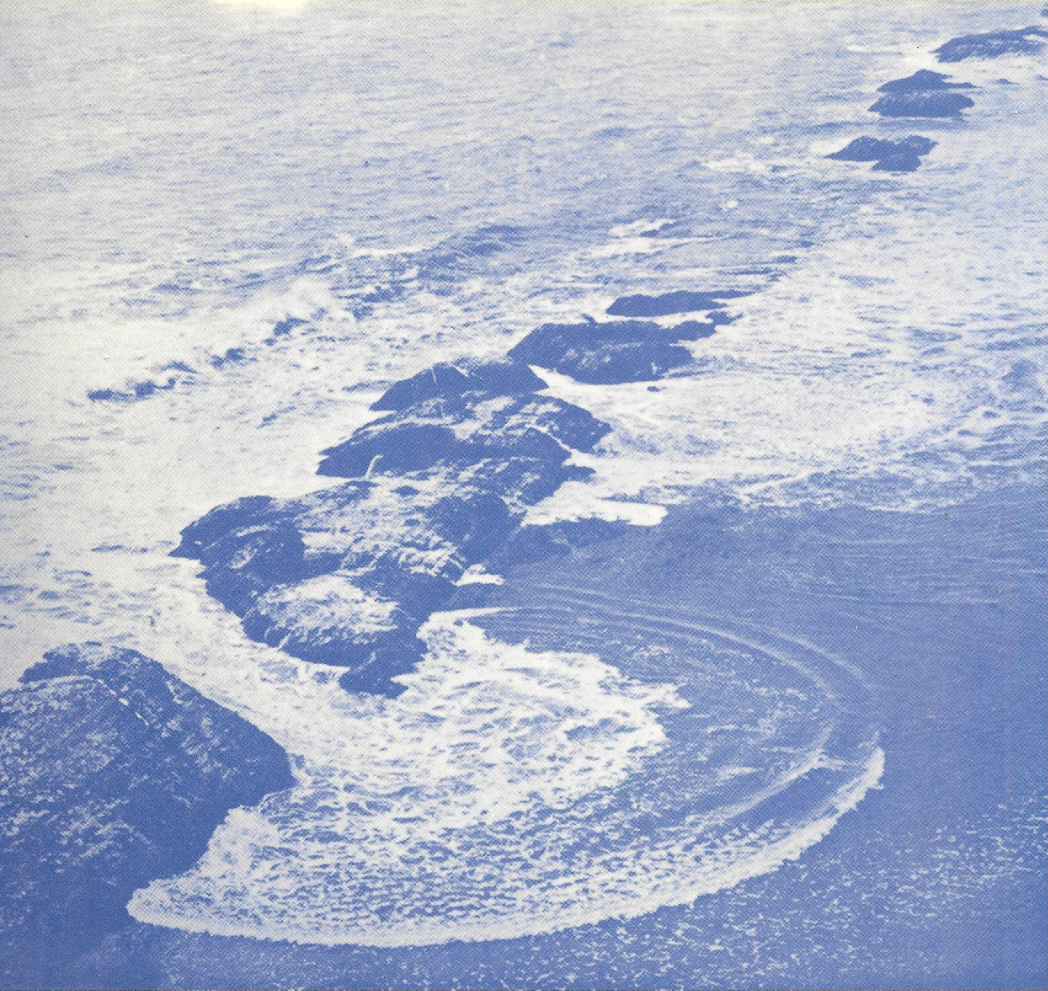




حساب برداری

نوشته: جلاله ای. مارسدن آنتونی ج. ترومبا

چاپ چهارم



مترجمان: دکتر علی اکبر عالم زاده حسین محمد داودی

حساب برداری

نوشتهٔ جerald امی. مارسدن
آنتونی ج. ترومبسا

ترجمهٔ دکتر علی اکبر عالم زاده
حسین محمد داودی

پیشگفتار مترجمان

قرن نوزدهم را باید قرن کشفیات بزرگ نامید. نظریهء تکامل داروین و کشفیات زمین‌شناسی راجع به تشکیل زمین دیدگاه فکری بشر را دگرگون ساخت. تحقیقات مهم در الکتریسیته و مغناطیس پیامدهای صنعتی مهمی در برداشت که از هر سو پریار بودند. جایگاه اجتماعی ریاضیدان تغییر کرد، و موقعیت پیشین وی که اغلب وابسته به طبقه‌ای خاص بود وضعیت عام و اجتماعی‌تری به خود گرفت و ریاضیدانان بیشتری، عمدتاً " به عنوان معلم، در اجتماع ظاهر شدند. آزادی بیشتر فکر و ازدیاد انگیزه عصر نوینی در تاریخ ریاضیات به وجود آورد.

