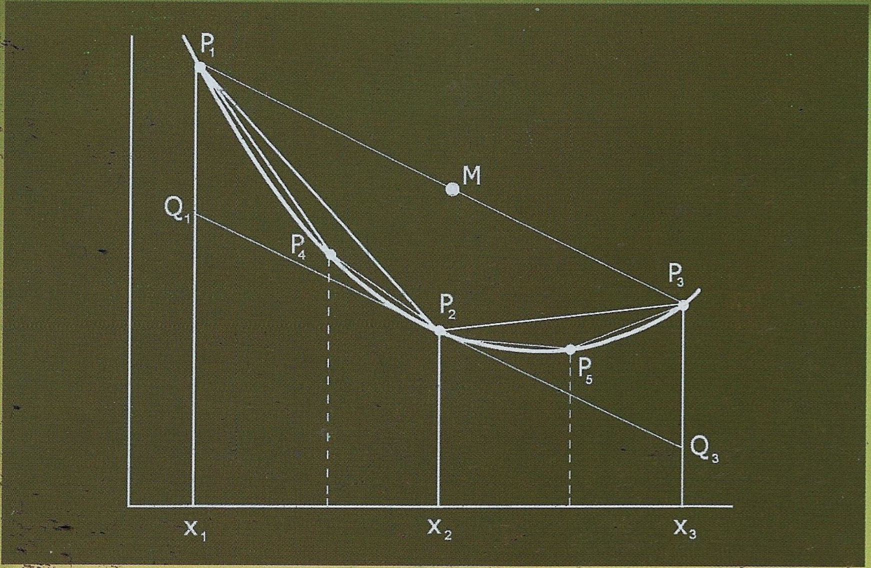
دانشگاه تربیت معلم سبزوار
۳۴

جلوه هایی از حسابان

گابریل کلامبوئر



ترجمهٔ : سید محمود طالبیان

جلوه‌هایی از حسابان

مترجم:

سید محمود طالبیان

پیشگفتار مؤلف

این کتاب برای دانشجویانی در نظرگرفته شده است که با درس حساب دیفرانسیل و انتگرال آشنایند و اکنون می‌خواهند مطالعهٔ عمیقتری از مفاهیم اساسی این درس را آغاز کنند که در آن از اطلاعات موجود برای ایجاد خلاقیت بیشتر بهره‌برداری شود. این اثر اساساً ویژهٔ آن دسته از دانشجویان ریاضی، مهندسی و علوم است که خود را در مرحلهٔ گذر از حسابان مقدماتی به درس دقیق آنالیز می‌بینند. بعلاوه، این کتاب برای ایجاد آمادگی تدریس درس حسابان نیز می‌تواند جالب باشد.

به جای این که خواننده را در معرض انبوهی از مجرّدات زود هنگام قرار دهم که سبب اتکای بیش از حد به کتاب شود، احساس کردم که ذکر مثالهای مهیّج و سازنده بیشتر می‌تواند مفید واقع شود. این کتاب شامل مثالهای حل شدهٔ متعددی است و تمرینات زیادی با راهنماییهای مفید یا حل مختصر در آن گنجانیده شده است.

کتاب حاضر مشتمل بر هفت فصل و حاوی اطلاعات تفصیلی دربارهٔ مباحث مطروحه است که با مطالعهٔ توابع لگاریتمی و نمایی آغاز می‌شود. دربارهٔ این توابع، برحسب طبیعت خود، بحث هندسی را بر بحث حسابی ترجیح داده‌ایم که سریعاً به محاسبهٔ حدودی می‌انجامد که از اهمیت خاصی برخوردارند؛ این راهکار که به رابطهٔ خاص بین قطعات سهموی و توابع لگاریتمی بستگی دارد به ای. اس. دو ساراپ (۱۶۶۷-۱۶۱۸) برمی‌گردد. در فهرست منابع پایان کتاب، مراجع مناسبی برای مطالعات بیشتر خواننده معرفی شده است.

تشکر می‌کنم از: پاول ر. هالموس، استاد دانشگاه ایندیانا، به خاطر توجه شایسته به این اثر؛ از پسرم پیتر، که شکلهای کتاب را آماده کرد؛ از دوستانم: دکتر ای. ال. کوهن، استاد دانشگاه اتاوا و دکتر جی. کی. ر. رائو، استاد دانشگاه کنیا، به خاطر همکاری ارزشمند خود و تشویقات بی‌وقفه‌ای که به عمل آورده‌اند. همچنین، مایلم سپاسگزاری کنم از: مسئولین دانشگاه اتاوا، به خاطر واگذاری یک فرصت مطالعاتی در زمان نگارش این کتاب؛ و از انتشارات اشپرینگر- ورلاگ، به خاطر همکاری صمیمانه در چاپ و انتشار کتاب.

گابریل کلامبوئر

پیشگفتار مترجم

کتابی که ملاحظه می‌کنید شامل یک نظریهٔ غنی از مباحث بسیار سودمند درس حسابان است که برای تقویت بنیه‌ی علمی دانشجویانی که قصد شرکت در المپیادهای ریاضی یا آزمون ورودی دوره‌های کارشناسی‌ارشد ریاضی را دارند بسیار مناسب به نظر می‌رسد. بعلاوه، مثالهای حل شدهٔ متنوع و آموزنده‌ای که در هر فصل ذکر شده و مسائل مبارزطلبی که همراه با راهنماییهای نسبتاً کامل در پایان هر فصل آمده مجموعهٔ ارزنده‌ای را برای کسب مهارتهای علمی دانشجویان ممتاز و مشتاق فراهم نموده است.

در واقع، این کتاب با مندرجات منحصربه‌فرد خود یک اثر کم‌نظیر است؛ و مطالعهٔ آن را به همهٔ علاقمندان به کسب دانش ریاضی توصیه می‌کنیم.

سید محمود طالبیان

فهرست مطالب

فصل اول

توابع لگاریتمی و نمایی

۱۰۱ مسأله‌ای از مساحت

منحنی $y = 1/x$، به‌ازای $x > 0$، مورد توجه خاص است؛ این منحنی در چارک اوّل صفحهٔ x و y قرار دارد و نسبت به خط $y = x$ متقارن است (زیرا معادلهٔ $xy = 1$ با تعویض x و y بدون تغییر باقی می‌ماند). شکل ۱.۱ را برای منحنی مورد بحث ملاحظه کنید.

تعریف. اگر $0 < a < b$ آن گاه $A_{a,b}$ را مساحت ناحیه‌ای تعریف می‌کنیم که از بالا به منحنی $y = 1/x$، از پایین به محور x، از چپ به خط $x = a$، و از راست به خط $x = b$ محصور شده است؛ اگر $0 < b < a$، تعریف می‌کنیم $A_{a,b} = -A_{b,a}$.

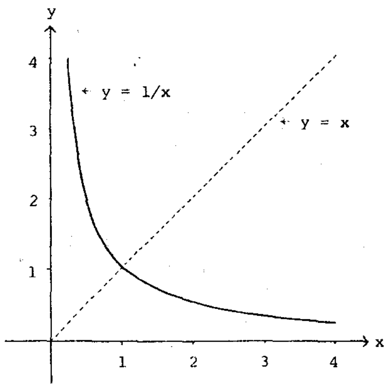
به آسانی دیده می‌شود که احکام $A_{a,a} = 0$، $A_{a,b} = -A_{b,a}$، و

$$A_{a,c} = A_{a.b} + A_{b,c} \qquad (1 \cdot 1)$$

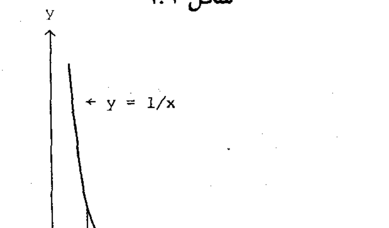
به ازای نقاط دلخواه a، b، و c از نیمهٔ مثبت محور x برقرار است [شکلهای ۲.۱ و ۳.۱ را در مورد معادلهٔ (۱.۱) ملاحظه کنید]. شاید رابطهٔ

$$A_{1,r} = A_{1/r,1} \qquad (۲.۱)$$

که به ازای $r > 0$ برقرار است، بدیهی نباشد. برای تحقیق در درستی معادلهٔ (۲.۱) به صورت زیر عمل می‌کنیم. فرض کنید $r > 1$. (حالت $r = 1$ نیاز به اقامهٔ برهان ندارد؛ حالت $0 < r < 1$ با تعویض نقشهای r و $1/r$ به حالت مورد بحث برمی‌گردد.) در شکل ۴.۱، مساحت دو ناحیه‌ای که با خطوط قائم و افقی هاشور زده شده‌اند یکسان است؛ زیرا مساحت مستطیل R_2 (با هاشور قائم) و مساحت مستطیل R_1 (با هاشور افقی) هر دو $1 - 1/r$ است. خواهیم دید که معادلهٔ (۲.۱) صرفاً حالت خاصی از یک رابطهٔ کلی‌تر است.



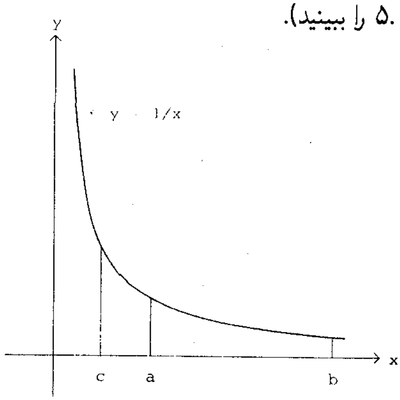
شکل ۱.۱



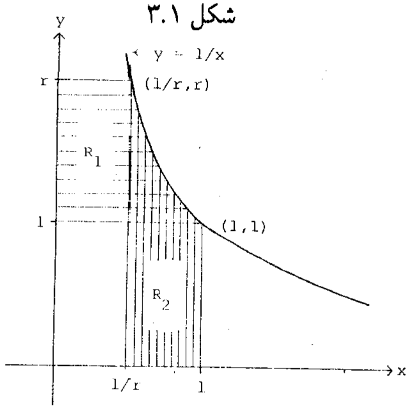
شکل ۲.۱

فرض کنید $0 < a < b$ و بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ را، که مجموعهٔ نقاط x با شرط $a \le x \le b$ است، در

نظر بگیرید. آن گاه $y = 1/x$، با شرط $a \leq x \leq b$، بزرگترین مقدار را به ازای $x = a$ و کوچکترین مقدار را به ازای $x = b$ اختیار می‌کند. بر بازهٔ $[a, b]$ دو مستطیل بنا می‌کنیم، یکی با ارتفاع $1/a$ و دیگری با ارتفاع $1/b$. مستطیل بزرگتر دارای مساحت $(b - a)/a$ است و مستطیل کوچکتر دارای مساحت $(b - a)/b$ است (شکل ۵.۱ را ببینید).



شکل ۳.۱

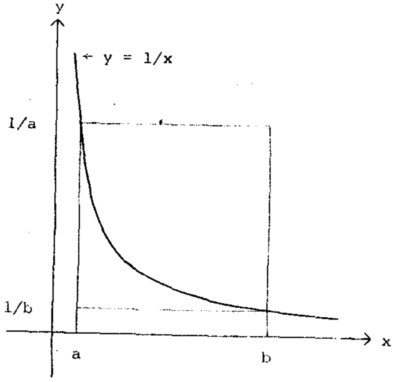


شکل ۴.۱

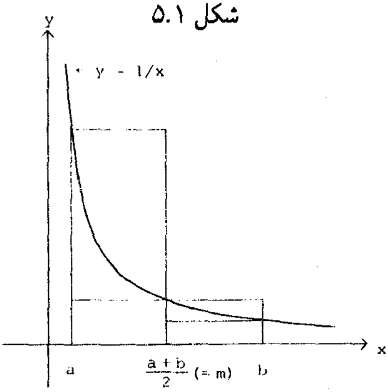
آشکار است که

$$\frac{b-a}{b} < A_{a,b} < \frac{b-a}{a} \qquad (۳.۱)$$

اگر $a = b$، هر جملهٔ این نامساوی برابر صفر است. نامساوی (۳.۱)، که در آتیه بسیار مفید واقع خواهد شد، مقدار $A_{a,b}$ را تخمین می‌زند.



شکل ۵.۱



شکل ۶.۱

برای افزایش دقت تخمین مقدار $A_{a,b}$ براساس نامساوی (۳.۱)، بازهٔ $[a,b]$ را با نقطهٔ $m = (b+a)/۲$، که نقطهٔ وسط بازهٔ $[a,b]$ است، به دو زیربازهٔ $[a,m]$ و $[m,b]$ تقسیم می‌کنیم و بر هر یک از این زیربازه‌ها مستطیلهای کوچک و بزرگ را برای تخمین مقادیر $A_{a,m}$ و $A_{m,b}$ بنا می‌کنیم (شکل ۶.۱ را ببینید). خواهیم داشت:

$$\frac{b-m}{b} < A_{m,b} < \frac{b-m}{m} \quad \text{و} \quad \frac{m-a}{m} < A_{a,m} < \frac{m-a}{a}$$

یا

$$\frac{m-a}{m} + \frac{b-m}{b} < A_{a,m} + A_{m,b} = A_{a,b} < \frac{m-a}{a} + \frac{b-m}{m} \qquad (۴.۱)$$

فرض کنید

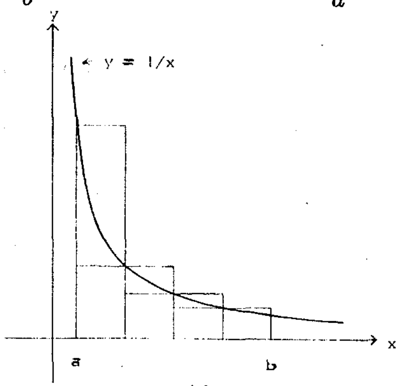
$$U_۱ = \frac{m-a}{a} + \frac{b-m}{m} \quad \text{و} \quad L_۱ = \frac{m-a}{m} + \frac{b-m}{b}$$

L_1 را یک مجموع تقریب نقصانی $A_{a,b}$ و U_1 را یک مجموع تقریب اضافی $A_{a,b}$ می‌نامیم؛ L_1 حاصل جمع مساحات مستطیلهای محاطی و U_1 حاصل جمع مستطیلهای محیطی است که ما به کمک آنها درصدد تقریب مقدار $A_{a,b}$ برآمده‌ایم. L_1 تخمینی کمتر و U_1 تخمینی بیشتر از مقدار $A_{a,b}$ است. می‌توان دید که

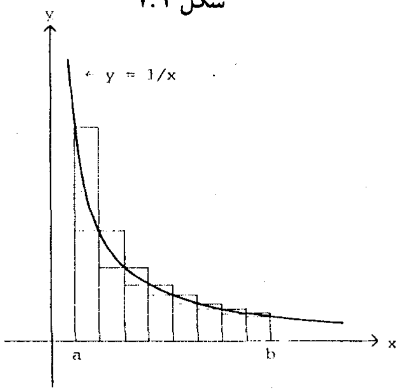
$$\frac{b-a}{a} > U_1 \quad \text{و} \quad \frac{b-a}{b} < L_1 \qquad (۵.۱)$$

در واقع، $(b-a)/b = (b-m)/b + (m-a)/b < (b-m)/b + (m-a)/m$ و $(b-a)/a = (b-m)/a + (m-a)/a > (b-m)/a + (m-a)/m$. از ترکیب نامساویهای (۴.۱) و (۵.۱) خواهیم داشت:

$$\frac{b-a}{b} < L_1 < A_{a,b} < U_1 < \frac{b-a}{a} \qquad (۶.۱)$$



شکل ۷.۱



شکل ۸.۱

با نگاهی به عقب، دیده می‌شود که ما فرایند تنصیف بازهٔ $[a,b]$ را به کار گرفته‌ایم تا از تخمین مقدار $A_{a,b}$ براساس نامساویهای (۳.۱) به تخمین دقیقتری براساس نامساویهای (۶.۱) برسیم. البته، می‌توانیم این فرایند را با تنصیف زیربازه‌های $[a,m]$ و $[m,b]$ ادامه دهیم (شکل ۷.۱) و مجموع تقریب نقصانی دیگری مانند $L_۲$ و مجموع تقریب اضافی دیگری مانند $U_۲$ برای $A_{a,b}$ بیابیم که $L_۲$ حاصل‌جمع مساحات چهار مستطیل محاطی و $U_۲$ حاصل جمع مساحات چهار مستطیل محیطی است که در تقریب $A_{a,b}$ حادث می‌شوند. در شکل ۸.۱ مرحلهٔ دیگری از فرایند تنصیفات متوالی دیده می‌شود که به یک مجموع تقریب نقصانی مانند $L_۳$ و به یک مجموع تقریب اضافی مانند $U_۳$ برای $A_{a,b}$ می‌انجامد. $L_۳$ حاصل جمع مساحات هشت مستطیل محاطی و $U_۳$ حاصل جمع مساحات هشت مستطیل محیطی است که در تقریب $A_{a,b}$ بنا می‌شوند. واضح است که

$$\frac{b-a}{b} < L_۱ < L_۲ < L_۳ < \cdots < A_{a,b} < \cdots < U_۳ < U_۲ < U_۱ < \frac{b-a}{a} \qquad (۷.۱)$$

در مرحلهٔ nام از تنصیفات متوالی، بازهٔ $[a,b]$ به ۲^n زیربازه با طولهای یکسان $(b-a)/۲^n$ تقسیم می‌شود؛ این زیربازه‌ها را به صورت $[a,t_۱]$، $[t_۱,t_۲]$، $[t_۲,t_۳]$،...،$[t_{k-۱},t_k]$، که در آن $k = ۲^n$ و $t_k = b$، نمایش می‌دهیم. آن‌گاه

$$L_n = \frac{b-a}{k}\left(\frac{۱}{t_۱}+\frac{۱}{t_۲}+\frac{۱}{t_۳}+\cdots+\frac{۱}{b}\right)$$

و

$$U_n = \frac{b-a}{k}\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{t_۱}+\frac{۱}{t_۲}+\cdots+\frac{۱}{t_{k-۱}}\right)$$

و داریم:

$$U_n - L_n = \frac{b-a}{k}\left(\frac{۱}{a}-\frac{۱}{b}\right) = \frac{(b-a)^۲}{ab}.\frac{۱}{۲^n} \qquad (۸.۱)$$

امّا a و b ثابت می‌باشند ولی n، هر قدر بخواهیم، می‌تواند بزرگ باشد. بنابراین، وقتی n به طور دلخواه بزرگ شود، $U_n - L_n$ به صفر میل می‌کند.

به ازای $n = ۱,۲,۳,\ldots$، بازهٔ $[L_n, U_n]$ را به I_n نشان می‌دهیم. از نامساوی (۷.۱) معلوم است که $I_{n+۱}$، به‌ازای $n = ۱,۲,۳,\ldots$، مشمول در I_n است و به این ترتیب با دنباله‌ای از بازه‌های بستهٔ تودرتو مواجه شده‌ایم که در آن $I_۲$ زیرمجموعه‌ای از $I_۱$ است، $I_۳$ زیرمجموعه‌ای از $I_۲$ است، و همین‌طور. بعلاوه، از نقطهٔ نظر نامساوی (۸.۱)، وقتی n به قدر دلخواه بزرگ شود، طول بازهٔ I_n، هر قدر بخواهیم،

کوچک می‌شود. به استناد بحثی که از آن درمی‌گذریم، می‌توان ثابت کرد که یک و فقط یک نقطه مانند t وجود دارد که در همهٔ بازه‌های I_n، به ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، مشترک است؛ این نقطهٔ منحصر به‌فرد t بر محور حقیقی دقیقاً همان کمیّت $A_{a,b}$ است. اینک به بیان حکمی می‌پردازیم که از آن در تعیین مقدار $A_{a,b}$ استمداد کرده‌ایم.

اصل بازه‌های تودرتو. به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، فرض کنید J_nها بازه‌های بسته‌ای باشند که

الف) به‌ازای هر n، $J_{n+۱}$ مشمول در J_n است،

ب) وقتی n به قدر دلخواه بزرگ می‌شود طول بازه‌های J_n به صفر میل می‌کند؛

آن‌گاه یک و فقط یک نقطه وجود دارد که در همهٔ بازه‌های J_n مشترک است.

توضیحات. به آسانی دیده می‌شود که دو نقطه (یا بیشتر) نمی‌تواند موجود باشد که در همهٔ بازه‌های J_n مشترک باشد؛ زیرا که وجود بیشتر از یک نقطه شرط (ب) را نقض می‌کند. در واقع، اگر دو نقطه، مثلاً t و s با $s \neq t$، در همهٔ بازه‌های J_n مشترک می‌بود آن‌گاه فاصلهٔ بین t و s (که صفر نیست) مانند یک سد عمل می‌کرد و طول هیچ بازه‌ای چون J_n نمی‌توانست کمتر از این فاصله باشد. همچنین، لازم است که بازه‌های J_n بسته باشند. در واقع، فرض کنید J_n، به ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، بازهٔ $۰ < x \leq ۱/n$ می‌بود. به طور آشکار، بازه‌های J_n، به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، تودرتو بودند و طول J_n، که $۱/n$ است، به صفر میل می‌کند وقتی که n به قدر دلخواه بزرگ شود. معذالک، در این حالت، هیچ نقطه‌ای مانند t وجود ندارد که در همهٔ بازه‌های J_n مشترک باشد. برای درک این واقعیت، ملاحظه کنید که ۰ واجد شرایط نیست؛ در واقع، ۰ به هیچ یک از بازه‌های J_n تعلق ندارد. همچنین، هیچ نقطهٔ بزرگتر از صفری مانند t نیز واجد شرایط نیست؛ زیرا، وقتی n بزرگ شود، $۱/n$ می‌تواند کوچکتر از چنین نقطهٔ ثابت t شود. سرانجام، توجه کنید که شرط (ب) را به صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد: به‌ازای هر $r > ۰$ بازه‌ای مانند J_n وجود دارد که طول آن از r کوچکتر است.

قضیهٔ ۱.۱. اگر $۰ < a < b$ و $s > ۰$ آن‌گاه

$$A_{sa,sb} = A_{a,b} \qquad (۹.۱)$$

برهان. فرض کنید $k = ۲^n$، که در آن n یک عدد صحیح مثبت است، و فرض کنید

$$a = t_۰ < t_۱ < t_۲ < \cdots < t_{k-۱} < t_k = b$$

نقاطی متساوی‌الفاصله باشند که بازهٔ $[a,b]$ را به k زیربازهٔ $[a,t_1]$، $[t_1,t_2]$، ... ، $[t_{k-1},b]$ تجزیه کنند. بر هر یک از این زیربازه‌ها، مستطیلهای محاطی و محیطی را، به‌گونه‌ای که در شکل ۹.۱ نشان داده شده است، بنا می‌کنیم. حاصل جمع مساحات مستطیلهای محاطی عبارت است از

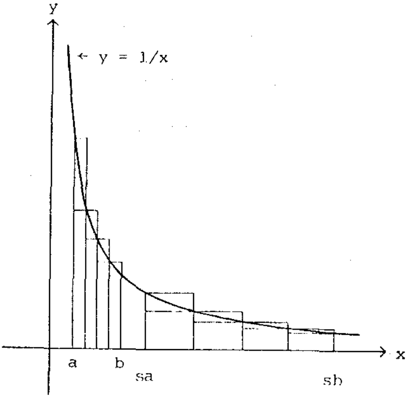
$$\frac{b-a}{k}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{b}\right)$$

و حاصل جمع مساحات مستطیلهای محیطی عبارت است از

$$\frac{b-a}{k}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{t_1}+\cdots+\frac{1}{t_{k-1}}\right)$$

بنابراین، داریم:

$$\frac{b-a}{k}\left(\frac{1}{t_1}+\frac{1}{t_2}+\cdots+\frac{1}{b}\right)<A_{a,b}<\frac{b-a}{k}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{t_1}+\cdots+\frac{1}{t_{k-1}}\right) \quad (1 \cdot 0 \cdot 1)$$



شکل ۹.۱

حال، فرض کنید

$$sa=v_0<v_1<v_2<\cdots<v_{k-1}<v_k=sb$$

نقاط متساوی‌الفاصله‌ای باشند که بازهٔ $[sa,sb]$ را به k زیربازهٔ $[sa,v_1]$، $[v_1,v_2]$، ... ،$[v_{k-1},v_k]$ تقسیم می‌کنند. مستطیلهای محاطی و محیطی را بر این بازه‌ها بنا می‌کنیم و، مانند حالتی که مورد بحث قرار گرفت، به دست می‌آوریم:

$$\frac{sb-sa}{k}\left(\frac{1}{v_1}+\frac{1}{v_2}+\cdots+\frac{1}{sb}\right)<A_{sa,sb}<\frac{sb-sa}{k}\left(\frac{1}{sa}+\frac{1}{v_1}+\cdots+\frac{1}{v_{k-1}}\right)$$

امّا $v_j = st_j$ وقتی که $j = ۱, ۲, \ldots, k - ۱$. بنابراین

$$\frac{b-a}{k}\left(\frac{۱}{t_۱}+\frac{۱}{t_۲}+\cdots+\frac{۱}{b}\right) < A_{sa,sb} < \frac{b-a}{k}\left(\frac{۱}{a}+\frac{۱}{t_۱}+\cdots+\frac{۱}{t_{k-۱}}\right) \quad (۱۱.۱)$$

مقایسهٔ (۱۰.۱) و (۱۱.۱) نشان می‌دهد که دنباله‌های یکسانی از بازه‌های بستهٔ تودرتو هر دو کمیّت $A_{a,b}$ و $A_{sa,sb}$ را تولید می‌کنند و به این ترتیب (۹.۱) معتبر و برهان تمام است.

تبصره. درج مقادیر $a = ۱$، $b = r$، و $s = ۱/r$ در (۹.۱) حکم (۲.۱) را نتیجه می‌دهد.

قضیهٔ ۲.۱. اگر $v > ۰$ و $w > ۰$ آن‌گاه

$$A_{۱,vw} = A_{۱,v} + A_{۱,w} \quad (۱۲.۱)$$

و

$$A_{۱,v/w} = A_{۱,v} - A_{۱,w} \quad (۱۳.۱)$$

برهان. به استناد (۱.۱) و (۹.۱)، داریم:

$$A_{۱,vw} = A_{۱,v} + A_{v,vw} = A_{۱,v} + A_{۱,w}$$

و

$$A_{۱,v/w} = A_{۱,v} + A_{v,v/w} = A_{۱,v} + A_{w,۱} = A_{۱,v} - A_{۱,w}$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم.

قضیهٔ ۳.۱. اگر $v > ۰$ و $r = n/m$، که در آن n عددی صحیح و m عددی صحیح و مثبت است، آن‌گاه

$$A_{۱,v^r} = rA_{۱,v} \quad (۱۴.۱)$$

برهان. به آسانی دیده می‌شود که تساوی

$$A_{1,v^k} = kA_{1,v}$$

به ازای هر عدد صحیح نامنفی k برقرار است. چون به استناد (۲.۱)، $A_{1,1/v} = -A_{1,v}$، ملاحظه می‌کنیم که تساوی

$$A_{1,v^{-k}} = -kA_{1,v}$$

نیز به‌ازای هر عدد صحیح نامنفی k برقرار است. اگر m یک عدد صحیح مثبت باشد، داریم:

$$A_{1,v^{1/m}} = \frac{1}{m}A_{1,v} \quad \text{یا} \quad A_{1,v} = A_{1,(v^{1/m})^m} = mA_{1,v^{1/m}}$$

بنابراین، اگر n عددی صحیح و m عددی صحیح و مثبت باشد و $r = n/m$، آن‌گاه

$$A_{1,v^r} = rA_{1,v} \quad \text{یا} \quad A_{1,v^{n/m}} = A_{1,(v^{1/m})^n} = nA_{1,v^{1/m}} = \frac{n}{m}A_{1,v}$$

و برهان تمام است.

۲.۱ لگاریتم طبیعی

یادآوری می‌کنیم که $A_{a,b}$ را، به‌ازای اعداد مثبت و مفروض a و b، مساحت ناحیه‌ای تعریف کرده‌ایم که زیرمنحنی $y = 1/x$ و بالای محور x و بین خطوط $x = a$ و $x = b$ با شرط $a < b$ واقع است؛ اگر $a > b$، تعریف کردیم: $A_{a,b} = -A_{b,a}$. قبلاً با تعدادی از خواص $A_{a,b}$ آشنا شده‌ایم.

تعریف. تابع $L(x) = \ln x$ با ضابطهٔ

$$\ln x = A_{1,x}, \qquad x > 0$$

را لگاریتم (طبیعی) می‌نامند.

واضح است که $\ln x$ به‌ازای $0 < x < 1$ منفی است، $\ln 1 = 0$، و $\ln x$ به‌ازای $x > 1$ مثبت است. آشکار است که $\ln x$ تابعی صعودی است؛ زیرا، بالبداهه، $x_1 < x_2$ مستلزم $\ln x_1 < \ln x_2$ است.
از (۱۲.۱) و (۱۳.۱) معلوم است که به‌ازای هر x و y مثبت

$$\ln(xy) = \ln x + \ln y \quad \text{و} \quad \ln\left(\frac{x}{y}\right) = \ln x - \ln y$$

از (۱۴.۱) نتیجه می‌شود که به‌ازای هر عدد گویای r (یعنی، هر عدد r به شکل n/m که در آن n و m اعدادی صحیح هستند و m صفر نیست.)

$$\ln x^r = r \ln x$$

این رابطه به‌ازای اعداد اصم (یعنی، اعدادی که گویا نیستند.) نیز برقرار است؛ مشکل اصلی، در این مورد، تعریف x^r است وقتی که r اصم باشد. این مشکل در بخش بعدی برطرف خواهد شد.

منحنی $y = \ln x$ به طور کامل در سمت راست محور y و زیرخط $y = x$ قرار می‌گیرد؛ حوزهٔ تعریف $\ln x$ بخش مثبت محور x است و، به استناد (۳.۱)، $\ln x \leq x - ۱$. چون

$$\ln x - \ln a = A_{۱,x} - A_{۱,a} = A_{a.x}$$

می‌توان دید که اگر x به a میل کند $\ln x$ به $\ln a$ میل می‌کند؛ زیرا $A_{a,x}$ به صفر میل می‌کند وقتی که x به a میل کند. در فصل بعدی خواهیم دید که این خاصیت $y = \ln x$ به معنای پیوستگی تابع لگاریتمی به‌ازای $x > ۰$ است. نیز، این بدان معنی است که $y = \ln x$ از هیچ مقداری نمی‌تواند درگذرد و این که حوزهٔ مقادیر یا بردش یک بازه است. برای این که نشان دهیم که این بازه تمامی خط حقیقی را در برمی‌گیرد، لازم است فقط ثابت کنیم که این بازه از پایین و بالا بی‌کران است. این کار را می‌توان چنین انجام داد که فرض کنیم M عدد مثبت دلخواهی باشد و نشان دهیم که $\ln x$ مقداری بزرگتر از M و مقداری کوچکتر از $-M$ دارد. در واقع، چون $\ln ۲$ مثبت است [به استناد (۳.۱)، $۱ > \ln ۲ > ۱/۲$]، می‌دانیم که مضرب مثبتی از $\ln ۲$ باید بزرگتر از M باشد؛ یعنی، می‌دانیم که عدد صحیح مثبتی مانند n موجود است به طوری که $n(\ln ۲) > M$. [در این مورد از خاصیت ارشمیدسی استفاده کرده‌ایم: اگر $a > ۰$ و $b > ۰$، عدد صحیح مثبتی مانند n موجود است به طوری که $na > b$.] از ضرب طرفین این نامساوی در -۱ نتیجه می‌شود که $-n(\ln ۲) < -M$. چون $n(\ln ۲) = \ln ۲^n$ و $-n(\ln ۲) = \ln ۲^{-n}$، خواهیم داشت: $\ln ۲^n > M$ و $\ln(۲^{-n}) < -M$، که بی‌کرانی $y = \ln x$ را محقق می‌کند.

از این بحث متوجه می‌شویم که $y = \ln x$ تابعی است با حوزهٔ تعریف $۰ < x < \infty$ و برد $-\infty < y < \infty$. بعلاوه، $y = \ln x$ هر مقدار بین $-\infty$ و ∞ را اختیار می‌کند ولی فقط یک بار، زیرا این تابع صعودی است. بالاخص، یک و فقط یک عدد e وجود دارد به طوری که $\ln e = ۱$؛ این عدد e را پایهٔ لگاریتم طبیعی می‌نامند. اکنون مسألهٔ محاسبهٔ عدد e را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

به استناد (۳.۱)، به‌ازای $x > ۱$ داریم:

$$\frac{۱}{x} < \frac{\ln x}{x - ۱} < ۱$$

به‌ازای $x = ۱ + \frac{۱}{n}$ که در آن $n = ۱, ۲, ۳, \dots$، خواهیم داشت:

$$\frac{n}{n+۱} < \ln\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n < ۱ \quad \text{یا} \quad \frac{n}{n+۱} < \frac{\ln(۱ + \frac{۱}{n})}{\frac{۱}{n}} < ۱$$

وقتی که n به قدر کافی بزرگ شود، $n/(n+۱)$ به ۱ میل می‌کند و، بنابراین، $\ln(۱+۱/n)^n$ نیز به ۱ میل می‌کند. این نشان می‌دهد که محاسبهٔ عدد e به بررسی دقیقتر دنبالهٔ $(۱+۱/n)^n$، که در آن $n = ۱, ۲, ۳, \dots$، بستگی دارد.

لم. اگر $b > a \geq ۰$ آن‌گاه نامساویهای

$$\frac{b^{n+۱} - a^{n+۱}}{b-a} < (n+۱)b^n \tag{۱۵.۱}$$

و

$$\frac{b^{n+۱} - a^{n+۱}}{b-a} > (n+۱)a^n \tag{۱۶.۱}$$

به ازای $n = ۱, ۲, ۳, \dots$ برقرارند.

برهان. اتحاد

$$b^{n+۱} - a^{n+۱} = (b^n + ab^{n-۱} + a^۲b^{n-۲} + \cdots + a^{n-۱}b + a^n)(b-a)$$

را در نظر بگیرید. آن‌گاه

$$\begin{aligned}\frac{b^{n+۱} - a^{n+۱}}{b-a} &= b^n + ab^{n-۱} + a^۲b^{n-۲} + \cdots + a^{n-۱}b + a^n \\ &< b^n + bb^{n-۱} + b^۲b^{n-۲} + \cdots + b^{n-۱}b + b^n = (n+۱)b^n\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}\frac{b^{n+۱} - a^{n+۱}}{b-a} &= b^n + ab^{n-۱} + a^۲b^{n-۲} + \cdots + a^{n-۱}b + a^n \\ &> a^n + aa^{n-۱} + a^۲a^{n-۲} + \cdots + a^{n-۱}a + a^n = (n+۱)a^n\end{aligned}$$

و برهان تمام است.

قضیهٔ ۴.۱. به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، فرض کنید

$$a_n = \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n, \quad b_n = \left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^{n+۱}$$

آن‌گاه $a_n < a_{n+۱}$ و $b_n > b_{n+۱}$.

برهان. نامساوی (۱۵.۱) را به صورت

$$b^n[b - (n + ۱)(b - a)] < a^{n+۱}$$

بازنویسی می‌کنیم. اگر قرار دهیم $a = ۱ + ۱/(n + ۱)$ و $b = ۱ + ۱/n$، خواهیم داشت:

$$\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n < \left(۱ + \frac{۱}{n + ۱}\right)^{n+۱}$$

این، نشان می‌دهد که $a_n < a_{n+۱}$. سپس، قرار می‌دهیم $a = ۱$ و $b = ۱ + ۱/(۲n)$. این بار، خواهیم داشت:

$$\left(۱ + \frac{۱}{۲n}\right)^{۲n} < ۴ \quad \text{یا} \quad \left(۱ + \frac{۱}{۲n}\right)^n < ۲$$

چون $a_n < a_{n+۱}$، نامساوی

$$\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n < \left(۱ + \frac{۱}{۲n}\right)^{۲n} < ۴$$

به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n برقرار است. با توجه به این که $a_۱ = ۲$، ملاحظه می‌کنیم که

$$۲ \leq a_n \leq ۴, \quad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

(۱۶.۱) را به صورت

$$b^{n+۱} > a^{n+۱} + (n + ۱)a^n(b - a)$$

بازنویسی می‌کنیم. اگر قرار دهیم $a = ۱ + ۱/(n + ۱)$ و $b = ۱ + ۱/n$، خواهیم داشت:

$$\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^{n+۱} > \left(۱ + \frac{۱}{n + ۱}\right)^{n+۱} + \frac{۱}{n}\left(۱ + \frac{۱}{n + ۱}\right)^n$$

یا

$$\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^{n+۱} > \left(۱ + \frac{۱}{n + ۱}\right)^n \left(۱ + \frac{۱}{n + ۱} + \frac{۱}{n}\right) \qquad (۱۷.۱)$$

امّا

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\left(1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}\right)>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \qquad (18.1)$$

زیرا

$$1+\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n}>\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2$$

یا، به طور معادل،

$$\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}=\frac{1}{n(n+1)}>\frac{1}{(n+1)^2}$$

از این رو، به استناد (۱۷.۱) و (۱۸.۱)، $b_n > b_{n+1}$ و برهان تمام است.

قضیهٔ ۵.۱. a_n و b_n را، به‌ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$، مانند قضیهٔ ۴.۱ در نظر بگیرید. آن‌گاه بازه‌های بستهٔ $[a_1, b_1]$، $[a_2, b_2]$، $[a_3, b_3]$، ... دنباله‌ای از بازه‌های تودرتو تشکیل می‌دهند و، وقتی که n به قدر دلخواه بزرگ شود، $b_n - a_n$ به صفر میل می‌کند. به استناد اصل بازه‌های تودرتو، یک و فقط یک نقطه وجود دارد که در همهٔ این بازه‌ها مشترک است؛ این نقطه همان عدد e، پایهٔ لگاریتم طبیعی است. وقتی n به قدر دلخواه بزرگ شود، دنبالهٔ (صعودی) a_1 ، a_2، a_3، ... و دنبالهٔ (نزولی) b_1، b_2،b_3،... به e میل خواهد کرد.

برهان. برای این که ببینیم که $b_n - a_n$، طول بازهٔ $[a_n, b_n]$، به صفر میل می‌کند وقتی که n به طور دلخواه بزرگ شود، ملاحظه می‌کنیم که

$$b_n - a_n = \frac{1}{n}a_n \qquad (19.1)$$

امّا، دیدیم که a_n، به‌ازای همهٔ اعداد صحیح مثبت n، در نامساویهای $2 \le a_n \le 4$ صدق می‌کند و $1/n$ به صفر میل می‌کند وقتی که n به طور دلخواه بزرگ شود. نامساویهای $a_n < a_{n+1}$، $b_n > b_{n+1}$، و $b_n - a_n = (1/n)a_n > 0$ نشان می‌دهند که بازهٔ $[a_{n+1}, b_{n+1}]$ مشمول در بازهٔ $[a_n, b_n]$ است. در واقع، همهٔ شرایط اصل بازه‌های تودرتو برقرار است و حکم قضیه نتیجه می‌شود.

توضیحات. چون $b_5 < 3$، معلوم می‌شود که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، $2 \le a_n < 3$؛ در این نتیجه‌گیری از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که به‌ازای هر m ثابت و هر عدد صحیح مثبت n، نقطهٔ b_m الزاماً در سمت راست نقطهٔ a_n قرار می‌گیرد. بازنویسی (۱۹.۱) به نتیجهٔ

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1}-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n=\frac{1}{n}\left(1+\frac{1}{n}\right)^n \qquad (20.1)$$

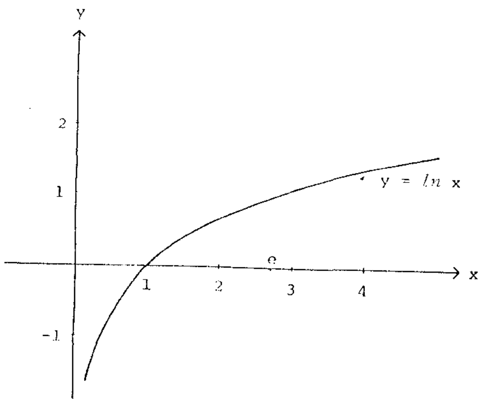
می‌انجامد. همچنین، می‌دانیم که $e < ۳$ و

$$\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n < e < \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱}$$

از این رو، از (۲۰.۱) نتیجه می‌شود که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n،

$$e - \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n < \frac{۳}{n} \qquad (۲۱.۱)$$

نامساوی (۲۱.۱) متضمن یک خطای تخمین در محاسبهٔ e براساس دنبالهٔ تقریب $(۱+\frac{۱}{n})^n$ به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ است؛ مثلاً، اگر $n = ۳۰۰۰۰$ آن‌گاه e فقط می‌تواند به مقداری کمتر از ۰٫۰۰۰۱ از $(۱+\frac{۱}{n})^n$ بیشتر باشد. عدد e اصم است، $e = ۲٫۷۱۸۲۸۱\ldots$. در مطالعهٔ سریهای نامتناهی، با روش مناسبتری از محاسبهٔ e مواجه خواهیم شد؛ همچنین، در مطالعهٔ سریهای نامتناهی است که با روشهای مؤثر محاسبهٔ لگاریتم اعداد مثبت آشنا می‌شویم. در این مرحله صرفاً از حسابگرهای جیبی مناسب یا ابزار دیگری نظیر جداول برای انجام محاسبات لگاریتمی استفاده می‌کنیم. برای رسم نمودار تابع لگاریتمی، به شکل ۱۰.۱ مراجعه کنید.



شکل ۱۰.۱

قضیهٔ ۶.۱. به‌ازای هر دو عدد صحیح مثبت p و q که $p < q$،

$$\ln\frac{q+۱}{p} < \frac{۱}{p} + \frac{۱}{p+۱} + \cdots + \frac{۱}{q} < \ln\frac{q}{p-۱} \qquad (۲۲.۱)$$

برهان. فرض کنید $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$. در (۳.۱)، قرار دهید $a = n$ و $b = n + ۱$. آن‌گاه

$$\frac{۱}{n + ۱} < \ln \frac{n + ۱}{n} < \frac{۱}{n} \qquad (۲۳.۱)$$

به‌ازای $n = p, p + ۱, \ldots, q$، نامساوی (۲۳.۱) ایجاب می‌کند که

$$\frac{۱}{p + ۱} < \ln \frac{p + ۱}{p} < \frac{۱}{p}, \quad \frac{۱}{p + ۲} < \ln \frac{p + ۲}{p + ۱} < \frac{۱}{p + ۱}, \ldots, \quad \frac{۱}{q + ۱} < \ln \frac{q + ۱}{q} < \frac{۱}{q}$$

نیمهٔ اول نامساوی (۲۲.۱) از جمع طرفهای راست این $q - p$ نامساوی به دست می‌آید و نیمهٔ دوم نیز به طور مشابه عاید می‌شود.

کاربرد. فرض کنید

$$H_n = \frac{۱}{n + ۱} + \frac{۱}{n + ۲} + \cdots + \frac{۱}{۲n}$$

که در آن $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$. به استناد (۲۲.۱)، خواهیم داشت:

$$\ln \frac{۲n + ۱}{n + ۱} < H_n < \ln \frac{۲n}{n} = \ln ۲$$

امّا می‌دانیم که اگر x به a میل کند $\ln x$ به $\ln a$ میل خواهد کرد و، بنابراین، واضح است که اگر n به طور دلخواه بزرگ شود H_n به $\ln ۲$ میل می‌کند.

فرض کنید

$$T_n = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \cdots - \frac{۱}{۲n}$$

که در آن $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$. آن‌گاه

$$\begin{aligned} T_n &= ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{۱}{۲n} - ۲\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{۱}{۲n}\right) \\ &= ۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{۱}{۲n} - \left(۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{n}\right) \\ &= H_n \end{aligned}$$

بنابراین، ملاحظه می‌کنیم که اگر n به طور دلخواه بزرگ شود T_n نیز به $\ln ۲$ میل می‌کند.

قضیهٔ ۷.۱. به‌ازای $n = ۲, ۳, ۴, \ldots$، فرض کنید

$$x_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{n-۱} - \ln n \qquad (۲۴.۱)$$

و

$$y_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{n-۱} + \frac{۱}{n} - \ln n \qquad (۲۵.۱)$$

آن‌گاه $x_{n+۱} > x_n$، $y_{n+۱} < y_n$، و $y_n - x_n = ۱/n$. از این رو، به استناد اصل بازه‌های تودرتو، یک و فقط یک نقطهٔ C وجود دارد که در بازه‌های بستهٔ $[x_۲, y_۲]$ ، $[x_۳, y_۳]$، $[x_۴, y_۴]$، ... مشترک است؛ این عدد C را ثابت اویلر می‌نامند و معلوم شده است که $C = ۰/۵۷۷۲۱۵۶۶۴۹\ldots$.

برهان. به استناد (۲۳.۱)،

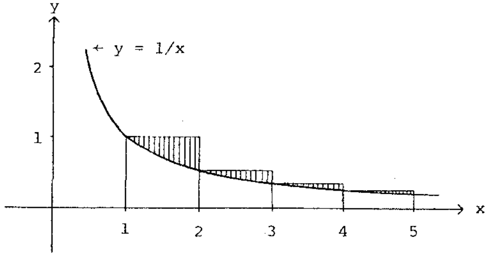
$$x_{n+۱} - x_n = \frac{۱}{n} - \ln(n+۱) + \ln n = \frac{۱}{n} - \ln\frac{n+۱}{n} > ۰$$

و

$$y_{n+۱} - y_n = \frac{۱}{n+۱} - \ln(n+۱) + \ln n = \frac{۱}{n+۱} - \ln\frac{n+۱}{n} < ۰$$

آشکار است که $y_n - x_n = ۱/n$. بنابراین، ملاحظه می‌کنیم که اصل بازه‌های تودرتو قابل اعمال است و عدد منحصربه‌فردی مانند C از آن نتیجه می‌شود.

توضیحات. برای این که عدد e را از روی شکل مجسم کنیم، وضعیت هندسی زیر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. منحنی $y = \ln x$ را بر بازهٔ مفروض $[۱, n]$ در نظر می‌گیریم. مساحت ناحیه‌ای که از بالا به منحنی $y = \ln x$، از سمت چپ به خط $x = ۱$ ، از سمت راست به خط $x = n$، و از پایین به محور x محصور است برابر $\ln n$ است. از طرف دیگر، اگر بازهٔ $[۱, n]$ را به $n - ۱$ زیربازهٔ $[۱, ۲]$، $[۲, ۳]$، ... ، $[n-۱, n]$ تقسیم کنیم و بر بازهٔ $[۱, ۲]$ مستطیلی به ارتفاع ۱، بر $[۲, ۳]$ مستطیلی به ارتفاع $۱/۲$، ... ، بر $[n-۱, n]$ مستطیلی به ارتفاع $۱/(n-۱)$ بنا کنیم، به آسانی می‌توانیم ببینیم که ناحیه‌ای که در شکل ۱۱.۱ با هاشور عمودی مشخص شده است دارای مساحت x_n است. [(۲۴.۱) را ببینید.] اگر $n - ۱$ ناحیهٔ جزئی با هاشور قائم را به چپ منتقل کنیم که در درون مربع محدود به محور x، محور y، و خطوط $x = ۱$ و $y = ۱$ قرار گیرند و، بعلاوه، فرض کنیم که n به طور دلخواه بزرگ شود، فوراً متوجه می‌شویم که C کمی بزرگتر از $\frac{۱}{۲}$ ولی مشخصاً کوچکتر از ۱ است. به عنوان یک مسألهٔ حل نشدهٔ مشهور ریاضی، مورد سؤال است که: آیا ثابت اویلر C عددی گویا (یعنی، خارج‌قسمت دو عدد صحیح) است یا خیر؟



شکل ۱۱.۱

کاربرد. به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، فرض کنید

$$S_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{n} \qquad (۲۶.۱)$$

با استفاده از یک حسابگر جیبی، در می‌یابیم که

$$S_{۱۰} = ۲/۹۲۸۹۶۸۳ \qquad S_{۷۰} = ۴/۸۳۲۸۳۶۸$$
$$S_{۲۰} = ۳/۵۹۷۷۳۹۷ \qquad S_{۸۰} = ۴/۹۶۵۴۷۹۳$$
$$S_{۳۰} = ۳/۹۹۴۹۸۷۱ \qquad S_{۹۰} = ۵/۰۸۲۵۷۰۶$$
$$S_{۴۰} = ۴/۲۷۸۵۴۳ \qquad S_{۱۰۰} = ۵/۱۸۷۳۷۷۵$$
$$S_{۵۰} = ۴/۴۹۹۲۰۵۳ \qquad S_{۱۱۰} = ۵/۲۸۲۲۳۴۶$$
$$S_{۶۰} = ۴/۶۷۹۸۷۰۴ \qquad S_{۱۲۰} = ۵/۳۶۸۸۶۸۳$$

فرض کنید x_n و y_n مانند (۲۴.۱) و (۲۵.۱) تعریف شده باشند و $z_n = (x_n + y_n)/۲$ نقطهٔ وسط بازهٔ $[x_n, y_n]$ باشد. داریم:

$$z_{۱۰} = ۰/۵۷۶۳۸۳۲ \qquad z_{۷۰} = ۰/۵۷۷۱۹۸۷$$
$$z_{۲۰} = ۰/۵۷۷۰۰۷۴ \qquad z_{۸۰} = ۰/۵۷۷۲۰۲۷$$
$$z_{۳۰} = ۰/۵۷۷۱۲۳۱ \qquad z_{۹۰} = ۰/۵۷۷۲۰۵۴$$

$$z_{40} = 0/5771635 \qquad z_{100} = 0/5772073$$

$$z_{50} = 0/5771828 \qquad z_{110} = 0/5772088$$

$$z_{60} = 0/5771925 \qquad z_{120} = 0/5772099$$

دیده می‌شود که درجهٔ تقریب z_{120} به $C = 0/5772156649\ldots$ قابل ملاحظه است.

مجدداً، به کمک حسابگر جیبی، در می‌یابیم که $\ln 10 = 2/3025851$، $x_{10} = 0/5263832$، و $y_{10} = 0/6263832$. به استناد قضیهٔ ۷.۱، به‌ازای $n > 10$، $S_n - \ln n = y_n$ الزاماً بین x_{10} و y_{10} است. از این رو،

$$23/55 < S_n < 23/66 \qquad \text{به‌ازای } n = 10^{10}$$

براساس این واقعیت که $x_{120} = 0/5730432$ و $y_{120} = 0/5813765$، خواهیم داشت:

$$23/598 < S_n < 23/608 \qquad \text{به‌ازای } n = 10^{10}$$

در این دو تخمین، از رابطهٔ $S_n = y_n + \ln n$ و این واقعیت استفاده کرده‌ایم که نامساویهای $x_m < y_n < y_m$ به‌ازای $n > m$ برقرارند. وقتی n به طور دلخواه بزرگ شود، x_n و y_n به C میل می‌کنند. معذالک، S_n بسیار آهسته زیاد می‌شود.

۳.۱ تابع نمایی

قوای گویای e معنی واضحی دارند: $e^{n/m}$ عبارت است از قوهٔ nام ریشهٔ mام e. بعلاوه، دیده‌ایم که

$$\ln e^{n/m} = \frac{n}{m} \qquad (27\cdot1)$$

تعریف. اگر t عددی اصم باشد، منظور از e^t عدد منحصربه‌فردی است که لگاریتم آن t است:

$$\ln e^t = t \qquad (28\cdot1)$$

تعریف. تابع

$$E(x) = e^x \qquad \text{به‌ازای هر عدد حقیقی } x\text{،}$$

را تابع نمایی می‌نامند.

توضیحات. بنابر (۲۷.۱) و (۲۸.۱)، اگر بنویسیم:

$$L(x) = \ln x \quad \text{و} \quad E(x) = e^x$$

خواهیم داشت:

(۲۹.۱) به‌ازای هر عدد حقیقی x، $L(E(x)) = x$.

معنایش این است که: تابع نمایی، معکوس تابع لگاریتمی است. طریق دیگر بیان این رابطه که توابع نمایی و لگاریتمی معکوس یکدیگرند این است که

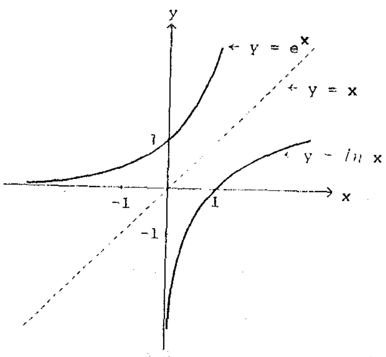
(۳۰.۱) به‌ازای هر عدد حقیقی x، $E(L(x)) = x$.

بر اساس نماد متداولتر، (۲۹.۱) و (۳۰.۱) را چنین می‌نویسند:

(۳۱.۱) به‌ازای هر عدد حقیقی x، $\ln e^x = x$.

و

(۳۲.۱) به‌ازای هر عدد حقیقی x، $e^{\ln x} = x$.



شکل ۱۲.۱

نمودار تابع نمایی در شکل ۱۲.۱ دیده می‌شود؛ این نمودار را می‌توان از انعکاس نمودار تابع لگاریتمی نسبت به خط $y = x$ به دست آورد. واضح است که $x = e^y$ فقط و فقط وقتی که $y = \ln x$. چون نمودار تابع لگاریتمی در سمت راست محور y است، نمودار تابع نمایی در بالای محور x باقی می‌ماند؛ یعنی،

(۳۳.۱) به‌ازای هر عدد حقیقی x، $e^x > 0$.

چون نمودار تابع لگاریتمی محور x را در $x = ۱$ قطع می‌کند، نمودار تابع نمایی محور y را در $y = ۱$ قطع می‌کند. با یادآوری این نکته که تابع لگاریتمی پیوسته و صعودی است و با توجه به این که تابع نمایی معکوس تابع لگاریتمی است، به موجب نظریهٔ کلی، نتیجه می‌شود که تابع نمایی صعودی و پیوسته است. [چون ارائهٔ یک برهان مستقیم برای اثبات پیوستگی تابع نمایی آسان است، این کار را اکنون انجام می‌دهیم. فرض کنید $x = e^y$ و $x + h = e^{y+v}$. آن‌گاه

$$v = A_{x,x+h}$$

به استناد (۳.۱)، نتیجه می‌شود که $|v| > h/(x+h)$ اگر $h > ۰$ و $|v| > |h|/x$ اگر $h < ۰$. این نشان می‌دهد که اگر v از لحاظ قدرمطلق کوچک باشد، h نیز باید از نظر قدرمطلق کوچک باشد. توجه کنید که $|v| = v$ اگر $v \geq ۰$ و $|v| = -v$ اگر $v \leq ۰$.]

حال، با استفاده از توابع لگاریتمی و نمایی، a^b را به‌ازای $a > ۰$ و عدد حقیقی دلخواه b تعریف می‌کنیم؛ مفهوم مقدماتی نما فقط وقتی به کار می‌رود که b گویا باشد. قبلاً حالت $a = e$ در نظر بوده است. اگر $a > ۰$ و n/m گویا باشد،

$$a^{n/m} = e^{(n/m)(\ln a)} \qquad (۳۴.۱)$$

برای تحقیق در درستی (۳۴.۱)، کافی است فقط از طرفین این معادله لگاریتم بگیریم. سپس، توجه می‌کنیم که طرف راست (۳۴.۱) به صورت

$$e^{b(\ln a)}$$

است و به‌ازای هر عدد حقیقی b با معنی است، خواه b گویا باشد خواه اصم. اکنون آماده‌ایم که a^b را به‌ازای $a > ۰$ و عدد اصم b تعریف کنیم.

تعریف. اگر b عددی اصم و a مثبت باشد، عدد a^b را چنین تعریف می‌کنیم:

$$a^b = e^{b(\ln a)} \qquad (۳۵.۱)$$

لم. فرض کنید $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$. آن‌گاه $\sqrt[n]{n}$ به ۱ میل می‌کند وقتی که n به طور دلخواه بزرگ شود.

برهان. به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، فرض کنید $\sqrt[n]{n} = ۱ + v_n$. آن‌گاه $v_n > ۰$ و

$$n = (۱ + v_n)^n = ۱ + nv_n + \frac{n(n-۱)}{۲}v_n^۲ + \cdots + v_n^n$$

چون همهٔ جمل مثبت هستند، داریم

$$1 > \frac{n}{2}v_n^2 \quad \text{یا} \quad n > 1 + \frac{n(n-1)}{2}v_n^2$$

به این ترتیب،

$$0 < v_n < \sqrt{\frac{2}{n}} \quad ، n = 2, 3, \ldots \ \text{به‌ازای}$$

واضح است که $\sqrt{2/n} = \sqrt{2}/\sqrt{n}$ به صفر میل می‌کند وقتی که n به طور دلخواه بزرگ شود. چون v_n به‌ازای $n = 2, 3 \ldots$ بین 0 و $\sqrt{2/n}$ قرار می‌گیرد، می‌توان دید که v_n به صفر میل می‌کند وقتی که n به طور دلخواه بزرگ شود و، بنابراین، $\sqrt[n]{n}$ باید به ۱ میل کند وقتی که n به طور دلخواه بزرگ می‌شود.

قضیهٔ ۱.۸. تابع $\ln x$ همراه x به بی‌نهایت میل می‌کند ولی آهسته‌تر از هر توان مثبت x. به عبارت دیگر، $\ln x$ همراه x به طور دلخواه بزرگ می‌شود ولی $(\ln x)/x^s$، به‌ازای هر $s > 0$، به صفر میل می‌کند وقتی که x به طور دلخواه بزرگ شود.

برهان. چون $\ln t$ به $\ln a$ میل می‌کند وقتی که t به a میل کند (چنان که در بخش ۲ دیدیم)، درمی‌یابیم که به استناد لم بالا $\ln \sqrt[n]{n} = (1/n)\ln n$ به صفر میل می‌کند وقتی که n به طور دلخواه بزرگ شود. معذالک، در لم مذکور، n مقادیر صحیح ۲، ۳، ۴، ... را اختیار می‌کند. باید تحقیق کنیم که $(\ln t)/t$ به صفر میل می‌کند وقتی که t عدد حقیقی دلخواهی باشد که به طور دلخواه بزرگ می‌شود. اینک این کار را انجام می‌دهیم. فرض کنید $[t]$ جزء صحیح t باشد. آن‌گاه

$$0 < \frac{\ln t}{t} < \frac{\ln([t]+1)}{[t]} = \frac{[t]+1}{[t]}.\frac{\ln([t]+1)}{[t]+1}, \qquad t > 1$$

نشان می‌دهد که $(\ln t)/t$ به صفر میل می‌کند وقتی که t به طور دلخواه بزرگ شود (توجه کنید که $t - 1 < [t] \leq t$). اگر فرض کنیم به‌ازای s مثبتی $t = x^s$، خواهیم دید که

$$\frac{\ln x^s}{x^s} = s.\frac{\ln x}{x^s}$$

به صفر میل می‌کند وقتی که x به طور دلخواه بزرگ شود. امّا s مثبت و ثابت است.

قضیهٔ ۱.۹. تابع e^y همراه y، سریعتر ازهر توان دیگر y، به بی‌نهایت میل می‌کند. یا، به‌ازای هر $t > 0$ و هر قدر بزرگ، e^t/e^y به صفر میل می‌کند وقتی که y به طور دلخواه بزرگ شود.

برهان. چنان که در قضیهٔ ۸.۱ دیدیم، به‌ازای هر مقدار مثبت s، $x^{-s}(\ln x)$ به صفر میل می‌کند وقتی که x به طور دلخواه بزرگ شود. اگر قرار دهیم $t = ۱/s$، ملاحظه می‌کنیم که $x^{-۱}(\ln x)^t$ به‌ازای هر $t > ۰$ به صفر میل می‌کند وقتی که x به طور دلخواه بزرگ شود. حکم مطلوب از جانشینی $x = e^y$ نتیجه می‌شود.

بحث. در بخش ۲ ملاحظه کردیم که تابع لگاریتمی $L(x) = \ln x$ در معادلهٔ تابعی

$$L(x_۱x_۲) = L(x_۱) + L(x_۲), \qquad x_۱ > ۰, \qquad x_۲ > ۰$$

صدق می‌کند. اکنون توجه می‌کنیم که تابع نمایی $E(y) = e^y$ در معادلهٔ تابعی

$$E(y_۱ + y_۲) = E(y_۱)E(y_۲) \qquad \text{به‌ازای هر دو عدد حقیقی } y_۱ \text{ و } y_۲،$$

صدق می‌کند. در واقع، قرار دهید $y_۱ = \ln x_۱$، $y_۲ = \ln x_۲$. آن‌گاه $x_۱ = e^{y_۱}$ ، $x_۲ = e^{y_۲}$، و

$$y_۱ + y_۲ = \ln x_۱ + \ln x_۲ = \ln x_۱x_۲$$

یا

$$e^{y_۱+y_۲} = e^{\ln(x_۱x_۲)} = x_۱x_۲ = e^{y_۱}e^{y_۲}$$

به صورت کلیتر، به‌ازای $a > ۰$، داریم:

$$a^{y_۱+y_۲} = a^{y_۱}a^{y_۲}$$

زیرا

$$a^{y_۱+y_۲} = e^{(y_۱+y_۲)(\ln a)} = e^{y_۱(\ln a)}e^{y_۲(\ln a)} = a^{y_۱}a^{y_۲}$$

همچنین، خاطرنشان می‌سازیم که

$$(a^{y_۱})^{y_۲} = (e^{y_۱(\ln a)})^{y_۲} = e^{y_۱y_۲(\ln a)} = a^{y_۱y_۲}$$

اگر $a > ۱$ آن‌گاه $a^x = e^{x(\ln a)} = e^{cx}$، که در آن $c = \ln a$ مثبت است. نمودار a^x در این حالت شبیه نمودار e^x است و a^x همراه x سریعتر از هر توان دیگر x به بی‌نهایت میل می‌کند.

اگر $۰ < a < ۱$ آن‌گاه نمودار a^x از انعکاس نمودار $y = b^x$، که در آن $b = ۱/a$ (و لذا $b > ۱$) نسبت به محور y به دست می‌آید.

به آسانی می‌توان لگاریتم را در مبنایی غیر از e برحسب لگاریتم طبیعی بیان کرد. اگر به‌ازای عدد مثبتی مانند a، که $a \neq ۱$، معادله $x = a^y$ برقرار باشد، می‌نویسیم:

$$y = \log_a x$$

و می‌گوییم که y لگاریتم x در مبنای a است. با استفاده از $a^y = e^{y(\ln a)}$، خواهیم داشت: $x = e^{y(\ln a)}$ یا $y(\ln a) = \ln x$. نتیجه می‌شود که

$$\log_a x = \frac{\ln x}{\ln a}$$

چون لگاریتم در مبنایی مانند a، که در آن $a > ۰$ و $a \neq ۱$، متناسب با لگاریتم طبیعی است، در اتحادهای معمول

$$\log_a x + \log_a y = \log_a(xy)$$
$$\log_a \left(\frac{x}{y}\right) = \log_a x - \log_a y$$
$$\log_a x^c = c(\log_a x)$$

به ازای هر دو عدد حقیقی مثبت x و y و هر عدد حقیقی c صدق می‌کند.

چون تساوی $\log_A B = (\ln B)/(\ln A)$ به‌ازای هر عدد حقیقی مثبت B و هر عدد حقیقی مثبت A با $A \neq ۱$ برقرار است، فوراً درمی‌یابیم که احکام

$$\log_a x = (\log_b x)(\log_a b)$$
$$\log_b a = \frac{۱}{\log_a b}$$
$$\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}$$

به‌ازای اعداد حقیقی مثبت و دلخواه x، a، و b با $a \neq ۱$ و $b \neq ۱$ برقرارند. واضح است که $\log_a ۱ = ۰$ و $\log_a a = ۱$. بعلاوه، $\ln x$ را به صورت $\log_e x$ نیز می‌توانیم بنویسیم.

امثله.

۱) عبارت $۱/(\log_۲ ۵) + ۱/(\log_۳ ۵) - (\log_۵ ۳)/(\log_{۳۰} ۳)$ را ساده کنید.

حل. چون $۱/\log_۲ ۵ = \log_۵ ۲$ و $۱/\log_۳ ۵ = \log_۵ ۳$، به‌دست می‌آوریم:

$$۱/(\log_۲ ۵) + ۱/(\log_۳ ۵) = \log_۵ ۲ + \log_۵ ۳ = \log_۵ ۶$$

از طرف دیگر، $\log_۵ ۳۰ = (\log_۵ ۳)(\log_۳ ۳۰) = (\log_۵ ۳)/(\log_{۳۰} ۳)$.
امّا $\log_۵ ۶ - \log_۵ ۳۰ = \log_۵(۱/۵) = -۱$. بنابراین، عبارت مفروض به -۱ ساده می‌شود.

۲) فرض کنید $\log_۴ \log_۳ \log_۲ x = ۰$. x را بیابید.

حل. داریم $\log_۴(\log_۳ \log_۲ x) = ۰ = \log_۴ ۱$. بنابراین، $\log_۳ \log_۲ x = ۱$. امّا $\log_۳(\log_۲ x) = ۱ = \log_۳ ۳$ ایجاب می‌کند که $\log_۲ x = ۳$ و، از این رو، $x = ۸$.

۳) اگر $\log_{۱۶} x + \log_۴ x + \log_۲ x = ۷$، x را بیابید.

حل. چون $\log_۴ x = (\log_۲ x)/(\log_۲ ۴) = (\log_۲ x)/۲$ و $\log_{۱۶} x = (\log_۲ x)/(\log_۲ ۱۶) = (\log_۲ x)/۴$، ملاحظه می‌کنیم که $۷ = (\log_۲ x)(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴})$ یا $\log_۲ x = ۴$. بنابراین، داریم $x = ۱۶$.

۴) $\log_۵ ۱۲$ را برحسب $a = \log_{۱۰} ۲$ و $b = \log_{۱۰} ۳$ بیان کنید.

حل. فرض می‌کنیم $x = \log_۵ ۱۲$. آن‌گاه: $۵^x = ۱۲$ یا $۱۲ = (۲^{-x})۱۰^x$. از طرفین در مبنای ۱۰ لگاریتم می‌گیریم، خواهیم داشت: $\log_{۱۰} ۱۲ = x(\log_{۱۰} ۱۰) - x(\log_{۱۰} ۲)$. امّا $\log_{۱۰} ۱۲ = \log_{۱۰} ۳ + ۲(\log_{۱۰} ۲) = b + ۲a$. بنابراین، $x - xa = b + ۲a$ یا $x = (b + ۲a)/(۱ - a)$.

۵) تصاعد هندسی و تصاعد حسابی مفروضی را با جمل مثبت در نظر بگیرید:

$$G, G_۱, G_۲, \ldots, G_n, \ldots \qquad \text{و} \qquad A, A_۱, A_۲, \ldots, A_n, \ldots$$

قدرنسبتهای این دو تصاعد، مثبت هستند. نشان دهید که دستگاهی از لگاریتمها می‌توان یافت که تساوی

$$\log_c G_n - \log_c G = A_n - A$$

به‌ازای هر n برقرار باشد و پایهٔ c این دستگاه را بیابید.

حل. فرض کنید $G_n = Gq^n$ و $A_n = A + nd$. آن‌گاه $\log_c G_n - \log_c G = n(\log_c q)$ و $A_n - A = nd$. از این رو، $n(\log_c q) = nd$؛ یعنی، $\log_c q = d$. بنابراین، به‌دست می‌آوریم: $c^d = q$ یا $c = q^{۱/d}$.

لم. فرض کنید $b > ۱$ و $n = ۲, ۳, \ldots$. اگر n به طور دلخواه بزرگ شود، $\sqrt[n]{b}$ به ۱ میل می‌کند.

برهان. چون $b > ۱$، به ازای $n = ۲, ۳, \ldots$، داریم $\sqrt[n]{b} > ۱$. قرار می‌دهیم $\sqrt[n]{b} = ۱ + h_n$. آن‌گاه، به‌ازای $n = ۲, ۳, \ldots$، خواهیم داشت $h_n > ۰$ و

$$b = (۱ + h_n)^n = ۱ + nh_n + \frac{n(n-۱)}{۲}h_n^۲ + \cdots + h_n^n$$

چون همهٔ جمل آخرین مجموع مثبت هستند، متوجه می‌شویم که

$$۰ < h_n < \frac{b-۱}{n}$$

وقتی n به طور دلخواه بزرگ شود، h_n به صفر و $\sqrt[n]{b}$ به ۱ میل می‌کند.

تبصره. برهان دیگری از این لم به این شکل به‌دست می‌آید که ملاحظه کنیم که $\ln(\sqrt[n]{b}) = (۱/n)(\ln b)$ به ۰ میل می‌کند وقتی که n به طور دلخواه بزرگ شود.

قضیهٔ ۱.۱۰. فرض کنید $b > ۱$ و $n = ۲, ۳, \ldots$. اگر n به طور دلخواه بزرگ شود، $n(\sqrt[n]{b} - ۱)$ به $\ln b$ میل می‌کند.

برهان. فرض کنید n عدد صحیح مثبتی بزرگتر از واحد باشد و قرار دهید $q = \sqrt[n]{b}$. آن‌گاه

$$۱ < q < q^۲ < q^۳ < \cdots < q^{n-۱} < q^n = b$$

فرض کنید $x_۰ = ۱$، $x_۱ = q$، $x_۲ = q^۲$، $x_۳ = q^۳$، ...، $x_{n-۱} = q^{n-۱}$، $x_n = q^n$، و بازهٔ $[۱, b]$ به n زیربازهٔ

$$[x_۰, x_۱], [x_۱, x_۲], [x_۲, x_۳], \ldots, [x_{n-۱}, x_n]$$

تجزیه شود. بر بازهٔ $[x_۰, x_۱]$ مستطیلی به ارتفاع $۱/x_۰$ بنا می‌کنیم، بر $[x_۱, x_۲]$ مستطیلی به ارتفاع $۱/x_۱$، بر $[x_۲, x_۳]$ مستطیلی به ارتفاع $۱/x_۲$ ، ...، بر $[x_{n-۱}, x_n]$ مستطیلی به ارتفاع $۱/x_{n-۱}$. حاصل جمع مساحات این n مستطیل عبارت است از:

$$(q-۱) + \frac{۱}{q}(q^۲ - q) + \frac{۱}{q^۲}(q^۳ - q^۲) + \cdots + \frac{۱}{q^{n-۱}}(q^n - q^{n-۱}) = n(q-۱)$$

که یک مجموع تقریبی برای $A_{۱,b} = \ln b$ است. می‌دانیم که، وقتی n به طور دلخواه بزرگ شود، q به ۱ میل می‌کند؛ یعنی، ما می‌توانیم، با انتخاب n به قدر کافی بزرگ، طول بزرگترین زیربازه‌های $[x_۰, x_۱]$، $[x_۱, x_۲]$، $[x_۲, x_۳]$ ، ... ، $[x_{n-۱}, x_n]$ را هر قدر بخواهیم کوچک اختیار کنیم و حکم مطلوب نتیجه می‌شود.

توضیحات. فرض کنید $a > ۱$ و $b > ۱$. آن‌گاه، ملاحظهٔ رابطهٔ

$$n(\sqrt[n]{ab} - ۱) = n(\sqrt[n]{a} - ۱)\sqrt[n]{b} + n(\sqrt[n]{b} - ۱)$$

طبعاً سبب می‌شود که معادلهٔ اساسی لگاریتم را نتیجه بگیریم:

$$\ln(ab) = \ln a + \ln b$$

مجدداً، فرض کنید $b > ۱$ و $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$. تعریف کنید $x_n = (b)^{۱/۲^n}$. آن‌گاه $x_{n+۱}^۲ = x_n$ و $x_{n+۱} < x_n$. بعلاوه، وقتی n به طور دلخواه بزرگ شود، x_n به ۱ میل می‌کند. تعریف می‌کنیم:

$$a_n = ۲^n\left(۱ - \frac{۱}{x^n}\right), \quad b_n = ۲^n(x_n - ۱), \quad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

اکنون نشان می‌دهیم که دنبالهٔ بازه‌های بستهٔ

$$[a_۱, b_۱], \quad [a_۲, b_۲], \quad [a_۳, b_۳], \quad \ldots$$

در شرایط اصل بازه‌های تودرتو (بخش اول را ملاحظه کنید.) صدق می‌کند. برای اثبات $b_n < b_{n-۱}$، ملاحظه می‌کنیم که $x_n > ۱$ و بنابراین

$$(x_n + ۱)(x_n - ۱) = x_n^۲ - ۱ = x_{n-۱} - ۱$$

مستلزم $۲(۱ - ۱/x_n) > ۱ - ۱/x_{n-۱}$ است و از این رو $۲^n(۱ - ۱/x_n) > ۲^{n-۱}(۱ - ۱/x_{n-۱})$.
برای اثبات $a_n > a_{n-۱}$، توجه می‌کنیم که $۱/x_n < ۱$ و لذا

$$\left(۱ + \frac{۱}{x_n}\right)\left(۱ - \frac{۱}{x_n}\right) = ۱ - \frac{۱}{x_n^۲} = ۱ - \frac{۱}{x_{n-۱}}$$

ایجاب می‌کند که $۲(۱ - ۱/x_n) > ۱ - ۱/x_{n-۱}$ و از این رو $۲^n(۱ - ۱/x_n) > ۲^{n-۱}(۱ - ۱/x_{n-۱})$.
برای اثبات $a_n < b_n$، ملاحظه می‌کنیم که

$$x_n - ۱ < x_n(x_n - ۱)$$

زیرا $x_n > ۱$. از این رو، $۱ - ۱/x_n < x_n - ۱$ یا $۲^n(۱ - ۱/x_n) < ۲^n(x_n - ۱)$. سرانجام، برای این که ثابت کنیم که وقتی n به طور دلخواه بزرگ شود $b_n - a_n$ به صفر میل می‌کند، فقط لازم است تشخیص دهیم که

$$x_n a_n = b_n$$

و وقتی n به طور دلخواه بزرگ شود x_n به ۱ میل می‌کند. تنها نقطهٔ مشترک همهٔ بازه‌های $[a_۱, b_۱]$، $[a_۲, b_۲]$، $[a_۳, b_۳]$، ... عبارت است از $\ln b$.

قضیهٔ ۱.۱۱. فرض کنید $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ و x عدد حقیقی دلخواهی باشد. اگر n به طور دلخواه بزرگ شود، هر دوی

$$\left(۱-\frac{x}{n}\right)^{-n}, \quad \left(۱+\frac{x}{n}\right)^{n}$$

به e^x میل می‌کند.

برهان. به استناد (۱.۳)، مقدار $(۱/h)\ln(۱+xh) = (۱/h)A_{۱,۱+xh}$ بین x و $x/(۱+xh)$ است. از این رو، وقتی h به صفر میل کند، $(۱/h)\ln(۱+xh)$ به x میل می‌کند. اگر قرار دهیم $h = ۱/k$، ملاحظه می‌کنیم که، وقتی k با مقادیر صحیح به ∞ یا $-\infty$ میل کند، $k\ln(۱+x/k)$ به x میل می‌کند. چون تابع نمایی پیوسته است، متوجه می‌شویم که

$$\left(۱+\frac{x}{k}\right)^{k} = e^{k\ln(۱+x/k)}$$

به e^x میل می‌کند وقتی که k به ∞ یا $-\infty$ میل کند.

تبصره. به ازای $n = ۲, ۳, ۴, \ldots$،

$$\left(۱-\frac{۱}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n-۱}{n}\right)^{-n} = \left(\frac{n}{n-۱}\right)^{n} = \left(۱+\frac{۱}{n-۱}\right)^{n}$$

قضیهٔ ۱.۱۲. فرض کنید $x_۱$،$x_۲$،$x_۳$، $\ldots$ دنباله‌ای از اعداد باشد. وقتی n به طور دلخواه بزرگ می‌شود، اگر nx_n به K میل کند آن‌گاه $(۱+x_n)^n$ به e^K میل می‌کند.

برهان. وقتی n به طور دلخواه بزرگ می‌شود، اگر nx_n به K میل کند، آن‌گاه x_n به ۰ و $\{\ln(۱+x_n)\}/x_n$ به ۱ میل می‌کند. (برهان قضیهٔ ۱.۱۱ را ببینید.) اگر $n\ln(۱+x_n)$ را به صورت

$$K\left(\frac{nx_n}{K}\right)\frac{\ln(۱+x_n)}{x_n}$$

بنویسیم، متوجه می‌شویم که $n\{\ln(۱+x_n)\}$ به K میل می‌کند وقتی که n به طور دلخواه بزرگ شود.

کاربرد. فرض کنید $a > ۰$، $b > ۰$، و $n = ۲, ۳, ۴, \ldots$. نشان می‌دهیم که اگر n به طور دلخواه بزرگ شود،

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a}+\sqrt[n]{b}}{۲}\right)^{n}$$

به $\sqrt{ab}$ میل می‌کند.

فرض کنید $x_n = (\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b})/۲ - ۱$. آن‌گاه

$$nx_n = \frac{۱}{۲}\{n(\sqrt[n]{a} - ۱) + n(\sqrt[n]{b} - ۱)\}, \qquad ۱ + x_n = \frac{\sqrt[n]{a} + \sqrt[n]{b}}{۲}$$

به استناد قضیهٔ ۱۰.۱، وقتی n به طور دلخواه بزرگ شود، nx_n به $\frac{۱}{۲}(\ln a + \ln b) = \ln\sqrt{ab}$ میل می‌کند. از این رو، به استناد قضیهٔ ۱۲.۱، $(۱ + x_n)^n$ به عدد

$$e^{\ln\sqrt{ab}} = \sqrt{ab}$$

میل می‌کند که همان چیزی است که می‌خواستیم.

به روش مشابه، می‌توان نشان داد که اگر $a_۱ > ۰$، $a_۲ > ۰$، ... ، $a_m > ۰$، دنبالهٔ

$$\left(\frac{\sqrt[n]{a_۱} + \sqrt[n]{a_۲} + \cdots + \sqrt[n]{a_m}}{m}\right)^n, \qquad n = ۲, ۳, ۴, \ldots$$

به $\sqrt[m]{a_۱ a_۲ \ldots a_m}$ میل می‌کند وقتی که n به طور دلخواه بزرگ شود. فرض می‌کنیم

$$x_n = \frac{\sqrt[n]{a_۱} + \sqrt[n]{a_۲} + \cdots + \sqrt[n]{a_m}}{m} - ۱$$

و توجه می‌کنیم که

$$nx_n = \frac{۱}{m}\{n(\sqrt[n]{a_۱} - ۱) + n(\sqrt[n]{a_۲} - ۱) + \cdots + n(\sqrt[n]{a_m} - ۱)\}$$

آن‌گاه ملاحظه می‌کنیم که وقتی n به طور دلخواه بزرگ شود، nx_n به $\ln(\sqrt[m]{a_۱ a_۲ \ldots a_m})$ و $(۱ + x_n)^n$ به $\sqrt[m]{a_۱ a_۲ \ldots a_m}$ میل می‌کند.

در فصل چهارم بعضی از خواص جالب تابع

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{a^x + b^x}{۲}\right)^{۱/x}, \qquad x \neq ۰ \\ &= \sqrt{ab}, \qquad x = ۰ \end{aligned}$$

را ثابت خواهیم کرد. برای ملاحظهٔ جزئیات، به قضیهٔ ۱۹.۴ مراجعه کنید.

۴.۱ توابع هذلولوی

بعضی از ترکیبات توابع نمایی (که به هذلولی $x^۲ - y^۲ = ۱$ مربوط می‌شوند، تقریباً نظیر حالتی که توابع مثلثاتی به دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = ۱$ مربوط می‌شوند؛) چنان مکرر در ریاضیات ظاهر می‌شوند که به اسامی خاصی موسوم شده‌اند. این توابع را توابع هذلولوی می‌نامند و شباهت آنها به توابع مثلثاتی به خاطر تأکیدی است که در معرفی آنها به اسامی سینوس هذلولوی، کسینوس هذلولوی، تانژانت هذلولوی، و امثال آن شده است. این توابع به صورت زیر تعریف می‌شوند:

الف) $\sinh x = \dfrac{e^x - e^x}{۲}$،

ب) $\cosh x = \dfrac{e^x + e^{-x}}{۲}$،

ج) $\tanh x = \dfrac{\sinh x}{\cosh x} = \dfrac{e^x - e^{-x}}{e^x + e^{-x}}$،

د) $\text{cotanh}\, x = \dfrac{\cosh x}{\sinh x} = \dfrac{e^x + e^{-x}}{e^x - e^{-x}}$،

ه) $\text{sech}\, x = \dfrac{۱}{\cosh x} = \dfrac{۲}{e^x + e^{-x}}$،

و) $\text{csch}\, x = \dfrac{۱}{\sinh x} = \dfrac{۲}{e^x - e^{-x}}$.

این شش تابع هذلولوی در اتحادهایی نظیر اتحادهای مثلثاتی صدق می‌کنند، به جز در بعضی موارد که اختلاف در یک علامت مثبت یا منفی است. مثلاً، اتحادهای زیر برقرارند:

۱) $\cosh^۲ x - \sinh^۲ x = ۱$،

۲) $۱ - \tanh^۲ x = \text{sech}^۲ x$،

۳) $\coth^۲ x - ۱ = \text{csch}^۲ x$،

۴) $\sinh(s \pm t) = (\sinh s)(\cosh t) \pm (\cosh s)(\sinh t)$،

۵) $\cosh(s \pm t) = (\cosh s)(\cosh t) \pm (\sinh s)(\sinh t)$،

۶) $\sinh ۲x = ۲(\sinh x)(\cosh s)$،

۷) $\cosh ۲x = \cosh^۲ x + \sinh^۲ x = ۲(\cosh^۲ x) - ۱ = ۲(\sinh^۲ x) + ۱$.

نمودار این شش تابع هذلولوی در شکل ۱۳.۱ نشان داده شده است.

چون توابع هذلولوی برحسب توابع نمایی تعریف شده‌اند، جای تعجب نیست که دریابیم که معکوس توابع هذلولوی برحسب توابع لگاریتمی نوشته می‌شوند. فرمول توابع هذلولوی معکوس به قرار زیر است:

الف) سینوس هذلولوی معکوس

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right), \qquad (x \in \mathbb{R})$$

ب) کسینوس هذلولوی معکوس

$$\cosh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2-1}\right), \qquad (x \geq 1)$$

ج) تانژانت هذلولوی معکوس

$$\tanh^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+x}{1-x}\right), \qquad |x| < 1$$

د) کتانژانت هذلولوی معکوس

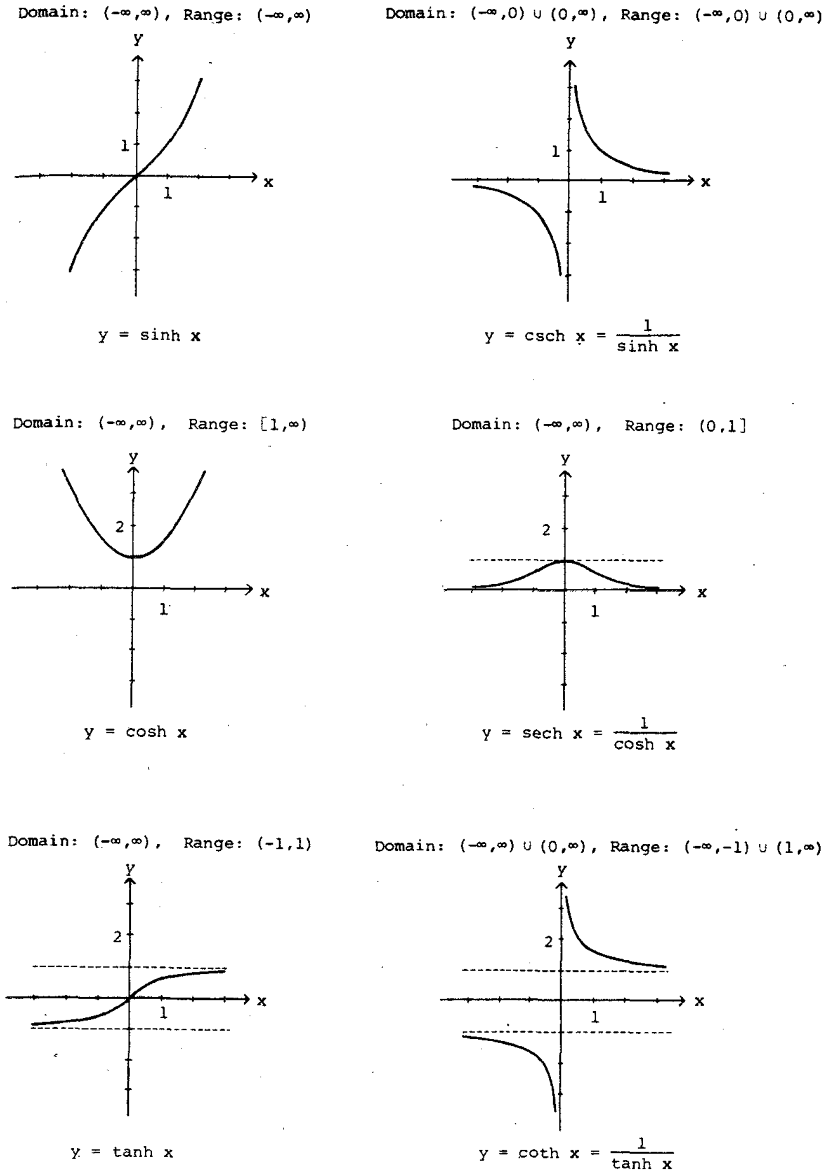
$$\coth^{-1} x = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{x+1}{x-1}\right), \qquad |x| > 1$$

ه) سکانت هذلولوی معکوس

$$\operatorname{sech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1+\sqrt{1-x^2}}{x}\right), \qquad 0 < x \leq 1$$

و) کسکانت هذلولوی معکوس

$$\operatorname{cech}^{-1} x = \ln\left(\frac{1}{x} + \frac{\sqrt{1+x^2}}{|x|}\right), \qquad x \neq 0$$


Domain: (-∞,∞), Range: (-∞,∞)
y
x
1
y = sinh x
Domain: (-∞,0) ∪ (0,∞), Range: (-∞,0) ∪ (0,∞)
y
x
1
y = csch x = 1/sinh x
Domain: (-∞,∞), Range: [1,∞)
y
x
2
1
y = cosh x
Domain: (-∞,∞), Range: (0,1]
y
x
2
1
y = sech x = 1/cosh x
Domain: (-∞,∞), Range: (-1,1)
y
x
2
1
y = tanh x
Domain: (-∞,∞) ∪ (0,∞), Range: (-∞,-1) ∪ (1,∞)
y
x
2
1
y = coth x = 1/tanh x

شکل ۱۳.۱

نمودار شش تابع هذلولوی معکوس در شکل ۱۴.۱ نشان داده شده‌است. توجه کنید که نمودار توابع $\sinh^{-1}$، $\tanh^{-1}$، $\coth^{-1}$، و $csch^{-1}$، به ترتیب، از انعکاس نمودار $\sinh$، $\tanh$، $\coth$، و csch نسبت به خط $y = x$ به دست می‌آیند؛ توابع $\sinh$، $\tanh$، $\coth$، و csch یک‌به‌یک هستند. (یعنی، هر خط موازی محور xها نمودار این توابع را حداکثر در یک نقطه قطع می‌کند.) از این رو، معکوس‌پذیرند. کسینوس هذلولوی و سکانت هذلولوی یک‌به‌یک نبوده و، بنابراین، معکوس‌پذیر نیستند. معذالک، تحدیدی از این توابع که نمودارشان در طرف راست محور y واقع می‌شود یک‌به‌یک و معکوس‌پذیرند؛ معکوس این تحدید $\cosh$ و sech به $\cosh^{-1}$ و sech^{-1} نمایش داده می‌شوند.

برای تحقیق در برقراری

$$\sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right), \qquad x \in \mathbb{R}$$

لازم است فقط بنویسیم:

$$f(x) = \sinh x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$

و

$$g(x) = \sinh^{-1} x = \ln\left(x + \sqrt{x^2 + 1}\right)$$

و نشان دهیم که $f[g(x)] = g[f(x)] = x$. این، محاسبه‌ای است که مشکلی ندارد. راه‌حل دیگر، این است که قرار دهیم $y = \sinh^{-1} x$. آن‌گاه،

$$2x = e^y - e^{-y} \quad \text{یا} \quad x = \sinh y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

پس از ضرب طرفین معادلهٔ آخر در e^y، خواهیم داشت:

$$(e^y)^2 - 2x(e^y) - 1 = 0 \quad \text{یا} \quad 2xe^y = (e^y)^2 - 1$$

به این ترتیب،

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2 + 4}}{2} = x \pm \sqrt{x^2 + 1}$$

چون e^y همیشه مثبت و $x - \sqrt{x^2 + 1}$ همیشه منفی است، جواب زیر قابل قبول است:

$$e^y = x + \sqrt{x^2 + 1}$$

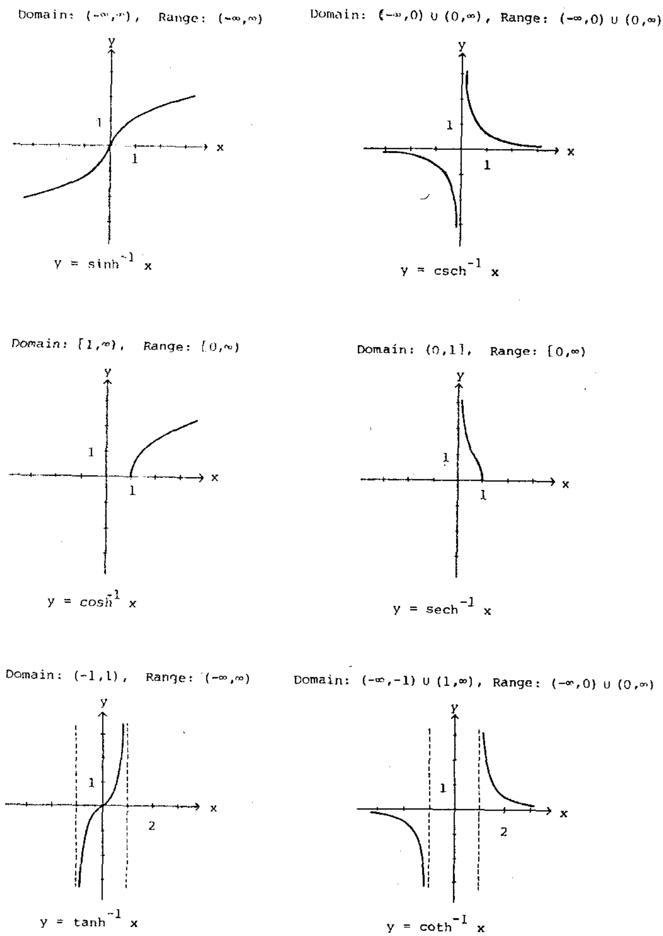
از طرفین این معادله لگاریتم می‌گیریم، خواهیم داشت:

$$y = \ln(x + \sqrt{x^2 + 1})$$

بنابراین،

$$\sinh^{-۱} x = \ln(x + \sqrt{x^۲ + ۱})$$

فرمول سایر توابع هذلولوی معکوس با یک بررسی ساده محقق می‌شود.



شکل ۱۴.۱

۵.۱ مثالهای گوناگون

۱) فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد و مجموع زیر را در نظر بگیرید:

$$M = \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n}$$

آن‌گاه، M صحیح نتواند بود.

در واقع، از میان کسرهایی که مجموع M را تشکیل می‌دهند، کسری را انتخاب می‌کنیم که بزرگترین توان ۲ را به عنوان یک عامل در برداشته باشد؛ فقط یک جمله با این ویژگی می‌تواند موجود باشد. اکنون، هر جملهٔ مجموع M را چنان بازنویسی می‌کنیم که مخرجش کوچکترین مضرب مشترک همهٔ مخرجها باشد. آن‌گاه، صورت هر یک از آنها، غیر از کسر منتخب، دارای عامل ۲ است، ولی صورت کسر منتخب فقط از عوامل فرد تشکیل شده است. بنابراین، وقتی این کسرها با هم جمع شوند، صورت کسر حاصل جمع مرکب از چندین عدد زوج و فقط یک عدد فرد خواهد بود، امّا مخرجش زوج. از این رو، صورت این کسر فرد و مخرجش زوج خواهد بود. بنابراین، مجموع M نمی‌تواند عددی صحیح باشد.

۲) از قضیهٔ ۷.۱ می‌دانیم که اگر n به قدر کافی بزرگ باشد، مجموع

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n}$$

از هر عدد منتخب مفروضی مانند N بزرگتر می‌شود. معذالک، اگر هر جمله‌ای را که مخرجش شامل رقم ۹ است از این مجموع حذف کنیم، مجموع جمل باقیمانده، به‌ازای هر n، از ۸۰ کمتر خواهد بود.

در واقع، فرض کنید n_k تعداد کسرهای بین $۱/۱۰^k$ و $۱/۱۰^{k+۱}$ باشد که پس از حذف جمل مذکور باقی می‌مانند. اگر کسر $۱/q$، که بین این دو کسر است، یکی از اعداد باقیمانده باشد، آن‌گاه در میان اعداد

$$\frac{۱}{۱۰q}, \frac{۱}{۱۰q+۱}, \frac{۱}{۱۰q+۲}, \ldots, \frac{۱}{۱۰q+۸}, \frac{۱}{۱۰q+۹}$$

(که همهٔ آنها بین $۱/۱۰^{k+۱}$ و $۱/۱۰^{k+۲}$ واقعند) فقط کسر آخر است که مخرجش شامل رقم ۹ است و حذف می‌شود. اگر $۱/q$ یکی از اعداد محذوف باشد، آن‌گاه همهٔ کسرهای

$$\frac{۱}{۱۰q}, \frac{۱}{۱۰q+۱}, \ldots, \frac{۱}{۱۰q+۹}$$

نیز حذف می‌شوند. نتیجه می‌شود که

$$n_k = ۹n_{k-۱}$$

در میان کسرهای ۱، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$، ...، $\frac{۱}{۸}$، $\frac{۱}{۹}$، فقط $\frac{۱}{۹}$ حذف می‌شود؛ از این رو، $n_۰ = ۸$ و

$$n_۱ = ۸ \cdot ۹ = ۷۲$$
$$n_۲ = ۸ \cdot ۹^۲$$
$$\vdots$$
$$n_k = ۸ \cdot ۹^k$$

اکنون، به‌ازای $n < ۱۰^{m+۱}$، مجموع

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{n}$$

را در نظر می‌گیریم. حاصل جمع

$$۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{۱۰^{m+۱} - ۱}$$

را پس از حذف کسرهایی که مخرجشان شامل رقم ۹ است، به دست می‌آوریم. خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
&\left(۱ + \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} + \cdots + \frac{۱}{۸}\right)\\
&+ \left(\frac{۱}{۱۰} + \frac{۱}{۱۱} + \frac{۱}{۱۲} + \cdots + \frac{۱}{۱۸} + \frac{۱}{۲۰} + \cdots + \frac{۱}{۸۸}\right)\\
&+ \left(\frac{۱}{۱۰۰} + \frac{۱}{۱۰۱} + \cdots + \frac{۱}{۸۸۸}\right) + \cdots + \left(\frac{۱}{۱۰^m} + \cdots + \frac{۱}{۸۸\ldots۸}\right)\\
&< ۱.n_۰ + \frac{۱}{۱۰}n_۱ + \frac{۱}{۱۰۰}n_۲ + \cdots + \frac{۱}{۱۰^{m-۱}}.n_{m-۱} + \frac{۱}{۱۰^m}.n_m
\end{aligned}$$

که در آن ۸ ... ۸۸ مبیّن عددی است که از $m + ۱$ رقم ۸ تشکیل شده است. حال، اگر مجموع داخل هر پرانتز را با حاصل ضرب بزرگترین جمله در تعداد جمل داخل آن پرانتز عوض کنیم، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}
&۱.n_۰ + \frac{۱}{۱۰}.n_۱ + \frac{۱}{۱۰۰}.n_۲ + \cdots + \frac{۱}{۱۰^{m-۱}}.n_{m-۱} + \frac{۱}{۱۰^m}.n_m\\
&= ۸\left(۱ + \frac{۹}{۱۰} + \frac{۹^۲}{۱۰^۲} + \cdots + \frac{۹^{m-۱}}{۱۰^{m-۱}} + \frac{۹^m}{۱۰^m}\right)\\
&= ۸.\frac{۱ - (۹/۱۰)^{m+۱}}{۱ - (۹/۱۰)} < ۸.\frac{۱}{۱ - (۹/۱۰)} = ۸ \cdot ۱۰ = ۸۰
\end{aligned}$$

و برهان حکمی که نخست ادعا کرده بودیم تمام می‌شود.

۳) به ازای هر عدد طبیعی n، مجموع

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots+\frac{1}{n^2}$$

بین مقادیر

$$\left(1-\frac{1}{2n+1}\right)\left(1+\frac{1}{2n+1}\right)\cdot\frac{\pi^2}{6} \quad \text{و} \quad \left(1-\frac{2}{n+1}\right)\left(1+\frac{2}{n+1}\right)\cdot\frac{\pi^2}{6}$$

واقع است. اگر فرض کنیم $n \longrightarrow \infty$، فوراً درمی‌یابیم که

$$1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\cdots=\frac{\pi^2}{6}$$

قبل از عرضهٔ برهان، دو قضیهٔ از جبر را یادآوری می‌کنیم: یکی فرمول موآور و دیگری فرمول ویتا.

فرمول موآور: فرض می‌کنیم n یک عدد صحیح مثبت باشد و α عددی حقیقی باشد و $i=\sqrt{-1}$. آن‌گاه

$$(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n=\cos n\alpha+i\sin n\alpha$$

فرمول ویتا: فرض کنید x_1، x_2، $\ldots$، x_n ریشه‌های چندجمله‌ای درجهٔ n

$$x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_{n-1}x+a_n$$

باشند. آن‌گاه روابط زیر بین ضرایب و ریشه‌های چندجمله‌ای برقرار است:

$$\begin{aligned}
a_1 &= -(x_1+x_2+\cdots+x_n)\\
a_2 &= x_1x_2+x_1x_3+\cdots+x_{n-1}x_n\\
a_3 &= -(x_1x_2x_3+\cdots+x_{n-2}x_{n-1}x_n)\\
&\vdots\\
a_n &= (-1)^n x_1x_2\ldots x_n
\end{aligned}$$

با استفاده از فرمول موآور و قضیهٔ دوجمله‌ای، داریم:

$$\cos n\alpha+i\sin n\alpha=(\cos\alpha+i\sin\alpha)^n$$

$$= \left(\cos^n \alpha - \binom{n}{۲} \cos^{n-۲} \alpha . \sin^۲ \alpha + \binom{n}{۴} \cos^{n-۴} \alpha . \sin^۴ \alpha - \dots\right)$$
$$+ i \left(\binom{n}{۱} \cos^{n-۱} \alpha . \sin \alpha - \binom{n}{۳} \cos^{n-۳} \alpha . \sin^۳ \alpha + \dots\right)$$

بنابراین،

$$\cos n\alpha = \cos^n \alpha - \binom{n}{۲} \cos^{n-۲} \alpha . \sin^۲ \alpha + \binom{n}{۴} \cos^{n-۴} \alpha . \sin^۴ \alpha - \dots$$

و

$$\sin n\alpha = \binom{n}{۱} \cos^{n-۱} \alpha . \sin \alpha - \binom{n}{۳} \cos^{n-۳} \alpha . \sin^۳ \alpha + \dots$$

در این فرمول، n را با $۲n + ۱$ عوض می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$\sin(۲n + ۱)\alpha = (\sin^{۲n+۱} \alpha) \left(\binom{۲n + ۱}{۱} \cot^{۲n} \alpha - \binom{۲n + ۱}{۳} \cot^{۲n-۲} \alpha + \dots\right)$$

به این ترتیب، نتیجه می‌شود که به‌ازای

$$\alpha = \frac{\pi}{۲n + ۱}, \frac{۲\pi}{۲n + ۱}, \dots, \frac{n\pi}{۲n + ۱}$$

معادلهٔ

$$\binom{۲n + ۱}{۱} \cot^{۲n} \alpha - \binom{۲n + ۱}{۳} \cot^{۲n-۲} \alpha + \dots = ۰$$

برقرار است. بنابراین، اعداد

$$\cot^۲ \frac{\pi}{۲n + ۱}, \cot^۲ \frac{۲\pi}{۲n + ۱}, \dots, \cot^۲ \frac{n\pi}{۲n + ۱}$$

ریشه‌های چندجمله‌ای درجهٔ n زیرند:

$$\binom{۲n + ۱}{۱} x^n - \binom{۲n + ۱}{۳} x^{n-۱} + \dots$$

امّا حاصل جمع ریشه‌های معادلهٔ

$$x^n - \frac{\binom{۲n+۱}{۳}}{\binom{۲n+۱}{۱}} x^{n-۱} + \dots = ۰$$

مساوی قرینهٔ ضریب x^{n-1} است؛ یعنی،

$$\cot^2 \frac{\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \cdots + \cot^2 \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{n(2n-1)}{3} \quad (36.1)$$

چون $\csc^2 \alpha = \cot^2 \alpha + 1$، معادلهٔ (۳۶.۱) ایجاب می‌کند که

$$\csc^2 \frac{\pi}{2n+1} + \csc^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \cdots + \csc^2 \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{2n(n+1)}{3} \quad (37.1)$$

اما نامساویهای $\sin\alpha < \alpha < \tan\alpha$ به‌ازای $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ برقرارند [مثلاً، (۹.۲) فصل ۲ را ببینید.] بنابراین،

$$\cot\alpha < \frac{1}{\alpha} < \csc\alpha, \qquad 0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$$

اکنون، از (۳۶.۱) و (۳۷.۱) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \frac{n(2n-1)}{3} &= \cot^2 \frac{\pi}{2n+1} + \cot^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \cdots + \cot^2 \frac{n\pi}{2n+1} \\ &< \left(\frac{2n+1}{\pi}\right)^2 + \left(\frac{2n+1}{2\pi}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{2n+1}{n\pi}\right)^2 \qquad (38.1) \\ &< \csc^2 \frac{\pi}{2n+1} + \csc^2 \frac{2\pi}{2n+1} + \cdots + \csc^2 \frac{n\pi}{2n+1} = \frac{2n(n+1)}{3} \end{aligned}$$

پس از تقسیم همهٔ جمل (۳۸.۱) بر $(2n+1)^2/\pi^2$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n-1}{2n+1}\cdot\frac{\pi^2}{6} &= \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)\left(1 - \frac{2}{2n+2}\right)\cdot\frac{\pi^2}{6} \\ &< 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \\ &< \frac{2n}{2n+1}\cdot\frac{2n+2}{2n+1}\cdot\frac{\pi^2}{6} = \left(1 - \frac{1}{2n+1}\right)\left(1 + \frac{1}{2n+1}\right)\cdot\frac{\pi^2}{6} \end{aligned}$$

که همان چیزی است که می‌خواستیم.

تبصره. برای بحث دیگری از این مجموع، قضیهٔ ۱۹.۷ (از فصل ۷) را ببینید.

۴) فرض کنید n و j اعدادی طبیعی باشند و قرار دهید

$$S_j = 1^j + 2^j + 3^j + \cdots + n^j$$

آن‌گاه

$$\binom{k+1}{1}S_1 + \binom{k+2}{2}S_2 + \cdots + \binom{k+1}{k}S_k = (n+1)^{k+1} - (n+1) \quad (39.1)$$

در واقع،

$$\sum_{p=1}^{n}(p+1)^{k+1} = \sum_{p=1}^{n}p^{k+1} + \binom{k+1}{1}\sum_{p=1}^{n}p^k + \binom{k+1}{2}\sum_{p=1}^{n}p^{k-1} + \dots + \binom{k+1}{k}\sum_{p=1}^{n}p + n$$

که از جمع جمل اتحاد زیر، وقتی که p مقادیر ۱ تا n را اختیار کند، حاصل می‌شود:

$$(p+1)^{k+1} = p^{k+1} + \binom{k+1}{1}p^k + \binom{k+1}{2}p^{k-1} + \cdots + \binom{k+1}{k}p + 1$$

معذالک،

$$\sum_{p=1}^{n}(p+1)^{k+1} - \sum_{p=1}^{n}p^{k+1} = (n+1)^{k+1} - 1$$

و

$$\binom{k+1}{m} = \binom{k+1}{k+1-m}, \qquad m = 1, 2, \dots, k$$

تبصره. از فرمول بازگشتی (۳۹.۱) مقادیر زیر به دست می‌آید:

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}, \qquad S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \qquad S_3 = S_1^2, \qquad \dots$$

۵) فرض کنید n و j اعداد صحیح مثبت باشند. آن‌گاه

$$\frac{1}{j+1}n^{j+1} < 1^j + 2^j + 3^j + \cdots + n^j < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{j+1}\frac{1}{j+1}n^{j+1} \quad (40.1)$$

در واقع، در میان جمل حاصل جمع $T = x^j + x^{j-1} + \cdots + x + 1$، اگر $x > 1$ آن‌گاه اولین جمله از همه بزرگتر است؛ ولی، اگر $0 < x < 1$ آن‌گاه آخرین جمله از همه بزرگتر است. از این رو،

$$(j+1)x^j > T > j+1, \qquad x > 1$$

و

$$(j+1)x^j < T < j+1, \qquad 0 < x < 1$$

اگر طرفین این نامساویها را در $x - 1$ ضرب کنیم، در می‌یابیم که به‌ازای $x \neq 1$

$$(j+1)x^j(x-1) > x^{j+1} - 1 > (j+1)(x-1)$$

[توجه کنید که $T(x-1) = x^{j+1} - 1$.] حال، فرض کنید که $x = p/(p-1)$. آن‌گاه

$$\frac{(j+1)p^j}{(p-1)^{j+1}} > \frac{p^{j+1} - (p-1)^{j+1}}{(p-1)^{j+1}} > \frac{(j+1)(p-1)^j}{(p-1)^{j+1}}$$

به طور مشابه، با فرض $x = (p+1)/p$، خواهیم داشت:

$$\frac{(j+1)(p+1)^j}{p^{j+1}} > \frac{(p+1)^{j+1} - p^{j+1}}{p^{j+1}} > \frac{(j+1)p^j}{p^{j+1}}$$

نتیجه می‌شود که

$$(p+1)^{j+1} - p^j > (j+1)p^j > p^{j+1} - (p-1)^{j+1}$$

اگر p متوالیاً مقادیر ۱، ۲، ۳، ... ، n را اختیار کند، نامساویهای زیر عاید می‌شوند:

$$\begin{aligned}
2^{j+1} - 1^{j+1} &> (j+1)1^j > 1^{j+1} - 0 \\
3^{j+1} - 2^{j+1} &> (j+1)2^j > 2^{j+1} - 1^{j+1} \\
4^{j+1} - 3^{j+1} &> (j+1)3^j > 3^{j+1} - 2^{j+1} \\
&\vdots \\
(n+1)^{j+1} - n^{j+1} &> (j+1)n^j > n^{j+1} - (n-1)^{j+1}
\end{aligned}$$

از جمع این نامساویها، خواهیم داشت:

$$(n+1)^{j+1} - 1 > (j+1)(1^j + 2^j + 3^j + \cdots + n^j) > n^{j+1} \qquad (۴۱.۱)$$

امّا به آسانی دیده می‌شود که (۴۱.۱) معادل (۴۰.۱) است.

تبصره. یک نتیجهٔ نامساوی (۴۰.۱) این است که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1^j + 2^j + 3^j + \cdots + n^j}{n^{j+1}} = \frac{1}{j+1} \qquad (۴۲.۱)$$

۶) نشان دهید که حاصل جمع

$$S_j = ۱^j + ۲^j + ۳^j + \cdots + n^j$$

که در آن n یک عدد صحیح مثبت دلخواه و j یک عدد صحیح مثبت فرد است، بر $S_۱$ بخش‌پذیر است. در واقع، $S_۱ = n(n+۱)/۲$ و نخست توجه می‌کنیم که اگر j فرد باشد، $a^j + b^j$ بر $a+b$ بخش‌پذیر است. دو حالت باید مورد بحث قرار گیرد.

حالت اول: فرض کنید n زوج است. در این حالت، S_j بر $n+۱$ بخش‌پذیر است؛ زیرا هر جملهٔ مجموعهای زیر

$$۱^j + n^j,\ ۲^j + (n-۱)^j,\ ۳^j + (n-۲)^j,\ \ldots,\ \left(\frac{n}{۲}\right)^j + \left(\frac{n}{۲}+۱\right)^j$$

بر

$$۱ + n = ۲ + (n-۱) = ۳ + (n-۲) = \cdots = \frac{n}{۲} + \left(\frac{n}{۲}+۱\right)$$

بخش‌پذیر است. مجموع S_j بر $n/۲$ نیز بخش‌پذیر است، زیرا اعداد

$$۱^j + (n-۱)^j, ۲^j + (n-۲)^j, ۳^j + (n-۳)^j, \ldots,$$
$$\left(\frac{n}{۲}-۱\right)^j + \left(\frac{n}{۲}+۱\right)^j, \left(\frac{n}{۲}\right)^j, n^j$$

بر $n/۲$ بخش‌پذیرند.

حالت دوم: فرض کنید n فرد باشد. در این حالت، مجموع S_j بر $(n+۱)/۲$ بخش‌پذیر است؛ زیرا همهٔ اعداد

$$۱^j + n^j,\ ۲^j + (n-۱)^j,\ ۳^j + (n-۲)^j,\ \ldots,$$
$$\left(\frac{n-۱}{۲}\right)^j + \left(\frac{n+۳}{۲}\right)^j,\ \left(\frac{n+۱}{۲}\right)^j$$

بر $(n+۱)/۲$ بخش‌پذیرند. همچنین، S_j بر n بخش‌پذیر است؛ زیرا همهٔ اعداد

$$۱^j + (n-۱)^j,\ ۲^j + (n-۲)^j,\ ۳^j + (n-۳)^j,\ \ldots,$$
$$\left(\frac{n-۱}{۲}\right)^j + \left(\frac{n+۱}{۲}\right)^j,\ n^j$$

بر n بخش‌پذیرند.

۷) در تساوی $N = N/۲ + N/۴ + N/۸ + \cdots + N/۲^n + \ldots$، که در آن N یک عدد صحیح مثبت دلخواه است، هر کسر را می‌توان با نزدیکترین عدد صحیح به آن تعویض کرد:

$$N = \left(\frac{N}{۲}\right) + \left(\frac{N}{۴}\right) + \left(\frac{N}{۸}\right) + \cdots + \left(\frac{N}{۲^n}\right) + \ldots$$

در واقع، به آسانی دیده می‌شود که $(a) = [a + \frac{۱}{۲}]$؛ که در آن (a) نشانگر نزدیکترین عدد صحیح به a است و $[a + \frac{۱}{۲}]$ جزء صحیح $a + \frac{۱}{۲}$ است، یعنی، بزرگترین عدد صحیحی که حداکثر مساوی $a + \frac{۱}{۲}$ است. از این رو، معادلهٔ مطلوب را به صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$N = \left[\frac{N}{۲} + \frac{۱}{۲}\right] + \left[\frac{N}{۴} + \frac{۱}{۲}\right] + \left[\frac{N}{۸} + \frac{۱}{۲}\right] + \ldots$$

حال، فرض کنید

$$N = a_n \cdot ۲^n + a_{n-۱} \cdot ۲^{n-۱} + \cdots + a_۱ \cdot ۲ + a_۰$$

(ضرایب a_n، $a_{n-۱}$، . . . ، $a_۱$، $a_۰$ برابر صفر یا واحدند) نمایش N در دستگاه شمار به مبنای ۲ باشد. آن‌گاه، داریم:

$$\begin{aligned}
\left[\frac{N}{۲} + \frac{۱}{۲}\right] &= \left[a_n \cdot ۲^{n-۱} + a_{n-۱} \cdot ۲^{n-۲} + \cdots + a_۱ + \frac{a_۰ + ۱}{۲}\right] \\
&= a_n \cdot ۲^{n-۱} + a_{n-۱} \cdot ۲^{n-۲} + \cdots + a_۱ + a_۰ \\
\left[\frac{N}{۴} + \frac{۱}{۲}\right] &= \left[a_n \cdot ۲^{n-۲} + a_{n-۱} \cdot ۲^{n-۳} + \cdots + \frac{a_۱ + ۱}{۲} + \frac{a_۰}{۴}\right] \\
&= a_n \cdot ۲^{n-۲} + a_{n-۱} \cdot ۲^{n-۳} + \cdots + a_۱ \\
&\vdots \\
\left[\frac{N}{۲^n} + \frac{۱}{۲}\right] &= \left[a_n + \frac{a_{n-۱} + ۱}{۲} + \frac{a_{n-۲}}{۴} + \cdots + \frac{a_۰}{۲^n}\right] \\
&= a_n + a_{n-۱} \\
\left[\frac{N}{۲^{n+۱}} + \frac{۱}{۲}\right] &= \left[\frac{a_n + ۱}{۲} + \frac{a_{n-۱}}{۴} + \cdots + \frac{a_۰}{۲^{n+۱}}\right] \\
&= a_n
\end{aligned}$$

و

$$\left[\frac{N}{۲^{n+۲}} + \frac{۱}{۲}\right] = \left[\frac{N}{۲^{n+۳}} + \frac{۱}{۲}\right] = \cdots = ۰$$

با یادآوری این نکته که هر a_i یکی از اعداد ۰ یا ۱ است. از این رو، به دست می‌آوریم:

$$\begin{aligned}\left[\frac{N}{2}+\frac{1}{2}\right]+\left[\frac{N}{4}+\frac{1}{2}\right]+\cdots+\left[\frac{N}{2^{n+1}}+\frac{1}{2}\right]+\dots\\ &= a_n\{2^{n-1}+2^{n-2}+\cdots+1+1\}\\ &+ a_{n-1}\{2^{n-2}+2^{n-3}+\cdots+1+1\}\\ &+\cdots+a_1\{1+1\}+a_0\\ &= a_n\cdot 2^n+a_{n-1}\cdot 2^{n-1}+\cdots+a_1\cdot 2+a_0\\ &= N\end{aligned}$$

که همان حکم مطلوب است.

۸) نامساوی کوشی ـ شوارتز: اگر a_1، a_2، ...، a_n و b_1، b_2، ...، b_n اعداد حقیقی دلخواهی باشند آن‌گاه

$$(a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n)^2\le(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)(b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2)$$
(۴۳.۱)

و تساوی فقط وقتی برقرار است که $a_1/b_1=a_2/b_2=\cdots=a_n/b_n$.

در واقع،

$$(xa_1+b_1)^2+(xa_2+b_2)^2+\cdots+(xa_n+b_n)^2=Ax^2+2Bx+C$$
(۴۴.۱)

که در آن

$$A=a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2,$$
$$B=a_1b_1+a_2b_2+\cdots+a_nb_n,$$
$$C=b_1^2+b_2^2+\cdots+b_n^2$$

به استناد (۴۴.۱)، $Ax^2+2Bx+C$ حاصل جمع چند مربع است و، بنابراین، به ازای هر عدد حقیقی x، $Ax^2+2Bx+C\ge 0$. از این رو، اگر قرار دهیم $x=-B/A$، خواهیم داشت:

$$A\frac{B^2}{A^2}-2B\frac{B}{A}+C=\frac{AC-B^2}{A}\ge 0$$

چون $A > ۰$[۱]، نتیجه می‌شود که $AC - B^۲ \geq ۰$ یا $B^۲ \leq AC$. بنابراین، (۴۳.۱) برقرار است.

تساوی در (۴۳.۱) فقط وقتی برقرار می‌شود که

$$xa_۱ + b_۱ = xa_۲ + b_۲ = \cdots = xa_n + b_n = ۰$$

یا $b_۱/a_۱ = b_۲/a_۲ = \cdots = b_n/a_n$.

۹) اگر $c_۱$،$c_۲$،...،c_n اعداد حقیقی مثبت باشند، آن‌گاه به‌ازای اعداد حقیقی دلخواه $t_۱$،$t_۲$،...،t_n نامساوی زیر برقرار است:

$$(c_۱t_۱ + c_۲t_۲ + \cdots + c_nt_n) \leq (c_۱ + c_۲ + \cdots + c_n)(c_۱t_۱^۲ + c_۲t_۲^۲ + \cdots + c_nt_n^۲) \quad (۴۵.۱)$$

در واقع، اگر انتخاب کنیم $a_k = \sqrt{c_k}$ و $b_k = \sqrt{c_k} \cdot t_k$ که $k = ۱, ۲, \ldots, n$ و اعداد حاصل را در (۴۳.۱) قرار دهیم، نامساوی مطلوب به دست می‌آید.

تبصره. با انتخاب $c_۱ = \frac{۱}{۲}$، $c_۲ = \frac{۱}{۳}$، و $c_۳ = \frac{۱}{۶}$، نامساوی (۴۵.۱) ایجاب می‌کند که

$$(\tfrac{۱}{۲}t_۱ + \tfrac{۱}{۳}t_۲ + \tfrac{۱}{۶}t_۳)^۲ \leq \tfrac{۱}{۲}t_۱^۲ + \tfrac{۱}{۳}t_۲^۲ + \tfrac{۱}{۶}t_۳^۲$$

به ازای هر سه عدد حقیقی و دلخواه $t_۱$،$t_۲$، و $t_۳$ برقرار باشد.

۱۰) اتحاد زیر برقرار است:

$$\begin{aligned} a + b(۱ + a) + c(a + ۱)(۱ + b) + d(۱ + a)(۱ + b)(۱ + c) \\ + \cdots + q(۱ + a)(۱ + b)\ldots(۱ + p) \\ = (۱ + a)(۱ + b)(۱ + c)\ldots(۱ + q) - ۱ \quad (۴۶.۱) \end{aligned}$$

در واقع، اگر عدد ۱ را به طرفین بیفزاییم، می‌توان نوشت:

$$[(۱ + a) + b(۱ + a)] + c(۱ + a)(۱ + b) + d(۱ + a)(۱ + b)(۱ + c)$$

۱) این در حالتی است که حداقل یکی از اعداد $a_۱$،$a_۲$، ...، a_n صفر نباشد. البته، اگر $a_۱ = a_۲ = \cdots = a_n = ۰$، نامساوی کوشی ـ شوارتز بالبداهه برقرار است. (م).

$$+\cdots+q(1+a)(1+b)\ldots(1+p)$$
$$=[(1+a)(1+b)+c(1+a)(1+b)]+d(1+a)(1+b)(1+c)$$
$$+\cdots+q(1+a)(1+b)\ldots(1+p)$$
$$=(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)+\cdots+q(1+a)(1+b)\ldots(1+p)$$
$$=(1+a)(1+b)(1+c)(1+d)\ldots(1+q)$$

ملاحظات. اگر $a=b=c=\cdots=q$، آن‌گاه

$$a+a(1+a)+a(1+a)^2+a(1+a)^3+\cdots+a(1+a)^{n-1}=(1+a)^n-1$$

که در آن n تعداد اعداد a،b، ...، q است. در این صورت، اگر بنویسیم $x=a+1$، خواهیم داشت:

$$(x-1)(1+x+x^2+\cdots+x^{n-1})=x^n-1$$

که فرمول تعیین حاصل جمع جمل یک تصاعد هندسی است.

با فرض $a=1$، $b=2$، $c=3$، ... ، $q=n$، چنین به دست می‌آوریم:

$$1\cdot 1!+2\cdot 2!+3\cdot 3!+\cdots+n\cdot n!=(n+1)!-1$$

و اگر قرار دهیم $a=(n+1)/1$، $b=(n+1)/2$، $c=(n+1)/3$، ... ، $q=(n+1)/k$، اتحاد زیر را نتیجه می‌گیریم:

$$\binom{n+1}{1}+\binom{n+2}{2}+\binom{n+3}{3}+\cdots+\binom{n+k}{k}=\binom{n+k+1}{k}-1$$

۱۱) فرض کنید $a>b>0$ و n یک عدد صحیح مثبت باشد. آن‌گاه

$$\frac{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}+a^n}{1+a+a^2+\cdots+a^{n-1}}>\frac{1+b+b^2+\cdots+b^{n-1}+b^n}{1+b+b^2+\cdots+b^{n-1}} \quad (47.1)$$

در واقع، چون $a>b>0$، داریم:

$$\frac{1+a}{a^2}=\frac{1}{a^2}+\frac{1}{a}<\frac{1}{b^2}+\frac{1}{b}=\frac{1+b}{b^2} \quad \text{یا} \quad \frac{a^2}{1+a}>\frac{b^2}{1+b}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{۱+a+a^۲}{۱+a}=۱+\frac{a^۲}{۱+a}>۱+\frac{b^۲}{۱+b}=\frac{۱+b+b^۲}{۱+b}$$

به طور مشابه،

$$\frac{۱+a+a^۲}{a^۳}=\frac{۱}{a^۳}+\frac{۱}{a^۲}+\frac{۱}{a}<\frac{۱}{b^۳}+\frac{۱}{b^۲}+\frac{۱}{b}=\frac{۱+b+b^۲}{b^۳}$$

یا

$$\frac{a^۳}{۱+a+a^۲}>\frac{b^۳}{۱+b+b^۲}$$

که نتیجه می‌دهد:

$$\frac{۱+a+a^۲+a^۳}{۱+a+a^۲}=۱+\frac{a^۳}{۱+a+a^۲}>۱+\frac{b^۳}{۱+b+b^۲}=\frac{۱+b+b^۲+b^۳}{۱+b+b^۲}.$$

و هکذا.

۱۲) به‌ازای هر عدد حقیقی x، $\cos(\sin x)>\sin(\cos x)$.

در واقع، به استناد اتحاد $\cos(A+B)=(\cos A)(\cos B)-(\sin A)(\sin B)$، داریم:

$$\begin{aligned}\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\cos x\right)&=\left(\cos\frac{\pi}{۲}\right)\cos(\cos x)-\left(\sin\frac{\pi}{۲}\right)\sin(\cos x)\\&=-\left(\sin\frac{\pi}{۲}\right)\sin(\cos x)=-\sin(\cos x)\end{aligned}$$

یا

$$\sin(\cos x)=-\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\cos x\right)$$

بنابراین،

$$\cos(\sin x)-\sin(\cos x)=\cos(\sin x)+\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\cos x\right)$$

امّا

$$\cos A=\cos(-A),\qquad \cos A+\cos B=۲\cos\frac{A+B}{۲}\cdot\cos\frac{A-B}{۲}$$

بنابراین،

$$\cos(\sin x)-\sin(\cos x)=۲\cos\frac{\sin x+\pi/۲+\cos x}{۲}\cdot\cos\frac{-\sin x+\pi/۲+\cos x}{۲}$$

حال، ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}|\cos x + \sin x| &= (\cos^{۲} x + ۲\{\cos x\}\{\sin x\} + \sin^{۲} x)^{۱/۲}\\ &= \sqrt{۱ + \sin ۲x} \leq \sqrt{۲}\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}|\cos x - \sin x| &= (\cos^{۲} x - ۲\{\cos x\}\{\sin x\} + \sin^{۲} x)^{۱/۲}\\ &= \sqrt{۱ - \sin ۲x} \leq \sqrt{۲}\end{aligned}$$

چون $\frac{\pi}{۲} = ۱/۵۷\ldots$ و $\sqrt{۲} = ۱/۴۱\ldots$، داریم:

$$\frac{\pi}{۲} > \frac{\pi/۲ + \cos x - \sin x}{۲} > ۰ \quad و \quad \frac{\pi}{۲} > \frac{\pi/۲ + \cos x + \sin x}{۲} > ۰$$

بنابراین،

$$\cos\frac{\pi/۲ + \cos x - \sin x}{۲} > ۰ \quad و \quad \cos\frac{\pi/۲ + \cos x - \sin x}{۲} > ۰$$

از این رو، $\cos(\sin x) - \sin(\cos x) > ۰$.

تمرینات فصل اول

۱.۱. نشان دهید که $(۱ - ۱/n)^{-n}$، به‌ازای $n = ۲, ۳, \ldots$، دنباله‌ای نزولی است که به e میل می‌کند.
راهنمایی: اگر $n = k + ۱$ آن‌گاه $(۱ - ۱/n)^{-n} = (۱ + ۱/k)^{k+۱}$.

۲.۱. نشان دهید که

$$\sinh x + \sinh ۲x + \sinh ۳x + \cdots + \sinh nx = (\sinh \tfrac{۱}{۲}nx)\frac{\sinh \frac{۱}{۲}(n + ۱)x}{\sinh \frac{۱}{۲}x}$$

و

$$\tfrac{۱}{۲} + \cosh x + \cosh ۲x + \cosh ۳x + \cdots + \cosh nx = \frac{\sinh\left(n + \frac{۱}{۲}\right)x}{۲\sinh \frac{۱}{۲}x}$$

راهنمایی: داریم

$$\begin{aligned}
۲(\sinh \tfrac{۱}{۲}nx)\frac{\sinh \frac{۱}{۲}(n+۱)x}{۲\sinh \frac{۱}{۲}x} &= (e^{nx/۲} - e^{-nx/۲})\frac{e^{(n+۱)x/۲} - e^{-(n+۱)x/۲}}{e^{x/۲} - e^{-x/۲}} \\
&= \frac{e^{(n+۱)x} - e^{x} + e^{-nx} - ۱}{e^{x} - ۱} \\
&= \frac{e^{x}(e^{nx-۱})}{e^{x} - ۱} - \frac{e^{-x}(e^{-nx} - ۱)}{e^{-x} - ۱} \\
&= \sum_{r=۱}^{n} e^{rx} - \sum_{r=۱}^{n} e^{-rx} = ۲\left(\sum_{r=۱}^{n} \sinh rx\right)
\end{aligned}$$

و هکذا.

۳.۱ فرض کنید a، b، c، . . . ، z اعداد صحیح مثبت باشند. اگر $n = a+b+c+\cdots+z$ آن‌گاه

$$\frac{n!}{a!b!c!\dots z!} \leq \frac{n^{n}}{a^{a}b^{b}c^{c}\dots z^{z}}$$

راهنمایی: داریم $(a+b+c+\cdots+z)^{n} = n^{n}$. هر جملهٔ بسط چندجمله‌ای طرف چپ این تساوی مثبت و کوچکتر از حاصل جمع همهٔ جمل است. از این رو، بالاخص

$$\frac{n!}{a!b!c!\dots z!}a^{a}b^{b}c^{c}\dots z^{z} \leq n^{n}$$

۴.۱ فرض کنید به‌ازای $k = ۱, ۲, \dots, n$، $a_k > ۰$ و $b_k > ۰$. تحقیق کنید که

$$\begin{aligned}
&(a_۱^۲ + b_۱^۲)^{۱/۲} + (a_۲^۲ + b_۲^۲)^{۱/۲} + \cdots + (a_n^۲ + b_n^۲)^{۱/۲} \\
&\qquad \geq [(a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n)^۲ + (b_۱ + b_۲ + \cdots + b_n)^۲]^{۱/۲}
\end{aligned}$$

راهنمایی: این نقاط را در نظر بگیرید: $P_۰$ با مختصات $(۰, ۰)$، $P_۱$ با مختصات $(a_۱, b_۱)$، $P_۲$ با مختصات $(a_۱ + a_۲, b_۱ + b_۲)$، . . . ، P_n با مختصات $(a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n, b_۱ + b_۲ + \cdots + b_n)$. آن‌گاه

$(a_۱^۲ + b_۱^۲)^{۱/۲}$ فاصلهٔ بین $P_۰$ و $P_۱$ است.

$(a_۲^۲ + b_۲^۲)^{۱/۲}$ فاصلهٔ بین $P_۱$ و $P_۲$ است.

$\vdots$

$(a_n^2 + b_n^2)^{1/2}$ فاصلهٔ بین P_{n-1} و P_n است.

ولی، $[(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2 + (b_1 + b_2 + \cdots + b_n)^2]^{1/2}$ فاصلهٔ بین P_0 و P_n است. اما کوتاهترین مسیر بین P_0 و P_n مسیر قطعه خط راستی است که P_0 را به P_n وصل می‌کند.

۵.۱. الف) آیا نامساوی (۴۸.۱) در حالتی که اعداد a_k و b_k مثبت نباشند بازهم برقرار است؟

ب) تحت چه شرایطی نامساوی (۴۸.۱) به تساوی تبدیل می‌شود؟

۶.۱. فرض کنید $A = (1/2)(3/4)(5/6)\ldots(9999/10000)$. تحقیق کنید که $A < 1/100$.

راهنمایی: قرار دهید $B = (2/3)(4/5)(6/7)\ldots(10000/10001)$. آن‌گاه $A < B$ و $A^2 < AB = 1/10001$.

۷.۱. نشان دهید که

$$\frac{1}{2}\cdot\frac{3}{4}\cdot\frac{5}{6}\cdot\ldots\cdot\frac{2n-1}{2n} < \frac{1}{\sqrt{2n+1}}$$

راهنمایی: واضح است که

$$1\cdot 3 < 2^2, \quad 3\cdot 5 < 4^2, \ldots, (2n-1)(2n+1) < (2n)^2$$

بنابراین،

$$1^2\cdot 3^2\cdot 5^2\cdot\ldots\cdot(2n-1)^2(2n+1) < 2^2\cdot 4^2\cdot 6^2\cdot\ldots\cdot(2n)^2$$

۸.۱. نشان دهید که

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\cdot\ldots\cdot 2n} > \frac{\sqrt{n+1}}{2n+1}$$

راهنمایی: اگر $a \neq b$ آن‌گاه $a + b > 2\sqrt{ab}$ و، بنابراین، $k + (k-1) > 2\sqrt{k(k-1)}$. از این رو، $(2k-1)/2(k-1) > \sqrt{k/(k-1)}$ و، به‌ازای $k = 2, 3, \ldots, n+1$، خواهیم داشت:

$$\frac{3}{2\cdot 1} > \sqrt{\frac{2}{1}}, \quad \frac{5}{2\cdot 2} > \sqrt{\frac{3}{2}}, \quad \frac{7}{2\cdot 3} > \sqrt{\frac{4}{3}}, \ \ldots,$$

$$\frac{2n-1}{2(n-1)} > \sqrt{\frac{n}{n-1}}, \qquad \frac{2n+1}{2n} > \sqrt{\frac{n+1}{n}}$$

از ضرب این نامساویها نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2n+1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n} > \sqrt{n+1}$$

و از آن لازم می‌آید که

$$\frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n} > \frac{\sqrt{n+1}}{2n+1}$$

تبصره. چون $\sqrt{n+1}/(2n+1) > \sqrt{n+1}/(2n+2) > 1/2\sqrt{n+1}$، به استناد تمرین ۱.۷، می‌توان نوشت:

$$\frac{1}{\sqrt{2n+1}} > \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot \ldots (2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n} > \frac{1}{2\sqrt{n+1}}$$

۱.۹. اعداد حقیقی a_1، a_2، ...، a_n، که همگی صفر نیستند، مفروضند؛ و متغیرهای x_1، x_2، ...، x_n در معادلهٔ $a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n = 1$ صدق می‌کنند. نشان دهید که کمترین مقدار $x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2$ عبارت است از $(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2)^{-1}$.

راهنمایی: به استناد نامساوی کوشی ـ شوارتز،

$$(x_1^2+x_2^2+\cdots+x_n^2)(a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2) \geq a_1x_1+a_2x_2+\cdots+a_nx_n$$

۱.۱۰. با فرض $0 < a < x < b$، نشان دهید که

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{a+b-x} < \frac{1}{a}+\frac{1}{b}$$

راهنمایی: داریم $a - x < 0$ و $b - x > 0$. بنابراین، $(a-x)(b-x) < 0$ یا $ab-(a+b)x+x^2 < 0$. از این رو، $ab < x(a+b-x)$؛ و نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{1}{ab} > \frac{1}{x(a+b-x)} \quad \text{یا} \quad \frac{a+b}{ab} > \frac{a+b}{x(a+b-x)}$$

۱۱.۱. فرض کنید $n = ۲, ۳, \ldots$. نشان دهید که $(۱ - \frac{۱}{۲n})^{-۱} = ۱ + \frac{۱}{۲n} + \frac{A_n}{n^۲}$، که در آن $A_n < \frac{۱}{۲}$.

راهنمایی: چون

$$(۱ - x)^{-۱} = ۱ + x + \frac{x^۲}{۱ - x}$$

داریم

$$\left(۱ - \frac{۱}{۲n}\right)^{-۱} = ۱ + \frac{۱}{۲n} + \frac{۱}{۴n^۲ - ۲n}$$

امّا، به ازای $n > ۱$، $۴n^۲ - ۲n > ۴n^۲ - ۲n^۲ = ۲n^۲$. از این رو، $A_n < \frac{۱}{۲}$.

۱۲.۱. فرض کنید تابع f به ازای همهٔ مقادیر x و y حقیقی تعریف شده باشد و در رابطهٔ $f(x + y) = f(x)f(y)$ صدق کند. نشان دهید که اگر f متحد با صفر نباشد، به ازای همهٔ مقادیر x مثبت است و $f(۰) = ۱$. همچنین، نشان دهید که اگر f همه جا برابر واحد نباشد، هیچ Mی نمی‌توان یافت که نامساوی $f(x) < M$ به‌ازای همهٔ مقادیر x برقرار باشد.

راهنمایی: فرض کنید $y = ۰$. آن‌گاه تساوی $f(x) = f(x)f(۰)$ به ازای همهٔ مقادیر x برقرار است. از این رو، $f(۰) = ۱$. قرار دهید: $x = y = \frac{۱}{۲}a$. آن‌گاه $f(a) = [f(\frac{۱}{۲}a)]^۲ \geq ۰$. اگر $f(a) = ۰$ آن‌گاه به ازای همهٔ مقادیر x، $f(x) = ۰$ (قرار دهید $x = a$، $y = x - a$). فرض کنید همواره $f(x) < M$، آن‌گاه $f(-x) = [f(x)]^{-۱} > M$، که یک تناقض است مگر این که همواره $f(x) = ۱$.

۱۳.۱. فرض کنید $n \neq ۱$. نشان دهید که اگر $\log_a n = x$ و $\log_c n = y$ آن‌گاه

$$\frac{x - y}{x + y} = \frac{\log_b c - \log_b a}{\log_b c + \log_b a}$$

راهنمایی:

$$\frac{\log_a n - \log_c n}{\log_a n + \log_c n} = \frac{(\log_b n)(\log_a b) - (\log_b n)(\log_c b)}{(\log_b n)(\log_a b) + (\log_b n)(\log_c b)} = \frac{\log_a b - \log_c b}{\log_a b + \log_c b}$$
$$= \frac{۱/(\log_b a) - ۱/(\log_b c)}{۱/(\log_b a) + ۱/(\log_b c)} = \frac{\log_b c - \log_b a}{\log_b c + \log_b a}$$

۱۴.۱. نشان دهید که اگر $x = \log_a(bc)$، $y = \log_b(ca)$، و $z = \log_c(ab)$، آن‌گاه $x + y + z = xyz - ۲$.

راهنمایی: داریم

$$\begin{aligned}&(\log_a b+\log_a c)(\log_b c+\log_b a)\\&=(\log_a b)(\log_b c)+(\log_a b)(\log_b a)+(\log_a c)(\log_b c)+(\log_a c)(\log_b a)\\&=(\log_a c)+1+(\log_a c)(\log_b c)+\log_b c\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}&\{(\log_a c)+1+(\log_a c)(\log_b c)+\log_b c\}(\log_c a+\log_c b)\\&=(\log_c a)(\log_a c)+\log_c a+(\log_c a)(\log_a c)(\log_b c)+(\log_c a)(\log_b c)\\&+(\log_c b)(\log_a c)+\log_c b+(\log_c b)(\log_a c)(\log_b c)+(\log_c b)(\log_b c)\\&=1+\log_c a+\log_b c+\log_b a+\log_a b+\log_c b+\log_a c+1\\&=\log_a(bc)+\log_b(ca)+\log_c(ab)+2\end{aligned}$$

۱۵.۱. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد و c_r را ضریب x^r در بسط $(1+x)^n$ بگیرید. نشان دهید که اگر $f(r)=c_0c_r+c_1c_{r+1}+\cdots+c_{n-r}c_n$ آن‌گاه

الف) $f(r)=\dfrac{(2n)!}{(n+r)!(n-r)!}$،

ب) $c_0f(0)+c_1f(1)+\cdots+c_nf(n)=\dfrac{(3n)!}{n!(2n)!}$.

راهنمایی:

الف) چون $c_r=c_{n-r}$،

$$\begin{aligned}&(c_0+c_1x+\cdots+c_rx^r+\cdots+c_nx^n)(c_n+c_{n-1}x+\cdots+c_{n-r}x^r+\cdots+c_0x^n)\\&=(1+x)^n(1+x)^n=(1+x)^{2n}\end{aligned}$$

ضریب x^{n+r} در طرف چپ عبارت است از $f(r)$، در حالی که ضریب x^{n+r} در $(1+x)^{2n}$ عبارت است از $(2n)!/(n+r)!(n-r)!$. از این رو، (الف) برقرار است.

ب) به استناد حکم (الف)،

$$(1+x)^{2n}=x^{n-1}\text{جمل بسط از آغاز تا جملهٔ شامل}+f(0)x^n+f(1)x^{n+1}+\cdots+f(n)x^{2n}$$

از ضرب طرفین در $(۱+x)^n = c_n + c_{n-۱}x + \cdots + c_۰x^n$، معلوم می‌شود که

$$c_۰ f(۰) + c_۱ f(۱) + \cdots + c_n f(n)$$

ضریب $x^{۲n}$ در بسط $(۱+x)^{۳n}$ است که عبارت است از $(۳n)!/(۲n)!(n)!$، و (ب) نتیجه می‌شود.

۱۶.۱. فرض کنید a و b اعداد صحیح مثبت باشند و $b > a$. نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱}{an+۱}+\frac{۱}{an+۲}+\frac{۱}{an+۳}+\cdots+\frac{۱}{bn}\right)=\ln\frac{b}{a}$$

راهنمایی: داریم

$$\lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{bn}-\ln(bn+۱)\right)=C$$

و

$$\lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{an}-\ln(an+۱)\right)=C$$

که در آن C ثابت اویلر است. از تفریق این دو معادله، حکم مطلوب آشکار می‌شود.

۱۷.۱. نشان دهید که اگر $۱ > x > ۰$ و $۱ > y > ۰$ آن‌گاه $۱ > x + y - xy > ۰$.

راهنمایی: چون $۱ > (۱-x)(۱-y) > ۰$، داریم $۱ > ۱ + xy - x - y > ۰$. بنابراین، $۰ > xy - x - y > -۱$ یا $۱ > -xy + x + y > ۰$.

۱۸.۱. نشان دهید که برد تابع $y = (x^۲ + x + ۱)/(x + ۱)$ شامل بازهٔ باز $(-۳, ۱)$ نیست.

راهنمایی: داریم $x^۲ + (۱-y)x + ۱ - y = ۰$. برای این که x حقیقی باشد باید

$$(۱-y)^۲ \geq ۴(۱-y) \quad \text{یا} \quad (y-۱)(y+۳) \geq ۰$$

اگر y بین -۳ و ۱ واقع شود، آن‌گاه $y+۳ > ۰$ و $y-۱ < ۰$ که مستلزم نامساوی $(y-۱)(y+۳) < ۰$ است. در این صورت، نامساوی $(۱-y)^۲ \geq ۴(۱-y)$ برقرار نخواهد بود. به این ترتیب، هیچ مقدار حقیقی بین -۳ و ۱ واقع نمی‌شود.

۱۹.۱. فرض کنید $E(x) = \lim_{n\to\infty}(۱ + x/n)^n$. نشان دهید که $E(x).E(y) = E(x+y)$.

راهنمایی: به استناد قضیهٔ ۱۲.۱،

$$E(x).E(y) = \lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{x}{n}\right)^n . \lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{y}{n}\right)^n = \lim_{n\to\infty}\left[\left(۱+\frac{x}{n}\right)\left(۱+\frac{y}{n}\right)\right]^n$$
$$= \lim_{n\to\infty}\left(۱+\frac{x+y}{n}+\frac{xy}{n^۲}\right)^n = E(x+y)$$

۲۰.۱. بزرگی حاصل جمع زیر را تخمین بزنید:

$$۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۴}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}}$$

راهنمایی: فرض کنید k یک عدد صحیح مثبت باشد. آن‌گاه

$$\sqrt{k+۱}-\sqrt{k} = \frac{۱}{\sqrt{k+۱}+\sqrt{k}}$$

بنابراین،

$$۲\sqrt{k+۱}-۲\sqrt{k} < \frac{۱}{\sqrt{k}} < ۲\sqrt{k}-۲\sqrt{k-۱}$$

از این رو،

$$۲\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲} < \frac{۱}{\sqrt{۲}} < ۲\sqrt{۲}-۲$$
$$۲\sqrt{۴}-۲\sqrt{۳} < \frac{۱}{\sqrt{۳}} < ۲\sqrt{۳}-۲\sqrt{۲}$$
$$۲\sqrt{۵}-۲\sqrt{۴} < \frac{۱}{\sqrt{۴}} < ۲\sqrt{۴}-۲\sqrt{۳}$$
$$\vdots$$
$$۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{n} < \frac{۱}{\sqrt{n}} < ۲\sqrt{n}-۲\sqrt{n-۱}$$

پس از جمع، خواهیم داشت:

$$۲\sqrt{n+۱}-۲\sqrt{۲} < \frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۴}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n}} < ۲\sqrt{n}-۲$$

چون $۳ > ۲\sqrt{۲}$ و $\sqrt{n+۱} > \sqrt{n}$، نتیجه می‌شود که

$$۲\sqrt{n}-۲ < ۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}+\frac{۱}{\sqrt{۳}}+\frac{۱}{\sqrt{۴}}+\cdots+\frac{۱}{\sqrt{n}} < ۲\sqrt{n}-۱$$

اما $n = ۱۰۰۰۰۰۰$. بنابراین،

$$۱۹۹۸ < ۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \frac{۱}{\sqrt{۴}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}} < ۱۹۹۹$$

۲۱.۱. نشان دهید که نامساوی

$$۲\sqrt{n+۱} - ۲\sqrt{m} < \frac{۱}{\sqrt{m}} + \frac{۱}{\sqrt{m+۱}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{n}} < ۲\sqrt{n} - ۲\sqrt{m-۱}$$

برقرار است و تحقیق کنید که

$$۱۸۰۰ < \frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۰}} + \frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۱}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{۱۰۰۰۰۰۰}} < ۱۸۰۰{,}۰۲$$

راهنمایی: به راهنمایی تمرین ۲۰.۱ مراجعه کنید.

۲۲.۱. فرض کنید $a > ۱$ و $b > ۱$. نشان دهید که

$$\log_a b + \log_b a \geq ۲$$

راهنمایی: اگر $m > ۰$ آن‌گاه $m + ۱/m \geq ۲$، و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $m = ۱$. در واقع، $(m-۱)^۲ = m^۲ - ۲m + ۱ \geq ۰$؛ و تقسیم بر m به نتیجهٔ مطلوب می‌انجامد. اما $\log_b a = ۱/(\log_a b)$.

۲۳.۱. نشان دهید که به‌ازای $n \geq ۱$، $\sqrt{n+۱} - \sqrt{n-۱} > ۱/\sqrt{n}$.

راهنمایی: داریم

$$(\sqrt{n+۱} + \sqrt{n-۱})^۲ = ۲n + ۲(n^۲-۱)^{۱/۲} < ۲n + ۲(n^۲)^{۱/۲} = ۴n$$

بنابراین، $\sqrt{n+۱} + \sqrt{n-۱} < ۲\sqrt{n}$. به این ترتیب،

$$\frac{۱}{۲\sqrt{n}} < \frac{۱}{\sqrt{n+۱} + \sqrt{n-۱}} = \frac{\sqrt{n+۱} - \sqrt{n-۱}}{۲}$$

و حکم مطلوب از آن نتیجه می‌شود.

۲۴.۱. فرض کنید a و b اعدادی بزرگتر از صفر باشند. میانگین حسابی، هندسی، و همساز a و b، به ترتیب، عبارت است از

$$H = \frac{2ab}{a+b}, \qquad G = \sqrt{ab}, \qquad A = \frac{a+b}{2}$$

[ملاحظه کنید که $a - A = A - b$، $a/G = G/b$، $1/a - 1/H = 1/H - 1/b$، و $AH = G^2$.]
اگر $0 < a < b$، تحقیق کنید که

الف) $A < G < H$،

ب) $A - G > G - H$،

ج) $A - G < (b-a)^2/8a$،

د) $A - H < (b-a)^2/4a$.

راهنمایی:

$$H - G = -\frac{\sqrt{ab}}{a+b}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 < 0, \qquad A - G = \frac{1}{2}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^2 > 0$$

که (الف) را ثابت می‌کند. سپس، ملاحظه می‌کنیم که

$$A - 2G + H = A - G - (G - H) = \frac{(\sqrt{a}-\sqrt{b})^4}{2(a+b)} > 0$$

که (ب) را ثابت می‌کند. از

$$A - G = \frac{(a-b)^2}{2(\sqrt{a}+\sqrt{b})^2}$$

و این فرض که $a < b$، حکم (ج) به دست می‌آید. سرانجام، از

$$A - H = \frac{(a-b)^2}{2(a+b)}$$

و فرض $a < b$ به حکم (د) می‌رسیم.

۲۵.۱. نشان دهید که اگر $x \geq 0$ آن‌گاه

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}}{1 + 2^2x + \cdots + n^2x^{n-1}} \leq 1, \qquad \frac{1}{n} \leq \frac{1 + 2x + \cdots + nx^{n-1}}{n + (n-1)x + \cdots + x^{n-1}} \leq n$$

راهنمایی: فرض کنید a_1/b_1، a_2/b_2، ... ، a_n/b_n کسرهایی با مخرج مثبت باشند. آنگاه کسر

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

محصور بین کوچکترین و بزرگترین آنهاست. (مثال ۱ بعد از قضیهٔ ۱۵.۷ از فصل ۷ را ببینید.) اکنون، نامساویهای مطلوب فوراً نتیجه می‌شوند.

۲۶.۱. فرض کنید a، b، c، و d اعدادی مثبت باشند. نشان دهید که

$$\frac{(a^2 + a + 1)(b^2 + b + 1)(c^2 + c + 1)(d^2 + d + 1)}{abcd} \geq 81$$

راهنمایی: اگر $a > 0$ آنگاه $a + (1/a) \geq 2$.

فصل دوم

حد و پیوستگی

۱.۲ حد

فرض کنید x عددی حقیقی باشد. قدرمطلق x، با نماد $|x|$، عبارت است از: x اگر $x \geq 0$، و $-x$ اگر $x \leq 0$. اگر x را نقطه‌ای از خط حقیقی تصورکنیم، آن‌گاه می‌توانیم $|x|$ را فاصلهٔ نقاط 0 و x تعبیرکنیم. بدیهی است که $|-x| = |x|$.

قضیهٔ ۱.۲. فرض کنید a و b اعدادی حقیقی باشند. آن‌گاه

$$|a+b| \leq |a| + |b|. \tag{۱.۲}$$

برهان. اگر نامساویهای (بدیهی)

$$-|b| \leq b \leq |b| \quad \text{و} \quad -|a| \leq a \leq |a|$$

را با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$-(|a|+|b|) \leq a+b \leq |a|+|b|$$

امّا واضح است که به‌ازای هر دو عدد حقیقی A و B نامساوی $|A| \leq B$ معادل نامساوی $-B \leq A \leq B$ است.

توضیحات. نامساوی قضیهٔ ۱.۲ را گاهی نامساوی مثلث می‌نامند. از آن می‌توانیم نامساویهای مفید دیگری نتیجه بگیریم. مثلاً، به‌ازای هر دو عدد حقیقی a و b

$$|a-b| = |a+(-b)| \leq |a|+|-b| = |a|+|b| \tag{۲.۲}$$

بعلاوه، چون $a = a+b-b$،

$$|a| \leq |a+b|+|-b| = |a+b|+|b|$$
$$|a|-|b| \leq |a+b|$$

پس از تعویض نقش a و b در نامساوی آخر، خواهیم داشت:

$$|b|-|a| \leq |a+b|$$

به این ترتیب، ملاحظه می‌کنیم که

$$||a|-|b|| \leq |a+b| \tag{۳.۲}$$

از طرف دیگر، چون $a = a-b+b$،

$$|a| \leq |a-b|+|b|$$

یا

$$|a|-|b| \leq |a-b|$$

پس از تعویض نقش a و b در نامساوی آخر، خواهیم داشت:

$$|b|-|a| \leq |b-a| = |a-b|$$

بنابراین،

$$||a| - |b|| \leq |a - b| \qquad (۴.۲)$$

از ترکیب نامساویهای (۱.۲) تا (۴.۲) نتیجه می‌گیریم که نامساویهای

$$||a| - |b|| \leq |a \pm b| \leq |a| + |b| \qquad (۵.۲)$$

به‌ازای هر دو عدد حقیقی a و b برقرارند.

نتیجهٔ سادهٔ دیگر (۱.۲) این است که

$$|a + b + c| \leq |a| + |b| + |c| \qquad \text{به‌ازای هر سه عدد حقیقی } a\text{، }b\text{، و }c\text{،}$$

در واقع، $|a + b + c| \leq |a| + |b + c| \leq |a| + |b| + |c|$. البته، به جای انتخاب فقط سه جمعوند، می‌توانیم هر تعداد متناهی جمعوند داشته باشیم.

قضیهٔ ۲.۲. فرض کنید a و b دو عدد حقیقی دلخواه باشند. اگر عدد بزرگتر را به $\max\{a, b\}$ و عدد کوچکتر را به $\min\{a, b\}$ نمایش دهیم، آن‌گاه

$$\frac{a + b + |a - b|}{۲} = \max\{a, b\}$$

و

$$\frac{a + b - |a - b|}{۲} = \min\{a, b\}$$

برهان. فرض کنید x یک عدد حقیقی دلخواه باشد. آن‌گاه

$$\frac{x + |x|}{۲} = x, \qquad x \geq ۰ \text{ اگر}$$
$$\frac{x + |x|}{۲} = ۰, \qquad x \leq ۰ \text{ اگر}$$

و

$$\frac{x - |x|}{۲} = ۰, \qquad x \geq ۰ \text{ اگر}$$
$$\frac{x - |x|}{۲} = x, \qquad x \leq ۰ \text{ اگر}$$

اگر $a - b$ را جایگزین x کنیم و، سپس، عدد a را به دو طرف بیفزاییم، آنچه می‌خواسته‌ایم به دست می‌آید.

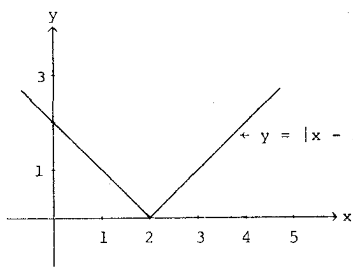
بحث. از نظر هندسی، $|x-a|$ به معنی فاصلهٔ بین دو نقطهٔ a و x است. فرض کنید δ (دلتا) بزرگتر از صفر باشد. آن‌گاه، $|x-a|<\delta$ به معنی $a-\delta<x<a+\delta$ و $|x|<\delta$ به معنی $-\delta<x<\delta$ است؛ زیرا که در حالت دوم $a=۰$. اگر $a<b$، نامساوی $a<x<b$ را می‌توان به صورت $|x-A|<B$ بیان کرد که در آن $A=(a+b)/۲$ و $B=|a-b|/۲$. (در این جا A نقطهٔ وسط بین a و b است و B نصف فاصلهٔ بین a و b می‌باشد.

اگر منحنی $y=f(x)$ را بشناسیم، آن‌گاه منحنی $y=|f(x)|$ به آسانی ترسیم می‌شود. برای تحصیل منحنی $y=|f(x)|$ از روی منحنی $y=f(x)$، آن قسمت از این منحنی را که بالای محور x است بدون تغییر باقی می‌گذاریم، ولی آن قسمت از منحنی را که زیرمحور x است نسبت به این محور منعکس می‌کنیم. مثلاً، $y=x-۲$ خط راستی با شیب واحد است که محور x را در $x=۲$ قطع می‌کند؛ منحنی $y=|x-۲|$ از دو شاخه تشکیل می‌شود: به‌ازای $x\geq ۲$ داریم $y=x-۲$، اما به‌ازای $x\leq ۲$ داریم $y=-(x-۲)$. شکل ۱.۲ منحنی $y=|x-۲|$ را نشان می‌دهد.

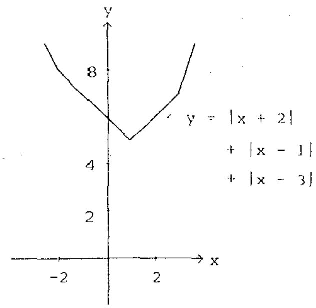
مجموعهٔ نقاط (x,y) که در معادلهٔ $|x|+|y|=۱$ صدق کنند منحنی بسته‌ای است که از اتصال متوالی نقاط $(۱,۰)$، $(۰,۱)$، $(-۱,۰)$، $(۰,-۱)$، و $(۱,۰)$ به کمک پاره‌خطها به دست می‌آید، شکل حاصل مانند یک قطعه الماس است. مجموعهٔ نقاط (x,y) که در معادلهٔ $x-|x|=y-|y|$ صدق می‌کنند، مجموعهٔ نقاط چارک اول (یعنی، همهٔ نقاط (x,y) که به‌ازای آنها $x\geq ۰$ و $y\geq ۰$) و مجموعهٔ نقاط خط $y=x$ در چارک سوم است.

برای تعیین کمترین مقدار

$$f(x)=|x+۲|+|x-۱|+|x-۳|$$



شکل ۱.۲



شکل ۲.۲

به طریق زیر عمل می‌کنیم: اگر x در نامساویهای $-۲ \leq x \leq ۳$ صدق کند آن‌گاه $f(x) = ۵ + |x - ۱|$ (زیرا وقتی که x بین -۲ و ۳ باشد، $|x + ۲| + |۳ - x| = ۵$)؛ اما $|x - ۱| \geq ۰$ که تساوی دقیقاً وقتی برقرار است که $x = ۱$. از این رو، وقتی x در بازهٔ بستهٔ $[-۲, ۳]$ تغییر کند، $f(x)$ در $x = ۱$ کمترین مقدار است. به‌ازای $x \geq ۳$ داریم $f(x) = ۳x - ۲$ (زیرا، وقتی $x \geq ۳$، $|x + ۲| = x + ۲$، $|x - ۱| = x - ۱$، و $|x - ۳| = x - ۳$) و به‌ازای $x \leq -۲$ داریم $f(x) = -۳x + ۲$ (زیرا، وقتی $x \leq -۲$، $|x + ۲| = -(x + ۲)$، $|x - ۱| = -(x - ۱)$، و $|x - ۳| = -(x - ۳)$). بنابراین، $f(x) \geq f(۳) = ۷$ در صورتی که $x \geq ۳$، و $f(x) \geq f(-۲) = ۸$ در صورتی که $x \leq -۲$. از این رو، x هر عدد حقیقی باشد، $f(x)$ در $x = ۱$ کمترین مقدار است؛ $f(۱) = ۵$. در میان نقاط $x = -۲$، $x = ۱$، و $x = ۳$، نقطهٔ $x = ۱$ نقطهٔ میانی است از این نظر که $x = -۲$ در سمت چپ و $x = ۳$ در طرف راست آن واقعند. کمترین مقدار

$$f(x) = |x - ۲| + |x - ۱| + |x - ۳|$$

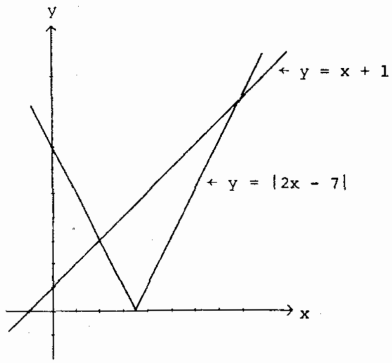
در نقطهٔ $x = ۱$ اختیار می‌شود، نقطهٔ میانی مجموعهٔ سه‌نقطهٔ $x = -۲$، $x = ۱$، و $x = ۳$. شکل ۲.۲ نمودار $y = |x + ۲| + |x - ۱| + |x - ۳|$ را نشان می‌دهد.

اگر نقاط $x = -۲$، $x = ۰$، $x = ۲$، $x = ۳$، و $x = ۱۰$ مفروض باشند، نقطهٔ $x = ۲$ نقطهٔ میانی است به این معنی که دو نقطهٔ $x = -۲$ و $x = ۰$ در سمت چپ و دو نقطهٔ $x = ۳$ و $x = ۱۰$ در سمت راست آن واقعند. با بحثی مشابه بحث بالا، می‌توانیم نتیجه بگیریم که کمترین مقدار

$$g(x) = |x + ۲| + |x| + |x - ۲| + |x - ۳| + |x - ۱۰|$$

در نقطهٔ $x = ۲$ اختیار می‌شود، نقطهٔ میانی مجموعهٔ $\{-۲, ۰, ۲, ۳, ۱۰\}$.

حل نامساوی $|۷ - ۲x| < x + ۱$ این است که مجموعهٔ همهٔ نقاطی مانند x را بیابیم که به‌ازای آنها نمودار $y = |۷ - ۲x|$ زیر نمودار $y = x + ۱$ واقع می‌شود. امّا $|۷ - ۲x| = ۲x - ۷$ وقتی که $x \geq \frac{۷}{۲}$، و $|۲x - ۷| = -(۲x - ۷)$ وقتی که $x \leq \frac{۷}{۲}$. به‌ازای $x \geq \frac{۷}{۲}$ داریم $۲x - ۷ = x + ۱$ یا $x = ۸$، و به‌ازای $x \leq \frac{۷}{۲}$ داریم $-(۲x - ۷) = x + ۱$ یا $x = ۲$. مجموعهٔ xهایی که در نامساوی $|۲x - ۷| < x + ۱$ صدق کنند همان مجموعهٔ نقاط x با خاصیت $۲ < x < ۸$ است.



شکل ۳.۲

شکل ۳.۲ نمودارهای $y = |۲x - ۷|$ و $y = x + ۱$ را نشان می‌دهد.

تعریف. اگر a و b دو نقطه از خط حقیقی باشند و $a < b$، آن‌گاه مجموعهٔ همهٔ نقاط x را که در نامساویهای $a < x < b$ صدق کنند یک بازهٔ باز می‌نامند و به (a, b) نشان می‌دهند. به‌ازای هر ε (اپسیلن) مثبت، بازهٔ $(a - \varepsilon, a + \varepsilon)$ را یک همسایگی a (یا، دقیقتر، یک εـ همسایگی a) می‌نامند. یادآور می‌شویم که مجموعهٔ همهٔ نقاط x که در نامساویهای $a \leq x \leq b$ صدق کنند یک بازهٔ بسته نامیده و به $[a, b]$ نمایش داده می‌شود.

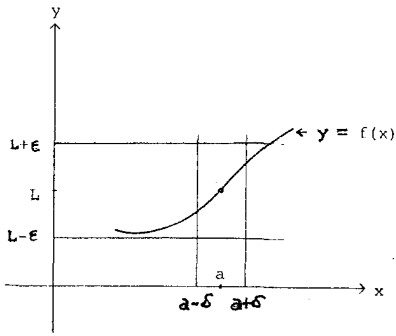
تعریف. فرض کنید f تابعی باشد که بر یک همسایگی از نقطه‌ای مانند a، احتمالاً جز در خود نقطهٔ a، تعریف شده باشد و مجموعهٔ مقادیر یا برد تابع f مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد. می‌گوییم حد $f(x)$، وقتی که x به a میل کند، عدد L است، یا $f(x)$ به L میل می‌کند وقتی که x به a میل کند، و می‌نویسیم

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{یا} \quad f(x) \longrightarrow L \quad \text{وقتی که} \quad x \longrightarrow a$$

در صورتی که به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ مفروض، عددی مثبت مانند δ موجود باشد به طوری که نامساوی $|f(x) - L| < \varepsilon$ به‌ازای هر x که $۰ < |x - a| < \delta$ برقرار باشد.

بحث. بیان فشرده‌تر شرط وجود حد یک تابع این است که: اگر به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ و عددی مثبت مانند δ، نامساوی $|f(x) - L| < \varepsilon$ به‌ازای هر x که $0 < |x - a| < \delta$ برقرار باشد. عبارت «$f(x)$ به L میل نمی‌کند وقتی که x به a میل کند» به این معنی است که: اگر به‌ازای عددی مثبت مانند ε و هر $\delta > 0$، نقطه‌ای چون x بیابیم که $0 < |x - a| < \delta$ و $|f(x) - L| \geq \varepsilon$.

برای تشخیص شرط وجود حد یک تابع، نمودار تابع $y = f(x)$ را بررسی می‌کنیم. $\varepsilon > 0$



شکل ۴.۲

دلخواهی اختیار و خطوط $y = L - \varepsilon$ و $y = L + \varepsilon$ را بررسی می‌کنیم. آن‌گاه، باید بازهٔ بازی مانند $(a - \delta, a + \delta)$ بر محور x موجود باشد به طوری که به‌ازای هر x از این بازه، جز نقطهٔ وسط $x = a$، $f(x)$ بین $L - \varepsilon$ و $L + \varepsilon$ قرار گیرد. به شکل ۴.۲ نگاه کنید.

برای این که شرط وجود حد یک تابع را حتی بیشتر محسوس کنیم، تابع f را تفنگی تصور کنید که از نقطهٔ t واقع بر محور x تیراندازی می‌کند و گلوله‌هایش به نقطهٔ $(t, f(t))$ از صفحهٔ xy اصابت می‌کنند. نوار بین خطوط $y = L - \varepsilon$ و $y = L + \varepsilon$ هدفی است که ما می‌خواهیم آن را بزنیم. با هر انتخاب $\varepsilon > 0$، باید یک δـ همسایگی از a بیابیم که، از آن موضع، گلوله به هدف اصابت کند. این δـ همسایگی a الزاماً بزرگترین همسایگی ممکن به‌ازای ε مفروض نیست و نقطهٔ $x = a$ کاملاً از بحث خارج است.

در تعریف مفهوم حد یک تابع، حد را تلویحاً منحصربه‌فرد گرفتیم، دلیلش در قضیهٔ یکتایی زیر آمده است.

قضیهٔ ۳.۲. اگر $\lim_{x \to a} f(x) = L$ و $\lim_{x \to a} f(x) = M$، آن‌گاه $L = M$.

برهان. برای اثبات $L = M$، ثابت می‌کنیم که فرض $L \neq M$ به نتیجهٔ محال $|L - M| < |L - M|$ می‌انجامد.

فرض کنید $L \neq M$. نتیجه می‌شود که $\frac{1}{2}|L-M| > 0$. چون $f(x) \longrightarrow L$ وقتی که $x \longrightarrow a$، می‌دانیم که باید عددی مثبت مانند δ_1 موجود باشد به طوری که اگر $0 < |x-a| < \delta_1$ آن گاه $|f(x)-L| < \frac{1}{2}|L-M|$. چون $f(x) \longrightarrow M$ وقتی که $x \longrightarrow a$، چنان که می‌دانیم، باید عددی مثبت مانند δ_2 موجود باشد به طوری که اگر $0 < |x-a| < \delta_2$ آن‌گاه $|f(x)-M| < \frac{1}{2}|L-M|$. فرض کنید $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$. اگر t در نامساویهای $0 < |t-a| < \delta$ صدق کند، درمی‌یابیم که

$$|f(t)-M| < \frac{1}{2}|L-M|, \qquad |f(t)-L| < \frac{1}{2}|L-M|$$

به استناد (۱.۲)، نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}|L-M| &= |[L-f(t)]+[f(t)-M]| \leq |L-f(t)|+|f(t)-M| \\ &< \frac{1}{2}|L-M|+\frac{1}{2}|L-M| = |L-M|\end{aligned}$$

در واقع، به نامساوی محال $|L-M| < |L-M|$ رسیده‌ایم.

تعریف. دنبالهٔ x_1، x_2، x_3، ... از اعداد حقیقی را همگرا می‌نامیم در صورتی که عددی حقیقی مانند x با خاصیت زیر موجود باشد: به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، عدد صحیح مثبتی مانند n_0، وابسته به ε، موجود باشد به طوری که $n > n_0$ مستلزم $|x_n - x| < \varepsilon$ باشد. در این صورت، عدد x را حد دنبالهٔ x_1، x_2، x_3، ... می‌نامیم و می‌گوییم که دنبالهٔ مفروض به x همگرا است، یا x_n به x میل می‌کند وقتی که n به طور دلخواه بزرگ شود، و می‌نویسیم

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x \text{ یا } x_n \longrightarrow x \text{ وقتی که } n \longrightarrow \infty$$

تبصره. اگر دنباله‌ای حدی داشته باشد، این حد منحصر به فرد است. در واقع، فرض کنید چنین نباشد. فرض کنید $x_n \longrightarrow x$ و $x_n \longrightarrow x'$، وقتی که $n \longrightarrow \infty$، و $x \neq x'$. فرض کنید $\varepsilon = \frac{1}{2}|x-x'|$. چون $x_n \longrightarrow x$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$، عدد صحیح مثبتی مانند n_1 موجود است به طوری که اگر $n > n_1$ آن‌گاه $|x_n - x| < \varepsilon$. به طور مشابه، چون $x_n \longrightarrow x'$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$، عدد صحیح مثبتی مانند n_2 موجود است به طوری که اگر $n > n_2$ آن‌گاه $|x_n - x'| < \varepsilon$. فرض کنید $n_0 = \max\{n_1, n_2\}$. آن‌گاه، به ازای $n > n_0$، $|x_n - x|$ و $|x_n - x'|$ کوچکتر از ε است. به این ترتیب،

$$|x-x'| = |(x_n-x')-(x_n-x)| \leq |x_n-x'|+|x_n-x| < 2\varepsilon = |x-x'|$$

که نشان می‌دهد که $|x-x'| < |x-x'|$. با این تناقض، ثابت می‌شود که $x = x'$.

قضیهٔ ۴.۲. فرض کنید f تابعی باشد که بر یک همسایگی مانند J از نقطه‌ای مانند a، احتمالاً جز در خود نقطهٔ a، تعریف شده باشد. آن‌گاه

$$\lim_{x\to a} f(x)=L$$

فقط و فقط وقتی که به‌ازای هر دنباله مانند $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، ... از نقاط J که همواره $x_n\neq a$ و $x_n\longrightarrow a$ وقتی که $n\longrightarrow\infty$، داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} f(x_n)=L$$

برهان. فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x)=L$. دنباله‌ای مانند $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، ... از نقاط J اختیار می‌کنیم به طوری که $x_n\neq a$ به‌ازای $n=۱,۲,۳,\ldots$، و $x_n\longrightarrow a$ وقتی که $n\longrightarrow\infty$. فرض کنید $\varepsilon>۰$ مفروض باشد. آن‌گاه، عددی مثبت مانند δ موجود است به طوری که $|f(x)-L|<\varepsilon$ هرگاه x نقطه‌ای از J باشد که $۰<|x-a|<\delta$. همچنین، عددی مانند $n_۰$ موجود است به طوری که $n>n_۰$ مستلزم $۰<|x_n-a|<\delta$. به این ترتیب، به‌ازای هر $n>n_۰$، داریم $|f(x_n)-L|<\varepsilon$ و ملاحظه می‌کنیم که $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=L$.

برعکس، فرض کنید $\lim_{x\to a} f(x)=L$ برقرار نباشد. آن‌گاه، $\varepsilon>۰$ی موجود است به طوری که به‌ازای هر $\delta>۰$ نقطه‌ای مانند x در همسایگی J (وابسته به δ) می‌توان یافت به طوری که $۰<|x-a|<\delta$ ولی $|f(x)-L|\geq\varepsilon$. به این ترتیب، با فرض $\delta_n=۱/n$، که در آن $n=۱,۲,۳,\ldots$، درمی‌یابیم که دنباله‌ای مانند $x_۱$، $x_۲$، $x_۳$، ... از نقاط J موجود است که همواره $x_n\neq a$ و $x_n\longrightarrow a$ وقتی که $n\longrightarrow\infty$، ولی، به‌ازای این دنباله، حکم $\lim_{n\to\infty} f(x_n)=L$ دروغ است؛ و برهان کامل می‌شود.

تبصره. عبارات زیر، معادل یکدیگرند:

(۱) $\lim_{x\to a} f(x)=L$ (۲) $\lim_{x\to a}[f(x)-L]=۰$

(۳) $\lim_{x\to a}|f(x)-L|=۰$ (۴) $\lim_{h\to ۰} f(a+h)=L$

مثالها

۱) نشان دهید که $\lim_{x\to ۰}(x/x)=۱$.

حل. مقدار تابع $f(x)=x/x$ در نقاط $x\neq ۰$ برابر ۱ است، ولی در $x=۰$ تعریف نمی‌شود.

فرض کنید $\varepsilon>۰$. در این مورد، باید $\delta>۰$ی بیابیم که

اگر $۰<|x|<\delta$ آن‌گاه $|۱-۱|<\varepsilon$.

چون $\circ = |۱ - ۱|$، همواره داریم $|۱ - ۱| < \varepsilon$؛ فارغ از نحوهٔ انتخاب δ. خلاصه، هر عدد مثبتی به جای δ مؤثر واقع می‌شود.

۲) نشان دهید که $\lim_{x\to ۱}(۳x - ۸) = -۵$.

حل. فرض کنید $\circ < \varepsilon$. در این مثال، باید $\circ < \delta$ی بیابیم که

$$\text{اگر} \quad \circ < |x - ۱| < \delta \quad \text{آن‌گاه} \quad |(۳x - ۸) - (-۵)| < \varepsilon \,.$$

امّا، $|(۳x - ۸) - (-۵)| = ۳|x - ۱|$. بنابراین، شرط $|(۳x - ۸) - (-۵)| < \varepsilon$ معادل $۳|x - ۱| < \varepsilon$ است؛ یعنی، $|x - ۱| < \varepsilon/۳$. از این رو، باید عددی مثبت مانند δ تعیین کنیم که

$$\text{اگر} \quad \circ < |x - ۱| < \delta \quad \text{آن‌گاه} \quad |x - ۱| < \varepsilon/۳ \,.$$

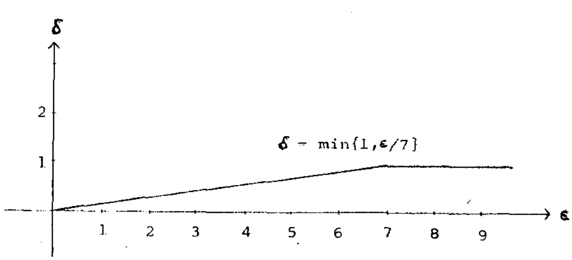
بالبداهه، $\delta = \varepsilon/۳$ مؤثر واقع می‌شود.

۳) نشان دهید که $\lim_{x\to ۳} x^۲ = ۹$.

حل. فرض کنید $\circ < \varepsilon$. باید $\circ < \delta$ی بیابیم که

$$\text{اگر} \quad \circ < |x - ۳| < \delta \quad \text{آن‌گاه} \quad |x^۲ - ۹| < \varepsilon \,.$$

امّا $|x^۲ - ۹| = |x - ۳||x + ۳|$. نخست، فرض می‌کنیم $\delta \leq ۱$. در این صورت، $|x - ۳| < \delta$ مستلزم $۲ < x < ۴$ است و، از این رو، $۵ < x + ۳ < ۷$. حال، $|x^۲ - ۹| = |x - ۳||x + ۳|$ کوچکتر از ε خواهد بود در صورتی که به طور همزمان $|x - ۳| < \varepsilon/۷$ و $|x + ۳| < ۷$؛ برای نیل به این مقصود، فقط کافی است δ را یکی از دو عدد ۱ و $\varepsilon/۷$ که کوچکتر از دیگری است اختیار کنیم، یعنی، $\delta = \min\{۱, \varepsilon/۷\}$. نمودار $\delta = \min\{۱, \varepsilon/۷\}$ در شکل ۵.۲ نشان داده شده است.



شکل ۵.۲

۴) نشان دهید که $\lim_{x\to ۲}[(x^۲ - x + ۱۸)/(۳x - ۱)] = ۴$.
حل. داریم

$$\left|\frac{x^۲ - x + ۱۸}{۳x - ۱} - ۴\right| = \left|\frac{x^۲ - ۱۳x + ۲۲}{۳x - ۱}\right| = |x - ۱|.\left|\frac{x - ۱۱}{۳x - ۱}\right|$$

لازم است فرض کنیم که $\delta \leq ۱$. آن‌گاه، $|x - ۲| < \delta$ ایجاب می‌کند که $۱ < x < ۳$ و $-۸ < x - ۱۱ < -۱۰$ و $۲ < ۳x - ۱ < ۸$؛ که در این صورت، $|x - ۱۱| < ۱۰$ و $|۳x - ۱| > ۲$. به این ترتیب،

هرگاه $|x - ۲| < ۱$، $\left|\frac{x - ۱۱}{۳x - ۱}\right| < \frac{۱۰}{۲} = ۵$.

امّا

$$|x - ۲|.\left|\frac{x - ۱۱}{۳x - ۱}\right|$$

کوچکتر از ε خواهد بود اگر به طور همزمان

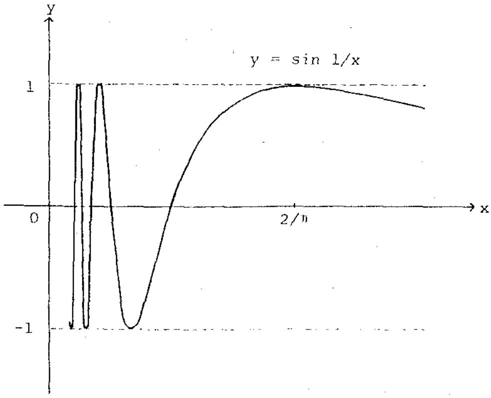
$$|x - ۲| < \frac{\varepsilon}{۵} \quad \text{و} \quad \left|\frac{x - ۱۱}{۳x - ۱}\right| < ۵$$

فقط باید بگیریم $\delta = \min\{۱, \varepsilon/۵\}$.

۵) نشان دهید که $\lim_{x\to ۰} \sin(۱/x)$ وجود ندارد، یعنی، هیچ عدد حقیقی مانند L نمی‌توان یافت به طوری که $\sin(۱/x) \longrightarrow L$ وقتی که $x \longrightarrow ۰$.
حل. به‌ازای $n = ۱, ۲, \ldots$، داریم $\sin(۲n - ۱/۲)\pi = -۱$ و $\sin(۲n + ۱/۲)\pi = ۱$.
فرض کنید

$$x_n = \frac{۱}{(۲n - ۱/۲)\pi}, \quad t_n = \frac{۱}{(۲n + ۱/۲)\pi}, \quad n = ۱, ۲, \ldots$$

آن‌گاه $x_n \longrightarrow ۰$ و $t_n \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$؛ در حالی که $\sin(۱/x_n) \longrightarrow -۱$ و $\sin(۱/t_n) \longrightarrow ۱$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$؛ و این با حکم قضیهٔ ۳.۲ متناقض است. منحنی $y = \sin(۱/x)$ در شکل ۶.۲ نشان داده شده است.



شکل ۶.۲

۶) نشان دهید که $\lim_{x\to ۰} x[\sin(۱/x)] = ۰$.

حل. چون نامساوی $|\sin t| \leq ۱$ به‌ازای هر عدد حقیقی t برقرار است، داریم:

$$۰ \leq \left|x \sin \frac{۱}{x}\right| \leq |x|$$

از این رو، به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ مفروض، می‌توانیم $\delta = \varepsilon$ بگیریم تا نتیجهٔ مطلوب به‌دست آید. منحنی $y = x\sin(۱/x)$ در شکل ۷.۲ نشان داده شده است.

۷) فرض کنید $f(x) = x$ اگر x گویا است، و $f(x) = -x$ اگر x اصم است. به‌ازای چه مقادیری از a، $\lim_{x\to a} f(x)$ موجود است؟

حل. به آسانی دیده می‌شود که حد مورد بحث به‌ازای $a = ۰$ موجود است. اگر $a \neq ۰$، این حد وجود ندارد. توجه کنید که هر بازهٔ باز خط حقیقی شامل نقاط گویا و، در عین حال، نقاط اصم است.

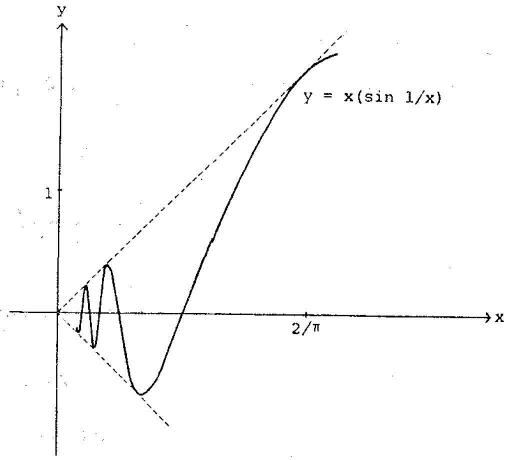
قضیهٔ ۵.۲. اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a} g(x) = M$، آن‌گاه

۱) $\lim_{x\to a}[f(x) + g(x)] = L + M$

۲) به‌ازای هر عدد حقیقی c، $\lim_{x\to a}[cf(x)] = cL$

۳) $\lim_{x\to a}[f(x)g(x)] = LM$

برهان. فرض کنید $\varepsilon > ۰$. برای اثبات (۱)، باید تحقیق کنیم که عددی مثبت مانند δ موجود است به طوری که اگر $۰ < |x - a| < \delta$، آن‌گاه $|[f(x) + g(x)] - [L + M]| < \varepsilon$.



شکل ۷.۲

چون $f(x) \longrightarrow L$ و $g(x) \longrightarrow M$ وقتی که $x \longrightarrow a$، می‌دانیم که اعداد مثبتی مانند δ_1 و δ_2 موجودند به طوری که

$$\text{اگر } 0 < |x-a| < \delta_1 \text{، آن‌گاه } |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

و

$$\text{اگر } 0 < |x-a| < \delta_2 \text{، آن‌گاه } |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

اگر قرار دهیم $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$، ملاحظه می‌کنیم که

$$\text{اگر } 0 < |x-a| < \delta \text{، آن‌گاه } |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و} \quad |g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

از این رو،

$$\text{اگر } 0 < |x-a| < \delta \text{، آن‌گاه } |[f(x)+g(x)] - [L+M]| < \varepsilon.$$

زیرا، به استناد (۱.۲)،

$$\begin{aligned} |[f(x)+g(x)] - [L+M]| &= |[f(x)-L] + [g(x)-M]| \\ &\le |f(x)-L| + |g(x)-M| \end{aligned}$$

و (۱) ثابت می‌شود.

برای اثبات (۲)، دو حالت در نظر می‌گیریم: $c \neq \circ$ و $c = \circ$. اگر $c \neq \circ$، آن‌گاه $\varepsilon/|c| > \circ$؛ و چون $f(x) \longrightarrow L$ وقتی که $x \longrightarrow a$، چنان که می‌دانیم، $\delta > \circ$ی موجود است به طوری که

$$\text{اگر}\ \circ < |x-a| < \delta\text{،}\quad \text{آن‌گاه}\quad |f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{|c|}\ .$$

امّا $|f(x) - L| < \varepsilon/|c|$ مستلزم $|c||f(x) - L| < \varepsilon$ است و، بنابراین، $|cf(x) - cL| < \varepsilon$. حالت $c = \circ$ بدیهی است.

برای اثبات (۳)، نخست ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}
|f(x)g(x) - LM| &\leq |f(x)g(x) - f(x)M| + |f(x)M - LM| \\
&= |f(x)||g(x) - M| + |M||f(x) - L| \\
&\leq |f(x)||g(x) - M| + (۱ + |M|)|f(x) - L|
\end{aligned}$$

فرض کنید $\varepsilon > \circ$. چون $f(x) \longrightarrow L$ و $g(x) \longrightarrow M$ وقتی که $x \longrightarrow a$، می‌دانیم که

الف) $\delta_۱ > \circ$ی موجود است به طوری که اگر $\circ < |x-a| < \delta_۱$ آن‌گاه $|f(x) - L| < ۱$ و، بنابراین، $|f(x)| < ۱ + |L|$.

ب) $\delta_۲ > \circ$ی موجود است به طوری که اگر $\circ < |x-a| < \delta_۲$ آن‌گاه

$$|g(x) - M| < \frac{\varepsilon}{۲}\left(\frac{۱}{۱ + |L|}\right)$$

ج) $\delta_۳ > \circ$ی موجود است به طوری که اگر $\circ < |x-a| < \delta_۳$ آن‌گاه

$$|f(x) - L| < \frac{\varepsilon}{۲}\left(\frac{۱}{۱ + |M|}\right)$$

اینک، قرار می‌دهیم $\delta = \min\{\delta_۱, \delta_۲, \delta_۳\}$ و توجه می‌کنیم که اگر $\circ < |x-a| < \delta$ آن‌گاه

$$|f(x)g(x) - LM| < (۱ + |L|)\frac{\varepsilon}{۲}\left(\frac{۱}{۱ + |L|}\right) + (۱ + |M|)\frac{\varepsilon}{۲}\left(\frac{۱}{۱ + |M|}\right) = \varepsilon$$

و برهان تمام است

قضیهٔ ۶.۲. اگر $\lim_{x\to a} f(x) = L$ و $\lim_{x\to a} g(x) = M$ و $M \neq \circ$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{L}{M}$$

برهان. نخست نشان می‌دهیم که $\lim_{x\to a} g(x) = M$ با $M \neq ۰$ مستلزم حکم

$$\lim_{x\to a} \frac{۱}{g(x)} = \frac{۱}{M}$$

است. در واقع، وقتی $g(x) \neq ۰$،

$$\left|\frac{۱}{g(x)} - \frac{۱}{M}\right| = \frac{|g(x) - M|}{|M||g(x)|}$$

$\delta_۱$ را طوری تعیین می‌کنیم که

اگر $۰ < |x - a| < \delta_۱$، آن‌گاه $|g(x) - M| < \frac{|M|}{۲}$.

به ازای چنین xی، داریم

$$|g(x)| > \frac{|M|}{۲}, \qquad \frac{۱}{|g(x)|} < \frac{۲}{|M|}$$

حال، فرض می‌کنیم $\varepsilon > ۰$ و $\delta_۲$ را طوری تعیین می‌کنیم که

اگر $۰ < |x - a| < \delta_۲$، آن‌گاه $|g(x) - M| < \frac{|M|^۲}{۲}\varepsilon$.

قرار می‌دهیم $\delta = \min\{\delta_۱, \delta_۲\}$، خواهیم داشت:

اگر $۰ < |x - a| < \delta$، آن‌گاه $\left|\frac{۱}{g(x)} - \frac{۱}{M}\right| < \varepsilon$.

این نشان می‌دهد که $۱/g(x) \longrightarrow ۱/M$ وقتی که $x \longrightarrow a$.

برای اثبات حکم قضیه، فقط توجه می‌کنیم که

$$\frac{f(x)}{g(x)} = f(x)\frac{۱}{g(x)}$$

از مفروضات $f(x) \longrightarrow L$ و $۱/g(x) \longrightarrow ۱/M$ وقتی که $x \longrightarrow a$، و حکم (ج) قضیهٔ ۵.۲، نتیجه می‌شود که

$$\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = L.\frac{۱}{M} = \frac{L}{M}$$

ملاحظات. احکام قضایای ۵.۲ و ۶.۲، به سهولت، برای هر تعداد متناهی از توابع تعمیم داده می‌شود. از این رو، به آسانی دیده می‌شود که هر چندجمله‌ای مانند

$$P(x) = c_n x^n + c_{n-1} x^{n-1} + \cdots + c_1 x + c_0$$

در حکم

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a) \qquad (۶.۲)$$

صدق می‌کند. همچنین، اگر P و Q چندجمله‌ای باشند و $Q(a) \neq 0$، آن‌گاه

$$\lim_{x \to a} \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{P(a)}{Q(a)} \qquad (۷.۲)$$

اگر $\lim_{x \to a} f(x) = L$ و $L \neq 0$ و $\lim_{x \to a} g(x) = 0$، آن‌گاه $\lim_{x \to a}[f(x)/g(x)]$ وجود دارند. در واقع، فرض کنید (فرض خلف) که عددی حقیقی مانند T موجود باشد به طوری که

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = T$$

آن‌گاه

$$L = \lim_{x \to a} f(x) = \lim_{x \to a} \left(g(x).\frac{f(x)}{g(x)} \right) = \lim_{x \to a} g(x). \lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0.T = 0$$

که با فرض $L \neq 0$ متناقض است.

قضیهٔ ۷.۲. فرض کنید عددی مثبت مانند q موجود باشد به طوری که نامساویهای

$$h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

به‌ازای هر x که $0 < |x - a| < q$ برقرار باشند. اگر

$$\lim_{x \to a} g(x) = L, \qquad \lim_{x \to a} h(x) = L$$

آن‌گاه

$$\lim_{x \to a} f(x) = L$$

برهان. فرض کنید $\varepsilon > 0$. فرض کنید عدد $q > 0$ چنان باشد که

$$\text{اگر } 0 < |x-a| < q\text{، آن‌گاه} \quad h(x) \leq f(x) \leq g(x)$$

δ_1 را طوری تعیین می‌کنیم که

$$\text{اگر } 0 < |x-a| < \delta_1\text{، آن‌گاه} \quad L-\varepsilon < h(x) < L+\varepsilon$$

و δ_2 را طوری تعیین می‌کنیم که

$$\text{اگر } 0 < |x-a| < \delta_2\text{، آن‌گاه} \quad L-\varepsilon < g(x) < L+\varepsilon$$

فرض کنید $\delta = \min\{q, \delta_1, \delta_2\}$. به ازای هر x که $0 < |x-a| < \delta$، داریم:

$$L-\varepsilon < h(x) \leq f(x) \leq g(x) < L+\varepsilon$$

و، بنابراین، $|f(x) - L| < \varepsilon$.

کاربرد. نشان دهید که

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1 \qquad (8.2)$$

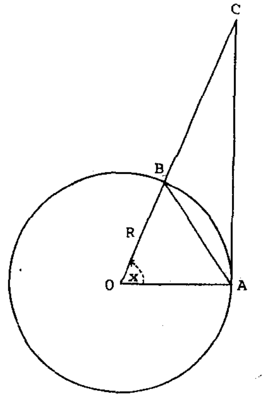
نخست، در صحت برقراری نامساوی

$$\sin x < x < \tan x, \quad 0 < x < \frac{\pi}{2} \qquad (9.2)$$

در دایره‌ای به شعاع R تحقیق می‌کنیم. زاویهٔ حادهٔ $\angle AOB$، وتر AB، و مماس AC بر دایره در نقطهٔ A را در نظر بگیرید (شکل ۸.۲). فرض کنید عدد x اندازهٔ زاویهٔ $\angle AOB$ به رادیان باشد؛ آن‌گاه، طول کمان مستدیر AB برابر Rx است. بالبداهه، مساحت مثلث AOB (که برابر $\frac{1}{2}R^2 \sin x$ است) کمتر از مساحت قطاع مستدیر AOB (که برابر $\frac{1}{2}R^2 x$ است) می‌باشد؛ بعلاوه، مساحت قطاع مستدیر AOB کوچکتر از مساحت مثلث AOC (که برابر $\frac{1}{2}R^2 \tan x$ است) می‌باشد. به این ترتیب، پس از تقسیم بر $\frac{1}{2}R^2$، نامساوی (۹.۲) عاید می‌شود.

چون $\sin x$ به‌ازای $0 < x < \frac{\pi}{2}$ مثبت است، می‌توانیم طرفین (۹.۲) را بر $\sin x$ تقسیم کنیم و نتیجه بگیریم که

$$\text{به‌ازای } 0 < x < \frac{\pi}{2}\text{،} \quad \cos x < \frac{\sin x}{x} < 1 \quad \text{یا} \quad 0 < 1 - \frac{\sin x}{x} < 1 - \cos x$$



شکل ۸.۲

امّا $۱ - \cos x = ۲(\sin^۲ x/۲) < ۲(\sin x/۲)$ و، بنابراین، به استناد (۹.۲)، $۲(\sin x/۲) < x$. به این ترتیب،

$$۱ - \frac{\sin x}{x} < x, \qquad ۰ < x < \frac{\pi}{۲}$$

یا

$$۰ < \left|\frac{\sin x}{x} - ۱\right| < |x|, \qquad ۰ < x < \frac{\pi}{۲}$$

اگر فرض کنیم $f(x) = (\sin x)/x$ وقتی که $x \neq ۰$، ملاحظه می‌کنیم که $f(-x) = f(x)$ ؛ از طرف دیگر، $|-x| = |x|$. بنابراین،

$$۰ < \left|\frac{\sin x}{x} - ۱\right| < |x|, \qquad ۰ < |x| < \frac{\pi}{۲} \tag{۱۰.۲}$$

با استناد به قضیهٔ ۷.۲، حکم مطلوب (۸.۲) فوراً نتیجه می‌شود. در واقع، اگر $۰ < \varepsilon$ مفروض باشد و $\delta = \min\{\varepsilon, \pi/۲\}$، داریم:

اگر $۰ < |x| < \delta$، آن‌گاه $\left|\dfrac{\sin x}{x} - ۱\right| < \varepsilon$.

اگر به تخمین

$$۰ < ۱ - \frac{\sin x}{x} < ۱ - \cos x, \qquad ۰ < x < \frac{\pi}{۲}$$

برگردیم، به طریق زیر نیز می‌توانستیم عمل کنیم: چون

$۱ - \cos x = ۲\sin^۲ \dfrac{x}{۲}$ و، به استناد (۹.۲)، $\sin \dfrac{x}{۲} < \dfrac{x}{۲}$،

نتیجهٔ

$$\text{۱} - \cos x < \frac{x^{\text{۲}}}{\text{۲}}, \quad \text{۰} < x < \frac{\pi}{\text{۲}} \qquad (\text{۱۱.۲})$$

به دست می‌آید. بنابراین،

$$\text{۰} < \text{۱} - \frac{\sin x}{x} < \frac{x^{\text{۲}}}{\text{۲}}, \quad \text{۰} < x < \frac{\pi}{\text{۲}}$$

امّا تعویض x با $-x$ تغییری در نامساوی ایجاد نمی‌کند. از این رو،

$$\text{۰} < \left|\frac{\sin x}{x} - \text{۱}\right| < \frac{x^{\text{۲}}}{\text{۲}}, \quad \text{۰} < |x| < \frac{\pi}{\text{۲}} \qquad (\text{۱۲.۲})$$

با استناد به قضیهٔ ۷.۲، حکم مطلوب (۸.۲) فوراً از (۱۲.۲) نتیجه می‌شود. در واقع، اگر $\varepsilon > \text{۰}$ مفروض باشد و $\delta = \min\{\sqrt{\text{۲}\varepsilon}, \frac{\pi}{\text{۲}}\}$، داریم:

اگر $\text{۰} < |x| < \delta$، آن‌گاه $\left|\frac{\sin x}{x} - \text{۱}\right| < \varepsilon$.

