دانشگاه تربیت معلم سبزوار

حسابان توابع چند متغیره
و
آنالیز برداری

ترجمه و اقتباس : سید محمود طالبیان

این متن هم برای دانشجویان دورهٔ کارشناسی ریاضی که در جستجوی یک بسط مفصل از مبحث آنالیز برداری و درک عمیق مفاهیم فیزیکی آن می‌باشند مفید و بسیار آموزنده است، هم برای دانشجویان فیزیک، که علاوه بر توجه به جنبهٔ فیزیکی مفاهیم این درس، می‌خواهند بر تحلیل دقیق ریاضی آنها نیز واقف شوند.

مجموعهٔ متن کتاب همهٔ مباحث درس ریاضی عمومی (۲) دورهٔ کارشناسی فیزیک را تشکیل می‌دهد و یک مجموعهٔ بی‌نظیر برای این درس محسوب می‌شود. با این وجود، دانشجویان رشتهٔ ریاضی نیز از مطالعهٔ این کتاب در فراگیری دروس ریاضی عمومی (۲) و (۳) بهرهٔ فراوان خواهند برد.

رمز برتری این کتاب در نحوهٔ بیان مفاهیم و تشریح و تفسیر آنها نهفته است، زیرا روش ما این بوده که با هر مفهوم جدیدی از دو طریق آشنا شویم: نخست با بحثی مبتنی بر اکتشاف شهودی و تعبیر هندسی، و سپس با بحثی تحلیلی و دقیق.

هری ف دیویس

آرتور دیوید اشنایدر

حسابان توابع چند متغیره
و
آنالیز برداری

ترجمه و اقتباس : سید محمود طالبیان

فهرست مندرجات

بسمه تعالی

پیشگفتار مترجم

آنالیز برداری یکی از مباحث عمدهٔ درس ریاضی عمومی دوره‌های کارشناسی ریاضی و فیزیک و درس ریاضی فیزیک دورهٔ کارشناسی فیزیک و شامل مفاهیم فیزیکی و ریاضی و دارای کاربردهای فراوان است، ولی متأسفانه به دلیل وجود همین وجه اشتراک ، توجه شایسته‌ای به آن نمی‌شود؛ زیرا مدرسین دروس ریاضی عموماً تمایلی به بحث دربارهٔ مفاهیم فیزیکی نشان نمی‌دهند، و اساتید دروس فیزیک عموماً بحث فیزیکی را بر بحث ریاضی ترجیح می‌دهند. بنابراین فکر انتشار کتابی که بتواند توجه دانشجویان هر دو رشته را به خود جلب کند و در فراگیری درس آنالیز برداری و درک عمیق مفاهیم آن مؤثر واقع شود معقول به نظر می‌رسد. کتابی که اکنون ملاحظه می‌کنید با چنین نیّتی ترجمه شده است و خوشبختانه مؤلفین این کتاب از دو دیدگاه ریاضی و فیزیک و با بیانی بسیار ساده به تشریح مفاهیم عمدهٔ درس آنالیز برداری پرداخته‌اند، به طوری که این متن هم برای دانشجویان دورهٔ کارشناسی ریاضی که در جستجوی یک بسط مفصّل از مبحث آنالیز برداری و درک عمیق مفاهیم فیزیکی آن می‌باشند مفید و بسیار آموزنده است ، هم برای دانشجویان فیزیک ؛ که علاوه بر توجه به جنبهٔ فیزیکی مفاهیم این درس ، می‌خواهند بر تحلیل دقیق ریاضی آنها نیز واقف شوند. به عنوان مثال، مفاهیم « واگرایی » و « تاو » یک میدان برداری به صورتی بی‌نظیر و از جوانب مختلف مورد بررسی و تجزیه و تحلیل قرارگرفته و اهمیّت و نقش قضایای « واگرایی » ، « گرین » ، و « استوکس » و امثال آنها به خوبی نمایان شده است .مفهوم «زاویه فضایی» ،

« قانون گاوس »، و « معادلات برداری الکترومغناطیس » نیز به تفصیل مورد بحث قرار گرفته‌اند. بنابراین ،کتاب حاضر سهم بسزایی در فراگیری عمیق و درست درس الکترومغناطیس خواهد داشت و ، به اعتقاد مترجم ، اگر اساتید محترم بخش فیزیک دانشگاهها مطالعهٔ این کتاب را به دانشجویان خود توصیه نمایند، زمینهٔ مناسبی برای سهولت تعلیم درس الکترومغناطیس و سایر دروسی که در تدریس آنها از ابزار آنالیزبرداری استفاده می‌شود ایجاد خواهد شد. دانشجویان مهندسی نیز ضمن مطالعهٔ این کتاب باکاربردهای متنوع آنالیز برداری آشنا می‌شوند.

ترجمهٔ مبحث الکترومغناطیس را ، که صرفاً جنبهٔ فیزیکی دارد، آقای حسین موحدیان عضو محترم هیأت علمی بخش فیزیک دانشگاه ، برعهده داشته‌اند که از مساعدت ایشان صمیمانه سپاسگزارم. (این مبحث در پیوست « د » آمده است).

سه پیوست « الف » ، « ب » و « ج » از سوی مترجم تهیه شده است . در پیوست (الف)و (ج)، به ترتیب ، «حساب دیفرانسیل توابع چند متغیره» و « انتگرال دوگانهٔ توابع دو متغیره » ذکر شده است. مجموعهٔ متن کتاب واین دو پیوست ، همهٔ مباحث درس ریاضی عمومی (۲) دورهٔ کارشناسی فیزیک را تشکیل می‌دهد ویک مجموعهٔ بی‌نظیر برای این درس محسوب می‌شود؛ جز این که مفهوم فضای برداری مستقلاً در این کتاب معرفی نشده است . به گمان مترجم ، عدم طرح مستقل مفهوم فضای برداری نقص قابل ملاحظه‌ای در درس مذکور به وجود نمی‌آورد. از این رو، اعتقاد مترجم این است که اگر اساتید بخش ریاضی دانشگاهها مجموعهٔ بالا را از نظر بگذرانند و متوجه ویژگیهای منحصر به فرد و محتوای جالب و ارزندهٔ آن بشوند، تدریس کتاب را به عنوان درس ریاضی عمومی (۲) دورهٔ کارشناسی فیزیک به همکاران خود توصیه خواهند نمود. با این وجود، دانشجویان رشتهٔ ریاضی نیز از مطالعهٔ این کتاب بهرهٔ فراوان خواهند برد.

در پیوست (ب) برهان مهمترین اتحادهای فصل سوّم بدون استفاده از نماد تانسور عرضه شده است تا دانشجویانی که با این نماد آشنایی ندارند یا فرصت کافی جهت استفاده از آن برایشان فراهم نیست، برهانی مبتنی بر تعاریف اوّلیهٔ مفاهیم برداری و دستورهای مقدماتی حاصل از آنها را در اختیار داشته باشند، وهرگونه نگرانی احتمالی آنان در مورد عدم توانایی اثبات آنها به طرق مقدماتی از بین برود.

پیشگفتار مؤلفین

جهت گیری آموزش ریاضی در عصر حاضر به کاربرد روشهای مختلف آن در سایر شاخه‌های علوم تأکید دارد. البته ، این نظر در مورد « آنالیزبرداری » که در واقع از ابتدای این قرن *زبان* علوم مکانیک و الکترومغناطیس بوده، نظر تازه‌ای نیست . در چاپهای اوّلیهٔ کتاب *« آشنایی با آنالیزبرداری »* ، این دیدگاه مورد توجه بوده است، ولی مؤلفین تصمیم گرفتند که در چاپ چهارم کتاب بحث از کاربردها را چنان وسعت دهند که گروههای بیشتر و وسیعتری از متعلمین به عرصهٔ کاربرد روشهای برداری قدم گذارند. این اقدام سبب افزایش مهارت کسانی که می‌خواهند این درس را به خوبی یاد بگیرند و برآن مسلّط شوند نیز می‌شود.

دراین ویراش ،که از اصلاح و تجدید نظر در متن اوّلیه به دست آمده است ، بعضی از بخشها به صورت ساده‌تر و مؤثرتری بازنویسی شده، بعضی با تفصیل بیشتری نوشته شده ، بخشهای جدیدی گنجانیده شده، و تدبیری اندیشیده شده است که با استفاده از بخشهایی که تحت عنوان « درس اختیاری » آمده است متن کتاب از چنان انعطافی برخوردار شود که با سلیقه‌های گوناگون مدرسین سازگاری داشته باشد. مانند چاپهای اوّلیه، رمز برتری این کتاب در نحوهٔ بیان مفاهیم و تشریح و تفسیر آنها نهفته است ، زیرا روش ما این بوده که با هر مفهوم جدیدی از دو طریق آشنا شویم : نخست با بحثی مبتنی بر اکتشاف شهودی و تعبیر هندسی ، و سپس با بحثی تحلیلی و دقیق. به عنوان مثال ، بحث از اهمیّت فیزیکی مفاهیم ضرب برداری ، تاو، قضیهٔ واگرایی ، و امثال آنها، ابتدا به اثبات شهودی احکام مربوط بدانها می‌انجامد و پس از آن ، برهانی تحلیلی و دقیق برای این

احکام عرضه می‌شود. در چاپ چهارم کتاب ، که اکنون در اختیار شماست ، این بحث دوگانهٔ هندسی - تحلیلی حتی در مورد مفهوم بنیادی بردار نیز به کار رفته است . نظر ما این است که این خطی مشی به خواننده کمک می‌کند که مفاهیم رابه خاطر بسپارد، قضایای مربوط به این مفاهیم را پیش بینی کند، و به ادراک عمیقی از خواص متعدد این مفاهیم برسد.

بعضی از تغییراتی که در متن اوّلیه صورت گرفته از این قرار است : یک بحث صریح از تجزیهٔ یک بردار به دو مؤلفهٔ متوازی - متعامد (که هم در نظریهٔ فضاهای هیلبرت و هم در مهندسی مورد استفاده قرار می‌گیرد)، بیان دقیق مفهوم پارامتر در هندسه ، تجدید سازمان بخشهایی که در آنها منحنیهای فضایی و مسیرهای حرکت یک متحرک مطرح شده است ، عرضهٔ یک برهان ساده از قضیهٔ پتانسیل در مورد میدانهای پایستار،اثبات فرمولهای گرین ، و بسط قابل ملاحظهٔ بخشهایی که در آنها انتگرالهای خط ، سطح ، و حجم معرفی شده‌اند. همچنین مبحث مختصات منحنی الخط چنان گسترش یافته که همهٔ فصل پنجم را در برگرفته است و بخشهایی نیز به بحث دربارهٔ دستگاههای مختصات استوانه‌ای ،کروی ، و متعامد کلی اختصاص یافته است.

بعضی از مباحثی که در درسهای اختیاری گنجانیده شده عبارتند از : نماد تانسور و مزیّتش در اثبات اتحادهای برداری ، دودوییها، برهانهای کلیتر بعضی از قضایا ، فرمولهای فرنه - سره و تعبیرات آنها، پتانسیلهای برداری ، و قضایای ترابری دینامیک شاره.

پیوست « د » شامل اثبات همهٔ معادلات درس الکترومغناطیس است .بحث این قسمت تا حدی فشرده است ، امّا دقیقتر از آنچه که معمولاً در کتب درسی فیزیک دیده می‌شود. بعضی از مدرسین و دانشجویان پیشرفته احتمالاً تعجب خواهند کرد وقتی که مشاهده کنند که اگر از همهٔ توان دستگاههای برداری استفاده شود با چه سرعتی ارتباط این معادلات با یکدیگر آشکار و مشخص می‌شود.

مجموعهٔ تمرینات چاپهای اوّلیه، با درج « مسائل تکمیلی »که در پایان هر فصل آمده، غنی شده است . این مسائل از نظر سادگی و دشواری بسیار متفاوتند، بعضی صرفاً جنبهٔ تمرین دارند و بعضی شامل مثالهای بحث‌انگیزی از حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته و هندسه می‌باشند ، ولی پاسخ آنها داده نشده است تا مدرسین بتوانند سؤالهای دیگری از روی آنها برای دانشجویان طرح نمایند.

فصل اول

جبر بردارها

۱.۱ تعریف

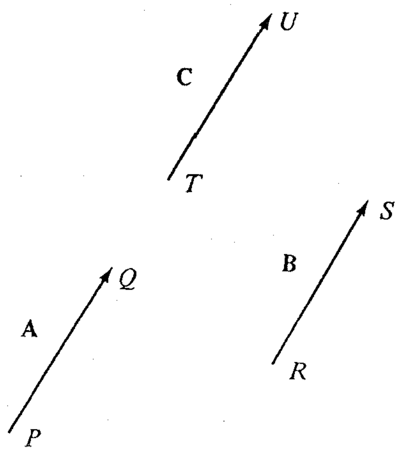
مفهوم بردار ارتباط نزدیک با مفهوم هندسی یک *قطع خط جهت دار* دارد. به زبان ساده، بردار کمیّتی است که جهت و اندازه دارد. بردار با پیکانی نمایش داده می‌شود که درازایش برابر اندازهٔ بردار است و یک جهت مناسب دارد. دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را مساوی می‌نامند و می‌نویسند $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ در صورتی که اندازه و جهت آنها یکسان باشد.

این توصیف بردار حاکی از مفهوم شهودی آن است ، ولی به عنوان یک تعریف خالی از دقت کافی است. اجازه دهید به اساس برگردیم و ببینیم که آیا می‌توانیم این مفهوم را دقیقتر و روشنتر فرمولبندی کنیم؟

دو نقطهٔ P و Q را در فضا در نظر بگیرید. اگر P و Q متمایز باشند، یک و فقط یک خط وجود دارد که از این دو نقطه می‌گذرد. بخشی از این خط که بین P و Q است و P و Q را به عنوان دو نقطهٔ انتهایی در بردارد، یک *قطعه خط* نامیده می‌شود. یک قطعه خط را *جهت دار* می‌نامند در صورتی که نقاط انتهایی ترتیب معینی داشته باشند. هر قطعه خط ، دو قطعه خط جهت دار را معین می‌کند که یکی PQ و دیگری به QP (یا PQ−) نشان داده می‌شود. اگر P و Q بر هم منطبق باشند، PQ تبهگن گفته می‌شود و، این قطعه خط ، یک نقطه است.

حال ، یک قطعه خط جهت دار کمیّتی است که اندازه (فاصلهٔ بین P و Q) و جهت دارد (یک استثنا : قطعه خط تبهگن ، یا نقطه !). از نظر تاریخی ، بردارها قطعه خطهای جهت دار تعریف شده‌اند. با این وجود، تجربه به ما آموخته است که دو قطعه خط جهت دار را یک بردار بدانیم در صورتی که هریک از آنها انتقال یافتهٔ دیگری باشد؛ یعنی ،آن دو موازی و همجهت باشند و درازای آنهانیزیکسان باشد.به این ترتیب، در شکل (۱.۱) می‌بینیم که PQ ، RS، و TU هم ارزند و یک

بردار را نمایش می‌دهند. اکنون اگر همهٔ حالات ممکن را با دقّت در نظر بگیریم ، می‌توانیم این تعاریف را فرمولبندی کنیم :



شکل ۱.۱

دوقطعه خط جهت دار PQ و RS هم ارز گفته می‌شوند در صورتی که PQ و RS دارای یک درازا و موازی باشند (با این شرط که هر دو نقطه موازی هستند) ، و همچنین PR و QS دارای یک درازا و موازی باشند.(با شرط اخیر مطمئن می‌شویم که RS در خلاف جهت PQ نیست . شکلی بکشید تا مطمئن شوید). *یک بردار، مجموعه‌ای از قطعه خطهای جهت دار هم ارز تعریف می‌شود.*

ما بردار را با هریک از قطعه خطهای جهت دار این مجموعه نمایش می‌دهیم . به این ترتیب، هر بردار با یک قطعه خط جهت دار خاص PQ نشان داده می‌شود، ولی توجه داریم که این بردار مجموعهٔ همهٔ قطعه خطهای جهت دار هم ارز PQ است .

در این کتاب معمولاً حروف سیاه برای نمایش بردارها به کار می‌روند. در نمودارها، غالباً تنها یک قطعه خط جهت دار برای نمایش یک بردار رسم و با حرف سیاهی که نام بردار مفروض است نشانه‌گذاری می‌شود. در شکل (۱.۱) PQ با **A**، RS با **B**، و TU با **C** نشانه‌گذاری شده است . چون

همهٔ اینها یک بردار را نشان می‌دهند، می‌توانیم بنویسیم $\mathbf{A} = \mathbf{B} = \mathbf{C}$. با این وجود، توجه کنید که PQ و RS قطعه خطهای جهت دار یکسان نیستند، زیرا آنها مکانهای متفاوتی را در فضا اشغال می‌کنند، بنابراین نمی‌توانیم بنویسیم $PQ = RS$.

اجمالاً $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ نتیجه می‌دهد که PQ موازی RS است، PQ و RS جهتهای یکسان دارند، و فاصلهٔ بین P و Q برابر فاصلهٔ بین R و S است. این فاصلهٔ مشترک، *اندازهٔ* بردار نامیده می‌شود. هر نقطه (قطعه خط تبهگن)، بردار $\mathbf{0}$ را نشان می‌دهد. این بردار جهت ندارد و اندازهٔ آن صفر است؛ این بردار یک استثنا از مشخصهٔ شهودی «بردار» است که در آغاز این بخش ذکر شد.

بسیاری از کمیتهای فیزیکی اندازه و جهت دارند و بنابراین مناسب است که با بردار نمایش نمایش داده شوند؛ به عنوان مثال، نیرو، تغییر مکان، سرعت، شتاب، و شدت میدان مغناطیسی را می‌توان نام برد. چنین کمیتهایی به کمک پیکانهایی که درازای آنها متناسب با اندازهٔ کمیت است و به جهت مناسبی اشاره دارند نمایش داده می‌شوند.

در بعضی از کتابها آنچه را *قطعه خطهای جهت دار* نامیده‌ایم *بردارهای مقید* گفته‌اند، و آنچه را صرفاً *بردار* نامیده‌ایم *بردار آزاد* لقب داده‌اند. مفهومش این است که «بردار آزاد» می‌تواند در فضا آزادانه حرکت کند به این شرط که همواره موازی با وضع اوّلیه باقی بماند و جهت و اندازه‌اش هرگز تغییر نکند (در واقع «عوض» نشود)؛ در حالی که «بردار مقید» نمی‌تواند در فضا حرکت کند. این تمایز هم برای ریاضیدانان و هم برای فیزیکدانان مشکلات منطقی به وجود می‌آورد. برای یک ریاضیدان پذیرش اصطلاحی چون «حرکت آزادانه در فضا» در تعریف کمیّتی که اساساً متضمّن مفهوم زمان یا حرکت نیست مشکل است. برای یک فیزیکدان در تعیین این که *نیرو* یک بردار مقید است یا یک بردار آزاد، مشکل بروز می‌کند. در بسیاری از حالات، اثر نیروی وارد بر یکی شئ نه تنها به اندازه و جهت، بلکه به نقطهٔ اثر نیرو نیز بستگی دارد. از این رو، نیرو می‌تواند به عنوان یک بردار مقیّد در نظر گرفته شود؛ امّا در یک بحث نظری عمیقتر، چنین تلقی‌ای از نیرو بسیار ناشیانه است. اغلب فیزیکدانان نیرو را یک کمیّت برداری (یعنی یک بردار «آزاد») در نظر می‌گیرند، البته با اعتراف به این که اثر یک نیرو به نقطهٔ اثر آن بستگی دارد.

در این کتاب، کلمهٔ *اسکالر* مترادف با عدد به کار برده می‌شود. آن کمیتهای فیزیکی که فقط با

مقدار عددی مشخص می‌شوند (و جهت ندارند) عدد یا کمیّتهای عددی نامیده می‌شوند. جرم ، زمان ، چگالی ، دما ، و سرعتی که از روی یک سرعت سنج خوانده می‌شود نمونه‌هایی از کمیّتهای عددی هستند.

تسامحاً می‌توانید هر بردار را یک پیکان تصور کنید، البته با توجه به این که ، از نظر برداری ، دو پیکان مساوی در نظر گرفته می‌شوند وقتی که موازی و همجهت باشند و اندازهٔ آنها یکسان باشد.

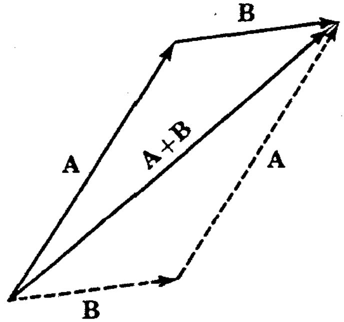
فرض کنید کنار میزی با یک سطح افقی نشسته باشید. چند بردار می‌توان یافت که بر این سطح عمود و جهتش از پایین به بالا و اندازه‌اش ۳ اینچ باشد ؟ فقط یکی . بی‌نهایت قطعه خط جهت دار با این خاصیّت وجود دارد ، ولی همهٔ آنها بردارهای یکسان هستند.

۲.۱ جمع و تفریق

مجموع $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ دو بردار را می‌توان به این صورت تعریف کرد : فرض کنید دو بردار چنان نمایش داده شوند که نقطهٔ انتهائی یا سر $\mathbf{A}$ بر نقطهٔ ابتدائی یا ته $\mathbf{B}$ منطبق شود. در این صورت $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ پیکانی است که از ته $\mathbf{A}$ به سر $\mathbf{B}$ کشیده شود (شکل ۲.۱). آشکار است که تعریف جمع به این صورت با مفهوم هم ارزی سازگار است؛ یعنی ، اگر $\mathbf{A} = \mathbf{A}'$ و $\mathbf{B} = \mathbf{B}'$، آن‌گاه $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{A}' + \mathbf{B}'$.

این جمع تعویض پذیر نیز هست :

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{B} + \mathbf{A}$$

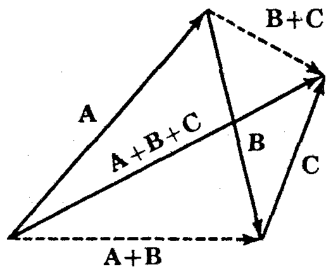


شکل ۲.۱

از روی شکل (۳.۱) می‌بینیم که جمع بردارها شرکت پذیر است ،

$$(\mathbf{A} + \mathbf{B}) + \mathbf{C} = \mathbf{A} + (\mathbf{B} + \mathbf{C})$$

به طوری که از نوشتن $\mathbf{A} + \mathbf{B} + \mathbf{C}$ بدون پرانتز هیچ ابهامی حاصل نمی‌شود.



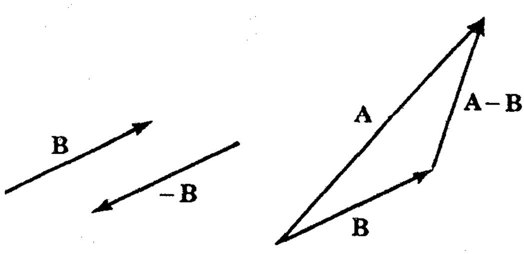
شکل ۳.۱

اگر $\mathbf{B}$ یک بردار باشد، $\mathbf{-B}$ برداری تعریف می‌شود با همان اندازهٔ بردار $\mathbf{B}$ ولی در خلاف جهت آن (شکل ۴.۱) . تفریق بردارها چنین تعریف می‌شود :

$$\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{A} + (-\mathbf{B})$$

محصّلی که‌این تعریف رانادیده بگیرد وفقط شکل (۴.۱) رابه خاطر بسپارد، حتما $\mathbf{A-B}$ را با $\mathbf{B-A}$ ، که در خلاف جهت آن است ، اشتباه خواهد کرد. بهترین راه اجتناب از اشتباه این است که به خاطر داشته باشیم که $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ ، از نظر برداری ، برداری است که باید به $\mathbf{B}$ افزوده شود تا $\mathbf{A}$ به دست آید. ازاین رو، وقتی ته $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ مشترک باشد ، $\mathbf{A} - \mathbf{B}$ برداری است که از سر $\mathbf{B}$ به سر $\mathbf{A}$ می‌رود.

تعریفهای بالا در مورد بردار $\mathbf{0}$ که با یک قطعه خط تبهگن نمایش داده می‌شود به کار می‌رود. به ازای هر بردار $\mathbf{A}$ داریم : $\mathbf{-0} = \mathbf{0}$ ، $\mathbf{A} - \mathbf{A} = \mathbf{0}$ ، $\mathbf{A} + \mathbf{0} = \mathbf{A}$ ، $\mathbf{0} + \mathbf{A} = \mathbf{A}$.



شکل ۴.۱

تمرینات

۱. اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ با پیکانهایی نمایش داده شوند که ابتدای آنها بر هم منطبق باشد، کدام پیکان $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ را نشان می‌دهد؟

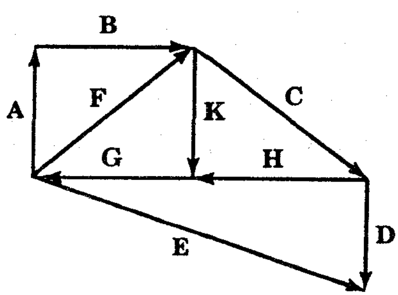
۲. با رسم یک نمودار نشان دهید که اگر $\mathbf{A} + \mathbf{B} = \mathbf{C}$ آن‌گاه $\mathbf{B} = \mathbf{C} - \mathbf{A}$.

۳. آیا گزارهٔ زیر درست است ؟ اگر بردارهای ناصفر $\mathbf{A}$، $\mathbf{B}$، $\mathbf{C}$، و $\mathbf{D}$ با پیکانهایی از مبدأ به نقاط A ، B ، C ، و D نمایش داده شوند ، و $\mathbf{B} - \mathbf{A} = \mathbf{C} - \mathbf{D}$، آن‌گاه ABCD یک متوازی الاضلاع است.

۴. فرض کنید اضلاع یک شش ضلعی منتظم به صورت پیکانهایی رسم شده باشند که انتهای هر پیکان ابتدای پیکان بعدی باشد.

(الف) اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بردارهای دو ضلع متوالی باشند، چهار بردار دیگر را برحسب $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ پیدا کنید.

(ب) حاصل جمع شش بردار چیست ؟



شکل ۵.۱

مسائل زیر مربوط به شکل (۵.۱) است :

۵. $\mathbf{C}$ را برحسب $\mathbf{E}$، $\mathbf{D}$، $\mathbf{F}$ بنویسید.

۶. $\mathbf{G}$ را برحسب $\mathbf{C}$ ، $\mathbf{D}$ ، $\mathbf{E}$ ، $\mathbf{K}$ بنویسید.

۷. $\mathbf{X} + \mathbf{B} = \mathbf{F}$ را برحسب $\mathbf{X}$ حل کنید.

۸. $\mathbf{X} + \mathbf{H} = \mathbf{D} - \mathbf{E}$ را برحسب $\mathbf{X}$ حل کنید.

۳.۱ ضرب اعداد در بردارها

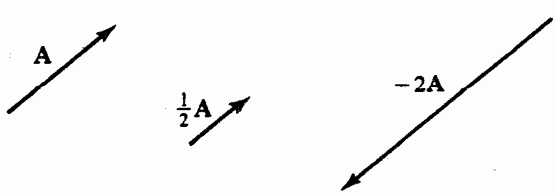
نماد $|\mathbf{A}|$ اندازهٔ بردار $\mathbf{A}$ را نشان می‌دهد. اگر چه نباید قدر مطلق یک بردار را با قدر مطلق یک عدد اشتباه کرد، بسیاری از خواص این دو کاملاً مشابه است؛ مثلاً، $|\mathbf{A}|$ هرگز منفی نیست، و $|\mathbf{A}| = 0$ اگر و فقط اگر $\mathbf{A} = \mathbf{0}$. چون اندازهٔ $\mathbf{A}$ و $-\mathbf{A}$ یکسان است، همیشه می‌توان نوشت $|\mathbf{A}| = |-\mathbf{A}|$ و $|\mathbf{A}-\mathbf{B}| = |\mathbf{B}-\mathbf{A}|$.

«نامساوی مثلث»:

$$|\mathbf{A}+\mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$$

نمایش برداری این واقعیت است که طول هر ضلع یک مثلث از مجموع طولهای دو ضلع دیگر تجاوز نمی‌کند (شکل ۲.۱).

اگر s یک عدد و $\mathbf{A}$ یک بردار باشد، $s\mathbf{A}$ برداری تعریف می‌شود که اندازهٔ آن $|s|$ برابر اندازهٔ $\mathbf{A}$ است و اگر s مثبت باشد در جهت بردار $\mathbf{A}$ است، و اگر s منفی باشد در خلاف جهت $\mathbf{A}$ است. هر بردار $s\mathbf{A}$ حاصل ضرب اسکالر $\mathbf{A}$ نامیده می‌شود (شکل ۶.۱).



شکل ۶.۱

دراین جا خواص اساسی عمل ضرب اعداد در بردارها را می‌نویسیم :

$$0\mathbf{A} = \mathbf{0} \qquad 1\mathbf{A} = \mathbf{A} \qquad (-1)\,\mathbf{A} = -\mathbf{A}$$

$$(s+t)\,\mathbf{A} = s\mathbf{A} + t\mathbf{A}$$

$$s(\mathbf{A} + \mathbf{B}) = s\mathbf{A} + s\mathbf{B}$$

$$s(t\mathbf{A}) = (st)\mathbf{A}$$

برداری که اندازه‌اش یک واحد است *بردار یکّه* نامیده می‌شود. برای حصول یک بـردار یکّـه در جهت $\mathbf{A}$، $\mathbf{A}$ رابه $|\mathbf{A}|$ تقسیم می‌کنیم (به طور معادل ، $\mathbf{A}$ را در $|\mathbf{A}|^{-1}$ ضرب می‌کنیم).

$$\left| \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} \right| = \frac{|\mathbf{A}|}{|\mathbf{A}|} = 1$$

تمرینات

۱. آیا ممکن است داشته باشیم $|\mathbf{A}| < 0$ ؟

۲. اگر $|\mathbf{A}| = 3$ ، $|4\mathbf{A}|$ چیست ؟ اگر بدانیم که $-2 \le s \le 1$ ،دربارهٔ $|s\mathbf{A}|$ چه می‌توان گفت ؟

۳. اگر $\mathbf{A}$ یک بردار ناصفر باشد و $s = |\mathbf{A}|^{-1}$ ؛ $|-s\mathbf{A}|$ چقدر است ؟

۴. اگر $\mathbf{B}$ یک بردار ناصفر باشد و $s = |\mathbf{A}|/|\mathbf{B}|$ ؛ دربارهٔ $|s\mathbf{B}|$ چه می‌توان گفت ؟

۵. اگر $\mathbf{A}$ یک مضرب اسکالر $\mathbf{B}$ باشد ، آیا $\mathbf{B}$ الزاماً یک مضرب اسکالر $\mathbf{A}$ است ؟

۶. اگر $\mathbf{A} - \mathbf{B} = \mathbf{0}$ ، آیا الزاماً $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ؟

۷. اگر $|\mathbf{A}| = |\mathbf{B}|$ ، آیا الزاماً $\mathbf{A} = \mathbf{B}$ ؟

۸. صفحه‌ای را در فضا در نظر بگیرید. چند بردار متمایز با اندازهٔ واحد بر این صفحه عمود است ؟

۹. چند بردار با اندازهٔ واحد بر خط مفروضی در فضا عمود است ؟

۱۰.اگر $\mathbf{A}$ یک بردار ناصفر باشد ؛ چند مضرب اسکالر متمایز $\mathbf{A}$ اندازهٔ واحد خواهد داشت ؟

۱۱.فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ دو بردار ناصفر باشند که با پیکانهایی از یک نقطهٔ ابتدائی مشترک، به ترتیب، به نقاط A و B رسم شده باشد. فرض کنید $\mathbf{C}$ برداری باشد که از نقطهٔ ابتدائی مشترک $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به

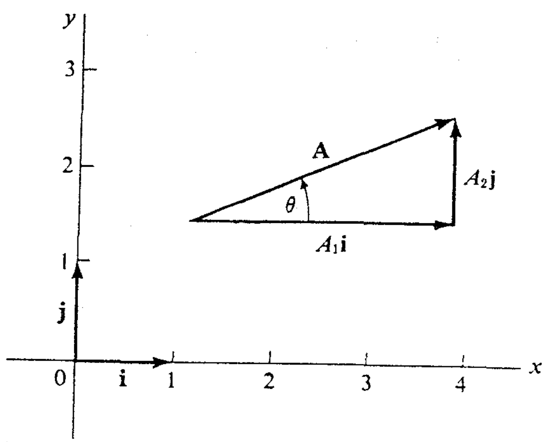
نقطهٔ وسط قطعه خط $\mathbf{AB}$ کشیده شده است . $\mathbf{C}$ را برحسب $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بنویسید.

۱۲.ثابت کنید که $|\mathbf{A}-\mathbf{B}| \geq |\mathbf{A}| - |\mathbf{B}|$

۱۳.اسکالرهای ناصفر a ، b ، و c را چنان بیابید که تساوی $a\mathbf{A}+b(\mathbf{A}-\mathbf{B})+c(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{0}$ به ازای هر زوج از بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ برقرار باشد.

۴.۱ مختصات دکارتی

یک دستگاه مختصات دکارتی در صفحه ، متشکل از دو محور متعامد x و y و یک واحد طول یکسان بر روی دو محور در نظر بگیرید. (شکل ۷.۱) فرض می‌کنیم که خواننده با چنین ساختمانی که یک تناظر یک به یک بین نقاط صفحه و ازواج مرتب (x,y) از اعداد برقرار می‌کند آشنایی دارد.



شکل ۷.۱

فرض کنید $\mathbf{i}$ بردار یکهٔ موازی محور x و در جهت x مثبت و $\mathbf{j}$ بردار یکهٔ در جت y مثبت باشد. هر بردار در صفحه را می‌توان با انتخاب مناسب اعداد A_1 و A_2 به طور منحصر به فرد به صورت

$$\mathbf{A} = A_1\,\mathbf{i} + A_2\,\mathbf{j}$$

نوشت. اعداد A_1 و A_2 *مؤلفه‌های* بردار $\mathbf{A}$، به ترتیب، در جهت x و در جهت y نامیده می‌شوند؛ مؤلفهٔ یک بردار در یک جهت مفروض تصویر عمودی بردار درآن جهت است.

اندازهٔ $\mathbf{A}$ را می‌توان به کمک قضیهٔ فیثاغورس از روی مؤلفه‌هایش تعیین کرد.(شکل ۷.۱)

$$|\mathbf{A}| = \sqrt{A_1^2 + A_2^2}$$

برای تعیین مؤلفه‌های یک بردار، هر قطعه خط جهت دار نمایشگر آن بردار را می‌توان به کار برد. به این ترتیب، اگر $P_1(x_1, y_1)$ و $P_2(x_2, y_2)$ نقاطی در صفحهٔ xy باشند، برداری که با قطعه خط جهت دار $P_1 P_2$ (P_1 نقطهٔ ابتدائی، P_2 نقطهٔ انتهائی) نمایش داده می‌شود عبارت است از: $(x_2-x_1)\mathbf{i}+(y_2-y_1)\mathbf{j}$. هر قطعه خط جهت دار دیگر هم ارز P_1P_2 همین مؤلفه‌ها را خواهد داشت.

مثال ۱.۱ قطعه خط جهت داری که از (۶ , ۴) به (۱۱ , ۷) می‌رود هم ارز قطعه خط جهت داری است که از (۳ , ۱−) به (۸ , ۲) می‌رود، زیرا هر دوی این قطعه خطهای جهت دار بردار $\mathbf{5j} + \mathbf{3i}$ را نمایش می‌دهند.

تمرینات

۱. مؤلفهٔ x بردار $\mathbf{i}$ چیست؟

۲. مؤلفهٔ x بردار $\mathbf{j}$ چیست؟

۳. اندازهٔ $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ چقدر است؟

۴. اندازهٔ $\mathbf{4j} - \mathbf{3i}$ چقدر است؟

۵. اگر محورها در موقعیت مناسبی باشند (شکل ۷.۱)، جهتها را می‌توان به زبان جغرافیا بیان کرد. کدام برداریکّه به غرب اشاره دارد؟ کدام به جنوب؟ کدام به شمال شرقی؟

۶. بردار $\mathbf{A}$ با پیکان به مبدأ (۲ , ۴) و انتهای (۱− , ۵) نمایُش داده می‌شود. $\mathbf{A}$ را بر حسب $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ بنویسید.

۷. جهت یک بردار ناصفر در صفحه را می‌توان به کمک زاویهٔ θ که آن بردار با جهت x مثبت می‌سازد توصیف کرد. (شکل «۷.۱» را ببینید). این زاویه، بنابر قرارداد، در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت، مثبت است. A_1 و A_2 را برحسب $|\mathbf{A}|$ و زاویهٔ θ بنویسید.

۸. در شکل (۷.۱)، اگر $|\mathbf{A}| = ۶$ و $\theta = ۳۰^\circ$، A_1 و A_2 را بیابید.

۹. بردارهای زیر را برحسب $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ بنویسید:

(الف) - بردار یکّه‌ای که با محور x زاویهٔ ۶۰° می‌سازد؛

(ب) - بردار یکّه با $\theta = -۳۰^\circ$ (θ مانند تمرین ۷)؛

(ج) - بردار یکّهٔ همجهت با $۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{j}$؛

(د) - بردارهای یکّه‌ای که مؤلفهٔ x آنها مساوی $\frac{۱}{۲}$ است؛

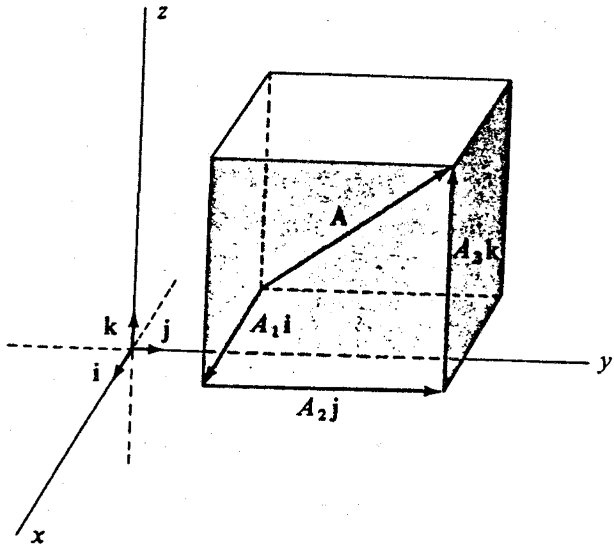
(هـ)- بردارهای یکّه‌ای که بر خط $x+y = ۰$ عمودند.

۱۰. $|۶\mathbf{i} + ۸\mathbf{j}|$ ، $|-۳\mathbf{i}|$ ، $|\mathbf{i} + s\mathbf{j}|$ ، $|(\cos\theta)\mathbf{i} + (\sin\theta)\mathbf{j}|$ را تعیین کنید.

۱۱. فرض کنید بردار $\mathbf{A}$ با پیکانی نمایش داده شود که ازمبدأ به نقطهٔ وسط قطعه خط و اصل (۴ , ۱) و (۳, ۸) می‌رود. $\mathbf{A}$ را برحسب $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ بنویسید.

۵.۱ بردارهای فضایی

در اکثر مباحث این کتاب، با بردارهایی در فضای سه بُعدی سر و کار خواهیم داشت. با معرفی سه محور متعامد و یک واحد طول یکسان در امتداد هر سه محور، دستگاه مختصات دکارتی معمولی را به دست می‌آوریم. جهت قراردادی محورها در شکل (۸.۱) نشان داده شده است. هر بردار را می‌توان به صورت $\mathbf{A} = A_1\mathbf{i} + A_2\mathbf{j} + A_3\mathbf{k}$ نوشت که در آن $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، $\mathbf{k}$، بردارهای یکّه، به ترتیب، در جهت x، y، و z مثبت می‌باشند. اعداد A_1، A_2، و A_3 *مؤلفه‌ها* یا *تصاویر عمودی* $\mathbf{A}$، به ترتیب، در جهت x، y، و z نامیده می‌شوند.



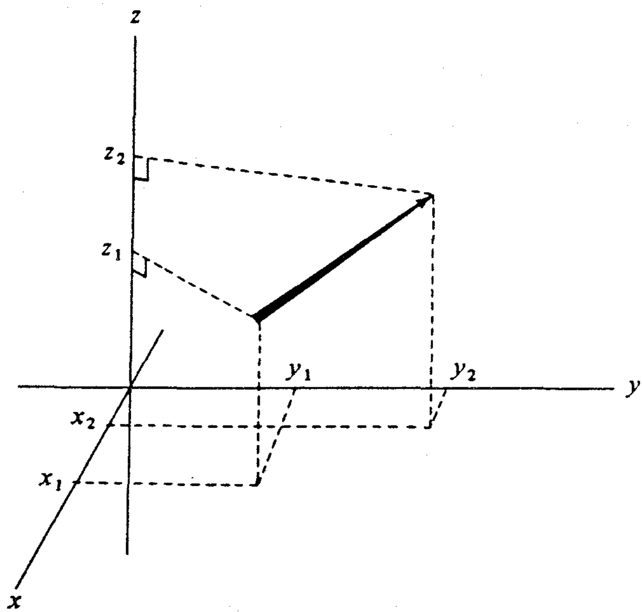
شکل ۸.۱

اگر $P_1(x_1,y_1,z_1)$ ، $P_2(x_2,y_2,z_2)$ ، و $P_3(x_3,y_3,z_3)$ نقاطی در فضا باشند، بردار P_1P_2 عبارت است از:

$$(x_2-x_1)\,\mathbf{i} + (y_2-y_1)\,\mathbf{j} + (z_2-z_1)\,\mathbf{k}$$

و همین طور برای P_2P_3 و P_1P_3 (شکل ۹.۱). ملاحظه کنید که هر مؤلفهٔ P_1P_3 حاصل جمع مؤلفه‌های متناظر از بردارهای P_1P_2 و P_2P_3 است ؛ مثلاً ، در جهت x ، داریم :

$$x_3-x_1 = (x_2-x_1) + (x_3-x_2)$$



شکل ۹.۱

به علاوه ، چون P_1P_3 مجموع *برداری* P_1P_2 و P_2P_3 است ، نشان داده‌ایم که *جمع بردارها از جمع مؤلفه‌ها ناشی می‌شود* ؛ یعنی ،

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}=(A_1+B_1)\mathbf{i}+(A_2+B_2)\mathbf{j}+(A_3+B_3)\mathbf{k}$$

با استدلال مشابه در مورد ضرب یک اسکالر در یک بردار ، دیده می‌شود که برحسب مؤلفه‌ها:

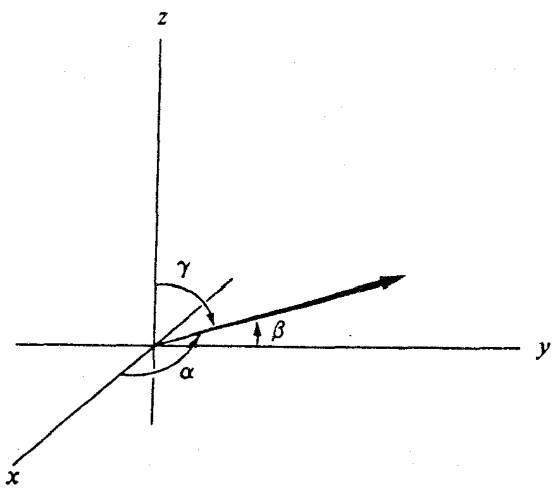
$$s\mathbf{A}=(sA_1)\mathbf{i}+(sA_2)\mathbf{j}+(sA_3)\mathbf{k}$$

قوانین تعویض پذیری و شرکت پذیری جمع ،که در بخش (۲.۱) داده شد ، برای بردارهای فضایی نیز برقرارند؛ فقط کافی است شکلهای (۲.۱) و (۳.۱) را در فضای سه بُعدی تصوّر کنیم . از طرف دیگر، این قوانین وقتی با مؤلفه‌ها بیان شوند بسیار واضح می‌شوند. (تمرین « ۱۹ » را ببینید).

با دو بار استفاده از قضیهٔ فیثاغورس ، دستور زیر را به دست می‌آوریم :

$$|\mathbf{A}|=\sqrt{A_1^2+A_2^2+A_3^2}$$

توصیف مشابهی از یک بردار فضایی با ارائه اندازه و جهت بردار میسّر می‌شود. ما می‌توانیم جهت بردار را به کمک *زوایای هادی* α، β، و γ، یعنی زوایای بین آن بردار و جهتهای x، y، و z مثبت، مشخص کنیم. (شکل «۱۰.۱») را ببینید). گاهی مناسبتر است که از کسینوسهای هادی $\cos\alpha$، $\cos\beta$، و $\cos\gamma$ استفاده کنیم، زیرا این کسینوسها با



شکل ۱۰.۱

فرمولهای سادهٔ زیر برحسب مؤلفه‌ها بیان می‌شوند:

$$\cos\alpha = \frac{A_1}{|\mathbf{A}|} \text{ و } \cos\beta = \frac{A_2}{|\mathbf{A}|} \text{ و } \cos\gamma = \frac{A_3}{|\mathbf{A}|}$$

(شکلهای «۸.۱» و «۱۰.۱» را مقایسه کنید). به آسانی می‌توان تحقیق کرد که کسینوسهای هادی در رابطهٔ زیر صدق می‌کنند:

$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

به طوری که اگر دو کسینوس هادی را بدانیم ، سومی تا مرحلهٔ انتخاب علامت تعیین می‌شود.[1]

اندازهٔ بردار به هیچ وجه از روی کسینوسهای هادی مشخص نمی‌شود؛ اندازهٔ بردار را باید جداگانه تعیین کرد؛ مثلاً ، هر بردار موازی صفحهٔ yz که با جهتهای y و z مثبت زاویهٔ ۴۵° می‌سازد دارای کسینوسهای هادی زیراست :

$$\cos\alpha = ۰ \quad \text{و} \quad \cos\beta = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad \text{و} \quad \cos\gamma = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

تمرینات

در هفت مسئلهٔ اول ، فرض کنید $\mathbf{A} = ۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{j}$ ، $\mathbf{B} = ۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ، و $\mathbf{C} = ۳\mathbf{i} - ۴\mathbf{k}$.

۱. $|\mathbf{A}|$ ، $|\mathbf{B}|$ ، و $|\mathbf{C}|$ را بیابید.

۲. $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ را بیابید.

۳. $|\mathbf{A}-\mathbf{C}|$ را تعیین کنید.

۴. به ازای چه مقادیری از s داریم $|s\mathbf{B}| = ۱$ ؟

۵. بردار یکّه‌ای همجهت با $\mathbf{A}$ بیابید.

۶. فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{C}$ با دو پیکانی نمایش داده شوند که از مبدأ رسم می‌شوند.

(الف) درازای قطعه خط موازی واصل نقاط انتهائی آنها را بیابید.

(ب) این قطعه خط موازی یکی از صفحات مختصات است ، کدام صفحه ؟

۷. فرض کنید α زاویهٔ بین $\mathbf{A}$ و جهت x مثبت باشد. $\cos\alpha$ را تعیین کنید.

۸. همهٔ بردارهای یکّهٔ عمود بر صفحه xz را تعیین کنید.

۹. $|\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}|$ را محاسبه کنید.

---

۱. مقصود این است که اگر مثلاً α و β معلوم باشند آن گاه $\cos\gamma = \pm\sqrt{۱ - \cos^۲\alpha - \cos^۲\beta}$. انتخاب یکی از دو علامت $\pm$ نیاز به مفروضات بیشتری دارد (م).

۱۰.اگر $P_1 = (3,4,7)$ و $P_2 = (4,-1,6)$، بردار P_1P_2 را برحسب $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ بنویسید.

۱۱.اگر O مبدأ و $P(x,y,z)$ نقطهٔ دلخواهی در فضا باشد، بردار نمایشگر قطعه خط جهت دار OP رابنویسید.

۱۲.فرض کنید $\mathbf{D} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ، $\mathbf{E} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ، و $\mathbf{F} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$. اسکالرهای s ، t ، و r را چنان بیابید که $4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} - \mathbf{k} = s\mathbf{D} + t\mathbf{E} + r\mathbf{F}$.

۱۳.کسینوسهای هادی بردار $2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ چیست ؟

۱۴.اتحاد $\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$ را نتیجه بگیرید.

۱۵.فرض کنید O مبدأ و OP برداری با کسینوس هادی $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ باشد. مکان هندسی P را توصیف کنید.

۱۶.چند بردار یکّه وجود دارد که به ازای آنها $\cos\alpha = \frac{1}{2}$ و $\cos\beta = \frac{1}{2}$ ؟ با یک نمودار تشریح کنید.

۱۷.$\mathbf{A}$ برداری است که کسینوسهای هادی آن ، به ترتیب ، $\cos\alpha$ ، $\cos\beta$ ، $\cos\gamma$ می‌باشند. کسینوسهای هادی تصویر $\mathbf{A}$ در صفحهٔ yz چیست ؟ (صفحهٔ yz را مانند یک آینه تصور کنید).

۱۸.همهٔ بردارهای یکّه‌ای را که به ازای آنها $\cos\alpha = \cos\beta = \cos\gamma$ ، تعیین کنید.

۱۹.صحّت قوانین تعویض پذیری و شرکت پذیری جمع را برای بردارهای فضایی که با مؤلفه‌های خود بیان می‌شوند بررسی کنید.

۶.۱ گریز

اولین مرحله در حل مسائل مکانیک انتخاب یک دستگاه مختصات است؛ به عنوان مثال ، اگر در مساله‌ای یک ذرّهٔ مادی بر روی یک صفحهٔ مایل بلغزد، مناسب به نظر می‌رسد که یکی از محورها، مثلاً محور x، موازی صفحهٔ مایل باشد ، و محور دیگر ، مثلاً محور z، عمود برآن صفحه گرفته شود. پس از انتخاب یک دستگاه مختصات خاص ، می‌توانیم از *بردار موضع* ذرّه صحبت کنیم . بردار موضع با قطعه خط جهت داری نمایش داده می‌شود که از نقطهٔ مبدأ (0,0,0) به نقطهٔ (x,y,z) ،

که ذرّه در آن جا واقع است، رسم می‌شود و (برحسب $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$) بردار $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ است . اگر بیشتر دقت کنیم ، باید از ذکر « *بردار موضع یک ذرّه* » اجتناب کنیم زیرا ممکن است این اثر نادرست را در ذهن ایجاد کند که بردار موضع را یک خاصیّت ذاتی ذرّه تصور کنیم ، حال آن که بردار موضع به مکان مبدأ دستگاه مختصات نیز بستگی دارد.

اگر یک ذرّه از موضع اوّلیهٔ (x_1,y_1,z_1) به موضع دیگر (x_2,y_2,z_2) حرکت کند، تغییر *مکان* ذرّه برداری است که با قطعه خط جهت دار و اصل موضع اوّلیه و موضع نهایی نمایش داده می‌شود. این بردار عبارت است از $(x_2-x_1)\mathbf{i} +(y_2-y_1)\mathbf{j} + (z_2-z_1)\mathbf{k}$.توجه کنید که اگر $\mathbf{R}_1 = x_1\mathbf{i}+y_1\mathbf{j}+z_1\mathbf{k}$ بردار موضع اوّلیه و $\mathbf{R}_2 = x_2\mathbf{i} + y_2\mathbf{j} + z_2\mathbf{k}$ بردار موضع نهایی باشد ، تغییر مکان عبارت است از $\mathbf{R}_2-\mathbf{R}_1$. تغییر مکان یک ذرّه ، *تفاضل بردار موضع نهایی و بردار موضع اوّلیه است* .

بردار تغییر مکان ، برخلاف بردار موضع ، یک خاصیّت ذاتی ذره است . بردار تغییر مکان به انتخاب دستگاه مختصات بستگی ندارد. (اگر چه مؤلفه‌هایش در دستگاههای مختصات مختلف متفاوت خواهند بود). در واقع ، در این مرحله ، تغییر مکان یک ذره یک الگوی کامل برای یک بردار است . ما جمع بردارها را چنان تعریف کرده‌ایم که بردارها به همان گونه‌ای جمع می‌شوند که تغییر مکانها « جمع » می‌شوند. به این ترتیب (شکل ۲.۱) ، اگر ذره‌ای نخست تغییر مکان $\mathbf{A}$ و سپس تغییر مکان دیگر $\mathbf{B}$ را طی کند، واضح است که تغییر مکان کل ، بردار $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ است ؛ یعنی ، $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ تغییر مکانی است که همان نتیجه‌ای را به بار می‌آورد که دو تغییر مکان $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ به وجود مـی‌آورند. از دیدگاه فیزیکدانان ، این دلیل تعریف جمع بردارها به این طریق است.

گاهی مفید به نظر می‌رسد که بردارها را تغییر مکانهایی تصور کنیم ، حتی اگر هیچ عمل فیزیکی مورد نظر نباشد؛ به عنوان مثال ، تمرین (۵) بخش (۲.۱) را در نظر بگیرید. دراین تمرین خواسته شده که $\mathbf{C}$ را برحسب $\mathbf{E}$، $\mathbf{D}$، و $\mathbf{F}$ بنویسیم . جواب ، $\mathbf{C} = -\mathbf{F} + \mathbf{E} - \mathbf{D}$ است که واضح می‌باشد ، زیرا در نگاهی به شکل (۵.۱) دیده می‌شود که $\mathbf{C}$ نتیجهٔ سه تغییر مکان $-\mathbf{F}$ ، $\mathbf{E}$، و $-\mathbf{D}$ است .

گمان نکنید که وقتی تغییر مکانی با یک بردار $\mathbf{A}$ نمایش داده می‌شود ، مسیر ذرّه الزاماً یک خط راست است. قطعه خط جهت دار نمایشگر یک تغییر مکان ، مستقیماً از موضع اوّلیه بـه مـوضع نهایی رسم می‌شود، ولی امکان دارد خود ذرّه از راه قطب شمال رفته باشد !

نیروها نیز کمیتهای برداری هستند. ممکن است این نکته واضح به *نظر آید*، زیرا، به طور هندسی و بنابر قرارداد، یک نیرو با یک قطعه خط جهت دار نمایش داده می‌شود. با این وجود، زیاد هم واضح نیست. از کجا می‌دانیم که نیروها مانند بردارها جمع می‌شوند؟ ما صرفاً به قول فیزیکدانان استناد می‌کنیم که آنها چنین می‌کنند و خوانندهٔ مشتاق را به آزمایشگاه دعوت می‌کنند. اگر $\mathbf{F}_1$ و $\mathbf{F}_2$ نیروهایی باشند که بر یک ذرّه اثر می‌کنند، بردار حاصل جمع $\mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2$ تک نیرویی است که اثر آن دو نیرو را دارد، و گاهی *برآیند* آن دو نیرو نامیده می‌شود. در فیزیک مقدماتی برآیند دو یا چند نیرو را معمولاً به صورت زیر پیدا می‌کنند: نخست با یک نمودار نیروها را نشان می‌دهند، سپس به طور منظم حدود هر نیرو را مشخص و مؤلفه‌های هر نیرو در امتداد محورهای مختصات را تعیین می‌کنند. نیروهای موجود در امتداد هر محور را به طور جبری با هم جمع می‌کنند که در نتیجهٔ این کار یک نیرو در امتداد هر یک از محورهای مختصات به دست می‌آید. اندازهٔ نیروی برآیند، $\mathbf{F}$، را می‌توان به کمک قضیهٔ فیثاغورس پیدا کرد، زیرا محورها بر هم عمودند. این بحثی است که در هر کتاب فیزیک مقدماتی صورت می‌گیرد. به وضوح، فرآیند مذکور معادل این است که نیروها را برحسب $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ بنویسیم و آنها را به صورتی که در بخش قبلی گفته شد با هم جمع کنیم.

تمرینات

۱. ذرّه‌ای از نقطهٔ (۳،۷،۸) تا نقطهٔ (۵،۲،۵) حرکت می‌کند. تغییر مکان ذره را برحسب $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ بنویسید.

۲. بردار موضع ذرّه واقع در نقطهٔ (۱،۲،۹) را بنویسید.

۳. بردار موضع یک ذرّه متحرک در لحظهٔ t عبارت است از $\mathbf{R} = ۳\mathbf{i} + ۴t^۲\mathbf{j} - t^۳\mathbf{k}$. تغییر مکان ذرّه را در فاصلهٔ زمانی از $t=۱$ تا $t=۳$ بیابید.

۴. اندازهٔ برآیند دو تغییر مکان زیر چقدر است: ۶ مایل به شرق، ۸ مایل به شمال؟

۵. ریسمانهایی به یک حلقهٔ فلزی کوچک بسته می‌شوند و، به کمک قرقره و وزنه، چهار نیرو به حلقه اثر می‌کند. یک نیرو به طرف بالاست با اندازهٔ ۳ پوند، دیگری به طرف مشرق با اندازهٔ ۶

پوند، و سومین نیرو به طرف شمال با اندازهٔ ۲ پوند. حلقه در حال تعادل است (یعنی حرکت نمی‌کند). اندازهٔ نیروی چهارم که با سه نیروی دیگر برابری می‌کند چقدر است ؟

۶. مرکز جرم دستگاهی از n ذرّه به وسیلهٔ بردار موضع

$$\mathbf{R}_{cm} = \frac{m_1\mathbf{R}_1+m_2\mathbf{R}_2+\ldots+m_n\mathbf{R}_n}{m_1+m_2+\ldots+m_n}$$

تعریف می‌شود که در آن ذرّهٔ i ام در مکان $\mathbf{R}_i$ قراردارد و دارای جرم m_i است . عدم *توازن جرمی* دستگاه در موضع $\mathbf{R}$ چنین تعریف می‌شود :

$$m_1(\mathbf{R}_1-\mathbf{R}) + m_2(\mathbf{R}_2-\mathbf{R}) + \ldots + m_n(\mathbf{R}_n-\mathbf{R})$$

نشان دهید که عدم توازن جرمی دستگاه در مرکز جرم صفر است .

۷.۱ مسائلی در هندسه

برای اجتناب از استعمال الفاظ زاید ، عملاً هرکسی که با بردارها سروکار دارد تفاوتی بین بردارها و قطعه خطهای جهت دار قائل نمی‌شود. به جای این که بگوییم « برداری که با قطعه خط جهت دار $\mathbf{A}$ نمایش داده می‌شود » بهتر است بگوییم « بردار $\mathbf{A}$ » . وقتی این کار صورت گرفت ، باز هم حائز اهمیت است که مفهوم بردار را تجریدی از مفهوم یک قطعه خط جهت دار بدانیم ، که در این تجرید مکان واقعی قطعه خط جهت دار نادیده گرفته می‌شود : می‌گوییم « $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ » وقتی که در واقع « قطعه خطهای جهت دار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ هم ارز باشند و بنابراین یک بردار را نمایش دهند » . اگر $\mathbf{A}$ از (۲،۳،۴) به (۲،۳،۵) ، و $\mathbf{B}$ از (۳،-۲،۸) به (۳،-۲،۹) کشیده شود، آن گاه به عنوان دو بردار ، $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ ، اگر چه ابتدای آنها دو نقطهٔ متمایز است.

آنچه ما می‌گوییم این است که : دو چیز با هم برابرند نه وقتی که واقعاً یکی باشند، بلکه وقتی که مطابق تعریف معیّنی فقط « هم ارز » یکدیگر باشند . ما قبلاً با این مفهوم در حساب مقدماتی آشنا شده‌ایم. وقتی می‌گوییم کسرهای $\frac{2}{3}$ و $\frac{4}{6}$ « برابرند » می‌دانیم آنها در واقع یکی نیستند، بلکه به طریق معینی فقط «هم ارز» یکدیگرند. به عبارت دقیقتر ، $\frac{2}{3}$ و $\frac{4}{6}$ کسرهایی هستند که یک عدد گویا را نمایش می‌دهند: به عنوان دوکسر، با هم برابر نیستند ولی یک عددگویا را نمایش می‌دهند.

به طور مشابه ، اگر دو قطعه خط جهت دار **A** و **B** مفروض باشند، امکان دارد بنویسیم $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ حتی وقتی که این دو قطعه خط جهت دار با هم برابر نباشند ، (مثلاً دو مبدأ متفاوت داشته باشند) ولی مطابق تعریف بخش (۱.۱) هم ارز یکدیگر باشند.

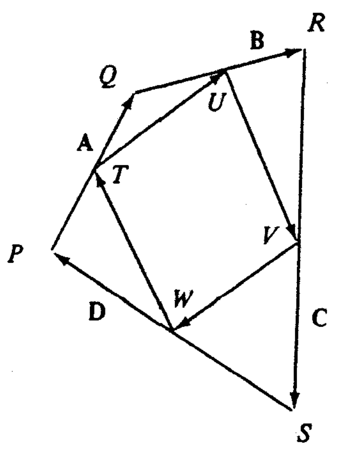
با توجه به نکتهٔ بالا ، اکنون به فواید عملی جبر بردارها برمی‌گردیم . ساده‌ترین کاربردهای جبر بردارها در هندسه است که در مرحلهٔ اوّل مورد بحث قرار می‌گیرند.

***مثال* ۲.۱** اوساط اضلاع متوالی یک چهار ضلعی را به وسیلهٔ قطعه خطهایی به هم وصل می‌کنیم. آیا چهار ضلعی حاصل یک متوازی الاضلاع است ؟

فرض کنید PQRS چهار ضلعی مفروض و T ، U ، V ، W اوساط اضلاع باشند. در وضعی که در شکل (۱۱.۱) نشان داده شده است ، مطمئناً واضح به نظر می‌رسد که TUVW یک متوازی الاضلاع است. با این وجود ، توجه داشته باشید که PQRS الزاماً یک شکل مسطّح نیست ؛ شاید نقطهٔ S چندین اینچ بالاتر از صفحهٔ ماربر P ، Q ، و R باشد. با توجه به این امکان ، آیا TUVW یک متوازی الاضلاع است ؟

حل چنان که در شکل (۱۱.۱) نشان داده شده است ، فرض کنید اضلاع چهار ضلعی قطعه خطهای جهت دار **A** ، **B** ، **C** ، و **D** باشند؛ آن گاه رابطهٔ بسیار واضح زیر را داریم :

$$\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}+\mathbf{D}=\mathbf{0}$$



شکل ۱۱.۱

برای این که ثابت کنیم که TUVW یک متوازی الاضلاع است،لازم‌است نشان دهیم که $TU = -VW$.
از روی شکل ، می‌توان TU را برحسب **A** و **B** بیان کرد؛ در واقع ، TU برابر است با «نیمهٔ طرف سر» **A** به علاوهٔ « نیمهٔ طرف ته » **B**. به این ترتیب

$$TU = \frac{۱}{۲}\mathbf{A} + \frac{۱}{۲}\mathbf{B} = \frac{۱}{۲}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$$

به طور مشابه ،

$$VW = \frac{۱}{۲}(\mathbf{C} + \mathbf{D})$$

امّا رابطهٔ اساسی اوّلیه نشان می‌دهد که $\mathbf{A} + \mathbf{B} = -(\mathbf{C}+\mathbf{D})$. بنابراین $TU = -VW$.

مثال ۳.۱ قطعه خطهایی از یک رأس یک متوازی الاضلاع به اوساط اضلاع مقابل رسم می‌شوند. نشان دهید که این قطعه خطها یک قطر متوازی الاضلاع را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند.

حل اوضاع مورد بحث در شکل (۱۲.۱) رسم شده و ، به اقتضای بحث ، بعضی از بردارها نشانه‌گذاری شده‌اند. چون قطر مورد نظر ، $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ است ، مسأله به اثبات $\mathbf{C}=\mathbf{D}= \frac{۱}{۳}(\mathbf{A}+\mathbf{B})$ منجر می‌شود. سعی می‌کنیم **C** را برحسب **A** و **B** بیان کنیم . قبل از هر چیز ، مطمئناً به ازای اسکالری چون s ، $\mathbf{C} = s(\mathbf{A}+\mathbf{B})$. همچنین ، چون نوک **C** روی خط واصل نوک **A** و نوک $\frac{۱}{۲}\mathbf{B}$ قرار دارد ، به ازای اسکالری چون t، داریم: $\mathbf{C} - \mathbf{A} = t(\frac{۱}{۲}\mathbf{B} - \mathbf{A})$. اگر دو عبارت مربوط به **C** را مساوی هم قرار دهیم ، خواهیم داشت ؛

$$s(\mathbf{A}+\mathbf{B}) = \mathbf{A} + t(\frac{۱}{۲}\mathbf{B} - \mathbf{A})$$

که از آن نتیجه می‌شود :

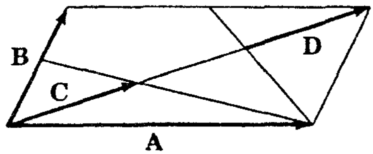
$$(s - \frac{۱}{۲}t)\mathbf{B} = (۱ - s - t)\mathbf{A}$$

چون **A** و **B** با هم موازی نیستند ، این معادله فقط وقتی می‌تواند برقرار باشد که اسکالرها صفر باشند:

$$s - \frac{۱}{۲}t = ۰$$

$$۱ - s - t = ۰$$

از حل این دستگاه به دست می‌آوریم : $s = \frac{۱}{۳}$. بنابراین ، $\mathbf{C} = \frac{۱}{۳}(\mathbf{A} + \mathbf{B})$.



شکل ۱۲.۱

برعهدهٔ خواننده است که به عنوان یک تمرین ، با محاسبهٔ **D** به طریق مشابه ، استدلال را کامل کند.

مثال ۴.۱ ثابت کنید که میانه‌های یک مثلث یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند.

حل در شکل (۱۳.۱) ، **D** برداری است که از گوشهٔ P به محل تلاقی دو میانهٔ مرسوم از Q و R رسم شده است. باید نشان دهیم که **D** در امتداد میانهٔ مرسوم از P قرار دارد؛ یعنی ،مضربی از $\mathbf{B}+\frac{۱}{۲}\mathbf{A}$ است . شرطی که **D** در امتداد میانهٔ مرسوم از R باشد این است که به ازای عددی چون s ،

$$\mathbf{C}+\mathbf{D}=s\left(\mathbf{C}+\frac{۱}{۲}\mathbf{A}\right)$$

واین فرض که **D** بر روی میانهٔ مرسوم از Q قرار داشته باشد ایجاب می‌کندکه به ازای عددی چون t ،

$$\mathbf{A}-\mathbf{D}=t\left(\frac{۱}{۲}\mathbf{C}+\mathbf{A}\right)$$

اگر **D** را از دو رابطهٔ بالا محاسبه کرده و عبارتهای حاصل را مساوی هم قرار دهیم ، خواهیم داشت:

$$\left(s+\frac{۱}{۲}t-۱\right)\mathbf{C}=\left(۱-t-\frac{۱}{۲}s\right)\mathbf{A}$$

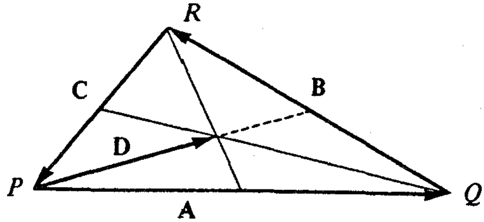
مانند مثال (۳.۱) ، نتیجه می‌گیریم که دو ضریب باید صفر باشند ؛ به این ترتیب ،

$$s=t=\frac{۲}{۳}$$

اگر این اعداد را در هریک از معادلات تعیین کنندهٔ **D** قرار دهیم و **C** را برحسب **A** و **B** بنویسیم در می‌یابیم که:

$$\mathbf{D}=\frac{۲}{۳}\left(\mathbf{A}+\frac{۱}{۲}\mathbf{B}\right)$$

که همان چیزی است که در جستجویش بودیم.



شکل ۱۳.۱

مثال ۵.۱ فرض کنید θ زاویهٔ بین دو بردار ناصفر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ باشد. نشان دهید که :

$$\cos\theta = \frac{A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3}{|\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}|} \qquad (5.1)$$

توجه : *این یکی از مهمترین اتحادها در جبر بردارهاست .*

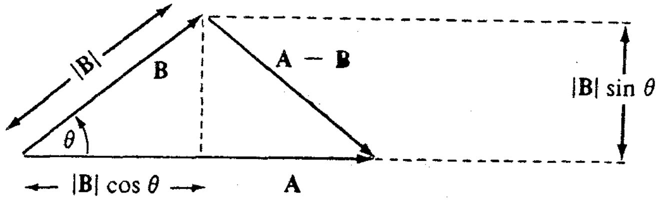
حل اگر دو عبارت $|\mathbf{A} - \mathbf{B}|^2$ را که یکی با استفاده از مؤلفه‌ها و دیگری از طریق هندسی به دست می‌آیند باهم مقایسه کنیم، فرمول مطلوب « نمایان » می‌شود. با استفاده از مؤلفه‌ها، می‌دانیم که :

$$|\mathbf{A} - \mathbf{B}|^2 = (A_1-B_1)^2 + (A_2-B_2)^2 + (A_3-B_3)^2$$

اگر توانها را بسط دهیم و جمله‌ها را دوباره دسته بندی کنیم ، این عبارت را می‌توانیم به صورت زیر بنویسیم :

$$|\mathbf{AB}|^2 = |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2-2\ (A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3)$$

اکنون برای نتیجه گیری عبارت متناظر از طریق هندسی ، ملاحظه می‌کنیم که $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، و θ در شکل (۱۴.۱) نشان داده شده و عمود وارد از نوک $\mathbf{B}$ بر $\mathbf{A}$ رسم شده و طول قطعات مقتضی مشخص شده است .



شکل ۱۴.۱

چون **A − B** وتر یک مثلث قائم الزاویه است، مطابق قضیهٔ فیثاغورس،

$$|\mathbf{A}-\mathbf{B}|^{2} = (|\mathbf{B}|\sin\theta)^{2} + (|\mathbf{A}| - |\mathbf{B}|\cos\theta)^{2}$$

$$= |\mathbf{B}|^{2}(\sin^{2}\theta + \cos^{2}\theta) + |\mathbf{A}|^{2} - 2|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\theta$$

$$|\mathbf{A}-\mathbf{B}|^{2} = |\mathbf{A}|^{2} + |\mathbf{B}|^{2} - 2|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\theta \qquad (۶.۱)$$

اگر دو عبارت $|\mathbf{A}-\mathbf{B}|^{2}$ را با هم مقایسه کنیم، نتیجه می‌گیریم که:

$$|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\cos\theta = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \qquad (۷.۱)$$

که هم ارز اتحاد مطلوب است.

ضمناً خوانندهٔ باهوش از مراجعه به شکل (۱۴.۱) در خواهد یافت که معادلهٔ (۶.۱) همان *قانون کسینوسها* در مثلثات است.

برای مشاهدهٔ کاربردی از این فرمول، مثال بعدی را در نظر بگیرید.

مثال ۶.۱ نشان دهید که بردارهای $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + 5\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 7\mathbf{j} + \mathbf{k}$ بر هم عمودند.

حل

$$\cos\theta = \frac{2-7+5}{\sqrt{30}\sqrt{51}} = 0$$

از این رو $\theta = 90°$

خلاصه - توصیفات هندسی و مختصاتی

اکنون وقت آن رسیده که اندکی تأمل کنیم و آنچه را فراگرفته‌ایم خلاصه نماییم .از دو راه می توان به بردارها نظر کرد : یکی طریق هندسی و دیگری طریق استفاده از مؤلفه‌ها. توصیفات هندسی بیشتر حالت فیزیکی دارند: یک بردار ، اندازه و جهت دارد و روابط برحسب طولها و زوایا بیان می‌شوند. امّا محاسبهٔ این کمیتها غالباً مشکل است ، به خصوص اگر مسأله در فضای سه بُعدی باشد ، رسم نمودار هندسی دشوار می‌شود. بنابراین ، برای حل این گونه مسائل ، نظیر تعیین برآیند چند نیرو ، یک دستگاه مختصات دکارتی معرفی می‌کنیم و همهٔ بردارها را با مؤلفه‌هایشان نمایش می‌دهیم . آن گاه هر بردار یک سه تایی مرتب از اعداد می‌شود.(دلیل دیگر استفاده از این توصیف نسبتاً غیر فیزیکی ، کاربرد آن در ارتباطات است ؛ مثلاً ، چگونه یک فضانورد که بر روی کرهٔ ماه است اطلاعات مربوط به کمیّتی را که اندازه و جهت دارد به همکارانش در زمین می‌رساند؟ او باید آن کمیّت را با مؤلفه‌هایش در یک دستگاه مختصات مشترک بین ماه و زمین -که به عنوان مثال با استفاده از ستاره‌های ثابت تعیین می‌شود - بیان کند.

اجازه دهید معادلاتی را که پیدا کرده‌ایم خلاصه کنیم . این معادلات بیان می‌کنند که چگونه یک توصیف را به توصیف دیگر ربط دهیم . از نظر هندسی ، درازای یک بردار برحسب مؤلفه‌هایش به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$|\mathbf{A}| = (A_1^2 + A_2^2 + A_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

زاویهٔ θ بین دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ از روی مؤلفه‌هایش با استفاده از معادلهٔ (۵.۱) محاسبه می‌شود:

$$\cos\theta = \frac{A_1 B_1 + A_2 B_2 + A_3 B_3}{|\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}|}$$

به خصوص ، کسینوسهای هادی $\mathbf{A}$ را ، که کسینوسهای زوایای بین $\mathbf{A}$ و محورهای مختصات مثبت است، می‌توان با جانشینی $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و یا $\mathbf{k}$ به جای $\mathbf{B}$ در فرمول بالا محاسبه کرد. به این ترتیب ،

$$\cos\alpha = \frac{A_1}{|\mathbf{A}|} \quad , \cos\beta = \frac{A_2}{|\mathbf{A}|} \quad , \cos\gamma = \frac{A_3}{|\mathbf{A}|}$$

از طرف دیگر ، این معادلات را می‌توان برای محاسبهٔ مؤلفه‌های یک بردار از روی مشخصه‌های هندسیش به کاربرد ؛ داریم :

$$A_1 = |\mathbf{A}| \cos\alpha \quad , \qquad A_2 = |\mathbf{A}| \cos\beta \quad , \qquad A_3 = |\mathbf{A}| \cos\gamma$$

از این رو ، دور کامل است و ما آزادیم که از هریک از دو توصیف بهره بگیریم. این توصیف، چه هندسی باشد و چه به کمک مؤلفه‌ها صورت گرفته باشد ، بسیار مناسب است . تمرینهای ۶ تا ۱۰ زیر این مفاهیم را روشن می‌نمایند.

تمرینات

۱. به تقلید از راه حل مثال (۲.۱) ، ثابت کنید که $UV = -WT$

۲. با اعمال روشهای برداری ، مستقیماً ثابت کنید که اگر دو ضلع یک چهار ضلعی با هم مساوی و موازی باشند ، دو ضلع دیگر نیز چنینند.

۳. با استفاده از روشهای برداری ، نشان دهید که قطعه خط واصل اوساط دو ضلع یک مثلث ، موازی ضلع سوم و درازایش نصف درازای ضلع سوم است

۴. ثابت کنید که اقطار یک متوازی الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

۵. براساس ملاحظات زیر، برهان دیگری برای این واقعیّت که میانه‌های یک مثلث یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند اقامه کنید : اگر $\mathbf{D}$ ، $\mathbf{E}$ ، و $\mathbf{F}$ بردارهایی باشند که از یک نقطهٔ ثابت به گوشه‌های مثلث رسم شده‌اند، آن‌گاه

$$\mathbf{D} + \frac{3}{2}\left[\frac{1}{3}(\mathbf{D}+\mathbf{E}+\mathbf{F}) - \mathbf{D}\right] = \frac{1}{2}(\mathbf{E}+\mathbf{F})$$

صحت این تساوی را به طور جبری ثابت و سپس آن را به طور هندسی تعبیر کنید.

[*راهنمایی* : نوک بردار($\frac{1}{3}(\mathbf{D}+\mathbf{E}+\mathbf{F})$ همان نقطهٔ تقاطع است .]

۶. زاویهٔ بین $2\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ و $3\mathbf{i}-4\mathbf{k}$ را بیابید.

۷. زاویهٔ بین محور x ها و $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ را بیابید.

۸. سه زاویهٔ مثلث به رئوس $(-2,1,1)$ ، $(1,-3,-5)$ ، و $(3,-4,-4)$ را بیابید.

۹. زاویهٔ بین صفحهٔ xy و $2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$ را بیابید. (توجه کنید که $\mathbf{k}$ بر صفحهٔ xy عمود است. باید مشخص کنید که منظور از زاویهٔ بین یک بردار و یک صفحه چیست.)

۱۰. نشان دهید که $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ بر صفحهٔ $x+y+z=0$ عمود است. (*راهنمایی*: این صفحه از مبدأ می‌گذرد. نشان دهید که $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ بر هر برداری که از مبدأ به نقطه‌ای در آن صفحه رسم شود عمود است.)

تمرینات سادهٔ زیر به جهت یادآوری بعضی از مفاهیم هندسهٔ تحلیلی درج شده است.

۱۱. درست است یا نادرست: $3x-4y+5z=0$ صفحه‌ای است که از مبدأ می‌گذرد.

۱۲. درست است یا نادرست: صفحهٔ yz با معادلهٔ $x=0$ نمایش داده می‌شود.

۱۳. درست است یا نادرست: مکان هندسی نقاطی که در آنها $x=3$ و $y=4$ باشد، خطی است موازی محور z ها که فاصله‌اش از این محور ۵ است.

۱۴. درست است یا نادرست: $x^2+y^2+z^2=9$ معادلهٔ کُره‌ای است که مرکزش در مبدأ و شعاعش ۹ است.

۱۵. معادلهٔ کره‌ای را بنویسید که مرکزش نقطهٔ $(2,3,4)$ و شعاعش ۳ است.

۱۶. معادلهٔ استوانه‌ای را بنویسید که محورش محور x ها و شعاعش ۲ است.

۱۷. آیا معادلات $x=y=z$ یک *خط* را نمایش می‌دهند یا یک صفحه را؟

۱۸. مکان هندسی نقاطی که در آنها $x^2+z^2=0$ باشد، چیست؟

۱۹. مکان هندسی نقاطی که در آنها $(x-2)^2+(y+3)^2+(z-4)^2=0$ باشد، چیست؟

۲۰. معادلهٔ $xyz=0$ کدام شکل هندسی را نمایش می‌دهد؟ (به خاطر داشته باشید که حاصل ضرب چند عدد صفر است اگر و فقط اگر حداقل یکی از آنها صفر باشد.)

۲۱. فاصلهٔ بین $(2,3,4)$ و $(5,3,8)$ چقدر است؟

۲۲. فاصلهٔ بین $(3,8,9)$ و صفحهٔ xz چقدر است؟ (در چنین حالاتی فاصله همواره به

معنی کوتاهترین فاصله یا فاصلهٔ عمودی است.)

۲۳.فاصلهٔ بین (۰,۳,۰) و استوانهٔ $x^2 + y^2 = 4$ چقدر است؟ (گمان نمی‌کنم که شما بتوانید فرمولی برای تعیین این فاصله در یکی از کتابهای خود بیابید. فقط از معنی معمول آن استفاده کنید.)

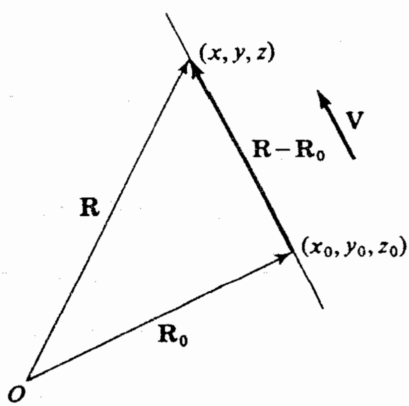
۲۴.عبارت $x^2 + y^2$ مربع فاصلهٔ بین (x,y,z) و محور z ها است. باتوجه به این نکته، معادلهٔ $x^2+y^2=z^2$ چه شکلی رانمایش می‌دهد؟

۲۵.آیا می‌دانید که معادلهٔ $(x/2)^2 + (y/3)^2 + (z/4)^2 = 1$ چه شکلی را نمایش می‌دهد؟ (اگر چنین باشد، اطلاعات شما از هندسهٔ تحلیلی بیشتر از میزان مورد نیاز برای مطالعهٔ این کتاب است.)

۸.۱ معادلات خط

بردار موضع یک نقطه برداری است که از مبدأ به آن نقطه کشیده می‌شود. به این ترتیب، بردار موضع نقطهٔ (x,y,z) بردار $x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ است. این تناظر بین نقاط و بردارها ابزاری اساسی است که به وسیلهٔ آن می‌توان مسائل هندسهٔ تحلیلی را به روشهای برداری مورد مطالعه قرار داد.

به عنوان یک مثال مقدماتی، اجازه دهید معادلات خطی را که از نقطهٔ مفروضی چون (x_0,y_0,z_0) به موازات بردار ناصفر مفروض $\mathbf{V} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ می‌گذرد بیابیم. (شکل «۱۵.۱» را ببینید.)



شکل ۱۵.۱

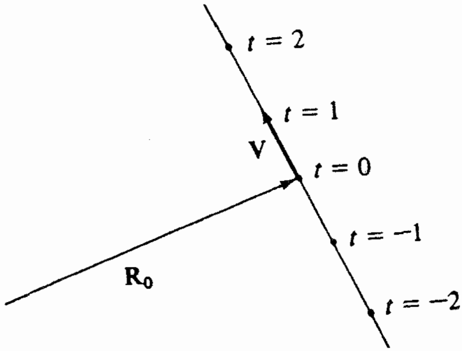
فرض کنید $\mathbf{R}_o$ بردار موضع (x_o,y_o,z_o) و $\mathbf{R}$ بردار موضع نقطهٔ (x,y,z) باشد. در ابتدا واضح نیست که چه شرطی باید بر بردار $\mathbf{R}$ اعمال شود تا نقطهٔ (x,y,z) روی خط مطلوب قرار گیرد، امّا برداری که از (نوک) $\mathbf{R}_o$ به (نوک) $\mathbf{R}$ کشیده می‌شود *باید موازی* $\mathbf{V}$ *باشد*. این بردار، که البته $\mathbf{R}-\mathbf{R}_o$ است، موازی $\mathbf{V}$ خواهد بود اگر و فقط اگر برابر مضرب اسکالری از $\mathbf{V}$ باشد، که در نتیجه شرطی که (x,y,z) روی خط باشد این می‌شود که به ازای عددی چون t، $\mathbf{R}-\mathbf{R}_o = t\mathbf{V}$. اگر این تساوی را به صورت $\mathbf{R} = \mathbf{R}_o + t\mathbf{V}$ بنویسیم و بردارها را با مؤلفه‌هایشان بیان کنیم، خواهیم داشت:

$$\begin{cases} x = x_o + at \\ y = y_o + bt \\ z = z_o + ct \end{cases} \qquad \text{یا} \quad \mathbf{R} = \mathbf{R}_o + t\mathbf{V} \qquad (۸.۱)$$

نقطهٔ (x,y,z) روی خطی است که از (x_o,y_o,z_o) می‌گذرد و موازی $\mathbf{V} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ است فقط و فقط وقتی که مختصاتش به ازای مقداری از اسکالر t، بین $-\infty$ و $+\infty$، در هر سه معادلهٔ (۸.۱) صدق کنند.

اجازه دهید لحظه‌ای به اهمیّت اسکالر t بیندیشیم. به نظر می‌رسد که نقش t در توصیف بالا ظاهری است. روی هم رفته، از نظر فیزیکی، همین که $\mathbf{R}_o$ و $\mathbf{V}$ را بدانیم، بی آن که داده‌های دیگری مورد نیاز باشد، می‌توانیم خط مطلوب، را رسم کنیم. معرفی عنصر t صرفاً یک تدبیر ریاضی است که به کمک آن، و *به استناد معادلات*، می‌توانیم بگوییم که $\mathbf{R}-\mathbf{R}_o$ موازی $\mathbf{V}$ است. معادلات (۸.۱) شکل *پارامتری* معادلات خط و متغیّر «ظاهری» t *پارامتر* نامیده می‌شوند.

تعبیر نقش t را می‌توان از مشاهدهٔ نقاط $\mathbf{R}$ روی خط، که به ازای مقادیر مختلف t به دست می‌آیند، پیدا کرد. به این ترتیب، مثلاً، اگر $t=0$، $\mathbf{R} = \mathbf{R}_o$؛ اگر $t=+1$، $\mathbf{R} = \mathbf{R}_o + \mathbf{V}$؛ اگر $t=-1$، $\mathbf{R} = \mathbf{R}_o - \mathbf{V}$؛ این نقاط و نقاط دیگری در شکل (۱۶.۱) نشان داده شده‌اند. اگر پارامتر t را نمایش دهندهٔ زمان بدانیم، معادلات (۸.۱) معادلاتی خواهند بود که موضع یک ذرّهٔ متحرک را در لحظهٔ t مشخص می‌کنند. این ذرّه بر روی خط موازی $\mathbf{V}$ حرکت می‌کند و در زمان $t=0$ از نقطهٔ (x_o,y_o,z_o) می‌گذرد.



شکل ۱۶.۱

تا آن جا که به خود خط مربوط می‌شود، ضریب اسکالر t در معادلهٔ (۸.۱) می‌تواند با هر تابع اسکالری از قبیل t/۲، t-، یا t^3، که همهٔ مقادیر بین ∞ - و ∞ + را اختیار می‌کند، تعویض شود. با این وجود، اگر می‌نوشتیم:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + t^2\mathbf{V}$$

فقط مضارب مثبت $\mathbf{V}$ به $\mathbf{R}_0$ افزوده می‌شدند که در نتیجه فقط «نیمی» از خط (یعنی، یک شعاع) تولید می‌شد. اگر می‌نوشتیم:

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + (\sin t)\,\mathbf{V}$$

فقط «قطعه‌ای» از خط که بین $\mathbf{R}_0 - \mathbf{V}$ و $\mathbf{R}_0 + \mathbf{V}$ است تولید می‌شد (زیرا $-1 \leq \sin t \leq 1$)، و این قطعه بی‌نهایت بار تکرار می‌شد به طوری که اگر t را زمان تعبیر می‌کردیم، ذرّهٔ متحرک الی‌الابد از یک انتهای آن قطعه به انتهای دیگر نوسان می‌کرد. اگر t را به بازهٔ $-1 \leq t \leq 1$ محدود کنیم، همین قطعه به کمک معادلات پارامتری اوّلیه، معادلات (۸.۱)، تولید می‌شود. با این وجود، اغلب خوانندگان اتفاق نظر دارند که معادلات (۸.۱) ساده‌ترین شکل ممکن هستند. در عین حال، توجه کنید که $\mathbf{R}_0$ را می‌توانیم با هر بردار دیگری که نقطه‌ای از خط را مشخص کند تعویض کرده و $\mathbf{V}$ را به هر بردار دیگری در همان جهت بدل کنیم.

پارامتر t را می‌توان از معادلات (۸.۱) حذف کرد. خواننده باید بتواند به آسانی تحقیق کند که اگر هیچ یک از مؤلفه‌های $\mathbf{V}$ صفر نباشد نتیجه می‌گیریم که :

$$\frac{x-x_\circ}{a}=\frac{y-y_\circ}{b}=\frac{z-z_\circ}{c} \qquad (۹.۱)$$

این شکل غیر پارامتری است ، و از روی آن فوراً می‌توانیم مؤلفه‌های $\mathbf{V}$ و $\mathbf{R}_\circ$ را بخوانیم. [در استفاده از (۹.۱) این نکتهٔ اصلی را به خاطر بسپارید که ضریب هر یک از x، y، و z عدد ۱ است ، و نیز ملاحظه کنید که (۹.۱) دو معادله را نمایش می‌دهد .]

مثال ۷.۱ معادلات خطی را که از نقطهٔ (۲,۰,۴) به موازات $۲\mathbf{i}+\mathbf{j}+۳\mathbf{k}$ می‌گذرد بیابید ؛ به هر دو صورت پارامتری و غیر پارامتری .

حل شرطی که $\mathbf{R}-\mathbf{R}_\circ$ موازی $\mathbf{V}$ است چنین می‌شود :

$$x-۲=۲t\ ,\quad y-\circ=۱t\ ,\quad z-۴=۳t$$

از این رو ،

$$x=۲+۲t\ ,\quad y=t\ ,\quad z=۴+۳t$$

صورت غیر پارامتری :

$$\frac{x-۲}{۲}=y=\frac{z-۴}{۳}$$

مثال ۸.۱ معادلات خطی را که از نقطهٔ (۰,۳,-۱) به موازات $۳\mathbf{i}+۴\mathbf{k}$ می‌گذرد بیابید.

حل در شکل پارامتری داریم :

$$x=۳t$$

$$y=۳$$

$$z=-۱+۴t$$

برای تعیین شکل غیرپارامتری ، ملاحظه می‌کنیم که $b=\circ$ ، و بنابراین معادلات (۹.۱) بی‌معنی می‌شوند. اگر t را از اوّلین و سوّمین معادلهٔ بالا حذف کنیم ، در می‌یابیم که :

$$\frac{x}{۳}=\frac{z+۱}{۴}$$

اگر $y = ۳$ را ضمیمهٔ این معادله کنیم ، شکل غیرپارامتری را خواهیم داشت .

مثال ۹.۱ بردار یکّه‌ای موازی خط زیر بیابید.

$$\frac{x-۴}{۲} = y-۳ = \frac{z+۱}{۲}$$

حل از مقایسه با (۹.۱) داریم $a = ۲$ ، $b = ۱$ ، $c = ۲$. بنابراین ، یک بردار موازی خط مفروض عبارت است از $۲\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$. اگر این بردار را بر درازایش تقسیم کنیم ،بردار یکّهٔ $\frac{۲}{۳}\mathbf{i} + \frac{۱}{۳}\mathbf{j} + \frac{۲}{۳}\mathbf{k}$ را به دست می‌آوریم . منهای این بردار نیز یک جواب درست است .

مثال ۱۰.۱ نقطهٔ تقاطع دو خط راست زیر را بیابید.

$$\mathbf{R} = ۳\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + (۲\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})t$$

$$\mathbf{R} = \mathbf{i} - ۲\mathbf{k} + (\mathbf{j} + \mathbf{k})t$$

حل این مثال کمی فریبنده است . اگر چه برای پارامترهای هر دو خط از یک حرف ، t ، استفاده کرده‌ایم، نمی‌توان نتیجه گرفت که در نقطهٔ تقاطع ، مقادیر t برای هر دو خط یکسان است . اگر تعبیر حرکت ذره را در نظر بگیریم ، می‌توان گفت که امکان دارد دو مسیر حرکت یکدیگر را قطع کنند ولی ذرات متحرک در دو زمان متفاوت از نقطهٔ تقاطع بگذرند. به این ترتیب ، باید به سراغ معادلات غیرپارامتری برویم.

برای این که نقطهٔ (x,y,z) روی اولین خط باشد ، باید داشته باشیم :

$$\frac{x-۳}{۲} = y-۲ = z$$

اعمال این شرط برای خط دوّم نشان می‌دهد که :

$$x = ۱ \qquad y = z+۲$$

بنابراین ، چهار معادله تشکیل می‌شوند که سه مجهول x ، y ، و z باید در آنها صدق کنند. اگر فقط سه معادلهٔ اوّل را در نظر بگیریم ،

$$\frac{x-۳}{۲} = y-۲ \qquad y-۲ = z \qquad x = ۱$$

و در می‌یابیم که $(x,y,z) = (۱,۱,-۱)$ جواب آنهاست . با این وجود ، این جواب باید در معادلهٔ چهارم

$$y = z+۲$$

صدق کند ؛ در غیر این صورت ، نقطهٔ تقاطعی وجود ندارد. (که در فضا کاملاً محتمل است !) چون در این حالت جواب بالا در معادلهٔ چهارم صدق می‌کند ، یک نقطهٔ تقاطع داریم که بردار $\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$ بردار موضع آن است .

مثال ۱۱.۱ زاویهٔ بین خطوط مثال (۱۰.۱) را بیابید.

حل قبلاً تحقیق کرده‌ایم که خطوط مورد بحث یکدیگر را قطع می‌کنند ، بنابراین ، مسأله با معنی است. خط اوّل موازی $۲\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ و خط دوّم موازی $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ است . زاویهٔ بین این بردارها در تساوی زیر صدق می‌کند. (معادلهٔ «۵.۱» را ببینید.)

$$\cos\theta = \frac{۲(۰) + ۱(۱) + (۱)}{(۲^۲ + ۱^۲ + ۲^۲)^{\frac{۱}{۲}}(۰^۲ + ۱^۲ + ۱^۲)^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۲}{۱۲^{\frac{۱}{۲}}} = \frac{۱}{۳^{\frac{۱}{۲}}}$$

بنابراین ،

$$\theta = \cos^{-۱}\left(\frac{\sqrt{۳}}{۳}\right)$$

تمرینات

۱. معادلات پارامتری خطی را که از مبدأ به موازات $۳\mathbf{i} - ۲\mathbf{j} + ۷\mathbf{k}$ می‌گذرد بیابید.

۲. معادلات خط موازی محور z ها را که از نقطهٔ (۱,۲,۳) می‌گذرد بیابید.

۳. معادلات خط عمود بر صفحهٔ yz را که از نقطهٔ (۱,۲,۳) می‌گذرد بیابید.

۴. دو بردار یکّه موازی خط زیر بیابید :

$$\frac{x-۱}{۳} = \frac{y+۲}{۴} \qquad z = ۹$$

۵. دو بردار یکّه موازی خط $x = ۲y = ۳z + ۳$ بیابید. این معادلات را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$x = \frac{y}{\frac{1}{2}} = \frac{z+1}{\frac{1}{3}}$$

۶. دو بردار یکّه موازی خطی که با معادلات $x+y=1$ ، $x-3z=5$ نمایش داده می‌شود بیابید.[*راهنمایی* : معادلات را به شکل (۹.۱) بنویسید.]

۷. معادلات خطی را بیابید که از مبدأ می‌گذرد و موازی خط زیر است :

$$x-3=\frac{y+2}{4}=1-z$$

۸. معادلات خطی را که از نقاط (۳،۴،۵) و (۳،۴،۷) می‌گذرد بیابید.

۹. معادلات خطی را که از نقاط (۱،۴،-۱) و (۲،۲،۷) می‌گذرد بیابید.

۱۰.کسینوس زاویهٔ بین خطوط زیر را به روشهای برداری بیابید :

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-0/5}{2}=z \quad \text{و} \quad z=y=z$$

۱۱.زاویهٔ بین خطوط متقاطع زیر را بیابید :

$$\frac{x-1}{3}=\frac{y-3}{4}=\frac{z}{5} \qquad \text{و} \qquad \frac{x-1}{2}=3-y=2z$$

۱۲.فرض کنید A و B دو نقطه ، به ترتیب ، با بردارهای موضع $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ باشند. نشان دهید که خط گذرنده بر این دونقطه را می‌توان با معادلهٔ برداری زیر نمایش داد :

$$\mathbf{R}=s\mathbf{A}+t\mathbf{B} \quad \text{و} \quad s+t=1 \qquad (۱۰.۱)$$

۱۳.تمرین (۹) را با استفاده از معادلهٔ (۱۰.۱) حل کنید.

۱۴.(نقاط تقسیم) فرض کنید نقاط A ، B ، و P بر یک استقامت باشند. می‌گوییم P قطعهٔ AB را به نسبت λ تقسیم می‌کند در صورتی که

$$AP=\lambda\ (PB) \qquad (۱۱.۱)$$

(الف)- به ازای چه مقادیری از λ نقطهٔ P اولاً بین A و B ، ثانیاً سمت چپ A ، وثالثاً سمت راست B است ؟

(ب) - نشان دهید که ، نسبت به یک مبدأ مانند O ، معادلهٔ (۱۱.۱) را می‌توان به صورت زیر

نوشت :

$$OP = \frac{OA + \lambda (OB)}{1 + \lambda}$$

این معادله را به معادلهٔ (۱۰.۱) مربوط کنید.

(ج) - اگر P و P′ قطعهٔ AB را از درون یا از بیرون به نسبتهای عددی یکسان $\lambda \pm$ تقسیم کنند، نشان دهید که A و B قطعهٔ PP′ را از درون یا از بیرون به نسبتهای $(1+\lambda) / (1-\lambda) \pm$ تقسیم می‌کنند.

۱۵.نقطهٔ تقاطع هر زوج مفروض از خطوط مستقیم زیر را بیابید.

(الف) $\mathbf{R} = (5\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k})\,t + 7\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 8\mathbf{k}$ و

$\mathbf{R} = (6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 6\mathbf{k})\,t + 8\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$

(ب) $\mathbf{R} = (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + \mathbf{k})\,t + 2\mathbf{k}$ و

$\mathbf{R} = (6\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 2\mathbf{k})\,t + 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

(ج) $\mathbf{R} = (3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})\,t$ و

$\mathbf{R} = (-6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k})\,t + 2\mathbf{i}$

(د) $\mathbf{R} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\,t$ و

$\mathbf{R} = (\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k})\,t - \mathbf{i} + \mathbf{j}$

۹.۱ ضرب اسکالر

حاصل ضرب اسکالر دوبردار ، عدد

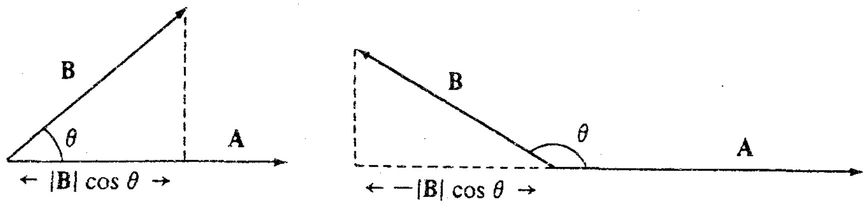
$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}| \cos\theta \qquad (۱۲.۱)$$

است که در آن θ زاویهٔ بین بردارهاست . اگر چه **A** و **B** بردارند ، $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ عدد است . ضرب اسکالر را ضرب *نقطه‌ای* یا ضرب *داخلی* نیز می‌نامند. با توجه به شکل (۱۷.۱) ، $|\mathbf{B}| \cos\theta$ را مؤلّفهٔ **B** موازی با **A** می‌نامیم ؛ یعنی ، درازای تصویر عمودی **B** در جهت **A** ، با علامت مناسب . به این ترتیب، می‌توانیم $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ را به صورت زیر تعبیر کنیم :

*(مؤلّفهٔ علامت دار **B** در امتداد **A**) (درازای **A**)*

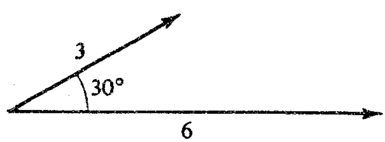
چون تعریف ضرب اسکالر **A** و **B** مستقل از ترتیب آنهاست، تعبیر زیر نیز اعتبار دارد:

(مؤلفهٔ علامت دار **A** *در امتداد* **B**) *(درازای* **B**)



شکل ۱۷.۱

در چند حالت معدود ساده، حاصل ضرب اسکالر دو بردار را به آسانی می‌توان از روی تعریف محاسبه کرد؛ به عنوان مثال، حاصل ضرب اسکالر بردارهایی که در شکل (۱۸.۱) نشان داده شده‌اند $۹\sqrt{۳}$ است.



شکل ۱۸.۱

اگر **A** یا **B** بردار صفر باشد، داریم: $|\mathbf{A}| = ۰$ یا $|\mathbf{B}| = ۰$؛ بنابراین، از (۱۲.۱) نتیجه می‌شود که: $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = ۰$. (ما این واقعیّت راکه θ در این حالت تعریف نشده است، نادیده می‌گیریم.) از طرف دیگر، ممکن است $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = ۰$ حتی اگر هر دو بردار **A** و **B** ناصفر باشند؛ مثلاً، اگر **A** و

B متعامد باشند آن‌گاه $\cos\theta = \cos 90^\circ = 0$ و بنابراین $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 0$.

یادآوری می‌کنیم که در بخش (۷.۱) معادلهٔ (۷.۱) را ثابت کردیم :

$$|\mathbf{A}|\ |\mathbf{B}|\ \cos\theta = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

از ترکیب این و معادلهٔ (۱۲.۱) ، خواهیم داشت :

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3 \qquad (13.1)$$

از این رو ، دو فرمول مهّم برای ضرب اسکالر داریم : یکی معادلهٔ (۱۲.۱) که **A·B** را با استفاده از مفاهیم هندسی توصیف و یک تصور ذهنی از آن ایجاد می‌کند ، و دیگری معادلهٔ (۱۳.۱) که حاصل ضرب اسکالر را به کمک مؤلفه‌ها بیان می‌کند و در محاسبات مفید واقع می‌شود. اکنون هر دو فرمول را به خاطر بسپارید. هردو مهمّند.

***مثال* ۱۲.۱** حاصل ضرب اسکالر $4\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$ را بیابید.

حل $(4)(1) + (-5)(2) + (-1)(3) = -9$. (علامت منفی نشان می‌دهد که زاویهٔ بین بردارها باید بیشتر از 90° باشد.)

***مثال* ۱۳.۱** زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ را بیابید.

حل داریم : $|\mathbf{A}| = 3$ و $|\mathbf{B}| = 5$. با استفاده از (۱۳.۱) می‌بینیم که $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = 14$. با جایگزینی این مقادیر در (۱۲.۱) خواهیم داشت : $\theta = \cos^{-1} 14/15$.

***مثال* ۱۴.۱** اگر **F** نیروی ثابتی باشد که در طول تغییر مکان **D** اثر کند ، کار انجام شده به وسیلهٔ **F** برابر حاصل‌ضرب اندازهٔ تغییر مکان در مؤلفهٔ نیرو در جهت تغییر مکان تعریف می‌شود. با استفاده از مفاهیم برداری،

$$\text{کار} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{D}$$

خواص زیر از ضرب اسکالر را به آسانی می‌توان از معادلهٔ (۱۳.۱) نتیجه گرفت :

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{A}$$

$$(s\mathbf{A} + \mathbf{B})\cdot\mathbf{C} = s\mathbf{A}\cdot\mathbf{C} + \mathbf{B}\cdot\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A}\cdot(s\mathbf{B} + \mathbf{C}) = s\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} + \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$$

$$|\mathbf{A}|^2 = \mathbf{A}\cdot\mathbf{A}$$

مثال ۱۵.۱ *(اصل ماکسیمم)* فرض کنید بردار ناصفر $\mathbf{D}$ مفروض و $\mathbf{n}$ یک بردار یکّه باشد. آن‌گاه $|\mathbf{n}| = 1$ و $\mathbf{D}\cdot\mathbf{n} = |\mathbf{D}|\,|\mathbf{n}|\cos\theta = |\mathbf{D}|\cos\theta$. این حاصل ضرب بیشترین مقدار را وقتی دارد که $\cos\theta = 1$؛ یعنی، وقتی که $\theta = 0$. به این ترتیب، به اصل ماکسیمم زیر می‌رسیم که در بخشهای بعدی مفید واقع خواهد شد:

بردار یکّهٔ $\mathbf{n}$ وقتی حاصل ضرب $\mathbf{D}\cdot\mathbf{n}$ را به ماکسیمم می‌رساند که در جهت $\mathbf{D}$ باشد.

مثال ۱۶.۱ البته از ضرب اسکالر می‌توان در محاسبهٔ مؤلفه‌ها در امتداد محورها استفاده کرد؛ به این ترتیب، مؤلّفهٔ $\mathbf{D}$ در جهت x حاصل ضرب $\mathbf{D}\cdot\mathbf{i}$ است، وهکذا. در واقع، به ازای هر بردار $\mathbf{D}$ می‌توان نوشت:

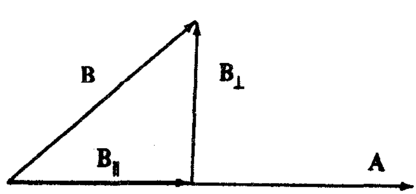
$$\mathbf{D} = (\mathbf{D}\cdot\mathbf{i})\,\mathbf{i} + (\mathbf{D}\cdot\mathbf{j})\,\mathbf{j} + (\mathbf{D}\cdot\mathbf{k})\,\mathbf{k} \qquad (۱۴.۱)$$

به عنوان مثالی دیگر از فایدهٔ ضرب اسکالر، مسأله زیر را در نظر بگیرید. فرض کنید دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ مفروض باشند و بخواهیم $\mathbf{B}$ را به حاصل جمع دو بردار تجزیه کنیم که یکی موازی $\mathbf{A}$ و دیگری عمود بر $\mathbf{A}$ باشد. به عبارت دیگر، می‌خواهیم بردارهای $\mathbf{B}_\parallel$ و $\mathbf{B}_\perp$ شکل (۱۹.۱) را بیابیم. به وضوح، درازای (علامت‌دار) $\mathbf{B}_\parallel$ برابر است با $\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}/|\mathbf{A}|$. برای تعیین برداری با این درازا در جهت $\mathbf{A}$، بردار یکّهٔ در امتداد $\mathbf{A}$ را در این اسکالر ضرب می‌کنیم. چون $\mathbf{A}/|\mathbf{A}|$ بردار یکّهٔ در امتداد $\mathbf{A}$ است، فرمول سادهٔ زیر را داریم:

$$\mathbf{B}_\parallel = \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|}\,\frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}\,\mathbf{A}$$

وقتی $\mathbf{B}_\parallel$ محاسبه شود، $\mathbf{B}_\perp$ بقیهٔ $\mathbf{B}$ است:

$$\mathbf{B}_\perp = \mathbf{B} - \mathbf{B}_\parallel = \mathbf{B} - \frac{\mathbf{B}\cdot\mathbf{A}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}\,\mathbf{A}$$



شکل ۱۹.۱

مثال ۱۷.۱ بردار $6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ را به بردارهایی موازی و عمود بر $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ تجزیه کنید.

حل بردار موازی عبارت است از :

$$\frac{6+2-2}{1+1+1}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) = 2(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$$

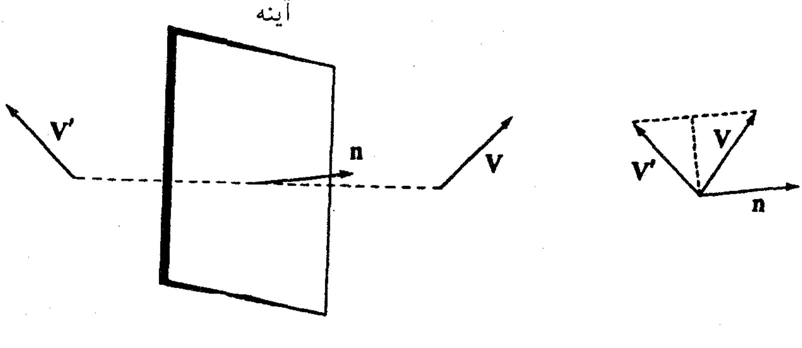
بردار عمود عبارت است از :

$$6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k} - 2(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}) = 4\mathbf{i} - 4\mathbf{k}$$

مثال ۱۸.۱ فرمولی برای تصویر آینه‌ای بردار $\mathbf{V}$، $\mathbf{V}'$، که در یک آینهٔ مسطح با قائم یکهٔ $\mathbf{n}$ منعکس شده است بیابید.(شکل «۲۵.۱ـ الف» را ببینید.)

حل در شکل (۲۰.۱ـ ب) ، بردارهای نمایش دهندهٔ $\mathbf{n}$، $\mathbf{V}$، $\mathbf{V}'$ را با یک ته مشترک رسم کرده‌ایم. خطوط نقطه‌چین این واقعیّت را روشن می‌کنند که $\mathbf{V}$ و $\mathbf{V}'$ مؤلفه‌های عمود بر $\mathbf{n}$ یکسان دارند، ولی مؤلفه‌های موازی آنها در دو جهت مخالفند. برای تعیین $\mathbf{V}'$ از روی $\mathbf{V}$، باید مؤلفهٔ موازی $\mathbf{n}$ بردار $\mathbf{V}$ را *دوبار* از $\mathbf{V}$ تفریق کنیم . ازاین رو، با توجه به این که $\mathbf{n}$ یک قائم یکّه بود ،

$$\mathbf{V}' = \mathbf{V} - 2\,\mathbf{V}_{\parallel} = \mathbf{V} - 2\,(\mathbf{V}\cdot\mathbf{n})\,\mathbf{n}$$



ب الف

شکل ۲۰.۱

تمرینات

۱. حاصل ضرب اسکالر $\mathbf{i}+8\mathbf{j}-2\mathbf{k}$۳ و $5\mathbf{i}+\mathbf{j}+2\mathbf{k}$ را بیابید.

۲. حاصل ضرب اسکالر $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ و $4\mathbf{i}-3\mathbf{k}+9\mathbf{j}$ را بیابید.

۳. حاصل ضرب اسکالر $3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ و $5\mathbf{j}-10\mathbf{k}$ را بیابید.

۴. زاویهٔ بین $2\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ و $3\mathbf{i}-4\mathbf{j}$ را تعیین کنید.

۵. زاویهٔ بین $2\mathbf{i}$ و $3\mathbf{i}+4\mathbf{j}$ را بیابید.

۶. نیروی $\mathbf{F}=2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+\mathbf{k}$ در طول تغییر مکان $\mathbf{D}=-2\mathbf{i}+\mathbf{j}-\mathbf{k}$ اثر می‌کند کار انجام شده را بیابید.

۷. مؤلفهٔ $8\mathbf{i}+\mathbf{j}$ در $\mathbf{i}+2\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ را بیابید.

۸. مؤلفهٔ $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ را در جهت $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ بیابید.

۹. مؤلفهٔ نیروی $5\mathbf{i}+7\mathbf{j}-\mathbf{k}$ را در جهت تغییر مکان PQ که در آن $P\ (3,0,1)$ و $Q\ (4,4,4)$ دو نقطه از فضا هستند، بیابید.

۱۰. برداری همجهت با $\mathbf{i}+\mathbf{j}$ بیابید که مؤلفه‌اش در جهت $2\mathbf{i}-4\mathbf{k}$ برابر واحد باشد.

۱۱. اگر $\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}=0$ و $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}=0$، در مورد بردار $\mathbf{B}$ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

۱۲. با تعبیر $2x+3y+4z$ به عنوان یک حاصل ضرب اسکالر، نشان دهید که $2\mathbf{i}+3\mathbf{j}+4\mathbf{k}$ بر صفحهٔ $2x+3y+4z=0$ عمود است.

۱۳. اگر $\mathbf{A}$ یک بردار ناصفر ثابت باشد، $(\mathbf{R}-\mathbf{A})\cdot\mathbf{R}=0$ را تعبیر هندسی کنید،

(الف) در صفحه با $\mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$،

(ب) در فضا با $\mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$،

۱۴. اگر $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ دو بردار یکّه باشند و θ زاویهٔ بین آنها باشد، $\frac{1}{2}\,|\mathbf{u}-\mathbf{v}|$ را بر حسب θ بیابید.

۱۵. فرض کنید $\mathbf{A}=(\cos\phi)\mathbf{i}+(\sin\phi)\mathbf{j}$ و $\mathbf{B}=(\cos\theta)\mathbf{i}+(\sin\theta)\mathbf{j}$. این بردارها را در صفحهٔ xy رسم کنید. با تعبیر هندسی حاصل ضرب اسکالر $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$، ثابت کنید که

$$\cos(\phi-\theta)=\cos\phi\cos\theta-\sin\phi\sin\theta$$

۱۶.به کمک روشهای برداری، ثابت کنید که میانهٔ مرسوم از رأس مقابل قاعدهٔ یک مثلث متساوی الساقین بر قاعده عمود است.

۱۷.ثابت کنید مجموع مربعات اقطار یک متوازی الاضلاع مساوی مجموع مربعات اضلاع آن است.

۱۸.نامساوی مثلث بخش (۳.۱) را ثابت کنید:

$$|\mathbf{A}+\mathbf{B}| \leq |\mathbf{A}| + |\mathbf{B}|$$

(*راهنمایی*: طرفین را مجذور و از ضرب اسکالر استفاده کنید.)

۱۹.بردار $6\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$ را به دو بردار تجزیه کنید یکی موازی با بردار زیر و دیگری عمود بر آن:

(الف) بردار $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$.

(ب) بردار $2\mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.

(ج) بردار $2\mathbf{j} - \mathbf{k}$.

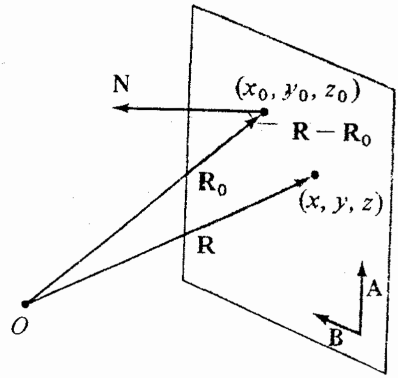
۲۰.بردار $\mathbf{n} = (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}) / 7$ بر صفحه‌ای عمود است. قطعه خط نمایش دهندهٔ بردار $\mathbf{A}=2\mathbf{i}+5\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ در یک طرف این صفحه قرار دارد. صفحه را مانند یک آینه در نظر بگیرید و بردار نمایشگر تصویر آینه‌ای $\mathbf{A}$ را بنویسید.

۱۰.۱ معادلات صفحه

یادآوری می‌کنیم که در بخش (۸.۱) هر خط راست را با نقطه‌ای روی خط و برداری موازی خط مشخص کردیم. به طور مشابه، امکان دارد یک صفحه را با این فرض که نقطهٔ (x_0,y_0,z_0) در صفحه باشد و دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ موازی صفحه باشند، مشخص کنیم؛ البته، $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ نباید با هم موازی باشند. با معرفی بردارهای موضع $\mathbf{R}_0 = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k}$ و $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$، شرطی را جستجو می‌کنیم که اعمال آن بر $\mathbf{R}$ وقوع نقطهٔ (x,y,z) را در صفحه تضمین کند. چندان بدیهی نیست که چگونه $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}_0$، $\mathbf{A}$، و $\mathbf{B}$ بستگی دارد؛ ولی، واضح است که «بردار نسبی» $\mathbf{R} - \mathbf{R}_0$ باید در صفحه باشد. (به عبارت دقیقتر، $\mathbf{R} - \mathbf{R}_0$ نماینده‌ای دارد که در صفحه واقع است. شکل «۲۱.۱») از این رو، آن را می‌توان به صورت ترکیبی از $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بیان کرد. به این ترتیب، به ازای اسکالرهایی

چون s و t ، که هر یک مقادیری بین $\infty-$ و $\infty+$ می‌گیرد ، داریم :

$$\mathbf{R} - \mathbf{R}_0 = s\mathbf{A} + t\mathbf{B}$$



شکل ۲۱.۱

اسکالرهای s و t نقشی مشابه نقش تک پارامتر t در معادلهٔ یک خط راست [معادلهٔ (۸.۱)] را ایفا می‌کنند. نیاز به دو پارامتر برای قرار دادن نقطه‌ای در صفحه حاکی از این واقعیّت است که صفحه یک شئ دو بعدی است . گفته می‌شود **A** و **B** *صفحه را پدید می‌آورند.*

تجربه‌ای که در تحصیل این معادلهٔ پارامتری برای صفحه کسب کردیم ، در فصل (۴) ، هنگـام تحلیل سطوح دوبعدی دیگر ، مفید واقع خواهد شد. با این وجود ، واقعیّت امر این است که مـا می‌توانیم یک معادلهٔ *غیرپارامتری* را که بسیار ساده‌تر است نتیجه بگیریم ، و صورت پارامتری بـالا تقریباً هیچ وقت به کار نمی‌رود.

پس اجازه دهید از نو حرکتی آغاز کنیم و راه دیگری در پیش گیریم.

راه حل توصیف غیرپارامتری ، مشاهدهٔ این نکته است که ، به جای تعیین دو بردار **A** و **B** واقع در صفحه ، کافی است یک بردار **N** ارائه کنیم که *بر صفحه عمود باشد* . اگر نقطه‌ای مانند $\mathbf{R}_0$ در صفحه و جهتی مانند **N** عمود بر صفحه مفروض باشند، ما می‌توانیم بدون ابهام صفحه را بسازیم .

شرطی را که **R** بردار موضع نقطه‌ای در صفحه باشد می‌توان چنین بیان کرد که : *«بردارنسبی»*

$\mathbf{R}-\mathbf{R}_0$، که مانند قبل در صفحه قرار دارد، بر $\mathbf{N}$ عمود است. (مجدداً شکل «۲۱.۱» را ببینید.) مطابق آنچه در بخش گذشته گفته شد، این شرط به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$(\mathbf{R}-\mathbf{R}_0)\cdot\mathbf{N} = 0 \tag{۱۵.۱}$$

برعکس، اگر (۱۵.۱) برقرار باشد، $(\mathbf{R}-\mathbf{R}_0)$ بر $\mathbf{N}$ عمود است. بنابراین، از این رابطه مطمئن می‌شویم که $\mathbf{R}$ بردار موضع نقطه‌ای در صفحه است.

از این رو، (۱۵.۱) معادلهٔ برداری توصیف صفحه است. این معادله بر حسب مؤلفه‌های $\mathbf{N}=a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ چنین می‌شود:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0) = 0 \tag{۱۶.۱}$$

اگر ثابتها را به طرف دوّم منتقل کنیم، این معادله به صورت

$$ax+by+cz = d \tag{۱۷.۱}$$

نوشته می‌شود که در آن $d = ax_0+by_0+cz_0$.

مثال ۱۹.۱ معادلهٔ صفحه‌ای را بیابید که ازنقطهٔ $(1,3,-6)$ می‌گذرد و بر بردار $3\mathbf{i}-2\mathbf{j}+7\mathbf{k}$ عمود است.

حل به استناد (۱۶.۱)، معادلهٔ مطلوب را سریعاً می‌توان نوشت:

$$3(x-1)-2(y-3)+7(z+6) = 0$$

که به صورت $3x-2y+7z = -45$ ساده می‌شود.

مثال ۲۰.۱ معادلهٔ صفحه‌ای را بیابید که از نقطهٔ $(1,2,3)$ می‌گذرد و برخط

$$\frac{x-1}{4} = \frac{y}{5} = \frac{z+5}{6}$$

عمود است.

حل از بخش (۸.۱) می‌دانیم که بردار $4\mathbf{i}+5\mathbf{j}+6\mathbf{k}$ موازی خط مفروض است. این بردار بر صفحهٔ مطلوب عمود است و، بنابراین، معادلهٔ صفحهٔ مطلوب عبارت است از:

$$4(x-1)+5(y-2)+6(z-3) = 0$$

برای این که بحث ما به لحاظ منطقی کامل باشد، باید نُشان دهیم که هر معادله بـه صـورت (۱۷.۱) صفحه‌ای با قائم $\mathbf{N} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$ (ناصفر فرض می‌شود) را نمایش می‌دهد. اثبات سر

راست است : فرض کنید $\mathbf{R}_0$ بردار موضع نقطه‌ای باشد که در (۱۷.۱) صدق می‌کند؛ مثلاً $(d/c)\mathbf{k}$. اگر $\mathbf{R}$ نیز در (۱۷.۱) صدق کند، آن گاه $\mathbf{R}\cdot\mathbf{N} = d = \mathbf{R}_0\cdot\mathbf{N}$ ، بنابراین ، $(\mathbf{R} - \mathbf{R}_0)\cdot\mathbf{N} = 0$ ، که همان معادلهٔ (۱۵.۱) است .

مثال ۲۱.۱ یک بردار یکّه عمود بر صفحهٔ $2x+y-2z = 7$ بیابید.

حل از روی ضرایب می‌بینیم که $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ بر صفحه عمود است .اندازهٔ این بردار ۳ و بنابراین $\frac{2}{3}\mathbf{i} + \frac{1}{3}\mathbf{j} - \frac{2}{3}\mathbf{k}$ بردار یکّهٔ مطلوب است . منهای این بردار نیز یک جواب درست است .

مثال ۲۲.۱ زاویهٔ بین دو صفحهٔ $3x + 4y = 0$ و $2x + y - 2z = 5$ را بیابید.

حل زاویهٔ مطلوب برابر زاویهٔ بین قائمهای $\mathbf{N}_1 = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$ و $\mathbf{N}_2 = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ است. با استفاده از روشهای بخش (۹.۱) ،

$$\cos\theta = \frac{\mathbf{N}_1\cdot\mathbf{N}_2}{|\mathbf{N}_1|\,|\mathbf{N}_2|} = \frac{6+4}{(5)(3)} = \frac{2}{3}$$

زاویهٔ مطلوب تقریباً 48° است .

مثال ۲۳.۱ در کتب هندسهٔ تحلیلی نشان داده شده است که فاصلهٔ بین یک نقطهٔ دلخواه (x_1,y_1,z_1) و صفحهٔ $ax + by + cz = d$ برابر است با :

$$\frac{|ax_1 + by_1 + cz_1 - d|}{(a^2+b^2+c^2)^{\frac{1}{2}}}$$

این فرمول را به روشهای برداری ثابت کنید.

حل فرض کنید $\mathbf{R}_0$ بردار موضع نقطه‌ای در صفحه باشد ، و $\mathbf{R}_1 = x_1\mathbf{i} + y_1\mathbf{j} + z_1\mathbf{k}$ و $\mathbf{N} = a\mathbf{i}+b\mathbf{j}+c\mathbf{k}$. فاصلهٔ مطلوب ، برابر قدر مطلق مؤلفهٔ $\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0$ در جهت $\mathbf{N}$ است . (فاصله هرگز منفی نیست !) از این رو، این فاصله عبارت است از :

$$\frac{|(\mathbf{R}_1 - \mathbf{R}_0)\cdot\mathbf{N}|}{|\mathbf{N}|} = \frac{|\mathbf{R}_1\cdot\mathbf{N} - d|}{|\mathbf{N}|}$$

که اگر آن را بر حسب مؤلفه‌ها بنویسیم ، همان فرمول بالا خواهد بود.

مثال ۲۴.۱ فاصلهٔ بین صفحات موازی $x + y + z = ۵$ و $x + y + z = ۱۰$ را بیابید.

حل نقطهٔ دلخواهی در صفحهٔ اوّل اختیار می‌کنیم ؛ مثلاً (۱،۱،۳) ، و ، مطابق فرمول مثال (۲۳.۱)، فاصله‌اش را از صفحهٔ دوّم به دست می‌آوریم . خواهیم داشت :

$$\frac{|۵-۱۰|}{\sqrt{۳}} = \frac{۵\sqrt{۳}}{۳}$$

تمرینات

۱. بردارهای یکّه‌ای عمود بر صفحات زیر بیابید :

(الف) $۲x+y+۲z= ۸$ (د) $x=۵$

(ب) $۴x - ۴z = ۰$ (هـ) $y=z+۲$

(ج) $-y + ۶z = ۰$ (و) $x=y$

۲. معادلهٔ صفحه‌ای را بیابید که از مبدأ می‌گذرد و بر $۲\mathbf{i} - ۸\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$ عمود است .

۳. معادلهٔ صفحه‌ای را بیابید که بر $\mathbf{D} = ۱۰\mathbf{i} - ۱۰\mathbf{j} + ۵\mathbf{k}$ عمود است و از نقطهٔ $P=(۱,۱,-۳)$ می‌گذرد.

۴. صفحه‌ای را بیابید که از (۱،۳،۵) بگذرد و با صفحهٔ $۳x + y - z = ۸$ موازی باشد.

۵. آیا امکان دارد صفحه‌ای را بیابیم که بر هر دو بردار $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ عمود باشد ؟

۶. به روشهای برداری ، فاصلهٔ نقطهٔ (۳،۴،۷) از صفحهٔ $۲x - y - ۲z = ۴$ را بیابید.

۷. فاصلهٔ بین صفحات زیر را بیابید.

(الف) $x+۲y+۳z= ۵$ و $x+۲y+۳z=۱۹$.

(ب) $x+y = ۴$ و $x+y=۱۰$.

(ج) $x=۵$ و $x=۷$. (در این مورد انجام هیچ محاسبه‌ای ضرورت ندارد.)

۸. θ زاویهٔ بین صفحات $x + y + z = ۰$ و $x = ۰$ است . $\cos\theta$ مشخص کنید.

۹. به روشهای برداری ، نشان دهید که خط $x = y = \frac{۱}{۳}(z + ۲)$ موازی صفحهٔ $۲x-۸y+۲z = ۵$

است.

۱۰.به روشهای برداری، زاویهٔ بین خط $x = y = ۲z$ و صفحهٔ $x + y + z = ۰$ را بیابید.

۱۱.زاویهٔ بین صفحهٔ $x + y + z = ۲۱$ و خط $x - ۱ = y + ۲ = ۲z + ۳$ را بیابید.

۱۲.معادلهٔ خط واقع در صفحهٔ xy راکه بر بردار $۳\mathbf{i} - \mathbf{j}$ عمود است بیابید.

۱۳.فاصلهٔ بین خطوط $x+y= ۰$ و $x+y= ۵$ واقع در صفحهٔ xy را بیابید.

۱۴.خطی واقع در صفحهٔ xy بیابید که موازی $۳x + ۲y = ۴$ باشد و از نقطهٔ $(۳,۱)$ بگذرد.

۱۵.معادلهٔ صفحه‌ای راکه شامل خطوط زیر است بیابید:

$$x = y = \frac{۴ - z}{۴}$$

$$۲x = ۲ - y = z$$

۱۶.دو صفحهٔ متمایز و موازی با فاصلهٔ d از یکدیگر مفروضند. بردار $\mathbf{V}$ بر دو صفحه عمود و اندازه‌اش $۱/d$ است. این صفحات محور y ها را به ترتیب در نقاط $(۰,۱,۰)$ و $(۰,۴,۰)$ قطع می‌کنند. مؤلّفهٔ y بردار $\mathbf{V}$ چیست؟ (دوجواب ممکن با توجه به دو جهت $\mathbf{V}$ وجود دارد.)

۱۷.اشتراک اشیاء هندسی زیر را بیابید:

(الف) صفحهٔ $۳x + ۲y - z = -۹$ و خط $\frac{۱}{۲}x = y - ۲ = -\frac{۱}{۴}(z - ۱)$،

(ب) صفحهٔ $x + y + ۲z = ۶$ و خط $-x = ۲y = ۴z + ۱$،

(ج) صفحهٔ $۳x - y + z = ۳$ و صفحهٔ $۲x + z = ۰$،

(د) صفحهٔ $x - y + ۲z = ۴$ و صفحهٔ $-۲x + ۲y - ۴z = ۱$.

۱۱.۱ جهت

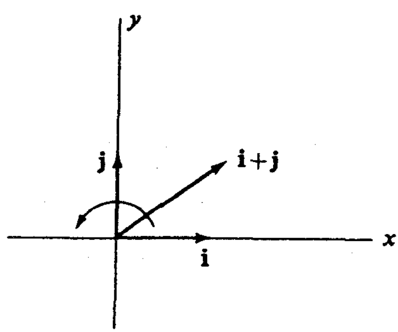
در مواجهه با صفحهٔ xy، بنابرقرارداد، جهت x مثبت را به راست و جهت y مثبت را به بالا در نظر می‌گیرند. آنگاه زوایا در خلاف جهت حرکت *عقربه‌های ساعت* مثبت خواهند بود.

در مواجهه با صفحات در فضا، قراردادی برای تعیین جهت مثبت اندازه‌گیری زوایا وضع نشده است. انتخاب جهت مثبت کاملاً اختیاری است. اگر صفحه‌ای در فضا مفروض باشد، می‌توانیم به دلخواه جهتی وضع کنیم که زوایا در آن جهت مثبت در نظر گرفته شوند. در این صورت می‌گویند که

صفحه جهت‌دار شده است .

یک طریق جهت دار کردن صفحه به صورت زیر است : فرض کنید **A** و **B** دو بردار ناصفر نامتوازی باشند که با دو پیکان در صفحهٔ مفروض نمایش داده شده‌اند. فرض کنید این دو پیکان از یک نقطه کشیده شده باشند. فرض کنید **A** به اندازهٔ کوچکترین زاویهٔ ممکن دوران کند تا به لحاظ جهت بر **B** منطبق شود. آن‌گاه جهت این دوران را «مثبت» می‌گویند و صفحه به وسیلهٔ آن جهت دار می‌شود . *صفحه با ارائهٔ دو بردار* **A** *و* **B** *به ترتیب مذکور جهت دار می‌شود.*

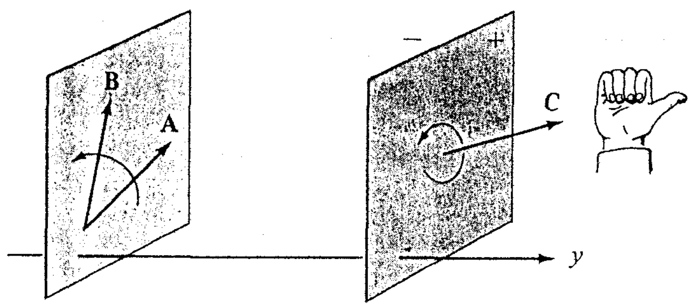
به عنوان مثال ، جهت معمول صفحهٔ xy با ارائهٔ بردارهای **i** ، **j** به ترتیب مذکور به دست می‌آید. با یک چرخش 90°ای ، می‌توان جهت **i** را بر جهت **j** منطبق کرد و این دوران ، جهت «مثبت» قراردادی دارد. ما همین جهت را با ارائهٔ بردارهای **i+j** و **j** به ترتیب مذکور به دست می‌آوریم . (شکل ۲۲.۱) از طرف دیگر، اگر جهتی را با ارائهٔ بردارهای **j** و **i** به ترتیب مذکور مشخص کنیم ، یک جهت مخالف خواهیم داشت که در آن زوایا در جهت حرکت عقربه‌های ساعت مثبت محسوب می‌شوند (که قراردادی نیست ، ولی کاملاً رضایت‌بخش است).



شکل ۲۲.۱

طریق دیگر جهت دارکردن یک صفحه چنین است : فرض کنید بردار منفردی مفروض باشد که با

صفحه موازی نباشد . فرض کنید این بردار با پیکانی نمایش داده شود که ابتدایش در صفحه باشد. آنگاه انتهای پیکان در یک طرف صفحه خواهد بود که آن را (به دلخواه) طرف «مثبت» می‌نامیم . اکنون جهت مثبت زوایای واقع در صفحه را جهتی می‌گیریم که اگر یک پیچ راستگرد که سرش موازی صفحه و محورش عمود بر صفحه است در آن جهت بچرخد ، در جهت طرف مثبت صفحه پیش رود. به طور معادل ، اگر فرض کنیم که بردار مفروض را با دست راست گرفته باشیم و انگشت شصت به جهت پیکان اشاره کند ، انگشتان دست حول ساقهٔ پیکان در جهت مثبت دوران در صفحه خواهد چرخید.

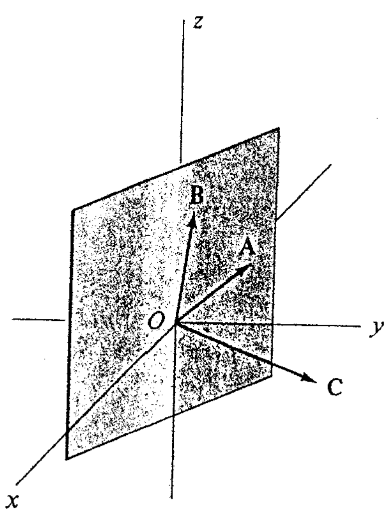


شکل ۲۳.۱

در شکل (۲۳.۱) هر دو روش جهت دارکردن یک صفحه برای صفحات عمود بر محور y تشریح شده است . در سمت چپ ، صفحه به کمک دو بردار واقع در صفحه ، **A** و **B** ، به ترتیب مذکور، جهت دار شده است . در سمت راست ، صفحه به کمک بردار **C** ،که از یک نقطه واقع در صفحه رسم شده ، جهت دار شده است .

حال فرض کنید سه بردار ناصفر **A** ، **B** ، و **C**،که همگی در یک صفحه نیستند، با سه پیکان که ابتدای آنها مبدأ است نمایش داده شوند (شکل ۲۴.۱). بردارهای **A** و **B** صفحه‌ای را مشخص می‌کنند که از مبدأ می‌گذرد. اگر جهت این صفحه که به وسیلهٔ بردارهای **A** و **B** ، به همین ترتیب ،

تعیین می‌شود، با جهت صفحه که به کمک بردار **C** مشخص می‌شود، یکسان باشد؛ می‌گوییم که بردارهای **A** ، **B** ، و **C** ، به ترتیب مذکور، یک دستگاه *راستگرد* تشکیل می‌دهند. یک دلیل این نامگذاری این است که اگر **A** ، **B** ، و **C** ، به ترتیب مذکور، یک دستگاه *راستگرد* تشکیل دهند، دوران **A** به طرف **B** (با زاویه‌ای کمتر از 180°) یک پیچ راستگرد را در جهت **C** به پیش می‌برد. بردارهای **A** ، **B** ، و **C** شکل (۲۴.۱) ، و نیز بردارهای **i** ، **j** ، و **k** ، یک دستگاه راستگرد تشکیل می‌دهند.



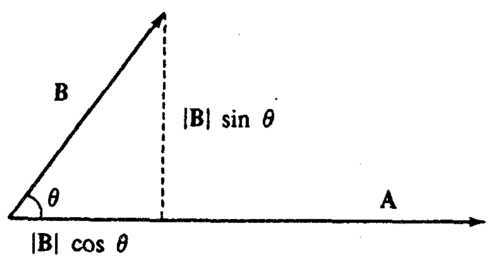
شکل ۲۴.۱

تمرین

۱. اگر یک سطح مستوی جهت دار با برداری عمود بر سطح که اندازهٔ آن برابر مساحت سطح مفروض است نمایش داده شود، مفهوم هندسی مؤلفه‌های این بردار چیست ؟

۱۲.۱ ضرب برداری

دیده‌ایم که حاصل ضرب اسکالر دو بردار **A** و **B** را می‌توان به عنوان حاصل ضرب درازای **A** در مؤلّفهٔ **B** در امتداد **A** تعبیر کرد. در مکانیک، این حاصل ضرب برابر کاری است که نیروی **B** در تغییر مکان **A** انجام می‌دهد. و در هندسهٔ تحلیلی نیز ابزاری بسیار مفید است. بنابراین طبیعی است که در جستجوی تعریف ضرب دیگری باشیم که حاصلش برابر حاصل ضرب درازای **A** در مؤلّفهٔ **B** عمود بر **A** است. (یعنی، $|\mathbf{B}| \sin\theta$ در شکل ۲۵.۱) در مکانیک تعبیر جالبی از این ضرب نیز سراغ داریم.



شکل ۲۵.۱

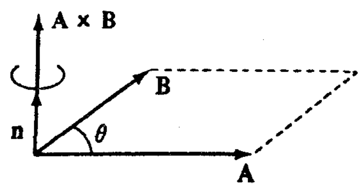
جسم سختی را در نظر بگیرید و فرض کنید یک دستگاه مختصات راستگرد ثابت در نقطه‌ای از این جسم تعریف شده باشد. **B** را نیرویی تعبیر کنید که در ابتدای بردار **A** (این نقطه نسبت به مبدأ ثابت گرفته می‌شود) بر جسم وارد می‌شود. ملاحظه کنید که مؤلفه‌ای از این نیرو که بر **A** عمود است. جسم را حول محوری که بر صفحهٔ **A** و **B** عمود است *می‌چرخاند*. اثر چرخشی این نیرو با افزایش فاصلهٔ نقطهٔ اثر نیرو از مبدأ افزایش می‌یابد. در واقع، اثر کلی نیرو با یک حاصل ضرب برداری - که به زودی به معرفی آن می‌پردازیم - اندازه‌گیری می‌شود. در نتیجه، در فیزیک، *گشتاور* مربوط به نیروی **B** که در نقطهٔ **A** اعمال شود با برداری تعریف می‌شود که اندازه‌اش برابر این حاصل

ضرب است («بازوی اهرم ضرب در نیروی عمود بر آن »)، و *راستایش بر صفحهٔ* **A** و **B** *عمود است* ، به طوری که **A** ، **B** ، و بردار گشتاور ، یک دستگاه راستگرد تشکیل می‌دهند. (یعنی ،چنان که در شکل «۲۳.۱») ملاحظه کنید ، اگر انگشتان دست راست در جهت چرخش **A** به طرف **B** بسته شوند، انگشت شصت در جهت گشتاور است .)

به انگیزهٔ این ملاحظات ، اکنون *حاصل ضرب برداری* **A** و **B** را بردار

$$\mathbf{A} \times \mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \sin\theta\, \mathbf{n}$$

تعریف می‌کنیم که در آن θ زاویهٔ بین بردارهای **A** و **B** است و بردار یکهٔ **n** بر هر دوی آنها عمود است به طوری که **A** ، **B** ، و **n** ، یک دستگاه راستگرد تشکیل می‌دهند.(شکل «۲۶.۱» را ببینید.) گاهی **A×B** را *حاصل ضرب خارجی* می‌نامند.



شکل ۲۶.۱

توجه کنید که $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$ مساحت متوازی الاضلاعی است که با **A** و **B** ساخته می‌شود. به علاوه، ملاحظه کنید که از قاعدهٔ تعیین جهت **n** نتیجه می‌شود که :

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -\mathbf{B}\times\mathbf{A}$$

از این ملاحظات هندسی متوجه می‌شویم که *اگر دو بردار با هم موازی باشند ، حاصل ضرب برداری آنها صفر است* . البتّه ، هرگاه **A** یا **B** صفر باشد بازهم **A×B** صفر است .

مانند ضرب اسکالر، خوب است نمایشی از **A×B** بر حسب مؤلفه‌های **A** و **B** داشته باشیم . چنین فرمولی از قوانین توزیع پذیری ضرب برداری، یعنی

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{A}\times\mathbf{C} \tag{۱۸.۱}$$

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B}) \times \mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{C} + \mathbf{B}\times\mathbf{C} \tag{۱۹.۱}$$

نتیجه می‌شود. برهان قوانین توزیع پذیری در انتهای این بخش تحت عنوان درس اختیاری ارائه خواهد شد. اگر این قوانین را موقتاً بپذیریم، به آسانی می‌توانیم $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ را برحسب مؤلفه‌های $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ بیان کنیم:

$$\begin{aligned}\mathbf{A}\times\mathbf{B} &= (A_1\,\mathbf{i} + A_2\,\mathbf{j} + A_3\,\mathbf{k}) \times (B_1\,\mathbf{i} + B_2\,\mathbf{j} + B_3\,\mathbf{k}) \\ &= A_1\,\mathbf{i} \times B_1\,\mathbf{i} + A_2\,\mathbf{j} \times B_1\,\mathbf{i} + A_3\,\mathbf{k} \times B_1\,\mathbf{i} \\ &+ A_1\,\mathbf{i} \times B_2\,\mathbf{j} + A_2\,\mathbf{j} \times B_2\,\mathbf{j} + A_3\,\mathbf{k} \times B_2\,\mathbf{j} \\ &+ A_1\,\mathbf{i} \times B_3\,\mathbf{k} + A_2\,\mathbf{j} \times B_3\,\mathbf{k} + A_3\,\mathbf{k} \times B_3\,\mathbf{k}\end{aligned}$$

حاصل ضربهای برداری موجود در این عبارت به سادگی به استناد تعریف محاسبه می‌شوند: $A_1\,\mathbf{i} \times B_1\,\mathbf{i} = \mathbf{0}$، $A_2\,\mathbf{j} \times B_1\,\mathbf{i} = -A_2 B_1\,\mathbf{k}$، و غیره. به این ترتیب، سرانجام به فرمول مورد نظر دست می‌یابیم:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = (A_2 B_3 - A_3 B_2)\,\mathbf{i} + (A_3 B_1 - A_1 B_3)\,\mathbf{j} + (A_1 B_2 - A_2 B_1)\,\mathbf{k} \tag{۲۰.۱}$$

بهتراست این فرمول را به صورت دترمینانی زیر بنویسیم:

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix} \tag{۲۰'.۱}$$

این دترمینان، برداری تعبیر می‌شود که مؤلفه‌های x ، y ، و z آن، به ترتیب، همسازه‌های درایه‌های اوّل، دوم، و سوم سطر اوّل دترمینان باشند.

مثال ۲۵.۱ هرگاه $\mathbf{A} = ۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = \mathbf{i} + ۵\mathbf{k} - ۲\mathbf{j}$، $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ را بیابید.

حل

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۳ & ۴ & ۰ \\ ۱ & -۲ & ۵ \end{vmatrix} = ۲۰\mathbf{i} - ۱۵\mathbf{j} - ۱۰\mathbf{k}$$

برای سهولت کار، فهرستی از خواص جبری ضرب برداری را در این جا ذکر می‌کنیم .

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = -(\mathbf{B}\times\mathbf{A})$$

$$(s\mathbf{A}+\mathbf{B}) \times \mathbf{C} = s(\mathbf{A}\times\mathbf{C}) + \mathbf{B}\times\mathbf{C}$$

$$\mathbf{A} \times (s\mathbf{B}+\mathbf{C}) = s(\mathbf{A}\times\mathbf{C}) + \mathbf{A}\times\mathbf{C}$$

مثال ۲۶.۱ دو بردار یکّه بیابید که بر هر دو بردار $\mathbf{A} = 2\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ عمود باشد.

حل دیده‌ایم که $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ بر هر دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ عمود است . داریم :

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & 2 & -3 \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = 11\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$$

درازای این بردار $9\sqrt{2}$ است . بنابراین ، بردار یکّه مطلوب عبارت است از :

$$\mathbf{n} = \frac{11}{9\sqrt{2}}\,\mathbf{i} - \frac{5}{9\sqrt{2}}\,\mathbf{j} + \frac{4}{9\sqrt{2}}\,\mathbf{k}$$

اگر $\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ را در نظر گرفته بودیم، منهای این بردار را به دست می‌آوردیم .دو جواب مطلوب عبارتند از:

$$\pm\left(\frac{11\sqrt{2}}{18}\,\mathbf{i} - \frac{5\sqrt{2}}{18}\,\mathbf{j} + \frac{2\sqrt{2}}{9}\,\mathbf{k} \right)$$

مثال ۲۷.۱ مساحت متوازی الاضلاعی راکه با دو بردار $\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = 5\mathbf{k} - 6\mathbf{j}$ ساخته می‌شود بیابید.

حل

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & -3 \\ 0 & -6 & 5 \end{vmatrix} = -13\mathbf{i} - 5\mathbf{j} - 4\mathbf{k}$$

$$|\mathbf{A}\times\mathbf{B}| = \sqrt{۱۳^۲ + ۵^۲ + ۶^۲} = \sqrt{۲۳۰}$$

که مساحت مطلوب است .

مثال ۲۸.۱ معادلات خطی را بیابید که از نقطهٔ (۳،۲،۴-) بگذرد و با فصل مشترک دو صفحهٔ $x+۳y-۲z=۸$ و $x-۳y+z=۰$ موازی باشد.

حل ملاحظه کنید که $\mathbf{A} = \mathbf{i} + ۳\mathbf{j} - ۲\mathbf{k}$ و $\mathbf{B} = \mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + \mathbf{k}$ بر صفحات مفروض عمودند ، و $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ بر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ عمود است . نتیجه می‌شود که $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ با هر دو صفحه موازی است . از این رو $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ با فصل مشترک موازی است .داریم :

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ ۱ & ۳ & -۲ \\ ۱ & -۳ & ۱ \end{vmatrix} = -۳\mathbf{i}-۳\mathbf{j}-۶\mathbf{k}$$

معادلات خط مطلوب عبارتند از :

$$\frac{x-۳}{-۳} = \frac{y-۲}{-۳} = \frac{z+۴}{-۶}$$

یا ، به طور معادل
$$x-۳ = y-۲ = \frac{z+۴}{۲}$$

اکنون جسم سختی را در نظر بگیرید که حول یک محور ثابت با سرعت زاویه‌ای ثابت ω بچرخد. سرعت *زاویه‌ای* با بردار $\boldsymbol{\omega}$ با اندازهٔ ω نمایش داده می‌شود که در امتداد محور دوران در جهتی کشیده می‌شود که با قانون دست راست تعیین می‌شود : اگر انگشتان دست راست حول محور دوران و در جهت دوران بسته شوند، انگشت شصت در جهت $\boldsymbol{\omega}$ است .(شکل ۲۷.۱)

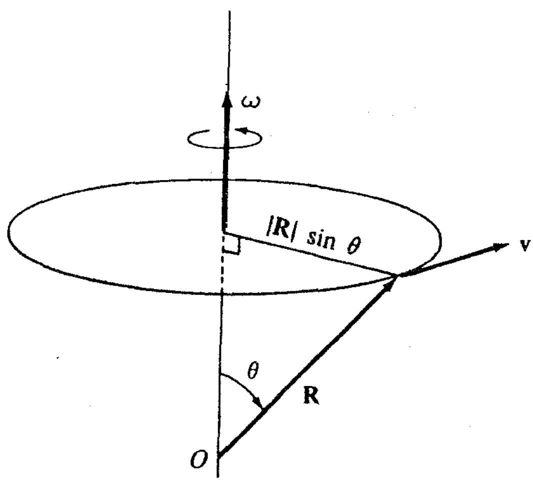
فرض کنید که مبدأ O روی محور دوران و $\mathbf{R}$ بردار موضع ذرّه‌ای از جسم باشد. آن گاه سرعت $\mathbf{v}$

ذره با

$$\mathbf{v} = \boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R} \qquad (۲۱.۱)$$

داده می‌شود. برای اثبات، نخست، توجه کنید $|\mathbf{R}| \sin\theta$ فاصلهٔ ذرّه از محور دوران است و، بنابراین، $\mathbf{v}$ دارای اندازهٔ $\omega|\mathbf{R}| \sin\theta$ می‌باشد. به علاوه، سرعت $\mathbf{v}$ الزاماً بر هردوی $\mathbf{R}$ و $\boldsymbol{\omega}$ عمود است و، چنان که در شکل (۲۷.۱) دیده می‌شود، جهت $\boldsymbol{\omega}$ چنان است که $\mathbf{v}$ برابر $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R}$ است نه $\mathbf{R} \times \boldsymbol{\omega}$.

مثال ۲۹.۱ یک جسم سخت حول خط $x = y/۲ = z/۲$ با سرعت زاویه‌ای ثابت ω می‌چرخد. سرعت ذرّه‌ای از جسم را در لحظه‌ای که این ذره از نقطهٔ (۲،۳،۵) می‌گذرد، بیابید.



شکل ۲۷.۱

حل بردار $\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$ موازی محور دوران است. یک بردار یکهٔ موازی این محور، بردار $\frac{۱}{۳}\mathbf{i} + \frac{۲}{۳}\mathbf{j} - \frac{۲}{۳}\mathbf{k}$ است. بنابراین،

$$\boldsymbol{\omega} = \pm\,\omega\left(\frac{۱}{۳}\mathbf{i} + \frac{۲}{۳}\mathbf{j} - \frac{۲}{۳}\mathbf{k}\right)$$

(از صورت مسئله علامت ω مشخص نمی‌شود.) بردار سرعت عبارت است از :

$$\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}=\pm\,\omega\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ \frac{۱}{۳} & \frac{۲}{۳} & \frac{۲}{۳}\\ ۲ & ۳ & ۵\end{vmatrix}=\pm\,\omega\left(\frac{۴}{۳}\mathbf{i}-\frac{۱}{۳}\mathbf{j}-\frac{۱}{۳}\mathbf{k}\right)$$

و

$$|\mathbf{v}|=\omega\left(\frac{۱۶}{۹}+\frac{۱}{۹}+\frac{۱}{۹}\right)^{۱/۲}=\sqrt{۲}\,\omega$$

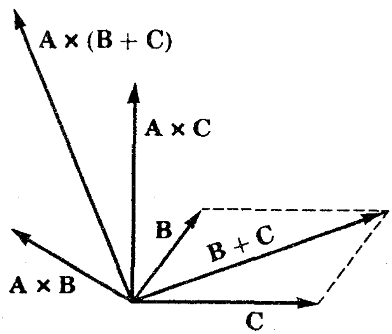
درس اختیاری : برهان قوانین توزیع پذیری

ملاحظه کنید که فقط باید معادلهٔ (۱۸.۱) را ثابت کنیم ؛ (۱۹.۱) بلافاصله از آن نتیجه خواهد شد، زیرا

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}+\mathbf{B})\times\mathbf{C} &= -\mathbf{C}\times(\mathbf{A}+\mathbf{B})\\ &= -(\mathbf{C}\times\mathbf{A}+\mathbf{C}\times\mathbf{B})\\ &= \mathbf{A}\times\mathbf{C}+\mathbf{B}\times\mathbf{C}\end{aligned}$$

استدلال را با اثبات (۱۸.۱) در حالت خاصی که $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ هر دو بر $\mathbf{A}$ عمود باشند آغاز می‌کنیم؛ در این صورت ، البته ، $(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ نیز بر $\mathbf{A}$ عمود است . در این حالت از تعریف ضرب برداری نتیجه می‌شود که مثلاً $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ برداری است که طرز تشکیل آن چنین است : $\mathbf{B}$ را در $|\mathbf{A}|$ ضرب و آن را به اندازهٔ ۹۰° در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت حول $\mathbf{A}$ به عنوان یک محور می‌چرخانیم . در شکل (۲۸.۱) ، بردار $\mathbf{A}$ را عمود بر صفحهٔ کتاب و در جهتی که به خواننده اشاره دارد ، تصور کنید. در این صورت ، همهٔ بردارهای $\mathbf{B}$ ، $\mathbf{C}$ ، $\mathbf{B}+\mathbf{C}$، $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ ، $\mathbf{A}\times\mathbf{C}$ ، و $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ در صفحهٔ کتاب قرار می‌گیرند .

حال از نظر هندسی می‌توان ادعا کرد که $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}+\mathbf{C})$ قطر متوازی الاضلاعی است که اضلاعش $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}\times\mathbf{C}$ هستند. این ادعا را می‌توان با بررسی مثلثهای متشابهی که از زوایای برابر و اضلاع متناسب در شکل (۲۸.۱) نتیجه می‌شوند، ثابت کرد.