در این قرن بود که حساب برداری و آنالیز برداری تولد یافت، و تجلی‌گاه حساب دیفرانسیل و انتگرال در زمینه‌های کاربردی گردید. گسترش حیثیت آورد و قدرت مانورش در مسائل ملموس آن را به صورت پایگاه اصلی ریاضیات درآورد. کتاب حاضر بیانگر جلوه‌های این مبحث بوده و درنوع خود کم‌نظیر و بلکه بی‌نظیر است. ترجمه‌اش می‌تواند در شناخت کاربردهای ریاضی در علوم به فارسی زبانان بسیار مؤثر باشد، و بی‌شک در تخمین توان واقعی مفاهیم ریاضی سهم بسزایی خواهد داشت. کتاب را می‌توان به عنوان ریاضی سه در رشته ریاضی و ریاضی دو در فنی مهندسی تدریس کرد.

دکتر علی‌اکبر عالم‌زاده و حسین محمد داودی

گروه آموزشی ریاضی

دانشگاه تربیت معلم

پشکفتار مؤلفان

این کتاب برای یک درس شش ماهه در حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع چند متغیره و آنالیز برداری در سال دوم لیسانس تدوین شده است. پیشنهاد آن معمولا "مقدماتی از جبرخطی است، ولی این یک پیشنهاد اساسی نیست. تنها مبانی جبر ماتریسی مورد نیازند که ما مفاهیم اصلی آن را در متن گنجانده ایم. لیکن، دانستن حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره (مشتقگیری و انتگرالگیری از توابع متعارف) را لازم می‌دانیم.

کتاب، علاوه بر مثالها و مسائل ملموس بسیار، بخش اعظم نظریه را شامل است. تدریس در این سطح نشان داده که حذف بسیاری از برهانهای تکنیکی کار مناسبی است؛ این برهانها برای شاگرد مبتدی مشکل‌اند و صرفاً "در متن برای ارجاع یا تکمیل آمده‌اند. بخصوص، بعضی از برهانهای تکنیکی قضایای فصلهای ۲ و ۵ در ضمایم ذکر شده‌اند. بخش ۲.۲، در باب حدود و پیوستگی، سبک و عمدا "مختصر طرح شده است. مباحث نظری پیچیده‌تر، نظیر فشردگی و برهانهای ظریف نظریه انتگرالگیری، حذف شده‌اند زیرا معمولا "به درس پیشرفته‌تری تعلق دارند. در این سطح مهارتهای محاسبه‌ای و درک شهودی مهم‌اند، و ماتلاش کرده‌ایم با ملموس و درجهت شاگرد ساختن کتاب این نیاز را برآورده سازیم. مثلا، "گرچه تعریف مشتق به طور صحیح تنظیم شده است، ولی این کار به جای تبدیلات خطی به کمک ماتریس مشتقات جزئی صورت گرفته است. این به تنهایی می‌تواند در یک یا دو هفته تدریس صرفه‌جویی کرده، به زحمت ناشی از عدم آشنایی کامل با جبر خطی پایان بخشد. همچنین، تعداد زیادی مثال فیزیکی گنجانده‌ایم. بویژه، مثالهایی از مکانیک سیالات، ثقل، نظریه الکترومغناطیس، و اقتصاد آورده‌ایم

(اطلاع قبلی از این مباحث لازم نیست).

به این چاپ (چاپ دوم) چند بخش اختیاری در مباحث نظری (که با قواعد سنگینی شروع شده‌اند)، نظیر قضیه^۲ تابع ضمنی، خواص انتگرال، و تعبیر هندسی دیورژانس و کرل، افزوده شده است. به علاوه، برای داشتن تنوع بیشتر، کاربردهای دیگری به متن و نیز تمرینهایی اضافه شده‌اند. بخش ضرایب لاگرانژ و کاربردهایشان را با افزودن کاربردهایی در اقتصاد وسعت بخشیده و چند مطلب جدید به مکانیک سیالات افزوده‌ایم. گرچه برهانهای بیشتری در ضمیمه^۳ اختیاری ب آمده‌اند، مفهوم مساحت صفر از فصلهای انتگرالگیری حذف شده است. مختصات استوانه‌ای و کروی به فصل ۱ منتقل و در تمام کتاب به آنها نقش جالبی داده‌ایم در این چاپ یادداشتهای تاریخی زیادی نیز آمده‌اند تا به شاگرد درک بیشتری از تاریخ حساب برداری ببخشند.