به آسانی ثابت می‌شود که

$$\lim_{x \to \text{۰}} \frac{\text{۱} - \cos x}{x} = \text{۰} \qquad (\text{۱۳.۲})$$

واضح است که نامساوی (۱۱.۲) با تعویض x به $-x$ به قوت خود باقی می‌ماند. از این رو،

$$\text{۱} - \cos x < \frac{x^{\text{۲}}}{\text{۲}}, \quad \text{۰} < |x| < \frac{\pi}{\text{۲}}$$

یا

$$\text{۰} < \left|\frac{\text{۱} - \cos x}{x}\right| < \frac{|x|}{\text{۲}}, \quad \text{۰} < |x| < \frac{\pi}{\text{۲}}$$

و (۱۳.۲) از آن، به استناد قضیهٔ ۷.۲، نتیجه می‌شود.

تعریف. فرض کنید f تابعی باشد که حداقل بر بازهٔ بازی به شکل (d, a) تعریف شده است. آن‌گاه، حد چپ $f(x)$ وقتی که x به a میل کند، L است و به صورت

$$f(a-) = L \quad \text{یا} \quad \lim_{x \uparrow a} f(x) = L$$

نوشته می‌شود در صورتی که به‌ازای هر $\varepsilon > \text{۰}$ مفروض، عددی مثبت مانند δ موجود باشد به طوری که نامساوی $|f(x) - L| < \varepsilon$ به‌ازای هر x که $a - \delta < x < a$ برقرار باشد.

تعریف. فرض کنید f تابعی باشد که حداقل بر بازهٔ بازی به شکل (a, d) تعریف شده است. آن‌گاه، حد راست $f(x)$ وقتی که x به a میل کند، L است و به صورت

$$f(a+) = L \quad \text{یا} \quad \lim_{x \downarrow a} f(x) = L$$

نوشته می‌شود در صورتی که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض، عددی مثبت مانند δ یافت شود به طوری که نامساوی $|f(x) - L| < \varepsilon$ به‌ازای هر x که $a < x < a + \delta$ برقرار باشد.

ملاحظات. چون $\sqrt{x}$ در هر دو طرف ۰ تعریف نشده است، نمی‌توانیم حد (دو طرفهٔ) $\sqrt{x}$ را وقتی $x \longrightarrow 0$ مورد بحث قرار دهیم. معذالک، حکم زیر برقرار است:

$$\lim_{x \downarrow 0} \sqrt{x} = 0$$

زیرا، اگر $\varepsilon > 0$ مفروض باشد و $\delta = \varepsilon^2$، خواهیم داشت:

$$\text{اگر } 0 < x < \delta \text{،} \quad \text{آن‌گاه} \quad |\sqrt{x} - 0| = \sqrt{x} < \varepsilon \text{ .}$$

حدود یکطرفه روش ساده‌ای برای حصول اطمینان از وجود یا عدم وجود حد (دو طرفه) به دست می‌دهند:

$$\lim_{x \to a} f(x) = L \quad \text{فقط‌وفقط وقتی که} \quad \lim_{x \uparrow a} f(x) = L \text{ و } \lim_{x \downarrow a} f(x) = L$$

چنان که در بخش بعد خواهیم دید، حدود یک طرفه در بحث از توابع صعودی یا نزولی مورد توجه خاص واقع می‌شوند.

تعریف. فرض کنید f تابعی باشد که به‌ازای همهٔ اعداد حقیقی $x > d$، که در آن d عددی حقیقی است، تعریف شده است. می‌گوییم: حد $f(x)$ وقتی که x به بی‌نهایت میل کند (یا وقتی که x به طور دلخواه بزرگ شود)، L است و می‌نویسیم

$$\lim_{x \to \infty} f(x) = L$$

در صورتی که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض، $K > 0$ی موجود باشد به طوری که نامساوی $|f(x) - L| < \varepsilon$ به‌ازای هر x که $x > K$ برقرار باشد.

تبصره. رابطهٔ ساده‌ای بین حدود در ∞ و حدود یکطرفه در ۰ وجود دارد؛ اگر قرار دهیم: $x = 1/t$، به آسانی دیده می‌شود که

$$\lim_{x\to\infty} f(x) = L \quad \text{فقط و فقط وقتی که} \quad \lim_{t\downarrow 0} f\left(\frac{1}{t}\right) = L .$$

تعریف. فرض کنید f تابعی باشد که به‌ازای همهٔ اعداد حقیقی $x < d$، که در آن d عددی حقیقی است، تعریف شده‌است. می‌گوییم: حد $f(x)$ وقتی که x به منفی بی‌نهایت (یا منهای بی‌نهایت) میل کند، L است و می‌نویسیم

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = L$$

در صورتی که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض، عددی منفی مانند K بتوان یافت به طوری که نامساوی $|f(x) - L| < \varepsilon$ به‌ازای هر x که $x < K$ برقرار باشد.

تبصره. قضایای ۳.۲ تا ۷.۲، با ویرایش مناسب، در مورد حدود یک طرفه و حدود در $\pm\infty$ نیز برقرارند.

مثالها

۱) فرض کنید که n یک عدد صحیح مثبت باشد. نشان دهید که

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = n$$

حل. به‌ازای $x \neq 1$، داریم:

$$x^n - 1 = (x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)$$

بنابراین،

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^n - 1}{x - 1} = \lim_{x\to 1}(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1) = n$$

۲) فرض کنید m و n اعدادی صحیح و مثبت باشند. نشان دهید که

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{m}{n}$$

حل. به‌ازای $x \neq 1$، داریم:

$$\frac{x^m - 1}{x^n - 1} = \frac{(x - 1)(x^{m-1} + x^{m-2} + \cdots + x + 1)}{(x - 1)(x^{n-1} + x^{n-2} + \cdots + x + 1)}$$

بنابراین،

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^m-1}{x^n-1}=\frac{\lim_{x\to 1}(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{\lim_{x\to 1}(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}=\frac{m}{n}$$

۳) فرض کنید n و k اعدادی صحیح و مثبت باشند و $n>k$. نشان دهید که

$$\lim_{x\to 1}\frac{(x^n-1)(x^{n-1}-1)\ldots(x^{n-k+1}-1)}{(x-1)(x^2-1)\ldots(x^k-1)}=\frac{n(n-1)\ldots(n-k+1)}{1\cdot 2\cdot\ldots\cdot k}$$

حل. داریم:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}&\frac{(x^n-1)(x^{n-1}-1)\ldots(x^{n-k+1}-1)}{(x-1)(x^2-1)\ldots(x^k-1)}\\&=\lim_{x\to 1}\frac{x^n-1}{x-1}\lim_{x\to 1}\frac{x^{n-1}-1}{x^2-1}\ldots\lim_{x\to 1}\frac{x^{n-k+1}-1}{x^k-1}\\&=\frac{n}{1}\cdot\frac{n-1}{2}\cdot\ldots\cdot\frac{n-k+1}{k}\end{aligned}$$

۴) فرض کنید m و n اعدادی صحیح و مثبت باشند. نشان دهید که

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=\frac{m-n}{2}$$

حل. داریم:

$$\begin{aligned}\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}&=\frac{n(x^m-1)-m(x^n-1)}{(x^m-1)(x^n-1)}\\&=\frac{n(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)-m(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}{(x-1)(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}\end{aligned}$$

امّا

$$\begin{aligned}&\frac{n(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)}{x-1}\\&\qquad=n\left(\frac{x^{m-1}-1}{x-1}+\frac{x^{m-2}-1}{x-1}+\cdots+\frac{x-1}{x-1}+\frac{1-1}{x-1}\right)+\frac{nm}{x-1}\end{aligned}$$

و

$$\frac{m(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}{x-1}$$

$$= m\left(\frac{x^{n-1}-1}{x-1}+\frac{x^{n-2}-1}{x-1}+\cdots+\frac{x-1}{x-1}+\frac{1-1}{x-1}\right)+\frac{nm}{x-1}$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}&\frac{n(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)-m(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)}{x-1}\\ &=n\{(m-1)+(m-2)+\cdots+1\}-m\{(n-1)+(n-2)+\cdots+1\}\\ &=n\frac{m(m-1)}{2}-m\frac{n(n-1)}{2}\\ &=\frac{m^2n-mn^2}{2}\end{aligned}$$

از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to 1}(x^{m-1}+x^{m-2}+\cdots+x+1)(x^{n-1}+x^{n-2}+\cdots+x+1)=mn$$

امّا

$$\frac{mn^2-mn^2}{2mn}=\frac{m-n}{2}$$

بنابراین

$$\lim_{x\to 1}\left(\frac{m}{1-x^m}-\frac{n}{1-x^n}\right)=\frac{m-n}{2}$$

۵) نشان دهید که

$$\lim_{x\to\infty}\{\sqrt{(x+a)(x+b)}-x\}=\frac{a+b}{2}$$

حل. بحث را با یک نامساوی شروع می‌کنیم: اگر A و B اعداد حقیقی مثبت باشند، آن‌گاه

$$\frac{2}{1/A+1/B}\le\sqrt{AB}\le\frac{A+B}{2} \qquad (14.2)$$

در واقع، $0\le(\sqrt{A}-\sqrt{B})^2=A+B-2\sqrt{AB}$. بنابراین، $\sqrt{AB}\le(A+B)/2$. این نشان می‌دهد که نیمهٔ دوم نامساوی (۱۴.۲) برقرار است. اگر در نامساوی $\sqrt{AB}\le(A+B)/2$ اعداد A و B را، به ترتیب، با $1/A$ و $1/B$ عوض کنیم، نیمهٔ اول نامساوی (۱۴.۲) به دست می‌آید. نامساوی (۱۴.۲) بیانگر این حکم آشناست که میانگین توافقی هر دو عدد مثبت A و B حداکثر مساوی میانگین هندسی A و B است که این، به نوبهٔ خود، حداکثر مساوی میانگین حسابی A و B است؛ تساوی در (۱۴.۲) فقط و فقط وقتی برقرار می‌شود که $A=B$.

اینک، در (۱۴.۲)، قرار می‌دهیم $A = x + a$ و $B = x + b$. خواهیم داشت:

$$\frac{(a+b)x + ۲ab}{۲x + a + b} \leq \sqrt{(x+a)(x+b)} - x \leq \frac{a+b}{۲}$$

البته، هرگاه x چنان باشد که $x + a > ۰$ و $x + b > ۰$. اگر فرض کنیم $x \longrightarrow \infty$، حکم مطلوب نتیجه می‌شود.

۶) اگر مساحت یک n ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای به شعاع r عبارت باشد از:

$$A(n) = \frac{۱}{۲} n r^۲ \sin \frac{۲\pi}{n}$$

و محیطش از دستور زیر به دست آید:

$$C(n) = ۲nr \sin \frac{\pi}{n}$$

نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} A(n) = \pi r^۲$ و $\lim_{n\to\infty} C(n) = ۲\pi r$.

حل. داریم: $(\sin x)/x \longrightarrow ۱$ وقتی که $x \longrightarrow ۱$؛ امّا

$$A(n) = \pi r^۲ \frac{\sin(۲\pi/n)}{۲\pi/n} \quad \text{و} \quad C(n) = ۲\pi r \frac{\sin(\pi/n)}{\pi/n}$$

۲.۲ پیوستگی

تعریف. فرض کنید f تابعی باشد که بر یک همسایگی از نقطه‌ای مانند a (شامل نقطهٔ a) تعریف شده است و مجموعهٔ مقادیر یا برد تابع f مجموعه‌ای از اعداد حقیقی است. می‌گوییم: f در نقطهٔ a پیوسته است در صورتی که به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ مفروض، $\delta > ۰$ ی موجود باشد به طوری که نامساوی $|f(x) - f(a)| < \varepsilon$ به‌ازای هر x که $|x - a| < \delta$ برقرار باشد.

تبصره. از این تعریف فوراً نتیجه می‌شود که f فقط و فقط وقتی در a پیوسته است که $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$.

تعریف. اگر تابعی مانند f در هر نقطهٔ بازهٔ بازی مانند (a,b) پیوسته باشد، می‌گوییم: f بر بازهٔ (a,b) پیوسته است. اگر تابع f بر $[a,b]$ تعریف شده باشد، می‌گوییم: f بر $[a,b]$ پیوسته است در صورتی که f بر (a,b) پیوسته باشد و، بعلاوه،

$$\lim_{x\downarrow a} f(x) = f(a) \quad \text{و} \quad \lim_{x\uparrow b} f(x) = f(b)$$

قضیهٔ ۸.۲. فرض کنید توابع f و g بر یک همسایگی از نقطهٔ a تعریف شده و هر دو در a پیوسته باشند. آن‌گاه، هر یک از توابع زیر در a پیوسته است:

الف) $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$

ب) $(fg)(x) = f(x)g(x)$

ج) $(\frac{f}{g})(x) = \frac{f(x)}{g(x)}, [g(a) \neq ۰]$

د) $|f|(x) = |f(x)|$

برهان. خواص (الف)، (ب)، و (ج) فوراً از قضایای ۵.۲ و ۶.۲ نتیجه می‌شوند؛ و خاصیت (د) نتیجه‌ای از نامساوی زیر است:

$$||f(x)| - |f(a)|| \leq |f(x) - f(a)|$$

[نامساوی (۴.۲) را ملاحظه کنید.]

تبصره. اگر f و g توابع قضیهٔ ۸.۲ باشند، آن‌گاه توابع

$$(f \wedge g)(x) = \min\{f(x), g(x)\}, \qquad (f \vee g)(x) = \max\{f(x), g(x)\}$$

در a پیوسته‌اند. در واقع، مورد ادعا، از قضایای ۲.۲ و ۸.۲ فوراً نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۹.۲. فرض کنید تابع g (از متغیر y) بر بازه‌ای مانند Y تعریف شده باشد و تابع f (از متغیر x) بر بازه‌ای مانند X تعریف شده باشد و مجموعهٔ مقادیر $f(x)$، وقتی x در X تغییر می‌کند، مشمول بازهٔ Y باشد. اگر f در نقطهٔ $x_۰$ از X پیوسته باشد و g در نقطهٔ متناظر $y_۰ = f(x_۰)$ از Y پیوسته باشد، آن‌گاه تابع مرکب

$$h(x) = g[f(x)], \qquad (x \in X)$$

در $x_۰$ پیوسته است.

برهان. فرض کنید $\varepsilon > ۰$ مفروض باشد. چون g در $y = y_۰$ پیوسته است، $\sigma > ۰$ی موجود است به طوری که

اگر $|y - y_۰| < \sigma$، آن‌گاه $|g(y) - g(y_۰)| < \varepsilon$.

از طرف دیگر، چون f در $x = x_\circ$ پیوسته است، به‌ازای این σ (سیگما)، $\delta > \circ$ ی موجود است که

اگر $|x - x_\circ| < \delta$، آن‌گاه $|f(x) - f(x_\circ)| = |f(x) - y_\circ| < \varepsilon$.

بنابراین، نتیجه می‌شود که

اگر $|x - x_\circ| < \delta$، آن‌گاه $|g[f(x)] - g(y_\circ)| = |g[f(x)] - g[f(x_\circ)]| < \varepsilon$.

این، پیوستگی h در $x = x_\circ$ را نشان می‌دهد.

تبصره. تابع توانی $h(x) = x^b$ را، که در آن $x > \circ$ و b یک عدد حقیقی ثابت است، می‌توان ترکیبی از تابع لگاریتمی و تابع نمایی دانست؛ به استناد (۳۵.۱) در فصل اول، داریم:

$$x^b = e^{b(\ln x)}$$

به محض این که پیوستگی توابع لگاریتمی و نمایی ثابت شود، پیوستگی تابع توانی $h(x) = x^b$، که در آن $x > \circ$ و b یک عدد حقیقی ثابت است، به استناد قضیهٔ ۹.۲، نتیجه می‌شود.

همین که بدانیم که تابع $g(x) = \sin x$ و تابع $f(x) = c - x$، که در آن c یک ثابت است، پیوسته‌اند، به استناد قضیهٔ ۹.۲، می‌توان نشان داد که تابع $h(x) = \cos x$ پیوسته است؛ زیرا $\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi - x)$.

قضیهٔ ۱۰.۲. فرض کنید تابع f در نقطهٔ a پیوسته و $f(a)$ مثبت باشد. آن‌گاه، عددی مثبت مانند σ می‌توان یافت به طوری که f در سراسر بازهٔ $(a - \sigma, a + \sigma)$ مثبت باشد.

برهان. در شرط پیوستگی، فرض کنید $\varepsilon = \frac{1}{2} f(a)$، و δ متناظر را به σ نشان دهید. آن‌گاه، نامساوی

$$|f(x) - f(a)| < \frac{1}{2} f(a)$$

به‌ازای هر x که $|x - a| < \sigma$ برقرار است. امّا، نامساوی $|f(x) - f(a)| < \frac{1}{2} f(a)$ معادل است با $-\frac{1}{2} f(a) < f(x) - f(a) < \frac{1}{2} f(a)$ یا $\frac{1}{2} f(a) < f(x) < \frac{3}{2} f(a)$. به این ترتیب، به‌ازای هر x از بازهٔ $(a - \sigma, a + \sigma)$، $f(x) > \frac{1}{2} f(a) > \circ$.

تبصره. به وضوح، حکم مشابهی در مورد مقادیر منفی تابع پیوسته‌ای مانند f برقرار است.

قضیهٔ ۱۱.۲. اگر تابع f بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ با طول متناهی پیوسته باشد، بر آن بازه کراندار است؛ یعنی، اعدادی مانند m و M موجودند به طوری که

$$\text{به‌ازای هر } x \text{ از } [a,b]،\quad m \leq f(x) \leq M\,.$$

برهان. فرض کنید f بر $[a,b]$ پیوسته باشد. نخست، ملاحظه می‌کنیم که اگر $x_\circ$ نقطه‌ای از $[a,b]$ باشد، زیربازه‌ای شامل $x_\circ$ وجود دارد که f بر آن کراندار است. زیرا، اگر در شرط پیوستگی، بگیریم $\varepsilon = ۱$ و δ متناظر را به $\delta_۱$ نشان دهیم، داریم:

$$f(x_\circ) - ۱ < f(x) < f(x_\circ) + ۱$$

مشروط به این که x نقطه‌ای از $[a,b]$ باشد که $x_\circ - \delta_۱ < x < x_\circ + \delta_۱$. توجه کنید که این زیربازه، $x_\circ$ را از دو طرف در بردارد در صورتی که $a < x_\circ < b$، و از یک طرف، هرگاه که $x_\circ = a$ یا $x_\circ = b$. نکتهٔ قابل ملاحظهٔ دوم این است که: اگر f بر دو زیربازه از $[a,b]$ که اجتماع آنها $[a,b]$ است کراندار باشد، f بر $[a,b]$ نیز کراندار است.

حال، به اثبات قضیهٔ مورد بحث برمی‌گردیم و فرض می‌کنیم که ادعای قضیه دروغ باشد. به عبارت دیگر، فرض می‌کنیم که f بر $[a,b]$ کراندار نباشد. با تنصیف $[a,b]$ به دو زیربازهٔ $[a,d]$ و $[d,b]$، که در آنها $d = (a+b)/۲$، متوجه می‌شویم که تابع f حداقل بر یکی از این دو زیربازه کراندار نیست. زیربازه‌ای را که f بر آن کراندار نیست، $[a_۱, b_۱]$ می‌نامیم. سپس، زیربازهٔ $[a_۱, b_۱]$ را نصف می‌کنیم تا زیربازه‌ای مانند $[a_۲, b_۲]$ بیابیم که f بر آن کراندار نیست و هکذا. با تکرار عمل تنصیف، دنباله‌ای از بازه‌های بستهٔ تودرتو می‌یابیم که f بر هیچ یک از آنها کراندار نیست؛ طول بازهٔ $[a_n, b_n]$ برابر $(b-a)/۲^n$ است. به استناد اصل بازه‌های تودرتو (بخش اول فصل اول)، یک و فقط یک نقطه مانند c وجود دارد که در همهٔ بازه‌های $[a_n, b_n]$ مشترک است. به وضوح، f بر بازه‌ای مانند J شامل نقطهٔ c کراندار است. چون c در $[a_n, b_n]$ است و طول $[a_n, b_n]$ به صفر میل می‌کند وقتی که n به بی‌نهایت میل کند، واضح است که وقتی n به قدر کافی بزرگ باشد J باید شامل $[a_n, b_n]$ باشد که این یک تناقض است؛ زیرا f بر $[a_n, b_n]$ کراندار نیست ولی بر J کراندار است. با این تناقض، فرض خلف باطل و برهان تمام می‌شود.

قضیهٔ ۱۲.۲. فرض کنید تابع f بر بازهٔ بسته با طول متناهی $[a,b]$ پیوسته باشد و $f(a) \neq f(b)$. آن‌گاه، به‌ازای هر عدد حقیقی A بین $f(a)$ و $f(b)$، نقطه‌ای مانند t وجود دارد به طوری که $f(t) = A$؛ یعنی، f همهٔ مقادیر میانی $f(a)$ و $f(b)$ را اختیار می‌کند.

برهان. فرض کنید که $f(a) < f(b)$. از نقاط $x_\circ = a$ و $y_\circ = b$ شروع می‌کنیم و با تنصیفات متوالی دنباله‌ای از بازه‌های بستهٔ تودرتوی $[x_n, y_n]$ به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ می‌سازیم به طوری که $f(x_n) \le A \le f(y_n)$. برای انجام این مقصود، کافی است قرار دهیم:

$$x_{n+1} = d_n, \quad y_{n+1} = y_n, \quad \text{در حالتی که} \quad f(d_n) \le A$$

و

$$x_{n+1} = x_n, \quad y_{n+1} = d_n, \quad \text{در حالتی که} \quad f(d_n) > A$$

که در آن $d_n = (x_n + y_n)/۲$. فرض کنید t نقطه‌ای باشد که از این دنباله از بازه‌های بستهٔ تودرتو به‌دست می‌آید (اصل بازه‌های تودرتو را ملاحظه کنید.)، یعنی، فرض کنید که t نقطهٔ مشترک همهٔ این بازه‌های بستهٔ تودرتو باشد. آن‌گاه، وقتی $n \longrightarrow \infty$، $x_n \longrightarrow t$ و $y_n \longrightarrow t$. چون $f(x_n) \le A \le f(y_n)$ و f در t پیوسته است، داریم $f(t) = A$.

حالتی که $f(b) < f(a)$، با بررسی تابع $-f$، به حالتی که مورد بحث قرار گرفت برمی‌گردد.

کاربرد. می‌خواهیم نشان بدهیم که هر تابع چندجمله‌ای P با درجهٔ فرد، حداقل یک ریشهٔ حقیقی دارد.

فرض کنید $P(x) = c_\circ + c_۱x + \cdots + c_nx^n$، که در آن $c_n \neq \circ$ و n فرد (یعنی، عدد صحیحی بخش‌ناپذیر بر ۲) است. می‌توانیم فرض کنیم که $c_n = ۱$؛ در غیر این صورت، چندجمله‌ای $(۱/c_n)P$ را مورد بحث قرار می‌دهیم. واضح است که P همه جا پیوسته است؛ زیرا، چنان که در ملاحظات پیرو قضیهٔ ۶.۲ متوجه شده‌ایم، حکم

$$\lim_{x \to a} P(x) = P(a)$$

به‌ازای هر عدد حقیقی a برقرار است. برای اعمال قضیهٔ ۱۲.۲، لازم است فقط نشان دهیم که به‌ازای x ی $P(x) > \circ$ و به‌ازای x ی دیگر $P(x) < \circ$. معذالک، با یادآوری این نکته که $c_n = ۱$، دیده می‌شود که این ادعا درست است؛ زیرا

$$\lim_{x \to \infty} P(x) = +\infty \quad \text{و} \quad \lim_{x \to -\infty} P(x) = -\infty$$

به کمک بحث زیر، می‌توانیم از این نمادها پرهیز کنیم. ملاحظه می‌کنیم که

$$P(x) = x^n D(x)$$

که در آن

$$D(x) = 1 + \frac{c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}}{x^n}$$

فرض کنید $d = 1 + |c_0| + |c_1| + \cdots + |c_{n-1}|$. اگر $|x| > d$ آن‌گاه

$$|x| > 1 \qquad \text{و} \qquad |x| > |c_0| + |c_1| + \cdots + |c_{n-1}|$$

بنابراین،

$$|c_0 + c_1 x + \cdots + c_{n-1}x^{n-1}| \le (|c_0| + |c_1| + \cdots + |c_{n-1}|)|x|^{n-1} < |x|^n$$

که نشان می‌دهد که $D(x) > 0$ به‌ازای $|x| > d$. اینک، اگر $x > d$ آن‌گاه $x^n > 0$ و $P(x) > 0$. اگر $x < -d$ آن‌گاه $x^n < 0$ (زیرا n فرد است.) و $P(x) < 0$.

تعریف. فرض کنید S مجموعه‌ای غیرخالی از اعداد حقیقی باشد. M را یک کران بالایی S می‌نامیم هرگاه $S \le M$ به‌ازای هر s از S برقرار باشد، و m را یک کران پایینی S می‌نامیم هرگاه $s \ge m$ به‌ازای هر s از S برقرار باشد. اگر S یک کران بالایی داشته باشد، می‌گوییم که S از بالا کراندار است؛ اگر S کرانی پایینی داشته باشد، می‌گوییم که S از پایین کراندار است. اگر S از بالا و پایین کراندار باشد، می‌گوییم S کراندار است.

تعریف. فرض کنید S مجموعه‌ای غیرخالی از اعداد حقیقی باشد که از بالا کراندار است. فرض کنید عددی حقیقی مانند M^* واجد دو خاصیت زیر باشد:

الف) M^* یک کران بالایی S است،

ب) اگر $K < M^*$ آن‌گاه K یک کران بالایی S نیست،

آن‌گاه M^* را کوچکترین کران بالایی S [این که حداکثر یک چنین M^* ای موجود است، از (ب) واضح است.] یا سوپرمم S می‌نامند؛ و می‌نویسند: $M^* = lubS$ یا $M^* = \sup S$.

اگر S مجموعه‌ای غیرخالی از اعداد حقیقی باشد که از بالا کراندار نیست، قرار می‌دهیم $\sup S = +\infty$.

تبصره. فرض کنید M^* یک کران بالایی مجموعهٔ غیرخالی S از اعداد حقیقی باشد. آن‌گاه M^* فقط و فقط وقتی سوپرمم S است که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند s در S یافت شود به طوری که $s > M^* - \varepsilon$.

در واقع، فرض کنید M^* سوپرمم S باشد. فرض کنید $\varepsilon > \circ$ مفروض باشد. آن‌گاه، $M^* - \varepsilon$ نمی‌تواند سوپرمم S باشد؛ از این رو، sی در S یافت می‌شود که $s > M^* - \varepsilon$. از طرف دیگر، فرض کنید که M^* سوپرمم S نباشد. آن‌گاه، عددی مانند $M^*_\circ$ وجود دارد که سوپرمم S باشد و $M^*_\circ < M^*$. باید $\varepsilon > \circ$ی بیابیم که $s \leq M^* - \varepsilon$ به‌ازای هر s از S برقرار باشد. برای این منظور، فقط لازم است قرار دهیم $\varepsilon = M^* - M^*_\circ$.

تعریف. فرض کنید S مجموعه‌ای غیرخالی از اعداد حقیقی باشد که از پایین کراندار است. فرض کنید که m_* عددی حقیقی باشد که در دو شرط زیر صدق می‌کند:

الف) m_* یک کران پایینی S است،

ب) اگر $L > m_*$ آن‌گاه L یک کران پایینی S نیست.

در این صورت، m_* را بزرگترین کران پایینی S [این که حداکثر یک چنین m_*ای موجود است، از (ب) واضح است.] یا اینفیموم S می‌نامند؛ و می‌نویسند: $m_* = glbS$ یا $m_* = \inf S$. اگر S مجموعه‌ای غیرخالی از اعداد حقیقی باشد که از پایین کراندار نیست، قرار می‌دهیم $\inf S = -\infty$.

اصل موضوع کمال.

هر مجموعهٔ غیرخالی از اعداد حقیقی که یک کران پایینی داشته باشد، دارای بزرگترین کران پایینی است. همچنین، هر مجموعهٔ غیرخالی از اعداد حقیقی که یک کران بالایی داشته باشد، دارای کوچکترین کران بالایی است.

بحث. اصل موضوع کمال و اصل بازه‌های تودرتو از یکدیگر نتیجه می‌شوند.

اصل موضوع کمال را مفروض می‌گیریم و نشان می‌دهیم که: اگر J_1، J_2، ...، J_n، ... دنباله‌ای از بازه‌های بستهٔ تودرتو باشد به طوری که، به‌ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$، $J_n \supset J_{n+1}$ و، به ازای همهٔ nهای بزرگ، طول J_n از هر عدد مثبت مفروضی کوچکتر باشد، آن‌گاه، یک و فقط یک نقطه وجود دارد که در همهٔ بازه‌های J_n مشترک است.

در واقع، فرض کنید $J_n = [a_n, b_n]$. بنابراین، خاصیت «تودرتویی»

$$a_n \leq a_{n+1} < b_{n+1} \leq b_n$$

به‌ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$ برقرار است. این، نشان می‌دهد که مجموعهٔ A متشکل از نقاط انتهای چپ بازه‌های J_n، مجموعه‌ای کراندار است و مجموعهٔ B متشکل از نقاط انتهای راست بازه‌های J_n نیز چنین

است. فرض کنید

$$a = \sup A \qquad \text{و} \qquad b = \inf B$$

واضح است که به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، $a \le b_n$ و $b \ge a_n$. بنابراین، $a \le b$، و a و b، هر دو، به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، به J_n تعلق دارند. امّا

$$b - a < b_n - a_n, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

و این که $b_n - a_n \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$، ایجاب می‌کنند که $a = b$. این، همان چیزی است که می‌خواستیم.

اینک، اصل بازه‌های تودرتو را مفروض می‌گیریم و نشان می‌دهیم که: اگر S مجموعه‌ای غیرخالی از اعداد حقیقی باشد که از بالا کراندار است، آن‌گاه S دارای کوچکترین کران بالایی است.

در واقع، فرض کنید M یک کران بالایی S باشد و $s \in S$. بازهٔ بستهٔ $J_۱ = [s, M]$ را در نظر بگیرید. اگر $J_۱$ فقط تک نقطهٔ s را مشترک با S داشته باشد، برهان تمام است و s کوچکترین کران بالایی S می‌باشد. اگر $J_۱$ بیشتر از یک نقطهٔ مشترک با S داشته باشد، آن‌گاه بازهٔ $J_۱$ را نصف می‌کنیم و آن یکی از دو نیمهٔ سمت راست و سمت چپ را $J_۲$ می‌نامیم که در طرف راست $J_۲$ هیچ نقطه‌ای از S موجود نباشد. مطابق همین قاعده، یکی از دو نیمهٔ $J_۲$ را به عنوان $J_۳$ انتخاب می‌کنیم و هکذا. بازه‌های $J_۱$، $J_۲$، $J_۳$، ... دارای این خاصیت هستند که در سمت راست هر چنین بازه‌ای هیچ نقطه‌ای از S وجود ندارد ولی در هر چنین بازه‌ای حداقل یک نقطه از S یافت می‌شود. نقطهٔ c که در همهٔ بازه‌های $J_۱$، $J_۲$، $J_۳$، ...مشترک است، این خاصیت را دارد که به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ نقطه‌ای مانند s در S یافت می‌شود که $s > c - \varepsilon$. از این رو، $c = \sup S$.

قضیهٔ ۱۳.۲. فرض کنید f تابعی پیوسته باشد بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ با طول متناهی. به استناد قضیهٔ ۱۱.۲، مجموعهٔ S متشکل از همهٔ $f(x)$ها، وقتی که x بر بازهٔ $[a, b]$ تغییر کند، کراندار است. فرض کنید $m = \inf S$ و $M = \sup S$. آن‌گاه، f هر یک از مقادیر m و M را حداقل یک بار در بازهٔ $[a, b]$ اختیار می‌کند.

برهان. فرض کنید M سوپرمم مجموعهٔ S متشکل از همهٔ $f(x)$هایی باشد که x در $[a, b]$ تغییر می‌کند، M را کران بالایی f بر $[a, b]$ می‌نامند. اگر $[a, b]$ نصف شود، می‌توان نیمه‌ای مانند $[a_۱, b_۱]$ پیدا کرد که کران بالایی f بر آن نیز M باشد. با اعمال روش تنصیفات مکرر، دنباله‌ای از بازه‌های بستهٔ تودرتوی

$$[a, b],\ [a_۱, b_۱],\ [a_۲, b_۲], \ldots$$

بنا می‌کنیم که کران بالایی f بر هر یک از آنها عدد M است. این بازه‌ها یک و فقط یک نقطهٔ مشترک c دارند و دنباله‌های

$$b_۱, b_۲, b_۳, \ldots, \qquad a_۱, a_۲, a_۳, \ldots$$

به c میل می‌کنند. امّا $f(c) = M$. فرض کنید چنین نباشد؛ یعنی، فرض کنید که $f(c) = L \neq M$. آن‌گاه، به‌ازای $\varepsilon > ۰$ ی، $|L - M| = ۲\varepsilon$. به موجب پیوستگی f در c، بازهٔ بازی مانند $(c-\delta, c+\delta)$ وجود دارد که بر آن اختلاف $f(x)$ و L نمی‌تواند بیشتر از ε باشد و، از این رو، M نمی‌تواند کران بالایی f بر $(c-\delta, c+\delta)$ باشد. امّا $(c-\delta, c+\delta)$، به‌ازای nهای بزرگتر از $n_۰$ ی، باید شامل $[a_n, b_n]$ باشد؛ زیرا طول

$$b_n - a_n = \frac{b-a}{۲^n}$$

به صفر میل می‌کند وقتی که n به طور دلخواه بزرگ شود. فرض کنید n طوری اختیار شود که $[a_n, b_n]$ مشمول $(c-\delta, c+\delta)$ باشد؛ آن‌گاه

$$M = \sup\{f(x) : a_n \leq x \leq b_n\} \leq \sup\{f(x) : c-\delta < x < c+\delta\}$$

امّا $[a, b]$ شامل $(c-\delta, c+\delta)$ است و، بنابراین،

$$\sup\{f(x) : c-\delta < x < c+\delta\} \leq \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\} = M$$

که یک تناقض است. [در حالتی که $c = a$ یا $c = b$، ویرایشهایی بدیهی مورد نیاز است.]

به طریق مشابه، می‌توانیم نشان دهیم که نقطه‌ای مانند d در $[a, b]$ یافت می‌شود به طوری که $f(d) = m$.

برهان دیگری از قضیهٔ ۱۳.۲. به‌ازای هر عدد مثبت مفروض σ، می‌توانیم نقطه‌ای مانند x در $[a, b]$ بیابیم که به‌ازای آن

$$\frac{۱}{M - f(x)} > \frac{۱}{\sigma} \quad \text{یا} \quad M - f(x) < \sigma$$

از این رو، $۱/[M - f(x)]$ کراندار نیست و، بنابراین، به استناد قضیهٔ ۱۱.۲، پیوسته نیست. امّا $M - f(x)$ تابعی پیوسته است و، بنابراین، $۱/[M - f(x)]$ در هر نقطه‌ای که مخرج صفر نشود پیوسته است. از این رو، باید نقطه‌ای یافت شود که در آن مخرج صفر شود؛ در چنین نقطه‌ای $f(x) = M$. به طور مشابه، می‌توان نشان داد که نقطه‌ای وجود دارد که در آن $f(x) = m$.

تعریف. فرض کنید f تابع کرانداری بر $[a,b]$ باشد و J زیربازه‌ای از $[a,b]$ باشد. نوسان f بر J، که آن را به $\omega(f,J)$ نشان می‌دهند، چنین تعریف می‌شود:

$$\omega(f,J) = \sup\{f(x) : x \in J\} - \inf\{f(x) : x \in J\}$$

یعنی، تفاضل کران بالایی و کران پایینی f بر J.

قضیهٔ ۱۴.۲. فرض کنید f تابع پیوسته‌ای بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ با طول متناهی باشد. هرگاه $\varepsilon > 0$ مفروض باشد، افرازی از $[a,b]$ به تعدادی متناهی زیربازه با طولهای مساوی وجود دارد به طوری که نوسان f بر هر یک از این زیربازه‌ها از ε تجاوز نمی‌کند.

برهان. فرض کنید چنین نباشد، یعنی، فرض کنید که تابع پیوسته‌ای مانند f بر $[a,b]$ و عددی مثبت مانند ε موجود می‌بود که برای آن هیچ افرازی از $[a,b]$ از نوع مطلوب پیدا نمی‌شد. برای سهولت بحث، مایلیم بگوییم که بازهٔ $[a,b]$ خاصیت P_ε دارد هرگاه هیچ افرازی از $[a,b]$ به تعدادی متناهی زیربازه با طولهای مساوی یافت نشود به طوری که نوسان f بر هر یک از این زیربازه‌ها کوچکتر از یا مساوی ε باشد. به طور خلاصه، فرض می‌کنیم که $[a,b]$ خاصیت P_ε داشته باشد. با تنصیف $[a,b]$، زیربازه‌ای مانند $[a_1,b_1]$ می‌یابیم که خاصیّت P_ε دارد. سپس، $[a_1,b_1]$ را نصف می‌کنیم و زیربازه‌ای مانند $[a_2,b_2]$ با خاصیت P_ε به دست می‌آوریم و هکذا. با عمل به این طریق، دنباله‌ای از بازه‌های بستهٔ تودرتو

$$[a_1,b_1],\ [a_2,b_2], \ldots, [a_n,b_n], \ldots$$

به دست می‌آوریم که هر بازه از آن خاصیت P_ε دارد. بالاخص، به‌ازای $n = 1,2,3,\ldots$، $\omega(f,[a_n,b_n]) > \varepsilon$. امّا طول $[a_n,b_n]$ برابر $(b-a)/2^n$ است که به صفر میل می‌کند وقتی که n به طور دلخواه بزرگ شود. به استناد اصل بازه‌های تودرتو، یک و فقط یک نقطه مانند c وجود دارد که در همهٔ بازه‌های $[a_n,b_n]$، به‌ازای $n = 1,2,3,\ldots$، مشترک است. امّا c در $[a,b]$ است و f در آن پیوسته است. از این رو، عددی مثبت مانند δ می‌توان یافت به طوری که نامساوی $|f(x)-f(c)| < \varepsilon/2$ به‌ازای هر x از $[a,b]$ که $|x-c| < \delta$ برقرار باشد. اگر x_1 و x_2 دو تا از این نقاط باشند، آنگاه

$$f(x_1) - f(x_2) = [f(x_1) - f(c)] + [f(c) - f(x_2)]$$

و، بنابراین،

$$|f(x_1) - f(x_2)| \leq |f(x_1) - f(c)| + |f(c) - f(x_2)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

از این رو، نوسان f بر بازهٔ $I = [a,b] \cap (c-\delta, c+\delta)$ کوچکتر از ε است.

بازهٔ $[a_n, b_n]$، به‌ازای n به قدر کافی بزرگ، مشمول بازهٔ I است و، بنابراین، نوسان f بر چنین بازهٔ $[a_n, b_n]$ کوچکتر از یا مساوی نوسان f بر I خواهد بود. ما به یک تناقض رسیده‌ایم؛ زیرا، براساس فرض و ساختمان دنباله، نوسان f بر $[a_n, b_n]$، به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، بزرگتر از ε است.

قضیهٔ ۱۵.۲. تابع f و $[a,b]$ را مانند قضیهٔ ۱۴.۲ فرض کنید. اگر $\varepsilon > ۰$ مفروض باشد، δی مثبتی وجود دارد به طوری که اگر J زیربازهٔ دلخواهی از $[a,b]$ با طول کمتر از δ باشد نوسان f بر J کوچکتر از ε است.

برهان. به استناد قضیهٔ ۱۴.۲، می‌توانیم m را به قدری بزرگ اختیار کنیم که نوسان f بر هر یک از بازه‌های

$$[a, a+\delta],\ [a+\delta, a+۲\delta],\ \ldots,\ [a+(m-۱)\delta, b] \qquad (۱۵\cdot۲)$$

که طول هر یک از آنها برابر $\delta = (b-a)/m$ است، کمتر از $\varepsilon/۲$ باشد. زیربازه‌ای مانند J از $[a,b]$ با طول کمتر از δ را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $x_۱$ و $x_۲$ نقاطی از J باشند که f در آنها، به ترتیب، بیشترین و کمترین مقدار خود بر J را اختیار می‌کند که، در این صورت، $f(x_۱) - f(x_۲)$ نوسان f بر J خواهد بود. این دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ یا به یک بازه از بازه‌های (۱۵.۲) تعلق دارند که، در این صورت، $f(x_۱) - f(x_۲)$ کوچکتر از $\varepsilon/۲$ خواهد بود یا به دو زیربازهٔ متوالی

$$[a+(k-۱)\delta, a+k\delta] \quad \text{و} \quad [a+k\delta, a+(k+۱)\delta]$$

تعلق دارند که، در این حالت،

$$f(x_۱) - f(x_۲) = [f(x_۱) - f(a+k\delta)] + [f(a+k\delta) - f(x_۲)] < \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon$$

به این ترتیب، نوسان f بر هر زیربازه مانند J از $[a,b]$ که طولش کمتر از δ باشد کوچکتر از عدد مفروض ε است.

تعریف. تابع f را بر $[a,b]$ به طور یکنواخت پیوسته می‌نامند در صورتی که به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ مفروض، $\delta > ۰$ی که فقط به ε بستگی دارد موجود باشد به طوری که به‌ازای هر دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از $[a,b]$ که $|x_۱ - x_۲| < \delta$ داشته باشیم $|f(x_۱) - f(x_۲)| < \varepsilon$.

ملاحظات. پیوستگی یکنواخت را به آسانی می‌توان برحسب نوسان بیان کرد. تعریف ایجاب می‌کند که $\varepsilon > \omega(f, J)$ هرگاه طول بازهٔ J کمتر از δ باشد بدون توجه به این که J در کجای بازهٔ $[a, b]$ واقع شده باشد. یا، می‌توانیم بگوییم که نامساوی $\varepsilon > \omega(f, J)$ به طور یکنواخت برحسب همهٔ بازه‌های J برقرار است مشروط به این که طول J کمتر از δ باشد. از نظر هندسی، وضعیت را می‌توان به صورت زیر بیان کرد: مستطیل کوچکی به ارتفاع 2ε و عرض 2δ به مرکز نقطه‌ای از منحنی در نظر بگیرید. پیوستگی فقط و فقط وقتی یکنواخت است که هرگاه ارتفاع مستطیل مفروض باشد بتوانیم پهنای مستطیل را طوری انتخاب کنیم که وقتی مستطیل در امتداد منحنی $y = f(x)$ به گونه‌ای بلغزد که همواره موازی با خود باقی بماند، منحنی فقط اضلاع قائم مستطیل را قطع کند نه اضلاع بالا و پایین را.

قضیهٔ ۱۶.۲. فرض کنید تابع f بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ با طول متناهی پیوسته باشد. آن‌گاه f بر $[a, b]$ به طور یکنواخت پیوسته است.

برهان. مورد ادعّا فوراً از قضیهٔ ۱۵.۲ نتیجه می‌شود.

مثالها. تابع $g(x) = 1/x$ بر بازهٔ باز $(0, 1)$ به طور یکنواخت پیوسته نیست. در واقع، فرض کنید که g بر $(0, 1)$ به طور یکنواخت پیوسته می‌بود. آن‌گاه، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$، می‌توانستیم δیی، مثلاً بین ۰ و ۱، بیابیم که به‌ازای هر x_1 و x_2 از $[a, b]$ که $|x_1 - x_2| < \delta$ داشته باشیم $|g(x_1) - g(x_2)| < \varepsilon$. حال، فرض کنید $x_1 = \delta$ و $x_2 = \delta/(1 + \varepsilon)$. آن‌گاه، $|x_1 - x_2| = [\varepsilon/(1 + \varepsilon)]\delta < \delta$. امّا $|1/x_1 - 1/x_2| = \varepsilon/\delta > \varepsilon$ (زیرا $0 < \delta < 1$). به این ترتیب، یک تناقض به دست می‌آید و نتیجه می‌گیریم که g بر $(0, 1)$ به طور یکنواخت پیوسته نیست.

تابع $h(x) = \sin(1/x)$ بر بازهٔ باز $(0, 1/\pi)$ به طور یکنواخت پیوسته نیست. شکل ۶.۲ نمودار تابع h را نشان می‌دهد. در حالی که تابع h بین ۱− و ۱ کراندار است، نوسان f بر هر بازه مانند J به شکل $(0, a)$ با a مثبت (هر قدر کوچک باشد) برابر ۲ است. این امر از پیوستگی یکنواخت h بر $(0, 1/\pi)$ جلوگیری می‌کند.

تابع $w(x) = x^2$ بر $(0, \infty)$ به طور یکنواخت پیوسته تیست. هرگاه فقط x به قدر کافی بزرگ باشد، تغییرات کوچک x می‌تواند سبب تغییرات به طور دلخواه بزرگ x^2 شود. در واقع، فرض کنید عددی مثبت مانند δ موجود می‌بود به طوری که

$$\text{هرگاه} \quad |x - a| < \delta \quad \text{و} \quad a > 0 \quad \text{آن‌گاه} \quad |w(x) - w(a)| < 2$$

آن‌گاه به‌ازای $x = a + \delta/۲$، می‌داشتیم

$$|w(x) - w(a)| = |x - a||x + a| = \frac{\delta}{۲}\left|۲a + \frac{\delta}{۲}\right| < ۲$$

که از آن نتیجه می‌شود که نامساوی $a\delta < ۲$ به‌ازای هر $a > ۰$ برقرار باشد که بالبداهه دروغ است.

فرض کنید A یک مجموعهٔ غیرخالی از اعداد باشد و تعریف می‌کنیم:

$$v(x) = \inf\{|x - a| : a \in A\}, \qquad x \in \mathbb{R}$$

آن‌گاه v بر $(-\infty, \infty)$ به طور یکنواخت پیوسته است. در واقع، اگر $a \in A$، نامساویهای

$$v(x) \leq |x - a| \leq |x - y| + |y - a|$$

به‌ازای هر عدد حقیقی y برقرارند. اگر وقتی a در A تغییر می‌کند اینفیموم بگیریم، خواهیم داشت:

$$v(x) \leq |x - y| + v(y)$$

یا $v(x) - v(y) \leq |x - y|$. همچنین، با تعویض نقش x و y، نامساوی $v(y) - v(x) \leq |x - y|$ به دست می‌آید. این، نشان می‌دهد که

$$|v(x) - v(y)| \leq |x - y|$$

و، بنابراین، دیده می‌شود که v بر $(-\infty, \infty)$ به طور یکنواخت پیوسته است.

۳.۲ توابع یکنوا

تعریف. فرض کنید f تابعی حقیقی مقدار باشد که بر بازه‌ای مانند J تعریف شده است و x و y نقاطی از J باشند. آن‌گاه، می‌گوییم f بر J نانزولی است در صورتی که

$x < y$ مستلزم $f(x) \leq f(y)$ باشد.

f بر J اکیداً صعودی نامیده می‌شود در صورتی که

$x < y$ مستلزم $f(x) < f(y)$ باشد.

به طور مشابه، f را بر J ناصعودی می‌نامند در صورتی که

$x < y$ مستلزم $f(x) \geq f(y)$ باشد؛

و آن را بر J اکیداً نزولی می‌نامند در صورتی که

$x < y$ مستلزم $f(x) > f(y)$ باشد.

ردهٔ توابع یکنوا متشکل است از توابع نانزولی و ناصعودی، و ردهٔ توابع اکیداً یکنوا متشکل است از توابع اکیداً صعودی و اکیداً نزولی.

تعریف. فرض کنید f تابعی حقیقی مقدار باشد که بر بازهٔ (a,b) تعریف شده است. اگر در نقطه‌ای مانند x از (a,b) پیوسته نباشد، می‌گوییم: f در x ناپیوسته است. اگر f در نقطهٔ x از (a,b) ناپیوسته باشد ولی حدود یکطرفهٔ $f(x+)$ و $f(x-)$ موجود باشند، می‌گوییم : f یک ناپیوستگی از نوع اول یا ناپیوستگی ساده در x دارد. در غیر این صورت، ناپیوستگی را از نوع دوم می‌نامند.

توضیح. سه تابع زیر را در نظر بگیرید:

$$
\begin{aligned}
f(x) &= ۱, & x &\geq ۰\\
&= -۱, & x &< ۰\\
g(x) &= ۱, & x &\neq ۰\\
&= ۰, & x &= ۰\\
h(x) &= \sin\frac{۱}{x}, & x &\neq ۰\\
&= ۰, & x &= ۰
\end{aligned}
$$

واضح است که $f(۰+) = ۱$ و $f(۰-) = -۱$؛ به این ترتیب، f یک ناپیوستگی از نوع اول در $x = ۰$ دارد. در مورد تابع g، $g(۰+) = g(۰-) = ۱$ ولی $g(۰) = ۰$؛ از این رو، g یک ناپیوستگی از نوع اول در $x = ۰$ دارد. در مورد تابع h، نه $h(۰+)$ وجود دارد نه $h(۰-)$ [شکل ۶.۲ را ملاحظه و توجه کنید که $h(-x) = -h(x)$]؛ بنابراین، h یک ناپیوستگی از نوع دوم در $x = ۰$ دارد.

تبصره. از دو طریق میسر است که تابعی مانند f یک ناپیوستگی ساده در x داشته باشد: یا $f(x+) \neq f(x-)$ یا $f(x+) = f(x-) \neq f(x)$. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که تابعی یکنوا مانند f هیچ ناپیوستگی از نوع دوم ندارد؛ زیرا حدود یکطرفهٔ $f(x+)$ و $f(x-)$ موجودند.

قضیهٔ ۱۷.۲. فرض کنید f یک تابع نانزولی بر بازهٔ باز (a,b) باشد. آن‌گاه، به‌ازای هر x که $a < x < b$،

$$A = f(x-) \leq f(x) \leq f(x+) = B \qquad (۱۶.۲)$$

که در آن $A = \sup\{f(t) : a < t < x\}$ و $B = \inf\{f(t) : x < t < b\}$. بعلاوه، اگر $a < x < y < b$، آن‌گاه

$$f(x+) \leq f(y-)$$

برهان. بنابر فرض، مجموعهٔ اعداد $f(t)$، که در آن $a < t < x$، از بالا به عدد $f(x)$ کراندار است؛ از این رو، دارای سوپرمم است که آن را به A نشان می‌دهیم. به وضوح، $A \leq f(x)$. تحقیق می‌کنیم که $A = f(x-)$.

فرض کنید $\varepsilon > ۰$ مفروض باشد. از تعریف A به عنوان سوپرمم نتیجه می‌شود که $\delta > ۰$ی موجود است به طوری که $a < x - \delta < x$ و

$$A - \varepsilon < f(x - \delta) \leq A$$

چون f نانزولی است، به‌ازای $x - \delta < t < x$، داریم $f(x - \delta) \leq f(t) \leq A$. از این رو، به‌ازای $x - \delta < t < x$، داریم $|f(t) - A| < \varepsilon$ و، بنابراین، $f(x-) = A$.

نیمهٔ دوم (۱۶.۲) به طریق مشابه ثابت می‌شود.

بعد، اگر $a < x < y < b$، از (۱۶.۲) درمی‌یابیم که

$$f(x+) = \inf\{f(t) : x < t < b\} = \inf\{f(t) : x < t < y\}$$

تساوی دوم از اعمال (۱۶.۲) در بازهٔ (a,y)، به جای (a,b)، به دست می‌آید. به طور مشابه،

$$f(y-) = \sup\{f(t) : a < t < y\} = \sup\{f(t) : x < t < y\}$$

بنابراین، دیده می‌شود که $f(x+) \leq f(y-)$ به‌ازای $a < x < y < b$ برقرار است.

تعریف. اگر X و Y دو مجموعهٔ غیرخالی باشند، آن‌گاه مجموعهٔ همهٔ ازواج مرتب (x,y) را که $x \in X$ و $y \in Y$ حاصل ضرب دکارتی X و Y می‌نامند و به $X \times Y$ نشان می‌دهند. در این جا، فقط و فقط وقتی $(x_۱, y_۱) = (x_۲, y_۲)$ که $x_۱ = x_۲$ و $y_۱ = y_۲$. x را مختص اول زوج (x,y) و y را مختص دوم آن می‌نامیم.

هر تابع از X به Y، زیرمجموعه‌ای غیرخالی از ازواج (x,y) در $X \times Y$ است به طوری که هیچ دو زوج متمایزی در آن یافت نشوند که دارای مختصات اول یکسان باشند. مجموعه‌های

$$D[f] = \{x : x \in X, (x,y) \in f\}$$
$$R[f] = \{y : y \in Y, (x,y) \in f\}$$

را، به ترتیب، قلمرو و برد f می‌نامند.

f را یک به یک می‌نامیم در صورتی که هرگاه $f \ni (x_۱, y_۱)$، $f \ni (x_۲, y_۲)$، و $x_۱ \neq x_۲$؛ آن‌گاه $y_۱ \neq y_۲$.

تعریف. فرض کنید f تابعی یک به یک با قلمرو $D[f]$ و برد $R[f]$ باشد. آن‌گاه، می‌گویند f معکوس‌پذیر است و تابع معکوس f، که به $f^{-۱}$ نشان داده می‌شود، با مجموعهٔ ازواج مرتب

$$\{(y,x) : y \in R[f], x \in D[f]\}$$

تعریف می‌شود. داریم:

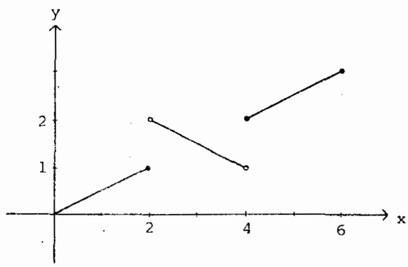
$$f^{-۱}[f(x)] = x, \qquad x \in D[f]$$
$$f[f^{-۱}(y)] = y, \qquad y \in R[f]$$

ملاحظات. ما با توابعی سروکار داریم که مجموعه‌ای از اعداد حقیقی را به مجموعهٔ دیگری از اعداد حقیقی می‌نگارند. درک معنای عباراتی که در تعریف آمد بسیار ساده است. هر تابع به عنوان یک مجموعه تعریف می‌شود، یعنی، مجموعهٔ نقاطی که نمودار تابع را تشکیل می‌دهند. تابعی یک‌به‌یک است که هر خط راست موازی محور x نمودار تابع را در حداکثر یک نقطه قطع کند. سرانجام، اگر f یک‌به‌یک باشد، یعنی، f معکوس‌پذیر باشد، آن‌گاه نمودار $f^{-۱}$ صرفاً از انعکاس نمودار f حول خط $y = x$ به دست می‌آید. هر تابع اکیداً یکنوا، یک‌به‌یک است، امّا هر تابع یک‌به‌یک الزاماً یکنوا نیست؛ مثلاً، تابع

$$\begin{aligned} f(x) &= \frac{۱}{۲}x \qquad , \quad ۰ \leq x \leq ۲ \\ &= -\frac{۱}{۲}x + ۳, \quad ۲ < x < ۴ \\ &= \frac{۱}{۲}x \qquad , \quad ۴ \leq x \leq ۶ \end{aligned}$$

بازهٔ بستهٔ $[\circ,۶]$ را بر بازهٔ بستهٔ $[\circ,۳]$ به صورت یک به‌یک می‌نگارد، ولی تابع f بر $[\circ,۶]$ یکنوا نیست. همچنین، توجه کنید که f همهٔ مقادیر بین ۰ و ۳ را اختیار می‌کند، ولی f در همهٔ نقاط بازهٔ $[\circ,۶]$ پیوسته نیست (ناپیوستگیهایی در نقاط $x=۲$ و $x=۴$ دارد). نمودار $y=f(x)$ را در شکل ۹.۲ ببینید.

قضیهٔ ۱۸.۲. فرض کنید f تابع پیوسته‌ای بر بازهٔ بستهٔ $I=[a,b]$ با طول متناهی باشد. آن‌گاه، f فقط و فقط وقتی معکوس‌پذیر است که اکیداً یکنوا باشد. بالبداهه، $f^{-۱}$ صعودی یا نزولی است بر حسب آن که f صعودی یا نزولی باشد. بعلاوه، تابع معکوس $f^{-۱}$ بر بازهٔ تعریف I^*، خود پیوسته است.



شکل ۹.۲

برهان. واضح است که یکنوایی اکید شرطی کافی برای معکوس‌پذیری f است. فقط باید نشان دهیم که این شرط در حالت پیوستگی لازم نیز هست. برای این که f معکوس‌پذیر باشد، باید به‌ازای هر دو نقطهٔ متمایز $x_۱$ و $x_۲$ از I داشته باشیم $f(x_۱)\neq f(x_۲)$. چون فرض شده است که f پیوسته است، به‌ازای هر x بین $x_۱$ و $x_۲$، داریم:

$$\{f(x)-f(x_۱)\}\{f(x)-f(x_۲)\}<\circ \qquad (۱۷.۲)$$

برای اثبات این، فرض می‌کنیم $x_۱$ و $x_۲$ طوری اندیسگذاری شده باشند که $f(x_۱)$ کوچکتر از $f(x_۲)$ باشد. حال، فرض کنید که $f(x)>f(x_۲)$. به استناد قضیهٔ ۱۲.۲، مقدار $f(x_۲)$ در نقطه‌ای بین $x_۱$ و x اختیار می‌شود؛ معذالک، این با معکوس‌پذیری f متناقض است، زیرا $x_۲$ بین $x_۱$ و x واقع نشده است. به طریق مشابه، این فرض که $f(x)$ کوچکتر از $f(x_۱)$ باشد نیز به یک تناقض می‌انجامد. بنابراین $f(x_۱)<f(x)<f(x_۲)$ و (۱۷.۲) عاید می‌شود.

اینک، فرض کنید که f بر I یکنوا نباشد. آن‌گاه، دو زوج نقاط $y_۱$، $y_۲$ و $y_۳$، $y_۴$ در I می‌توان یافت

که $y_1 < y_2$ و $y_3 < y_4$ ولی

$$f(y_1) < f(y_2) \quad \text{و} \quad f(y_3) > f(y_4) \tag{۱۸.۲}$$

بی‌آن که به کلیت استدلال خللی وارد آید، می‌توانیم فرض کنیم که هیچ یک از نقاط y_1 ، y_2، y_3، و y_4 یک نقطهٔ انتهایی I نباشد. (توجه کنید: اگر f در t پیوسته باشد و، به‌ازای عدد حقیقی مفروضی مانند c، $f(t) > c$ [یا $f(t) < c$]، آن‌گاه یک همسایگی مانند U از t وجود دارد به طوری که نامساوی $f(x) > c$ [یا $f(x) < c$] به‌ازای هر x از U و واقع در I، حوزهٔ تعریف f، برقرار باشد. این، نتیجهٔ ساده‌ای از قضیهٔ ۱۰.۲ است که در مورد تابع $g(x) = f(x) - c$ به کار رفته باشد.) آن‌گاه، نقاطی مانند v و w در I موجودند که به‌ازای $k = ۱, ۲, ۳, ۴$،

$$v < y_k < w$$

به استناد (۱۷.۲)، داریم:

$$\{f(y_1) - f(v)\}\{f(y_1) - f(y_2)\} < ۰$$

و

$$\{f(y_2) - f(y_1)\}\{f(y_2) - f(w)\} < ۰$$

از جمع این دو نامساوی، خواهیم داشت:

$$\{f(y_1) - f(y_2)\}^۲ - \{f(v) - f(w)\}\{f(y_1) - f(y_2)\} < ۰$$

به این ترتیب،

$$\{f(v) - f(w)\}\{f(y_1) - f(y_2)\} > ۰$$

به طریق مشابه، به دست می‌آوریم:

$$\{f(v) - f(w)\}\{f(y_3) - f(y_4)\} > ۰$$

امّا، این، نامساوی (۱۸.۲) را نقض می‌کند. بنابراین، نشان داده‌ایم که f اکیداً یکنوا است.

نشان می‌دهیم که اگر f اکیداً صعودی باشد آن‌گاه f^{-1} اکیداً صعودی است، حالتی که f اکیداً نزولی باشد کاملاً مشابه است. فرض کنید که

$$x_2 = f^{-1}(y_2) \quad \text{و} \quad x_1 = f^{-1}(y_1) \quad \text{و} \quad y_1 < y_2$$

آن‌گاه

$$y_1 = f(x_1) \qquad \text{و} \qquad y_2 = f(x_2)$$

اگر $x_2 < x_1$ آن‌گاه $y_2 < y_1$ (زیرا f اکیداً صعودی است)، که ناقض فرض است. اگر $x_1 = x_2$ آن‌گاه $y_1 = y_2$، که باز هم خلاف فرض است. از این رو، فقط $x_1 < x_2$ ممکن و دیده می‌شود که f^{-1} اکیداً صعودی است.

برای تکمیل برهان، باید نشان دهیم که f^{-1} پیوسته است بر I^* که، به عنوان برد f و به استناد قضایای ۱۲.۲ و۱۳.۲، بازه‌ای بسته با طول متناهی است.

فرض کنید r در برد f باشد و بنویسید $r = f(s)$ که در آن $s \in I$. می‌خواهیم ثابت کنیم که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ مفروض، $\delta > 0$ی موجود است به طوری که به‌ازای هر y از برد f که $|y - r| < \delta$ داریم: $|f^{-1}(y) - f^{-1}(r)| < \varepsilon$.

برای نیل به این مقصود، فرض کنید $\varepsilon > 0$. به استناد احکامی که تاکنون ثابت کرده‌ایم، f اکیداً یکنوا است. بی‌آن که به کلیّت استدلال خللی وارد شود، فرض می‌کنیم که f صعودی باشد. چون $s - \varepsilon < s < s + \varepsilon$، داریم

$$f(s-\varepsilon) < f(s) < f(s+\varepsilon)$$

فرض کنید δ کوچکترین اعداد $f(s) - f(s-\varepsilon)$ و $f(s+\varepsilon) - f(s)$ باشد. آن‌گاه

$$f(s-\varepsilon) \leq f(s) - \delta < f(s) + \delta \leq f(s+\varepsilon)$$

از این رو، به‌ازای هر y که $f(s) - \delta < y < f(s) + \delta$، داریم

$$f(s-\varepsilon) < y < f(s+\varepsilon)$$

چون f صعودی است، f^{-1} نیز چنین است. از این رو،

$$f^{-1}\{f(s-\varepsilon)\} < f^{-1}(y) < f^{-1}\{f(s+\varepsilon)\}$$

یعنی،

$$s - \varepsilon < f^{-1}(y) < s + \varepsilon$$

امّا $f^{-1}(r) = s$. بنابراین،

$$|f^{-1}(r) - f^{-1}(y)| < \varepsilon$$

به این ترتیب، نشان داده‌ایم که به‌ازای هر y که $r - \delta < y < r + \delta$،

$$|f^{-1}(r) - f^{-1}(y)| < \varepsilon$$

لذا، f^{-1} در r پیوسته است.

۴.۲ مثالهای گوناگون

۱) توابع لگاریتمی $f(x) = \ln x$ و $g(x) = \log_a x$، که در آن $a > 0$ ، $a \neq 1$، بر $(0, \infty)$ پیوسته‌اند. در واقع، به استناد (۳.۱)

$$\frac{x-c}{x} < \ln x - \ln c < \frac{x-c}{c}, \qquad x > c$$

و

$$\frac{c-x}{c} < \ln c - \ln x < \frac{c-x}{x}, \qquad x < c$$

در هر صورت، به‌ازای هر c از $(0, \infty)$، $\ln x \longrightarrow \ln c$ وقتی که $x \longrightarrow c$. برای تحقیق در پیوستگی $g(x) = \log_a x$ فقط باید یادآوری کنیم که

$$\log_a x = (\log_a e)(\ln x)$$

۲) توابع نمایی $v(x) = e^x$ و $w(x) = a^x$، که در آن $a > 0$ و $a \neq 1$، بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته‌اند. در واقع، مورد ادعا فوراً از قضیهٔ ۱۸.۲ نتیجه می‌شود. تابع $v(x) = e^x$، تابع معکوس تابع پیوستهٔ اکیداً صعودی $f(x) = \ln x$ است؛ این حکم را که $f(x) = \ln x$ اکیداً صعودی است می‌توان از نامساوی

$$\frac{x-c}{x} < \ln x - \ln c, \qquad x > c > 0$$

که قبلاً در مثال ۱ آورده شد، نتیجه گرفت. در بخش ۳ از فصل ۱، برهان مستقیمی از پیوستگی تابع نمایی $v(x) = e^x$ عرضه شده است.

برای تحقیق در پیوستگی تابع نمایی در مبنای a، یعنی $w(x) = a^x$، می‌توانیم قضیهٔ ۱۸.۲ را به کار ببریم و با $w(x) = a^x$ به عنوان تابع معکوس تابع اکیداً یکنوا و پیوستهٔ $g(x) = \log_a x$ رفتار کنیم. راه‌حل دیگر، این است که نشان بدهیم که $a^x \longrightarrow a^c$ وقتی که $x \longrightarrow c$. چون

$$a^x - a^c = a^c(a^{x-c} - 1)$$

لازم است تحقیق کنیم که $a^{x-c} \longrightarrow ۱$ وقتی که $x - c \longrightarrow ۰$؛ یا، به طور معادل، $a^t \longrightarrow ۱$ وقتی که $t \longrightarrow ۰$. اکنون به این کار می‌پردازیم. کافی است که فقط حالت $a > ۱$ را در نظر بگیریم.

فرض کنید $a > ۱$. به استناد لم ماقبل قضیهٔ ۱۰.۱، $a^{۱/n} \longrightarrow ۱$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. می‌خواهیم این حکم کلیتر را ثابت کنیم که $a^t \longrightarrow ۱$ وقتی که $t \longrightarrow ۰$. نخست، توجه می‌کنیم که

$$\lim_{n\to\infty} a^{-۱/n} = \frac{۱}{\lim_{n\to\infty} a^{۱/n}} = ۱$$

به این ترتیب، متناظر با هر $\varepsilon > ۰$، عدد صحیح مثبتی مانند $n_۰$ موجود است به طوری که

$$۱ - \varepsilon < a^{-۱/n_۰} < a^{۱/n_۰} < ۱ + \varepsilon, \quad (a > ۱)$$

حال، اگر

$$-\frac{۱}{n_۰} < t < \frac{۱}{n_۰} \quad \text{یا} \quad |t| < \frac{۱}{n_۰}$$

آن‌گاه

$$a^{-۱/n_۰} < a^t < a^{۱/n_۰}$$

که از آن نتیجه می‌شود که

$$|a^t - ۱| < \varepsilon \quad \text{یا} \quad ۱ - \varepsilon < a^t < ۱ + \varepsilon$$

که همان چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

۳) تابع توانی $h(x) = x^b$، که در آن $x > ۰$ و b یک عدد حقیقی ثابت است، بر $(۰, \infty)$ پیوسته است. در واقع، به تبصرهٔ بعد از قضیهٔ ۹.۲ مراجعه کنید.

۴) تابع چندجمله‌ای $P(x) = c_n x^n + c_{n-۱}x^{n-۱} + \cdots + c_۱ x + c_۰$، که در آن c_n، $c_{n-۱}$، ...، $c_۱$، $c_۰$ اعداد حقیقی ثابت هستند، بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته است. تابع گویای

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

که در آن P و Q توابع چندجمله‌ای هستند، بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته است، جز در نقاطی مانند a که به‌ازای آنها $Q(a) = ۰$.

در واقع، به ملاحظات بعد از قضیهٔ ۶.۲ توجه کنید.

۵) تابع مثلثاتی $s(x) = \sin x$ بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته است. در واقع، به استناد (۹.۲)،

$$\sin x < x, \qquad ۰ < x < \frac{\pi}{۲}$$

از این، به آسانی نتیجه می‌شود که

$$\text{به‌ازای هر عدد حقیقی } x، \qquad |\sin x| \leq |x| \;.$$

[به ازای $۱ < \frac{\pi}{۲} \leq |x|$، این حکم از $|\sin x| \leq ۱$ نتیجه می‌شود؛ بعلاوه، $s(-x) = -s(x)$].
امّا

$$\sin x - \sin c = ۲ \sin \frac{x-c}{۲} \cos \frac{x-c}{۲}$$

بنابراین،

$$|\sin x - \sin c| = ۲ \left|\sin \frac{x-c}{۲}\right| \left|\cos \frac{x-c}{۲}\right| \leq ۲ \left|\sin \frac{x-c}{۲}\right| \leq ۲ \frac{|x-c|}{۲}$$

یعنی،

(۱۹.۲) به‌ازای هر دو عدد حقیقی x و c، $\quad |\sin x - \sin c| \leq |x - c|$.

به این ترتیب، $\sin x \longrightarrow \sin c$ وقتی که $x \longrightarrow c$. [در واقع، از (۱۹.۲) پیوستگی یکنواخت بر $(-\infty, \infty)$ ثابت می‌شود.]

از تبصرهٔ بعد از قضیهٔ ۹.۲ می‌توانیم ببینیم که تابع کسینوس نیز بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته است. معذالک، توابع

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \qquad \sec x = \frac{۱}{\cos x}, \qquad \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \qquad \csc x = \frac{۱}{\sin x}$$

نقاط ناپیوستگی معیّنی دارند؛ توابع $\tan x$ و $\sec x$ به‌ازای هر x که $\cos x \neq ۰$ پیوسته‌اند، و $\cot x$ و $\csc x$ به‌ازای هر x که $\sin x \neq ۰$ پیوسته‌اند. نقاط ناپیوستگی $\tan x$ و $\sec x$ به شکل $(۲k + ۱)\pi/۲$ هستند و نقاط ناپیوستگی $\cot x$ و $\csc x$ به شکل $k\pi$ می‌باشند، که در آنها k یک عدد صحیح دلخواه است.

۶) فرض کنید f تابع پیوسته‌ای بر بازهٔ بستهٔ $[۰, ۲]$ باشد و $f(۰) = f(۲)$. آن‌گاه، نقاطی مانند $x_۱$ و $x_۲$ در $[۰, ۲]$ موجودند به طوری که $|x_۱ - x_۲| = ۱$ و $f(x_۱) = f(x_۲)$.

در واقع، فرض کنید $g(x) = f(x+1) - f(x)$ بر $[0, 1]$. آن‌گاه g بر $[0, 1]$ پیوسته است و $g(1) = -g(0)$. اگر $g(0) = 0$ آن‌گاه $f(1) = f(0)$ و به مقصود رسیده‌ایم. اگر $g(0) \neq 0$ آن‌گاه $g(0)$ و $g(1)$ مختلف‌العلامه‌اند؛ به استناد قضیهٔ ۱۲.۲، نقطه‌ای مانند t در $[0, 1]$ موجود است به طوری که $g(t) = f(t+1) - f(t) = 0$، یعنی، $f(t+1) = f(t)$.

۷) فرض کنید g تابع پیوسته‌ای باشد که بازهٔ بستهٔ $[0, 1]$ را برخود می‌نگارد. آن‌گاه، نقطه‌ای مانند t در $[0, 1]$ وجود دارد به طوری که $g(t) = t$.

در واقع، فرض کنید $h(x) = g(x) - x$ بر $[0, 1]$. آن‌گاه h بر $[0, 1]$ پیوسته است. چون $h(0) = g(0) - 0 = g(0) \geq 0$ و $h(1) = g(1) - 1 \leq 1 - 1 = 0$، قضیهٔ ۱۲.۲ نشان می‌دهد که نقطه‌ای مانند t در $[0, 1]$ وجود دارد به طوری که $h(t) = 0$؛ بنابراین، $g(t) = t$.

۸) معادلهٔ $x2^x = 1$ به‌ازای xای از $(0, 1)$ برقرار است.

در واقع، فرض کنید $h(x) = x2^x$ بر $[0, 1]$. آن‌گاه $h(0) = 0$ و $h(1) = 2$. به استناد قضیهٔ ۱۲.۲، نقطه‌ای مانند t بین ۰ و ۱ موجود است به طوری که $h(t) = 1$.

۹) فرض کنید f تابع پیوسته‌ای بر بازهٔ J با طول متناهی باشد و x_1، x_2، و x_3 نقاطی از J باشند و p_1، p_2، و p_3 اعداد حقیقی مثبتی باشند. آن‌گاه، نقطه‌ای مانند t در J وجود دارد به طوری که

$$f(t) = \frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + p_3 f(x_3)}{p_1 + p_2 + p_3}$$

در واقع، فرض کنید $a = \min\{x_1, x_2, x_3\}$ و $b = \max\{x_1, x_2, x_3\}$، و قرار دهید $v = \min\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\}$ و $V = \max\{f(x_1), f(x_2), f(x_3)\}$. آن‌گاه f بر $[a, b]$ با طول متناهی پیوسته است و f همهٔ مقادیر بین v و V را اختیار می‌کند. امّا

$$v(p_1 + p_2 + p_3) \leq p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + p_3 f(x_3) \leq V(p_1 + p_2 + p_3)$$

یا

$$v \leq \frac{p_1 f(x_1) + p_2 f(x_2) + p_3 f(x_3)}{p_1 + p_2 + p_3} \leq V$$

[واضح است که حکم مورد بحث را می‌توان از حالت سه‌نقطه‌ای به حالتی که تعداد متناهی دلخواهی از نقاط مطرح باشد تعمیم داد.]

۱۰) هر عدد گویای x را می‌توان به صورت $x = p/q$ نوشت که در آن $q > 0$ و p و q اعدادی صحیح هستند که مقسوم‌علیه مشترک ندارند. وقتی $x = 0$، می‌گیریم $q = 1$. تابع f را که بر $[0, 1]$ با ضابطهٔ

$$f(x) = \circ \qquad \text{اگر } x \text{ اصم باشد}$$
$$= \frac{1}{q} \qquad x = \frac{p}{q} \quad \text{اگر}$$

تعریف شده است در نظر بگیرید. آن‌گاه، f در هر نقطهٔ اصم $(\circ, 1)$ پیوسته است و در هر نقطهٔ گویای $(\circ, 1)$ ناپیوسته است.

در واقع، فرض کنید t نقطه‌ای از $(\circ, 1)$ باشد. به‌ازای $\varepsilon > \circ$ مفروض، فقط تعداد متناهی عدد صحیح مثبت مانند q وجود دارد که از $1/\varepsilon$ بزرگتر نیستند؛ معنایش این است که فقط تعدادی متناهی نقطهٔ گویای p/q در $(\circ, 1)$ موجودند که به‌ازای آنها $f(p/q) = 1/q \geq \varepsilon$. از این رو، می‌توانیم یک همسایگی مانند $(t - \delta, t + \delta)$ با شعاع $\delta > \circ$ حول نقطهٔ t بسازیم به طوری که در این همسایگی هیچ نقطه‌ای مانند x یافت نشود که $f(x) \geq \varepsilon$ (احتمالاً، جز خود نقطهٔ t). از این رو، اگر $\circ < |x - t| < \delta$، خواه x گویا باشد خواه اصم، داریم $|f(x)| < \varepsilon$. به این ترتیب، حدود یکطرفه در هر نقطهٔ t از $(\circ, 1)$ در

$$f(t+) = f(t-) = \circ$$

صدق می‌کنند. اگر t اصم باشد آن‌گاه $f(t) = \circ$، یعنی، f در t پیوسته است؛ اگر t گویا باشد آن‌گاه $f(t) \neq \circ$، یعنی، f در t ناپیوسته است.

۱۱) فرض کنید g بر $(-\infty, \infty)$ به صورت زیر تعریف شود:

$$g(x) = \circ, \qquad \text{اگر } x \text{ اصم است.}$$
$$= x, \qquad \text{اگر } x \text{ گویا است.}$$

آن‌گاه، g در $x = \circ$ پیوسته است و در هر جای دیگر ناپیوسته.

در واقع، $\lim_{x\to\circ} g(x) = \circ$؛ ولی $\lim_{x\to a} g(x)$ به‌ازای $a \neq \circ$ وجود ندارد، زیرا هر بازه باز (غیرخالی) خط حقیقی هم شامل اعداد گویا است هم شامل اعداد اصم.

۱۲) هر تابع اکیداً صعودی (یا اکیداً نزولی) بر یک بازه که همهٔ مقادیر میانی را اختیار کند، پیوسته است.

در واقع، فرض کنید g تابعی اکیداً صعودی بر بازه‌ای مانند J باشد به طوری که مجموعهٔ $g(x)$، وقتی x در سرتاسر J تغییر می‌کند، بازه‌ای مانند I باشد. نقطه‌ای مانند t در J در نظر بگیرید و فرض کنید که t از نقاط انتهایی J نباشد؛ اگر t یک نقطهٔ انتهایی باشد، تنها برخی تغییرات جزئی در برهان لازم می‌شود. در این صورت، $g(t)$ از نقاط انتهایی I نیست و، بنابراین، $\sigma > \circ$ی وجود

دارد به طوری که بازهٔ باز $(g(t) - \sigma, g(t) + \sigma)$ مشمول I باشد. ε را عدد مثبتی بگیرید که $\varepsilon < \sigma$. آن‌گاه نقاطی مانند $x_۱$ و $x_۲$ در J موجودند به طوری که

$$g(x_۱) = g(t) - \varepsilon \quad \text{و} \quad g(x_۲) = g(t) + \varepsilon$$

واضح است که $x_۱ < t < x_۲$. بعلاوه، اگر $x_۱ < x < x_۲$ آن‌گاه

$$g(x_۱) < g(x) < g(x_۲) \quad \text{یا} \quad g(t) - \varepsilon < g(x) < g(t) + \varepsilon$$

و، از این رو، $|g(x) - g(t)| < \varepsilon$. حال، اگر قرار دهیم $\delta = \min\{x_۲ - t, t - x_۱\}$ آن‌گاه

$$|x - t| < \delta \quad \text{ایجاب می‌کند که} \quad x_۱ < x < x_۲$$

و، بنابراین، $|g(x) - g(t)| < \varepsilon$.

اگر g اکیداً نزولی باشد آن‌گاه $-g$ اکیداً صعودی است؛ از این رو، حالتی که g اکیداً نزولی باشد نیاز به ذکر برهانی جداگانه ندارد.

۱۳) فرض کنید a و b اعداد حقیقی مفروضی باشند. آن‌گاه

$$\lim_{x\to\infty} \{\sqrt{(x+a)(x+b)} - x\} = \frac{a+b}{۲}$$

در واقع، داریم:

$$\begin{aligned}\sqrt{(x+a)(x+b)} - x &= \frac{(x+a)(x+b) - x^۲}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x} = \frac{(a+b)x + ab}{\sqrt{(x+a)(x+b)} + x} \\ &= \frac{a + b + ab/x}{\sqrt{(۱ + a/x)(۱ + b/x)} + ۱}\end{aligned}$$

با استفاده از پیوستگی تابع توانی (مثال ۳)، خواهیم داشت:

$$\sqrt{\left(۱ + \frac{a}{x}\right)\left(۱ + \frac{b}{x}\right)} \longrightarrow ۱ \quad \text{وقتی که} \quad x \longrightarrow \infty$$

و حکم مطلوب نتیجه می‌شود.

۱۴) فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ...، a_k اعداد حقیقی مفروضی باشند و قرار دهید

$$S(x) = \sqrt[k]{(x + a_۱)(x + a_۲)\ldots(x + a_k)} - x$$

آن‌گاه $\lim_{x\to\infty} S(x) = (a_1 + a_2 + \cdots + a_k)/k$.

در واقع، با جایگزینی

$$z = x \quad \text{و} \quad y = \sqrt[k]{(x+a_1)(x+a_2)\dots(x+a_k)}$$

در اتحاد

$$y - z = \frac{y^k - z^k}{y^{k-1} + y^{k-2}z + \cdots + z^{k-1}}$$

چنین به دست می‌آید

$$\begin{aligned} S(x) &= \frac{(x+a_1)\dots(x+a_k) - x^k}{(\sqrt[k]{\dots})^{k-1} + x(\sqrt[k]{\dots})^{k-2} + \cdots + x^{k-1}} \\ &= \frac{(a_1 + \cdots + a_k) + (a_1a_2 + \cdots + a_{k-1}a_k)/x + \cdots + (a_1a_2\dots a_k)/x^{k-1}}{\{\sqrt[k]{(1+a_1/x)\dots(1+a_k/x)}\}^{k-1} + \cdots + 1} \end{aligned}$$

چون $\sqrt[k]{(1+a_1/x)\dots(1+a_k/x)} \longrightarrow 1$ وقتی که $x \longrightarrow \infty$، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\infty} S(x) = \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_k}{k}$$

۱۵) اگر m یک عدد صحیح مثبت باشد آن‌گاه

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{x - 1} = \frac{1}{m}$$

در واقع، فرض کنید $x = t^m$. آن‌گاه $t = x^{1/m}$ به‌ازای $x > 0$ پیوسته است (مثال ۳ را ببینید.) و $t \longrightarrow 1$ وقتی که $x \longrightarrow 1$. بنابراین،

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{x - 1} = \lim_{t\to 1} \frac{t - 1}{t^m - 1} = \lim_{t\to 1} \frac{1}{t^{m-1} + t^{m-2} + \cdots + t + 1} = \frac{1}{m}$$

۱۶) اگر m و n اعداد صحیح مثبت باشند آن‌گاه

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \frac{n}{m}$$

در واقع، داریم (به استناد مثال ۱۵):

$$\lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \lim_{x\to 1} \frac{\sqrt[m]{x} - 1}{x - 1} . \lim_{x\to 1} \frac{x - 1}{\sqrt[n]{x} - 1} = \frac{1}{m} . \frac{n}{1} = \frac{n}{m}$$

۱۷) اگر p، q، r، و s اعداد صحیح مثبت باشند آن‌گاه

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{p/q}-1}{x^{r/s}-1}=\frac{ps}{qr}$$

در واقع، فرض کنید $x = t^q$. آن‌گاه $t = x^{1/q}$ به‌ازای $x > 0$ پیوسته است (مثال ۳ را ببینید.) و $t \longrightarrow 1$ وقتی که $x \longrightarrow 1$. به این ترتیب، به استناد مثال ۱۶،

$$\lim_{x\to 1}\frac{x^{p/q}-1}{x-1}=\lim_{t\to 1}\frac{t^p-1}{t^q-1}=\frac{p}{q}$$

از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to 1}\frac{x-1}{x^{r/s}-1}=\frac{s}{r}$$

از این رو، حکم مطلوب نتیجه می‌شود.

۱۸) اگر a و b اعداد حقیقی مفروضی باشند آن‌گاه

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{a}{b}$$

در واقع، داریم:

$$\frac{\sin ax}{\sin bx}=\frac{\sin ax}{ax}.\frac{bx}{\sin bx}.\frac{a}{b}$$

امّا، به استناد (۸.۲)، $(\sin t)/t \longrightarrow 1$ وقتی که $t \longrightarrow 0$.

۱۹) داریم:

$$\lim_{x\to\infty}[\ln(x+1)-\ln x]=0$$

در واقع، چون

$$\ln(x+1)-\ln x=\ln\frac{x+1}{x} \quad \text{و} \quad \ln t\longrightarrow 0 \quad \text{وقتی که} \quad t\longrightarrow 1$$

حکم مطلوب نتیجه می‌شود.

۲۰) داریم:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(x+1)}{x}=1 \qquad (۲۰.۲)$$

در واقع، به استناد (۳.۱)،

$$\frac{۱}{۱+x} < \frac{\ln(۱+x)}{x} < ۱, \qquad x > ۰$$

و

$$۱ < \frac{\ln(۱+x)}{x} < \frac{۱}{۱+x}, \qquad -۱ < x < ۰$$

مورد ادّعا فوراً نتیجه می‌شود.

۲۱) اگر $a > ۰$ و $a \neq ۱$ آن‌گاه

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\log_a(۱+x)}{x} = \log_a e \qquad (۲۱.۲)$$

در واقع، با توجه به رابطهٔ زیر، (۲۱.۲) از (۲۰.۲) نتیجه می‌شود:

$$\log_a(۱+x) = (\log_a e)\ln(۱+x)$$

۲۲) اگر $a > ۰$ و $a \neq ۱$ آن‌گاه

$$\lim_{x\to ۰} \frac{a^x - ۱}{x} = \ln a \qquad (۲۲.۲)$$

در واقع، اگر قرار دهیم $y = a^x - ۱$ آن‌گاه $y \longrightarrow ۰$ وقتی که $x \longrightarrow ۰$، زیرا تابع نمایی پیوسته است. بعلاوه، $x = \log_a(۱+y)$ و، به استناد (۲۱.۲)،

$$\lim_{x\to ۰} \frac{a^x - ۱}{x} = \lim_{y\to ۰} \frac{y}{\log_a(۱+y)} = \frac{۱}{\log_a e} = \ln a$$

توجه کنید که (۲۲.۲) ایجاب می‌کند که $n(\sqrt[n]{a} - ۱) \longrightarrow \ln a$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$، که این از جایگزینی $x = ۱/n$ در (۲۲.۲) به دست می‌آید؛ این حکم قبلاً در قضیهٔ ۱۰.۱ ثابت شده است.

۲۳) اگر c عدد حقیقی مفروضی باشد آن‌گاه

$$\lim_{x\to ۰} \frac{(۱+x)^c - ۱}{x} = c \qquad (۲۳.۲)$$

در واقع، اگر فرض کنیم $y = (۱+x)^c - ۱$ آن‌گاه $y \longrightarrow ۰$ وقتی که $x \longrightarrow ۰$، زیرا تابع توانی پیوسته است. (مثال ۳ را ببینید.) امّا $(۱+x)^c = ۱+y$ مستلزم $c[\ln(۱+x)] = \ln(۱+y)$ است. بنابراین،

$$\frac{(۱+x)^c - ۱}{x} = \frac{y}{x} = \frac{y}{\ln(۱+y)}.c.\frac{\ln(۱+x)}{x}$$

به استناد (۲.۲۰)،

$$1 \longrightarrow \frac{y}{\ln(1+y)} \text{ وقتی که } y \longrightarrow 0 \quad \text{و} \quad 1 \longrightarrow \frac{\ln(1+x)}{x} \text{ وقتی که } x \longrightarrow 0$$

و حکم مطلوب (۲.۲۳) نتیجه می‌شود.

۲۴) فرض کنید

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1}, \qquad g(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{x^{2n+1}+x^2}{x^{2n}+1}$$

آن‌گاه

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 \qquad , \quad |x| > 1 \\ &= -1 \qquad , \quad |x| < 1 \\ &= 0 \qquad , \quad |x| \pm 1 \end{aligned}$$

در واقع، به‌ازای $|x| > 1$ داریم $x^{2n} \longrightarrow \infty$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. به این ترتیب، به‌ازای $|x| > 1$،

$$1 \longrightarrow \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} = \frac{1-1/x^{2n}}{1+1/x^{2n}} \quad \text{وقتی که} \quad n \longrightarrow \infty\,.$$

به ازای $|x| < 1$ داریم $x^{2n} \longrightarrow 0$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. بنابراین، به‌ازای $|x| < 1$،

$$-1 \longrightarrow \frac{x^{2n}-1}{x^{2n}+1} \quad \text{وقتی که} \quad n \longrightarrow \infty\,.$$

به ازای $x = \pm 1$ داریم $x^{2n} = 1$. از این رو، $f(\pm 1) = 0$.

به طریقی کاملاً مشابه، در می‌یابیم که $g(x) = x$ هرگاه $|x| > 1$، $g(x) = x^2$ هرگاه $|x| < 1$، $g(1) = 1$، و $g(-1) = 0$. به این ترتیب، g فقط در $x = -1$ ناپیوسته است.

۲۵) داریم

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2} \qquad (۲.۲۴)$$

در واقع، اگر قرار دهیم $x = 2t$، خواهیم داشت:

$$\frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1-\cos 2t}{4t^2} = \frac{\sin^2 t}{2t^2} = \frac{1}{2}\,\frac{\sin t}{t}\,\frac{\sin t}{t}$$

و حکم مطلوب به آسانی از (۲.۸) نتیجه می‌شود.

۲۶) داریم

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\cos mx - \cos nx}{x^۲} = \frac{n^۲ - m^۲}{۲}$$

در واقع،

$$\frac{۱-\cos nx}{x^۲} - \frac{۱-\cos mx}{x^۲} = n^۲\frac{۱-\cos nx}{(nx)^۲} - m^۲\frac{۱-\cos mx}{(mx)^۲}$$

و ما می‌توانیم حکم مطلوب را با استفاده از (۲۴.۲) نتیجه بگیریم.

۲۷) داریم

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\tan x - \sin x}{x^۳} = \frac{۱}{۲}$$

در واقع، داریم

$$\frac{\sin x - (\sin x)(\cos x)}{x^۳\cos x} = \frac{\sin x}{x}\frac{۱-\cos x}{x^۲}\frac{۱}{\cos x}$$

و ما می‌توانیم حکم مطلوب را با استفاده از (۲۴.۲) به دست آوریم.

۲۸) داریم

$$\lim_{x\to ۰} \frac{\sqrt{۱-\cos x}}{x} = \frac{۱}{\sqrt{۲}}$$

در واقع،

$$\frac{\sqrt{۱-\cos x}}{x} = \frac{\sqrt{۱-\cos x}}{x}\frac{\sqrt{۱+\cos x}}{\sqrt{۱+\cos x}} = \frac{\sqrt{۱-\cos^۲ x}}{x\sqrt{۱+\cos x}} = \frac{\sin x}{x\sqrt{۱+\cos x}}$$

و آنچه را که می‌خواهیم با استفاده از (۸.۲) به دست می‌آوریم.

۲۹) داریم

$$\lim_{x\to ۰} \frac{x - \sin ۲x}{x + \sin ۳x} = -\frac{۱}{۴}$$

در واقع، چون

$$\frac{x-\sin ۲x}{x+\sin ۳x} = \frac{۲(x-\sin ۲x)/۲x}{۳(x+\sin ۳x)/۳x} = \frac{۲\frac{۱}{۲} - ۲(\sin ۲x)/۲x}{۳\frac{۱}{۳} + ۳(\sin ۳x)/۳x}$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$\lim_{x\to ۰} \frac{x-\sin ۲x}{x+\sin ۳x} = \frac{۲\frac{۱}{۲} - ۲}{۳\frac{۱}{۳} + ۳} = -\frac{۱}{۴}$$

۳۰) داریم

$$\lim_{x\to ۳} \frac{\sqrt{x^۲ - ۲x + ۶} - \sqrt{x^۲ + ۲x - ۶}}{x^۲ - ۴x + ۳} = -\frac{۱}{۳}$$

در واقع،

$$\frac{\sqrt{x^۲ - ۲x + ۶} - \sqrt{x^۲ + ۲x - ۶}}{x^۲ - ۴x + ۳} = \frac{-۴(x-۳)}{(x^۲ - ۴x + ۳)(\sqrt{x^۲ - ۲x + ۶} + \sqrt{x^۲ + ۲x - ۶})}$$
$$= \frac{-۴}{(x-۱)(\sqrt{x^۲ - ۲x + ۶} + \sqrt{x^۲ + ۲x - ۶})}$$

بنابراین، حد مطلوب برابر است با

$$\frac{-۴}{۲(\sqrt{۹} + \sqrt{۹})} \quad \text{یا} \quad -\frac{۱}{۳}$$

۳۱) داریم

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۲^{n+۱} + ۳^{n+۱}}{۲^n + ۳^n} = ۳$$

در واقع،

$$\frac{۲^{n+۱} + ۳^{n+۱}}{۲^n + ۳^n} = \frac{۲(\frac{۲}{۳})^n + ۳}{(\frac{۲}{۳})^n + ۱}$$

که از آن حکم مطلوب نتیجه می‌شود.

۳۲) فرض کنید $f(-۲) = -۱$، $f(-۱) = ۰$، $f(۱) = ۱$، و

$$f(x) = \frac{x^۲ + x - ۲}{x^۳ + ۲x^۲ - x - ۲}, \qquad x \neq -۱, -۲, ۱$$

آن‌گاه f در نقاط $x = \pm ۱$ ناپیوسته است، ولی در نقطهٔ $x = -۲$ پیوسته است.

در واقع، به‌ازای $x \neq -۲, -۱, ۱$، داریم

$$f(x) = \frac{(x+۲)(x-۱)}{(x+۲)(x-۱)(x+۱)} = \frac{۱}{x+۱}$$

امّا

$$\lim_{x\downarrow -۱} \frac{۱}{x+۱} = \infty \quad \text{و} \quad \lim_{x\uparrow -۱} \frac{۱}{x+۱} = -\infty$$

بعلاوه،

$$\lim_{x\to ۱} \frac{۱}{x+۱} = \frac{۱}{۲}$$

از طرف دیگر،

$$\lim_{x\to -۲}\frac{۱}{x+۱}=-۱$$

۳۳) داریم

$$\lim_{x\to\infty} x^{۳/۲}(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱}-۲\sqrt{x})=-\frac{۱}{۴}$$

در واقع، چون

$$\begin{aligned}\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱}-۲\sqrt{x}&=(\sqrt{x+۱}-\sqrt{x})-(\sqrt{x}-\sqrt{x-۱})\\&=\frac{۱}{\sqrt{x+۱}+\sqrt{x}}-\frac{۱}{\sqrt{x}+\sqrt{x-۱}}\\&=\frac{\sqrt{x-۱}-\sqrt{x+۱}}{(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x-۱})}\end{aligned}$$

داریم

$$\begin{aligned}&x^{۳/۲}(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x-۱}-۲\sqrt{x})\\&=\frac{-۲(\sqrt{x})^{۳}}{(\sqrt{x+۱}+\sqrt{x})(\sqrt{x}+\sqrt{x-۱})(\sqrt{x-۱}+\sqrt{x+۱})}\\&=\frac{-۲}{(\sqrt{۱+۱/x}+۱)(۱+\sqrt{۱-۱/x})(\sqrt{۱-۱/x}+\sqrt{۱+۱/x})}\longrightarrow -\frac{۱}{۴}\end{aligned}$$

وقتی که $x\longrightarrow\infty$.

۳۴) فرض کنید A و B دو مجموعهٔ کراندار از اعداد حقیقی باشند و C به صورت زیر تعریف شود:

$$C=\{x: x=a+b; a\in A, b\in B\}$$

آن‌گاه C از بالا کراندار است و $\sup C=\sup A+\sup B$.

در واقع، به‌ازای هر $x\in C$، $x=a+b$ که در آن $a\in A$ و $b\in B$. حال، $a\le \sup A$ و $b\le\sup B$. بنابراین، $x\le \sup A+\sup B$. این نامساوی به‌ازای هر $x\in C$ برقرار است؛ از این رو، $\sup A+\sup B$ یک کران بالای C است، C از بالا کراندار است، و $\sup C\le \sup A+\sup B$.

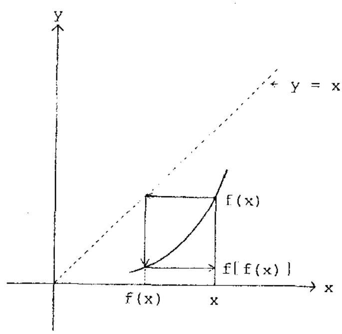
به استناد تبصرهٔ متعاقب تعریف سوپرمم، به‌ازای هر $\varepsilon>۰$ یک $a\in A$ وجود دارد به طوری که $a>\sup A-\frac{۱}{۲}\varepsilon$ و یک $b\in B$ وجود دارد به طوری که $b>\sup B-\frac{۱}{۲}\varepsilon$. امّا $a+b\in C$. از این رو، $\sup C\ge a+b>\sup A+\sup B-\varepsilon$. این نامساوی به‌ازای هر $\varepsilon>۰$ برقرار است. بنابراین، $\sup C\ge \sup A+\sup B$. به این ترتیب، سرانجام، $\sup C=\sup A+\sup B$.

۳۵) فرض کنید A و B دو مجموعهٔ کراندار از اعداد حقیقی باشند. آن‌گاه

$$\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$$

در واقع، $A \cup B \supset A$. از این رو، $\sup(A \cup B)$ یک کران بالای A است. بنابراین، $\sup(A \cup B) \geq \sup A$. به طور مشابه، $\sup(A \cup B) \geq \sup B$. اگر $a \in A \cup B$، آن‌گاه $a \in A$ یا $a \in B$. از این رو، $a \leq \sup A$ یا $a \leq \sup B$ و، در هر صورت، $a \leq \max\{\sup A, \sup B\}$. بنابراین، داریم $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.

۳۶) با این فرض که نمودار تابع $y = f(x)$ معلوم باشد، شکل ۱۰.۲ نشان می‌دهد که نمودار تابع $y = f[f(x)]$ چگونه رسم می‌شود.



شکل ۱۰.۲

تمرینات فصل دوم

۱.۲ توابع f و g به صورت زیر تعریف شده‌اند:

$$f(x) = \begin{cases} -\dfrac{۱}{۲(۱+x)} & , \quad -۱ < x \leq -\dfrac{۱}{۲} \\ ۲x & , \quad -\dfrac{۱}{۲} \leq x \leq \dfrac{۱}{۲} \\ \dfrac{۱}{۲(۱-x)} & , \quad \dfrac{۱}{۲} \leq x < ۱ \\ ۰ & , \quad |x| \geq ۱ \end{cases}$$

و

$$
\begin{aligned}
g(x) &= \frac{۲x-۱}{۲x} \qquad , \quad x \geq ۱ \\
&= \frac{x}{۲} \qquad , \quad -۱ \leq x \leq ۱ \\
&= -\frac{۲x+۱}{۲x} \qquad , \quad x \leq -۱
\end{aligned}
$$

نشان دهید که به‌ازای همهٔ مقادیر x، $f[g(x)] = x$؛ ولی $g[f(x)]$ در خارج بازهٔ $(-۱, ۱)$ مخالف x است.

راهنمایی: اگر $۱ > x \geq \frac{۱}{۲}$ آن‌گاه $g[f(x)] = x$؛ اگر $\frac{۱}{۲} \geq x \geq -\frac{۱}{۲}$، $g[f(x)] = x$؛ اگر $x \geq ۱$، $g[f(x)] = g(۰) = ۰ \neq x$؛ اگر $-\frac{۱}{۲} \geq x > -۱$، $g[f(x)] = x$؛ و اگر $x \leq -۱$، $g[f(x)] = ۰ \neq x$. توجه کنید که g صعودی است ولی مقادیرش در بازهٔ $(-۱, ۱)$ واقعند و، از این رو، تساوی $g[f(x)] = x$ فقط به‌ازای x واقع در $(-۱, ۱)$ برقرار است.

از طرف دیگر، اگر $x \geq ۱$ آن‌گاه

$$
f[g(x)] = f\left(\frac{۲x-۱}{۲x}\right) = \frac{۱}{۲}\left[۱ - \left(۱ - \frac{۱}{۲x}\right)\right] = x
$$

اگر $-۱ \leq x \leq ۱$ آن‌گاه

$$
f[g(x)] = f\left(\tfrac{۱}{۲}x\right) = ۲\left(\tfrac{۱}{۲}x\right) = x
$$

اگر $x \leq -۱$ آن‌گاه

$$
f[g(x)] = f\left(-\frac{۲x+۱}{۲x}\right) = -\frac{۱}{۲}\left(۱ - \frac{۲x+۱}{۲x}\right) = x
$$

از این رو، تساوی $f[g(x)] = x$ به‌ازای همهٔ مقادیر x برقرار است.

۲.۲ تابع f بر (a, b) پیوسته است و $f(x)$ به‌ازای هیچ نقطهٔ x از (a, b) صفر نیست. نشان دهید که f در (a, b) دارای علامت ثابت است.

راهنمایی: به‌ازای هر t مثبت و هر A و B از (a, b)، $[tf(A) + f(B)]/(t+۱)$ بین $f(A)$ و $f(B)$ قرار می‌گیرد و بنابراین، چون f پیوسته است، برابر مقداری از تابع f به‌ازای xی بین A و B است و، از این رو، مخالف صفر است. فرض کنید $f(A) > ۰$؛ بگیرید $t = |f(B)|/f(A)$. آن‌گاه $f(B) \neq -|f(B)|$ و لازم می‌آید که $f(B) > ۰$. به طریق مشابه، نتیجه می‌شود که اگر $f(A) < ۰$ آن‌گاه $f(B) < ۰$.

۳.۲ فرض کنید

$$d(x,y) = \frac{|x-y|}{1+|x-y|}$$

نشان دهید که نامساوی $d(a,b) \leq d(a,c) + d(b,c)$ به‌ازای هر سه عدد حقیقی a، b ، و c برقرار است.

راهنمایی: چون $a - b = (a-c) + (c-b)$، داریم

$$|a-b| \leq |a-c| + |c-b|$$

بالبداهه $|c-b| = |b-c|$. امّا تابع

$$f(t) = \frac{t}{1+t} = 1 - \frac{1}{1+t}$$

به‌ازای $t \geq 0$ صعودی است و بنابراین

$$\frac{|a-b|}{1+|a-b|} \leq \frac{|a-c|+|b-c|}{1+|a-c|+|b-c|}$$

معذالک، واضح است که

$$\frac{|a-c|+|b-c|}{1+|a-c|+|b-c|} \leq \frac{|a-c|}{1+|a-c|} + \frac{|b-c|}{1+|b-c|}$$

۴.۲ تابع f را بر (A,B) مقعر به بالا می‌نامیم در صورتی که

$$f[tx + (1-t)y] \leq tf(x) + (1-t)f(y)$$

هرگاه $A < x < B$ ،$A < y < B$ ،$0 < t < 1$. از نظر هندسی، به این معنی است که اگر P، Q ، و R سه نقطهٔ دلخواه بر نمودار f باشند به طوری که Q بین P و R باشد، آن‌گاه Q روی وتر PR یا زیر آن است.

نشان دهید که اگر f بر (A,B) مقعر به بالا باشد و $[a,b]$ زیربازهٔ بسته‌ای از (A,B) باشد، آن‌گاه f بر $[a,b]$ پیوسته است.

راهنمایی: نشان می‌دهیم که مجموعهٔ همهٔ مقادیر $f(x)$، وقتی x در بازهٔ $[a,b]$ تغییر کند، از بالا و پایین کراندار است و سپس ثابت می‌کنیم که ثابتی مانند K وجود دارد به طوری که به‌ازای هر دو نقطهٔ x و y از $[a,b]$،

$$|f(x) - f(y)| \leq K|x-y|$$

ملاحظه می‌کنیم که $M = \max\{f(a), f(b)\}$ یک کران بالای f بر $[a,b]$ است، زیرا به‌ازای هر $z = ta + (1-t)b$ از $[a,b]$،

$$f(z) \leq tf(a) + (1-t)f(b) \leq tM + (1-t)M = M$$

امّا f از پایین نیز کراندار است، زیرا اگر یک نقطهٔ دلخواه را به صورت $(a+b)/2 + s$ در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2} + s\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{a+b}{2} - s\right)$$

یا

$$f\left(\frac{a+b}{2} + s\right) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2} - s\right)$$

چون M یک کران بالاست،

$$-f\left(\frac{a+b}{2} - s\right) \geq -M$$

بنابراین

$$f\left(\frac{a+b}{2} + s\right) \geq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - M = m$$

این نشان می‌دهد که M و m، به ترتیب، کرانهای بالا و پایین f بر $[a,b]$ می‌باشند. سپس، $h > 0$ را طوری اختیار می‌کنیم که $a-h$ و $b+h$ متعلق به (A,B) باشند، و فرض می‌کنیم که M و m کرانهای بالا و پایین f بر $[a-h, b+h]$ باشند. اگر x و y نقاط متمایزی از $[a,b]$ باشند، قرار می‌دهیم

$$z = y + \frac{h}{|y-x|}(y-x), \qquad t = \frac{|y-x|}{h+|y-x|}$$

آن‌گاه z به بازهٔ بستهٔ $[a-h, b+h]$ تعلق دارد، $y = tz + (1-t)x$، و داریم

$$f(y) \leq tf(z) + (1-t)f(x) = t[f(z) - f(x)] + f(x)$$

$$f(y) - f(x) \leq t(M-m) < \frac{|y-x|}{h}(M-m) = K|y-x|$$

که در آن $K = (M-m)/h$. چون این نامساوی به‌ازای هر x و y از $[a,b]$ برقرار است، نتیجه می‌گیریم که $|f(y) - f(x)| \leq K|y-x|$، همان چیزی که می‌خواستیم.

۵.۲ نشان دهید که f فقط و فقط وقتی بر (A, B) مقعر به بالا است که به‌ازای هر سه نقطهٔ متمایز $x_۱$، $x_۲$، و $x_۳$ از (A, B)،

$$\frac{(x_۳ - x_۲)f(x_۱) + (x_۱ - x_۳)f(x_۲) + (x_۲ - x_۱)f(x_۳)}{(x_۱ - x_۲)(x_۲ - x_۳)(x_۳ - x_۱)}$$

نامنفی باشد.

راهنمایی: فرض کنید $x_۱ < x_۲ < x_۳$ و دترمینان

$$\begin{vmatrix} ۱ & x_۱ & f(x_۱) \\ ۱ & x_۲ & f(x_۲) \\ ۱ & x_۳ & f(x_۳) \end{vmatrix}$$

را در نظر بگیرید. این دترمینان را تعبیر هندسی کنید.

۶.۲ فرض کنید $f_۱$، $f_۲$، و $f_۳$ توابع پیوسته‌ای بر $[a, b]$ باشند و فرض کنید $f(x)$ آن مقدار از سه مقدار $f_۱(x)$، $f_۲(x)$، و $f_۳(x)$ باشد که بین دوتای دیگر واقع می‌شود. نشان دهید که f بر $[a, b]$ پیوسته است.

راهنمایی: توجه کنید که

$$f(x) = f_۱(x) + f_۲(x) + f_۳(x) - \max\{f_۱(x), f_۲(x), f_۳(x)\}$$
$$- \min\{f_۱(x), f_۲(x), f_۳(x)\}$$

۷.۲ هر تابع پیوسته‌ای مانند f که مجموعهٔ اعداد حقیقی را طوری بر خودش بنگارد که رابطهٔ $f(x + y) = f(x) + f(y)$ به‌ازای هر دو عدد حقیقی x و y برقرار باشد، به صورت $f(x) = cx$ است که در آن c یک ثابت است. صحّت این ادعا را بررسی کنید.

راهنمایی: به استقرا، دیده می‌شود که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، $f(nx) = nf(x)$؛ با جایگزینی x/n به جای x، ملاحظه می‌کنیم که $f(x/n) = (۱/n)f(x)$. از طرف دیگر، $f(۰ + x) = f(۰) + f(x)$؛ازاین رو، $f(۰) = ۰$ و $f[x+(-x)] = f(x)+f(-x) = f(۰) = ۰$ که مستلزم $f(-x) = -f(x)$ است. به این ترتیب، به‌ازای هر زوج اعداد صحیح p و q که $q > ۰$، داریم $f(px/q) = (p/q)f(x)$؛ به عبارت دیگر، تساوی $f(rx) = rf(x)$ به‌ازای هر عدد گویای r برقرار است. اگر قرار دهیم $x = ۱$ و $f(۱)$ را به c نشان دهیم. خواهیم داشت: $f(r) = cr$.

فرض کنید ρ یک عدد اصم دلخواه باشد. دنباله‌ای مانند $r_۱$، $r_۲$، $r_۳$ ، ... از اعداد گویا اختیار می‌کنیم که همگرا به ρ باشد؛ به عنوان مثال، دنبالهٔ کسرهای اعشاری مختوم در تقریب ρ. آن‌گاه، به‌ازای

$n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، $f(r_n) = cr_n$. چون f بر خط حقیقی پیوسته فرض شده است، پس از حدگیری وقتی که $n \longrightarrow \infty$، خواهیم داشت:

$$f(\rho) = \lim_{n\to\infty} f(r_n) = \lim_{n\to\infty} cr_n = c\rho$$

۸.۲ نشان دهید که اگر g تابع پیوسته‌ای باشد که مجموعهٔ اعداد حقیقی را بر خودش چنان بنگارد که رابطهٔ $g[(x+y)/۲] = [g(x)+g(y)]/۲$ به‌ازای هر دو عدد حقیقی x و y برقرار باشد، آن‌گاه g به صورت $g(x) = cx + a$ است که در آن c و a ثابت هستند.

راهنمایی: درواقع، به‌ازای $y = ۰$، به‌دست می‌آوریم $g(x/۲) = [g(x)+g(۰)]/۲ = [g(x)+a]/۲$ که در آن $a = g(۰)$؛ بنابراین،

$$\frac{g(x)+g(y)}{۲} = g\left(\frac{x+y}{۲}\right) = \frac{g(x+y)+a}{۲}$$

یعنی، $g(x+y) = g(x) + g(y) - a$. با تعریف $f(x) = g(x) - a$ خواهیم داشت:

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

اما g پیوسته است؛ از این رو f پیوسته است و، به استناد تمرین ۷.۲، f به صورت $f(x) = cx$ است. این نشان می‌دهد که g به صورت $g(x) = cx + a$ است که در آن c و a ثابت هستند.

۹.۲ فرض کنید $[a, b]$ بازه‌ای بسته با طول متناهی و f تابع پیوسته‌ای بر $[a, b]$ باشد. اگر به‌ازای هر x از $[a, b]$ نقطه‌ای مانند y در $[a, b]$ یافت شود به طوری که

$$|f(y)| \leq \frac{۱}{۲}|f(x)|$$

نشان دهید که نقطه‌ای مانند t در $[a, b]$ وجود دارد به طوری که $f(t) = ۰$.

راهنمایی: تابع $f^۲$ بر $[a, b]$ پیوسته است و، از این رو، مینیمم مقدار c را در نقطه‌ای مانند t از $[a, b]$ اختیار می‌کند. امّا نقطه‌ای مانند s در $[a, b]$ یافت می‌شود به طوری که $|f(s)| \leq \frac{۱}{۲}|f(t)| = \frac{۱}{۲}\sqrt{c}$. به این ترتیب، $f^۲$ مقدار $\frac{۱}{۴}c$ را بر $[a, b]$ اختیار می‌کند و، بنابراین، $c \leq \frac{۱}{۴}c$. چون $c \geq ۰$، نتیجه می‌شود که $c = ۰$.

۱۰.۲ فرض کنید اعداد بازهٔ باز $(۰, ۱)$ به صورت کسرهای اعشاری مختوم یا نامختوم $x = ۰{,}a_۱a_۲a_۳\ldots a_n\ldots$ نمایش داده شوند و $f(x) = ۰{,}۰a_۱۰a_۲۰a_۳\ldots$. آیا f در هر نقطهٔ x که قابل نمایش به یک کسر اعشاری مختوم باشد ناپیوسته است؟

۱۱.۲ نشان دهید که تابع پیوسته‌ای که بر بازهٔ بستهٔ J با طول متناهی چنان تعریف شده باشد که هیچ مقدار را بیشتر از دو بار نگیرد، باید مقداری را فقط یک بار بگیرد.

راهنمایی: فرض کنید M ماکسیمم مقادیری باشد که تابع f بر J اختیار می‌کند. اگر $f(x) = M$ هیچ جای دیگری در J برقرار نشود، برهان تمام است؛ اگر چنین نباشد، فرض کنید m مینیمم مقادیر f بین دونقطه‌ای باشد که f در آنها برابر M است. آن‌گاه، بالبداهه، f هر یک از مقادیر $m < a < M$ را حداقل دوبار بین این دو نقطه اختیار می‌کند و از این رو، به استناد فرض، دقیقاً دوبار. امّا مقدار m فقط یک بار اختیار می‌شود، زیرا اگر دوبار اختیار شود، در درون یا بیرون بازهٔ بین دو ماکسیمم، لازم می‌آید که f بعضی از مقادیر $m < a < M$ را بیشتر از دوبار اختیار کند.

۱۲.۲ تابع f را متناوب با دورهٔ تناوب a می‌نامند در صورتی که تساوی $f(x) = f(x+a)$ به‌ازای هر مقدار x که f در آن تعریف شده است برقرار باشد. نشان دهید که هیچ تابع متناوبی نمی‌تواند گویا باشد (یعنی، خارج‌قسمت دو چندجمله‌ای) مگر این که ثابت باشد.

راهنمایی: فرض کنید f تابعی متناوب با دورهٔ تناوب a باشد و فرض کنید که f تابع گویایی مانند $f(x) = P(x)/Q(x)$ باشد که در آن P و Q دوچندجمله‌ای هستند. اگر $f(\circ) = c$ آن‌گاه $P(x)/Q(x) = c$ وقتی که $x = \circ, a, ۲a, ۳a, \ldots$. از این رو، بدون توجه به درجهٔ n معادلهٔ $P(x) - cQ(x) = \circ$، بیشتر از n مقدار از x در این معادله صدق می‌کند و این فقط زمانی میسر است که $P(x) - cQ(x) = \circ$ به‌ازای همهٔ مقادیر x برقرار باشد؛ یعنی، وقتی که f ثابت باشد.

۱۳.۲ نشان دهید که اگر $P(x) = x^m + a_۱x^{m-۱} + a_۲x^{m-۲} + \cdots + a_m$، که در آن m یک عدد صحیح مثبت است و $a_۱$، $a_۲$، …، a_m اعدادی حقیقی هستند، آن‌گاه عددی مانند X وجود دارد به طوری که هرگاه $x > X$،

$$\frac{۱}{۲}x^m < P(x) < \frac{۳}{۲}x^m$$

راهنمایی: به‌ازای $x > ۱$،

$$|a_۱x^{m-۱} + a_۲x^{m-۲} + \cdots + a_m| \leq |a_۱x^{m-۱}| + |a_۲x^{m-۲}| + \cdots + |a_m| \leq Ax^{m-۱}$$

که در آن $A = |a_۱| + |a_۲| + \cdots + |a_m|$. بنابراین،

$$|a_۱x^{m-۱} + a_۲x^{m-۲} + \cdots + a_m| \leq \frac{۱}{۲}x^m \qquad \text{هرگاه } x > X = \max\{۱, ۲A\}،$$

یعنی،

$$-\frac{1}{2}x^m \leq a_1x^{m-1} + a_2x^{m-2} + \cdots + a_m \leq \frac{1}{2}x^m$$

و، پس از جمع x^m به طرفین، مورد ادعا نتیجه می‌شود.

۱۴.۲ فرض کنید

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln(x+2) - x^{2n}(\sin x)}{1 + x^{2n}}, \qquad 0 \leq x \leq \frac{1}{2}\pi$$

نمودار f را در بازهٔ $[0, \frac{1}{2}\pi]$ توصیف و توجه کنید که اگرچه $f(0)$ و $f(\frac{1}{2}\pi)$ مختلف‌العلامه‌اند، f در هیچ جای این بازه صفر نمی‌شود.

راهنمایی: توجه کنید که

$$\begin{aligned} f(x) &= \ln(x+2) && , \quad 0 \leq x < 1 \\ &= \frac{1}{2}(\ln 3 - \sin 1) && , \quad x = 1 \\ &= -\sin x && , \quad 1 < x \leq \frac{1}{2}\pi \end{aligned}$$

۱۵.۲ نشان دهید که اگر تابع f بر بازهٔ مفروض $[a,b]$ یکی از دو خاصیت زیر را داشته باشد، الزاماً خاصیت دیگر را نخواهد داشت:

الف) f بیشترین و کمترین مقدار خود در هر زیربازهٔ $[a',b']$ از $[a,b]$ را حداقل یک بار در این زیربازه اختیار می‌کند.

ب) f در هر زیربازهٔ $[a',b']$ از $[a,b]$ هر مقدار بین $f(a')$ و $f(b')$ را حداقل یک بار اختیار می‌کند.

بعلاوه، نشان دهید که هر تابعی که دو خاصیت مذکور را با هم دربازهٔ $[a,b]$ داشته باشد الزاماً بر $[a,b]$ پیوسته نخواهد بود.

راهنمایی: بربازهٔ $[a,b]$ با $a = -1$ و $b = 1$، توابع زیر را در نظر بگیرید:

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \quad \text{برای } x \text{ گویا} \\ &= 1, \quad \text{برای } x \text{ اصم} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} g(x) &= (1-x^2)\sin(x^{-2}), && \text{برای } x \neq 0 \\ &= 0, && \text{برای } x = 0 \\ h(x) &= \sin(x^{-1}), && \text{برای } x \neq 0 \\ &= 0, && \text{برای } x = 0 \end{aligned}$$

آن‌گاه f نشان می‌دهد که (الف) مستلزم (ب) نیست؛ g نشان می‌دهد که (ب) مستلزم (الف) نیست؛ و، سرانجام، h نشان می‌دهد که (الف) و (ب) توأماً برای تضمین پیوستگی بر $[a, b]$ کافی نیستند. بالاخص، توجه کنید که اگرچه ۱ یک کران بالای g بر $[-1, 1]$ است، هرگز اختیار نمی‌شود و نمودار g به‌ازای $-1 \leq x \leq 1$ بین دو قوس سهموی $g = \pm(1 - x^2)$ واقع است.

۱۶.۲ فرض کنید $p > 1$، $q > 1$، و توابع y_1، y_2، ...، y_n با روابط زیر تعریف شوند:

$$y_1 = \{x(x)^{1/q}\}^{1/p}, \quad y_2 = \{x(xy_1)^{1/q}\}^{1/p}, \ \dots, \ y_n = \{x(xy_{n-1})^{1/q}\}^{1/p}$$

حد $y = \lim_n y_n$ را بیابید.

راهنمایی: فرض کنید a_1، a_2، ...، a_n، به ترتیب، توانهای x در y_1، y_2، ...، y_n باشند. آن‌گاه

$$\begin{aligned} a_1 &= \frac{1}{p}\left(1 + \frac{1}{p}\right), \\ a_2 &= a_1\left(1 + \frac{1}{pq}\right) \\ a_3 &= a_1 + \frac{a_2}{pq} = a_1\left(1 + \frac{1}{pq} + \frac{1}{p^2q^2}\right) \\ &\vdots \\ a_n &= a_1\left(1 + \frac{1}{pq} + \frac{1}{p^2q^2} + \cdots + \frac{1}{p^{n-1}q^{n-1}}\right) \end{aligned}$$

از این رو،

$$a_n \longrightarrow \frac{q+1}{pq-1} \quad \text{وقتی که} \quad n \longrightarrow \infty .$$

بنابراین

$$y = x^{(q+1)/(pq-1)}$$

۱۷.۲ اگر f، که بر $(\circ, \infty)$ تعریف شده است، دارای معکوس f^{-1} باشد و به‌ازای همهٔ مقادیر $x > \circ$ و $y > \circ$ در رابطهٔ

$$f(x) + f(y) = f(xy)$$

صدق کند، رابطهٔ متناظری را که f^{-1} در آن صدق می‌کند بیابید.

راهنمایی: باید داشته باشیم $f^{-1}\{f(x)+f(y)\} = f^{-1}\{f(xy)\} = xy$. قرار دهید $f(x) = u$ و $f(y) = v$. آن‌گاه $x = f^{-1}(u)$، $y = f^{-1}(v)$، و $f^{-1}(u+v) = f^{-1}(u)f^{-1}(v)$. معادلهٔ اخیر، همان رابطهٔ مطلوب است.

۱۸.۲ فرض کنید $f(x) = (ax+b)/(cx+d)$، که در آن، بنابه‌فرض، $ad - bc \neq \circ$. نشان دهید که $f^{-1}(x) = (b - dx)/(cx - a)$. در حالت خاصی که $a = -d$، $f = f^{-1}$.

۱۹.۲ فرض کنید $f(x) = ۱ - |x|$ هرگاه $|x| \leq ۱$ و $f(x) = \circ$ هرگاه $|x| \geq ۱$. نمودار $y = f(x)f(a-x)$ را در حالتهای (الف) $a = \circ$، (ب) $a = ۱$، (ج) $a = ۲$ رسم کنید.

۲۰.۲ حد زیر را بیابید:

$$\lim_{n\to\infty}\left(۱ + \frac{۱}{۲}\cos x + \frac{۱}{۴}\cos ۲x + \cdots + \frac{۱}{۲^n}\cos nx\right)$$

راهنمایی: فرض کنید

$$S = ۱ + a(\cos x) + a^۲(\cos ۲x) + \cdots + a^k(\cos kx)$$

و

$$T = a(\sin x) + a^۲(\sin ۲x) + \cdots + a^k(\sin kx)$$

آن‌گاه

$$S + iT = ۱ + a(\cos x + i\sin x) + a^۲(\cos ۲x + i\sin ۲x) + \ldots + a^k(\cos kx + i\sin kx)$$

قرار دهید $A = \cos x + i\sin x$، خواهید داشت:

$$S + iT = ۱ + aA + a^۲A^۲ + \cdots + a^kA^k$$

$$= \frac{a^{k+1}A^{k+1} - 1}{aA - 1} = \frac{a^{k+1}A^{k+1} - 1}{aA - 1} \cdot \frac{aA^{-1} - 1}{aA^{-1} - 1}$$
$$= \frac{a^{k+2}A^{k} - a^{k+1}A^{k+1} - aA^{-1} + 1}{a^{2} - a(A + A^{-1}) + 1}$$

از این رو،

$$S = \frac{a^{k+2}(\cos kx) - a^{k+1}[\cos(k+1)x] - a(\cos x) + 1}{a^{2} - 2a(\cos x) + 1}$$

سرانجام، با انتخاب $k = n$ و $a = 1/2$، ملاحظه می‌کنیم که

$$\lim_{n\to\infty}\left(1 + \frac{1}{2}\cos x + \frac{1}{4}\cos 2x + \cdots + \frac{1}{2^{n}}\cos nx\right) = \frac{2(2 - \cos x)}{5 - 4\cos x}$$

فصل سوم

مشتقگیری

۱۰۳ قواعد اساسی مشتقگیری

تعریف. فرض کنید f تابعی حقیقی مقدار باشد که بر بازهٔ بازی مانند (a,b) شامل نقطهٔ s تعریف شده است. خارج‌قسمت

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

را با $a<t<b$ و $t\neq s$ تشکیل می‌دهیم. اگر حد

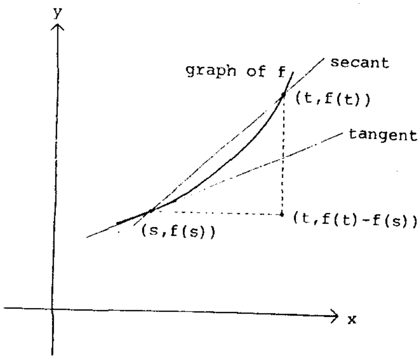
$$\lim_{t\to s}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

موجود باشد (به عنوان یک عدد حقیقی متناهی)، مقدارش را به $f'(s)$ نشان می‌دهند و، در این حالت، $f'(s)$ را مشتق f در s می‌نامند و f را در s مشتق‌پذیر می‌گویند. اگر f در هر نقطهٔ مجموعه‌ای مانند S مشتق‌پذیر باشد، f را بر S مشتق‌پذیر می‌نامند.

تبصره. نمودار تابع f را در نظر بگیرید و فرض کنید $(s, f(s))$ و $(t, f(t))$ دو نقطه از نمودار f باشند. خط راستی که شامل نقاط $(s, f(s))$ و $(t, f(t))$ است خط قاطع نمودار f با شیب

$$\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$

است. وقتی $t \longrightarrow s$، شیب $[f(t)-f(s)]/(t-s)$ خط قاطع به شیب m خط مماس بر نمودار f در نقطهٔ $(s, f(s))$ میل می‌کند و $m = f'(s)$. شکل ۱.۳ را ببینید.



شکل ۱.۳

تعریف. فرض کنید تابع حقیقی مقدار f بر $[a,b]$ تعریف شده باشد. آن‌گاه، f را در نقاط انتهایی a و b مشتق‌پذیر می‌نامند در صورتی که

$$f'(b) = \lim_{t\uparrow b}\frac{f(t)-f(b)}{t-b} \quad \text{و} \quad f'(a) = \lim_{t\downarrow a}\frac{f(t)-f(a)}{t-a}$$

(به عنوان اعداد حقیقی متناهی) موجود باشند؛ نماد $t \downarrow a$ حاکی از این است که t از بالا به a میل می‌کند، یعنی $t > a$؛ و $t \uparrow b$ دال بر این است که t از پایین به b میل می‌کند، یعنی $t < b$.

قضیهٔ ۱.۳. فرض کنید f بر بازهٔ J تعریف شده باشد. اگر f در نقطهٔ s از J مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه f در s پیوسته است.

برهان. به‌ازای همهٔ نقاط x از J که به قدر کافی نزدیک به s باشند و $x \neq s$، عبارت

$$\left|\frac{f(x)-f(s)}{x-s}\right|$$

دارای کرانی مانند M است، یعنی،

$$|f(x) - f(s)| \leq M|x - s| \qquad (۱.۳)$$

در واقع، به‌ازای همه نقاط x از J که $x \neq s$، قرار دهید

$$h(x) = \frac{f(x) - f(s)}{x - s}$$

امّا $\lim_{x \to s} h(x) = L$، که در آن L یک عدد حقیقی متناهی است. در تعریف حد، بگیرید $\varepsilon = ۱$. آن‌گاه زیربازه‌ای مانند I از J موجود است به طوری که s در I نیست و نامساویهای

$$L - ۱ < h(x) < L + ۱$$

به‌ازای هر x از I برقرار است. حال، بگیرید $M = \max\{|L - ۱|, |L + ۱|\}$.

وقتی $x \longrightarrow s$، عبارت سمت راست نامساوی (۱.۳) به صفر میل می‌کند؛ از این رو، $f(x) \longrightarrow f(s)$ هرگاه $x \longrightarrow s$ و پیوستگی f در s ثابت می‌شود.

تبصره. روش دیگر اثبات قضیهٔ ۱.۳ این است که توجه کنیم که

$$f(x) - f(s) = \frac{f(x) - f(s)}{x - s}(x - s) \longrightarrow f'(s) \cdot ۰ = ۰ \qquad \text{وقتی که} \qquad x \longrightarrow s\ .$$

عکس قضیهٔ ۱.۳ برقرار نیست؛ ممکن است تابعی در یک نقطه پیوسته باشد ولی در آن نقطه مشتق‌پذیر نباشد. مثلاً $f(x) = |x|$ در $x = ۰$ پیوسته‌است ولی در $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیست؛ حد

$$\lim_{x \to ۰} \frac{|x| - |۰|}{x - ۰}$$

وجود ندارد. عبارت $|x|/x$ برابر ۱ است وقتی که $x > ۰$ و برابر ۱− است هنگامی که $x < ۰$؛ عبارت $|x|/x$ به‌ازای $x = ۰$ تعریف نشده است.

می‌توان تابعی ساخت که در همهٔ نقاط یک بازه پیوسته باشد ولی در هیچ نقطهٔ آن بازه مشتق‌پذیر نباشند؛ قضیهٔ ۶۵.۷ را ببینید.

قضیهٔ ۲.۳. فرض کنید توابع f و g بر $[a, b]$ تعریف شده و در نقطهٔ x از $[a, b]$ مشتق‌پذیر باشند و k یک عدد حقیقی ثابت شد. آن‌گاه kf، $f + g$، fg، و f/g [که در آن $g(x) \neq ۰$] در x مشتق‌پذیرند، و

الف) $(kf)'(x) = kf'(x)$؛

ب) $(f+g)'(x) = f'(x) + g'(x)$؛

ج) $(fg)'(x) = f'(x)g(x) + f(x)g'(x)$؛

د) $\left(\frac{f}{g}\right)'(x) = \frac{g(x)f'(x)-g'(x)f(x)}{g^{2}(x)}$.

برهان. قسمتهای (الف) و (ب) نتایج سادهٔ قضیهٔ ۵.۲ هستند. برای اثبات (ج)، فرض می‌کنیم $h = fg$ و توجه می‌کنیم که

$$h(t) - h(x) = f(t)[g(t) - g(x)] + g(x)[f(t) - f(x)]$$

اگر طرفین را بر $t - x$ تقسیم و ملاحظه کنیم که (به استناد قضیهٔ ۱.۳) f و g در x پیوسته‌اند و فرض کنیم $t \longrightarrow x$، می‌بینیم که (ج) نتیجه می‌شود.

سرانجام، فرض کنید $w = f/g$. آن‌گاه

$$\frac{w(t) - w(x)}{t - x} = \frac{1}{g(t)g(x)}\left(g(x)\frac{f(t) - f(x)}{t - x} - f(x)\frac{g(t) - g(x)}{t - x}\right)$$

وقتی $t \longrightarrow x$، (د) را خواهیم داشت.

قضیهٔ ۳.۳. (قاعدهٔ زنجیری). فرض کنید که تابع f بر بازهٔ J تعریف شده و در نقطهٔ x از J مشتق‌پذیر باشد؛ فرض کنید g بر بازهٔ I، که شامل برد f است، تعریف شده و در نقطهٔ $f(x)$ مشتق‌پذیر باشد. اگر به‌ازای هر t از J،

$$h(t) = g[f(t)]$$

آن‌گاه h در x مشتق‌پذیر است و

$$h'(x) = g'[f(x)]f'(x) \qquad (۲.۳)$$

برهان. فرض کنید $y = f(x)$. بنابر تعریف مشتق، داریم

$$f(t) - f(x) = (t - x)[f'(x) + u(t)]$$

$$g(s) - g(y) = (s - y)[g'(y) + v(s)]$$

که در آن $t \in J$، $s \in I$، و $u(t) \longrightarrow 0$ وقتی که $t \longrightarrow x$، $v(s) \longrightarrow 0$ وقتی که $s \longrightarrow y$. فرض می‌کنیم $s = f(t)$. آن‌گاه

$$h(t) - h(x) = g[f(t)] - g[f(x)] = [f(t) - f(x)][g'(y) + v(s)]$$
$$= (t - x)[f'(x) + u(t)][g'(y) + v(s)]$$

یا، اگر $t \neq s$،

$$\frac{h(t) - h(x)}{t - x} = [g'(y) + v(s)][f'(x) + u(t)]$$

به استناد پیوستگی f در x (قضیهٔ ۱.۳)، اگر $t \longrightarrow x$، دیده می‌شود که $s \longrightarrow y$ ؛ بنابراین، وقتی $t \longrightarrow x$،

$$\frac{h(t) - h(x)}{t - x} \longrightarrow g'(y)f'(x)$$

قضیهٔ ۴.۳. فرض کنید f بر بازهٔ I پیوسته و اکیداً یکنوا باشد؛ بعلاوه، فرض کنید f در نقطه‌ای مانند x از I مشتق‌پذیر باشد و $f'(x) \neq 0$. آن‌گاه تابع معکوس f^{-1} در $y = f(x)$ مشتق‌پذیر است و

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(x)} \tag{۳.۳}$$

برهان. فرض کنید I^* بازه‌ای باشد که f^{-1} بر آن تعریف شده است (قضیهٔ ۱۸.۲ را ببینید). فرض کنید $w \in I^*$، $w \neq y$، و $w \longrightarrow y$. آن‌گاه [با $v = f^{-1}(w)$، $v \in I$، $v \neq x$، و $v \longrightarrow x$]

$$\frac{f^{-1}(w) - f^{-1}(y)}{w - y} = \frac{v - x}{f(v) - f(x)} = \frac{1}{[f(v) - f(x)]/(v - x)} \longrightarrow \frac{1}{f'(x)}$$

ملاحظات. رابطهٔ (۳.۳) به آسانی به خاطر سپرده می‌شود. چون $h(x) = x$ بالبداهه مستلزم $h'(x) = 1$ است، به استناد قضیهٔ ۳.۳، متوجه می‌شویم که $f^{-1}[f(x)] = x$ ایجاب می‌کند که

$$(f^{-1})'(y)f'(x) = 1$$

شکل ۲.۳ فرمول (۳.۳) را به طور هندسی تشریح می‌کند. نمودارهای f و f^{-1} بازتابهای یکدیگر نسبت به خط $y = x$ هستند. خطوط مماس l_1 و l_2 نیز بازتابهای یکدیگر نسبت به خط $y = x$ می‌باشند؛ داریم

$$f'(x) = l_1 \text{ شیب خط } = \frac{f(x) - b}{x - b} \qquad \text{و} \qquad (f^{-1})'(y) = l_2 \text{ شیب خط } = \frac{x - b}{f(x) - b}$$

معکوس یکدیگرند.

فرض کنید $y = f(x)$. آن‌گاه $f'(x)$ را به صورتهای زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\frac{dy}{dx}،\quad \frac{d}{dx}f(x)،\quad D_xy،\quad D_xf(x)،\quad \text{و}\ y'.$$

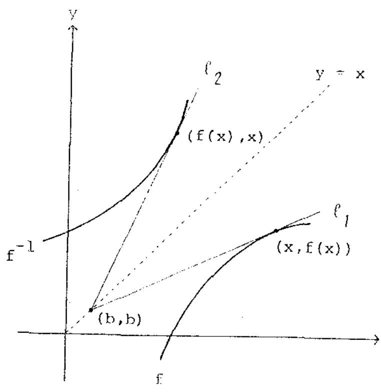
به‌ازای $w = g(y)$ و $y = f(x)$، رابطهٔ (۲.۳) را می‌توانیم به صورت سادهٔ

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy}.\frac{dy}{dx} \quad \text{یا} \quad D_xw = D_yw.D_xy \qquad (۴.۳)$$

بنویسیم. به طور مشابه، به‌ازای $y = f(x)$ و $x = f^{-1}(y)$، رابطهٔ (۳.۳) را می‌توانیم به صورت سادهٔ

$$D_yx = \frac{1}{D_xy} \quad \text{یا} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{dy/dx} \qquad (۵.۳)$$

بنویسیم



شکل ۲.۳

تعریف. تابع f را که بر بازهٔ بازی مانند (a,b) تعریف شده است در نقطهٔ s از (a,b) دوبار مشتق‌پذیر می‌نامند در صورتی که f بر یک همسایگی از s مشتق‌پذیر باشد و f' در s دارای مشتق باشد. مشتق f' را مشتق دوم f یا مشتق مرتبهٔ دوم f می‌نامند و مقدارش در s را به $f''(s)$ نشان می‌دهند. اگر این وضعیت در همهٔ نقاط s بازهٔ (a,b) برقرار باشد، آن‌گاه می‌گویند f بر (a,b) دوبار مشتق‌پذیر است و مشتق دوم f را به f'' نشان می‌دهند. به جای این که بگوییم f در s دوبار مشتق‌پذیر است می‌توانیم بگوییم که مشتق دوم f در s موجود است یا f در s مشتق دوم دارد. می‌گوییم مشتق سوم f در s موجود

است در صورتی که f' در یک همسایگی s مشتق‌پذیر باشد و f'' در s مشتق داشته باشد؛ مشتق سوم f در s را به $f'''(s)$ نشان می‌دهند. با ادامهٔ این فرایند به استقرا، می‌گوییم که مشتق nام f در s موجود است در صورتی که مشتق مرتبهٔ $n-۲$ تابع f در یک همسایگی از s مشتق‌پذیر باشد و مشتق مرتبهٔ $n-۱$ تابع f در s مشتق داشته باشد. مشتق مرتبهٔ nام f را به $f^{(n)}$ نمایش می‌دهیم.

اگر $y = f(x)$، آن‌گاه $f^{(n)}(x)$ را به صورتهای زیر نیز می‌توان نوشت:

$$\frac{d^n y}{dx^n}،\quad \frac{d^n}{dx^n}f(x)،\quad D_x^n y،\quad D_x^n f(x)،\quad \text{و}\ y^{(n)}.$$

۲.۳ مشتق توابع اساسی

۱. اگر $f(x) = c$، که در آن c یک عدد حقیقی ثابت است، آن‌گاه $f'(x) = ۰$. در واقع،

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{f(t)-f(x)}{t-x} = \lim_{t\to x}\frac{c-c}{t-x} = \lim_{t\to x} ۰ = ۰$$

۲. فرض کنید $g(x) = x^n$، که در آن n یک عدد صحیح مثبت است. آن‌گاه $g'(x) = nx^{n-۱}$. در واقع، به‌ازای $t \neq x$، داریم

$$\frac{t^n - x^n}{t-x} = t^{n-۱} + t^{n-۲}x + \cdots + tx^{n-۲} + x^{n-۱}$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} g'(x) &= \lim_{t\to x}\frac{t^n - x^n}{t-x} = \lim_{t\to x}(t^{n-۱} + t^{n-۲}x + \cdots + tx^{n-۲} + x^{n-۱}) \\ &= nx^{n-۱} \end{aligned}$$

۳. به‌ازای $x > ۰$، فرض کنید $f(x) = \ln x$. آن‌گاه $f'(x) = ۱/x$. در واقع، به استناد (۳.۱)،

$$\frac{۱}{t} < \frac{\ln t - \ln x}{t-x} < \frac{۱}{x},\qquad \text{برای } x > t$$

و

$$\frac{۱}{x} < \frac{\ln x - \ln t}{x-t} < \frac{۱}{t},\qquad \text{برای } x < t$$

در هر صورت،

$$f'(x) = \lim_{t\to x}\frac{\ln t - \ln x}{t-x} = \frac{۱}{x}$$

تبصره. روش دیگر تعیین مشتق $\ln x$ این است که توجه کنیم که

$$\frac{\ln t - \ln x}{t - x} = \frac{1}{x}\frac{\ln[1 + (t - x)/x]}{(t - x)/x}$$

و سپس از (۲۰.۲) استفاده کنیم.

۴. به‌ازای $x > 0$، فرض کنید $g(x) = \log_a x$ ، که در آن a یک عدد حقیقی مثبت ثابت و مخالف ۱ است. آن‌گاه $g'(x) = (\log_a e)(1/x)$.

در واقع، $\log_a x = (\log_a e)(\ln x)$ و بنابراین،

$$\frac{d}{dx}(\log_a x) = (\log_a e)\frac{d}{dx}(\ln x) = (\log_a e)\frac{1}{x}$$

۵. فرض کنید $h(x) = a^x$، که در آن a یک عدد حقیقی مثبت ثابت و مخالف ۱ است و x عددی حقیقی است. آن‌گاه $h'(x) = (\ln a)a^x$.

در واقع، به‌ازای $-\infty < x < \infty$ و $0 < y < \infty$،

$$y = a^x \quad \text{فقط و فقط وقتی که} \quad x = \log_a y$$

لذا، به استناد (۵.۳)،

$$D_x y = \frac{1}{D_y x} = (\log_e a)y = (\ln a)a^x$$

بالاخص،

$$\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$$

تبصره. روش دیگر تعیین مشتق a^x این است که توجه کنیم که

$$\frac{a^t - a^x}{t - x} = a^x\frac{a^{t-x} - 1}{t - x}$$

و سپس از (۲۲.۲) استفاده می‌کنیم.

۶. به‌ازای $x > 0$، فرض کنید $w(x) = x^b$، که در آن b یک عدد حقیقی ثابت است. آن‌گاه $w'(x) = bx^{b-1}$.

در واقع، چون

$$x^b = e^{b(\ln x)}$$

با فرض $w = e^y$ و $y = b(\ln x)$، خواهیم داشت:

$$\frac{dw}{dx} = \frac{dw}{dy}.\frac{dy}{dx} = e^y\left(\frac{b}{x}\right) = x^b\left(\frac{b}{x}\right) = bx^{b-1}$$

تبصره. روش دیگر تعیین مشتق تابع توانی x^b این است که ملاحظه می‌کنیم که

$$\frac{t^b - x^b}{t-x} = x^{b-1}\frac{[1+(t-x)/x]^b - 1}{(t-x)/x}$$

و سپس از (۲۳.۲) استفاده می‌کنیم.

۷. به‌ازای $x > 0$، فرض کنید $v(x) = x^x$. آن‌گاه $v'(x) = x^x(1+\ln x)$.

در واقع، $x^x = e^{x(\ln x)}$ و از این رو، با انتخاب $v = e^y$ و $y = x(\ln x)$، خواهیم داشت:

$$\frac{dv}{dx} = \frac{dv}{dy}.\frac{dy}{dx} = e^y(1+\ln x) = x^x(1+\ln x)$$

۸. فرض کنید $f(x) = \sin x$. آن‌گاه $f'(x) = \cos x$.

در واقع، چون

$$\sin t - \sin x = 2\sin\frac{t-x}{2}\cos\frac{t+x}{2}$$

به استناد (۸.۲)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \lim_{t\to x}\frac{\sin t - \sin x}{t-x} = \lim_{t\to x}\left[\frac{2}{t-x}\sin\frac{t-x}{2}\cos\frac{t+x}{2}\right] \\ &= \lim_{t\to x}\frac{\sin[(t-x)/2]}{(t-x)/2}.\lim_{t\to x}\cos\left[\frac{(t+x)}{2}\right] = \cos x \end{aligned}$$

۹. فرض کنید $g(x) = \cos x$. آن‌گاه $g'(x) = -\sin x$.

در واقع، چون $\cos x = \sin(\frac{1}{2}\pi - x)$، به استناد قضیهٔ ۳.۳، خواهیم داشت:

$$\frac{d}{dx}(\cos x) = \frac{d}{dx}\left[\sin(\frac{1}{2}\pi - x)\right] = -\cos\left(\frac{1}{2}\pi - x\right) = -\sin x$$

تبصره. چون

$$\tan x = \frac{\sin x}{\cos x}, \cot x = \frac{\cos x}{\sin x}, \sec x = \frac{۱}{\cos x} \text{ و } \csc x = \frac{۱}{\sin x}$$

به استناد قسمت چهارم قضیهٔ ۲.۳، به آسانی دیده می‌شود که

$$\frac{d}{dx}(\tan x) = \sec^۲ x, \qquad \frac{d}{dx}(\cot x) = -\csc^۲ x$$
$$\frac{d}{dx}(\sec x) = (\sec x)(\tan x), \qquad \frac{d}{dx}(\csc x) = -(\csc x)(\cot x)$$

۱۰. تابع معکوس سینوس را، که به $\sin^{-۱}$ یا $\arcsin$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$y = \sin^{-۱} x$ فقط و فقط وقتی که $x = \sin y$ و $-\frac{\pi}{۲} \leq y \leq \frac{\pi}{۲}$.

(قلمرو $\sin^{-۱}$ عبارت است از بازهٔ بستهٔ $[-۱, ۱]$، و بردش عبارت است از بازهٔ بستهٔ $[-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲}]$.) به‌ازای $-۱ < x < ۱$، داریم

$$\frac{d}{dx}(\sin^{-۱} x) = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}$$

در واقع، رابطهٔ $D_y(\sin y) = \cos y > ۰$ به‌ازای هر y از بازهٔ باز $(-\frac{\pi}{۲}, \frac{\pi}{۲})$ برقرار است. در این حالت، مشتق $D_x y$ موجود است و

$$D_x y = \frac{۱}{D_y x} = \frac{۱}{\cos y} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - \sin^۲ y}} = \frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}$$

ریشهٔ مثبت اختیار می‌شود، زیرا $\cos y > ۰$.

ملاحظات. تابع معکوس کسینوس را، که به $\cos^{-۱}$ یا $\arccos$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$y = \cos^{-۱} x$ فقط و فقط وقتی که $x = \cos y$ و $۰ \leq y \leq \pi$.

(قلمرو $\cos^{-۱}$ عبارت است از بازهٔ بستهٔ $[-۱, ۱]$، و برد این تابع عبارت است از بازهٔ بستهٔ $[۰, \pi]$. بعلاوه، به‌ازای $-۱ \leq x \leq ۱$، $\cos^{-۱} x = \pi/۲ - \sin^{-۱} x$.)

چندان دشوار نیست که نشان بدهیم که

به‌ازای $-۱ < x < ۱$، $\quad \frac{d}{dx}(\cos^{-۱} x) = -\frac{۱}{\sqrt{۱ - x^۲}}$

۱۱. تابع معکوس تانژانت را، که به $\tan^{-1}$ یا $\arctan$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$y = \tan^{-1} x \quad \text{فقط و فقط وقتی که} \quad x = \tan y \quad \text{و} \quad -\frac{\pi}{2} < y < \frac{\pi}{2}.$$

(قلمرو $\tan^{-1}$ عبارت است از مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی، و بردش عبارت است از بازهٔ باز $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$.)

به‌ازای $-\infty < x < \infty$، داریم:

$$\frac{d}{dx}(\tan^{-1} x) = \frac{1}{1+x^2}$$

در واقع، به‌ازای هر عدد حقیقی x،

$$D_x y = \frac{1}{D_y x} = \frac{1}{\sec^2 y} = \frac{1}{1+\tan^2 y} = \frac{1}{1+x^2}$$

ملاحظات. تابع معکوس کتانژانت را، که به $\cot^{-1}$ یا $\operatorname{arc\,cot}$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$y = \cot^{-1} x \quad \text{فقط و فقط وقتی که} \quad x = \cot y \quad \text{و} \quad 0 < y < \pi.$$

(قلمرو $\cot^{-1}$ عبارت است از مجموعهٔ همهٔ اعداد حقیقی، و بردش عبارت است از بازهٔ باز $(0, \pi)$. بعلاوه، رابطهٔ $\cot^{-1} x = (\pi/2) - \tan^{-1} x$ به‌ازای همهٔ اعداد حقیقی برقرار است.)

چندان دشوار نیست که ثابت کنیم که

$$\frac{d}{dx}(\cot^{-1} x) = -\frac{1}{1+x^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

۱۲. تابع معکوس سکانت را، که به $\sec^{-1}$ یا $\operatorname{arc\,sec}$ نمایش داده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌کنند:

$$y = \sec^{-1} x \quad \text{فقط و فقط وقتی که} \quad x = \sec y,\ y \neq \pi/2,\ \text{و}\ 0 \leq y \leq \pi.$$

(قلمرو $\sec^{-1}$ عبارت است از اجتماع $(-\infty, -1]$ و $[1, \infty)$، و بردش عبارت است از اجتماع $[0, \pi/2)$ و $(\pi/2, \pi]$. بعلاوه، رابطهٔ $\sec^{-1} x = \cos^{-1}(1/x)$ به‌ازای $|x| \geq 1$ برقرار است.)

وقتی $|x| > 1$، می‌توان نشان داد که

$$\frac{d}{dx}(\sec^{-1} x) = \frac{1}{|x|\sqrt{x^2-1}}$$

توجه کنید: تابع معکوس کسکانت را، که به $\csc^{-1}$ یا $\operatorname{arc\,csc}$ نمایش داده می‌شود، چنین تعریف می‌کنند:

$y = \csc^{-1} x$ فقط و فقط وقتی که $x = \csc y$، $y \neq 0$، و $-\frac{\pi}{2} \leq y \leq \frac{\pi}{2}$.

(قلمرو csc^{-1} عبارت است از اجتماع $[-\infty, -1)$ و $(1, \infty]$، و بردش عبارت است از اجتماع $[-\pi/2, 0)$ و $(0, \pi/2]$. بعلاوه، رابطهٔ $\csc^{-1} x = \sin^{-1}(1/x)$ به‌ازای $|x| \geq 1$ برقرار است.)

به‌ازای $|x| > 1$، می‌توان نشان داد که

$$\frac{d}{dx}(\csc^{-1} x) = -\frac{1}{|x|\sqrt{x^2 - 1}}$$

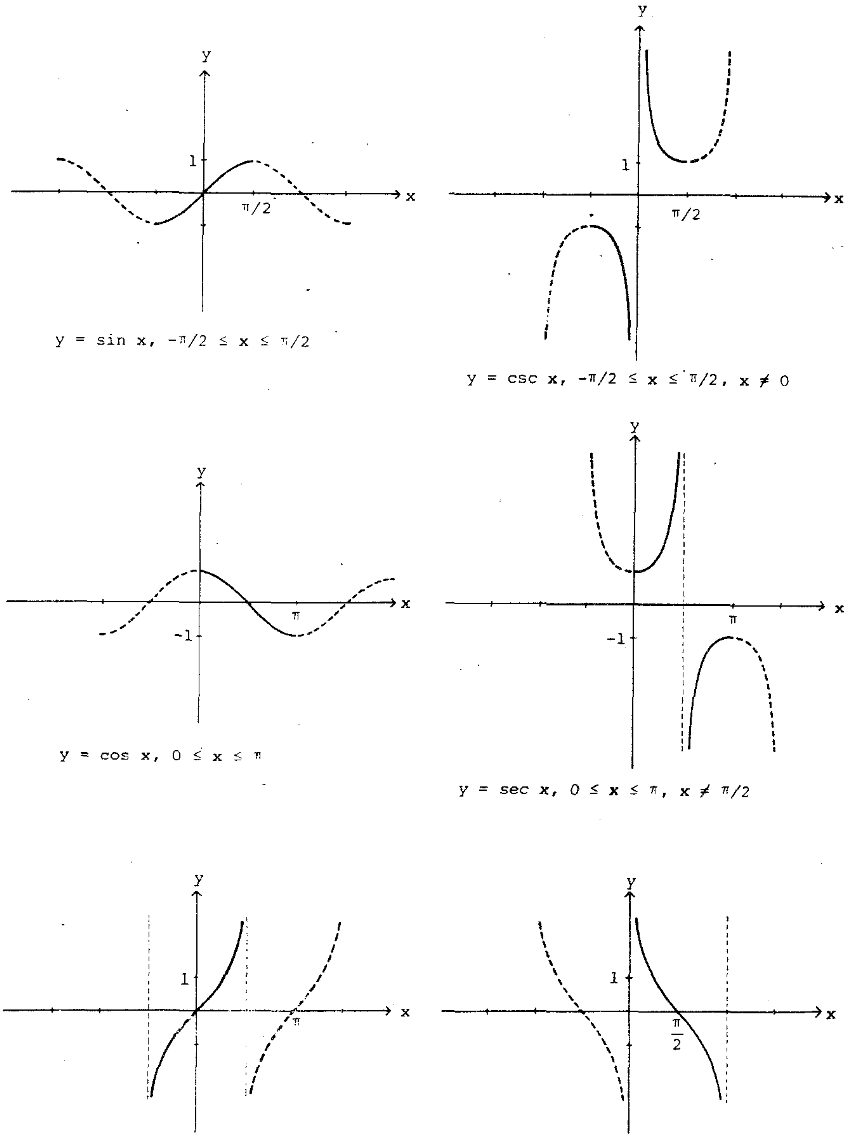
تبصره. نمودار توابع معکوس توابع مثلثاتی از انعکاس هر یک از نمودارهای شکل ۳.۳ حول خط $y = x$ به‌دست می‌آید؛ این نمودارها در شکل ۴.۳ نشان داده شده است. نمودار بعضی دیگر از توابع جالب توجه در شکل ۵.۳ دیده می‌شود.

۱۳. توابع هذلولوی و توابع هذلولوی معکوس در بخش چهارم فصل اول معرفی شدند. به آسانی دیده می‌شود که

$$\frac{d}{dx}(\sinh x) = \cosh x, \quad \frac{d}{dx}(\cosh x) = \sinh x, \quad \frac{d}{dx}(\tanh x) = \operatorname{sech}^2 x$$
$$\frac{d}{dx}(\coth x) = -\operatorname{csch}^2 x, \quad \frac{d}{dx}(\operatorname{sech} x) = -(\operatorname{sech} x)(\tanh x)$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch} x) = -(\operatorname{csch} x)(\coth x)$$

و

$$\frac{d}{dx}(\sinh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{1 + x^2}}$$
$$\frac{d}{dx}(\cosh^{-1} x) = \frac{1}{\sqrt{x^2 - 1}}, \quad x > 1$$
$$\frac{d}{dx}(\tanh^{-1} x) = \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| < 1$$
$$\frac{d}{dx}(\coth^{-1} x) = \frac{1}{1 - x^2}, \quad |x| > 1$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{sech}^{-1} x) = \frac{-1}{x\sqrt{1 - x^2}}, \quad 0 < x < 1$$
$$\frac{d}{dx}(\operatorname{csch}^{-1} x) = \frac{-1}{|x|\sqrt{1 + x^2}}, \quad x \neq 0$$



$y = \sin x,\ -\pi/2 \le x \le \pi/2$

$y = \csc x,\ -\pi/2 \le x \le \pi/2,\ x \ne 0$

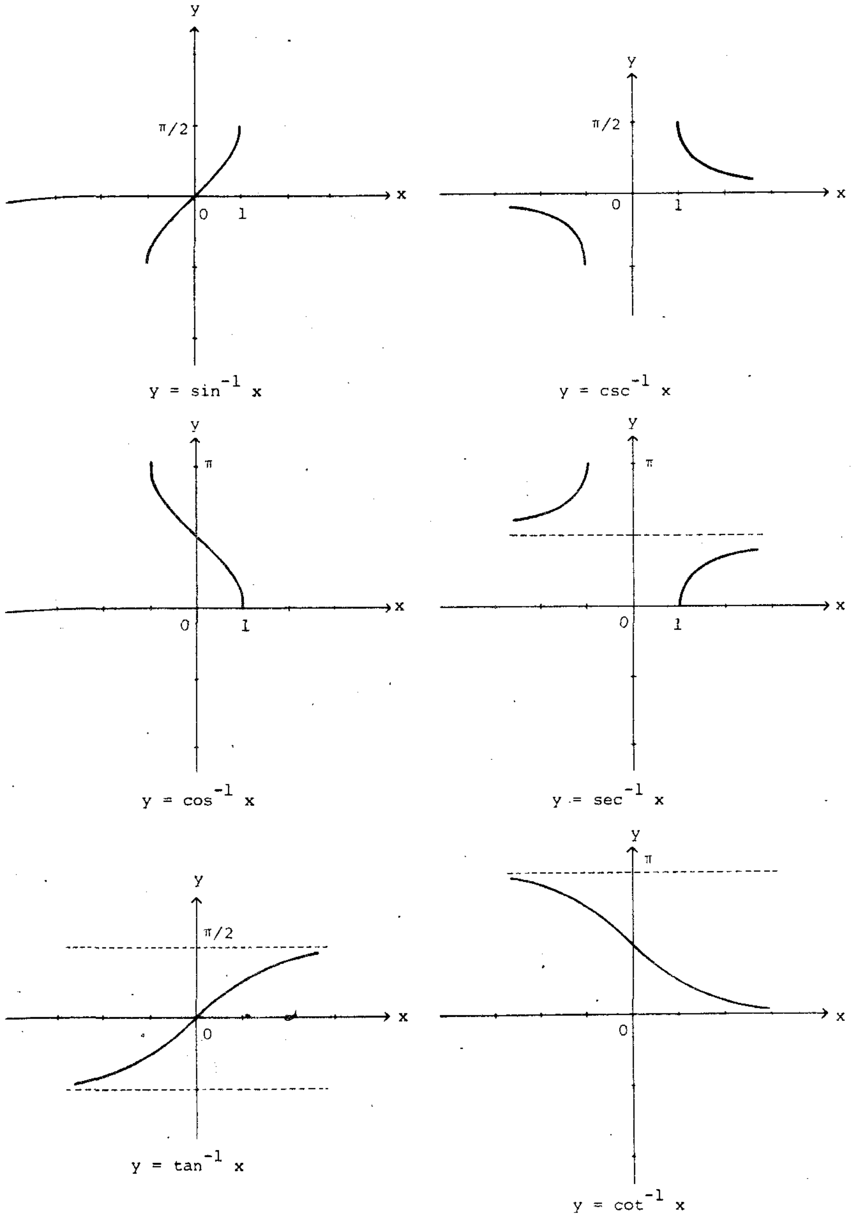
$y = \cos x,\ 0 \le x \le \pi$

$y = \sec x,\ 0 \le x \le \pi,\ x \ne \pi/2$

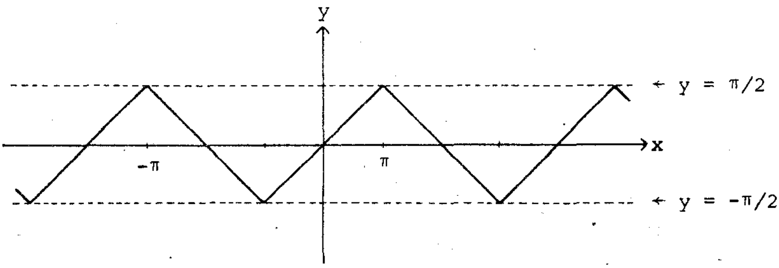
$y = \tan x,\ -\pi/2 < x < \pi/2$

$y = \cot x,\ 0 < x < \pi$

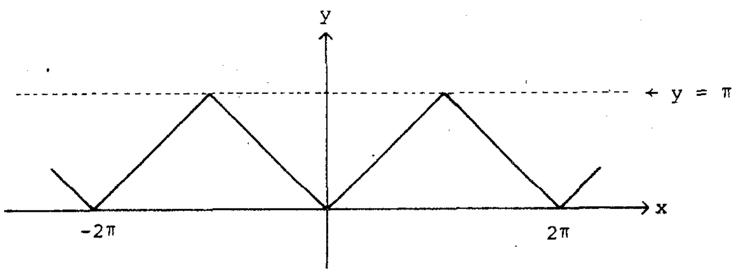
شکل ۳.۳



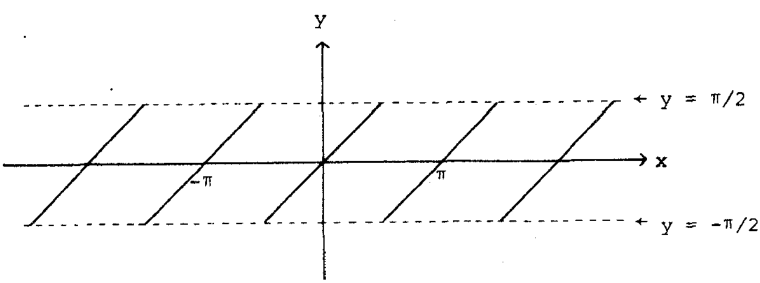
شکل ۴.۳



(a) $y = \sin^{-1}(\sin x)$



(b) $y = \cos^{-1}(\cos x)$



(c) $y = \tan^{-1}(\tan x)$

شکل ۵.۳

۳.۳ روشهای مشتقگیری

ما فرمولهای مختلف مشتقگیری را که تاکنون در این فصل مورد بحث قرار گرفته‌اند جدول‌بندی می‌کنیم. فرض می‌شود که c و n اعداد حقیقی ثابتی هستند و توابع u، v، w، و y مشتق‌پذیرند.

۱) $D_x(c) = ۰$

۲) $D_x(x) = ۱$

۳) $D_x(x^n) = nx^{n-۱}$

۴) $D_x(cu) = cD_x(u)$

۵) $D_x(u+v) = D_x(u) + D_x(v)$

۶) $D_x(uv) = uD_x(v) + vD_x(u)$

۷) $D_x\left(\frac{u}{v}\right) = \frac{vD_x(u) - uD_x(v)}{v^۲} \quad (v \neq ۰)$

۸) $D_x w = D_y w . D_x y$ (قاعدهٔ زنجیری)

۹) $D_y x = \frac{۱}{D_x y} \quad (D_x y \neq ۰)$

۱۰) $D_x(\ln x) = \frac{۱}{x} \quad (x > ۰)$

۱۱) $D_x(\log_a x) = (\log_a e)\frac{۱}{x} = \frac{۱}{(\ln a)x} \quad (x > ۰)$

۱۲) $D_x(e^x) = e^x$

۱۳) $D_x(a^x) = (\ln a)a^x$

۱۴) $D_x(x^x) = x^x(۱ + \ln x) \quad (x > ۰)$

۱۵) $D_x(\sin x) = \cos x$

۱۶) $D_x(\cos x) = -\sin x$

۱۷) $D_x(\tan x) = \sec^۲ x$

۱۸) $D_x(\cot x) = -\csc^۲ x$

۱۹) $D_x(\sec x) = (\sec x)(\tan x)$

۲۰) $D_x(\csc x) = -(\csc x)(\cot x)$

۲۱) $D_x(\sin^{-۱} x) = \frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}} \quad (|x| < ۱)$

۲۲) $D_x(\cos^{-۱} x) = -\frac{۱}{\sqrt{۱-x^{۲}}} \quad (|x| < ۱)$

۲۳) $D_x(\tan^{-۱} x) = \frac{۱}{۱+x^{۲}}$

۲۴) $D_x(\cot^{-۱} x) = -\frac{۱}{۱+x^{۲}}$

۲۵) $D_x(\sec^{-۱} x) = \frac{۱}{|x|\sqrt{x^{۲}-۱}} \quad (|x| > ۱)$

۲۶) $D_x(\csc^{-۱} x) = -\frac{۱}{|x|\sqrt{x^{۱}-۱}} \quad (|x| > ۱)$

۲۷) $D_x(\sinh x) = \cosh x$

۲۸) $D_x(\cosh x) = \sinh x$

۲۹) $D_x(\tanh x) = \operatorname{sech}^{۲} x$

۳۰) $D_x(\coth x) = -\operatorname{csch}^{۲} x$

۳۱) $D_x(\operatorname{sech} x) = -(\operatorname{sech} x)(\tanh x)$

۳۲) $D_x(\operatorname{csch} x) = -(\operatorname{csch} x)(\coth x)$

۳۳) $D_x(\sinh^{-۱} x) = \frac{۱}{\sqrt{۱+x^{۲}}}$

۳۴) $D_x(\cosh^{-۱} x) = \frac{۱}{\sqrt{x^{۲}-۱}} \quad (x > ۱)$

۳۵) $D_x(\tanh^{-۱} x) = \frac{۱}{۱-x^{۲}} \quad (|x| < ۱)$

۳۶) $D_x(\coth^{-۱} x) = \frac{۱}{۱-x^{۲}} \quad |x| > ۱)$

۳۷) $D_x(\operatorname{sech}^{-۱} x) = \frac{-۱}{x\sqrt{۱-x^{۲}}} \quad (۰ < x < ۱)$

۳۸) $D_x(\operatorname{csch}^{-۱} x) = \frac{-۱}{|x|\sqrt{۱+x^{۲}}}, \quad (x \neq ۰)$

توابع لگاریتمی در بعضی از انواع محاسبات حسابی بسیار مفید واقع می‌شوند؛ در محاسبهٔ مشتق بعضی از توابع نیز مورد استفاده قرار می‌گیرند. به عنوان مثال، فرض کنید

$$F(x) = f_۱(x)f_۲(x)\ldots f_n(x) \qquad (۶.۳)$$

که در آن هر f_k، وقتی $k = ۱, ۲, \ldots, n$، تابع مثبت مشتق‌پذیری است که بر بازه‌ای مانند (a, b) تعریف شده است. در این صورت، ملاحظه می‌شود که F نیز همین خواص را دارد؛ توجه می‌کنیم که

$$\ln F(x) = \ln f_۱(x) + \ln f_۲(x) + \cdots + \ln f_n(x)$$

و، به استناد قاعدهٔ زنجیری در مشتقگیری، خواهیم داشت:

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = \frac{f'_۱(x)}{f_۱(x)} + \frac{f'_۲(x)}{f_۲(x)} + \cdots + \frac{f'_n(x)}{f_n(x)} \qquad (۷\cdot۳)$$

این روش مشتقگیری را مشتقگیری لگاریتمی می‌نامند؛ این نامگذاری از این واقعیت ناشی می‌شود که

$$\frac{d}{dx}(\ln F(x)) = \frac{F'(x)}{F(x)}$$

و، از این رو، مشتق لگاریتمی مشتق جدیدی نیست جز صرفاً مشتق لگاریتم یک تابع. مشتقگیری لگاریتمی غالباً سبب صرفه‌جویی در وقت می‌شود و با استفاده از آن خواصی از مشتق به دست می‌آید که از طرف دیگر به آسانی قابل حصول نیست.

مشتقگیری لگاریتمی در حالتی که توان مطرح باشد دارای اهمیت ویژه است. فرض کنید که توابع f و g بر بازهٔ (a, b) مشتق‌پذیرند و f مثبت است. می‌خواهیم تابع

$$G(x) = [f(x)]^{g(x)}$$

را بررسی کنیم. با لگاریتم‌گیری از طرفین، خواهیم داشت:

$$\ln G(x) = g(x)\{\ln f(x)\}$$

و مشتقگیری ایجاب می‌کند که

$$\frac{G'(x)}{G(x)} = g'(x)\{\ln f(x)\} + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}$$

به این ترتیب،

$$G'(x) = [f(x)]^{g(x)}\left(g'(x)\{\ln f(x)\} + g(x)\frac{f'(x)}{f(x)}\right)$$

اینک نکات قبلی را با چند مثال تشریح می‌کنیم.

مثال ۱. y' را بیابید هرگاه

$$y = \sqrt[۳]{x^۲}\frac{۱-x}{۱+x^۲}(\sin^۴ x)(\cos^۲ x), \qquad ۰ < x < ۱$$

حل. لگاریتم می‌گیریم، خواهیم داشت:

$$\ln y = \tfrac{۲}{۳}(\ln x) + \ln(۱-x) - \ln(۱+x^۲) + ۴\{\ln(\sin x)\} + ۲\{\ln(\cos x)\}$$

و مشتقگیری ایجاب می‌کند که

$$\frac{۱}{y}y' = \frac{۲}{۳}\frac{۱}{x} - \frac{۱}{۱-x} - \frac{۲x}{۱+x^۲} + ۴\cot x - ۲\tan x$$

از این رو،

$$y' = y\left(\frac{۲}{۳x} - \frac{۱}{۱-x} - \frac{۲x}{۱+x^۲} + ۴\cot x - ۲\tan x\right)$$

مثال ۲. y' را بیابید هرگاه $y = (\tan x)^{\cos x}$، که در آن $\frac{\pi}{۲} > x > ۰$.

حل. داریم $\ln y = (\cos x)\{\ln(\tan x)\}$؛ از این رو،

$$\frac{۱}{y}y' = \csc x - (\sin x)\{\ln(\tan x)\}$$

بنابراین، $y' = (\tan x)^{\cos x}[\csc x - (\sin x)\{\ln(\tan x)\}]$.

مثال ۳. فرض کنید $f(x)$ و $g(x)$ بر بازه‌ای مانند (a,b) مثبت باشند. بعلاوه، فرض کنید g بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد. با استفاده از مشتقگیری لگاریتمی، نشان دهید که

$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{gf' - fg'}{g^۲}$$

حل. فرض کنید $h = f/g$ بر (a,b). آن‌گاه $\ln h = \ln f - \ln g$، و لذا

$$h' = h\left(\frac{۱}{f}f' - \frac{۱}{g}g\right) \qquad \text{یا} \qquad \frac{۱}{h}h' = \frac{۱}{f}f' - \frac{۱}{g}g'$$

امّا $h = f/g$ و، به این ترتیب، فرمول مطلوب حاصل می‌شود.

توضیحات. واضح است که تابع $\ln(-x)$ به‌ازای $x < ۰$ تعریف می‌شود. با استفاده از قاعدهٔ زنجیری در مشتقگیری، داریم

$$D_x\{\ln(-x)\} = \frac{۱}{-x}(-۱) = \frac{۱}{x}, \qquad (x < ۰)$$

از ترکیب این رابطه با

$$D_x(\ln x) = \frac{۱}{x}, \qquad (x > ۰)$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$D_x(\ln|x|) = \frac{۱}{x}, \qquad (x \neq ۰) \tag{۸.۳}$$

بنابراین، می‌توانیم نتیجه بگیریم که اگر f بربازه‌ای مشتق‌پذیر باشد و $f(x)$ در هیچ نقطه‌ای از این بازه صفر نشود، آن‌گاه

$$D_x\{\ln|f(x)|\} = \frac{f'(x)}{f(x)} \tag{۹.۳}$$

بر این بازه موجود است که آن را مشتق لگاریتمی f می‌نامند.

فرض کنید F مانند (۶.۳) تعریف شود، که در آن هر f_k، به‌ازای $k = ۱, ۲, \ldots, n$، تابعی است که بر بازهٔ (a, b) مشتق‌پذیر است و در هیچ نقطهٔ این بازه صفر نمی‌شود، آن‌گاه فرمول (۷.۳) برقرار است؛ زیرا

$$\frac{F'(x)}{F(x)} = D_x\{\ln|F(x)|\} = D_x\{\ln|f_۱(x)\ldots f_n(x)|\}$$

و

$$D_x\{\ln|f_۱(x)| + \cdots + \ln|f_n(x)|\} = \frac{f'_۱(x)}{f_۱(x)} + \cdots + \frac{f'_n(x)}{f_n(x)}$$

می‌دانیم که فرمول

$$D_x(x^n) = nx^{n-۱} \tag{۱۰.۳}$$

برقرار است هرگاه $x > ۰$ و n یک عدد حقیقی ثابت باشد. حال، فرض کنید $n > ۰$ و تعریف کنید:

$$f(x) = x^n, \qquad \text{برای } x > ۰$$
$$= ۰, \qquad \text{برای } x = ۰$$

(توجه کنید که x^n به‌ازای $x = ۰$ و $n \leq ۰$ تعریف نشده است.) آن‌گاه، به‌ازای $h > ۰$، داریم

$$\frac{f(۰+h)-f(۰)}{h} = \frac{h^n}{h} = h^{n-۱}$$

به‌ازای $n > ۱$ و $h > ۰$، داریم

$$h^{n-۱} \longrightarrow ۰ \qquad \text{وقتی که} \qquad h \longrightarrow ۰\,.$$

به‌ازای $۰ < n < ۱$ و $h > ۰$، داریم

$$h^{n-۱} \longrightarrow +\infty \qquad \text{وقتی که} \qquad h \longrightarrow ۰\,.$$

اگر $n = ۱$، آن‌گاه $f(x) = x$. معذالک، می‌دانیم که $D_x(x) = ۱$.

همچنین، دیده‌ایم که فرمول (۱۰.۳) در حالتی که x عددی حقیقی و n یک عدد صحیح مثبت باشد برقرار است. اگر $n = ۰$، آن‌گاه $x^n = ۱$ مشروط به این که $x \neq ۰$، و $D_x(۱) = ۰$. به آسانی دیده می‌شود که فرمول (۱۰.۳) در حالتی که n یک عدد صحیح منفی ثابت باشد و $x \neq ۰$ به قوت خود باقی می‌ماند. مثلاً،

$$y = x^{-۲} = \frac{۱}{x^۲} \qquad (x \neq ۰)$$

دارای مشتق

$$y' = \frac{-۲x}{x^۴} = -۲x^{-۳} \qquad (x \neq ۰)$$

است.

فرض کنید که $n > ۰$ عددی گویا باشد، یعنی، $n = p/q$ که در آن p و q دو عدد صحیح مثبت می‌باشند که نسبت به هم اولند. اگر q عددی فرد باشد، آن‌گاه $x^{p/q}$ به عنوان جواب (منحصر به‌فرد) معادلهٔ $y^q = x^p$ تعریف می‌شود. در این حالت، تابع $y = x^{p/q} = x^n$ به‌ازای x منفی نیز تعریف می‌شود و به‌ازای این x

$$x^{۱/q} = -(-x)^{۱/q} \qquad \text{و} \qquad x^n = (x^{۱/q})^p = (-۱)^p(-x)^n$$

اکنون، تحقیق می‌کنیم که فرمول (۱۰.۳) در حالتی که تابع مورد بحث $y = x^n = x^{p/q}$ باشد که در آن p و q دو عدد صحیح مثبت متباین می‌باشند، q زوج است، و $x \neq ۰$، نیز برقرار است. در واقع،

$$|x^n| = |x|^n \qquad \text{یا} \qquad \ln|x^n| = n(\ln|x|)$$

امّا، (۹.۳) ایجاب می‌کند که

$$D_x[\ln|x^n|] = \frac{D_x(x^n)}{x^n} \qquad (x \neq ۰)$$

و، به استناد (۸.۳)،

$$D_x[n(\ln|x|)] = n\frac{۱}{x} \qquad (x \neq ۰)$$

بنابراین،

$$D_x(x^n) = nx^{n-۱}, \qquad x \neq ۰ \qquad \text{یا} \qquad \frac{D_x(x^n)}{x^n} = n\frac{۱}{x}$$

به انگیزهٔ قضیهٔ بعدی، مثال زیر را بررسی می‌کنیم. فرض کنید

$$y = \sqrt{۱ - x^۲} \qquad (-۱ < x < ۱)$$

آن‌گاه

$$D_x y = -\frac{x}{\sqrt{۱ - x^۲}}$$

اگر قرار دهیم $x = \sin t$، که در آن $-\pi/۲ < t < \pi/۲$، آن‌گاه $y = (۱ - \sin^۲ t)^{۱/۲} = \cos t$ و خواهیم داشت:

$$D_t x = \cos t, \qquad D_t y = -\sin t$$

به این ترتیب،

$$D_x y = \frac{-\sin t}{\cos t} = \frac{D_t y}{D_t x} \qquad (۱۱.۳)$$

این مثال، امکان حصول $D_x y$ بر حسب $D_t y$ و $D_t x$ را نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۵.۳. فرض کنید توابع f و g بر بازهٔ بسته‌ای مانند $[a,b]$ پیوسته و بر بازهٔ باز (a,b) مشتق‌پذیر باشند. بعلاوه، فرض کنید به‌ازای هر t که $a < t < b$، $f'(t) \neq ۰$ و f بر $[a,b]$ اکیداً یکنوا باشد. آن‌گاه، معادلات پارامتری

$$x = f(t), \qquad y = g(t), \qquad a \leq t \leq b \qquad (۱۲.۳)$$

y را به عنوان تابعی مشتق‌پذیر از x تعریف می‌کنند و

$$D_x y = \frac{D_t y}{D_t x}, \qquad a < t < b$$

برهان. به استناد قضیهٔ ۱۸.۲، ملاحظه می‌کنیم که f معکوس پیوسته‌ای مانند f^{-1} دارد با ضابطهٔ $t = f^{-1}(x)$ که به‌ازای همهٔ xهای بازهٔ بستهٔ با نقاط انتهایی $f(a)$ و $f(b)$ تعریف می‌شود. به این ترتیب،

$$y = g(t) = g\{f^{-1}(x)\} = F(x) \qquad (۱۳.۳)$$

که در آن $F = g(f^{-1})$ تابعی پیوسته است که قلمروش بازهٔ بستهٔ با نقاط انتهایی $f(a)$ و $f(b)$ است. از این رو، معادلات پارامتری (۱۲.۳) تابع y را به عنوان تابع پیوسته‌ای از x تعریف می‌کنند که قانون این تناظر با (۱۳.۳) داده می‌شود. از (۱۳.۳)، با جایگزینی $x = f(t)$ در $g(t) = F(x)$، اتحاد زیر برحسب t به دست می‌آید:

$$g(t) = F\{f(t)\} \qquad (۱۴.۳)$$

اگر براساس قاعدهٔ زنجیری (قضیهٔ ۳.۳) از طرفین (۱۴.۳) برحسب t مشتق بگیریم، خواهیم داشت:

$$g'(t) = F'[f(t)]f'(t)$$

که از نقطهٔ نظر معادلات (۱۲.۳)، به صورت زیر نیز می‌تواند نوشته شود:

$$D_t y = D_x F . D_t x$$

بنابراین، چون $D_t x = f'(t) \neq 0$،

$$D_x F = \frac{D_t y}{D_t x}$$

تبصره. توجه کنیدکه اگر $f'(t) \neq 0$ بر (a, b) و f' بر $[a, b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه f بر $[a, b]$ اکیداً یکنوا خواهد بود.

بحث. معادلهٔ

$$x^2 + y^2 = R^2 \qquad (۱۵.۳)$$

را در نظر بگیرید. این معادله، دایره‌ای به شعاع R را نشان می‌دهد که مرکزش در مبداء $(0, 0)$ صفحهٔ xy است. به دو نمایش پارامتری این دایره نظر می‌افکنیم.

اولین نمایش پارامتری. فرض کنید θ زاویهٔ (قطبی) پاره‌خط واصل مبدأ $(۰,۰)$ به نقطهٔ $(R,۰)$ و پاره‌خط واصل مبدأ $(۰,۰)$ به نقطهٔ (x,y) از دایره باشد؛ زاویهٔ θ برحسب رادیان و در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت اندازه‌گیری می‌شود. (شکل ۶.۳ را ببینید.) آن‌گاه

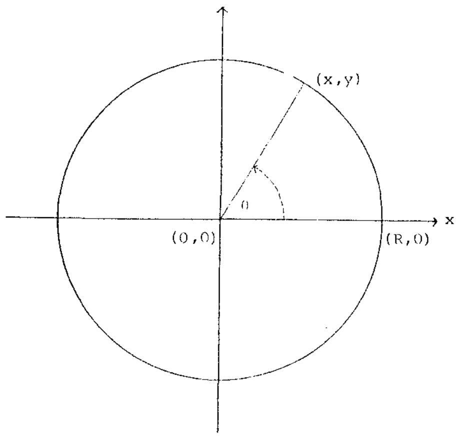
$$x = R\cos\theta ،\quad y = R\sin\theta ،\quad \text{و} \quad ۰ \leq \theta \leq ۲\pi \qquad (۱۶.۳)$$

وقتی θ از ۰ به ۲π برود، نقطهٔ (x,y)، با شروع از $(R,۰)$ و حرکت در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، دایره را می‌پیماید.

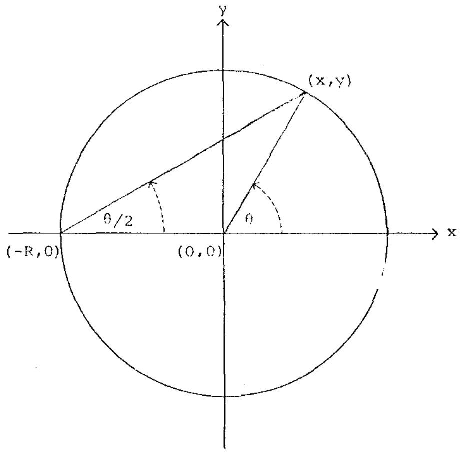
دومین نمایش پارامتری. حال، به جای زاویهٔ (قطبی) θ، t را مطابق

$$t = \tan\frac{\theta}{۲}$$

به عنوان پارامتر اختیار می‌کنیم؛ توجه کنیدکه t شیب خط واصل نقاط $(-R,۰)$ و (x,y) از دایرهٔ

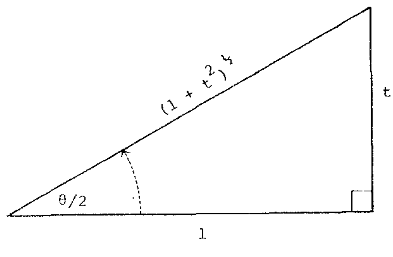


شکل ۶.۳



شکل ۷.۳

$x^۲ + y^۲ = R^۲$ است. (شکل ۷.۳ را ببینید.) از روی شکل ۸.۳ می‌توان دید که



شکل ۸.۳

$$\sin\frac{\theta}{۲} = \frac{t}{\sqrt{۱+t^۲}}, \qquad \cos\frac{\theta}{۲} = \frac{۱}{\sqrt{۱+t^۲}}$$

امّا

$$\sin\theta = ۲\sin\frac{\theta}{۲}\cos\frac{\theta}{۲} = \frac{۲t}{۱+t^۲}$$
$$\cos\theta = \cos^۲\frac{\theta}{۲} - \sin^۲\frac{\theta}{۲} = \frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}$$

و، بنابراین، معادلات

$$x = R\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}, \quad y = R\frac{۲t}{۱+t^۲}, \quad و \quad -\infty < t < \infty \qquad (۱۷.۳)$$

به عنوان نمایش پارامتری $x^۲+y^۲=R^۲$ برحسب پارامتر t به دست می‌آیند. وقتی t از $-\infty$ به ∞ برود، زاویهٔ $\frac{\theta}{۲} = \tan^{-۱} t$ از $-\frac{\pi}{۲}$ به $\frac{\pi}{۲}$ می‌رود و، از این رو، θ از $-\pi$ به π می‌رود؛ و نقطهٔ (x, y) دایرهٔ (۱۵.۳) را، با شروع از نقطهٔ $(-R, ۰)$ و حرکت در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، می‌پیماید. خود نقطهٔ $(-R, ۰)$ یک نقطهٔ حدی است هنگامی که $t \longrightarrow \pm\infty$.

از (۱۶.۳)، به ازای $۰ < \theta < \pi$ و $\pi < \theta < ۲\pi$، خواهیم داشت:

$$\frac{D_\theta y}{D_\theta x} = \frac{r\cos\theta}{-r\sin\theta} = -\cot\theta = -\frac{x}{y}$$

و از (۱۷.۳)، به‌ازای $-\infty < t < ۰$ و $۰ < t < \infty$، نتیجه می‌شود که

$$\frac{D_t y}{D_t x} = \frac{۲r(۱-t^۲)}{۱+t^۲} \div \frac{-۴rt}{(۱+t^۲)^۲} = -\frac{۱-t^۲}{۲t} = -\frac{x}{y}$$

از این رو، هر دو طریق پارامتری به یک جواب ختم می‌شوند، یعنی،

$$y' = -\frac{x}{y}, \quad y \neq ۰ \quad برای \qquad (۱۸.۳)$$

در نقاط $(\pm R, ۰)$، خط مماس بر دایرهٔ (۱۵.۳) موازی محور y است و مشتق در این نقاط باید نامتناهی باشد.

در جریان این بحث، دو نمایش پارامتری برای بیضی

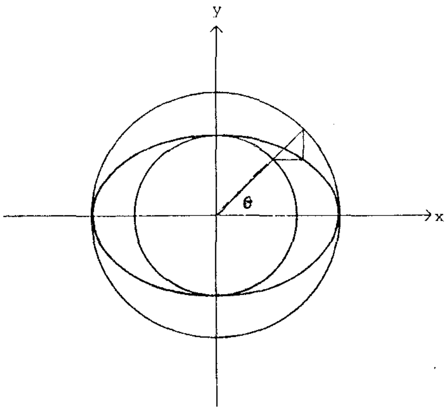
$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱, \qquad (۱۹.۳)$$

ذکر می‌کنیم، که عبارتند از

$$x = a\cos\theta, \quad y = b\sin\theta, \quad ۰ \leq \theta < ۲\pi \qquad (۲۰.۳)$$

(شکل ۹.۳ را ببینید.) و

$$x = a\frac{۱-t^۲}{۱+t^۲}, \quad y = b\frac{۲t}{۱+t^۲}, \quad -\infty < t < \infty \qquad (۲۱.۳)$$



شکل ۹.۳

سه نمایش پارامتری برای هذلولوی

$$\frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲} = ۱ \qquad (۲۲.۳)$$

می‌توان نوشت، که عبارتند از

$$x = a\cosh s, \quad y = b\sinh s, \quad -\infty < s < \infty \qquad (۲۳.۳)$$

$$x = a\sec v, \quad y = b\tan v, \quad ۰ \le v < ۲\pi, v \neq \frac{\pi}{۲}, v \neq \frac{۳\pi}{۲} \qquad (۲۴.۳)$$

$$x = a\frac{۱+w^۲}{۱-w^۲}, \quad y = b\frac{۲w}{۱-w^۲}, \quad -\infty < w < \infty, \quad w \neq \pm ۱ \qquad (۲۵.۳)$$

در مورد بیضی (۱۹.۳)، این نتیجه عاید می‌شود که

$$y' = -\frac{b^۲x}{a^۲y}, \quad y \neq ۰ \qquad (۲۶.۳)$$

و در مورد هذلولوی (۲۲.۳)،

$$y' = \frac{b^2 x}{a^2 y}, \qquad y \neq 0 \tag{۲۷.۳}$$

در مورد منحنیهای (۱۵.۳)، (۱۹.۳)، و (۲۲.۳)، از نمایش پارامتری صریح برای محاسبهٔ y' استفاده کردیم. معذالک، عدم وجود یک نمایش پارامتری صریح الزاماً نباید ما را از تعیین y' بازبدارد. فرض کنید منحنی C با معادله‌ای به صورت

$$F(x, y) = 0 \tag{۲۸.۳}$$

، که برحسب y حل‌پذیر نیست، داده شده باشد. فرض کنید که در بازه‌ای یا در قلمروی دیگر، حداقل یک تابع f موجود باشد به طوری که رابطهٔ

$$F[x, f(x)] = 0 \tag{۲۹.۳}$$

به‌ازای همهٔ مقادیر x از بازهٔ مورد بحث برقرار باشد. بعلاوه، فرض کنید که F تابعی مشتق‌پذیر از هر دو متغیر x و y باشد، و f تابعی مشتق‌پذیر از x باشد. آن‌گاه، مشتق f را می‌توان با مشتقگیری مستقیم از (۲۹.۳) به دست آورد. از این طریق، امکان وجود نقاطی که در آنها f مشتق ندارد یا مشتق f نامتناهی است (یعنی، منحنی یک مماس قائم دارد)، مستثنا نمی‌شود. فرایند محاسبهٔ $f'(x)$ در این حالت را مشتقگیری ضمنی و f را تابع ضمنی می‌نامند؛ زیرا f صریحاً تعریف نشده است.

قبل از ذکر مثالهایی از مشتقگیری ضمنی، صریحاً خاطر نشان می‌کنیم که منظور فعلی ما بررسی سؤالات زیر نیست: تحت چه شرایطی یک جواب $y = f(x)$ از $F(x, y) = 0$ ممکن می‌شود؟ از آنچه دربارهٔ F می‌دانیم، چه نتایجی دربارهٔ مشتق‌پذیری تابع f حاصل می‌شود؟ جواب این سؤالات و امثال آنها به بحث از توابع چندمتغیره مربوط می‌شود.

مثالها

۱. دایرهٔ $x^2 + y^2 = R^2$ را در نظر بگیرید، و با استفاده از مشتقگیری ضمنی، y' را محاسبه کنید.

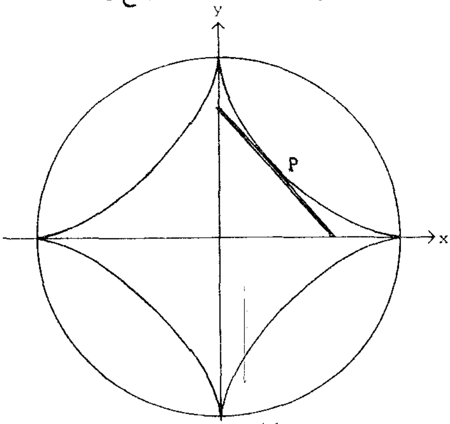
حل. داریم

$$2x + 2y.D_x y = 0 \quad \text{یا} \quad y' = -\frac{x}{y}$$

۲. هر ستاره‌وار در معادلهٔ
$$x^{۲/۳} + y^{۲/۳} = a^{۲/۳}$$
صدق می‌کند، که در آن a یک عدد مثبت ثابت است. نمودار ستاره‌وار را در شکل ۱۰.۳ ملاحظه کنید. با استفاده از مشتقگیری ضمنی، y' را بیابید.

حل. داریم
$$y' = -\sqrt[۳]{\frac{y}{x}} \quad \text{یا} \quad \tfrac{۲}{۳}x^{-۱/۳} + \tfrac{۲}{۳}y^{-۱/۳}.D_x y = ۰$$

ملاحظات. یک محاسبهٔ مستقیم نشان می‌دهد که $x^{۲/۳} + y^{۲/۳} = a^{۲/۳}$ مستلزم
$$(x^۲ + y^۲ - a^۲)^۳ + ۲۷a^۲x^۲y^۲ = ۰$$
است که نشان می‌دهد که ستاره‌وار درون دایرهٔ $x^۲ + y^۲ = a^۲$ واقع و نسبت به دو محور مختصات متقارن است.



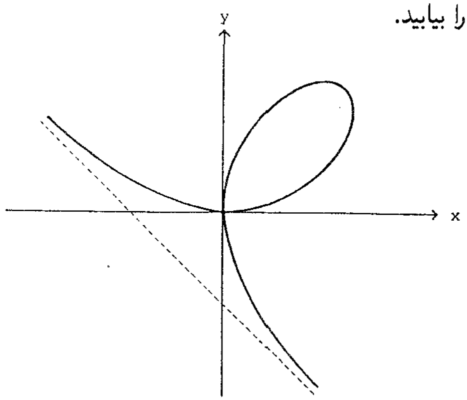
شکل ۱۰.۳

بنابراین، کافی است که منحنی مفروض را فقط در چارک اول صفحهٔ xy مطالعه کنیم. به آسانی می‌توان ثابت کرد که طول قسمتی که محورهای مختصات از خط مماس بر منحنی جدا می‌کنند مستقل از نقطهٔ تماس P با منحنی است؛ این طول مساوی a است. این خاصیت هندسی در ترسیم ستاره‌وار مفید واقع می‌شود. سرانجام، ستاره‌وار دارای نمایش پارامتری زیر است:
$$x = a\cos^۳ t \qquad y = a\sin^۳ t, \qquad ۰ \le t < ۲\pi$$

۳. معادلهٔ خم برگی دکارت عبارت است از

$$x^۳ + y^۳ = ۳axy$$

که در آن a یک عدد مثبت ثابت است. نمودار خم برگی دکارت را در شکل ۱۱.۳ ملاحظه کنید. با استفاده از مشتقگیری ضمنی، y' را بیابید.