شکل ۲۸.۱

برای اثبات معادلهٔ (۱۸.۱) در حالت کلی، بدون هیچ فرضی دربارهٔ جهت بردارها، بردارهای $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ را به مؤلفه‌های موازی با $\mathbf{A}$ و عمود بر $\mathbf{A}$ تجزیه می‌کنیم (شکل «۱۹.۱» را به یاد بیاورید.) :

$$\mathbf{B} = \mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{B}_{\perp} \qquad\qquad \mathbf{C} = \mathbf{C}_{\parallel} + \mathbf{C}_{\perp}$$

آن گاه از تعریف ضرب برداری نتیجه می‌شود که :

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}_{\perp} \qquad\qquad \mathbf{A}\times\mathbf{C} = \mathbf{A}\times\mathbf{C}_{\perp}$$

(تأمل کنید : اگر $\mathbf{B}_{\perp}$ را جانشین $\mathbf{B}$ کنیم، نه جهت $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ عوض می‌شود نه اندازهٔ آن.) به علاوه، به آسانی دیده می‌شود که اتحاد

$$\mathbf{B} + \mathbf{C} = (\mathbf{B}_{\parallel} + \mathbf{C}_{\parallel}) + (\mathbf{B}_{\perp} + \mathbf{C}_{\perp})$$

حاصل جمع $\mathbf{B}+\mathbf{C}$ را به مؤلفه‌هایی موازی با $\mathbf{A}$ و عمود بر $\mathbf{A}$ تجزیه می‌کند و، بنابراین،

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times (\mathbf{B}_{\perp} + \mathbf{C}_{\perp})$$

چون برقراری معادلهٔ (۱۸.۱) را برای بردارهای عمود بر $\mathbf{A}$ ثابت کرده‌ایم، برقراری این معادله در حالت کلی به صورت زیر نتیجه می‌شود :

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \times (\mathbf{B}_{\perp} + \mathbf{C}_{\perp}) = \mathbf{A} \times \mathbf{B}_{\perp} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}_{\perp} = \mathbf{A} \times \mathbf{B} + \mathbf{A} \times \mathbf{C}$$

(برهان دیگری از این معادله در مسائل تکمیلی (۲۲) و (۲۳) در پایان این فصل مختصراً شرح داده

شده است .)

خلاصه - ضرب بردارها

تا این جا ما همهٔ عناصر اساسی جبر بردارها را تعریف کرده‌ایم ؛ اکنون می‌خواهیم به تعبیرات هندسی و کاربردهای آنها نظر کنیم .

این مبحث را با فراگیری چگونگی جمع دو بردار آغاز کردیم . این جمع ، خواص جبری تعویض پذیری و شرکت پذیری معمولی را داراست ، و با ضرب اسکالر سازگار است .

نتیجهٔ ضرب دو بردار تا اندازه‌ای پیچیده‌تر است . ما دو نوع ضرب تعریف کرده‌ایم که خواص کاملاً متفاوتی دارند. وقتی دو بردار در هم ضرب اسکالر شوند ، نتیجه یک بردار نیست ، یک اسکالر است . وقتی دو بردار در هم ضرب برداری شوند ، نتیجه یک بردار است ، ولی جهتش با جهت بردارهای اوّلیه کاملاً متفاوت و ، در واقع ، برآنها عمود است . به علاوه ، حاصل ضرب برداری دوبردار به ترتیب آنها بستگی دارد، وقتی ترتیب دوبردار را عوض کنیم ، جهت بردار حاصل ضرب عوض می‌شود.

فرمول هندسی ضرب اسکالر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ عبارت است از:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\,\cos\theta$$

که در آن θ زاویهٔ بین بردارهاست ، امّا فرمول ضرب اسکالر با استفاده از مؤلفه‌ها چنین است :

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

در مورد ضرب برداری ، فرمول هندسی عبارت است از :

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = |\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}|\,\sin\theta\,\mathbf{n}$$

که در آن $\mathbf{n}$ بردار یکّهٔ عمود بر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ است به طوری که $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، و $\mathbf{n}$ ، یک دستگاه راستگرد تشکیل می‌دهند؛ وحاصل ضرب برداری با استفاده از مؤلفه‌ها نمایش جالبی به صورت زیر دارد :

$$\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \end{vmatrix}$$

از روی فرمول هندسی دیدیم که حاصل ضرب اسکالر صفرآزمونی برای تعامد بود، در حالی که حاصل ضرب برداری صفر نشانهٔ توازی است .

مثال ۳۰.۱ با استفاده از ضرب برداری ، معادلات غیر پارامتری خط راستی راکه از نقطهٔ $\mathbf{R}_o = x_o\mathbf{i}+y_o\mathbf{j}+z_o\mathbf{k}$ به موازات $\mathbf{V} = a\mathbf{i} + b\mathbf{j} + c\mathbf{k}$ می‌گذرد ، بیابید.

حل به یاد بیاورید که در بخش (۸.۱) ملاحظه کردیم که $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بردار موضع نقطه‌ای از خط بود هرگاه $\mathbf{R}\text{-}\mathbf{R}_o$ موازی $\mathbf{V}$ می‌بود. اگر حاصل ضرب برداری را مساوی صفر قرار دهیم ،

$$(\mathbf{R}-\mathbf{R}_o) \times \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x-x_o & y-y_o & z-z_o \\ a & b & c \end{vmatrix} = 0$$

معادلات

$$(x-x_o)\, b = (y-y_o)\, a$$

$$(y-y_o)\, c = (z-z_o)\, b$$

$$(x-x_o)\, c = (z-z_o)\, a$$

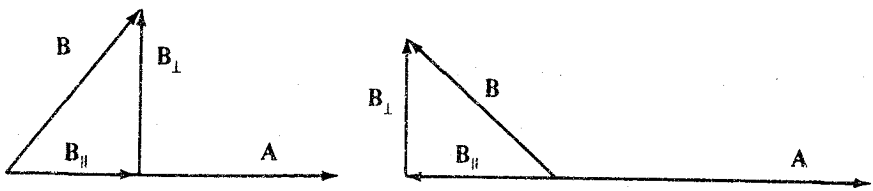
که معادل معادلات (۹.۱) می‌باشند ، نتیجه می‌شوند.

تعبیرات هندسی ضربهای اسکالر و برداری را می‌توانیم به کمک شکل آشنای (۲۹.۱) متصوّر سازیم. می‌بینیم که درازای مؤلفهٔ $\mathbf{B}$ موازی با $\mathbf{A}$ را می‌توان با استفاده از حاصل ضرب اسکالر محاسبه کرد :

$$|\mathbf{B}_\parallel| = \frac{|\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}|}{|\mathbf{A}|}$$

در حالی که درازای مؤلفهٔ عمود بر $\mathbf{A}$ با استفاده از حاصل ضرب برداری محاسبه می‌شود :

$$|\mathbf{B}_\perp| = \frac{|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|}{|\mathbf{A}|}$$



شکل ۲۹.۱

برای بیان بردارهای $\mathbf{B}_\parallel$ و $\mathbf{B}_\perp$ ، از بردار یکّهٔ در جهت $\mathbf{A}$ استفاده می‌کنیم :

$$|\mathbf{B}_\parallel| = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{|\mathbf{A}|} \quad \frac{\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|} = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}\,\mathbf{A}$$

در حالی که $\mathbf{B}_\perp$ را می‌توان به صورت تفاضل

$$\mathbf{B}_\perp = \mathbf{B} - \mathbf{B}_\parallel$$

محاسبه کرد.

مثال ۳۱.۱ $\mathbf{B}_\perp$ را مستقیماً بر حسب $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ محاسبه کنید.

حل واضح است که برداری در جهت $\mathbf{B}_\perp$ مورد نیاز است . در این جا راه حل این است که بردار $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{A}$ را بررسی کنیم .

با مراجعه به شکل (۲۹.۱) ، می‌بینیم که $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ بر صفحهٔ کتاب عمود است و به طرف خواننده اشاره دارد. اکنون اگر ضرب برداری این بردار در $\mathbf{A}$ را در نظر بگیریم ، در می‌یابیم که بردار حاصل در صفحهٔ $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ قرار می‌گیرد و در جهت $\mathbf{B}_\perp$ است ! با توجه به این که زاویهٔ بین $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ و $\mathbf{A}$ برابر 90° است ، به محاسبهٔ درازا می‌پردازیم :

$$|(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \times \mathbf{A}| = |\mathbf{A}\times\mathbf{B}|\,|\mathbf{A}| \sin 90^\circ$$

$$= (|\mathbf{A}|\,|\mathbf{B}| \sin\theta)\,|\mathbf{A}| \quad (1)$$

$$= |\mathbf{A}|^2\,|\mathbf{B}| \sin\theta$$

چون $|\mathbf{B}_\perp| = |\mathbf{B}| \sin\theta$ ، داریم :

$$\mathbf{B}_{\perp} = \frac{(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{A}}{|\mathbf{A}|^{۲}} = \frac{(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{A}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}$$

به این ترتیب ، تجزیهٔ $\mathbf{B}$ به دو مؤلفهٔ موازی با $\mathbf{A}$ و عمود بر $\mathbf{A}$ را می‌توان چنین نوشت :

$$\mathbf{B} = \frac{\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}\mathbf{A} + \frac{(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{A}}{\mathbf{A}\cdot\mathbf{A}}$$

تمرینات

۱. $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ رابیابید که در آن

(الف) $\mathbf{A} = ۳\mathbf{i} - \mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$ ، $\mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - ۴\mathbf{k}$

(ب) $\mathbf{A} = ۲\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۷\mathbf{k}$ ، $\mathbf{B} = ۳\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

(ج) $\mathbf{A} = \mathbf{j} + ۶\mathbf{k}$ ، $\mathbf{A} = \mathbf{k} + ۲\mathbf{j} - \mathbf{i}$

(د) $\mathbf{A} = \mathbf{i}$ ، $\mathbf{B} = \mathbf{j}$

(هـ) می‌دانیم که $\mathbf{B}\times\mathbf{A}$ بردار $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ است .

۲. مساحت متوازی الاضلاعی راکه با بردارهای $۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{j}$ و $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ساخته می‌شود بیابید.

۳. مساحت مثلثی راکه رأسهایش (۱,۱,۲) و (۲,۳,۵) و (۱,۵,۵) می‌باشند بیابید.

۴. هرگاه $\mathbf{A} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ، $\mathbf{B} = ۳\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}$ ، بردار $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ را بیابید. اهمیّت هندسی این جواب چیست ؟

۵. بردار یکّه‌ای عمود بر دو بردار $۳\mathbf{i} + \mathbf{j}$ و $۲\mathbf{i} - \mathbf{j} - ۵\mathbf{k}$ بیابید.

۶. با استفاده از روشهای برداری ، معادلات خطی را بیابید که از نقطهٔ (۲,۳,۷) می‌گذرد و با خط تقاطع صفحات $۲x + y + z = ۰$ و $x - y + ۷z = ۰$ موازی است .

۷. معادلات خطی راکه بر خطوط $x = y = z$ ، $x = ۲y = ۳z$ عمود است و از مبدأ می‌گذرد بیابید.

۸. بردارهای $\mathbf{A} = ۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = ۳\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ، و $\mathbf{C} = ۸\mathbf{i}$ مفروضند.

$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C}$ و $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ را محاسبه کنید . آیا قانون شرکت پذیری برای ضرب برداری برقرار است ؟

۹. با استفاده از روشهای برداری ، معادلهٔ صفحهٔ ماربر نقاط (۲,۵,۱) ، (۱,۱,۳) ، و (۴,۷,-۲) را تعیین کنید.

۱۰.بردار یکّه‌ای در صفحهٔ بردارهای $\mathbf{A} = \mathbf{i} + ۲\mathbf{j}$ و $\mathbf{B} = \mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$ بیابید که بر بردار $\mathbf{C}=۲\mathbf{i}+\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$ عمود باشد.

۱۱.با استفاده از ضرب خارجی $(\cos\theta)\mathbf{i}+(\sin\theta)\mathbf{j}$ و $(\cos\psi)\mathbf{i}+(\sin\psi)\mathbf{j}$ و تعبیر هندسی آن ، اتحاد مثلثاتی مشهوری را نتیجه بگیرید.

۱۲.اگر $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، و $\mathbf{C}$ بردارهایی باشند که از مبدأ ، به ترتیب ، به نقاط A ، B ، و C کشیده شده‌اند، نشان دهید که $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})+(\mathbf{B}\times\mathbf{C})+(\mathbf{C}\times\mathbf{A})$ برصفحهٔ ABC عمود است . [*راهنمایی* : $(\mathbf{B}-\mathbf{A})\times(\mathbf{C}-\mathbf{A})$ را در نظر بگیرید.]

۱۳.فاصله نقطهٔ (۵,۷,۱۴) را از خطی که از نقاط (۲,۳,۸) و (۳,۶,۱۲) می‌گذرد بیابید.(*راهنمایی* : از یک ضرب خارجی استفاده کنید.)

۱۴.اگر $\mathbf{0} = (۲\mathbf{i} + ۶\mathbf{j} - ۲۷\mathbf{k})\times(\mathbf{i} + r\mathbf{j} + s\mathbf{k})$ ، r و s را بیابید.

۱۵.ازفرض $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = ۰$ و $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{0}$ چه نتیجه‌ای دربارهٔ بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ عاید می‌شود.

۱۶.فرض کنید $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ موازی صفحهٔ yz باشند ، $|\mathbf{A}|=۲$ ، $|\mathbf{B}|=۴$ ، و $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = ۰$. دربارهٔ $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ چه می‌توان گفت ؟

۱۷.(الف) آیا خطوط $x/۳ = y/۲ = z/۲$ و $x/۵ = y/۳ = (z-۴)/۲$ متقاطعند؟

(ب) معادلات خطی راکه بر خطوط مذکور عمود باشد بیابید.

(ج) فاصلهٔ بین دو خط مذکور چقدر است ؟

۱۸.اگر $\boldsymbol{\omega}$ در جهت $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ باشد و جسم حول محوری که از مبدأ می‌گذرد با سرعت زاویه‌ای $۱۰\sqrt{۳}$ رادیان برثانیه دوران کند ، مکان نقاطی راکه دارای سرعت ۲۰ فوت بر ثانیه هستند بیابید. این مکان هندسی چه چیزی را نمایش می‌دهد؟

۱۹.جزئیات محذوف برهان قانون توزیع پذیری ضرب برداری را عرضه کنید.

۲۰. اگر $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ ، و $\mathbf{w}$ بردارهای یکهٔ دوبه دو متعامد باشند و $\mathbf{u}\times\mathbf{v}=\mathbf{w}$ ،نشان دهیدکه $\mathbf{v}=\mathbf{w}\times\mathbf{u}$ و $\mathbf{u}=\mathbf{v}\times\mathbf{w}$.

۱۳.۱ ضرب اسکالر سه‌گانه

ضرب اسکالر سه‌گانهٔ بردارهای $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، و $\mathbf{C}$ چنین تعریف می‌شود :

$$[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}] = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) \tag{۲۲.۱}$$

توجه کنید که پرانتزها را می‌توان حذف کرد زیرا هیچ طریق معقول دیگری برای تعبیر $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ وجود ندارد. اگر به صورتی که در بخش قبلی دیدیم ، حاصل ضرب خارجی را با استفاده از مؤلفه‌ها بنویسیم ، خواهیم داشت :

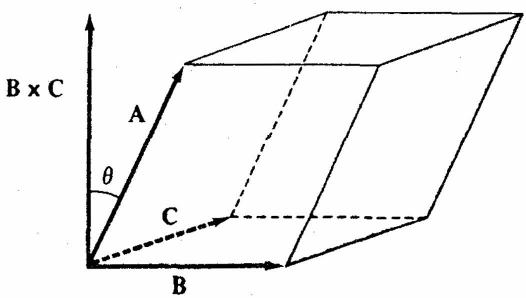
$$\begin{aligned}[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}] &= A_1B_2C_3 - A_1B_3C_2 + A_2B_3C_1\\ &\quad - A_2B_1C_3 + A_3B_1C_2 - A_3B_2C_1\end{aligned} \tag{۲۳.۱}$$

که با استفاده از دترمینان به صورت زیر در می‌آید :

$$[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}] = \begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3\\ B_1 & B_2 & B_3\\ C_1 & C_2 & C_3\end{vmatrix} \tag{۲۳'.۱}$$

حاصل ضرب اسکالر سه‌گانه یک تعبیر هندسی دارد. چنان که در شکل (۳۰.۱) ملاحظه می‌کنید، متوازی‌السطوحی راکه $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، و $\mathbf{C}$ سه یال آن هستند در نظر بگیرید. قاعدهٔ این جسم متوازی الاضلاعی است که مساحتش ، چنان که قبلاً دیدیم ، $|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|$ است . ارتفاع این جسم درازای مؤلفهٔ $\mathbf{A}$ در امتداد عمود بر قاعده است که ، چنان که در شکل (۳۰.۱) دیده می‌شود، می‌توان آن را مؤلفهٔ $\mathbf{A}$ در امتداد *موازی* با $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ دانست که $|\mathbf{A}|\ \cos\theta$ است . به عبارت دقیقتر، باید بگوییم که این ارتفاع برابر قدر مطلق $|\mathbf{A}|\cos\theta$ است ، زیرا اگر $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ در دو طرف صفحهٔ $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ باشند ؛ یعنی $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، و $\mathbf{C}$ یک دستگاه چپگرد تشکیل دهند ، $\cos\theta$ منفی خواهد بود. به این

ترتیب ، می‌بینیم که حجم متوازی السطوح که حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع می‌باشد ، برابر است با قدر مطلق $|\mathbf{A}|\cos\theta|\mathbf{B}\times\mathbf{C}|$. امّا این دقیقاً $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$ است ، حاصل ضرب اسکالر سه‌گانه !



شکل ۳۰.۱

به طور خلاصه ، می‌توان گفت که حجم *متوازی السطوح با یالهای* $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، و $\mathbf{C}$ ، *تا مرحلهٔ انتخاب* علامت ، با $[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}]$ داده می‌شود. به علاوه ، $[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}]$ *مثبت است اگر و فقط اگر* $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، و $\mathbf{C}$ یک *دستگاه راستگرد تشکیل دهند.*

مثال ۳۲.۱ هرگاه $\mathbf{A} = ۲\mathbf{i} + \mathbf{k}$ ، $\mathbf{B} = ۳\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ، و $\mathbf{C} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + ۴\mathbf{k}$ ، $[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}]$ را محاسبه کنید.

حل

$$[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}] = [۲\mathbf{i}+\mathbf{k}, ۳\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}, \mathbf{i}+\mathbf{j}+۴\mathbf{k}]$$

$$= \begin{vmatrix} ۲ & ۰ & ۱ \\ ۳ & ۱ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۴ \end{vmatrix} = ۸+۳-۱-۲=۸$$

مثال ۳۳.۱ $[\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{i}+۲\mathbf{j}]$ را محاسبه کنید.

حل

$$[\,\mathbf{i}\,,\mathbf{j}\,,\mathbf{i}+۲\mathbf{j}\,] = \begin{vmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۱ & ۲ & ۰ \end{vmatrix} = ۰$$

(بردارها در یک صفحه‌اند و بنابراین حجم متوازی السطوح صفر است .)

اکنون بعضی از خواص ضرب اسکالر سه‌گانه راکه از معادلهٔ (۲۳.۱) نتیجه می‌شوند ذکر می‌کنیم. این خواص برای محصلینی که دترمینانها را مطالعه کرده‌اند آشناست .

اولاً ، توجه کنید که قدر مطلق حاصل ضرب اسکالر سه‌گانه به ترتیب بردارها بستگی ندارد، ولی اگر جای دوبردار با هم عوض شود علامت حاصل ضرب عوض می‌شود :

$$[\,\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\,] = -[\,\mathbf{B},\mathbf{A},\mathbf{C}\,] = [\,\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{A}\,] \qquad (۲۴.۱)$$

این نشان می‌دهد که جای $\cdot$ و $\times$ را به صورتی که در زیر ملاحظه می‌کنید می‌توان آزادانه عوض نمود:

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C} = [\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}] = [\mathbf{C},\mathbf{A},\mathbf{B}] = \mathbf{C}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{A}\times\mathbf{B}\cdot\mathbf{C} \qquad (۲۵.۱)$$

ثانیاً ، حاصل ضرب اسکالر سه‌گانه نسبت به هریک از عواملش خطی است :

$$\begin{aligned} [\,s\mathbf{A}+\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}\,] &= s\,[\,\mathbf{A},\mathbf{C},\mathbf{D}\,] + [\,\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}\,] \\ [\,\mathbf{A}+s\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}\,] &= s\,[\,\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{D}\,] + [\,\mathbf{A},\mathbf{C},\mathbf{D}\,] \qquad (۲۶.۱) \\ [\,\mathbf{A},\mathbf{B},s\mathbf{C}+\mathbf{D}\,] &= s\,[\,\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\,] + [\,\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{D}\,] \end{aligned}$$

ثالثاً ، اتحاد بدیهی زیر را داریم :

$$[\,\mathbf{i}\,,\mathbf{j}\,,\mathbf{k}\,] = ۱ \qquad (۲۷.۱)$$

بدیهی است که اگر دو بردار از بردارهای $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، و $\mathbf{C}$ برابر باشند ، حاصل ضرب اسکالر سه‌گانه صفر خواهد شد. (حجم متوازی السطوح صفر است.) به علاوه ، اگر به جای هر یک از بردارها حاصل جمع آن بردار با ترکیبی خطی از دو بردار دیگر را جایگزین کنیم ، حاصل ضرب اسکالر سه‌گانه ثابت می‌ماند؛ مثلاً ، اگر $\mathbf{A}$ را با $\mathbf{A}+s\mathbf{B}+t\mathbf{C}$ ،که در آن s و t دو عدد دلخواه هستند،عوض کنیم،آن گاه $[\mathbf{A}+s\mathbf{B}+t\mathbf{C},\mathbf{B},\mathbf{C}]=[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}]$. اثباتش آسان است :

$$[\mathbf{A}+s\mathbf{B}+t\mathbf{C}\ ,\ \mathbf{B}\ ,\ \mathbf{C}] = [\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}] + s[\mathbf{B},\mathbf{B},\mathbf{C}] + t[\mathbf{C},\mathbf{B},\mathbf{C}]$$

و دو جملهٔ آخر صفرند.

جالب است توجه کنیم که این خواص ما را قادر می‌سازند که حاصل ضرب اسکالر سه گانه را بدون استعانت ازمعادلات (۲۳.۱) یا (‎۱.‎۲۳′) محاسبه کنیم؛به عنوان مثال، فرض کنید $\mathbf{A}=\mathbf{i}+۳\mathbf{j}$ ، $\mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$ ، و $\mathbf{C} = -\mathbf{k}$ ؛ آن گاه

$$\begin{aligned}[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}] &= [\mathbf{i}+۳\mathbf{j}\ ,\ \mathbf{i}+\mathbf{k}\ ,\ -\mathbf{k}] \\ &= [\mathbf{i}\ ,\ \mathbf{i}+\mathbf{k}\ ,\ -\mathbf{k}] + [۳\mathbf{j}\ ,\ \mathbf{i}+\mathbf{k}\ ,\ -\mathbf{k}] \\ &= [\mathbf{i}\ ,\ \mathbf{i}\ ,\ -\mathbf{k}] + [\mathbf{i}\ ,\ \mathbf{k}\ ,\ -\mathbf{k}] + [۳\mathbf{j}\ ,\ \mathbf{i}\ ,\ -\mathbf{k}] + [۳\mathbf{j}\ ,\ \mathbf{k}\ ,\ -\mathbf{k}] \\ &= -[\mathbf{i}\ ,\ \mathbf{i}\ ,\ \mathbf{k}] - [\mathbf{i}\ ,\ \mathbf{k}\ ,\ \mathbf{k}] - ۳[\mathbf{j}\ ,\ \mathbf{i}\ ,\ \mathbf{k}] - ۳[\mathbf{j}\ ,\ \mathbf{k}\ ,\ \mathbf{k}] \\ &= -۳\,[\mathbf{j},\mathbf{i},\mathbf{k}] = ۳\,[\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k}] = ۳\end{aligned}$$

به عنوان آخرین نکته ، نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان با استفاده از ضرب اسکالر سه‌گانه، معادلات پارامتری و غیرپارامتری یک صفحه را ، که در بخش ۱۰.۱ نتیجه گرفتیم ، به هم مربوط ساخت . معادلهٔ پارامتری براین اساس بود که نقطه‌ای در صفحه بابردارموضع $\mathbf{R}_0 = x_0\mathbf{i}+y_0\mathbf{j}+z_0\mathbf{k}$ و دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ موازی با صفحه مشخص کنیم . مسلماً $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بردار موضع نقطه‌ای از صفحه است هرگاه متوازی السطوح متشکل از $\mathbf{R}-\mathbf{R}_0$ ، $\mathbf{A}$ ، و $\mathbf{B}$ تخت باشد ، یعنی حجمش صفر باشد . از این رو، معادلهٔ این صفحه را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$[\mathbf{R}-\mathbf{R}_0,\mathbf{A},\mathbf{B}] = ۰$$

به استناد تعریف (۲۲.۱) ضرب اسکالر سه‌گانه ، $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ را برداری مانند $\mathbf{N}$ عمود بر صفحه می‌گیریم، و داریم :

$$(\mathbf{R}-\mathbf{R}_0)\cdot\mathbf{N} = ۰$$

این معادله با معادلهٔ (۱۵.۱) ، که معادلهٔ غیرپارامتری صفحه است ، مطابقت دارد.

تمرینات

۱. حاصل ضرب اسکالر سه‌گانهٔ $[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}]$ را با مفروضات زیر بیابید :

(الف) $\mathbf{A} = ۲\mathbf{i}$ ، $\mathbf{B} = ۳\mathbf{j}$ ، $\mathbf{C} = ۵\mathbf{k}$.

(ب) $\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ، $\mathbf{B} = ۳\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ، $\mathbf{C} = ۵\mathbf{k} - \mathbf{j}$.

(ج) $\mathbf{A} = ۲\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ، $\mathbf{B} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ، $\mathbf{C} = ۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{k}$.

(د) $\mathbf{A} = \mathbf{k}$ ، $\mathbf{B} = \mathbf{i}$ ، $\mathbf{C} = \mathbf{j}$.

۲. حجم متوازی السطوحی را بیابید که یالهایش پیکانهایی باشند که بابردارهای $۳\mathbf{i}+۴\mathbf{j}$ ، $۲\mathbf{i}+۳\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$ ، $۵\mathbf{k}$ نمایش داده می‌شوند.

۳. حجم متوازی السطوحی را بیابید که یالهایش AB، AC، و AD باشند که در آنها $A=(۳,۲,۱)$، $B=(۴,۲,۱)$ ، $C=(۰,۱,۴)$ ، و $D=(۰,۰,۷)$.

۴. حجم چهاروجهی‌ای راکه یالهایش بردارهای $\mathbf{i}+\mathbf{j}$، $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ ، $۲\mathbf{k}$ باشند بیابید. مسأله را با یک نمودار تشریح کنید.(توجه کنید : حجم چهار وجهی یک ششم حجم متوازی السطوحی است که با همان یالها ساخته می‌شود.)

۵. مساحت متوازی الاضلاع مسطحی را که رأسهایش نقاط (۰,۰) ، (۱,۱) ، (۳,۴) ، و (۴,۵) می‌باشند بیابید. (*راهنمایی* : با تبدیل این مسأله به مسأله‌ای در فضای سه بعدی ، حجم متوازی السطوحی را بیابید که این متوازی اللاضلاع قاعده آن و یال سوم متوازی السطوح در امتداد محور z ها به طول واحد باشد.)

۶. معادلهٔ صفحه‌ای راکه از مبدأ می‌گذرد و با بردارهای $\mathbf{A} = ۳\mathbf{i} + \mathbf{j} - ۲\mathbf{k}$ ، $\mathbf{B} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + ۵\mathbf{k}$ موازی است بیابید.

۷. معادلهٔ صفحه‌ای راکه از نقطهٔ $(۱,-۴,۳)$ می‌گذرد و با بردارهای $\mathbf{A} = ۲\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ، $\mathbf{B} = \mathbf{i} - ۳\mathbf{k}$ موازی است بیابید .

۸. (الف) نشان دهید که بردارهای $\mathbf{i}-\mathbf{j}$ ، $\mathbf{j}-\mathbf{k}$ ، $\mathbf{k}-\mathbf{i}$ با یک صفحه موازیند.

(ب) معادلهٔ صفحه‌ای راکه از مبدأ می‌گذرد و با این سه بردار موازی است بیابید.

۹. بردارهای زیر را در نظر بگیرید :

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \qquad \mathbf{B} = \mathbf{i}$$

$$\mathbf{C} = C_1\mathbf{i} + C_2\mathbf{j} + C_3\mathbf{k}$$

(الف) اگر $C_1 = 1$ ، $C_2 = 2$ ، مؤلفهٔ C_3 را چنان بیابید که سه بردار در یک صفحه قرار گیرند.

(ب) اگر $C_2 = -1$ و $C_3 = 1$ ، نشان دهید که هیچ مقداری برای C_1 نمی‌توان یافت به طوری که سه بردار در یک صفحه واقع شوند.

(ج) دربارهٔ دلیل هندسی حکم بند (ب) بحث کنید.

۱۰. ارتفاع متوازی السطوحی را که با بردارهای **A** ، **B** ، و **C** ساخته می‌شود بیابید ، در صورتی که قاعدهٔ این جسم متوازی الاضلاعی باشد که با بردارهای **A** و **B** تعیین می‌شود ، و

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \mathbf{k}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}$$

(*راهنمایی*: دربارهٔ تعبیر هندسی $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$ / $[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}]$ فکر کنید.)

۱۱. بردارهای $\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ، $\mathbf{B} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ ، و $\mathbf{C} = \mathbf{i} + 3\mathbf{k}$ را رسم کنید. از روی شکل تعیین کنید که آیا **A** ، **B** ، و **C** به ترتیب مذکور یک دستگاه راستگرد تشکیل می‌دهند یا خیر؟ نتیجه را با محاسبهٔ علامت $[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}]$ بیازمایید.

۱۲. اگر $|(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}| + |(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\cdot\mathbf{D}| = 0$ ، دربارهٔ بردارهای ناصفر **A** ، **B** ، **C** ، و **D** چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت ؟

۱۳. (الف) فرض کنید **u** ، **v** ، و **w** سه بردار یکّهٔ دو به دو متعامد باشند که یک دستگاه راستگرد تشکیل دهند. نشان دهید که زاویه‌ای که بردار $\mathbf{A} = \mathbf{i}\times\mathbf{u} + \mathbf{j}\times\mathbf{v} + \mathbf{k}\times\mathbf{w}$ با بردارهای **i** و **u** می‌سازد یکسان است .

(ب) برداری در امتداد محور دورانی که **i** ، **j** ، و **k** را به ترتیب به **u** ، **v** ، و **w** می‌برد بیابید.

۱۴. نشان دهید که هر بردار دلخواه **V** را می‌توان برحسب هر سه بردار **A** ، **B** ، و **C** که در یک صفحه نباشند به صورت زیر بیان کرد :

$$V = \frac{[V,B,C]}{[A,B,C]} A + \frac{[V,C,A]}{[A,B,C]} B + \frac{[V,A,B]}{[A,B,C]} C \qquad (۲۸.۱)$$

(*راهنمایی*: می‌دانیم که V را می‌توان چنین بیان کرد $V = aA + bB + cC$؛ برای تعیین a، ضرب اسکالر V در $B \times C$ را در نظر بگیرید.)

۱۴.۱ اتحادهای برداری

از میان اتحادهای زیر، اولی مهمترین آنهاست، زیرا سه تای دیگر را به آسانی می‌توان از آن نتیجه گرفت.

$$A \times (B \times C) = (A \cdot C)\, B - (A \cdot B)\, C \qquad (۲۹.۱)$$

$$(A \times B) \times C = (A \cdot C)\, B - (B \cdot C)\, A \qquad (۳۰.۱)$$

$$(A \times B) \times (C \times D) = [A,C,D]\, B - [B,C,D]\, A \qquad (۳۱.۱)$$

$$(A \times B) \cdot (C \times D) = (A \cdot C)(B \cdot D) - (A \cdot D)(B \cdot C) \qquad (۳۲.۱)$$

در فرمول (۲۹.۱)، اگر $V = A \times (B \times C)$ بردار صفر نباشد باید بر $B \times C$ عمود باشد. چون $B \times C$ بر دو بردار B و C عمود است، نتیجه می‌گیریم که V باید در صفحهٔ B و C باشد، و چون B و C بردارهای ناصفری هستند که با هم موازی نمی‌باشند (در غیر این صورت V بردار صفر خواهد بود)، V باید یک ترکیب خطی از B و C باشد. به این ترتیب، به ازای اسکالرهای مناسبی چون m و n، $V = mB + nC$. البته، این واقعیّت که $m = A \cdot C$ و $n = -A \cdot B$ بدیهی نیست. تحقیق برقراری (۲۹.۱) را می‌توان از طریق بیان طرفین تساوی برحسب مؤلفه‌ها به انجام رسانید. این محاسبهٔ دشوار و پرزحمت را به خوانندهٔ فعال واگذار می‌کنیم که این کار را انجام دهد (یا بخش ۱۵.۱ را بخواند).

ما تدبیر زیر را برای حفظ (۲۹.۱) پیشنهاد می‌کنیم. چنان که ملاحظه کردیم، $A \times (B \times C)$ باید به صورت یک ترکیب خطی از B و C قابل بیان باشد. اگر محصل بتواند فقط به خاطر داشته باشد که

ضرایب دراین ترکیب خطی حاصل ضربهای اسکالر دو بردار دیگرند و جمله‌ها مختلف العلامه می‌باشند ، وی قادر خواهد بود که بنویسد :

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = \pm [(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C})\ \mathbf{B} - (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})\ \mathbf{C}]$$

برای تحصیل علامت درست ، از بردارهای آشنای $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ استفاده می‌کنیم . از روابط

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{j}) = \mathbf{i}\times\mathbf{k} = -\mathbf{j} = \pm [\ (\mathbf{i}\cdot\mathbf{j})\mathbf{i} - (\mathbf{i}\cdot\mathbf{i})\mathbf{j}\ ]$$

دیده می‌شود که + علامت صحیح است .[البته ، این نتیجه در مورد فرمول (۳۰.۱) نیز برقرار است .]

فرمول (۳۰.۱) را به آسانی می‌توان با ملاحظهٔ

$$\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C}) = -\mathbf{C}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})$$

و به کارگیری (۲۹.۱) برای طرف راست ثابت کرد.

برای اثبات (۳۱.۱) ، فرض کنید $\mathbf{U}=\mathbf{C}\times\mathbf{D}$. آن گاه

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{U} = (\mathbf{A}\cdot\mathbf{U})\ \mathbf{B} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{U})\ \mathbf{A} = [\mathbf{A},\mathbf{C},\mathbf{D}]\ \mathbf{B} - [\mathbf{B},\mathbf{C},\mathbf{D}]\ \mathbf{A}$$

و برای نتیجه‌گیری (۳۲.۱)

$$\begin{aligned}(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{U} &= [\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{U}] = \mathbf{A}\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{U}) = \mathbf{A}\cdot[\mathbf{B}\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D})]\\ &= \mathbf{A}\cdot[(\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})\ \mathbf{C} - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})\ \mathbf{D}]\\ &= (\mathbf{B}\cdot\mathbf{D})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}) - (\mathbf{B}\cdot\mathbf{C})(\mathbf{A}\cdot\mathbf{D})\end{aligned}$$

به خواننده توصیه می‌شود که این بخش را برای سهولت مراجعه به اتحادهایی که بعداً مطرح می‌شوند نشانه‌گذاری کند.

تمرینات

۱. اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{D}) = [\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{D}]\ \mathbf{C} - [\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}]\ \mathbf{D}$$

۲. اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A}) = [\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}]^2$$

۳. اتحاد زیر را نتیجه بگیرید.

$$\mathbf{A} \times (\mathbf{B}\times\mathbf{C}) + \mathbf{B} \times (\mathbf{C}\times\mathbf{A}) + \mathbf{C} \times (\mathbf{A}\times\mathbf{B})=\mathbf{0}$$

۴. درستی فرمول (۲۹.۱) را با بیان بردارها با استفاده از مؤلفه‌ها تحقیق کنید.

۵. اگر بردار $\boldsymbol{\omega}$ در شکل (۲۷.۱) ثابت باشد، آن‌گاه شتاب یک ذره با بردار موضع $\mathbf{R}$ عبارت است از $\mathbf{a}=\boldsymbol{\omega}\times(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})$. این عبارت را ساده کنید.

۶. آیا هریک از احکام زیر برای بردارها همیشه برقرار است ؟

(الف) $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{B}\times\mathbf{A}$.

(ب) $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\times\mathbf{C} = \mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$.

(ج) $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{A}\times\mathbf{C}$ اگر و فقط اگر $\mathbf{B}=\mathbf{C}$.

(د) $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{0}$ اگر و فقط اگر $\mathbf{A}=\mathbf{0}$ یا $\mathbf{B}=\mathbf{0}$.

۷. عبارت $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|^2 + (\mathbf{A}\cdot\mathbf{B})^2 - |\mathbf{A}|^2|\mathbf{B}|^2$ را ساده کنید.

۱۵.۱ درس اختیاری : نماد تانسور

استفاده از نمادهای متمایزی چون $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ ، و امثال آنها برای نمایش بردارها و اعمال با آنها سبب ایجاز در بیان قوانین هندسه و فیزیک می‌شود. با این وجود ، وقتی سرانجام به یک مسألهٔ واقعی با محاسبات واقعی می‌رسیم ، مجبور می‌شویم بردارها را با مؤلفه‌هایشان مورد بحث و بررسی قرار دهیم . به علاوه ، استفاده از مؤلفه‌ها در تحقیق (وکشف !) بعضی از اتحادهای برداری پیچیده نظیر اتحادهای بخش قبلی غالباً بسیار مؤثر واقع می‌شود. دراین بخش نمادی موسوم به *نماد تانسور* معرفی خواهیم کرد که غالباً این فرآیند را آسان می‌کند. اگر چه قصد نداریم خود تانسورها را در این جا مورد بحث قرار دهیم ؛ هیچ دلیلی نمی‌بینیم که دستگاه نمادی را با چیزی غیر از اسم خاص آن معرفی کنیم .

نماد برداری سیاه $\mathbf{A}$، چنان که گفته‌ایم ، کمیتی با اندازه و جهت را نشان می‌دهد؛ این کمیّت با سه عدد A_1 ، A_2 ، A_3 ، که مؤلفه‌های این بردارند، نیز نمایش داده می‌شود. هرگزاره‌ای دربارهٔ این بردار، در واقع ،گزاره‌ای دربارهٔ مؤلفه‌های بردار است .به این ترتیب ، $\mathbf{A}=\mathbf{B}$ به این معنی است : $A_1 = B_1$ ،

$A_2 = B_2$ ، $A_3 = B_3$ ؛ و مختصراً

$$A_i = B_i \ (i = 1,2,3) \tag{۳۳.۱}$$

به عبارت ساده ، هدف اصلی از به کارگیری نماد تانسور این است که بکوشیم تا همهٔ معادلات برداری را برحسب مؤلفه‌ها بنویسیم ، امّا به جای این که معادله‌ای را به تفصیل برای اوّلین ، دومین ، و سومین مؤلفه بنویسیم ، از اندیسهایی چون i در معادلهٔ (۳۳.۱) استفاده می‌کنیم (این که چنین کاری همیشه ممکن است یا نه ، در این جا مورد بحث قرار نمی‌گیرد. فعلاً ، به همین اندازه اکتفا می‌کنیم که هرگاه *بتوانیم* نماد تانسور رابه کار می‌بریم). مؤلفه‌های برداری چون $\mathbf{A}$ را با A_i ، یا ، اگر مناسبتر باشد ، با $(\mathbf{A})_i$ نشان می‌دهیم ؛ عبارت "$(i = 1,2,3)$" را دانسته فرض می‌کنیم و آن را حذف می‌نماییم . اجازه دهید چند مثال ذکر کنیم :

این واقعیت که در جمع بردارها مؤلفه‌های متناظر با هم جمع می‌شوند چنین بیان می‌شود :

$$(\mathbf{A}+\mathbf{B})_i = A_i + B_i$$

یعنی ، مؤلفه iام $\mathbf{A}+\mathbf{B}$ حاصل جمع مؤلفه‌های iام $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ است . ضرب اسکالر چنین بیان می‌شود :

$$(s\mathbf{A})_i = sA_i$$

قانون شرکت پذیری بردارها ، وقتی بر حسب مؤلفه‌ها نوشته شود ، به قانون شرکت پذیری *اعداد* تبدیل شود:

$$[(\mathbf{A}+\mathbf{B}) + \mathbf{C}]_i = (\mathbf{A}+\mathbf{B})_i + C_i$$
$$= (A_i + B_i) + C_i$$
$$= A_i + (B_i + C_i)$$
$$[\mathbf{A}+(\mathbf{B}+\mathbf{C})]_i$$

شرطی که $\mathbf{R}$ روی خطی قرار گیرد که از نوک $\mathbf{V}$ به موازات $\mathbf{W}$ می‌گذرد ، چنین بیان می‌شود :

$$R_i = V_i + tW_i$$

در مورد ضرب اسکالر داریم :

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = A_1B_1 + A_2B_2 + A_3B_3$$

این تساوی را می‌توان با استفاده از حرف یونانی Σ که نشانهٔ جمع بندی است فشرده کرد. به ازای هر

n عدد $\{a_l\}$ $(l=1,2,\ldots,n)$ ، حاصل جمع

$$a_1 + a_2 + \ldots + a_n$$

را به عبارت

$$\sum_{i=1}^{n} a_l$$

خلاصه می‌کنیم . به این ترتیب حاصل ضرب اسکالر بالا به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}= \sum_{i=1}^{3} A_i\, B_i \tag{۳۴.۱}$$

بیان حاصل ضرب خارجی با استفاده از مؤلفه‌ها قدری پیچیده است . ملاحظه کنید که هر مؤلفهٔ $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ حاصل جمعی از حاصل ضربهای مؤلفه‌های $\mathbf{A}$ در مؤلفه‌های $\mathbf{B}$ است . اگر همهٔ حاصل ضربهای $\{A_j\ B_k\}$ را تشکیل دهیم . می‌توانیم بگوییم که مؤلفهٔ i ام $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ ترکیبی خطی از این حاصل ضربها با ضرایب ۱+ ، ۱- ، یا ٥ است (اگر جمله‌ای ظاهر نشود ضریبش صفر است). بنابراین با تعریف مناسب ε_{ijk} می‌توان نوشت :

$$(\mathbf{A}\times\mathbf{B})_i= \sum_{j=1}^{3}\ \sum_{k=1}^{3} \varepsilon_{ijk}\, A_j\, B_k \tag{۳۵.۱}$$

ε_{ijk} ضریب $A_j\ B_k$ در مؤلفهٔ i ام $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ است . مقایسهٔ این تساوی با عبارت (۲۰.۱) بخش (۱۲.۱) نشان می‌دهد که :

$$\varepsilon_{ijk}= \begin{cases} +1 & \text{اگر (ijk) یکی از (۱۲۳) ، (۲۳۱) ، (۳۱۲) باشد} \\ -1 & \text{اگر (ijk) یکی از (۳۲۱) ، (۲۱۳) ، (۱۳۲) باشد} \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در واقع ، ε_{ijk} ضریب $\lambda_i \mu_j \eta_k$ در ترمینان

$$\begin{vmatrix} \lambda_1 & \lambda_2 & \lambda_3 \\ \mu_1 & \mu_2 & \mu_3 \\ \eta_1 & \eta_2 & \eta_3 \end{vmatrix}$$

است ، واقعیتی که توانستیم از مقایسهٔ عبارت (۳۵.۱) با فرمول دترمینانی حاصل ضرب خارجی بخش (۱۲.۱) پیش بینی کنیم .

دربارهٔ نماد ε_{ijk} احکام زیر صحّت دارد :

(۱) $\varepsilon_{ijk} = 0$ هرگاه دواندیس با هم برابر باشند.

(۲) $\varepsilon_{ijk} = \varepsilon_{jki} = \varepsilon_{kij}$ ، یعنی اندیسها می‌توانند به طور دوری تعویض شوند.

(۳) $\varepsilon_{ijk} = -\varepsilon_{jik}$ ، یعنی اگر جای دو اندیس عوض شود ، علامت عوض می‌شود.

البته ، حاصل ضرب اسکالر $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$ نیز از حاصل ضربهای مؤلفه‌های $\mathbf{A}$ در مؤلفه‌های $\mathbf{B}$ تشکیل شده است ، و اگر عبارت (۳۴.۱) به صورت سادهٔ فعلی نبود ، باید می‌نوشتیم :

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} A_i B_j$$

که در آن

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{اگر } i=j \\ 0 & \text{اگر } i\neq j \end{cases} \qquad (۳۷.۱)$$

چگونگی اثر δ_{ij} برعبارتی که جمل اندیسدار آن با هم جمع می‌شوند ساده است ؛ چون $\delta_{ij} = 0$ مگر این که $i=j$ ، می‌توانیم δ را حذف و i را جانشین j کنیم . به این ترتیب

---

۱ - فرض کنید سه اندیس i ، j ، و k بر روی یک دایره باشند. اگر از یک اندیس شروع کنیم و یک دور بزنیم و در این حرکت هر اندیس را به ترتیب به اندیس بعدی تبدیل کنیم ، می‌گویند یک تبدیل دوری انجام داده‌ایم (م).

$$\sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \delta_{ij} A_i B_j = \sum_{j=1}^{3} A_i B_j \quad (=\mathbf{A\cdot B})$$

به این دلیل ، δ_{ij} را گاهی *تانسور جانشینی* می‌نامند که به «دلتای کرونکر» نیز موسوم است .

مثال ۳۴.۱ نشان دهید که حاصل ضرب اسکالر سه گانه با یک دترمینان محاسبه می‌شود.

حل در عبارت $\mathbf{A\cdot B\times C}$ ، ابتدا از نماد تانسور برای ضرب اسکالر استفاده می‌کنیم :

$$\mathbf{A\cdot B\times C} = \sum_{i=1}^{3} A_i\,(\mathbf{B\times C})_i$$

سپس (۳۵.۱) را برای ضرب برداری به کار می‌بریم :

$$\mathbf{A\cdot B\times C} = \sum_{i=1}^{3} A_i \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \delta_{ijk} B_j\, C_k$$

$$= \sum_{i=1}^{3} \sum_{j=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \delta_{ijk} A_i B_j\, C_k \qquad (۳۸.۱)$$

چنان که قبلاً ملاحظه کردیم ، عبارت اخیر بسط دترمینان زیر است :

$$\begin{vmatrix} A_1 & A_2 & A_3 \\ B_1 & B_2 & B_3 \\ C_1 & C_2 & C_3 \end{vmatrix}$$

توجه کنید که هر زمان که از نماد جمع استفاده کرده‌ایم ، اندیس هر جمله در این جمع‌بندی دو بار ظاهر شده است ؛ i در (۳۴.۱) تکرار شده است ، j و k در (۳۵.۱) تکرار شده‌اند ، و به همین ترتیب . به دلیل کثرت وقوع این امر ، قرارداد زیر در نماد تانسور مورد استفاده قرار می‌گیرد : *هرگاه اندیسی در یک جمله بیش از یک‌بار ظاهر شود ، در می‌یابیم که این جمله باید به ازای همهٔ مقادیر اندیس مکرر (۱،۲،و۳)*

در جمع ملحوظ گردد. به این ترتیب ، حاصل ضربهای اسکالر به صورت $A_i\ B_i$ نوشته می‌شود، و مؤلفهٔ i ام بردار $\mathbf{A}\times\mathbf{B}$ عبارت است از $\delta_{ijk}\ A_j\ B_k$. در واقع ، داریم : $\delta_{ii} = ۳$ [1]. *استثنائات این قاعده باید صراحتاً ذکر شود.*

فن محاسبهٔ عبارات مشتمل بر یک ضرب خارجی به کمک اتحاد زیر اجرا می‌شود :

$$\varepsilon_{ikm}\,\varepsilon_{psm} = \delta_{ip}\,\delta_{ks} - \delta_{is}\,\delta_{kp} \qquad (۳۹.۱)$$

(ملاحظه کنید که m اندیس مکرر است.) برای اثبات این اتحاد ، توجه می‌کنیم که طرف راست صفر است مگر این که به شکل ۰-۱ یا ۱-۰ باشد . به این ترتیب ،

$$\delta_{ip}\,\delta_{ks} - \delta_{is}\,\delta_{kp} = \begin{cases} ۱ & \text{اگر } i=p \text{ و } k=s \text{ ولی } i\neq s \text{ (یا } k\neq p\text{)،} \\ -۱ & \text{اگر } i=s \text{ و } k=p \text{ ولی } i\neq p \text{ (یا } k\neq s\text{)،} \\ ۰ & \text{غیر موارد اول و دوم ،} \end{cases}$$

در طرف چپ (۳۹.۱) ، ε صفر است مگر این که همهٔ اندیسها متفاوت باشند ؛ در این حالت ، $i\neq k$ و $p\neq s$ و m با هیچ یک از i ، p ، k ، و s مساوی نیست . بنابراین ، هر بار که i ، p ، k ، و s ثابت بمانند و m مقادیر ۱ ،۲ ، و ۳ را اختیار کند ، حداکثر یک جملهٔ ناصفر در جمع جمل وجود دارد و این جمله برابر ۱+ است اگر (ikm) یک جایگشت دوری (psm) باشد ، که این حالت فقط وقتی اتفاق می‌افتد که $i=p$ و $k=s$ ؛ برابر ۱- است هرگاه ترتیب (ikm) معکوس ترتیب (psm) باشد ، که این حالت فقط وقتی اتفاق می‌افتد که $i=s$ و $k=p$. از مقایسهٔ این شرایط ، می‌بینیم که طرفهای چپ و راست (۳۹.۱) برابرند.

مثال ۳۵.۱ $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ را ساده کنید .

حل مؤلفهٔ i ام عبارت است از :

---

۱ – توجه کنید که بنابرقرارداد مذکور، $\delta_{ii} = \sum_{i=۱}^{۳}\delta_{ii} = ۱+۱+۱ = ۳$ (م) .

$$\varepsilon_{ijk}\, A_j\, (\mathbf{B}\times\mathbf{C})_k = \varepsilon_{ijk}\, A_j\, \varepsilon_{klm}\, B_l\, C_m$$
$$= \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{klm}\, A_j\, B_l\, C_m$$

به خاطر داشته باشید که مجموع را به ازای مقادیر مختلف اندیس مکرر محاسبه می‌کنیم . نخست مجموع نظیر مقادیر k را پیدا می‌کنیم . چون سایر جمل به k بستگی ندارند ، می‌توانیم $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{klm}$ را محاسبه کنیم ؛ این برابر است با $\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{lmk}$ که ، به استناد معادلهٔ (۳۹.۱) ، عبارت است از : $\delta_{jl}\delta_{jm}-\delta_{im}\delta_{jl}$. بنابراین ، عبارت بالا برابر است با :

$$(\delta_{il}\, \delta_{jm} - \delta_{im}\, \delta_{jl})\; A_j\, B_l\, C_m$$

اکنون مجموع تانسورهای جانشینی را یکی یکی پیدا می‌کنیم . با جمع روی m به دست می‌آوریم :

$$\delta_{il}\, A_j\, B_l\, C_j - \delta_{jl}\, A_j\, B_l\, C_i$$

وبا جمع روی l

$$A_j\, C_j\, B_i - A_j\, B_j\, C_i$$

با کمی دقت متوجه می‌شویم که عبارت اخیر مؤلفه iام $(\mathbf{A\cdot C})\mathbf{B} - (\mathbf{A\cdot B})\mathbf{C}$ است ، و فرمول (۲۹.۱) را ثابت کرده‌ایم !

مثال ۳۶.۱ $(\mathbf{A}\times\mathbf{B}) \times (\mathbf{C}\times\mathbf{D})$ را ساده کنید .

حل مؤلفهٔ iام عبارت است از:

$$\varepsilon_{ijk}\, (\mathbf{A}\times\mathbf{B})_j\, (\mathbf{C}\times\mathbf{D})_k = \varepsilon_{ijk}\, \varepsilon_{jmn}\, A_m\, B_n\, \varepsilon_{kpq}\, C_p\, D_q$$

اگر ابتدا مجموع نظیر مقادیر j را محاسبه کنیم ، فقط دو عامل اول وارد جمع می‌شوند. اگر این دو عامل را به صورت $\varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{mnj}$ بنویسیم می‌توانیم با استفاده از (۳۹.۱) عبارت بالا را به عبارت

$$(\delta_{km}\, \delta_{in} - \delta_{kn}\, \delta_{im})\; A_m\, B_n\, \delta_{kpq}\, C_p\, D_q$$

تبدیل کنیم . اکنون تعیین حاصل جمعهای نظیراندیسهای تانسورهای جانشینی کار آسانی است که به نتیجهٔ زیر می‌انجامد :

$$A_k\, B_i\, \varepsilon_{kpq}\, C_p\, D_q - A_i\, B_k\, \varepsilon_{kpq}\, C_p\, D_q$$

حال با یادآوری معادلهٔ (۳۸.۱) متوجه می‌شویم که $\varepsilon_{kpq}\, A_k\, C_p\, D_q$ و $\varepsilon_{kpq}\, B_k\, C_p\, D_q$ حاصل ضربهای اسکالر سه‌گانه‌اند. از این رو عبارت اخیر برابر است با :

$$[\mathbf{A,C,D}]\ B_i - [\mathbf{B,C,D}]\ A_i$$

که مؤلفهٔ iام $[\mathbf{A,C,D}]\ \mathbf{B} - [\mathbf{B,C,D}]\ \mathbf{A}$ است و فرمول (۳۱.۱) را «کشف» کرده‌ایم.

تمرینات

۱. $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{C}$ را ساده کنید.

۲. $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{C}\times\mathbf{D})$ را ساده کنید.

۳. $(\mathbf{A}\times\mathbf{B})\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{C})\times(\mathbf{C}\times\mathbf{A})$ را ساده کنید.

مسائل تکمیلی

۱. اگر بردار $\mathbf{V} = ۲\mathbf{i} + ۳\mathbf{j}$ قطعهٔ AB را نمایش دهد، و نقطهٔ وسط AB نقطهٔ (۲,۱) باشد، A و B را بیابید.

۲. اگر $\mathbf{V}$ یک بردار یکّه در صفحهٔ xy باشد که با محور y مثبت زاویهٔ °۳۰ بسازد، $\mathbf{V}$ را بر حسب $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ بیان کنید *(دوجواب)*.

۳. برای برداری که زاویهٔ بین بردارهای $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ را نصف می‌کند فرمولی بیابید.

۴. با مفروضات زیر، s و t را چنان بیابید که $\mathbf{C} - s\mathbf{A} - t\mathbf{B}$ بر هر دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ عمود باشد.

$$\mathbf{A} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = ۲\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + ۴\mathbf{k}$$

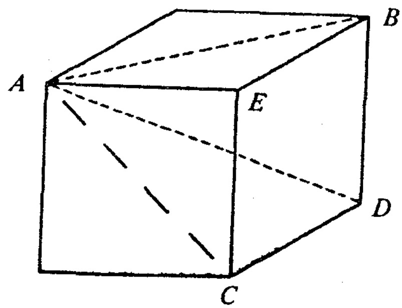
۵. ثابت کنید که به ازای هر دو بردار $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$، بردار $|\mathbf{A}|\mathbf{B} + |\mathbf{B}|\mathbf{A}$ بر $|\mathbf{B}|\mathbf{A} - |\mathbf{A}|\mathbf{B}$ عمود است.

۶. مکعب شکل (۳۱.۱) را در نظر بگیرید و زوایای زیر را بیابید:

(الف) زاویهٔ بین اقطار AB و AC از دو وجه مکعب.

(ب) زاویهٔ بین قطر اصلی AD وقطر وجهی AB ،

(ج) زاویهٔ بین قطر اصلی AD ولبهٔ (یال) AE.



شکل ۳۱.۱

۷. فرض کنید :

$$\mathbf{A} = ۳\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$$

$$\mathbf{B} = ۴\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۵\mathbf{k}$$

$$\mathbf{C} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

$\mathbf{A}\times\mathbf{B}$، $[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}]$، $|\mathbf{A}\times\mathbf{B}|$ را بیابید، و فاصلهٔ نوک **C** را تا صفحه‌ای محاسبه کنید که از مبدأ می‌گذرد و به وسیلهٔ بردارهای **A** و **B** پدید می‌آید.

۸. بافرض $\mathbf{A}\neq \mathbf{0}$ ، آیا درست است که $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ و $\mathbf{A}\times\mathbf{B} = \mathbf{A}\times\mathbf{C}$ مستلزم $\mathbf{B}=\mathbf{C}$ است ؟

۹. ثابت کنید که به ازای هر بردار **A**

$$\mathbf{i}\times(\mathbf{i}\times\mathbf{A}) + \mathbf{j}\times(\mathbf{j}\times\mathbf{A}) + \mathbf{k}\times(\mathbf{k}\times\mathbf{A}) = -۲\mathbf{A}$$

۱۰.ثابت کنید اگر $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}=\mathbf{0}$ آن گاه $\mathbf{A}\times\mathbf{B}=\mathbf{B}\times\mathbf{C}=\mathbf{C}\times\mathbf{A}$. تعبیر هندسی این حکم چیست ؟

۱۱.$[\mathbf{A}\times(\mathbf{A}\times\mathbf{B})]\times\mathbf{A}\cdot\mathbf{C}$ را ساده کنید.

۱۲.فرض کنید $\mathbf{V} = ۲\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} - ۲\mathbf{k}$. بردار $۲\mathbf{i} - \mathbf{j} + ۳\mathbf{k}$ را به صورت مجموع دوبردار بنویسید که

یکی موازی با $\mathbf{V}$ و دیگری عمود بر آن باشد.

۱۳.فرض کنید خط l_1 از نقاط (۲-,۱,۵) و (۱,۳-,۲) و خط l_2 از نقاط (۱,۸,۳) و (۷,۵,۳-) بگذرد. تعیین کنید که آیا این دو خط بر هم عمودند ؟ با هم موازیند ؟ بر هم منطبقند ؟ یا هیچکدام از اینها برقرار نیست ؟

۱۴.نقطهٔ تقاطع خطوط زیر را بیابید.

$$l_1 \ : \mathbf{R} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 3\mathbf{k} + t\ (\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 5\mathbf{k})$$

$$l_2 \ : \frac{x+3}{2} = \frac{y+1}{3} = -z$$

۱۵.فاصلهٔ مبدأ تا صفحه‌ای که محورهای x، y، و z را به ترتیب در $x=a$ ، $y=b$ ، و $z=c$ قطع می‌کند چقدر است ؟

۱۶.فاصلهٔ بین نقطهٔ (۱,۲,۳) و صفحهٔ $2x-2y+z=4$ را بیابید.

۱۷.فاصلهٔ بین صفحات $2x+y+z=2$ و $2x+y+z=4$ را بیابید.

۱۸.با چه شرایطی می‌توان بردار منحصر به فردی چون $\mathbf{X}$ یافت که جواب هر دو معادلهٔ زیر باشد ؟

$$\mathbf{A}\times\mathbf{X} = \mathbf{B} \ , \ \mathbf{C}\cdot\mathbf{X} = s$$

۱۹.قضیهٔ زیر را که منسوب به دزارگ[1] می‌باشد ثابت کنید. دو مثلث (ناتبهگن) ABC و DEF مفروضند با این خاصیّت که خطوط AD ، BE ، و CF یک نقطهٔ مشترک دارند ؛ به علاوه، فرض کنید خطوط AB و DE یکدیگر را در P قطع کنند، خطوط BC و EF یکدیگر رادر Q قطع کنند، و خطوط AC و DF یکدیگر رادر R قطع کنند. ثابت کنید که P، Q ، و R در یک استقامتند.

۲۰.عکس قضیهٔ دزارگ تمرین (۱۹) را ثابت کنید.

۲۱.فرض می‌کنیم $\mathbf{A}_1$ و $\mathbf{B}$ بردارهای دلخواهی باشند و دنبالهٔ بردارهای $\mathbf{A}_n$ را با $\mathbf{A}_{n+1} = \mathbf{B}\times\mathbf{A}_n$ تعریف می‌کنیم. رفتار نهایی دنباله چیست ؟

۲۲.براساس تعبیر حاصل ضرب اسکالر سه‌گانه به عنوان حجم ، یک دلیل هندسی برای معادلهٔ

[1] -Desargues

(۲۵.۱) عرضه کنید.

۲۳.با توجه به توزیع پذیری ضرب اسکالر واین که حاصل ضرب اسکالرسه‌گانه باتعویض × و · ثابت می‌ماند (تمرین قبلی راببینید)، دلیل دیگری برای قانون توزیع پذیری ضرب برداری ارائه کنید. (*راهنمایی* : اتحاد

$$\mathbf{D}\cdot\mathbf{A} \times (\mathbf{B}+\mathbf{C}) = \mathbf{D}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{B} + \mathbf{D}\cdot\mathbf{A}\times\mathbf{C}$$

را ثابت کنید و سپس $\mathbf{D}$ را به ترتیب $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ بگیرید.)

۲۴.ثابت کنید : اقطار یک مستطیل بر هم عمودند اگر و فقط اگر این مستطیل یک مربع باشد.

۲۵.مجموعهٔ نقاط با بردار موضع $\mathbf{R}$ راکه

$$(\mathbf{R}-\mathbf{a})\cdot(\mathbf{R}+\mathbf{a}) = ०$$

و $\mathbf{a}$ یک بردار ثابت فرض شود ، وصف کنید .(*راهنمایی* : نموداری رسم کنید.)

۲۶.دو خط متقاطع

$$\frac{x}{۲} = y = \frac{z-۱}{۳} \qquad \frac{x}{۳} = y = z$$

مفروضند. نقطه‌ای مانند P روی خط اوّل و نقطه‌ای مانند Q روی خط دوّم چنان بیابید که PQ بر هر دو خط عمود باشد.

۲۷.ثابت کنید : حاصل جمع مربعات اضلاع هر چهار ضلعی منهای حاصل جمع مربعات دو قطر، مساوی چهاربرابر مجذور فاصلهٔ بین اوساط اقطار است .

فصل دوّم

توابع برداری یک متغیره

۱.۲ مشتق‌گیری

نظریهٔ توابع برداری مانند نظریهٔ توابع حقیقی است . یک تابع برداری $\mathbf{F}(t)$ قاعده‌ای است که مطابق آن هر عدد حقیقی t از یک مجموعه ، که این مجموعه معمولاً یک بازه $(t_1 \leq t \leq t_2)$ یا مجموعه‌ای از بازه‌هاست ،به برداری چون $\mathbf{F}$ مربوط می‌شود؛ به عنوان مثال ،$\mathbf{F}(t)=(1/t)\mathbf{i}$ به ازای $0 < t < \infty$ و $-\infty < t < 0$ تعریف می‌شود.

مفهوم حد را می‌توان در مورد توابع برداری به کار برد. عبارت

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{F}(t) = \mathbf{A} \tag{۱.۲}$$

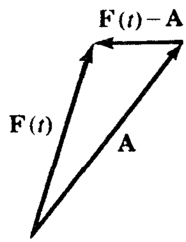
به این معنی است که به ازای هر عدد مثبت مفروض ε، هر قدر کوچک فرض شده باشد ، عدد مثبتی چون δ بتوان یافت به طوری که اگر $0 < |t - t_0| < \delta$ آن‌گاه $|\mathbf{F}(t)-\mathbf{A}| < \varepsilon$.

این یک معنی شهودی ساده دارد . منظور این است که اندازهٔ $\mathbf{F}(t)$ به اندازهٔ $\mathbf{A}$ نزدیک می‌شود و (اگر $\mathbf{A}$ ناصفر باشد) زاویهٔ بین آنها به صفر نزدیک می‌شود.(شکل «۱.۲» را ببینید.) به طور معادل ، *مؤلفه‌های* $\mathbf{F}(t)$ به *مؤلفه‌های* $\mathbf{A}$ میل می‌کنند.

تعریفی که اکنون ارائه شد با تعریفی که در کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال برای توابع حقیقی گفته می‌شود یکسان است ، به جز این که عبارت $|\mathbf{F}(t)-\mathbf{A}|$ اکنون اندازهٔ یک بردار است نه قدر مطلق یک عدد.

تابع برداری $\mathbf{F}$ را در t_0 پیوسته می‌گویند در صورتی که

$$\lim_{t\to t_0} \mathbf{F}(t) = \mathbf{F}(t_0) \tag{۲.۲}$$



شکل ۱.۲

این تابع در t_0 مشتق پذیر گفته می‌شود هرگاه حد

$$\lim_{\Delta t \to t_0} \frac{\mathbf{F}(t_0+\Delta t)-\mathbf{F}(t_0)}{\Delta t} \tag{۳.۲}$$

موجود باشد ؛ آن‌گاه این حد را مشتق $\mathbf{F}(t)$ در t_0 می‌نامند و به $\mathbf{F}'(t_0)$ یا $\frac{d\mathbf{F}}{dt}(t_0)$ نشان می‌دهند. مشتق نیز یک تابع برداری است.

اگر $\mathbf{F}(t)$ در هر نقطهٔ t که تابع در آن تعریف شده است پیوسته (مشتق پذیر) باشد، فقط می‌گوییم $\mathbf{F}(t)$ پیوسته (مشتق پذیر) است.

قضایای اساسی مربوط به مشتق گیری از توابع برداری مشابه همین قضایا در مورد توابع حقیقی است، به جز این که وقتی از حاصل ضرب برداری دو تابع برداری مشتق می‌گیریم، باید دقت کنیم که ترتیب عوامل حفظ شود، زیرا ضرب برداری یک عمل تعویض پذیر نیست.

قضیهٔ ۱.۲ *اگر توابع* $\mathbf{F}$ *و* $\mathbf{G}$ *مشتق پذیر باشند، آن‌گاه حاصل جمع آنها* $\mathbf{F}+\mathbf{G}$ *نیز مشتق پذیر است، و مشتق تابع* $\mathbf{F}+\mathbf{G}$ *برابر حاصل جمع مشتقات* $\mathbf{F}$ *و* $\mathbf{G}$ *به همین ترتیب*[1] *است.*

۱- در مورد جمع و ضرب اسکالر رعایت ترتیب الزامی نیست (م).

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{F}+\mathbf{G}) = \frac{d\mathbf{F}}{dt} + \frac{d\mathbf{G}}{dt} \qquad (۴.۲)$$

قضیهٔ ۲.۲ *اگر $\mathbf{F}$ یک تابع برداری مشتق پذیر و s یک تابع اسکالر مشتق پذیر باشد ، آن‌گاه حاصل ضرب $s\mathbf{F}$ یک تابع برداری مشتق پذیر است ، و*

$$\frac{d}{dt}(s\mathbf{F}) = \frac{ds}{dt}\mathbf{F} + s\frac{d\mathbf{F}}{dt} \qquad (۵.۲)$$

قضیهٔ ۳.۲ *اگر $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ توابع برداری مشتق پذیر باشند ، آن‌گاه $\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}$ یک تابع اسکالر مشتق پذیر است ، و*

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G}) = \frac{d\mathbf{F}}{dt}\cdot\mathbf{G}+\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{G}}{dt} \qquad (۶.۲)$$

قضیهٔ ۴.۲ *اگر $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ توابع برداری مشتق پذیر باشند آن‌گاه $\mathbf{F}\times\mathbf{G}$ نیز یک تابع برداری مشتق پذیر است ، و*

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \frac{d\mathbf{F}}{dt}\times\mathbf{G} + \mathbf{F}\times\frac{d\mathbf{G}}{dt} \qquad (۷.۲)$$

خواننده‌ای که با اثبات فرمولهای جمع و ضرب حساب مقدماتی آشناست هیچ مشکلی در ارائهٔ برهان این قضایا نخواهد داشت .

مثال ۱.۲ قضیهٔ ۴.۲ را ثابت کنید.

حل با توجه به تعریف مشتق ، می‌نویسیم :

$$\frac{\mathbf{F}(t+\Delta t)\times\mathbf{G}(t+\Delta t) - \mathbf{F}(t)\times\mathbf{G}(t)}{\Delta t}$$

$$= \frac{[\mathbf{F}(t+\Delta t) - \mathbf{F}(t)]\times\mathbf{G}(t+\Delta t)}{\Delta t} + \frac{\mathbf{F}(t)\times[\mathbf{G}(t+\Delta t) - \mathbf{G}(t)]}{\Delta t}$$

وقتی $\Delta t \to 0$ ، طرف راست به حد زیر میل می‌کند .

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt} \times \mathbf{G} + \mathbf{F} \times \frac{d\mathbf{G}}{dt}$$

چون حد طرف چپ برابر $\frac{d}{dt}(\mathbf{F}\times\mathbf{G})$ است ، قضیه ثابت شده است .

از (۴.۲) و (۵.۲) نتیجه می‌شود که اگر

$$\mathbf{F}(t) = P(t)\mathbf{i} + Q(t)\mathbf{j} + R(t)\mathbf{k}$$

آن گاه

$$\mathbf{F}'(t) = P'(t)\mathbf{i} + Q'(t)\mathbf{j} + R'(t)\mathbf{k} \qquad (۸.۲)$$

به این ترتیب ، وقتی $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{k}$ به عنوان کمیتهای ثابت در نظر گرفته شوند، مشتقگیری برداری مانند مشتقگیری اسکالر است .

مثال ۲.۲ فرض کنید $\mathbf{F}(t) = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}$. آن گاه $\mathbf{F}$ یک تابع برداری ثابت و مشتق آن برحسب t و به ازای همهٔ مقادیر t برابر بردار صفر است .

مثال ۳.۲ اگر $\mathbf{F}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + t\mathbf{k}$ ، آن گاه $\mathbf{F}'(t) = \cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

مثال ۴.۲ اگر $\mathbf{F}(t) = t^3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ ، آن گاه $\mathbf{F}'(t) = 3t^2\mathbf{j}$.

مثال ۵.۲ اگر $\mathbf{F}'(t) = 0$ ،آن گاه $\mathbf{F}(t) = \mathbf{C}$ ، که در آن ثابت $\mathbf{C}$ یک *بردار* است .

مثال ۶.۲ ثابت کنید که اگر $\mathbf{F}(t)$ دارای اندازهٔ ثابت ناصفر باشد (فقط جهت بردار تغییر می‌کند)، آن گاه یا $\mathbf{F}'(t)$ بردار صفر است یا یک بردار ناصفر عمود بر $\mathbf{F}(t)$ است .

حل اگر ثابت = $\mathbf{F}(t)$ ، باید داشته باشیم :

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{F} = \text{ثابت}$$

و با مشتقگیری برحسب t و استفاده از (۶.۲) ، داریم :

$$\frac{d\mathbf{F}}{dt}\cdot\mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{F}}{dt} = 0$$

$$۲\mathbf{F}\cdot \frac{d\mathbf{F}}{dt} = ۰$$

ازاین رو حاصل ضرب اسکالر $\mathbf{F}$ با $d\mathbf{F}/dt$ به ازای همهٔ مقادیر t صفر است. این وقتی اتفاق می‌افتد که بردارهای $\mathbf{F}$ و $d\mathbf{F}/dt$ بر هم عمود باشند یا یکی از آنها بردار صفر باشد. شایسته است که این واقعیّت را به خاطر بسپاریم: *مشتق یک بردار با اندازهٔ ثابت بر آن بردار عمود یا بردار صفر است.*

تمرینات

۱. فرض کنید $\mathbf{F}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + \cos t\,\mathbf{j} + \mathbf{k}$.

(الف) $\mathbf{F}'(t)$ را بیابید.

(ب) نشان دهید که $\mathbf{F}'(t)$ همیشه با صفحهٔ xy موازی است.

(ج) به ازای چه مقادیری از t بردار $\mathbf{F}'(t)$ با صفحهٔ xz موازی است؟

(د) آیا اندازهٔ $\mathbf{F}(t)$ ثابت است؟

(هـ) آیا اندازهٔ $\mathbf{F}'(t)$ ثابت است؟

(و) $\mathbf{F}''(t)$ را محاسبه کنید.

۲. $\mathbf{F}'(t)$ را در هریک از حالات زیر بیابید:

(الف) $\mathbf{F}(t) = ۳t\mathbf{i} + t^۳\mathbf{j}$.

(ب) $\mathbf{F}(t) = \sin t\,\mathbf{i} + e^{-t}\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}$.

(ج) $\mathbf{F}(t) = (e^t\mathbf{i} + \mathbf{j} + t^۲\mathbf{k}) \times (t^۳\mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k})$.

(د) $\mathbf{F}(t) = (\sin t + t^۳)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + ۲\mathbf{k})$.

(هـ) $\mathbf{F}(t) = ۳\mathbf{i} + \mathbf{k}$.

۳. $f'(t)$ را در هر یک از حالات زیر بیابید:

(الف) $f(t) = (3t\mathbf{i} + 5t^2\mathbf{j})\cdot(t\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j})$.

(ب) $f(t) = |2t\mathbf{i} + 2t\mathbf{j} - \mathbf{k}|$.

(ج) $f(t) = [(\mathbf{i}+\mathbf{j}-2\mathbf{k}) \times (3t^4\mathbf{i} + t\mathbf{j})]\cdot\mathbf{k}$.

۴. نشان دهید که $\dfrac{d}{dt}\left(\mathbf{R}\times\dfrac{d\mathbf{R}}{dt}\right) = \mathbf{R} \times \dfrac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$

۵. سه بردار $\mathbf{A} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 6\mathbf{k}$، $\mathbf{B} = 3\mathbf{i} + 4\mathbf{k}$، و $\mathbf{C} = 2\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$ مفروض است. مطلوب است محاسبهٔ

(الف) $|\mathbf{A}|$

(ب) $\mathbf{A}\cdot\mathbf{B}$

(ج) $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$

(د) $\mathbf{B}\cdot\mathbf{B}\times\mathbf{C}$

(هـ) $[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}]$

(و) $\mathbf{A} / |\mathbf{B}|$

(ز) $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$

(ح) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{A}+\mathbf{B}t)$

(ط) $\dfrac{d}{dt}(\mathbf{B}\times t\mathbf{C})$

۲.۲ منحنیهای فضایی، سرعت، و مماس

در فصل اوّل، نشان دادیم که معادلات پارامتری یک خط را می‌توان به صورت برداری

$$\mathbf{R} = \mathbf{R}_0 + t\mathbf{V} \tag{۹.۲}$$

نوشت. در این جا $\mathbf{R}_0$ بردار موضع نقطهٔ ثابتی از خط و $\mathbf{V}$ موازی با آن خط است، و وقتی t مقادیر از $-\infty$ تا $+\infty$ را اختیار کند، نوک بردار $\mathbf{R}$ این خط را در فضای (x,y,z) می‌پیماید. ما می‌توانیم معادلهٔ (۹.۲) را تعریف $\mathbf{R}$ به عنوان یک تابع برداری از t (که مشتق آن، البته، $\mathbf{V}$ است) نیز بدانیم.

دراین بخش معادلاتی به شکل $\mathbf{R}=\mathbf{R}(t)$ راکه در آنها تابع $\mathbf{R}(t)$ پیچیده‌تر از معادلهٔ (۹.۲) است بررسی خواهیم کرد. البته، معادلهٔ $\mathbf{R}=\mathbf{R}(t)$ را می‌توان برحسب مؤلفه‌هایش نوشت که دستگاه

$$x=x(t)$$

$$y=y(t) \tag{۱۰.۲}$$

$$z=z(t)$$

را نتیجه می‌دهد که در آن x ، y ، و z توابع حقیقی ساده‌ای از t می‌باشند.

وقتی t از مقدار اوّلیهٔ t_1 به مقدار t_2 افزایش یابد ، نقطهٔ (x,y,z) [نوک بردار موضع $\mathbf{R}(t)$] مسیری هندسی در فضا را طی می‌کند. در حالت معادلهٔ (۹.۲) این مسیر قطعه‌ای از یک خط راست است . در مورد توابع برداری (پیوستهٔ) پیچیده‌تر، این مکان هندسی نوع کلیتری از مسیر یک بعدی خواهد بود که ما آن را یک منحنی *فضایی* یا یک *کمان* می‌نامیم .[مسیر را یک بعدی می‌نامیم به این دلیل که موضع هر نقطهٔ آن را می‌توان از طریق تابع پیوستهٔ $\mathbf{R}(t)$ و تعیین یک عدد t مشخص کرد.] ما از اصطلاح «منحنی» استفاده می‌کنیم حتی وقتی که مسیر $\mathbf{R}(t)$ یک خط راست باشد.

به این ترتیب ، به هر تابع برداری پیوستهٔ $\mathbf{R}(t)$ یک منحنی در فضا نسبت می‌دهیم که مجموعهٔ مقادیری است که $\mathbf{R}(t)$ دراثر تغییرات t دریک بازه اختیار می‌کند. این منحنی مجموعه‌ای ریسمان مانند از نقاط فضای (x,y,z) است که ناشی از پیوستگی تابع $\mathbf{R}(t)$ است[۱]. به خاطر داشته باشید که تاآن جاکه به منحنی مربوط می‌شود ، t یک متغیر ظاهری است که ما عنوان «پارامتر» به آن داده‌ایم .

همچنین توجه کنید که یک منحنی مفروض را به چند طریق می‌توان پارامتری کرد؛ به عنوان مثال ، اگر $\mathbf{W} = \frac{۱}{۲}\mathbf{V}$ ، تابع

$$\mathbf{R}_1(t) = \mathbf{R}_0 + t\mathbf{W}$$

به ازای $-\infty < t < \infty$ و تابع

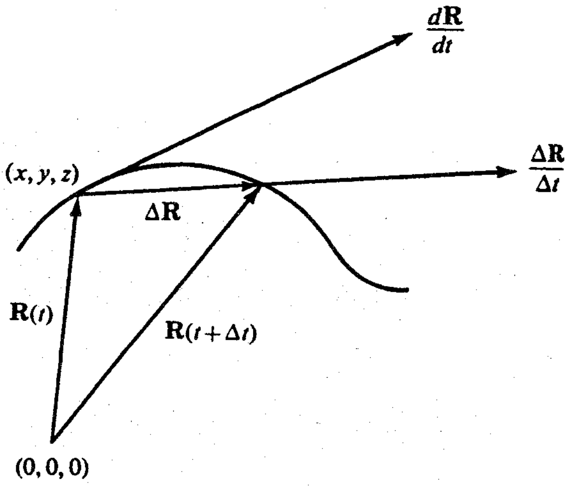
$$\mathbf{R}_2(t) = \mathbf{R}_0 + \tan t\, \mathbf{W}$$

به ازای $-\pi/۲ < t < \pi/۲$ دقیقاً همان خط راست (۹.۲) را می‌پیمایند. به این ترتیب ، امکان دارد

---

۱ - دربیان این نکته اندک تصرفی در معنی صورت گرفته است . همچنین ، مؤلف در این جا به نکات دیگری اشاره کرده است که ذکر آنها ضرورت ندارد (م).

چندین *تابع* متفاوت یک منحنی را پارامتری کنند.



شکل ۲.۲

این ایده که پارامتر t را متغیر زمان و (x,y,z) را موضع ذرهٔ متحرکی در فضا بدانیم مفید واقع می‌شود. در فاصلهٔ زمانی Δt ، بردار موضع ذره از مقدار $\mathbf{R}(t)$ به مقدار جدید $\mathbf{R}(t+\Delta t)$ تبدیل می‌شود. تغییر مکان ذره در این فاصلهٔ زمانی عبارت است از :

$$\Delta\mathbf{R} = \mathbf{R}(t+\Delta t) - \mathbf{R}(t) = \Delta x\mathbf{i} + \Delta y\mathbf{j} + \Delta z\mathbf{k} \qquad (۱۱.۲)$$

اگر این تغییر مکان را بر اسکالر Δt تقسیم کنیم ، سرعت متوسط ذره در فاصله زمانی مذکور به دست می‌آید.

$$\frac{\Delta\mathbf{R}}{\Delta t} = \frac{\Delta x}{\Delta t}\mathbf{i} + \frac{\Delta y}{\Delta t}\mathbf{j} + \frac{\Delta z}{\Delta t}\mathbf{k} \qquad (۱۲.۲)$$

(درشکل «۲.۲»، Δt را کمتر از واحد می‌گیریم ؛ از این رو، اندازهٔ بردار $\Delta\mathbf{R} / \Delta t$ بزرگتر از اندازهٔ $\Delta\mathbf{R}$ است.)

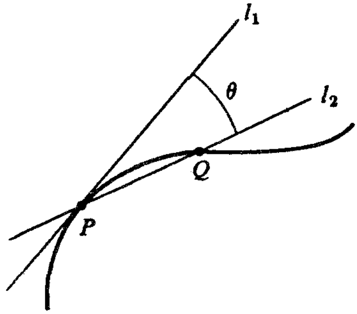
اگر $\mathbf{R}$ مشتق پذیر باشد ، هنگامی که Δt به صفر میل کند ، $\Delta\mathbf{R} / \Delta t$ به یک حد میل می‌کند.

این حد ، بنا بر تعریف ، سرعت (لحظه‌ای) $\mathbf{v}$ است :

$$\mathbf{v}(t) = \mathbf{R}'(t) = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \qquad (۱۳.۲)$$

اندازهٔ $\mathbf{v}$ را ، که به v نشان داده می‌شود ، تندی می‌نامند.

شکل (۲.۲) نشان می‌دهد که بردار سرعت $\Delta \mathbf{R} / \Delta t$ بر منحنی مماس است . اجازه دهید این واقعیت را بیشتر مورد بررسی قرار دهیم . با مراجعه به شکل (۳.۲) ، به طور صوری می‌گوییم که خط l_1 در نقطهٔ P بر منحنی مماس است در صورتی که زاویهٔ θ ، زاویهٔ بین l_1 و خط قاطع l_2 که با P و Q تعیین می‌شود، به صفر میل کند هرگاه Q در امتداد منحنی به P نزدیک شود ؛ یعنی ، هرگاه Q به P نزدیک می‌شود ، راستای خط قاطع l_2 به راستای l_1 میل کند.



شکل ۳.۲

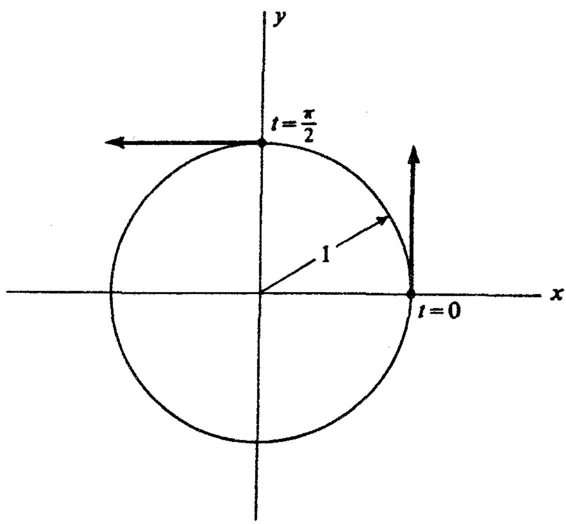
اگر آنچه را که گفته شد در مورد شکل (۲.۲) اعمال کنیم ، می‌توانیم راستای خط قاطع را همان راستای $\Delta \mathbf{R}/\Delta t$ بگیریم . به این ترتیب ، وقتی Δt به صفر نزدیک می‌شود ، خط قاطع باید یک راستای حدی داشته باشد که همان راستای $d\mathbf{R}/dt$ است ؛ البته ، به جز حالتی که $d\mathbf{R}/dt$ بردار صفر باشد که راستای معینی ندارد. بنابراین نشان داده‌ایم که : اگر تابع برداری $\mathbf{R}(t)$ مشتق ناصفری در t_0

داشته باشد ، آن گاه منحنی‌ای که با $\mathbf{R}=\mathbf{R}(t)$ پارامتری شده است یک مماس در $\mathbf{R}(t_0)$ دارد که راستایش بر راستای $d\mathbf{R}/dt$ منطبق است. به طور خلاصه ، $d\mathbf{R}/dt$ *بر منحنی مماس است* .

به طور قراردادی *بردار* یکّهٔ مماس بر منحنی را با حرف $\mathbf{T}$ نشان می‌دهیم . این بردار با عبارت

$$\mathbf{T} = \frac{(dx/dt)\mathbf{i} + (dy/dt)\mathbf{j} + (dz/dt)\mathbf{k}}{\sqrt{(dx/dt)^{۲} + (dy/dt)^{۲} + (dz/dt)^{۲}}} \qquad (۱۴.۲)$$

که از تقسیم $d\mathbf{R}/dt$ بر اندازه‌اش به دست می‌آید، تعریف می‌شود.



شکل ۴.۲

مثال ۷.۲ بردار یکّهٔ مماس بر کمان $x=\cos t$ ، $y=\sin t$ ، $z=0$ را درنقاط متناظر (الف) $t=0$ ، (ب) $t=\pi/۲$ تعیین کنید.

حل چنان که از شکل (۴.۲) مشهود است ، جوابها عبارتند از (الف) $\mathbf{j}$ ،(ب) $-\mathbf{i}$. این جوابها را

می‌توان با استفاده از معادلهٔ (۱۴.۲) نیز به دست آورد که خواهیم داشت :

$$\mathbf{T} = \frac{-\text{sint } \mathbf{i} + \text{cost } \mathbf{j}}{\sqrt{\sin^{۲}t + \cos^{۲}t}} = -\text{ sint } \mathbf{i} + \text{cost } \mathbf{j}$$

در $t=۰$ داریم : $\mathbf{T} = -\sin ۰\ \mathbf{i} + \cos ۰\ \mathbf{j} = \mathbf{j}$ ؛ و در $t=\pi/۲$ داریم :

$$.\mathbf{T} = -\sin(\pi/۲)\mathbf{i} + \cos(\pi/۲)\mathbf{j} = -\mathbf{i}$$

مثال ۸.۲ بردار یکهٔ مماس بر منحنی $x=t$ ، $y=t^{۲}$ ، $z=t^{۳}$ را در نقطهٔ (۲,۴,۸) بیابید.

حل با استفاده از معادلهٔ (۱۴.۲) ، داریم :

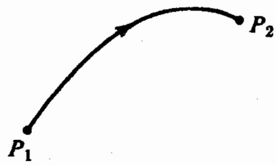
$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{i}+۲t\mathbf{j}+۳t^{۲}\mathbf{k}}{\sqrt{۱+۴t^{۲}+۹t^{۴}}}$$

وقتی $t=۲$ داریم $(x,y,z) = (۲,۴,۸)$ و $\mathbf{T} = (۱/\sqrt{۱۶})\ (\mathbf{i}+۴\mathbf{j}+۱۲\mathbf{k})$

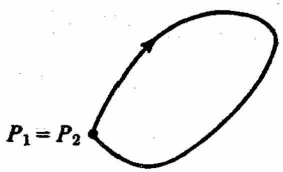
اکنون می‌خواهیم اصطلاحاتی چند برای توصیف منحنیهای مرسوم در شکلهای (۵.۲) تا (۸.۲) را معرفی کنیم . ساده‌ترین این منحنیها در شکل (۵.۲) نشان داده شده است که هیچ گاه خود را قطع نمی‌کند و مماس بر منحنی در هر نقطه موجود است و این مماس چرخشی پیوسته دارد[۱]. از بحث بالا می‌توان دریافت که چه شرایطی این خواص را تضمین می‌کنند.

---

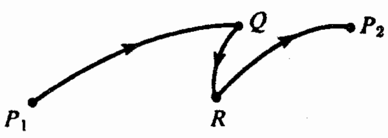
۱ - این یکی از ویژگیهای منحنیهای هموار است که به زودی تعریف خواهند شد. اگر $\mathbf{R}=\mathbf{R}(t)$ یک منحنی هموار باشد ، وقتی t تغییر کند، $d\mathbf{R}/dt$ به طور پیوسته تغییر می‌کند و تغییر ناگهانی در راستا و جهت ندارد. به عبارت دیگر ، به ازای هر مقدار t چون t_0، بردار $(d\mathbf{R}/dt)$ وضعیّت حدّی بردار $d\mathbf{R}/dt$ است وقتی که t به t_0 میل کند (م).



شکل ۵.۲



شکل ۶.۲



شکل ۷.۲

بنابراین، کمانی راکه با $\mathbf{R}=\mathbf{R}(t)$ ، $t_1 \le t \le t_2$ ، پارامتری شده است *هموار* می‌نامیم در صورتی که در شرایط زیر صدق کند :

(۱) dR/dt به ازای هر مقدار t از بازهٔ $t_1 \leq t \leq t_2$ موجود و در این بازه پیوسته است ،

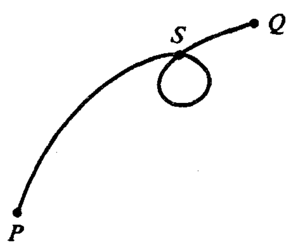
(۲) مقادیر متمایز t از بازهٔ $t_1 \leq t \leq t_2$ متناظر با نقاط متمایزند،

(۳) هیچ مقدار از t در بازهٔ $t_1 \leq t \leq t_2$ وجود ندارد که به ازای آن dR/dt بردار صفر باشد.

این امکان وجود دارد که ، چنان که در شکل (۶.۲) ملاحظه می‌کنید ، یک کمان مفروض بسته باشد ، و این وقتی اتفاق می‌افتد که $\mathbf{R}(t_1) = \mathbf{R}(t_2)$.

توجه کنید که برای این که نشان دهیم که کمان مفروضی هموار است باید یک معادلهٔ پارامتری برای منحنی پیدا کنیم که در شرایط مذکور صدق کند ؛ امکان دارد معادلات پارامتری دیگری موجود باشندکه در شرایط مذکور صدق نکنند ؛ مثلاً،یک قطعه خط مستقیم را می‌توان با $\mathbf{R}(t)=\mathbf{R}_0+t^3\mathbf{V}$ ، $-1 \leq t \leq 1$ ، پارامتری کرد که در شرط سوّم از شرایط بالا صدق نمی‌کند در عین حال که این قطعه خط یک کمان هموار است.

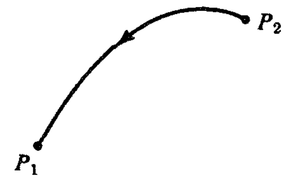
کمان شکل (۷.۲) هموار نیست زیرا در نقاط Q و R فاقد مماس است . با این وجود ، این منحنی از تعدادی متناهی کمان هموار متصل به هم تشکیل شده است و خودش را قطع نمی‌کند ؛ چنین منحنی‌ای را منظم می‌نامند. منحنی شکل (۸.۲) منظم نیست ، زیرا خودش را در S قطع می‌کند.



شکل ۸.۲

در شکلهای (۵.۲) ، (۶.۲) ، و (۷.۲) جهتی که در آن ذرّهٔ متحرک منحنی را می‌پیماید با یک پیکان باریک نشان داده شده است . به عبارت دقیق ، هر منحنی چیزی جز مجموعه‌ای از نقاط نیست . با این وجود ، اگر مانند شکلهای بالا جهتی در امتداد یک کمان هموار مشخص کنیم

می‌گوییم که این کمان جهت دار شده است . بدیهی است که هر کمان هموار به دو طریق جهت دار می‌شود. کمان شکل (۹.۲) عین کمان شکل (۵.۲) است ولی در خلاف جهت آن جهت دار شده است .



شکل ۹.۲

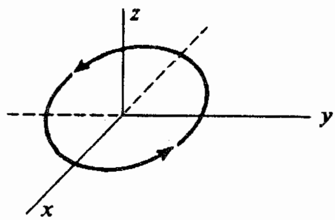
وقتی که کمانی با معادلاتی نظیر معادلات (۱۰.۲) ، بر حسب یک پارامتر t ، توصیف می‌شود، جهت کمان به وسیلهٔ آن پارامتر معین می‌شود: جهت کمان همان جهت افزایش t است ؛ مثلاً ، کمان بستهٔ

$$x=\cos t$$
$$y=\sin t \qquad (۱۵.۲)$$
$$z=0$$

یک دایرهٔ ساده به شعاع واحد در صفحهٔ xy است . وقتی t از صفربه ۲π افزایش می‌یابد، نقطهٔ نظیر آن ، چنان که در شکل (۱۰.۲) دیده می‌شود ، دور دایره را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیماید. همین کمان را می‌توان با معادلات پارامتری

$$x=\cos t$$
$$y=-\sin t \qquad (۱۶.۲)$$
$$z=0$$

در خلاف جهت اولیه جهت دار کرد. معادلات (۱۶.۲) همان کمان (۱۵.۲) را مشخص می‌کنند ولی در خلاف جهت قبلی ، زیرا وقتی t از ۰ به ۲π افزایش یابد، نقطهٔ (x,y,z) دایره را در خلاف جهت منحنی (۱۵.۲) طی می‌کند.



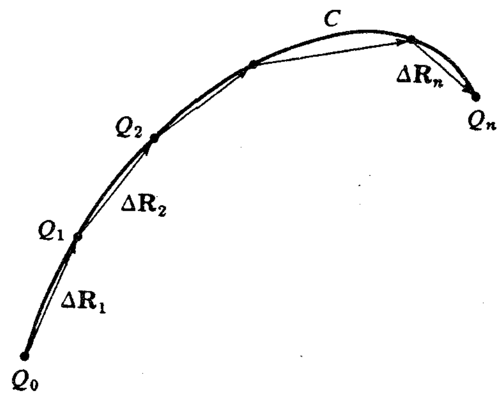
شکل ۱۰.۲

همین دایره را می‌توان به شکلی *غیرپارامتری* (یعنی ، بدون یک «متغیرظاهری») با معادلات

$$x^2 + y^2 = 1$$
$$z = 0 \qquad (۱۷.۲)$$

نمایش داد. از معادلات (۱۷.۲) به هیچ وجه نمی‌توان فهمید که چه جهتی در نظر گرفته شده است . توجه کنید که (۱۷.۲) کمان مورد نظر را به عنوان مقطع دو سطح (یک استوانه و یک صفحه) نمایش می‌دهد. وقتی یک کمان جهت دار را با ارائهٔ دو معادله به عنوان مقطع دو سطح مشخص می‌کنیم ، ضرورت دارد که جهت منحنی را جداگانه با رسم یک نمودار یا شفاهاً تعیین کنیم .

بدون شک خواننده با مفهوم طول کمان که در کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال (حداقل برای منحنیهای مسطح) مورد بحث قرار می‌گیرد آشنایی دارد. این مفهوم را به آسانی می‌توان برای منحنیهای فضایی تعمیم داد. فرض کنید C یک منحنی فضایی هموار باشد. C را به کمانهای کوچکتر تقسیم و آن را با یک مسیر چند بری متشکل از n قطعه خط راست که نقاط انتهایی کمانها را به هم وصل می‌کنند تقریب می‌کنیم (شکل ۱۱.۲).



شکل ۱۱.۲

یعنی، نقاط Q_0، Q_1، ...، Q_n را در امتداد C به همان ترتیب انتخاب می‌کنیم به طوری که Q_0 و Q_n نقاط انتهایی C باشند. به ازای هر $k = 0,1,\dots,n$، فرض کنید $\mathbf{R}_k$ بردار موضع نقطهٔ Q_k باشد و به ازای $k=1,2,\dots,n$، $\Delta\mathbf{R}_k = \mathbf{R}_k - \mathbf{R}_{k-1}$. آن گاه طول کلی مسیر چند بری، $\sum|\Delta R_k|$ است. طول منحنی فضایی C حد مجموعه‌هایی از این نوع تعریف می‌شود، که در آنها مسیرهای چند بری تقریبی از افزایش قطعات کوچک منحنی، که نتیجهٔ افزایش n است، به دست می‌آیند.

وقتی منحنی مفروض، مثلاً، در بازهٔ $a\le t\le b$ با $\mathbf{R}(t)$ پارامتری شده باشد، می‌توانیم این حد را به صورت زیر محاسبه کنیم. طول $\Delta\mathbf{R}_k$ عبارت است از:

$$|\Delta\mathbf{R}_k| = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_k)^2 + (\Delta z_k)^2}$$

فرض کنید t_k ها مقادیری از t باشند که با نقاط $\mathbf{R}_k$ متناظرند؛ یعنی، فرض کنید $\mathbf{R}_k=\mathbf{R}(t_k)$. آن‌گاه، چون dR/dt پیوسته است، به استناد قضیهٔ مقدار میانگین حساب دیفرانسیل و انتگرال مطمئن می‌شویم که عددی چون τ_k بین t_{k-1} و t_k وجود دارد به طوری که

$$\Delta x_k=x_k-x_{k-1}=(t_k-t_{k-1})\frac{dx}{dt}\,(\tau_k)$$

به طور مشابه، اعدادی چون τ'_k و τ''_k در همان بازه موجودند به طوری که

$$\Delta y_k=(t_k-t_{k-1})\ \frac{dy}{dt}\ (\tau'_k)$$

$$\Delta z_k=(t_k-t_{k-1})\ \frac{dz}{dt}\ (\tau''_k)$$

بنابراین، برای طول مسیر چند بری داریم

$$\sum_{k=1}^{n}|\Delta \mathbf{R}_k| = \sum_{k=1}^{n}\left[\left(\frac{dx}{dt}\ (\tau_k)\right)^2+\left(\frac{dy}{dt}\ (\tau'_k)\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\ (\tau''_k)\right)^2\right]^{\frac{1}{2}}(t_k-t_{k-1})$$

حال اگر نقاط تقسیم افزایش یابد به طوری که تفاضل t_k-t_{k-1} کوچکتر شود، این مجموع به انتگرال

$$\int_a^b\left[(\frac{dx}{dt})^2+(\frac{dy}{dt})^2+(\frac{dz}{dt})^2\right]^{\frac{1}{2}}dt \qquad (۱۸.۲)$$

میل می‌کند. اگر توجه کنیم که عبارت زیر علامت انتگرال $|d\mathbf{R}/dt|$ است، ملاحظه می‌کنیم که *طول منحنی C برابر است با*

$$\int_a^b \left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right| dt \qquad (۱۹.۲)$$

طول یک منحنی منظم مجموع طولهای منحنیهای هموار مختلفی که منحنی مفروض را تشکیل می‌دهند تعریف می‌شود.

گاهی ممکن است بتوانیم دو تا از متغیرها، مثلاً y و z، را بر حسب متغیر دیگر، مثلاً x، بنویسیم. در این حالت dy و dz برحسب x و dx بیان می‌شوند و، بنابراین، متغیر انتگرالگیری x و حدود انتگرالگیری مقادیر x نظیر t_1 و t_2 خواهد بود.

اگر کمان P_1P_2 تماماً در صفحه xy واقع شود، که این ساده‌ترین حالتی است که در کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مورد بحث قرار می‌گیرد، آن گاه z همیشه صفر است و $dz/dt=0$ و،

با حذف پارامتر t، معادلهٔ (۱۸.۲) به صورت آشنای

$$\int_{x_1}^{x_2} \left[1+\left(\frac{dy}{dx}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} dx \qquad (۲۰.۲)$$

یا

$$\int_{y_1}^{y_2} \left[\left(\frac{dy}{dx}\right)^2+1\right]^{\frac{1}{2}} dy \qquad (۲۱.۲)$$

در می‌آید، البته به شرطی که این انتگرالها موجود باشند. امکان دارد این انتگرالها موجود نباشند. مثلاً اگر کمان P_1P_2 شامل قطعه‌ای موازی محور y باشد، آن‌گاه dy/dx در امتداد این قطعه موجود نخواهد بود، (یعنی، dy/dx «نامتناهی» است.) و (۲۰.۲) فاقد معنی خواهد بود.

مثال ۹.۲ طول قسمتی از منحنی

$$y = \sin 2\pi x \qquad z = \cos 2\pi x$$

را که بین (۰,۰,۱) و (۱,۰,۱) است بیابید (این منحنی یک مارپیچ است که به دور محور x می‌چرخد.)

حل

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = dx^2 + 4\pi^2 \cos^2 2\pi x dx^2 + 4\pi^2 \sin^2 2\pi x dx^2$$

ازاین رو انتگرال عبارت است از :

$$\int_0^1 (1+4\pi^2)^{\frac{1}{2}} dx = (1+4\pi^2)^{\frac{1}{2}}$$

گاهی عبارت (۱۸.۲) را به صورت

$$\int_C |d\mathbf{R}| \quad \text{یا} \quad \int_C [(dx)^2+(dy)^2+(dz)^2]^{\frac{1}{2}} \qquad (۲۲.۲)$$

می‌نویسند که از آن چنین فهمیده می‌شود که dx ، dy ، و dz برحسب پارامتر t و دیفرانسیل dt بیان می‌شوند (که در نتیجه t متغیر انتگرالگیری است). صورت (۲۲.۲) نشانهٔ تاکید بر این نکته است که طول یک منحنی خاصیّتی مربوط به خود منحنی است و به طرق خاص پارامتری کردن منحنی بستگی ندارد.

با مراجعه به (۱۹.۲) می‌بینیم که طول منحنی از یک موضع اوّلیهٔ دلخواه $\mathbf{R}(t_۱)$ تا یک موضع متغیر $\mathbf{R}(t)$ از معادلهٔ

$$s=s(t)=\int_{t_۱}^{t}\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|dt \qquad (t\geq t_۱)$$

به دست می‌آید، این معادله بر امکان استفاده از s به عنوان پارامتر دلالت دارد. در اصل، حداقل این امکان وجود دارد که از معادلهٔ بالا t را برحسب s محاسبه و آن را در تابع $\mathbf{R}(t)$ برای تعیین $\mathbf{R}$ به عنوان تابعی از s جایگزین کنیم .

درعمل ، محاسبهٔ مستقیم $\mathbf{R}(s)$ بسیار مشکل است ، به جز چند مثال استاندارد که برای آنها چاره‌جویی شده است و بعضی از آنها را در زیر ملاحظه می‌کنید :

مثال ۲.۱۰ منحنیهای

$$\mathbf{R}(t) = \frac{t^۲}{۲}\,\mathbf{i} + \frac{t^۳}{۳}\,\mathbf{k} \quad ۰\leq t\leq ۲ \qquad (۱)$$

$$\mathbf{R}(t) = (۲\cos t)\,\mathbf{i} + (۲\sin t)\,\mathbf{j} \quad ۰\leq t\leq ۲\pi \qquad (۲)$$

را بر حسب طول کمان پارامتری کنید.

حل (۱) با انتخاب $t_۱=۰$ ، داریم :

$$s=\int_{۰}^{t}\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|dt=\int_{۰}^{۱}(t^۲+t^۴)^{\frac{۱}{۲}}\,dt=\frac{(t^۲+۱)^{\frac{۳}{۲}}-۱}{۳}$$

اگر معادله را برگردانیم ، خواهیم داشت :

$$t = [(۳s+۱)^{\frac{۲}{۳}} -۱]^{\frac{۱}{۲}}$$

و صورت پارامتری جدید عبارت است از :

$$\mathbf{R}(s)=\frac{(۳s+۱)^{\frac{۲}{۳}}-۱}{۲}\,\mathbf{i} + \frac{[(۳s+۱)^{\frac{۲}{۳}} -۱]^{\frac{۳}{۲}}}{۳}\,\mathbf{k}$$

(۲) مجدداً با انتخاب $t_۱=o$، داریم :

$$s=\int_o^t \left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right| dt = \int_o^t (۴\sin^۲ t + ۴\cos^۲ t)^{\frac{۱}{۲}} dt = ۲t$$

از این رو، $t=s/۲$ و پارامتری کردن طول کمان به نتیجهٔ زیر می‌انجامد.

$$\mathbf{R}(s) = ۲\cos\frac{s}{۲}\,\mathbf{i} + ۲\sin\frac{s}{۲}\,\mathbf{j}$$

پارامتری کردن طول کمان چند امتیاز دارد. به استناد قضیهٔ بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال ، داریم:

$$\frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right| (=|\mathbf{v}|)$$

(این رابطه ، تندی را برحسب میزان تغییرات طول کمان به عنوان یک واقعیّت مؤکد تعیین می‌کند.)

این رابطه برحسب مختصات به صورت زیر در می‌آید:

$$\frac{ds}{dt} = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^۲ + \left(\frac{dy}{dt}\right)^۲ + \left(\frac{dz}{dt}\right)^۲\right]^{\frac{۱}{۲}}$$

چون مفروضات ما $ds/dt\neq o$ را تضمین می‌کنند ، از قاعدهٔ زنجیری چنین نتیجه می‌شود که :

$$\frac{d\mathbf{R}}{ds} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} \Big/ \frac{ds}{dt}$$

چون $d\mathbf{R}/dt$ بر منحنی مماس است ، این تساوی نشان می‌دهد که $d\mathbf{R}/ds$ نیز بر منحنی مماس

است . (این رابطه این واقعیّت بدیهی را هم نشان می‌دهد که جهت مماس از نحوهٔ پارامتری کردن منحنی مستقل است.) به علاوه ، $d\mathbf{R}/ds$ یک بردار مماس یکّه است و، بنابراین ، به استناد معادلهٔ (۱۴.۲) :

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{R}}{ds}$$

در مثال (۱۰.۲) این بردارها عبارتند از :

$$(۱) \quad \frac{d\mathbf{R}}{ds} = (۳s+۱)^{-\frac{۱}{۳}}\mathbf{i} + [(۳s+۱)^{\frac{۲}{۳}}-۱]^{\frac{۱}{۲}}(۳s+۱)^{-\frac{۱}{۳}}\mathbf{k}$$

$$(۲) \quad \frac{d\mathbf{R}}{ds} = -\sin\frac{s}{۲}\,\mathbf{i} + \cos\frac{s}{۲}\,\mathbf{j}$$

و خواننده می‌تواند تحقیق کند که این بردارها یکّه‌اند.

تمرینات

۱. فرض کنید که $P_۱P_۲$ یک کمان هموار در صفحهٔ xy باشد. آیا این درست است که dy/dx در هر نقطهٔ این کمان وجود دارد ؟

۲. نتایج حذف شرط (۳) در تعریف یک کمان هموار را بررسی کنید.(*راهنمایی* : کمان $\mathbf{R}=t^۲\mathbf{i}+t^۳\mathbf{j}$ را رسم کنید.)

۳. با استفاده از اتحادهای مربوط به توابع هذلولیگون ، پارامتر t را از معادلات زیر حذف کنید.

$$x=\cosh t \qquad y=\sinh t \qquad z=۰$$

۴. وقتی t از ۱- تا ۱ تغییر کند، نقطهٔ (x,y,z)، که در آن

$$x=t \qquad y=|t| \qquad z=۰$$

یک منحنی منظم می‌پیماید. در کدام نقطهٔ این منحنی مماس وجود ندارد؟

۵. معادلات

$$x=t \qquad y=\sin 2\pi t \qquad z=\cos 2\pi t$$

معادلهٔ پارامتری مارپیچ مثال (۹.۲) است. با استفاده از فرمول (۱۹.۲) طول کمان واقع بین دو نقطهٔ انتهایی یکسان را محاسبه کنید. بردار یکهٔ مماس در نقطهٔ $(0,0,1)$ چیست؟

۶. اگر $\mathbf{T}$ بردار یکهٔ مماس بر منحنی

$$x=t \qquad y=2t+5 \qquad z=3t$$

باشد، نشان دهید که $d\mathbf{T}/dt=0$. تعبیر هندسی این حکم را بیان کنید.

۷. طول کمان بین نقاط $(0,5,0)$ و $(1,7,3)$ از منحنی تمرین (۶) را به طرق زیر محاسبه کنید:

(الف) با استفاده از (۱۹.۲)، و (ب) با درکی معمولی که از مسأله دارید.

۸. (الف) طول کمان بین $t=0$ و $t=1$ از منحنی

$$x=e^t\cos t \qquad y=e^t\sin t \qquad z=0$$

را تعیین کنید.

(ب) منحنی را دوباره برحسب طول کمان پارامتری کنید.

۹. برای منحنی

$$x=\sin t-t\cos t$$

$$y=\cos t+t\sin t$$

$$z=t^2$$

مطلوب است (الف) طول کمان بین $(0,1,0)$ و $(-2\pi,1,4\pi^2)$، (ب) $\mathbf{T}(t)$، (ج) $\mathbf{T}(\pi)$.

۱۰. بردار یکهٔ مماس بر منحنی جهت دار بستهٔ

$$x=a\cos t \qquad y=b\sin t \qquad z=0$$

را در $t=\frac{3}{2}\pi$ بیابید.

۱۱. نشان دهید که نمودار یک تابع به طور پیوسته مشتق پذیر $y=f(x)$ یک منحنی هموار است.

(*راهنمایی*: منحنی را به صورت $x=t$ ، $y=f(t)$ ، $z=0$ پارامتری کنید.)

۳.۲ شتاب و انحنا

شتاب یک ذرّهٔ متحرک ، میزان تغییر سرعت ذرّه در واحد زمان تعریف می‌شود. چون سرعت یک کمیّت برداری است ، امکان دارد شتاب با تغییر اندازه یا جهت سرعت ، یا هر دو ربط داشته باشد.

نخست فرض کنید که جهت سرعت ثابت باشد. آن گاه حرکت ذرّه در امتداد یک خط راست صورت می‌گیرد و اندازهٔ شتاب ، میزان تغییر تندی است :

$$|\mathbf{a}| = \frac{d}{dt}|\mathbf{v}| = \frac{d^2s}{dt^2}$$

که در آن s طول کمان مسیر متحرک است .[معادلهٔ (۲۳.۲) را به خاطر بیاورید.] جهت شتاب در امتداد همان خط راست است . از طرف دیگر ، اگر ذره با یک تندی ثابت روی یک دایره با شعاع ρ حرکت کند، یک شتاب «مرکز گرا» به اندازهٔ

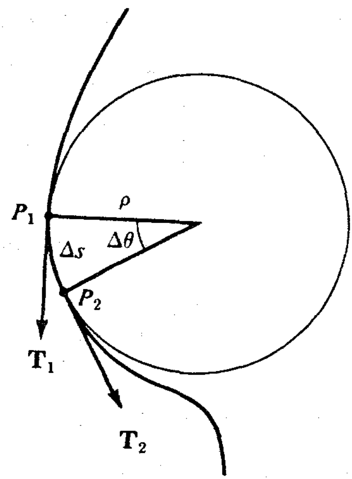
$$|\mathbf{a}| = \frac{|\mathbf{v}|^2}{\rho} = \frac{1}{\rho}\left(\frac{ds}{dt}\right)^2$$

رو به مرکزدارد. این حالت منحصراً مربوط به تغییر جهت شتاب است .

یکی از اهداف این بخش این است که نشان دهیم که در مورد حرکت در امتداد یک منحنی *دلخواه*، که در آن جهت و اندازهٔ $\mathbf{v}$ تغییر می‌کند ، بردار شتاب را می‌توان به صورت مجموع دو بردار متعامد نوشت که یکی میزان تغییر تندی و دیگری شتاب مرکز گرای لحظه‌ای را نشان می‌دهد که متناظر با یک مسیر دایره‌ای مربوطه است .

اگر لازم باشد که حرکت در امتداد یک منحنی به حرکت روی یک دایره مربوط شود ، به وضوح لازم است دایره‌ای انتخاب شود که «بهترین» تقریب منحنی در نقطهٔ مفروض باشد. شکل (۱۲.۲) دایره‌ای را نشان می‌دهد که تقریب منحنی در P_1 است . دو خاصیتی که این دایره باید داشته باشد روشن است : این دایره باید از نقطهٔ P_1 بگذرد و مماس بر آن بر مماس بر منحنی در P_1 منطبق باشد. چیزی که می‌ماند این است که تصمیم بگیرید که دایره چه شعاعی مانند ρداشته باشد تا مناسبترین

دایره برای منحنی باشد.



شکل ۱۲.۲

ملاحظه کنید که انحنای دایرهٔ با شعاع کوچک بیشتر از انحنای دایرهٔ با شعاع بزرگ است .به این ترتیب، با انتخاب ρ به طور مناسب ، باید بتوانیم دایره‌ای انتخاب کنیم که همان *انحنایی* را داشته باشد که منحنی مفروض در P_1 دارد. امّا این انحنا را چگونه اندازه‌گیری کنیم ؟ از نظر شهودی ، وقتی در امتداد منحنی حرکت می‌کنیم ، انحنای منحنی در نتیجهٔ تغییر جهت مماس بر منحنی بروز می‌کند؛ یک خط راست انحنا ندارد و انحنای یک کمان وقتی بیشتر می‌شود که مماس بر منحنی درمسیر منحنی سریعتر بچرخد. بنابراین ، می‌توانیم انحنای k را میزان چرخش بردار مماس یکّه برحسب طول کمان در مسیر منحنی تعریف کنیم :

$$k = \left| \frac{dT}{ds} \right| = \left| \frac{dT}{dt} \right| \Big/ \frac{ds}{dt} \qquad (۲۴.۲)$$

به استناد این تعریف ، انحنای یک دایره با شعاع ρ چیست ؟ در شکل (۱۲.۲) طول کمانی از دایره که بین P_1 و P_2 قراردارد عبارت است از : $\Delta s = \rho\Delta\theta$. زاویهٔ بین بردارهای مماس یکّهٔ $\mathbf{T}_1$ و

$\mathbf{T}_2$ نیز $\Delta\theta$ است ، و تغییر بردار مماس وقتی از P_1 به P_2 پیش می‌رویم عبارت است از :

$$\Delta \mathbf{T} = \mathbf{T}_2 - \mathbf{T}_1$$

چنان که از شکل (۱۳.۲) دیده می‌شود ، وقتی $\Delta\theta$ کوچک باشد ، اندازهٔ $\Delta\mathbf{T}$ تقریباً برابر $\Delta\theta$ است.

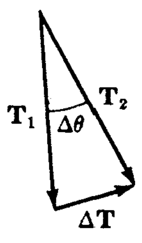
(به خاطر داشته باشید که اندازهٔ $\mathbf{T}_1$ و $\mathbf{T}_2$ برابر واحد است .) به این ترتیب ،

$$\left| \frac{\Delta \mathbf{T}}{\Delta s} \right| \approx \frac{\Delta\theta}{\Delta s} = \frac{1}{\rho}$$

این تقریب وقتی Δs به صفر نزدیک شود دقیق می‌شود و بنابراین می‌توانیم بنویسیم :

$$\left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \frac{1}{\rho}$$

به این ترتیب انحنای یک دایره ، به صورتی که تعریف شد ، برابر معکوس شعاع دایره است . این با استنباط شهودی ما سازگار است و ، بنابراین ، به انتخاب تعریف (۲۴.۲) اعتماد پیدا می‌کنیم .



شکل ۱۳.۲

درنتیجه ، ρ، شعاع دایرهٔ تقریب (موسوم به «دایرهٔ بوسان») چنین است :

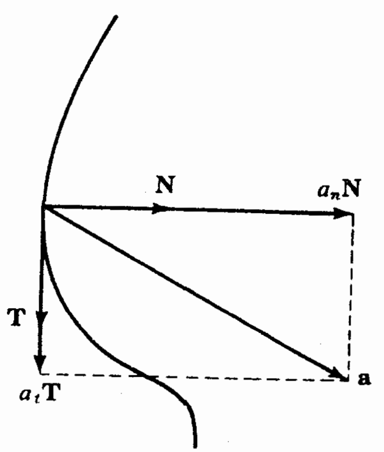
$$\rho = \frac{1}{k} = 1 \Big/ \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right|$$

اکنون فرض کنید $\mathbf{N}$ بردار یکّه‌ای باشد که به طرف مرکز دایرهٔ تقریب باشد.و، طبق معمول، $\mathbf{T}$ بردار یکّهٔ مماس باشد. امکان دارد جهت بردارهای $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ در نقاط مختلف منحنی تغییر کند، ولی، چنان که در شکل (۱۴.۲) نشان داده شده است، این دو بردار همیشه بر هم عمودند.

اگر ملاحظات اوّلیه در مورد حرکت دایره‌ای به حرکت در امتداد یک منحنی تعمیم داده شود، پیش بینی می‌شود که بتوانیم شتاب $\mathbf{a}$ را به صورت حاصل جمع دو مؤلفه

$$\mathbf{a} = a_t\mathbf{T} + a_n\mathbf{N}$$

بیان کنیم که در آن $a_t = d^2s/dt^2$ میزان تغییر تندی و $a_n = |\mathbf{v}|^2/\rho$ نتیجهٔ تغییر جهت سرعت است. برای این که ببینیم این پیش بینی حقیقتاً به وقوع می‌پیوندد، به تحلیلی دقیقتر می‌پردازیم.



شکل ۱۴.۲

بردار موضع ذرّه، طبق معمول، عبارت است از:

$$\mathbf{R}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k}$$

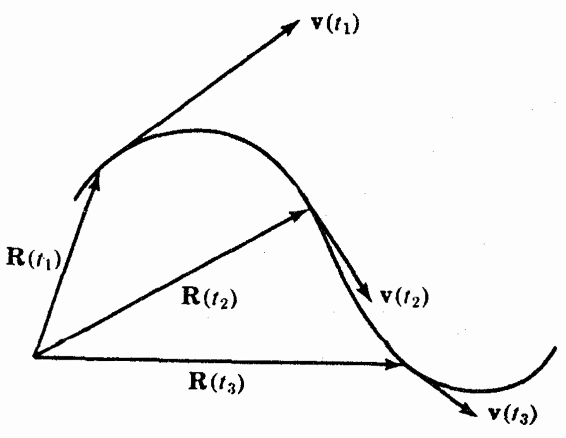
که قطعه خط جهت داری است که از مبدأ به نقطهٔ موضع ذره کشیده می‌شود. ما توجه خود را به بخشی از مسیر محدود می‌کنیم که در آن $\mathbf{R}(t)$ یک کمان هموار تعریف می‌کند و دوبار مشتق پذیر است. این مشتقات که، به ترتیب سرعت $\mathbf{v}$ و شتاب $\mathbf{a}$ می‌باشند، مانند بخش (۱.۲) محاسبه می‌شوند.

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{dx}{dt}\mathbf{i} + \frac{dy}{dt}\mathbf{j} + \frac{dz}{dt}\mathbf{k} \qquad (۲۶.۲)$$

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} \qquad (۲۷.۲)$$

مناسب است که $\mathbf{v}(t)$ را قطعه خط جهت داری تصور کنیم که ابتدایش نقطهٔ موضع ذره است. وقتی t تغییر کند، امکان دارد بردار متناظر $\mathbf{v}(t)$ از لحاظ جهت یا اندازه یا از هر دو لحاظ تغییر کند (شکل ۱۵.۲). تندی ذره، اندازهٔ سرعت ds/dt است که در آن طول کمان s در مسیر منحنی از یک نقطهٔ اوّلیهٔ دلخواه اندازه‌گیری می‌شود:

$$v = |\mathbf{v}(t)| = \left[\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right]^{\frac{1}{2}} = \frac{ds}{dt} \qquad (۲۸.۲)$$



شکل ۱۵.۲

بردار مماس یکّهٔ $\mathbf{T}$ را می‌توان از تقسیم سرعت $\mathbf{v}(t)$ برتندی $|\mathbf{v}(t)|$ به دست آورد، زیرا فرض ما تضمین می‌کند که $|\mathbf{v}(t)|$ هیچ گاه صفر نمی‌شود.

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} \qquad (۲۹.۲)$$

توجه می‌کنیم که $\mathbf{T}$ از تساوی

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{R}}{ds} \qquad (۳۰.۲)$$

نیز به دست می‌آید.

انحنای منحنی در هر نقطه، یعنی k، *اندازهٔ* بردار $d\mathbf{T}/ds$ در آن نقطه تعریف می‌شود.[معادلهٔ ۲۴.۲ را به خاطر بیاورید.]:

$$k = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| \qquad (۳۱.۲)$$

اگر $k \neq 0$، *شعاع انحنای* ρ، معکوس انحنا تعریف می‌شود:

$$\rho = \frac{1}{k} \qquad (۳۲.۲)$$

انگیزهٔ تعریف ρ به این صورت در بالا بیان شد. با معرفی k می‌توانیم از اصطلاح «شعاع انحنای نامتناهی» خودداری کنیم. به این ترتیب، انحنای یک خط راست صفر است.

چون *اندازهٔ* $\mathbf{T}$ ثابت است، مشتق $\mathbf{T}$ نسبت به t یا بردار صفر است یا بردار ناصفری است که بر $\mathbf{T}$ عمود است. این حکم در مثال (۶.۲) ثابت شد؛ به علاوه، درستی این حکم به لحاظ هندسی نیز از روی شکل (۱۳.۲) واضح است، زیرا دراین شکل می‌بینیم که اگر $\Delta\mathbf{T}$ کوچک باشد تقریباً بر $\mathbf{T}$ عمود است.

اگر $d\mathbf{T}/dt$ بردار صفر نباشد، بردار یکّهٔ $\mathbf{N}$ را خارج قسمت تقسیم بردار $d\mathbf{T}/dt$ بر اندازه‌اش تعریف می‌کنیم:

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} \qquad (۳۳.۲)$$

این بردار را *قائم اصلی* می‌نامند. اگر قاعدهٔ زنجیری $d\mathbf{T}/dt = (d\mathbf{T}/ds)(ds/dt)$ را در صورت و مخرج کسر (۳۳.۲) اعمال کنیم، می‌توانیم ds/dt را حذف و صورت دیگر

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|}$$

را برای نمایش بردار $\mathbf{N}$ بیابیم و چون $k = |d\mathbf{T}/ds|$، می‌توانیم بنویسیم:

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{N}$$

اکنون آماده‌ایم که نمایش مورد نظر را برای شتاب ذره نتیجه بگیریم. شتاب، میزان تغییر سرعت نسبت به زمان تعریف شده است:

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2}\mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2}\mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2}\mathbf{k} \tag{۳۴.۲}$$

چون $|\mathbf{v}(t)| = ds/dt$، می‌توانیم بنویسیم:

$$\mathbf{v}(t) = \frac{ds}{dt}\mathbf{T} \tag{۳۵.۲}$$

بنابراین، به استناد قاعدهٔ ضرب مشتقات (بخش ۱.۲)

$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{v}'(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \frac{ds}{dt}\frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt}$$

$$= \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 k\mathbf{N}$$

به عبارت دیگر، داریم:

$$\mathbf{a} = a_t\mathbf{T} + a_n\mathbf{N} \tag{۳۶.۲}$$

که در آن $a_t = d^2s/dt^2$ و $a_n = kv^2$. این دقیقاً همان چیزی است که در معادلهٔ (۲۵.۲) پیش بینی کردیم.

توجه می‌کنیم که در هر نقطهٔ منحنی که $k=0$، بردار قائم $\mathbf{N}$ تعریف نمی‌شود. این اهمیّتی ندارد، زیرا در این حالت $a_n=0$ و نیازی به وجود $\mathbf{N}$ در (۳۶.۲) احساس نمی‌شود. در حالتی که $k\neq 0$، چنان که در بحث مبتنی بر اکتشاف شهودی قبلی دیدیم، می‌توان نوشت: $a_n = v^2/\rho$.

چون $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ در هر نقطه‌ای که تعریف می‌شوند بر هم عمودند، به استناد قضیهٔ فیثاغورس، داریم:

$$a^2 = a_t^2 + a_n^2 \tag{۳۷.۲}$$

برای محاسبهٔ a، فقط لازم است، با مشتقگیری، $d^2\mathbf{R}/dt^2$ را بیابیم و اندازهٔ این بردار را محاسبه کنیم. برای محاسبهٔ a_t، فقط لازم است $\mathbf{v}=d\mathbf{R}/dt$ را پیدا و اندازه‌اش، $|d\mathbf{R}/dt| = ds/dt$، را

تعیین کنیم و سپس نسبت به t مشتق بگیریم. به محض محاسبهٔ a و a_t ، a_n به آسانی از (۳۷.۲) به دست می‌آید. در بعضی از مسائل، این دستور از $a_n = kv^2$ مناسبتر است.

مثال ۱۱.۲ موضع ذرّه‌ای که روی دایرهٔ $x^2 + y^2 = r^2$ در صفحهٔ xy با سرعت زاویه‌ای ω حرکت می‌کند عبارت است از:

$$x = r\cos\omega t \qquad y = r\sin\omega t \qquad z=0$$

مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب ذره را بیابید و انحنای دایره را تعیین کنید.

حل داریم:

$$\mathbf{R} = r\cos\omega t\,\mathbf{i} + r\sin\omega t\,\mathbf{j}$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = -r\omega\sin\omega t\,\mathbf{i} + r\omega\cos\omega t\,\mathbf{j}$$

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = -r\omega^2\cos\omega t\,\mathbf{i} - r\omega^2\sin\omega t\,\mathbf{j}$$

اندازهٔ این بردارها عبارتند از:

$$v = \frac{ds}{dt} = \left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right| = (r^2\omega^2\sin^2\omega t + r^2\omega^2\cos^2\omega t)^{\frac{1}{2}} = \omega r$$

$$a = \left|\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}\right| = \omega^2 r$$

چون ds/dt ثابت است؛ $a_t=d^2s/dt^2=0$ و $a=a_n$. بنابراین، $kv^2 = \omega^2 r$؛ و چون $v=\omega r$، داریم: $k = \omega^2 r/\omega^2 r^2 = 1/r$. ازاین رو محقق می‌شود که انحنای یک دایره معکوس شعاع آن دایره است. جوابها عبارتند از: $a_n = \omega^2 r$ ، $a_t=0$ ، $k=1/r$.

مثال ۱۲.۲ مختصات ذره‌ای در زمان t عبارتند از:

$$x = \sin t - t\cos t$$

$$y = \cos t + t\sin t$$

$$z = t^2$$

تندی، مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب، و انحنای مسیر را بر حسب t بیابید.

حل

$$\mathbf{R} = (\sin t - t\cos t)\mathbf{i} + (\cos t + t\sin t)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$$

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = (t\sin t)\mathbf{i} + (t\cos t)\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$$

$$\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2} = (t\cos t + \sin t)\mathbf{i} + (-t\sin t + \cos t)\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$$

تندی عبارت است از : $ds/dt = |d\mathbf{R}/dt| = (t^2\sin^2 t + t^2\cos^2 t + 4t^2)^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5}t$. مؤلفهٔ

مماسی شتاب عبارت است از : $a_t = d^2s/dt^2 = \sqrt{5}$.

از (۳۷.۲) :

$$a_n = [\,a^2 - a_t^2\,]^{\frac{1}{2}}$$

$$= [(t\cos t + \sin t)^2 + (-t\sin t + \cos t)^2 + 2^2 - 5]^{\frac{1}{2}} = t$$

چون $a_n = kv^2$ ، داریم $k = a_n/v^2 = t/5t^2 = 1/5t$.

می‌توان عبارت نسبتاً ساده‌ای برای انحنای k با استفاده از ضرب برداری $\mathbf{R}'(t) = |\mathbf{v}|\mathbf{T}$ و $\mathbf{R}''(t) = \frac{d^2s}{dt^2}\mathbf{T} + k|\mathbf{v}|^2\mathbf{N}$ یافت که ، چون $\mathbf{T}\times\mathbf{T} = \mathbf{0}$ ، نتیجه می‌شود :

$$\mathbf{R}'\times\mathbf{R}'' = k|\mathbf{V}|^3\,(\mathbf{T}\times\mathbf{N})$$

چون $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ بردارهای یکّهٔ متعامدند، حاصل ضرب خارجی $\mathbf{B} = \mathbf{T}\times\mathbf{N}$ یک بردار یکّه است که قائم دوم نامیده می‌شود. داریم $\mathbf{R}'\times\mathbf{R}'' = k|\mathbf{v}|^3\mathbf{B}$ و

$$|\mathbf{R}'\times\mathbf{R}''| = k|\mathbf{v}|^3$$

و بنابراین ،

$$k = \frac{|\mathbf{R}'\times\mathbf{R}''|}{(\mathbf{R}'\cdot\mathbf{R}')^{\frac{3}{2}}} = \frac{|\mathbf{R}'\times\mathbf{R}''|}{|\mathbf{R}'|^3} \qquad (۳۸.۲)$$

با این وجود ، در اغلب حالات ، استفاده از معادلهٔ (۲۴.۲) آسانتر است .

یک بار دیگر خاطر نشان می‌کنیم که اگرچه بسیاری از این فرمولها متضمن مشتقاتی هستند که بر حسب طول کمان s بیان شده‌اند، به دلیل وجود قاعدهٔ زنجیری هرگز نیازی به محاسبهٔ واقعی صورت پارامتری جدید $\mathbf{R}(s)$ وجود ندارد.

درس اختیاری : فرمولهای فرنه

حق این است که به خاطر اهمیّت هندسی بردار $\mathbf{B}$ ، که بر هر دوبردار $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ عمود است ، دربارهٔ این بردار بیشتر بحث کنیم . بردارهای $\mathbf{T}$ ، $\mathbf{N}$ ، $\mathbf{B}$ ، به همین ترتیب ، یک دستگاه راستگرد تشکیل می‌دهند. مفید است که این سه بردار را متصل به ذرّهٔ متحرک در امتداد منحنی مسیر بدانیم : وقتی ذرّه حرکت می‌کند، دستگاه متشکل از سه بردار دو به دو متعامد مربوط به آن حرکت می‌کند و می‌چرخد. (شکل «۱۶.۲» راببینید.) برای یک منحنی مسطح ، $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ در صفحهٔ منحنی قرار می‌گیرند و ، بنابراین ، $\mathbf{B}$ یک بردار یکّهٔ ثابت است که همیشه بر صفحهٔ منحنی عمود است .

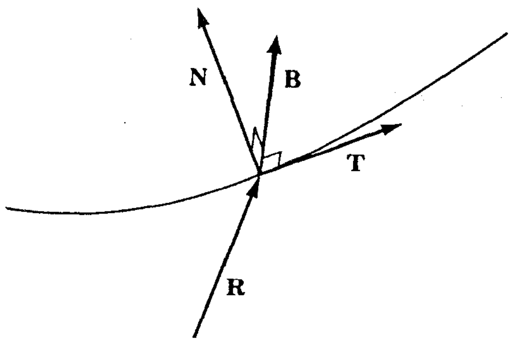
کوشش می‌کنیم تا توصیف نماییم که وقتی یک ذره در امتداد یک منحنی فضایی به پیش می‌رود، دستگاه سه تایی مذکور چگونه می‌چرخد. چنان که دیده‌ایم ، بردار $\mathbf{T}$ به میزان k ، که بر حسب طول کمان اندازه‌گیری می‌شود، به طرف $\mathbf{N}$ می‌چرخد :

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = k\mathbf{N} \tag{۳۹.۲}$$

امّا چون $\mathbf{N}$ همیشه بر $\mathbf{T}$ عمود است ، این دو بردار با یکدیگر مانند یک جسم سخت خواهند چرخید. بنابراین، $\mathbf{N}$ باید با همان میزان k به طرف $-\mathbf{T}$ بچرخد. به علاوه ، این هم امکان دارد که $\mathbf{N}$ حول $\mathbf{T}$ *به عنوان یک محور بچرخد*؛ این وقتی اتفاق می‌افتد که صفحهٔ لحظه‌ای منحنی «کج» شود. در چنین حالتی ، $d\mathbf{N}/ds$ مؤلفه‌ای عمود بر هر دو بردار $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ ، یعنی در امتداد $\mathbf{B}$ ، دارد. به این ترتیب ، خواهیم داشت :

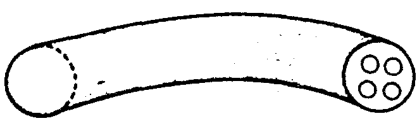
$$\frac{d\mathbf{N}}{ds} = -k\mathbf{T} + \tau\mathbf{B} \tag{۴۰.۲}$$

که درآن τ میزان پیچش منحنی را اندازه می‌گیرد و ازاین رو به *تاب* مشهور است .



شکل ۱۶.۲

تصور تاب را می‌توان از ملاحظهٔ مقطع عرضی یک قطعه سیم لحیم ، که به صورت منحنی مشهود در شکل (۱۷.۲) خم شده است ، در ذهن ایجاد کرد. تاب یا پیچش سیم باعث یک *دوران* در مقطع عرضی این سیم خواهد شد. ما می‌توانیم سیم را بدون ایجاد تاب به شکل یک منحنی مسطح درآوریم ، ولی اگر منحنی مسطح نباشد ، سیم باید بپیچد.



شکل ۱۷.۲

مجدداً، این واقعیت که $\mathbf{N}$ به میزان τ به طرف $\mathbf{B}$ می‌چرخد و زاویهٔ بین $\mathbf{N}$ و $\mathbf{B}$ مقدار ثابت یک قائمه است ایجاب می‌کند که $\mathbf{B}$ به همان میزان به طرف $\mathbf{N}$- بچرخد. در نگاه اوّل معقول به نظر می‌رسد که تصور کنیم که $\mathbf{B}$ نیز باید حول $\mathbf{N}$ به عنوان یک محور بچرخد، و، به این ترتیب ، چرخشی در جهت $\mathbf{T}$ داشته باشد. با این وجود، اگر چنین چیزی اتفاق می‌افتاد، $\mathbf{T}$ مجبور بود که در جهت $\mathbf{B}$- بچرخد؛ امّا، *بنا برتعریف !* ،$\mathbf{T}$ فقط در جهت $\mathbf{N}$ می‌چرخد. به این ترتیب ، داریم :

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N} \tag{۴۱.۲}$$

معادلات (۳۹.۲)، (۴۰.۲)، و(۴۱.۲) *فرمولهای فرنه* نامیده می‌شوند. اینها فرمولهای مهمی در هندسهٔ دیفرانسیل هستند که در آن مبحث ثابت می‌شود که هر دو منحنی با مقادیر متناظر یکسانی از انحنا و تاب همنهشتند. (طبق معمول، با اعمال بعضی محدودیتها.)

تمرینات

در چهار مسألهٔ اوّل از مسائل زیر مختصات یک ذرّهٔ متحرک به عنوان تابعی از t داده شده است. مطلوب است (الف) تندی، (ب) مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب، (ج) بردار مماس یکّهٔ $\mathbf{T}$، و (د) انحنای منحنی، به عنوان توابعی از t.

۱. $x=e^t \cos t$ ، $y=e^t \sin t$ ، $z=0$.

۲. $x=3t \cos t$ ، $y=3t \sin t$ ، $z=4t$.

۳. $x=e^t \cos t$ ، $y=e^t \sin t$ ، $z=e^t$.

۴. $x=5 \sin 4t$ ، $y=5 \cos 4t$ ، $z=10t$.

۵. بردار موضع ذرّهٔ متحرکی عبارت است از:

$$\mathbf{R} = \cos t\,(\mathbf{i}-\mathbf{j}) + \sin t\,(\mathbf{i}+\mathbf{j}) + \frac{1}{2}t\mathbf{k}$$

(الف) سرعت و تندی ذره را تعیین کنید.

(ب) شتاب ذره را تعیین کنید.

(ج) بردار یکّه‌ای مماس بر مسیر ذره در جهت حرکت بیابید.

(د) نشان دهید که منحنی مسیر ذره دارای انحنای ثابت k است و مقدارش را بیابید.

۶. انحنای منحنی فضایی زیر را بیابید:

$$x=3t^2-t^3 \qquad y=3t^2 \qquad z=3t+t^3$$

۷. انحنا و تاب مارپیچ زیر را بیابید:

$$x=t \qquad y=\sin t \qquad z=\cos t$$

۸. بردار موضع یک ذره چنین داده شده است :

$$\mathbf{R}(t) = \sqrt{۲}\cos ۳t\,\mathbf{i} + \sqrt{۲}\cos ۳t\,\mathbf{j} + ۲\sin ۳t\,\mathbf{k}$$

تندی ذره ، انحنا، و تاب مسیر ذره را بیابید و مسیر را از نظر مهندسی توصیف کنید.

۹. اگر $\mathbf{F}$ تابعی از t باشد که مشتقاتش از هر مرتبه موجود باشند، مشتق تابع زیر

$$\mathbf{F}\times\frac{d\mathbf{F}}{dt}\cdot\frac{d^{۲}\mathbf{F}}{dt^{۲}}$$

را بیابید.

۱۰.با بررسی دقیق ، مقادیر زیر را بیابید.

(الف) $\frac{d\mathbf{T}}{ds}\cdot\mathbf{T}$ (ب) $\frac{d}{ds}(\mathbf{T}\cdot\mathbf{T})$ (ج) $\frac{d^{۲}\mathbf{R}}{dt^{۲}}\cdot\mathbf{T}$

(د) $\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}$ (هـ) $\frac{d\mathbf{R}}{dt}\cdot\mathbf{T}$ (و) $\frac{d\mathbf{N}}{ds}\cdot\mathbf{B}$

(ز) $[\mathbf{T},\mathbf{N},\mathbf{B}]$ (ح) $\left|\frac{d^{۲}\mathbf{R}}{ds^{۲}}\right|$ (ط) $\frac{d\mathbf{B}}{ds}$

۱۱.بردار داربو[۱] چنین تعریف می‌شود : $\boldsymbol{\omega} = \tau\mathbf{T} + k\mathbf{B}$. نشان دهید که معادلهٔ

$$\frac{d\mathbf{u}}{ds} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{U}$$

به ازای $\mathbf{U}=\mathbf{T},\mathbf{N},\mathbf{B}$ برقرار است . به شباهت این معادله با معادلهٔ بخش (۱۲.۱) که سرعت زاویه‌ای را وصف می‌کرد توجه کنید.

۱۲.مراحل اثبات دقیق فرمولهای فرنه به صورت زیر است :

(الف) معادلهٔ (۳۹.۲) را به عنوان معرف k و $\mathbf{N}$ در نظر بگیرید.

(ب) نشان دهید که $\frac{d\mathbf{N}}{ds} + k\mathbf{T}$ برهر دو بردار $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ عمود است .(در این جا مفید است که از رابطهٔ $\mathbf{T}\cdot\mathbf{N}=۰$ مشتق بگیرید.) به این ترتیب ، (۴۰.۲) می‌تواند معادلهٔ معرف τ باشد.

(ج) (۴۱.۲) را از (۳۹.۲) نتیجه بگیرید و (۴۰.۲) را با مشتقگیری از $\mathbf{B}=\mathbf{T}\times\mathbf{N}$.

جزئیات این برنامه را انجام دهید.

۱۳. راست است یا دروغ :

۱- Darboux

(الف) اگر $\mathbf{R}$ بردار موضع یک ذره، t زمان، و s طول کمان باشد، $d^2\mathbf{R}/dt^2$ یک مضرب اسکالر $d^2\mathbf{R}/ds^2$ است.

(ب) هر ذرهٔ متحرک بیشترین تندی را در لحظهٔ $t=3$ دارد. (تندی ذره در لحظات قبل و بعد از لحظهٔ مذکور از تندی در $t=3$ کمتر است.) از این نتیجه می‌شود که شتاب در لحظهٔ $t=3$ برابر صفر است.

(ج) شتاب هر ذرهٔ متحرک در مسیری با قائم دوّم $\mathbf{B}$ همیشه بر $\mathbf{B}$ عمود است.
[دقیقتر بگوئیم، $\mathbf{a}(t)$ و $\mathbf{B}(t)$ به ازای هر مقدار ثابت t برهم عمودند.]

۴.۲ حرکت در صفحه با مختصات قطبی

در این بخش حرکت یک ذره در صفحهٔ xy را که در آن موضع ذره با مختصات قطبی r و θ داده شده است مورد بررسی قرار می‌دهیم. یادآوری می‌کنیم که r و θ توصیف دیگری از نقاط صفحه فراهم می‌کنند، و در مواردی که تقارنهای دایره‌ای مورد بحث باشد مناسبترند. مختصات قطبی در شکل (۱۸.۲) تشریح شده و رابطهٔ آنها با مختصات دکارتی با معادلات زیر بیان شده است.

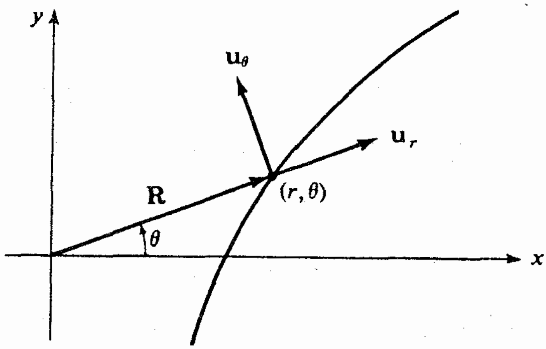
$$x=r\cos\theta \quad , \quad y=r\sin\theta$$

$$r=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}} \quad , \quad \theta = \sin^{-1}\frac{y}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} = \cos^{-1}\frac{x}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

معادلات اضافی برای θ لازمند تا از این ابهام که ندانیم θ در کدام ربع دایره قرار دارد جلوگیری شود. معمولاً فرض می‌کنند که $-\pi < \theta \le \pi$.

فرض می‌کنیم که مسیر ذره با ارائهٔ r و θ به عنوان توابعی از t مشخص شده است و این توابع مشتق مرتبهٔ دوّم دارند.

برای استفادهٔ مستقیم از مختصات قطبی در انجام مقاصدی که در پیش داریم مناسب است که، چنان که در شکل (۱۸.۲) دیده می‌شود، دو بردار یکّه به نامهای $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$ معرفی کنیم که اوّلی در امتداد بردار موضع و دومی براوّلی عمود باشد (درجهت افزایش θ).



شکل ۱۸.۲

به آسانی دیده می‌شود که $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$ برحسب $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$ چنین نوشته می‌شوند:

$$\mathbf{u}_r = \cos\theta\, \mathbf{i} + \sin\theta\, \mathbf{j}$$

(۴۲.۲)

$$\mathbf{u}_\theta = \sin\theta\, \mathbf{i} + \cos\theta\, \mathbf{j}$$

توجه کنید که $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$ توابعی از θ می‌باشند و در هر نقطهٔ فضا غیر از مبدأ تعریف می‌شوند. برخلاف $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$، $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$ ثابت نیستند؛ مثلاً، در امتداد محور x مثبت: $\mathbf{u}_r=\mathbf{i}$، ولی در امتداد محور y مثبت: $\mathbf{u}_r=\mathbf{j}$. این نتیجه عاید می‌شود که باید در مشتقگیری از بردارهایی که برحسب $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$ بیان شده‌اند دقت کنیم.

از معادلهٔ (۴۲.۲) مستقیماً می‌بینیم که:

$$\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta} = \mathbf{u}_\theta$$

(۴۳.۲)

$$\frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta} = -\mathbf{u}_r$$

(توجه کنید که این فرمولهای مهم مؤید اظهارات بخش قبلی در مورد مشتقگیری از بردارهای یکّه‌ای است که شدیداً به یکدیگر وابسته‌اند.)

بردار موضع ذره‌ای که در نقطهٔ (r,θ) جای دارد عبارت است از:

$$\mathbf{R} = r\mathbf{u}_r \qquad (۴۴.۲)$$

با مشتقگیری از معادلهٔ (۴۴.۲) و استفاده از قاعدهٔ زنجیری ، سرعت به دست می‌آید :

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\mathbf{u}_r}{dt}$$

$$= \frac{dr}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt}$$

ازاین رو ، به استناد (۴۳.۲) ، سرعت چنین می‌شود :

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt}\mathbf{u}_r + r\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta \qquad (۴۵.۲)$$

این معادله ، سرعت را به صورت مجموع دو مؤلفه بیان می‌کند : یکی مؤلفهٔ شعاعی به طرف مبدأ یا در جهت مخالف آن با اندازهٔ $|dr/dt|$ ، و دیگری مؤلفه‌ای که اوّلی را با یک زاویهٔ قائمه قطع می‌کند و اندازه‌اش $|rd\theta/dt|$ است .

مثال ۱۳.۲ ذره‌ای روی دایرهٔ $r=۲$ با سرعت زاویه‌ای $d\theta/dt=۵$ رادیان بر ثانیه حرکت می‌کند. تندی ذره را بیابید .

حل چون r ثابت است ، $dr/dt=۰$. ازاین رو ،

$$\mathbf{v} = r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)\mathbf{u}_\theta = ۱۰\mathbf{u}_\theta$$

بنابراین ، $|\mathbf{v}| = ۱۰$.

مثال ۱۴.۲ یک قرص مستدیر با سرعت زاویه‌ای ثابت ۳ رادیان بر ثانیه می‌چرخد. حشره‌ای با سرعت ۲ سانتیمتر بر ثانیه (نسبت به قرص) از مرکز قرص به حرکت در می‌آید و به لبهٔ قرص نزدیک می‌شود. تندی حشره را ۴ ثانیه پس از آغاز حرکت از مرکز بیابید.

حل چون $dr/dt=۲$ ، داریم : $r=r_0+۲t$. چون حشره از مرکز به حرکت در می‌آید ، $r_0=۰$. ازاین رو ، بنابر معادلهٔ (۴۵.۲) ،

$$\mathbf{v} = ۲\mathbf{u}_r + ۳\,r\,\mathbf{u}_\theta$$

در زمان $t=۴$ ، $r=۲t=۸$. بنابراین ، $\mathbf{v} = ۲\mathbf{u}_r + ۲۴\mathbf{u}_\theta$. آن گاه تندی عبارت است از:

$(۵۸۰)^{1/2} = (۲۴^2 + ۲^2)$ سانتیمتر بر ثانیه.

با مراجعه به معادلهٔ (۴۵.۲) و مشتقگیری مجدد، شتاب به دست می‌آید:

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\mathbf{u}_r}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbf{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\mathbf{u}_\theta}{dt}$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{u}_r + \frac{dr}{dt}\frac{d\mathbf{u}_r}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} + \frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbf{u}_\theta + r\frac{d\theta}{dt}\frac{d\theta}{dt}\frac{d\mathbf{u}_\theta}{d\theta}$$

$$= \frac{d^2r}{dt^2}\mathbf{u}_r + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta + r\frac{d^2\theta}{dt^2}\mathbf{u}_\theta - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\mathbf{u}_r$$

که پس از دسته بندی جمل، خواهیم داشت:

$$\mathbf{a} = \left[\frac{d^2r}{dt^2} - r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2\right]\mathbf{u}_r + \left[r\frac{d^2\theta}{dt^2} + 2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\right]\mathbf{u}_\theta \qquad (۴۶.۲)$$

نخستین جملهٔ معادلهٔ (۴۶.۲)، $(d^2r/dt^2)\mathbf{u}_r$، شتاب حرکت شعاعی محض است؛ و جملهٔ سوم، $r(d^2\theta/dt^2)\mathbf{u}_\theta$ اثر شتاب زاویه‌ای را اندازه می‌گیرد. در حالت خاصی که r ثابت باشد، حرکت روی دایره‌ای است که مرکزش مبدأ است و، در این صورت، $\mathbf{u}_\theta$ و $\mathbf{u}_r$، به ترتیب، بردارهای $\mathbf{T}$ و $\mathbf{N}$ - بخش گذشته می‌باشند. دراین حالت خاص، جملهٔ دوّم، شتاب مرکزگراست.

جملهٔ چهارم،

$$2\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt}\mathbf{u}_\theta$$

پیچیده‌تر است و معمولاً درکتب درسی فیزیک مقدماتی مورد بحث قرار نمی‌گیرد. بنابر مقتضیاتی، این جمله به *شتاب کوریولیس*[۱] مشهور است. بررسی دقیق نتایج بالا نشان می‌دهد که این جمله تا اندازه‌ای مربوط به تغییر جهت مؤلفهٔ شعاعی سرعت است، و تا حدی به این واقعیت بستگی دارد که وقتی r تغییر کند مؤلفهٔ دیگر سرعت تغییر می‌کند، حتی اگر سرعت زاویه‌ای $d\theta/dt$ ثابت باشد.

۱- Coriolis

مطابق قانون دوّم نیوتن ، $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ ؛ که در آن $\mathbf{F}$ نیروی وارد بر ذره است . این نیرو را می‌توانیم به صورت مجموع دو مؤلفه بنویسیم :

$$\mathbf{F} = F_r\mathbf{u}_r + F_\theta\mathbf{u}_\theta$$

در این صورت ، حرکت ذره ناظر به دو معادلهٔ دیفرانسیل زیر است :

$$F_r = m\frac{d^۲r}{dt^۲} - mr\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^۲ \qquad (۴۷.۲)$$

$$F_\theta = mr\frac{d^۲\theta}{dt^۲} + ۲m\frac{dr}{dt}\frac{d\theta}{dt} \qquad (۴۸.۲)$$

اگر دو طرف معادلهٔ (۴۸.۲) را در r ضرب کنیم ، آن را می‌توان به صورت

$$rF_\theta = \frac{d}{dt}\left(mr^۲\frac{d\theta}{dt}\right) \qquad (۴۹.۲)$$

نوشت که در بعضی از حالات چنین تعبیر می‌شود که : *گشتاور ذرّه برابر تغییر اندازهٔ حرکت زاویه‌ای در واحد زمان است .*

اگر $F_\theta=۰$ ، با یک انتگرالگیری از (۴۹.۲) نتیجه می‌شود : $mr^۲d\theta/dt=C$. به عبارت دیگر ، اگر نیروی وارد بر ذره همیشه یک نیروی شعاعی به طرف مبدأ یا در جهت مخالف آن باشد (یک «میدان نیروی مرکزی») ، آن گاه اندازهٔ حرکت زاویه‌ای ذره ثابت است . از این نکته بلافاصله قانون دوّم کپلر در مورد حرکت سیارات نتیجه می‌شود که شعاع حامل یک میدان نیروی مرکزی سطح را با سرعت ثابت جارو می‌کند ، زیرا سرعتی که با آن بردار $\mathbf{R}$ سطح را جارو می‌کند عبارت است از :

$$\frac{dA}{dt} = \frac{۱}{۲}r^۲\frac{d\theta}{dt}$$

تمرینات

۱. $d^۳\mathbf{R}/dt^۳$ رابر حسب $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$ بیابید.

۲. ذره‌ای در صفحه‌ای با سرعت زاویه‌ای ثابت ω حول مبدأ حرکت می‌کند ، ولی r چنان تغییر می‌کند که سرعت افزایش شتاب ذره موازی بردار موضع $\mathbf{R}$ است . نشان دهید که $d^۲r/dt^۲=r\omega^۲/۳$.

۳. اگر ذرّه‌ای چنان حرکت کند که

$$r=b(۱-\cos\theta)$$

و

$$\frac{d\theta}{dt}=۴$$

$\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ را بیابید.

۴. هرگاه

$$r=b(۱+\sin t)$$
$$\theta=e^{-t}-۱$$

$\mathbf{v}$ و $\mathbf{a}$ را بیابید.

۵. نیروی $\mathbf{F}$ از یک میدان مغناطیسی $\mathbf{B}$ بر ذره‌ای حامل بار q مطابق $\mathbf{F}=q(\mathbf{v}\times\mathbf{B})$ ، که درآن $\mathbf{v}$ سرعت ذره است ، اثر می‌کند. نموداری رسم کنید که جهات نسبی $\mathbf{v}$ ، $\mathbf{B}$ ، و $\mathbf{F}$ را در یک حالت خاص نشان بدهد . تحت چه شرایطی این میدان هیچ نیرویی بر ذره وارد نخواهد کرد ؟

۶. ذره‌ای به جرم m و بار q در یک میدان مغناطیسی ثابت $\mathbf{B}$ که دارای جهتی موازی محور z هاست ، حرکت می‌کند. اگر مسیر ذره دایره‌ای به شعاع r در صفحهٔ xy باشد ، q/m رابرحسب v، r ، و $\mathbf{B}$ بیان کنید.

۷. در هر یک از حالات زیر ، کدام جملهٔ معادلهٔ (۴۶.۲) مخالف صفر خواهد بود ؟

(الف) ذره‌ای روی یک دایره به مرکز مبدأ با سرعت زاویه‌ای ثابت ناصفر حرکت می‌کند.

(ب) ذره‌ای روی یک دایره به مرکز مبدأ با شتاب زاویه‌ای ثابت ناصفر حرکت می‌کند.

(ج) ذره‌ای روی خطی که از مبدأ نمی‌گذرد با تندی ثابت حرکت می‌کند.

(د) شخصی از مرکز میدانی با چند انشعاب به طرف حاشیهٔ بیرونی میدان حرکت می‌کند. (امکانات مختلف را مورد بحث قرار دهید.)