ویژگی دیگر این کتاب ارائه^۴ زودتر میدانهای برداری، دیورژانس، و کرل در فصل ۳، پیش از انتگرالگیری است. آنالیز برداری معمولاً^۵ در این نوع درسها مظلوم واقع می‌شود، و ترتیب حاضر برای رفع این نقیصه است. حتی می‌توان جلوتر رفت و تدریس فصل ۴ (قضیه^۶ تیلور، ماکزیممها و مینیممها، ضرایب لاگرانژ) را پس از فصل ۷ (آنالیز برداری) تدریس کرد.

بسیاری از همکاران و دانشجویان ریاضی از بدو پیدایش این کتاب در آن سهم بوده و پیشنهادات با ارزشی به ما کرده‌اند. پیش نویس اولیه^۱ کتاب با همکاری رالف آبراهام^۱ صورت گرفته است. از وی به خاطر این همکاری سپاسگزاریم. ذکر اسامی تمام افرادی که در این کتاب یار ما بوده‌اند ممکن نیست، ولی مایلیم از همکاران خود مایکل هافمن^۲ و جوآن زیتس^۳ تشکر کنیم. همچنین، مری آندرسون^۴، جان بال^۵، فرانک گریش^۶، ریچارد کوخ^۷، اندرولنارد^۸، دیوید مریل^۹، ژانست

1. Ralph Abraham

2. Michael Hoffman

3. Joanne Seitz

4. Mary Anderson

5. John Ball

6. Frank Gerrish

7. Richard Koch

8. Andrew Lenard

9. David Merriell

(چ)



نلسون^۱، دان نورمن^۲، کیت فیلیپس^۳، آن پرلمن^۴، کنت راس^۵، دیان ساواگوت^۶، جوئل اسمولر^۷، رالف و باب ترومبا^۸، استیو وان^۹، آلن وین اشتاین^{۱۰}، و جان ویلکر^{۱۱} پیشنهادات با ارزشی به ما کرده‌اند.

در خاتمه ما یلیم از افرادی که در تهیه دستنویس و تولید کتاب ما را یاری داده‌اند سپاسگزاریم. بویژه از کانی کالیکا^{۱۲}، نورالی^{۱۳}، مارنی مک‌الینی^{۱۴}، رزماری استمپفول^{۱۵}، روت سوزوکی^{۱۶}، واکوکو ورکمن^{۱۷} به خاطر تایپ عالی دستنویس؛ هرب هولدن^{۱۸} از موء‌سسه تحقیقاتی استانفورد و جری کازدان^{۱۹} از دانشگاه پنسیلوانیا به خاطر پیشنهاد و تهیه شکل‌های کامپیوتری؛ و پیتر رنتس^{۲۰}، لاری اولسن^{۲۱}، و ربکا اشتاین^{۲۲} که توصیه‌های با ارزشی در جنبه‌های ریاضی و ویرایشی این کتاب کرده‌اند قدردانی کنیم.

نوامبر ۱۹۸۰

جرالد ای. مارسدن

آنتونی ج. ترومبا

-
- | | |
|------------------------|-------------------------|
| 1. Jeanette Nelson | 2. Dan Norman |
| 3. Keith Phillips | 4. Anne Perleman |
| 5. Kenneth Ross | 6. Diane Sauvageot |
| 7. Joel Smoller | 8. Ralph and Bob Tromba |
| 9. Steve Wan | 10. Alan Weinstein |
| 11. John Wilker | 12. Connie Calica |
| 13. Nora Lee | 14. Marnie McElhiney |
| 15. Rosemarie Stampful | 16. Ruth Suzuki |
| 17. Ikuko Workman | 18. Herb Holden |
| 19. Jerry Kazdan | 20. Peter Renz |
| 21. Larry Olsen | 22. Rebecca Stein |

فهرست مطالب

نمادگذاری

فصل اول	هندسه فضای اقلیدسی	۵
۱.۱	بردارها در فضای سه بعدی،	۵
۲.۱	ضرب داخلی،	۲۴
۳.۱	ضرب خارجی،	۳۳
۴.۱	مختصات استوانه‌ای و کروی،	۵۱
۵.۱	فضای اقلیدسی n بعدی،	۵۹
۷۳	تمرینات دوره‌ای برای فصل ۱،	۷۳

فصل دوم مشتگیری

۱.۲	هندسه توابع حقیقی،	۸۰
۲.۲ ✓	حدود و پیوستگی،	۱۰۱
۳.۲	مشتگیری،	۱۲۹
۴.۲	خواص مشتق،	۱۴۴
۵.۲	گرادیانها و مشتقات جهتی،	۱۶۰
۶.۲	مشتقات جزئی مکرر،	۱۷۳
۱۸۱	تمرینات دوره‌ای برای فصل ۲،	۱۸۱