شکل ۱۱.۳

حل. داریم

$$۳x^۲ + ۳y^۲.D_xy = ۳a(x.D_xy + y)$$

یا

$$y' = \frac{ay - x^۲}{y^۲ - ax}$$

ملاحظات. خط راست $y = tx$، که د رآن t یک عدد حقیقی دلخواه است، خم برگی دکارت را در سه نقطه قطع می‌کند، مبداء $(۰,۰)$ دو نقطه محسوب می‌شود، و نقطهٔ سوم دارای مختصات زیر است:

$$x = \frac{۳at}{۱ + t^۳}, \quad y = \frac{۳at^۲}{۱ + t^۳}, \quad -\infty < t < \infty; \quad t \neq -۱$$

این یک نمایش پارامتری خم برگی دکارت است. وقتی t از $\infty-$ به $۱-$ برود، نقطهٔ (x,y) منحنی از مبداء $(۰,۰)$ شروع به حرکت می‌کند و در امتداد شاخهٔ سمت راست منحنی به بی‌نهایت می‌رود. وقتی t از $۱-$ به ۰ برود، این نقطهٔ منحنی، در امتداد شاخهٔ سمت چپ، از بی‌نهایت به مبداء می‌آید. هرگاه t از ۰ به ∞ برود، این نقطه در امتداد طوقهٔ منحنی در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت حرکت می‌کند. خم برگی دکارت در نیمصفحهٔ محدود به خط $x + y + a = ۰$ که شامل مبداء $(۰,۰)$ می‌باشد واقع شده

است. خط $x + y + a = \circ$ در شکل ۱۱.۳ به صورت خط چین نشان داده شده است. بالاترین نقطهٔ طوقه دارای مختصات $(\text{۲}^{\text{۱}/\text{۳}}a, \text{۲}^{\text{۲}/\text{۳}}a)$ است. سه نقطهٔ متمایز بر خم برگی دکارت که با مقادیر پارامتری $t_\text{۱}$، $t_\text{۲}$، و $t_\text{۳}$ مفروض باشند فقط و فقط وقتی بر یک استقامتند که حاصل ضرب $t_\text{۱}t_\text{۲}t_\text{۳}$ برابر ۱− باشد.

۴. منحنی $x^y = y^x$ را که در آن $x > \circ$ و $y > \circ$، در نظر بگیرید. این منحنی از دو شاخه تشکیل شده است: خط $y = x$ در چارک اول صفحهٔ xy و منحنی با معادلات پارامتری

$$y = \left(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{u}\right)^{u+\text{۱}} \quad \text{و} \quad x = \left(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{u}\right)^{u}$$

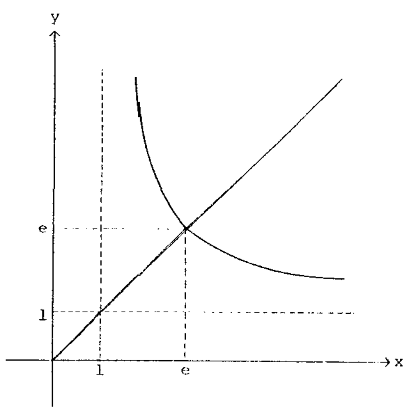
که نخست از جایگزینی $y = tx$ در $x^y = y^x$ و سپس تغییر متغیر $t - \text{۱} = \text{۱}/u$ به دست می‌آید. منحنی $x^y = y^x$ در شکل ۱۲.۳ به‌ازای $x > \circ$ و $y > \circ$ نشان داده شده است. y' را، هنگامی که $x \neq y$، محاسبه کنید.

حل. به‌ازای $x > \circ$ و $y > \circ$، معادلهٔ $x^y = y^x$ معادل

$$y(\ln x) = x(\ln y)$$

است. مشتقگیری ضمنی ایجاب می‌کند که

$$y' = \left(\frac{x(\ln y) - y}{y(\ln x) - x}\right)\frac{y}{x} \quad \text{یا} \quad y\frac{\text{۱}}{x} + y'(\ln x) = \ln y + x\frac{\text{۱}}{y}y'$$



شکل ۱۲.۳

ملاحظات. نمایش $x = (1 + \frac{1}{u})^u$، $y = (1 + \frac{1}{u})^{u+1}$ سبب می‌شود که به آسانی نقاطی بر قسمت خمیدهٔ نمودار $x^y = y^x$ به‌ازای $x > 0$ و $y > 0$ بیابیم. مثلاً، توجه کنید که
اگر $u = 1$، آنگاه $x = 2$ و $y = 4$؛
اگر $u = 2$، آنگاه $x = \frac{9}{4}$ و $y = \frac{27}{8}$؛
اگر $u = 3$، آنگاه $x = \frac{64}{27}$ و $y = \frac{256}{81}$.

معادلهٔ $4^2 = 2^4$ تنها جواب $n^m = m^n$ برحسب اعداد صحیح مثبت n و m با $m \neq n$ است. در واقع، فرض کنید $n < m$ و بنویسیم $m = n + r$، که در آن r یک عدد صحیح مثبت است. با جایگزینی در $m^n = n^m$، به استناد قضیهٔ ۱.۱۱ فصل اول، درمی‌یابیم که $(n + r)^n = n^{n+r}$ یا

$$\left(1 + \frac{r}{n}\right)^n = n^r < e^r$$

از این رو، $n = 1$ یا $n = 2$. اگر $n = 1$، آنگاه $m = 1$ و این حالت از بحث خارج می‌شود؛ زیرا $m \neq n$. حالت $n = 2$ مستلزم $m = 4$ است.

۵. فرض کنید که x و y با معادلهٔ

$$\ln \sqrt{x^2 + y^2} = \tan^{-1} \frac{y}{x}$$

به هم مربوط باشند. با استفاده از مشتقگیری ضمنی، y' و y'' را بیابید.
حل. چون $\frac{1}{2} \ln(x^2 + y^2) = \tan^{-1} y/x$ مستلزم

$$\frac{1}{2}\frac{2x + 2yy'}{x^2 + y^2} = \frac{1}{1 + (y/x)^2}\frac{xy' - y}{x^2} \quad \text{یا} \quad x + yy' = xy' - y$$

است، خواهیم داشت:

$$y' = \frac{x + y}{x - y}$$

مشتقگیری ضمنی از $x + yy' = xy' - y$ ایجاب می‌کند که $1 + (y')^2 + yy'' = xy''$. بنابراین (با جایگزینی عبارت بالا به جای y')،

$$y'' = \frac{1 + (y')^2}{x - y} = 2\frac{x^2 + y^2}{(x - y)^3}$$

۶. فرض کنید $x = y - \alpha \sin y$، که در آن α ثابت است و $۰ < \alpha < ۱$. y' و y'' را بیابید.
حل. داریم $۱ = y' - \alpha(\cos y)y'$. از این رو،

$$y' = \frac{۱}{۱ - \alpha \cos y} \quad \text{و} \quad y'' = \frac{-\alpha(\sin y)y'}{(۱ - \alpha\cos y)^۲} = \frac{-\alpha \sin y}{(۱ - \alpha \cos y)^۳}$$

تبصره. در $x = y - \alpha \sin y$، که در آن $۰ < \alpha < ۱$، x یک تابع اکیداً صعودی از y است. در واقع، فرض کنید، به‌ازای $k = ۱, ۲, \ldots$، $x_k = y_k - \alpha \sin y_k$؛ آن‌گاه

$$x_۲ - x_۱ = y_۲ - y_۱ - \alpha(\sin y_۲ - \sin y_۱)$$

امّا، هرگاه $y_۲ > y_۱$، $|\sin y_۲ - \sin y_۱| < y_۲ - y_۱$. [نامساوی (۱۹.۲) از فصل دوم را ببینید.] بنابراین، نتیجه می‌شود که $y_۲ > y_۱$ مستلزم $x_۲ > x_۱$ است. تابع معکوس

$$x = y - \alpha \sin y \quad (۰ < \alpha < ۱)$$

وجود دارد، ولی نمی‌توانیم آن را برحسب توابع مقدماتی بیان کنیم. نهایتاً، به‌ازای هر y حقیقی دلخواه، $D_y x > ۰$؛ و ما برای تعیین y' از قضیهٔ ۴.۳ هم می‌توانستیم استفاده کنیم.

۷. فرض کنید که x و y با معادلهٔ

$$y^۵ e^y - (۲x^۳ + ۳)(\sin y) + x^۲ y^۲ - x \cos x = ۰ \qquad (۳۰.۳)$$

به هم مربوط باشند. واضح است که مبداء $(۰, ۰)$ نقطه‌ای از نمودار (۳۰.۳) است. معذالک، به زحمت می‌توان تحقیق کرد که هر x نزدیک به صفر متناظر یک y نزدیک به صفر از معادلهٔ (۳۰.۳) است، زیرا ما نمی‌توانیم معادلهٔ (۳۰.۳) را حل کنیم. با این وجود، مشتقگیری ضمنی در نقطهٔ $(x, y) = (۰, ۰)$ ایجاب می‌کند که

$$y' = -\frac{۱}{۳}, \quad y'' = ۰, \quad y''' = \frac{۲۶}{۲۷} \qquad (۳۱.۳)$$

تبصره. اگرچه روشی برای رسم نمودار معادلهٔ (۳۰.۳) نداریم، نتیجهٔ (۳۱.۳) نشان می‌دهد که (۳۰.۳) نقطهٔ عطفی (مفهومی که بعداً مطالعه خواهد شد.) در نقطهٔ $(۰, ۰)$ دارد.

این بخش را با ملاحظاتی دربارهٔ مشتقات مراتب بالاتر کامل می‌کنیم. فرض کنید که f و g در یک بازهٔ مشترک دارای مشتقات مرتبهٔ n باشند. آن‌گاه، تابع حاصل ضرب fg در روابط زیر صدق می‌کند:

$$(fg)' = fg' + f'g$$

$$(fg)'' = fg'' + ۲f'g' + f''g$$
$$\vdots \qquad (۳۲.۳)$$
$$(fg)^{(n)} = fg^{(n)} + \binom{n}{۱} f'g^{(n-۱)} + \binom{n}{۲} f''g^{(n-۲)} + \cdots + \binom{n}{n-۱} f^{(n-۱)}g' + f^{(n)}g$$

که در آن

$$m! = ۱\cdot۲\cdot۳\cdot\ldots m, \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

رابطهٔ (۳۲.۳) به فرمول لایب نیتس مشهور است. برای تحقیق در درستی (۳۲.۳)، ملاحظه می‌کنیم که کاملاً آشکار است که باید فرمولی از نوع

$$(fg)^{(n)} = fg^{(n)} + C_{n,۱}f'g^{(n-۱)} + C_{n,۲}f''g^{(n-۲)} + \cdots + C_{n,n-۱}f^{(n-۱)}g' + f^{(n)}g$$

داشته باشیم که در آن ضرایب $C_{n,k}$ اعداد صحیح مثبتی می‌باشند که از انتخاب f و g مستقل‌اند. مقادیر ضرایب را می‌توان از طریق جایگزینی توابع ویژهٔ مناسبی به دست آورد. مثلاً می‌گیریم

$$f(x) = x^k, \qquad g(x) = x^{n-k}$$

که، در این صورت، طرف چپ به شکل زیر درمی‌آید:

$$(fg)^{(n)} = D_x^n(x^k x^{n-k}) = D_x^n(x^n) = n!$$

در طرف راست، مشتقات f به ترتیب صعود مرتبه پدیدار می‌شوند، در حالی که مشتقات g به ترتیب کاهش مرتبه ظاهر می‌شوند. از این رو، نتایج

$$D_x^j(x^k) = k!, \qquad j = k \quad \text{اگر}$$
$$= ۰, \qquad j > k \quad \text{اگر}$$

و

$$D_x^{n-j}(x^{n-k}) = ۰, \qquad j = ۰, ۱, \ldots, k-۱ \quad \text{اگر}$$

$$= (n-k)!, \quad j = k \quad \text{اگر}$$

حاصل می‌شود. بنابراین، همهٔ جمل سمت راست صفر می‌شوند، جز یک جمله، به طوری که معادلهٔ

$$n! = C_{n,k}k!(n-k)!$$

عاید و دیده می‌شود که $C_{n,k}$ مقدار مورد ادعّا در (۳۲.۳) را داراست.

سپس، مشتقات مراتب بالاتر توابع مرکب را بررسی می‌کنیم. به عنوان مثال، فرض می‌کنیم که f و g دارای مشتقات مرتبهٔ ۴ باشند و

$$F = f[g]$$

موجود باشد؛ آن‌گاه

$$\begin{aligned}
F' &= f'[g]g', \\
F'' &= f''[g](g')^{۲} + f'[g]g'', \\
F''' &= f'''[g](g')^{۳} + ۳f''[g]g'g'' + f'[g]g''' \\
F^{(۴)} &= f^{(۴)}[g](g')^{۴} + ۶f'''[g](g')^{۲}g'' + f''[g]\{۳(g'')^{۲} + ۴g'g''\} + f'[g]g^{(۴)}
\end{aligned}$$

اینک، به تابع معکوس نظر افکنده و فرض می‌کنیم که f اکیداً یکنوا و سه بار مشتق‌پذیر باشد و $f'(x) \neq ۰$. آن‌گاه، $f^{-۱}$ در روابط

$$(f^{-۱})'(y) = \frac{۱}{f'(x)}, \qquad (f^{-۱})''(y) = -\frac{f''(x)}{[f'(x)]^{۳}},$$
$$(f^{-۱})'''(y) = \frac{۳[f''(x)]^{۳} - f'(x)f''(x)}{[f'(x)]^{۵}}$$

سرانجام، نمایش پارامتری $x = f(t)$ و $y = g(t)$ را با $a \leq t \leq b$ مورد بررسی قرار می‌دهیم؛ فرض می‌کنیم که توابع f و g بر بازهٔ باز (a, b) دوبار مشتق‌پذیر باشند، f و g و مشتقات مرتبهٔ اول آنها برحسب t بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته باشند، $f'(t) \neq ۰$ به‌ازای هر t که $a < t < b$ و f بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ اکیداً یکنوا باشد. آن‌گاه، y تابعی است که دوبار برحسب x مشتق‌پذیر است و

$$D_x y = \frac{D_t y}{D_t x}, \qquad D_x^{۲} y = \frac{D_t x . D_t^{۲} y - D_t y . D_t^{۲} x}{[D_t x]^{۳}}, \qquad a < t < b$$

۴.۳ مجانب

تعریف. خط راستی را مجانب شاخه‌ای نامتناهی از یک منحنی می‌نامند در صورتی که هرگاه نقطهٔ P در حرکت بر روی این شاخه بی‌نهایت از مبداء فاصله بگیرد، فاصلهٔ عمودی P از این خط به صفر میل کند.

ملاحظات. محورهای مختصات، مجانبهای $y = ۱/x$ می‌باشند. محور x یک مجانب $y = e^x$ است. به وضوح، خط راست $y = x$ یک مجانب منحنی $y = x + ۱/x$ است؛ زیرا $۱/x \longrightarrow ۰$ وقتی که $x \longrightarrow \pm\infty$. خطوط راست $y = \pm\frac{\pi}{۲}$ مجانبهای $y = \arctan x$ می‌باشند.

بحث. به تعیین مجانبها می‌پردازیم و ابتدا مجانبهای مایل را مورد بحث قرار می‌دهیم، یعنی، مجانبهایی که با محورهای مختصات موازی نیستند و معادله‌ای به صورت

$$y = Ax + B \qquad (۳۳.۳)$$

دارند. طول x باید به بی‌نهایت میل کند وقتی که نقطهٔ P با مختصات (x, y) در امتداد شاخهٔ منحنی تا بی‌نهایت به پیش می‌رود. A و B را طوری تعیین می‌کنیم که خط راست (۳۳.۳) مجانب احتمالی منحنی مفروض باشد. فاصلهٔ عمودی هر نقطهٔ P با مختصات (x, y) بر یک شاخهٔ نامتناهی منحنی مفروضی تا خط (۳۳.۳) عبارت است از

$$d = \frac{|y - Ax - B|}{\sqrt{۱ + A^۲}}$$

امّا $d \longrightarrow ۰$ وقتی که $x \longrightarrow \infty$ و، بنابراین، $\lim_{x\to\infty}(y - Ax - B) = ۰$ ، که معادل

$$\lim_{x\to\infty}(y - Ax) = B$$

است. چون $y/x - A = (y - Ax)(۱/x)$،

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x - A}\right) = \left(\lim_{x\to\infty}(y - Ax)\right)\left(\lim_{x\to\infty}\left(\frac{۱}{x}\right)\right) = B \cdot ۰ = ۰$$

یا

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y}{x}\right) = A$$

از این رو،

$$B = \lim_{x\to\infty}(y - Ax) \quad \text{و} \quad A = \lim_{x\to\infty}\frac{y}{x} \qquad (۳۴.۳)$$

A شیب و B عرض از مبداء مجانب $y = Ax + B$ است.

همین ملاحظات در حالتی که $x \longrightarrow -\infty$ اعمال می‌شود.

مثال ۱. هذلولی

$$y = \pm\frac{b}{a}\sqrt{x^۲ - a^۲} \quad \text{یا} \quad \frac{x^۲}{a^۲} - \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$$

مفروض است. وقتی $x \longrightarrow \infty$، به استناد (۳۴.۳)، خواهیم داشت:

$$\frac{y}{x} = \pm\frac{b}{a}\frac{\sqrt{x^۲ - a^۲}}{x} = \pm\frac{b}{a}\sqrt{۱ - a^۲/x^۲} \longrightarrow \pm\frac{b}{a}$$

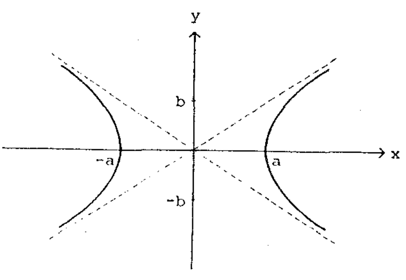
آن‌گاه،

$$y \mp \frac{b}{a}x = \pm\frac{b}{a}(\sqrt{x^۲ - a^۲} - x) = \mp\frac{ab}{x + \sqrt{x^۲ - a^۲}} \longrightarrow ۰$$

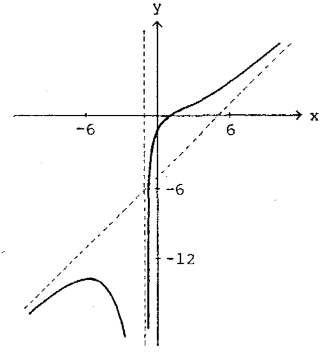
به این ترتیب،

$$y = \pm\frac{b}{a}x$$

مجانبهای مطلوب هستند. شکل (۱۳.۳) را ببینید.



شکل ۱۳.۳



شکل ۱۴.۳

مثال ۲. فرض کنید $y = (x-۱)^۳/(x+۱)^۲$. (شکل ۱۴.۳ را ببینید.) وقتی $x \longrightarrow \pm\infty$، خواهیم داشت:

$$\frac{y}{x} \longrightarrow ۱, \qquad y - x = \frac{-۵x^۲ + ۲x - ۱}{(x+۱)^۲} \longrightarrow -۵$$

بنابراین، $y = x - ۵$ یک مجانب منحنی مفروض است. (مجانب دیگر، عبارت است از $x = -۱$؛ زیرا $y \longrightarrow -\infty$ وقتی که $x \longrightarrow -۱$.)

مثال ۳. فرض کنید $y = (x-۳)^۲/۴(x-۱)$. (شکل ۱۵.۳ را ببینید.) وقتی $x \longrightarrow \pm\infty$، خواهیم داشت:

$$\frac{y}{x} = \frac{(x-۳)^۲}{۴(x-۱)x} = \frac{(۱-۳/x)^۲}{۴(۱-۱/x)} \longrightarrow \frac{۱}{۴}$$

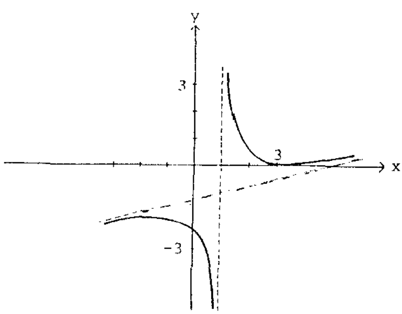
و

$$y - \frac{۱}{۴}x = \frac{(x-۳)^۲}{۴(x-۱)} - \frac{x}{۴} = \frac{-۵x+۹}{۴(x-۱)} = \frac{-۵+۹/x}{۴(۱-۱/x)} \longrightarrow -\frac{۵}{۴}$$

به این ترتیب،

$$y = \frac{۱}{۴}x - \frac{۵}{۴}$$

یک مجانب منحنی مفروض است. (مجانب دیگر، عبارت است از $x = ۱$؛ زیرا $y \longrightarrow \pm\infty$ وقتی که $x \longrightarrow ۱$.)



شکل ۱۵.۳

مثال ۴. خم برگی دکارت $x^{\text{۳}} + y^{\text{۳}} - \text{۳}axy = \text{۰}$ را که در آن a یک عدد مثبت ثابت است، در نظر می‌گیریم؛ (شکل ۱۰.۳ را ببینید.) نشان می‌دهیم که $x + y + a = \text{۰}$ یک مجانب منحنی است.

در واقع، از تقسیم معادلهٔ منحنی بر $x^{\text{۳}}$، داریم:

$$\left(\frac{y}{x}\right)^{\text{۳}} = \text{۳}a.\frac{y}{x}.\frac{\text{۱}}{x} - \text{۱}$$

از این رو، به‌ازای $|x| > \text{۳}a$، کمیّت $|y/x|$ کراندار باقی می‌ماند و خواهیم داشت:

$$\frac{y}{x} \longrightarrow -\text{۱} \qquad \text{وقتی که} \qquad x \longrightarrow \pm\infty$$

امّا، وقتی $x \longrightarrow \pm\infty$،

$$y + x = \frac{\text{۳}axy}{x^{\text{۲}} - xy + y^{\text{۲}}} = \frac{\text{۳}a(y/x)}{\text{۱} - y/x + (y/x)^{\text{۲}}} \longrightarrow -a$$

تعریف. فرض می‌کنیم $P(x,y)$ یک چندجمله‌ای برحسب x و y با ضرایب حقیقی باشد:

$$P(x,y) = \sum a_{jk}x^j y^k$$

به عبارت دیگر، $P(x,y)$ ترکیبی خطی از جمله‌هایی به شکل $x^j y^k$ است که در آن j و k اعداد صحیح نامنفی هستند و ضرایب a_{jk} در این ترکیب خطی اعداد حقیقی می‌باشند. درجهٔ چندجمله‌ای $P(x,y)$ عبارت است از

$$n = \max\{j+k\}$$

فرض می‌کنیم که $P(x,y)$ به عوامل چندجمله‌ای قابل تجزیه نباشد. مجموعهٔ نقاط (x,y) از صفحه که $P(x,y) = \text{۰}$ یک منحنی جبری C از مرتبهٔ n تشکیل می‌دهند.

ملاحظات. در مثالهای ۱ و ۳، منحنیهای جبری از درجهٔ ۲ داشتیم؛ در مثالهای ۲ و۴، منحنیهای جبری از مرتبهٔ ۳. ستاره‌وار (شکل ۹.۳) در معادلهٔ $x^{\text{۲}/\text{۳}} + y^{\text{۲}/\text{۳}} = a^{\text{۲}/\text{۳}}$، که در آن a یک عدد مثبت ثابت است، صدق می‌کند؛ این معادله را به صورت

$$(x^{\text{۲}} + y^{\text{۲}} - a^{\text{۲}})^{\text{۳}} + \text{۲۷}a^{\text{۲}}x^{\text{۲}}y^{\text{۲}} = \text{۰}$$

نیز می‌توان نوشت که نشان می‌دهد که ستاره‌وار یک منحنی جبری از درجهٔ ۶ است.

بحث. فرض کنید معادلهٔ یک منحنی جبری از مرتبهٔ n برحسب مجموعه‌های همگنی از جمل مرتب و به صورت

$$\begin{aligned} a_{n,0}x^n + a_{n-1,1}x^{n-1}y + a_{n-2,2}x^{n-2}y^2 + \cdots + a_{0,n}y^n \\ + a_{n-1,0}x^{n-1} + a_{n-2,1}x^{n-2}y + \cdots + a_{0,n-1}y^{n-1} \\ + a_{n-2,0}x^{n-2} + \cdots + a_{0,n-2}y^{n-2} + \cdots + a_{0,0} = 0 \end{aligned}$$

یا

$$x^n H_n\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-1}H_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right) + x^{n-2}H_{n-2}\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots + H_0\left(\frac{y}{x}\right) = 0 \qquad (۳۵.۳)$$

که در آن $H_k(y/x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ k برحسب مجهول y/x است، نوشته شود. پس از تقسیم بر x^n، خواهیم داشت:

$$H_n\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x}H_{n-1}\left(\frac{y}{x}\right) + \frac{1}{x^2}H_{n-2}\left(\frac{y}{x}\right) + \cdots + \frac{1}{x^n}H_0\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

اگر فرض کنیم $x \longrightarrow \pm\infty$، ملاحظه می‌کنیم که

$$H_n\left(\frac{y}{x}\right) = 0$$

یعنی، y/x الزاماً به عددی مانند A میل می‌کند و این A در معادلهٔ

$$H_n(A) = 0 \qquad (۳۶.۳)$$

صدق می‌کند، از این رو، در بحث از منحنیهای جبری، درمی‌یابیم که شیب A یک مجانب مایل از طریق تعیین ریشه‌های حقیقی چندجمله‌ای (با بیشترین درجهٔ) H_n به دست می‌آید. بنابراین، هر منحنی جبری از مرتبهٔ n حداکثر n مجانب مایل دارد. پس از تعیین A از طریق حل معادلهٔ (۳۶.۳)، $y = Ax + B$ را در معادلهٔ منحنی جایگزین می‌کنیم و، در عبارت حاصل، ضریب بزرگترین توان x را مساوی صفر قرار می‌دهیم؛ این فرایند، در اغلب حالات، به تعیین مقدار متناظر B، به‌ازای هر مقدار A، می‌انجامد. وضعیّت مورد بحث را به کمک چند مثال و تفسیر، تشریح می‌کنیم.

مثال ۵. می‌خواهیم مجانبهای منحنی جبری

$$P(x,y) = ۹x^۲ - ۴y^۲ - ۵x + ۲y + ۱ = ۰$$

را بیابیم.

منحنی جبری مورد بحث، دارای مرتبهٔ ۲ است. واضح است که $H_۲(A) = ۹ - ۴A^۲$. به این ترتیب، $H_۲(A) = ۰$ مستلزم $A = \pm ۳/۲$ است. اگر، در معادلهٔ منحنی، قرار دهیم $y = Ax + B$ و توجه داشته باشیم که $۹ - ۴A^۲ = ۰$، خواهیم داشت:

$$-۸ABx - ۴B^۲ - ۵x + ۲Ax + ۲B + ۱ = ۰$$

که اگر ضریب بزرگترین توان x را مساوی صفر قرار دهیم، چنین به دست می‌آید:

$$-۸AB - ۵ + ۲A = ۰ \quad \text{یا} \quad B = \frac{۲A - ۵}{۸A}$$

از این رو، اگر $A = ۳/۲$ آن‌گاه $B = -۱/۶$، و اگر $A = -۳/۲$ آن‌گاه $B = ۲/۳$. دو مجانب حاصل، عبارتند از:

$$y = \frac{۳}{۲}x + \frac{۱}{۶} \quad \text{و} \quad y = -\frac{۳}{۲}x + \frac{۲}{۳}$$

مثال ۶. مجانبهای منحنی جبری از مرتبهٔ ۳

$$۲x^۳ - x^۲y - ۲xy^۲ + y^۳ + ۲x^۲ + xy - y^۲ + x + y + ۱ = ۰$$

عبارتند از:

$$y = x + ۱، \quad y = -x، \quad \text{و} \quad y = ۲x$$

در این مورد، $H_۳(A) = A^۳ - ۲A^۲ - A + ۲ = (A - ۱)(A + ۱)(A - ۲)$؛ و

$$B = \frac{A^۲ - A - ۲}{۳A^۲ - ۴A - ۱}$$

مثال ۷. می‌خواهیم مجانبهای منحنی جبری

$$(y - x)^۲x - ۳y(y - x) + ۲x = ۰$$

را پیدا کنیم. در این مورد، داریم $xy^۲ - ۲x^۲y + x^۳ - ۳y^۲ + ۳xy + ۲x = ۰$ و، بنابراین، $H_۳(A) = (A-۱)^۲$. معادلهٔ $H_۳(A) = ۰$ دارای ریشهٔ مضاعف $A = ۱$ است. البته، می‌توانیم معادلهٔ منحنی را به صورت

$$(y-x)^۲ - ۳(y-x)\frac{y}{x} + ۲ = ۰$$

بنویسیم و از این واقعیّت استفاده کنیم که $A \longrightarrow y/x$ وقتی که $x \longrightarrow \pm\infty$. با این کار، خواهیم داشت:

$$(y-x)^۲ - ۳(y-x) + ۲ = ۰$$

که نشان می‌دهد که $y - x = ۱$ و $y - x = ۲$ مجانبهایند؛ به این ترتیب، B مساوی ۱ یا ۲ است.

معذالک، اگر سعی کنیم B را از طریق جایگزینی $y = Ax + B$ در معادلهٔ منحنی پیدا کنیم، چنین به دست می‌آوریم (با توجه به این که $A^۲ - ۲A + ۱ = ۰$):

$$(۲AB - ۲B - ۳A^۲ + ۳A)x^۲ + (B^۲ - ۶AB + ۳B + ۲)x - ۳B^۲ = ۰$$

ضریب بزرگترین توان x عبارت است از

$$۲AB - ۲B - ۳A^۲ + ۳A$$

که به‌ازای $A = ۱$ برابر می‌شود با $۲B - ۲B - ۳ + ۳$، که خود به خود صفر است و مقدار معینی برای B به دست نمی‌آید. امّا ضریب بزرگترین توان بعدی x، یعنی

$$B^۲ - ۶AB + ۳B + ۲$$

به ازای $A = ۱$ به عبارت

$$B^۲ - ۳B + ۲ = (B-۱)(B-۲)$$

تبدیل می‌شود و ملاحظه می‌کنیم که، وقتی مساوی صفر قرار گیرد، B از آن برابر ۱ یا ۲ به دست می‌آید. شکل ۱۶.۳ منحنی مورد بحث را نشان می‌دهد. (ضمناً، منحنی مفروض یک مجانب قائم نیز دارد، یعنی، $x = ۳$.)

توضیحات. یادآوری می‌کنیم که برای تعیین شیب A مجانب $y = Ax + B$، می‌بایست معادلهٔ (۳۶.۳) برای A حل کنیم. برای تعیین B (همین که A معلوم شد)، $y = Ax + B$ را در معادلهٔ منحنی جایگزین کنیم و ضریب بزرگترین توان x در عبارت حاصل را مساوی ۰ قرار دهیم (در مثال ۷، ضریب توان ماقبل بزرگترین توان x را مساوی صفر قرار دادیم) و معادلهٔ حاصل را برای B حل کنیم. اگر A یک ریشهٔ حقیقی سادهٔ معادلهٔ (۳۶.۳) باشد، می‌توانیم B را با استفاده از فرمول

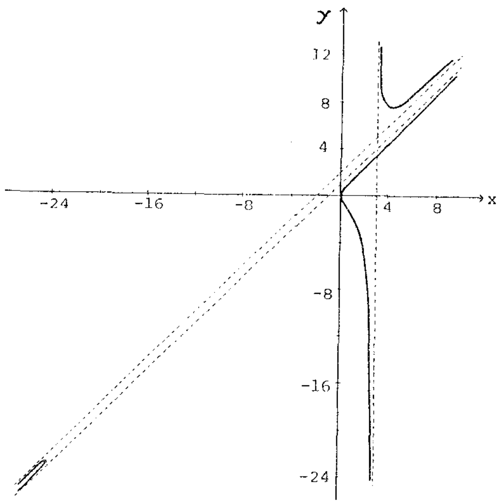
$$B.H_n'(A) + H_{n-۱}(A) = ۰ \qquad (۳۷.۳)$$

به دست آوریم. اگر $H_{n-۱}(A) = ۰ = H_n'(A)$ و $H''(A) \neq ۰$، فرمول زیر جایگزین فرمول (۳۷.۳) برای تعیین B می‌شود:

$$\frac{B^۲}{۲}H''(A) + B.H_{n-۱}'(A) + H_{n-۲}(A) = ۰ \qquad (۳۸.۳)$$

دلیل انتخاب فرمولهای (۳۷.۳) و (۳۸.۳)، مختصراً، به قرار زیر است. از تعویض y/x با $A + B/x$ در (۳۵.۳)، وقتی جمل برحسب قوای نزولی x مرتب شوند، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} x^n[H_n(A)] &+ x^{n-۱}[B.H_n'(A) + H_{n-۱}(A)] \\ &+ x^{n-۲}[\tfrac{۱}{۲}B^۲.H''(A) + B.H_{n-۱}'(A) + H_{n-۲}(A)] + \cdots = ۰ \qquad (۳۹.۳) \end{aligned}$$



شکل ۱۶.۳

انجام جزئیات این محاسبه قدری کسل کننده است، ولی با استفاده از قضیهٔ تیلور (که در بخش دوم فصل چهارم خواهد آمد.) می‌توان از این مشکل پرهیز کرد. ملاحظه می‌کنیم که اگر در (۳۹.۳) قرار دهیم

$H_n(A) = \circ$ و آن‌گاه طرفین عبارت حاصل را بر x^{n-1} تقسیم کنیم و فرض کنیم $x \longrightarrow \pm\infty$، فرمول (۳۷.۳) به دست می‌آید؛ بعلاوه، در صورتی که $H'_n(A) \neq \circ$، می‌توانیم معادله را برحسب B حل کنیم. اگر $H'_n(A) = \circ$ ولی $H_{n-1}(A) \neq \circ$، هیچ مقدار (متناهی) از (۳۹.۳) برای B به دست نمی‌آید و، از این رو، هیچ مجانبی متناظر با شیب A وجود ندارد، معذالک، اگر $H'_n(A) = \circ = H_{n-1}(A)$، (۳۷.۳) به یک اتحاد تبدیل می‌شود و ما مجبوریم معادلهٔ (۳۹.۳) را، که در این حالت به صورت

$$x^{n-2}[\tfrac{1}{2}B^2.H''(A) + B.H'_{n-1}(A) + H_{n-2}(A)] + \cdots = \circ$$

در می‌آید، مجدداً آزمایش کنیم. اگر طرفین را بر x^{n-2} تقسیم کنیم و، هنگامی که $x \longrightarrow \pm\infty$، حد بگیریم، فرمول (۳۸.۳) نتیجه می‌شود که از آن دو مقدار برای B به دست می‌آید مشروط به این که $H''(A) \neq \circ$. شرایط

$$H_n(A) = \circ = H'_n(A) = \circ \text{،} \qquad H''(A) \neq \circ \text{، و} \qquad H_{n-1}(A) = \circ$$

حاکی از این است که A یک ریشهٔ مضاعف است و، بنابراین، دو مجانب موازی موجودند. حالتی استثنایی که در مثال ۷ با آن مواجه شدیم از این نوع بود، زیرا

$$H_3(A) = (A-1)^2 \text{،} \qquad H_2(A) = -3A^2 + 3A \text{، و} \qquad H_1(A) = 2$$

اعمال فرمول (۳۹.۳) به نتیجهٔ $B^2 - 3B + 2 = \circ$ می‌انجامد که نشان می‌دهد که B برابر ۱ یا ۲ است.

بحث. اکنون محاسبهٔ مجانبهای موازی محورهای مختصات را مورد بررسی قرار می‌دهیم. نخست، به حالتی نظر می‌کنیم که مجانبها موازی محور y می‌باشند؛ یعنی، حالت مجانبهای قائم.

فرض کنید $x = k$ یک مجانب منحنی باشد و بخواهیم k را تعیین کنیم. در این بحث، y به تنهایی به بی‌نهایت میل می‌کند وقتی که نقطهٔ P با مختصات (x,y) در امتداد منحنی تا بی‌نهایت پیشروی کند. فاصلهٔ هر نقطهٔ P با مختصات (x,y) از منحنی تا خط $x = k$ برابر است با $|x-k|$. از این رو، $x \longrightarrow k$ وقتی که y به بی‌نهایت میل کند.

به این ترتیب، برای تعیین مجانبهای موازی محور y، مقدار یا مقادیری چون k_1، k_2، و امثال آنها، را می‌یابیم که x به آنها میل می‌کند وقتی که y به بی‌نهایت میل کند. آن‌گاه، $x = k_1$، $x = k_2$، و امثال آنها، مجانبهای مطلوبند.

حال، به استخراج قاعدهٔ ساده‌ای برای تعیین مجانبهای قائم یک منحنی جبری می‌پردازیم. معادلهٔ منحنی را برحسب قوای نزولی y مرتب می‌کنیم که، بنابراین، به صورت

$$y^m Q(x) + y^{m-1}Q_1(x) + y^{m-2}Q_2(x) + \cdots = \circ \qquad (۴۰.۳)$$

خواهد بود که در آن $Q(x)$، $Q_1(x)$، $Q_2(x)$، ... چندجمله‌ایهایی برحسب x می‌باشند. از تقسیم طرفین معادلهٔ (۴۰.۳) بر y^m، خواهیم داشت:

$$Q(x) + \frac{1}{y}Q_1(x) + \frac{1}{y^2}Q_2(x) + \cdots = 0 \qquad (۴۱.۳)$$

اگر فرض کنیم y به بی‌نهایت میل کند و بنویسیم $x \longrightarrow k$ وقتی که y به بی‌نهایت میل می‌کند، معادلهٔ (۴۱.۳) ایجاب می‌کند که $Q(k) = 0$، که معلوم می‌شود که k یک ریشهٔ معادلهٔ $Q(x) = 0$ است. فرض کنید k_1، k_2، و امثال آنها ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $Q(x) = 0$ باشند. آن‌گاه، مجانبهای موازی محور y عبارتند از $x = k_1$، $x = k_2$، و امثال آنها. لذا، این قاعده به دست می‌آید: مجانبهای موازی محور y از مساوی صفر قرار دادن عوامل خطی و حقیقی ضریب $Q(x)$ بزرگترین توان y معادلهٔ منحنی حاصل می‌شوند.

به طریق مشابه، می‌توان نشان داد که مجانبهای افقی یک منحنی جبری از مساوی صفر قرار دادن عوامل خطی و حقیقی ضریب بزرگترین توان x معادلهٔ منحنی به دست می‌آیند. به طورکلی، اگر $y \longrightarrow r$ وقتی که x به بی‌نهایت میل می‌کند، $y = r$ یک مجانب موازی محور x است.

۵.۳ مماس بر مقاطع مخروطی

از هندسهٔ تحلیلی می‌دانیم که هر مقطع مخروطی (از قبیل دایره، بیضی، هذلولی، سهمی) را می‌توان با معادله‌ای به شکل

$$Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F = 0 \qquad (۴۲.۳)$$

نمایش داد که در آن A، B، C، D، E، و F اعدادی ثابت می‌باشند. روش بسیار ساده‌ای برای تعیین معادلهٔ مماس بر یک چنین منحنی مفروضی در نقطه‌ای مانند (x_1, y_1) از منحنی وجود دارد. در واقع، با استفاده از مشتقگیری ضمنی، از معادلهٔ (۴۲.۳) نتیجه می‌گیریم که

$$y' = -\frac{Ax + By + D}{Bx + Cy + E}$$

بنابراین، معادلهٔ مماس بر منحنی در (x_1, y_1) عبارت است از

$$y - y_1 = -\frac{Ax_1 + By_1 + D}{Bx_1 + Cy_1 + E}(x - x_1)$$

یا

$$Ax_1x + B(x_1y + y_1x) + Cy_1y + D(x_1 + x) + E(y_1 + y) + F = 0$$
(۴۳.۳)

اگر این معادله را با معادلهٔ(۴۲.۳) مقایسه کنیم، ملاحظه می‌کنیم که معادلهٔ مماس در نقطهٔ (x_1, y_1) بر هر منحنی، که با یک معادلهٔ درجهٔ ۲ برحسب x و y تعریف شده است، از جایگزینی x_1x به جای x^2، $(x_1y + xy_1)$ به جای $2xy$، y_1y به جای y^2، $(x_1 + x)$ به جای $2x$، و $(y_1 + y)$ به جای $2y$، به دست می‌آید. این روش، البته، فقط در تعیین مماس بر منحنیهای درجهٔ ۲ قابل اجرا است.

فرض کنید $P_3 = (x_3, y_3)$، که نقطهٔ مفروضی است که بر مقطع مخروطی (۴۲.۳) واقع نیست، چنان باشد که دو مماس از آن بر مقطع مخروطی (۴۲.۳) ترسیم‌پذیر باشد؛ فرض کنید $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ نقاط تماس این دو مماس باشند (شکل ۱۷.۳ را ببینید.). می‌خواهیم معادلهٔ وتر واصل نقاط تماس P_1 و P_2 را بیابیم.

به استناد (۴۳.۳)، معادلات دو مماس عبارتند از:

$$Ax_1x + B(x_1y + y_1x) + Cy_1y + D(x_1 + x) + E(y_1 + y) + F = 0$$
(۴۴.۳)

و

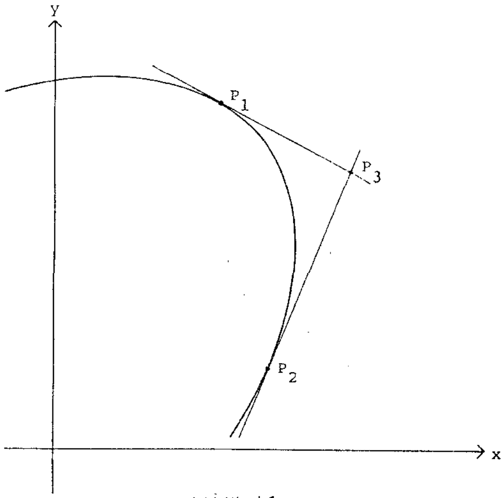
$$Ax_2x + B(x_2y + y_2x) + Cy_2y + D(x_2 + x) + E(y_2 + y) + F = 0$$
(۴۵.۳)

که در آنها، البته، x_1، y_1، x_2، y_2 مفروض نیستند. چون دو مماس الزاماً از نقطهٔ $P_3(x_3, y_3)$ می‌گذرند، $x = x_3$ و $y = y_3$ در معادلات (۴۴.۳) و (۴۵.۳) صدق می‌کنند. یعنی،

$$Ax_1x_3 + B(x_1y_3 + y_1x_3) + Cy_1y_3 + D(x_1 + x_3) + E(y_1 + y_3) + F = 0$$

و

$$Ax_2x_3 + B(x_2y_3 + y_2x_3) + Cy_2y_3 + D(x_2 + x_3) + E(y_2 + y_3) + F = 0$$



شکل ۱۷.۳

این معادلات نشان می‌دهند که مختصات P_1 و مختصات P_2 در معادلهٔ

$$Ax_3x + B(x_3y + y_3x) + Cy_3y + D(x_3 + x) + E(y_3 + y) + F = 0 \tag{46.3}$$

صدق می‌کنند. امّا (۴۶.۳) برحسب x و y خطی است و، بنابراین، یک خط راست را نمایش می‌دهد. چون مختصات P_1 و P_2 در (۴۶.۳) صدق می‌کنند، این خط، همان خطی است که از P_1 و P_2 می‌گذرد. بنابراین، معادلهٔ (۴۶.۳) معادلهٔ وتر حاصل از نقاط تماس مماسهایی است که از نقطهٔ $P_3 = (x_3, y_3)$ بر مقطع مخروطی (۴۲.۳) رسم شوند. این معادله را به آسانی می‌توان از شکل معادلهٔ مماس بر مخروطی در نقطه‌ای از آن به خاطر سپرد.

مثال ۹. به استناد (۴۶.۳)، معادلهٔ وتر حاصل از نقاط تماس مماسهایی که از نقطهٔ خارجی $(2, 2)$ بر بیضی

$$x^2 + 4y^2 - 18 = 0$$

رسم شوند، عبارت است از

$$x + 4y = 0 \quad \text{یا} \quad 2x + 4 \cdot 2y - 18 = 0$$

از روی این معادله، نقاط مماس

$$\left(\tfrac{3}{5}, \tfrac{21}{10}\right) \quad \text{و} \quad \left(3, \tfrac{3}{2}\right)$$

و معادلات دو مماس به آسانی به دست می‌آیند:

$$x + ۲y - ۶ = ۰ \qquad \text{و} \qquad x + ۱۴y - ۳۰ = ۰$$

تمرینات فصل سوم

۱.۳ اگر درایه‌های یک دترمینان توابعی مشتقپذیر باشند، نشان دهید که مشتق دترمینان عبارت است از حاصل جمع دترمینانهایی که از مشتقگیری یک سطر و عدم تغییر سطرهای دیگر به دست می‌آیند.

راهنمایی: اگر p، q، r، و s توابعی مشتقپذیر باشند، آن‌گاه

$$\begin{vmatrix} p & q \\ r & s \end{vmatrix}' = p's - q'r + ps' - qr' = \begin{vmatrix} p' & q' \\ r & s \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} p & q \\ r' & s' \end{vmatrix}$$

فرض می‌کنیم که حکم قضیه در مورد دترمینانی از مرتبهٔ n برقرار باشد. اگر $P_۱$، $P_۲$، ... ، $P_{n+۱}$ همعاملهای $p_۱$، $p_۲$، ...، $p_{n+۱}$ دترمینانی مانند $\Delta_{n+۱}$ از مرتبهٔ $n + ۱$ باشد که، در این صورت، $\Delta_{n+۱} = p_۱P_۱ + p_۲P_۲ + \cdots + p_{n+۱}P_{n+۱}$، آن‌گاه

$$\Delta'_{n+۱} = p'_۱P_۱ + p'_۲P_۲ + \cdots + p'_{n+۱}P_{n+۱} + p_۱P'_۱ + p_۲P'_۲ + \cdots + p_{n+۱}P'_{n+۱}$$

از این رو، چون $P_۱$، $P_۲$، ...، $P_{n+۱}$ دترمینانهایی از مرتبهٔ n هستند، حکم مطلوب برای دترمینانهای از مرتبهٔ $n + ۱$ نتیجه می‌شود.

۲.۳ نشان دهید که

$$\frac{d}{dx}\ln\left(\frac{(۱ + x^۴)^{۱/۲} + \sqrt{۲}x}{۱ - x^۲}\right) = \frac{\sqrt{۲}(۱ + x^۲)}{(۱ - x^۲)(۱ + x^۴)^{۱/۲}}$$

راهنمایی: چون

$$y = \frac{(۱ + x^۴)^{۱/۲} + \sqrt{۲}x}{۱ - x^۲} = \frac{۱ - x^۲}{(۱ + x^۴)^{۱/۲} - \sqrt{۲}x}$$

داریم

$$y - \frac{۱}{y} = \frac{۲x\sqrt{۲}}{۱ - x^۲}, \qquad y + \frac{۱}{y} = \frac{۲(۱ + x^۴)^{۱/۲}}{۱ - x^۲}$$

بنابراین،

$$\left(y+\frac{1}{y}\right)\frac{1}{y}y'=\left(1+\frac{1}{y^2}\right)y'=2\sqrt{2}\left(\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\right)$$

که ایجاب می‌کند که

$$\frac{d}{dx}(\ln y)=\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}=2\sqrt{2}\left(\frac{1+x^2}{(1-x^2)^2}\right)\frac{1-x^2}{2(1+x^4)^{1/2}}=\frac{\sqrt{2}(1+x^2)}{(1-x^2)(1+x^4)^{1/2}}$$

۳.۳ اگر P یک چندجمله‌ای باشد و $P(a)=P'(a)=0$، نشان دهید که $P(x)$ دارای عامل $(x-a)^2$ است. در حالت کلی، اگر P یک چندجمله‌ای باشد و $P(a)=P'(a)=\cdots=P^{(n)}(a)=0$، نشان دهید که $P(x)$ بر $(x-a)^{n+1}$ بخش‌پذیر است.

راهنمایی: چون $P(a)=0$، $P(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است. فرض کنید $P(x)=(x-a)Q(x)$، که در آن Q یک چندجمله‌ای است. آن‌گاه، $P'(x)=(x-a)Q'(x)+Q(x)$. امّا $P'(a)=0$. بنابراین، $Q(a)=0$؛ از این رو، $Q(x)$ بر $x-a$ بخش‌پذیر است. حال، از استقرا استفاده کنید.

۴.۳ می‌گوییم تابع f تناوبی با دورهٔ تناوب a است در صورتی که تساوی $f(x+a)=f(x)$ به‌ازای هر x برقرار باشد. نشان دهید که اگر f مشتق‌پذیر و تناوبی با دورهٔ تناوب a باشد، آن‌گاه f' تناوبی با دورهٔ تناوب a است.

راهنمایی: به موجب وجود تناوب،

$$\frac{f(t+a)-f(x+a)}{(t+a)-(x+a)}=\frac{f(t)-f(x)}{t-x}$$

۵.۳ سهمی $y=x^2$ و خط راست $x-y-2=0$ را در نظر بگیرید. مطلوب این است که این دو منحنی را با پاره‌خطی با حداقل طول به هم وصل کنیم.

راهنمایی: مسلماً فقط نقطهٔ $(1/2, 1/4)$ واقع بر سهمی $y=x^2$ است که خط مماس بر سهمی در آن نقطه موازی خط $x-y-2=0$ است. عمودی که از نقطهٔ $(1/2, 1/4)$ بر خط $x-y-2=0$ وارد شود، این خط را در نقطهٔ $(11/8, -5/8)$ قطع می‌کند. بنابراین، پاره‌خط با حداقل طول که رابط $y=x^2$ و $x-y-2=0$ است، نقاط $(1/2, 1/4)$ و $(11/8, -5/8)$ را به هم وصل می‌کند و دارای طول $7\sqrt{2}/8$ است.

۶.۳ فرض کنید $f(x) = Ax^{۲} + Bx + C$ یک سهمی باشد و a و b اعداد مفروضی باشند. آن‌گاه، $c = (a+b)/۲$ تنها عددی است که اکیداً بین a و b است و به‌ازای آن

$$f(b) - f(a) = (b-a)f'(c)$$

توجه کنید که $c = (a+b)/۲$ نقطهٔ وسط بازهٔ $[a,b]$ است.

راهنمایی: داریم $f(b) - f(a) = A(b^{۲} - a^{۲}) + B(b-a)$؛ از این رو،

$$\frac{f(b) - f(a)}{b-a} = A(b+a) + B$$

از طرف دیگر، $f'(c) = ۲Ac + B$؛ بنابراین، $c = (a+b)/۲$.

۷.۳ اگر f و g سه بار مشتقپذیر باشند و $f'(x)g'(x) = ۱$ و $h(x) = f(x)g(x)$، نشان دهید که

$$\frac{h'''(x)}{h(x)} = \frac{f'''(x)}{f(x)} + \frac{g'''(x)}{g(x)}$$

راهنمایی: چون $f'g' = ۱$، $f'g'' + f''g' = ۰$؛ بنابراین،

$$h''' = f'''g + ۳f''g' + ۳f'g'' + g'''f = f'''g + g'''f$$

۸.۳ فرض کنید $f(x) = \{x(x+۱)(x+۲)(x+۳)(x+۴)\}^{-۱}$. $f^{(n)}$ را بیابید.

راهنمایی: قرار دهید

$$\frac{۱}{x(x+۱)(x+۲)(x+۳)(x+۴)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x+۱} + \frac{C}{x+۲} + \frac{D}{x+۳} + \frac{E}{x+۴}$$

خواهید داشت:

$$\begin{aligned} ۱ =& A(x+۱)(x+۲)(x+۳)(x+۴) + Bx(x+۲)(x+۳)(x+۴) \\ &+ Cx(x+۱)(x+۳)(x+۴) + Dx(x+۱)(x+۲)(x+۴) \\ &+ Ex(x+۱)(x+۲)(x+۳) \end{aligned}$$

متوالیاً فرض کنید $x = ۰, -۱, -۲, -۳, -۴$، خواهید داشت: $A = ۱/۲۴$، $B = -۱/۶$، $C = ۱/۴$، $D = -۱/۶$، و $E = ۱/۲۴$. به این ترتیب،

$$f(x) = \frac{۱}{۲۴x} - \frac{۱}{۶(x+۱)} + \frac{۱}{۴(x+۲)} - \frac{۱}{۶(x+۳)} + \frac{۱}{۲۴(x+۴)}$$

و، بنابراین، مشتق nام مطلوب عبارت است از

$$(-1)^n n!\left(\frac{1}{24x^{n+1}}-\frac{1}{6(x+1)^{n+1}}+\frac{1}{4(x+2)^{n+1}}-\frac{1}{6(x+3)^{n+1}}+\frac{1}{24(x+4)^{n+1}}\right)$$

۹.۳ نشان دهید که چندجمله‌ای

$$P_n(x)=\frac{d^n}{dx^n}(x^2-1)^n$$

در معادلهٔ

$$(1-x^2)P_n''(x)-2xP_n'(x)+n(n+1)P_n(x)=0$$

صدق می‌کند.

راهنمایی: فرض کنید $g=(x^2-1)^n$. با مشتقگیری لگاریتمی، خواهید داشت:

$$\frac{g'}{g}=\frac{2nx}{x^2-1}$$

و، بنابراین، $(x^2-1)g'+2nxg=0$. با مشتقگیری مجدد،

$$(1-x^2)g''+2(n-1)xg'+2ng=0$$

با استفاده از فرمول (۳۲.۳) لایب‌نیتس برای n بار مشتقگیری، خواهید داشت:

$$(1-x^2)g^{(n+2)}+ng^{(n+1)}(-2x)+\frac{n(n+1)}{2}g^{(n)}(-2)$$
$$+2(n-1)[xg^{(n+1)}+ng^{(n)}]+2ng^{(n)}=0$$

که نتیجه می‌دهد:

$$(1-x^2)g^{(n+2)}-2xg^{(n+1)}+n(n+1)g^{(n)}=0$$

امّا $g^{(n)}=P_n$.

۱۰.۳ اگر $y=u/x$، که در آن u تابعی از x است، تحقیق کنید که

$$\frac{d^ny}{dx^n}=\frac{(-1)^n n!}{x^{n+1}}\left(u-\frac{x}{1!}\frac{du}{dx}+\frac{x^2}{2!}\frac{d^2u}{dx^2}-\frac{x^3}{3!}\frac{d^3u}{dx^3}+\cdots+(-1)^n\frac{x^n}{n!}\frac{d^nu}{dx^n}\right)$$

با انتخاب $u = x^m$، نتیجه بگیرید که

$$\binom{m}{0} - \binom{m}{1} + \binom{m}{2} - \cdots + (-1)^n \binom{m}{n} = (-1)^n \binom{m-1}{n}$$

که در آن m یک عدد گویای دلخواه است.

۱۱.۳ اگر $x^4 - (a+b)x^3 + (a-b)x - 1 = 0$ دارای ریشه‌ای با مرتبهٔ تکرار ۲ باشد، نشان دهید که $a^{4/3} - b^{4/3} = 2^{2/3}$.

راهنمایی: به استناد تمرین ۳.۳، معادلات

$$f(x) = x^4 - (a+b)x^3 + (a-b)x - 1 = 0$$

و

$$f'(x) = 4x^3 - 3(a+b)x^2 + a - b = 0$$

یک ریشهٔ مشترک دارند و حکم مطلوب از حذف x بین این دو معادله به دست می‌آید. اگر معادلهٔ دوم را در x ضرب و از معادلهٔ اول کم کنیم، خواهیم داشت: $a + b = (3x^4 + 1)/2x^3$؛ ضرب معادلهٔ دوم در x و تفریق آن از سه برابر معادلهٔ اول، به نتیجهٔ $a - b = (x^4 + 3)/2x$ می‌انجامد. از جمع و تفریق این روابط، a و b به دست می‌آیند و خواهیم داشت:

$$2a = \frac{1}{2}\left(x + \frac{1}{x}\right)^3, \qquad 2b = -\frac{1}{2}\left(x - \frac{1}{x}\right)^3$$

از این رو، $x + 1/x = 2^{2/3}a^{2/3}$ و $x - 1/x = -2^{2/3}b^{2/3}$؛ که اگر تفاضل مجذور آنها را بنویسیم، حکم مطلوب نتیجه می‌شود.

۱۲.۳ نشان دهید که طول آن قسمت از مماس بر ستاره‌وار (شکل ۱۰.۳ را ببینید.)

$$x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$$

که محدود به محورهای مختصات است، ثابت می‌باشد.

راهنمایی: مشتقگیری ایجاب می‌کند که

$$\frac{2}{3}x^{-1/3} + \frac{2}{3}y^{-1/3}\frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{یعنی،} \quad \frac{dy}{dx} = -\left(\frac{y}{x}\right)^{1/3}$$

بنابراین، معادلهٔ مماس در هر نقطهٔ (x_1, y_1) عبارت است از

$$y - y_1 = -\left(\frac{y_1}{x_1}\right)^{1/3}(x - x_1)$$

نقطهٔ تقاطع این مماس با محور x عبارت است از $(x_1^{1/3}a^{2/3}, 0)$ و نقطهٔ تقاطع آن با محور y عبارت است از $(0, y_1^{1/3}a^{2/3})$؛ فاصلهٔ بین این دو نقطه برابر a است.

۱۳.۳ نشان دهید که مجموع قطعاتی که یک مماس دلخواه بر $\sqrt{x} + \sqrt{y} = \sqrt{a}$ از محورهای مختصات جدا می‌کند ثابت است.

۱۴.۳ معادلات مماسهایی را که از نقطهٔ $(4, 4)$ بر بیضی $4x^2 + y^2 = 72$ رسم می‌شوند، بیابید.

جواب: $2x + y - 12 = 0$ و $14x + y - 60 = 0$.

۱۵.۳ فرض کنید $P(x)$ یک چندجمله‌ای و $y = mx + c$ مماس بر $y = P(x)$ در $x = x_0$ باشد. نشان دهید که چندجمله‌ای $Q(x) = P(x) - mx - c$ بر $(x - x_0)^2$ بخش‌پذیر است.

راهنمایی: چون $y = mx + c$ بر $y = P(x)$ در نقطهٔ $x = x_0$ مماس است، داریم $P(x_0) = mx_0 + c$، $P'(x_0) = m$. بنابراین، $Q(x_0) = Q'(x_0) = 0$ و حکم مطلوب، به استناد تمرین ۳.۳، نتیجه می‌شود.

۱۶.۳ معادلات مجانبهای $y^2(x - 1) - x^3 = 0$ را بیابید.

جواب: $x - 1 = 0$، $y = x + \frac{1}{2}$، $y = -x - \frac{1}{2}$.

۱۷.۳ معادلات مجانبهای $x^3 - 2x^2y - y^2 = 0$ را بیابید.

جواب: $4x - 8y - 1 = 0$.

۱۸.۳ اگر $y = 1/(a^2 + x^2)$، نشان دهید که

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!(\sin^{n+1} t)[\sin(n+1)t]}{a^{n+2}}$$

که در آن $t = \cot^{-1}(x/a)$.

راهنمایی: قرار دهید $i = \sqrt{-1}$. خواهید داشت:

$$y = \frac{1}{(x+ia)(x-ia)} = \frac{1}{2ia}\left(\frac{1}{x-ia} - \frac{1}{x+ia}\right)$$

بنابراین،

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2ia}\left(\frac{1}{(x-ia)^{n+1}} - \frac{1}{(x+ia)^{n+1}}\right)$$

اینک، فرض کنید r و t چنان باشند که $x = r\cos t$ و $a = r\sin t$؛ آن‌گاه

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2iar^{n+1}}\left[(\cos t - i\sin t)^{-n-1} - (\cos t + i\sin t)^{-n-1}\right]$$

بنابراین، چون

$$(\cos t - i\sin t)^{-n-1} = \cos(n+1)t + i\sin(n+1)t$$

و

$$(\cos t + i\sin t)^{-n-1} = \cos(n+1)t - i\sin(n+1)t$$

خواهید داشت:

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{ar^{n+1}}\sin(n+1)t = \frac{(-1)^n n!}{a^{n+2}}(\sin^{n+1} t)[\sin(n+1)t]$$

۱۹.۳ اگر $y = x/(a^2 + x^2)$، نشان دهید که

$$y^{(n)} = (-1)^n n!(\sin^{n+1} t)[\cos(n+1)t]$$

که در آن $t = \cot^{-1}(x/a)$.

راهنمایی: تمرین ۱۸.۳ را ببینید.

۲۰.۳ اگر $y = \sin x$، نشان دهید که $y^{(n)} = \sin(x + n\pi/2)$.

راهنمایی: داریم $y' = \cos x = \sin(x + \pi/2)$،

$$y'' = \frac{d}{dx}\sin(x+\pi/2) = \frac{d}{d(x+\pi/2)}\sin(x+\pi/2) = \sin(x + 2\pi/2), \ldots$$

۲۱.۳ اگر $y = \cos x$، نشان دهید که $y^{(n)} = \cos(x + n\pi/۲)$.

۲۲.۳ نشان دهید که

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{ax} \sin bx = r^n e^{ax} \sin(bx + nt)$$

و

$$\frac{d^n}{dx^n} e^{ax} \cos bx = r^n e^{ax} \cos(bx + nt)$$

که در آن $r^۲ = a^۲ + b^۲$ و $t = \tan^{-۱}(b/a)$.

راهنمایی: اگر $y = e^{ax} \sin bx$، آن‌گاه

$$y' = ae^{ax} \sin bx + be^{ax} \cos bx = e^{ax}(a \sin bx + b \cos bx)$$

فرض کنید $a = r \cos t$ و $b = r \sin t$. در این صورت،

$$\tan t = \frac{b}{a} \quad \text{و} \quad r^۲ = a^۲ + b^۲$$

آن‌گاه، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} y' &= re^{ax}[(\cos t)(\sin bx) + (\sin t)(\cos bx)] = re^{ax} \sin(bx + t) \\ y'' &= re^{ax}[a \sin(bx + t) + b \cos(bx + t)] \\ &= r^۲ e^{ax}\{(\cos t)[\sin(bx + t) + (\sin t)[\cos(bx + t)]\} \\ &= r^۲ e^{ax} \sin(bx + ۲t) \end{aligned}$$

و همین طور.

۲۳.۳ اگر $y = (\sin x)(\sin ۲x)$، نشان دهید که

$$y^{(n)} = \frac{۱}{۲}\left[\cos\left(x + \frac{n\pi}{۲}\right) - ۳^n \cos\left(۳x + \frac{n\pi}{۲}\right)\right]$$

راهنمایی: توجه کنیدکه $y = \frac{۱}{۲}(\cos x - \cos ۳x)$.

۲۴.۳ اگر $y = e^x(\sin^۲ x)(\sin ۲x)$، نشان دهید که

$$y^{(n)} = \tfrac{۱}{۲}(۵)^{n/۲} e^x \sin(۲x + n \tan^{-۱} ۲) - \tfrac{۱}{۴}(۱۷)^{n/۲} e^x \sin(۴x + n \tan^{-۱} ۴)$$

راهنمایی: توجه کنید که

$$y = (e^x/۲)(۱ - \cos ۲x)(\sin ۲x) = \tfrac{۱}{۲}e^x(\sin ۲x) - \tfrac{۱}{۴}e^x(\sin ۴x)$$

۲۵.۳ نشان دهید که دترمینان

$$\Delta(x) = \begin{vmatrix} \cos(x+a) & \sin(x+a) & ۱ \\ \cos(x+b) & \sin(x+b) & ۱ \\ \cos(x+c) & \sin(x+c) & ۱ \end{vmatrix}$$

در رابطهٔ $\Delta'(x) = ۰$ صدق می‌کند.

راهنمایی: ترانهاد دترمینان $\Delta(x)$ را بنویسید و مشتق بگیرید. (تمرین ۱.۳ را ببینید.)

۲۶.۳ عبارت $f(x) = \cos\{\tan^{-۱}[\sin(\cot^{-۱} x)]\}$ را ساده کنید.

راهنمایی: فرض کنید $\alpha = \cot^{-۱} x$ و $\beta = \tan^{-۱} y$. آن‌گاه

$$\sin\alpha = \sin(\cot^{-۱} x) = (۱ + x^۲)^{-۱/۲}, \qquad \cos\beta = \cos(\tan^{-۱} y) = (۱ + y^۲)^{-۱/۲}$$

امّا $y = \sin(\cot^{-۱} x) = (۱ + x^۲)^{-۱/۲}$ و $f(x) = \cos\{\tan^{-۱} y\} = (۱ + y^۲)^{-۱/۲}$؛ که، در این صورت،

$$f(x) = \frac{(x^۲ + ۱)^{۱/۲}}{(x^۲ + ۲)^{۱/۲}}$$

۲۷.۳ فرض کنید $y = (ax + b)(cx + d)$. نشان دهید که

$$y^{(n)} = (-۱)^n \frac{n!c^{n-۱}}{(cx+d)^{n+۱}}(bc - ad)$$

راهنمایی: توجه کنید که

$$\frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c} + \frac{bc - ad}{c(cx+d)}$$

۲۸.۳ اگر $y = ۱/(x^۴ - a^۴)$، نشان دهید که

$$y^{(n)} = \frac{(-۱)^n n!}{۴a^۳}\left(\frac{۱}{(x-a)^{n+۱}} - \frac{۱}{(x+a)^{n+۱}} - \frac{۲}{a^{n+۱}}(\sin^{n+۱} t)[\sin(n+۱)t]\right)$$

که در آن $t = \cot^{-1}(x/a)$.

راهنمایی: داریم

$$\frac{1}{x^4 - a^4} = \frac{1}{4a^3}\left(\frac{1}{x-a} - \frac{1}{x+a} - 2a\frac{1}{x^2+a^2}\right)$$

برای مشتقگیری از $1/(x^2+a^2)$، تمرین ۱۸.۳ را ببینید.

۲۹.۳ اگر $y = \tanh^{-1}(x/a)$، نشان دهید که

$$y^{(n)} = \frac{(n-1)!}{2}\left(\frac{(-1)^{n-1}}{(a+x)^n} + \frac{1}{(a-x)^n}\right)$$

راهنمایی: یادآوری می‌کنیم که (بخش چهارم فصل اول را ببینید.)

$$\tanh^{-1} u = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1+u}{1-u}\right), \qquad |u| < 1$$

۳۰.۳ اگر $y = 1/[(x^2+a^2)(x^2+b^2)]$، نشان دهید که

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{a^2 - b^2}\left(\frac{(\sin^{(n+1)} t)[\sin(n+1)t]}{b^{n+2}} - \frac{(\sin^{n+1} s)[\sin(n+1)s]}{a^{n+2}}\right)$$

که در آن $x = b\cot t = a\cot s$.

راهنمایی: داریم

$$\frac{1}{(x^2+a^2)(x^2+b^2)} = \frac{1}{a^2-b^2}\left(\frac{1}{x^2+b^2} - \frac{1}{x^2+a^2}\right)$$

برای مشتقگیری از $1/(x^2+c^2)$، تمرین ۱۸.۳ را ببینید.

۳۱.۳ اگر $y = 1/(x^2 - a^2)$، نشان دهید که

$$y^{(n)} = \frac{(-1)^n n!}{2a}\left(\frac{1}{(x-a)^{n+1}} - \frac{1}{(x+a)^{n+1}}\right)$$

۳۲.۳ حکم زیر را ثابت کنید: اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و در هر نقطهٔ t از $[a,b]$

$$\frac{f(t+h) - f(t-h)}{h} \longrightarrow 0 \qquad \text{وقتی که} \qquad h \longrightarrow 0$$

آن‌گاه f بر $[a,b]$ ثابت است.

توضیحات. نخست باید توجه کنیم که، وقتی $h \longrightarrow 0$، همگرایی کسر

$$\frac{f(t+h)-f(t-h)}{h}$$

، که نمو خاصی در آن اعمال شده است، وجود $f'(t)$ را تضمین نمی‌کند. برای تحقیق، کافی است که توابع

$$|x|, \quad \sin^2\left(\frac{1}{x}\right)$$

را در $x = 0$ بررسی کنیم. هیچ یک از این توابع در $x = 0$ مشتقپذیر نیست؛ معذالک، کسر مذکور برای هر یک از آنها همواره صفر است و، بنابراین، مطمئناً همگرا است وقتی که $h \longrightarrow 0$.

از طریق بررسی تابع

$$f(x) = 1, \quad x \neq 0 \quad \text{برای}$$
$$= 0, \quad x = 0 \quad \text{برای}$$

می‌توانیم ملاحظه کنیم که حکم مذکور در مورد توابع ناپیوسته الزاماً برقرار نیست. در این مثال، اگر $t \neq 0$،

$$f(t+h) - f(t-h) = 0 \quad \text{هرگاه} \quad |h| < |t|.$$

در حالی که به‌ازای هر h، $f(h) - f(-h) = 0$. از این رو، حد کسر مذکور همه جا صفر است؛ ولی این تابع در هر بازه‌ای که شامل مبداء باشد ثابت نیست.

راهنمایی: برای اثبات حکم، شرط همگرایی را به صورت

یک $\delta(\varepsilon, x)$ موجود است که: هرگاه $0 < h < \delta(\varepsilon, x)$، $|f(x+h) - f(x-h)| \le h\varepsilon$.
(۴۷.۳)

می‌نویسیم که در آن کافی است h را مثبت در نظر بگیریم، زیرا تغییر h به $-h$ در عبارت سمت چپ بی‌اثر است. تحقیق می‌کنیم که اعداد δ محدودیتی ندارند؛ البته، غیر از این شرط که $x \pm h$ در بازهٔ مفروض $[a, b]$ قرار گیرد. فرض کنید (فرض خلف) که، به‌ازای x و ε مفروض، اعداد δ دارای یک ماکسیمم یا یک کران بالای $\delta_0(\varepsilon, x)$ باشند. آن‌گاه،

(۴۸.۳) هرگاه $0 < h < \delta_0(\varepsilon, x)$، $|f(x+h) - f(x-h)| \le h\varepsilon$

به‌ازای هر ε'، h'ی یافت می‌شود که $h' < \delta_0 + \varepsilon'$ و $|f(x+h') - f(x-h')| > h'\varepsilon$.
(۴۹.۳)

که در آن، البته، به استناد (۴۸.۳)، $h' \geq \delta_\circ$.

حال، بنابر (۴۷.۳)،

$$|f(x+\delta_\circ+h)-f(x+\delta_\circ-h)| \leq h\varepsilon \quad \text{هرگاه } \circ < h < \delta(\varepsilon, x+\delta_\circ)، \tag{۵۰.۳}$$

$$|f(x-\delta_\circ+h)-f(x-\delta_\circ-h)| \leq h\varepsilon \quad \text{هرگاه } \circ < h < \delta(\varepsilon, x-\delta_\circ)، \tag{۵۱.۳}$$

ε' را کوچکترین اعداد $\delta_\circ$ و $\delta(\varepsilon, x\pm\delta_\circ)$ بگیرید. آن‌گاه، به استناد (۴۹.۳)، می‌توانیم عددی مثبت مانند $h_\backslash$ بیابیم که $h_\backslash < \varepsilon' \leq \delta_\circ$ و

$$|f(x+\delta_\circ+h_\backslash)-f(x-\delta_\circ-h_\backslash)| > (\delta_\circ+h_\backslash)\varepsilon$$

امّا، به استناد (۵۰.۳) و (۵۱.۳)،

$$|f(x+\delta_\circ+h_\backslash)-f(x+\delta_\circ-h_\backslash) \leq h_\backslash\varepsilon \text{ ، زیرا } \circ < h_\backslash < \delta(\varepsilon, x+\delta_\circ).$$

$$|f(x-\delta_\circ-h_\backslash)-f(x-\delta_\circ-h_\backslash) \leq h_\backslash\varepsilon \text{ ، زیرا } \circ < h_\backslash < \delta(\varepsilon, x_\circ-\delta_\circ).$$

و، به استناد (۴۸.۳)،

$$|f(x+\delta_\circ-h_\backslash)-f(x-\delta_\circ-h_\backslash) \leq (\delta_\circ-h_\backslash)\varepsilon \text{ ، زیرا } \circ < \delta_\circ-h_\backslash < \delta_\circ.$$

از جمع سه نامساوی اخیر، داریم

$$|f(x+\delta_\circ+h_\backslash)-f(x-\delta_\circ-h_\backslash)| \leq (\delta_\circ+h_\backslash)\varepsilon$$

که با (۵۲.۳) متناقض است.

معذالک، بحث قبلی سفسطه‌آمیز است هرگاه، در (۴۹.۳)، h' همواره $\delta_\circ$ باشد؛ یعنی، هرگاه

$$|f(x+\delta_\circ)-f(x-\delta_\circ)| > \delta_\circ\varepsilon > \circ$$

امّا نامساوی

$$|f(x+h)-f(x-h)| \leq h\varepsilon$$

در هر همسایگی باز از $h = \delta_\circ$ برقرار است. حال، شرط پیوستگی f را لازم داریم که به موجب آن بتوانیم حد بگیریم وقتی که $h \longrightarrow \delta_\circ$، این ایجاب می‌کند که

$$|f(x+\delta_\circ) - f(x-\delta_\circ)| \leq \delta_\circ \varepsilon$$

که فرض ما را رد می‌کند.

به این ترتیب، فرض اولیه، که $\delta(\varepsilon, x)$ دارای بزرگترین مقدار است، نیز رد می‌شود و، بنابراین، داریم

$$|f(x+h) - f(x-h)| \leq h\varepsilon$$

فقط مشروط به این که $x \pm h$ در $[a, b]$ واقع شود. از این رو، ε مستقل از x و h است و می‌توانیم فرض کنیم که $\varepsilon \longrightarrow \circ$؛ که نتیجه می‌شود:

$$\text{به‌ازای هر } h،\quad f(x+h) = f(x-h)\ .$$

بالاخص، اگر قرار دهیم $x = h + c$، که در آن c ثابتی از $[a, b]$ است، خواهیم داشت:

$$f(x + ۲c) = f(c)$$

یعنی، f بر $[a, b]$ ثابت است.

۳۳.۳ حد زیر را محاسبه کنید:

$$\lim_{x \to \circ} \frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x}$$

راهنمایی: توجه کنید که

$$\frac{e^x - e^{\sin x}}{x - \sin x} = e^{\sin x} \frac{e^{x - \sin x} - ۱}{x - \sin x}$$

و این که

$$\lim_{t \to \circ} \frac{e^t - ۱}{t} = \frac{d}{dt}(e^t)|_{t=\circ} = ۱$$

۳۴.۳ اگر $(۱-x^۲)^{۱/۲}+(۱-y^۲)^{۱/۲} = a(x-y)$، نشان دهید که $y' = (۱-y^۲)^{۱/۲}/(۱-x^۲)^{۱/۲}$.

راهنمایی: قرار دهید $x = \sin t$ و $y = \sin s$، خواهید داشت:

$$\cos t + \cos s = a(\sin t - \sin s)$$

نتیجه می‌شود که $a = \cot \frac{۱}{۲}(t - s)$، که مستلزم $t - s = ۲(\cot^{-۱} a)$ است یا

$$\sin^{-۱} x - \sin^{-۱} y = ۲(\cot^{-۱} a)$$

مشتقگیری برحسب x به عبارت مطلوب برای y' می‌انجامد.

فصل چهارم

کاربردهای مشتقگیری

۱.۴ قضایای مقدار میانگین

تعریف. فرض کنید (a, b) بازهٔ بازی مشمول حوزهٔ تعریف تابع حقیقی مقدار f باشد و c نقطه‌ای از (a, b) باشد. عدد $f(c)$ را ماکسیمم نسبی f در c می‌نامند در صورتی که عددی مثبت مانند δ موجود باشد به طوری که بازهٔ باز $(c-\delta, c+\delta)$ مشمول (a, b) باشد و نامساوی $f(x) \leq f(c)$ به‌ازای هر نقطهٔ x از $(c-\delta, c+\delta)$ برقرار باشد. به طور مشابه، عدد $f(c)$ را مینیمم نسبی f در c می‌نامند در صورتی که عددی مثبت مانند δ موجود باشد به طوری که بازهٔ باز $(c-\delta, c+\delta)$ مشمول (a, b) باشد و نامساوی $f(x) \geq f(c)$ به‌ازای هر نقطهٔ x از $(c-\delta, c+\delta)$ برقرار باشد. منظور از اکسترمم نسبی، ماکسیمم نسبی یا مینیمم نسبی است. منظور از ماکسیمم مطلق یک تابع بر یک بازه، صرفاً بزرگترین مقدار آن تابع بر بازهٔ مفروض است؛ منظور از مینیمم مطلق یک تابع بر یک بازه، کوچکترین مقدار آن تابع بر بازهٔ مفروض است. از ماکسیمم مطلق یا مینیمم مطلق غالباً و به ترتیب، فقط با عنوان ماکسیمم یا مینیمم یاد می‌کنند.

توضیحات. به استناد قضیهٔ ۱۳.۲، هر تابعی که بر بازهٔ بسته‌ای با طول متناهی مانند $[a,b]$ پیوسته باشد، بر آن بازه یک ماکسیمم مطلق و یک مینیمم مطلق دارد. ممکن است اتفاق بیفتد که تابع پیوسته‌ای ماکسیمم مطلق داشته باشد ولی فاقد ماکسیمم نسبی باشد؛ حالت مورد اشاره در تابع $f(x) = x$ بر $[۰, ۱]$ دیده می‌شود. به استناد تعریف اکسترمم نسبی، این ماکسیمم، در صورت وجود، باید در یک نقطهٔ داخلی رخ بدهد نه در نقاط انتهایی بازه.

قضیهٔ ۱.۴. اگر تابع f که بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ با طول متناهی پیوسته است یک مقدار را دوبار اختیار کند، یک اکسترمم نسبی دارد.

برهان. اگر f ثابت باشد، یعنی، تساوی $f(x_۱) = f(x_۲)$ به‌ازای هر $x_۱$ و $x_۲$ از $[a,b]$ برقرار باشد، بالبداهه، قضیه برقرار است. اگر f ثابت نباشد، بی‌آن که به کلیّت استدلال خللی وارد شود، می‌توان فرض کرد که $f(a) = f(b)$ و نقطه‌ای مانند x در درون بازه یافت شود به طوری که $f(x) > f(a)$. در این صورت، ماکسیمم مطلق تابع در یک نقطهٔ داخلی، مثلاً در $x_۰$، اختیار می‌شود. به این ترتیب، قضیه ثابت می‌شود، زیرا چنین ماکسیمم مطلقی الزاماً یک ماکسیمم نسبی است. اگر $f(x)$ کوچکتر از $f(a)$ می‌بود، بحثی مشابه به وجود یک مینیمم می‌انجامید.

قضیهٔ ۲.۴ (قضیهٔ فرما). فرض کنید f بر $[a,b]$ پیوسته باشد. اگر f یک اکسترمم نسبی در یک نقطهٔ داخلی x از $[a,b]$ داشته باشد و مشتق f در x موجود باشد، آن‌گاه $f'(x) = ۰$.

برهان. فرض کنید که یک ماکسیمم نسبی در x داشته باشیم. مطابق تعریف ماکسیمم نسبی، فرض کنید δ چنان انتخاب شده باشد که

$$a < x - \delta < x < x + \delta < b$$

اگر $x - \delta < t < x$، آن‌گاه

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \geq ۰$$

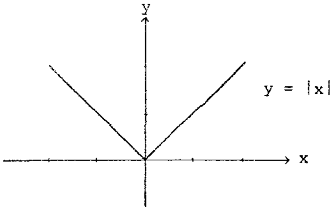
با این فرض که $t \longrightarrow x$، ملاحظه می‌کنیم که $f'(x) \geq ۰$. اگر $x < t < x + \delta$، آن‌گاه

$$\frac{f(t) - f(x)}{t - x} \leq ۰$$

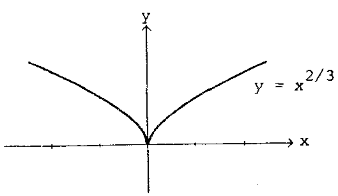
که نشان می‌دهد که $f'(x) \leq ۰$. از این رو، $f'(x) = ۰$. یک بحث مشابه نشان می‌دهد که مشتق در موضع مینیمم نسبی نیز صفر می‌شود.

ملاحظات. قضیهٔ ۲.۴ نشان می‌دهد که موضع اکسترمم نسبی یک تابع مشتق‌پذیر را باید در میان صفرهای مشتق پیدا کرد. ماکسیمم مطلق باید بزرگترین مقادیر تابع در این نقاط و در نقاط انتهایی بازه باشد؛ مینیمم مطلق باید کوچکترین مقادیر تابع در این نقاط و در نقاط انتهایی بازه باشد. عکس قضیهٔ ۲.۴ برقرار نیست؛ تابع $f(x) = x^{۳}$ در $x = ۰$ دارای مشتق صفر است، ولی فاقد اکسترمم نسبی در $x = ۰$ است.

نمودار تابع $g(x) = |x|$ یک گوشه در $x = ۰$ دارد؛ g در $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیست، ولی g یک مینیمم نسبی در $x = ۰$ دارد. نمودار تابع $h(x) = x^{۲/۳}$ یک تیزه در $x = ۰$ دارد؛ h در $x = ۰$ مشتق‌پذیر نیست، ولی h یک مینیمم نسبی در $x = ۰$ دارد. نمودار تابع g در شکل ۱.۴ و نمودار تابع h در شکل ۲.۴ دیده می‌شود.



شکل ۱.۴



شکل ۲.۴

قضیهٔ ۳.۴ (قضیهٔ رُل). اگر تابع حقیقی مقدار f بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ با طول متناهی پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشد و اگر $f(b) = f(a)$، آن‌گاه نقطه‌ای مانند x در (a,b) وجود دارد به طوری که $f'(x) = 0$.

برهان. این قضیه، نتیجه‌ای از قضایای ۱.۴ و ۲.۴ است.

ملاحظات. قضیهٔ ۳.۴ نشان می‌دهد که اگر به‌ازای هر x از (a,b)، $f'(x) \neq 0$، آن‌گاه به ازای هر دو نقطهٔ متمایز x_1 و x_2 از (a,b)، $f(x_1) \neq f(x_2)$.

قضیهٔ ۳.۴ شامل این گزاره است که بین هر دو صفر حقیقی یک تابع، مشتق باید حداقل یک صفر حقیقی داشته باشد. اگر f یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد به طوری که $f(a) = f(b) = 0$ ولی $f(x) \neq 0$ به‌ازای هر x از بازهٔ باز (a,b)، آن‌گاه f' تعدادی فرد صفر حقیقی در بازهٔ باز (a,b) دارد و، از این رو، حداقل یک صفر حقیقی بین a و b دارد؛ البته، صفرها با مرتبهٔ تکرار خود شمرده می‌شوند. این نتیجه، حالت خاصی از قضیهٔ ۴.۴ است که ذیلاً بررسی می‌شود.

قضیهٔ ۴.۴ (قضیهٔ وارینگ). فرض کنید f یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد به طوری که $f(a) = f(b) = 0$ ولی $f(x) \neq 0$ به‌ازای هر x از بازهٔ باز (a,b)؛ بعلاوه، فرض کنید r یک عدد حقیقی ثابت باشد. آن‌گاه $f' + rf$ تعداد فردی صفر (از این رو، حداقل یک صفر) دربازهٔ باز (a,b) دارد. در این جا باید بدانیم که صفرها با مرتبهٔ تکرار خود شمرده می‌شوند.

برهان. حکم زیر از جبر را یادآوری می‌کنیم: فرض کنید A و B دو عدد حقیقی باشند و P یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی باشد. اگر اعداد $P(A)$ و $P(B)$ مختلف‌العلامه باشند، آن‌گاه P تعداد فردی صفر (از این رو، حداقل یک صفر) بین A و B دارد. معذالک، اگر اعداد $P(A)$ و $P(B)$ دارای علامت یکسان باشند، آن‌گاه یا P هیچ صفری بین A و B ندارد یا تعداد این صفرها زوج است. در این جا، صفرها با مرتبهٔ تکرار خود شمرده می‌شوند.

به برهان قضیه برمی‌گردیم و فرض می‌کنیم که $a < b$ و a یک صفر f با مرتبهٔ تکرار p و b یک صفر f با مرتبهٔ تکرار q باشد؛ آن‌گاه

$$f(x) = (x-a)^p(x-b)^q g(x)$$

که در آن g هیچ جا در $[a,b]$ صفر نمی‌شود و، بنابراین، بر $[a,b]$ تغییر علامت نمی‌دهد؛ می‌توانیم فرض

کنیم که g بر $[a,b]$ مثبت باشد. نتیجه می‌شود که

$$f'(x) + rf(x) = (x-a)^{p-1}(x-b)^{q-1}h(x)$$

که در آن

$$h(x) = p(x-b)g(x) + q(x-a)g(x) + (x-a)(x-b)g'(x) + r(x-a)(x-b)g(x)$$

بنابراین، صفرهای بین a و b از تابع $f'+rf$ و صفرهای بین a و b از تابع h، وقتی با مرتبهٔ تکرار شمرده شوند، یکسانند. امّا علامت $h(a)$ همان علامت $b-a$ است ولی علامت $h(b)$ علامت $a-b$ است؛ از این رو، $h(a)$ و $h(b)$ مختلف‌العلامه‌اند. به این ترتیب، h تعداد فردی صفر بین a و b دارد؛ لذا تابع $f'+rf$ نیز باید تعداد فردی صفر بین a و b داشته باشد.

کاربرد. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد و $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$. تابع

$$f_n(x) = 1 + \frac{x}{1!} + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

برحسب این که n زوج یا فرد باشد صفر حقیقی ندارد یا یک صفر حقیقی دارد.

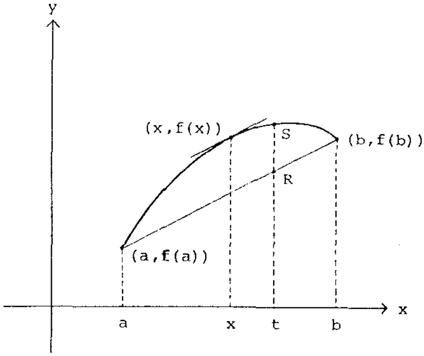
در واقع، کافی است نشان دهیم که f_n دو صفر متوالی ندارد. واضح است که f_n نمی‌تواند ریشهٔ مثبت داشته باشد و اگر n فرد باشد حداقل یک ریشه دارد. (کاربرد متعاقب قضیهٔ ۱۲.۲ را ببینید.) حال، فرض کنید a و b چنین دو ریشهٔ متوالی باشند، [یعنی، $f_n(a) = f_n(b) = 0$، $f_n(x) \neq 0$ به‌ازای $a < x < b$.] آن‌گاه داریم

$$f_n(a) = f'_n(a) + \frac{a^n}{n!} = 0, \qquad f_n(b) = f'_n(b) + \frac{b^n}{n!} = 0$$
$$\operatorname{sgn} f'_n(a) = \operatorname{sgn} f'_n(b) \neq 0$$

که در آن $\operatorname{sgn} A$ مبین علامت عدد A است. چون علامت $f'_n(a)$ و علامت $f'_n(b)$ یکی هستند، f'_n تعداد زوجی صفر دربازهٔ باز (a,b) دارد. معذالک، به استناد قضیهٔ ۴.۴ (با $r = 0$)، f'_n تعداد فردی صفر در (a,b) دارد. لذا، این فرض که f_n دو صفر منفی متوالی داشته باشد به تناقض می‌انجامد. این، گزاره را ثابت می‌کند.

قضیهٔ ۵.۴ (قضیهٔ مقدار میانگین). اگر f بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ با طول متناهی پیوسته و بر بازهٔ باز (a,b) مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه نقطه‌ای مانند x در بازهٔ باز (a,b) وجود دارد به طوری که

$$f'(x)=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$



شکل ۳.۴

برهان. از نظر هندسی، قضیهٔ مقدار میانگین می‌گوید که حداقل یک مقدار از x بین a و b وجود دارد به طوری که مماس بر منحنی در نقطهٔ $(x,f(x))$ موازی وتر و اصل نقاط $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$ است؛ شکل ۳.۴ را ببینید. برهان قضیهٔ مقدار میانگین از اعمال قضیهٔ ۳.۴ در مورد یک تابع کمکی F، که به نحو مقتضی انتخاب شده است، به دست می‌آید. به همین منظور، تعریف می‌کنیم:

$$F(t)=f(t)-\left(f(a)+\frac{f(b)-f(a)}{b-a}(t-a)\right),\qquad a\leq t\leq b$$

توجه کنید که $F(t)$ می‌تواند یک تعبیر هندسی داشته باشد: چنان که در شکل ۳.۴ دیده می‌شود، این تابع میزان جدایی نقطه $S=(t,f(t))$ از منحنی و نقطهٔ R به طول t از وتر و اصل $(a,f(a))$ و $(b,f(b))$ را اندازه‌گیری می‌کند. حال، به وضوح، دیده می‌شود که F بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر است و $F(a)=F(b)=0$. بنابراین، F در شرایط قضیهٔ ۳.۴ صدق می‌کند. بر این اساس، نقطه‌ای مانند x در بازهٔ باز (a,b) وجود دارد به طوری که $F'(x)=0$. این، ایجاب می‌کند که

$$f'(x)-\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=0$$

و برهان پایان می‌پذیرد.

توضیحات. برای این که ببینیم که مفروضات قضیهٔ مقدار میانگین الزامی هستند، تابع

$$f(0) = 0, \qquad f(t) = \frac{1}{t}, \qquad t \neq 0$$

را در نظر می‌گیریم. اگر $t = 0$ متعلق به بازهٔ باز (a, b) باشد، آن‌گاه اعمال قضیهٔ مقدار میانگین به رابطهٔ ممتنع $x^2 = ab$ می‌انجامد، که در آن a و b مختلف‌العلامه‌اند؛ ولی قضیهٔ مقدار میانگین قابل اعمال نیست زیرا f در $t = 0$ مشتق‌پذیر نیست. اگر $t = 0$ یکی از نقاط انتهایی بازهٔ $[a, b]$ باشد، مثلاً $a = 0$، آن‌گاه اعمال قضیهٔ مقدار میانگین به رابطهٔ ممتنع $x^2 = -b^2$ می‌انجامد؛ امّا قضیهٔ مقدار میانگین در این مورد نیز قابل اعمال نیست زیرا f در $t = 0$ پیوسته نیست.

یک وضعیت جالب توجه دیگر با تابع

$$g(0) = 0, \qquad g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}, \qquad x \neq 0$$

پیش می‌آید. وقتی $x \neq 0$، می‌توانیم مشتق را به طریق معمول محاسبه کنیم:

$$g'(x) = 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x}$$

به‌ازای $x = 0$، داریم

$$g'(0) = \lim_{h \to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = \lim_{h \to 0} h \sin\frac{1}{h} = 0$$

(زیرا $|\sin(1/h)| \leq 1$.) چون $\lim_{x \to 0} \cos(1/x)$ وجود ندارد، ملاحظه می‌کنیم که، وقتی $x \longrightarrow 0$، $g'(x)$ به حدی میل نمی‌کند و، بنابراین، تابع g' در $x = 0$ پیوسته نیست. این نشان می‌دهد که ممکن است تابعی همه جا مشتق‌پذیر باشد ولی مشتق تابع همه‌جا پیوسته نباشد. نکتهٔ زیر قابل ملاحظه است: فرض کنید h یک عدد حقیقی مثبت باشد و بازهٔ بستهٔ $[0, h]$ را در نظر بگیرید. تابع g بر $[0, h]$ پیوسته و بر بازهٔ باز $(0, h)$ مشتق‌پذیر است. به استناد قضیهٔ مقدار میانگین، نقطه‌ای مانند x در $(0, h)$ وجود دارد به طوری که

$$g'(x) = \frac{g(h) - g(0)}{h} \text{، یعنی،} \qquad 2x \sin\frac{1}{x} - \cos\frac{1}{x} = h \sin\frac{1}{h}$$

اینک، ملاحظه می‌کنیم که، به موجب قضیهٔ مقدار میانگین، به‌ازای هر $h > 0$ یک $x > 0$ وجود دارد؛ بعلاوه، چون $h > x > 0$، واضح است که اگر $h \longrightarrow 0$ آن‌گاه $x \longrightarrow 0$. داریم

$$\lim_{h \to 0} g'(x) = 0 \qquad \text{ولی} \qquad \lim_{x \to 0} g'(x) \text{ وجود ندارد.}$$

و

$$\lim_{h\to 0} \cos \frac{1}{x} = 0 \qquad \text{ولی} \qquad \lim_{x\to 0} \cos \frac{1}{x}$$ وجود ندارد.

این نشان می‌دهد که x باید تابع ناپیوسته‌ای از h باشد، در نقاطی بسیار بیشتر از آنچه که در هر بازهٔ باز به صورت $(0, b)$ تعریف شده باشد تعریف نشده است.

مثال دیگری از این نوع، تابع

$$w(0) = 0, \qquad w(x) = x\sin(\ln x), \qquad x > 0$$

است. در مورد این تابع، به موجب قضیهٔ مقدار میانگین و با توجه به رابطهٔ

$$\sin(\ln x) + \cos(\ln x) = \sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right)$$

داریم

$$\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} + \ln x\right) = \sin(\ln h)$$

چون $\sin^2(\pi/4 + \ln x)$ نمی‌تواند بزرگتر از $1/2$ باشد، هر قدر h کوچک باشد، بی‌نهایت بازه در $(0, h)$ موجودند که شامل نقطهٔ x نیستند. این بازه‌ها در میان جمل دنبالهٔ زیرند:

$$(q, q^2), (q^3, q^4), (q^5, q^6), \ldots$$ ، که در آن $q = e^{-\pi/2}$.

قضیهٔ ۶.۴. (۱) فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بر (a, b) باشد به طوری که به‌ازای هر x از (a, b)، $f'(x) = 0$. آن‌گاه f بر (a, b) ثابت است.

(۲) فرض کنید f و g توابعی مشتق‌پذیر بر (a, b) باشند به طوری که $f' = g'$ بر (a, b). آن‌گاه ثابتی مانند c وجود دارد به طوری که به‌ازا هر x از (a, b)، $f(x) = g(x) + c$.

برهان. اگر f بر بازهٔ (a, b) ثابت نباشد، دو نقطهٔ x_1 و x_2 موجودند به طوری که $a < x_1 < x_2 < b$ و $f(x_2) \neq f(x_1)$. به استناد قضیهٔ مقدار میانگین، xی می‌توان یافت که $x_1 < x < x_2$ و

$$f'(x) = \frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} \neq 0$$

که یک تناقض است. این، حکم اول قضیه را ثابت می‌کند.

برای اثبات حکم دوم قضیه، کافی است فقط حکم اول قضیه را در مورد تابع $f - g$ به کار بریم.

قضیهٔ ۷.۴. فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بر (a,b) باشد. آن‌گاه

۱) f اکیداً صعودی است هرگاه $f'(x) > 0$ به‌ازای هر x از (a,b)؛

۲) f اکیداً نزولی است هرگاه $f'(x) < 0$ به‌ازای هر x از (a,b)؛

۳) f اکیداً نانزولی است هرگاه $f'(x) \geq 0$ به‌ازای هر x از (a,b)؛

۴) f اکیداً ناصعودی است هرگاه $f'(x) \leq 0$ به‌ازای هر x از (a,b).

برهان. برای اثبات قسمت (۱)، نقاط x_1 و x_2 را در نظر بگیرید که $a < x_1 < x_2 < b$. به استناد قضیهٔ مقدار میانگین، (قضیهٔ ۵.۴ را ببینید.) به‌ازای x ی که $x_1 < x < x_2$، داریم

$$\frac{f(x_2) - f(x_1)}{x_2 - x_1} = f'(x) > 0$$

چون $x_2 - x_1 > 0$، درمی‌یابیم که $f(x_2) - f(x_1) > 0$ یا $f(x_2) > f(x_1)$. حالات باقیمانده به همین سادگی ثابت می‌شوند.

توضیحات. تابع $f(x) = x^3$ اکیداً صعودی است، ولی $f'(x) = 3x^2$ به‌ازای $x = 0$ صفر می‌شود. این نشان می‌دهد که ممکن است f بر بازه‌ای مانند (a,b) اکیداً صعودی باشد در حالی که $f'(x)$ در بعضی از نقاط منفرد این بازه صفر باشد.

اگر f تابعی مشتق‌پذیر بر بازهٔ (a,b) باشد و نقطه‌ای مانند c در (a,b) موجود باشد به طوری که $f'(c) > 0$، آن‌گاه زیربازه‌ای مانند (a_1, c) از (a,c) وجود دارد به طوری که نامساوی $f(x) < f(c)$ به‌ازای هر x از (a_1, c) برقرار باشد و زیربازه‌ای مانند (c, b_1) از (c,b) وجود دارد به طوری که نامساوی $f(x) > f(c)$ به‌ازای هر x از (c, b_1) برقرار باشد. در واقع، از فرض $f'(c) > 0$ نتیجه می‌شود که به‌ازای همهٔ نقاط x از (a,b) که به قدر کافی به c نزدیک باشند،

$$\frac{f(x) - f(c)}{x - c} > 0$$

یعنی، به ازای $x < c$ (یا $x > c$) داریم $f(x) < f(c)$ (یا $f(x) > f(c)$). یک حکم مشابه در حالتی برقرار است که $f'(c) < 0$.

قضیهٔ ۸.۴ (قضیهٔ داربو). فرض کنید f تابعی مشتق‌پذیر بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ با طول متناهی باشد و $f'(a) < y_0 < f'(b)$. آن‌گاه نقطه‌ای مانند x_0 در بازهٔ باز (a,b) موجود است به طوری که $f'(x_0) = y_0$.

برهان. نخست، حالت خاصی را در نظر می‌گیریم که $f'(a) < 0$ و $f'(b) > 0$ و نشان می‌دهیم که یک x در (a,b) وجود دارد به طوری که $f'(x) = 0$.

توجه می‌کنیم که چون f مشتق‌پذیر است باید پیوسته باشد. (قضیهٔ ۱.۳ را ببینید.) بر این اساس، کوچکترین مقدار خود را بر $[a,b]$ اختیار می‌کند. (قضیهٔ ۱۳.۲ را ببینید.) چون $f'(a) < 0$، نقاطی مانند x_1 در (a,b) موجودند که $f(x_1) < f(a)$؛ به طور مشابه، چون $f'(b) > 0$، نقاطی مانند x_2 در (a,b) موجودند به طوری که $f(x_2) < f(b)$. (توضیحات متعاقب قضیهٔ ۷.۴ را ملاحظه کنید.) به این ترتیب، کمترین مقدار f در $[a,b]$ در یک x از (a,b) اختیار می‌شود. امّا، در این صورت، $f'(x) = 0$. (به استناد قضیهٔ ۲.۴.)

حال، فرض کنید f مشتق‌پذیر باشد و فقط $f'(a) < y_0 < f'(b)$. نشان می‌دهیم که یک x_0 در (a,b) موجود است به طوری که $f'(x_0) = y_0$.

تابع کمکی $g(t) = f(t) - y_0 t$ را در نظر بگیرید. آن‌گاه

$$g'(a) = f'(a) - y_0 < 0 \quad \text{و} \quad g'(b) = f'(b) - y_0 > 0$$

چون g در شرایط حالت خاصی که قبلاً مورد بحث قرار گرفت صدق می‌کند، یک x_0 در (a,b) وجود دارد که به‌ازای آن $g'(x_0) = 0$. امّا $f'(x_0) = g'(x_0) + y_0 = y_0$.

ملاحظات. به جای نامساوی $f'(a) < y_0 < f'(b)$ در قضیهٔ ۸.۴، نامساوی $f'(a) > y_0 > f'(b)$ را نیز می‌توانستیم به کار ببریم؛ در اقامهٔ برهان این حالت، فقط می‌بایست جای تابع f را با تابع $-f$ عوض کنیم.

از توضیحات متعاقب قضیهٔ ۵.۴ معلوم شده است که ضرورتی ندارد که مشتق یک تابع مشتق‌پذیر، تابعی پیوسته باشد. توابع پیوسته دارای این خاصیت می‌باشند که همهٔ مقادیر میانی را اختیار می‌کنند؛ (قضیهٔ ۱۲.۲ را ببینید.) به استناد قضیهٔ ۸.۴، مشتقات توابع مشتق‌پذیر در این خاصیت سهیم هستند. حال، دو تابع f و g مثال می‌زنیم که هر دو دارای خاصیت مقدار میانی باشند ولی $f + g$ این خاصیت را نداشته باشد. فرض کنید

$$F(0) = 0 \text{ و } F(t) = t^2 \sin \tfrac{1}{t}, \quad t \neq 0 \text{ برای}$$
$$G(0) = 0 \text{ و } G(t) = t^2 \cos \tfrac{1}{t}, \quad t \neq 0 \text{ برای}$$

ملاحظه می‌کنیم که $F'(0) = G'(0) = 0$؛ به‌ازای $t \neq 0$: $F'(t) = 2t\sin(1/t) - \cos(1/t)$ و $G'(t) = 2t\cos(1/t) + \sin(1/t)$. اگر $f(t) = \{F'(t)\}^2$ و $g(t) = \{G'(t)\}^2$، آن‌گاه f و g خاصیت مقدار میانی دارند؛ زیرا F' و G' این خاصیت را دارند، امّا

$$\begin{aligned}(f+g)(t) &= ۴t^۲ + ۱, \quad & t \neq ۰ \text{ برای} \\ &= ۰, & t = ۰ \text{ برای}\end{aligned}$$

قضیهٔ ۹.۴ (قضیهٔ مقدار میانگین تعمیم‌یافته). (۱) اگر توابع f و g بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ با طول متناهی پیوسته و هر دو بر بازهٔ باز (a,b) مشتق‌پذیر باشند، آن‌گاه نقطه‌ای مانند x در (a,b) موجود است به طوری که

$$[f(b)-f(a)]g'(x) = [g(b)-g(a)]f'(x) \qquad (۱.۴)$$

(۲) بعلاوه، اگر $g(b) \neq g(a)$ و $f'(t)$ و $g'(t)$ هر دو به‌ازای مقدار یکسانی از t در (a,b) صفر نشوند، آن‌گاه، به‌ازای xی در (a,b)،

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)} = \frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (۲.۴)$$

(۳) اگر $g'(t)$ در هیچ نقطهٔ t از (a,b) صفر نشود، مفروضات اضافی (۲) الزاماً برقرارند و، بنابراین، معادلهٔ (۲.۴) نتیجه می‌شود.

برهان. برای اثبات قسمت (۱)، قضیهٔ ۳.۴ را بر تابع کمکی F با ضابطهٔ

$$F(t) = [f(b)-f(a)]g(t) - [g(b)-g(a)]f(t)$$

اعمال می‌کنیم. F بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر است و $F(a) = F(b) = f(b)g(a) - f(a)g(b)$. بنابراین، به استناد قضیهٔ ۳.۴، نقطه‌ای مانند x در (a,b) می‌توان یافت که به‌ازای آن $F'(x) = ۰$. از این رو، نتیجه می‌شود که

$$[f(b)-f(a)]g'(x) = [g(b)-g(a)]f'(x)$$

سپس، فرض می‌کنیم که مفروضات اضافی قسمت (۲) برقرار باشند. در این صورت، اگر $f'(x) = ۰$ نتیجه می‌شود که $g'(x) \neq ۰$. از طرف دیگر، چون $g(b) - g(a) \neq ۰$، اگر $f'(x) \neq ۰$، طرف راست معادلهٔ (۱.۴) صفر نخواهد بود. بنابراین، طرف چپ معادلهٔ (۱.۴) صفر نیست، و مجدداً $g'(x) \neq ۰$. به این ترتیب، می‌توانیم بر $g'(x)$ و $g(b) - g(a)$ تقسیم کنیم و معادلهٔ (۲.۴) را نتیجه بگیریم.

سرانجام، می‌خواهیم ببینیم که آیا می‌توانیم مفروضات اضافی قسمت (۲) را با این فرض که همواره $g'(t) \neq ۰$، چنان که در قسمت (۳) بیان شد، عوض کنیم؟ در واقع، اگر $g'(t) \neq ۰$ به‌ازای هر t از

(a,b)، آن‌گاه $f'(t)$ و $g'(t)$ نمی‌توانند در نقطه‌ای از (a,b) با هم صفر شوند. بعلاوه، به استناد قضیهٔ مقدار میانگین،

$$g(b)-g(a)=(b-a)g'(s)\neq 0$$

و برهان تمام می‌شود.

توضیحات. با فرض $g(t)=t$، ملاحظه می‌کنیم که قضیهٔ ۵.۴ حالت خاصی از قضیهٔ ۹.۴ است. یک تعبیر هندسی از قضیهٔ ۹.۴، شبیه تعبیر هندسی قضیهٔ ۵.۴، می‌توانیم عرضه کنیم. منحنی با نمایش پارامتری زیر را در نظر می‌گیریم:

$$x=f(t),\qquad y=g(t),\qquad \alpha\leq t\leq\beta$$

آن‌گاه، تساوی

$$\frac{f(\beta)-f(\alpha)}{g(\beta)-g(\alpha)}=\frac{f'(\gamma)}{g'(\gamma)} \tag{۳.۴}$$

، که به‌ازای یک γ از (α,β) برقرار است، می‌تواند به صورت زیر تعبیر شود: طرف چپ (۳.۴) شیب وتر واصل دو نقطهٔ انتهایی منحنی است و طرف راست (۳.۴) شیب خط مماس بر منحنی به‌ازای $t=\gamma$ است.

قضیهٔ ۱۰.۴ (قواعد لوپیتال). فرض کنید J یک بازهٔ باز باشد و c یک «نقطهٔ انتهایی» آن، که c می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. فرض کنید f و g دو تابع با خواص زیر باشند:

۱) f و g بر J مشتق‌پذیرند؛

۲) به‌ازای هر x از J، $g(x)\neq 0$ و $g'(x)\neq 0$؛

۳) $\lim_{x\to c} f'(x)/g'(x)=L$، که در آن L می‌تواند متناهی یا نامتناهی باشد. بعلاوه، فرض کنید که

الف) $\lim_{x\to c} f(x)=0=\lim_{x\to c} g(x)$

یا

ب) $\lim_{x\to c} |g(x)|=\infty$

در این صورت،

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)}{g(x)}=L$$

برهان. فرض کنید $c < d$ و $J = (c, d)$. توابع زیر را بر J تعریف کنید:

$$M(x) = \sup\left\{\frac{f'(v)}{g'(v)} : c < v < x\right\} \quad \text{و} \quad m(x) = \inf\left\{\frac{f'(v)}{g'(v)} : c < v < x\right\}$$

فرض کنید s نقطه‌ای بین c و x باشد. به استناد قضیهٔ ۹.۴، داریم

$$\frac{f(x) - f(s)}{g(x) - g(s)} = \frac{f'(t)}{g'(t)}$$

که در آن t عددی بین s و x است. از این رو، نامساویهای

$$m(x) \leq \frac{f(x) - f(s)}{g(x) - g(s)} \leq M(x)$$

به‌ازای هر s بین c و x برقرارند. امّا، به وضوح،

$$m(x) \leq \frac{f(x) - f(s)}{g(x) - g(s)} = \frac{f(x)/g(x) - f(s)/g(x)}{۱ - g(s)/g(x)} \leq M(x) \qquad (۴.۴)$$

و

$$m(x) \leq \frac{f(x) - f(s)}{g(x) - g(s)} = \frac{f(s)/g(s) - f(x)/g(s)}{۱ - g(x)/g(s)} \leq M(x) \qquad (۵.۴)$$

حال، فرض کنید که شرط (الف) برقرار باشد. فرض کنید x ثابت باشد. آن‌گاه، چون $f(s)$ و $g(s)$ هر دو به ۰ میل می‌کنند وقتی که $s \longrightarrow c$، از (۴.۴) نتیجه می‌گیریم که $m(x) \leq f(x)/g(x) \leq M(x)$ اگر شرط (ب) برقرار و x ثابت باشد و فرض کنیم $s \longrightarrow c$، از (۵.۴) نتیجه می‌شود که

$$m(x) \leq \lim_{s \to c} \frac{f(s)}{g(s)} \leq M(x)$$

برای تکمیل برهان، کافی است توجه کنیم که، به استناد (۳)، $m(x)$ و $M(x)$ هر دو به L میل می‌کنند وقتی که $x \longrightarrow c$ و s بین x و c سیر می‌کند.

اگر x به یک عدد حقیقی متناهی c میل نکند، با همان شیوهٔ قبلی به بحث می‌پردازیم. به عنوان مثال، فرض کنید که $x \longrightarrow \infty$. با تغییر متغیر $y = ۱/x$، ملاحظه می‌کنیم که y از راست به ۰ میل می‌کند وقتی که $x \longrightarrow \infty$. اگر تعریف کنیم:

$$G(y) = g\left(\frac{۱}{y}\right) = g(x) \quad \text{و} \quad F(y) = f\left(\frac{۱}{y}\right) = f(x)$$

خواهیم داشت:

$$F'(y) = -y^{-2}f'\left(\frac{1}{y}\right) = -x^2 f'(x) \quad \text{و} \quad G'(y) = -x^2 g'(x)$$

بنابراین،

$$\frac{F'(y)}{G'(y)} = \frac{f'(x)}{g'(x)}$$

این نشان می‌دهد که اگر $\lim_{x\to\infty} f'(x)/g'(x) = L$، آن‌گاه

$$\lim_{x\to\infty}\frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{y\downarrow 0}\frac{F(y)}{G(y)} = \lim_{y\downarrow 0}\frac{F'(y)}{G'(y)} = \lim_{x\to\infty}\frac{f'(x)}{g'(x)} = L$$

توضیحات. اگر $f'(x)/g'(x)$ به حدی میل نکند وقتی که $x \longrightarrow c$، نمی‌توانیم نتیجه بگیریم که $f(x)/g(x)$ نیز حد ندارد وقتی که $x \longrightarrow c$. به عنوان مثال، فرض کنید

$$f(x) = x - \sin x \quad \text{و} \quad g(x) = x + \sin x$$

در این صورت،

$$\lim_{x\to\infty}\frac{x - \sin x}{x + \sin x} = \lim_{x\to\infty}\frac{1 - (\sin x)/x}{1 + (\sin x)/x} = 1$$

ولی

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1 - \cos x}{1 + \cos x} = \lim_{x\to\infty}\tan^2\frac{x}{2}$$

وجود ندارد. مثال دیگری از این نوع به قرار زیر است: فرض کنید

$$f(0) = 0, \qquad f(x) = x^2\sin\frac{1}{x}, \qquad x \neq 0; \qquad g(x) = \sin x$$

در این صورت، وقتی $x \longrightarrow 0$،

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{x}{\sin x}\left(x\sin\frac{1}{x}\right) \longrightarrow 0$$

ولی

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{2x\sin(1/x) - \cos(1/x)}{\cos x}$$

به حدی میل نمی‌کند.

این نکته که $g'(x) \neq ۰$ به‌ازای x «نزدیک» به c، مهم است: فرض کنید

$$f(x) = x + \sin x \cos x \quad \text{و} \quad g(x) = (x + \sin x \cos x)e^{\sin x}$$

در این صورت، وقتی $x \longrightarrow \infty$، $f(x)/g(x)$ همواره بین e و $۱/e$ نوسان می‌کند و حد ندارد. ولی

$$f'(x) = ۲(\cos x)^۲ \quad \text{و} \quad g'(x) = e^{\sin x}(\cos x)(x + ۲\cos x + \sin x \cos x)$$

و وقتی $x \longrightarrow \infty$،

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{۲e^{-\sin x}\cos x}{x + (۲ + \sin x)\cos x} \longrightarrow ۰$$

زیرا صورت کسر کراندار باقی می‌ماند و مخرج به طور دلخواه بزرگ می‌شود. توجه کنید که تواماً $f'(x) = ۰$ و $g'(x) = ۰$ هر جا که $\cos x = ۰$.

از ملاحظات قضیهٔ ۳.۴ معلوم است که اگر g تابعی مشتق‌پذیر بر بازهٔ بازی مانند (c, d) باشد و $g'(x) \neq ۰$ به‌ازای هر x از (c, d)، آن‌گاه $g(x_۱) \neq g(x_۲)$ به‌ازای هر دو نقطهٔ $x_۱$ و $x_۲$ از (c, d). اضافه می‌کنیم که اگر $g'(x) \neq ۰$ به‌ازای هر x از (c, d)، آن‌گاه یا $g'(x) > ۰$ به‌ازای هر x از (c, d) یا $g'(x) < ۰$ به‌ازای هر x از (c, d) و، از این رو، دیده می‌شود که، به استناد قضیهٔ ۷.۴، g بر (c, d) اکیداً یکنوا است. در واقع، اگر به‌ازای دو نقطهٔ متمایز $x_۱$ و $x_۲$ داشته باشیم $g'(x_۱)g'(x_۲) < ۰$، آن‌گاه، به موجب خاصیت مقدار میانی توابع مشتق‌پذیر (قضیهٔ ۸.۴)، نقطه‌ای مانند $x_۳$ بین $x_۱$ و $x_۲$ یافت می‌شود به طوری که $g'(x_۳) = ۰$.

بحث و امثله. مکرراً به حدودی به صورت

$$\lim_{x \to c} \frac{f(x)}{g(x)} \tag{۶.۴}$$

برمی‌خوریم که در آنها حد مورد بحث می‌تواند یک طرفه یا دو طرفه باشد و c متناهی یا نامتناهی. حد (۶.۴) موجود و به صورت سادهٔ

$$\frac{\lim_{x \to c} f(x)}{\lim_{x \to c} g(x)} \tag{۷.۴}$$

است مشروط به این که حدود $\lim_{x \to c} f(x)$ و $\lim_{x \to c} g(x)$ موجود و متناهی باشند و $\lim_{x \to c} g(x) \neq ۰$؛ قضیهٔ ۶.۲ را ببینید. وقتی مشتق تابعی مانند h را در نقطه‌ای مانند x محاسبه می‌کنیم، حد

$$\lim_{t \to x} \frac{h(t) - h(x)}{t - x}$$

را در نظر می‌گیریم به شرطی که این حد موجود باشد. اعمال این قاعده که «حد خارج‌قسمت، مساوی خارج قسمت حدود است» به نتیجهٔ مبهمی از نوع $۰/۰$ می‌انجامد که بی‌معنی است و غفلت از این شرط مهم را نشان می‌دهد که، در اعمال این قاعده، حد مخرج کسر الزاماً باید مخالف صفر باشد. اگر عبارت (۷.۴) به یکی از صور مبهم $۰/۰$ یا ∞/∞ منتهی شود، آن‌گاه لازم است که قواعد لوپیتال (قضیهٔ ۱۰.۴) مکرراً در محاسبهٔ حد (۶.۴) به کار برده شود. بعلاوه، صور مبهم دیگر، از قبیل $۰.\infty$، $\infty - \infty$، $۰^۰$، $\infty^۰$، یا ۱^∞، را معمولاً می‌توان دوباره چنان فرمولبندی کرد که به صورت $۰/۰$ یا ∞/∞ درآیند.

در واقع، وقتی که $x \longrightarrow c$، اگر حاصل ضرب fg دو تابع به صورت $۰.\infty$ درآید، سعی می‌کنیم که قواعد لوپیتال را در مورد کسر

$$\frac{f}{۱/g}$$

اعمال کنیم. اگر تفاضل $f - g$ به صورت $\infty - \infty$ درآید، حاصل‌ضرب

$$f(۱ - g/f)$$

را، که از نوع $۰.\infty$ خواهد بود، در نظر می‌گیریم. اگر

$$F(x) = [f(x)]^{g(x)}$$

صورت مبهمی از نوع $۰^۰$، $\infty^۰$، یا ۱^∞ تولید کند، آن‌گاه

$$\ln F(x) = g(x)[\ln f(x)]$$

به صورت مبهم $۰.\infty$ درمی‌آید. به استناد پیوستگی تابع نمایی، اگر $\ln\{F(x)\} \longrightarrow K$ وقتی که $x \longrightarrow c$، آن‌گاه $F(x) \longrightarrow e^K$ وقتی که $x \longrightarrow c$.

اکنون به ذکر چند مثال می‌پردازیم.

۱. می‌خواهیم حد

$$\lim_{x\to ۰} \frac{a^x - b^x}{x}$$

را، که در آن a و b اعداد حقیقی مثبت ثابتی هستند، پیدا کنیم.

در این مثال، $f(x) = a^x - b^x$ و $g(x) = x$؛ وقتی $x \longrightarrow ۰$ به صورت مبهم $۰/۰$ درمی‌آید. امّا

$$\lim_{x\to ۰} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to ۰}\{a^x(\ln a) - b^x(\ln b)\} = \ln \frac{a}{b}$$

و قضیهٔ ۴.۱۰ قابل اعمال است. خواهیم داشت:

$$\lim_{x \to ۰} \frac{a^x - b^x}{x} = \ln \frac{a}{b}$$

۲. برای تعیین حد

$$\lim_{x \downarrow a} \frac{x^{۱/۲} - a^{۱/۲} + (x-a)^{۱/۲}}{(x^۲ - a^۲)^{۱/۲}}$$

که در آن a یک عدد حقیقی مثبت ثابت است، مجدداً از قضیهٔ ۴.۱۰ استفاده می‌کنیم. در این جا $f(x) = x^{۱/۲} - a^{۱/۲} + (x-a)^{۱/۲}$ و $g(x) = (x^۲ - a^۲)^{۱/۲}$؛ در این صورت

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{(x^۲ - a^۲)^{۱/۲} + x^{۱/۲}(x+a)^{۱/۲}}{۲x x^{۱/۲}} \longrightarrow \frac{۱}{(۲a)^{۱/۲}}$$ وقتی که $x \downarrow a$.

یک بار دیگر با صورت مبهم ۰/۰ مواجه شدیم. به استناد قضیهٔ ۴.۱۰، نتیجه می‌گیریم که حد مورد بحث برابر $(۲a)^{-۱/۲}$ است.

۳. حد

$$\lim_{x \to ۰} \frac{e^x + e^{-x} - ۲}{۱ - \cos x}$$

را در نظر می‌گیریم. با $f(x) = e^x + e^{-x} - ۲$ و $g(x) = ۱ - \cos x$، ملاحظه می‌کنیم که

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} \quad و \quad \frac{f''(x)}{g''(x)} = \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x}$$

در این جا، $f(x)/g(x)$ و $f'(x)/g'(x)$ صور مبهمی از نوع ۰/۰ می‌باشند؛ معذالک

$$\lim_{x \to ۰} \frac{f''(x)}{g''(x)} = \lim_{x \to ۰} \frac{e^x + e^{-x}}{\cos x} = ۲$$

از این رو، به استناد قضیهٔ ۴.۱۰،

$$\lim_{x \to ۰} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x \to ۰} \frac{e^x - e^{-x}}{\sin x} = ۲$$

و، به استناد قضیهٔ ۴.۱۰ که برای دومین بار اعمال شود،

$$\lim_{x \to ۰} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x \to ۰} \frac{e^x + e^{-x} - ۲}{۱ - \cos x} = ۲$$

۴. اگر $f'(x)$ بر بازه‌ای شامل c موجود و پیوسته باشد، آن‌گاه، به استناد قضیهٔ ۴.۱۰،

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)-f(c-h)}{2h}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(c+h)+f'(c-h)}{2}=f'(c)$$

اگر $f''(x)$ بر بازه‌ای شامل c موجود و پیوسته باشد، آن‌گاه

$$\lim_{h\to 0}\frac{f(c+h)+f(c-h)-2f(c)}{h^2}=\lim_{h\to 0}\frac{f'(c+h)-f'(c-h)}{2h}=f''(c)$$

۵. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد. ادعا می‌کنیم که

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[n]{x^n+a_1x^{n-1}+a_2x^{n-2}+\cdots+a_n}-x\right)=\frac{a_1}{n}$$

در واقع، فرض کنید $1/y$ را با x عوض کنیم به طوری که $y\downarrow 0$ متناظر $x\longrightarrow\infty$ باشد. در این صورت، مسألهٔ مفروض به محاسبهٔ حد

$$\lim_{y\downarrow 0}\frac{\sqrt[n]{1+a_1y+a_2y^2+\cdots+a_ny^n}-1}{y}$$

تبدیل می‌شود که صورت و مخرج به ۰ میل می‌کنند وقتی که $y\downarrow 0$. در گذر از کسر $f(y)/g(y)$ به کسر $f'(y)/g'(y)$، باید در صدد محاسبهٔ حد

$$\lim_{y\downarrow 0}\frac{a_1+2a_2y+\cdots+na_ny^{n-1}}{n(1+a_1y+\cdots+a_ny^n)^{1-1/n}}$$

باشیم. معذالک، به آسانی دیده می‌شود که این حد مساوی a_1/n است. با استمداد از قضیهٔ ۴.۱۰، آنچه ادعا کرده بودیم به دست می‌آید.

۶. از مثال ۵ فوراً نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sqrt[n]{x^n+a_1x^{n-1}+\cdots+a_n}-\sqrt{x^n+b_1x^{n-1}+\cdots+b_n}\right)=\frac{a_1-b_1}{n}$$

که در آن n یک عدد صحیح مثبت است. در مثال ۵ و مثال حاضر، صورت مبهم $\infty-\infty$ مطرح شده است.

۷. فرض کنید b یک عدد حقیقی مثبت باشد. می‌خواهیم نشان بدهیم که

$$\lim_{x\to\infty} x(b^{۱/x} - ۱) = \ln b$$

در واقع، با فرض $f(x) = b^{۱/x} - ۱$ و $g(x) = ۱/x$، ملاحظه می‌کنیم که وقتی $x \longrightarrow \infty$،

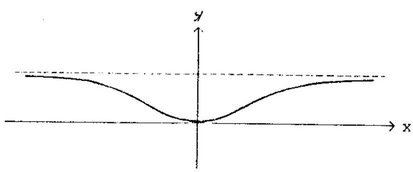
$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{b^{۱/x}(\ln b)(-۱/x^{۲})}{-۱/x^{۲}} \longrightarrow \ln b$$

اتمام برهان به استناد قضیهٔ ۱۰.۴ است. (قضیهٔ ۱۰.۱ را در مقام مقایسه ملاحظه کنید.)

۸. تابع

$$F(\circ) = \circ, \qquad F(x) = e^{-۱/x^{۲}}, \qquad x \neq \circ \qquad \text{برای}$$

این خاصیت شایان توجه را دارد که مشتقاتش، از هر مرتبه، در $x = \circ$ مساوی صفرند. در نمودار $y = F(x)$، (شکل ۴.۴ را ببینید.) این خاصیت به شکل همواری فوق‌العادهٔ منحنی در همسایگی مبدأ ظاهر می‌شود. توجه کنید که نمودار $y = F(x)$ نسبت به محور y متقارن است؛ زیرا $F(-x) = F(x)$.



شکل ۴.۴

حال، نشان می‌دهیم که مشتقات F، از هر مرتبه، در $x = \circ$ صفر می‌شوند. اگر قرار دهیم $u = ۱/x$ و از نماد $\exp(t)$ به جای e^t استفاده کنیم، به استناد قضیهٔ ۱۰.۴، خواهیم داشت:

$$F'(\circ) = \lim_{x\to\circ} \frac{F(x)}{x} = \lim_{u\to\pm\infty} \frac{u}{\exp(u^{۲})} = \circ$$

چون $F(x) = \exp(-u^{۲})$، $u' = -u^{۲}$، به استناد قاعدهٔ زنجیری در مشتقگیری،

$$F'(x) = \exp(-u^{۲})[-۲uu'] = ۲u^{۳}\exp(-u^{۲}), \qquad x \neq \circ$$

حال، با استفادهٔ مکرر از قضیهٔ ۴.۱۰،

$$F''(\circ) = \lim_{x\to\circ} \frac{F'(x)}{x} = \lim_{u\to\pm\infty} \frac{۲u^۴}{\exp(u^۲)} = \circ$$

و

$$F''(x) = \exp(-u^۲)[۶u^۲u' - ۴u^۴u'] = \exp(-u^۲)[۴u^۶ - ۶u^۴], \qquad x \neq \circ$$

مجدداً، با چند بار استفاده از قضیهٔ ۴.۱۰،

$$F'''(\circ) = \lim_{x\to\circ} \frac{F''(x)}{x} = \lim_{u\to\pm\infty} \frac{۴u^۷ - ۶u^۵}{\exp(u^۲)} = \circ$$

اگر به این طریق ادامه دهیم، درمی‌یابیم که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n،

$$F^{(n)}(\circ) = \lim_{u\to\pm\infty} \frac{P_n(u)}{\exp(u^۲)} = \circ$$

که در آن P_n یک چندجمله‌ای است.

اگر $F^{(n)}(x) = \exp(-u^۲)P_n(u)$، فرمول بازگشتی زیر را به دست می‌آوریم:

$$P_{n+۱}(u) = ۲u^۳P_n(u) - u^۲P_n'(u)$$

به این ترتیب، با $P_\circ(u) = ۱$، خواهیم داشت:

$$P_۱(u) = ۲u^۳, P_۲(u) = ۴u^۶ - ۶u^۴, P_۳(u) = ۸u^۹ - ۳۶u^۷ + ۲۴u^۵, \ldots$$

واضح است که چندجمله‌ای P_n دارای درجهٔ $۳n$ است و $P_n(u)$ از ترکیب خطی جملی به شکل u^m تشکیل شده است که در آن m عدد صحیحی است که $\circ < m \leq ۳n$. از این رو،

$$\lim_{u\to\pm\infty} \frac{u^m}{\exp(u^۲)} = \circ \quad \text{ایجاب می‌کند که} \quad \lim_{u\to\pm\infty} \frac{P_n(u)}{\exp(u^۲)} = \circ$$

با استفادهٔ مکرر از قضیهٔ ۴.۱۰، ثابت می‌کنیم که

$$\lim_{u\to\pm\infty} \frac{u^m}{\exp(u^۲)} = \circ$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$\lim_{u\to\pm\infty} \frac{u^m}{\exp(u^۲)} = \lim_{u\to\pm\infty} \frac{mu^{m-۱}}{۲u\exp(u^۲)} = \frac{m}{۲}\left(\lim_{u\to\pm\infty} \frac{u^{m-۲}}{\exp(u^۲)}\right)$$

بعد از چند مرحله، نمای مثبتی در صورت کسر نخواهد ماند و، بنابراین، دیده می‌شود که حد مذکور برابر $\circ$ است.

۹. نشان می‌دهیم که

$$\lim_{x\to\infty}(1+x)^{1/x}=1$$

در واقع، اگر فرض کنیم $y=(1+x)^{1/x}$، آن‌گاه $\ln y=(1/x)\ln(1+x)$. ولی، به استناد قضیهٔ ۱۰.۴،

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\ln(1+x)}{x}=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{1+x}=0$$

چون $\ln y\longrightarrow 0$ وقتی که $x\longrightarrow\infty$، ملاحظه می‌کنیم که $y\longrightarrow 1$ وقتی که $x\longrightarrow\infty$.

۱۰. تحقیق می‌کنیم که

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}=-\frac{e}{2}$$

در واقع، اگر قرار دهیم $y=(1+x)^{1/x}$، آن‌گاه $\ln y=(1/x)\ln(1+x)$؛ و می‌توانیم ملاحظه کنیم که

$$\lim_{x\downarrow 0}(1+x)^{1/x}=e$$

به استناد قضیهٔ ۱۰.۴،

$$\lim_{x\downarrow 0}\frac{(1+x)^{1/x}-e}{x}=\lim_{x\downarrow 0}(1+x)^{1/x}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}$$

و دو بار استفاده از قضیهٔ ۱۰.۴، به نتیجهٔ زیر می‌انجامد:

$$\lim_{x\to 0}\frac{x-(1+x)\ln(1+x)}{x^2(1+x)}=-\frac{1}{2}$$

۱۱. داریم

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}=e^{1/3}$$

در واقع، چون

$$\frac{\tan x}{x}=\frac{\sin x}{x}\frac{1}{\cos x}$$

ملاحظه می‌کنیم که صورت مبهم مورد بحث از نوع 1^∞ است. قرار می‌دهیم

$$y=\left(\frac{\tan x}{x}\right)^{1/x^2}$$

و نشان می‌دهیم که وقتی $x \longrightarrow 0$، $\ln y \longrightarrow 1/3$ و، بنابراین، $y \longrightarrow e^{1/3}$. امّا

$$\ln y = \frac{\ln(\tan x) - \ln x}{x^2}$$

و اعمال قضیهٔ ۱۰.۴ به نتیجهٔ زیر می‌انجامد:

$$\lim_{x\to 0} \ln y = \lim_{x\to 0} \frac{(\sec^2 x)/(\tan x) - 1/x}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin(2x)}{2x^2 \sin(2x)}$$

معذالک، سه‌بار متوالی استفاده از قضیهٔ ۱۰.۴ ایجاب می‌کند که

$$\lim_{x\to 0} \frac{2x - \sin(2x)}{2x^2 \sin(2x)} = \frac{1}{3}$$

۱۲. نشان می‌دهیم که

$$\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \cot x\right) = 0$$

در واقع،

$$\frac{1}{x} - \cot x = \frac{\sin x - x\cos x}{x \sin x}$$

و، به استناد قضیهٔ ۱۰.۴،

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x\cos x}{x\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x}$$

یک بار دیگر استفاده از قضیهٔ ۱۰.۴ به نتیجهٔ زیر می‌انجامد:

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x + x\cos x}{2\cos x - x\sin x} = 0$$

معذالک، اگر ملاحظه می‌کردیم که $(\sin x)/x \longrightarrow 1$ وقتی که $x \longrightarrow 0$، می‌توانستیم از اعمال قضیهٔ ۱۰.۴ در آخرین مرحله اجتناب ورزیم. از این رو،

$$\lim_{x\to 0} \frac{x\sin x}{\sin x + x\cos x} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{(\sin x)/x + \cos x} = 0$$

۱۳. نشان می‌دهیم که

$$\lim_{x\to 0}\frac{xe^{2x}+xe^{x}-2e^{2x}+2e^{x}}{(e^{x}-1)^{3}}=\frac{1}{6}$$

در واقع، سه بار متوالی از قضیهٔ ۱۰.۴ استفاده می‌کنیم. بعد از اعمال اولین بار قضیهٔ ۱۰.۴، عامل مشترک e^x را از صورت و مخرج حذف می‌کنیم و پس از به‌کارگیری قضیهٔ ۱۰.۴ برای دومین بار، عامل e^x در مخرج را با ۱ عوض می‌کنیم (زیرا $e^x \longrightarrow 1$ وقتی که $x \longrightarrow 0$). با اعمال این روش، محاسبهٔ واقعی به میزان قابل ملاحظه‌ای ساده می‌شود. جزئیات مراحل بالا به قرار زیر است:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{xe^{2x}+xe^{x}-2e^{2x}+2e^{x}}{(e^{x}-1)^{3}}&=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{2x}+e^{2x}+xe^{x}-4e^{2x}+3e^{x}}{3e^{x}(e^{x}-1)^{2}}\\&=\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x}-3e^{x}+3+x}{3(e^{x}-1)^{2}}\\&=\frac{1}{3}.\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x}+2e^{x}-3e^{x}+1}{2e^{x}(e^{x}-1)}\\&=\frac{1}{6}.\lim_{x\to 0}\frac{-e^{x}+2xe^{x}+1}{e^{x}-1}\\&=\frac{1}{6}.\lim_{x\to 0}\frac{2xe^{x}+e^{x}}{e^{x}}=\frac{1}{6}\end{aligned}$$

۱۴. فرض کنید

$$y=\left(\frac{\pi}{2}-\arctan x\right)^{1/\ln x}$$

وقتی $x \longrightarrow \infty$، یک صورت مبهم از نوع 0^0 به دست می‌آید؛ می‌خواهیم نشان دهیم که $y \longrightarrow 1/e$ وقتی که $x \longrightarrow \infty$.

در واقع،

$$\ln y=\frac{\ln(\frac{\pi}{2}-\arctan x)}{\ln x}$$

یک صورت مبهم از نوع ∞/∞ است؛ با اعمال قضیهٔ ۱۰.۴، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty}\ln y&=\lim_{x\to\infty}\frac{-\frac{1}{\pi/2-\arctan x}\frac{1}{1+x^{2}}}{1/x}=\lim_{x\to\infty}\frac{x/(1+x^{2})}{\arctan x-\pi/2}\\&=\lim_{x\to\infty}\frac{(1-x^{2})(1+x^{2})^{2}}{1/(1+x^{2})}=\lim_{x\to\infty}\frac{1-x^{2}}{1+x^{2}}=-1\end{aligned}$$

۱۵. داریم
$$\lim_{x\to ۰} \frac{x\cos x - \sin x}{x\sin^۲ x} = -\frac{۱}{۳}$$
از این، بالاخص، نتیجه می‌شود که
$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{\sin x}{x}\right)^{۱/(۱-\cos x)} = e^{-۱/۳} \quad \text{و} \quad \lim_{x\to ۰}\left(\cot^۲ x - \frac{۱}{x^۲}\right) = -\frac{۲}{۳}$$
در واقع، به استناد قضیهٔ ۱۰.۴،
$$\lim_{x\to ۰} \frac{x\cos x - \sin x}{x\sin^۲ x} = \lim_{x\to ۰} \frac{-x\sin x}{\sin^۲ x + ۲x(\sin x)(\cos x)}$$
$$= \lim_{x\to ۰} \frac{-۱}{(\sin x)/x + ۲\cos x} = -\frac{۱}{۳}$$
که گزارهٔ اول ثابت می‌شود. چون
$$\cot^۲ x - \frac{۱}{x^۲} = \frac{x^۲\cos^۲ x - \sin^۲ x}{x^۲ \sin^۲ x} = \frac{x\cos x + \sin x}{x}\,\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin^۲ x}$$
و وقتی که $x \longrightarrow ۰$،
$$\frac{x\cos x + \sin x}{x} = \cos x + \frac{\sin x}{x} \longrightarrow ۲$$
گزارهٔ دوم از گزارهٔ اول نتیجه می‌شود. سرانجام، اگر قرار دهیم $y = f(x)$، که در آن
$$f(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)^{۱/(۱-\cos x)}$$
آن‌گاه
$$\ln y = \frac{\ln(\sin x) - \ln x}{۱-\cos x}, \qquad x > ۰ \qquad \text{برای}$$
فرض $x > ۰$ محدودیتی ایجاد نمی‌کند، زیرا $f(-x) = f(x)$. با استفاده از قضیهٔ ۱۰.۴، خواهیم داشت:
$$\lim_{x\to ۰}\ln y = \lim_{x\to ۰} \frac{(\cos x)/(\sin x) - ۱/x}{\sin x} = \lim_{x\to ۰}\frac{x\cos x - \sin x}{x\sin^۲ x} = -\frac{۱}{۳}$$
که حکم سوم براساس حکم اول ثابت می‌شود.

۱۶. مقداری از عدد ثابت c بیابید که

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x = ۴$$

قرار می‌دهیم

$$y=\left(\frac{x+c}{x-c}\right)^x \quad \text{یا} \quad \ln y = \frac{\ln(x+c)-\ln(x-c)}{۱/x}$$

و قضیهٔ ۱۰.۴ را به کار می‌بریم، خواهیم داشت:

$$\lim_{x\to\infty}\ln y = \lim_{x\to\infty}\frac{\ln(x+c)-\ln(x-c)}{۱/x} = \lim_{x\to\infty}\frac{۱/(x+c)-۱/(x-c)}{-۱/x^۲}$$

$$= \lim_{x\to\infty}\frac{۲cx^۲}{x^۲-c^۲} = ۲c$$

بنابراین، ملاحظه می‌کنیم که $۲c = ۲(\ln ۲)$ یا $c = \ln ۲$.

۱۷. فرض کنید a و b اعداد حقیقی ثابتی باشند و $a > ۰$. آنگاه

$$\lim_{x\to\infty} a^x.\sin\frac{b}{a^x} = b, \qquad a > ۱ \quad \text{اگر}$$

$$= ۰, \qquad ۰ < a < ۱ \quad \text{اگر}$$

در واقع، اگر $a > ۱$ و $\infty \longrightarrow x$ آنگاه $\infty \longrightarrow a^x$ و

$$a^x.\sin\frac{b}{a^x} = b.\frac{\sin(b/a^x)}{b/a^x} \longrightarrow b$$

اگر $۰ < a < ۱$ و $\infty \longrightarrow x$ آنگاه $۰ \longrightarrow a^x$؛ بعلاوه، همواره $|\sin t| \le ۱$.

۱۸. داریم

$$\lim_{x\to ۰}\left(\frac{۱}{\sin^۲ x}-\frac{۱}{x^۲}\right) = \frac{۲}{۳}$$

در واقع،

$$\frac{۱}{\sin^۲ x}-\frac{۱}{x^۲} = \frac{x^۲-\sin^۲ x}{x^۲\sin^۲ x} = \frac{x^۲-\sin^۲ x}{x^۴}.\frac{x^۲}{\sin^۲ x}$$

اگر قضیهٔ ۱۰.۴ را چهار بار پیاپی اعمال کنیم، نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{x\to ۰}\frac{x^۲-\sin^۲ x}{x^۴} = \frac{۱}{۳}$$

از طرف دیگر، $x^۲/(\sin^۲ x) \longrightarrow ۱$ وقتی که $x \longrightarrow ۰$.

۲.۴ قضیهٔ تیلور

قضیهٔ ۱۱.۴ (قضیهٔ تیلور). فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار باشد که بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ با طول متناهی تعریف شده است و n یک عدد صحیح نامنفی باشد. فرض کنید f و n مشتق اول آن بر $[a,b]$ پیوسته باشند و $f^{(n+1)}$ (یعنی، مشتق $f^{(n)}$) بر (a,b) موجود باشد. بعلاوه، فرض کنید که α و β نقاط متمایزی از $[a,b]$ باشند و قرار دهید

$$P(t) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(t-\alpha) + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(t-\alpha)^n \tag{۸.۴}$$

در این صورت، نقطه‌ای مانند x بین α و β وجود دارد به طوری که

$$f(\beta) = P(\beta) + \frac{f^{(n+1)}(x)}{n!q}(\beta-\alpha)^q(\beta-x)^{n-q+1} \tag{۹.۴}$$

که در آن q عدد ثابتی ناکمتر از ۱ است.

برهان. β را ثابت نگه می‌داریم و عدد K را با رابطهٔ

$$f(\beta) = P(\beta) + K(\beta-\alpha)^q \tag{۱۰.۴}$$

تعریف می‌کنیم و، به‌ازای $t \in [a,b]$، قرار می‌دهیم

$$g(t) = f(t) + \frac{f'(t)}{1!}(\beta-t) + \cdots + \frac{f^{(n)}(t)}{n!}(\beta-t)^n + K(\beta-t)^q$$

واضح است که $g(\beta) = f(\beta)$ و، به استناد (۱۰.۴)، $g(\alpha) = f(\beta)$. به این ترتیب، به استناد قضیهٔ ۳.۴، xی بین α و β یافت می‌شود به طوری که $g'(x) = 0$. امّا

$$\begin{aligned} g'(t) =& f'(t) + \left(\frac{f''(t)}{1!}(\beta-t) - f'(t)\right) \\ &+ \left(\frac{f'''(t)}{2!}(\beta-t)^2 - \frac{f''(t)}{1!}(\beta-t)\right) \\ &+ \left(\frac{f^{(4)}(t)}{3!}(\beta-t)^3 - \frac{f'''(t)}{2!}(\beta-t)^2\right) + \cdots \\ &+ \left(\frac{f^{(n+1)}}{n!}(\beta-t)^n - \frac{f^{(n)}(t)}{(n-1)!}(\beta-t)^{n-1}\right) - qK(\beta-t)^{q-1} \end{aligned}$$

و (۹.۴) نتیجه می‌شود.

ملاحظات. در (۸.۴)، چندجمله‌ای P را چندجمله‌های تیلور از مرتبهٔ n تابع f در α می‌نامند. عبارت

$$R_n = \frac{f^{(n+۱)}(x)}{n!q}(\beta - \alpha)^q(\beta - x)^{n-q+۱} \tag{۱۱.۴}$$

را، که در (۹.۴) ظاهر شد، صورت اشلومیلش باقیمانده می‌نامند. اگر انتخاب $q = n + ۱$ در (۱۱.۴) صورت گیرد، خواهیم داشت:

$$R_n = \frac{f^{(n+۱)}(x)}{(n+۱)!}(\beta - \alpha)^{n+۱}$$

و آن را صورت لاگرانژ باقیمانده می‌نامند. انتخاب $q = ۱$ در (۱۱.۴) به نتیجهٔ

$$R_n = \frac{f^{(n+۱)}(x)}{n!}(\beta - \alpha)(\beta - x)^n$$

می‌انجامد که آن را صورت کوشی باقیمانده می‌نامند.

به‌ازای $n = ۰$ و با استفاده از صورت لاگرانژ باقیمانده، قضیهٔ ۱۱.۴ به قضیهٔ ۵.۴ تبدیل می‌شود. به طور کلی، قضیهٔ ۱۱.۴ نشان می‌دهد که f می‌تواند با یک چندجمله‌ای درجهٔ n تقریب شود؛ و (۹.۴) وسیله‌ای برای تخمین خطای تقریب است در صورتی که کرانهایی برای $|f^{(n+۱)}(x)|$ معلوم باشد.

در مثال ۸ بعد از قضیهٔ ۱۰.۴، تابع

$$F(۰) = ۰, \quad F(t) = e^{-۱/t^۲}, \quad t \neq ۰ \quad \text{برای}$$

را مطالعه کردیم. شایان ذکر است که چندجمله‌ای تیلور F از هر مرتبه در ۰ صفر می‌شود، زیرا که مشتقات F از هر مرتبه در $t = ۰$ صفر می‌شوند. در مورد این تابع، قضیهٔ ۱۱.۴ به یک چندجمله‌ای تقریبی نمی‌انجامد (غیر از چندجمله‌ای بدیهی صفر) و تابع F مجدداً در باقیمانده ظاهر می‌شود. معذالک، در مورد بعضی توابع دیگر، قضیهٔ ۱۱.۴ متضمن اطلاعات بسیار مفید است. در زیر، چندمثال را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تابع نمایی. فرض کنید $f(t) = e^t$. آن‌گاه $f^{(k)}(t) = e^t$ به‌ازای $k = ۱, ۲, \ldots$. اگر α را صفر بگیریم و صورت لاگرانژ را برای باقیماندهٔ R_n انتخاب کنیم، خواهیم داشت:

$$e^\beta = ۱ + \frac{\beta}{۱!} + \frac{\beta^۲}{۲!} + \cdots + \frac{\beta^n}{n!} + R_n(\beta)$$

که در آن

$$R_n(\beta) = e^x \frac{\beta^{n+۱}}{(n+۱)!}$$

با x بین ۰ و β. توجه می‌کنیم که

$$|R_n(\beta)| < \frac{|\beta|^{n+1} e^{\beta}}{(n+1)!}$$

و، اگر β ثابت باشد،

$$\lim_{n\to\infty} R_n(\beta) = 0 \qquad (12.4)$$

برای تحقیق در درستی (۱۲.۴)، فرض می‌کنیم که m عدد صحیح مثبتی بزرگتر از $2|\beta|$ باشد. آن‌گاه، به‌ازای $n \geq m$، داریم

$$\frac{|\beta|^{n+1} e^{|\beta|}}{(n+1)!} = e^{|\beta|} . \frac{|\beta|^m}{m!} . \left(\frac{|\beta|}{m+1}\right) . \left(\frac{|\beta|}{m+2}\right) \cdots \left(\frac{|\beta|}{n+1}\right) < e^{|\beta|} . \frac{|\beta|^m}{m!} \left(\frac{1}{2}\right)^{n-m+1}$$

به این ترتیب، به‌ازای $n \geq m$،

$$|R_n(\beta)| < M . \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

که در آن M عدد ثابت

$$M = 2^{m-1} . e^{|\beta|} . \frac{|\beta|^m}{m!}$$

است. اگر $n \longrightarrow \infty$، آن‌گاه $(1/2)^n \longrightarrow 0$. از این رو، با عدد ثابت M، $M(1/2)^n \longrightarrow 0$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. بنابراین، وقتی β ثابت باشد، می‌توانیم e^β را با استفاده از رابطهٔ

$$e^\beta = 1 + \frac{\beta}{1!} + \frac{\beta^2}{2!} + \cdots + \frac{\beta^n}{n!} + \frac{\beta^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta\beta} \qquad (13.4)$$

که در آن $0 < \theta < 1$، تا هر درجهٔ دقت محاسبه کنیم. بالاخص، به‌ازای $\beta = 1$، از (۱۳.۴) نتیجه می‌گیریم که

$$e = 1 + \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} + \cdots + \frac{1}{n!} + R_n(1) \text{، که در آن } 0 < R_n(1) < \frac{3}{(n+1)!} . \qquad (14.4)$$

با انتخاب $n = 13$ در (۱۴.۴)، ملاحظه می‌کنیم که $e = 2/718281828\ldots$، با دقتی تا ۹ رقم اعشار، به دست می‌آید.

توجه می‌کنیم که e یک عدد گویا نیست؛ یعنی، e قابل نمایش به صورت خارج‌قسمت دو عدد صحیح نیست. در واقع، از (۱۳.۴) نتیجه می‌شود که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، عددی مانند θ موجود است که به n بستگی دارد و $۰ < \theta < ۱$ و

$$e = ۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \cdots + \frac{۱}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+۱)!}$$

حال، فرض کنید که $e = p/q$، که در آن p و q دو عدد صحیح مثبت می‌باشند. فقط باید قانع شویم که، در صورتی که $n \geq q$ و $n \geq ۳$ و $۰ < \theta < ۱$، رابطهٔ

$$\frac{p}{q} = ۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \cdots + \frac{۱}{n!} + \frac{e^{\theta}}{(n+۱)!} \qquad (۱۵.۴)$$

نمی‌تواند معتبر باشد. (۱۵.۴) معادل

$$n!\frac{p}{q} - n!\left(۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \cdots + \frac{۱}{n!}\right) = \frac{e^{\theta}}{n+۱} \qquad (۱۶.۴)$$

است که نمی‌تواند برقرار باشد؛ زیرا طرف چپ این رابطه عددی صحیح است ولی طرف راست کمیتی است که بزرگتر از صفر و کوچکتر از $۳/(n+۱)$ است که این، به نوبهٔ خود و به استناد فرض $n \geq ۳$، کوچکتر از ۱ است؛ معذالک، عدد صحیحی بین ۰ و ۱ وجود ندارد.

توابع سینوس و کسینوس. فرض کنید $f(t) = \sin t$. اگر m عدد صحیح مثبتی باشد، آن‌گاه

$$f^{(۲m)}(t) = (-۱)^m \sin t, \qquad f^{(۲m-۱)}(t) = (-۱)^{m-۱} \cos t$$

اگر α را صفر بگیریم و صورت لاگرانژ را برای باقیماندهٔ R_n اختیار کنیم و قرار دهیم $n = ۲m$، خواهیم داشت:

$$\sin\beta = \beta - \frac{\beta^۳}{۳!} + \frac{\beta^۵}{۵!} - \frac{\beta^۷}{۷!} + \cdots + (-۱)^{m-۱}\frac{\beta^{۲m-۱}}{(۲m-۱)!} + R_n(\beta) \qquad (۱۷.۴)$$

که در آن

$$R_n(\beta) = (-۱)^m \frac{\beta^{۲m+۱}}{(۲m+۱)!}\cos x$$

و x نقطه‌ای بین ۰ و β است. واضح است که

$$|R_n(\beta)| \leq \frac{|\beta|^{۲m+۱}}{(۲m+۱)!}$$

بنابراین، درست مانند حالت تابع نمایی، به‌ازای هر عدد ثابت β، $R_n(\beta) \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. به این ترتیب، به‌ازای هر عدد ثابت β، می‌توانیم $\sin\beta$ را به کمک (۱۷.۴) تا هر درجهٔ دقت مطلوب محاسبه کنیم.

به روشی کاملاً مشابه، درمی‌یابیم که

$$\cos\beta = ۱ - \frac{\beta^۲}{۲!} + \frac{\beta^۴}{۴!} - \frac{\beta^۶}{۶!} + \cdots + (-۱)^{m-۱}\frac{\beta^{۲m-۲}}{(۲m-۲)!} + R_n(\beta) \quad (۱۸.۴)$$

که در آن

$$R_n(\beta) = (-۱)^m \frac{\beta^{۲m}}{(۲m)!}\cos v$$

و v نقطه‌ای بین ۰ و β است. چون

$$|R_n(\beta)| \leq \frac{|\beta|^{۲m}}{(۲m)!}$$

نتیجه می‌شود که به‌ازای هر عدد ثابت β، $R_n(\beta) \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. از این رو، (۱۸.۴) می‌تواند در محاسبهٔ $\cos\beta$ تا هر درجهٔ دقت مطلوب مورد استفاده قرار گیرد.

تابع لگاریتمی. فرض کنید $f(t) = \ln(۱+t)$. آن‌گاه، به‌ازای $k = ۱, ۲, \ldots$،

$$f^{(k)}(t) = (-۱)^{k-۱}\frac{(k-۱)!}{(۱+t)^k}$$

داریم $f(۰) = ۰$ و

$$\frac{۱}{k!}f^{(k)}(۰) = \frac{(-۱)^{k-۱}}{k}, \qquad k = ۱, ۲, \ldots$$

اگر α را ۰ بگیریم و صورت لاگرانژ را برای باقیماندهٔ R_n اختیار کنیم، خواهیم داشت:

$$\ln(۱+\beta) = \beta - \frac{\beta^۲}{۲} + \frac{\beta^۳}{۳} - \frac{\beta^۴}{۴} + \cdots + (-۱)^{n-۱}\frac{\beta^n}{n} + R_n(\beta) \quad (۱۹.۴)$$

که در آن

$$R_n(\beta) = (-۱)^n \frac{\beta^{n+۱}}{n+۱}\frac{۱}{(۱+\theta\beta)^{n+۱}}$$

و θ عددی بین ۰ و ۱ است. به‌ازای هر عدد ثابت β که $0 \leq \beta \leq 1$، داریم

$$|R_n(\beta)| \leq \frac{1}{n+1} \longrightarrow 0 \quad \text{وقتی که} \quad n \longrightarrow \infty\ .$$

از این رو، ملاحظه می‌کنیم که $\ln(1+\beta)$ را می‌توان تا هر درجهٔ دقتی به کمک (۱۹.۴) محاسبه کرد مشروط به این که $0 \leq \beta \leq 1$.

چون به‌ازای مقادیر مثبت β، عبارت

$$\frac{1}{(1+\theta\beta)^{n+1}}$$

مانند θ بین ۰ و ۱ است، می‌توانیم (۱۹.۴) را به صورت

$$\ln(1+\beta) = \beta - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{3} - \frac{\beta^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\beta^n}{n} + (-1)^n\theta_1\frac{\beta^{n+1}}{n+1} \tag{۲۰.۴}$$

نیز بنویسیم که در آن $0 \leq \beta \leq 1$ و $0 < \theta_1 < 1$.

حال، می‌خواهیم بدانیم که وقتی $-1 < \beta \leq 0$ چه اتفاق می‌افتد؟ به جای صورت لاگرانژ باقیمانده، صورت کوشی را مورد بررسی قرار می‌دهیم. در این صورت،

$$\ln(1+\beta) = \beta - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{3} - \frac{\beta^4}{4} + \cdots + (-1)^n\frac{\beta^n}{n} + R_n(\beta) \tag{۲۱.۴}$$

که در آن

$$R_n(\beta) = (-1)^n\frac{\beta^{n+1}}{1+\omega\beta}\left(\frac{1-\omega}{1+\omega\beta}\right)^n$$

و $0 < \omega < 1$ و $-1 < \beta \leq 0$. (توجه کنید که $\omega\beta$ را به جای x در صورت کوشی باقیمانده جایگزین کرده‌ایم.) این صورت باقیمانده سبب می‌شود که ملاحظه کنیم که در حالت $-1 < \beta \leq 0$ نیز $R_n(\beta) \longrightarrow 0$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. در واقع، اگر $-1 < \beta \leq 0$، آن‌گاه (چون $0 < \omega < 1$)

$$1 - \omega < 1 + \omega\beta$$

و، بنابراین، به‌ازای هر $n \geq 0$،

$$0 < \left(\frac{1-\omega}{1+\omega\beta}\right)^n \leq 1$$

بعلاوه، اگر $-1 < \beta \leq 0$ و $0 < \omega < 1$، آن‌گاه

$$0 < \frac{1}{1+\omega\beta} \leq \frac{1}{1+\beta}$$

از این رو، (۲۱.۴) را می‌توانیم به صورت

$$\ln(1+\beta) = \beta - \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{3} - \frac{\beta^4}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{\beta^n}{n} + (-1)^n\theta_2\frac{\beta^{n+1}}{1+\beta} \qquad (22.4)$$

بنویسیم که در آن $-1 < \beta \leq 0$ و $0 < \theta_2 < 1$، که در این مورد نیز واضح است که

$$R_n(\beta) = (-1)^n\theta_2\frac{\beta^{n+1}}{1+\beta}$$

به 0 میل می‌کند وقتی که $n \longrightarrow \infty$. به این ترتیب، وقتی β در نامساویهای $-1 < \beta \leq 0$ صدق کند، (۲۲.۴) می‌تواند در محاسبهٔ $\ln(1+\beta)$ تا هر درجهٔ دقت مطلوب مورد استفاده واقع شود. البته، در حالت بدیهی $\beta = 0$، به چنین روشهای قوی نیازی نیست. چون

$$\ln a = -\ln\frac{1}{a}$$

می‌توانیم از (۲۲.۴) برای محاسبهٔ $\ln a$ در حالت $a > 0$ استفاده کنیم؛ معذالک، این روش غالباً سودمند نیست. با انتخاب $-\beta$ در (۲۲.۴) و ضرب طرفین در -1، خواهیم داشت:

$$\ln\frac{1}{1-\beta} = \beta + \frac{\beta^2}{2} + \frac{\beta^3}{3} + \cdots + \frac{\beta^n}{n} + \theta_2\frac{\beta^{n+1}}{1-\beta} \qquad (23.4)$$

که در آن $0 \leq \beta < 1$ و $0 < \theta_2 < 1$.

چون

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} = \ln(1+\beta) + \ln\frac{1}{1-\beta}$$

می‌توانیم نتایج (۲۰.۴) و (۲۳.۴) را با هم ترکیب کنیم؛ در این صورت، اگر n را عدد زوج $2k$ بگیریم، داریم

$$\frac{1+\beta}{1-\beta} = 2\left(\beta + \frac{\beta^3}{3} + \cdots + \frac{\beta^{2k-1}}{2k-1}\right) + \beta^{2k+1}\left(\frac{\theta_1}{2k+1} + \frac{\theta_2}{1-\beta}\right), \qquad (24.4)$$

که در آن $۱ > \beta \leq ۰$، $۱ > \theta_۱ > ۰$، و $۱ > \theta_۲ > ۰$. روابط (۲۰.۴)، (۲۲.۴)، و (۲۴.۴) از روابط اساسی برای محاسبات لگاریتمی می‌باشند.

با انتخاب $\beta = ۲$ در (۲۰.۴)، خواهیم داشت:

$$\ln ۲ = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \cdots + \frac{(-۱)^{n-۱}}{n} + \frac{(-۱)^n}{n+۱}\theta_۱ \qquad (۲۵.۴)$$

که در آن $۱ > \theta_۱ > ۰$. با این که (۲۵.۴) از فایدهٔ نظری قابل ملاحظه‌ای برخوردار است، در محاسبهٔ $\ln ۲$، مثلاً با دقتی تا شش رقم اعشار، خیلی سودمند واقع نمی‌شود؛ زیرا برای رسیدن به چنین دقتی باید $n = ۱۰^۶$ یا بزرگتر باشد و انجام این محاسبات وحشتناک است.

در مقابل، رابطهٔ (۲۵.۴) در محاسبهٔ $\ln ۲$ بیشتر مفید واقع می‌شود. برای این که

$$\frac{۱+\beta}{۱-\beta} = ۲$$

کافی است که $\beta = ۱/۳$؛ با این انتخاب، خواهیم داشت:

$$\ln ۲ = ۲\left(\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۳ \cdot ۳^۳} + \frac{۱}{۵ \cdot ۳^۵} + \cdots + \frac{۱}{(۲k-۱)۳^{۲k-۱}}\right) + \frac{۱}{۳^{۲k+۱}}\left(\frac{\theta_۱}{۲k+۱} + \frac{۳}{۲}\theta_۲\right) \qquad (۲۶.۴)$$

که در آن $۱ > \theta_۱ > ۰$ و $۱ > \theta_۲ > ۰$. به عنوان مثال، به آسانی دیده می‌شود که با انتخاب $k = ۹$ در (۲۶.۴) به دقتی تا هشت رقم اعشار می‌رسیم.

فرض کنید $\ln m$ را، که در آن m یک عدد صحیح مثبت است، قبلاً محاسبه کرده باشیم و، سپس، بخواهیم $\ln(m+۱)$ را محاسبه کنیم. چون

$$\ln(m+۱) = \ln m + \ln \frac{m+۱}{m}$$

شایسته است که $\ln\{(m+۱)/m\}$ را با هر دقت ممکن محاسبه کنیم. اگر قرار دهیم

$$\beta = \frac{۱}{۲m+۱}$$

خواهیم داشت:

$$\frac{۱+\beta}{۱-\beta} = \frac{m+۱}{m}$$

بنابراین، رابطهٔ (۲۴.۴) در محاسبهٔ $\ln\{(m+۱)/m\}$ به ما کمک خواهد کرد و، در واقع، هر قدر m بزرگتر شود مناسبتر می‌شود. ضمناً، توجه می‌کنیم که، به عنوان مثال، محاسبهٔ $\ln ۳$ با استفاده از اتحاد

$$\ln ۳ = \ln ۲ + \ln \frac{۳}{۲}$$

و انتخاب $\beta = ۱/۵$ در (۲۴.۴) بر محاسبهٔ آن به استناد (۲۴.۴) با $\beta = ۱/۲$، که به نتیجهٔ زیر می‌انجامد،

$$\ln ۳ = ۲\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳\cdot ۲^۳} + \frac{۱}{۵\cdot ۲^۵} + \cdots + \frac{۱}{(۲k-۱)۲^{۲k-۱}}\right) + \frac{۱}{۲^{۲k+۱}}\left(\frac{\theta_۱}{۲k+۱} + ۲\theta_۲\right)$$

رحجان دارد.

جی. سی. آدامز در (Proceedings of the Royal Society of London، مجلّد ۲۷، چاپ ۱۸۷۸، صفحهٔ ۸۸) از اتحادهای

$$\ln ۲ = ۷\ln\frac{۱۰}{۹} - ۲\ln\frac{۲۵}{۲۴} + ۳\ln\frac{۸۱}{۸۰}$$
$$\ln ۳ = ۱۱\ln\frac{۱۰}{۹} - ۳\ln\frac{۲۵}{۲۴} + ۵\ln\frac{۸۱}{۸۰}$$
$$\ln ۵ = ۱۶\ln\frac{۱۰}{۹} - ۴\ln\frac{۲۵}{۲۴} + ۷\ln\frac{۸۱}{۸۰}$$
$$\ln ۷ = \frac{۱}{۲}\left(۳۹\ln\frac{۱۰}{۹} - ۱۰\ln\frac{۲۵}{۲۴} + ۱۷\ln\frac{۸۱}{۸۰} - \ln\frac{۵۰}{۴۹}\right)$$

و

$$\ln ۷ = ۱۹\ln\frac{۱۰}{۹} - ۴\ln\frac{۲۵}{۲۴} + ۸\ln\frac{۸۱}{۸۰} + \ln\frac{۱۲۶}{۱۲۵}$$

برای محاسبهٔ $\ln ۲$، $\ln ۳$، $\ln ۵$، و $\ln ۷$ با دقتی تا ۲۶۲ رقم اعشار می‌توان استفاده کرد. توجه کنید که

$$\ln\frac{۱۰}{۹} = -\ln\left(۱ - \frac{۱}{۱۰}\right), \qquad \ln\frac{۲۵}{۲۴} = -\ln\left(۱ - \frac{۴}{۱۰۰}\right), \qquad \ln\frac{۸۱}{۸۰} = \ln\left(۱ + \frac{۱}{۸۰}\right)$$
$$\ln\frac{۵۰}{۴۹} = -\ln\left(۱ - \frac{۲}{۱۰۰}\right), \quad \ln\frac{۱۲۶}{۱۲۵} = -\ln\left(۱ + \frac{۸}{۱۰۰۰}\right),$$

بعلاوه، اعداد

$$\frac{۱}{۱۰},\quad \frac{۴}{۱۰۰},\quad \frac{۱}{۸۰},\quad \frac{۲}{۱۰۰},\quad \frac{۸}{۱۰۰۰}$$

همراه با توانهای صحیح خود تا چندین رقم اعشار به آسانی محاسبه می‌شوند.

همین که $\ln ۲$ و $\ln ۵$ با دقت زیاد محاسبه شده باشند، $\ln ۱۰$ نیز با دقت زیاد معلوم است؛ زیرا

$$\ln ۱۰ = \ln ۲ + \ln ۵$$

رابطهٔ بین لگاریتم در مبنای ۱۰ و لگاریتم اعشاری به صورت زیر است:

$$\log_{۱۰} N = \frac{\ln N}{\ln ۱۰}$$

و، بنابراین، محاسبهٔ دقیق $M = \ln ۱۰$ مورد توجه است. ملاحظه می‌کنیم که

$$M = ۲{,}۳۰۲۵۸۵۰۹۲۹۹۴۰\ldots \quad \text{و} \quad \frac{۱}{M} = ۰{,}۴۳۴۲۹۴۴۸۱۹۰۳۲\ldots$$

تابع دوجمله‌ای. فرض کنید c یک عدد حقیقی باشد و قرار دهید

$$\binom{c}{0} = 1, \qquad \binom{c}{k} = \frac{c(c-1)(c-2)\dots(c-k+1)}{k!}, \qquad k = 1, 2, \dots$$

اگر $f(t) = (1+t)^c$ به‌ازای $t > -1$، آن‌گاه، به‌ازای $k = 0, 1, 2, \dots$،

$$\frac{1}{k!}f^{(k)}(t) = \binom{c}{k}(1+t)^{c-k} \text{؛ یعنی، } \frac{1}{k!}f^{(k)}(0) = \binom{c}{k}$$

اگر α را 0 بگیریم و صورت لاگرانژ را برای باقیماندهٔ R_n اختیار کنیم (و نقطهٔ x بین 0 و β را به صورت $\theta\beta$ در نظر بگیریم که در آن $0 < \theta < 1$)، خواهیم داشت:

$$(1+\beta)^c = 1 + \binom{c}{1}\beta + \binom{c}{2}\beta^2 + \dots + \binom{c}{n}\beta^n + R_n(\beta) \qquad (27.4)$$

که در آن

$$R_n(\beta) = \binom{c}{n+1}\beta^{n+1}(1+\theta\beta)^{c-n-1}$$

و θ، که به n و β بستگی دارد، در نامساویهای $0 < \theta < 1$ صدق می‌کند.

واضح است که (۲۷.۴) توسیعی از قضیهٔ دوجمله‌ای است و زمانی به این قضیه برمی‌گردد که c یک عدد صحیح مثبت مانند p باشد و $n \geq p$.

اگر $\beta > 0$ (حالت $\beta = 0$ بدیهی است.) و $c < n+1$، آن‌گاه

$$0 < (1+\theta\beta)^{c-n-1} < 1$$

و می‌توانیم (۲۷.۴) را با صورت ساده‌تر

$$(1+\beta)^c = 1 + \binom{c}{1}\beta + \binom{c}{2}\beta^2 + \dots + \binom{c}{n}\beta^n + \binom{c}{n+1}\theta_1\beta^{n+1} \qquad (28.4)$$

تعویض کنیم که در آن c دلخواه است، $\beta > 0$، $c < n+1$، و $0 < \theta_1 < 1$.

فرض کنید c ثابت باشد ولی نه یک عدد صحیح مثبت؛ فرض کنید β ثابت باشد و $|\beta| < 1$. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$y_n = \binom{c}{n}\beta^n \longrightarrow 0 \quad \text{آن‌گاه} \quad n \longrightarrow \infty \quad \text{اگر} \qquad (29.4)$$

در واقع،

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} = \frac{c-n}{n+1}\beta$$

بنابراین،

$$\frac{y_{n+1}}{y_n} \longrightarrow -\beta \quad \text{وقتی که} \quad n \longrightarrow \infty \tag{۳۰.۴}$$

یعنی، قدر مطلق حد از واحد کوچکتر است. از این رو، اگر v عدد ثابتی باشد که $|\beta| < v < 1$، می‌توانیم عدد صحیح مثبتی مانند m بیابیم که

$$\left|\frac{y_{n+1}}{y_n}\right| < v \quad \text{به‌ازای } k \geq m\text{،} \tag{۳۱.۴}$$

حال، نامساوی (۳۱.۴) را به‌ازای $k = m, m+1, \ldots, n-1$ در نظر می‌گیریم. پس از ضرب این نامساویها در یکدیگر، خواهیم داشت:

$$|y_n| < \frac{|y_m|}{v^m}v^n \quad \text{به‌ازای } n > m\text{،}$$

امّا m ثابت است و، از این رو، $|y_m|/v^m$ نیز ثابت است. بنابراین، اگر $n \longrightarrow \infty$ آن‌گاه $v^n \longrightarrow 0$، و نتیجه می‌گیریم که

$$y_n \longrightarrow 0 \quad \text{وقتی که} \quad n \longrightarrow \infty$$

در ادامهٔ بحث، لازم خواهد بود که بدانیم که، در حالت $|\beta| < 1$، حکم قویتر

$$z_n = ny_n \longrightarrow 0 \quad \text{وقتی که} \quad n \longrightarrow \infty \tag{۳۲.۴}$$

نیز برقرار است. امّا

$$\frac{z_{n+1}}{z_n} = \frac{n+1}{n}\frac{c-n}{n+1}\beta \longrightarrow -\beta$$

و ما می‌توانیم همان استدلالی را که در مورد اعداد y_n براساس رابطهٔ (۳۱.۴) به کار رفت، تکرار کنیم.

به این ترتیب، به‌ازای یک عدد ثابت β که $0 \leq \beta < 1$، یقیناً می‌توانیم ادعا کنیم که باقیماندهٔ $R_n(\beta)$ در (۲۷.۴) به صفر میل می‌کند وقتی که n به طور دلخواه بزرگ شود. در حالت $-1 < \beta < 0$، از روی (۲۷.۴) یا (۲۸.۴) به زحمت می‌توان فهمید که چه بر سر $R_n(\beta)$ می‌آید وقتی که $n \longrightarrow \infty$. معذالک، به جای صورت لاگرانژ، اگر از صورت کوشی برای باقیمانده استفاده کنیم، چندان دشوار نیست که ملاحظه کنیم که حتی در حالتی که β ثابت باشد و $-1 < \beta < 0$ نیز $R_n(\beta) \longrightarrow 0$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$.

در واقع، با استفاده از صورت کوشی باقیمانده، به نمایش

$$(۱+\beta)^c = ۱ + \binom{c}{۱}\beta + \binom{c}{۲}\beta^۲ + \cdots + \binom{c}{n}\beta^n$$
$$+ (n+۱)\binom{c}{n+۱}\beta^{n+۱}(۱-\omega)^n(۱+\omega\beta)^{c-n-۱} \quad (۳۳.۴)$$

دست می‌یابیم که در آن $۰ \leq \beta > -۱$ و $۱ > \omega > ۰$. (توجه کنید که، در صورت کوشی باقیمانده، $\omega\beta$ جانشین x شده است.) درست مانند حالتی که تابع لگاریتمی مورد مطالعه قرار گرفت، توجه می‌کنیم که $۰ \leq \beta > -۱$ و $۱ > \omega > ۰$ مستلزم

$$۱ - \omega < ۱ + \omega\beta$$

است. از این رو، به‌ازای هر $n \geq ۰$، عدد

$$\theta_۲ = \left(\frac{۱-\omega}{۱+\omega\beta}\right)^n$$

در نامساویهای $۱ \leq \theta_۲ > ۰$ صدق می‌کند. بنابراین، (۳۳.۴) را می‌توانیم به صورت ساده‌تر زیر بازنویسی کنیم:

$$(۱+\beta)^c = ۱ + \binom{c}{۱}\beta + \binom{c}{۲}\beta^۲ + \cdots + \binom{c}{n}\beta^n$$
$$+ (n+۱)\binom{c}{n+۱}\beta^{n+۱}\theta_۲(۱+\omega\beta)^{c-۱} \quad (۳۴.۴)$$

که در آن c دلخواه است، $۰ \leq \beta > -۱$، $۱ \leq \theta_۲ > ۰$، و $۱ > \omega > ۰$. به استناد (۳۲.۴)، اگر β ثابت باشد و در نامساویهای $۰ \leq \beta > -۱$ صدق کند، آنگاه

$$z_n = ny_n = n\binom{c}{n}\beta^n \longrightarrow ۰$$ ، وقتی که $n \longrightarrow \infty$.

همچنین، به‌ازای β ثابتی که $۰ \leq \beta > -۱$، خواهیم داشت:

$$|\theta_۲(۱+\omega\beta)^{c-۱}| \leq ۱, \qquad c - ۱ \geq ۰$$
$$\leq (۱+\beta)^{c-۱}, \quad c - ۱ \leq ۰$$

در هر صورت، عوامل الحاقی به z_n کراندارند و، بنابراین، در این حالت نیز $R_n(\beta) \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$.

خلاصهٔ بحث: به‌ازای هر β که $-۱ < \beta < ۱$، نمایشی به صورت

$$(۱+\beta)^c = ۱ + \binom{c}{۱}\beta + \binom{c}{۲}\beta^۲ + \cdots + \binom{c}{n}\beta^n + R_n(\beta) \qquad (۳۵.۴)$$

داریم که در آن $R_n(\beta) \longrightarrow ۰$ وقتی که β ثابت باشد و $n \longrightarrow \infty$. بعلاوه، اگر $c < n+۱$، داریم

$$R_n(\beta) = \binom{c}{n+۱}\theta_۱\beta^{n+۱}, \qquad ۰ \le \beta < ۱ \quad \text{برای} \qquad (۳۶.۴)$$

و

$$R_n(\beta) = (n+۱)\binom{c}{n+۱}\beta^{n+۱}\theta_۲(۱+\omega\beta)^{c-۱}, \qquad -۱ < \beta \le ۰ \quad \text{برای} \qquad (۳۷.۴)$$

اعداد $\theta_۱$ و $\theta_۲$ بزرگتر از صفر ولی کوچکتر از واحدند؛ و اطلاعات بیشتری دربارهٔ آنها نداریم.

از نتیجهٔ قبلی می‌توانیم در انجام محاسبات با دقت زیاد استفاده کنیم. مثلاً،

$$\begin{aligned}\sqrt{۲} &= ۱/۴\left(۱-\frac{۱}{۵۰}\right)^{-۱/۲}\\ &= ۱/۴\left(۱+\frac{۱}{۲}\frac{۱}{۵۰}+\frac{۳}{۸}\frac{۱}{۵۰^۲}+\frac{۵}{۱۶}\frac{۱}{۵۰^۳}+\frac{۳۵}{۱۲۸}\frac{۱}{۵۰^۴}+\frac{۶۳}{۲۵۶}\frac{۱}{۵۰^۵}+\ldots\right)\end{aligned}$$

امّا

$$\begin{aligned}۱+\cdots+\frac{۵}{۱۶}\frac{۱}{۵۰^۳} &= ۱/۰۱۰۱۵۲۵\\ \frac{۳۵}{۱۲۸}\frac{۱}{۵۰^۴} &= ۰/۰۰۰۰۰۰۰۴۳۷۵\\ \frac{۶۳}{۲۵۶}\frac{۱}{۵۰^۵} &= ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۷۸۷۵\\ \hline &\ ۱/۰۱۰۱۵۲۵۴۴۵۳۷۵\end{aligned}$$

معذالک،

$$۱/۰۱۰۱۵۲۵۴۴۵۳۷۵ \cdot ۱/۴ = ۱/۴۱۴۲۱۳۵۶۲۳۵۲۵۰$$

توجه می‌کنیم که خطای این تقریب کوچکتر است از

$$۱/۴\cdot۶\binom{-۱/۲}{۶}\frac{۱}{۵۰^۶} = ۱/۴\cdot۶\cdot\frac{۲۳۱}{۱۰۲۴}\frac{۱}{۵۰^۶}$$

که این عدد از $۱٫۲۲ \cdot ۱۰^{-۱۰}$ کوچکتر است. بنابراین، با دقتی تا ۹ رقم اعشار،

$$\sqrt{۲} = ۱٫۴۱۴۲۱۳۵۶۲\ldots$$

در صورتی که از اتحاد

$$\sqrt{۲} = ۱٫۴۱\left(۱ - \frac{۱۱۹}{۲۰۰۰۰}\right)^{-۱/۲}$$

استفاده می‌کردیم، دقت محاسبه حتی بیشتر می‌شد.

تابع معکوس تانژانت. فرض کنید $y = \arc\tan t$. می‌خواهیم $y^{(n)}$ را برحسب y بیان کنیم. چون $t = \tan y$، داریم

$$y' = \frac{۱}{۱+t^۲} = \cos^۲ y = (\cos y)\sin\left(y + \frac{\pi}{۲}\right)$$

یک بار دیگر مشتقگیری ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned} y'' &= \left(-(\sin y)\sin\left(y+\frac{\pi}{۲}\right) + (\cos y)\cos\left(y+\frac{\pi}{۲}\right)\right)y' \\ &= (\cos^۲ y)\cos\left(۲y + \frac{\pi}{۲}\right) = (\cos^۲ y)\sin ۲\left(y+\frac{\pi}{۲}\right) \end{aligned}$$

با مشتقگیری مجدد، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} y''' &= \left(-۲(\sin y)(\cos y)\sin ۲\left(y+\frac{\pi}{۲}\right) + ۲(\cos^۲ y)\cos ۲\left(y+\frac{\pi}{۲}\right)\right)y' \\ &= ۲(\cos^۳ y)\cos(۳y + ۲\frac{\pi}{۲}) = ۲(\cos^۳ y)\sin ۳\left(y+\frac{\pi}{۲}\right) \end{aligned}$$

فرمول کلی عبارت است از

$$y^{(n)} = (n-۱)!(\cos^n y)\sin n\left(y+\frac{\pi}{۲}\right) \tag{۳۸.۴}$$

که به استقرا می‌تواند محقق شود. (تمرین ۱۸.۳ آخر فصل سوم را نیز ببینید.)

اگر قرار دهیم $f(t) = \arc\tan t$، ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{gathered} f(۰) = ۰, \quad \frac{f'(۰)}{۱!} = ۱, \quad \frac{f''(۰)}{۲!} = ۰, \quad \frac{f'''(۰)}{۳!} = -\frac{۱}{۳}, \quad \frac{f^{(۴)}(۰)}{۴!} = ۰, \\ \frac{f^{(۵)}(۰)}{۵!} = \frac{۱}{۵}, \quad \frac{f^{(۶)}(۰)}{۶!} = ۰, \quad \frac{f^{(۷)}(۰)}{۷!} = -\frac{۱}{۷}, \quad \ldots \end{gathered}$$

اگر فرض کنیم $\alpha = \circ$، $\theta\beta$ را جایگزین x کنیم، و n را عدد صحیح زوج $۲k$ بگیریم، خواهیم داشت:

$$\arctan\beta = \beta - \frac{\beta^۳}{۳} + \frac{\beta^۵}{۵} - \frac{\beta^۷}{۷} + \cdots + (-۱)^{k-۱}\frac{\beta^{۲k-۱}}{۲k-۱} + R_n(\beta) \quad (۳۹.۴)$$

که در آن

$$R_n(\beta) = (-۱)^k \frac{\beta^{۲k+۱}}{۲k+۱}\left(\cos^{۲k+۱}\theta\beta\right)\sin(۲k+۱)\left(\theta\beta + \frac{\pi}{۲}\right)$$

با $۱ \leq |\beta|$ و $۱ > \theta > \circ$. واضح است که

$$|R_n(\beta)| \leq \frac{۱}{n+۱} \longrightarrow \circ \qquad \text{وقتی که} \qquad n \longrightarrow \infty .$$

جان مکین در حدود سال ۱۷۰۶ میلادی از رابطهٔ (۳۹.۴) برای محاسبهٔ عدد π با دقتی تا ۱۰۰ رقم اعشار استفاده کرد؛ و. شنکس در سال ۱۸۷۳ میلادی حکم مکین را تعمیم داد و π را با دقتی تا ۷۰۷ رقم اعشار محاسبه نمود. (رجوع کنید به Proceedings of the Royal Society of London، مجلد ۲۱، ۱۸۷۳، صفحهٔ ۳۱۸؛ که اصلاحات آن در مجلد ۲۲، ۱۸۷۴، صفحهٔ ۴۵ آمده است.) در روش مکین از فرمول

$$\frac{\pi}{۴} = ۴\arctan\frac{۱}{۵} - \arctan\frac{۱}{۲۳۹}$$

، که به صورت زیر ثابت می‌شود، استفاده شده است. فرض کنید $A = \arctan\frac{۱}{۵}$. آن‌گاه

$$\tan A = \frac{۱}{۵}, \qquad \tan ۲A = \frac{۲/۵}{۱ - ۱/۲۵} = \frac{۵}{۱۲}, \qquad \tan ۴A = \frac{۱۰/۱۲}{۱ - ۲۵/۱۴۴} = \frac{۱۲۰}{۱۱۹}$$

چون عدد ۱۲۰/۱۱۹ نزدیک ۱ است، زاویهٔ $۴A$ نزدیک $\pi/۴$ است. اگر قرار دهیم

$$B = ۴A - \frac{\pi}{۴}$$

خواهیم داشت:

$$\tan B = \frac{۱۲۰/۱۱۹ - ۱}{۱ + ۱۲۰/۱۱۹} = \frac{۱}{۲۳۹} \text{؛ یعنی،} \qquad B = \arctan\frac{۱}{۲۳۹}$$

به این ترتیب، فرمول مکین به دست می‌آید:

$$\pi = ۱۶A - ۴B = ۱۶\left(\frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۳}.\frac{۱}{۵^۳} + \frac{۱}{۵}.\frac{۱}{۵^۵} + \frac{۱}{۷}.\frac{۱}{۵^۷} + \frac{۱}{۹}.\frac{۱}{۵^۹} + \frac{۱}{۱۱}.\frac{۱}{۵^{۱۱}} + \ldots\right)$$

$$- ۴\left(\frac{۱}{۲۳۹} - \frac{۱}{۳}\frac{۱}{۲۳۹^۲} + \dots\right)$$

بررسی (۳۹.۴) نشان می‌دهد که محاسبهٔ جمل بالا برای تعیین π با دقتی تا چندین رقم اعشار کفایت می‌کند:

$$\pi = ۳/۱۴۱۵۹۲۶\dots$$

ملاحظات. فرمول دیگری که از $\frac{\pi}{۴} = ۴\left(\tan^{-۱}\frac{۱}{۵}\right) - \left(\tan^{-۱}\frac{۱}{۲۳۹}\right)$ کمتر مؤثر واقع می‌شود، فرمول $\frac{\pi}{۴} = \tan^{-۱}\frac{۱}{۲} + \tan^{-۱}\frac{۱}{۳}$ است. گاوس با استفاده از ابزار نظریهٔ اعداد دو فرمول قابل ملاحظهٔ زیر را پیدا کرد:

$$\begin{aligned}\frac{\pi}{۴} &= ۱۲\left(\tan^{-۱}\frac{۱}{۱۸}\right) + ۸\left(\tan^{-۱}\frac{۱}{۵۷}\right) - ۵\left(\tan^{-۱}\frac{۱}{۲۳۹}\right)\\ &= ۱۲\left(\tan^{-۱}\frac{۱}{۳۸}\right) + ۲۰\left(\tan^{-۱}\frac{۱}{۵۷}\right) + ۷\left(\tan^{-۱}\frac{۱}{۲۳۹}\right) + ۲۴\left(\tan^{-۱}\frac{۱}{۲۶۸}\right)\end{aligned}$$

که به کمک آنها عدد π با سرعت زیاد برای دستیابی به مقداری مطلوب با دقتی بیشتر از آنچه «و. شنکس» به آن رسیده بود محاسبه می‌شد. در این اواخر، عدد π با دقت یک میلیون رقم اعشار محاسبه شد.

قضیهٔ ۱۲.۴. فرض کنید f تابعی حقیقی مقدار باشد و n عدد صحیحی ناکمتر از ۲ باشد. فرض کنید $f^{(n)}$ در نقطه‌ای مانند c موجود باشد و

به‌ازای $k = ۱, ۲, \dots, n-۱$، $\quad f^{(k)}(c) = ۰$ و $f^{(n)}(c) \neq ۰$.

در این صورت، اگر n زوج باشد، f یک اکسترمم نسبی در c دارد. اگر n زوج باشد و $f^{(n)}(c) > ۰$، آن‌گاه f یک مینیمم نسبی در c دارد؛ اگر n زوج باشد و $f^{(n)}(c) < ۰$، آن‌گاه f یک ماکسیمم نسبی در c دارد.

برهان. کافی است برهان را در حالت $f^{(n)}(c) > ۰$ عرضه کنیم؛ حالتی که $f^{(n)}(c) < ۰$ کاملاً مشابه است و، در واقع، با تبدیل f به $-f$ به حالت مورد بحث برمی‌گردد.

چون فرض شده است که $f^{(n)}$ در c موجود است، $f^{(n-۱)}$ در یک همسایگی از c وجود دارد. به استناد قضیهٔ ۱۱.۴، به‌ازای $|h|$ به قدر کافی کوچک و θ مناسب که $۰ < \theta < ۱$، داریم

$$f(c+h) = f(c) + \frac{f'(c)}{۱!}h + \frac{f''(c)}{۲!}h^۲ + \dots + \frac{f^{(n-۲)}(c)}{(n-۲)!}h^{n-۲}$$

$$+\frac{f^{(n-1)}(c+\theta h)}{(n-1)!}h^{n-1}$$
$$= f(c)+\frac{f^{(n-1)}(c+\theta h)}{(n-1)!}h^{n-1} \qquad (40.4)$$

امّا، بنابه فرض، $f^{(n-1)}(c)=0$ و $f^{(n)}(c)>0$؛ بنابراین،

$$f^{(n-1)}(c+\theta h)<0, \quad h<0 \text{ به‌ازای}$$
$$>0, \quad h>0 \text{ به‌ازای}$$

(توضیحات قضیهٔ ۷.۴ را ببینید.) اگر n فرد باشد، $h^{n-1}>0$؛ بنابراین،

$$f^{(n-1)}(c+\theta h)h^{n-1}<0, \quad h<0 \text{ به‌ازای}$$
$$>0, \quad h>0 \text{ به‌ازای}$$

و، به استناد (۴۰.۴)، f نمی‌تواند یک اکسترمم نسبی داشته باشد. از طرف دیگر، اگر n زوج باشد، علامت h و علامت h^{n-1} بر هم منطبق می‌شوند و، از این رو،

$$f^{(n-1)}(c+\theta h)h^{n-1}>0, \quad h\neq 0 \text{ برای}$$

به این ترتیب، (۴۰.۴) نشان می‌دهد که f یک مینیمم نسبی در c دارد.

تبصره. در بحث متعاقب قضیهٔ ۱۰.۴، تابع

$$F(0)=0, \quad F(t)=e^{-1/t^2}, \quad t\neq 0 \quad \text{برای}$$

را مورد مطالعه قرار دادیم. این تابع یک مینیمم نسبی و، در عین حال، یک مینیمم مطلق در $t=0$ دارد؛ معذالک، قضیهٔ ۱۲.۴ قابل اعمال نیست به این دلیل که $F^{(n)}(0)$ به ازای هر عدد صحیح نامنفی n مساوی صفر است. اگرچه قضیهٔ ۱۲.۴ بسیار مفید است، ولی یقیناً در همه جا مؤثر واقع نمی‌شود.

قضیهٔ ۱۳.۴. اگر مشتق $f^{(n+1)}$ تابع f بر بازه‌ای مانند J موجود و صفر باشد، آن‌گاه f یک چندجمله‌ای با درجه‌ای حداکثر مساوی n است (احتمالاً چندجمله‌ای صفر).

برهان. فرض کنید α یک نقطهٔ داخلی J باشد و θ در نامساویهای $0 < \theta < 1$ صدق کند. به استناد قضیهٔ ۱۱.۴، به‌ازای هر β در داخل J، داریم

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(\beta-\alpha)^n + \frac{f^{(n+1)}\{\alpha+\theta(\beta-\alpha)\}}{(n+1)!}(\beta-\alpha)^{n+1}$$

[نقطهٔ x بین α و β را به صورت $\alpha + \theta(\beta - \alpha)$ نوشته‌ایم.] معذالک، به استناد فرض، $f^{(n+1)}$ بر J صفر است و، از این رو،

$$f(\beta) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{1!}(\beta-\alpha) + \frac{f''(\alpha)}{2!}(\beta-\alpha)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(\beta-\alpha)^n \tag{۴۱.۴}$$

این، برهان را تمام می‌کند.

تبصره. اگر f یک چندجمله‌ای از درجهٔ n برحسب متغیر β باشد و بخواهیم به‌ازای α مفروضی $f(\beta)$ را برحسب قوای $(\beta - \alpha)$ بیان کنیم، می‌توانیم از (۴۱.۴) برای انجام این مقصود استفاده کنیم. مثلاً،

$$\beta^3 - 2\beta^2 + 3\beta + 5 = 11 + 7(\beta - 2) + 4(\beta - 2)^2 + (\beta - 2)^3$$

زیرا، اگر قرار دهیم

$$\alpha = 2 \quad \text{و} \quad f(\beta) = \beta^3 - 2\beta^2 + 3\beta + 5$$

ملاحظه می‌کنیم که $f(2) = 11$، $f'(2) = 7$، $f''(2) = 8$، و $f'''(2) = 6$؛ و حکم مطلوب از جایگزینی این مقادیر در فرمول (۴۱.۴) به دست می‌آید.

۳.۴ توابع مقعّر

تعریف. فرض کنید J یک بازه باشد. تابع f را که بر J تعریف شده است بر J مقعر به بالا می‌نامند در صورتی که همواره اگر a و b دو نقطه از J باشند و $0 \le t \le 1$، آن‌گاه

$$f((1-t)a + tb) \le (1-t)f(a) + tf(b) \tag{۴۲.۴}$$

f را بر J مقعر به پایین می‌نامیم در صورتی که $-f$ بر J مقعر به بالا باشد.

ملاحظات. اگر قرار دهیم $x = (1-t)a + tb$، ملاحظه می‌کنیم که نامساوی (۴۲.۴) معادل است با

$$f(x) \leq \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$
$$= f(a) + \frac{f(b)-f(a)}{b-a}(x-a) \qquad (۴۳.۴)$$

هرگاه a و b نقاطی از J باشند و x بین a و b قرار داشته باشد. از نظر هندسی، f بر J در صورتی مقعر به بالاست که به‌ازای هر دو نقطهٔ a و b از J وتری که ابتدا و انتهایش $(a, f(a))$ و $(b, f(b))$ می‌باشند هرگز زیرنمودار f بر $[a, b]$ واقع نشود. نامساوی (۴۳.۴) را می‌توانیم به صورت زیر، که تقارن بیشتری دارد، بنویسیم:

$$(b-x)f(a) + (a-b)f(x) + (x-a)f(b) \geq 0 \qquad (۴۴.۴)$$

قضیهٔ ۱۴.۴. فرض کنید تابع f بر بازهٔ باز J مشتق‌پذیر باشد. f بر J مقعر به بالاست فقط و فقط وقتی که f' بر J نانزولی باشد.

برهان. فرض کنید f بر J مقعر به بالا نباشد. آن‌گاه نقاطی مانند a، x، و b در J موجودند به طوری که $a < x < b$ و

$$f(x) > \frac{b-x}{b-a} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b)$$

این نامساوی معادل است با

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} > \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

حال، قضیهٔ ۵.۴ را در هر یک از بازه‌های بستهٔ $[a, x]$ و $[x, b]$ به کار می‌بریم و ملاحظه می‌کنیم که نقاطی مانند t و s موجودند به طوری که $a < t < s < b$ و

$$f'(t) > f'(s)$$

بنابراین، f' بر J نانزولی نیست.

بالعکس، اگر f بر J مقعر به بالا باشد آن‌گاه، با انتخاب a و b و x از J که $a < x < b$،

$$\frac{f(x)-f(a)}{x-a} \leq \frac{f(b)-f(x)}{b-x}$$

امّا f' بر J موجود است. اگر x به a یا b میل کند، به ترتیب، خواهیم داشت:

$$f'(a) \leq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{۴۵.۴}$$

یا

$$f'(b) \geq \frac{f(b)-f(a)}{b-a} \tag{۴۶.۴}$$

و، از این رو، $f'(a) \leq f'(b)$. چون a و b دو نقطهٔ دلخواه از J بودند به طوری که $a < b$، ملاحظه می‌شود که f' بر J نانزولی است.

قضیهٔ ۱۵.۴. فرض کنید J بازه‌ای باز و f تابعی دوبار مشتق‌پذیر بر J باشد. آن‌گاه، f بر J مقعر به بالا است فقط و فقط وقتی که $f''(x) \geq 0$ به‌ازای هر x از J.

برهان. حکم قضیه یک نتیجهٔ بدیهی قضیهٔ ۱۴.۴ است.

قضیهٔ ۱۶.۴. فرض کنید f بر بازهٔ باز J مشتق‌پذیر باشد. آن‌گاه، f بر J مقعر به‌بالا است فقط و فقط وقتی که نقاط خط مماس بر نمودار f در هر نقطهٔ J هرگز بالای نمودار f بر J واقع نشوند.

برهان. فرض کنید $(c, f(c))$ نقطه‌ای از نمودار f بر J باشد. آن‌گاه، معادلهٔ خط مماس در نقطهٔ $(c, f(c))$ عبارت است از

$$y = f(c) + f'(c)(x-c)$$

فرض می‌کنیم f مقعر به بالا باشد و نشان می‌دهیم که نامساوی

$$f(x) \geq f(c) + f'(c)(x-c) \tag{۴۷.۴}$$

به‌ازای هر x از J برقرار است. امّا، نامساوی (۴۷.۴) معادل دونامساوی زیر است:

$$f'(c) \leq \frac{f(x)-f(c)}{x-c}, \qquad x > c \quad \text{برای} \tag{۴۸.۴}$$

و

$$f'(c) \geq \frac{f(x)-f(c)}{x-c}, \qquad x < c \quad \text{برای} \tag{۴۹.۴}$$

معذالک، نامساوی (۴.۴۸) همان نامساوی (۴.۴۵) است با $a = c$ و $b = x$؛ نامساوی (۴.۴۹) همان نامساوی (۴.۴۶) است با $b = c$ و $a = x$. بنابراین، فرض مشتق‌پذیری f بر J و این که f بر J مقعر به بالا است ایجاب می‌کنند که (۴.۴۸) و (۴.۴۹) برقرار باشند.