۸. ذره‌ای روی یک خط راست که از مبدأ نمی‌گذرد حرکت می‌کند. آیا $r(d\theta/dt)^{۲}$ مخالف صفر است ؟

۹. ذره‌ای با تندی شعاعی ثابت ۲ سانتیمتر بر ثانیه از مرکز یک سکوی مدور که با سرعت زاویه‌ای یکنواخت ۳۰ دور در دقیقه می‌چرخد دور می‌شود.

(الف) شتاب شعاعی ذره چقدر است ؟

(ب) شتاب کوریولیس ذره چقدر است ؟

۱۰. اندازهٔ شتاب کوریولیس ذرّه‌ای را که در مسیری واقع در صفحهٔ xy با معادلات

$$x = ۳t\cos ۴\pi t$$

$$y = ۳t\sin ۴\pi t$$

حرکت می‌کند، بیابید.

۱۱. ذره‌ای به جرم m در یک میدان نیروی $\mathbf{F}$ حرکت می‌کند. فرض کنید که حاصل جمع انرژی جنبشی و پتانسیل ذره عبارت است از : $E=\frac{۱}{۲}m\mathbf{v}\cdot\mathbf{v}-\int_{۰}^{t}\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}dt$. با استفاده از معادلات (۴۵.۲)، (۴۷.۲)، و (۴۸.۲)، E را در دستگاه مختصات قطبی بیان کنید و نشان دهید که $dE/dt=۰$، و ازاین رو E ثابت است.

۵.۲ درس اختیاری : نماد تانسور

چنان که در بخش (۱.۲) دیده شد، مشتقگیری از یک تابع برداری مؤلفه به مؤلفه صورت می‌گیرد. یعنی، مؤلفهٔ i ام $d\mathbf{F}/dt$ مشتق مؤلفهٔ i ام $\mathbf{F}$ است.

$$\left(\frac{d\mathbf{F}}{dt}\right)_i = \frac{dF_i}{dt}$$

این وضع زیبا اهمیّت نماد تانسور را در قواعد قضایای (۱.۲) تا (۴.۲) و اثبات آنها کاملاً آشکار می‌سازد. به این ترتیب، در مورد ضرب خارجی، به استناد قواعد حساب دیفرانسیل و انتگرال معمولی، داریم :

$$\frac{d}{dt}\varepsilon_{ijk}F_jG_k = \varepsilon_{ijk}\frac{dF_j}{dt} G_k + \varepsilon_{ijk}F_j \frac{dG_k}{dt}$$

این تساوی چنین تعبیر می‌شود :

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \frac{d\mathbf{F}}{dt}\times\mathbf{G} + \mathbf{F}\times\frac{d\mathbf{G}}{dt}$$

که همان معادلهٔ (۷.۲) است .

قضایای دیگر به همین سادگی و روشنی هستند .

تمرین

قاعدهٔ مشتقگیری از حاصل ضرب اسکالر را نتیجه بگیرید.

مسائل تکمیلی

۱. فرض کنید C منحنی به معادلهٔ زیر باشد :

$$\mathbf{R}(t) = \sin\ t\ \mathbf{i} + \cos\ t\ \mathbf{j} + \text{logsec}\ t\ \mathbf{k} \qquad 0\le t\le\frac{\pi}{۲}$$

مطلوب است :

(الف) عنصر طول کمان ds ، در امتداد C ، برحسب t،

(ب) مماس یکّهٔ $\mathbf{T}$ ،

(ج) قائم یکّهٔ $\mathbf{N}$ ، و

(د) انحنای k .

۲. اگر C منحنی پارامتری زیر باشد ،

$$\mathbf{R}(t) = \cos\ t\ \mathbf{i} + \sin t\ \mathbf{j} + ۲\ t\ \mathbf{k}$$

مطلوب است :

(الف) قائم $\mathbf{N}$ وقائم دوّم $\mathbf{B}$ این منحنی در $t=0$ ، و

(ب) معادلهٔ صفحهٔ ماربر $\mathbf{R}(0)$ و موازی بردارهای $\mathbf{N}$ و $\mathbf{B}$ قسمت (الف).

۳. ذره‌ای چنان حرکت می‌کند که مختصاتش در لحظهٔ t عبارتند از :

$$x(t)=e^{-t}\cos t \qquad y(t)=e^{-t}\sin t \qquad z(t)=e^{-t}$$

سرعت ، تندی ، شتاب و انحنای مسیر ذره را در لحظهٔ t بیابید.

۴. ذره‌ای چنان حرکت می‌کند که بردار موضعش در لحظهٔ t عبارت است از:

$$\mathbf{R}(t) = \log(t^2+1)\mathbf{i} + (t-2\operatorname{Arctan} t)\mathbf{j} + 2\sqrt{2}\, t\,\mathbf{k}$$

(الف) نشان دهید که این ذره با تندی ثابت $v=3$ حرکت می‌کند.

(ب) انحنای مسیر ذره را بیابید.

۵. نقطه‌ای در امتداد یک منحنی چنان حرکت می‌کند که بردار موضعش چنین است :

$$\mathbf{R} = t^2\mathbf{i} + t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

مطلوب است .

(الف) تندی v متحرک ،

(ب) مماس یکهٔ $\mathbf{T}$ مسیر متحرک ، و

(ج) بردار $k\mathbf{N}$.

۶. (الف) مماس یکّهٔ $\mathbf{T}$ ، قائم اصلی $\mathbf{N}$ ، و قائم دوّم $\mathbf{B}$ منحنی

$$x=\cos^3 t \quad y=\sin^3 t \qquad z=2\sin^2 t \quad 0<t\le\frac{\pi}{2}$$

را بیابید.

(ب) انحنا و تاب منحنی مذکور را بیابید.

۷. ذره‌ای چنان حرکت می‌کند که موضعش ، (r,θ) ، در دستگاه مختصات قطبی عبارت است از:

$$r = 2(1+\sin\theta) \quad , \quad \theta = e^{-t}$$

سرعت $\mathbf{v}$ ذره را برحسب بردارهای $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$ بیابید.

۸. آزمایشی چنین طراحی شده است که در آن ذره‌ای به جرم ۱ مجبور است حرکتی با معادلات

$$\left.\begin{aligned} r(t) &= 1+t \\ \theta(t) &= \frac{\pi}{1+t} \end{aligned}\right\} t\geq 0$$

در دستگاه مختصات قطبی داشته باشد.

(الف) موضع و سرعت ذره را در لحظهٔ $t=1$ تعیین و جواب خود را با رسم یک نمودار تشریح کنید.

(ب) نیروهای متعامد $F_2(t)$ و $F_\theta(t)$ مؤثر در حرکت ذره را بیابید.

(ج) اگر نیروهای مؤثر بر ذره در لحظهٔ $t=1$ حذف شوند، موضع متحرک را در لحظهٔ $t=5$ بیابید.

۹. یک ذرهٔ باردار در امتداد منحنی

$$r = \frac{1}{1+2\cos\theta} \qquad \text{با} \qquad \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{r^2}$$

حرکت می‌کند.

(الف) با مشتقگیری از معادلهٔ $\mathbf{R} = r\mathbf{u}_r$ ، نشان دهید که:

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = 2\sin\theta\,\mathbf{u}_r + \frac{1}{r}\mathbf{u}_\theta$$

(ب) $\frac{d^2\mathbf{R}}{dt^2}$ را بیابید و ساده کنید.

۱۰.ذره‌ای در لحظهٔ $t=0$ از نقطهٔ $r=2$ ، $\theta=0$ در دستگاه مختصات قطبی شروع به حرکت می‌کند به طوری که

$$r = 2+\sin t \qquad , \qquad v = \sqrt{2}\cos t$$

فرمولی برای زاویهٔ θ برحسب t بیابید، و موضع ذره را در لحظهٔ $t=\pi/2$ تعیین کنید. (فرض می‌شود که همواره $\theta\geq 0$.)

۱۱.قرصی در دو جهت جلو و عقب با سرعت زاویه‌ای $\cos t$ رادیان برثانیه می‌چرخد. حشره‌ای در لحظهٔ $t=0$ از فاصلهٔ یک سانتیمتری مرکز قرص شروع به حرکت می‌کند و با سرعت $2t$ سانتیمتر برثانیه از مرکز دور می‌شود. موضع ، سرعت ، و تندی حشره را 2π ثانیه بعد از شروع حرکت بیابید.

۱۲.گستردهٔ منحنی $\mathbf{R}(t)$ مکان هندسی مراکز انحنای منحنی است . با بهره‌گیری از فرمولهای پارامتری ، نشان دهید که مماس بر گسترده بر منحنی اوّلیه عمود است .

۱۳.با استفاده از اصطلاحات بخش (۳.۲) ، ثابت کنید که اگر منحنی $\mathbf{R}(t)$ روی کرهٔ $|\mathbf{R}(t)| =$ ثابت ، قرار گیرد، آن گاه

$$\mathbf{R} = -\rho \mathbf{N} - \frac{1}{\tau}\frac{d\rho}{ds}\mathbf{B}$$

(*راهنمایی*: از $\mathbf{R}\cdot\mathbf{R} =$ ثابت متوالیاً مشتق بگیرید و فرمولهای فرنه را به کار برید.)

پیوست الف

مروری بر
حساب دیفرانسیل توابع چند متغیره

در این پیوست، حساب دیفرانسیل توابع دو یا سه متغیرهٔ حقیقی را مختصراً مورد بحث قرار می‌دهیم.

به محدودیتهای زیر در این بحث توجّه کنید:

(الف) صرفاً توابعی حقیقی مانند f را مورد مطالعه قرار می‌دهیم که بر زیر مجموعه‌ای از R^2 یا R^3 تعریف شده باشند. در حالت اوّل، f را تابعی حقیقی از دو متغیر حقیقی x و y می‌نامیم. در حالت دوّم، f تابعی حقیقی از سه متغیر حقیقی x، y، و z است. ما از نمادهای اختصاری

$$w = f(x,y)$$

یا

$$w = f(x,y,z)$$

استفاده می‌کنیم تا نشان بدهیم که w مقدار تابع f در نقطهٔ (x,y) یا در نقطهٔ (x,y,z) است. این نمادها برای معرفی توابع نیز بکار می‌روند.

(ب) اغلب خواص جالب وممتاز نظریهٔ توابع چند متغیره در بحث از توابع دو متغیره ظاهر می‌شوند. بنابراین، ما تعاریف و قضایا را عموماً در مورد توابع دو متغیره بیان می‌کنیم. البته، این تعاریف و قضایا را به سادگی می‌توان به حالت سه متغیره تعمیم داد. در موارد ضروری، چگونگی این تعمیمها ذکر شده است.

(ج) قلمرو توابع مورد بحث را عموماً نواحی همبندی از صفحه یا فضا در نظر می‌گیریم. مفهوم ناحیه در بخش (۲.۴) کتاب تشریح شده است و به دانشجویان توصیه می‌کنیم که این بخش را به دقّت مطالعه نمایند.

اکنون، با توجه به نکات بالا، بحث اصلی را آغاز می‌کنیم.

بخش اوّل: حد و پیوستگی

تعریف ۱: فرض کنید تابع حقیقی f از دو متغیر x و y بر ناحیهٔ R از صفحهٔ xy تعریف شده و (x_0,y_0) یک نقطهٔ درونی یا مرزی R باشد. (بنابراین، هر همسایگی (x_0,y_0) حداقل یک نقطه از R را در بر دارد.) می‌گوییم: حد f، وقتی $(x,y)\to(x_0,y_0)$، موجود و برابر L است و می‌نویسیم $\lim\limits_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = L$ ، در صورتی که به ازای هر عدد مثبت مانند ε، عددی مثبت مانند δ موجود باشدبطوری که هرگاه $(x,y)\in R$ و $\circ<\sqrt{(x-x_0)^۲+(y-y_0)^۲}<\delta$، آنگاه $|f(x,y)-L|<\varepsilon$

مثال ۱: ثابت کنید که

$$\lim_{(x,y)\to(۱,۱)} \frac{xy}{x^۲+y^۲} = \frac{۱}{۲}$$

برهان: فرض می‌کنیم ε یک عدد مثبت دلخواه، ولی کوچکتر از واحد، باشد. فرض کنید $(x,y)\neq(\circ,\circ)$. ملاحظه می‌کنیم که

$$\left|\frac{xy}{x^۲+y^۲}-\frac{۱}{۲}\right| = \frac{(x-y)^۲}{۲(x^۲+y^۲)} = \frac{|x-y|^۲}{۲(x^۲+y^۲)} = \frac{|(x-۱)-(y-۱)|^۲}{۲(x^۲+y^۲)}$$

$$\leq \frac{(|x-۱|+|y-۱|)^۲}{۲(x^۲+y^۲)} = \frac{|x-۱|^۲+|y-۱|^۲+۲|x-۱||y-۱|}{۲(x^۲+y^۲)} \qquad (۱)$$

اگر فرض کنیم:

$$\sqrt{(x-۱)^۲+(y-۱)^۲}<\varepsilon/۲ \qquad (۲)$$

خواهیم داشت:

$$|y-۱|<\varepsilon/۲<۱/۲ \quad \text{و} \quad |x-۱|<\varepsilon/۲<۱/۲$$

(توجه کنید که $\varepsilon<۱$) که از آنها نامساوی

$$\frac{۱}{۲}<x^۲+y^۲ \qquad (۳)$$

نتیجه می‌شود. نامساویهای (۱)، (۲)، و (۳) نشان می‌دهند که (۲) مستلزم

$$\left|\frac{xy}{x^۲+y^۲}-\frac{۱}{۲}\right|<\varepsilon^۲<\varepsilon$$

و برهان تمام است.

بدیهی است که اگر حد تابع f، وقتی (x,y) به (x_0,y_0) میل می‌کند، موجود و برابر L باشد، عدد L از انتخاب مسیری که در آن نقطهٔ (x,y) به نقطهٔ (x_0,y_0) نزدیک می‌شود مستقل است. از این نکته می‌توان در اثبات عدم وجود حد یک تابع در نقطهٔ مفروضی استفاده کرد.

مثال ۲: ثابت کنید که حد تابع

$$f(x,y) = \frac{xy}{x^2+y^2} \;,\; (x,y) \neq (0,0)$$

در نقطهٔ $(0,0)$ وجود ندارد.

برهان: کافی است ملاحظه کنیم که، به عنوان مثال، مقادیر تابع در مسیر $x=y$ برابر ۱/۲ و در مسیر $x=-y$ برابر ۱/۲- است.

تعریف ۲: تابع f را در نقطهٔ (x_0,y_0) پیوسته می‌نامند در صورتی که f در (x_0,y_0) تعریف شده باشد و

$$\lim_{(x,y)\to(x_0,y_0)} f(x,y) = f(x_0,y_0)$$

تابع f را بر ناحیهٔ R پیوسته می‌نامند در صورتی که f در هر نقطهٔ R پیوسته باشد.

مثلاً، به استناد ملاحظات بالا، تابع مثال (۲) در نقطهٔ (۱،۱) پیوسته است و در نقطهٔ $(0,0)$ ناپیوسته.

تمرینات

۱. ثابت کنید که تابع

$$f(x,y) = \frac{\sin x + \sin y}{x^2+y^2+1}$$

در مبدأ پیوسته است. (*راهنمایی*: در نزدیکی صفر، $\sin x$ را با x مقایسه کنید.)

۲. نشان دهید که حد تابع زیر در مبدأ وجود ندارد:

$$f(x,y) = \frac{x^2y}{x^4+y^2} \qquad , \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

۳. آیا حد تابع

$$f(x,y) = \frac{\sin(x^2+2y^2)}{x^2+y^2} \qquad , \qquad (x,y) \neq (0,0)$$

در مبدأ وجود دارد ؟

۴. آیا تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x-y^4}{x^3-y^4}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

در نقطهٔ (۱،۱) حد دارد؟ (*راهنمایی*: مسیرهای $x=1$ و $y=1$ را بیازمایید.)

۵. ثابت کنید که اگر توابع یک متغیرهٔ g و h پیوسته باشند، تابع f با ضابطهٔ

$$f(x,y)=g(x)h(y)$$

پیوسته است.

۶. ثابت کنید که اگر تابع یک متغیرهٔ g و تابع دو متغیرهٔ h پیوسته باشند، تابع f با ضابطهٔ

$$f(x,y)= g(h(x,y))$$

پیوسته است.

۷. در پیوستگی توابع $f(x,y)=e^x \sin y$ و $F(x,y)=\sin(x^2y)$ بحث کنید.

۸. آیا تابع

$$f(x,y) = \frac{xy}{1-xy}$$

در حوزهٔ تعریف خود پیوسته است؟

بخش دوّم: مشتقات جزئی

درست مانند حالت یک متغیره، مشتق بیانگر میزان تغییرات تابع است. فرض کنید f تابعی از دو متغیر x و y باشد. در این بخش، حالتهایی را در نظر می‌گیریم که یکی از x و y تغییر کند و دیگری ثابت بماند. مشتق موجود در هر حالت را مشتق جزئی تابع f می‌نامند.

تعریف ۱ : فرض کنید تابع f در یک همسایگی از نقطهٔ (x_0,y_0) تعریف شده باشد.

(الف) مشتق تابع g با ضابطهٔ $g(x)=f(x,y_0)$ در نقطهٔ x_0 را، در صورت وجود، مشتق جزئی f نسبت به x در نقطهٔ (x_0,y_0) می‌نامند و آن را به

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0,y_0) \qquad \text{یا} \qquad f_x(x_0,y_0)$$

نشان می‌دهند. بنابراین،

$$f_x(x_o,y_o) = \lim_{\Delta x\to o} \frac{g(x_o+\Delta x)-g(x_o)}{\Delta x} =$$
$$= \lim_{\Delta x\to o} \frac{f(x_o+\Delta x,y_o)-f(x_o,y_o)}{\Delta x}$$

(ب) مشتق تابع h با ضابطهٔ $h(y)=f(x_o,y)$ در نقطهٔ y_o را، در صورت وجود، مشتق جزئی f نسبت به y در نقطه (x_o,y_o) می‌نامند و به

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x_o,y_o) \quad \text{یا} \quad f_y(x_o,y_o)$$

نشان می‌دهند. بنابراین،

$$f_y(x_o,y_o)=\lim_{\Delta y\to o}\frac{h(y_o+\Delta y)-h(y_o)}{\Delta y} =$$
$$=\lim_{\Delta y\to o}\frac{f(x_o,y_o+\Delta y)-f(x_o,y_o)}{\Delta y}$$

بدیهی است که ،به استناد (الف)، قلمرو تابع f_1 با ضابطه $f_1(x,y)=\frac{\partial f}{\partial x}(x,y)$ مجموعهٔ همه نقاطی مانند (x,y) از قلمرو تابع f است که $\frac{\partial f}{\partial x}$ در این نقطه موجود باشد و مقدار تابع f_1 در (x,y) برابر $\frac{\partial f}{\partial x}$ در این نقطه است. به استناد (ب)،قلمرو تابع f_2 با ضابطهٔ $f_2(x,y)=\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)$ مجموعهٔ همهٔ نقاطی مانند (x,y) از قلمرو f است که $\frac{\partial f}{\partial y}$ در این نقطه موجود باشد و مقدار تابع f_2 در (x,y) برابر $\frac{\partial f}{\partial y}$ در این نقطه است . معمولاً $\frac{\partial f}{\partial x}$ را همان f_1 و $\frac{\partial f}{\partial y}$ را همان f_2 می‌گیرند.

به همین صورت ، مشتقات جزئی مراتب بالاتر تعریف می‌شود ، مثلاً

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

و

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)$$

و هکذا.

مثال ۱ : مشتقات جزئی مرتبهٔ اوّل تابع f با ضابطهٔ $f(x,y)=x^3y^2+\sin xy$ عبارتند از :

$$\frac{\partial f}{\partial x}=3x^2y^2+y\cos xy \qquad \frac{\partial f}{\partial y}=2x^3y+x\cos xy$$

مشتقات جزئی مرتبهٔ دوّم این تابع عبارتند از :

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = 6xy^2 - y^2\sin xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = 2x^3 - x^2\sin xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial y}\left(3x^2y^2 + y\cos xy\right)$$

$$= 6x^2y + \cos xy - xy\sin xy$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(2x^3y + x\cos xy\right)$$

$$= 6x^2y + \cos xy - xy\sin xy$$

چنان که ملاحظه می‌کنید، در این مثال:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}$$

این تساوی همیشه بر قرار نیست. شرط برقراری این تساوی در قضیهٔ زیر آمده است.

قضیهٔ ۱ : اگر مشتقات جزئی $\partial f/\partial x$، $\partial f/\partial y$، و $\partial^2 f/\partial y\partial x$ از تابع f در یک همسایگی مانند N از (x,y) موجود و پیوسته باشد، آن گاه $\partial^2 f/\partial x\partial y$ در نقطهٔ (x,y) نیز موجود است و

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}$$

برهان : Δx و Δy را به قدری کوچک فرض می‌کنیم که مستطیل به مرکز (x,y) و اضلاع $2|\Delta x|$ و $2|\Delta y|$ درون همسایگی N واقع شود. کافی است ثابت کنیم که

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x} = \lim_{\Delta x\to 0}\frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+\Delta x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\Delta x}$$

به استناد تعریف :

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x+\Delta x,y) = \lim_{\Delta y\to 0}\frac{f(x+\Delta x,y+\Delta y) - f(x+\Delta x,y)}{\Delta y}$$

و

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) = \lim_{\Delta y\to 0} \frac{f(x,y+\Delta y) - f(x,y)}{\Delta y}$$

از این رو می‌توان نوشت :

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+\Delta x,y) - \frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\left\{ \lim_{\Delta y\to 0} \frac{[f(x+\Delta x,y+\Delta y)-f(x+\Delta x,y)]-[f(x,y+\Delta y)-f(x,y)]}{\Delta y} \right\} \qquad (۱)$$

برای نیل به مقصودی که در پیش داریم، تابع F را در نزدیکی x با ضابطهٔ

$$F(s)=f(s,y+\Delta y) - f(s,y)$$

تعریف می‌کنیم. به استناد مفروضات، وقتی s به x نزدیک باشد، تابع F در شرایط قضیهٔ مقدار میانگین صدق می‌کند و، بنابراین، عددی مانند θ_1 موجود است به طوری که $0<\theta_1<1$ و

$$\begin{aligned} F(x+\Delta x) - F(x) &= F'(x+\theta_1\Delta x)\Delta x \\ &= \left[\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_1\Delta x,y)\right]\Delta x \end{aligned} \qquad (۲)$$

از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x}\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x+\Delta x,y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x,y)\right] =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{1}{\Delta x} \lim_{\Delta y\to 0} \Delta x \left[\frac{\frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_1\Delta x,y+\Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_1\Delta x,y)}{\Delta y} \right] \qquad (۳)$$

حال ، اگر تابع G را در نزدیکی y با ضابطهٔ

$$G(t) = \frac{\partial f}{\partial x}(x+\theta_1\Delta x,t)$$

تعریف کنیم، به استناد مفروضات، تابع G نیز در شرایط قضیهٔ مقدار میانگین صدق می‌کند و، از این

رو، عددی مانند θ_2 موجود است به طوری که $0<\theta_2<1$ و

$$G(y+\Delta y)-G(y)= G'(y+\theta_2\Delta y)\Delta y \qquad (4)$$

اکنون (۳) و (۴) ایجاب می‌کنند که

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\frac{\partial f}{\partial y}(x+\Delta x,y)-\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)}{\Delta x} =$$

$$\lim_{\Delta x\to 0}\left[\lim_{\Delta y\to 0} \frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(x+\theta_1\Delta x,y+\theta_2\Delta y)\right]$$

چون $\partial^2 f/\partial y\partial x$ در نقطهٔ (x,y) پیوسته است، وقتی $\Delta x\to 0$ و $\Delta y\to 0$ ، حکم مطلوب فوراً نتیجه می‌شود.

این بخش را با یک حکم مفید دیگر به پایان می‌بریم. چنان که می‌دانیم، اگر تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ x_0 مشتق‌پذیر باشد، آن گاه

$$\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\Delta y}{\Delta x}=f'(x_0)$$

بنابراین، اگر فرض کنیم $\varepsilon(\Delta x)=\frac{\Delta y}{\Delta x}-f'(x_0)$ ، ملاحظه می‌کنیم که

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon(\Delta x)=0$$

و می‌توان نوشت:

$$\Delta y=f'(x_0)\Delta x+\varepsilon(\Delta x)\Delta x$$

این حکم تعمیم ساده و جالبی در مورد توابع چند متغیره دارد. قضیهٔ زیر این تعمیم را در حالت دو متغیره نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۲: اگر $z=f(x,y)$ و f_x و f_y در یک همسایگی از نقطهٔ (x_0,y_0) موجود و پیوسته باشند، آن گاه می‌توان نوشت:

$$\Delta z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

که در آن

$$\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \varepsilon_1=\lim_{\substack{\Delta x\to 0\\ \Delta y\to 0}} \varepsilon_2=0$$

برهان :فرض می‌کنیم Δx و Δy به قدر کافی کوچک باشند. می‌توان نوشت :

$$\Delta z=f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0,y_0)$$

$$=[f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)]+[f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)]$$

به استناد فرض، تابع g با ضابطهٔ

$$g(y)=f(x_0+\Delta x,y)$$

در نقطهٔ y_0 مشتق پذیر است و،بنابراین، می توان نوشت:

$$g(y_0+\Delta y)-g(y_0)=g'(y_0)\Delta y+\varepsilon_1\Delta y$$

که در آن

$$\lim_{\Delta y\to 0} \varepsilon_1=0 \qquad (1)$$

بنابراین

$$f(x_0+\Delta x,y_0+\Delta y)-f(x_0+\Delta x,y_0)=f_y(x_0+\Delta x,y_0)\Delta y+\varepsilon_1\Delta y \qquad (2)$$

مجدداً، به استناد فرض، تابع h با ضابطهٔ $h(x)=f(x,y_0)$ در نقطهٔ x_0 مشتق پذیر است و، بنابراین، می‌توان نوشت:

$$h(x_0+\Delta x)-h(x_0)=h'(x_0)\Delta x+\varepsilon_2\Delta x$$

که در آن

$$\lim_{\Delta x\to 0} \varepsilon_2=0 \qquad (3)$$

از این رو:

$$f(x_0+\Delta x,y_0)-f(x_0,y_0)=f_x(x_0,y_0)\Delta x+\varepsilon_2\Delta x \qquad (4)$$

از (۲)و(۴) نتیجه می‌گیریم که

$$\Delta z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0+\Delta x,y_0)\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y \qquad (5)$$

اما، بنابرفرض، f_y در نقطهٔ (x_0,y_0) پیوسته است. از این رو، می‌توان نوشت:

$$f_y(x_0+\Delta x,y_0)=f_y(x_0,y_0)+\varepsilon_3\Delta x \qquad (6)$$

که درآن

$$\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon_3=0 \qquad (7)$$

اینک، (۵) و (۶) ایجاب می‌کنند که

$$\Delta z=f_x(x_0,y_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0)\Delta y+(\varepsilon_1+\varepsilon_3)\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

که در آن، به استناد (۱)،(۳) و(۷):

$$\lim_{\Delta x\to 0}(\varepsilon_1+\varepsilon_3)=0 \quad , \quad \lim_{\Delta y\to 0}\varepsilon_2=0$$

و برهان تمام است.

این قضیه تعمیمی بصورت زیر در مورد توابع سه متغیره دارد:

قضیهٔ ۳: اگر $w=f(x,y,z)$ و مشتقات جزئی f_x، f_y، و f_z در یک همسایگی از نقطهٔ (x_0,y_0,z_0)موجود و پیوسته باشند، می‌توان نوشت:

$$\Delta w=f_x(x_0,y_0,z_0)\Delta x+f_y(x_0,y_0,z_0)\Delta y+f_z(x_0,y_0,z_0)\Delta z$$
$$+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y+\varepsilon_3\Delta z$$

که در آن $\varepsilon_1\to 0$، $\varepsilon_2\to 0$، و $\varepsilon_3\to 0$ وقتی که Δx، Δy، Δz و به صفر میل کنند.

تمرینات

۱. نشان دهید که اگر $w(x,y,z)=xz^2+zy^2+yx^2$، آن گاه

$$\frac{\partial w}{\partial x}+\frac{\partial w}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}=(x+y+z)^2$$

۲. ثابت کنید که اگر $z=x\sin(x/y)+ye^{y/x}$، آن گاه

$$x\frac{\partial z}{\partial x}+y\frac{\partial z}{\partial y}=z$$

۳. فرض کنید هر یک از دو تابع دلخواه f و g دوبار مشتق پذیر باشد. ثابت کنید که اگر c یک عدد دلخواه باشد و تابع w را به صورت

$$w(x,t)=f(x+ct)+g(x-ct)$$

تعریف کنیم، w در معادلهٔ موج

$$\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0$$

صدق می‌کند.

تابع حقیقی h از دو متغیر حقیقی x و y را در حوزهٔ D از صفحهٔ xy *همساز* می نامند در صورتی که h در سراسر D دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ اوّل و دوّم پیوسته باشد و در معادلهٔ

$$\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 h}{\partial y^2}=0$$

موسوم به *معادلهٔ لاپلاس*، صدق کند.

۴. ثابت کنید که هر یک از توابع زیر در صفحهٔ xy همساز است:

$$u(x,y)=e^x\sin y\qquad,\qquad V(x,y)=x^3-3xy^2$$

۵. ثابت کنید که اگر هر یک از توابع u و v در حوزهٔ D همساز باشند و $w=u+v$، آن‌گاه w نیز در D همساز است.

۶. ثابت کنید که تابع زیر در صفحهٔ xy همساز است:

$$w(x,y)=e^x\sin y+x^3-3xy^2$$

۷. تابع

$$f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{xy(y^2-x^2)}{x^2+y^2}, & (x,y)\neq(0,0)\\ 0, & (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

مفروض است. ثابت کنید که

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\partial x}(0,0)\neq\frac{\partial^2 f}{\partial x\partial y}(0,0)$$

راهنمایی: $\frac{\partial f}{\partial x}(0,y)$ و $\frac{\partial f}{\partial y}(x,0)$ را محاسبه کنید.

بخش سوّم: دیفرانسیل

چنان که در بخش دوّم دیدیم، اگر تابع $y=f(x)$ در نقطهٔ x مشتق پذیر باشد، می توان نوشت:

$$\Delta y=f'(x)\Delta x+\varepsilon\Delta x$$

که در آن $\lim_{\Delta x\to 0}\varepsilon=0$. این نشان می دهد که وقتی Δx بسیار کوچک باشد،

$$\Delta y\approx f'(x)\Delta x$$

به این مناسب، $f'(x)\Delta x$ را دیفرانسیل تابع f در نقطهٔ x می نامند و می‌نویسند:

$$df=f'(x)\Delta x \qquad (*)$$

در حالت خاصی که $f(x)=x$، ملاحظه می کنیم که $df=dx=1\,.\,\Delta x$.از این رو، (*) به صورت معمول

$$df=f'(x)dx$$

در می‌آید.

تعریف دیفرانسیل را به حالتهای دو متغیره و سه متغیره می توان تعمیم داد:

فرض کنید مشتقات جزئی f_x و f_y از تابع $w=f(x,y)$ در هر نقطه از حوزهٔ D موجود و پیوسته باشند. اگر (x,y) نقطه‌ای از D باشد وΔx و Δy کوچک باشند، به استناد قضیهٔ (۲) بخش دوّم ، می‌توان نوشت:

$$\Delta w\approx f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y \qquad (**)$$

از این رو، دیفرانسیل f در نقطهٔ (x,y) از D را به صورت

$$dw=df=f_x(x,y)dx+f_y(x,y)dy$$

تعریف می کنند و، عموماً، آن را دیفرانسیل کل f در نقطهٔ (x,y) وهر یک از $f_x(x,y)dx$ و $f_y(x,y)dy$ را یک دیفرانسیل جزئی f در نقطهٔ (x,y) می نامند.

تعریف دیفرانسیل توابع سه متغیره نیز بر همین منوال است.

از (**) برای تعیین مقادیر تقریبی در بعضی از محاسبات و برآورد خطا نیز می توان استفاده کرد. به دو مثال زیر توجه کنید.

مثال ۱: مستطیلی به اضلاع x و y در نظر بگیرید. مساحت این مستطیل از دستور

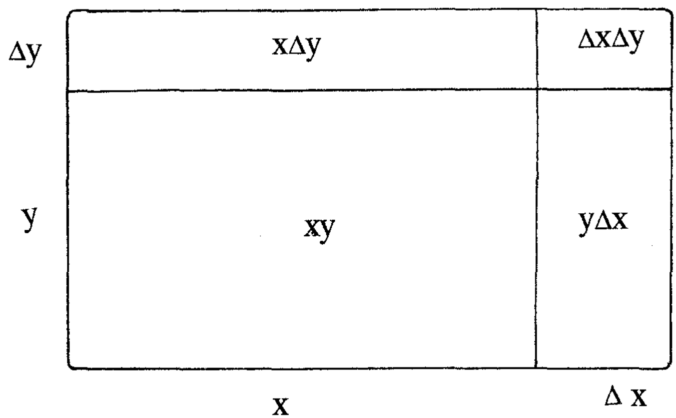
$$A=xy$$

به دست می‌آید. اگر x و y ، به ترتیب، با خطای اضافی Δx و Δy اندازه‌گیری شده باشد، چنان‌که شکل زیر نشان می دهد، در اندازه‌گیری مساحت، مرتکب خطای

$$\Delta A=(x+\Delta x)(y+\Delta y)-xy=x\Delta y+y\Delta x+\Delta x\Delta y$$

می شویم، ولی دیفرانسیل، خطای مساحت را

$$dA=\frac{\partial A}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial A}{\partial y}\Delta y=y\Delta x+x\Delta y$$



برآورد می کند. چنان که ملاحظه می کنید، اختلاف تخمین خطا از طریق استفاده از دیفرانسیل، مقدار اندک $\Delta x\Delta y$ است.

مثال ۲: برای تعیین مقدار تقریبی $\sqrt{۲۷}\,\sqrt[۳]{۱۰۲۱}$، تابع f را با ضابطهٔ

$$f(x,y)=\sqrt{x}\,\sqrt[3]{y}،$$

تعریف می کنیم. مقدار تابع در نقطهٔ به مختصات ۲۵ $=x$ و ۱۰۰۰ $=y$ معلوم و برابر ۵۰ است. ولی،

اگر به x نمو $\Delta x=۲$ و به y نمو $\Delta y=۲۱$ را بدهیم، افزایش مقدار f، با استفاده از دیفرانسیل، تقریباً برابر می‌شود با

$$df=f_x(x,y)\Delta x+f_y(x,y)\Delta y$$

$$=\frac{۱}{۲}x^{-\frac{۱}{۲}}y^{\frac{۱}{۳}}\Delta x+\frac{۱}{۳}x^{\frac{۱}{۲}}y^{-\frac{۲}{۳}}\Delta y=۲{,}۳۵$$

در نتیجه،

$$\sqrt{۲۷}\,\sqrt[۳]{۱۰۲۱}\approx\sqrt{۲۵}\,\sqrt[۳]{۱۰۰۰}+۲{,}۳۵=۵۲{,}۳۵$$

تمرینات

۱. مقاومت الکتریکی بعضی از سیمها مطابق دستور $V=IR$ محاسبه می‌شود که در آن V افت ولتاژ دو سر سیم است، I جریانی است که از سیم می‌گذرد، و R مقاومت سیم است. اگر V و I با خطایی حداکثر برابر یک درصد اندازه‌گیری شوند، حداکثر خطایی که در محاسبهٔ مقدار تقریبی R مرتکب می‌شویم چند درصد است؟

۲. فاصلهٔ کانونی یک عدسی، که معمولاً به f نشان داده می‌شود، از دستور

$$\frac{۱}{f}=\frac{۱}{p}+\frac{۱}{q}$$

به دست می آید که در آن p و q، به ترتیب، فواصل عدسی از شیء و تصویر آن است. در مورد عدسی مفروضی، p و q، با خطای احتمالی ۰٫۵ سانتیمتر، برابر ۲۰ سانتیمتر اندازه‌گیری شده است. حداکثر خطای احتمالی در محاسبهٔ مقدار تقریبی f رابیابید.

۳. مقدار تقریبی عدد $\sqrt{(۳{,}۰۱)^۲+(۳{,}۹۷)^۲}$ را تا دو رقم اعشار محاسبه کنید.

بخش چهارم: قاعدهٔ زنجیری

قاعدهٔ زنجیری یکی از قواعد مفید این مبحث است که در نظریهٔ توابع چند متغیره کاربردهای فراوان دارد. در قضیهٔ زیر، یکی از صورتهای سادهٔ قاعدهٔ زنجیری بیان و ثابت شده است.

قضیهٔ ۱ : فرض کنید مشتقات جزئی تابع $w=f(x,y)$ در یک همسایگی از نقطهٔ (x,y) موجود وپیوسته باشند. اگر x و y توابعی مشتق پذیر از t باشند، f نیز تابعی مشتق پذیر از t است و مشتق آن از دستور

$$\frac{dw}{dt}=\frac{df}{dt}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{dt}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{dt} \tag{1}$$

موسوم به *قاعده زنجیری* ، به دست می آید

برهان : به استناد قضیهٔ (۲) بخش دوّم، می توان نوشت:

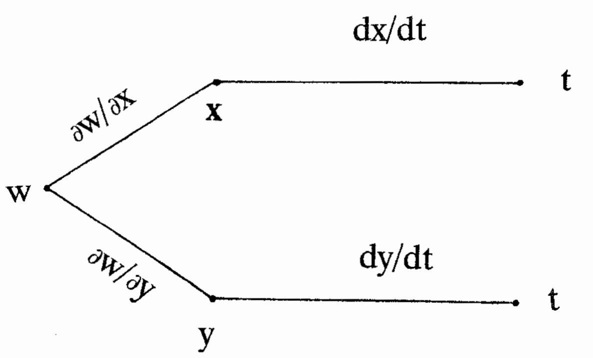
$$\Delta w=\frac{\partial w}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial w}{\partial y}\Delta y+\varepsilon_1\Delta x+\varepsilon_2\Delta y$$

که در آن $\varepsilon_1\to 0$ و $\varepsilon_2\to 0$ وقتی که $\Delta x\to 0$ و $\Delta y\to 0$. در این صورت، بدیهی است که پس از تقسیم طرفین بر Δt و حدگیری، وقتی که $\Delta t\to 0$ ، نتیجه مطلوب عاید می شود.

اگر برای سهولت، تابع w را که مشتقات جزئی آن در یک همسایگی از نقطهٔ (x,y) موجود و پیوسته‌اند مشتق پذیر بنامیم، قاعدهٔ زنجیری را بصورت سادهٔ زیر می‌توان بیان کرد:

قاعدهٔ زنجیری : اگر $w=f(x,y)$ تابعی مشتق پذیر از x و y باشد، و x و y توابعی مشتق پذیر از t باشند، آنگاه w تابعی مشتق پذیر از t است، و مشتق w بر حسب t از دستور (۱) به دست می‌آید.

نمودار زیر چگونگی بسط قاعدهٔ زنجیری را نشان می دهد.



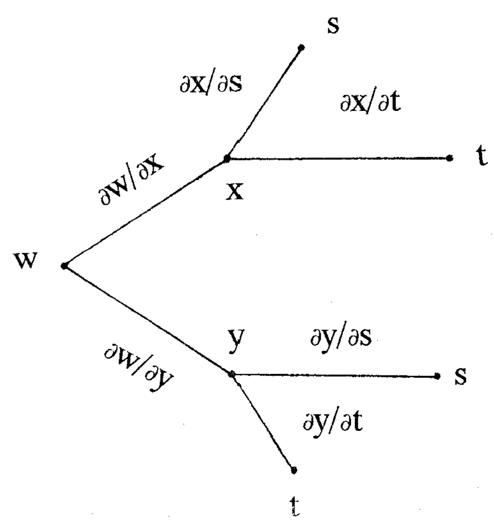
قضیهٔ (۱) را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد:

قضیهٔ (۲): اگر $w=f(x,y)$ تابعی مشتق پذیر از x و y باشد، و x و y توابعی مشتق پذیر از s و t باشند، w نیز تابعی مشتق پذیر از s و t است، و

$$\frac{\partial w}{\partial s}=\frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial s}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t}=\frac{\partial w}{\partial x}\,\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial w}{\partial y}\,\frac{\partial y}{\partial t}$$

برای اثبات، کافی است قاعدهٔ زنجیری را به کار ببریم، و یک بار t را ثابت نگهداریم و بار دیگر s را. به نمودار زیر برای بسط این قاعده توجه کنید:



قضیهٔ (۱) تعمیم دیگری در حالت سه بعدی به صورت زیر دارد:

قضیهٔ ۳: اگر $w=f(x,y,z)$ تابعی مشتق پذیر از x، y، و z باشد، و x، y، و z توابعی مشتقپذیر از r ، s ، و t باشند، آن گاه w نیز تابعی مشتق پذیر از r، s، و t است، و

$$\frac{\partial w}{\partial r} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial r}$$

$$\frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial s}$$

$$\frac{\partial w}{\partial t} = \frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t} + \frac{\partial w}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}$$

اثبات این قضیه و رسم نمودار تشریح آن را به دانشجویان واگذار می‌کنیم.

مثال ۱ : تابع $w=x^2y+xy^2$ مفروض است. اگر مختصات قائم x و y را به مختصات قطبی r و θ تبدیل کنیم، مشتقات جزئی w نسبت به r و θ را به دو طریق می‌توان محاسبه کرد.

روش اوّل: چنان که می‌دانیم، روابط

$$x=r\cos\theta$$

$$y=r\sin\theta \qquad (*)$$

بین مختصات دکارتی و قطبی برقرار است. در این صورت، خواهیم داشت:

$$w(r,\theta)=r^3\cos^2\theta\sin\theta + r^3\cos\theta\sin^2\theta$$
$$=r^3(\cos^2\theta\sin\theta + \cos\theta\sin^2\theta)$$

بنابراین ،

$$\frac{\partial w}{\partial r} = 3r^2(\cos^2\theta\sin\theta + \cos\theta\sin^2\theta)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta} = r^3(-2\cos\theta\sin^2\theta + \cos^3\theta + 2\sin\theta\cos^2\theta - \sin^3\theta)$$

$$=r^3[(\cos^3\theta - \sin^3\theta) + 2\sin\theta\cos\theta(\cos\theta - \sin\theta)]$$

$$=r^3(\cos\theta - \sin\theta)(1 + 3\sin\theta\cos\theta)$$

روش دوّم : در این روش، از قاعدهٔ زنجیری استفاده می‌کنیم. برای این منظور، ملاحظه می‌کنیم که به استناد روابط (*) ،

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta \qquad \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta \tag{۱}$$

$$\frac{\partial x}{\partial \theta}=-r\sin\theta \quad \frac{\partial y}{\partial \theta}=r\cos\theta \tag{۲}$$

سپس، توجه می‌کنیم که، بنابر تعریف،

$$\frac{\partial w}{\partial x}=2xy+y^2 \qquad \frac{\partial w}{\partial y}=x^2+2xy \tag{۳}$$

از این رو، به استناد روابط (*)، (۱)، (۲)، (۳)، و قاعدهٔ زنجیری، خواهیم داشت:

$$\frac{\partial w}{\partial r}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}$$

$$=(2r^2\sin\theta\cos\theta+r^2\sin^2\theta)\cos\theta+(r^2\cos^2\theta+2r^2\sin\theta\cos\theta)\sin\theta$$

$$=3r^2(\cos^2\sin\theta+\cos\theta\sin^2\theta)$$

$$\frac{\partial w}{\partial \theta}=\frac{\partial w}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta}+\frac{\partial w}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta}$$

$$=(2r^2\sin\theta\cos\theta+r^2\sin^2\theta)(-r\sin\theta)$$

$$+(r^2\cos^2\theta+2r^2\sin\theta\cos\theta)(r\cos\theta)$$

$$=r^3(\cos^3\theta-\sin^3\theta)+2r^3\sin\theta\cos\theta(\cos\theta-\sin\theta)$$

$$=r^3(\cos\theta-\sin\theta)(1+3\sin\theta\cos\theta)$$

مثال ۲ : مشتقات جزئی تابع h در حوزهٔ D، از هر مرتبه، موجودند. ثابت کنید که اگر مختصات دکارتی x و y را به مختصات قطبی r و θ تبدیل کنیم، h دارای مشتقات جزئی پیوسته نسبت به r و θ است، و نتیجه بگیرید که

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r\partial\theta}=\frac{\partial^2 h}{\partial\theta\partial r}$$

برهان: به استناد قاعدهٔ زنجیری، ملاحظه می کنیم که

$$\frac{\partial h}{\partial r}=\frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial r}+\frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial r}=\frac{\partial h}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial h}{\partial y}\sin\theta$$

$$\frac{\partial h}{\partial \theta} = \frac{\partial h}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial h}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial \theta} = \frac{\partial h}{\partial x}(-r\sin\theta) + \frac{\partial h}{\partial y}(r\cos\theta)$$

$$\frac{\partial^2 h}{\partial \theta \partial r} = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial h}{\partial r}\right) = \frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial h}{\partial y}\sin\theta\right)$$

$$= \left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial h}{\partial x}\right)\right]\cos\theta - \frac{\partial h}{\partial x}\sin\theta + \left[\frac{\partial}{\partial \theta}\left(\frac{\partial h}{\partial y}\right)\right]\sin\theta + \frac{\partial h}{\partial y}\cos\theta$$

$$= \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^2}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\cos\theta - \frac{\partial h}{\partial x}\sin\theta$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}\frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)\sin\theta + \frac{\partial h}{\partial y}\cos\theta$$

$$= \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}(-r\sin\theta\cos\theta) + \frac{\partial^2 h}{\partial y \partial x}(r\cos^2\theta) - \frac{\partial h}{\partial x}\sin\theta$$

$$+ \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y}(-r\sin^2\theta) + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2}(r\sin\theta\cos\theta) + \frac{\partial h}{\partial y}\cos\theta$$

.
.
.

به این ترتیب، دیده می شود که مشتقات جزئی h نسبت به r و θ از هر مرتبه، در D موجودند. بنابراین، مشتقات جزئی موجود، پیوسته نیز هستند. از این رو، به استناد قضیهٔ بخش دوّم، تساوی مطلوب فوراً نتیجه می شود.

تمرینات

۱. مشتقات جزئی تابع h در حوضهٔ D، که شامل مبدأ نیست، از هر مرتبه، موجودند، و h در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند. ثابت کنید که اگر مختصات دکارتی x و y را به مختصات قطبی r و θ تبدیل کنیم، h در D دارای مشتقات جزئی پیوسته نسبت به r و θ است، و در معادلهٔ

$$\frac{\partial^2 h}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial h}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 h}{\partial \theta^2}=0$$

مشهور به معادلهٔ لاپلاس در مختصات قطبی، صدق می کند.

۲. ثابت کنید که اگر f مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $z=f(x^3-y^2)$ یک جواب معادلهٔ $2y\frac{\partial z}{\partial x}+3x^2\frac{\partial z}{\partial y}=0$ است.

۳. ثابت کنید که اگر f مشتق‌پذیر باشد، آن‌گاه $z=f(x^2-y^2)$ در معادلهٔ زیر صدق می‌کند :

$$x\frac{\partial z}{\partial y}+y\frac{\partial z}{\partial x}=0$$

۴. f تابعی مشتق‌پذیر است. ثابت کنید که $z=x^2+xf(xy)$ در معادلهٔ $x\frac{\partial z}{\partial x}-y\frac{\partial z}{\partial y}=x^2+z$ صدق می‌کند.

بخش پنجم:صفحات مماس و خطوط قائم بر سطح

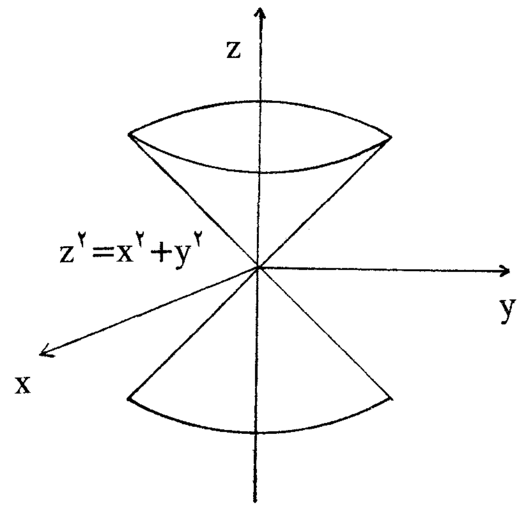
اگر تابع f بر ناحیهٔ R از صفحهٔ xy تعریف شده باشد، مجموعهٔ نقاط (x,y,z)، که در آنها $z=f(x,y)$ سطحی مانند S در فضا تشکیل می‌دهند. مثلاً

$$z=f(x^2+y^2)$$

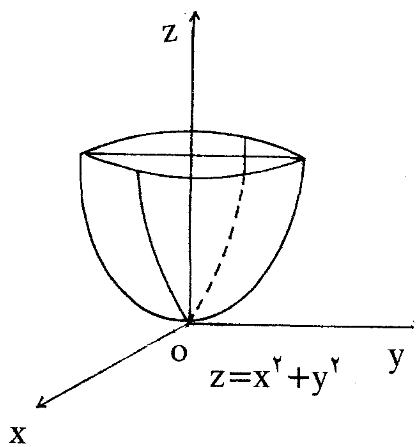
معادلهٔ سطحی است که از دوران سهمی $z=x^2$ حول محور z به دست می‌آید. به همین دلیل، این سطح را سهمیگون نامیده‌اند. (شکل (۱) را ببینید.) به عنوان مثالی دیگر، خواننده می تواند تحقیق کند که

$$z^2=x^2+y^2$$

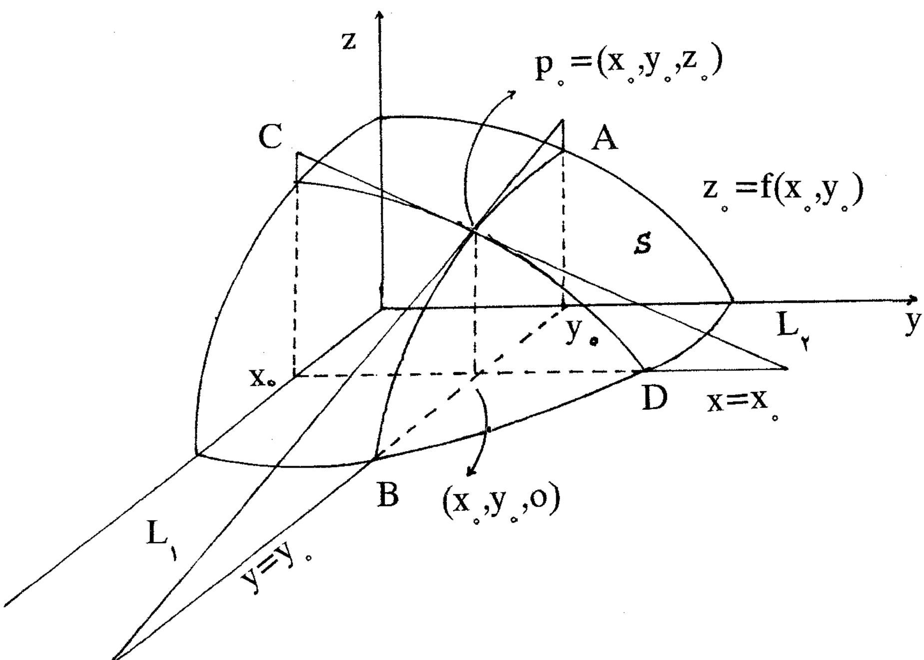
یک مخروط دوّار دوگانه است که رأس هر مخروط بر مبدأ مختصات منطبق است ومحور z محور دوران مخروط محسوب می‌شود. این مخروط از دوران خط $z=x$ حول محور z به دست می‌آید. بنابراین زاویهٔ رأس مخروط ۹۰ درجه است. این مخروط در شکل (۲) نشان داده شده است.



شکل۲



شکل۱



شکل۳

فرض کنید (x_o,y_o) نقطه‌ای از R باشد. صفحهٔ $x=x_o$ مقطعی مانند AB با سطح S دارد، و صفحهٔ $y=y_o$ مقطعی مانند CD.به عبارت دیگر، منحنی AB مجموعهٔ نقاطی از سطح S است که در آنها $x=x_o$ ، و منحنی CD مجموعهٔ نقاطی از این سطح است که در آنها $y=y_o$. منحنیهای AB و CD در شکل (۳) نشان داده شده‌اند. این منحنیها یکدیگر را در نقطهٔ $P_o(x_o,y_o,z_o)$ قطع می‌کنند که در آن $z_o=f(x_o,y_o)$ در واقع، $z=f(x,y_o)$ معادلهٔ منحنی AB در صفحهٔ xz و $z=f(x_o,y)$ معادلهٔ منحنی CD در صفحهٔ yz است. فرض کنید مشتقات جزئی f_x و f_y در یک همسایگی از نقطهٔ (x_o,y_o) موجود و پیوسته باشند. در این صورت ، منحنیهای AB و CD در نزدیکی P_o، هموارند و $\frac{\partial z}{\partial x}(x_o,y_o)=f_x(x_o,y_o)$ شیب خط مماس بر منحنی AB در نقطهٔ P_o و $\frac{\partial z}{\partial y}(x_o,y_o)=f_y(x_o,y_o)$ شیب خط مماس بر منحنی CD در نقطهٔ P_o است. به عبارت دیگر، بردار

$$\mathbf{V}=\mathbf{i}+0\mathbf{j}+f_x(x_o,y_o)\mathbf{k}$$

در راستای خط مماس بر منحنی AB در نقطهٔ P_o است، و بردار

$$\mathbf{U}=0\mathbf{i}+\mathbf{j}+f_y(x_o,y_o)\mathbf{k}$$

در راستای خط مماس بر منحنی CD در نقطهٔ P_o است. بنابراین، اگر L_1 و L_2، به ترتیب، خطوط مماس بر منحنیهای AB و CD در نقطهٔ P_o باشند، $\mathbf{V}$ در راستای L_1 و $\mathbf{U}$ در راستای L_2 است و، از این رو، بردار

$$\mathbf{N}=\mathbf{U}\times\mathbf{V}=\begin{vmatrix}\mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k}\\ 0 & 1 & f_y(x_o,y_o)\\ 1 & 0 & f_x(x_o,y_o)\end{vmatrix}$$

$$=f_x(x_o,y_o)\mathbf{i}+f_y(x_o,y_o)\mathbf{j}-\mathbf{k}$$

بر صفحهٔ مار بر خطوط L_1 و L_2 عمود است.

حال، فرض کنید T صفحه‌ای باشد که از خطوط L_1 و L_2 می‌گذرد. می‌گویند: T در نقطهٔ P_o برسطح S مماس است در صورتی که اگر P نقطهٔ دلخواهی از سطح S باشد و به P_o نزدیک شود،

زاویهٔ بین P_oP و صفحهٔ T به صفر میل کند.

به استناد این تعریف، فرض کنید T در نقطهٔ P_o برسطح S مماس باشد. چون **N** بر T عمود است، تعریف بالا نشان می‌دهد که اگر P نقطه‌ای از سطح S باشد و P به P_o نزدیک شود، زاویهٔ بین **N** و P_oP به $\pi/۲$ نزدیک می‌شود. در چنین شرایطی، **N** را قائم بر سطح S در نقطهٔ P_o می‌نامند.

این ملاحظات نشان می‌دهد که اگر بخواهیم ثابت کنیم که صفحهٔ T در نقطهٔ P_o برسطح S مماس است، کافی است که ثابت کنیم که اگر P نقطه‌ای از سطح S باشد و P به P_o نزدیک شود، زاویهٔ **N** و P_oP به $\pi/۲$ نزدیک می‌شود. در زیر ثابت می‌کنیم که اگر مشتقات جزئی f_x و f_y در یک همسایگی از نقطهٔ (x_o,y_o) موجود و پیوسته باشند، صفحهٔ T در نقطهٔ P_o بر سطح S مماس است و، در این صورت، بدیهی است که **N** قائم بر سطح S در نقطه P_o خواهد بود.

فرض کنید P نقطه‌ای از سطح S، **R** بردار موضع نقطهٔ P_o و $\mathbf{R}_o$ بردار موضع نقطهٔ P_o باشد. در این صورت، $\mathbf{R}-\mathbf{R}_o=\Delta x\mathbf{i}+\Delta y\mathbf{j}+\Delta z\mathbf{k}$ بردار تغییر مکان است. اگر θ زاویهٔ بین **N** و $\mathbf{R}-\mathbf{R}_o$ باشد، آن‌گاه، چنان که می‌دانیم،

$$\cos\theta=\frac{(\mathbf{R}-\mathbf{R}_o)\cdot\mathbf{N}}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}_o|\cdot|\mathbf{N}|}$$

$$=\frac{f_x(x_o,y_o)\Delta x+f_y(x_o+y_o)\Delta y-\Delta z}{\sqrt{[f_x(x_o,y_o)]^۲+[f_y(x_o,y_o)]^۲+۱}\sqrt{(\Delta x)^۲+(\Delta y)^۲+(\Delta z)^۲}} \quad (۱)$$

چون f_x و f_y در یک همسایگی از (x_o,y_o) پیوسته‌اند، می‌توان نوشت:

$$\Delta z=f_x(x_o,y_o)\Delta x+f_y(x_o,y_o)\Delta y+\varepsilon_۱\Delta x+\varepsilon_۲\Delta y \quad (۲)$$

که درآن $\varepsilon_۱\to o$ و $\varepsilon_۲\to o$ وقتی که $\Delta x\to o$ و $\Delta y\to o$. از (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که

$$\cos\theta=\frac{-\varepsilon_۱\Delta x-\varepsilon_۲\Delta y}{\sqrt{[f_x(x_o,y_o)]^۲+[f_y(x_o,y_o)]^۲+۱}\sqrt{(\Delta x)^۲+(\Delta y)^۲+(\Delta z)^۲}}$$

بنابراین، خواهیم داشت:

$$|\cos\theta| \leq |\varepsilon_1| + |\varepsilon_2|$$

این نامساوی نشان می‌دهد که

$$\lim_{\substack{\Delta x \to 0 \\ \Delta y \to 0}} \cos\theta = 0$$

و برهان تمام است.

متعلمین به آسانی می‌توانند به استناد $(\mathbf{R}-\mathbf{R}_0)\cdot\mathbf{N}=0$ به معادلهٔ صفحهٔ T دست یابند که به صورت زیر است:

$$z-z_0=f_x(x_0,y_0)(x-x_0)+f_y(x_0,y_0)(y-y_0)$$

بدیهی است که چون بردار $\mathbf{N}$ قائم بر سطح S در نقطهٔ P_0 است، معادلهٔ خط قائم بر سطح S در این نقطه عبارت است از:

$$\frac{x-x_0}{f_x(x_0,y_0)} = \frac{(y-y_0)}{f_y(x_0,y_0)} = \frac{z-z_0}{-1}$$

در حالت خاصی که $f_x(x_0,y_0)=f_y(x_0,y_0)=0$ ، قائم بر سطح ، موازی محور z است.

تمرینات

۱. معادلهٔ صفحهٔ مماس و خط قائم بر هر یک از سطوح زیر را در نقطهٔ مفروض بیابید:

(الف) $z=x^2+(y-2)^2$ در نقطهٔ $P_0=(2,3,5)$

(ب) $z=10-x^2-y^2$ در نقطهٔ $P_0=(1,2,5)$

(ج) $x^2+y^2+z^2=121$ در نقطهٔ $P_0=(6,7,6)$

۲. نشان دهید که صفحهٔ مماس بر مخروط $z^2=a^2(x^2+y^2)$ ، که در آن $a\neq 0$ ، فقط در رأس وجود ندارد، و صفحهٔ مماس، در نقاطی که موجود است، از رأس می‌گذرد.

۳. زاویهٔ بین خط $\mathbf{R}=(-2+4t)\mathbf{i}+(5+t)\mathbf{j}+(12-3t)\mathbf{k}$ و قائم بر کرهٔ $x^2+y^2+z^2=121$ را در نقطهٔ

تقاطع خط وکره بیابید.

۴. صفحهٔ مماس بر سطح $z=3xy-x^3-y^3$ در کدام نقاط افقی است؟

۵. نشان دهید که کرهٔ $x^2+y^2+z^2-4y-2z+2=0$ سهمیگون $3x^2+2y^2-2z=1$ را در نقطهٔ (۱,۱,۲) با زاویهٔ قائمه قطع می‌کند.

فصل سوم

میدانهای اسکالر و برداری

۱.۳ میدانهای اسکالر، سطوح تک مقدار، گرادیانها

اگر هر نقطهٔ (x,y,z) از یک ناحیه در فضا با عددی چون $f(x,y,z)$ متناظر شود، می‌گوییم f یک میدان *اسکالر* است. به عبارت دیگر، یک میدان اسکالر صرفاً یک تابع سه متغیره با مقادیر اسکالر است.

به خاطر تثبیت مقاصدی که در پیش داریم، میدانهای اسکالر زیر به عنوان مثالهایی که در آتیه مکرراً به آنها مراجعه خواهد شد ذکر می‌شوند:

۱. $f(x,y,z)=x+2y-3z$

۲. $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$

۳. $f(x,y,z)=x^2+y^2$

۴. $f(x,y,z)=\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+z^2$

۵. $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2}-z$

۶. $f(x,y,z)=\frac{1}{x^2+y^2}$

میدانهای مذکور در مثالهای (۱) تا (۵) در هر نقطهٔ فضا تعریف می‌شوند. میدان مثال (۶) در همهٔ نقاط (x,y,z) تعریف می‌شود ، به جز نقاطی که $x^2+y^2=0$، یعنی ، همه جا به جز نقاط روی محور z .

اگر f یک میدان اسکالر باشد، هر سطح به معادلهٔ $f(x,y,z)=C$ ،که در آن C یک ثابت است،

یک *سطح تک مقدار** نامیده می‌شود. گاهی، در فیزیک، اصطلاحات تخصصی به‌کار می‌برند؛ مثلاً، اگر f پتانسیل میدان الکتریکی یا میدان گرانشی باشد، سطوح تک مقدار را *سطوح همپتانسیل* می‌نامند. اگر f نشان دهندهٔ درجهٔ حرارت باشد، چنین سطوحی را *تک دما* می‌نامند. اگر f نشان دهندهٔ فشار باشد، سطوح تک مقدار را *سطوح تک فشار* می‌نامند.

در مثالهای بالا، سطوح تک مقدار عبارتند از:

۱. همهٔ صفحات عمود بر بردار $\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$.

۲. همهٔ کره‌های به مرکز مبدأ.

۳. همهٔ استوانه‌های مستدیر قائم که محور z محور تقارن آنهاست.

۴. خانواده‌ای از بیضیگونها.

۵. خانواده‌ای از مخروطها.

۶. همان سطوح مثال (۳).

سطوح تک مقدار متمایز یک میدان اسکالر هرگز یکدیگر راقطع نمی‌کنند، زیرا با هر نقطهٔ (x,y,z) فقط یک عدد $f(x,y,z)$ متناظر شده است.

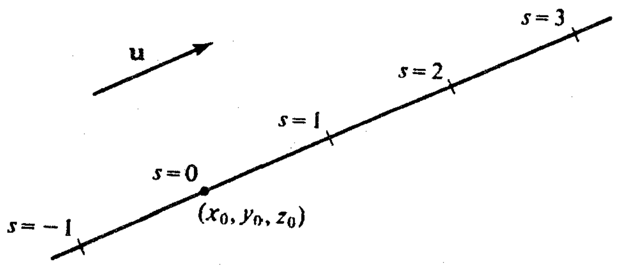
در این جا چند مثال فیزیکی از میدانهای اسکالر عرضه می‌کنیم:چگالی جرم جو، دمای هر نقطهٔ یک دیوار عایق، فشار آب در هر نقطهٔ اقیانوس، پتانسیل گرانشی نقاط فضای نجومی، پتانسیل الکتروستاتیکی ناحیهٔ بین دو صفحهٔ خازن. میدانهای اسکالری چون چگالی وفشار صرفاً تصورات تقریبی از یک وضع فیزیکی پیچیده هستند، زیرا برای آنها خواص اتمی ماده در نظر گرفته نمی‌شود.

اجازه دهید رفتار یک میدان اسکالر رادر همسایگی نقطه‌ای چون (x_0,y_0,z_0) ، که در درون ناحیهٔ تعریفش واقع است، بررسی کنیم.قطعهٔ خطی تصور کنید که از نقطهٔ (x_0,y_0,z_0) به موازات بردار مفروض $\mathbf{u}$ بگذرد. فرض کنید s تغییر مکانی باشد که در امتداد قطعه خط مذکور در جهت $\mathbf{u}$ (شکل ۱.۳) اندازه‌گیری می‌شودبه‌طوری‌که $s=0$ متناظر با (x_0,y_0,z_0) باشد. هر مقدار پارامتر s با

* اصطلاح «isotimic» تک مقدار معنی شده است. این اصطلاح از ریشهٔ یونانی isotimos به معنی *با مقادیر یکسان* گرفته شده است (م).

نقطه‌ای چون (x,y,z) از قطعه خط مذکور و، از این رو، یک اسکالر $f(x,y,z)$ متناظر می‌شود. مشتق df/ds در $s=0$، در صورت وجود، مشتق جهتی f در (x_0,y_0,z_0) در جهت بردار $\mathbf{u}$ نامیده می‌شود.

به عبارت دیگر، مشتق جهتی f صرفاً میزان تغییر f، در واحد فاصله، در یک جهت مفروض است. مشتق جهتی df/ds عموماً به موضع نقطهٔ (x_0,y_0,z_0) و نیز به جهت مفروض بستگی خواهد داشت.



شکل ۱.۳

مشتق جهتی میدان اسکالری چون f در جهت موازی با محور x، که s با افزایشی در جهت x مثبت اندازه‌گیری شود،به طور قراردادی با $\partial f/\partial x$ نشان داده می‌شود، و آن را مشتق جزئی f نسبت به x می‌نامند. به طور مشابه، مشتق جهتی f در جهت y مثبت را $\partial f/\partial y$ و مشتق جهتی f در جهت z مثبت را $\partial f/\partial z$ می‌نامند. فرض می‌کنیم که خواننده تجربیاتی در زمینهٔ مشتقات جزئی کسب کرده است.

مشتق جهتی میدان اسکالری چون f در جهتی که با هیچ یک از محورهای مختصات موازی نیست به طور قراردادی به df/ds نمایش داده می‌شود ، ولی البته این نماد مبهم است ؛ سؤال « df/ds چیست؟ » بدون تعیین جهتی که در آن s اندازه‌گیری شود، فاقد معنی است.

یک طریق مناسب تعیین جهت مطلوب این است که برداری چون $\mathbf{u}$ در آن جهت در نظر بگیریم. اگر چه اندازهٔ $\mathbf{u}$ فاقد اهمیت است؛ به طور قراردادی $\mathbf{u}$ را یک بردار یکّه می‌گیرند. قبلاً دیده‌ایم

(بخش ۳.۲) که یک بردار یکّه در جهت مطلوب را می‌توان با محاسبهٔ dR/ds در آن جهت، که در آن $\mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ ، به دست آورد؛ یعنی، بردار

$$\mathbf{u}=\frac{dx}{ds}\mathbf{i}+\frac{dy}{ds}\mathbf{j}+\frac{dz}{ds}\mathbf{k} \qquad (۱.۳)$$

یک بردار یکّه در همان جهتی است که s اندازه گرفته می‌شود. در این جا اگر (x,y,z) نقطه‌ای از قطعه خطی باشد که قبلاً توصیف شد، x، y، و z را توابعی از s می‌دانیم، که در آن، البته، s طول کمان در امتداد این قطعه است.

اگر مشتقات جزئی $\partial f/\partial x$ ، $\partial f/\partial y$ ، و $\partial f/\partial z$ در ناحیه‌ای موجود و پیوسته باشند، به خوبی می‌دانیم که قاعدهٔ زنجیری زیر برقرار است:

$$\frac{df}{ds}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{dx}{ds}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{dy}{ds}+\frac{\partial f}{\partial z}\frac{dz}{ds} \qquad (۲.۳)$$

اگر *گرادیان* f را بردار

$$\mathbf{grad}\, f=\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \qquad (۳.۳)$$

تعریف کنیم ، می‌بینیم که طرف راست (۲.۳) حاصل ضرب نقطه‌ای $\mathbf{u}$ در $\mathbf{grad}\, f$ است،

$$\frac{df}{ds}=\mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}\, f \qquad (۲'.۳)$$

چون $\mathbf{u}$ یک بردار یکّه است، $\mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}\, f=|\mathbf{u}|\,|\mathbf{grad}\, f|\cos\theta=|\mathbf{grad}\, f|\cos\theta$ که در آن θ زاویهٔ بین $\mathbf{grad}\, f$ و $\mathbf{u}$ است. از این رابطه، اولین خاصیت بنیادی گرادیان نتیجه می‌شود:

خاصیت ۱.۳ مؤلفهٔ $\mathbf{grad}\, f$ در هر جهت مفروض، مشتق جهتی df/ds در آن جهت است.

به استناد اصل ماکسیمم (مثال ۱۵.۱) بزرگترین مقدار ممکن $\mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}\, f$، به ازای بردارهای یکّه $\mathbf{u}$، وقتی بدست می‌آید که $\mathbf{u}$ در جهت $\mathbf{grad}\, f$ باشد (فرض می‌شود $\mathbf{grad} f\neq 0$). چون $\mathbf{u}\cdot\mathbf{grad} f=df/ds$ ، نتیجه می‌گیریم که مقدار ماکسیمم df/ds در جهت $\mathbf{grad}\, f$ به‌دست‌می‌آید.. این دوّمین خاصیّت بنیادی گرادیان است.

خاصیّت ۲.۳ $\mathbf{grad}\, f$ در جهت بیشترین میزان افزایش‌′تابع f است.

اگر $\mathbf{u}$ در جهت $\mathbf{grad}\ f$ باشد، آنگاه

$$\mathbf{u}\cdot \mathbf{grad}\ f=|\mathbf{u}|\ |\mathbf{grad}\ f|\cos\theta=|\mathbf{grad}\ f|$$

که از آن سوّمین خاصیت بنیادی گرادیان نتیجه می‌شود:

خاصیت ۳.۳ اندازهٔ $\mathbf{grad}\ f$ مساوی بیشترین میزان افزایش f در واحد فاصله است.

تجربه نشان داده است که بیان اختصاری خواص بنیادی، حفظ این خواص را آسان‌تر می‌کند. [و این خواص با تعریف (۳.۳) *باید* حفظ شوند.]

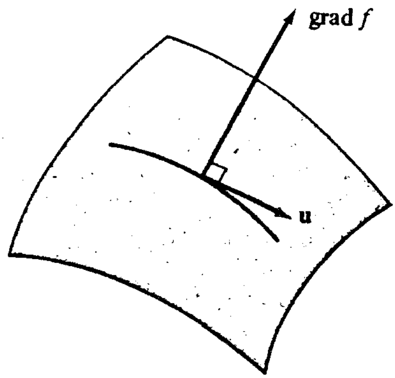
چهارمین خاصیّت بنیادی گرادیان یک تابع این امکان را به ما می‌دهد که از مفهوم گرادیان یک تابع در حل مسائل هندسی استفاده کنیم.

خاصیّت ۴.۳ از هر نقطه چون (x_0,y_0,z_0) که در آن $\mathbf{grad}\ f\neq 0$، یک سطح تک مقدار $f(x,y,z)=C$ می‌گذرد؛ $\mathbf{grad}\ f$ در نقطهٔ (x_0,y_0,z_0) بر این سطح عمود است.

این خاصیّت فقط وقتی برقرار است که مشتقات $\partial f/\partial x$، $\partial f/\partial y$، و $\partial f/\partial z$ در یک همسایگی از نقطهٔ مورد بحث موجود و پیوسته باشند. البته، ثابت C برابر $f(x_0,y_0,z_0)$ است. اگر $\mathbf{grad}\ f=0$، ممکن است مکان هندسی نقاطی که در $f(x,y,z)=C$ صدق می‌کنند یک سطح تشکیل ندهند. (مثلاً، این مکان هندسی را وقتی f یک تابع *ثابت* است در نظر بگیرید.)

ما جزئیات اثبات خاصیّت چهارم را حذف می‌کنیم، ولی بحث زیر احتمالاً یک بحث معقول است. فرض کنید C مقدار f در (x_0,y_0,z_0) باشد. چون $\mathbf{grad} f\neq 0$، از خواص بنیادی قبلی نتیجه می‌شود که df/ds در جهت معینی مثبت است؛ آنگاه، اگر از (x_0,y_0,z_0) در جهت مذکور پیش رویم، مقدار $f(x,y,z)$ افزایش خواهد یافت؛ و اگر در جهت خلاف جهت مذکور پیش رویم، مقدار f کاهش می‌یابد. چون f و مشتقات جزئیش پیوسته‌اند، معقول به نظر می‌رسد که صفحه‌ای موجود باشد که از نقطهٔ (x_0,y_0,z_0) بگذرد و مقادیر f در یک طرف آن بزرگتر از C و در طرف دیگر کوچکتر از C باشند. اکنون فرض کنید کمان هموراری را در نظر بگیریم که از نقطهٔ (x_0,y_0,z_0) بگذرد و تماماً در این سطح باشد. آنگاه به ازای همهٔ نقاط این کمان $f(x,y,z)=C$ و، بنابراین، $df/ds=0$، که در آن s در امتداد این کمان اندازه‌گیری می‌شود. چون $df/ds=\mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}\ f$، و در این حالت $\mathbf{u}$ یک بردار یکّه مماس بر این کمان است، ملاحظه می‌کنیم که: $\mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}\ f=df/ds=0$

و این ایجاب می‌کند که **grad** f بر **u** عمود باشد. این استدلال در مورد هر کمان هموارى که در سطح مذکور باشد و از (x_0,y_0,z_0) بگذرد، به‌کار می‌رود. از این رو **grad** f بر هر چنین کمانی در آن نقطه عمود است، و این حالت فقط وقتی رخ می‌دهد که **grad** f بر سطح مذکور عمود باشد. (شکل ۲.۳)



شکل ۲.۳

اکنون به شش مثالی که قبلاً آورده شد بر می‌گردیم. در هر حالت، گرادیان را به آسانی می‌توان به استناد تعریف (۳.۳) محاسبه کرد.

۱. $\mathbf{grad}\ f=\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-۳\mathbf{k}$

۲. $\mathbf{grad}\ f=۲x\mathbf{i}+۲y\mathbf{j}+۲z\mathbf{k}$

۳. $\mathbf{grad}\ f=۲x\mathbf{i}+۲y\mathbf{j}$

۴. $\mathbf{grad}\ f=\frac{x}{۲}\mathbf{i}+\frac{۲y}{۹}\mathbf{j}+۲z\mathbf{k}$

۵. $\mathbf{grad}\ f=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{\sqrt{x^۲+y^۲}}-\mathbf{k}$

۶. $\mathbf{gead}\ f=-\frac{۲x}{(x^۲+y^۲)^۲}\mathbf{i}-\frac{۲y}{(x^۲+y^۲)^۲}\mathbf{j}$

۱. (این فقط یکی از شش مثالی است که در آن **grad** f ثابت است.)

قبلاً از بخش (۱۵.۱) می‌دانیم که $\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$ بر هر صفحه به صورت $x+2y-3z=C$ عمود است. می‌بینیم که $\mathbf{grad}\ f=\mathbf{i}+2\mathbf{j}-3\mathbf{k}$. به این ترتیب، در این حالت خاص، چهارمین خاصیّت بنیادی محقق شده است.

۲. در این حالت سطوح تک مقدار کره‌هایی به مرکز مبدأ می‌باشند و، بنابراین، قائمهای این سطوح باید بردارهایی باشند که مستقیماً از مبدأ به اطراف کشیده می‌شوند. با کمال اطمینان داریم: $\mathbf{grad}\ f=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}=2\mathbf{R}$ ، و می‌دانیم که که بردار $2\mathbf{R}$ همیشه در جهت دور شدن از مبدأ است. برای ملاحظهٔ اهمیّت مثال (۲)، فرض کنید r فاصلهٔ مبدأ تا نقطهٔ (x,y,z) باشد. آن‌گاه، در این مثال، می‌توانیم تابع مفروض را بر حسب r بنویسیم که $f(x,y,z)=r^2$ می‌شود. به علاوه، اگر از هر نقطه در جهت بیشترین افزایش r^2 حرکت کنیم، که جهتی است که متحرک مستقیماً از مبدأ دور می‌شود، آن‌گاه عنصر طول کمان صرفاً dr است. در این جهت، مشتق df/ds همان df/dr است و $(d/dr)(r^2)=2r$. همچنین، $|2\mathbf{R}|=2r$، و ملاحظه می‌کنیم که سومین خاصیّت بنیادی در این حالت خاص محقق شده است.

۳. خواننده‌ای که با مختصات استوانه‌ای آشنایی دارد می‌تواند مشابه مثال (۲) عمل کند. فرض کنید $\rho=(x^2+y^2)^{1/2}$ ، فاصلهٔ نقطهٔ (x,y,z) تا محور z. آن‌گاه f در این مثال به‌صورت سادهٔ ρ^2 است، و به وضوح در جهت عمود بر محور z بیشترین سرعت افزایش را دارد. مشتق تابع در این جهت 2ρ می‌باشد که برابر اندازهٔ $|\mathbf{grad}\ f|=(4x^2+4y^2)^{1/2}$ نیز هست. به وضوح این جهت بر سطوح تک مقدار عمود است، زیرا این سطوح استوانه‌های مستدیر قائمی هستند که محور تقارن آنها محور z است. در این حالت، مانند مثال (۲)، دومین، سومین، و چهارمین خاصیّت بنیادی بسیار واضحند.

۵. [مثال (۴) را حذف می‌کنیم.] آنچه در این جا باید به آن دقت شود اهمیّت هندسی جملهٔ $-\mathbf{k}$ در $\mathbf{grad}\ f$ است. سطوح تک مقدار این تابع، مخروطی‌هایی هستند که رأس هر یک بر محور z قرار دارد و همراه با افزایش z گسترده می‌شود. به این ترتیب، به آسانی می‌بینیم که قائم بر یک چنین سطحی مانند مثال (۳) در جهت عمود بر محور z نیست، ولی یک مؤلّفهٔ ثابت در جهت z منفی دارد.

مسائل زیر نمونه‌هایی جهت تشریح کاربرد خواص بنیادی گرادیان یک میدان اسکالر می‌باشند.

مثال ۱.۳ اگر $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$ ، df/ds را در جهت بردار $4\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ در نقطهٔ (۲،۱،۱) بیابید.

حل در نقطهٔ (۲،۱،۱)، $\mathbf{grad} f=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}-\mathbf{k}=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$. بردار یکّه در جهت مطلوب عبارت است از: $\mathbf{u}=\frac{2}{3}\mathbf{i}+\frac{2}{3}\mathbf{j}-\frac{1}{3}\mathbf{k}$. (که از تقسیم $4\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ بر اندازه‌اش نتیجه می‌شود.) آن‌گاه، به استناد خاصیّت (۱.۳)، $df/ds = \mathbf{u}\cdot\mathbf{grad}\, f = \frac{4}{3}+\frac{4}{3}+\frac{1}{3} = 3$. معنایش این است که اگر از نقطهٔ (۲،۱،۱) در جهتی که بیان شده است پیش رویم، مقدار تابع f در هر واحد فاصله ، ۳ واحد افزایش می‌یابد.

مثال ۲.۳ درجهٔ حرارت نقاط فضا با $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$ داده می‌شود.پشه‌ای می‌خواهد از نقطهٔ (۲،۱،۱) در جهتی پرواز کند که درکمترین زمان ممکن به سرما برسد. در چه جهتی باید حرکت کند؟

حل چنان که در مثال (۱.۳) دیدیم،در نقطهٔ (۲،۱،۱) ، $\mathbf{grad}\, f=2\mathbf{i}+2\mathbf{j}-\mathbf{k}$. پشه باید در جهت $-\mathbf{grad}\, f$ حرکت کند، زیرا $\mathbf{grad}\, f$ در جهت افزایش درجه حرارت است.

مثال ۳.۳ پشه‌ای با تندی ۵ واحد در ثانیه در جهت بردار $4\mathbf{i}+4\mathbf{j}-2\mathbf{k}$ پرواز می‌کند.درجهٔ حرارت با $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$ داده می‌شود. در لحظه‌ای که پشه از نقطهٔ (۲،۱،۱) می‌گذرد، میزان افزایش درجهٔ حرارت در واحد زمان چقدر است؟

حل چنان که در مثال (۱.۳) بالا نشان داده شد، df/ds در این جهت ۳ واحد در واحد فاصله است. به این ترتیب، سرعت افزایش درجهٔ حرارت $df/dt=(df/ds)(ds/dt)=(3)(5)=15$ درجه بر ثانیه است.

مثال ۴.۳ اگر $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$ ، بیشترین مقدار ممکن df/ds در نقطهٔ (۲،۴،۱) چقدر است؟

حل $|\mathbf{grad}\, f| = |2\mathbf{i}+8\mathbf{j}-\mathbf{k}| = \sqrt{69}$. جواب تقریباً ۸٫۳۱ واحد در واحد فاصله است.

مثال ۵.۳ بردار یکّه‌ای عمود بر سطح $x^2+y^2-z=6$ در نقطهٔ (۲،۳،۷)بیابید.

حل این سطح، یک سطح تک مقدار برای تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$ است. در (۲،۳،۷) داریم: $\mathbf{grad}\, f=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}-\mathbf{k}=4\mathbf{i}+6\mathbf{j}-\mathbf{k}$. اندازهٔ این بردار $\sqrt{53}$ است. بنابراین، یک جواب عبارت

است از: $(\sqrt{۵۳}/۵۳)(۴\mathbf{i}+۶\mathbf{j}-\mathbf{k})$. (منهای این بردار نیز یک جواب درست است.)

ممکن است خواننده ملاحظه کند که عدد «۶»، ثابت موجود در طرف راست معادلهٔ معرف سطح تک مقدار مثال (۵.۳)، اثری بر قائم، $\mathbf{grad}\ f$ ، ندارد. این کاملاً درست نیست. اگر بپذیریم که در فرمول $\mathbf{grad}\ f$ عدد ۶ نادیده گرفته می‌شود، ولی وقتی گرادیان در نقطهٔ (x,y,z) محاسبه شود، اعداد x ، y ، و z باید در $x^۲+y^۲-z=۶$ صدق کنند. به وضوح $۲^۲+۳^۲-۷=۶$.

تمرینات

۱. $\mathbf{grad}\ f$ را محاسبه کنید هرگاه

(الف) $f=\sin x+e^{xy}+z$ (*)

(ب) $f=۱/|\mathbf{R}|$

(ج) $f=\mathbf{R}\cdot\mathbf{i}\times\mathbf{j}$

۲. اگر $f(x,y,z)=x^۲+y^۲$ ، مکان هندسی نقاطی از فضا که در آن نقاط $\mathbf{grag}\ f$ موازی محور y باشد چیست؟

۳. در بارهٔ تابعی که گرادیانش همه جا موازی محور y است چه می‌توان گفت؟

۴. تمام توابعی چون $f(x,y,z)$ را بیابید که برای آنها $\mathbf{grad}\ f=۲x\mathbf{i}+z\mathbf{j}+y\mathbf{k}$.

۵. فرض کنید $f(x,y,z)$ فاصلهٔ بین (x,y,z) و محور z باشد، بدون انجام هیچ محاسبه‌ای $\mathbf{grad}\ f$ را وصف کنید.

۶. مشتق تابع $f(x,y,z)=x+xyz$ را در نقطهٔ (۲،۲،-۱) در هر یک از جهت‌های (الف) $۲\mathbf{i}+۲\mathbf{j}-\mathbf{k}$ (ب) $۲\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+\mathbf{k}$ بیابید.

۷. مشتق جهتی df/ds را در نقطهٔ (۲-، ۳، ۱) در جهت $-\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$ بیابید هرگاه

(الف) $f(x,y,z)=yz+xy+xz$

(*) منظور تابع f با ضابطهٔ $f(x,y,z)=\sin x+e^{xy}+z$ است (م)

(ب) $f(x,y,z)=x^2+2y^2+3z^2$

(ج) $f(x,y,z)=xy+x^3y^3$

(د) $f(x,y,z)=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$

۸. فرض کنید $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$. بیشترین مقدار df/ds در نقطهٔ (۳،۵،۴) را بیابید،

(الف) با استفاده از گرادیان f؛

(ب) از طریق تعبیر هندسی f.

۹. اندازهٔ بزرگترین میزان تغییر $f(x,y,z)=(x^2+z^2)^3$ در نقطهٔ (۱،۳،-۲) را بیابید. تعبیر هندسی کنید.

۱۰. برداری قائم بر سطح $x^2+yz=5$ در نقطهٔ (۲،۱،۱) بیابید.

۱۱. معادلهٔ صفحهٔ مماس بر کرهٔ $x^2+y^2+z^2=21$ در نقطهٔ (۲،۴،-۱) را بیابید.

۱۲. برداری قائم بر استوانهٔ $x^2+z^2=8$ در نقطهٔ (۲،۵،۲) بیابید؛

(الف) با رسم یک نمودار و بررسی وضعیت.

(ب) از طریق محاسبهٔ گرادیان تابع $f(x,y,z)=x^2+z^2$ در نقطهٔ (۲،۵،۲).

۱۳. معادلهٔ صفحهٔ مماس بر سطح $z^2-xy=14$ در نقطهٔ (۲،۱،۴) را بیابید.

۱۴. معادلات خط قائم بر کرهٔ $x^2+y^2+z^2=2$ در نقطهٔ (۱،۱،۰) را بیابید،

(الف) با رسم یک نمودار و بررسی وضعیّت؛

(ب) با محاسبهٔ گرادیان $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$ در (۱،۱،۰)، و استفاده از آن برای دستیابی به قائم.

۱۵. یک بردار یکّهٔ قائم بر صفحهٔ $3x-y+2z=3$ بیابید،

(الف) به روش مذکور در بخش (۱۰.۱)؛

(ب) به روش مذکور در بخش گذشته.

۱۶. معادلهٔ صفحهٔ مماس بر سطح $z=x^2+y^2$ در (۲،۳،۱۳) را بیابید. [*راهنمایی:* تابع $f(x,y,z)=x^2+y^2-z$ را در نظر بگیرید.]

۱۷. بردار یکّه‌ای مماس بر منحنی مقطع استوانهٔ $x^2+y^2=4$ و کرهٔ $x^2+y^2+z^2=9$ در نقطهٔ

$(\sqrt{۲},\sqrt{۲},\sqrt{۵})$ بیابید،

(الف) با رسم یک نمودار و بررسی وضعیت؛

(ب) از طریق یافتن حاصل ضرب برداری قائمهای بر دو سطح مذکور در آن نقطه؛

(ج) با نوشتن معادلات منحنی به صورت پارامتری. [*راهنمایی:* فرض کنید $x=۲\sin t$ و $y=۲\cos t$.]

۱۸. زاویهٔ بین قائمهای کره‌های متقاطع $x^۲+y^۲+z^۲=۱۶$ و $(x-۱)^۲+y^۲+z^۲=۱۶$ در نقطهٔ $(۱/۲,۳/۲,۳\sqrt{۶}/۲)$ را بیابید.

۱۹. خط $۲x=y=۲z$ بیضیگون $۲x^۲+y^۲+۲z^۲=۸$ را با چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

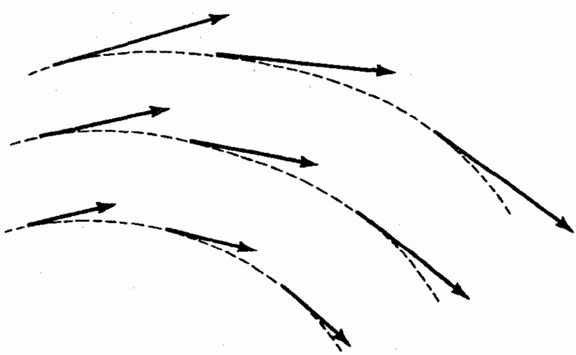
۲.۳ میدانهای برداری و خطوط شارش

هر *میدان برداری* $\mathbf{F}$ قاعده‌ای است که به هر نقطه مانند (x,y,z) از یک ناحیه برداری چون $\mathbf{F}(x,y,z)$ نسبت می‌دهد. به عبارت دیگر، هر میدان برداری یک تابع برداری سه متغیره است.

بعضی از میدانهای برداری در همهٔ نقاط فضا تعریف نمی‌شوند؛ مثلاً، میدان برداری

$$\mathbf{F}(x,y,z)=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{x^۲+y^۲}$$

در امتداد محور z تعریف نمی‌شود، زیرا در هر نقطهٔ این محور $x^۲+y^۲=۰$



شکل ۳.۳

برای تصور یک میدان برداری، فرض می‌کنیم از هر نقطهٔ واقع در ناحیهٔ مفروض یک بردار کشیده شود. امکان دارد هم جهت و هم اندازهٔ بردار با تغییر موضع نقطه تغییر کند. (شکل ۳.۳)

هر میدان برداری را می‌توانیم بر حسب مؤلفه‌هایش بنویسیم:

$$\mathbf{F}(x,y,z)=F_1(x,y,z)\mathbf{i}+F_2(x,y,z)\mathbf{j}+F_3(x,y,z)\mathbf{k}$$

مثال ۶.۳ اگر $f(x,y,z)$ یک میدان *اسکالر* باشد، $\mathbf{grad}\, f$ یک میدان *برداری* است.

مثال ۷.۳ هر یک از « بردارهای » $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$ (بخش ۴.۲) یک میدان برداری است که در صفحه تعریف شده است .

مثال ۸.۳ در هیدرودینامیک، به هر نقطهٔ یک ناحیه برداری منسوب می‌شود که سرعت شارهٔ جاری در آن نقطه است. در این حالت، در هر لحظه، یک میدان برداری داریم که سرعت لحظه‌ای شاره را در هر لحظه نشان می‌دهد.

مثال ۹.۳ در فیزیک نظری، به هر نقطه در فضا یک بردار شدت الکتریکی منسوب می‌شود که نیروی الکتریکی وارد بر هر واحد بار (مثبت) در آن نقطه است. این میدان الکتریکی در هر لحظه یک میدان برداری تشکیل می‌دهد. (میدانهای مغناطیسی و گرانشی نیز مثالهایی از میدانهای برداری در فضایند.)

یک میدان برداری $\mathbf{F}$ در نظر بگیرید که در هر نقطه از یک ناحیه در فضا تعریف شده وناصفر است. هر منحنی که از این ناحیه بگذرد یک *خط شارش* $\mathbf{F}$ نامیده می‌شود، به شرطی که $\mathbf{F}$ در هر نقطهٔ این منحنی بر آن مماس باشد. (خطوط شارش را *خطوط جریان* یا *منحنیهای سرشت‌نمای* $\mathbf{F}$ نیز نامیده‌اند. اگر $\mathbf{F}$ یک میدان نیرو باشد، خطوط شارش را معمولاً *خطوط نیرو* می‌نامند.) در شکل (۳.۳) خطوط شارش با منحنیهای نقطه چین نشان داده شده‌اند.

به خطوط شارش به طریق دیگر نیز می‌توان نگاه کرد. میدان برداری $\mathbf{F}$ در هر نقطه از یک ناحیه یک جهت تعیین می‌کند. اگر یک ذره چنان حرکت کند که جهت سرعتش در هرنقطه بر جهت میدان برداری $\mathbf{F}$ در آن نقطه منطبق باشد، منحنی فضایی مسیر، یک خط شارش است.

اگر میدان برداری $\mathbf{F}$ معرف سرعت در هر نقطه از یک دستگاه هیدرودینامیکی باشد، با این

فرض که $\mathbf{F}$ تابعی از زمان نباشد، خطوط شارش مسیرهایی هستند که‌به‌وسیلهٔ ذرّات شاره پیموده می‌شوند. (وضعیتی که در آن شارشها با زمان تغییر کنند، پیچیده‌تر است.)

توجه کنید که اگر $g(x,y,z)$ یک میدان اسکالر باشد که در هیچ نقطه صفر نشود، خطوط شارش میدان برداری $g(x,y,z)\mathbf{F}(x,y,z)$ همان خطوط شارش $\mathbf{F}(x,y,z)$ خواهد بود، زیرا تنها جهت $\mathbf{F}$ در هر نقطه به تعیین خطوط شارش مربوط می‌شود.

چون جهت یک خط شارش به طور منحصر به فرد به وسیلهٔ میدان $\mathbf{F}$ تعیین می‌شود، نمی‌توانیم در یک نقطه دو جهت مختلف داشته باشیم و، بنابراین، غیر ممکن است که دو خط شارش یکدیگر را قطع کنند. اگر اندازهٔ $\mathbf{F}$ در نقطه‌ای از فضا صفر باشد، هیچ جهتی در آن تعریف نمی‌شود و هیچ خط شارشی از آن نقطه نمی‌گذرد. اکنون اجازه دهید تا ببینیم که خطوط شارش را چگونه محاسبه می‌کنند.

اگر $\mathbf{R}$ بردار موضع نقطهٔ دلخواهی از یک خط شارش و s طول کمانی باشد که در امتداد این خط اندازه‌گیری می‌شود، آنگاه بردار یکّه مماس بر منحنی در آن نقطه عبارت است از:

$$\mathbf{T}=\frac{d\mathbf{R}}{ds}=\frac{dx}{ds}\mathbf{i}+\frac{dy}{ds}\mathbf{j}+\frac{dz}{ds}\mathbf{k} \tag{۴.۳}$$

یکسانی جهت $\mathbf{T}$ و $\mathbf{F}$ را می‌توان بصورت

$$\mathbf{T}=\beta\mathbf{F} \tag{۵.۳}$$

نوشت که در آن β یک تابع اسکالر از x، y، و z است. این رابطه بر حسب مؤلفه‌ها چنین نوشته می‌شود:

$$\beta F_1=\frac{dx}{ds} \qquad \beta F_2=\frac{dy}{ds} \qquad \beta F_3=\frac{dz}{ds} \tag{۶.۳}$$

اگر F_1، F_2، و F_3 همه ناصفر باشند، می‌توانیم β را حذف کنیم و (۶.۳) را به صورت دیفرانسیلی

$$\frac{dx}{F_1}=\frac{dy}{F_2}=\frac{dz}{F_3} \tag{۷.۳}$$

بنویسیم. اگریکی از این توابع (مثلاً F_3) در همهٔ نقاط یک ناحیه صفر باشد، آنگاه از (۶.۳) مستقیماً

نتیجه می‌گیریم که منحنی در یک صفحهٔ (مثلاً، ثابت$=z$) موازی با یکی از صفحات مختصات قرار می‌گیرد.

مثال ۱۰.۳ اگر $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+\mathbf{k}$ ، آنگاه $F_1=x$، $F_2=y$، و $F_3=1$، که خواهیم داشت: $dx/x=dy/y=dz$. از حل معادلات دیفرانسیل $dx/x=dz$ و $dy/y=dz$ جوابهای $x=c_1e^z$ ، $y=c_2e^z$ به دست می‌آیند. به این ترتیب، معادلات خط شارش که از نقطهٔ (۷، ۴، ۳) می‌گذرد عبارتند از: $x=3e^{z-7}$ ، $y=4e^{z-7}$. معادلات خط شارشی که از مبدأ می‌گذرند عبارتند از: $x=0$ ، $y=0$ ؛ یعنی، محور z.

مثال ۱۱.۳ اگر $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ ، آنگاه $F_1=x$، $F_2=y$، و $F_3=0$. در این حالت (۶.۳) به صورت $\beta x=dx/ds$ ، $\beta y=dy/ds$ ، و $0=dz/ds$ در می‌آید. از حذف β از دو معادلهٔ اوّل معادلهٔ $dx/x=dy/y$ و از حل آن جواب $y=cx$ را به دست می‌آوریم. از معادلهٔ سوّم خواهیم داشت: $z=$ثابت. اگر x و y هر دو صفر باشند میدان صفر است و، بنابراین، خطوط شارش در امتداد محور z تعریف نمی‌شوند. خطوط شارش، نیمخطهای مستقیم موازی صفحهٔ xy می‌باشند که از محور z به اطراف کشیده می‌شوند.

مثال ۱۲.۳ اگر $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ ، آنگاه $-\beta y=dx/ds$، $\beta x=dy/ds$، و $0=dz/ds$. به این ترتیب، $-dx/y=dy/x$ و، از این رو، $x^2+y^2=$ثابت . همچنین، داریم: $z=$ثابت. خطوط شارش دوایری هستند که محور z را احاطه کرده‌اند و موازی صفحهٔ xy می‌باشند. مانند مثال (۱۱.۳)، هیچ خط شارشی از محور z نمی‌گذرد.

امکان دارد خطوط شارش مانند مثالهای (۱۰.۳) و (۱۱.۳) تا بی‌نهایت گسترش یابند، یا، مانند مثال (۱۲.۳)، به یکدیگر نزدیک باشند.

تمرینات

۱. یک میدان برداری در صفحهٔ xy با $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$ تعریف شده است. نموداری مشابه شکل (۳.۳) رسم کنید که نمایش دهندهٔ مقادیر $\mathbf{F}$ در نقاط (۰،۱)،(۱،۰)،(۰،۱-)،(۱-،۰)،(۱،۱)،

(−۱،۱)،(−۱،−۱)، (۱،−۱)، و چندی از نقاط دیگر باشد. خطوط شارش را نشان دهید.

۲. فرض کنید $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

(الف) معادلهٔ کلی یک خط شارش را بیابید.

(ب) خط شارشی راکه از نقطهٔ (۲،۱،۱) میگذرد بیابید.

۳. بدون هیچ محاسبه‌ای، خطوط شارش میدان برداری $\mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ را وصف کنید. [*راهنمایی:* اگر ذره‌ای در موضع (x,y,z) دارای سرعت $\mathbf{R}$ باشد، در کدام جهت نسبت به مبدأ در حرکت است؟]

۴. خطوط شارش گرادیان یک میدان اسکالر، سطوح تک مقدار را به طور عمودی قطع می‌کنند. توضیح دهید.

۳.۳ واگرایی

مفهوم *گرادیان*، که قبلاً تعریف شده، فقط درمورد میدانهای اسکالر به کار می‌رود. اکنون مسألهٔ پیچیده‌تر آهنگ تغییر یک میدان *برداری* را بررسی می‌کنیم. دو روش اندازه‌گیری آهنگ تغییر یک میدان برداری وجود دارد: *واگرایی* و *تاو*

تسامحاً، واگرایی یک میدان برداری، یک میدان اسکالر است که بیان می‌کند که، در هرنقطه، میدان مفروض چقدر از آن نقطه متباعد می‌شود. تاو یک میدان برداری، میدانی برداری است که نشان می‌دهد که، در هر نقطه، میدان مفروض چگونه در نزدیکی آن نقطه می‌چرخد. با این وجود، توصیف واگرایی و تاو به صورت اختصاری فوق نه فقط بی‌فایده بلکه قدری خطرناک است، زیرا (اگر جدی گرفته شود) دو توصیف مذکور نه تنها مبهمند بلکه از نظر تکنیکی نادرستند. چنان که خواهیم دید، ممکن است میدانی یک واگرایی مثبت داشته باشد بدون آنکه اصلاً مشاهده شود که میدان « واگرا » می‌شود، و ممکن است میدانی یک تاو نابدیهی داشته باشد و در عین حال این میدان خطوط شارشی داشته باشد که اصلاً خمیده نشوند.

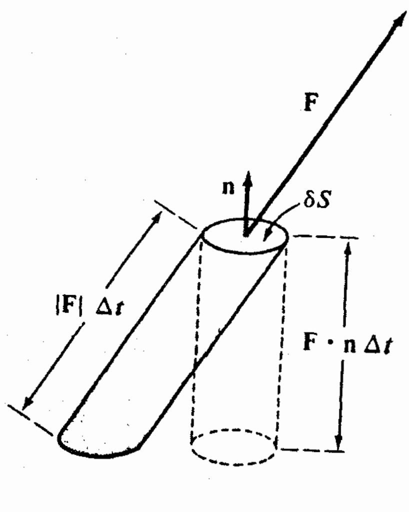
در این بخش فقط واگرایی را مورد بحث قرار می‌دهیم‌این مبحث رابا یک بحث مبتنی بر اکتشاف شهودی آغاز می‌کنیم که موجبات یک تعریف صوری را فراهم خواهد کرد.

مطابق معمول، میدان برداری بصورت

$$\mathbf{F}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$$

نمایش داده خواهد شد. موقتاً، چنان‌که در مثال (۸.۳) بخش قبل ملاحظه شد، $\mathbf{F}(x,y,z)$ را سرعت یک ذرهٔ شاره در موضع (x,y,z) تعبیر کنید؛ به این ترتیب، $\mathbf{F}$ میدان سرعت شاره است. اکنون قطعهٔ مسطح کوچکی از سطح درون شاره را در نظر بگیرید. فرض کنید δS مساحت این قطعه و $\mathbf{n}$ یک بردار یکّه عمود بر این قطعه باشد. می‌خواهیم عبارتی بیابیم که مقدار شاره‌ای را که از این سطح در واحد زمان جاری می‌شود نشان دهد.

چنان‌که در شکل (۴.۳) نشان داده شده است، اگر $\mathbf{F}$ سرعت شاره در نقطه‌ای از قطعهٔ مورد بحث باشد، آنگاه مقدار شاره‌ای که از این قطعه در زمان Δt خواهد گذشت، تقریباً، شارهٔ لوله‌ای است با قاعدهٔ δS و محور مرکزی $\mathbf{F}\Delta t$. وقتی δS و Δt کوچک شوند، این تقریب دقیق می‌شود. اگر فرض کنیم چگالی شاره برابر واحد باشد (شاره غیر قابل تراکم باشد)، آنگاه مقدار شارهٔ موجود در این لوله با حجمش برابر است. مساحت قاعده‌اش δS و ارتفاعش $\mathbf{F}\Delta t\cdot\mathbf{n}$ است. از ضرب این دو در هم و تقسیم بر Δt ملاحظه می‌کنیم که *مقدار شاره‌ای که از سطح به مساحت* δS *(در جهت* $\mathbf{n}$ *) در واحد زمان می‌گذرد تقریباً* $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\delta S$ *است. این را شار میدان برداری* $\mathbf{F}$ *گذران از سطح به مساحت* δS می‌نامند.



شکل ۴.۳

برای تعریف واگرایی میدان $\mathbf{F}$، متوازی السطوح قائم کوچکی با گوشه‌های (x,y,z)، $(x+\Delta x,y,z)$، $(x,y+\Delta y,z)$، $(x,y,z+\Delta z)$، و غیره در نظر می‌گیریم (شکل ۵.۳). ما شار کلی میدان $\mathbf{F}$ گذران از شش وجه این قوطی را در جهت از درون به برون (در هر وجه، قائم $\mathbf{n}$ را برونسو انتخاب می‌کنیم) محاسبه می‌کنیم. آنگاه این شار را بر حجم قوطی تقسیم می‌کنیم و از خارج قسمت، وقتی ابعاد قوطی به صفر میل کنند، حد می‌گیریم. *این حد، واگرایی* $\mathbf{F}$ *در نقطهٔ* (x,y,z) *نامیده می‌شود.*

محاسبهٔ این حد با فرایند زیر انجام می‌شود: بر وجه شمارهٔ یک در شکل (۵.۳)، قائم برونسو $\mathbf{-i}$ است. به این ترتیب، مطابق تحلیل بالا، شار خروجی از این وجه تقریباً $-F_1(x,y,z)\Delta y\Delta z$ است. شار خروجی از وجه شمارهٔ دو، که قائم برونسویش $\mathbf{i}$ می‌باشد، $F_1(x+\Delta x,y,z)\Delta y\Delta z$ است. کل شار خروجی از وجوه یک و دو عبارت است از:

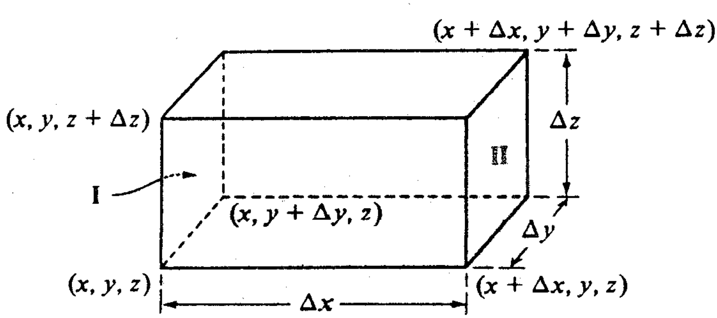
$$[F_1(x+\Delta x,y,x)-F_1(x,y,x)]\Delta y\Delta z$$

تفاضل این مقادیر F_1، با همان درجهٔ دقت، از دستور

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\Delta x$$

به دست می‌آید. بنابراین، سهمی که به شار خالص خروجی از وجوه یک و دو داده می‌شود عبارت است از:

$$\frac{\partial F_1}{\partial x}\Delta x\Delta y\Delta z$$



شکل ۵.۳

به طور مشابه، وجوه در جهت y ، سهم

$$\frac{\partial F_2}{\partial y}\Delta x\Delta y\Delta z$$

را دارند و ، با جمع سهم وجوه باقیمانده ، ملاحظه می‌کنیم که شار خالص خروجی تقریباً برابر است با:

$$\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\right)\Delta x\Delta y\Delta z$$

پس از تقسیم بر حجم $\Delta x\Delta y\Delta z$ ، این تقریب با حدگیری دقیق می‌شود و این بحث به تعریف زیر، که تعریف صوری واگرایی است، می‌انجامد:

واگرایی میدان برداری

$$\mathbf{F}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k} \tag{۸.۳}$$

که یک میدان اسکالر است و به $\text{div}\mathbf{F}$ *نمایش داده می‌شود، به صورت*

$$\text{div}\mathbf{F}=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z} \tag{۹.۳}$$

تعریف می‌شود.

چنان که در مثالها تشریح خواهیم کرد، محاسبهٔ واگرایی یک میدان برداری آسان است. به خاطر بسپارید که $\text{div}\mathbf{F}$ با معادلهٔ (۹.۳)تعریف می‌شود ، و بحث مبتنی بر اکتشافات شهودی بالا به تعبیر $\text{div}\mathbf{F}$ به عنوان شار خالص خروجی از واحد حجم انجامید.

مثال ۱۳.۳ $\text{div}\mathbf{F}$ را بیابید هرگاه $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y^2z\mathbf{j}+xz^3\mathbf{k}$.

حل

$$\text{div}\mathbf{F}=\frac{\partial}{\partial x}(x)+\frac{\partial}{\partial y}(y^2z)+\frac{\partial}{\partial z}(xz^3)$$

$$=1+2yz+3xz^2$$

مثال ۱۴.۳ $\text{div}\mathbf{F}$ را بیابید هرگاه $\mathbf{F}=xe^y\mathbf{i}+e^{xy}\mathbf{j}+\sin yz\mathbf{k}$.

حل

$$\text{div}\mathbf{F}=\frac{\partial}{\partial x}(xe^y)+\frac{\partial}{\partial y}(e^{xy})+\frac{\partial}{\partial z}(\sin yz)$$

$$=e^y+xe^{xy}+y\cos yz$$

مثال ۱۵.۳ مثالی از یک میدان برداری F بیاورید که واگرائیش در هر نقطه از فضا برابر ۳ باشد.

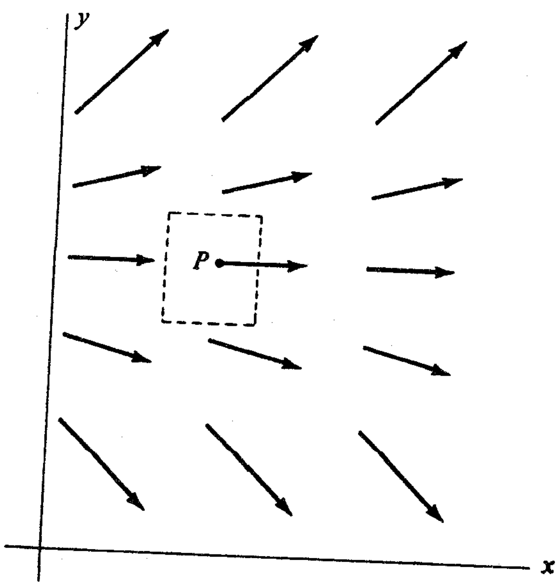
حل جوابهای متعددی وجود دارند؛ مثلاً، $\mathbf{F}=3x\mathbf{i}$ یا $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.

مثال ۱۶.۳ درشکل (۶.۳)، آیا واگرایی $\mathbf{F}$ در نقطهٔ P مثبت است یا منفی؟ فرض کنید $\mathbf{F}$ در امتداد محور z تغییری ندارد و F_3 تابع صفر است.

حل از روی نمودار ملاحظه می‌کنیم که F_1 تقریباً ثابت است؛ بنابراین، $\partial F_1/\partial x=0$. زیر P، F_2 منفی است؛ و بالای P، F_2 مثبت است؛ از این رو، $\partial F_2/\partial y$ مثبت است. چون $F_3=0$، داریم: $\partial F_3/\partial z=0$. نتیجه می‌شود که واگرایی $\mathbf{F}$ در نقطهٔ P مثبت است.

با یک بحث مبتنی بر اکتشاف شهودی، می‌توانیم ببینیم که شار x یک متوازی‌السطوح در P حذف خواهد شد، در حالی که شار خروجی معینی برای هر دو وجه y موجود است. چون هیچ شاری در جهت z وجود ندارد، واگرایی مثبت است.

مثال ۱۷.۳ درشکل (۷.۳)، آیا واگرایی $\mathbf{F}$ در نقطهٔ P مثبت است یا منفی؟ فرض می‌کنیم $\mathbf{F}$ هیچ تغییری در جهت z نداشته باشد و F_3 تابع صفر باشد.



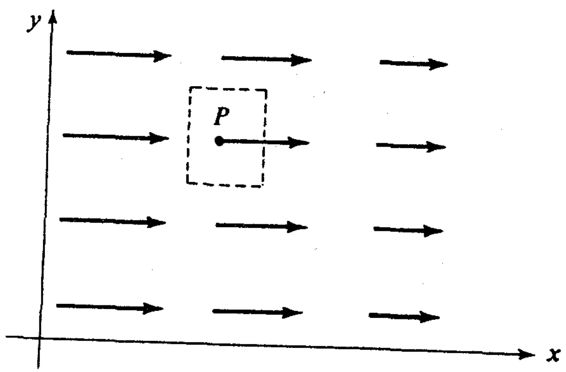
شکل ۶.۳

حل از روی شکل می‌بینیم که وقتی x افزایش می‌یابد F_1 کاهش پیدا می‌کند، از این رو $\partial F_1/\partial x$ منفی است. F_2 و F_3 در هر نقطه صفرند. نتیجه می‌شود که واگرایی $\mathbf{F}$ در هر نقطه منفی است.

مجدداً با همان بحث ملاحظه می‌کنیم که هیچ شاری در جهت y یا z وجود ندارد، و اگر به راست حرکت کنیم شار موجود در جهت x *کاهش می‌یابد*. بنابراین، شار خالصی که از میان وجوه یک قوطی در P می‌گذرد در جهت از خارج به داخل قوطی است، و واگرایی باید منفی باشد.

در شکل (۶.۳) ، جایی که واگرایی مثبت است، خطوط شار، به یک معنی، در یک همسایگی از P واگرا می‌شوند. این تصویری است که انگیزهٔ بیان این عبارت معمول (نادرست) است که « واگرایی مثبت به این معنی است که میدان واگرا می‌شود، واگرایی منفی به این معنی است که میدان همگرا می‌شود. » توجه کنید که در شکل (۷.۳)، واگرایی منفی است، ولی خطوط شارش همگرا نیستند. واگرایی منفی است به این دلیل که شاری که از طرف چپ بـه یک نـاحیهٔ مـفروض وارد می‌شود بیشتر از شاری است که از طرف راست خارج می‌شود.

اجازه دهید که یک کاربرد هیدرودینامیکی را دراین‌جا ذکر کنیم. مجدداً، $\mathbf{F}$ را سرعت میدان یک شاره تعبیر می‌کنیم که *چگالی آن،* ρ*، احتمالاً به موضع زمان بستگی دارد*. آن‌گاه با یک تغییر ساده از تحلیلی که از شار داریم دیده می‌شود که مقدار شاره‌ای که از سطح به مساحت δS در جهت قائم یکّه‌اش $\mathbf{n}$، در واحد زمان، می‌گذرد، عبارت است از: $\rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\delta S$. از این رو، مقدار شاره‌ای که از یک



شکل ۷.۳

قوطی کوچک با ابعاد Δx ، Δy ، و Δz در واحد زمان شارش می‌کند تقریباً عبارت است از:

$$\operatorname{div}(\rho \mathbf{F})\Delta x\, \Delta y\, \Delta z$$

این نتیجه باید برای حالت *کاهش* مقدار شاره

$$\rho\, \Delta x\, \Delta y\, \Delta z$$

و از این رو کاهش چگالی معتبر باشد. بنابراین می‌توانیم بنویسیم:

$$\operatorname{div}\ (\rho \mathbf{F}) = -\frac{\partial \rho}{\partial t}$$

این را *معادلهٔ* پیوستگی در مکانیک شاره می‌نامند؛ این معادله بیانگر قانون بقای جرم است.

استدلال مبتنی بر اکتشاف شهودی که در این بخش آورده شد، البته با انتقادی که بر آن وارد است، مانند اغلب بحثهای متضمن « بی نهایت کوچکها» است، توجیه دقیقش موکول به حکمی است که به « قضیهٔ واگرایی » موسوم است، که آن را در فصل بعد مطالعه خواهیم کرد. در حال حاضر به یک تعریف صوری و دقیق $\operatorname{div}\mathbf{F}$ در معادلهٔ (۹.۳) و یک تصور شهودی از آن اکتفا می‌کنیم.

تمرینات

۱. با فرض $\mathbf{F} = e^{xy}\mathbf{i} + \sin xy\mathbf{j} + \cos^{۲} zx\mathbf{k}$ ، $\operatorname{div}\mathbf{F}$ را بیابید.

۲. با فرض $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ، $\operatorname{div}\mathbf{F}$ را بیابید.

۳. با فرض $\mathbf{F} = \operatorname{grad} \phi$ و $\phi = ۳x^{۲}y^{۳}z$ ، $\operatorname{div}\mathbf{F}$ را بیابید.

۴. واگرایی میدان

$$\frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}}{(x^{۲} + y^{۲} + z^{۲})^{۱/۲}}$$

را بیابید. آیا واگرایی این میدان در هر نقطه از فضا تعریف می‌شود؟

۵. به تفصیل نشان دهید که: $\operatorname{div}(\phi\mathbf{F}) = \phi \operatorname{div}\ \mathbf{F} + \mathbf{F}\cdot \operatorname{grad} \phi$.

۶. مثالی از یک میدان اسکالر ϕ و یک میدان برداری $\mathbf{F}$ بیاورید که هیچ یک از آنها ثابت نباشد و $\operatorname{div}(\phi\mathbf{F})$ برابر $\phi \operatorname{div}\mathbf{F}$ باشد.

۷. یک میدان غیر ثابت مثال بزنید که واگرائیش صفر باشد.

۸. یک میدان با واگرایی ثابت منفی مثال بزنید.

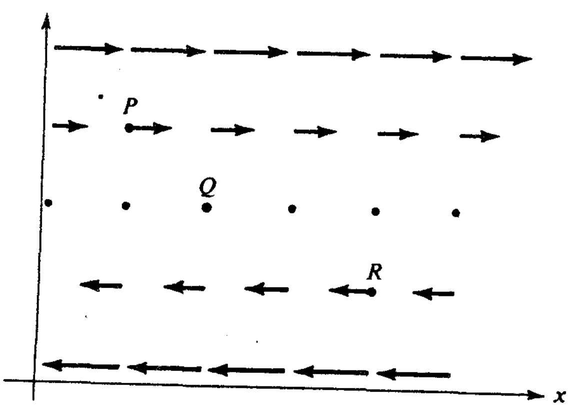
۹. یک میدان مثال بزنید که واگرائیش فقط به x بستگی داشته باشد؛ همیشه مثبت باشد؛ و با افزایش x افزایش یابد. (*راهنمایی:* تابع e^x به ازای هر x مثبت است.)

۱۰. راست است یا دروغ: اگر $\mathbf{F}$ همه جا ناصفر و $\text{div}\ \mathbf{F}$ همیشه صفر باشد، خطوط شارش $\mathbf{F}$ باید منحنیهای بسته باشند.

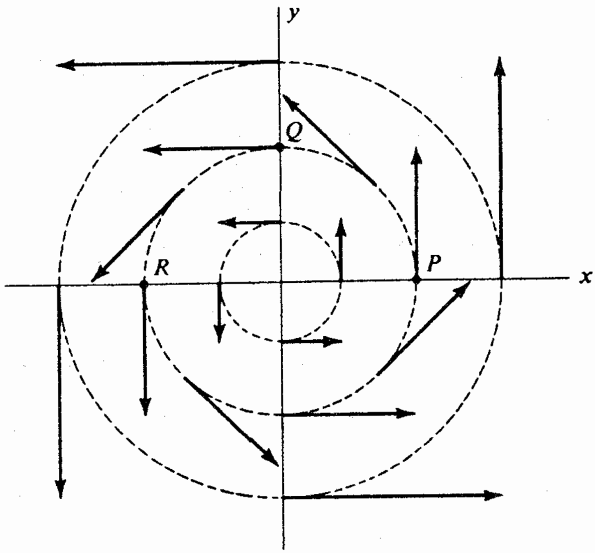
۱۱. دربارهٔ واگرایی میدان برداری شکل (۸.۳) در نقاط P، Q، و R چه می‌توان گفت؟

۱۲. دربارهٔ واگرایی میدان برداری شکل (۹.۳) در نقاط P، Q، و R چه می‌توان گفت؟ فرض کنید $\mathbf{F}$ در جهت z بدون تغییر باشد و F_3 تابع صفر باشد.

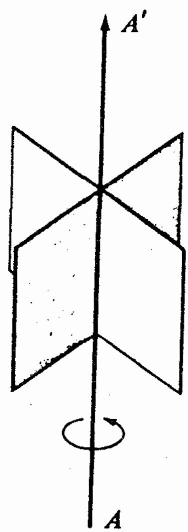
۱۳. تعبیر هیدرودینامیکی از واگرایی به صورت زیر است: فرض کنید $\mathbf{F}$ میدان سرعت یک شاره باشد. یک متوازی‌السطوح قائم کوچک از شاره در موضع (x,y,z) در نظر بگیرید. آنگاه واگرایی $\mathbf{F}$ آهنگ تغییر حجم این شاره در واحد حجم و در واحد زمان است وقتی که اندازهٔ قوطی به صفر میل کند. این را ثابت کنید. [*راهنمایی:* با $\mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$، گوشه‌های قوطی در مواضع $\mathbf{R}$، $\mathbf{R}+\Delta x\mathbf{i}$، $\mathbf{R}+\Delta y\mathbf{j}$، $\mathbf{R}+\Delta z\mathbf{k}$ و غیره واقعند. پس از زمان Δt این گوشه‌ها به مواضع جدید $\mathbf{R}+\mathbf{F}(x,y,z)\,\Delta t$، $\mathbf{R}+\Delta x\mathbf{i}+\mathbf{F}(x+\Delta x,y,z)\,\Delta t$، $\mathbf{R}+\Delta y\mathbf{j}+\mathbf{F}(x,y+\Delta y,z)\,\Delta t$، $\mathbf{R}+\Delta z\mathbf{k}+\mathbf{F}(x,y,z+\Delta z)\Delta t$ و غیره می‌رسند. با استفاده از ضرب اسکالر سه گانه، حجم جدید را بیابید و حد فوق‌الذکر را محاسبه کنید.]



شکل ۸.۳



شکل ۹.۳



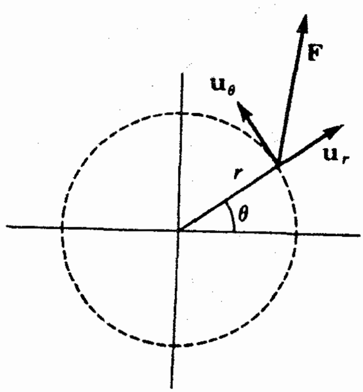
شکل ۱۰.۳

۴.۳ تاو

مانند بخش گذشته، از تعریف صوری تاو یک میدان برداری همراه با بعضی ملاحظات مبتنی بر ادراک شهودی شروع می‌کنیم. یک بار دیگر، مناسب است که **F** را سرعت میدان یک شارهٔ غیر قابل تراکم تصور کنیم. فرض کنید یک چرخ پره‌دار کوچک، مانند چرخی که در شکل (۱۰.۳) دیده می‌شود، در اختیار داریم که می‌تواند آزادانه حول محورش AA' بچرخد.

فرض کنید این چرخ پره‌دار را در شاره فرو ببریم. به دلیل شارش شاره، این چرخ با یک سرعت زاویه‌ای شروع به چرخش می‌کند. این سرعت زاویه‌ای با توجه به موضع چرخ پره‌دار و وضعیت محورش تغییر می‌کند. به خاطر قطعیّت، سعی خواهیم کرد سرعت زاویه‌ای را در حالتی محاسبه کنیم که چرخ پره‌دار در امتداد محور z قرار داده شده باشد.

تمایل شاره به چرخش حول محور z مکانیزمی است که چرخ را به حرکت در می‌آورد؛ این حرکت در نزدیکی محور به آن مؤلّفه‌هایی از سرعت بستگی دارد که در خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌باشند. اگر، چنان که در شکل (۱۱.۳) نشان داده شده است، یک دستگاه مختصات قطبی وضع کنیم که مرکزش منطبق بر محور چرخ پره‌دار باشد، آن‌گاه آن مؤلفه از **F** در نقطهٔ (r,θ) که در



شکل ۱۱.۳

خلاف جهت عقربهٔ ساعت است، $\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_\theta$ است. این مؤلفه سرعت، یک تیغهٔ چرخ پره‌دار را با سرعت *زاویه‌ای* $\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_\theta/r$ رادیان بر ثانیه می‌چرخاند. البتّه، این سرعت در نزدیکی محور، وقتی از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر برویم، تغییر می‌کند به طوری که تیغه‌های مختلف چرخ با تندیهای متفاوت «به حرکت در می‌آیند». امّا معقول به نظر می‌رسد که اگر *میانگین* این مؤلفه از سرعت را بر یک دایرهٔ کوچک حول محور حساب کنیم و آن را بر شعاع دایره تقسیم کنیم، خارج قسمت، سرعت زاویه‌ای چرخ پره‌دار (که تیغه‌هایش را نسبت به هم ثابت در نظر می‌گیریم) خواهد بود.

اجازه دهید این محاسبه را انجام دهیم. در شکل (۱۱.۳)، (x,y,z) مختصات مرکز دایره‌اند؛ محور z از صفحهٔ کتاب به طرف خواننده بیرون می‌آید. در آن نقطه از دایره با مختصات $(x+\Delta x,y+\Delta y,z)$، بردار یکّهٔ $\mathbf{u}_\theta$ بر حسب زاویهٔ θ عبارت است از:

$$\mathbf{u}_\theta=-\sin\theta\,\mathbf{i}+\cos\theta\,\mathbf{j}$$

مؤلفه‌های سرعت $\mathbf{F}(x+\Delta x,y+\Delta y,z)$ در این نقطه را می‌توان تا یک درجه دقت به صورت

$$F_1(x+\Delta x,y+\Delta y,z)=F_1(x,y,z)+\frac{\partial F_1}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F_1}{\partial y}\Delta y$$

$$F_2(x+\Delta x,y+\Delta y,z)=F_2(x,y,z)+\frac{\partial F_2}{\partial x}\Delta x+\frac{\partial F_2}{\partial y}\Delta y$$

نوشت. F_3 به ما مربوط نمی‌شود، زیرا ما فقط به مؤلفهٔ $\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_\theta$، که در خلاف جهت عقربهٔ ساعت است، توجه داریم. با بیان Δx و Δy بر حسب r و θ،

$$\Delta x=r\cos\theta$$

$$\Delta y=r\sin\theta$$

برای این مؤلفه از سرعت در نقطهٔ (r,θ) از دایره داریم:

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_\theta=-\left(F_1+\frac{\partial F_1}{\partial x}r\cos\theta+\frac{\partial F_1}{\partial y}r\sin\theta\right)\sin\theta$$

$$+\left(F_2+\frac{\partial F_2}{\partial x}r\cos\theta+\frac{\partial F_2}{\partial y}r\sin\theta\right)\cos\theta$$

میانگین این مؤلفه حول دایره عبارت است از:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\mathbf{F}\cdot\mathbf{u}_\theta\, d\theta$$

چون انتگرالهای $\cos\theta$، $\sin\theta$، و $\sin\theta\cos\theta$ بر یک دورهٔ تناوب صفرند، و چون $\int_0^{2\pi}\cos^2\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi}\sin^2\theta\, d\theta = \pi$، دیده می‌شود که این میانگین عبارت است از:

$$\frac{1}{2}r\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

و از تقسیم آن بر r نتیجه می‌گیریم که *سرعت زاویه‌ای شاره حول محور* z برابر است با

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)$$

محاسبهٔ سرعت زاویه‌ای حول محور x به نتیجهٔ

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)$$

و حول محور y به نتیجهٔ

$$\frac{1}{2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)$$

می‌انجامد.

می‌خواهیم تاو یک میدان برداری را تمایل آن به چرخش بیان کنیم؛ بنابراین، مناسب است که عامل $\frac{1}{2}$ را حذف و تعریف زیر را فرمولبندی کنیم:

تاو میدان برداری $\mathbf{F}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$ *میدان برداری زیر است:*

$$\left(\frac{\partial F_3}{\partial y}-\frac{\partial F_2}{\partial z}\right)\mathbf{i}+\left(\frac{\partial F_1}{\partial z}-\frac{\partial F_3}{\partial x}\right)\mathbf{j}+\left(\frac{\partial F_2}{\partial x}-\frac{\partial F_1}{\partial y}\right)\mathbf{k} \qquad (10.3)$$

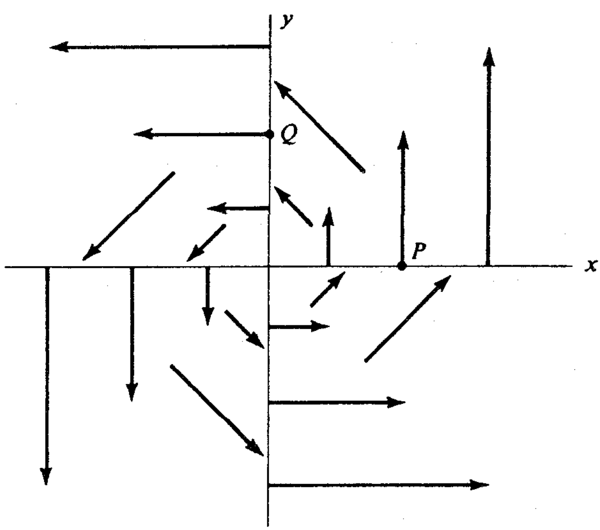
به محصل توصیه می‌شود که، به جای حفظ (۱۰.۳)، تاو را بصورت دترمینان نمادی زیر بنویسید:

$$\text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix} \qquad (۱۱.۳)$$

مثال ۱۸.۳ اگر $\mathbf{F} = xyz\mathbf{i} + x^2y^2z^2\mathbf{j} + y^2z^3\mathbf{k}$، تاو **F** را بیابید.

حل

$$\text{curl } \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ xyz & x^2y^2z^2 & y^2z^3 \end{vmatrix} = (2yz^3 - 2x^2y^2z)\mathbf{i} + (xy)\mathbf{j} + (2xy^2z^2 - xz)\mathbf{k}$$



شکل ۱۲.۳

مثال ۱۹.۳ اگر $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ ، تاو $\mathbf{F}$ را بیابید.

حل

$$\mathbf{curl\ F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

مثال ۲۰.۳ تاو $\mathbf{F}$ در نقاط P و Q شکل (۱۲.۳) در چه جهتی است؟ فرض کنید که F_3 تابع صفر باشد و $\mathbf{F}$ در جهت z بدون تغییر باشد. (این همان میدانی است که در شکل (۹.۳) نشان داده شده است.)

حل باید از بحث قبلی آشکار شود که تاو $\mathbf{F}$ در جهت $+z$ است. با استفاده از تعریف صوری، ملاحظه می‌کنیم که در نقطهٔ P، تابع F_2 در جهت x صعودی است؛ بنابراین، $\partial F_2/\partial x$ مثبت است. اگر چه F_1 در P صفر است، F_1 در زیر P مثبت و در بالای P منفی است؛ بنابراین، هرگاه از P در جهت y عبور کنیم، F_1 نزولی است؛ یعنی، $\partial F_1/\partial y$ منفی است. چون، بنا بر فرض، F_3 همیشه صفر است، مشتقات $\partial F_3/\partial y$ و $\partial F_3/\partial x$ نیز صفرند، و چون، بنا بر فرض، هیچ تغییری در جهت z وجود ندارد، $\partial F_2/\partial z$ و $\partial F_1/\partial z$ صفرند. نتیجه می‌شود که تنها جمله‌ای از (۱۰.۳) که صفر نمی‌شود جملهٔ آخر است و این جمله مثبت است.

در نقطهٔ Q، F_2 صفر است، امّا F_2 در سمت چپ Q منفی و در طرف راست مثبت است؛ از این رو، $\partial F_2/\partial x$ مثبت است. F_1 در Q منفی است و با صعود y بیشتر منفی می‌شود و، بنابراین، $\partial F_1/\partial y$ منفی است. از این رو، جملهٔ $(\partial F_2/\partial x - \partial F_1/\partial y)$ مثبت است. مشتقات دیگر (۱۰.۳) برابر صفرند. نتیجه می‌شود که تاو $\mathbf{F}$ در نقطهٔ Q نیز بر صفحهٔ xy عمود و جهتش به طرف خواننده است. (در واقع، یک انعکاس کوچک، خواننده را متقاعد خواهد کرد که تاو $\mathbf{F}$ در نقطهٔ P برابر تاو $\mathbf{F}$ در نقطهٔ Q است.)

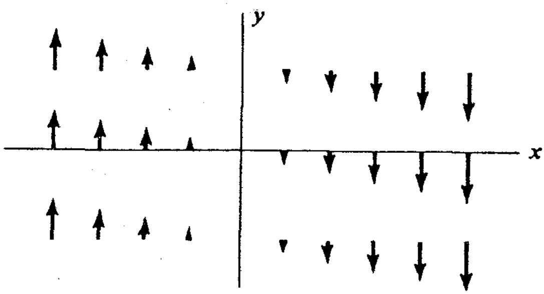
مثال ۲۱.۳ اگر $\mathbf{F}$ میدانی باشد که در شکل (۱۳.۳) نشان داده شده است، تاو $\mathbf{F}$ در چه جهتی است؟

حل چون $\mathbf{F}$ با محور y موازی است و اندازه‌اش متناسب با x است، می‌توان حدس زد که

$\mathbf{F}=Cx\mathbf{j}$، که در آن C یک ثابت منفی است. از این رو،

$$\mathbf{curl\ F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ 0 & Cx & 0 \end{vmatrix} = C\mathbf{k}$$

چون C منفی است، تاو **F** عمود بر صفحهٔ کتاب است و جهتش رو به کتاب (جهت z منفی) است.



شکل ۱۳.۳

در شکل (۱۳.۳)، چرخ پره‌دار مایل است که با حد اکثر سرعت حول محوری عمود بر صفحهٔ کتاب بچرخد؛ چرخ خواهد چرخید، زیرا سرعت شاره در یک طرف بیشتر از طرف دیگر است. جهت تاو رو به صفحهٔ کتاب است، زیرا چرخ می‌خواهد در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بچرخد. این مثال نشان می‌دهد که ممکن است یک میدان برداری تاوی ناصفر داشته باشد، حتی وقتی که خطوط شارش خطوط مستقیم باشند؛ بنابراین، وصف تاو **F** به صورت «اندازهٔ آهنگ چرخش **F**» کاملاً نادرست است.

مثال ۲۲.۳ فرض کنید **F** میدان سرعت شاره‌ای با چگالی جرم ثابت باشد که با سرعت زاویه‌ای یکنواخت ω حول محور z می‌چرخد. تاو **F** را بیابید. (فرض کنید بردار سرعت زاویه‌ای $\boldsymbol{\omega}$ به جهت z مثبت اشاره دارد.)

حل چون $\boldsymbol{\omega}=\omega\mathbf{k}$، داریم: $\mathbf{F}=\omega\mathbf{k}\times\mathbf{R}$ (معادلهٔ ۲۱.۱)، که در آن $\mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. از این رو،

$\mathbf{F}=-\omega y\mathbf{i}+\omega x\mathbf{j}$. با استفاده از (۱۱.۳) در می‌یابیم که $\mathbf{curlF} = 2\omega\mathbf{k}$. چنان‌که انتظار داشتیم، تاو $\mathbf{F}$ درست دو برابر بردار سرعت زاویه‌ای است ؛ در این وضعیت، این بردار در همهٔ نقاط فضا یکسان است.

خواننده باید خویش را متقاعد کند که میدان مثال (۲۲.۳) در شکل (۱۲.۳) نشان داده شده است.

تمرینات

در تمرینات (۱) تا (۳)، تاو $\mathbf{F}$ را بیابید:

۱. $\mathbf{F}= xy^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

۲. $\mathbf{F}= e^{xy}\mathbf{i} + \sin xy\mathbf{j} + \cos yz^2\mathbf{k}$

۳. $\mathbf{F}= z^2x\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} - z^2y\mathbf{k}$

۴. میدان برداری $\mathbf{F}= (x+xz^2)\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ مفروض است،

(الف)، واگرایی $\mathbf{F}$ را محاسبه کنید،

(ب) تاو $\mathbf{F}$ را محاسبه کنید.

۵. تصویری از میدان برداری $\mathbf{F}= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ بکشید و چرخ پره‌دار را تعبیر تاو $\mathbf{F}$ بدانید. توضیح بدهید که چرا در این حالت تاو $\mathbf{F}$ همواره صفر است.

۶. مثالی از یک میدان برداری بیاورید که تاوش همیشه برابر با $2\mathbf{i}$ باشد.

۷. خطوط شارش یک میدان سرعت $\mathbf{F}$ خطوط مستقیمند، آیا این ایجاب می‌کند که $\mathbf{curlF=0}$ ؟

۸. اگر فقط یک توصیف از خطوط شارش $\mathbf{F}$ مفروض باشد، آیا قضاوت دربارهٔ $\mathbf{curl\ F}$ امکان‌پذیر است؟

۵.۳ نماد دل

برای درک درست مفهوم «عملگر»، ضرورت دارد که به طور وسیع و کلّی به مفهوم « تابع » نگاه کنیم. به این دلیل موقتاً از بحث اصلی منحرف می‌شویم و مفهوم تابع را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی، توابع مورد بحث عموماً « توابع حقیقی از یک متغیر حقیقی » می‌باشند. یعنی، یک تابع f قاعده‌ای است که به موجب آن با هر عدد حقیقی x از حوزهٔ تعریف f یک عدد حقیقی منحصر به فرد $f(x)$ متناظر قرار می‌گیرد؛ مثلاً، تابع نمایی به ازای همهٔ مقادیر x تعریف می‌شود، و به هر عدد حقیقی x عدد حقیقی منحصر به فرد e^x را نسبت می‌دهد. این تابع را این طور معرفی می‌کنیم که می‌نویسیم: $f(x)=e^x$. برای تعریف توابع دیگر، می‌نویسند: مثلاً، $f(x)=x^2$ یا $f(x)=\sin x$. اغلب ریاضیدانان عصر حاضر بین نماد f و نماد $f(x)$ به دقت تفاوت قائل می‌شوند. نماد اوّل یک تابع را نشان می‌دهد و نماد دوّم نشانگر مقدار تابع است (که یک عدد است نه یک تابع) . به این ترتیب اگر $f(x)=x^2$، تابع f این قاعده است : «مجذور عدد مفروض» ، ولی $f(3)$ عدد ۹ است.

در دروس پیشرفته، با توابع دو یا سه متغیره مواجه می‌شویم. در این کتاب «میدانهای اسکالر» صرفاً توابع حقیقی از سه متغیر حقیقیند. به این ترتیب، تابع f با ضابطهٔ تعریف $f(x,y,z)=x^2y^2z^2$ می‌گوید که «مجذور عدد مفروض» را در هم ضرب کنید . در این زمینه، هرگاه حرف f به تنهایی به کار می‌رود این *قاعده* را نشان می‌دهد، امّا اگر، مثلاً، بنویسیم $f(3,1,2)$، منظور *مقدار* تابع در نقطهٔ $(3,1,2)$ است، که در این حالت عدد ۳۶ می‌باشد.

اغلب توابعی که در این فصل مورد بحث قرار گرفته‌اند با عباراتی متضمن x ، y، و z توصیف شده‌اند. در مطالعهٔ آنالیز برداری مفید است که چنین توابعی را در میان عبارات هندسی یا فیزیکی جستجو کنیم و «متصور» سازیم . به این ترتیب، امکان دارد دانشجوی مهندسی «یک تابع دلخواه f» را «یک پتانسیل الکتریکی دلخواه» یا « یک توزیع گرمای دلخواه » بداند، و ریاضیدانان آن را «قاعده‌ای که با آن هر نقطه از فضا به یک عدد مربوط می‌شود» بدانند. محصلی که یک تابع را آمیخته‌ای از xها، yها، و zها بداند از درک قسمت اعظم موضوع باز می‌ماند.

توابع *برداری* مورد بحث توابع *برداری* از سه متغیر حقیقیند. امّا مفهوم هنوز هم همان هست که دیدیم. در این مورد، یک تابع $\mathbf{F}$ *قاعده‌ای* است که به هر نقطهٔ (x,y,z) یک بردار منحصر به فرد $\mathbf{F}(x,y,z)$ نسبت دهد.

امّا اکنون به سراغ چیزی می‌رویم که برای بعضی محصلان معضل بزرگی است. پرداختن به

مفهوم *کلی* یک تابع . اگر به این نکته پی ببریم که یک ریاضیدان کلمهٔ «تابع» را به صورتی بسیار کلیتر به کار می‌برد، که قاعده‌ای را نشان بدهد که هر شیء را با یک شیء منحصر به فرد از رده‌ای از اشیاء متناظر سازد، بسیاری از رموز ریاضیات جدید آشکار می‌شود. به این ترتیب، نه تنها توابعی وجود دارند که عدد را با عدد متناظر می‌سازند (توابع حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی)، اعداد را با نقاط موجود در فضا متناظر می‌سازند (میدانهای اسکالر)، و بردارها را با نقاط موجود در فضا متناظر می‌سازند (میدانهای برداری)، بلکه *توابع* را با *توابع* نیز متناظر می‌سازند.

تا حدی به دلیل رعایت تناسب، ولی عمدةً (به گمان ما) به این دلیل که اغلب مردم تصورات قدیمی از کلمهٔ «تابع» دارند، انواع اخیر تابع عموماً «عملگر» نامیده می‌شوند. یک عملگر، صرفاً قاعده‌ای است که با هر عضو رده‌ای خاص از توابع تابع جدیدی را متناظر می‌سازد.

به عنوان مثالی از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی، ملاحظه می‌کنیم که روند مشتقگیری تابعی تعریف می‌کند که عملگر مشتق نامیده می‌شود. این عملگری است که با هر تابع مشتقپذیر f مشتقش df/dx را متناظر می‌سازد. این عملگر را گاهی به d/dx یا حتی به صورت ساده‌تر D نشان می‌دهند. این عملگر هر تابع مشتقپذیر f را به مشتقش تبدیل می‌کند. ممکن است این عملگر را به صورت صوری زیر بنویسیم:

$$D(f) = \frac{df}{dx}$$

در بعضی از کتب درسی گفته می‌شود که D صرفاً یک نماد اختصاری برای d/dx است، و نماد d/dx به خودی خود فاقد معنی است و فقط وقتی معنی دارد که در مورد تابعی مانند f اعمال شود. آن گاه می‌توان نوشت، df/dx، که البته برای همه قابل درک است. عملگرهای دیفرانسیل دیگری چون $L=(d^۲/dx^۲)+۲(d/dx)+۴$ متشابهاً به صورت نمادهایی تعبیر می‌شوند که فاقد معنی هستند مگر این که در مورد یک تابع اعمال شوند. در این حالت داریم:

$$L(f)= \frac{d^۲f}{dx^۲}+ ۲\ \frac{df}{dx}+ ۴f$$

با این وجود، این تعبیر همهٔ اثر مفهوم عملگر را از میان می‌برد. بسیار بهتر است که این عملگر را

نوعی چرخ گوشت تعبیر کنیم که تابع f را در آن می‌اندازیم، دسته را می‌چرخانیم، و تابع $(d^2f/dx^2)+2(df/dx)+4$ را بیرون می‌کشیم. در واقع، هیچ مشکل بر طرف ناشدنی در درک این نکته وجود ندارد که هر عملگر T *قاعده‌ای* است که با آن هر تابع f با تابع دیگر $T(f)$ (یا احتمالاً حتی خود تابع f) متناظر می‌شود. گمراه کننده است که بگوییم نماد d/dx به خودی خود فاقد معنی است. این نماد بسیار پر معناست: این نماد قاعده‌ای را نشان می‌دهد که به کمک آن هر تابع مشتق پذیر با مشتقش متناظر قرار می‌گیرد. در این جا هیچ قصدی نداریم که «مشتق» را به طور اساسی تعریف کنیم یا روشهای بی شمار محاسبهٔ مشتق را بیان کنیم. مقصود بیان این نکته است که هر تابع مشتق پذیر مشتق دارد و عملگر مشتق، تابع را با مشتق جفت می‌کند(مفهوم عالی «جفت کردن» در بسیاری از کتب جدید در بحث از مفهوم تابع به کار می‌رود. مشتق یک تابع، تابعی دیگر است، و عملگر مشتق نخی است که آن دو را به هم می‌دوزد.)

گرادیان مثال دیگری از عملگر است . یادآوری می‌کنیم که گرادیان یک میدان اسکالر f میدان برداری $\mathbf{grad}\ f$ است. عملگر گرادیان را می‌توان چنین نوشت:

$$\mathbf{i}\ \frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\ \frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\ \frac{\partial}{\partial z}$$

واگرایی نیز یک عملگر است، عملگری که یک میدان برداری را به یک میدان اسکالر تبدیل می‌کند. به طور مشابه، *تاو*، یک عملگر است، ولی عملگری که یک میدان برداری را به میدان برداری دیگری تبدیل می‌کند.

سه عملگری که بیشترین ارتباط را با ما دارند عبارتند از: گرادیان، واگرایی، و تاو. اگر چه این عملگرها را می‌توان به صورت $\mathbf{grad}$، div، و $\mathbf{curl}$ نوشت، طریق نمادی مناسبی برای نمایش آنها وجود دارد که معمولاً به کار می‌رود. برای این منظور، ما نماد ∇ را، موسوم به «دل» معرفی می‌کنیم که یک صورت اختصاری $\mathbf{i}(\partial/\partial x)+\mathbf{j}(\partial/\partial y)+\mathbf{k}(\partial/\partial z)$ است. بر حسب این نماد، $\mathbf{grad}\ f$ را می‌توان به صورت ∇f نوشت. اگر ∇ را به صورت صوری محض اعمال و آن را فعلاً یک بردار وانمود کنیم، می‌بینیم که اگر ضرب اسکالر ∇ در میدان برداری $\mathbf{F}$ را تشکیل دهیم، خواهیم داشت:

$$\nabla\cdot \mathbf{F}=(\mathbf{i}\ \frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\ \frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\ \frac{\partial}{\partial z})\cdot(\mathbf{i}F_1+\mathbf{j}F_2+\mathbf{k}F_3)=\frac{\partial F_1}{\partial x}+\frac{\partial F_2}{\partial y}+\frac{\partial F_3}{\partial z}$$

که واگرایی $\mathbf{F}$ است. به طور مشابه، اگر ∇ را یک بردار تصور کنیم وضرب خارجی آن را در $\mathbf{F}$ تشکیل دهیم، تاو $\mathbf{F}$ به دست می‌آید:

$$\nabla\times\mathbf{F}=(\mathbf{i}\ \frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\ \frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\ \frac{\partial}{\partial z})\times(\mathbf{i}F_1+\mathbf{j}F_2+\mathbf{k}F_3)$$

$$=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}=\mathbf{curl\ F}$$

مجدداً یاد آوری می‌کنیم که ∇ نماد اختصاری زیر است:

$$\nabla=\mathbf{i}\ \frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\ \frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\ \frac{\partial}{\partial z} \qquad (۱۲.۳)$$

نمادهای ∇f، $\nabla\cdot\mathbf{F}$، و $\nabla\times\mathbf{F}$ با

$$\nabla f=\mathbf{grad}\ f \qquad (۱۳.۳)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=\mathrm{div}\ \mathbf{F} \qquad (۱۴.۳)$$

$$\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{curl\ F} \qquad (۱۵.۳)$$

تعریف می‌شوند.

پس از این که (۱۲.۳) را به خاطر سپردید، فرمولهای (۱۳.۳)، (۱۴.۳)، و (۱۵.۳) طرق بسیار مناسبی برای حفظ عبارات گرادیان، واگرایی، و تاو فراهم می‌کنند.

ما با ∇ درست مانند یک بردار عمل کردیم. از این پس، این اختصارات را مکرراً به کار خواهیم برد.

تمرینات

۱. اگر $f(x,y,z)=x^{2}y+z$، $f(2,3,4)$ چیست؟

۲. اگر $f(x,y,z)=x^{2}y+z$ ، مقدار ∇f در $(2,3,4)$ چیست؟

۳. اگر $g(t)=t^{3}$ و $f(x,y,z)=x^{2}+y^{2}z$، $g[f(1,1,3)]$ چیست؟

۴. فرض کنید $\mathbf{F}(x,y,z)=x^{2}y\mathbf{i}+z\mathbf{j}-(x+y-z)\mathbf{k}$ مطلوب است:

(الف) $\nabla\cdot\mathbf{F}$

(ب) $\nabla\times\mathbf{F}$

(ج) $\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})$

۵. اگر $\mathbf{F}$ یک میدان برداری باشد، $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})$ یک میدان اسکالر است یا یک میدان برداری؟

۶. اگر $\mathbf{F}$ یک میدان برداری باشد، $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})$ یک میدان اسکالر است یا یک میدان برداری؟

۷. هرگاه $\mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ ، $\nabla\cdot\mathbf{R}$ و $\nabla\times\mathbf{R}$ را بیابید.

۸. هرگاه $f(x,y,z)=xyz+e^{xz}$ ، $\nabla\cdot(\nabla f)$ را بیابید.

۹. (الف) به ازای تابع اسکالر f تمرین ۸، $\nabla\times(\nabla f)$ را محاسبه کنید.

(ب) همان محاسبه را در مورد میدان اسکالر دیگری انجام دهید (یکی از میدانهای اسکالری را که در تمرینهای قبلی تعریف شده‌اند انتخاب یا خودتان یکی تعریف کنید).

(ج) پس از این محاسبات چه چیزی می‌توانید حدس بزنید؟

۱۰. (الف) فرض کنید $\mathbf{F}$ میدان برداری تمرین ۴ باشد و $\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})$ را محاسبه کنید.

(ب) همان محاسبه را در مورد یک میدان برداری $\mathbf{F}$ که خودتان می‌سازید انجام دهید.

(ج) پس از انجام این محاسبات چه چیزی می‌توانید حدس بزنید؟

۶.۳ لاپلاسی

در الکتروستاتیک، گرادیان پتانسیل الکتریکی مضرب اسکالری از شدت میدان الکتریکی است،

و واگرایی شدت میدان الکتریکی به چگالی بار مربوط می‌شود. به این دلیل و به دلایل دیگر، مناسب است که عملگر یکتایی تعریف کنیم که مرکب از دو عملگر **grad** و div باشد. این عملگر را لاپلاسی می‌نامند.

لاپلاسی میدان اسکالر f را $\operatorname{div}(\mathbf{grad}\, f)$ تعریف می‌کنند. توجه کنید که $\mathbf{grad}\, f$ یک میدان برداری است و واگرایی $\mathbf{grad}\, f$ یک میدان اسکالر است؛ از این رو، لاپلاسی میدان اسکالر f یک میدان اسکالر است. با استفاده از نماد دل، این میدان اسکالر، $\nabla\cdot(\nabla f)$ است و، برای سادگی، غالباً به صورت $\nabla^۲ f$ یا Δf نوشته می‌شود.

داریم:

$$\text{لاپلاسی}(f)=\nabla^۲ f=\nabla\cdot(\nabla f)=\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}+\frac{\partial^۲ f}{\partial z^۲}=\Delta f \qquad (۱۶.۳)$$

زیرا

$$\nabla\cdot(\nabla f)=\nabla\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right)=\frac{\partial^۲ f}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲ f}{\partial y^۲}+\frac{\partial^۲ f}{\partial z^۲}$$

نماد $\nabla^۲$ یا Δ را می‌توان صرفاً صورت اختصاری

$$\frac{\partial^۲}{\partial x^۲}+\frac{\partial^۲}{\partial y^۲}+\frac{\partial^۲}{\partial z^۲}$$

دانست. معادلهٔ

$$\Delta f=\nabla^۲ f=0 \qquad (۱۷.۳)$$

معادلهٔ لاپلاس نامیده می‌شود. هر تابعی که در ناحیهٔ مفروضی در این معادله صدق کند در آن ناحیه *همساز* است؛ مثلاً، پتانسیل الکتریکی توزیع ایستایی بار در ناحیه‌ای که چگالی بار صفر باشد همساز است. تابع بیانگر توزیع دمای یک مادهٔ همگن در درون ناحیه‌ای که ماده آن را اشغال کرده است همساز است.

عملگر لاپلاس مهمترین عملگر دیفرانسیل ریاضی فیزیک است. در این بخش دربارهٔ معنی شهودی آن، بدون اقامهٔ دلیل، به بحث می‌پردازیم.

اگر f یک اسکالر باشد، آنگاه $\nabla^۲ f(x,y,z)$ مقدار $\nabla^۲ f$ در نقطهٔ (x,y,z) را نشان می‌دهد. این

عددی است که اطلاعاتی در مورد رفتار میدان اسکالر مفروض در مجاورت نقطهٔ (x,y,z) به ما می‌دهد. به زبان عامیانه، این عدد، *تفاضل بین مقدار میانگین میدان در یک همسایگی از آن نقطه و مقدار دقیق میدان در آن نقطه را نشان می‌دهد.*

(در این جا کلمهٔ «میانگین» به میانگین روی ناحیه‌ای از فضا اطلاق می‌شود نه به میانگین زمان. تغییرات زمان در محاسبهٔ $\nabla^2 f$ دخالتی ندارند.)