فصل سوم توابع برداری

۱.۳	مسیرها و سرعت،	۱۸۹
۲.۳	طول قوس،	۲۰۲
(خ)		

۲۱۲	میدانهای برداری،	۳۰۳
۲۲۲	دیورژانس و کرل یک میدان برداری،	۴۰۳
۲۳۶	حساب دیفرانسیل برداری،	۵۰۳
۲۴۵	تمرینات دوره‌ای برای فصل ۳،	

فصل چهارم مشتقات مراتب بالاتر، ماکزیممها و مینیممها ۲۴۹

۱۰۴	قضیه تیلور،	۲۵۰
۲۰۴	اکسترممهای توابع حقیقی،	۲۵۷
۳۰۴	اکسترممهای مقید و ضرایب لاگرانژ،	۲۷۲
۴۰۴	قضیه تابع ضمنی (اختیاری)،	۲۹۰
۵۰۴	چند کاربرد،	۳۰۲
۳۱۰	تمرینات دوره‌ای برای فصل ۴،	

فصل پنجم انتگرالگیری ۳۱۷

۱۰۵	مقدمه،	۳۱۷
۲۰۵	انتگرال مضاعف روی یک مستطیل،	۳۲۹
۳۰۵	انتگرال مضاعف روی نواحی کلیتر،	۳۴۶
۴۰۵	تغییر ترتیب انتگرالگیری،	۳۵۶
۵۰۵	انتگرالهای مجازی (اختیاری)،	۳۶۲
۶۰۵	انتگرال سه گانه،	۳۶۹
۷۰۵	هندسه نگاهشده از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R}^2 ،	۳۸۰
۸۰۵	قضیه تغییر متغیر،	۳۸۸
۴۰۹	تمرینات دوره‌ای برای فصل ۵،	

فصل ششم انتگرالها روی مسیرها و سطوح ۴۱۵

۱۰۶	انتگرال مسیری،	۴۱۷
۲۰۶	انتگرالهای خط،	۴۲۳
۳۰۶	سطوح پارامتری شده،	۴۴۶

۴۵۶	مساحت یک سطح ،	۴۰۶
۴۷۱	انتگرالهای توابع اسکالر روی سطوح ،	۵۰۶
۴۸۱	انتگرالهای سطح توابع برداری ،	۶۰۶
۴۹۸	تمرینات دوره‌ای برای فصل ۶ ،	

فصل هفتم آنالیز برداری ۵۰۳

۵۰۴	قضیه گرین ،	۱۰۷
۵۱۹	قضیه استوکس ،	۲۰۷
۵۳۴	میدانهای بقا ،	۳۰۷
۵۴۷	قضیه گاوس ،	۴۰۷
	کاربرد در فیزیک و معادلات دیفرانسیل (اختیاری) ،	۵۰۷
۵۸۸	فرمهای دیفرانسیل (اختیاری) ،	۶۰۷
۶۰۶	تمرینات دوره‌ای برای فصل ۷ ،	

ضمیمه آ چند قضیه تکنیکی در باب مشتقگیری ۶۱۱

ضمیمه ب چند قضیه تکنیکی در باب انتگرالگیری ۶۲۹

ضمیمه پ جدولها ۶۴۵

۶۴۵	توابع مثلثاتی ،	۰۱
۶۴۷	مشتقات ،	۰۲
۶۴۹	انتگرالها ،	۰۳

ضمیمه ت جواب تمرینات با شماره‌های فرد ۶۵۷

ضمیمه ث چند علامت مهم ۷۲۵

۷۴۵ واژه نامه فارسی به انگلیسی

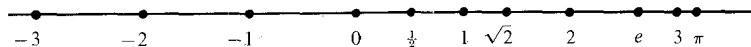
۷۲۷ واژه نامه انگلیسی به فارسی

نمادگذاری

فرض است که دانشجو حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع یک متغیر حقیقی را، همراه با هندسه^۶ تحلیلی در صفحه، مطالعه کرده است. بعضی از دانشجویان ممکن است با ماتریسها نیز آشنا باشند، گرچه آنچه لازم داریم در بخشهای ۳.۱ و ۵.۱ داده شده است. همچنین، واجب است دانشجو با توابع حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی نظیر $\sin x$ ، $\cos x$ ، e^x ، و $\log x$ آشنا باشد ($\log x$ یعنی لگاریتم طبیعی، که گاهی با $\ln x$ یا $\log_e x$ نموده می‌شود). دانشجو باید، ضمن جلو رفتن درس، قواعد اساسی مشتقگیری و انتگرالگیری از توابع یک متغیره، نظیر قاعده^۷ زنجیره‌ای، قاعده^۸ خارج قسمت، انتگرالگیری به طریقه^۹ جزء به جزء، و غیره، را بداند یا آنها را مرور نماید.