بالعکس، فرض کنید که (۴.۴۷) یا، به طور معادل، (۴.۴۸) و (۴.۴۹) برقرار باشند. اگر قرار دهیم $c = a$ و $x = b$، نامساوی (۴.۴۸) به نامساوی (۴.۴۵) تبدیل می‌شود؛ اگر قرار دهیم $c = b$ و $x = a$، نامساوی (۴.۴۹) به نامساوی (۴.۴۶) تبدیل می‌شود. امّا، نامساویهای (۴.۴۵) و (۴.۴۶) توأماً ایجاب می‌کنند که f' بر J نانزولی باشد. در این صورت، از قضیهٔ ۴.۱۴ اطمینان حاصل می‌کنیم که f بر J مقعر به بالا است.

ملاحظات. متناظر با قضایای ۴.۱۴، ۴.۱۵، و ۴.۱۶، گزاره‌هایی برحسب توابع مقعر به پایین وجود دارد.

از مفهوم تقّعر غالباً برای اتخاذ تصمیم در مواردی که اکسترمم مفروضی ماکسیمم یا مینیمم است استفاده می‌شود. مثالی در این مورد را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید $A > 0$، $B > 0$، و $p \neq 0$. تابع

$$f(x) = Ae^{px} + Be^{-px}$$

مفروض است. می‌خواهیم کمترین مقدار f را بیابیم.

چون

$$f'(x) = Ape^{px} - Bpe^{-px} \quad \text{و} \quad f''(x) = p^2 f(x)$$

به آسانی دیده می‌شود که f بر تمام خط حقیقی مقعر به بالا است؛ زیرا که $f(x) > 0$ به‌ازای هر عدد حقیقی x و، از این رو، $f''(x) > 0$ به‌ازای هر عدد حقیقی x. حال، از $f'(x) = 0$ نتیجه می‌شود که $Ae^{px} = Be^{-px}$ یا $Ae^{2px} = B$؛ که مستلزم $e^{px} = \sqrt{\frac{B}{A}}$ و $e^{-px} = \sqrt{\frac{A}{B}}$ است. بنابراین، کمترین مقدار f عبارت است از

$$A\sqrt{\frac{B}{A}} + B\sqrt{\frac{A}{B}} = 2\sqrt{AB}$$

تعریف. فرض کنید f تابعی دوبار مشتق‌پذیر بر بازهٔ باز J باشد. به‌ازای c در J، نقطهٔ $(c, f(c))$ از نمودار f را یک نقطهٔ عطف f می‌نامند در صورتی که $f''(c) = 0$ و نامساوی

$$f''(c-h)f''(c+h) < 0$$

به ازای همهٔ مقادیر به قدر کافی کوچک $h \neq 0$ برقرار باشد.

ملاحظات. نقطه‌ای از یک منحنی که در آن تقعر منحنی از بالا به پایین یا بالعکس تغییر کند، یک نقطهٔ عطف است. چون مماس بر منحنی همواره در طرف دیگر طرف مقعر منحنی قرار دارد، (قضیهٔ ۱۶.۴ را ملاحظه کنید.) نتیجه می‌شود که مماس بر منحنی در نقطهٔ عطف از منحنی عبور می‌کند.

یک شرط لازم و کافی برای آن که f نقطهٔ عطفی در $x = c$ داشته باشد آن است که $f''(c) = ۰$ و $f'''(c) \neq ۰$. به قیاس قضیهٔ ۱۲.۴، اگر نخستین مشتق ناصفر f در $x = c$، که مرتبه‌اش بالاتر از دو است، از مرتبهٔ فرد باشد، یک نقطهٔ عطف در $x = c$ وجود دارد؛ اگر این مرتبه زوج باشد، نقطهٔ عطفی در $x = c$ وجود ندارد. به عنوان مثال، $f(x) = x^۴$ هیچ نقطهٔ عطفی در $x = ۰$ ندارد، ولی $g(x) = x^۵$ نقطهٔ عطفی در $x = ۰$ دارد.

تابع $h(x) = x^۳$ یک نقطهٔ عطف دارد، یعنی، نقطهٔ $(۰, ۰)$. بعلاوه، منحنی $y = x^۳$ نسبت به این نقطه متقارن است؛ زیرا $h(-x) = -x^۳ = -h(x)$. در حالت کلیتر، منحنی درجهٔ سوم

$$y = ax^۳ + bx^۲ + cx + d \tag{۵۰.۴}$$

یک نقطهٔ عطف دارد، و منحنی نسبت به این نقطه متقارن است.

در واقع، $y'' = ۶ax + ۲b$ و، بنابراین، نقطهٔ (A, B) با مختصات

$$B = \frac{۲b^۳}{۲۷a^۲} - \frac{cb}{۳a} + d \quad \text{و} \quad A = -\frac{b}{۳a}$$

نقطهٔ عطف است. از انتقال محورها استفاده کرده قرار می‌دهیم $X = x - A$ و $Y = y - B$. جایگزینی $x = X + A$ و $y = Y + B$ در (۵۰.۴)، به نتیجهٔ

$$Y = aX^۳ + \left(c - \frac{b^۲}{۳a}\right) X \tag{۵۱.۴}$$

می‌انجامد که اگر قرار دهیم $Y = H(X)$، ملاحظه می‌کنیم که $H(-X) = -H(X)$. این، تقارن منحنی (۵۰.۴) را نسبت به نقطهٔ (A, B) ثابت می‌کند.

۴.۴ روش نیوتن در تقریب ریشه‌های توابع

روشی که معمولاً به روش نیوتن موسوم است ما را قادر می‌سازد که ریشه‌های حقیقی بسیاری از معادلات به شکل $f(x) = ۰$ را تا هر درجهٔ دقت مطلوب پیدا کنیم. برای تثبیت مفاهیم، در سرتاسر این بخش، بنا را براین می‌گذاریم که تابع f مورد بحث در سه شرط زیر صدق می‌کند:

۱) تابع f و مشتقات f' و f'' بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ به طول متناهی پیوسته‌اند.

۲) اعداد $f(a)$ و $f(b)$ مختلف‌العلامه‌اند؛ یعنی، $f(a)f(b) < 0$.

۳) مشتقات f' و f'' بر بازهٔ $[a,b]$ تغییر علامت نمی‌دهند.

چون f بر $[a,b]$ پیوسته است و بر بازهٔ $[a,b]$ تغییر علامت می‌دهد، باید حداقل یک ریشه در داخل بازهٔ $[a,b]$ داشته باشد. چون f' بر $[a,b]$ تغییر علامت نمی‌دهد، f بر $[a,b]$ الزاماً یکنوا است و، بنابراین، می‌تواند فقط یک ریشه در داخل $[a,b]$ داشته باشد. این شرط که f'' بر $[a,b]$ تغییر علامت نمی‌دهد بدین معنی است که f بر $[a,b]$ مقعر به بالا یا مقعر به پایین است. وضعیتی که با سه شرط بالا مشخص شد، همیشه می‌تواند در مورد یک چندجمله‌ای f با ضرایب حقیقی به واقعیت بپیوندد؛ همین وضعیت می‌تواند برای بسیاری از توابع f که چندجمله‌ای نیستند نیز پیش آید، ولی نه در مورد همهٔ توابع.

اگر سه شرط بالا در بازه‌ای مانند $[a,b]$ تحقق پیدا کند، چهار حالت ممکن زیر رخ می‌دهد:

حالت اول: به‌ازای هر x از $[a,b]$، $f'(x) > 0$ و $f''(x) > 0$؛

حالت دوم: به‌ازای هر x از $[a,b]$، $f'(x) < 0$ و $f''(x) > 0$؛

حالت سوم: به‌ازای هر x از $[a,b]$، $f'(x) > 0$ و $f''(x) < 0$؛

حالت چهارم: به‌ازای هر x از $[a,b]$، $f'(x) < 0$ و $f''(x) < 0$.

شکل ۵.۴ این چهار حالت را نشان می‌دهد.

فرض می‌کنیم که تابع f در شرایط «۱»، «۲»، و «۳» بر $[a,b]$ صدق کند و r ریشهٔ f در داخل $[a,b]$ باشد. با شروع از یک نقطهٔ انتهایی $[a,b]$، مثلاً نقطهٔ b، قضیهٔ ۱۱.۴ (با استفاده از صورت لاگرانژ باقیمانده) ایجاب می‌کند که

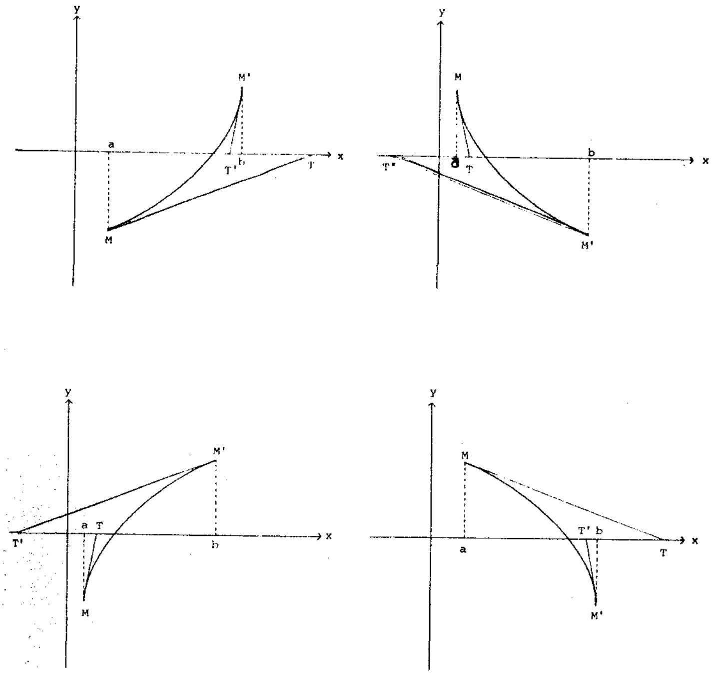
$$0 = f(r) = f(b) + f'(b).(r-b) + \frac{1}{2}f''(c).(r-b)^2 \qquad (۵۲.۴)$$

که در آن $r < c < b$. با چشم پوشی از جملهٔ باقیمانده، تقریب زیر را می‌توانیم بنویسیم:

$$f(b) + f'(b).(r-b) \approx 0$$

که، از آن، تقریب زیر به دست می‌آید:

$$r \approx b - \frac{f(b)}{f'(b)}$$



شکل ۵.۴

در این حالت، به تقریب زیر

$$x_۱ = b - \frac{f(b)}{f'(b)} \qquad (۵۳.۴)$$

از ریشهٔ r می‌رسیم. معادلهٔ (۵۳.۴) را می‌توانیم از نظر هندسی به صورت زیر تعبیر کنیم: خط مماس را در نقطهٔ M' به مختصات $(b, f(b))$ رسم می‌کنیم؛ معادلهٔ این خط به صورت زیر است:

$$y - f(b) = f'(b).(x - b)$$

اگر قرار دهیم $y = ۰$، نقطهٔ T' با مختصات $(x_۱, ۰)$ را می‌یابیم که در آن خط مماس (با نقطهٔ تماس M') محور x را قطع می‌کند. جوهر این روش این است که کمان $y = f(x)$ و اصل نقاط M [به مختصات $(a, f(a))$] و M' [به مختصات $(b, f(b))$] را با خط مماسی که در یکی از نقاط انتهایی M یا M' بر کمان رسم می‌شود عوض کنیم. پیدا کردن نقطهٔ تقاطع یک خط راست با محور x، از نظر محاسبات، بسیار ساده است.

مسأله‌ای که به مکان نسبی نقطهٔ $x_۱$ بر روی محور x مربوط می‌شود، خود را نشان می‌دهد. از روی شکل ۵.۴ می‌توان دید که کاملاً امکان دارد که نقطهٔ تقاطع خط مماس و محور x در خارج از بازهٔ $[a,b]$ واقع شود. ادعا می‌کنیم که: اگر $f(b)$ و $f''(x)$، به‌ازای هر x از $[a,b]$، دارای علائم یکسان باشند، {حالتهای اول و چهارم از این گونه‌اند.} آن‌گاه $x_۱$ بین r و b است. (البته، این بدان معنی است که $x_۱$ تقریب بهتری از b برای r است.)

در واقع، اگر $f(b)$ و $f'(b)$ دارای علائم یکسان باشند، آن‌گاه (۵۳.۴) نشان می‌دهد که $x_۱ < b$. از طرف دیگر، به استناد (۵۲.۴) و (۵۳.۴)،

$$r - x_۱ = r - b + \frac{f(b)}{f'(b)} = -\frac{۱}{۲}\frac{f''(c)}{f'(b)}(r-b)^۲ \qquad (۵۴.۴)$$

در حالتهایی که مورد بحث قرارگرفتند، علائم $f''(x)$ و $f'(x)$ به‌ازای هر x از $[a,b]$ بر هم منطبقند و، از این رو، $r < x_۱$. به این ترتیب، چنان که ادعا شده بود، $r < x_۱ < b$.

به طریق مشابه، اگر از نقطهٔ a شروع و مماس بر کمان $y = f(x)$ واصل نقاط M (به طول a) و M' (به طول b) را در نقطهٔ M رسم کنیم، به جای (۵۳.۴)، تقریب

$$x_۱ = a - \frac{f(a)}{f'(a)} \qquad (۵۳^* \cdot ۴)$$

از ریشهٔ r را خواهیم داشت. در مورد $x_۱$ در فرمول(۴ ・ ۵۳*)، ادعا می‌کنیم که: اگر $f(a)$و $f''(x)$ به‌ازای هر x از $[a,b]$ دارای علائم یکسان باشند، { این وضعیت در حالتهای دوم و سوم پیش می‌آید.} آن‌گاه $x_۱$ بین a و r است.

به این ترتیب، دریافتیم که با استفاده از روش نیوتن در هر یک از چهار حالت مذکور از هر یک از نقاط انتهایی (M یا M') کمان $y = f(x)$ با $a \le x \le b$ بهترین تقریب ریشهٔ r به دست می‌آید.

با تکرار اعمال این روش، در حالتهای اول و چهارم، دنبالهٔ نزولی

$$b > x_۱ > x_۲ > \cdots > x_n > x_{n+۱} > \cdots > r$$

و در حالتهای دوم و سوم، دنبالهٔ صعودی

$$a < x_۱ < x_۲ < \cdots < x_n < x_{n+۱} < \cdots < c$$

تولید می‌شود که در آن $x_{n+۱}$ از روی ماقبل خود x_n با فرمول زیر محاسبه می‌شود:

$$x_{n+۱} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \qquad (۵۵.۴)$$

[چندان دشوار نیست که ثابت کنیم که $x_n \longrightarrow r$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. فرض کنید که $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ نزولی باشد. مجموعهٔ

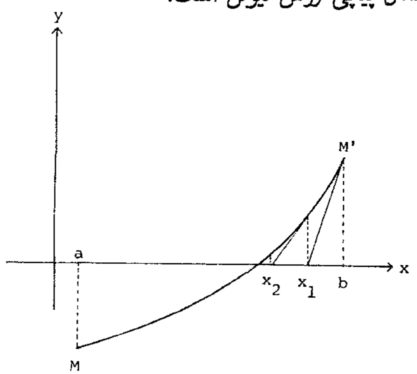
$$S = \{x_n : n = ۱, ۲, ۳, \ldots\}$$

از پایین به r (که، به نوبهٔ خود، از عدد حقیقی a بزرگتر است.) کراندار است. از این رو، $\inf S = \beta$، به عنوان یک عدد حقیقی (بین دو عدد حقیقی a و b)، موجود است و، در واقع، $x_n \longrightarrow \beta$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. امّا، f و f' بر $[a, b]$ پیوسته‌اند و حدگیری از طرفین (۵۵.۴)، وقتی $n \longrightarrow \infty$، نشان می‌دهد که

$$\frac{f(\beta)}{f'(\beta)} = ۰$$
. از این رو، $f(\beta) = ۰$ و $\beta = r$.

اگر دنبالهٔ $\{x_n\}$ صعودی باشد، سوپرمم مجموعهٔ S را در نظر می‌گیریم.]

شکل ۶.۴ حاکی از اعمال پیاپی روش نیوتن است.



شکل ۶.۴

حال، به موضوع تخمین دقت تقریب برمی‌گردیم. برای تخمین انحراف بین r و x_n، توجه می‌کنیم که به استناد قضیهٔ ۵.۴،

$$f(x_n) = f(x_n) - f(r) = (x_n - r)f'(c)$$

که در آن c بین x_n و r است. از این رو،

$$x_n - r = \frac{f(x_n)}{f'(c)}$$

اگر m را کوچکترین مقدار $|f'(x)|$ بر $[a, b]$ بگیریم، ملاحظه می‌کنیم که

$$|x_n - r| \le \frac{|f(x_n)|}{m} \qquad (۵۶.۴)$$

برای تخمین انحراف بین r و x_{n+1} برحسب انحراف بین r و x_n، رابطهٔ (۵۴.۴) را در نظر می‌گیریم و در آن b را جایگزین x_n می‌کنیم و x_1 را جانشین x_{n+1}؛ خواهیم داشت:

$$x_{n+1} - r = \frac{1}{2}\frac{f''(c)}{f'(x_n)}(x_m - r)^2$$

اگر بزرگترین مقدار $|f''(x)|$ بر $[a, b]$ را به M نشان دهیم، می‌بینیم که

$$|x_{n+1} - r| \leq \frac{M}{2m}.|x_n - r|^2 \qquad (۵۷.۴)$$

چون یک مربع در سمت راست رابطهٔ (۵۷.۴) ظاهر شده است، از همگرایی نسبتاً سریع x_n به r اطمینان حاصل می‌کنیم؛ مثلاً، اگر $M < 2m$ و x_n ریشهٔ r را با دقت تا k رقم اعشار تقریب کند، آن‌گاه x_{n+1} ریشهٔ r را با دقتی حداقل تا $2k$ رقم اعشار تقریب خواهد کرد. این ویژگی باعث می‌شود که روش نیوتن یکی از مؤثرترین روشهای حل عددی معادلات شود.

مثال ۱. می‌خواهیم ریشهٔ $x^3 - 2x - 5 = 0$ در بازهٔ $[2, 2/1]$ را با خطایی کمتر از 10^{-10} محاسبه کنیم.

داریم:

$$f(x) = x^3 - 2x - 5, \qquad f(2) = -1 < 0, \qquad f(2/1) = 0/061 > 0$$

$$f'(x) = 3x^2 - 2 > 0, \qquad f''(x) = 6x > 0, \qquad 2 \leq x \leq 2/1 \text{ برای }$$

حالت اول: فوراً درمی‌یابیم که $m = 10$، $M < 12/6$، و نامساوی زیر برقرار است.

$$\frac{M}{2m} < 0/63$$

از $b = 2/1$ شروع می‌کنیم. به استناد (۵۶.۴)، خواهیم داشت:

$$b - r < \frac{0/061}{10} = 0/0061$$

با استفاده از (۵۷.۴)، دقتی را می‌توانیم تعیین کنیم که در محاسبهٔ x_1 می‌تواند مورد انتظار باشد:

$$x_1 - r < 0/63.(0/0061)^2 < 0/000024$$

از این رو، عدد

$$x_۱ = ۲/۱ - \frac{f(۲/۱)}{f'(۲/۱)} = ۲/۱ - \frac{۰/۰۶۱}{۱۱/۲۳} = ۲/۱ - ۰/۰۰۵۴۳\ldots$$

را به عنوان «کاندیدای ریشه» تا پنج رقم اعشار گرد می‌کنیم: $x_۱ = ۲/۱ - ۰/۰۰۵۴۴ = ۲/۰۹۴۵۶$. چون

$$f(x_۱) = f(۲/۰۹۴۵۶) = ۰/۰۰۰۰۹۵۰۷۸۶۹۰۸۱۶$$

به استناد (۵۶.۴)، خطای محاسبه را می‌توانیم دقیقتر تعیین کنیم:

$$x_۱ - r < \frac{۰/۰۰۰۰۹۵}{۱۰} < ۰/۰۰۰۰۱$$

حال، به $x_۲$ می‌رسیم و یک بار دیگر از (۵۷.۴) استفاده می‌کنیم تا تعیین کنیم که چه دقتی در محاسبهٔ $x_۲$ می‌تواند مورد انتظار باشد:

$$x_۲ - r < ۰/۶۳.(۰/۰۰۰۰۱)^۲ < ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۶۳$$

از این رو، عدد

$$x_۲ = ۲/۰۹۴۵۶ - \frac{۰/۰۰۰۰۹۵۰۷۸۶۹۰۸۱۶}{۱۱/۱۶۱۵۴۴۷۸۰۸} = ۲/۰۹۴۵۶ - ۰/۰۰۰۰۰۸۵۱۸۴۱۶\ldots$$

که اگر آن را تا یازده رقم اعشار گرد کنیم برابر

$$x_۲ = ۲/۰۹۴۵۶ - ۰/۰۰۰۰۰۸۵۱۸۴۱ = ۲/۰۹۴۵۵۱۴۸۱۵۹$$

می‌شود، تا ریشهٔ مطلوب به مقداری کمتر از ۰/۰۰۰۰۰۰۰۰۰۰۷ اختلاف دارد. به این ترتیب،

$$۲/۰۹۴۵۵۱۴۸۱۵۲ < r < ۲/۰۹۴۵۵۱۴۸۱۵۹$$

مثال ۲. معادلهٔ $۴x = ۲^x$ دو ریشه دارد؛ یکی عبارت است از $x = ۴$ و دیگری بین ۰ و ۱/۲ است. می‌خواهیم ریشهٔ بین ۰ و ۱/۲ را با خطایی کمتر از $۱۰^{-۵}$ محاسبه کنیم.

به‌ازای $۰ \leq x \leq ۱/۲$، داریم

$$f(x) = ۲^x - ۴x, \quad f'(x) = ۲^x(\ln ۲) - ۴ < ۰, \quad f''(x) = ۲^x(\ln ۲)^۲ > ۰$$

حالت دوم: چون $M = \sqrt{۲}(\ln ۲)^{۲} < ۰٫۷$ و $m = ۴ - \sqrt{۲}(\ln ۲) > ۳$، داریم

$$\frac{M}{۲m} < ۰٫۱۲$$

از مقدار $f(۰٫۳۰) = ۰٫۰۳۱۱۴۴$ استفاده می‌کنیم و، به استناد (۵۶.۴)، خطای محاسبه را دقیقتر تخمین می‌زنیم:

$$r - x_۱ < \frac{۰٫۰۳۱۱۴۴}{۳} < ۰٫۰۱۱$$

بنابراین، به استناد (۵۷.۴)، خواهیم داشت:

$$r - x_۲ < ۰٫۱۲ \cdot ۰٫۰۰۰۱۲۱ < ۰٫۰۰۰۰۱۵$$

و دیده می‌شود که به درجهٔ مطلوب از دقت رسیده‌ایم.

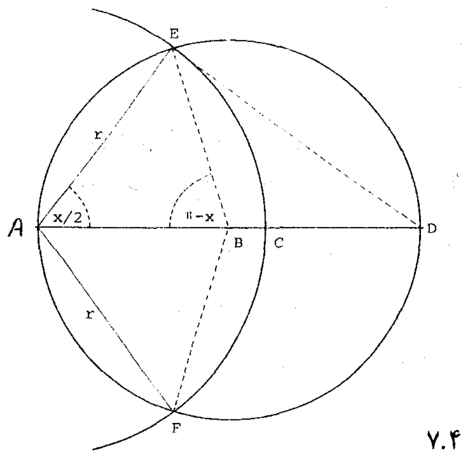
در تقریب بعدی، عدد

$$x_۲ = ۰٫۳۰ - \frac{۰٫۰۳۱۴۴}{۰٫۸۵۳۳۶۴۳\ldots - ۴} = ۰٫۰۳ + \frac{۰٫۰۳۱۱۴۴}{۳٫۱۴۶۶۳۵۶\ldots} = ۰٫۳۰۹۸۹۷\ldots$$

را به عنوان «کاندیدای ریشه» تا پنج رقم اعشار گرد می‌کنیم: $x_۲ = ۰٫۳۰۹۹۰$. چون $f(۰٫۳۰۹۹۰) = ۰٫۰۰۰۰۲۱\ldots > ۰$، این مقدار هنوز از ریشه کمتر است. به استناد (۵۶.۴)، خطای محاسبه واقعاً کمتر از $۱۰^{-۵}$ است؛ زیرا

$$r - x_۲ < \frac{۰٫۰۰۰۰۲۲}{۳} < ۰٫۰۰۰۰۱$$

و، بنابراین، $r = ۰٫۳۰۹۹۰(+۰٫۰۰۰۰۱)$.



شکل ۷.۴

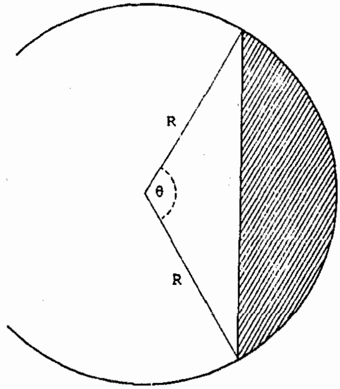
مثال ۳. بزی طنابی به گردن دارد که سرطناب به مکانی واقع بر مرز یک میدان مستدیر به شعاع واحد بسته شده است. طول r طناب چقدر باشد تا بز دقیقاً به نیمی از میدان دسترسی داشته باشد؟

شکل ۷.۴ را در نظر بگیرید. مرکز میدان مستدیر به شعاع واحد در نقطهٔ B است و مکان سرطناب در نقطهٔ A واقع است. زاویهٔ $\angle BAE$ را به $x/۲$ نشان می‌دهیم و ملاحظه می‌کنیم که زاویهٔ $\angle AED$ قائمه است. فاصلهٔ A تا E برابر r است و فاصلهٔ A تا D برابر ۲. از تشابه مثلثها لازم می‌آید که $r/۲ = \cos(x/۲)$؛ یعنی،

$$r = ۲\left(\cos\frac{x}{۲}\right) \qquad (۵۸.۴)$$

زاویهٔ $\angle BDE$ برابر $\frac{\pi}{۲} - \frac{x}{۲}$ است و زاویه $\angle BED$ نیز برابر $\frac{\pi}{۲} - \frac{x}{۲}$ است، زیرا مثلث ΔBDE متساوی‌الساقین است. از این رو، زاویهٔ $\angle DBE$ برابر x و زاویهٔ $\angle ABE$ برابر $\pi - x$ است.

شکل ۸.۴ را در نظر بگیرید. به آسانی دیده می‌شود که قطعهٔ (خط دار) مستدیر دارای مساحت $\frac{۱}{۲}R^۲(\theta - \sin\theta)$ است.



شکل ۸.۴

از روی شکل ۷.۴ می‌توان دید که بز الزاماً به ناحیه‌ای دسترسی دارد که به کمانهای مستدیر EAF و FCE محدود می‌شود؛ این ناحیه از اجتماع دو قطعهٔ مستدیر تشکیل شده و مساحتش برابر است با

$$\begin{aligned}
&\tfrac{۱}{۲}r^۲(x - \sin x) + \tfrac{۱}{۲}[(۲\pi - ۲x) - \sin(۲\pi - ۲x)] \\
&= ۲(\cos^۲ x/۲)(x - \sin x) + \pi - x + (\sin x)(\cos x) \\
&= (۱ + \cos x)(x - \sin x) + \pi - x + (\sin x)(\cos x) \\
&= \pi + x(\cos x) - \sin x
\end{aligned}$$

اما نیمی از میدانِ مستدیر به شعاع واحد دارای مساحت $\pi/۲$ است و، از این رو، x باید در معادلهٔ

$$\sin x - x(\cos x) = \frac{\pi}{۲} \qquad (۵۹.۴)$$

صدق کند. پس از حل (۵۹.۴) و جایگزینی جواب در (۵۸.۴)، r به دست می‌آید.

نکتهٔ مثال این است که مسألهٔ سادهٔ چوپان به معادلهٔ پیچیده‌ای به صورت (۵۹.۴) منتهی شد که از فعالیت سادهٔ ذهن برنمی‌آید.

با استفاده از یک حسابگر جیبی معمولی درمی‌یابیم که جواب x معادلهٔ (۵۹.۴) تقریباً برابر ۱٫۹۰۵۶۹۵۷ رادیان است و r متناظر با آن تقریباً برابر ۱٫۱۵۸۷۲۸۵ می‌شود.

مثال ۴. حجم یک قطعهٔ کروی از یک قاعده از دستور

$$\pi h^۲\left(r - \frac{h}{۳}\right)$$

به دست می‌آید که در آن r شعاع کره و h ارتفاع قطعه است.

فرض کنید که نیمکره‌ای به شعاع واحد را به وسیلهٔ صفحه‌ای موازی قاعده به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم. آن‌گاه

$$x^۳ - ۳x^۲ + ۱ = ۰ \quad \text{یا} \quad ۲\pi x^۲\left(۱ - \frac{x}{۳}\right) = \frac{۲\pi}{۳}$$

که در آن x ارتفاع قطعهٔ کروی از یک قاعده است که از نیمکرهٔ به شعاع واحد بریده شده است. تعیین x به محاسبهٔ ریشهٔ معادلهٔ

$$x^۳ - ۳x^۲ + ۱ = ۰$$

در بازهٔ (۱ ,۰) منجر می‌شود. این جواب، تقریباً برابر است با $x = ۰٫۶۵۲۷$. دو ریشهٔ دیگر، به طور تقریبی، عبارتند از ۰٫۵۳۲۱− و ۲٫۸۷۹۴.

فرمول حجم قطعهٔ کروی از یک قاعده، که در بالا به کار رفت، منسوب به ارشمیدس است؛ یکی از مسائل مهم ارشمیدس این بود که با صفحه‌ای کره‌ای را به دو قطعه تقسیم کند که حجم این دو قطعه دارای نسبت معینی باشد. [برای تحقیق در درستی فرمول $\pi h^۲(r - h/۳)$ حجم یک قطعهٔ کروی، (۱۰۶.۶) بخش پنجم فصل ششم را ببینید.]

۵.۴ میانگینهای حسابی و هندسی

به سادگی می‌توان تحقیق کرد که تابع $f(x) = e^x - ۱ - x$ با مشتق $f'(x) = e^x - ۱$ تک مینیممی در $x = ۰$ دارد و، بنابراین، نامساوی

$$۰ = f(۰) \leq f(x)$$

به‌ازای هر عدد حقیقی x برقرار است. از این رو،

$$e^x \geq ۱ + x \quad \text{به‌ازای هر عدد حقیقی } x، \qquad (۶۰.۴)$$

بالاخص،

$$e^x > ۱ + x \quad \text{به‌ازای } x \neq ۰، \qquad (۶۱.۴)$$

ما از نامساویهای (۶۰.۴) و (۶۱.۴) برای اثبات چند نامساوی مفید استفاده خواهیم کرد.

قضیهٔ ۱۷.۴. فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n اعداد حقیقی مثبتی باشند. آنگاه

$$\sqrt[n]{a_۱ a_۲ \ldots a_n} \leq \frac{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n}{n} \qquad (۶۲.۴)$$

و تساوی در (۶۲.۴) فقط و فقط وقتی برقرار است که همهٔ اعداد a_k، به‌ازای $k = ۱, ۲, \ldots, n$، با هم برابر باشند.

برهان. فرض کنید

$$G = \sqrt[n]{a_۱ a_۲ \ldots a_n} \quad \text{و} \quad A = \frac{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n}{n}$$

A را میانگین حسابی $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n و G را میانگین هندسی $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n می‌نامند. به استناد (۶۰.۴) و با استفاده از نماد $\exp(t) = e^t$، به‌ازای

$$x = \frac{a_k}{A} - ۱, \quad k = ۱, ۲, \ldots, n$$

داریم

$$\exp\left(\frac{a_۱}{A} - ۱\right) \geq \frac{a_۱}{A}, \quad \exp\left(\frac{a_۲}{A} - ۱\right) \geq \frac{a_۲}{A}, \ldots, \exp\left(\frac{a_n}{A} - ۱\right) \geq \frac{a_n}{A}$$

با ضرب این نامساویها در یکدیگر، خواهیم داشت:

$$\exp\left(\frac{a_۱+a_۲+\cdots+a_n}{n}-n\right)\geq\frac{a_۱a_۲\ldots a_n}{A^n}$$

یا

$$۱\geq\frac{G^n}{A^n}\quad \text{یا}\quad e^{n-n}\geq\frac{G^n}{A^n}$$

که مستلزم

$$A\geq G$$

است.

توجه کنید که $A=G$ فقط وقتی برقرار است که در همهٔ n رابطهٔ بالا تساوی برقرار باشد. این ایجاب می‌کند که در همهٔ حالات، $a_k/A-۱=۰$؛ که نشان می‌دهد که $A=G$ فقط وقتی که همهٔ a_kها با هم برابر باشند (برابر با A).

تبصره. با جایگزینی $۱/a_k$ به جای a_k در (۶۲.۴)، در می‌یابیم که

$$\frac{n}{\frac{۱}{a_۱}+\frac{۱}{a_۲}+\cdots+\frac{۱}{a_n}}\leq\sqrt[n]{a_۱a_۲\ldots a_n}\qquad(۶۳.۴)$$

جملهٔ سمت چپ (۶۳.۴) را میانگین همساز $a_۱$،$a_۲$،...،a_n می‌نامند.

قضیهٔ ۱۸.۴. داریم

$$e^\pi>\pi^e\qquad(۶۴.۴)$$

برهان. چون $\pi>e$، داریم $\pi/e>۱$؛ از این رو، $x=\pi/e-۱>۰$. لذا، به استناد (۶۱.۴)،

$$\exp\left(\frac{\pi}{e}-۱\right)>۱+\left(\frac{\pi}{e}-۱\right)$$

یا

$$e^{\pi/e}>\pi\quad \text{یا}\quad \frac{\exp(\pi/e)}{e}>\frac{\pi}{e}$$

که معادل نامساوی (۶۴.۴) است.

ملاحظات. یک طریق دیگر اثبات نامساوی (۶۴.۴) این است که ملاحظه کنیم که تابع $g(x) = (\ln x)/x$، که به‌ازای $x > ۰$ تعریف می‌شود، تک ماکسیممی در $x = e$ دارد؛ زیرا $g'(x) = [۱ - \ln x]/x^۲$ به‌ازای $x > e$ منفی است و به‌ازای هر x که $۰ < x < e$ مثبت است. امّا $e < \pi$ و، از این رو، $g(\pi) < g(e)$؛ و همین طور.

ما می‌توانیم از یک حسابگر جیبی معمولی استفاده و مقادیر تقریبی e^π و π^e را بیابیم تا ببینیم کدام عدد بزرگتر است؛ معذالک، جالبتر این است که از لبهٔ برندهٔ نظریه در اثبات حکم (۶۴.۴) بهره گیریم.

مثالهای حل شده و توضیحات.

۱. دو حکم زیر نتایج مستقیم قضیهٔ ۱۷.۴ اند:

(یک) اگر $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n اعداد حقیقی مثبتی باشند که در شرط

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n = k$$

صدق کنند، حاصل ضرب $a_۱ a_۲ \ldots a_n$ آنها بیشترین مقدار خود، $(k/n)^n$، را وقتی دارد که $a_۱ = a_۲ = \cdots = a_n = k/n$.

(دو) اگر $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n اعداد حقیقی مثبتی باشند که در شرط

$$a_۱ a_۲ \ldots a_n = k$$

صدق کنند، حاصل جمع $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$ آنها کمترین مقدار خود، $n(k)^{۱/n}$، را وقتی دارد که $a_۱ = a_۲ = \cdots = a_n = k^{۱/n}$.

تبصره. به عنوان مثال، اگر $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، و $a_۴$ چهار عدد مثبت باشند که مجموع آنها ۱۰۰۰ است، آن‌گاه حاصل‌ضرب $a_۱a_۲a_۳a_۴$ وقتی ماکسیمم است که

$$a_۱ = a_۲ = a_۳ = a_۴ = ۲۵۰$$

۲. مکعب، مکعب مستطیلی است که با مساحت سطح مفروض ماکسیمم حجم را دارد، و با حجم مفروض مینیمم مساحت سطح را داراست.

در واقع، اگر طول سه لبهٔ مجاور یک مکعب مستطیل را به x، y، و z نشان دهیم، مساحت سطحش $۲(yz + zx + xy)$ و حجمش xyz است. اگر قرار دهیم $\alpha = yz$، $\beta = zx$، $\gamma = xy$، مساحت سطح این مکعب مستطیل $۲(\alpha + \beta + \gamma)$ و حجمش $\sqrt{\alpha\beta\gamma}$ است. از این رو، براساس علم آنالیز، مسأله این است که $\alpha\beta\gamma$ به ماکسیمم برسد وقتی که $\alpha + \beta + \gamma$ مفروض است، و به مینیمم برسد وقتی که $\alpha\beta\gamma$ مفروض است. به استناد حکم مثال ۱، این مقصود در هر حالت با $\alpha = \beta = \gamma$ حاصل می‌شود؛ یعنی، $yz = zx = xy$، یا $x = y = z$.

۳. مثلث متساوی‌الاضلاع با محیط مفروض ماکسیمم مساحت را دارد، و با مساحت مفروض مینیمم محیط را داراست.

در واقع، $\Delta = \sqrt{s(s-a)(s-b)(s-c)}$ مساحت مثلث به اضلاع a، b، c است که در آن s نصف محیط است. اگر قرار دهیم $x = s - a$، $y = s - b$، $z = s - c$، آن‌گاه $x + y + z = s$ و $\Delta = \sqrt{sxyz}$. در مرحلهٔ اول، چون s مفروض است، باید فقط با شرط $x + y + z = s$ کمّیت xyz ماکسیمم شود. به استناد حکم مثال ۱، این مقصود با $x = y = z$ حاصل می‌شود.

سپس، Δ را مفروض بگیرید. آن‌گاه $(x + y + z)xyz = \Delta^۲$ و $s = \Delta^۲/xyz$. اگر قرار دهیم $\alpha = x^۲yz$، $\beta = xy^۲z$، $\gamma = xyz^۲$، خواهیم داشت: $\alpha + \beta + \gamma = \Delta^۲$ و $s = \Delta^۲/(\alpha\beta\gamma)^{۱/۴}$. از این رو، برای این که s مینیمم شود وقتی که Δ مفروض است، باید $\alpha\beta\gamma$ با شرط $\alpha + \beta + \gamma = \Delta^۲$ به ماکسیمم برسد. این، با $\alpha = \beta = \gamma$ رخ می‌دهد؛ یعنی

$$x^۲yz = xy^۲z = xyz^۲$$

و، بنابراین، $x = y = z$.

تبصره. به طریق مشابه، می‌توانیم ثابت کنیم که: از میان همهٔ مستطیلهایی که محیط مفروضی دارند، مربع بزرگترین مساحت را دارد؛ از میان همهٔ مستطیلهایی که مساحت مفروضی دارند، مربع حداقل محیط را داراست.

۴. از این واقعیت که میانگین حسابی n عدد مثبت از میانگین هندسی آنها کمتر نیست (قضیهٔ ۱۷.۴ را ببینید.) در اثبات نامساویهای زیر نیز می‌توان استفاده کرد: به ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$،

$$\left(۱ + \frac{۱}{n}\right)^n < \left(۱ + \frac{۱}{n + ۱}\right)^{n+۱} \qquad (۶۵.۴)$$

و

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n+1} > \left(1+\frac{1}{n+1}\right)^{n+2} \qquad (۶۶.۴)$$

[توجه کنید که نامساویهای (۶۵.۴) و (۶۶.۴) قبلاً در قضیهٔ ۴.۱ ثابت شده‌اند.]

در واقع، مجموعهٔ $n+1$ عدد

$$1, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad 1+\frac{1}{n}, \quad \ldots, \quad 1+\frac{1}{n}$$

را در نظر بگیرید. اینها دارای میانگین حسابی

$$1+\frac{1}{n+1}$$

و میانگین هندسی

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/(n+1)}$$

می‌باشند، از این رو،

$$1+\frac{1}{n+1} > \left(1+\frac{1}{n}\right)^{n/(n+1)} \qquad (۶۷.۴)$$

امّا، (۶۷.۴) معادل (۶۵.۴) است.

به طریق مشابه، مجموعهٔ $n+2$ عدد

$$1, \quad \frac{n}{n+1}, \quad \frac{n}{n+1}, \quad \ldots, \quad \frac{n}{n+1}$$

را در نظر بگیرید. اینها دارای میانگین حسابی

$$\frac{n+1}{n+2}$$

و میانگین هندسی

$$\left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n+1)/(n+2)}$$

می‌باشند. از این رو،

$$\frac{n+1}{n+2} > \left(\frac{n}{n+1}\right)^{(n+1)/(n+2)}$$

اگر طرفین را معکوس کنیم، چنین می‌شود:

$$1+\frac{1}{n+1} < \left(1+\frac{1}{n}\right)^{(n+1)/(n+2)} \qquad (۶۸.۴)$$

امّا، (۶۸.۴) معادل (۶۶.۴) است.

۵. به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، داریم:

$$n\{(n+۱)^{۱/n}-۱\} < ۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{n} < n\left(۱-\frac{۱}{(n+۱)^{۱/n}}+\frac{۱}{n+۱}\right) \qquad (۶۹.۴)$$

برای تحقیق در برقراری نامساویهای (۶۹.۴) مجدداً از این واقعیت استفاده خواهیم کرد که میانگین حسابی n عدد مثبت از میانگین هندسی آنها بیشتر نیست.

نخست، نشان می‌دهیم که

$$۱+\frac{۱}{n}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\cdots+\frac{۱}{n}\right) > (n+۱)^{۱/n}$$

اگر اعداد

$$a_۱=۱+۱=\frac{۲}{۱}, \quad a_۲=۱+\frac{۱}{۲}=\frac{۳}{۲}, \quad \ldots, \quad a_n=۱+\frac{۱}{n}=\frac{n+۱}{n}$$

را در (۶۲.۴) قرار دهیم، نامساوی بالا فوراً نتیجه می‌شود.

سپس، نشان می‌دهیم که

$$\frac{n}{(n+۱)^{۱/n}} < n\left(۱+\frac{۱}{n+۱}\right)-۱-\frac{۱}{۲}-\cdots-\frac{۱}{n} \qquad (۷۰.۴)$$

امّا طرف راست نامساوی (۷۰.۴) عبارت است از

$$(۱-۱)+\left(۱-\frac{۱}{۲}\right)+\cdots+\left(۱-\frac{۱}{n}\right)+\frac{n}{n+۱}$$

اگر نامساوی (۶۲.۴) را با اعداد

$$a_۱=\frac{۱}{۲}, \quad a_۲=\frac{۲}{۳}, \quad \ldots, \quad a_n=\frac{n}{n+۱}$$

بنویسیم، حکم مطلوب نتیجه می‌شود.

۶. به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، داریم

$$۱\cdot ۳\cdot\cdots\cdot(۲n-۱) < n^n \qquad (۷۱.۴)$$

در واقع، به استناد نامساوی (۶۲.۴)،

$$\frac{\{1+3+\cdots+(2n-1)\}}{n} > \{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)\}^{1/n}$$

یا

$$\frac{n^2}{n} > \{1\cdot 3\cdot\cdots\cdot(2n-1)\}^{1/n}$$

که مستلزم (۷۱.۴) است.

۷. بزرگترین مقدار $(a+x)^5(a-x)^3$ را در حالی بیابید که x بین $-a$ و a تغییر کند. در این جا، مایلیم که مجدداً از نامساوی (۶۲.۴) در تحصیل جواب استفاده کنیم.

هشت عدد مثبت زیر را در نظر بگیرید.

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_5 = \frac{a+x}{5}, \qquad a_6 = a_7 = a_8 = \frac{a-x}{3}; \qquad -a < x < a$$

میانگین حسابی آنها $a/4$ است. از این رو، به استناد نامساوی (۶۲.۴)،

$$\left(\frac{a+x}{5}\right)^5\left(\frac{a-x}{3}\right)^3 \le \left(\frac{a}{4}\right)^8 \tag{۷۲.۴}$$

تساوی وقتی رخ می‌دهد که

$$\frac{1}{5}(a+x) = \frac{1}{3}(a-x)$$

از (۷۲.۴) در می‌یابیم که

$$(a+x)^5(a-x)^3 \le \frac{5^5\cdot 3^3\cdot a^8}{4^8} \qquad \text{به‌ازای } -a<x<a،$$

۸. فرض کنید $a_i > 0$، $b_i > 0$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$. آن‌گاه

$$\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)} \ge \sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n} \tag{۷۳.۴}$$

و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $a_1/b_1 = a_2/b_2 = \cdots = a_n/b_n$.

در واقع، به استناد نامساوی (۶۲.۴)،

$$\frac{\sqrt[n]{a_1a_2\ldots a_n} + \sqrt[n]{b_1b_2\ldots b_n}}{\sqrt[n]{(a_1+b_1)(a_2+b_2)\ldots(a_n+b_n)}}$$

$$= \left(\left(\frac{a_۱}{a_۱+b_۱}\right)\dots\left(\frac{a_n}{a_n+b_n}\right)\right)^{۱/n} + \left(\left(\frac{b_۱}{a_۱+b_۱}\right)\dots\left(\frac{b_n}{a_n+b_n}\right)\right)^{۱/n}$$
$$\le \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{a_i}{a_i+b_i} + \frac{۱}{n}\sum_{i=۱}^{n}\frac{b_i}{a_i+b_i} = ۱$$

۹. به‌ازای $i = ۱, ۲, \dots, n$، فرض کنید $w_i > ۰$. آن‌گاه

$$(۱+w_۱)(۱+w_۲)\dots(۱+w_n) \ge (۱+q)^n \qquad (۷۴.۴)$$

که در آن $w_۱w_۲\dots w_n = q^n$، و تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $w_۱ = w_۲ = \dots = w_n$.

در واقع، نامساوی (۷۴.۴) از نامساوی (۷۳.۴) با انتخاب $a_i = ۱$ و $b_i = w_i$، که در آنها $i = ۱, ۲, \dots, n$، نتیجه می‌شود.

۱۰. مسألهٔ هویگنس. فرض کنید $b > a > ۰$. کسر

$$u = \frac{x_۱x_۲\dots x_k}{(a+x_۱)(x_۱+x_۲)\dots(x_{k-۱}+x_k)(x_k+b)}$$

بیشترین مقدار خود را دقیقاً وقتی اختیار می‌کند که اعداد

$$a < x_۱ < x_۲ < \dots < x_{k-۱} < x_k < b$$

یک تصاعد هندسی تشکیل دهند، یعنی، $x_۱/a = x_۲/x_۱ = \dots = x_k/x_{k-۱} = b/x_k$.

به وضوح، u فقط و فقط وقتی ماکسیمال است که $۱/au$ مینیمال باشد. امّا،

$$\frac{۱}{au} = (۱+w_۱)(۱+w_۲)\dots(۱+w_{k-۱})(۱+w_k)$$

که در آن $w_۱ = a/x_۱$، $w_۲ = x_۲/x_۱$، …، $w_{k-۱} = x_k/x_{k-۱}$، $w_k = b/x_k$. به استناد (۷۴.۴)، حاصل ضرب

$$(۱+w_۱)(۱+w_۲)\dots(۱+w_{k-۱})(۱+w_k)$$

دقیقاً وقتی مینیمال است که $w_۱ = w_۲ = \dots = w_{k-۱} = w_k$.

۱۱. به‌ازای $n = ۲, ۳, \ldots$، داریم

$$n! < \left(\frac{n+۱}{۲}\right)^n$$

درواقع، فرض کنید $a_k = k$. آن‌گاه $\sqrt[n]{n!} = \sqrt[n]{a_۱ a_۲ \ldots a_n}$ و $(a_۱+a_۲+\cdots+a_n)/n = (۱+n)/۲$، و مورد ادعّا از قضیهٔ ۱۷.۴ نتیجه می‌شود.

تبصره. تحقیق در برقراری نامساوی $n^{n/۲} < n!$ به‌ازای $n = ۳, ۴, ۵, \ldots$ آسان است. تساوی

$$(n!)^۲ = [۱.n][۲(n-۱)][۳(n-۲)]\ldots[(n-۱)۲][n\cdot ۱]$$

را در نظر بگیرید. حال، ملاحظه می‌کنیم که نخستین و آخرین عوامل داخل کروشه با هم برابرند و از دیگر عوامل داخل کروشه‌ها کوچکترند، زیرا وقتی $n-k > ۱$ و $k > ۰$ داریم $(k+۱)(n-k) = k(n-k) + (n-k) > k\cdot ۱ + (n-k) = n$. بنابراین، نامساوی $(n!)^۲ > n^n$ به‌ازای $n = ۳, ۴, ۵, \ldots$ نتیجه می‌شود.

۱۲. فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، …، a_n مثبت باشند و قرار دهید $s = a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$. آن‌گاه

$$(۱+a_۱)(۱+a_۲)\ldots(۱+a_n) \le ۱ + s + \frac{s^۲}{۲!} + \frac{s^۳}{۳!} + \cdots + \frac{s^n}{n!}$$

و تساوی فقط در حالت $n = ۱$ برقرار است.

در واقع، به استناد قضیهٔ ۱۷.۴،

$$\begin{aligned}(۱+a_۱)(۱+a_۲)\ldots(۱+a_n) &\le \left(\frac{n+a_۱+a_۲+\cdots+a_n}{n}\right)^n\\ &= \left(۱+\frac{s}{n}\right)^n\\ &= ۱ + n\left(\frac{s}{n}\right) + \frac{n(n-۱)}{۲}\left(\frac{s}{n}\right)^۲ + \cdots + \left(\frac{s}{n}\right)^n\end{aligned}$$

ملاحظه می‌کنیم که ضرایب s^m عبارت خواهند بود از

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{۱}{n^m}$$

امّا $n! \le (n-m)!n^m$ و، بنابراین،

$$\frac{n!}{m!(n-m)!}\frac{۱}{n^m} \le \frac{n!}{m!n!} = \frac{۱}{m!}$$

و نامساوی مورد بحث ثابت می‌شود. این که تساوی فقط در حالت $n = ۱$ رخ می‌دهد، از قضیهٔ ۱۷.۴ نتیجه می‌شود.

۱۳. داریم

$$۱ \cdot \frac{۱}{۲^۲} \cdot \frac{۱}{۳^۳} \cdot \frac{۱}{۴^۴} \cdot \cdots \cdot \frac{۱}{n^n} < \left(\frac{۲}{n+۱}\right)^{n(n+۱)/۲}$$

در واقع، طرف چپ نامساوی شامل ۲ عامل ۱/۲ است، ۳ عامل ۱/۳، ...، و n عامل $۱/n$؛ جمعاً $۱ + ۲ + ۳ + \cdots + n = n(n+۱)/۲$ از این عوامل. میانگین هندسی این عوامل برابر ریشهٔ $n(n+۱)/۲$ام حاصل ضرب آنهاست، و میانگین حسابی این عوامل عبارت است از

$$\frac{۱ \cdot ۱ + ۲ \cdot \frac{۱}{۲} + ۳ \cdot \frac{۱}{۳} + \cdots + n \cdot \frac{۱}{n}}{n(n+۱)/۲} = \frac{n}{n(n+۱)/۲} = \frac{۲}{n+۱}$$

بنابراین، برقراری نامساوی مورد بحث از قضیهٔ ۱۷.۴ نتیجه می‌شود.

۶.۴ مثالهای گوناگون

۱. فرض کنید a و b اعداد حقیقی مثبت متمایز باشند. تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} f(x) &= \left(\frac{a^x + b^x}{۲}\right)^{۱/x}, \quad && \text{به‌ازای } x \neq ۰ \\ &= \sqrt{ab}, && \text{به‌ازای } x = ۰ \end{aligned}$$

تابع f بر $(-\infty, \infty)$ اکیداً صعودی است، در حالی که کل صعود تابع صرفاً $|a - b|$ است. بالاخص، ادعا می‌کنیم که:

الف) به‌ازای $x \neq ۰$، $f'(x) > ۰$؛

ب) $\lim_{x \to ۰} f(x) = \sqrt{ab}$؛

ج) $f'(۰) = \frac{۱}{۸}\sqrt{ab}(\ln a/b)^۲$؛

د) $\lim_{x \to -\infty} f(x) = \min\{a, b\}$ و $\lim_{x \to \infty} f(x) = \max\{a, b\}$.

برهان این احکام به قرار زیر است. نخست، ادعای (الف) را ثابت می‌کنیم. به‌ازای $x \neq ۰$، فرض کنید

$$g(x) = \ln f(x) = \frac{۱}{x} \ln\left(\frac{a^x + b^x}{۲}\right)$$

آن‌گاه،

$$f'(x) = e^{g(x)} g'(x)$$

و $f'(x)$ و $g'(x)$ علامتی یکسان دارند. مشتقگیری ایجاب می‌کند که

$$g'(x) = \frac{a^x(\ln a) + b^x(\ln b)}{x(a^x + b^x)} - \frac{۱}{x^۲} \ln\left(\frac{a^x + b^x}{۲}\right)$$

چون

$$\ln\left(\frac{a^x + b^x}{۲}\right) = \frac{a^x}{a^x + b^x} \ln\left(\frac{a^x + b^x}{۲}\right) + \frac{b^x}{a^x + b^x} \ln\left(\frac{a^x + b^x}{۲}\right)$$

و

$$x^۲ g'(x) = \frac{a^x(\ln a^x) + b^x(\ln b^x)}{a^x + b^x} - \ln\left(\frac{a^x + b^x}{۲}\right)$$

خواهیم داشت:

$$۲x^۲ g'(x) = \frac{۲a^x}{a^x + b^x} \ln\left(\frac{۲a^x}{a^x + b^x}\right) + \frac{۲b^x}{a^x + b^x} \ln\left(\frac{۲b^x}{a^x + b^x}\right)$$

قرار می‌دهیم:

$$\frac{a^x - b^x}{a^x + b^x} = t \qquad (۷۵.۴)$$

چون a^x و b^x همیشه مثبت هستند، ملاحظه می‌کنیم که $-۱ < t < ۱$. بعلاوه،

$$۱ + t = \frac{۲a^x}{a^x + b^x}, \qquad ۱ - t = \frac{۲b^x}{a^x + b^x} \qquad (۷۶.۴)$$

به این ترتیب،

$$۲x^۲ g'(x) = (۱ + t)\ln(۱ + t) + (۱ - t)\ln(۱ - t) \qquad (۷۷.۴)$$

به‌ازای $-۱ < t < ۱$، فرض می‌کنیم

$$h(t) = (۱ + t)\ln(۱ + t) + (۱ - t)\ln(۱ - t)$$

آن‌گاه

$$h'(t) = \ln(۱ + t) - \ln(۱ - t) = \ln\frac{۱ + t}{۱ - t}$$

داریم:

$$\frac{1+t}{1-t} > 1, \qquad 0 < t < 1 \text{ به‌ازای}$$
$$< 1, \qquad -1 < t < 0 \text{ به‌ازای}$$

از این رو،

$$\ln\frac{1+t}{1-t} > 0, \qquad 0 < t < 1 \text{ به‌ازای}$$
$$< 0, \qquad -1 < t < 0 \text{ به‌ازای}$$

نتیجه می‌شود که h بر $(0, 1)$ صعودی است، بر $(-1, 0)$ نزولی است، و $h(0) = 0$ کمترین مقدار $h(t)$ به‌ازای $-1 < t < 1$ است. چون $x \neq 0$ (زیرا $1/x$ در $x = 0$ تعریف نشده است) و چون $a \neq b$، می‌بینیم که t نمی‌تواند صفر شود. از این رو، $h(t) > 0$ وقتی که $t \neq 0$؛ که ایجاب می‌کند که $g'(x) > 0$ وقتی که $x \neq 0$ و، بنابراین، $f'(x) > 0$ وقتی که $x \neq 0$.

سپس، درستی ادعای (ب) را بررسی می‌کنیم. فرض کنید

$$y = \left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} \qquad \text{بنابراین،} \qquad \ln y = \frac{1}{x}\ln\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)$$

به استناد قضیهٔ ۴.۱۰،

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(a^x/2 + b^x/2)}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{a^x(\ln a) + b^x(\ln b)}{a^x + b^x} = \frac{\ln a + \ln b}{2} = \ln\sqrt{ab}$$

به این ترتیب،

$$\lim_{x\to 0}\left(\frac{a^x + b^x}{2}\right)^{1/x} = \lim_{x\to 0} f(x) = \sqrt{ab}$$

چون $f(x)$ به‌ازای $x \neq 0$ مشتق‌پذیر است و $f(0) = \sqrt{ab}$ تعریف شده است، ملاحظه می‌کنیم که f بر سرتاسر $(-\infty, \infty)$ پیوسته است.

اکنون، در درستی ادعای (ج) تحقیق می‌کنیم. دیده می‌شود که تابع f بر بازهٔ بسته‌ای با طول متناهی مانند $[0, s]$ در قضیهٔ مقدار میانگین صدق می‌کند. (قضیهٔ ۴.۵ را ببینید.) از این رو، نقطه‌ای مانند x بین 0 و s یافت می‌شود که

$$\frac{f(s) - f(0)}{s} = f'(x)$$

مانند قبل، فرض کنید $g(x) = \ln f(x)$. آن‌گاه

$$f'(x) = f(x)g'(x)$$

و، با استفاده از جایگزینی (۷۵.۴)، خواهیم داشت:

$$g'(x) = \frac{(1+t)\ln(1+t) + (1-t)\ln(1-t)}{2x^2}$$

[۷۷.۴ را ببینید.] به استناد (۷۶.۴)،

$$\frac{a^x}{b^x} = \frac{1+t}{1-t}$$

بنابراین،

$$x = \frac{\ln(1+t) - \ln(1-t)}{\ln(a/b)}$$

به این ترتیب،

$$f'(x) = \frac{1}{2}f(x)\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2 \frac{(1+t)\ln(1+t) + (1-t)\ln(1-t)}{[\ln(1+t) - \ln(1-t)]^2}$$

امّا، $\ln(1+t) + \ln(1-t) = \ln(1-t^2)$؛ بنابراین،

$$f'(x) = \frac{1}{2}f(x)\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2 \frac{(1/t^2)\ln(1-t^2) + \frac{\ln(1+t)-\ln(1-t)}{t}}{\left(\frac{\ln(1+t)-\ln(1-t)^2}{t}\right)^2}$$

اگر $x \longrightarrow 0$ آن‌گاه $t \longrightarrow 0$؛ بعلاوه، به استناد قضیهٔ ۱۰.۴،

$$\lim_{t\to 0}\frac{\ln(1+t) - \ln(1-t)}{2t} = 1, \qquad \lim_{t\to 0}\frac{\ln(1-t^2)}{-t^2} = 1$$

به این ترتیب،

$$\lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{8}\sqrt{ab}\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2$$

از این رو،

$$f'(0) = \lim_{s\to 0}\frac{f(s) - f(0)}{s} = \lim_{s\to 0} f'(x) = \lim_{x\to 0} f'(x) = \frac{1}{8}\sqrt{ab}\left(\ln\frac{a}{b}\right)^2$$

زیرا، x بین ۰ و s است و $\lim_{x\to 0} f'(x)$ وجود دارد.

سرانجام، ادعای (د) را ثابت می‌کنیم. فرض کنید $a > b$ و x مقادیر ۱، ۲، ۳، ... را اختیار کند. آن‌گاه

$$f(n) = \left(\frac{a^n + b^n}{۲}\right)^{۱/n} = a\left(\frac{۱ + (b/a)^n}{۲}\right)^{۱/n} = a۲^{-۱/n}e^{(۱/n)\ln[۱+(b/a)^n]}$$

امّا $(b/a)^n \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$ و، $\ln[۱ + (b/a)^n] \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. به وضوح $۱/n \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$ و $۲^{-۱/n} \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. به این ترتیب، $f(n) \longrightarrow a$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. امّا، اگر $n \le x < n + ۱$ آن‌گاه $f(n) \le f(x) < f(n + ۱)$. [زیرا، به استناد قضیهٔ ۷.۴، $f'(x) > ۰$] و، بنابراین، $f(x) \longrightarrow a$ وقتی که $x \longrightarrow \infty$. به طریقی کاملاً مشابه، می‌توان نشان داد که $f(x) \longrightarrow b$ وقتی که $x \longrightarrow -\infty$.

تبصره. بالاخص، به نامساویهای

$$f(-۱) < f(۰) < f(۱)$$

توجه کنید. $f(-۱)$ میانگین همساز، $f(۰)$ میانگین هندسی، و $f(۱)$ میانگین حسابی دو عدد حقیقی مثبت متمایز a و b می‌باشند.

۲. این مسأله را بررسی می‌کنیم که می‌خواهیم استوانهٔ مستدیر قائمی در یک مخروط مستدیر قائم با ابعاد ثابت محاط کنیم‌که مساحت سطحش ماکسیمم باشد.

فرض کنید R شعاع و H ارتفاع مخروط باشد؛ فرض کنید r شعاع و h ارتفاع استوانه باشد. آن‌گاه، مساحت سطح استوانه عبارت است از

$$S = ۲\pi r^۲ + ۲\pi rh$$

از مثلثهای متشابه، داریم:

$$\frac{h}{R - r} = \frac{H}{R} \quad \text{یا} \quad h = \frac{R - r}{R}H$$

و، بنابراین،

$$S = ۲\pi\left[r^۲ + rH\left(۱ - \frac{r}{R}\right)\right]$$ ، که در آن $۰ \le r \le R$.

مشتقگیری برحسب r به نتیجهٔ

$$S' = ۲\pi\left(۲r + H - \frac{۲r}{R}H\right), \qquad S'' = ۴\pi\left(۱ - \frac{H}{R}\right)$$

می‌انجامد. اگر قرار دهیم $S' = ۰$، خواهیم داشت:

$$r = \frac{HR}{۲(H-R)} \tag{۴. ۷۸}$$

اگر قرار باشد که این مقدار r در بازه $(۰\,, R)$ واقع شود، باید نامساویهای

$$\frac{HR}{۲(H-R)} < R \quad \text{و} \quad \frac{HR}{۲(H-R)} > ۰ \tag{۴. ۷۹}$$

برقرار باشند. اولین این نامساویها معادل $H > R$ است. پس از ضرب نامساوی دوم در کمیت مثبت $۲(H-R)$، خواهیم داشت:

$$R < \frac{H}{۲}$$

اگر این نامساوی برقرار باشد، S'' منفی است؛ تنها ماکسیمم تابع S است که با مقدار r از (۷۸.۴) متناظر قرار می‌گیرد. این مقدار ماکسیمم از طریق جایگزینی مقدار r از (۷۸.۴) در عبارت S به آسانی به دست می‌آید.

حال، فرض می‌کنیم که مقدار r موجود در (۷۸.۴) در بازهٔ باز $(۰\,, R)$ نباشد؛ یعنی، نامساویهای (۷۹.۴) برقرار نباشند. در این صورت، دو حالت می‌تواند رخ دهد: یا $R \geq H$ یا $R < H$ ولی $R \geq H/۲$. نامساوی

$$H \leq ۲R \tag{۴. ۸۰}$$

شاخص این دو حالت است.

عبارت S' را به صورت زیر بازنویسی می‌کنیم:

$$S' = ۲\pi\left(۲r + H - \frac{۲rH}{R}\right) = \frac{۲\pi}{R}[(۲R-H)r + H(R-r)]$$

امّا، نامساوی (۸۰.۴) ایجاب می‌کند که در محدودهٔ $۰ < r < R$، $S' > ۰$؛ از این رو، S بر $(۰\,, R)$ تابعی صعودی است و بیشترین مقدار خود را به ازای $r = R$ اختیار می‌کند. به‌ازای $r = R$، داریم $h = ۰$؛ و استوانهٔ محاطی کاملاً تخت است.

۳. فرض کنید (a,b) مختصات نقطهٔ ثابتی باشند که در چارک اول صفحهٔ xy واقع است و مجموعهٔ همهٔ خطوط راستی را درنظر بگیرید که از نقطهٔ (a,b) بگذرند و هر دو محور مختصات را قطع کنند.

می‌خواهیم طول کوتاهترین قطعه‌ای را که محورهای مختصات از این خطوط راست جدا می‌کنند تعیین کنیم.

فرض کنید $t > ۰$ و $a + t$ طول از مبداء خط راستی باشد که از نقطهٔ (a, b) در چارک اول می‌گذرد. به آسانی دیده می‌شود که این خط راست محور y را در نقطهٔ به عرض $y = (b/t)(a+t)$ قطع می‌کند و مربع طول قطعه‌ای از این خط راست که به وسیلهٔ محورهای مختصات جدا می‌شود عبارت است از

$$f(t) = (a+t)^۲ + \left(\frac{b}{t}\right)^۲ (a+t)^۲ = (a+t)^۲ \left(۱ + \frac{b^۲}{t^۲}\right)$$

واضح است که اگر $f(t)$ کمترین مقدار را به‌ازای $t = t_۰$ داشته باشد، $\sqrt{f(t)}$ نیز کمترین مقدار را به ازای $t = t_۰$ خواهد داشت؛ و برعکس. برای تعیین کمترین مقدار $f(t)$، به طریق زیر عمل می‌کنیم. مشتقگیری ایجاب می‌کند که

$$f'(t) = ۲(a+t)\left(۱ + \frac{b^۲}{t^۲}\right) + (a+t)^۲\left(-\frac{۲b^۲}{t^۳}\right)$$

اگر قرار دهیم $f'(t) = ۰$، خواهیم داشت:

$$t = a^{۱/۳} b^{۲/۳}$$

و

$$f(a^{۱/۳}b^{۲/۳}) = (a^{۲/۳} + b^{۲/۳})^۳$$

یک محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که

$$f''(a^{۱/۳}b^{۲/۳}) = \frac{۲}{a^{۲/۳}}(a^{۲/۳} + b^{۲/۳})\left[۱ - ۴ + \frac{۳(a^{۲/۳} + b^{۲/۳})}{b^{۲/۳}}\right] > ۰$$

زیرا $(a^{۲/۳} + b^{۲/۳})/b^{۲/۳} > ۱$.

بنابراین، ملاحظه می‌کنیم که طول کوتاهترین قطعه‌ای که به وسیلهٔ محورهای مختصات جدا می‌شود عبارت است از $(a^{۲/۳} + b^{۲/۳})^{۳/۲}$.

ملاحظات. نتیجهٔ قبلی برقراری دو حکم زیر را نشان می‌دهد:

الف) فرض کنید دو راهرو که پهنای آنها، به ترتیب، a و b است یکدیگر را با زاویهٔ قائمه قطع کنند. آن‌گاه، طول بلندترین میلهٔ باریکی که بتواند به طور افقی در گوشهٔ راهرو دور بزند عبارت است از $(a^{۲/۳} + b^{۲/۳})^{۳/۲}$.

ب) طول کوتاهترین میلهٔ باریکی که یک سر آن به دیواری بسته شده است و سر دیگرش باید به دیوار دیگری (که ضخامت دیوار قابل اغماض است) وصل شود که a واحد از دیوار اول فاصله دارد و ارتفاعش b واحد بیشتر از آن می‌باشد عبارت است از $(a^{۲/۳} + b^{۲/۳})^{۳/۲}$.

۴. قطاع مستدیری به شعاع ثابت R و زاویهٔ مرکزی متغیر x (برحسب رادیان) باید به شکل مخروط مستدیر قائمی به ارتفاع h و شعاع r درآید. می‌خواهیم مقدار x را چنان بیابیم که مخروط بیشترین حجم را داشته باشد.

طول کمان مستدیر با زاویهٔ مرکزی x و شعاع R عبارت است از Rx. محیط قاعدهٔ مخروط عبارت است از $۲\pi r$. به این ترتیب،

$$r = \frac{Rx}{۲\pi} \quad \text{یا} \quad ۲\pi r = Rx$$

واضح است که $h^۲ + r^۲ = R^۲$ و، بنابراین،

$$h = (R^۲ - r^۲)^{۱/۲} = \left(R^۲ - \frac{R^۲x^۲}{۴\pi^۲}\right)^{۱/۲} = \frac{R}{۲\pi}(۴\pi^۲ - x^۲)^{۱/۲}$$

حجم مخروط عبارت است از

$$V = \frac{\pi r^۲ h}{۳} = \frac{۱}{۳}\pi \frac{R^۲x^۲}{۴\pi^۲}.\frac{R}{۲\pi}(۴\pi^۲ - x^۲)^{۱/۲} = \frac{R^۳}{۲۴\pi^۲}x^۲(۴\pi^۲ - x^۲)^{۱/۲}$$

برای تعیین بیشترین مقدار حجم V، فقط لازم است که تابع

$$h(x) = ۴\pi^۲x^۴ - x^۶, \quad ۰ < x < ۲\pi$$

را بررسی کنیم. امّا، $h'(x) = ۱۶\pi^۲x^۳ - ۶x^۵$ و معادلهٔ $h'(x) = ۰$ دارای سه جواب

$$x_۱ = ۰ \quad ،x_۲ = -۲\pi\sqrt{\frac{۲}{۳}} \quad ،x_۳ = ۲\pi\sqrt{\frac{۲}{۳}} \text{ و}$$

است. فقط $x_۳$ در بازهٔ باز $(۰, ۲\pi)$ واقع است و جواب مطلوب به دست می‌آید.

۵. **قانون شکست** را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنید دو نقطهٔ مفروض A و B در دو طرف مقابل محور xها باشند. برای تثبیت مواضع، فرض کنید A دارای مختصات $(۰, a)$ باشد و B دارای

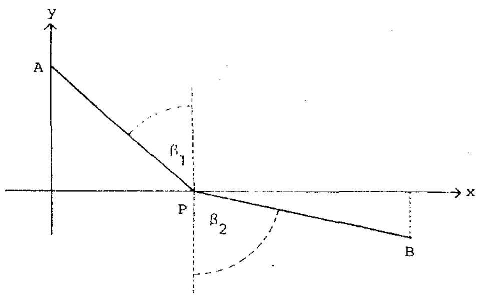
مختصات (c, b)؛ که در آنها a، b، و c اعداد مثبت ثابتی هستند. می‌خواهیم مسیری از A به B بیابیم که در کوتاهترین زمان ممکن طی شود در صورتی که بدانیم که سرعت حرکت در طرف بالای محور xها $v_۱$ و در طرف پایین محور xها $v_۲$ است؛ فرض می‌شود که $v_۱$ و $v_۲$ اعداد مثبت ثابتی هستند.

واضح است که این کوتاهترین مسیر باید متشکل از دو پاره‌خط مستقیم باشد که یکدیگر را در نقطه‌ای مانند P از محور xها قطع می‌کنند؛ فرض کنید که نقطهٔ P دارای مختصات $(x, ۰)$ باشد. شکل ۹.۴ را ببینید. طول قطعات AP و PB، به ترتیب، عبارت است از

$$[b^۲ + (c-x)^۲]^{۱/۲} \quad \text{و} \quad (a^۲ + x^۲)^{۱/۲}$$

زمان طی مسیر مرکب از پاره‌خطهای AP و PB عبارت است از

$$f(x) = \frac{۱}{v_۱}(a^۲ + x^۲)^{۱/۲} + \frac{۱}{v_۲}[b^۲ + (c-x)^۲]^{۱/۲}$$



شکل ۹.۴

مشتقگیری ایجاب می‌کند که

$$f'(x) = \frac{x}{v_۱(a^۲ + x^۲)^{۱/۲}} - \frac{c-x}{v_۲[b^۲ + (c-x)^۲]^{۱/۲}}$$

و

$$f''(x) = \frac{a^۲}{v_۱(a^۲ + x^۲)^{۳/۲}} - \frac{b^۲}{v_۲[b^۲ + (c-x)^۲]^{۳/۲}}$$

چون همواره $f''(x) > ۰$، نتیجه می‌شود که f' بر $(-\infty, \infty)$ اکیداً صعودی است. بعلاوه، $f'(۰) < ۰$ و $f'(c) > ۰$. چون f' پیوسته است، باید دقیقاً یک ریشه بین $x = ۰$ و $x = c$ داشته باشد. به‌ازای این ریشه، مثلاً $x = x.$، داریم

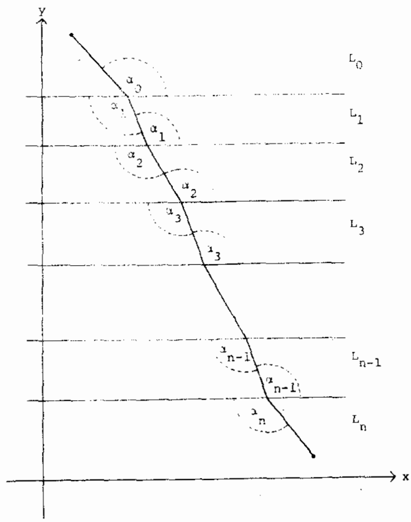
$$\frac{x/(a^۲ + x^۲)^{۱/۲}}{(c-x)/[b^۲ + (c-x)^۲]^{۱/۲}} = \frac{v_۱}{v_۲}$$

این قانون شکست منسوب به اِسنل است که می‌تواند به صورت

$$\frac{\sin\beta_1}{\sin\beta_2}=\frac{v_1}{v_2}$$

نوشته شود که در آن f_1 زاویهٔ تابش و β_2 زاویه شکست است. اگر α_1 را زاویهٔ میلی بگیریم که پاره‌خط AP با محور xها می‌سازد و α_2 زاویهٔ میلی باشد که پاره‌خط PB با محور xها تشکیل می‌دهد، قانون شکست به صورت زیر نیز نوشته می‌شود:

$$\frac{\cos\alpha_1}{v_1}=\frac{\cos\alpha_2}{v_2}$$



شکل ۱۰.۴

۶. **منحنی شکست کلی.** فرض کنید که صفحهٔ xy به لایه‌هایی موازی محور x ها افراز شود. (شکل ۱۰.۴ را ببینید.) سرعت عبور در درون هر لایه ثابت است. دو نقطهٔ A و B از دو لایهٔ متفاوت را انتخاب می‌کنیم؛ فرض کنید A در لایهٔ L_0 و B در لایهٔ L_n باشد. بین دو لایهٔ L_0 و L_n، لایه‌های L_1، L_2، ... ، L_{n-1} واقعند. به ازای $k=0,1,2,\ldots,n$، سرعت عبور از لایهٔ L_k برابر v_k است. از نقطهٔ A در لایهٔ L_0 حرکت کرده و پس از عبور از لایه‌های متوالی L_1، L_2، ... ، L_{n-1} در امتداد مسیری که در کوتاهترین زمان ممکن طی شود به نقطهٔ B در لایهٔ L_n می‌رسیم. این مسیر از قطعه خطهای

$$AP_1, P_1P_2, P_2P_3, \ldots, P_{n-2}P_{n-1}, P_{n-1}P_n, P_nB$$

تشکیل شده است. زوایایی را که این پاره‌خطهای متوالی با محور xها می‌سازند به

$$\alpha_{0}, \alpha_{1}, \alpha_{2}, \ldots, \alpha_{n-2}, \alpha_{n-1}, \alpha_{n}$$

نمایش می‌دهیم. مطابق قانون شکست مورد بحث در مثال ۵، در نقطهٔ P_1

$$\frac{\cos \alpha_0}{v_0} = \frac{\cos \alpha_1}{v_1}$$

و در نقطهٔ P_2،

$$\frac{\cos \alpha_1}{v_1} = \frac{\cos \alpha_2}{v_2}$$

و هکذا. در نقطهٔ P_n،

$$\frac{\cos \alpha_{n-1}}{v_{n-1}} = \frac{\cos \alpha_n}{v_n}$$

از این رو،

$$\frac{\cos \alpha_0}{v_0} = \frac{\cos \alpha_1}{v_1} = \frac{\cos \alpha_2}{v_2} = \cdots = \frac{\cos \alpha_{n-1}}{v_{n-1}} = \frac{\cos \alpha_n}{v_n}$$

اگر مقدار مشترک این کسرها را به c نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$\frac{\cos \alpha}{v} = c$$

که در آن α زاویهٔ میل هر یک از پاره‌خطها نسبت به محور xها و v سرعت عبور از لایهٔ متناظر است.

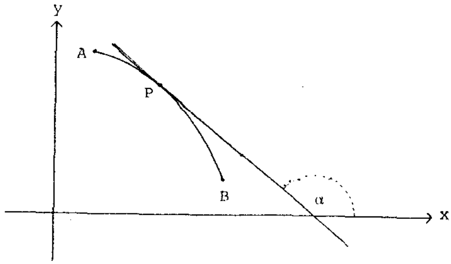
سرانجام، فرض کنید که سرعت عبور v تابع پیوسته‌ای از مختص y نقطهٔ P با مختصات (x, y) باشد، یعنی،

$$v = v(y)$$

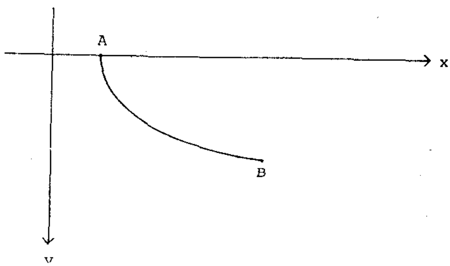
در این صورت، مسیری که در کوتاهترین زمان ممکن از A به B طی شود منحنی q است که با معادلهٔ

$$\frac{\cos \alpha}{v} = c$$

مشخص می‌شود که در آن α زاویهٔ میل خط مماس بر منحنی q در نقطهٔ P با مختصات (x, y) است که با محور xها می‌سازد، $v = v(y)$ سرعت عبور در نقطهٔ P است، و c یک ثابت است. (شکل ۱۱.۴ را ببینید.) برای نیل به این وضعیت، لایه‌هایی را بررسی می‌کنیم که موازی محور xهایند و پهنای این لایه‌ها به صفر می‌گراید.



شکل ۱۱.۴



شکل ۱۲.۴

۷. منحنی سریعترین نزول. اکنون، فرض می‌کنیم که نقطهٔ A روی محور x ها باشد و نقطهٔ B زیرنقطهٔ A باشد ولی نه بر خط قائمی که از A می‌گذرد. (شکل ۱۲.۴ را ببینید.) فرض می‌کنیم که محور yها رو به پایین جهت‌دار شده باشد. شیئی باید صرفاً تحت تأثیر نیروی گرانش از نقطهٔ A به نقطهٔ B برود؛ فرض می‌شود که این شیء در A در حال سکون است و در امتداد مسیری حرکت می‌کند که در کوتاهترین زمان ممکن از A به B برسد.

از فیزیک، می‌دانیم که نیروی گرانش شتاب ثابتی در حدود ۳۲ فوت بر مجذور ثانیه در جهت پایین وارد می‌کند. امّا، شتاب نرخ تغییر سرعت v برحسب زمان است، یعنی، $D_t v$. چون $v = ۰$ وقتی که $t = ۰$، داریم $v = gt$، که در آن t نشان دهندهٔ زمان (برحسب ثانیه) است. جابه‌جایی y (برحسب فوت) به‌ازای $t = ۰$ صفر است. (زیرا A روی محور xهاست.) به این ترتیب، $y = gt^۲/۲$ و، بنابراین،

$$v^۲ = ۲gy \qquad \text{یا} \qquad v = \sqrt{۲g}\sqrt{y}$$

بنابراین، منحنی واصل A به B، که در امتداد آن شیئی از حالت سکون در A به حرکت درآید و فقط تحت تأثیر نیروی گرانشی در کوتاهترین زمان ممکن به B برسد، در معادلهٔ

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{y}} = c_۱ \quad \text{یا} \quad \frac{\cos\alpha}{v} = \frac{\cos\alpha}{\sqrt{۲g}\sqrt{y}} = c$$

صدق می‌کند که در آن c و $c_۱$ نشان دهندهٔ اعداد ثابت هستند.

در مثال ۲ بخش اول فصل پنجم، منحنی‌ای به نام چرخزاد را مورد مطالعه قرار خواهیم داد. (برای رسم یک چرخزاد، شکل ۲.۵ را ببینید.) منحنی چرخزاد را نقطه‌ای از یک دایره پدید می‌آورد که این دایره بر روی خطی راست بدون لغزش بچرخد.

در مکان مذکور از فصل پنجم، نشان خواهیم داد که معادلات

$$x = a(t - \sin t) \quad \text{و} \quad y = a(۱ - \cos t)$$

که در آن a یک ثابت است، معادلات پارامتری یک چرخزاد می‌باشند. آنچه که در این جا برای ما جالب توجه است این است که چرخزاد در معادلهٔ

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{y}} = c_۱$$

صدق می‌کند که در آن $c_۱$ یک ثابت است و α زاویهٔ میل خط مماس بر چرخزاد در نقطه‌ای مانند (x, y) است که با محور xها می‌سازد؛ نقطهٔ (x, y) واقع بر چرخزاد نباید تیزهٔ منحنی باشد، ولی باید نقطه‌ای از منحنی باشد که مشتق $D_x y$ در آن نقطه موجود است.

در واقع،

$$D_x y = \tan\alpha \quad \text{و} \quad D_x y = \frac{D_t y}{D_t x} = \frac{\sin t}{۱ - \cos t} = \cot\frac{t}{۲}$$

امّا، $\tan(\pi/۲ - \theta) = \cot\theta$ مستلزم $\alpha = \pi/۲ - t/۲$ است و، بنابراین،

$$\cos\alpha = \sin\frac{t}{۲}$$

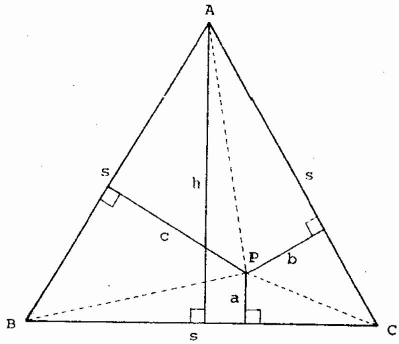
ولی $y = a(۱ - \cos t) = ۲a(\sin^۲ t/۲)$. بنابراین،

$$\frac{\cos\alpha}{\sqrt{y}} = \frac{۱}{\sqrt{۲a}} = \text{ثابت}$$

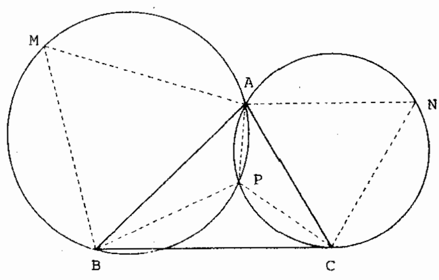
این نشان می‌دهد که منحنی سریعترین نزول واصل A به B قسمتی از یک چرخزاد است.

تبصره. چرخزاد در مسائل متعددی از مبحث حرکت شناسی، که در آنها نزول یک شیء تحت تأثیر نیروی گرانش در امتداد یک منحنی واقع در صفحه‌ای قائم مورد بحث قرار می‌گیرد، ظاهر می‌شود؛ جزئیات بحث مسائل حرکت شناسی در کتب حساب تغییرات آمده است.

۸. حل مسائل بعدی براساس حکمی است که به قضیهٔ ویویانی مشهور است.



شکل ۱۳.۴



شکل ۱۴.۴

قضیهٔ ویویانی. به‌ازای هر نقطهٔ P واقع در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، مجموع عمودهای a، b، c که از P بر اضلاع وارد شوند مساوی ارتفاع h است.

در واقع، برحسب مساحات، داریم (شکل ۱۳.۴ را ببینید.):

$$\Delta ABC = \Delta PBC + \Delta PCA + \Delta PAB$$

یا

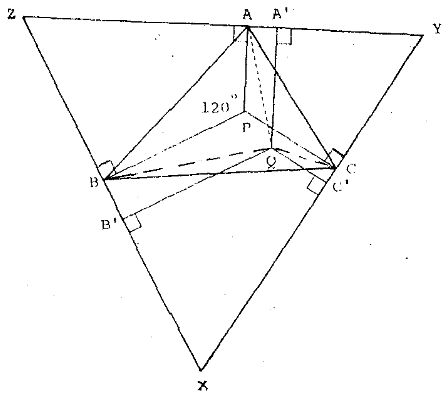
$$\tfrac{1}{2}sh = \tfrac{1}{2}sa + \tfrac{1}{2}sb + \tfrac{1}{2}sc$$

که مستلزم $h = a + b + c$ است. این، قضیهٔ ویویانی را ثابت می‌کند.

حال، مسألهٔ مورد بحث را بیان می‌کنیم: می‌خواهیم نقطه‌ای مانند P در مثلث مفروضی چون ΔABC تعیین کنیم به طوری که مجموع $PA + PB + PC$ مینیمم باشد.

ثابت می‌شود که اگر مثلث مفروض ABC دارای زاویه‌ای با اندازهٔ ۱۲۰° یا بیشتر باشد، نقطهٔ مطلوب رأس همین زاویهٔ منفرجه است. ما این حالت را بررسی نمی‌کنیم ولی، در عوض، بحث خود را به حالتی متمرکز می‌کنیم که در آن مثلث ABC فاقد زاویه‌ای به بزرگی ۱۲۰° باشد؛ در این صورت، نقطهٔ مطلوب P، که به نقطهٔ فرمای مثلث ABC موسوم است، براساس این واقعیت مشخص می‌شود که در نقطهٔ P هر ضلع مثلث روبروی یک زاویهٔ ۱۲۰° است. توجه می‌کنیم که برای دستیابی به نقطهٔ فرمای مثلث مفروضی، کافی است که با دو ضلع مثلث مفروض مثلثهای متساوی‌الاضلاعی به طرف بیرون رسم و محل تلاقی دوایر محیطی آنها را پیدا کنیم. (شکل ۱۴.۴ را ببینید.)

نقطهٔ فرمای P مثلث ABC را در شکل ۱۵.۴ در نظر بگیرید؛ نشان می‌دهیم که این همان نقطهٔ جواب مسأله است.



شکل ۱۵.۴

در مرحلهٔ اول، با رسم عمودهایی بر PA، PB، و PC مثلث XYZ را بر گرد مثلث مفروض ABC می‌سازیم. آن‌گاه، در چهارضلعی $ZAPB$. زاویهٔ Z برابر است با

$$۳۶۰^\circ - ۹۰^\circ - ۹۰^\circ - ۱۲۰^\circ = ۶۰^\circ$$

از همین روش برای محاسبهٔ زوایای Y و X استفاده می‌کنیم تا نشان بدهیم که مثلث XYZ متساوی

است. از این رو، به استناد قضیهٔ ویویانی،

$$PA+PB+PC=h$$

که در آن h ارتفاع مثلث XYZ است.

به‌ازای نقطهٔ دیگری مانند Q در مثلث ABC نیز به این نتیجه می‌رسیم که مجموع عمودهای QA'، QB'، و QC' بر اضلاع ΔXYZ برابر h است. ولی، به طور کلی: وتر QA از مثلث قائم‌الزاویهٔ QAA' بزرگتر از ضلع QA' است. به طور مشابه، QB و QC، به ترتیب، از QB' و QC' بزرگترند. بنابراین،

$$QA+QB+QC>QA'+QB'+QC'=h=PA+PB+PC$$

که نشان می‌دهد که P جواب مسأله است.

ملاحظه می‌کنیم که حداکثر یک مثلث قائم‌الزاویه محو می‌شود و نتیجتاً حداکثر یک تساوی وتر و ضلع را خواهیم داشت. (مثلاً، وقتی که Q بر PA واقع شود.) از این رو، حداکثر یکی از QA'، QB'، یا QC' می‌تواند واقعاً به بزرگی متناظرش QA، QB ، یا QC باشد، که به برقراری کلی نامساوی

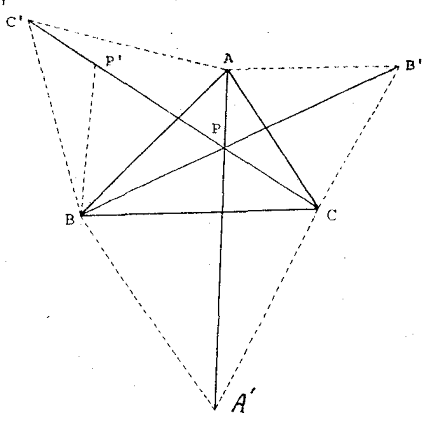
$$QA+QB+QC>QA'+QB'+QC'$$

می‌انجامد و مسألهٔ مورد بحث حل می‌شود.

در شکل ۱۶.۴ ، ساختار دیگری از نقطهٔ فرمای P مثلث ABC نشان داده‌ایم. مثلث ABC را با سه مثلث متساوی‌الاضلاع

$$\Delta AC'B\text{،}\quad \Delta BA'C\text{، و}\quad \Delta CB'A$$

که با سه ضلع مثلث مفروض (به طرف بیرون) ساخته شده‌اند، در نظر بگیرید. بعد از رسم خطوط BB'



شکل ۱۶.۴

و CC' که یکدیگر را در P قطع می‌کنند، ملاحظه می‌کنیم که با دورانی به اندازهٔ $60°$ حول A مثلث $AC'C$ بر مثلث ABB' منطبق می‌شود. از این رو، $\angle C'PB = 60°$ و $C'C = BB'$. با یک استدلال مشابه، دیده می‌شود که $A'A = CC'$. بنابراین،

$$AA' = BB' = CC'$$

بعلاوه، چون

$$\angle CPB' = 60° = \angle CAB' \quad \text{و} \quad \angle C'PB = 60° = \angle C'AB$$

چهار ضلعیهای $AC'BP$ و $CB'AP$ دوری[1] هستند؛ و چون

$$\angle BPC = 120° \quad \text{در حالی که} \quad \angle CA'B = 60°$$

چهارضلعی سوم $BA'CP$ نیز دوری است. بنابراین، دوایر محیطی مثلثهای

$$\Delta BA'C، \quad \Delta CB'A، \text{و} \quad \Delta AC'B$$

همگی از نقطهٔ P می‌گذرند. این همان نقطهٔ فرمای مثلث ABC است.

به آسانی دیده می‌شود که

$$AA' = BB' = CC' = PA + PB + PC$$

در واقع، اگر مثلث PAB به اندازهٔ $60°$ حول رأس B به طرف بیرون دوران کند تا به وضع $\Delta P'C'B$ درآید، از روی شکل ۱۶.۴، می‌توان دید که

$$C'C = PA + PB + PC$$

خلاصه. قطعات AA'، BB'، و CC' همگی به یک اندازه‌اند (مساوی مجموع مینیمم PA، PB، و PC)، همرس در نقطهٔ فرمای P مثلث ABCاند، و یکدیگر را با زاویهٔ $60°$ در آن نقطه قطع می‌کنند. (شکل ۱۶.۴ را ببینید.)

تبصره. مسألهٔ تعیین نقطه‌ای مانند P در مثلث مفروضی چون ΔABC به قسمی که مجموع $PA + PB + PC$ مینیمم باشد، از جانب عالم نامدار نظریهٔ اعداد، پیر دو فرما (۱۶۶۵-۱۶۰۱)، به ایوانجلیستا توریچلی (۱۶۴۷-۱۶۰۸) شاگرد مشهور گالیله و کاشف دماسنج، داده شد. توریچلی به چند طریق مسأله را حل کرد و ساده‌ترین راه حل توریچلی مورد بحث قرار گرفت.

۱) رئوس چهارضلعی بر یک دایره واقع می‌شوند. (م)

۹. فرض کنید $0 < x$ و $0 < \alpha < 1$. آن‌گاه

$$x^\alpha - \alpha x \leq 1 - \alpha \tag{۴.۸۱}$$

در واقع، مشتقگیری از تابع $f(x) = x^\alpha - \alpha x$ برحسب x به نتیجهٔ

$$f'(x) = \alpha(x^{\alpha-1} - 1)$$

می‌انجامد. به وضوح،

$$\begin{aligned} f'(x) &> 0, \quad 0 < x < 1 \quad \text{برای} \\ &= 0, \quad x = 1 \quad \text{برای} \\ &< 0, \quad x > 1 \quad \text{برای} \end{aligned}$$

از این رو، $f(x) \leq f(1)$ وقتی که $0 < x$؛ و این مستلزم (۸۱.۴) است.

تبصره. اگر قرار دهیم $x = a/b$ و $\beta = 1 - \alpha$، ملاحظه می‌کنیم که (۸۱.۴) به صورت

$$a^\alpha b^\beta \leq \alpha a + \beta b \tag{۴.۸۲}$$

درمی‌آید که در آن a و b اعداد مثبتی هستند و α و β در شرایط $0 < \alpha < 1$، $0 < \beta < 1$، و $\alpha + \beta = 1$ صدق می‌کنند. [توجه کنید که نامساوی اکید در (۸۲.۴) فقط و فقط وقتی برقرار است که $a \neq b$.]

۱۰. فرض کنید $0 < x$ و a و b مثبت باشند و $a \neq b$. آن‌گاه

$$\left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{b+x} > \left(\frac{a}{b}\right)^b \tag{۴.۸۲}$$

در واقع، مشتقگیری از تابع

$$h(x) = \left(\frac{a+x}{b+x}\right)^{b+x}, \quad x > 0$$

مستلزم

$$h'(x) = g(x)h(x) \tag{۴.۸۳}$$

است که در آن

$$g(x) = \frac{b-a}{a+x} + \ln\frac{a+x}{b+x}$$

علامت $h'(x)$ با علامت $g(x)$ یکی است. چون

$$g'(x) = -\frac{(a-b)^{2}}{(a+x)^{2}(b+x)} < 0$$

تابع g نزولی است و، از این رو،

$$g(x) > g(+\infty) = 0, \qquad x > 0 \quad \text{برای} \qquad (۸۵.۴)$$

از (۸۴.۴) و (۸۵.۴) نتیجه می‌گیریم که تابع h صعودی است و، بنابراین، (۸۳.۴) برقرار است.

تبصره. با انتخاب $x = a$ در (۸۳.۴)، خواهیم داشت:

$$\left(\frac{2a}{a+b}\right)^{b+a} > \left(\frac{a}{b}\right)^{b}$$

یا

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b} < a^a b^b, \qquad a \neq b \quad \text{برای} \qquad (۸۶.۴)$$

که در آن a و b مثبت فرض می‌شوند.

۱۱. فرض کنید a و b دو عدد حقیقی مثبت باشند و $a \neq b$. آن‌گاه

$$a^b b^a < \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b} < a^a b^b \qquad (۸۷.۴)$$

در واقع، با عنایت به (۸۶.۴) فقط تحقیق در برقراری حکم زیر باقی می‌ماند:

$$a^b b^a < \left(\frac{a+b}{2}\right)^{a+b} \qquad (۸۸.۴)$$

با جایگزینی

$$\beta = \frac{a}{a+b}, \qquad \alpha = \frac{b}{a+b}$$

در (۸۲.۴) و یادآوری این نکته که $a \neq b$، ملاحظه می‌کنیم که

$$a^b b^a < \left(\frac{۲ab}{a+b}\right)^{a+b}$$

امّا، به استناد (۶۲.۴) و (۶۳.۴)،

$$\frac{۲ab}{a+b} = \frac{۲}{۱/a + ۱/b} < \sqrt{ab} < \frac{a+b}{۲}, \qquad a \neq b$$

به این ترتیب،

$$\left(\frac{۲ab}{a+b}\right)^{a+b} < \left(\frac{a+b}{۲}\right)^{a+b}$$

و (۸۸.۴) نتیجه می‌شود.

۱۲. نامساوی

(۸۹.۴) $$x(\ln x) \geq x - ۱, \qquad x > ۰ \qquad \text{برای}$$

ایجاب می‌کند که نامساوی

(۹۰.۴) $$\sum_{i=۱}^{n} p_i(\ln p_i) \geq \sum_{i=۱}^{n} p_i(\ln q_i)$$

به‌ازای $p_i > ۰$، $q_i > ۰$ $(i = ۱, ۲, \ldots, n)$ و شرط

$$\sum_{i=۱}^{n} p_i = \sum_{i=۱}^{n} q_i$$

برقرار باشد. در واقع، چون $p_i/q_i > ۰$، از (۸۹.۴) درمی‌یابیم که

$$\frac{p_i}{q_i} \ln \frac{p_i}{q_i} \geq \frac{p_i}{q_i} - ۱$$

یا

$$p_i \ln \frac{p_i}{q_i} \geq p_i - q_i$$

زیرا $q_i > ۰$. به این ترتیب،

$$\sum_{i=۱}^{n} p_i \ln \frac{p_i}{q_i} \geq \sum_{i=۱}^{n} (p_i - q_i) = ۰$$

یا

$$\sum_{i=۱}^{n} [p_i(\ln p_i) - p_i(\ln q_i)] \geq ۰$$

امّا، نامساوی اخیر مستلزم (۹۰.۴) است.

ملاحظات. فرض کنید a و b اعداد حقیقی مثبت باشند. نامساوی $a^b b^a \leq a^a b^b$ معادل است با

$$b(\ln a) + a(\ln b) \leq a(\ln a) + b(\ln b) \qquad (۹۱.۴)$$

و نامساوی $[(a+b)/۲]^{a+b} \leq a^a b^b$ معادل است با

$$(a+b)\ln\frac{a+b}{۲} \leq a(\ln a) + b(\ln b) \qquad (۹۲.۴)$$

به طور آشکار، نامساویهای (۹۱.۴) و (۹۲.۴) نتایج مستقیم نامساوی (۹۰.۴) می‌باشند و، بنابراین، قسمت عمده‌ای از نامساوی (۸۷.۴) می‌تواند با استفاده از نامساوی (۹۰.۴) محقق شود. یادآوری می‌کنیم که نامساوی (۸۹.۴) نتیجهٔ ساده‌ای از نامساوی (۳.۱) فصل اول است.

۱۳. فرض کنید $[a,b]$ بازهٔ بسته‌ای با طول متناهی باشد و f تابع پیوسته‌ای بر $[a,b]$ باشد. فرض کنید که به‌ازای هر x بین a و b،

$$\lim_{h\to ۰}\frac{f(x+h)+f(x-h)-۲f(x)}{h^۲} = ۰$$

آن‌گاه، به‌ازای اعداد مناسبی مانند A و B، $f(x) = Ax + B$.

در واقع، فرض کنید c نقطه‌ای بین a و b باشد. قرار می‌دهیم

$$Q(x) = \frac{(x-b)(x-c)}{(a-b)(a-c)}f(a) + \frac{(x-c)(x-a)}{(b-c)(b-a)}f(b) + \frac{(x-a)(x-b)}{(c-a)(c-b)}f(c)$$

به وضوح، $Q(a) = f(a)$، $Q(b) = f(b)$، و $Q(c) = f(c)$. قرار می‌دهیم

$$g(x) = Q(x) - f(x), \qquad a \leq x \leq b$$

آن‌گاه $g(a) = g(b) = g(c) = ۰$. به طور آشکار، g بر $[a,b]$ پیوسته است. از این رو، به استناد قضیهٔ ۱۳.۳، نقاطی مانند S و s بین a و b موجودند به طوری که g بزرگترین و کوچکترین مقادیر خود را، به ترتیب، در S و s اختیار می‌کند؛ اگر اتفاقاً یکی از این نقاط بر نقطهٔ انتهایی a یا نقطهٔ انتهایی b منطبق شود، آن را مساوی c قرار می‌دهیم تا از این طریق S و s همیشه بین a و b واقع شوند.

امّا، وقتی $a < x < b$ و $h \longrightarrow ۰$، داریم:

$$\lim_{h\to ۰}\frac{g(x+h)+g(x-h)-۲g(x)}{h^۲} = \lim_{h\to ۰}\frac{Q(x+h)+Q(x-h)-۲Q(x)}{h^۲}$$

$$= \frac{۲f(a)}{(a-b)(a-c)} + \frac{۲f(b)}{(b-c)(b-a)} = K$$

از این رو، همچنین، داریم:

$$\lim_{h\to ۰} \frac{g(S+h)+g(S-h)-۲g(S)}{h^۲} = K$$

و

$$\lim_{h\to ۰} \frac{g(s+h)+g(s-h)-۲g(s)}{h^۲} = K$$

امّا

$$g(S+h) \le g(S), \quad g(S-h) \le g(S)$$

و

$$g(s+h) \ge g(s), \quad g(s-h) \ge g(s)$$

این بدان معنی است که عدد K الزاماً نامثبت و، در عین حال، نامنفی است. بنابراین، $K = ۰$ و

$$f(c) = \frac{b-c}{b-a}f(a) + \frac{c-a}{b-a}f(b)$$

معذالک، c نقطهٔ دلخواهی بین a و b بود. بعلاوه، اگر c با a یا b تعویض شود، معادلهٔ $g = Q - f$ به قوت خود باقی می‌ماند. از این رو، در کل بازه،

$$f(x) = \frac{b-x}{b-a}f(a) + \frac{x-a}{b-a}f(b)$$

و دیده می‌شود که f به صورت $f(x) = Ax + B$ است.

۱۴. فرض کنید w تابع پیوسته‌ای بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ با طول متناهی باشد. فرض کنید که مشتق دوّم w در هر نقطهٔ بازهٔ باز (a, b) موجود باشد. در این صورت، به‌ازای نقطه‌ای مانند c بین a و b،

$$\frac{\frac{w(x)-w(a)}{x-a} - \frac{w(b)-w(a)}{b-a}}{x-b} = \frac{۱}{۲}w''(c)$$

در واقع، فرض کنید x نقطهٔ ثابتی باشد که $a < x < b$. قرار دهید

$$v(t) = \begin{vmatrix} w(t) & t^۲ & t & ۱ \\ w(x) & x^۲ & x & ۱ \\ w(a) & a^۲ & a & ۱ \\ w(b) & b^۲ & b & ۱ \end{vmatrix}$$

آن‌گاه $v(a) = v(x) = v(b) = 0$. به استناد قضیهٔ مقدار میانگین (قضیهٔ ۵.۴)، اعدادی مانند α و β موجودند به طوری که $a < \alpha < x < \beta < b$ و $v'(\alpha) = v'(\beta) = 0$. با اعمال مجدد قضیهٔ مقدار میانگین، ملاحظه می‌کنیم که عددی مانند c موجود است به طوری که $\alpha < c < \beta$ و $v''(c) = 0$. به طور آشکار، c بین a و b است. حال،

$$v''(c) = \begin{vmatrix} w''(t) & 2 & 0 & 0 \\ w(x) & x^2 & x & 1 \\ w(a) & a^2 & a & 1 \\ w(b) & b^2 & b & 1 \end{vmatrix} = 0$$

از بسط این دترمینان برحسب سطر اول، رابطهٔ مطلوب به دست می‌آید.

۱۵. نامساوی برنولی. اگر $x > -1$، $x \neq 0$، و n عدد صحیح مثبتی بزرگتر از واحد باشد، آن‌گاه

$$(1 + x)^n > 1 + nx \qquad (۴.۹۳)$$

در این جا، تعمیم زیر از نامساوی برنولی را بررسی می‌کنیم.

فرض کنید α عدد حقیقی ثابتی مخالف ۰ و ۱ باشد. اگر $x > -1$ و $x \neq 0$، آن‌گاه

$$(1 + x)^\alpha > 1 + \alpha x, \quad \alpha < 0 \text{ یا } \alpha > 1 \quad \text{در صورتی که} \qquad (۴.۹۴)$$

و

$$(1 + x)^\alpha < 1 + \alpha x, \quad 0 < \alpha < 1 \quad \text{در صورتی که} \qquad (۴.۹۵)$$

در واقع، به‌ازای $x > -1$، فرض کنید $f(x) = (1 + x)^\alpha - (1 + \alpha x)$. آن‌گاه

$$f'(x) = \alpha(1 + x)^{\alpha-1} - \alpha \quad \text{و} \quad f''(x) = \alpha(\alpha - 1)(1 + x)^{\alpha-2}$$

فرض کنید $\alpha < 0$ یا $\alpha > 1$. در این صورت، f بر $(-1, \infty)$ مقعر به بالا است. بعلاوه، f بر $(-1, 0)$ نزولی و بر $(0, \infty)$ صعودی است. چون $f(0) = 0$، نتیجه می‌شود که $f(x) > 0$ هرگاه که $x > -1$ و $x \neq 0$. به این ترتیب (۹۴.۴) نتیجه می‌شود. در حالتی که $0 < \alpha < 1$، f بر $(-1, \infty)$ مقعر به پایین است. بعلاوه، f بر $(-1, \infty)$ صعودی و بر $(0, \infty)$ نزولی است و $f(0) = 0$. از این رو، $f(x) < 0$ هرگاه که $x > -1$ و $x \neq 0$؛ و (۹۵.۴) نتیجه و برهان تمام می‌شود.

تبصره. گاهی نامساوی برنولی را به صورت زیر بیان می‌کنند: اگر n عدد صحیح مثبتی بزرگتر از واحد باشد، آن‌گاه

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_n) > 1+x_1+x_2+\cdots+x_n \qquad (۹۶.۴)$$

مشروط به این که هر یک از اعداد x_1، x_2، . . . ، x_n مخالف صفر و بزرگتر از ۱− باشد و علامت همهٔ اعداد x_1، x_2، . . . ، x_n یکی باشد.

در واقع، از فرض استقرای

$$(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k) > 1+x_1+x_2+\cdots+x_k$$

به آسانی می‌توان دید که

$$\begin{aligned}&(1+x_1)(1+x_2)\ldots(1+x_k)(1+x_{k+1})\\ >&1+(x_1+x_2+\cdots+x_k)+x_{k+1}+(x_1+x_2+\cdots+x_k)x_{k+1}\\ >&1+(x_1+x_2+\cdots+x_k+x_{k+1})\end{aligned}$$

زیرا $(x_1+x_2+\cdots+x_k)x_{k+1} > 0$. بقیهٔ برهان استقرایی (۹۶.۴)، یعنی برقراری آن به‌ازای $n=2$، بدیهی است.

۱۶. فرض کنید $y=(1+2x-\sqrt{1+4x})/2$. این تابع بر $[-1/4,\infty)$ تعریف شده و دارای مشتق $y'=1-1/\sqrt{1+4x}$ است. از این رو، تابع

$$f(x)=\frac{1+2x-\sqrt{1+4x}}{2}, \qquad x\in[0,\infty)$$

صعودی است و دارای تابع معکوس f^{-1} است. تحقیق کنید که

$$f^{-1}(x)=x+\sqrt{x}, \qquad x\in[0,\infty)$$

در واقع، با تعویض x و y، داریم:

$$x=\frac{1+2y-\sqrt{1+4y}}{2} \qquad (۹۷.۴)$$

برای حل معادلهٔ (۹۷.۴) بر حسب y، ملاحظه می‌کنیم که

$$\frac{۱ + ۲y - \sqrt{۱ + ۴y}}{۲} = \left(\frac{\sqrt{۱ + ۴y} - ۱}{۲}\right)^{۲}$$

بنابراین

$$x + \sqrt{x} = \frac{۱ + ۲y - \sqrt{۱ + ۴y}}{۲} + \frac{\sqrt{۱ + ۴y} - ۱}{۲} = y$$

تبصره. توجه کنید که تابع $y = (۱ + ۲x - \sqrt{۱ + ۴x})/۲$ بر بازهٔ $(-۱/۴, ۰)$ نزولی است. در حالی که $y = (۱ + ۲x - \sqrt{۱ + ۴x})/۲$ بر $[-۱/۴, \infty)$ تعریف شده است، بر همهٔ $[-۱/۴, \infty)$ معکوس‌پذیر نیست. (قضیهٔ ۱۸.۲ را ببینید.)

۱۷. چندجمله‌ای

$$P(x) = ۱ + \frac{x}{۱} + \frac{x^{۲}}{۱ \cdot ۲} + \cdots + \frac{x^n}{n!}$$

ریشهٔ مکرر ندارد.

در واقع، هر ریشهٔ مکرر چندجمله‌ای $P(x)$ باید یک ریشهٔ مشتق خود

$$P'(x) = ۱ + \frac{x}{۱} + \cdots + \frac{x^{n-۱}}{(n-۱)!} = P(x) - \frac{x^n}{n!}$$

نیز باشد. از این رو، اگر $P(x_۰) = P'(x_۰) = ۰$، آن‌گاه $x_۰ = ۰$، ولی ۰ ریشهٔ $P(x) = ۰$ نیست.

۱۸. فرض کنید f یک چندجمله‌ای از درجهٔ n باشد. اگر $f(a) > ۰$، $f'(a) \geq ۰$، ... ، $f^{(n)}(a) \geq ۰$، آن‌گاه هیچ ریشهٔ حقیقی f بزرگتر از a نیست.

در واقع، پس از بسط $f(x)$ برحسب قوای $x - a$، به‌ازای $x \geq a$، خواهیم داشت:

$$f(x) = f(a) + \frac{f'(a)}{۱!}(x-a) + \frac{f''(a)}{۲!}(x-a)^{۲} + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n > ۰$$

۱۹. فرض کنید که، به ازای $k = ۱, ۲, \ldots, n$، $c_k > ۰$ و $c_۱ + c_۲ + \cdots + c_n = ۱$. آن‌گاه

$$\sum_{k=۱}^{n} \left(c_k + \frac{۱}{c_k}\right)^{۲} \geq \frac{(۱ + n^{۲})^{۲}}{n} \qquad (۹۸.۴)$$

در واقع، اگر در نامساوی کوشی ـ شوارتز [(۴۳.۱) فصل اول را ببینید.]

$$\left(\sum_{k=1}^{n} a_k b_k\right)^2 \leq \left(\sum_{k=1}^{n} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{n} b_k^2\right)$$

قرار دهیم $a_k = 1$ و $b_k = c_k + 1/c_k$، خواهیم داشت:

$$\left(\sum_{k=1}^{n}\left(c_k + \frac{1}{c_k}\right)\right)^2 \leq n\sum_{k=1}^{n}\left(c_k + \frac{1}{c_k}\right)^2$$

امّا

$$\sum_{k=1}^{n}\left(c_k + \frac{1}{c_k}\right) = \sum_{k=1}^{n} c_k + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k} = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k}$$

به استناد (۶۲.۴) و (۶۳.۴)، میانگین حسابی بزرگتر از یا مساوی میانگین همساز اعداد $1/c_1$، $1/c_2$، ...، $1/c_n$ است؛ یعنی،

$$n^2 \leq \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k} \quad \text{یا} \quad \frac{n}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k}$$

از این رو،

$$\sum_{k=1}^{n}\left(c_k + \frac{1}{c_k}\right) = 1 + \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{c_k} \geq 1 + n^2$$

و، بنابراین،

$$\sum_{k=1}^{n}\left(c_k + \frac{1}{c_k}\right)^2 \geq \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n}\left(c_k + \frac{1}{c_k}\right)\right)^2 \geq \frac{1}{n}(1 + n^2)^2$$

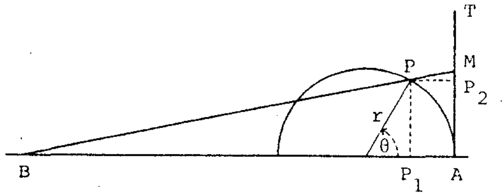
۲۵. دایرهٔ به مرکز O، شعاع r، که خط AT برآن مماس است، مفروض می‌باشد. در شکل ۱۷.۴، AM مساوی کمان AP است و B نقطهٔ تقاطع خطی است که از M و P می‌گذرد با خطی که از A و O می‌گذرد. مکان حدی B را در حالتی بیابید که P به A، به‌عنوان یک مکان حدی، میل کند.

فرض کنید $\theta = \angle POA$، $PP_1 \perp OA$، و $PP_2 \perp MA$. (شکل ۱۷.۴ را ببینید.) $\widehat{AP} = r\theta = AM$، و، چون مثلثهای MAB و MP_2P متشابهند،

$$\frac{AB}{AM} = \frac{PP_2}{P_2M}$$

امّا، $PP_2 = OA - OP_1 = r - r\cos\theta$ و $P_2M = AM - P_2A = AM - P_1P = r\theta - r\sin\theta$.

به این ترتیب،

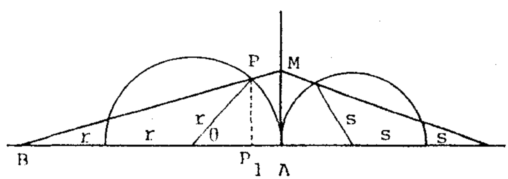


شکل ۱۷.۴

$$AB = AM\frac{PP_۲}{P_۲M} = r\frac{\theta - \theta\cos\theta}{\theta - \sin\theta}$$

اگر P به A میل کند، $\theta \longrightarrow ۰$. اگر در عبارتی که برای AB به دست آورده‌ایم $\theta \longrightarrow ۰$، یک صورت مبهم پیش می‌آید. با استفاده از قاعدهٔ لوپیتال (قضیهٔ ۱۰.۴)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\lim_{P\to A} AB &= r\lim_{\theta\to ۰}\frac{\theta - \theta\cos\theta}{\theta - \sin\theta} = r\lim_{\theta\to ۰}\frac{۱ - \cos\theta + \theta\sin\theta}{۱ - \cos\theta}\\ &= r\lim_{\theta\to ۰}\frac{۲\sin\theta + \theta\cos\theta}{\sin\theta} = r\lim_{\theta\to ۰}\frac{۳\cos\theta - \theta\sin\theta}{\cos\theta} = ۳r\end{aligned}$$



شکل ۱۸.۴

تبصره. در شکل ۱۸.۴، فرض کنید $AB = ۳r$ و $\angle AOP \leq \pi/۳$. در این صورت، خطی که از نقاط B و P می‌گذرد مماس بر دایره در A را در چنان نقطه‌ای مانند M قطع می‌کند که قطعهٔ AM از مماس و کمان AP از دایره تقریباً با هم برابرند. حال، $PP_۱ = r\sin\theta$ و $OP_۱ = r\cos\theta$. بنابراین،

درمی‌یابیم که $\theta = \angle AOP$ تقریباً مساوی $(۳\sin\theta)/(۲+\cos\theta)$ است که تقریبی است منسوب به عالم قرن پانزدهم میلادی، کاردینال نیکولاس کازانوس. به‌ازای $\theta = \pi/۳$، کمان AP فقط در حدود ۰٫۸ درصد r از قطعهٔ AM کوچکتر است. این که θ تقریباً مساوی $(۳\sin\theta)/(۲+\cos\theta)$ است، البته، نتیجهٔ تشابه مثلثهای $BP_۱P$ و BAM است. شکل ۱۸.۴ همچنین نشان می‌دهد که چگونه می‌توان کمانهای تقریباً مساوی بر دو دایره با شعاعهای متفاوت r و s اندازه‌گیری کرد.

۲۱. به‌ازای $x \neq ۱$، داریم:

$$\begin{aligned} Q_n &= ۱^۲ + ۲^۲x + ۳^۲x^۲ + \cdots + n^۲x^{n-۱} \\ &= \frac{۱ + x - (n+۱)^۲x^n + (۲n^۲ + ۲n - ۱)x^{n+۱} - n^۲x^{n+۲}}{(۱-x)^۳} \end{aligned}$$

در واقع، به‌ازای $x \neq ۱$، فرض کنید

$$T_n = ۱ + x + x^۲ + x^۳ + \cdots + x^n$$

آن‌گاه

$$T_n = \frac{۱ - x^{n+۱}}{۱ - x}$$

و

$$\frac{d}{dx}(T_n) = ۱ + ۲x + ۳x^۲ + \cdots + nx^{n-۱} = \frac{۱ - (n+۱)x^n - nx^{n+۱}}{(۱-x)^۲} = S_n$$

و

$$Q_n = \frac{d}{dx}(xS_n) = \frac{۱ + x - (n+۱)^۲x^n + (۲n^۲ + ۲n - ۱)x^{n+۱} - n^۲x^{n+۲}}{(۱-x)^۳}$$

۲۲. به‌ازای $x \neq ۰$، داریم:

$$\frac{۱}{۲}\tan\frac{x}{۲} + \frac{۱}{۴}\tan\frac{x}{۴} + \cdots + \frac{۱}{۲^n}\tan\frac{x}{۲^n} = \frac{۱}{۲^n}\tan\frac{x}{۲^n} - \cot x$$

در واقع، به‌ازای $x \neq ۰$،

$$\sin x = ۲\left(\cos\frac{x}{۲}\right)\left(\sin\frac{x}{۲}\right) = ۲^۲\left(\cos\frac{x}{۲}\right)\left(\cos\frac{x}{۴}\right)\left(\sin\frac{x}{۴}\right)$$

$$= \cdots = ۲^n \left(\cos \frac{x}{۲}\right) \left(\cos \frac{x}{۴}\right) \cdots \left(\cos \frac{x}{۲^n}\right) \left(\sin \frac{x}{۲^n}\right)$$

بنابراین،

$$\left(\cos \frac{x}{۲}\right) \left(\cos \frac{x}{۲^۲}\right) \cdots \left(\cos \frac{x}{۲^n}\right) = \frac{\sin x}{۲^n \sin(x/۲^n)}$$

یا

$$\ln \left(\cos \frac{x}{۲}\right) + \ln \left(\cos \frac{x}{۲^۲}\right) + \cdots + \ln \left(\cos \frac{x}{۲^n}\right) = \ln(\sin x) - \ln ۲^n - \ln \left(\sin \frac{x}{۲^n}\right)$$

با مشتقگیری از طرفین این تساوی، حکم مطلوب نتیجه می‌شود.

۲۳. فرض کنید f چنان باشد که $f''(x)$ در (a,b) موجود باشد و $f'(a) = f'(b) = ۰$. در این صورت، نقطه‌ای مانند c وجود دارد که $a < c < b$ و

$$|f''(c)| \geq \frac{۴}{(b-a)^۲}|f(b) - f(a)|$$

در واقع، چون $f'(a) = f'(b) = ۰$، به استناد قضیهٔ ۱۱.۴،

$$f\left(\frac{a+b}{۲}\right) = f(a) + \frac{f''(x_۱)}{۲!}\left(\frac{b-a}{۲}\right)^۲$$

و

$$f\left(\frac{a+b}{۲}\right) = f(b) + \frac{f''(x_۲)}{۲!}\left(\frac{b-a}{۲}\right)^۲$$

که در آنها $x_۱$ بین a و $(a+b)/۲$ و $x_۲$ بین $(a+b)/۲$ و b است. امّا،

$$\begin{aligned} |f(b) - f(a)| &\leq \left|f(b) - f\left(\frac{a+b}{۲}\right)\right| + \left|f\left(\frac{a+b}{۲}\right) - f(a)\right| \\ &\leq \left(\frac{b-a}{۲}\right)^۲ \left(\frac{۱}{۲!}\right) [|f''(x_۱)| + |f''(x_۲)|] \end{aligned}$$

اگر $|f''(c)|$ بزرگترین اعداد $|f''(x_۱)|$ و $|f''(x_۲)|$ باشد، آن‌گاه

$$\frac{۱}{۲}[|f''(x_۱)| + |f''(x_۲)|] \leq |f''(c)|$$

و مورد ادعّا فوراً نتیجه می‌شود.

۲۴. فرض کنید $b > a > ۰$. آن‌گاه، $b \le e$ مستلزم $a^b < b^a$ و $a \ge e$ مستلزم $a^b > b^a$ است.

در واقع، $a^b < b^a$ فقط و فقط وقتی که $(\ln a)/a < (\ln b)/b$، و این نامساوی در صورتی درست است که رابطهٔ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \frac{۱ - \ln x}{x^۲} > ۰$$

در سرتاسر (a, b) برقرار باشد، و این در صورتی برقرار است که $b \le e$. به طور مشابه، $a^b > b^a$ در صورتی که رابطهٔ

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\ln x}{x}\right) = \frac{۱ - \ln x}{x^۲} < ۰$$

در سرتاسر (a, b) برقرار باشد، و این در صورتی برقرار است که $a \ge e$.

تبصره. اگر $a < e < b$، چه می‌شود؟ با انتخاب $a = ۲$ و $b = ۳$، داریم: $a^b < b^a$؛ اگر $a = ۲$ و $b = ۴$، آن‌گاه $a^b = b^a$؛ در حالی که اگر $a = ۲$ و $b = ۵$، آن‌گاه $a^b > b^a$.

۲۵. قاعدهٔ اجزای متناسب. اگر $a < b < c$ و مقادیر تابع f در نقاط a و c جدولبندی شده باشند، قاعدهٔ اجزای متناسب، این است که: تقریباً

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{c-a}(f(c) - f(a))$$

به عبارت دیگر، وتر واصل نقاط $(a, f(a))$ و $(c, f(c))$ را جایگزین کمانی از منحنی $y = f(x)$ می‌کنیم که متناظر بازهٔ $[a, c]$ است.

برای دستیابی به کران بالایی برای خطا، فرض کنید f بر بازهٔ بستهٔ $[a, c]$ پیوسته باشد و f در هر نقطهٔ بازهٔ باز (a, c) مشتق دوم داشته باشد. با اعمال قضیهٔ مقدار میانگین (قضیهٔ ۵.۴) در مورد تابع

$$g(x) = \begin{vmatrix} f(x) & x^۲ & x & ۱ \\ f(a) & a^۲ & a & ۱ \\ f(b) & b^۲ & b & ۱ \\ f(c) & c^۲ & c & ۱ \end{vmatrix}$$

خواهیم داشت:

$$f(b) - f(a) = \frac{b-a}{c-a}(f(c) - f(a)) + \frac{۱}{۲}(b-a)(b-c)f''(s)$$

که در آن $a < s < c$. (جزئیات برهان کاملاً شبیه جزئیات برهان مثال ۱۴ همین بخش است.)

سپس، توجه می‌کنیم که $b-a$ و $c-b$ مثبت هستند و حاصل جمع

$$(b-a)+(c-b)=c-a$$

مستقل از b است. اما حاصل ضرب $(b-a)(c-b)$ وقتی بیشترین مقدار ممکن را دارد که

$$b-a=c-b=\frac{c-a}{۲}$$

(مسألهٔ اوّل از مسائل حل شده و توضیحات متعاقب قضیهٔ ۱۸.۴ را ملاحظه کنید.) به این ترتیب،

$$|(b-a)(c-b)| \leq \frac{(c-a)^{۲}}{۴}$$

از این رو، خطای ناشی از این فرض که وقتی x از a تا c صعود کند، افزایش $f(x)$ متناسب افزایش x است، از $\frac{۱}{۸}(c-a)^{۲}M$ تجاوز نمی‌کند، که در آن $M=\sup\{|f''(x)| : a \leq x \leq c\}$.

۲۶. فرض کنید f و g توابع پیوسته‌ای بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ با طول متناهی باشند و هر دو بر بازهٔ باز (a,b) مشتق‌پذیر باشند. بعلاوه، اگر $g'(t)$ در هیچ نقطه‌ای مانند t از (a,b) صفر نشود، آن‌گاه به‌ازای نقطه‌ای مانند x از (a,b)،

$$\frac{f(b)-f(a)}{g(b)-g(a)}=\frac{f'(x)}{g'(x)} \qquad (۹۹.۴)$$

قبلاً در بخش سوم قضیهٔ ۹.۴ با این حکم مواجه شده‌ایم. هدف فعلی این است که نشان بدهیم که فرمول (۹۹.۴) نمونه‌ای از کاربرد قضیهٔ مقدار میانگین (قضیهٔ ۸.۴) در مورد ترکیبی از توابع است.

در واقع، اگر G تابعی باشد بر $[\alpha,\beta]$ پیوسته، بر (α,β) مشتق‌پذیر، با مشتقی ناصفر بر (α,β)، آن‌گاه، چون $D_t f[G(t)] = f'[G(t)]G'(t)$، به استناد قضیهٔ ۸.۴، نقطه‌ای مانند γ در (α,β) موجود است به طوری که

$$\frac{f[G(\beta)]-f[G(\alpha)]}{\beta-\alpha}=f'[G(\gamma)]G'(\gamma) \qquad (۱۰۰.۴)$$

چون $G'(t)\neq ۰$ بر (α,β)، به استناد قضیهٔ ۸.۴، ملاحظه می‌کنیم که علامت $G'(t)$ ثابت است و، بنابراین، G تابع معکوس مشتق‌پذیری مانند g دارد، مثلاً، به صورتی که $G'(t)=۱/g'[G(t)]$. با انتخاب a، b، x برای $G(\alpha)$، $G(\beta)$، $G(\gamma)$، که آن‌گاه، $\alpha = g(a)$ و $\beta = g(b)$، ملاحظه می‌کنیم که معادلهٔ (۱۰۰.۴) به صورت معادلهٔ (۹۹.۴) درمی‌آید.

۲۷. فرض کنید f و g توابع پیوسته‌ای بر بازهٔ بستهٔ $[\alpha, b]$ با طول متناهی باشند و هر دو n بار بر (α, b) مشتق‌پذیر باشند. بعلاوه، فرض کنید

$$f^{(k)}(\alpha) = g^{(k)}(\alpha) = ۰, \qquad ۱ \leq k < n$$

و

$$|f^{(k)}(t)| > ۰, \qquad ۱ \leq k \leq n \qquad \text{بر} \qquad [\alpha, b]$$

در این صورت، اگر $\alpha \leq a < b$، نقطه‌ای مانند x در (α, b) می‌توان یافت به طوری که

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

در واقع، به استناد (۹۹.۴)، نقاطی مانند $x_۱$، $x_۲$، $\ldots$ ، $x_{n-۱}$، x، به نوبت، می‌توان یافت که

$$\frac{f(b) - f(a)}{g(b) - g(a)} = \frac{f'(x_۱)}{g'(x_۱)}$$

و

$$\frac{f'(x_۱)}{g'(x_۱)} = \frac{f'(x_۱) - f'(\alpha)}{g'(x_۱) - g'(\alpha)} = \frac{f''(x_۲)}{g''(x_۲)} = \cdots = \frac{f^{(n-۱)}(x_{n-۱})}{g^{(n-۱)}(x_{n-۱})}$$
$$= \frac{f^{(n-۱)}(x_{n-۱}) - f^{(n-۱)}(\alpha)}{g^{(n-۱)}(x_{n-۱}) - g^{(n-۱)}(\alpha)} = \frac{f^{(n)}(x)}{g^{(n)}(x)}$$

که برهان را کامل می‌کند.

۲۸. **فرمول هویگنس.** اگر A طول وتر کمانی مستدیر باشد و B طول وتر نیمی از آن کمان، آن‌گاه، طول L کمان مفروض تقریباً برابر است با

$$\frac{۸B - A}{۳}$$

در واقع، اگر α زاویهٔ مرکزی کمان مفروض و R شعاع دایره باشد، به استناد قانون کسینوس،

$$A^۲ = R^۲ + R^۲ - ۲R^۲ \cos\alpha$$

امّا، $۱ - \cos\alpha = ۲\sin^۲(\alpha/۲)$؛ بنابراین،

$$A = ۲R\sin\frac{\alpha}{۲}$$

واضح است که $B = ۲R\cos(\alpha/۴)$ و، بنابراین،

$$\frac{۸B - A}{۳} = \frac{R}{۳}\left(۱۶\sin\frac{\alpha}{۴} - ۲\sin\frac{\alpha}{۲}\right) = R\alpha + \lambda\alpha^۵$$

که در آن λ یک عامل متناهی است، و چند جمله‌ای تیلور از مرتبهٔ ۵ جایگزین تابع سینوس شده است؛ و $L = R\alpha$.

تبصره. تقریب بهتری برای طول L کمانی مستدیر از فرمول

$$\frac{۱}{۴۵}(A + ۲۵۶C - ۴۰B) \tag{۴. ۱۰۱}$$

به دست می‌آید که در آن A طول وتر کمان مستدیر مفروض است، B طول وتر نیمی از کمان، و C طول وتر چارک کمان.

تمرینات فصل چهارم

۱.۴. اگر f دارای n ریشه در $[a,b]$ باشد، نشان دهید که $f^{(n-۱)}$ حداقل یک ریشه در این بازه دارد.
راهنمایی: به استناد قضیه‌ی رُل (قضیهٔ ۳.۴)، f' حداقل یک ریشه بین هر دو ریشهٔ f دارد. بنابراین، f' حداقل $n - ۱$ ریشه دارد، f'' حداقل $n - ۲$ ریشه دارد، f''' حداقل $n - ۳$ ریشه دارد، و هکذا.

۲.۴. اگر $f(a) = f(b) = ۰$ و $f''(x) \neq ۰$ بر (a,b)، نشان دهید که $f(x) \neq ۰$ بر (a,b).
راهنمایی: به‌ازای $a < x < b$، فرض کنید

$$g(t) = f(x)(t-a)(t-b) - f(t)(x-a)(x-b)$$

آن‌گاه، g در نقاط $t = a$، $t = x$، و $t = b$ صفر می‌شود. در این صورت، به استناد قضیهٔ رُل، g' بین a و x و، مجدداً، بین x و b صفر می‌شود. از این رو، g'' (حداقل) در نقطه‌ای مانند c از (a,b) صفر می‌شود. امّا، $g''(t) = ۲f(x) - (x-a)(x-b)f''(t)$ و، بنابراین، $f(x) = \frac{۱}{۲}(x-a)(x-b)f''(c)$، که نشان می‌دهد که $f(x) \neq ۰$؛ زیرا $f''(c) \neq ۰$.

۳.۴. اگر $a < b < c$، $a + b + c = ۲$، و $ab + bc + ca = ۱$، نشان دهید که a، b، و c، به ترتیب، در بازه‌های $(۰, ۱/۳)$، $(۱/۳, ۱)$، و $(۱, ۴/۳)$ واقع می‌شوند.

راهنمایی: اعداد a، b، و c ریشه‌های چندجمله‌ای درجهٔ سهٔ

$$f(t) = t^{3} - 2t^{2} + t - abc = t(t-1)^{2} - abc$$

می‌باشند. امّا، $f'(t) = (3t-1)(t-1)$ و، بنابر قضیهٔ رُل، ریشه‌ای از f' بین دو ریشهٔ f واقع می‌شود و، بنابراین، $a < \frac{1}{3} < b < 1 < c$.

چون $f(c) = 0$، $ab = (c-1)^{2}$؛ در این صورت، $a > 0$ و $f(0) = -abc < 0$. چون $f'(1/3) = 0$، $f(t) - f(1/3)$ دارای عامل $(t-\frac{1}{3})^{2}$ است و چون حاصل جمع ریشه‌های معادلهٔ $f(t) - f(1/3) = 0$ مساوی ۲ است، ریشهٔ سوم عبارت است از $t = 4/3$. به این ترتیب، $f(t) = (t-\frac{4}{3})(t-\frac{1}{3})^{2} + f(\frac{1}{3})$. فقط یک ریشهٔ $f(t) = 0$ بین 0 و $\frac{1}{3}$ واقع می‌شود و $f(0) < 0$؛ بنابراین، $f(\frac{1}{3}) > 0$. امّا $f(c) = 0$ و، از این رو، $(c-\frac{4}{3})(c-\frac{1}{3})^{2} = -f(\frac{1}{3}) < 0$. لذا، $c < \frac{4}{3}$.

۴.۴. فرض کنید $f(0) = a$، $f(a) = b$، $f'(0) = -1$، و بر بازهٔ $[-2a, 2a]$ داشته باشیم $|f''(x)| < 1/4|a|$. نشان دهید که نامساوی $|1 + f'(x)| < \frac{1}{2}$ در $[-2a, 2a]$ برقرار است و، از این رو، نشان دهید که $|f(a+b)| < \frac{1}{2}|f(a)| < \frac{1}{4}|a|$.

راهنمایی: به استناد قضیهٔ مقدار میانگین (قضیهٔ ۵.۴)، به‌ازای $-2a \leq x \leq 2a$،

$$|f'(x) + 1| = |f'(x) - f'(0)| = |xf''(c)| < \frac{2|a|}{4|a|} = \frac{1}{2}$$

چون $f(a) - a = f(a) - f(0) = af'(c)$، به استناد نامساوی بالا،

$$|f(a)| = |a||1 + f'(c)| < \frac{1}{2}|a|$$

بعلاوه، $|a + b| = |a + f(a)| < \frac{3}{2}a$ که، در این صورت، $a+b$ در $[-2a, 2a]$ واقع می‌شود و

$$\begin{aligned} f(a+b) &= f(a) + bf'(\beta), \qquad \beta \in (-2a, 2a) \\ &= f(a)(1 + f'(\beta)) \end{aligned}$$

و، بنابراین، $|f(a+b)| < \frac{1}{2}|f(a)| < \frac{1}{4}|a|$.

۵.۴. فرض کنید f بر $[a, b]$ دوبار مشتق‌پذیر باشد و $f(a) = f(b) = 0$ و به‌ازای نقطه‌ای مانند c که $a < c < b$، داشته باشیم $f(c) > 0$. نشان دهید که حداقل یک مقدار از t بین a و b می‌توان یافت که به‌ازای آن $f''(t) < 0$.

راهنمایی: چون f'' موجود است، f و f' هر دو بر $[a,b]$ پیوسته‌اند. چون c نقطه‌ای بین a و b است، با اعمال قضیهٔ مقدار میانگین در مورد f بر بازه‌های $[a,c]$ و $[c,b]$، به ترتیب، خواهیم داشت:

$$\frac{f(c)-f(a)}{c-a}=f'(t_1), \qquad a<t_1<c$$

و

$$\frac{f(b)-f(c)}{b-c}=f'(t_2), \qquad c<t_2<b$$

ولی $f(a)=f(b)=0$ و، بنابراین،

$$f'(t_1)=\frac{f(c)}{c-a} \quad \text{و} \quad f'(t_2)=-\frac{f(c)}{b-c}$$ ، که در آن $a<t_1<c<t_2<b$.

مجدداً، f' بر $[t_1,t_2]$ پیوسته و مشتق‌پذیر است. از این رو، به استناد قضیهٔ مقدار میانگین،

$$\frac{f'(t_2)-f'(t_1)}{t_2-t_1}=f''(t), \qquad t_1<t<t_2$$

با جایگزینی مقادیر $f(t_1)$ و $f(t_2)$، خواهیم داشت:

$$f''(t)=-\frac{(b-a)f(c)}{(t_2-t_1)(b-c)(c-a)}<0$$

۶.۴. فرض کنید تابع h بر $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد با مشتق مثبت، و $h(a)=0$. فرض کنید تابع مفروض f در بازهٔ $[h(a),h(b)]$ در نامساویهای $a\leq f(x)\leq b$ صدق کند، $f(0)=a$، و $f'(x)=1/h'[f(x)]$. نشان دهید که توابع f و h معکوس یکدیگرند.

راهنمایی: تابع $h[f(x)]$ بر $[h(a),h(b)]$ مشتق‌پذیراست با مشتق $h'[f(x)]f'(x)=1$؛ از این رو، $h[f(x)]-x$ ثابت است. وقتی $x=0$، $h[f(x)]-x=0$؛ بنابراین، $h[f(x)]=x$ به‌ازای هر x از $[h(a),h(b)]$ برقرار است.

۷.۴. اگر $f'(a)=f'(b)=0$ و $f'(x)\neq 0$ بر (a,b)، نشان دهید که $f(a)$ و $f(b)$ نمی‌توانند هر دو ماکسیمم یا هر دو مینیمم باشند.

راهنمایی: به استناد قضیهٔ ۸.۴، علامت f' در (a,b) ثابت است. اگر f' در (a,b) مثبت باشد، $f(a)$ ماکسیمم نیست و $f(b)$ مینیمم نمی‌باشد، یعنی، $f(a)$ و $f(b)$ هر دو ماکسیمم یا هر دو مینیمم نیستند. حکم مشابهی در حالتی که f' در (a,b) منفی باشد برقرار است.

۸.۴. اگر f در $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد و f' فقط در تعدادی متناهی نقطه از $[a,b]$ صفر شود، آن‌گاه بین هر دو نقطهٔ (a,b) که f در آنها ماکسیمم است نقطه‌ای وجود دارد که f در آن مینیمم است، و بین هر دو نقطهٔ مینیمم یک نقطهٔ ماکسیمم موجود است.

راهنمایی: فرض کنید α و β در (a,b) باشند و $f(\alpha)$ و $f(\beta)$ مقادیر ماکسیمم f باشند. فرض کنید α_1،α_2، ... ، α_p نقاطی بین α و β باشند که در آنها $f'(x) = 0$. چون $f(\alpha)$ یک ماکسیمم است، به استناد تمرین ۷.۴، f' در (α, α_1) منفی است و، به طور مشابه، f' در (α_p, β) مثبت است. بعلاوه، علامت f' در هر بازهٔ (α_r, α_{r+1}) ثابت است. فرض کنید ρ کمترین مقدار r باشد که به‌ازای آن f' در (α_r, α_{r+1}) مثبت است. در این صورت، f' در $(\alpha_{\rho-1}, \alpha_\rho)$ منفی و در $(\alpha_\rho, \alpha_{\rho+1})$ مثبت است و، بنابراین، f مینیممی در $x = \alpha_\rho$ دارد.

۹.۴. فرض کنید که a و b دو ریشهٔ حقیقی معادلهٔ $f(x) = 0$ باشند که در آن $f(x)$ یک چندجمله‌ای برحسب x است. نشان دهید که معادلهٔ $f'(x) + f(x) = 0$ حداقل یک ریشهٔ حقیقی بین a و b درد.

راهنمایی: فرض کنید $g(x) = e^x f(x)$ که، در این صورت، $g'(x) = e^x[f'(x) + f(x)]$. چون f در $x = a$ و $x = b$ صفر می‌شود، g نیز چنین است؛ از این رو، به استناد قضیهٔ رُل (قضیهٔ ۳.۴)، g حداقل یک ریشهٔ حقیقی بین a و b دارد. چون $e^x \neq 0$، نتیجه می‌شود که $f'(x) + f(x)$ به‌ازای حداقل یک مقدار حقیقی بین a و b صفر می‌شود.

۱۰.۴. از حکم تمرین ۹.۴ نتیجه بگیرید که اگر a، b، و c ریشه‌هایی حقیقی از معادلهٔ $f(x) = 0$ باشند به طوری که $a < b < c$، آن‌گاه، معادلهٔ $f''(x) + 2f'(x) + f(x) = 0$ حداقل یک ریشهٔ حقیقی داردکه بین a و c واقع است.

۱۱.۴. دامنهٔ مقادیر A را چنان تعیین کنید که معادلهٔ

$$3x^4 - 8x^3 - 6x^2 + 24x + A = 0$$

دارای چهار ریشهٔ حقیقی نابرابر باشد.

راهنمایی: فرض کنید f یک چندجمله‌ای باشد. اگر $f(a)$ و $f(b)$ صفر نباشند ولی دارای علائم مختلف باشند، آن‌گاه تعداد فردی از ریشه‌های حقیقی معادلهٔ $f(x) = 0$ بین a و b واقع می‌شوند؛ اگر $f(a)$ و $f(b)$ صفر نباشند و علامتی یکسان داشته باشند، آن‌گاه تعداد زوجی از ریشه‌های (یا هیچ ریشهٔ) $f(x) = 0$ بین a و b است. از این رو، به استناد قضیهٔ رُل، شرط لازم و کافی برای آن که $f(x) = 0$

تعداد n ریشهٔ حقیقی نابرابر داشته باشد آن است که $f'(x) = ۰$ تعداد $n - ۱$ ریشهٔ حقیقی نابرابر داشته باشد و، اگر $x_۱$، $x_۲$، $\ldots$ ، $x_{n-۱}$ این $n - ۱$ ریشه به ترتیب صعودی باشند، علائم اعداد دنبالهٔ

$$f(-\infty), f(x_۱), f(x_۲), \ldots, f(x_{n-۱}), f(\infty)$$

متفاوت باشند.

اگر $f(x) = ۳x^۴ - ۸x^۳ - ۶x^۲ + ۲۴x + A$، آن‌گاه $f'(x) = ۱۲(x+۱)(x-۱)(x-۲)$، و ریشه‌های $f'(x) = ۰$ در نقاط -۱، ۱، و ۲ واقعند. از این رو، معادلهٔ مورد بحث چهار ریشهٔ نابرابر خواهد داشت در صورتی که علائم $f(-\infty)$، $f(-۱) = -۱۹ + A$، $f(۱) = ۱۳ + A$، $f(۲) = ۸ + A$، و $f(\infty)$ متناوب باشند. امّا، وقتی $x \longrightarrow \pm\infty$، $f(x)$ مثبت است و، بنابراین، لازم است که $-۱۹ + A < ۰$، $۱۳ + A > ۰$، و $۸ + A < ۰$. این نامساویها نشان می‌دهند که $-۱۳ < A < -۸$.

۱۲.۴. فرض کنید $f(x) = ۱ - x + x^۲/۲ - x^۳/۳ + \cdots + (-۱)^n x^n/n$. نشان دهید که $f(x) = ۰$ یک ریشهٔ حقیقی دارد هرگاه n فرد باشد و ریشهٔ حقیقی ندارد در صورتی که n زوج باشد.

راهنمایی: به وضوح، $f(x) = ۰$ ریشهٔ منفی ندارد. ملاحظه می‌کنیم که $f(x) = ۰$ دو ریشهٔ متوالیاً مثبت ندارد. فرض کنید چنین دو ریشه‌ای داشته باشد. آن‌گاه، $f'(x) = ۰$ الزاماً ریشه‌ای بین دو ریشهٔ متوالیاً مثبت $f(x) = ۰$ خواهد داشت. ولی $f'(x) = -(۱ + x^{n+۱})/(۱ + x^n)$.

۱۳.۴. توابع u و v و مشتقات u' و v' آنها در $[a,b]$ پیوسته‌اند و $uv' - u'v$ در هیچ نقطهٔ $[a,b]$ صفر نمی‌شود. نشان دهید که بین هر دو صفر u صفری از v واقع می‌شود و برعکس.

راهنمایی: فرض کنید $x_۱$ و $x_۲$ دو ریشهٔ متوالی $u(x) = ۰$ باشند. آن‌گاه، اگر $v(x) \neq ۰$ وقتی که $x_۱ < x < x_۲$، u/v در $[x_۱, x_۲]$ پیوسته است و در $x_۱$ و $x_۲$ صفر می‌شود؛ از این رو، $(u/v)'$ در یک نقطهٔ میانی صفر می‌شود که یک تناقض است. v هم نمی‌تواند دوبار در $(x_۱, x_۲)$ صفر شود؛ زیرا که، در این صورت، u باید ریشه‌ای بین $x_۱$ و $x_۲$ داشته باشد.

۱۴.۴. نشان دهید که معادلهٔ

$$a_۰ x^n + a_۱ x^{n-۱} + a_۲ x^{n-۲} + \cdots + a_{n-۱}x + a_n = \frac{a_۰}{n+۱} + \frac{a_۱}{n} + \frac{a_۲}{n-۱} + \cdots + \frac{a_{n-۱}}{۲} + \frac{a_n}{۱}$$

ریشه‌ای بین ۰ و ۱ دارد.

راهنمایی: تابع

$$F(x) = \frac{a_۰ x^{n+۱}}{n+۱} + \frac{a_۱ x^n}{n} + \frac{a_۲ x^{n-۱}}{n-۱} + \cdots + \frac{a_{n-۱} x^۲}{۲} + \frac{a_n x}{۱}$$
$$= -\left(\frac{a_۰}{n+۱} + \frac{a_۱}{n} + \frac{a_۲}{n-۱} + \cdots + \frac{a_{n-۱}}{۲} + \frac{a_n}{۱}\right)$$

را در نظر بگیرید. آن‌گاه، $F(۰) = F(۱) = ۰$. از این رو، به استناد قضیهٔ رُل، نقطه‌ای مانند x بین ۰ و ۱ موجود است به طوری که $F'(x) = ۰$.

۱۵.۴. نشان دهید که نامساوی $(\tan x)/x > x(\sin x)$ به‌ازای $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ برقرار است.

راهنمایی: چون $x \sin x > ۰$ وقتی که $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$، کافی است نشان دهیم که نامساوی $(\sin x)(\tan x) - x^۲ > ۰$ به‌ازای $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ برقرار است تا داشته باشیم

$$\frac{(\sin x)(\tan x) - x^۲}{x \sin x} > ۰, \qquad ۰ < x < \frac{\pi}{۲} \quad \text{به‌ازای}$$

فرض کنید $f(x) = (\sin x)(\tan x) - x^۲$. آن‌گاه

$$f'(x) = (\cos x)(\tan x) + (\sin x)(\sec^۲ x) - ۲x$$
$$= \sin x + (\sin x)(\sec^۲ x) - ۲x$$

و

$$f''(x) = \cos x + (\cos x)(\sec^۲ x) + ۲(\sin x)(\sec^۲ x)(\tan x) - ۲$$
$$= (\sqrt{\sec x} - \sqrt{\cos x})^۲ + ۲(\tan^۲ x)(\sec x)$$

به این ترتیب، $f''(x) > ۰$ وقتی که $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$. چون $f''(x)$ به‌ازای $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ مثبت است، f' به‌ازای $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ صعودی است. بعلاوه، چون $f'(۰) = ۰$، $f'(x)$ به‌ازای $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ مثبت است. مجدداً، چون $f'(x)$ به‌ازای $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$ مثبت است و $f(۰) = ۰$، $f(x) > ۰$ وقتی که $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$. بنابراین، نتیجه می‌شود که $(\tan x)/x > x/(\sin x)$ وقتی که $۰ < x < \frac{\pi}{۲}$.

۱۶.۴. نشان دهید که اگر $۰ < w < v$ آن‌گاه

$$\frac{v-w}{۱+v^۲} < \tan^{-۱} v - \tan^{-۱} w < \frac{v-w}{۱+w^۲}$$

راهنمایی: از قضیهٔ مقدار میانگین (قضیهٔ ۵.۴) استفاده کنید.

۱۷.۴. نشان دهید که اگر $0 < \alpha < \beta < \frac{\pi}{2}$ آن‌گاه، به‌ازای θیی که $\alpha < \theta < \beta$،

$$\frac{\sin\alpha - \sin\beta}{\cos\beta - \cos\alpha} = \cot\theta$$

راهنمایی: از قسمت دوّم قضیهٔ ۹.۴ استفاده کنید.

۱۸.۴. اگر توابع f، g، و h بر $[a,b]$ پیوسته و بر (a,b) مشتق‌پذیر باشند، نشان دهید که نقطه‌ای مانند c بین a و b موجود است به طوری که

$$\begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f'(c) \\ g(a) & g(b) & g'(c) \\ h(a) & h(b) & h'(c) \end{vmatrix} = 0$$

راهنمایی: قضیهٔ رُل (قضیهٔ ۳.۴) را در مورد تابع زیر اعمال کنید:

$$w(x) = \begin{vmatrix} f(a) & f(b) & f(x) \\ g(a) & g(b) & g(x) \\ h(a) & h(b) & h(x) \end{vmatrix}$$

۱۹.۴. نشان دهید که مقادیر اکسترمم

$$y = \frac{ax^2 + 2bx + c}{px^2 + 2qx + r}, \qquad pr - q^2 > 0$$

ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوّم زیرند:

$$(pr - q^2)y^2 - (ar - 2bq + cp)y + (ac - b^2) = 0$$

راهنمایی: از $(px^2 + 2qx + r)y = ax^2 + 2bx + c$ مشتق می‌گیریم. وقتی $y' = 0$، $(px + q)y = ax + b$؛ از این و $(px^2 + 2qx + r)y = ax^2 + 2bx + c$، خواهیم داشت: $(qx + r)y = bx + c$. از حل معادلات

$$y = \frac{bx + c}{qx + r} \quad \text{و} \quad y = \frac{ax + b}{px + q}$$

برحسب x، به ترتیب، خواهیم داشت:

$$x = \frac{-ry + c}{qy - b} \quad \text{و} \quad x = \frac{-qy + b}{py - a}$$

بنابراین، حذف x از معادلات

$$y = \frac{bx+c}{qx+r} \quad \text{و} \quad y = \frac{ax+b}{px+q}$$

به نتیجهٔ $(-qy+b)(qy-b) = (-ry+c)(py-a)$ یا

$$(pr-q^2)y^2 - (ar - 2bq + cp)y + (ac - b^2) = 0$$

می‌انجامد.

۲۰.۴. نشان دهید که مقادیر $y = (x^2+2x+11)/(x^2+4x+10)$ در بازهٔ $\frac{5}{6} \le y \le 2$ محصورند.

راهنمایی: حکم تمرین ۱۹.۴ را به کار برید.

۲۱.۴. نشان دهید که $f(x) = (a\cos x + b\sin x)/(c\cos x + d\sin x)$ نه ماکسیمم دارد نه مینیمم.

راهنمایی: $f'(x) = (bc-ad)/(c\cos x + d\sin x)^2$.

۲۲.۴. نشان دهید که مقادیر اکسترمم $f(x) = a\sin x + b\cos x$ عبارتند از $\pm(a^2+b^2)^{1/2}$.

راهنمایی: $f'(x) = 0$ مستلزم $a/b = \tan x$ است.

۲۳.۴. تحقیق کنید که، وقتی m و n اعداد صحیح مثبت باشند، تابع

$$f(x) = (x-a)^m(x-c)^n, \qquad a < c$$

دارای مقادیر اکسترمم زیر است؛ توجه کنید به این که b بازهٔ $[a, c]$ را به نسبت m/n تقسیم می‌کند.

الف) m و n زوجند؛ مینیمم در a و c، ماکسیمم در $b = (na+mc)/(m+n)$.

ب) m و n فردند؛ مینیمم در b.

ج) m زوج و n فرد است؛ ماکسیمم در a، مینیمم در b.

د) m فرد و n زوج است؛ ماکسیمم در b، مینیمم در c.

۲۴.۴. وقتی $x > 0$، نشان دهید که $f(x) = (\tan^{-1} x)/(\tanh x)$ با صعود x صعود می‌کند و

$$\tan^{-1} x < \frac{\pi}{2}(\tanh x)$$

راهنمایی: $f'(x)$ و $g(x) = (1 + x^2)^{-1}(\sinh x)(\cosh x) - \tan^{-1} x$ دارای یک علامت می‌باشند، $g'(x)$ و $h(x) = (1 + x^2)(\sinh x) - x \cosh x$ نیز علامتی یکسان دارند، و $h'(x) > 0$ وقتی که $x > 0$. بعلاوه، $f(x) \longrightarrow \frac{\pi}{2}$ وقتی که $x \longrightarrow \infty$.

۲۵.۴. کجای استدلال زیر نادرست است؟ فرض کنید $f(x) = e^{-2x}(\cos x + 2 \sin x)$ و $g(x) = e^{-x}(\cos x + \sin x)$. وقتی $x \longrightarrow \infty$، کسر $f(x)/g(x)$ به صورت $0/0$ درمی‌آید. حال،

$$\frac{f'(x)}{g'(x)} = \frac{-5e^{-2x} \sin x}{-2e^{-x} \sin x}$$

با حذف $\sin x$، ملاحظه می‌کنیم که $f'/g' \longrightarrow 0$ وقتی که $x \longrightarrow \infty$ و، بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که $f/g \longrightarrow 0$ وقتی که $x \longrightarrow \infty$.

راهنمایی: توجه کنید که f'/g' حد ندارد وقتی که $x \longrightarrow \infty$؛ زیرا، f'/g' به‌ازای $x = n\pi$ تعریف نشده است. حد

$$\lim_{x\to\infty} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to\infty} e^{-x} \frac{1 + 2 \tan x}{1 + \tan x}$$

وجود ندارد، زیرا که $(1 + 2 \tan x)/(1 + \tan x)$ در نقاط $x_n = n\pi + \frac{\pi}{2}$، به‌ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$، ناپیوسته است.

۲۶.۴. درستی فرمول (۱۰.۴) را بررسی کنید.

۲۷.۴. ثابتهای A و B را چنان بیابید که $(\sin 3x + A \sin 2x + B \sin x)/x^5$ به حدی متناهی میل کند وقتی که $x \longrightarrow 0$.

راهنمایی: با بسط تابع سینوس برحسب قوای x براساس قضیهٔ تیلور (قضیهٔ ۱۱.۴)، لازم است داشته باشیم:

$$3 + 2A + B = 0, \qquad 27 + 8A + B = 0$$

تا ضرایب x و x^3 صفر شوند. از این رو، $A = -4$ و $B = 5$.

۲۸.۴. فرض کنید $f(x) = x^{۲} \sin(۱/x)$ و $g(x) = \sin x$. تحقیق کنید که $f(x)/g(x) \longrightarrow ۰$ وقتی که $x \longrightarrow ۰$ و این که $f'(x)/g'(x)$ به حدی میل نمی‌کند وقتی که $x \longrightarrow ۰$. آیا این نتیجه درستی قاعدهٔ لوپیتال را نقض نمی‌کند؟

۲۹.۴. مطلوب است

$$\lim_{x \to ۰} \frac{x \sin(\sin x) - \sin^{۲} x}{x^{۶}}$$

[جواب: $\frac{۱}{۱۸}$]

۳۰.۴. مطلوب است

$$\lim_{x \to ۰} \frac{(\sin x)(\sin^{-۱} x) - x^{۲}}{x^{۶}}$$

[جواب: $\frac{۱}{۱۸}$]

۳۱.۴. مطلوب است

$$\lim_{x \to ۰} \frac{\tan(\sin x) + \tan^{-۱}(\sin x) - \sin(\tan x) - \sin(\tan^{-۱} x)}{x^{۹}}$$

[جواب: $\frac{۱}{۹}$]

۳۲.۴. مطلوب است

$$\lim_{a \to b} \frac{a^b - b^a}{a^a - b^b}$$

[جواب: $(۱ - \ln b)/(۱ + \ln b)$]

۳۳.۴. نشان دهید که اگر $۰ < b < a$، مقدار مینیمم $(a - b)x/(x + a)(x + b)$ به‌اندازهٔ $۴\sqrt{ab}/(a - b)$ بیشتر از مقدار ماکسیمم است.

راهنمایی: اگر $y = (a - b)x/(x + a)(x + b) = a/(x + a) - b/(x + b)$ آن‌گاه $y = ۰$ وقتی که $x = \pm\sqrt{ab}$،

$$y'' = -\frac{(\sqrt{a} - \sqrt{b})}{\sqrt{ab}(\sqrt{a} + \sqrt{b})^{۳}} \quad \text{هرگاه} \quad x = \sqrt{ab}$$

و

$$y'' = \frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{ab}(\sqrt{a}-\sqrt{b})^۳} \quad \text{هرگاه} \quad x = -\sqrt{ab}$$

از این رو، $(\sqrt{a}+\sqrt{b})/(\sqrt{a}-\sqrt{b})$ مقدار ماکسیمم و $(\sqrt{a}-\sqrt{b})/(\sqrt{a}+\sqrt{b})$ مقدار مینیمم است.

۳۴.۴. اگر $y = (x+a)(x+b)/(x-a)(x-b)$، نشان دهید که ماکسیمم و مینیمم، به ترتیب، عبارتند از:

$$-\left(\frac{\sqrt{a}+\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}\right)^۲ \quad \text{و} \quad -\left(\frac{\sqrt{a}-\sqrt{b}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)^۲$$

راهنمایی: داریم

$$\frac{(x+a)(x+b)}{(x-a)(x-b)} = ۱ + \frac{۲(a+b)x}{(x-a)(x-b)} = ۱ + \frac{۲(a+b)}{a-b}\left(\frac{a}{x-a} - \frac{b}{x-b}\right)$$

همچنین، ملاحظه می‌کنیم که

$$\frac{x^۲ + (a+b)x + ab}{x^۲ - (a+b)x + ab} = y$$

یا

$$(۱-y)x^۲ + (a+b)(۱+y)x - ab(۱-y) = ۰$$

معادله‌ای است که ریشه‌هایش فقط وقتی حقیقی است که $(a+b)^۲(۱+y)^۲ \geq ۴ab(۱-y)^۲$.

۳۵.۴. یک دامپرور می‌خواهد زمینی مثلثی را با حصاری مستقیم به دو جزء مساوی تقسیم کند. چگونه می‌توان این کار را انجام داد که حصار کمترین طول ممکن را داشته باشد.

راهنمایی: اگر A کوچکترین زاویهٔ مثلث باشد و b و c اضلاع مجاور باشند، فاصلهٔ هر انتهای حصار از A برابر $\sqrt{bc/۲}$ است و طول حصار برابر $\sqrt{۲bc}(\sin A/۲)$ است.

۳۶.۴. اگر a و b مثبت باشند، نشان دهید که

$$(۱+a)\ln(۱+a) + (۱+b)\ln(۱+b) < (۱+a+b)\ln(۱+a+b)$$

و، به طور کلی، اگر هر a_r مثبت باشد،

$$\sum_{r=۱}^{n}(۱+a_r)\ln(۱+a_r) < \left(۱+\sum_{r=۱}^{n}a_r\right)\ln\left(۱+\sum_{r=۱}^{n}a_r\right)$$

راهنمایی: $g(x)=(۱+x)\ln(۱+x)$ را به‌ازای $x>۰$ درنظر بگیرید و فرض کنید $۰<a<b$. به استناد قضیهٔ مقدار میانگین (قضیهٔ ۵.۴)، نقطه‌ای مانند c وجود دارد به طوری که

$$\frac{g(a+b)-g(b)}{a}=g'(c)\text{، که در آن}\quad b<c<a+b$$

بنابراین،

$$(۱+a+b)\ln(۱+a+b)-(۱+b)\ln(۱+b)=a[۱+\ln(۱+c)]$$

که در آن $۰<a<b<c<a+b$. امّا، $a>\ln(۱+a)$ وقتی $a>۰$ و $\ln(۱+c)>\ln(۱+a)$ وقتی $۰<a<c$. از این رو،

$$\begin{aligned}a[۱+\ln(۱+c)]&=a+a[\ln(۱+c)]\\&>\ln(۱+a)+a[\ln(۱+a)]=(۱+a)\ln(۱+a)\end{aligned}$$

۳۷.۴. فرض کنید $f''(c)=f'''(c)=\cdots=f^{(n-۱)}(c)=۰$ ولی $f^{(n)}(c)\neq۰$. نشان دهید که اگر n فرد باشد آن‌گاه منحنی $y=f(x)$ نقطهٔ عطفی در $x=c$ دارد؛ اگر n زوج باشد، این منحنی مقعر به بالا یا پایین است برحسب این که $f^{(n)}(c)$ مثبت یا منفی باشد.

۳۸.۴. فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد. نشان دهید که طول نقاط عطف منحنی $y^n=f(x)$ ریشه‌های معادلهٔ زیرند:

$$\frac{n-۱}{n}\{f'(x)\}^۲=f(x)f''(x)$$

۳۹.۴. نشان دهید که نقاط عطف منحنی $y^۲=(x-a)^۲(x-b)$ بر خط $۳x+a=۴b$ واقعند.

۴۰.۴. فرض کنید $f(x)=ax+۶b^۲/x^۲$ و $b\neq۰$. نشان دهید که منحنی $y=e^{-f(x)}$ حداقل دو نقطهٔ عطف دارد.

راهنمایی: داریم $f'(x) = a - ۱۲b^۲/x^۳$ و $f''(x) = ۳۶b^۲/x^۴$. بنابراین،

$$y'' = e^{-f}(f')^۲ - e^{-f}(f'') = \frac{e^{-f}}{x^۶}\{(ax^۳ - ۶bx - ۱۲b^۲)(ax^۳ + ۶bx - ۱۲b^۲)\}$$

چون $b \neq ۰$، چندجمله‌ایهای درجهٔ سه هیچ عامل مشترکی ندارند، و هر یک از آنها یایک ریشهٔ حقیقی دارد یا سه ریشهٔ حقیقی که یکی از آنها الزاماً ساده است؛ یعنی، هر یک از آنها حداقل یک ریشهٔ حقیقی نامکرر دارد، و y'' تغییر علامت نمی‌دهد و به‌ازای هر ریشهٔ حقیقی نامکرر هر یک از این چندجمله‌ایهای درجهٔ سه صفر می‌شود.

۴۱.۴. فرض کنید n و r اعداد صحیح مثبتی بزرگتر از یا مساوی ۳ باشند. نشان دهید که

$$(n+r)^n < n^{n+r}$$

راهنمایی: نامساوی مطلوب معادل است با

$$\frac{\ln(n+r)}{n+r} < \frac{\ln n}{n}$$

امّا تابع $g(x) = (\ln x)/x$، که به‌ازای $x > ۰$ تعریف می‌شود، تک ماکسیممی در $x = e$ دارد؛ زیرا که $g'(x) = (۱ - \ln x)/x^۲$ به‌ازای $x > e$ منفی و به‌ازای $۰ < x < e$ مثبت است. بالبداهه، تابع g به‌ازای $x > e$ نزولی است.

۴۲.۴. اگر صفحه‌ای، که به فاصلهٔ x از مرکز کره‌ای به شعاع واحد واقع است، آن را به دو قطعه تقسیم کند که حجم یکی دو برابر دیگری باشد، نشان دهید که

$$۳x^۲ - ۹x + ۲ = ۰$$

آن‌گاه، با استفاده از روش نیوتن، x را با دقتی تا چهار رقم اعشار بیابید.

راهنمایی: مثال ۴ بخش ۴ فصل ۴ را ببینید. جواب: ۰٫۲۲۶۱.

۴۳.۴. معادلهٔ $x = \tan x$ بی‌نهایت ریشه دارد. به آسانی دیده می‌شود که کوچکترین ریشهٔ مثبت این معادله بین $\frac{۵\pi}{۴}$ و $\frac{۳\pi}{۲}$ است. با استفاده از روش نیوتن، تحقیق کنید که کوچکترین ریشهٔ مثبت معادلهٔ مفروض تقریباً ۴٫۴۹۳۴ است.

۴۴.۴. معادلهٔ $x\sin x = ۱/۲$ بی‌نهایت جواب دارد. تحقیق کنید که کوچکترین جواب مثبت این معادله تقریباً ۰٫۷۴۰۸۴۱ است.

۴۵.۴. معادلهٔ $۲x^۳ - x^۲ - ۷x + ۵ = ۰$ سه ریشهٔ حقیقی متمایز دارد. این سه ریشه را با دقت ۰٫۰۰۱ بیابید.

جواب: $x_۱ = -۱٫۹۵۰۹$ (تقریباً)، $x_۲ = ۰٫۷۵۶$ (تقریباً)، و $x_۳ = ۱٫۶۹۴$ (تقریباً). توجه کنید که، به استناد قضیهٔ ویتا، حاصل جمع سه ریشه برابر ۱/۲ است.

۴۶.۴. تحقیق کنید که معادلهٔ $x^۴ - x - ۱ = ۰$ یک ریشه بین نقاط $a = ۱٫۲۲$ و $b = ۱٫۲۳$ دارد. سپس، این ریشه را با دقت شش رقم اعشار تعیین کنید.

جواب: [۱٫۲۲۰۷۴۴].

۴۷.۴. مسألهٔ ویویانی. دو خط موازی را خط مفروض AB قطع می‌کند. شکل ۱۹.۴ را ببینید. از نقطهٔ C خط راستی رسم می‌کنیم که AB را قطع کند. این خط چگونه انتخاب شود تا مجموع مساحات مثلثهای ACP و QPB مینیمم باشد؟

راهنمایی: طول قطعات AC و AB را، به ترتیب، a و b بگیرید و طول قطعات AP و QB را، به ترتیب، x و y فرض کنید. چون مثلثها متشابهند، داریم:

$$\frac{a}{x} = \frac{y}{b-x} \quad \text{یا} \quad y = a\frac{b-x}{x}$$

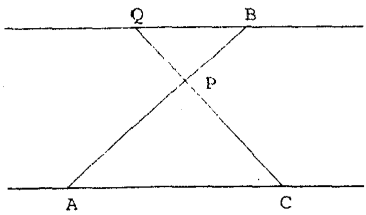
اگر α اندازهٔ زاویهٔ A باشد، مجموع مساحات عبارت است از

$$\frac{۱}{۲}ax\sin\alpha + \frac{۱}{۲}(b-x)(y\sin\alpha)$$

پس از جایگزینی مقدار y، مسأله به تعیین مقدار مینیمم تابع

$$f(x) = x + \frac{(b-x)^۲}{x}$$

می‌انجامد. به آسانی دیده می‌شود که $x = b/\sqrt{۲}$ مستلزم مساحت مینیمم است.



شکل ۱۹.۴

۴۸.۴. قطعه سیمی به طول k واحد به دو قسمت بریده می‌شود. قسمتی را به شکل دایره درمی‌آوریم و با قسمت دیگر یک مربع می‌سازیم. نشان دهید که حاصل جمع مساحتهای دایره و مربع وقتی مینیمم است که سیم به طریقی بریده شود که قطر دایره مساوی ضلع مربع باشد و این حاصل‌جمع وقتی ماکسیمم است که سیم بریده نشود و به صورت دایره درآید.

۴۹.۴. زاویهٔ رأس C از مثلث ABC قائمه است و حاصل ضرب اضلاع AB و BC ثابت است. نشان دهید که $AC + ۳BC$ وقتی مینیمم است که $AC = ۲BC$ و زمانی ماکسیمم است که $AC = BC$.

راهنمایی: فرض کنید $AB = x$ و $\angle ABC = \theta$. آن‌گاه $x^۲ \cos\theta$ ثابت است و $(AC + ۳BC)^۲$ متناسب است با $(\sin\theta + ۳\cos\theta)^۲/(\cos\theta) = \sec\theta + ۶\sin\theta + ۸\cos\theta$؛ مشتق اول برابر است با

$$(\sec\theta)(\tan\theta) + ۶\cos\theta - ۸\sin\theta = \frac{t^۳ - ۷t + ۶}{(۱+t)^{۳/۲}}$$
$$= \frac{(t+۳)(t-۱)(t-۲)}{(۱+t)^{۳/۲}}$$

که در آن $t = \tan\theta$. مشتق به‌ازای $۰ < t < ۱$ مثبت است، در $t = ۱$ صفر می‌شود، به‌ازای $۱ < t < ۲$ منفی است، در $t = ۲$ مجدداً صفر می‌شود، و به‌ازای $t > ۲$ مثبت است. از این رو، $(AC + ۳BC)^۲$ ماکسیمم است وقتی که $t = ۱$ و مینیمم است وقتی که $t = ۲$. توجه کنید که $[f(t)]^۲$ و $f(t)$ در حالتی با هم ماکسیمم و مینیمم هستند که $f(t) > ۰$، زیرا

$$[f(T)]^۲ - [f(t)]^۲ = \{f(T) - f(t)\}\{f(T) + f(t)\}$$

و، بنابراین، $[f(T)]^۲ - [f(t)]^۲$ و $f(T) - f(t)$ علامتی یکسان دارند.

۵۰.۴. فرض کنید $q_۱$، $q_۲$، ...، q_n اعداد حقیقی مثبت باشند و مجموع آنها ۱ باشد. نشان دهید که به‌ازای اعداد حقیقی نامنفی $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n

$$q_۱a_۱ + q_۲a_۲ + \cdots + q_na_n \geq a_۱^{q_۱}.a_۲^{q_۲}.\ldots.a_n^{q_n}$$

و تساوی فقط وقتی برقرار است که $a_۱ = a_۲ = \cdots = a_n$.

راهنمایی: نخست، توجه می‌کنیم که اگر x یک عدد حقیقی دلخواه باشد آن‌گاه

$$e^x \geq ex$$

و تساوی فقط وقتی برقرار است که $x = ۱$. در واقع، تابع $f(x) = e^x - ex$ مینیمم مطلقی در $x = ۱$ دارد.

برای اثبات نامساوی مطلوب، قرار می‌دهیم $w = q_۱a_۱ + q_۲a_۲ + \cdots + q_na_n$. حال، در نامساوی $e^x \geq ex$، a_j/w را جایگزین x می‌کنیم که خواهیم داشت:

$$e^{a_jq_j/w} \geq \left(\frac{ea_j}{w}\right)^{q_j} \quad \text{یا} \quad e^{a_j/w} \geq ea_j/w$$

از ضرب این نامساویها به‌ازای مقادیر $j = ۱, ۲, \ldots, n$، خواهیم داشت:

$$e \geq \frac{e[a_۱^{q_۱}.a_۲^{q_۲}.\ldots.a_n^{q_n}]}{w}$$

که همان نامساوی مطلوب است. بالبداهه، تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که هر یک از $a_۱/w$، $a_۲/w$، ...، a_n/w برابر ۱ باشد که معادل شرط $a_۱ = a_۲ = \cdots = a_n$ است.

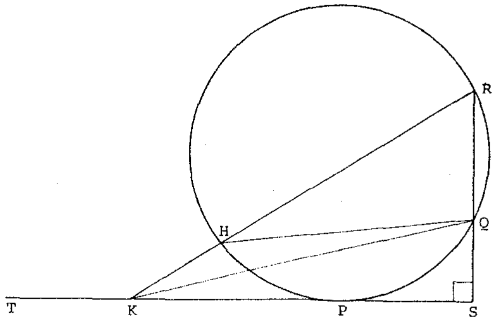
۵۱.۴. کوتاهترین فاصلهٔ نقطهٔ $(c, ۰)$ از منحنی $y^۲ = ۴x$ را تعیین کنید. ممکن است c مثبت، منفی، یا صفر باشد.

جواب: اگر $c \leq ۲$، نزدیکترین نقطهٔ منحنی $y^۲ = ۴x$ به $(c, ۰)$ عبارت است از $(۰, ۰)$. اگر $c > ۲$، دو نقطه بر منحنی وجود دارند که نزدیکترین نقاط به $(c, ۰)$ می‌باشند؛ این دو نقطه عبارتند از $(c - ۲, \pm ۲\sqrt{c - ۲})$.

۵۲.۴. فرض کنید تابع f در هر نقطهٔ بازهٔ بستهٔ $[a, b]$، که در آن $|b - a| < \infty$، مشتق‌پذیر باشد. اگر عددی مانند M بتوان یافت که نامساوی $|f'(x)| < M$ به‌ازای هر x از $[a, b]$ برقرار باشد، نشان دهید که f بر $[a, b]$ به طور یکنواخت پیوسته است.

راهنمایی: از قضیهٔ مقدار میانگین (قضیهٔ ۵.۴) استفاده کنید.

۵۳.۴. فرض کنید $f(x) = x(\ln x)$ هرگاه $x > ۰$، و $f(۰) = ۰$. نشان دهید که f بر بازهٔ بستهٔ $[۰, ۱]$ به طور یکنواخت پیوسته است ولی f' بر $[۰, ۱]$ کراندار نیست. توضیح دهید که چرا این وضعیت با حکم تمرین ۵۲.۴ متناقض نیست.



شکل ۲۰.۴

۵۴.۴. عکسی بر دیواری بالاتر از چشم ناظری نصب شده‌است. ناظر در چه فاصله‌ای از دیوار قرار گیرد تا زاویهٔ مشاهده ماکسیمم شود؟

راهنمایی: شکل ۲۰.۴ را در نظر بگیرید که در آن Q و R لبه‌های پایین و بالای عکس را نشان می‌دهند و TS خط افقی هم تراز چشم ناظر است. سپس، دایره‌ای را در نظر بگیرید که از نقاط Q و R بگذرد و بر خط TS مماس شود و فرض کنید P نقطهٔ تماس باشد. فرض کنید K نقطهٔ دیگری بر TS باشد و نقطهٔ تلاقی قطعه خط RK و دایره را H بنامید. چون وتر QR مقابل زوایای متساوی از هر دو نقطهٔ دلخواه کمان QR است، داریم

$$\angle QPR = \angle QHR$$

از این رو،

$$\angle QPR = \angle QHR = \angle QKR + \angle HQK > \angle QKR$$

این نشان می‌دهد که زاویهٔ مشاهده وقتی ماکسیمم می‌شود که چشم ناظر در نقطهٔ تماس P واقع شود. خط مماس SP و خط قاطع SQR در رابطهٔ $(SP)^۲ = (SQ)(SR)$، که با فاصله مربوط است، صدق می‌کنند.

۵۵.۴ فرض کنید که مشتق دوّم تابع f به‌ازای $a \le x \le b$ پیوسته باشد و، در هر نقطهٔ x، علامت $f(x)$ و $f''(x)$ یکی باشد. نشان دهید که اگر f در نقاطی مانند c و d صفر شود که $a \le c < d \le b$، آن‌گاه f در همهٔ نقاط بین c و d نیز صفر می‌شود.

۵۶.۴ عمود بر بیضی

$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$$

را در نقطهٔ متغیر P از آن رسم می‌کنیم. نشان دهید که ماکسیمم فاصلهٔ این عمود از مرکز بیضی عبارت است از $|a-b|$.

۵۷.۴ تحقیق کنید که اگر در فرمول (۲.۴) به جای $f(t)$ و $g(t)$، به ترتیب،

الف) $t^۲$، t،

ب) $\sin t$، $\cos t$،

ج) e^t، e^{-t}،

قرار گیرند، آن‌گاه، در هر یک از این حالات، «x» میانگین حسابی a و b است.

اگر در فرمول (۲.۴) به جای $f(t)$ و $g(t)$، به ترتیب،

$$\sqrt{t} \quad \text{و} \quad \frac{۱}{\sqrt{t}}$$

قرار دهیم، آن‌گاه «x» میانگین هندسی a و b است؛ و اگر

$$\frac{۱}{t} \quad \text{و} \quad \frac{۱}{t^۲}$$

قرار دهیم، آن‌گاه «x» میانگین همساز a و b خواهد بود.

میانگینهای حسابی، هندسی، و همساز a و b، به ترتیب، عبارتند از

$$A = \frac{a+b}{۲}، \quad G = \sqrt{ab}، \quad \text{و} \quad H = \frac{۲ab}{a+b}$$

۵۸.۴. اگر همهٔ ریشه‌های چندجمله‌ایهای $P(x)-a$ و $P(x)-b$ حقیقی باشند، نشان دهید که همهٔ ریشه‌های چندجمله‌ای $P(x)-c$ که در آن $a<c<b$ نیز حقیقی است.

راهنمایی: واضح است که همهٔ ریشه‌های $P'(x)$ حقیقی هستند. این ریشه‌ها را به $t_۱$، $t_۲$، ...، $t_{n-۱}$ نشان دهید. سپس، ریشه‌های $P(x)-b$ را به $y_۱$، $y_۲$، ...، y_n نشان دهید و ریشه‌های $P(x)-a$ را $x_۱$، $x_۲$، ...، x_n بنامید. آن‌گاه $y_۱<t_۱<y_۲<\cdots<y_{n-۱}<t_{n-۱}<y_n$ و $x_۱<t_۱<x_۲<t_۲<\cdots<x_{n-۱}<t_{n-۱}<x_n$. نتیجه می‌شود که بازه‌هایی که به نقاط x_i و y_i کراندارند روی هم نمی‌افتند زیرا اینها در بازه‌های مجزای $(-\infty,t_۱)$، $(t_۱,t_۲)$، ...، $(t_{n-۱},\infty)$ واقعند. چندجمله‌ای $P(x)$ مقادیر a و b را در نقاط انتهایی هر یک از این بازه‌ها اختیار می‌کند و همهٔ مقادیر میانی داخل بازه را هم اختیار می‌کند. از این رو، $P(x)-c$ بر $(-\infty,\infty)$ مقدار صفر را n بار اختیار می‌کند.

۵۹.۴. تابع f چنان است که f'' موجود است، $|f(x)|\le A$، و $|f''(x)|\le B$ هرگاه $x>۰$، که در آنها A و B ثابتهای مثبتی هستند. نشان دهید که $|f'(x)|\le ۲\sqrt{AB}$ هرگاه $x>۰$.

راهنمایی: فرض کنید x و h مثبت باشند. آن‌گاه، به استناد قضیهٔ تیلور، به‌ازای عددی مانند θ که $۰<\theta<۱$،

$$f(x+h)=f(x)+hf'(x)+\frac{h^۲}{۲!}f''(x+\theta h)$$

از این رو، به‌ازای $x>۰$،

$$\begin{aligned}|hf'(x)|&=|f(x+h)-f(x)-\frac{h^۲}{۲!}f''(x+h)|\\&\le|f(x+h)|+|f(x)|+\frac{h^۲}{۲!}|f''(x+\theta h)|\\&\le ۲A+\frac{Bh^۲}{۲}\end{aligned}$$

یا

$$|f'(x)|\le\frac{۲A}{h}+\frac{Bh}{۲},\qquad x>۰ \text{ به‌ازای هر }$$

چون $|f'(x)|$ مستقل از h است و، به‌ازای هر $h>۰$، کوچکتر از یا مساوی $۲A/h+Bh/۲$ است، نتیجه می‌شود که $|f'(x)|$ کوچکتر از یا مساوی حداقل مقدار $۲A/h+Bh/۲$ است. امّا،

$$\frac{۲A}{h}+\frac{Bh}{۲}=\left(\sqrt{\frac{۲A}{h}}-\sqrt{\frac{Bh}{۲}}\right)^۲+۲\sqrt{AB}$$

و، بنابراین،

$$۲\sqrt{AB} \leq \frac{۲A}{h} + \frac{Bh}{۲}, \qquad \text{به‌ازای هر } h > ۰$$

که نتیجه می‌شود که نامساوی $۲\sqrt{AB} \leq |f'(x)|$ به‌ازای هر $x > ۰$ برقرار است.

فصل پنجم

انتگرالگیری

۱.۵ مثالهایی از محاسبهٔ مساحت

مسألهٔ تعیین مساحت ناحیه‌ای از یک صفحه، که به منحنی مفروضی کراندار است، ریاضیدانان را در طی دورانی طولانی مجذوب خود کرده است. چند مثال مشهور را که از زمانهای گذشته به دست ما رسیده است مورد بررسی قرار می‌دهیم؛ ابداع روشهای خاصی در تعیین مساحت که در این مثالها به کار رفته نسبتاً زیرکانه و ماهرانه است.

مثال ۱. (روش ارشمیدس در تعیین مساحت سهمی) سهمی با معادلهٔ

$$y = Ax^{۲} + Bx + C, \qquad A > ۰ \tag{۱.۵}$$

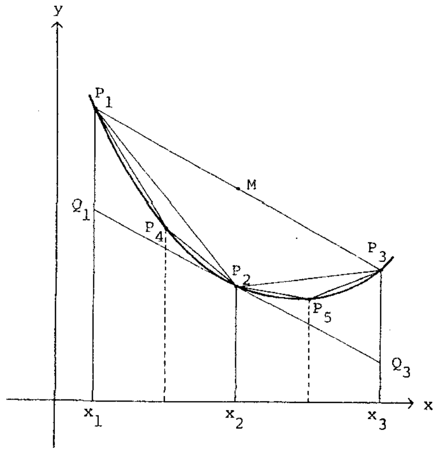
را درنظر بگیرید. شکل ۱.۵ سهمی مورد بحث را نشان می‌دهد. فرض کنید $P_۱ = (x_۱, y_۱)$، $P_۲ = (x_۲, y_۲)$، و $P_۳ = (x_۳, y_۳)$ نقاطی از این سهمی باشند به طوری که طولهای $x_۱$، $x_۲$، و $x_۳$ یک

تصاعد حسابی تشکیل دهند؛ یعنی،

$$x_{۲} - x_{۱} = x_{۳} - x_{۲} = h$$

ناحیهٔ محدود به کمان سهموی واصل نقاط $P_{۱}$ و $P_{۳}$ و وتر واصل $P_{۱}$ و $P_{۳}$ را قطعهٔ سهموی بین $P_{۱}$ و $P_{۳}$ می‌نامند؛ وتر بین $P_{۱}$ و $P_{۳}$ را قاعدهٔ قطعهٔ سهموی بین $P_{۱}$ و $P_{۳}$ و نقطهٔ $P_{۲}$ را رأس این قطعه می‌نامند. رأس $P_{۲}$ قطعهٔ سهموی بین $P_{۱}$ و $P_{۳}$ آن نقطه‌ای از کمان سهموی واصل $P_{۱}$ و $P_{۳}$ است که عمود بر پایه در آن نقطه بزرگترین طول را داشته باشد.

فرض کنید قطعهٔ سهموی بین $P_{۱}$ و $P_{۳}$ با رأس $P_{۲}$ مفروض باشد و کمان سهموی در معادلهٔ (۱.۵) صدق کند. مسألهٔ مورد بحث، محاسبهٔ مساحت این قطعهٔ سهموی است. این کار را در دو مرحله انجام می‌دهیم: نشان می‌دهیم که



شکل ۱.۵

الف) مساحت مثلث $P_{۱}P_{۲}P_{۳}$ مساوی $Ah^{۳}$ است و

ب) مساحت قطعهٔ سهموی بین $P_{۱}$ و $P_{۳}$ با رأس $P_{۲}$ عبارت است از ۴/۳ برابر مساحت مثلث $P_{۱}P_{۲}P_{۳}$.

اگر فرض کنیم M مرکز وتری باشد که از $P_{۱}$ به $P_{۳}$ وصل می‌شود، M دارای مختصات زیر است:

$$M = \left(\frac{x_{۱} + x_{۳}}{۲}, \frac{y_{۱} + y_{۳}}{۲}\right)$$

نقطهٔ $P_{۲}$ دارای مختصات $(x_{۲}, y_{۲})$ است، که در آن

$x_{۲} = \frac{x_{۱} + x_{۳}}{۲}$ و $y_{۲} = f(\frac{x_{۱} + x_{۳}}{۲})$ با $f(x) = Ax^{۲} + Bx + C$.

فاصلهٔ بین M و $P_۲$ عبارت است از

$$\begin{aligned}
&\frac{y_۱+y_۲}{۲}-f\left(\frac{x_۱+x_۳}{۲}\right)\\
&=\frac{Ax_۱^۲+Bx_۱+C+Ax_۳^۲+Bx_۳+C}{۲}-A\left(\frac{x_۱+x_۳}{۲}\right)^۲-B\left(\frac{x_۱+x_۳}{۲}\right)-C\\
&=\frac{A}{۲}(x_۱^۲+x_۳^۲)-\frac{A}{۴}(x_۱+x_۳)^۲\\
&=\frac{A}{۴}(x_۳-x_۱)^۲
\end{aligned}$$

امّا، مساحت مثلث $P_۱P_۲P_۳$ عبارت است از

$$\frac{۱}{۲}(x_۳-x_۱)\times(\text{فاصلهٔ بین نقاط } M \text{ و} P_۲)$$

بنابراین، مساحت مثلث $P_۱P_۲P_۳$ عبارت است از

$$\frac{A}{۸}(x_۳-x_۱)^۳=ah^۳$$

خلاصه، مساحت مثلث $P_۱P_۲P_۳$، که در بالای بازه‌ای به طول $۲h$ واقع شده است، برابر $Ah^۳$ می‌باشد.

توجه کنید که مثلث $P_۱P_۲P_۳$ در قطعهٔ سهموی با قاعدهٔ $P_۱P_۳$ و رأس $P_۲$ محاط شده است؛ مثلث $P_۱P_۲P_۳$ و قطعهٔ سهموی بین $P_۱$ و $P_۳$ یک قاعدهٔ $P_۱P_۳$ و یک رأس $P_۲$ دارند. واضح است که مساحت مثلث $P_۱P_۲P_۳$ کمتر از مساحت قطاع سهموی بین $P_۱$ و $P_۳$ است؛ بعلاوه، به آسانی دیده می‌شود که مثلث $P_۱P_۲P_۳$ بزرگترین مثلث با قاعدهٔ $P_۱P_۳$ است که می‌تواند در کمان سهموی با قاعدهٔ $P_۱P_۳$ محاط شود. همچنین، توجه می‌کنیم که: اگر از نقطهٔ $P_۲$ خطی به موازات وتر $P_۱P_۳$ رسم کنیم، این خط موازی یک ضلع متوازی‌الاضلاع $P_۱Q_۱Q_۳P_۳$ است که قطاع سهموی بین $P_۱$ و $P_۳$ را به طور کامل دربردارد. (شکل ۱.۵ را ببینید.) در واقع، قطعه خط $Q_۱Q_۳$ بر کمان سهموی بین $P_۱$ و $P_۳$ در نقطهٔ $P_۲$ مماس است و مساحت متوازی‌الاضلاع $P_۱Q_۱Q_۳P_۳$ دقیقاً دو برابر مساحت مثلث $P_۱P_۲P_۳$ است. بنابراین، مساحت قطعهٔ سهموی با قاعدهٔ $P_۱P_۳$، که در بالای بازه‌ای به طول $۲h$ واقع شده است و منحنی سهموی مورد بحث در معادلهٔ (۱.۵) صدق می‌کند، اکیداً بین اعداد زیر واقع است:

$$Ah^۳ \quad \text{و} \quad ۲Ah^۳$$

اینک، نشان می‌دهیم که مساحت قطعهٔ سهموی با قاعدهٔ $P_۱P_۳$ و رأس $P_۲$ عبارت است از ۴/۳ برابر مساحت مثلث $P_۱P_۲P_۳$ با قاعدهٔ $P_۱P_۳$ و رأس $P_۲$.

نخست، مثلث $P_۱P_۲P_۳$ را در قطعهٔ سهموی به قاعدهٔ $P_۱P_۳$ و رأس $P_۲$ محاط می‌کنیم. سپس، مثلثهای $P_۱P_۴P_۲$ و $P_۲P_۵P_۳$ را در قطعات سهموی کوچکتر با قاعده‌های $P_۱P_۲$ و $P_۲P_۳$ محاط می‌کنیم. (شکل ۱.۵ را ببینید.) قطعهٔ سهموی به قاعدهٔ $P_۱P_۲$ (یا، قطعهٔ به قاعدهٔ $P_۲P_۳$) و رأس $P_۴$ (یا، قطعهٔ به رأس $P_۵$) دارای همان قاعده و رأس است که مثلث $P_۱P_۴P_۲$ (یا، مثلث $P_۲P_۵P_۳$) می‌باشد. طول $x_۴$ نقطهٔ وسط بازهٔ $x_۱$ تا $x_۲$ است و طول $x_۵$ نقطهٔ وسط بازهٔ $x_۲$ تا $x_۵$ می‌باشد. مساحت مثلث $P_۱P_۴P_۲$ (یا، مثلث $P_۲P_۵P_۳$)، واقع بر بالای بازه‌ای به طول h، برابر است با

$$A\left(\frac{h}{۲}\right)^۳ = \frac{Ah^۳}{۸}$$

و، از این رو، دو مثلث $P_۱P_۴P_۲$ و $P_۲P_۵P_۳$ با هم دارای مساحت کل

$$\frac{۱}{۴}Ah^۳$$

می‌باشند. براین اساس، چندضلعی $P_۱P_۴P_۲P_۵P_۳$ دارای مساحت زیر است:

$$\left(۱+\frac{۱}{۴}\right)Ah^۳$$

سپس در چهار قطعهٔ سهموی، به ترتیب، به قاعده‌های $P_۱P_۴$، $P_۴P_۲$، $P_۲P_۵$، و $P_۵P_۳$، مثلثهایی محاط می‌کنیم؛ رئوس متناظر چنان انتخاب می‌شوند که رأس هر قطعهٔ سهموی بر رأس مثلث محاط در خود منطبق شود.

با ادامهٔ این فرایند، در مرحلهٔ nام، یک چندضلعی با مساحت

$$q_n = \left(۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴^۲}+\cdots+\frac{۱}{۴^{n-۱}}\right)Ah^۳$$

به‌دست می‌آید. تفاضل مساحت چندضلعی و مساحت قطعهٔ سهموی به قاعدهٔ $P_۱P_۳$ نامنفی است و به صفر میل می‌کند وقتی که n به طور دلخواه بزرگ شود. مساحت قطعهٔ سهموی به قاعدهٔ $P_۱P_۳$ عبارت است از

$$\lim_{n\to\infty} q_n$$

اگر قرار دهیم:

$$s_n = ۱+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴^۲}+\cdots+\frac{۱}{۴^{n-۱}}$$

خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۴}s_n = \frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۴^۲}+\cdots+\frac{۱}{۴^n}$$

بنابراین،

$$\frac{۳}{۴}s_n = ۱ - \frac{۱}{۴^n} \quad \text{یا} \quad \lim_{n\to\infty} s_n = \frac{۴}{۳}$$

که مستلزم

$$\lim_{n\to\infty} q_n = \frac{۴}{۳}Ah^۳$$

است. به این ترتیب، مساحت قطعهٔ سهموی عبارت است از ۴/۳ برابر مساحت مثلث محاطی که دارای همان قاعده و رأس است که قطعهٔ سهموی می‌باشد.

حال، به آنچه دربارهٔ محاسبهٔ مساحت یک قطعهٔ سهموی بیان شد، چند نکته‌ای اضافه می‌کنیم. با شروع از مثلث $P_۱P_۲P_۳$، دو مثلث $P_۱P_۴P_۲$ و $P_۲P_۵P_۳$ افزوده شد، بعداً چهار مثلث، و هکذا؛ که هر بار تعداد مثلثهای مرحلهٔ ماقبل خود دو برابر شده است. اگر، به جای این که تعداد مثلثهای مرحلهٔ nام را دو برابر کنیم، تعداد مثلثها را چهار برابر کنیم، می‌توان دید که مساحت این مثلثها از مساحت قطعهٔ سهموی مورد بحث بیشتر می‌شود. در این مورد، یادآوری می‌کنیم که مساحت چندضلعی $P_۱Q_۱Q_۲P_۳$ دوبرابر مساحت مثلث $P_۱P_۲P_۳$ می‌شود و قطعهٔ سهموی به قاعدهٔ $P_۱P_۳$ را کاملاً دربرمی‌گیرد. در این صورت، تفاضل مساحت قطعهٔ سهموی به قاعدهٔ $P_۱P_۳$ و مساحت مثلث $P_۱P_۲P_۳$ از

$$s_n = ۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴^۲} + \cdots + \frac{۱}{۴^{n-۲}} + \frac{۱}{۴^{n-۱}}$$

بزرگتر و از

$$S_n = ۱ + \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴^۲} + \cdots + \frac{۱}{۴^{n-۲}} + \frac{۲}{۴^{n-۱}}$$

کوچکتر است. به وضوح، s_n با افزایش n بزرگتر می‌شود؛ معذالک،

$$S_{n+۱} - S_n = \frac{۲}{۴^n} - \frac{۱}{۴^{n-۱}} = -\frac{۱}{۲\,.\,۴^{n-۱}}$$

و، بنابراین، S_n با افزایش n نزول می‌کند. به ازای $n = ۲, ۳, \ldots$، بازه‌های بستهٔ

$$J_n = [s_n, S_n]$$

که J_n دارای طول $۱/۴^{n-۱}$ است، دنباله‌ای از بازه‌های تودرتو تشکیل می‌دهند؛ نقطهٔ ۴/۳ نقطهٔ مشترک منحصربه‌فرد همهٔ بازه‌های J_n است.

توضیح. ارشمیدس، اهل سیراکوس، در ۲۱۲ قبل از میلاد وفات یافت. دو ریاضیدان، گیلز پرسونه دو رابروال و پیر دو فرما، که دو مثال بعدی منسوب به آنهاست، در قرن هفدهم می‌زیستند.

مثال ۲. (روش رابروال در محاسبهٔ مساحت چرخزاد.) منحنی‌ای که نقطه‌ای از یک دایره می‌پیماید در حالی که دایره بر روی خط راستی بدون لغزش می‌غلطد، یک چرخزاد نامیده می‌شود؛ دایرهٔ غلطان را دایرهٔ مولد چرخزاد می‌نامند.