به این ترتیب، اگر $\nabla^2 f$ در نقطه‌ای مثبت و f بیانگر دما باشد، آنگاه دما در مجاورت آن نقطه، به طور متوسط، بزرگتر از دما در خود نقطه است. مخصوصاً اگر دما مقدار مینیمم خود را در نقطه‌ای از فضا اختیار کند، یک انتظار عاقلانه این است که مقدار $\nabla^2 f$ در آن نقطه منفی *نخواهد* بود. از این جهت، به لاپلاسی می‌توان به عنوان نوعی تعمیم سه بعدی عملگر معمولی d^2/dx^2 نگاه کرد که در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی برای تشخیص نوع نقطهٔ اکسترمم یک تابع (که نقطهٔ ماکسیمم است یا مینیمم) بکار می‌رود.

اگر $\nabla^2 f$ متحد با صفر باشد، مقدار میانگین f در هر کره (یا هر مکعب) دقیقاً برابر مقدار f در مرکز آن کره (یا آن مکعب) خواهد بود. این یکی از مهمترین خواص توابع همساز است.

فرض کنید (x,y,z) نقطهٔ ثابتی در فضا باشد، و $\bar{f}$ مقدار میانگین f در داخل کره‌ای (یامکعبی) به مرکز (x,y,z) باشد. اگر این کره (یا مکعب) به قدر کافی کوچک باشد، خواهیم داشت (تقریباً):

$$\bar{f}-f(x,y,z)=k\,\nabla^2 f(x,y,z) \tag{۱۸.۳}$$

که در آن k ثابت مثبتی است که فقط به ابعاد کره یا مکعب بستگی دارد. برای یک کره، $k=R^2/10$، که در آن R شعاع کره است. برای یک مکعب، داریم: $k=a^2/24$، که در آن a درازی یال مکعب است.

رابطهٔ (۳. ۱۸) در یک حالت خیلی خاص دقیق است: وقتی که $\nabla^2 f$ ثابت و از x، y، و z مستقل است. در حالتهای دیگر تقریبی است. امّا در حالتی که کره یا مکعب به قدر کافی کوچک باشد، یک تقریب نسبتاً خوب خواهیم داشت. این فرمول در تبیین شهودی عبارات مشتمل بر لاپلاسی بسیار مفید است.

عملگر دیفرانسیل صوری

$$\Delta = \nabla^{2} = \frac{\partial^{2}}{\partial x^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial y^{2}} + \frac{\partial^{2}}{\partial z^{2}}$$

را نیز می‌توان در مورد میدانهای *برداری* برای تحصیل میدانهای برداری جدید اعمال کرد، زیرا اگر $\mathbf{F}$ یک میدان *برداری* باشد، $(\partial^{2}\mathbf{F}/\partial x^{2})+(\partial^{2}\mathbf{F}/\partial y^{2})+(\partial^{2}\mathbf{F}/\partial z^{2})$ کاملاً با معنی است؛ مثلاً، اگر

$$\mathbf{F}=x^{2}y\mathbf{i}+y^{2}z^{3}\mathbf{j}+xyz^{4}\mathbf{k}$$

آن‌گاه داریم:

$$\frac{\partial^{2}\mathbf{F}}{\partial x^{2}} = 2y\mathbf{i}$$

$$\frac{\partial^{2}\mathbf{F}}{\partial y^{2}} = 2z^{3}\mathbf{j}$$

$$\frac{\partial^{2}\mathbf{F}}{\partial z^{2}} = 6y^{2}z\mathbf{j}+12xyz^{2}\mathbf{k}$$

و، از این رو، $\nabla^{2}\mathbf{F}=2y\mathbf{i}+(2z^{3}+6y^{2}z)\mathbf{j}+12xyz^{2}\mathbf{k}$. وقتی عملگر لاپلاس به این معنی به کار می‌رود که بر یک میدان برداری برای تولید میدان برداری دیگر اعمال شود، ∇^{2} را عملگر لاپلاس *برداری* می‌نامند.

درس اختیاری: دودوییها

توجه کنید که وقتی ∇^{2} به عنوان عملگری بر میدانهای برداری اعمال شود؛ مثلاً، در $\nabla^{2}\mathbf{F}$، تعبیر عملگر به عنوان **div grad** قدری غیر طبیعی است. روی هم رفته، در تصوّری که از اشیاء داریم، **grad F** فاقد معنی است.

با این وجود، در بعضی از مباحث فیزیک و مهندسی، استفاده از چنین نمادهای عجیبی مناسب به نظر می‌رسد. برای اینکه ببینیم این حالت چگونه رخ می‌دهد، فرض کنید بخواهیم مؤلّفهٔ برداری بردار $\mathbf{F}$ را در جهت بردار یکّه‌ای چون $\mathbf{n}$ بیان کنیم. جواب با $\mathbf{n}(\mathbf{n}\cdot\mathbf{F})$ داده می‌شود. (بخش (۹.۱) را به خاطر بیاورید.) این فرمول ما را وادار می‌کند که عملگری به نام *عملگر تصویر* در جهت $\mathbf{n}$ تعریف

کنیم و آن را به **nn** نشان دهیم؛ آنگاه تصویر **F** در جهت **n** عبارت است از:

$$(\mathbf{nn})\cdot\mathbf{F}\equiv\mathbf{nn}\cdot\mathbf{F}$$

در تعمیم، به ازای هر دو بردار مفروض **A** و **B**، دودویی **AB** را به طور صوری به عنوان عملگری که به صورت زیر عمل می‌کند تعریف می‌کنیم: به ازای هر بردار **F**

$$(\mathbf{AB})\cdot\mathbf{F}\equiv\mathbf{AB}\cdot\mathbf{F}$$

و

$$\mathbf{F}\cdot(\mathbf{AB})\equiv\mathbf{F}\cdot\mathbf{AB}$$

به این ترتیب، دودویی **ii** هر بردار را بر روی محور x تصویر می‌کند. به عنوان مثال دیگر، ملاحظه کنید که دودویی **ii+jj+kk** عملگر همانی است، زیرا

$$(\mathbf{ii}+\mathbf{jj}+\mathbf{kk})\cdot\mathbf{F}=\mathbf{F}=\mathbf{F}\cdot(\mathbf{ii}+\mathbf{jj}+\mathbf{kk})$$

[معادلهٔ (۱۴.۱) را به خاطر بیاورید.]

در این زمینه، می‌توانیم **grad F**، یا **∇F** را به عنوان یک دودویی در نظر بگیریم:

$$\nabla\mathbf{F}=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)(F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k})$$

$$=\frac{\partial F_1}{\partial x}\mathbf{ii}+\frac{\partial F_1}{\partial y}\mathbf{ji}+\frac{\partial F_1}{\partial z}\mathbf{ki}$$

$$+\frac{\partial F_2}{\partial x}\mathbf{ij}+\frac{\partial F_2}{\partial y}\mathbf{jj}+\frac{\partial F_2}{\partial z}\mathbf{kj}$$

$$+\frac{\partial F_3}{\partial x}\mathbf{ik}+\frac{\partial F_3}{\partial y}\mathbf{jk}+\frac{\partial F_3}{\partial z}\mathbf{kk}$$

(توجه کنید که **ij≠ji**). آنگاه تعبیر دودویی **div grad F** چنین می‌شود:

$$\nabla\cdot(\nabla\mathbf{F})=\left(\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}\right)\cdot\left(\frac{\partial F_1}{\partial x}\mathbf{ii}+\cdots+\frac{\partial F_3}{\partial z}\mathbf{kk}\right)$$

$$=\frac{\partial^2 F_1}{\partial x^2}\mathbf{i}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial x^2}\mathbf{j}+\frac{\partial^2 F_3}{\partial x^2}\mathbf{k}$$

$$+\frac{\partial^2 F_1}{\partial y^2}\mathbf{i}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial y^2}\mathbf{j}+\frac{\partial^2 F_3}{\partial y^2}\mathbf{k}$$

$$+\frac{\partial^2 F_1}{\partial z^2}\mathbf{i}+\frac{\partial^2 F_2}{\partial z^2}\mathbf{j}+\frac{\partial^2 F_3}{\partial z^2}\mathbf{k}$$

که همان $\nabla^2\mathbf{F}$ است.

تمرینات

۱. اگر $f(x,y,z)=x^5yz^3$ مفروض باشد، $\nabla^2 f$ را بیابید.

۲. اگر $f(x,y,z)=1/(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ مفروض باشد، $\nabla^2 f$ را بیابید.

۳. اگر $\mathbf{F}(x,y,z)=3\mathbf{i}+\mathbf{j}-x^2y^3z^4\mathbf{k}$ مفروض باشد، $\nabla^2\mathbf{F}$ را بیابید.

۴. کدام یک از توابع زیر در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند؟

(الف) $f(x,y,z)=e^z\sin y$

(ب) $f(x,y,z)=\sin x\sinh y+\cos x\cosh z$

(ج) (p و q ثابتند) $f(x,y,z)=\sin px\sinh qy$

۵. فرض کنید f یک میدان اسکالر و $\mathbf{F}$ یک میدان برداری باشد. تعیین کنید که میدانهای زیر اسکالرند یا برداری؟ دو تا از عبارات زیر فاقد معنی هستند؛ این دو عبارت را تعیین کنید.

(الف) ∇f (و) $\nabla\times f$

(ب) $\nabla\cdot\mathbf{F}$ (ز) $\nabla^2\mathbf{F}$

(ج) $\nabla\times\mathbf{F}$ (ح) $\nabla\times\nabla^2\mathbf{F}$

(د) $\nabla\cdot(\nabla f)$ (ط) $\nabla\times(\nabla^2 f)$

(هـ) $\nabla\times(\nabla f)$ (ی) $\nabla(\nabla^2 f)$

۶. (الف) نشان دهید که اگر f و γ در معادلهٔ لاپلاس صدق کنند، $f+\gamma$ نیز در این معادله صدق می‌کند.

(ب) تابعی بیابید که در معادلهٔ لاپلاس و نیز در اتحادهای زیر صدق کند:

$f(o,y,z)=o$ ، $f(x,o,z)=o$ ، $f(\pi,y,z)=o$ ، $f(x,\text{۵},z) = \sin x + \sin \text{۲}x$. [راهنمایی: از (۶ـ الف) و (۴ـ ج) برای حدس زدن یک جواب استفاده کنید.]

۷.۳ اتحادهای برداری

اگر چه ما به استفاده از نماد دل ادامه می‌دهیم، و به طور صوری می‌پذیریم که

$$\nabla=\mathbf{i}\frac{\partial}{\partial x}+\mathbf{j}\frac{\partial}{\partial y}+\mathbf{k}\frac{\partial}{\partial z}$$

مثل یک بردار است، این عمل خطراتی نیز دارد. به خاطر بسپارید که عملگرهای مشتقی که در عملگر دل ظاهر می‌شوند فقط بر توابعی عمل می‌کنند که در طرف راست عملگر پدیدار می‌شوند؛ مثلاً، با فرض

$$\mathbf{F}=x^{\text{۳}}y\mathbf{i}+y^{\text{۲}}\mathbf{j}+x^{\text{۲}}z\mathbf{k} \qquad \mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$$

دو عبارت $(\nabla\cdot\mathbf{R})\mathbf{F}$ و $(\mathbf{R}\cdot\nabla)\mathbf{F}$ را با هم مقایسه می‌کنیم. در مورد عبارت اوّل، داریم:

$$(\nabla\cdot\mathbf{R})\mathbf{F}=\text{۳}\mathbf{F}=\text{۳}x^{\text{۳}}y\mathbf{i}+\text{۳}y^{\text{۲}}\mathbf{j}+\text{۳}x^{\text{۲}}z\mathbf{k}$$

از طرف دیگر، در عبارت دوّم، $\mathbf{R}$ در سمت چپ ∇ است و، بنابراین، عملگر های مشتق موجود در نماد دل بر $\mathbf{R}$ عمل نمی‌کنند. داریم:

$$(\mathbf{R}\cdot\nabla)\mathbf{F}=\left(x\frac{\partial}{\partial x}+y\frac{\partial}{\partial y}+z\frac{\partial}{\partial z}\right)(x^{\text{۳}}y\mathbf{i}+y^{\text{۲}}\mathbf{j}+x^{\text{۲}}z\mathbf{k})$$

$$=x(\text{۳}x^{\text{۲}}y\mathbf{i}+\text{۲}xz\mathbf{k})+y(x^{\text{۳}}\mathbf{i}+\text{۲}y\mathbf{j})+z(x^{\text{۲}}\mathbf{k})$$

$$=\text{۴}x^{\text{۳}}y\mathbf{i}+\text{۲}y^{\text{۲}}\mathbf{j}+\text{۳}x^{\text{۲}}z\mathbf{k}$$

همچنین، معمول است که در زمینهٔ آنالیز برداری معمولی (یعنی، فاقد مبحث دودویی‌ها) در عبارتهای برداری* شامل پرانتز وقتی با حذف پرانتز فقط یک مفهوم از عبارت مفروض فهمیده شود پرانتزها رابر دارند ؛ به عنوان مثال ، $\nabla\cdot\mathbf{R}\mathbf{F}$ و $\mathbf{R}\cdot\nabla\mathbf{F}$ باید ، به ترتیب، به معنی $(\nabla\cdot\mathbf{R})\mathbf{F}$ و $(\mathbf{R}\cdot\nabla)\mathbf{F}$ باشند، زیرا $\nabla\cdot(\mathbf{R}\mathbf{F})$ و $\mathbf{R}\cdot(\nabla\mathbf{F})$ در این زمینه فاقد معنی می‌باشند.

به طور مشابه، $\nabla\cdot f\mathbf{F}$ به معنی $\nabla\cdot(f\mathbf{F})$ ، صرفاً واگرایی $f\mathbf{F}$ ، است، زیرا $\nabla\cdot f$ ، و، بنابراین، $(\nabla\cdot f)\mathbf{F}$، فاقد معنی است.

در بعضی حالات، با حذف پرانتزها، هر عبارت دارای دو تعبیر متفاوت می‌شود؛ مثلاً، اگر $\mathbf{A}=A_1\mathbf{i}+A_2\mathbf{j}+A_3\mathbf{k}$ یک میدان برداری و f یک میدان اسکالرباشد، هر دو عبارت $(\mathbf{A}\cdot\nabla)f$ و $\mathbf{A}\cdot(\nabla f)$ با معنی هستند و گاهی به صورت $\mathbf{A}\cdot\nabla f$ نوشته می‌شوند. دلیلش این است که هر دو تعبیر دقیقاً به یک نتیجهٔ نهایی منجر می‌شود. داریم :

$$(\mathbf{A}\cdot\nabla)f=\left(A_1\frac{\partial}{\partial x}+A_2\frac{\partial}{\partial y}+A_3\frac{\partial}{\partial z}\right)f=A_1\frac{\partial f}{\partial x}+A_2\frac{\partial f}{\partial y}+A_3\frac{\partial f}{\partial z}$$

و

$$\mathbf{A}\cdot(\nabla f)=\mathbf{A}\cdot\left(\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k}\right)=A_1\frac{\partial f}{\partial x}+A_2\frac{\partial f}{\partial y}+A_3\frac{\partial f}{\partial z}$$

که هر دو با هم برابرند.

به دلیل قراردادی که در بالا پذیرفته شد، اساساً حفظ ترتیب در عمل با ∇ حائز اهمّیت است؛ به عنوان مثال، $\nabla\cdot\mathbf{A}$ یک میدان اسکالر است، صرفاً واگرایی $\mathbf{A}$ ، ولی $\mathbf{A}\cdot\nabla$ عملگر دیفرانسیل زیر است، اسبی با رنگ کاملاً متفاوت:

$$A_1\frac{\partial}{\partial x}+A_2\frac{\partial}{\partial y}+A_3\frac{\partial}{\partial z}$$

اکنون تعدادی از اتّحادها را در زیر درج می‌کنیم. در این جا $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ دو میدان برداریند، ϕ یک میدان اسکالر است،و $\mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. برهانهای آنها به لحاظ سرشت و درجهٔ دشواری متفاوتند، و

* عبارتهای شامل یک یا چند بردار (م)

ما آنها را در زیر مورد بحث قرار می‌دهیم.

$$\nabla(\phi_1\phi_2)=\phi_1\nabla\phi_2+\phi_2\nabla\phi_1 \qquad (۱۹.۳)$$

$$\nabla\cdot\phi\mathbf{F}=\phi\nabla\cdot\mathbf{F}+\mathbf{F}\cdot\nabla\phi \qquad (۲۰.۳)$$

$$\nabla\times\phi\mathbf{F}=\phi\nabla\times\mathbf{F}+\nabla\phi\times\mathbf{F} \qquad (۲۱.۳)$$

$$\nabla f(u)=\frac{df}{du}\nabla u \qquad (۲۲.۳)$$

در معادلات (۲۳.۳) تا (۲۷.۳)، $\mathbf{A}$ یک بردار ثابت است.

$$\nabla\cdot(\mathbf{R}-\mathbf{A})=3 \qquad (۲۳.۳)$$

$$\nabla\times(\mathbf{R}-\mathbf{A})=\mathbf{0} \qquad (۲۴.۳)$$

$$\nabla(|\mathbf{R}-\mathbf{A}|^n)=n|\mathbf{R}-\mathbf{A}|^{n-2}(\mathbf{R}-\mathbf{A}) \qquad (۲۵.۳)$$

$$\mathbf{F}\cdot\nabla(\mathbf{R}-\mathbf{A})=\mathbf{F} \qquad (۲۶.۳)$$

$$\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})=\mathbf{A} \qquad (۲۷.۳)$$

$$\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G})=\mathbf{G}\cdot(\nabla\times\mathbf{F})-\mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G}) \qquad (۲۸.۳)$$

$$\nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G})=(\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F}-(\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G}+(\nabla\cdot\mathbf{G})\mathbf{F}-(\nabla\cdot\mathbf{F})\mathbf{G} \qquad (۲۹.۳)$$

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{F})=\nabla(\nabla\cdot\mathbf{F})-\nabla^2\mathbf{F} \qquad (۳۰.۳)$$

$$\nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})=(\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G}+(\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F}+\mathbf{F}\times(\nabla\times\mathbf{G})+\mathbf{G}\times(\nabla\times\mathbf{F}) \qquad (۳۱.۳)$$

$$\nabla\times\nabla(\phi)=\mathbf{0} \qquad (۳۲.۳)$$

$$\nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})=0 \qquad (۳۳.۳)$$

$$\nabla\cdot(\nabla\phi_1\times\nabla\phi_2)=0 \qquad (۳۴.۳)$$

اتحادهای (۱۹.۳)، (۲۰.۳)، (۲۱.۳) بسیار ساده‌اند. آنها بر اساس فرمولی نوشته شده‌اند که مشتق یک حاصل ضرب را به صورت مجموع دو جمله بیان می‌کند که هر یک شامل مشتق یکی از عوامل ضرب است. هر یک از این اتحادها به آسانی مؤلفه به مؤلفه ثابت می‌شود؛ به عنوان مثال،

مؤلفهٔ z از $\nabla\times\phi\mathbf{F}$ عبارت است از :

$$\frac{\partial}{\partial x}(\phi F_2) - \frac{\partial}{\partial y}(\phi F_1)$$

که اگر آن را تجزیه کنیم، ملاحظه می‌کنیم که این عبارت، ϕ برابر مؤلفهٔ z از $\nabla\times\mathbf{F}$ است به اضافهٔ مؤلفهٔ z از $(\nabla\phi)\times\mathbf{F}$.

اتحاد (۲۲.۳) قاعدهٔ زنجیری است ؛ مؤلفهٔ x آن می‌گوید که

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u) = \frac{df}{du}\,\frac{\partial u}{\partial x}$$

این اتحاد را می‌توان در مورد توابع چند متغیره تعمیم داد؛ مثلاً، اگر u_1 و u_2 توابعی از x ، y، و z باشند و f تابعی از u_1 و u_2 باشد، داریم:

$$\nabla f(u_1,u_2) = \frac{\partial f}{\partial u_1}\nabla u_1 + \frac{\partial f}{\partial u_2}\nabla u_2$$

اتحادهای (۲۳.۳) تا (۲۷.۳)، که شامل بردار $\mathbf{R}$ می‌باشند، کاملاً بدیهی هستند ولی به ندرت مفید واقع می‌شوند.

اتحادهای (۲۸.۳) تا (۳۱.۳) متضمن اثر متقابل بردار و خواص دیفرانسیل ∇ می‌باشند و کاملاً پیچیده‌اند. درستی هر یک از آنها را می‌توان مؤلفه به مؤلفه، که البته استخراج مؤلفه‌ها از بردار مورد بحث کار نسبتاً دشواری است، تحقیق کرد، و ما از محصل مشتاق می‌خواهیم که آنها را به این صورت ثابت کند. در بخش (اختیاری) بعد که مخصوص بحث از نماد تانسور است، از چند میکانیزم نمادی سنگین برای اثبات مؤثرتر این اتحادها استفاده خواهیم کرد. با این وجود، می‌خواهیم چند تدبیر برای حدس و کشف این اتحادها، به همان صورتی که هستند، ذکر کنیم.

اتحاد (۲۸.۳) را انتخاب می‌کنیم و می‌رویم به سراغ

$$\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) \tag{۳۵.۳}$$

تا آن جا که به طبیعت برداری ضرب اسکالر سه‌گانه مربوط می‌شود، می‌دانیم که می‌توان جای علائم ضرب اسکالر و ضرب خارجی را عوض کرد. به این ترتیب، گمان می‌کنیم که عبارت (۳۵.۳) برابر

است با:

$$(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{G} \qquad (۳۶.۳)$$

با این وجود، باید (۳۶.۳) را خارج از قرارداد تفسیر کنیم؛ یعنی عملگر ∇ از هردوی $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ مشتق بگیرد. [و نه صرفاً از $\mathbf{F}$، به صورتی که (۳۶.۳) حکم می‌کند.]بنابراین ، برای اینکه حدس ما دقیق شود ، باید (۳۶.۳) را به دو جمله تجزیه کنیم، شبیه تجزیه‌ای که در مشتقگیری از یک حاصل ضرب صورت می‌گیرد. جمله‌ای که در آن به تنهایی از $\mathbf{F}$ مشتق گرفته می‌شود صراحتاً به صورت

$$\mathbf{G}\cdot(\nabla\times\mathbf{F}) \qquad (۳۷.۳)$$

بیان می‌شود. برای تحصیل جمله‌ای که در آن از $\mathbf{G}$ مشتق گرفته می‌شود، (۳۶.۳) را به صورت

$$-(\nabla\times\mathbf{G})\cdot\mathbf{F} \qquad (۳۸.۳)$$

«بازنویسی» می‌کنیم که با طبیعت برداری ضرب اسکالر سه‌گانه سازگار است. اکنون بخشی از فرمول که در آن از $\mathbf{G}$ مشتق گرفته می‌شود از (۳۸.۳) به صورت

$$-\mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G})$$

آشکار می‌شود. به این ترتیب، سرانجام، بحث به این می‌انجامد که حدس بزنیم که (۳۵.۳) با حاصل جمع (۳۷.۳) و (۳۹.۳) برابر است، همان اتحاد (۲۸.۳)!

اجازه دهید مجدداً این تدبیر را بر روی فرمول (۲۹.۳) بیازمائیم. اگر قاعدهٔ قدیم خود در مورد $\mathbf{A}\times(\mathbf{B}\times\mathbf{C})$ را اعمال کنیم، نخست، به صورت نادرست، می‌نویسیم:

$$\nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G})=(\nabla\cdot\mathbf{G})\mathbf{F}-(\nabla\cdot\mathbf{F})\mathbf{G} \qquad (۴۰.۳)$$

این فرمول نادرست است، زیرا، در هر یک از عبارات طرف راست، باید ∇ را عملگری تعبیر کنیم که از هر دوی $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ مشتق می‌گیرد. برای این که این مشتق مرکب را تجزیه کنیم و عبارت درستی برای «$(\nabla\cdot\mathbf{G})\mathbf{F}$» بیابیم، ملاحظه می‌کنیم که $(\nabla\cdot\mathbf{G})\mathbf{F}$، که با قرارداد این بخش تعبیر می‌شود، جمله‌ای می‌دهد که در آن از $\mathbf{G}$ مشتق گرفته می‌شود، در حالی که $(\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F}$ جمله‌ای می‌دهد که در آن $\mathbf{G}$ یک ثابت تلقی و از $\mathbf{F}$ مشتق گرفته می‌شود. اگر جملهٔ دیگر (۴۰.۳) را به طور مشابه مورد بحث قرار دهیم، پیشنهاد می‌کنیم که

$$\nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G})=(\nabla\cdot\mathbf{G})\mathbf{F}+(\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F}-(\nabla\cdot\mathbf{F})\mathbf{G}-(\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G}$$

این اتحاد (۲۹.۳) است.

مسلماً استدلال بالا دشوار است، ولی می‌تواند در انتخاب طریق مناسب اثبات معادلات برداری پیچیده (نظیر معادلات نظریهٔ الکترومغناطیس) مفید واقع شود. کافی است بگوییم که خواننده همیشه آرزو می‌کند که برهان چنین «اتحاد» ی را در یک کتاب راهنمای ریاضی بیابد .

اتحادهای (۳۲.۳)، (۳۳.۳)، و (۳۴.۳) در هر حالت بر اساس ظهور تفاضلات مرتبهٔ دوم مخلوط بنا شده‌اند؛ مثلاً، مؤلفهٔ z از $\nabla\times(\nabla\phi)$ عبارت است از:

$$\frac{\partial}{\partial x}\frac{\partial\phi}{\partial y}-\frac{\partial}{\partial y}\frac{\partial\phi}{\partial x}$$

از حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته می‌دانیم که این مشتقات مخلوط با هر ترتیب دلخواه با هم برابرند؛ از این رو، این جمله‌ها حذف می‌شوند . [محض رعایت دقت، قرار می‌گذاریم که در بحث از اتحادهای (۳۲.۳)، (۳۳.۳) و (۳۴.۳)، توابع ϕ و $\mathbf{F}$ *مشتقات مرتبهٔ دوّم پیوسته دارند.*]

اتحاد (۲۲.۳) به این دلیل در این جا گنجانیده شده است که، در این کتاب ، مختصات منحنی الخط تا فصل پنجم به تفضیل مورد بحث قرار نمی‌گیرد، و اغلب کسانی که از این کتاب استفاده می‌کنند تا آن جا پیش نخواهند رفت. برای چنین خوانندگانی، زحمت محاسبهٔ گرادیان می‌تواند با استفاده از (۲۲.۳) و کمی اطلاعات عمومی تقلیل یابد، و اینان باید مثال زیر را به دقت مطالعه نمایند.

مثال ۳. ۲۳ گرادیان میدان اسکالر f با ضابطهٔ $f(r)=1/r$ را، که در آن r فاصلهٔ از مبدأ است و $r=|\mathbf{R}|=\sqrt{x^2+y^2+z^2}$، بیابید.

حل: چون r فاصلهٔ از مبدأ است، ∇r را می‌توان با استفاده از خواص ۱.۳ تا ۴.۳ محاسبه کرد. مسلماً، وقتی از مبدأ دور می‌شویم، r با حداکثر سرعت افزایش می‌یابد؛ بنابراین، جهت ∇r همان جهت بردار موضع $\mathbf{R}$ است، که آن نیز در جهت خروج از مبدأ است. وقتی در این جهت حرکت می‌کنیم، آهنگ افزایش r در واحد فاصله صرفاً $dr/dr=1$ است. بنابراین، ∇r یک بردار یکّه در جهت خروج

از مبدأ است و، از این رو، برابر $\mathbf{R}/|\mathbf{R}|$ است که از تقسیم بردار موضع بر اندازه‌اش به دست آمده است؛ یعنی،

$$\nabla r=\nabla|r|=\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{1/2}}$$

اگر (۲۲.۳) را در مورد $f(r)=1/r$ اعمال کنیم، داریم: $\nabla f(r)=f'(r)\nabla r=(-1/r^2)\nabla r$، و، بنابراین،

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=\left(-\frac{1}{r^2}\right)\nabla r=-\frac{1}{r^2}\frac{\mathbf{R}}{|\mathbf{R}|}=-\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{3/2}}=-\frac{\mathbf{R}}{r^3}$$

که با معادلهٔ (۲۵.۳) به ازای $n=1$ سازگار است. خوانندگانی که با میدانهای الکتریکی آشنایند این عبارت را تشخیص می‌دهند. به استثنای بعضی ثابتهای فیزیکی، این عبارت شدت میدان الکتریکی یک نقطهٔ باردار واقع در مبدأ است.

مانند بخش (۱۴.۱)، به خواننده توصیه می‌شود که این بخش را برای مراجعات بعدی علامت گذاری نماید.

تمرینات

۱. معادلات (۱۹.۳) و (۲۰.۳) را ثابت کنید.

۲. (۲۳.۳) تا (۲۷.۳) را ثابت کنید.

۳. (۳۲.۳)، (۳۳.۳)، و (۳۴.۳) را ثابت کنید.

۴. (۳۰.۳) را به روش مبتنی بر اکتشافات شهودی «نتیجه بگیرید.»

۵. چرا «اتحاد» زیر مسلماً نادرست است ؟ (*راهنمایی*: تقارن را بررسی کنید.)

$$\nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G})=\mathbf{G}\cdot(\nabla\times\mathbf{F})+\mathbf{F}\cdot(\nabla\times\mathbf{G})$$

۸.۳ درس اختیاری: نماد تانسور

عملگر ∇، که به عنوان یک عملگر برداری مورد بحث قرار گیرد، دارای مؤلفه‌های $\partial/\partial x$، $\partial/\partial y$، و $\partial/\partial z$ است. در مبحث نماد تانسور، دو قرارداد می‌پذیریم که ما را قادر خواهند ساخت که ∇ را به سادگی وارد دستگاه مورد بحث کنیم. اولاً، مختصات را به جای (x,y,z) به سه تایی (x_1,x_2,x_3) نشان می‌دهیم که، به موجب این قرار داد، مؤلفهٔ iام ∇ برابر $\partial/\partial x_i$ مـی‌شود. ثـانیاً، $\partial/\partial x_i$ را مختصراً به ∂_i نمایش می‌دهیم. اکنون عبارت تانسوری مفاهیمی راکه در این فصل معرفی شده‌اند می‌نویسیم.

مؤلفهٔ iام گرادیان ϕ عبارت است از $\partial_i \phi$.

واگرایی $\mathbf{F}$ عبارت است از $\partial_i F_i$ (جمع بندی را به خاطر بیاورید).

مؤلفهٔ iام تاو $\nabla\times\mathbf{F}$، عبارت است از $\varepsilon_{ijk}\,\partial_j F_k$. (عبارت دترمینانی تاو را به خاطر بیاورید.)

لاپلاسی ϕ عبارت است از $\partial_i\,\partial_i\phi$. اگر شرط کنیم که قرارداد جمع بندی در مورد جمله‌های مجذور شده اعمال می‌شود، می‌توانیم $\partial_i\,\partial_i\phi$ را به صورت $\partial^2_i\phi$ بنویسیم، زیرا وقتی $\partial^2_i\phi$ به تفصیل نوشته شود اندیس مکرّر دارد.

اکنون استدلال اتحادهای بخش اخیر به آسانی صورت می‌گیرد. برای بررسی اتحاد (۲۱.۳)، ملاحظه کنید که مؤلفهٔ iام $\nabla\times\phi\mathbf{F}$ عبارت است از:

$$\varepsilon_{ijk}\,\partial_j(\phi F_k)=\varepsilon_{ijk}(\partial_j\,\phi)F_k+\varepsilon_{ijk}\,\phi\partial_j F_k$$

که این جمله‌ها همان مؤلفه‌های iام $\nabla\phi\times\mathbf{F}$ و $\phi\nabla\times\mathbf{F}$ می‌باشند.

برای بررسی (۳. ۲۶)، ملاحظه کنید که مؤلفهٔ iام $\mathbf{F}\cdot\nabla\mathbf{R}$ عبارت است از $F_j\partial_j x_j$ (j اندیس جمع است). امّا $\partial_j\,x_i=\delta_{ij}$، دلتای کرونکر؛ لذا $F_j\,\partial_j\,x_i=F_j\,\delta_{ij}=F_j$، مؤلفهٔ iام $\mathbf{F}$.

اثبات فرمول (۳. ۲۹) به صورت زیر انجام می‌شود:

$$\begin{aligned}\varepsilon_{ijk}\,\partial_j(\mathbf{F}\times\mathbf{G})_k&=\varepsilon_{ijk}\,\partial_j(\varepsilon_{klm}\,F_l\,G_m)\\&=\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{klm}\,\partial_j(F_l\,G_m)\end{aligned}$$

$$=(\delta_{il}\,\delta_{jm}-\delta_{im}\,\delta_{jl})\partial_j(F_l\,G_m)$$

$$=\partial_j(F_i\,G_j)-\partial_j(F_j\,G_i)$$

$$=G_j\,\partial_j\,F_i+(\partial_j\,G_j)F_i-(\partial_j\,F_j)G_i-F_j\,\partial_j\,G_i$$

$$=(\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F}_i+(\nabla\cdot\mathbf{G})\mathbf{F}_i-(\nabla\cdot\mathbf{F})\mathbf{G}_i-(\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G}_i$$

برهان (۳۱.۳) کمی پیچیده است. استدلال را با بسط بدیهی مؤلفهٔ $\mathbf{i}$ ام $\nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})$ آغاز می‌کنیم:

$$\partial_j(F_j\,G_j)=F_j\,\partial_i\,G_j+G_j\,\partial_i\,F_j \qquad (۴۱.۳)$$

اکنون، ماگیر افتاده‌ایم؛ به نظر می‌رسد که جمله‌های سمت راست مشابه‌های برداری ندارند. چگونه می‌توانیم طرف راست اتحاد (۳۱.۳) را تشخیص دهیم؟ کلید این معمّا در عبارت تانسوری $\mathbf{F}\times(\nabla\times\mathbf{G})$ نهفته است؛ مؤلفهٔ $\mathbf{i}$ ام این بردار عبارت است از:

$$\varepsilon_{ijk}\,F_j(\varepsilon_{klm}\,\partial_l\,G_m)=\varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{klm}\,F_j\,\partial_l\,G_m$$

$$=(\delta_{il}\,\delta_{jm}-\delta_{im}\,\delta_{jl})F_j\,\partial_l\,G_m$$

$$=F_j\,\partial_i\,G_j-F_j\,\partial_j\,G_i$$

ما حضور یکی از عبارات «رمزی»، $F_j\,\partial_i\,G_j$، و مؤلفهٔ $\mathbf{i}$ ام $(\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G}$- را مشاهده می‌کنیم. پس از جابه جایی، می‌بینیم که $F_j\,\partial_i\,G_j$ مؤلفهٔ $\mathbf{i}$ ام $\mathbf{F}\times(\nabla\times\mathbf{G})+\mathbf{F}\cdot\nabla\mathbf{G}$ است. اگر این را در معادلهٔ (۴۱.۳) بالا قرار دهیم، و عبارت مشابهی برای $G_j\,\partial_i\,F_j$ بیابیم، به اتحاد

$$\nabla(\mathbf{F}\cdot\mathbf{G})=\mathbf{F}\times(\nabla\times\mathbf{G})+\mathbf{F}\cdot\nabla\mathbf{G}+\mathbf{G}\times(\nabla\times\mathbf{F})+\mathbf{G}\cdot\nabla\mathbf{F}$$

می‌رسیم که همان اتحاد مطلوب است.

برابری مشتقات مرتبهٔ دوّم مخلوط هر تابع (دوباره به طور پیوسته مشتق پذیر) را می‌توان در دستگاه نماد تانسوری با معادلات

$$\partial_j\,\partial_i\,\phi=\partial_i\,\partial_j\,\phi$$

یا، مختصراً، با

$$\partial_j\,\partial_i=\partial_i\,\partial_j$$

نمایش داد. یعنی، مؤلفه‌های ∇ با یکدیگر تعویض می‌شوند. (البته، آنها با توابع تعویض نمی‌شوند: $\partial_i \phi$ با $\phi \partial_i$ بسیار متفاوت است.) این نکته تحقیق درستی اتحادهای (۳۲.۳)، (۳۳.۳)، و (۳۴.۳) را آسان می‌کند.

در مورد (۳۴.۳)، به جای ϕ_1 و ϕ_2 از ψ و χ استفاده می‌کنیم تا اندیسها با هم مخلوط نشوند. در این صورت داریم:

$$\partial_i [\varepsilon_{ijk} (\partial_j \psi)(\partial_k \chi)] = \varepsilon_{ijk} (\partial_i \partial_j \psi)(\partial_k \chi) + \varepsilon_{ijk} (\partial_j \psi)(\partial_i \partial_k \chi)$$

به علّت طبیعت نامتقارن ε_{ijk}، وقتی مجموع نظیر i و j را در نظر می‌گیریم، اگر $j \neq i$، جمل $\partial_i \partial_j \psi$ و $\partial_j \partial_i \psi$ علائم متفاوت دارند، و اگر $j = i$، ضرایب این جمله‌ها صفرند. به این ترتیب، همهٔ افزوده‌های اولین و دومین جمله حذف می‌شوند و به صفر می‌رسیم و اتحاد (۳۴.۳) ثابت می‌شود.

تمرینات

با استفاده از نماد تانسور، اتحادهای برداری زیر را ثابت کنید:

۱. $\nabla \cdot \phi \mathbf{F} = \phi \nabla \cdot \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla \phi$

۲. اگر $\mathbf{A}$ یک بردار ثابت باشد، $\nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{R}) = \mathbf{A}$

۳. $\nabla \times \mathbf{R} = \mathbf{0}$

۴. $\nabla . (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) - \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \mathbf{G})$

۵. $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$

۶. $\nabla \times (\nabla \phi) = \mathbf{0}$

۷. $\nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) = 0$

مسائل تکمیلی

۱. فرض کنید $T(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ و S سطح تک مقدار $T = 1$ باشد. همهٔ نقاط (x,y,z) بر S را بیابید که صفحات مماس با قائمهای (۱،۱،۱) دارند.

۲. جهت بیشترین افزایش تابع

$$f(x,y,z) = e^{-xy}\cos z$$

را در نقطهٔ (۱،۱،۰) بیابید.

۳. اگر $\phi(x,y,z)=x^2y+zy+z^3$، مطلوب است:

(الف) گرادیان ϕ، و

(ب) معادلهٔ صفحه‌ای که از نقطهٔ (۱،۱،-۱) می‌گذرد و با سطح تک مقدار ϕ در آن نقطه موازی است.

۴. فرض کنید S_1 و S_2 سطوح با معادلات

$$\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}+\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad \text{و} \qquad \frac{x^2}{A^2}+\frac{y^2}{B^2}+\frac{z^2}{C^2}=1$$

باشند. نشان دهید که اگر $a^2B^2-b^2A^2=0$ ، آن‌گاه منحنی مقطع S_1 و S_2 باید با صفحهٔ xy موازی باشد.

۵. $\operatorname{div}\mathbf{F}$ و $\operatorname{curl}\mathbf{F}$ را محاسبه کنید وقتی که

$$\mathbf{F}= e^{x}\cos yz\,\mathbf{i} + e^{y}\cos xz\,\mathbf{j} + e^{z}\cos xy\,\mathbf{k}$$

۶. اگر $\mathbf{A} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ یک بردار ثابت باشد، و $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ و $r=|\mathbf{R}|$ ، نشان دهید که

$$\nabla\cdot\left|\frac{\mathbf{A}\times\mathbf{R}}{r}\right|=0$$

۷. مطلوب است :

(الف) واگرایی و تاو $\mathbf{F}$ وقتی که

$$\mathbf{F}=e^{y+z}(\mathbf{i}+x\mathbf{j}+2x\mathbf{k})$$

(ب) جهت بیشترین افزایش تابع f با ضابطهٔ

$$f(x,y,z)=\operatorname{Ln}[(x+y)^2+(y+z)^2+(z+x)^2]$$

در نقطهٔ (۱،-۱،۲) ، و

(ج) مشتق جهتی تابع f بخش (ب) در نقطهٔ (۲،-۱،۱) در جهت (۰،-۱،۰).

۸. فرض کنید $\mathbf{F}=y^2\mathbf{i}+z^2\mathbf{j}+x\mathbf{k}$. مطلوب است:

(الف) تاو $\mathbf{F}$، و

(ب) مؤلفهٔ تاو $\mathbf{F}$ در امتداد مماس بر منحنی

$$x=\cos\pi t \qquad y=\sin\pi t \qquad z=t^2$$

در $t=1$.

۹. فرض کنید $\mathbf{F}(x,y,z)$ یک میدان برداری باشد که در همهٔ نقاط فضا تعریف شده است، و مورچهٔ باهوشی را در نظر بگیرید که در صفحه xy زندگی می‌کند. فرض کنید همهٔ چیزی که مورچه دربارهٔ $\mathbf{F}$ می‌داند مقادیر این تابع در صفحهٔ xy است.

(الف) آیا این مورچه می‌تواند $\nabla\times\mathbf{F}$ را محاسبه کند. مختصراً توضیح دهید.

(ب) آیا این مورچه می‌تواند $(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{k}$ را محاسبه کند. مختصراً توضیح دهید.

۱۰. یک کوه آتشفشان هم اکنون منفجر و گدازه از نوک کوه به پایین سرازیر می‌شود. فرض کنید که ارتفاع کوه با

$$z(x,y)=h\,e^{-(x^2+y^2)}$$

داده شده است که در آن h، ماکسیمم ارتفاع است، و نیز فرض کنید که گدازه در جهت تند ترین شیب (سریعترین تغییر در z) جاری می‌شود. مطلوب است:

(الف) تصویر بر صفحهٔ xy جهتی که در آن گدازه از نقطه $(1,2,he^{-9})$ دور می‌شود، و

(ب) تصویر بر صفحهٔ xy خط شارش گدازه که از نقطهٔ $(1,2,he^{-9})$ می‌گذرد.

۱۱. فرض کنید بتوانیم $\mathbf{V}(\mathbf{R})$ را به صورت $\mathbf{V}(\mathbf{R})=\mathbf{A}f(\mathbf{R}\cdot\mathbf{B})$ بیان کنیم که در آن $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ ثابتند. ثابت کنید که $\mathbf{Curl\ v}$ برهر دوی $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ عمود است.

پیوست ب

مطابق قولی که داده‌ایم، این پیوست را به اثبات مهمترین اتحادهای برداری (۳. ۱۹) تا (۳. ۳۴) فصل سوّم کتاب اختصاص می‌دهیم. برهانها بر اساس تعریف ضرب اسکالر، ضرب برداری، گرادیان، واگرایی، تاو، و احکام مقدماتی آنهاست که در فصول اوّلیهٔ کتاب بیان و ثابت شده است. برای سهولت، مختصات یک نقطهٔ دلخواه از یک دستگاه مختصات قائم راستگرد را به x_1، x_2 و x_3 و بردارهای یکّهٔ محورها را، به ترتیب، به $\mathbf{i}_1$، $\mathbf{i}_2$ و $\mathbf{i}_3$ نشان می‌دهیم.

برهان (۳.۱۹):

$$\mathbf{grad}(\phi_1\phi_2)=$$

$$\nabla(\phi_1\phi_2)=\sum_{n=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_n}(\phi_1\phi_2)\,\mathbf{i}_n$$

$$=\sum_{n=1}^{3}\left(\phi_1\frac{\partial}{\partial x_n}\phi_2+\phi_2\frac{\partial}{\partial x_n}\phi_1\right)\mathbf{i}_n$$

$$=\phi_1\sum_{n=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_n}\phi_2\,\mathbf{i}_n+\phi_2\sum_{n=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_n}\phi_1\,\mathbf{i}_n$$

$$=\phi_1\nabla\phi_2+\phi_2\nabla\phi_1$$

برهان (۳. ۲۵):

$$\text{div}\,(\phi\mathbf{F})=\nabla\cdot\phi\mathbf{F}=\sum_{n=1}^{3}\mathbf{i}_n\cdot\frac{\partial}{\partial x_n}(\phi\mathbf{F})$$

$$=\sum_{n=1}^{3}\mathbf{i}_n\cdot\left(\phi\frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{F}+\mathbf{F}\frac{\partial}{\partial x_n}\phi\right)$$

$$=\phi\sum_{n=1}^{3}\mathbf{i}_n\cdot\frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{F}+\mathbf{F}\cdot\sum_{n=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_n}\phi\,\mathbf{i}_n$$

$$=\phi\,\nabla\cdot\mathbf{F}+\mathbf{F}\cdot\nabla\phi=\phi\,\text{div}\mathbf{F}+\mathbf{F}\cdot\mathbf{grad}\,\phi$$

برهان (۲۱.۳):

$$\mathbf{Curl}\,\phi\mathbf{F} = \nabla\times\phi\mathbf{F} = \sum_{n=۱}^{۳} \mathbf{i}_n\times \frac{\partial}{\partial x_n}(\phi\mathbf{F})$$

$$= \sum_{n=۱}^{۳} \mathbf{i}_n\times\left(\phi\frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{F} + \mathbf{F}\frac{\partial}{\partial x_n}\phi\right)$$

$$= \phi\sum_{n=۱}^{۳} \mathbf{i}_n\times\frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{F} + \left(\sum_{n=۱}^{۳}\frac{\partial}{\partial x_n}\phi\mathbf{i}_n\right)\times\mathbf{F}$$

$$= \phi\nabla\times\mathbf{F} + \nabla\phi\times\mathbf{F}$$

$$= \phi\mathbf{Curl}\ \mathbf{F} + \mathbf{grad}\,\phi\times\mathbf{F}$$

برهان (۲۸.۳):

$$\mathrm{div}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \nabla\cdot(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \sum_{n=۱}^{۳} \mathbf{i}_n\cdot\frac{\partial}{\partial x_n}(\mathbf{F}\times\mathbf{G})$$

$$= \sum_{n=۱}^{۳} \mathbf{i}_n\cdot\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{F}\right)\times\mathbf{G} + \mathbf{F}\times\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{G}\right)\right]$$

$$= \sum_{n=۱}^{۳}\left(\mathbf{i}_n\times\frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{F}\right)\times\mathbf{G} - \sum_{n=۱}^{۳}\left(\mathbf{i}_n\times\frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{G}\right)\cdot\mathbf{F}$$

$$= \mathbf{G}\cdot\sum_{n=۱}^{۳}\left(\mathbf{i}_n\times\frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{F}\right) - \mathbf{F}\cdot\sum_{n=۱}^{۳}\left(\mathbf{i}_n\times\frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{G}\right)$$

$$= \mathbf{G}\cdot\nabla\times\mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\nabla\times\mathbf{G} = \mathbf{G}\cdot\mathbf{Curl}\ \mathbf{F} - \mathbf{F}\cdot\mathbf{Curl}\ \mathbf{G}$$

برهان (۲۹.۳):

$$\mathbf{Curl}(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{G}) = \sum_{n=۱}^{۳}\mathbf{i}_n\times\frac{\partial}{\partial x_n}(\mathbf{F}\times\mathbf{G})$$

$$= \sum_{n=۱}^{۳}\mathbf{i}_n\times\left[\mathbf{F}\times\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{G}\right)\right] + \sum_{n=۱}^{۳}\mathbf{i}_n\times\left[\left(\frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{F}\right)\times\mathbf{G}\right]$$

که به استناد (۲۹.۱)،

$$= \sum_{n=1}^{3} \left(\mathbf{i}_n \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} \mathbf{G} \right) \mathbf{F} - \sum_{n=1}^{3} \left(\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{F} \right) \frac{\partial}{\partial x_n} \mathbf{G}$$

$$+ \sum_{n=1}^{3} \left(\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{G} \right) \frac{\partial}{\partial x_n} \mathbf{F} - \sum_{n=1}^{3} \left(\mathbf{i}_n \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} \mathbf{F} \right) \mathbf{G}$$

$$= \left(\nabla \cdot \mathbf{G} \right) \mathbf{F} - \left(\mathbf{F} \cdot \nabla \right) \mathbf{G} + \left(\mathbf{G} \cdot \nabla \right) \mathbf{F} - \left(\nabla \cdot \mathbf{F} \right) \mathbf{G}$$

برهان (۳۰.۳):

$$\textbf{Curl Curl } \mathbf{F} = \nabla \times \left(\nabla \times \mathbf{F} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{3} \mathbf{i}_n \times \frac{\partial}{\partial x_n} \sum_{k=1}^{3} \mathbf{i}_k \times \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{F}$$

$$= \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_n} \left(\mathbf{i}_n \times \sum_{k=1}^{3} \mathbf{i}_k \times \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{F} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_n} \sum_{k=1}^{3} \mathbf{i}_n \times \left(\mathbf{i}_k \times \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{F} \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_n} \sum_{k=1}^{3} \left[\left(\mathbf{i}_n \cdot \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{F} \right) \mathbf{i}_k - \left(\mathbf{i}_n \cdot \mathbf{i}_k \right) \frac{\partial}{\partial x_k} \mathbf{F} \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_n} \left[\sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} F_n \right) \mathbf{i}_k - \frac{\partial}{\partial x_n} \mathbf{F} \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_n} \sum_{k=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x_k} F_n \right) \mathbf{i}_k - \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x^2_n} \mathbf{F}$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \sum_{n=1}^{3} \left(\frac{\partial}{\partial x_n} F_n \right) \mathbf{i}_k - \sum_{n=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x^2_n} \sum_{k=1}^{3} F_k \mathbf{i}_k$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{n=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_n} F_n \right) \mathbf{i}_k - \sum_{n=1}^{3} \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x^2_n} F_k \mathbf{i}_k$$

$$= \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\sum_{n=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_n} F_n \right) \mathbf{i}_k - \sum_{k=1}^{3} \left(\sum_{n=1}^{3} \frac{\partial^2}{\partial x_n^2} F_k \right) \mathbf{i}_k$$

$$= \nabla (\nabla \cdot \mathbf{F}) - \sum_{k=1}^{3} \nabla^2 F_k \, \mathbf{i}_k$$

$$= \mathbf{grad}\,(\operatorname{div} \mathbf{F}) - \nabla^2 \mathbf{F}$$

برهان (۳.۳۱):

$$\mathbf{grad}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = \sum_{n=1}^{3} \mathbf{i}_n \frac{\partial}{\partial x_n} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{G})$$

$$= \sum_{n=1}^{3} \mathbf{i}_n \left(\frac{\partial}{\partial x_n} \sum_{k=1}^{3} F_k G_k \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{3} \mathbf{i}_n \sum_{k=1}^{3} \frac{\partial}{\partial x_n} (F_k G_k)$$

$$= \sum_{n=1}^{3} \mathbf{i}_n \sum_{k=1}^{3} \left(F_k \frac{\partial}{\partial x_n} G_k + G_k \frac{\partial}{\partial x_n} F_k \right)$$

$$= \sum_{n=1}^{3} \mathbf{i}_n \left[\left(\mathbf{F} \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} \mathbf{G} \right) + \left(\mathbf{G} \, \frac{\partial}{\partial x_n} \mathbf{F} \right) \right]$$

$$= \sum_{n=1}^{3} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{i}_n) \frac{\partial}{\partial x_n} \mathbf{G} + \sum_{n=1}^{3} (\mathbf{G} \cdot \mathbf{i}_n) \frac{\partial}{\partial x_n} \mathbf{G}$$

$$+ \sum_{n=1}^{3} \left(\mathbf{F} \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} \mathbf{G} \right) \mathbf{i}_n - \sum_{n=1}^{3} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{i}_n) \frac{\partial}{\partial x_n} \mathbf{G}$$

$$+ \sum_{n=1}^{3} \left(\mathbf{G} \cdot \frac{\partial}{\partial x_n} \mathbf{F} \right) \mathbf{i}_n - \sum_{n=1}^{3} (\mathbf{G} \cdot \mathbf{i}_n) \frac{\partial}{\partial x_n} \mathbf{F}$$

$$= (\mathbf{F} \cdot \nabla) \mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla) \mathbf{F}$$

$$+ \sum_{n=1}^{3} \left[\left(\mathbf{F}\cdot\frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{G} \right)\mathbf{i}_n - (\mathbf{F}\cdot\mathbf{i}_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{G}\right]$$

$$+ \sum_{n=1}^{3} \left[\left(\mathbf{G}\cdot\frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{F} \right)\mathbf{i}_n - (\mathbf{G}\cdot\mathbf{i}_n)\frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{F}\right]$$

$$= (\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F} + \sum_{n=1}^{3}\mathbf{F}\times\mathbf{i}_n\times\frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{G} + \sum_{n=1}^{3}\mathbf{G}\times\mathbf{i}_n\times\frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{F}$$

$$= (\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F}\times\sum_{n=1}^{3}\mathbf{i}_n\times\frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{G} + \mathbf{G}\times\sum_{n=1}^{3}\mathbf{i}_n\times\frac{\partial}{\partial x_n}\mathbf{F}$$

$$= (\mathbf{F}\cdot\nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G}\cdot\nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F}\times(\nabla\times\mathbf{G}) + \mathbf{G}\times(\nabla\times\mathbf{F})$$

برهان (۳۲.۳):

$$\mathbf{Curl\ grad}\phi = \nabla\times\nabla\phi = \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1}\phi & \frac{\partial}{\partial x_2}\phi & \frac{\partial}{\partial x_3}\phi \end{vmatrix}$$

$$= \phi \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \end{vmatrix} = \phi(\mathbf{0}) = 0$$

البته، فرض بر این است که ϕ دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ دوّم پیوسته است.

برهان (۳۳.۳):

$$\text{div}\,(\mathbf{Curl\ F}) = \nabla\cdot(\nabla\times\mathbf{F})$$

$$= \nabla \cdot \begin{vmatrix} \mathbf{i}_1 & \mathbf{i}_2 & \mathbf{i}_3 \\ \frac{\partial}{\partial x_1} & \frac{\partial}{\partial x_2} & \frac{\partial}{\partial x_3} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \nabla\cdot\left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right)\mathbf{i}_1 + \left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right)\mathbf{i}_2 + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)\mathbf{i}_3\right]$$

$$= \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{\partial F_3}{\partial x_2} - \frac{\partial F_2}{\partial x_3}\right) + \frac{\partial}{\partial x_2}\left(\frac{\partial F_1}{\partial x_3} - \frac{\partial F_3}{\partial x_1}\right) + \frac{\partial}{\partial x_3}\left(\frac{\partial F_2}{\partial x_1} - \frac{\partial F_1}{\partial x_2}\right)$$

$$= \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_1 \partial x_3} + \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_2 \partial x_1} + \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_3 \partial x_2}$$

که اگر مؤلفه‌های $\mathbf{F}$ دارای مشتقات جزئی مرتبهٔ دوّم پیوسته باشند، خواهیم داشت:

$$\operatorname{div}(\mathbf{Curl\ F}) = \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_2} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial x_1 \partial x_2}\right) + \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_3} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial x_2 \partial x_3}\right)$$

$$+\left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial x_3 \partial x_1} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x_3 \partial x_1}\right) = 0$$

برهان (۳۴.۳): به استناد (۲۸.۳) و (۳۲.۳)،

$$\nabla\cdot(\nabla\phi_1 \times \nabla\phi_2) = \nabla\phi_2\cdot[\nabla\times(\nabla\phi_1)] - \nabla\phi_1\cdot[\nabla\times(\nabla\phi_2)]$$

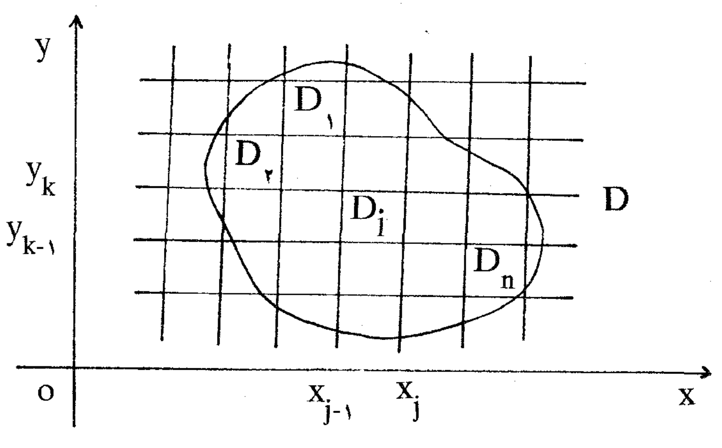
$$= \nabla\phi_2\cdot\mathbf{0} - \nabla\phi_1\cdot\mathbf{0} = 0 - 0 = 0$$

پیوست ج

در این پیوست، انتگرال دوگانهٔ توابع حقیقی از دو متغیر حقیقی و کاربردهای آن را مورد بحث قرار می‌دهیم.

بخش اوّل : تعریف انتگرال دوگانه

فرض می‌کنیم تابع $z=f(x,y)$ بر ناحیهٔ بستهٔ D [1] از صفحهٔ xy تعریف شده و در آن پیوسته باشد. ناحیهٔ D را به وسیلهٔ خطوط موازی با محورهای مختصات به نواحی جزئی تقسیم و فرض می‌کنیم $D_۱$، $D_۲$،...، D_n نواحی جزئی D باشند. (شکل (۱) را ببینید.) مساحت این نواحی جزئی را، به ترتیب، $A(D_۱)$ ، $A(D_۲)$ ،...، $A(D_n)$ می‌نامیم، و در هر ناحیهٔ جزئی مانند D_i، که در آن $۱\le i\le n$، نقطه‌ای مانند (ξ_i , η_i) انتخاب می‌کنیم و مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم:



شکل ۱

[1] هر ناحیه که شامل مرز خود باشد، بسته نامیده می‌شود.

$$f(\xi_1,\eta_1)A(D_1)+f(\xi_2,\eta_2)A(D_2)+\ldots+f(\xi_n,\eta_n)A(D_n)$$

$$=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)A(D_i) \qquad (1)$$

این مجموع را یک مجموع تقریب انتگرال دوگانهٔ تابع f بر ناحیهٔ D می‌نامند، و ملاحظه می‌کنید که به ازای هر افراز ناحیهٔ D یک مجموع تقریب مانند (۱) خواهیم داشت. بزرگترین قطر مستطیلهای D_1، D_2،...، D_n را نرم این افراز می‌گویند. اگر وقتی $n\to\infty$ ، نرم افراز به صفر میل کند، حد مجموع تقریب (۱) را، در صورت وجود، انتگرال دوگانهٔ تابع f بر ناحیهٔ D می‌نامند و آن را به صورت

$$\int\int_D f(x,y)dxdy$$

نشان می‌دهند.

تبصرهٔ ۱: بررسی شرایطی که در صورت تحقق آنها انتگرال دوگانهٔ تابع f بر ناحیهٔ D موجود باشد از موضوع این درس خارج است. بنابراین، فرض می‌کنیم نواحی و توابعی مورد بحث قرار می‌گیرند که انتگرال دوگانهٔ آنها بر نواحی مفروض وجود دارد.

تبصرهٔ ۲: وجود dxdy در زیر نشانهٔ انتگرال، حاکی از آن است که، چنان که در شکل (۱) ملاحظه می‌کنید،

$$A(D_i)=(x_j-x_{j-1})(y_k-y_{k-1})=\Delta x_j\,\Delta y_k\ ,\ 1\leq i\leq n$$

از این رو، انتگرال دوگانهٔ بالا راگاهی به صورت

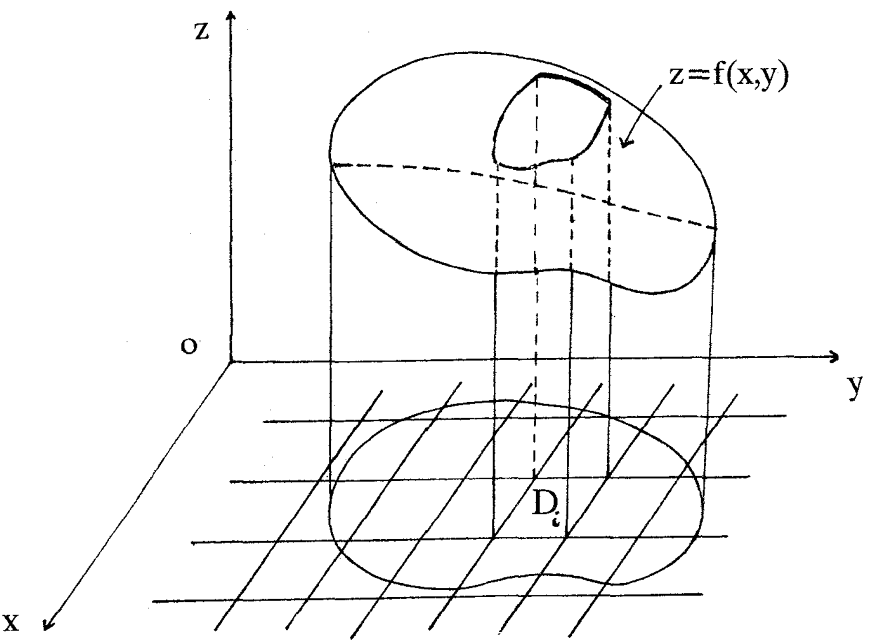
$$\int\int_D f(x,y)dA(D)$$

می‌نویسند و، در این نمایش، dA(D) را عنصر مساحت می‌نامند.

بخش دوّم: تعبیر هندسی انتگرال دوگانه

فرض کنید f در D نامنفی باشد، و جسمی را در نظر بگیرید که بدنه‌اش از سه قسمت زیر تشکیل شده است (شکل (۲) را ملاحظه کنید.):

(الف) پایهٔ D، (ب) دیوارهٔ قائمی که از مرز D می‌گذرد، (ج) سطح $z=f(x,y)$.



شکل ۲

(حالت خاصی که در آن تمام یا قسمتی از لبهٔ سطح $z=f(x,y)$ بر مرز D منطبق باشد، مشمول این حالت کلی است.) آن گاه، هر جملهٔ تقریب (۱) مانند $f(\xi_i,\eta_i)A(D_i)$ ، $1\le i\le n$، مقدار تقریبی حجم یک ستون قائم از آن جسم است که پایه‌اش D_i باشد. بنابراین، مجموع (۱) به طور تقریبی برابر حجم جسم مذکور است، و هر چه n بزرگتر شود این تقریب دقیقتر می‌شود، و نتیجه می‌گیریم

که، وقتی $n \to \infty$، حد مجموع تقریب (۱) برابر حجم جسم خواهد بود.

بخش سوّم: خواص انتگرال دوگانه

(الف) اگر c یک عدد ثابت و f بر ناحیهٔ بستهٔ D انتگرال پذیر باشد، آن گاه، cf نیز بر D انتگرال پذیر است، و

$$\iint_D cf(x,y)dxdy = c\iint_D f(x,y)dxdy$$

(ب) اگر f و g بر ناحیهٔ بستهٔ D انتگرال‌پذیر باشند،آن گاه، $f+g$ نیز بر D انتگرال پذیر است، و

$$\iint_D [f(x,y)+g(x,y)]dxdy = \iint_D f(x,y)dxdy + \iint_D g(x,y)dxdy$$

(ج) اگر ناحیهٔ D از دو ناحیهٔ بستهٔ D_1 و D_2 تشکیل شده و f بر D پیوسته باشد، آن گاه:

$$\iint_D f(x,y)dxdy = \iint_{D_1} f(x,y)dxdy + \iint_{D_2} f(x,y)dxdy$$

(د) اگر مساحت ناحیهٔ D را به $A(D)$ نشان دهیم، آن گاه:

$$A(D) = \iint_D dxdy = \iint_D dA(D)$$

(هـ) اگر f بر ناحیهٔ بستهٔ D انتگرال پذیر باشد، و m و M دو عدد باشند به طوری که نامساویهای

$$m \leq f(x,y) \leq M$$

به ازای هر $(x,y) \in D$ برقرار باشد، آن گاه:

$$mA(D) \leq \iint_D f(x,y)dxdy \leq MA(D)$$

(و) قضیهٔ مقدار میانگین: اگر f بر D پیوسته باشد، حداقل یک نقطه مانند (ξ,η) در D می‌توان

یافت به طوری که

$$\int\int_D f(x,y)\,dxdy = f(\xi,\eta)A(D)$$

برهان : خواص مذکور از تعریف انتگرال دو گانه مستقیماً نتیجه می‌شود؛ به عنوان مثال، برهان احکام (الف) و (د) را بیان و اثبات سایر احکام را به متعلم واگذار می‌کنیم.

برهان (الف): مجموع

$$\sum_{i=1}^{n} c f(\xi_i,\eta_i)A(D_i)$$

یک مجموع تقریب انتگرال طرف چپ است. به موجب خاصیّت توزیع پذیری ضرب نسبت به جمع، می‌توان نوشت:

$$\sum_{i=1}^{n} c f(\xi_i,\eta_i)A(D_i) = c \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i,\eta_i)A(D_i)$$

به حدگیری از طرفین، حکم (الف) ثابت می‌شود.

برهان (د) : اگر f بر D با ضابطهٔ $f(x,y)=1$ تعریف شده باشد، آن‌گاه مجموع تقریب (۱) به صورت سادهٔ

$$\sum_{i=1}^{n} A(D_i)$$

در می‌آید، و آشکار است که حد آن، وقتی $n\to\infty$ و نرم افراز به صفر میل کند، برابر مساحت ناحیهٔ D است.

بخش چهارم: محاسبهٔ انتگرال دوگانه و انتگرالهای مکرر

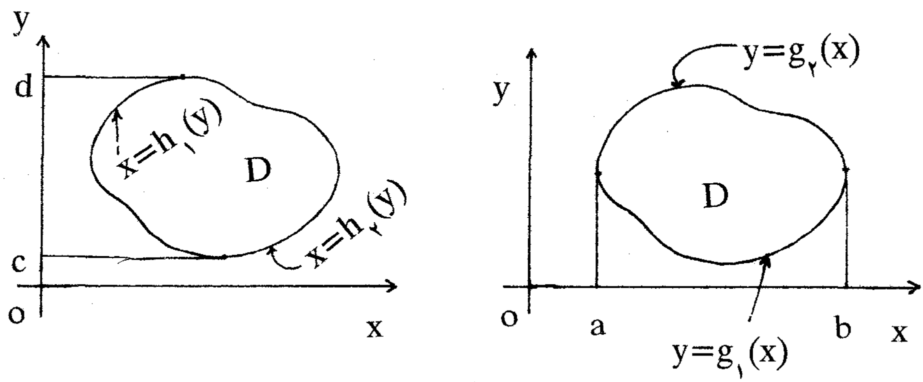
در عمل، اگر نتوانیم حد مجموع تقریب (۱) را پیدا کنیم، تعریف انتگرال دو گانه به صورت مذکور در بخش اوّل بی‌فایده است. تجربه نشان داده است که تعیین حد مجموعهای تقریب در اغلب موارد مستقیماً ممکن نیست یا، اگر ممکن باشد، بسیار مشکل است. بنابراین، باید یک روش عملی برای محاسبهٔ انتگرال دوگانه بیابیم. نشان می‌دهیم که انتگرال دو گانه را با دو بار انتگرالگیری سادهٔ پی‌درپی می‌توان محاسبه کرد. انتگرالی که از محاسبهٔ پی‌درپی دو انتگرال ساده به دست می‌آید،

انتگرال مکرر نامیده می‌شود که اکنون به تشریح آن می‌پردازیم.

تعریف : ناحیهٔ D در صفحهٔ مختصات را در جهت y منظم می‌نامند در صورتی که هر خط موازی با محور yها که از یک نقطهٔ درونی D می‌گذرد مرز D را در دو نقطه قطع کند.

به همین صورت می‌توان ناحیه‌ای را که در جهت x منظم است تعریف کرد. به طور کلی، ناحیهٔ D را منظم می‌گویند در صورتی که D در هر دو جهت x و y منظم باشد.

مثلاً ناحیهٔ D در شکل (۱) منظم است. این ناحیه را به هر یک از دو صورتی که در شکلهای (۳-الف) و (۳-ب) می‌بینید می‌توان نمایش داد.



(ب) شکل ۳ (الف)

ناحیهٔ D در شکل (۳-الف) از پایین به منحنی $y=g_1(x)$ ، از بالا به منحنی $y=g_2(x)$ ، و از چپ و راست به خطوط $x=a$ و $x=b$ محدود است. در بحث ما توابع g_1 و g_2 پیوسته‌اند و $g_1 \leq g_2$ و $a<b$. همان ناحیه در شکل (۳-ب) از پایین به خط $y=c$ ، از بالا به خط $y=d$ ، و از چپ و راست به منحنیهای $x=h_1(y)$ و $x=h_2(y)$ محدود است. فرض می‌کنیم توابع h_1 و h_2 پیوسته باشند، $h_1 \leq h_2$ ، و $c<d$.

حال، فرض کنید تابع f بر D پیوسته باشد و انتگرالهای

$$\int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right)dx \quad (۲) \quad \text{و} \quad \int_c^d\left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\right)dy \quad (۳)$$

را بر در D نظر بگیرید. در (۲)، نخست، x را ثابت و در داخل کمانکها نسبت به y انتگرال می‌گیریم. این انتگرال، یک تابع پیوسته از x مانند G است. بنابراین، در مرحلهٔ دوّم، به محاسبهٔ $\int_a^b G(x)dx$ می‌رسیم که یک عدد حقیقی است. در (۳)، ابتدا، y را ثابت و در داخل کمانها نسبت به x انتگرال می‌گیریم. این، انتگرال، یک تابع پیوسته از y مانند H است. در مرحلهٔ دوّم، به محاسبهٔ $\int_c^d H(y)dy$ می‌رسیم. هر یک از دو انتگرال مذکور را یک انتگرال مکرر بر ناحیهٔ D می‌نامند. می توان ثابت کرد که

$$\iint_D f(x,y)dxdy=\int_a^b\left(\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f(x,y)dy\right)dx=\int_c^d\left(\int_{h_1(y)}^{h_2(y)} f(x,y)dx\right)dy \qquad (۴)$$

(برای اثبات به تعبیر هندسی متوسل شوید. مثلاً، وقتی x ثابت باشد، $\int_{g_1(x)}^{g_2(x)} f dy$ برابر سطح محدود به منحنی $z=f(x,y)$ در صفحهٔ yz است. وقتی x از a تا b تغییر کند، سطح مذکور همهٔ حجم جسم را جارو (اشغال) می‌کند.)

تبصره: در هر یک از انتگرالهای مکرر (۴)، حدود انتگرالگیری شاخص ترتیب انتگرالگیری نیز می‌باشد و، بنابراین، می‌توانیم کمانکها را برداریم.

مثال ۱: حجم جسم محدود به سطوح $z=0$ ، $x=-y$ ، $x=\sqrt{y}$ ، و $z=x+y+1$ را بیابیم.

حل : برای خوانندهٔ مبتدی، رسم شکل به حل مسأله کمک می‌کند. در این مسأله، برای تجسم جسم مفروض ملاحظه می‌کنیم که مقطع صفحات $x=-y$ و $z=x+y+1$ یک خط راست موازی با خط $x=-y$ است که محور z را در نقطهٔ $z=1$ قطع می‌کند. بنابراین، جسم مفروض به صورتی است که در شکل (۴) ملاحظه می‌کنید.

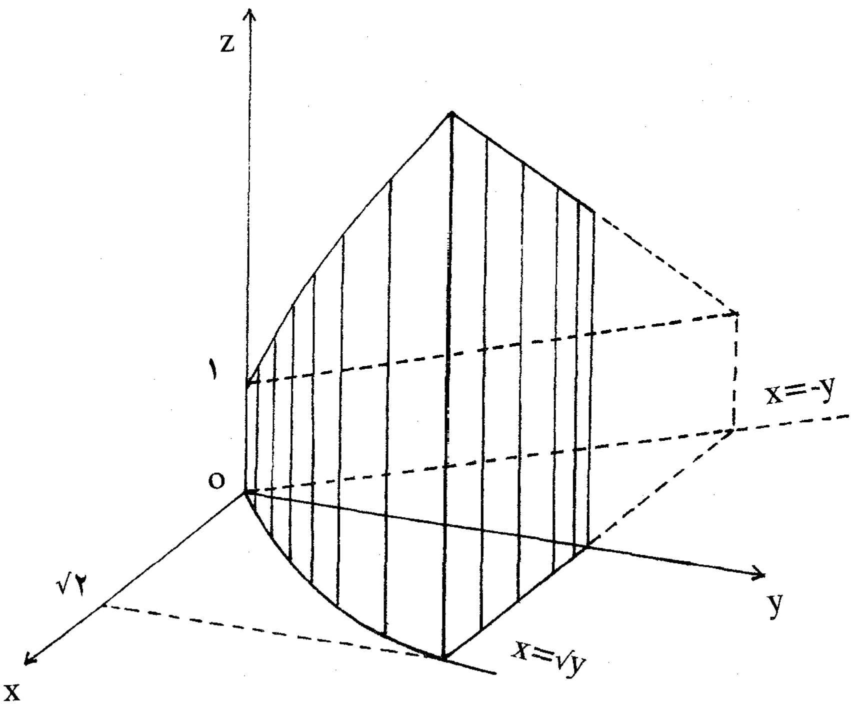
از این رو، اگر حجم جسم را به V نشان دهیم، خواهیم داشت:

$$V=\int_{\circ}^{۲}\int_{-y}^{\sqrt{y}}(x+y+۱)\,dx\,dy=\int_{\circ}^{۲}\left[x^{۲}/۲+xy+x\right]_{-y}^{\sqrt{y}}dy$$

$$=\int_{\circ}^{۲}\left[(y/۲+y\sqrt{y}+\sqrt{y})-(y^{۲}/۲-y^{۲}-y)\right]dy$$

$$=\int_{\circ}^{۲}\left(\frac{۳}{۲}y+y\sqrt{y}+\sqrt{y}+\frac{۱}{۲}y^{۲}\right)dy$$

$$=\left[\frac{۳}{۴}y^{۲}+\frac{۲}{۵}y^{۵/۲}+\frac{۲}{۳}y^{۳/۲}+\frac{۱}{۶}y^{۳}\right]_{\circ}^{۲}=\frac{۱۳}{۳}+\frac{۴۴}{۱۵}\sqrt{۲}$$



شکل ۴

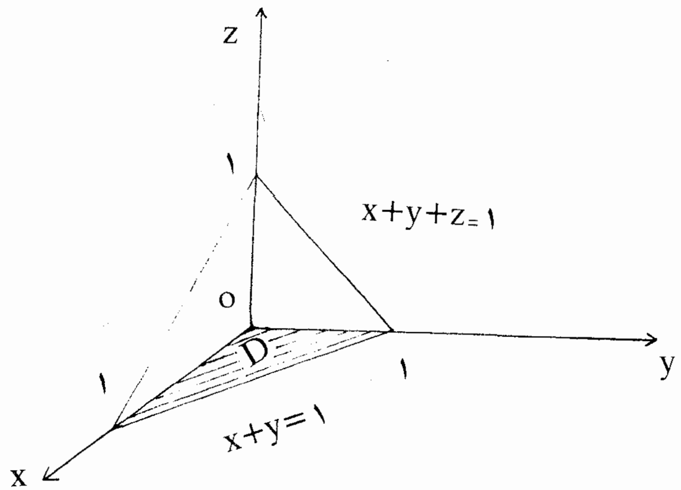
مثال ۲: حجم جسم محدود به سطوح $x=0$ ، $y=0$ ، $z=0$ ، و $x+y+z=1$ (شکل۵) را بیابید.

حل: مقطع دو صفحهٔ $x+y+z=1$ و $z=0$ ، خط $x+y=1$ است. بنابراین، حجم مذکور از دستور

$$V=\iint_D (1-x-y)\,dx\,dy$$

به دست می‌آید که در آن D ناحیهٔ محدود به خطوط $x=0$ ، $y=0$ ، و $x+y=1$ است. از این رو، خواهیم داشت:

$$V=\int_0^1\int_0^{1-x}(1-x-y)dydx=\int_0^1\left[(1-x)y-\frac{1}{2}y^2\right]_0^{1-x}dx=\int_0^1\frac{1}{2}(1-x)^2dx=\frac{1}{6}$$



شکل ۵

مثال ۳: حجم جسم محدود به دو استوانهٔ $x^2+y^2=a^2$ و $x^2+z^2=a^2$ را بیابید.

حل: چون هر دو استوانه نسبت به مبدأ تقارن دارند، حجم مطلوب ۸ برابر حجم آن قسمت از جسم است که در یک هشتم اوّل قرار دارد. بنابراین،

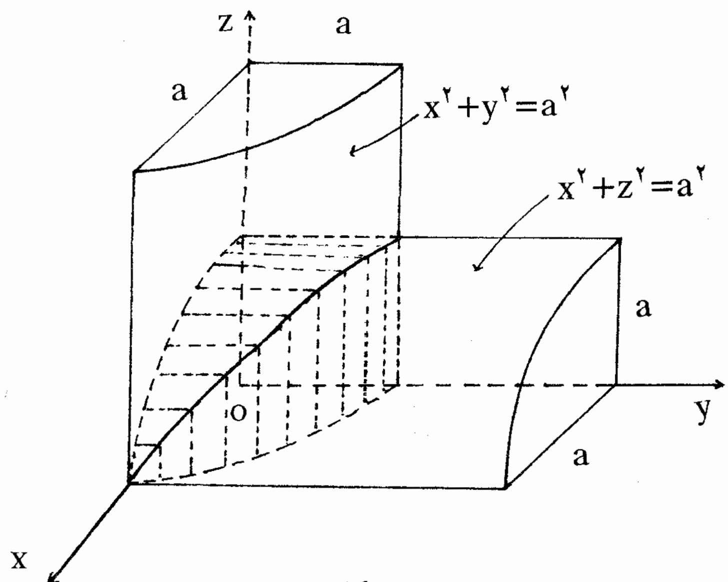
$$V=8\iint_D (a^2-x^2)^{1/2}dx\,dy$$

که در آن D ناحیهٔ محدود به محورهای ox ، oy ، و دایرهٔ $x^۲+y^۲=a^۲$ است.(شکل ۶)

از این رو،

$$V=\wedge\int_{\circ}^{a}dx\int_{\circ}^{\sqrt{a^۲-x^۲}}\sqrt{a^۲-x^۲}\ dy=\wedge\int_{\circ}^{a}\Big[\sqrt{a^۲-x^۲}\ y\Big]_{\circ}^{\sqrt{a^۲-x^۲}}dx$$

$$=\wedge\int_{\circ}^{a}(a^۲-x^۲)\ dx=\frac{۱۶}{۳}a^۳$$



شکل ۶

مثال ۴: D ، ناحیهٔ محدود به منحنی $y=x^۲$ و خط $y=x$ است. مساحت D را به صورت دو انتگرال مکرر بر D بنویسید و مقدار آن را بیابید.

حل: مساحت مطلوب از دستور

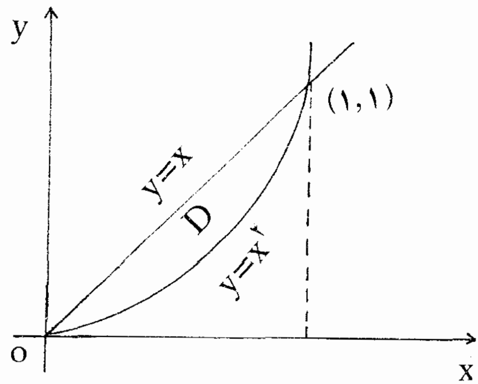
$$A(D)=\iint_D dxdy$$

به دست می‌آید. منحنی $y=x^2$ و خط $y=x$ یکدیگر را در نقطهٔ (۱،۱) قطع می‌کنند. از این رو، با توجه به شکلهای (۷-الف) و (۷-ب):

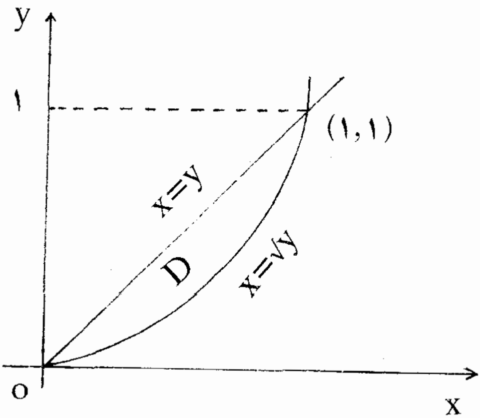
$$A(D)=\int_0^1 dx\int_{x^2}^{x} dy=\int_0^1 (x-x^2)dx=\frac{1}{6}$$

و

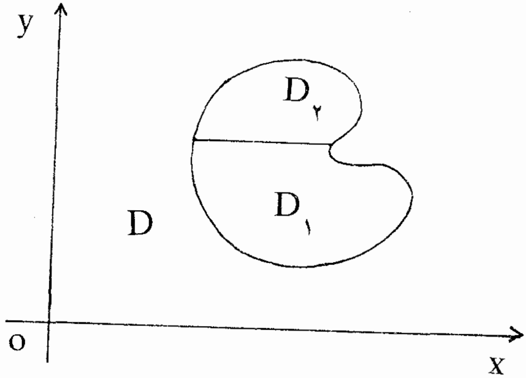
$$A(D)=\int_0^1 dy\int_{y}^{\sqrt{y}} dx=\int_0^1 (\sqrt{y}-y)dy=\frac{1}{6}$$



شکل ۷ـ الف



شکل ۷ـ ب



شکل ۸

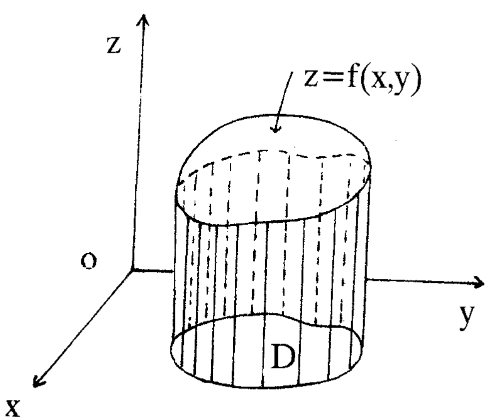
تبصرهٔ ۱: اگر ناحیهٔ D در هیچ یک از دو جهت x و y منظم نباشد، می‌توان آن را به چند ناحیه که هر یک حداقل در یکی از دو جهت x و y منظم باشد تقسیم کرد؛ مثلاً، ناحیهٔ شکل (۸) به دو ناحیه که هر یک در جهت y منظم است تقسیم شده است.

تبصرهٔ ۲: در زمینهٔ کاربرد (یا تعبیر هندسی) انتگرال توابع حقیقی از یک متغیر حقیقی، دیده‌ایم که مساحت سطح محصور بین دو منحنی $y=f(x)$ و $y=g(x)$ ، که یکدیگر را در دو نقطهٔ $A=(a,a')$ و $B=(b,b')$ قطع می‌کنند و همواره $f(x) \leq g(x)$ ، از دستور

$$\int_a^b [g(x)-f(x)]\ dx$$

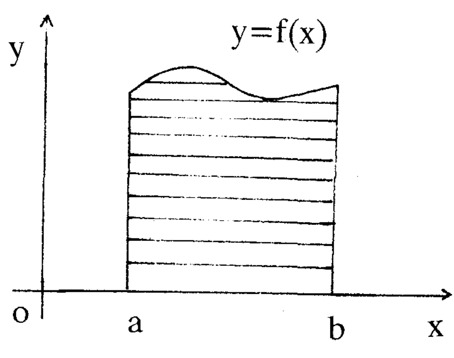
به دست می‌آید. در مبحث انتگرالهای دوگانه، اگر f و g بر ناحیه‌ای مانند D تعریف شده و انتگرال پذیر باشند و، براین ناحیه، همواره $f(x,y) \leq g(x,y)$ ، آن گاه، حجم جسم محدود به سطوح $z=f(x,y)$ و $z=g(x,y)$ و دیوارهٔ قائمی که از مرز D می‌گذرد، از دستور

$$V=\int\int_D [g(x,y)-f(x,y)]dxdy$$



شکل ۱۰ـ الف

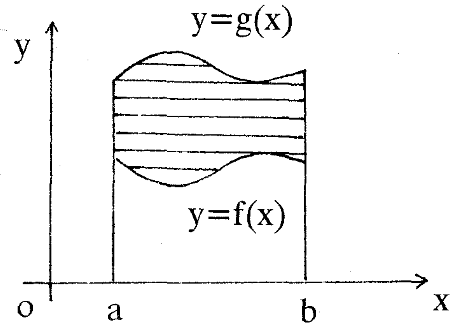
$$V=\int\int_D f(x,y)dxdy$$



شکل ۹ـ الف

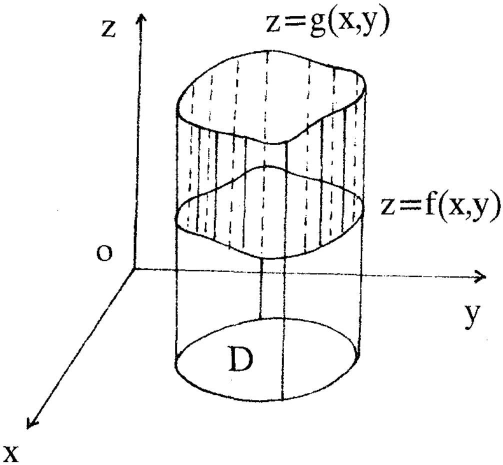
$$A=\int_a^b f(x)dx$$

به دست می‌آید. اگر دو سطح مذکور متقاطع باشند، آن گاه، D ناحیه‌ای است که مرز آن را فصل مشترک آن دو سطح تشکیل می‌دهد. به شکلهای (۹) و (۱۵) توجه کنید.



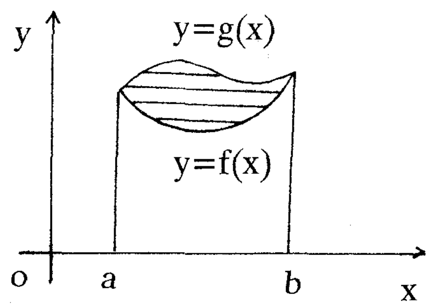
شکل ۹ـ ب

$$A=\int_a^b (g-f)dx$$



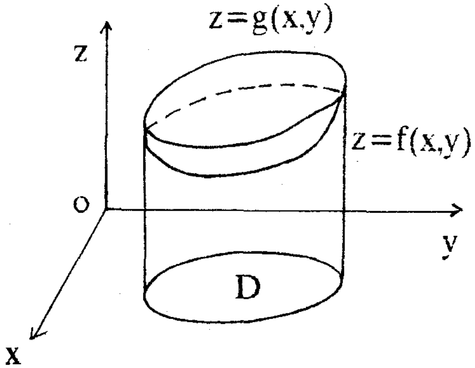
شکل ۱۰ـ ب

$$V=\int\int_D (g-f)dxdy$$



شکل ۹ـج

$$A=\int_a^b (g-f)dx$$



شکل ۱۰ـج

$$V=\int\int_D (g-f)dxdy$$

مثال ۵: حجم جسم محدود به سطوح $z=x^2$ و $z=4-x^2-y^2$ را بیابید.

حل: دو سطح مفروض، متقاطعند، و از تساوی $x^2=4-x^2-y^2$ در می‌یابیم که ناحیهٔ بستهٔ D عبارت است از بیضی:

$$\frac{x^2}{2}+\frac{y^2}{4}=1$$

مختصات هر نقطهٔ بیضی D در نامساوی $2x^2+y^2\leq 4$ صدق می‌کند که می‌توان آن را به صورت

$$x^2\leq 4-x^2-y^2$$

نوشت، و از آن نتیجه می‌گیریم که سطح $z=x^2$ زیر سطح $z=4-x^2-y^2$ است. بنابراین، اگر حجم مطلوب را به V نشان دهیم، می‌توان نوشت:

$$V=\int\int_D [(4-x^2-y^2)-x^2]dxdy=\int_{-2}^{2} dx\int_{-\sqrt{4-y^2}/\sqrt{2}}^{\sqrt{4-y^2}/\sqrt{2}}(4-2x^2-y^2)dy$$

$$=\int_{-2}^{2}\frac{2\sqrt{2}}{3}(4-y^2)^{3/2}dy=\frac{4\sqrt{2}}{3}\int_0^2(4-y^2)^{3/2}dy$$

با تغییر متغیر $y=2\sin\theta$ ، که در این صورت $0\leq\theta\leq\pi/2$ و $dy=2\cos\theta\ d\theta$ ، خواهیم داشت:

$$V=\frac{64\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2}\cos^4\theta d\theta=\frac{16\sqrt{2}}{3}\int_0^{\pi/2}(1+2\cos 2\theta+\cos^2 2\theta)\,d\theta=4\sqrt{2}\pi$$

تمرینات

(الف) : انتگرالهای مکرر زیر را محاسبه و ناحیهٔ انتگرالگیری را رسم کنید.

۱. $\int_0^1\int_0^2(x^2+y^2)dxdy$

۲. $\int_3^4\int_1^2\frac{dydx}{(x+y)^2}$

۳. $\int_{2}^{3}\int_{1+y}^{\sqrt{y}} (x^2y+xy^2)\ dxdy$

۴. $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} ydydx$

۵. $\int_{0}^{2}\int_{x^2}^{2x^2} x\cos y\,dydx$

۶. $\int_{1}^{2}\int_{x^3}^{4x^3} \frac{1}{y}\ dydx$

(ب): هر یک از انتگرالهای دوگانهٔ زیر را بر ناحیهٔ مفروض محاسبه و ناحیهٔ انتگرالگیری را رسم کنید.

۷. $\iint_D x\cos y\ dxdy$، که در آن D به منحنی $y=x^2$ و خطوط $y=0$ و $x=\sqrt{\pi}/2$ محدود است.

۸. $\iint_D \frac{x}{x^2+y^2}\ dxdy$، که در آن D به خطوط $y=0$، $y=x$، $x=1$، و $x=\sqrt{3}$ محدود است.

۹. $\iint_D \log y\ dxdy$، که در آن D به خطوط $y=1$، $y=x-1$، و $x=3$ محدود است.

۱۰. $\iint_D \frac{x}{\sqrt{1-y^2}}\ dxdy$، که در آن D به خطوط $y=0$، $y=x$، و $y=1/2$ محدود است.

۱۱. $\iint_D \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}\ dxdy$، که در آن D به خطوط $y=x$، $y=1$، و $x=2$ محدود است.

۱۲. $\iint_D \frac{1}{y^2}\ e^{2/\sqrt{y}}dxdy$، که در آن D به خطوط $x=1$، $y=2$، و منحنی $y=x^2 (x\geq 1)$ محدود است.

(ج) در هر یک از مسائل زیر، نخست، ناحیهٔ انتگرالگیری را رسم کنید؛ سپس، جهت انتگرالگیری را عوض و انتگرال مفروض را محاسبه کنید.

۱۳. $\int_{1}^{2}\int_{1}^{x} x^2/y^2 dydx$

۱۴. $\int_{-2}^{2}\int_{-\sqrt{4-x^2}}^{\sqrt{4-x^2}} xydydx$

۱۵. $\int_0^a\int_0^{\sqrt{a^2-x^2}}(a^2-y^2)^{3/2}dydx$ ۱۶. $\int_0^1\int_y^1\sqrt{1+x^2}\ dxdy$

۱۷. $\int_0^1\int_{\sqrt{x}}^1\sqrt{1+y^2}\ dydx$ ۱۸. $\int_0^2\int_0^{x^2/2}\frac{x}{\sqrt{1+x^2+y^2}}\ dydx$

(د) در هر یک از مسائل زیر، حجم جسم محدود به سطوح مفروض را بیابید.

۱۹. $x=0$، $y=0$، $z=0$، و $x/a+y/b+z/c=1$

۲۰. $z=0$، $x^2+y^2=1$، و $x+y+z=3$

۲۱. $z=0$، $y=0$، $y=x$، $x+y=2$، و $x+y+z=3$

۲۲. $z=0$، $z=x$، و $y^2=2-x$.

۲۳. $z=0$، $x=0$، $y^2=4-x$، و $z=y+2$.

۲۴. $y^2=x$، $x+y=2$، $x+z=0$، و $z=x+1$

بخش پنجم: انتگرال دوگانه در دستگاههای مختصات قطبی و استوانه‌ای

معادلات

$$x=s(u,v) \quad \text{و} \quad y=t(u,v)$$

ناحیه‌ای مانند D از صفحهٔ xy را به ناحیه‌ای مانند R از صفحهٔ uv می‌نگارند، (تبدیل می‌کنند). اگر s و t در شرایط معیّنی صدق کنند، (دانشجویان می‌توانند برای یک بحث از تغییر دستگاه مختصات، درس اختیاری بخش (۵. ۴) کتاب را مطالعه نمایند) آن‌گاه، دستور تغییر متغیر در انتگرال دوگانه چنین خواهد بود:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy=\int\int_R f[s(u,v),t(u,v)]\ \frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}\ dudv$$

که در آن $\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)}$ را ژاکوبی تبدیل می‌نامند و

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

چنان که می‌دانیم، بین مختصات یک نقطه از صفحهٔ xy و مختصات همان نقطه در دستگاه مختصات قطبی، روابط

$$y=r\sin\theta \quad و \quad x=r\cos\theta$$

برقرار است. بنابراین، اگر بخواهیم یک انتگرال دو گانه را که در دستگاه مختصات قائم نوشته شده است به یک انتگرال دو گانه در دستگاه مختصات قطبی تبدیل کنیم، باید r و θ جانشین u و v شود. در این صورت،

$$\frac{\partial(x,y)}{\partial(u,v)} = \begin{vmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r\ (\cos^2\theta + \sin^2\theta)=r$$

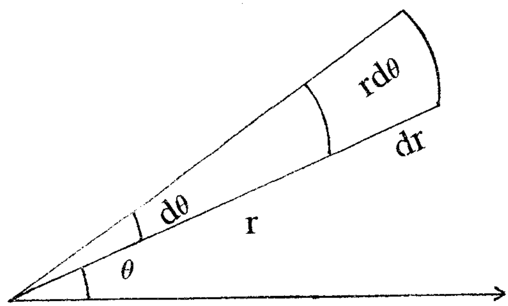
و خواهیم داشت:

$$\int\int_D f(x,y)dxdy= \int\int_R f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)rdrd\theta$$

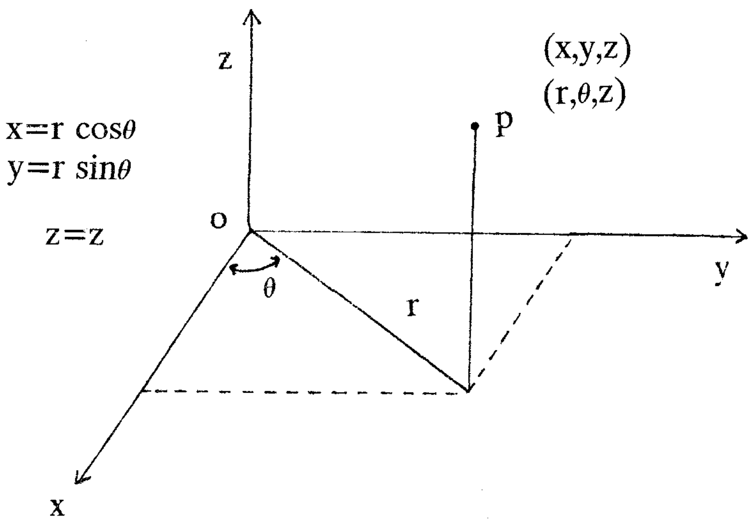
از این بحث، نتیجه می‌گیریم که برای تبدیل انتگرال دو گانه از دستگاهی به دستگاه دیگر، کافی است عنصر مساحت را در دستگاه جدید بدانیم. خوشبختانه، محاسبهٔ عنصر مساحت در دستگاه مختصات قطبی از طریق هندسی بسیار ساده است؛ زیرا، چنان که از شکل زیر بر می‌آید، اگر عنصر مساحت را ΔA بنامیم ، آن گاه

$$\Delta A=rdrd\theta$$

گاهی محاسبهٔ یک انتگرال دو گانه در دستگاه مختصات قطبی بسیار ساده‌تر از محاسبهٔ آن در دستگاه مختصات قائم است. بالاخص، استفاده از مختصات استوانه‌ای ـ که تعمیم مختصات قطبی در فضای سه بعدی است ـ در محاسبهٔ حجم اجسام بسیار مؤثر است. دستگاه مختصات استوانه‌ای در شکل (۱۱) تشریح شده است.



شکل ۱۰



شکل ۱۱

مثال ۱: انتگرال $\int\int_D \sqrt{x^۲+y^۲}\ dxdy$ را، که در آن D ناحیهٔ دایره‌ای محدود به منحنی $x^۲+y^۲=۲x$ است، با استفاده از مختصات قطبی محاسبه کنید.

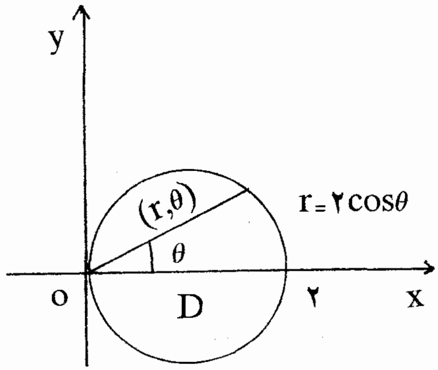
حل: در شکل (۱۲)، ناحیهٔ مفروض D در دستگاه مختصات قطبی نشان داده شده است. مشخصات این ناحیه در دستگاه جدید چنین است:

$$D:\ -\pi/۲ \le \theta \le \pi/۲ \quad , \quad ۰ \le r \le ۲\cos\theta$$

از این رو، بنابر دستور تغییر متغیر در انتگرال دوگانه، خواهیم داشت:

$$\int\int_D \sqrt{x^۲+y^۲}\ dxdy = \int_{\pi/۲}^{\pi/۲} d\theta \int_0^{۲\cos\theta} r.rdr = \int_{\pi/۲}^{\pi/۲} \frac{۸}{۳} \cos^۳\theta d\theta$$

$$= \frac{۱۶}{۳} \int_0^{\pi/۲} (۱-\sin^۲\theta)\cos\theta\, d\theta = \frac{۳۲}{۳}$$



شکل ۱۲

مثال ۲: یک کرهٔ فلزی به شعاع a را در راستای یکی از قطرهایش سوراخ می‌کنیم. شعاع این سوراخ استوانه‌ای برابر b است و $b \leq a$. حجم فلزی را که از این کره برداشته شده است بیابید.

حل: کره را در موقعیتی در نظر می‌گیریم که در شکل (۱۳) نمایش داده شده است. آن‌گاه، معادلهٔ کره $x^۲+y^۲+z^۲=a^۲$ و معادلهٔ دیوارهٔ سوراخ $x^۲+y^۲=b^۲$ خواهد بود. حجم سوراخ، که نسبت به مبدأ متقارن است، از دستور

$$V = ۲\int\int_D \sqrt{a^۲-x^۲-y^۲}\ dxdy$$

به دست می‌آید که در آن D قرص $x^۲+y^۲ \leq b^۲$ و $z=\sqrt{a^۲-x^۲-y^۲}$ معادلهٔ نیم‌کرهٔ بالای صفحهٔ xy است.

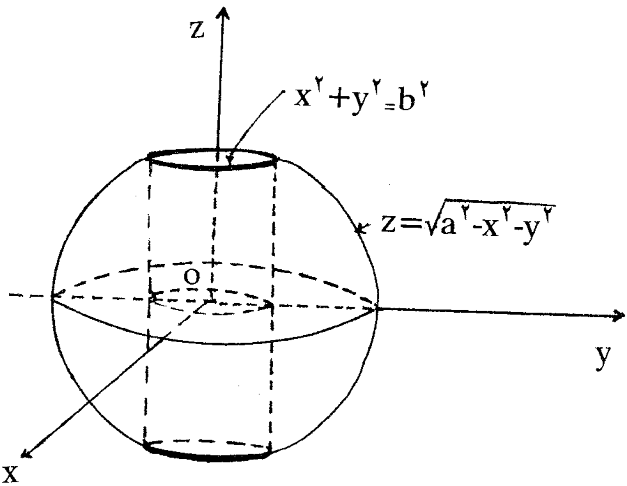
وجود x^2+y^2 در معادلات، ما را بر آن می‌دارد که حجم مطلوب را در دستگاه مختصات استوانه‌ای محاسبه کنیم. در این دستگاه، ناحیهٔ D چنین نمایش داده می‌شود:

$$D: \qquad 0\leq r\leq b \ , \ 0\leq\theta\leq 2\pi$$

بنابراین،

$$V=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^{b}2\sqrt{a^2-r^2}\ rdr=2\pi\left[-\frac{2}{3}\ (a^2-r^2)^{3/2}\right]_0^b$$

$$=\frac{4\pi}{3}\ [a^3-(a^2-b^2)^{3/2}]$$

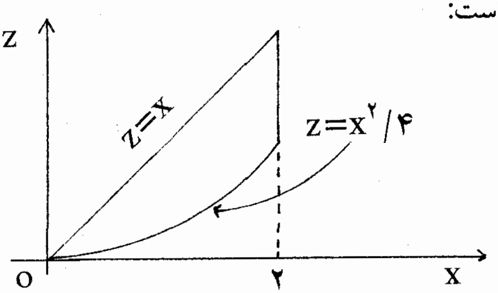


شکل ۱۳

مثال ۳: با استفاده از مختصات استوانه‌ای، حجم جسم محدود به مخروط $z^2=x^2+y^2$، استوانهٔ $x^2+y^2-2x=0$، و سهمیگون $4z=x^2+y^2$ را بیابید.

حل: در دستگاه مختصات استوانه‌ای، معادلات مخروط، استوانه ، و سهمیگون مفروض، به ترتیب، $z^2=r^2$ ، $r=2\cos\theta$، و $4z=r$ است. آشکار است که، در این مثال، ناحیهٔ انتگرالگیری D قرص $x^2+y^2-2x\leq 0$ است که با مختصات استوانه‌ای به صورت $r\leq 2\cos\theta$ نوشته می‌شود. برای این که خواننده بتواند شکل جسم مفروض را در ذهن خود مجسم کند، مقطع آن با صفحهٔ xz در

شکل زیر نشان داده شده است:



شکل ۱۴

چون سطح مخروط، بالای سطح سهمیگون قرار دارد، بنابراین،

$$V=\iint_D \left(\sqrt{x^۲+y^۲}-\frac{x^۲+y^۲}{۴}\right)dxdy=\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}d\theta\int_0^{۲\cos\theta}\left(r-\frac{r^۲}{۴}\right)rdr$$

$$=\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}d\theta\int_0^{۲\cos\theta}\left(r^۲-\frac{r^۳}{۴}\right)dr=\int_{-\pi/۲}^{\pi/۲}\left(\frac{۸}{۳}\cos^۳\theta-\cos^۴\theta\right)d\theta=\frac{۳۲}{۹}-\frac{۳\pi}{۸}$$

تمرینات

انتگرالهای زیر را در دستگاه مختصات قطبی محاسبه کنید.

۱. $\int_0^۲\int_0^{\sqrt{۴-y^۲}}\sqrt{x^۲+y^۲}\,dxdy$

۲. $\int_{-۲}^{۲}\int_{\sqrt{۴x-x^۲}}^{\sqrt{۴-x^۲}}e^{-(x^۲+y^۲)}\,dydx$

۳. $\int_{-\sqrt{\pi}}^{\sqrt{\pi}}\int_{-\sqrt{\pi-y^۲}}^{\sqrt{\pi-y^۲}}\sin(x^۲+y^۲)dxdy$

۴. $\int_0^۴\int_{-\sqrt{۴x-x^۲}}^{\sqrt{۴x-x^۲}}\sqrt{x^۲+y^۲}\,dydx$

۵. $\int_0^۲\int_0^x(x^۲+y^۲)dydx$

۶. $\int_0^۱\int_y^{\sqrt{y}}(x^۲+y^۲)^{-۱/۲}dxdy$

۷. $\int_{۲}^{۲}\int_{۲-\sqrt{۴-x^۲}}^{۲+\sqrt{۴-x^۲}}\sqrt{۱۶-x^۲-y^۲}\,dydx$

در هر یک از مسائل زیر، مساحت ناحیهٔ مفروض را با استفاده از مختصات قطبی بیابید.

۸. یک برگ از گل سرخ سه برگی $r=a\sin 3\theta$.

۹. یک بال پروانهٔ $r^2=a\cos 2\theta$.

۱۰. ناحیهٔ درون دایرهٔ $x^2+y^2=8y$ و بیرون دایرهٔ $x^2+y^2=9$.

۱۱. ناحیهٔ درون دایرهٔ $x^2+y^2=2ax$ و بیرون دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$.

حجم نواحی زیر را بیابید.

۱۲. ناحیهٔ بین دو استوانهٔ $x^2+y^2=1$ و $x^2+y^2=4$ که از پایین به صفحهٔ $z=0$ و از بالا به سطح $z=1/(x^2+y^2)$ محدود است.

۱۳. ناحیهٔ محدود به سطوح $z=0$، $2z=x^2+y^2$، و $x^2+y^2=4$.

۱۴. ناحیهٔ بالای مخروط $z^2=x^2+y^2$ و درون کرهٔ $x^2+y^2+z^2=a^2$.

۱۵. ناحیهٔ محدود به مخروط $z^2=x^2+y^2$ و استوانهٔ $x^2+y^2=4$.

۱۶. ناحیهٔ محدود به سطوح $z=0$، $2z=x^2+y^2$، و $2y=x^2+y^2$.

بخش ششم: کاربردهای فیزیکی

(الف): تعیین جرم.

یک ورق بسیار نازک و صاف از جسمی را در نظر بگیرید. اگر این ورق بر روی صفحهٔ مختصات قرار گیرد، محل استقرار آن ناحیهٔ بسته‌ای مانند D خواهد بود. فرض می‌کنیم $\rho(x,y)$ چگالی جرم در نقطهٔ (x,y) از D و تابع ρ بر D پیوسته باشد.[1] این تصور را به این صورت نیز بیان می‌کنند که فرض می‌کنیم مقداری از یک ماده به طور پیوسته در ناحیهٔ D پخش شده و $\rho(x,y)$ چگالی آن ماده در نقطهٔ (x,y) از D باشد. می‌خواهیم جرم این ماده را تعیین کنیم. به روشی که در بخش اوّل گفته شد، D را به مستطیلهای D_1، D_2، ...، D_n افراز می‌کنیم. اگر (ξ_i,η_i)، $1\leq i\leq n$، یک نقطه از مستطیل D_i باشد، $\rho(\xi_i,\eta_i)A(D_i)$ به طور تقریبی برابر جرم این مستطیل است. بنابراین، مجموع تقریب

۱. چون ورق مفروض بسیار نازک در نظر گرفته شده است، می‌توان فرض کرد که ρ فقط به x و y بستگی داشته باشد.

$$\sum_{i=۱}^{n} \rho(\xi_i,\eta_i)A(D_i)$$

یک مقدار تقریبی جرم ورق مفروض است. از این رو، وقتی که n به ∞ و نرم افراز مذکور به صفر میل می‌کند، حد مجموع تقریب، در صورت وجود، جرم کل ورق مفروض خواهد بود که اگر آن را به $m(D)$ نشان دهیم، خواهیم داشت:

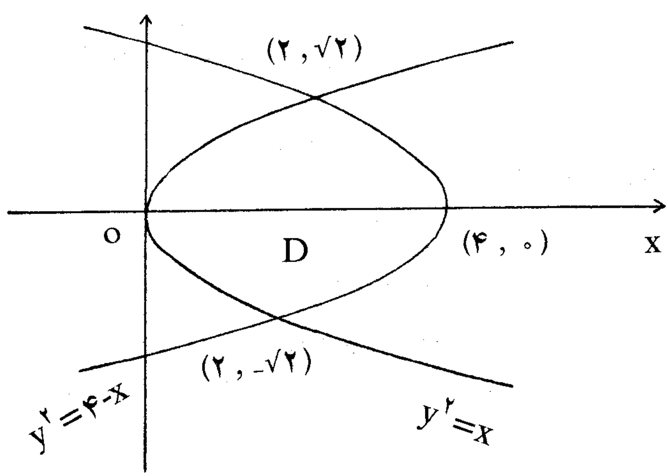
$$m(D)=\int\int_D \rho(x,y)dxdy$$

مثال ۱ : یک لایهٔ نازک از جسمی ناحیهٔ D محدود به منحنیهای $y^۲=x$ و $y^۲=۴-x$ را اشغال کرده و چگالی آن در هر نقطه از D برابر $\rho(x,y)=۱+۲x+y$ است. جرم کل این لایه را بیابید.

حل: جرم کل لایهٔ مفروض از دستور

$$m(D)=\int\int_D (۱+۲x+y)dxdy$$

به دست می‌آید. دو منحنی مفروض، یکدیگر را در نقاط $(۲ , \sqrt{۲})$ و $(۲ , -\sqrt{۲})$ قطع می‌کنند. (به شکل زیر نگاه کنید.)



شکل ۱۵

از این رو،

$$m(D)=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}dy\int_{y^2}^{4-y^2}(1+2x+y)dx=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}\Big[x+x^2+xy\Big]_{y^2}^{4-y^2}dy$$

$$=\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}}(20+4y-10y^2-2y^3)dy=\frac{80}{3}\sqrt{2}$$

مثال ۲: چگالی هر نقطه مانند (x,y) از قرص D به شعاع R، متناسب با فاصلهٔ آن نقطه از مرکز قرص است. جرم قرص را بیابید.

حل: می‌توان نوشت:

$$D=\{(x,y)\ |\ x^2+y^2\leq R^2\}$$

اگر ضریب تناسب را k بگیریم، تابع چگالی ρ با ضابطهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$\rho(x,y)=k\sqrt{x^2+y^2}\ ,\ (x,y)\in D$$

بنابراین،

$$m(D)=\int\int_D k\sqrt{x^2+y^2}\ dxdy$$

این انتگرال را در دستگاه مختصات قطبی محاسبه می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$m(D)=\int_0^{2\pi}d\theta\int_0^R kr.rdr=k\int_0^{2\pi}\Big[\ \frac{1}{3}\ r^3\ \Big]_0^R d\theta=\frac{2}{3}\ k\pi R^3$$

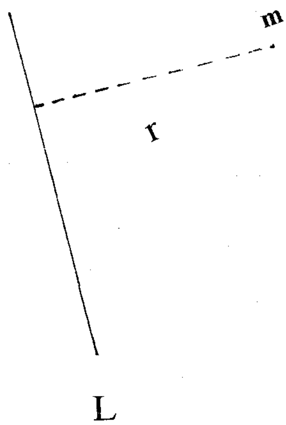
تبصره: یک صفحهٔ مادی را همگن می‌نامند در صورتی که چگالی آن در همهٔ نقاطش یکسان باشد. آشکار است که اگر D یک صفحهٔ مادی همگن و محدود و چگالی آن مثلاً عدد ثابت ρ باشد، آن گاه $m(D)=\rho A(D)$.

(ب) گشتاور لختی

تعریف: نقطهٔ مادی P به جرم m مفروض است. خط L را به عنوان یک محور در نظر بگیرید. اگر

r فاصلهٔ P از محور باشد، (شکل زیر) عدد mr^2 را *گشتاور لختی نقطهٔ* P به جرم m *حول محور* L می‌*نامند*. اگر دستگاهی از ذرّات مادی به جرمهای m_1، m_2،...، m_n داشته باشیم، و فواصل آنها از L، به ترتیب، برابر r_1، r_2،...، r_n باشد، آن گاه گشتاور لختی این دستگاه، حول محور L، که آن را به I نشان می‌دهیم، بنابرتعریف، برابر است با

$$I=m_1r_1^2+m_2r_2^2+...+m_nr_n^2=\sum_{i=1}^{n} m_ir_i^2$$



شکل ۱۶

اکنون نقاط ناحیهٔ D از صفحهٔ xy را به عنوان ذرّات مادی تصور و فرض کنید جرم هر نقطهٔ (x,y) از D برابر $\rho(x,y)$ و تابع ρ بر D پیوسته باشد. می‌خواهیم گشتاور لختی این ناحیه رانسبت به یکی از محورهای مختصات، مثلاً محور xها، تعریف و تعیین کنیم. طبق معمول، D را به مستطیلهای D_1، D_2،...، D_n افراز و در مستطیل جزئی D_i، که در آن $1\leq i\leq n$، نقطه‌ای مانند P_i با مختصات x_i و y_i انتخاب می‌کنیم. با توجه به این که مجذور فاصلهٔ P_i از محور x ها برابر y_i^2 است، مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$\sum_{i=1}^{n} y_i^2\rho(x_i,y_i)A(D_i)$$

حد این مجموع را، وقتی n به ∞ و نرم افراز مذکور به صفر میل می‌کند، در صورت وجود، گشتاور

لختی صفحهٔ مادی D حول محور xها می‌نامند. چون مجموع بالا یک مجموع تقریب انتگرال دو گانهٔ تابع $y^2\rho(x,y)$ بر ناحیهٔ D است، تعریف زیر موجه خواهد بود.

تعریف: اگر D یک صفحهٔ مادی با تابع چگالی ρ باشد، آن گاه

$$I_x=\iint_D y^2\rho(x,y)dxdy$$

را گشتاور لختی D حول محور xها می‌نامند. همچنین، چون مجذور فاصلهٔ هر نقطهٔ D مانند (x,y) از محور yها برابر x^2 و از محور z ها برابر x^2+y^2 است، انتگرالهای دو گانهٔ

$$I_z=\iint_D (x^2,y^2)\rho(x,y)dxdy \quad \text{و} \quad I_y=\iint_D x^2\rho(x,y)dxdy$$

را، به ترتیب، گشتاورهای لختی صفحهٔ مادی D با تابع چگالی ρ حول محورهای y و z می‌نامند.

مثال ۳: گشتاور لختی صفحهٔ همگن D محدود به $y=0$ و $y=4-x^2$ را حول محور x بیابید.

حل: چنان که در شکل ۱۷ ملاحظه می‌کنید، بنابر تعریف

$$I_x=\iint_D y^2\rho dxdy=\rho\int_{-2}^{2}dx\int_0^{4-x^2}y^2dy=\frac{1}{3}\rho\int_{-2}^{2}(4-x^2)^3dx=\frac{4096}{105}\rho$$

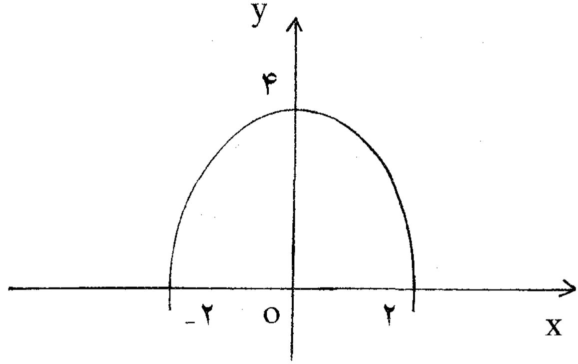
مثال ۴: صفحهٔ مادی D با نامساویهای $x\geq 0$، $y\geq 0$، و $y^2+x\leq 1$ مشخص شده (شکل ۱۷) و چگالی هر نقطهٔ آن متناسب با فاصلهٔ این نقطه از محور ox است. گشتاور لختی D را نسبت به محور oy محاسبه کنید.

حل: اگر ضریب تناسب را λ فرض کنیم، آن گاه

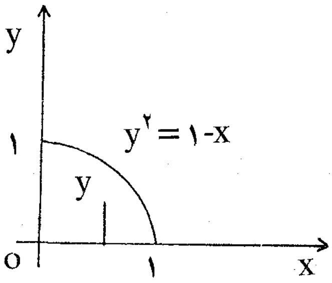
$$\rho(x,y)=\lambda y \quad , \quad (x,y)\in D$$

بنابراین، چنان که از روی شکل ۱۸ دیده می‌شود،

$$I_y=\int_0^1 dx\int_0^{\sqrt{1-x}}x^2(\lambda y)dy=\frac{\lambda}{2}\int_0^1 x^2(1-x)dx=\frac{\lambda}{24}$$



شکل ۱۷



شکل ۱۸

(ج) گشتاور جبری و مرکز جرم

مرکز جرم یک صفحهٔ مادی را به کمک گشتاور جبری تعریف می‌کنند. اگر در تعاریف I_x و I_y به جای مجذور فاصله، فاصلهٔ جبری ساده را به کار ببریم، به تعریف گشتاور جبری، یا، به طور ساده، گشتاور صفحهٔ مادی D حول محور های x و y می‌رسیم که آنها را، به ترتیب، به M_x و M_y نشان می‌دهند. به طور کلی، اگر D یک صفحهٔ مادی با تابع چگالی ρ باشد، آن گاه

$$M_{x=a}=\iint_D (x-a)\rho(x,y)\,dxdy \qquad \text{و} \qquad M_{y=b}=\iint_D (y-b)\rho(x,y)\,dxdy$$

را گشتاورهای D حول خطوط x=a و y=b می‌نامند.

مرکز جرم D، نقطه‌ای مانند $(\bar{x},\ \bar{y})$ است که گشتاورهای D حول خطوط $x=\bar{x}$ و $y=\bar{y}$ هر دو صفر باشند. مقادیر $\bar{x}$ و $\bar{y}$ ، که منحصر به فرد هستند، از دستورهای

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m(D)} \qquad \text{و} \qquad \bar{y}=\frac{M_x}{m(D)}$$

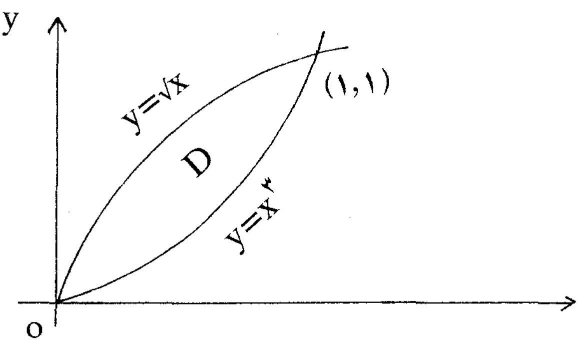
به دست می‌آیند. زیرا، مثلاً، اگر $M_{x=\bar{x}}=0$، آن گاه

$$0=\int\int_D(x-\bar{x})\rho(x,y)dxdy=\int\int_D x\rho(x,y)dxdy-\bar{x}\int\int_D(x,y)dxdy$$

$$=M_y-\bar{x}m(D)$$

مثال ۵: مرکز جرم ناحیهٔ D محدود به منحنیهای $y=x^3$ و $y=\sqrt{x}$ با چگالی $\rho=3x$ را بیابید.

حل: این ناحیهٔ در شکل (۱۹) نشان داده شده است. مراحل مختلف تعیین مرکز جرم را به صورت زیر تنظیم می‌کنیم.



شکل ۱۹

$$M_y=\int\int_D x\rho\,dxdy=3\int_0^1 dx\int_{x^3}^{\sqrt{x}}x^2dy=3\int_0^1 x^2\Big[y\Big]_{x^3}^{\sqrt{x}}dx$$

$$=3\int_0^1(x^{5/2}-x^5)dx=\frac{5}{14}$$

$$M_x=\int\int_D y\rho\,dxdy=3\int_0^1 dx\int_{x^3}^{\sqrt{x}}yx\,dy=\frac{3}{2}\int_0^1 x\Big[y^2\Big]_{x^3}^{\sqrt{x}}dx$$

$$=\frac{3}{2}\int_0^1(x^2-x^7)dx=\frac{5}{16}$$

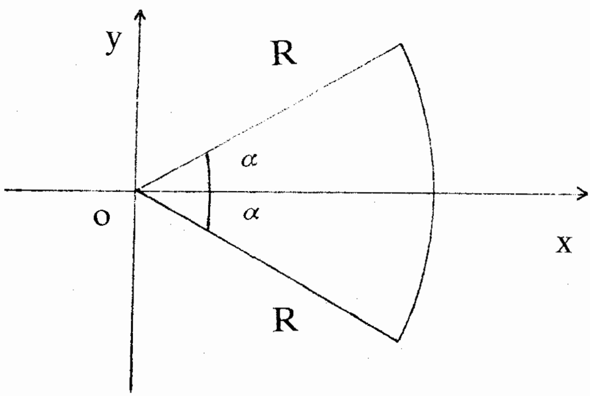
$$M(D)=\int\int_D \rho dxdy = ۳\int_o^۱ dx\int_{x^۳}^{\sqrt{x}} xdy = ۳\int_o^۱ x\ \left[y\right]_{x^۳}^{\sqrt{x}} dx$$

$$= ۳\int_o^۱ (x^{۳/۲}-x^۴)dx = \frac{۳}{۵}$$

از این رو، $\bar{x}=\dfrac{M_y}{m(D)}=\dfrac{۲۵}{۴۲}$ و $\bar{y}=\dfrac{M_x}{m(D)}=\dfrac{۲۵}{۴۸}$

مثال ۶: مرکز جرم یک قطاع به زاویهٔ مرکزی ۲α از قرص مثال (۲) را بیابید.

حل: قطاع را در وضعی در نظر می‌گیریم که در شکل زیر نشان داده شده است.



شکل ۲۰

در این صورت، قطاع نسبت به محور xها متقارن است و $\bar{y}=o$. (چرا؟) برای محاسبهٔ $\bar{x}$، قطاع را S می‌نامیم و به محاسبهٔ M_y و $m(S)$ می‌پردازیم. با استفاده از مختصات قطبی،

$$M_y=\int\int_S kx\sqrt{x^۲+y^۲}\ dxdy = k\int_{-\alpha}^{\alpha} d\theta\int_o^R (r^۲\cos\theta) rdr$$

$$= \frac{kR^۴}{۴}\int_{-\alpha}^{\alpha}\cos\theta\ d\theta = \frac{۱}{۲}kR^۴\sin\alpha$$

از محاسبه‌ای که در مثال (۲) انجام شد نتیجه می‌گیریم که $m(S)=\frac{2}{3}kR^3\alpha$. بنابراین،

$$\bar{x}=\frac{M_y}{m(S)}=\frac{3}{4}R\,\frac{\sin\alpha}{\alpha}$$

تمرینات

در هر یک از مسائل زیر، حدود یک ناحیهٔ مادی و چگالی آن داده شده و یک محور نیز ذکر شده است. گشتاور لختی ناحیه را حول محور مفروض بیابید.

۱. ناحیهٔ محدود به $y=\sqrt{x}$ و $y=x^2$، چگالی ثابت؛ محور yها.

۲. ناحیهٔ محدود به $x+y=5$ و $xy=4$، $\rho(x,y)=ky$؛ محور x ها.

۳. ناحیهٔ تمرین (۲)، چگالی ثابت؛ محور x ها.

۴. ناحیهٔ محدود به $y=x^2$ و $y=x+2$، چگالی ثابت؛ محور x ها.

۵. مربع به رئوس $(0,0)$، $(a,0)$، (a,a)، $(0,a)$؛ چگالی ثابت؛ محور y ها.

۶. همان مربع، چگالی ثابت، محور z ها.

۷. ناحیهٔ محدود به $y=x^2$ و $y^2=x$، $\rho(x,y)=ky$؛ محور yها.

۸. ناحیهٔ محدود به $y=x^2$ و $y=x+2$، چگالی ثابت ؛ خط $y=4$.

۹. ناحیهٔ محدود به $r=2a\cos\theta$، $\rho(r,\theta)=kr$؛ محور z ها.

۱۰. یک بال پروانهٔ $r^2=a^2\cos 2\theta$، چگالی ثابت ؛ محور z ها.

در هر یک از مسائل زیر، مشخصات یک ناحیهٔ مادی داده شده است. مرکز جرم آن را بیابید.

۱۱. ناحیهٔ محدود به $x+y=5$ و $xy=4$، $\rho(x,y)=ky$.

۱۲. ناحیهٔ محدود به $y^2=x$ و $x=y+2$، $\rho(x,y)=kx$.

۱۳. ناحیهٔ محدود به $y=x^2$ و $y^2=x$، $\rho(x,y)=ky$.

۱۴. ناحیهٔ محدود به $y=x^2$ و $y=x+2$، چگالی ثابت.

۱۵. ناحیهٔ محدود به دلوار $r=2(1+\cos\theta)$، چگالی ثابت.

فصل چهارم

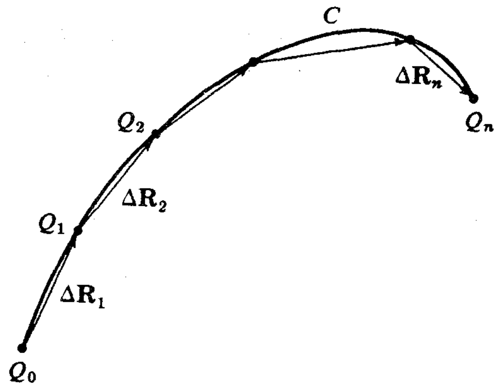
انتگرالهای خط ، سطح ، و حجم

۱.۴ انتگرال خط

در این بخش می‌خواهیم ساختمانی را مطالعه کنیم که فواید قابل ملاحظه‌ای در ریاضیات و فیزیک دارد و آن عمل انتگرالگیری از میدان برداری در امتداد یک منحنی فضایی است .

اجازه دهید چند نکته دربارهٔ مفهوم انتگرالگیری در امتداد یک منحنی ذکر کنیم . مانند نظریهٔ انتگرالگیری (ریمان) در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی ، خواننده گمان می‌کند که منحنی به کمانهای کوتاهی افراز می‌شود. سپس نوعی مجموع با این افراز تشکیل می‌شود و ، سرانجام ، «انتگرال» به عنوان حد این مجموعها ، وقتی که افرازها ظریفتر و ظریفتر می‌شوند ، پدیدار می‌شود.

در واقع ، قبلاً تجربه‌ای از این فرآیند در بخش (۲.۲) ، که در آن طول یک کمان هموار را محاسبه کردیم ، کسب کرده‌ایم . شکل (۱.۴) [المثنایی از شکل (۱۱.۲) که به خاطر راحتی تکرار شده است] نشان می‌دهد که چگونه نقاط Q_0 ، Q_1 ، ...... ، Q_n ، (به ترتیب ، با بردارهای $\mathbf{R}_0$ ، $\mathbf{R}_1$ ، ...... ، $\mathbf{R}_n$) منحنی را افراز می‌کنند و مسیر چند بری محاط را تشکیل می‌دهند که طول این مسیر از جمع طول اضلاع $|\mathbf{R}_k-\mathbf{R}_{k-1}| = |\Delta\mathbf{R}_k|$ حاصل می‌شود . آن گاه طول منحنی به عنوان حد این مجموعها گرفته می‌شود وقتی که افرازها چنان تظریف شوند که بزرگترین طول $|\Delta\mathbf{R}_k|$ به صفر میل کند.



شکل ۱.۴

در همان بخش دیدیم که چگونه این حد را می‌توان محاسبه کرد هرگاه منحنی با $\mathbf{R}=\mathbf{R}(t)$ ، $a\leq t\leq b$ پارامتری شده باشد. نکات اساسی این روش را یادآوری می‌کنیم : بازهٔ $[a,b]$ به صورت $a=t_0<t_1<t_2<.....t_n=b$ نظیر نقاط $\mathbf{R}_k=\mathbf{R}(t_k)$ افراز می‌شود ، و تقریب

$$\Delta\mathbf{R}_k \approx \frac{d\mathbf{R}}{dt}\Delta t_k$$

برای اثبات

$$\int_c |d\mathbf{R}| \equiv \lim\sum_{k=1}^{n}|\Delta\mathbf{R}_k| = \lim\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\Delta t_k\right| = \int_a^b\left|\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|dt$$

وقتی Δt_k به صفر میل کند ، به کار می‌رود. عبارت اخیر، یک انتگرال معمولی است .

اکنون با استفاده از این فرآیند ، به عنوان یک مدل ، به تعریف انتگرال خط برمی‌گردیم . برای تشکیل یک انتگرال خط از یک منحنی فضایی جهت دار هموار C واقع در ناحیه‌ای که در آن یک

میدان برداری پیوستهٔ $\mathbf{F}$ تعریف شده است آغاز می‌کنیم . اجازه دهید C را بـه کمـانهای کـوچکتر تقسیم و آن را با یک مسیر چندبری ، چنان که در شکل (۱.۴) دیده می‌شود ، تقریب کنیم . فرض کنید $\mathbf{F}_k$ مقدار $\mathbf{F}$ در نقطهٔ Q_k باشد ، و مجموع $\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k \cdot \Delta\mathbf{R}_k$ را ،که یک اسکالر است ، تشکیل می‌دهیم . انتگرال

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} \qquad (۱.۴)$$

را حد مجموعهایی از این نوع تعریف می‌کنیم در صورتی که وقتی n به طور بیکران افزایش می‌یابد زیر بازه‌های ناشی از افراز کوچک شوند. می‌توان نشان داد که ایـن حـد وجـود دارد و از انتخـاب تقسیمات خاص ، به این شرط که مقدار ماکسیمم $|\Delta\mathbf{R}_k|$ به صفر میل کند ، مستقل است .

عباراتی نظیر (۱.۴) ، *انتگرالهای خط* نامیده می‌شوند. (این شاید مایهٔ تأسف باشد ، زیرا ضرورت ندارد که C یک قطعه خط باشد ؛ *انتگرال منحنی* اصطلاح بهتری است .) *اجزای لازم یک انتگرال خط عبارتند از یک میدان برداری و یک منحنی جهت دار ، و نتیجه یک اسکالر است .*

تعریف انتگرال خط به صورتی که آورده شد مبهم است مگر این که C *جهت دار* باشد. جـهت بردارهای $\Delta\mathbf{R}_k$ چنان انتخاب می‌شود که با جهت C ،که در شکل (۱.۴) از Q_0 به Q_n است ، سازگار باشد. اگر C برخلاف جهت مفروض ، یعنی در جهت Q_n به Q_0 ، جهت دار شده بود ، هر یک از بردارهای $\Delta\mathbf{R}_k$ باید در جهت مخالف انتخاب می‌شدند ، و انتگرال تغییر علامت می‌داد.

نمادهای دیگری را می‌توان در نمایش انتگرالهای خط به کار برد. اگر $\mathbf{T}$ یک بردار یکّهٔ مماس بر مسیر در جهت منحنی باشد ، آن گاه $\mathbf{T}=d\mathbf{R}/ds$ ، و معادلهٔ (۱.۴) را می‌توان به صورت

$$\int_C \mathbf{F} \cdot \mathbf{T}\, ds \qquad (۲.۴)$$

نوشت که در آن s ، طول کمانی که در امتداد C اندازه‌گیری می‌شود ، در جهت C صعودی است .

اگر $F_t=\mathbf{F}\cdot\mathbf{T}$ مؤلفهٔ اسکالر $\mathbf{F}$ در جهت مماس یکّه باشد ، انتگرال را نیز می‌توان به صورت

$$\int_C F_t\, ds \qquad (۳.۴)$$

نوشت . به زبان بردارها ، گاهی از *انتگرال خط مؤلفهٔ مماسی* $\mathbf{F}$ بر *منحنی جهت دار* C صحبت به میان می‌آید . اگر مسامحه‌ای در کار باشد ، فقط می‌گوییم «انتگرال $\mathbf{F}$ در امتداد C ».

در کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته که از نماد برداری استفاده نمی‌کنند ، فرم دیگری نیز به کار می‌رود :

$$\int_C (F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz) \tag{۴.۴}$$

این فرم از (۱.۴) با انتخاب $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ به دست می‌آید. چون $d\mathbf{R} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} + dz\mathbf{k}$ ، داریم : $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$.

عباراتی چون $F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$ ، که در آن F_1 ، F_2 ، F_3 توابعی از x ، y ، و z اند ، یک *فرم دیفرانسیل* نامیده می‌شود. ما (۴.۴) را انتگرال خط فرم دیفرانسیل بر منحنی جهت دار C می‌نامیم.

اغلب محصلین ، در مرحلهٔ اوّل ، از انتگرالهای خط احساس ناخوشایندی می‌کنند ، زیرا آنها از خوبی این انتگرالها بی‌خبرند . عموماً می‌پرسند : « پس از محاسبهٔ یک انتگرال خط صاحب چه چیزی می‌شوید ؟ » جواب این است : صاحب یک عدد . بر حسب نوع مسأله ، ممکن است این عدد نمایش دهندهٔ کار انجام شده ، تغییر انرژی پتانسیل ، شارش گرمای کل ، تغییر در آنتروپی ، گردش یک شاره ، و غیره باشد ، امّا دراین مرحله به محصل توصیه می‌شود که حواس خود را فقط به یادگیری چگونگی *محاسبهٔ* انتگرالهای خط متوجه سازد.

اکنون می‌خواهیم ببینیم که ، وقتی منحنی پارامتردار شده است ، چگونه می‌توان انتگرال خط را به آسانی محاسبه کرد. با این وجود ، به خاطر کسب تجربه ، نخست مثالی می‌آوریم که در آن یک انتگرال خط مستقیماً با استفاده از تعریف محاسبه شود. توجه کنید که مثال (۱.۴) به عنوان یک نمونهٔ واقعی ، که باید با دقت حل شود ، طرح شده است .

مثال ۱.۴ فرض کنید C منحنی $y=\sqrt{x}$ در صفحهٔ xy باشد که از نقطهٔ (۰,۰,۰) به نقطهٔ (۱,۱,۰) رسم شده است ، و فرض کنید $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{k}$. انتگرال $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ را مستقیماً با استفاده از تعریف انتگرال به عنوان حد یک مجموع بیابید.

حل برای راحتی ، فرض کنید ، همهٔ Δx ها برابرند ، که از این رو ،

$$Q_k = (x_k, y_k, z_k) = \left(\frac{k}{n}, \sqrt{\frac{k}{n}}, 0\right)$$

$$\Delta \mathbf{R}_k = \frac{1}{n}\mathbf{i} + \left(\sqrt{\frac{k}{n}} - \sqrt{\frac{k-1}{n}}\right)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{F}_k = x_k y_k^2 \mathbf{i} + y_k^2 \mathbf{k} = \frac{k^2}{n^2}\mathbf{i} + \frac{k}{n}\mathbf{k}$$

$$\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}\cdot\Delta \mathbf{R}_k = \sum_{k=1}^{n} \frac{k^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\sum_{k=1}^{n} k^2$$

$$= \frac{1}{n^3}\left(\frac{1}{6}n(n+1)(2n+1)\right) = \frac{1}{6}\left(1+\frac{1}{n}\right)\left(2+\frac{1}{n}\right)$$

که وقتی $n\to\infty$ به $\frac{1}{3}$ میل می‌کند . بنابراین ،

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \frac{1}{3}$$

در حالت معمولی که منحنی هموار C به صورت $\mathbf{R}=\mathbf{R}(t)$ با $a\le t\le b$ پارامتری شده است ، به قیاس روش محاسبهٔ طول کمان پیشنهاد می‌کنیم که

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \lim\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k\cdot\Delta \mathbf{R}_k = \lim\sum_{k=1}^{n} \mathbf{F}_k\cdot\frac{d\mathbf{R}}{dt}\Delta t_k = \int_a^b \mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{R}}{dt}\,dt \qquad (5.4)$$

فرم نهایی ، یک انتگرال معین معمولی است . برای اثبات ، ملاحظه کنید که تابع برداری پیوستهٔ $\mathbf{F} = \mathbf{F}(x,y,z) = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ و توابع پارامتری به طور پیوسته مشتق پذیر $x=x(t)$ ، $y=y(t)$ ، و $z=z(t)$ را داریم به طوری که ضرب داخلی اوّلی در دوّمی ، در معادلهٔ (۵.۴) ، به یک انتگرال معمولی از یک تابع t می‌انجامد :

$$\int_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \int_a^b \Big[F_1\big(x(t), y(t), z(t)\big) \frac{dx}{dt} + F_2\big(x(t), y(t), z(t)\big) \frac{dy}{dt} + F_3\big(x(t), y(t), z(t)\big) \frac{dz}{dt} \Big] dt$$

به عنوان نمونه ، منحنی مثال (۱.۴) را می‌توان به صورت $x=t \ , \ y=\sqrt{t} \ , \ z=0$ با $0 \le t \le 1$ پارامتری کرد ، و معادلۀ (۵.۴) به صورت زیر در می‌آید :

$$\int_0^1 \left(xy^2 \frac{dx}{dt} + y^2 \frac{dz}{dt} \right) dt = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

ملاحظه کنید که انتگرال خط بدون توجه به نحوۀ پارامتری کردن منحنی تعریف شده است و بنابراین مقدار انتگرال فقط به میدان $\mathbf{F}$ و منحنی جهت دار C بستگی دارد نه به پارامتر t. گاهی *طول کمان* یک پارامتر مناسب است ، گاهی بهتر است یک *زاویه* یا *زمان* یا یکی از متغیرهای x ، y ، و z به کار برده شود . در زیر مثالهایی می‌آوریم ؛ آنها را به دقت مطالعه کنید !

انتگرالهای $\int_a^b f(x)dx$ را ، که در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی ظاهر می‌شوند ، می‌توان از انواع خیلی خاص انتگرالهای خط به شمار آورد. در واقع ، فرض کنید $\mathbf{F}$ همیشه در جهت موازی با محور x باشد به طوری که $\mathbf{F}=f(x)\mathbf{i}$ ، و فرض کنید C قطعه‌ای چون $a \le x \le b$ از محور x باشد که در جهت افزایش x جهت دار شده است .آن گاه $d\mathbf{R}=dx\mathbf{i}$ ، و $\int_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\int_a^b f(x)dx$. بنابراین ، شما قبلاً تجربیاتی در زمینۀ محاسبۀ انتگرالهای خط کسب کرده‌اید ! توجه : در حالت کلی ، انتگرالهای خط نه مساحت زیر منحنی را نشان می‌دهند و نه طول کمان را .

مثال ۲.۴ هرگاه

$$\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y\mathbf{j} + (xz-y)\mathbf{k}$$

انتگرال خط $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ را از (۰,۰,۰) تا (۱,۲,۴) در هر یک از حالتهای زیر محاسبه کنید :

(الف) در امتداد قطعه خطی که آن دو نقطه را به هم وصل می‌کند ،

(ب) در امتداد منحنی پارامتری $z=4t^3$, $y=2t$, $x=t^2$.

حل (الف) معادلات پارامتری قطعه خطی که (۰,۰,۰) رابه (۱,۲,۴) وصل می‌کند عبارتند از : $z=4t$, $y=2t$, $x=t$ (بخش ۸.۱) . داریم :

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \int_C x^2dx + ydy + (xz-y)dz$$

$$= \int_0^1 t^2dt + 2t(2dt) + (4t^2-2t)(4dt)$$

$$= \int_0^1 (17t^2-4t)dt=\frac{11}{3}$$

در این حالت داریم :

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\int_0^1 (t^4)(2tdt) + (2t)(2dt) + (4t^5-2t)(12t^2dt)$$

$$=\int_0^1 (2t^5 + 4t + 48t^7 - 24t^3)\, dt = \frac{7}{3}$$

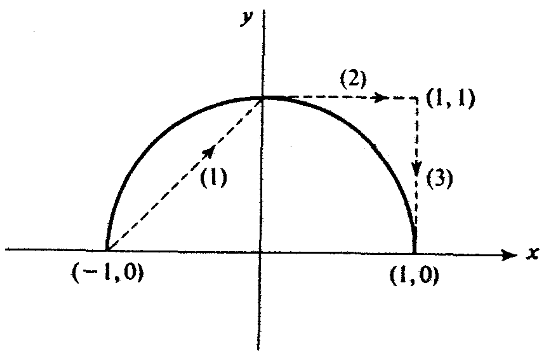
مثال ۳.۴ انتگرال خط مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + x^2\mathbf{j}$ از (۱,۰-) تا (۱,۰) در صفحهٔ xy را در هر یک از حالتهای زیر بیابید : (الف) در امتداد محور x، (ب) در امتداد نیم دایرهٔ $y=\sqrt{1-x^2}$ ، (ج) در امتداد مسیر چند بری نقطه چین شکل (۲.۴) .

حل

(الف) در امتداد محور x : $y=0$ ، از این رو، $dy=0$ ، dx ، و

$$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \int (xdx + x^2dy) = \int_{-1}^{1} xdx = \frac{1}{2}x^2 \Big|_{-1}^{1} = 0$$

(ب) در امتداد نیم دایره ، مختص قطبی θ یک پارامتر مناسب است . چون شعاع دایره برابر واحد است ، برای نقاط (x,y) این مسیر داریم : $x=\cos\theta$ ، $y=\sin\theta$ ، از این رو ، $dx=-\sin\theta d\theta$ ، $dy=\cos\theta d\theta$ ، و θ از π به صفر نزول می‌کند.



شکل ۲.۴

$$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \int (xdx + x^2dy)$$

$$= \int_{\pi}^{0} \Big[(\cos\theta)(-\sin\theta d\theta) + (\cos^2\theta)(\cos\theta d\theta)\Big]$$

$$= \int_{\pi}^{0} \Big[(-\sin\theta \cos\theta d\theta + \cos^3\theta) d\theta\Big]$$

$$= \left[-\frac{\sin^۲\theta}{۲} - \sin\theta + \frac{\sin^۳\theta}{۳}\right]_{\pi}^{\circ} = \circ$$

(ج) در امتداد مسیر شمارهٔ (۱) شکل (۲.۴) ، $y=x+۱$ ، که در این صورت $dy=dx$ و

$$\int (xdx + x^۲dy) = \int_{\circ}^{-۱} [xdx + x^۲dx] = -\frac{۱}{۶}$$

در امتداد مسیر شمارهٔ (۲) ، $y=۱$ ، که در این صورت $dy=\circ\cdot dx$ و

$$\int (xdx + x^۲dy) = \int_{\circ}^{۱} xdx = \frac{۱}{۲}$$

در امتداد مسیر شمارهٔ (۳) ، $x=۱$ ، که در این صورت $dx=\circ\cdot dy$ و

$$\int (xdx + x^۲dy) = \int_{۱}^{\circ} dy = -۱$$

[توجه کنید که ما y را به جای x به عنوان پارامتری در امتداد مسیر (۳) به کار بردیم.] مقدار انتگرال عبارت است از : $-\frac{۱}{۶} + \frac{۱}{۲} - ۱ = -\frac{۲}{۳}$.

مثال ۴.۴ کار انجام شده به وسیلهٔ نیروی $\mathbf{F}$ در حرکت یک ذرّه از مبدأ تا انتهای منحنی جهت دار C با

$$W = \int_{C} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$$

داده می‌شود . این تعمیم مثال (۱۴.۱) است ، و در حالت خاصی که $\mathbf{F}$ یک ثابت باشد به آن مثال برمی‌گردد .

تبصره : اگر منحنی بسته باشد ، یعنی ، نقاط ابتدایی و انتهایی آن بر هم منطبق باشند ، نماد

$\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ مکرراً به کار برده می‌شود . انتگرال خط $\mathbf{F}$ حول یک منحنی بستهٔ C را گردش $\mathbf{F}$ حول C می‌نامند.

تمرینات

۱. در مثال (۳.۴) بالا ، [به شکل (۲.۴) مراجعه کنید] مطلوب است $\mathbf{T}$:

(الف) در امتداد مسیر (۱) ، در جهت نشان داده شده ، برحسب $\mathbf{i}$ و $\mathbf{j}$،

(ب) در امتداد مسیر نقطه چین (۲) ، در جهت نشان داده شده ،

(ج) در امتداد (۳) ، در جهت نشان داده شده .

۲. در مثال (۳.۴) ، در هر یک از حالتهای زیر ، ds برحسب dx یا dy چیست ؟

(الف) در امتداد مسیر نقطه چین (۱) ،

(ب) در امتداد مسیر نقطه چین (۲) ،

(ج) در امتداد مسیر نقطه چین (۳) ،

۳. نشان دهید که در هر یک از سه حالت خاصی که در دو مسألهٔ قبلی مطرح شدند $d\mathbf{R}=dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}$ همان $\mathbf{T}ds$ است . (این تمرین این قاعدهٔ کلی را تشریح می‌کند که ، در عمل ، محاسبهٔ مستقیم $d\mathbf{R}$ آسانتر از این است که $\mathbf{T}$ و ds را جداگانه تعیین و در هم ضرب کنیم .)

۴. فرض کنید

$$\mathbf{F} = \frac{y}{x^2+y^2}\mathbf{i} - \frac{x}{x^2+y^2}\mathbf{j}$$

انتگرال خط مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{F}$ از $(-1,0)$ تا $(1,0)$ را در هر یک از حالتهای زیر بیابید :

(الف) در امتداد نیم دایرهٔ $y=\sqrt{1-x^2}$؛

(ب) در امتداد مسیر چندبری نقطه چینی که در شکل (۲.۴) نشان داده شده است .

۵. با تغییر مختصات از قائم به قطبی ، جوابهای تمرین (۴) را بیابید.

۶. هرگاه $\mathbf{F} = x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ، $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ را از $(1,0,0)$ تا $(1,0,4)$ بیابید :

(الف) در امتداد قطعه خط واصل $(1,0,0)$ و $(1,0,4)$ ؛

(ب) در امتداد مارپیچ $z=4t$ ، $y=\sin 2\pi t$ ، $x=\cos 2\pi t$.

۷. $\int \mathbf{R}\cdot d\mathbf{R}$ را از (۱,۲,۲) تا (۳,۶,۶) در امتداد قطعه خط واصل این دو نقطه بیابید:

(الف) در حالتی که در متن کتاب تشریح شده است؛

(ب) با ملاحظهٔ این که $\mathbf{R}\cdot d\mathbf{R}=s\,ds$، که در آن $s=(x^2+y^2+z^2)^{1/2}$ فاصلهٔ از مبدأ است، و محاسبهٔ $\int_3^9 s\,ds$.

۸. مقدار انتگرال $\oint[(3x+4y)\,dx+(2x+3y^2)\,dy]$ را حول دایرهٔ $x^2+y^2=4$ بیابید.

۹. $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ را در امتداد قطعه خطی که از (۱,۰,۲) تا (۳,۴,۱) می‌رود با فرض $\mathbf{F}=2xy\mathbf{i}+(x^2+z)\mathbf{j}+y\mathbf{k}$ بیابید.

۱۰. $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ را حول محیط دایرهٔ $z=1$ ، $x^2-2x+y^2=2$ با فرض $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+xyz^2\mathbf{k}$ بیابید.

۱۱. $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ را، که در آن $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+\mathbf{j}+yz\mathbf{k}$، در امتداد منحنی زیر بیابید:

$$C:\ x=t\ ,\quad y=2t^2\ ,\quad z=3t\ ,\quad 0\le t\le 1$$

۱۲. فرض کنید $\mathbf{F}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}$، که در آن $\boldsymbol{\omega}$ یک ثابت است. (مثال «۲۲.۳» را به خاطر بیاورید.)

(الف) $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ را در امتداد قطعه خطی که از (۰,۰,۰) تا (۲,۲,۲) می‌رود محاسبه کنید.

(*راهنمایی*: با کمی تفکّر می‌توانید از هر زحمتی در محاسبه برهید.)

(ب) همان انتگرال خط را در امتداد مسیر $z=(x^2+y^2)/4$ در صفحهٔ $x=y$ محاسبه کنید.

۲.۴ حوزه‌ها؛ حوزه‌های همبند ساده

بسیاری از توابعی که در حساب دیفرانسیل و انتگرال ظاهر می‌شوند به ازای همهٔ مقادیر x تعریف نمی‌شوند، بلکه فقط در بعضی از بازه‌ها تعریف می‌شوند؛ مثلاً، تابع $f(x)=1/x$ در $x=0$ تعریف نمی‌شود، و تابع $f(x)=\csc(x)$ وقتی x مضرب صحیحی از π باشد تعریف نمی‌شود.

عیناً، اغلب میدانهای برداری که در عمل ظاهر می‌شوند در همهٔ نقاط (x,y,z) فضا تعریف نمی‌شوند، بلکه فقط در نواحی خاصی از فضا تعریف می‌شوند.

به عنوان نمونه، از فیزیک مقدماتی آموخته‌ایم که اندازهٔ شدت میدان مغناطیسی مربوط به شارش جریان در امتداد یک خط مستقیم به نسبت معکوس فاصله از آن خط در تغییر است. هرچه

به خط نزدیکتر شویم ، اندازهٔ شدت میدان مغناطیسی افزایش می‌یابد. این میدان مغناطیسی در امتداد خود خط تعریف نمی‌شود. ناحیهٔ تعریف میدان متشکل از همهٔ نقاط فضا ، به جز نقاط واقع بر خط مذکور ، است .

عیناً ، شدت میدان الکتریکی مربوط به دستگاهی متشکل از n نقطهٔ بار در همهٔ نقاط فضا ، به جز n نقطهٔ مفروض ، تعریف می‌شود.

یقیناً میدانهای مورد بحث در فیزیک مقدماتی تا اندازه‌ای فرضی هستند (آیا بار واقعاً در یک نقطه متمرکز می‌شود؟) ، امّا این میدانها در مباحث نظری مفید واقع می‌شوند و مطالعهٔ آنها برای یک کار پیشرفته‌تر ضروری است .

خواننده‌ای که اطلاعات محدودی از میدانهای مغناطیسی یا الکتریکی دارد ، می‌تواند فرض کند که میدانهای مورد بحث ما میدانهای سرعت شاره در یک ظرف است . مسلماً صحبت از بردار سرعت در نقاط بیرونی ظرف فاقد معنی است . ناحیهٔ تعریف میدان در این حالت متشکل از همهٔ نقاط درونی ظرف است .

میدانهای برداریی که معمولاً در مباحث نظری و عملی ظاهر می‌شوند دو خاصیّت مهم دارند : اوّلاً ، این میدانها در درون ناحیهٔ مفروضی تعریف می‌شوند نه در نقاط مرزی ناحیه . ثانیاً ، اگر میدان در دو نقطهٔ P و Q تعریف شده باشد ، امکان دستیابی به کمان هموارى مانند C وجود دارد که دو نقطهٔ P و Q را به هم وصل می‌کند و میدان مفروض در همهٔ نقاط این کمان تعریف می‌شود.

به عنوان مثال ، سرعت یک شاره در یک ظرف فقط در نقاط درونی ظرف تعریف می‌شود نه در نقاط واقع بر سطح ظرف . به علاوه ، غیرعادی است که ظرفی را با دو قسمت مجزا در نظر بگیریم ؛ معمولاً فرض بر این است که اگر شاره در دو نقطهٔ P و Q موجود باشد ، امکان حرکت از P به Q بدون گذر از جدارهای جداکننده وجود دارد . به انگیزهٔ این ایده‌ها ، اکنون به ذکر چند تعریف دقیق می‌پردازیم .

اگر P یک نقطهٔ مفروض و ε یک عدد مثبت دلخواه باشد ، یک ε *همسایگی* از P را مجموعهٔ همهٔ نقاطی می‌گوییم که فاصلهٔ هر یک از آنها تا P کمتر از ε باشد . به این ترتیب ، اگر از مجموعهٔ نقاط واقع در صفحه صحبت کنیم ، یک ε همسایگی از نقطه‌ای چون P از همهٔ نقاط درونی دایرهٔ به

مرکز P و به شعاع ε (امّا نه نقاط واقع بر محیط دایره) تشکیل شده است. اگر نقاط فضا مورد نظر باشند، یک ε همسایگی از P از همهٔ نقاط درونی کرهٔ به مرکز P و به شعاع ε (امّا نه نقاط واقع بر سطح کره) تشکیل شده است.