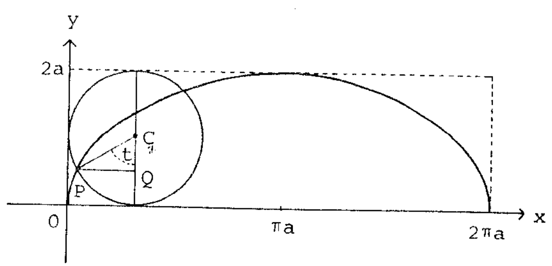
برای تعیین معادلات پارامتری سادهٔ چرخزاد، فرض می‌کنیم خط ثابتی که دایره بر آن می‌غلطد محور xها باشد و مبداء را یکی از مکانهایی می‌گیریم که نقطهٔ رسام در آن جا با محور xها تماس پیدا می‌کند. مرکز دایرهٔ غلطان را به C و شعاع آن را به a نشان می‌دهیم. فرض کنید نقطهٔ P به مختصات (x, y) مکان دلخواهی از نقطهٔ رسام باشد و زاویهٔ t چرخش قطعه خط CP از موضع خود در زمانی که P در مبداء بوده است را به عنوان پارامتر انتخاب می‌کنیم. (شکل ۲.۵ را ببینید.) فرض می‌کنیم که دایرهٔ مولد بر بالای محور xها و به راست بغلطد، زاویهٔ t برحسب رادیان اندازه‌گیری می‌شود، و جهت مثبت برای t جهت چرخش عقربه‌های ساعت باشد. اگرچه چرخزاد از تعدادی نامتناهی طاقهای همنهشت (یکسان) تشکیل شده است، فقط طاقی را در نظر می‌گیریم که از $x = ۰$ تا $x = ۲\pi a$ کشیده شده است. هدف ما این است که نشان بدهیم که مساحت ناحیه‌ای که به محور xها و طاقی از چرخزاد محدود می‌شود که از $x = ۰$ تا $x = ۲\pi a$ کشیده شده است سه برابر مساحت دایرهٔ مولد است؛ یعنی، $۳\pi a^۲$.

چون دایرهٔ مولد در امتداد محور xها بدون لغزش می‌غلطد، فاصلهٔ O تا N برابر طول کمانی از دایرهٔ مولد است که از P تا N در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت طی شود. از روی شکل ۲.۵ می‌توان دید که

$$\overline{ON} = at, \quad \overline{QC} = a\cos t, \quad \overline{PQ} = a\sin t$$

به این ترتیب،

$$y = \overline{NC} - \overline{QC} = a(۱ - \cos t) \quad \text{و} \quad x = \overline{ON} - \overline{PQ} = a(t - \sin t)$$



شکل ۲.۵

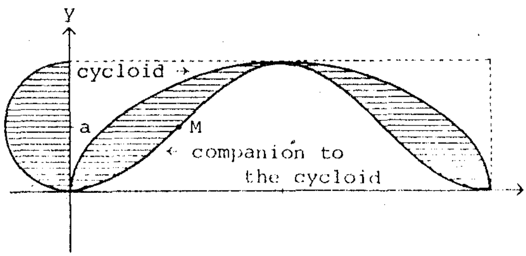
بنابراین، معادلات پارامتری طاقی از چرخزاد که از $x = \circ$ تا $x = \text{۲}\pi a$ کشیده شده است عبارتند از

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(\text{۱} - \cos t), \quad \circ \leq t \leq \text{۲}\pi$$

منظور از منحنی همراه چرخزاد منحنی با معادلات پارامتری زیر است:

$$x = at, \quad y = a(\text{۱} - \cos t), \quad \circ \leq t \leq \text{۲}\pi$$

توجه کنید که نقطهٔ Q بر منحنی همراه چرخزاد واقع است و قطعه خطی که از P به Q می‌رود دقیقاً دارای همان طول است که مقطعی از نیمدایره که در سطح $y = a(\text{۱} - \cos t)$ بریده شود؛ شکل ۳.۵ را به منظور تشریح منحنی همراه چرخزاد ملاحظه کنید.



شکل ۳.۵

فرض کنید M نقطهٔ به مختصات $(\pi a/\text{۲}, a)$ باشد. به آسانی دیده می‌شود که منحنی

$$x = at, \quad y = a(\text{۱} - \cos t), \quad \circ \leq t \leq \pi$$

با دورانی به اندازهٔ π حول نقطهٔ M بر روی خود نگاشته می‌شود؛ توجه کنید که به‌ازای هر $t_\text{۱}$ که $\circ \leq t_\text{۱} \leq \pi/\text{۲}$،

$$a(\text{۱} - \cos t_\text{۱}) + a\left(\text{۱} - \cos\{\frac{\pi}{\text{۲}} - t_\text{۱}\}\right) = \text{۲}a$$

از این رو، منحنی

$$x = at, \quad y = a(\text{۱} - \cos t), \quad \circ \leq t \leq \pi$$

مستطیل به رئوس $(\circ, \circ)$، $(\pi a, \circ)$، $(\pi a, ۲a)$، و $(\circ, ۲a)$ را به دو ناحیهٔ همنهشت تقسیم می‌کند. به این ترتیب، مساحت ناحیهٔ محدود به محور xها و منحنی همراه چرخزاد

$$x = at, \quad y = a(۱ - \cos t), \quad \circ \leq t \leq ۲\pi$$

دقیقاً نصف مساحت مستطیل به رئوس $(\circ, \circ)$، $(۲\pi a, \circ)$، $(۲\pi a, ۲a)$، و $(\circ, ۲a)$ است. در نتیجه، ناحیهٔ محدود به محور xها و منحنی همراه چرخزاد دارای مساحت $۲\pi a^۲$ است.

از طرف دیگر، مساحت ناحیهٔ محدود به طاقی از چرخزاد که از $x = \circ$ تا $x = ۲\pi a$ کشیده می‌شود و منحنی همراه چرخزاد با مساحت دایرهٔ مولد برابر است، یعنی، $\pi a^۲$؛ مساحات دو شکل مسطح برابرند مشروط به این که هر دستگاهی از خطوط موازی مقاطع یکسانی از هر شکل جدا کند. بنابراین، مساحت ناحیهٔ محدود به محور xها و یک طاق کامل از یک چرخزاد سه برابر مساحت دایرهٔ مولد است.

مثال ۳. (روش فرما در تعیین مساحت $y = Ax^c$.) ناحیهٔ محدود به منحنی $y = Ax^c$، محور xها، و دو خط راست $x = a$ و $x = b$ را با $\circ < a < b$، که در آن ضریب A و نمای c اعداد حقیقی دلخواه ولی ثابت می‌باشند، در نظر بگیرید. برای تعیین مساحت ناحیهٔ مورد بحث، بین a و b تعداد $n - ۱$ میانگین هندسی درج می‌کنیم به طوری که دنبالهٔ

$$a, \quad a(۱ + v), \quad a(۱ + v)^۲, \quad \ldots, \quad a(۱ + v)^{n-۱}, \quad b$$

حاصل شود که در آن عدد v در شرط $a(۱ + v)^n = b$ صدق می‌کند. اگر این اعداد را طولهای نقاط تقسیم بازهٔ $[a, b]$ در نظر بگیریم، عرضهای متناظر دارای مقادیر زیر خواهد بود:

$$Aa^c, \;\; Aa^c(۱ + v)^c, \;\; Aa^c(۱ + v)^{۲c}, \;\; \ldots, \;\; Aa^c(۱ + v)^{(n-۱)c}, \;\; Ab^c$$

و مساحت مستطیل pام عبارت است از

$$[a(۱ + v)^p - a(۱ + v)^{p-۱}]Aa^c(۱ + v)^{(p-۱)c} = Aa^{c+۱}v(۱ + v)^{(p-۱)(c+۱)}$$

از این رو، حاصل جمع مساحات همهٔ مستطیلها عبارت است از

$$Aa^{c+۱}v[۱ + (۱ + v)^{c+۱} + (۱ + v)^{۲(c+۱)} + \cdots + (۱ + v)^{(n-۱)(c+۱)}]$$

اگر $c + ۱ \neq \circ$ که در ابتدا فرض را بر این می‌گذاریم، مجموع داخل کروشه برابر است با

$$\frac{(۱ + v)^{n(c+۱)} - ۱}{(۱ + v)^{c+۱} - ۱}$$

یا، پس از تعویض $a(1+v)^n$ با b، حاصل جمع مساحات همهٔ مستطیلها به صورت زیر نیز نوشته می‌شود:

$$A(b^{c+1}-a^{c+1})\frac{v}{(1+v)^{c+1}-1}$$

اگر v به صفر میل کند، خارج‌قسمت

$$\frac{(1+v)^{c+1}-1}{v}$$

به حد خود، یعنی، $c+1$، که مشتق $(1+v)^{c+1}$ برحسب v به‌ازای $v=0$ می‌باشد، میل می‌کند؛ از این رو، مساحت ناحیهٔ مورد بحث عبارت است از

$$\frac{A(b^{c+1}-a^{c+1})}{c+1}$$

اگر $c=-1$، این محاسبه دیگر مؤثر واقع نمی‌شود. مجموع مساحتهای مستطیلهای محاطی برابر است با nAv، و باید حد حاصل‌ضرب nv را بیابیم که در آن n و v با رابطهٔ $a(1+v)^n=b$ به هم مربوطند. از این رو،

$$nv=\left(\ln\frac{b}{a}\right)\frac{v}{\ln(1+v)}=\left(\ln\frac{b}{a}\right)\frac{1}{\ln(1+v)^{1/v}}$$

وقتی v به صفر میل کند، $(1+v)^{1/v}$ به e و حاصل‌ضرب nv به $\ln(b/a)$ میل می‌کند. بنابراین، مساحت مطلوب برابر است با $A\ln(b/a)$.

۲.۵ مساحت ناحیهٔ مسطّح

فرض کنید که شخصی ناحیه‌ای از صفحهٔ x و y را به کمک یک منحنی مشخص کرده باشد؛ به طور شهودی واضح است که این ناحیه مساحتی دارد. معذالک، از نظر علم حساب، این مساحت را چگونه تعریف کنیم؟ اگر این ناحیه یک مستطیل باشد، مساحت ناحیه از ضرب طول و عرض مستطیل به دست می‌آید. معذالک، وقتی که حداقل قسمتی از مرز ناحیه خمیده باشد، تعریف مساحت ناحیه دیگر بدیهی نخواهد بود.

در حال حاضر، توجه خود را به نواحی سادهٔ خاصی معطوف می‌کنیم و فقط نواحی محدود به محور xها، خطوط $x=a$ و $x=b$ با $a<b$، و منحنی $y=f(x)$ را مورد بررسی قرار می‌دهیم. بعلاوه، فرض می‌کنیم که تابع $y=f(x)$ بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد و به‌ازای هر x که $a\le x\le b$ داشته

باشیم $f(x) \geq \circ$. نظریهٔ مساحت نواحی کلی که به چند منحنی محدودند قابل تبدیل به حالت این نواحی خاص است. بلافاصله توجه می‌کنیم که محدودیت مربوط به علامت f بر $[a,b]$ یک شرط جدی نیست. در واقع، اگر f تابع پیوسته‌ای بر $[a,b]$ باشد که تغییر علامت بدهد، می‌توانیم توابع پیوسته و نامنفی (محتوای قضیهٔ ۸.۲ را به خاطر بیاورید.)

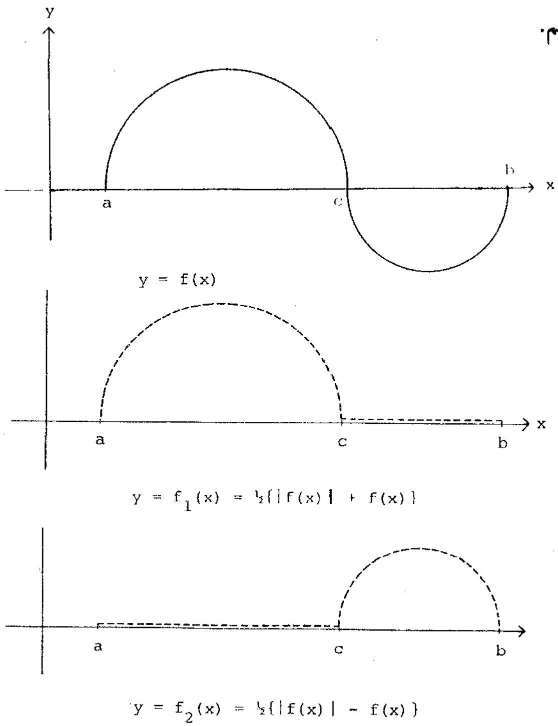
$$f_{۱}(x) = \frac{۱}{۲}\{|f(x)| + f(x)\} \qquad \text{و} \qquad f_{۲}(x) = \frac{۱}{۲}\{|f(x)| - f(x)\}$$

را معرفی کنیم و قرار دهیم $f = f_{۱} - f_{۲}$؛ شکل ۴.۵ را ببینید.

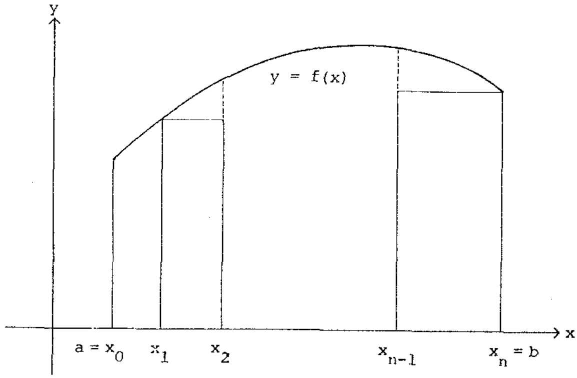
برای تعریف مساحت I ناحیه‌ای مانند F، بازهٔ $[a,b]$ را به کمک نقاط

$$a = x_{\circ} < x_{۱} < x_{۲} < \cdots < x_{n-۱} < x_n = b \qquad (۲\cdot۵)$$

به n زیربازه تقسیم و از نقاط x_k، $k = \circ, ۱, \ldots, n$، خطوطی موازی محور yها رسم می‌کنیم. به این طریق، ناحیهٔ F به n نوار تقسیم می‌شود. در هر یک از این نوارها بزرگترین مستطیلی را که درون ناحیه جا بگیرید رسم می‌کنیم.



شکل ۴.۵



شکل ۵.۵

(شکل ۵.۵ را ببینید.) مساحت kامین مستطیل عبارت است از

$(x_k - x_{k-۱})m_k$ ، که در آن $m_k = \min\{f(x) : x_{k-۱} \leq x \leq x_k\}$.

واضح است که مساحت F را باید حداقل مساوی حاصل جمع

$$s = (x_۱ - x_۰)m_۱ + (x_۲ - x_۱)m_۲ + \cdots + (x_n - x_{n-۱})m_n = \sum_{k=۱}^{n}(x_k - x_{k-۱})m_k$$

مساحتهای این مستطیلها تعریف کنیم. حال، عدد s به تعداد و انتخاب خاص نقاط x_k بستگی دارد. مجموعهٔ همهٔ این اعداد s را که براساس انتخابهای متفاوت افراز (۲.۵) قابل حصول است به $\underline{\mathscr{S}}$ نشان می‌دهیم. واضح به نظر می‌رسد که باید I را چنان تعریف کنیم که اعدادی مانند s به قدر دلخواه نزدیک به I در $\underline{\mathscr{S}}$ داشته باشیم. به این ترتیب، مجبور می‌شویم که I را مساوی کوچکترین کران بالای $\underline{I}$ همهٔ اعداد s در $\underline{\mathscr{S}}$ تعریف کنیم؛ یعنی، $\underline{I} = \sup \underline{\mathscr{S}}$.

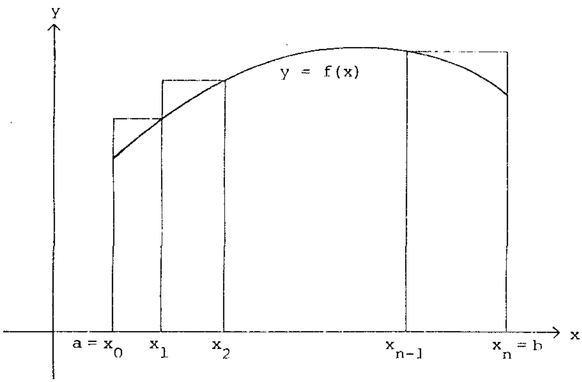
معذالک، برای نیل به تعریف مساحت I ناحیهٔ F، به جای بررسی مستطیلهایی که درون F واقع می‌شوند، می‌توانیم مستطیلهایی را نیز بررسی کنیم که F رامی‌پوشانند. مجدداً، با رسم خطوطی موازی محور yها که از نقاط x_k افراز (۲.۵) بگذرند، F را به n نوار تقسیم می‌کنیم. ولی، این بار، به‌ازای هر نوار کوچکترین مستطیلی را جستجو می‌کنیم که باز هم شامل این نوار باشد. (شکل ۶.۵ را ببینید.) مساحت kامین ناحیه از این مستطیلها عبارت است از

$(x_k - x_{k-۱})M_k$، که در آن $M_k = \max\{f(x) : x_{k-۱} \leq x \leq x_k\}$

واضح است که مساحت I ناحیهٔ F را باید چنان تعریف کنیم که حداکثر مساوی حاصل‌جمع

$$S = (x_۱ - x_۰)M_۱ + (x_۲ - x_۱)M_۲ + \cdots + (x_n - x_{n-۱})M_n = \sum_{k=۱}^{n}(x_k - x_{k-۱})M_k$$

مساحات این مستطیلها باشد. مجموعهٔ همهٔ این اعداد S را که براساس انتخابهای متفاوت افراز (۲.۵) قابل حصول است به $\overline{\mathscr{S}}$ نشان می‌دهیم. مجدداً واضح به نظر می‌رسد که باید I چنان تعریف شود که اعدادی مانند S در $\overline{\mathscr{S}}$ یافت شوند که به قدر دلخواه به I نزدیک باشند. به این ترتیب، مجبور می‌شویم که I را مساوی بزرگترین کران پایین $\bar{I}$ همهٔ اعداد S در $\overline{\mathscr{S}}$ تعریف کنیم؛ یعنی، $\bar{I} = \inf \overline{\mathscr{S}}$.



شکل ۶.۵

بنابراین، ملاحظه کرده‌ایم که باید روابط $I = \underline{I}$ و $I = \bar{I}$ برقرار باشند. معذالک، در آغاز چندان واضح نیست که اعداد $\underline{I}$ و $\bar{I}$ بر هم منطبق باشند. هر نظریهٔ کاملی از مساحت که نخستین هدفش دستیابی به تعریف درستی از مقدار عددی مساحت ناحیه باشد باید شامل تحقیقی در درستی معادلهٔ

$$\underline{I} = \bar{I} \qquad (۳.۵)$$

باشد. برهان این معادله صرفاً مسأله‌ای از حساب است. این معادله گزاره‌ای دربارهٔ توابع پیوسته است. ردهٔ توابعی که به‌ازای آنها گزارهٔ متناظر معادلهٔ (۳.۵) برقرار باشد بسیار وسیعتر از مجموعهٔ توابع پیوسته است. در بخش بعدی رشتهٔ افکاری را که به معادلهٔ (۳.۵) انجامید مرور می‌کنیم. این روّیه صرفاً به حساب مربوط می‌شود و از بحثهای هندسی و شهودی پرهیز خواهیم کرد.

۳.۵ انتگرال ریمان

تعریف. فرض کنید $[a,b]$ بازهٔ بسته‌ای با طول متناهی باشد. منظور از افراز P از $[a,b]$ مجموعه‌ای متناهی از نقاط x_0، x_1، …، x_n است به طوری که

$$a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b$$

به‌ازای $1 \le k \le n$، می‌نویسیم:

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$$

و

$$\|P\| = \max\{\Delta x_k : 1 \le k \le n\}$$

$\|P\|$ را نرم افراز P می‌نامند.

تعریف. افراز P^* از $[a,b]$ را یک تظریف افراز P از $[a,b]$ می‌نامند (و می‌نویسند: $P^* \supset P$) در صورتی که هر نقطهٔ P نقطه‌ای از P^* باشد. اگر دو افراز P_1 و P_2 از $[a,b]$ مفروض باشند، افراز $P^* = P_1 \cup P_2$ را تظریف مشترک آنها می‌نامیم. P^* را ظریفتر از P می‌گویند در صورتی که $P^* \supset P$.

تبصره. واضح است که تظریف مشترک هر دو افراز یک بازه، در واقع، تظریفی از هر یک از آنهاست.

تعریف. فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار کراندار بر بازهٔ بسته‌ای با طول متناهی مانند $[a,b]$ باشد، یعنی، دو عدد مانند m و M موجود باشند به طوری که

$$\text{به‌ازای} \quad a \le x \le b، \quad m \le f(x) \le M$$

متناظر با هر افراز P از $[a,b]$، قرار می‌دهیم

$$M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}$$
$$m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \le x \le x_k\}$$

و مجموعهای داربوی بالایی و پایینی f برحسب P را، به ترتیب،

$$U(P,f) = \sum_{k=1}^{n} M_k \Delta x_k \quad \text{و} \quad L(P,f) = \sum_{k=1}^{n} m_k \Delta x_k$$

تعریف می‌کنیم؛ سرانجام، قرار می‌دهیم

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \inf U(P,f) \qquad (۴.۵)$$

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx = \sup L(P,f) \qquad (۵.۵)$$

که در آنها اینفیموم و سوپرمم زمانی گرفته می‌شود که P همهٔ افرازهای $[a,b]$ را اختیار کند. اعداد سمت چپ روابط (۴.۵) و (۵.۵) را، به ترتیب، انتگرالهای ریمان بالایی و پایینی f بر $[a,b]$ می‌نامند. اگر انتگرالهای ریمان بالایی و پایینی با هم برابر باشند، می‌گوییم که f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است و مقدار مشترک (۴.۵) و (۵.۵) را به صورت

$$\int_a^b f(x)dx$$

نشان می‌دهیم و آن را انتگرال ریمان f بر $[a,b]$ می‌نامیم. وقتی از انتگرال ریمان f بر $[a,b]$ صحبت می‌کنیم، فرض بر این است که f بر $[a,b]$ کراندار است و $[a,b]$ با طول متناهی است.

تبصره. برای این که ببینیم که انتگرالهای ریمان بالایی و پایینی به‌ازای هر تابع کراندار f بر بازهٔ بسته‌ای مانند $[a,b]$ با طول متناهی موجودند، ملاحظه می‌کنیم که اعداد $L(P,f)$ و $U(P,f)$ مجموعه‌ای کراندار تشکیل می‌دهند. در واقع، چون f کراندار است،

$$\text{به‌ازای } a \le x \le b, \quad m \le f(x) \le M$$

از این رو، به‌ازای هر افراز P از $[a,b]$، داریم:

$$m(b-a) \le L(P,f) \le U(P,f) \le M(b-a)$$

قضیهٔ ۱.۵. فرض کنید f تابع کرانداری بر $[a,b]$ باشد. اگر P و P^* افرازهایی از $[a,b]$ باشند و $P \subset P^*$، آن‌گاه

$$L(P,f) \le L(P^*,f) \le U(P^*,f) \le U(P,f)$$

برهان. نامساوی میانی بدیهی است. تحقیق در درستی اولین و سومین نامساوی مشابه است و، بنابراین، فقط ثابت می‌کنیم که

$$L(P,f) \le L(P^*,f)$$

نخست، فرض می‌کنیم که P^* فقط یک نقطه بیشتر از P داشته باشد. فرض کنید x^* این نقطهٔ اضافی باشد و $x_{k-1} < x^* < x_k$، که در آن x_{k-1} و x_k دو نقطهٔ متوالی از افراز P می‌باشند. قرار می‌دهیم

$$w_1 = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x^*\}$$
$$w_2 = \inf\{f(x) : x_* \leq x \leq x_k\}$$

مانند گذشته، با فرض

$$m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

ملاحظه می‌کنیم که $w_1 \geq m_k$ و $w_2 \geq m_k$. به این ترتیب،

$$\begin{aligned} L(P^*, f) - L(P, f) &= w_1(x^* - x_{k-1}) + w_2(x_k - x^*) - m_k(x_k - x_{x-1}) \\ &= (w_1 - m_k)(x^* - x_{k-1}) + (w_2 - m_k)(x_k - x^*) \\ &\geq 0 \end{aligned} \tag{۶.۵}$$

اگر P^* تعداد j نقطه بیشتر از P داشته باشد، استدلال بالا را j بار تکرار می‌کنیم تا به نامساوی $L(P, f) \leq L(P^*, f)$ برسیم.

قضیهٔ ۲.۵. فرض کنید f تابعی کراندار بر $[a, b]$ باشد و P_1 و P_2 دو افراز دلخواه $[a, b]$ باشند. آن‌گاه

$$L(P_1, f) \leq U(P_2, f)$$

برهان. فرض کنید $P^* = P_1 \cup P_2$ تظریف مشترک P_1 و P_2 باشد. به استناد قضیهٔ ۱.۵، داریم:

$$L(P_1, f) \leq L(P^*, f) \leq U(P^*, f) \leq U(P_2, f)$$

زیرا $P_1 \subset P^*$ و $P_2 \subset P^*$.

قضیهٔ ۳.۵. اگر f تابعی کراندار بر $[a, b]$ باشد، آن‌گاه

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx$$

برهان. به استناد قضیهٔ ۲.۵، به‌ازای هر دو افراز P_1 و P_2 از $[a,b]$،

$$L(P_1,f) \leq U(P_2,f)$$

اگر P_2 را ثابت نگهداریم و برحسب افرازهای P_1 سوپرمم بگیریم، این نامساوی ایجاب می‌کند که

$$\underline{\int_a^b} f(x)dx \leq U(P_2,f)$$

اکنون، حکم قضیه، با اینفیموم‌گیری برحسب افرازهای P_2 در نامساوی اخیر، نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۴.۵. تابع f، که بر $[a,b]$ کراندار است، فقط و فقط وقتی بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ افرازی مانند P از $[a,b]$ بتوان یافت که

$$U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon \qquad (۷.۵)$$

برهان. با استفاده از قضیهٔ ۳.۵، ملاحظه می‌کنیم که

$$L(P,f) \leq \underline{\int_a^b} f(x)dx \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx \leq U(P,f)$$

که در آن P افراز دلخواهی از $[a,b]$ است. بنابراین، نامساوی (۷.۵) ایجاب می‌کند که

$$0 \leq \overline{\int_a^b} f(x)dx - \underline{\int_a^b} f(x)dx < \varepsilon$$

چون این نامساوی به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ برقرار است، خواهیم داشت:

$$\overline{\int_a^b} f(x)dx = \underline{\int_a^b} f(x)dx$$

که نشان می‌دهد که f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است.

برعکس، فرض کنید f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد و $\varepsilon > 0$ مفروض باشد. آن‌گاه، افرازهایی مانند P_1 و P_2 از $[a,b]$ موجودند به طوری که

$$\int_a^b f(x)dx - L(P_1,f) < \frac{\varepsilon}{2}, \qquad U(P_2,f) - \int_a^b f(x)dx < \frac{\varepsilon}{2} \qquad (۸.۵)$$

فرض کنید P تظریف مشترک P_1 و P_2 باشد. آن‌گاه، به استناد قضیهٔ ۳.۵ و روابط (۸.۵)، خواهیم داشت:

$$U(P,f) \leq U(P_2,f) < \int_a^b f(x)dx + \frac{\varepsilon}{2} < L(P_1,f) + \varepsilon < L(P,f) + \varepsilon$$

به این ترتیب، (۷.۵) به‌ازای افراز $P = P_1 \cup P_2$ برقرار است.

تبصره. در اثبات قضیهٔ قبلی از واقعیت زیر استفاده شده است: اگر A و B اعداد حقیقی ثابتی باشند به طوری که $B \geq A$ و نامساوی $A - B < \varepsilon$ به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ برقرار باشد، آن‌گاه $A = B$. در واقع، اگر $A \neq B$ ممکن بود، آن‌گاه $A - B = \alpha > ۰$ و، بنابراین، $\varepsilon > \alpha$ نتیجه می‌شد.

قضیهٔ ۵.۵. تابع f، که بر $[a, b]$ کراندار است، فقط و فقط وقتی بر $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است که به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ عددی مثبت مانند δ موجود باشد به طوری که

(۹.۵) هرگاه P افرازی از $[a, b]$ باشد که $\|P\| < \delta$ آن‌گاه $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon$

برهان. قضیهٔ ۴.۵ نشان می‌دهد که شرط (۹.۵) مستلزم انتگرال‌پذیری ریمان f است.

برعکس، فرض کنید f بر $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد. فرض کنید $\varepsilon > ۰$ و افراز

$$P_{\circ} = \{a = t_{\circ} < t_{۱} < \cdots < t_n = b\}$$

از $[a, b]$ را طوری انتخاب کنید که

$$U(P_{\circ}, f) - L(P_{\circ}, f) < \frac{\varepsilon}{۲} \qquad (۱۰.۵)$$

چون f کراندار است، $B > ۰$ی موجود است به طوری که نامساوی $|f(x)| \leq B$ به‌ازای هر x از $[a, b]$ برقرار است. فرض کنید $\delta = \varepsilon / ۸mB$ که در آن m تعداد بازه‌هایی است که $P_{\circ}$ از $[a, b]$ جدا می‌کند.

برای تحقیق در برقراری (۹.۵)، افراز دلخواهی مانند

$$P = \{a = x_{\circ} < x_{۱} < \cdots < x_n = b\}$$

در نظر می‌گیریم که $\|P\| < \delta$. فرض کنید $Q = P \cup P_{\circ}$. اگر Q یک عنصر بیشتر از P داشته باشد، آن‌گاه با نگاهی به رابطهٔ (۶.۵) در برهان قضیهٔ ۱.۵ آشکار می‌شود که

$$L(Q, f) - L(P, f) \leq ۲B . \|P\|$$

چون Q حداکثر m عنصر بیشتر از P دارد، ملاحظه می‌کنیم که

$$L(Q, f) - L(P, f) \leq ۲mB . \|P\| < ۲mB\delta = \frac{\varepsilon}{۴}$$

به استناد قضیهٔ ۱.۵، $L(P_{\circ}, f) \leq L(Q, f)$ و، بنابراین،

$$L(P_{\circ}, f) - L(P, f) < \frac{\varepsilon}{۴}$$

به طور مشابه، $U(P,f) - U(P_\circ, f) < \frac{\varepsilon}{۴}$ و، بنابراین،

$$U(P,f) - L(P,f) < U(P_\circ, f) - L(P_\circ, f) + \frac{\varepsilon}{۲}$$

حال، (۱۰.۵) نشان می‌دهد که $U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$ و (۹.۵) محقق می‌شود.

تعریف. فرض کنید $[a,b]$ بازهٔ بسته‌ای با طول متناهی و f تابعی کراندار بر $[a,b]$ باشد. افرازی مانند

$$P = \{a = x_\circ < x_۱ < \cdots < x_n = b\}$$

از $[a,b]$ اختیار کنید. به‌ازای $k = ۱, ۲, \ldots, n$، t_k را طوری انتخاب کنید که $x_{k-۱} \leq t_k \leq x_k$ و مجموع

$$S(P,f) = \sum_{k=۱}^{n} f(t_k)\Delta x_k \quad \text{را که در آن} \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-۱}$$

تشکیل دهید. عدد $S(P,f)$ را مجموع ریمان f متناظر با افراز P می‌نامند. انتخاب نقاط t_k، قطع نظر از محدودّیت $x_{k-۱} \leq t_k \leq x_k$ به‌ازای $k = ۱, ۲, \ldots, n$، دلخواه است و، بنابراین، بی‌نهایت مجموع ریمان می‌توان یافت که متناظر با یک تابع و یک افراز باشد. نماد

$$\lim_{\|P\| \to \circ} S(P,f) = A \qquad (۱۱.۵)$$

که در آن A عددی حقیقی است و $\|P\|$ نرم افراز P را نشان می‌دهد، به این معنی است که به‌ازای هر $\varepsilon > \circ$ عددی مثبت مانند δ وجود دارد به طوری که به‌ازای هر افراز P از $[a,b]$ که $\|P\| < \delta$ و هر مجموع ریمان ممکن متناظر با P نامساوی

$$|S(P,f) - A| < \varepsilon$$

برقرار باشد.

ملاحظات. مشابه با قضیهٔ ۳.۲، می‌توان نشان داد که اگر

$$\lim_{\|P\| \to \circ} S(P,f) = A \quad \text{و} \quad \lim_{\|P\| \to \circ} S(P,f) = B$$

آن‌گاه $A = B$، به عبارت دیگر، اگر حد موجود باشد منحصربه‌فرد است.

تعریف زیرمعادل تعریف پیشین نماد (۱۱.۵) است: به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ افرازی مانند P_ε از $[a,b]$ می‌توان یافت به طوری که نامساوی

$$|S(P,f) - A| < \varepsilon$$

به‌ازای همهٔ افرازهای P شامل P_ε از $[a,b]$ برقرار باشد، که در آن $S(P,f)$ یک مجموع ریمان متناظر با P است.

تعریف ۶.۵. فرض کنید f تابعی کراندار بر $[a,b]$ باشد. آن‌گاه f فقط و فقط وقتی بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است‌که

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f) = A$$

بعلاوه،

$$\int_a^b f(x)dx = A$$

برهان. نخست، فرض کنید که f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد. فرض کنید $\varepsilon > 0$، و $\delta > 0$ طوری انتخاب شود که در شرط (۹.۵) قضیهٔ ۵.۵ صدق کند. تحقیق می‌کنیم که نامساوی

$$\left|S(P,f) - \int_a^b f(x)dx\right| < \varepsilon \qquad (۱۲.۵)$$

به‌ازای هر مجموع ریمان $S(P,f)$ متناظر با افرازی چون P که $\|P\| < \delta$ برقرار است. بالبداهه، داریم

$$L(P,f) \le S(P,f) \le U(P,f)$$

و، بنابراین، (۱۲.۵) از نامساویهای

$$U(P,f) < L(P,f) + \varepsilon \le \underline{\int_a^b} f(x)dx + \varepsilon = \int_a^b f(x)dx + \varepsilon$$

و

$$L(P,f) > U(P,f) - \varepsilon \ge \overline{\int_a^b} f(x)dx - \varepsilon = \int_a^b f(x)dx - \varepsilon$$

نتیجه می‌شود. از این رو،

$$\lim_{\|P\|\to 0} S(P,f) = \int_a^b f(x)dx$$

حال، فرض کنید که $\lim_{\|P\|\to \circ} S(P,f)$ موجود و مساوی A باشد. فرض کنید $\varepsilon > \circ$ مفروض باشد. از تعریف نماد مذکور در (۱۱.۵) ملاحظه می‌کنیم که $\delta > \circ$ی موجود است به طوری که $\|P\| < \delta$ مستلزم

$$A - \frac{\varepsilon}{۳} < S(P,f) < A + \frac{\varepsilon}{۳} \qquad (۱۳.۵)$$

است. یک چنین افرازی را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$P = \{a = x_\circ < x_۱ < \cdots < x_n = b\}$$

اگر نقاط t_k را در محدودهٔ بازه‌های $[x_{k-۱}, x_k]$ اختیار کنیم و از اعداد $S(P,f)$، که از این طریق به دست می‌آیند، سوپرمم و اینفیموم بگیریم، (۱۳.۵) ایجاب می‌کند که

$$A - \frac{\varepsilon}{۳} \leq L(P,f) \leq U(P,f) \leq A + \frac{\varepsilon}{۳}$$

به این ترتیب،

$$U(P,f) - L(P,f) \leq \frac{۲\varepsilon}{۳} < \varepsilon$$

و، به استناد قضیهٔ ۴.۵، دیده می‌شود که f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است. چون

$$L(P,f) \leq \int_a^b f(x)dx \leq U(P,f)$$

نتیجه می‌شود که

$$\lim_{\|P\|\to \circ} S(P,f) = \int_a^b f(x)dx$$

با این، برهان کامل می‌شود.

قضیهٔ ۷.۵. فرض کنید تابع f بر $[a,b]$ با طول متناهی کراندار باشد. آن‌گاه، f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است فقط و فقط وقتی که به‌ازای هر دو عدد مثبت و دلخواه ω و σ روشی برای تقسیم $[a,b]$ به زیربازه‌ها بتوان یافت به طوری که مجموع طول زیربازه‌هایی که نوسان f در آنها بزرگتر از یا مساوی ω است کوچکتر از σ باشد.

برهان. فرض کنید $P = \{a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n = b\}$ افرازی از $[a,b]$ باشد و مجموع

$$Z(P,f) = \sum_{k=۱}^{n} \omega_k \Delta x_k$$

را در نظر بگیرید که در آن $\Delta x_k = x_k - x_{k-۱}$ و $\omega_k = M_k - m_k$ با

$$M_k = \sup\{f(x) : x_{k-۱} \le x \le x_k\}, \qquad m_k = \inf\{f(x) : x_{k-۱} \le x \le x_k\}$$

(یعنی، ω_k نوسان f دربازهٔ $[x_{k-۱}, x_k]$ است.) فرض می‌کنیم

$$\Omega = M - m$$

که در آن

$$M = \sup\{f(x) : a \le x \le b\}, \qquad m = \inf\{f(x) : a \le x \le b\}$$

و K طول بازهٔ $[a,b]$ باشد.

حال، کرانهایی برای $Z(P,f)$ به دست می‌آوریم؛ ضمناً، $Z(P,f) = U(P,f) - L(P,f)$. فرض کنید δ مجموع طولهای زیربازه‌هایی باشد که از طریق افراز P به دست می‌آیند و نوسان f در آنها بزرگتر از یا مساوی ω است. آن‌گاه،

$$Z(P,f) \ge \delta\omega \tag{۱۴.۵}$$

ولی، نوسان f در این زیربازه‌ها کوچکتر از یا مساوی Ω است و نوسان f در زیربازه‌های باقیمانده (که مجموع طولهای آنها مساوی $K - \delta$ است) کوچکتر از ω است. به این ترتیب،

$$Z(P,f) \le \delta\Omega + (K-\delta)\omega$$

چون $K - \delta \le K$، ملاحظه می‌کنیم که

$$\delta\omega \le Z(P,f) \le \delta\Omega + K\omega$$

اگر f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد، به استناد قضیهٔ ۴.۵، به‌ازای هر دو عدد مثبت مفروض σ و ω، افرازی مانند P وجود دارد به طوری که

$$Z(P,f) < \omega\sigma \tag{۱۵.۵}$$

از (۱۴.۵) و (۱۵.۵) نتیجه می‌شود که $\delta\omega < \omega\sigma$، یعنی، $\delta < \sigma$.

برعکس، فرض می‌کنیم ε عدد مثبت دلخواهی باشد. ω و σ را به صورت زیر انتخاب می‌کنیم:

$$\omega = \frac{\varepsilon}{۲K}, \quad \sigma = \frac{\varepsilon}{۲\Omega}$$

(بدیهی است که اگر f ثابت باشد، f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است؛ اگر f ثابت نباشد، $\Omega > ۰$.) اگر افرازی مانند P موجود باشد که $\delta < \sigma$، آن‌گاه

$$Z(P,f) \leq \delta\Omega + K\omega < \sigma\Omega + K\omega = \frac{\varepsilon}{۲} + \frac{\varepsilon}{۲} = \varepsilon$$

قضیهٔ ۸.۵. فرض کنید توابع $f_۱$، $f_۲$، ...، f_q بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشند و تابع f بر $[a,b]$ تعریف شده باشد. فرض کنید اعداد مثبتی مانند $\gamma_۱$، $\gamma_۲$، ...، γ_q موجود باشند به طوری که بر هر زیربازهٔ J از $[a,b]$

$$\omega(f,J) \leq \gamma_۱\omega(f_۱,J) + \gamma_۲\omega(f_۲,J) + \cdots + \gamma_q\omega(f_q,J)$$

که در آن $\omega(f,J)$ نوسان تابع f بر J است و، به‌ازای $j = ۱,\ldots,q$، $\omega(f_j,J)$ نوسان f_j بر J است. در این صورت، f نیز بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است.

برهان. فرض کنید P افراز

$$P = \{a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n = b\}$$

از $[a,b]$ باشد. چون

$$\omega(f,[x_{k-۱},x_k]) = \sup\{f(x) : x_{k-۱} \leq x \leq x_k\} - \inf\{f(x) : x_{k-۱} \leq x \leq x_k\}$$

داریم:

$$\begin{aligned}
U(P,f) - L(P,f) &= \sum_{k=۱}^{n} \omega(f,[x_{k-۱},x_k])\Delta x_k \\
&\leq \sum_{j=۱}^{q} \gamma_j \sum_{k=۱}^{n} \omega(f_j,[x_{k-۱},x_k])\Delta x_k \\
&= \sum_{j=۱}^{q} \gamma_j \{U(P,f_j) - L(P,f_j)\}
\end{aligned}$$

اکنون، مورد ادعا به آسانی از قضیهٔ ۴.۵ نتیجه می‌شود. در واقع، به‌ازای یک $\varepsilon > ۰$ مفروض، افراز P را طوری انتخاب می‌کنیم که نامساوی

$$U(P, f_j) - L(P, f_j) < \frac{\varepsilon}{\gamma_۱ + \gamma_۲ + \cdots + \gamma_q}$$

به‌ازای هر $j = ۱, \ldots, q$ برقرار باشد.

قضیهٔ ۹.۵. فرض کنید f و g بر $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشند. آن‌گاه هر یک از توابع زیر بر $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است:

الف) $\alpha f + \beta g$، که در آن α و β اعداد حقیقی ثابت دلخواه‌اند؛

ب) $|f|$؛

ج) fg؛

د) f/g؛ مشروط به این که $\inf\{|g(x)| : a \leq x \leq b\} > ۰$.

برهان. قضیهٔ ۸.۵ را به کار می‌بریم. برای تحقیق در برقراری احکام (الف) و (ب)، فقط لازم است توجه کنیم که به‌ازای هر زیربازه مانند J از $[a, b]$ داریم

$$\omega(\alpha f + \beta g, J) \leq |\alpha|\omega(f, J) + |\beta|\omega(g, J) \qquad (۱۶.۵)$$

و

$$\omega(|f|, J) \leq \omega(f, J) \qquad (۱۷.۵)$$

معذالک، (۱۶.۵) و (۱۷.۵) رامی‌توان از نامساوی

$$|\alpha f(x) + \beta g(x) - \alpha f(t) - \beta g(t)| \leq |\alpha||f(x) - f(t)| + |\beta||g(x) - g(t)|$$

و

$$||f(x) - |f(t)|| \leq |f(x) - f(t)|$$

که در آنها x و t نقاطی از بازهٔ J هستند، نتیجه گرفت. (در مورد این نامساویها، به قضیهٔ ۱.۲ و توضیحات بعد از آن مراجعه کنید.)

برای اثبات ادعای (ج) نیز قضیهٔ ۸.۵ را به کار می‌بریم و ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای هر زیربازهٔ J از $[a,b]$ داریم

$$\omega(fg,J) \leq \gamma_1\omega(f,J) + \gamma_2\omega(g,J)$$

که در آن

$$\gamma_1 = \sup\{|g(x)| : a \leq x \leq b\} \quad \text{و} \quad \gamma_2 = \sup\{|f(x)| : a \leq x \leq b\}$$

زیرا، به‌ازای هر دو نقطهٔ x و t از J،

$$\begin{aligned}|f(x)g(x) - f(t)g(t)| &\leq |f(x)[g(x)-g(t)] + g(t)[f(x)-f(t)]| \\ &\leq \sup\{|f(s)| : a \leq s \leq b\}|g(x)-g(t)| \\ &\quad + \sup\{|g(s)| : a \leq s \leq b\}|f(x)-f(t)|\end{aligned}$$

برای اثبات ادعای (د)، فقط لازم است ثابت کنیم که $1/g$ انتگرال‌پذیر ریمان است؛ بقیه از حکم (ج) نتیجه می‌شود. اگر توجه کنیم که

$$\left|\frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(t)}\right| = \frac{1}{|g(x)||g(t)|}|g(x)-g(t)| \leq \gamma|g(x)-g(t)|$$

که در آن

$$\gamma = \frac{1}{(\inf\{|g(s)| : a \leq s \leq b\})^2} \tag{۱۸.۵}$$

و x و t دو نقطهٔ دلخواه از زیربازه‌ای چون J از $[a,b]$ می‌باشند، نتیجه می‌شود که

$$\omega\left(\frac{1}{g}, J\right) \leq \gamma\omega(g,J) \tag{۱۹.۵}$$

که در آن γ از (۱۸.۵) به دست می‌آید. امّا، به استناد قضیهٔ ۸.۵، از (۱۹.۵) اطمینان حاصل می‌کنیم که $1/g$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است؛ مشروط به این که $\inf\{|g(s)| : a \leq s \leq b\} > 0$.

قضیهٔ ۱۰.۵. فرض کنید f و g بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشند و α و β اعداد حقیقی ثابتی باشند. آن‌گاه

$$\int_a^b \{\alpha f(x) + \beta g(x)\}dx = \alpha\int_a^b f(x)dx + \beta\int_a^b g(x)dx \tag{۲۰.۵}$$

برهان. فرض کنید $P = \{a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n = b\}$ افرازی از $[a,b]$ باشد و، به‌ازای $k = ۱, \ldots, n$، t_k در $x_{k-۱} \le t_k \le x_k$ صدق کند. آن‌گاه، به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ اعداد مثبتی مانند $\delta_۱$ و $\delta_۲$ موجودند به طوری که

$$\left|\alpha \sum_{k=۱}^{n} f(t_k)\Delta x_k - \alpha \int_a^b f(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{۲} \qquad \text{هرگاه } \|P\| < \delta_۱،$$

و

$$\left|\beta \sum_{k=۱}^{n} g(t_k)\Delta x_k - \beta \int_a^b g(x)dx\right| < \frac{\varepsilon}{۲} \qquad \text{هرگاه } \|P\| < \delta_۲،$$

که در آنها، به‌ازای $k = ۱, \ldots, n$، $\Delta x_k = x_k - x_{k-۱}$. به این ترتیب، هرگاه $\|P\| < \min\{\delta_۱, \delta_۲\}$،

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{k=۱}^{n}\{\alpha f(t_k) + \beta g(t_k)\}\Delta x_k - \left(\alpha \int_a^b f(x)dx + \beta \int_a^b g(x)dx\right)\right| \\
&\le \left|\alpha \sum_{k=۱}^{n} f(t_k)\Delta x_k - \alpha \int_a^b f(x)dx\right| + \left|\beta \sum_{k=۱}^{n} g(t_k)\Delta x_k - \beta \int_a^b g(x)dx\right| < \varepsilon
\end{aligned}$$

که نشان می‌دهد که $\alpha f + \beta g$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان و (۲۰.۵) برقرار است.

قضیهٔ ۱۱.۵. اگر f و g بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشند و نامساوی $f(x) \le g(x)$ به‌ازای هر x از $[a,b]$ برقرار باشد، آن‌گاه $\int_a^b f(x)dx \le \int_a^b g(x)dx$.

برهان. به استناد قضیهٔ ۹.۵، $h = g - f$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است. چون نامساوی $h(x) \ge ۰$ به‌ازای هر x از $[a,b]$ برقرار است، واضح است که نامساوی $L(P,h) \ge ۰$ به‌ازای همهٔ افرازهای P از $[a,b]$ برقرار است و، بنابراین،

$$\int_a^b h(x)dx = \underline{\int_a} h(x)dx \ge ۰$$

با اعمال قضیهٔ ۱۰.۵، ملاحظه می‌کنیم که $\int_a^b g(x)dx - \int_a^b f(x)dx = \int_a^b h(x)dx \ge ۰$ و برهان کامل می‌شود.

قضیهٔ ۱۲.۵. اگر f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد، آن‌گاه $|f|$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است (به استناد قضیهٔ ۹.۵) و

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \int_a^b |f(x)|dx \qquad (۲۱.۵)$$

برهان. چون از قبل می‌دانیم که $|f|$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است، اگر قضیهٔ ۱۱.۵ در مورد f و $|f|$، که درنامساویهای $-|f| \le f \le |f|$ صدق می‌کنند، اعمال شود دیده می‌شود که

$$-\int_a^b |f(x)|dx \le \int_a^b f(x)dx \le \int_a^b |f(x)|dx$$

و (۲۱.۵) از آن نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۱۳.۵. اگر f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد و $a < c < b$، آن‌گاه f بر هر دو بازهٔ $[a,c]$ و $[c,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است، و

$$\int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx = \int_a^b f(x)dx \qquad (*)$$

برهان. فرض کنید $\varepsilon > 0$ مفروض باشد. افراز P از $[a,b]$ را طوری انتخاب کنید که

$$U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$$

از نقطهٔ نظر قضیهٔ ۴.۵، می‌توانیم فرض کنیم (و فرض می‌کنیم) که c نقطه‌ای از P باشد؛ مثلاً

$$P = \{a = x_0 < \cdots < x_m = c < x_{m+1} < \cdots < x_n = b\}$$

فرض کنید

$$P_1 = \{a = x_0 < \cdots < x_m = c\} \quad \text{و} \quad P_2 = \{c = x_m < \cdots < x_n = b\}$$

آن‌گاه

$$[U(P_1,f) - L(P_1,f)] + [U(P_2,f) - L(P_2,f)] = U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon$$

نتیجه می‌شود که f بر هر دو بازهٔ $[a,c]$ و $[c,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است. فرض کنید

$$\int_a^c f(x)dx = K_1 \quad \text{و} \quad \int_c^b f(x)dx = K_2$$

واضح است که

$$0 \le U(P_1,f) - K_1 < \varepsilon, \qquad 0 \le U(P_2,f) - K_2 < \varepsilon$$

از جمع این دو نامساوی، خواهیم داشت:

$$\circ \leq U(P, f) - (K_{۱} + K_{۲}) < ۲\varepsilon$$

چون حکم مشابهی در مورد $L(P, f)$ نیز برقرار است، نتیجه می‌گیریم که

$$\int_a^b f(x)dx = K_{۱} + K_{۲}$$

و برهان کامل می‌شود.

قضیهٔ ۱۴.۵. فرض کنید f تابعی باشد که بر $[a, b]$ تعریف شده است. اگر $a < c < b$ و f بر بازه‌های $[a, c]$ و $[c, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد، آن‌گاه f بر $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است و

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$$

برهان. چون f بر هر دو بازهٔ $[a, c]$ و $[c, b]$ کراندار است، f بر $[a, b]$ کراندار است. فرض کنید $\varepsilon > \circ$. به استناد قضیهٔ ۴.۵، افرازهای $P_{۱}$ از $[a, c]$ و $P_{۲}$ از $[c, b]$ موجودند (مجموعهای بالایی و پایینی را در این برهان به گونه‌ای تزیین می‌کنیم که بازهٔ مورد بحث، در هر مورد، مشخص باشد.) که

$$U_a^c(P_{۱}, f) - L_a^c(P_{۱}, f) < \frac{\varepsilon}{۲} \quad \text{و} \quad U_c^b(P_{۲}, f) - L_c^b(P_{۲}, f) < \frac{\varepsilon}{۲}$$

مجموعهٔ $P = P_{۱} \cup P_{۲}$ افرازی از $[a, b]$ است و واضح می‌باشد که

$$U_a^b(P, f) = U_a^c(P, f) + U_c^b(P, f) \qquad (۲۲.۵)$$

و اتحاد مشابهی در مورد مجموعهای پایینی برقرار است. نتیجه می‌شود که

$$U_a^b(P, f) - L_a^b(P, f) < \varepsilon$$

از این رو، f بر $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است. رابطهٔ (*) نیز برقرار است، زیرا

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)dx &\leq U_a^b(P, f) + U_c^b(P, f) < L_a^c(P, f) + L_c^b(P_{۲}, f) + \varepsilon \\ &\leq \int_a^b f(x)dx + \int_c^b f(x)dx + \varepsilon\end{aligned}$$

و، به طور مشابه،

$$\int_a^b f(x)dx > \int_a^b f(x)dx + \int_c^b f(x)dx - \varepsilon$$

که برهان کامل می‌شود.

تعریف. اگر $a > b$، قرار می‌دهیم

$$\int_a^b f(x)dx = -\int_b^a f(x)dx$$

مشروط به این که انتگرال دوم موجود باشد. بعلاوه، قرار می‌دهیم

$$\int_a^b f(x)dx = 0$$

توضیحات. در قضایای ۱۳.۵ و ۱۴.۵ با معادلهٔ

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx \qquad (۲۳.۵)$$

مواجه شدیم. به استناد تعریف بالا، (۲۳.۵) را به صورت

$$\int_a^b f(x)dx + \int_b^c f(x)dx + \int_c^a f(x)dx = 0 \qquad (۲۴.۵)$$

هم می‌توانیم بنویسیم. به آسانی دیده می‌شود که اگر سه انتگرال موجود باشند، (۲۴.۵) در حالت کلی، بدون توجه به رابطهٔ ترتیبی موجود بین اعداد a، b، و c، برقرار است. به عنوان مثال، اگر $a > b > c$، (۲۴.۵) باز هم برقرار است. همچنین، می‌توان دید که اگر a_1، a_2، . . .، a_k تعدادی متناهی نقطه از $[a, b]$ با طول متناهی باشند و تابع f بر این بازه انتگرال‌پذیر ریمان باشد، آن‌گاه رابطهٔ

$$\int_{a_1}^{a_2} f(x)dx + \int_{a_2}^{a_3} f(x)dx + \cdots + \int_{a_{k-1}}^{a_k} f(x)dx + \int_{a_k}^{a_1} f(x)dx = 0$$

صرف‌نظر از رابطهٔ ترتیبی بین نقاط a_1، a_2، . . .، a_k، برقرار است.

اگر رابطهٔ ترتیبی بین a و b مشخص نباشد، ضروری است که نامساوی (۲۱.۵) به صورت زیر نوشته شود:

$$\left|\int_a^b f(x)dx\right| \le \left|\int_a^b |f(x)|dx\right|$$

قضیهٔ ۱۵.۵. هر تابع یکنوای f بر $[a, b]$، بر این بازه انتگرال‌پذیر ریمان است.

برهان. فرض کنید f بر $[a,b]$ صعودی باشد؛ اگر f نزولی می‌بود، می‌توانستیم صرفاً تابع $-f$ را بررسی کنیم. چون نامساویهای $f(a) \le f(x) \le f(b)$ به ازای هر x از $[a,b]$ برقرارند، به‌وضوح، f بر $[a,b]$ کراندار است. فرض کنید $\varepsilon > ۰$ و عدد صحیح و مثبت n را به قدری بزرگ انتخاب کنید که

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a} < n\varepsilon$$

با افراز

$$P = \{a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n = b\}$$

که در آن، به‌ازای $k = ۱, ۲, \ldots, n$، $x_k - x_{k-۱} = \Delta x_k = (b-a)/n$ فرض می‌شود، داریم

$$U(P,f) - L(P,f) = \frac{b-a}{n}\sum_{k=۱}^{n}\{f(x_k) - f(x_{k-۱})\} = \frac{b-a}{n}\{f(b)-f(a)\} < \varepsilon$$

حال، قضیهٔ ۴.۵ ایجاب می‌کند که f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد.

قضیهٔ ۱۶.۵. هر تابع پیوستهٔ f بر $[a,b]$، بر این بازه انتگرال‌پذیر ریمان است.

برهان. فرض کنید $\varepsilon > ۰$. چون فرض بر این است که $[a,b]$ بسته و با طول متناهی است، به استناد قضیهٔ ۱۶.۲، f بر $[a,b]$ به طور یکنواخت پیوسته است. از این رو، $\delta > ۰$ی موجود است به طوری که هرگاه x و y در $[a,b]$ باشند و $|x-y| < \delta$ آن‌گاه

$$|f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{b-a} \qquad (۲۵.۵)$$

افرازی مانند

$$P = \{a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n = b\}$$

را که در آن $\|P\| < \delta$ در نظر بگیرید. چون، به استناد قضیهٔ ۱۳.۲، f، ماکسیمم و مینیمم خود را بر هر بازهٔ $[x_{k-۱}, x_k]$ اختیار می‌کند، از (۲۵.۵) نتیجه می‌شود که به‌ازای هر k که $k = ۱, \ldots, n$،

$$M_k - m_k < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

به این ترتیب،

$$U(P,f) - L(P,f) < \sum_{k=۱}^{n}\frac{\varepsilon}{b-a}\Delta x_k = \varepsilon$$

و قضیهٔ ۴.۵ ایجاب می‌کند که f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد.

قضیهٔ ۱۷.۵. فرض می‌کنیم f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد. قرار می‌دهیم

$$m = \inf\{f(x) : a \leq x \leq b\}, \qquad M = \sup\{f(x) : a \leq x \leq b\}$$

و فرض می‌کنیم که g تابع پیوسته‌ای بر $[m, M]$ باشد. در این صورت، تابع مرکب $h(x) = g[f(x)]$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است.

برهان. فرض کنید $\varepsilon > 0$ مفروض باشد. به موجب پیوستگی یکنواخت g بر $[m, M]$، $\delta_1 > 0$ی می‌توان یافت به طوری که

$$|g(s) - g(t)| < \varepsilon$$

وقتی که $|s - t| < \delta_1$ و s و t نقاطی از بازهٔ بستهٔ $[m, M]$ باشند. فرض کنید $\delta = \min\{\delta_1, \varepsilon\}$. متناظر با δ^2، افرازی مانند

$$P = \{a = x_0 < x_1 < \cdots < x_n = b\}$$

از $[a,b]$ انتخاب می‌کنیم به طوری

$$U(P, f) - L(P, f) < \delta^2 \qquad (۲۶.۵)$$

که این انتخاب، به استناد قضیهٔ ۴.۵، مقدور است. طبق معمول، فرض می‌کنیم

$$M_k = \sup\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, \qquad m_k = \inf\{f(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

و

$$M_k^* = \sup\{h(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}, \qquad m_k^* = \inf\{h(x) : x_{k-1} \leq x \leq x_k\}$$

اعداد ۱، ۲، ...، n را به دو دسته تقسیم می‌کنیم: $k \in A$ هرگاه $M_k - m_k < \delta$ و $k \in B$ هرگاه $M_k - m_k \geq \delta$.

اگر $k \in A$ و $x_{k-1} \leq x \leq y \leq x_k$، آن‌گاه

$$|f(x) - f(y)| \leq M_k - m_k < \delta \leq \delta_1$$

و، بنابراین، $|g[f(x)-g[f(y)]| < \varepsilon$، که ایجاب می‌کند که $M_k^* - m_k^* \le \varepsilon$؛ زیرا $h(x) = g[f(x)]$.
به این ترتیب،

$$\sum_{k\in A}(M_k^* - m_k^*)\Delta x_k \le \varepsilon \sum_{k=1}^{n} \Delta x_k = \varepsilon(b-a) \qquad (۲۷.۵)$$

اگر $k \in B$ آن‌گاه $M_k - m_k \ge \delta$ و، به استناد (۲۶.۵)، داریم

$$\delta \sum_{k\in B} \Delta x_k \le \sum_{k\in B}(M_k - m_k)\Delta x_k \le \sum_{k=1}^{n}(M_k - m_k)\Delta x_k = U(P,f) - L(P,f) < \delta^2$$

و

$$0 \le \sum_{k\in B} \Delta x_k < \delta \le \varepsilon$$

فرض کنید $K = \sup\{g(t) : m \le t \le M\}$. آن‌گاه $M_k^* - m_k^* \le 2K$ و

$$\sum_{k\in B}(M_k^* - m_k^*)\Delta x_k \le 2K \sum_{k\in B} \Delta x_k \le 2K\varepsilon \qquad (۲۸.۵)$$

به این ترتیب، با استفاده از (۲۷.۵) و (۲۸.۵)،

$$\begin{aligned} U(P,h) - L(P,h) &= \sum_{k\in A}(M_k^* - m_k^*)\Delta x_k + \sum_{k\in B}(M_k^* - m_k^*)\Delta x_k \\ &\le \varepsilon(b - a + 2K) \end{aligned}$$

چون ε دلخواه و $b - a + 2K$ ثابت است، ملاحظه می‌کنیم که، به استناد قضیهٔ ۴.۵، h بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است.

تبصره. چون $f(x) = x$ یکنوا و، به استناد قضیهٔ ۱۵.۵، بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است، واضح است که قضیهٔ ۱۶.۵ حالت خاصی از قضیهٔ ۱۷.۵ است.

بحث. در مثال ۱۰ بخش ۴ فصل ۲، تابع f را که بر $[0,1]$ به صورت زیر تعریف شده بود، مورد بررسی قرار دادیم: فرض می‌کنیم $f(0) = f(1) = 1$ و

$$\begin{aligned} f(x) &= 0, \quad \text{هرگاه } x \text{ اصم باشد} \\ &= \frac{1}{q}, \quad \text{هرگاه } x = \frac{p}{q} \end{aligned}$$

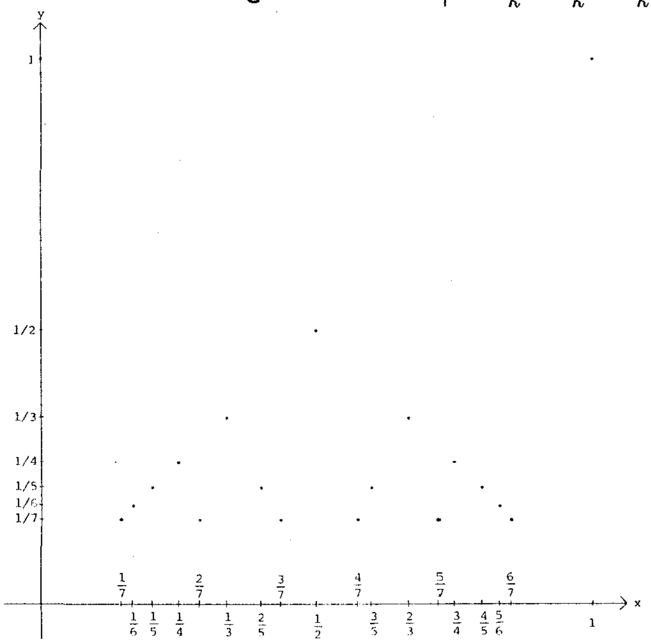
که در آن $q > ۰$ و p و q اعداد صحیحی هستند که فاقد مقسوم‌علیه مشترک می‌باشند. نشان داده شد که f در هر نقطهٔ گویای x از $[۰, ۱]$ ناپیوسته و در هر نقطهٔ اصم x از $[۰, ۱]$ پیوسته است. در شکل ۷.۵ نشانه‌هایی از نمودار f دیده می‌شود. ملاحظه می‌کنیم f انتگرال‌پذیر ریمان است.

در واقع، هر حاصل جمع داربوی پایینی f برابر صفر است. سپس، بازهٔ $[۰, ۱]$ را به $k^۳$ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. چون حداکثر

$$۱ + ۲ + \cdots + (k - ۱) = \frac{k(k-۱)}{۲}$$

کسر سرهٔ مثبت با مخرجی حداکثر مساوی k وجود دارد،

$$\text{حاصل جمع داربوی بالایی} < \frac{k(k-۱)}{۲}.\frac{۱}{k^۳} + \frac{۲}{k^۳} + \frac{۱}{k} \cdot ۱ \qquad (۲۹.۵)$$



شکل ۷.۵

توجه کنید که بر حداکثر $k(k-۱)/۲$ زیربازه از بازهٔ باز $(۰, ۱)$، هر کدام به طول $۱/k^۳$، مقادیر f بین $۱/۲$ و ۰ می‌باشند، بر زیربازه‌های $[۰, ۱/k^۳]$ و $[(k^۳ - ۱)/k^۳, ۱]$ مقادیر f بین ۱ و ۰ می‌باشند، و بر سایر زیربازه‌ها، که مجموع طول آنها حداکثر ۱ است، مقادیر f بین $۱/k$ و ۰ می‌باشند. امّا، طرف راست نامساوی (۲۹.۵) به صفر میل می‌کند وقتی که k به قدر دلخواه بزرگ شود؛ بنابراین، به استناد قضیهٔ ۴.۵، ملاحظه می‌کنیم‌که f بر $[۰, ۱]$ انتگرال‌پذیر ریمان است. به آسانی دیده می‌شود که $\int_۰^۱ f(x)dx = ۰$.

همچنین، توجه می‌کنیم که اگر $g(y) = ۱$ وقتی که $۰ < y \leq ۱$ و $g(۰) = ۰$، آن‌گاه تابع

$$h(x) = g[f(x)], \quad ۰ \leq x \leq ۱$$

بر $[۰, ۱]$ انتگرال‌پذیر ریمان نیست، زیرا

$$h(x) = ۱, \quad \text{هرگاه } x \text{ گویا باشد}$$
$$= ۰, \quad \text{هرگاه } x \text{ اصم باشد}$$

معذالک،

$$\underline{\int_۰^۱} h(x)dx = ۰, \quad \overline{\int_۰^۱} h(x)dx = ۱$$

می‌توان نشان داد که تابع h همه جا بر $[۰, ۱]$ ناپیوسته است.

تابعی که بر بازهٔ بسته‌ای به طول متناهی کراندار است تا چه حد می‌تواند ناپیوسته باشد و، در همین حال، بر این بازه انتگرال‌پذیر ریمان نیز باشد؟ جواب این سؤال به کمک مفهوم مجموعه‌های با اندازهٔ صفر بیان می‌شود: مجموعه‌ای از نقاط محور xها را دارای اندازهٔ صفر می‌نامند در صورتی که بازه‌هایی شامل این نقاط بتوان یافت که مجموع طول آنها از هر عدد مثبت مفروضی مانند ε کمتر باشد. شرط انتگرال‌پذیری مورد بحث این‌است: تابعی که بر بازهٔ بسته‌ای به طول متناهی کراندار است فقط و فقط وقتی بر این بازه انتگرال‌پذیر ریمان است که مجموعهٔ نقاط ناپیوستگی تابع بر این بازه دارای اندازهٔ صفر باشد. چون این موارد کلاً به نظریهٔ انتگرالگیری لبگ، که تعمیم مهّمی از نظریهٔ انتگرالگیری ریمان است، مربوط می‌شود، این موضوع را دیگر در این جا پی‌گیری نخواهیم کرد ولی از خوانندهٔ مشتاق می‌خواهیم که به کتب آنالیز حقیقی مراجعه کند. (سه کتاب از این نوع در فهرست منابع آخر این کتاب آمده است.)

در انتگرال ریمانی مانند $\int_a^b f(x)dx$، مقادیر تابع را می‌توان در تعدادی متناهی نقطه عوض کرد بدون آن که اثری بر وجود یا مقدار انتگرال داشته باشد. برای تحقیق در درستی این حکم، کافی است حالتی را بررسی کنیم که در آن $f(x)$ به‌ازای هر x از $[a, b]$ صفر است جز در یک نقطه، مثلاً $x = c$. امّا، به‌ازای چنین تابعی، واضح است که

$$|S(P, f)| \leq |f(c)|.\|P\|$$

چون $\|P\|$ را می‌توان به قدر دلخواه کوچک کرد، نتیجه می‌شود که $\int_a^b f(x)dx = ۰$.

تابع f را بر $[a, b]$ «تابع پله‌ای» می‌نامند در صورتی که افرازی مانند

$$P = \{a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n = b\}$$

از $[a,b]$ بتوان یافت به طوری که f بر هر یک از زیربازه‌های $(x_{k-۱}, x_k)$، که در آن $k = ۱, ۲, \ldots, n$، ثابت باشد؛ مثلاً، به‌ازای هر x از $(x_{k-۱}, x_k)$، $f(x) = c_x$. توجه کنید که هر تابع پله‌ای f انتگرال‌پذیر ریمان است و

$$\int_a^b f(x)dx = \sum_{k=۱}^{n} c_k \Delta x_k \text{، که در آن } \quad \Delta x_k = x_k - x_{k-۱}.$$

در این مورد، فقط لازم است که قضیهٔ ۱۴.۵ را یادآوری و ملاحظه کنیم که هر مقدار (متناهی) که بخواهیم می‌توانیم به تابع f در نقاط افراز P نسبت دهیم.

سرانجام، به مثال زیر توجه می‌کنیم: فرض کنید w بر $[۰, ۱]$ تعریف شده باشد و

$$\begin{aligned} w(x) &= (۱ - x^۲)^{۱/۲}, && \text{هرگاه } x \text{ گویا باشد} \\ &= ۱ - x, && \text{هرگاه } x \text{ اصم باشد} \end{aligned}$$

آن‌گاه، w همه جا بر بازهٔ $(۰, ۱)$ ناپیوسته است، بعلاوه،

$$\overline{\int_۰^۱} w(x)dx = \frac{\pi}{۴}, \qquad \underline{\int_۰^۱} w(x)dx = \frac{۱}{۲}$$

و، بنابراین، w بر $[۰, ۱]$ انتگرال‌پذیر ریمان نیست.

۴.۵ قضایای اساسی حساب انتگرال

قضیهٔ ۱۸.۵. (قضیهٔ اساسی اول حسابان) فرض کنید $[a,b]$ بازهٔ بسته‌ای به طول متناهی باشد. اگر f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد و تابع مشتق پذیری مانند F بر $[a,b]$ موجود باشد به طوری که $F' = f$، آن‌گاه

$$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a) \tag{۳۰.۵}$$

برهان. فرض کنید $\varepsilon > ۰$. به استناد قضیهٔ ۴.۵، افرازی مانند

$$P = \{a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n = b\}$$

از $[a,b]$ وجود دارد به طوری که

$$U(P,f) - L(P,f) < \varepsilon \tag{۳۱.۵}$$

به موجب قضیهٔ ۳.۱، F بر $[a,b]$ پیوسته است. با اعمال قضیهٔ مقدار میانگین (قضیهٔ ۴.۵) در هر یک از بازه‌های $[x_{k-۱},x_k]$، وقتی $k=۱,\ldots,n$، نقطه‌ای مانند t_k در بازهٔ باز $(x_{k-۱},x_k)$ می‌یابیم که به‌ازای آن

$$F(x_k)-F(x_{k-۱})=f(t_k)(x_k-x_{k-۱})$$

از این رو،

$$F(b)-F(a)=\sum_{k=۱}^{n}[F(x_k)-F(x_{k-۱})]=\sum_{k=۱}^{n}f(t_k)\Delta x_k$$

که در آن $\Delta x_k=x_k-x_{k-۱}$. نتیجه می‌شود که

$$L(P,f)\le F(b)-F(a)\le U(P,f) \qquad (۳۲.۵)$$

چون $L(P,f)\le \int_a^b f(x)dx\le U(P,f)$، نامساویهای (۳۱.۵) و (۳۲.۵) ایجاب می‌کنند که

$$\left|\int_a^b f(x)dx-[F(b)-F(a)]\right|<\varepsilon$$

است. چون ε دلخواه بود، (۳۰.۵) برقرار است.

ملاحظات. این فرض که f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد یک قسمت اساسی از مفروضات قضیهٔ ۱۸.۵ است. مثلاً، تابع

$$F(x)=x^{۲}\sin\frac{۱}{x^{۲}},\quad x\ne ۰ \quad \text{به‌ازای}$$
$$F(۰)=۰,$$

بر $[۰,۱]$ مشتق‌پذیر است، ولی $f=F'$ بر $[۰,۱]$ انتگرال‌پذیر ریمان نیست؛ زیرا بی‌کران است.

با نگاهی به مثال ۳ بخش اول این فصل، ملاحظه می‌کنیم که از قضیهٔ ۱۸.۵، با کمترین تلاش، نتیجهٔ

$$\int_a^b x^c dx=\frac{b^{c+۱}-a^{c+۱}}{c+۱},\quad c\ne -۱$$
$$=\ln\frac{b}{a},\qquad c=-۱$$

به دست می‌آید که در آن a، b، و c اعداد حقیقی دلخواه، ولی ثابت، هستند و $b>a>۰$. مثالی دیگر این است که

$$\int_{-۱}^{۱}\frac{۱}{۱+x^{۲}}dx=\frac{\pi}{۲}$$

در واقع، با فرض $F(x) = \tan^{-1} x$، داریم $F'(x) = 1/(1 + x^2)$ که پیوسته است و، از این رو، بر $-1 \leq x \leq 1$ انتگرال‌پذیر ریمان است. امّا، $F(1) = \frac{\pi}{4}$ و $F(-1) = -\frac{\pi}{4}$.

قضیهٔ ۱۹.۵. (فرمول انتگرالگیری جزء به جزء) فرض کنید $[a,b]$ بازهٔ بسته‌ای به طول متناهی باشد. اگر u و v توابعی مشتق‌پذیر بر $[a,b]$ باشند و u' و v' هر دو بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشند، آن‌گاه

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx + \int_a^b u'(x)v(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) \qquad (۳۳.۵)$$

برهان. به استناد قضیهٔ ۱.۳، u و v بر $[a,b]$ پیوسته‌اند و، بنابراین، به استناد قضیهٔ ۱۶.۵، u و v بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان هستند. فرض کنید $g = uv$. به استناد قضیهٔ ۲.۳، $g' = uv' + u'v$. دیده می‌شود که، به موجب قضیهٔ ۹.۵، g' بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است. قضیهٔ ۱۸.۵ نشان می‌دهد که

$$\int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a) = u(b)v(b) - u(a)v(a)$$

و، بنابراین، (۳۳.۵) برقرار است.

امثله. با فرض $u(x) = xe^x$ و $v(x) = -1/(x+1)$، از (۳۳.۵) نتیجه می‌شود که

$$\int_0^1 \frac{xe^x}{(x+1)^2}dx = \frac{e}{2} - 1$$

و با فرض $u(x) = \tan^{-1} x$ و $v(x) = (x^2+1)/2$، (۳۳.۵) ایجاب می‌کند که

$$\int_0^1 x(\tan^{-1} x)dx = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2}$$

قضیهٔ ۲۰.۵. (قضیهٔ اساسی دوّم حسابان) فرض کنید $[a,b]$ بازهٔ بسته‌ای به طول متناهی باشد. اگر f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد و

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad \text{به ازای } x \in [a,b]$$

آن‌گاه F بر $[a,b]$ پیوسته است. اگر f در نقطهٔ x_0 از بازهٔ باز (a,b) پیوسته باشد، آن‌گاه F در x_0 مشتق‌پذیر است و $F'(x_0) = f(x_0)$.

برهان. $B > 0$ را طوری انتخاب کنید که نامساوی $|f(x)| \le B$ به‌ازای هر $x \in [a,b]$ برقرار باشد. اگر $x, y \in [a,b]$ و $|x-y| < \varepsilon/B$ و، مثلاً، $x < y$، آن‌گاه

$$|F(y) - F(x)| = \left|\int_x^y f(t)dt\right| \le \int_x^y |f(t)|dt \le \int_x^y B dt = B(y-x) < \varepsilon$$

بنابراین، ملاحظه می‌کنیم که F بر $[a,b]$ (به طور یکنواخت) پیوسته است.

سپس، فرض کنید f در نقطهٔ $x_0 \in (a,b)$ پیوسته باشد. چون

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(t)dt \qquad \text{به‌ازای } x \ne x_0\text{،}$$

و

$$f(x_0) = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x f(x_0)dt$$

داریم:

$$\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0) = \frac{1}{x - x_0}\int_{x_0}^x [f(t) - f(x_0)]dt \qquad (۳۴.۵)$$

فرض کنید $\varepsilon > 0$. چون f در x_0 پیوسته است، $\delta > 0$ی وجود دارد به طوری که هرگاه $t \in (a,b)$ و $|t - x_0| < \delta$،

$$|f(t) - f(x_0)| < \varepsilon$$

از (۳۴.۵) نتیجه می‌شود که نامساوی

$$\left|\frac{F(x) - F(x_0)}{x - x_0} - f(x_0)\right| < \varepsilon \qquad (۳۵.۵)$$

به‌ازای $x \in (a,b)$ که $|x - x_0| < \delta$ برقرار است؛ حالتهای $x_0 < x$ و $x_0 > x$ مستلزم بحثهای جداگانه‌اند.

ملاحظات. به نتیجهٔ زیر از قضیهٔ ۲۰.۵ توجه می‌کنیم: اگر g مشتق‌پذیر و f پیوسته باشد، آن‌گاه

$$\frac{d}{dx}\left(\int_a^{g(x)} f(t)dt\right) = f[g(x)]g'(x)$$

در واقع، فرض کنید

$$H(x) = \int_a^{g(x)} f(t)dt$$

ملاحظه کنید که H ترکیبی از توابع مشتق پذیر است:

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt \quad \text{با} \quad H(x) = F[g(x)]$$

قاعدهٔ زنجیری (قضیهٔ ۳.۳) ایجاب می‌کند که

$$H'(x) = F'[g(x)]g'(x)$$

قضیهٔ ۲۰.۵ مستلزم

$$F'(x) = f(x)$$

است. از این رو، نتیجه می‌شود که

$$H'(x) = f[g(x)]g'(x)$$

که همان چیزی است که باید ثابت می‌کردیم.

به طریق مشابه، می‌توانیم در درستی حکم زیر تحقیق کنیم: اگر $g_۱$ و $g_۲$ مشتق‌پذیر باشند و f پیوسته باشد، آن‌گاه

$$\frac{d}{dx}\left(\int_{g_۱(x)}^{g_۲(x)} f(t)dt\right) = f[g_۲(x)]g_۲'(x) - f[g_۱(x)]g_۱'(x)$$

در واقع، فقط لازم است عددی مانند a از قلمرو f اختیار و توجه کنیم که

$$\int_{g_۱(x)}^{g_۲(x)} f(t)dt = \int_a^{g_۲(x)} f(t)dt - \int_a^{g_۱(x)} f(t)dt$$

برای توضیح، ملاحظه کنید که $H'(۲) = ۲۰/۳$ وقتی که

$$H(x) = x\left(\int_{۲x}^{x^۳-۴} \frac{۱}{۱+\sqrt{t}}dt\right)$$

قضیهٔ ۲۱.۵. (فرمول تغییر متغیر) فرض کنید تابع u بر بازهٔ بازی مانند J مشتق‌پذیر باشد به طوری که u' پیوسته باشد و فرض کنید I بازهٔ بازی باشد به طوری که $u(x) \in I$ هرگاه $x \in J$. اگر f بر I پیوسته باشد، تابع مرکب $h(x) = f[u(x)]$، به‌ازای $x \in J$، بر J پیوسته است و به‌ازای $a, b \in J$،

$$\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u)du \qquad (۳۶.۵)$$

برهان. پیوستگی تابع مرکب h از قضیهٔ ۹.۲ نتیجه می‌شود. $c \in I$ را ثابت بگیرید و فرض کنید $F(u) = \int_c^u f(t)dt$. آن‌گاه، به استناد قضیهٔ ۲۰.۵، $F'(u) = f(u)$ به‌ازای هر $u \in I$. فرض کنید $g(x) = F[u(x)]$ به‌ازای $x \in J$. به استناد قاعدهٔ زنجیری (قضیهٔ ۳.۳)، داریم: $g'(x) = F'[u(x)]u'(x) = f[u(x)]u'(x)$ و، به استناد قضیهٔ ۱۸.۵،

$$\int_a^b f[u(x)]u'(x)dx = \int_a^b g'(x)dx = g(b) - g(a) = F[u(b)] - F[u(a)]$$
$$= \int_c^{u(b)} f(t)dt - \int_c^{u(a)} f(t)dt = \int_{u(a)}^{u(b)} f(t)dt$$

که (۳۶.۵) ثابت می‌شود. [ملاحظه کنید که $u(a)$ الزاماً کوچکتر از $u(b)$ نیست، حتی اگر a کوچکتر از b باشد.]

تبصره. فرض کنید a، b، و s اعدادی مثبت باشند. به‌ازای $f(u) = 1/u$ و $u(x) = sx$، که در آن $x > 0$، رابطهٔ (۳۶.۵) ایجاب می‌کند که

$$\int_a^b \frac{1}{x}dx = \int_{sa}^{sb} \frac{1}{u}du$$

(این را با قضیهٔ ۱.۱ فصل اول مقایسه کنید.)

بحث. فرض کنید تابع g اکیداً یکنوا و بر بازهٔ بازی مانند I مشتق‌پذیر باشد و، به‌ازای هر $x \in I$، $g'(x) \neq 0$. در این صورت، $J = g(I)$ بازه‌ای باز است و، به استناد قضیهٔ ۴.۳، تابع معکوس g^{-1} بر J مشتق‌پذیر است. نشان می‌دهیم که تساوی

$$\int_a^b g(x)dx + \int_{g(a)}^{g(b)} g^{-1}(u)du = bg(b) - ag(a) \qquad (۳۷.۵)$$

به‌ازای هر a و b از I برقرار است.

در واقع، در فرمول (۳۶.۵)، قرار می‌دهیم $f = g^{-1}$ و $u = g$ تا داشته باشیم

$$\int_a^b g^{-1}[g(x)]g'(x)dx = \int_{g(a)}^{g(b)} g^{-1}(u)du$$

چون $g^{-1}[g(x)] = x$ به‌ازای هر $x \in I$ برقرار است، خواهیم داشت:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} g^{-1}(u)du = \int_a^b xg'(x)dx$$

حال، با استفاده از $u(x) = x$ و $v(x) = g(x)$، به روش جزءبه‌جزء انتگرال می‌گیریم:

$$\int_{g(a)}^{g(b)} g^{-۱}(u)du = bg(b) - ag(a) - \int_a^b g(x)dx$$

که همان (۳۷.۵) است.

گاهی می‌توان فرمول (۳۷.۵) را برای محاسبهٔ مقدار بعضی از انتگرالها به کار گرفت که از طرق دیگر به این آسانی قابل محاسبه نیست. یکی از حالتهای مورد اشاره، انتگرال

$$\int_{\circ}^{۱/۲} (\sin^{-۱} x)dx$$

است. با استفاده از (۳۷.۵)، ملاحظه می‌کنیم که

$$\int_{\circ}^{۱/۲} (\sin^{-۱} x)dx + \int_{\circ}^{\pi/۶} (\sin x)dx = \frac{۱}{۲}\left(\frac{\pi}{۶}\right)$$

یا

$$\int_{\circ}^{۱/۲} (\sin^{-۱} x)dx = \frac{\pi}{۱۲} + \frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۱$$

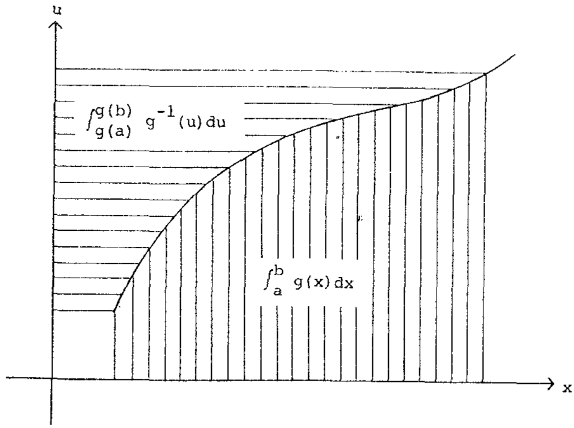
زیرا

$$\int_{\circ}^{\pi/۶} (\sin x)dx = -\left(\cos\frac{\pi}{۶} - \cos\circ\right) = ۱ - \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

فرمول (۳۷.۵) در حالتی که g بر بازهٔ بازی مانند J فقط اکیداً یکنوا و پیوسته فرض شود نیز برقرار است. در واقع، در این شرایط، به استناد قضیهٔ ۱۸.۲، تابع معکوس $g^{-۱}$ وجود دارد و تابعی اکیداً یکنوا و پیوسته است. بعلاوه، هر دو انتگرال

$$\int_{g(a)}^{g(b)} g^{-۱}(u)du \qquad \text{و} \qquad \int_a^b g(x)dx$$

(به استناد قضیهٔ ۱۵.۵ یا قضیهٔ ۱۶.۵) موجودند. این انتگرالها را می‌توان مساحت ناحیه‌هایی از صفحه تعبیر کرد؛ شکل ۸.۵ را ببینید. اعداد $bg(b)$ و $ag(a)$ مساحت مستطیلها را نشان می‌دهند. در واقع، فرمول (۳۷.۵) از آنچه که از ملاحظات هندسی می‌توان انتظار داشت بیشتر نیست.



شکل ۸.۵

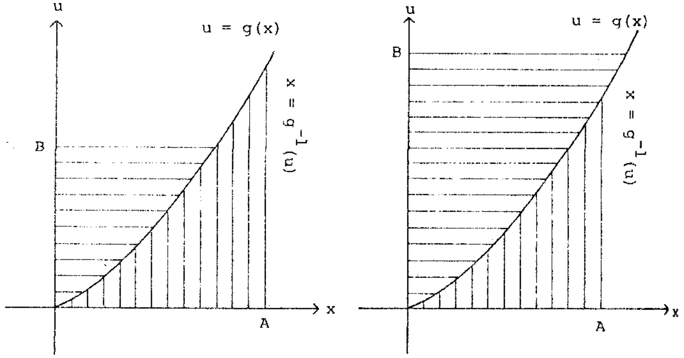
حال، فرض کنید g تابعی پیوسته و اکیداً صعودی از x باشد وقتی که $x \geq \circ$ و $g(\circ) = \circ$. اگر $A > \circ$ و $B > \circ$، آن‌گاه

$$AB \leq \int_{\circ}^{A} g(x)dx + \int_{\circ}^{B} g^{-1}(u)du \qquad (۳۸.۵)$$

نامساوی (۳۸.۵) را نامساوی یانگ می‌نامند. برقراری نامساوی یانگ از ملاحظهٔ شکل ۹.۵ واضح می‌شود و این که انتگرالهای

$$\int_{\circ}^{B} g^{-1}(u)du \quad \text{و} \quad \int_{\circ}^{A} g(x)dx$$

را مساحت ناحیه‌هایی تعبیر کنیم که، به ترتیب، با خطوط قائم و افقی سایه‌دار شده‌اند. همچنین، واضح است که، در نامساوی یانگ، تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $B = g(A)$.



شکل ۹.۵

حکم زیر را فوراً می‌توان از نامساوی یانگ نتیجه گرفت: اگر $p > ۱$، $A > ۰$، و $B > ۰$، آن‌گاه

$$AB \leq \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q} \qquad (۳۹.۵)$$

که در آن q در $۱/p + ۱/q = ۱$ صدق می‌کند؛ تساوی فقط و فقط وقتی برقرار است که $A^p = B^q$.
در واقع، فرض کنید $g(x) = x^{p-۱}$ و $g^{-۱}(u) = u^{۱/(p-۱)}$. آن‌گاه، g و $g^{-۱}$ در شرایط نامساوی یانگ صدق می‌کنند. بنابراین، با توجه به این که $(p-۱)q = p$، داریم

$$AB \leq \int_۰^A x^{p-۱}dx + \int_۰^B u^{۱/p-۱)}du = \frac{A^p}{p} + \frac{B^q}{q}$$

که (۳۹.۵) ثابت می‌شود. نامساوی (۳۸.۵) عنقریب برای نتیجه‌گیری نامساوی مهمی دربارهٔ انتگرالها به کار خواهد رفت.

فرض کنید $p > ۱$ و $q > ۱$ به طوری که $۱/p + ۱/q = ۱$. فرض کنید توابع u و v بر بازهٔ $[a, b]$ به طول متناهی انتگرال‌پذیر ریمان باشند. به استناد قضایای ۹.۵ و ۱۷.۵، توابع $|uv|$، $|u|^p$، و $|v|^q$ بر $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان هستند. بعلاوه،

$$\int_a^b |u(x)v(x)|dx \leq \left(\int_a^b |u(x)|^p dx\right)^{۱/p} \left(\int_a^b |v(x)|^q dx\right)^{۱/q} \qquad (۴۰.۵)$$

نامساوی (۴۰.۵) را نامساوی هولدر می‌نامند. به‌ازای $p = q = ۲$، نامساوی هولدر را نامساوی کوشی ـ شوارتز نامیده‌اند:

$$\int_a^b |u(x)v(x)|dx \leq \left(\int_a^b |u(x)|^۲ dx\right)^{۱/۲} \left(\int_a^b |v(x)|^۲ dx\right)^{۱/۲} \quad (۴۱.۵)$$

برای اثبات (۴۰.۵) به صورت زیر عمل می‌کنیم: به استناد (۳۹.۵)،

$$\frac{|u(x)v(x)|}{AB} \leq \frac{A^{-p}|u(x)|^p}{p} + \frac{B^{-q}|v(x)|^q}{q}$$

که در آن

$$B = \left(\int_a^b |v(x)|^q dx\right)^{۱/q}, \quad A = \left(\int_a^b |u(x)|^p dx\right)^{۱/p}$$

به استناد قضایای ۹.۵ و ۱۱.۵،

$$\frac{۱}{AB}\int_a^b |u(x)v(x)|dx \leq \frac{۱}{pA^p}\int_a^b |u(x)|^p dx + \frac{۱}{qB^q}\int_a^b |v(x)|^q dx = \frac{۱}{p} + \frac{۱}{q} = ۱$$

به این ترتیب،

$$\int_a^b |u(x)v(x)|dx \leq AB$$

و (۴۰.۵) نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۲۲.۵. فرض کنید $[a,b]$ بازهٔ بسته‌ای به طول متناهی باشد.

الف) اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و به‌ازای هر x از $[a,b]$ داشته باشیم $f(x) \geq ۰$ و نقطه‌ای مانند c در $[a,b]$ یافت شود که $f(c) = k > ۰$، آن‌گاه $\int_a^b f(x)dx > ۰$.

ب) اگر f و g بر $[a,b]$ پیوسته باشند و به‌ازای هر x از $[a,b]$ داشته باشیم $f(x) \leq g(x)$ و نقطه‌ای مانند c در $[a,b]$ یافت شود که $f(c) < g(c)$، آن‌گاه $\int_a^b f(x)dx < \int_a^b g(x)dx$.

برهان. قسمت (الف) را بررسی و فرض می‌کنیم که c نقطه‌ای از بازهٔ باز (a,b) باشد. به موجب پیوستگی f، بازه‌ای مانند $(c-\sigma, c+\sigma)$ می‌توانیم بیابیم که در سرتاسر آن $f(x) > k/۲$؛ (قضیهٔ ۱۰.۲ را ببینید.) که، در این صورت، مقدار انتگرال بزرگتر از σk خواهد شد. اگر c یک نقطهٔ انتهایی $[a,b]$ باشد، مثلاً $c = a$، بازه‌ای چون $(a, a+\sigma)$ می‌توان یافت که در سرتاسر آن $f(x) > k/۲$؛ و آن‌گاه مقدار انتگرال بزرگتر از $\sigma k/۲$ خواهد شد.

قسمت (ب) با انتخاب $h = f - g$ به قسمت (الف) برمی‌گردد.

قضیهٔ ۲۳.۵. (نخستین قضیهٔ مقدار میانگین انتگرالها) فرض کنید $[a,b]$ بازهٔ بسته‌ای به طول متناهی باشد. اگر f تابع پیوسته‌ای بر $[a,b]$ باشد، نقطه‌ای مانند t وجود دارد به طوری که $a < t < b$ و

$$\int_a^b f(x)dx = f(t)[b-a] \qquad (۴۲.۵)$$

برهان. فرض کنید m و M، به ترتیب، کوچکترین و بزرگترین مقادیر f بر $[a,b]$ باشند. (قضیهٔ ۱۳.۲ را ببینید.) به استناد قضیهٔ ۱۶.۵، f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر است. اگر f بر $[a,b]$ ثابت نباشد، قسمت دوّم قضیهٔ ۲۲.۵ ایجاب می‌کند که

$$m < \frac{\int_a^b f(x)dx}{b-a} < M$$

امّا f بر $[a,b]$ پیوسته است و، از این رو، همهٔ مقادیر بین m و M را اختیار می‌کند؛ (قضیهٔ ۱۲.۲ را ببینید.) بنابراین، نقطه‌ای مانند t بین a و b وجود دارد که در (۴۲.۵) صدق کند.

قضیهٔ ۲۴.۵. (صورت تعمیم یافتهٔ نخستین قضیهٔ مقدار میانگین انتگرالها) فرض کنید $[a,b]$ بازهٔ بسته‌ای به طول متناهی باشد. اگر f و g بر $[a,b]$ پیوسته باشند و g بر $[a,b]$ تغییر علامت ندهد، آن‌گاه نقطه‌ای مانند t وجود دارد به طوری که $a < t < b$ و

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = f(t)\int_a^b g(x)dx \qquad (۴۳.۵)$$

برهان. جزئیات برهان این قضیه مشابه برهان قضیهٔ ۲۳.۵ است. فرض کنید m و M، به ترتیب، کوچکترین و بزرگترین مقادیر f بر $[a,b]$ باشند. برای پرهیز از حالت بدیهی، فرض می‌کنیم که g بر $[a,b]$ متحد با صفر نباشد. اگر f بر $[a,b]$ ثابت نباشد، آن‌گاه

$$m < \frac{\int_a^b f(x)g(x)dx}{\int_a^b g(x)dx} < M$$

امّا f بر $[a,b]$ پیوسته است و، از این رو، همهٔ مقادیر بین m و M را اختیار می‌کند؛ بنابراین، نقطه‌ای مانند t بین a و b وجود دارد که در (۴۳.۵) صدق می‌کند.

ملاحظات. اگر قرار دهیم $g(x) = x$، قضیهٔ ۲۳.۵ از قضیهٔ ۲۴.۵ نتیجه می‌شود. در حالتی که f بر $[a,b]$ هرگز منفی نباشد، قضیهٔ ۲۳.۵ یک تعبیر هندسی ساده دارد: مستطیلی به ارتفاع $f(t)$ و طول

$b - a$ وجود دارد که مساحتش با مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی $y = f(x)$، خطوط $x = a$ و $x = b$، و محور xها یکی است. در فرمولبندی قضایای ۲۳.۵ و ۲۴.۵ فرض بر این بود که $a < b$. یک لحظه تأمل نشان می‌دهد که این قضایا در حالتی که $b \geq a$ نیز برقرارند.

قضیهٔ ۲۵.۵. (دومین قضیهٔ مقدار میانگین انتگرالها) فرض کنید $[a, b]$ بازهٔ بسته‌ای به طول متناهی باشد. اگر f، g، و g' بر $[a, b]$ پیوسته باشند و g بر $[a, b]$ یکنوا باشد، (به طور معادل، g' بر $[a, b]$ تغییر علامت ندهد،) آن‌گاه نقطه‌ای مانند t وجود دارد به طوری که $a < t < b$ و

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = g(a)\int_a^t f(x)dx + g(b)\int_t^b f(x)dx$$

برهان. فرض کنید $F(x) = \int_a^x f(s)ds$. به استناد قضیهٔ ۱۹.۵،

$$\int_a^b f(x)g(x)dx = F(b)g(b) - \int_a^b F(x)g'(x)dx$$

به موجب قضیهٔ ۲۴.۵، نقطه‌ای مانند t بین a و b وجود دارد به طوری که

$$\int_a^b F(x)g'(x)dx = F(t)\int_a^b g'(x)dx = F(t)[g(b) - g(a)]$$

بنابراین،

$$\begin{aligned}\int_a^b f(x)g(x)dx &= F(b)g(b) - F(t)g(b) + F(t)g(a)\\ &= g(a)F(t) + g(b)[F(b) - F(t)]\\ &= g(a)\int_a^t f(s)ds + g(b)\int_t^b f(s)ds\end{aligned}$$

و برهان تمام است.

بحث. فرض کنید $[a, b]$ بازهٔ بسته‌ای به طول متناهی باشد. اگر u' و v' توابع پیوسته‌ای بر $[a, b]$ باشند، به استناد قضیهٔ ۱۹.۵،

$$\int_a^b u(x)v'(x)dx = u(b)v(b) - u(a)v(a) - \int_a^b u'(x)v(x)dx$$

این فرمول را با نماد ساده‌تر زیر می‌نویسند:

$$\int_a^b uv'dx = uv|_a^b - \int_a^b u'vdx$$

به آسانی دیده می‌شود که اعمال مکرر این فرمول به حکم زیر می‌انجامد:

اگر $u^{(n+1)}$ و $v^{(n+1)}$ توابع پیوسته‌ای بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ به طول متناهی باشند، آن‌گاه

$$\int_a^b uv^{(n+1)}dx = (uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + \cdots + (-1)^n u^{(n)}v)\Big|_a^b + (-1)^{n+1}\int_a^b u^{(n+1)}v\,dx \quad (44.5)$$

فرمول (۴۴.۵) را می‌توان به عنوان نقطهٔ شروع در تحصیل فرمولی از نوع تیلور با باقیمانده (قضیهٔ ۱۱.۴) به کار برد. فرض کنید

$$v(x) = (b-x)^n$$

آن‌گاه

$$\begin{aligned} v'(x) &= -n(b-x)^{n-1} \\ v''(x) &= n(n-1)(b-x)^{n-2} \\ v'''(x) &= -n(n-1)(n-2)(b-x)^{n-3} \\ &\vdots \\ v^{(n)}(x) &= (-1)^n n(n-1)(n-2)\cdot\cdots\cdot 2\cdot 1 \end{aligned}$$

بعلاوه، $v(b) = v'(b) = v''(b) = \cdots = v^{(n-1)}(b) = 0$. با فرض $f = u$، فرمول (۴۴.۵) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} 0 = &(-1)^n\Big[n!f(b) - n!f(a) - n!f'(a)(b-a) \\ &-\frac{n!}{2!}f''(a)(b-a)^2 - \cdots - f^{(n)}(a)(b-a)^n\Big] \\ &+ (-1)^{n+1}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx \end{aligned}$$

(البته، فرض بر این است که $f^{(n+1)}$ بر $[a,b]$ پیوسته است؛ در قضیهٔ ۱۱.۴ هیچ فرضی حاکی از پیوستگی $f^{(n+1)}$ وضع نشده بود.) از این، به نوبهٔ خود، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned} f(b) = f(a) &+ \frac{f'(a)}{1!}(b-a) + \frac{f''(a)}{2!}(b-a)^2 + \dots \\ &+ \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(b-a)^n + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n+1)}(x)(b-x)^n dx \end{aligned}$$

پس از تعویض a با α، b با β، و x با t، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} f(\beta) = f(\alpha) + \frac{f'(\alpha)}{۱!}(\beta - \alpha) + \frac{f''(\alpha)}{۲!}(\beta - \alpha)^۲ + \dots \\ + \frac{f^{(n)}(\alpha)}{n!}(\beta - \alpha)^n + \frac{۱}{n!}\int_\alpha^\beta f^{(n+۱)}(t)(\beta - t)^n dx \end{aligned} \quad (۴۵\text{.}۵)$$

معذالک، $(\beta - t)^n$ بر بازهٔ $[\alpha, \beta]$ تغییر علامت نمی‌دهد و، بنابراین، با اعمال قضیهٔ ۲۴.۵ درمی‌یابیم که

$$\begin{aligned} \frac{۱}{n!}\int_\alpha^\beta f^{(n+۱)}(t)(\beta - t)^n dt &= \frac{۱}{n!}f^{(n+۱)}(x)\int_\alpha^\beta (\beta - t)^n dt \\ &= \frac{f^{(n+۱)}(x)}{(n+۱)!}(\beta - \alpha)^{n+۱} \end{aligned}$$

که در آن x نقطه‌ای بین α و β است. امّا این صورت لاگرانژ باقیمانده است. (ملاحظات بعد از قضیهٔ ۱۱.۴ را ببینید.)

بحث بیشتر. نمونهٔ آموزنده‌ای از محاسبهٔ انتگرالها در مثال زیر فراهم شده است. مطلوب است محاسبهٔ

$$I = \int_۰^{\pi/۲} \frac{\sin^\pi x}{\sin^\pi x + \cos^\pi x} dx$$

در واقع، اگر بخواهیم I را با استفاده از قضیهٔ ۱۸.۵ محاسبه کنیم، به راه خطا خواهیم رفت. در عوض، به روش زیر عمل می‌کنیم. با فرض $x = \pi/۲ - t$، خواهیم داشت:

$$I = \int_۰^{\pi/۲} \frac{\sin^\pi x}{\sin^\pi x + \cos^\pi x} dx = \int_۰^{\pi/۲} \frac{\cos^\pi t}{\cos^\pi t + \sin^\pi t} dt = \int_۰^{\pi/۲} \frac{\cos^\pi x}{\cos^\pi x + \sin^\pi x} dx$$

و، بنابراین،

$$\begin{aligned} I + I &= \int_۰^{\pi/۲} \frac{\sin^\pi x}{\sin^\pi x + \cos^\pi x} dx + \int_۰^{\pi/۲} \frac{\cos^\pi x}{\cos^\pi x + \sin^\pi x} dx \\ &= \int_۰^{\pi/۲} \frac{\sin^\pi x + \cos^\pi x}{\sin^\pi x + \cos^\pi x} dx = \int_۰^{\pi/۲} dx = \frac{\pi}{۲} \end{aligned}$$

به این ترتیب، $۲I = \frac{\pi}{۲}$ یا $I = \frac{\pi}{۴}$.

به همین طریق، می‌توان نشان داد که، به‌ازای هر عدد حقیقی ثابت r،

$$\int_۰^{\pi/۲} \frac{\sin^r x}{\sin^r x + \cos^r x} dx = \frac{\pi}{۴}$$

در مثال ۶ بخش بعد، محاسبه خواهیم کرد که

$$\int_{۰}^{۱} \frac{\ln(۱+x)}{۱+x^{۲}} dx = \frac{\pi}{۸}(\ln ۲)$$

یک کار نه چندان سخت در مورد محاسبهٔ انتگرالها این است که نشان بدهیم که

$$\int_{۰}^{b} (a^{۲}-x^{۲})^{۱/۲} dx = \frac{b}{۲}(a^{۲}-b^{۲})^{۱/۲} + \frac{a^{۲}}{۲} \arcsin \frac{b}{a}, \qquad ۰ \le b \le a \text{ بەازای }$$
(۴۶.۵)

ما برقراری حکم (۴۶.۵) را به سه روش مختلف بررسی می‌کنیم.

روش اول: به روش انتگرالگیری جزءبه‌جزء، با انتخاب $u = (a^{۲}-x^{۲})^{۱/۲}$ و $dv = dx$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{b} (a^{۲}-x^{۲})^{۱/۲} dx &= x(a^{۲}-x^{۲})|_{۰}^{b} - \int_{۰}^{b} \frac{-x^{۲}}{(a^{۲}-x^{۲})^{۱/۲}} dx \\ &= b(a^{۲}-b^{۲})^{۱/۲} - \int_{۰}^{b} \frac{a^{۲}-x^{۲}-a^{۲}}{(a^{۲}-x^{۲})^{۱/۲}} dx \\ &= b(a^{۲}-b^{۲})۱/۲ - \int_{۰}^{b} (a^{۲}-x^{۲})^{۱/۲} dx \\ &\quad + a^{۲} \int_{۰}^{b} \frac{۱}{(a^{۲}-x^{۲})^{۱/۲}} dx\end{aligned}$$

که مستلزم

$$۲\int_{۰}^{b} (a^{۲}-x^{۲})^{۱/۲} dx = b(a^{۲}-b^{۲})^{۱/۲} + a^{۲}(\arcsin \frac{b}{a})$$

است که معادل (۴۶.۵) می‌باشد.

روش دوم: با جانشینی $x = a\sin t$، انتگرال می‌گیریم، خواهیم داشت:

$$\int_{۰}^{b} (a^{۲}-x^{۲})^{۱/۲} dx = a^{۲} \int_{۰}^{B} (\cos^{۲} t) dt$$ ، که در آن $B = \arcsin \frac{b}{a}$.

امّا

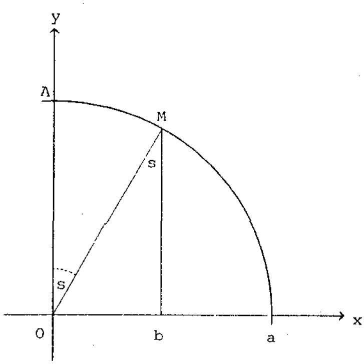
$$\int_{۰}^{B} (\cos^{۲} t) dt = \frac{۱}{۲} \int_{۰}^{B} (۱+\cos ۲t) dt = \tfrac{۱}{۲}(t + \tfrac{۱}{۲} \sin ۲t)|_{۰}^{b}$$

$$= \tfrac{1}{2}(t + [\sin t][\cos t])|_0^b$$
$$= \frac{1}{2}\left(\left(\arcsin\frac{b}{a}\right) + \frac{b}{a}.\frac{(a^2-b^2)^{1/2}}{a}\right)$$

زیرا

$$\cos B = (1 - \sin^2 B)^{1/2} = \frac{(a^2-b^2)^{1/2}}{a} \qquad \text{و} \qquad \sin B = \frac{b}{a}$$

و (۴۶.۵) نتیجه می‌شود.



شکل ۱۰.۵

روش سوّم: با توجه به این که انتگرال

$$0 \le b \le a \qquad \text{به‌ازای} \qquad T = \int_0^b (a^2-x^2)^{1/2}dx$$

مساحت ناحیه‌ای از چارک اوّل را نشان می‌دهد که به محورهای مختصات، خط $x = b$، و دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ محدود است، ملاحظه می‌کنیم که ناحیهٔ مورد بحث از مثلث ObM و قطاع مستدیر AOM (شکل ۱۰.۵ را ببینید.) تشکیل شده است. امّا، مساحت مثلث ObM عبارت است از $(b/2)(a^2-b^2)^{1/2}$ و مساحت قطاع مستدیر AOM عبارت است از $\frac{1}{2}a^2s = (a^2/2)\arcsin(b/a)$؛ زیرا $\sin s = b/a$. به این ترتیب، (۴۶.۵) نتیجه می‌شود.

توضیحات بیشتری در مورد نامساویهای مربوط به انتگرال. با استفاده از نامساوی کوشی ـ شوارتز می‌توانیم ثابت کنیم که

$$\ln\frac{b}{a} < \frac{b-a}{\sqrt{ab}} \qquad \text{به‌ازای } b > a > 0،$$

در واقع، کافی است که در (۴۱.۵) قرار دهیم $u(x) = 1$ و $v(x) = 1/x$؛ و مورد ادعا نتیجه می‌شود.

یک نامساوی جالب، منسوب به کانتوروویچ، نامساوی زیر است: فرض کنید f تابع پیوسته‌ای بر بازهٔ $[0,1]$ باشد به طوری که به‌ازای هر x از $[0,1]$ داشته باشیم $0 < m \le f(x) \le M$. آن‌گاه

$$\left(\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx\right)\left(\int_0^1 f(x)dx\right) \le \frac{(m+M)^2}{4mM} \tag{۴۷.۵}$$

اگر بازهٔ $[a,b]$ جایگزین بازهٔ واحد $[0,1]$ شود، (۴۷.۵) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\left(\int_a^b \frac{1}{f(x)}dx\right)\left(\int_a^b f(x)dx\right) \le \frac{(m+M)^2}{4mM}(b-a)^2$$

در واقع، چون

$$\frac{\{f(x)-m\}\{f(x)-M\}}{f(x)} \le 0 \qquad \text{به‌ازای } 0 \le x \le 1،$$

با انتگرالگیری از $f - (m+M) + mM/f$ بر $[0,1]$، به رابطهٔ

$$\int_0^1 f(x)dx + mM\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \le m+M$$

دست می‌یابیم. اگر قرار دهیم

$$u = mM\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx$$

خواهیم داشت:

$$\int_0^1 f(x)dx + u \le m+M$$

و با توجه به این که $[(m+M)/2 - u]^2 \ge 0$،

$$u\int_0^1 f(x)dx \le (m+M)u - u^2 \le \frac{(m+M)^2}{4}$$

با این، (۴۷.۵) ثابت می‌شود.

۵.۵ انتگرالگیری عددی

فرض کنید $a < b$ و به‌ازای $a \le x \le b$ داشته باشیم $f(x) > 0$. آن‌گاه، $\int_a^b f(x)dx$ برابر مساحت ناحیه‌ای است که از بالا به منحنی $y = f(x)$، از پایین به محور xها، و از دو طرف به خطوط $x = a$ و $x = b$ محدود است. بازهٔ مفروض را از a تا b به وسیلهٔ نقاط

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

به n زیربازه، هر یک به طول

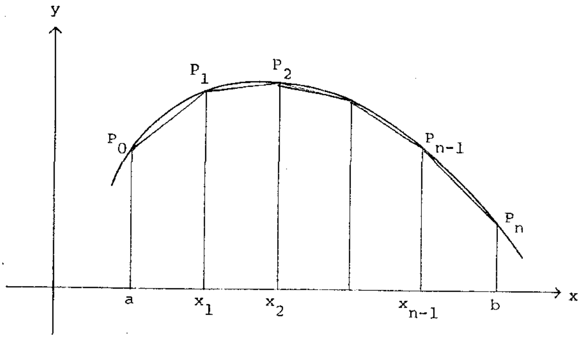
$$h = \frac{b-a}{n}$$

تقسیم می‌کنیم و، به‌ازای $k = 0, 1, 2, \ldots, n-1, n$، قرار می‌دهیم $y_k = f(x_k)$. به‌ازای $k = 0, 1, 2, \ldots, n$. فرض کنید P_k نقطهٔ به مختصات (x_k, y_k) باشد و خط شکسته‌ای را در نظر بگیرید که رئوسش همین نقاط P_k باشند. (شکل ۱۱.۵ را ببینید.) آن‌گاه، مساحت ناحیهٔ زیرمنحنی $y = f(x)$ با مساحت ناحیهٔ زیرخط شکستهٔ به رئوس P_k تقریب زده می‌شود. ناحیهٔ زیرخط شکسته از چند ذوزنقه تشکیل شده است. مساحت هر ذوزنقه برابر است با حاصل‌ضرب نصف مجموع اضلاع موازی در پهنا. نتیجه می‌شود که

$$\text{مساحت اولّین ذوزنقه} = \frac{h}{2}(y_0 + y_1)$$
$$\text{مساحت دومّین ذوزنقه} = \frac{h}{2}(y_1 + y_2)$$
$$\vdots$$
$$\text{مساحت } n\text{امین ذوزنقه} = \frac{h}{2}(y_{n-1} + y_n)$$

از جمع این عبارات درمی‌یابیم که ناحیهٔ تقریب کننده دارای مساحت

$$T_n = h\left(\frac{y_0}{2} + y_1 + y_2 + \cdots + y_{n-1} + \frac{y_n}{2}\right)$$



شکل ۱۱.۵

است، فرمول تقریب

$$\int_a^b f(x)dx \approx T_n$$

به قاعدهٔ ذوزنقه‌ای در انتگرالگیری عددی مشهور شده است.

محدودیت $f(x) > ۰$ وقتی که $a \leq x \leq b$ در بحث ما ضروری نیست؛ به عنوان مثال، به راحتی می‌توان دید که اگر $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ با خط راستی مانند $y = s(x)$ به هم وصل شوند و $x_۲ = x_۱ + h$، آن‌گاه

$$\int_{x_۱}^{x_۲} s(x)dx = \frac{h}{۲}(y_۱ + y_۲)$$

بعداً کران خطای زیر را برای قاعدهٔ ذوزنقه‌ای ثابت خواهیم کرد: اگر مشتق دوّم f بر $[a, b]$ پیوسته باشد و M بزرگترین مقدار $|f''(x)|$ به‌ازای $a \leq x \leq b$ باشد، آن‌گاه

$$\left|T_n - \int_a^b f(x)dx\right| \leq M\frac{(b-a)^۳}{۱۲n^۲}$$

که در آن T_n یک مقدار تقریبی $\int_a^b f(x)dx$ است که از طریق قاعدهٔ ذوزنقه‌ای به دست می‌آید:

$$T_n = h\left(\frac{y_۰}{۲} + y_۱ + y_۲ + \cdots + y_{n-۱} + \frac{y_n}{۲}\right), \qquad h = \frac{b-a}{n}$$

قضیهٔ ۲۶.۵. فرض کنید که مشتق دوّم تابع f بر بازهٔ بسته‌ای به شکل $[A, A+h]$ به طول متناهی h پیوسته باشد. آن‌گاه

$$\int_A^{A+h} f(x)dx = \frac{h}{۲}\{f(A)+f(A+h)\} - \frac{h^۳}{۱۲}f''(s)$$

که در آن s بین A و $A+h$ است.

برهان. می‌خواهیم Q را چنان اختیار کنیم که

$$\int_A^{A+h} f(x)dx = \frac{h}{۲}\{f(A)+f(A+h)\} + h^۳Q$$

فرض کنید $f(x) = F'(x)$. آن‌گاه

$$\int_A^{A+h} f(x)dx = F(A+h) - F(A)$$

و، بنابراین،

$$F(A+h) - F(A) - \frac{h}{۲}\{f(A)+f(A+h)\} - h^۳Q = ۰$$

فرض کنید $c = A + h/۲$؛ c نقطهٔ وسط $[A, A+h]$ است. تابع G را بر $۰ \le x \le h$ با ضابطهٔ

$$G(x) = F\left(c+\frac{x}{۲}\right) - F\left(c-\frac{x}{۲}\right) - \frac{x}{۲}\left\{f\left(c+\frac{x}{۲}\right) + f\left(c-\frac{x}{۲}\right)\right\} - Qx^۳$$

تعریف می‌کنیم. امّا، $G(۰) = G(h) = ۰$. از این رو، به استناد قضیهٔ رُل (قضیهٔ ۳.۴)، نقطه‌ای مانند t بین ۰ و h وجود دارد که $G'(t) = ۰$. ولی، چون $F' = f$،

$$\begin{aligned} G'(x) =& \frac{۱}{۲}f\left(c+\frac{x}{۲}\right) + \frac{۱}{۲}f\left(c-\frac{x}{۲}\right) - \frac{۱}{۲}\left\{f\left(c+\frac{x}{۲}\right) + f\left(c-\frac{x}{۲}\right)\right\} \\ & - \frac{x}{۴}\left\{f'\left(c+\frac{x}{۲}\right) - f'\left(c-\frac{x}{۲}\right)\right\} - ۳Qx^۲ \\ =& - \frac{x}{۴}\left\{f'\left(c+\frac{x}{۲}\right) - f'\left(c-\frac{x}{۲}\right)\right\} - ۳Qx^۲ \end{aligned}$$

به این ترتیب،

$$۰ = G'(t) = -\frac{t}{۴}\left\{f'\left(c+\frac{t}{۲}\right) - f'\left(c-\frac{t}{۲}\right)\right\} - ۳Qt^۲$$

چون $t \neq ۰$،

$$Q = -\frac{۱}{۱۲}\frac{f'(c+t/۲) - f'(c-t/۲)}{t}$$

مجدداً، به استناد قضیهٔ رُل، به‌ازای sی بین نقاط $c - t/۲$ و $c + t/۲$،

$$\frac{f'(c+t/۲) - f'(c-t/۲)}{t} = f''(s)$$

از این رو،

$$Q = -\frac{۱}{۱۲}f''(s)$$

که در آن s نقطه‌ای بین نقاط $c - t/۲$ و $c + t/۲$ است و، به طریق اولی، s بین A و $A + h$ است.

قضیهٔ ۲۷.۵. فرض کنید $[a, b]$ بازهٔ بسته‌ای به طول متناهی باشد. بازهٔ $[a, b]$ را به n زیربازه، هر یک به طول $h = (b-a)/n$، تقسیم می‌کنیم. فرض کنید که مشتق دوّم تابع f بر $[a, b]$ پیوسته باشد. آن‌گاه

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{۲n}\left(f(a) + f(b) + ۲\sum_{k=۱}^{n-۱} f\left(a + k\frac{b-a}{n}\right)\right) - \frac{(b-a)^۳}{۱۲n^۲}f''(v)$$

که در آن v بین a و b است.

برهان. چون $h = (b-a)/n$ و

$$\int_a^b f(x)dx = \int_a^{a+h} f(x)dx + \int_{a+h}^{a+۲h} f(x)dx + \cdots + \int_{a+(n-۱)h}^{b} f(x)dx$$

داریم:

$$\begin{aligned}
\int_a^b f(x)dx =& \frac{h}{۲}\{f(a) + f(a+h)\} - \frac{h^۳}{۱۲}f''(s_۱) \\
&+ \frac{h}{۲}\{f(a+h) + f(a+۲h)\} - \frac{h^۳}{۱۲}f''(s_۲) \\
&+ \dots \\
&+ \frac{h}{۲}\{f(a+[n-۱]h) + f(b)\} - \frac{h^۳}{۱۲}f''(s_n)
\end{aligned}$$

که در آن $s_۱$ بین a و $a + h$ است، $s_۲$ بین $a + h$ و $a + ۲h$، ...، s_n ین $a + (n-۱)h$ و b. امّا، f'' بر $[a, b]$ پیوسته است و، از این رو، نقطه‌ای مانند v بین a و b موجود است به طوری که (مثال ۹ بخش

۴ فصل ۲ را ببینید.)

$$\frac{f''(s_۱) + f''(s_۲) + \cdots + f''(s_n)}{n} = f''(v)$$

که برهان را کامل می‌کند.

تبصره. قضیهٔ قبل نشان می‌دهد که

$$T_n - \int_a^b f(x)dx = \frac{(b-a)^۳}{۱۲n^۲} f''(v)$$

که در آن v نقطه‌ای بین a و b است. به وضوح، نامساوی

$$|f''(v)| \leq \max\{|f''(x)| : a \leq x \leq b\} = M$$

به ازای هر نقطهٔ v بین a و b برقرار است. از این رو،

$$|T_n - \int_a^b f(x)dx| \leq M \frac{(b-a)^۳}{۱۲n^۲}$$

و کران خطای قاعدهٔ ذوزنقه‌ای ثابت می‌شود.

لم. معادلهٔ یک سهمی با محور قائم را می‌توان به صورت $y = g(x)$ نوشت، که در آن

$$g(x) = a(x - x_۱)^۲ + b(x - x_۱) + c$$

اگر این سهمی از نقاط $(x_۰, y_۰)$، $(x_۱, y_۱)$، و $(x_۲, y_۲)$ بگذرد و، به‌ازای h مثبت و ثابتی، $x_۱ = x_۰ + h$ و $x_۲ = x_۱ + h$، آن‌گاه

$$\int_{x_۰}^{x_۲} g(x)dx = \frac{h}{۳}(y_۰ + ۴y_۱ + y_۲)$$

برهان. داریم:

$$\int_{x_۰}^{x_۲} g(x)dx = \int_{x_۱-h}^{x_۱+h} \{a(x-x_۱)^۲ + b(x-x_۱) + c\}dx$$

با انتخاب $x = x_۱ + t$، این رابطه به صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_{-h}^{h} (at^۲ + bt + c)dt = \frac{h}{۳}(۲ah^۲ + ۶c)$$

امّا

$$y_\circ = g(x_\circ) = g(x_1 - h) = ah^2 - bh + c$$
$$y_1 = g(x_1) = c$$
$$y_2 = g(x_2) = g(x_1 + h) = ah^2 + bh + c$$

نتیجه می‌شود که

$$y_\circ + 4y_1 + y_2 = 2ah^2 + 6c \quad \text{و} \quad y_\circ + y_2 = 2ah^2 + 2c$$

که، در این صورت،

$$\int_{x_\circ}^{x_2} g(x)dx = \frac{h}{3}(2ah^2 + 6c) = \frac{h}{3}(y_\circ + 4y_1 + y_2)$$

که همان چیزی است که باید ثابت می‌شد.

بحث. انتگرال معین $\int_a^b f(x)dx$ را دوباره بررسی می‌کنیم. عدد طبیعی زوجی مانند $2n$ اختیار و بازهٔ $[a,b]$ را به وسیلهٔ نقاط

$$a = x_\circ < x_1 < x_2 < \cdots < x_{2n-2} < x_{2n-1} < x_{2n} = b$$

به $2n$ زیربازه، هر یک به طول

$$h = \frac{b-a}{2n}$$

تقسیم می‌کنیم. به‌ازای $k = \circ, 1, 2, \ldots, 2n$، قرار می‌دهیم $y_k = f(x_k)$ و فرض می‌کنیم P_k نقطهٔ به مختصات (x_k, y_k) باشد. اینک، مانند شکل ۱۲.۵، منحنی $y = f(x)$ را به‌ازای هر زوج از این بازه‌ها به وسیلهٔ کمانی از یک سهمی با محور قائم تقریب می‌کنیم. از لم بالا، بدون توجه به علامت $f(x)$، نتیجه می‌شود که مساحت بین محور xها و کمان سهموی

$P_\circ P_1 P_2$، عبارت است از $\quad \frac{h}{3}(y_\circ + 4y_1 + y_2)$

$P_2 P_3 P_4$، عبارت است از $\quad \frac{h}{3}(y_2 + 4y_3 + y_4)$

$$\vdots$$

$P_{n-۲}P_{n-۱}P_n$، عبارت است از $\quad \frac{h}{۳}(y_{۲n-۲} + ۴y_{۲n-۱} + y_{۲n})$

از جمع این عبارات درمی‌یابیم که مساحت تقریبی عبارت است از

$$S_{۲n} = \frac{h}{۳}(y_۰ + ۴y_۱ + ۲y_۲ + ۴y_۳ + ۲y_۴ + \cdots + ۲y_{۲n-۲} + ۴y_{۲n-۱} + y_{۲n})$$

فرمول تقریب

$$\int_a^b f(x)dx = S_{۲n}, \qquad h = \frac{b-a}{۲n}$$

به قاعدهٔ سیمسون در انتگرالگیری عددی مشهور شده است.

ما کران خطای زیرا را برای قاعدهٔ سیمسون اثبات خواهیم کرد. اگر مشتق چهارم تابع f بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته باشد و K بزرگترین مقدار $|f^{(۴)}(x)|$ به‌ازای $a \leq x \leq b$ باشد، آن‌گاه

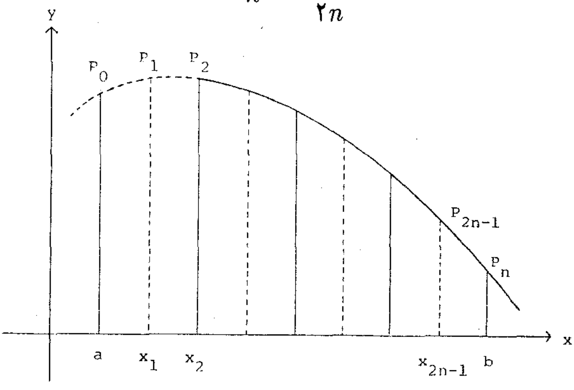
$$\left|S_{۲n} - \int_a^b f(x)dx\right| \leq K\frac{(b-a)^۵}{۲۸۸۰\ n^۴}$$

که در آن $S_{۲n}$ یک مقدار تقریبی $\int_a^b f(x)dx$ است که از قاعدهٔ سیمسون

$$S_{۲n} = \frac{h}{۳}(y_۰ + ۴y_۱ + ۲y_۲ + ۴y_۳ + ۲y_۴ + \cdots + ۲y_{۲n-۲} + ۴y_{۲n-۱} + y_{۲n})$$

به دست می‌آید که در آن

$$h = \frac{b-a}{۲n}$$



شکل ۱۲.۵

تبصره. اگر f یک چندجمله‌ای با درجه‌ای حداکثر مساوی ۳ باشد، آن‌گاه $K = ۰$ و قاعدهٔ سیمسون مقدار دقیق $\int_a^b f(x)dx$ را به دست می‌دهد:

$$\int_a^b f(x)dx = \frac{b-a}{۶}\left(f(a) + ۴f\left(\frac{a+b}{۲}\right) + f(b)\right)$$

[اگر حجم V جسمی را حد حاصل جمع ورقه‌های نازک به مساحت $f(x)$ تلقی کنیم، آن‌گاه

$$V = \int_a^b f(x)dx \approx \frac{b-a}{۶}\left(f(a) + ۴f\left(\frac{a+b}{۲}\right) + f(b)\right)$$

که آن را فرمول منشوروار می‌نامند. به آسانی دیده می‌شود که فرمول منشوروار حجم استوانه، مخروط، کره و بیضی‌وار را دقیقاً به دست می‌دهد.]

قضیهٔ ۲۸.۵. فرض کنید مشتق چهارم تابع f بر بازهٔ بسته‌ای به شکل $[A-h, A+h]$، به طول متناهی $۲h$، پیوسته باشد. آن‌گاه

$$\int_{A-h}^{A+h} f(x)dx = \frac{h}{۳}\{f(A-h) + ۴f(A) + f(A+h)\} - \frac{h^۵}{۹۰}f^{(۴)}(w)$$

که در آن w نقطه‌ای بین $A-h$ و $A+h$ است.

برهان. می‌خواهیم K را طوری تعیین کنیم که

$$\int_{A-h}^{A+h} f(x)dx = \frac{h}{۳}\{f(A-h) + ۴(A) + f(A+h)\} + Kh^۵$$

فرض کنید $f(x) = F'(x)$. آن‌گاه

$$\int_{A-h}^{A+h} f(x)dx = F(A+h) - F(A-h)$$

و، بنابراین،

$$F(A+h) - F(A-h) - \frac{h}{۳}\{f(A+h) + ۴f(A) + f(A-h)\} - Kh^۵ = ۰$$

تابع H را بر $۰ \leq x \leq h$ با ضابطهٔ

$$H(x) = F(A+x) - F(A-x) - \frac{x}{۳}\{f(A+x) + ۴f(A) + f(A-x)\} - Kx^۵$$

در نظر می‌گیریم. ملاحظه می‌کنیم که $H(\circ) = H(h) = \circ$ و، به استناد قضیهٔ رُل (قضیهٔ ۳.۴)، tای بین $\circ$ و h موجود است که $H'(t) = \circ$. ولی، چون $F' = f$،

$$\begin{aligned} H'(x) =& f(A+x) + f(A-x) - \frac{۱}{۳}\{f(A+x) + ۴f(A) + f(A-x)\} \\ & - \frac{۴}{۳}\{f'(A+x) - f'(A-x)\} - ۵Kx^۴ \\ =& \frac{۲}{۳}\{f(A+x) + f(A-x)\} - \frac{۴}{۳}f(A) \\ & - \frac{x}{۳}\{f'(A+x) - f'(A-x)\} - ۵Kx^۴ \end{aligned}$$

از این رو، $H'(\circ) = H'(t) = \circ$ و، به استناد قضیهٔ رُل، sی بین $\circ$ و t موجود است که $H''(s) = \circ$. امّا

$$\begin{aligned} H''(x) =& \frac{۲}{۳}\{f'(A+x) - f'(A-x)\} - \frac{۱}{۳}\{f'(A+x) - f'(A-x)\} \\ & - \frac{x}{۳}\{f''(A+x) + f''(A-x)\} - ۲\circ Kx^۳ \\ =& \frac{۱}{۳}\{f'(A+x) - f'(A-x)\} - \frac{x}{۳}\{f''(A+x) + f''(A-x)\} - ۲\circ Kx^۳ \end{aligned}$$

به این ترتیب، $H''(\circ) = H''(s) = \circ$ و، به استناد قضیهٔ رُل، حداقل یک v بین $\circ$ و s وجود دارد که $H'''(v) = \circ$ امّا،

$$\begin{aligned} H'''(x) = & \frac{۱}{۳}\{f''(A+x) + f''(A-x)\} - \frac{۱}{۳}\{f''(A+x) + f''(A-x)\} \\ & - \frac{x}{۳}\{f'''(A+x) - f'''(A-x)\} - ۶\circ Kx^۲ \end{aligned}$$

نتیجه می‌شود که

$$H'''(v) = -\frac{v}{۳}\{f'''(A+v) - f'''(A-v)\} - ۶\circ Kv^۲ = \circ$$

چون $v \neq \circ$، خواهیم داشت:

$$K = -\frac{۱}{۹\circ}\frac{f'''(A+v) - f'''(A-v)}{۲v}$$

به استناد قضیهٔ رل، حداقل یک w بین $A - v$ و $A + v$ می‌توان یافت که

$$\frac{f'''(A+v) - f'''(A-v)}{۲v} = f^{(۴)}(w)$$

به این ترتیب،

$$K = -\frac{۱}{۹۰} f^{(۴)}(w)$$

که در آن w نقطه‌ای بین $A - v$ و $A + v$ است و، به طریق اولی، بین $A - h$ و $A + h$.

ملاحظات. اگر $[a, b]$ را به وسیلهٔ نقاط

$$a = x_۰ < x_۱ < x_۲ < x_۳ < x_۴ < \cdots < x_{۲n-۲} < x_{۲n-۱} < x_{۲n} = b$$

ب $۲n$ زیربازه، هر یک به طول

$$h = \frac{b - a}{۲n}$$

تقسیم کنیم، خواهیم داشت:

$$\int_{x_۰}^{x_۲} f(x)dx = \frac{h}{۳}\{f(x_۰) + ۴f(x_۱) + f(x_۲)\} - \frac{h^۵}{۹۰} f^{(۴)}(w_۱)$$
$$\int_{x_۲}^{x_۴} f(x)dx = \frac{h}{۳}\{f(x_۲) + ۴f(x_۳) + f(x_۴)\} - \frac{h^۵}{۹۰} f^{(۴)}(w_۲)$$
$$\vdots$$
$$\int_{x_{۲n-۲}}^{x_{۲n}} f(x)dx = \frac{h}{۳}\{f(x_{۲n-۲}) + ۴f(x_{۲n-۱}) + f(x_{۲n})\} - \frac{h^۵}{۹۰} f^{(۴)}(w_n)$$

که در آنها $w_۱$، $w_۲$، ...، w_n بین a و b هستند. امّا چون $f^{(۴)}$ بر $[a, b]$ پیوسته است، نقطه‌ای مانند w بین a و b می‌توان یافت که

$$\frac{f^{(۴)}(w_۱) + f^{(۴)}(w_۲) + \cdots + f^{(۴)}(w_n)}{n} = f^{(۴)}(w)$$

(مثال ۹ بخش ۴ فصل دوّم را ببینید.) از این رو،

$$\int_a^b f(x)dx = S_{۲n} - \frac{h^۵}{۹۰}(nf^{(۴)}(w)) = S_{۲n} - \frac{(b-a)^۵}{۲۸۸۰ n^۴} f^{(۴)}(w)$$

که در آن w نقطه‌ای بین a و b است و

$$S_{۲n} = \frac{b - a}{۶}(y_۰ + ۴y_۱ + ۲y_۲ + ۴y_۳ + ۲y_۴ + \cdots + ۲y_{۲n-۲} + ۴y_{۲n-۱} + y_{۲n})$$

با $y_k = f(x_k)$ وقتی که $k = ۰, ۱, ۲, \ldots$، $۲n$. بنابراین، نتیجه می‌شود که

$$\left|S_{۲n} - \int_a^b f(x)dx\right| \leq K\frac{(b-a)^۵}{۲۸۸۰ n^۴}$$

که در آن K بزرگترین مقدار $|f^{(۴)}(x)|$ به‌ازای $a \leq x \leq b$ است، و کران خطای قاعدهٔ سیمسون ثابت می‌شود.

از این قضیه واضح است که اگر f یک چندجمله‌ای درجهٔ چهار باشد، آن‌گاه کران خطای قاعدهٔ سیمسون یک ثابت قابل محاسبه است. این وضعیت را اکنون می‌بینیم.

بشکهٔ متقارنی راکه از دوران یک سهمی به دست می‌آید در نظر بگیرید. فرض کنید H ارتفاع بشکه، R شعاع مقطع میانی، r شعاع هر یک از دو انتها باشد، و $\delta = R - r$. در این صورت، مطابق دستور نیوتن، حجم بشکه دقیقاً عبارت است از

$$V = \pi H\left(\frac{۲}{۳}R^۲ + \frac{۱}{۳}r^۲ - \frac{۲}{۱۵}\delta^۲\right)$$

در واقع

$$y = -\frac{۴\delta}{H^۲}x^۲ + R \quad \text{که در آن} \quad V = \pi\int_{-H/۲}^{H/۲} y^۲ dx$$

به این ترتیب،

$$f(x) = \frac{۱۶\delta^۲}{H^۴}x^۴ - \frac{۸\delta R}{H^۲}x^۲ + R^۲ \quad \text{که در آن} \quad V = \pi\int_{-H/۲}^{H/۲} f(x)dx$$

امّا

$$f^{(۴)}(x) = ۲۴\frac{۱۶\delta^۲}{H^۴}$$

با انتخاب $A = ۰$، $h = H/۲$، و ضرب طرفین معادلهٔ قضیهٔ قبل در π، حکم مطلوب در مورد V از آن نتیجه می‌شود.

مثال ۱. فرض کنید $n = ۱۰$ و، با استفاده از قاعدهٔ ذوزنقه‌ای، انتگرال

$$\ln ۲ = \int_۱^۲ \frac{۱}{x}dx$$

را محاسبه و کران خطای متناظر را تعیین کنید.

حل. در این مورد، $f(x) = ۱/x$، $[a,b] = [۱,۲]$، و $h = ۰٫۱$؛ از این رو

$$T_{۱۰} = \frac{۱}{۱۰}\left(\frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۱٫۱} + \frac{۱}{۱٫۲} + \frac{۱}{۱٫۳} + \frac{۱}{۱٫۴} + \frac{۱}{۱٫۵} + \frac{۱}{۱٫۶} + \frac{۱}{۱٫۷} + \frac{۱}{۱٫۸} + \frac{۱}{۱٫۹} + \frac{۱}{۲}\right)$$
$$= ۰٫۶۹۳۷۷$$

چون $۰ < f''(x) = ۲/x^۳ \le ۲۰$ وقتی که $۱ \le x \le ۲$، کران خطا عبارت است از

$$\frac{۲}{۱۲ \cdot ۱۰^۲} = \frac{۱}{۶۰۰}$$

ضمناً، با فرض $n = ۲۰$ (و بر این اساس، $h = ۰٫۰۵$)، خواهیم داشت: $T_{۲۰} = ۰٫۶۹۳۳۰۳۳۳\ldots$. در واقع، با دقتی تا هشت رقم اعشار، $\ln ۲ = ۰٫۶۹۳۱۴۷۱۸\ldots$.

مثال ۲. با فرض $۲n = ۱۰$ و با استفاده از قاعدهٔ سیمسون انتگرال

$$\ln ۲ = \int_۱^۲ \frac{۱}{x} dx$$

را محاسبه و کران خطا متناظر را تعیین کنید.

حل. در این مورد، $f(x) = ۱/x$، $[a,b] = [۱,۲]$، و $h = ۰٫۱$؛ از این رو

$$S_{۱۰} = \frac{۱}{۳۰}\left(۱ + \frac{۴}{۱٫۱} + \frac{۲}{۱٫۲} + \frac{۴}{۱٫۳} + \frac{۲}{۱٫۴} + \frac{۴}{۱٫۵} + \frac{۲}{۱٫۶} + \frac{۴}{۱٫۷} + \frac{۲}{۱٫۸} + \frac{۴}{۱٫۹} + \frac{۱}{۲}\right)$$
$$= ۰٫۶۹۳۱۵۲\ldots$$

چون $۰ < f^{(۴)}(x) = ۲۴/x^۵ \le ۲۴$ وقتی که $۱ \le x \le ۲$، کران خطا عبارت است از

$$\frac{۲۴}{۲۸۸۰ \cdot ۵^۴} = \frac{۱}{۷۵۰۰۰}$$

با فرض $۲n = ۲۰$ (و، از این رو، $h = ۰٫۰۵$)، خواهیم داشت: $S_{۲۰} = ۰٫۶۹۳۱۴۷۱۶\ldots$ ؛ که با مقدار واقعی $\ln ۲ = ۰٫۶۹۳۱۴۷۱۸\ldots$ تا هفت رقم اوّل مطابقت دارد.

تفسیر. مقایسهٔ مثالهای ۱و۲ نشان می‌دهد که حجم محاسبات لازم در استفاده از قواعد ذوزنقه‌ای و سیمسون یکسان است؛ معذالک، قاعدهٔ سیمسون به تقریب بسیار بهتری می‌انجامد.

مثال ۳. چون

$$\frac{\pi}{۴} = \int_{۰}^{۱} f(x)dx \qquad \text{که در آن} \qquad f(x) = \frac{۱}{۱+x^{۲}}$$

محاسبهٔ عددی این انتگرال تا حدی جالب توجه است. چون

$$f'(x) = \frac{-۲x}{(۱+x^{۲})^{۲}}, \qquad f''(x) = \frac{۶x^{۲}-۲}{(۱+x^{۲})^{۳}}, \qquad f'''(x) = \frac{۲۴x(۱-x^{۲})}{(۱+x^{۲})^{۴}}$$

$$f^{(۴)}(x) = \frac{۲۴(۵x^{۴}-۱۰x^{۲}+۱)}{(۱+x^{۲})^{۵}}, \qquad f^{(۵)}(x) = \frac{-۲۴۰x(۳x^{۴}-۱۰x^{۲}+۳)}{(۱+x^{۲})^{۶}}$$

درمی‌یابیم که نامساویهای $|f''(x)| < ۲$ و $|f^{(۴)}(x)| \leq ۲۴$ به‌ازای $۰ \leq x \leq ۱$ برقرارند. یک روش ظریفتر این است که قرار دهیم $y = \arctan x$. در این صورت، به استناد (۳۸.۴) (در فصل ۴)،

$$f''(x) = y''' = ۲(\cos^{۳} y)\left[\sin ۳\left(y+\frac{\pi}{۲}\right)\right] = -۲(\cos^{۳} y)(\sin ۳y)$$

و

$$f^{(۴)}(x) = y^{(۵)} = ۲۴(\cos^{۵} y)\left[\sin ۵\left(y+\frac{\pi}{۲}\right)\right] = ۲۴(\cos^{۵} y)(\cos ۵y)$$

در این مثال، قاعدهٔ ذوزنقه‌ای با $n = ۱۰$ می‌دهد $T_{۱۰} = ۰/۷۸۵۶۲\ldots$؛ در حالی که قاعدهٔ سیمسون با $۲n = ۴$ می‌دهد $S_{۴} = ۰/۷۸۵۳۹\ldots$. مقدار واقعی $\frac{\pi}{۴}$ با دقتی تا شش رقم اعشار عبارت است از $۰/۷۸۵۳۹۸\ldots$.

مثال ۴. فرض کنید $h(۰) = ۱$ و

$$h(x) = \frac{\ln(x+۱)}{x} \qquad \text{به‌ازای } x > ۰،$$

اگر بخواهیم از قاعدهٔ سیمسون برای محاسبهٔ انتگرال h بر بازه‌ای مناسب استفاده کنیم. اطلاعاتی دربارهٔ $h^{(۴)}$ لازم داریم. ادعا می‌کنیم که $h^{(۴)}$ تابعی نزولی بر $[۰,\infty)$ است و

$$\text{به‌ازای } x > ۰، \qquad ۰ < h^{(۴)}(x) < ۴/۸ = h^{(۴)}(۰).$$

در واقع،

$$h'(x) = \frac{۱}{(x+۱)x} - \frac{\ln(x+۱)}{x^{۲}}, \qquad h''(x) = ۲\frac{\ln(x+۱)}{x^{۲}} - \frac{۳x+۲}{(x+۱)^{۲}x^{۲}}$$

$$h'''(x) = \frac{11x^2 + 15x + 6}{(x+1)^3 x^3} - \frac{6\ln(x+1)}{x^4}$$
$$h^{(4)}(x) = \frac{24\ln(x+1)}{x^5} - \frac{50x^3 + 104x^2 + 84x + 24}{(x+1)^4 x^4}$$
$$h^{(5)}(x) = \frac{27x^4 + 770x^3 + 940x^2 + 540x + 120}{(x+1)^5 x^5} - \frac{120\ln(x+1)}{x^5}$$

بنابراین،

$$\frac{d}{dx}(x^6.h^{(5)}(x)) = -\frac{120x^5}{(x+1)^6}$$

و نتیجه می‌شود که $x^6.h^{(5)}(x)$ در قلمرو $x > 0$ تابعی نزولی است (به استناد قضیهٔ ۷.۴). چون حاصل ضرب $x^6.h^{(5)}(x)$ در $x = 0$ صفر می‌شود، خواهیم داشت:

به‌ازای $x > 0$، $x^6.h^{(5)}(x) < 0$ که مستلزم $h^{(5)}(x) < 0$ است

و نشان می‌دهد که $h^{(4)}$ بر $[0, \infty)$ نزولی است. بالاخص،

به‌ازای $x > 0$، $\quad 0 < h^{(4)}(x) < 4/8 = h^{(4)}(0)$

تبصره. با استفاده از روشهای مناسب نظریهٔ سریهای نامتناهی، می‌توان نشان داد که (مثال ۱ بخش ۸ فصل ۷ را ببینید.)

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x}dx = \frac{\pi^2}{12}$$

به جای تساوی واقعی، می‌توانیم با به کارگیری قاعدهٔ سیمسون در برقراری تساوی تقریبی تحقیق کنیم.

مثال ۵. فرض کنید $y = e^{-x^2}$. آن‌گاه

$$y' = -2xe^{-x^2}, \quad y'' = 2(2x^2 - 1)e^{-x^2}, \quad y''' = -4x(2x^2 - 3)e^{-x^2}$$
$$y^{(4)} = 4(4x^4 - 12x^2 + 3)e^{-x^2}, \quad y^{(5)} = -8x(4x^4 - 20x^2 + 15)e^{-x^2}$$

از این رو، $\max\{|y^{(4)}| : 0 \le x \le 1\} = 12$. با فرض $2n = 10$ و با استفاده از قاعدهٔ سیمسون، خواهیم داشت:

$$\int_0^1 e^{-x^2}dx \approx 0/746825$$

و کران خطا عبارت است از

$$\frac{12}{2880 \cdot 5^4} = \frac{1}{150000}$$

مثال ۶. از قاعدهٔ سیمسون با $2n = ۲۰$، چنین به دست می‌آوریم:

$$\int_{۰}^{۱} \frac{\ln(۱+x)}{۱+x^{۲}}dx \approx ۰/۲۷۲۱۹۸۴۴$$

به صورت واقعی،

$$\int_{۰}^{۱} \frac{\ln(۱+x)}{۱+x^{۲}}dx = \frac{\pi}{۸}\ln ۲ = ۰/۲۷۲۱۹۸۲۶۱۳\ldots$$

برای تحقیق در برقراری این تساوی، قرار می‌دهیم $x = \tan t$،

$$\int_{۰}^{۱} \frac{\ln(۱+x)}{۱+x^{۲}}dx = \int_{۰}^{\pi/۴} \ln(\cos t + \sin t)dt - \int_{۰}^{\pi/۴} \ln(\cos t)dt$$

و جانشین می‌کنیم $t = \pi/۴ - s$،

$$\begin{aligned}
\int_{۰}^{\pi/۴} \ln(\cos t)dt &= -\int_{\pi/۴}^{۰} \ln\left[(\cos s)\left(\cos\frac{\pi}{۴}\right) + (\sin s)\left(\sin\frac{\pi}{۴}\right)\right]ds \\
&= \int_{۰}^{\pi/۴} \ln\left(\frac{\cos s + \sin s}{\sqrt{۲}}\right)ds \\
&= \int_{۰}^{\pi/۴} \ln(\cos s + \sin s)ds - \frac{\ln ۲}{۲}\int_{۰}^{\pi/۴} ds \\
&= \int_{۰}^{\pi/۴} \ln(\cos s + \sin s)ds - \frac{\pi}{۸}\ln ۲
\end{aligned}$$

از این رو،

$$\int_{۰}^{۱} \frac{\ln(۱+x)}{۱+x^{۲}}dx = \frac{\pi}{۸}\ln ۲$$

مثال ۷. از قاعدهٔ سیمسون با $2n = ۶$، چنین به دست می‌آوریم:

$$\int_{۰}^{\pi} \frac{\sin x}{x}dx \approx ۱/۸۵۲$$

مثال ۸. می‌خواهیم $\int_{۱}^{۲}(۱/x)dx$ را با دقتی تا $۵ \cdot ۱۰^{-۵}$ محاسبه کنیم. بازهٔ $[۱, ۲]$ به چند قسمت باید تقسیم شود هرگاه (الف) از قاعدهٔ ذوزنقه‌ای استفاده کنیم؟ (ب) از قاعدهٔ سیمسون استفاده کنیم؟

نخست، حالت اوّل را درنظر می‌گیریم. کران خطای استفاده از قاعدهٔ ذوزنقه‌ای (قضیهٔ ۲۷.۵ و تبصرهٔ بعد از آن را ملاحظه کنید.) عبارت است از

$$\frac{M(b-a)^{۳}}{۱۲n^{۲}}$$

در این حالت، $M = \max\{|۲/x^۳| : ۱ \leq x \leq ۲\} = ۲$ و $b - a = ۱$. باید برقراری نامساوی

$$\frac{۲}{۱۲n^۲} < ۵ \cdot ۱۰^{-۵}$$

را بررسی کنیم و کوچکترین عدد صحیح مثبت n را که در آن صدق کند بیابیم. امّا

$$\frac{۲}{۱۲n^۲} < ۵ \cdot ۱۰^{-۵} \qquad \text{فقط و فقط وقتی که} \qquad \frac{۱۰۰}{\sqrt{۳}} < n.$$

چون $۱۰۰/\sqrt{۳}$ تقریباً برابر ۵۷٫۷۳۵۰۲۷ است، متوجه می‌شویم که در حالتی که بخواهیم از قاعدهٔ ذوزنقه‌ای استفاد کنیم، تعداد زیربازه‌های بازهٔ $[۱, ۲]$ برابر $n = ۵۸$ خواهد بود.

سپس، حالت دوّم را در نظر می‌گیریم. کران خطای استفاده از قاعدهٔ سیمسون (ملاحظات بعد از قضیهٔ ۲۸.۵ را ببینید.) عبارت است از

$$\frac{K(b-a)^۵}{۲۸۸۰n^۴} = \frac{K(b-a)^۵}{۱۸۰(۲n)^۴}$$

در حالت مورد بحث، $K = \max\{|۲۴/x^۵| : ۱ \leq x \leq ۲\} = ۲۴$ و $b - a = ۱$. همچنین، یادآوری می‌کنیم که، در حالت استفاده از قاعدهٔ سیمسون، تعداد زیربازه‌های بازهٔ $[a, b]$ عبارت است از $۲n$. بنابراین، باید برقراری نامساوی

$$\frac{۲۴}{۱۸۰(۲n)^۴} < ۵ \cdot ۱۰^{-۵}$$

را بررسی کنیم و کوچکترین عدد صحیح مثبت $۲n$ را که در آن صدق کند بیابیم. امّا

$$\frac{۲۴}{۱۸۰(۲n)^۴} < ۵ \cdot ۱۰^{-۵} \qquad \text{فقط و فقط وقتی که} \qquad \sqrt[۴]{\frac{۴}{۱۵}} \cdot ۱۰ < ۲n.$$

چون $۱۰ \cdot \sqrt[۴]{۴/۱۵}$ تقریباً برابر ۷٫۱۸۶۰۸۲ است، تعداد مطلوب $۲n$ زیربازهٔ $[۱, ۲]$ در حالت استفاده از قاعدهٔ سیمسون فقط $۲n = ۸$ خواهد بود.

بنابراین، واضح است که در محاسبهٔ $\int_۱^۲ (۱/x)dx$ با دقتی تا $۵ \cdot ۱۰^{-۵}$ قاعدهٔ سیمسون بسیار مؤثرتر از قاعدهٔ ذوزنقه‌ای است.

مثال ۹. اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد آن‌گاه

$$\frac{۲}{۳}n^{۳/۲} < ۱ + \sqrt{۲} + \sqrt{۳} + \cdots + \sqrt{n} < \frac{۴n + ۳}{۶}\sqrt{n}$$

در واقع، اگر k یک عدد صحیح مثبت باشد و $k-1 \leq x < k$، آن‌گاه $\sqrt{x} < \sqrt{k}$ و

$$\sqrt{k} > \int_{k-1}^{k} \sqrt{x}dx$$

از جمع این نامساویها، وقتی که $k = 1, 2, \ldots, n$، خواهیم داشت:

$$1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n} > \int_{0}^{n} \sqrt{x}dx = \frac{2}{3}n^{3/2}$$

چون نمودار $y = \sqrt{x}$ مقعّر به پایین است، واضح می‌باشد که

$$\frac{1}{2}(\sqrt{k-1} + \sqrt{k}) < \int_{k-1}^{k} \sqrt{x}dx$$

در این جا، $\frac{1}{2}(\sqrt{k-1}+\sqrt{k})$ عبارت است از مساحت ذوزنقهٔ به رئوس $(k-1, 0)$، $(k, 0)$، $(k, \sqrt{k})$، و $(k-1, \sqrt{k-1})$. از این رو،

$$\begin{aligned}
1 + \sqrt{2} + \sqrt{3} + \cdots + \sqrt{n} &= \frac{1}{2}(\sqrt{0} + \sqrt{1}) + \frac{1}{2}(\sqrt{1} + \sqrt{2}) + \frac{1}{2}(\sqrt{2} + \sqrt{3}) \\
&\quad + \frac{1}{2}(\sqrt{3} + \sqrt{4}) + \cdots + \frac{1}{2}(\sqrt{n-1} + \sqrt{n}) + \frac{1}{2}\sqrt{n} \\
&< \int_{0}^{n} \sqrt{x}dx + \frac{1}{2}\sqrt{n} = \frac{4n+3}{6}\sqrt{n}
\end{aligned}$$

مثال ۱۰. فرض کنید تابع f بر $[a,b]$ مشتق‌پذیر باشد و به‌ازای هر x از $[a,b]$ داشته باشیم $|f'(x)| \leq M$. بعلاوه، با فرض $h = (b-a)/n$، $x_0 = a$، $x_1 = a+h$، $x_2 = a+2h$، ...، $x_n = a+nh = b$، و $t_j \in [x_{j-1}, x_j]$ وقتی که $j = 1, 2, \ldots, n$، قرار می‌دهیم:

$$S_n = \sum_{j=1}^{n} f(t_j)h$$

در این صورت،

$$\left| \int_{a}^{b} f(x)dx - S_n \right| \leq \frac{M(b-a)^2}{n}$$

در واقع، به استناد اوّلین قضیهٔ مقدار میانگین انتگرالها (قضیهٔ ۲۳.۵)، در هر بازهٔ $[x_{j-1}, x_j]$ نقطه‌ای مانند c_j وجود دارد به طوری که

$$\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx = f(c_j)(x_j - x_{j-1}) = f(c_j)h$$

از این رو،

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S_n\right| = \left|\sum_{j=1}^{n}\int_{x_{j-1}}^{x_j} f(x)dx - \sum_{j=1}^{n} f(t_j)h\right|$$
$$= \left|\sum_{j=1}^{n}[f(c_j) - f(t_j)]h\right| \leq \sum_{j=1}^{n}|f(c_j) - f(t_j)|\,h$$

امّا، به استناد قضیهٔ مقدار میانگین حساب دیفرانسیل (قضیهٔ ۵.۴)، نقطه‌ای مانند e_j بین c_j و t_j وجود دارد به طوری که

$$|f(c_j) - f(t_j)| = |f'(e_j)|.|c_j - t_j|$$

بعلاوه، واضح است که $|c_j - t_j| \leq |x_j - x_{j-1}|$؛ بنابراین

$$\left|\int_a^b f(x)dx - S_n\right| \leq \sum_{j=1}^{n}|f'(e_j)|h^2 \leq nMh^2 = \frac{M(b-a)^2}{n}$$

تبصره. در مثال ۱۰، با استفاده از مجموعهای ریمان حاصل از افراز بازهٔ $[a,b]$ به زیربازه‌هایی به طولهای مساوی، کران خطایی برای تقریب یک انتگرال به دست آوردیم. به عنوان مثال، کران خطای محاسبهٔ $\int_1^2 (1/x)dx$ با $h = 0/1$ فقط $\frac{1}{10}$ است. (این را با نتایج حاصل از مثالهای ۱ و ۲ مقایسه کنید.)

تمرینات فصل پنجم

۱.۵. فرض کنید f تابع پیوسته‌ای باشد که به‌ازای $0 \leq x \leq 1$ داشته باشیم $0 < A \leq f(x) \leq B$. نشان دهید که

$$AB\int_0^1 \frac{1}{f(x)}dx \leq A + B - \int_0^1 f(x)dx$$

راهنمایی: توجه کنید که در بازهٔ $[0, 1]$

$$\frac{\{f(x) - A\}\{f(x) - B\}}{f(x)} \leq 0$$

با انتگرالگیری از دو طرف این نامساوی بر $[0, 1]$ نتیجهٔ مطلوب عاید می‌شود.

۲.۵. فرض کنید p و q بزرگتر از صفر باشند. نشان دهید که

$$\int_{۰}^{۱} (۱ - x^p)^{۱/q} dx = \int_{۰}^{۱} (۱ - x^q)^{۱/p} dx$$

راهنمایی: فرض کنید f تابعی پیوسته و نزولی بر $[a, b]$ باشد. آن‌گاه، تابع معکوس g بر $[f(b), f(a)]$ وجود دارد که پیوسته و نزولی است. از این رو،

$$\int_{f(b)}^{f(a)} g(y)dy = \int_b^a g\{f(t)\}f'(t)dt = \int_b^a tf'(t)dt = af(a) - bf(b) + \int_a^b f(t)dt$$

اگر، بعلاوه، داشته باشیم $f(a) = b$ و $f(b) = a$، آن‌گاه

$$\int_a^b g(t)dt = \int_a^b f(t)dt$$

توابع $f(x) = (۱ - x^q)^{۱/p}$ و $g(x) = (۱ - x^p)^{۱/q}$ بر $[۰, ۱]$ حالت خاصی از این وضعیت محسوب می‌شوند.

۳.۵. برقراری تساوی

$$\int_a^b \frac{۱}{x \ln x} dx = ۱|_a^b + \int_a^b \frac{۱}{x \ln x} dx$$

را با استفاده از انتگرالگیری جزءبه‌جزء: $u = ۱/(\ln x)$ و $dv = (۱/x)dx$ توضیح دهید.

۴.۵. فرض کنید $a > ۱$ و، به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، $x_n = n(\sqrt[n]{a} - ۱)$. نشان دهید که همواره $x_n > x_{n+۱}$.

راهنمایی: اگر $x > ۱$ و $p > q > ۱$، آن‌گاه $x^{p-۱} > x^{q-۱}$ و، بنابراین،

$$\frac{a^p - ۱}{p} > \frac{a^q - ۱}{q} \quad \text{یا} \quad \int_{۱}^{a} x^{p-۱} dx > \int_{۱}^{a} x^{q-۱} dx$$

با انتخاب $p = ۱/n$ و $q = ۱/(n + ۱)$، نامساوی مطلوب به دست می‌آید.

۵.۵. اگر به‌ازای همهٔ مقادیر x

$$\int_{۰}^{۱} f(xt)dt = ۰$$

نشان دهید که $f = 0$.

راهنمایی: داریم $\int_0^1 f(xt)dt = \int_0^x f(u)\frac{du}{x}$، که مستلزم تساوی $\int_0^x f(u)du = 0$ به‌ازای همهٔ مقادیر x است و، بنابراین،

$$\frac{d}{dx}\int_0^x f(u)du = 0 \quad \text{یا} \quad f = 0.$$

۶.۵. مشتق تابع

$$H(x) = \left(\int_a^x f(y)dy\right)\left(\int_x^b g(y)dy\right)$$

را بیابید و به موجب آن نشان دهید که

$$\int_a^b g(x)\left(\int_a^x f(y)dy\right)dx = \int_b^a f(x)\left(\int_b^x g(y)dy\right)dx$$

راهنمایی: داریم $H(a) = H(b) = 0$ و

$$H'(x) = f(x)\int_x^b g(y)dy - g(x)\int_a^x f(y)dy$$

از این رو، با انتگرالگیری بر $[a,b]$، نتیجهٔ مطلوب عاید می‌شود.

تبصره. در سه تمرین آتیه، فرض بر این است که f دوبار مشتق‌پذیر است.

۷.۵. نشان دهید که نقطه‌ای مانند α در $(-h,h)$ وجود دارد به طوری که

$$\int_{-h}^h f(x)dx = 2hf(0) + \frac{h^3}{3}f''(\alpha)$$

راهنمایی: فرض کنید $T(h) = \int_{-h}^h f(x)dx - 2hf(0)$. آن‌گاه

$$T(0) = 0, \quad T'(h) = f(h) + f(-h) - 2f(0), \quad T'(0) = 0$$

و، به استناد قضیهٔ مقدار میانگین (قضیهٔ ۵.۴ فصل ۴)،

$$T''(h) = f'(h) - f'(-h) = 2hf''(c_h)$$

که در آن c_h نقطه‌ای بین $-h$ و h است. از این رو، به استناد حکم مثال ۲۷ بخش ۶ فصل ۴، نقطه‌ای مانند u در $(\circ, h)$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{T(h)}{h^۳} = \frac{T''(u)}{۳\cdot ۲\cdot u} = \frac{۱}{۳}f''(c_u)$$

و، بنابراین، $T(h) = (h^۳/۳)f''(\alpha)$، که در آن $\alpha = c_u$ نقطه‌ای از $(-u, u)$ است و، نهایتاً، نقطه‌ای از $(-h, h)$.

۸.۵. نشان دهید که نقطه‌ای مانند β در $(-h, h)$ وجود دارد به طوری که

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = h\{f(h) + f(-h)\} - \frac{۲h^۳}{۳}f''(\beta)$$

راهنمایی: اگر $T(h) = \int_{-h}^{h} f(x)dx - h\{f(h) + f(-h)\}$ آن‌گاه، به استناد قضیهٔ مقدار میانگین (قضیهٔ ۵.۴)

$$T'(h) = -h\{f'(h) - f'(-h)\} = ۲h^۲ f''(c_h)$$

که در آن c_h بین $-h$ و h است. از این رو، به موجب حکم مثال ۲۶ بخش ۶ فصل ۴، نقطه‌ای مانند u در $(\circ, h)$ وجود دارد به طوری که

$$\frac{T(h)}{h^۳} = \frac{T'(u)}{۳u^۲} = -\frac{۲}{۳}f''(c_u), \qquad -u < c_u < u$$

زیرا $T(\circ) = \circ$. از این رو، $T(h) = -(۲h^۳/۳)f''(c_u)$.

۹.۵. نشان دهید که نقطه‌ای مانند γ در $(-h, h)$ وجود دارد به طوری که

$$\int_{-h}^{h} f(x)dx = \frac{h}{۲}\{f(h) + ۲f(\circ) + f(-h)\} - \frac{h^۳}{۶}f''(\gamma)$$

راهنمایی: اگر

$$T(h) = \int_{-h}^{h} f(x)dx - \left(\frac{h}{۲}\right)\{f(h) + ۲f(\circ) + f(-h)\}$$

آن‌گاه

$$T''(h) = -\frac{h}{۲}\{f''(h) + f''(-h)\} \quad \text{و} \quad T(\circ) = T'(\circ) = \circ$$

امّا، $\{f''(h)+f''(-h)\}/2$ بین $f''(h)$ و $f''(-h)$ واقع است و، چون f'' همهٔ مقادیر میانی را اختیار می‌کند، به ازای نقطه‌ای مانند c از $[-h,h]$ برابر $f''(c)$ است. به این ترتیب، $T''(h)=-hf''(c)$، یا

$$T(h)=-\frac{h^3}{6}f''(\gamma)$$

۱۰.۵. اگر f متناوب باشد با دورهٔ تناوب a، و

$$g(x)=f(x)-\frac{1}{a}\int_0^a f(x)dx$$

نشان دهید که $\int_0^x g(t)dt$ نیز متناوب است با دورهٔ تناوب a.

راهنمایی:

$$\begin{aligned}\int_0^{x+a} g(t)dt &= \left(\int_0^a+\int_a^{a+x}\right)g(t)dt=\int_0^a g(t)dt+\int_0^x g(u)du, t=a+u\\ &=\int_0^x g(u)du\end{aligned}$$

زیرا g دارای دورهٔ تناوب a است و

$$\int_0^a g(t)dt=\int_0^a f(t)dt-\frac{1}{a}\int_0^a\left(\int_0^a f(x)dx\right)dt=\int_0^a f(t)dt-\int_0^x f(t)dt=0$$

۱۱.۵. فرض کنید f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و $\int_a^b f(x)dx=0$. نشان دهید که نقطه‌ای مانند x در (a,b) می‌توان یافت که $f(x)=0$.

راهنمایی: قضیهٔ ۲۳.۵ را ببینید.

تبصره. اگر g و h بر $[a,b]$ پیوسته باشند و $\int_a^b g(x)dx=\int_a^b h(x)dx$، آن‌گاه نقطه‌ای مانند x در (a,b) وجود دارد که $g(x)=h(x)$. [در واقع، قرار دهید $f(x)=g(x)-h(x)$ و حکم تمرین ۱۱.۵ را اعمال کنید.]

۱۲.۵. (قضیهٔ بلیس) فرض کنید که f و g بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشند و $P=\{a=x_0<x_1<\cdots<x_n=b\}$ افرازی از $[a,b]$ باشد. نشان دهید که

$$\sum_{k=1}^n f(t_k)g(t'_k)\Delta x_k$$

که در آن $x_{k-۱} \leq t_k \leq x_k$ و $x_{k-۱} \leq t'_k \leq x_k$، $k = ۱,۲,\ldots,n$، و

$$\sum_{k=۱}^{n} f(t_k)g(t_k)\Delta x_k$$

به یک حد میل می‌کنند وقتی که $\|P\| \longrightarrow ۰$.

راهنمایی: به اتحاد

$$\sum_{k=۱}^{n} f(t_k)g(t'_k)\Delta x_k = \sum_{k=۱}^{n} f(t_k)g(t_k)\Delta x_k + \sum_{k=۱}^{n} f(t_k)[g(t'_k) - g(t_k)]\Delta x_k$$

و نامساوی

$$\left|\sum_{k=۱}^{n} f(t_k)[g(t'_k) - g(t_k)]\Delta_k\right| \leq K \sum_{k=۱}^{n} |g(t'_k) - g(t_k)|\Delta x_k$$

توجه کنید. (چون f انتگرال‌پذیر ریمان است، کراندار می‌باشد.) سرانجام، فرض کنید $\xi_k = t_k$ یا $\xi_k = t'_k$ به طوری که

$$g(\xi_k) = \max\{g(t_k), g(t'_k)\}$$

و $\eta_k = t_k$ یا $\eta_k = t'_k$ به قسمی که

$$g(\eta_k) = \min\{g(t_k), g(t'_k)\}$$

آن‌گاه

$$\sum_{k=۱}^{n} |g(t'_k) - g(t_k)|\Delta x_k = \sum_{k=۱}^{n} g(\xi_k)\Delta x_k - \sum_{k=۱}^{n} g(\eta_k)\Delta x_k$$

۱۳.۵. کجای رابطهٔ زیر نادرست است؟

$$\int_{-۱}^{۱} \frac{۱}{x^۲} dx = -\frac{۱}{x}\Big|_{-۱}^{۱} = -۲$$

۱۴.۵. مطلوب است محاسبهٔ

$$\lim_{x \to ۰} \frac{x}{۱ - e^{x^۲}} \int_{۰}^{x} e^{t^۲} dt$$

[جواب: ۱−].

۱۵.۵. نشان دهید که اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و به‌ازای هر تابع انتگرال‌پذیر g داشته باشیم $\int_a^b f(x)g(x)dx = 0$، آن‌گاه $f = 0$.

راهنمایی: اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و $\int_a^b f^2(x)dx = 0$، آن‌گاه، چنان که از قسمت اوّل قضیهٔ ۲۲.۵ برمی‌آید، $f = 0$ بر $[a,b]$.

۱۶.۵. فرض کنید f، g، و h بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشند. نشان دهید که

$$\int_a^b |f(x)-g(x)|^2 dx \le 2\int_a^b |f(x)-h(x)|^2 dx + 2\int_a^b |g(x)-h(x)|^2 dx$$

راهنمایی: داریم $f(x)-g(x) = \{f(x)-h(x)\} - \{g(x)-h(x)\}$. بنابراین

$$|f(x)-g(x)| \le |f(x)-h(x)| + |g(x)-h(x)|$$

و

$$|f(x)-g(x)|^2 \le |f(x)-h(x)|^2 + |g(x)-h(x)|^2 + 2|f(x)-h(x)||g(x)-h(x)|$$

امّا $2|f(x)-h(x)||g(x)-h(x)| \le |f(x)-h(x)|^2 + |g(x)-h(x)|^2$.

۱۷.۵. اگر $f_1(x) = \int_0^x f(t)dt$ و $f_2(x) = \int_0^x f_1(t)dt$، نشان دهید که

$$f_2(x) = \int_0^x (x-t)f(t)dt$$

به طور کلی، اگر $f_k(x) = \int_0^x f_{k-1}(t)dt$ وقتی که $k = 2, 3, \ldots$، آن‌گاه

$$f_k(x) = \frac{1}{(k-1)!}\int_0^x (x-t)^{k-1} f(t)dt$$

راهنمایی: انتگرال $\int_0^x f_1(t)dt$ را به روش جزءبه‌جزء به صورت زیر محاسبه می‌کنیم: فرض کنید $u = f_1(t)$ و $dv = dt$. آن‌گاه

$$\begin{aligned}\int_0^x f_1(t)dt &= tf_1(t)\Big|_0^x - \int_0^x tf(t)dt = xf_1(x) - \int_0^x tf(t)dt \\ &= x\int_0^x f(t)dt - \int_0^x tf(t)dt = \int_0^x (x-t)f(t)dt\end{aligned}$$

یک انتگرال‌گیری مشابه به روش جزءبه‌جزء به فرمول

$$f_n(x) = \int_{۰}^{x} (x-t) f_{n-۲}(t)dt$$

می‌انجامد. در این معادله، فرض کنید $u = f_{n-۲}(t)$ و $dv = (x-t)dt$. آن‌گاه

$$\begin{aligned}\int_{۰}^{x} (x-t) f_{n-۲}(t)dt &= -\frac{(x-t)^{۲}}{۲} f_{n-۲}(t)\Big|_{۰}^{x} + \int_{۰}^{x} \frac{(x-t)^{۲}}{۲} f_{n-۳}(t)dt \\ &= \int_{۰}^{x} \frac{(x-t)^{۲}}{۲} f_{n-۳}(t)dt\end{aligned}$$

یک بار دیگر انتگرال‌گیری به روش جزءبه‌جزء به نتیجهٔ

$$f_n(x) = \int_{۰}^{x} \frac{(x-t)^{۳}}{۳} f_{n-۴}(t)dt$$

می‌انجامد و بدیهی است که می‌توانیم بحث را به این طریق ادامه دهیم تا فرمول زیر عاید شود:

$$f_n(x) = \int_{۰}^{x} \frac{(x-t)^{n-۱}}{(n-۱)!} f(t)dt$$

۱۸.۵. به عنوان کاربردی از حکم تمرین ۱۷.۵، نشان دهید که اگر m و n اعداد صحیح مثبت باشند، آن‌گاه

$$\int_{۰}^{۱} (۱-x)^n x^m dx = \frac{m!n!}{(m+n+۱)!}$$

راهنمایی: اگر $f(t) = t^m$ آن‌گاه، به کمک نماد مذکور در تمرین ۱۷.۵،

$$\int_{۰}^{۱} (۱-t)^n t^m dt = n! f_{n+۱}(۱)$$

امّا،

$$\begin{aligned} f_۱(x) &= \int_{۰}^{x} t^m dt = \frac{x^{m+۱}}{(m+۱)!} \\ f_۲(x) &= \int_{۰}^{x} \frac{m! t^{m+۱}}{(m+۱)!} dt = \frac{m! x^{m+۲}}{(m+۲)!} \\ &\vdots \\ f_k(x) &= \frac{m! x^{m+k}}{(m+k)!} \end{aligned}$$

بنابراین، $n! f_{n+۱}(۱) = m!n!/(m+n+۱)!$.

۱۹.۵. با استفاده از قاعدهٔ سیمسون، حجم یک کره را محاسبه کنید.

۲۰.۵. تحقیق کنید که اگر در محاسبهٔ

$$\frac{\pi}{۴} = \int_{۰}^{۱} \frac{۱}{۱+x^{۲}} dx$$

که با استفاده از قاعدهٔ سیمسون انجام شود، بگیریم $۲n = ۱۰$، مقدار تقریبی ۰٫۷۸۵۳۹۸۱۵ به دست می‌آید. (مقدار واقعی $\frac{\pi}{۴}$ با دقتی تا ۸ رقم اعشار عبارت است از ۰٫۷۸۵۳۹۸۱۶) کران خطا در حالت مورد بحث تقریباً برابر ۰٫۰۰۰۰۱۳ است که بسیار بزرگتر از خطای واقعی است.

راهنمایی: مثال ۳ بعد از قضیهٔ ۲۸.۵ را ببینید.

۲۱.۵. با استفاده از قاعدهٔ سیمسون، نشان دهید که انتگرال

$$\int_{۰}^{۱} e^{-x^{۲}} dx$$

تقریباً برابر است با ۰٫۷۴۶۸.

۲۲.۵. با استفاده از قاعدهٔ سیمسون، نشان دهید که انتگرال

$$\int_{۰}^{\pi/۲} \left(۱ - \tfrac{۱}{۲}\sin x\right)^{۱/۲} dx$$

تقریباً برابر است با ۱٫۵۳۱.

۲۳.۵. نشان دهید که اگر P یک چندجمله‌ای از درجهٔ پنجم باشد و α و β ریشه‌های $x^{۲} - x + \frac{۱}{۱۰} = ۰$ باشند، آنگاه $\int_{۰}^{۱} P(x)dx = \frac{۱}{۱۸}\{۵P(\alpha) + ۸P(\frac{۱}{۲}) + ۵P(\beta)\}$.

فصل ششم

مباحثی دیگر در انتگرالگیری

۱.۶ انتگرال نامعیّن

تعریف. فرض کنید f تابع پیوستهٔ مفروضی بر $[a,b]$ باشد. تابعی مانند F را که

$$F'(x) = f(x), \qquad a < x < b$$

یک پاد مشتق یا یک انتگرال نامعیّن f می‌نامند. در صورت استفاده از نامگذاری دوّم، می‌نویسیم:

$$F(x) = \int f(x)dx$$

ملاحظات. قضیهٔ ۲۰.۵ بیان می‌کند که اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد آن‌گاه

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in [a,b] \text{ به‌ازای}$$

یک پاد مشتق f بر $[a,b]$ است. واضح است که می‌توانیم هر ثابت دلخواهی به F بیفزاییم و باز هم پاد مشتقی از f به دست آوریم. اینک نشان می‌دهیم که همهٔ پادمشتقهای f از جمع یک ثابت دلخواه به F به دست می‌آیند.

قضیهٔ ۱.۶. فرض کنید f تابع پیوسته‌ای بر $[a,b]$ باشد. آن‌گاه، تابع

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt, \qquad x \in [a,b] \tag{۱.۶}$$

یک پاد مشتق f است و هر پاد مشتق دیگر f با اختلاف یک ثابت از این تابع به دست می‌آید.

برهان. این که با (۱.۶) پاد مشتقی از f تعریف می‌شود، از قضیهٔ ۵.‏۲۰ نتیجه می‌شود. اگر F_1 پادمشتق دیگری از f باشد، آن‌گاه تفاضل $F - F_1$ تابعی است که مشتق آن به‌ازای هر x از $[a,b]$ صفر است و، بنابر قضیهٔ ۶.۴، چنین تابعی ثابت است.

ملاحظات. از نظر قضیهٔ ۱.۶،

$$\int f(x)dx = \int_a^x f(t)dt + C \tag{۲.۶}$$

که در آن C یک ثابت است. به این ترتیب، اگر

$$\int f(x)dx = F \tag{۳.۶}$$

فوراً درمی‌یابیم که $f = F'$، ولی نه بیشتر. بعلاوه، اگر

$$\int f(x)dx = F_1 \tag{۴.۶}$$

نتیجه نمی‌شود که $F = F_1$؛ ولی، به دلیل وجود ثابت C در (۲.۶)، معادلات (۳.۶) و (۴.۶) فقط ایجاب می‌کنند که

$$F = F_1 + C$$

که در آن، مجدداً، C یک ثابت است.

برای تشریح بیشتر این نظر، فرض کنید f و g دارای مشتقات پیوسته‌ای بر $[a,b]$ باشند. تابع

$$f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx$$

یک پاد مشتق $f(x)g'(x)$ است؛ زیرا، به استناد قسمت سوم قضیهٔ ۲.۳، $f(x)g'(x) = (f(x)g(x))' - f'(x)g(x)$. که، بنابراین، به فرمول انتگرالگیری جزءبه‌جزء می‌رسیم:

$$\int f(x)g'(x)dx = f(x)g(x) - \int f'(x)g(x)dx \qquad (۵.۶)$$

به استناد (۵.۶)،

$$\int \frac{۱}{(\sin x)(\cos x)}dx = \int \frac{\cot x}{\cos^۲ x}dx = \int (\cot x)(\tan x)'dx$$
$$= (\cot x)(\tan x) - \int (\tan x)(\cot x)'dx = ۱ + \int \frac{\tan x}{\sin^۲ x}dx$$

یعنی،

$$\int \frac{۱}{(\sin x)(\cos x)}dx = ۱ + \int \frac{۱}{(\sin x)(\cos x)}dx \qquad (۶.۶)$$

با یک تعبیر نادرست، معادلهٔ (۶.۶) به نتیجهٔ محال ۱ = ۰ می‌انجامد. تعبیر درست (۶.۶) این است: ثابت ۰ با یک ثابت اضافی برابر ثابت ۱ است. (که بدون شک درست است!) این مثال فقط به منظور بیان اهمیت وافر ثابت انتگرالگیری C در معادلهٔ

$$\int f(x)dx = F + C$$

آورده شد که در آن F یک پادمشتق f است و f را انتگرالده می‌نامند. فرمول انتگرالگیری جزءبه‌جزء (۵.۶)، که قبلاً در قضیهٔ ۱۹.۵ آمده است، و تعمیمی از فرمول انتگرالگیری جزءبه‌جز در (۴۴.۵) فصل پنجم ظاهر شده است.

ملاحظات دیگر. از قضیهٔ ۱۸.۵ (همراه با قضیهٔ ۱۶.۵) می‌توان نتیجه گرفت که اگر f بر $[a,b]$ پیوسته باشد و F پادمشتقی از f باشد، آن‌گاه

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) \qquad (۷.۶)$$

موافقیم که انتگرال ریمان $\int_a^b f(t)dt$ تابع f بر $[a,b]$ را صرفاً انتگرال معین f بر $[a,b]$ و اعداد a و b را حدود پایین و بالای انتگرالگیری بنامیم؛ برای رعایت اختصار، عبارت «انتگرال‌پذیر» به جای «انتگرال‌پذیر ریمان» به کار خواهد رفت.

رابطهٔ (۷.۶) نشان می‌دهد که آگاهی از پادمشتق (یا انتگرال نامعین) برای تعیین انتگرال معین متناظر کفایت می‌کند. بعداً روشهای متنوعی برای تعیین پادمشتق بعضی از توابع مورد بررسی قرار خواهد گرفت.

معذالک، یادآوری می‌کنیم که انتگرالهای معیّنی وجود دارند که عبارتهای صریح در مورد آنها قابل حصول نیست و بدون اطلاع از پادمشتقهای متناظر قابل محاسبه‌اند. [به عنوان مثال، (۴۵.۵) فصل پنجم و تمرینات ۳.۶ و ۴.۶ انتهای این فصل را ملاحظه کنید.]

قضیهٔ ۲.۶. انتگرال نامعین در قواعد اساسی زیر صدق می‌کند:

الف) اگر F دارای مشتق پیوستهٔ F' باشد، آن‌گاه

$$\int F'(x)dx = F(x) + C \qquad (۸.۶)$$

ب) اگر f و g دارای پادمشتق باشند، $f+g$ نیز پادمشتق دارد و

$$\int \{f(x)+g(x)\}dx = \int f(x)dx + \int g(x)dx \qquad (۹.۶)$$

ج) اگر f پادمشتقی داشته و k یک ثابت باشد، آن‌گاه kf یک پادمشتق دارد و

$$\int kf(x)dx = k\int f(x)dx \qquad (۱۰.۶)$$

د) اگر F و G دارای مشتقات پیوستهٔ F' و G' باشند، آن‌گاه

$$\int \{F(x)G'(x) + F'(x)G(x)\}dx = F(x)G(x) + C \qquad (۱۱.۶)$$

ه) فرض کنید G به عنوان تابعی از متغیر x دارای مشتق پیوستهٔ G' بر بازه‌ای مانند (a,b) باشد. فرض کنید F به عنوان تابعی از u بر برد G تعریف شود و دارای مشتق پیوستهٔ F' باشد. آن‌گاه

$$\int F'\{G(x)\}G'(x)dx = F\{G(x)\} + C \qquad (۱۲.۶)$$

برهان. احکام مورد ادعا مستقیماً از تعریف و قواعد مشتقگیری نتیجه می‌شوند. به عنوان مثال، توجه کنید که انتگرالده در (۱۱.۶) مساوی $(FG)'$ بوده و $FG' + GF'$ پیوسته است. به طور مشابه، در (۱۲.۶)، انتگرالده پیوسته و مساوی مشتق $F\{G(x)\}$ است.

ملاحظات. ملاحظه کنید که $\int F'(x)dx = F + C$، ولی $[\int F(x)dx]' = F$.

به وضوح، (۱۱.۶) را می‌توانیم به صورت

$$\int F(x)G'(x)dx = FG - \int G(x)F'(x)dx \qquad (۱۳.۶)$$

بازنویسی کنیم که به فرمول انتگرالگیری جزءبه‌جزء مشهور است. اعمال مکرر (۱۳.۶) به نتیجهٔ زیر می‌انجامد: اگر $F^{(n+1)}$ و $G^{(n+1)}$ پیوسته باشند، آن‌گاه

$$\int F(x)G^{(n+1)}(x)dx = FG^{(n)} - F'G^{(n-1)} + \dots$$
$$+ (-1)^n F^{(n)}G + (-1)^{n+1}\int F^{(n+1)}(x)G(x)dx \quad (14.6)$$

که فرمول تعمیم یافتهٔ انتگرالگیری جزءبه‌جزء نامیده شده است.

در (۱۲.۶)، اگر قرار دهیم $u = G(x)$، آن‌گاه

$$\int F'\{G(x)\}G'(x)dx = \int F'(u)du = F(u) + C = F\{G(x)\} + C \quad (15.6)$$

وقتی این فرایند را به کار می‌بریم، گفته می‌شود که از انتگرالگیری به روش جایگزینی استفاده شده است.

۲.۶ بعضی از روشهای انتگرالگیری

قسمت عمدهٔ هنر انتگرالگیری اساساً در استفادهٔ مکرر از قواعد مذکور در قضیهٔ ۲.۶ و چند پادمشتق اساسی نهاده شده است. بحث را با فهرستی از چند فرمول مفید انتگرالگیری آغاز می‌کنیم.

۱) $\int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \neq -1$

۲) $\int \frac{1}{x} dx = \ln|x| + C$

۳) $\int e^x dx = e^x + C$

۴) $\int a^x dx = \frac{a^x}{\ln a} + C, \quad (a \neq 1, a > 0)$

۵) $\int (\sin x)dx = -\cos x + C$

۶) $\int (\cos x)dx = \sin x + C$

۷) $\int (\sec^2 x)dx = \tan x + C$

۸) $\int (\csc^2 x)dx = -\cot x + C$

۹) $\int (\sec x)(\tan x)dx = \sec x + C$

۱۰) $\int (\csc x)(\cot x)dx = -\csc x + C$

۱۱) $\int(\tan x)dx = \ln|\sec x| + C$

۱۲) $\int(\cot x)dx = \ln|\sin x| + C$

۱۳) $\int(\sec x)dx = \ln|\sec x + \tan x| + C$

۱۴) $\int(\csc x)dx = \ln|\csc x - \cot x| + C$

۱۵) $\int(\sinh x)dx = \cosh x + C$

۱۶) $\int(\cosh x)dx = \sinh x + C$

۱۷) $\int(\operatorname{sech}^2 x)dx = \tanh x + C$

۱۸) $\int(\operatorname{csch}^2 x)dx = -\coth x + C$

۱۹) $\int(\operatorname{sech} x)(\tanh x)dx = -\operatorname{sech} x + C$

۲۰) $\int(\operatorname{csch} x)(\coth x)dx = -\operatorname{csch} x + C$

۲۱) $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C$

۲۲) $\int \frac{1}{(a^2-x^2)^{1/2}}dx = \sin^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad (|x| < a, a > 0)$

۲۳) $\int \frac{1}{x(x^2-a^2)^{1/2}}dx = \sec^{-1}\left|\frac{x}{a}\right| + C, \quad (|x| > |a|, a \neq 0)$

۲۴) $\int \frac{1}{(a^2+x^2)^{1/2}}dx = \sinh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad a > 0$

۲۵) $\int \frac{1}{(x^2-a^2)^{1/2}}dx = \cosh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad x > a > 0$

۲۶)

$$\int \frac{1}{a^2-x^2}dx = \frac{1}{a}\tanh^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad |x| < a$$
$$= \frac{1}{a}\coth^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) + C, \quad |x| > a > 0$$

۲۷) $\int \frac{1}{x(a^2-x^2)^{1/2}}dx = -\frac{1}{a}\operatorname{sech}^{-1}\frac{|x|}{a} + C, \quad 0 < |x| < a$

۲۸) $\int \frac{1}{x(a^2+x^2)^{1/2}}dx = -\frac{1}{a}\operatorname{csch}^{-1}\frac{|x|}{a} + C, \quad (a > 0, x \neq 0)$

این فرمولهای انتگرالگیری نتایج بدیهی فرمولهای مشتقگیری متناظر خود هستند که در بخش ۳ از فصل ۳ بیان شدند. فقط فرمولهای ۱۳ و ۱۴ نخست با توجه به روابط مصنوعی

$$\csc x = (\csc x)\frac{\csc x - \cot x}{\csc x - \cot x}, \qquad \sec x = (\sec x)\frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x}$$

و سپس با استفاده از رابطهٔ

$$\int \frac{f'(t)}{f(t)}dt = \ln|f(t)| + C \qquad (۱۶.۶)$$

به دست می‌آیند. رابطهٔ (۱۶.۶) از فرمول ۲ با جایگزینی $f(t) = x$ نتیجه می‌شود؛ احکام (۸.۳) و (۹.۳) فصل سوم را نیز ملاحظه کنید. البته، فرمولهای ۱۱ و ۱۲ هم از طریق رابطهٔ (۱۶.۶) حاصل می‌شوند.

انتگرالگیری از توابع مثلثاتی غالباً متضمن استفادهٔ قابل ملاحظه‌ای از اتحادهای مثلثاتی است. به عنوان مثال، برای اثبات

$$\int \frac{\sin nx}{\sin x}dx = ۲\sum_{k=۱}^{n} \frac{\sin(۲k-۱)}{۲k-۱} + C, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots \qquad (۱۷.۶)$$

لازم است توجه کنیم که

$$\sin ۲nx = \sum_{k=۱}^{n}[\sin ۲kx - \sin(۲k-۲)x] = ۲(\sin x)\sum_{k=۱}^{n}\cos(۲k-۱)x$$

و این، به وضوح، متضمن اتحاد مثلثاتی

$$\sin A - \sin B = ۲\cos\frac{A+B}{۲}.\sin\frac{A-B}{۲}$$

است. به طور مشابه، خواهیم داشت:

$$\int \frac{\sin(۲n+۱)x}{\sin x}dx = x + ۲\sum_{k=۱}^{n}\frac{\sin ۲kx}{۲k} + C \qquad (۱۸.۶)$$

انتگرالهای به صورت

$$\int (\sin^m x)(\cos^n x)dx \qquad (۱۹.۶)$$

که در آن m و n نماهای ثابتی هستند، به آسانی قابل محاسبه‌اند در صورتی که حداقل یکی از نماهای m و n عدد صحیح فرد و مثبتی باشد. در این حالت، با استفاده از اتحاد

$$\sin^۲ x + \cos^۲ x = ۱$$

انتگرالده را به صورت $F(\sin x)\cos x$ یا $F(\cos x)\sin x$ بازنویسی می‌کنیم. در حالت اوّل، جایگزینی $u = \cos x$ مؤثر واقع می‌شود و، در حالت دوّم، جایگزینی $u = \sin x$. به عنوان مثال، با جایگزینی $u = \cos x$،

$$\int \frac{\sin^۳ x}{(\cos x)^{۱/۲}}dx = \int \frac{۱-\cos^۲ x}{(\cos x)^{۱/۲}}(\sin x)dx = -\int \frac{۱-u^۲}{u^{۱/۲}}du$$

امّا

$$-\int \frac{۱-u^۲}{u^{۱/۲}}du = \int (u^{۳/۲} - u^{-۱/۲})du = \tfrac{۲}{۵}u^{۵/۲} - ۲u^{۱/۲} + C$$
$$= \tfrac{۲}{۵}(\cos x)^{۵/۲} - ۲(\cos x)^{۱/۲} + C$$

انتگرالهای به صورت (۱۹.۶) در حالتی که هر دوی n, m اعداد صحیح نامنفی زوج باشند نیز به آسانی قابل محاسبه‌اند. در این حالت، از اتحادهای

$$\cos^۲ x = \frac{۱}{۲}(۱ + \cos ۲x), \qquad \sin^۲ x = \frac{۱}{۲}(۱ - \cos ۲x)$$

که از فرمولهای قوس دوگانهٔ

$$\cos ۲x = ۱ - ۲\sin^۲ x = ۲\cos^۲ x - ۱$$

نتیجه می‌شوند، استفاده می‌کنیم. به عنوان مثال،

$$\int (\cos^۲ mx)dx = \frac{۱}{۲}x + \frac{۱}{۴m}(\sin ۲mx) + C, \qquad m \neq ۰ \qquad (۲۰.۶)$$

و

$$\int (\sin^۲ mx)dx = \frac{۱}{۲}x - \frac{۱}{۴m}(\sin ۲mx) + C, \qquad m \neq ۰ \qquad (۲۱.۶)$$

استفاده از اتحادهای مثلثاتی

$$(\sin mx)(\cos nx) = \tfrac{۱}{۲}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$
$$(\cos mx)(\cos nx) = \tfrac{۱}{۲}[\sin(m+n)x + \cos(m-n)x]$$

و

$$(\sin mx)(\sin nx) = \tfrac{۱}{۲}[\cos(m-n)x - \cos(m+n)x]$$

در حالتی که $m \pm n \neq ۰$، به نتایج زیر می‌انجامد.

$$\int (\sin mx)(\cos nx)dx = -\frac{۱}{۲(m+n)}\cos(m+n)x - \frac{۱}{۲(m-n)}\cos(m-n)x + C \qquad (۲۲.۶)$$

$$\int(\cos mx)(\cos nx)dx = \frac{۱}{۲(m+n)}\sin(m+n)x + \frac{۱}{۲(m-n)}\sin(m-n)x + C \quad (۲۳.۶)$$

و

$$\int(\sin mx)(\sin nx)dx = \frac{۱}{۲(m-n)}\sin(m-n)x - \frac{۱}{۲(m+n)}\sin(m+n)x + C \quad (۲۴.۶)$$

در انتگرالگیری از قوای صحیح و مثبت یا حاصل ضربهای قوای صحیح و مثبت tan، cot، sec، و csc، اتحادهای

$$۱+\cot^۲ s = \csc^۲ s, \qquad ۱+\tan^۲ s = \sec^۲ s$$

غالباً مفید واقع می‌شوند. به عنوان مثال،

$$\begin{aligned}\int(\tan^۴ x)dx &= \int \tan^۲ x(\sec^۲ x - ۱)dx \\ &= \int(\tan^۲ x)(\sec^۲ x)dx - \int \tan^۲ x dx \\ &= \int(\tan^۲ x)(\tan x)'dx - \int(\sec^۲ x - ۱)dx \\ &= \tfrac{۱}{۳}\tan^۳ x - \tan x + x + C\end{aligned}$$

معذالک، محاسبهٔ انتگرال $\int(\sec^۳ x)dx$ نشان می‌دهد که برای کسب موفقیت به‌ابزاری بیشتر از چند اتحاد مثلثاتی صرف نیازمندیم. با استفاده از انتگرالگیری جزءبه‌جزء [با انتخاب $F(x) = \sec x$ و $G(x) = \tan x$ در (۳.۶)] داریم:

$$\begin{aligned}\int(\sec^۳ x)dx &= (\sec x)(\tan x) - \int(\sec x)(\tan^۲ x)dx \\ &= (\sec x)(\tan x) - \int(\sec^۳ x)dx + \int(\sec x)dx\end{aligned}$$

حال، با حل این معادله برحسب $\int(\sec^۳ x)dx$، خواهیم داشت:

$$\int(\sec^۳ x)dx = \frac{۱}{۲}(\sec x)(\tan x) + \frac{۱}{۲}\ln|\sec x + \tan x| + C \quad (۲۵.۶)$$

انتگرالگیری جزءبه‌جزء در محاسبهٔ انتگرالهایی چون

$$\int(\sin mx)(\cos nx)dx$$

، که در (۲۲.۶) ظاهر شد، نیز می‌تواند مورد استفاده قرار گیرد در صورتی که اتحاد مثلثاتی مناسب

$$(\sin mx)(\cos nx) = \frac{1}{2}[\sin(m+n)x + \sin(m-n)x]$$

را به خاطر نداشته باشیم. فرمول تعمیم یافتهٔ انتگرالگیری جزءبه‌جزء (۱۴.۶)

$$\int F(x)G''(x)dx = F(x)G'(x) - F'(x)G(x) + \int F''(x)G(x)dx$$

با $F(x) = \sin mx$ و $G(x) = -(\cos nx)/n^2$، به معادله‌ای می‌انجامد که برحسب $\int (\sin mx)(\cos nx)dx$ قابل حل است. ملاحظات مشابهی در مورد انتگرالهای (۲۳.۶) و (۲۴.۶) به چشم می‌خورند.

فرمول تعمیم یافتهٔ انتگرالگیری جزءبه‌جزء (۱۴.۶) در مورد انتگرالهایی چون

$$\int P(x)e^{ax}dx \text{ ، } \int P(x)(\sin bx)dx \text{ ، و } \int P(x)(\cos bx)dx$$

که در آنها P یک چندجمله‌ای است، مخصوصاً مؤثر واقع می‌شود. با انتخاب

$$F(x) = P(x) \quad \text{و} \quad G^{(n+1)}(x) = e^{ax}$$

در (۱۴.۶)، ملاحظه می‌کنیم که

$$\int P(x)e^{ax}dx = e^{ax}\left(\frac{P(x)}{a} - \frac{P'(x)}{a^2} + \frac{P''(x)}{a^3} - \dots\right) + C \qquad (۲۶.۶)$$

انتخاب

$$F(x) = P(x) \quad \text{و} \quad G^{(n+1)}(x) = \sin bx$$

در (۱۴.۶) به نتیجهٔ

$$\int P(x)(\sin bx)dx = (\sin bx)\left(\frac{P'(x)}{b^2} - \frac{P'''(x)}{b^4} + \dots\right) - (\cos bx)\left(\frac{P(x)}{b} - \frac{P''(x)}{b^3} + \dots\right) + C \qquad (۲۷.۶)$$

می‌انجامد. به طریق مشابه، درمی‌یابیم که

$$\int P(x)(\cos bx)dx = (\sin bx)\left(\frac{P(x)}{b} - \frac{P''(x)}{b^3} + \dots\right)$$

$$+ (\cos bx)\left(\frac{P'(x)}{b^۲} - \frac{P'''(x)}{b^۴} + \dots\right) + C \quad (۲۸.۶)$$

با استفاده از فرمول انتگرالگیری جزءبه‌جزء (۱۳.۶) به آسانی می‌توان دید که

$$\int e^{ax}(\cos bx)dx = \frac{۱}{a}e^{ax}(\cos bx) + \frac{b}{a}\int e^{ax}(\sin bx)dx \qquad (۲۹.۶)$$

و

$$\int e^{ax}(\sin bx)dx = \frac{۱}{a}e^{ax}(\sin bx) - \frac{b}{a}\int e^{ax}(\cos bx)dx \qquad (۳۰.۶)$$

اگر انتگرال سمت راست (۲۹.۶) را با آنچه از (۳۰.۶) در مورد این انتگرال به دست می‌آید تعویض کنیم، خواهیم داشت:

$$\int e^{ax}(\cos bx)dx = \frac{b\sin bx + a\cos bx}{a^۲ + b^۲}e^{ax} + C \qquad (۳۱.۶)$$

به طریق مشابه، درمی‌یابیم که

$$\int e^{ax}(\sin bx)dx = \frac{a\sin bx - b\cos bx}{a^۲ + b^۲}e^{ax} + C \qquad (۳۲.۶)$$

کاربرد دیگری از فرمول انتگرالگیری جزءبه‌جزء (۱۳.۶) بسط بعضی فرمولهای بازگشتی است. فرض کنید

$$J_n = \int \frac{۱}{(x^۲ + a^۲)^n}dx, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \dots \qquad (۳۳.۶)$$

با انتخاب

$$G(x) = x, \qquad F(x) = \frac{۱}{(x^۲ + a^۲)^n}$$

در (۱۳.۶)، متوجه می‌شویم که

$$J_n = \frac{x}{(x^۲ + a^۲)^n} + ۲n\int \frac{x^۲}{(x^۲ + a^۲)^{n+۱}}dx$$

امّا،

$$\int \frac{x^۲}{(x^۲ + a^۲)^{n+۱}}dx = \int \frac{(x^۲ + a^۲) - a^۲}{(x^۲ + a^۲)^{n+۱}}dx = J_n - a^۲ J_{n+۱}$$

بنابراین،

$$J_n = \frac{x}{(x^۲ + a^۲)^n} + ۲nJ_n - ۲na^۲ J_{n+۱}$$

یا

$$J_{n+1} = \frac{1}{2na^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^n} + \frac{2n-1}{2n}\frac{1}{a^2}J_n \tag{۳۴.۶}$$

چون

$$J_1 = \frac{1}{a}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{۳۵.۶}$$

خواهیم داشت:

$$J_2 = \frac{1}{2a^2}\frac{x}{x^2+a^2} + \frac{1}{2a^3}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{۳۶.۶}$$

$$J_3 = \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{4a^2}J_2 = \frac{1}{4a^2}\frac{x}{(x^2+a^2)^2} + \frac{3}{8a^5}\tan^{-1}\left(\frac{x}{a}\right) \tag{۳۷.۶}$$

وهکذا. در (۳۵.۶)، (۳۶.۶)، و (۳۷.۶) ثابتهای انتگرالگیری عمداً حذف شده است.

طریق دیگر محاسبهٔ انتگرالهای

$$J_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots \tag{۳۸.۶}$$

جایگزینی مثلثاتی $x = a\tan t$ است. خواهیم داشت:

$$J_n = \int \frac{1}{(x^2+a^2)^n}dx = \int \frac{a\sec^2 t}{(a^2\sec^2 t)^n}dt = \frac{1}{a^{2n-1}}\int(\cos^{2n-2} t)dt$$

به عنوان مثال،

$$J_1 = \frac{1}{a}\int dt = \frac{1}{a}t + C \tag{۳۹.۶}$$

و

$$\begin{aligned} J_2 &= \frac{1}{a^3}\int(\cos^2 t)dt = \frac{1}{a^3}\frac{1}{2}\int(1+\cos 2t)\,dt = \frac{1}{2a^3}\left(t+\tfrac{1}{2}\sin 2t\right)+C \\ &= \frac{1}{2a^3}[t+(\sin t)(\cos t)]+C \end{aligned} \tag{۴۰.۶}$$

امّا $\tan t = x/a$. بنابراین، $t = \tan^{-1}(x/a)$، $\sin t = x/(x^2+a^2)^{1/2}$، و $\cos t = a/(x^2+a^2)^{1/2}$. (شکل ۲.۶ را ببینید.) این نشان می‌دهد که وقتی ثابت انتگرالگیری را حذف کنیم، J_1 و J_2 مطابق (۳۵.۶) و (۳۶.۶) به دست می‌آیند.

ملاحظات. با استفاده از اتحادهای مثلثاتی

$$\text{۱} - \sin^{\text{۲}} t = \cos^{\text{۲}} t \text{،} \quad \text{۱} + \tan^{\text{۲}} t = \sec^{\text{۲}} t \text{،} \quad \text{و} \quad \sec^{\text{۲}} t - \text{۱} = \tan^{\text{۲}} t$$

جانشینهایی می‌یابیم که ما را قادر می‌سازند که از عباراتی شامل

$$(a^{\text{۲}} - x^{\text{۲}})^{\text{۱/۲}} \text{،} \quad (a^{\text{۲}} + x^{\text{۲}})^{\text{۱/۲}} \text{،} \quad \text{و} \quad (x^{\text{۲}} - a^{\text{۲}})^{\text{۱/۲}}$$

انتگرال بگیریم. اگر $(a^{\text{۲}} - x^{\text{۲}})^{\text{۱/۲}}$ ظاهر شود، $x = a\sin t$ را جایگزین می‌کنیم؛ اگر $(a^{\text{۲}} + x^{\text{۲}})^{\text{۱/۲}}$ ظاهر شود، $x = a\tan t$ را جایگزین می‌کنیم؛ اگر $(x^{\text{۲}} - a^{\text{۲}})^{\text{۱/۲}}$ ظاهر شود، $x = a\sec t$ را جایگزین می‌کنیم. پس از این که انتگرالگیری برحسب متغیر t انجام شد، از طریق مراجعه به مثلث قائم‌الزاویهٔ مناسبی در اشکال ۱.۶، ۲.۶، یا ۳.۶ می‌توان جواب مطلوب را برحسب متغیر اصلی x نوشت.

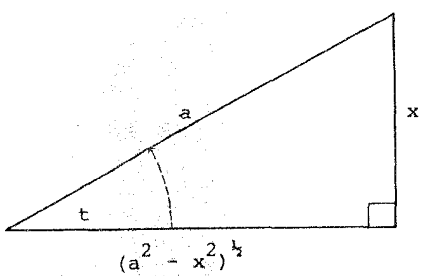
گاهی بسیار مناسب است که از عبارات شامل قوای صحیح $a^{\text{۲}} - x^{\text{۲}}$، $a^{\text{۲}} + x^{\text{۲}}$، یا $x^{\text{۲}} - a^{\text{۲}}$ به کمک این جانشینهای مثلثاتی انتگرال گرفته شود؛ روابط (۳۴.۶) و (۳۵.۶) این وضعیت را روشن می‌کنند.

با ذکر چند مثال به این بحث خاتمه می‌دهیم.

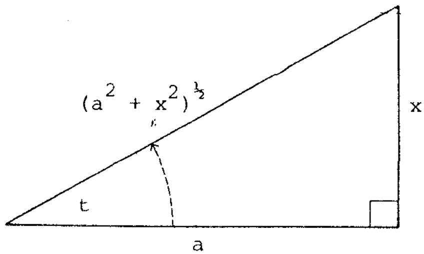
۱) برای تعیین $\int (a^{\text{۲}} - x^{\text{۲}})^{\text{۱/۲}} dx$، که در آن $|x| \leq a$ و $a > \text{۰}$، قرار می‌دهیم $x = a\sin t$. آن‌گاه

$$\begin{aligned}
\int (a^{\text{۲}} - x^{\text{۲}})^{\text{۱/۲}} dx &= a^{\text{۲}} \int (\cos^{\text{۲}} t) dt = \frac{\text{۱}}{\text{۲}} a^{\text{۲}} \int (\text{۱} + \cos \text{۲}t) dt \\
&= \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}} a^{\text{۲}} (t + \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}} \sin \text{۲}t) + C = \tfrac{\text{۱}}{\text{۲}} a^{\text{۲}} [t + (\sin t)(\cos t)] + C \\
&= \frac{\text{۱}}{\text{۲}} a^{\text{۲}} \left(\sin^{-\text{۱}} \left(\frac{x}{a} \right) + \frac{x}{a} \frac{(a^{\text{۲}} - x^{\text{۲}})^{\text{۱/۲}}}{a} \right) + C
\end{aligned}$$

در آخرین مرحله، به عنوان راهنمایی، از شکل ۱.۶ استفاده شده است.



شکل ۱.۶ جایگزینی: $x = a\sin t$



شکل ۲.۶ جایگزینی: $x = a\tan t$

۲) برای تعیین $\int(a^2+x^2)^{-1/2}dx$، که در آن $a > 0$، قرار می‌دهیم $x = a\tan t$. آن‌گاه

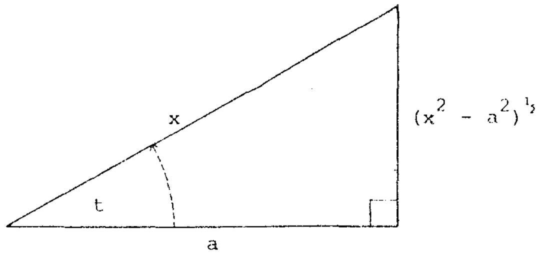
$$\begin{aligned}\int(a^2+x^2)^{-1/2}dx &= \int(\sec t)dt = \ln|\sec t+\tan t|+C\\ &= \ln\left|\frac{(a^2+x^2)^{1/2}}{a}+\frac{x}{a}\right|+C = \ln|(a^2+x^2)^{1/2}+x|+C_1\end{aligned}$$

در تبدیل مجدد متغیر t به متغیر اصلی x، از شکل ۲.۶ استفاده شده است. در آغاز این بخش (فرمول ۲۴)، انتگرال مورد بحث برحسب معکوس تابع سینوس هذلولوی محاسبه شد.

۳) برای تعیین $\int(x^2-a^2)^{-1/2}dx$، که در آن $x > a > 0$، قرار می‌دهیم $x = a\sec t$. آن‌گاه

$$\begin{aligned}\int(a^2-x^2)^{-1/2}dx &= \int(\sec t)dt = \ln|\sec t+\tan t|+C\\ &= \ln\left|\frac{x}{a}+\frac{(x^2-a^2)^{1/2}}{a}\right|+C = \ln|x+(x^2-a^2)^{1/2}|+C_1\end{aligned}$$

در تبدیل مجدد متغیر t به متغیر اصلی x، از شکل ۳.۶ استفاده شده است. در آغاز این بخش (فرمول ۲۵)، انتگرال مورد بحث برحسب معکوس تابع کسینوس هذلولوی محاسبه شده است.



شکل ۳.۶ جایگزینی: $x = a\sec t$

۳.۶ انتگرالگیری از توابع گویا

تعریف. تابع f را گویا می‌نامند در صورتی که قابل نمایش به صورت

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} \tag{۴۱.۶}$$

باشد که در آن P و Q چندجمله‌ایهایی چون

$$P(x) = a_m x^m + a_{m-1}x^{m-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

و

$$Q(x) = b_n x^n + b_{n-1}x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

با ضرایب حقیقی $a_0, a_1, \ldots, a_m$ و $b_1, \ldots, b_n$ هستند. همچنین، فرض می‌کنیم که P و Q هیچ ریشهٔ مشترکی ندارند یا، به عبارت دیگر، کسر گویای P/Q به صورت «کانونی» است. اگر درجهٔ صورت P کمتر از درجهٔ مخرج Q باشد، کسر P/Q را سره می‌نامند؛ در غیر این صورت، ناسره نامیده می‌شود.

ملاحظات. اگر کسر گویای (۴۱.۶) ناسره باشد، آن‌گاه با تقسیم چندجمله‌ایها می‌توانیم P/Q را به صورت

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = S(x) + \frac{R(x)}{Q(x)}$$

نمایش دهیم که در آن S (خارج‌قسمت) و R (باقیمانده) نیز چندجمله‌ای هستند، ولی درجهٔ R کمتر از درجهٔ مقسوم‌علیه Q است؛ یعنی، R/Q سره است. از این رو، هر کسر گویای ناسره را می‌توان به صورت حاصل‌جمع یک چندجمله‌ای و یک کسره سره نمایش داد. چون می‌توانیم از چندجمله‌ایها انتگرال بگیریم، انتگرالگیری از کسرهای گویای ناسره به انتگرالگیری از کسرهای سره باز می‌گردد. بنابراین، می‌توانیم فقط حالتی را مورد بحث قرار دهیم که در آن f یک کسر گویای سره است.

همهٔ روشهای کلی انتگرالگیری از توابع گویا مبتنی است بر نمایش آنها به صورت ویژه‌ای مناسب انتگرالگیری. در این روشها، ریشه‌های مخرج Q نقش مهمی ایفا می‌کنند. اگر α یک ریشهٔ حقیقی یا مختلط چندجمله‌ای Q باشد، آن‌گاه Q بر دوجمله‌ای $x - \alpha$ بدون باقیمانده تقسیم می‌شود، یعنی،

$$Q(x) = (x - \alpha)Q^*(x)$$

که در آن Q^* نیز یک چندجمله‌ای است؛ اگر $Q^*(\alpha) = ۰$، داریم

$$Q(x) = (x - \alpha)^۲ Q^{**}(x)$$

و هکذا. اگر

$$Q(x) = (x - \alpha)^k Q_۱(x) \qquad (۴۲.۶)$$

که در آن $k \geq ۱$ و $Q_۱(\alpha) \neq ۰$ (یعنی، α ریشهٔ چندجمله‌ای $Q_۱$ نیست)، می‌گوییم که α ریشهٔ چندجمله‌ای Q با مرتبهٔ تکرار k است.

لم ۱. اگر α یک ریشهٔ حقیقی چندجمله‌ای Q با مرتبهٔ تکرار $k > ۰$ باشد، متحداً داریم

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_k}{(x - \alpha)^k} + \frac{P_۱(x)}{(x - \alpha)^{k-۱} Q_۱(x)} \qquad (۴۳.۶)$$

که در آن A_k یک ثابت و $P_۱$ یک چندجمله‌ای است.

برهان. نخست توجه می‌کنیم که، در چنین حالتی، چندجمله‌ای $Q_۱$ با معادلهٔ (۴۲.۶) تعریف می‌شود [به طوری که $Q_۱(\alpha) \neq ۰$]، عدد A_k حقیقی است، همهٔ چندجمله‌ایها ضرایب حقیقی دارند، و کسر P/Q در (۴۳.۶) می‌تواند سره یا ناسره باشد.

به برهان برمی‌گردیم. اتحاد (۴۳.۶) معادل اتحاد

$$P(x) - A_k Q_۱(x) = (x - \alpha)P_۱(x) \qquad (۴۴.۶)$$

است که از ضرب طرفین در $Q(x)$ به دست می‌آید؛ اتحاد (۴۴.۶) ایجاب می‌کند که چندجمله‌ای $P - A_kQ_1$ بر دوجمله‌ای $x - \alpha$ بخش‌پذیر باشد. امّا، برای تحقق این امر، لازم و کافی است که

$$P(\alpha) - A_kQ_1(\alpha) = 0 \qquad (۴۵.۶)$$

بنابراین، اگر فرض کنیم که

$$A_k = \frac{P(\alpha)}{Q_1(\alpha)}$$

[یادآوری می‌کنیم که $Q_1(\alpha) \neq 0$]، آن‌گاه معادلهٔ (۴۵.۶) برقرار و چندجمله‌ای $P - A_kQ_1$ بر دوجمله‌ای $x - \alpha$ بخش‌پذیر خواهد بود، یعنی، اتحاد (۴۴.۶) و، از این رو، اتحاد (۴۳.۶) را نیز خواهیم داشت.

ملاحظات. اگر $k \geq 2$، آن‌گاه کسر گویای

$$\frac{P_1(x)}{(x-\alpha)^{k-1}Q_1(x)}$$

به همان صورت کسر اصلی P/Q است؛ با اعمال لم ۱ در مورد این کسر، درمی‌یابیم که

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \frac{P_2(x)}{(x-\alpha)^{k-2}Q_1(x)}$$

اگر $k \geq 3$، این فرایند را می‌توانیم تا آنجا که مخرج آخرین کسر طرف دوّم هنوز شامل دوجمله‌ای $x - \alpha$ با یک توان مثبت دلخواه است، ادامه دهیم. از این رو، سرانجام، خواهیم داشت:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{A_k}{(x-\alpha)^k} + \frac{A_{k-1}}{(x-\alpha)^{k-1}} + \cdots + \frac{A_1}{x-\alpha} + \frac{P^*(x)}{Q_1(x)} \qquad (۴۶.۶)$$

که در آن A_1، ...، A_k اعدادی حقیقی هستند و P^* یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی است.

در همهٔ این بررسیها فرض بر این بوده است که α حقیقی است. اگر عدد مختلط $\alpha = \beta + i\gamma$، $\gamma \neq 0$، یک ریشهٔ چندجمله‌ای Q (با ضرایب حقیقی) با مرتبهٔ تکرار k باشد، آن‌گاه عدد مختلط مزدوج $\bar{\alpha} = \beta - i\gamma$ نیز یک ریشهٔ این چندجمله‌ای با همان مرتبهٔ تکرار k خواهد بود. در این حالت، چندجمله‌ای Q بر $(x-\alpha)^k$ و $(x-\bar{\alpha})^k$ بخش‌پذیر است و، از این رو، بر حاصل ضرب آنها نیز بخش‌پذیر است. بنابراین، چون $(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = (x-\beta)^2 + \gamma^2$، درمی‌یابیم که

$$Q(x) = [(x-\beta)^2 + \gamma^2]^kQ_1(x) \qquad (۴۷.۶)$$

که در آن $Q_1(\alpha) \neq 0$ و $Q_1(\bar{\alpha}) \neq 0$. [اعداد β و γ و ضرایب چندجمله‌ای Q_1، بالبداهه، حقیقی هستند.]

لم ۲. اگر عدد مختلط $\alpha = \beta + i\gamma$، $\gamma \neq ۰$، یک ریشهٔ چندجمله‌ای Q با مرتبهٔ تکرار k باشد، آن‌گاه متحداً

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_k x + C_k}{[(x-\beta)^۲ + \gamma^۲]^k} + \frac{P_۱(x)}{[(x-\beta)^۲ + \gamma^۲]^{k-۱} Q_۱(x)} \qquad (۴۸.۶)$$

که در آن B_k و C_k اعداد ثابتی هستند و $P_۱$ یک چندجمله‌ای است.

برهان. در این جا، چندجمله‌ای $Q_۱$ با معادلهٔ (۴۷.۶) تعریف می‌شود، اعداد B_k، C_k، و ضرایب چندجمله‌ای $P_۱$ اعدادی حقیقی هستند، و کسر P/Q سمت چپ (۴۸.۶) می‌تواند سره یا ناسره باشد.

با بازگشت به برهان، فرض می‌کنیم

$$(x-\alpha)(x-\bar{\alpha}) = (x-\beta)^۲ + \gamma^۲ = q(x)$$

اتحاد (۴۸.۶) معادل اتحاد

$$P(x) - (B_k x + C_k) Q_۱(x) = q(x) P_۱(x) \qquad (۴۹.۶)$$

است که چون چندجمله‌ای $P_۱$ نقداً نامعین است، به نوبهٔ خود، معادل است با این شرط که چندجمله‌ای سمت چپ (۴۹.۶) بر q بخش‌پذیر است، یعنی، بر $x-\alpha$ و $x-\bar{\alpha}$. امّا، برای این که چنین باشد لازم‌و کافی است که

$$P(\alpha) - (B_k\alpha + C_k)Q_۱(\alpha) = P(\bar{\alpha}) - (B_k\bar{\alpha} + C_k)Q_۱(\bar{\alpha}) = ۰$$

یا

$$B_k\bar{\alpha} + C_k = \frac{P(\bar{\alpha})}{Q_۱(\bar{\alpha})} \quad \text{و} \quad B_k\alpha + C_k = \frac{P(\alpha)}{Q_۱(\alpha)}$$

به این ترتیب، برای محاسبهٔ مجهولات B_k و C_k، دستگاهی از دو معادلهٔ درجهٔ اول با دترمینان

$$\alpha - \bar{\alpha} = ۲i\gamma \neq ۰$$

داریم و، بنابراین، می‌توانیم این اعداد را به طور منحصربه‌فرد تعیین کنیم. در این حالت، می‌توان دید که عباراتی که برای B_k و C_k به دست می‌آیند متقارناً به α و $\bar{\alpha}$ بستگی دارند و، بنابراین، حقیقی هستند. وقتی B_k و C_k به این ترتیب تعیین شده باشند، به آسانی می‌توانیم $P_۱$ را از (۴۹.۶) بیابیم.

ملاحظات. اگر $k > 1$ آن‌گاه، مانند حالت ریشهٔ حقیقی، آخرین کسر سمت راست (۴۸.۶) به همان صورت کسر اصلی سمت چپ است. بنابراین، می‌توانیم همان لم ۲ را اعمال کنیم. مانند گذشته، با ادامهٔ این فرایند درمی‌یابیم که اگر چندجمله‌ای Q ریشهٔ مختلطی مانند $\alpha = \beta + i\gamma$، $\gamma \neq 0$، با مرتبهٔ تکرار k داشته باشد و چندجمله‌ای Q_1 با اتحاد (۴۷.۶) تعریف شود، اتحاد زیر برقرار است:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{B_k x + C_k}{\{q(x)\}^k} + \frac{B_{k-1}x + C_{k-1}}{\{q(x)\}^{k-1}} + \cdots + \frac{B_1 x + C_1}{q(x)} + \frac{P^*(x)}{Q_1(x)} \tag{۵۰.۶}$$

که در آن $q(x) = (x-\beta)^2 + \gamma^2$، B_1، B_2، ...، B_k، C_1، C_2، ...، C_k اعدادی حقیقی هستند و P^* یک چندجمله‌ای با ضرایب حقیقی است.

ملاحظات دیگر. در بحث از اتحادهای (۴۶.۶) و (۵۰.۶) توجه می‌کنیم که اگر P/Q یک کسر سره باشد، آن‌گاه P^*/Q_1 نیز چنین است. در واقع، اگر فرض کنیم که متغیر x به طور نامعین صعود کند، همهٔ جمل، جز احتمالاً $P^*(x)/Q_1(x)$، به صفر میل می‌کنند؛ از این اتحاد نتیجه می‌شود که $P^*(x)/Q_1(x)$ نیز باید به صفر میل کند و این فقط وقتی میسر است که P^*/Q_1 یک کسر گویای سره باشد.

تعریف. یک تابع گویای مفروض را کسر جزئی می‌نامند هرگاه به یکی از دو صورت

$$\frac{A}{(x-\alpha)^u}$$

یا

$$\frac{Bx + C}{[(x-\beta)^2 + \gamma^2]^v}$$

باشد که در آن A، B، C، α، β، و γ اعداد حقیقی ثابتی را نشان می‌دهند و u و v اعداد صحیح مثبتی هستند.

بحث. هدف ما این است که نشان بدهیم که هر تابع گویای سرهٔ P/Q را می‌توان به مجموع تعدادی متناهی کسر جزئی تبدیل کرد. بعداً ملاحظه خواهیم کرد که کسرهای جزئی برای انتگرالگیری بسیار مناسب می‌باشند.

فرض کنید که Q دارای ریشه‌های حقیقی α_1، α_2، ...، α_r و ریشه‌های مختلط $\beta_1 \pm i\gamma_1$، $\beta_2 \pm i\gamma_2$، ...، $\beta_s \pm i\gamma_s$ باشد. بعلاوه، فرض کنید که همهٔ این ریشه‌ها متمایز باشند و ریشهٔ حقیقی

α_m، که $1 \le m \le r$، دارای مرتبهٔ تکرار k_m باشد و زوج ریشهٔ مختلط $\beta_n \pm i\gamma_n$، که $1 \le n \le s$، دارای مرتبهٔ تکرار j_n باشد. آن‌گاه

$$Q(x) = b\prod_{m=1}^{r}(x-\alpha_m)^{k_m}\prod_{n=1}^{s}[(x-\beta_n)^2+\gamma_n^2]^{j_n}$$

که در آن $b \neq 0$ یک ثابت است.

با اعمال r مرتبه فرمول (۴۶.۶) (به‌ازای کل r ریشهٔ حقیقی α_m)، به اتحاد

$$\begin{aligned}\frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{k_1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{k_1}} + \frac{A_{k_1-1}^{(1)}}{(x-\alpha_1)^{k_1-1}} + \cdots + \frac{A_1^{(1)}}{x-\alpha_1}\\ &+ \frac{A_{k_2}^{(2)}}{(x-\alpha_2)^{k_2}} + \frac{A_{k_2-1}^{(2)}}{(x-\alpha_2)^{k_2-1}} + \cdots + \frac{A_1^{(2)}}{x-\alpha_2}\\ &+ \cdots\\ &+ \frac{A_{k_r}^{(r)}}{(x-\alpha_r)^{k_r}} + \frac{A_{k_r-1}^{(r)}}{(x-\alpha_r)^{k_r-1}} + \cdots + \frac{A_1^{(r)}}{x-\alpha_r} + \frac{P^*(x)}{Q^*(x)}\\ &= \sum_{m=1}^{r}\sum_{u=1}^{k_m}\frac{A_u^{(m)}}{(x-\alpha_m)^u} + \frac{P^*(x)}{Q^*(x)}\end{aligned}$$

می‌انجامد که در آن $A_u^{(m)}$ یک ثابت حقیقی است و P^*/Q^* یک کسر سره است زیرا P/Q سره است و

$$Q^*(x) = b\prod_{n=1}^{s}[(x-\beta_n)^2+\gamma_n^2]^{j_n}$$

با اعمال s مرتبه فرمول (۵۰.۶)، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\frac{P^*(x)}{Q^*(x)} &= \frac{B_{j_1}^{(1)}x + C_{j_1}^{(1)}}{[(x-\beta_1)^2+\gamma_1^2]^{j_1}} + \cdots + \frac{B_1^{(1)}x + C_1^{(1)}}{(x-\beta_1)^2+\gamma^2}\\ &+ \frac{B_{j_2}^{(2)}x + C_{j_2}^{(2)}}{[(x-\beta_2)^2+\gamma_2^2]^{j_2}} + \cdots + \frac{B_1^{(2)}x + C_1^{(2)}}{(x-\beta_2)^2+\gamma_2^2}\\ &+ \cdots\\ &+ \frac{B_{j_s}^{(s)}x + C_{j_s}^{(s)}}{[(x-\beta_s)^2+\gamma_s^2]^{j_s}} + \cdots + \frac{B_1^{(s)}x + C_1^{(s)}}{(x-\beta_s)^2+\gamma_s^2} + \frac{P^{**}(x)}{Q^{**}(x)}\\ &= \sum_{n=1}^{s}\sum_{v=1}^{j_n}\frac{B_v^{(n)}x + C_v^{(n)}}{[(x-\beta_n)^2+\gamma_n^2]^v} + \frac{P^{**}(x)}{Q^{**}(x)}\end{aligned}$$

که در آن $B_v^{(n)}$ و $C_v^{(n)}$ اعداد حقیقی ثابت هستند و $P^{**} = 0$. (زیرا از همهٔ ریشه‌های Q^* استفاده شده است و Q^{**} ریشهٔ دیگری ندارد؛ همچنین، چون P^*/Q^* یک کسر سره است، P^{**}/Q^{**} نیز چنین است.) به این ترتیب، بسط زیر به کسرهای جزئی را برای کسر سرهٔ اصلی P/Q داریم:

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \sum_{m=1}^{r}\sum_{u=1}^{k_m}\frac{A_u^{(m)}}{(x-\alpha_m)^u} + \sum_{n=1}^{s}\sum_{v=1}^{j_n}\frac{B_v^{(n)}x + C_v^{(n)}}{[(x-\beta_n)^2+\gamma_n^2]^v} \qquad (۵۱.۶)$$

این بحث نشان می‌دهد که هر کسر گویای سرهٔ مفروض را می‌توان به مجموع تعدادی متناهی کسرهای جزئی بسط داد؛ بعلاوه، این بسط منحصربه‌فرد است زیرا که در تمامی مراحل متوالی تعیین اعداد $A_u^{(m)}$، $B_v^{(n)}$، و $C_v^{(n)}$ دریافته‌ایم که اینها منحصربه‌فرد تعیین می‌شوند. این واقعیتها را در قضیهٔ زیر ثبت می‌کنیم.

قضیهٔ ۳.۶. هر کسر گویای سره را می‌توان به طور منحصربه‌فرد به صورت مجموع تعداد متناهی کسر جزئی نمایش داد.

توضیحات. روشی که برای تعیین ضرایب بسط (۵۱.۶) مورد بحث قرار گرفت، معمولاً ساده‌ترین روش عمل نیست. معمولاً، ساده‌تر و مؤثرتر این است که از روشی موسوم به روش ضرایب نامعین استفاده کنیم. در این روش، بسط (۵۱.۶) را با ضرایب نامعین $A_u^{(m)}$، $B_v^{(n)}$، و $C_v^{(n)}$ می‌نویسم و طرفین این رابطه را در $Q(x)$ ضرب می‌کنیم. در نتیجه، چندجمله‌ای مفروض P را در سمت چپ خواهیم داشت و، در سمت راست، چندجمله‌ای دیگری داریم که ضرایبش، بعد از مقایسه با جمل مشابه، بالبداهه شامل اعداد مجهول $A_u^{(m)}$، $B_v^{(n)}$، و $Cv^{(n)}$ می‌باشند و، چنان که به آسانی می‌توان دید، وابستهٔ خطی به این اعدادند.

چون معادلهٔ منتج باید یک اتحاد باشد، ضرایب قوای مشابه x در طرفهای راست و چپ باید برابر باشند. از مقایسهٔ دوبه‌دوی این ضرایب با یکدیگر، دستگاهی از معادلات خطی برحسب مجهولات $A_u^{(m)}$، $B_v^{(n)}$، و $C_v^{(n)}$ می‌یابیم که به کمک آن این اعداد تعیین می‌شوند. بعلاوه، می‌دانیم که این مسأله یک جواب منحصربه‌فرد دارد. به آسانی دیده می‌شود که تعداد معادلات دستگاه مساوی تعداد مجهولات است. در واقع، فرض کنید N درجهٔ چندجمله‌ای Q باشد. اگر دو طرف اتحاد (۵۱.۶) را در $Q(x)$ ضرب کنیم، به وضوح، یک چندجمله‌ای از درجهٔ $N-1$ در سمت راست به دست می‌آید؛ در سمت چپ، یک چندجمله‌ای خواهیم داشت که درجه‌اش از $N-1$ بیشتر نیست، زیرا که P/Q یک کسر گویای سره است. چون یک چندجمله‌ای از درجهٔ $N-1$ دارای N ضریب است، از مقایسهٔ ضرایب طرفهای راست و چپ دستگاهی از N معادله به دست می‌آید. از طرف دیگر، تعداد $A_u^{(m)}(1 \le m \le r, 1 \le u \le k_n)$ عبارت است از $\sum_{m=1}^{r} k_m$؛ به طور مشابه، تعداد $B_v^{(n)}$ عبارت است از $\sum_{n=1}^{s} j_n$ و همین تعداد $C_v^{(n)}$

داریم. از این رو، تعداد کل مجهولات برابر است با

$$\sum_{m=1}^{r} k_m + 2\sum_{n=1}^{s} j_n$$

امّا بسط

$$Q(x) = b\prod_{m=1}^{r}(x-\alpha_m)^{k_m}\prod_{n=1}^{s}[(x-\beta_n)^2+\gamma_n^2]^{j_n},$$ $b \neq 0$ ثابت است.

نشان می‌دهد که این تعداد دقیقاً مساوی درجهٔ N چندجمله‌ای Q است. از این رو، تعداد مجهولات، در واقع، مساوی تعداد معادلات خطی حاصل است.

مثال. برای تشریح روش ضرایب نامعین، تجزیهٔ

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2}$$

به کسرهای جزئی را بررسی می‌کنیم. قرار می‌دهیم:

$$\frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} = \frac{A}{x-2} + \frac{Bx+C}{x^2+1} + \frac{Dx+E}{(x^2+1)^2}$$

پس از حذف مخرجها، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
2x^2+2x+13 &= A(x^2+1)^2 + (Bx+C)(x^2+1)(x-2) + (Dx+E)(x-2)\\
&= (A+B)x^4 + (-2B+C)x^3 + (2A+B-2C+D)x^2\\
&\quad + (-2B+C-2D+E)x + (A-2C-2E)
\end{aligned}$$

از مقایسهٔ ضرایب قوای مشابه، دستگاه معادلات

$$\begin{array}{lllllll}
A & +B & & & & = 0\\
 & -2B & +C & & & = 0\\
2A & +B & -2C & +D & & = 2\\
 & -2B & +C & -2D & +E & = 2\\
A & & -2C & & -2E & = 13
\end{array}$$

به دست می‌آید. در

$$۲x^۲ + ۲x + ۱۳ = A(x^۲ + ۱)^۲ + (Bx + C)(x^۲ + ۱)(x - ۲) + (Dx + E)(x - ۲)$$

اگر قرار دهیم $x = ۲$، خواهیم داشت: $۲۵A = ۲۵$ یا $A = ۱$. از دستگاه معادلات درمی‌یابیم که $B = -۱$، $C = -۲$، $D = -۳$، و $E = -۴$. بنابراین،

$$\frac{۲x^۲ + ۲x + ۱۳}{(x-۲)(x^۲+۱)^۲} = \frac{۱}{x-۲} - \frac{x+۲}{x^۲+۱} - \frac{۳x+۴}{(x^۲+۱)^۲} \qquad (۵۲.۶)$$

بحث. اینک انتگرالگیری از کسرهای جزئی را بررسی می‌کنیم. یعنی، انتگرالگیری از کسرهای گویای سره به شکل

$$\frac{A}{(x-\alpha)^u} \quad \text{و} \quad \frac{Bx + C}{[(x-\beta)^۲ + \gamma^۲]^v}$$

که در آنها A، B، C، α، β، و γ اعداد حقیقی ثابتی هستند و u و v اعداد صحیح مثبت می‌باشند. داریم

$$\int \frac{A}{x-\alpha}dx = A\ln|x-\alpha| + K \qquad (۵۳.۶)$$

و

$$\int \frac{A}{(x-\alpha)^u}dx = \frac{-A}{(u-۱)(x-\alpha)^{u-۱}} + K, \qquad u = ۲, ۳, \ldots \text{ به‌ازای } \qquad (۵۴.۶)$$

جایگزینی $x = \beta + \gamma y$ به نتیجهٔ

$$\begin{aligned}
\int \frac{Bx + C}{(x-\beta)^۲ + \gamma^۲}dx &= \int \frac{B(\beta + \gamma y) + C}{\gamma^۲(۱ + y^۲)}\gamma dy \\
&= \frac{B}{۲}\int \frac{۲y}{۱ + y^۲}dy + \frac{B\beta + C}{\gamma}\int \frac{۱}{۱ + y^۲}dy \\
&= \frac{B}{۲}\ln(۱ + y^۲) + \frac{B\beta + C}{\gamma}\tan^{-۱} y + K \\
&= \frac{B}{۲}\ln\left(۱ + \left(\frac{x-\beta}{\gamma}\right)^۲\right) + \frac{B\beta + C}{\gamma}\tan^{-۱}\left(\frac{x-\beta}{\gamma}\right) + K
\end{aligned} \qquad (۵۵.۶)$$

می‌انجامد. به طور مشابه، به‌ازای $v = ۲, ۳, \ldots$، خواهیم داشت:

$$\int \frac{Bx + C}{[(x-\beta)^۲ + \gamma^۲]^v}dx = \int \frac{B(\beta + \gamma y) + C}{\gamma^{۲v}(۱ + y^۲)^v}\gamma dy$$

$$= \frac{B}{2\gamma^{2v-2}} \int \frac{2y}{(1+y^2)^v} dy + \frac{B\beta + C}{\gamma^{2v-1}} \int \frac{1}{(1+y^2)^v} dy \qquad (۵۶.۶)$$

امّا

$$\int \frac{2y}{(1+y^2)^v} dy = -\frac{1}{(v-1)(1+y^2)^{v-1}} + K \qquad (۵۷.۶)$$

و، اگر قرار دهیم

$$I_v = \int \frac{1}{(1+y^2)^v} dy \qquad (۵۸.۶)$$

به استناد (۳۴.۶)، خواهیم داشت:

$$I_{v+1} = \frac{2v-1}{2v} I_v + \frac{y}{2v(1+y^2)^v} \qquad (۵۹.۶)$$

از این رو، با دانستن I_1، می‌توانیم I_2، I_3، ... را پی‌درپی بیابیم. با انتخاب $y = (x-\beta)/\gamma$، به متغیر اصلی x برمی‌گردیم.

به طور خلاصه، ملاحظه می‌کنیم که توابعی که از انتگرالگیری از کسرهای جزئی (و، بنابراین، از انتگرالگیری از همهٔ توابع گویا) به دست می‌آیند، می‌توانند لگاریتمی، معکوس تانژانت، یا توابع گویا باشند.

مثال. به استناد (۵۲.۶)، داریم

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx = \int \frac{1}{x-2} dx - \int \frac{x+2}{x^2+1} dx - \int \frac{3x+4}{(x^2+1)^2} dx$$

و، بنابراین،

$$\int \frac{2x^2+2x+13}{(x-2)(x^2+1)^2} dx = \frac{1}{2}\frac{13-4x}{x^2+1} + \frac{1}{2}\ln\frac{(x-2)^2}{x^2+1} + 4\tan^{-1}x + K$$

بحث بیشتر. تاکنون دیده‌ایم که انتگرالگیری از توابع گویایی که در مورد آنها ریشه‌های مخرج معلوم است مشکل زیادی ایجاد نمی‌کنند، اگرچه گاهی با محاسبات نسبتاً طولانی همراهند. روشی کلی، منسوب به ام.وی. استراگرادسکی و سی. هرمیت، وجود دارد که غالباً محاسبات را ساده و کوتاه می‌کند. این روش را بعداً تحت عنوان روش هرمیت ـ استراگرادسکی بررسی خواهیم کرد.

مجدداً فرض می‌کنیم‌که P/Q یک کسر گویای سره باشد و

$$Q(x) = b\prod_{m=1}^{r}(x-\alpha_m)^{k_m}\prod_{n=1}^{s}[(x-\beta_n)^2+\gamma_n^2]^{j_n}, \qquad b \neq 0 \qquad (۶۰.۶)$$

به استناد قضیهٔ ۳.۶، می‌توانیم P/Q را به طور منحصربه‌فرد به مجموع تعدادی متناهی از کسرهای جزئی بسط دهیم، یعنی، بسط به توابعی به صورت

$$\frac{Bx+C}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^v} \quad \text{و} \quad \frac{A}{(x-\alpha)^u}$$

که در آنها A، B، C، α، β، و γ اعداد حقیقی ثابتی هستند و u و v اعداد صحیح مثبت می‌باشند. انتگرالگیری از

$$\frac{A}{(x-\alpha)^u}$$

به‌ازای $u = 1$ به تابع لگاریتمی می‌انجامد و به ازای $u > 1$ به توابع گویا [(۵۳.۶) و (۵۴.۶) را ببینید.] اگر فرض کنیم

$$I_v = \int \frac{1}{(1+y^2)^v}dy$$

رابطهٔ (۵۹.۶) نشان می‌دهد که I_v را می‌توان به صورت

$$I_v = \lambda_v I_1 + \frac{L(y)}{(1+y^2)^{v-1}} \qquad (۶۱.۶)$$

نمایش داد که در آن λ_v یک ثابت است، L یک چندجمله‌ای است، و کسر

$$\frac{L(y)}{(1+y^2)^{v-1}}$$

یک کسر گویای سره است. اگر (۶۱.۶) را در (۵۶.۶) جایگزین کنیم و، در طرف راست، متغیر y را به متغیر اصلی x بازگردانیم خواهیم داشت:

$$\int \frac{Bx+C}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^v}dx = \frac{R(x)}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^{v-1}} + \sigma_v\int\frac{1}{(x-\beta)^2+\gamma^2}dx. \qquad (۶۲.۶)$$

که در آن R یک چندجمله‌ای است، σ_v یک ثابت است، و کسر

$$\frac{R(x)}{[(x-\beta)^2+\gamma^2]^{v-1}}$$

یک کسر گویای سره است. این جایگزینی برای $v > ۱$است؛ برای $v = ۱$ رابطهٔ (۵۵.۶) را داریم که در طرف راست آن هیچ جملهٔ گویایی وجود ندارد و فقط تابع لگاریتمی و تابع معکوس تانژانت ظاهر شده است.

بنابراین، ملاحظه می‌کنیم که اگر یک کسر گویای سره به کسرهای جزئی بسط داده شود، انتگرالگیری از جملی از این بسط که در آنها $u > ۱$ یا $v > ۱$ به کسرهای گویای سره با مخرجهای متناظر

$$(x-\alpha_m)^{u-۱} \quad \text{و} \quad [(x-\beta_n)^۲+\gamma_n^۲]^{v-۱}$$

می‌انجامد. از جمع این کسرهای گویای سره، کسر گویای سرهٔ دیگری مانند

$$\frac{P_۱(x)}{Q_۱(x)}$$

حاصل می‌شود که مخرجش، بالبداهه، برابر است با

$$Q_۱(x) = \prod_{m=۱}^{r}(x-\alpha_m)^{k_m-۱}\prod_{n=۱}^{s}[(x-\beta_n)^۲+\gamma_n^۲]^{j_n-۱} \qquad (۶۳.۶)$$

این همان جزء گویای انتگرال کسر مفروض P/Q است. به وضوح، جزء متعالی انتگرال P/Q عبارت خواهد بود از: (الف) انتگرال جملی از بسط (۵۱.۶) که در آنها $u = ۱$ و $v = ۱$، و (ب) انتگرال جملی از بسط (۵۱.۶) که در آنها $v > ۱$، چنان که از (۶۲.۶) می‌توان دید. در این دو حالت، انتگرالده از یکی از انواع زیر

$$\frac{A}{x-\alpha}, \qquad \frac{Bx+C}{(x-\beta)^۲+\gamma^۲}$$

است. از این رو، حاصل جمع آنها کسر گویای سره‌ای مانند

$$\frac{P_۲(x)}{Q_۲(x)}\,.$$

است که در آن

$$Q_۲(x) = \prod_{m=۱}^{r}(x-\alpha_m)\prod_{n=۱}^{s}[(x-\beta_n)^۲+\gamma_n^۲] \qquad (۶۴.۶)$$

به این ترتیب، فرمول هرمیت ـ استراگرادسکی

$$\int\frac{P(x)}{Q(x)}dx = \frac{P_۱(x)}{Q_۱(x)} + \int\frac{P_۲(x)}{Q_۲(x)}dx \qquad (۶۵.۶)$$

به دست می‌آید که در آن جمل اوّل و دوّم طرف راست، به ترتیب، اجزای گویا و متعالی انتگرال P/Q را نمایش می‌دهند. چندجمله‌ایهای $Q_۱$ و $Q_۲$، به ترتیب، از فرمولهای (۶۳.۶) و (۶۴.۶) تعیین می‌شوند؛ و کسرهای $P_۱/Q_۱$ و $P_۲/Q_۲$ کسرهای گویای سره‌اند.

ترکیب جالب (۶۵.۶) ناشی از این واقعیت است که این رابطه بدون آگاهی از ریشه‌های چندجمله‌ای Q قابل حصول است. در واقع، به آسانی می‌توان دید که هر ریشهٔ چندجمله‌ای Q با مرتبهٔ تکرار $k > ۱$ ریشه‌ای از چندجمله‌ای Q' (مشتق Q) با مرتبهٔ تکرار $k - ۱$ است؛ بنابراین، اگر فرض کنیم که

$$Q(x) = b\prod_{m=۱}^{r}(x-\alpha_m)^{k_m}\prod_{n=۱}^{s}[(x-\beta_n^۲)^۲+\gamma_n^۲]^{j_n}$$

آن‌گاه

$$Q'(x) = \prod_{m=۱}^{r}(x-\alpha_m)^{k_m-۱}\prod_{n=۱}^{s}[(x-\beta_n)^۲+\gamma_n^۲]^{j_n-۱}.R(x) = Q_۱(x)R(x)$$

که در آن چندجمله‌ایهای Q و R ریشهٔ مشترک ندارند. این نشان می‌دهد که چندجمله‌ای $Q_۱$ بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک چندجمله‌ای Q و مشتق آن Q' است. به استناد (۶۰.۶)، (۶۳.۶)، و (۶۴.۶)، داریم

$$Q(x) = bQ_۱(x)Q_۲(x) \qquad (۶۶.۶)$$

بنابراین، اگر Q و $Q_۱$ معلوم باشند، چندجمله‌ای $Q_۲$ از (۶۶.۶) قابل حصول است. سرانجام، برای تعیین $P_۱$ و $P_۲$، می‌توانیم از عبارت (۶۵.۶) مشتق بگیریم تا داشته باشیم

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{Q_۱(x)P_۱'(x)-P_۱(x)Q_۱'(x)}{[Q_۱(x)]^۲}+\frac{P_۲(x)}{Q_۲(x)} \qquad (۶۷.۶)$$

به استناد (۶۳.۶)، هر ریشه مانند τ از چندجمله‌ای $Q_۱$ ریشه‌ای از چندجمله‌ای Q است و، به استناد (۶۴.۶)، یک ریشهٔ چندجمله‌ای $Q_۲$ نیز هست. اگر $Q_۱$ شامل دوجمله‌ای $x - \tau$ با توان $k > ۱$ باشد، آن‌گاه $Q_۱'$ نیز شامل همین دوجمله‌ای ولی با توان $k - ۱$ است و در $Q_۲$ با درجهٔ نخست ظاهر می‌شود؛ بنابراین، حاصل ضرب $Q_۱'Q_۲$ شامل $x - \tau$ با همان توان k است که در چندجمله‌ای $Q_۱$ ظاهر شده است. چون این حکم در مورد هر ریشه مانند τ از چندجمله‌ای $Q_۱$ برقرار است، $Q_۱'Q_۲$ بر $Q_۱$ بخش‌پذیر است؛ یعنی

$$Q_۱'(x)Q_۲(x) = Q_۱(x)S(x)$$

که در آن S یک چندجمله‌ای است. بنابراین، خواهیم داشت:

$$\frac{Q_۱(x)P_۱'(x)-P_۱(x)Q_۱'(x)}{[Q_۱(x)]^۲} = \frac{Q_۲(x)Q_۱(x)P_۱'(x)-Q_۲(x)P_۱(x)Q_۱'(x)}{Q_۲(x)[Q_۱(x)]^۲}$$

$$= \frac{Q_1(x)[Q_2(x)P_1'(x) - P_1(x)S(x)]}{Q_2(x)[Q_1(x)]^2}$$

$$= \frac{Q_2(x)P_1'(x) - P_1(x)S(x)}{Q_1(x)Q_2(x)}$$

اگر طرفین را در $Q(x) = bQ_1(x)Q_2(x)$ ضرب کنیم، به استناد (۶۷.۶)، درمی‌یابیم که

$$P(x) = b[Q_2(x)P_1'(x) - P_1(x)S(x)] + bP_2(x)Q_1(x) \qquad (۶۸.۶)$$

در این بسط، چندجمله‌ایهای P، Q_1، Q_2، و S بر ما معلومند. بزرگترین درجهٔ ممکن چندجمله‌ایهای P_1 و P_2، که ما در صددیم آنها را بیابیم، براساس این واقعیت تعیین می‌شوند که P_1/Q_1 و P_2/Q_2 کسرهای گویای سره‌اند. از این رو، چندجمله‌ایهای P_1 و P_2 از رابطهٔ (۶۸.۶) به روش ضرایب نامعین به آسانی قابل حصول می‌باشند. در این حالت، می‌توان دید که تعداد مجهولات مطابق تعداد معادلات حاصل است و به کمک بسط (۶۷.۶) از وجود جواب این دستگاه اطمینان حاصل می‌کنیم.

برای تشریح این نظریه، به چند مثال نظر می‌افکنیم.

مثال ۱. انتگرال

$$\int \frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2}dx$$

را در نظر بگیرید. در این مثال، $Q(x) = (x^5 + x + 1)^2$ و $Q'(x) = 2(x^5 + x + 1)(5x^4 + 1)$. چون Q_1 بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک Q و Q' است، داریم: $Q_1(x) = x^5 + x + 1$. چون $b = 1$، $Q_2 = Q/Q_1$ و، بنابراین، $Q_2(x) = x^5 + x + 1$. به این ترتیب، به استناد فرمول هرمیت ـ استراگرادسکی [فرمول (۶۵.۶)]،

$$\int \frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2}dx = \frac{P_1(x)}{x^5 + x + 1} + \int \frac{P_2(x)}{x^5 + x + 1}dx$$

یا

$$\frac{4x^5 - 1}{(x^5 + x + 1)^2} = \frac{(x^5 + x + 1)P_1'(x) - (5x^4 + 1)P_1(x)}{(x^5 + x + 1)^2} + \frac{P_2(x)}{x^5 + x + 1}$$

اگر قرار دهیم:

$$P_1(x) = A_0x^4 + A_1x^3 + A_2x^2 + A_3x + A_4$$

$$P_۲(x) = B_۰x^۴ + B_۱x^۳ + B_۲x^۲ + B_۳x + B_۴$$

پس از حذف مخرجها، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}۴x^۵ - ۱ = &(x^۵ + x + ۱)(۴A_۰x^۳ + ۳A_۱x^۲ + ۲A_۲x + A_۳)\\ &- (۵x^۴ + ۱)(A_۰x^۴ + A_۱x^۳ + A_۲x^۲ + A_۳x + A_۴)\\ &+ (x^۵ + x + ۱)(B_۰x^۴ + B_۱x^۳ + B_۲x^۲ + B_۳x + B_۴)\end{aligned}$$

از مقایسهٔ ضرایب قوای مشابه x، درمی‌یابیم که

$$A_۰ = A_۱ = A_۲ = A_۴ = ۰, \qquad A_۳ = -۱$$
$$B_۰ = B_۱ = B_۲ = B_۳ = B_۴ = ۰$$

بنابراین، نتیجه می‌گیریم که

$$\int \frac{۴x^۵ - ۱}{(x^۵ + x + ۱)^۲}dx = -\frac{x}{x^۵ + x + ۱} + K$$

تبصره. به طریقی کاملاً مشابه، می‌توانیم نشان بدهیم که

$$\int \frac{۴x^۹ + ۲۱x^۶ + ۲x^۳ - ۳x^۲ - ۳}{(x^۷ - x + ۱)^۲}dx = -\frac{x^۳ + ۳}{x^۷ - x + ۱} + K$$

مثال ۲. انتگرال

$$\int \frac{۴x^۴ + ۴x^۳ + ۱۶x^۲ + ۱۲x + ۸}{(x + ۱)^۲(x^۲ + ۱)^۲}dx$$

را در نظر بگیرید. در این مثال،

$$Q_۱(x) = Q_۲(x) = (x + ۱)(x^۲ + ۱) = x^۳ + x^۲ + x + ۱$$

اگر قرار دهیم

$$P_۲(x) = B_۰x^۲ + B_۱x + B_۲ \quad \text{و} \quad P_۱(x) = A_۰x^۲ + A_۱x + A_۲$$

فرمول هرمیت ـ استراگرادسکی ایجاب می‌کند که

$$\frac{۴x^۴ + ۴x^۳ + ۱۶x^۲ + ۱۲x + ۸}{(x^۳ + x^۲ + x + ۱)^۲} = \left(\frac{A_۰x^۲ + A_۱x + A_۲}{x^۳ + x^۲ + x + ۱}\right)' + \frac{B_۰x^۲ + B_۱x + B_۲}{x^۳ + x^۲ + x + ۱}$$

که از آن، به نوبهٔ خود، خواهیم داشت:

$$A_0 = -1,\ A_1 = 1,\ A_2 = -4,\ B_0 = 0,\ B_1 = 3,\ B_2 = 3$$

بنابراین،

$$\int \frac{4x^4 + 4x^3 + 16x^2 + 12x + 8}{(x+1)^2(x^2+1)^2}dx = -\frac{x^2 - x + 4}{x^3 + x^2 + x + 1} + 3\tan^{-1} x + K$$

مثال ۳. انتگرال

$$\int \frac{2x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 40x + 20}{(x-1)(x^2 - 2x + 2)^2}dx$$

را در نظر بگیرید. در این مورد،

$$Q_2(x) = (x-1)(x^2 - 2x + 2) \quad \text{و} \quad Q_1(x) = (x^2 - 2x + 2)^2$$

به این ترتیب،

$$\frac{2x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 40x + 20}{(x-1)(x^2 - 2x + 2)^2} = \left(\frac{Ax^3 + Bx^2 + Cx + D}{(x^3 - 2x + 2)^2}\right)' + \frac{E}{x-1} + \frac{Fx + G}{x^2 - 2x + 2}$$

و، بنابراین،

$$A = 2,\ B = -6,\ C = 8,\ D = -9,\ E = 2,\ F = -2,\ G = 4$$

که نشان می‌دهد که

$$\int \frac{2x^4 - 4x^3 + 24x^2 - 40x + 20}{(x-1)(x^2 - 2x + 2)^2}dx = \frac{2x^3 - 6x^2 + 8x - 9}{(x^2 - 2x + 2)^2} + \ln\frac{(x-1)^2}{x^2 - 2x + 2} + 2\tan^{-1}(x-1) + K$$

مثال ۴. انتگرال

$$\int \frac{x^6 - x^5 + x^4 + 2x^3 + 3x^2 + 3x + 3}{(x+1)^2(x^2 + x + 1)^3}dx$$

را در نظر بگیرید. در این مثال،

$$Q_۱(x) = (x+۱)(x^۲+x+۱)^۲ \quad \text{و} \quad Q_۲(x) = (x+۱)(x^۲+x+۱)$$

به این ترتیب،

$$\frac{x^۶ - x^۵ + x^۴ + ۲x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۳}{(x+۱)^۲(x^۲+x+۱)^۳} = \left(\frac{Ax^۴ + Bx^۳ + Cx^۲ + Dx + E}{(x+۱)(x^۲+x+۱)}\right)' + \frac{Fx^۲ + Gx + H}{(x+۱)(x^۲+x+۱)}$$

و، بنابراین،

$$A = -۱,\ B = ۰,\ C = -۲,\ D = ۰,\ E = -۱,\ F = G = H = ۰$$

که نشان می‌دهد که

$$\int \frac{x^۶ - x^۵ + x^۴ + ۲x^۳ + ۳x^۲ + ۳x + ۳}{(x+۱)^۲(x^۲+x+۱)^۳}dx = -\frac{x^۴ + ۲x^۲ + ۱}{(x+۱)(x^۲+x+۱)^۲} + K$$

۴.۶ انتگرالگیری به روش گویاسازی

اگر انتگرال مفروضی با جایگزینی مناسبی به انتگرالی از یک تابع گویا تبدیل شود، می‌گوییم که به روش گویاسازی قابل انتگرالگیری است. در بخش قبلی مسألهٔ انتگرالگیری از توابع گویا اساساً حل شد؛ در این بخش بعضی از انتگرالهایی را که به روش گویاسازی قابل محاسبه‌اند مورد بررسی قرار می‌دهیم.

تعریف. P را یک چندجمله‌ای برحسب متغیرهای u، v، . . .، z می‌نامند در صورتی که $P(u,v,\ldots,z)$ ترکیبی خطی (البته، حقیقی و متناهی) از عباراتی به شکل $u^k v^j \ldots z^m$ باشد که در آنها k، j، . . .، m اعداد صحیح نامنفی هستند. R را تابعی گویا از متغیرهای u، v، . . .، z می‌نامیم در صورتی که

$$R(u,v,\ldots,z) = \frac{P(u,v,\ldots,z)}{Q(u,v,\ldots,z)}$$

که در آن P و Q چندجمله‌ایهایی برحسب متغیرهای u، v، . . .، z باشند.

قضیهٔ ۴.۶. انتگرال

$$\int R(\sin x, \cos x)dx \tag{۶۹.۶}$$

را در نظر بگیرید که در آن R تابع گویایی از متغیرهای u و v است با

$$v = \cos x \quad \text{و} \quad u = \sin x \tag{۷۰.۶}$$

این انتگرال می‌تواند با جایگزینی

$$t = \tan \frac{x}{۲}, \qquad -\pi < x < \pi \tag{۷۱.۶}$$

گویاسازی شود.

برهان. چون

$$\sin x = ۲ \sin \frac{x}{۲} \cos \frac{x}{۲} = ۲ \frac{\sin(x/۲)}{\cos(x/۲)} \cos^۲ \frac{x}{۲} = \frac{۲ \tan(x/۲)}{۱ + \tan^۲(x/۲)}$$
$$\cos x = \cos^۲ \frac{x}{۲} - \sin^۲ \frac{x}{۲} = \cos^۲ \frac{x}{۲}(۱ - \tan^۲ \frac{x}{۲}) = \frac{۱ - \tan^۲(x/۲)}{۱ + \tan^۲(x/۲)}$$

و

$$x = ۲ \tan^{-۱} t$$

در می‌یابیم که

$$\sin x = \frac{۲t}{۱ + t^۲}, \qquad \cos x = \frac{۱ - t^۲}{۱ + t^۲}, \qquad dx = \frac{۲dt}{۱ + t^۲}$$

و، بنابراین،

$$\int R(\sin x, \cos x)dx = ۲ \int R\left(\frac{۲t}{۱ + t^۲}, \frac{۱ - t^۲}{۱ + t^۲}\right) \frac{۱}{۱ + t^۲} dt$$

و کار گویاسازی تمام است.

بحث. جایگزینی (۷۱.۶) گاهی به عبارات پیچیده‌ای می‌انجامد و، بنابراین، کشف روشهای دیگر جایگزینی که مستلزم کار کمتری باشد مورد توجه است، مشروط به این که وقتی تابع گویای R در بعضی خواص اضافی صدق می‌کند چنین جایگزینیها موجود باشد.

برای بررسی وضعیت فعلی، نخست به ذکر بعضی نکات دربارهٔ چندجمله‌ایهای زوج و فرد و توابع گویا می‌پردازیم. تابع R را زوج یا فرد می‌نامیم در صورتی، به ترتیب، رابطهٔ

$$R(-x) = R(x) \quad \text{یا} \quad R(-x) = -R(x)$$

برقرار باشد. هر چندجمله‌ای زوج فقط شامل قوای زوج x است و، از این رو، یک چندجمله‌ای برحسب $x^۲$ است. هر چندجمله‌ای فرد فقط شامل قوای فرد x و، از این رو، بر x بخش‌پذیر است و لهذا مساوی حاصل‌ضرب x و یک چندجمله‌ای برحسب $x^۲$ است.

حال، فرض کنید تابع گویای R تابعی زوج باشد و $R = P_۱/P_۲$، که در آن $P_۱/P_۲$ تحویل‌ناپذیر است. یعنی، فرض بر این است که $P_۱$ و $P_۲$ ریشهٔ مشترکی ندارند. در این صورت

$$\frac{P_۱(-x)}{P_۲(-x)} = \frac{P_۱(x)}{P_۲(x)}$$

ایجاب می‌کند که به ازای ثابتی مانند a،

$$P_۱(x) = aP_۱(-x), \qquad P_۲(x) = aP_۲(-x)$$

از مقایسهٔ بزرگترین قوای x در این دو معادله متوجه می‌شویم که مقادیر ممکن a فقط ± ۱ هستند. اگر می‌پذیرفتیم که $a = -۱$، آن‌گاه $P_۱$ و $P_۲$ هر دو فرد می‌بودند و، از این رو، بر x بخش‌پذیر می‌شدند؛ در صورتی که فرض کرده بودیم که $P_۱/P_۲$ تحویل‌ناپذیر باشد. بنابراین، $a = ۱$ و $P_۱$ و $P_۲$ زوجند، یعنی، $P_۱$ و $P_۲$ چندجمله‌ایهایی برحسب $x^۲$ هستند.

بنابراین، ملاحظه می‌کنیم که هر تابع گویای زوج مانند R تابعی گویا برحسب $x^۲$ است و چنانچه تحویل‌ناپذیر باشد قابل نمایش به صورت خارج‌قسمت دو چندجمله‌ای زوج است:

$$R(x) = \frac{Q_۱(x^۲)}{Q_۲(x^۲)}$$

از طرف دیگر، اگر R فرد باشد آن‌گاه $R(x)/x$ زوج است و، در این صورت، به‌ازای تابع گویایی چون $R_۱$ از $x^۲$، داریم:

$$R(x) = xR_۱(x^۲)$$

بنابراین، ادعا می‌کنیم که:

قاعدهٔ اول: اگر $R(u,v)$ تابعی فرد برحسب u باشد، آن‌گاه انتگرال (۶۹.۶) با جایگزینی

$$t = \cos x$$

گویاسازی می‌شود.

در واقع، به استناد مفروضات و آنچه در بالا گفته شد،

$$R(u,v) = uR_1(u^2, v)$$

که در آن R_1 تابعی گویا از دو متغیر u^2 و v است. بنابراین، انتگرال (۶۹.۶) صورت

$$\int R_1(\sin^2 x, \cos x)(\sin x)dx$$

را به خود می‌گیرد و با جایگزینی $t = \cos x$ به شکل زیر درمی‌آید:

$$-\int R_1(1 - t^2, t)dt$$

قاعدهٔ دوم: اگر $R(u,v)$ تابعی فرد برحسب v باشد، آن‌گاه انتگرال (۶۹.۶) با جایگزینی

$$t = \sin x$$

گویاسازی می‌شود.

در واقع، در این حالت،

$$R(u,v) = vR_1(u, v^2)$$

که در آن R_1 تابعی گویا از متغیرهای u و v^2 است؛ انتگرال (۶۹.۶) با جایگزینی

$$t = \sin x$$

به صورت زیر درمی‌آید:

$$\int R_1(t, 1 - t^2)dt$$

قاعدهٔ سوم: اگر تابع گویای R از متغیرهای u و v در شرط

$$R(-u,-v)=R(u,v)$$

صدق کند، آن‌گاه انتگرال (۶۹.۶) با جایگزینی

$$t=\tan x$$

گویاسازی می‌شود.

در واقع، اگر قرار دهیم $u=vt$، از مفروضات نتیجه می‌شود که

$$R(-vt,-v)=R(vt,v)$$

به این ترتیب، تابع $R(vt,v)$ برحسب v زوج است و، بنابراین، در رابطهٔ

$$R(vt,v)=R_{۱}(v^{۲},t)$$

صدق می‌کند که در آن $R_{۱}$ تابعی گویا از متغیرهای $v^{۲}$ و t است. بنابراین، اگر قرار دهیم $v=\cos x$، $t=\tan x$، خواهیم داشت:

$$R(\sin x,\cos x)=R_{۱}(\cos^{۲}x,\tan x)=R_{۱}\left(\frac{۱}{۱+\tan^{۲}x},\tan x\right)$$

و، از این رو، با $t=\tan x$،

$$\int R(\sin x,\cos x)\,dx=\int R_{۱}\left(\frac{۱}{۱+t^{۲}},t\right)\frac{۱}{۱+t^{۲}}dt$$

در بعضی حالات، انتگرالده انتگرال (۶۹.۶) را به آسانی می‌توان چنان به یک مجموع تجزیه کرد که یکی از قواعد سه‌گانهٔ بالا در مورد جمعوندها قابل اعمال باشد.

در واقع، حتی در کلی‌ترین حالت ممکن، از تجزیهٔ زیر برای R می‌توان استفاده کرد:

$$R(u,v)=\tfrac{۱}{۲}[R(u,v)+R(-u,-v)]+\tfrac{۱}{۲}[R(u,v)-R(-u,v)]$$
$$+\tfrac{۱}{۲}[R(-u,v)-R(-u,-v)]$$

در مورد سه مجموع جزئی طرف راست، به ترتیب، قواعد سوم، اول، و دوم قابل اعمال است. معذالک، اگر هر سه قاعده به کار گرفته شود، امتیاز جایگزینیهای مذکور در این قواعد بر جایگزینی (۷۱.۶) غالباً در عمل اهمیتی ندارد.

اینک به ذکر چند مثال مبادرت می‌ورزیم.

مثال ۱. فرض کنید

$$I = \int \frac{۱}{(\sin x)(۲ + \cos x - ۲\sin x)} dx$$

با استفاده از جایگزینی $t = \tan(x/۲)$، خواهیم داشت:

$$I = \int \frac{۱ + t^۲}{t(t^۲ - ۴t + ۳)} dt$$

با بسط به کسرهای جزئی، درمی‌یابیم که

$$\frac{۱ + t^۲}{t(t-۳)(t-۱)} = \frac{A}{t} + \frac{B}{t-۳} + \frac{C}{t-۱}$$

که در آن $A = \frac{۱}{۳}$، $B = \frac{۵}{۳}$، و $C = -۱$. از این رو،

$$\begin{aligned} I &= \tfrac{۱}{۳}\ln|t| + \tfrac{۵}{۳}\ln|t-۳| - \ln|t-۱| + K \\ &= \frac{۱}{۳}\ln\left|\tan\frac{x}{۲}\right| + \frac{۵}{۳}\ln\left|\left(\tan\frac{x}{۲}\right) - ۳\right| - \ln\left|\left(\tan\frac{x}{۲}\right) - ۱\right| + K \end{aligned}$$

مثال ۲. فرض کنید

$$J = \int \frac{(\sin^۲ x)(\cos x)}{\sin x + \cos x} dx$$

در این مورد می‌توانیم قاعدهٔ سوم را به کار ببریم و از جایگزینی $t = \tan x$ استفاده کنیم. خواهیم داشت:

$$J = \int \frac{t^۲}{(t+۱)(t^۲+۱)^۲} dt$$

با بسط به کسرهای جزئی، درمی‌یابیم که

$$\frac{t^۲}{(t+۱)(t^۲+۱)^۲} = \frac{A}{t+۱} + \frac{Bt + C}{t^۲+۱} + \frac{Dt + E}{(t^۲+۱)^۲}$$

که در آن $A + \frac{۱}{۴}$، $B = -\frac{۱}{۴}$، $C = \frac{۱}{۴}$، $D = \frac{۱}{۲}$، $E = -\frac{۱}{۲}$. از این رو،

$$J = \frac{۱}{۴}\ln\left|\frac{۱+t}{(۱+t^۲)^{۱/۲}}\right| - \frac{۱}{۴}\frac{۱+t}{۱+t^۲} + K$$

مثال ۳. فرض کنید

$$H = \int \frac{۱}{(\sin x)(۲\cos^۲ x - ۱)} dx$$

در این مثال قاعدهٔ اول قابل اعمال است. قرار می‌دهیم $t = \cos x$، خواهیم داشت:

$$H = -\int \frac{۱}{(۱ - t^۲)(۲t^۲ - ۱)} dt$$

امّا

$$\frac{۱}{(۱-t^۲)(۲t^۲-۱)} = \frac{۱}{۱+\sqrt{۲}t} + \frac{۱}{۱-\sqrt{۲}t} + \frac{۱/۲}{۱+t} + \frac{۱/۲}{۱-t}$$

و، بنابراین،

$$\begin{aligned} H &= \frac{۱}{\sqrt{۲}} \ln\left|\frac{۱+\sqrt{۲}t}{۱-\sqrt{۲}t}\right| - \frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{۱+t}{۱-t}\right| + K \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۲}} \ln\left|\frac{۱+\sqrt{۲}(\cos x)}{۱-\sqrt{۲}(\cos x)}\right| + \frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{۱-\cos x}{۱+\cos x}\right| + K \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۲}} \ln\left|\frac{۱+\sqrt{۲}(\cos x)}{۱-\sqrt{۲}(\cos x)}\right| + \frac{۱}{۲}\ln\left|\tan\frac{x}{۲}\right| + K \end{aligned}$$

مثال ۴. می‌خواهیم انتگرال

$$\int \frac{A\cos x + B\sin x}{C\cos x + D\sin x} dx$$

را محاسبه کنیم که در آن A، B، C، و D ثابت هستند.

برای این منظور، دو ثابت λ و μ را طوری تعیین می‌کنیم که

$$A\cos x + B\sin x \equiv \lambda(-C\sin x + D\cos x) + \mu(C\cos x + D\sin x)$$

و این معادله به ازای جمیع مقادیر x برقرار باشد. از برابری ضرایب $\cos x$و $\sin x$ در طرفین، ملاحظه می‌کنیم که ثابتهای λ و μ از معادلات

$$A = D\lambda + C\mu$$

$$B = -C\lambda + D\mu$$

به دست می‌آیند. از این رو،

$$\mu = \frac{AC + BD}{D^۲ + C^۲} \quad \text{و} \quad \lambda = \frac{AD - BC}{D^۲ + C^۲}$$

بعلاوه،

$$\int \frac{A\cos x + B\sin x}{C\cos x + D\sin x}dx = \lambda \int \frac{-C\sin x + D\cos x}{C\cos x + D\sin x}dx + \mu \int dx$$
$$= \lambda \ln(C\cos x + D\sin x) + \mu x + K$$

تبصره. قضیهٔ ۴.۶ همتایی در مورد توابع هذلولوی دارد. انتگرال

$$\int R(\sinh x, \cosh x)dx$$

، که در آن R تابعی گویا از متغیرهای u و v با

$$u = \sinh x \quad \text{و} \quad v = \cosh x$$

است، با جایگزینی

$$t = \tanh \frac{x}{۲}$$

گویاسازی می‌شود.

در واقع، با این جایگزینی، داریم

$$\sinh x = \frac{۲t}{۱ - t^۲}, \quad \cosh x = \frac{۱ + t^۲}{۱ - t^۲}, \quad dx = \frac{۲dt}{۱ - t^۲}$$

و، بنابراین،

$$\int R(\sinh x, \cosh x)dx = ۲\int R\left(\frac{۲t}{۱ - t^۲}, \frac{۱ + t^۲}{۱ - t^۲}\right)\frac{۱}{۱ - t^۲}dt$$

قضیهٔ ۵.۶. فرض کنید $R(x, y, z, \dots)$ تابعی گویا از متغیرهایش باشد، و

$$L(x) = \frac{ax + b}{cx + b}$$

یک تابع خطی کسری باشد که در آن a، b، c، و d ثابتهای مفروضی هستند و $ad - bc \neq ۰$، و فرض کنید α، β، ... اعدادی گویا باشند. در این صورت، انتگرال

$$\int R(x, [L(x)]^\alpha, [L(x)]^\beta, \dots)dx \qquad (۷۲.۶)$$

با جایگزینی

$$L(x) = t^m \qquad (۷۳.۶)$$

، که m کوچکترین مخرج مشترک کسرهای α، β، ... است، گویاسازی می‌شود.

برهان. اعداد αm، βm، ... صحیح هستند. بعلاوه

$$x = \frac{dt^m - b}{a - ct^m}$$

اگر قرار دهیم $x = r(t)$، ملاحظه می‌کنیم که انتگرال (۷۲.۶) به صورت

$$\int R(r(t), t^{\alpha m}, t^{\beta m}, \ldots) r'(t) dt$$

درمی‌آید که در آن انتگرالده بالبداهه تابعی گویا از r است. بعد از تعیین انتگرال، با استفاده از جایگزینی (۷۳.۶)، t را برحسب x می‌نویسیم.

مثال ۱. انتگرال

$$I = \int \frac{۱}{\sqrt[۳]{۱+x} - \sqrt[۴]{۱+x}} dx$$

را در نظر بگیرید. این انتگرال با جایگزینی $۱ + x = t^{۱۲}$ گویاسازی می‌شود. از این رو،

$$I = ۱۲ \int \frac{t^{۸}}{t - ۱} dt$$

امّا

$$\frac{t^{۸}}{t-۱} = \frac{t^{۸} - ۱}{t-۱} + \frac{۱}{t-۱} = t^{۷} + t^{۶} + t^{۵} + t^{۴} + t^{۳} + t^{۲} + t + ۱ + \frac{۱}{t-۱}$$

و، بنابراین،

$$I = ۱۲ \left(\frac{t^{۸}}{۸} + \frac{t^{۷}}{۷} + \frac{t^{۶}}{۶} + \frac{t^{۵}}{۵} + \frac{t^{۴}}{۴} + \frac{t^{۳}}{۳} + \frac{t^{۲}}{۲} + t + \ln|t - ۱| \right) + K$$

با انتخاب $t = \sqrt[۱۲]{۱+x}$، انتگرال مطلوب I برحسب متغیر اصلی x به دست می‌آید.

مثال ۲. انتگرال

$$J = \int \left(\frac{x+۱}{x-۱} \right)^{۱/۳} \frac{۱}{۱+x} dx$$

را در نظر بگیرید. این انتگرال با $t^{۳} = (x + ۱)/(x - ۱)$ گویاسازی می‌شود. به این ترتیب، $x = (t^{۳} + ۱)/(t^{۳} - ۱)$ و

$$J = -۳ \int \frac{۱}{t^{۳} - ۱} dt$$

بنابراین،

$$J = \int \left(-\frac{۱}{t-۱} + \frac{t+۲}{t^۲+t+۱}\right) dt$$
$$= \frac{۱}{۲}\ln\left|\frac{t^۲+t+۱}{(t-۱)^۲}\right| + \sqrt{۳}\tan^{-۱}\frac{۲t+۱}{\sqrt{۳}} + K$$

که در آن $t = \sqrt[۳]{(x+۱)/(x-۱)}$.

قضیهٔ ۶.۶. فرض کنید a و b اعداد حقیقی دلخواهی باشند و m، n، و pاعدادی گویا باشند. در این صورت، اگر یکی از سه عدد

$$p, \qquad \frac{m+۱}{n}, \qquad \frac{m+۱}{n} + p$$

صحیح باشد، آن‌گاه انتگرال دوجمله‌ای

$$I = \int x^m(a+bx^n)^p\, dx \tag{۷۴.۶}$$

قابل تحویل به انتگرالی از نوع (۷۲.۶) است؛ یعنی، می‌توان آن را گویاسازی کرد.

برهان. حالت $n = ۰$ بدیهی است. فرض می‌کنیم $n \neq ۰$ و قرار می‌دهیم $x^n = t$. آن‌گاه

$$x = t^{۱/n}, \qquad dx = \frac{۱}{n}t^{۱/n-۱}dt$$

با فرض

$$q = \frac{m+۱}{n} - ۱$$

و جایگزینی $x = \sqrt[n]{t}$، انتگرال (۷۴.۶) به

$$I = \frac{۱}{n}\int t^q(a+bt)^p\, dt \tag{۷۵.۶}$$

تبدیل می‌شود.

حالت اوّل: فرض کنید p یک عدد صحیح باشد. در این حالت، انتگرالده (۷۵.۶) به $t^{(m+۱)/n}$ و t بستگی دارد؛ اگر

$$\frac{m+۱}{n} = \frac{j}{k}$$

که در آن j و k اعدادی صحیح‌اند و $k > ۰$، این انتگرالده به صورت $R(t, \sqrt[k]{t})$ درمی‌آید که در آن R تابعی گویا از شناسه‌های خود است. این، حالت خاصی از قضیهٔ ۵.۶ است.

حالت دوّم: فرض کنید $(m+1)/n$ عددی صحیح باشد. در این صورت، انتگرالده (۷۵.۶) به t و $(a+bt)^p$ بستگی دارد؛ اگر $p=v/w$ که در آن v و w اعدادی صحیح‌اند و $w>0$، این انتگرالده به صورت $R(t,\sqrt[w]{a+bt})$ درمی‌آید و مجدداً انتگرالی از نوعی داریم که قبلاً در قضیهٔ ۵.۶ بررسی شده است.

حالت سوّم: فرض کنید $(m+1)/n+p$ عددی صحیح باشد. در این صورت، انتگرالده (۷۵.۶) را می‌توان به صورت $[(a+bt)/t]^p t^{q+p}$ نوشت که، بنابراین، به t و $(a+bt)/t$ بستگی دارد؛ اگر $p=v/w$ که در آن v و w اعدادی صحیح‌اند و $w>0$، این انتگرالده به صورت $R(t,\sqrt[w]{(a+bt)/t})$ درمی‌آید و یک بار دیگر انتگرالی از نوعی داریم که قبلاً در قضیهٔ ۵.۶ بررسی شده است.

ملاحظات. برای محاسبهٔ انتگرالی از نوع (۷۲.۶)، مشروط به این که یکی از سه عدد p، $(m+1)/n$، یا $(m+1)/n+p$ صحیح باشد، به صورت زیر عمل می‌کنیم:

حالت اول: فرض کنید p یک عدد صحیح باشد. در این صورت، اگر $p>0$، جملهٔ $(a+bx^n)^p$ مطابق فرمول دوجمله‌ای بسط داده می‌شود؛ ولی، اگر $p<0$، قرار می‌دهیم $x=t^s$، که در آن s کوچکترین مخرج مشترک کسرهای m و n است. اگر $p=0$، همه چیز بدیهی است.

حالت دوّم: فرض کنید $(m+1)/n$ عددی صحیح باشد. قرار می‌دهیم $a+bx^n=t^w$، که در آن w مخرج کسر $p=v/w$ است که v و w اعدادی صحیح‌اند و $w>0$.

حالت سوّم: فرض کنید $(m+1)/n+p$ عددی صحیح باشد. قرار می‌دهیم $a+bx^n=t^w x^n$، که در آن w مخرج کسر $p=v/w$ است که v و w اعدادی صحیح‌اند و $w>0$.

پی. ال. چبیشف ثابت کرد که انتگرالی از نوع (۷۲.۶) در صورتی که هیچ یک از اعداد p، $(m+1)/n$ و $(m+1)/n+p$ صحیح نباشد به صورت دقیق قابل محاسبه نیست.

مثال ۱. انتگرال

$$\int x^{-1/2}(1+x^{1/4})^{1/3}dx$$

را در نظر بگیرید. در این مثال، $m=-\frac{1}{2}$، $n=\frac{1}{4}$، $p=\frac{1}{3}$، و $(m+1)/n=2$. بنابراین، حالت دوّم را داریم و قرار می‌دهیم

$$x=(t^3-1)^4 \quad \text{یا} \quad t=(1+x^{1/4})^{1/3}$$

خواهیم داشت:

$$\int x^{-۱/۲}(۱+x^{۱/۴})^{۱/۳}dx = ۱۲\int(t^۶-t^۳)dt = \tfrac{۳}{۷}t^۴(۴t^۳-۷)+K$$

که در آن $t=(۱+x^{۱/۴})^{۱/۳}$.

مثال ۲. انتگرال

$$\int(۱+x^۴)^{-۱/۴}dx$$

را در نظر بگیرید. در این مثال، $m=۰$، $n=۴$، $p=-\frac{۱}{۴}$، و $(m+۱)/n+p=۰$. حالت سوم را داریم و قرار می‌دهیم

$$x=(t^۴-۱)^{-۱/۴} \quad \text{یا} \quad t=\frac{(۱+x^۴)^{۱/۴}}{x}$$

خواهیم داشت:

$$\int(۱+x^۴)^{-۱/۴}dx = -\int\frac{t^۲}{t^۴-۱}dt = \frac{۱}{۴}\int\left(\frac{۱}{t+۱}-\frac{۱}{t-۱}\right)dt-\frac{۱}{۲}\int\frac{۱}{t^۲+۱}dt$$
$$= \frac{۱}{۴}\ln\left|\frac{t+۱}{t-۱}\right|-\frac{۱}{۲}\tan^{-۱}t+K$$

که در آن

$$t=\frac{(۱+x^۴)^{۱/۴}}{x}=(x^{-۴}+۱)^{۱/۴}$$

قضیه ۷.۶. فرض کنید $R(x,y)$ تابعی گویا از x و y باشد و

$$y=(ax^۲+bx+c)^{۱/۲} \qquad (۷۶.۶)$$

آن‌گاه انتگرال

$$\int R(x,y)dx \qquad (۷۷.۶)$$

با یک جایگزینی گویا به انتگرالی از یک تابع گویا تحویل‌پذیر است. بالاخص، جایگزینیهایی که در این گویاسازی مؤثر واقع می‌شوند (و آنها را جایگزینیهای اویلر نیز می‌نامند) عبارتند از:

الف) $(ax^۲+bx+c)^{۱/۲}=(x-\alpha)t$ در صورتی که $ax^۲+bx+c=a(x-\alpha)(x-\beta)$؛ یعنی، در صورتی که ریشه‌های α و β سه‌جمله‌ای $ax^۲+bx+c$ حقیقی باشند.

ب) $(ax^۲+bx+c)^{۱/۲}=tx+\sqrt{c}$ در صورتی که $c>۰$.

برهان. اگر ریشه‌های α و β سه‌جمله‌ای $ax^۲ + bx + c$ حقیقی باشند، می‌توان نوشت:

$$(ax^۲ + bx + c)^{۱/۲} = [a(x-\alpha)(x-\beta)]^{۱/۲} = (x-\alpha)\left[\frac{a(x-\beta)}{x-\alpha}\right]^{۱/۲}$$

از این رو، انتگرالده به x و $[a(x-\beta)/(x-\alpha)]^{۱/۲}$ بستگی دارد و این وضعیتی است که قبلاً در قضیهٔ ۵.۶ بررسی شده است. به این ترتیب، گویاسازی انتگرال با جایگزینی

$$x = \frac{\alpha t^۲ - \beta\alpha}{t^۲ - a} \quad \text{یا} \quad \frac{a(x-\beta)}{x-\alpha} = t^۲$$

قابل انجام است. حالتی که $\alpha = \beta$، البته، اهمیتی ندارد.

اگر ریشه‌های $ax^۲ + bx + c$ مختلط باشند، آن‌گاه علامت $ax^۲ + bx + c$ به‌ازای همهٔ مقادیر x یکسان می‌ماند؛ البته، فرض می‌کنیم که این علامت مثبت باشد، زیرا در غیر این صورت مقدار ریشهٔ دوم به‌ازای همهٔ مقادیر x مختلط است و مسأله بی‌اعتبار می‌شود. بالاخص، با فرض $x = ۰$ می‌توانیم ببینیم که در این حالت الزاماً $c > ۰$. (روشی که هم‌اکنون به توصیف آن می‌پردازیم در حالتی که $c > ۰$، بدون توجه به این که ریشه‌های $ax^۲ + bx + c$ حقیقی باشند یا مختلط، همیشه به نتیجهٔ مطلوب می‌انجامد.)

با فرض

$$\frac{(ax^۲ + bx + c)^{۱/۲} - \sqrt{c}}{x} = t$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}
ax^۲ + bx + c &= (tx + \sqrt{c})^۲ = t^۲x^۲ + ۲\sqrt{c}tx + c\\
ax + b &= t^۲x + ۲\sqrt{c}t\\
x &= \frac{b - ۲\sqrt{c}t}{t^۲ - a} = g(t)\\
dx &= g'(t)dt\\
(ax^۲ + bx + c)^{۱/۲} &= tx + \sqrt{c} = tg(t) + \sqrt{c}
\end{aligned}$$

بنابراین،

$$\int R(x, (ax^۲ + bx + c)^{۱/۲})dx = \int R\{g(t), tg(t) + \sqrt{c}\}g'(t)dt$$

چون تابع g (و نیز مشتق آن g') گویاست، عمل گویاسازی انتگرال خاتمه یافته است.

مثال ۱. انتگرال

$$I = \int \frac{x}{(۷x - ۱۰ - x^۲)^{۳/۲}} dx$$

را در نظر بگیرید. چون $۷x - ۱۰ - x^۲$ دارای ریشه‌های حقیقی $\alpha = ۲$ و $\beta = ۵$ است، نخستین جایگزینی اویلر را به کار می‌بریم:

$$(۷x - ۱۰ - x^۲)^{۱/۲} = \sqrt{(x - ۲)(x - ۵)} = (x - ۲)t$$

بنابراین،

$$x = \frac{۵ + ۲t^۲}{۱ + t^۲} \quad \text{یا} \quad \frac{۵ - x}{x - ۲} = t^۲$$

و خواهیم داشت:

$$I = -\frac{۶}{۲۷} \int \frac{۵ + ۲t^۲}{t^۲} dt = -\frac{۲}{۹} \int \left(\frac{۵}{t^۲} + ۲\right) dt = -\frac{۲}{۹} \left(-\frac{۵}{t} + ۲t\right) + K$$

که در آن

$$t = \frac{(۷x - ۱۰ - x^۲)^{۱/۲}}{x - ۲}$$

مثال ۲. انتگرال

$$J = \int \frac{۱}{x(x^۲ + x + ۱)^{۱/۲}} dx$$

را در نظر بگیرید. چون $c = ۱ > ۰$، می‌توانیم جایگزینی دوّم اویلر را به کار ببریم:

$$(x^۲ + x + ۱)^{۱/۲} = tx + ۱$$

بنابراین،

$$x = \frac{-۲t + ۱}{t^۲ - ۱}$$

و خواهیم داشت:

$$J = \int \frac{۲}{۲t - ۱} dt = \ln|۲t - ۱| + K$$

که در آن

$$t = \frac{(x^۲ + x + ۱)^{۱/۲} - ۱}{x}$$

لم. فرض کنید R تابعی گویا از x و y و $y^2 = P(x)$ یک چندجمله‌ای برحسب x باشد. آن‌گاه R قابل نمایش به صورت

$$R(x,y) = R_1(x) + R_2(x)y = R_1(x) + R_3(x)\frac{1}{y}$$

است که در آن R_1، R_2، و R_3 توابعی گویا از xاند.

برهان. چون R تابعی گویا از x و y است، می‌توانیم R را خارج‌قسمت دوچندجمله‌ای برحسب y بدانیم که ضرایبش چندجمله‌ایهایی از x هستند، یعنی، خارج‌قسمت دو عبارت به صورت

$$H_0(x) + H_1(x)y + H_2(x)y^2 + \dots H_n(x)y^n \qquad (۷۸.۶)$$

که در آن H_0، H_1، ...، H_n چندجمله‌ایهایی از x هستند. امّا $y^2 = P(x)$ یک چندجمله‌ای برحسب x است و، از این رو، هر توان زوجی از y نیز یک چندجمله‌ای از x است و هر توان فرد آن حاصل‌ضرب y و یک چندجمله‌ای از xاست. معنایش این است که (۷۸.۶) به صورت

$$P_0^*(x) + P_1^*(x)y$$

درمی‌آید که در آن P_0^* و P_1^* چندجمله‌ایهایی از xاند. از این رو،

$$R(x,y) = \frac{P_0^*(x) + P_1^*(x)y}{Q_0^*(x) + Q_1^*(x)y} \qquad (۷۹.۶)$$

اکنون صورت و مخرج (۷۹.۶) را در $Q_0^*(x) - Q_1^*(x)y$ ضرب می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$(P_0^* + P_1^*y)(Q_0^* - Q_1^*y) = P_0^*Q_0^* - P_1^*Q_1^*y^2 + (P_1^*Q_0^* - P_0^*Q_1^*)y = P_0 + Q_0y$$

و

$$(Q_0^* + Q_1^*y)(Q_0^* - Q_1^*y) = (Q_0^*)^2 - (Q_1^*)^2y^2 = D$$

که در آن P_0، Q_0، D چندجمله‌ایهایی از xاند. سرانجام

$$R(x,y) = R_1(x) + R_2(x)y \quad \text{یا} \quad R(x,y) = \frac{P_0(x)}{D(x)} + \frac{Q_0(x)}{D(x)}y$$

اگر قرار دهیم $R_3(x) = R_2(x)P(x)$ و به یاد داشته باشیم که $y^2 = P(x)$، خواهیم داشت:

$$R(x,y) = R_1(x) + R_3(x)\frac{1}{y}$$

و برهان کامل می‌شود.

قضیهٔ ۸.۶. اگر $R(x,y)$ تابعی گویا از x و y باشد و

$$y=\sqrt{Y}, \qquad Y=ax^۲+bx+c$$

آن‌گاه، بنا بر لم،

$$R(x,y)=R_۱(x)+R_۲(x)\frac{۱}{y}$$

که در آن $R_۱$ و $R_۲$ توابعی گویا می‌باشند. در محاسبهٔ انتگرال

$$\int R(x,y)dx=\int R_۱(x)dx+\int R_۲(x)\frac{۱}{y}dx$$

انتگرال $\int R_۱(x)dx$ ساده است و انتگرال

$$\int R_۲(x)\frac{۱}{y}dx=\int\frac{R_۲(x)}{\sqrt{Y}}dx=\int\frac{R_۲(x)}{(ax^۲+bx+c)^{۱/۲}}dx$$

به انتگرالهایی از سه نوع زیر تبدیل می‌شود:

(یک) $\int\frac{P(x)}{(ax^۲+bx+c)^{۱/۲}}dx$، که در آن P یک چندجمله‌ای است؛

(دو) $\int\frac{A}{(x-\alpha)^k(ax^۲+bx+c)^{۱/۲}}dx$، که در آن α حقیقی است و $k=۰,۱,۲,\ldots$.

(سه) $\int\frac{Bx+C}{(x^۲+px+q)^m(ax^۲+bx+c)^{۱/۲}}dx$، که در آن $m=۰,۱,۲,\ldots$ و ریشه‌های $x^۲+px+q$ اعدادی مختلط‌اند.

برهان. برای انتگرالگیری از

$$\int\frac{R_۲(x)}{(ax^۲+bx+c)^{۱/۲}}dx$$

که در آن $R_۲$ تابع گویایی از x است، نخست جزء صحیح $P(x)$ تابع گویای $R_۲(x)$ را جدا می‌کنیم و سپس جزء کسری (سره) باقیماندهٔ $R_۲(x)$ را به کسرهای جزئی تجزیه می‌کنیم.

بحث. حال، طریق محاسبهٔ سه نوع انتگرال مذکور در قضیهٔ ۸.۶ را بررسی می‌کنیم.

(یک) قرار می‌دهیم

$$V_m = \int \frac{x^m}{(ax^۲ + bx + c)^{۱/۲}} dx = \int \frac{x^m}{\sqrt{Y}} dx, \qquad m = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

برای چنین انتگرالهایی، به آسانی می‌توانیم یک فرمول بازگشتی بیابیم. برای این منظور، فرض می‌کنیم $m \geq ۱$ و پس از محاسبهٔ مشتق

$$\begin{aligned}
(x^{m-۱}Y)' &= (m-۱)x^{m-۲}\sqrt{Y} + \frac{x^{m-۱}Y'}{۲\sqrt{Y}} \\
&= \frac{۲(m-۱)x^{m-۲}(ax^۲ + bx + c) + x^{m-۱}(۲ax + b)}{۲\sqrt{Y}} \\
&= ma\frac{x^m}{\sqrt{Y}} + (m - \tfrac{۱}{۲})b\frac{x^{m-۱}}{\sqrt{Y}} + (m-۱)c\frac{x^{m-۲}}{\sqrt{Y}}
\end{aligned}$$

از اتحاد حاصل انتگرال می‌گیریم؛ خواهیم داشت:

$$x^{m-۱}\sqrt{Y} = maV_m + (m - \tfrac{۱}{۲})bV_{m-۱} + (m-۱)cV_{m-۲}$$

به‌ازای $m = ۱$ چنین حاصل می‌شود:

$$V_۱ = \frac{۱}{a}\sqrt{Y} - \frac{b}{۲}V_۰$$

به‌ازای $m = ۲$ (و با استفاده از $V_۱$) چنین به دست می‌آید:

$$V_۲ = \frac{۱}{۴a^۲}(۲ax - ۳b)\sqrt{Y} + \frac{۱}{۸a^۲}(۳b^۲ - ۴ac)V_۰$$

با ادامهٔ این فرایند، به فرمول کلی

$$V_m = P_{m-۱}(x)\sqrt{Y} + \lambda_m V_۰ \qquad (۸۰.۶)$$

می‌رسیم که در آن $P_{m-۱}(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $m - ۱$ بوده و λ_m یک ثابت است. از این رو، همهٔ انتگرالهای V_m قابل تبدیل به $V_۰$ است.

اگر چندجمله‌ای $P(x)$ در انتگرال

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{Y}} dx$$

دارای درجهٔ n باشد، آن‌گاه این انتگرال ترکیبی خطی از انتگرالهای V_0، V_1، ...، V_n است و، از این رو، براساس (۸۰.۶)، قابل نمایش به صورت

$$\int \frac{P(x)}{\sqrt{Y}}dx = Q(x)\sqrt{Y} + \lambda \int \frac{1}{\sqrt{Y}}dx \qquad (۸۱.۶)$$

می‌باشد که در آن $Q(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n-1$ بوده و λ یک ثابت است.

چندجمله‌ای Q و ثابت λ به طور کلی به روش ضرایب نامعین به دست می‌آیند. با مشتقگیری از (۸۱.۶) و ضرب معادلهٔ حاصل در $\sqrt{Y}$، خواهیم داشت:

$$P(x) = Q'(x)(ax^2 + bx + c) + \frac{1}{2}Q(x)(2ax + b) + \lambda$$

اگر به جای $Q(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $n-1$ با ضرایب نامعین جایگزین کنیم، می‌بینیم که در طرف راست معادله یک چندجمله‌ای برحسب x از درجهٔ n خواهیم داشت. از مقایسهٔ ضرایب قوای مشابه، به دستگاهی از $n+1$ معادلهٔ خطی می‌رسیم که از آن می‌توانیم n ضریب Q و ثابت λ را محاسبه کنیم. از بررسی طریق استنتاج دستگاه متشکل از $n+1$ معادلهٔ خطی به آسانی می‌توان دید که این دستگاه سازگار است و جوابی منحصربه‌فرد دارد.

(دو) انتگرال

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k(ax^2 - bx + c)^{1/2}}dx$$

با جایگزینی

$$x - \alpha = \frac{1}{t}$$

به انتگرالی از نوعی که در بالا مورد بحث قرارگرفت قابل تبدیل است. در واقع، اگر $x - \alpha = 1/t$ آن‌گاه

$$dx = -\frac{1}{t^2}dt, \qquad ax^2 + bx + c = \frac{(a\alpha^2 + b\alpha + c)t^2 + (2a\alpha + b)t + a}{t^2}$$

و، از این رو، (محض سهولت، مخصوصاً فرض می‌کنیم که $x > \alpha$، $t > 0$.)

$$\int \frac{1}{(x-\alpha)^k(ax^2 + bx + c)^{1/2}}dx = -\int \frac{t^{k-1}}{(a\alpha^2 + b\alpha + c)t^2 + (2a\alpha + b)t + a}dt$$

اگر $a\alpha^2 + b\alpha + c = 0$، یعنی، اگر α یک ریشهٔ Y باشد، این انتگرال بیشتر ساده می‌شود و انتگرالی می‌یابیم از نوعی که در قضیهٔ ۵.۶ مورد بررسی قرار گرفت.

(سه) (الف) انتگرال

$$\int \frac{Bx+C}{(x^{۲}+px+q)^m(ax^{۲}+bx+c)^{۱/۲}}dx$$

را در نظر می‌گیریم که در آن $m = ۰, ۱, ۲, \ldots$ و ریشه‌های $x^{۲}+px+q$ مختلط‌اند و فرض می‌کنیم که اختلاف عبارتهای $ax^{۲}+bx+c$ و $x^{۲}+px+q$ فقط در عامل a است. بنابراین، انتگرال مفروض به شکل

$$\int \frac{Bx+C}{(ax^{۲}+bx+c)^{(۲m+۱)/۲}}dx$$

است که آن را می‌توان به صورت

$$\frac{B}{۲a}\int \frac{۲ax+b}{(ax^{۲}+bx+c)^{(۲m+۱)/۲}}dx + \left(C-\frac{Bb}{۲a}\right)\int \frac{۱}{(ax^{۲}+bx+c)^{(۲m+۱)/۲}}dx \qquad (۸۲.۶)$$

نوشت. نخستین انتگرال با جایگزینی $t = ax^{۲}+bx+c$ به آسانی قابل محاسبه است. برای محاسبهٔ

$$\int \frac{۱}{(ax^{۲}+bx+c)^{(۲m+۱)/۲}}dx = \int \frac{۱}{Y^{(۲m+۱)/۲}}dx$$

از جایگزینی آبل

$$t = (\sqrt{Y})' = \frac{Y}{۲\sqrt{Y}} = \frac{ax+b/۲}{(ax^{۲}+bx+c)^{۱/۲}} \qquad (۸۳.۶)$$

استفاده می‌کنیم. اگر طرفین معادله را مجذور و آن‌گاه در $۴Y$ ضرب کنیم، خواهیم داشت:

$$۴t^{۲}Y = (Y')^{۲} = ۴a^{۲}x^{۲}+۴abx+b^{۲}$$

از این رو،

$$۴(a-t^{۲})Y = ۴ac-b^{۲}$$

و

$$Y^m = \left(\frac{۴ac-b^{۲}}{۴}\right)^m \frac{۱}{(a-t^{۲})^m} \qquad (۸۴.۶)$$

سپس، با مشتقگیری از

$$t\sqrt{Y} = ax+\frac{b}{۲}$$

در می‌یابیم که

$$\sqrt{Y}\,dt + t^{2}dx = a\,dx$$

یعنی

$$\frac{dx}{\sqrt{Y}} = \frac{dt}{a - t^{2}} \tag{۸۵.۶}$$

به استناد (۸۴.۶) و (۸۵.۶)،

$$\frac{dx}{Y^{(2m+1)/2}} = \left(\frac{4}{4ac - b^{2}}\right)^{m} (a - t^{2})^{m-1}dt$$

و، بنابراین،

$$\int \frac{1}{Y^{(2m+1)/2}}dx = \left(\frac{4}{4ac - b^{2}}\right)^{m} \int (a - t^{2})^{m-1}dt \tag{۸۶.۶}$$

به این ترتیب، مسألهٔ مورد بحث به انتگرالگیری از یک چندجمله‌ای می‌انجامد. به عنوان مثال، به‌ازای $m = 1$،

$$\int \frac{1}{(ax^{2} + bx + c)^{3/2}}dx = \frac{2}{4ac - b^{2}}\,\frac{2ax + b}{(ax^{2} + bx + c)^{1/2}}$$

(ب) اکنون حالت کلی را در نظر می‌گیریم و، به لحاظ رعایت تقارن در نمادگذاری، قرار می‌دهیم

$$ax^{2} + bx + c = a(x^{2} + p'x + q')$$

می‌توانیم فرض کنیم که $x^{2} + p'x + q'$ با $x^{2} + px + q$ یکی نباشد. می‌خواهیم متغیر x را به طریقی تبدیل کنیم که جمل خطی $x^{2} + px + q$ و $x^{2} + p'x + q'$ به طور همزمان صفر شوند.

نخست، فرض می‌کنیم که $p \neq p'$. در این صورت، به کمک جایگزینی خطی کسری

$$x = \frac{\mu t + \nu}{t + 1} \tag{۸۷.۶}$$

که ضرایب μ و ν به طور مناسب انتخاب شوند، می‌توانیم به هدف خود برسیم. با این جایگزینی، درمی‌یابیم که

$$x^{2} + px + q = \frac{(\mu^{2} + p\mu + q)t^{2} + [2\mu\nu + p(\mu + \nu) + 2q]t + (\nu^{2} + p\nu + q)}{(t + 1)^{2}}$$

و فرمول مشابهی برای $x^{2} + p'x + q'$ نیز خواهیم داشت. ضرایب مطلوب از روی شرایط

$$2\mu\nu + p(\mu+\nu) + 2q = 0, \qquad 2\mu\nu + p'(\mu+\nu) + 2q' = 0$$

یا

$$\mu + \nu = -2\frac{q-q'}{p-p'}, \qquad \mu\nu = \frac{p'q - pq'}{p-p'}$$

تعیین می‌شوند. از این رو، μ و ν ریشه‌های معادلهٔ

$$(p-p')z^{2} + 2(q-q')z + (p'q - pq') = 0$$

می‌باشند. برای این که ریشه‌ها حقیقی و متمایز باشند، (لازم و) کافی است که

$$(q-q')^{2} - (p-p')(p'q-pq') > 0 \qquad (۸۸.۶)$$

یا، به عبارت معادل،

$$[2(q+q') - pp']^{2} > (4q - p^{2})(4q' - p'^{2}) \qquad (۸۹.۶)$$

توجه کنید که در حالت $\mu = \nu$ این جایگزینی فاقد معنی است، زیرا در چنین حالتی $x = \nu$. امّا $4q - p^{2} > 0$ (زیرا $x^{2} + px + q$ دارای ریشه‌های مختلط است)؛ از این رو، در صورتی که به طور همزمان $4q' - p'^{2} < 0$ ، رابطهٔ (۸۹.۶) مطمئناً برقرار خواهد بود.

فقط حالت $4q' - p'^{2} > 0$ برای بررسی باقی می‌ماند. از این، نتیجه می‌شود که $q' > 0$، و چون q نیز مثبت است و از این رو $4\sqrt{qq'} > pp'$، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}[2(q+q') - pp']^{2} &\geq [4\sqrt{qq'} - pp']^{2} \\ &= (4q-p^{2})(4q'-p'^{2}) + 4(p\sqrt{q'} - p'\sqrt{q})^{2} \\ &\geq (4q-p^{2})(4q'-p'^{2})\end{aligned}$$

[زیرا $\sqrt{qq'} \leq (q+q')/2$]. در این رابطه علامت $\geq$ دوبار آمده است؛ علامت تساوی در هر دو حالت به طور همزمان رخ نمی‌دهد: اگر $q \neq q'$ تساوی در حالت اول برقرار نمی‌شود، و اگر $q = q'$ تساوی در حالت دوم اتفاق نمی‌افتد. به این ترتیب، نامساوی (۸۹.۶) و، همراه با آن، نامساوی (۸۸.۶) ثابت می‌شوند.

حال، به کمک جایگزینی (۸۷.۶)، انتگرال

$$\int \frac{Bx + C}{(x^{2}+px+q)^{m}(ax^{2}+bx+c)^{1/2}}dx$$

را به انتگرالی به صورت

$$\int \frac{P(t)}{(t^۲ + \lambda)^m (\alpha t^۲ + \beta)^{۱/۲}} dt$$

تبدیل می‌کنیم‌که در آن $P(t)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ $۲m - ۱$ است و $\lambda > ۰$. با تجزیهٔ کسر گویای سرهٔ (فرض می‌کنیم که $m > ۱$)

$$\frac{P(t)}{(t^۲ + \lambda)^m}$$

به کسرهای جزئی، مجموعی از انتگرالهایی به صورت

$$\int \frac{Mt + N}{(t^۲ + \lambda)^k (\alpha t^۲ + \beta)^{۱/۲}} dt, \qquad (k = ۱, ۲, \ldots, m) \qquad (۹۰.۶)$$

حاصل می‌شود.

در حالت $p = p'$، حالتی که تاکنون از بحث خارج بوده‌است، جمل درجهٔ اوّل با تدبیر ساده‌تری صفر می‌شوند، یعنی، با جایگزینی

$$x = t - \frac{p}{۲}$$

با این جایگزینی، انتگرالی از نوع (۹۰.۶) فوراً به دست می‌آید.

امّا

$$\int \frac{Mt + N}{(t^۲ + \lambda)^k (\alpha t^۲ + \beta)^{۱/۲}} dt = \frac{M}{\alpha} \int \frac{\alpha t}{(t^۲ + \lambda)^k (\alpha t^۲ + \beta)^{۱/۲}} dt + N \int \frac{۱}{(t^۲ + \lambda)^k (\alpha t^۲ + \beta)^{۱/۲}} dt \qquad (۹۱.۶)$$

نخستین انتگرال سمت راست (۹۱.۶) با جایگزینی $s = (\alpha t^۲ + \beta)^{۱/۲}$ فوراً محاسبه می‌شود؛ در مورد انتگرال دوّم، جایگزینی آبل

$$s = \frac{\alpha t}{(\alpha t^۲ + \beta)^{۱/۲}}$$

را به کار می‌بریم. به استناد (۸۶.۶)، خواهیم داشت:

$$\frac{dt}{(\alpha t^۲ + \beta)^{۱/۲}} = \frac{ds}{\alpha - s^۲}$$

بعلاوه،

$$t^۲ + \lambda = \frac{(\beta - \alpha\lambda)s^۲ + \lambda\alpha^۲}{\alpha(\alpha - s^۲)}$$

به این ترتیب،

$$\int \frac{1}{(t^2+\lambda)^k(\alpha t^2+\beta)^{1/2}}dt = \alpha^k \int \frac{(\alpha - s^2)^{k-1}}{[(\beta-\alpha\lambda)s^2+\lambda\alpha^2]^k}ds$$

از این رو، انتگرال مورد بحث به انتگرالی از یک تابع گویا تبدیل شده است.

ملاحظات. از قضیهٔ ۸.۶، توأم با بحث بالا، روشی برای محاسبهٔ انتگرال (۷۷.۶) بدون استفاده از جایگزینی اویلر به دست می‌آید. بالاخص، جایگزینیهای اویلر غالباً به محاسبات پیچیده می‌انجامند.

انتگرال (۷۷.۶) به وسیلهٔ جایگزینیهای مثلثاتی زیر قابل تبدیل به صورت (۶۹.۶) است:

$$\begin{aligned}
x+\frac{b}{2a} &= \frac{(b^2-4ac)^{1/2}}{2a}\sin t\\
&= \frac{(b^2-4ac)^{1/2}}{2a}\cos t, \qquad (a<0,\ 4ac-b^2<0)\\
x+\frac{b}{2a} &= \frac{(b^2-4ac)^{1/2}}{2a}\sec t\\
&= \frac{(b^2-4ac)^{1/2}}{2a}\csc t \qquad (a>0,\ 4ac-b^2<0)\\
x+\frac{b}{2a} &= \frac{(4ac-b^2)^{1/2}}{2a}\tan t\\
&= \frac{(4ac-b^2)^{1/2}}{2a}\cot t \qquad (a>0,\ 4ac-b^2>0)
\end{aligned}$$

معذالک، این روش نیز غالباً به محاسبات پیچیده می‌انجامد.

مثال ۱. فرض کنید

$$I = \int \frac{x+3}{(4x^2+4x-3)^{1/2}}dx$$

با استفاده از جایگزینی $t = 2x+1$ یا $x = (t-1)/2$، درمی‌یابیم که

$$I = \frac{1}{4}\int \frac{t+5}{(t^2-4)^{1/2}}dt$$

اگر قرار دهیم $t = 2\sec s$ و پس از انتگرالگیری به متغیر t برگردیم، خواهیم داشت:

$$I = \frac{1}{4}(t^2-4)^{1/2} + \frac{5}{4}\ln|t+(t^2-4)^{1/2}| + K$$

بنابراین،

$$I = \frac{1}{4}(4x^2+4x-3)^{1/2} + \frac{5}{4}\ln|2x+1+(4x^2+4x-3)^{1/2}| + K$$

مثال ۲. فرض کنید

$$J = \int \frac{x^۳ - x - ۱}{(x^۲ + ۲x + ۲)^{۱/۲}} dx$$

اگر قراردهیم $Q(x) = Ax^۲ + Bx + C$، ملاحظه می‌کنیم که به استناد (۸۱.۶)،

$$J = (Ax^۲ + Bx + C)(x^۲ + ۲x + ۲)^{۱/۲} + \lambda \int \frac{۱}{(x^۲ + ۲x + ۲)^{۱/۲}} dx$$

با مشتقگیری از طرفین این تساوی، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} J' &= \frac{x^۳ - x - ۱}{(x^۲ + ۲x + ۲)^{۱/۲}} \\ &= (۲Ax + B)(x^۲ + ۲x + ۲)^{۱/۲} \\ &+ (Ax^۲ + Bx + C)\frac{x + ۱}{(x^۲ + ۲x + ۲)^{۱/۲}} + \frac{\lambda}{(x^۲ + ۲x + ۲)^{۱/۲}} \end{aligned}$$

از این رو،

$$x^۳ - x - ۱ = (۲Ax + B)(x^۲ + ۲x + ۲) + (Ax^۲ + Bx + C)(x + ۱) + \lambda$$

اگر ضرایب قوای مشابه x را مساوی هم قرار دهیم، دستگاهی از معادلات با جواب $A = \frac{۱}{۳}$، $B = -\frac{۵}{۶}$، $C = \frac{۱}{۶}$، $\lambda = \frac{۱}{۲}$ به دست می‌آید. به این ترتیب،

$$J = \left(\tfrac{۱}{۳}x^۲ - \tfrac{۵}{۶}x + \tfrac{۱}{۶}\right)(x^۲ + ۲x + ۲)^{۱/۲} + \frac{۱}{۲}\int \frac{۱}{(x^۲ + ۲x + ۲)^{۱/۲}} dx$$

که در آن

$$\begin{aligned} \int \frac{۱}{(x^۲ + ۲x + ۲)^{۱/۲}} dx &= \int \frac{۱}{[(x + ۱)^۲ + ۱]^{۱/۲}} d(x + ۱) \\ &= \ln |x + ۱ + (x^۲ + ۲x + ۲)^{۱/۲}| + K \end{aligned}$$

مثال ۳. انتگرال

$$\int \frac{۱}{(x - ۱)^۳(x^۲ - ۲x - ۱)^{۱/۲}} dx$$

با جایگزینی $x - ۱ = ۱/t$ (فرض می‌کنیم که $x > ۱$، $t > ۰$) به انتگرال

$$-\int \frac{t^۲}{(۱ - ۲t^۲)^{۱/۲}} dt$$

تبدیل می‌شود. این انتگرال با جایگزینی مثلثاتی $t = \sqrt{۲}\sin s$ قابل محاسبه است؛ اگر پس از انتگرالگیری به متغیر t برگردیم، خواهیم داشت:

$$-\int \frac{t^{۲}}{(۱-۲t^{۲})^{۱/۲}}dt = \frac{۱}{۴}t(۱-t^{۲})^{۱/۲} - \frac{۱}{۴\sqrt{۲}}\sin^{-۱}(\sqrt{۲}t) + K$$

به این ترتیب،

$$\int \frac{۱}{(x-۱)^{۳}(x^{۲}-۲x-۱)^{۱/۲}}dx = \frac{۱}{۴(x-۱)^{۲}}(x^{۲}-۲x-۱)^{۱/۲} - \frac{۱}{۴\sqrt{۲}}\sin^{-۱}\left(\frac{\sqrt{۲}}{x-۱}\right) + K$$

مثال ۴. فرض کنید

$$H = \int \frac{۱}{(۲x^{۲}-x+۲)^{۷/۲}}dx$$

با اعمال جایگزینی آبل

$$t = \frac{۴x-۱}{۲(۲x^{۲}-x+۲)^{۱/۲}}$$

براساس (۸۶.۶)، خواهیم داشت:

$$H = \frac{۶۴}{۳۳۷۵}\int (۲-t^{۲})^{۲}dt$$

بنابراین،

$$H = \frac{۶۴}{۳۳۷۵}\left(۲\frac{۴x-۱}{(۲x^{۲}-x+۲)^{۱/۲}} - \frac{۱}{۶}\frac{(۴x-۱)^{۳}}{(۲x^{۲}-x+۲)^{۳/۲}} + \frac{۱}{۱۶۰}\frac{(۴x-۱)^{۵}}{(۲x^{۲}-x+۲)^{۵/۲}}\right) + K$$

مثال ۵. انتگرال

$$\int \frac{x+۳}{(x^{۲}-x+۱)(x^{۲}+x+۱)^{۱/۲}}dx$$

را در نظر بگیرید. در این مثال، جایگزینی خطی کسری (۸۷.۶) به نتیجهٔ

$$x^{۲} \pm x + ۱ = \frac{(\mu^{۲} \pm \mu + ۱)t^{۲} + [۲\mu\nu \pm (\mu+\nu+۲)]t + (\nu^{۲} \pm \nu + ۱)}{(t+۱)^{۲}}$$

می‌انجامد. شرایط

$$۲\mu\nu + (\mu+\nu) + ۲ = ۰$$

یا $\nu = 0$، $\mu + \nu = -1$، $\mu\nu = 1$، مثلاً، به‌ازای $\mu = 1$ و $\nu = -1$ برقرارند. از این رو،

$$x = \frac{t-1}{t+1}, dx = \frac{dt}{(t+1)^2}, x+3 = \frac{4t+2}{t+1}, x^2+x+1 = \frac{t^2+3}{(t+1)^2}$$

و اگر فرض کنیم $t+1 > 0$، یعنی، $x < 1$،

$$(x^2+x+1)^{1/2} = \frac{(3t^2+1)^{1/2}}{t+1}$$

به این ترتیب،

$$\int \frac{x+3}{(x^2-x+1)(x^2+x+1)^{1/2}}dx = \int \frac{8t+4}{(t^2+3)(3t^2+1)^{1/2}}dt$$

انتگرال حاصل مساوی مجموع

$$8\int \frac{t}{(t^2+3)(3t^2+1)^{1/2}}dt + 4\int \frac{1}{(t^2+3)(3t^2+1)^{1/2}}dt$$

است. نخستین جمعوند با جایگزینی $s = (3t^2+1)^{1/2}$ قابل محاسبه است و حاصلش

$$\sqrt{8}\tan^{-1}\left(\frac{3t^2+1}{8}\right)^{1/2} + K_1$$

است. برای جمعوند دوّم، جایگزینی آبل

$$s = \frac{3t}{(3t^2+1)^{1/2}}$$

را به کار می‌بریم که با آن انتگرال مورد بحث به انتگرال

$$12\int \frac{1}{27-8s^2}ds = \frac{1}{\sqrt{6}}\ln\left|\frac{3\sqrt{3}+2\sqrt{2}s}{3\sqrt{3}-2\sqrt{2}s}\right| + K_2$$

تبدیل می‌شود. فقط این باقی می‌ماند که به متغیر اصلی x برگردیم.

۵.۶ بعضی کاربردهای انتگرالگیری

بحث را با فهرستی از فرمولهایی آغاز می‌کنیم که به کاربردهای وسیع انتگرال در هندسه اشاراتی دارند.

مساحت A ناحیهٔ R زیر نمودار یک تابع مثبت و پیوسته مانند f، بین $x = a$ و $x = b$ با $a < b$، از فرمول

$$A = \int_a^b f(x)dx \qquad (۹۲.۶)$$

به دست می‌آید. وقتی که این ناحیهٔ R حول محور xها دوران کند، حجم V_x جسم حاصل از فرمول

$$V_x = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx \qquad (۹۳.۶)$$

به دست می‌آید. زمانی که R حول محور yها دوران کند، حجم V_y جسم حاصل از فرمول

$$V_y = 2\pi \int_a^b x f(x)dx \qquad (۹۴.۶)$$

به دست می‌آید مشروط به این که یا $a \geq 0$ یا $b \leq 0$. سپس، نمودار تابع $y = f(x)$ را در بازهٔ $a \leq x \leq b$ به C نشان می‌دهیم. اگر f مشتق‌پذیر باشد و f' بر $[a, b]$ پیوسته باشد، آن‌گاه طول L منحنی C از فرمول

$$L = \int_a^b \{1 + [f'(x)]^2\}^{1/2} dx \qquad (۹۵.۶)$$

به دست می‌آید. (این فرمول حتی وقتی که f تابعی مثبت نباشد معتبر است.) اگر منحنی C حول محور xها دوران کند، مساحت سطح S_x سطح حاصل از دوران از فرمول

$$S_x = 2\pi \int_a^b f(x)\{1 + [f'(x)]^2\}^{1/2} dx \qquad (۹۶.۶)$$

به دست می‌آید. اگر C حول محور yها دوران کند، مساحت سطح S_y سطح حاصل از دوران از فرمول

$$S_y = 2\pi \int_a^b x\{1 + [f'(x)]^2\}^{1/2} dx \qquad (۹۷.۶)$$

به دست می‌آید مشروط به این که یا $a \geq 0$ یا $b \leq 0$.

فرمولهای (۹۳.۶) و (۹۴.۶) صرفاً نمونه‌هایی از یک فرمول کلی‌ترند. اگر جسمی بین a و b از محور xها قرار گیرد و مساحت مقطع عرضی آن برحسب x عبارت باشد از $A(x)$، که در آن A تابعی پیوسته است، آن‌گاه حجم V جسم از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$V = \int_a^b A(x)dx \qquad (۹۸.۶)$$

فرمولهای مساحت و طول قوس را در حالتی که ناحیه یا منحنی مفروض برحسب مختصات قطبی مشخص شده باشد نیز می‌توان به دست آورد. فرض کنید که ناحیهٔ R محدود شده باشد به بردارهای شعاعی $\theta = \alpha$، $\theta = \beta$، و منحنی C که نمودار $r = f(\theta)$ است. در این صورت، مساحت A ناحیهٔ R را می‌توان از فرمول

$$A = \frac{1}{2}\int_{\alpha}^{\beta}[f(\theta)]^2 d\theta \qquad (۹۹.۶)$$

به دست آورد، در حالی که طول L منحنی C از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$L = \int_{\alpha}^{\beta}\{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2\}^{1/2} d\theta \qquad (۱۰۰.۶)$$

صورت دیگری از فرمول (۱۰۰.۶) سراغ داریم که گاهی مفید واقع می‌شود. اگر C نمودار $\theta = g(r)$ به‌ازای r بین r_1 و r_2 باشد، آن‌گاه

$$L = \int_{r_1}^{r_2}\{r^2[g'(r)]^2 + 1\}^{1/2} dr \qquad (۱۰۱.۶)$$

در حالت کلی‌تر، اگر مختصات منحنی با معادلات پارامتری

$$y = y(t) \quad \text{و} \quad x = x(t)$$

داده شده باشد و $a = x(t_1)$ و $b = x(t_2)$، آن‌گاه مساحت A ناحیهٔ محدود به منحنی C، خطوط $x = a$ و $x = b$، و محور xها از فرمول

$$A = \left|\int_{t_1}^{t_2} y(t)x'(t)dt\right| \qquad (۱۰۲.۶)$$

به دست می‌آید مشروط به این که $x(t)$ و $y(t)$ دارای مشتقات پیوسته باشند و $y(t)$ بر $[t_1, t_2]$ اکیداً صعودی باشد. طول L منحنی C بین a و b از فرمول

$$L = \int_{t_1}^{t_2}\{[y'(t)]^2 + [x'(t)]^2\}^{1/2} dt \qquad (۱۰۳.۶)$$

به دست می‌آید مشروط به این که $x(t)$ و $y(t)$ بر $[t_1, t_2]$ دارای مشتقات پیوسته باشند.

سرانجام، اگر ناحیهٔ R محدود باشد به نمودارهای دو تابع پیوستهٔ f_1 و f_2 به طوری که به‌ازای $a \le x \le b$ داشته باشیم $f_2(x) \ge f_1(x)$ ودو خط راست $x = a$ و $x = b$، آن‌گاه مساحت A ناحیهٔ R از فرمول

$$A = \int_{a}^{b}[f_2(x) - f_1(x)]dx \qquad (۱۰۴.۶)$$

به دست می‌آید. فرض کنید مرز ناحیهٔ R یک منحنی بستهٔ ساده باشد (منحنی‌ای که هیچ گاه خودش را قطع نمی‌کند.) و این مرز با معادلات پارامتری $x = x(t)$ و $y = y(t)$ داده شده باشد به طوری که $x'(t)$ و $y'(t)$ توابع پیوسته‌ای بر $[t_۱, t_۲]$ باشند که $t_۱$ و $t_۲$، به ترتیب، مقادیری از پارامتر t متناظر ابتدا و انتهای حرکت بر روی مرز باشند که در جهت مثبت پیموده شود. (یعنی، جهتی که اگر متحرکی بر روی منحنی مرزی در این جهت حرکت کند، ناحیهٔ مورد بحث همواره در طرف چپ متحرک باقی بماند.) در این صورت، مساحت A ناحیهٔ R با یکی از سه فرمول زیر قابل محاسبه است:

$$A = -\int_{t_۱}^{t_۲} y(t)x'(t)dt = \int_{t_۱}^{t_۲} x(t)y'(t)dt = \frac{۱}{۲}\int_{t_۱}^{t_۲} \{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\}dt \qquad (۱۰۵.۶)$$

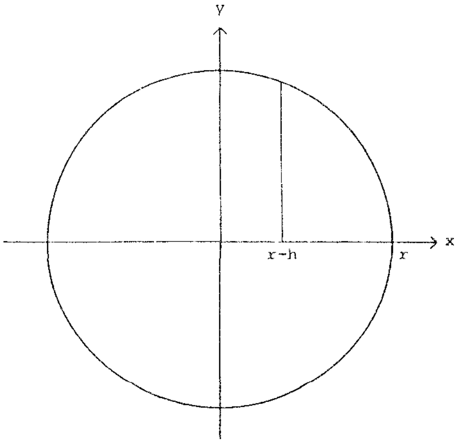
برای تشریح فرمولها، چند مثال را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مثال ۱. حجم یک قطعهٔ کروی با یک قاعده از فرمول

$$\pi h^۲ \left(r - \frac{h}{۳}\right) \qquad (۱۰۶.۶)$$

به دست می‌آید که در آن r شعاع کره و h ارتفاع قطعه است.

در واقع، به استناد (۹۳.۶)، حجم جسم مورد بحث برابر است با (شکل ۴.۶ را ببینید.)



شکل ۴.۶

$$\pi \int_{r-h}^{r} (r^۲ - x^۲)dx = \pi \left(r^۲x - \frac{x^۳}{۳}\right)\Big|_{r-h}^{r} = \pi h^۲ \left(r - \frac{h}{۳}\right)$$

قبلاً فرمول (۱۰۶.۶) در مثال ۴ بخش ۴ فصل ۴ به کار برده شده است.

مثال ۲. مساحت سطح یک قطعهٔ کروی با یک قاعده از فرمول

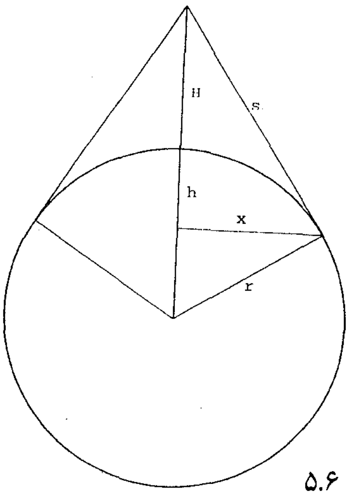
$$۲\pi rh \qquad (۱۰۷.۶)$$

به دست می‌آید که در آن r شعاع کره و h ارتفاع قطعه است.

در واقع، به استناد (۹۵.۶)، مساحت سطح مورد بحث برابر است با (شکل ۴.۶ را ببینید.)

$$۲\pi \int_{r-h}^{r} r dx = ۲\pi r x|_{r-h}^{r} = ۲\pi r h$$

ملاحظات. یک نتیجهٔ جالب (۱۰۷.۶) واقعیت زیر است که قبلاً ارشمیدس آن را دریافته است: اگر کره‌ای در استوانهٔ مستدیر قائمی محاط شود، آنگاه سطوحی از کره و استوانه که دو صفحهٔ عمود بر محور استوانه از آنها جدا می‌کنند مساحتی یکسان دارند.



شکل ۵.۶

نتیجهٔ دیگر (۱۰۷.۶) این است که: اگر ناظری در ارتفاع H از قطب شمال کره‌ای به شعاع r قرار بگیرد، آن قسمتی از کره برای وی قابل مشاهده است که دارای مساحت

$$\frac{۲\pi H r^{۲}}{H+r} \qquad (۱۰۸.۶)$$

می‌باشد. در واقع، از روی شکل ۵.۶، می‌توان دید که

$$(H+r)^{۲} = r^{۲} + s^{۲}$$

و
$$r^۲ - (r-h)^۲ = x^۲ = s^۲ - (H+h)^۲$$

به این ترتیب،
$$۲hr = ۲Hr - ۲hH \quad \text{یا} \quad r^۲ - (r-h)^۲ = (H+r)^۲ - r^۲ - (H+h)^۲$$

و بنابراین،
$$h = \frac{Hr}{H+r}$$
از جایگزینی این مقدار h در (۱۰۷.۶)، (۱۰۸.۶) را خواهیم داشت.

مثال ۳. چرخزاد

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(۱ - \cos t)$$

مفروض است. (مثال ۲ از بخش ۱ فصل ۵ را ببینید.) می‌خواهیم مساحت ناحیهٔ محدود به یک کمان از این چرخزاد و محور xها را با استفاده از انتگرالگیری بیابیم.

مرز ناحیهٔ مورد بحث از یک کمان چرخزاد $(۰ \leq t \leq ۲\pi)$ و قطعه‌ای از محور x ها $(۰ \leq x \leq ۲\pi a)$ تشکیل شده است. فرمول
$$A = -\int_{t_۱}^{t_۲} y(t)x'(t)dt$$
را به کار می‌بریم. چون بر قطعهٔ محور xها داریم $y = ۰$، مساحت مطلوب از محاسبهٔ انتگرال زیر (با در نظر گرفتن جهت حرکت بر روی مرز) به دست می‌آید:

$$\begin{aligned} A &= -\int_{۲\pi}^{۰} a(۱ - \cos t)a(۱ - \cos t)dt = a^۲ \int_{۰}^{۲\pi} (۱ - \cos t)^۲ dt \\ &= a^۲ \int_{۰}^{۲\pi} (۱ - ۲\cos t + \tfrac{۱}{۲}(۱ + \cos ۲t))dt = ۳\pi a^۲ \end{aligned}$$

بنابراین، مساحت ناحیهٔ محدود به یک کمان چرخزاد و محور xها سه برابر مساحت دایرهٔ مولد است.

مثال ۴. برای تعیین طول یک کمان از چرخزاد

$$x = a(t - \sin t), \qquad y = a(۱ - \cos t)$$

فرمول (۱۰۳.۶) را به کار می‌بریم:

$$L = \int_{\circ}^{\text{۲}\pi} \{a^{\text{۲}} \sin^{\text{۲}} t + a^{\text{۲}}(\text{۱} - \cos t)^{\text{۲}}\}^{\frac{\text{۱}}{\text{۲}}} dt = \text{۲}a \int_{\circ}^{\text{۲}\pi} \left(\sin \frac{t}{\text{۲}}\right) dt = \text{۸}a$$

از این رو، طول هر کمان چرخزاد چهار برابر قطر دایره مولد است، نتیجه‌ای که اولین بار کریستوفر رن، معمار کلیسای سنت پاول، آن را کشف کرد.

مثال ۵. طوقهٔ خم برگی دکارت

$$x^{\text{۳}} + y^{\text{۳}} = \text{۳}axy$$

(مثال ۳ بخش ۳ فصل ۳ و شکل ۶.۶ را ببینید.) دارای مساحت

$$\frac{\text{۳}a^{\text{۲}}}{\text{۲}}$$

است. بعلاوه، مساحت طوقه با مساحت ناحیهٔ بین خم برگی دکارت و مجانب این خم $x + y + a = \circ$ برابر است.

در واقع، با تغییر مختصات به مختصات قطبی، یعنی، با انتخاب

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta$$

و سپس تقسیم بر $r^{\text{۲}}$، معادلهٔ خم در دستگاه مختصات قطبی به دست می‌آید:

$$r = \frac{\text{۳}a(\sin\theta)(\cos\theta)}{\sin^{\text{۳}}\theta + \cos^{\text{۳}}\theta}$$

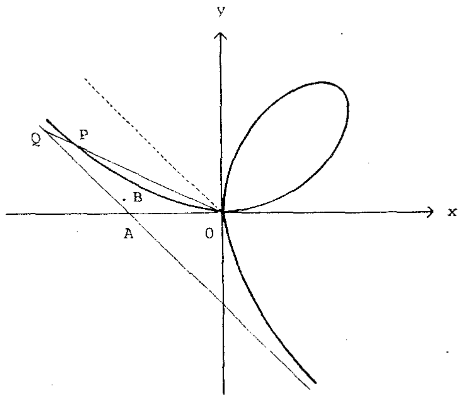
چون زاویهٔ θ در چارک اوّل از ۰ تا $\pi/\text{۲}$ تغییر می‌کند، از (۹۹.۶) نتیجه می‌گیریم که

$$A = \frac{\text{۹}a^{\text{۲}}}{\text{۲}} \int_{\circ}^{\pi/\text{۲}} \frac{(\sin^{\text{۲}}\theta)(\cos^{\text{۲}}\theta)}{(\sin^{\text{۳}}\theta + \cos^{\text{۳}}\theta)^{\text{۲}}} d\theta$$

اگر $\sin\theta$ را در انتگرالده با $(\tan\theta)(\cos\theta)$ عوض کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} A &= \frac{\text{۹}a^{\text{۲}}}{\text{۲}} \int_{\circ}^{\pi/\text{۲}} \frac{\tan^{\text{۲}}\theta}{(\text{۱} + \tan^{\text{۳}}\theta)^{\text{۲}}} d(\tan\theta) \\ &= -\frac{\text{۹}a^{\text{۲}}}{\text{۲}} \frac{\text{۱}}{\text{۳}} \left(\frac{\text{۱}}{\text{۱} + \tan^{\text{۳}}\theta}\right) \Big|_{\circ}^{\pi/\text{۲}} = -\frac{\text{۳}a^{\text{۲}}}{\text{۲}} \frac{\cos^{\text{۳}}\theta}{\sin^{\text{۳}}\theta + \cos^{\text{۳}}\theta} \Big|_{\circ}^{\pi/\text{۲}} = \frac{\text{۳}a^{\text{۲}}}{\text{۲}} \end{aligned}$$

حال، مساحت ناحیهٔ بین منحنی و مجانبش را پیدا خواهیم کرد. خطی که موازی مجانب رسم شده است (خطی که در شکل ۶.۶ به صورت خط چین نشان داده شده است.) زاویهٔ $۳\pi/۴$ با محور xها می‌سازد. خطی از نقطهٔ O رسم می‌کنیم که زاویهٔ برداری آن θ بین $۳\pi/۴$ و π باشد. فرض کنید که این خط منحنی و مجانب را، به ترتیب، در نقاط P و Q قطع کند. (شکل ۶.۶ را ببینید.)



شکل ۶.۶

نخست، مساحت بین منحنی و مجانبش را که در چارک دوم واقع می‌شود محاسبه خواهیم کرد. این مساحت، حد مساحت ناحیهٔ خمیده خطی $OBPQAO$ است وقتی که خط OP با شروع از موضع OA به طرف خط خط‌چین حرکت کند. مساحت مثلث OAQ برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\int_{\theta}^{\pi} r^{۲} d\theta = \frac{۱}{۲}\int_{\theta}^{\pi} \frac{a^{۲}}{(\sin\theta+\cos\theta)^{۲}} d\theta$$

و مساحت ناحیهٔ محدود به منحنی و خط OP برابر است با

$$\frac{۱}{۲}\int_{\theta}^{\pi} \frac{۹a^{۲}(\sin^{۲}\theta)(\cos^{۲}\theta)}{(\sin^{۳}\theta+\cos^{۳}\theta)^{۲}} d\theta$$

به این ترتیب، مساحت ناحیهٔ خمیده خطی $OBPQAO$ عبارت است از

$$\frac{۱}{۲}\int_{۰}^{\pi} \left(\frac{a^{۲}}{(\sin\theta+\cos\theta)^{۲}} - \frac{۹a^{۲}(\sin^{۲}\theta)(\cos^{۲}\theta)}{(\sin^{۳}\theta+\cos^{۳}\theta)^{۲}}\right) d\theta$$
$$= \frac{a^{۲}}{۲}\left(-\frac{۱}{۱+\tan\theta} + \frac{۳}{۱+\tan^{۳}\theta}\right)\Big|_{۰}^{\pi}$$

زیرا

$$\int \frac{(\sin^۲\theta)(\cos^۲\theta)}{(\sin^۳\theta+\cos^۳\theta)^۲}d\theta = \int \frac{(\tan^۲\theta)(\sec^۲\theta)}{(۱+\tan^۳\theta)^۲}d\theta = -\frac{۱}{۳(۱+\tan^۳\theta)} + K$$

و

$$\int \frac{۱}{(\sin\theta+\cos\theta)^۲}d\theta = \int \frac{\sec^۲\theta}{(۱+\tan^۲\theta)^۲}d\theta = -\frac{۱}{۱+\tan\theta} + K$$

امّا، وقتی که $\theta \longrightarrow ۳\pi/۴$، داریم

$$\tan\theta \longrightarrow -۱$$

و

$$\begin{aligned} \frac{۱}{۱+\tan\theta} - \frac{۳}{۱+\tan^۳\theta} &= \frac{\tan^۲\theta - \tan\theta - ۲}{۱+\tan^۳\theta} \\ &= \frac{(\tan\theta+۱)(\tan\theta-۲)}{(\tan\theta+۱)(\tan^۲\theta-\tan\theta+۱)} \\ &= \frac{\tan\theta-۲}{\tan^۲\theta-\tan\theta+۱} \longrightarrow -۱ \end{aligned}$$

بنابراین، مساحت بین منحنی و مجانبش واقع در چارک دوم برابر است با

$$\frac{a^۲}{۲}(۲-۱) = \frac{a^۲}{۲}$$

به دلیل تقارن نسبت به خط $y = x$، $a^۲/۲$ مساحت بین منحنی و مجانبش واقع در چارک چهارم نیز هست. همچنین، مساحت قسمت مثلثی این ناحیه که در چارک سوم واقع می‌شود $a^۲/۲$ است. سرانجام، مساحت بین منحنی و مجانبش برابر است با

$$\frac{a^۲}{۲} + \frac{a^۲}{۲} + \frac{a^۲}{۲} = \frac{۳a^۲}{۲}$$

که همان مساحت طوقه است.

مثال ۶. مساحت ناحیهٔ محصور در بیضی

$$\frac{x^۲}{a^۲} + \frac{y^۲}{b^۲} = ۱$$

πab است.

در واقع، اگر نمایش پارامتری

$$x = a(\cos t), \qquad y = b(\sin t), \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

را در نظر بگیریم، درمی‌یابیم که

$$x(t)y'(t) - y(t)x'(t) = a(\cos t)b(\cos t) + b(\sin t)a(\sin t) = ab$$

از این رو، به استناد (۱۰۵.۶)،

$$A = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \{x(t)y'(t) - y(t)x'(t)\}dt = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} ab\,dt = \pi ab$$

مثال ۷. حجم بیضیوار

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$\frac{4}{3}\pi abc$ است.

در واقع، مقطعی از بیضیوار که با صفحهٔ x ثابت ایجاد می‌شود یک بیضی است:

$$\frac{y^2}{b^2(1 - x^2/a^2)} + \frac{z^2}{c^2(a - x^2/a^2)} = 1$$

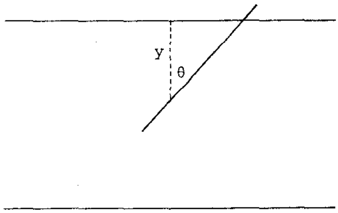
با نیم محورهای $b(1 - x^2/a^2)^{1/2}$ و $c(1 - x^2/a^2)^{1/2}$. از این رو، به استناد مثال ۶، مساحت این مقطع عبارت است از

$$A(x) = \pi b \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} c \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)^{1/2} = \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)$$

که در آن $-a \le x \le a$. به استناد (۹۸.۶)، حجم بیضیوار عبارت است از

$$V = \int_{-a}^{a} \pi bc \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \pi bc \left(x - \frac{x^3}{3a^2}\right) \Big|_{-a}^{a} = \frac{4}{3}\pi abc$$

در حالت خاصی که $a = b = c$، بیضیوار به کره‌ای به شعاع a تبدیل و حجم v برابر $\frac{4}{3}\pi a^3$ می‌شود.



شکل ۷.۶

مثال ۸. (مسألهٔ سوزن بوفون) میزی با خطوط موازی با فاصله‌های مساوی D از یکدیگر خط‌کشی شده است. سوزنی به طول L، که $L < D$، به طور تصادفی بر روی میز پرتاب می‌شود. احتمال P که سوزن یکی از خطوط را قطع کند چقدر است؟ (احتمال دیگر این است که سوزن به طور کامل در نوار بین دو خط واقع شود.)

موقعیت سوزن را از طریق تعیین فاصلهٔ y نقطهٔ وسط سوزن تا نزدیکترین خط موازی و تعیین زاویهٔ θ بین سوزن و خط تصویر به طول yبه دست می‌آوریم. (شکل ۷.۶ را ببینید.) سوزن در صورتی یکی از خطوط را قطع می‌کند که وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ شکل ۷.۶ کمتر از$L/۲$ باشد، یعنی، هرگاه

$$y < \frac{L}{۲}\cos\theta \quad \text{یا} \quad \frac{y}{\cos\theta} < \frac{L}{۲}$$

وقتی که y بین ۰ و $D/۲$ تغییر می‌کند و θ بین ۰ و $\pi/۲$، معقول به نظر می‌رسد که فرض کنیم که این کمیتها متغیرهای تصادفی مستقلی هستند که در این محدوده‌های مخصوص خود توزیعی یکنواخت دارند. حالتهای ممکن با شرط $۰ \le \theta \le \pi/۲$، $۰ \le y \le D/۲$ توصیف می‌شوند و حالتهای مساعد با شرط $y < (L/۲)\cos\theta$. بنابراین، احتمال مطلوب P برابراست با خارج‌قسمت مساحت ناحیهٔ زیر منحنی

$$y = \frac{L}{۲}(\cos\theta) \quad \text{با} \quad ۰ \le \theta \le \pi/۲$$

و مساحت مستطیل $۰ \le \theta \le \pi/۲$، $۰ \le y \le D/۲$؛ به این ترتیب،

$$P = \frac{\int_۰^{\pi/۲}(L/۲)(\cos\theta)d\theta}{(\pi/۲)(D/۲)} = \frac{۲L}{\pi D} \qquad (۱۰۹.۶)$$

جاذبهٔ عمدهٔ (۱۰۹.۶) در این است که از آن نتیجه می‌گیریم که

$$\pi = \frac{۲L}{PD}$$

و محاسبهٔ P از طریق آزمایش به تعیین آماری π می‌انجامد.

ملاحظات. علاوه بر کاربردهای بالا در هندسه، انتگرالها در تعیین مرکز جرم، گشتاور لختی، کار، فشار مایعات، و امثال آن نیز می‌توانند به کار روند. ما وارد این مباحث نخواهیم شد. در عوض، در دو مثال بعدی به نحوهٔ محاسبهٔ حدود مجموعها به کمک انتگرال معیّن اشارهٔ مختصری خواهیم داشت. چند مثال دیگر، که به طور کلی جالب می‌باشند، نیز ذکر خواهد شد.

مثال ۹. به‌ازای $p > ۰$،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{۱^p + ۲^p + \cdots + n^p}{n^{p+۱}} = \frac{۱}{p+۱}$$

در واقع، به استناد قضیهٔ ۶.۵،

$$\begin{aligned}\frac{۱^p + ۲^p + \cdots + n^p}{n^{p+۱}} &= \frac{۱}{n}\left(\left(\frac{۱}{n}\right)^p + \left(\frac{۲}{n}\right)^p + \cdots + \left(\frac{n}{n}\right)^p\right)\\ &= \frac{۱}{n}\left(f\left(\frac{۱}{n}\right) + f\left(\frac{۲}{n}\right) + \cdots + f\left(\frac{n}{n}\right)\right)\\ &\longrightarrow \int_۰^۱ f(x)dx\end{aligned}$$

وقتی که $n \longrightarrow \infty$، که در آن

$$f(x) = x^p$$

و

$$\int_۰^۱ x^p dx = \frac{۱}{p+۱}$$

مثال ۱۰. وقتی که $n \longrightarrow \infty$،

$$\left(g(a).g\left(a+\frac{h}{n}\right).g\left(a+\frac{۲h}{n}\right)\ldots.g\left(a+\frac{nh}{n}\right)\right)^{۱/n} \longrightarrow \exp\left(\frac{۱}{h}\int_a^{a+h} \ln[g(x)]dx\right)$$

بالاخص،

وقتی که $n \longrightarrow \infty$،
$$\left(\left(1+\frac{1}{n^2}\right)\left(1+\frac{2^2}{n^2}\right)\dots\left(1+\frac{n^2}{n^2}\right)\right)^{1/n} \longrightarrow 2e^{(\pi-4)/2}$$

در واقع، با لگاریتم گیری، ملاحظه می‌کنیم که وقتی $n \longrightarrow \infty$،

$$\frac{1}{n}\left(\ln[g(a)]+\ln\left[g\left(a+\frac{h}{n}\right)\right]+\cdots+\ln\left[g\left(a+\frac{nh}{n}\right)\right]\right) \longrightarrow \frac{1}{h}\int_a^{a+h}\ln[g(x)]dx$$

بعلاوه،

$$\begin{aligned}\int_0^1 \ln(1+x^2)dx &= x\{\ln(1+x^2)\}|_0^1 - \int_0^1 \frac{2x^2}{1+x^2}dx\\ &= x\{\ln(1+x^2)\}|_0^1 - 2\int_0^1 dx + 2\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx\\ &= \ln 2 + \frac{1}{2}(\pi-4)\end{aligned}$$

مثال ۱۱.

$$\sum_{n=1}^{r}\frac{1}{n} = \sum_{n=1}^{r}(-1)^{n+1}\frac{1}{n}\binom{r}{n}$$

در واقع، محاسبه مستقیم انتگرال

$$\int_0^1 \frac{1-x^r}{1-x}dx$$

سمت چپ رابطهٔ مفروض را نتیجه می‌دهد. سپس، محاسبهٔ همان انتگرال با استفاده از جایگزینی $x = 1-u$ سمت راست رابطهٔ مفروض را نتیجه می‌دهد.

مثال ۱۲. فرض کنید E_1، E_2، ...، E_n تعداد n بازه باشند که در بازهٔ یکهٔ $[0,1]$ واقع شده‌اند. اگر هر نقطهٔ $[0,1]$ به حداقل q بازهٔ E_j با $j=1,2,\dots,n$ تعلق داشته باشد، آن‌گاه حداقل یکی از این بازه‌ها دارای طولی ناکمتر از q/n است.

در واقع، تابع f_j را بر $[0,1]$ چنین تعریف می‌کنیم: $f_j(x)=1$ هرگاه $x\in E_j$ و $f_j(x)=0$ هرگاه $x\notin E_j$. سپس، فرض می‌کنیم

$$f(x)=\sum_{j=1}^{n}f_j(x)$$

بدیهی است که نامساوی $f(x) \geq q$ به‌ازای هر x از بازهٔ $[0, 1]$ برقرار است و از این رو

$$q \leq \int_0^1 f(x)dx = \int_0^1 \sum_{j=1}^{n} f_j(x)dx = \sum_{j=1}^{n} \int_0^1 f_j(x)dx = \sum_{j=1}^{n} |E_j|$$

که در آن $|E_j|$ نشانگر طول بازهٔ E_j است. واضح است که همهٔ جمعوندهای آخرین مجموع نمی‌توانند کوچکتر از q/n باشند، زیرا در چنین صورتی باید داشته باشیم $q < n(q/n)$.

مثال ۱۳. فرض کنید f بر هر بازه به طول متناهی انتگرال‌پذیر باشد و رابطهٔ

$$f(x+y) = f(x) + f(y) \qquad (۱۱۰.۶)$$

به‌ازای اعداد حقیقی دلخواه x و y برقرار باشد. در این صورت، $f(x) = cx$، که در آن $c = f(1)$.

در واقع، با انتگرالگیری از $f(y) = f(u+y) - f(u)$ برحسب u بر بازهٔ $[0, x]$، ملاحظه می‌کنیم که

$$xf(y) = \int_0^x f(u+y)du - \int_0^x f(u)du$$

اگر قرار دهیم $u + y = s$، متوجه می‌شویم که

$$\int_0^x f(u+y)du = \int_y^{x+y} f(s)ds = \int_0^{x+y} f(s)ds - \int_0^y f(s)ds$$

بنابراین،

$$xf(y) = \int_0^{x+y} f(u)du - \int_0^x f(u)du - \int_0^y f(u)dy \qquad (۱۱۱.۶)$$

چون طرف راست (۱۱۱.۶) تحت تغییرات xو y ناوردا است، نتیجه می‌شود که $xf(y) = yf(x)$. از این رو، وقتی $x \neq 0$، به‌ازای ثابتی چون c، $x^{-1}f(x) = c$. آن‌گاه، $f(x) = cx$. چون، به استناد (۱۱۰.۶)، $f(0) = 0$، تساوی $f(x) = cx$ به‌ازای $x = 0$ نیز برقرار است. با انتخاب $x = 1$، متوجه می‌شویم که $c = f(1)$.

تبصره. اگر f در (۱۱۰.۶) صدق کند، آن‌گاه پیوستگی f در یک نقطه مستلزم پیوستگی f در همه جا است. در واقع،

$$|f(x+h) - f(x)| = |f(h)| = |f(y+h) - f(y)|$$

مثال ۱۴. هر یک از دو تصاعد حسابی و هندسی مفروضی n جمله دارد، جملهٔ اول آنها a و جملهٔ آخرشان b است. مجموع جمل دو تصاعد، به ترتیب، $s_۱$ و $s_۲$ است. در این صورت،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_۱}{s_۲} = \frac{۱}{۲}\frac{b+a}{b-a}\ln\frac{b}{a}$$

در واقع، کلید حل مسأله این است که تابع نمایی هر تصاعد حسابی را به یک تصاعد هندسی تبدیل می‌کند. با توجه به این واقعیت،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{s_۱}{s_۲} = \frac{\frac{۱}{b-a}\int_a^b x\,dx}{\frac{۱}{\ln b - \ln a}\int_{\ln a}^{\ln b} e^x\,dx}$$

و با محاسبهٔ انتگرالها نتیجهٔ مطلوب عاید می‌شود.

ملاحظات. به استناد قضیهٔ ۶.۵،

$$\frac{۱}{B-A}\int_A^B f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{k=۱}^{n} f\left(A+(B-A)\frac{k}{n}\right)$$

که در آن f بر $[A,B]$ انتگرال‌پذیر است. همچنین، چون

$$\lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}f(A) = ۰$$

می‌توان نوشت:

$$\frac{۱}{B-A}\int_A^B f(x)dx = \lim_{n\to\infty}\frac{۱}{n}\sum_{k=۰}^{n} f\left(A+(B-A)\frac{k}{n}\right)$$

مثال ۱۵. عدد π اصم است، یعنی، فرض $\pi = a/b$ که در آن a و b اعداد صحیح باشند، به تناقض می‌انجامد.

در واقع، فرض کنید

$$f(x) = \frac{x^n(a-bx)^n}{n!}$$

که در آن n عددی صحیح است (که بعداً با دقت بیشتری تعیین می‌شود). بنابر فرض، $f(x) = f(\pi - x)$. قرار می‌دهیم

$$F(x) = f(x) - f''(x) + f^{(۴)}(x) + \cdots + (-۱)^n f^{(۲n)}(x)$$

و ملاحظه می‌کنیم که

$$F(x) + F''(x) = f(x)$$

زیرا $f^{(k)}(x) = ۰$ وقتی که $k > ۲n$. بعلاوه، $f^{(k)}(۰)$ به‌ازای همهٔ مقادیر k عددی صحیح است. در واقع، این نکته به‌ازای $k > ۲\pi$ و $k < n$ بدیهی است زیرا مشتق در این محدوده صفر است. به‌ازای سایر مقادیر k، $f^{(k)}(۰)$ عبارت است از حاصل ضرب $k!/n!$، که عددی صحیح است، در ضریب x^k از $x^n(a-bx)^n$، که این نیز عددی صحیح است. چون $f(x) = f(\pi - x)$، نتیجه می‌شود که $f^{(k)}(\pi)$ نیز به‌ازای همهٔ مقادیر k عددی صحیح است. از این رو، $F(۰)$ و $F(\pi)$ اعدادی صحیح می‌باشند.

حال، چون $F(x) + F''(x) = f(x)$،

$$\frac{d}{dx}(F'(x)\sin x - F(x)\cos x) = [F''(x) + F(x)]\sin x = f(x)\sin x$$

و بنابراین،

$$\int_۰^\pi f(x)(\sin x)dx = (F'(x)\sin x - F(x)\cos x)|_۰^\pi = F(\pi) + F(۰)$$

و نتیجه می‌گیریم که مقدار انتگرال عدد صحیحی مانند N است. امّا، اگر $\pi > x > ۰$ آن‌گاه

$$۰ < f(x)\sin x \le f(x) < \frac{\pi^n}{n!}a^n$$

از این رو، به استناد قضیهٔ ۲۲.۵،

$$۰ < N < \frac{\pi^n a^n}{n!}\pi \qquad (۱۱۲.۶)$$

ولی

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(\pi a)^n}{n!} = ۰$$

(به عنوان مثال، به شمارهٔ ۱۱ از مثالهای حل شدهٔ آخر بخش ۱ فصل ۷ مراجعه کنید.) به این ترتیب، وقتی n به قدر کافی بزرگ باشد، جملهٔ سمت راست (۱۱۲.۶) از ۱ کوچکتر است و آن‌گاه $۱ > N > ۰$. چون N عددی صحیح است، این نتیجه بالبداهه غیرممکن است، و این فرض که π گویا باشد به تناقض می‌انجامد. پس، π اصم است.

مثال ۱۶. اگر $t \ge ۱$ و $s \ge ۰$، آن‌گاه $ts \le t(\ln t) - t + e^s$.

در واقع، در نامساوی یانگ، بگیرید $f(x) = \ln(x+۱)$، $A = t - ۱$، و $B = s$. [رابطهٔ (۳۸.۵) فصل ۵ را ببینید.]

مثال ۱۷. موقعیت وتری قائم بر یک سهمی را بیابید که قطعه‌ای با کمترین مساحت را از سهمی جدا کند. (توجه کنید که قائم بر یک منحنی عبارت است از خط راستی که بر مماس بر منحنی در نقطهٔ تماس عمود باشد.)

برای حل مسأله، دستگاه مختصات را طوری اختیار می‌کنیم که معادلهٔ سهمی عبارت باشد از $x^۲ = ۴ay$، که در آن $a > ۰$. وتری که نقطهٔ $P(۲as, as^۲)$ را به نقطهٔ $Q(۲at, at^۲)$ وصل کند دارای معادلهٔ

$$y = \tfrac{۱}{۲}(t+s)x - ast \qquad (۱۱۳.۶)$$

و خط مماس در نقطهٔ $(۲at, at^۲)$ دارای شیب t است. از این رو، خط (۱۱۳.۶) قائم بر سهمی در نقطهٔ Q خواهد بود فقط و فقط وقتی که $\tfrac{۱}{۲}t(t+s) = -۱$، که این شرط را به صورت

$$s = -\frac{۲}{t} - t \qquad (۱۱۴.۶)$$

نیز می‌توان نوشت. بنابراین، ملاحظه می‌کنیم که s و t علائم متفاوت دارند. فرض کنید $s < ۰$ و $t > ۰$. در این صورت مساحتی که وتر از سهمی جدا می‌کند عبارت است از

$$\int_{۲as}^{۲at} \left[\frac{۱}{۲}(t+s)x - ast - \frac{۱}{۴a}x^۲\right] dx = \frac{۱}{۳}a^۲(t-s)^۳$$

این مساحت زمانی مینیمم است که $t - s$ مینیمم باشد. امّا، به استناد (۱۱۴.۶)،

$$t - s = ۲t + \frac{۲}{t} = ۲(\sqrt{t} - \frac{۱}{\sqrt{t}})^۲ + ۴ \geq ۴$$

تساوی فقط زمانی رخ می‌دهد که $\sqrt{t} = ۱$ یا $t = ۱$.

به این ترتیب، در میان همهٔ قائمهای بر سهمی در نقاطی که به طرف راست محور کشیده می‌شوند، قائم در $(۲a, a)$ بزرگترین مساحت را جدا می‌کند. این مساحت عبارت است از $۶۴a^۲/۳$. به موجب تقارن، در میان همهٔ قائمها در نقاطی که به طرف چپ محور کشیده می‌شوند، قائم در $(-۲a, a)$ کمترین مساحت را جدا می‌کند. قائمهای بحرانی قائمهایی هستند که محور را با زاویهٔ $\pi/۴$ قطع می‌کنند.

تمرینات فصل ششم

۱.۶. یک n ضلعی منتظم روی یک خط راست می‌غلتد. نشان دهید که طول مسیری که یک رأس این چندضلعی در یک دوران کامل طی می‌کند عبارت است از

$$۴a\sum_{r=۱}^{n-۱}\frac{\pi}{n}\sin\frac{r\pi}{n}$$

که در آن a شعاع دایرهٔ محیطی چندضلعی است. نتیجه بگیرید که اگر دایره‌ای به شعاع a روی یک خط بغلتد، در هر دوران کامل، طول مسیر نقطه‌ای از محیط دایره، یعنی، طول یک کمان منحنی چرخزاد با دایرهٔ مولدی به شعاع a، مساوی $۸a$ است.

به طریق مشابه، ثابت کنید که مساحت محدود به هر کمان چرخزاد و خط قاعده، سه برابر مساحت دایرهٔ مولد است.

راهنمایی: فرض کنید که رئوس چندضلعی از ۱ تا n شماره‌گذاری شده باشد. در آغاز حرکت، ضلع n۱ روی خط مفروض است، سپس ضلع ۱۲، بعد از آن ضلع ۲۳، و همین طور. این چندضلعی به نوبت حول هر یک از رئوس ۱، ۲، ۳، ... به اندازهٔ زاویهٔ $۲\pi/n$ می‌چرخد. وقتی که چندضلعی حول رأس r می‌چرخد، رأس n کمانی به زاویهٔ $۲\pi/n$ از یک دایره به شعاع rn رسم می‌کند. قطر rn (قطر چندضلعی) روبروی زاویهٔ مرکزی $۲r\pi/n$ است و، از این رو، طول این قطر عبارت است از $۲a\sin(r\pi/n)$. بنابراین، طول مسیری که رأس n در یک دوران چندضلعی طی می‌کند عبارت است از

$$۴a\sum_{r=۱}^{n-۱}\frac{\pi}{n}\sin\frac{r\pi}{n}$$

امّا، وقتی که $n \longrightarrow \infty$،

$$\sum_{r=۱}^{n-۱}\frac{\pi}{n}\sin\frac{r\pi}{n} \longrightarrow \int_{۰}^{\pi}(\sin x)dx = ۲$$

به این ترتیب، طول هر کمان چرخزاد، مکان هندسی نقطه‌ای از محیط یک دایرهٔ غلتان به شعاع a، برابر $۸a$ است.

مساحت محدود به مسیر رأس n، در هر دوران، و خطی که چندضلعی بر آن می‌غلتد، عبارت است از حاصل‌جمع مساحات $n-۱$ قطاع به مرکز ۱، ۲، ۳، ...، $n-۱$، زاویهٔ $۲\pi/n$، و شعاع $۲a\sin(r\pi/n)$ به ازای $r = ۱, ۲, ۳, \ldots, n-۱$ و مساحات مثلثهای $۱۲n$، $۲۳n$، $۳۴n$، ...، $(n-۲)(n-۱)n$؛

یعنی

$$\sum_{r=1}^{n-1}\frac{1}{2}\frac{2\pi}{n}4a^2\sin^2\frac{r\pi}{n}+\frac{n}{2}a^2\sin\frac{2\pi}{n}=4a^2\sum_{r=1}^{n-1}\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{r\pi}{n}+\frac{n}{2}a^2\sin\frac{2\pi}{n}$$

امّا، وقتی که $n \longrightarrow \infty$،

$$\sum_{r=1}^{n-1}\frac{\pi}{n}\sin^2\frac{r\pi}{n}\longrightarrow\int_0^{\pi}(\sin^2 x)dx=\frac{1}{2}\pi$$

و

$$\frac{na^2}{2}\sin\frac{2\pi}{n}=\pi a^2\frac{\sin(2\pi/n)}{2\pi/n}\longrightarrow\pi a^2$$

بنابراین، مساحت محدود به هرکمان چرخزاد و خط قاعده، عبارت است از $2\pi a^2+\pi a^2=3\pi a^2$.

۲.۶. مراکز دو کره به شعاعهای a و b به فاصلهٔ c از یکدیگر واقعند و $c>a+b$. یک منبع نقطه‌ای نور در چه مکانی از خط واصل مراکز دو کره قرار گیرد تا بزرگترین سطح کل ممکن روشن شود؟

راهنمایی: از فرمول (۱۰۸.۶) استفاده کنید. جواب: خط واصل مراکز به نسبت $a^{3/2}$ به $b^{3/2}$ تقسیم شود.

۳.۶. نشان دهید که

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\frac{\pi^2}{4}$$

راهنمایی: به آسانی دیده می‌شود که $\int_0^a f(x)dx=\int_0^a f(a-x)dx$. از این رو،

$$\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin(\pi-x)}{1+\cos^2(\pi-x)}dx=\int_0^{\pi}\frac{(\pi-x)\sin x}{1+\cos^2 x}dx$$

و، بنابراین، خواهیم داشت:

$$2\int_0^{\pi}\frac{x\sin x}{1+\cos^2 x}dx=\pi\int_0^{\pi}\frac{\sin x}{1+\cos^2 x}dx=-\pi\tan^{-1}(\cos x)|_0^{\pi}=\frac{\pi^2}{2}$$

۴.۶. نشان دهید که

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 x}{\sin x+\cos x}dx=\frac{1}{\sqrt{2}}\ln(1+\sqrt{2})$$

راهنمایی: به راهنمایی تمرین ۳.۶ مراجعه کنید. فرض کنید

$$f(x) = \frac{\sin^۲ x}{\sin x + \cos x}$$

آن‌گاه

$$f(\tfrac{۱}{۲}\pi - x) = \frac{\cos^۲ x}{\sin x + \cos x}$$

بنابراین،

$$\int_۰^{\pi/۲} \frac{\sin^۲ x}{\sin x + \cos x} dx = \int_۰^{\pi/۲} \frac{\cos^۲ x}{\sin x + \cos x} dx$$

و نتیجه می‌گیریم که

$$۲I = \int_۰^{\pi/۲} \frac{۱}{\sin x + \cos x} dx$$

اگر قرار دهیم $\tan(x/۲) = t$، خواهیم داشت (به برهان قضیهٔ ۴.۶ مراجعه کنید.):

$$\begin{aligned} ۲I &= \int_۰^{\pi/۲} \frac{۱}{\sin x + \cos x} dx = ۲ \int_۰^۱ \frac{۱}{۲-(t-۱)^۲} dt \\ &= ۲\frac{۱}{۲\sqrt{۲}} \int_۰^۱ \left(\frac{۱}{\sqrt{۲}-(t-۱)} + \frac{۱}{\sqrt{۲}+(t-۱)} \right) dt \\ &= \frac{۱}{\sqrt{۲}} \ln \left| \frac{\sqrt{۲}+(t-۱)}{\sqrt{۲}-(t-۱)} \right| \Big|_۰^۱ = \frac{۲}{\sqrt{۲}} \ln(\sqrt{۲}+۱) = \frac{۱}{\sqrt{۲}} \ln(\sqrt{۲}+۱) \end{aligned}$$

۵.۶. انتگرال $\int [\sin(x-a)\sin(x-b)]^{-۱} dx$ را محاسبه کنید.

راهنمایی: چون

$$\begin{aligned} \sin(b-a) &= \sin[(x-a)-(x-b)] \\ &= \sin(x-a)\cos(x-b) - \cos(x-a)\sin(x-b) \end{aligned}$$

می‌توان نوشت:

$$\frac{\sin(b-a)}{\sin(x-a)\sin(x-b)} = \cot(x-b) - \cot(x-a)$$

بنابراین، انتگرال مورد بحث برابر می‌شود با

$$\frac{۱}{\sin(a-b)} \ln \left| \frac{\sin(x-a)}{\sin(x-b)} \right| + c$$

۶.۶. محاسبهٔ

$$\int \frac{A\cos x + B\sin x + C}{D\cos x + E\sin x + F}dx$$

را به محاسبهٔ

$$\int \frac{۱}{D\cos x + E\sin x + F}dx$$

کاهش دهید.

راهنمایی: سه ثابت λ، μ، و ν را طوری تعیین می‌کنیم که

$$A\cos x + B\sin x + C = \lambda(D\cos x + E\sin x + F) + \mu(-D\sin x + E\cos x) + \nu$$

این ثابتها از معادلات زیر به دست می‌آیند:

$$A = D\lambda + E\mu, \qquad B = E\lambda - D\mu, \qquad C = F\lambda + \nu$$

با این مقادیر λ، μ، و ν، داریم

$$\begin{aligned}
&\int \frac{A\cos x + B\sin x + C}{D\cos x + E\sin x + F}dx \\
&= \int \lambda dx + \mu \int \frac{-D\sin x + E\cos x}{D\cos x + E\sin x + F}dx + \nu \int \frac{۱}{D\cos x + E\sin x + F}dx \\
&= \lambda x + \mu \ln|D\cos x + E\sin x + F| + \nu \int \frac{۱}{D\cos x + E\sin x + F}dx
\end{aligned}$$

۷.۶. به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ فرض کنید

$$S_n = \frac{۱}{n\sqrt{n}}(\sqrt{۱} + \sqrt{۲} + \cdots + \sqrt{n})$$

حد S_n را، وقتی $n \longrightarrow \infty$، بیابید.

راهنمایی: وقتی $n \longrightarrow \infty$،

$$S_n = \frac{۱}{n}\left(\sqrt{\frac{۱}{n}} + \sqrt{\frac{۲}{n}} + \cdots + \sqrt{\frac{n}{n}}\right) \longrightarrow \int_{۰}^{۱} \sqrt{x}dx = \frac{۲}{۳}$$

۸.۶. به ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ فرض کنید

$$S_n = \frac{۱}{n} + \frac{۱}{(n^۲ - ۱)^{۱/۲}} + \frac{۱}{(n^۲ - ۲۲)^{۱/۲}} + \cdots + \frac{۱}{[n^۲ - (n-۱)^۲]^{۱/۲}}$$

حد S_n را، وقتی $n \longrightarrow \infty$، بیابید.

راهنمایی: قرار می‌دهیم $h = ۱/n$. وقتی $n \longrightarrow \infty$، خواهیم داشت:

$$S_n = h\left(۱ + \frac{۱}{(۱-h^۲)^{۱/۲}} + \frac{۱}{[۱-(۲h)^۲]^{۱/۲}} + \cdots + \frac{۱}{[۱-(n-۱)^۲h^۲]^{۱/۲}}\right)$$
$$\longrightarrow \int_۰^۱ \frac{۱}{(۱-x^۲)^{۱/۲}}dx = \frac{\pi}{۲}$$

۹.۶. با استفاده از تجزیه به کسرهای جزئی، انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int \frac{x^۲ + ۵x + ۴۱}{(x+۳)(x-۱)(۲x-۱)}dx$$

جواب: $\frac{۵}{۴}\ln|x+۳| + \frac{۴۷}{۴}\ln|x-۱| - \frac{۲۵}{۲}\ln|۲x-۱| + C$

۱۰.۶. محاسبه کنید:

$$\int \frac{۱}{x^۳(x-۱)^۲(x+۱)}dx$$

جواب: $۲\ln|x| - \frac{۱}{x} - \frac{۱}{۲x^۲} - \frac{۷}{۴}\ln|x-۱| - \frac{۱}{۲(x-۱)} - \frac{۱}{۴}\ln|x+۱| + C$

۱۱.۶. محاسبه کنید:

$$\int \frac{۱}{(x-۱)^۲(x^۲+۴)}dx$$

جواب: $-\frac{۲}{۲۵}\ln|x-۱| - \frac{۱}{۵(x-۱)} + \frac{۱}{۲۵}\ln(x^۲+۴) - \frac{۳}{۵۰}\tan^{-۱}\frac{x}{۲} + C$

۱۲.۶. محاسبه کنید:

$$\int \frac{(x^۲+۱)(x^۲+۲)}{(x^۲+۳)(x^۲+۴)}dx$$

راهنمایی: قرار دهید $y = x^۲$. جواب: $x + \frac{۲}{\sqrt{۳}}\tan^{-۱}\frac{x}{\sqrt{۳}} - ۳\tan^{-۱}\frac{x}{۲} + C$.

۱۳.۶. محاسبه کنید:

$$\int \frac{۱+x^۲}{۱+x^۴}dx$$

راهنمایی: قرار دهید $y = x - ۱/x$. جواب: $\frac{۱}{\sqrt{۲}}\tan^{-۱}\frac{x^۲-۱}{\sqrt{۲}x} + C$.

۱۴.۶. انتگرالگیری از $(\sin^p x)(\cos^q x)$، که در آن $p+q$ یک عدد صحیح زوج منفی است، با استفاده از جایگزینی $\tan x = t$ به آسانی صورت می‌گیرد. در واقع، داریم:

$$\cos x = \frac{۱}{(۱+t^۲)^{۱/۲}} \quad \text{و} \quad \sin x = \frac{t}{(۱+t^۲)^{۱/۲}}$$

از این رو، با فرض $p+q=-۲n$، خواهیم داشت:

$$\int (\sin^p x)(\cos^q x)dx = \int t^p(۱+t^۲)^{n-۱}dt$$

حال، انتگرال $\int(\cot x)^{۱/۲}(\sec^۴ x)dx$ را محاسبه کنید.

جواب: $۲(\tan x)^{۱/۲} + \frac{۲}{۵}(\tan^۵ x)^{۱/۲} + C$.

۱۵.۶. محاسبه کنید:

$$\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲} \frac{۱}{۵+۷\cos x+\sin x}dx$$

راهنمایی: جایگزینی $\tan(x/۲)=t$ را اعمال کنید. جواب: $\frac{۱}{۵}\ln ۶$.

۱۶.۶. محاسبه کنید:

$$\int \frac{۱}{a^۲\sin^۲ x+b^۲\cos^۲ x}dx = \int \frac{\sec^۲ x}{b^۲+a^۲\tan^۲ x}dx$$

راهنمایی: جایگزینی $\tan x = t$ را اعمال کنید.

جواب: $\frac{۱}{ab}\tan^{-۱}\left(\frac{a\tan x}{b}\right)+C$.

۱۷.۶. محاسبه کنید:

$$\int \frac{\tan x}{a^۲+b^۲\tan^۲ x}dx$$

راهنمایی: جایگزینی $\tan^۲ x = t$ را اعمال کنید.

جواب: $-\frac{۱}{۲(a^۲-b^۲)}\ln(a^۲\cos^۲ x+b^۲\sin^۲ x)+C$.

۱۸.۶. محاسبه کنید:

$$\int \frac{۱}{(۱+x)^{۱/۲}+(۱+x)^{۱/۳}}dx$$

راهنمایی: جایگزینی $۱+x=t^۶$ را اعمال کنید.

جواب: $۲(۱+x)^{۱/۲}-۳(۱+x)^{۱/۳}+۶(۱+x)^{۱/۶}-۶\ln|۱+(۱+x)^{۱/۶}|+C$.

۱۹.۶. محاسبه کنید:

$$\int \left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2} \frac{1}{x}dx$$

راهنمایی: قرار دهید $(1-x)/(1+x) = y^2$.

جواب: $\ln\left|\frac{(1+x)^{1/2}-(1-x)^{1/2}}{(1+x)^{1/2}+(1-x)^{1/2}}\right| + 2\tan^{-1}\left(\frac{1-x}{1+x}\right)^{1/2} + C$

۲۰.۶. با استفاده از فرمول هرمیت ـاستراگرادسکی (۶۵.۶)، انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int \frac{1}{(x^3-1)^2}dx$$

راهنمایی:

$$\int \frac{1}{(x^3-1)^2}dx = \frac{Ax^2+Bx+C}{x^3-1} + \int \frac{Dx^2+Ex+F}{x^3-1}dx$$

که در آن $A=0$، $B=-\frac{1}{3}$، $C=D=E=0$، و $F=-\frac{2}{3}$.

جواب: $-\frac{x}{3(x^3-1)} + \frac{1}{9}\ln\frac{x^2+x+1}{(x-1)^2} - \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x+1}{\sqrt{3}} + C$

۲۱.۶. محاسبه کنید:

$$\int \frac{1}{(x^2+1)^4}dx$$

جواب: $\frac{15x^5+40x^3+33x}{48(1+x^2)^3} + \frac{15}{48}\tan^{-1}x + C$.

۲۲.۶. محاسبه کنید:

$$\int \frac{x^4-2x^2+2}{(x^2-2x+2)^{1/2}}dx$$

جواب: $x - \frac{x-1}{x^2-2x+2} + 2\ln(x^2-2x+2) + 3\tan^{-1}(x-1) + C$.

۲۳.۶. محاسبه کنید:

$$\int \frac{1}{(x+1)^2(x^2+1)}dx$$

جواب: $\frac{-x^2+x}{4(x+1)(x^2+1)} + \frac{1}{2}\ln|x+1| - \frac{1}{4}\ln(x^2+1) + \frac{1}{4}\tan^{-1}x + C$

۲۴.۶. با استفاده از حکم قضیهٔ ۵.۶، انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int \frac{x + x^{۲/۳} + x^{۱/۶}}{x(۱ + x^{۱/۳})} dx$$

راهنمایی: جایگزینی $x = t^{۶}$ را اعمال کنید. جواب: $\frac{۳}{۲}x^{۲/۳} + ۶\tan^{-۱} x^{۱/۶} + C$.

۲۵.۶. محاسبه کنید:

$$\int \frac{(۲x - ۳)^{۱/۲}}{(۲x - ۳)^{۱/۳} + ۱} dx$$

راهنمایی: جایگزینی $۲x - ۳ = t^{۶}$ را اعمال کنید.

جواب: $\frac{۳}{۷}(۲x-۳)^{۷/۶} - \frac{۳}{۵}(۲x-۳)^{۵/۶} + (۲x-۳)^{۱/۲} - ۳(۲x-۳)^{۱/۶} + \tan^{-۱}(۲x-۳)^{۱/۶} + C$

۲۶.۶. محاسبه کنید:

$$\int \frac{۲}{(۲ - x)^{۲}} \left(\frac{۲ - x}{۲ + x}\right)^{۱/۳} dx$$

راهنمایی: جایگزینی $t^{۳} = (۲ - x)/(۲ + x)$ را اعمال کنید. جواب: $\frac{۳}{۴}\left(\frac{۲-x}{۲+x}\right)^{۲/۳} + C$.

۲۷.۶. محاسبه کنید:

$$\int \frac{۱}{[(x - ۱)^{۳}(x + ۲)^{۵}]^{۱/۴}} dx$$

راهنمایی: جایگزینی $t^{۴} = (x - ۱)/(x + ۲)$ را اعمال کنید. جواب: $\frac{۴}{۳}\left(\frac{x-۱}{x+۲}\right)^{۱/۴} + C$.

۲۸.۶. با استفاده از حکم قضیهٔ ۶.۶، انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int x^{-۲/۳}(۱ + x^{۱/۳})^{۱/۲} dx$$

راهنمایی: جایگزینی $۱ + x^{۱/۳} = t^{۲}$ را اعمال کنید. جواب: $۲(۱ + x^{۱/۳})^{۳/۲} + C$.

۲۹.۶. محاسبه کنید:

$$\int x^{-۱۱}(۱ + x^{۴})^{-۱/۲} dx$$

راهنمایی: جایگزینی $۱ + x^{۴} = x^{۴}t^{۲}$ را به کار می‌بریم.

جواب: $-\frac{۱}{۱۰x^{۱۰}}(۱ + x^{۴})^{۵/۲} + \frac{۱}{۳x^{۶}}(۱ + x^{۴})^{۳/۲} - \frac{۱}{۲x^{۲}}(۱ + x^{۴})^{۱/۲} + C$

۳۰.۶. با استفاده از حکم قضیهٔ ۷.۶، انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$\int \frac{۱}{x+(x^۲-x+۱)^{۱/۲}}dx$$

راهنمایی: جایگزینی $(x^۲-x+۱)^{۱/۲}=tx+۱$ را به کار می‌بریم و، بنابراین، انتگرال مفروض به صورت

$$\int \frac{۲+۲t+۲t^۲}{(۲+t)(۱-t)(۱+t)^۲}dt = ۲\ln|۲+t| - \frac{۱}{۲}\ln|۱-t| - \frac{۳}{۲}\ln|۱+t| - \frac{۱}{۱+t} + C$$

درمی‌آید. سپس، قرار می‌دهیم $t=\frac{(x^۲-x+۱)^{۱/۲}-۱}{x}$.

۳۱.۶. با استفاده از رابطهٔ (۸۱.۶)، تحقیق کنید که

$$\int \frac{۳۰x^۵+۳۰x^۴+۱۲x^۳+۲۱x^۲-۱۵x-۱}{(۴+۲x+۳x^۲)^{۱/۲}}dx$$
$$=(۲x^۴+x^۳-۳x^۲+۴x-۱)(۴+۲x+۳x^۲)^{۱/۲} - ۱۶\int \frac{۱}{(۴+۲x+۳x^۲)^{۱/۲}}dx$$

بعلاوه، بررسی کنید که

$$\int \frac{۱}{(۳x^۲+۲x+۴)^{۱/۲}}dx = \frac{۱}{\sqrt{۳}}\ln|۱+۳x+(۹x^۲+۶x+۱۲)^{۱/۲}|+C$$

۳۲.۶. انتگرال زیر را محاسبه کنید:

$$I=\int \frac{x+۴}{(x-۱)(x+۲)^۲(x^۲+x+۱)^{۱/۲}}dx$$

راهنمایی: توجه کنید که

$$\frac{x+۴}{(x-۱)(x+۲)^۲} = \frac{A}{x-۱} + \frac{B}{(x+۲)^۲} + \frac{C}{x+۲}$$

که در آن $A=\frac{۵}{۹}$، $B=-\frac{۲}{۳}$، و $C=-\frac{۵}{۹}$. درمی‌یابیم که

$$I=\frac{۵}{۹}\int \frac{۱}{(x-۱)(x^۲+x+۱)^{۱/۲}}dx - \frac{۲}{۳}\int \frac{۱}{(x+۲)(x^۲+x+۱)^{۱/۲}}dx$$
$$-\frac{۵}{۹}\int \frac{۱}{(x+۲)(x^۲+x+۱)^{۱/۲}}dx$$

انتگرال اول با استفاده از جایگزینی $x-۱=۱/t$ محاسبه می‌شود، انتگرالهای دوم و سوم با استفاده از $x+۲=۱/t$.

۳۳.۶. محاسبه کنید:

$$\int \frac{۱}{(x^۲+۲)(۲x^۲-۲x+۵)^{۱/۲}}dx$$

جواب:

$$\frac{۱}{۶\sqrt{۲}}\ln\left|\frac{[۲(۲x^۲-۲x+۵)]^{۱/۲}-(x+۱)}{[۲(۲x^۲-۲x+۵)]^{۱/۲}+(x+۱)}\right|-\frac{۱}{۳}\tan^{-۱}\frac{(۲x^۲-۲x+۵)^{۱/۲}}{x+۱}+C$$

۳۴.۶. انتگرال زیر را با استفاده از حکم قضیهٔ ۷.۶ محاسبه کنید:

$$\int \frac{۱}{[۱+\{x(۱+x)\}^{۱/۲}]^۲}dx$$

جواب: $\frac{۲(۳-۴z)}{۵(۱-z-z^۲)}+\frac{۲}{۵\sqrt{۵}}\ln\left|\frac{\sqrt{۵}+۱+۲z}{\sqrt{۵}-۱-۲z}\right|+C$ ، که در آن $z=-x+\{x(۱+x)\}^{۱/۲}$.

فصل هفتم

سریهای نامتناهی

۱۰۷ دنباله‌های عددی

تعریف. هر دنباله مانند $x_۱, x_۲, \ldots, x_n, \ldots$ از اعداد حقیقی، تابعی است که به هر عدد صحیح مثبت n عددی مانند x_n نسبت می‌دهد. عدد x_n جملهٔ nام دنباله نامیده می‌شود. گاهی نماد $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$، یا نماد ساده‌تر $\{x_n\}$، برای نمایش اختصاری دنبالهٔ $x_۱, x_۲, \ldots, x_n, \ldots$ به کار می‌رود.

تعریف. دنبالهٔ $\{x_n\}$ را دنبالهٔ صفر می‌نامیم در صورتی که به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ عدد صحیح مثبتی مانند $n_۰$ موجود باشد به طوری که

$$|x_n| < \varepsilon \qquad \text{به‌ازای هر } n \geq n_۰، \tag{۱۰۷}$$

به جای عبارت «به‌ازای هر $n \geq n_۰$» غالباً عبارت «به‌ازای همهٔ nهای به قدر کافی بزرگ» را به کار خواهیم برد.

ملاحظات. شرط مذکور در تعریف به این معنی است که اگر عدد مثبت کوچک دلخواهی چون ε مفروض باشد، همیشه می‌توانیم عددی طبیعی مانند $n_\circ$ (که عموماً به ε بستگی دارد) بیابیم به طوری که (۱.۷) برقرار باشد. این خاصیت راکه $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ صفر است نیز می‌توانیم به این صورت بیان کنیم که به‌ازای هر $\varepsilon > \circ$ داریم

$$|x_n| < K\varepsilon \qquad \text{به‌ازای } n\text{های به قدر کافی بزرگ،}$$

که در آن K عدد حقیقی مثبت ثابتی (مستقل از ε) است.

واضح است که $\{1/n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنبالهٔ صفر است، زیرا نامساوی $1/n \le 1/n_\circ$ به‌ازای همهٔ nهایی که $n \ge n_\circ > \circ$ برقرار است.

تعریف. دنبالهٔ $\{x_n\}$ را کراندار می‌نامند در صورتی که عددی حقیقی مانند M موجود باشد به طوری که

$$|x_n| < M \qquad \text{به‌ازای هر } n\text{،}$$

قضیهٔ ۱.۷. هر دنبالهٔ صفر $\{x_n\}$ کراندار است.

برهان. چون $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ صفر است، عددی طبیعی مانند $n_\circ$ موجود است که به ازای هر $n \ge n_\circ$ داشته باشیم $|x_n| \le 1$. بنابراین،

$$|x_n| \le 1 + \max\{|x_n| : n \le n_\circ\}$$

و مورد ادعا ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۲.۷. حاصل جمع، تفاضل، و حاصل‌ضرب دنباله‌های صفر، مجدداً دنباله‌های صفر می‌باشند.

برهان. فرض کنید $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ دنباله‌های صفر باشند. نامساویهای $|x_n| < \varepsilon$ و $|y_n| < \varepsilon$، که به‌ازای nهای به قدر کافی بزرگ برقرارند، ایجاب می‌کنند که

$$|x_n \pm y_n| \le |x_n| + |y_n| < 2\varepsilon \qquad \text{به‌ازای } n\text{های به قدر کافی بزرگ،}$$

و، اگر $|x_n| < M$ به‌ازای هر n برقرار باشد، آن‌گاه

$$|x_n y_n| = |x_n||y_n| < M\varepsilon \qquad \text{به‌ازای } n\text{های به‌قدر کافی بزرگ،} \qquad (۲.۷)$$

و برهان کامل می‌شود.

تبصره. رابطهٔ (۲.۷) نشان می‌دهد که: حاصل ضرب یک دنبالهٔ کراندار و یک دنبالهٔ صفر، یک دنبالهٔ صفر است.

تعریف. عدد حقیقی a را حد دنبالهٔ $\{x_n\}$ می‌نامند (و می‌نویسند: $a = \lim_{n\to\infty} x_n$) در صورتی که $\{x_n - a\}$ یک دنبالهٔ صفر باشد؛ یعنی، به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ داشته باشیم

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \text{به‌ازای همهٔ } n\text{های به قدر کافی بزرگ،}$$

همچنین، می‌گوییم که x_n به a میل می‌کند یا همگرا به a است وقتی که n به طور دلخواه بزرگ شود؛ و می‌نویسیم $x_n \longrightarrow a$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. دنباله‌ای با جمل ثابت c، به c میل می‌کند.

قضیهٔ ۳.۷. هر دنباله حداکثر یک حد دارد.

برهان. فرض کنید a و b حدود $\{x_n\}$ باشند. فرض کنید که $\varepsilon > ۰$ دلخواه باشد. عدد صحیح مثبتی مانند n موجود است به طوری که

$$|x_n - a| < \varepsilon \quad \text{و} \quad |x_n - b| < \varepsilon \tag{۳.۷}$$

[توجه کنید که (۳.۷) به‌ازای همهٔ nهای به قدر کافی بزرگ برقرار است.] بنابراین،

$$|a - b| = |(x_n - b) - (x_n - a)| \leq |x_n - a| + |x_n - b| < ۲\varepsilon \tag{۴.۷}$$

چون $a - b$ ثابت و ۲ε عدد مثبت کوچک دلخواهی است، (۴.۷) ایجاب می‌کند که $a - b = ۰$.

تعریف. دنبالهٔ مفروضی را همگرا می‌نامند در صورتی که حدّی (که یک عدد حقیقی متناهی است) داشته باشد. دنباله‌ای را که همگرا نباشد واگرا می‌نامند.

ملاحظات. تغییر یا حذف تعدادی متناهی جمله از یک دنباله یا الحاق تعدادی متناهی جمله به آن اثری در همگرایی یا واگرایی دنباله ندارد و، در حالت همگرایی، اثری در حد دنباله نیز ندارد.

تعریف. دنبالهٔ $\{x_n\}$ و دنبالهٔ $\{n_k\}_{k=۱}^{\infty}$ از اعداد صحیح مثبت که $n_۱ < n_۲ < n_۳ < \ldots$ مفروضند. در این صورت، دنبالهٔ

$$x_{n_۱}, x_{n_۲}, x_{n_۳}, \ldots$$

را یک زیردنباله از $\{x_n\}$ می‌نامند.

تبصره. دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا به a است فقط و فقط وقتی که هر زیردنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا به a باشد.

قضیهٔ ۴.۷. هر دنبالهٔ همگرا کراندار است.

برهان. فرض کنید $\{x_n\}$ همگرا به a باشد. چون

$$|x_n| \le |x_n - a| + |a|$$

ادعا ثابت می‌شود، زیرا $\{x_n - a\}$ یک دنبالهٔ صفر و، از این رو، کراندار است (قضیهٔ ۱.۷).

قضیهٔ ۵.۷. حاصل‌جمع، تفاضل، و حاصل‌ضرب دنباله‌های همگرای $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$ همگرا است. بعلاوه، اگر $x_n \longrightarrow a$ و $y_n \longrightarrow b$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$، و c یک عدد حقیقی ثابت باشد، آن‌گاه

$$x_n \pm y_n \longrightarrow a \pm b, \quad x_n y_n \longrightarrow ab, \quad \text{و} \quad cx_n \longrightarrow ca$$

اگر همهٔ y_nها و حد b مخالف صفر باشند، آن‌گاه خارج‌قسمت x_n/y_n همگرا است و داریم

$$\frac{x_n}{y_n} \longrightarrow \frac{a}{b}$$

برهان. احکام مربوط به مجموع و تفاضل به احکام متناظر در مورد دنباله‌های صفر تبدیل می‌شود:

$$(x_n \pm y_n) - (a \pm b) = (x_n - b) \pm (y_n - b) \longrightarrow ۰$$

حکم مربوط به حاصل ضرب از قضیهٔ ۴.۷ و تبصرهٔ قضیهٔ ۲.۷ نتیجه می‌شود:

$$x_n y_n - ab = (x_n - a)y_n + a(y_n - b) \longrightarrow ۰$$

بعلاوه،

$$cx_n - ca = c(x_n - a) \longrightarrow ۰$$

اگر حاصل‌ضرب قبلاً بررسی شده باشد، حکم مربوط به خارج‌قسمت نتیجه خواهد شد در صورتی که بتوانیم نشان بدهیم که $۱/y_n - ۱/b \longrightarrow ۰$. امّا، به‌ازای همهٔ nهای به قدر کافی بزرگ، داریم $|y_n - b| < |b|/۲$. از این رو،

$$|y_n| \ge |b| - |y_n - b| > \frac{|b|}{۲}, \qquad \frac{۱}{|y_n|} < \frac{۲}{|b|}$$

معنایش این است که دنبالهٔ $\{1/y_n\}$ کراندار است. از قضیهٔ ۴.۷ و تبصرهٔ قضیهٔ ۲.۷ نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{1}{y_n} - \frac{1}{b} = -\frac{1}{by_n}(y_n - b) \longrightarrow 0$$

و برهان تمام می‌شود.

مثال. فرض کنید a_0، a_1، ...، a_p، که $a_p \neq 0$، اعداد حقیقی مفروضی باشند و

$$x_n^* = \frac{x_n}{n^p} = \sum_{k=0}^{p} \frac{a_k}{n^{p-k}} \quad \text{و} \quad x_n = \sum_{k=0}^{p} a_k n^k \quad ،n = 1, 2, 3, \ldots \text{ به‌ازای}$$

چون $1/n \longrightarrow 0$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$، از قضیهٔ ۵.۷ لازم می‌آید که $x_n^* \longrightarrow a_p$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$.
به طور مشابه، فرض کنید b_0، b_1، ...، b_q، که $b_q \neq 0$، اعداد حقیقی مفروضی باشند و

$$y_n^* = \frac{y_n}{n^q} = \sum_{k=0}^{q} \frac{b_k}{n^{q-k}} \quad \text{و} \quad y_n = \sum_{k=0}^{q} b_k n^k \quad ،n = 1, 2, 3, \ldots \text{ به‌ازای}$$

چون $y_n^* \longrightarrow b_q \neq 0$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$، به‌ازای همهٔ nهای به قدر کافی بزرگ، مثلاً به‌ازای هر $n \geq n_1 \geq 1$، داریم $y_n \neq 0$. دنبالهٔ $\{x_n/y_n\}$ را به‌ازای $n \geq n_1$ در نظر می‌گیریم. چون

$$\frac{x_n^*}{y_n^*} \longrightarrow \frac{a_p}{b_q} \neq 0 \quad \text{وقتی که} \quad n \longrightarrow \infty$$

دنبالهٔ

$$\frac{x_n}{y_n} = n^{p-q}\left(\frac{x_n^*}{y_n^*}\right)$$

وقتی که $n \longrightarrow \infty$ به 0 میل می‌کند هرگاه $p < q$ و به a_p/b_p میل می‌کند هرگاه $p = q$؛ به‌ازای $p > q$، بالبداهه، دنباله بیکران (از این رو، واگرا) است.

قضیهٔ ۶.۷. اگر $x_n \longrightarrow a$، آن‌گاه $|x_n| \longrightarrow |a|$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. عکس این حکم به‌ازای $a = 0$ نیز برقرار است: اگر $|x_n| \longrightarrow 0$، آن‌گاه $x_n \longrightarrow 0$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$.

برهان. حکم اول مستقیماً از نامساوی

$$||x_n| - |a|| \leq |x_n - b|$$

نتیجه می‌شود و برهان حکم دوم بدیهی است.

قضیهٔ ۷.۷. اگر $x_n \longrightarrow a$ و $y_n \longrightarrow b$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$، و به‌ازای همهٔ nهای به قدرکافی بزرگ $x_n \le y_n$، آن‌گاه $a \le b$. بالاخص، اگر $x_n \longrightarrow a$ و به‌ازای همهٔ nهای به قدرکافی بزرگ $|x_n| \le c$، آن‌گاه $|a| \le c$.

تبصره. برهان قضیهٔ ۷.۷ بدیهی است.

تعریف. دنبالهٔ $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی را نانزولی می‌نامند در صورتی که همواره $x_n \le x_{n+1}$، و آن را ناصعودی می‌نامند در صورتی که همواره $x_n \ge x_{n+1}$. ملاحظه کنید که اگر $\{x_n\}$ نانزولی باشد آن‌گاه $x_n \le x_m$ هرگاه $n < m$ و اگر $\{x_n\}$ ناصعودی باشد آن‌گاه $x_n \ge x_m$ هرگاه $n < m$. دنباله‌ای را که نانزولی یا ناصعودی باشد دنبالهٔ یکنوا می‌نامند.

قضیهٔ ۸.۷. هر دنبالهٔ یکنوای کراندار همگرا است.

برهان. کافی است حالتی را در نظر بگیریم که دنبالهٔ نانزولی است؛ اگر $\{x_n\}$ ناصعودی باشد آن‌گاه $\{-x_n\}$ نانزولی است.

فرض کنید $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ نانزولی کراندار باشد؛ فرض کنید که S مجموعهٔ جمل $\{x_n : n = ۱, ۲, ۳, \ldots\}$ باشد و $M^* = \sup S$. در این صورت،

$$x_n \le M^* \quad \text{به‌ازای هر } n، \tag{۵.۷}$$

به استناد تبصرهٔ متعاقب تعریف سوپرمم در بخش ۲ از فصل ۲، به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ عدد صحیح مثبتی مانند $n_۰$ موجود است به طوری که

$$x_{n_۰} > M^* - \varepsilon$$

چون دنبالهٔ $\{x_n\}$ نانزولی است، نتیجه می‌شود که

$$x_n > M^* - \varepsilon \quad \text{به‌ازای هر } n \ge n_۰، \tag{۶.۷}$$

به استناد (۵.۷) و (۶.۷)، داریم:

$$|x_n - M^*| < \varepsilon \quad \text{به‌ازای هر } n \text{ به قدرکافی بزرگ،}$$

و برهان تمام است.

تبصره. توجه کنید که اصل موضوع کمال (بخش ۲ از فصل ۲ را ببینید.) یک جزء اساسی از برهان قضیهٔ ۸.۷ است.