اگر ناحیهٔ R مفروض باشد، P را یک *نقطهٔ داخلی* R می‌نامیم در صورتی که یک ε همسایگی از P بتوان یافت به طوری که کاملاً در R قرار بگیرد. P را یک *نقطهٔ مرزی* R می‌گوییم در صورتی که به ازای هر عدد مثبت (هر قدر کوچک) ε، ε همسایگی P شامل حداقل یک نقطه از R باشد و شامل حداقل یک نقطه که در R نباشد. بنابراین، به استناد این تعریف، هیچ نقطهٔ داخلی نمی‌تواند یک نقطهٔ مرزی باشد، و هیچ نقطهٔ مرزی یک نقطهٔ داخلی نخواهد بود.

ناحیه‌ای *باز* گفته می‌شود که هر نقطه‌اش یک نقطهٔ داخلی ناحیه باشد. به این ترتیب، اگر ناحیهٔ تعریف یک میدان برداری یک ناحیهٔ باز باشد، می‌توان گفت که اگر میدان در نقطه P تعریف شود، در یک ε همسایگی از P نیز تعریف خواهد شد. البته، اگر P بسیار نزدیک به مرز ناحیهٔ مفروض باشد، ε خیلی کوچک خواهد بود.

بنابر تعریف، یک ناحیهٔ باز شامل مرز خود نیست. (مثلاً، مجموعهٔ همهٔ نقاط درون یک مکعب یک ناحیهٔ باز از فضاست، ولی مجموعه‌ای که از همهٔ نقاط درونی یا واقع بر سطح یک مکعب تشکیل شده است یک ناحیهٔ بازنیست.) اگر بگوییم که کمان C در یک ناحیهٔ باز قرار دارد، بنابرتعریف، C نمی‌تواند مرز این ناحیه را قطع کند یا حتی بر آن مماس شود.

ازاین به بعد، فقط نواحی باز را در نظر خواهیم گرفت.

ناحیهٔ باز R همبند گفته می‌شود در صورتی که به ازای هر دو نقطهٔ P و Q از R، کمان هموار در R بتوان یافت که P را به Q وصل کند.

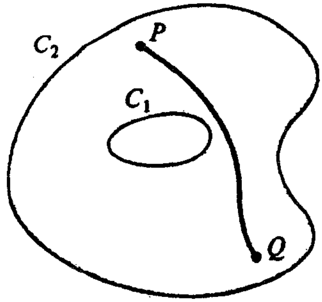
شکل ۳.۴

در شکل (۳.۴) ناحیه‌ای از صفحه نشان داده شده است که همبند نیست . مسلماً نمی‌توانیم به کمک کمان همواری که به طور کامل درون ناحیهٔ مذکور قرار گیرد P را به Q وصل کنیم . چون فرصت بررسی این گونه نواحی را نداریم ، از این پس فقط نواحی همبند را در نظر خواهیم گرفت .

ناحیه‌ای که هم باز باشد و هم همبند ، یک حوزه نامیده می‌شود.

ناحیهٔ تعریف میدان مغناطیسی مربوط به شارش یک جریان پایا در امتداد محور z ها از همهٔ نقاط ، غیر از نقاط واقع بر محور z ، تشکیل شده است . ناحیهٔ تعریف میدان الکتریکی مربوط به دستگاهی متشکل از n نقطهٔ ثابت بار ، مجموعهٔ همهٔ نقاط ، غیر از n نقطهٔ مفروض ، است . به آسانی دیده می‌شود که ناحیهٔ تعریف در هر یک از دو حالت مورد بحث هم باز است و هم همبند و، بنابراین ، اصطلاح «حوزه» به آنها اطلاق می‌شود.

در شکل (۴.۴) نمونه‌ای از یک ناحیه در صفحه نشان داده شده است . اگر D را مجموعهٔ نقاط درونی ناحیهٔ سایه‌دار بگیریم که شامل هیچیک از نقاط منحنیهای C_1 و C_2 نباشد ، آن‌گاه D یک حوزه است . نقاط واقع بر منحنیهای C_1 و C_2 مرز ناحیه را تشکیل می‌دهند. در شکل مذکور نمونه‌ای از یک کمان هموار را می‌بینید که نقاط P و Q را به هم وصل کرده است .

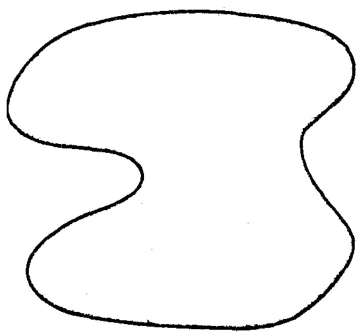


شکل ۴.۴

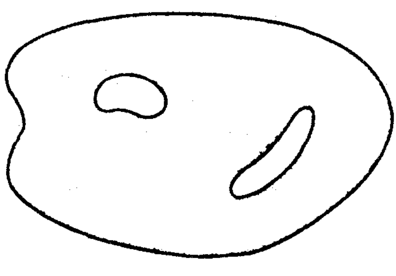
حوزه‌های همبند ساده اهمیت خاصی دارند. در شکل (۵.۴) ناحیه‌ای در صفحه را ملاحظه

می‌کنید که همبند ساده است . نواحی اشکال (۴.۴) و (۶.۴) همبند ساده نیستند.

به زبان عامیانه، حوزه‌ای همبند *ساده* است که بتوانیم هر منحنی بسته واقع در آن را طوری در یک نقطه جمع کنیم که هیچ قسمتی از منحنی از ناحیهٔ مفروض خارج نشود. نواحی مسطحی که در اشکال (۴.۴) و (۶.۴) نشان داده شده‌اند همبند ساده نیستند، زیرا هیچ منحنی بسته‌ای وجود ندارد که یکی از «حفره» ها را احاطه کرده باشد و بتوانیم آن را در یک نقطه جمع کنیم به طوری که این منحنی همواره در حوزه باقی بماند. به این ترتیب، در حالت خاصی که حوزه‌ای از نقاط واقع در صفحه مورد نظر باشد، همبند ساده به این معنی است که با هر منحنی بستهٔ واقع در حوزه، مجموعهٔ نقاط درونی این منحنی بسته نیز در حوزه باشد. به عبارت دیگر، هیچ «حفره‌ای» در حوزه وجود ندارد.



شکل ۵.۴



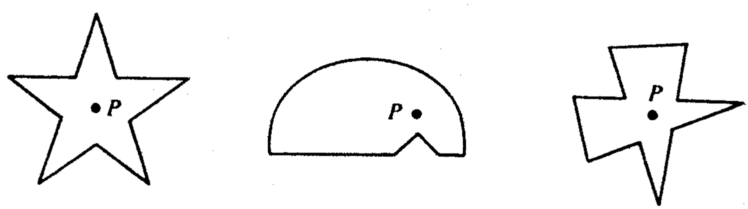
شکل ۶.۴

با بیان عامیانه ، می‌توان گفت که حوزه‌های همبند ساده در فضا حوزه‌هایی هستند که هیچ حفره‌ای در آنها ایجاد نشده باشد . به این ترتیب ، مجموعهٔ نقاط درونی یک چنبره همبند ساده نیست ، زیرا هیچ منحنی بسته‌ای واقع در درون چنبره را که بر حفرهٔ چنبره محاط باشد نمی‌توان در یک نقطه جمع کرد در حالی که این منحنی همواره در داخل چنبره باقی بماند.

هر منحنی بستهٔ C ، در روند تجمّع در یک نقطه ، سطحی می‌سازد که منحنی اوّلیهٔ C مرز آن است . بنابراین ، روش دیگر تعریف همبندی ساده به صورت زیر است :

حوزه‌ای همبند ساده است که به ازای هر منحنی بستهٔ مفروض واقع در حوزه ، سطحی در درون حوزه بتوان یافت که این منحنی مرز آن باشد.

حوزهٔ متشکل از نقاط درونی یک کره همبند ساده است . به عنوان مثالی دیگر ، فرض کنید دو کرهٔ متحدالمرکز مفروض باشند ؛ آن گاه مجموعهٔ نقاط بین دو کره یک حوزهٔ همبند ساده است .



شکل ۷.۴

باز هم به عنوان مثالی دیگر ، استوانهٔ $x^2+y^2=1$ را در نظر بگیرید. این ، استوانه‌ای به شعاع یک است که محور تقارنش محور z می‌باشد. هر نقطه در بیرون استوانه دارای مختصاتی چون x ، y ، و z است که x و y در نامساوی $x^2+y^2>1$ صدق می‌کنند و z دلخواه است ، و مجموعهٔ این نقاط حوزه‌ای تشکیل می‌دهند که همبند ساده نیست . مجموعه نقاط درون استوانه ، $x^2+y^2<1$، همبند ساده است .

به طور کلی میدانهای برداریی که در نواحی همبند ساده تعریف می‌شوند خواصی به مراتب

ساده‌تر از میدانهای برداریی دارند که حوزهٔ تعریف آنها همبند ساده نیست . امکان دارد حوزه‌هایی که همبند ساده نیستند بسیار پیچیده باشند ؛ خواننده می‌تواند ناحیهٔ فضای درونی یک رادیاتور بخار قدیمی را در نظر مجسم کند که در واقع از حوزه‌های همبند ساده بسیار فاصله دارد.

در این فصل فرصت داریم که به *حوزه‌های ستاره شکل* بپردازیم . حوزه‌ای ستاره شکل است که نقطه‌ای چون P در حوزه موجود باشد به طوری که با هر نقطه چون Q از حوزه تمامی قطعه خط PQ در حوزه باشد . در شکل (۷.۴) چند حوزهٔ ستاره شکل نشان داده شده‌اند.

هر حوزهٔ ستاره شکل همبند ساده است ؛ در واقع ، هر منحنی را می‌توان در نقطهٔ P جمع کرد.

تمرینات

در هریک از حالات زیر ناحیه‌ای چون D داده شده است . پاسخ دهید که آیا این ناحیه یک حوزه است ؟ اگر جواب مثبت است ، تعیین کنید که حوزهٔ مفروض همبند ساده است یا خیر. اگر جواب منفی است ، علت را توضیح دهید.

۱. ناحیهٔ تعریف میدان مغناطیسی مربوط به شارش یک جریان پایا در امتداد محور z. [به عبارت دیگر ، ناحیهٔ متشکل از همهٔ نقاط (x,y,z) به طوری که $x^2+y^2>0$.]

۲. ناحیهٔ تعریف میدان الکتریکی مربوط به n نقطهٔ بار.

۳. ناحیهٔ متشکل از همهٔ نقاط بالای صفحهٔ xy. (یعنی ، همه نقاط (x,y,z) که $z>0$.

۴. ناحیهٔ D متشکل از همهٔ نقاط (x,y,z) با $z\geq 0$.

۵. ناحیهٔ D متشکل از همهٔ نقاط (x,y,z) به طوری که $x^2+y^2+z^2>4$.

۶. ناحیهٔ D متشکل از همهٔ نقاط (x,y,z) که به ازای آنها $1<x^2+y^2<4$ (یعنی ، همهٔ نقاط بین دو استوانه به شعاعهای یک و دو که محور تقارن هر یک از آنها محور z است).

۷. ناحیهٔ D متشکل از همهٔ نقاط (x,y,z) که به ازای آنها $1<x<2$ (یعنی ، همهٔ نقاط بین صفحات $x=1$ و $x=2$).

۸. ناحیهٔ متشکل از همهٔ نقاط (x,y,z) که به ازای آنها $z\neq 0$.

۳.۴ میدانهای پایستار

در این بخش فرض می‌کنیم $\mathbf{F}$ میدانی برداری باشد که در حوزه‌ای چون D تعریف شده و بر آن پیوسته است . بنابراین ،

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} \tag{۷.۴}$$

که در آن F_1 ، F_2 ، و F_3 توابع اسکالری هستند که هر یک بر D پیوسته است . اگر این سه تابع دارای مشتقات جزئی باشند (نُه مشتق جزئی موجود است : $\partial F_1/\partial x$ ، $\partial F_1/\partial y$ ، ...... ، $\partial F_3/\partial z$) ، و همهٔ این مشتقات جزئی بر D پیوسته باشند ، می‌گوییم $\mathbf{F}$ در D به *طور پیوسته مشتق پذیر* است . از این تعریفات نتیجه می‌شود که اگر $\mathbf{F}$ در D به طور پیوسته مشتق پذیر باشد آن گاه $\mathbf{curl\ F}$ یک میدان برداری است که در D پیوسته است ، و $\text{div}\,\mathbf{F}$ یک میدان اسکالر است که در D پیوسته است .

میدان برداری $\mathbf{F}$ را در حوزهٔ D *پایستار* می‌نامند در صورتی که میدان اسکالری چون ϕ بتوان یافت که در D تعریف شده باشد و در این حوزه $\mathbf{F}=\mathbf{grad}\,\phi$. اگر وجود چنین میدان اسکالری ممکن باشد، آن گاه ϕ یک *تابع پتانسیل* یا مختصراً یک *پتانسیل* برای $\mathbf{F}$ نامیده می‌شود.

توجه کنید که تابع پتانسیل یک میدان پایستار منحصر به فرد نیست ، زیرا همواره با افزودن یک ثابت دلخواه به ϕ پتانسیل جدیدی به دست می‌آوریم که گرادیـان آن نـیز $\mathbf{F}$ است .(فـیزیکدانـان پتانسیلهایی انتخاب می‌کنند که در شرایط مرزی طبیعی خاصی صدق کنند ؛ مثلاً ، احتمالاً ثابت را چنان برمی‌گزینند که تابع پتانسیل میدان گرانش در کف آزمایشگاه صفر باشد ، یا تابع پتانسیل یک میدان الکتریکی در بی‌نهایت به صفر میل کند.)

در بعضی از کاربردهای فیزیکی ، تعریف دیگری از پتانسیل داده می‌شود به طوری که به جای $\mathbf{F}=\mathbf{grad}\phi$ داشته باشیم $\mathbf{F} = -\,\mathbf{grad}\,\phi$. اختلاف در علامت است . این اختلاف ، محصلی را که عمیقاً با ایده‌های اساسی مورد بحث آشنایی دارد با مشکل مواجه نمی‌سازد.

قضیهٔ زیر ما را به اهمیّت زیاد میدانهای پایستار متوجه می‌سازد :

قضیهٔ ۱.۴ *یک میدان برداری پیوسته در حوزهٔ D پایستار است اگر و فقط اگر انتگرال خط مؤلفهٔ مماسی* $\mathbf{F}$ *در امتداد هر منحنی منظم در D فقط به نقاط انتهایی منحنی بستگی داشته باشد. در این حالت ، انتگرال*

خط صرفاً تفاضل پتانسیل نقاط انتهایی است . یعنی ، داریم :

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \phi(Q) - \phi(P)$$

که در آن P و Q ، به ترتیب ، نقاط ابتدا و انتهای C می‌باشند.

قبل از ادامهٔ بحث ، باید مطمئن شویم که قضیه را فهمیده‌ایم . یک میدان برداری $\mathbf{F}$ مفروض است که بر حوزهٔ D تعریف شده و در آن پیوسته است . این قضیه می‌گوید که این میدان پایستار است اگر و فقط اگر شرط زیر برقرار باشد : اگر دو نقطهٔ P و Q در D مفروض باشند و C منحنی منظم دلخواهی درون حوزه باشد که از P به Q کشیده شده است ، آن‌گاه

$$\int_P^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R}$$

فقط به موقعیت نقاط انتهایی P و Q بستگی دارد نه به مسیری که برای منحنی C جهت اتصال P به Q انتخاب شده است . (این شرط را مختصراً چنین بیان می‌کنیم که : «انتگرال خط مستقل از مسیر است.») به علاوه ، اگر این شرط برقرار باشد ، آن‌گاه می‌توانیم این انتگرال خط را به این شکل محاسبه کنیم که نخست تابع ϕ را چنان تعیین کنیم که $\mathbf{F}=\mathbf{grad}\,\phi$ ، و سپس مقدار تابع ϕ در P را از مقدار تابع ϕ در Q کم کنیم .

این نخستین قضیه‌ای است که با این عمق در کتاب بیان می‌شود . مصراً از خواننده می‌خواهیم که برهان مختصر زیر از قضیه را مطالعه کند .

برهان : اصطلاح «اگر و فقط اگر» ایجاب می‌کند که استلزام را در دو جهت ثابت کنیم . ما برهان قضیه را به چهار قسمت تقسیم می‌کنیم :

نخست فرض می‌کنیم که انتگرال خط $\mathbf{F}$ فقط به نقاط انتهایی بستگی داشته باشد ، و

(۱) تابع ϕ را به روش خاصی تعریف می‌کنیم ،

(۲) نشان می‌دهیم که ϕ یک پتانسیل $\mathbf{F}$ است ، و

(۳) نشان می‌دهیم که :

$$\int_P^Q \mathbf{F} \cdot d\mathbf{R} = \phi(Q) - \phi(P)$$

سرانجام ، بحث را با اثبات عکس این استلزام کامل می‌کنیم ؛

(۴) فرض می‌کنیم که $\mathbf{F}$ پایستار باشد ، ثابت می‌کنیم که انتگرال خط برابر $\phi(Q) - \phi(P)$ و لذا مستقل از مسیر است .

اکنون استدلال را آغاز می‌کنیم .

(۱) تعریف *تابع*

نقطهٔ دلخواهی مانند (x_o,y_o,z_o) در D ، که آن را «نقطهٔ پتانسیل صفر» می‌نامیم ، یک بار و برای همیشه انتخاب می‌کنیم . با این فرض که (x,y,z) نقطهٔ دیگری در D باشد ، کمان همواری چون C_1 در D از (x_o,y_o,z_o) به (x,y,z) اختیار می‌کنیم ؛ این انتخاب امکان‌پذیر است زیرا فرض کرده‌ایم که D یک حوزه باشد . $\phi\ (x,y,z)$ را به صورت

$$\phi\ (x,y,z) = \int_{(x_o,y_o,z_o)}^{(x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$$

که در آن انتگرالگیری در امتداد C_1 است ، تعریف می‌کنیم . بنابر فرض ، این انتگرال مستقل از مسیر است و لذا این تعریف $\phi(x,y,z)$ به کمان منختب خاص C_1 بستگی ندارد. به عبارت دیگر ، ϕ بدون ابهام تعریف شده است .

(۲) اثبات $\mathbf{F} = \nabla\phi$:

برهان را با محاسبهٔ $\partial\phi/\partial x$ در (x,y,z) شروع می‌کنیم . بنابر تعریف ، این مشتق عبارت است از:

$$\lim_{\Delta x \to o} \frac{\phi(x+\Delta x,y,z) - \phi(x,y,z)}{\Delta x} \qquad (۸.۴)$$

چون D باز است (هر حوزه‌ای باز است) یک ε همسایگی از (x,y,z) وجود دارد که درون D است . قطعه خطی موازی محور x که از نقطهٔ (x,y,z) بگذرد و درون این ε همسایگی باشد در نظر می‌گیریم . به ازای نقطه‌ای چون $(x+\Delta x,y,z)$ در امتداد این قطعه خط ، بخشی از این قطعه را که از (x,y,z) به $(x+\Delta x,y,z)$ کشیده شده است به C_2 نشان می‌دهیم . آن گاه ، C_2 ، که یک قطعه خط

است، به *طریق اولی* یک کمان هموار است ، و مسیر از (x_0,y_0,z_0) به $(x+\Delta x,y,z)$ ، که از اتصال C_2 به C_1 به دست می‌آید ، از دو کمان هموار تشکیل شده و ، بنابراین ، یک منحنی منظم است. (شکل ۸.۴) برای دستیابی به $\phi(x+\Delta x,y,z)$ در امتداد این منحنی ، نخست در امتداد C_1 و سپس در امتداد C_2 انتگرال می‌گیریم . چون نخستین انتگرال به $\phi(x,y,z)$ می‌انجامد ، داریم :

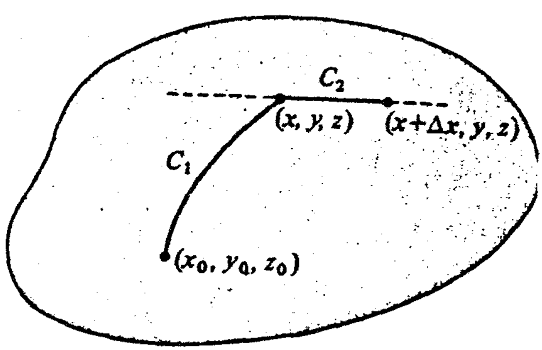
$$\phi(x+\Delta x,y,z) = \phi(x,y,z) + \int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$$

که از آن نتیجه می‌شود که صورت کسر (۸.۴) صرفاً انتگرال

$$\int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$$

است که در امتداد C_2 انتگراگیری می‌شود. چون y و z در امتداد این قطعه خط ثابتند ، داریم : $d\mathbf{R}=dx\mathbf{i}$ ، و از این رو ، $\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=F_1dx$. به این ترتیب ، (۸.۴) چنین می‌شود :

$$\lim_{\Delta x\to 0} \frac{\int_{(x,y,z)}^{(x+\Delta x,y,z)} F_1dx}{\Delta x} \tag{۹.۴}$$



شکل ۸.۴

در (۹.۴) فقط یک متغیر وجود دارد ، زیرا y و z در امتداد C_2 ثابت هستند ؛ به عبارت دیگر ، ما می‌توانیم صورت کسر را درست مانند یک انتگرال از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی مورد بحث قرار دهیم . خواننده می‌داند که خارج قسمت تقسیم این انتگرال بر Δx صرفاً مقدار متوسط F_1 در امتداد قطعه خط C_2 است . چون F_1 پیوسته است ، وقتی Δx به صفر میل کند این مقدار متوسط به $F_1(x,y,z)$ میل می‌کند . (این یک نتیجهٔ قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال است .) نتیجه می‌شود که در هر نقطهٔ (x,y,z) داریم : $\partial\phi/\partial x=F_1$.

به طور مشابه ، با انتخاب قطعه خطهایی ، به ترتیب ، موازی محورهای y و z ، می‌توانیم نشان دهیم که $\partial\phi/\partial y=F_2$ و $\partial\phi/\partial z=F_3$. بنابراین ،

$$\mathbf{grad}\,\phi=\frac{\partial\phi}{\phi x}\,\mathbf{i}+\frac{\partial\phi}{\phi y}\,\mathbf{j}+\frac{\partial\phi}{\phi z}\,\mathbf{k}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$$

و ثابت می‌شود که ϕ یک تابع پتانسیل برای $\mathbf{F}$ است .

(۳)اثبات $$\int_P^Q \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\phi(Q)-\phi(P)$$

فرض کنید P و Q دو نقطهٔ متمایز در D باشند و C منحنی منظمی باشد که از P به Q کشیده شده است . فرض کنید C_1 یک کمان هموار باشد که از (x_0,y_0,z_0) به P رسم شده است . چون انتگرال مستقل از مسیر است ، $\phi(Q)$ باید مساوی با انتگرال در امتداد منحنی منظم حاصل از اتصال C_1 و C_2 باشد . به این ترتیب ،

$$\phi(Q)=\int_{C_1}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}+\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\phi(P)+\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$$

که از آن نتیجه می‌شود که :

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=\phi(Q)-\phi(P)$$

(۴) عکس حکم

برای اثبات عکس حکم مذکور در قضیه ، فرض می‌کنیم که **F** پایستار باشد ، یعنی ، تابعی چون ϕ موجود باشد که $\mathbf{F}=\mathbf{grad}\phi$. آن گاه در امتداد هر کمان همواری ، **F** و **dR** برحسب پارامتری چون t و دیفرانسیل آن dt بیان می‌شوند.

$$\int_P^Q \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \int_P^Q \left[\frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz\right]$$

$$= \int_P^Q \left(\frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{dt}\right) dt$$

$$= \int_P^Q \frac{d\phi}{dt}\,dt = \phi(Q) - \phi(P)$$

در اینجا از این واقعیت استفاده کرده‌ایم که اگر تابع ϕ دارای مشتقات جزئی پیوسته بر حسب x ، y ، و z باشد و x ، y ، و z توابع مشتق پذیری از یک پارامتر t باشند ، آن گاه

$$\frac{d\phi}{dt} = \frac{\partial\phi}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial\phi}{\partial z}\frac{dz}{dt}$$

معادلات بالا را می‌توانیم به صورت ساده و مختصر زیر بنویسیم :

$$\int_P^Q \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \int_P^Q d\phi = \phi(Q) - \phi(P)$$

که در آن

$$\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = d\phi = \frac{\partial\phi}{\partial x}dx + \frac{\partial\phi}{\partial y}dy + \frac{\partial\phi}{\partial z}dz$$

دیفرانسیل کل ϕ است .

با این عمل برهان تمام است . توجه خواهیم کرد که اگر مسیر C بسته باشد ، یعنی ، اگر P و Q برهم منطبق باشند ، آن گاه

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=0$$

زیرا $\phi(P) - \phi(P)=0$. برعکس ، اگر حول هر منحنی منظم بسته‌ای در حوزهٔ مفروض

$$\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=0$$

آن گاه ، $\mathbf{F}$ پایستار است . (برای اثبات ، به تمرین (۱) مراجعه کنید.)

قضیهٔ ۲.۴ *میدان برداری $\mathbf{F}$ ، که در حوزهٔ D پیوسته فرض می‌شود ، پایستار است اگر و فقط اگر انتگرال خط مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{F}$ حول هر منحنی منظم بسته در D صفر باشد.*

مثال ۵.۴ نشان دهید که $\mathbf{F}=xy^2\mathbf{i}+x^3y\mathbf{j}$ پایستار نیست .

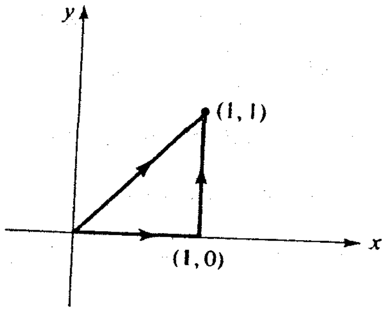
حل روش حل سریع چنین مسائلی در مثال بعدی ارائه خواهد شد. با این وجود ، اگر بتوانیم نشان دهیم که انتگرال خط $\mathbf{F}$ به مسیر بستگی دارد ، ثابت می‌شود که $\mathbf{F}$ پایستار نیست . دراین حالت ، مثلاً ، انتگرال $\mathbf{F}$ را در امتداد دو مسیر واقع در صفحهٔ xy ، که (0,0) را به (1,1) وصل می‌کنند، محاسبه می‌کنیم (شکل ۹.۴) . در امتداد خط $y=x$ داریم :

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)}(xy^2dx+x^3ydy) = \int_{x=0}^{x=1}(x^3+x^4)dx = \frac{9}{20}$$

اکنون در امتداد مسیر منظمی که از دو قطعه خط ، یکی واصل (0,0) به (1,1) و دیگری واصل (1,0) به (1,1) ، تشکیل شده است حرکت می‌کنیم . در امتداد قطعه خط اوّل ، $y=0$ و ، لذا ، انگرال خط صفر است . در امتداد قطعه خط دوّم ، $x=1$ و ، بنابراین $dx=0$ و انتگرال بر آن می‌شود:

$$\int_{y=0}^{y=1} ydy=\frac{1}{2}$$

مجموع دو انتگرال عبارت است از $\frac{۱}{۲}$ که مساوی $\frac{۹}{۲۰}$ نیست. از این رو میدان مفروض پایستار نیست.



شکل ۹.۴

حائز اهمیت است که توجه کنیم که اگر این دو انتگرال خط با هم برابر می‌بودند از آن به تنهایی هیچ نتیجه‌ای عاید نمی‌شد. امکان دارد چنین چیزی برحسب تصادف اتفاق بیفتد حتی اگر میدان $\mathbf{F}$ پایستار نباشد. مسلماً، چون محاسبهٔ $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ در امتداد هر منحنی منظم قابل تصور ممکن نیست، از قضیهٔ بالا هیچ روش عملی که به کمک آن ثابت شود که میدان مفروضی پایستار است حاصل نمی‌شود.

مثال ۶.۴ بدون محاسبهٔ هیچ انتگرالی، نشان دهید که $\mathbf{F} = xy^2\mathbf{i} + x^3y\mathbf{j}$ پایستار نیست.

حل با حصول یک تناقض، مسأله حل می‌شود. فرض کنید $\mathbf{F}$ پایستار باشد. آن‌گاه تابعی چون ϕ وجود دارد که $\mathbf{F} = \mathbf{grad}\,\phi$. چون

$$\mathbf{grad}\phi = \frac{\partial\phi}{\phi x}\,\mathbf{i} + \frac{\partial\phi}{\phi y}\,\mathbf{j} + \frac{\partial\phi}{\phi z}\,\mathbf{k}$$

باید داشته باشیم: $\partial\phi/\partial x = xy^2$ و $\partial\phi/\partial y = x^3y$. امّا این غیرممکن است، زیرا، دراین صورت، $\partial^2\phi/\partial y\partial x$ و $\partial^2\phi/\partial x\partial y$، به ترتیب، $2xy$ و $3x^2y$ خواهند بود. در حالی که نظریهٔ مشتقگیری جزئی ایجاب می‌کند که این دو با هم برابر باشند. این تناقض نشان می‌دهد که یک چنین تابعی

نمی‌تواند وجود داشته باشد و ، بنابراین ، $\mathbf{F}$ پایستار نیست .

مثال ۷.۴ نشان دهید که $\mathbf{F} = ۳x^۲y\mathbf{i} + (x^۳+۱)\mathbf{j} + ۹z^۲\mathbf{k}$ پایستار است .

حل: مجدداً ، راه حل سر راست چنین مسائلی بعداً عرضه خواهد شد. در این مرحله هیچ راهی سراغ نداریم مگر این که تلاش کنیم تابعی چون ϕ بیابیم که $\mathbf{F}=\mathbf{grad}\ \phi$. چنان که قبلاً خاطرنشان کرده‌ایم، قضایای این بخش در اثبات این که تابع مفروضی پایستار است مفید نیستند. زیرا به استناد این قضایا باید بی‌نهایت انتگرال را محاسبه کنیم . (اگر قرار بود دو نقطه بگیریم و انتگرالهای خط را در امتداد بسیاری از مسیرهایی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کنند محاسبه کنیم ، آن گاه برابری اعداد حاصل احتمالاً به این منجر می‌شد که گمان کنیم که میدان مفروض پایستار است ، ولی آزمایش جای استدلال دقیق را نمی‌گیرد.)

اگر $\mathbf{F}=\mathbf{grad}\ \phi$ ، آن گاه $\partial\phi/\partial x=۳x^۲y$ و $\partial\phi/\partial y=x^۳+۱$ ، و $\partial\phi/\partial z=۹z^۲$. در محاسبهٔ $\partial\phi/\partial x$ متغیرهای y و z ثابت گرفته می‌شوند و، بنابراین ، به وضوح ،

$$\phi=x^۳y + (\text{یک جملهٔ ثابت یا جمله‌ای فقط شامل } y \text{ و } z)$$

این تساوی را به صورت $\phi = x^۳y + g(y,z)$ می‌نویسیم که در آن g تابعی است که هنوز تعیین نشده است . با مشتقگیری داریم : $\partial\phi/\partial y = x^۳+ (\partial g/\partial y)$. از مقایسهٔ این با $\partial\phi/\partial y$ ، ملاحظه می‌کنیم که $\partial g/\partial y=۱$. چون g تابعی از y و z است ، به وضوح ،

$$g(x,y)=y + (\text{یک جملهٔ ثابت یا جمله‌ای شامل فقط } z)$$

بنابراین ، داریم : $\phi = x^۳y + y + h(z)$ ، که در آن h فقط به z بستگی دارد. (یا ممکن است احتمالاً یک ثابت باشد.) با مشتقگیری برحسب z، داریم : $\partial\phi/\partial z = h'(z)$. از مقایسهٔ این رابطه با $\partial\phi/\partial z$ نتیجه می‌گیریم که $h'(z)=۹z^۲$. بنابراین ، $h(z)=۳z^۳+C$ ، که در آن C ثابتی دلخواه است . اکنون بابررسی ساده‌ای نتیجه می‌گیریم : $\phi = x^۳y+y+۳z^۳+C$ و ، بنابراین ، $\mathbf{grad}\ \phi=\mathbf{F}$. از این رو ، $\mathbf{F}$ پایستار است .

تذکر: انتگرالگیری جداگانه و جمع نتایج یک اشتباه معمولی است . چون $\partial\phi/\partial x=۳x^۲y$ ، پس $\phi=x^۳y$. چون $\partial\phi/\partial y=x^۳+۱$ ، پس $\phi=x^۳y+y$. چون $\partial\phi/\partial z=۹z^۲$ ، پس $\phi=۳z^۳$. از جمع اینها، خواهیم داشت : $\phi=۳x^۲y+y+۳z^۳$، که نادرست است .

تمرینات

۱. نشان دهید که اگر $\oint_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ به ازای هر منحنی بسته چون C صفر باشد، آن‌گاه، به ازای هر دو نقطهٔ P و Q، انتگرال

$$\int_P^Q \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$$

مستقل از مسیر است. (*راهنمایی*: فرض کنید C_1 و C_2 دو مسیر باشند که از P به Q کشیده شوند و از اینها یک منحنی بسته بسازید.)

۲. با استفاده از روش مثال (۵.۴)، یا روش مشابه دیگری، نشان دهید که میدانهای زیر پایستار نیستند:

(الف) $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$

(ب) $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+y(x-1)\mathbf{j}$

(ج) $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+x\mathbf{j}+x^2\mathbf{k}$ [*پیشنهاد*: دو مسیر مختلف در نظر بگیرید که از (0,0,0) به (1,1,1) کشیده شوند.]

(د) $\mathbf{F}=z\mathbf{i}+z\mathbf{j}+(y-1)\mathbf{k}$

(هـ) $\mathbf{F}=\dfrac{x\mathbf{i}+x\mathbf{j}}{x^2+y^2}$ (در مبدأ تعریف نشده است.)

۳. با روشهایی مشابه روشی که در مثال (۶.۴) به کار رفته است، نشان دهید که میدانهای تمرین (۲) پایستار نیستند.

۴. بگیرید $\mathbf{F}=(-y\mathbf{i}+x\mathbf{j})/(x^2+y^2)$ و $\oint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ را حول مسیر بستهٔ متشکل از دایرهٔ به مرکز مبدأ و به شعاع r در صفحهٔ xy محاسبه کنید. (*راهنمایی*: به مختصات قطبی تبدیل کنید.)

۵. اگر تلاش درستی به کار می‌برید، جواب ناصفری برای تمرین (۴) پیدا می‌کردید. با این وجود، چنین به نظر می‌رسد که $\mathbf{F}=\mathbf{grad}\,\phi$ که در آن $\phi=\tan^{-1}(y/x)$، و این با قضیهٔ (۲.۴) متناقض است. علت را توضیح دهید.

۶. پتانسیلی برای میدان نیروی زیر بیابید.

$$\mathbf{F} = (y+z\cos xz)\mathbf{i} + x\mathbf{j} + (x\cos xz)\mathbf{k}$$

۷. نشان دهید که میدان $\mathbf{F} = 2xy\mathbf{i} + (x^2+z)\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ پایستار است .

۴.۴ میدانهای پایستار (ادامهٔ بحث)

در بخش گذشته دیدیم که هر میدان برداری به طور پیوسته مشتق پذیری که در حوزه‌ای چون D تعریف شده است ، پایستار است اگر و فقط اگر هر یک از (ولذا همهٔ) شرایط زیر برقرار باشد :

(۱) میدان مفروض ،گرادیان یک تابع اسکالر باشد.

(۲) انتگرال میدان حول هر منحنی منظم بسته صفر باشد.

(۳) انتگرال میدان در امتداد هر منحنی منظمی که از نقطه‌ای چون P به نقطه‌ای چون Q کشیده شده است مستقل از مسیر باشد.

توجه کنید که در بیان این خواص قدری مسامحه شده است . وقتی می‌گوییم : «انتگرال میدان» ، منظور ما «انتگرال خط مؤلفهٔ مماسی» است ، و وقتی می‌گوییم : «هر منحنی منظم بسته» یا «هر منحنی منظم» ، منظور این است که به طور کامل درون D قرار گیرد.

اگر حوزهٔ D که در آن $\mathbf{F}$ تعریف شده است همبند *ساده* باشد ، می‌توانیم خاصیّت چهارمی را ، که معادل هر یک از سه خاصیّت دیگر است ، به آنها بیفزاییم :

$$\mathbf{curl\ F=0} \tag{۱۰.۴}$$

این خاصیّت فایدهٔ عملی دارد، زیرا اگر میدان برداری $\mathbf{F}$ بر حوزهٔ D تعریف شده باشد ، سریعاً با محاسبهٔ تاو میدان می‌توانیم تعیین کنیم که میدان مفروض پایستار است یا خیر. میدان

$$\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$$

وقتی پایستار است که مؤلفه‌هایش در همهٔ معادلات زیر صدق کنند :

$$\frac{\partial F_1}{\partial y} = \frac{\partial F_2}{\partial x} \qquad \frac{\partial F_2}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial y} \qquad \frac{\partial F_1}{\partial z} = \frac{\partial F_3}{\partial x} \tag{۱۱.۴}$$

از تعریف **curl F** به آسانی نتیجه می‌شود که معادلات (۱۱.۴) فقط و فقط وقتی برقرارند که **curl F=0**.

بعضی از مسائل بخش گذشته با استفاده از این آزمون به سادگی قابل حل هستند ؛ به عنوان مثال، میدان برداری $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + x\mathbf{j} + x^2\mathbf{k}$ را در نظر بگیرید. معادلات (۱۱.۴) در مورد این میدان عبارتند از :

$$\frac{\partial}{\partial y}(y) = \frac{\partial}{\partial x}(x) \qquad \frac{\partial}{\partial z}(x) = \frac{\partial}{\partial y}(x^2) \qquad \frac{\partial}{\partial z}(y) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2)$$

دو معادلهٔ اوّل برقرارند ولی معادلهٔ سوم برقرار نیست و ، بنابراین ، میدان برداری مفروض پایستار نیست :

میدانی برداری که تاوش همه جا صفر باشد بی‌گردش نامیده می‌شود. اکنون به قضیه‌ای که مبیّن هدف ماست بر می‌گردیم .

قضیهٔ ۳.۴ میدان برداری **F** که بر حوزهٔ همبند سادهٔ D تعریف شده و در آن به طور پیوسته مشتق پذیر باشد ، پایستار است اگر و فقط اگر **curl F** در سراسر D صفر باشد.

توجه کنید که بخش «فقط اگر» این قضیه بدیهی است ؛ زیرا تاو هر گرادیان همیشه صفر است . با این وجود ، بخش «اگر» مشکلتر است . در این جا به اثبات قضیه در حالت خاصی که D کل فضاست می‌پردازیم . در تمرین (۴) از خواننده خواسته شده است که برهان قضیه را به حالتهایی که حوزهٔ مفروض کروی و مکعب مستطیلی است تعمیم دهد. در پایان این بخش ، در مبحث درس اختیاری ، برهان قضیه برای حوزه‌های ستاره شکل ذکر شده است . این حالتهای خاص برای اغلب کاربردهای عملی کافی است . تعمیم قضیه به حالت کلی ، که در آن حوزهٔ مفروض همبند ساده است ، مستلزم استفاده از ابزار توپولوژی است و ما وارد آن بحث نمی‌شویم .

برهان بخش اگر وقتی که D کل فضاست : فرض این است که همه جا **curl F=0** ، و هدف این است که نشان دهیم میدان اسکالری چون ϕ وجود دارد به طوری که **F=grad** ϕ . پیشاپیش ، می‌دانیم که انتگرال خط **F** را می‌توان برحسب ϕ محاسبه کرد ، به این ترتیب ، ϕ را با یک انتگرال

خط تعریف و سپس سعی می‌کنیم که قضیه را ثابت کنیم .

بالاخص ، $\phi(x,y,z)$ را انتگرال خط $\mathbf{F}$ از (o,o,o) تا (x,y,z) در امتداد منحنی زیر تعریف می‌کنیم :

(۱) از (o,o,o) به (x,o,o) در امتداد محور x،

(۲) از (x,o,o) به (x,y,o) در امتداد موازی با محور y،

(۳) از (x,y,o) تا (x,y,z) در امتداد موازی با محور z.

طریقهٔ پارامتری کردن منحنی بدیهی است و داریم :

$$\phi(x,y,z)=\int_o^x F_1(t,o,o)dt+\int_o^y F_2(x,t,o)dt+\int_o^z F_3(x,y,t)dt \qquad (۱۲.۴)$$

در این مرحله نمی‌توانیم فرض کنیم که انتگرالهای خط مستقل از مسیر می‌باشند. با این وجود ، تابع $\phi(x,y,z)$ برحسب یک مسیر خاص محاسبه می‌شود و ، بنابراین ، خوش تعریف است .

اکنون مراحل اثبات تساوی $\mathbf{grad}\,\phi=\mathbf{F}$ را تعقیب می‌کنیم . مؤلّفهٔ z آسان است :

$$\frac{\partial\phi}{\partial z}=\lim_{\Delta z\to o}\frac{\phi(x,y,z+\Delta z)-\phi(x,y,z)}{\Delta z}$$

$$=\lim_{\Delta z\to o}\frac{\int_z^{z+\Delta z} F_3(x,y,t)dt}{\Delta z}=F_3(x,y,z)$$

که استدلال آن شبیه (۹.۴) است .

در مورد مؤلفهٔ y، داریم :

$$\frac{\partial\phi}{\partial y}=\lim_{\Delta z\to o}\frac{\phi(x,y+\Delta y,z)-\phi(x,y,z)}{\Delta y}$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{1}{\Delta y} \left[\int_0^{y+\Delta y} F_2(x,t,0)dt + \int_0^z F_3(x,y+\Delta y,t)dt - \int_0^y F_2(x,t,0)dt - \int_0^z F_3(x,y,t)dt \right]$$

$$= \lim_{\Delta y \to 0} \frac{\int_y^{y+\Delta y} F_2(x,t,0)dt}{\Delta y} + \lim_{\Delta y \to 0} \int_0^z \frac{F_3(x,y+\Delta y,t) - F_3(x,y,t)}{\Delta y} dt$$

$$= F_2(x,y,0) + \int_0^z \frac{\partial F_3(x,y,t)}{\partial y} dt$$

حال دومین معادله از معادلات (۱۱.۴) را به کار می‌بریم و به خاطر می‌سپارم که در فرمول بالا مختص سوم t است نه z:

$$\frac{\partial \phi}{\partial y} = F_2(x,y,0) + \int_0^z \frac{\partial F_2(x,y,t)}{\partial t} dt$$

$$= F_2(x,y,0) + F_2(x,y,z) - F_2(x,y,0)$$
$$= F_2(x,y,z)$$

ما طرح کلی محاسبات در مورد مؤلفهٔ x را درج و به خواننده واگذار می‌کنیم که جزئیات را عرضه کند:

$$\frac{\partial \phi}{\partial x} = F_1(x,0,0) + \int_0^y \frac{\partial F_2(x,t,0)}{\partial x} dt + \int_0^z \frac{\partial F_3(x,y,t)}{\partial x} dt$$

$$=F_1(x,0,0)+\int_0^y \frac{\partial F_1(x,t,0)}{\partial t}\,dt+\int_0^z \frac{\partial F_1(x,y,t)}{\partial t}\,dt$$

$$=F_1(x,0,0)+F_1(x,y,0)-F_1(x,0,0)+F_1(x,y,z)-F_1(x,y,0)$$

$$=F_1(x,y,z)$$

این ، برهان $\mathbf{grad}\,\phi=\mathbf{F}$ را تمام می‌کند.

مثال ۸.۴ نشان دهید که $\mathbf{F}=2xy\mathbf{i}+(x^2+1)\mathbf{j}+6z^2\mathbf{k}$ پایستار است ، و یک پتانسیل اسکالر ϕ بیابید.

حل میدان $\mathbf{F}$ در سراسر فضا تعریف شده و به طور پیوسته مشتق پذیر است . بنابراین ، می‌توانیم از آزمون (۱۱.۴) استفاده کنیم :

$$\frac{\partial F_1}{\partial y}=\frac{\partial F_2}{\partial x}=2x$$

$$\frac{\partial F_2}{\partial z}=\frac{\partial F_3}{\partial y}=0$$

و

$$\frac{\partial F_1}{\partial z}=\frac{\partial F_3}{\partial x}=0$$

تاو صفر است و ، از این رو ، میدان پایستار می‌باشد.

تابع پتانسیل را می‌توانیم به روش مثال (۷.۴) یا با استفاده از انتگرال خط معادلهٔ (۱۲.۴) پیدا کنیم . ما روش دوّم را امتحان می‌کنیم .

از جاگذاری $\mathbf{F}$ در معادلهٔ (۱۲.۴) نتیجه می‌گیریم که :

$$\phi(x,y,z)=\int_0^x 0\,dt+\int_0^y (x^2+1)\,dt+\int_0^z 6t^2\,dt$$

$$= ۰ + (x^۲t+t) \Big|_۰^y + ۲t^۳ \Big|_۰^z = x^۲y + y + ۲z^۳$$

جهت آزمایش نتیجه ، ϕ را با انتگرالگیری از $\mathbf{F}$ در امتداد خط مستقیمی که (۰,۰,۰) را به (x,y,z) وصل می‌کند و به صورت

$$\mathbf{R}(t) = tx\mathbf{i} + ty\mathbf{j} + tz\mathbf{k} \quad , \quad ۰ \leq t \leq ۱$$

پارامتری شده است محاسبه می‌کنیم . خواهیم داشت :

$$\phi(x,y,z) = \int_۰^۱ [۲(tx)(ty)\mathbf{i} + (t^۲x^۲+۱)\mathbf{j} + ۶(t^۲z^۲)\mathbf{k}]\cdot[x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}]\ dt$$

$$= ۲x^۲y \int_۰^۱ t^۲dt + x^۲y \int_۰^۱ t^۲dt + y\int_۰^۱ dt + ۶z^۳\int_۰^۱ t^۲dt$$

$$= x^۲y + y + ۲z^۳$$

که همان نتیجه قبلی است .

مثال ۹.۴ با استفاده از معادلهٔ (۱۲.۴) تابع پتانسیلی برای

$$\mathbf{F} = (۳x^۳yz+y+۵)\mathbf{i} + (x^۳z+x-z)\mathbf{j} + (x^۳y-y+۷)\mathbf{k}$$

بیابید که در مبدأ مقدار آن ۱۰ باشد.

حل به استناد معادلهٔ (۱۲.۴) داریم :

$$\phi(x,y,z) = ۱۰ + \int_۰^x ۵dt + \int_۰^y xdt + \int_۰^z (x^۳y-y+۷)dt$$

$$= 10+5t \Big|_0^x + xt \Big|_0^y + (x^3yt-yt+7t) \Big|_0^z$$

$$= 10+5x+xy+x^3yz-yz+7z$$

قاعدةً خواننده باید از آزمون این بخش برای تعیین پایستاری یا عدم پایستاری میدان مفروض **F** استفاده کند ، ولی برای تعیین ϕ مانند روش مثال (۷.۴) عمل کند. دلیل عدم توصیهٔ استفاده از (۱۲.۴) این بخش این است که استفادهٔ درست از آن برای اغلب محصلین قدری دشوار است .

بررسی میدان برداری

$$\mathbf{F}=\frac{-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}}{x^2+y^2}$$

بسیار روشنگر است . خواننده باید تحقیق کند که $\text{curl}\ \mathbf{F}=0$ ، ولی **F** پایستار نیست زیرا ، چنان‌که در تمرین (۴) بخش (۳.۴) نشان داده شده است ، انتگرال خط **F** حول همهٔ مسیرهای بسته همیشه صفر نیست . این متناقض با قضیه نیست ، زیرا **F** بر محور z ، که در آن $x^2+y^2=0$ ، تعریف نشده است و لذا حوزهٔ D همبند ساده نیست .

در تمرین (۵) بخش (۳.۴) سعی کردیم توجه خواننده را به این نکته جلب کنیم که این **F** یک گرادیان بود ، یعنی ، گرادیان $\phi=\tan^{-1}(y/x)$. البته ، این تعریف به دلیل عدم تشخیص درست موقعیت نقطهٔ (x,y) ، که در کدام ربع صفحه واقع است ، دارای ابهام است و باید $\mathbf{F}=\mathbf{grad}\theta$ را ، که در آن θ زاویهٔ قطبی تعریف شده در بخش (۴.۲) است ، بیازماییم . با این وجود ، وقتی از محور x منفی عبور می‌کنیم ، زاویهٔ قطبی ناگهان از π به $-\pi$ تغییر می‌کند و ، بنابراین ، در آن جا ناپیوسته است و گرادیانش تعریف نمی‌شود. (یا نامتناهی است !) به این ترتیب ، قضیه بدون خدشه باقی می‌ماند.

درس اختیاری : برهان قضیهٔ (۳.۴) برای حوزه‌های ستاره شکل

مانند گذشته فقط باید بخش «اگر» را ثابت کنیم . با این فرض که D برحسب نقطهٔ P ستاره شکل باشد ، ما می‌توانیم تابع ϕ را در Q برابر انتگرال خط **F** ، در *امتداد قطعه خط مستقیمی* که از P به Q می‌رود ، تعریف کنیم . مجدداً توجه می‌کنیم که $\phi(Q)$ برحسب یک مسیر *خاص* محاسبه می‌شود و ، بنابراین ، خالی از ابهام است .

اکنون مراحل اثبات $\mathbf{grad}\ \phi=\mathbf{F}$ را پیگیری می‌کنیم . نخست مسیر انتگرالگیری را پارامتری می‌کنیم . فرض کنید (x_0,y_0,z_0) نقطهٔ P و (x,y,z) نقطهٔ Q باشد. چون معمولاً $\mathbf{R}$ را برای نمایش بردار (x,y,z) ، که اکنون یک *نقطهٔ انتهایی* انتگرال است ، به کار می‌بریم ، می‌نویسیم :

$$\phi(x,y,z) = \int_P^Q \mathbf{F}\cdot d\mathbf{r} \tag{۱۳.۴}$$

که در آن $\mathbf{r}(t)$ نمایش دهندهٔ مسیر انتگرالگیری است . آن گاه یک طریق پارامتری کردن قطعه خط مذکور عبارت است از :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= [x_0+t(x-x_0)]\mathbf{i} + [y_0+t(y-y_0)\mathbf{j}] + [z_0+t(z-z_0)]\mathbf{k}\\ &= \mathbf{R}_0+t(\mathbf{R}-\mathbf{R}_0) \qquad (0\le t\le 1)\end{aligned} \tag{۱۴.۴}$$

بستگی صریح **F** به پارامتر t در انتگرال (۱۳.۴) به صورت زیر است :

$$\begin{aligned}\mathbf{F} &= \mathbf{F}[x_0+t(x-x_0)\ ,\ y_0+t(y-y_0)\ ,\ z_0+t(z-z_0)]\\ &= \mathbf{F}(X,Y,Z)\end{aligned}$$

که در آن ، جهت رعایت اختصار ، مؤلفهٔ اوّل **F** را به X ، مؤلفهٔ دوّم را به Y ، و مؤلفهٔ سوّم را به Z نشان داده‌ایم .

حال گرادیان ϕ را محاسبه می‌کنیم . چون ∇ فقط بر متغیرهای x ، y ، و z عمل می‌کند (ونه بر t) ، می‌توانیم در (۱۳.۴) عملگر دیفرانسیل را وارد انتگرال کنیم . با استفاده از اتحاد (۳۱.۳) خواهیم داشت :

$$\nabla\phi=\int_0^1 \nabla\left(\mathbf{F}\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)dt \tag{۱۵.۴}$$

$$= \int_0^1 \left[(\mathbf{F}\cdot\nabla)\frac{d\mathbf{r}}{dt} + \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right)\mathbf{F} + \mathbf{F}\times\left(\nabla\times\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) + \frac{d\mathbf{r}}{dt}\times(\nabla\times\mathbf{F})\right]dt$$

در این جا در تعبیر اعمالی که انجام می‌شود باید بسیار دقت کنیم . چنان که گفتیم ، ∇ بر x ، y ، و z عمل می‌کند ؛ ولی مؤلفه‌های $\mathbf{F}$ عبارتند از : X ، Y ، و Z . به این ترتیب ، به عنوان مثال ، ما نمی‌توانیم $\nabla\times\mathbf{F}(X,Y,Z)$ را تاو $\mathbf{F}$ بدانیم که در (X,Y,Z) محاسبه می‌شود. تاو $\mathbf{F}$ در (X,Y,Z) باید به صورت

$$\nabla^*\times\mathbf{F}(X,Y,Z)$$

نوشته شود که ∇^* عملگر

$$\nabla^* = \mathbf{i}\frac{\partial}{\partial X} + \mathbf{j}\frac{\partial}{\partial Y} + \mathbf{k}\frac{\partial}{\partial Z}$$

است . با این وجود ، به موجب تعریف X برحسب x ، رابطهٔ زیر برقرار است :

$$\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x} = \frac{\partial X}{\partial x}\,\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial X} = t\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial X} \qquad (۱۶.۴)$$

به طور مشابه

$$\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial y} = t\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial Y}$$

$$\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial z} = t\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial Z} \qquad (۱۶'.۴)$$

از این اتحادها نتیجه می‌شود که

$$\nabla\times\mathbf{F}(x,y,z) = t\nabla^*\times\mathbf{F}(X,Y,Z) = t\ \mathbf{curl}\ \mathbf{F}(X,Y,Z)$$

بنا بر فرض ، تاو $\mathbf{F}$ صفر است ؛ از این رو ، تساوی بالا ایجاب می‌کند که در عبارت (۱۵.۴)

$$\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$$

به علاوه ، چون

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{R} - \mathbf{R}_o$$

داریم :

$$\nabla\times\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{0}$$

و

$$(\mathbf{F}\cdot\nabla)\ \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \mathbf{F}$$

[اتحادهای (۲۴.۳) و (۲۶.۳) را به خاطر بیاورید.]

اگر این نتایج را در (۱۵.۴) اعمال کنیم ، خواهیم داشت :

$$\nabla\phi(x,y,z) = \int_o^1 \left[\mathbf{F}+\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right)\mathbf{F}\right]dt \tag{۱۷.۴}$$

باز هم می‌توان ساده کرد. اگر در امتداد از $t\mathbf{F}$ نسبت به t مشتق بگیریم ، با استفاده از قاعدهٔ زنجیری نتیجه می‌گیریم که :

$$\frac{d}{dt}\left(t\mathbf{F}\left[x_o+t(x-x_o)\ ,\ y_o+t(y-y_o)\ ,\ z_o+t(z-z_o)\right]\right)$$

$$= t\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial X}(x-x_o) + t\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial Y}(y-y_o) + t\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial Z}(z-z_o) + \mathbf{F}$$

به استناد تساوی (۱۶.۴) ، این معادله را می‌توان به صورت

$$\frac{d(t\mathbf{F})}{dt} = (x-x_o)\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial x} + (y-y_o)\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial y} + (z-z_o)\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial z} + \mathbf{F}$$

$$= \left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right)\mathbf{F} \tag{۱۸.۴}$$

نوشت ، که اگر در (۱۷.۴) قرار داده شود خواهیم داشت :

$$\nabla\phi(x,y,z) = \int_o^1 \frac{d}{dt}(t\mathbf{F})dt = t\mathbf{F}\Big|_o^1 = \mathbf{F}(x,y,z)$$

به این ترتیب ، موفق شدیم ثابت کنیم که گرادیان ϕ همان $\mathbf{F}$ و لذا $\mathbf{F}$ پایستاراست !

تمرینات

۱. تحقیق کنید که آیا میدانهای زیر پایستارند یا خیر ؟

(الف) $\mathbf{F} = (12xy+yz)\mathbf{i} + (6x^2+xz)\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$

(ب) $\mathbf{F} = ze^{xz}\mathbf{i} + xe^{xz}\mathbf{k}$

(ج) $\mathbf{F} = \sin x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + e^z\mathbf{k}$

(د) $\mathbf{F} = 3x^2yz^2\mathbf{i} + x^3z^2\mathbf{j} + x^3yz\mathbf{k}$

(هـ) $\mathbf{F} = \dfrac{2x}{x^2+y^2}\mathbf{i} + \dfrac{2y}{x^2+y^2}\mathbf{j} + 2z\mathbf{k}$

۲. در مورد کدام یک از میدانهای تمرین (۱) آزمون مذکور در این بخش قابل اجرا نیست ؟ در این صورت ، چگونه می‌توانید امتحان کنید که این میدان در حوزهٔ تعریف خود پایستار است یا خیر؟

۳. فرض کنید $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ دو میدان برداری پایستار با پتانسیلهای ϕ و ψ باشند. آیا میدان برداری $\mathbf{F}+\mathbf{G}$ پایستار است ؟ اگر جواب مثبت است ، تابع پتانسیلی برای آن بیابید.

۴. نشان دهید که برهان قضیهٔ (۳.۴) مذکور در متن را برای حوزه‌های دیگری نیز می‌توان تنظیم کرد، بویژه : (۱) درون یک کره و (۲) درون یک متوازی السطوح که یالهایش موازی محورهایند. (*راهنمایی* : باید تحقیق کنید که همهٔ انتگرالهای خط خوش تعریفند.)

۵. نشان دهید که میدان اسکالر

$$\phi = -\frac{1}{|\mathbf{R}|}$$

که در همهٔ نقاط ، به جز مبدأ ، تعریف شده است ، پتانسیلی برای میدان برداری $\mathbf{R}/|\mathbf{R}|^3$ است که در آن $\mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.

(الف) با بیان ϕ برحسب x ، y ، و z و محاسبهٔ گرادیانش ؛

(ب) با ادراک دقیق و استفاده از دومین و سومین خاصیّت اساسی گرادیان که در بخش (۱.۳) ذکر شده است .

۶. یک میدان نیرو به صورت

$$\mathbf{F} = \frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

در همه نقاط فضا ، به جز مبدأ ، تعریف شده است . ذره‌ای در امتداد قطعه خط مستقیمی که از نقطهٔ (۱،۲،۳) به نقطهٔ (۲،۳،۵) می‌رود ، حرکت می‌کند . کاری که با نیروی وارد بر ذره انجام می‌شود چیست ؟ [*راهنمایی* : با استفاده از تمرین (۵) از تلاش زیاد پرهیز کنید !]

۷. در تمرین (۶) ، آیا اگر مسیری که از (۱،۲،۳) به (۲،۳،۵) می‌رود مستقیم نباشد ، جواب تغییر می‌کند ؟

۵.۴ درس اختیاری : پتانسیلهای برداری

در بخش گذشته عکس‌گونه‌ای از حکم (۳۲.۳) را مورد بحث قرار دادیم که بیان می‌کند که تاو یک گرادیان صفر است . این عکس آن حکم است ، زیرا بیان می‌کند که *اگر* تاو یک میدان صفر باشد ، آن گاه ، این میدان یک گرادیان است ؛ امّا این عکس گونه است ، زیرا فقط در مورد حوزه‌های همبند ساده برقرار است .

برای خوانندهٔ زیرک تعجب آور است که اتحاد (۳۳.۳) ، که بیان می‌کند که واگرایی یک تاو صفر است ، یک عکس ، یا حداقل یک عکس گونه داشته باشد. اگر واگرایی یک میدان برداری صفر باشد، آیا این میدان الزاماً تاو میدان برداری دیگری است ؟ جواب مثبت است به شرطی که حوزهٔ تعریف ستاره شکل باشد.

میدانی برداری که واگرایی آن همه جا صفر باشد *سیملوله‌ای* نامیده می‌شود. اگر $\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{G}$ ، $\mathbf{G}$ را یک *پتانسیل برداری* برای $\mathbf{F}$ می‌نامند. توجه کنید که $\mathbf{G}$ منحصر به فرد نیست ؛ در واقع ، به استناد (۳۲.۳) ، گرادیان هر میدان اسکالری را می‌توان به $\mathbf{G}$ افزود.

حال حکم مربوط به وجود یک پتانسیل برداری را ثابت می‌کنیم .

قضیهٔ ۴.۴ میدان برداری $\mathbf{F}$ که در حوزهٔ ستاره شکل D به طور پیوسته مشتق پذیر می‌باشد سیملوله‌ای است اگر ، و فقط اگر ، میدانی برداری چون $\mathbf{G}$ موجود باشد به طوری که تساوی

$\mathbf{F}=\mathbf{curl\ G}$ در سرتاسر D برقرار باشد.

برهان بخش «اگر» از اتحاد (۳۳.۳) نتیجه می‌شود. برای حکم «فقط اگر» فرض می‌کنیم که $\mathbf{F}$ در حوزهٔ D ، که نسبت به نقطهٔ P ستاره شکل است ، سیملوله‌ای باشد. می‌خواهیم تابعی چون $\mathbf{G}(x,y,z)$ بیابیم که $\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{G}$.

این برهان کاملاً شبیه برهانی است که در بخش قبلی اقامه شد. (در واقع ، هر دو قضیه حالتهای خاص حکمی مشهور به *لم پوانکاره‌اند*). مجدداً قطعه خط مستقیمی را که از $P(x,y,z)$ به $Q(x,y,z)$ می‌رود نظیر (۱۴.۴) پارامتری می‌کنیم :

$$\begin{aligned}\mathbf{r}(t) &= [x_o+t(x-x_o)]\mathbf{i} + [y_o+t(y-y_o)\mathbf{j} + [z_o+t(z-z_o)]\mathbf{k}\\ &= X\mathbf{i} + Y\mathbf{j} + Z\mathbf{k}\\ &= \mathbf{R}_o + t(\mathbf{R}-\mathbf{R}_o)\end{aligned}$$

(از همان نمادهای بخش قبلی استفاده شده است).

حال $\mathbf{G}$ را چنین تعریف می‌کنیم :

$$\mathbf{G}(x,y,z)= \int_o^1 t\mathbf{F} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\, dt \tag{۱۹.۴}$$

که در آن بستگی $\mathbf{F}$ و $\mathbf{r}$ به t دقیقاً مانند بخش گذشته است . معادلهٔ (۱۹.۴) ، چنان که می‌نماید، صرفاً انتگرال یک تابع برداری از t است ؛ با این وجود ، این معادله جهت تعبیر بدیهی عبارتی چون $\int_P^Q t\mathbf{F}\times d\mathbf{r}$ به کار می‌آید.

تاو $\mathbf{G}$ را محاسبه می‌کنیم . مجدداً ، ∇ را می‌توان به درون انتگرال برد و به استناد اتحاد (۲۹.۳) داریم :

$$\nabla\times\mathbf{G} = \int_o^1 t\nabla \times \left(\mathbf{F} \times \frac{d\mathbf{r}}{dt}\right) dt \tag{۲۰.۴}$$

$$=\int_{0}^{1}\left[\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right)\mathbf{F}-(\mathbf{F}\cdot\nabla)\frac{d\mathbf{r}}{dt}+\left(\nabla\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right)\mathbf{F}-(\nabla\cdot\mathbf{F})\frac{d\mathbf{r}}{dt}\right]t\,dt$$

مانند بخش قبلی ،

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{R}-\mathbf{R}_{0}$$

که در این صورت

$$\nabla\cdot\frac{d\mathbf{r}}{dt}=3$$

و

$$(\mathbf{F}\cdot\nabla)\frac{d\mathbf{r}}{dt}=\mathbf{F}$$

به دلایلی که در بخش گذشته بیان شد ، $\nabla\cdot\mathbf{F}(X,Y,Z)$ واگرایی $\mathbf{F}$ نیست ، امّا چون

$$\nabla\cdot\mathbf{F}(x,y,z)=t\nabla^{*}\cdot\mathbf{F}(X,Y,Z)$$

که در آن ∇^{*} مانند گذشته تعریف می‌شود ، می‌بینیم که $\nabla^{*}\cdot\mathbf{F}=0$ مستلزم $\nabla\cdot\mathbf{F}=0$ است .

اگر همهٔ این نتایج را در (۲۰.۴) قرار دهیم ، خواهیم داشت :

$$\nabla\times\mathbf{G}=\int_{0}^{1}\left[\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right)\mathbf{F}-\mathbf{F}+3\mathbf{F}\right]t\,dt \qquad (۲۱.۴)$$

اکنون با استفاده از معادلهٔ (۱۸.۴) در می‌یابیم که

$$\frac{d(t^{2}\mathbf{F})}{dt}=t\frac{d(t\mathbf{F})}{dt}+(t\mathbf{F})\frac{dt}{dt}=2t\mathbf{F}+t\left(\frac{d\mathbf{r}}{dt}\cdot\nabla\right)\mathbf{F}$$

این دقیقاً همان چیزی است که در (۲۱.۴) داریم ؛ بنابراین ،

$$\nabla\times\mathbf{G}=\int_{0}^{1}\frac{d}{dt}(t^{2}\mathbf{F})dt=t^{2}\mathbf{F}\Big|_{0}^{1}=\mathbf{F}(x,y,z)$$

و $\mathbf{F}$ تاو $\mathbf{G}$ است .

مثال ۱۰.۴ یک پتانسیل برداری برای

$$\mathbf{F} = \boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}$$

که درآن $\boldsymbol{\omega}$ یک بردار ثابت است ، بیابید. (مثال «۲۲.۳» را، که در آن $\mathbf{F}$ میدان سرعت یک شاره با سرعت زاویه‌ای یکنواخت بود، به خاطر بیاورید.)

حل تحقیق این که $\nabla.\mathbf{F} = 0$ ، آسان است . اگر در معادلات بالا P را مبدأ بگیریم ، قطعهٔ PQ به صورت زیر پارامتری می‌شود،

$$\mathbf{r}(t)=t\mathbf{R}$$

بنابراین ، $\mathbf{F}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{r}(t)$ ، و به استناد معادلهٔ (۱۹.۴)،

$$\mathbf{G}(x,y,z) = \int_0^1 t(\boldsymbol{\omega} \times t\mathbf{R}) \times \mathbf{R}dt$$

$$= (\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{R})\times\mathbf{R} \int_0^1 t^2dt$$

بنابراین ،

$$\mathbf{G}(x,y,z)=\frac{1}{3}(\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R})\times\mathbf{R}$$

از خواننده می‌خواهیم که تحقیق کند که $\nabla\times\mathbf{G}=\mathbf{F}$.

احکامی که تاکنون ثابت کرده‌ایم نشان می‌دهند که میدانهای برداری بی‌گردش از پتانسیلهای اسکالر مشتق می‌شوند و میدانهای سیملوله‌ای از پتانسیلهای برداری . طبعاً این سؤال پیش می‌آید : آیا می‌توان ، تحت شرایطی مناسب ، یک میدان برداری *دلخواه* را به صورت مجموع گرادیان یک میدان اسکالر و تاو یک میدان برداری دیگر بیان کرد ؟ این حدس درست است و *قضیهٔ بنیادی آنالیز برداری* نامیده شده است . برهان این قضیه متضمن استفاده از نظریهٔ پتانسیل است . در واقع ، فواید عملی این قضیه ، علیرغم ظاهر فریبنده‌اش ، بسیار کمتر از دو حکمی است که ما ثابت کرده‌ایم .

تمرینات

۱. در مثال (۴.۱۰) ، تحقیق کنید که $\mathbf{F}=\nabla\times\mathbf{G}$.

۲. یک پتانسیل برداری برای $\mathbf{F}=x\mathbf{j}$ بیابید.

۳. ثابت کنید : اگر $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ بی‌گردش باشند ، آن گاه $\mathbf{F}\times\mathbf{G}$ سیملوله‌ای است . آیا می‌توانید یک پتانسیل برداری برای $\mathbf{F}\times\mathbf{G}$ بیابید ؟ (*راهنمایی* : اگر در استفاده از نماد تانسور مهارت کسب کرده باشید ، حل این مسأله بسیار آسانتر می‌شود.)

۶.۴ سطوح جهت دار

در فصل دوم هندسهٔ منحنیهای فضایی را ، تا حدی با جزئیات لازم ، مورد بحث قرار دادیم . اکنون به مطالعهٔ سطوح می‌پردازیم . درست همچنان که خواص اساسی منحنیها به *بردارهای مماسی* مربوط می‌شود ، رفتار یک سطح در هر نقطه بر حسب *بردارهای قائم* مشخص می‌شود. (به خاطر بیاورید که فقط یک روش برای محاسبهٔ قائمها وجود دارد ؛ یعنی ، $\mathbf{grad}f(x,y,z)$ بر سطح $f(x,y,z)=0$ عمود است . روش دیگر از بحث زیر نتیجه خواهد شد.)

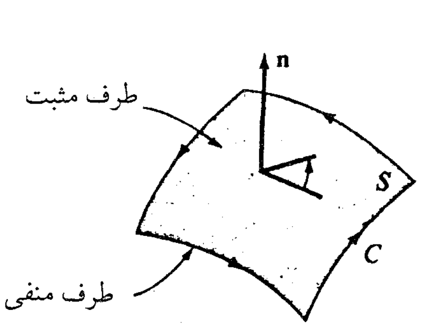
ضمن به خاطر سپردن این نکته که منحنیهای هموار مماسی با چرخش پیوسته دارند ، سطح S را *هموار* می‌نامیم در صورتی که در هر نقطهٔ S بردار یکّهٔ قائمی چون $\mathbf{n}$ بتوان یافت به طوری که $\mathbf{n}$ بر S به طور پیوسته تغییر کند. سطح S را *قطعه قطعه هموار* گوییم در صورتی که این سطح از تعدادی متناهی سطوح هموار متصل به هم تشکیل شده باشد. به این ترتیب ، سطح یک کره هموار است ، ولی سطح یک مکعب قطعه قطعه هموار است .(زیرا از شش سطح هموار متصل به هم تشکیل شده است .)

البته ، در هر نقطهٔ یک سطح هموار دو انتخاب برای قائم یکّهٔ $\mathbf{n}$ وجود دارد . بنابراین ، به دو طریق می‌توانیم میدانی از بردارهای قائم یکّه که بر S پیوسته‌اند بسازیم . به عنوان مثال ، اگر سطحی با معادلهٔ $f(x,y,z)=C$ مفروض باشد ، دو میدان مذکور عبارتند از :

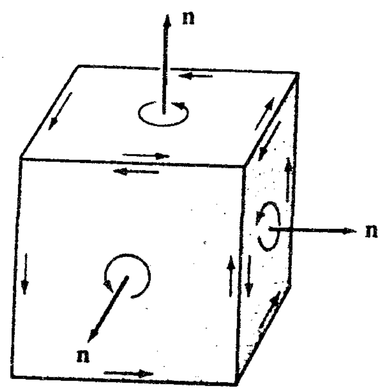
$$\frac{\mathbf{grad}f}{|\mathbf{grad}f|} \quad \text{و} \quad -\frac{\mathbf{grad}f}{|\mathbf{grad}f|}$$

[به بخش «۱.۳» مراجعه کنید.] با انتخاب یکی از این دو میدان ، سطح مفروض جهت *دار* می‌شود. به این ترتیب ، همیشه دو امکان برای جهت دار کردن یک سطح هموار وجود دارد. ما قبلاً روش جهت‌دار کردن یک سطح را در حالت خاصی که این سطح یک صفحه است مورد بحث قرار داده‌ایم . [بخش «۱.۱» را ببینید.] این وضعیت تا حدی مشابه وضعیت کلی است . وقتی که سطح هموارى با انتخاب یک میدان قائم یکهٔ خاصی چون **n** جهت دار شده باشد ، جهت مثبتی برای زوایا در هر یک از نقاط آن سطح تعیین می‌شود (شکل ۱۰.۴) . اگر مرز سطح مفروض منحنی بستهٔ منظمی چون C باشد ، به کمک قاعدهٔ زیر ، پس از جهت دار کردن سطح ، جهتی که ما آن را جهت مثبت در امتداد C می‌نامیم ، تعیین می‌شود : جهت مثبت در امتداد C جهتی است که اگر ناظری که در طرف مثبت سطح (طرفی که در آن **n** ظاهر می‌شود) قرار گرفته و در جهت مثبت حرکت کند ، سطح مفروض همواره در طرف چپ او باشد.

برای جهت دار کردن یک سطح قطعه قطعه هموار ، باید به قطعات هموار چنان جهت بدهیم که این جهتها با هم *سازگار* باشند ؛ بدین معنی که در امتداد هر یال مشترک بین دو سطح هموار جهت مثبت نسبت به یکی از دو سطح هموار *مخالف* جهت مثبت نسبت به سطح دیگر باشد.



شکل ۱۰.۴



شکل ۱۱.۴

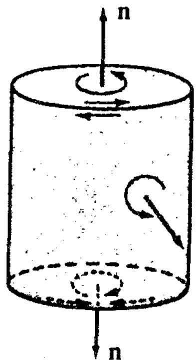
برای درک دلیل انتخاب این تعریف ، به شکلهای (۱۱.۴) و (۱۲.۴) توجه کنید. همهٔ سطوح قطعه قطعه هموار را نمی‌توان جهت دار کرد ؛ به تمرین (۱) مراجعه کنید.

سطح بسته ، سطحی است که مرز نداشته باشد . به این ترتیب ، سطوح اشکال (۱۱.۴) و (۱۲.۴) بسته‌اند ، ولی سطحی که در شکل (۱۰.۴) ملاحظه کنید دارای مرز است و بسته نیست . جهت یک سطح بسته ، که ناحیه‌ای از فضا را در بردارد، بنا بر قرارداد ، باید چنان انتخاب شود که ، چنان که در اشکال (۱۱.۴) و (۱۲.۴) مشاهده می‌کنید ، بردار قائم یکهٔ **n** همیشه در جهت از درون به بیرون ناحیه‌ای باشد که سطح مفروض آن را احاطه کرده است .

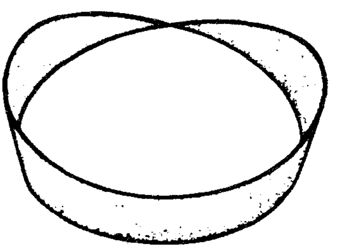
یک سطح مفروض را فقط وقتی می‌توان جهت دار کرد که دارای دو طرف باشد ؛ فرایند جهت دادن سطح اساساً از انتخاب یک طرف «مثبت» و یک طرف «منفی» تشکیل شده است . (اگر سطح مفروض بسته باشد ، در این فرایند طبعاً «برون» و «درون» سطح مطرح می‌شود.)

نوار موبیوس ، که از پیچش و اتصال لبه‌های نواری از یک کاغذ به دست می‌آید ، مثالی از یک

سطح جهت ناپذیر است (شکل ۱۳.۴) . این سطح جهت ناپذیر است ، زیرا فقط یک طرف دارد. اگر **n**



شکل ۱۲.۴



شکل ۱۳.۴

بردار قائم یکهٔ سطح در نقطه‌ای چون P باشد ، وقتی **n** یک دور نوار را طی کند ، در حالی به نقطهٔ P می‌رسد که جهتش معکوس شده است . این با فرضی که **n** باید در هر نقطه بدون ابهام تعیین شود و به طور پیوسته تغییر کند متناقض است .

خواننده می‌تواند با انتخاب دو نوار کاغذی و تهیهٔ دو نوار بسته ، یکی پیچدار و دیگری بدون پیچ ، خود را سرگرم کند. اگر این دو نوار به قدری طویل باشند که روی زمین بخوابند (پهن شوند) ، هیچ کس متوجه تفاوت آنها نخواهد شد. اگر در زمانی که کسی نوار استوانه‌ای را در امتداد خط مرکزی (خطی بین دو لبهٔ نوار) می‌بُرَد ، نوار موبیوس را در امتداد یک چنین خطی ببرید ، نوار

استوانه‌ای به دو نوار استوانه‌ای تبدیل می‌شود، ولی نوار موبیوس به دو نوار موبیوس تبدیل نخواهد شد. آیا می‌توانید نتیجه را پیشگویی کنید؟

سطوح جهت ناپذیر خواص ریاضی نسبتاً شگفت آوری دارند؛ در واقع بسیار شگفت انگیز، که ما ناچاریم آنها را از بحث خود خارج کنیم. از این به بعد، هرگاه از یک «سطح» صحبت می‌کنیم، منظور یک سطح جهت پذیر است.

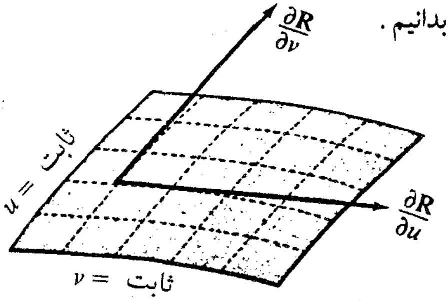
هم چنان که امکان دارد معادلهٔ یک منحنی فضایی را به صورت پارامتری، با بیان x ، y ، و z برحسب تک پارامتر t (زیرا این منحنی یک موجود یک بعدی است) بنویسیم، این امکان نیز وجود دارد که این سطوح *(دو بعدی)* را به صورت پارامتری با بیان x ، y ، و z به عنوان توابعی از دو پارامتر u و v نمایش دهیم:

$$x=x(u,v) \qquad y=y(u,v) \qquad z=z(u,v) \tag{۲۲.۴}$$

چنین صورت پارامتری را قبلاً در مورد صفحه دیده‌ایم (بخش ۱۰.۱). با استفاده از نماد برداری، معادلهٔ (۲۲.۴) را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\mathbf{R}=\mathbf{R}(u,v) \tag{۲۲'.۴}$$

وقتی پارامترهای u و v تغییر کنند، نوک بردار موضع $\mathbf{R}(u,v)$ سطح را تولید می‌کند. بالاخص، اگر مثلاً v ثابت بماند و u تغییر کند، آن گاه $\mathbf{R}(u,v)$ یک زیر مجموعهٔ یک بعدی از نقاط واقع بر سطح (یعنی یک منحنی واقع بر سطح) را رسم می‌کند، به ازای مقدار ثابت دیگری از v ، $\mathbf{R}(u,v)$ منحنی دیگری واقع بر سطح را رسم می‌کند. در واقع، ما می‌توانیم سطحی را که با معادلهٔ (۲۲.۴)، که در آن u و v مستقلاً تغییر می‌کنند، تعریف شده است ترکیبی از منحنیهای (۲۲.۴)، که در هر یک از آنها u متغیر و v ثابت است، بدانیم.



شکل ۱۴.۴

البته ، این سطح را می‌توانیم ترکیبی از منحنیهای $\mathbf{R}(u,v)$ که در آنها v متغیر و u ثابت است تصور کنیم . این دو خانواده از منحنیها شبکه‌ای از خطوط متقاطعند و مانند یک تور ماهیگیری سطح مفروض را می‌پوشانند (شکل ۱۴.۴).

توجه به سطوح از این دیدگاه بسیار مفید است زیرا به استناد آن می‌توانیم روشهای فصل دوم را در مورد این منحنیها اعمال کنیم تا خواصی از سطح مفروض را کشف کنیم ؛ مثلاً ، می‌دانیم که بردار مماس بر منحنی حاصل از تثبیت v با

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}\,\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}\,\mathbf{k} \qquad (۲۳.۴)$$

داده می‌شود ، و ، عیناً ، $\partial \mathbf{R}/\partial v$ بر منحنی حاصل از تثبیت u مماس است (شکل ۱۴.۴). در این جا، فرض می‌کنیم که مشتقات مورد نظر همواره موجودند ، $\partial \mathbf{R}/\partial u$ و $\partial \mathbf{R}/\partial v$ در هیچ نقطه صفر و موازی نیستند ، و این مشتقات همواره پیوسته‌اند. چون هر دو بردار بر منحنیهای واقع بر سطح مماسند ، این بردارها بر خود سطح نیز مماسند . بنابراین ، بردار

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \qquad (۲۴.۴)$$

بر سطح عمود است .

تکرار می‌کنیم : تاکنون دو طریق برای محاسبهٔ قائم بر یک سطح پیداکرده‌ایم . اگر سطح مفروض به صورت غیرپارامتری $f(x,y,z)=C$ مشخص شده باشد ، آن گاه $\mathbf{grad}\,f$ یک بردار قائم است ؛ اگر سطح مفروض به صورت پارامتری با معادلات (۲۲.۴) تعریف شده باشد ، آن گاه (۲۴.۴) یک بردار قائم است . در هر دو حالت یک قائم یکهٔ $\mathbf{n}$ از تقسیم بردار قائم بر طول این بردار به دست می‌آید ، و جهت حاصل با تغییر علامت $\mathbf{n}$ (یا ، در صورت وجود معادلات پارامتری ، استفاده از $(\partial \mathbf{R}/\partial u)\times(\partial \mathbf{R}/\partial u)$ به جای (۲۴.۴)) معکوس می‌شود.

مثال ۱۱.۴ معادلهٔ صفحهٔ مماس بر سطح

$$x=u^{۲} \quad , \quad y=uv \quad , \quad z=v$$

را در نقطهٔ نظیر $u=۱$ و $v=۲$ بیابید.

حل نقطهٔ نظیر $u=۱$ و $v=۲$ عبارت است از: $\mathbf{R}_0=\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$. مماسهای بر منحنیهای حاصل از تثبیت v و u عبارتند از:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} = ۲u\mathbf{i}+v\mathbf{j} = ۲\mathbf{i}+۲\mathbf{j}$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} = u\mathbf{j}+\mathbf{k} = \mathbf{j}+\mathbf{k}$$

از این رو قائم بر صفحهٔ مطلوب با حاصل ضرب برداری زیر داده می‌شود:

$$\mathbf{n} = (۲\mathbf{i}+۲\mathbf{j}) \times (\mathbf{j}+\mathbf{k}) = ۲\mathbf{i}-۲\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$$

به این ترتیب، معادلهٔ غیرپارامتری صفحهٔ مطلوب چنین است:

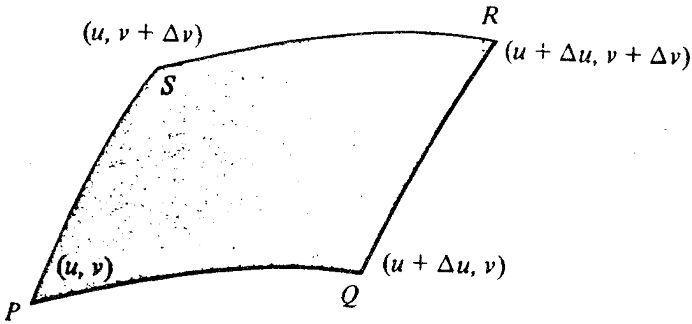
$$(\mathbf{R}-\mathbf{R}_0)\cdot\mathbf{n}=۲(x-۱)-۲(y-۲)+۲(z-۲)=۰$$

صورت پارامتری این معادله را می‌توان با استفاده از بردارهای مماس پیدا کرد:

$$\mathbf{R}(u,v)=u(۲\mathbf{i}+۲\mathbf{j})+v(\mathbf{j}+\mathbf{k})+\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$$

هر بخشی از یک سطح را که بتوان با معادلاتی از نوع (۲۲.۴) چنان نمایش داد که با ازواج مرتب متمایز (u,v) نقاط متمایز (x,y,z) از سطح مفروض متناظر قرار گیرند و این معادلات در مقررات مشتق پذیری و پیوستگی مذکور در بالا صدق کنند، یک *عنصر سطح منظم* می‌نامند.

یادآوری می‌کنیم که طول یک کمان هموار حد طول مسیرهای چند بری محاط در کمان مذکور تعریف شد (بخش ۲.۲). مساحت یک عنصر سطح منظم، مفهوم ثقیلی است. بنابراین، در حال حاضر به یک مبحث مبتنی بر اکتشاف شهودی، که منجر به یک فرمول درست خواهد شد، اکتفا خواهیم کرد. شکل (۱۵.۴) قطعهٔ کوچکی از سطح را، که به منحنیهای حاصل از تثبیت u و v محدود شده است، نشان می‌دهد. توجه کنید که به ازای مقادیر کوچک Δu و Δv، این قطعه به خوبی با متوازی الاضلاع به اضلاع PQ و PS، که، به ترتیب، با بردارهای $\mathbf{R}(u+\Delta u,v)-\mathbf{R}(u,v)$ و $\mathbf{R}(u,v+\Delta v)-\mathbf{R}(u,v)$ نمایش داده می‌شوند، تقریب زده می‌شود. مساحت این متوازی اضلاع از یک ضرب خارجی حاصل می‌شود؛ به طوری که اگر تقریبهای زیر را معرفی کنیم.



شکل ۱۵.۴

$$\mathbf{R}(u+\Delta u,v)-\mathbf{R}(u,v) \approx \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\Delta u$$

$$\mathbf{R}(u+v,\Delta v)-\mathbf{R}(u,v) \approx \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\Delta v$$

در می‌یابیم که مساحت قطعهٔ مذکور تقریباً برابر است با :

$$\Delta S = \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \right| \Delta u \Delta v$$

از جمع این قطعات که همهٔ سطح را فراگیرند و Δu و Δv به صفر میل کنند ، ثابت می‌شود که *مساحت عنصر سطح منظم از دستور زیر به دست می‌آید :*

$$S = \iint \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \right| du dv \qquad (۲۵.۴)$$

اگر نماد

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\, du \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\, dv \tag{۲۶.۴}$$

را معرفی کنیم ، می‌بنیم که $d\mathbf{S}$ یک بردار قائم بر سطح در نقطهٔ P است که اندازهٔ این بردار ، $dS = |d\mathbf{S}|$ ، عنصر مساحت است . انتگرال (۲۵.۴) را به صورتهای دیگر

$$\iint |d\mathbf{S}|$$

یا

$$\iint dS$$

یا حتی

$$\iint \mathbf{n}\cdot ds$$

نیز می‌توان نوشت که در آن $\mathbf{n}$ یک قائم یکّه در جهت $d\mathbf{S}$ است .

***مثال* ۱۲.۴** مساحت سطحی راکه با معادلات

$$x=\cos u \qquad y=\sin u \qquad z=v$$

به ازای $0 \le u \le \pi$ ، $0 \le v \le 1$ تعریف شده است ، بیابید.

حل داریم :

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} = -\sin u\,\mathbf{i} + \cos u\,\mathbf{j}$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} = \mathbf{k}$$

$$d\mathbf{S} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -\sin u & \cos u & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} dudv = (\cos u\,\mathbf{i} + \sin u\,\mathbf{j})dudv$$

$$\iint |d\mathbf{S}| = \int_0^1 \int_0^{2\pi} (\cos^2 u + \sin^2 u)^{\frac{1}{2}} dudv = 2\pi$$

این سطح ، یک استوانهٔ مستدیر قائم به شعاع واحد و ارتفاع واحد است . اگر این سطح در امتداد هادی بریده شود ، به مستطیلی با ابعاد 2π و ۱ تبدیل می‌شود.

اکنون *حالت خاصی* از معادلهٔ (۲۵.۴) را ، که اهمیّت هندسی آن بعداً روشن خواهد شد ، در نظر می‌گیریم . فرض کنید معادلهٔ مفروض به صورت $z=f(x,y)$ باشد . به عبارت دیگر ، این معادله ارتفاع هر نقطهٔ متناظر (x,y) از سطح را تا صفحهٔ xy نشان می‌دهد. در این صورت ، مناسب است که به جای u و v از x و y به عنوان پارامتر استفاده کنیم . فرض کنید ، چنان که در شکل (۱۶.۴) نشان داده شده است ، تصویر عنصر سطح بر صفحهٔ xy محدود به منحنیهای

$$y=y_1(x) \qquad y=y_2(x) \qquad z=a \qquad x=b$$

باشد .برای این که از فرمولهای پیشین استفاده کنیم، میتوانیم بنویسیم : $x=u$ ، $y=v$، $z=f(x,y)$.

داریم :

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}=\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial x}=\mathbf{i}+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)\mathbf{k}$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}=\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial y}=\mathbf{j}+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

حاصل ضرب برداری آنها عبارت است از :

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}=\begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 0 & \frac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \frac{\partial f}{\partial y}\end{vmatrix}=\mathbf{k}-\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i}-\frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j}$$

اندازهٔ این بردار برابر است با $\sqrt{1+(\partial f/\partial x)^2+(\partial f/\partial y)^2}$ و ، بنابراین ، انتگرال (۲۵.۴) عبارت است از :

$$\int_a^b\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dydx \qquad (۲۷.۴)$$

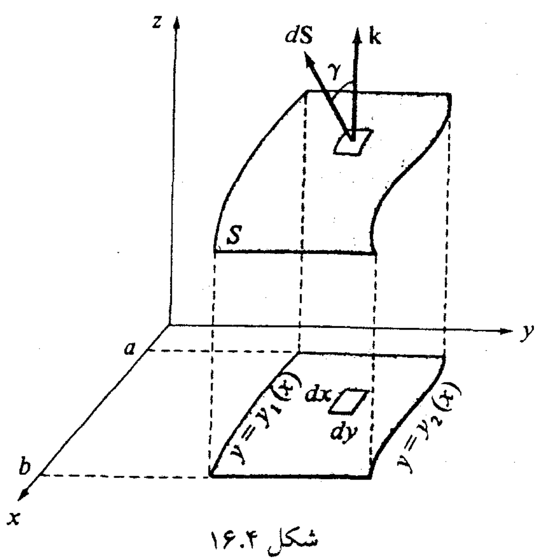
اهمیّت هندسی این انتگرال وقتی معلوم می‌شود که زاویهٔ γ بین $\mathbf{dS}$ و $\mathbf{k}$ را در نظر بگیریم. با یک محاسبهٔ ساده، که با استفاده از ضرب اسکالر صورت می‌گیرد، ملاحظه می‌کنیم که

$$|\cos\gamma| = \frac{|\mathbf{dS}\cdot\mathbf{k}|}{|\mathbf{dS}|} = \left[1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2\right]^{-\frac{1}{2}}$$

که به موجب آن انتگرال (۲۷.۴) به صورت سادهٔ زیر در می‌آید:

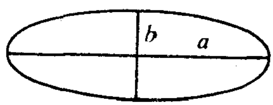
$$\int_a^b\int_{y_1(x)}^{y_2(x)}\frac{dxdy}{|\cos\gamma|} \tag{۲۸.۴}$$

می‌توانیم این انتگرال را با روش اکتشاف شهودی از *اصل کسینوس مساحت* نتیجه بگیریم. این اصل می‌گوید که اگر قائم بر سطح مسطحی به مساحت A با خط دید زاویهٔ حادهٔ θ بسازد، مساحت سطحی که به نظر بیننده می‌رسد $A\cos\theta$ است. دلیلش این است که فواصل موجود در یک جهت با ضریب $\cos\theta$ کوتاه می‌شوند و فواصل موجود در جهت عمود بر آن بدون تغییر باقی می‌مانند.

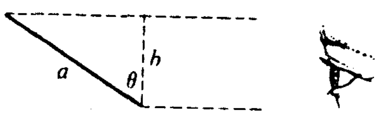


شکل ۱۶.۴

اکنون کمی از بحث منحرف می‌شویم و با استفاده از این قانون ، مساحت بیضی شکل (۱۷.۴) را تعیین می‌کنیم . ادعا می‌کنیم که این بیضی در واقع یک دایره به شعاع a است که با افق دید یک زاویه می‌سازد. به عبارت دیگر ، چنین می‌پنداریم که ، این بیضی ، دایره‌ای به شعاع a (و مساحت πa^2) است که چنان کج شده است که فواصل قائم با ضریب b/a کوتاه شده‌اند. مساحتی که مشاهده می‌کنیم برابر $A\cos\theta = (\pi a^2)(b/a) = \pi ab$ خواهد بود. به این ترتیب ، به روشی که بسیار ساده‌تر از اعمال حساب انتگرال است ، متوجه می‌شویم که مساحت این بیضی πab است .



شکل ۱۷.۴



شکل ۱۸.۴

با مراجعه به شکل (۱۶.۴) ، می‌توانیم عنصری از S را چنان در نظر بگیریم که مساحت تصویر آن بر صفحهٔ xy برابر $dxdy$ باشد . زاویهٔ بین قائم بر این عنصر و «خط دید» (فرض کنید ناظر زیر صفحهٔ xy است و از آن جا در امتداد یک خط قائم به سطح مفروض می‌نگرد) برابر γ است . به استناد اصل کسینوس مساحت ، مساحتی که مشاهده می‌کنیم $dS\,|\cos\gamma|$ است . نتیجه می‌شود که :

$$dS = \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}$$

وقتی که γ حاده باشد درج علامت قدر مطلق ضرورت ندارد.

غالباً یک استفادهٔ صحیح از اصل کسینوس مساحت ما را از اعمال (۲۵.۴) بی‌نیاز می‌کند. کسینوس زاویهٔ مناسب، در این حالت γ، به آسانی محاسبه می‌شود، زیرا می‌توانیم به کمک روشهایی که تاکنون آموخته‌ایم قائمی بر سطح مفروض بیابیم و سپس برای تعیین کسینوس مطلوب از ضرب اسکالر استفاده کنیم؛ به عنوان مثال، سطح $z=f(x,y)$ را می‌توان به صورت $z-f(x,y)=0$ نمایش داد که در این صورت گرادیان تابع $z-f(x,y)$ عبارت خواهد بود از: $\mathbf{k}-(\partial f/\partial x)\mathbf{i}-(\partial f/\partial y)\mathbf{j}$. این آسانتر از محاسبهٔ حاصل ضرب خارجی بالاست. [توجه کنید: استفاده از گرادیان در تعیین یک بردار قائم $\mathbf{N}$ منجر به تعیین برداری می‌شود که برابر $d\mathbf{S}$ نیست، بلکه مضرب اسکالری از آن است. با این وجود، عدم توجه به این نکته مشکلی ایجاد نمی‌کند، زیرا ما در استفاده از (۲۸.۴) فقط به محاسبهٔ $\cos\gamma=\mathbf{N}\cdot\mathbf{k}/|\mathbf{N}|$ علاقه‌مندیم.]

مثال ۱۳.۴ مساحت سطح زیر را بیابید.

$$x^2+y^2+z^2=1 \quad , \qquad x\geq 0$$

حل خواننده حتماً تشخیص می‌دهد که این سطح نیمی از یک کرهٔ به شعاع واحد است. اجازه دهید سطح مفروض را بر صفحهٔ xy تصویر کنیم و با این فرض که خط دید در امتداد بردار $\mathbf{i}$ است از اصل کسینوس مساحت استفاده کنیم. قائم بر این سطح عبارت است از:

$$\nabla(x^2+y^2+z^2)=2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k}$$

اگر α زاویه‌ای باشد که این قائم با $\mathbf{i}$ می‌سازد، آن گاه

$$\cos\alpha=\frac{(2x\mathbf{i}+2y\mathbf{j}+2z\mathbf{k})\cdot\mathbf{i}}{(4x^2+4y^2+4z^2)^{\frac{1}{2}}}=\frac{2x}{2}=x$$

تصویر این نیم کره بر صفحهٔ xy دایرهٔ واحد است؛ از این رو، مساحت مطلوب عبارت است از:

$$S=\iint\frac{dy\,dz}{\cos\alpha}=\int_{-1}^{1}\int_{-(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}^{+(1-z^2)^{\frac{1}{2}}}x^{-1}\,dy\,dz$$

چون $x=(1-y^2-z^2)^{\frac{1}{2}}$، خواهیم داشت :

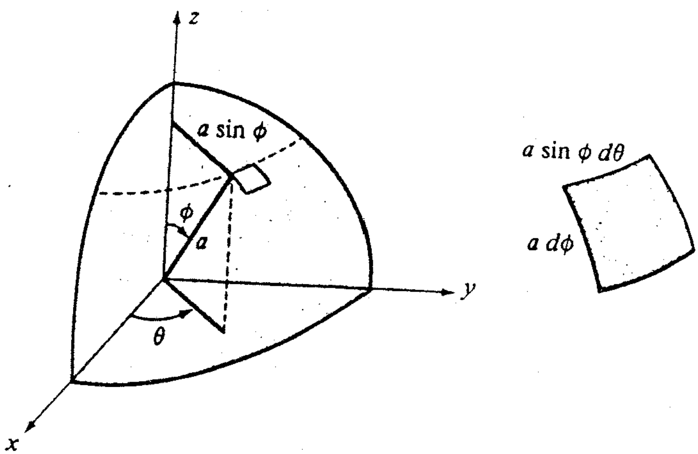
$$S=2\pi$$

نتیجه‌ای که کاملاً در انتظارش بودیم ؛ یعنی ، مساحت یک نیم‌کرهٔ واحد برابر است با $4\pi/2=2\pi$.

در عمل ، گاهی می‌توان فرمول (۲۶.۴) را متصور ساخت ؛ به عنوان مثال ، فرض کنید ، چنان که در شکل (۱۹.۴) می‌بینید ، کره‌ای به شعاع a با طول و عرض جغرافیائی θ و ϕ پارامتری شده باشد . داریم :

$$x=a\sin\phi\cos\theta \qquad y=\sin\phi\sin\theta \qquad z=a\cos\phi$$

$$0\leq\phi\leq\pi \qquad -\pi\leq\theta\leq\pi$$



شکل ۱۹.۴

با اعمال دو پارامتر ϕ و θ به جای u و v ، خواهیم داشت :

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi} = a\cos\phi\cos\theta\mathbf{i} + a\cos\phi\sin\theta\,\mathbf{j} - a\sin\phi\,\mathbf{k} \qquad (۲۹.۴)$$

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta} = -a\sin\phi\ \sin\theta\mathbf{i} + a\sin\phi\ \cos\theta\ \mathbf{j} \qquad (۳۰.۴)$$

که حاصل ضرب خارجی آنها خواهد شد :

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial \theta} = a^2\sin^2\phi\ \cos\theta\mathbf{i} + a^2\sin^2\phi\ \sin\theta\mathbf{j} + a^2\sin\theta\ \cos\theta\ \mathbf{k} \qquad (۳۱.۴)$$

بزرگی این بردار عبارت است از : $a^2\sin\phi$ ؛ از این رو نتیجه می‌شود که

$$dS = a^2\sin\phi d\phi d\theta \qquad (۳۲.۴)$$

این نتیجه را در شکل (۱۹.۴) می‌توان مجسم کرد. اگر θ را ثابت بگیریم و ϕ به اندازهٔ $d\phi$ تغییر کند، کمانی به طول $ad\phi$ رسم می‌شود. اگر ϕ را ثابت بگیریم و θ تغییر کند، کمانی از دایره‌ای به شعاع $a\sin\phi$ را خواهیم داشت که طول این کمان $a\sin\phi d\theta$ است . به این ترتیب ، برای مقادیر کوچک $d\phi$ و $d\theta$ ، تقریباً مستطیلی به مساحت $a^2\sin\phi d\phi d\theta$ به دست می‌آید.

تمرینات

۱. نشان دهید که نوار موبیوس قطعه قطعه هموار است ، و نشان دهید که چرا قسمتهای هموار را نمی‌توان به طور سازگار با هم جهت دار کرد ؟

۲. نموداری شبیه نمودارهای اشکال (۱۱.۴) و (۱۲.۴) برای سطح یک چهار وجهی بکشید.

۳. مثلثی به رئوس (۱,۰,۰) ، (۰,۱,۰) ، و (۰,۰,۱) را در نظر بگیرید.

(الف) یک بردار یکهٔ قائم بر این مثلث چون $\mathbf{n}$ بیابید که در جهت دور شدن از مبدأ باشد.

(ب) $\cos\gamma$ را برای این بردار بیابید.

(ج) اگر انتگرال

$$\iint \frac{dxdy}{|\cos\gamma|}$$

مساحت این مثلث باشد ، حدود مناسبی برای این انتگرال عرضه کنید.

(د) انتگرال بالا را محاسبه کنید.

(هـ) مساحت مثلث مفروض را با اعمال اصل کسینوس مساحت در مورد تصویر این مثلث بر صفحهٔ yz بیابید.

۴. (الف) معادلهٔ (۳۱.۴) را از (۲۹.۴) و (۳۰.۴) نتیجه بگیرید.

(ب) نشان دهید که اندازهٔ این بردار برابر است با $a^2\sin\phi$.

۵. عنصر مساحت سطح ، dS ، را برای استوانهٔ مستدیر قائم زیر تعیین کنید.

$$x=a\cos u \qquad y=a\sin u \qquad z=v$$

نتیجه را تعبیر هندسی کنید. [شکل (۱.۵) را ، که در آن (u,v) به عنوان (θ,z) تعبیر می‌شود ، ببینید.]

۶. عنصر مساحت سطح ، dS ، را برای سطح $z=x^2+y^2$ بیابید.

۷. مساحت بخشی از سطح

$$x=u^2 \qquad y=uv \qquad z=\tfrac{1}{2}v^2$$

را که به منحنیهای $u=0$ ، $u=1$ ، $v=0$ ، و $v=3$ محدود است ، بیابید.

۸. اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$dS=(EG-F^2)^{\frac{1}{2}}dudv$$

که در آن

$$E=\left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\right|^2 \qquad F=\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\cdot\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \qquad G=\left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\right|^2$$

(کمیّتهای E ، F ، و G در هندسهٔ دیفرانسیل در نظریهٔ سطوح به کار می‌روند.اینها «دومین صورت اساسی» را تشکیل می‌دهند.)

۷.۴ انتگرال سطح

فرض کنید S یک سطح هموار و $f(x,y,z)$ تابعی باشد که بر S تعریف شده و بر آن پیوسته باشد. انتگرال سطح f بر S ، که آن را به

$$\int\int f dS$$

نمایش می‌دهیم ، با ساختاری که خواننده می‌تواند بدون هیچ مشکل و زحمتی آن را پیش‌بینی کند ، تعریف می‌شود. فرض می‌کنیم سطح مفروض به n قطعه با مساحتهای δS_1، δS_2،...، δS_n بریده شده باشد. در هر قطعه نقطه‌ای چون (x_i,y_i,z_i) انتخاب و $f(x_i,y_i,z_i)$ را محاسبه می‌کنیم و آن گاه $f(x_i,y_i,z_i)\delta S_i$ را تشکیل می‌دهیم و این اعداد را جمع می‌کنیم :

$$\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\delta S_i \qquad (۳۳.۴)$$

به این طریق یک عدد به دست می‌آوریم . اکنون فرض کنید n به بی‌نهایت میل کند ، و در عین حال قطعات سطح چنان کوچک شوند که ماکسیمم δS_1 ، δS_2 ،...، δS_n به صفر میل کند. به عبارت دیگر ، مرتباً سطح مفروض را به قطعات کوچکتری تقسیم می‌کنیم و هر بار مجموع نظیر (۳۳.۴) را تشکیل می‌دهیم . اگر این حاصل جمعها ، مستقل از نحوهٔ تقسیم سطح به قطعات کوچک ، به حدی میل کند ، این حد *انتگرال سطح* f بر S نامیده می‌شود :

$$\int\int_S f(x,y,z)dS = \lim_{\substack{\max \delta S_i \to 0 \\ n\to\infty}} \sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\delta S_i \qquad (۳۴.۴)$$

در اغلب موارد ، تابع f از یک ضرب اسکالر حاوی یک میدان برداری $\mathbf{F}$ ناشی می‌شود. ما *شار* $\mathbf{F}$ گذران از سطح S را انتگرال سطح

$$\int\int_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n} dS \qquad (۳۵.۴)$$

تعریف می‌کنیم ، که در آن در هر نقطه از سطح جهت دار S بردار $\mathbf{n}$ قائم یکّه بر S است .(به این ترتیب ، در این موقعیت $f=\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$.) معنی فیزیکی انتگرال شار مختصراً مورد بحث قرار خواهد گرفت ، امّا اول باید ببینیم که چگونه آن را محاسبه می‌کنند.

با استفاده از نماد بخش قبلی ، شار مذکور را می‌توان به صورت

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS \qquad (۴.۳۵')$$

نوشت . وقتی سطح مفروض با $\mathbf{R}(u,v)$ پارامتری شده باشد ، ما می‌توانیم با به کارگیری معادلهٔ (۴.۲۶) انتگرال بالا را به صورتی عملی و قابل استفاده تبدیل کنیم :

$$\iint \mathbf{F}\cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\, dudv \qquad (۴.۳۵'')$$

اگر سطح مفروض با بیان z به عنوان تابعی از x و y مشخص شده باشد ، صورت

$$\iint \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\frac{dxdy}{|\cos\gamma|} \qquad (۴.۳۵''')$$

را به کار می‌بریم که در آن حدود انتگرالگیری از تصویر S بر صفحهٔ xy تعیین می‌شوند [با یک پیرایش بدیهی در مورد سطوحی که مثلاً به صورت $x=x(y,z)$ توصیف شده‌اند] .

اگر سطح S قطعه قطعه هموار باشد ، بر هر یک از قطعات هموار انتگرالگیری کرده و اعداد حاصل را با هم جمع می‌کنیم.

مثال ۱۴.۴ شار میدان برداری $\mathbf{F}=\mathbf{i}+xy\mathbf{j}$ گذران از سطح

$$x=u+v \qquad y=u-v \qquad z=u^2$$

$$0\le u\le 1 \qquad 0\le v\le 1$$

را بیابید.

حل با اعمال (۴.۳۵'')

$$\iint \mathbf{F}\cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\, dudv = \int_0^1\int_0^1 \begin{vmatrix} 1 & u^2-v^2 & 0 \\ 1 & 1 & 2u \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} dudv$$

$$=\int_{0}^{1}\int_{0}^{1}(2u^{3}-2uv^{2}+2u)\ dudv$$

$$=\int_{0}^{1}\left(\frac{1}{2}-v^{2}+1\right)dv=\frac{7}{6}$$

مثال ۱۵.۴ انتگرال

$$\iint_{S}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

را، که در آن S سطح کرهٔ $x^{2}+y^{2}+z^{2}=4$ و $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ است، محاسبه کنید.

حل یادآوری می‌کنیم که در نقطه‌ای چون (x,y,z) بردار $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ مستقیماً در جهت دور شدن از مبدأ کشیده می‌شود. قائم خارجی این کره نیز در جهت دور شدن از مبدأ است، زیرا مرکز کره در مبدأ است. از این رو برای نقاط روی سطح

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=|\mathbf{F}|\,|\mathbf{n}|\cos\theta=|\mathbf{F}|=(x^{2}+y^{2}+z^{2})^{\frac{1}{2}}=2$$

و

$$\iint_{S}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint_{S}\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS=\iint_{S}2\,dS=2(4\pi r^{2})=32\pi$$

زیرا شعاع کره $r=2$ است.

توجه کنید که، در مثال بالا، انتگرالگیری ضرورت نداشت، زیرا $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ در سرتاسر سطح ثابت بود.

مثال ۱۶.۴ انتگرال

$$\iint_{S}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

را، که در آن S سطح مکعب محدود به صفحات $x=0$، $x=1$، $y=0$، $y=1$، $z=0$، $z=1$ است و $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$، محاسبه کنید.

حل از شکل (۲۰.۴) دیده می‌شود که قائم یکهٔ وجه جلوی مکعب عبارت است از : $\mathbf{n}=\mathbf{i}$، لذا، بر این وجه

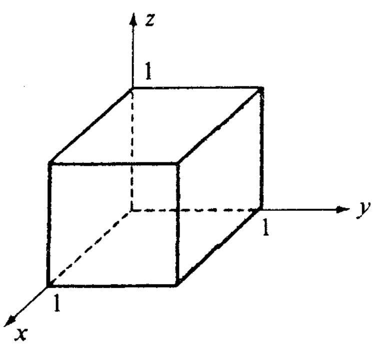
$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=\mathbf{i}\cdot(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})=x=1$$

نتیجه می‌شود که انتگرال بر این وجه عبارت است از:

$$\iint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=\iint \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS=\iint dS=1$$

زیرا مساحت این وجه برابر ۱ است. در وجه مقابل (در صفحهٔ yz)، $\mathbf{n}=-\mathbf{i}$ ؛ بنابراین، $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=-x$. امّا در همهٔ نقاط این وجه $x=0$ و، از این رو،

$$\iint \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS=0$$



شکل ۲۰.۴

بر وجه بالایی مکعب داریم :

$$\iint \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS=\iint \mathbf{F}\cdot\mathbf{k}dS=\iint z dS=\iint dS=1$$

و بر وجه پایینی داریم :

$$\iint \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS=\iint(-z)dS=0$$

زیرا z در صفحهٔ xy صفر است. بر وجه سمت راست داریم : $\mathbf{n}=\mathbf{j}$. بنابراین ، مؤلفهٔ قائم $\mathbf{F}$ عبارت از واحد است و انتگرال بر این وجه برابر واحد است . بر وجه سمت چپ ، $\mathbf{n}=-\mathbf{j}$ و $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=-y=0$. بنابراین ، سهمش در انتگرال نیز صفر است . از جمع انتگرالهای بالا در می‌یابیم که

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS=3$$

مثال ۱۷.۴ انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+xy\mathbf{j}+zx\mathbf{k}$ را بر مثلثی به رئوس $(1,0,0)$ ، $(0,2,0)$ ، و $(0,0,3)$ محاسبه کنید. جهت مثلث را چنان بگیرید که طرف مثبت مثلث در جهت دور شدن از مبدأ باشد (شکل ۲۱.۴).

حل با به‌کارگیری روشهای فصل اوّل به آسانی در می‌یابیم که $\mathbf{n}=\frac{6}{7}\mathbf{i}+\frac{3}{7}\mathbf{j}+\frac{2}{7}\mathbf{k}$. از این رو، $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=\frac{6}{7}x^2+\frac{3}{7}xy+\frac{2}{7}zx$ و

$$\cos\gamma=\mathbf{n}\cdot\mathbf{k}=\frac{2}{7}$$

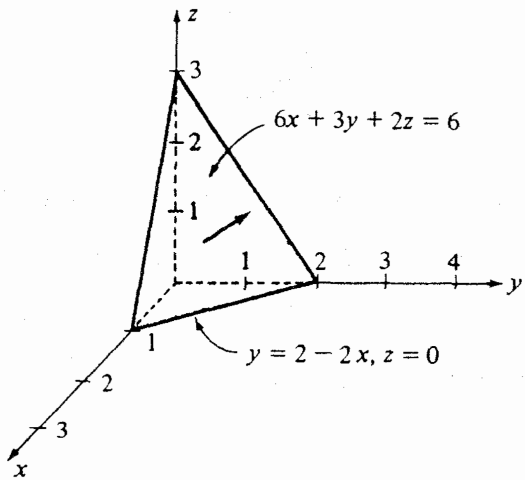
با استفاده از (۴. "'۳۵) داریم :

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS=\int_0^1\int_0^{2-2x}\frac{7}{2}\left(\frac{6}{7}x+\frac{3}{7}xy+\frac{2}{7}zx\right)dydx$$

$$=\int_0^1\int_0^{2-2x}\left(3x^2+\frac{3}{2}xy+zx\right)dydx$$

بر S داریم $z=3-3x-\frac{3}{2}y$. بنابراین ، $zx=3x-3x^2-\frac{3}{2}yx$ ، و انتگرال به صورت زیر در می‌آید :

$$\int_0^1\int_0^{2-2x} 3x\,dy\,dx=\int_0^1 3x(2-2x)\,dx=3x^2-2x^3\Big|_0^1=1$$



شکل ۲۱.۴

مثال ۱۸.۴ انتگرال

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

رابر چهار وجهی به رئوس (۱،۰،۰)،(۰،۲،۰)، (۰،۰،۳)، (۰،۰،۰)، که درآن $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+xy\mathbf{j}+zx\mathbf{k}$ ، محاسبه کنید (شکل ۲۱.۴)

حل قبلاً انتگرال را بر یک وجه محاسبه کرده‌ایم . بر وجه پایین داریم : $\mathbf{n}=-\mathbf{k}$ و ، از این رو ، $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=-zx$. امّا چون $z=0$ ، انتگرال بر وجه پایینی صفر می‌شود. بر وجه سمت چپ داریم : $\mathbf{n}=-\mathbf{j}$ و $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=-yx$ ، که این نیز صفر است ؛ زیرا بر این وجه $y=0$. بر وجه عقبی ، در صفحهٔ yz ، $\mathbf{n}=-\mathbf{i}$ و

$\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}=x^2=0$. نتیجه می‌شود که

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}=1$$

توجه کنید که در مثالهای (۱۵.۴) ، (۱۶.۴) و (۱۸.۴) بردار $\mathbf{n}$ را قائم برونسو گرفتیم که با قرارداد معمول در مورد سطوح بسته مطابقت دارد.

اکنون چند مثال فیزیکی از انتگرال سطح را بررسی می‌کنیم . به عنوان مثال ، فرض کنید که در نقطه‌ای چون (x,y,z) بر سطح S ، $f(x,y,z)$ میزان شـــارش گرما را در واحد سطح در آن نقطه ، مثلاً برحسب کالری در ثانیه در واحد سطح (سانتیمتر مربع) ، نشان بدهد ، آن گاه $f(x_i,y_i,z_i)\delta S_i$ ، تقریباً، میزان کالری است که از عنصر مساحت δS_i در ثانیه عبور می‌کند و حاصل جمع (۳۳.۴) تقریباً میزان کل کالری است که از همهٔ سطح S در ثانیه عبور می‌کند . اگر $f(x,y,z)$ بر سطح مفروض نقطه به نقطه در تغییر باشد ، این تقریب را می توان با انتخاب عناصر کوچکتری از مساحت (که در این صورت تعداد عناصر افزایش می‌یابد) دقیقتر نمود. حد

$$\iint_S f(x,y,z)\ dS$$

میزان کل کالری است که از سطح مفروض در ثانیه عبور می‌کند.

اکنون در ورای این پدیده ، نظر عمیقتری به فیزیک می‌اندازیم . اگر یک توزیع گرمای حالت پایا را مفروض بگیریم که در آن $T(x,y,z)$ درجهٔ حرارت هر نقطهٔ فضا باشد ، و اگر ناحیهٔ مورد نظر پر از یک مادهٔ همگن با ضریب رسانندگی گرمایی k باشد ، بردار

$$\mathbf{Q}=-k\nabla T \qquad (۳۶.۴)$$

جهتی راکه گرما در هر نقطهٔ فضا منتشر می‌شود نشان می‌دهد. اندازهٔ $\mathbf{Q}$ میزان گرمایی است که واحد سطح در جهت عمود بر $\mathbf{Q}$ شارش می‌کند. به طور کلی می‌توانیم بگوییم که مؤلفهٔ اسکـالر $\mathbf{Q}$ در جهت بردار یکّه‌ای چون $\mathbf{n}$ (برابر با $\mathbf{Q}\cdot\mathbf{n}$) آن میزان کالری را نشان می‌دهد که در واحد زمان از واحد سطح عمود بر $\mathbf{n}$ عبور می‌کند.

نتیجه می‌شود که تابع f عبارت است از : $(-k\nabla T)\cdot\mathbf{n}$ ، و کل گرمایی که در هر ثانیه از سطح S عبور می‌کند برابر است با :

$$\iint_S (-k\nabla T)\cdot\mathbf{n}dS \tag{۳۷.۴}$$

دلیل انتخاب علامت منفی در (۳۶.۴) و (۳۷.۴) این است که گرادیان درجهٔ حرارت ، ∇T ، به جهت بیشترین میزان افزایش درجهٔ حرارت اشاره دارد ، در حالی که گرما در خلاف جهت منتشر می‌شود (از گرم به سرد).

اکنون مورد دیگری از فیزیک را که در آن انتگرال سطح ظاهر می‌شود بررسی می‌کنیم . اگر $\mathbf{F}$ میدان سرعت یک شاره و ρ چگالی آن باشد ، آن گاه ، چنان که در بخش (۳.۳) دیدیم ، مقدار شاره‌ای که از قطعه‌ای از سطح با مساحت δS و قائم یکهٔ $\mathbf{n}$ در واحد زمان می‌گذرد تقریباً برابر $\rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\delta S$ است . وقتی δS به صفر میل کند ، این عدد به مقدار واقعی خود نزدیک می‌شود. به این ترتیب ، ملاحظه می‌کنیم که

$$\iint_S \rho\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS \tag{۳۸.۴}$$

جرم میزان شاره‌ای است که در واحد زمان از سطح S می‌گذرد.

باز به عنوان مثالی دیگر ، یک میدان الکتروستاتیکی $\mathbf{E}$ را که در ناحیه‌ای از فضا تعریف شده است در نظر بگیرید. ما انتگرال

$$\iint \mathbf{n}\cdot\mathbf{E}dS$$

را ، که انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم $\mathbf{E}$ بر سطح S است ، تشکیل می‌دهیم . این انتگرال در رابطه با قانون گاوس در الکتروستاتیک ظاهر می‌شود. این قانون بیان می‌کند که اگر S یک سطح بسته باشد آن‌گاه

$$\iint_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{E}dS = \frac{q}{\varepsilon_0} \tag{۳۹.۴}$$

که در آن q کل باری است که سطح S را در بر می‌گیرد و ε_0 ثابتی است که به واحدهای دستگاه

بستگی دارد. مقدار عددی انتگرال سطح در معادلهٔ (۳۹.۴) را *شارگذران* از سطح S یا تعداد خطوط شارش میدان برداری $\mathbf{E}$ از سطح S می‌نامند. عبارت اخیر را نباید جدی بگیریم، زیرا معمولاً در هر نقطه از S یک خط شارش وجود دارد، بنابراین، در واقع بی‌نهایت خط شارش وجود دارد که از S می‌گذرند. با این وجود، در رسم نمودارها مسلماً این امکان وجود ندارد که بی‌نهایت خط شارش رسم کنیم و، بنابراین، مناسب به نظر می‌رسد که برای تجسم (۳۹.۴) فقط تعدادی از خطوط شارش راکه از سطح می‌گذرند رسم کنیم. [این تعداد الزاماً تقریبی است، زیرا امکان دارد مقدار (۳۹.۴) یک عدد صحیح نباشد.]

مثال ۱۹.۴ با استفاده از قانون گاوس (۳۹.۴) اندازهٔ شدت میدان الکتریکی را در نقطه‌ای که r واحد از یک نقطهٔ بار به اندازهٔ q فاصله دارد، بیابید.

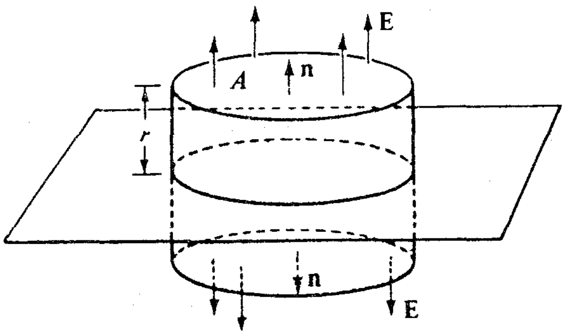
حل فرض کنید S کره‌ای به شعاع r باشد که بار q در مرکز آن است. به دلیل وجود نقاط متقارن بر روی کره متقاعد می‌شویم که $\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}$ بر سطح این کره ثابت و $\mathbf{E}$ بر سطح کره عمود است. از این رو، می‌توانیم $\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}$ را از انتگرال خارج کنیم و لذا خواهیم داشت:

$$\iint \mathbf{n}\cdot\mathbf{E}\ dS=\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}\iint dS=4\pi r^2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})$$

از (۳۹.۴) نتیجه می‌شود که $\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}=q/4\pi\varepsilon_0 r^2$. از این رو، اگر بار مثبت باشد، $|\mathbf{E}|=q/4\pi\varepsilon_0 r^2$ و $\mathbf{E}$ در جهت دور شدن از q است. اگر q منفی باشد، جهت $\mathbf{E}$ به طرف بار q خواهد بود.

مثال ۲۰.۴ با استفاده از قانون گاوس (۳۹.۴) اندازهٔ شدت میدان الکتریکی را در نقطه‌ای به فاصلهٔ r واحد از یک صفحهٔ نامتناهی که حامل باری با چگالی σ (بار در واحد سطح) است، بیابید.

حل فرض کنید S سطح یک استوانهٔ مستدیر قائم به ارتفاع 2r و قاعدهٔ A باشد که با صفحهٔ باردار نصف شده است. قاعده‌های استوانه را موازی این صفحه می‌گیریم که در این صورت به دلیل وجود تقارن در دو طرف صفحه متوجه می‌شویم که $\mathbf{E}$ بر قاعده‌ها عمود است (شکل ۲۲.۴)



شکل ۲۲.۴

بار موجود در S برابر است با $q=\sigma A$. به دلیل وجود تقارن در دو طرف صفحه (زیرا که این صفحه را نامتناهی فرض کرده‌ایم) $\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}$ بر هر یک از دو قاعده ثابت است ، و چون $\mathbf{E}$ با بدنهٔ خمیدهٔ استوانه موازی است ، $\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}$ هیچ سهمی در انتگرال بر این بدنه ندارد ؛ بنابراین ،

$$\int\!\!\int_S \mathbf{n}\cdot\mathbf{E}\; dS=\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}\int\!\!\int_S dS=(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})(۲A)$$

به استناد (۳۹.۴) داریم : $(\mathbf{n}\cdot\mathbf{E})(۲A)=\sigma A/\varepsilon_0$ و لذا $\mathbf{n}\cdot\mathbf{E}=\sigma/۲\varepsilon_0$. اگر σ مثبت باشد ، این نتیجه نشان می‌دهد که $\mathbf{n}$ و $\mathbf{E}$ در یک جهت می‌باشند و $|\mathbf{E}|=\sigma/۲\varepsilon_0$ مستقل از r است .

مثال ۲۱.۴ یک عایق گرمای استوانه‌ای را در نظر بگیرید که یک لولهٔ بخار را احاطه کرده است . فرض کنید شعاعهای سطوح داخلی و خارجی عایق ، به ترتیب مذکور ، $r=a$ و $r=b$ باشند ؛ و T_a و T_b ، به ترتیب مذکور ، دمای سطوح داخلی و خارجی عایق باشند ؛ دمای هر نقطهٔ داخلی عایق را به صورت تابعی از r بیابید (شکل ۲۳.۴).

حل قطعه‌ای به طول L از عایق در شکل نشان داده شده است . به دلیل وجود تقارن ، فرض می‌کنیم که T تابعی فقط از r باشد . در این صورت $\nabla T=\mathbf{grad}T$ ، به اندازهٔ dT/dr، در امتداد شعاع لوله و جهت آن به طرف مرکز لوله است . (با این فرض که لوله داغتر از محیط است ، dT/dr منفی خواهد بود.) فرض کنید S یک سطح استوانه‌ای به شعاع r و طول L در داخل عایق باشد. به موجب

معادلهٔ (۳۶.۴) ، داریم :

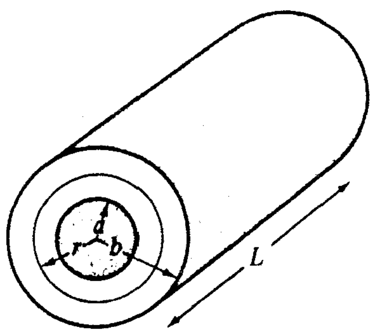
$$\mathbf{Q}\cdot\mathbf{n} = (-k\nabla T)\cdot\mathbf{n} = -k\frac{dT}{dr}$$

(مطابق معمول، $\mathbf{n}$ رابرونسو می‌گیریم .دراین صورت، $\nabla T\cdot\mathbf{n}=|\nabla T||\mathbf{n}|\cos 180^\circ=-|\nabla T|=dT/dr$) .

با این فرض که شارش گرما در حالت پایا باشد ، تعداد کالری گرمایی که از چنین سطحی عبور می‌کند با تعدادی که از هر سطح دیگری چون این سطح گذر کند یکسان است ، زیرا در غیر این صورت درجهٔ حرارت با زمان تغییر خواهد کرد. مقدار گرمایی که از یک چنین سطحی در واحد زمان شارش می‌کند عبارت است از :

$$H=\iint_s \mathbf{Q}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iint_s -k\frac{dT}{dr}\, dS = -k\frac{dT}{dr}\iint_s dS$$

$$= -k\frac{dT}{dr}(2\pi L r)$$



شکل ۲۳.۴

مجدداً به دلیل وجود تقارن فرض کرده‌ایم که dT/dr در هر نقطهٔ سطحی چون S ثابت باشد (امّا نه الزاماً بر هر سطح دیگری با یک r متفاوت) و ، بنابراین ، dT/dr را می‌توان از انتگرال خارج کرد.

چون H مستقل از r است ، در حل معادلهٔ دیفرانسیل زیر به عنوان یک ثابت در نظر گرفته می‌شود :

$$H = -2\pi kLr \frac{dT}{dr}$$

متغیرها را جدا می‌کنیم:

$$H\frac{dr}{r} = -2\pi kLdT$$

و سپس انتگرال می‌گیریم:

$$H\int_a^b \frac{dr}{r} = -2\pi kL\int_{T_a}^{T_b} dT$$

که بالاخره به تساوی

$$H = \frac{2\pi Lk(T_a - T_b)}{\operatorname{Log}(b/a)}$$

منجر می‌شود. اگر این مقدار را در بالا جایگزین H کنیم و انتگرال بگیریم، خواهیم داشت:

$$H\int_a^b \frac{dr}{r} = -2\pi kL\int_{T_a}^{T} dT$$

در نهایت، داریم:

$$T = T_a - (T_a - T_b)\frac{\log(r/a)}{\log(b/a)}$$

تمرینات

۱. اگر $\mathbf{F} = z\mathbf{k}$، انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم $\mathbf{F}$ بر سطح بستهٔ استوانهٔ مستدیر قائم با بدنهٔ خمیدهٔ $x^2 + y^2 = 9$ و قواعدی در صفحات $z = 0$ و $z = 2$ را بیابید. (یک محاسبهٔ ذهنی کفایت می‌کند.)

۲. انتگرال

$$\iint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

را، که در آن S سطح مکعب محدود به صفحات $x = \pm 1$، $y = +1$، و $z = \pm 1$، و $\mathbf{F}$ یکی از میدانهای زیر باشد، بیابید:

(الف) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}$ (هـ) $\mathbf{F}=y\mathbf{i}$

(ب) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ (و) $\mathbf{F}=z\mathbf{i}$

(ج) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ (ز) $\mathbf{F}=z^2\mathbf{i}$

(د) $\mathbf{F}=x^2\mathbf{i}+y^2\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$

۳. انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم $\mathbf{F}=x\mathbf{i}$ را بر مثلثی به رئوس (۱,۰,۰) ، (۰,۲,۰) ، (۰,۰,۳) محاسبه کنید و ، در این‌محاسبه ،قائم را در طرفی بگیرید که از مبدأ دور می‌شود.

۴. با استفاده از قانون گاوس ، اندازهٔ شدت میدان الکتریکی را در نقطه‌ای به فاصلهٔ r واحد از یک سیم نازک طویل که حامل باری به میزان λ واحد در واحد طول است ، تعیین کنید. (استوانه‌ای به طول L و شعاع r که محورش بر سیم منطبق باشد در نظر بگیرید.)

۵. کره‌ای خالی از یک مادهٔ همگن با شعاع داخلی a و شعاع خارجی b و دمای داخلی T_a و دمای خارجی T_b در نظر بگیرید.

(الف) دمای حالت پایا را به عنوان تابعی از فاصلهٔ r از مرکز ،که مقادیری بین a و b را اختیار می‌کند، بیابید.

(ب) اگر $r=\frac{a+b}{2}$ ، آیا $T=\frac{T_a+T_b}{2}$ ؟

۶. با فرض $\mathbf{F}=x\mathbf{i}-y\mathbf{j}$ ، مقدار انتگرال

$$\iint \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

را بر سطح بستهٔ محدود به صفحات $z=0$ و $z=1$ و استوانهٔ $x^2+y^2=a^2$ با قائم یکهٔ برونسوی $\mathbf{n}$ با دستورالعلهای زیر بیابید :

(الف) با محاسبهٔ مستقیم (*راهنمایی* : در دستگاه مختصات استوانه‌ای که بر سطح خمیده در نظر گرفته شود ، عنصر مساحت عبارت است از : $dS=ad\theta dz$.) ؛

(ب) با استفاده از وجود تقارن بدون استفاده از مختصات استوانه‌ای .

۷. با فرض $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+(z^2-1)\mathbf{k}$ ، مقدار انتگرال

$$\iint \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS$$

را بر سطح بستهٔ محدود به صفحات $z=0$ و $z=1$ و استوانهٔ $x^2+y^2=a^2$ با قائم یکهٔ برونسوی

n بیابید.

۸. فرض کنید $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+\mathbf{k}$. انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم **F** را بر جعبه‌ای که در شکل (۲۴.۴) نشان داده شده است با قائم یکهٔ برونسوی **n** بیابید. فرض کنید این جعبه ته داشته باشد ولی سر نداشته باشد، یعنی، تقریباً مانند یک کفش. (توجه کنید: در مسائل بعدی از شما خواسته خواهد شد که، به عنوان نمایشی از قدرت قضیهٔ واگرایی، مسأله‌ای نظیر این مسأله را با محاسبات ذهنی حل کنید. نگاهی دزدکی به تمرین «۷» بخش «۹.۴» بیندازید.)

۹. فرض کنید D ناحیهٔ زیر باشد:

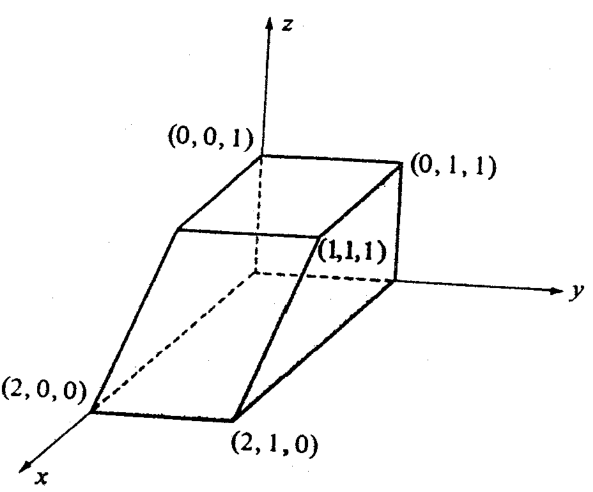
$$x\geq 0 \quad , \quad y\geq 0 \quad , \quad z\geq 0 \quad , \quad x+\tfrac{1}{2}y+\tfrac{1}{3}z\leq 1$$

(الف) آیا این ناحیه یک حوزه است؟

(ب) آیا این ناحیه همبند ساده است؟

(ج) اگر $\mathbf{F}=2x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$، انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم **F** را بر مرز این ناحیه، که در جهت قائم برونسو جهت دار شده است، بیابید.

۱۰. $\iint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ را وقتی $\mathbf{F}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}+xy\mathbf{k}$ بر قسمت توصیف شده از سطح تمرین (۷) بخش (۶.۴) را بیابید.



شکل ۲۴.۴

۱۱.فرض کنید **F** میدان مربوط به یک «منبع قدرت» q واقع در نقطه‌ای چون P باشد که در نقطه‌ای چون Q به فاصلهٔ r از P دارای پتانسیل ϕ با $\phi(Q)=q/r$ است. اگر $r\neq ۰$، ϕ یک تابع همساز است ؛ یعنی $\nabla^۲\phi=۰$. اکنون فرض کنید که این منبع در یک نقطه متمرکز نشده باشد ؛ بلکه توزیع یکنواختی به چگالی σ (معادل قدرت منبع در واحد مساحت) بر سطح کره‌ای به شعاع a داشته باشد. اگر Q نقطهٔ $(x_۰,y_۰,z_۰)$ باشد ، آن گاه پتانسیل در نقطهٔ Q از انتگرال

$$\phi(x_۰,y_۰,z_۰)=\iint\frac{\sigma dS}{\sqrt{(x-x_۰)^۲+(y-y_۰)^۲+(z-z_۰)^۲}}$$

که بر سطح کره گرفته شود ، به دست می‌آید. با یک رشته استدلالهای مبتنی بر اکتشاف شهودی نشان دهید که

(الف) پتانسیل داخلی کره ثابت و برابر $۴\pi a\sigma$ است ؛

(ب) پتانسیل هر نقطهٔ بیرونی کره به فاصلهٔ b از مرکز کره برابر است با $۴\pi a^۲\sigma/b$. (*راهنمایی* : **F** را مضرب اسکالری از شدت میدان الکتریکی مربوط به توزیع بار بدانید و از قانون گاوس استفاده کنید.)

۱۲.با تعبیر هر یک از انتگرالهای زیر به عنوان یک پتانسیل ، مقادیر آنها را بیابید. سطح S را کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ بگیرید.

(الف)
$$\iint_S\frac{dS}{\sqrt{(x-۱)^۲+y^۲+z^۲}}$$

(ب)
$$\iint_S\frac{dS}{\sqrt{(x-۳)^۲+y^۲+z^۲}}$$

۱۳.با تعبیر انتگرال زیر به عنوان یک پتانسیل ، مقدار آن را بر سطح $x^۲+y^۲+z^۲=۵$ محاسبه کنید.

$$\iint_S\frac{dS}{\sqrt{(x-۳)^۲+(y-۲)^۲+z^۲}}$$

۱۴.فرض کنید $\mathbf{R}= x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ و $r=|\mathbf{R}|$. نشان دهید که ، تحت شرایط معینی ، انتگرال

$$\omega=\int\int\frac{\mathbf{R}}{r^3}\cdot\mathbf{n}\ dS= -\int\int\left(\nabla\frac{1}{r}\right)\cdot\mathbf{n}\ dS$$

بر یک سطح مفروض برابر همان زاویهٔ فضایی است که این سطح در مبدأ می‌سازد.

۸.۴ انتگرال حجم

تعریف انتگرال حجم ، البته ، براساس مفهوم آشنای افراز صورت می‌گیرد. تابعی چون f (یعنی، یک میدان اسکالر) را ، که در درون و بر مرز حوزه‌ای چون V تعریف شده است ، در نظر می‌گیریم . فرض می‌کنیم V *کراندار* است ، یعنی ، مکعب به قدر کافی بزرگی چون R وجود دارد که هر نقطهٔ V درون R باشد . فرض می‌کنیم مکعب R به کمک صفحاتی موازی با صفحات مختصات به متوازی السطوحهای قائمی تقسیم شود. با اغماض از متوازی السطوحهایی که هیچ نقطه‌ای از V را در برندارند ، حجم متوازی السطوحهایی را که V را فرا گرفته‌اند با δV_1 ، δV_2 ، ... ، δV_n نشان می‌دهیم ، و در هر یک از این متوازی السطوحها نقطه‌ای چون (x_i,y_i,z_i) انتخاب می‌کنیم که این نقطه در V نیز باشد. سپس ، مجموع $\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\ \delta V_i$ را تشکیل می‌دهیم و انتگرال حجم f بر V را ، در صورت وجود ، برابر

$$\int\int\int_V f(x,y,z)dV=\lim\sum_{n=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\ \delta V_i \tag{۴۰.۴}$$

تعریف می‌کنیم که در آن حدگیری وقتی صورت می‌پذیرد که ابعاد δV_i به صفر میل کند. (که در این صورت n وادار می‌شود که به بی‌نهایت میل کند.) برای این که معادلهٔ (۴۰.۴) دارای معنی و خالی از ابهام باشد ، لازم است که وجود حد مذکور مستقل از نحوهٔ تقسیم باشد . می‌توان ثابت کرد که اگر f در درون و بر مرز V پیوسته باشد ، این شرط تحقق پیدا می‌کند . ما از اثبات آن صرف نظر می‌کنیم .

چون حجم یک متوازی السطوح قائم به ابعاد dx ، dy ، و dz برابر $dV=dxdydz$ است ، گاهی به جای انتگرال

$$\iiint_V f(x,y,z)\ dV$$

این انتگرال

$$\iiint_V f(x,y,z)\ dxdydz$$

نوشته می‌شود. صورت اخیر نشان می‌دهد ، و می‌توان ثابت کرد ، که انتگرال حجم با سه انتگرالگیری محاسبه می‌شود ؛ یعنی ، با انتگرالگیری پیاپی برحسب x ، y ، و سپس z (یک تعمیم بدیهی از انتگرال دوگانه) . در واقع ، هر انتگرال حجم تقریباً همیشه به این صورت محاسبه می‌شود ، مانند یک انتگرال مکرّر. تنها بخش مشکل انتگرالگیری حجم تشخیص حدود «انتگرالهای جزئی» است . در زیر چند مثال عرضه می‌کنیم :

یک کاربرد بدیهی انتگرال حجم در جایی است که تابعی که باید از آن انتگرال گرفته شود چگالی جرم یک ماده باشد . فرض کنید $\rho(x,y,z)$ چگالی جرم یک ماده ، مثلاً برحسب گرم در هر سانتیمتر مکعب ، در نقطه‌ای چون (x,y,z) باشد . اگر ρ ثابت باشد ، جرم ماده‌ای که حجم δV را اشغال می‌کند دقیقاً $\rho\delta V$ است . وقتی ρ از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر تغییر می‌کند ، مثلاً ، وقتی که مادهٔ مفروض یک شارهٔ تراکم پذیر است ، اگر نقطه‌ای چون (x,y,z) در یک ناحیهٔ کوچک از حجم δV انتخاب کنیم ، آن گاه $\rho(x,y,z)\delta V$ تقریباً جرم مادهٔ درون این ناحیه است . بنابراین ، می‌توانیم مجموع $\sum_{i=1}^{n} f(x_i,y_i,z_i)\ \delta V_i$ را یک مقدار تقریبی برای جرم درون حوزهٔ کامل V تعبیر کنیم ، و انتگرال (۴۰.۴) مقدار دقیق این جرم است .

به طور مشابه ، اگر f شدت بار (بار واحد حجم) باشد ، انتگرال حجم f بر V بار کلی خالص موجود در ناحیهٔ V است .

البته ، اگر $f(x,y,z)$ تابع ثابت واحد باشد ، انتگرال (۴۰.۴) حجم حوزهٔ V است :

$$\text{حجم } V = \iiint_V dV = \iiint_V dxdydz \qquad (۴۱.۴)$$

مثال ۲۲.۴ انتگرال حجم $f(x,y,z)=x+yz$ را بر قوطی محدود به صفحات مختصات و صفحات $x=1$ ، $y=2$ ، و $z=1+x$ بیابید.

حل ناحیهٔ انتگرالگیری در شکل (۲۵.۴ - الف) نشان داده شده است . این ناحیه را می‌توان یک خانهٔ «چهار دیواری با یک سقف شیبدار» توصیف کرد.

حال حدود انتگرالگیری را مشخص می‌کنیم . به عنوان نمونه نقطه‌ای چون (x,y,z) در وسط ناحیه در نظر بگیرید. اگر x و y را ثابت بگیریم ، z می‌تواند از صفر تا $1+x$ صعود کند و یک ستون تشکیل دهد. حال اگر x تغییر کند ولی y ثابت بماند ، x می‌تواند در محدودهٔ صفر تا یک به جلو یا عقب حرکت کند و ، در این صورت ، ستونها یک *قاش* ترسیم می‌کنند. این ستونها و قاشها در شکل (۲۵.۴ - ب) نمایش داده شده‌اند. اکنون اگر y از ۰ تا ۲ تغییر کند ، قاشها سرتاسر ناحیه را طی و آن را کامل می‌کنند. اگر به این ترتیب انتگرالگیری کنیم ، خواهیم داشت :

$$\iiint f\,dz\,dx\,dy = \int_0^2\int_0^1\int_0^{1+x}(x+yz)\,dz\,dx\,dy$$

$$=\int_0^2\int_0^1\left(xz+\frac{1}{2}yz^2\right)\Big|_0^{1+x}dx\,dy$$

$$=\int_0^2\int_0^1\left(x+x^2+\frac{1}{2}y+yx+\frac{1}{2}yx^2\right)dx\,dy$$

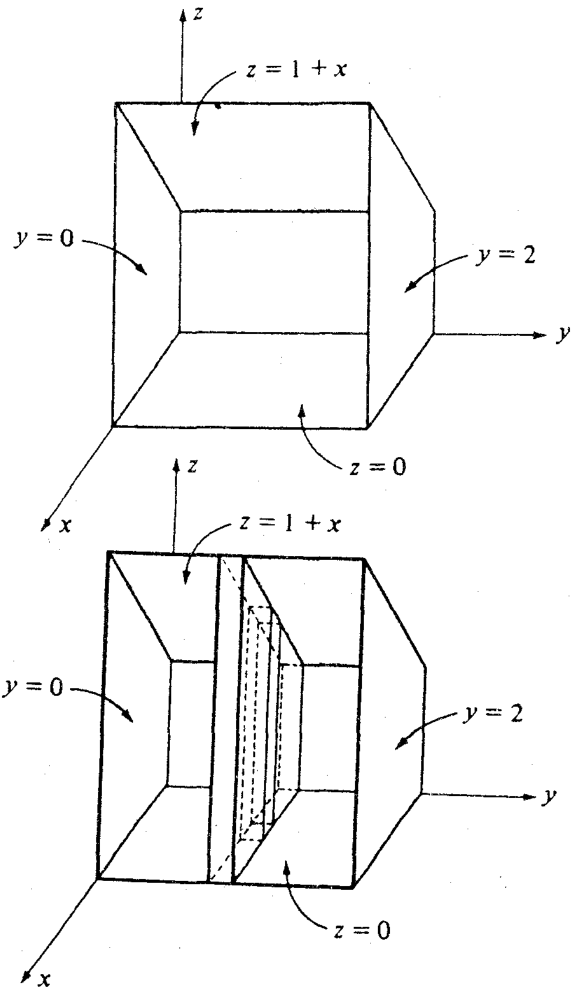
$$=\int_0^2\left(\frac{5}{6}+\frac{7}{6}y\right)dy=4$$

اگر y قبل از x تغییر کند ، طریق دیگری در تعیین حدود پیش می‌آید. در این حالت ستونهای قائم در حرکت از چپ به راست ، در محدودهٔ $0\le y\le 2$ ، قاش می‌سازند و این قاشها ، وقتی x از صفر به یک برود ، ناحیه را کامل می‌کنند که به انتگرال زیر می‌انجامد :

$$\int_0^1\int_0^2\int_0^{1+x}(x+yz)\,dzdydx=\int_0^1\int_0^2\left(x+x^2+\frac{1}{2}y+yx+\frac{1}{2}yx^2\right)dydx$$

$$=\int_0^1\left(xy+x^2y+\frac{1}{4}y^2+\frac{1}{2}y^2x+\frac{1}{4}y^2x^2\right)\Big|_0^2\,dx$$

$$=\int_0^1(1+4x+3x^2)\,dx=4$$



الف

ب

شکل ۲۵.۴

فرض کنید وقتی از (x,y,z) ، «یک نقطهٔ نمونه در وسط» شروع می‌کنیم ، نخست y تغییر کند و x و z ثابت بمانند . در این صورت اگر نقطه از چپ به راست برود که y از ۰ تا ۲ تغییر کند ، ستونهای افقی تشکیل می‌شوند. آن‌گاه ، اگر x ثابت بماند و z تغییر کند ، این ستونهای افقی یک قاش موازی صفحهٔ yz می‌سازند که از کف $(z=0)$ به سقف $(z=1+x)$ در حرکتند و ، وقتی x از صفر تا یک تغییر کند ، ناحیه را کامل می‌کنند و خواهیم داشت :

$$\int_0^1\int_0^{1+x}\int_0^2 (x+yz)\,dydzdx = \int_0^1\int_0^{1+x}\left(xy+\frac{1}{2}y^2z\right)\Big|_0^2\,dzdx$$

$$=\int_0^1\int_0^{1+x}(2x+2z)\,dzdx$$

$$=\int_0^1(2xz+z^2)\Big|_0^{1+x}\,dx$$

$$=\int_0^1(1+4x+3x^2)\,dx=4$$

اگر ، با شروع از نقطه‌ای در وسط ، نخست x تغییر کند و y و z را ثابت نگهداریم ، که ، در این صورت ، ستونهایی تولید می‌شوند که چنانند که در شکل (۲۵.۴) از صفحهٔ کتاب خارج می‌شوند ، چه نتیجه‌ای به بار می‌آید ؟ یک گرفتاری ! در قسمت اصلی اطاق ، $z\le 1$ ، ستونها از دیوار عقب $(x=0)$ به دیوار جلو $(x=1)$ می‌آیند ، امّا در اطاقک زیر سقف شیبدار ، $z\ge 1$ ، این ستونها تا سقف شیبدار ، که در آن $x=z-1$ ، به عقب می‌روند . (این معادله از کجا می‌آید ؟) به این ترتیب ، برای تشخیص حدود سازگار انتگرالگیری باید ناحیه را به دو قسمت زیر و بالای سطح $z=1$ تقسیم کنیم. در هر دو قسمت ، ستونها می‌توانند از چپ به راست در محدودهٔ $0\le y\le 2$ حرکت و قاشهایی افقی تولید کنند که قسمتهای پایینی ، $0\le z\le 1$ ، و بالایی ، $1\le z\le 2$ ، را کامل نمایند. این حالت به نتیجهٔ زیر می‌انجامد :

$$\int_0^1\int_0^2\int_0^1 (x+yz)\, dxdydz + \int_1^2\int_0^2\int_{z-1}^1 (x+yz)\, dxdydz$$

$$= \int_0^1\int_0^2 (\tfrac{1}{2}+yz)\, dydz + \int_1^2\int_0^2 (2yz-\tfrac{1}{2}z^2+z-yz^2)\, dydz =$$

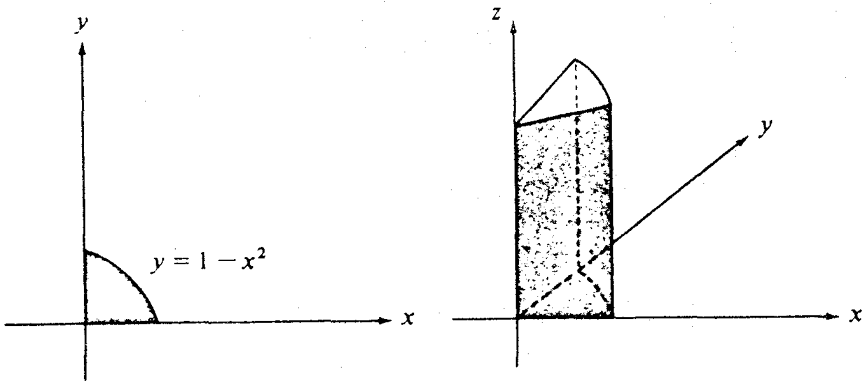
$$= \int_0^1 (1+2z)\, dz + \int_1^2 (6z-3z^2)\, dz = 2+2=4$$

مثال بالا نشان می‌دهد که انتگرال حجم را به هر ترتیب دلخواه می‌توان تکرار کرد، امّا امکان دارد یک ترتیب پیچیده‌تر از ترتیب دیگر باشد.

مثال ۲۳.۴ حجم ناحیه‌ای از فضا را که بالای صفحهٔ xy و زیر صفحهٔ $z=2+x+y$ و محدود به صفحات $x=0$، $y=0$، و سطح $y=1-x^2$ است محاسبه کنید.

حل ابتدا ناحیه را مشخص می‌کنیم، کف این ناحیه، که در صفحهٔ xy واقع است، در شکل (۲۶.۴ - الف) نشان داده شده است. هر نقطه از این محدودهٔ سایه‌دار، پایهٔ ستونی است که در بالا به «سقف شیبدار» $z=2+x+y$ می‌رسد (شکل ۲۶.۴ - ب).

برای تعیین حدود انتگرالگیری، از «نقطه‌ای در وسط» شروع می‌کنیم. اگر ابتدا z تغییر کند و x و y ثابت بمانند، ستون قائمی از $z=0$ تا $z=2+x+y$ رسم می‌شود. اگر، در عوض، y و z را ثابت بگیریم و x تغییر کند، ستونهایی افقی خواهیم داشت که در قسمت اعظم ناحیه از ۰ به $(1-y)^{\frac{1}{2}}$ کشیده و در محاسبهٔ انتگرال ایجاد زحمت می‌کنند، دو گوشهٔ سمت راست بالایی (شکل ۲۶.۴-ب) اطاقکی زیر سقف شیبدار وجود دارد که ستونها را از طرف چپ قطع می‌کند. اگر ابتدا y تغییر کند وضعیت مشابهی رخ می‌دهد. بنابراین، طریق ساده، انتخاب ستونهای قائم است.



(ب) (الف)

شکل ۲۶.۴

اگر x را ثابت بگیریم و y تغییر کند ، ستونها قاشهایی از $y=0$ تا $y=1-x^2$ پدید می‌آورند. این قاشها در محدودهٔ $0 \le x \le 1$ ناحیه را کامل می‌کنند ، و در می‌یابیم که

$$\int_0^1\int_0^{1-x^2}\int_0^{2+x+y} dzdydx=\int_0^1\int_0^{1-x^2} (2+x+y)\, dydx$$

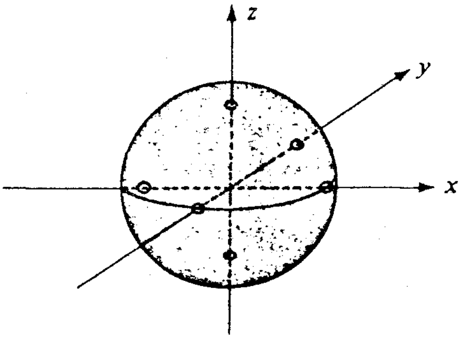
$$=\int_0^1 \left(2y+xy+\frac{1}{2}y^2\right)\Big|_0^{1-x^2} dx$$

$$=\int_0^1 \left(\frac{5}{2}+x-3x^2-x^3+\frac{1}{2}x^4\right) dx$$

$$=\frac{37}{25}$$

مثال ۲۴.۴ انتگرال $f(x,y,z)=y$ را بر حجم کرهٔ $x^2+y^2+z^2=1$ بیابید.

حل بدیهی است که در مورد یک کره به هر ترتیب که بخواهیم می‌توانیم انتگرال بگیریم . در



شکل ۲۷.۴

شکل (۲۷.۴) می‌بینیم که اگر x و y ثابت باشند ، z یک ستون در محدودهٔ $\pm(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}$ رسم می‌کند. وقتی x ثابت باشد ، این ستونها می‌توانند در محدودهٔ $y=\pm(1-x^2)^{\frac{1}{2}}$ در جهت y حرکت و قاشهایی تولید کنند که این قاشها از $x=-1$ تا $x=1$ ناحیه را کامل کنند . از این رو

$$\iiint f\,dV=\int_{-1}^{1}\int_{-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}^{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}\int_{-(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}}^{(1-x^2-y^2)^{\frac{1}{2}}} y\,dz\,dy\,dx$$

$$=2\int_{-1}^{1}\int_{-(1-x^2)^{\frac{1}{2}}}^{(1-x^2)^{\frac{1}{2}}} y(1-x^2-y^2)\ dy\,dx$$

$$=2\int_{-1}^{1} 0\,dx=0$$

(به دلیل وجود تقارن ، احتمالاً منتظر چنین جوابی بوده‌ایم).

تمرینات

۱. به وسیلهٔ انتگرالهای مکرر ، حجم کره‌ای به شعاع R را بیابید.

۲. حجم ناحیه‌ای که در مثال (۲۲.۴) توصیف شده مساوی ۳ است . در این مثال ، به جای $f(x,y,z)=x+yz$ ، فرض کنید $f(x,y,z)=۱$ و ، با انجام طرق مختلف انتگرالگیری که در آن مثال بیان شده است ، چهار بار درستی گزارهٔ مذکور را بررسی کنید.