تعریف. عدد حقیقی a را یک نقطهٔ انباشتگی دنبالهٔ $\{x_n\}$ می‌نامند در صورتی که به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ داشته باشیم

$$|x_n - a| < \varepsilon \qquad \text{به‌ازای بی‌نهایت } n، \tag{۷.۷}$$

تبصره. هر نقطهٔ انباشتگی هر زیردنبالهٔ $\{x_n\}$ یک نقطهٔ انباشتگی دنبالهٔ $\{x_n\}$ نیز هست. حد هر دنبالهٔ همگرای $\{x_n\}$ یک نقطهٔ انباشتگی $\{x_n\}$ است، در واقع، تنها نقطهٔ انباشتگی (چنان که قضیهٔ بعدی نشان خواهد داد).

قضیهٔ ۹.۷. اگر a یک نقطهٔ انباشتگی دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ باشد، آن‌گاه زیردنباله‌ای مانند $\{x_{n_k}\}_{k=۱}^{\infty}$ وجود دارد که همگرا به a است.

برهان. به استقرا زیردنباله‌ای خواهیم ساخت که به‌ازای هر $k = ۱, ۲, ۳, \ldots$،

$$|x_{n_k} - a| < \frac{۱}{k} \tag{۸.۷}$$

در این صورت، بدیهی است که خواهیم داشت: $x_{n_k} \longrightarrow a$ وقتی که $k \longrightarrow \infty$.

از انتخاب $n_۱$ آغاز می‌کنیم به طوری که (۸.۷) به‌ازای $k = ۱$ برقرار باشد. شرط (۷.۷) باعث می‌شود که بتوانیم چنین عدد صحیح مثبتی بیابیم. سپس، $n_۲$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $n_۲ > n_۱$ و (۸.۷) به‌ازای $k = ۲$ برقرار باشد. به طور کلی، n_k را طوری انتخاب می‌کنیم که بزرگتر از ماقبل خود $n_{k-۱}$ باشد و در (۸.۷) صدق کند؛ شرط (۷.۷) با $\varepsilon = ۱/k$ وجود عدد n_k را تضمین می‌کند.

قضیهٔ ۱۰.۷. (قضیهٔ بولتسانو و وایرشتراس) هر دنبالهٔ کراندار از اعداد حقیقی حداقل یک نقطهٔ انباشتگی دارد.

برهان. فرض کنید $\{x_n\}$ دنبالهٔ کراندار مفروضی باشد و

$$M_۰ \leq x_n \leq N_۰ \qquad \text{به‌ازای هر } n،$$

که در آن $M_\circ < N_\circ$. با شروع از بازهٔ بستهٔ $[M_\circ, N_\circ]$ و تنصیف متوالی، دنباله‌ای تودرتو از بازه‌های

$$[M_\circ, N_\circ] \supset [M_۱, N_۱] \supset [M_۲, N_۲] \supset \dots \supset [M_k, N_k] \supset \dots$$

بنا می‌کنیم به طوری که هر یک از این بازه‌ها شامل تعدادی نامتناهی از جمل دنبالهٔ $\{x_n\}$ باشد، یعنی، به‌ازای هر k که $k = \circ, ۱, ۲, \dots$، داشته باشیم

$$M_k \le x_n \le N_k \qquad \text{به‌ازای بی‌نهایت } n،$$

امکان تشکیل چنین ساختاری واضح است، اگر بازه‌ای مانند J شامل تعدادی نامتناهی از جمل یک دنباله باشد، آن‌گاه حداقل یک نیمه از بازهٔ J الزاماً شامل تعدادی نامتناهی از جمل آن دنباله است. واضح است که $\{M_k\}$ دنباله‌ای نانزولی و $\{N_k\}$ دنباله‌ای ناصعودی است؛ بعلاوه، هر دو دنباله کراندارند به این دلیل که همهٔ جمل دو دنباله به بازهٔ $[M_\circ, N_\circ]$ تعلق دارند. همچنین، روشن است که

$$M_k \longrightarrow a، \qquad N_k \longrightarrow a \qquad \text{وقتی که } k \longrightarrow \infty؛$$

که در آن a نقطهٔ مشترک منحصربه‌فردی است که به همهٔ بازه‌های بستهٔ دنبالهٔ تودرتوی $\{[M_k, N_k]\}_{k=۱}^{\infty}$ تعلق دارد. (اصل بازه‌های تودرتو را در بخش ۱ فصل ۱ ملاحظه کنید.) از این رو، به‌ازای هر $\varepsilon > \circ$ عددی طبیعی مانند k موجود است به طوری که

$$a - \varepsilon < M_k < N_k < a + \varepsilon$$

و بنابراین،

$$a - \varepsilon < x_n < a + \varepsilon \qquad \text{به‌ازای بی‌نهایت } n،$$

که از آن لازم می‌آید که a یک نقطهٔ انباشتگی دنبالهٔ $\{x_n\}$ باشد.

قضیهٔ ۷.۱۱. فرض کنید که مجموعهٔ غیرخالی A متشکل از همهٔ نقاط انباشتگی دنبالهٔ کراندار $\{x_n\}$ باشد. آن‌گاه A شامل $\sup A$ و $\inf A$ است.

برهان. فرض کنید $\alpha = \sup A$. آن‌گاه به‌ازای هر $\varepsilon > \circ$ داریم (الف) حداقل یک عنصر مانند a از A در نامساوی $a > \alpha - \varepsilon$ صدق می‌کند و (ب) هر عنصر a از A در نامساوی $a < \alpha + \varepsilon$ صدق می‌کند.

به این ترتیب، به استناد (الف)، عنصری مانند a در A وجود دارد به طوری که $a > \alpha - \varepsilon$. چون $a \in A$ به این معنی است که a یک نقطهٔ انباشتگی $\{x_n\}$ است و چون $\alpha - \varepsilon$ نقطه‌ای از محور حقیقی است که در سمت چپ a قرار دارد، داریم

$$x_n > \alpha - \varepsilon \qquad \text{به‌ازای بی‌نهایت } n،$$

چون به استناد (ب) عدد $\alpha + \varepsilon$ در سمت راست هر نقطهٔ a از A است، نامساوی $x_n \geq \alpha + \varepsilon$ حداکثر به ازای تعدادی متناهی اندیس n می‌تواند برقرار باشد و از این رو،

$$x_n < \alpha + \varepsilon \qquad \text{به‌ازای همهٔ } n\text{های به قدر کافی بزرگ،}$$

بنابراین، $\alpha \in A$. حکم متناظر مربوط به $\inf A$ با استدلال مشابه قابل اثبات است.

تبصره. قضیهٔ ۱۱.۷ نشان می‌دهد که مجموعهٔ A متشکل از همهٔ نقاط انباشتگی یک دنبالهٔ کراندار دارای ماکسیمم و مینیمم است.

تعریف. اعداد حقیقی $\sup A$ و $\inf A$ مورد بحث قضیهٔ ۱۱.۷ را، به ترتیب، حد اعلی و حد اسفل دنبالهٔ $\{x_n\}$ می‌نامند و به صورت

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} x_n \quad \text{و} \quad \underline{\lim}_{n\to\infty} x_n$$

نمایش می‌دهند.

ملاحظات. اعداد $\bar{a} = \overline{\lim}\, x_n$ و $\underline{a} = \underline{\lim}\, x_n$ با خواص زیر مشخص می‌شوند: به‌ازای هر $\varepsilon > 0$،

$$\begin{aligned}
&x_n > \bar{a} - \varepsilon \quad \text{به‌ازای بی‌نهایت } n، \text{ و}\\
&x_n < \bar{a} + \varepsilon \quad \text{به‌ازای همهٔ } n\text{های به قدر کافی بزرگ،}\\
&x_n < \underline{a} + \varepsilon \quad \text{به‌ازای بی‌نهایت } n، \text{ و}\\
&x_n > \underline{a} - \varepsilon \quad \text{به‌ازای همهٔ } n\text{های به قدر کافی بزرگ،}
\end{aligned}$$

به ازای هر دنبالهٔ کراندار $\{x_n\}$ (از اعداد حقیقی) $\overline{\lim}\, x_n$ و $\underline{\lim}\, x_n$ موجودند و $\underline{\lim}\, x_n \leq \overline{\lim}\, x_n$؛ تساوی دقیقاً وقتی رخ می‌دهد که دنباله همگرا باشد (و، در این صورت، داریم $\lim x_n = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n$). همچنین، به آسانی دیده می‌شود که $\underline{\lim}\, x_n = -\overline{\lim}\,(-x_n)$.

به‌ازای دنبالهٔ بیکران، تعریف می‌کنیم $\overline{\lim}\, x_n = \infty$ در صورتی که $\{x_n\}$ از بالا کراندار نباشد و تعریف می‌کنیم $\underline{\lim}\, x_n = -\infty$ در صورتی که $\{x_n\}$ از پایین کراندار نباشد؛ بعلاوه، اگر $x_n \longrightarrow \infty$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$، قرار می‌دهیم $\lim x_n = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = \infty$ و اگر $x_n \longrightarrow -\infty$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$، قرار می‌دهیم $\lim x_n = \underline{\lim}\, x_n = \overline{\lim}\, x_n = -\infty$.

تعریف. دنبالهٔ $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی را یک دنبالهٔ کوشی می‌گویند در صورتی که به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ عدد صحیح مثبتی مانند $n_۰$ موجود باشد به طوری که

$$|x_n - x_m| < \varepsilon \quad \text{به‌ازای هر } n \geq n_۰ \text{ و هر } m \geq n_۰، \qquad (۹.۷)$$

ملاحظات. در (۹.۷)، می‌توانیم ε را با $M\varepsilon$، که در آن M عدد حقیقی ثابت مثبت دلخواهی مستقل از ε است، تعویض کنیم.

بدون آن که به کلیت خللی وارد شود، می‌توانیم فرض کنیم که $m > n$ و (۹.۷) را به صورت زیر فرمولبندی کنیم:

$$|x_{n+k} - x_n| < \varepsilon \quad \text{به‌ازای هر } n \geq n_۰ \text{ و هر عدد صحیح مثبت } k،$$

قضیهٔ ۱۲.۷. دنبالهٔ $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی فقط و فقط وقتی همگرا است که یک دنبالهٔ کوشی باشد.

برهان. فرض کنید که $\{x_n\}$ همگرا باشد و $x_n \longrightarrow a$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. آن‌گاه، به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ مفروض، داریم

$$|x_n - a| < \varepsilon, \quad |x_m - a| < \varepsilon, \quad \text{به‌ازای همهٔ } n\text{ها و } m\text{های به قدر کافی بزرگ}$$

به این ترتیب، نامساوی

$$|x_n - x_m| = |(x_n - a) - (x_m - a)| \leq |x_n - a| + |x_m - a| < ۲\varepsilon$$

به‌ازای همهٔ nها و mهای به قدر کافی بزرگ برقرار است و نشان می‌دهد که $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ کوشی است.

بالعکس، فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای کوشی باشد، یعنی، به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ مفروض عدد صحیح مثبتی مانند $n_۰$ موجود است به طوری که در شرط (۹.۷) صدق می‌کند. بالاخص، نتیجه می‌شود که

$$|x_n - x_{n_۰}| < \varepsilon \quad \text{به‌ازای هر } n \geq n_۰،$$

از این رو،

$$|x_n| < |x_{n_\circ}| + \varepsilon \qquad \text{به‌ازای هر } n \geq n_\circ،$$

بنابراین، از میان دو عدد

$$\max\{|x_n| : n \leq n_\circ\}, \qquad |x_{n_\circ}| + \varepsilon$$

عدد بزرگتر یک کران $|x_n|$ است و، به استناد قضیهٔ ۱۰.۷، دنبالهٔ $\{x_n\}$ یک نقطهٔ انباشتگی مانند a دارد. لذا، داریم

$$|x_m - a| < \varepsilon \qquad \text{به‌ازای بی‌نهایت } m،$$

یک m را چنان انتخاب می‌کنیم که $m \geq n_\circ$. در این صورت، به‌ازای هر $n \geq n_\circ$، داریم

$$|x_n - a| \leq |x_n - x_m| + |x_m - a| < ۲\varepsilon$$

این بدان معنی است که a حد $\{x_n\}$ و برهان تمام است.

قضیهٔ ۱۳.۷. فرض کنید $\{x_n\}$ دنباله‌ای همگرا با حد a باشد. آن‌گاه

$$y_n = \frac{x_۱ + x_۲ + \cdots + x_n}{n} \longrightarrow a \qquad \text{وقتی که } n \longrightarrow \infty،$$

برهان. فرض کنید $x_n = v_n + a$. باید نشان دهیم که اگر $\{v_n\}$ یک دنبالهٔ صفر باشد،

$$\frac{v_۱ + v_۲ + \cdots + v_n}{n} \longrightarrow \circ \qquad \text{وقتی که } n \longrightarrow \infty،$$

حال، به‌ازای $n > m$،

$$\frac{v_۱ + v_۲ + \cdots + v_n}{n} = \frac{v_۱ + v_۲ + \cdots + v_m}{n} + \frac{v_{m+۱} + v_{m+۲} + \cdots + v_n}{n}$$

از این رو،

$$\left|\frac{v_۱ + v_۲ + \cdots + v_n}{n}\right| \leq \frac{|v_۱ + v_۲ + \cdots + v_m|}{n} + \frac{|v_{m+۱}| + |v_{m+۲}| + \cdots + |v_n|}{n}$$

به‌ازای $\varepsilon > \circ$ مفروض، می‌توانیم m را طوری اختیار کنیم که هرگاه $n > m$ آن‌گاه $|v_n| < \varepsilon/۲$. به‌ازای هر چنین nی، داریم:

$$\left|\frac{v_۱ + v_۲ + \cdots + v_n}{n}\right| \leq \frac{|v_۱ + v_۲ + \cdots + v_m|}{n} + \frac{\varepsilon}{۲} \cdot \frac{n - m}{n}$$

چون $|v_1 + v_2 + \cdots + v_m|$ عدد حقیقی ثابتی است، عدد صحیح مثبت $n_0 > m$ را می‌توان طوری انتخاب کرد که به‌ازای هر $n > n_0$ داشته باشیم

$$\frac{|v_1 + v_2 + \cdots + v_m|}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$$

در این صورت،

$$\text{به‌ازای هر } n > n_0، \quad \frac{|v_1 + v_2 + \cdots + v_n|}{n} < \varepsilon$$

و برهان کامل می‌شود.

قضیهٔ ۱۴.۷. فرض کنید $\{u_n\}$ دنباله‌ای همگرا با حد b باشد و هر u_n و b مثبت باشند. در این صورت،

$$\text{وقتی که } n \longrightarrow \infty، \quad w_n = \sqrt[n]{u_1 u_2 \ldots u_n} \longrightarrow b$$

برهان. چون لگاریتم طبیعی $\ln$ تابعی پیوسته است، درمی‌یابیم که (قضیهٔ ۴.۲ و تعریف پیوستگی را ببینید.) $u_n \longrightarrow b$ ایجاب می‌کند که

$$\text{وقتی که } n \longrightarrow \infty، \quad x_n = \ln u_n \longrightarrow a = \ln b$$

به استناد قضیهٔ ۱۲.۷،

$$\text{وقتی که } n \longrightarrow \infty، \quad y_n = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n} = \ln \sqrt[n]{u_1 u_2 \ldots u_n} = \ln w_n \longrightarrow \ln b$$

امّا تابع نمایی پیوسته است و از این رو،

$\ln w_n \longrightarrow \ln b$ ایجاب می‌کند که $w_n \longrightarrow b$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$؛

و برهان کامل می‌شود.

کاربردها. با اعمال قضیهٔ ۱۴.۷ در مورد دنبالهٔ

$$u_1, \quad \frac{u_2}{u_1}, \quad \ldots, \quad \frac{u_n}{u_{n-1}}, \quad \frac{u_{n+1}}{u_n}, \quad \ldots$$

که در آن $\{u_{n+1}/u_n\}$ همگرا فرض می‌شود، خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{u_{n+1}}{u_n}$$

(البته، $\lim_{n\to\infty} u_{n+1}/u_n = \lim_{n\to\infty} u_n/u_{n-1}$). اگر قرار دهیم $u_n = n!/n^n$، درمی‌یابیم که

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}}.\frac{n^n}{n!} = \frac{1}{(1+\frac{1}{n})^n} \longrightarrow \frac{1}{e} \qquad \text{وقتی که } n \longrightarrow \infty،$$

از این رو،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{1}{e}$$

اگر قرار دهیم $u_n = (n+1)(n+2)\dots(n+n)/n^n$، متوجه می‌شویم که $u_{n+1}/u_n \longrightarrow 4/e$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. از این رو،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sqrt[n]{(n+1)(n+2)\dots(n+n)} = \frac{4}{e}$$

اگر بگیریم $u_n = n$، می‌بینیم که $u_{n+1}/u_n \longrightarrow 1$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$؛ از این رو، $\sqrt[n]{n} \longrightarrow 1$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. (حکمی که پیش از این از لم ماقبل قضیهٔ ۸.۱ به دست آمده است.)

قضیهٔ ۱۵.۷. اگر $\{x_n\}$ و $\{y_n\}$، به ترتیب، به X و Y همگرا باشند، آن‌گاه $\{Z_n\}$ با

$$Z_n = \frac{x_1 y_n + x_2 y_{n-1} + \cdots + x_n y_1}{n}$$

به XY همگرا است.

برهان. فرض کنید $x_n = X + a_n$. در این صورت، $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ صفر است. چون $\{y_n\}$ همگرا است، کراندار است (قضیهٔ ۴.۷) و، بنابراین، عددی مانند K وجود دارد به طوری که

$$|y_n| < K \qquad \text{به‌ازای هر } n،$$

داریم

$$Z_n = X\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} + \frac{a_1 y_n + a_2 y_{n-1} + \cdots + a_n y_1}{n}$$

به استناد قضیهٔ ۱۳.۷،

$$\frac{y_1 + y_2 + \cdots + y_n}{n} \longrightarrow Y$$

و

$$\left|\frac{a_۱ y_n + a_۲ y_{n-۱} + \cdots + a_n y_۱}{n}\right| \leq K \frac{|a_۱| + |a_۲| + \cdots + |a_n|}{n} \longrightarrow ۰$$

وقتی که $n \longrightarrow \infty$. بنابراین، Z_n به XY همگرا است.

مثالهای حل شده

۱. (الف) فرض کنید

$$\frac{a_۱}{b_۱}, \frac{a_۲}{b_۲}, \ldots, \frac{a_n}{b_n}$$

n کسر باشند که $b_i > ۰$ وقتی که $i = ۱, ۲, \ldots, n$. نشان دهید که کسر

$$\frac{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n}{b_۱ + b_۲ + \cdots + b_n}$$

بین کوچکترین و بزرگترین این کسرها واقع است.

(ب) با استفاده از قسمت (الف)، نشان دهید که اگر $\{a_n/b_n\}$ دنباله‌ای یکنوا باشد به طوری که $b_n > ۰$ وقتی که $n = ۱, ۲, \ldots$، آن‌گاه $\{c_n\}$ با

$$c_n = \frac{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n}{b_۱ + b_۲ + \cdots + b_n}$$

نیز دنباله‌ای یکنوا است.

حل. برای تحقیق در صحت ادعای قسمت (الف)، فرض کنید m و M، به ترتیب، کوچکترین و بزرگترین این کسرها باشند. آن‌گاه

به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, n$، $\quad m \leq \frac{a_i}{b_i} \leq M \quad$ یا $\quad mb_i \leq a_i \leq Mb_i$

از جمع این نامساویها، درمی‌یابیم که

$$m \sum_{i=۱}^{n} b_i \leq \sum_{i=۱}^{n} a_i \leq M \sum_{i=۱}^{n} b_i$$

یا

$$m \leq \frac{\sum_{i۱}^{n} a_i}{\sum_{i=۱}^{n} b_i} \leq M$$

برای بررسی قسمت (ب)، فرض می‌کنیم که $\{a_n/b_n\}$ نانزولی باشد:

$$\frac{a_۱}{b_۱} \leq \frac{a_۲}{b_۲} \leq \dots \leq \frac{a_n}{b_n} \leq \frac{a_{n+۱}}{b_{n+۱}} \leq \dots$$

به استناد قسمت (الف)،

$$\frac{a_۱}{b_۱} \leq \frac{a_۱ + a_۲ + \dots + a_n}{b_۱ + b_۲ + \dots + b_n} \leq \frac{a_n}{b_n}$$

و

$$\frac{a_۱ + a_۲ + \dots + a_n}{b_۱ + b_۲ + \dots + b_n} \leq \frac{a_۱ + a_۲ + \dots + a_n + a_{n+۱}}{b_۱ + b_۲ + \dots + b_n + b_{n+۱}} \leq \frac{a_{n+۱}}{b_{n+۱}}$$

بالاخص، نتیجه می‌شود که $\{c_n\}$ نانزولی است. حالتی که دنبالهٔ مفروض ناصعودی باشد، به صورتی کاملاً مشابه محقق می‌شود.

ملاحظات. از بحث بالا به آسانی می‌توان نتیجه گرفت که: اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای یکنوا باشد، آن‌گاه $\{c_n\}$ با

$$c_n = \frac{a_۱ + a_۲ + \dots + a_n}{n}$$

نیز دنباله‌ای یکنوا است. در واقع، کافی است که، در قسمت (ب)، قرار دهیم $b_n = ۱$ وقتی که $n = ۱, ۲, ۳, \dots$.

به طور مشابه، اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای یکنوا باشد به طوری که $a_n > ۰$ وقتی که $n = ۱, ۲, ۳, \dots$، آن‌گاه $\{c_n\}$ با

$$c_n = \sqrt[n]{a_۱ a_۲ \dots a_n}$$

نیز دنباله‌ای یکنوا است. در این حالت، فقط لازم است توجه کنیم که

$$\ln c_n = \frac{\ln a_۱ + \ln a_۲ + \dots + \ln a_n}{n}$$

و این که تابع لگاریتمی جهت یکنوایی را حفظ می‌کند.

۲. نشان دهید که دنبالهٔ $\{x_n\}$ با

$$x_n = \frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n+۲} + \dots + \frac{۱}{n+n}$$

همگرا است و حدش را بیابید.

حل. چون

$$x_{n+1}-x_n=\frac{1}{2n+1}+\frac{1}{2n+2}-\frac{1}{n}<\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}-\frac{1}{n}=0$$

دیده می‌شود که دنبالهٔ مورد بحث نزولی است. بعلاوه، $\frac{1}{2}$ یک کران پایین دنباله است؛ زیرا

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\geq\frac{1}{2n}+\frac{1}{2n}+\cdots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{2}$$

و ۱ یک کران بالای دنباله است؛ زیرا

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\leq\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+1}+\cdots+\frac{1}{n+1}=\frac{n}{n+1}<1$$

به استناد قضیهٔ ۸.۷، دنبالهٔ $\{x_n\}$ همگرا است.

به عنوان کاربردی از قضیهٔ ۶.۱، قبلاً نشان داده‌ایم که

$$\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\longrightarrow \ln 2 \quad \text{وقتی } n\longrightarrow\infty،$$

در این جا همین حکم را به روش دیگری ثابت می‌کنیم: تقسیم $[0,1]$ به n زیربازه به طول مساوی و ملاحظهٔ مجموع تقریب مستطیلهای زیرمنحنی $y=1/(1+x)$ به نتیجهٔ زیر می‌انجامد:

$$\begin{aligned}&\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\cdots+\frac{1}{n+n}\\&=\frac{1}{n}\left(\frac{1}{1+1/n}+\frac{1}{1+2/n}+\cdots+\frac{1}{1+n/n}\right)\longrightarrow\int_0^1\frac{1}{1+x}dx=\ln 2\end{aligned}$$

وقتی که $n\longrightarrow\infty$.

۳. فرض کنید $a_1>b_1>0$ مفروض باشد. اعداد زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\begin{aligned}b_2&=\sqrt{a_1b_1}\ , & a_2&=\tfrac{a_1+b_1}{2}\\b_3&=\sqrt{a_2b_2}\ , & a_3&=\tfrac{a_2+b_2}{2}\\&\vdots\ , & &\vdots\\b_{n+1}&=\sqrt{a_nb_n}\ , & a_{n+1}&=\tfrac{a_n+b_n}{2}\\&\vdots\ , & &\vdots\end{aligned}$$

نشان دهید که دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به یک حد مشترک $L(a_1, b_1)$ میل می‌کنند و تحقیق کنید که

$$L(a_1, b_1) = \frac{\pi}{2G}$$

که در آن

$$G = \int_0^{\pi/2} \frac{1}{(a_1^2 \cos^2 x + b_1^2 \sin^2 x)^{1/2}} dx$$

حل. ملاحظه می‌کنیم که $a_1 > a_2 > b_2 > b_1$ و، به طور کلی،

$$a_1 > a_2 > \cdots > a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_n > \cdots > b_2 > b_1$$

از این رو، $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی و کراندار است و $\{b_n\}$ دنباله‌ای صعودی و کراندار است. در واقع، آشکار است که $a_1 > a_2$ و $b_2 > b_1$ (زیرا $a_1 > b_1 > 0$). برای این که ببینیم که $a_2 > b_2$، توجه می‌کنیم که

$$\frac{a_1 + b_1}{2} - \sqrt{a_1 b_1} = \frac{(\sqrt{a_1} - \sqrt{b_1})^2}{2} > 0, \qquad \text{وقتی که } a_1 \neq b_1 \text{،}$$

به طریق مشابه، می‌توانیم نشان بدهیم که

$$a_n > a_{n+1} > b_{n+1} > b_1$$

بعلاوه، به آسانی دیده می‌شود که

$$a_1 > a_n > b_n > b_1$$

بنابراین، به استناد قضیهٔ ۸.۷، دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ همگرایند؛ فرض کنید

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} a_n \quad \text{و} \quad \beta = \lim_{n\to\infty} b_n$$

امّا

$$a_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2}$$

از این رو، وقتی $n \longrightarrow \infty$، خواهیم داشت:

$$\alpha = \frac{\alpha + \beta}{2}$$

و معلوم می‌شود که $\alpha = \beta$. این حد مشترک را به $L = L(a_1, b_1)$ نشان می‌دهیم.

حال، فرض می‌کنیم که $a > b > 0$ و قرار می‌دهیم:

$$B = \sqrt{ab} \quad \text{و} \quad A = \frac{a+b}{2}$$

و نشان می‌دهیم که

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a^2\cos^2 x + b^2\sin^2 x)^{1/2}} = \int_0^{\pi/2} \frac{dt}{(A^2\cos^2 t + B^2\sin^2 t)^{1/2}} \quad (10.7)$$

با اعمال مکرر (۱۰.۷) در می‌یابیم که

$$G = \int_0^{\pi/2} \frac{dx}{(a_n^2\cos^2 x + b_n^2\sin^2 x)^{1/2}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

که در آن a_n و b_n با فرمول‌های بازگشتی

$$a_n = \frac{a_{n-1} + b_{n-1}}{2}, \qquad b_n = \sqrt{a_{n-1}b_{n-1}}$$

تعریف می‌شوند. چنان که از قبل می‌دانیم، این دو دنباله به حد مشترک $L = L(a_1, b_1)$ همگرایند. به آسانی دیده می‌شود که

$$\frac{\pi}{2a_n} < G < \frac{\pi}{2b_n}$$

و با حدگیری، وقتی که $n \longrightarrow \infty$، نتیجهٔ زیر عاید می‌شود:

$$L(a_1, b_1) = \frac{\pi}{2G} \quad \text{یا} \quad G = \frac{\pi}{2L(a_1, b_1)}$$

به تحقیق در صحت تبدیل (۱۰.۷) برمی‌گردیم و قرار می‌دهیم

$$\sin x = \frac{2a\sin t}{(a+b) + (a-b)\sin^2 t}$$

وقتی t از 0 به $\pi/2$ تغییر کند، x از 0 به $\pi/2$ می‌رود. با مشتقگیری خواهیم داشت:

$$\cos x dx = 2a\frac{(a+b) - (a-b)\sin^2 t}{[(a+b) + (a-b)\sin^2 t]^2}\cos t dt$$

امّا

$$\cos x = \frac{[(a+b)^2 - (a-b)^2\sin^2 t]^{1/2}}{(a+b) + (a-b)\sin^2 t}\cos t$$

و به این ترتیب،

$$dx = ۲a\frac{(a+b)-(a-b)\sin^۲ t}{(a+b)+(a-b)\sin^۲ t}.\frac{dt}{[(a+b)^۲-(a-b)^۲\sin^۲ t]^{۱/۲}}$$

از طرف دیگر،

$$(a^۲\cos^۲ x + b^۲\sin^۲ x)^{۱/۲} = a\frac{(a+b)-(a-b)\sin^۲ t}{(a+b)+(a-b)\sin^۲ t}$$

و بنابراین،

$$\frac{dx}{(a^۲\cos^۲ x + b^۲\sin^۲ x)^{۱/۲}} = \frac{dt}{\{[(a+b)/۲]^۲\cos^۲ t + ab\sin^۲ t\}^{۱/۲}}$$

که مستلزم (۱۰.۷) است.

ملاحظات. از فرمول

$$G = \frac{\pi}{۲L(a_۱, b_۱)}$$

می‌توانیم در محاسبهٔ تقریبی بعضی از انواع انتگرالها استفاده کنیم. به عنوان مثال،

$$G = \int_۰^{\pi/۲}\frac{dx}{(۱+\cos^۲ x)^{۱/۲}} = \int_۰^{\pi/۲}\frac{dx}{(۲\cos^۲ x + \sin^۲ x)^{۱/۲}}$$

و می‌گیریم $a_۱ = \sqrt{۲}$ و $b_۱ = ۱$. در این حالت، دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ سریعاً به $L = L(a_۱, b_۱)$ میل می‌کنند و دیده می‌شود که $a_۴$ و $b_۴$ هر دو تقریباً مساوی ۱٫۱۹۸۱۵۴ می‌باشند. اگر L را تقریباً مساوی ۱٫۱۹۸۱۵۴ بگیریم، خواهیم داشت:

$$G = \frac{\pi}{۲L} = ۱٫۳۱۱۰۱۱۳۸ \quad (\text{تقریباً})$$

فرمول (۱۰.۷) منسوب به کارل فردریش گاوس (۱۸۵۵-۱۷۷۷) است.

۴. فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ...، a_p اعداد حقیقی مثبتی باشند و A بزرگترین این اعداد باشد. نشان دهید که

$$\lim_{n\to\infty}(a_۱^n + a_۲^n + \cdots + a_p^n)^{۱/n} = A$$

حل. چون

$$A \le (a_۱^n + a_۲^n + \cdots + a_p^n)^{۱/n} \le A.\sqrt[n]{p}$$

و، به استناد لم ماقبل قضیهٔ ۱.۱۰.۱، $\sqrt[n]{p} \longrightarrow ۱$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$، حکم مطلوب نتیجه می‌شود.

۵. فرض کنید

$$Z_n = \frac{1}{(n^2+1)^{1/2}} + \frac{1}{(n^2+2)^{1/2}} + \cdots + \frac{1}{(n^2+n)^{1/2}}$$

$\lim_{n\to\infty} Z_n$ را بیابید.

حل. فرض کنید

$$y_n = \frac{n}{(n^2+1)^{1/2}} \quad \text{و} \quad x_n = \frac{n}{(n^2+n)^{1/2}}$$

واضح است که هر جمعوند موجود در عبارت Z_n از اولین آنها کوچکتر و از آخرین جمعوند بزرگتر است. از این رو،

$$x_n = \frac{n}{(n^2+n)^{1/2}} < Z_n < \frac{n}{(n^2+1)^{1/2}} = y_n$$

امّا $x_n \longrightarrow 1$ و $y_n \longrightarrow 1$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$؛ بنابراین، $Z_n \longrightarrow 1$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$.

۶. فرض کنید

$$a_n = \ln\left(1+\frac{1}{n^2}\right) + \ln\left(1+\frac{2}{n^2}\right) + \cdots + \ln\left(1+\frac{n}{n^2}\right)$$

$\lim_{n\to\infty} a_n$ را بیابید.

حل. چون نامساویهای $x/(1+x) < \ln(1+x) < x$ به‌ازای $x > 0$ برقرارند، اگر فرض کنیم $x = k/n^2$ و $k \le n < n^2$، خواهیم داشت:

$$\frac{k}{n^2+n} \le \frac{k}{n^2+k} < \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) < \frac{k}{n^2}$$

بنابراین،

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2+n} < \sum_{k=1}^{n} \ln\left(1+\frac{k}{n^2}\right) < \sum_{k=1}^{n} \frac{k}{n^2}$$

لذا،

$$\frac{1+2+\cdots+n}{n^2+n} < a_n < \frac{1+2+\cdots+n}{n^2}$$

یا

$$\frac{n(n+1)}{2(n^2+n)} < a_n < \frac{n(n+1)}{2n^2}$$

که مستلزم

$$\frac{1}{2} < a_n < \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right)$$

است و نتیجه می‌شود که $a_n \longrightarrow \frac{1}{2}$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$.

۷. فرض کنید $x_{۱} = ۱$ و

$$x_{n+۱} = \left(۱ - \frac{۱}{(n+۱)^{۲}}\right) x_n, \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

$\lim_{n\to\infty} x_n$ را بیابید.

حل. واضح است که $۱ \le x_n > x_{n+۱} > ۰$. از این رو، به استناد قضیهٔ ۸.۷، $\lim_{n\to\infty} x_n$ وجود دارد. چون

$$x_{۲n} = \frac{n+۱}{۲n}$$

ملاحظه می‌کنیم که $x_n \longrightarrow \frac{۱}{۲}$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$.

۸. فرض کنید $a_{۰} = ۱$ و

$$a_{n+۱} = \frac{۱}{۱ + a_n}, \qquad n = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

$\lim_{n\to\infty} a_n$ را بیابید.

حل. نخست تحقیق می‌کنیم که $\{a_n\}$ همگرا است. به طور آشکار، همواره $\frac{۱}{۲} \le a_n \le ۱$؛ بنابراین، به‌ازای n دلخواه و $k \ge ۰$،

$$a_{n+۱+k} - a_{n+۱} = \frac{۱}{۱+a_{n+k}} - \frac{۱}{۱+a_n} = -\frac{a_{n+k} - a_n}{(۱+a_{n+k})(۱+a_n)}$$
$$|a_{n+۱+k} - a_{n+۱}| = \frac{|a_{n+k} - a_n|}{(۱+a_{n+k})(۱+a_n)} \le \frac{۱}{(۱+\frac{۱}{۲})^{۲}}|a_{n+k} - a_n| = \frac{۴}{۹}|a_{n+k} - a_n|$$

به این ترتیب،

$$|a_{n+k} - a_n| \le \left(\frac{۴}{۹}\right)^{n} |a_k - a_{۰}| \le ۲ \cdot \left(\frac{۴}{۹}\right)^{n}$$

چون $(\frac{۴}{۹})^n \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$، ملاحظه می‌کنیم که $\{a_n\}$ دنباله‌ای کوشی است؛ به استناد قضیهٔ ۱۲.۷، $\{a_n\}$ همگرا است. حدگیری از

$$a_{n+۱} = \frac{۱}{۱+a_n}$$

وقتی که $n \longrightarrow \infty$ به نتیجهٔ $a = ۱/(۱+a)$ یا $a^{۲} + a = ۱$ می‌انجامد که در آن $a = \lim_{n\to\infty} a_n$ جواب مثبت معادلهٔ $a^{۲} + a = ۱$ است.

۹. فرض کنید

$$a_{n+۱} = \frac{a_n + b_n}{۲} \quad \text{و} \quad b_{n+۱} = \sqrt{a_{n+۱} b_n}$$

که در آن $a_۱ = \cos t$ با $-\pi/۲ < t < \pi/۲$ و $b_۱ = ۱$. نشان دهید که $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به یک حد $L = (\sin t)/t$ همگرایند.

حل. نخست نشان می‌دهیم که به‌ازای $t \neq ۰$،

$$\lim_{n\to\infty} \left(\cos \frac{t}{۲}\right)\left(\cos \frac{t}{۲^۲}\right)\left(\cos \frac{t}{۲^۳}\right)\cdots\left(\cos \frac{t}{۲^n}\right) = \frac{\sin t}{t} \qquad (۱۱.۷)$$

در واقع،

$$\sin t = ۲\left(\cos \frac{t}{۲}\right)\left(\sin \frac{t}{۲}\right) = ۲^۲\left(\cos \frac{t}{۲}\right)\left(\cos \frac{t}{۲^۲}\right)\left(\sin \frac{t}{۲^۲}\right) = \ldots$$
$$= ۲^n\left(\cos \frac{t}{۲}\right)\left(\cos \frac{t}{۲^۲}\right)\cdots\left(\cos \frac{t}{۲^n}\right)\left(\sin \frac{t}{۲^n}\right)$$

بنابراین، تساوی

$$\left(\cos \frac{t}{۲}\right)\left(\cos \frac{t}{۲^۲}\right)\left(\cos \frac{t}{۲^۳}\right)\cdots\left(\cos \frac{t}{۲^n}\right) = \frac{\sin t}{t}.\frac{t/۲^n}{\sin(t/۲^n)}$$

برقرار است. امّا $x_n = t/۲^n \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$ و $(\sin x)/x \longrightarrow ۱$ وقتی که $x \longrightarrow ۰$.

سپس، با مراجعه به مسألهٔ مورد بحث، توجه می‌کنیم که

$$a_۲ = \frac{\cos t + ۱}{۲} = \cos^۲ \frac{t}{۲}$$
$$a_۳ = \left(\cos \frac{t}{۲}\right)\left(\cos^۲ \frac{t}{۲^۲}\right)$$
$$a_۴ = \left(\cos \frac{t}{۲}\right)\left(\cos \frac{t}{۲^۲}\right)\left(\cos^۲ \frac{t}{۲^۳}\right)$$
$$a_۵ = \left(\cos \frac{t}{۲}\right)\left(\cos \frac{t}{۲^۲}\right)\left(\cos \frac{t}{۲^۳}\right)\left(\cos^۲ \frac{t}{۲^۴}\right)$$

$$b_۲ = \cos \frac{t}{۲}$$
$$b_۳ = \left(\cos \frac{t}{۲}\right)\left(\cos \frac{t}{۲^۲}\right)$$
$$b_۴ = \left(\cos \frac{t}{۲}\right)\left(\cos \frac{t}{۲^۲}\right)\left(\cos \frac{t}{۲^۳}\right)$$
$$b_۵ = \left(\cos \frac{t}{۲}\right)\left(\cos \frac{t}{۲^۲}\right)\left(\cos \frac{t}{۲^۳}\right)\left(\cos \frac{t}{۲^۴}\right)$$

و هکذا. امّا $\cos x \longrightarrow ۱$ وقتی که $x \longrightarrow ۰$ و، به استناد (۱۱.۷)، همه چیز واضح است.

۱۰. بعد از اثبات قضیهٔ ۱۴.۷، نشان دادیم که

$$\lim \frac{\sqrt[n]{n!}}{n} = \frac{۱}{e} \quad \text{و} \quad \lim \frac{۱}{n}\sqrt[n]{(n+۱)(n+۲)\dots(n+n)} = \frac{۴}{e}$$

درستی این احکام را براساس نظریهٔ انتگرالگیری بررسی کنید.

حل. ملاحظه می‌کنیم که وقتی $n \longrightarrow \infty$،

$$\begin{aligned}\ln\left(\frac{n!}{n^n}\right)^{۱/n} &= \frac{۱}{n}\left(\ln\frac{۱}{n} + \ln\frac{۲}{n} + \dots + \ln\frac{n}{n}\right)\\ &\longrightarrow \int_۰^۱ (\ln x)dx = [x(\ln x) - x]|_۰^۱ = -۱\end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned}&\ln\left(\frac{(n+۱)(n+۲)\dots(n+n)}{n^n}\right)\\ &= \frac{۱}{n}\left(\ln\left(۱+\frac{۱}{n}\right) + \ln\left(۱+\frac{۲}{n}\right) + \dots + \ln\left(۱+\frac{n}{n}\right)\right)\\ &\longrightarrow \int_۰^۱ \ln(۱+x)dx = [(۱+x)\ln(۱+x) - x]|_۰^۱ = (\ln ۴) - ۱\end{aligned}$$

۱۱. فرض کنید f یک ترکیب خطی (متناهی و حقیقی) از توابعی به صورت $h(t) = t^r$ باشد که در آن r یک عدد حقیقی ثابت است؛ بالاخص، f می‌تواند یک چندجمله‌ای باشد. فرض کنید $[a,b]$ بازهٔ بسته‌ای باشد با $۰ < a < b$. قرار دهید

$$p_۱ = ad,\ \ p_۲ = ad^۲,\ \ \dots,\ \ p_{n-۱} = ad^{n-۱}$$

که در آن $d = \sqrt[n]{b/a}$، و

$$q_۱ = a+s,\ \ q_۲ = a+۲s,\ \ \dots,\ \ q_{n-۱} = a+(n-۱)s$$

که در آن $s = (b-a)/n$. فرض کنید A میانگین حسابی مقادیر

$$f(a),\ \ f(p_۱),\ \ \dots,\ \ f(p_{n-۱}),\ \ f(b)$$

باشد و G میانگین حسابی مقادیر

$$\frac{f(a)}{a},\ \ \frac{f(q_۱)}{q_۱},\ \ \dots,\ \ \frac{f(q_{n-۱})}{q_{n-۱}},\ \ \frac{f(b)}{b}$$

در این صورت، وقتی $n \longrightarrow \infty$، کسر G/A به حدی میل می‌کند که مستقل از f است؛ این حد عبارت است از $\ln(b/a)/(b-a)$.

حل. نخست، فرض کنید که $f(t) = t^r$ که در آن r یک عدد حقیقی ثابت است. آن‌گاه

$$G = \frac{1}{n+1}\left(a^{r-1} + q_1^{r-1} + \cdots + q_{n-1}^{r-1} + b^{r-1}\right)$$

و، بنابراین،

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} G &= \frac{\ln(b/a)}{b-a} \qquad r = 0 \qquad \text{هرگاه} \\ &= \frac{b^r - a^r}{(b-a)r} \qquad r \neq 0 \qquad \text{هرگاه} \end{aligned}$$

در واقع، وقتی $n \longrightarrow \infty$،

$$\frac{1}{n+1}\left(a^{r-1} + q_1^{r-1} + \cdots + q_{n-1}^{r-1} + b^{r-1}\right) \longrightarrow \frac{1}{b-a}\int_a^b t^{r-1}dt$$

بعلاوه،

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{n+1}\left(a^r + (ad)^r + (ad^2)^r + \cdots + (ad^{n-1})^r + b^r\right) \\ &= \frac{a^r}{n+1}\left(1 + d^r + d^{2r} + \cdots + d^{(n-1)r} + d^{nr}\right) \end{aligned}$$

و، بنابراین،

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} A &= 1 \qquad r = 0 \qquad \text{هرگاه} \\ &= \frac{b^r - a^r}{r\ln(b/a)} \qquad r \neq 0 \qquad \text{هرگاه} \end{aligned}$$

این نتیجه‌گیری در حالی که $r = 0$ بدیهی است؛ در حالتی که $r \neq 0$ و $n \longrightarrow \infty$ ، داریم

$$\frac{a^r}{n+1}\left(1 + d^r + d^{2r} + \cdots + d^{(n-1)r} + d^{nr}\right) \longrightarrow \frac{a^r}{r}\int_0^r \left(\frac{b}{a}\right)^t dt$$

به این ترتیب، وقتی که $f(t) = t^r$ و $n \longrightarrow \infty$، G/A به $\ln(b/a)/(b-a)$ میل می‌کند.

اگر فرض کنیم $f(t) = Kt^r$، که در آن K یک ثابت باشد، بدیهی است که کسر G/A تغییر نمی‌کند؛ عامل K از صورت و مخرج G/A حذف می‌شود. سرانجام، برای این که ببینیم که حکم مطلوب در حالتی که f ترکیبی خطی از توابعی به صورت $h(t) = t^r$ است برقرار می‌باشد ملاحظه می‌کنیم که: در دنباله‌ای متناهی از کسرهای متساوی، از تقسیم مجموع صورتها به مجموع مخرجها کسری به دست می‌آید که با هر یک از کسرهای مفروض در دنباله برابر است.

۱۲. به‌ازای هر عدد حقیقی ثابت a، $a^n/n! \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$.

حل. فرض کنید که $a > ۰$ و عدد صحیح k طوری باشد که $a < k + ۱$. به‌ازای $n > k$، داریم

$$\frac{a^n}{n!} = \frac{a^k}{k!} . \frac{a}{k+۱} . \frac{a}{k+۲} . \cdots . \frac{a}{n}$$

به این ترتیب،

$$\frac{a^n}{n!} \leq \frac{a^k}{k!} . \left(\frac{a}{k+۱}\right)^{n-k}$$

امّا $a^k/k!$ ثابت است و $[a/(k+۱)]^{n-k} \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$.

۱۳. فرض کنید

$$x_n = n\left(۱ - \frac{\ln n}{n}\right)^n, \qquad n = ۲, ۳, \ldots$$

$\lim_{n\to\infty} x_n$ را بیابید.

حل. قرار می‌دهیم $v = n/(\ln n)$. آن‌گاه

$$\ln x_n = \left(۱ + v \ln\left(۱ - \frac{۱}{v}\right)\right)(\ln n)$$

امّا

$$-\ln\left(۱ - \frac{۱}{v}\right) = -\ln\frac{v-۱}{v} = \ln\frac{v}{v-۱} = \ln\left(۱ + \frac{۱}{v-۱}\right)$$

و [با یادآوری نامساوی (۳.۱)]

$$\frac{۱}{v} < -\ln\left(۱ - \frac{۱}{v}\right) = \ln\left(۱ + \frac{۱}{v-۱}\right) < \frac{۱}{v-۱}$$

بعلاوه،

$$\ln x_n > \left(\ln\left(۱ - \frac{۱}{v}\right)\right)(\ln n)$$

بنابراین،

$$۰ < -\ln x_n < (\ln n)\left(-\ln\left(۱ - \frac{۱}{v}\right)\right)$$

یا

$$۰ < -\ln x_n < \frac{\ln n}{v-۱}$$

از این رو،

$$\circ < -\ln x_n < \frac{\ln n}{v-\text{۱}} = \frac{(\ln n)^{\text{۲}}}{\ln n}.\frac{n}{n}.\frac{\text{۱}}{v-\text{۱}}$$

یا

$$\circ < -\ln x_n < \frac{v}{v-\text{۱}}.\frac{(\ln n)^{\text{۲}}}{n}$$

با حدگیری (اگر $n \longrightarrow \infty$ آن‌گاه $v \longrightarrow \infty$) خواهیم داشت:

$$\circ \leq -\lim \ln x_n \leq \lim_{v\to\infty} \frac{v}{v-\text{۱}}.\lim_{n\to\infty} \frac{(\ln n)^{\text{۲}}}{n} = \text{۱}\cdot\circ = \circ$$

بنابراین، $x_n \longrightarrow \text{۱}$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$.

۱۴. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد که $(\text{۲} - a_n)a_{n+\text{۱}} = \text{۱}$. نشان دهید که $\lim_{n\to\infty} a_n = \text{۱}$.

حل. اگر nی یافت شود که $a_n = \text{۱}$ آن‌گاه همواره $a_n = \text{۱}$. در غیر این صورت، اگر فرض کنیم

$$b_n = \frac{\text{۱}}{\text{۱} - a_n}$$

خواهیم داشت:

$$b_{n+\text{۱}} = \frac{\text{۱}}{\text{۱} - a_{n+\text{۱}}} = \frac{\text{۱}}{\text{۱} - \frac{\text{۱}}{\text{۱}-a_n}} = \frac{\text{۲} - a_n}{\text{۱} - a_n} = b_n + \text{۱}$$

از این رو،

$$b_n = b_{\text{۱}} + (n - \text{۱}) \quad \text{و} \quad a_n = \text{۱} - \frac{\text{۱}}{b_n} = \frac{b_{\text{۱}} + n - \text{۲}}{b_{\text{۱}} + n - \text{۱}}$$

به این ترتیب، $a_n \longrightarrow \text{۱}$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$.

۱۵. به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n، قرار می‌دهیم

$$a_n = \left(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{n}\right)^n ,\quad b_n = \left(\text{۱} + \frac{\text{۱}}{n}\right)^{n+\text{۱}} ,\quad \text{و} \quad c_n = \frac{\text{۲}a_n b_n}{a_n + b_n}$$

نشان دهید که

$$c_{\text{۱}} < c_{\text{۲}} < c_{\text{۳}} < \cdots < c_n < \ldots$$

حل. ملاحظه می‌کنیم که $c_n = ۲(n+۱)^{n+۱}n^{-n}(۲n+۱)^{-۱}$. فرض کنید

$$g(x) = \ln ۲ + (x+۱)\ln(x+۱) - x(\ln x) - \ln(۲x+۱)$$

آن‌گاه

$$g'(x) = \ln(x+۱) - \ln x - \frac{۲}{۲x+۱}$$

و

$$g''(x) = \frac{۱}{x+۱} - \frac{۱}{x} + \frac{۴}{(۲x+۱)^۲} = -\frac{۱}{x(x+۱)(۲x+۱)^۲} < ۰$$

وقتی که $۰ < x < \infty$. از این رو، g' بر $(۰, \infty)$ نزولی است. چون

$$\lim_{x\to\infty} g'(x) = \lim_{x\to\infty} \ln\frac{x+۱}{x} - \lim_{x\to\infty}\frac{۲}{۲x+۱} = ۰$$

نتیجه می‌شود که g' بر $(۰, \infty)$ مثبت است. بنابراین، g بر $(۰, \infty)$ صعودی است، و

$$c_n = e^{g(n)}$$

به‌ازای اعداد صحیح مثبت n اکیداً صعودی است.

تبصره. چون $a_n \longrightarrow e$ و $b_n \longrightarrow e$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$، از قضیهٔ ۵.۷ نتیجه می‌شود که $c_n \longrightarrow e$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. همچنین، توجه می‌کنیم که c_n میانگین همساز a_n و b_n است.

۱۶. فرض کنید که

$$J_n = \int_۰^h \frac{\sin nx}{x} dx$$

که در آن n یک عدد صحیح مثبت است و $h > ۰$.

نماد $(\sin nx)/x$ به‌ازای $x = ۰$ بی‌معنی است. اگر $(\sin nx)/x$ را به‌ازای $x = ۰$ برابر n تعریف کنیم، ملاحظه می‌کنیم که $(\sin nx)/x$ به‌ازای همهٔ اعداد حقیقی x پیوسته می‌شود.

قرار می‌دهیم $nx = u$ و ملاحظه می‌کنیم که

$$J_n = \int_۰^{nh} \frac{\sin u}{u} du$$

به این ترتیب، به‌ازای اعداد صحیح مثبت n و m که $n > m$،

$$J_n - J_m = \int_{mh}^{nh} \frac{\sin u}{u} du$$

می‌خواهیم تحقیق کنیم که $\{J_n\}$ یک دنبالهٔ کوشی است و از این رو، به استناد قضیهٔ ۱۲.۷، همگرا است.

در واقع، با فرض $a = mh$ و $b = nh$، داریم $b > a > ۰$؛ بنابراین

$$\int_a^b \frac{\sin u}{u} du = \left(\frac{-\cos u}{u}\right)\Big|_a^b - \int_a^b \frac{\cos u}{u^۲} du$$

به این ترتیب،

$$\left|\int_a^b \frac{\sin u}{u} du\right| \le \frac{۱}{a} + \frac{۱}{b} + \int_a^b \frac{۱}{u^۲} du = \frac{۲}{a}$$

لذا،

$$\left|\int_a^b \frac{\sin u}{u} du\right| < \varepsilon \qquad \text{هرگاه} \qquad a > \frac{۲}{\varepsilon}$$

در نتیجه، اگر $\varepsilon > ۰$ مفروض باشد، m را می‌توانیم طوری اختیار کنیم که $۲/mh < \varepsilon$. آن‌گاه، به‌ازای $n > m$،

$$|J_n - J_m| < \frac{۲}{mh} < \varepsilon$$

و دیده می‌شود که دنبالهٔ $\{J_n\}$ کوشی است.

۱۷. فرض کنید $[a, b]$ بازهٔ بسته‌ای به طول متناهی باشد، $p = ۱, ۲, \ldots$، و

$$A_p = \int_a^b f(x)(\sin px)dx \qquad \text{و} \qquad B_p = \int_a^b f(x)(\cos px)dx$$

که در آن f تابعی است که بر $[a, b]$ انتگرال‌پذیر ریمان است. در این صورت، $A_p \longrightarrow ۰$ و $B_p \longrightarrow ۰$ وقتی که $p \longrightarrow \infty$.

در واقع، به‌ازای هر بازهٔ بستهٔ $[\alpha, \beta]$ به طول متناهی، داریم

$$\left|\int_\alpha^\beta (\sin px)dx\right| = \left|\frac{\cos p\alpha - \cos p\beta}{p}\right| \le \frac{۲}{p}$$

زیرا، به‌ازای هر t، $|\cos t| \le ۱$. فرض کنید $|f(x)| \le M$ بر $[a, b]$ و ε عدد مثبت دلخواه معمول باشد. افرازی مانند P از $[a, b]$، مثلاً

$$P = \{a = x_۰ < x_۱ < \cdots < x_n = b\}$$

موجود است به طوری که $U(P, f) - L(P, f) < \varepsilon/۲$ (قضیهٔ ۴.۵)، بنابراین،

$$\left|\int_a^b f(x)(\sin px)dx\right| = \left|\sum_{k=۱}^n \int_a^b [f(x_k) + f(x) - f(x_k)](\sin px)dx\right|$$

$$\leq \sum_{k=۱}^{n}\left(|f(x_k)|\left|\int_{x_{k-۱}}^{x_k}(\sin px)dx\right| + \int_{x_{k-۱}}^{x_k}|f(x)-f(x_k)||\sin px|dx\right)$$
$$< \frac{۲nM}{p} + [U(P,f)-L(P,f)] < \frac{۲nM}{p} + \frac{\varepsilon}{۲} < \varepsilon$$

وقتی که $p \geq ۴nM/\varepsilon$. از این رو، $A_p = \int_a^b f(x)(\sin px)dx$ به صفر میل می‌کند وقتی که $p \longrightarrow \infty$. به طریق مشابه، $B_p = \int_a^b f(x)(\cos px)dx$ به صفر میل می‌کند وقتی که $p \longrightarrow \infty$.

۱۸. با مراجعه به انتگرال

$$J_n = \int_{\circ}^{h} \frac{\sin nx}{x}dx$$

مثال ۱۶، می‌خواهیم حد دنبالهٔ $\{J_n\}$ را وقتی $n \longrightarrow \infty$ محاسبه کنیم.

به استناد حکم مثال ۱۷،

$$\lim_{n\to\infty}\int_{h}^{h'} \frac{\sin nx}{x}dx = \circ$$

که در آن h و h' دو عدد بزرگتر از صفرند. این نشان می‌دهد که

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\circ}^{h} \frac{\sin nx}{x}dx$$

کاملاً مستقل از این است که چه مقداری برای عدد مثبت h اختیار کنیم. بنابراین، می‌توانیم خود را به بررسی

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\circ}^{\pi/۲} \frac{\sin nx}{x}dx$$

محدود کنیم. به‌ازای $\circ < x \leq \pi/۲$،

$$\frac{۱}{x} - \frac{۱}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x(\sin x)}$$

یک تابع پیوسته است. با دوبار استفاده از قاعدهٔ لوپیتال (قضیهٔ ۱۰.۴)، ملاحظه می‌کنیم که

$$\frac{\sin x - x}{x(\sin x)} \longrightarrow \circ \qquad \text{وقتی که} \qquad x \longrightarrow \circ$$

اگر $۱/\sin x - ۱/x$ را به‌ازای $x = \circ$ برابر $\circ$ تعریف کنیم، می‌بینیم که

$$\frac{۱}{x} - \frac{۱}{\sin x} = \frac{\sin x - x}{x \sin x}$$

به‌ازای $\circ \leq x \leq \pi/۲$ پیوسته است. به این ترتیب، به استناد حکم مثال ۱۷،

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\circ}^{\pi/۲}\left(\frac{۱}{x}-\frac{۱}{\sin x}\right)(\sin nx)dx=\circ$$

که ایجاب می‌کند که

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\circ}^{\pi/۲}\frac{\sin nx}{\sin x}dx=\lim_{n\to\infty}\int_{\circ}^{\pi/۲}\frac{\sin nx}{x}dx$$

برای تعیین حد یک دنبالهٔ همگرا، کافی است که زیردنباله‌ای از آن را در نظر بگیریم. زیر دنبالهٔ متناظر با اندیسهای فرد را در نظر می‌گیریم. ملاحظه می‌کنیم که

$$\cos(p-۱)t-۲\cos pt+\cos(p+۱)t=۲(\cos t-۱)(\cos pt)$$

با فرض $u_p=\cos(p-۱)t-\cos pt$، می‌توانیم این تساوی را به صورت

$$u_{p+۱}-u_p=۲(۱-\cos t)(\cos pt)$$

بنویسیم. زنجیر زیر از این معادلات را می‌نویسیم:

$$\begin{aligned}u_۱&=۱-\cos t\\u_۲-u_۱&=۲(۱-\cos t)(\cos t)\\u_۳-u_۲&=۲(۱-\cos t)(\cos ۲t)\\&\vdots\\u_{p+۱}-u_p&=۲(۱-\cos t)(\cos pt)\end{aligned}$$

از این معادلات، خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}u_{p+۱}=\left(\frac{۱}{۲}+\cos t+\cos ۲t+\cdots+\cos pt\right)(۱-\cos t)$$

از این رو، در حالتی که $\cos t\neq ۱$،

$$\frac{۱}{۲}+\cos t+\cos ۲t+\cdots+\cos pt=\frac{\cos pt-\cos(p+۱)t}{۲(۱-\cos t)}$$

چون

$$\cos pt = \cos[(p+\tfrac{1}{2})t - \tfrac{1}{2}t] \quad \text{و} \quad \cos(p+1)t = \cos[(p+\tfrac{1}{2})t + \tfrac{1}{2}t]$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$\cos pt - \cos(p+1)t = [2\sin(p+\tfrac{1}{2})t](\cos\tfrac{1}{2}t)$$

ولی

$$1 - \cos t = 2\sin^2\tfrac{1}{2}t$$

بنابراین،

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos pt = \frac{\sin(p+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

اگر t را به بازهٔ $[0, \pi]$ محدود کنیم، آن‌گاه $\sin\frac{1}{2}t$ فقط به‌ازای $t = 0$ صفر می‌شود. اگر

$$\frac{\sin(p+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

را به ازای $t = 0$ برابر $p + \frac{1}{2}$ تعریف کنیم، آن‌گاه فرمول

$$\frac{1}{2} + \cos t + \cos 2t + \cdots + \cos pt = \frac{\sin(p+\frac{1}{2})t}{2\sin\frac{1}{2}t}$$

به‌ازای $t = 0$ نیز معتبر است.

بنابراین، در انتگرال

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2p+1)x}{\sin x}dx$$

می‌توان نوشت:

$$\frac{\sin(2p+1)x}{\sin x} = 2\left(\frac{1}{2} + \cos 2x + \cos 4x + \cdots + \cos 2px\right)$$

از این رو، خواهیم داشت:

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin(2p+1)x}{x}dx = \int_0^{\pi/2} dx + \sum_{k=1}^{n} 2\int_0^{\pi/2}(\cos 2kx)dx$$

امّا

$$۲\int_{۰}^{\pi/۲}(\cos ۲kx)dx = \frac{۱}{k}(\sin ۲kx)|_{۰}^{\pi/۲} = ۰$$

و لذا،

$$\int_{۰}^{\pi/۲}\frac{\sin(۲p+۱)x}{\sin x}dx = \frac{\pi}{۲}$$

از این می‌توان نتیجه گرفت که

$$\lim_{n\to\infty}\int_{۰}^{h}\frac{\sin nx}{x}dx = \frac{\pi}{۲} \qquad \text{به‌ازای } h > ۰،$$

۱۹. کسر اعشاری

$$\alpha = ۰/۱۲۳۴۵۶۷۸۹۱۰۱۱۱۲۱۳۱۴\ldots$$

(اعداد صحیح مثبت متوالیاً نوشته می‌شوند) عددی اصم است. جزء صحیح t را به $[t]$ نشان می‌دهیم و دنبالهٔ

$$۱۰^n\alpha - [۱۰^n\alpha], \qquad n = ۰, ۱, ۲, \ldots$$

را در نظر می‌گیریم. توجه کنید که $۱۰^n\alpha - [۱۰^n\alpha]$ از انتقال نقطهٔ اعشاری α به اندازهٔ n رقم به راست و حذف همهٔ ارقام سمت چپ نقطهٔ اعشاری به دست می‌آید. فرض کنید که

$$\beta = ۰/\beta_۱\beta_۲\ldots\beta_k$$

یک کسر اعشاری متناهی باشد. اگر n را طوری انتخاب کنیم که $۱۰^n\alpha - [۱۰^n\alpha]$ با ارقام $\beta_۱$، $\beta_۲$، ...، β_k شروع و پس از آن r صفر ظاهر شود، آن‌گاه

$$|۱۰^n\alpha - [۱۰^n\alpha] - \beta| < \frac{۱}{۱۰^{k+r}}$$

این نشان می‌دهد که هر عدد گویای بین ۰ و ۱ مانند β یک نقطهٔ انباشتگی دنبالهٔ $۱۰^n\alpha - [۱۰^n\alpha]$ به‌ازای $n = ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots$ است؛ چون هر عدد بین ۰ و ۱ حد دنباله‌ای از اعداد گویای بین ۰ و ۱ است، نهایتاً نتیجه می‌شود که هر عدد بازهٔ $[۰, ۱]$ یک نقطهٔ انباشتگی دنبالهٔ $۱۰^n\alpha - [۱۰^n\alpha]$ به‌ازای $n = ۰, ۱, ۲, ۳, \ldots$ است.

۲۰. فرض کنید که A، B، C، و D اعداد حقیقی متمایزی باشند و $\{x_n\}$ یک دنبالهٔ صفر باشد و دنبالهٔ $\{u_n\}$ را به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ به صورت

$$u_{۴n-۳} = A + x_n, \quad u_{۴n-۲} = B + x_n, \quad u_{۴n-۱} = C + x_n, \quad u_{۴n} = D + x_n$$

تعریف کنید. آن‌گاه $\{A, B, C, D\}$ مجموعهٔ نقاط انباشتگی این دنباله است.

۲۱. به‌ازای هر عدد صحیح $p \geq ۲$ تعداد $p - ۱$ عدد به صورت $۱/k + ۱/m$ وجود دارد که به‌ازای هر یک از آنها حاصل جمع اعداد صحیح مثبت k و m مساوی p باشد. به‌ازای $p = ۲, ۳, ۴, \ldots$، این اعداد را می‌نویسیم. در این صورت، دنبالهٔ

$$۲, \ \frac{۳}{۲}, \ \frac{۳}{۲}, \ \frac{۴}{۱}, \ ۱, \ \frac{۴}{۳}, \ \frac{۴}{۳}, \ \frac{۵}{۴}, \ \frac{۵}{۶}, \ \frac{۵}{۶}, \ \frac{۵}{۴}, \ldots$$

را خواهیم داشت. در $۱/k + ۱/m$، اگر m را ثابت نگهداریم و $k \longrightarrow \infty$، ملاحظه می‌شود که $۱/m$ به‌ازای $m = ۱, ۲, ۳, \ldots$ یک نقطهٔ انباشتگی است. به این ترتیب، ۱، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$، ... نقاط انباشتگی دنبالهٔ مورد بحث می‌باشند. به طور مشابه، اگر k ثابت بماند و $m \longrightarrow \infty$، درمی‌یابیم که ۱، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$، ... نقاط انباشتگی دنباله‌اند. ملاحظه می‌کنیم که ۰ یک نقطهٔ انباشتگی ۱، $\frac{۱}{۲}$، $\frac{۱}{۳}$، ... است و، بنابراین، دنبالهٔ مورد بحث دارای نقاط انباشتگی

$$۰, \ ۱, \ \frac{۱}{۲}, \ \frac{۱}{۳}, \ \ldots$$

است و نقطهٔ انباشتگی دیگری ندارد.

۲۲. فرض کنید $[t]$ جزء صحیح t باشد. دنبالهٔ

$$n!e - [n!e], \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

تنها یک نقطهٔ انباشتگی دارد و آن ۰ است (از این رو، $\lim_{n\to\infty} n!e - [n!e] = ۰$).

در واقع، به استناد قضیهٔ تیلور (قضیهٔ ۱۱.۴) و بالاخص (۱۳.۴)،

$$e = ۱ + \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} + \cdots + \frac{۱}{n!} + \frac{e^\theta}{(n+۱)!} \quad \text{با} \quad ۰ < \theta < ۱.$$

بنابراین،

$$n!e = n! + \frac{n!}{۱!} + \frac{n!}{۲!} + \cdots + ۱ + \frac{e^\theta}{n+۱}$$

به‌ازای $n \geq ۲$، داریم $e^\theta/(n+۱) < e/(n+۱) < ۱$؛ از این رو،

$$n!e - [n!e] < \frac{e^\theta}{(n+۱)} < \frac{e}{n+۱}$$

۲.۷ فرمولهای والیس و استرلینگ

قضیهٔ ۱۶.۷. (فرمول والیس) داریم

$$\frac{\pi}{۲} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{۲^۲\cdot۴^۲\cdot\ldots\cdot(۲n)^۲}{۱^۲\cdot۳^۲\cdot\ldots\cdot(۲n-۱)^۲}\cdot\frac{۱}{۲n}\right) \qquad (۱۲.۷)$$

برهان. فرض کنید k عدد صحیح مثبتی بزرگتر از یا مساوی ۲ باشد. با انتگرالگیری جزء‌به‌جزء، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}\int_۰^{\pi/۲}(\sin^k x)dx &= \int_۰^{\pi/۲}(\sin^{k-۱} x)(\sin x)dx\\ &= [-(\sin^{k-۱} x)(\cos x)]|_۰^{\pi/۲} + (k-۱)\int_۰^{\pi/۲}(\sin^{k-۲} x)(\cos^۲ x)dx\\ &= (k-۱)\int_۰^{\pi/۲}(\sin^{k-۲} x)dx - (k-۱)\int_۰^{\pi/۲}(\sin^k x)dx\end{aligned}$$

که مستلزم

$$\int_۰^{\pi/k}(\sin^k x)dx = \frac{k-۱}{k}\int_۰^{\pi/۲}(\sin^{k-۲} x)dx \qquad (۱۳.۷)$$

است. اگر $k = ۲n$، (۱۳.۷) ایجاب می‌کند که

$$\int_۰^{\pi/۲}(\sin^{۲n} x)dx = \frac{۱\cdot۳\cdot\ldots\cdot(۲n-۱)}{۲\cdot۴\cdot\ldots\cdot(۲n)}\cdot\frac{\pi}{۲}$$

اگر $k = ۲n+۱$، از (۱۳.۷) نتیجه می‌گیریم که

$$\int_۰^{\pi/۲}(\sin^{۲n+۱} x)dx = \frac{۲\cdot۴\cdot\ldots\cdot(۲n)}{۳\cdot۵\cdot\ldots\cdot(۲n+۱)}$$

زیرا

$$\int_۰^{\pi/۲}(\sin x)dx = ۱$$

اگر $0 \leq x \leq \pi/2$ و n یک عدد صحیح مثبت باشد، آن‌گاه

$$\sin^{2n+1} x \leq \sin^{2n} x \leq \sin^{2n-1} x$$

بنابراین، به استناد قضیهٔ ۱۱.۵ و با عنایت به نتایج قبلی، ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای $n \geq 2$،

$$\frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n+1)} \leq \frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}.\frac{\pi}{2} \leq \frac{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n-2)}{3\cdot 5\cdot \ldots \cdot (2n-1)}$$

که مستلزم

$$\frac{2^2\cdot 4^2\cdot \ldots \cdot (2n)^2}{1^2\cdot 3^2\cdot \ldots \cdot (2n-1)^2}\cdot\frac{1}{2n+1} \leq \frac{\pi}{2} \leq \frac{2^2\cdot 4^2\cdot \ldots \cdot (2n)^2}{1^2\cdot 3^2\cdot \ldots \cdot (2n-1)^2}.\frac{1}{2n} \qquad (14.7)$$

است. به طور آشکار، (۱۴.۷) به‌ازای $n \geq 1$ برقرار است و به‌ازای هر چنین n یک عدد حقیقی θ_n وجود دارد که $0 \leq \theta_n \leq 1$ و

$$\frac{\pi}{2} = \frac{2^2\cdot 4^2\cdot \ldots \cdot (2n)^2}{1^2\cdot 3^2\cdot \ldots \cdot (2n-1)^2}\cdot\frac{1}{2n+\theta_n} \qquad (15.7)$$

در (۱۵.۷)، اگر کسر $1/(2n+\theta_n)$ را با

$$\frac{1}{2n}\cdot\frac{2n}{2n+\theta_n}$$

تعویض و توجه کنیم که

$$\frac{2n}{2n+\theta_n} \longrightarrow 1 \qquad \text{وقتی که} \qquad n \longrightarrow \infty$$

ملاحظه می‌شود که (۱۵.۷) مستلزم (۱۲.۷) است.

ملاحظات. از فرمول (۱۲.۷) به آسانی نتیجه می‌شود که

$$\lim_{n\to\infty}\left(\frac{1\cdot 3\cdot \ldots \cdot (2n-1)}{2\cdot 4\cdot \ldots \cdot (2n)}.\sqrt{2n}\right) = \left(\frac{2}{\pi}\right)^{1/2} \qquad (16.7)$$

نتیجهٔ دیگری از (۱۲.۷) عبارت است از

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(1-\frac{1}{2^2}\right)\left(1-\frac{1}{4^2}\right)\ldots\left(1-\frac{1}{(2n)^2}\right)\right) = \frac{2}{\pi} \qquad (17.7)$$

برای تحقیق در برقراری (۱۷.۷)، ملاحظه می‌کنیم که به استناد (۱۲.۷)،

$$\frac{۲}{\pi} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{۱\cdot ۳\cdot ۳\cdot ۵\cdot \ldots (۲n-۱)(۲n-۱)}{۲\cdot ۲\cdot ۴\cdot ۴\cdot \ldots \cdot (۲n-۲)(۲n)}\right)$$

امّا

$$w_n = v_n\cdot\frac{۲n+۱}{۲n} \quad \text{و} \quad v_n = \frac{۱\cdot ۳\cdot ۳\cdot ۵\cdot \ldots (۲n-۱)(۲n-۱)}{۲\cdot ۲\cdot ۴\cdot ۴\cdot \ldots \cdot (۲n-۲)(۲n)}$$

به حد مشترک $۲/\pi$ میل می‌کنند وقتی که $n \longrightarrow \infty$ و

$$w_n = \left(۱-\frac{۱}{۲^۲}\right)\left(۱-\frac{۱}{۴^۲}\right)\ldots\left(۱-\frac{۱}{(۲n)^۲}\right)$$

اگر دنبالهٔ

$$S_۱ = ۱,\ \ S_{n+۱} = [۱-۱/(۲n)^۲].S_n, \qquad n = ۱,۲,۳,\ldots$$

مفروض باشد، با اندک تلاشی می‌توان نشان داد که $\{S_n\}$ کراندار و یکنوا و، به استناد قضیهٔ ۸.۷، همگرا است. معذالک، تعیین حد $\{S_n\}$ چندان آسان نیست و رابطهٔ (۱۷.۷) مورد نیاز است.

قضیهٔ ۱۷.۷ (فرمول استرلینگ). به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n عددی مانند θ_n موجود است به طوری که

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{۲\pi n}.(e)^{\theta_n/۴n} \quad \text{و در آن} \quad ۰ \le \theta_n \le ۱ \qquad (۱۸.۷)$$

برهان. دنبالهٔ $\{x_n\}$ را با ضابطهٔ

$$x_n = \frac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}, \qquad n = ۱,۲,۳,\ldots \qquad (۱۹.۷)$$

در نظر می‌گیریم. ملاحظه می‌کنیم که $\{x_n\}$ نزولی است، زیرا نامساوی

$$\frac{x_n}{x_{n+۱}} = \frac{۱}{e}\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{n+۱/۲} > ۱ \qquad (۲۰.۷)$$

یا

$$\left(n+\frac{۱}{۲}\right)\ln\left(۱+\frac{۱}{n}\right) - ۱ > ۰$$

برقرار است. در واقع، فوراً نشان خواهیم داد که نامساوی دوگانهٔ

$$\circ < \left(n+\frac{۱}{۲}\right)\ln\left(۱+\frac{۱}{n}\right)-۱ < \frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱}\right) \qquad (۲۱.۷)$$

برقرار است. فرض کنید $A_۱$ مساحت ناحیهٔ بین محور xها و منحنی $y=۱/x$ دربازهٔ $n \le x \le n+۱$ باشد؛ چنان که می‌دانیم،

$$A_۱ = \ln\frac{n+۱}{n}$$

فرض کنید $A_۲$ مساحت ناحیهٔ بین محور xها و قطعه خط واصل نقاط $(n, ۱/n)$ و $(n+۱, ۱/(n+۱))$ دربازهٔ $n \le x \le n+۱$ باشد؛ به وضوح

$$A_۲ = \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱}\right)$$

و $A_۱ < A_۲$، زیرا منحنی $y=۱/x$ دربازهٔ $n \le x \le n+۱$ مقعر به بالاست و در تعیین ناحیهٔ به مساحت $A_۲$ منحنی $y=۱/x$ را در فاصلهٔ مذکور با وترش تعویض کرده‌ایم. سرانجام، فرض کنید $A_۳$ مساحت ناحیهٔ بین محور xها و خط مماس بر منحنی $y=۱/x$ در نقطهٔ $x=n+\frac{۱}{۲}$ از بازهٔ $n \le x \le n+۱$ باشد؛ داریم

$$A_۳ = \frac{۱}{n+\frac{۱}{۲}}$$

و، با عنایت به قضیهٔ ۱۶.۴، $A_۳ < A_۱$. به این ترتیب، $A_۳ < A_۱ < A_۲$. از این رو

$$\frac{۱}{n+\frac{۱}{۲}} < \ln\left(۱+\frac{۱}{n}\right) < \frac{۱}{۲}\left(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+۱}\right)$$

که به طور آشکار معادل (۲۱.۷) است. امّا (۲۱.۷) مستلزم (۲۰.۷) است.

چون $x_{n+۱} < x_n$ و همواره $x_n > \circ$، می‌بینیم که

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \sigma \qquad (۲۲.۷)$$

موجود است و σ نامنفی است. در واقع، (۲۱.۷) نشان می‌دهد که

$$۱ < \frac{x_i}{x_{i+۱}} < \exp\left(\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{i}-\frac{۱}{i+۱}\right)\right) \qquad (۲۳.۷)$$

که در آن نماد $\exp(t)$ برای نمایش e^t است. وقتی که $i=n, n+۱, \ldots, n+k-۱$، نامساوی (۲۳.۷) دستگاهی از نامساویها تولید می‌کند که از ضرب آنها نامساوی

$$۱ < \frac{x_n}{x_{n+k}} < \exp\left(\frac{۱}{۴}\left(\frac{۱}{n}-\frac{۱}{n+k}\right)\right) < \exp\left(\frac{۱}{۴n}\right)$$

به دست می‌آید که به‌ازای هر دو عدد صحیح مثبت n و k برقرار است. اگر n را ثابت نگهداریم و k به طور دلخواه بزرگ شود، ملاحظه می‌کنیم که $\sigma \neq ۰$ و

$$۱ \leq \frac{x_n}{\sigma} \leq \exp\left(\frac{۱}{۴n}\right)$$

بنابراین، می‌توان نوشت:

$$x_n = \sigma \exp\left(\frac{\theta_n}{۴n}\right), \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots \tag{۲۴.۷}$$

که در آن θ_nها ثابتهای مناسبی هستند که در $۰ \leq \theta_n \leq ۱$ صدق می‌کنند. به استناد (۱۹.۷) و (۱۶.۷)، وقتی $n \longrightarrow \infty$،

$$\begin{aligned} \frac{x_{۲n}}{x_n^۲} &= \frac{(۲n)!}{(۲n)^{۲n}e^{-۲n}\sqrt{۲n}}.\frac{n^{۲n}e^{-۲n}n}{(n!)^۲} \\ &= \frac{۱\cdot۳\cdot\ldots\cdot(۲n-۱)}{۲\cdot۴\cdot\ldots\cdot(۲n)}.\frac{\sqrt{۲n}}{۲} \longrightarrow \frac{۱}{\sqrt{۲\pi}} \end{aligned}$$

از این رو، به موجب (۲۲.۷) و این که $\sigma > ۰$،

$$\sigma = \lim_{n\to\infty} x_n = \sqrt{۲\pi} \tag{۲۵.۷}$$

سرانجام، از (۲۵.۷) و (۲۴.۷) نتیجه می‌شود که

$$n! = n^n e^{-n}\sqrt{۲\pi n}\exp\left(\frac{\theta_n}{۴n}\right), \qquad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

که در آن θ_nها ثابتهایی هستند که در $۰ \leq \theta_n \leq ۱$ صدق می‌کنند.

توضیحات. از قضیهٔ ۵.۱ فصل اول، می‌دانیم که

$$\left(۱+\frac{۱}{i}\right)^i < e < \left(۱+\frac{۱}{i}\right)^{i+۱}, \qquad i = ۱, ۲, ۳, \ldots \tag{۲۶.۷}$$

به‌ازای $i = ۱, ۲, \ldots, n-۱$، (۲۶.۷) دستگاهی از نامساویها تولید می‌کند که از ضرب آنها نامساوی

$$e\left(\frac{n}{e}\right)^n \leq n! \leq en\left(\frac{n}{e}\right)^n \tag{۲۷.۷}$$

به دست می‌آید. اگرچه (۲۷.۷) صرفاً تخمین ضعیفی از میزان بزرگی عدد $n!$ عرضه می‌کند، هرگز نشان نمی‌دهد که عدد $\sqrt{n}.(n/e)^n$ بین $e(n/e)^n$ و $en(n/e)^n$ است؛ به این دلیل است که دنبالهٔ (۱۹.۷) معرفی شد.

به کمک فرمول استرلینگ (۱۸.۷)، اطلاعاتی در مورد عدد $۱۰۰۰!$ کسب می‌کنیم. چون

$$\log_{۱۰}(۱۰۰۰^{۱۰۰۰}e^{-۱۰۰۰}\sqrt{۲۰۰۰\pi}) = ۲۵۶۷/۶۰۴۶\ldots$$

و

$$\log_{۱۰}(e)^{\theta^*/۴۰۰۰}$$

عددی بین ۰ و ...۰/۰۰۰۱۰۸۵ است، نتیجه می‌شود که

$$\log_{۱۰}(۱۰۰۰!) = ۲۵۶۷/۶۰۴\ldots$$

که رقم چهارم بعد از اعشار ۶ یا ۷ است. این نشان می‌دهد که $۱۰۰۰!$ عددی است که ۲۵۶۸ رقم دارد و با ارقام ...۴۰۲ شروع می‌شود.

سؤال جالب دیگر این است که: $۱۰۰۰!$ به چند صفر ختم می‌شود؟ به وضوح، تعداد صفرهای پایانهٔ هر عدد بستگی به تعداد عوامل $۱۰ = ۵ \cdot ۲$ دارد که در تجزیهٔ آن عدد ظاهر می‌شوند. بنابراین، لازم است که توان عوامل ۲ و ۵ را در تجزیهٔ $۱۰۰۰!$ به عوامل اول بیابیم. یک لحظه تأمل نشان می‌دهد که عدد اول ۲ در تجزیهٔ $۱۰۰۰!$ به عوامل اول به مراتب بیشتر از عدد اول ۵ ظاهر می‌شود (اصلاً ۵۰۰ عدد زوج بین ۱ و ۱۰۰۱ موجود است). فوراً ملاحظه خواهیم کرد که دقیقاً ۲۴۹ تا «۵» در تجزیهٔ $۱۰۰۰!$ به عوامل اول موجود است. در واقع، از شمارش مضارب ۵، یعنی

$$۵,\ ۱۰,\ ۱۵,\ \ldots,\ ۱۰۰۰$$

عدد ۲۰۰ به دست می‌آید. از شمارش مضارب $۲۵(= ۵^۲)$، یعنی

$$۲۵,\ ۵۰,\ ۷۵,\ \ldots,\ ۱۰۰۰$$

عدد ۴۰ حاصل می‌شود. از شمارش مضارب $۱۲۵(= ۵^۳)$، یعنی

$$۱۲۵,\ ۲۵۰,\ ۳۷۵,\ \ldots,\ ۱۰۰۰$$

عدد ۸ عاید می‌شود. سرانجام، از شمارش مضارب $۶۲۵(= ۵^۴)$ یک جمله به دست می‌آید، یعنی

$$۶۲۵$$

ولی $۲۴۹ = ۱ + ۸ + ۴۰ + ۲۰۰$. با همین شیوهٔ استدلال می‌توان دید که دقیقاً ۹۹۴ تا «۲» در $۱۰۰۰!$ وجود دارد. به این ترتیب، $۱۰۰۰!$ به ۲۴۹ صفر ختم می‌شود.

در تعیین تعداد صفرهای پایانی $۱۰۰۰!$ از موضوع جالبی در زمینهٔ نظریهٔ اعداد بهره گرفته‌ایم. فرض کنید p یک عدد اول و $E_p(m)$ بزرگترین توان p باشد که عدد صحیح مثبت مفروض m را عاد می‌کند. می‌توان نشان داد که اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد، بزرگترین توان p که $n!$ را عاد کند از فرمول

$$E_p(n!) = \left[\frac{n}{p}\right] + \left[\frac{n}{p^۲}\right] + \cdots + \left[\frac{n}{p^s}\right] \qquad \text{با} \qquad \left[\frac{n}{p^{s+۱}}\right] = ۰$$

به دست می‌آید که در آن $[t]$ (در این جا) بزرگترین عدد صحیح کوچکتر از یا مساوی با t است. به این ترتیب،

$$\begin{aligned} E_۵(۱۰۰۰!) &= \left[\frac{۱۰۰۰}{۵}\right] + \left[\frac{۱۰۰۰}{۵^۲}\right] + \left[\frac{۱۰۰۰}{۵^۳}\right] + \left[\frac{۱۰۰۰}{۵^۴}\right] \\ &= ۲۰۰ + ۴۰ + ۸ + ۱ = ۲۴۹ \\ E_۲(۱۰۰۰!) &= \left[\frac{۱۰۰۰}{۲}\right] + \left[\frac{۱۰۰۰}{۲^۲}\right] + \left[\frac{۱۰۰۰}{۲^۳}\right] + \left[\frac{۱۰۰۰}{۲^۴}\right] + \left[\frac{۱۰۰۰}{۲^۵}\right] \\ &\quad + \left[\frac{۱۰۰۰}{۲^۶}\right] + \left[\frac{۱۰۰۰}{۲^۷}\right] + \left[\frac{۱۰۰۰}{۲^۸}\right] + \left[\frac{۱۰۰۰}{۲^۹}\right] \\ &= ۵۰۰ + ۲۵۰ + ۱۲۵ + ۶۲ + ۳۱ + ۱۵ + ۷ + ۳ + ۱ = ۹۹۴ \end{aligned}$$

برای این که ببینیم که ضریب دو جمله‌ای $\binom{۱۰۰۰}{۵۰۰} = ۱۰۰۰!/(۵۰۰!)^۲$ بر ۷ بخش‌پذیر نیست، فقط لازم است توجه کنیم که $E_۷(۱۰۰۰!) = ۱۶۴$ و $E_۷(۵۰۰!) = ۸۲$. بنابراین، وقتی $۷^{۱۶۴}$ از صورت و مخرج $\binom{۱۰۰۰}{۵۰۰}$ حذف شود، هیچ مضربی از ۷ در عدد حاصل باقی نمی‌ماند.

برای راحتی خواننده، عدد

$$۲۵! = ۱۵,۵۱۱,۲۱۰,۰۴۳,۳۳۰,۹۸۵,۹۸۴,۰۰۰,۰۰۰$$

را یادداشت می‌کنیم. از فرمول استرلینگ مقدار تقریبی $۱٫۵۴۵۹۶ \times ۱۰^{۲۵}$ به دست می‌آید؛ بنابراین، مقادیر واقعی و تقریبی فقط در حدود $۰٫۳\%$ اختلاف دارند. وقتی n زیاد شود، خطای بین مقدار واقعی و مقدار تقریبی $n!$ کاهش می‌یابد؛ می‌توان نشان داد که این خطا هرگز بیشتر از $۱۰/n$ درصد نیست.

تعریف. فرض کنید $(a_۱, a_۲, \ldots, a_n)$ جایگشتی از اعداد ۱، ۲، ...، n باشد به طوری که هیچ عنصری به مکان اصلی برنگردد، یعنی، $a_۱ \neq ۱$، $a_۲ \neq ۲$، ...، $a_n \neq n$. هر چنین جایگشتی را یک «پریش» می‌نامند. فرض کنید D_n تعداد پریشهای مجموعهٔ $\{۱, ۲, \ldots, n\}$ باشد.

ملاحظات. اگر از $24 = 4!$ جایگشت اعداد ۱، ۲، ۳، ۴ شروع و آنهایی را حذف کنیم که یک در مکان اول واقع شده است، دو در مکان دوم، سه در مکان سوم، و چهار در مکان چهارم، نه آرایش زیر به جا می‌ماند:

۲ ۴ ۱ ۳	۲ ۳ ۴ ۱	۲ ۱ ۴ ۳
۳ ۴ ۲ ۱	۳ ۴ ۱ ۲	۳ ۱ ۴ ۲
۴ ۳ ۲ ۱	۴ ۳ ۱ ۲	۴ ۱ ۲ ۳

بنابراین، $D_4 = 9$.

قضیهٔ ۱۸.۷. فرض کنید D_n تعداد پریشهای مجموعهٔ $\{1, 2, \ldots, n\}$ باشد. آن‌گاه

$$D_n = n!\left(1 - \frac{1}{1!} + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \cdots + (-1)^n \frac{1}{n!}\right)$$

برهان. فرض کنید $D_0 = 1$ و $D_1 = 0$. دو نوع پریش تشخیص می‌دهیم. می‌دانیم که a_1 در مکان اول قرار می‌گیرد؛ فرض کنید که ۱ در مکان a_1ام واقع شود، یعنی، فقط a_1 و ۱ جابه‌جا شده باشند. باید $n - 2$ عدد دیگر یک پریش کوچکتر تشکیل بدهند که هر عنصر از مکان اصلی خارج شده باشد. این کار به D_{n-2} طریق انجام می‌شود. چون a_1 را می‌توان به $n - 1$ طریق انتخاب کرد، تعداد پریشهایی از این نوع عبارت است از $(n-1)D_{n-2}$. حال، می‌توانیم تعداد پریشهایی را تعیین کنیم که در آنها ۱ در مکان a_1ام نباشد. ابتدا، می‌توانیم a_1 را به $n - 1$ طریق انتخاب کنیم. سپس، آن را در جلو پریشی از $\{2, 3, \ldots, n\}$ قرار می‌دهیم که در آن a_1 با ۱ تعویض شده است. چون a_1 در مکان a_1 نبود، ۱ در مکان a_1 نخواهد بود. با این فرایند همهٔ پریشهای نوع دوم تولید می‌شود. به وضوح، $(n-1)D_{n-1}$ پریش از این نوع وجود دارد.

از جمع این دو، درمی‌یابیم که

$$D_n = (n-1)D_{n-1} + (n-1)D_{n-2} \tag{28.7}$$

رابطهٔ (۲۸.۷) را به صورت

$$\frac{D_n}{n!} = \frac{n-1}{n}\frac{D_{n-1}}{(n-1)!} + \frac{n-1}{n(n-1)}\frac{D_{n-2}}{(n-2)!}$$

می‌نویسیم. حال، نماد

$$E_n = \frac{D_n}{n!}, \qquad E_0 = 1, \qquad E_1 = 0$$

را معرفی می‌کنیم. اینها در رابطهٔ بازگشتی

$$E_n = \left(۱ - \frac{۱}{n}\right) E_{n-۱} + \frac{۱}{n} E_{n-۲}$$

یا

$$E_n - E_{n-۱} = \left(\frac{-۱}{n}\right)(E_{n-۱} - E_{n-۲}) \qquad (۲۹.۷)$$

صدق می‌کنند. وقتی (۲۹.۷) با $n - ۱$، به جای n، تکرار شود، روابط نزولی

$$\begin{aligned} E_n - E_{n-۱} &= \left(\frac{-۱}{n}\right)\left(\frac{-۱}{n-۱}\right)(E_{n-۲} - E_{n-۳}) \\ &= \left(\frac{-۱}{n}\right)\left(\frac{-۱}{n-۱}\right)\left(\frac{-۱}{n-۲}\right)(E_{n-۳} - E_{n-۴}) \\ &\vdots \\ &= \frac{(-۱)^n}{n!} \end{aligned}$$

را خواهیم داشت. آخری را به صورت

$$E_n = \frac{(-۱)^n}{n!} + E_{n-۱} \qquad (۳۰.۷)$$

می‌نویسیم. با تکرار (۳۰.۷) به‌ازای $n - ۱$ به جای n، روابط نزولی دیگر

$$\begin{aligned} E_n &= \frac{(-۱)^n}{n!} + \frac{(-۱)^{n-۱}}{(n-۱)!} + E_{n-۲} \\ &\vdots \\ &= (-۱)^n \left(\frac{۱}{n!} - \frac{۱}{(n-۱)!} + \frac{۱}{(n-۲)!} - + \dots\right) \end{aligned}$$

به دست می‌آیند که بنابراین

$$D_n = n!\left(۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \dots + (-۱)^n \frac{۱}{n!}\right) \qquad (۳۱.۷)$$

و برهان تمام می‌شود.

بحث. به‌ازای هر n، احتمال این که جایگشت مفروضی یک پریش باشد برابر است با

$$\frac{D_n}{n!} = ۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \cdots + (-۱)^n \frac{۱}{n!}$$

به استناد (۱۳.۴)، می‌دانیم که اختلاف

$$۱ - \frac{۱}{۱!} + \frac{۱}{۲!} - \frac{۱}{۳!} + \cdots + (-۱)^n \frac{۱}{n!}$$

و $۱/e = e^{-۱}$ حداکثر مساوی $۳/(n+۱)!$ است.

باید توجه شود که (۳۱.۷) را می‌توانیم به صورت ساده‌تر زیر بازنویسی کنیم:

$$D_۱ = ۰, \qquad D_n = nD_{n-۱} + (-۱)^n \qquad (۳۲.۷)$$

قضیهٔ ۱۹.۷. فرض کنید

$$T_n = \sum_{k=۱}^{n} \frac{۱}{k^۲}$$

آن‌گاه $T_n \longrightarrow \pi^۲/۶$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$.

برهان. فرض کنید که به‌ازای هر عدد صحیح نامنفی n،

$$I_{۲n} = \int_۰^{\pi/۲} t^۲(\cos^{۲n} t)dt, \qquad J_{۲n} = \int_۰^{\pi/۲} (\cos^{۲n} t)dt$$

با دوبار انتگرالگیری جزءبه‌جزء، خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
\int_۰^{\pi/۲} (\cos^{۲n} t)dt &= t(\cos^{۲n} t)|_۰^{\pi/۲} + ۲n\int_۰^{\pi/۲} t(\cos^{۲n-۱} t)(\sin t)dt \\
&= n[t^۲(\cos^{۲n-۱} t)(\sin t)]|_۰^{\pi/۲} \\
&- n\int_۰^{\pi/۲} t^۲[-(۲n-۱)(\cos^{۲n-۲} t)(\sin^۲ t) + (\cos^{۲n} t)]dt \\
&= -۲n^۲ I_{۲n} + n(۲n-۱)I_{۲n-۲}
\end{aligned}$$

یا

$$J_{۲n} = -۲n^۲ I_{۲n} + n(n-۱)I_{۲n-۲}$$

از طرف دیگر،

$$\begin{aligned}\int_{\circ}^{\pi/\text{۲}} (\cos^{\text{۲}n} t)dt &= \int_{\circ}^{\pi/\text{۲}} (\cos^{\text{۲}n-\text{۱}} t)d(\sin t) \\ &= (\cos^{\text{۲}n-\text{۱}} t)(\sin t)|_{\circ}^{\pi/\text{۲}} + (\text{۲}n-\text{۱}) \int_{\circ}^{\pi/\text{۲}} (\cos^{\text{۲}n-\text{۲}} t)(\sin^{\text{۲}} t)dt\end{aligned}$$

یعنی $J_{\text{۲}n} = (\text{۲}n-\text{۱})J_{\text{۲}n-\text{۲}} - (\text{۲}n-\text{۱})J_{\text{۲}n}$، یا

$$J_{\text{۲}n} = \frac{\text{۲}n-\text{۱}}{\text{۲}n} J_{\text{۲}n-\text{۲}}$$

با توجه به این‌که $J_{\circ} = \pi/\text{۲}$، می‌بینیم که

$$J_{\text{۲}n} = \frac{(\text{۲}n-\text{۱})(\text{۲}n-\text{۳})\cdot\ldots\cdot\text{۳}\cdot\text{۱}}{\text{۲}n(\text{۲}n-\text{۲})\cdot\ldots\cdot\text{۴}\cdot\text{۲}} \cdot \frac{\pi}{\text{۲}}$$

به این ترتیب، نتیجه می‌گیریم که

$$-\text{۲}n^{\text{۲}} I_{\text{۲}n} + n(\text{۲}n-\text{۱})I_{\text{۲}n-\text{۲}} = \frac{(\text{۲}n-\text{۱})!!}{(\text{۲}n)!!} \frac{\pi}{\text{۲}}$$

که در آن نماد

$$\begin{aligned}(\text{۲}n)!! &= \text{۲}\cdot\text{۴}\cdot\ldots\cdot(\text{۲}n-\text{۲})(\text{۲}n), \qquad \circ!! = \text{۱} \\ (\text{۲}n+\text{۱})!! &= \text{۱}\cdot\text{۳}\cdot\ldots\cdot(\text{۲}n-\text{۱})(\text{۲}n+\text{۱}), \qquad (-\text{۱})!! = \text{۱}\end{aligned}$$

به کار رفته است (اگر n یک عدد صحیح مثبت باشد آن‌گاه $n!!$ حاصل ضرب همهٔ اعداد صحیح مثبت کوچکتر از یا مساوی با n است که از لحاظ زوجیت با n یکسانند). بنابراین،

$$\frac{(\text{۲}n)!!}{(\text{۲}n-\text{۱})!!} I_{\text{۲}n} - \frac{(\text{۲}n-\text{۲})!!}{(\text{۲}n-\text{۳})!!} I_{\text{۲}n-\text{۲}} = -\frac{\pi}{\text{۴}} \cdot \frac{\text{۱}}{n^{\text{۲}}}$$

و

$$\begin{aligned}\frac{(\text{۲}n)!!}{(\text{۲}n-\text{۱})!!} I_{\text{۲}n} - \frac{\circ!!}{(-\text{۱})!!} I_{\circ} &= \sum_{k=\text{۱}}^{n} \left(\frac{(\text{۲}k)!!}{(\text{۲}k-\text{۱})!!} I_{\text{۲}k} - \frac{(\text{۲}k-\text{۲})!!}{(\text{۲}k-\text{۳})!!} I_{\text{۲}k-\text{۲}} \right) \\ &= -\frac{\pi}{\text{۴}} \sum_{k=\text{۱}}^{n} \frac{\text{۱}}{k^{\text{۲}}}\end{aligned}$$

این نشان می‌دهد که

$$\frac{(۲n)!!}{(۲n-۱)!!}I_n = \frac{\pi^۳}{۲۴} - \frac{\pi}{۴}\sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k^۲} = \frac{\pi}{۴}\left(\frac{\pi^۲}{۶} - \sum_{k=۱}^{n}\frac{۱}{k^۲}\right)$$

امّا

$$\lim_{n\to\infty}\frac{(۲n)!!}{(۲n-۱)!!}I_{۲n} = ۰$$

در واقع، چون نامساوی $(۲/\pi)t \le \sin t$ به‌ازای $۰ \le t \le \pi/۲$ برقرار است، داریم

$$\begin{aligned} I_{۲n} &= \int_۰^{\pi/۲} t^۲(\cos^{۲n} t)dt \le \left(\frac{\pi}{۲}\right)^۲ \int_۰^{\pi/۲}(\sin^۲ t)(\cos^{۲n} t)dt \\ &= \frac{\pi^۲}{۴}\left(\int_۰^{\pi/۲}(\cos^{۲n} t)dt - \int_۰^{\pi/۲}(\cos^{۲n+۱} t)dt\right) \\ &= \frac{\pi^۳}{۸}\left(\frac{(۲n-۱)!!}{(۲n)!!} - \frac{(۲n+۱)!!}{(۲n+۲)!!}\right) = \frac{\pi^۳}{۸}\frac{(۲n-۱)!!}{(۲n+۲)!!} \end{aligned}$$

بنابراین،

$$۰ < \frac{(۲n)!!}{(۲n-۱)!!}I_{۲n} \le \frac{\pi^۳}{۸}.\frac{۱}{۲n+۲}$$

و برهان کامل است.

تبصره. در مثال ۳ بخش ۴ فصل ۱، محتوای قضیهٔ ۱۹.۷ به طریق متفاوتی نتیجه‌گیری شد.

۳.۷ سریهای عددی

تعریف. فرض کنید $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. سری نامتناهی (یا مختصراً سری) تولید شده با $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ که به

$$\sum_{n=۱}^{\infty} x_n \quad \text{یا} \quad x_۱ + x_۲ + x_۳ + \ldots$$

نمایش داده می‌شود دنبالهٔ $\{s_k\}_{k=۱}^{\infty}$ با ضابطهٔ

$$s_۱ = x_۱$$

$$s_۲ = s_۱ + x_۲ \quad (= x_۱ + x_۲)$$

$$\vdots$$

$$s_k = s_{k-1} + x_k \qquad (= x_1 + x_2 + \cdots + x_k)$$

$$\vdots$$

است. اگر دنبالهٔ $\{s_k\}_{k=1}^{\infty}$ همگرا باشد، یعنی، اگر یک عدد حقیقی (متناهی) مانند S موجود باشد به طوری که $s_k \longrightarrow S$ وقتی که $k \longrightarrow \infty$، آن‌گاه می‌گویند که سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ همگرا است و S را مجموع سری می‌نامند و می‌نویسند:

$$\sum_{n=1}^{\infty} x_n = S$$

عناصر x_n را جمل و عناصر s_k را مجموعهای جزئی سری نامتناهی $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ می‌نامند. سری نامتناهی را واگرا می‌نامند در صورتی که دنبالهٔ مجموعهای جزئی سری همگرا نباشد.

ملاحظات. چنان که در تعریف بالا دیدیم، سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ فقط و فقط وقتی همگرا است که دنبالهٔ مجموعهای جزئی سری همگرا به یک عدد حقیقی (متناهی) باشد. برعکس، ملاحظه می‌کنیم که دنبالهٔ دلخواهی مانند $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ از اعداد حقیقی فقط و فقط وقتی همگرا است که سری

$$x_1 + (x_2 - x_1) + (x_3 - x_2) + \cdots + (x_n - x_{n-1}) + \ldots$$

همگرا باشد زیرا که دنبالهٔ مجموعهای جزئی این سری بر دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ منطبق است. معنایش این است که معیار همگرایی سریهای نامتناهی را برای بررسی همگرایی دنباله‌ها نیز می‌توان به کار برد.

قضیهٔ ۲۰.۷. سری $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ فقط و فقط وقتی همگرا است که باقیماندهٔ بعد از m جمله، یعنی

$$R_m = a_{m+1} + a_{m+2} + \cdots = \sum_{n=m+1}^{\infty} x_n$$

همگرا باشد. بعلاوه، اگر $\sum_{n=1}^{\infty} x_n$ همگرا باشد آن‌گاه $\lim_{m\to\infty} R_m = 0$.

برهان. فرض کنید $R_{m,k}$ باقیماندهٔ جزئی

$$R_{m,k} = x_{m+1} + x_{m+2} + \cdots + x_{m+k}$$

باشد. آن‌گاه

$$R_{m,k} = s_{m+k} - s_m \qquad (۳۳.۷)$$

که در آن s_{m+k} و s_m مجموعهای جزئی

$$s_m = x_۱ + x_۲ + \cdots + x_m \quad \text{و} \quad s_{m+k} = x_۱ + x_۲ + \cdots + x_{m+k}$$

از سری $\sum_{n=۱}^{\infty} x_n$ می‌باشند. حال، فرض کنید که سری $\sum_{n=۱}^{\infty} x_n$ همگرا و دارای مجموع S باشد. در این صورت، اگر m را ثابت بگیریم و فرض کنیم که $k \longrightarrow \infty$، متوجه می‌شویم که $s_{m+k} \longrightarrow S$. به استناد تعریف، وقتی m ثابت باشد و $k \longrightarrow \infty$، دیده می‌شود که $R_{m,k} \longrightarrow R_m$. از این رو، به استناد (۳۳.۷)، وقتی m ثابت باشد و $k \longrightarrow \infty$،

$$R_m = S - s_m \qquad (۳۴.۷)$$

بنابراین، دیده می‌شود که سری $\sum_{n=m+۱}^{\infty} x_n$ همگرا است. بعلاوه، (۳۴.۷) نشان می‌دهد که $R_m \longrightarrow ۰$ وقتی که $m \longrightarrow \infty$.

برعکس، اگر فرض کنیم که $\sum_{n=m+۱}^{\infty} x_n$ همگرا و دارای مجموع T باشد، آن‌گاه $\lim_{k\to\infty} R_{m,k} = T$. به استناد (۳۳.۷)، $s_{m+k} = R_{m,k} + s_m$؛ که وقتی m ثابت باشد و $k \longrightarrow \infty$، خواهیم داشت:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} x_n = T + s_m$$

که نشان می‌دهد که سری $\sum_{n=۱}^{\infty} x_n$ همگرا است.

تبصره. قضیهٔ ۲۰.۷ نشان می‌دهد که جمل اولیهٔ هر سری نامتناهی هیچ اثری در همگرایی یا واگرایی سری ندارند؛ این «قسمت آخر» سری است که به همگرایی یا واگرایی سری مربوط می‌شود.

قضیهٔ ۲۱.۷. فرض کنید که سری $\sum_{n=۱}^{\infty} x_n$ همگرا باشد. آن‌گاه $x_n \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$.

برهان. فرض کنید که $\{s_k\}_{k=۱}^{\infty}$ دنبالهٔ مجموعهای جزئی $\sum_{n=۱}^{\infty} x_n$ باشد. آن‌گاه

$$x_n = s_n - s_{n-۱} \longrightarrow ۰ \quad \text{وقتی که} \quad n \longrightarrow \infty$$

زیرا s_n (همراه با $s_{n-۱}$) به S میل می‌کند وقتی که $n \longrightarrow \infty$، که در آن S مجموع سری همگرای $\sum_{n=۱}^{\infty} x_n$ است.

تبصره. قضیهٔ ۲۱.۷ یک شرط لازم بسیار سودمندی برای همگرایی یک سری نامتناهی فراهم می‌کند: اگر $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یک دنبالهٔ صفر نباشد، آن‌گاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} x_n$ واگرا است. معذالک، حائز اهمیت است که توجه کنیم که این شرط کافی نیست: اگر $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنبالهٔ صفر باشد، باز ممکن است اتفاق بیفتد که سری $\sum_{n=۱}^{\infty} x_n$ واگرا باشد. به عنوان مثال، سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \ln\left(۱+\frac{۱}{n}\right) = \sum_{n=۱}^{\infty}[\ln(n+۱)-\ln n] \qquad (۳۵.۷)$$

در این خاصیت صدق می‌کند که $x_n = \ln(۱+\frac{۱}{n}) \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$، ولی سری (۳۵.۷) واگرا است زیرا

$$s_k = \sum_{n=۱}^{k}[\ln(n+۱)-\ln n] = \ln(k+۱) \longrightarrow \infty \quad \text{وقتی که} \quad k \longrightarrow \infty$$

سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(۱/n)$ همین رفتار را نشان می‌دهد؛ در حالی که $۱/n \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. از قضیهٔ ۷.۱ معلوم می‌شود که سری همساز $\sum_{n=۱}^{\infty}(۱/n)$ واگرا است. مثالی دیگر، سری واگرای $\sum_{n=۱}^{\infty}(۱/\sqrt{n})$ است؛ در واقع،

$$s_k = ۱ + \frac{۱}{\sqrt{۲}} + \frac{۱}{\sqrt{۳}} + \cdots + \frac{۱}{\sqrt{k}} > k\frac{۱}{\sqrt{k}} \longrightarrow \infty \quad \text{وقتی که} \quad k \longrightarrow \infty$$

و $۱/\sqrt{n} \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$.

قضیهٔ ۲۲.۷. فرض کنید که $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=۱}^{\infty} b_n$ دو سری همگرا باشند که مجموعهای آنها، به ترتیب، A و B است. اگر α و β دو عدد حقیقی (متناهی) دلخواه باشند، آن‌گاه سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(\alpha a_n + \beta b_n)$$

همگرا است و مجموعش $\alpha A + \beta B$ می‌باشد.

برهان. مورد ادعا از قضیهٔ ۵.۷ نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۲۳.۷. سری $\sum_{n=۱}^{\infty} x_n$ همگرا است فقط و فقط وقتی که به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ عدد صحیحی مانند $n_۰$ موجود باشد به طوری که

$$\text{هرگاه} \quad m \geq n \geq n_۰ \quad \text{آن‌گاه} \quad \left|\sum_{k=n}^{m} x_k\right| < \varepsilon .$$

برهان. مورد ادعا نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ ۱۲.۷ است.

تبصره. با انتخاب $m = n$ در قضیهٔ ۲۳.۷ درمی‌یابیم که $|x_n| < \varepsilon$ وقتی که $n \geq n_۰$، و قضیهٔ ۲۱.۷ نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۲۴.۷. اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} x_n$ یک سری با جمل نامنفی باشد و

$$s_k = x_۱ + \cdots + x_k$$

آن‌گاه $\sum_{n=۱}^{\infty} x_n$ همگرا است فقط و فقط وقتی که $\{s_k\}_{k=۱}^{\infty}$ کراندار باشد.

برهان. مورد ادعا از قضیهٔ ۸.۷ نتیجه می‌شود.

تبصره. سری همساز $\sum_{n=۱}^{\infty}(۱/n)$ یک سری با جمل نامنفی است. چون

$$\frac{۱}{n+۱} + \frac{۱}{n+۲} + \cdots + \frac{۱}{۲n} \geq n\frac{۱}{۲n} = \frac{۱}{۲}$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$\frac{۱}{۲^{k-۱}+۱} + \cdots + \frac{۱}{۲^k} > \frac{۱}{۲}$$

و، از این رو، مجموعهای

$$\frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۴},\ \frac{۱}{۵} + \cdots + \frac{۱}{۸},\ \frac{۱}{۹} + \cdots + \frac{۱}{۱۶},\ \ldots$$

از $\frac{۱}{۲}$ بزرگترند و، بنابراین، با فرض $s_k = \sum_{n=۱}^{k}(۱/n)$ ملاحظه می‌کنیم که

$$s_{۲^k} > k.\frac{۱}{۲}$$

و لذا دنبالهٔ مجموعهای جزئی $\{S_k\}_{k=۱}^{\infty}$ کراندار نیست و، به استناد قضیهٔ ۲۴.۷، سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(۱/n)$ باید واگرا باشد.

قضیهٔ ۲۵.۷. (قضیهٔ تراکم کوشی) فرض کنید $x_۱ \geq x_۲ \geq \ldots \geq ۰$. آن‌گاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} x_n$ فقط و فقط وقتی همگرا است که سری زیر همگرا باشد

$$\sum_{k=۰}^{\infty} ۲^k.x_{۲^k} = x_۱ + ۲x_۲ + ۴x_۴ + ۸x_۸ + \ldots$$

برهان. به استناد قضیهٔ ۲۴.۷، کافی است که کرانداری دنبالهٔ مجموعهای جزئی را بررسی کنیم. فرض کنید

$$s_n = x_1 + \cdots + x_n \quad \text{و} \quad t_k = x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^k . x_{2^k}$$

به‌ازای $n < 2^k$،

$$\begin{aligned} s_n &\leq x_1 + (x_2 + x_3) + \cdots + (x_{2^k} + \cdots + x_{2^{k+1}-1}) \\ &\leq x_1 + 2x_2 + \cdots + 2^k . x_{2^k} \\ &= t_k \end{aligned}$$

به‌ازای $n \geq 2^k$،

$$\begin{aligned} s_n &\geq x_1 + x_2 + (x_3 + x_4) + \cdots + (x_{2^{k-1}+1} + \cdots + x_{2^k}) \\ &\geq \tfrac{1}{2}x_1 + x_2 + 2x_4 + \cdots + 2^{k-1}x_{2^k} \\ &= \tfrac{1}{2}t_k \end{aligned}$$

به این ترتیب، دنباله‌های $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{t_k\}_{k=1}^{\infty}$ یا هر دو کراندارند یا هر دو بی‌کران.

قضیهٔ ۲۶.۷. (قضیهٔ مقایسه) آزمونهای مقایسهٔ زیر را داریم:

الف) اگر به‌ازای $n \geq n_0$ داشته باشیم $|a_n| \leq c_n$، که در آن n_0 عدد صحیح ثابتی است، و اگر $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ همگرا باشد، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است.

ب) اگر به‌ازای $n \geq n_0$ داشته باشیم $a_n \geq d_n \geq 0$، که در آن n_0 عدد صحیح ثابتی است، و اگر $\sum_{n=1}^{\infty} d_n$ واگرا باشد، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است.

برهان. به استناد قضیهٔ ۲۳.۷، اگر $\varepsilon > 0$ مفروض باشد عدد صحیحی مانند $\tilde{n}_0 \geq n_0$ موجود است به طوری که $m \geq n \geq \tilde{n}_0$ مستلزم $\sum_{k=n}^{m} c_k < \varepsilon$ است. از این رو،

$$\left|\sum_{k=n}^{m} a_k\right| \leq \sum_{k=n}^{m} |a_k| \leq \sum_{k=n}^{m} c_k < \varepsilon$$

و (الف) نتیجه می‌شود. قسمت (ب) از قضیهٔ ۲۴.۷ نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۲۷.۷. (آزمون مقایسهٔ حد) فرض کنید که $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌هایی از اعداد حقیقی مثبت باشند.

الف) اگر $\overline{\lim}_{n\to\infty} a_n/b_n < \infty$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ همگرا باشد، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا است.

ب) اگر $\underline{\lim}_{n\to\infty} a_n/b_n > 0$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا است.

برهان. (الف) β را طوری انتخاب کنید که

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} < \beta < \infty$$

آن‌گاه n_0ی موجود است که به‌ازای $n \geq n_0$ داشته باشیم $a_n/b_n < \beta$؛ از این رو،

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n < \beta \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n < \infty$$

(ب) α را طوری انتخاب کنید که در

$$0 < \alpha < \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n}$$

صدق کند. آن‌گاه n_0ی موجود است که به‌ازای $n \geq n_0$ داشته باشیم $a_n/b_n > \alpha$ ؛ از این رو،

$$\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n > \alpha \sum_{n=n_0}^{\infty} b_n = \infty$$

و برهان کامل است.

امثله

۱. اگر $|x| < 1$ آن‌گاه سری هندسی همگراست و

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$$

اگر $|x| \geq 1$، این سری واگراست. در واقع، اگر $x \neq 0$ آن‌گاه

$$s_k = 1 + x + x^2 + \cdots + x^k = \frac{1 - x^{k+1}}{1-x}$$

که اگر فرض کنیم $k \longrightarrow \infty$ مورد ادعا نتیجه می‌شود.

۲. سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$$

همگراست اگر $p > 1$ و واگراست اگر $p \leq 1$. در واقع، اگر $p \leq 0$، واگرایی از قضیهٔ ۲۱.۷ نتیجه می‌شود. اگر $p > 0$، قضیهٔ ۲۵.۷ قابل اعمال است، و به سری

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k \frac{1}{2^{kp}} = \sum_{k=0}^{\infty} 2^{(1-p)k}$$

می‌رسیم. امّا $2^{1-p} < 1$ فقط و فقط وقتی که $1 - p < 0$، و مورد ادعا از مقایسه با سری هندسی به‌ازای $x = 2^{1-p}$ نتیجه می‌شود. حالتی که $p = 1$ قبلاً در تبصرهٔ بعد از قضیهٔ ۲۴.۷ و نیز در قضیهٔ ۷.۱ مورد بررسی قرار گرفته است.

۳. سری

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)}$$

به موجب قضیهٔ ۲۵.۷ واگرا است، زیرا

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^k}{2^k(\ln 2^k)} = \frac{1}{\ln 2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$$

واگرا است.

۴. سری

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)(\ln\{\ln n\})}$$

به موجب قضیهٔ ۲۵.۷ و مثال ۳ واگرا است:

$$\frac{2^k}{2^k(\ln 2^k)(\ln\{\ln 2^k\})} = \frac{1}{k(\ln 2)(\ln[k\{\ln 2\}])} > \frac{1}{k(\ln k)}$$

۵. سری

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

به موجب قضیهٔ ۲۵.۷ و مثال ۲ همگرا است:

$$\frac{۲^k}{۲^k(\ln ۲^k)^۲} = \frac{۱}{k^۲(\ln ۲)^۲}$$

و سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(۱/n^۲)$ همگراست.

۶. سری

$$\sum_{n=۳}^{\infty} \frac{۱}{n(\ln n)(\ln\{\ln n\})^۲}$$

به موجب قضیهٔ ۲۵.۷ و مثال ۵ همگراست:

$$\frac{۲^k}{۲^k(\ln ۲^k)(\ln\{\ln ۲^k\})^۲} < \frac{۱}{\ln ۲}\frac{۱}{k(\ln k)^۲}$$

۷. سری

$$\sum_{n=۲}^{\infty} \frac{۱}{(\ln n)^{\ln n}}$$

همگراست. در واقع،

$$\frac{۱}{(\ln n)^{\ln n}} = \frac{۱}{(n)^{\ln(\ln n)}}$$

و به‌ازای همهٔ nهای به قدرکافی بزرگ داریم $\ln(\ln n) > ۲$. از این رو، به‌ازای همهٔ nهای به قدرکافی بزرگ،

$$\frac{۱}{(n)^{\ln(\ln n)}} < \frac{۱}{n^۲}$$

امّا سری $\sum_{n=۱}^{\infty}(۱/n^۲)$ همگراست و مورد ادعا از قسمت (الف) قضیهٔ ۲۶.۷ نتیجه می‌شود.

۸. سری

$$\sum_{n=۳}^{\infty} \frac{۱}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$$

واگراست. در واقع،

$$\frac{۱}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} = \frac{۱}{e^{[\ln(\ln n)]^۲}}$$

و به‌ازای nهای به قدر کافی بزرگ داریم $[\ln(\ln n)]^{2} < \ln n$ (توجه کنید که $(\ln T)^{2} < T$ وقتی که T به قدر کافی بزرگ باشد، به طوری که $(\ln T)^{2}/T \longrightarrow 0$ وقتی که $T \longrightarrow \infty$). از این رو، به‌ازای nهای به قدر کافی بزرگ، داریم

$$\frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}} = \frac{1}{e^{[\ln(\ln n)]^{2}}} > \frac{1}{e^{(\ln n)}} = \frac{1}{n}$$

امّا سری $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ واگرا است و مورد ادعا از قسمت (ب) قضیهٔ ۲۶.۷ نتیجه می‌شود.

۹. سری

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln\{\ln n\})^{\ln n}}$$

واگراست. در واقع،

$$\frac{1}{(\ln\{\ln n\})^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln(\ln\{\ln n\})}}$$

و $2 < \ln(\ln\{\ln n\})$ وقتی که n به قدر کافی بزرگ باشد. از این رو، به‌ازای همهٔ nهای به قدر کافی بزرگ،

$$\frac{1}{(\ln\{\ln n\})^{\ln n}} = \frac{1}{n^{\ln(\ln\{\ln n\})}} < \frac{1}{n^{2}}$$

امّا $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n^{2})$ همگراست و مورد ادعا از قسمت (الف) قضیهٔ ۲۶.۷ نتیجه می‌شود.

۱۰. سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^{n}$$

واگراست. درواقع، قضیهٔ ۲۷.۷ قابل اعمال است. فرض کنید $b_n = 1/n$ و $a_n = [1-(1/n)(\ln n)]^{n}$. در مثال ۱۳ از مثالهای حل شدهٔ بعد از قضیهٔ ۱۵.۷ نشان دادیم که

$$x_n = \frac{a_n}{b_n} = n\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)^{n} \longrightarrow 1 \quad \text{وقتی که} \quad n \longrightarrow \infty \qquad (۳۶.۷)$$

تبصره. روش دیگر اثبات (۳۶.۷) به صورت زیر است: داریم

$$\ln x_n = \ln n + n \ln\left(1 - \frac{\ln n}{n}\right)$$

به استناد قضیهٔ تیلور (بخش ۲ از فصل ۴ را ببینید)،

$$\ln\left(1-\frac{\ln n}{n}\right)=-\frac{\ln n}{n}-\frac{1}{2}\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2+\alpha_n\left(\frac{\ln n}{n}\right)^2$$

که در آن $\alpha_n \longrightarrow 0$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. از این رو،

$$\ln x_n=-\frac{1}{2}\frac{(\ln n)^2}{n}+\alpha_n\frac{(\ln n)^2}{n}\longrightarrow 0 \quad \text{وقتی که} \quad n\longrightarrow\infty$$

و از آن، به استناد پیوستگی تابع لگاریتمی، (۳۶.۷) نتیجه می‌شود.

۱۱. سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}\right) \tag{37.7}$$

واگراست. در واقع، چون $1/(n+1) < \ln\{(n+1)/n\} < 1/n$ [(۲۳.۱) را ببینید]، خواهیم داشت:

$$0<\frac{1}{n}-\ln\frac{n+1}{n}<\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}, \qquad n=1,2,3,\ldots$$

امّا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right)=1$$

زیرا

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots+\left(\frac{1}{k}-\frac{1}{k+1}\right)=1-\frac{1}{k+1}\longrightarrow 1$$

وقتی که $k \longrightarrow \infty$. بنابراین، به استناد قسمت (الف) قضیهٔ ۲۶.۷، سری (۳۷.۷) همگرا است؛ به استناد قضیهٔ ۷.۱، مجموع این سری مساوی ثابت اویلر $C = 0{,}5772156649\ldots$ است.

۱۲. سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sin\frac{x}{n}$$

در حالتی که $x \neq 0$ واگراست. در واقع، به استناد قسمت (ب) قضیهٔ ۲۷.۷، با فرض $b_n = 1/n$ و $a_n = \sin(x/n)$، ملاحظه می‌کنیم که $a_n/b_n \longrightarrow x$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. معذالک، سری

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}\sin\frac{x}{n}$$

به‌ازای هر مقدار (متناهی) x همگراست. در واقع، قسمت (الف) قضیهٔ ۲۶.۷ قابل اعمال است. چون نامساوی $|\sin t| \le |t|$ به‌ازای هر عدد حقیقی t برقرار است، می‌بینیم که

$$\left|\frac{۱}{n}\sin\frac{x}{n}\right| \le \frac{|x|}{n^{۲}}$$

به‌ازای هر عدد حقیقی x و هر عدد طبیعی n برقرار است. امّا $\sum_{n=۱}^{\infty}(۱/n^{۲})$ همگراست؛ در واقع، می‌دانیم که مجموعش $\pi^{۲}/۶$ است (قضیهٔ ۱۹.۷).

قضیهٔ ۲۸.۷. فرض کنید که $\sum_{n=۱}^{\infty} c_n$ و $\sum_{n=۱}^{\infty} d_n$ ، به ترتیب، یک سری همگرا و یک سری واگرا با جمل مثبت باشند. آن‌گاه

الف) اگر دنبالهٔ $\{\gamma_n\}_{n=۱}^{\infty}$ مثبت و کراندار باشد، $\sum_{n=۱}^{\infty} \gamma_n c_n$ همگراست؛

ب) اگر دنبالهٔ $\{\delta_n\}_{n=۱}^{\infty}$ مثبت و از پایین به عدد مثبتی مانند δ کراندار باشد، $\sum_{n=۱}^{\infty} \delta_n d_n$ واگراست.

برهان. (الف) اگر مجموعهای جزئی $\sum_{n=۱}^{\infty} c_n$ همواره کوچکتر از K باقی بمانند و ضرایب در $\gamma_n < \gamma$ به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ صدق کنند، آن‌گاه بدیهی است که مجموعهای جزئی $\sum_{n=۱}^{\infty} \gamma_n c_n$ همیشه کوچکتر از γK خواهند بود و مورد ادعا از قضیهٔ ۲۴.۷ نتیجه می‌شود.

(ب) اگر $G > ۰$ دلخواه باشد، به استناد فرض، مجموعهای جزئی $\sum_{n=۱}^{\infty} d_n$ از اندیس مناسبی مانند $n_۰$ به بعد بزرگتر از G/δ می‌باشند. در این صورت، از همان اندیس $n_۰$ به بعد، مجموعهای جزئی $\sum_{n=۱}^{\infty} \delta_n d_n$ بزرگتر از G خواهند بود و، بنابراین، دیده می‌شود که $\sum_{n=۱}^{\infty} \delta_n d_n$ واگراست.

قضیهٔ ۲۹.۷. فرض کنید که $\sum_{n=۱}^{\infty} c_n$ و $\sum_{n=}^{\infty} d_n$، به ترتیب، یک سری همگرا و یک سری واگرا با جمل مثبت باشند. اگر جمل یک سری مفروض $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ با جمل مثبت به‌ازای هر $n \ge n_۰$، که $n_۰$ ثابت است، در شرط

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} \le \frac{c_{n+۱}}{c_n} \qquad \text{(الف)}$$

صدق کنند، آن‌گاه سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ نیز همگراست. معذالک، اگر به‌ازای هر $n \ge n_۰$، که $n_۰$ ثابت است، داشته باشیم

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} \ge \frac{d_{n+۱}}{d_n} \qquad \text{(ب)}$$

آن‌گاه $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ نیز باید واگرا باشد.

برهان. دنبالهٔ کسرهای $\gamma_n = a_n/c_n$، از اندیس معینی به بعد، نزولی یکنواست و در نتیجه، چون همهٔ جمل دنباله مثبت هستند، الزاماً کراندار است. اینک، به استناد قسمت (الف) قضیهٔ ۲۸.۷، مورد ادعا ثابت می‌شود.

(ب) به طور مشابه، $a_{n+1}/d_{n+1} \geq a_n/d_n$، که در این صورت کسرهای $\delta_n = a_n/d_n$ از اندیس معینی به بعد صعود می‌کنند. امّا چون همواره مثبت هستند، یک کران پایین مثبت دارند. اینک، به استناد قسمت (ب) قضیهٔ ۲۸.۷، واگرایی ثابت می‌شود.

تعریف. $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ را مطلقاً همگرا می‌نامند در صورتی که $\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|$ همگرا باشد.

تبصره. به استناد قسمت (الف) قضیهٔ ۲۶.۷، همگرایی مطلق مستلزم همگرایی است.

قضیهٔ ۳۰.۷. (آزمون ریشه) فرض کنید که $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ یک سری از اعداد حقیقی باشد و

$$r = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}$$

(الف) اگر $r < 1$، سری مطلقاً همگراست.
(ب) اگر $r > 1$، سری واگراست.

برهان. فرض کنید که $r < 1$. عدد ثابت β را طوری انتخاب کنید که $r < \beta < 1$. آن‌گاه عدد صحیحی مانند $\tilde{n}$ موجود است به طوری که به‌ازای هر $n \geq \tilde{n}$ داشته باشیم $\sqrt[n]{|c_n|} < \beta$. به این ترتیب،

$$\sum_{n=\tilde{n}}^{\infty} |c_n| < \sum_{n=\tilde{n}}^{\infty} \beta^n = \frac{\beta^{\tilde{n}}}{1-\beta} < \infty$$

و (الف) نتیجه می‌شود.

اگر $r > 1$، آن‌گاه بی‌نهایت بار $\sqrt[n]{|c_n|} > 1$ ؛ از این رو، بی‌نهایت بار $|c_n| > 1$ و چنین نیست که $c_n \longrightarrow 0$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. بنابراین، (ب) از قضیهٔ ۲۱.۷ نتیجه و برهان تمام می‌شود.

قضیهٔ ۳۱.۷. (قضیهٔ کوشی ـ هادامارد) فرض کنید که $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ یک سری از اعداد حقیقی باشد و

$$\gamma = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}, \qquad R = \frac{1}{\gamma}$$

(اگر $\gamma = ۰$، $R = +\infty$؛ اگر $\gamma = +\infty$، $R = ۰$.) در این صورت، $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ مطلقاً همگراست هرگاه $|x| < R$ و واگراست هرگاه $|x| > R$. (سری به صورت $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ را سری توانی می‌نامند و متعاقباً در این فصل مطالعه خواهد شد.)

برهان. قرار می‌دهیم $c_n = a_n x^n$ و قضیهٔ ۳۰.۷ را به کار می‌بریم؛ خواهیم داشت:

$$\overline{\lim}\ \sqrt[n]{|c_n|} = |x|\,\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = |x|.\gamma = \frac{|x|}{R}$$

لم ۱. فرض کنید b یک عدد حقیقی مثبت باشد. آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = ۱$.

برهان. اگر $b > ۱$، مورد ادعا از لم قبل از قضیهٔ ۱۰.۱ نتیجه می‌شود؛ اگر $۰ < b < ۱$، $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{b} = \lim_{n\to\infty} ۱/\sqrt[n]{b} = ۱$.

تبصره. یک روش بسیار ساده‌تر اثبات لم ۱ این است که لگاریتم بگیریم و دنبالهٔ $\{(۱/n)(\ln b)\}$ را در نظر بگیریم.

لم ۲. فرض کنید $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی مثبت باشد. آن‌گاه

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} \le \underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \le \overline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} \quad (۳۸.۷)$$

بالاخص، اگر $\lim_{n\to\infty}(a_{n+۱}/a_n) = L$، که در آن $۰ \le L \le \infty$، آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} = L$.

برهان. واضح است که گزارهٔ آخر از گزارهٔ اول نتیجه می‌شود. نامساوی دوم (۳۸.۷) بدیهی است، در حالی که نامساویهای اول و سوم برهانی مشابه دارند. فقط در نامساوی اول (۳۸.۷) تحقیق می‌کنیم. فرض کنید

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+۱}}{a_n} = a$$

آشکار است‌که $a \ge ۰$. اگر $a = ۰$، چیزی برای اثبات نمی‌ماند؛ بنابراین، فرض می‌کنیم که $a > ۰$. فرض کنید که $۰ < \alpha < a$. از این رو، عدد صحیحی مانند N موجود است به طوری که

$$\frac{a_{k+۱}}{a_k} > \alpha \quad (۳۹.۷)$$

به‌ازای هر $N \geq k$. فرض می‌کنیم $n > N$ و نامساویهای (۳۹.۷) را به‌ازای $k = N, N+1, \ldots, n-2, n-1$ در هم ضرب می‌کنیم؛ خواهیم داشت:

$$\frac{a_n}{a_N} > \alpha^{n-N} \quad \text{و} \quad \sqrt[n]{a_n} > \alpha(a_N\alpha^{-N})^{1/N} \qquad (40.7)$$

چون (۴۰.۷) به‌ازای هر $n > N$ برقرار است، لم ۱ نشان می‌دهد که

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geq \underline{\lim}_{n\to\infty} \alpha(a_N\alpha^{-N})^{1/n} = \alpha$$

امّا α عدد حقیقی (مثبت) دلخواهی کوچکتر از a بود، لذا

$$\underline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \geq a = \underline{\lim}_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$$

قضیهٔ ۳۲.۷. (آزمون نسبت) فرض کنید که $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ یک سری از اعداد حقیقی باشد و همواره $c_n \neq 0$،

الف) اگر $\overline{\lim}_{n\to\infty}|c_{n+1}/c_n| < 1$، آن‌گاه سری مطلقاً همگراست.

ب) اگر $\underline{\lim}_{n\to\infty}|c_{n+1}/c_n| > 1$، آن‌گاه سری واگراست.

برهان. قرار دهید $a_n = |c_n|$ و لم ۲ و قضیهٔ ۳۰.۷ را به کار برید.

توضیحات. لازم است که در قضایای ۳۰.۷ و ۳۲.۷ نامساویها اکید باشند. اگر $c_n = 1/n$ آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ واگراست در حالی که $\lim \sqrt[n]{c_n} = \lim(c_{n+1}/c_n) = 1$. از طرف دیگر، اگر $c_n = 1/n^2$ آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ همگراست در حالی که $\lim \sqrt[n]{c_n} = \lim(c_{n+1}/c_n) = 1$.

آزمون نسبت (قضیهٔ ۳۲.۷) را غالباً ساده‌تر از آزمون ریشه (قضیهٔ ۳۰.۷) می‌توان به کار برد، ولی آزمون ریشهٔ حوزهٔ عمل وسیعتری دارد؛ برهان آزمون نسبت نشان می‌دهد که هر سری که براساس آزمون نسبت قابل آزمایش باشد براساس آزمون ریشه نیز قابل آزمایش است. دو مثال زیر نشان می‌دهند که آزمون ریشه اکیداً قویتر از آزمون نسبت است. آزمون ریشه نشان می‌دهد که سری

$$\frac{1}{3} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^3} + \frac{1}{2^4} + \frac{1}{3^5} + \frac{1}{2^6} + \frac{1}{3^7} + \frac{1}{2^8} + \ldots \qquad (41.7)$$

همگراست در حالی که آزمون نسبت مؤثر واقع نمی‌شود؛ آزمون ریشه نشان می‌دهد که سری

$$\frac{1}{2} + 2^2 + \frac{1}{2^3} + 2^4 + \frac{1}{2^5} + 2^6 + \frac{1}{2^7} + 2^8 + \ldots \qquad (42.7)$$

واگراست در حالی که آزمون نسبت عمل نمی‌کند. بعلاوه، سری (۴۱.۷) نشان می‌دهد که $\underline{\lim}$ در قسمت (ب) قضیهٔ ۳۲.۷ قابل تعویض با $\overline{\lim}$ نیست و سری (۴۲.۷) نشان می‌دهد که $\overline{\lim}$ نه در قسمت (الف) قضیهٔ ۳۰.۷ قابل تعویض با $\underline{\lim}$ است نه در قسمت (الف) قضیهٔ ۳۲.۷.

قضیهٔ ۳۳.۷. (آزمون سری متناوب لایبنیتس) اگر $a_1 \geq a_2 \geq a_3 \geq \ldots \geq 0$ و $a_n \longrightarrow 0$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$، آن‌گاه سری متناوب

$$\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}a_n$$

همگرا است. بعلاوه، اگر

$$S = \sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}a_k \quad \text{و} \quad s_n = \sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}a_k$$

آن‌گاه

$$|S - s_n| \leq a_{n+1}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

برهان. به‌ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$ داریم:

$$s_{2n+2} - s_{2n} = a_{2n+1} - a_{2n} \geq 0$$
$$s_{2n+2} - s_{2n+1} = -a_{2n+2} \leq 0$$
$$s_{2n+1} - s_{2n-1} = -a_{2n} + a_{2n+1} \leq 0$$

بنابراین،

$$s_{2n} \leq s_{2n+2} \leq s_{2n+1} \leq s_{2n-1}$$

بعلاوه،

$$\lim_{n\to\infty}(s_{2n-1} - s_{2n}) = \lim_{n\to\infty} a_{2n} = 0$$

زیردنباله‌های $\{s_{2n}\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{s_{2n-1}\}_{n=1}^{\infty}$ به 0 و a_1 کراندارند و دنبالهٔ

$$\{[s_{2n}, s_{2n-1}]\}_{n=1}^{\infty}$$

از بازه‌های بستهٔ تودرتو را تولید می‌کنند و طول این بازه‌ها، یعنی $s_{۲n} - s_{۲n-۱}$، به صفر میل می‌کند وقتی که $n \longrightarrow \infty$. به طور آشکار، S نقطهٔ مشترک منحصربه‌فرد همهٔ این بازه‌هاست و

$$s_{۲n} \leq S \leq s_{۲n-۱}, \quad n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

بنابراین، به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$،

$$|S - s_{۲n-۱}| \leq |s_{۲n} - s_{۲n-۱}| = a_{۲n} \quad \text{و} \quad |S - s_{۲n}| \leq |s_{۲n+۱} - s_{۲n}| = a_{۲n+۱}$$

و برهان کامل است.

قضیهٔ ۳۴.۷. (آزمون کومر) فرض کنید که $\{a_n\}_{n=۱}^{\infty}$ و $\{b_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌هایی از اعداد مثبت باشند و قرار دهید

$$K_n = b_n - b_{n+۱}\frac{a_{n+۱}}{a_n}$$

آن‌گاه

الف) $\underline{\lim}_{\,n\to\infty} K_n > ۰$ مستلزم همگرایی $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ است، و

ب) فرض $۰ \leq K_n$ که به ازای هر $n \geq N$ برقرار باشد همراه با واگرایی $\sum_{n=۱}^{\infty}(۱/b_n)$ مستلزم واگرایی $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ است.

برهان. (الف) β را طوری انتخاب کنید که $۰ < \beta < \underline{\lim}\, K_n$. آن‌گاه عدد صحیحی مانند $n_۰$ موجود است به طوری که به‌ازای هر $n \geq n_۰$ داشته باشیم $K_n > \beta$. این ایجاب می‌کند که به‌ازای هر $n \geq n_۰$،

$$۰ < a_n < \frac{۱}{\beta}(a_n b_n - a_{n+۱}b_{n+۱}) \qquad (۴۳.۷)$$

از این رو، دنبالهٔ $\{a_n b_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای اکیداً نزولی از اعداد مثبت است و، بنابراین، همگرا به حدی نامنفی مانند γ است. به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\sum_{n=n_۰}^{\infty} \frac{۱}{\beta}(a_n b_n - a_{n+۱}b_{n+۱}) &= \lim_{k\to\infty} \sum_{n=n_۰}^{k} \frac{۱}{\beta}(a_n b_n - a_{n+۱}b_{n+۱}) \\ &= \lim_{k\to\infty} \frac{۱}{\beta}(a_{n_۰}b_{n_۰} - a_{k+۱}b_{k+۱}) \\ &= \frac{۱}{\beta}(a_{n_۰}b_{n_۰} - \beta) < \infty\end{aligned}$$

به استناد (۴۳.۷) و قسمت (الف) قضیهٔ ۲۶.۷ ملاحظه می‌کنیم که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگراست.

(ب) به‌ازای $n \geq N$ داریم $a_n b_n - a_{n+1} b_{n+1} \leq 0$ و لذا دنبالهٔ $\{a_n b_n\}_{n=N}^{\infty}$ نانزولی است. بنابراین،

$$\text{به‌ازای } n \geq N، \quad a_n \geq \frac{a_N b_N}{b_n}$$

از این رو، قسمت دوم قضیهٔ ۲۶.۷ ایجاب می‌کند که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ واگرا باشد.

تبصره. با فرض $b_n = 1$، که $n = 1, 2, 3, \ldots$، داریم $K_n = 1 - a_{n+1}/a_n$ و $\underline{\lim}\, K_n = 1 - \overline{\lim}\,(a_{n+1}/a_n)$. به این ترتیب، در این حالت، قضیهٔ ۳۴.۷ به قضیهٔ ۳۲.۷ تبدیل می‌شود.

قضیهٔ ۳۵.۷. (آزمون رابه) اگر $a_n > 0$ وقتی که $n = 1, 2, 3, \ldots$، و

$$R_n = n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right)$$

آن‌گاه

الف) $\underline{\lim}_{n\to\infty} R_n > 1$ مستلزم همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ است.

ب) فرض $R_n \leq 1$ که به‌ازای هر $n \geq N$ برقرار باشد مستلزم واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ است.

برهان. در قضیهٔ ۳۴.۷، بگیرید $b_n = n - 1$ وقتی که $n > 1$ و $b_1 = 1$. آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty}(1/b_n)$ واگراست و

$$\text{به‌ازای } n > 1، \quad R_n - 1 = (n-1) - n\frac{a_{n+1}}{a_n} = K_n$$

و برهان کامل است.

ملاحظات. آزمون رابه قویتر از آزمون نسبت است. در واقع، سری دوجمله‌ای $\sum_{n=0}^{\infty} \binom{\alpha}{n} x^n$ را، که در آن α یک عدد حقیقی ثابت است و

$$a_n = \binom{\alpha}{n} = \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-n+1)}{n!}(-1)^n, \qquad n > 0$$

به‌ازای $x = -1$ در نظر بگیرید. آن‌گاه

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n-\alpha}{n+1} \longrightarrow 1 \quad \text{وقتی که} \quad n \longrightarrow \infty \qquad (۴۴.۷)$$

و بنابراین آزمون نسبت برای نتیجه‌گیری همگرایی یا واگرایی $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ مؤثر واقع نمی‌شود. اما از (۴۳.۷) نتیجه می‌شود که وقتی $n > \max\{\alpha, ۰\}$ همهٔ جمل سری یک علامت دارند. بنابراین، می‌توانیم فرض کنیم که به‌ازای همه nهای بزرگ $a_n > ۰$. حال، ملاحظه می‌کنیم که

$$R_n = n\left(۱ - \frac{a_{n+۱}}{a_n}\right) = \frac{n(۱+\alpha)}{n+۱} \longrightarrow ۱+\alpha \qquad \text{وقتی که} \qquad n \longrightarrow \infty$$

این نشان می‌دهد که، به استناد آزمون رابه، $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ به‌ازای $\alpha > ۰$ همگراست و به‌ازای $\alpha < ۰$ واگرا (به طور آشکار، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگراست هرگاه $\alpha = ۰$).

قضیهٔ ۳۶.۷. (آزمون برتراند) اگر $a_n > ۰$ وقتی که $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، و

$$B_n = (R_n - ۱)\ln n = (n-۱)\ln n - \left(\frac{a_{n+۱}}{a_n}\right) n(\ln n)$$

آن‌گاه

الف) $\underline{\lim}_{\,n\to\infty} B_n > ۱$ مستلزم همگرایی $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ است.

ب) $\overline{\lim}_{\,n\to\infty} B_n < ۱$ مستلزم واگرایی $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ است.

برهان. در قضیهٔ ۳۴.۷، بگیرید $b_{n+۱} = n(\ln n)$. آن‌گاه $\sum_{n=۱}^{\infty}(۱/b_n)$ واگرا است و

$$K_n = (n-۱)\ln(n-۱) - n(\ln n)\frac{a_{n+۱}}{a_n} = (n-۱)\ln\left(\frac{n-۱}{n}\right) + B_n$$

چون

$$\lim_{n\to\infty}(n-۱)\ln\left(\frac{n-۱}{n}\right) = \lim_{n\to\infty}\ln\left(۱+\frac{۱}{n}\right)^{-n} = -۱$$

داریم $\overline{\lim}\, K_n = ۱ + \overline{\lim}\, B_n$ و مورد ادعا از قضیهٔ ۳۴.۷ نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۳۷.۷. (آزمون گاوس) اگر $a_n > ۰$ وقتی که $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، و اگر یک عدد حقیقی مانند α، یک عدد مثبت ε، و دنباله‌ای کراندار مانند $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از اعداد حقیقی بتوان یافت به طوری که

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = ۱ - \frac{\alpha}{n} - \frac{x_n}{n^{۱+\varepsilon}} \qquad \text{به‌ازای } n = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

آن‌گاه $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگراست فقط و فقط وقتی که $\alpha > ۱$.

برهان. داریم

$$R_n = n\left(۱ - \frac{a_{n+۱}}{a_n}\right) = \alpha + \frac{x_n}{n^\varepsilon} \longrightarrow \alpha \qquad \text{وقتی که} \qquad n \longrightarrow \infty$$

زیرا $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ کراندار است. به این ترتیب، به‌ازای $\alpha \neq ۱$، مورد ادعا از آزمون رابه (قضیهٔ ۳۵.۷) نتیجه می‌شود. به‌ازای $\alpha = ۱$ آزمون برتراند (قضیهٔ ۳۶.۷) را به کار می‌بریم. داریم

$$B_n = (R_n - ۱)(\ln n) = \frac{x_n(\ln n)}{n^\varepsilon} \longrightarrow ۰ \qquad \text{وقتی که} \qquad n \longrightarrow \infty$$

و بنابراین $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ واگراست.

مثالهای حل شده

۱. فرض کنید که α، β، و γ سه عدد حقیقی باشند که هیچ یک از آنها عدد صحیح منفی یا صفر نیست. تعریف کنید $a_۰ = ۱$ و، به‌ازای $n > ۰$،

$$a_n = \frac{\alpha(\alpha+۱)(\alpha+۲)\ldots(\alpha+n-۱)\beta(\beta+۱)(\beta+۲)\ldots(\beta+n-۱)}{\gamma(\gamma+۱)(\gamma+۲)\ldots(\gamma+n-۱)}$$

سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ را سری ابرهندسی می‌نامند. به وضوح،

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = \frac{(\alpha+n)(\beta+n)}{(۱+n)(\gamma+n)} = \frac{n^۲ + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta}{n^۲ + (\gamma+۱)n + \gamma}$$

چون $\lim_{n\to\infty}(a_{n+۱}/a_n) = ۱$، جمل سری به‌ازای همهٔ nهای بزرگ یک علامت دارند وآزمون گاوس قابل اعمال است. از حل معادلهٔ

$$\frac{n^۲ + (\alpha+\beta)n + \alpha\beta}{n^۲ + (\gamma+۱)n + \gamma} = ۱ - \frac{(\gamma+۱) - (\alpha+\beta)}{n} - \frac{x_n}{n^۲}$$

برحسب n درمی‌یابیم که $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ همگرا و، از این رو، کراندار است. به این ترتیب، آزمون گاوس نشان می‌دهد که $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگرا است فقط و فقط وقتی که $\alpha + \beta < \gamma$.

۲. سری

$$\left(\frac{۱}{۲}\right)^p + \left(\frac{۱\cdot۳}{۲\cdot۴}\right)^p + \left(\frac{۱\cdot۳\cdot۵}{۲\cdot۴\cdot۶}\right)^p + \ldots$$

را در نظر بگیرید. چون

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p \longrightarrow 1 \quad \text{وقتی که} \quad n \longrightarrow \infty$$

آزمون نسبت (قضیهٔ ۳۲.۷) از کار می‌افتد، و به آزمون رابه (قضیهٔ ۳۵.۷) مراجعه می‌کنیم. درمی‌یابیم که

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1 - \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^p\right) = \frac{2n}{2n+2}\frac{1-(1-x)^p}{2x}$$

که در آن $1/x = 2n + 2$. امّا (به استناد قاعدهٔ لوپیتال)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-(1-x)^p}{2x} = \lim_{x\to 0} \frac{p(1-x)^{p-1}}{2} = \frac{p}{2}$$

بنابراین، سری مفروض به‌ازای $p > 2$ همگرا است و به‌ازای $p < 2$ واگرا است. بررسی حالت $p = 2$ باقی می‌ماند. به‌ازای $p = 2$، آزمون رابه مؤثر واقع نمی‌شود ولی آزمون گاوس (قضیهٔ ۳۷.۷) واگرایی را نشان می‌دهد؛ زیرا

$$\left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{n} + \frac{5 - 4/n}{4n^2 + 8n + 4}$$

و بنابراین

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \left(\frac{2n+1}{2n+2}\right)^2 = 1 - \frac{1}{n} + \frac{x_n}{n^2}$$

که در آن $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای کراندار است.

۳. سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

به استناد آزمون رابه واگرا است. در واقع،

$$n\left(1 - \frac{a_{n+1}}{a_n}\right) = n\left(1 - \frac{(1+1/n)^n}{e}\right)$$

و فقط باید تحقیق کنیم که

$$\lim_{x\to 0} \frac{1}{x}\left(1 - \frac{(1+x)^{1/x}}{e}\right) = \frac{1}{2}$$

۶. سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \tau(n)x^n$$

را در نظر بگیرید که در آن $x > 0$ و $\tau(n)$ تعداد مقسوم‌علیه‌های مثبت عدد صحیح n است. چون

$$x \leq \sqrt[n]{\tau(n)}.x \leq \sqrt[n]{n}.x$$

و (با استفاده از لم قبل از قضیهٔ ۸.۱)

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$$

ملاحظه می‌کنیم که آزمون ریشه (قضیهٔ ۳۰.۷) قابل اعمال است. سری مورد بحث به‌ازای $0 < x < 1$ همگرا است و به‌ازای $x > 1$ واگرا (بدیهی است که این سری به‌ازای $x = 1$ واگرا است).

۷. فرض کنید $0 < p \leq 1$. آن‌گاه سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n^p}$$

با استفاده از قضیهٔ ۳۳.۷ همگرا است؛ بالاخص، سری همساز متناوب

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{n}$$

همگرا است و مجموعش $\ln 2$ است (به کاربرد بعد از قضیهٔ ۶.۱ مراجعه کنید). سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \sin\frac{x}{n}$$

به‌ازای هر $x \neq 0$ همگرا است. اگرچه ما نمی‌توانیم قضیهٔ ۳۳.۷ را مستقیماً در مورد این سری به کار ببریم، به نظر می‌رسد باقیمانده‌ای از آن قابل اعمال است. به‌ازای nهای به قدر کافی بزرگ، علامت $\sin(x/n)$ و x یکی است و، وقتی n زیاد شود، قدرمطلق $\sin(x/n)$ نزول می‌کند. معذالک، از مثال ۱۲ بعد از قضیهٔ [illegible] می‌توان دید که سری $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n \sin(x/n)$ مطلقاً همگرا نیست.

۶. دیده می‌شود که، به استناد قضیهٔ ۳۳.۷، سری

$$۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۱۱} + \dots$$

همگرا است. معذالک، از (۳۹.۴) فصل ۴ می‌توان استنباط کرد که

$$۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۱۱} + \dots = \frac{\pi}{۴} \qquad (۴۵.۷)$$

نمایش (۴۵.۷) بسیار جالب است ولی برای محاسبهٔ عدد π مناسب نیست؛ مثلاً، به استناد قضیهٔ ۳۳.۷، برای حصول دقتی تا شش رقم اعشار، لازم است که نیم میلیون جمله از سری (۴۵.۷) را داشته باشیم. در تعقیب معادلهٔ (۳۹.۴) فصل ۴، روش مکین در محاسبهٔ عدد π با درجهٔ دقت زیاد را بررسی کردیم.

۷. سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty}(-۱)^{\sigma(n)}\left(\frac{n}{۲n-۱}\right)^{n}$$

که در آن $\sigma(n) = ۱ + ۲ + \dots + n = n(n+۱)/۲$، همگراست. در واقع، ملاحظه کنید که آزمون ریشه (قضیهٔ ۳۰.۷) همگرایی مطلق سری مورد بحث را نشان می‌دهد.

۸. به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \dots$، فرض کنید

$$a_n = \frac{۲^n n!}{n^n}$$

آن‌گاه $a_n \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. در واقع، چون $a_{n+۱}/a_n \longrightarrow ۲/e < ۱$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$، به استناد آزمون نسبت (قضیهٔ ۳۲.۷)، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگراست و لذا، به استناد قضیهٔ ۲۱.۷، $a_n \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$.

تعریف. حاصل ضرب کوشی دو سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=۰}^{\infty} b_n$ از اعداد حقیقی، سری $\sum_{n=۰}^{\infty} c_n$ است که در آن

$$c_n = \sum_{k=۰}^{n} a_k b_{n-k}$$

لم. فرض کنید که $\{\alpha_n\}_{n=۰}^{\infty}$ و $\{\beta_n\}_{n=۰}^{\infty}$ دنباله‌هایی از اعداد حقیقی باشند و α و β اعداد حقیقی (متناهی) باشند.

الف) اگر $\sum_{n=۰}^{\infty}|\beta_n|$ همگرا باشد و $\{\alpha_n\}_{n=۰}^{\infty}$ دنبالهٔ صفر باشد، آن‌گاه

$$\gamma_n = \sum_{k=۰}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} \longrightarrow ۰ \qquad \text{وقتی که} \qquad n \longrightarrow \infty.$$

ب) اگر $\alpha_n \longrightarrow \alpha$ و $\beta_n \longrightarrow \beta$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$، آن‌گاه

$$\frac{۱}{n+۱}\sum_{k=۰}^{n} \alpha_k \beta_{n-k} \longrightarrow \alpha\beta \qquad \text{وقتی که} \qquad n \longrightarrow \infty.$$

ج) اگر $\alpha_n \longrightarrow \alpha$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$، آن‌گاه

$$\frac{۱}{n+۱}\sum_{k=۰}^{n} \alpha_k \longrightarrow \alpha \qquad \text{وقتی که} \qquad n \longrightarrow \infty.$$

برهان. (الف) قرار می‌دهیم $b = \sum_{n=۰}^{\infty}|\beta_n|$. فرض کنید $\varepsilon > ۰$ و $n_۰$ را طوری انتخاب کنید که به‌ازای هر $n > n_۰$ داشته باشیم

$$|\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{۲b}$$

قرار می‌دهیم $a = \sum_{n=۰}^{n_۰}|\alpha_n|$. چون به استناد قضیهٔ ۲۱.۷، $\{\beta_n\}_{n=۰}^{\infty}$ یک دنبالهٔ صفر است، می‌توان $j_۰$ را طوری اختیار کنیم که به‌ازای هر $j > j_۰$ داشته باشیم

$$|\beta_j| < \frac{\varepsilon}{۲a}$$

در این صورت، به‌ازای $n > n_۰ + j_۰$،

$$|\gamma_n| \leq \sum_{k=۰}^{n_۰}|\alpha_k||\beta_{n-k}| + \sum_{k=n_۰+۱}^{n}|\alpha_k||\beta_{n-k}|| < \frac{\varepsilon}{۲a}.a + \frac{\varepsilon}{۲b}.b = \varepsilon$$

و صحت ادعای (الف) محقق شده است.

موارد ادعای (ب) و (ج)، به ترتیب، صرفاً فرمولبندی مجددی از قضایای ۱۵.۷ و ۱۳.۷ می‌باشند.

قضیهٔ ۳۸.۷. (قضیهٔ مرتنس) اگر حداقل یکی از دو سری همگرای

$$\sum_{n=۰}^{\infty} a_n = A \qquad \text{و} \qquad \sum_{n=۰}^{\infty} b_n = B$$

از اعداد حقیقی مطلقاً همگرا باشد و $\sum_{n=۰}^{\infty} c_n$ حاصل‌ضرب کوشی آنها فرض شود، آن‌گاه $\sum_{n=۰}^{\infty} c_n$ همگراست و داریم $\sum_{n=۰}^{\infty} c_n = AB$.

برهان. فرض کنید که $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ مطلقاً همگرا باشد. قرار می‌دهیم

$$A_n = \sum_{k=0}^{n} a_k, \qquad B_n = \sum_{k=0}^{n} b_k, \qquad C_n = \sum_{k=0}^{n} c_k, \qquad \beta_n = b_n, \alpha_n = A_n - A$$

آن‌گاه C_n مجموع همهٔ حاصل‌ضربهای $a_j b_k$ است که در آنها $0 \leq j \leq n$، $0 \leq k \leq n$، و $0 \leq j + k \leq n$. از این رو

$$\begin{aligned} C_n &= A_0 b_n + A_1 b_{n-1} + \cdots + A_n b_0 \\ &= (A + \alpha_0)\beta_n + (A + \alpha_1)\beta_{n-1} + \cdots + (A + \alpha_n)\beta_0 \\ &= AB_n + \sum_{k=0}^{n} \alpha_n \beta_{n-k} \end{aligned}$$

که، به استناد مفروضات و قسمت (الف) لم پیش، به $AB + 0 = AB$ میل می‌کند وقتی که $n \longrightarrow \infty$.

قضیهٔ ۳۹.۷. اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = A$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n = B$ دو سری همگرا باشند و حاصل‌ضرب کوشی آنها $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = C$ نیز همگرا باشد، آن‌گاه $C = AB$.

برهان. با استفاده از نماد برهان قبلی، داریم

$$C_k = A_0 b_k + A_1 b_{k-1} + \cdots + A_k b_0$$

بنابراین،

$$C_0 + C_1 + \cdots + C_n = A_0 B_n + A_1 B_{n-1} + \cdots + A_n B_0 \qquad (۴۶.۷)$$

اگر طرفین معادلهٔ (۴۶.۷) را بر $n + 1$ تقسیم کنیم و از طرفین حد بگیریم وقتی که $n \longrightarrow \infty$، براساس قسمتهای (ب) و (ج) لم قبل از قضیهٔ ۳۸.۷، درمی‌یابیم که $C = AB$.

تبصره. امکان دارد که حاصل‌ضرب کوشی دو سری همگرا یک سری واگرا باشد. فرض کنید که

$$a_0 = b_0 = 0, \qquad a_n = b_n = \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}}, \qquad n = 1, 2, 3, \ldots$$

آن‌گاه، به استناد مثال ۵ از مثالهای حل شدهٔ بعد از قضیهٔ ۳۷.۷، سریهای $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=0}^{\infty} b_n$ همگرایند، ولی $c_0 = c_1 = 0$ و به‌ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$

$$c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k} = (-1)^n \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{n-k}}$$

$$|c_n| = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{k(n-k)}} \geq \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{\sqrt{(n-1)(n-1)}} = 1$$

از این رو، $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ یک دنبالهٔ صفر نیست و، به استناد قضیهٔ ۲۱.۷، $\sum_{n=0}^{\infty} c_n$ واگرا است.

قضیهٔ ۴۰.۷. (لم آبل) اگر $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد با این خاصیت که اعدادی حقیقی مانند m و M یافت شوند به طوری که مجموعهای جزئی $s_n = a_1 + \cdots + a_n$ به‌ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$ در $m \leq s_n \leq M$ صدق کنند، و اگر $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ چنان باشد که $b_1 \geq b_2 \geq b_3 \ldots \geq 0$، آن‌گاه

$$\text{به‌ازای } n = 1, 2, 3, \ldots \text{،} \qquad mb_1 \leq \sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq M b_1$$

برهان. یک محاسبهٔ ساده نشان می‌دهد که

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k = \sum_{k=1}^{n} s_k (b_k - b_{k+1}) + s_n b_{n+1}$$

چون $b_k - b_{k+1} \geq 0$ و $s_k \leq M$، خواهیم داشت:

$$\sum_{k=1}^{n} a_k b_k \leq M \sum_{k=1}^{n} (b_k - b_{k+1}) + M b_{n+1} = M b_1$$

طرف چپ نامساوی به طریق مشابه محقق می‌شود.

قضیهٔ ۴۱.۷. (آزمون دیریکله) فرض کنید که دنباله‌های $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ با شرایط قضیهٔ ۴۰.۷ انتخاب شوند و، بعلاوه، $b_n \longrightarrow 0$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. آن‌گاه سری $\sum_{k=1}^{\infty} a_k b_k$ همگراست.

برهان. به استناد فرض، یک $M > 0$ موجود است به طوری که به‌ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$ داشته باشیم $|s_n| \leq M$. از این رو، به‌ازای هر دو عدد صحیح مثبت j و n که $j \leq n$،

$$\left| \sum_{k=j}^{n} a_k \right| = |s_n - s_{j-1}| \leq |s_n| + |s_{j-1}| \leq 2M$$

به استناد قضیهٔ ۴۰.۷، که در مورد دنباله‌های $\{a_k\}_{k=j}^{\infty}$ و $\{b_k\}_{k=j}^{\infty}$ اعمال شود، این نامساوی ایجاب می‌کند که به‌ازای $n \geq j$،

$$\left|\sum_{k=j}^{n} a_k b_k\right| \leq ۲Mb_j$$

به استناد فرض، عدد صحیحی مانند $n_۰$ موجود است به طوری که به‌ازای هر $n \geq n_۰$ داشته باشیم $b_n < \varepsilon/۲M$. از این رو، $۲Mb_j < \varepsilon$ هرگاه $j \geq n_۰$؛ بنابراین،

$$\left|\sum_{k=j}^{n} a_k b_k\right| < \varepsilon \qquad \text{به‌ازای } n \geq j \geq n_۰،$$

اینک، مورد ادعا از قضیهٔ ۲۳.۷ نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۴۲.۷. (آزمون آبل) اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ یک سری همگرا باشد و دنبالهٔ $\{b_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یکنوا و کراندار باشد، آن‌گاه $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n b_n$ نیز همگرا است.

برهان. فرض کنید که $\{b_n\}_{n=۱}^{\infty}$ صعودی باشد و $c_n = b - b_n$ که در آن $b_n \longrightarrow b$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. به استناد قضیهٔ ۴۱.۷، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n c_n$ همگراست. واضح است که سری $\sum_{n=۱}^{\infty} b a_n$ نیز همگراست. امّا $a_n b_n = b a_n - a_n c_n$؛ از این رو،

$$\sum_{n=۱}^{\infty} a_n b_n = \sum_{n=۱}^{\infty} (b a_n - a_n c_n)$$

همگراست.

۴.۷ گروه‌بندی و تجدید آرایش

تعریف. سری $\sum A_k$ را حاصل از گروه‌بندی (یا درج پرانتز در) جمل سری مفروض $\sum a_n$ می‌نامند در صورتی که هر A_k حاصل‌جمع تعدادی متناهی از جمل متوالی $\sum a_n$ باشد و هر زوج از جمل مانند a_m و a_n که در آن $m < n$، به ترتیب، از جملهٔ جمل زوج منحصربه‌فردی چون A_p و A_q باشند که در آن $p \leq q$.

مثال. گروه‌بندی

$$(a_{0} + a_{1}) + (a_{2}) + (a_{3} + a_{4} + a_{5}) + (a_{6} + a_{7}) + \dots$$

به سری $\sum A_n$ می‌انجامد که در آن $A_{0} = a_{0} + a_{1}$، $A_{1} = a_{2}$، $A_{2} = a_{3} + a_{4} + a_{5}$، $A_{3} = a_{6} + a_{7}$، $\dots$

قضیهٔ ۴۳.۷. قانون شرکت‌پذیری در مورد سریهای نامتناهی همگرا فقط به معنی زیر بدون محدودیت برقرار است:

$$a_{0} + a_{1} + a_{2} + \cdots = s$$

مستلزم

$$(a_{0} + a_{1} + \cdots + a_{v_1}) + (a_{v_1+1} + a_{v_1+2} + \cdots + a_{v_2}) + \cdots = s$$

است در صورتی که v_1، v_2، $\dots$ دنباله‌ای صعودی از اعداد صحیح متمایز باشد و حاصل جمع جمل داخل هر پرانتز یک جمله از سری جدید

$$A_{0} + A_{1} + \cdots + A_k + \dots$$

محسوب شود با تعریف

$$A_k = a_{v_k+1} + a_{v_k+2} + \cdots + a_{v_{k+1}}$$

وقتی که $k = 0, 1, 2, \dots$ و $v_{0} = -1$.

برهان. به وضوح، دنبالهٔ مجموعهای جزئی $\{S_k\}$ سری $\sum A_k$ زیردنبالهٔ

$$s_{v_1}, s_{v_2}, \dots, s_{v_k}, \dots$$

دنبالهٔ مجموعهای جزئی $\{s_n\}$ سری $\sum a_n$ است.

تبصره. مثال

$$\left(2 - 1\frac{1}{2}\right) + \left(1\frac{1}{3} - 1\frac{1}{4}\right) + \left(1\frac{1}{5} - 1\frac{1}{6}\right) + \cdots = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} + \dots$$

نشان می‌دهد که ممکن است که عمل گروه‌بندی جمل، یک سری واگرا را به یک سری همگرا تبدیل کند. به طور معادل، امکان دارد که حذف پرانتز همگرایی را از بین ببرد.

قضیهٔ ۴۴.۷. اگر جمل یک سری همگرای $\sum_{k=\circ}^{\infty} A_k$ حاصل جمعهای متناهی باشند (مثلاً، چنان که در قضیهٔ ۴۳.۷ ملاحظه کردیم، $A_k = a_{v_k+1} + \cdots + a_{v_{k+1}}$ وقتی که $k = \circ, 1, 2, \ldots$ و $v_\circ = -1$)، آن‌گاه حذف پرانتز از این مجموعها فقط و فقط وقتی مجاز است که سری جدید حاصل $\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n$ نیز همگرا باشد.

برهان. به استناد قضیهٔ ۴۳.۷، اگر $\sum a_n$ همگرا باشد آن‌گاه $\sum a_n = \sum A_k$. اگر $\sum a_n$ واگرا باشد، تساوی بین سریهای $\sum a_n$ و $\sum A_k$ بی‌معنی می‌شود.

تبصره. سری جدید $\sum a_n$ حاصل از $\sum A_k$ در قضیهٔ ۴۴.۷ مطمئناً همگراست هرگاه اعداد

$$A'_k = |a_{v_k+1}| + |a_{v_k+2}| + \cdots + |a_{v_{k+1}}|$$

یک دنبالهٔ صفر تشکیل بدهند. در واقع، اگر $\varepsilon > \circ$ مفروض باشد، m_1 را به قدری بزرگ اختیار می‌کنیم که

$$|S_{k-1} - s| < \frac{\varepsilon}{2}$$

به‌ازای هر $k > m_1$ برقرار باشد و m_2 را به قدری بزرگ اختیار می‌کنیم که $A'_k < \frac{\varepsilon}{2}$ به‌ازای هر $k > m_2$ برقرار باشد. اگر m بزرگتر از هر دو عدد m_1 و m_2 باشد، آن‌گاه

$$|s_n - s| < \varepsilon \qquad \text{به‌ازای هر } n > v_m،$$

زیرا با هر چنین n عددی مانند k متناظر قرار می‌گیرد به طوری که

$$v_k < n \leq v_{k+1}$$

و این عدد k الزاماً بزرگتر از یا مساوی m است. معذالک، در این حالت،

$$s_n = S_{k-1} + a_{v_k+1} + \cdots + a_n, \qquad |s_n - S_{k-1}| \leq A'_k < \frac{\varepsilon}{2}$$

و چون

$$s_n - s = (s_n - S_{k-1}) + (S_{k-1} - s)$$

خواهیم داشت:

$$|s_n - s| < \varepsilon$$

یا $\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n = s$ که همان چیزی است که می‌خواستیم.

امثله

۱. به استناد قضیهٔ ۴۳.۷، سه سری زیر همگرایند و یک مجموع s دارند:

$$1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\frac{1}{4}+\frac{1}{5}-\frac{1}{6}+-\dots \tag{۴۷.۷}$$

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{5}-\frac{1}{6}\right)+\left(\frac{1}{3}-\frac{1}{4}\right)+\cdots=\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}+\frac{1}{5\cdot 6}+\dots \tag{۴۸.۷}$$

$$1-\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)-\left(\frac{1}{4}-\frac{1}{5}\right)-\cdots=1-\frac{1}{2\cdot 3}-\frac{1}{4\cdot 5}-\dots \tag{۴۹.۷}$$

از (۴۸.۷) دیده می‌شود که

$$s>\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{3\cdot 4}=\frac{7}{12}$$

و از (۴۹.۷) پیداست که

$$s<1-\frac{1}{2\cdot 3}=\frac{10}{12}$$

از این رو،

$$\frac{7}{12}<s<\frac{10}{12}$$

با استفاده از جمل بیشتری از سریهای (۴۸.۷) و (۴۹.۷) تخمین دقیقتری از s می‌توانیم داشته باشیم؛ معذالک، قبلاً ازکاربرد متعاقب قضیهٔ ۶.۱ معلوم شده است که $s=\ln 2$. مجدداً، به استناد قضیهٔ ۴۳.۷، سری

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-3}-\frac{1}{4k-2}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{4k}\right) \tag{۵۰.۷}$$

دارای همان مجموع $s=\ln 2$ است، همچنان که سریهای

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k}\right) \quad \text{و} \quad \sum_{k=1}^{\infty}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

که، به ترتیب، در (۴۷.۷) و (۴۸.۷) ظاهر شدند. بنابراین، به استناد قضیهٔ ۲۲.۷،

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-2}-\frac{1}{4k}\right)=\frac{\ln 2}{2} \tag{۵۱.۷}$$

اگر سریهای (۵۰.۷) و (۵۱.۷) را جمله‌به‌جمله جمع کنیم، قضیهٔ ۲۲.۷ ایجاب می‌کند که

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k-3}+\frac{1}{4k-1}-\frac{1}{2k}\right)=\frac{3}{2}\ln 2 \tag{۵۲.۷}$$

۲. یک بار دیگر سری (۵۲.۷) را بررسی می‌کنیم، یعنی، سری $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$ را که در آن

$$A_k = \frac{1}{4k-3} + \frac{1}{4k-1} - \frac{1}{2k}$$

با توجه به این که A_k مثبت است و

$$A_k < \frac{2}{4k-4} - \frac{1}{2k} = \frac{1}{2(k-1)k} \leq \frac{1}{k^2} \quad \text{به‌ازای } k>1،$$

به استناد قضیهٔ ۲۶.۷، همگرایی سری $\sum A_k$ از همگرایی سری $\sum(1/n^2)$ نتیجه می‌شود. تبصرهٔ بعد از قضیهٔ ۴۴.۷ قابل اعمال است؛ در واقع،

$$A'_k < \frac{2}{4k-2} + \frac{1}{2k} < \frac{1}{k-1}$$

و، از این رو، $\{A'_k\}$ یک دنبالهٔ صفر است. به این ترتیب، دیده می‌شود که، به استناد قضیهٔ ۴۴.۷، سری

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{6} - \frac{1}{4} + + - \dots \qquad (53.7)$$

همگراست. با عنایت به (۵۲.۷) و قضیهٔ ۴۳.۷، مجموع سری (۵۳.۷) عبارت است از $\frac{3}{2}\ln 2$.

تعریف. اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد ولی $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ واگرا باشد، می‌گوییم که سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به طور مشروط همگرا است.

ملاحظات. یک سری مفروض زمانی به طور مشروط همگراست که همگرا باشد ولی مطلقاً همگرا نباشد. سری متناوب

$$1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + - \dots$$

مطلقاً همگراست هرگاه $p > 1$، به طور مشروط همگراست هرگاه $0 < p \leq 1$، و واگراست هرگاه $p \leq 0$.

سری متناوب

$$\frac{1}{2} - \frac{1\cdot 3}{2\cdot 4} + \frac{1\cdot 3\cdot 5}{2\cdot 4\cdot 6} - \frac{1\cdot 3\cdot 5\cdot 7}{2\cdot 4\cdot 6\cdot 8} + - \dots$$

به طور مشروط همگراست. در واقع، به استناد مثال ۲ بعد از قضیهٔ ۳۷.۷، این سری مطلقاً همگرا نیست. برای تحقیق در همگرایی، از قضیهٔ ۳۳.۷ می‌توان استفاده کرد. چون

$$1\cdot 3 < 2^2, \quad 3\cdot 5 < 4^2, \ \dots, \ (2n-1)(2n+1) < (2n)^2$$

نتیجه می‌شود که

$$۱^۲ \cdot ۳^۲ \cdot ۵^۲ \ldots (۲n-۱)^۲(۲n+۱) < ۲^۲ \cdot ۴^۲ \cdot ۶^۲ \cdot \ldots \cdot (۲n)^۲$$

که معادل است با نامساوی

$$\frac{۱}{۲} \cdot \frac{۳}{۴} \cdot \frac{۵}{۶} \cdot \ldots \cdot \frac{۲n-۱}{۲n} < \frac{۱}{\sqrt{۲n+۱}}$$

به این ترتیب،

$$\frac{۱ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot \ldots \cdot (۲n-۱)}{۲ \cdot ۴ \cdot ۶ \cdot \ldots \cdot (۲n)} \longrightarrow ۰ \qquad \text{وقتی که} \qquad n \longrightarrow \infty.$$

برقراری سایر مفروضات قضیهٔ ۳۳.۷ به آسانی قابل بررسی است.

تعریف. فرض کنید که $\{n_i\}_{i=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد صحیح مثبت باشد به طوری که هر عدد صحیح مثبت دقیقاً یک بار در میان جمل دنباله ظاهر شود (یعنی، اگر N مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت باشد، $\{n_i\}_{i=۱}^{\infty}$ تابعی یک به یک از N بروی N باشد). اگر $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ یک سری از اعداد حقیقی باشد و رابطهٔ $b_i = a_{n_i}$ به‌ازای $i = ۱, ۲, ۳, \ldots$ برقرار باشد، آن‌گاه $\sum_{i=۱}^{\infty} b_i$ را یک تجدید آرایش $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ می‌نامند.

بحث. سری همساز متناوب

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{n} = ۱ - \frac{۱}{۲} + \frac{۱}{۳} - \frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۶} + - \ldots$$

را در نظر بگیرید. این سری به طور مشروط همگراست. تجدید آرایش زیر از این سری را امتحان می‌کنیم. فرض کنید نخست p جملهٔ مثبت اول سری بیاید و پس از آن q جملهٔ منفی اول سری، سپس p جملهٔ مثبت بعدی سری ظاهر شود و به دنبال آن q جملهٔ منفی بعدی سری، و هکذا. سری حاصل به

$$\ln\left(۲\sqrt{\frac{p}{q}}\right)$$

همگراست. برای بررسی صحت ادعا، فرض می‌کنیم که

$$H_n = ۱ + \frac{۱}{۲} + \cdots + \frac{۱}{n} = \ln n + C + \gamma_n$$

که در آن C ثابت اویلر است و $\gamma_n \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$ (قضیهٔ ۷.۱ را در فصل اول ببینید). آن‌گاه

$$\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۴}+\cdots+\frac{۱}{۲m}=\frac{۱}{۲}H_m=\frac{۱}{۲}\ln m+\frac{۱}{۲}C+\frac{۱}{۲}\gamma_m$$

و

$$۱+\frac{۱}{۳}+\cdots+\frac{۱}{۲k-۱}=H_{۲k}-\frac{۱}{۲}H_k=\ln ۲+\frac{۱}{۲}\ln k+\frac{۱}{۲}C+\gamma_{۲k}-\frac{۱}{۲}\gamma_k$$

این روابط نشان می‌دهند که مجموعهای جزئی سری مورد بحث به صورت

$$\ln\left(۲\sqrt{\frac{p}{q}}\right)+\delta_n$$

می‌باشند که در آن $\{\delta_n\}_{n=۱}^{\infty}$ یک دنبالهٔ صفر است.

توجه می‌کنیم که به‌ازای $p=q=۱$ چنین داریم

$$۱-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۶}+-\cdots=\ln ۲$$

به‌ازای $p=۲$ و $q=۱$ خواهیم داشت [مقایسه کنید با (۵۲.۷)]

$$۱+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۵}+\frac{۱}{۷}-\frac{۱}{۴}+\cdots=\frac{۳}{۲}\ln ۲$$

به‌ازای $p=۱$ و $q=۴$،

$$۱-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۴}-\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۸}+\frac{۱}{۳}-\frac{۱}{۱۰}-\frac{۱}{۱۲}-\frac{۱}{۱۴}-\frac{۱}{۱۶}+\frac{۱}{۱۵}-\cdots=۰$$

و هکذا.

قضیهٔ ۴۵.۷. فرض کنید $\sum_{n=۱}^{\infty}a_n$ یک سری از اعداد حقیقی باشد و قرار دهید

$$p_n=\max\{a_n,۰\}=\frac{a_n+|a_n|}{۲} \quad \text{و} \quad q_n=\min\{a_n,۰\}=\frac{a_n-|a_n|}{۲}$$

احکام زیر برقرارند:

الف) اگر $\sum_{n=۱}^{\infty}a_n$ مطلقاً همگرا باشد آن‌گاه هر دو سری $\sum_{n=۱}^{\infty}p_n$ و $\sum_{n=۱}^{\infty}q_n$ همگرایند.

ب) اگر $\sum_{n=۱}^{\infty}a_n$ به طور مشروط همگرا باشد آن‌گاه هر دو سری $\sum_{n=۱}^{\infty}p_n$ و $\sum_{n=۱}^{\infty}q_n$ واگرایند.

برهان. (الف) اگر هر دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ همگرا باشند آن‌گاه سری $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n + |a_n|)$ نیز همگراست. به این ترتیب، $\sum_{n=1}^{\infty} 2p_n$ همگراست که همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ را ایجاب می‌کند. همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ به طریق مشابه ثابت می‌شود.

(ب) فرض کنید که سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشد ولی $\sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$ واگرا. آن‌گاه هر دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ واگرایند. زیرا، اگر هر دو همگرا باشند آن‌گاه

$$\sum_{n=1}^{\infty}(p_n + q_n) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

همگرا می‌شود که با فرض متناقض است. چون

$$\sum_{n=1}^{k} a_n = \sum_{n=1}^{k}(p_n + q_n) = \sum_{n=1}^{k} p_n + \sum_{n=1}^{k} q_n$$

واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ و همگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ (یا برعکس) مستلزم واگرایی $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ است که مجدداً با فرض متناقض است.

تبصره. توجه کنید که p_nها جمل مثبت و q_nها جمل منفی دنبالهٔ $\{a_n\}$ می‌باشند.

قضیهٔ ۴۶.۷. (قضیهٔ تجدید آرایش ریمان) هر سری به طور مشروط همگرا را می‌توان به گونه‌ای تجدید آرایش کرد که یا یک سری واگرا حاصل شود یا یک سری به طور مشروط همگرا که مجموعش هر عدد از پیش تعیین شده‌ای باشد.

برهان. فرض کنید که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری به طور مشروط همگرا باشد و $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$، به ترتیب، سریهای واگرای حاصل از جمل نامنفی و جمل نامثبت سری مفروض باشند و c یک عدد حقیقی (متناهی) دلخواه باشد. فرض کنید که تجدید آرایش به صورت زیر تعیین شود: ابتدا جمل

$$p_1 + \cdots + p_{m_1}$$

را تا آن جا می‌نویسیم که مجموع جزئی حاصل از آنها برای نخستین بار از c بیشتر شود، سپس به جمل

$$q_1 + \cdots + q_{n_1}$$

روی می‌آوریم تا جایی که مجموع جزئی کل برای نخستین بار از c کمتر شود. آن‌گاه، جمل

$$p_{m_1+1} + \cdots + p_{m_2}$$

را می‌نویسیم به قدری که مجموع جزئی کل برای اولین بار از c تجاوز کند، سپس جمل

$$q_{n_۱+۱} + \cdots + q_{n_۲}$$

را به دنبال می‌آوریم تا جایی که مجموع جزئی کل برای اولین بار از c کمتر شود، و هکذا. به دلیل واگرایی $\sum_{n=۱}^{\infty} p_n$ و $\sum_{n=۱}^{\infty} q_n$، هر یک از این مراحل میسر است [به قسمت دوم قضیهٔ ۴۵.۷ مراجعه کنید]. تجدید آرایش حاصل از سری مفروض $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ همگرا به c است، زیرا که $p_n \longrightarrow ۰$ و $q_n \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$ (چون $a_n \longrightarrow ۰$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$).

برای این که به وجود تجدید آرایشهایی از $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ پی ببریم که مجموعهای جزئی حاصل از آنها به $+\infty$ میل کند، تجدید آرایشی از سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ را در نظر می‌گیریم که در آن متناوباً پس از دسته‌ای از جمل مثبت یک جملهٔ منفی آمده باشد. چون سری $\sum_{n=۱}^{\infty} p_n$ واگرا است، مجموعهای جزئی این سری بی‌کرانند و ما می‌توانیم $m_۱$ را به قدری بزرگ اختیار کنیم که

$$p_۱ + \cdots + p_{m_۱} > ۱ - q_۱$$

سپس $m_۲ > m_۱$ را به قدری بزرگ اختیار کنیم که

$$p_۱ + p_۲ + \cdots + p_{m_۱} + \cdots + p_{m_۲} > ۲ - q_۱ - q_۲$$

و، به طور کلی، $m_k > m_{k-۱}$ را به قدری بزرگ بگیریم که

$$p_۱ + p_۲ + \cdots + p_{m_k} > k - q_۱ - q_۲ - \cdots - q_k \qquad (k = ۳, ۴, \ldots)$$

از این رو، سری

$$p_۱ + \cdots + p_{m_۱} + q_۱ + p_{m_۱+۱} + \cdots + p_{m_۲} + q_۲ + p_{m_۲+۱} + \cdots$$

که در آن متناوباً یک جملهٔ منفی به دنبال دسته‌ای از جمل مثبت آمده است، بالبداهه واگرا می‌باشد؛ مجموع جزئی kام این سری

$$p_۱ + \cdots + p_{m_۱} + q_۱ + \cdots + p_{m_k} + q_k$$

از k تجاوز می‌کند.

به طور مشابه، تجدید آرایشهایی از سری $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ می‌توان یافت‌که به $-\infty$ میل کنند.

قضیهٔ ۴۷.۷. اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقاً همگرا به A باشد، آن‌گاه هر تجدید آرایشی مانند $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ از $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز همگرا به A است.

برهان. نخست نشان می‌دهیم که این قضیه در حالتی که $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ یک سری از اعداد نامنفی باشد برقرار است.

فرض کنید که به‌ازای هر عدد صحیح مثبت k، $s_k = b_1 + \cdots + b_k$. چون به‌ازای $b_i = a_{n_i}$ دنباله‌ای مانند $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$، داریم

$$b_1 = a_{n_1}, \ \ldots, \ b_k = a_{n_k}$$

فرض کنید $m = \max\{n_1, \ldots, n_k\}$. آن‌گاه، به وضوح

$$s_k \leq a_1 + \cdots + a_m \leq A$$

به این ترتیب، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ به عددی حقیقی مانند B همگرا است (به استناد قضیهٔ ۲۴.۷). ولی

$$B = \lim_{k \to \infty} s_k$$

و بنابراین $B \leq A$ (یعنی، $\sum_{n=1}^{\infty} b_n \leq \sum_{n=1}^{\infty} a_n$). معذالک، چون $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ نیز تجدید آرایشی از $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ است، یک استدلال مشابه با تعویض نقش سریهای $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ نشان می‌دهد که $A \leq B$. از این رو، $A = B$.

اکنون حالت کلی را در نظر می‌گیریم. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقاً همگرا باشد، آن‌گاه، به استناد قسمت اول قضیهٔ ۴۵.۷، هر دو سری $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ و $\sum_{n=1}^{\infty} q_n$ همگرایند، مثلاً $\sum_{n=1}^{\infty} p_n = P$ و $\sum_{n=1}^{\infty} q_n = Q$ (که در این صورت، $Q \leq 0$). آن‌گاه، $A = P + Q$. به‌ازای دنباله‌ای مانند $\{n_i\}_{i=1}^{\infty}$، داریم

$$b_i = a_{n_i} = p_{n_i} + q_{n_i} \qquad (۵۴.۷)$$

بعلاوه، $\sum_{i=1}^{\infty} p_{n_i}$ تجدید آرایشی از سری $\sum_{n=1}^{\infty} p_n$ باجمل نامنفی است. از این رو، به استناد قسمت اول این برهان، $\sum_{i=1}^{\infty} p_{n_i}$ همگرا است و $\sum_{i=}^{\infty} p_{n_i} = P$. به طور مشابه، $\sum_{i=1}^{\infty} q_{n_i} = Q$. از (۵۴.۷) درمی‌یابیم که $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ همگرا است و

$$\sum_{i=1}^{\infty} b_i = \sum_{i=1}^{\infty} p_{n_i} + \sum_{i=1}^{\infty} q_{n_i} = P + Q = A$$

فقط باقی می‌ماند که نشان بدهیم که $\sum_{i=1}^{\infty} b_i$ مطلقاً همگرا است. معذالک، به استناد (۵۴.۷)، داریم

$$|b_i| \leq |p_{n_i}| + |q_{n_i}| = p_{n_i} - q_{n_i}$$

به این ترتیب، به‌ازای هر عدد صحیح مثبت k،

$$|b_1| + \cdots + |b_k| \leq \sum_{i=1}^{k} p_{n_i} - \sum_{i=1}^{k} q_{n_i} \leq \sum_{i=1}^{\infty} p_{n_i} - \sum_{i=1}^{\infty} q_{n_i} = P - Q$$

از این رو، مجموعهای جزئی $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|$ از بالا به $P - Q$ کراندارند و، بنابراین، دیده می‌شود که $\sum_{i=1}^{\infty} |b_i|$ همگرا است (به استناد قضیهٔ ۲۴.۷).

قضیهٔ ۴۸.۷. اگر همهٔ تجدید آرایشهای $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ همگرا باشند، همگی به یک مجموع همگرایند.

برهان. یا $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقاً همگراست که، در این حالت، قضیهٔ ۴۷.۷ قابل اعمال است؛ یا این سری به طور مشروط همگراست که، در چنین حالتی به استناد قضیهٔ ۴۶.۷، یک تجدید آرایش واگرا از سری موجود است.

تعریف. سری مفروضی را همگرای نامشروط می‌نامند در صورتی که هر تجدید آرایش آن همگرا باشد.

ملاحظات. به عنوان یک جمع‌بندی، نشان داده‌ایم که سری مفروضی همگرای نامشروط است فقط و فقط وقتی که همگرای مطلق باشد. همچنین، اگر سری مفروضی همگرای نامشروط باشد، آن‌گاه همهٔ تجدید آرایشهای این سری به یک مجموع همگرایند.

تعریف. هر ماتریس نامتناهی

$$\begin{array}{cccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \ldots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \ldots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \ldots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ldots \end{array}$$

از اعداد حقیقی متناظر یک سری دوگانهٔ

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} a_{\mu\nu}$$

است. اگر $\lambda \longrightarrow (\mu,\nu) : A$ یک شمارش از ازواج (μ,ν) از اعداد صحیح مثبت باشد، قرار می‌دهیم $C_\lambda(A) = a_{\mu\nu}$ و سری

$$\sum_{\lambda=۱}^{\infty} C_\lambda(A)$$

را ترتیبی (نسبت به A) از سری $\sum_{\mu,\nu=۱}^{\infty} a_{\mu\nu}$ به یک سری منفرد می‌نامیم.

تبصره. مثالهایی از ترتیب یک سری دوگانه به یک سری منفرد عبارتند از آرایش قطری

$$a_{۱۱} + (a_{۱۲} + a_{۲۱}) + (a_{۱۳} + a_{۲۲} + a_{۳۱}) + \ldots$$

و آرایش مربعی

$$a_{۱۱} + (a_{۱۲} + a_{۲۲} + a_{۲۱}) + (a_{۱۳} + a_{۲۳} + a_{۳۳} + a_{۳۲} + a_{۳۱}) + \ldots$$

در آرایش قطری درایه‌های واقع بر قطرهای متوالی دسته‌بندی می‌شوند و در آرایش مربعی دسته‌بندیهای مستطیلی به کار می‌روند.

قضیهٔ ۴۹.۷. (قضیهٔ تجدید آرایش اصلی) فرض کنید $\sum_{\mu,\nu=۱}^{\infty} a_{\mu\nu}$ یک سری دوگانهٔ مفروض باشد. فرض کنید که عددی مانند M موجود باشد به طوری که

$$\sum_{\mu,\nu=۱}^{m} |a_{\mu\nu}| \le M < \infty, \qquad \text{به‌ازای هر } m،$$

در این صورت، گزاره‌های زیر برقرارند:

الف) هر ترتیبی از یک سری دوگانه به یک سری منفرد مطلقاً همگرا است و همهٔ سریهای منفرد یک مجموع s دارند.

ب) سریهای $\sum_{\nu=۱}^{\infty} a_{\mu\nu}$ (سریهای ستونی) مطلقاً همگرایند $(\mu = ۱, ۲, ۳, \ldots)$ و همین طور سریهای $\sum_{\mu=۱}^{\infty} a_{\mu\nu}$ (سریهای سطری) $(\nu = ۱, ۲, ۳, \ldots)$.

ج) دو سری

$$\sum_{\nu=۱}^{\infty}\left(\sum_{\mu=۱}^{\infty} a_{\mu\nu}\right) \quad \text{و} \quad \sum_{\mu=۱}^{\infty}\left(\sum_{\nu=۱}^{\infty} a_{\mu\nu}\right)$$

همگرایند و مجموع آنها یکی است (مجموع سری سطری = مجموع سری ستونی)؛ یعنی، مساوی با s.

برهان. (الف) فرض کنید n یک عدد صحیح مثبت باشد. ازواج (μ,ν) را که متناظر با اعداد $\lambda = 1,\ldots,n$ تحت شمارش A می‌باشند در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که m بزرگترین μ و ν باشد. آن‌گاه

$$\sum_{\lambda=1}^{n}|C_\lambda(A)| \leq \sum_{\mu,\nu=1}^{m}|a_{\mu\nu}| \leq M$$

ملاحظه می‌کنیم که، به استناد قضیهٔ ۲۴.۷، $\sum_{\lambda=1}^{\infty} C_\lambda(A)$ مطلقاً همگرا است. اگر A^* یک شمارش دیگر باشد، آن‌گاه $\sum_{\lambda=1}^{\infty} C_\lambda(A^*)$ یک تجدید آرایش $\sum_{\lambda=1}^{\infty} C_\lambda(A)$ است؛ همگرایی مطلق ایجاب می‌کند که هر دو سری یک مجموع داشته باشند (قضیهٔ ۴۷.۷ را ببینید).

(ب) اگر قرار دهیم $m = \max\{\mu,n\}$ و $m' = \max\{\nu,n\}$، آن‌گاه

$$\sum_{\nu=1}^{n}|a_{\mu\nu}| \leq \sum_{\mu,\nu=1}^{m}|a_{\mu\nu}| \leq M, \qquad \sum_{\mu=1}^{n}|a_{\mu\nu}| \leq \sum_{\mu,\nu=1}^{m'}|a_{\mu\nu}| \leq M$$

به این ترتیب، به استناد قضیهٔ ۲۴.۷، احکام موردنظر محقق می‌شوند.

(ج) به‌ازای $m \leq n$، داریم

$$\sum_{\mu=1}^{m}\left|\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu}\right| = \sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n}|a_{\mu\nu}| \leq \sum_{\mu,\nu=1}^{n}|a_{\mu\nu}| \leq M$$

و با حدگیری، وقتی که $n \longrightarrow \infty$، نتیجه می‌شود که

$$\sum_{\mu=1}^{m}\left|\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\mu\nu}\right| \leq M$$

که همگرایی مطلق سریهای متشکل از سریهای ستونی را نشان می‌دهد. به طریق مشابه، همگرایی مطلق سریهای متشکل از سریهای سطری نتیجه می‌شود.

سرانجام، فرض کنید که $\sum_{\lambda=1}^{\infty} C_\lambda$ ترتیبی از سری دوگانه به یک سری منفرد باشد. به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ یک k_0ای موجود است به طوری که

$$\sum_{\lambda=k+1}^{\infty}|C_\lambda| < \varepsilon \qquad \text{به‌ازای هر } k \geq k_0,$$

متناظر با k_0، می‌توانیم n_0ی پیدا کنیم که C_1، C_2، …، C_k در میان $a_{\mu\nu}$ها باشند وقتی که $1 \leq \mu \leq n_0$ و $1 \leq \nu \leq n_0$. در این صورت، به‌ازای $m \geq n_0$ و $n \geq n_0$، خواهیم داشت:

$$\left|\sum_{\mu=1}^{m}\sum_{\nu=1}^{n} a_{\mu\nu} - \sum_{\lambda=1}^{k} C_\lambda\right| \leq \sum_{\lambda=k+1}^{\infty}|C_\lambda| < \varepsilon$$

با حدگیری، که $n \longrightarrow \infty$ و $m \longrightarrow \infty$ و متعاقباً $k \longrightarrow \infty$، خواهیم داشت:

$$\left|\sum_{\mu=1}^{\infty}\sum_{\nu=1}^{\infty} a_{\mu\nu} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} C_\lambda\right| \le \varepsilon, \quad \left|\sum_{\nu=1}^{\infty}\sum_{\mu=1}^{\infty} a_{\mu\nu} - \sum_{\lambda=1}^{\infty} C_\lambda\right| \le \varepsilon$$

امّا $\varepsilon > 0$ به قدر دلخواه کوچک است.

تبصره. سریهای دوگانه‌ای که در مفروضات قضیهٔ ۴۹.۷ صدق کنند مطلقاً همگرا نامیده می‌شوند؛ برای چنین سریهایی می‌توانیم عدد s بند (الف) قضیه را مجموع سری بدانیم.

قضیهٔ ۵۰.۷. فرض کنید که $\sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu$ و $\sum_{\nu=1}^{\infty} a_\nu$ سریهای مطلقاً همگرا باشند. آن‌گاه، هر سری حاصل از ضرب آنها همگراست؛ بعلاوه، همهٔ حاصل‌ضربها به یک مجموع همگرایند، یعنی

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{\infty} a_\mu b_\nu = \left(\sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu\right)\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu\right) \tag{۵۵.۷}$$

بالاخص، حاصل‌ضرب کوشی

$$\sum_{\omega=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu=0}^{\omega} a_\mu b_{\omega-\mu}\right)$$

سریهای مطلقاً همگرای $\sum_{\mu=1}^{\infty} a_\mu$ و $\sum_{\nu=1}^{\infty} b_\nu$ مطلقاً همگراست و

$$\sum_{\omega=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu=0}^{\omega} a_\mu b_{\omega-\mu}\right) = \left(\sum_{\mu=0}^{\infty} a_\mu\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} b_\nu\right) \tag{۵۶.۷}$$

برهان. چون

$$\sum_{\mu,\nu=1}^{m} |a_\mu b_\nu| = \left(\sum_{\mu=1}^{m} |a_\mu|\right)\left(\sum_{\nu=1}^{m} b_\nu\right) \le \left(\sum_{\mu=1}^{\infty} |a_\mu|\right)\left(\sum_{\nu=1}^{\infty} |b_\nu|\right)$$

مفروضات قضیهٔ ۴۹.۷ برقرارند. رابطهٔ (۵۵.۷) نتیجه‌ای از قسمت سوم قضیهٔ ۴۹.۷ است. سرانجام، حکم مورد ادعا راجع به حاصل ضرب کوشی نتیجهٔ بدیهی قسمت اول قضیه است.