۳. ناحیه‌ای را که حجمش با انتگرال سه‌گانهٔ زیر نمایش داده شده است رسم کنید .

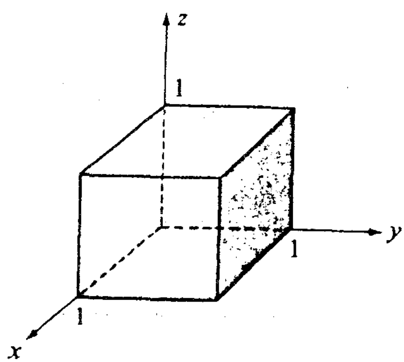
$$\int_{0}^{۲}\int_{0}^{۳}\int_{0}^{\sqrt{۹-y^{۲}}} dxdydz$$

۴. در این تمرین از خواننده می‌خواهیم که بر اساس انجام محاسبات زیر حدس ساده‌ای بزنند.

(الف) فرض کنید $\mathbf{F}(x,y,z)=x^{۲}\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$. انتگرال

$$\iint_{S} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

را بر سطح مکعب محدود به صفحات $x=0$ ، $x=۱$ ، $y=0$ ، $y=۱$ ، $z=0$ ، و $z=۱$ محاسبه کنید (شکل ۲۸.۴)



شکل ۲۸.۴

(ب) فرض کنید $f(x,y,z)=\nabla\cdot\mathbf{F}$ ، و انتگرال

$$\iiint_V f(x,y,z)\ dV$$

را بر مکعب مذکور محاسبه کنید. توجه کنید که در این جا حدود انتگرالگیری مشکلی پیش نمی‌آورد. انتگرال به صورت سادهٔ زیر است :

$$\int_0^1\int_0^1\int_0^1 f(x,y,z)\ dxdydz$$

(ج) اگر جوابهای بندهای (الف) و (ب) یکسان نیستند ، محاسبات را تا کشف اشتباه بررسی کنید.

(د) حال میدان برداری دیگری چون $\mathbf{F}$ در نظر بگیرید و گامهای (الف) و (ب) را تکرار کنید.

(هـ) حدس شما بر اساس محاسبات بالا چیست ؟

۵. فرض کنید V حوزه‌ای با حجم v باشد. فرض کنید $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$.

(الف) مقدار انتگرال زیر چیست ؟

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{F}\ dV$$

(ب) براساس پاسخ تمرین (۴) ، آیا می‌توانید حدس بزنید که مقدار انتگرال سطح

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

مؤلفهٔ قائم $\mathbf{F}$ بر مرز V است ؟

۶. حجم ناحیهٔ محدود به سطح $z=e^{-(x^2+y^2)}$ ، استوانهٔ $x^2+y^2=1$ ، و صفحهٔ $z=0$ را بیابید.

(*راهنمایی* : در دستگاه مختصات استوانه‌ای $dV=rdrd\theta dz$.)

۷. اگر $\rho(x,y,z)$ *چگالی بار* (بار موجود در واحد حجم) ناحیه‌ای از فضا باشد ، آن‌گاه کل بار موجود

در ناحیهٔ V عبارت است از :

$$q=\iiint_V \rho(x,y,z)\ dV$$

به موجب قانون گاوس ، داریم :

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=\frac{1}{\varepsilon_0}\,q=\frac{1}{\varepsilon_0}\iiint_V \rho(x,y,z)\ dV$$

از ترکیب این و حدسی که در تمرین (۴) دربارهٔ

$$\iiint_V \nabla\cdot\mathbf{E}\ dV$$

زده‌اید ، آیا می‌توانید بگویید چه رابطه‌ای بین واگرایی $\mathbf{E}$ و چگالی بار موجود است ؟

۸. انتگرالهای زیر را بر ناحیهٔ متشکل از فضای درون کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ ، با تعبیر آنها به عنوان پتانسیل و استفاده از قانون گاوس ، محاسبه کنید. (تمرین «۱۲» بخش قبلی را ببینید.)

(الف) $$\iiint \frac{dxdydz}{\sqrt{(x-1)^2+y^2+z^2}}$$

(ب) $$\iiint \frac{dxdydz}{\sqrt{(x-3)^2+y^2+z^2}}$$

۹. انتگرال

$$\iiint \frac{dxdydz}{\sqrt{(x-9)^2+(y-2)^2+z^2}}$$

را بر ناحیهٔ درونی کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ ، با تعبیر آن به عنوان یک پتانسیل ، محاسبه کنید.

۹.۴ آشنایی با قضایای واگرایی و استوکس

با تکمیل مقدمات انتگرالگیری ، اکنون می‌توانیم به بخش جالبی از کار خود رجوع کنیم . در این بخش به معرفی دو قضیهٔ آنالیز برداری ، که اهمیت بنیادی دارند ، می‌پردازیم ؛ تا این جا قسمت عمدهٔ کار ما به منظور تهیهٔ مقدمات این دو قضیه صورت گرفته است . این دو قضیه در بخشهای

بعدی با دقت بیشتری بیان خواهند شد ؛ در این جا قصد داریم این قضایا را به صورت خام ، بدون ذکر شرایط دقیق پیوستگی ، مشتق پذیری ، و غیره ، بیان و برهانهایی سازنده ، ولی نه دقیق ، برای آنها عرضه کنیم . برهانهای دقیق در بخشهای بعدی داده خواهد شد . نخست قضیهٔ واگرایی را معرفی می‌کنیم .

قضیهٔ ۵.۴ *انتگرال حجم واگرایی یک میدان برداری بر حوزهٔ کرانداری چون D برابر انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم آن میدان برداری بر مرز D است .*

به عبارت دیگر ، واگرایی کل درون D برابر شار خالصی است که از D بیرون می‌آید . در زیر «برهان ساده»ای از قضیه را ملاحظه می‌کنید ؛ برهان دقیق بعداً عرضه خواهد شد.

برهان نخست ، متوازی السطوح قائم کوچکی محدود به صفحات x ، x+dx ، y ، y+dy ، z ، z+dz در نظر می‌گیریم . انتگرال سطح $\mathbf{F}\cdot\mathbf{n}$ بر شش وجه این جسم برابر کل شار $\mathbf{F}$ است که از این قوطی بیرون می‌آید. در بخش (۳.۳) نشان داده‌ایم که این شار ، در حد ، به صورت

$$\nabla\cdot\mathbf{F}\ dxdydz$$

ظاهر می‌شود.

حال می‌خواهیم حوزهٔ D را به تعدادی از متوازی السطوحهای کوچک ، همچون بلوکهایی که در ساختمان D به کار می‌روند ، تقسیم کنیم . اگر شار همهٔ این بلوکها را جمع کنیم چه چیزی به دست می‌آوریم ؟ اگر دو تا از این متوازی السطوحها پهلوی یکدیگر باشند ، در وجه مشترک این دو ، شاری که از یکی خارج می‌شود برابر شاری است که به دیگری وارد می‌شود. از این رو شاری که از سطح خارج می‌شود شاری است که از بلوکهای روی سطح خارج می‌شود و مجموع آنها کل شار $\mathbf{F}$ را که از « ساختمان آجری » خارج می‌شود تشکیل می‌دهد . بنابراین ، وقتی این بلوکها کوچک شوند انتظار داریم که $\sum\nabla\cdot\mathbf{F}\delta V$ به انتگرال حجم میل کند ، و شاری که از ساختمان خارج می‌شود به شار خروجی از D نزدیک شود . از این رو ،

$$\iiint \nabla\cdot\mathbf{F}\ dV = \iint \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

نقاط ضعف آشکاری در این برهان وجود دارد . انتقال به مرحلهٔ حدگیری باید با دقت بیشتری مورد بررسی قرار گیرد ، بالاخص در مورد انتگرال سطح ؛ به عنوان مثال ، روشن نیست که مثلاً آیا تقریب یک سطح کروی با مجموعه‌ای از مستطیلهای کوچک موازی صفحات مختصات مقدور است یا خیر ؟ (یادآوری می‌کنیم که در شکل «۱۵.۴» قطعهٔ مستطیلی *موازی با* سطح در نظر گرفته می‌شود .) با این وجود ، این بحثهای مبتنی بر اکتشاف شهودی ، از این نظر که در یادآوری قضایای قبلی و حدس احکام جدید به ما کمک می‌کنند بسیار ارزشمندند.

به خاطر رابطهٔ نزدیکی که بین قضیهٔ واگرایی و قانون گاوس (بخش ۷.۴) وجود دارد ، گاهی قضیهٔ واگرایی را قضیهٔ گاوس نامیده‌اند. برای مشاهدهٔ این رابطه ، لازم است بدانیم که واگرایی شدت میدان الکتریکی مضرب اسکالری از چگالی بار است . از این رو انتگرال حجم واگرایی بر هر حوزه ، مضرب اسکالری از کل بار q موجود در درون حوزه است و از قضیهٔ واگرایی نتیجه می‌گیریم که انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم شدت الکتریکی ، بر مرز یک حوزه ، مضرب اسکالری از بار داخل حوزه است . با این وجود ، قانون گاوس فقط یک حالت خاص از قضیهٔ واگرایی نیست ، زیرا این قانون را می‌توان در مورد نقاط بار ، در جایی که مفهوم بار در واحد حجم بی‌معنی است ، به کار برد.

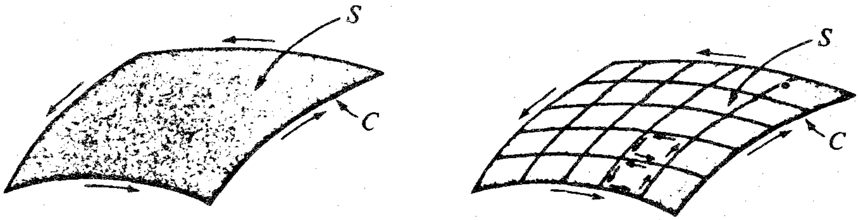
تا چند سال پیش ، قضیهٔ واگرایی را قضیهٔ گاوس در حالت سه بعدی می‌نامیدند. حال قضیهٔ استوکس ، قضیهٔ بنیادی دیگری از آنالیز برداری ، را مورد بحث قرار می‌دهیم .

قضیهٔ ۶.۴ *انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم تاو یک میدان برداری ، که بر یک سطح کراندار گرفته شود ، با انتگرال خط مؤلفهٔ مماسی میدان ، که بر منحنی بستهٔ کراندار سطح گرفته شود ، مساوی است .*

در این جا منحنی بسته‌ای چون C در فضا و سطحی چون S محدود به این منحنی را در نظر می‌گیریم . قضیهٔ استوکس می‌گوید که

$$\iint_S (\mathbf{curl\ F})\cdot\mathbf{n}\ dS = \int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\ ds \qquad (۴۲.۴)$$

که در آن dS عنصر *مساحت* و ds عنصر *طول کمان* است . فرض می‌کنیم که سطح S با میدانی از قائمهای یکهٔ $\mathbf{n}$ جهت دار شده است و انتگرال خط در امتداد C در جهت مثبت حاصل گرفته شود (شکل «۲۹.۴ - الف» را ببینید).



شکل ۲۹.۴

برهانی که عرضه می‌کنیم به صورت زیر است : (برهان دقیق بعداً ارائه خواهد شد.)

برهان روشی که اتخاذ می‌کنیم شبیه همان روشی است که در اثبات قضیهٔ واگرایی به کار برده شد . فرض کنید سطح مفروض به عناصر کوچکی ، که هر یک تقریباً یک مستطیل است ، تقسیم شده باشد (شکل ۲۹.۴ – ب) . شاری که از S عبور می‌کند برابر مجموع شاری است که از مستطیلها عبور می‌کند. همچنین ، اگر انتگرالهای خط حاصل از انتگرالگیری بر محیط مستطیلها را با هم جمع کنیم ، حاصل جمع انتگرالهای مرزهای درونی صفر می‌شود ، و مجموع با انتگرال خطی که بر کرانهٔ C گرفته شود برابر می‌شود. به این ترتیب ، اگر بتوانیم معادلهٔ (۴۲.۴) را برای یک مستطیل ثابت کنیم ، همان نتیجه را در حالت کلی خواهیم داشت .

برای اثبات (۴۲.۴) در مورد یک سطح مستطیلی کوچک ، محورهای مختصات را چنان انتخاب می‌کنیم که محورهای x و y در امتداد اضلاع مستطیل و محور z در جهت **n** باشد . در این صورت ، داریم : $\mathbf{n}=\mathbf{k}$ ؛ از این رو ،

$$(\mathbf{curl\ F})\cdot\mathbf{n} = (\mathbf{curl\ F})\cdot\mathbf{k} = \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}$$

بنابراین ، طرف چپ (۴۲.۴) عبارت است از :

$$\iint \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) dxdy$$

با $0 \le x \le a$ ، $0 \le y \le b$. ما این انتگرال را به دو انتگرال تجزیه می‌کنیم که ترتیب انتگرالگیری در این دو متفاوت باشد :

$$\int_0^b\int_0^a \frac{\partial F_2}{\partial x}\,dxdy - \int_0^a\int_0^b \frac{\partial F_1}{\partial y}\,dydx$$

$$=\int_0^b F_2(x,y)\Big|_{x=0}^{x=a} dy - \int_0^a F_1(x,y)\Big|_{y=0}^{y=b} dx$$

$$=\int_0^b [F_2(a,y)-F_2(0,y)]\,dy - \int_0^a [F_1(x,b)-F_1(x,0)]\,dx$$

$$=\int_0^b F_2(a,y)dy + \int_b^0 F_2(0,y)dy + \int_a^0 F_1(x,b)dx + \int_0^a F_2(x,0)dx$$

$$=\int_0^a F_1(x,0)dy + \int_0^b F_2(a,y)dy + \int_a^0 F_1(x,b)dx + \int_b^0 F_2(0,y)dy$$

چنان که انتظار داشتیم ، این دقیقاً انتگرال خط $\mathbf{F}$ حول اضلاع مستطیل ، $\int_c \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\ ds$ ، است .

چه نکات ظریفی در این « استدلال » وجود دارد که ما متوجه آنها نشده‌ایم ؟ نخست ، توجه می‌کنیم که معمولاً امکان ندارد که سطحی چون S را به مستطیلهای کامل تقسیم کنیم و ، از این رو ، ما مجبوریم که یک سطح تقریبی در نظر بگیریم و اثر این تقریبها را در حدگیری مطالعه کنیم .

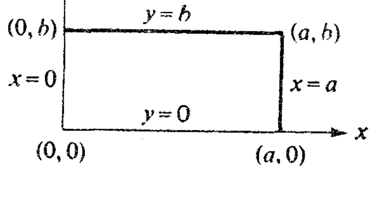
با این وجود ، مشکل اول ، مشکل اساسی نیست ؛ مشکل اساسی در انتخاب محورهاست ، به این دلیل که محورهای x و y باید در امتداد اضلاع مستطیل باشند . اجازه دهید این مورد را دقیقتر مورد تجزیه و تحلیل قرار دهیم .

برای سهولت بحث ، فرض کنید که سطح S یک مستطیل باشد . در این صورت ، مشکل اوّل

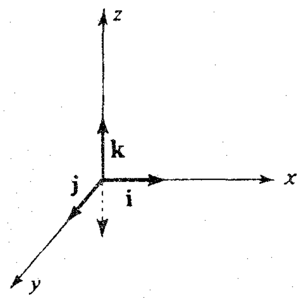
بروز نمی‌کند و ابداً نیازی به تقسیم S وجود ندارد. اگر اتفاقاً S در صفحهٔ xy و به صورتی باشد که در شکل (۳۰.۴) دیده می‌شود، هیچ مشکلی در استدلال بالا وجود ندارد (به شرط پیوستگی مشتقات مورد بحث و امثال آن برای وجود انتگرال). امّا فرض کنید S در صفحهٔ xy نباشد؛ فرایند بالا ایجاب می‌کند که دستگاه مختصات جدیدی چون x'، y'، و z' انتخاب کنیم به طوری که S در صفحهٔ $z' = 0$ باشد و اضلاعش در امتداد محورهای x' و y' باشند. در این صورت، بحث بالا نشان می‌دهد که معادلهٔ (۴۲.۴)، وقتی همهٔ محاسبات در دستگاه مختصات x'، y'، و z' انجام شود، برقرار است. *امّا چگونه بدانیم که (۴۲.۴) در دستگاه مختصات اوّلیهٔ x، y، و z برقرار است؟* این یک مشکل جدی است، زیرا تاو **F** را برحسب یک دستگاه ثابت مختصات تعریف کرده‌ایم و هنوز بررسی نکرده‌ایم که پس از تغییر دستگاه مختصات چه چیزی رخ می‌دهد.

اهمیّت فراوان درک این موضوع، صراحت بیشتری را طلب می‌کند. فرض کنید میدان برداری **F** برحسب مختصات x، y، و z مفروض باشد. حال، فرض کنید مختصات جدید x'، y'، و z' طوری معرفی شده باشند که بتوان اینها را به عنوان توابعی از مختصات قدیم x، y، و z بیان کرد. با جایگزینی آنها در $\mathbf{F}(x,y,z)$ این میدان برحسب x'، y'، و z' نوشته می‌شود. حال، **curl F** را برحسب x'، y'، و z' محاسبه می‌کنیم، و آن‌گاه مختصات را به x، y، و z برمی‌گردانیم. سؤال این است: آیا به این ترتیب به همان چیزی می‌رسیم که از محاسبهٔ **curl F** مستقیماً برحسب x، y، و z دستگیرمان می‌شد؟

به عبارت دیگر، آیا تاو یک میدان برداری فقط به طبیعت میدان بستگی دارد یا به انتخاب دستگاه مختصات نیز بستگی دارد؟



شکل ۳۰.۴



شکل ۳۱.۴

در فصل بعدی ثابت خواهیم کرد که تاو به انتخاب محورهای مختصات بستگی ندارد به این شرط که:(۱) محورها همیشه متعامد اختیار شوند ، (۲) طرق تعیین فواصل بر این محورها با هم سازگار باشند (از نظر فیزیکی ، سازگاری به این معنی است که بر محورها یک واحد طول ؛ مثلاً سانتیمتر ، انتخاب شود و همهٔ فواصل با این واحد طول اندازه‌گیری شوند) ، و (۳) دستگاه مختصات همیشه راستگرد باشد ؛ یعنی ، دستگاهی که در آن $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$.

در واقع ، انتظار داریم که چنین چیزی درست باشد . در بخش (۴.۳) دیدیم که تاو ، مانند سرعت زاویه‌ای موضعی یک شاره ، تعبیری «مستقل از مختصات» دارد. عیناً ، واگرایی ، میزان تغییر چگالی یک شارهٔ تراکم پذیر را اندازه می‌گیرد (بخش ۳.۳) ، و گرادیان ، جهت و اندازهٔ بیشترین میزان تغییر یک اسکالر را تعیین می‌کند. بنابراین ، شگفت آور نیست که این کمیتها تحت تبدیلات مختصات رفتار «ثابتی» داشته باشند.

در این رابطه شایان ذکر است که در بعضی از کتابها دستگاه مختصات را مانند دستگاه شکل (۳۱.۴) چپگرد می‌گیرند. در این صورت ، یا $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=-\mathbf{k}$ ، یا باید تعریف ضرب خارجی بردارها چنان اصلاح شود که مستلزم $\mathbf{i}\times\mathbf{j}=\mathbf{k}$ باشد ، که در این حالت «قاعدهٔ دست راست» (بخش ۱۲.۱) به «قاعدهٔ دست چپ» تبدیل می‌شود (این قرارداد برای محصل راست دستی که در یک امتحان نگران کمبود وقت است یک امتیاز بدیهی به شمار می‌آید ، زیرا ، اگر او بخواهد از قاعدهٔ دست چپ استفاده کند ، دست چپش آزاد است وضرورت ندارد که مدادش را زمین بگذارد).

بعداً به بحث مهم تبدیلات مختصات باز خواهیم گشت .

به طور خلاصه ، آنچه دربارهٔ قضایای واگرایی و استوکس گفته‌ایم تقریبی بوده و حتی برهانی که تاکنون برای این دو قضیه آورده شده سازنده ولی نادرست بوده است . قبل از شروع یک تحلیل دقیق از این قضایا ، مصراً از خواننده می‌خواهیم که تمرینات زیر را مورد مطالعه قرار دهد . اینها مهمترین قضایای این کتاب به شمار می‌آیند و محصل باید آنها را کاملاً درک کند .

محصلی که درس را تا این جا با دقت مطالعه کرده باشد «قلّه را فتح کرده است» . *بقیهٔ این کتاب به طور کامل به مطالعهٔ عمیقتر مفاهیمی که قبلاً معرفی شده‌اند اختصاص یافته است .*

تمرینات

۱. با استفاده از قضیهٔ واگرایی ، تمرین (۱) از بخش (۷.۴) را حل کنید.

۲. هفت قسمت تمرین (۲) از بخش (۷.۴) را با محاسبهٔ

$$\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1}\int_{-1}^{1} \nabla\cdot\mathbf{F}\; dxdydz$$

درهر حالت به انجام برسانید.

۳. تمرینات زیر را با استفاده از قضیهٔ واگرایی حل کنید :

(الف) تمرین (۶) بخش (۷.۴) ؛

(ب) تمرین (۷) بخش (۷.۴) .

۴. تمرین (۸) بخش (۱.۴) را با استفاده از قضیهٔ استوکس حل کنید.

۵. تمرین (۱۰) بخش (۱.۴) را با استفاده از قضیه استوکس حل کنید.

۶. درستی قضیهٔ استوکس را در هر یک از حالات زیر بررسی کنید. فرض کنید C مربع واقع در صفحهٔ xy با معادلهٔ $|x|+|y|=1$ باشد . فرض کنید $\mathbf{F}$ میدان زیر باشد :

(الف) $\mathbf{F}=x\mathbf{i}$

(ب) $\mathbf{F}=y\mathbf{i}$

(ج) $\mathbf{F}=-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}$

(د) $\mathbf{F}=\mathbf{i}+\mathbf{j}$

(هـ) $\mathbf{F}=y^3\mathbf{i}$

۷. علی رغم این که سطح تمرین (۸) بخش (۷.۴) بسته نیست ، با استفاده از قضیهٔ واگرایی می‌توان آن را به مسأله‌ای ذهنی تبدیل کرد. این کار چگونه انجام می‌شود ؟

۸. گشتاور لختی یک جامد یکنواخت حول محور z متناسب است با

$$\iiint_V (x^2+y^2)\ dxdydz$$

این را به صورت شار یک میدان برداری گذران از سطح جسم بیان کنید.

۹. نشان دهید که حجم یک اطاق را می‌توان با محاسبهٔ شار بردار $\mathbf{R}$ که از دیوارها می‌گذرد تعیین نمود.

۱۰. فرض کنید

$$\mathbf{F}= x\mathbf{i} + (x+y)\mathbf{j} + (x+y+z)\mathbf{k}$$

به وسیلهٔ قضیهٔ استوکس ، انتگرال

$$\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$$

را حول بیضی $x^2+y^2=1$ ، $z=y$ ، بیابید.

۱۱. مفهوم کرهٔ نوک دار از شکل یک تخم نوک دار ، که تخم نوعی مرغابی است ، گرفته شده است . این تخم شبیه یک بیضیگون است با دو انتهای نوک دار . محاسبهٔ انتگرالهای سطح بر کره‌های نوک دار دشوار و مستلزم وجود جداولی از توابع نوک دار است ، ولی این توابع ، که در خلال جنگ جهانی جدول بندی شدند ، هنوز جزو اسناد طبقه بندی شدهٔ به کلی سرّی محسوب می‌شوند. آنچه می‌دانیم این است که حجم یک کرهٔ نوک دار با قطر اقل $d=1$ تقریباً برابر ۰٫۷ است . (الف) انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ را بر سطح یک کرهٔ نوک دار به مرکز مبدأ و قطر اقل $d=2$ را با هر فرضی که به نظر شما معقول می‌آید محاسبه کنید. (ب) اگر مرکز این

کره در نقطهٔ (۳-،۲،۷) باشد، باز هم نتیجهٔ محاسبه یکسان است؟

۱۲. اگر شدت میدان الکتریکی $\mathbf{E}=(x+y)^2\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ باشد و واحدها به طور مناسب انتخاب شوند، بار کلی درون مکعب محدود به صفحات $x=0$، $x=1$، $y=0$، $y=1$، $z=0$، و $z=1$ چقدر است؟ طرف چپ معادلهٔ (۳۹.۴) را، (الف) مستقیماً، (ب) به وسیلهٔ قضیهٔ واگرایی، محاسبه کنید.

۱۳. اگر $\mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$، انتگرال

$$\iint r\mathbf{R}\cdot\mathbf{n}\ dS$$

را بر سطح کرهٔ به شعاع b که مرکزش بر مبدأ منطبق است، به طرق زیر محاسبه کنید:

(الف) با تعبیر هندسی عبارت زیر نماد انتگرال،

(ب) با استفاده از قضیهٔ واگرایی.

۱۴. میدان برداری

$$\mathbf{F}=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{x^2+y^2+z^2}$$

مفروض است. انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم $\mathbf{F}$ را بر سطح کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ بیابید. آیا می‌توانید از قضیهٔ واگرایی در محاسبه استفاده کنید؟

۱۵. به کمک قضیهٔ استوکس تعبیر جالبی از قضیهٔ (۳.۴)، که در آن یکسانی میدانهای بی‌گردش و میدانهای پایستار در یک حوزهٔ همبند ساده ثابت شده است، به دست می‌آید. نشان دهید که اگر $\mathbf{curl\ F}=0$، آن گاه انتگرال خط $\mathbf{F}$ حول هر منحنی بسته، که کرانهٔ یک سطح جهت دار در حوزهٔ مفروض باشد، برابر صفر است. چرا همبندی ساده وارد معرکه می‌شود؟

۱۶. فرض کنید $\phi(x,y,z)=xyz+5$ باشد و انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم $\mathbf{grad}\ \phi$ را بر $x^2+y^2+z^2=9$ بیابید.

۱۷. (الف) نشان دهید که اگر ϕ همساز باشد آن گاه $\nabla\cdot(\phi\nabla\phi)=|\nabla\phi|^2$.

(ب) فرض کنید $\phi=3x+2y+4z$، و انتگرال

$$\iint\phi\frac{\partial\phi}{\partial n}\ dS$$

را بر سطح $x^2+y^2+z^2=4$ محاسبه کنید. در این جا، $\partial\phi/\partial n$ مشتق قائم ϕ است، یعنی $\mathbf{n}\cdot\nabla\phi$.

۱۸.فرض کنید $\mathbf{F}=\phi\nabla\phi$. انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم $\mathbf{F}$ را بر سطح کرهٔ به مرکز مبدأ و به شعاع ۳ در هر یک از حالات زیر بیابید :

(الف) اگر $\phi=x+y+z$؛

(ب) اگر $\phi=x^2+y^2+z^2$.

۴.۱۰ قضیهٔ واگرایی

چنان که قبلاً قول داده بودیم ، اکنون به بحث دقیقتر و تفصیلی قضیهٔ واگرایی می‌پردازیم . برای تثبیت شرایط ، میدان برداری

$$\mathbf{F}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$$

را ،که بر یک ناحیه تعریف شده است و مشتقات جزئی مؤلفه‌های F_1 ، F_2 ، و F_3 بر این ناحیه پیوسته‌اند ، در نظر می‌گیریم . فرض کنید S سطح *کره‌ای* از این ناحیه و D مجموعهٔ نقاط درون S باشد . فرض کنید $\mathbf{n}$ میدان برداری یکهٔ قائم بر S باشد . فرض می‌کنیم در هر نقطه از S، بردار $\mathbf{n}$ قائم برونسو باشد تا S مطابق قرار داد جهت دار شده باشد.

انتگرال سطح زیر را در نظر می‌گیریم :

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\, dS \tag{۴۳.۴}$$

که برحسب مؤلفه‌ها به صورت

$$\iint_S (F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k})\cdot\mathbf{n}dS \tag{۴۴.۴}$$

نوشته می‌شود که برابر است با :

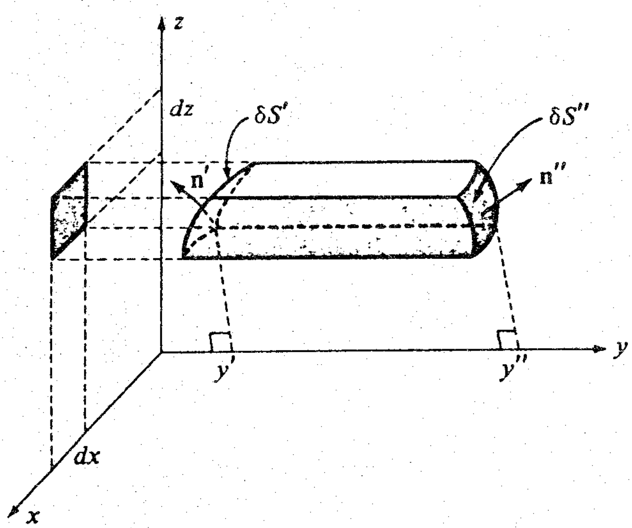
$$\iint_S F_1(\mathbf{n}\cdot\mathbf{i})dS + \iint_S F_2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{j})dS + \iint_S F_3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})dS \tag{۴۵.۴}$$

اکنون تلاش خود را بر یکی از این انتگرالها ، مثلاً انتگرال میانی ، متمرکز می‌کنیم . فرض کنید کره به رشته‌های باریکی موازی با محور y تقسیم شود . یک نمونه از این رشته‌ها در شکل (۳۲.۴)

نشان داده شده است . این رشته دارای سطح مقطع عرضی $dxdz$ است و S را در دو جا به مساحتهای $\delta S'$ و $\delta S''$ قطع می‌کند . سهم انتگرال میانی از این دو مقطع تقریباً برابر است با :

$$F_2'(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{j})\delta S'+F_2''(\mathbf{n}''\cdot\mathbf{j})\delta S''$$

که در آن F'_2 و F''_2 مقادیر F_2 در تقاطی از این دو مقطع به ترتیب مذکور می‌باشند. به استناد اصل کسینوس مساحت (بخش ۶.۴) ، $(\mathbf{n}''\cdot\mathbf{j})\delta S''$ و $(\mathbf{n}'\cdot\mathbf{j})\delta S'$ تقریباً برابرند با $dxdz$ و $-dxdz$ ، زیرا حاصل ضرب اسکالر دو بردار یکّه با کسینوس زاویهٔ بین آنها برابر است . بنابراین ، سهم رشته از این دو مقطع عبارت است از : $(F_2''-F_2')dxdz$.



شکل ۳۲.۴

چون ، به موجب قضیهٔ بنیادی حساب دیفرانسیل و انتگرال ، داریم :

$$\int_{y'}^{y''}\frac{\partial F_2}{\partial y}\,dy = F_2''-F_2'$$

از بحث بالا نتیجه می‌شود که انتگرال میانی از انتگرالهای (۴۵.۴) را می‌توان به صورت

$$\iint_s \left(\int_{y'}^{y''} \frac{\partial F_2}{\partial y}\, dy \right) dxdz$$

نوشت که در آن انتگرالگیری با تغییر y از y' تا y'' در درون کره انجام و انتگرال دوگانه بر تصویر S بر صفحهٔ xy گرفته می‌شود. با این وجود ، این انتگرال برابر انتگرال حجم بر D است . ازاین رو ، می‌توان نوشت :

$$\iint_s F_2 \mathbf{j}\cdot\mathbf{n}\, dS = \iiint_D \frac{\partial F_2}{\partial y}\, dxdydz$$

بنابراین ، انتگرال سطح $F_2(\mathbf{n}\cdot\mathbf{j})$ بر S با انتگرال حجم $\partial F_2/\partial y$ بر حوزهٔ محدود به S برابر است .

به طریق مشابه ، می‌توان نشان داد که انتگرال سطح $F_1(\mathbf{n}\cdot\mathbf{i})$ بر S برابر انتگرال حجم $\partial F_1/\partial x$ در D است ؛ و $F_3(\mathbf{n}\cdot\mathbf{k})$ و $\partial F_3/\partial z$ رابطهٔ مشابهی با یکدیگر دارند . بنابراین ، (۴۵.۴) به صورت زیر در می‌آید :

$$\iiint_D \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) dxdydz$$

این صرفاً انتگرال حجم واگرایی میدان برداری $\mathbf{F}$ در D است . چون (۴۳.۴) و (۴۵.۴) با هم برابرند ، خواهیم داشت :

$$\iint_s \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS = \iiint_D \mathrm{div}\mathbf{F}dV \qquad (۴۶.۴)$$

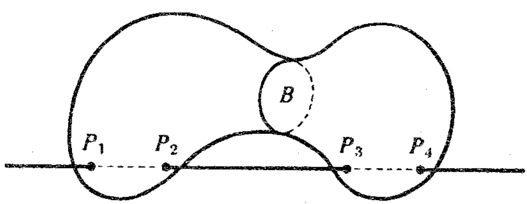
به این طریق قضیهٔ واگرایی را در مورد یک کره ثابت کردیم . با این وجود ، توجه کنید که همین استدلال در حالتهایی که S سطح یک بیضیگون ، یک مکعب ، یک استوانهٔ مستدیر قائم ، یا حتی یک ناحیهٔ سیب زمینی شکل با ساختاری کاملاً دلخواه است ، صورت می‌گیرد. گزارهٔ دقیق حکمی که ثابت شد چنین است :

قضیهٔ ۵.۴ (قضیهٔ واگرایی) *فرض کنید D حوزه‌ای با این خاصیّت باشد که هرخط راست که از یک*

نقطهٔ داخلی این حوزه بگذرد ، مرز حوزه را دقیقاً در دو نقطه قطع کند ؛ و فرض کنید که مرز S یک سطح قطعه‌قطعه هموار ،بسته ، و جهت دار با جهتی از درون به برون حوزه باشد. فرض کنید میدان برداری $\mathbf{F}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}+F_3\mathbf{k}$ و مشتقات جزئی F_1 ، F_2 ، و F_3 در سرتاسر ناحیه‌ای شامل D و مرز آن پیوسته باشند. آن گاه

$$\iint_D \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV = \iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS$$

در اثبات این قضیه ، از ایدهٔ تقسیم کره به رشته‌هایی موازی یکی از محورهای مختصات فایدهٔ بسیار برده‌ایم . در شکل (۳۲.۴) فرض کرده‌ایم که هر چنین رشته‌ای دو مقطع با سطح مفروض دارد. به این ترتیب ، این استدلال بدون هیچ پیرایشی در مورد ناحیه‌ای نظیر دمبل شکل زیر مؤثر واقع نمی‌شود.



شکل ۳۳.۴

در این مورد ، یک چنین رشته‌ای سطح مفروض را در چهار موضع قطع می‌کند. با این وجود ، به آسانی دیده می‌شود که قضیهٔ واگرایی در مورد چنین حوزه‌ای نیز قابل اعمال است ، زیرا می‌توانیم دمبل را از وسط به دو نیم کنیم و قضیه را برای هر قسمت جداگانه به کار ببریم . انتگرال حجم بر تمامی حوزه برابر حاصل جمع انتگرال حجم بر هر یک از دو قسمت است ، و از جمع انتگرال سطح متناظر هر قسمت انتگرال سطح بر تمامی دمبل به دست می‌آید (در مرز مشترک B دو سهم وجود دارد که حذف می‌شوند ، زیرا جهت $\mathbf{n}$ در یک انتگرال مخالف جهت این بردار در انتگرال دیگر

است).

حال یکی از نتایج جالب قضیهٔ واگرایی را مورد بحث قرار می‌دهیم . فرض کنید حوزهٔ D حوزه‌ای بسیار کوچک باشد که نقطه‌ای چون D را احاطه کرده است . اگر این حوزه به قدر کافی کوچک باشد ، واگرایی $\mathbf{F}$ تقریباً ثابت خواهد بود ، و انتگرال حجم $\operatorname{div}\mathbf{F}$ بر حجم V تقریباً برابر حاصل ضرب $(\operatorname{div}\mathbf{F})V$ خواهد بود . با بیانی دقیقتر ، داریم :

$$\lim_{V\to 0} \frac{\iiint \operatorname{div}\mathbf{F}\,dV}{V} = \operatorname{div}\mathbf{F}$$

به استناد قضیه واگرایی ، ما می‌توانیم انتگرال حجم $\operatorname{div}\mathbf{F}$ را با انتگرال سطح $\mathbf{F}$ ، بر مرزی که این حجم را در بر گرفته است ، تعویض کنیم که از آن نتیجه می‌شود که

$$\operatorname{div}\mathbf{F} = \lim_{V\to 0} \frac{\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\,dS}{V}$$

یادآوری می‌کنیم که این انگیزهٔ اوّلیهٔ ما برای تعریف واگرایی در بخش (۳.۳) بود ، ولی پس از آن بحث خود را به متوازی السطوحهای قائمی که وجوه آنها موازی با محورهای مختصات باشد محدود کردیم . قضیهٔ واگرایی ما را از این محدودیّت رها کرد ؛ زیرا این قضیه ایجاب می‌کند که واگرایی $\mathbf{F}$ در هر نقطهٔ P ، صرف نظر از شکل حجم ، شار خروجی از واحد حجم در نقطهٔ P باشد. در واقع ، واگرایی ، مفهومی «مستقل از مختصات» است .

تمرینات

توجه کنید . تمرینات محاسباتی در مورد قضیهٔ واگرایی در آخر بخش (۹.۴) داده شد. تمرینات زیر تا حدی جنبهٔ نظری دارند. در این تمرینات ، D و $\mathbf{F}$ واجد خواص مذکور در قضیهٔ واگرایی می‌باشند.

۱. در چه قسمتی از برهان قضیهٔ واگرایی از پیوستگی مشتق جزئی $\partial F_2/\partial y$ ، به عنوان تابعی از y ،

استفاده کرده‌ایم ؟

۲. در برهان قضیهٔ واگرایی ، لازم بود که مشتقات جزئی سه گانه پیوسته باشند. یعنی ، هر یک از آنها نسبت به سه متغیر پیوسته باشد ؛ به عنوان مثال ، چرا باید از پیوستگی مشتق جزئی $\partial F_2/\partial y$ به عنوان تابعی از x مطمئن شویم ؟

۳. با نموداری شبیه نمودار شکل (۳۲.۴) نشان دهید که انتگرال حجم یک تابع بر D به این ترتیب نیز قابل حصول است که اوّل بر حسب z انتگرال گرفته شود و سپس بر تصویر S بر صفحهٔ xy.

۴. با انتخاب تمرین (۳) به عنوان نقطهٔ شروع استدلال ، برهانی برای قضیهٔ واگرایی ارائه کنید. از انتگرال

$$\iiint_D \operatorname{div}\mathbf{F}dV$$

که نخست برحسب z گرفته شود ، شروع کنید. برهان شما با برهانی که در این بخش عرضه شد کمی تفاوت دارد ، یعنی ، شما اوّل به جای y برحسب z انتگرال می‌گیرید. برای سهولت استدلال ، فرض کنید S یک سطح هموار باشد ، و ، به استناد تعریف انتگرال سطح ، از به کار بردن کلماتی چون «تقریباً» کاملاً اجتناب کنید.

۵. در برهان خود (تمرین ۴) ، در کجا ناآگاهانه از این واقعیت استفاده کرده‌اید که اگر مواضعی از سطح S را که قائمی موازی با صفحهٔ xy دارند بر این صفحه تصویر کنیم ، مساحت تصویر صفر است ؟ [*راهنمایی* : مجدداً به تعریف مساحت یک سطح (بخش ۶.۴) نگاه کنید. برای چنین مواضعی $\cos\gamma$ چقدر است ؟]

۶. اگر $\mathbf{F}=x^3\mathbf{i}+yx\mathbf{j}-x^3\mathbf{k}$ ، شاری که از واحد حجم در (۳,۱,-۲) تراوش می‌کند چقدر است ؟

۷. اگر $\mathbf{F}=3x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ ، شاری که از یک بیضیگون به حجم V تراوش می‌کند چقدر است ؟

۸. اگر $\mathbf{F}=3x^2\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ ، آیا شاری که از یک بیضیگون تراوش می‌کند علاوه بر حجم به موضع بیضیگون نیز بستگی دارد ؟

۹. (الف) با قرارداد معمول ، که به موجب آن سطح بستهٔ مفروضی جهت دار می‌شود ، سطح جهت‌داری را که بر ناحیهٔ

$$1 \leq x^2+y^2+z^2+\leq 4$$

احاطه دارد توصیف کنید . (در بخش «۶.۴» تذکر دادیم که اگر سطحی ناحیه‌ای از فضـا را در برگیرید ، قائم یکّه در جهت از درون به برون ناحیهٔ محصور شده خواهد بود ؛ در این مسأله ، سطح مفروض دو بخش جداگانه دارد.)

(ب) انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم میدانی برداری چون $\mathbf{F}$ را بر این سطح چگونه محاسبه می‌کنید ؟

(ج) اگر $\mathrm{div}\mathbf{F}=0$ ، به جز احتمالاً در مبدأ ، دربارهٔ انتگرال

$$\iint \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ dS$$

بر دو قسمت این سطح چه می‌توان گفت ؟ در هر حالت ، $\mathbf{n}$ را قائم یکّه‌ای بگیرید که از مبدأ دور می‌شود .

(د) اگر ناحیهٔ مفروض ، ناحیهٔ بین کرهٔ $x^2+y^2+z^2=1$ و بیضیگون

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$$

باشد ، آیا جواب بند (ج) تغییر می‌کند ؟

(هـ) انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم

$$\mathbf{F}=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}}$$

را بر بیضیگون زیر محاسبه کنید .

$$\frac{x^2}{4}+\frac{y^2}{9}+\frac{z^2}{16}=1$$

۱۰.(الف) با استفاده از قضیهٔ واگرایی ، ثابت کنید که

$$\iiint_D \nabla^2\phi\ dV=\iint_s \frac{\partial\phi}{\partial n}\ dS$$

که در آن $\partial\phi/\partial n$ میزان تغییر میدان اسکالر را در هر نقطهٔ S در جهت قائم برونسو در آن نقطه نشان می‌دهد (*راهنمایی* : فرض کنید $\mathbf{F}=\mathbf{grad}\ \phi$.)

(ب) قضیهٔ واگرایی را در مورد $\mathbf{F}=\phi\nabla\psi$ برای تحصیل «اولین فرمول گرین» به کار برید:

$$\iiint_D \phi\nabla^2\psi \, dV = \iint_s \phi\frac{\partial\psi}{\partial n}\, dS - \iiint_D \nabla\phi\cdot\nabla\psi \, dV$$

(ج) نقش ϕ و ψ را برای تحصیل «دومین فرمول گرین» تعویض کنید.

$$\iiint_D (\phi\nabla^2\psi-\psi\nabla^2\phi)dV = \iint_S (\phi \frac{\partial\psi}{\partial n} - \psi \frac{\partial\phi}{\partial n})dS$$

۱۱. فرض کنید ϕ یک میدان اسکالر باشد، با نمادی که در این بخش مورد استفاده قرار گرفت، «ناهنجاری» ϕ در هر نقطه را اسکالر

$$-\lim_{V\to 0} \frac{\iint_s \frac{\partial\phi}{\partial n}\, dS}{V}$$

تعریف کنید.

(الف) توضیح دهید که چرا اصطلاح «ناهنجاری» مناسب است. (*راهنمایی:* ϕ را چگالی یک شار، یا، اگر ترجیح می‌دهید، غلظت نمک در هر نقطه از یک محلول شفاف بگیرید.)

(ب) ناهنجاری، چگونه به لاپلاسی مربوط می‌شود؟ (تمرین «۱۰» را ببینید.)

(ج) دربارهٔ ناهنجاری یک تابع همساز چه می‌توانید بگویید؟ (بخش «۶.۳» را ببینید.)

۱۲. فرض کنید $\phi(x,y,z)$ دمای نقطهٔ (x,y,z) باشد. اگر ϕ توزیع دمای حالت پایا باشد، نشان دهید که ϕ یک تابع همساز است. [*راهنمایی:* با رسم یک متوازی السطوح و استفاده از این واقعیت که $\mathbf{Q}=-k\ \mathbf{grad}\ \phi$ میزان گرمای ناشی از واحد سطح را نشان می‌دهد (بخش ۷.۴)، حکم مذکور رامستقیماً می‌توان ثابت کرد. با این وجود، مقصود این است که شما از تمرین (۱۰) و ایده‌های مطرح شده در تمرین (۱۱) استفاده کنید.]

۱۳. فرض کنید ϕ توزیع دما در حالت ناپایا باشد، که در این صورت ϕ تابعی از موضع و زمان است. رابطهٔ بین لاپلاسی ϕ و میزان تغییر ϕ در واحد زمان در هر نقطه را بیابید. (فرض کنید k ضریب رسانندگی گرمایی، c گنجایش گرمایی، و ρ چگالی جرم باشد.)

۱۴. فرض کنید S کرهٔ به شعاع b و مرکز P و ϕ تابعی پیوسته باشد. انتگرال زیر را در نظر بگیرید:

$$\iint_S \phi \nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot \mathbf{n}\ dS$$

در این انتگرال ، $\mathbf{n}$ قائم یکهٔ برونسو است و $r=|\mathbf{R}|$ ، که در آن $\mathbf{R}$ از مرکز کره به نقطهٔ دلخواهی از سطح کره رسم می‌شود. حد این انتگرال ، وقتی b به صفر میل کند چیست ؟ (شما نمی‌توانید از قضیهٔ واگرایی استفاده کنید ، زیرا $1/r$ در $r=0$ تعریف نشده است . ملاحظه کنید که

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)=-\frac{\mathbf{R}}{r^3} \quad \text{و} \quad \mathbf{n}=\frac{\mathbf{R}}{r}$$

که از آنها رابطهٔ

$$\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\cdot\mathbf{n}=-\frac{1}{r^2}=-\frac{1}{b^2}$$

برای نقاط روی سطح نتیجه می‌شود.)

۱۵. فرض کنید $\mathbf{F}$ یک میدان برداری باشد که در همه جا تعریف شده و در همه جا ، به جز نقطهٔ P ، به طور پیوسته مشتق پذیر و واگرایی آن صفر باشد (به جز در P) . فرض کنید S' یک سطح بسته (مثلاً یک بیضیگون) در برگیرندهٔ P و S سطح یک کرهٔ کوچک به مرکز P باشد که به طور کامل درون S' قرار گیرد. انتگرالهای

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS \qquad \text{و} \qquad \iint_{S'} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}dS'$$

را ، که در آنها $\mathbf{n}$ در هر حالت قائم یکهٔ برونسو است ، مقایسه کنید.

۱۶. فرض کنید ϕ تابعی دارای مشتق دوّم پیوسته باشد که در ناحیهٔ D محدود به سطح همواری چون S تعریف شده است ، و فرض کنید r فاصله‌ای باشد که از یک نقطهٔ ثابت چون P در درون D اندازه‌گیری می‌شود. فرمول سوم گرین را ثابت کنید :

$$\phi(P)=-\frac{1}{4\pi}\iiint_D \frac{\nabla^2\phi}{r}\,dV+\frac{1}{4\pi}\iint_s\left[\frac{\nabla\phi}{r}-\phi\nabla\left(\frac{1}{r}\right)\right]\cdot dS$$

(*راهنمایی*: کرهٔ کوچکی به مرکز P جدا کنید و در فرمول دوم گرین قرار دهید $\psi=1/r$ و از نظریهٔ مندرج در تمرینهای (۱۴) و (۱۵) برای بحث در این کره استفاده کنید.)

۱۷. انتگرال

$$\iint_s\left[\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial n}-\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)\right]dS$$

را، که در آن $r=x^2+y^2+z^2$ و $\phi=xyz+5$، بر سطح کرهٔ $(x-3)^2+y^2+z^2=25$ محاسبه کنید. با استفاده از فرمول تمرین (۱۶)، باید قادر باشید که فوراً به جواب برسید.

۱۸. انتگرال

$$\iint_s\left[\phi\frac{\partial}{\partial n}\left(\frac{1}{r}\right)-\frac{1}{r}\frac{\partial\phi}{\partial n}\right]dS$$

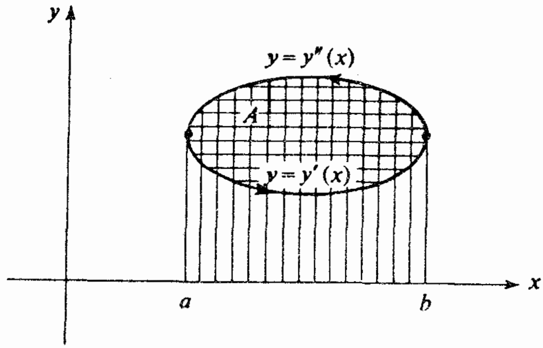
را در هر یک از حالات زیر محاسبه کنید.

(الف) بر سطح بیضیگون $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{16}+\frac{z^2}{25}=1$، که در آن $r^2=x^2+(y-1)^2+z^2$ و $\phi=x^2+y^2-2z^2+4$؛

(ب) بر سطح استوانهٔ محدود به $x^2+y^2=25$ و $z\pm 10$، که در آن $r^2=(x-2)^2+(y-1)^2+(z-3)^2$ و $\phi=x^2-z^2+5$.

۱۱.۴ قضیهٔ گرین

این بخش نسبتاً مقدماتی است و هدف از آن فراهم نمودن مقدمات یک برهان دقیق از قضیهٔ استوکس می‌باشد.



شکل ۳۴.۴

بحث ما تماماً در صفحهٔ xy خواهد بود. فرض کنید C کمان هموار بسته‌ای در این صفحه باشد (شکل ۳۴.۴). انتگرال خط میدان برداری $\mathbf{F}=y\mathbf{i}$ حول C را در نظر بگیرید:

$$\oint_c \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \int_c y\,dx$$

(چون، به موجب قرارداد، جهت منحنیهای بستهٔ صفحهٔ xy چنان است که $\mathbf{k}$ قائم مثبت بر صفحه باشد، C را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیماییم.) آن گاه انتگرال خط مذکور را می‌توان به صورت مجموع دو انتگرال معمولی

$$\int_c y\,dx = \int_a^b y'(x)\;dx + \int_b^a y''(x)\;dx \qquad (۴۷.۴)$$

نوشت که اوّلی در امتداد قسمت بالایی منحنی و دومی در امتداد قسمت پایینی منحنی است؛ و نمادهای به کار رفته در (۴۷.۴) خود به خود از روی شکل مشخص می‌شود. (توجه کنید که در این جا نمادهای «′» و «″» مشتقات را نشان نمی‌دهند.)

انتگرال اوّل برابر مساحت زیر منحنی پایینی و بالای محور x است. انتگرال دوّم برابر است با

$$-\int_a^b y''(x)\ dx$$

و مساحت سطح زیر منحنی بالایی و بالای محور x را با علامت منفی می‌دهد. بنابراین، حاصل جمع دو انتگرال برابر با A-، یعنی مساحت درون C با علامت منفی، است:

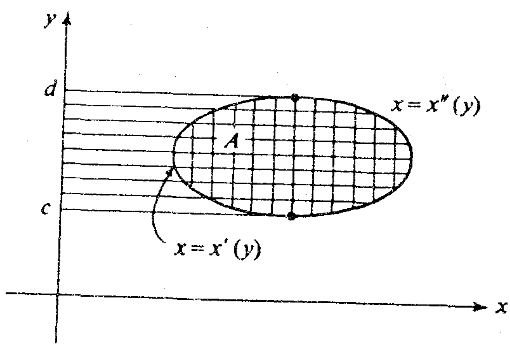
$$\int_c y dx = -A \tag{۴۸.۴}$$

فرض کردیم که C در نیم صفحهٔ بالایی است، ولی خواننده به آسانی می‌تواند تحقیق کند که (۴۸.۴) حتی در مواردی که C محور x را قطع کند یا زیر این محور باشد، نیز برقرار است.

یک بحث مشابه نشان میدهد که

$$\int_c x dy = A \tag{۴۹.۴}$$

در این جا، چنان که از شکل (۳۵.۴) دیده می‌شود، ما به A می‌رسیم نه A-.



شکل ۳۵.۴

حال انتگرالگیری ساده و متنوع دیگری را دربارهٔ C بررسی می‌کنیم . به عنوان مثال ، به سادگی می‌توان تحقیق کرد که اگر **F** میدان برداری **F**=x**i** باشد ، آن گاه

$$\int_C x\,dx = 0 \qquad (۵۰.۴)$$

در واقع ، x**i** گرادیان تابع $x^2/2$ است که در این صورت انتگرال خط xdx تغییرات $x^2/2$ را در حرکت از نقطهٔ ابتدا تا نقطهٔ انتها به دست می‌دهد ، امّا در مورد هر منحنی بسته این نقاط بر هم منطبق می‌شوند و ، از این رو ، انتگرال خط برابر صفر است . به طور مشابه ، چون y**i** نیز یک گرادیان است، داریم :

$$\int_C y\,dy = 0 \qquad (۵۱.۴)$$

همچنین ، داریم :

$$\int_C dx = 0 \qquad (۵۲.۴)$$

$$\int_C dy = 0 \qquad (۵۳.۴)$$

ترکیب این انتگرالهای خط به طرق مختلف اگرچه سازنده نیست ولی سرگرم کننده است ؛ مثلاً ، اگر x_0 ثابت باشد ، از معادلات (۴۸.۴) و (۵۳.۴) نتیجه می‌گیریم که :

$$\int_C (x-x_0)\,dy = A \qquad (۵۴.۴)$$

به طریق مشابه ، از (۴۹.۴) و (۵۲.۴) لازم می‌آید که

$$\int_C (x-x_0)\,dx = 0 \qquad (۵۵.۴)$$

نتیجهٔ جالبتر این است که

$$\int_C \frac{1}{2}\,(xdy-ydx) = A \qquad (56.4)$$

که از ترکیب (۴۷.۴) و (۴۸.۴) به دست می‌آید.

نظر به اینکه انتگرالهای خط (۴۷.۴)، (۴۸.۴)، (۵۴.۴)، و (۵۶.۴) را می‌توان برحسب A، مساحت درون C، تعبیر کرد، طبیعی است بپرسیم که آیا تعبیر مشابهی برای دیگر انتگرالهای خط وجود دارد یا خیر؟ برای یک بحث کلی‌تر، فرض کنید دیفرانسیل دلخواهی چون $F_1(x,y)dx+F_2(x,y)dy$، که در آن F_1 و F_2 توابعی پیوسته‌اند، مفروض باشد. آیا بین انتگرال خط این دیفرانسیل حول C و مساحت درون C رابطه‌ای وجود دارد؟

پاسخ هم «بلی» و هم «خیر» است. به طور کلی، به این معنی که بتوانیم شکلی نظیر شکل (۳۵.۴) رسم و انتگرال را برحسب مساحتها تعبیر کنیم، هیچ رابطه‌ای وجود ندارد. با این وجود، بین انتگرال خط حول C و انتگرال دوگانه‌ای که بر ناحیهٔ درون C گرفته شود، یک رابطه وجود دارد. نشان خواهیم داد که

$$\int_C F_1dx + F_2dy = \iint_D \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y}\right) dxdy \qquad (57.4)$$

که در آن D حوزهٔ درون C با مساحت A است. در حالت خاصی که تابع زیر نماد انتگرال در انتگرال دوگانهٔ سمت راست (۵۷.۴) تابع واحد باشد، چنان‌که در معادلهٔ (۵۶.۴) چنین است، سمت راست (۵۷.۴) دقیقاً برابر A خواهد بود. اگر تابع زیر نماد انتگرال تابع صفر باشد، انتگرال صفر خواهد شد. با این وجود، به طور کلی امکان دارد در هر حالت مقدماتی نتیجه‌ای که به دست می‌آوریم به A مربوط نباشد و امکان دارد محاسبه حتی به کمک (۵۷.۴) مشکل باشد.

ممکن است خواننده (۵۷.۴) را حالت خاصی از قضیهٔ استوکس، که مختصراً در بخش (۹.۴) مورد بحث قرار گرفت، بداند. برای پی‌بردن به این نکته، فرض کنید: $\mathbf{F}=F_1\mathbf{i}+F_2\mathbf{j}$ و $\mathbf{n}=\mathbf{k}$. آن گاه، انتگرال طرف چپ، انتگرال خط مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{F}$ حول C است، و انتگرال سمت راست، انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم $\mathbf{curl\ F}$ بر سطح محصور در C است.

این حالت خاص قضیهٔ استوکس را گاهی قضیهٔ گرین نامیده‌اند. (چندین قضیهٔ دیگر نیز قضیهٔ گرین نامیده شده‌اند.) بیان دقیق قضیهٔ گرین به صورت زیر است :

قضیهٔ ۴.۷ *فرض کنید* F_1 *و* F_2 *توابع پیوسته‌ای از* x *و* y *باشند به طوری که مشتقات جزئی* $\partial F_2/\partial x$ *و* $\partial F_1/\partial y$ *موجود و در سرتاسر حوزهٔ* D *از صفحهٔ* xy *پیوسته باشند. فرض می‌کنیم* D *محدود به منحنی بستهٔ منظمی چون* C *باشد که با انتخاب* $\mathbf{k}$ *به عنوان قائم یکه بر صفحهٔ* xy *جهت دار شده است . نیز فرض می‌کنیم که هر خط مار بر یک نقطهٔ داخلی* D *و موازی با یکی از محورهای مختصات مرز* D *را درست در دو نقطه قطع کند . آن گاه (۵۷.۴) برقرار است . در حالت کلی‌تر ، (۵۷.۴) برای آن نواحی از صفحه که قابل تجزیه به تعدادی متناهی حوزه با خواص مذکور باشد نیز برقرار است .*

اثبات این قضیه مشابه اثبات قضیهٔ واگرایی و به صورت زیر است :

برهان نخست توجه خود را به طرف راست (۵۷.۴) معطوف می‌کنیم . انتگرال طرف راست به دو انتگرال تجزیه می‌شود که اولی عبارت است از :

$$\int\int_D \frac{\partial F_2}{\partial x}\, dxdy$$

که اگر (با نمادهای شکل ۳۵.۴) ابتدا برحسب x انتگرال بگیریم ، خواهیم داشت :

$$\int_c^d\int_{x'(y)}^{x''(y)} \frac{\partial F_2}{\partial x}\, dxdy = \int_c^d [F_2(x'',y)-F_2(x',y)]\; dy = \int_C F_2 dy$$

به طور مشابه ،

$$-\int\int \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dxdy = -\int_a^b\int_{y'(x)}^{y''(x)} \frac{\partial F_1}{\partial y}\, dxdy$$

$$= \int_a^b [F_1(y')-F_1(y'')]\; dx = \int_C F_1 dx$$

از جمع این دو انتگرال نتیجهٔ مطلوب عاید می‌شود . اگر بتوانیم ناحیهٔ D را به تعدادی متناهی حوزه با خواص مذکور در قضیه تجزیه کنیم ، انتگرالهای نظیر این حوزه‌ها را با هم جمع می‌کنیم . آن گاه انتگرال دوگانه بر همهٔ قسمتها و انتگرال خط بر همهٔ مرز گسترش می‌یابد. اگر قسمتی از مرز دو حوزه مشترک باشند ، از آن می‌توان صرف نظر کرد ؛ زیرا انتگرالهای متناظر با این قسمت مشترک حذف می‌شوند (به شکل «۲۹.۴» مراجعه کنید.)

تمرینات

۱. معادلهٔ (۴۸.۴) را با استفاده از قضیهٔ گرین نتیجه بگیرید.

۲. (۴۹.۴) را با استفاده از قضیهٔ گرین نتیجه بگیرید.

۳. (۵۰.۴) را با استفاده از قضیهٔ گرین نتیجه بگیرید.

۴. (۵۶.۴) را با استفاده از قضیهٔ گرین نتیجه بگیرید.

۵. فرض کنید $\mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ و $d\mathbf{R}=dx\mathbf{i}+dy\mathbf{j}$.

(الف) اندازهٔ حاصل ضرب برداری $\mathbf{R}\times(\mathbf{R}+d\mathbf{R})$ را محاسبه کنید.

(ب) با استفاده از (الف) ، یک تعبیر هندسی مستقیم از انتگرالده (۵۶.۴) ارائه کنید. [*راهنمایی* : مثلث با رئوس $(0,0)$ ، (x,y) ، و $(x+dx,y+dy)$ را در نظر بگیرید.]

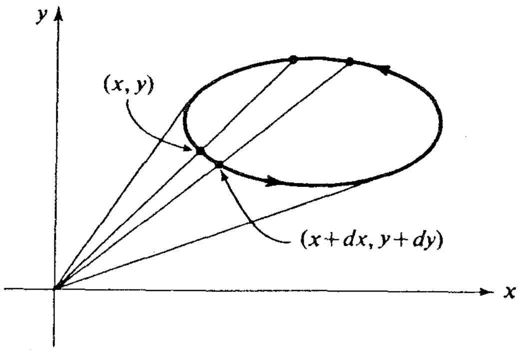
(ج) با استفاده از شکل (۳۶.۴) ، طریق دیگری برای اثبات (۵۶.۴) بیان کنید.

۶. فرض کنید $\mathbf{F}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}$ و C یک منحنی بستهٔ جهت دار باشد که سطحی به مساحت A را احاطه کرده است . انتگرال

$$\int_C \mathbf{F}\cdot\mathbf{T}\ ds$$

چیست ؟ (مطابق معمول ، $\mathbf{T}$ بردار یکهٔ مماس بر منحنی C در جهت مثبت است.)

۷. فرض کنید C دایرهٔ $x^2+y^2=9$ و $\mathbf{F}=y\mathbf{i}-3x\mathbf{j}$ باشد. انتگرال خط مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{F}$ حول C ، که در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت گرفته شود ، چیست ؟



شکل ۳۶.۴

۸. فرض کنید C بیضی $(x^2/4)+(y^2/9)=1$ باشد و

$$\mathbf{F}=(2y^2-y)\mathbf{i}+(x^2+2)\mathbf{j}$$

(الف) مساحت محصور در C چیست ؟ (انترالگیری نکنید ، ما قبلاً مساحت بیضی را با استفاده از اصل کسینوس مساحت به دست آورده‌ایم.)

(ب) انتگرال خط مؤلفهٔ مماسی **F** حول C را در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت بیابید . [*راهنمایی* : به موجب قضیهٔ گرین ، این خود به یک انتگرال دوگانه تبدیل می‌شود ، امّا اگر ملاحظه کنید که به دلیل وجود تقارن شما قادر خواهید بود که بعضی از جملات را نادیده بگیرید، هیچ محاسبه‌ای ضرورت نخواهد داشت . فقط مساحت را در مقدار میانگین $(\partial F_2/\partial x)-(\partial F_1/\partial y)$ ضرب کنید.)

۹. انتگرال

$$\int_C (4y^3dx-2x^2dy)$$

را حول مربع محدود به خطوط $x=\pm 1$ و $y=\pm 1$ به طرق زیر محاسبه کنید :

(الف) مستقیماً با تشکیل انتگرال خط ؛

(ب) با استفاده از قضیهٔ گرین ؛

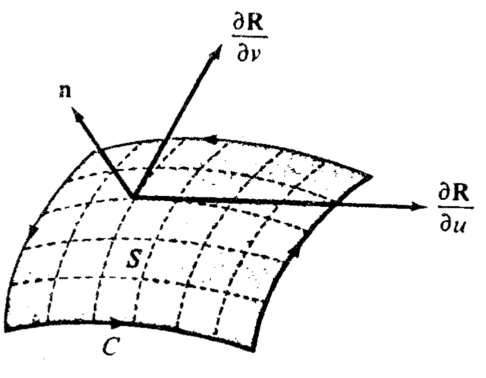
(ج) با استفاده از تقارن، بدیهی است که یکی از جمل انتگرالده در انتگرال خط بالا را می‌توان نادیده گرفت. کدام جمله؟

۱۰. فرض کنید $\mathbf{F}=۴z\mathbf{i}-۳x\mathbf{k}$. انتگرال خط مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{F}$ را در صفحهٔ xz حول دایرهٔ $(x-۵)^۲+(z-۷)^۲=۴$ محاسبه کنید. صفحه را با فرض $\mathbf{j}$ به عنوان قائم یکه جهت دار کنید. [*مواظب باشید*: اگر در معادلهٔ (۵۷.۴) فقط y را با z عوض کنید، جهت نادرستی خواهید داشت.]

۱۱. در (۵۷.۴)، توابع $F_۱$ و $F_۲$ توابع کاملاً دلخواهی از x و y هستند (فقط پیوستگی بعضی از مشتقات جزئی ضرورت دارد). بنابراین به نظر می‌رسد که می‌توانیم $F_۱$ و $F_۲$ و نیز x و y را با هم عوض کنیم و فرمول زیر را نتیجه بگیریم:

$$\int_c (F_۲dy+F_۱dx)=\iint_D\left(\frac{\partial F_۱}{\partial y}-\frac{\partial F_۲}{\partial x}\right)dydx$$

طرف چپ این معادله همان طرف چپ (۵۷.۴) است، ولی طرف راست آن در یک علامت با طرف راست (۵۷.۴) اختلاف دارد. نتیجه می‌شود که این معادله نادرست است. *فقط در یک کلمه* به این تناقض پاسخ دهید.

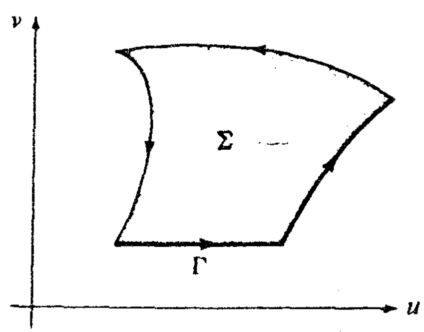


شکل ۳۷.۴

۱۲.۴ قضیه استوکس

اکنون در موقعیتی هستیم که برهان دقیقی از قضیهٔ استوکس را، که به موجب آن بعضی از انتگرالهای سطح به انتگرالهای خط تبدیل می‌شوند، عرضه کنیم. فرض می‌کنیم سطح جهت دار هموار چون S در فضا مفروض است که به منحنی قطعه قطعه هموار و بستهٔ C، که جهتش با جهت S سازگار است، محدود می‌باشد (شکل ۳۷.۴). فرض می‌کنیم که سطح S را می‌توان با $\mathbf{R}=\mathbf{R}(u,v)$ چنان پارامتری کرد که مختصات x، y، و z توابعی دارای مشتق دوم پیوسته از u و v باشند (که در این صورت مشتقات جزئی مخلوط با هر ترتیبی با هم برابر خواهند بود)، و $(\partial\mathbf{R}/\partial u\times\partial\mathbf{R}/\partial v)$ در جهت قائم باشد.

مجموعهٔ مقادیر (u,v) از صفحهٔ uv که با نقاط S متناظرند به $\sum$ نمایش داده می‌شود (شکل ۳۸.۴). فرض می‌کنیم که نقاط متمایز $\sum$ متناظر با نقاط متمایز S باشند (نگاشت $\mathbf{R}(u,v)$ یک به یک است) و ناحیهٔ $\sum$ و مرزش Γ در مفروضات قضیهٔ گرین صدق کنند (توجه کنید که این مفروضات ایجاب می‌کنند که جهت مثبت C با جهت درست Γ متناظر باشد؛ تمرین (۸) را ببینید.) آن گاه می‌توانیم حکم زیر را نتیجه بگیریم:



شکل ۳۸.۴

قضیهٔ ۶.۴ فرض کنید S و C به صورتی باشند که در بالا توصیف شدند، و فرض کنید $\mathbf{F}$ یک میدان برداری به طور پیوسته مشتق پذیر باشد؛ آن گاه

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \int\int_S \mathbf{curl F} \cdot d\mathbf{S} \tag{۵۸.۴}$$

ملاحظه کنید که ما از نماد

$$d\mathbf{S} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\, du \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\, dv \tag{۵۹.۴}$$

که در بخش (۶.۴) معرفی شد، استفاده می‌کنیم . در اثبات قضیه ، از اتحادهای

$$d\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\, du + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\, dv \tag{۶۰.۴}$$

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \cdot \nabla \tag{۶۱.۴}$$

$$\frac{\partial}{\partial v} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \cdot \nabla \tag{۶۲.۴}$$

نیز استفاده خواهد شد. قبل از شروع استدلال ، بهتر است خواننده بخش (۶.۴) و نیز اوّلین پاراگراف بخش (۷.۳) را ، که مربوط به عملگر دل است ، مرور کند . به این ترتیب ، برای نتیجه‌گیری معادلهٔ (۶۱.۴) ، کافی است قاعدهٔ زنجیری را در شکل عملگر به کار ببریم ،

$$\frac{\partial}{\partial u} = \frac{\partial x}{\partial u}\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial u}\frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial u}\frac{\partial}{\partial z} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \cdot \nabla \tag{۶۳.۴}$$

و (۶۲.۴) نیز به طریق مشابه نتیجه می‌شود. همچنین از معادلهٔ

$$\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\right) \times \nabla = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \cdot \nabla\right) - \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \cdot \nabla\right) \tag{۶۴.۴}$$

که از بسط ضرب برداری سه گانه و به کارگیری نماد دل به دست می‌آید ، استفاده خواهیم کرد. به طریق مشابه ، تعویض $\cdot$ و $\times$ در

$$\mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{B}=\mathbf{A}\times\nabla\cdot\mathbf{B} \tag{۶۵.۴}$$

به آسانی محقق می‌شود.

این تشریفات نباید ما را از ایدهٔ اصلی دور کند. آن ایده این است که بردار موضع $\mathbf{R}$ ، برای نقاط روی S ، و خود $\mathbf{F}$ در این نقاط را می‌توان به عنوان توابعی از پارامترهای u و v نوشت که ، در این صورت ، انتگرالهای (۵۸.۴) برحسب u و v نوشته خواهند شد. بعد از انجام این مقصود ، چنین به نظر می‌رسد که در صفحهٔ uv عمل می‌کنیم و برهان منحصر می‌شود به چند رابطه که ، با استعانت از قضیهٔ گرین ، ماهرانه از اتحادهای برداری الهام گرفته شده‌اند.

برهان می‌نویسیم :

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} = \int_\Gamma \left[\left(\mathbf{F}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial u}\right)du+\left(\mathbf{F}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial v}\right)dv\right] \qquad \text{[به استناد (۶۰.۴)]}$$

$$=\iint_\Sigma \left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\mathbf{F}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\mathbf{F}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial u}\right)\right]du\,dv \qquad \text{(قضیهٔ گرین)}$$

$$=\iint_\Sigma \left[\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial u}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial v}+\mathbf{F}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial u\partial v}-\mathbf{F}\cdot\frac{\partial^2\mathbf{R}}{\partial v\partial u}-\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial v}\cdot\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial u}\right]du\,dv$$

$$=\iint_\Sigma \left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial v}\frac{\partial}{\partial u}-\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial u}\frac{\partial}{\partial v}\right)\cdot\mathbf{F}\,du\,dv$$

$$=\iint_\Sigma \left[\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial v}\left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial u}\cdot\nabla\right)-\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial u}\left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial v}\cdot\nabla\right)\right]\cdot\mathbf{F}\,du\,dv$$

[به استناد (۶۱.۴) و (۶۲.۴)]

$$=\iint_\Sigma \left(\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial u}\times\frac{\partial\mathbf{R}}{\partial v}\right)\times\nabla\cdot\mathbf{F}\,du\,dv \qquad \text{[به استناد (۶۴.۴)]}$$

$$=\int\int_{\Sigma}\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\right)\cdot\nabla\times\mathbf{F}\ dudv$$ [به استناد (۶۵.۴)]

$$=\int\int_{\Sigma}(\mathbf{curl\ F})\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\right)\ dudv$$

$$=\int\int_{S}\mathbf{curlF}\cdot d\mathbf{S}$$ [به استناد (۵۹.۴)]

که نتیجه‌گیری کامل می‌شود.

این برهان فقط با عدم توجه کامل به محتوای فیزیکی از بحث بخش (۹.۴) آزاد می‌شود. این ، ارزش و توانایی ناشی از اعتماد به صورتهای پارامتری است .

تمرینات

۱. در هر نقطهٔ P از فضا ، «چرخش» $\mathbf{F}$ در P و در جهت $\mathbf{n}$ را

$$\lim_{A\to o}\frac{1}{A}\int_{c}\mathbf{F}\cdot d\mathbf{R} \qquad (۶۶.۴)$$

تعریف می‌کنیم که در آن C محیط دایره‌ای به مرکز P و قائم یکّهٔ $\mathbf{n}$ و مساحت A است . با استفاده از مفهوم «چرخش» ، $\mathbf{curl\ F}$ را تعریف کنید [*راهنمایی* : به استناد قضیهٔ استوکس نشان دهید که (۶۶.۴) برابر $(\mathbf{curl\ F})\cdot\mathbf{n}$ است . آن گاه ، با استفاده از اصل ماکسیمم ، که در بخش (۹.۱) بیان شد ، جهت $\mathbf{curl\ F}$ را تعریف کنید.] نشان دهید که نتیجه‌ای که از این تمرین عاید می‌شود مؤیّد تعریف تاو از طریق مطالعهٔ مکانیزم حرکت چرخ پره‌دار است . همچنین ، تعریفی که از این تمرین برای تاو به دست آمد مستقل از توصیف تاو با استفاده از مختصات است .

۲. لحظه‌ای به عالم تخیل بروید و S را سطح کیسه‌ای فرض کنید که بند کیسه مرز کیسه باشد که آن

را به C نشان می‌دهیم. آن گاه، به استناد قضیهٔ استوکس، انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم **curl F** بر سطح کیسه با انتگرال خط مؤلفهٔ مماسی تاو حول بند کیسه مساوی است. اکنون اگر بند را بکشیم و کیسه راببندیم، طول مؤثر بند (طول بخشی از بند که با کیسه در تماس است) به صفر میل می‌کند و، بنابراین، انتگرال خط نیز صفر می‌شود. این در حالی است که S به یک سطح بسته تبدیل شده است.

(الف) انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم **curl F** بر یک سطح بسته چیست؟

حال از قضیهٔ واگرایی استفاده می‌کنیم که می‌گوید انتگرال حجم واگرایی یک میدان برداری فضای درونی یک کیسهٔ بسته با انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم این میدان بر سطح کیسه مساوی است. فرض کنید این میدان برداری **curl F** باشد.

(ب) انتگرال حجم واگرایی **curl F** بر یک حوزه چیست؟ اگر کیسه خیلی کوچک باشد، واگرایی **curl F** تقریباً ثابت و انتگرال حجم div(**curl F**) تقریباً برابر حاصل ضرب div(**curl F**)، در یک نقطهٔ درونی کیسه، در حجم کیسه است.

(ج) div(**curl F**) در نقطه‌ای چون P چیست؟

(د) این به کدام یک از اتحادهای بخش (۷.۳) مربوط می‌شود؟

۳. این تمرین بسیار شبیه تمرین (۲) است ولی با نقطهٔ نظر متفاوت. فرض کنید S سطح کره‌ای باشد که به وسیلهٔ صفحه‌ای موازی صفحهٔ xy که از مرکز کره می‌گذرد به دو نیم کره، نیم کرهٔ بالایی و نیم کرهٔ پایینی، تقسیم شده است. (نموداری که نشان دهندهٔ این وضعیّت باشد رسم کنید.) فرض کنید **F** یک میدان برداری باشد، و انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم **curl F** را بر نیم کرهٔ بالایی در نظر بگیرید. این انتگرال سطح را در ذهن خود با انتگرال خط زیر ربط دهید:

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$$

که در آن C دایرهٔ عظیمهٔ مرز دو نیم کره است که نسبت به قائم برونسوی نیم کرهٔ بالایی جهت دار شده است (یعنی، جهت مثبت از غرب به شرق است).

همین کار را در مورد نیم کرهٔ پایینی انجام دهید: انتگرال سطح $(\mathbf{curl\ F})\cdot\mathbf{n}$ بر نیم کرهٔ پایینی با انتگرال خط بر C، که از غرب به شرق جهت دار شده باشد، مساوی است. این دو انتگرال را با هم جمع کنید.

(الف) انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم $\mathbf{curl\ F}$ بر یک کره چیست؟

(ب) انتگرال حجم $\mathrm{div}\,(\mathbf{curl\ F})$ فضای درونی یک کره چیست؟

(ج) اگر فرض کنیم کره در یک نقطهٔ جمع شود، با این عمل، دربارهٔ $\mathrm{div}(\mathbf{curl\ F})$ در یک نقطه چه می‌توان گفت؟

۴. فرض کنید $\mathbf{F}=\mathbf{grad}\ \phi$ به طوری که انتگرال خط مؤلفهٔ مماسی $\mathbf{F}$ در امتداد هر منحنی برابر تفاضل مقادیر ϕ در نقاط انتهایی آن منحنی باشد. بالاخص، اگر C یک منحنی بسته باشد،

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}=0$$

فرض کنید S سطحی با مرز C باشد.

(الف) انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم $\mathbf{curl}(\mathbf{grad}\ \phi)$ بر سطح S چیست؟

اگر S یک عنصربسیارکوچک سطح محدودبه یک منحنی بسته چون C باشد، $\mathbf{curl}(\mathbf{grad}\ \phi)$ بر S تقریباً ثابت خواهد بود، و انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم $\mathbf{curl}(\mathbf{grad}\ \phi)$ تقریباً مساوی حاصل ضرب $\mathbf{n}\cdot\mathbf{curl}(\mathbf{grad}\ \phi)$ در مساحت سطح خواهد بود.

(ب) اگر $\mathbf{n}$ یک بردار یکهٔ دلخواه در نقطه‌ای از فضا باشد، $\mathbf{n}\cdot\mathbf{curl}(\mathbf{grad}\ \phi)$ در این نقطه چیست؟

(ج) چون این نتیجه مستقل از جهت $\mathbf{n}$ است، دربارهٔ $\mathbf{curl}(\mathbf{grad}\ \phi)$ چه می‌توان گفت؟

(د) این به کدام یک از اتحادهای بخش (۷.۳) مربوط می‌شود؟

۵. فرض کنید $\mathbf{J}$ چگالی جریان الکتریکی (برداری در جهت جریان که اندازه‌اش با واحد جریان بر مساحت سنجیده می‌شود) و $\mathbf{B}$ شدت میدان مغناطیسی باشد. یکی از قوانین ماکسول در الکترومغناطیس این است که در یک میدان الکتریکی که از نظر زمانی بدون تغییر است،

$$\mathbf{curl\ B} = \mu_\circ \mathbf{J} \qquad (۶۷.۴)$$

که در آن $\mu_\circ$ یک ثابت است. با استفاده از قضیهٔ استوکس نتیجه بگیرید که

$$\int_C \mathbf{B} \cdot d\mathbf{R} = \mu_\circ i$$

یعنی، انتگرال خط مؤلفهٔ مماسی شدت میدان مغناطیسی، حول یک حلقهٔ بسته، متناسب با جریان i است که از هر سطح محدود به آن حلقه می‌گذرد.

۶. میدان برداری $\mathbf{F} = ۳y\mathbf{i} + (۵-۲x)\mathbf{j} + (z^۲-۲)\mathbf{k}$ مفروض است، مطلوبست: (الف) $\mathbf{div\ F}$، (ب) $\mathbf{curl\ F}$، (ج) انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم $\mathbf{curl\ F}$ بر سطح خمیدهٔ نیمی از کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۴$ که در بالای صفحهٔ xy واقع است. [*راهنمایی*: با استفادهٔ مکرر از قضیهٔ استوکس، قسمت (ج) به یک رابطهٔ بدیهی می‌انجامد.]

۷. $\mathbf{curl\ F} = ۲y\mathbf{i} - ۲z\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}$ مفروض است، انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم $\mathbf{curl\ F}$ (نه $\mathbf{F}$) را (الف) بر سطح خمیدهٔ نیم کرهٔ

$$x^۲+y^۲+z^۲=۹ \quad , \qquad z>\circ$$

و(ب) بر کرهٔ $x^۲+y^۲+z^۲=۹$ بیابید. (در هر دو قسمت، شما باید قادر باشید که جواب مسأله را با یک بررسی از اوضاع بنویسید.)

۸. در برهان قضیهٔ استوکس، نشان دهید که چرا جهتهای مثبت C و Γ متناظرند؟ (*راهنمایی*: اوایل بخش (۶.۴) را مجدداً مطالعه کنید.)

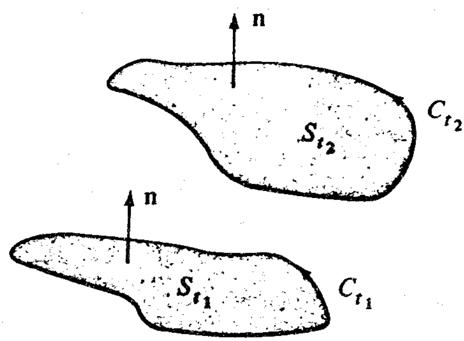
۱۳.۴ درس اختیاری: قضایای ترابری

در بعضی از کاربردهای فیزیکی و مهندسی، ضرورت دارد که مشتق یک انتگرال سطح یا حجم، وقتی که سطح یا حجم انتگرالگیری در حرکت است، نسبت به زمان محاسبه شود؛ به عنوان مثال، در یک مولد الکتریکی، حلقه‌ای از سیم در یک میدان مغناطیسی به صورتی به حرکت در می‌آید که شار میدانی که از سطح محدود به حلقه عبور می‌کند در تغییر باشد. مطابق قانون فاراده، یک نیروی

محرّکهٔ الکتریکی در حلقه ایجاد می‌شود که متناسب با نرخ تغییر انتگرال این شار است.

به طریق مشابه، ممکن است کسی بخواهد به نرخ تغییر کمیّتی چون بار یا انرژی ذخیره شده در بخش معیّنی از یک شارهٔ متحرک توجه کند. اگر این کمیّت به صورت یک انتگرال حجم از یک تابع چگالی داده شده باشد، آن‌گاه، وقتی مشتقگیری نسبت به زمان صورت گیرد، حجم مورد بررسی همراه شاره به پایین سرازیر می‌شود.

این دو مسأله به هم مربوطند. نخست مسأله سطح متحرک را مورد بحث قرار می‌دهیم، و از جواب آن در تحلیل مسأله حجم انتقالی استفاده می‌کنیم.



شکل ۳۹.۴

وضعیت از این قرار است: یک میدان برداری $\mathbf{F}$ مفروض است که با زمان تغییر می‌کند، $\mathbf{F}=\mathbf{F}(\mathbf{R},t)$، و یک سطح جهت دار S با منحنی مرزی کاملاً جهت دار C در فضا حرکت می‌کند؛ از نمادهای S_t و C_t برای نمایش سطح و منحنی در لحظهٔ t استفاده می‌کنیم. فرض کنید $\phi(t)$ شار $\mathbf{F}=(\mathbf{R},t)$ باشد که در زمان t از S_t می‌گذرد:

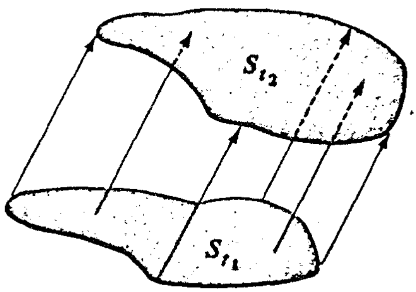
$$\phi(t)=\iint_{S_t} \mathbf{F}(\mathbf{R},t)\cdot d\mathbf{S}$$

توجه کنید که تغییرات $\phi(t)$ به دو عامل بستگی دارد؛ میدان متحرک $\mathbf{F}$ و حرکت سطح S_t. مسأله

مورد بحث ، محاسبهٔ $d\phi/dt$ است .

ما دو راه حل معرفی می‌کنیم ، اوّلی مبتنی بر اکتشاف شهودی مطابق شکل (۳۹.۴) ، و دیگری بحثی مبتنی بر استفاده از پارامتر.

شکل (۳۹.۴) مکان سطح در لحظات t_1 و t_2 را با مرزها و جهت‌ها نشان می‌دهد. در شکل (۴۰.۴) حرکات نقاط متناظر بر S_{t_1} و S_{t_2} نشان داد، شده است . اگر بتوانیم یک میدان سرعت $\mathbf{v}=\mathbf{v}(\mathbf{R},t)$ بر S در نظر بگیریم که حرکت نقطه به نقطهٔ سطح را توصیف کند ، آن گاه برای $dt=t_2-t_1$ به قدر کافی کوچک ، نقطهٔ $\mathbf{R}$ بر S_{t_1} به نقطهٔ $\mathbf{R}+\mathbf{v}(\mathbf{R},t_1)dt$ بر S_{t_2} منتقل می‌شود (خواننده که از ابهام این مفاهیم ناراحت است ، در راه حل بعدی آسوده‌تر خواهد بود.)



شکل ۴۰.۴

در واقع ، $d\phi/dt$ عبارت است از :

$$\frac{d\phi}{dt}=\lim_{t_2\to t_1}\frac{1}{t_2-t_1}\left[\iint_{S_{t_2}}\mathbf{F}(\mathbf{R},t_2)\cdot d\mathbf{S}-\iint_{S_{t_1}}\mathbf{F}(\mathbf{R},t_1)\cdot d\mathbf{S}\right] \qquad (۶۹.۴)$$

تشخیص این شارها در شکل (۴۰.۴) ، رهنمودی است که نشان می‌دهد که امکان دارد اعمال قضیهٔ واگرایی در مورد ناحیهٔ D ، که از حرکت سطوح در لحظات t_1 و t_2 ایجاد می‌شود ، مفید واقع شود. با اعمال این قضیه در لحظهٔ t_1 ، با عنایت به تفاوت بین قائم سطح و قائم برونسو ، خواهیم داشت :

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}(\mathbf{R},t_1)dV=\iint_{S_{t_2}}\mathbf{F}(\mathbf{R},t_1)\cdot d\mathbf{S}-\iint_{S_{t_1}}\mathbf{F}(\mathbf{R},t_1)\cdot d\mathbf{S}$$

$$+\iint_{(\text{پهلوها})}\mathbf{F}(\mathbf{R},t_1)\cdot d\mathbf{S} \tag{۷۰.۴}$$

اگر بنویسیم :

$$\mathbf{F}(\mathbf{R},t_2)\approx\mathbf{F}(\mathbf{R},t_1)+\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t}dt$$

و از (۷۰.۴) برای انتگرال S_{t_1} استفاده کنیم ، در می‌یابیم که

$$\iint_{S_{t_2}}\mathbf{F}(\mathbf{R},t_2)\cdot d\mathbf{S}-\iint_{S_{t_1}}\mathbf{F}(\mathbf{R},t_1)\cdot d\mathbf{S}$$

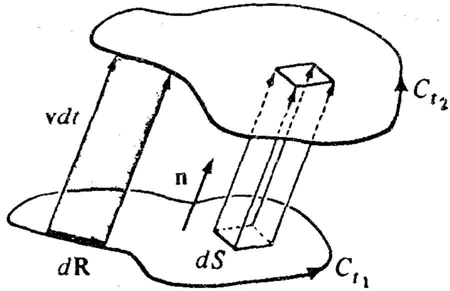
$$=\iint_{S_{t_2}}\mathbf{F}(\mathbf{R},t_1)\cdot d\mathbf{S}+dt\iint_{S_{t_1}}\frac{\partial\mathbf{F}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S}$$

$$-\iint_{S_{t_2}}\mathbf{F}(\mathbf{R},t_1)\cdot d\mathbf{S}-\iint_{\text{پهلوها}}\mathbf{F}(\mathbf{R},t_1)\cdot d\mathbf{S}$$

$$+\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{F}(\mathbf{R},t)dV \tag{۷۱.۴}$$

بدیهی است که دو انتگرال از انتگرالهای بالا حذف می‌شوند. شکل (۴۱.۴) نشان می‌دهد که عنصر سطح $d\mathbf{S}$ در دو پهلو با $d\mathbf{R}\times\mathbf{v}dt$ ، که در آن $d\mathbf{R}$ در امتداد C_{t_1} گرفته شود ، برابر است . عنصر حجم در D دارای پایهٔ $|d\mathbf{S}|$ و ارتفاع $|\mathbf{v}dt\cdot\mathbf{n}|$ است و ، بنابراین ،

$$dV=d\mathbf{S}\cdot\mathbf{v}dt$$



شکل ۴۱.۴

در نتیجه ، معادلهٔ (۷۱.۴) به صورت زیر در می‌آید :

$$\iint_{S_{t_2}} \mathbf{F}(\mathbf{R},t_2)\cdot d\mathbf{S} - \iint_{S_{t_1}} \mathbf{F}(\mathbf{R},t_1)\cdot d\mathbf{S}$$

$$= dt \iint_{S_{t_2}} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} - dt \oint_{C_{t_1}} \mathbf{F}(\mathbf{R},t_1)\cdot d\mathbf{R}\times\mathbf{v}$$

$$+ dt \iint_{S_{t_2}} (\nabla\cdot\mathbf{F})\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}$$

که اگر طرفین بر dt تقسیم شود ، قضیهٔ حمل شار نتیجه خواهد شد:

$$\frac{d\phi}{dt} = \iint_{S_t} \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + (\nabla\cdot\mathbf{F})\mathbf{v}\right]\cdot d\mathbf{S} + \oint_{C_t} \mathbf{F}\times\mathbf{v}\cdot d\mathbf{R} \qquad (۷۲.۴)$$

یکی از بزرگترین نقایص بحث قبلی ابهام مفهوم میدان سرعت است . لازمهٔ این بحث این است که به طریقی یک تناظر یک به یک بین نقاط سطح S_{t_2} ونقاط متناظر از سطح S_{t_1} برقرار شود که در

این صورت $\mathbf{v}(\mathbf{R})dt$ مقدار حرکت را توصیف می‌کند . با این وجود ، اگر S_t سطحی ریاضی ، عاری از مواد فیزیکی ، باشد ، این تناظر بین نقاط و در نتیجه میدان سرعت تا حدی اختیاری است .

روش منطقی ، تعیین یک صورت پارامتری از سطح در یک لحظهٔ ثابت ، مثلاً $t=0$ ، است :

$$\mathbf{R}=\mathbf{R}_0(u,v) \tag{۷۳.۴}$$

در این جا u و v در ناحیه‌ای چون Σ ، که محدود به منحنی Γ از صفحهٔ uv است ، تغییر می‌کنند (بخش «۱۲.۴» را به خاطر بیاورید). با گذشت زمان ، هر نقطه ، که از S_0 سرچشمه می‌گیرد، یک منحنی رسم می‌کند و می‌نویسیم :

$$\mathbf{R}=\mathbf{R}(\mathbf{R}_0,t) \tag{۷۴.۴}$$

تا مکان نقطه‌ای را که از $\mathbf{R}_0$ سرچشمه گرفته است در لحظهٔ t مشخص کنیم . با جانشینی $\mathbf{R}$ از (۷۳.۴) در (۷۴.۴) ، معادلهٔ زیر را خواهیم داشت :

$$\mathbf{R}=\mathbf{R}(u,v,t) \tag{۷۵.۴}$$

به این ترتیب ، اگر t ثابت باشد و u و v در Σ گردش کنند (u و v ناحیهٔ Σ راطی کنند)، معادلهٔ (۷۵.۴) سطحی چون S_t می‌سازد ؛ ولی اگر u و v ثابت باشند و t تغییر کند ، این معادله بیانگر تابعی است که نشان می‌دهد که نقطه چگونه از سطحی به سطح دیگر منتقل می‌شود. در این مورد ، آشکار است که سرعت نقطهٔ $\mathbf{R}=\mathbf{R}(u,v,t)$ بر S_t ، یعنی $\mathbf{v}$ ، چنین است :

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}$$

فرض می‌کنیم که جهت S_t ، C_t ، Σ ، و Γ با معادلهٔ پارامتری (۷۵.۴) ، به صورتی که در بخش (۱۲.۴) گفته شد ، سازگار باشند. در این صورت ، فرایند استنتاج دقیق (۷۲.۴) از این قرار است :

$$\phi = \iint_{S_t} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S} = \iint_{\Sigma} \mathbf{F}(\mathbf{R}(u,v,t),t) \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\, du dv$$

بنابراین ، چون Σ ثابت است ،

$$\frac{d\phi}{dt} = \iint_{\Sigma} \frac{d\mathbf{F}}{dt} \cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\, du dv$$

$$+\iint_{\Sigma} \mathbf{F}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\right)\,dudv \tag{۷۶.۴}$$

به استناد قاعدهٔ زنجیری ، برای اوّلین جمله داریم :

$$\frac{d\mathbf{F}[\mathbf{R}(u,v,t),t]}{dt}=\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial y}\frac{\partial t}{\partial y}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial t}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}$$

$$=(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{F}+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \tag{۷۷.۴}$$

جملهٔ دوّم زحمت بیشتری می‌طلبد ، امّا نه بیشتر از زحمت تدبیر الهام‌گیری از یک اتحاد. ملاحظه کنید که

$$\mathbf{F}\cdot\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\right)=\mathbf{F}\cdot\left[\frac{\partial}{\partial u}\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial t}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\right)\right]$$

$$=\mathbf{F}\cdot\frac{\partial}{\partial u}\left(\mathbf{v}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\right)-\mathbf{F}\cdot\frac{\partial}{\partial v}\left(\mathbf{v}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\right)$$

و این برابر است با

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\right)-\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u}\cdot\left(\mathbf{v}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\right)$$

$$+\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v}\cdot\left(\mathbf{v}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\right) \tag{۷۸.۴}$$

در پاراگراف بعدی نشان خواهیم داد که

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial v}\cdot\mathbf{v}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}-\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u}\cdot\mathbf{v}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}=[(\nabla\cdot\mathbf{F})\mathbf{v}-(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{F}]\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}\right) \tag{۷۹.۴}$$

اگر برای چند لحظه معادلهٔ (۷۹.۴) را مسلّم فرض کنیم ، و آن را در (۷۸.۴) قرار دهیم و از حکم مذکور در (۷۶.۴) استفاده کنیم ، خواهیم داشت :

$$\frac{d\phi}{dt} = \iint_{\Sigma} \left[(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{F} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + (\nabla\cdot\mathbf{F})\mathbf{v} - (\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{F} \right] \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \right) du dv$$

$$+ \iint_{\Sigma} \left[\frac{\partial}{\partial u} \left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \right) - \frac{\partial}{\partial v} \left(\mathbf{F}\cdot\mathbf{v} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \right) \right] du dv$$

در آخرین جمله ، جای نماد ضرب داخلی و خارجی را عوض می‌کنیم و قضیهٔ گرین را به کار می‌بریم (بخش ۱۱.۴) خواهیم داشت :

$$\frac{d\phi}{dt} = \iint_{\Sigma} \left[(\nabla\cdot\mathbf{F})\mathbf{v} + \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \right] \cdot \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \times \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} \right) du dv$$

$$+ \oint_{\Gamma} \left(\mathbf{F}\times\mathbf{v}\cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} du + \mathbf{F} \times \mathbf{v}\cdot \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} dv \right) \tag{۸۰.۴}$$

که از آن با دخالت $\mathbf{dS}$ و توجه به این که

$$d\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} du + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} dv$$

معادلهٔ (۷۲.۴) به دست می‌آید.

برهان اتحاد (۷۹.۴) با استفاده از نماد تانسور به ساده‌ترین وجه ممکن صورت می‌گیرد. نخست ، ملاحظه کنید که به استناد قاعدهٔ زنجیری داریم :

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial u} = \left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u} \cdot\nabla \right)\mathbf{F}$$

و این برای v نیز برقرار است . اگر مؤلفهٔ i ام $\partial\mathbf{R}/\partial u$ و $\partial\mathbf{R}/\partial v$ را ، به ترتیب ، به x_i^u و x_i^v نشان دهیم ، طرف چپ معادلهٔ (۷۹.۴) به صورت زیر نوشته خواهد شد :

$$\varepsilon_{ijk}(x_l{}^v \partial_l F_i)v_j x_k{}^u - \varepsilon_{ijk}(x_l{}^u \partial_l F_i)v_j x_k{}^v$$

$$=\varepsilon_{ijk}(x_l{}^v x_k{}^u - x_l{}^u x_k{}^v)v_j\partial_l F_i$$

$$=\varepsilon_{ijk}(\delta_{ls}\delta_{kt} - \delta_{lt}\delta_{ks})x_s{}^v x_t{}^u v_j \partial_l F_i$$

$$=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{lkp}\varepsilon_{stp} x_s{}^v x_t{}^u v_j \partial_l F_i$$ به موجب (۳۹.۱)

$$=\varepsilon_{ijk}\varepsilon_{plk}\varepsilon_{stp} x_s{}^v x_t{}^u v_j \partial_l F_i$$ (به استناد ۳۶.۱

$$=(\delta_{ip}\delta_{jl} - \delta_{il}\delta_{jp})\varepsilon_{stp} x_s{}^v x_s{}^u v_j \partial_l F_i$$ (بنابر ۳۹.۱

$$=\varepsilon_{sti} x_s{}^v x_t{}^u v_l \partial_l F_i - \varepsilon_{stj} x_s{}^v x_t{}^u v_j \partial_i F_i$$

$$=-\varepsilon_{its} v_l (\partial_l F_i) x_t{}^u x_s{}^v + \varepsilon_{jts} (\partial_i F_i) v_j x_t{}^u x_s{}^v$$

$$= -[(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{F}]\cdot\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v} + (\nabla\cdot\mathbf{F})\,\mathbf{v}\cdot\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u}\times\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial v}$$

که اتحاد مطلوب ثابت می‌شود.

سرانجام ، این نکته را اضافه می‌کنیم که اگر بتوانیم میدان سرعت $\mathbf{v}$ را ، که بر سطح S_t تعریف شده است ، به یک میدان برداری به طور پیوسته مشتق پذیر در ناحیه‌ای شامل S_t تعمیم دهیم ، آن‌گاه می‌توانیم (۷۲.۴) را با استفاده از قضیهٔ استوکس مجدداً به صورت زیر به دست آوریم :

$$\frac{d\phi}{dt} = \iint_{S_t} \left[\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} + (\nabla\cdot\mathbf{F})\mathbf{v} + \nabla\times(\mathbf{F}\times\mathbf{v})\right]\cdot d\mathbf{S} \tag{۸۱.۴}$$

این حالت وقتی اتفاق می‌افتد که مثلاً سطح S_t درون یک شارهٔ متحرک نقل مکان کند.

اکنون به قضیهٔ ترابری برای انتگرال حجم می‌پردازیم . فرض کنید $\rho(\mathbf{R},t)$ یک میدان برداری به طور پیوسته مشتق پذیر و V_t حجم انترالگیری در لحظهٔ t باشد. نقاط درون V_t، که با سرعت $\mathbf{v}(R,t)$ حرکت می‌کنند ، باعث حرکت حجم می‌شوند. مطلوب ما محاسبهٔ

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_t} \rho(\mathbf{R},t)\, dV \tag{۸۲.۴}$$

است .

جواب این سؤال را می‌توان به روش اکتشاف شهودی به صورت زیر به دست آورد :
اگر حجم مفروض را ، چنان که در بخش (۳.۳) دیدیم ، به متوازی السطوحهای قائم کوچک ، که حجم هر یک ΔV فرض می‌شود ، تقسیم کنیم ، انتگرال (۸۲.۴) تقریباً برابر خواهد بود با

$$\sum \rho(\mathbf{R},t)\Delta V$$

که مشتق آن چنین است :

$$\sum \frac{d\rho(\mathbf{R},t)}{dt}\Delta V + \sum \rho(\mathbf{R},t)\frac{d\Delta V}{dt}$$

از یک طرف ، به استناد معادلهٔ (۷۷.۴) ،

$$\frac{d\rho(\mathbf{R},t)}{dt} = \frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho$$

و ، از طرف دیگر ، به استناد تمرین (۱۳) بخش (۳.۳) :

$$\frac{1}{\Delta V}\cdot\frac{d\Delta V}{dt} = \nabla\cdot\mathbf{v}$$

اگر از این دو رابطه استفاده کنیم ، به نتیجهٔ

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_t}\rho dV = \iiint_{V_t}\left(\frac{\partial\rho}{\partial t} + \mathbf{v}\cdot\nabla\rho + \rho\nabla\cdot\mathbf{v}\right)dV$$

$$= \iiint_{V_t}\left[\frac{\partial\rho}{\partial t} + \nabla\cdot(\rho\mathbf{v})\right]dV$$

می‌رسیم که ، با استفاده از قضیهٔ واگرایی ، معادلهٔ

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_t}\rho dV = \iiint_{V_t}\frac{\partial\rho}{\partial t}dV + \iint_{S_t}\rho\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S} \qquad (۸۳.۴)$$

عاید می‌شود که به قضیهٔ *ترابری رینولد*[1] مشهور است .

1. Reynold

یک برهان دقیقتر (۸۳.۴) مبتنی بر این نکته است که هر میدان اسکالر پیوستهٔ ρ را می‌توان به صورت واگرایی یک میدان برداری چون $\mathbf{F}$ نوشت: مثلاً، در پیوست «د» نشان داده شده است که اگر $\mathbf{F}$ با

$$\mathbf{F}(\mathbf{R},t) = \frac{1}{4\pi} \iiint \frac{\rho(\mathbf{R}',t)}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|^3} (\mathbf{R}-\mathbf{R}')\, dV'$$

تعریف شود، در

$$\nabla\cdot\mathbf{F}(\mathbf{R},t)=\rho(\mathbf{R},t)$$

صدق می‌کند. با این رابطه و با استناد به قضیهٔ واگرایی می‌توان نوشت:

$$\iiint_{V_t} \rho dV=\iint_{S_t} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$$

که با اعمال معادلهٔ (۷۲.۴) در مورد سطح بستهٔ S_t به نتیجهٔ

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_t} \rho dV=\iint_{S_t} \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S}+\iint_{S_t} (\nabla\cdot\mathbf{F})\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}$$

می‌رسیم. یک بار دیگر استفاده از قضیهٔ واگرایی آن را به صورت

$$\frac{d}{dt} \iiint_{V_t} \rho dV=\iiint_{S_t} \nabla\cdot \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial t}\, dV+\iint_{S_t} (\nabla\cdot\mathbf{F})\mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}$$

در می‌آورد که با (۸۳.۴) سازگار است.

تمرینات

۱. فرض کنید S_t نیم کرهٔ

$$x^2+y^2+z^2=(vt)^2 \quad , \quad z\geq 0$$

با انبساط یکنواخت و $\mathbf{F}$ میدان برداری

$$\mathbf{F}(\mathbf{R},t)=\mathbf{R}t$$

باشد. درستی قضیهٔ حمل شار را در این حالت بررسی کنید.

۲. درستی قضیهٔ حمل شار را وقتی که S_t مربعی به رئوس $(0,0,t)$ ، $(0,1,t)$ ، $(1,0,t)$ ، و $(1,1,t)$ باشد و $\mathbf{F}(\mathbf{R},t)=xz\mathbf{k}$ ، تحقیق کنید.

۳. فرض کنید مربع $0\le x\le 1$ ، $0\le y\le 1$ حول محور x با سرعت زاویه‌ای ثابت دوران کند. درستی قضیهٔ حمل شار را با میدان برداری یکنواخت $\mathbf{F}(\mathbf{R},t)=\mathbf{k}$ بررسی کنید.

۴. درستی قضیهٔ ترابری رینولد را برای کره‌های منبسط شدنی

$$x^2+y^2+z^2\le (vt)^2$$

و

$$\rho(\mathbf{R},t)=|\mathbf{R}|^2 t$$

تحقیق کنید.

۵. درستی قضیهٔ ترابری رینولد را برای مکعب واحدی که لبه‌هایش موازی محورهایند و با یک سرعت ثابت در جهت x می‌لغزد با $\rho(\mathbf{R},t)=xy$ بررسی کنید.

۶. فرمول بسط *اویلر* را ثابت کنید:

$$\frac{d}{dt}\iiint_{V_t} dV = \text{مشتق حجم نسبت به زمان} = \iiint_{V_t} \nabla\cdot\mathbf{v}\,dV = \iint_{S_t} \mathbf{v}\cdot d\mathbf{S}$$

این فرمول را به تمرین (۱۳) از بخش (۳.۳) ربط دهید.

۷. با استفاده از معادلهٔ پیوستگی بخش (۳.۳) و قضیهٔ رینولد ، ثابت کنید که جرم بخش معینی از یک شارهٔ متحرک در مدت شارش ثابت می‌ماند.

مسائل تکمیلی

۱. فرض کنید C منحنی

$$\mathbf{R}(t)= \cos t\mathbf{i} + \sin t\mathbf{j} + e^{t}\mathbf{k} \quad , \quad ۰\leq t\leq \frac{\pi}{۲}$$

باشد و $\mathbf{F}= -\frac{۲x}{x^۲+y^۲}\mathbf{i} + \frac{۲y}{x^۲+y^۲}\mathbf{j} + ۲z\mathbf{k}$ ،

در این صورت ، انتگرال $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ را بر حسب $\mathbf{t}$ بیان و سپس آن را محاسبه کنید.

۲. انتگرالهای خط زیر را در امتداد قطعه خط مستقیم C که نقطهٔ (۲،۱،۴) را به نقطهٔ (۳،۳،۴) وصل می‌کند ، محاسبه کنید :

(الف) $\int_C ۳xydx + ۳dy + yzdz$

(ب) $\int_C e^{xyz}(yzdx+xzdy+xydz)$

۳. انتگرال

$$\oint[(y + yz\cos xyz)dx + (x^۲ + xz\cos xyz)\ dy + (z + xy\cos xyz)\ dz]$$

را در امتداد بیضی

$$x=۲\cos\theta \quad , \quad y=۳\sin\theta \quad , \quad z=۱ \quad , \quad ۰\leq\theta\leq ۲\pi$$

محاسبه کنید.

۴. انتگرال خط $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ را که در آن C مقطع صفحهٔ $x+y+z=۱$ و استوانهٔ $x^۲+y^۲=۱$ و $\mathbf{F}$ میدان $\mathbf{F}=(x+y)\mathbf{i} + (y+z)\mathbf{j} + (z+x)\mathbf{k}$ است ، محاسبه کنید. چنان که از مفروضات مشهود است ، C را در جهت حرکت عقربه‌های ساعت جهت دار کنید.

۵. انتگرال

$$\oint_C (\sin x+y^۲)\ dx + (x-e^{-y})\ dy$$

راکه در آن C مرز ناحیهٔ نیمه استوانه‌ای

$$x^۲+y^۲\leq ۴\ ,\quad y\geq ۰$$

است ، محاسبه کنید.

۶. فرض کنید $\mathbf{F}=(x^۲/y)\mathbf{i}+y\mathbf{j}+\mathbf{k}$.

(الف) معادلهٔ خط شارش $\mathbf{F}$ را که از نقطهٔ $(۱,۱,۰)$ بگذرد، بیابید.

(ب) نشان دهید که این خط شارش از نقطهٔ $(e,e,۱)$ نیز می‌گذرد.

(ج) انتگرال

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$$

را که در آن C مسیر خط شارش از $(۱,۱,۰)$ تا $(e,e,۱)$ است ، محاسبه کنید.

۷. فرض کنید $\mathbf{F}(x,y)=(x^۲+y^۲)(\mathbf{i}+\mathbf{j})$ ، و C قطعه خط جهت داری باشد که یک سرآن مبدأ و طول آن برابر واحد باشد. جهت C را چنان بیابید که انتگرال

$$I=\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$$

(الف) بیشترین مقدار خود را بگیرد (جهت C و مقدار I را تعیین کنید) ،

(ب) کمترین مقدار خود را بگیرد (جهت C و مقدار I را تعیین کنید) ، و

(ج) صفر شود.

۸. فرض کنید

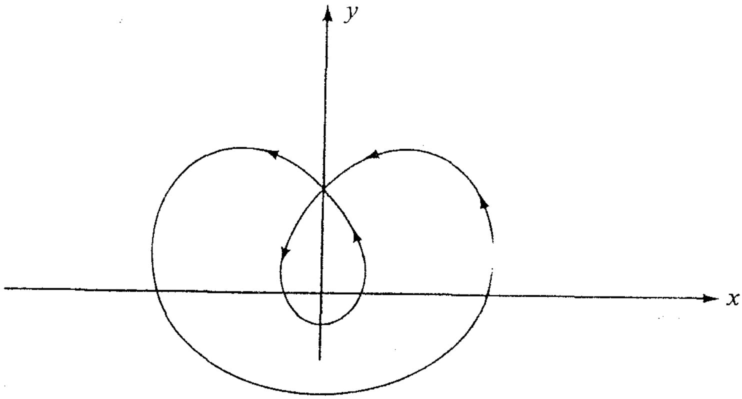
$$\mathbf{F}(x,y)=\frac{x-y}{x^۲+y^۲}\mathbf{i}+\frac{x+y}{x^۲+y^۲}\mathbf{j}$$

(الف) نشان دهید که

$$\frac{\partial F_۱}{\partial y}=\frac{\partial F_۲}{\partial x}$$

(ب) آیا $\mathbf{F}$ پایستار است ؟ درستی جواب خود را بررسی کنید.

(ج) $\int \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ را در امتداد منحنی شکل (۴۲.۴) محاسبه کنید.



شکل ۴۲.۴

۹. فرض کنید :

$$\mathbf{F}=(6x-2e^{2x}y^2)\,\mathbf{i} - 2ye^{2x}\,\mathbf{j} + \cos z\mathbf{k}$$

(الف) آیا $\mathbf{F}$ پایستار است ؟ چرا؟

(ب) انتگرال خط $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ را در امتداد مسیری که به صورت

$$\mathbf{R}(t)=t\mathbf{i}+(t-1)(t-2)\mathbf{j} + \frac{\pi}{2}t^3\mathbf{k} \quad , \quad 0\leq t\leq 1$$

پارامتری شده است ، محاسبه کنید.

(ج) انتگرال $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ را در امتداد

$$\mathbf{R}(t) = \frac{1}{2}(t-1)\mathbf{i} + t(3-t)\mathbf{j} + \frac{\pi}{4}(t-1)\mathbf{k} \quad , \quad 1\leq t\leq 3$$

محاسبه کنید.

۱۰.فرض کنید $\mathbf{F}=[(1+x)e^{x+y}]\mathbf{i}+[xe^{x+y}+2y]\mathbf{j}-2z\mathbf{k}$

$$\mathbf{G}=[(1+x)e^{x+y}]\mathbf{i}+[xe^{x+y}+2z]\mathbf{j}-2y\mathbf{k}$$

(الف) با تعیین یک پتانسیل ϕ برای $\mathbf{F}$ ، نشان دهید که $\mathbf{F}$ پایستار است .

(ب) انتگرال $\int_C \mathbf{G}\cdot d\mathbf{R}$ را که در آن C مسیر

$$x=(1-t)e^t \quad , \quad y=t \quad , \quad z=2t \quad , \quad 0\leq t\leq 1$$

است ، محاسبه کنید.

(*راهنمایی* : از تشابه موجود بین $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ استفاده کنید.)

۱۱.(الف) نشان دهید که میدان

$$\mathbf{F}=xe^y\mathbf{i} + ye^z\mathbf{j} + ze^x\mathbf{k}$$

پایستار نیست .

(ب) یک پتانسیل ϕ برای میدان $\mathbf{G}$ ، که به صورت تعریف شده است ، بیابید.

$$\mathbf{G}=[xe^{-x^2}+(xyz+y)e^{zx}+y^2ze^{xy}+ze^{yz}]\mathbf{i}$$

$$+[ye^{-y^2}+(yzx+z)e^{xy}+z^2xe^{yz}+xe^{zx}]\mathbf{j}$$

$$+[ze^{-z^2}+(zxy+x)e^{yz}+x^2ye^{zx}+ye^{xy}]\mathbf{k}$$

۱۲.(الف) یک پتانسیل ϕ برای میدان زیر بیابید.

$$\mathbf{F}=(2xyz+z^2-2y^2+1)\mathbf{i} + (x^2z-4xy)\mathbf{j} + (x^2y+2xz-2)\mathbf{k}$$

(ب) میدان

$$\mathbf{G} = \frac{x}{(x^2+z^2)^2}\,\mathbf{i} + \frac{z}{(x^2+z^2)^2}\,\mathbf{k}$$

چنان است که در شرط $\nabla\times\mathbf{G}=\mathbf{0}$ در همهٔ نقاط فضا ، به استثنای نقاط واقع بر محور y ها ، صدق می‌کند. آیا $\mathbf{G}$ پایستار است ؟

۱۳.سطح S با معادلات پارامتری

$$x=u^2 \quad , \quad y=\sqrt{2}uv \quad , \quad z=v^2$$

داده شده است . عناصر $d\mathbf{S}$ و dS را بر حسب du و dv بیابید.

۱۴.فرض کنید $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+(x+2)\mathbf{j}+x^3\sin yz\mathbf{k}$ ، و S بخشی از استوانهٔ $x^2+y^2=1$ باشد که در هشت یک اوّل زیر صفحهٔ $z=1$ قرار دارد. انتگرال

$$\iint_c \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\; dS$$

را محاسبه کنید.

۱۵.سطح S با معادلات پارامتری

$$x=(1+\cos\theta)\cos\phi \quad , \quad y=(1+\cos\theta)\sin\phi \quad , \quad z=\sin\theta$$

داده شده است . $d\mathbf{S}$ و dS را برحسب $d\phi$ و $d\theta$ بیابید.

۱۶.فرض کنید $\mathbf{E}=-\,\mathbf{grad}(|\mathbf{R}|^{-1})$ ، که در آن $\mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ ؛

(الف) نشان دهید که $\mathbf{E}=\mathbf{R}/|\mathbf{R}|^3$.

(ب) انتگرال $\int_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{R}$ راکه درآن C قطعه خط واصل نقاط $(0,1,0)$ و $(0,0,1)$است ، محاسبه کنید.

(ج) $\iint_{S_1} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$ راکه در آن S_1 کرهٔ $x^2+y^2+z^2=9$ است ، محاسبه کنید.

(د) $\iint_{S_2} \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$ راکه در آن S_2 مکعبی به مرکز مبدأ و با یالهای به طول واحد است ، محاسبه کنید.

(هـ) در صورت امکان ، کره‌ای چون S با شعاع مثبت چنان مثال بزنید که

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}=0$$

۱۷.فرض کنید S بخشی از سهمیگون $z=9-x^2-y^2$ باشد که در بالای صفحهٔ $z=0$ است ، وفرض کنید:

$$\mathbf{F}=(y-z)\mathbf{i}-(x+z)\mathbf{j}+(x+y)\mathbf{k}$$

$\iint_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\ dS$ را بیابید.

۱۸.فرض کنید $\mathbf{F}$ میدان $\mathbf{F}=(x^2+xy)\mathbf{i}+(y^2+yz)\mathbf{j}+(z^2+zx)\mathbf{k}$ و V مکعب به مرکز مبدأ باشد که وجوهش بر صفحات $x=\pm1$ ، $y=\pm1$ ، و $z=\pm1$ واقعند . انتگرال

$$\iiint_V \operatorname{div}\mathbf{F}\ dV$$

را محاسبه کنید.

۱۹.فرض کنید : $\mathbf{F}=2y\mathbf{i}+(x-2x^3z)\mathbf{j}+xy^3\mathbf{k}$ و S سطح نیم کرهٔ

$$x^2+y^2+z^2=1 \quad , \quad z\geq0$$

باشد . انتگرال

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}\ dS$$

را محاسبه کنید.

۲۰.فرض کنید C مسیر متشکل از قطعه خطهای مستقیمی باشد که ، به ترتیب ، از اتصال نقاط

$P_0=(0,0,0)$ ، $P_1=(\pi/2,0,0)$ ، $P_2=(\pi/2,0,1)$ ، $P_3=(0,0,1)$ ، $P_4=(0,\pi/2,1)$ ،
$P_5=(0,\pi/2,0)$ ، $P_0=(0,0,0)$ به دست می‌آید.

انتگرال

$$\int_c [x\sin y\mathbf{i} - y\sin x\mathbf{j} + (x+y)z^2\mathbf{k}].d\mathbf{R}$$

را با استفاده از قضیهٔ استوکس محاسبه کنید.

۲۱. فرض کنید : $\mathbf{F}=y^2x\mathbf{i}+x^2y\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ و S همهٔ سطح ناحیهٔ محدود به استوانهٔ $x^2+y^2=4$ و صفحات $z=0$ و $z=2$ باشد . انتگرال

$$\iint_S \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}\ dS$$

را با استفاده از قضیهٔ واگرایی محاسبه کنید.

۲۲. فرض کنید : $\mathbf{F}=(x-yz)\mathbf{i}+(y+xz)\mathbf{j}+(z+2xy)\mathbf{k}$ و S_1 قسمتی از استوانهٔ $x^2+y^2=2$ باشد که درون کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ قرار می‌گیرد ؛ و فرض کنید : S_2 بخشی از سطح کرهٔ $x^2+y^2+z^2=4$ باشد که خارج از استوانهٔ $x^2+y^2=2$ قرار دارد. فرض کنید : V حجم محدود به S_1 و S_2 باشد.

(الف) نموداری رسم کنید که سطوح S_1 ، S_2 ، و حجم V را نشان بدهد.

(ب) انتگرال

$$\iint_{S_1} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_1 dS_1$$

را ، که در آن $\mathbf{n}_1$ قائم یکّهٔ برونسو باشد ، محاسبه کنید.

(ج) انتگرال $\iiint_V (\nabla\cdot\mathbf{F})dV$

را محاسبه کنید.

(د) انتگرال $\iint_{S_2} \mathbf{F}\cdot\mathbf{n}_2 dS_2$

را، که در آن $\mathbf{n}_2$ قائم یکّهٔ برونسو باشد ، محاسبه کنید.

۲۳. فرض کنید : $\mathbf{F}=xyz\mathbf{i}+(y^2+1)\mathbf{j}+z^3\mathbf{k}$ و S سطح مکعب $0\le x,y,z\le 1$ باشد . انتگرال سطح

$$\iint_S (\nabla\times\mathbf{F})\cdot\mathbf{n}dS$$

را با دستورالعملهای زیر محاسبه کنید :

(الف) با استفاده از قضیهٔ واگرایی ،

(ب) با استفاده از قضیهٔ استوکس، و

(ج) با محاسبهٔ مستقیم.

۲۴. فرض کنید $\mathbf{F}$ میدان $\mathbf{F}=ye^x\mathbf{i}+(x+e^x)\mathbf{j}+z^2\mathbf{k}$ و C منحنی $0\le t\le 2\pi$ و $\mathbf{R}(t)=(1+\cos t)\mathbf{i}+(1+\sin t)\mathbf{j}+(1-\sin t-\cos t)\mathbf{k}$ باشد. انتگرال

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$$

را بیابید. (*راهنمایی*: از قضیهٔ استوکس استفاده و ملاحظه کنید که C اوّلاً در یک صفحه است و ثانیاً تصویرش بر صفحهٔ xy یک دایره است.)

۲۵. فرض کنید: $\mathbf{F}=xz\mathbf{i}-y\mathbf{j}+x^2y\mathbf{k}$ و C مسیر بسته‌ای متشکل از اضلاع مثلث به رئوس $P_1=(1,0,0)$، $P_2=(0,0,1)$، $P_3=(0,0,0)$ باشد. انتگرال

$$\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$$

را، که در آن C در جهت P_1 به P_2، P_2 به P_3، و P_3 به P_1 پیموده شود، با استفاده از قضیهٔ استوکس محاسبه کنید.

۲۶. نشان دهید که کدام یک از گزاره‌های زیر *راست* و کدام یک *دروغ* است.

فرض کنید، همهٔ توابعی که در این گزارها ظاهر می‌شوند دارای مشتقات پیوسته‌ای از هر مرتبه در هر نقطه باشند.

(الف) به ازای هر $\mathbf{F}$، واگرایی $\nabla\times\mathbf{F}$ صفر است.

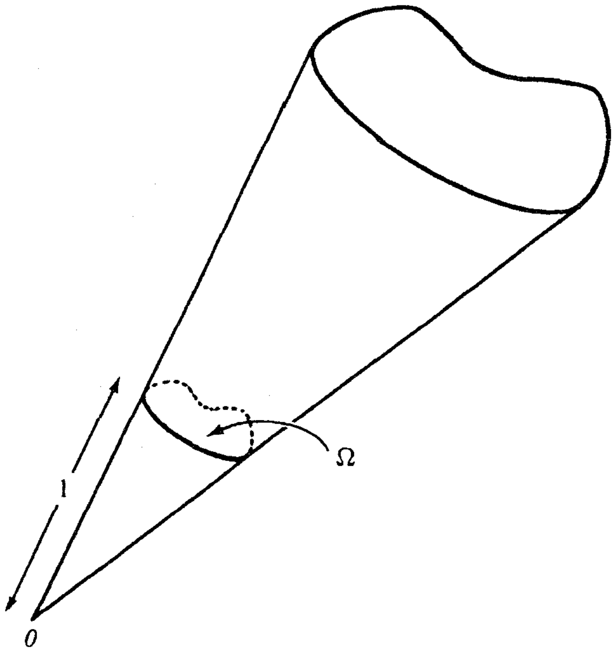
(ب) انتگرال $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$، در هر ناحیهٔ همبند ساده، فقط به نقاط انتهایی C بستگی دارد.

(ج) اگر $\nabla f=\mathbf{0}$، آن‌گاه f یک تابع ثابت است.

(د) اگر $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$، آن‌گاه $\mathbf{F}$ یک میدان برداری ثابت است.

(هـ) اگر $\operatorname{div}\mathbf{F}=0$، آن‌گاه $\iint_S \mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ بر هر سطح بستهٔ S صفر است.

(و) اگر $\int_C \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ بر هر مرز بستهٔ C صفر باشد، آن‌گاه $\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{0}$.



شکل ۴۳.۴

۲۷.مخروطی به رأس مبدأ، نظیر شکل (۴۳.۴)، در نظر بگیرید. *زاویهٔ فضایی* Ω در رأس، مساحت سطحی تعریف می‌شود که این مخروط از کرهٔ واحد به مرکز مبدأ جدا می‌کند.

(الف) اگر این مخروط کاملاً تخت، یعنی یک صفحه، باشد، Ω چقدر است؟

(ب) Ω برای گوشهٔ یک مکعب چقدر است؟

(ج) Ω برای مخروط ۴۵ درجه‌ای $z=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$ چقدر است؟

(د) کل زاویهٔ فضایی حول یک نقطه چقدر است؟

(هـ) فرض کنید سطح S، که به منحنی بستهٔ سادهٔ C محدود است، دارای این خاصیت باشد که هر شعاع خروجی از مبدأ سطح S را حداکثر یک بار قطع کند. آن‌گاه زاویهٔ فضایی Ωکه سطح S

در مبدأ می‌سازد برابر زاویهٔ فضایی رأس مخروطی است که شعاعهای ماربر C می‌سازند. نشان دهید که اگر S به طور کامل جهت دار شده باشد ، آن گاه

$$\Omega=\iint_s \frac{\mathbf{R}\cdot d\mathbf{S}}{|\mathbf{R}|^{۳}} \quad (\mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})$$

۲۸.نتایج حاصل از تمرین قبلی را برای تحقیق در درستی قانون گاوس در مورد یک نقطهٔ بار در مبدأ، یعنی معادلهٔ (۳۹.۴) ، به‌کار برید. عبارت مربوط به میدان الکتریکی در مثال (۱۹.۴) ذکر شده است.

۲۹.شار یک میدان سیملوله‌ای که از یک سطح می‌گذرد فقط به منحنی کرانهٔ سطح بستگی دارد. چرا؟

۳۰.نشان دهید که هر منحنی تک مقدار $\mathbf{R}(t)$ از تابع $f(x,y,z)$ در تساوی

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt}\cdot\nabla f=0$$

صدق می‌کند.

۳۱.فرض کنید ، چنان که در قضیهٔ واگرایی آمده است ، حوزهٔ D به سطح S محدود باشد ، و همهٔ میدانهای مورد بحث در شرایط مشتق پذیری مناسب صدق کنند. اتحادهای زیر را ثابت کنید :

(الف)
$$\iiint_D \nabla\phi\cdot\nabla\times\mathbf{F}\ dV=\iint_S \mathbf{F}\times\nabla\phi\cdot d\mathbf{S}$$

(ب)
$$\iiint_D [(\nabla\times\mathbf{V})\cdot(\nabla\times\mathbf{W})-\mathbf{V}\cdot(\nabla\times\nabla\times\mathbf{W})]dV=\iint_S (\mathbf{V}\times\nabla\times\mathbf{W})\cdot d\mathbf{S}$$

(ج)
$$\iiint_D [\mathbf{W}\cdot(\nabla\times\nabla\times\mathbf{V})-\mathbf{V}\cdot(\nabla\times\nabla\times\mathbf{W})]dV=$$
$$\iint_S [\mathbf{V}\times\nabla\times\mathbf{W}-\mathbf{W}\times\nabla\times\mathbf{V}]\cdot d\mathbf{S}$$

۳۲.فرض کنید D و S همان حوزه و سطح تمرین قبلی باشند ، و فرض کنید $\nabla\cdot\mathbf{V}=0$ و $\mathbf{W}=\nabla\phi$ و ϕ بر S صفر باشد . ثابت کنید که

$$\iiint_D \mathbf{V}\cdot\mathbf{W}\ dV=0$$

۳۳.فرض کنید S و C همان سطح و منحنی موصوف در قضیهٔ استوکس باشند. اتحاد

$$\iint_S \nabla\phi\times\nabla\psi\cdot d\mathbf{S}=\oint_C \phi\nabla\psi\cdot d\mathbf{R}$$

را ثابت کنید.

۳۴.زاویهٔ بین مماس بر منحنی

$$\mathbf{R}(t)=t\mathbf{i}+t^{۲}\mathbf{j}+۲t^{۲}\mathbf{k} \qquad , \qquad ۰\leq t\leq ۳$$

و قائم بر سطح $z=۱۶-x^{۲}-y$ در نقطهٔ تقاطع آنها چقدر است ؟

۳۵.مساحت ناحیهٔ درون طوقهٔ

$$x=\frac{t}{۱+t^{۳}}$$

$$y=\frac{t^{۲}}{۱+t^{۳}} \qquad , \qquad ۰\leq t<\infty$$

از منحنی *دو شاخهٔ دکارت* [1] را با استفاده از قضیهٔ گرین بیابید.

۳۶.تابع $f(x,y,z)$ را *همگن از درجهٔ* k می‌نامند در صورتی که $f(tx,ty,tz)=t^{k}f(x,y,z)$. فرض کنید مؤلفه‌های $F_۱$ ، $F_۲$ ، و $F_۳$ از میدان برداری $\mathbf{F}(x,y,z)$ همگن از درجهٔ k باشند و $\mathbf{curl\ F=0}$. ثابت کنید که

$$\mathbf{F}=\nabla\left(\frac{xF_۱+yF_۲+zF_۳}{k+۱}\right)$$

۳۷.چنبری در شکل (۴۴.۴) نشان داده شده است . فرض می‌کنیم A اندازهٔ شعاع بزرگتر و a اندازهٔ شعاع کوچکتر این چنبر باشد. صورت پارامتری زیر را

$$x=A\cos u+a\cos u\cos v$$

$$y=A\sin u+a\sin u\cos v$$

$$z=a\sin v$$

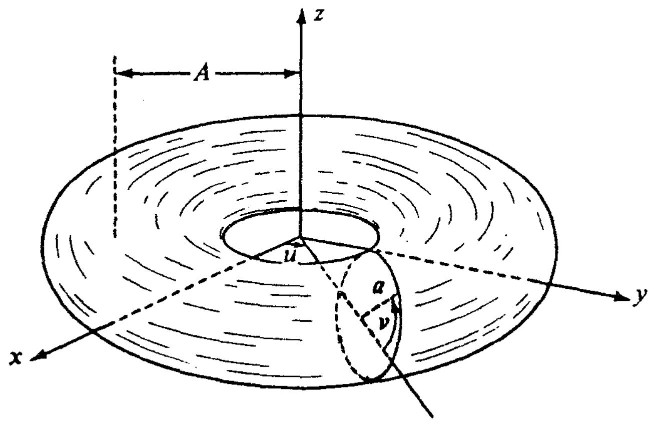
1. Descartes' Folium

که در آن u *زاویهٔ چنبرگون* و v *زاویهٔ قطبیگون* است ، به دست آورید. نشان دهید که مساحت چنبر برابر است با $4\pi^2 Aa$.

۳۸.نشان دهید که اگر ϕ همساز و S یک کره به شعاع R و به مرکز P باشد ، آن‌گاه فرمول سوم گرین (تمرین ۱۶ ، بخش ۱۰.۴) به قضیهٔ *مقدار میانگین توابع همساز*

$$\phi(P) = \frac{1}{4\pi R^2} \iint_S \phi dS$$

تبدیل می‌شود .[*راهنمایی* : شما به حکم بند (الف) تمرین (۱۰) آن بخش نیازمندید.]



شکل ۴۴.۴

۳۹.درفرمول سوم گرین ، اگر ϕ همساز باشد و P بیرون سطح بستهٔ S واقع شود، مقدار انتگرال سطح چقدر است ؟

۴۰.فرض کنید میدانهای برداری $\mathbf{V}$ و $\mathbf{W}$ دارای یک واگرایی یکسان ویک تاو یکسان درناحیهٔ D باشند، و مؤلفهٔ قائم دو میدان بر مرز سطح S یکی باشد.ثابت کنید که $\mathbf{V}=\mathbf{W}$.(*راهنمایی* :به خواص $\mathbf{U}=\mathbf{V}$-$\mathbf{W}$ توجه کنید.)

فصل پنجم

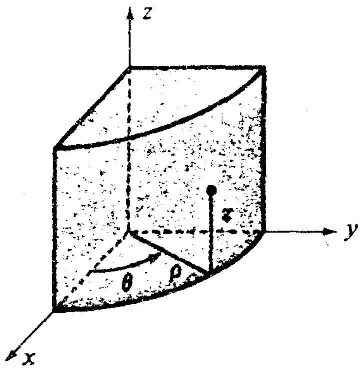
مختصات متعامد تعمیم یافته

۱.۵ مختصات استوانه‌ای و کروی

یادآوری می‌کنیم که بسیاری از مسائل دو بعدی در دستگاه مختصات قطبی راحتتر از دستگاه مختصات قائم بیان می‌شوند (بخش ۴.۲) . این حالت ، مثلاً ، وقتی رخ می‌دهد که یک تقارن مدوّر در میان باشد . البته ، وضعیتهای مشابه در دستگاههای مختصات سه بعدی نیز ظاهر می‌شوند و ، بنابراین ، در چنین مواردی تعمیم دستگاه مختصات قطبی ضرورت پیدا می‌کند. مفیدترین دستگاههای تعمیم یافته *دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی* می‌باشند. در این بخش چگونگی بیان روابط برداری مختلف را در این دستگاهها مورد مطالعه قرار خواهیم داد.

مختصات استوانه‌ای طبیعی‌ترین تعمیم مختصات قطبی است . برای درک این نکته ، نخست ملاحظه می‌کنیم که دستگاه *دکارتی* را می‌توان چنین وصف کرد : مختص سوّم ، z ، ارتفاع (علامت دار) نقطه را از صفحهٔ xy نشان می‌دهد ، و دو مختص اوّل x و y مختصات دکارتی دوبعدی تصویر قائم نقطه بر صفحهٔ xy می‌باشند .

در دستگاه مختصات استوانه‌ای ، مختص سوم ، یعنی z ، مجدداً ارتفاع نقطه از صفحهٔ xy است ، ولی دو مختص اوّل ، که به ρ و θ نشان داده می‌شوند ، مختصات قطبی تصویر نقطه بر صفحه‌اند (شکل «۱.۵» را ببینید). توجه کنید که در مختصات استوانه‌ای ، «ρ» نقش «r» در مختصات قطبی را ایفا می‌کند ؛ دلیل تعویض نماد بعداً گفته خواهد شد. با این وجود ، آگاه باشید که *جامعهٔ مؤلفان* هیچ *نماد استانداردی برای این دستگاههای مختصات ندارند.*

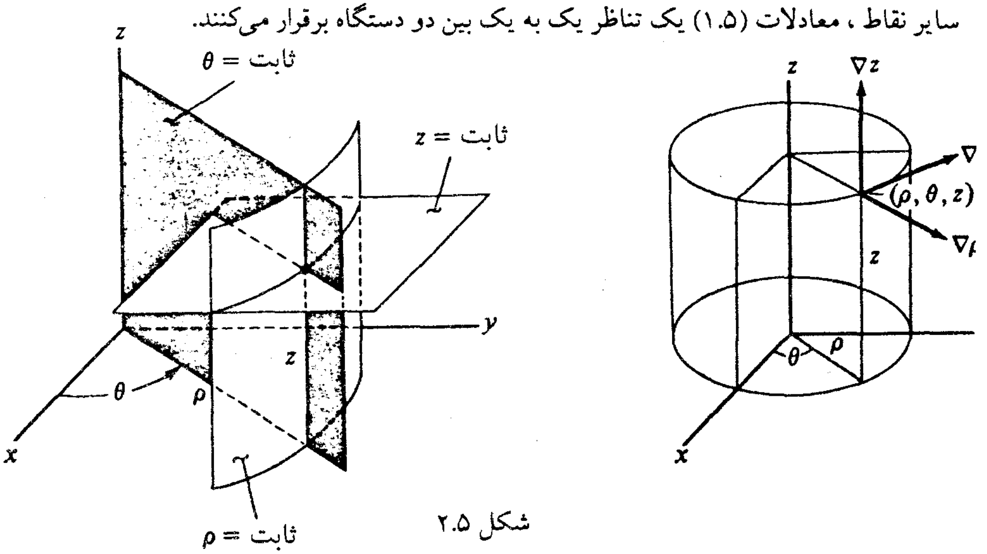


شکل ۱.۵

$$x=\rho\cos\theta \qquad \rho=(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}$$
$$y=\rho\sin\theta \qquad \theta=\sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}}=\cos^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} \tag{۱.۵}$$
$$z=z \qquad z=z$$

معادلهٔ اضافی برای θ به این دلیل نوشته شده است که به خاطر داشته باشیم که از روی آن مقدار θی مناسب چارکی که نقطه در آن است ، انتخاب شود ، نه الزاماً مقدار اصلی θ.

در مختصات استوانه‌ای ، زاویهٔ θ بر روی محور z ، که در آن $\rho=0$، تعریف نمی‌شود ، ولی در سایر نقاط ، معادلات (۱.۵) یک تناظر یک به یک بین دو دستگاه برقرار می‌کنند.



شکل ۲.۵

اصطلاح «استوانه‌ای» از این واقعیت ناشی می‌شود که سطوحی که برای آنها ρ ثابت باشد

استوانه‌اند. سطوحی که در آنها θ *ثابت* است «*نیم صفحه‌هایی*» هستند که در یک طرف صفحهٔ $y=0$ واقعند و محور z فصل مشترک آنها با صفحهٔ $y=0$ است، و، البته، معادلات «$z=$ ثابت» خانواده‌ای از صفحات افقی تعریف می‌کنند. قائم بر این صفحات، به ترتیب مذکور، عبارتند از: $\mathbf{grad}\rho$، $\mathbf{grad}\theta$، و $\mathbf{grad}z$. در شکل (۲.۵) مشاهده می‌کنیم که $\mathbf{grad}\rho$ در جهت دور شدن از محور z است، $\mathbf{grad}\theta$ در صفحهٔ افقی در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت است، و سرانجام $\mathbf{grad}z$ به بالا اشاره دارد. بردارهای $\mathbf{grad}\rho$، $\mathbf{grad}\theta$، و $\mathbf{grad}z$، به همین ترتیب، یک دستگاه متعامد راستگرد تشکیل می‌دهند.

صفحاتی که در آنها ρ و θ *ثابت* است یکدیگر را در یک خط قائم قطع می‌کنند که یک منحنی است که در امتداد آن فقط z تغییر می‌کند. این خط را منحنی مختص z می‌نامند. منحنیهای مختص ρ شعاعهایی افقی هستند که از محور z به اطراف پخش می‌شوند. منحنیهای مختص θ دوایر افقی می‌باشند. توجه کنید که $\mathbf{grad}z$، $\mathbf{grad}\rho$، و $\mathbf{grad}\theta$ همه جا بر منحنیهای مختص خود مماسند.

بردارهای یکّه در جهت بردارهای $\mathbf{grad}z$، $\mathbf{grad}\rho$، و $\mathbf{grad}\theta$ را می‌توان با استفاده از این ابزار معرفی کرد. این بردارها، به ترتیب مذکور، عبارتند از:

$$\mathbf{e}_z=\frac{\mathbf{grad}z}{|\mathbf{grad}z|}$$

$$\mathbf{e}_\rho=\frac{\mathbf{grad}\rho}{|\mathbf{grad}\rho|} \qquad (۲.۵)$$

$$\mathbf{e}_\theta=\frac{\mathbf{grad}\theta}{|\mathbf{grad}\theta|}$$

خواننده باید متقاعد شود که $\mathbf{e}_z$ همان $\mathbf{k}$ است، و $\mathbf{e}_\rho$ و $\mathbf{e}_\theta$ نظیرهای سه بعدی $\mathbf{u}_r$ و $\mathbf{u}_\theta$ از بخش (۴.۲) می‌باشند. در واقع، اگر به خاطر بیاوریم که $|\mathbf{grad}f|=df/ds$، وقتی که s بیانگر فاصله در جهت $\mathbf{grad}f$ باشد، آن گاه می‌توانیم این معادلات را ساده کنیم. در امتداد منحنیهای مختص z، $ds=|dz|$. از این رو، $|\mathbf{grad}z|=dz/dz=1$. در امتداد منحنیهای مختص ρ، $ds=|d\rho|$. لذا، $|\mathbf{grad}\rho|=d\rho/d\rho=1$. ولی در امتداد منحنیهای مختص θ، $ds=\rho|d\theta|$. بنابراین،

$|\mathbf{grad}\theta| = d\theta/\rho d\theta = 1/\rho$ ، و نتایج زیر عاید می‌شود :

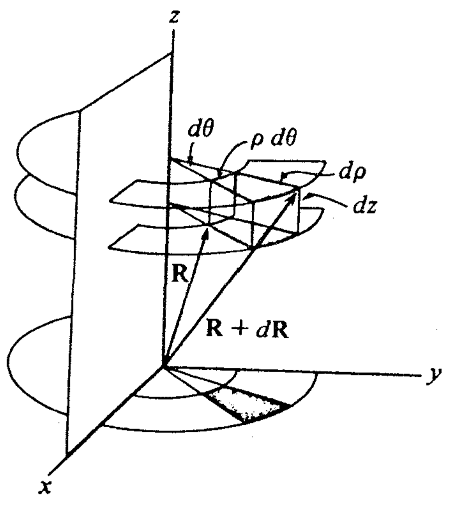
$$\begin{aligned} \mathbf{e}_z &= \mathbf{grad} z \\ \mathbf{e}_\rho &= \mathbf{grad}\rho \\ \mathbf{e}_\theta &= \rho\,\mathbf{grad}\theta \end{aligned} \tag{۳.۵}$$

ملاحظه کنید که بردار وضعیت یک نقطه در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت زیر است :

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = \rho\mathbf{e}_\rho + z\mathbf{e}_z \tag{۴.۵}$$

در محاسبهٔ طول کمان در مختصات استوانه‌ای ، باید توجه کنیم که ، چنان که در شکل (۳.۵) دیده می‌شود ، تغییر مکان $d\mathbf{R}$ را می‌توان به صورت حاصل جمع سه تغییر مکان متعامد نوشت :

$$d\mathbf{R} = \mathbf{e}_\rho d\rho + \mathbf{e}_\theta\, \rho d\theta + \mathbf{e}_z dz \tag{۵.۵}$$



شکل ۳.۵

از این رو ، عنصر طول کمان در مختصات استوانه‌ای از دستور زیر به دست می‌آید :

$$ds=|d\mathbf{R}|=(d\rho^{2}+\rho^{2}d\theta^{2}+dz^{2})^{\frac{1}{2}} \qquad (۶.۵)$$

مثال ۱.۵ طول قسمتی از مارپیچ

$$x=\sin t \qquad y=\cos t \qquad z=t$$

را که متناظر $0\leq t\leq 4\pi$ است بیابید.

حل با تبدیل مختصات به مختصات استوانه‌ای در می‌یابیم که :

$$\rho=1 \quad , \quad \theta=\frac{\pi}{2}-t \quad , \quad z=t$$

از این رو ،

$$s=\int_{0}^{4\pi}\left[\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^{2}+\rho^{2}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^{2}+\left(\frac{dz}{dt}\right)^{2}\right]^{\frac{1}{2}}dt$$

$$=\int_{0}^{4\pi}[1+1]^{\frac{1}{2}}dt=4\sqrt{2}\,\pi$$

از شکل (۳.۵) پیداست که عنصر حجم در دستگاه مختصات استوانه‌ای چنین است :

$$dV=d\rho\rho d\theta dz=\rho d\rho d\theta dz \qquad (۷.۵)$$

مثال ۲.۵ انتگرال حجم تابع $f(x,y,z)=x^{2}+y^{2}$ را بر حجم محصور بین دو استوانهٔ $\rho=1$ و $\rho=2$ وقتی که $0\leq z\leq 2$ بیابید.

حل

$$\iiint(x^{2}+y^{2})\,dV=\int_{0}^{2}\int_{0}^{2\pi}\int_{1}^{2}\rho^{3}d\rho d\theta dz=2(2\pi)\left(\frac{2^{4}}{4}-\frac{1^{4}}{4}\right)=15\pi$$

حال فرض کنید یک میدان اسکالر f در مختصات استوانه‌ای به صورت $f=f(\rho,\theta,z)$ تعریف شده باشد. برای تعیین $\mathbf{grad}f$ در این دستگاه ، ملاحظه کنیم که چون $\mathbf{e}_\rho$ ، $\mathbf{e}_\theta$ ، و $\mathbf{e}_z$ بردارهای یکّهٔ

دوبه دو متعامدند ،

$$\nabla f=(\mathbf{e}_\rho\cdot\nabla f)\ \mathbf{e}_\rho+(\mathbf{e}_\theta\cdot\nabla f)\ \mathbf{e}_\theta+(\mathbf{e}_z\cdot\nabla f)\mathbf{e}_z$$

هر یک از این ضرایب نرخ تغییر f نسبت به فاصله ، df/ds ، را در جهت متناظر نشان می‌دهد .آنگاه با استفاده از دستور (۶.۵) در مورد ds ، در می‌یابیم که

$$\mathbf{e}_\rho\cdot\nabla f=\left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{\text{ثابت } z \text{ و } \theta} =\frac{\partial f}{\partial \rho}$$

$$\mathbf{e}_\theta\cdot\nabla f=\left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{\text{ثابت } \rho \text{ و } z} =\frac{۱}{\rho}\ \frac{\partial f}{\partial \theta}$$

$$\mathbf{e}_z\cdot\nabla f=\left.\frac{\partial f}{\partial s}\right|_{\text{ثابت } \rho \text{ و } \theta} =\frac{\partial f}{\partial z}$$

بنابراین ، بردار $\mathbf{grad}f$ در مختصات استوانه‌ای عبارت است از :

$$\mathbf{grad}f=\frac{\partial f}{\partial \rho}\ \mathbf{e}_\rho+\frac{۱}{\rho}\ \frac{\partial f}{\partial \theta}\ \mathbf{e}_\theta+\frac{\partial f}{\partial z}\ \mathbf{e}_z \qquad (۸.۵)$$

مثال ۳.۵ فرض کنید f در مختصات دکارتی با ضابطهٔ $f(x,y,z)=z/(x^۲+y^۲)$ تعریف شده باشد. $\mathbf{grad}f$ را در مختصات استوانه‌ای محاسبه کنید.

حل نخست ، f را در مختصات استوانه‌ای بیان می‌کنیم و سپس (۸.۵) را به کار می‌بریم . داریم : $f(\rho,\theta,z)=z/\rho^۲$. از این رو ،

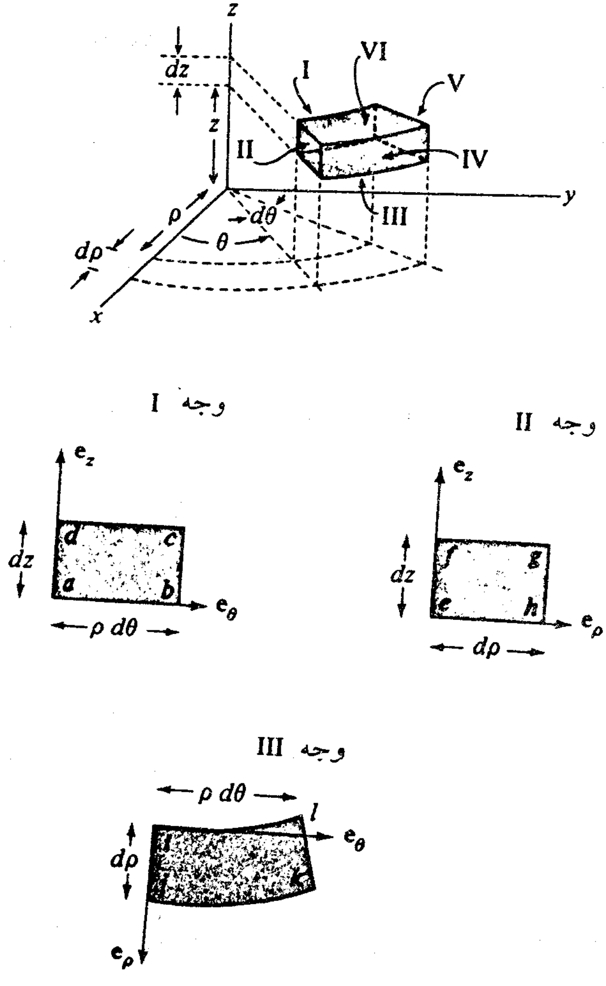
$$\mathbf{grad}f=-\frac{۲z}{\rho^۳}\ \mathbf{e}_\rho+\frac{۱}{\rho^۲}\mathbf{e}_z$$

عبارات واگرایی و تاو یک میدان برداری را می‌توان از یک بحث مبتنی بر اکتشاف شهودی از بی‌نهایت کوچکها (نظیر بحث بخش ۳.۳) به دست آورد ، ولی این گونه استدلال وقتی دستگاه مختصات مستقیم الخط نیست ، مستلزم دقت فوق العاده است .

فرض کنید بخواهیم $\text{div}\ \mathbf{F}$ را به عنوان شاری که در واحد حجم از جعبهٔ شکل (۴.۵) خارج

می‌شود محاسبه کنیم . از میدان برداری $\mathbf{F}$ ، که در مختصات استوانه‌ای از دستور زیر به دست می‌آید، شروع می‌کنیم .

$$\mathbf{F}=F_\rho(\rho,\theta,z)\ \mathbf{e}_\rho + F_\theta(\rho,\theta,z)\ \mathbf{e}_\theta + F_z(\rho,\theta,z)\ \mathbf{e}_z \qquad (۹.۵)$$



شکل ۴.۵

شار خروجی $\mathbf{F}$ از وجه شمارهٔ I برابر حاصل ضرب مؤلفهٔ قائم برونسوی $\mathbf{F}$ در مساحت سطح آن وجه است : $(-F_\rho)(\rho d\,\theta dz)$. عبارت مشابهی برای وجه شمارهٔ IV ، ولی با مقدار متفاوتی از ρ، صادق است . از این رو ، درحدگیری ، سهم وجوه I و IV از دستور زیر بدست می‌آید :

$$(F_\rho \rho d\,\theta dz)_{IV}-(F_\rho \rho d\theta dz)_{I}=\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho}\, d\rho d\theta dz \qquad (۱۰.۵)$$

توجه کنید که ما ابعاد $d\theta$ و dz را در وجوه I و IV یکسان فرض کرده‌ایم و ، بنابراین ، این مقادیر در (۱۰.۵) ثابت می‌باشند.

شار خروجی از وجه شمارهٔ II عبارت است از : $(-F_\theta)d\rho dz$ ، که اگر با شار خروجی از وجه شمارهٔ V ترکیب شود ، سهم این وجوه چنین خواهد شد :

$$(F_\theta\, dz)_V\, d\rho-(F_\theta\, d\rho\, dz)_{II}=\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}\, d\theta d\rho dz \qquad (۱۱.۵)$$

شار خروجی از وجوه III و VI عبارت است از :

$$(F_z \rho d\theta d\rho)_{VI}-(F_z \rho d\,\theta d\rho)_{III}=\frac{\partial F_z}{\partial z}\, dz\, \rho d\theta d\rho \qquad (۱۲.۵)$$

امکان دارد خواننده در صحت تساوی اخیر شک کند ، زیرا وجه شمارهٔ III یک مستطیل کامل نیست، زیرا یک ضلع آن ، li ، دارای طول $\rho d\theta$ و ضلع مقابل آن ، kj ، دارای طول $(\rho+d\rho)d\theta$ است . برای رفع این شبهه ، کافی است در معادلهٔ (۱۲.۵) جای ρ را با $\overline{\rho}$، مقداری بین ρ و $\rho+d\rho$، عوض کنیم . در این صورت ، شار خروجی عبارت خواهد بود از :

$$\frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial \rho}\, d\rho d\theta dz+\frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}\, d\theta d\rho dz+\frac{\partial F_z}{\partial z}\, dz d\overline{\rho} d\theta d\rho$$

اگر این را بر عنصر حجم (۷.۵) تقسیم کنیم و توجه داشته باشیم که در حدگیری $\overline{\rho}\to\rho$ (که بنابراین احتیاطی که به خرج دادیم ضرورت نداشت) ، در می‌یابیم که *واگرایی یک میدان برداری در مختصات*

استوانه‌ای از دستور زیر به دست می‌آید :

$$\text{div } \mathbf{F}=\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial(\rho F_\rho)}{\partial\rho} + \frac{1}{\partial F_\theta}\partial\theta\frac{}{\rho} + \frac{\partial F_z}{\partial z} \qquad (13.5)$$

مثال ۴.۵ واگرایی میدان زیر را محاسبه کنید :

$$\mathbf{F}(\rho,\theta,z)=\rho\mathbf{e}_\rho+z\sin\theta\mathbf{e}_\theta + \rho z\mathbf{e}_z \qquad (14.5)$$

حل با اعمال (۱۳.۵) خواهیم داشت :

$$\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{1}{\rho}\ \frac{\partial(\rho^2)}{\partial\rho} + \frac{1}{\rho}\ \frac{\partial(z\sin\theta)}{\partial\theta}+\ \frac{\partial(\rho z)}{\partial z} = 2+\frac{z\cos\theta}{\rho}+\rho$$

curl F را با استفاده از سرشت فیزیکی تاو به عنوان «چرخش» در واحد سطح محاسبه می‌کنیم؛ معادلهٔ (۶۶.۴) را ببینید. برای محاسبهٔ مؤلفهٔ $\mathbf{e}_\rho$، انتگرال خط $\mathbf{F}$ را حول لبهٔ وجه شمارهٔ I در شکل (۴.۵) در نظر بگیرید. این لبه باید به ترتیب abcda جهت دار شود ، زیرا $\mathbf{e}_\rho$ به سوی خواننده است.

مقدار انتگرال خط در امتداد ab برابر $F_\theta\rho d\theta$ و در امتداد cd برابر $(-F_\theta)\rho d\theta$ ، البته با مقدار متفاوتی از z ، است . چون ρ و $d\theta$ در امتداد این دو لبه یکسانند ، مقدار انتگرال در این دو لبه عبارت است از :

$$(F_\theta\,\rho d\theta)_{ab} - (F_\theta\,\rho d\theta)_{cd}=-\ \frac{\partial F_\theta}{\partial z}\ dz\rho d\theta$$

به طریق مشابه، برای لبه‌های bc و da مقدار

$$(F_z dz)_{bc} - (F_z dz)_{da}=\frac{\partial F_z}{\partial\theta}\, d\theta dz$$

به دست می‌آید. از این رو ، مؤلفهٔ $\mathbf{e}_\rho$ تاو، خارج قسمت تقسیم مجموع مقادیر بالا بر مساحت $\rho d\theta dz$ است :

$$\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial \theta} - \frac{\partial F_\theta}{\partial z} \qquad (۱۵.۵)$$

برای تعیین مؤلفهٔ e_θ، حول لبهٔ $efghe$ از وجه شمارهٔ II انتگرال می‌گیریم. (زیرا e_θ به درون صفحهٔ کتاب اشاره دارد.) این انتگرال عبارت است از :

$$(F_z dz)_{ef}-(F_z dz)_{gh}+(F_\rho d\rho)_{fg}-(F_\rho d\rho)_{he}$$

$$= -\frac{\partial F_z}{\partial \rho}\, d\rho dz + \frac{\partial F_e}{\partial z}\, dz d\rho$$

که اگر آن را بر مساحت $d\rho dz$ تقسیم کنیم، مؤلفهٔ e_θ به دست می‌آید :

$$\frac{\partial F_\rho}{\partial z} - \frac{\partial F_z}{\partial \rho} \qquad (۱۶.۵)$$

مؤلفهٔ e_z از انتگرالگیری حول لبهٔ ijkli وجه شمارهٔ III به دست می‌آید.

$$(F_\rho d\rho)_{ij}-(F_\rho d\rho)_{kl}+(F_\theta \rho d\theta)_{jk}-(F_\theta \rho d\theta)_{li}$$

$$= -\frac{\partial F_\rho}{\partial \theta}\, d\theta d\rho + \frac{\partial (\rho F_\theta)}{\partial \rho}\, d\rho d\theta$$

(به خاطر داشته باشیم که ρ بر لبهٔ li با ρ بر لبهٔ jk مساوی نیست). پس از تقسیم بر مساحت

$\tilde{\rho} d\theta d\rho$، که در آن $\tilde{\rho}$ بین ρ و $\rho+d\rho$ است، و حدگیری، مؤلفهٔ e_z از **curl F** به صورت زیر به دست می‌آید :

$$\frac{1}{\rho_1}\left[-\frac{\partial F_\rho}{\partial \theta} + \frac{\partial (\rho F_\theta)}{\partial \rho}\right] \qquad (۱۷.۵)$$

از ترکیب این مؤلفه‌ها در می‌یابیم که *تاو* یک *میدان برداری* در *مختصات استوانه‌ای* از دستور زیر به دست می‌آید :

$$\mathbf{curl\ F}=\left(\frac{1}{\rho}\frac{\partial F_z}{\partial\theta}-\frac{\partial F_\theta}{\partial z}\right)\mathbf{e}_\rho+\left(\frac{\partial F_\rho}{\partial z}-\frac{\partial F_z}{\partial\rho}\right)\mathbf{e}_\theta+\frac{1}{\rho}\left(\frac{\partial(\rho F_\theta)}{\partial\rho}-\frac{\partial F_\rho}{\partial\theta}\right)\mathbf{e}_z \qquad (۱۸.۵)$$

که معادل است با (تمرین ۳):

$$\mathbf{curl\ F}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ F_\rho & \rho F_\theta & F_z\end{vmatrix} \qquad (۱۹.۵)$$

مثال ۵.۵ تاو میدان مذکور در (۱۴.۵) را محاسبه کنید.

حل بنابر (۱۹.۵) :

$$\mathbf{curl\ F}=\frac{1}{\rho}\begin{vmatrix}\mathbf{e}_\rho & \rho\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z\\ \dfrac{\partial}{\partial\rho} & \dfrac{\partial}{\partial\theta} & \dfrac{\partial}{\partial z}\\ \rho & \rho z\sin\theta & \rho z\end{vmatrix}$$

$$=(0-\rho\sin\theta)\frac{\mathbf{e}_\rho}{\rho}+(0-z)\,\mathbf{e}_\theta+(z\sin\theta-0)\frac{\mathbf{e}_z}{\rho}$$

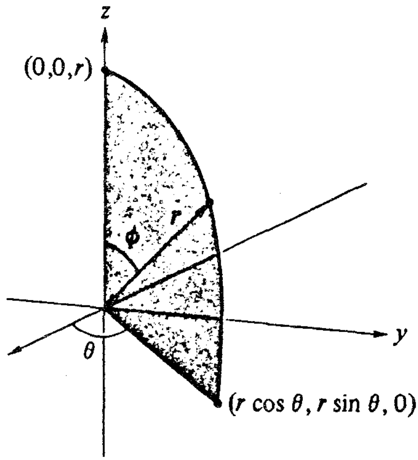
$$=-\sin\theta\,\mathbf{e}_\rho-z\mathbf{e}_\theta+\frac{z\sin\theta}{\rho}\,\mathbf{e}_z$$

مختصات کروی نیز تعمیمی از مختصات قطبی در صفحه‌اند . مختص اوّل ، r ، فاصلهٔ نقطه از مبدأ و ، از این رو ، تعمیم سه بعدی فاصلهٔ دو بعدی «r» است . مختص دوّم ، ϕ، زاویهٔ بین محور z مثبت و بردار موضع $\mathbf{R}$ است (شکل «۵.۵» را ببینید). مختص سوم ، θ ، همان زاویهٔ θ در دستگاه

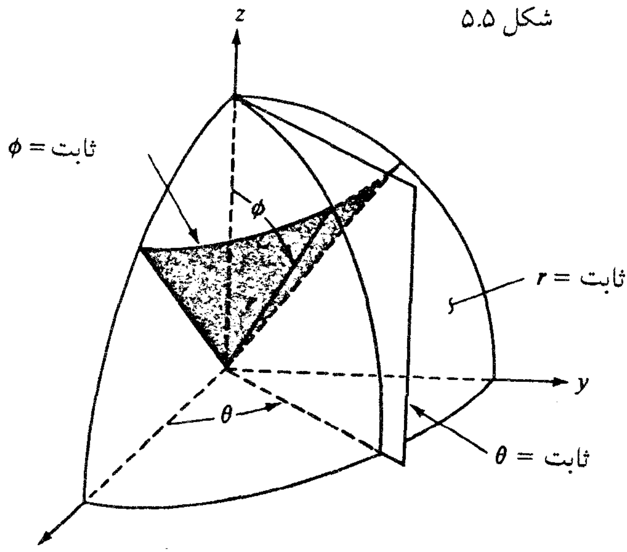
مختصات استوانه‌ای است .

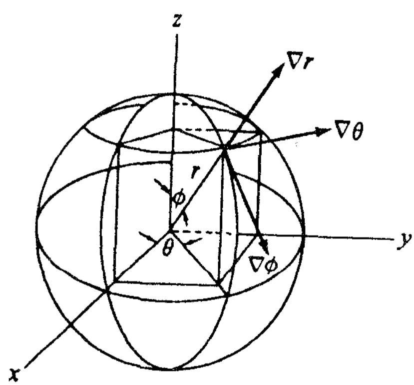
البته ، سطوحی که در نقاط آنها r ثابت است کره‌هایی به مرکز مبدأ می‌باشند. سطوح با ϕ ثابت مخروطهای قائم دوارند (شکلهای «۵.۵» و «۶.۵» را ببینید). سطوحی که در نقاط آنها θ ثابت است ، نیم صفحه‌هایی هستند که در دستگاه مختصات استوانه‌ای توصیف شدند .

خواننده باید مطمئن شود که چرا ، بنا بر تعریف ، زاویهٔ ϕ بین ۰ و π رادیان محدود می‌شود.



شکل ۵.۵





شکل ۶.۵

به محض اینکه تشخیص دادیم که در مختص استوانه‌ای ، ρبرابر $r\sin\phi$ و z برابر $r\cos\phi$ است، معادلات تبدیل مختصات کروی و دکارتی به یکدیگر به آسانی به دست می‌آیند.

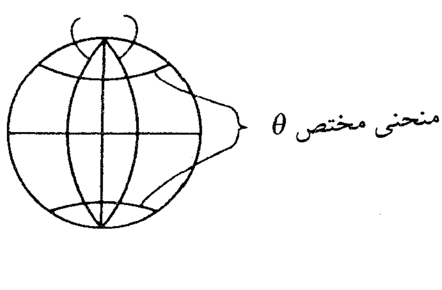
در این صورت ، به کمک معادلات (۱.۵) در می‌یابیم که

$$x=r\sin\phi\cos\theta \qquad r=(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}$$

$$x=r\sin\phi\sin\theta \qquad \phi=\cos^{-1}\frac{z}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}} \quad \text{(مقدار اصلی)} \qquad (۲۰.۵)$$

$$z= r\cos\phi \qquad \theta=\sin^{-1}\frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} = \cos^{-1}\frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}}$$

منحنیهای مختص (منحنیهایی که در امتداد آنها یک مختص تغییر می‌کند و دو مختص دیگر ثابت می‌مانند) ، به ترتیب ، برای r ، اشعه‌یی که از مبدأ سرچشمه می‌گیرند ؛ برای ϕ، نیم‌دایره‌های قائم ؛ و برای θ ، دوایر افقی می‌باشند . اگر سطح زمین را کره‌ای با شعاع ثابت r در نظر بگیریم، منحنیهای مختص θ ، دوایری با عرض جغرافیائی ثابت می‌باشند ، و $\theta=\frac{\pi}{2}$ خط استواست (شکل«۷.۵» را ببینید).



شکل ۷.۵

اگر لحظه‌ای بر این سطح زمین مانند قرار بگیرید ، از مشاهدهٔ سطوح ثابت در شکل (۶.۵)

متوجه می‌شوید که $\mathbf{grad}\ r$ در جهت قائم موضعی برونسو است ، $\mathbf{grad}\,\phi$ متمایل به جنوب است ، $\mathbf{grad}\,\theta$ به سمت شرق است . این بردارها نیز بر منحنیهای مختص خود مماس و دو به دو متعامدند. از این رو ، اگر بردارهای یکّهٔ

$$\mathbf{e}_r=\frac{\mathbf{grad}\ r}{|\mathbf{grad}\ r|}$$

$$\mathbf{e}_\phi=\frac{\mathbf{grad}\,\phi}{|\mathbf{grad}\,\phi|} \qquad (۲۱.۵)$$

$$\mathbf{e}_\theta=\frac{\mathbf{grad}\,\theta}{|\mathbf{grad}\,\theta|}$$

را تعریف کنیم ، ملاحظه می‌کنیم که این بردارها به ترتیب مذکور یک دستگاه راستگرد تشکیل می‌دهند. مجدداً اگر به خاطر بیاوریم که $|\mathbf{grad}f|=df/ds$ ، می‌توانیم معادلات (۲۱.۵) را به صورت ساده‌تری نیز بنویسیم . در امتداد منحنی مختص r ، $ds=|dr|$. منحنیهای مختص ϕنیم دایره‌هایی به شعاع r اند و لذا در امتداد آنها $ds=|rd\phi|$. منحنیهای مختص θ دوایری به شعاع (دقت کنید) $r\sin\phi$ می‌باشند ، و لذا در امتداد آنها $ds=|r\sin\phi d\theta|$ (شکل «۸.۵» را ببینید). بنابراین ،

$$\mathbf{e}_r=\mathbf{grad}\ r$$

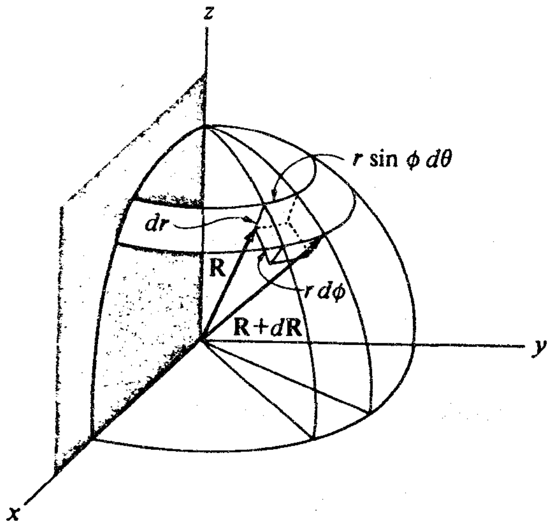
$$\mathbf{e}_\phi=r\ \mathbf{grad}\phi \qquad (۲۲.۵)$$

$$\mathbf{e}_\theta=r\ \mathbf{grad}\phi\ \mathbf{grad}\theta$$

بردار موضع در دستگاه مختصات استوانه‌ای به صورت سادهٔ زیر است :

$$\mathbf{R}=r\mathbf{e}_r$$

اکنون ما می‌توانیم محاسباتی ، نظیر آنچه در دستگاه مختصات استوانه‌ای صورت گرفت ، انجام دهیم و به نتایج مشابهی در دستگاه مختصات کروی دست یابیم .



شکل ۸.۵

از شکل (۸.۵) ملاحظه می‌کنیم که تغییر مکان $\mathbf{dR}$ را می‌توانیم به صورت

$$d\mathbf{R}=e_r dr+e_\phi r d\phi+e_\theta r\sin\phi d\theta \tag{۲۳.۵}$$

بیان کنیم . بنابراین ، عنصر طول کمان در مختصات کروی عبارت است از :

$$ds=|d\mathbf{R}|=(dr^2+r^2 d\phi+r^2\sin^2\phi d\theta)^{\frac{1}{2}} \tag{۲۴.۵}$$

از شکل (۸.۵) دیده می‌شود که عنصر حجم در مختصات کروی از دستور زیر به دست می‌آید :

$$dV=(dr)(rd\phi)(r\sin\phi d\theta)=r^2\sin\phi\, dr d\phi d\theta \tag{۲۵.۵}$$

مولفهٔ گرادیان $f(r,\phi,\theta)$ در جهت e_r ، نرخ تغییر f نسبت به فاصله در امتداد منحنی مختص r است ، و مؤلفه‌هایی که در جهت e_ϕ و e_θ می‌باشند خاصیّت مشابه دارند. بنابراین ، اگر از دستور (۲۴.۵) برای تعیین فاصله استفاده کنیم ، در می‌یابیم که گرادیان f در دستگاه مختصات کروی عبارت است از :

$$\mathbf{grad}\, f(r,\phi,\theta)=\frac{\partial f}{\partial r}e_r+\frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \phi}e_\phi+\frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial f}{\partial \theta}e_\theta \tag{۲۶.۵}$$

اگر میدان برداری $\mathbf{F}$ در دستگاه مختصات کروی به صورت زیر مفروض باشد ،

$$\mathbf{F}(r,\phi,\theta)=F_r\mathbf{e}_r+F_\phi\mathbf{e}_\phi+F_\theta\mathbf{e}_\theta$$

آن گاه ، مانند قبل ، می‌توانیم واگرایی $\mathbf{F}$ را با استدلالی به وسیلهٔ متوازی السطوح بی‌نهایت کوچک شکل (۹.۵) محاسبه کنیم . کل شار خروجی از وجوه این متوازی السطوح برابر است با

$$(F_r r\sin\phi d\theta r d\phi)_{IV} - (F_r r\sin\phi d\theta r d\phi)_{I} + (F_\theta r d\phi dr)_{V}$$

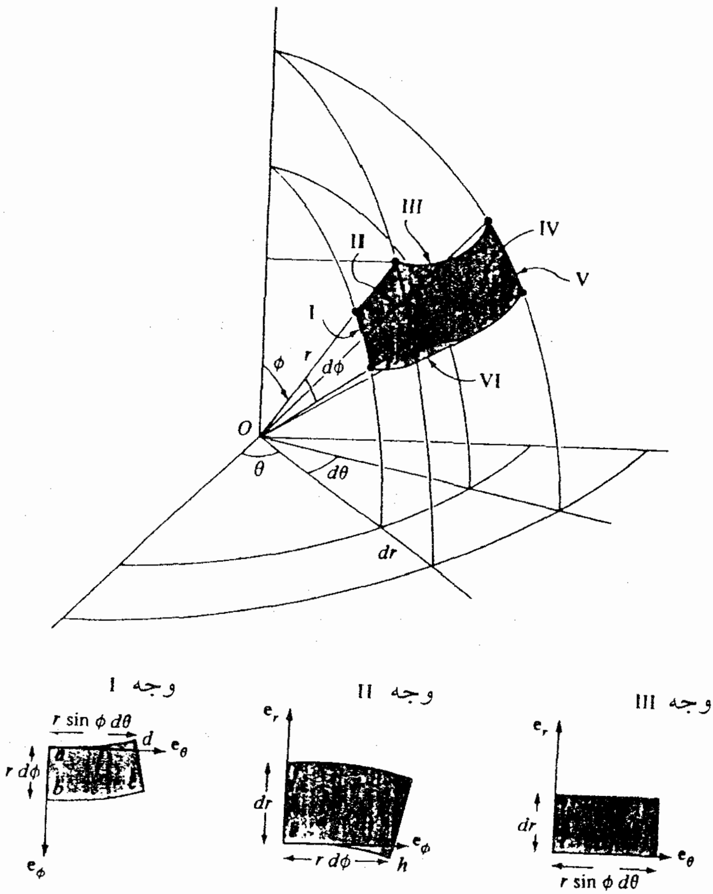
$$-(F_\theta r d\phi dr)_{II} + (F_\phi r\sin\phi d\theta dr)_{VI} - (F_\phi r\sin\phi d\theta dr)_{III}$$

$$=\frac{\partial(r^{2}F_r)}{\partial r}\,dr\sin\phi d\theta d\phi+\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}\,d\theta r d\phi dr+\frac{\partial(F_\phi\sin\phi)}{\partial\phi}\,d\phi r d\theta dr$$

(دقت کنید که کدام متغیر از وجهی به وجه دیگر تغییر می‌کند). از تقسیم شار مذکور بر عنصر حجم ، که در (۲۵.۵) محاسبه شده است ، *واگرایی میدان* $\mathbf{F}$ *در دستگاه مختصات کروی* به صورت زیر به دست می‌آید :

$$\text{div } \mathbf{F}=\frac{1}{r^{2}}\frac{\partial(r^{2}F_r)}{\partial r}+\frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial F_\theta}{\partial\theta}+\frac{1}{r\sin\phi}\frac{\partial(F_\phi\sin\phi)}{\partial\phi} \qquad (۲۷.۵)$$

از استدلال مشابهی بر مبنای شکل (۹.۵) تاو میدان $\mathbf{F}$ نیز به دست می‌آید .



شکل ۹.۵

انتگرال خط حول لبهٔ وجه شمارهٔ I، که به طریق درستی جهت دار شده باشد، عبارت است از:

$$(F_\phi r d\phi)_{ab}-(F_\phi r d\phi)_{cd}+(F_\theta r \sin\phi d\theta)_{bc}-(F_\theta r \sin\phi d\theta)_{da}$$

$$= -\frac{\partial F_\phi}{\partial \theta} d\theta r d\phi + \frac{\partial (F_\theta \sin\phi)}{\partial \phi} d\phi r d\theta$$

که از تقسیم آن بر مساحت وجه ، $r^2\sin\phi d\theta d\phi$ ، مؤلفهٔ **curl F** در جهت $\mathbf{e}_r$ به دست می‌آید :

$$\frac{1}{r\sin\phi}\left[\frac{\partial(F_\theta\sin\phi)}{\partial\phi}-\frac{\partial F_\phi}{\partial\theta}\right] \qquad (۲۸.۵)$$

انتگرال خط حول کرانهٔ وجه شمارهٔ II عبارت است از :

$$(F_r dr)_{ef}-(F_r dr)_{gh}+(F_\phi r d\phi)_{fg}-(F_\phi r d\phi)_{he}=-\frac{\partial F_r}{\partial\phi}d\phi dr+\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r}drd\phi$$

که از تقسیم آن بر مساحت وجه ، $rd\phi dr$ ، مؤلفهٔ تاو **F** در جهت $\mathbf{e}_\theta$ نتیجه می‌شود :

$$\frac{1}{r}\left[\frac{\partial(rF_\phi)}{\partial r}-\frac{\partial(F_r)}{\partial\phi}\right] \qquad (۲۹.۵)$$

انتگرال خط حول کرانهٔ وجه شمارهٔ III عبارت است از :

$$(F_\theta r\sin\phi d\theta)_{ij}-(F_\theta r\sin\phi d\theta)_{kl}+(F_r dr)_{jk}-(F_r dr)_{li}$$

$$=-\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r}dr\sin\phi d\theta+\frac{\partial F_r}{\partial\theta}d\theta dr$$

که از تقسیم آن بر مساحت وجه ، $r\sin\phi d\theta dr$ ، مؤلفهٔ تاو **F** در جهت $\mathbf{e}_\phi$ عاید می‌شود :

$$\frac{1}{r\sin\phi}\left[\frac{\partial F_r}{\partial\theta}-\frac{\partial(rF_\theta)}{\partial r}\sin\phi\right] \qquad (۳۰.۵)$$

خواننده باید تحقیق کند که نتایج (۲۸.۵) ، (۲۹.۵) ، و (۳۰.۵) را می‌توان چنین خلاصه کرد :

تاو میدان برداری $\mathbf{F}$ در دستگاه مختصات کروی از دستور زیر به دست می‌آید :

$$\operatorname{curl} \mathbf{F}=\frac{1}{r^2\sin\phi}\begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\phi & r\sin\phi\,\mathbf{e}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ F_r & rF_\phi & r\sin\phi F_\theta \end{vmatrix} \qquad (۳۱.۵)$$

برای سهولت مراجعه ، فرمولهایی که در این بخش به دست آمدند ، همراه با تعمیمهای آنها، در انتهای این بخش درج خواهد شد.

تمرینات

۱. معادلات تبدیل مختصات استوانه‌ای و کروی را به یکدیگر بیابید.

۲. با استفاده از معادلات (۱.۵) و (۲.۵) ، ثابت کنید که

$$\mathbf{e}_z=\mathbf{k}\ , \qquad \mathbf{e}_\rho=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}\ , \qquad \mathbf{e}_\theta=\frac{-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}} \qquad (۳۲.۵)$$

۳. درستی معادلهٔ (۱۹.۵) را بررسی کنید.

۴. با استفاده از (۲۰.۵) و (۲۱.۵) ، ثابت کنید که

$$\mathbf{e}_r=\frac{x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}}{(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\mathbf{e}_\phi=\frac{z(x\mathbf{i}+y\mathbf{j})-(x^2+y^2)\mathbf{k}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}\,(x^2+y^2+z^2)^{\frac{1}{2}}}$$

$$\mathbf{e}_\theta=\frac{-y\mathbf{i}+x\mathbf{j}}{(x^2+y^2)^{\frac{1}{2}}}$$

۵. درستی معادلهٔ (۳۱.۵) را بررسی کنید.

۶. لاپلاسی $\nabla^2 f$ را در مختصات استوانه‌ای و کروی محاسبه کنید. (*راهنمایی*: از تساوی $\nabla^2 = \text{div}\,\mathbf{grad}$ استفاده کنید.)

۷. نشان دهید که اگر f تابعی فقط از r باشد، آن گاه

$$\nabla^2 f(\mathrm{r}) = f''(\mathrm{r}) + \frac{2}{\mathrm{r}} f'(\mathrm{r})$$

۸. با تبدیل مختصات دکارتی به مختصات استوانه‌ای، واگرایی و تاو میدانهای زیر را بیابید:

(الف) $\mathbf{F} = \dfrac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$ (ب) $\mathbf{F} = \dfrac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}$

[*راهنمایی*: معادلهٔ (۳۲.۵) را ملاحظه کنید.]

۹. طول منحنی به معادلات

$$\mathrm{r} = \sin\phi \quad , \quad \theta = \pi/2$$

به ازای $0 \leq \phi \leq \pi$ چقدر است؟

۱۰. مساحت سطح مارپیچی

$$\rho = u \quad , \quad \theta = (\pi/2) - v \quad , \quad z = v$$

را به ازای $0 \leq u \leq 1$ و $0 \leq v \leq 2$ محاسبه کنید. [*راهنمایی*: از معادلات (۲۶.۴) و (۵.۵) استفاده کنید.]

۱۱. فرض کنید $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ و $\mathbf{F} = \mathbf{R} \times \mathbf{k}$. شار $\mathbf{F}$ گذران از سطح استوانهٔ

$$\rho = 1 \quad , \quad 0 \leq z \leq 1$$

را محاسبه کنید. درستی قضیهٔ واگرایی را در این حالت بررسی کنید.

۱۲. مساحت سطح مخروط

$$\phi = \pi/6 \quad , \quad 0 \leq \mathrm{r} \leq 2$$

را محاسبه کنید. [*راهنمایی*: از معادلات (۲۶.۴) و (۲۳.۵) استفاده کنید.]

۱۳. $\nabla(\mathrm{r}^n)$ را محاسبه کنید.

۱۴. انتگرال $\iiint (x^2+y^2+z^2)^{\frac{3}{2}}\,dxdydz$ را بر مقطع کرهٔ به مرکز مبدأ و شعاع ۲ و ناحیهٔ یک هشتم اوّل ($x>0$, $y>0$, $z>0$) محاسبه کنید.

۱۵. فرض کنید $\mathbf{R}=x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$ و $r=|\mathbf{R}|$. میدان برداری $\mathbf{F}=\mathbf{R}/r^3$ را بر حسب r و $\mathbf{e}_r$ بنویسید و

(الف) نشان دهید که $\operatorname{div}\mathbf{F}$ در حوزهٔ تعریف $\mathbf{F}$ صفر است.

(ب) نشان دهید که انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم $\mathbf{F}$ بر سطح کرهٔ واحد $r=1$ برابر 4π است.

(ج) توضیح دهید که چرا نتایج بندهای (الف) و (ب) با قضیهٔ واگرایی متناقض نیستند.

(د) انتگرال سطح مؤلفهٔ قائم $\mathbf{F}$ بر سطح کرهٔ واحدی که مرکزش ۴ واحد دور از مبدأ باشد چقدر است ؟

۱۶. گرادیان $f(r,\phi,\theta)=\cos\phi/r^2$ را در دستگاه مختصات کروی محاسبه کنید.

۱۷. واگرایی تاو میدان $\mathbf{F}(r,\phi,\theta)=\mathbf{e}_r+r\mathbf{e}_\phi+r\cos\theta\,\mathbf{e}_\theta$ را در دستگاه مختصات کروی محاسبه کنید.

۱۸. شار میدان $\mathbf{F}=r^n\mathbf{e}_r$ را که از سطح محدود به نیمهٔ بالایی کرهٔ واحد و صفحهٔ استوایی می‌گذرد محاسبه کنید. درستی قضیهٔ واگرایی را در این حالت بررسی کنید.

۱۹. درستی قضیهٔ استوکس را در مورد $\mathbf{F}=x\mathbf{j}$ و سطح نیم کره

$$S:\quad r=1\quad,\quad 0\le\phi\le\pi/2\quad,\quad 0\le\theta\le 2\pi$$

بررسی کنید، البته با استفاده از مختصات کروی.

۲۰. تساوی $\nabla\cdot(r^n\mathbf{e}_r)=0$ به ازای چه مقادیری از n برقرار است ؟

۲۱. تساوی $\nabla\times(r^n\mathbf{e}_r)=\mathbf{0}$ به ازای چه مقادیری از n برقرار است ؟

۲۲. (الف) یک میدان برداری به صورت $\mathbf{F}=F_r(r)\mathbf{e}_r$ بیابید که به ازای $m\ge 0$ در تساوی $\nabla\cdot\mathbf{F}=r^m$ صدق کند.

(ب) با استفاده از قضیهٔ واگرایی ثابت کنید که

$$\iiint_D r^m dv = \frac{1}{m+3} \iint_S r^{m+1} \mathbf{e}_r \cdot d\mathbf{S}$$

(ج) وقتی $m=0$ ، حکم بند (ب) را تعبیر کند. (*راهنمایی* : حجم هر هرم یک سوم حجم متوازی السطوحی است که دارای همان قاعده و همان ارتفاع باشد.)

۲.۵ مختصات منحنی الخط متعامد

تجربیاتی که از بررسی دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی کسب کردیم ما را در موقعیت خوبی قرار می‌دهد که به تحلیل دستگاههای مختصات کلی یا *دستگاههای منحنی الخط* بپردازیم.

حالت کلی از این قرار است : هر نقطه در ناحیه‌ای از فضا با سه تائی مرتب (u_1,u_2,u_3) ، که در آن u_1 ، u_2 ، و u_3 اعدادی حقیقی می‌باشند ، موسوم به مختصات منحنی الخط آن نقطه مشخص می‌شود. شاید این اعداد را طول یا زاویه تعبیر کنید ، ولی هیچ‌یک از این تعبیرهای هندسی موردنیاز نیست . آنچه باید بدانیم معادلاتی است که به کمک آنها مختصات منحنی الخط و دکارتی به یکدیگر تبدیل می‌شوند ، و ما این معادلات را به صورت زیر نمایش می‌دهیم :

$$\begin{aligned} x&=x(u_1,u_2,u_3), & u_1&=u_1(x,y,z) \\ y&=y(u_1,u_2,u_3), & u_2&=u_2(x,y,z) \\ z&=z(u_1,u_2,u_3), & u_3&=u_3(x,y,z) \end{aligned} \qquad (۳۳.۵)$$

معادلات (۳۳.۵) ، معادلات (۱.۵) و (۲۰.۵) را به عنوان حالتهای خاص در بردازند.

ملاحظه کنید که انتخاب توابع u_1 ، u_2 ، و u_3 به طور دلخواه عملی نیست . به عنوان مثال ، دستگاه

$$u_1=x^2 \quad , \quad u_2=y-z \quad , \quad u_3=2y-2z$$

انتظارات ما را برآورده نمی‌کند ، زیرا معادلات این دستگاه معکوس پذیر نیستند ؛ در واقع ، نقاط $(x,y,z)=(1,2,3)$ و $(x,y,z)=(1,3,4)$ دارای مختصات منحنی الخط یکسان می‌باشند. بنابراین ، ما قرار می‌گذاریم که توابع u_1 ، u_2 ، و u_3 سه تائیهای مرتب متمایز را به نقاط متمایزی از ناحیهٔ

مورد بحث تبدیل کنند. همچنین، فرض می‌کنیم که این توابع دارای مشتقات جزئی پیوسته از همهٔ مراتب باشند، و گرادیانهای این توابع در هر نقطه چون P ناصفر باشند.

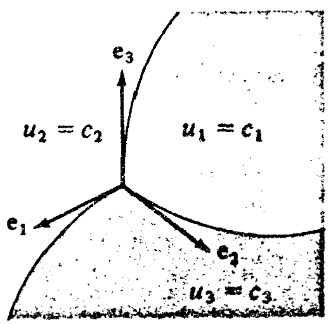
(گاهی ضرورت ندارد که مختصات هر نقطهٔ فضا در این شرایط صدق کنند؛ مثلاً، اگر در امتداد یک خط موازی با محور x از محور z بگذریم، مختص کروی θ ناگهان از ۰ به π می‌رود و یک ناپیوستگی جهشی در نقطهٔ برخورد با محور z خواهد داشت. معمولاً از این مشکل صرف نظر می‌کنیم و تنها حوزه‌هایی را مورد بحث قرار می‌دهیم که در آنها همهٔ شرایط بالا تحقق یابند.)

این شرایط ما را مطمئن می‌سازند که از هر نقطهٔ حوزهٔ مفروض با مختصات منحنی الخط (c_1, c_2, c_3) سه سطح تک مقدار $u_1(x,y,z)=c_1$، $u_2(x,y,z)=c_2$، و $u_3(x,y,z)=c_3$ خواهد گذشت. چنان‌که در شکل (۱۰.۵) نشان داده شده است، این سطوح دو به دو یکدیگر را قطع می‌کنند و سه منحنی می‌سازند که از P می‌گذرند و در امتداد هر یک از آنها فقط یک مختص تغییر می‌کند: اینها همان منحنیهای مختص می‌باشند. قائم بر سطح $u_i=c_i$ گرادیان

$$\nabla u_i=\frac{\partial u_i}{\partial x}\mathbf{i}+\frac{\partial u_i}{\partial y}\mathbf{j}+\frac{\partial u_i}{\partial z}\mathbf{k} \tag{۳۴.۵}$$

است و مماس بر منحنی مختص u_i بردار زیر است:

$$\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u_i}=\frac{\partial x}{\partial u_i}\mathbf{i}+\frac{\partial y}{\partial u_i}\mathbf{j}+\frac{\partial z}{\partial u_i}\mathbf{k} \tag{۳۵.۵}$$



شکل ۱۰.۵

یادآوری می‌کنیم که در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی، سه بردار قائم بر سطوح تک مقدار دو به دو متعامدند. در حالت کلی، هرگاه بردارهای ∇u_1، ∇u_2، و ∇u_3 در هر نقطه دو به دو متعامدند باشند، می‌گوییم که u_1، u_2، و u_3 یک *دستگاه مختصات منحنی الخط متعامد* تشکیل

می‌دهند. در این بخش بحث خود را به چنین دستگاههایی محدود می‌کنیم. به علاوه، فرض می‌کنیم u_i ها چنان شماره‌گذاری می‌شوند که ∇u_1، ∇u_2، و ∇U_3 (به همین ترتیب) یک دستگاه راستگرد بسازند.

نکتهٔ شایان ذکر دیگری که از مطالعهٔ دستگاههای مختصات خاص در بخش گذشته آموختیم این است که متوجه شدیم که هر بردار گرادیان ∇u_i موازی بردار $\partial\mathbf{R}/\partial u_i$ بود که بر منحنی مختص متناظر مماس است. این خاصیّت در مورد دستگاههای مختصات منحنی الخط متعامد نیز به قوت خود باقی است: *هر منحنی مختص* u_i *سطح تک مقدار* $u_i=c_i$ *را، وقتی* (u_1,u_2,u_3) *مختصات منحنی‌الخط متعامد باشند، با یک زاویهٔ قائمه قطع می‌کند.* برای اثبات این حکم، مثلاً، منحنی مختص u_1 را در نظر بگیرید.

(۱) این منحنی، مقطع دو سطح $u_2=c_2$ و $u_3=c_3$ است. از این رو، مماس بر آن، $\partial\mathbf{R}/\partial u_1$، بر هر دو قائم این سطوح، ∇u_2 و ∇u_3، عمود است.

(۲) بردار ∇u_1، به استناد تعریف دستگاه مختصات منحنی الخط متعامد، نیز بر ∇u_2 و ∇u_3 عمود است.

(۳) این ایجاب می‌کند که $\partial\mathbf{R}/\nabla u_1$ موازی (یا شاید متنافر) با ∂u_1 باشد. چون هر دو نقطه در جهت افزایش u_1 هستند، این دو بردار موازی یکدیگرند.

البته، از بحث بالا نتیجه می‌گیریم که بردارهای $\partial\mathbf{R}/\partial u_1$، $\partial\mathbf{R}/\partial u_2$، و $\partial\mathbf{R}/\partial u_3$ نیز یک دستگاه راستگرد از بردارهای دو به دو متعامد تشکیل می‌دهند. در واقع، بنابر قاعدهٔ زنجیری،

$$(\nabla u_i)\cdot\left(\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u_i}\right)=\frac{\partial u_i}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u_j}+\frac{\partial u_i}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u_j}+\frac{\partial u_i}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial u_j}$$

$$=\frac{\partial u_i}{\partial u_j}=\begin{cases}1 & i=j\\ 0 & i\neq j\end{cases} \qquad (۳۶.۵)$$

به این ترتیب، طبیعی است که دستگاه راستگرد متشکل از بردارهای یکّهٔ دوبدو متعامد $(\mathbf{e}_1,\mathbf{e}_2,\mathbf{e}_3)$

را به صورت

$$\mathbf{e}_i = \frac{\nabla u_i}{|\nabla u_i|} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u_i} \Big/ \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u_i} \right| \qquad (i=1,2,3) \qquad (۳۷.۵)$$

تعریف کنیم . بردارهای $(\mathbf{e}_\rho, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z)$ و $(\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\phi, \mathbf{e}_\theta)$ نمونه‌های خاصی از (۳۷.۵) می‌باشند.

برای بیان اعمال برداری در دستگاه منحنی الخط متعامد کلی ، لازم است سه تابع h_i موسوم به *عوامل مقیاس* را تعریف کنیم . *عامل مقیاس h_i نرخ افزایش طول کمان منحنی مختص iام نسبت به u_i است.* به عبارت دیگر ، اگر s_i طول منحنی مختص iام باشد که در جهت افزایش u_i اندازه‌گیری می‌شود ، آن گاه

$$h_1 = \frac{ds_1}{du_1} \quad , \quad h_2 = \frac{ds_2}{du_2} \quad , \quad h_3 = \frac{ds_3}{du_3} \qquad (۳۸.۵)$$

چون طول کمان را در حالت کلی می‌توانیم به صورت

$$ds = |d\mathbf{R}| = \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u_3} du_3 \right| \qquad (۳۹.۵)$$

بنویسیم ، ملاحظه می‌کنیم که

$$h_i = \left| \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u_i} \right| \qquad (i=1,2,3) \qquad (۴۰.۵)$$

ترکیب دو معادلهٔ اخیر نشان می‌دهد که بردار تغییر مکان را می‌توان بر حسب عوامل مقیاس به صورت زیر نوشت :

$$d\mathbf{R} = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3 \qquad (۴۱.۵)$$

از مشهودات زیر می‌توان فرمول دیگری برای عامل مقیاس h_i به دست آورد :

(۱) $|\nabla u_i|$ نرخ تغییر u_i بر حسب فاصله در جهت ∇u_i است .

(۲) جهت ∇u_i همان جهت منحنی مختص u_i است .

(۳) s_i فاصله را در امتداد منحنی مختص u_i اندازه‌گیری می‌کند.

نتیجه می‌گیریم که

$$|\nabla u_i| = \frac{du_i}{ds_i} = \frac{1}{h_i}$$

بنابراین ،

$$h_1 = \frac{1}{|\nabla u_1|}\ ,\ h_2 = \frac{1}{|\nabla u_2|}\ ,\ h_3 = \frac{1}{|\nabla u_3|} \qquad (۴۲.۵)$$

مثال ۶۰۵ دستگاه مختصات منحنی‌الخطی را که به ازای $z \geq 0$ به صورت

$$x = u_1 - u_2\ ,\ y = u_1 + u_2\ ,\ z = u_3^2 \qquad (۴۳.۵)$$

تعریف شده است ، در نظر بگیرید . تحقیق کنید که دستگاه متعامد و راستگرد است و بردارهای یکّهٔ e_i و عوامل مقیاس h_i را محاسبه کنید .

حل در این مثال نیازی به معادلات وارون نداریم ، اگرچه به سادگی ازمعادلات مفروض نتیجه می‌شوند :

$$u_1 = \frac{x+y}{2}$$

$$u_2 = \frac{y-x}{2}$$

$$u_3 = z^{\frac{1}{2}}$$

(برای جلوگیری از ابهام ، ریشهٔ نامنفی را در نظر بگیرید)

برای محاسبهٔ e_i از عبارت سمت راست معادلهٔ (۳۷.۵) استفاده می‌کنیم :

$$\mathbf{e}_1 = \frac{\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}}$$

$$\mathbf{e}_2 = \frac{-\mathbf{i}+\mathbf{j}}{\sqrt{2}} \qquad (۴۴.۵)$$

$$\mathbf{e}_3 = \frac{2u_3\mathbf{k}}{|2u_3|} = \mathbf{k}$$

واضح است که این دستگاه راستگرد و متعامد است و می‌توان گفت که ، در واقع ، معادلات (۴۳.۵) یک دستگاه منحنی‌الخط متعامد تعریف می‌کنند. h_i ها قبلاً در مخرج کسرهای معادلات (۴۴.۵) ظاهر (و ، از این رو ، محاسبه) شده‌اند :

$$h_1=\sqrt{2}\ ,\quad h_2=\sqrt{2}\ ,\quad h_3=2u_3 \qquad (۴۵.۵)$$

مثال ۷۰۵ عوامل مقیاس دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی را محاسبه کنید .

حل از مقایسهٔ معادلات (۴۱.۵) ، (۵.۵) ، (۲۳.۵) ، به همین ترتیب ، در می‌یابیم که

$$h_\rho=1 \quad ,\quad h_\theta=\rho \quad ,\quad h_z=1 \qquad (۴۶.۵)$$

$$h_r=1 \quad ,\quad h_\phi=r \quad ,\quad h_\theta=r\sin\phi \qquad (۴۷.۵)$$

یادآوری می‌کنیم که این نتایج از بررسی نمودارها به آسانی به دست می‌آیند ؛ وقتی که مختصات منحنی‌الخط قابل تصور باشد ، محاسبات (۴۰.۵) در مورد h_i غالباً ضرورت ندارد.

عوامل مقیاس این امکان را برای ما فراهم می‌سازند که فرمولهای کلی طول کمان ، حجم ، گرادیان ، واگرایی ، و تاو را بر حسب مختصات منحنی‌الخط بنویسیم . در این بخش ما روش اکتشاف شهودی را برای استنتاج این فرمولها عرضه خواهیم کرد.

از بحث بالا می‌توان چنین نتیجه گرفت که ds_i طول کمان منحنی مختص i ام است وقتی که مختص i ام از u_i به u_i+du_i تغییر یابد. چون یک تغییر مکان دلخواه $d\mathbf{R}$ از تغییرات du_1,du_2 و du_3 ، هریک در جهات دوبه دو متعامد ، پدید می‌آید ، ما می‌توانیم عنصر طول کمان $|d\mathbf{R}|$ را به استناد قضیهٔ فیثاغورس به صورت

$$|d\mathbf{R}|^2=ds_1^2+ds_2^2+ds_3^2$$

بیان کنیم . اگر از عوامل مقیاسی که از معادلهٔ (۳۹.۵) به دست می‌آیند استفاده کنیم ، در می‌یابیم که طول کمان در امتداد منحنی C از دستور

$$\int_C |d\mathbf{R}|=\int ds\ =\int\sqrt{(h_1du_1)^2+(h_2du_2)^2+(h_3du_3)^2} \qquad (۴۸.۵)$$

که شامل یک انتگرال خط است ، به دست می‌آید و این تعمیم فرمول بخش (۲.۲) است .

بلافاصله می‌توانیم بحث بالا را تعمیم دهیم و نتیجه بگیریم که انتگرال خط یک میدان برداری پیوستهٔ $\mathbf{F}$ ، که در دستگاه مختصات کلی به صورت $F=F_1\mathbf{e}_1+F_2\mathbf{e}_2+F_3\mathbf{e}_3$ تعریف شده است ، در امتداد یک منحنی چون C از دستور

$$\int_C \mathbf{F}.d\mathbf{R}=\int_C (F_1h_1du_1+F_2h_2du_2+F_3h_3du_3) \qquad (۴۹.۵)$$

به دست می‌آید که ، در عمل ، اگر u_1 ، u_2 ، و u_3 بر حسب پارامتری چون t داده شده باشند (که معمولاً چنین است) ، آنگاه (۴۹.۵) نهایتاً به یک انتگرال شامل t و dt تبدیل می‌شود.

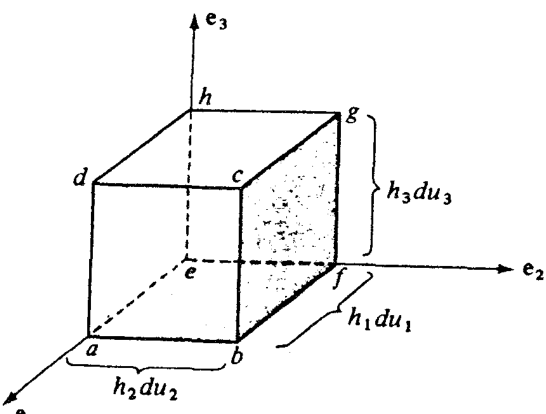
از شکل (۱۱.۵) در می‌یابیم که جسم حاصل از تغییر مکانهای du_1 ، du_2 ، و du_3 تقریباً یک متوازی السطوح قائم با لبه‌های h_1du_1 ، h_2du_2 ، و h_3du_3 است و ، بنابراین ، حجم آن برابر است با

$$dV=h_1h_2h_3\ du_1du_2du_3 \qquad (۵۰.۵)$$

از این رو ، انتگرال حجم تابعی چون $f(u_1,u_2,u_3)$ از دستور زیر به دست می‌آید :

$$\iiint f(u_1,u_2,u_3)dv=\iiint f(u_1,u_2,u_3)h_1h_2h_3du_1du_2du_3 \qquad (۵۱.۵)$$

دوباره ، وقتی حدود انتگرالگیری مشخص شده باشد ، می‌توانیم از معادلهٔ (۵۱.۵) مکرراً انتگرال بگیریم . در مختصات کروی $dV=r^2\sin\phi drd\theta d\phi$ ؛ در مختصات استوانه‌ای



شکل ۱۱.۵

$dV=\rho d\rho d\theta dz$ است .

در بخش (۱.۳) ، نشان داده شد که مولفه $\mathbf{grad}f$ در جهت $\mathbf{e}_۱$ عبارت است از : $df/ds_۱$ ، نرخ تغییر f نسبت به فاصله در جهت $\mathbf{e}_۱$. چون $\mathbf{e}_۱$ ، $\mathbf{e}_۲$ ، $\mathbf{e}_۳$ بردارهای یکهٔ دوبه دو متعامدند ، فوراً می‌توانیم $\mathbf{grad}f$ را برحسب آنها بیان کنیم :

$$\mathbf{grad}f=\frac{df}{ds_۱}\mathbf{e}_۱+\frac{df}{ds_۲}\mathbf{e}_۲+\frac{df}{ds_۳}\mathbf{e}_۳$$

یا ، با معرفی عوامل مقیاس :

$$\mathbf{gard}f=\frac{۱}{h_۱}\frac{\partial f}{\partial u_۱}\mathbf{e}_۱+\frac{۱}{h_۲}\frac{\partial f}{\partial u_۲}\mathbf{e}_۲+\frac{۱}{h_۳}\frac{\partial f}{\partial u_۳}\mathbf{e}_۳ \qquad (۵۲.۵)$$

مثال ۸۰۵ گرادیان $f(u_۱,u_۲,u_۳)=u_۱u_۲+u_۳^۲$ را در دستگاه مختصات (۴۳.۵) محاسبه کنید .

حل از (۵۲.۵) و (۴۵.۵) داریم :

$$\nabla f = \frac{۱}{\sqrt{۲}}u_۲\mathbf{e}_۱+\frac{۱}{\sqrt{۲}}u_۱\mathbf{e}_۲+\frac{۱}{۲u_۳}۲u_۳\mathbf{e}_۳$$

$$=(u_۲\mathbf{e}_۱+u_۱\mathbf{e}_۲)\frac{\sqrt{۲}}{۲}+\mathbf{e}_۳ \qquad (۵۳.۵)$$

فرمول مربوط به واگرایی قدری پیچیده‌تر است . فرض کنید

$$\mathbf{F}=F_۱\mathbf{e}_۱+F_۲\mathbf{e}_۲+F_۳\mathbf{e}_۳$$

میدانی برداری باشد که برحسب بردارهای یکهٔ $\mathbf{e}_۱$ ، $\mathbf{e}_۲$ و $\mathbf{e}_۳$ داده شده است . واگرایی $\mathbf{F}$ را به عنوان خارج قسمت شار خروجی از وجوه جعبهٔ شکل (۱۱.۵) بر حجم جعبه ، مطابق تعبیری که از واگرایی در بخشهای (۳.۳) و (۹.۴) داده شد ، محاسبه می‌کنیم .

چگالی شار قائم بر وجه abcd برابر $\mathbf{F}\cdot\mathbf{e}_۱=F_۱$ و مساحت این وجه برابر $h_۲h_۳du_۲du_۳$ است.

بنابراین ، شار خروجی از این وجه برابر است با $F_1h_2h_3du_2du_3$. قائم یکّهٔ برونسوی وجه $efgh$ برابر $-e_1$ است . بنابراین ، شار خروجی از این وجه $-F_1h_2h_3du_2du_3$ خواهدبود. چون وقتی که درامتداد منحنی مختص u_1 حرکت کنیم، F_1 ، h_2 ، و h_3 توابعی از u_1 خواهند بود ، مجموع شار خروجی از دو وجه مذکور تقریباً برابر است با :

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(F_1h_2h_3)du_1\right]du_2du_3$$

از این عبارت و عبارات مشابهی که از دو زوج وجه دیگر به دست می‌آیند نتیجه می‌گیریم که شار خالص خروجی از متوازی‌السطوح تقریباً مساوی

$$\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(F_1h_2h_3)+\frac{\partial}{\partial u_2}(F_2h_1h_3)+\frac{\partial}{\partial u_3}(F_3h_1h_2)\right]du_1du_2du_3$$

است و ، بنابراین ، شار خروجی از واحد حجم ، خارج قسمت تقسیم این عبارت بر حجم $h_1h_2h_3du_1du_2du_3$ است . از این‌رو ،

$$\text{div }\mathbf{F}=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(F_1h_2h_3)+\frac{\partial}{\partial u_2}(F_2h_1h_3)+\frac{\partial}{\partial u_3}(F_3h_1h_2)\right] \quad (۵۴.۵)$$

با استفاده از معادلات (۵۲.۵) و (۵۴.۵) عبارت زیر برای لاپلاسی به دست می‌آید :

$$\nabla^2 f=\text{div }\mathbf{grad}f$$

$$=\frac{1}{h_1h_2h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right)+\frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1h_3}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right)+\frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\right] \quad (۵۵.۵)$$

اکنون عبارتی برای **Curl F** پیدا می‌کنیم . از مشخص‌سازی «چرخش» که در تمرین اوّل بخش

(۱۲.۴) توصیف شد ، استفاده می‌کنیم . مولّفهٔ **Curl F** در جهت $\mathbf{e}_1$ برابر است با خارج قسمت تقسیم انتگرال خط مولفهٔ مماسی **F** حول منحنی $efghe$ در شکل (۱۱.۵) بر مساحت محصور در این منحنی . [یادآوری می‌کنیم که ، به استناد قضیهٔ استوکس ، $\int_{efghe} \mathbf{F}\cdot d\mathbf{R}$ برابر $\iint(\text{curl } \mathbf{F}).\mathbf{n}ds$ است که این تقریباً مساوی حاصل ضرب $(\text{Curl } \mathbf{F})\cdot\mathbf{e}_1$ در مساحت است] .

انتگرال در امتداد لبهٔ ef تقریباًبرابر است با

$$F_2(u_1,u_2,u_3)h_2(u_1,u_2,u_3)du_2$$

در امتداد gh, در خلاف جهت به پیش می‌رویم ، به علاوه ، مختص سوم اکنون $u_3 + du_3$ است ؛ از این رو ، انتگرال خط عبارت است از :

$$-F_2(u_1,u_2,u_3 + du_3)h_2(u_1,u_2,u_3+du_3)du_2$$

به این ترتیب ، سهم خالص ef و gh از دستور

$$-\frac{\partial}{\partial u_3}(F_2h_2)du_3du_2$$

به دست می‌آید . به طریق مشابه ، سهم fg و he عبارت است از:

$$\frac{\partial}{\partial u_2}(F_3h_3)du_2du_3$$

پس از تقسیم بر مساحت $h_2du_2h_3du_3$ خواهیم داشت :

$$(\text{Curl } \mathbf{F})\cdot\mathbf{e}_1 = \frac{1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_2}(F_3h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(F_2h_2)\right)$$

با استدلالی مشابه در مورد سایر مولفه‌ها ، نتیجه می‌گیریم که

$$\begin{aligned}\text{Curl } \mathbf{F} &= \frac{1}{h_2h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_2}(F_3h_3) - \frac{\partial}{\partial u_3}(F_2h_2)\right)\mathbf{e}_1\\ &+\frac{1}{h_1h_3}\left(\frac{\partial}{\partial u_3}(F_1h_1) - \frac{\partial}{\partial u_1}(F_3h_3)\right)\mathbf{e}_2\\ &+\frac{1}{h_1h_2}\left(\frac{\partial}{\partial u_1}(F_2h_2) - \frac{\partial}{\partial u_2}(F_1h_1)\right)\mathbf{e}_3\end{aligned}$$

$$= \frac{1}{h_1h_2h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{u}_1 & h_2\mathbf{u}_2 & h_3\mathbf{u}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ F_1h_1 & F_2h_2 & F_3h_3 \end{vmatrix} \qquad (۵۶.۵)$$

مثال ۹۰۵ واگرایی و تاو میدان برداری

$$\mathbf{F}(u_1,u_2,u_3)=u_3u_1\mathbf{e}_1 + u_3u_2\mathbf{e}_2 + u_1u_2\mathbf{e}_3$$

را در دستگاه مختصات (۴۳.۵) محاسبه کنید .

حل از معادلات (۵۴.۵) و (۴۵.۵) نتیجه می‌شود که

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{4u_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(u_3u_1 2\sqrt{2}u_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(u_3u_1 2\sqrt{2}u_3) + \frac{\partial}{\partial u_3}(2u_1u_2)\right] = \sqrt{2}u_3$$

بنابر معادلهٔ (۵۶.۵) ، داریم :

$$\nabla\times\mathbf{F} = \frac{1}{4u_3}\begin{vmatrix} \sqrt{2}\mathbf{e}_1 & \sqrt{2}\mathbf{e}_2 & 2u_3\mathbf{e}_3 \\ \dfrac{\partial}{\partial u_1} & \dfrac{\partial}{\partial u_2} & \dfrac{\partial}{\partial u_3} \\ \sqrt{2}u_3u_1 & \sqrt{2}u_3u_2 & \sqrt{2}u_1u_2u_3 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{(2u_1u_3 - \sqrt{2}u_2)\sqrt{2}}{4u_3}\mathbf{e}_1 + \frac{(\sqrt{2}u_1 - 2u_2u_3)\sqrt{2}}{4u_3}\mathbf{e}_2$$

برای سهولت مراجعه ، همهٔ اعمال مختلف برداری را در دستگاههای مختصات منحنی‌الخط متعامد کلی ، مختصات استوانه‌ای ، و مختصات کروی در این جا می‌آوریم . به خواننده توصیه می‌کنیم که این صفحه از کتاب را برای مراجعات مکرر خود علامت‌گذاری کند.

دستگاه مختصات منحنی‌الخط متعامد کلی

عوامل مقیاس :

$$h_i = \left|\frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u_i}\right| = \frac{1}{|\nabla u_i|} \quad (i=1,2,3)$$

بردار تغییر مکان :

$$d\mathbf{R} = h_1 du_1 \mathbf{e}_1 + h_2 du_2 \mathbf{e}_2 + h_3 du_3 \mathbf{e}_3$$

طول کمان :

$$ds = (h_1^2 du_1^2 + h_1^2 du_2^2 + h_3^2 du_3^2)^{\frac{1}{2}}$$

عنصر حجم :

$$dV = h_1 h_2 h_3 du_1 du_2 du_3$$

گرادیان :

$$\nabla f = \frac{1}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\mathbf{e}_1 + \frac{1}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\mathbf{e}_2 + \frac{1}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\mathbf{e}_3$$

واگرایی :

$$\nabla\cdot\mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}(F_1 h_2 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_2}(F_2 h_1 h_3) + \frac{\partial}{\partial u_3}(F_3 h_1 h_2)\right]$$

تاو :

$$\nabla\times\mathbf{F} = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\begin{vmatrix} h_1\mathbf{e}_1 & h_2\mathbf{e}_2 & h_3\mathbf{e}_3 \\ \frac{\partial}{\partial u_1} & \frac{\partial}{\partial u_2} & \frac{\partial}{\partial u_3} \\ F_1 h_1 & F_2 h_2 & F_3 h_3 \end{vmatrix}$$

لاپلاسی :

$$\nabla^2 f = \frac{1}{h_1 h_2 h_3}\left[\frac{\partial}{\partial u_1}\left(\frac{h_2 h_3}{h_1}\frac{\partial f}{\partial u_1}\right) + \frac{\partial}{\partial u_2}\left(\frac{h_1 h_3}{h_2}\frac{\partial f}{\partial u_2}\right) + \frac{\partial}{\partial u_3}\left(\frac{h_1 h_2}{h_3}\frac{\partial f}{\partial u_3}\right)\right]$$

دستگاه مختصات استوانه‌ای

بردار تغییر مکان :

$$d\mathbf{R} = d\rho\,\mathbf{e}_\rho + \rho\, d\theta\,\mathbf{e}_\theta + dz\,\mathbf{e}_z$$

طول کمان :

$$ds = (d\rho^{۲} + \rho^{۲} d\theta^{۲} + dz^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$$

عنصر حجم :

$$dV = \rho d\rho d\theta dz$$

گرادیان :

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \mathbf{e}_\rho + \frac{۱}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z$$

واگرایی :

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{۱}{\rho} \frac{\partial (\rho F_\rho)}{\partial \rho} + \frac{۱}{\rho} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z}$$

تاو :

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{۱}{\rho} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_\rho & \rho \mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial \rho} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_\rho & \rho F_\theta & F_z \end{vmatrix}$$

لاپلاسی :

$$\nabla^{۲} f = \frac{۱}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial f}{\partial \rho} \right) + \frac{۱}{\rho^{۲}} \frac{\partial^{۲} f}{\partial \theta^{۲}} + \frac{\partial^{۲} f}{\partial z^{۲}}$$

دستگاه مختصات کروی :

بردار تغییر مکان :

$$d\mathbf{R} = dr\mathbf{e}_r + r d\phi \mathbf{e}_\phi + r \sin\phi d\theta \mathbf{e}_\theta$$

طول کمان :

$$ds = (dr^{۲} + r^{۲} d\phi^{۲} + r^{۲} \sin^{۲}\phi d\theta^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$$

عنصر حجم:

$$dV = r^2 \sin\phi \, dr \, d\phi \, d\theta$$

گرادیان:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \phi} \mathbf{e}_\phi + \frac{1}{r\sin\phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta$$

واگرایی:

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} (r^2 F_r) + \frac{1}{r\sin\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (F_\phi \sin\phi) + \frac{1}{r\sin\phi} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta}$$

تاو:

$$\nabla \times F = \frac{1}{r^2 \sin\phi} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\phi & (r\sin\phi)\mathbf{e}_\theta \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \phi} & \frac{\partial}{\partial \theta} \\ F_r & rF_\phi & (r\sin\phi)F_\theta \end{vmatrix}$$

لاپلاسی:

$$\nabla^2 f = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin\phi} \frac{\partial}{\partial \phi} \left(\sin\phi \frac{\partial f}{\partial \phi} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2\phi} \frac{\partial^2 f}{\partial \theta^2}$$

تمرینات

۱. تحقیق کنید که فرمولهایی از اعمال برداری در دستگاههای مختصات استوانه‌ای و کروی که در بخش (۱.۵) محاسبه شدند، نمونه‌هایی از فرمولهای کلی حاصل از این بخش می‌باشند وقتی که عوامل مقیاس مطابق معادلات (۴۶.۵) و (۴۷.۵) در نظر گرفته شوند.

۲. درستی معادلهٔ (۵۳.۵) را از طریق بیان f در دستگاه مختصات دکارتی، اعمال ∇، و سپس تبدیل مختصات، بررسی کنید.

۳. توضیح دهید که چرا دستگاه مختصات منحنی‌الخطی که به کمک توابع

$$u_1=u_1(z) \quad , \quad u_2=u_2(x) \quad , \quad u_3=u_3(y)$$

تعریف شود خود به خود متعامد است ، کدام ترکیبات دیگر این خاصیّت را دارند ؟

دربارهٔ دستگاه

$$u_1=u_1(\rho) \ , \ u_2=u_2(\theta) \ , \ u_3=u_3(z)$$

چه می‌توان گفت؟

۴. عنصر حجم در دستگاه مختصات

$$u_1=e^x \text{ ، } u_2=y \text{ ، } u_3=z$$

چیست ؟

۵. در دستگاه مختصات (۴۳.۵) ، فرض کنید $g=u_1^3+u_2^3+u_3^3$ ، $\nabla^2 g$ را محاسبه کنید.

۶. فرض کنید $u_1=x+y$ ، $u_2=x-y$ ، و $u_3=2z$

(الف) آیا این دستگاه مختصات متعامد است ؟

(ب) x ، y ، و z را برحسب u_1 ، u_2 ، u_3 محاسبه کنید.

(ج) ds^2 را بیابید و از روی آن h_1 ، h_2 ، و h_3 را در این دستگاه تعیین کنید.

(د) لاپلاسی در این دستگاه چیست ؟

(هـ) فرض کنید $f(u_1,u_2,u_3)=u_1+u_2+2u_3$. بردار $\mathbf{grad} f$ را بیابید.

۷. فرض کنید $u_1=x+y$ ، $u_2=x-2y$ ، و $u_3=2z$

(الف) x ، y ، و z را بر حسب u_1 ، u_2 ، و u_3 محاسبه کنید.

(ب) سعی کنید عوامل مقیاس h_1 ، h_2 ، h_3 را تعیین کنید.

(ج) چه چیزی «نادرست» است؟

۸. تبدیل

$$z=u_1^2-u_2^2 \quad , \quad y=2u_1u_2 \quad , \quad z=u_3$$

را در نظر بگیرید .

(الف) نشان دهید که (u_1,u_2,u_3) یک دستگاه مختصات منحنی‌الخط متعامد راستگرد تشکیل می‌دهد.

(ب) عوامل مقیاس را محاسبه کنید.

(ج) $\nabla^2 g(u_1,u_2,u_3)$ را بیان کنید.

(د) واگرایی و تاو میدان برداری $\mathbf{F}=u_3\mathbf{e}_1+u_1\mathbf{e}_2+u_2\mathbf{e}_3$ را بیابید.

۹. تبدیل

$$x=u_3\ ,\ y=e^{u_2}\cos u_1\ ,\ z=e^{u_2}\sin u_1$$

را در نظر بگیرید.

(الف) نشان دهید که (u_1,u_2,u_3) یک دستگاه مختصات منحنی‌الخط متعامد است.

(ب) عوامل مقیاس را محاسبه کنید.

(ج) اگر $g=u_1^2+u_2^2+u_3^2$ ، $\nabla^2 g$ را بیابید.

(د) واگرایی و تاو میدان برداری $\mathbf{F}=-e^{u_2}\mathbf{e}_3+u_3\mathbf{e}_1$ را بیابید.

۱۰. می‌دانیم که در دستگاه مختصات دکارتی، $dV=dxdydz$. از معادلات (۲۰.۵) شروع و سپس با دیفرانسیلگیری، dx، dy، و dz رابر حسب dr، $d\phi$، و $d\theta$ تعیین و آنها را در هم ضرب کنید.

(الف) آیا این کار به تعیین dV در دستگاه مختصات کروی می‌انجامد؟

(ب) این پدیده را توضیح دهید.

۱۱. دستگاه مختصات

$$u_1=y\ ,\ u_2=x\ ,\ u_3=z$$

را در نظر بگیرید. همهٔ عوامل مقیاس برابر واحدند و، در این صورت، معادلهٔ (۵۶.۵) شکل ساده‌ای به خود می‌گیرد.

(الف) فرض کنید $\mathbf{F}=-u_2\mathbf{e}_1+u_1\mathbf{e}_2$ نشان دهید که به استناد (۵۶.۵):

$$\mathbf{curl\ F}=2\mathbf{e}_3$$

(ب) مسلماً $\mathbf{e}_1=\mathbf{j}$ ، $\mathbf{e}_2=\mathbf{i}$ ، و $\mathbf{e}_3=\mathbf{k}$. از این رو، $\mathbf{F}=y\mathbf{i}-x\mathbf{j}$ و بنابر قسمت اوّل، $\mathbf{curl\ F}=2\mathbf{k}$. ولی محاسبهٔ مستقیم $\mathbf{curl\ F}$ در دستگاه مختصات دکارتی نشان می‌دهد که $\mathbf{curl\ F}=-2\mathbf{K}$ کدام «نادرست» است؟

۱۲. فرض کنید u ، v ، و w مختصات متعامد منحنی‌الخطی باشند که برای آنها

$ds^2 = v^2du^2 + u^2dv^2 + dw^2$.

(الف) اگر $\mathbf{u}$ بردار یکهٔ مماس بر یک منحنی u باشد، واگرایی $\mathbf{u}$ را محاسبه کنید.

(ب) لاپلاسی تابع $f = uvw$ را تعیین کنید.

۱۳. با استفاده از تعریف «ناهنجاری» لاپلاسی (تمرین ۱۱ بخش ۱۰.۴) در مورد یک متوازی‌السطوح قائم، فرمول (۵۵.۵) را مستقیماً نتیجه بگیرید.

۳.۵ درس اختیاری

روشهای ماتریسی در آنالیز برداری

در این بخش می‌خواهیم نگاهی سریع به نظریهٔ ماتریسها، به شکلی که در آنالیز برداری به کار می‌رود، بیندازیم. مبتدی باید بداند که او می‌خواهد ردهٔ بسیار محدودی از ماتریسها را فرا گیرد. نظریهٔ ماتریسها بسیار وسیعتر از آن است که در این‌جا مورد بحث قرار می‌گیرد؛ در واقع، اغلب نویسندگان یک کتاب کامل به آن اختصاص می‌دهند. با این وجود، حساب ماتریسها، وقتی در مورد آنالیز برداری سه بعدی به کار رود، تعبیرات بسیار زیبایی دارد، و ما می‌خواهیم از این ویژگیها بهره‌برداری کنیم.

با این وجود، خوانندگان که قبلاً جبر خطی آموخته‌اند، از مطالعهٔ این بخش لذّت خواهند برد. آنها همهٔ فرمولهای مباحث قبلی را از دیدگاهی کاملاً متفاوت با مشی جبری مشاهده و اطلاعات جدیدی کسب خواهند کرد.

هر ماتریس، یک آرایش مستطیلی از اعداد است که شمار سطرها و ستونهایش دلخواه است. با این وجود، در آنالیز برداری معمولاً فقط سه ماتریس با اندازه‌های معیّن زیر به کار می‌رود:

ماتریس سطری یک در سه؛ مانند

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۴ & ۲ \end{bmatrix} \qquad (۵۷.۵)$$

ماتریس ستونی سه در یک؛ مانند

$$\begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۵ \end{bmatrix} \qquad (۵۸.۵)$$

و ماتریس مربعی سه در سه؛ مانند

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \qquad (۵۹.۵)$$

توجه کنید که ابعاد یک ماتریس به صورت «m در n» بیان می‌شود که نشانگر m سطر و n ستون است.

تصور درایه‌های یک ماتریس به عنوان مؤلفه‌های یک بردار، سودمند است.

به این ترتیب، ماتریس (۵۷.۵) بردار $۲\mathbf{i}+۴\mathbf{j}+\mathbf{k}$ را به صورت یک سطر و ماتریس (۵۸.۵) بردار $۲\mathbf{i}+\mathbf{j}+۵\mathbf{k}$ را به صورت یک ستون نمایش می‌دهد.

ماتریس مربعی (۵۹.۵)، هم می‌تواند ماتریسی مرکب از سه سطر، به ترتیب، برای نمایش

$$\mathbf{A}=\mathbf{i}-\mathbf{j}+\mathbf{k}$$
$$\mathbf{B}=۲\mathbf{i}+\mathbf{k} \qquad (۶۰.۵)$$
$$\mathbf{C}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$$

تعبیر شود، هم ماتریسی مرکب از سه ستون، به ترتیب، برای نمایش

$$\mathbf{D}=\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+\mathbf{k}$$
$$\mathbf{E}=-\mathbf{i}+\mathbf{k} \qquad (۶۱.۵)$$
$$\mathbf{F}=\mathbf{i}+\mathbf{j}+۲\mathbf{k}$$

هردو تعبیر مفید است. برای تأکید براین نظر، وقتی سطرها را بردار بدانیم، می‌توانیم (۵۹.۵) را به صورت:

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ldots \mathbf{A} \ldots \\ \ldots \mathbf{B} \ldots \\ \ldots \mathbf{C} \ldots \end{bmatrix}$$

بنویسیم ؛ یا ، اگر تعبیر ستونها به عنوان بردار مناسب باشد ، به صورت :

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \cdot & \cdot & \cdot \end{bmatrix}$$

وقتی بخواهیم به یک تک شماره در ماتریس $\mathscr{M}$ اشاره کنیم ، چنان که در زیر تشریح شده است، از نماد m_{ij} برای نمایش درایه‌ای که در سطر i ام و ستون j ام واقع است استفاده می‌کنیم :

$$\begin{bmatrix} m_{۱۱} & m_{۱۲} & m_{۱۳} \\ m_{۲۱} & m_{۲۲} & m_{۲۳} \\ m_{۳۱} & m_{۳۲} & m_{۳۳} \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} m_{۱۱} \\ m_{۲۱} \\ m_{۳۱} \end{bmatrix} \qquad [m_{۱۱} \; m_{۱۲} \; m_{۱۳}] \tag{۶۲.۵}$$

بنابراین ،درماتریس (۵۷.۵): $m_{۱۳}=۱$ ؛ در(۵۸.۵): $m_{۲۱}=۱$ ؛ ودر(۵۹.۵): $m_{۱۲}=-۱$ ، $m_{۳۳}=۲$، و $m_{۲۳}=۱$. (به خاطر داشته‌باشید که i عدد سطر است و j عدد ستون .)

جمع ماتریسی از جمع مؤلفه‌های متناظر حاصل می‌شود :

$$[۲ \quad ۱ \quad ۴] + [۷ \quad ۱۱ \quad ۳] = [۹ \quad ۱۲ \quad ۷]$$

$$\begin{bmatrix} -۱ \\ ۱ \\ ۰ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ \\ ۳ \\ ۳ \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۴ & ۵ & ۶ \\ ۷ & ۸ & ۹ \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \\ ۰ & ۱ & -۱ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ & ۳ & ۲ \\ ۴ & ۶ & ۵ \\ ۷ & ۹ & ۸ \end{bmatrix}$$

این جمع با روش جمع بردارهای ناشی از تعبیر سطرها و ستونها به عنوان بردارهای سطری و ستونی ، سازگار است . توجه کنید که فقط ماتریسهای با ابعاد یکسان با هم جمع می‌شوند؛ مثلاً ، ما نمی‌توانیم (۵۷.۵) را با (۵۸.۵) جمع کنیم . ضرب اسکالر ، با حفظ همان تعبیر برداری ، به صورت ضرب اسکالر در درایه‌ها انجام می‌شود :

$$۲[۲ \quad ۱ \quad ۴] = [۴ \quad ۲ \quad ۸]$$

$$-\frac{۱}{۲}\cdot\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} \\ -۱ & ۰ & -\frac{۱}{۲} \\ -\frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & -۱ \end{bmatrix}$$

نتیجه می‌گیریم که جمع ماتریسی ، مانند جمع برداری ، همهٔ خواص معمول را دارد ؛ یعنی ، تعویض پذیر، شرکت‌پذیر ، و ، نسبت به ضرب اسکالر ، توزیع‌پذیر است . در حقیقت ، اگر جمع و ضرب اسکالر تنها اعمال ماتریسی بودند ، نظریهٔ ماتریسها کمرنگ می‌بود.

تعریف ضرب ماتریسی است که موضوع ماتریسها را مفید و جالب توجه می‌سازد.

به طور کلی ، حاصل‌ضرب $\mathscr{L}\mathscr{R}=\mathscr{P}$ دو ماتریس $\mathscr{L}$و $\mathscr{R}$فقط وقتی تعریف می‌شود که شمار ستونهای عامل سمت چپ ، $\mathscr{L}$ ، با شمار سطرهای عامل سمت راست ، $\mathscr{R}$ ، برابر باشد. اگر این شمار مشترک را به s نشان دهیم ، آنگاه درایهٔ سطر iام و ستون jام $\mathscr{P}$ چنین تعریف می‌شود :

$$p_{ij}=\sum_{k=۱}^{s} l_{ik}\, r_{kj} \tag{۶۳.۵}$$

از این فرمول دیده می‌شود که شمار سطرهای $\mathscr{P}$ و $\mathscr{L}$و شمار ستونهای $\mathscr{P}$ و $\mathscr{R}$ یکسان است.

اگر به امکان ضرب سه نوع ماتریس موردبحث توجه کنیم ، در می‌یابیم که (۶۳.۵) دارای چهار تعبیر زیر است :

(۱) اگر $\mathscr{L}$ یک ماتریس سطری یک در سه و $\mathscr{R}$ یک ماتریس ستونی سه در یک باشد ، آنگاه حاصل‌ضرب $\mathscr{L}\mathscr{R}$ همان حاصل‌ضرب اسکالر بردارهای متناظر است :

$$[\cdots \mathbf{A} \cdots]\begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{B} \\ \vdots \end{bmatrix} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{B} \tag{۶۴.۵}$$

مثلاً،

$$[۲\quad ۴\quad ۱]\begin{bmatrix}۲\\۱\\۵\end{bmatrix} = ۴+۴+۵=۱۳$$

(۲) اگر $\mathcal{L}$ یک ماتریس مربعی سه در سه و $\mathcal{R}$ یک ماتریس ستونی سه در یک باشد، آنگاه حاصل‌ضرب $\mathcal{L}\mathcal{R}$ یک ماتریس ستونی سه در یک است. اوّلین درایه، حاصل‌ضرب اسکالر اوّلین سطر $\mathcal{L}$ در $\mathcal{R}$ است؛ درایه‌های دوّم و سوم، به ترتیب، حاصل‌ضربهای اسکالر متناظر سطرهای دوّم و سوم در $\mathcal{R}$ اند:

$$\begin{bmatrix}\cdots & \mathbf{A} & \cdots\\ \cdots & \mathbf{B} & \cdots\\ \cdots & \mathbf{C} & \cdots\end{bmatrix}\begin{bmatrix}\vdots\\ \mathbf{D}\\ \vdots\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\mathbf{A\cdot D}\\ \mathbf{B\cdot D}\\ \mathbf{C\cdot D}\end{bmatrix} \qquad (۶۵.۵)$$

مثلاً،

$$\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۱\\ ۲ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۲\end{bmatrix}\begin{bmatrix}۲\\ ۱\\ ۵\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}۶\\ ۹\\ ۱۳\end{bmatrix} \qquad (۶۶.۵)$$

(۳) اگر $\mathcal{L}$ یک ماتریس سطری یک در سه و $\mathcal{R}$ یک ماتریس مربعی سه در سه باشد، آنگاه حاصل‌ضرب $\mathcal{L}\mathcal{R}$ یک ماتریس سطری یک در سه است. نخستین درایه، حاصل‌ضرب اسکالر $\mathcal{L}$ در نخستین ستون $\mathcal{R}$ است؛ درایه‌های دوّم و سوّم، به ترتیب، حاصل‌ضربهای اسکالر متناظر ستونهای دوم و سوم در $\mathcal{R}$ اند:

$$[\cdots\quad \mathbf{A}\quad \cdots]\begin{bmatrix}\vdots & \vdots & \vdots\\ \mathbf{B} & \mathbf{C} & \mathbf{D}\\ \vdots & \vdots & \vdots\end{bmatrix}=[\mathbf{A\cdot B}\quad \mathbf{A\cdot C}\quad \mathbf{A\cdot D}] \qquad (۶۷.۵)$$

مثلاً،

$$[۲\quad ۴\quad ۱]\begin{bmatrix}۱ & -۱ & ۱\\ ۲ & ۰ & ۱\\ ۱ & ۱ & ۲\end{bmatrix}=[۱۱\quad -۱\quad ۸] \qquad (۶۸.۵)$$

(۴) اگر هردوی $\mathcal{L}$ و $\mathcal{R}$ ماتریسهای مربعی سه در سه باشند، آنگاه حاصل‌ضرب $\mathcal{L}\mathcal{R}$ نیز یک

ماتریس مربعی سه در سه است . درایهٔ (i,j) ام $\mathscr{LR}$، حاصل‌ضرب اسکالر سطر i ام $\mathscr{L}$ در ستون j ام $\mathscr{R}$ است :

$$\begin{bmatrix} \dots & \mathbf{A} & \dots \\ \dots & \mathbf{B} & \dots \\ \dots & \mathbf{C} & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} . & . & . \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ . & . & . \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{A}\cdot\mathbf{D} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{E} & \mathbf{A}\cdot\mathbf{F} \\ \mathbf{B}\cdot\mathbf{D} & \mathbf{B}\cdot\mathbf{E} & \mathbf{B}\cdot\mathbf{F} \\ \mathbf{C}\cdot\mathbf{D} & \mathbf{C}\cdot\mathbf{E} & \mathbf{C}\cdot\mathbf{F} \end{bmatrix} \qquad (۶۹.۵)$$

مثلاً ،

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۰ & ۲ & ۴ \\ ۴ & ۶ & ۸ \\ ۸ & ۸ & ۸ \end{bmatrix} \qquad (۷۰.۵)$$

توجه کنید که ، در واقع ، عبارتی که در (۴) با حروف ایرانیک (کج) نوشته شده است حالتهای (۱) ، (۲) ، و (۳) را نیز دربردارد. خوانندهٔ هوشیار ملاحظه می‌کند که $\mathscr{LR}$ را می‌توان وقتی کـه $\mathscr{L}$ یک ماتریس ستونی و $\mathscr{R}$ یک ماتریس سطری باشد نیز تعریف کرد ، ولی چنین ضربی در این جا هیچ فایده‌ای ندارد. (این ضرب به دو دوییها ،که در بخش ۶.۳ تشریح شدند ، مربوط می‌شود.)

بیشترین فایدهٔ معمول ماتریسها در بیان دستگاهی از معادلات ظاهر می‌شود.

دو ماتریس وقتی با هم برابرند که دارای ابعاد یکسان باشند و درایه‌های متناظرشان با هم برابر باشند.

مثال ۵. ۱۰ دستگاه معادلات

$$\begin{aligned} x - y + z &= ۱ \\ ۲x \quad\;\; + z &= ۲ \\ x + y + ۲z &= ۳ \end{aligned} \qquad (۷۱.۵)$$

را به صورت یک معادلهٔ ماتریسی بنویسید.

حل خواننده می‌تواند تحقیق کند که معادلهٔ

$$\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} \qquad (۷۲.۵)$$

با معادلهٔ (۷۱.۵) هم ارز است . ماتریس مربعی ، همـان مـاتریس (۵۹.۵) است، و سطرهـای

C،**B**،و**A** آن ، همان بردارهای مذکور در (۵.۶۰) می‌باشند. معادلات (۵.۷۱) را ، با **R**=x**i**+y**j**+z**k** ، به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}=۱$$
$$\mathbf{B}\cdot\mathbf{R}=۲$$
$$\mathbf{C}\cdot\mathbf{R}=۳$$

از این‌رو ، **R** بردار موضع نقطه‌ای است که همزمان در سه صفحه ، به ترتیب ، با قائمهای **A**،**B**،و**C** قرار دارد. (بخش (۱.۱۰) را به خاطر بیاورید.)

چون حاصل‌ضرب دو ماتریس را می‌توان به عنوان آرایه‌هایی از حاصل‌ضربهای اسکالر تعبیر کرد ، نباید شگفت‌آور باشد که ملاحظه کنیم که ضرب ماتریسها بر حسب هر عامل خطی است ؛ یعنی ، به ازای هر اسکالر s :

$$(s\mathscr{M}+\mathscr{N})\mathscr{R}=s\mathscr{M}\mathscr{R}+\mathscr{N}\mathscr{R}$$
$$\mathscr{L}(s\mathscr{M}+\mathscr{N})=s\mathscr{L}\mathscr{M}+\mathscr{L}\mathscr{N}$$

البته ، بااین فرض که همهٔ ضربها ممکن باشد. استدلال برقراری این احکام به عنوان تمرین واگذار می‌شود.

چون ضرب اسکالر تعویض‌پذیر است ، خواننده انتظار دارد که ضرب ماتریسی نیز چنین باشد. با کمال تعجّب ، این‌طور نیست ! به عنوان مثال ، فرض کنید ماتریسهای مذکور در (۵.۷۰) ، به ترتیب وارونه ، در هم ضرب شوند:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۲ & ۳ \\ ۳ & ۲ & ۱ \\ ۲ & ۲ & ۲ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} ۸ & ۲ & ۹ \\ ۸ & -۲ & ۷ \\ ۸ & ۰ & ۸ \end{bmatrix}$$

جواب متفاوت است ! دلیلش این‌است که وقتی $\mathscr{L}\mathscr{R}$را تشکیل می‌دهیم ، بردارهای سطری $\mathscr{L}$را در بردارهای ستونی $\mathscr{R}$ ضرب می‌کنیم ؛ ولی برای تشکیل $\mathscr{R}\mathscr{L}$ از بردارهای ستونی $\mathscr{L}$و بردارهای سطری $\mathscr{R}$استفاده می‌کنیم . (در واقع ، اگر ابعاد با هم جور نباشند. امکان دارد $\mathscr{L}\mathscr{R}$ تعریف نشده

باشد.)

حال قانون شرکت‌پذیری را بررسی می‌کنیم . آیا هیچ تفاوتی بین $(\mathscr{L}\mathscr{M})\mathscr{R}$ و $\mathscr{L}(\mathscr{M}\mathscr{R})$ وجود دارد؟ توجه کنید که اگر هر دو ضرب تعریف شده باشد ، $\mathscr{M}$، در محدودهٔ درس فعلی ، الزاماً یک ماتریس سه در سه است . برای محاسبهٔ $(\mathscr{L}\mathscr{M})\mathscr{R}$ ، از ستونهای $\mathscr{M}$ به عنوان بردار استفاده می‌کنیم . با این وجود ، در محاسبهٔ $\mathscr{L}(\mathscr{M}\mathscr{R})$ از بردارهای سطری $\mathscr{M}$ شروع می‌کنیم . بنابراین ، انتظار داریم که حاصل ضربها متفاوت باشد. با کمال تعجّب ، حاصل‌ضربها یکسانند!

مثال ۵.۱۱ فرض کنید $\mathscr{L}$، $\mathscr{M}$، و $\mathscr{R}$ ، به ترتیب ، ماتریسهای (۵.۵۷) ، (۵.۵۹) ، و (۵.۵۸) باشند. درستی قانون شرکت‌پذیری

$$(\mathscr{L}\mathscr{M})\mathscr{R} = \mathscr{L}(\mathscr{M}\mathscr{R})$$

را بررسی کنید .

حل $\mathscr{L}\mathscr{M}$ را در (۵.۶۸) محاسبه کردیم؛ از این‌رو

$$(\mathscr{L}\mathscr{M})\mathscr{R} = \begin{bmatrix} ۱۱ & -۱ & ۸ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۲ \\ ۱ \\ ۵ \end{bmatrix} = ۲۲-۱+۴۰ = ۶۱$$

$\mathscr{M}\mathscr{R}$ در (۵.۶۶) محاسبه شد؛ بنابراین ،

$$\mathscr{L}(\mathscr{M}\mathscr{R}) = \begin{bmatrix} ۲ & ۴ & ۱ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} ۶ \\ ۹ \\ ۱۳ \end{bmatrix} = ۱۲+۳۶+۱۳ = ۶۱$$

برای اثبات (۵.۷۴) در حالت کلی ، باید چند لحظه‌ای تعبیر برداری ضرب ماتریسها را کنار بگذاریم ، و از فرمول صریح (۵.۶۷) ، که بر حسب درایه‌ها بیان شده است ، استفاده کنیم.

نمادهای $\mathscr{N}=\mathscr{L}\mathscr{M}$ و $\mathscr{Q}=\mathscr{M}\mathscr{R}$ را معرفی می‌کنیم . در این‌صورت ، درایهٔ (i,j) ام طرف چپ (۵.۷۴) با دوبار استفاده از (۵.۶۳) به دست می‌آید:

$$\sum_{k=1}^{3} n_{ik}r_{kj} = \sum_{k=1}^{3}\left(\sum_{s=1}^{3} l_{is}m_{sk}\right)r_{kj} = \sum_{k=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} l_{is}m_{sk}r_{kj} \qquad (۵.۷۵)$$

عنصر (i,j) ام طرف راست (۵.۷۴) عبارت است از

$$\sum_{k=1}^{3} l_{ik}q_{kj} = \sum_{k=1}^{3} l_{ik}\left(\sum_{s=1}^{3} m_{ks}r_{sj}\right) = \sum_{k=1}^{3}\sum_{s=1}^{3} l_{ik}m_{ks}r_{sj} \qquad (۷۶.۵)$$

دقیقاً یک عبارت در حاصل‌جمعهای نهایی (۷۵.۵) و (۷۶.۵) ظاهر می‌شود و ، بنابراین ، این دو با هم برابرند و (۷۴.۵) ثابت می‌شود.

یک ماتریس وجود دارد که در جبر خطی نقش ویژه‌ای ایفا می‌کند ، و آن ماتریس همانی $\mathcal{I}$است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\mathcal{I} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{i} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{j} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{k} & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \qquad (۷۷.۵)$$

نام «همانی» به این خاطر است که ضرب یک ماتریس در $\mathcal{I}$، از راست یا چپ ، تغییری در آن ماتریس ایجاد نمی‌کند؛ مثلاً ،

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

طریق بررسی برقراری این تساویها در حالت کلی از این قرار است :

$$\begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{i} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{j} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{k} & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{A} \\ \vdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}\cdot\mathbf{A} \\ \mathbf{j}\cdot\mathbf{A} \\ \mathbf{K}\cdot\mathbf{A} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \vdots \\ \mathbf{A} \\ \vdots \end{bmatrix}$$

$$[\ldots \quad \mathbf{B} \quad \ldots]\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{K} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = [\mathbf{B}\cdot\mathbf{i} \quad \mathbf{B}\cdot\mathbf{j} \quad \mathbf{B}\cdot\mathbf{K}] = [\ldots \quad \mathbf{B} \quad \ldots]$$

اگر ماتریس مربعی $\mathscr{M}$ مفروض باشد، $\mathscr{R}$ را یک *وارون راست* $\mathscr{M}$ می‌نامیم در صورتی که $\mathscr{M}\mathscr{R}=\mathscr{I}$. مثلاً، خوانند باید بررسی کند که:

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M} & \mathscr{R} & \mathscr{I} \\ \begin{bmatrix} ۱ & -۱ & ۱ \\ ۲ & ۰ & ۱ \\ ۱ & ۱ & ۲ \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۲} & \frac{۳}{۴} & -\frac{۱}{۴} \\ -\frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \end{array}$$

بنابراین، ماتریس دوّم یک وارون راست ماتریس اوّل است.

به رابطهٔ بین سطرهای $\mathscr{M}$ و ستونهای $\mathscr{R}$ توجه کنید: اگر تساوی $\mathscr{M}\mathscr{R}=\mathscr{I}$ را به صورت

$$\begin{array}{ccc} \mathscr{M} & \mathscr{R} & \mathscr{I} \\ \begin{bmatrix} \ldots & \mathbf{A} & \ldots \\ \ldots & \mathbf{B} & \ldots \\ \ldots & \mathbf{C} & \ldots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = & \begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix} \end{array}$$

بنویسیم، می‌بینیم که

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{D} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{F} = ۱$$

$$\mathbf{A}\cdot\mathbf{E} = \mathbf{A}\cdot\mathbf{F} = ۰ \qquad \mathbf{B}\cdot\mathbf{D} = \mathbf{B}\cdot\mathbf{F} = ۰ \qquad \mathbf{C}\cdot\mathbf{D} = \mathbf{C}\cdot\mathbf{E} = ۰ \qquad (۷۹.۵)$$

در مورد دو مجموعهٔ $\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\}$ و $\{\mathbf{D},\mathbf{E},\mathbf{F}\}$، که در روابط (۷۹.۵) صدق می‌کنند، می‌گوییم که یکی *متقابل* یا *دوگان* دیگری است. بررسیهای فصل اوّل ما را قادر می‌سازد که فرمولهایی را برای بردارهای متقابل (و، به عنوان یک نتیجه، فرمولی برای وارون راست) بیابیم.

مثال ۱۲.۵ فرمولهایی برای بردارهای متقابل مجموعهٔ $\{\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}\}$ نتیجه بگیرید.

حل از بررسی (۷۹.۵) دیده می‌شود که $\mathbf{D}$ بر $\mathbf{B}$ و $\mathbf{C}$ عمود است. بنابراین، می‌توان نوشت: $\mathbf{D}=s\mathbf{B}\times\mathbf{C}$. برای این‌که $\mathbf{A}\cdot\mathbf{D}=۱$، باید s را چنان انتخاب کنیم که

$$sA\cdot B\times C = s[A,B,C] = ۱$$

در نتیجه ، اگر $[\mathbf{A}\ ,\ \mathbf{B}\ ,\ \mathbf{C}]$، که دترمینان $\mathscr{M}$ است ، صفر نباشد ، در می‌یابیم که

$$\mathbf{D} = \frac{\mathbf{B}\times\mathbf{C}}{[\mathbf{A}\ ,\ \mathbf{B}\ ,\ \mathbf{C}]} \qquad (۸۰.۵)$$

به طور مشابه

$$\mathbf{E} = \frac{\mathbf{C}\times\mathbf{A}}{[\mathbf{A}\ ,\ \mathbf{B}\ ,\ \mathbf{C}]} \qquad (۸۱.۵)$$

$$\mathbf{F} = \frac{\mathbf{A}\times\mathbf{B}}{[\mathbf{A}\ ,\ \mathbf{B}\ ,\ \mathbf{C}]} \qquad (۸۲.۵)$$

از طرف دیگر ، اگر $[\mathbf{A},\ \mathbf{B},\ \mathbf{C}] = ۰$، آن‌گاه $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، و $\mathbf{C}$ در یک صفحه‌اند، و به آسانی دیده می‌شود که هیچ مجموعه‌ای وجود ندارد که در (۷۹.۵) صدق کند. (تمرین ۵)

از ملاحظات بالا فرمولی برای وارون راست به دست می‌آید : *اگر* $[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}] \neq ۰$ *، آن‌گاه یک وارون راست ماتریس*

$$\mathscr{M} = \begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{A} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{B} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{C} & \cdots \end{bmatrix}$$

عبارت است از

$$\mathscr{R} = \frac{۱}{[\mathbf{A}\ ,\ \mathbf{B}\ ,\ \mathbf{C}]}\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{B}\times\mathbf{C} & \mathbf{C}\times\mathbf{A} & \mathbf{A}\times\mathbf{B} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \qquad (۸۳.۵)$$

اگر $[\mathbf{A},\mathbf{B},\mathbf{C}] = ۰$ ، هیچ وارون راستی وجود ندارد. خواننده باید تحقیق کند (تمرین ۷) که وارون راست مذکور در (۷۸.۵) با این فرمول سازگار است.

به وضوح ، اگر مجموعهٔ بردارهای متقابل را ستونهای $\mathscr{M}$ بگیریم و آنها را ، به همان ترتیب ، در

سطرهای $\mathscr{L}$ جای دهیم، یک *وارون چپ* برای $\mathscr{M}$ می‌یابیم؛ یعنی، $\mathscr{I} = \mathscr{L}\mathscr{M}$ از این‌رو، اگر فرض کنیم **A**، **B**، و **C**، به ترتیب، ستونهای $\mathscr{M}$ باشند، داریم:

$$\frac{1}{[\mathbf{A}\ ,\mathbf{B}\ ,\mathbf{C}]}\begin{bmatrix} \ldots & \mathbf{B}\times\mathbf{C} & \ldots \\ \ldots & \mathbf{C}\times\mathbf{A} & \ldots \\ \ldots & \mathbf{A}\times\mathbf{B} & \ldots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{A} & \mathbf{B} & \mathbf{C} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} = \mathscr{I} \tag{۸۴.۵}$$

یک محاسبهٔ سریع (تمرین ۶) نشان می‌دهد که حاصل‌ضرب اسکالر سه‌گانهٔ ستونهای $\mathscr{M}$ مساوی حاصل‌ضرب اسکالر سه‌گانهٔ سطرهای آن‌است که این، به نوبهٔ خود برابر دترمینان $\mathscr{M}$ است. بنابراین، وجود وارون چپ نیز به شرط $\det(\mathscr{M}) \neq 0$ بستگی دارد.

در تمرین (۸) از خواننده خواسته شده است که وارون چپ ماتریس $\mathscr{M}$ مذکور در (۷۸.۵) را محاسبه کند. شاید شگفت‌آور باشد که ملاحظه کنیم که وارون چپ $\mathscr{L}$ مساوی وارون راست $\mathscr{R}$ است! برای اثبات این واقعیّت در حالت کلی، از قانون شرکت‌پذیری و تساویهای $\mathscr{L}\mathscr{M}=\mathscr{I}=\mathscr{M}\mathscr{R}$ به صورت زیر کمک می‌گیریم:

$$\mathscr{L} = \mathscr{L}\mathscr{I} = \mathscr{L}(\mathscr{M}\mathscr{R}) = (\mathscr{L}\mathscr{M})\mathscr{R} = \mathscr{I}\mathscr{R} = \mathscr{R}$$

چنان‌که خواننده در تمرین (۹) نشان خواهد داد، واقعیّت امر این‌است که وارون ماتریس $\mathscr{M}$، در صورت وجود، منحصر به فرد است، و هم وارون راست محسوب می‌شود هم وارون چپ. این وارون منحصر به فرد را به $\mathscr{M}^{-1}$ نشان می‌دهیم. شرط وجود وارون این‌است که دترمینان ماتریس مخالف صفر باشد. فایدهٔ وارون در حل دستگاهی از معادلات در مثال زیر تشریح شده است.

مثال ۱۳.۵ دستگاه معادلات مثال (۱۰.۵) را حل کنید.

حل دستگاه را به صورت ماتریسی (۷۲.۵) در نظر بگیرید. اگر طرفین آن معادله را از سمت چپ در ماتریس وارونی که در (۷۸.۵) داده شده است ضرب کنیم، جواب معادله به دست می‌آید:

$$\begin{bmatrix} ۱ & ۰ & ۰ \\ ۰ & ۱ & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{۱}{۴} & \frac{۳}{۴} & -\frac{۱}{۴} \\ -\frac{۳}{۴} & \frac{۱}{۴} & \frac{۱}{۴} \\ \frac{۱}{۲} & -\frac{۱}{۲} & \frac{۱}{۲} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} ۱ \\ ۲ \\ ۳ \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{۱}{۲} \\ \frac{۱}{۲} \\ ۱ \end{bmatrix}$$

یا $x=\frac{۱}{۲}$ ، $y=\frac{۱}{۲}$ ، $z=۱$

مثال ۱۴.۵ فرمولی کلی برای جواب دستگاه

$$\begin{bmatrix} m_{۱۱} & m_{۱۲} & m_{۱۳} \\ m_{۲۱} & m_{۲۲} & m_{۲۳} \\ m_{۳۱} & m_{۳۲} & m_{۳۳} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix} \qquad (۸۵.۵)$$

که در آن $\det(\mathscr{M}) \neq ۰$ ، بیابید.

حل نخست ،وارون چپ ماتریس مربعی مفروض را می‌یابیم . برای تعیین این وارون ، باید آن را ماتریسی متشکل از بردارهای ستونی بدانیم :

$$\mathscr{M}=\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \qquad \mathscr{M}^{-۱}=\frac{۱}{[\mathbf{A}\ ,\mathbf{B}\ ,\mathbf{C}]}\begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{E}\times\mathbf{F} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{F}\times\mathbf{D} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{D}\times\mathbf{E} & \cdots \end{bmatrix}$$

سپس ، طرف چپ را در $\mathscr{M}^{-۱}$ ضرب می‌کنیم . خواهیم داشت :

$$\mathscr{I}\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \frac{۱}{[\mathbf{D},\mathbf{E},\mathbf{F}]}\begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{E}\times\mathbf{F} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{F}\times\mathbf{D} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{D}\times\mathbf{E} & \cdots \end{bmatrix}\begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix}$$

با نگاهی به اوّلین مؤلفه ، درمی‌یابیم که

$$x=\frac{\mathbf{E}\times\mathbf{F}\cdot(u\mathbf{i}+v\mathbf{j}+w\mathbf{k})}{[\mathbf{D},\mathbf{E},\mathbf{F}]}=\frac{\begin{vmatrix} u & v & w \\ \cdots & \mathbf{E} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{F} & \cdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cdots & \mathbf{D} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{E} & \cdots \\ \cdots & \mathbf{F} & \cdots \end{vmatrix}}=\frac{\begin{vmatrix} u & \vdots & \vdots \\ v & \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ w & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{D} & \mathbf{E} & \mathbf{F} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{vmatrix}}$$

که با درایه‌های ماتریس اصلی $\mathscr{M}$ به صورت زیر نوشته می‌شود :

$$x=\frac{\begin{vmatrix} u & m_{12} & m_{13} \\ v & m_{22} & m_{23} \\ w & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}} \qquad (86.5)$$

به طور مشابه ، داریم :

$$y=\frac{\begin{vmatrix} m_{11} & u & m_{13} \\ m_{21} & v & m_{23} \\ m_{31} & w & m_{33} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}} \qquad z=\frac{\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & u \\ m_{21} & m_{22} & v \\ m_{31} & m_{32} & w \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} m_{11} & m_{12} & m_{13} \\ m_{21} & m_{22} & m_{23} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{vmatrix}}$$

مجموعهٔ این فرمولها را *قاعدهٔ کرامر* می‌نامند.

تمرینات

۱. حاصل‌ضربهای زیر را بیابید:

(الف) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(ب) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$

(ج) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$

(د) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

(هـ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 10 & 0 & 0 \\ 0 & 10 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{bmatrix}$

۲. ثابت کنید که جمع ماتریسها تعویض‌پذیر ، شرکت‌پذیر و ، نسبت به ضرب اسکالر ، توزیع‌پذیر است . (راهنمایی: از تعبیر برداری استفاده کنید.)

۳. قوانین توزیع‌پذیری (۷۳.۵) را ثابت کنید.

۴. دو ماتریس مربعی مثال بزنید که ضرب آنها تعویض‌پذیر باشد.

۵. نشان دهید که اگر بردارهای **A**، **B**، **C** در یک صفحه باشند ، هیچ مجموعهٔ متقابلی از بردارها وجود ندارد. (این امکان را که بردارها بر یک استقامت باشند فراموش نکنید.)

۶. نشان دهید که حاصل‌ضرب اسکالر سه‌گانهٔ ستونهای یک ماتریس مربعی با حاصل‌ضرب اسکالر سه‌گانهٔ سطرهایش برابر است.

۷. نشان دهید که وارون راست ماتریس مذکور در (۷۸.۵) با فرمول (۸۳.۵) سازگار است.

۸. وارون چپ ماتریس (۵۹.۵) را با استفاده از معادلهٔ (۸۴.۵) محاسبه و آن را با (۷۸.۵) مقایسه کنید.

۹. ثابت کنید که اگر $\det(\mathcal{M}) \neq 0$ ، $\mathcal{M}$ فقط یک وارون دارد .

۱۰. دستگاه زیر را به روش محاسبهٔ وارون حل کنید :

$$\begin{aligned} 2x + y + 2z &= 2 \\ 3x \quad + 2z &= 4 \\ x + y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

۱۱. تمرین (۱۰) را با استفاده از قاعدهٔ کرامر حل کنید.

۱۲. نشان دهید که اگر $\mathcal{L}$ و $\mathcal{R}$ وارون‌پذیر باشند ، آنگاه $(\mathcal{L}\mathcal{R})^{-1} = \mathcal{R}^{-1}\mathcal{L}^{-1}$

ترانهادهٔ ماتریس $\mathcal{M}$ ، که آن را به $\mathcal{M}^{T}$ نشان می‌دهیم ، ماتریسی است که سطرهایش ، به ترتیب،

ستونهای ماتریس اوّلیهٔ $\mathcal{M}$اند.

۱۳.نشان دهید که درایهٔ (j,i) ام $\mathcal{M}^{\mathrm{T}}$ برابر درایهٔ (i,j) ام $\mathcal{M}$ است.

۱۴.نشان دهید که اگر $\mathcal{L}$ و $\mathcal{R}$ دوماتریس باشند ، آنگاه $(\mathcal{L}\mathcal{R})^{\mathrm{T}}=\mathcal{R}^{\mathrm{T}}\mathcal{L}^{\mathrm{T}}$.

ماتریس $\mathcal{M}$ را متقارن می‌نامند در صورتی که $\mathcal{M}=\mathcal{M}^{\mathrm{T}}$، و آن را پاد متقارن می‌گویند در صورتی که $\mathcal{M}^{\mathrm{T}}=-\mathcal{M}$. ماتریس وارون‌پذیر $\mathcal{M}$ را متعامد می‌نامند در صورتی که $\mathcal{M}^{\mathrm{T}}=\mathcal{M}^{-1}$

۱۵.نشان دهید که هر ماتریس متقارن باید به صورت زیر باشد:

$$\begin{bmatrix} m_{11} & m_{21} & m_{31} \\ m_{21} & m_{22} & m_{32} \\ m_{31} & m_{32} & m_{33} \end{bmatrix}$$

آیا حاصل‌ضرب دوماتریس متقارن الزاماً متقارن است ؟

۱۶.نشان دهید که ستونهای هر ماتریس متعامد ، بردارهای یکّهٔ دوبه‌دو متعامدند. نشان دهید که این حکم در مورد سطرها نیز برقرار است . این مسأله دربارهٔ مجموعه‌های متقابل چه می‌گوید؟

۱۷.نشان دهید که اگر $\mathcal{O}$ متعامد و $\mathcal{L}$ متقارن باشد ، $\mathcal{O}^{-1}\mathcal{L}\mathcal{O}$ متقارن است.

۱۸.نشان دهید که هر ماتریس پاد متقارن $\mathcal{A}$ به صورت زیر است :

$$\begin{bmatrix} 0 & -m_{21} & m_{13} \\ m_{21} & 0 & -m_{32} \\ -m_{13} & m_{32} & 0 \end{bmatrix}$$

سپس ، نشان دهید که اگر $\mathcal{R}$ یک ماتریس ستونی نمایشگر $\mathbf{V}$ باشد ، $\mathcal{A}\mathcal{R}$ عبارت است از:

$$(m_{32}\mathbf{i} + m_{13}\mathbf{j} + m_{21}\,\mathbf{k}) \times \mathbf{V}$$

۱۹.چند دستگاه متشکل از سه معادله به صورت (۸۵.۵) مثال بزنید که جواب آنها عبارت باشد از:

(الف) یک صفحه ،

(ب) یک خط راست ، و

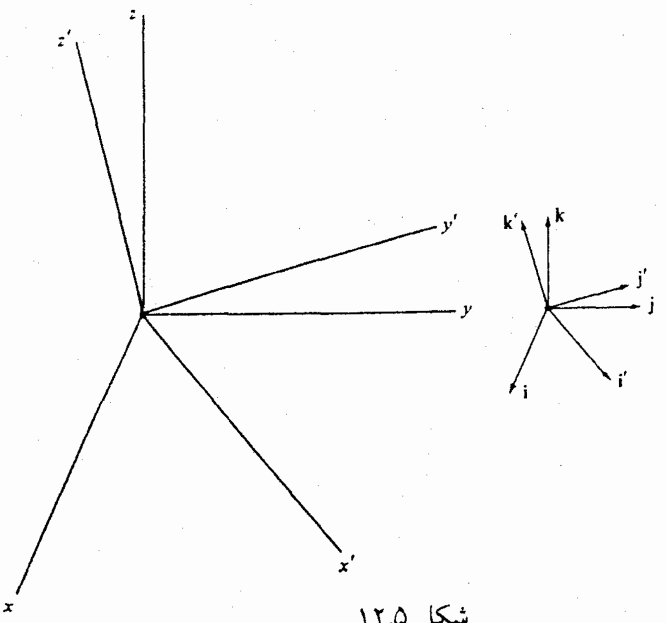
(ج) یک مجموعهٔ خالی.

(راهنمایی : تعبیر مقطع سه صفحه را به خاطر بیاورید.) دترمینان ماتریس در این حالات چیست؟

۴.۵ درس اختیاری

تبدیلات خطی متعامد

اکنون به مطالعهٔ دستگاههای مختصات متفاوت برای توصیف میدانهای اسکالر و برداری برمی‌گردیم. یک حالت مهم ، تشکیل دستگاه مختصات دکارتی (البته ، راستگرد) دیگر است که محورهایش را با x' ، y' ،و z' نشانه‌گذاری می‌کنیم ، و بردارهای یکّهٔ مربوط به آنها را $\mathbf{i}'$،$\mathbf{j}'$،$\mathbf{k}'$ می‌نامیم. این دستگاه مختصات «جدید» دارای همان مبدأ دستگاه قدیم x ، y ،و z است . (شکل ۱۲.۵ را ببینید.)



شکل ۱۲.۵

نقطه‌ای در فضا در نظر بگیرید. مختصات این نقطه در دستگاه قدیم x ، y ، و z است و در دستگاه جدید x' ، y' ،و z' . برای کشف رابطهٔ بین آنها ، بردار موضع این نقطه ، $\mathbf{R}$ ، را رسم

می‌کنیم . (شکل ۱۲.۵) در این صورت ، دو توصیف برای $\mathbf{R}$ داریم :

$$\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{i} + z\mathbf{k} = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j} + z'\mathbf{k} \tag{۸۷.۵}$$

اگر حاصل‌ضرب اسکالر $\mathbf{R}$ را ، به ترتیب ، در $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$، و $\mathbf{k}$ به دست آوریم ، خواهیم داشت :

$$\begin{aligned} x &= x'\mathbf{i}'\cdot\mathbf{i} + y'\mathbf{j}'\cdot\mathbf{i} + z'\mathbf{k}'\cdot\mathbf{i} \\ y &= x'\mathbf{i}'\cdot\mathbf{j} + y'\mathbf{j}'\cdot\mathbf{j} + z'\mathbf{k}'\cdot\mathbf{j} \\ z &= x'\mathbf{i}'\cdot\mathbf{k} + y'\mathbf{j}'\cdot\mathbf{k} + z'\mathbf{k}'\cdot\mathbf{k} \end{aligned} \tag{۸۸.۵}$$

این دستگاه را به صورت فشردهٔ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathcal{J} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

می‌نویسیم که در آن $\mathcal{J}$ *ماتریس تبدیل* زیر است :

$$\mathcal{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}'\cdot\mathbf{i} & \mathbf{j}'\cdot\mathbf{i} & \mathbf{k}'\cdot\mathbf{i} \\ \mathbf{i}'\cdot\mathbf{j} & \mathbf{j}'\cdot\mathbf{j} & \mathbf{k}'\cdot\mathbf{j} \\ \mathbf{i}'\cdot\mathbf{k} & \mathbf{j}'\cdot\mathbf{k} & \mathbf{k}'\cdot\mathbf{k} \end{bmatrix} \tag{۸۹.۵}$$

ماتریس $\mathcal{J}$ خواص جالب و مفید بسیار دارد. اوّل از همه ، ملاحظه می‌کنیم که ستونهایش کسینوسهای هادی بردارهای $\mathbf{i}'$ ، $\mathbf{j}'$ ، و $\mathbf{k}'$ در دستگاه مختصات قدیمند. (بخش (۵.۱) را به خاطر بیاورید.) گاهی توجه به این نکته سبب سهولت محاسبهٔ $\mathcal{J}$ می‌شود.

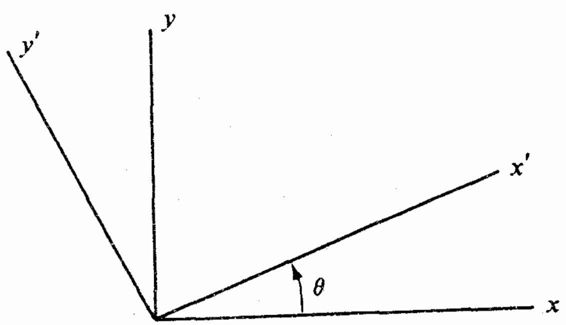
مثال ۱۵.۵ فرض کنید : چنانکه شکل (۱۳.۵) نشان می‌دهد ، دستگاه جدید از دوران دستگاه قدیم حول محور z به اندازهٔ زاویهٔ θ حاصل شده باشد. ماتریس تبدیل $\mathcal{J}$ را بیابید.

حل کسینوسهای هادی $\mathbf{i}'$ عبارتند از: $\cos\theta$، $\cos\left(\frac{\pi}{۲}-\theta\right)$، و ۰. در مورد $\mathbf{j}'$ عبارتند از: $\cos\left(\frac{\pi}{۲}+\theta\right)$، $\cos\theta$، و ۰. در مورد $\mathbf{k}'$: ۰، ۰، و ۱. از این‌رو،

$$\mathcal{J}=\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & ۰ \\ \sin\theta & \cos\theta & ۰ \\ ۰ & ۰ & ۱ \end{bmatrix}$$

از دیدگاه دیگر، می‌توان گفت که ستونهای $\mathcal{J}$ بردارهای $\mathbf{i}'$، $\mathbf{j}'$، و $\mathbf{k}'$ را در دستگاه مختصات قدیم نشان می‌دهند:

$$\mathcal{J}=\begin{bmatrix} \vdots & \vdots & \vdots \\ \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix} \qquad (۹۱.۵)$$



شکل ۱۳.۵

z و z′ به طرف خواننده‌اند.

این باعث می‌شود که وارون $\mathcal{J}$ را به سادگی بیابیم. چون مجموعهٔ $\mathbf{i}'$، $\mathbf{j}'$،و $\mathbf{k}'$ متقابل خود است، با تحلیلی که در بخش (۳.۵) به عمل آمد، درمی‌یابیم که:

$$\mathcal{J}^{-1} = \begin{bmatrix} \cdots & \mathbf{i}' & \cdots \\ \cdots & \mathbf{j}' & \cdots \\ \cdots & \mathbf{k}' & \cdots \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}'\cdot\mathbf{i} & \mathbf{i}'\cdot\mathbf{j} & \mathbf{i}'\cdot\mathbf{k} \\ \mathbf{j}'\cdot\mathbf{i} & \mathbf{j}'\cdot\mathbf{j} & \mathbf{j}'\cdot\mathbf{k} \\ \mathbf{k}'\cdot\mathbf{i} & \mathbf{k}'\cdot\mathbf{j} & \mathbf{k}'\cdot\mathbf{k} \end{bmatrix} \qquad (۹۲.۵)$$

ماتریس $\mathcal{J}^{-1}$ *ترانهادهٔ* $\mathcal{J}$ است؛ یعنی سطرهایش ستونهای $\mathcal{J}$ اند. چنان‌که می‌دانیم، ماتریسی که ترانهاده‌اش با وارونش برابر باشد، متعامد نامیده می‌شود. (این مفهوم در مجموعهٔ تمرینات بخش قبل معرفی شد.) *به این ترتیب، نشان داده‌ایم که تبدیلی که مختصات دو دستگاه دکارتی با یک مبدأ را به هم مربوط می‌کند، نتیجهٔ یک ضرب ماتریسی (یک عمل خطی) با استفاده از یک ماتریس متعامد است*، و نام «تبدیل خطی متعامد» از این جا ناشی می‌شود.

با استفاده از $\mathcal{J}^{-1}$، می‌توانیم مختصات جدید را بر حسب مختصات قدیم به دست آوریم:

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} = \mathcal{J}^{-1} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \mathbf{i}'\cdot\mathbf{i} & \mathbf{i}'\cdot\mathbf{j} & \mathbf{i}'\cdot\mathbf{k} \\ \mathbf{j}'\cdot\mathbf{i} & \mathbf{j}'\cdot\mathbf{j} & \mathbf{j}'\cdot\mathbf{k} \\ \mathbf{k}'\cdot\mathbf{i} & \mathbf{k}'\cdot\mathbf{j} & \mathbf{k}'\cdot\mathbf{k} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \qquad (۹۳.۵)$$

نقشهای واژگونه را به آسانی می‌توان ملاحظه کرد: اینک، ستون اوّل، متشکل از کسینوسهای هادی $\mathbf{i}$ بر حسب دستگاه جدید است، و به همین منوال. در واقع، به سادگی نیز می‌توان دید (تمرین ۱) که معادلات (۹۳.۵) از ضرب اسکالر (۸۷.۵)، به ترتیب، در $\mathbf{i}'$، $\mathbf{j}'$،و $\mathbf{k}'$ نتیجه می‌شود.

حال که نحوهٔ تبدیل مختصات به یکدیگر را می‌دانیم، اجازه دهید ببینیم که *بردارها* چگونه تبدیل می‌شوند. به روشنی:

$$\begin{aligned} \mathbf{i} &= (\mathbf{i}\cdot\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{i}\cdot\mathbf{k}')\mathbf{k}' \\ \mathbf{j} &= (\mathbf{j}\cdot\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{j}\cdot\mathbf{k}')\mathbf{k}' \\ \mathbf{k} &= (\mathbf{k}\cdot\mathbf{i}')\mathbf{i}' + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{j}')\mathbf{j}' + (\mathbf{k}\cdot\mathbf{k}')\mathbf{k}' \end{aligned} \qquad (۹۴.۵)$$

بردار دلخواهی مانند $\mathbf{V}$ دو نمایش دارد:

$$\begin{aligned} \mathbf{V} &= \mathbf{V}\cdot\mathbf{i}\mathbf{i} + \mathbf{V}\cdot\mathbf{j}\mathbf{j} + \mathbf{V}\cdot\mathbf{k}\mathbf{k} = V_1\mathbf{i} + V_2\mathbf{j} + V_3\mathbf{k} \\ &= \mathbf{V}\cdot\mathbf{i}'\mathbf{i}' + \mathbf{V}\cdot\mathbf{j}'\mathbf{j}' + \mathbf{V}\cdot\mathbf{k}'\mathbf{k}' = V_1'\,\mathbf{i}' + V_2'\,\mathbf{j}' + V_3'\,\mathbf{k}' \end{aligned} \qquad (۹۵.۵)$$

اگر حاصل‌ضرب اسکالر (۹۵.۵) را در $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ،و $\mathbf{k}$ به دست آوریم ، می‌بینیم که *مؤلفه‌های* $\mathbf{V}$ *درست مانند مختصات یک نقطه تبدیل می‌شوند:*

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} = \mathcal{J} \begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} V_1' \\ V_2' \\ V_3' \end{bmatrix} = \mathcal{J}^{-1} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \end{bmatrix} \qquad (۹۶.۵)$$

یک میدان اسکالر ، مانند $f(x,y,z)$ ، با چنین تبدیلی چه می‌شود ؟ به عنوان مثال ، اگر f نمایش‌دهندهٔ دما باشد ، واضح است که صرفاً با تغییر دستگاه مختصات ، تغییری در مقدار f در یک نقطهٔ ایجاد نمی‌شود. با این وجود ، سه عددی که مختصات نقطه را نشان می‌دهند تغییر می‌کنند. بنابراین ، فرمول f ، یا صورت تابعی آن ، متفاوت خواهدبود. اجازه دهید قبل از فرمولبندی حالت کلی ، به ذکر یک مثال و بررسی آن بپردازیم .

مثال ۱۶.۵ فرض کنید f تابعی با ضابطهٔ $f(x,y,z)=y^2-x^2$ در دستگاه مختصات قدیم باشد. تبدیل خطی متعامد مثال(۱۵.۵)را با $\theta = \pi/6$ تشکیل می‌دهیم . مقدار f در نقطهٔ (۱ , ۱ ,o) از دستگاه جدید چیست ؟

حل قبل از اعمال فرمول $y^2 - x^2$ در مورد f ، باید x و y ، یعنی مختصات اوّلیهٔ (۱ , ۱ ,o) ، را

بیابیم . با استفاده از تبدیل (۸۹.۵) با ماتریس $\mathcal{J}$ مفروض در (۹۰.۵) و $\theta = \pi/6$، چنین به دست می‌آوریم :

$$x = x'\cos\theta - y'\sin\theta = 1(\sqrt{3}/2)-1(1/2) = \frac{\sqrt{3}-1}{2}$$

$$y = x'\sin\theta + y'\cos\theta = 1(1/2)+1(\sqrt{3}/2) = \frac{\sqrt{3}+1}{2}$$

از این رو ، مقدار مطلوب f عبارت است از $\sqrt{3} = y^2 - x^2$.

توجه کنید که ما نمی‌توانستیم مقدار f را با استفاده از $f(x',y',z')=y'^2 - x'^2 = 1-1 = 0$ محاسبه کنیم . نخست ، باید مختصات اوّلیه را بر حسب مختصات جدید بیان کنیم ؛ سپس ، با اعمال فرمول f در دستگاه مختصات اوّلیه ، مقدار f را بیابیم . به عبارت دیگر ، برای بیان تابعی مانند $f(x,y,z)$ در دستگاه مختصات جدید ، یعنی $f'(x',y',z')$ ، نخست ، مانند (۸۸.۵) ، مختصات قدیم را بر حسب مختصات جدید بیان می‌کنیم :

$$\begin{aligned} x&=x(x',y',z')\\ y&=y(x',y',z')\\ z&=z(x',y',z') \end{aligned} \qquad (۹۷.۵)$$

آن گاه ، این مختصات را در فرمول تابع f قرار می‌دهیم :

$$f'(x',y',z') = f(x(x',y',z')\ ,\ y(x',y',z')\ ,\ z(x',y',z')) \qquad (۹۸.۵)$$

بالاخص ، تابع تبدیل یافته نباید به صورت نادرست $f(x',y',z')$ نوشته شود.

در مثال (۱۶.۵) ، تابع $f(x,y,z)=y^2 - x^2$ در دستگاه مختصات جدید به صورت زیر محاسبه شد:

$$\begin{aligned} f'(x',y',z') &= (x'\sin\theta + y'\cos\theta)^2 - (x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2\\ &= (y'^2 - x'^2)\cos 2\theta + 2x'y'\sin 2\theta \end{aligned} \qquad (۹۹.۵)$$

تبدیل میدانهای برداری دو برابر مشکلتر است : باید به کمک تبدیل (۹۶.۵) *مؤلفه‌های* جدید را بر حسب مؤلفه‌های قدیم به دست آوریم ، ولی چون *مؤلفه‌ها تابع* موضعند ، قاعدهٔ (۹۸.۵) باید در مورد هر مؤلفه اعمال شود.به این ترتیب ، نخست از (۹۸.۵) برای بیان مؤلفه‌های قدیمی متناظر **i** ، **j**، و **k** بردار **V** بر حسب مختصات جدید x' ، y' ، و z' نقطهٔ مفروض در فضا استفاده می‌کنیم :

$$\mathbf{V}= V_1(x(x',y',z'),y(x',y',z'),z(x',y',z'))\mathbf{i} + V_2(x(x'\dots)\mathbf{j} + V_3(x(x'\dots)\mathbf{k}$$

سپس ، در تحصیل مؤلفه‌های جدید **V** از $\mathcal{J}^{-1}$ کمک می‌گیریم . به طور خلاصه ، قاعده تبدیل یک میدان برداری چنین است :

اگر **V** در دستگاه قدیم به صورت

$$\mathbf{V} = V_1(x,y,z)\mathbf{i} + V_2(x,y,z)\,\mathbf{j} + V_3(x,y,z)\mathbf{k} \qquad (۱۰۰.۵)$$

و در دستگاه جدید به صورت

$$\mathbf{V} = V'_1\,(x',y',z')\mathbf{i}' + V'_2\,(x',y',z')\,\mathbf{j}' + V'_3\,(x',y',z')\mathbf{k}' \qquad (۱۰۱.۵)$$

مفروض باشد ، مؤلفه‌ها به صورت زیر به هم مربوطند:

$$\begin{bmatrix} V'_1\,(x',y',z') \\ V'_2\,(x',y',z') \\ V'_3\,(x',y',z') \end{bmatrix} = \mathcal{J}^{-1} \begin{bmatrix} V_1(x\,(x',y',z'),y\,(x',y',z'),z\,(x',y',z')) \\ V_2(x\,(x',y',z'),y\,(x',y',z'),z\,(x',y',z')) \\ V_3(x\,(x',y',z'),y\,(x',y',z'),z\,(x',y',z')) \end{bmatrix} \qquad (۱۰۲.۵)$$

مثال ۱۷.۵ میدان برداری

$$\mathbf{V}=\mathbf{i} + (yz)\,\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\,\mathbf{k} \qquad (۱۰۳.۵)$$

را در دستگاه مختصات جدید مثال (۱۵.۵) بیان کنید.

حل با استفاده از ماتریس $\mathcal{J}$ مذکور در (۹۰.۵)، که از ماتریس (۸۹.۵) به دست آمده است، مختصات را تبدیل می‌کنیم، و ترانهاده‌اش را در مورد $\mathcal{J}^{-1}$ به کار می‌بریم. از این‌رو،

$$\begin{bmatrix} V'_1 & (x',y',z') \\ V'_2 & (x',y',z') \\ V'_3 & (x',y',z') \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ (x'\sin\theta + y'\cos\theta)z' \\ (x'\cos\theta - y'\sin\theta)^2 + (x'\sin\theta + y'\cos\theta) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\theta + x'z'\sin^2\theta + y'z'\sin\theta\cos\theta \\ -\sin\theta + x'z'\sin\theta\cos\theta + y'z'\cos^2\theta \\ x'^2 + y'^2 \end{bmatrix}$$

و

$$\begin{aligned} \mathbf{V} = {} & (\cos\theta + x'z'\sin^2\theta + y'z'\sin\theta\cos\theta)\mathbf{i}' \\ & + (-\sin\theta + x'z'\sin\theta\cos\theta + y'z'\cos^2\theta)\mathbf{j}' \\ & + (x'^2 + y'^2)\mathbf{k}' \end{aligned} \tag{۱۰۴.۵}$$

اکنون به این سؤال برمی‌گردیم که وقتی مختصات تبدیل می‌شوند در مورد عملگرهای برداری **grad**، div، و **curl** چه رخ می‌دهد؟ به عنوان یک آزمایش مقدماتی، مثال زیر را در نظر بگیرید.

مثال ۱۸.۵ فرض کنید: $f(x,y,z)=y^2-x^2$. تبدیل متعامد خطی مثال (۱۵.۵) را به کار ببرید. عبارت

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} \tag{۱۰۵.۵}$$

را با عبارت مشابه زیر در دستگاه مختصات جدید مقایسه کنید:

$$\frac{\partial f'}{\partial x'}\mathbf{i}' + \frac{\partial f'}{\partial y'}\mathbf{j}' + \frac{\partial f'}{\partial z'}\mathbf{k}' \tag{۱۰۶.۵}$$

حل تابع تبدیل‌یافتهٔ f' در (۹۹.۵) محاسبه شد. بنابراین، (۱۰۶.۵) به صورت زیر درمی‌آید:

$$(-2x'\cos 2\theta + 2y'\sin 2\theta)\mathbf{i}' + (2x'\sin 2\theta + 2y'\cos 2\theta)\mathbf{j}'$$

حال، اجازه دهید (۱۰۵.۵) را محاسبه کرده و سپس میدان برداری منتج را به دستگاه جدید تبدیل کنیم:

$$\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z}\mathbf{k} = -2x\mathbf{i} + 2y\mathbf{j}$$

با اعمال (۱۰۲.۵)، خواهیم داشت:

$$\mathcal{J}^{1}\begin{bmatrix} -2x(x',y',z') \\ 2y(x',y',z') \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -2x'\cos\theta + 2y'\sin\theta \\ 2x'\sin\theta + 2y'\cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} -2x'\cos 2\theta + 2y'\sin 2\theta \\ 2x'\sin 2\theta + 2y'\cos 2\theta \\ 0 \end{bmatrix}$$

از این‌رو، (۱۰۵.۵) به (۱۰۶.۵) تبدیل می‌شود و هردو یک میدان برداری را توصیف می‌کنند.

البته، هردو عبارت این مثال، ∇f را، که در دو دستگاه مختصات متفاوت محاسبه شدند، نمایش می‌دهد. دلیل این که هردو به یک میدان برداری منتهی شدند این است که $\mathbf{grad} f$ را بدون مراجعه به یک دستگاه مختصات خاص می‌توان مشخص کرد. این بردار در جهت بیشترین میزان تغییرات f بر حسب فاصله است، و درازایش مساوی همین ماکسیمم میزان تغییر f است. همان بحثی که نشان داد که $\mathbf{grad} f$ را می‌توان به وسیلهٔ (۱۰۵.۵) در دستگاه مختصات قدیم محاسبه کرد، نیز نشان می‌دهد که آن‌را می‌توان به وسیلهٔ (۱۰۶.۵) در دستگاه مختصات جدید محاسبه کرد.

به طور مشابه، به دلیل وجود قضیهٔ واگرایی (آخرین پاراگراف بخش (۱۰.۴) را به خاطر

بیاورید.) ، واگرایی یک میدان برداری را می‌توان مستقل از دستگاه مختصات تعریف کرد. اگر $\operatorname{div} \mathbf{V}$ را به عنوان شار خروجی از واحد حجم از یک جعبه ، که پهلوهایش بر محورهـای x، y ،و z عمودند ، محاسبه کنیم ، به عبارت

$$\frac{\partial V_1}{\partial x} + \frac{\partial V_2}{\partial y} + \frac{\partial V_3}{\partial z} \qquad (۱۰۷.۵)$$

می‌رسیم . اگر از جعبه‌ای که پهلوهایش بر محورهای x' ، y' ، و z' عمودند استفاده کنیم ، عبارت

$$\frac{\partial V'_1}{\partial x'} + \frac{\partial V'_2}{\partial y'} + \frac{\partial V'_3}{\partial z'} \qquad (۱۰۸.۵)$$

را به دست می‌آوریم . چون هردو $\operatorname{div} \mathbf{V}$ را نشان می‌دهند ، (۱۰۷.۵) و (۱۰۸.۵) دو میدان اسکالر یکسانند که در دو دستگاه متفاوت بیان شده‌اند.

مثال ۱۹.۵ $\mathbf{V}$ را میدان برداری مثال (۱۷.۵) بگیرید ، و یکسانی $\operatorname{div} \mathbf{V}$ را در دو دستگاه مختصات مثال (۱۵.۵) تحقیق کنید.

حل با اعمال (۱۰۷.۵) در مورد (۱۰۳.۵) ، به نتیجهٔ $\nabla \cdot \mathbf{V} = z$ می‌رسیم. با اعمال (۱۰۸.۵) در مورد (۱۰۴.۵) ، به نتیجهٔ $z' \sin^2\theta + z' \cos^2\theta = z'$ می‌رسیم. چون در این تبدیل $z = z'$ ، آنها یکسانند.

البته ، آنچه گفته شد دربارهٔ $\operatorname{curl} \mathbf{V}$ نیز صادق است . به دلیل وجود قضیهٔ استوکس ، مؤلفهٔ $\operatorname{curl} \mathbf{V}$ در هر جهت ، میزان «چرخش» $\mathbf{V}$ در آن جهت است ؛ و این مفهومی است که مستقل از دستگاه مختصات تعریف می‌شود. (تمرین (۱) انتهای بخش (۱۲.۴) را به خاطر بیاورید.) از این رو، میدان برداری

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ V_1 & V_2 & V_3 \end{bmatrix} \qquad (۱۰۹.۵)$$

به میدان برداری

$$\begin{bmatrix} \mathbf{i}' & \mathbf{j}' & \mathbf{k}' \\ \dfrac{\partial}{\partial x'} & \dfrac{\partial}{\partial y'} & \dfrac{\partial}{\partial z'} \\ V'_1 & V'_2 & V'_3 \end{bmatrix}$$

تبدیل می‌شود و هردو با **curl V** برابرند. در تمرین (۷) ، از خواننده می‌خواهیم که برقراری این تساوی را در مورد میدان برداری (۱۰۳.۵) بررسی کند.

مثال زیر تعبیر دیگری از ماتریس $\mathcal{J}$ مذکور در (۸۹.۵) عرضه می‌کند.

مثال ۲۰.۵ تحقیق کنید که با یک تبدیل خطی متعامد کلی ، (۱۰۵.۵) و (۱۰۶.۵) یک میدان برداری را توصیف می‌کنند.

حل صور تابعی f و f' با معادلهٔ (۸۹.۵) به هم مربوطند. از این‌رو ، به استناد قاعدهٔ زنجیری :

$$\frac{\partial f'}{\partial x'} = \frac{\partial f(x(x',y',z'),y(x',y',z'),z(x',y',z'))}{\partial x'}$$

$$= \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial x'} + \frac{\partial f}{\partial z}\frac{\partial z}{\partial x'} \tag{۱۱۱.۵}$$

معادلات مشابهی در مورد $\partial f' / \partial y'$ و $\partial f' / \partial z'$ برقرارند.

از معادلات (۸۸.۵) درمی‌یابیم که

$$\frac{\partial x}{\partial x'} = \mathbf{i}'\cdot\mathbf{i}\ ,\ \frac{\partial x}{\partial y'} = \mathbf{j}'\cdot\mathbf{i}\ ,\ \frac{\partial x}{\partial z'} = \mathbf{k}'\cdot\mathbf{i}\ ,\ \frac{\partial y}{\partial x'} = \mathbf{i}'\cdot\mathbf{j}\ ,\ \ldots$$

به عبارت دیگر ، مشتقات جزئی مختصات قدیم بر حسب مختصات جدید، درایه‌های ماتریس $\mathcal{J}$ اند:

$$\mathcal{J}=\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial x'} & \frac{\partial x}{\partial y'} & \frac{\partial x}{\partial z'} \\ \frac{\partial y}{\partial x'} & \frac{\partial y}{\partial y'} & \frac{\partial y}{\partial z'} \\ \frac{\partial z}{\partial x'} & \frac{\partial z}{\partial y'} & \frac{\partial z}{\partial z'} \end{bmatrix} \tag{۱۱۲.۵}$$

از این‌رو ، ملاحظه می‌کنیم که می‌توانیم (۱۱۱.۵) ، و معادلات متناظر y' و z' ، را از طریق ضرب ماتریسی زیر ، برای بیان بردار (۱۰۶.۵) به‌کار بریم :

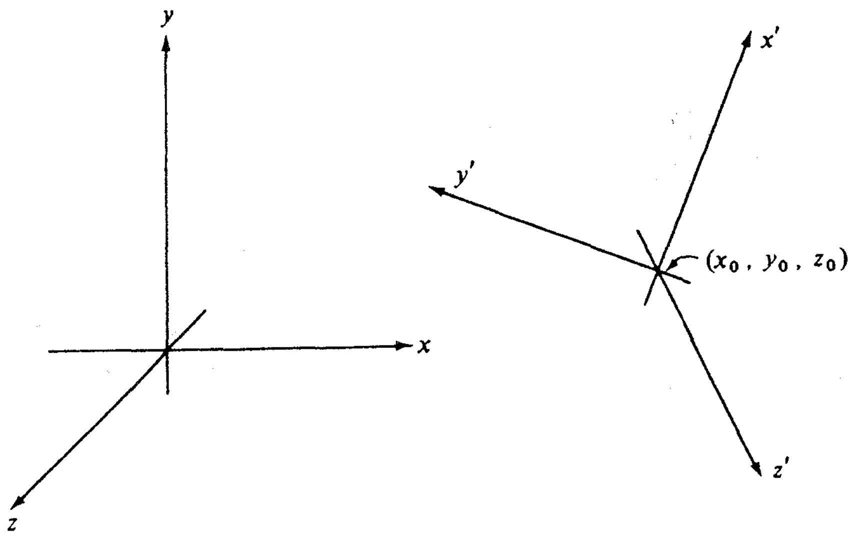
$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f'}{\partial x'} & \frac{\partial f'}{\partial y'} & \frac{\partial f'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \mathcal{J}$$

اگر ترانهادهٔ ماتریسها را محاسبه کنیم و به خاطر داشته‌باشیم که $\mathcal{J}$ متعامد است ، درمی‌یابیم که:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial f'}{\partial x'} \\ \frac{\partial f'}{\partial y'} \\ \frac{\partial f'}{\partial z'} \end{bmatrix} = \mathcal{J}^{1} \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{bmatrix} \tag{۱۱۳.۵}$$

امّا ، طرف راست (۱۱۳.۵) دقیقاً همان چیزی است که از اعمال قاعدهٔ تبدیل (۱۰۲.۵) در مورد بردار (۱۰۵.۵) به دست می‌آوریم ! از این‌رو ، (۱۰۵.۵) و (۱۰۶.۵) یک میدان برداری را توصیف می‌کنند.

تحقیقات مشابه در مورد «پایایی» فرمولهای واگرایی و تاو به تمرینات واگذار می‌شود.



شکل ۱۴.۵

این واقعیّت که $\mathcal{J}$ ماتریس مشتقات جزئی است ، از نماد زیر فهمیده می‌شود:

$$\mathcal{J} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(x',y',z')}$$

اصطلاح «ماتریس ژاکوبی» غالباً در اشاره به ماتریس مشتقات جزئی به کار می‌رود. از این رو ، نماد $\mathcal{J}$ ناظر به همین نکته است.

سرانجام ، مایلیم تحلیل این بخش را به حالت کلیتری تعمیم دهیم. فرض کنید که مبدأ دستگاه مختصات جدید بر مبدأ دستگاه اوّلیه منطبق نباشد؛ مثلاً در نقطهٔ به مختصات x_0 ، y_0 ،و z_0 از دستگاه قدیم . (شکل ۱۴.۵ را ببینید.) در این صورت ، اگر نقطه‌ای مانند P دارای مختصات قدیم x ، y ،و z و مختصات جدید x' ، y' ،و z' باشد ، چنان‌که شکل (۱۵.۵) نشان می‌دهد،

بردارهای $\mathbf{R}_1$ و $\mathbf{R}_2$ با رابطهٔ زیر به هم مربوطند:

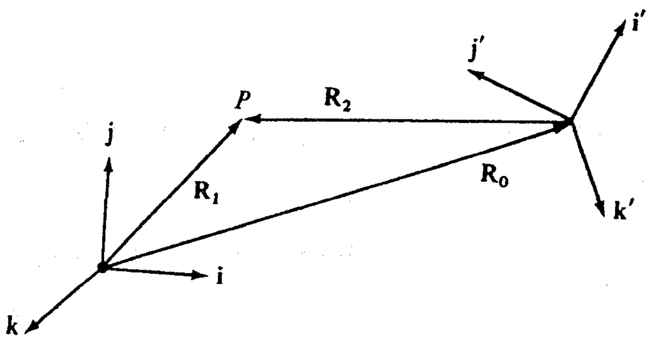
$$\mathbf{R}_1 = \mathbf{R}_0 + \mathbf{R}_2$$

$$x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k} = x_0\mathbf{i} + y_0\mathbf{j} + z_0\mathbf{k} + x'\mathbf{i}' + y'\mathbf{j}' + z'\mathbf{k}' \qquad (۱۱۴.۵)$$

اگر حاصل‌ضربهای اسکالر (۱۱۴.۵) را، به ترتیب ، در بردارهای $\mathbf{i}$، $\mathbf{j}$و $\mathbf{k}$ محاسبه کنیم، به معادلهٔ

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{bmatrix} + \mathcal{J} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \qquad (۱۱۵.۵)$$

می‌رسیم که در آن $\mathcal{J}$ همان ماتریس (۸۹.۵) است. به این ترتیب ، در این حالت ، مختصات یک نقطه با یک تبدیل متعامد خطی تبدیل نمی‌شود؛ بلکه این تبدیل از قانون (۱۱۵.۵) تبعیّت میکند که یک *تبدیل آفین* است.



شکل ۱۵.۵

با این وجود ، بردارها هنوز هم مطابق قواعد قدیمی (۹۵.۵) و (۹۶.۵) تبدیل می‌شوند؛ زیرا اینها از انتخاب دستگاه مختصات مستقلند، و انتقال مبدأ هیچ تغییری در آنها به وجود نمی‌آورد.

به علاوه ، عملگرهای برداری **grad** ، div ، **curl** نیز «بدون تغییر» باقی می‌مانند؛ زیرا، مجدداً ، آنها نیز مستقل از یک دستگاه مختصات خاص تعریف می‌شوند. حتی اثبات مستقیم این پایائی (عدم تغییر) ، چنان‌که در مثال (۲۰.۵) دیده‌ایم ، نیز به همان صورت سابق است ؛ زیرا ماتریس (۸۹.۵) باز هم ماتریس مشتقات جزئی است. خواننده باید مثال (۲۰.۵) را مرور کند تا مطمئن شود که این نکته را فهمیده است.

در نتیجه ، قسمت اعظم تحلیلی که در مورد تبدیلات بین دستگاههای مختصات دکارتی با یک مبدأ عرضه شد ، در مورد تبدیلات بین دستگاههای مختصات که دو مبدأ متفاوت دارند نیز معتبر است. این تحلیل شامل تعامد ماتریس $\mathcal{J}$ و قواعد (۹۶.۵) در مورد تبدیل بردارها ، قواعد (۸۹.۵) و (۱۰۲.۵) در مورد تبدیل میدانهای اسکالر و برداری ، عبارات (۱۰۶.۵) ، (۱۰۸.۵) ،و (۱۱۰.۵) در مورد **grad** ، div ،و **curl** است . تنها تفاوت این است که «انتقالهای» ناهمگن در معادلهٔ (۱۱۵.۵) ، که مختصات نقاط را به هم مربوط می‌کنند ، ظاهر می‌شود.

تمرینات

۱. نشان دهید که معادلهٔ (۹۳.۵) را می‌توان از ضرب اسکالر (۸۷.۵) ، به ترتیب ، در $\mathbf{i}'$ ، $\mathbf{j}'$ و $\mathbf{k}'$ نتیجه گرفت.

۲. (الف) ماتریس تبدیلی راکه از دوران دستگاه (x,y,z) حول محور x به اندازهٔ زاویهٔ ϕ به دست می‌آید بیابید.

(ب) قسمت (الف) را وقتی دستگاه (x,y,z) حول محور y به اندازهٔ زاویهٔ ψ دوران کند تکرار کنید.

۳. تحقیق کنید که ترانهادهٔ ماتریس $\mathcal{J}$ مذکور در (۹۰.۵) برابر وارون آن است.

۴. اگر $\mathbf{V} = ۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{W} = ۲\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$ ، $\mathbf{V}$ و $\mathbf{W}$ را در دستگاه مختصات جدید مثال (۱۵.۵) محاسبه کنید. تحقیق کنید که حاصل‌ضرب اسکالر $\mathbf{V}\cdot\mathbf{W}$ ثابت می‌ماند.

۵. میدانهای اسکالر و برداری زیر را در نظر بگیرید:

$$f(x,y,z) = xyz$$

$$\mathbf{V}(x,y,z) = xz\mathbf{i} + \mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$$

اگر تبدیل مختصات مثال (۱۵.۵) را با $\theta = \pi/۶$ در نظر بگیریم ، میدانهای زیر را در دستگاه مختصات جدید بیان کنید:

(الف) میدان اسکالر f ،

(ب) میدان برداری $\mathbf{V}$ ،

(ج) $\mathbf{grad} f$ ،

(د) $\text{div } \mathbf{V}$ ،و

(هـ) $\mathbf{curl\ V}$.

۶. تمرین (۵) را در مورد میدانهای زیر تکرار کنید:

$$f = x^۲ + y^۲$$
$$\mathbf{V} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

نتایج را تعبیر کنید.

۷. تحقیق کنید که در مورد میدان برداری (۱۰۳.۵) ، محاسبهٔ $\mathbf{curl\ V}$ از طریق (۱۰۹.۵) در دستگاه قدیم و از طریق (۱۱۰.۵) در دستگاه جدید مثال (۱۵.۵) ، با تبدیلی که در آن آمده است ، به یک نتیجه می‌انجامد.

۸. بر اساس روش مثال (۲۰.۵) ، برهان مستقیمی برای «پایایی» میدانهای زیر تحت تبدیل متعامد خطی کلی (۸۸.۵) ارائه کنید:

(الف) واگرایی یک میدان برداری دلخواه ، و

(ب) تاو یک میدان برداری دلخواه.

۹. تمرین (۸) را برای تبدیل خطی متعامد توأم با انتقال (۱۱۵.۵) تکرار کنید.

۱۰.آیا لاپلاسی یک میدان اسکالر تحت تبدیلات مورد بحث در این بخش «پایاست»؟

جواب خود را بر اساس:

(الف) لاپلاسی = واگرایی گرادیان ،و

(ب) تمرین (۱۱) آخر بخش (۱۰.۴) ،

بررسی کنید.

۱۱.عنصر طول کمان ، $ds = (dx^2 + dy^2 + dz^2)^{\frac{1}{2}}$ ، در دستگاه مختصات جدید چیست؟

۱۲.عنصر حجم ،$dV=dxdydz$ ، در دستگاه مختصات جدید چیست؟

۱۳.فرض کنید یک دستگاه مختصات جدید x' ، y' ، z' به وسیلهٔ یک تبدیل خطی متعامد ،که مانند (۸۹.۵) با ماتریس $\mathcal{J}$ توصیف شده است ، به دستگاه اوّلیه مربوط باشد. فرض یک دستگاه جدیدتر x'' ، y'' ، z'' به وسیلهٔ یک تبدیل خطی متعامد ،که با ماتریس $\mathcal{K}$ توصیف می‌شود،به دستگاه جدید مربوط باشد. نشان دهید که دستگاه x'' ، y'' ، z'' به وسیلهٔ یک تبدیل خطی متعامد ،که با ماتریس $(\mathcal{J}\mathcal{K})$ توصیف می‌شود ، مربوط است. مستقیماً ثابت کنید که حاصل‌ضرب هردو ماتریس متعامد ، یک ماتریس متعامد است. چه تعبیری برای ستونهای $(\mathcal{J}\mathcal{K})$ سراغ دارید؟

۱۴.ماتریس حاصل از دنبالهٔ زیر از اعمال را ،که در آنها محورهای x ، y ، z به محورهای x' ، y' ، z' تبدیل می‌شود ، بیابید:

(الف) نخست ، دوران حول محور z به اندازهٔ زاویهٔ $\pi/4$،

(ب) سپس ، دوران حول محور y حاصل از تبدیل اوّل به اندازهٔ $\pi/2$،

(ج) سرانجام ، دوران حول محور x حاصل از تبدیل دوّم به اندازهٔ $(-\pi/4)$.

۱۵.مستقیماً نشان دهید که حاصل‌ضربهای اسکالر تحت تبدیل خطی متعامد کلی (۹۶.۵) ثابت می‌مانند؛ یعنی ، نشان دهید که وقتی مؤلفه‌های بردارهای $\mathbf{V}$ و $\mathbf{W}$ با (۹۶.۵) به هم مربوط

باشند،

$$V_1W_1 + V_2W_2 + V_3W_3 = V_1' W_1' + V_2' W_2' + V_3' W_3'$$

این نتیجه حاکی از این واقعیّت (بدیهی) است که طولها و زوایا تحت چنین تبدیلاتی ثابت می‌مانند.

۱۶. نشان دهید که تحت تبدیل متعامد خطی (۸۸.۵) خط راستی وجود دارد که از مبدأ می‌گذرد و مختصات همهٔ نقاطش قبل و بعد از تبدیل یکی است ؛ یعنی ، در مورد همهٔ نقاط این خط : $x = x'$ ، $y = y'$ ، و $z = z'$.

[راهنمایی: اگر $\mathbf{R}$ بردار موضع نقطه‌ای از خط باشد، آنگاه $\mathbf{R}\cdot\mathbf{i} = \mathbf{R}\cdot\mathbf{i}'$؛ از این‌رو $\mathbf{R}\cdot(\mathbf{i} - \mathbf{i}') = 0$. به طور مشابه $\mathbf{R}\cdot(\mathbf{j} - \mathbf{j}') = \mathbf{R}\cdot(\mathbf{k} - \mathbf{k}') = 0$.

اگر $\mathbf{i} = \mathbf{i}'$ یا $\mathbf{j} = \mathbf{j}'$، چیزی برای اثبات نمی‌ماند. بنابراین $\mathbf{R} = (\mathbf{i} - \mathbf{i}') \times (\mathbf{j} - \mathbf{j}')$ را بیازمایید.]

۱۷. بر اساس دو تمرین اخیر ، آیا می‌توانید قضیهٔ *اویلر* را نتیجه بگیرید: هر تبدیل به صورت (۸۸.۵) را می‌توان دوران دستگاه مختصات حول خط مستقیمی مار از مبدأ توصیف کرد.

۱۸. قضیهٔ اویلر ایجاب می‌کند که دنبالهٔ اعمال تمرین (۱۴) معادل یک دوران حول خطی مستقیم است. این خط و زاویّهٔ دوران را بیابید.

۱۹. به عنوان یک عکس گونه از نظریه‌ای که در این بخش بسط داده شد، فرض کنید با تبدیلی از مختصات به صورت

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \mathcal{J} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix} \tag{۱۱۶.۵}$$

شروع کنیم و فقط این را بدانیم که $\mathcal{J}$ یک ماتریس متعامد است.

(الف) با آزمایش سه نقطه ، به ترتیب ، با مختصات جدید $(1,0,0)$، $(0,1,0)$، و $(0,0,1)$، نشان دهید که ستونهای $\mathcal{J}$ ، که بردارهایی در دستگاه قدیم تعبیر شوند ، در جهت محورهای جدید x', y', z' اند.

(ب) با استفاده از تعامد $\mathcal{J}$،ثابت کنید که محورهای جدید دوبه‌دو متعامدند و $(x'^{2}+y'^{2}+z'^{2})^{\frac{1}{2}}$ برابر فاصلهٔ نقطهٔ (x',y',z') از مبدأ است.

(ج) از بندهای (الف) و (ب) می‌توان نتیجه گرفت که دستگاه جدید یک دستگاه مختصات دکارتی است. با این وجود ، چنان‌که مثال سادهٔ زیر

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x' \\ y' \\ z' \end{bmatrix}$$

نشان می‌دهد ، امکان دارد که این دستگاه چپ گرد باشد. وقتی که دستگاه قدیم به یک دستگاه چپ‌گرد تبدیل می‌شود ، چه اصلاحاتی باید در قواعد (۵.۹۶) ، (۵.۹۸) ، (۵.۱۰۲) ، (۵.۱۰۶) ، (۵.۱۰۸) ، و (۵.۱۱۰) صورت گیرد؟

(د) از روی ماتریس $\mathcal{J}$، چگونه می‌توان تعیین کرد که دستگاه جدید راستگرد است یا نه؟

۲۰. تمرین (۱۸) را تعمیم دهید: فرض کنید یک ماتریس متعامد دلخواه $\mathcal{J}$ مفروض است که تبدیلی را از طریق (۵.۱۱۶) شکل می‌دهد ، و فرض کنید که دستگاه جدید راستگرد باشد. چگونگی محاسبهٔ زاویه و محور دوران را بر حسب $\mathcal{J}$ بیان کنید.

۲۱. ماتریس تبدیلی راکه از دوران دستگاه x ، y ، z به اندازهٔ زاویهٔ $\pi/2$ حول خط مستقیم مارّ بر مبدأ به موازات $\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$ به دست می‌آید ، نتیجه بگیرید.

۲۲. تمرین قبلی را تعمیم دهید : ماتریس تبدیلی راکه از دوران دستگاه x ، y ، z به اندازهٔ زاویهٔ θ حول خط مستقیم مارّ بر مبدأ به موازات $\mathbf{n}$ به دست می‌آید ، نتیجه بگیرید.

۲۳. *(اهمیّت ژاکوبی)* : بالبداهه ، معادلات تبدیل (۵.۳۳) در مورد مختصات متعامد ، در حالت کلی ، غیر خطّی هستند . با این وجود ، رابطهٔ

$$d\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u_1} du_1 + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u_2} du_2 + \frac{\partial \mathbf{R}}{\partial u_3} du_3 \qquad (۵.۱۱۷)$$

بین دیفرانسیلها را می‌توان به عنوان «خطی سازی موضعی» معادلهٔ (۳۳.۵) تلقی کرد.

(الف) نشان دهید که (۱۱۷.۵) را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

$$\begin{bmatrix} dx \\ dy \\ dz \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} & \frac{\partial x}{\partial u_3} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} & \frac{\partial y}{\partial u_3} \\ \frac{\partial z}{\partial u_1} & \frac{\partial z}{\partial u_2} & \frac{\partial z}{\partial u_3} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} du_1 \\ du_2 \\ du_3 \end{bmatrix} \qquad (۱۱۸.۵)$$

به خاطر داشته‌باشید که با نمادهای معرفی شده در این بخش ، ماتریس مشتقات جزئی مذکور در (۱۱۸.۵) همان ژاکوبی تبدیل (۳۳.۵) است که مختصراً به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\mathcal{J} = \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)}$$

(ب) نشان دهید که قاعدهٔ زنجیری ایجاب می‌کند که

$$\mathcal{J}^{-1} = \frac{\partial(u_1,u_2,u_3)}{\partial(x,y,z)} = \begin{bmatrix} \frac{\partial u_1}{\partial x} & \frac{\partial u_1}{\partial y} & \frac{\partial u_1}{\partial z} \\ \frac{\partial u_2}{\partial x} & \frac{\partial u_2}{\partial y} & \frac{\partial u_2}{\partial z} \\ \frac{\partial u_3}{\partial x} & \frac{\partial u_3}{\partial y} & \frac{\partial u_3}{\partial z} \end{bmatrix} \qquad (۱۱۹.۵)$$

(ج) نشان دهید که این شرط که (u_1,u_2,u_3) یک دستگاه مختصات منحنی‌الخط متعامد تشکیل دهدایجاب می‌کندکه‌سطرهای $\mathcal{J}$ متعامدباشند.بااین وجود، $\mathcal{J}$ یک ماتریس متعامد نیست . چرا؟

(د) نشان دهید که دترمینان $\mathcal{J}$ عبارت است از $h_1 \; h_2 \; h_3$ ، عاملی که در عنصر حجم (۵۰.۵) ظاهر شد. این نکته باعث می‌شود که فوراً متوجه شویم که

$$dxdydz = \left| \frac{\partial(x,y,z)}{\partial(u_1,u_2,u_3)} \right| du_1du_2du_3$$

تمرینات دوره

۱. بردارهایی از مبدأ O به نقاط A ، B ، C ،و D به صورت زیر مفروضند:

$$\mathbf{A} = ۲\mathbf{i} \quad , \quad \mathbf{B} = ۳\mathbf{j} \quad , \quad \mathbf{C} = ۴\mathbf{k} \quad , \quad \mathbf{D} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + ۲\,\mathbf{k}$$

(الف) طول عمودی راکه از A بر صفحهٔ BCD فرود می‌آید بیابید.

(ب) طول عمود مشترک خطوط AB و CD را بیابید.

(ج) برداری موازی این عمود مشترک بیابید.

۲. چهاروجهی منتظم OABC را در نظر بگیرید. ثابت کنید که بردار OC + OB + OA بر صفحهٔ ABC عمود است.

۳. اگر A نقطهٔ (۱,۳,۲) و B نقطهٔ (۲,۱,۱) باشد، زاویه‌ای راکه صفحهٔ OAB با محور z می‌سازد بیابید.