مثال. فرض کنید ۱ = !۰. به استناد آزمون نسبت (قضیهٔ ۳۲.۷)، سری

$$\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x^\mu}{\mu!} = E(x) \tag{۵۷.۷}$$

به‌ازای هر عدد حقیقی (متناهی) x مطلقاً همگراست. از این رو، رابطهٔ (۵۶.۷) ایجاب می‌کند که به‌ازای هر دو عدد حقیقی x و y

$$\left(\sum_{\mu=0}^{\infty} \frac{x^\mu}{\mu!}\right)\left(\sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{y^\nu}{\nu!}\right) = \sum_{\omega=0}^{\infty}\left(\sum_{\mu=0}^{\omega} \frac{x^\mu}{\mu!}\frac{y^{\omega-\mu}}{(\omega-\mu)!}\right)$$
$$= \sum_{\omega=0}^{\infty} \frac{1}{\omega!}\sum_{\mu=0}^{\omega}\binom{\omega}{\mu} x^\mu y^{\omega-\mu} = \sum_{\omega=0}^{\infty} \frac{1}{\omega!}(x+y)^\omega$$

یعنی، با نمادی که در (۵۷.۷) معرفی شد،

$$E(x+y) = E(x).E(y) \tag{۵۸.۷}$$

بالاخص، به‌ازای $y = -x$، خواهیم داشت:

$$E(x).E(-x) = E(0) = 1 \tag{۵۹.۷}$$

قضیهٔ تیلور (قضیهٔ ۱۱.۴ فصل ۴) که در مورد تابع نمایی اعمال شود [بالاخص، به (۱۲.۴) فصل ۴ توجه کنید] نشان می‌دهد که $E(x)$، به صورتی که در (۵۷.۷) تعریف شد، دقیقاً تابع e^x است. بنابراین، قضیهٔ ۵۰.۷ روشی تحلیلی برای بررسی صحّت روابط آشنای

$$e^x.e^{-x} = 1, \qquad e^{x+y} = e^x.e^y$$

فراهم می‌کند.

۵.۷ همگرایی یکنواخت

تعریف. فرض کنید که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی مقدار باشد که بر مجموعه‌ای مانند E از اعداد حقیقی تعریف شده‌اند. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ را بر E نقطه به نقطه همگرا می‌نامیم در صورتی که به‌ازای هر x از E دنبالهٔ عددی

$$\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$$

همگرا باشد. در این حالت، تابع f را بر E با ضابطهٔ

$$f(x)=\lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad x\in E$$

تعریف می‌کنیم. این تابع را حد نقطه به نقطهٔ دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌نامند.

تعریف. فرض کنید E مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد و $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ یک دنباله باشد که هر جمله‌اش یک تابع حقیقی مقدار است که بر E تعریف شده است. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ را بر E به طور یکنواخت همگرا به f می‌نامیم در صورتی که به‌ازای هر $\varepsilon>0$ عدد صحیحی مانند n_0 (که فقط به ε بستگی دارد) موجود باشد به طوری که $n\geq n_0$ ایجاب کند که نامساوی

$$|f_n(x)-f(x)|<\varepsilon \tag{۶۰.۷}$$

به‌ازای هر x از E برقرار باشد. این گزاره را به صورت نمادی زیر می‌نویسیم:

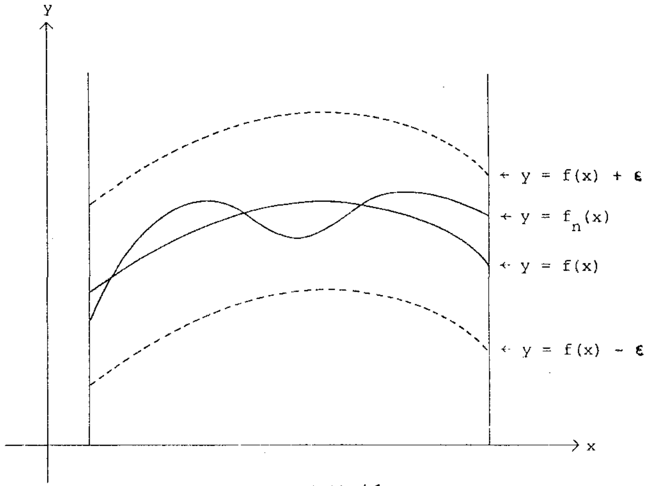
$$f_n \longrightarrow f \quad \text{به طور یکنواخت بر} \quad E$$

ملاحظات. به وضوح، همگرایی یکنواخت بر E مستلزم همگرایی نقطه‌به‌نقطه بر E است؛ اگر حد یکنواخت موجود باشد با حد نقطه به نقطه برابر است. تفاوت بین همگرایی نقطه‌به‌نقطه و همگرایی یکنواخت این است که: اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر E نقطه‌به‌نقطه همگرا باشد، آنگاه تابعی مانند f موجود است به طوری که به ازای هر $\varepsilon>0$ و به‌ازای هر x از E عدد صحیحی مانند n_0 موجود است، که به ε و به x بستگی دارد، به طوری که (۶۰.۷) به‌ازای $n\geq n_0$ برقرار باشد؛ اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر E به طور یکنواخت همگرا باشد، آنگاه به‌ازای هر $\varepsilon>0$ یک عدد صحیح n_0 می‌توان یافت که به‌ازای هر x از E مؤثر واقع شود.

چون (۶۰.۷) معادل

$$f(x)-\varepsilon<f_n(x)<f(x)+\varepsilon$$

است، ملاحظه می‌کنیم که اگر (۶۰.۷) به‌ازای هر $n\geq n_0$ و هر x از E برقرار باشد، آنگاه نمودار f_n (یعنی، مجموعهٔ $\{(x,y): y=f_n(x), x\in E\}$) درون «نوار»ی به ارتفاع 2ε که به طور متقارن حول نمودار f رسم شده است قرار می‌گیرد؛ شکل ۱.۷ را ببینید.



شکل ۱.۷

قضیهٔ ۵۱.۷. فرض کنید که، به‌ازای هر x از E، $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$. فرض کنید

$$M_n = \sup\{|f_n(x) - f(x)| : x \in E\}$$

آن‌گاه f_n بر E فقط و فقط وقتی به طور یکنواخت به f همگراست که $M_n \longrightarrow 0$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$.

برهان. این قضیه یک نتیجهٔ بدیهی تعریف همگرایی یکنواخت است.

قضیهٔ ۵۲.۷. فرض کنید که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع باشد که بر مجموعه‌ای مانند E از اعداد حقیقی تعریف شده‌اند.

آن‌گاه تابعی مانند f وجود دارد به طوری که

$$f_n \longrightarrow f \text{ بر } E \text{ به طور یکنواخت}$$

فقط و فقط وقتی که شرط زیر (موسوم به معیار کوشی برای همگرایی یکنواخت) برقرار باشد: به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیح n_0ی موجود باشد به طوری که $m \geq n_0$ و $n \geq n_0$ ایجاب کند که نامساوی

$$|f_m(x) - f_n(x)| < \varepsilon \qquad (۶۱.۷)$$

به‌ازای هر x از E برقرار باشد.

برهان. فرض کنید که f_n بر E به طور یکنواخت به f همگرا باشد. آن‌گاه، به‌ازای $\varepsilon > ۰$ مفروض، $n_۰$ را می‌توان طوری پیدا کرد که $n \geq n_۰$ ایجاب کند که $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/۲$ به‌ازای هر x از E برقرار باشد. به‌ازای $m \geq n_۰$، خواهیم داشت: $|f_m(x) - f(x)| < \varepsilon/۲$ و، از این رو،

$$|f_m(x) - f_n(x)| \leq |f_m(x) - f(x)| + |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$$

به‌ازای هر x از E برقرار است.

برعکس، فرض کنید که شرط (۶۱.۷) برقرار باشد. آن‌گاه، به استناد قضیهٔ ۱۲.۷، به‌ازای هر x از E دنبالهٔ $\{f_n(x)\}_{n=۱}^{\infty}$ همگرا است. فرض کنید

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x), \qquad x \in E$$

باید نشان دهیم که f_n بر E به طور یکنواخت به f همگراست. اگر $\varepsilon > ۰$ مفروض باشد، $n_۰$ را طوری انتخاب می‌کنیم که $n \geq n_۰$ ایجاب کند که

$$|f_n(x) - f_{n+k}(x)| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

به‌ازای هر $k = ۱, ۲, \ldots$ و هر x از E برقرار باشد. به این ترتیب،

$$\lim_{k\to\infty} |f_n(x) - f_{n+k}(x)| = |f_n(x) - f(x)| \leq \frac{\varepsilon}{۲}$$

از این رو، $n \geq n_۰$ ایجاب می‌کند که $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon/۲$ به‌ازای هر x از E برقرار باشد و، بنابراین، همگرایی f_n به f بر E یکنواخت است.

قضیهٔ ۵۳.۷. دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از توابعی که بر E تعریف شده‌اند بر E به تابعی مانند f به طور یکنواخت همگرا نمی‌شود فقط و فقط وقتی که به‌ازای یک $\varepsilon_۰ > ۰$ زیردنباله‌ای مانند $\{f_{n_k}\}_{k=۱}^{\infty}$ از $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ و دنباله‌ای مانند $\{x_k\}_{k=۱}^{\infty}$ از نقاط E موجود باشد به طوری که

$$|f_{n_k}(x_k) - f(x_k)| \geq \varepsilon_۰ \qquad \text{به‌ازای } k = ۱, ۲, ۳, \ldots$$

برهان. نقیض همگرایی یکنواخت: دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از توابعی که بر E تعریف شده‌اند بر E به تابعی مانند f به طور یکنواخت همگرا نیست فقط و فقط وقتی که عدد مثبتی مانند $\varepsilon_۰$ با این خاصیت موجود باشد که به‌ازای هر عدد N عدد صحیح مثبتی مانند $n \geq N$ و نقطه‌ای مانند x از E موجود باشد به طوری که $|f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon_۰$.

به این ترتیب، اگر $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر E به طور یکنواخت به f همگرا نباشد، اعداد صحیح مثبتی مانند $n_1 < n_2 < \ldots$ و نقاطی مانند x_1، x_2، ... از E موجودند به طوری که به‌ازای $\varepsilon_0 > 0$ی،

$$|f_{n_1}(x_1) - f(x_1)| \geq \varepsilon_0, \qquad |f_{n_2}(x_2) - f(x_2)| \geq \varepsilon_0, \ldots$$

امثله.

۱. فرض کنید که به‌ازای $|x| \leq c$، که در آن c ثابت است و $0 < c < 1$، $f_n(x) = x^n$. آن‌گاه $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر بازهٔ $|x| \leq c$ به طور یکنواخت به $f(x) = 0$ (وقتی که $-c \leq x \leq c$) همگراست، زیرا $|x^n| \leq c^n$ و $c^n \longrightarrow 0$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. معذالک، $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر بازهٔ باز $|x| < 1$ به طور یکنواخت به $f(x) = 0$ (به‌ازای $-1 < x < 1$) همگرا نیست. در واقع، به‌ازای هر عدد صحیح مثبت n نقطه‌ای مانند x در بازهٔ باز $(-1, 1)$ موجود است به طوری که $|x^n|$ کوچکتر از عدد مثبت $\frac{1}{2}$ نباشد؛ به عنوان مثال، فرض کنید $x = 1 - 1/2n$ و ملاحظه کنید که به استناد نامساوی برنولی [حکم (۹۳.۴) از مثال ۱۵ بخش ۶ فصل ۴]،

$$\left(1 - \frac{1}{2n}\right)^n \geq 1 - \frac{1}{2n}.n = 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

بنابراین، به استناد قضیهٔ ۵۳.۷، $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر $(-1, 1)$ به طور یکنواخت به تابع ثابت صفر همگرا نیست.

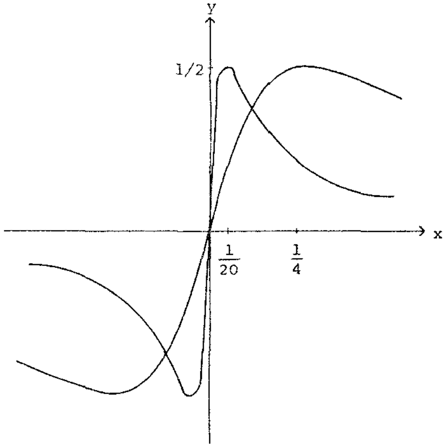
۲. به‌ازای $x \in [0, 2]$، فرض کنید که

$$f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2}$$

واضح است که $f_n(0) = 0$ و $f_n(x) < 1/nx$ وقتی که $x > 0$؛ به این ترتیب، حد نقطه به نقطهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر $[0, 2]$ تابع ثابت 0 است. چون به‌ازای $1 \leq x \leq 2$،

$$0 < f_n(x) = \frac{nx}{1 + n^2x^2} < \frac{nx}{n^2x^2} \leq \frac{1}{n}$$

واضح است که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر بازهٔ $[1, 2]$ به طور یکنواخت به تابع ثابت 0 همگراست. معذالک، $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر $[0, 1]$ به طور یکنواخت به 0 همگرا نیست. در واقع، به‌ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$، $f_n(1/n) = 1/2$ و f_n بزرگترین مقدار خود (یعنی، $1/2$) را در نقطهٔ $x = 1/n$ اختیار می‌کند؛ بنابراین، به استناد قضیهٔ ۵۳.۷، ملاحظه می‌کنیم که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر $[0, 1]$ به طور یکنواخت به 0 همگرا نیست. تابع f_n نه تنها بزرگترین مقدار خود را در $x = 1/n$ اختیار می‌کند بلکه یک ماکسیمم موضعی نیز در آن جا دارد؛ از این رو، یک برآمدگی در $x = 1/n$ مشاهده می‌شود. شکل ۲.۷ نمودار



شکل ۲.۷

$$y = f_n(x) = \frac{nx}{۱ + n^۲x^۲}$$

را در حالتهای $n = ۴, ۲۰$ نشان می‌دهد. اگر n مقادیر ۱، ۲، ۳، ... را اختیار کند، این برآمدگی به طرف نقطهٔ $x = ۰$ کشیده می‌شود.

۳. به‌ازای $۰ < x < ۱$، فرض کنید که

$$f_n(x) = \frac{۱}{۱ + nx}$$

به طور آشکار، حد نقطه به نقطهٔ $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ بر بازهٔ باز $(۰, ۱)$ تابع ثابت ۰ است، ولی این دنباله بر $(۰, ۱)$ به طور یکنواخت به ۰ همگرا نیست، زیرا، مانند مثال ۲، $f_n(۱/n) = ۱/۲$.

۴. به‌ازای $۰ < x < ۱$، فرض کنید که

$$f_n(x) = ۲n^۲xe^{-n^۲x^۲}$$

حد نقطه به نقطهٔ $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ بر بازهٔ باز $(۰, ۱)$ تابع ثابت ۰ است، ولی این دنباله بر $(۰, ۱)$ به طور یکنواخت به ۰ همگرا نیست؛ زیرا $f_n(۱/n) = ۲n/e$. در این حالت، برآمدگی در $x = ۱/n$ دارای ارتفاع $۲n/e$ است و، از این رو، با افزایش n به قدر دلخواه بزرگ می‌شود.

۵. به‌ازای $\circ \leq x \leq 1$، فرض کنید که

$$f_n(x) = \frac{x}{1 + n^2 x^2}$$

حد نقطه به نقطهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر بازهٔ $[\circ, 1]$ تابع ثابت $\circ$ است؛ بعلاوه، این دنباله بر $[\circ, 1]$ نیز به طور یکنواخت به $\circ$ همگراست، زیرا

$$\circ \leq f_n(x) = \frac{1}{2n}\frac{2nx}{1 + n^2 x^2} \leq \frac{1}{2n}$$

[توجه کنید که $(1 - nx)^2 \geq \circ$ و، از این رو، $2nx \leq 1 + n^2x^2$].

۶. فرض کنید x عددی حقیقی باشد و قرار دهید

$$f_n(x) = \frac{x}{n}$$

آن‌گاه حد نقطه به نقطهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر خط حقیقی $(-\infty, \infty)$ تابع ثابت $\circ$ است، ولی این دنباله بر $(-\infty, \infty)$ به طور یکنواخت به $\circ$ همگرا نیست؛ زیرا $f_n(n) = 1$. معذالک، دیده می‌شود که دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر هر بازهٔ (a, b) به طول متناهی به طور یکنواخت به $\circ$ همگراست.

بررسی وضعیت دنبالهٔ

$$h_n(x) = \frac{x^2 + nx}{n}$$

کاملاً مشابه است. حد نقطه به نقطهٔ $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر خط حقیقی $(-\infty, \infty)$ تابع $h(x) = x$ است، ولی این دنباله بر $(-\infty, \infty)$ به طور یکنواخت به h همگرا نیست؛ زیرا که $h_n(n) = n$. معذالک، دنبالهٔ $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر هر بازهٔ (a, b) به طول متناهی به طور یکنواخت به تابع $h(x) = x$ همگراست.

۷. فرض کنید x عددی حقیقی باشد و قرار دهید

$$f_n(x) = \frac{\sin(nx + n)}{n}$$

چون همواره $|sint| \leq 1$، ملاحظه می‌کنیم که حد نقطه به نقطهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر $(-\infty, \infty)$ تابع ثابت صفر است. چون به‌ازای هر عدد حقیقی x،

$$|f_n(x) - \circ| = \frac{1}{n}|\sin(nx + n)| \leq \frac{1}{n}$$

می‌بینیم که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر $(-\infty, \infty)$ به طور یکنواخت به $\circ$ همگراست.

قضیهٔ ۵۴.۷. فرض کنید که f_n بر بازه‌ای مانند J به طور یکنواخت به f همگرا باشد. اگر هر f_n در نقطه‌ای مانند $\bar{x}$ از J پیوسته باشد آن‌گاه تابع حد f نیز در $\bar{x}$ پیوسته است و

$$\lim_{x\to\bar{x}} \lim_{n\to\infty} f_n(x) = \lim_{n\to\infty} \lim_{x\to\bar{x}} f_n(x)$$

برهان. بنابه فرض، به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ عدد صحیحی مانند N موجود است به طوری که $n \geq N$ ایجاب می‌کند که

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{۳}$$

به‌ازای هر x از J برقرار باشد. چون f_N در $\bar{x}$ پیوسته است، یک همسایگی مانند $(\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta)$ با $\delta > ۰$ موجود است به طوری که $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \cap J$ مستلزم

$$|f_N(x) - f_N(\bar{x})| < \frac{\varepsilon}{۳}$$

باشد. امّا

$$|f(x) - f(\bar{x})| \leq |f(x) - f_N(x)| + |f_N(x) - f_N(\bar{x})| + |f_N(\bar{x}) - f(\bar{x})|$$

اگر $x \in (\bar{x} - \delta, \bar{x} + \delta) \cap J$، هر جملهٔ سمت راست این نامساوی کوچکتر از $\varepsilon/۳$ است و، از این رو، $|f(x) - f(\bar{x})| < \varepsilon$.

تبصره. بنابراین، برای انتقال پیوستگی از جمل دنباله‌ای از توابع به تابع حد، همگرایی یکنواخت یک شرط کافی است نه لازم؛ به عنوان مثال، اگر J بازهٔ باز $(۱ ,۱-)$ باشد و $f_n(x) = x^n$، آن‌گاه $f(x) = ۰$ و f_n و f بر J پیوسته‌اند ولی همگرایی f_n به f بر J فقط نقطه به نقطه است و یکنواخت نیست (مثال ۱ متعاقب قضیهٔ ۳۵.۷ را ببینید). امّا قضیهٔ ۵۴.۷ یک عکس جزئی دارد که آن را ذیلاً مطرح می‌کنیم.

قضیهٔ ۵۵.۷. (قضیهٔ دینی) فرض کنید که $[a,b]$ بازهٔ بسته‌ای به طول متناهی باشد و $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع باشد که بر $[a,b]$ پیوسته‌اند و بر $[a,b]$ نقطه به نقطه به تابع پیوستهٔ f همگراست. اگر، بعلاوه، این دنباله بر $[a,b]$ یکنوا باشد آن‌گاه f_n بر $[a,b]$ به طور یکنواخت به f همگراست.

برهان. فرض می‌کنیم که به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ و به‌ازای هر x از $[a,b]$ داشته باشیم $f_n(x) \geq f_{n+۱}(x)$ قرار می‌دهیم

$$g_n(x) = f_n(x) - f(x)$$

آن‌گاه، $g_n \longrightarrow 0$ بر $[a,b]$ و بر این بازه $g_n(x) \geq g_{n+1}(x)$. باید نشان دهیم که g_n بر $[a,b]$ به طور یکنواخت به 0 همگراست.

برای این منظور، کافی است ثابت کنیم که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ حداقل یک اندیس n موجود است به طوری که نامساوی

$$g_n(x) < \varepsilon \tag{۶۲.۷}$$

به‌ازای هر x از $[a,b]$ برقرار است (چون $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای نزولی از توابعی است که بر $[a,b]$ تعریف شده‌اند، نامساوی (۶۲.۷) به‌ازای همهٔ اندیسهای بزرگتر از n نیز، البته، برقرار است). حال، اگر همگرایی یکنواخت نمی‌بود، به استناد قضیهٔ ۵۳.۷، زیردنباله‌ای مانند $\{g_{n_k}\}_{n=1}^{\infty}$ از $\{g_n\}_{n=1}^{\infty}$ و دنباله‌ای مانند $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ از نقاط $[a,b]$ موجود می‌بودند به طوری که به‌ازای $\varepsilon_0 > 0$ ی،

$$g_{n_k}(x_k) \geq \varepsilon_0 > 0$$

به استناد قضیهٔ ۱۰.۷، دنبالهٔ $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ شامل یک زیردنبالهٔ همگراست که، برای سهولت در نمادگذاری، مجدداً این زیردنباله را به $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم که $x_k \longrightarrow \bar{x}$ وقتی که $k \longrightarrow \infty$. واضح است که $\bar{x}$ در $[a,b]$ است. به موجب پیوستگی هر g_m که $m = 1, 2, 3, \ldots$،

$$\lim_{k\to\infty} g_m(x_k) = g_m(\bar{x})$$

از طرف دیگر، به‌ازای هر m و هر k ی به قدر کافی بزرگ که $n_k \geq m$،

$$g_m(x_k) \geq g_{n_k}(x_k) \geq \varepsilon_0$$

با حدگیری، وقتی که $k \longrightarrow \infty$، خواهیم داشت:

$$\lim_{k\to\infty} g_m(x_k) = g_m(\bar{x}) \geq \varepsilon_0$$

امّا نامساوی $g_m(\bar{x}) \geq \varepsilon_0$، که به‌ازای هر m برقرار است، با فرض $g_m(\bar{x}) \longrightarrow 0$ وقتی که $m \longrightarrow \infty$ متناقض است.

تبصره. در مثال ۳ بعد از قضیهٔ ۵۳.۷ ملاحظه کردیم که

$$f_n(x) = \frac{1}{1+nx}$$

بر بازهٔ باز $(\circ , \text{۱})$ به طور یکنواخت به تابع ثابت صفر همگرا نیست. معذالک، نامساوی

$$f_n(x) \geq f_{n+\text{۱}}(x)$$

که به‌ازای هر x از $(\circ , \text{۱})$ برقرار است، نشان می‌دهد که شرط بسته بودن بازه در قضیهٔ ۵۵.۷ یک شرط اساسی است. این که بازهٔ مفروض در قضیهٔ ۵۵.۷ به طول متناهی باشد نیز اساسی است؛ دنبالهٔ توابع $\{h_n\}_{n=\text{۱}}^{\infty}$ با ضابطهٔ

$$h_n(x) = -\frac{x^{\text{۲}}}{n}$$

بر $(-\infty, \infty)$ به طور یکنواخت به $\circ$ همگرا نیست، ولی نامساوی $h_n(x) \leq h_{n+\text{۱}}(x)$ به‌ازای هر x از $(-\infty, \infty)$ برقرار است.

قضیهٔ ۵۶.۷. فرض کنید $\{f_n\}_{n=\text{۱}}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع باشد که بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ به طول متناهی مشتق‌پذیر می‌باشند و نقطه‌ای مانند $x_\circ$ در $[a, b]$ موجود است به طوری که $\{f_n(x_\circ)\}_{n=\text{۱}}^{\infty}$ همگراست. اگر $\{f'_n\}_{n=\text{۱}}^{\infty}$ بر $[a, b]$ به طور یکنواخت همگرا باشد، آن‌گاه $\{f_n\}_{n=\text{۱}}^{\infty}$ بر $[a, b]$ به طور یکنواخت به تابعی مانند f همگراست و به ازای هر x از $[a, b]$،

$$f'(x) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x) \tag{۶۳.۷}$$

برهان. فرض کنید $\circ < \varepsilon$ مفروض باشد. $n_\circ$ را طوری انتخاب کنید که $n, m \geq n_\circ$ مستلزم

$$|f_n(x_\circ) - f_m(x_\circ)| < \frac{\varepsilon}{\text{۲}} \tag{۶۴.۷}$$

باشد و به‌ازای $a \leq t \leq b$

$$|f'_n(t) - f'_m(t)| < \frac{\varepsilon}{\text{۲}(b-a)}. \tag{۶۵.۷}$$

اگر قضیهٔ ۵.۴ فصل ۴ را در مورد تابع $f_n - f_m$ اعمال کنیم، (۶۵.۷) نشان می‌دهد که اگر $n \geq n_\circ$ و $m \geq n_\circ$، نامساوی

$$|f_n(x) - f_m(x) - f_n(t) + f_m(t)| < \frac{|x-t|\varepsilon}{\text{۲}(b-a)} < \frac{\varepsilon}{\text{۲}} \tag{۶۶.۷}$$

به‌ازای هر x و t از $[a, b]$ برقرار است. امّا

$$|f_n(x) - f_m(x)| \leq |f_n(x) - f_m(x) - f_n(x_\circ) + f_m(x_\circ)| + |f_n(x_\circ) - f_m(x_\circ)|$$

ایجاب می‌کند که، به استناد (۶۴.۷) و (۶۶.۷)، نامساوی

$$|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$$

به‌ازای $a \leq x \leq b$، $n \geq n_۰$، و $m \geq n_۰$ برقرار باشد؛ از این رو، $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ بر $[a,b]$ به طور یکنواخت همگراست. فرض کنید که، به‌ازای $a \leq x \leq b$،

$$f(x) = \lim_{n\to\infty} f_n(x)$$

حال، x را نقطهٔ ثابتی از $[a,b]$ می‌گیریم و توابع

$$h_n(t) = \frac{f_n(t) - f_n(x)}{t-x}, \qquad h(t) = \frac{f(t) - f(x)}{t-x} \tag{۶۷.۷}$$

را به‌ازای $a \leq t \leq b$، که $t \neq x$، تعریف می‌کنیم. آن‌گاه، به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$،

$$\lim_{t\to x} h_n(t) = f'_n(x) \tag{۶۸.۷}$$

نامساوی اول (۶۶.۷) نشان می‌دهد که به‌ازای $n, m \geq n_۰$،

$$|h_n(t) - f_m(t)| < \frac{\varepsilon}{۲(b-a)}$$

از این رو، $\{h_n\}_{n=۱}^{\infty}$ به‌ازای $t \neq x$ به طور یکنواخت همگراست. چون $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ به f همگراست، از (۶۶.۷) درمی‌یابیم که همگرایی

$$\lim_{n\to\infty} h_n(t) = h(t) \tag{۶۹.۷}$$

به‌ازای $a \leq t \leq b$ که $t \neq x$ یکنواخت است. با اعمال قضیهٔ ۵۴.۷ در مورد $\{h_n\}_{n=۱}^{\infty}$، از (۶۸.۷) و (۶۹.۷) نتیجه می‌شود که

$$\lim_{t\to x} h(t) = \lim_{n\to\infty} f'_n(x)$$

امّا، به استناد تعریف $h(t)$، این همان (۶۳.۷) است.

تبصره. توجه کنید که از همگرایی یکنواخت $\{f_n\}_{n=۱}^{\infty}$ چیزی در مورد دنبالهٔ $\{f'_n\}_{n=۱}^{\infty}$ عاید نمی‌شود؛ به عنوان مثال، دنبالهٔ

$$f_n(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{n}}$$

را به‌ازای همهٔ اعداد حقیقی x در نظر بگیرید. آن‌گاه، به‌ازای هر عدد حقیقی x، $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x) = 0$ و

$$f_n'(x) = \sqrt{n}\cos nx$$

از این رو، $\lim_{n\to\infty} f_n'(x)$ به‌ازای هیچ عدد حقیقی x وجود ندارد. دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر $(-\infty,\infty)$ به طور یکنواخت همگراست، ولی $\{f_n'\}_{n=1}^{\infty}$ بر $(-\infty,\infty)$ حتی نقطه به نقطه همگرا نیست. مثلاً، $\{f_n'(0)\}_{n=1}^{\infty}$ واگرا است زیرا $f_n'(0) = \sqrt{n}$؛ ولی همواره $f'(x) = 0$.

قضیهٔ ۵۷.۷. فرض کنید $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع باشد که بر بازهٔ بستهٔ $[a,b]$ به طول متناهی پیوسته‌اند و فرض کنید f تابعی بر $[a,b]$ باشد به طوری که f_n بر $[a,b]$ به طور یکنواخت به f همگرا باشد. آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b f_n(x)dx = \int_a^b f(x)dx \qquad (۷۰.۷)$$

برهان. به استناد قضیهٔ ۵۴.۷، تابع f بر $[a,b]$ پیوسته است و، از این رو، همهٔ توابع $f_n - f$ بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان هستند (به استناد قضیهٔ ۱۶.۵ فصل ۵). فرض کنید $\varepsilon > 0$. چون f_n بر $[a,b]$ به طور یکنواخت به f همگراست، عدد n_0ی موجود است به طوری که به‌ازای هر x از $[a,b]$ و هر $n \ge n_0$،

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{b-a}$$

به این ترتیب، $n \ge n_0$ ایجاب می‌کند که

$$\begin{aligned}\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| &= \left|\int_a^b [f_n(x) - f(x)]dx\right| \\ &\le \int_a^b |f_n(x) - f(x)|dx \le \int_a^b \frac{\varepsilon}{b-a}dx = \varepsilon\end{aligned}$$

(توجه کنید که از قضایای ۱۱.۵ و ۱۲.۵ فصل ۵ استفاده کرده‌ایم.) بنابراین، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد n_0ی موجود است به طوری که $n \ge n_0$ مستلزم

$$\left|\int_a^b f_n(x)dx - \int_a^b f(x)dx\right| \le \varepsilon$$

و ملاحظه می‌کنیم‌که (۷۰.۷) برقرار است.

امثله.

۱. فرض کنید که $f_n(x) = nx(1-x)^n$. آن‌گاه، حد نقطه به نقطهٔ دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر $[0, 1]$ تابع ثابت ۰ است، ولی همگرایی دنباله بر $[0, 1]$ یکنواخت نیست. در واقع، f_n یک برآمدگی در $x = 1/(n+1)$ دارد و

$$f_n\left(\frac{1}{n+1}\right) = \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \longrightarrow e^{-1}$$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$،

از این رو، قضیهٔ ۵۳.۷ قابل اعمال است. دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر $[0, 1]$ به طور یکنواخت همگرا نیست، در حالی که انتگرالگیری جمله‌به‌جمله به نتیجهٔ

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \int_0^1 f(x)dx$$

می‌انجامد. بنابراین، همگرایی یکنواخت شرطی کافی برای تعویض علامت حد و انتگرالگیری در رابطهٔ (۷۰.۷) است و این شرط لازم نیست.

۲. فرض کنید که $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$، $n = 1, 2, \ldots$، $0 \le x \le 1$. آن‌گاه، به‌ازای هر x از $[0, 1]$، $f_n(x) \longrightarrow 0$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. امّا

$$\int_0^1 nxe^{-nx^2}dx = \frac{1}{2}(1 - e^{-n})$$

از این رو،

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{2}(1 - e^{-n}) = \frac{1}{2}$$

از طرف دیگر، $\int_0^1 f(x)dx = 0$؛ لذا

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^1 f_n(x)dx \neq \int_0^1 f(x)dx \qquad (۷۱.۷)$$

دلیل نتیجهٔ (۷۱.۷) این است که دنبالهٔ $f_n(x) = nxe^{-nx^2}$ بر $[0, 1]$ به طور یکنواخت همگرا نیست. در واقع، f_n یک برآمدگی در $x = 1/\sqrt{2n}$ دارد و

$$f_n\left(\frac{1}{\sqrt{2n}}\right) = \frac{\sqrt{n/2}}{\sqrt{e}}$$

و، بنابراین، قضیهٔ ۵۳:۷ قابل اعمال است.

۳. فرض کنید $f_n(x) = (n+\sin x)/(3n+\cos^2 x)$. آن‌گاه، به استناد قضیهٔ ۵۷.۷، $\lim_{n\to\infty} \int_0^3 f_n(x)dx = 1$.

در واقع، حد نقطه به نقطهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر $[0,3]$ عبارت است از $\frac{1}{3}$. امّا $\frac{1}{3}$ حد یکنواخت دنباله بر $[0,3]$ نیز می‌باشد؛ زیرا، به‌ازای هر x از $[0,3]$،

$$\left|\frac{n+\sin x}{3n+\cos^2 x} - \frac{1}{3}\right| = \left|\frac{3\sin x - \cos^2 x}{3(3n+\cos^2 x)}\right| \le \frac{3|\sin x| + \cos^2 x}{3(3n+\cos^2 x)} \le \frac{3+1}{9n} = \frac{4}{9n}$$

تعریف. فرض کنید E مجموعه‌ای از اعداد حقیقی باشد و $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی مقدار باشد که بر E تعریف شده‌اند. سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ را بر E به طور یکنواخت همگرا می‌نامیم در صورتی که دنبالهٔ مجموعهای جزئی سری، که با ضابطهٔ

$$s_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)$$

تعریف می‌شود، بر E به طور یکنواخت همگرا باشد.

بحث. اگر قرار دهیم

$$\sum_{j=1}^{\infty} f_j(x) = s_n(x) + r_n(x)$$

که در آن

$$r_n(x) = \sum_{j=n+1}^{\infty} f_j(x) \quad \text{و} \quad s_n(x) = \sum_{j=1}^{n} f_j(x)$$

شرط (۶۰.۷) را می‌توانیم به زبان سریها به صورت زیر مجدداً فرمولبندی کنیم: سری $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ بر E به طور یکنواخت همگراست در صورتی که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیح n_0ی (که فقط به ε بستگی دارد) موجود باشد به طوری که $n \ge n_0$ ایجاب کند که به ازای هر عدد x از E

$$|r_n(x)| < \varepsilon$$

[در این صورت، می‌گوییم که $r_n(x)$ بر E به طور یکنواخت به 0 همگراست].

معیار کوشی برای همگرایی یکنواخت که در قضیهٔ ۵۲.۷ مورد بحث قرار گرفت در مورد سریها چنین فرمولبندی می‌شود: به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیح n_0ی موجود است به طوری که به‌ازای هر $n \ge n_0$، هر $k = 1, 2, 3, \ldots$، و هر x از E،

$$|f_{n+1}(x) + f_{n+2}(x) + \cdots + f_{n+k}(x)| < \varepsilon$$

سرانجام، توجه می‌کنیم که $\sum_{n=۱}^{\infty} f_n$ بر E به طور یکنواخت همگراست فقط و فقط وقتی که به‌ازای هر دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از نقاط E باقیمانده‌های متناظر

$$r_n(x_n)$$

همواره یک دنبالهٔ صفر تشکیل بدهند. این گزارهٔ معادل قضیهٔ ۵۳.۷ است که برحسب سریها فرمولبندی شده است.

قضیهٔ ۵۸.۷. اگر سری $\sum_{n=۱}^{\infty} f_n$ بر E به طور یکنواخت همگرا باشد، آن‌گاه جملهٔ عمومی f_n بر E به طور یکنواخت به ۰ همگرا است.

برهان. فرض کنید $s_n(x) = f_۱(x) + \cdots + f_n(x)$ و $S(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} f_n(x)$. آن‌گاه

$$\begin{aligned} |f_n(x)| &= |s_n(x) - s_{n-۱}(x)| = |[s_n(x) - S(x)] + [S(x) - s_{n-۱}(x)]| \\ &\le |s_n(x) - S(x)| + |s_{n-۱}(x) - S(x)| \end{aligned}$$

فرض کنید $۰ < \varepsilon$ مفروض باشد. اگر $n_۰$ طوری انتخاب شده باشد که $n \ge n_۰ - ۱$ ایجاب کند که نامساوی

$$|s_n(x) - S(x)| < \frac{\varepsilon}{۲}$$

به‌ازای هر x از E برقرار باشد، آن‌گاه $n \ge n_۰$ مستلزم برقراری نامساوی $|f_n(x)| < \varepsilon$ به‌ازای هر x از E است.

تعریف. سری توابع $\sum_{n=۱}^{\infty} v_n(x)$ را غالب بر سری $\sum_{n=۱}^{\infty} f_n$ از توابع بر E می‌نامند در صورتی که جمل سری بر E تعریف شده باشند و به‌ازای هر x از E و هر عدد صحیح مثبت n داشته باشیم $|f_n(x)| \le v_n(x)$.

قضیهٔ ۵۹.۷. (آزمون مقایسه) اگر سری $\sum_{n=۱}^{\infty} f_n$ از توابع که بر E تعریف شده‌اند مغلوب سری $\sum_{n=۱}^{\infty} v_n$ از توابعی باشد که بر E به طور یکنواخت همگراست، بر E به طور یکنواخت همگرا می‌باشد.

برهان. از قسمت اول قضیهٔ ۲۶.۷ می‌دانیم که سری $\sum_{n=۱}^{\infty} f_n(x)$ به‌ازای هر x از E همگراست. اگر $F(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} f_n(x)$ و $V(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} v_n(x)$، آن‌گاه

$$|[f_۱(x) + f_۲(x) + \cdots + f_n(x)] - F(x)| = |f_{n+۱}(x) + f_{n+۱}(x) + \ldots|$$

$$\leq v_{n+1}(x)+v_{n+2}(x)+\cdots=|[v_1(x)+v_2(x)+\cdots+v_n(x)]-V(x)|$$

فرض کنید $\varepsilon > 0$ مفروض باشد. اگر n_0 چنان باشد که $n \geq n_0$ ایجاب کند که به‌ازای هر x از E

$$|[v_1(x)+\cdots+v_n(x)]-V(x)|<\varepsilon$$

آن‌گاه به‌ازای هر x از E، $|[f_1(x)+\cdots+f_n(x)]-F(x)|<\varepsilon$.

قضیهٔ ۶۰.۷. سری مفروضی از توابع بر مجموعه‌ای به طور یکنواخت همگراست هرگاه که سری حاصل از قدر مطلق جمل بر آن مجموعه به طور یکنواخت همگرا باشد.

برهان. این قضیه یک نتیجهٔ بدیهی قضیهٔ ۵۹.۷ است.

قضیهٔ ۶۱.۷. (آزمون M وایرشتراس) فرض کنید $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ یک سری از توابع باشد که بر مجموعه‌ای مانند E تعریف شده‌اند. اگر $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$ یک سری همگرا از ثابتهای نامنفی باشد و به‌ازای هر x از E و هر $n=1,2,3,\ldots$ داشته باشیم

$$|f_n(x)| \leq M_n$$

آن‌گاه $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ بر E به طور یکنواخت همگراست.

برهان. چون هر سری همگرا از ثابتها (توابع ثابت) بر هر مجموعه‌ای به طور یکنواخت همگراست، قضیهٔ مورد بحث صرفاً یک حالت خاص قضیهٔ ۵۹.۷ است.

توضیحات. آزمون M وایرشتراس (قضیهٔ ۶۱.۷) آزمون بسیار مفیدی برای همگرایی یکنواخت است. معذالک، باید دقیقاً توجه کنیم که امکان دارد که سری مفروضی مانند $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ از توابعی که بر بازهٔ بسته‌ای مانند $[a,b]$ به طول متناهی پیوسته‌اند بر این بازه به طور مطلق و یکنواخت همگرا باشد ولی آزمون M وایرشتراس مؤثر واقع نشود. به ذکر یک مثال مبادرت می‌ورزیم: فرض کنید که توابع f_n بر $[0,1]$ به صورت زیر تعریف شوند

به‌ازای $0 \leq x \leq \frac{1}{2n+1}$ و $\frac{1}{2n-1} \leq x \leq 1$، $f_n(x)=0$

به‌ازای $x=\frac{1}{2n}$، $f_n(x)=\frac{1}{n}$

$f_n(x)$ در بازه‌های $[1/2n, 1/(2n-1)], [1/(2n+1), 1/2n]$ خطی است.

به آسانی دیده می‌شود که $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

الف) این سری بر $[0, 1]$ به طور یکنواخت همگراست.

ب) هر تجدید آرایش سری به طور یکنواخت همگراست (یعنی، سری به طور مطلق و یکنواخت همگراست).

ج) سری $\sum_{n=1}^{\infty} M_n$، که در آن M_n کران بالای $|f_n(x)|$ بر بازهٔ $[0, 1]$ فرض می‌شود، واگرا است.

تعریف. دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ از توابع را بر E به طور یکنواخت کراندار می‌نامند در صورتی که ثابتی مانند $M > 0$ موجود باشد به طوری که به‌ازای هر x از E و هر $n = 1, 2, 3, \ldots$ داشته باشیم $|f_n(x)| \leq M$. عدد M را یک کران یکنواخت برای $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ می‌نامند.

تبصره. اگر هر تابع دنبالهٔ $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر E کراندار باشد، یعنی به‌ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$ داشته باشیم $\sup\{|f_n(x)| : x \in E\} \leq M_n$، و f_n بر E به طور یکنواخت به f میل کند، آن‌گاه به آسانی دیده می‌شود که $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر E به طور یکنواخت کراندار است.

قضیهٔ ۶۲.۷. (آزمون دیریکله برای همگرایی یکنواخت) فرض کنید که $s_n(x)$ مجموع جزئی nام سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ باشد که در آن a_n یک تابع حقیقی مقدار است که بر مجموعه‌ای مانند E از اعداد حقیقی تعریف شده‌است. فرض کنید که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر E به طور یکنواخت به ثابت M کراندار باشد. فرض کنید که $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع حقیقی مقدار باشد که به‌ازای هر x ثابت از E نزولی است [یعنی، به‌ازای هر x از E و هر $n = 1, 2, 3, \ldots$، $b_{n+1}(x) \leq b_n(x)$] و فرض کنید که b_n بر E به طور یکنواخت به 0 همگرا باشد. در این صورت، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ بر E به طور یکنواخت همگراست.

برهان. چون b_n بر E به طور یکنواخت به 0 همگراست، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مانند j موجود است به طوری که به‌ازای هر $n \geq j$ و هر x از E،

$$|b_n(x)| \leq \frac{\varepsilon}{2M}$$

بعلاوه، به استناد برهان قضیهٔ ۴۱.۷،

$$|a_{j+1}(x) b_{j+1}(x) + \cdots + a_{j+p}(x) b_{j+p}(x)| \leq 2M |b_{j+1}(x)| < \varepsilon$$

مشروط به این که p یک عدد صحیح مثبت باشد و $x \in E$. حال، همگرایی یکنواخت سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x) b_n(x)$ بر E از قضیهٔ ۵۲.۷ نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۶۳.۷. (آزمون آبل برای همگرایی یکنواخت) فرض کنید که $s_n(x)$ مجموع جزئی nام سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)$ باشد که در آن a_n یک تابع حقیقی مقدار است که بر مجموعه‌ای مانند E از اعداد حقیقی تعریف شده است. فرض کنید که $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر E به طور یکنواخت همگرا باشد. فرض کنید که $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌ای از توابع باشد که بر E به طور یکنواخت به ثابت K کراندار است. اگر $b_n(x)$ به‌ازای هر x ثابت صعودی یا نزولی باشد، سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ بر E به طور یکنواخت همگراست.

برهان. فرض کنید که $b_n(x)$ به‌ازای هر x ثابت از E صعودی باشد، یعنی به‌ازای هر x از E و هر $n = 1, 2, 3, \ldots$، $b_n(x) \le b_{n+1}(x)$. در این صورت، حد نقطه به نقطهٔ b_n بر E، مثلاً b، موجود است. فرض کنید

$$c_n(x) = b(x) - b_n(x)$$

آن‌گاه c_n مثبت (یا صفر) است و به‌ازای هر x ثابت از E نزولی است. همچنین، به‌ازای هر x از E،

$$|b(x)| \le K$$

از این رو، اگر $n = 1, 2, 3, \ldots$ آن‌گاه به‌ازای هر x از E

$$c_n(x) \le 2K$$

چون $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ بر E به طور یکنواخت همگراست، عدد صحیح مثبتی مانند j موجود است به طوری که نامساوی

$$|a_{j+1}(x) + \cdots + a_{j+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2K}$$

به‌ازای هر عدد صحیح مثبت p و هر x از E برقرار است. از این رو، به استناد قضیهٔ ۴۰.۷،

$$|a_{j+1}(x)c_{j+1}(x) + \cdots + a_{j+p}(x)c_{j+p}(x)| \le \frac{\varepsilon}{2K}c_{j+1}(x) < \varepsilon$$

بنابر قضیهٔ ۵۲.۷، $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)c_n(x)$ بر E به طور یکنواخت همگراست.

همچنین، چون $|b(x)| \le K$ به‌ازای هر x از E برقرار است، از قضیهٔ ۵۲.۷ نتیجه می‌شود که $\sum_{n=1}^{\infty} b(x)a_n(x)$ بر E به طور یکنواخت همگراست. حال، همگرایی یکنواخت $\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x)$ نتیجه‌ای از رابطهٔ

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n(x)b_n(x) = \sum_{n=1}^{\infty}[b(x)a_n(x) - a_n(x)c_n(x)]$$

و برهان کامل است.

قضیهٔ ۶۴.۷. (قضیهٔ تانری) فرض کنید $F(x) = \sum_{n=۱}^{\infty} v_n(x)$، که در آن سری مفروض به‌ازای جمیع مقادیر x مثبت به طور یکنواخت همگراست. بعلاوه، به‌ازای هر n ثابت، فرض کنید که

$$v_n(x) \longrightarrow w_n \quad \text{وقتی که} \quad n \longrightarrow \infty$$

در این صورت، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} w_n$ همگراست و

$$F(x) \longrightarrow \sum_{n=۱}^{\infty} w_n \quad \text{وقتی که} \quad x \longrightarrow \infty$$

یعنی، حدگیری جمله‌به‌جملهٔ زیر را داریم

$$\lim_{x\to\infty}\left(\sum_{n=۱}^{\infty} v_n(x)\right) = \sum_{n=۱}^{\infty}\left(\lim_{x\to\infty} v_n(x)\right)$$

برهان. مناسب است که برهان در دو مرحله عرضه شود.

مرحلهٔ اول: ثابت می‌کنیم که سری $\sum_{n=۱}^{\infty} w_n$ همگراست. در واقع، به استناد همگرایی یکنواخت $\sum_{n=۱}^{\infty} v_n(x)$ به‌ازای جمیع مقادیر x مثبت، به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ عدد صحیحی مانند N موجود است به طوری که به‌ازای هر x مثبت و هر $k = ۱, ۲, ۳, \ldots$،

$$\left|\sum_{n=N+۱}^{N+k} v_n(x)\right| < \varepsilon$$

وقتی $x \longrightarrow \infty$، $v_{N+۱}(x) + \cdots + v_{N+k}(x) \longrightarrow w_{N+۱} + \cdots + w_{N+k}$. از این رو، به‌ازای هر $k = ۱, ۲, ۳, \ldots$،

$$\left|\sum_{n=N+۱}^{N+k} w_n\right| \le \varepsilon$$

که (به استناد قضیهٔ ۲۳.۷) مستلزم همگرایی $\sum_{n=۱}^{\infty} w_n$ است.

مرحلهٔ دوم: بحث را از این جا شروع می‌کنیم که همگرایی $\sum_{n=۱}^{\infty} w_n$ ثابت شده است. فرض کنید که $W = \sum_{n=۱}^{\infty} w_n$. آن‌گاه، چون سری $\sum_{n=۱}^{\infty} v_n(x)$ به‌ازای جمیع مقادیر x مثبت به طور یکنواخت به مجموع $F(x)$ همگراست، به‌ازای هر $\varepsilon > ۰$ عدد صحیحی مانند N موجود است به طوری که به‌ازای هر x مثبت،

$$\left|F(x) - \sum_{n=۱}^{N} v_n(x)\right| < \varepsilon$$

و

$$\left|W - \sum_{n=1}^{N} w_n\right| < \varepsilon$$

از این رو، به‌ازای هر x مثبت،

$$\begin{aligned}|F(x) - W| &\leq |F(x) - \sum_{n=1}^{N} v_n(x)| + |\sum_{n=1}^{N} v_n(x) - \sum_{n=1}^{N} w_n| + |\sum_{n=1}^{N} w_n - W| \\ &< 2\varepsilon + \left|\sum_{n=1}^{N} v_n(x) - \sum_{n=1}^{N} w_n\right|\end{aligned}$$

امّا، وقتی که $x \longrightarrow \infty$، به‌ازای هر n، $v_n(x) \longrightarrow w_n$؛ از این رو، چون N متناهی است،

$$\sum_{n=1}^{N} v_n(x) \longrightarrow \sum_{n=1}^{N} w_n$$

بنابراین، عددی مانند K موجود است به طوری که

هرگاه $x > K$، $\left|\sum_{n=1}^{N} v_n(x) - \sum_{n=1}^{N} w_n\right| < \varepsilon$

سرانجام، درمی‌یابیم که

هرگاه $x > K$، $|F(x) - W| < 3\varepsilon$

این بدان معنی است که $F(x) \longrightarrow W$ وقتی که $x \longrightarrow \infty$.

کاربرد. داریم:

$$\lim_{n\to\infty}\left(\left(\frac{n}{n}\right)^n + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)\right) = \frac{e}{e-1}$$

در واقع، فرض کنید که

$$A_n = \left(\frac{n}{n}\right)^n + \left(\frac{n-1}{n}\right)^n + \cdots + \left(\frac{1}{n}\right)^n$$

آن‌گاه

$$A_n = \sum_{k=0}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{n}\right)^n = \sum_{k=0}^{n-1} b_k(n)$$

حال، ملاحظه می‌کنیم که $b_k(n)$ برحسب n صعودی است و به e^{-k} میل می‌کند وقتی که $n \longrightarrow \infty$؛ که در این صورت

$$b_k(n) \le e^{-k} \qquad \text{همواره}$$

بعلاوه، سری

$$\sum_{k=\circ}^{\infty} e^{-k}$$

همگراست با مجموع $\text{۱}/(\text{۱} - e^{-\text{۱}})$. امّا، وقتی $n \longrightarrow \infty$ الزاماً $k \longrightarrow \infty$ و، به استناد قضیهٔ ۶۴.۷،

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \sum_{k=\circ}^{\infty} \left(\lim_{n\to\infty} b_k(n)\right) = \sum_{k=\circ}^{\infty} e^{-k} = \frac{\text{۱}}{\text{۱} - e^{-\text{۱}}} = \frac{e}{e - \text{۱}}$$

لم. فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار باشد که بر بازه‌ای مانند $[a, b]$ تعریف شده است. اگر به‌ازای $x \in (a, b)$ دنباله‌هایی مانند $\{\alpha_n\}_{n=\text{۱}}^{\infty}$ و $\{\beta_n\}_{n=\text{۱}}^{\infty}$ بتوان یافت که همواره $a < \alpha_n < x < \beta_n < b$ و $\alpha_n \longrightarrow x$ و $\beta_n \longrightarrow x$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$ ولی حد

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n}$$

موجود نباشد، آن‌گاه f در x مشتق‌پذیر نیست.

برهان. عکس نقیض این گزاره را ثابت می‌کنیم. فرض کنید f یک تابع حقیقی مقدار بر $[a, b]$ باشد که در نقطهٔ x از (a, b) مشتق‌پذیر است. فرض کنید $\{\alpha_n\}_{n=\text{۱}}^{\infty}$ و $\{\beta_n\}_{n=\text{۱}}^{\infty}$ دنباله‌هایی باشند که همواره $a < \alpha_n < x < \beta_n < b$ و $\alpha_n \longrightarrow x$ و $\beta_n \longrightarrow x$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} = f'(x) \qquad (\text{۷۲.۷})$$

در واقع، فرض کنید که $\lambda_n = (\beta_n - x)/(\beta_n - \alpha_n)$. آن‌گاه $\circ < \lambda_n < \text{۱}$ و

$$\frac{f(\beta_n) - f(\alpha_n)}{\beta_n - \alpha_n} - f'(x) = \lambda_n \left(\frac{f(\beta_n) - f(x)}{\beta_n - x} - f'(x)\right) + (\text{۱} - \lambda_n)\left(\frac{f(\alpha_n) - f(x)}{\alpha_n - x} - f'(x)\right)$$

هر دو عبارت داخل پرانتز به صفر میل می‌کنند وقتی که $n \longrightarrow \infty$ و دنباله‌های $\{\lambda_n\}_{n=\text{۱}}^{\infty}$ و $\{\text{۱} - \lambda_n\}_{n=\text{۱}}^{\infty}$ کراندارند. از این رو، حد (۷۲.۷) موجود و تساوی برقرار است.

قضیهٔ ۶۵.۷. یک تابع حقیقی مقدار پیوسته بر $(-\infty, \infty)$ وجود دارد که هیچ جا مشتق‌پذیر نیست.

برهان. فرض کنید که

$$\begin{aligned} h(x) &= x, & \circ \le x \le \text{۱} \\ &= \text{۲} - x, & \text{۱} \le x \le \text{۲} \end{aligned}$$

و حوزهٔ تعریف تابع را با شرط

$$h(x + \text{۲}) = h(x)$$

به همهٔ xهای حقیقی وسعت دهید. به عبارت دیگر، h متناوب فرض می‌شود با دورهٔ تناوب ۲. واضح است که h بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته است. تعریف کنید

$$f(x) = \sum_{k=\circ}^{\infty} \left(\frac{\text{۳}}{\text{۴}}\right)^n h(\text{۴}^n x) \tag{۷۳.۷}$$

چون به‌ازای هر x حقیقی $\circ \le h(x) \le \text{۱}$، قضیهٔ ۶۱.۷ نشان می‌دهد که سری (۷۳.۷) بر $(-\infty, \infty)$ به طور یکنواخت همگراست؛ از این رو، به استناد قضیهٔ ۵۴.۷، f بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته است.

یک عدد حقیقی x و یک عدد صحیح مثبت m را ثابت نگه می‌داریم. عدد صحیحی مانند k وجود دارد به طوری که

$$k \le \text{۴}^m x \le k + \text{۱}$$

قرار می‌دهیم

$$\alpha_m = \text{۴}^{-m} k, \qquad \beta_m = \text{۴}^{-m}(k + \text{۱})$$

و اعداد $\text{۴}^n \beta_m$ و $\text{۴}^n \alpha_m$ را در نظر می‌گیریم. اگر $n > m$، تفاضل آنها یک عدد صحیح زوج است؛ اگر $n = m$، اینها اعداد صحیحی می‌باشند و تفاضل آنها ۱ است؛ اگر $n < m$، هیچ عدد صحیحی بین آنها واقع نمی‌شود. از این رو،

$$\begin{aligned} |h(\text{۴}^n \beta_m) - h(\text{۴}^n \alpha_m)| &= \circ & \text{به‌ازای } n > m, \\ &= \text{۴}^{n-m} & \text{به‌ازای } n \le m \end{aligned} \tag{۷۴.۷}$$

به استناد (۷۳.۷) و (۷۴.۷)،

$$f(\beta_m) - f(\alpha_m) = \sum_{n=\circ}^{m} \left(\frac{\text{۳}}{\text{۴}}\right)^n [h(\text{۴}^n \beta_m) - h(\text{۴}^n \alpha_m)]$$

به این ترتیب،

$$|f(\beta_n) - f(\alpha_m)| \geq \left(\frac{۳}{۴}\right)^m - \sum_{n=۰}^{m-۱} \left(\frac{۳}{۴}\right)^n ۴^{n-m} > \left(\frac{۱}{۲}\right) \cdot \left(\frac{۳}{۴}\right)^m$$

یا

$$\left|\frac{f(\beta_m) - f(\alpha_m)}{\beta_m - \alpha_m}\right| > \frac{۱}{۲} \cdot ۳^m \qquad (۷۵\cdot۷)$$

چون $\alpha_m \leq x \leq \beta_m$ و $\beta_m - \alpha_m \longrightarrow ۰$ وقتی که $m \longrightarrow \infty$، به استناد لم، (۷۵.۷) نشان می‌دهد که f در x مشتق‌پذیر نیست.

مثالهای حل شده

۱. سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{x}{n^{\alpha}(۱+nx^۲)}, \qquad (\alpha > ۰)$$

بر $(-\infty, \infty)$ به طور یکنواخت همگرا است. در واقع، بزرگترین مقدار $x/(۱+nx^۲)$ به‌ازای $x = ۱/\sqrt{n}$ به دست می‌آید و ازاین رو سری مفروض مغلوب سری همگرای

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n^{\alpha+۱}}$$

است و همگرایی یکنواخت سری مفروض بر $(-\infty, \infty)$ از قضیهٔ ۶۱.۷ نتیجه می‌شود.

۲. سری متناوب

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{x^۲+n}$$

بر $(-\infty, \infty)$ به طور یکنواخت همگراست، زیرا به استناد قضیهٔ ۳۳.۷،

$$\left|\sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-۱)^{n+۱}}{x^۲+n}\right| \leq \frac{۱}{x^۲+m} \leq \frac{۱}{m}$$

۳. سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^2}{(1+x^2)^n}$$

بر $(-\infty, \infty)$ به طور یکنواخت همگراست، زیرا به ازای $x \neq 0$،

$$\left|\sum_{n=m}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}x^2}{(1+x^2)^n}\right| \leq \frac{x^2}{(1+x^2)^m} = \frac{x^2}{1+mx^2+\dots} \leq \frac{1}{m}$$

معذالک، سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n}$$

بر $(-\infty, \infty)$ به طور یکنواخت همگرا نیست، زیرا

$$\begin{aligned}\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^2}{(1+x^2)^n} &= 1, \quad x \neq 0 \\ &= 0, \quad x = 0\end{aligned}$$

و می‌دانیم که حد یکنواخت دنباله‌ای از توابع پیوسته تابعی پیوسته است (قضیهٔ ۵۴.۷ را ملاحظه کنید)، ولی در این جا تابع حد یک نقطهٔ ناپیوستگی در $x = 0$ دارد.

۴. سری

$$\frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)(1+2x)} + \frac{x}{(1+2x)(1+3x)} + \dots$$

بر $(-\infty, \infty)$ به طور یکنواخت همگرا نیست. در واقع، مجموع جزئی nام سری

$$\begin{aligned}&\frac{x}{1+x} + \frac{x}{(1+x)(1+2x)} + \dots + \frac{x}{(1+\{n-1\}x)(1+nx)} \\ &= \left(1 - \frac{1}{1+x}\right) + \left(\frac{1}{1+x} - \frac{1}{1+2x}\right) + \dots + \left(\frac{1}{1+(n-1)x} - \frac{1}{1+nx}\right) \\ &= 1 - \frac{1}{1+nx} = f_n(x)\end{aligned}$$

همگرا به ۱ است وقتی که $n \longrightarrow \infty$، ولی $f_n(1/n) = \frac{1}{2}$. این نشان می‌دهد که همگرایی بر $(-\infty, \infty)$ یکنواخت نیست.

۵. سری
$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n} e^{-nx}$$
را بر $[0, \infty)$ در نظر بگیرید. به طور آشکار، $1 \leq |e^{-nx}|$ وقتی که $x \geq 0$. چون سری همساز $\sum 1/n$ واگرا است، قضیهٔ ۶۱.۷ را نمی‌توان اعمال کرد. بعد از این که معلوم شد که مجموعهای جزئی سری $\sum(-1)^n e^{-nx}$ کراندارند، همگرایی یکنواخت سری مفروض را با استفاده از قضیهٔ ۶۲.۷ نشان می‌دهیم. به عنوان راه حل دیگر، قضیهٔ ۶۳.۷ قابل اعمال است زیرا سری $\sum(-1)^n/n$ همگراست و دنبالهٔ کراندار $\{e^{-nx}\}$ بر $[0, \infty)$ نزولی است (امّا به طور یکنواخت همگرا به صفر نیست).

۶.۷ سریهای توانی

تعریف. اگر دنباله‌ای مانند $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ از اعداد حقیقی مفروض باشد، سری
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (۷۶.۷)$$
را یک سری توانی می‌نامند؛ اعداد a_n ضرایب این سری توانی نامیده می‌شوند.

قضیهٔ ۶۶.۷. اگر $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ به‌ازای $x = x_0$ همگرا باشد، به‌ازای هر مقدار x که $|x| < |x_0|$ مطلقاً همگراست؛ اگر به‌ازای $x = x_1$ واگرا باشد، به‌ازای هر مقدار x که $|x_1| < |x|$ واگرا است.

برهان. چون $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ همگراست، به استناد قضیهٔ ۲۱.۷، دنبالهٔ $\{a_n x_0^n\}_{n=0}^{\infty}$ همگرا به صفر و (بنابر قضیهٔ ۱.۷ یا قضیهٔ ۴.۷) کراندار است. از این رو، عدد مثبتی مانند M موجود است به طوری که به‌ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$ داشته باشیم $|a_n x_0^n| < M$. امّا
$$|a_n x^n| = |a_n x_0^n| \left|\frac{x}{x_0}\right|^n$$
بنابراین، اگر $|x/x_0| = c < 1$، جمل سری $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n x^n|$ کوچکتر از جمل متناظر سری $M \sum_{n=0}^{\infty} c^n$ می‌باشند. از این، قسمت اول قضیه به آسانی نتیجه می‌شود. فرض کنید که $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_1^n$ واگرا باشد و مقدار دیگری از x، مثلاً $x = x_0$، با $|x_1| < |x_0|$ موجود باشد به طوری که $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x_0^n$ همگرا باشد. اگر چنین واقعه‌ای اتفاق بیفتد، موقعیت زیر را خواهیم داشت: یک x_0ی موجود است که به‌ازای آن سری مفروض همگراست و x_1 ی موجود است که $|x_1| < |x_0|$ و سری به‌ازای آن واگراست. اما این با قسمت اول قضیه متناقض است.

تبصره. از قضیهٔ ۶۶.۷ نتیجه می‌شود که فقط سه حالت زیر می‌تواند رخ بدهد:

الف) سری توانی (۷۶.۷) به‌ازای $x = ۰$ همگراست و مقدار دیگری از x نمی‌توان یافت که به‌ازای آن همگرا باشد؛ به عنوان مثال،

$$۱ + ۱!x + ۲!x^۲ + ۳!x^۳ + \ldots, \qquad ۱ + x + ۲^۲x^۲ + ۳^۳x^۳ + \ldots$$

ب) سری توانی (۷۶.۷) به‌ازای جمیع مقادیر x همگراست؛ مثلاً

$$۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \ldots$$

ج) عدد مثبتی مانند R موجود است به طوری که اگر $|x| < R$ سری توانی (۷۶.۷) همگراست و اگر $|x| > R$ سری توانی (۷۶.۷) واگراست؛ به عنوان مثال،

$$۱ + x + x^۲ + x^۳ + \ldots, \qquad x - \tfrac{۱}{۲}x^۲ + \tfrac{۱}{۳}x^۳ - \ldots$$

تعریف. اگر سری توانی $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ مفروض باشد، فرض کنید S مجموعهٔ مقادیری از x باشد که به‌ازای آنها این سری همگراست. در این صورت، عدد R را که به صورت زیر تعریف می‌شود شعاع همگرایی سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ می‌نامند:

الف) $R = ۰$ هرگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ فقط به ازای $x = ۰$ همگرا باشد.

ب) $R = +\infty$ هرگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ به‌ازای جمیع مقادیر x همگرا باشد.

ج) $R = \sup\{|x| : x \in S\}$ هرگاه $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ به‌ازای بعضی از مقادیر x همگرا و به‌ازای بعضی دیگر واگرا باشد. بازهٔ باز $(-R, R)$ را بازهٔ همگرایی می‌نامند.

قضیهٔ ۶۷.۷. سری توانی $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ به‌ازای جمیع مقادیر x درون بازهٔ همگرایی $(-R, R)$ مطلقاً همگراست و به‌ازای هر مقدار x که $|x| > R$ واگراست.

برهان. بحث خود را به حالت (ج) محدود می‌کنیم، زیرا واضح است که اگر $R = ۰$ یا $R = +\infty$ چیزی برای اثبات نمی‌ماند.

فرض کنید $x \in (-R, R)$. آن‌گاه $x_۰$ی وجود دارد که $|x| < |x_۰| < R$ و سری به‌ازای آن همگراست (این از تعریف سوپرمم نتیجه می‌شود). به استناد قضیهٔ ۶۶.۷، سری توانی در x مطلقاً همگراست. از این رو، سری مفروض به‌ازای همهٔ این مقادیر x، یعنی همهٔ xهایی که $x \in (-R, R)$، مطلقاً همگراست.

حال، فرض کنید که سری توانی به ازای $x_\circ$ی که $|x_\circ| < R$ واگرا نباشد. معنایش این است که به‌ازای $x_\circ$ همگراست. امّا، در این صورت، عضوی از مجموعهٔ S پیدا کرده‌ایم که از سوپرمم بزرگتر است که یک تناقض می‌باشد.

تبصره. از قضیهٔ ۶۷.۷ هیچ حکمی در مورد نقاط انتهایی $x = \pm R$ بازهٔ همگرایی نتیجه نمی‌شود. امکان دارد که یک سری توانی در هیچ یک از این نقاط همگرا نباشد، یا در یکی همگرا باشد و در دیگری همگرا نباشد، یا در هر دو نقطه همگرا باشد. سریهای توانی زیر را در نظر بگیرید:

$$\text{(الف)}\quad \sum_{n=\circ}^{\infty} x^n \qquad \text{(ب)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n} \qquad \text{(ج)}\quad \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^n}{n}$$

$$\text{(د)}\quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2} \qquad \text{(ه)}\quad \sum_{n=\circ}^{\infty}(-1)^n \frac{x^{2n}}{2n+1}$$

با استفاده از آزمون نسبت (قضیهٔ ۳۲.۷)، ملاحظه می‌کنیم که هر یک از این پنج سری به‌ازای $|x| < 1$ همگرا می‌باشد و به‌ازای $|x| > 1$ واگرا. سری (الف) به‌ازای $x = \pm 1$ واگراست؛ سری (د) به‌ازای $x = \pm 1$ مطلقاً همگراست؛ سری (ه) به ازای $x = \pm 1$ همگرای مشروط است؛ سری (ب) به ازای $x = -1$ همگرا و به‌ازای $x = 1$ واگرا می‌باشد؛ در حالی که سری (ج) به‌ازای $x = 1$ همگراست و به‌ازای $x = -1$ واگرا.

قضیهٔ ۶۸.۷. فرض کنید $\{a_n\}_{n=\circ}^{\infty}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد و

$$\gamma = \overline{\lim_{n\to\infty}} \sqrt[n]{|a_n|} \tag{۷۷.۷}$$

الف) اگر $\gamma = \circ$ آن‌گاه $\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n$ به‌ازای جمیع مقادیر حقیقی x مطلقاً همگرا می‌باشد.

ب) اگر $\circ < L = \gamma$ آن‌گاه $\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n$ به‌ازای $|x| < 1/L$ مطلقاً همگرا می‌باشد و به‌ازای $|x| > 1/L$ واگرا.

ج) اگر $\gamma = +\infty$ آن‌گاه $\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n$ فقط به‌ازای $x = \circ$ همگراست و به‌ازای سایر مقادیر حقیقی x واگرا می‌باشد.

د) عدد $1/\gamma$ شعاع همگرایی $\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n$ است، یعنی، اگر $R = 1/\gamma$ آن‌گاه $\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n$ به‌ازای هر x که $-R < x < R$ همگرا است.

برهان. این قضیه صرفاً یک فرمولبندی جدید از قضیهٔ ۳۱.۷ است.

ملاحظات. شعاع همگرایی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ از فرمول

$$R = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right| \qquad (۷۸.۷)$$

نیز به دست می‌آید مشروط به این که این حد موجود باشد؛ این واقعیت نتیجهٔ ساده‌ای از آزمون نسبت (قضیهٔ ۳۲.۷) است. غالباً، برای تعیین شعاع همگرایی سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ مناسبتر است که از (۷۸.۷) استفاده کنیم تا این که از (۷۷.۷) استفاده شود. معذالک، فرمول (۷۷.۷) همیشه قابل اعمال است، و حال آن که فرمول (۷۸.۷) فقط وقتی قابل اعمال است که حد (۷۸.۷) موجود باشد، چه متناهی چه نامتناهی. سری توانی

$$1 + \left(\frac{x}{2}\right) + \left(\frac{x}{4}\right)^2 + \left(\frac{x}{2}\right)^3 + \left(\frac{x}{4}\right)^4 + \dots \qquad (۷۹.۷)$$

که در آن

$$a_{2n} = \left(\frac{1}{4}\right)^{2n} \qquad \text{و} \qquad a_{2n-1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{2n-1}$$

به موجب فرمول (۷۷.۷) دارای شعاع همگرایی $R = 2$ است. واضح است که فرمول (۷۸.۷) برای تعیین شعاع همگرایی سری توانی (۷۹.۷) کارساز نیست زیرا که $\lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$ در این حالت وجود ندارد.

قضیهٔ ۶۹.۷. فرض کنید که سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ به‌ازای $|x| < R$ همگرا باشد. آن‌گاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بر هر بازهٔ بستهٔ $[-R+\delta, R-\delta]$، که در آن δ عدد مثبت دلخواهی کوچکتر از R می‌باشد، به طور یکنواخت همگرا است.

برهان. فرض کنید $\delta > 0$ مفروض باشد. به‌ازای $|x| \le R - \delta$، داریم

$$|a_n x^n| \le |a_n (R-\delta)^n|$$

و چون، به استناد قضیهٔ ۶۷.۷، سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n (R-\delta)^n$$

مطلقاً همگراست، قضیهٔ ۶۱.۷ نشان می‌دهد که $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ بر $[-R+\delta, R-\delta]$ به طور یکنواخت همگراست.

تبصره. در حالتی که بازهٔ همگرایی تا بی‌نهایت گسترش پیدا کند، سری توانی به‌ازای همهٔ مقادیر x مطلقاً همگراست، ولی ضرورت ندارد که بر $(-\infty, \infty)$ به طور یکنواخت همگرا باشد. معذالک، این سری بر هر بازهٔ $[-b, b]$، که در آن b عددی حقیقی (متناهی) است، به طور یکنواخت همگرا می‌باشد؛ حالت مورد اشاره در سری توانی زیر دیده می‌شود:

$$۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots$$

قضیهٔ ۷۰.۷. (قضیهٔ حد آبل) احکام زیر برقرارند:

الف) اگر $\sum_{k=۰}^{\infty} a_k$ همگرا باشد، آن‌گاه $\sum_{k=۰}^{\infty} a_k x^k$ بر $[۰, ۱]$ به طور یکنواخت همگراست.

ب) اگر $\sum_{k=۰}^{\infty} a_k$ همگرا به L باشد و $f(x) = \sum_{k=۰}^{\infty} a_k x^k$، آن‌گاه $\lim_{x\uparrow ۱} f(x) = L$.

برهان. اگر $\varepsilon > ۰$ مفروض باشد $n_۰$ را طوری انتخاب می‌کنیم که

$$\left|\sum_{k=m+۱}^{n} a_k\right| < \varepsilon$$

مشروط به این که $m, n \geq n_۰$. یعنی،

$$-\varepsilon < a_{m+۱} + a_{m+۲} + \cdots + a_n < \varepsilon$$

وقتی که $m, n \geq n_۰$. اگر $۰ \leq x \leq ۱$ آن‌گاه لم آبل (قضیهٔ ۴۰.۷)، که در مورد $\{a_k\}_{k=m+۱}^{\infty}$ و $\{x^k\}_{k=m+۱}^{\infty}$ اعمال شود، ایجاب می‌کند که نامساویهای

$$-\varepsilon x^{m+۱} < a_{m+۱}x^{m+۱} + a_{m+۲}x^{m+۲} + \cdots + a_n x^n < \varepsilon x^{m+۱} \qquad (۸۰.۷)$$

به‌ازای $m, n \geq n_۰$ و $۰ \leq x \leq ۱$ برقرار باشند. اگر $f_n(x) = \sum_{k=۰}^{n} a_k x^k$ وقتی که $۰ \leq x \leq ۱$، آن‌گاه (۸۰.۷) ایجاب می‌کند که به‌ازای $m, n \geq n_۰$ و $۰ \leq x \leq ۱$ داشته باشیم $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$. به استناد قضیهٔ ۵۲.۷، قسمت اول قضیه نتیجه می‌شود.

برای تحقیق در برقراری قسمت دوم، از این واقعیت استفاده می‌کنیم که، چنان که در قسمت اول ثابت شد، $\sum_{k=۰}^{\infty} a_k x^k$ بر $[۰, ۱]$ به طور یکنواخت همگرا می‌باشد و از این رو (بنابر قضیهٔ ۵۴.۷) بر $[۰, ۱]$ پیوسته است. به این ترتیب، $\lim_{x\uparrow ۱} f(x) = f(۱) = L$.

لم. فرض کنید که $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{v_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنباله‌هایی از اعداد حقیقی مثبت باشند که اولی از بالا کراندار است و $v_n \longrightarrow 1$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. آن‌گاه

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} u_n v_n = \overline{\lim}_{n\to\infty} u_n \qquad (۸۱.۷)$$

برهان. واضح است که $\{u_n v_n\}_{n=1}^{\infty}$ دنبالهٔ مثبتی است که از بالا کراندار است. اگر ممکن باشد، فرض کنید که

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} u_n v_n = s' > s = \overline{\lim}_{n\to\infty} u_n$$

بگیرید $s' - s = 2\varepsilon$، و فرض کنید $K = \sup\{u_n : n = 1, 2, \ldots\}$. چون $v_n \longrightarrow 1$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$، عدد صحیح مثبتی مانند k_1 موجود است به طوری که

$$|v_n - 1| < \frac{\varepsilon}{2K} \qquad \text{به‌ازای } n \geq k_1،$$

به این ترتیب،

$$|u_n v_n - u_n| = |u_n||v_n - 1| < K\frac{\varepsilon}{2K} = \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{به‌ازای } n \geq k_1،$$

بنابراین،

$$u_n v_n < u_n + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{به‌ازای } n \geq k_1،$$

ولی، چون $\overline{\lim}_{n\to\infty} u_n = s$، عدد صحیح مثبتی مانند k_2 موجود است به طوری که

$$u_n < s + \frac{\varepsilon}{2} \qquad \text{به‌ازای } n \geq k_2،$$

بنابراین، $u_n v_n < s + \varepsilon$ به‌ازای $n \geq k = \max\{k_1, k_2\}$. امّا، چون

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} u_n v_n = s'$$

می‌دانیم که بی‌نهایت بار $u_n v_n > s' - \varepsilon$. لذا، s' نمی‌تواند بزرگتر از s باشد.

به طریق مشابه، می‌توان نشان داد که s' کوچکتر از s نیست؛ پس، $s' = s$.

قضیهٔ ۷۱.۷. بازه‌های همگرایی دو سری توانی

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \ldots \qquad \text{و} \qquad a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \ldots$$

یکسانند.

برهان. چون $1 \longrightarrow \sqrt[n]{n}$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$ (لم مقدم بر قضیهٔ ۸.۱ فصل اول)، به استناد (۸۱.۷)

$$\overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n\to\infty} \sqrt[n]{n|a_n|}$$

حال، حکم مورد بحث از قضیهٔ ۶۸.۷ نتیجه می‌شود.

قضیهٔ ۷۲.۷. فرض کنید که سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ دارای بازهٔ همگرایی $(-R, R)$ باشد و تعریف کنیم:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad \text{،}-R < x < R \text{ به‌ازای}$$

آن‌گاه

الف) به‌ازای $-R < x_0 < x < R$، $\int_{x_0}^{x} f(t)dt = a_0(x - x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n+1}(x^{n+1} - x_0^{n+1})$

ب) $f'(x) = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + \dots$ که در آن x نقطهٔ دلخواهی از بازهٔ باز $(-R, R)$ است؛

ج) به‌ازای هر x از $(-R, R)$، $f^{(k)}(x) = \sum_{n=k}^{\infty} n(n-1)\dots(n-k+1)a_n x^{n-k}$ و

$$f^{(k)}(0) = k!a_k \tag{۸۲.۷}$$

که در آن $k = 0, 1, 2, \dots$.

برهان. قسمت (الف) از قضایای ۶۷.۷ و ۵۷.۷ نتیجه می‌شود. قسمت (ب) نتیجه‌ای از قضایای ۷۱.۷ و ۵۶.۷ است. قسمت (ج) نتیجه‌ای از قسمت (ب) محسوب می‌شود و برهان تمام است.

ملاحظات. فرمول (۸۲.۷) نشان می‌دهد که ضرایب بسط f به سری توانی از روی مقادیر f و مشتقاتش در یک نقطه تعیین می‌شوند. همچنین، اگر ضرایب مفروض باشند، مقدار مشتقات f در مرکز بازهٔ همگرایی را از روی سری توانی فوراً می‌توان خواند. معذالک، توجه کنید که اگر چه امکان دارد که مشتقات f از هر مرتبه موجود باشند، ولی سری $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$، که در آن a_n به کمک (۸۲.۷) محاسبه می‌شود، به‌ازای $x \neq 0$ الزاماً همگرا به $f(x)$ نباشد. در این حالت، f قابل بسط به یک سری توانی به شکل $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ نخواهد بود. تابع

$$\begin{aligned} f(x) &= e^{-1/x^2}, \quad & x \neq 0 \\ &= 0, & x = 0 \end{aligned}$$

یکی از این موارد است؛ مشتقات f از هر مرتبه در $x = \circ$ موجودند و همواره $f^{(n)}(\circ) = \circ$ (مثال ۸ بعد از قضیهٔ ۱۰.۴ فصل ۴ را ملاحظه کنید).

قضیهٔ ۷۳.۷. (قضیهٔ یکتایی سریهای توانی) اگر $\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n$ و $\sum_{n=\circ}^{\infty} c_n x^n$ در بازه‌ای مانند $(-r, r)$، با $r > \circ$، به تابعی چون f همگرا باشند، آن‌گاه

$$a_n = c_n \quad \text{،}n = \circ, ۱, ۲, \ldots \text{ به‌ازای}$$

برهان. به استناد (۸۲.۷)، به‌ازای $n = \circ, ۱, ۲, \ldots$، $n!a_n = f^{(n)}(\circ) = n!c_n$.

قضیهٔ ۷۴.۷. (قضیهٔ ضرب سریهای توانی) اگر f و g در بازهٔ بازی مانند $(-r, r)$ با سریهای توانی

$$g(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} b_n x^n \quad \text{و} \quad f(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n$$

داده شده باشند، آن‌گاه حاصل‌ضرب fg در این بازه از سری $\sum_{n=\circ}^{\infty} c_n x^n$ به دست می‌آید که در آن ضرایب c_n عبارتند از

$$c_n = \sum_{k=\circ}^{n} a_k b_{n-k} \quad \text{،}n = \circ, ۱, ۲, \ldots \text{ به‌ازای}$$

برهان. در قضیهٔ ۶۷.۷ دیده‌ایم که اگر $|x| < r$ آن‌گاه سریهای همگرا به $f(x)$ و $g(x)$ مطلقاً همگرایند. اگر قضیهٔ ۵۰.۷ را اعمال کنیم، نتیجهٔ مطلوب به دست می‌آید.

بحث. سریهای توانی

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n x^n \tag{۸۳.۷}$$

و

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} b_n x^n \tag{۸۴.۷}$$

را با شعاعهای همگرایی مخالف صفر در نظر بگیرید و فرض کنید که r شعاع کوچکتر باشد. چنان که از قبل می‌دانیم، این سریها را می‌توان با هم جمع، از یکدیگر تفریق، یا در هم ضرب کرد؛ سری حاصل

به‌ازای $|x| < r$ همگراست و به صورت سری توانی زیر است:

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \pm \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n \pm b_n) x^n$$
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \sum_{n=0}^{\infty} b^n x_n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + a_2 b_{n-2} + \cdots + a_n b_0) x^n$$
(۸۵.۷)

با این فرض که سری (۸۴.۷) همان سری (۸۳.۷) باشد، ملاحظه می‌کنیم که می‌توانیم هر سری توانی را در داخل بازهٔ همگرایی‌اش هر چند بار که بخواهیم در خودش ضرب کنیم؛ که خواهیم داشت:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^2 = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 a_n + a_1 a_{n-1} + \cdots + a_n a_0) x^n$$

و، به طور کلی، به‌ازای هر توان صحیح مثبت m،

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} x^n \qquad (۸۶.۷)$$

که در آن ضریب $a_n^{(m)}$ به ضرایب a_0، a_1، ...، a_n سری اولیهٔ (۸۳.۷) بستگی دارد و، چنان که (۸۵.۷) نشان می‌دهد، از طریق جمع و ضرب این ضرایب به دست می‌آید. بعلاوه، سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^{(m)} x^n$$

به‌ازای $m = 2, 3, \ldots$ مطلقاً همگراست مادام که $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ چنین باشد.

حال، جایگزینی یک سری توانی در سری توانی دیگر را مورد بررسی قرار می‌دهیم. فرض کنید که $y = f(x)$ تابعی باشد که در بازهٔ بازی چون $(-R, R)$ قابل نمایش به یک سری توانی مانند $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ است. بعلاوه، فرض کنید که $z = g(y)$ تابعی باشد که در بازهٔ باز $(-r, r)$ قابل نمایش به سری توانی $\sum_{m=0}^{\infty} b_m y^m$ است.

اگر $|f(0)| = |a_0| < r$، آن‌گاه $|f(x)|$ کوچکتر از r است وقتی که x به قدر کافی کوچک باشد (زیرا f مشتق‌پذیر است و لذا در بازهٔ همگرایی خود پیوسته است) و بنابراین ترکیب تابعی $z = g[f(x)]$ حداقل به ازای همهٔ xهایی که $|x| < R$ و $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x|^n < r$ بامعنی است.

با تنها یک شرط که $|a_0| < r$ تابع $z = g[f(x)]$ را می‌توان در یک همسایگی از نقطهٔ $x = 0$ به صورت یک سری توانی برحسب x نوشت به این ترتیب که در سری $\sum_{m=0}^{\infty} b_m y^m$ به جای y سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ را قرار دهیم و سپس جمل را برحسب قوای صعودی x مرتب کنیم. جزئیات برهان این حکم در قضیهٔ بعدی خواهد آمد.

قضیهٔ ۷.۷۵. (قضیهٔ جایگزینی سریهای توانی) فرض کنید که

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n \qquad \text{به‌ازای } |x|<R،$$
$$g(y)=\sum_{m=0}^{\infty}b_my^m \qquad \text{به‌ازای } |y|<r،$$

و

$$|a_0|<r$$

آن‌گاه تابع $F(x)=g[f(x)]$ حداقل به‌ازای xهایی که

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||x|^n<r \quad \text{و} \quad |x|<R \tag{۷.۸۷}$$

تعریف می‌شود و قابل نمایش به یک سری توانی مانند $\sum_{n=0}^{\infty}A_nx^n$ است. این وضعیت مطمئناً در یک همسایگی از $x=0$ پیش می‌آید.

برهان. ادعای آخر، که (۷.۸۷) مطمئناً به‌ازای همهٔ xهای یک همسایگی به قدرکافی کوچک از $x=0$ برقرار است، به آسانی از پیوستگی نتیجه می‌شود:

$$\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||x|^n\longrightarrow|a_0|<r \qquad \text{وقتی که } x\longrightarrow 0،$$

با تکرار ضرب سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ در خودش، خواهیم داشت:

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n\right)^m=\sum_{n=0}^{\infty}a_n^{(m)}x^n \tag{۷.۸۸}$$

با

$$a_n^{(m)}=\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n}a_{k_1}a_{k_2}\dots a_{k_m} \tag{۷.۸۹}$$

که در آن نماد $\sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n}$ حاکی از این است که جمعبندی باید به ازای همهٔ اعداد صحیح نامنفی k_1، k_2، ...، k_m که مجموع آنها n است صورت گیرد. نماد مندرج در (۷.۸۸) را به‌ازای $m=0$ و $m=1$ نیز می‌پذیریم. به طریق مشابه، داریم

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty}|a_n||x|^n\right)^m=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n^{(m)}|x|^n$$

با

$$\alpha_n^{(m)} = \sum_{k_1+k_2+\cdots+k_m=n} |a_{k_1}||a_{k_2}|\dots|a_{k_m}|$$

چون $\alpha_n^{(m)}$ از جمع و ضرب $|a_0|$، $|a_1|$، ...، $|a_n|$ به دست آید به همان طریقی که $a_n^{(m)}$ از جمع و ضرب a_0، a_1، ...، a_n حاصل می‌شود، واضح است که $|a_n^{(m)}| \leq \alpha_n^{(m)}$. محض اختصار، قرار می‌دهیم

$$\sum_{n=0}^{\infty} |a_n||x|^n = \rho$$

و فرض می‌کنیم که $\rho < r$. به‌ازای هر عدد صحیح $M \geq 0$، داریم

$$\sum_{n=0}^{M} |a_n^{(m)}||x|^n \leq \sum_{n=0}^{M} \alpha_n^{(m)}|x|^n \leq \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n^{(m)}|x|^n = \rho^m$$
$$\sum_{m,n=0}^{M} |b_m||a_n^{(m)}||x|^n \leq \sum_{m=0}^{M} |b_m|\rho^m \leq \sum_{m=0}^{\infty} |b_m|\rho^m$$

از این رو، به استناد قضیهٔ تجدید آرایش اصلی (قضیهٔ ۴۹.۷)، نتیجه می‌شود که

$$F(x) = \sum_{m=0}^{\infty}\sum_{n=0}^{\infty} b_m a_n^{(m)} x^n = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{\infty} b_m a_n^{(m)} x^n$$

بنابراین، باید قرار دهیم

$$A_n = \sum_{m=0}^{\infty} b_m a_n^{(m)}$$

و برهان تمام است.

توضیح. حالت $a_0 = 0$ از اهمیت خاصی برخوردار است. در این حالت، ضرایب A_n از روی ضرایب A_n و b_m به صورت مجموعهای متناهی محاسبه می‌شوند نه سریهای نامتناهی. در واقع، اگر $a_0 = 0$ آن‌گاه از تعریف $a_n^{(m)}$ در (۸۹.۷) دیده می‌شود که به‌ازای همهٔ $m > n$، $a_n^{(m)} = 0$ (در هر دستگاه k_1، k_2، ...، k_m از اعداد صحیح نامنفی که حاصل جمع آنها n باشد و $m > n$، حداقل یک 0 باید موجود باشد). به این ترتیب،

$$A_n = \sum_{m=0}^{n} b_m a_n^{(m)} \qquad (a_0 = 0 \text{ در حالت})$$

قضیهٔ ۷۶.۷. (قضیهٔ بسط تیلور) فرض کنید که

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$$

که سری توانی به‌ازای $|x| < R$ همگرا باشد. اگر $-R < a < R$ آن‌گاه بسط زیر را

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n \qquad (۹۰.۷)$$

به‌ازای هر x که $|x-a| < R - |a|$ داریم و می‌گوییم که f قابل بسط به یک سری توانی حول نقطهٔ $x = a$ است که در $|x-a| < R - |a|$ همگراست.

برهان. ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n[a + (x-a)]^n &= \sum_{n=0}^{\infty} c_n \sum_{m=0}^{n} \binom{n}{m} a^{n-m}(x-a)^m \\ &= \sum_{m=0}^{\infty} \left(\sum_{n=m}^{\infty} \binom{n}{m} a^{n-m} \right)(x-a)^m \end{aligned}$$

این همان بسط مطلوب حول نقطهٔ $x = a$ است. برای اثبات برقراری، توجه می‌کنیم که ما از قضیهٔ ۷۵.۷ استفاده کرده و صرفاً سری توانی سادهٔ $a + (x-a)$ با متغیر $(x-a)$ را در سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ جایگزین کرده‌ایم؛ بسط منتج حداقل به ازای xهایی که

$$|a| + |x-a| < R$$

معتبر است.

سرانجام، شکل ضرایب بسط (۹۰.۷) از قسمت (ج) قضیهٔ ۷۲.۷ نتیجه می‌شود.

بحث. یک مثال مهم از کاربرد قضیهٔ جایگزینی سریهای توانی (قضیهٔ ۷۵.۷) تقسیم سریهای توانی است.

فرض کنید که جملهٔ a_0 سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ مخالف صفر باشد؛ آن‌گاه $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ را می‌توان به صورت

$$a_0 \left(1 + \frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{a_0}x^n + \ldots \right) = a_0(1+y)$$

نوشت که در آن

$$y = \frac{a_1}{a_0}x + \frac{a_2}{a_0}x^2 + \cdots + \frac{a_n}{a_0}x^n + \dots$$

به این ترتیب،

$$\begin{aligned}\frac{1}{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \dots} &= \frac{1}{a_0}\frac{1}{1+y}\\ &= \frac{1}{a_0}(1 - y + y^2 - \cdots + (-1)^m y^m + \dots)\end{aligned}$$

سری اخیر نقش سری $\sum_{m=0}^{\infty} b_m y^m$ را که در قضیهٔ ۷۵.۷ ظاهر شد ایفا می‌کند؛ در این مورد، $r = 1$.
به استناد قضیهٔ ۷۵.۷، عبارت مورد بحث قابل بسط برحسب توانهای x است:

$$\frac{1}{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \dots} = c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \dots$$

که به‌ازای xهای به قدر کافی کوچک برقرار است؛ مثلاً، به‌ازای xهایی که در نامساوی زیر صدق می‌کنند:

$$\left|\frac{a_1}{a_0}\right| \cdot |x| + \left|\frac{a_2}{a_0}\right| \cdot |x|^2 + \cdots + \left|\frac{a_n}{a_0}\right| \cdot |x|^n + \cdots < 1$$

یک سری توانی دیگر

$$h_0 + h_1 x + h_2 x^2 + \cdots + h_n x^n + \dots$$

در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم که یک شعاع همگرایی مخالف صفر داشته باشد. در این صورت، خارج‌قسمت

$$\frac{h_0 + h_1 x + \cdots + h_n x^n + \dots}{a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \dots} \qquad (۹۱.۷)$$

را می‌توان با حاصل ضرب

$$(h_0 + h_1 x + \cdots + h_n x^n + \dots)(c_0 + c_1 x + \cdots + c_n x^n + \dots)$$

به‌ازای xهای به قدر کافی کوچک تعویض نمود و، از این رو، قابل نمایش به یک سری توانی مانند

$$d_0 + d_1 x + d_2 x^2 + \cdots + d_n x^n + \dots$$

است. مناسبترین طریق تعیین ضرایب این سری این است که از رابطهٔ

$$(a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n + \dots)(d_0 + d_1 x + \cdots + d_n x^n + \dots)$$

$$= h_0 + h_1 x + \cdots + h_n x^n + \ldots$$

که ضرایب a_i و h_k از آن معلوم می‌باشند، شروع کنیم. از ضرب سریهای توانی سمت چپ این معادله براساس قاعدهٔ کلی

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n . \sum_{n=0}^{\infty} d_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_0 d_n + a_1 d_{n-1} + a_2 d_{n-2} + \cdots + a_n d_0) x^n$$

و مقایسهٔ ضرایب قوای متشابه x، دستگاه نامتناهی زیر

$$a_0 d_0 = h_0$$

$$a_0 d_1 + a_1 d_0 = h_1$$

$$a_0 d_2 + a_1 d_1 + a_2 d_0 = h_2$$

$$\vdots$$

$$a_0 d_n + a_1 d_{n-1} + \cdots + a_{n-1} d_1 + a_n d_0 = h_n$$

$$\vdots$$

از معادلات را خواهیم داشت. چون $a_0 \neq 0$، معادلهٔ اول ایجاب می‌کند که $d_0 = h_0 / a_0$، معادلهٔ دوم مستلزم

$$d_1 = \frac{h_1 - a_1 d_0}{a_0} = \frac{a_0 h_1 - a_1 h_0}{a_0^2}$$

است و هکذا. پس از دستیابی به n ضریب d_0، d_1، $\ldots$، d_{n-1}، معادلهٔ $(n+1)$ام که شامل تنها مجهول d_n است ما را در موقعیت تعیین مقدار d_n قرار می‌دهد. به این ترتیب، قادر هستیم که ضرایب سری توانی مبین خارج قسمت (۹۱.۷) را (در واقع، به طور منحصر به فرد) تعیین کنیم.

۷.۷ بعضی سریهای توانی مهم

سریهای زیر، که در بازه‌های مفروض به توابع مفروض همگرایند، در عمل مکرراً به کار برده می‌شوند.

سریهای توانی مهم

۱) $$(a+x)^m = a^m + m a^{m-1} x + \cdots + \frac{m(m-1)\ldots(m-n+1)}{n!} a^{m-n} x^n + \ldots$$

که در آن $-|a| < x < |a|$.

۲) $$a^x = ۱ + \frac{(\ln a)}{۱!}x + \frac{(\ln a)^۲}{۲!}x^۲ + \cdots + \frac{(\ln a)^n}{n!}x^n + \ldots$$

که در آن $-\infty < x < \infty$.

۳) $$e^x = ۱ + x + \frac{x^۲}{۲!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \ldots, \qquad -\infty < x < \infty$$

۴) $$\sin x = x - \frac{x^۳}{۳!} + \cdots + (-۱)^n \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} + \ldots, \qquad -\infty < x < \infty$$

۵) $$\cos x = ۱ - \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} - \cdots + (-۱)^n \frac{x^{۲n}}{(۲n)!} + \ldots, \qquad -\infty < x < \infty$$

۶) $$\tan x = x + \frac{x^۳}{۳} + \frac{۲x^۵}{۱۵} + \frac{۱۷x^۷}{۳۱۵} + \frac{۶۲x^۹}{۲۸۳۵} + \ldots, \qquad -\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲}$$

۷) $$\cot x = \frac{۱}{x} - \left(\frac{x}{۳} + \frac{x^۳}{۴۵} + \frac{۲x^۵}{۹۴۵} + \frac{x^۷}{۴۷۲۵} + \ldots\right),$$

که در آن $-\pi < x < \pi$ و $x \neq ۰$.

۸) $$\sin^{-۱} x = x + \frac{۱.x^۳}{۲ \cdot ۳} + \frac{۱ \cdot ۳ \cdot x^۵}{۲ \cdot ۴ \cdot ۵} + \frac{۱ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot x^۷}{۲ \cdot ۴ \cdot ۶ \cdot ۷} + \ldots$$

$$+ \frac{۱ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot \ldots \cdot (۲n-۱)x^{۲n+۱}}{۲ \cdot ۴ \cdot ۶ \cdot \ldots \cdot (۲n)(۲n+۱)} + \ldots, \qquad -۱ < x < ۱$$

۹) $$\tan^{-۱} x = x - \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} - \frac{x^۷}{۷} + \cdots + (-۱)^n \frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱} + \ldots, \qquad -۱ \leq x \leq ۱$$

۱۰) $$\sinh x = x + \frac{x^۳}{۳!} + \cdots + \frac{x^{۲n+۱}}{(۲n+۱)!} + \ldots, \qquad -\infty < x < \infty$$

۱۱) $$\cosh x = ۱ + \frac{x^۲}{۲!} + \frac{x^۴}{۴!} + \cdots + \frac{x^{۲n}}{(۲n)!} + \ldots, \qquad -\infty < x < \infty$$

۱۲) $$\tanh x = x - \frac{x^۳}{۳} + \frac{۲x^۵}{۱۵} - \frac{۱۷x^۷}{۳۱۵} + \ldots, \qquad -\frac{\pi}{۲} < x < \frac{\pi}{۲}$$

۱۳) $$\coth x = \frac{۱}{x} + \frac{x}{۳} - \frac{x^۳}{۴۵} + \frac{۲x^۵}{۹۴۵} - \frac{x^۷}{۴۷۲۵} + \ldots,$$

که در آن $-\pi < x < \pi$ و $x \neq ۰$.

۱۴) $$\sinh^{-۱} x = x - \frac{x^۳}{۲ \cdot ۳} + \frac{۱ \cdot ۳ \cdot x^۵}{۲ \cdot ۴ \cdot ۵} - \frac{۱ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot x^۷}{۲ \cdot ۴ \cdot ۶ \cdot ۷} + \ldots$$

$$+ (-۱)^n \frac{۱ \cdot ۳ \cdot ۵ \cdot \ldots \cdot (۲n-۱).x^{۲n+۱}}{۲ \cdot ۴ \cdot ۶ \cdot \ldots \cdot (۲n)(۲n+۱)} + \cdots, \qquad -۱ \leq x \leq ۱$$

۱۵) $$\tanh^{-۱} x = x + \frac{x^۳}{۳} + \frac{x^۵}{۵} + \cdots + \frac{x^{۲n+۱}}{۲n+۱} + \ldots, \qquad -۱ < x < ۱$$

۱۶) $$\ln(۱+x) = x - \frac{x^۲}{۲} + \frac{x^۳}{۳} - \cdots + (-۱)^n \frac{x^n}{n} + \ldots, \qquad -۱ < x \leq ۱$$

۱۷) $$\ln x = 2\left(\frac{x+1}{x+1} + \frac{1}{3}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^3 + \frac{1}{5}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^5 + \cdots + \frac{1}{2n+1}\left(\frac{x-1}{x+1}\right)^{2n+1} + \ldots\right),$$

که در آن $x > 0$.

۱۸) $$\ln\frac{1+x}{1-x} = 2\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \cdots + \frac{x^{2n+1}}{2n+1} + \ldots\right), \qquad -1 < x < 1$$

۱۹) $$\ln\frac{x+1}{x-1} = 2\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{3x^3} + \frac{1}{5x^5} + \cdots + \frac{1}{(2n+1)x^{2n+1}} + \ldots\right),$$

که در آن $x < -1$ یا $x > 1$.

۲۰) $$\sinh x + \sin x = 2\left(\frac{x}{1} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^9}{9!} + \ldots\right), \qquad -\infty < x < \infty$$

۲۱) $$\sinh x - \sin x = 2\left(\frac{x^3}{3!} + \frac{x^7}{7!} + \frac{x^{11}}{11!} + \ldots\right), \qquad -\infty < x < \infty$$

۲۲) $$\cosh x + \cos x = 2\left(1 + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^8}{8!} + \ldots\right), \qquad -\infty < x < \infty$$

۲۳) $$\cosh x - \cos x = 2\left(\frac{x^2}{2!} + \frac{x^6}{6!} + \frac{x^{10}}{10!} + \ldots\right), \qquad -\infty < x < \infty$$

۲۴) $$\tanh x + \tan x = 2\left(x + \frac{2x^5}{15} + \frac{62x^9}{2835} + \ldots\right), \qquad -\infty < x < \infty$$

۲۵) $$\tanh x - \tan x = -2\left(\frac{x^3}{3} + \frac{17x^7}{315} + \frac{1382x^{11}}{155925} + \ldots\right), \qquad -\infty < x < \infty$$

بحث. اکنون نشان می‌دهیم که بعضی از این بسطها چگونه به دست می‌آیند. برای این منظور، باید به مندرجات بخش ۲ فصل ۴ توجه خاص مبذول شود.

فرض کنید f تابعی باشد که مشتقاتش از هر مرتبه در یک همسایگی از نقطهٔ $x = 0$ موجودند. اعداد

$$a_k = \frac{1}{k!}f^{(k)}(0), \qquad k = 0, 1, 2, \ldots$$

را در نظر می‌گیریم و به طور صوری می‌نویسیم:

$$s(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k \qquad (۹۲.۷)$$

در حال حاضر، از همگرایی سری، یعنی وجود تابع مجموع s، صرف‌نظر می‌کنیم. به استناد قضیهٔ ۱۱.۴، داریم

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k + R_n \qquad (۹۳.۷)$$

که در آن $\sum_{k=0}^{n} a_k x^k$ چندجمله‌ای تیلور مرتبهٔ n تابع f در نقطهٔ 0 و R_n باقیمانده است. از مقایسهٔ (۹۲.۷) و (۹۳.۷) نتیجهٔ زیر عاید می‌شود:

اگر به‌ازای $\rho > |x|$، $\rho > 0$، داشته باشیم

$$\lim_{n\to\infty} R_n = 0 \tag{۹۴.۷}$$

آن‌گاه

$$s(x) \equiv f(x)$$

یعنی، سری توانی

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

با $a_k = \frac{1}{k!} f^{(k)}(0)$ دربازهٔ همگرایی تابع f را نشان می‌دهد.

در واقع، به استناد قضیهٔ ۷۳.۷، نمایش به صورت سری توانی منحصربه‌فرد است. برای این که ببینیم که شرط (۹۴.۷) نه تنها لازم است، بلکه برای همگرایی سری (۹۲.۷) کافی نیز هست، توجه می‌کنیم که (۹۴.۷) به این معنی است که به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیح مثبتی مانند N موجود است به طوری که $|R_n| < \varepsilon$ مشروط به این که $n > N$. امّا، در این صورت، به‌ازای هر $n > N$ و هر $p > 0$ دلخواه،

$$|a_{n+1}x^{n+1} + \cdots + a_{n+p}x^{n+p}| = |R_n - R_{n+p}| \leq |R_n| + |R_{n+p}| < 2\varepsilon$$

سری

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(0) x^k \tag{۹۵.۷}$$

را سری ماکلورن f می‌نامند. به طور کلی، سری

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} f^{(k)}(x_0)(x - x_0)^k \tag{۹۶.۷}$$

را سری تیلور f در نقطهٔ x_0 می‌نامند. البته، در حالت اخیر، با تابعی سروکار داریم که مشتقاتش از هر مرتبه در یک همسایگی از نقطهٔ $x = x_0$ موجودند.

ملاحظه می‌کنیم که شرط (۹۴.۷) نه تنها یک شرط لازم و کافی برای همگرایی سریهای (۹۵.۷) و (۹۶.۷) است، بلکه تابع مفروض f نیز با این سریها نمایش داده می‌شود.

یک بررسی اجمالی بخش ۲ فصل ۴ نشان می‌دهد که ما قبلاً نمایش سری توانی تعدادی از توابع مقدماتی را، که در آغاز این بخش آورده شده‌اند، ثابت کرده‌ایم به این طریق که نشان داده‌ایم که باقیماندهٔ R_n به ۰ میل می‌کند وقتی که $n \longrightarrow \infty$.

یک طریق مؤثر برای تحصیل سریهای تیلور و ماکلورن توابع مقدماتی این است که مجموعه‌ای از بسطهای اساسی بیابیم و سپس با استفاده از روشهای زیرکانهٔ بخش اخیر سایر بسطها را از این بسطهای اساسی نتیجه بگیریم. به عنوان مثال، سری

$$\frac{۱}{۱+t} = ۱ - t + t^{۲} - t^{۳} + \dots$$

دارای شعاع همگرایی $R = ۱$ است. بنابراین، به‌ازای $|x| < ۱$، انتگرالگیری از ۰ تا x به نتیجهٔ

$$\ln(۱+x) = x - \frac{x^{۲}}{۲} + \frac{x^{۳}}{۳} - \dots, \qquad -۱ < x < ۱$$

می‌انجامد و قضیهٔ ۷.۷۰ ایجاب می‌کند که

$$\ln(۱+x) = x - \frac{x^{۲}}{۲} + \frac{x^{۳}}{۳} - \dots, \qquad -۱ < x \leq ۱$$

به عنوان مثالی دیگر، توجه کنید که سری

$$\frac{۱}{۱+t^{۲}} = ۱ - t^{۲} + t^{۴} - t^{۶} + \dots$$

دارای شعاع همگرایی $R = ۱$ است و لذا، به‌ازای $|x| < ۱$، انتگرالگیری از ۰ تا x به نتیجهٔ

$$\tan^{-۱} x = x - \frac{x^{۳}}{۳} + \frac{x^{۵}}{۵} - \frac{x^{۷}}{۷} + \dots, \qquad -۱ < x < ۱$$

می‌انجامد. از این رو، به استناد قضیهٔ ۷.۷۰، خواهیم داشت:

$$\tan^{-۱} x = x - \frac{x^{۳}}{۳} + \frac{x^{۵}}{۵} - \frac{x^{۷}}{۷} + \dots, \qquad -۱ \leq x \leq ۱$$

به عنوان مثال سوم، توجه کنید که سری

$$(۱+t)^{-۱/۲} = ۱ - \frac{۱}{۲}t + \frac{۱ \cdot ۳}{۲ \cdot ۴}t^{۲} - \frac{۱ \cdot ۳ \cdot ۵}{۲ \cdot ۴ \cdot ۶}t^{۳} + \dots$$

دارای شعاع همگرایی $R = ۱$ است. بنابراین، همین حکم در مورد

$$(۱-t^{۲})^{-۱/۲} = ۱ + \frac{۱}{۲}t^{۲} + \frac{۱ \cdot ۳}{۲ \cdot ۴}t^{۴} + \frac{۱ \cdot ۳ \cdot ۵}{۲ \cdot ۴ \cdot ۶}t^{۶} + \dots$$

معتبر است. از این، با انتگرالگیری از ۰ تا x که $|x| < ۱$، درمی‌یابیم که

$$\sin^{-۱} x = x + \frac{۱}{۲}\frac{x^{۳}}{۳} + \frac{۱\cdot۳}{۲\cdot۴}\frac{x^{۵}}{۵} + \frac{۱\cdot۳\cdot۵}{۲\cdot۴\cdot۶}\frac{x^{۷}}{۷} + \dots, \qquad -۱ < x < ۱$$

به عنوان مثال چهارم، نشان می‌دهیم که

$$\tan x = x + \frac{x^{۳}}{۳} + \frac{۲x^{۵}}{۱۵} + \frac{۱۷x^{۷}}{۳۱۵} + \dots$$

در واقع، با عنایت به این که تابع $f(x) = \tan x$ تابعی فرد است، یعنی $f(-x) = -f(x)$، فرض کنید که

$$\tan x = a_{۱}x + a_{۳}x^{۳} + a_{۵}x^{۵} + a_{۷}x^{۷} + \dots$$

حال، با مشتقگیری و استفاده از اتحاد

$$\sec^{۲} x = ۱ + \tan^{۲} x$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} & a_{۱} + ۳a_{۳}x^{۲} + ۵a_{۵}x^{۴} + ۷a_{۷}x^{۶} + ۹a_{۹}x^{۸} + \dots \\ &= ۱ + [a_{۱}x + a_{۳}x^{۳} + a_{۵}x^{۵} + a_{۷}x^{۷} + \dots]^{۲} \\ &= ۱ + a_{۱}^{۲}x^{۲} + ۲a_{۱}a_{۳}x^{۴} + (۲a_{۱}a_{۵} + a_{۳}^{۲})x^{۶} + \dots \end{aligned}$$

از برابری ضرایب قوای متشابه فرمولهای بازگشتی

$$\begin{aligned} a_{۱} &= ۱ \\ ۳a_{۳} &= a_{۱}^{۲} \\ ۵a_{۵} &= ۲a_{۱}a_{۳} \\ ۷a_{۷} &= ۲a_{۱}a_{۵} + a_{۳}^{۲} \end{aligned}$$

حاصل می‌شوند و هکذا. از این رو، $a_{۱} = ۱$، $a_{۳} = ۱/۳$، $a_{۵} = ۲/۱۵$، $a_{۷} = ۱۷/۳۱۵$، و هکذا.

۸.۷ مثالهای گوناگون

مثال ۱. داریم

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}dx = \frac{\pi^2}{12}$$

در واقع، در کل بازهٔ $[0\,,1]$،

$$\frac{\ln(1+x)}{x} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{1}{3}x^2 - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}x^{n-1} + \dots$$

انتگرالگیری جمله‌به‌جمله به نتیجهٔ

$$I = 1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n^2} + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n-1}\frac{1}{n^2}$$

می‌انجامد. امّا

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

(به مثال ۳ از بخش ۴ فصل ۱ مراجعه کنید). بنابراین،

$$I = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n-1}}{n^2} = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} - 2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{(2n)^2} = \frac{\pi^2}{12}$$

مثال ۲. داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} = \frac{1}{3}(\ln 2) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}$$

در واقع،

$$\begin{aligned}
\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1} &= \lim_{x\to 1-0}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3n+1}x^{3n+1} \\
&= \lim_{x\to 1-0}\int_0^x \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n x^{3n}dx = \lim_{x\to 1-0}\int_0^x \frac{1}{1+x^3}dx \\
&= \lim_{x\to 1-0}\left(\frac{1}{6}\ln\frac{(x+1)^2}{x^2-x+1} + \frac{1}{\sqrt{3}}\tan^{-1}\frac{2x-1}{\sqrt{3}} + \frac{\pi}{6\sqrt{3}}\right) \\
&= \frac{1}{3}(\ln 2) + \frac{\pi}{3\sqrt{3}}
\end{aligned}$$

مثال ۳. برای تعیین مجموع سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n+1)(n+3)}$$

از سری معلوم

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+1}}{n+1}$$

شروع می‌کنیم. پس از ضرب در x، به دست می‌آوریم:

$$x \ln(1+x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+2}}{n+1}$$

انتگرالگیری ایجاب می‌کند که

$$\int x \ln(1+x) dx = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+3}}{(n+1)(n+3)}$$

یا

$$\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(1+x) - \frac{1}{4}(x-1)^2 = C + \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+3}}{(n+1)(n+3)}$$

اگر قرار دهیم $x = 0$ درمی‌یابیم‌که $C = -1/4$. بنابراین،

$$\frac{1}{2}(x^2-1)\ln(1+x) - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{2}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{n+3}}{(n+1)(n+3)}$$

از تقسیم بر x^3، با این فرض که $x \neq 0$، نتیجهٔ

$$\frac{x^2-1}{2x^3}\ln(1+x) - \frac{1}{4x} + \frac{1}{2x^2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)(n+3)}$$

عاید می‌شود. سرانجام، از جایگزینی x^2 به جای x، خواهیم داشت:

$$\frac{x^4-1}{2x^6}\ln(1+x^2) - \frac{1}{4x^2} + \frac{1}{2x^4} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(n+1)(n+3)} \qquad \text{به‌ازای } 0 < |x| < 1\text{،}$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم. به این نکته نیز توجه می‌کنیم که سمت چپ، نزدیک $x = 0$، صورت نامعینی است با حد $1/3$ وقتی که $x \longrightarrow 0$ (جملهٔ متناظر $n = 0$ در سمت راست).

مثال ۴. اگر s_r مجموع مربعات اولین r عدد صحیح مثبت باشد، آن‌گاه

$$\frac{s_1}{1!}+\frac{s_2}{2!}+\cdots+\frac{s_n}{n!}+\cdots=\frac{17e}{6}$$

در واقع، چون (مثال ۴ بخش ۴ فصل ۱ را ببینید)

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{s_n}{n!}=\frac{1}{6}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n!}$$

بنابراین، کافی است نشان دهیم که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n!}=17e$$

برای انجام این مقصود، بحث را از

$$e^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!}$$

شروع می‌کنیم. پس از ضرب طرفین در x،

$$xe^x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n!}$$

سپس، دوبار برحسب x مشتق می‌گیریم:

$$e^x(2+x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+1)x^{n-1}}{n!}$$

با جایگزینی x^2 به جای x، خواهیم داشت:

$$e^{x^2}(2+x^2)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+1)x^{2n-2}}{n!}$$

ضرب طرفین این معادله در x^3 به نتیجهٔ

$$e^{x^2}(2x^3+x^5)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n(n+1)x^{2n+1}}{n!}$$

می‌انجامد. از مشتقگیری برحسب x نتیجهٔ

$$e^{x^{۲}}(۶x^{۲}+۹x^{۴}+۲x^{۶})=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{n(n+۱)(۲n+۱)x^{۲n}}{n!}$$

عاید می‌شود. اگر قرار دهیم $x=۱$، خواهیم داشت:

$$۱۷e=\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{n!}=\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{n(n+۱)(۲n+۱)}{n!}$$

که همان چیزی است که باید انجام می‌شد.

مثال ۵. داریم:

$$S=۱-\frac{۱}{۲}-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۷}++--\cdots=\frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۲}(\ln ۲)$$

در واقع، با استفاده از زابطهٔ

$$\int_{۰}^{۱}t^{n-۱}dt=\frac{۱}{n}\qquad \text{به‌ازای } n=۱,۲,۳,\ldots،$$

ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}
S&=\int_{۰}^{۱}(۱-t-t^{۲}+t^{۳}+t^{۴}-t^{۵}-t^{۶}++--\ldots)dt\\
&=\int_{۰}^{۱}[(۱-t^{۲}+t^{۴}-t^{۶}+\ldots)-(t-t^{۳}+t^{۵}-\ldots)]dt\\
&=\int_{۰}^{۱}\left(\frac{۱}{۱+t^{۲}}-\frac{t}{۱+t^{۲}}\right)dt=\left(\tan^{-۱}t-\frac{۱}{۲}\ln(۱+t^{۲})\right)\Big|_{۰}^{۱}\\
&=\frac{\pi}{۴}-\frac{۱}{۲}(\ln ۲)
\end{aligned}$$

مثال ۶. داریم:

$$H=\frac{۱}{۱\cdot۲\cdot۳}+\frac{۱}{۳\cdot۴\cdot۵}+\frac{۱}{۵\cdot۶\cdot۷}+\cdots=\ln ۲-\frac{۱}{۲}$$

در واقع، با استفاده از اتحاد

$$\frac{۱}{k!}\int_{۰}^{۱}t^{n-۱}(۱-t)^{k}dt=\frac{۱}{n(n+۱)\ldots(n+k)}$$

که در آن n و k اعداد صحیح مثبتی هستند، ملاحظه می‌کنیم که

$$H = \frac{۱}{۲!}\int_۰^۱ (۱-t)^۲(۱+t^۲+t^۴+\dots)dt = \frac{۱}{۲!}\int_۰^۱ \frac{(۱-t)^۲}{۱-t^۲}dt$$
$$= \frac{۱}{۲!}\int_۰^۱ \frac{۱-t}{۱+t}dt = \frac{۱}{۲!}\int_۱^۲ \frac{۲-s}{s}ds = \ln ۲ - \frac{۱}{۲}$$

مثال ۷. داریم:

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{n(n+m)} = \frac{۱}{m}\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\dots+\frac{۱}{m}\right)$$

زیرا، به‌ازای $a > -۱$، $b > -۱$، و $a \neq b$،

$$\sum_{n=۱}^{\infty} \frac{۱}{(n+a)(n+b)} = \frac{۱}{b-a}\int_۰^۱ \frac{x^a - x^b}{۱-x}dx$$

اگر قرار دهیم $a = ۰$ و $b = m$، براساس رابطهٔ زیر حکم مطلوب به دست می‌آید.

$$\frac{۱-x^m}{۱-x} = ۱+x+x^۲+\dots+x^{m-۱}$$

مثال ۸. داریم:

$$\int_۰^۱ \frac{x^{p-۱}}{۱+x^q}dx = \frac{۱}{p} - \frac{۱}{p+q} + \frac{۱}{p+۲q} - \frac{۱}{p+۳q} + \dots$$

که در آن p و q اعداد صحیح مثبتی هستند، زیرا

$$\frac{x^{p-۱}}{۱+x^q} = x^{p-۱}(۱-x^q+x^{۲q}-x^{۳q}+\dots)$$

مثال ۹. فرض کنید $x > ۰$ و $x \neq ۱$. آن‌گاه

$$\frac{\ln x}{x-۱} \le \frac{۱}{x^{۱/۲}} \tag{۹۷.۷}$$

و

$$\frac{\ln x}{x-۱} \le \frac{۱+x^{۱/۳}}{x+x^{۱/۳}} \tag{۹۸.۷}$$

در واقع، از بسط

$$\ln\frac{۱+t}{۱-t} = ۲\left(t+\frac{۱}{۳}t^{۳}+\frac{۱}{۵}t^{۵}+\frac{۱}{۷}t^{۷}+\dots\right)$$

که به‌ازای $|t| < ۱$ برقرار است، شروع می‌کنیم. برای تحقیق در صحت (۹۷.۷)، قرار می‌دهیم $x = (۱+t)^{۲}/(۱-t)^{۲}$ و توجه می‌کنیم که (۹۷.۷) به صورت

$$\frac{۱}{۲t}\ln\frac{۱+t}{۱-t} - \frac{۱}{۱-t^{۲}} \le ۰, \qquad ۰ < |t| < ۱$$

درمی‌آید. با استفاده از بسط به سری توانی، خواهیم داشت:

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\left(۱-\frac{۱}{۲n+۱}\right)t^{۲n} \ge ۰, \qquad ۰ \le |t| < ۱$$

که بالبداهه درست است.

برای تحقیق در درستی (۹۸.۷)، قرار می‌دهیم $x = (۱+t)^{۳}/(۱-t)^{۳}$ و ملاحظه می‌کنیم که (۹۸.۷) به صورت

$$\frac{۳}{۲t}\ln\frac{۱+t}{۱-t} - \frac{t^{۲}+۳}{۱-t^{۴}} \le ۰, \qquad ۰ < |t| < ۱$$

درمی‌آید. با استفاده از بسط به سری توانی، خواهیم داشت:

$$\sum_{n=۰}^{\infty}t^{۴n+۲} + ۳\sum_{n=۰}^{\infty}t^{۴n} - ۳\sum_{n=۰}^{\infty}\frac{t^{۲n}}{۲n+۱} \ge ۰, \qquad |t| < ۱$$

یعنی،

$$۳\sum_{n=۰}^{\infty}\left(۱-\frac{۱}{۴n+۱}\right)t^{۴n} + \sum_{n=۰}^{\infty}\left(۱-\frac{۳}{۴n+۳}\right)^{۴n+۲} \ge ۰$$

که بالبداهه درست است.

مثال ۱۰. فرض کنید p و q دو عدد حقیقی باشند و n یک عدد صحیح مثبت باشد. آن‌گاه

$$\sum_{k=۰}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n} \qquad (۹۹.۷)$$

در واقع، $(۱+x)^{p}(۱+x)^{q} = (۱+x)^{p+q}$. اگر $|x| < ۱$ آن‌گاه

$$(۱+x)^{p+q} = \sum_{n=۰}^{\infty}\binom{p+q}{n}x^{n}$$

و

$$(۱+x)^p(۱+x)^q = \left(\sum_{n=۰}^{\infty}\binom{p}{n}x^n\right)\left(\sum_{n=۰}^{\infty}\binom{q}{n}x^n\right) = \sum_{n=۰}^{\infty}\left(\sum_{k=۰}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k}\right)x^n$$

چون دو سری توانی به‌ازای $|x| < ۱$ برابرند، نتیجه می‌شود که

$$\sum_{k=۰}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}$$

تبصره. چون

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}.$$

اگر در (۹۹.۷) قرار دهیم $p = q = n$، خواهیم داشت:

$$\sum_{k=۰}^{n}\binom{n}{k}^۲ = \binom{۲n}{k}$$

مثال ۱۱. داریم:

$$\cos^۳ x - \frac{۱}{۳}\cos^۳ ۳x + \frac{۱}{۳^۲}\cos^۳ ۳^۲x - \frac{۱}{۳^۳}\cos^۳ ۳^۳x + \cdots = \frac{۳}{۴}\cos x$$

در واقع، اتحادهای متوالی زیر را داریم:

$$۴\cos^۳ x = \cos ۳x + ۳\cos x$$

$$۴\cos^۳ ۳x = \cos ۳^۲x + ۳\cos ۳x$$

$$۴\cos^۳ ۳^۲x = \cos ۳^۳x + ۳\cos ۳^۲x$$

$$\vdots$$

$$۴\cos^۳ ۳^nx = \cos ۳^{n+۱}x + ۳\cos ۳^nx$$

اگر اولین اتحاد را در ۱ ضرب کنیم، دومین را در $(-۳)^{-۱}$، سومین را در $۳^{-۲}$ ، ...، nامین را در $(-۳)^{-n}$، و مجموع n جملهٔ اول سری مورد بحث را به S_n نشان دهیم، می‌بینیم که

$$۴S_n = ۳\cos x + (-۳)^{-n}\cos ۳^{n+۱}x$$

اگر فرض کنیم $n \longrightarrow \infty$، ملاحظه می‌کنیم که $S_n \longrightarrow \frac{۳}{۴}\cos x$.

مثال ۱۲. به‌ازای $|x| < 1$، داریم

$$\frac{1}{1+x} + \frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8} + \cdots = \frac{1}{1-x}$$

در واقع، مجموع جزئی nام سری

$$\ln(1-x) + \ln(1+x) + \ln(1+x^2) + \ln(1+x^4) + \ldots$$

برابر است با

$$\begin{aligned}
&\ln\{(1-x)(1+x)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^{n-2}})\}\\
&= \ln\{(1-x^2)(1+x^2)\ldots(1+x^{2^{n-2}})\}\\
&= \ldots\\
&= \ln(1-x^{2^{n-1}})
\end{aligned}$$

که به‌ازای $|x| < 1$ به صفر میل می‌کند وقتی که $n \longrightarrow \infty$. بعلاوه، به‌ازای $|x| \le \rho < 1$،

$$\left|\frac{2^n x^{2^n-1}}{1+x^{2^n}}\right| \le 2^n \rho^{2^n-1}$$

و سری $\sum 2^n \rho^{2^n}$ همگراست. از این رو، سری

$$\frac{2x}{1+x^2} + \frac{4x^3}{1+x^4} + \frac{8x^7}{1+x^8} + \ldots$$

به‌ازای $|x| \le \rho < 1$ به طوریکنواخت همگراست و، به استناد قضیهٔ ۵۶.۷ (که برای سریها مجدداً فرمولبندی شده باشد)، مجموعش مساوی مشتق $\ln(1+x) - \ln(1-x)$ است، یعنی $1/(x-1) - 1/(1+x)$؛ که حکم مطلوب فوراً نتیجه می‌شود.

مثال ۱۳. (قضیهٔ اشتولتس) فرض کنید $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ و $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ دو دنباله از اعداد حقیقی باشند. فرض کنید که $\{y_n\}_{n=1}^{\infty}$ به‌ازای nهای به قدر کافی بزرگ اکیداً صعودی باشد و $y_n \longrightarrow \infty$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{y_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} \qquad (۱۰۰.۷)$$

مشروط به این که حد طرف راست موجود باشد (متناهی یا نامتناهی).

در واقع، نخست فرض می‌کنیم که این حد متناهی باشد، یعنی

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} = r$$

که در آن r عددی حقیقی است. آن‌گاه، به‌ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیح مثبتی مانند k موجود است به طوری $n \geq k$ مستلزم

$$\left|\frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}} - r\right| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{و} \quad y_n - y_{n-1} > 0$$

باشد. بنابراین، ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای $n > k$ همهٔ کسرهای

$$\frac{x_{k+1} - x_k}{y_{k+1} - y_k},\ \frac{x_{k+2} - x_{k+1}}{y_{k+2} - y_{k+1}},\ \ldots,\ \frac{x_{n-1} - x_{n-2}}{y_{n-1} - y_{n-2}},\ \frac{x_n - x_{n-1}}{y_n - y_{n-1}}$$

بین $r - \varepsilon/2$ و $r + \varepsilon/2$ واقع می‌شوند. به استناد مثال ۱ از مثالهای حل شدهٔ بعد از قضیهٔ ۱۵.۷، کسر

$$\frac{x_n - x_k}{y_n - y_k}$$

نیز بین $r - \varepsilon/2$ و $r + \varepsilon/2$ است و از این رو،

$$\left|\frac{x_n - x_k}{y_n - y_k} - r\right| < \frac{\varepsilon}{2}$$

حال، اتحاد

$$\frac{x_n}{y_n} - r = \frac{x_k - ry_k}{y_n} + \left(1 - \frac{y_k}{y_n}\right)\left(\frac{x_n - x_k}{y_n - y_k} - r\right)$$

را به کار می‌بریم و نامساوی

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - r\right| \leq \left|\frac{x_k - ry_k}{y_n}\right| + \left|\frac{x_n - x_k}{y_n - y_k} - r\right|$$

را به دست می‌آوریم (با توجه به این که $y_k/y_n \longrightarrow 0$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$). از قبل می‌دانیم که جمعوند دوم طرف راست این نامساوی به ازای $n \geq k$ کوچکتر از $\varepsilon/2$ است؛ نخستین جمعوند (که صورت آن کمیت ثابتی است) نیز، به این دلیل که $y_n \longrightarrow \infty$، به‌ازای $n \geq n'$ کوچکتر از $\varepsilon/2$ می‌شود. با انتخاب $n' \geq k$، ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای $n \geq n'$،

$$\left|\frac{x_n}{y_n} - r\right| < \varepsilon$$

که حکم قضیه در حالت خاص مورد بحث ثابت می‌شود.

برای اتمام برهان، ملاحظه می‌کنیم که حالت حد نامتناهی به آسانی به حالت حد متناهی برمی‌گردد. به عنوان مثال، حالتی را در نظر بگیرید که

$$\frac{x_n - x_{n-۱}}{y_n - y_{n-۱}} \longrightarrow \infty \quad \text{وقتی که} \quad n \longrightarrow \infty$$

در این صورت، به‌ازای همهٔ nهای به قدر کافی بزرگ، $x_n - x_{n-۱} > y_n - y_{n-۱}$؛ از این رو، دنبالهٔ $\{x_n\}_{n=۱}^{\infty}$ از مرتبه‌ای به بعد صعودی است و $x_n \longrightarrow \infty$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. بنابراین، اگر کسرها را وارونه کنیم و آنچه را که قبلاً ثابت کرده‌ایم به کار ببریم، متوجه می‌شویم که

$$\lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{x_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n - y_{n-۱}}{x_n - x_{n-۱}} = ۰$$

و نتیجه می‌گیریم که $\lim_{n\to\infty} x_n/y_n = \infty$ و برهان تمام است.

مثال ۱۴. اگر $a_n > ۰$، $b_n > ۰$، سری $\sum_{n=۱}^{\infty} b_n$ واگرا باشد، و

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_n}{b_n} = L$$

که در آن L متناهی یا نامتناهی است، آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n}{b_۱ + b_۲ + \cdots + b_n} = L$$

درواقع، فقط باید در (۱۰۰.۷) قرار دهیم $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n = x_n$ و $b_۱ + b_۲ + \cdots + b_n = y_n$، و همه چیز واضح است.

مثال ۱۵. فرض کنید که $\{t_n\}_{n=۱}^{\infty}$ دنباله‌ای با حد (متناهی یا نامتناهی) T باشد. اگر $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n اعداد حقیقی مثبتی باشند که

$$a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n \longrightarrow \infty \quad \text{وقتی که} \quad n \longrightarrow \infty$$

آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{a_۱ t_۱ + a_۲ t_۲ + \cdots + a_n t_n}{a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n} \right) = T \qquad (۱۰۱.۷)$$

در واقع، (۱۰۱.۷) با انتخاب $a_۱ t_۱ + \cdots + a_n t_n = x_n$ و $a_۱ + \cdots + a_n = y_n$ از (۱۰۰.۷) نتیجه می‌شود.

تبصره. اگر در (۱۰۱.۷) فرض کنیم که $a_۱ = a_۲ = \cdots = a_n = ۱$، خواهیم داشت:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{t_۱ + t_۲ + \cdots + t_n}{n} = T \qquad (۱۰۲.۷)$$

مشروط به این که $\lim_{n\to\infty} t_n = T$، که در آن T متناهی یا نامتناهی است.

توجه کنید که (۱۰۲.۷) از قضیهٔ ۱۳.۷، که قبلاً در حالتی که T متناهی است ثابت شده است، بر ما معلوم است.

مثال ۱۶. فرض کنید که $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، ... همگی مثبت باشند و $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ یک سری نامتناهی همگرا با مجموع S باشد. بعلاوه، فرض کنید که

$$b_n = \frac{a_۱ + ۲a_۲ + \cdots + na_n}{n(n+۱)}$$

آن‌گاه

$$\sum_{n=۱}^{\infty} b_n = S$$

در واقع، از (۱۰۲.۷) می‌دانیم که دنبالهٔ

$$\frac{s_۱ + s_۲ + \cdots + s_n}{n}$$

به همان حد دنبالهٔ $\{s_n\}$ میل می‌کند. قرار می‌دهیم $s_n = \sum_{k=۱}^{n} a_k$. آن‌گاه

$$\begin{aligned}
\sum_{k=۱}^{n} b_k &= \frac{a}{۱\cdot ۲} + \frac{a_۱ + ۲a_۲}{۲\cdot ۳} + \frac{a_۱ + ۲a_۲ + ۳a_۳}{۳\cdot ۴} + \cdots + \frac{a_۱ + ۲a_۲ + \cdots + na_n}{n(n+۱)} \\
&= a_۱\left(۱ - \frac{۱}{n+۱}\right) + ۲a_۲\left(\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{n+۱}\right) + \cdots + na_n\left(\frac{۱}{n} - \frac{۱}{n+۱}\right) \\
&= \frac{na_۱}{n+۱} + \frac{(n-۱)a_۲}{n+۱} + \cdots + \frac{a_n}{n+۱} \\
&= \frac{s_۱ + s_۲ + \cdots + s_n}{n+۱} = \frac{s_۱ + s_۲ + \cdots + s_n}{n}\,\frac{۱}{۱ + ۱/n}
\end{aligned}$$

به این ترتیب

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=۱}^{n} b_k\right) = S$$

مثال ۱۷. (نامساوی کارلمان) فرض کنید $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، ... همگی مثبت باشند و $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n$ یک سری نامتناهی همگرا با مجموع S باشد. بعلاوه، فرض کنید

$$g_n = \sqrt[n]{a_۱ a_۲ \dots a_n}$$

و سری نامتناهی $\sum_{n=۱}^{\infty} g_n$ دارای مجموع U باشد. آن‌گاه

$$U < eS \qquad (۱۰۳.۷)$$

بعلاوه، e بهترین ثابت ممکن در (۱۰۳.۷) است.

در واقع، فرض کنید که b_n مانند مثال ۱۶ تعریف شود. آن‌گاه، به استناد قضیهٔ ۱۷.۴،

$$g_n = \sqrt[n]{a_۱ a_۲ \dots a_n} = \frac{۱}{n!}\sqrt[n]{a_۱ \cdot ۲a_۲ \cdot \dots \cdot na_n} \le \frac{n+۱}{\sqrt[n]{n!}} b_n$$

امّا

$$\left(۱+\frac{۱}{۱}\right)^۱ \left(۱+\frac{۱}{۲}\right)^۲ \dots \left(۱+\frac{۱}{n}\right)^n = \frac{(n+۱)^n}{n!} < e^n$$

که از این رو

$$\frac{n+۱}{\sqrt[n]{n!}} < e$$

به این ترتیب،

$$\sum_{k=۱}^{n} g_k < e \sum_{k=۱}^{n} b_k$$

و اگر $n \longrightarrow \infty$ نتیجه می‌گیریم که سری نامتناهی $\sum_{n=۱}^{\infty} g_n$ همگراست (زیرا، بنابر مثال ۱۶، $\sum_{n=۱}^{\infty} b_n = S$)، و مجموعش، که U فرض شده است، از eS تجاوز نمی‌کند.

برای تحقیق در این که e بهترین ثابت ممکن در (۱۰۳.۷) است، می‌نویسیم

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{۱}{n}, \qquad n = ۱, ۲, \dots, m \\ &= ۰, \qquad n > m \end{aligned}$$

در این صورت، باید ثابت کنیم که

$$\lim_{m\to\infty}\left(\frac{\sum_{n=۱}^{m} g_n}{\sum_{n=۱}^{m} a_n}\right) = e$$

امّا

$$\frac{\sum_{n=1}^{m} g_n}{\sum_{n=1}^{m} a_n} = \frac{\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}}{\sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n}} \qquad (104.7)$$

و چون $\sum_{n=1}^{\infty}(1/n)$ واگراست، به استناد مثال ۱۴، اگر $m/\sqrt[m]{m!}$ به حدی میل کند وقتی که $m \longrightarrow \infty$، طرف راست (۱۰۴.۷) به همان حد میل می‌کند. معذالک، از دهمین مثال از مثالهای حل شدهٔ بعد از قضیهٔ ۱۵.۷ می‌دانیم که

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sqrt[m]{m!}}{m} = \frac{1}{e}$$

از این رو، $m/\sqrt[m]{m!} \longrightarrow e$ وقتی که $m \longrightarrow \infty$ و برهان کامل است.

مثال ۱۸. (آزمون بندیکسون در مورد همگرایی یکنواخت) فرض کنید $|\sum_{n=0}^{m} f'_n(x)|$ به‌ازای همهٔ نقاط بازهٔ (a,b) به طول متناهی و به‌ازای همهٔ مقادیر m از عدد ثابتی مانند G کوچکتر باشد. در این صورت، اگر $\sum_{n=0}^{\infty} f_n(x)$ به‌ازای همهٔ نقاط (a,b) همگرا باشد، به طور یکنواخت همگراست.

در واقع، بازه را به j زیربازه که طول هر یک $L = \delta/G$ باشد تقسیم می‌کنیم به طوری که $\delta < \frac{1}{2}\varepsilon$، که در آن ε یک عدد مثبت دلخواه کوچک است. سپس، m را طوری می‌یابیم که در دو انتهای هر زیربازه قدرمطلق

$$g(x_r) = \sum_{n=m+1}^{m+p} f_n(x_r), \qquad p = 1, 2, 3, \ldots$$

کوچکتر از δ باشد. این کار میسر است زیرا که سری در هر یک از این نقاط همگرا می‌باشد و تعداد این نقاط متناهی است با عدد $(j+1)$. حال، اگر x نقطهٔ دلخواهی از بازه باشد فاصله‌اش تا نزدیکترین نقطهٔ انتهایی یک زیربازه (مثلاً x_r) بزرگتر از $L/2$ نیست؛ از این رو،

$$|g(x) - g(x_r)| < \left(\frac{L}{2}\right)(2G) = \delta$$

زیرا $|g'(x)| < 2G$. به این ترتیب،

$$|g(x)| < |g(x_r)| + \delta < 2\delta < \varepsilon$$

و آزمون همگرایی یکنواخت درست است.

مثال ۱۹. فرض کنید $u_n \downarrow 0$ و $u_1 + u_2 + \cdots + u_n \longrightarrow \infty$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. آن‌گاه

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n}{u_1 + u_2 + \cdots + u_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

مشروط به این که حد طرف راست موجود باشد.

[ملاحظه کنید که ما فرض نکرده‌ایم که $\lim_{n\to\infty} a_n$ موجود باشد و لذا (۱۰۱.۷) را نمی‌توان به کار برد؛ در واقع، چنان که در مثال ۲۰ خواهیم دید، این حکم به دلیلی که گفته شد از ارزش ویژه‌ای برخوردار است.]

در واقع، قرار دهید $a_1 + a_2 + \cdots + a_n = nA_n$ و فرض کنید که $A_n \longrightarrow A$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. آن‌گاه

$$\begin{aligned}
&a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n \\
&= A_1u_1 + (2A_2 - A_1)u_2 + \cdots + [nA_n - (n-1)A_{n-1}]u_n \\
&= A_1(u_1 - u_2) + 2A_2(u_2 - u_3) + \cdots + nA_n(u_n - u_{n+1}) + nA_nu_{n+1}
\end{aligned}$$

اگر فرض کنیم $c_n = n(u_n - u_{n+1})$ و توجه کنیم که

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n = u_1 + u_2 + \cdots + u_n - nu_{n+1}$$

خواهیم داشت:

$$\begin{aligned}
a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n &= A_1c_1 + A_2c_2 + \cdots + A_nc_n \\
&+ A_n\{(u_1 + u_2 + \cdots + u_n) - (c_1 + c_2 + \cdots + c_n)\} \quad (105.7)
\end{aligned}$$

چون $\{u_n\}$ نزولی است، c_n مثبت است. بعلاوه، $c_1 + c_2 + \cdots + c_n$ به قدر دلخواه بزرگ می‌شود. در واقع، اگر L عدد بزرگ دلخواهی باشد، k را می‌توان طوری انتخاب کرد که $c_1 + c_2 + \cdots + c_k$ از L تجاوز کند. آن‌گاه، n را می‌توان چنان اختیار کرد که

$$u_{n+1} < \frac{u_1 + u_2 + \cdots + u_k - L}{k}$$

برقرار باشد. این دو انتخاب متوالی میسر است زیرا

$$u_1 + u_2 + \cdots + u_n \longrightarrow \infty \text{ و } u_n \downarrow 0 \quad \text{وقتی که} \quad n \longrightarrow \infty$$

با توجه به این که $\{u_n\}$ نزولی است، داریم

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n > u_1 + u_2 + \cdots + u_k + (n-k)u_{n+1} - nu_{n+1}$$

یعنی،

$$c_1 + c_2 + \cdots + c_n > u_1 + u_2 + \cdots + u_k - ku_{n+1} > L$$

از این رو، به استناد (۷.۱۰۰)،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{A_1c_1 + A_2c_2 + \cdots + A_nc_n}{c_1 + c_2 + \cdots + c_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{A_nc_n}{c_n} = \lim_{n\to\infty} A_n$$

بنابراین، قسمت دوم سمت راست (۷.۱۰۵) تشکیل شده است از حاصل ضرب عاملی که همگرا به صفر است و عامل

$$\frac{c_1 + c_2 + \cdots + c_n}{u_1 + u_2 + \cdots + u_n} = 1 - \frac{nu_{n+1}}{u_1 + u_2 + \cdots + u_n}$$

که کمیتی بین ۰ و ۱ می‌باشد. از این رو، عبارت مورد بحث به صفر میل می‌کند در حالی که قسمت اول سمت راست (۷.۱۰۵) به A میل می‌کند. به این ترتیب،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n}{u_1 + u_2 + \cdots + u_n} = A$$

مثال ۲۰. (قضیهٔ چزارو) نسبت بسامد جمل مثبت و منفی یک سری همگرای مشروط مانند $\sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n$ که در آن $|\alpha_n|$ به طور یکنوا کاهش پیدا کند از قانون زیر تبعیت می‌کند: حد کسر P_n/Q_n، که در آن P_n تعداد جمل مثبت و Q_n تعداد جمل منفی α_n به‌ازای $k \leq n$ است، در صورت وجود، الزاماً ۱ است.

در واقع، فرض کنید

$$\begin{aligned} a_n &= 1 && \text{اگر } \alpha_n \text{ مثبت باشد،} \\ &= -1 && \text{اگر } \alpha_n \text{ منفی باشد،} \end{aligned}$$

و $u_n = |\alpha_n|$. آن‌گاه

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3 + \cdots = a_1u_1 + a_2u_2 + a_3u_3 + \ldots$$

سری $u_1 + u_2 + u_3 + \ldots$ واگرا است و $u_n \downarrow 0$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. به استناد مثال ۱۹،

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_1u_1 + a_2u_2 + \cdots + a_nu_n}{u_1 + u_2 + \cdots + u_n} = 0$$

مشروط به این که حد اول موجود باشد. با توجه به این که $a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n$ مساوی فزونی تعداد جمل مثبت بر تعداد جمل منفی است، می‌بینیم که کسر دو عدد مورد بحث در

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n + (a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n)}{n - (a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{۱ + (۱/n)(a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n)}{۱ - (۱/n)(a_۱ + a_۲ + \cdots + a_n)} = ۱$$

صدق می‌کند؛ یعنی، بسامد جمل مثبت و جمل منفی مجانباً یکسان است.

مثال ۲۱. (قضیهٔ تاوبر) فرض کنید که سری توانی $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n x^n$ به‌ازای $|x| < ۱$ همگرا به $f(x)$ باشد و $\lim_{n\to\infty} na_n = ۰$. اگر $f(x) \longrightarrow A$ وقتی که $x \longrightarrow ۱-$، آن‌گاه سری $\sum_{n=۰}^{\infty} a_n$ همگرا به A است.

در واقع، می‌خواهیم تفاضلاتی از قبیل $\sum_{n=۰}^{N} a_n - A$ را تخمین بزنیم. برای این مقصود، می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \sum_{n=۰}^{N} a_n - A &= \left(\sum_{n=۰}^{N} a_n - f(x)\right) + \{f(x) - A\} \\ &= \sum_{n=۰}^{N} a_n(۱ - x^n) - \sum_{n=N+۱}^{\infty} a_n x^n + \{f(x) - A\} \end{aligned} \tag{۱۰۶.۷}$$

چون $۰ \leq x < ۱$، داریم $۱ - x^n = (۱ - x)(۱ + x + \cdots + x^{n-۱}) < n(۱ - x)$؛ از این رو، اولین جملهٔ سمت راست مغلوب

$$(۱ - x)\sum_{n=۰}^{N} na_n$$

واقع می‌شود. بنابه فرض، $\lim_{n\to\infty} na_n = ۰$؛ لذا، به استناد قضیهٔ ۱۳.۷،

$$\lim_{m\to\infty} \left(\frac{۱}{m + ۱}\sum_{n=۰}^{m} na_n\right) = ۰$$

بعلاوه، $f(x) \longrightarrow A$ را مفروض داریم.

حال، فرض کنید $\varepsilon > ۰$ مفروض باشد و عدد صحیح مثبت ثابتی مانند N را به قدری بزرگ انتخاب می‌کنیم که

الف) $\left|\sum_{n=۰}^{N} na_n\right| < (N + ۱)\varepsilon$

ب) به‌ازای هر $n \geq N$، $|a_n| < \frac{\varepsilon}{N+۱}$

ج) به‌ازای $x_۰ = ۱ - \frac{۱}{N+۱}$، $|f(x_۰) - A| < \varepsilon$

در این صورت، از (۱۰۶.۷) با عنایت به ملاحظات بالا و این که $(1-x_\circ)(N+1) = 1$ نتیجه می‌شود که

$$\left|\sum_{n=\circ}^{N} a_n - A\right| \le (1-x_\circ)(N+1)\varepsilon + \frac{\varepsilon}{N+1}\frac{x_\circ^{N+1}}{1-x_\circ} + \varepsilon < 3\varepsilon$$

از این رو، $\sum_{n=\circ}^{\infty} a_n$ همگرا به A است.

مثال ۲۲. (قضیهٔ برنشتاین) فرض کنید f بر بازهٔ $[\circ, r]$ تعریف شده و مشتقاتش از هر مرتبه در این بازه موجود باشند و f و همهٔ مشتقاتش بر بازهٔ $[\circ, r]$ نامنفی باشند. اگر $\circ \le x < r$، نشان دهید که

$$f(x) = \sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{f^{(n)}(\circ)}{n!}x^n$$

برای اثبات از فرمول (۴۵.۵) استفاده می‌کنیم؛ اگر $\circ \le x < r$ آن‌گاه

$$f(x) = \sum_{k=\circ}^{n} \frac{f^{(k)}(\circ)}{k!}x^n + R_n \tag{۱۰۷.۷}$$

که در آن

$$R_n = \frac{1}{n!}\int_\circ^r f^{(n+1)}(t)(r-t)^n dt = \frac{r^n}{n!}\int_\circ^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(rs)ds$$

چون همهٔ جمل مجموع (۱۰۷.۷) نامنفی هستند،

$$f(r) \ge \frac{r^n}{n!}\int_\circ^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(rs)ds \tag{۱۰۸.۷}$$

چون $f^{(n+2)}$ نامنفی است، $f^{(n+1)}$ بر $[\circ, r]$ صعودی است؛ بنابراین، اگر x در این بازه باشد آن‌گاه

$$R_n \le \frac{x^n}{n!}\int_\circ^1 (1-s)^n f^{(n+1)}(rs)ds \tag{۱۰۹.۷}$$

از ترکیب (۱۰۸.۷) و (۱۰۹.۷)، خواهیم داشت:

$$R_n \le \left(\frac{x}{r}\right)^n f(r)$$

از این رو، اگر $\circ \le x < r$ آن‌گاه $\lim_{n\to\infty} R_n = \circ$ و برهان تمام است.

تمرینات

۱.۷. فرض کنید $a_۲ > a_۱ > ۰$ و به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ تعریف کنید $a_{n+۲} = \sqrt{a_{n+۱}a_n}$. نشان دهید که دنبالهٔ $\{a_{۲n-۱}\}$ صعودی و از بالا به $a_۲$ کراندار است و $\{a_{۲n}\}$ نزولی واز پایین به $a_۱$ کراندار است و هر دو دنباله به حد مشترک $(a_۱a_۲^۲)^{۱/۳}$ میل می‌کنند.

راهنمایی: توجه کنید که $a_{n+۲}$، که میانگین هندسی a_n و $a_{n+۱}$ است، بین a_n و $a_{n+۱}$ قرار می‌گیرد. همچنین، $a_{n+۲}\sqrt{a_{n+۱}} = a_{n+۱}\sqrt{a_n} = \cdots = a_۲\sqrt{a_۱}$.

۲.۷. فرض کنید $۰ < A \leq a_۱ < a_۲ \leq B$ و دنبالهٔ $\{A_n\}$ را مانند تمرین ۱.۷ تعریف کنید. نشان دهید که

$$|a_{n+۱} - a_n| \leq \frac{B}{A+B}|a_n - a_{n-۱}| \leq \left(\frac{B}{A+B}\right)^{n-۱} |a_۲ - a_۱|$$

و نتیجه بگیرید که $\{a_n\}$ دنباله‌ای کوشی است.

راهنمایی: به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$، $A \leq a_n \leq B$ و $a_{n+۱}^۲ - a_n^۲ = a_n(a_{n-۱} - a_n)$ به طوری که

$$|a_{n+۱} - a_n| = \frac{a_n}{a_{n+۱} + a_n}|a_n - a_{n-۱}| \leq \frac{B}{A+B}|a_n - a_{n-۱}|$$

بعلاوه، اگر $n > m$ آن‌گاه

$$\begin{aligned} |a_n - a_m| &= |a_n - a_{n-۱} + a_{n-۱} - a_{n-۲} + \cdots + a_{m+۱} - a_m| \\ &\leq |a_n - a_{n-۱}| + |a_{n-۱} - a_{n-۲}| + \cdots + |a_{m+۱} - a_m| \end{aligned}$$

۳.۷. مجموعه‌های اعداد $a_۱$، $a_۲$، $a_۳$، …، و $b_۱$، $b_۲$، $b_۳$، … متوالیاً با روابط

$$a_{n+۱} = \frac{a_n + b_n}{۲}, \qquad b_{n+۱} = \frac{۲a_nb_n}{a_n + b_n}$$

تعریف شده‌اند که در آنها $a_۱ > b_۱ > ۰$. نشان دهید که به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$

$$a_n > a_{n+۱} > b_{n+۱} > b_n > ۰$$

و هر دو دنبالهٔ $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ به حد مشترک $\sqrt{a_۱b_۱}$ میل می‌کنند.

راهنمایی: توجه کنید که $b_{n+۱}$ میانگین همساز a_n و b_n است. همچنین، ملاحظه کنید که $a_{n+۱}b_{n+۱} = a_nb_n = \cdots = a_۱b_۱$.

۴.۷. فرض کنید که $a_۱ = ۱$ و، به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ ، $a_{n+۱} = ۲(۲a_n + ۱)/(a_n + ۳)$. نشان دهید که $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی است که از پایین به ۰ و از بالا به ۲ کراندار است و به ۲ میل می‌کند.
راهنمایی:

$$۲ - a_{n+۱} = \frac{۲(۲ - a_n)}{a_n + ۳} \quad \text{و} \quad a_{n+۱} - a_n = \frac{(۲ - a_n)(۱ + a_n)}{a_n + ۳}$$

۵.۷. فرض کنید $a_۱ = \sqrt{۲}$ و، به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ ، $a_{n+۱} = (\sqrt{۲})^{a_n}$. نشان دهید که $\{a_n\}$ دنباله‌ای صعودی است که از بالا به ۲ کراندار است. $\lim_{n\to\infty} a_n$ را بیابید.
راهنمایی: مسلماً $a_۲ > a_۱$. بعلاوه، $a_n > a_{n-۱}$ ایجاب می‌کند که $a_{n+۱} > a_n$ زیرا

$$\frac{a_{n+۱}}{a_n} = (\sqrt{۲})^{a_n - a_{n-۱}}$$

و $a_n < ۲$ ایجاب می‌کند که $a_{n+۱} < ۲$ زیرا $۲/a_{n+۱} = (\sqrt{۲})^{۲-a_n}$.

۶.۷. فرض کنید که به‌ازای $n = ۱, ۲, ۳, \ldots$ ، $a_{n+۱} = \frac{۱}{۲}(a_n + a_{n-۱})$. نشان دهید که $\{a_n\}$ دنباله‌ای کوشی است و $a_n \longrightarrow (a_۰ + ۲a_۱)/۳$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$.
راهنمایی: $a_{n+۱} - a_n = \frac{۱}{۲}(a_{n-۱} - a_n)$ ایجاب می‌کند که

$$|a_{n+۱} - a_n| = \frac{۱}{۲}|a_{n-۱} - a_n| = \frac{۱}{۲^۲}|a_{n-۱} - a_{n-۲}| = \cdots = \frac{۱}{۲^n}|a_۱ - a_۰|$$

بعلاوه، $a_{n+۱} + \frac{۱}{۲}a_n = a_n + \frac{۱}{۲}a_{n-۱} = \cdots = a_۱ + \frac{۱}{۲}a_۰$.

۷.۷. فرض کنید که دنبالهٔ $\{a_n\}$ مانند تمرین ۶.۷ تعریف شده باشد. نشان دهید که

$$a_n = c_۱ + c_۲\left(-\frac{۱}{۲}\right)^n$$

که در آن $c_۱ = (a_۰ + ۲a_۱)/۳$ و $c_۲ = ۲(a_۰ - a_۱)/۳$.
راهنمایی: اگر $a_n = t_n$ و $a_n = s_n$ در رابطهٔ $a_{n+۱} = \frac{۱}{۲}(a_n + a_{n-۱})$ صدق کنند، آنگاه $a_n = c_۱t_n + c_۲s_n$ به‌ازای هر دو ثابت دلخواه $c_۱$ و $c_۲$ نیز در آن رابطه صدق می‌کند. به‌ازای $n \geq ۲$ ، $a_n = v^n$ در رابطهٔ مفروض صدق می‌کند مشروط به این که $v^۲ = \frac{۱}{۲}(v + ۱)$، یعنی، هرگاه $v = ۱$ یا $v = -\frac{۱}{۲}$. از این رو، $a_n = c_۱ + c_۲(-\frac{۱}{۲})^n$. $c_۱$ و $c_۲$ را طوری انتخاب کنید که $a_n = c_۱ + c_۲(-\frac{۱}{۲})^n$ به‌ازای $n = ۰$ و ۱ نیز برقرار باشد؛ در این صورت، خواهید داشت $c_۱ = (a_۰ + ۲a_۱)/۳$ و $c_۲ = ۲(a_۰ - a_۱)/۳$. همچنین، توجه کنید که $a_n \longrightarrow (a_۰ + ۲a_۱)/۳$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$.

۸.۷. دنباله‌ای که چنین تعریف شود: $a_0 = 0$، $a_1 = 1$، و $a_{n+1} = \lambda(a_n + a_{n-1})$ وقتی که $n \geq 1$، همگراست مشروط به این که $-1 < \lambda \leq \frac{1}{2}$.

راهنمایی: به روش مذکور در راهنمایی تمرین ۷.۷ ملاحظه می‌کنیم که در این حالت نمایشی به صورت $a_n = c_1 v_1^n + c_2 v_2^n$ داریم که در آن v_1 و v_2 ریشه‌های معادلهٔ $v^2 = \lambda(v+1)$ می‌باشند، یعنی

$$v_1 = \frac{\lambda + (\lambda^2 + 4\lambda)^{1/2}}{2} \quad \text{و} \quad v_2 = \frac{\lambda - (\lambda^2 + 4\lambda)^{1/2}}{2}$$

و c_1 و c_2 در رابطهٔ $c_1 = -c_2$ صدق می‌کنند و $c_1 = 1/(\lambda^2 + 4\lambda)^{1/2}$. برای این که $\{a_n\}$ همگرا باشد لازم است که $|v_1| \leq 1$ و $|v_2| \leq 1$. امّا این حالت وقتی رخ می‌دهد که $-1 < \lambda \leq \frac{1}{2}$.

۹.۷. فرض کنید که $3a_{n+1} = 2a_n + a_{n-1}$ با $a_0 = 7$ و $a_1 = 3$. $\lim_{n\to\infty} a_n$ را بیابید.

راهنمایی: روش مذکور در راهنمایی تمرین ۷.۷ را ملاحظه و توجه کنید که در این حالت نمایش $a_n = 4 - 9(-\frac{1}{3})^n$ را داریم.

۱۰.۷. هرگاه $a_{n+1} = +\sqrt{a_n + k}$، $a_0 > \frac{1}{2}$، و $k > 0$، نشان دهید که دنبالهٔ $\{a_n\}$ همگرا است و حدش ریشهٔ مثبت معادلهٔ زیر است:

$$x^2 - x - k = 0$$

راهنمایی: همواره $a_n > 0$. اگر $a_0^2 - a_0 = k$ آن‌گاه همواره $a_n = a_0$ و، از این رو، a_n مساوی ریشهٔ مثبت معادلهٔ

$$x^2 - x = k$$

است. اگر $a_0^2 - a_0 < k$ (که در این صورت a_0 کوچکتر از ریشهٔ مثبت $x^2 - x = k$ است)، b_0 را بزرگتر از ریشهٔ مثبت $x^2 - x = k$ انتخاب کنید به طوری که $b_0^2 - b_0 > k$، و b_n را با $b_{n+1} = +\sqrt{b_n + k}$ تعریف کنید. چون $a_{n+1}^2 = a_n + k$، داریم

$$a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 = a_{n+1} - a_n$$

ولی $a_1^2 - a_0^2 = -(a_0^2 - a_0 - k)$ و لذا همواره $a_{n+1} > a_n$. به طور مشابه، همواره $b_{n+1} < b_n$. امّا $b_0 > a_0$ و $b_{n+1}^2 - a_{n+1}^2 = b_n - a_n$ که نشان می‌دهد که همواره $b_n > a_n$ و

$$b_{n+1} - a_{n+1} = \frac{b_n - a_n}{b_{n+1} + a_{n+1}} < \frac{b_n - a_n}{2a_1}, \qquad 2a_1 > 2a_0 > 1$$

که نشان می‌دهد که a_n و b_n به یک حد، مثلاً L، میل می‌کنند. چون $a_{n+1}^2 = a_n + k$، با حدگیری وقتی که $n \longrightarrow \infty$ نتیجه می‌گیریم که $L^2 - L - k = 0$ و $L > 0$. اگر $a_0^2 - a_0 > k$، نقش a_n و b_n را عوض کنید.

۱۱.۷. فرض کنید $a_{n+1} = k/(1 + a_n)$، $k > 0$، $a_0 > 0$. نشان دهید که $\{a_n\}$ همگرا می‌باشد و حدش ریشهٔ مثبت معادلهٔ زیر است:

$$x^2 + x - k = 0$$

راهنمایی: همواره $a_n > 0$. اگر $a_0^2 + a_0 = k$ آن‌گاه همواره $a_n = a_0$. اگر $a_0^2 + a_0 < k$ آن‌گاه

$$a_1 - a_0 = \frac{k}{1 + a_0} - a_0 = -\frac{a_0^2 + a_0 - k}{1 + a_0} > 0$$

و لذا $a_1 > a_0$. چون

$$a_{n+2} = \frac{k}{1 + a_{n+1}} = \frac{k(1 + a_n)}{1 + k + a_n}$$

داریم

$$\begin{aligned} a_{2n+1} - a_{2n} &= \frac{k(1 + a_{2n-1})}{1 + k + a_{2n-1}} - \frac{k(1 + a_{2n-2})}{1 + k + a_{2n-2}} \\ &= \frac{k^2(a_{2n-1} - a_{2n-2})}{(1 + k + a_{2n-2})(1 + k + a_{2n-1})} \end{aligned}$$

و ملاحظه می‌کنیم که $a_{2n+1} - a_{2n}$ دارای همان علامت است که $a_{2n-1} - a_{2n-2}$؛ و لذا مثبت است، زیرا $a_1 - a_0 > 0$. همچنین،

$$a_{2n+1} - a_{2n} < \left(\frac{k}{1 + k}\right)^2 (a_{2n-1} - a_{2n-2})$$

بعلاوه،

$$\begin{aligned} a_2 - a_0 &= -\frac{a_0^2 + a_0 - k}{1 + k + a_0} > 0 \\ a_3 - a_1 &= \frac{k(a_0^2 + a_0 - k)}{(1 + a_0)^2(1 + k) + (1 + a_0)k} < 0 \end{aligned}$$

و

$$a_{2n+2} - a_{2n} = \frac{k^2(a_{2n} - a_{2n-2})}{(1 + k + a_{2n})(1 + k + a_{2n-2})}$$

$$a_{2n+3}-a_{2n+1}=\frac{k^2(a_{2n+1}-a_{2n-1})}{(1+k+a_{2n+1})(1+k+a_{2n-1})}$$

که نشان می‌دهد که همواره $a_{2n+2}>a_{2n}$ و $a_{2n+3}<a_{2n+1}$ و، از این رو،

$$a_{2n}<a_{2n+2}<a_{2n+3}<a_{2n+1}$$

یعنی، همواره بازهٔ بستهٔ $[a_{2n+2},a_{2n+3}]$ مشمول در بازهٔ بستهٔ $[a_{2n},a_{2n+1}]$ است.

۱۲.۷. دنبالهٔ $\{a_n\}$ را مانند تمرین ۱۱.۷ تعریف کنید. نشان دهید که همواره یک ریشهٔ $x^2+x=k$ بین a_{2n} و a_{2n+1} واقع می‌شود، مشروط به این که $a_0^2+a_0\neq k$.

راهنمایی: داریم $a_{n+1}-a_n=-(a_n^2+a_n-k)/(1+a_n)$؛ اگر $a_0^2+a_0-k<0$ آن‌گاه (به راهنمایی تمرین ۱۱.۷ نگاه کنید)

$$a_{2n+1}>a_{2n},\qquad a_{2n+1}>a_{2n+2}$$

و لذا $a_{2n}^2+a_{2n}-k$ منفی است و $a_{2n+1}^2+a_{2n+1}-k$ مثبت است؛ از این رو، چون x^2+x-k پیوسته است، نتیجه می‌شود که یک ریشهٔ x^2+x-k بین a_{2n} و a_{2n+1} واقع می‌شود.

۱۳.۷. اگر $a_{n+1}=2k^2a_n/(a_n^2+k^2)$ و $b_{n+1}=(b_n^2+k^2)/2b_n$، $a_0>0$، $b_0>0$، $k>0$، آن‌گاه a_n و b_n هر دو به k میل می‌کنند.

راهنمایی: داریم

$$\frac{k-a_{n+1}}{k+a_{n+1}}=\left(\frac{k-a_n}{k+a_n}\right)^2$$
$$=\left(\frac{k+a_0}{k+a_0}\right)^{2^n}\longrightarrow 0$$

به طور مشابه،

$$\frac{b_{n+1}-k}{b_{n+1}+k}=\left(\frac{b_0-k}{b_0+k}\right)^{2^n}\longrightarrow 0$$

۱۴.۷. اگر $|b_{n+2}-b_{n+1}|\leq k|b_{n+1}-b_n|$ و $k<1$، تحقیق کنید که دنبالهٔ $\{b_n\}$ همگرا می‌باشد. از این رو، نشان دهید که اگر همواره

$$pc_{n+2}-(p+q)c_{n+1}+qc_n=0,\qquad p>q>0$$

آن‌گاه $pc_{n+2} - qc_{n+1} = pc_1 - qc_0$ و c_n همگرا به $(pc_1 - qc_0)/(p-q)$ است.

راهنمایی: چون $|b_{n+2} - b_{n+1}|/|b_{n+1} - b_n| \leq k < 1$، سری $\sum(b_{n+1} - b_n)$ مطلقاً همگرا می‌باشد؛ و لذا،

$$\sum_{r=1}^{n-1}(b_{r+1} - b_r) = b_n - b_0$$

همگراست.

از این رو، چون $(c_{n+2} - c_{n+1})/(c_{n+1} - c_n) = q/p > 0$، داریم

$$\frac{|c_{n+2} - c_{n+1}|}{|c_{n+1} - c_n|} = \frac{q}{p} < 1$$

که نشان می‌دهد که c_n همگراست؛ فرض کنید γ حد c_n باشد.

از $pc_{n+2} - qc_{n1} = pc_{n+1} - qc_n$ نتیجه می‌شود که $pc_{n+2} - qc_{n+1} = pc_1 - qc_0$ و لذا

$$pc_1 - qc_0 = \lim_{n\to\infty}(pc_{n+2} - qc_{n+1}) = (p-q)\gamma$$

۱۵.۷. اگر $\{a_n\}$ دنباله‌ای کراندار از اعداد حقیقی باشد و $2a_n \leq a_{n-1} + a_{n+1}$، نشان دهید که $\lim_{n\to\infty}(a_{n+1} - a_n) = 0$.

راهنمایی: داریم $a_n - a_{n-1} \leq a_{n+1} - a_n$، بنابراین $\{a_n - a_{n-1}\}$ صعودی ولی کراندار است؛ بنابراین، $a_n - a_{n-1} \longrightarrow k$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. فرض کنید $k \neq 0$. اگر $k > 0$ (حالت دیگر مشابه است)، آن‌گاه به‌ازای هر $n \geq N$، که N به قدر مناسب بزرگ اختیار شده باشد، $a_n - a_{n-1} > \frac{1}{2}k$. به این ترتیب،

$$a_M - a_{N-1} = \sum_{n=N}^{M}(a_n - a_{n-1}) > \frac{1}{2}(M-N)k$$

که با فرض کرانداری $\{a_n\}$ متناقض می‌باشد. بنابراین، $k \leq 0$. به طور مشابه، $k \geq 0$. لذا، $k = 0$.

۱۶.۷. حاصل جمع n جملهٔ اول سری

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{k!}{(x+1)(x+2)\ldots(x+k)}$$

را بیابید و به استناد آن نشان دهید که این سری به‌ازای $x > 1$ همگرا و به‌ازای $x \leq 1$ واگرا می‌باشد.

راهنمایی: فرض کنید $u_1 = 1$ و $u_{k+1} = k!/(x+1)(x+2)\dots(x+k)$، آن‌گاه

$$(x+k)u_{k+1} = ku_k$$

و لذا $(x-1)u_{k+1} = ku_k - (k+1)u_{k+1}$؛ از این رو،

$$(x-1)\sum_{k=1}^{n} u_{k+1} = 1 - \frac{(n+1)!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

بنابراین، اگر $x \neq 1$ آن‌گاه

$$\sum_{k=1}^{n} u_{k+1} = \frac{1}{x-1} - \frac{(n+1)!}{(x-1)(x+1)(x+2)\dots(x+n)}$$

اگر $y > 0$ آن‌گاه

$$\left(1+\frac{y}{2}\right)\left(1+\frac{y}{3}\right)\dots\left(1+\frac{y}{n}\right) > 1 + y\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}\right) > \frac{Ny}{2}$$

هرگاه $n > 2^N$، و لذا

$$\frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)} = \frac{1}{(1+y/2)(1+y/3)\dots(1+y/n)} \longrightarrow 0$$

که در آن $y = x - 1 > 0$. به این ترتیب، به‌ازای $x > 1$ سری مفروض همگرا به $1/(x-1)$ است.
اگر $x < 1$، قرار دهید $z = x - 1 > 0$. آن‌گاه

$$\frac{n!}{(x+1)(x+2)\dots(x+n-1)} = \frac{n!}{(2-z)(3-z)\dots(n-z)}$$
$$= \frac{1}{(1-z/2)(1-z/3)\dots(1-z/n)}$$

که وقتی $z < p$، (p را یک عدد صحیح بزرگتر از واحد در نظر بگیرید)،

$$> \frac{(1+z/p)\{1+z/(p+1)\}\dots(1+z/n)}{(1-z/2)(1-z/3)\dots\{1-z/(p-1)\}}$$

زیرا $1/(1-z/r) > 1 + z/r$ وقتی که $z < r$،

$$> \frac{z\{1/p + 1/(p+1) + \dots + 1/n\}}{(1-z/2)(1-z/3)\dots\{1-z/(p-1)\}}$$

از این رو، دنبالهٔ $\{n!/(x+1)(x+2)\dots(x+n)\}$ واگرا می‌باشد، و لذا سری $\sum u_k$ واگراست.

۱۷.۷. نشان دهید که اگر $x > ۱$ آن‌گاه سری

$$\frac{۱}{x+۱}+\frac{۲}{x^{۲}+۱}+\frac{۴}{x^{۴}+۱}+\frac{۸}{x^{۸}+۱}+\dots$$

دارای مجموع $۱/(x-۱)$ است.

راهنمایی: توجه کنید که $۱/(x-۱)-۱/(x+۱)=۲/(x^{۲}-۱)$.

۱۸.۷. نشان دهید که $k+۴$ جمله از سری

$$\sum_{r=۰}^{\infty}\frac{۱}{r!}$$

برای تعیین مقدار تقریبی حد سری تا k رقم اعشار کفایت می‌کند.

راهنمایی: به‌ازای $n\geq ۱۰$، $\frac{۱}{۲}(n!) > ۳\cdot۴\cdot۵\cdot۶\cdot۷\cdot۸\cdot۹\cdot۱۰^{n-۹} > ۱۰^{n-۴}$؛ ولی هرگاه $n\geq k+۴$

$$\begin{aligned}\frac{۱}{(n+۱)!}+\frac{۱}{(n+۲)!}+\dots &< \frac{۱+۱/۲+۱/۲^{۲}+\dots}{(n+۱)!}\\ &< \frac{۲}{(n+۱)!}<\frac{۱}{۱۰^{n-۳}}\leq\frac{۱}{۱۰^{k+۱}}\end{aligned}$$

۱۹.۷. به ازای چه مقادیری از x سری

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲^{n}x^{n}}{\sqrt{n}}$$

(الف) مطلقاً همگرا است؟ (ب) همگرا است (ولی نه به طور مطلق) (ج) واگرا است؟

راهنمایی: فرض کنید $a_n=۱/\sqrt{n}$. آن‌گاه $p_n=a_n/a_{n+۱}=\sqrt{۱+۱/n}$ از این رو، $p_n^{۲}=۱+۱/n$ و هرگاه $n\geq k$ آن‌گاه $p_n-۱\leq ۱/k(p_n+۱)$ که نشان می‌دهد که $p_n\longrightarrow ۱$. به این ترتیب، $\sum a_nt^n$ به‌ازای $|t|<۱$ مطلقاً همگرا می‌باشد و به‌ازای $|t|>۱$ واگرا. وقتی $t=۱$، $\sum a_nt^n=\sum ۱/\sqrt{n}$، که واگراست به این دلیل که $۱/\sqrt{n}>۱/n$، و وقتی $t=-۱$، $\sum a_nt^n=\sum(-۱)^n/\sqrt{n}$، که همگراست به این دلیل که $۱/\sqrt{n}$ نزولی با حد صفر است. اگر بگیریم $t=۲x$، ملاحظه می‌کنیم که

$$\sum_{n=۱}^{\infty}\frac{۲^{n}x^{n}}{\sqrt{n}}$$

به‌ازای $|x|<\frac{۱}{۲}$ مطلقاً همگراست، به‌ازای $x=-\frac{۱}{۲}$ همگراست، و به‌ازای $x\geq\frac{۱}{۲}$ یا $x<-\frac{۱}{۲}$ واگراست.

۲۰.۷. اگر $x_0 > 0$، $x_{n+1} = +\sqrt{x_n}$، آن‌گاه تبدیل $y = \sqrt{x}$ به نتیجهٔ

$$\int_1^{x_{n+1}} \frac{1}{y} dy = \frac{1}{2} \int_1^{x_n} \frac{1}{x} dx$$

می‌انجامد. از این رو، نشان دهید که

$$2^n (x_n - 1) \longrightarrow \int_1^{x_0} \frac{1}{x} dx = \ln x_0$$

راهنمایی: داریم

$$2^n \int_1^{x_n} \frac{1}{y} dy = \int_1^{x_0} \frac{1}{x} dx$$

چون $\sqrt{x_n} = x_{n+1}$، داریم $(x_{n+1} - 1)/(x_n - 1) = 1/(x_{n+1} + 1)$؛ ولی اگر $x_0 > 1$ آن‌گاه همواره $x_n > 1$ و لذا $(x_{n+1} - 1)/(x_n - 1) < 1/2$ و $(x_n - 1)/(x_0 - 1) < 1/2^n$ که نشان می‌دهد که $x_n \longrightarrow 1$. اگر $x_0 < 1$ آن‌گاه $1/x_n > 1$ که، به استناد ملاحظات بالا، $1/x_n \longrightarrow 1$، یعنی، $x_n \longrightarrow 1$. سرانجام، اگر $x_0 = 1$، آن‌گاه همواره $x_n = 1$.

حال، ملاحظه می‌کنیم که

$$\lim_{t \to 1} \frac{\int_1^t (1/x) dx}{t - 1} = \lim_{t \to 1} \frac{1}{t} = 1$$

و لذا

$$\frac{2^n \int_1^{x_n} (1/x) dx}{2^n (x_n - 1)} = \frac{\int_1^{x_n} (1/x) dx}{x_n - 1} \longrightarrow 1$$

۲۱.۷. اگر $x_{n+1} = x_n / [1 + (1 + x_n^2)^{1/2}]$، آن‌گاه تبدیل

$$y = \frac{x}{1 + (1 + x^2)^{1/2}}$$

به نتیجهٔ

$$\int_0^{x_{n+1}} \frac{1}{1 + y^2} dy = \frac{1}{2} \int_0^{x_n} \frac{1}{1 + x^2} dx$$

می‌انجامد. از این رو، نشان دهید که

$$2^n x_n \longrightarrow \int_0^{x_0} \frac{1}{1 + x^2} dx = \tan^{-1} x_0$$

راهنمایی: چون $x_{n+1} = x_n / [1 + (1 + x_n^2)^{1/2}]$، داریم $|x_{n+1}| < \frac{1}{2} |x_n|$ و لذا

$$|x_n| < \frac{1}{2^n} |x_0| \longrightarrow 0$$

با تبدیل

$$y = \frac{x}{۱ + (۱ + x^۲)^{۱/۲}} = \frac{(۱ + x^۲)^{۱/۲} - ۱}{x}$$

داریم

$$y = \frac{۱}{y} = \frac{۲(۱ + x^۲)^{۱/۲}}{x}, \qquad y - \frac{۱}{y} = -\frac{۲}{x}$$

و لذا

$$\left(y + \frac{۱}{y}\right)\frac{۱}{y}\frac{dy}{dx} = \left(۱ + \frac{۱}{y^۲}\right)\frac{dy}{dx} = \frac{۲}{x^۲}$$

از این رو،

$$\frac{۱}{۱ + y^۲}\frac{dy}{dx} = \frac{۱}{(y + ۱/y)^۲}\left(y + \frac{۱}{y}\right)\frac{۱}{y}\frac{dy}{dx} = \frac{x^۲}{۴(۱ + x^۲)}\frac{۲}{x^۲} = \frac{۱}{۲}\frac{۱}{۱ + x^۲}$$

به این ترتیب،

$$\int_۰^{x_{n+۱}} \frac{۱}{۱ + y^۲}dy = \frac{۱}{۲}\int_۰^{x_n} \frac{۱}{۱ + x^۲}dx$$

و لذا

$$۲^n \int_۰^{x_n} \frac{۱}{۱ + y^۲}dy = \int_۰^{x_۰} \frac{۱}{۱ + x^۲}dx$$

چون

$$\lim_{t \to ۰} \frac{\int_۰^t \frac{۱}{۱+x^۲}dx}{t} = \lim_{t \to ۰} \frac{۱}{۱ + t^۲} = ۱$$

داریم

$$\frac{۲^n \int_۰^{x_n} \frac{۱}{۱+y^۲}dy}{۲^n x_n} = \frac{\int_۰^{x_n} \frac{۱}{۱+x^۲}dx}{x_n} \longrightarrow ۱$$

و لذا

$$۲^n x_n \longrightarrow \int_۰^{x_۰} \frac{۱}{۱ + x^۲}dx = \tan^{-۱} x_۰$$

۲۲.۷. دنبالهٔ $\{u_n\}$ با مقدار مفروضی از جملهٔ $u_۰$ و با رابطهٔ $u_{n+۱} = (۶u_n^۲ + ۶)/(u_n^۲ + ۱۱)$ تعریف شده است. تحقیق کنید که اگر $L \longrightarrow u_n$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$، آن‌گاه L یکی از اعداد ۱، ۲، ۳ است.

نشان دهید که اگر $u_n > ۳$ آن‌گاه

(الف) $۳ < u_{n+۱} < u_n$، (ب) $\frac{u_{n+۱} - ۳}{u_n - ۳} < \frac{۹}{۱۰}$

و ثابت کنید که اگر $u_\circ > ۳$ آن‌گاه $u_n \longrightarrow ۳$ (به طور یکنوا) وقتی که $n \longrightarrow \infty$.

راهنمایی: اگر $u_n \longrightarrow L$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$، آن‌گاه $L = (۶L^۲ + ۶)/(L^۲ + ۱۱)$ که به صورت $(L - ۱)(L - ۲)(L - ۳) = \circ$ درمی‌آید.

الف) اگر $u_n > ۳$ آن‌گاه

$$u_{n+۱} - u_n = \frac{۶u_n^۲ + ۶ - u_n^۳ - ۱۱u_n}{u_n^۲ + ۱۱} = -\frac{(u_n - ۱)(u_n - ۲)(u_n - ۳)}{u_n^۲ + ۱۱} < \circ$$

و

$$u_{n+۱} - ۳ = \frac{۳u_n^۲ - ۲۷}{u_n^۲ + ۱۱} > \circ$$

از این دو نامساوی نتیجه می‌شود که $u_n > u_{n+۱} > ۳$.

ب) از برابری اخیر برای $u_{n+۱} - ۳$ لازم می‌آید که وقتی $u_n > ۳$،

$$\frac{u_{n+۱} - ۳}{u_n - ۳} = \frac{۳(u_n + ۳)}{u_n^۲ + ۱۱} = \frac{۳}{۱\circ}\left(۳ - \frac{(۳u_n - ۱)(u_n - ۳)}{u_n^۲ + ۱۱}\right) < \frac{۹}{۱\circ}$$

از ضرب این نامساویها وقتی که اندیس u از $\circ$ تا $n + ۱$ تغییر کند، خواهیم داشت:

$$\circ < \frac{u_{n+۱} - ۳}{u_\circ - ۳} < \left(\frac{۹}{۱\circ}\right)^{n+۱}$$

چون $\frac{۹}{۱\circ} < ۱$، این نامساویها نشان می‌دهند که $u_n \longrightarrow ۳$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$.

۲۳.۷. نشان دهید که اگر k یک عدد صحیح مثبت باشد آن‌گاه

$$\sum_{n=\circ}^{\infty} \frac{n^k}{n!}$$

مضرب صحیحی از e است.

راهنمایی: توجه کنید که

$$n^k = A_۱ n + A_۲ n(n - ۱) + A_۳ n(n - ۱)(n - ۲) \cdots + A_k n(n - ۱)\ldots(n - k + ۱)$$

که در آن $A_k = ۱$ و، به‌ازای هر r که $۱ \leq r \leq k$، A_r باقیماندهٔ تقسیم

$$n^{k-۱} - A_۱ - A_۲(n - ۱) - \cdots - A_r(n - ۱)(n - ۲)\ldots(n - r + ۱)$$

بر $(n-r)\dots(n-2)(n-1)$ است که، در این صورت، هر A_r عددی صحیح است. داریم

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^k x^n}{n!}=A_1x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n-1}}{(n-1)!}+A_2x^2\sum_{n=2}^{\infty}\frac{x^{n-2}}{(n-2)!}+\cdots+A_kx^k\sum_{n=k}^{\infty}\frac{x^{n-k}}{(n-k)!}$$
$$=(A_1x+A_2x^2+\cdots+A_kx^k)e^x$$

و لذا

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^k}{n!}=(A_1+A_2+\cdots+A_k)e$$

از باب توضیح، ملاحظه کنید که $n^3=n+3n(n-1)+n(n-1)(n-2)$ و لذا

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{n^3}{n!}=5e$$

۲۴.۷. نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1^3+2^3+\cdots+n^3}{n!}x^n=(x+\tfrac{7}{2}x^2+2x^3+\tfrac{1}{4}x^4)e^x$$

راهنمایی: به استناد فرمول (۳۹.۱)

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\frac{n^4+2n^3+n^2}{4}$$

و لذا

$$1^3+2^3+\cdots+n^3$$
$$=\frac{1}{4}[A_1n+A_2n(n-1)+A_3n(n-1)(n-2)+A_4n(n-1)(n-2)(n-3)]$$

که در آن $A_1=4$، $A_2=14$، $A_3=8$، و $A_4=1$.

۲۵.۷. نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)x^n}{(n+2)n!}=\frac{(x^2-3x+3)e^x+\frac{1}{2}x^2-3}{x^2}$$

راهنمایی: داریم

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n-1)x^n}{(n+2)n!}=\frac{1}{x^2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(n^2-1)x^{n+2}}{(n+2)!}$$

امّا $(n+1)(n+2) + 3(n+2) - 3 = 1 - n^2$ و لذا

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n-1)x^n}{(n+2)n!} = \frac{1}{x^2}\left(3\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+2}}{(n+2)!} - 3x\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{(n+1)!} + x^2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n!}\right)$$
$$= \frac{3(e^x - 1 - x - \frac{1}{2}x^2) - 3x(e^x - 1 - x) + x^2(e^x - 1)}{x^2}$$
$$= \frac{(x^2 - 3x + 3)e^x + \frac{1}{2}x^2 - 3}{x^2}$$

۲۶.۷. نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^3 + 2n^2 + n - 1}{n!} = 9e + 1$$

راهنمایی: فرض کنید

$$n^3 + 2n^2 + n - 1 = A_0 + A_1 n + A_2 n(n-1) + A_3 n(n-1)(n-2)$$

۲۷.۷. اگر در سری

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

علامت جمع را به گونه‌ای تغییر دهیم که p جملهٔ مثبت و q جملهٔ منفی متوالیاً تولید شوند، نشان دهید که سری حاصل همگرا یا واگرا خواهد بود برحسب این که $p = q$ یا $p \neq q$.

راهنمایی: قضیهٔ چزارو را ببینید (مثال ۲۰ بخش ۸ همین فصل).

۲۸.۷. فرض کنید q_1، q_2، q_3، ... دنبالهٔ همهٔ اعداد صحیح مثبت باشد که نمایش اعشاری آنها فاقد رقم ۹ است. آیا سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{q^n}$$

همگراست؟

راهنمایی: $9^m - 9^{m-1}$ عدد صحیح بین $10^{m-1} - 1$ و $10^m - 1$ موجودند که شامل نه نیستند. از این رو، مجموع مورد بحث کوچکتر است از

$$\frac{9-1}{1} + \frac{9^2 - 9}{10} + \frac{9^3 - 9^2}{100} + \dots = 80$$

۲۹.۷. سری توانی $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ را در نظر بگیرید که در آن ضرایب در رابطهٔ $a_{r+2}+c_1a_{r+1}+c_2a_r = 0$ با ثابتهای c_1 و c_2 صدق می‌کنند. اگر x چنان باشد که سری توانی مورد بحث همگرا باشد، مجموع سری را بیابید در صورتی که $a_0 = 1$، $a_1 = -7$، $a_2 = -1$، و $a_3 = -43$.

راهنمایی: از رابطهٔ بازگشتی ضرایب درمی‌یابیم که

$$-1 - 7c_1 + c_2 = 0 \qquad \text{و} \qquad -43 - c_1 - 7c_2 = 0$$

و لذا $c_1 = -1$، $c_2 = -6$. فرض کنید S مجموع سری به‌ازای مقادیری از x باشد که سری همگراست، ملاحظه می‌کنیم که

$$S = 1 - 7x - x^2 - 43x^3 - \dots$$
$$-xS = -x + 7x^2 + x^3 + \dots$$
$$-6x^2S = -6x^2 + 42x^3 + \dots$$

و پس از جمع،

$$(1 - x - 6x^2)S = 1 - 8x$$

یا

$$S = \frac{1 - 8x}{1 - x - 6x^2} = \frac{1 - 8x}{(1 + 2x)(1 - 3x)}$$

همچنین، می‌توان دید که سری مفروض به‌ازای $|x| < \frac{1}{3}$ همگرا می‌باشد.

۳۰.۷. اگر فرض کنیم که

$$\lim_{x\to 0} \frac{a\cos x + b\sin x + ce^x + d}{x^3} = 1$$

مقادیر a، b، c، و d را بیابید.

راهنمایی: با استفاده از بسط $\cos x$، $\sin x$، و e^x به سریهای توانی، ملاحظه می‌کنیم که

$$\frac{a\cos x + b\sin x + ce^x + d}{x^3}$$
$$= \frac{a+c+d}{x^3} + \frac{b+c}{x^2} + \frac{c-a}{2x} + \frac{c-b}{2x} + \frac{c-b}{6} + \left(\frac{c+a}{24}\right)x + \text{توانهای بالاتر } x$$

اگر قرار باشد که این عبارت به واحد میل کند وقتی که $x \longrightarrow 0$، نتیجه می‌شود که

$$a+c+d = 0, \qquad b+c = 0, \qquad c-a = 0, \qquad c-b = 6$$

از حل این دستگاه معادلات، خواهیم داشت: $a = 3$، $b = -3$، $c = 3$، و $d = -6$.

۳۱.۷. سری دو جمله‌ای

$$z = (1+x)^m = 1 + mx + m(m-1)\frac{x^2}{2!} + m(m-1)(m-2)\frac{x^3}{3!} + \dots$$

را به طریق زیر به دست آورید: بگیرید

$$z = e^y = 1 + y + \frac{y^2}{2!} + \frac{y^3}{3!} + \dots$$

و

$$y = m\ln(1+x) = m\left(x - \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \dots\right)$$

۳۲.۷. فرض کنید که $x_n = (1+a)(1+a^2)\dots(1+a^n)$. نشان دهید که $\{x_n\}$ همگراست وقتی که $0 \le a < 1$.

راهنمایی: $1 + x \le e^x$.

۳۳.۷. فرض کنید m یک عدد صحیح مثبت باشد. نشان دهید که

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(m+n)} = \frac{1}{m}\left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m}\right)$$

راهنمایی: فرض کنید

$$S_n = \frac{1}{1(m+1)} + \frac{1}{2(m+2)} + \dots + \frac{1}{n(m+n)}$$

آن‌گاه

$$mS_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{m} - \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n+2} + \dots + \frac{1}{n+m}\right)$$

زیرا

$$\frac{1}{k(m+k)} = \frac{1}{m}\left(\frac{1}{k} - \frac{1}{k+m}\right)$$

۳۴.۷. نشان دهید که

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)} = \frac{1}{3x(x+1)(x+2)}$$

راهنمایی: فرض کنید که

$$f(x) = \frac{1}{3x(x+1)(x+2)}$$

آن‌گاه

$$\begin{aligned} f(x) - f(x+1) &= \frac{1}{x(x+1)(x+2)(x+3)} \\ f(x+1) - f(x+2) &= \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)} \\ &\vdots \\ f(x+n) - f(x+n+1) &= \frac{1}{(x+n)(x+n+1)(x+n+2)(x+n+3)} \end{aligned}$$

از جمع این معادلات و حدگیری وقتی که $n \longrightarrow \infty$ حکم مطلوب به دست می‌آید.

۳۵.۷. نشان دهید که اگر سری $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ مطلقاً همگرا باشد، سریهای زیر نیز مطلقاً همگرایند.

الف) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{1+a_n}$، که در آن هیچ گاه a_n مساوی -1 نیست.

ب) $\sum_{n=1}^{\infty} a_n^2$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n^2}{1+a_n^2}$

راهنمایی: (الف) چون $\sum a_n$ همگراست، باید داشته باشیم $a_n \longrightarrow 0$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$؛ از این رو، وقتی که n به قدرکافی بزرگ باشد $1 + a_n > 1/2$. به این ترتیب، نامساوی $|a_n/(1+a_n)| < 2|a_n|$ به‌ازای چنین nهایی برقرار است و نتیجه می‌گیریم که $\sum a_n/(1+a_n)$ مطلقاً همگراست.

(ب) چون $a_n \longrightarrow 0$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$، $\{|a_n|\}$ کراندار است. فرض کنید که همواره $|a_n| < M$. آن‌گاه $a_n^2 = |a_n^2| = |a_n|^2 < M|a_n|$ و، از این رو، $\sum a_n^2$ مطلقاً همگرا می‌باشد.

(ج) این حکم از قسمت (ب) همراه با قسمت (الف) نتیجه می‌شود.

۳۶.۷. نشان دهید که هر یک از سریهای زیر دارای مجموعی است که نوشته شده است:

الف) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\frac{1}{2n} = \ln\left(\frac{1+\sqrt{2}}{2}\right)$

ب) $1+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot5\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot6\cdot\ldots\cdot(2n)}\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{2}$

ج) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{1}{n+1} = \frac{1}{2}(\ln 2)^2$

د) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{2n}\right)\frac{1}{2n+1} = \frac{\pi}{8}\ln 2$

ه) $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{2n-1}\right)\frac{1}{2n} = \frac{\pi^2}{32}$

راهنمایی: از قضیهٔ ۷۰.۷ و بسطهای زیر استفاده کنید.

الف) $\ln\left(\frac{1+\sqrt{1+x}}{2}\right) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)}\frac{x^n}{2n}$

ب) $\sin^{-1}x = x+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1\cdot3\cdot\ldots\cdot(2n-1)}{2\cdot4\cdot\ldots\cdot(2n)}\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

ج) $\frac{1}{2}[\ln(1+x)]^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(1+\frac{1}{2}+\cdots+\frac{1}{n}\right)\frac{x^{n+1}}{n+1}$

د) $\frac{1}{2}(\tan^{-1}x)\ln(1+x^2) = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$

ه) $\frac{1}{2}(\tan^{-1}x)^2 = \sum_{n=1}^{\infty}(-1)^{n+1}\left(\sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{2k+1}\right)\frac{x^{2n}}{2n}$

۳۷.۷. بازهٔ همگرایی سری توانی زیر را بیابید و همگرایی سری را در نقاط انتهایی بیازمایید:

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{n^n}{n!}x^n$$

راهنمایی: به آسانی ملاحظه می‌شود که شعاع همگرایی $1/e$ است. برای تحقیق در نقاط انتهایی $x=\pm1/e$، قرار می‌دهیم $b_n = n^n/e^n n!$. از فرمول استرلینگ (قضیهٔ ۱۷.۷) نتیجه می‌شود که $b_n \longrightarrow 0$ وقتی که $n \longrightarrow \infty$. حال،

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \left(\frac{1}{e}\right)\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < 1$$

بنابراین، $\{b_n\}$ دنباله‌ای نزولی است که همگرا به صفر است؛ از این رو، $\sum_{n=1}^{\infty}(-1)^n b_n$ همگرا می‌باشد. از طرف دیگر، به استناد فرمول استرلینگ، نامساوی

$$b_n > \frac{1}{2(2\pi n)^{1/2}}$$

به‌ازای همهٔ nهای به قدر کافی بزرگ برقرار است، و لذا $\sum_{n=1}^{\infty} b_n$ واگرا می‌باشد.

۳۸.۷. فرض کنید $\{f_n\}$ دنباله‌ای از توابع انتگرال‌پذیر ریمان باشد که بر بازهٔ $[a,b]$ تعریف شده‌اند و فرض کنید که f بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد و

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b |f_n(x)-f(x)|^۲dx=۰$$

فرض کنید g بر $[a,b]$ انتگرال‌پذیر ریمان باشد و توابع

$$h_n(x)=\int_a^x f_n(t)g(t)dt \qquad \text{و} \qquad h(x)=\int_a^x f(t)g(t)dt$$

را بر $[a,b]$ تعریف کنید. نشان دهید که $\{h_n\}$ بر $[a,b]$ به طور یکنواخت به h همگراست.
راهنمایی: به استناد (۴۱.۵)،

$$۰\le\left(\int_a^x |f(t)-f_n(t)||g(t)|dt\right)^۲\le\left(\int_a^x |f(t)-f_n(t)|^۲dt\right)\left(\int_a^x |g(t)|^۲dt\right)$$

اگر $\varepsilon>۰$ مفروض باشد، N را می‌توانیم طوری انتخاب کنیم که $n\ge N$ مستلزم

$$\int_a^b |f(t)-f_n(t)|^۲dt<\frac{\varepsilon^۲}{A}$$

باشد که در آن

$$A=۱+\int_a^b |g(t)|^۲dt$$

به این ترتیب، $n\ge N$ ایجاب می‌کند که $۰\le|h(x)-h_n(x)|<\varepsilon$ به‌ازای هر x از $[a,b]$ برقرار باشد.

۳۹.۷. حدود زیر را بیابید:

(الف) $\lim_{x\to۰}\frac{(۱+x)^{۱/x}-e}{x}$ و (ب) $\lim_{x\to۰}\frac{(۱+x)^{۱/x}-e+\frac{۱}{۲}x}{x^۲}$

راهنمایی: فرض کنید $y=(۱+x)^{۱/x}$. آن‌گاه

$$\ln y=\frac{۱}{x}\ln(۱+x)=۱-\frac{x}{۲}+\frac{x^۲}{۳}-\dots$$

و لذا

$$y=e^{۱-x/۲+x^۲/۳-\dots}=e.e^{-x/۲+x^۲/۳-\dots}$$

$$= e\left(۱+\left(-\frac{x}{۲}+\frac{x^{۲}}{۳}-\dots\right)+\frac{۱}{۲!}\left(-\frac{x}{۲}+\frac{x^{۲}}{۳}-\dots\right)^{۲}+\dots\right)$$
$$= e\left(۱-\frac{x}{۲}+\frac{۱۱x^{۲}}{۲۴}-\dots\right)$$

حال، فوراً دیده می‌شود که جواب قسمت (الف) عبارت است از $-e/۲$ و جواب قسمت (ب) عبارت است از $۱۱e/۲۴$.

۴۰.۷. نشان دهید که

$$\lim_{x\to ۰}\frac{(۱+x)^{۱/x}-e+\frac{۱}{۲}ex+\frac{۱۱}{۲۴}ex^{۲}}{x^{۳}}=-\frac{۷e}{۱۶}$$

راهنمایی: تمرین ۳۹.۷ را ببینید.

۴۱.۷. نشان دهید که

$$e^{-n}\left(۱+\frac{n}{۱!}+\frac{n^{۲}}{۲!}+\dots+\frac{n^{n}}{n!}\right)\longrightarrow\frac{۱}{۲} \qquad \text{وقتی که} \qquad n\longrightarrow\infty.$$

فهرست راهنما