۴. نقاط O=(o,o,o)، A=(۱,۲,۳)، B=(o,-۱,۱)،و C=(۲,o,۲) داده شده‌اند.

(الف) برداری عمود بر صفحهٔ OAB بیابید.

(ب) فاصلهٔ C از صفحهٔ OAB را بیابید.

۵. کمترین فاصلهٔ نقطهٔ (۳,۴,۵) را از خطی که از مبدأ به موازات بردار $۲\mathbf{i} - \mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$ می‌گذرد تعیین کنید.

۶. معادلات اسکالر خطی راکه موازی فصل مشترک صفحات ۵ =x + y + z۳ و x-۲y +۳z=۱ است و از نقطهٔ (۴,۲,۱) می‌گذرد بنویسید.

۷. نقاط $P_۱(۲,-۱,۴)$، $P_۲(-۱,o,۳)$، $p_۳(۴,۳,۱)$، و $P_۴(۳,-۵,o)$ مفروضند. مطلوب است:

(الف) حجم چهاروجهی $P_۱P_۲P_۳P_۴$؛

(ب) صفحهٔ مار بر نقاط $P_۱$ ، $P_۲$ ، و $P_۳$؛

(ج) کسینوس زاویهٔ بین قطعه خطهای $P_۱P_۲$ و $P_۱P_۳$.

۸. برداری به طول ۵ بیابید که موازی صفحهٔ ۳x + ۴y + ۵z=۱o و عمود بر بردار $\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۲\mathbf{k}$ باشد.

۹. فرض کنید $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، $\mathbf{C}$ ،و $\mathbf{D}$ بردارهای موضع نقاط(۲-,۱,۳) A ،(۳,۵,-۳)B ،(۵-,۹,-۵)C ، و (۴,-۱,۱۰)D باشند. مطلوب است :

(الف) $|\mathbf{A} - \mathbf{D}|$ (ج) $(\mathbf{A} - \mathbf{C})\cdot(\mathbf{A} - \mathbf{B})$

(ب) $\mathbf{A} \times \mathbf{B}$ (د) $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \times \mathbf{C}$

۱۰.چهارنقطهٔ مذکور در تمرین (۹) مفروضند. مطلوب است:

(الف) مساحت مثلث OAB ؛

(ب) حجم چهاروجهی OABC ؛

(ج) زاویهٔ CAB .

۱۱.به روشهای برداری ثابت کنید که زاویه‌ای که محیط دایره با یک قطر آن در نقطهٔ تلاقی می‌سازد قائمه است.

۱۲.فرض کنید PQR یک مثلث باشد. به روشهای برداری نشان دهید که مثلثی وجود دارد که اضلاعش مساوی و موازی با میانه‌های PQR باشند.

۱۳.(الف) چند بردار یکّه زوایای مساوی با بردارهای $\mathbf{a} = ۲\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = ۳\mathbf{i} + ۴\mathbf{k}$ می‌سازند؟

(ب) بردار یکّه‌ای چون $\mathbf{u}$ بیابید که زاویهٔ بین $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را نصف کند.

۱۴.حاصل‌ضرب $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u} \times \mathbf{v})$ را به صورت دترمینانی که فقط شامل حاصل ضربهای اسکالر باشد بنویسید.

۱۵.اگر $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ ،و $\mathbf{w}$ سه بردار باشند، آیا الزاماً $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$؟

۱۶.اگر سه بردار $\mathbf{u}$ ، $\mathbf{v}$ ، و $\mathbf{w}$ با اندازه‌های یکسان چنان باشند که $(\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \times \mathbf{w} = \mathbf{u} \times (\mathbf{v} \times \mathbf{w})$ ، دربارهٔ آنها چه می‌توان گفت؟

۱۷.فاصلهٔ نقطهٔ (۳,۷,۲) A را از صفحه‌ای بیابید که از نقطهٔ (۵,۱۰,۸) B می‌گذرد و بر خط AB عمود است.

۱۸.فاصلهٔ مبدأ را از صفحهٔ مار بر (۳,۲,۶) و عمود بر محور z بیابید.

۱۹.فاصلهٔ مبدأ را از صفحه‌ای بیابید که از نقطهٔ (۳,۴,۲) می‌گذرد و بر خط واصل نقاط (۱,۲,۳) و (۳,۵,۹) عمود است.

۲۰.معادلات صفحه‌ای را بیابید که از نقطهٔ (۶،-۲،۴) بگذرد و با صفحهٔ مار بر سه نقطهٔ (۴, ۰, ۰) (۰ , ۶ , ۰) ، و (۱۲ , ۰ , ۰) موازی باشد.

۲۱.نشان دهید که منحنی $x=t$، $y=2t^2$، $z=t^3$ صفحهٔ $x+8y+12z=162$ را با زوایای قائمه قطع می‌کند.

۲۲.نزدیکترین نقطه از کرهٔ $x^2+y^2+z^2=84$ به صفحهٔ $x+2y+4z=77$ را بیابید.

۲۳.نزدیکترین نقطه از بیضیگون $x^2+2y^2+3z^2=6$ به صفحهٔ $x+2y+3z=8$ را بیابید.

۲۴.به روشهای برداری ، نقطه‌ای روی منحنی $x=t$، $y=t^2$ ، $z=2$ بیابید که در آن درجهٔ حرارت $\phi(x,y,z)=x^2-6x+y^2$ مینیمم باشد.

۲۵.نزدیکترین نقطه از منحنی $x=t$، $y=t^2$ ، $z=2$ به سطح $x^2-6x+y^2+7=0$ کدام است؟

۲۶.منحنی $x=t$، $y=2t-t^2$ ، $z=2t^4$ سطح $x^2+y^3+3z^2=14$ را در نقطهٔ (۱،۱،۲) با چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

۲۷.میدان سرعت یک شاره در شکل (۶.۳) توصیف شده است. مقداری از شاره ، ناحیهٔ کروی به مرکز P را در لحظهٔ $t=0$ اشغال می‌کند. ناحیه‌ای را که همین شاره در زمان کوتاهی بعد از آن اشغال می‌کند وصف کنید. آیا این ناحیه کروی است؟

۲۸.فرض کنید $\mathbf{R}=R_1\mathbf{i}+R_2\mathbf{j}+R_3\mathbf{k}$ یک تابع برداری از زمان t باشد، و

$$\left.\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|_m=\frac{dR_1}{dt}\mathbf{i}+\frac{dR_2}{dt}\mathbf{j}+\frac{dR_3}{dt}\mathbf{k}$$

نرخ تغییر $\mathbf{R}$ در واحد زمان باشد که با این فرض محاسبه می‌شود که $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ،و $\mathbf{k}$ با زمان تغییر نمی‌کنند . حال ، فرض کنید $\mathbf{i}$ ، $\mathbf{j}$ ،و $\mathbf{k}$ با زمان تغییر کنند ، ولی فقط به صورت یک دستگاه صلب. (این بردارها همواره یکّه و دو به دو متعامد باقی می‌مانند.)نشان دهید که ، در هر لحظهٔ t، برداری چون $\mathbf{w}$ وجود دارد که نرخ واقعی تغییر $\mathbf{R}$ عبارت است از

$$\frac{d\mathbf{R}}{dt}=\left.\frac{d\mathbf{R}}{dt}\right|_m+\mathbf{w}\times\mathbf{R}$$

(حرف m حرکت را نشان می‌دهد؛ $(d\mathbf{R}/dt)\big|_m$ نرخ تغییر نسبت به «دستگاه متحرک» $(\mathbf{i},\mathbf{j},\mathbf{k})$ است.

۲۹. اگر $\mathbf{R}_1$ بردار موضع نقطهٔ P نسبت به مبدئی چون O_1 در صفحهٔ xy و $\mathbf{R}_2$ بردار موضع همان نقطه نسبت به مبدأ دیگری چون O_2 باشد ، آنگاه

$$|\mathbf{R}_1| + |\mathbf{R}_2| = \text{ثابت}$$

معادلهٔ یک بیضی با کانونهای O_1 و O_2 است . با استفاده از این ملاحظات ، ثابت کنید که خطوط O_1P و O_2P با مماس بر بیضی در نقطهٔ P زوایای یکسان می‌سازند.

[راهنمایی : $\operatorname{grad}\,(|\mathbf{R}_1| + |\mathbf{R}_2|)$ بر بیضی عمود است.]

۳۰. زاویهٔ بین سطوح $z=x^2+y^2$ و $x^2 + y^2 + (z-3)^2 = 9$ را در نقطهٔ $(2, -1, 5)$ بیابید.

۳۱. فرض کنید $f(x,y,z) = 2x^2 + y$ و $\mathbf{R} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ مطلوب است:

(الف) ∇f ، (ب) $\nabla\cdot\mathbf{R}$ ، (ج) $\nabla^2 f$ ، (د) $\nabla\times(f\mathbf{R})$.

۳۲. اگر $\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ، هریک از (الف) $\nabla^2\mathbf{F}$ ، (ب) $\nabla\times\mathbf{F}$ ،(ج) $\nabla\cdot\mathbf{F}$ را در نقطهٔ $(-1,2,3)$ محاسبه کنید.

۳۳. فرض کنید $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. $\nabla^2[(\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k})\times\nabla(\mathbf{R}\cdot\mathbf{R})^2]$ را محاسبه کنید.

۳۴. $\nabla\ln(xyz-5)$ را در نقطهٔ $(1,2,3)$ محاسبه کنید.

۳۵. $\mathbf{A}$ یک میدان برداری ثابت است و $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. مطلوب است محاسبهٔ

$$\mathbf{A}\cdot\nabla\mathbf{R} + \nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}) + \mathbf{A}\cdot\nabla\times\mathbf{R}$$

۳۶. اگر $r^2 = x^2 + y^2 + z^2$ و $\mathbf{R} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ، و $\mathbf{A}$ یک میدان برداری ثابت باشد، مطلوب است:

(الف) $\nabla\cdot(r^2\mathbf{A})$	(د) $\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})^4$	(ز) $\nabla\cdot(\mathbf{A}\times\mathbf{R})$
(ب) $\nabla\times(r^2\mathbf{A})$	(هـ) $\nabla\cdot(r\mathbf{A})$	(ح) $\nabla\times(\mathbf{A}\times\mathbf{R})$
(ج) $\mathbf{R}\cdot\nabla(r^2\mathbf{A})$	(و) $\mathbf{R}\cdot\nabla(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R}\mathbf{A})$	(ط) $\nabla^2(\mathbf{R}\cdot\mathbf{R})$

۳۷. پتانسیل $\phi(x,y,z) = xyz$ را در نظر بگیرید.

(الف) برداری عمود بر سطح همپتانسیلی که از نقطهٔ (۳ , ۲ , ۱) میگذرد بیابید.

(ب) $d\phi/ds$ را در همان نقطه، وقتی که s در جهت بردار $\mathbf{6i} + \mathbf{3j} + \mathbf{2k}$ اندازه‌گیری شود، محاسبه کنید.

۳۸. $\phi(x,y,z)=z^2-x-y$ مفروض است. مطلوب است تعیین

(الف) معادلهٔ صفحه‌ای که در نقطهٔ (۲ , ۴ , ۲-) بر سطح $\phi=2$ مماس باشد؛

(ب) معادلات خط قائم بر سطح $\phi=2$ در نقطهٔ (۲ , ۴ , ۲-)؛

(ج) مشتق ϕ در (۲ , ۴ , ۲-) در جهت بردار $\mathbf{3i} - \mathbf{2j} + \mathbf{6k}$.

۳۹. بردار $\mathbf{3i} + \mathbf{4j} + \mathbf{5k}$ با سطح $xy - z^2 = 3$ در نقطهٔ (۳ , ۴ , ۳) چه زاویه‌ای می‌سازد؟

۴۰. اگر r فاصلهٔ مبدأ تا نقطهٔ (x,y,z) و $\mathbf{A}$ یک بردار ثابت باشد، مطلوب است محاسبهٔ

$$\nabla\left(\mathbf{A}\cdot\nabla \frac{1}{r} \right) + \nabla\times\left(\mathbf{A}\times\nabla \frac{1}{r} \right)$$

۴۱. تعیین کنید که به ازای چه مقداری از ثابت C میدان برداری

$$\mathbf{V}=(x+4y)\mathbf{i} + (y-3z)\mathbf{j} + Cz\mathbf{k}$$

تاو میدانی برداری چون $\mathbf{F}$ است؟

۴۲. اگر $\mathbf{R}=x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$، $r=|\mathbf{R}|$، و f یک تابع مشتق‌پذیر باشد، $\mathbf{Curl}[f(r)\mathbf{R}]$ را به طریق زیر بیابید:

(الف) محاسبهٔ مستقیم،

(ب) با استفاده از تعبیر هندسی.

۴۳. معادلات ماکسول در فضای آزاد به صورت

$$\nabla\cdot\mathbf{E}=0 \text{ ، } \nabla\cdot\mathbf{H}=0 \text{ ، } \nabla\times\mathbf{E}= -\frac{\partial\mathbf{H}}{\partial t} \text{ ، } \nabla\times\mathbf{H}=\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}$$

مفروضند. نشان دهید که هردوی $\mathbf{E}$ و $\mathbf{H}$ در معادلهٔ موج

$$\nabla^2\mathbf{u}=\frac{\partial^2\mathbf{u}}{\partial t^2}$$

صدق می‌کنند.

۴۴. $\phi=\tan^{-1}x+\tan^{-1}y$ و $\psi=\dfrac{x+y}{1-xy}$ مفروضند. نشان دهید که $\nabla\phi\times\nabla\psi=\mathbf{0}$.

۴۵. تمرین قبلی را بدون محاسبهٔ صریح $\nabla\phi$ یا $\nabla\psi$ انجام دهید.

۴۶. اگر در همهٔ فضا $\nabla\phi\times\nabla\psi=\mathbf{0}$، و $\nabla\phi$ و $\nabla\psi$ در هیچ نقطه صفر نشوند، دربارهٔ سطوح تک مقدار ψ و ϕ چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

۴۷. $w=uv$، که در آن u و v میدانهای اسکالرند، مفروض است. به طرق زیر، نشان دهید که

$$\nabla w\cdot\nabla u\times\nabla v=0$$

(الف) محاسبهٔ مستقیم،

(ب) بدون محاسبه.

۴۸. حکم تمرین قبلی را تعمیم دهید.

۴۹. اگر $\mathbf{F}$ و $\mathbf{G}$ میدانهای پایستار باشند، آیا $\mathbf{F}\times\mathbf{G}$ الزاماً پایستار است؟ اگر نیست، دربارهٔ $\mathbf{F}\times\mathbf{G}$ چه می‌توان گفت؟

۵۰. فرض کنید $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+(x+2)\mathbf{j}+(x^3\sin yz)\mathbf{k}$. انتگرال سطح $\iint\mathbf{F}\cdot d\mathbf{S}$ را بر سطح استوانهٔ $x^2+y^2=9$ که در ناحیهٔ یک هشتم اوّل به صفحات $z=0$ و $z=4$ محدود است بیابید. (با استفاده از قضیهٔ واگرایی، این مسأله به یک مسألهٔ ساده در حساب تبدیل می‌شود.)

۵۱. با یک بحث مبتنی بر وجود تقارن، یا به طریقی دیگر، نشان دهید که $\int(x^2-y^2)ds$، وقتی که این انتگرال خط حول دایرهٔ $x^2+y^2=a^2$ در صفحهٔ xy گرفته شود، برابر صفر است.

۵۲. $\iint_S(\nabla\times\mathbf{F})\cdot d\mathbf{S}$ را، که در آن $\mathbf{F}=y\mathbf{i}+(x-2x^3z)\mathbf{j}+xy^3\mathbf{k}$ و S سطح کرهٔ $x^2+y^2+z^2=a^2$ در بالای صفحهٔ xy است، محاسبه کنید.

۵۳. فرمول $A=\pi ab$ را برای مساحت یک بیضی از قضیهٔ گرین نتیجه بگیرید.

[راهنمایی: اگر $\mathbf{F}=\frac{1}{2}(-y\mathbf{i}+x\mathbf{j})$، آنگاه $\mathbf{curl\ F}=\mathbf{k}$.]

۵۴. انتگرال

$$\int_{(0,0)}^{(1,2)}(15x^4-3x^2y^2)dx-2x^3y\,dy$$

را در امتداد مسیر $۲x^۴ - ۶xy^۳ + ۲۳y = ۰$ محاسبه کنید.

۵۵.انتگرالهای سطح و حجم توابع برداری نظیر انتگرالهای سطح و حجم توابع با مقادیر عددی تعریف می‌شوند. به طریق دیگر، این انتگرالها را می‌توان با انتگرالگیری ساده و جداگانه از مؤلفه‌های x ، y ، و z (که توابعی با مقادیر عددی هستند) تعریف کرد. با اعمال قضیهٔ واگرایی در مورد $\mathbf{F}=\phi\mathbf{C}$، که در آن $\mathbf{C}$ یک میدان برداری ثابت است، به طور صوری نشان دهید که

$$\iiint_D \nabla\phi dV = \iint_s \phi\, \mathbf{n} dS$$

۵۶.به طریق مشابه، تساوی

$$\iiint_D \nabla\times\mathbf{A} dV = \iint_s \mathbf{n}\times\mathbf{A} dS$$

را که در آن $\mathbf{n}$ قائم برونسوی S، مرز D، است نتیجه بگیرید.

۵۷.یک تعبیر برداری برای هریک از موارد زیر عرضه کنید. نماد به کاررفته همان نماد بخش (۱۰.۴) است.

(الف) $\lim\limits_{V\to ۰} \dfrac{\iint_s \mathbf{n} f dS}{V}$ $\qquad \lim\limits_{V\to ۰} \dfrac{\iint_s \mathbf{n}\times\mathbf{F} dS}{V}$

۵۸.مختصات استوانه‌ای سهموی (u,v,z) به صورت

$$x=\frac{۱}{۲}(u^۲ - v^۲)\ ,\ y=uv\ ,\ z=z\ ;\ -\infty<u<\infty\ ,\ ۰\leq v\ ,\ -\infty<z<\infty$$

تعریف می‌شود. برای این‌که از فرمولهای بخش (۲.۵) استفاده کنیم، لازم است که عوامل مقیاس h_u، h_v، و h_z را بدانیم. این عوامل مقیاس را تعیین کنید.

۵۹.عنصر حجم در مختصات استوانه‌ای سهموی چیست؟

۶۰.(الف) $\mathrm{div}\mathbf{A}$ را در مختصات استوانه‌ای سهموی بنویسید.

(ب) معادلهٔ لاپلاس $\nabla^۲\phi=۰$ را در مختصات استوانه‌ای سهموی بنویسید.

پیوست د

معادلات برداری الکترومغناطیس

۱.د الکتروستاتیک

می‌دانیم که دو ذرهٔ باردار الکتریکی ساکن نیروهایی بر یکدیگر وارد می‌کنند. اثر این نیروها با مجذور فاصلهٔ بین آنها نسبت معکوس و با بار هر ذره نسبت مستقیم دارد. این نیروها اثر جاذبه یا دافعه دارند بر حسب این که دارای قطبیتی متفاوت یا یکسان باشند. مجموعهٔ این حقایق به «قانون‌کولن» مشهور است و می‌توان آن را به صورت برداری زیر فرمولبندی کرد.

فرض کنید q_1 و q_2 بار واقع بر هر ذره (با علامتی مطابق قطبیّت هر ذره)، و $\mathbf{r}_1$ و $\mathbf{r}_2$، به ترتیب، بردارهای موضع دو ذره باشند. در این صورت، نیرویی که ذرهٔ ۲ بر ذرهٔ ۱ وارد می‌کند برابر است با:

$$\mathbf{F}_1^{(2)} = \frac{kq_1q_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^2} \ \frac{(\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|} = kq_1q_2 \ \frac{\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

که در آن ثابت (مثبت) k به دستگاه واحدها بستگی دارد.

اگر N ذرهٔ ساکن با بار q_i موجود باشند، آنگاه نیروهایی که آنها بر یک «بار آزمون» q واقع در $\mathbf{r}$ وارد می‌کنند به صورت برداری با هم جمع می‌شوند:

$$\mathbf{F} = \sum_{i=1}^{N} kqq_i \ \frac{\mathbf{r} - \mathbf{r}_i}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_i|^3} \qquad (\text{د}-1)$$

از لحاظ تاریخی محقق گردیده که بهتر است معادلهٔ (د-۱) را به صورت زیر تعبیر کنیم :

$$\mathbf{F}=q\mathbf{E}(\mathbf{r}) \tag{د-۲}$$

که در آن *میدان الکتریکی* $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ نیرو به ازای یک واحد بار است که ذرّات باردار ۱ تا N بر ذرهٔ باردار واقع در $\mathbf{r}$ وارد می‌کنند.[1] از این رو ، $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ میدان برداری زیر است :

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})=k\sum_{i=1}^{N} q_i \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}_i}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} \tag{د-۳}$$

چنان‌که محاسبات زیر نشان می‌دهد ، این میدان الکتریکی به ازای $\mathbf{r}\neq\mathbf{r}_i$ بی‌گردش است :

$$\begin{aligned}\nabla\times\mathbf{E}&=\sum kq_i\,\nabla\times\frac{(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}\\&=\sum kq_i\left[\frac{\nabla\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}+\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3}\right)\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\right]\\&=\sum kq_i\left[\mathbf{0}-\frac{3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}|^5}\right]\\&=\mathbf{0}\end{aligned} \tag{د - ۴}$$

که در آن از اتحادهای (۲۱.۳) ، (۲۴.۳) ،و (۲۵.۳) استفاده شده است. در واقع ، $\mathbf{E}$ متقابل گرادیان *پتانسیل الکتروستاتیکی* $\mathcal{V}(\mathbf{r})$ است که از دستور

$$\mathcal{V}(\mathbf{r})=\sum kq_i\;/\;|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i| \tag{د - ۵}$$

---

۱ میدان الکتریکی ، نیرو به ازای یک واحد بار مثبت است . به عبارت دیگر ، میدان الکتریکی در هر نقطه از فضا نیرویی الکتریکی است که بر واحد بار مثبت (فرضی) در آن نقطه وارد می‌شود(م).

به دست می‌آید. معادلهٔ

$$\mathbf{E} = -\nabla \mathcal{V} \qquad (د - ۶)$$

از اتحاد (۲۵.۳) نتیجه می‌شود.

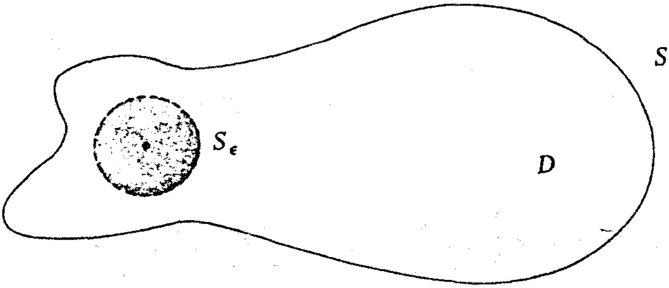
واگرایی میدان الکتریکی ، به ازای $\mathbf{r} \neq \mathbf{r}_i$ ، باستفاده از (۲۰.۳) ، (۲۳.۳) ، و (۲۵.۳) محاسبه می‌شود:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = k\sum q_i\left[\frac{3}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^3} - \frac{3(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}_i)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}_i|^5}\right] = 0$$

ولی ، اگر نوک $\mathbf{r}$ بر یکی از بارهای نقطه‌ای منطبق شود، $\nabla\cdot\mathbf{E}$ تعریف نمی‌شود (نامعین؟). برای بررسی کاملتر این وضعیت ، میدان الکتریکی مربوط به بار تک‌نقطه‌ای q_1 واقع در مبدأ $\mathbf{r}_1 = \mathbf{0}$ را در نظر می‌گیریم و شارگذران از یک سطح بستهٔ S را محاسبه می‌کنیم :

$$\text{شار} = \iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = kq_1\iint \frac{\mathbf{r}}{r^3}\cdot d\mathbf{S} \qquad (د - ۷)$$

(که در آن ، مطابق معمول ، $r = |\mathbf{r}|$.) اگر حوزهٔ محصور در S شامل مبدأ نباشد، آنگاه ، به استناد قضیهٔ واگرایی ، $\nabla\cdot\mathbf{E}$ در سرتاسر D صفر و شار خالص خروجی از سطح S صفر است. اگر مبدأ درون D واقع شود، کره‌ای چون S_ε پیرامون مبدأ با شعاع ε چنان کوچک در نظر می‌گیریم که نقاط درونی S_ε داخل D قرار گیرند. (شکل (د - ۱) را ببینید.) چون $\nabla\cdot\mathbf{E}$ درناحیهٔ میانی محدود به S و S_ε صفر است، شار خروجی از S برابر شار خروجی از S_ε است. (با تمرین (۱۵) بخش (۱۰.۴) مقایسه کنید.) اگر S_ε را با



(شکل د - ۱)

مختصات کروی θ و ϕ (و $r=\varepsilon$ که ثابت است) پارامتری کنیم، خواهیم داشت:

$$d\,\mathbf{S} = \left(\frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \phi} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial \theta}\right) d\phi \ d\theta$$

$$= r^{۲} \sin\phi \ d\phi \ d\theta \frac{\mathbf{r}}{r}$$

به این ترتیب، شار خروجی از S_ε، و از این‌رو از S، برابر می‌شود با

$$kq_{۱} \int_{o}^{۲\pi} \int_{o}^{\pi} \frac{\mathbf{r}}{r^{۳}} \cdot \frac{\mathbf{r}}{r} \, r^{۲} \sin\phi \ d\phi \ d\theta = ۴\pi kq_{۱}$$

با انتقال بار $q_{۱}$ به موضع $\mathbf{r}_{۱}$، نتیجه می‌گیریم که

$$\iint_{s} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \begin{cases} ۴\pi kq_{۱} & \text{اگر S در برگیرندهٔ } \mathbf{r}_{۱} \text{ باشد} \\ ۰ & \text{در غیر این‌صورت} \end{cases}$$

برای N بار، سهام شار حاصل از یکایک بارهای نقطه‌ای را با هم جمع و *قانون گاوس در الکتروستاتیک* را نتیجه می‌گیریم

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = ۴\pi k \sum (q_i \text{ یا } ۰) = ۴\pi k (\text{بار کل محصور در } S) \qquad (د - ۸)$$

[معادلهٔ (۳۹.۴) را به خاطر بیاورید.]. در این جا فرض کرده‌ایم که هیچ‌یک از بارهای q_i به طور واقعی بر سطح S قرار ندارند.

بارهای نقطه‌ای در طبیعت مانند الکترون ، پروتون ، و امثال آنها ظاهر می‌شوند؛ امّا در اغلب وضعیتهای فیزیکی میکروسکپی شامل ماده، ذرّات موجود به قدری زیادند که استفاده از یک تقریب پیوستاری ضرورت پیدا می‌کند، یعنی، به جای مجموع مربوط به بارهای نقطه‌ای باید انتگرال مربوط به چگالیهای بار را جانشین کنیم. به این ترتیب، *تابع چگالی بار* $\rho(\mathbf{r})$را با واحدهای بار در واحد حجم معرفی می‌کنیم، که در این صورت کل بار q در ناحیهٔ D از دستور

$$q = \iiint_D \rho(x,y,z)\,dx\,dy\,dz = \iiint \rho(\mathbf{r})\,dV \qquad (د - ۹)$$

به دست می‌آید. این نکته رهنمودی است که ما مشابه‌های معادلات (د - ۳) ، (د - ۵) ، (د - ۶) ، و (د - ۷) را برای حالت پیوسته در نظر بگیریم:

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = k \iiint \rho(\mathbf{r}') \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV' \qquad (د - ۱۰)$$

$$\mathcal{V}(\mathbf{r}) = k \iiint \frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV' \qquad (د - ۱۱)$$

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = -\nabla \mathcal{V}(\mathbf{r}) \qquad (د - ۱۲)$$

$$\iint_S \mathbf{E}\cdot d\mathbf{S} = ۴\pi k \iiint_{D\,(\text{محصور به } S)} \rho(\mathbf{r})\,dV \qquad (د - ۱۳)$$

معذالک ، اکنون با چند مشکل ریاضی مواجه می‌شویم. این مشکلات از وجود صفر در مخرج

کسرها ناشی می‌شوند. در حالتی که ذرات گسسته بودند، ما فقط نقاط $\mathbf{r} = \mathbf{r}_i$ را از بحث در معادلاتی چون (د - ۳) خارج می‌کردیم؛ مجموعهٔ این نقاط متناهی بود و ما بحث را به اطراف آنها هدایت می‌کردیم. ولی وقتی نقاط پیوسته باشند، بحث ما همهٔ ناحیه‌هایی از فضا را، که در آنها ρ ناصفر است، در برمی‌گیرد، و اگر بخواهیم $\mathbf{E}$ یا $\mathcal{V}$ را در این نواحی محاسبه کنیم، انتگرالده در انتگرالهای (د - ۱۰) و (د - ۱۱) واگرا خواهدشد. به این ترتیب، این سؤالات مطرح می‌شوند:

(۱) آیا انتگرالهای ناسرهٔ (د - ۱۰) و (د - ۱۱) در نقاطی که $\rho(\mathbf{r}) \neq 0$ خوش تعریفند؟

(۲) اگر چنین باشد، آیا (د - ۱۲) و (د - ۱۳) همچنان معتبرند؟

این سؤالات اساس *نظریهٔ پتانسیل* را تشکیل می‌دهند، موضوعی که در کتاب درسی جفریز و جفریز[1] مورد بحث قرار گرفته است. بدون پرداختن به جزئیات، با بررسی مثال زیر می‌توانیم بـه آگـاهی مختصری دست یابیم. فرض کنید $f(\mathbf{r})$ یک تابع پیوسته باشد و بخواهیم از $f(\mathbf{r}) / \mathbf{r}^p$ بر ناحیه‌ای شامل مبدأ، که در آن‌جا $\mathbf{r}=0$ ، انتگرال بگیریم.

با استفاده از مختصات کروی خواهیم داشت:

$$\iiint \frac{f(\mathbf{r})}{r^p}\, dV = \iiint \frac{f(r,\phi,\theta)}{r^p}\, r^2 \sin\phi \; dr d\phi d\theta$$

$$= \iiint [f(r,\phi,\theta) r^{2-p} \; dr] \; \sin\phi d\phi d\theta$$

چون انتگرال ناسرهٔ $\int_0^a r^q dr$ به ازای $q > -1$ واگراست، نتیجه می‌گیریم که انتگرال میانی بـه ازای $p < 3$ متناهی است. انتگرالهای دیگر هیچ مشکلی ایجاد نمی‌کنند، و بنابراین قاعدهٔ کلی زیر را برای محاسبهٔ انتگرالهای ناسره‌ای که در تقریب پیوستار ظاهر می‌شوند، پیشنهاد می‌کنیم. همهٔ اعمال و قضایای معمولی به صورت سر راست به کار برده می‌شوند مگر وقتی که *با انتگرالهایی* به صورت زیر

1. Jeffreys and Jeffreys

مواجه می‌شویم:

$$\iiint f(\mathbf{r}')\ |\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{-p}\ dV' \quad \text{با} \quad p\geq ۳$$

البته چنین گزارهٔ روانی از نقطهٔ نظر ریاضی فریبنده است ، ولی تقریباً خلاصه‌ای از احکام نـظریهٔ دقیق پتانسیل است.

از این‌رو، ملاحظه می‌کنیم که در همهٔ نقاطی چون $\mathbf{r}$ که در آنها چگالی بار $\rho(\mathbf{r})$ پیوسته باشد، پتانسیل $\mathcal{V}(\mathbf{r})$ در معادلهٔ (د - ۱۱) خوش تعریف است. (در واقع ، ناپیوستگی جهشی در ρ مجاز است.). میدان الکتریکی $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ نیز چنین است: به خاطر داشته باشید که در معادلهٔ (د - ۱۰) توان خاص $|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|$ در مخرج برابر ۲ است. بعلاوه ، چون (د - ۱۰) با مشتقگیری صوری از (د - ۱۱) به دست می‌آید و همهٔ انتگرالها همگرایند ، رابطهٔ

$$\mathbf{E}(\mathbf{r})= -\nabla\mathcal{V}(\mathbf{r}) \qquad (د - ۱۲)$$

درست است. به این ترتیب، $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ باز هم بی‌گردش و (د - ۴) برقرار است. بعلاوه ، هردو انتگرال قانون گاوس ، معادلهٔ (د - ۱۳) ، کاملاً منظمند و این قانون همچنان دارای اعتبار است.

اکنون واگرایی $\mathbf{E}$ را ، که به استناد معادلهٔ (د - ۱۲) برابر متقابل لاپلاسی $\mathcal{V}$ است ، محـاسبه می‌کنیم. نحوهٔ محاسبات قبلی ، ما را برمی‌انگیزاند که به طور صوری از (د - ۱۰) نتیجه بگیریم که

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = k\iiint \rho(\mathbf{r}')\ \nabla\cdot \frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\ dV'$$

$$= k\iiint \rho(\mathbf{r}')\ \left[\frac{۳}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} - \frac{۳(\mathbf{r}-\mathbf{r}')\cdot(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{۵}}\right] dV'$$

$$= ۰ \qquad (\text{غلط !})$$

امّا ، همانطور که علامت اخطار نشان می‌دهد ، این محاسبه به دلیل نمـای مـوجود در مـخرجـها مشکوک است ؛ قاعدهٔ کلی نقض شده است. حکم صحیح از اعمال قضیهٔ واگرایی در مورد طرف

چپ معادلهٔ (د - ۱۳) نتیجه می‌شود که خواهیم داشت:

$$\iiint_D \nabla\cdot\mathbf{E}\ dV = ۴\pi k \iiint \rho(\mathbf{r})dV$$

چون این معادله برای هر حوزهٔ D برقرار است ، در می‌یابیم که

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = ۴\pi \mathbf{k}\rho \qquad (د - ۱۴)$$

که «صورت دیفرانسیلی قانون گاوس» است. با بیان $\mathbf{E}$ بر حسب $\mathcal{V}$ ، *معادلهٔ پواسون در مورد پتانسیل الکتروستاتیکی* را به دست می‌آوریم

$$\nabla^۲\mathcal{V} = -۴\pi k\rho \qquad (د - ۱۵)$$

وضعیّت نوعی در الکتروستاتیک به صورت زیر است: (۱) توزیع بار ρ در حوزهٔ معینی چون D و (۲) مقادیر پتانسیل $\mathcal{V}(\mathbf{r})$ بر S ، سطح مرزی این حوزه، صریحاً داده شده است و مطلوب تعیین $\mathcal{V}(\mathbf{r})$ در تمام نقاط داخلی حوزه است. ملاحظه کنید که ما نمی‌توانیم صرفاً از (د - ۱۱) استفاده کنیم زیرا تابع چگالی بار، ρ، فقط در درون D معلوم است. آنچه دربارهٔ بارهای بیرون D می‌دانیم این است که اینها ، همراه با بارهای درون حوزه ، مقادیر معین $\mathcal{V}$ بر سطح را سبب می‌شوند. (به عنوان مثال ، در حالت الکتروستاتیکی ، بارهای داخل یک رسانای الکتریکی همیشه چنان در امتداد سطح رسانا توزیع می‌شوند که رسانا یک همپتانسیل باشد.) . به این ترتیب ، برای تعیین $\mathcal{V}(\mathbf{r})$، باید معادلهٔ پواسون را در D با شرایط مرزی معیّن حل کنیم. آنگاه میدان الکتریکی $\mathbf{E}(\mathbf{r})$ از گرادیان گیری جواب معادله به دست می‌آید.

د.۲ مغناطوستاتیک

درست همانگونه که بارهای ساکن یک میدان الکتریکی ایجاد می‌کنند که می‌تواند به صورت نیروی وارد بر یک بار آزمون آشکار گردد ، بارهای متحرک یا *جریانها میدانهای مغناطیسی* ایجاد می‌کنند که بر «*جریانهای آزمون*» نیرو وارد می‌کنند.ولی خواص هندسی این میدانها تا اندازه‌ای

پیچیده‌تر است.

بار نقطه‌ای q_1 واقع در $\mathbf{r}_1$، که با سرعت $\mathbf{v}_1$ حرکت می‌کند، یک *میدان القای مغناطیسی* $\mathbf{B}$ تولید می‌کند که اندازه و جهتش در نقطهٔ $\mathbf{r}$ (در مورد تندیهای غیر نسبیتی) از دستور

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \gamma \mathrm{q}_1 \frac{\mathbf{v}_1 \times (\mathbf{r} - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}_1|^3} \qquad (\text{د} - ۱۶)$$

به دست می‌آید که در آن γ یک ثابت مثبت است که به دستگاه واحدها بستگی دارد. بردار القای مغناطیسی نیرویی بر ذرهٔ با بار q و سرعت $\mathbf{v}$ وارد می‌کند که از دستور

$$\mathbf{F} = \eta \mathrm{q}\, \mathbf{v} \times \mathbf{B} \qquad (\text{د} - ۱۷)$$

به دست می‌آید. در این‌جا مجدداً η یک ثابت ابعادی است.

وابستگی به سرعت را در این معادلات در نظر داشته باشید؛ یک ذرهٔ ساکن نه میدان مغناطیسی ایجاد می‌کند و نه تحت تأثیر یک میدان مغناطیسی قرار می‌گیرد. یک ذرهٔ متحرک میدانی عمود بر سرعت خود تولید می‌کند و از جانب یک میدان خارجی نیرویی بر آن وارد می‌شود که بر سرعت و میدان عمود است.

بعلاوه، فعل و انفعالات متقابل بین دو ذرهٔ متحرک در قانون سوم نیوتن صدق نمی‌کند؛ نیرویی که از جانب ذرهٔ اوّل با مشخصات $(\mathrm{q}_1, \mathbf{r}_1, \mathbf{v}_1)$ بر ذرهٔ دوم با مشخصات $(\mathrm{q}_2, \mathbf{r}_2, \mathbf{v}_2)$ وارد می‌شود عبارت است از

$$\mathbf{F}_2^{(1)} = \eta \mathrm{q}_2 \mathbf{v}_2 \times \frac{\mathrm{q}_1 \mathbf{v}_1 \times (\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1)}{|\mathbf{r}_2 - \mathbf{r}_1|^3}$$

در حالی که

$$\mathbf{F}_1^{(2)} = \eta \mathrm{q}_1 \mathbf{v}_1 \times \frac{\mathrm{q}_2 \mathbf{v}_2 \times (\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2|^3}$$

و یک آزمایش مختصر نشان می‌دهد که نه $\mathbf{F}_1^{(2)}$ مساوی $\mathbf{F}_2^{(1)}$ است و نه این نیروها در راستای

$\mathbf{r}_1 - \mathbf{r}_2$ اند.

یک بار دیگر لازم است که از تقریب پیوستاری در حل اغلب مسائل فیزیکی استفاده کنیم. به این ترتیب ، پیوستاری از ذرّات متحرک با تابع چگالی بار $\rho_m(\mathbf{r})$ و میدان سرعت $\mathbf{v}(\mathbf{r})$ در نظر می‌گیریم. (در بسیاری از موارد ، بارهای متحرک از زمینه‌ای با بارهای ساکن عبور می‌کنند؛ مثلاً در یک رسانای حامل جریان ، الکترونهای هدایت شونده از کنار یونهای ساکن می‌گذرند. بنابراین ما برای تفکیک چگالی بارهای متحرک ، ρ_m، و چگالی بار کل ، ρ، از اندیس استفاده کرده‌ایم.).

این بارهای متحرک یک چگالی جریان $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ تولید می‌کنند:

$$\mathbf{j}(\mathbf{r}) = \rho_m(\mathbf{r})\mathbf{v}(\mathbf{r}) \tag{د - ۱۸}$$

به استناد بحث بخش (۳.۳) ، شار $\mathbf{j}$ گذران از سطح S برابر مقدار باری است که از این سطح در واحد زمان می‌گذرد ، یا ، به عبارت دیگر ، برابر است با جریان $\mathbf{I}$ گذران از سطح S

$$\mathbf{I} = \iint_s \mathbf{j} \cdot d\mathbf{S}$$

بعلاوه ، پایستاری بار را می‌توان ، مطابق بحث بخش (۳.۳) ، به صورت

$$\nabla \cdot \mathbf{j} = -\frac{\partial \rho_m}{\partial t} = -\frac{\partial \rho}{\partial t} \tag{د - ۱۹}$$

بیان کرد. (زیرا بارهای ساکن تغییر نمی‌کنند.) در مغناطوستاتیک ، $\partial\rho / \partial t = 0$ و بنابراین $\mathbf{j}$ سیملوله‌ای است.

کل سهم میدان القای مغناطیسی مربوط به یک جریان پایا (یعنی مستقل از زمان) به روش برهم‌نهی از دستور زیر به دست می‌آید

$$\begin{aligned} \mathbf{B}(\mathbf{r}) &= \gamma \iiint \rho_m(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \, dV' \\ &= \gamma \iiint \mathbf{j}(\mathbf{r}') \times \frac{(\mathbf{r} - \mathbf{r}')}{|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|^3} \, dV' \end{aligned} \tag{د - ۲۰}$$

در بعضی از آزمایشهای فیزیکی ، جریان موجد میدان $\mathbf{B}$ به وسیلهٔ یک رشته سیم حمل می‌شود. در این وضعیّت ، مناسب است که فرض کنیم سطح مقطع سیم به صفر و چگالی جریان به بی‌نهایت میل کند به صورتی که شار $\mathbf{j}$ گذران از سیم ، یعنی جریان $\mathbf{I}$ ، ثابت بماند. در چنین شرایطی ، سیم به یک منحنی فضایی $\mathbf{r}'=\mathbf{r}'(s)$ حامل جریان $\mathbf{I}$ تبدیل می‌شود. در این صورت ، انتگرال حجم (د - ۲۰) را می‌توان یک انتگرال مکرر به حساب آورد که در آن نخست بر سطح مقطع سیم انتگرال گرفته می‌شود و سپس در امتداد طول سیم. در این نحوهٔ عمل ، انتگرال اوّل به جریان $\mathbf{I}$ می‌انجامد ، و (د - ۲۰) به صورت

$$\mathbf{B}(\mathbf{r})=\gamma\mathbf{I}\int\frac{d\mathbf{r}'\times(\mathbf{r}-\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|^{3}}$$

$$\left(=\gamma\mathbf{I}\int\frac{d\mathbf{r}'(s)}{ds}\times\frac{\mathbf{r}-\mathbf{r}'(s)}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'(s)|^{3}}\,ds\right) \qquad \text{(د - ۲۱)}$$

درمی‌آید. البته ، در وضعیتهای مغناطوستاتیکی ، جریان در یک منحنی بسته حمل می‌شود؛ در غیر این صورت ، $\mathbf{j}$ سیملوله‌ای نتواند بود. به این ترتیب ، در (د - ۲۱) دقیقتر آن است که نماد انتگرال را به صورت $\oint$ بنویسیم .

محاسبهٔ کل نیرویی که یک حلقه جریان بر دیگری وارد می‌کند بسیار آموزنده است. اثر میدان $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ بر حلقهٔ $\mathbf{r}_1(s)$ حامل جریان $\mathbf{I}_1$ از دستور

$$\mathbf{F}_1=\eta\iiint\mathbf{j}\times\mathbf{B}\,dV$$

$$=\eta\mathbf{I}_1\oint d\mathbf{r}_1\times\mathbf{B}(\mathbf{r}_1)$$

به دست می‌آید. اگر $\mathbf{B}$ از حلقهٔ $\mathbf{r}_2(s)$ حامل جریان $\mathbf{I}_2$ تولید شده باشد، آنگاه نیروی فعل و انفعال عبارت است از:

$$\mathbf{F}_1^{(2)}=\eta\,\gamma\mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\oint_2\oint_1 d\mathbf{r}_1\times\frac{[d\mathbf{r}_2\times(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)]}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^{3}}$$

به موجب اتحادهای (۲۹.۱) و (۲۵.۳)

$$\mathbf{F}_1^{(2)}=\eta\gamma \mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\oint_2\oint_1\left\{\frac{d\mathbf{r}_1\cdot(\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2)}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}\, d\mathbf{r}_2 - d\mathbf{r}_1\cdot d\mathbf{r}_2\,\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}\right\}$$

$$=\eta\gamma \mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\oint_2 d\mathbf{r}_2\oint_1\nabla_1\left(\frac{-1}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|}\right)\cdot d\mathbf{r}_1 - \eta\gamma \mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\oint_2\oint_1\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}\, d\mathbf{r}_1\cdot d\mathbf{r}_2$$

به استناد قضیهٔ (۲.۴) ، جملهٔ اوّل به صفر میل می‌کند و در نتیجه خواهیم داشت

$$\mathbf{F}_1^{(2)}= -\eta\gamma \mathbf{I}_1\mathbf{I}_2\oint_2\oint_1\frac{\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2}{|\mathbf{r}_1-\mathbf{r}_2|^3}\, d\mathbf{r}_1\cdot d\mathbf{r}_2$$

که پاد متقارن است؛ یعنی ، پس از تغییر اندیسها در می‌یابیم که $\mathbf{F}_1^{(2)}=-\mathbf{F}_2^{(1)}$. بنابراین ، نیروی مغناطیسی کل بین دو حلقه جریان از صورتی از قانون سوم نیوتن تبعیّت می‌کند، در صورتی که نیروهای بین ذرات از این قانون تبعیّت نمی‌کنند.

می‌توان نشان داد که یک حلقه جریان هیچ نیروی خالصی بر خود وارد نمی‌کند ، ولی ، به طورکلی ، هر قسمت حلقه تحت تأثیر یک نیرو قرار دارد. ما از تحلیل این نکته صرف‌نظر می‌کنیم ، زیرا انتگرالهای ناسرهٔ مورد بخث بسیار پیچیده‌اند.

برمی‌گردیم به (د − ۲۰) و از (۲۵.۳) برای بازنویسی معادلهٔ القای مغناطیسی استفاده می‌کنیم:

$$\mathbf{B}(\mathbf{r}) = -\gamma\iiint \mathbf{j}(\mathbf{r}')\times\nabla\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)\, dV'$$

$$= \gamma\nabla\times\iiint\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\, dV' \qquad \text{(د − ۲۲)}$$

(زیرا ∇ فقط بر $\mathbf{r}$ عمل می‌کند.). فوراً نتیجه می‌شود که $\mathbf{B}$ سیملوله‌ای است :

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = 0 \qquad \text{(د − ۲۳)}$$

از این‌رو، $\mathbf{B}$ از یک پتانسیل برداری چون $\mathbf{A}$ نتیجه می‌شود:

$$\mathbf{B} = \nabla\times\mathbf{A}$$

و، در واقع ، از روی (د – ۲۲) می‌توان گفت که $\mathbf{A}$ چه باید باشد:

$$\mathbf{A}(\mathbf{r}) = \gamma\iiint\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' + \psi(\mathbf{r})$$

که در آن ψ یک تابع اسکالر دلخواه است. (این درجهٔ آزادی به درجهٔ *پایانی* مشهور است.).

برای تعیین تاو $\mathbf{B}$ ، اتحاد (۳۰.۳) را در مورد (د – ۲۲) به کار می‌بریم:

$$\nabla\times\mathbf{B} = \gamma\nabla\times\left(\nabla\times\iiint\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'\right)$$
$$= \gamma\nabla\left(\nabla\cdot\iiint\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' - \gamma\nabla^{2}\iiint\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'\right.$$

برای بررسی مجدد معادلات (د – ۱۱) و (د – ۱۵) ، می‌توانیم ملاحظه کنیم که مؤلفه‌های آخرین جمله همان مؤلفه‌های $4\pi\gamma\mathbf{j}(\mathbf{r})$ اند. در مورد جملهٔ «واگرایی» ، ∇ را به درون انتگرال می‌بریم و به

$$\nabla f(\mathbf{r}-\mathbf{r}') = -\nabla' f(\mathbf{r}-\mathbf{r}')$$

متوسل می‌شویم (در این جا ∇ بر $\mathbf{r}$ و ∇' بر $\mathbf{r}'$ عمل می‌کند) تا نتیجه بگیریم که:

$$\nabla\cdot\iiint\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' = -\iiint\mathbf{j}(\mathbf{r}')\cdot\nabla'\left(\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right)dV' =$$

$$-\iiint\nabla'\cdot\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' + \iiint\frac{1}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\nabla'\cdot\mathbf{j}(\mathbf{r}')dV' \qquad (\text{د} - ۲۴)$$

در مغناطوستاتیک ، $\nabla\cdot\mathbf{j}=0$ ، و قضیهٔ واگرایی ایجاب می‌کند که

$$\nabla\cdot\int\int\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV' = -\int\int_S\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\cdot d\mathbf{S}' \qquad \text{(د - ۲۵)}$$

چون بر ناحیه‌ای شامل همهٔ منابع جریان $\mathbf{j}(\mathbf{r})$ انتگرال می‌گیریم ، سطح این ناحیه هیچ جریانی ندارد؛ به این ترتیب ، $\mathbf{j}$ در سمت راست (د - ۲۵) صفر است و سرانجام *قانون آمپر* را خواهیم داشت:

$$\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r}) = 4\pi\gamma\mathbf{j}(\mathbf{r}) \qquad \text{(د - ۲۶)}$$

معادلات (د - ۲۳) و (د - ۲۶) قوانین اساسی مغناطوستاتیک هستند. گاهی مناسب است قضیهٔ استوکس را در مورد (د - ۲۶) اعمال کنیم تا به معادلهٔ

$$\oint_C\mathbf{B}\cdot d\mathbf{r} = 4\pi\gamma\int\int_S\mathbf{j}\cdot d\mathbf{S} = 4\pi\gamma\mathbf{I}$$

بیانجامد ، که در آن S محدود به منحنی C و $\mathbf{I}$ کل جریانی است که از S عبور می‌کند.

مسئلهٔ نوعی در مغناطوستاتیک شامل حل (د - ۲۳) و (د - ۲۶) تحت شرایط مرزی معینی بین دو محیط متفاوت است. ما این بحث را فعلاً به تعویق می‌اندازیم.

د . ۳ الکترودینامیک

در وضعیتهایی که نسبت به زمان تغییر می‌کنند (ناایستا) ، معادلات قبلی باید اصلاح شوند. قبل از هرچیز ، ملاحظه کنید که ، طبق معادلهٔ پیوستگی (د - ۱۹) ، جملهٔ $\nabla\cdot\mathbf{j}$ در معادلهٔ (د - ۲۴) نباید نادیده گرفته شود ، بلکه به طور کلی باید $-\partial\rho/\partial t$ جانشین آن شود. از این‌رو ، به جای (د - ۲۶) ، به استناد معادلات (د - ۱۱) و (د - ۱۲) در می‌یابیم که :

$$\nabla\times\mathbf{B}(\mathbf{r}) = \gamma\nabla\left(\nabla\cdot\int\int\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'\right) - \gamma\nabla^2\int\int\int\frac{\mathbf{j}(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\,dV'$$

$$= -\gamma\nabla\iiint\left(\frac{\partial\rho(\mathbf{r}')/\partial t}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|}\right) dV' + ۴\pi\gamma\mathbf{j}(\mathbf{r})$$

$$= -\gamma \frac{\partial}{\partial t}\nabla\iiint\frac{\rho(\mathbf{r}')}{|\mathbf{r}-\mathbf{r}'|} dV' + ۴\pi\gamma\mathbf{j}(\mathbf{r})$$

$$= \frac{\gamma}{k}\frac{\partial\mathbf{E}(\mathbf{r})}{\partial t} + ۴\pi\gamma\mathbf{j}(\mathbf{r})$$

به این ترتیب، برای وضعیتهای دینامیکی، می‌نویسیم:

$$\nabla\times\mathbf{B} = ۴\pi\gamma\mathbf{j} + \frac{\gamma}{k}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \qquad (\text{د} - ۲۷)$$

توجه کنید که معادلهٔ (د – ۲۷) نشان می‌دهد که میدانهای القای مغناطیسی نه تنها به وسیلهٔ جریانهای $\mathbf{j}$ بلکه در اثر تغییر میدانهای الکتریکی نیز تولید می‌شود. ماکسول، کاشف این اثر، $(۱/۴\pi k)(\partial\mathbf{E}/\partial t)$ را «جریان تغییرمکان» نامید.

اصلاح ضروری دیگری در معادلات در آزمایشات فاراده کشف شد. این مورد شامل شار مغناطیسی ϕ است که از یک سطح جهت‌دار می‌گذرد:

$$\phi=\iint_S \mathbf{B}\cdot d\mathbf{S}$$

فاراده مشاهده کرد که وقتی شارگذران از S تغییر کند، یک میدان الکتریکی حول منحنی C، که مرز S را تشکیل می‌دهد، مطابق

$$\frac{d\phi}{dt} = \iint_S \frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} = -\frac{۱}{\alpha}\oint_C \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}$$

تولید می‌شود که در آن α یک ثابت مثبت دیگر است.

با اعمال قضیهٔ استوکس ، در می‌یابیم که

$$\alpha\int\int_s \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} = -\int\int_s \nabla\times\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$$

و چون این معادله به ازای سطوح دلخواه S برقرار است ، نتیجه می‌گیریم که هر میدان القای مغناطیسی متغیر یک میدان الکتریکی ایجاد می‌کند. بنابراین ، معادلهٔ (د - ۴) در مورد وضعیتهای دینامیکی باید به صورت

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\alpha\,\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}$$

اصلاح شود.

در واقع قانون فاراده کلیتر از آن است که شرح داده شد. ما فرض کرده‌ایم که شار ϕ گذران از S تغییر می‌کند به این دلیل که خود میدان $\mathbf{B}$ تغییر می‌کند. در واقع ، اگر S حرکت کند یا بچرخد ، باز هم ϕ می‌تواند تغییر کند که در این حالت باید از معادلهٔ (۷۲.۴) برای محاسبهٔ $d\phi/dt$ استفاده شود. فاراده مشاهده کرد که بدون توجه به مکانیزمی که تغییر در ϕ را ایجاد می‌کند ، همان میدان الکتریکی القا می‌شود. این وضعیّت نسبیّتی است و ما از خواننده می‌خواهیم که برای کسب اطلاعات بیشتر به کتب مرجع مراجعه کند ، ولی می‌گوییم که یکی از نتایج بررسی این وضعیّت تساوی ثابتهای α و η است:

$$\alpha = \eta \qquad \text{(د - ۲۸)}$$

و ما از این واقعیّت در معادلات بعدی استفاده خواهیم کرد.

چهار معادلهٔ عمده‌ای که در بالا بررسی کردیم:

$$\nabla\cdot\mathbf{E} = ۴\pi k\rho \qquad (د - ۱۴)$$

$$\nabla\cdot\mathbf{B} = ۰ \qquad (د - ۲۳)$$

$$\nabla\times\mathbf{E} = -\eta\,\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t} \qquad (د - ۲۹)$$

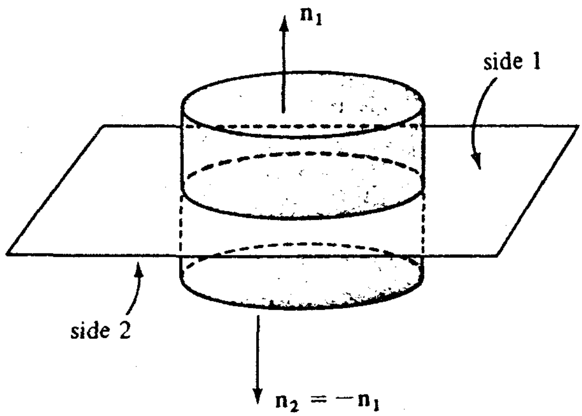
$$\nabla\times\mathbf{B} = ۴\pi\eta\mathbf{j} + \frac{\gamma}{k}\,\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t} \qquad (د - ۲۷)$$

معادلات ماکسول نامیده می‌شوند ، و وقتی که بارهای ρ و جریانهای $\mathbf{j}$ در همهٔ فضا معلوم باشند ، می‌توان از آنها برای تعیین $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ استفاده کرد . بارها ، به نوبهٔ خود ، تحت تأثیر *نیروی لورنتس* هستند که از جمع (د - ۲) و (د - ۱۷) به دست می‌آید:

$$\mathbf{F} = \iiint \rho(\mathbf{E} + \eta\mathbf{v}\times\mathbf{B})\ dV \qquad (د - ۳۰)$$

بنابراین ، به طور کلی ، دستگاه متشکل از معادلات ماکسول و معادلات لورنتس نشان می‌دهد که بارها چگونه میدانها را تولید می‌کنند و چگونه تحت تأثیر آنها قرار می‌گیرند.

اگر منابع بار فقط در ناحیه‌ای چون D معلوم باشند ، لازم است معادلات ماکسول با شرایط مرزی همراه باشند . این شرایط را می‌توان از خود معادلات به صورت زیر به دست آورد: فرض کنید ناحیهٔ D محدود به سطح هموار S باشد. یک «قوطی گاوسی» ، یعنی یک استوانهٔ مستدیر خیلی کوتاه با محوری عمود بر S که هر قاعده‌اش در یک طرف S باشد ، مطابق شکل (د - ۲) ، در نظر بگیرید.



شکل د – ۲

با توجه به این‌که ارتفاع بسیار کوچکتر از قطر دو قاعده است ، با اعمال قانون گاوس (د – ۸) درمی‌یابیم که

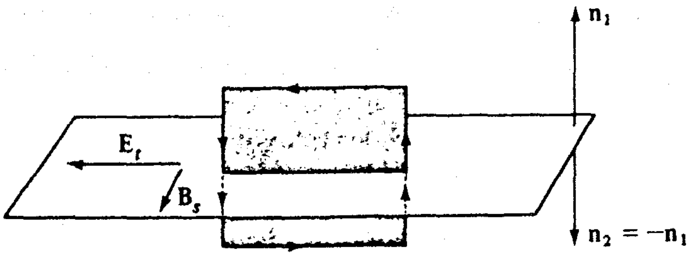
$$(\mathbf{E}_1\cdot\mathbf{n}_1 + \mathbf{E}_2\cdot\mathbf{n}_2)\ (\text{مساحت قاعده}) = 4\pi k\ (\text{بار محصور})$$

$$\mathbf{n}_1\cdot(\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 4\pi k\left(\frac{\text{بار}}{\text{مساحت}}\right) = 4\pi k\ (\text{چگالی بار سطحی})$$

به این ترتیب ، هنگام عبور از یک طرف سطح به طرف دیگر ، مؤلفهٔ قائم $\mathbf{E}$ به اندازهٔ $4\pi k$ برابر چگالی بار سطحی جهش می‌کند.

چون $\nabla\cdot\mathbf{B} = 0$ ، بحث مشابهی نشان می‌دهد که مؤلفهٔ قائم $\mathbf{B}$ هنگام گذر از سطح پیوسته است.

حال یک حلقهٔ بی‌نهایت کوچک در نظر می‌گیریم که مطابق شکل (د – ۳) از سطح بگذرد. انتگرال خط $\mathbf{E}$ را حول این گذر ، مجدداً با این فرض که ارتفاع ε در مقایسه با طول δ قابل اغماض است ، محاسبه می‌کنیم. اگر $\mathbf{E}_t$ معرف مؤلفهٔ برداری مربوط به $\mathbf{E}$ باشد ، داریم



شکل د - ۳

$$\oint \mathbf{E}\cdot d\mathbf{r}=(\mathbf{E}_{t_1}-\mathbf{E}_{t_2})\delta$$

با اعمال قضیهٔ استوکس و معادلهٔ (د - ۲۹) ، داریم :

$$(\mathbf{E}_{t_1}-\mathbf{E}_{t_2})\,\delta \;=\; -\eta\int\!\!\int \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t}\cdot d\mathbf{S} \;=\; -\frac{\partial \mathbf{B}_s}{\partial t}\,\delta\varepsilon$$

که در آن $\mathbf{B}_s$ مؤلفه‌ای از $\mathbf{B}$ است که در شکل نشان داده شده است . چون ε در مقایسه با δ قابل اغماض است [۱]، این معادله ایجاب می‌کند که $E_{t_1}=E_{t_2}$ ؛ یعنی ، مؤلفهٔ $\mathbf{E}$ در گذر از S پیوسته است.

اگر از $\mathbf{B}$ حول همان حلقه انتگرال بگیریم و از قضیهٔ استوکس و (د - ۲۷) استفاده کنیم ، خواهیم داشت :

$$(B_{t_1}-B_{t_2})\,\delta \;=\; 4\pi\gamma(j_s\,\varepsilon)\,\delta+\frac{\gamma}{k}\,\frac{\partial E_s}{\partial t}\,\delta\varepsilon$$

مجدداً از جملهٔ آخر صرف‌نظر می‌کنیم ، ولی اگر یک *چگالی جریان سطحی* موجود باشد ، $j_s\varepsilon$ احتمالاً

۱. ملاحظه کنید که اساساً $\partial B_s/\partial t$ کراندار است.(م)

محسوس و قابل توجه است. با بررسی جهتها ، نتیجه می‌گیریم که مؤلفهٔ مماسی **B** هنگام گذر از سطح S ، در جهت عمود بر چگالی جریان سطحی ، به اندازهٔ $۴\pi\gamma$ برابر این چگالی جهش می‌کند.

خلاصه ، δ را به عنوان چگالی بار سطحی و **K** را به عنوان چگالی جریان سطحی معرفی می‌کنیم و می‌گوییم که هرگاه از طرف ۲ به طرف ۱ برویم ، مؤلفه‌های قائم و مماس **E** و **B** به اندازهٔ

$$\Delta\mathbf{E}_{\text{قائم}} = ۴\pi k\delta$$

$$\Delta\mathbf{B}_{\text{قائم}} = ۰$$

$$\Delta\mathbf{E}_{\text{مماس}} = ۰$$

$$\Delta\mathbf{B}_{\text{مماس}} = ۴\pi\gamma\mathbf{K}\times\mathbf{n}$$

جهش می‌کنند.

وقتی که درون ناحیهٔ مورد نظر محیطهای مادی وجود دارد ، وضعیّت فیزیکی مناسبی پیش می‌آید که بین بارهای آزاد و مقید ، و جریانهای آزاد و مقید تمایز قائل شویم. این کار با تجزیهٔ **E** به یک بردار تغییر مکان الکتریکی **D** و یک بردار قطبیدگی الکتریکی **P** ، و تجزیهٔ **B** به یک بردار میدان مغناطیسی **H** و یک بردار مغناطیدگی **M** انجام می‌شود. جزئیات این تجزیه‌ها به خواص ماده بستگی دارد و بنابراین ما این موضوع را به کتب مرجع واگذار می‌کنیم.

ما می‌خواهیم دو حکم راکه شامل اثر متقابل حرکات مکانیکی و میدانها هستند ، نتیجه بگیریم. بار نقطه‌ای q به جرم m و سرعت **v** دارای انرژی جنبشی $\mathcal{K}=\frac{۱}{۲}\,m\,|\mathbf{v}|^{۲}$ است که در معادلهٔ

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt} = m\mathbf{v}\cdot\frac{d\mathbf{v}}{dt} = m\mathbf{a}\cdot\mathbf{v} = \mathbf{F}\cdot\mathbf{v}$$

صدق می‌کند. اثر نیروی **F** در این معادله این است که انرژی جنبشی را با آهنگ **F·v** تغییر می‌دهد .

اگر این معادله را برای همهٔ بارها بنویسیم و آنها را با هم جمع کنیم و انرژی جنبشی کل را $\mathcal{K}$ بنامیم ، و نیروی لورنتس را جانشین $\mathbf{F}$ کنیم ، نتیجه می‌گیریم که

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt} = \sum q(\mathbf{E}+\eta\mathbf{v}\times\mathbf{B})\cdot\mathbf{v} = \sum q\mathbf{E}\cdot\mathbf{v}$$

یا به صورت پیوستهٔ

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt} = \iiint \rho_m\ \mathbf{E}\cdot\mathbf{v}dV = \iiint \mathbf{E}\cdot\mathbf{j}dV$$

اگر از (د – ۲۷) برای حذف $\mathbf{j}$ استفاده و از (۲۸.۳) استمداد کنیم ، خواهیم داشت:

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt} = \iiint \mathbf{E}\cdot\left(\frac{۱}{۴\pi\gamma}\nabla\times\mathbf{B} - \frac{۱}{۴\pi k}\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\right) dV$$

$$= -\frac{۱}{۴\pi k}\iiint \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}dV + \frac{۱}{۴\pi\gamma}\iiint (\mathbf{B}\cdot\nabla\times\mathbf{E} + \nabla\cdot(\mathbf{B}\times\mathbf{E})dV$$

با اعمال (د – ۲۹) و قضیهٔ واگرایی

$$\frac{d\mathcal{K}}{dt} = -\frac{۱}{۴\pi k}\iiint \mathbf{E}\cdot\frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}dV - \frac{\eta}{۴\pi\gamma}\iiint \mathbf{B}\cdot\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}dV + \frac{۱}{۴\pi\gamma}\iint_s \mathbf{B}\times\mathbf{E}\cdot d\mathbf{S}$$

که در آن سطح انتگرالگیری S مرز ناحیهٔ مفروض است. در نتیجه

$$\frac{d}{dt}\left[\mathcal{K} + \iiint\left(\frac{|\mathbf{E}|^۲}{۸\pi k} + \frac{\eta|\mathbf{B}|^۲}{۸\pi\gamma}\right)dV\right] = -\iint_s \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{۴\pi\gamma}\cdot d\mathbf{S}$$

این معادله باعث می‌شود که بپذیریم که خود میدان الکترومغناطیسی دارای یک انرژی است که در سرتاسر فضا با چگالی

$$\frac{|\mathbf{E}|^۲}{۸\pi k} + \eta\frac{|\mathbf{B}|^۲}{۸\pi\gamma}$$

پخش می‌شود و این‌که انرژی دستگاه الکترومکانیکی به وسیلهٔ میدان با چگالی شار $\mathscr{P}$، موسوم به بردار پوینتینگ [1] ، منتقل می‌شود:

$$\mathscr{P} = \frac{\mathbf{E}\times\mathbf{B}}{۴\pi\gamma}$$

استنتاج مشابهی را می‌توان برای اندازهٔ حرکت انجام داد. اگر **P** معرف اندازهٔ حرکت مکانیکی کل باشد ، آنگاه به استناد معادلات ماکسول

$$\frac{d\mathbf{P}}{dt} = \Sigma\mathbf{F} = \iiint (\rho\mathbf{E} + \eta\mathbf{j}\times\mathbf{B})\,dV$$

$$= \frac{۱}{۴\pi k}\iiint (\nabla\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}\,dV + \frac{\eta}{۴\pi\gamma}\iiint (\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B}\,dV$$

$$- \frac{\eta}{۴\pi k}\iiint \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{B}\,dV \qquad (د - ۳۱)$$

با استفاده از اتحاد

$$\frac{\partial}{\partial t}(\mathbf{E}\times\mathbf{B}) = \frac{\partial\mathbf{E}}{\partial t}\times\mathbf{B} + \mathbf{E}\times\frac{\partial\mathbf{B}}{\partial t}$$

و معادلات (د - ۲۹) و (د - ۲۳) ، معادلهٔ (د - ۳۱) مجدداً به صورت

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} + \frac{\eta}{۴\pi k}\iiint \frac{\partial(\mathbf{E}\times\mathbf{B})}{\partial t}\,dV = \iiint \frac{۱}{۴\pi k}\Big[(\nabla\times\mathbf{E})\times\mathbf{E} + (\nabla\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}\Big]dV +$$

$$\iiint \frac{\eta}{۴\pi\gamma}\Big[(\nabla\times\mathbf{B})\times\mathbf{B} + (\nabla\cdot\mathbf{B})\mathbf{B}\Big]dV \qquad (د - ۳۲)$$

نوشته می‌شود. با توسل به نماد تانسور ، درمی‌یابیم که:

1-Poynting Vector

$$[(\nabla\times\mathbf{E})\times\mathbf{E} + (\nabla\cdot\mathbf{E})\mathbf{E}]_i = \varepsilon_{ijk}\,\varepsilon_{jlm}\,(\partial_l E_m)E_k + (\partial_l E_l)E_i$$

$$= \varepsilon_{kij}\,\varepsilon_{lmj}(\partial_l E_m)E_k + (\partial_l E_l)E_i$$

$$= (\delta_{kl}\,\delta_{im} - \delta_{km}\,\delta_{il})(\partial_l E_m)E_k + (\partial_l E_l)E_i$$

$$= (\partial_l E_i)E_l - (\partial_i E_m)E_m + (\partial_l E_l)E_i$$

$$= \partial_l(E_l E_i) - \partial_i\left(\frac{E_m^{۲}}{۲}\right)$$

$$= \partial_l\left(E_l E_i - \frac{\delta_{il}\,|\mathbf{E}|^{۲}}{۲}\right)$$

از این رو ، مؤلفه i ام (د - ۳۲) را می‌توان به صورت :

$$\frac{dp_i}{dt} + \frac{\eta}{۴\pi k}\iiint \frac{\partial(\mathbf{E}\times\mathbf{B})_i}{\partial t}\,dV = \iiint \partial_l T_{li}\,dV \qquad (د - ۳۳)$$

نوشت که درآن

$$T_{li} = \frac{E_l E_i}{۴\pi k} + \eta\frac{B_l B_i}{۴\pi\gamma} - \delta_{li}\left(\frac{|\mathbf{E}|^{۲}}{۸\pi k} + \frac{\eta|\mathbf{B}|^{۲}}{۸\pi\gamma}\right)$$

اگر i را مانند یک ثابت بدانیم ، طرف راست (د - ۳۳) مانند واگرایی است؛ بنابراین ، معادلهٔ اندازهٔ حرکت به صورت

$$\frac{dp_i}{dt} + \iiint \frac{\partial}{\partial t}\,\frac{\eta(\mathbf{E}\times\mathbf{B})_i}{۴\pi k}\,dV = \iint_S T_{li}\,n_l\,dS \qquad (د - ۳۴)$$

درمی‌آید که در آن n_l معرف مؤلّفه‌های قائم یکّهٔ برونسوی $\mathbf{n}$ است. تعبیر معادلهٔ (د - ۳۴) این‌است که $\eta(\mathbf{E}\times\mathbf{B})/۴\pi k$ را اندازهٔ حرکتی بدانیم که در میدان ذخیره می‌شود و T_{li} به عنوان «شار دودویی» یا «تانسورتنش» ، نمایش مؤلفه به مؤلفهٔ شارش اندازهٔ حرکت گذران از سطح S باشد. جزئیات

بیشتر *تانسورتنش ماکسول* را در کتب مرجع می‌توان یافت.

تمرینات

۱. نشان دهید که در فضای آزاد با $\rho=0$ و $\mathbf{j=0}$، هردوی $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ در *معادلهٔ موج*

$$\nabla^2\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{B}\end{pmatrix}=\frac{\eta\gamma}{k}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{B}\end{pmatrix}$$

صدق می‌کنند.

۲. در بسیاری از رساناهای الکتریکی، جریانها و میدانها از یک قانون تجربی به نام *قانون اُهم* $\mathbf{j}=\sigma\mathbf{E}$، تبعیت می‌کنند که در آن σ ثابتی است که به رسانا بستگی دارد و آن را رسانندگی می‌نامند. اگر قانون اُهم برقرار باشد و $\rho=0$، نشان دهید که هردوی $\mathbf{E}$ و $\mathbf{B}$ در *معادلهٔ تلگرافر*

$$\nabla^2\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{B}\end{pmatrix}=\frac{\eta\gamma}{k}\frac{\partial^2}{\partial t^2}\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{B}\end{pmatrix}+4\pi\eta\gamma\sigma\frac{\partial}{\partial t}\begin{pmatrix}\mathbf{E}\\\mathbf{B}\end{pmatrix}$$

صدق می‌کنند.

۳. اگر یک حلقهٔ سیمی در یک میدان القای مغناطیسی $\mathbf{B}(\mathbf{r})$ حرکت کند، الکترونهای رسانشی یک نیروی $\eta q\mathbf{v}\times\mathbf{B}$ را «احساس» می‌کنند که در آن $\mathbf{v}$ سرعت سیم است. ولی، ناظری که با سیم حرکت می‌کند از هرگونه سرعتی بی‌اطلاع است و می‌پندارد که منبع این نیرو یک میدان الکتریکی $\mathbf{E}$ است. از قضیهٔ ترابری شار [معادلهٔ (۷۲.۴)] برای تحلیل این وضعیّت استفاده کنید و رابطهٔ (د - ۲۸) را از قانون فاراده نتیجه بگیرید.

مراجع

1. JACKSON, J.D., *Classical Electrodynamics*, New York: John Wiley and Sons, Inc., 1962.
2. JEFFREYS, H., and JEFFREYS, B.S., *Mathematical Physics*, 3rd edition, New York: Cambridge University Press, 1956.
3. PANOFSKY, Wolfgang K.H., and PHILLIPS, M., *Classical Electricity and Magnetism*, 2nd edition, Reading, Mass.: Addison-Wesley, 1962.

پاسخ‌ها و نکته‌ها

مهم: همهٔ نکاتی که در این‌جا گفته می‌شود برای دانشجویان مبتدی قابل درک نیست. بعضی از این نکات برای دانشجویان ارشد یا اساتیدی که برای اوّلین بار آنالیز برداری تدریس می‌کنند نوشته شده است.

در این کتاب ، بردارها با حروف سیاهی چون **A** ، **B** ، **C** ،... نمایش داده شده‌اند. چون در نسخه‌های دستنوشته رعایت تمایز این حروف از بقیّه به این شکل دشوار است ، پیشنهاد می‌کنیم که از نمادهای $\underline{A}$ یا $\vec{A}$ برای نمایش یک بردار استفاده کنید.

حتماً متوجه تفاوت عدد ۰ و بردار **0** باشید.

بخش ۱.۱

نکته : اگر خواننده جبر جدید یا منطق مطالعه کرده باشد ، می‌داند که هر بردار یک دستهٔ هم‌ارز از قطعه خطهای جهت‌دار است. توجه کنید که در ازای بردارهای موازی یکسان است ، چه با فوت اندازه‌گیری شوند ، چه با متر ، و چه با سانتیمتر . یعنی ، تساوی برداری ، یک خاصیّت متری نیست ؛ این تساوی به انتخاب واحد اندازه‌گیری بستگی ندارد.

بخش ۲.۱

۱. پیکانی که از ابتدای مشترک دو بردار رسم می‌شود، مطابق شکل (۲.۱) ، قطر متوازی‌الاضلاعی را تشکیل می‌دهد که با آن دو بردار ساخته می‌شود.

۲. توجه کنید که $\mathbf{C}-\mathbf{A} = \mathbf{C}+(-\mathbf{A}) = (-\mathbf{A})+\mathbf{C}$

۳. بلی ،گزاره راست است (امکان دارد متوازی‌الاضلاع «تخت» باشد).

۴. اگر ملاحظه کنید که یک شش ضعلی منتظم از شش مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل شده است ، حل مسئله آسان می‌شود. (الف) $\mathbf{B}-\mathbf{A}$ ، $-\mathbf{A}$ ، $-\mathbf{B}$ ، $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ ، (ب) بردار صفر.

۵. در مسائلی از این نوع ، بردارها را تغییر مکان تصور کنید. در این صورت ، تغییر مکان **C** نخست از حرکت به عقب در امتداد **F**، سپس حرکت در امتداد **E**، و آن‌گاه حرکت به بالا در خلاف جهت **D** به دست می‌آید. از این‌رو ، $\mathbf{C} = -\mathbf{F} + \mathbf{E} - \mathbf{D}$ ، $\mathbf{D} - \mathbf{E} + \mathbf{F} = \mathbf{C}$.

۶. $\mathbf{G} = -\mathbf{K} + \mathbf{C} + \mathbf{D} - \mathbf{E}$

۷. $\mathbf{X} = \mathbf{F} - \mathbf{B} = \mathbf{A}$

۸. $\mathbf{X} = \mathbf{D} - \mathbf{E} - \mathbf{H} = \mathbf{G}$

نکته: در قرن گذشته ، این نوع جمع نخست به وسیلهٔ موبیوس و دیگران معرفی و جمع هندسی نامیده شد. ملاحظه کنید که درازای $\mathbf{A} + \mathbf{B}$ برابر حاصل جمع درازاهای **A** و **B** نیست. یک‌بار ، در یک شرط بندی ، محصلی نمونه‌ای نشان داد که در آن حاصل جمع ۳ واحد و ۴ واحد برابر ۵ واحد می‌شد و برنده شناخته شد. (تمرین (۴) بخش (۴.۱) را ببینید.)

بخش ۳.۱

۱. خیر ، درازا هرگز منفی نمی‌شود.

۲. $|۴\mathbf{A}| = ۱۲$ ، $|-۲\mathbf{A}| = ۶$ ، $|s\mathbf{A}| \le ۶$.

۳. $|s\mathbf{A}| = ۱$ ، $|-s\mathbf{A}| = ۱$.

نکته: اگر s یک عدد ناصفر و **A** یک بردار باشد ، گاهی بردار $s^{-1}\mathbf{A}$ را «خارج قسمت تقسیم **A** بر s» می‌نامند. به این ترتیب ، اگر یک بردار ناصفر را بر اندازه‌اش تقسیم کنیم ، برداری به اندازهٔ واحد به دست می‌آید. این نکتهٔ قسمت اوّل تمرین (۳) است.

۴. برابر اندازهٔ **A** است.

۵. خیر ، ممکن است **A** بردار صفر باشد.

۶. بلی.

۷. الزاماً درست نیست ، زیرا امکان دارد بردارها در یک جهت نباشند.

۸. دو. صفحهٔ مورد بحث را صفحهٔ میز خود تصور کنید. یکی از بردارها به بالا اشاره دارد و

دیگری به پایین. بسیاری از محصلین می‌گویند: «بی‌نهایت» . این گفته نادرست است ، زیرا هیچ تمایزی بین بردارهای متساوی قائل نمی‌شویم.

۹. بی‌نهایت. خط مورد بحث را عمود بر صفحهٔ xy تصور کنید. بردارهای یکّه ، زوایای مختلفی چون θ با محور x می‌سازند.

۱۰. دو ، در خلاف جهت یکدیگر.

۱۱. $\mathbf{C}=\frac{۱}{۲}(\mathbf{A}+\mathbf{B})$

۱۲. $|\mathbf{A}|=|\mathbf{A}-\mathbf{B}+\mathbf{B}|\le|\mathbf{A}-\mathbf{B}|+|\mathbf{B}|$

بنابراین ، $|\mathbf{A}|-|\mathbf{B}|\le|\mathbf{A}-\mathbf{B}|$. اگر شما راه حل ساده‌تری را ترجیح می‌دهید ، نموداری رسم و از قضیهٔ مشهوری در هندسه استفاده کنید.

۱۳. $a=۲$ ، $b=c=۱$ یک جواب قابل قبول است . جوابهای دیگری نیز موجودند.

بخش ۴.۱

نکته: به گمان من تنها دلیلی که بعضی از محصلین درحل بعضی از این مسائل به زحمت می‌افتند این‌است که تصور می‌کنند ما از آنها چیزی بیشتر از یک پاسخ ساده و صرف انتظار داریم. وقتی یکی از این مسائل را با رسم یک نمودار و بررسی آن حل می‌کنم ، گاهی محصلین می‌گویند: عجب! این است همهٔ آن چیزی که شما میخواهید؟ استفاده از معادله یا فرمول در پاسخگویی به یک تمرین بدیهی ضرورت ندارد.

۱. ۱

۲. ۰

۳. $\sqrt{۲}$

۴. ۵

۵. $-\mathbf{i}$ ، $-\mathbf{j}$ ، $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\mathbf{i}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\mathbf{j}$.

۶. $\mathbf{A}=\mathbf{i}-۳\mathbf{j}$

۷. $A_۱=|\mathbf{A}|\cos\theta, A_۲=|\mathbf{A}|\sin\theta$

۸. $A_۱=۳\sqrt{۳}\ ,\quad A_۲=۳$

۹. (الف) $\frac{۱}{۲}\mathbf{i}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}\mathbf{j}$

(ب) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}\mathbf{i}-\frac{۱}{۲}\mathbf{j}$

(ج) $\frac{۳}{۵}\mathbf{i}+\frac{۴}{۵}\mathbf{j}$

(د) $\frac{۱}{۲}\mathbf{i}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}\mathbf{j}$ ، $\frac{۱}{۲}\mathbf{i}-\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}\mathbf{j}$.

(هـ) $\pm(\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\mathbf{i}+\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\mathbf{j})$

۱۰. ۱۵ ، ۳ ، $\sqrt{۱+s^۲}$ ، ۱.

۱۱. $۲\mathbf{i}+۶\mathbf{j}$

بخش ۵.۱

۱. ۵،۳،۵

۲. $۵\mathbf{i}+۶\mathbf{j}-\mathbf{k}$ ، $۴\mathbf{j}+۴\mathbf{k}$.

۳. $۴\sqrt{۲}$

۴. $\pm\frac{۱}{۳}$

۵. $\frac{۳}{۵}\mathbf{i}+\frac{۴}{۵}\mathbf{j}$

۶. (الف) $۴\sqrt{۲}$ (ب) صفحهٔ yz

۷. $\cos\alpha=\frac{۳}{۵}$

۸. $\pm\mathbf{j}$

۹. $\sqrt{۳}$

۱۰. $\mathbf{i}-۵\mathbf{j}-\mathbf{k}$

۱۱. $x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k}$

۱۲. $s=۲$ ، $t=۳$ ، $r=-۱$.

۱۳. $\frac{۲}{۳}$ ، $-\frac{۲}{۳}$ ، $\frac{۱}{۳}$.

۱۴. از قضیهٔ فیثاغورس استفاده کنید.

۱۵. مخروطی به رأس O و محوری منطبق بر محور x مثبت.

۱۶. دو

۱۷. $-\cos\alpha$، $\cos\beta$ ، $\cos\gamma$.

۱۸. $\pm\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$

بخش ۶.۱

۱. $۲\mathbf{i}-۵\mathbf{j}-۸\mathbf{k}$

۲. $\mathbf{i}+۲\mathbf{j}+۹\mathbf{k}$

۳. $۳۲\mathbf{j}-۲۶\mathbf{k}$

۴. ۱۵ مایل

۵. ۷ پوند

بخش ۷.۱

۲. اگر $\mathbf{A}+\mathbf{B}+\mathbf{C}+\mathbf{D}=\mathbf{0}$ و $\mathbf{A}=-\mathbf{C}$ آن‌گاه $\mathbf{B}=-\mathbf{D}$.

۳. *راهنمایی:* فرض کنید $\mathbf{A}$ ، $\mathbf{B}$ ، و $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ اضلاع مثلث باشند. در این‌صورت ، قطعه خط جهت‌داری که وسط $\mathbf{B}$ را به وسط $\mathbf{A}-\mathbf{B}$ وصل می‌کند ، عبارت است از:

$$\frac{۱}{۲}(\mathbf{B}-\mathbf{A})+\mathbf{A}-\frac{۱}{۲}\mathbf{B}=\frac{۱}{۲}\mathbf{A}.$$

۴. از روشی که در مثال (۳.۱) تشریح شده است ، استفاده کنید.

۶. $\cos^{-۱}(-\frac{۲}{۱۵})$

۷. $\cos^{-۱}(\frac{۱}{۳}\sqrt{۳})$

۸. $\cos^{-۱}\frac{۱}{۴۱}\sqrt{۱۴۳۵}$ ، $\cos^{-۱}\frac{۱}{۴۱}\sqrt{۲۴۶}$

۹. $۹۰^\circ-\cos^{-۱}\frac{۱}{۳}$

۱۰. $(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}).(x\mathbf{i}+y\mathbf{j}+z\mathbf{k})=۰$ اگر و فقط اگر $x+y+z=۰$. از این‌رو ، $\theta=۹۰^\circ$ اگر و فقط اگر $x+y+z=۰$.

۱۱. راست

۱۲. راست

۱۳. راست

۱۴. دروغ (شعاع برابر ۳ است.)

۱۵. $(x-۲)^۲+(y-۳)^۲+(z-۴)^۲=۹$

۱۶. $x^۲+y^۲=۴$

۱۷. خط

۱۸. محور y

۱۹. تک نقطهٔ $(۲,-۳,۴)$

۲۰. سه صفحهٔ مختصات

۲۱. ۵

۲۲. ۸

۲۳. ۱

۲۴. مخروطی دوطرفه به مرکز O و محور z

۲۵. بیضیگون

بخش ۸.۱

۱. $x=۳t\ ,\ y=-۲t\ ,z=۷t$

۲. $x=۱\ ,\ y=۲$

بخش ۸.۱

۱. $x=۳t\ ,\ y=-۲t\ ,z=۷t$

۲. $x=۱\ ,\ y=۲$

۳. $y=۲\ ,\ z=۳$

۴. $\pm(\frac{۳}{۵}\mathbf{i}+\frac{۴}{۵}\mathbf{j})$

۵. $\pm(\frac{۶}{۷}\mathbf{i}+\frac{۳}{۷}\mathbf{j}+\frac{۲}{۷}\mathbf{k})$

۶. $\pm(\frac{۳}{۱۹}\sqrt{۱۹}\mathbf{i}-\frac{۳}{۱۹}\sqrt{۱۹}\mathbf{j}+\frac{۱}{۱۹}\sqrt{۱۹}\mathbf{k})$

۷. $x=\frac{۱}{۴}\ y=-z$

۸. $x=۳\ ,\ y=۴$

۹. $x-۱=-\frac{۱}{۲}(y-۴)=\frac{۱}{۸}(z+۱)$. این معادله را به صورتهای دیگر نیز می‌توان نوشت.

۱۰. $\frac{۱}{۷}\sqrt{۴۲}$

۱۱. $\cos^{-۱}\frac{۳}{۷۰}\sqrt{۴۲}$، تقریباً ۷۴°

۱۴. (الف) $۰<\lambda<\infty$ ؛ $-۱<\lambda<۰$ ؛ $-\infty<\lambda<-۱$

۱۵. (الف) (۲،۲،۳)

(ب) خطوط بر هم منطبقند.

(ج) فاقد نقطهٔ تقاطع (متوازی)

(د) فاقد نقطهٔ تقاطع

بخش ۹.۱

۱. ۱۹

۲. $۸+۲۷-۱۲=۲۳$

۳. ۲۰

۴. $\cos^{-۱}\frac{۲}{۱۵}$

۵. $\cos^{-۱}\frac{۳}{۵}$

۶. -۲

۷. $\frac{۱۰}{۳}$

۸. $\sqrt{۲}$

۹. $\frac{۱۵}{۱۳}\sqrt{۲۶}$

۱۰. $\sqrt{۵}\,\mathbf{i}+\sqrt{۵}\,\mathbf{j}$

۱۱. هیچ .امّا $\mathbf{A}=\mathbf{0}$. ٠

۱۳. (الف) دایره‌ای به قطر $|\mathbf{A}|$

(ب) کره‌ای به قطر $|\mathbf{A}|$

۱۴. $|\sin\frac{۱}{۲}\theta|$

۱۷. $(\mathbf{A}+\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}+\mathbf{B})+(\mathbf{A}-\mathbf{B})\cdot(\mathbf{A}-\mathbf{B})$

را بسط دهید.

۱۹. (الف) $-(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})+(۷\mathbf{i}-۲\mathbf{j}-۵\mathbf{k})$

(ب) $۳(۲\mathbf{i}-\mathbf{j}-۲\mathbf{k})+\mathbf{0}$

(ج) $\mathbf{0}+(۶\mathbf{i}-۳\mathbf{j}-۶\mathbf{k})$

۲۰. $-\frac{۲۱۴}{۴۹}\mathbf{i}+\frac{۳۷}{۴۹}\mathbf{j}-\frac{۳۳۰}{۴۹}\mathbf{k}$

بخش ۱۰.۱

نکته: غالباً از معادلهٔ یک صفحه به عنوان تنها معادلهٔ صفحه صحبت می‌کنند در صورتی که این معادله منحصر به فرد نیست ، زیرا امکان دارد معادلات متمایزی نمایشگر یک صفحه باشند. مثلاً معادلات $x+y+۲z=۳$ و $۲x+۲y+۴z=۶$ یک صفحه را نشان می‌دهند.

۱. (الف) $\pm(\frac{۲}{۳}\mathbf{i}+\frac{۱}{۳}\mathbf{j}+\frac{۲}{۳}\mathbf{k})$

(ب) $\pm(\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\mathbf{i}-\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\mathbf{k})$

(ج) $\pm(-\frac{۱}{۳۷}\sqrt{۳۷}\mathbf{j}+\frac{۶}{۳۷}\sqrt{۳۷}\mathbf{k})$

(د) $\pm\mathbf{i}$

(هـ) $\pm(\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\mathbf{j}-\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\mathbf{k})$

(و) $\pm(\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\mathbf{i}-\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}\mathbf{j})$

۲. $x-۴y+z=۰$

۳. $۲x-۲y+z+۳=۰$

۴. $۳x+y-z=۳$

۵. خیر

۶. $\frac{۱۶}{۳}$

۷. (الف) $\sqrt{۱۴}$ (ب) $۳\sqrt{۲}$ (ج) ۲

۸. $\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}$

۹. $(\mathbf{i}+\mathbf{j}+۳\mathbf{k})\cdot(۲\mathbf{i}-۸\mathbf{j}+۲\mathbf{k})=۰$

۱۰. $\sin^{-1}\frac{۵}{۹}\sqrt{۳}$، تقریباً ۷۴°.

۱۱. $۹۰^\circ-\cos^{-1}\frac{۵}{۹}\sqrt{۳}$

۱۲. $۳x-y=c\ ,\ z=۰$

۱۳. $\frac{۵}{۲}\sqrt{۲}$

۱۴. $۳x+۲y=۱۱\ ,\ z=۰$

۱۵. $۲x+۲y+z=۴$

۱۶. $\pm\frac{۱}{۳}$

۱۷. (الف) نقطهٔ $(-۲,۱,۵)$

(ب) فاقد مقطع

(ج) خط $x=y+۳=-\frac{۱}{۲}z$

(د) فاقد مقطع

بخش ۱۱.۱

نکته‌ای برای مدرس : یک فضای برداری k بعدی (یا یک زیرفضای k بعدی) با انتخاب یک مجموعهٔ مرتب متشکل از k بردار مستقل خطی جهت‌دار می‌شود. جهت هر مجموعهٔ مرتب دیگری از این نوع «مثبت» نامیده می‌شود در صورتی که این مجموعه با ترتیب ناشی از یک تبدیل خطی با دترمینان مثبت از مجموعهٔ اوّلیه به دست آید. اگر یک فضای n بعدی جهت‌دار شده باشد ، و اگر یک زیرفضای ۱-n بعدی از آن با مجموعهٔ مرتب

$$\mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , \ldots , \mathbf{A}_{n-1}$$

جهت‌دار شده باشد ، آن‌گاه همین جهت را می‌توان با انتخاب برداری چون $\mathbf{C}$ ، که در زیر فضای مذکور نباشد ، با این قرارداد که جهت مجموعهٔ

$$\mathbf{A}_1 , \mathbf{A}_2 , \ldots , \mathbf{A}_{n-1} , \mathbf{C}$$

یک جهت مثبت در نظر گرفته شود ، حفظ کرد.

۱. از لحاظ عددی ، این مؤلفه‌ها برابر مساحات تصاویر سطح مفروض بر صفحات مختصات هستند.

بخش ۱۲.۱

۱. (الف) $۲\mathbf{i} + ۱۴\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}$

(ب) $- ۸\mathbf{i} + ۲۳\mathbf{j} - \mathbf{k}$

(ج) $- ۱۱\mathbf{i} - ۶\mathbf{j} + \mathbf{k}$

(د) $\mathbf{k}$

(هـ) $\mathbf{j} - \mathbf{i}$

۲. $\sqrt{۲۶}$

۳. $\frac{۱}{۲}\sqrt{۶۱}$

۴. $\mathbf{0}$. $\mathbf{A}$ و $\mathbf{B}$ موازیند.

۵. $\pm\left(\frac{۱}{۱۱}\sqrt{۱۱}\,\mathbf{i}-\frac{۳}{۱۱}\sqrt{۱۱}\,\mathbf{j}+\frac{۱}{۱۱}\sqrt{۱۱}\,\mathbf{k}\right)$

۶. $\frac{۱}{۸}(x-۲)=-\frac{۱}{۱۳}(y-۳)=-\frac{۱}{۳}(z-۷)$

۷. $x=-\frac{۱}{۴}y=\frac{۱}{۳}z$

۸. $-۶۴\mathbf{j}+۱۶\mathbf{K}$، $-۱۶\mathbf{i}-۱۶\mathbf{j}+۱۶\mathbf{k}$، خیر.

۹. $۱۷x-y+۹z=۴۳$

۱۰. $\pm\frac{۱}{۲۵}\sqrt{۵}(۵\mathbf{i}+۶\mathbf{j}-۸\mathbf{k})$

۱۱. $\sin(\psi-\theta)=\sin\psi\cos\theta-\cos\psi\sin\theta$

۱۳. $\sqrt{۶۵}/\sqrt{۲۶}$

۱۴. $r=۳$، $s=-\frac{۲۷}{۲}$.

۱۵. یکی از آنها صفر است.

۱۶. $\pm۸\mathbf{i}$

۱۷. (الف) خیر.
(ب) $\frac{۱}{۲}x-\frac{۵۲}{۷}=-\frac{۱}{۴}y+\frac{۵۲}{۲۱}=z-\frac{۲۰۸}{۲۱}$ (این جواب را به صورتهای دیگری نیز می‌توان نوشت، بنابراین اگر جواب شما ظاهراً با این جواب متفاوت باشد، دلسرد نشوید.)
(ج) $۴/\sqrt{۲۱}$

۱۸. $x^۲+y^۲+z^۲-xy-yz-zx=۲$؛ استوانه‌ای به شعاع $\frac{۲}{۳}\sqrt{۳}$ فوت

بخش ۱۳.۱

۱. (الف) ۳۰ (ب) ۱۳- (ج) ۵ (د) ۱

۲. ۵

۳. ۰

۴. $\frac{۲}{۳}$

۵. ۱

۶. $۳x-۱۷y-۴z=۰$

۷. $۳x-۷y+z=-۲۰$

۸. (الف) حاصلضرب اسکالر سه‌گانهٔ آنها صفر است. به طریق دیگر، هر سه بردار بر $\mathbf{i+j+k}$ عمودند.
(ب) $x+y+z=۰$

۹. (الف) $C_۳=۲$ (ج) نموداری رسم کنید.

۱۰. $\frac{۲}{۱۹}\sqrt{۳۸}$

۱۱. بلی.

۱۲. آنها در یک صفحه واقعند.

۱۳. (الف) $\mathbf{A\cdot i}$ و $\mathbf{A\cdot u}$ را مقایسه کنید.
(ب) $\mathbf{A}$

۱۵. فقط (الف)، (ب)، (ج)، (ز)، و (ح) دارای معنی هستند.

بخش ۱۴.۱

۵. $(\omega\cdot\mathbf{R})\omega-(\omega\cdot\omega)\mathbf{R}$ ۶. خیر ۷. ۰

بخش ۱۵.۱

این تمرینات قبلاً در بخش (۱۴.۱) ظاهر شده‌اند .

بخش ۱.۲

نکته : چون از قواعد متفاوتی برای تعریف یک تابع می‌توان استفاده کرد ، در حال حاضر تعریف برداری مفروض در متن ، به صورتی که بیان شده است ، قدیمی محسوب می‌شود . روش جدید تعریف یک تابع این است که آن را مجموعه‌ای از ازواج مرتب تعریف کنیم که بر اساس قاعدهٔ معینی تعیین می‌شوند . اغلب ریاضیدانان تعریف قدیمی تابع راکاملاً مناسب می‌دانند .

۱. (الف) $\cos t\,\mathbf{i} - \sin t\,\mathbf{j}$

(ب) ملاحظه می‌کنیم که $\mathbf{K}\cdot\mathbf{F}'(t)=0$.

(ج) $t=n\pi\ ,\ (n=0,\pm1,\pm2,\ \ldots)$

(د) بلی ، $\sqrt{2}$.

(هـ) بلی ، ۱ .

(ز) $-\sin t\,\mathbf{i} - \cos t\,\mathbf{j}$

۲. (الف) $3\mathbf{i} + 3t^2\mathbf{j}$

(ب) $\cos t\,\mathbf{i} - e^{-t}\mathbf{j}$

(ج) $-2t\mathbf{i} + (e^t+5t^4)\mathbf{j} + (e^t-3t^2)\mathbf{k}$

(د) $(\cos t + 3t^2)(\mathbf{i} + \mathbf{j} + 2\mathbf{k})$

(هـ) $\mathbf{0}$

۳. (الف) $6t - 10t\sin t - 5t^2\cos t$

(ب) $8t\sqrt{8t^2+1}\,/\,(8t^2+1)$

(ج) $1 - 12t^3$.

۴. از قضیهٔ ۴.۲ استفاده و توجه کنید که در این حالت یک جمله صفر می‌شود.

۵. (الف) ۷

(ب) ۳۳

(ج) $8\mathbf{i} + 5\mathbf{j} - 6\mathbf{k}$

(د) ۰

(هـ) -2

(ز) $\frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{2}{5}\mathbf{j} + \frac{6}{5}\mathbf{k}$

(ح) $-42\mathbf{i} + 66\mathbf{j} - \mathbf{k}$

ط) $\mathbf{B}$.

ی) $\mathbf{B}\times\mathbf{C}$.

بخش ۲.۲

۱. خیر ، امکان دارد مماس موازی محور y باشد .

۲. کمان $t^{۲}\mathbf{i} + t^{۳}\mathbf{j}$ در $t=۰$ دارای یک نوک است . به لحاظ فیزیکی ، متحرکی که بر یک منحنی نوک دار حرکت می‌کند ، برای عبور از نوک مجبور است سرعت خود راکاهش دهد تا در نوک به صفر برسد ، سپس با سرعتی در یک جهت متفاوت ، حرکتی از نو آغاز کند .

۳. $x^{۲} - y^{۲}=۱$، $z=۰$.

۴. در $(۰ , ۰ , ۰)$ ، متناظر با $t=۰$.

۵. $(\mathbf{i} + ۲\pi\mathbf{j})/\sqrt{۱ + ۴\pi^{۲}}$

۶. در امتداد یک خط مستقیم ، T ثابت است .

۷. (الف) $\int_{۰}^{۱}\sqrt{۱۴}dt=\sqrt{۱۴}$ (ب) فاصلهٔ بین نقاط برابر $\sqrt{۱۴}$ و مسیر مستقیم است

۸. (الف) $\sqrt{۲}(e-۱)$

(ب)
$$x= \frac{s+\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} \cos\log \frac{s+\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}}$$

$$y= \frac{s+\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} \sin\log \frac{s+\sqrt{۲}}{\sqrt{۲}} \quad , \ z=۰$$

۹. (الف) $۲\sqrt{۵}\pi^{۲}$

(ب) $\frac{۱}{۵}\sqrt{۵}(\sin t\mathbf{i} + \cos t\mathbf{j} + ۲\mathbf{k})$

(ج) $\frac{۱}{۵}\sqrt{۵}(-\mathbf{j} + ۲\mathbf{k})$

۱۰. $\mathbf{i}$

بخش ۳.۲

۱. (الف) $\sqrt{۲}e^t$

(ب) $a_t=\sqrt{۲}e^t\ ,\ a_n=\sqrt{۲}e^t$

(ج) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}[(\cos t - \sin t)\mathbf{i}+(\sin t + \cos t)\mathbf{j}]$

(د) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}e^{-t}$

۲. (الف) $\sqrt{۹t^۲ + ۲۵}$

(ب) $۹t/\sqrt{۹t^۲+۲۵}\ ,\ [۹(t^۲ + ۴) - ۸۱t^۲/(۹t^۲ + ۲۵)]^{\frac{۱}{۲}}$

(ج) $\dfrac{۳(\cos t - t\sin t)\mathbf{i} + ۳(\sin t + t\cos t)\mathbf{j} + ۴\mathbf{k}}{\sqrt{۹t^۲+۲۵}}$

(د) $۳(۹t^۴ + ۵۲t^۲ + ۱۰۰)^{\frac{۱}{۲}}\Big/(۹t^۲ + ۲۵)^{\frac{۳}{۲}}$

۳. (الف) $\sqrt{۳}e^t$

(ب) $a_t=\sqrt{۳}e^t\ ,\ a_n=\sqrt{۲}e^t$

(ج) $\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}[(\cos t - \sin t)\ \mathbf{i} + (\sin t + \cos t)\mathbf{j} + \mathbf{k}]$

(د) $\frac{۱}{۳}\sqrt{۲}e^{-t}$

۴. (الف) $۱۰\sqrt{۵}$

(ب) $a_t = ۰\ ,\ a_n=۸۰$

(ج) $\frac{۱}{۵}\sqrt{۵}(۲\cos ۴t\mathbf{i} - ۲\sin ۴t\mathbf{j} + \mathbf{k})$

(د) $\frac{۴}{۲۵}$

۵. (الف) $v=\frac{۳}{۲}$

(ب) $\mathbf{a}= -\cos t(\mathbf{i} - \mathbf{j}) - \sin t(\mathbf{i} + \mathbf{j})$

(ج) $-\frac{۲}{۳}\sin t\ (\mathbf{i} - \mathbf{j}) + \frac{۲}{۳}\cos t\ (\mathbf{i} + \mathbf{j}) + \frac{۱}{۳}$

(د) $k=۴\sqrt{۲}/۹$

۶. $$\frac{۲(۳t^۴+۲t^۳-۳t^۲-۲t+۲)^{\frac{۱}{۲}}}{۳(۲t^۴-۴t^۳+۱۰t^۲+۱)^{\frac{۳}{۲}}}$$

۷. $\frac{۱}{۲}$ ؛ $-\frac{۱}{۲}$.

۸. ۶ ، $\frac{۱}{۲}$ ، ۰ ، دایره‌ای به شعاع ۲ در صفحهٔ x=y.

۹. $$\mathbf{F}\times\frac{d\mathbf{F}}{dt}\cdot\frac{d^۳\mathbf{F}}{dt^۳}$$

۱۰. (الف) ۱ (و) τ

(ب) ۰ (ز) ۱

(ج) $a_t=d^۲s/dt^۲$ (ح) k

(د) ۰ (ط) $-\tau\mathbf{N}$

(هـ) ds/dt

۱۳. (الف) دروغ (ب) دروغ (ج) راست

بخش ۴.۲

۱. $$\left[\frac{d^۳r}{dt^۳}-۳\frac{dr}{dt}\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^۲-۳r\frac{d\theta}{dt}\frac{d^۲\theta}{dt^۲}\right]\mathbf{u}_r+\left[۳\frac{d^۲r}{d^۲t}\frac{d\theta}{dt}+۳\frac{dr}{dt}\frac{d^۲\theta}{dt^۲}+r\frac{d^۳\theta}{dt^۳}-r\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^۳\right]\mathbf{u}_\theta$$

۳. $$\mathbf{v}=۴b[(\sin\theta)\mathbf{u}_r+(۱-\cos\theta)\mathbf{u}_\theta]$$

$$\mathbf{a}=۱۶b[(۲\cos\theta-۱)\mathbf{u}_r+(۲\sin\theta)\mathbf{u}_\theta]$$

۴. $$\mathbf{v}=b[(\cos t)\mathbf{u}_r-e^{-t}(۱+\sin t)\mathbf{u}_\theta]$$

$$\mathbf{a}=b\Big([-\sin t-e^{-۲t}(۱+\sin t)]\mathbf{u}_r+e^{-t}(۱+\sin t-۲\cos t)\mathbf{u}_\theta\Big)$$

۵. اگر ذره موازی میدان حرکت کند ، هیچ نیرویی اعمال نخواهد شد . (در کتب مقدماتی این نکته راگاهی به این صورت بیان می‌کنند که نیروی وارد بر ذره متناسب با نرخی است که در

آن ذرهٔ متحرکت خطوط شارش را قطع می‌کند.)

۶. $|\mathbf{B}|\cdot \mathrm{v}/\mathrm{r}|\mathbf{B}|$ [$\mathrm{qv}|\mathbf{B}|$ باید با مؤلفهٔ a_n مورد بحث در بخش (۳.۲) برابر باشد.]

۷. (الف) جملهٔ دوّم

(ب) جمل دوم و سوم.

(ج) همه ناصفرند.

(د) امکانات زیادی وجود دارد.

۸. بلی، به جز وقتی که سرعت متحرک صفر باشد.

۹. (الف) $\pi^{۲}\mathrm{r}$ سانتیمتر بر مجذور ثانیه (اگر r بر حسب سانتیمتر باشد) در جهت متمایل به مرکز. توجه کنید که ۳۰ دور در دقیقه مساوی π رادیان در ثانیه است.

(ب) $۴\pi\mathbf{u}_\theta$ سانتیمتر بر ثانیه.

۱۰. ۲۴π، زیرا $dr/dt=۳$ و $d\theta/dt=۴\pi$.

۱۱. $E=\frac{m}{۲}\left(\frac{dr}{dt}\right)^{۲}+\frac{m}{۲}\left(r\frac{d\theta}{dt}\right)^{۲}-\int_{0}^{۱}\left(F_r\frac{dr}{dt}+F_\theta r\frac{d\theta}{dt}\right)dt$. اکنون مشتق بگیرید و از $\frac{d}{dt}\int_{0}^{۱}f(t)\,dt=f(t)$ استفاده کنید.

بخش ۱.۳

۱. (الف) $(\cos x+ye^{xy})\mathbf{i}+xe^{xy}\mathbf{j}+\mathbf{k}$ (ب) $-\mathbf{R}/|\mathbf{R}|^{۳}$ (ج) $\mathbf{K}$

۲. صفحهٔ yz، که در آن $x=0$.

۳. f فقط به y بستگی دارد.

۴. $f(x,u,z)=x^{۲}+yz+c$.

۵. بردار یکّه‌ای در جهت دورشدن از محور z، به جز در نقاط واقع بر محور z که در این نقاط تعریف نمی‌شود.

۶. (الف) ۰ (ب) $-\frac{۴}{۳}$

۷. (الف) $\frac{۵}{۳}$ (ب) $-\frac{۲}{۳}$ (ج) $-\frac{۲۸}{۳}$ (د) $\frac{۱}{۴۲}\sqrt{۱۴}$

۸. (الف) ۱۰

(ب) بیشترین میزان افزایش $r^۲$ در جهت $\mathbf{R}$ است که در آن

$\frac{d}{dr}(r^۲)=۲r$ $=$ $\frac{d}{ds}(r^۲)$، که در نقطهٔ (۳,۰,۴) برابر ۱۰ می‌شود.

۹. $۱۵۰\sqrt{۵}$. این تابع عبارت است از $s^۶$، که در آن s فاصله تا محور y است. در این نقطه، داریم $(d/ds)(s^۶)=۶s^۵=۱۵۰\sqrt{۵}$.

۱۰. هر مضرب اسکالری از $۴\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k}$

۱۱. $۲x+۴y-z=۲۱$

۱۲. (الف) از روی نموداری که رسم کرده‌اید متوجه می‌شوید که هر مضرب اسکالر $\mathbf{i}+\mathbf{k}$ یک چنین برداری است.

(ب) $۴\mathbf{i}+۴\mathbf{k}$

۱۳. $x+۲y-۸z=-۲۸$

۱۴. $x=y\ ,z=۰$

۱۵. $\pm\frac{۱}{۱۴}\sqrt{۱۴}(۳\mathbf{i}-\mathbf{j}+۲\mathbf{k})$

۱۶. $۴x+۶y-z=۱۳$

۱۷. $\pm\frac{۱}{۲}\sqrt{۲}(\mathbf{i}-\mathbf{j})$. در (ج)، قرار دهید $\mathbf{R}=۲\sin t\,\mathbf{i}+۲\cos t\,\mathbf{j}+\sqrt{۵}\mathbf{k}$.

۱۸. $\cos^{-۱}\frac{۳۱}{۳۲}$.

۱۹. $\sin^{-۱}\frac{۲}{۳}\sqrt{۲}$.

بخش ۲.۳

۱. شکل (۳.۳) را ببینید.

۲. (الف) $x(z+a)=-۱\quad ,\ y(z+b)=-۱$

(ب) $x(z-۳)=-۱\quad ,\ y(z-۳)=-۱$

۳. نیمخطهایی که از مبدأ به اطراف رسم شوند.

۴. گرادیان بر این سطوح عمود است.

بخش ۳.۳

۱. $ye^{xy} + x\cos xy - ۲x\cos(zx)\sin(zx)$

۲. ۳

۳. $۶y^۳z + ۱۸x^۲yz$

۴. صفر ، به جز در مبدأ ، که در آن میدان تعریف نشده‌است . اندازهٔ این میدان در هر نقطه برابر $۱/r^۲$ است ، که در این صورت میدان مفروض را می‌توان شدت میدان الکتریکی مربوط به یک بار ، که اندازهٔ آن در مبدأ به صورت مناسبی انتخاب شده باشد ، دانست . امکان دارد یک فیزیکدان یا مهندس برق بگوید که واگرایی در مبدأ «بی‌نهایت» است ، زیرا واگرایی یک میدان الکتروستاتیک با چگالی بار متناسب است ، و چگالی بار در یک نقطهٔ بار «بی‌نهایت» است .

۶. فرض کنید $\mathbf{F} \cdot \mathbf{grad}\phi = ۰$.

۷. $\mathbf{F} = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}$ یک مثال است .

۸. بی‌نهایت جواب قابل قبول وجود دارد ، مثلاً $\mathbf{F} = -x\mathbf{i}$.

۹. مجدداً بی‌نهایت جواب قابل قبول وجود دارد . دو تا از آنها $e^x\mathbf{i}$ و $e^x\mathbf{i} + ye^x\mathbf{j}$ هستند .

۱۰. دروغ (مثلاً یک میدان ثابت)

۱۱. واگرایی همه جا صفر است ، زیرا $\partial F_۱/\partial x = ۰$ ، $F_۲ = ۰$ ، و (فرض می‌کنیم) $F_۳ = ۰$. بعضی از محصلین مشاهده می‌کنند که به ازای عدد ثابتی چون C میدان مفروض به صورت $\mathbf{F} = Cy\mathbf{i}$ است و آنگاه جواب را بااستفاده از فرمول واگرایی محاسبه می‌کنند . این زیرکانه است ولی نکتهٔ نهفته در مسئله نیست .

۱۲. واگرایی همه جا صفر است . مثلاً نقطهٔ P را در نظر بگیرید . در امتداد محور x ، $F_۱ = ۰$ ، بنابراین $\partial F_۱/\partial x$ در P صفر است . اگر در امتداد خط شارشی که نشان داده شده است از P بگذریم، $F_۲$ بیشترین مقدار خود ، $|\mathbf{F}|$ ، را می‌گیرد. بنابراین ، در P ، $\partial F_۲/\partial s = ۰$ ، که در آن s در امتداد خط شارش اندازه‌گیری می‌شود . امّا حرکت در نقطهٔ P موازی محور y است ؛ از این‌رو ، در این نقطه $\partial F_۲/\partial y = \partial F_۲/\partial s = ۰$. روش دیگر : حدس بزنید که $\mathbf{F} = -y\mathbf{i} + x\mathbf{j}$ و

از فرمول استفاده کنید .

بخش ۴.۳

۱. $x\mathbf{i} - y\mathbf{j} + y\,(1-2x)\mathbf{k}$

۲. $-z^2 \sin yz^2\, \mathbf{i} + (y \cos xy - xe^{xy})\mathbf{k}$

۳. $-(y^2+z^2)\mathbf{i} + 2xz\mathbf{j}$

۴. (الف) $1 + z^2 + x + y$

(ب) $z\mathbf{i} + 2xz\mathbf{i} + y\mathbf{k}$

۵. چرخ پردار تمایلی به دوران نخواهد داشت .

۶. میدان سرعت شاره‌ای را که حول محور x می‌چرخد ، در نظر بگیرید. سرعت زاویه‌ای را ثابت بگیرید و $\boldsymbol{\omega}$ فرض کنید . آن‌گاه $\mathbf{v}=\boldsymbol{\omega}\times\mathbf{R}$، و چون $\mathbf{curl\ F}= 2\boldsymbol{\omega}$ ، که این در متن بیان شده است و بعداً باید ثابت شود ، داریم : $\boldsymbol{\omega} = \mathbf{i}$ و

$$\mathbf{v}= \mathbf{i}\times\mathbf{R}= \mathbf{i}\times(x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})= y\mathbf{k} - z\mathbf{j}$$

این یک جواب ممکن است . جواب دیگر $2y\mathbf{k}$ است ، که یک حرکت برشی به موازات صفحهٔ xz را نشان می‌دهد .

۷. خیر (شکل ۱۳.۳) .

۸. خیر .

بخش ۵.۳

۱. ۱۶

۲. $12\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + \mathbf{k}$

۳. ۶۴

۵. میدان اسکالر

۶. میدان برداری

۷. ۳ ، ۰.

۴. (الف) $2xy + 1$

(ب) $-2\mathbf{i} + \mathbf{j} - x^2\mathbf{k}$

(ج) $2y\mathbf{i} + 2x\mathbf{j}$.

۸. $(x^2 + z^2)e^{xz}$

۹. همیشه ۰

۱۰. همیشه ۰

بخش ۶.۳

۱. $20x^3yz^3 + 6x^5yz$

۲. ۰ به جز در مبدأ

۳. $-2yz^2(y^2z^2 + 3x^2z^2 + 6x^2y^2)\mathbf{k}$

۴. (الف) و (ب) . همچنین (ج) به شرطی که $p^2 = q^2$.

۵. (الف) میدان برداری

(ب) میدان اسکالر

(ج) میدان برداری

(د) میدان اسکالر

(هـ) میدان برداری ،

(و) فاقد معنی

(ز) میدان برداری

(ح) میدان برداری

(ط) فاقد معنی

(ی) میدان برداری

۶. (ب) $\dfrac{\sin 2x \sinh 2y}{\sinh 10} + \dfrac{\sin x \sinh y}{\sinh 5}$

بخش ۷.۳

۵. به صورتی که نوشته شده است ، طرف راست بر حسب **F** و **G** متقارن است ولی طرف چپ چنین نیست ، زیرا $\mathbf{F}\times\mathbf{G} \neq \mathbf{G}\times\mathbf{F}$.

بخش ۱.۴

۱. (الف) $\frac{1}{2}\sqrt{2}(\mathbf{i}+\mathbf{j})$

(ب) $\mathbf{i}$

(ج) $-\mathbf{j}$

۲. (الف) $\sqrt{2}dx$ یا $\sqrt{2}dy$

(ب) dx

(ج) $-dy$

۳. (الف) $\mathbf{dR} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} = dx\mathbf{i} + dx\mathbf{j} = (\frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{2}\mathbf{j})\sqrt{2}dx = \mathbf{T}ds$

(ب) $\mathbf{dR} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} = \mathbf{i}\ dx = \mathbf{T}ds$

(ج) $\mathbf{dR} = dx\mathbf{i} + dy\mathbf{j} = dy\ \mathbf{j} = \mathbf{T}ds$

۴. (الف) در امتداد این مسیر، $\mathbf{F} = \sqrt{1-x^2}\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ و

$$\mathbf{dR} = dx\mathbf{i} - \frac{xdx}{\sqrt{1-x^2}}\mathbf{j}$$

بنابراین

$$\mathbf{F}\cdot\mathbf{dR} = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \quad \text{و} \quad \int \mathbf{F}\cdot\mathbf{dR} = \int_{-1}^{1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi$$

(ب) π

۵. $\mathbf{F}\cdot\mathbf{dR} = -d(\tan^{-1}y/x) = -d\theta$

۶. (الف) ۸ (ب) ۸

۷. ۳۶ (توجه: در این حالت $\mathbf{R}\cdot\mathbf{dR} = sds$، زیرا نقاط مفروض با مبدأ بر یک استقامتند.)

۸. $\pm 8\pi$، که علامت به جهت بستگی دارد.

۹. ۴۰ (از ملاحظهٔ $\mathbf{F}\cdot\mathbf{dR} = d\phi$ که در آن $\phi = x^2y + zy$، نیز می‌توان به جواب رسید، زیرا که در این صورت انتگرال مورد بحث برابر است با $\phi(3, 4, 1) - \phi(1, 0, 2)$. بخش (۳.۴) را برای بحث بیشتری از این «تدبیر» مطالعه کنید.)

۱۰. صفر

۱۱. $\frac{41}{6}$

۱۲. (الف) ۰ ($\mathbf{F}$ بر $\mathbf{dR}$ عمود است.)

(ب) $\frac{4}{3}(\omega_1 - \omega_2)$

بخش ۲.۴

نکته: در این کتاب، هر مجموعه‌ای از نقاط یک *ناحیه* است و هر ناحیه یک حوزه است فقط و فقط وقتی که بازو همبند باشد. در بعضی از کتابها قراردادهای دیگری به کار می‌رود؛ با قرارداد

استانداردی وجود ندارد؛ مثلاً، در بعضی از کتابها، حوزه به معنی حوزهٔ تعریف است و حوزه‌های بازو همبند را ناحیه نامیده‌اند.

۱. حوزه، ولی نه همبند و ساده

۲. حوزهٔ همبند ساده

۳. حوزهٔ همبند ساده

۴. حوزه نیست .(نقاط صفحهٔ $z=0$ داخلی نیستند.)

۵. حوزهٔ همبند ساده

۶. حوزه، ولی نه همبند ساده

۷. حوزهٔ همبند ساده

۸. حوزه نیست (همبند نیست).

بخش ۳.۴

۱. انتگرال بر C برابر است با انتگرال بر C_1 منهای انتگرال بر C_2، بنابراین اگر انتگرال اوّل صفر باشد، دو انتگرال دیگر با هم برابرند.

۴. 2π یا -2π، بر حسب این که دایره در چه جهتی جهت‌دار شده باشد.

۵. ϕ یک تابع چند مقداری است و، به استناد تعریف، میدان اسکالر نیست.

۶. $\phi=yx+\sin xz+c$.

۷. $\mathbf{F}=\mathbf{grad}\phi$ که در آن $\phi=x^2y+zy$.

بخش ۴.۴

۱. (الف) پایستار، $\phi=6x^2y+xyz+c$.

(ب) پایستار، $\phi=e^{xz}+c$.

(ج) پایستار، $\phi=-\cos x+\frac{1}{3}y^3+e^z+c$.

(د) پایستار نیست.

(هـ) پایستار ، $\phi=\log(x^2+y^2)+z^2$.

۲. (هـ) ، زیرا حوزهٔ تعریف همبند ساده نیست . باید ϕ را صریحاً بسازید .

۳. بلی. $\phi+\psi$.

۶. $\phi(۲,۳,۵)=-\frac{۱}{۱۴}\sqrt{۱۴}$ و $\phi(۱,۲,۳)=-\frac{۱}{۳۸}\sqrt{۳۸}$ ؛ از این‌رو ، کار انجام شده برابر است با:

$$\phi(۲,۳,۵)-\phi(۱,۲,۳)=\frac{۱}{۱۴}\sqrt{۱۴}-\frac{۱}{۳۸}\sqrt{۳۸}$$

۷. خیر ، به این شرط که مسیر از مبدأ عبور نکند .

نکته : میدانهای پایستار را گاهی *میدان پتانسیل* می‌نامند . اصطلاح *بی‌گردش* نیز بـه کـار مـی‌رود . ممکن نیست که خط شارش چنین میدانی یک منحنی بسته باشد ، زیرا انتگرال میدان حول یک خط شارش بسته ناصفر است و این با (۲) متناقض است . بنابراین خطوط شارش یا فاقد نقاط انتهایی هستند (یعنی ، در دو جهت تا بی‌نهایت گسترش یافته‌اند) یا از نقطه‌ای به نام «چشمه» یا «منبع» شروع و در نقطه‌ای به نام «نقطهٔ زوال» پایان می‌یابند. به این دلیل ، چنین میدانهایی را *میدانهای منبع‌دار* نیز نامیده‌اند. میدان الکتروستاتیک مربوط به یک نقطهٔ بار مثبت در مبدأ مثال ساده‌ای از این میدانهاست . مبدأ در حکم «چشمه» است و خطوط شارش به صورت شعاعهایی از مبدأ دور می‌شوند .

بخش ۵.۴

۲. $-\frac{۱}{۲}x^2\mathbf{k}$.

۳. اگر $\mathbf{F}=\nabla\phi$ ، یک پتانسیل برداری با $\phi\mathbf{G}$ داده می‌شود .

بخش ٦.۴

این بخش نیاز به دقت زیاد ندارد .

۳. (الف) $\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}(\mathbf{i}+\mathbf{j}+\mathbf{k})$.

(ب) $\mathbf{K}\cdot\mathbf{n}=\frac{۱}{۳}\sqrt{۳}$

(ج) $\int_0^1\int_0^{1-y}\frac{dx}{|\cos\gamma|}$

(د) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۳}$

۶. $\sqrt{۴x^۲+۴y^۲+۱}\ dx\ dy$

۷. ۱۱

بخش ۷.۴

۱. ۱۸π

۲. (الف) ۸

(ب) ۱۶

(ج) ۲۴

(د) ۰

(هـ) ۰

(و) ۰

(ز) ۰

۳. $\int_0^1\int_0^{۲-۲x}\frac{۷}{۲}\cdot\frac{۶}{۷}\,xdydx=۱$

۴. $|\mathbf{E}|=\lambda/۲\pi\varepsilon_0 r$.

۵. (الف) $T_r=T_a\ \frac{۱/r-۱/a}{۱/b-۱/a}(T_b-T_a)$

(ب) خیر.

۶. صفر

۷. $۳\pi a^۲$

۸. -۱

۹. (الف) خیر

(ب) بلی

(ج) ۴

۱۰. $۱۳\frac{۷}{۸}$

۱۱. در تمرین (۱۱)، استفاده از اصطلاح چشمه یا منبع بهتر است از اصطلاح *نقطهٔ زوال*، زیرا در الکتروستاتیک، به موجب قرارداد، میدان الکتریکی را منفی پتانسیل می‌گیرند.

(الف) به موجب قانون گاوس و تقارن، $\mathbf{F}$ درون کره صفر و، بنابراین، در درون کره ثابت است، و در مرکز $r=a$ یک ثابت است. از این‌رو، $\phi=q/a=۴\pi a^۲\sigma/a$.

(ب) به موجب قانون گاوس و تقارن ، میدان الکتریکی بیرون کره با میدان مربوط به یک نقطهٔ بار به اندازهٔ $۴\pi a^۲\sigma$ واقع در مرکز کره یکی است .

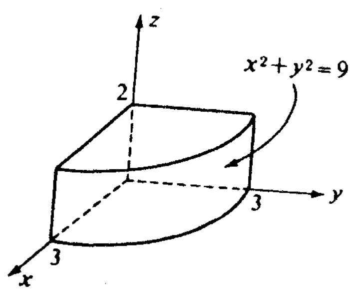
۱۲. (الف) ۸π (نقطه درون کره است)

(ب) $\frac{۱۶}{۳}\pi$ (نقطه خارج کره است)

۱۳. ۲۰π

بخش ۸.۴

۳.



۴. (الف) ۳

(ب) ۳

(ه) این بعداً مورد بحث قرار خواهد گرفت .

۵. ۳۷

۶. $\pi(۱-e^{-۱})$

۷. در هر نقطهٔ کره $\nabla\cdot\mathbf{E}=\rho/\varepsilon_0$. در این‌جا فرض می‌کنیم که بار به طور پیوسته توزیع شده باشد، یعنی ، هیچ نقطهٔ باری در حوزه نباشد .

۸. (الف) $\frac{۲۲}{۳}\pi$. (ب) $\frac{۳۲}{۹}\pi$.

۹. $\frac{۳۲}{۲۵۵}\sqrt{۸۵}\,\pi$.

بخش ۹.۴

۶. (الف) ۰ (ب) ۲- (ج) ۴ (د) ۰ (هـ) ۱-

۷. واگرایی صفر است و، بنابراین، انتگرال مطلوب برابر است با منفی انتگرال بر سر صندوق که، در این حالت، محاسبهٔ آن آسان است.

۸. میدان عبارت است از: $\frac{1}{3}x^3\mathbf{i} + \frac{1}{3}y^3\mathbf{j}$.

۱۰. $\pm ۲\pi$، بر حسب جهت انتگرالگیری.

۱۱. (الف) ۱۶/۸، در صورتی که حجم مورد بحث متناسب با مکعب قطر اقل باشد.

(ب) بلی.

۱۲. $۵\varepsilon_0$

۱۳. (الف) $۴\pi b^4$

(ب) برای اجتناب از محاسبهٔ یک انتگرال سه‌گانه، بگیرید $dV = ۴\pi r^2 dr$. در این صورت، انتگرال مطلوب برابر می‌شود با: $\int_0^b ۱۶\pi r^3 dr$.

۱۴. ۸π

۱۵. ۰

۱۷. (الف) (۲۰.۳) را به کار ببرید. (ب) $\frac{۹۲۸}{۳}\pi$

[راه حل بند (الف) در مورد بند (ب) به کار نمی‌رود زیرا این تابع همساز نیست.]

۱۸. (الف) ۱۵۸π (ب) ۱۹۴۴π

بخش ۱۰.۴

۱. در استفاده از قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال

۲. برای اطمینان از وجود انتگرال حجم $\text{div}\mathbf{F}$ بر حوزهٔ کراندار D

۵. $\cos\gamma=0$ و بنابراین عبارت $dxdy/|\cos\gamma|$ بی‌معنی است .

۶. ۳۰

۷. ۵۷

۸. بلی .

۹. (الف) یک کرهٔ بیرونی با $\mathbf{n}$ متمایل به مبدأ و یک کرهٔ درونی با $\mathbf{n}$ در جهت گریز از مبدأ

(ب) حاصل جمع دو انتگرال

(ج) آنها با هم برابرند .

(د) خیر .

(هـ) 4π

۱۱. (ب) ناهنجاری مساوی منفی لاپلاسی است .

(ج) ناهنجاری صفر است .

۱۲. *راهنمایی دوّم* : در حالت پایا ، میزان شارش گرما به بیرون حوزه مساوی میزان شارش گرما به درون حوزه است ؛ زیرا در غیر این‌صورت دما تغییر می‌کند . از این‌رو ،

$$\iint \frac{\partial\phi}{\partial n} dS$$

بر سطوح بستهٔ دلخواه صفر است . همچنین توجه کنید که اگر $\nabla^2\phi$ پیوسته باشد ، حد

$$\frac{1}{V}\iiint_D \nabla^2\phi\, dV$$

وقتی که حوزهٔ D در یک نقطه جمع شود و V به صفر میل کند ، برابر مقدار $\nabla^2\phi$ در آن نقطه است .

۱۳. $c\rho(\partial\phi/\partial t)=k\nabla^2\phi$

نکته : با استفاده از این قضیه که اگر f پیوسته و تساوی

$$\iiint f(x,y,z)\,dV=0$$

برای هر حوزهٔ D برقرار باشد ، آنگاه f تابع صفر است ، این استنتاجات را دقیقتر می‌توان انجام داد ؛ به عنوان مثال ، در تمرین (۱۳) این قضیه را می‌توان در مورد

$$f=c\rho\ \frac{\partial\phi}{\partial t}\ -k\nabla^{۲}\phi$$

به کار برد .

۱۴. $-۴\pi\phi(P)$

۱۵. آنها با هم برابرند .

۱۷. $۴\pi\phi(۰,۰,۰)=۲۰\pi$.

۱۸. (الف) $-۴\pi\phi(۰,۱,۰)=-۲۰\pi$.

(ب) $-۴\pi\phi(۲,۱,۳)=۰$.

۱۹. صفر

بخش ۱۱.۴

۶. صفر

۷. -۳۶π ، زیرا $\mathbf{curlF\cdot k}=-۴$ و مساحت محدود به C برابر ۹π است .

۸. (الف) ۶π (ب) ۶π

۹. (الف) -۱۶ (ب) -۱۶ (ج)جملهٔ دوّم

۱۰. ۲۸π

۱۱. عنوان بخش (۱۱.۱) چیست ؟

بخش ۱۲.۴

۱. تاو یک میدان برداری $\mathbf{F}$ در جهت بیشترین چرخش و اندازه‌اش برابر ماکسیمم چرخش است.

۲. (الف) صفر

(ب) صفر

(ج)صفر . برای افزایش دقت ، از قضیه‌ای که در پاسخ تمرین (۱۳) بخش (۱۰.۴) به آن اشاره شد استفاده کنید تا از بحث از کیسه‌های «بسیار کوچک» خلاص شوید .

$$\iint \frac{\partial\phi}{\partial n} dS$$

بر سطوح بستهٔ دلخواه صفر است . همچنین توجه کنید که اگر $\nabla^۲\phi$ پیوسته باشد ، حد

$$\frac{۱}{V}\iiint_D \nabla^۲\phi dV$$

وقتی که حوزهٔ D در یک نقطه جمع شود و V به صفر میل کند ، برابر مقدار $\nabla^۲\phi$ در آن نقطه است .

۱۳. $c\rho(\partial\phi/\partial t)=k\nabla^۲\phi$

نکته : با استفاده از این قضیه که اگر f پیوسته و تساوی

$$\iiint f(x,y,z)dV=۰$$

برای هر حوزهٔ D برقرار باشد ، آنگاه f تابع صفر است ، این استنتاجات را دقیقتر می‌توان انجام داد ؛ به عنوان مثال ، در تمرین (۱۳) این قضیه را می‌توان در مورد

$$f=c\rho \frac{\partial\phi}{\partial t} -k\nabla^۲\phi$$

به کار برد .

۱۴. $-۴\pi\phi(p)$

۱۵. آنها با هم برابرند .

۱۷. $۴\pi\phi(۰,۰,۰)=۲۰\pi$.

۱۸. (الف) $-۴\pi\phi(۰,۱,۰)=-۲۰\pi$.

(ب) $-۴\pi\phi(۲,۱,۳)=۰$.

۱۹. صفر

بخش ۱۱.۴

۶. صفر

۷. -۳۶π ، زیرا $\mathbf{curlF{\cdot}k}=-۴$ و مساحت محدود به C برابر ۹π است .

۸. (الف) ۶π (ب) ۶π

(د) $\text{div}\ \mathbf{curl}\ \mathbf{F}=0$.

نکته : واگرایی یک میدان برداری در یک نقطه راگاهی *چگالی* منبع میدان در آن نقطه می‌گویند. دلیلش این‌است که واگرایی شدت الکتریکی یک میدان الکتروستاتیک (با اختلاف یک ضریب) مساوی چگالی بار است ، و بار الکتریکی منبع یا «سبب» میدان است . گزارهٔ «واگرایی یک میدان در هر ناحیه‌ای که فاقد منبع باشد ، صفر است» مستمسک شهودی اغلب محصلین است . تمرین بالا را می‌توان در قالب کلمات چنین بیان کرد : تاو یک میدان برداری ، میدان برداری دیگری است که فاقد منبع است .

۳. (الف) صفر (ب) صفر (ج) صفر

۴. (الف) صفر (ب) صفر (ج) بردار صفر (د) $\mathbf{curl}\ \mathbf{grad}\phi=0$

نکته: تاو یک میدان برداری در یک نقطه را گاهی *چگالی* پیچ میدان در آن نقطه می‌نامند. دلیلش این‌است که تاو ، به یک معنی ، «تلاطم» یا «پیچش» طبیعت میدان را وصف می‌کند . توجه کنید که چگالی پیچ یک کمیت برداری است . درست همچنان که مهندسین گاهی نقطهٔ منبع را نقطه‌ای می‌دانند که در آن واگرایی «بی‌نهایت» است ، رشتهٔ پیچ را منحنی‌ای از فضا می‌دانند که در امتداد آن اندازهٔ تاو «بی‌نهایت» است . بخش مرکزی یک گردباد تقریباً چنین ایده‌ای را به ذهن القا می‌کند . به خواننده واگذار می‌کنیم که تعریف را دقیقاً فرمولبندی کند . محتوای شهودی تمرین ۴ این است که هر میدانی که از یک پتانسیل اسکالر نتیجه شده باشد فاقد پیچ یا گرداب است . معذالک ، باید توجه داشته باشیم که اگر پتانسیل اسکالر یک تابع چند مقداری باشد ، گاهی امکان دارد پتانسیل اسکالری برای میدان سرعت شاره‌ای که حول یک رشتهٔ پیچ می‌پیچد ، بیابیم .

اکنون بعضی از ایده‌های قبلی را به طور مختصر مرور می‌کنیم و در این بررسی فقط میدانهای برداری به طور پیوسته مشتق‌پذیر را در نظر می‌گیریم .

اگر یک میدان برداری که در حوزه‌ای چون D تعریف شده است دارای فقط یکی از خواص زیر باشد ، دارای همهٔ خواص خواهد بود :

(الف) تاو میدان در هر نقطه صفر است .

(ب) انتگرال میدان حول هر منحنی بسته صفر است ، به شرطی که سطحی درون D موجود باشد که بر این منحنی احاطه داشته باشد .

(ج)میدان ،گرادیان یک تابع اسکالر است ، ولی امکان دارد این تابع چند مقداری باشد . اگر حوزهٔ D همبند ساده باشد ، شرط مذکور در بند (ب) ضرورت ندارد و تابع اسکالر بند (ج) چند مقداری نخواهد بود . وقتی D همبند ساده باشد ، اصطلاحات زیر در مورد این میدانها به کار می‌رود : میدان پایستار ، میدان بی‌گردش ، میدان پتانسیل ، میدان منبع‌دار . به طور مشابه ، هریک از خواص زیر از یک میدان به طور پیوسته مشتق‌پذیر سایر خواص را ایجاب می‌کند :

(۱) واگرایی میدان در هر نقطهٔ D صفر است .

(۲) انتگرال میدان بر هر سطحی صفر است ، به این شرط که این سطح تماماً در D باشد .

(۳) میدان مفروض ، تاو میدان برداری (احتمالاً چند مقداری) دیگری است .

این گزاره‌ها دقیق نیستند و نباید خیلی جدّی گرفته شوند. اصطلاحاتی که گاهی برای چنین میدانهایی به کار می‌برند ، عبارتند از : میدان سیملوله‌ای ، میدان دورانی یا گردشی ، میدان متلاطم ، میدان بی‌منبع ، میدان پیچدار . در کاربردها ، میدانهای برداری‌ای که در امتداد سطحی ناپیوستگی دارند ، از اهمیّت قابل ملاحظه‌ای برخوردارند ، ولی ما این‌گونه میدانها را مورد بحث قرار نداده‌ایم . گزاره‌های بالا در مورد چنین میدانهایی کاملاً دروغ است .

۶. (الف) $۲Z$ (ب) $-۵\mathbf{K}$ (ج) -۲۰π

۷. (الف) ۲۷π (ب) 0

بخش ۱.۵

۶. به انتهای بخش (۲.۵) مراجعه کنید .

۸. همه صفرند . (البته ، به جز در مبدأ.)

۹. π

۱۰. $\sqrt{۲}+\log(۱+\sqrt{۲})$

۱۱.صفر

۱۲.2π

۱۳.$nr^{n-1}\mathbf{e}_r$

۱۴.$\frac{16}{3}\pi$

۱۵.(د) صفر

۱۶.$(-2\cos\phi\,\mathbf{e}_r - \sin\phi\,\mathbf{e}_\phi)/r^3$

۱۷.
$$\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{2}{r}+\cot\phi-\frac{\sin\theta}{\sin\phi}$$
$$\nabla\times\mathbf{F}=\cot\phi\ \cos\theta\mathbf{e}_r-2\cos\theta\mathbf{e}_\phi+2\mathbf{e}_\theta$$

۱۸. 2π

۲۰. $n=-2$.

۲۱. به ازای همهٔ مقادیر n

۲۲. (الف) $F_r=r^{m+1}/(m+3)$

بخش ۲.۵

۴. $(1/u_1)du_1du_2du_3$.

۵. $(12u_1u_3+12u_2u_3+3)/4u_3$.

۶. (الف) بلی.

(ب) $x=(u_1+u_2)/2\ ,\ y=(u_1-u_2)/2\ ,\ z=u_3/2$

(ج) $h_1=\frac{1}{2}\sqrt{2}\ ,\ h_2=\frac{1}{2}\sqrt{2}\ ,\ h_3=\frac{1}{2}$

(د) $\nabla^2 f=2\frac{\partial^2 f}{\partial u_1}+2\frac{\partial^2 f}{\partial u_2}+4\frac{\partial^2 f}{\partial u_3}$

(هـ) $\sqrt{2}\mathbf{u}_1+\sqrt{2}\mathbf{u}_2+4\mathbf{u}_3$

۷. (الف) $x=\frac{1}{3}(2u_1+u_2)\ ,\ y=\frac{1}{3}(u_1-u_2)\ ,\ z=\frac{1}{2}u_3$

(ج) این دستگاه مختصات متعامد نیست.

۸. (ب) $h_۱=h_۲=۲(u_۱^۲+u_۲^۲)^{\frac{۱}{۲}}\ ,\ h_۳=۱$

(ج) $$\left(\frac{\partial^۲ g}{\partial u_۱^۲}+\frac{\partial^۲ g}{\partial u_۲^۲}\right)\Big/ ۴(u_۱^۲+u_۲^۲)+\frac{\partial^۲ g}{\partial u_۳^۲}$$

(د) $$\nabla\cdot\mathbf{F}=\frac{u_۱(u_۲+u_۳)}{(u_۱^۲+u_۲^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$$

$$\nabla\times\mathbf{F}=\mathbf{e}_۱\Big/ ۲(u_۱^۲+u_۲^۲)^{\frac{۱}{۲}}+\mathbf{e}_۲+(۴u_۱^۲+۲u_۲^۲-۲u_۲u_۳)\mathbf{e}_۳\Big/(u_۱^۲+u_۲^۲)^{\frac{۱}{۲}}$$

۱۰. (الف) خیر .

(ب) عنصر حجم در دستگاه مختصات کروی از لحاظ شکل و موقعیّت با عنصر حجم در دستگاه مختصات دکارتی متفاوت است .

۱۱. این دستگاه مختصات راستگرد نیست و ، بنابراین ، فرمول معمول تاو در این دستگاه اعمال نمی‌شود .

۱۲. (الف) $۱/uv$ (ب) $۲w/uv$

۱۳. $\partial f/\partial n$ در جهت $u_۱$ عبارت است از $(\partial f/\partial u_۱)/h_۱$ ، و انتگرال سطح آن بر abcd مساوی حاصل‌ضرب $(\partial f/\partial u_۱)/h_۱$ در $h_۲h_۳du_۲du_۳$ است و ، بنابراین ، انتگرال سطح بر این وجه و وجه مقابلش عبارت است از :

$$\frac{\partial}{\partial u_۱}\left(\frac{h_۲h_۳}{h_۱}\frac{\partial f}{\partial u_۱}\right)du_۱du_۲du_۳$$

و نتایج مشابهی برای هر زوج از وجوه دیگر به دست می‌آید . لاپلاسی برابر خارج‌قسمت تقسیم مجموع کلی بر حجم $h_۱h_۲h_۳du_۱du_۲du_۳$ است .

بخش ۳.۵

۱. (الف) ۱۴ (ب) $[1\ \ -1\ \ 7]$ (ج) $\begin{bmatrix} -2 \\ 5 \\ 4 \end{bmatrix}$ (د) $[1\ \ -1\ \ 7\ \ 10]$

(هـ) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 7 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 7 \end{bmatrix}$ (و) $\begin{bmatrix} 10 & 0 & -10 \\ 0 & 10 & 10 \\ 0 & -10 & 20 \end{bmatrix}$

۱۰. جواب خود را از طریق جانشینی در معادلات بیازمایید .

۱۵. به طور کلی ، خیر . (بلی ، هرگاه تعویض‌پذیر باشند.)

بخش ۴.۵

۲. (ب) $\begin{bmatrix} \cos\psi & 0 & \sin\psi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\sin\psi & 0 & \cos\psi \end{bmatrix}$

۶. $f'=x'^2+y'^2$ ، $\mathbf{V}'=x'\mathbf{i}'+y'\mathbf{j}'+z'\mathbf{k}'$ ، $\nabla f=2x'\mathbf{i}'+2y'\mathbf{j}'$ ، $\nabla\cdot\mathbf{V}'=3$ ، $\nabla\times\mathbf{V}'=\mathbf{0}$.

۱۱. $ds=(dx'^2+dy'^2+dz'^2)^{\frac{1}{2}}$

۱۲. $dV'=dx'dy'dz'$

۱۴. $x=-y'$, $y=z'$, $z=-x'$

۱۸. خط ، در امتداد $\mathbf{i}-\mathbf{j}-\mathbf{k}$ است . زاویهٔ حول این محور عبارت است از $-\dfrac{\pi}{3}$.

۱۹. (د) دترمینان بگیرید .

۲۰. ۲۲.به روش تمرین (۱۸) عمل کنید ؛ یا مقالهٔ «صورتگرایی دوران آزاد از مختصات» ، نوشتهٔ ج ماتیو ، از مجلهٔ Amer. Jnl. of Physics با مشخصات ۴۴ ، ۱۲۱۰(۱۹۷۶) را

بخوانید .

۲۳. (ج) ممکن است تبدیل چپگرد باشد .

مسائل دوره

۱. (الف) $\frac{۸}{۲۹}\sqrt{۲۹}$

(ب) $\frac{۸}{۷۷}\sqrt{۷۷}$

(ج) هر مضرب اسکالر $۶\mathbf{i} + ۴\mathbf{j} + ۵\mathbf{k}$

۳. $۹۰^\circ - \cos^{-۱}\frac{۱}{۷}\sqrt{۳۵}$

۴. (الف) هر مضرب اسکالر $۵\mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}$

(ب) $\frac{۸}{۲۷}\sqrt{۲۷}$

۵. $\sqrt{۳۴}$

۶. $\frac{۱}{۵}(x-۴) = -\frac{۱}{۸}(y-۲) = -\frac{۱}{۷}(z-۱)$

۷. (الف) $\frac{۱}{۶}(۱۰۱)$

(ب) $x - ۱۱y - ۱۴z + ۴۳ = ۰$

(ج) $\frac{۱}{۳۱۹}\sqrt{۳۱۹}$

۸. $\pm\frac{۵}{۳}(۲\mathbf{i} + \mathbf{j} - ۲\mathbf{k})$

۹. (الف) ۱۳

(ب) $\mathbf{i} - ۳\mathbf{j} - ۴\mathbf{k}$

(ج) ۳

(د) -۱۲

۱۰. (الف) $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲۶}$

(ب) ۲

(ج) $\cos^{-۱}\frac{۱}{۹}$

۱۱. فرض کنید C مرکز ، A و B دو انتهای قطر ، و P نقطهٔ دیگری بر محیط دایره باشد . PA و PB را بر حسب PC و CA یا CB بنویسید ؛ سپس نشان دهید که $PA \cdot PB = ۰$. ضرورت خواهد داشت که از $|CA| = |BC| = |PC|$ استفاده کنید .

۱۲. نشان دهید که حاصل جمع برداری میانه‌ها بردار صفر است .

۱۳. (الف) بی‌نهایت (ب) $\mathbf{u} = (۱۹\mathbf{i} + ۱۰\mathbf{j} + ۱۷\mathbf{k})/\sqrt{۷۲۵}$

توجه کنید که $\mathbf{u}\cdot(\mathbf{a}/|\mathbf{a}|) = \mathbf{u}\cdot(\mathbf{b}/|\mathbf{b}|)$ ، $\mathbf{u}\cdot\mathbf{a}\times\mathbf{b} = ۰$ ، و $|\mathbf{u}| = ۱$ دو جواب $\pm\mathbf{u}$

دارد . چگونه متوجه می‌شویم که جواب مسئله همان $\mathbf{u}$ است نه $\mathbf{-u}$ ؟

.۱۴ $(\mathbf{u}\times\mathbf{v})\cdot(\mathbf{u}\times\mathbf{v})=\mathbf{u}\cdot\mathbf{v}\times(\mathbf{u}\times\mathbf{v})$.حاصل‌ضرب برداری سه گانه را بسط دهید . جواب مسئله عبارت است از :

$$\begin{vmatrix} \mathbf{u}\cdot\mathbf{u} & \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} \\ \mathbf{u}\cdot\mathbf{v} & \mathbf{v}\cdot\mathbf{v} \end{vmatrix}$$

.۱۵ خیر .

.۱۶ یا $\mathbf{u}=\pm\mathbf{v}$ یا هردوی $\mathbf{u}$ و $\mathbf{v}$ بر $\mathbf{w}$ عمودند .

.۱۷ ۷ (صرفاً فاصلهٔ $|AB|$)

.۱۸ ۶ (هیچ محاسبه‌ای ضرورت ندارد .)

.۱۹ $\frac{۳۵}{۷}$

.۲۰ $۳x + ۲y + z = ۱۸$

.۲۱ بردار $\mathbf{i} + ۸\mathbf{j} + ۱۲\mathbf{k}$ بر منحنی مماس و بر صفحه در نقطهٔ (۲،۸،۸) عمود است .

.۲۲ (۲،۴،۸) . برداری که از مرکز کره به این نقطه رسم شود بر صفحهٔ مفروض عمود است .)

.۲۳ (۱،۱،۱) .[گرادیان $x^۲ + ۲y^۲ + ۳z^۲$ در نقطهٔ (۱،۱،۱) با $\mathbf{i} + ۲\mathbf{j} + ۳\mathbf{k}$ موازی است .]

.۲۴ (۱،۱،۲) . (مماس بر منحنی در این نقطه بر $\mathbf{grad}\phi$ عمود است . این مسئله را بدون استفاده از روشهای برداری نیز می‌توان حل کرد ، کافی است ملاحظه کنیم که $\phi=t^۲ - ۶t + t^۴$ کمترین مقدار خود را در $t=۱$ می‌گیرد.)

.۲۵ (۱،۱،۲) . این همان مسئله قبلی با یک شکل متفاوت است .

.۲۶ $۹۰^\circ - \cos^{-1} ۹۸/\sqrt{۱۵۷}\sqrt{۶۵}$.

.۲۷ ناحیه‌ای در سمت راست P ، تقریباً سیگار شکل ،که محور بزرگتر آن موازی محور y است .

.۲۸ $$\frac{d\mathbf{R}}{dt} = \frac{d}{dt}(R_۱\mathbf{i} + R_۲\mathbf{j} + R_۳\mathbf{k}) = \frac{d\mathbf{R}}{dt}\Big|_m + R_۱\frac{d\mathbf{i}}{dt} + R_۲\frac{d\mathbf{j}}{dt} + R_۳\frac{d\mathbf{k}}{dt}$$

به استناد مثال (۶.۲) ، $d\mathbf{i}/dt$ بر $\mathbf{i}$ عمود است . بنابراین ،

$$\frac{d\mathbf{i}}{dt} = \alpha_1\mathbf{j} + \alpha_2\mathbf{k}$$

به طور مشابه

$$\frac{d\mathbf{j}}{dt} = \alpha_3\mathbf{k} + \alpha_4\mathbf{i}$$

$$\frac{d\mathbf{k}}{dt} = \alpha_5\mathbf{i} + \alpha_6\mathbf{j}$$

اگر از دو طرف $\mathbf{i}\cdot\mathbf{j}=0$ مشتق بگیریم ، خواهیم داشت: $\mathbf{i}\cdot(d\mathbf{j}/dt) + (d\mathbf{i}/dt)\cdot\mathbf{j}=0$. از این‌رو $\alpha_4 = -\alpha_1$ ، به طورمشابه $\alpha_5 = -\alpha_2$ و $\alpha_6 = -\alpha_3$. فرض کنید $\omega=\alpha_3\mathbf{i} - \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_1\mathbf{k}$ و تحقیق کنید که

$$\omega\times\mathbf{R}=R_1 d\mathbf{i}/dt + R_2 d\mathbf{j}/dt + R_3 d\mathbf{k}/dt.$$

۲۹. اگر $\mathbf{T}$ یک مماس یکّه بر بیضی باشد ، $\nabla(|\mathbf{R}_1| + |\mathbf{R}_2|)\cdot\mathbf{T}=0$ (چرا؟) . همچنین ، $\nabla|\mathbf{R}_1|$ و $\nabla|\mathbf{R}_2|$ ، به ترتیب ، بردارهای یکّه در جهت $\mathbf{R}_1$ و $\mathbf{R}_2$ می‌باشند که در این صورت کسینوس زاویهٔ بین $\nabla|\mathbf{R}_2|$ و $\mathbf{T}$ مساوی کسینوس زاویهٔ بین $\nabla|\mathbf{R}_1|$ و $-\mathbf{T}$ است.

۳۰. $\cos^{-1}\frac{8}{63}\sqrt{21}$

۳۱. (الف) $4x\mathbf{i} + \mathbf{j}$ (ب) 3 (ج) 4

(د) $z\mathbf{i} - 4xz\mathbf{j} + (4xy - x)\mathbf{k}$

۳۲. (الف) $2\mathbf{i}$ (ب) $2\mathbf{k}$ (ج) -2

۳۳. $40[(z - y)\mathbf{i} + (x - z)\mathbf{j} + (y - x)\mathbf{k}]$

۳۴. $6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

۳۵. $2\mathbf{A}$

۳۶. (الف) $2\mathbf{R}\cdot\mathbf{A}$ (ب) $2\mathbf{R}\times\mathbf{A}$ (ج) $2r^2\mathbf{A}$

(د) $4(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})^3\mathbf{A}$ (هـ) $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})/r$ (و) $(\mathbf{A}\cdot\mathbf{R})\mathbf{A}$

(ز) 0 (ح) $2\mathbf{A}$ (ط) 6

۳۷. (الف) هر مضرب اسکالر $6\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

(ب) ۷

۳۸. (الف) $x + y - ۴z + ۶ = ۰$

(ب) $x + ۲ = y - ۴ = -\frac{۱}{۴}(z - ۲)$

(ج) $\frac{۲۳}{۷}$

۳۹. $۹۰^\circ - (\cos^{-۱} \frac{۳}{۳۰۵}\sqrt{۱۲۲})$

۴۰. میدان برداری صفر به جز وقتی که $r=۰$، که به ازای $r=۰$ تعریف نمی‌شود.

۴۱. $\operatorname{div}(\mathbf{curl\ F}) = ۰$. از این‌رو، $۲+c=۰$ و $c=-۲$.

۴۲. ۰. به موجب تقارن، کاملاً واضح است که چرخ پره‌دار، بدون توجه به جهتی که به آن داده شود، در چنین میدان نیرویی تمایل به دوران ندارد.

۴۳. $\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = \nabla\times(-\partial\mathbf{H}/\partial t) = -\partial/\partial t(\nabla\times\mathbf{H}) = -\partial^۲\mathbf{E}/\partial t^۲$

همچنین

$$\nabla\times(\nabla\times\mathbf{E}) = -\nabla^۲\mathbf{E} + \nabla(\nabla\cdot\mathbf{E}) = -\nabla^۲\mathbf{E}$$

از این رو $\nabla^۲\mathbf{E} = \partial^۲\mathbf{E}/\partial t^۲$. نتیجه‌گیری در مورد $\mathbf{H}$ مشابه است.

۴۵. چون $\psi = \tan\phi$، دو تابع سطوح تک مقدار یکسان دارند. بنابراین، $\nabla\psi$ و $\nabla\phi$ موازیند.

فهرست راهنما