در اینجا نمادهایی را مرور می‌کنیم که بعداً^{۱۰}، و اغلب بدون ذکر صریح، به کار خواهند رفت. این بخش را می‌توان سریع خواند؛ بعداً^{۱۱} چنانچه لازم شد، می‌توان به آن مراجعه کرد.

گردایه^{۱۲} تمام اعداد حقیقی با \mathbb{R} نموده می‌شود. لذا، \mathbb{R} مشتمل است بر اعداد صحیح گردایه^{۱۳} $\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots$ ؛ اعداد گویای p/q ، که در آنها p و q صحیح‌اند ($q \neq 0$)؛ و اعداد گنگ نظیر $\sqrt{2}$ ، π ، e ، و غیره. اعضای \mathbb{R} را می‌توان نقاطی بر خط اعداد حقیقی به صورت شکل ۱.۰ تجسم کرد.



شکل ۱.۰

تمایش هندسی نقاط بر خط اعداد حقیقی

وقتی می‌نویسیم $a \in \mathbb{R}$ یعنی a عضوی از مجموعه \mathbb{R} است؛ به عبارت دیگر، a یک عدد حقیقی است. به ازای دو عدد حقیقی a و b که $a < b$ (یعنی، a کوچکتر از b است)، می‌توان بازهٔ بسته $[a, b]$ ، مرکب از تمام x هایی که $a \leq x \leq b$ و بازهٔ باز $]a, b[$ ، مرکب از تمام x هایی که $a < x < b$ را تشکیل داد (در کتب دیگر اغلب بازهٔ باز با (a, b) نموده می‌شود). به همین نحو، می‌توان بازه‌های نیمباز $]a, b]$ و $[a, b[$ را تشکیل داد (شکل ۲۰۰).



شکل ۲۰۰

نمایش هندسی بازه‌های $[a, b]$ ، $]c, d[$ ، و $[e, f[$

قدر مطلق عدد $a \in \mathbb{R}$ را به صورت $|a|$ نوشته و به شکل زیر تعریف می‌کنیم:

$$|a| = \begin{cases} a, & \text{اگر } a \geq 0 \\ -a, & \text{اگر } a < 0 \end{cases}$$

مثلاً، $|3| = 3$ ، $|-3| = 3$ ، $|0| = 0$ ، و $|-6| = 6$. نامساوی $|a + b| \leq |a| + |b|$. همواره برقرار است. فاصله a تا b با $|a - b|$ داده می‌شود. مثلاً، فاصله 6 تا 10 مساوی 4 و فاصله -6 تا 3 برابر 9 است.

اگر بنویسیم $A \subset \mathbb{R}$ ، یعنی A زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R} است. مثلاً، A می‌تواند مجموعهٔ اعداد صحیح $\{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \dots\}$ باشد. مثالی دیگر از زیرمجموعهٔ \mathbb{R} مجموعهٔ اعداد گویای \mathbb{Q} است. به‌طور کلی، به‌ازای دو گردایه از اشیاء (یعنی، دو مجموعهٔ A و B ، $A \subset B$ یعنی A زیرمجموعهٔ B است؛ یعنی، هر عضو A عضو B نیز می‌باشد. علامت $A \cup B$ یعنی اجتماع A و B ، و آن عبارت است از گردایه‌ای که اعضای عضوهای A یا B اند. مثلاً،

$$\{\dots, -3, -2, -1, 0\} \cup \{-1, 0, 1, 2, \dots\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}.$$

به همین نحو، $A \cap B$ یعنی اشتراک A و B ، و آن عبارت است از مجموعه‌ای که از تمام اعضای مشترک A و B تشکیل شده است. مثلاً، اشتراک دو مجموعهٔ فوق $\{-1, 0\}$ است. برای مجموعهٔ اعضای A که در B نیستند می‌نویسیم $A \setminus B$. مثلاً،

$$\{\dots, -3, -2, -1, 0\} \setminus \{-1, 0, 1, 2, \dots\} = \{\dots, -3, -2\}.$$

همچنین، می‌توان مجموعه‌ها را به صورت زیر نیز مشخص کرد:

$$\{a \in \mathbb{R} \mid \text{عددی صحیح است } a\} = \{\dots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$$

$$\{a \in \mathbb{R} \mid \text{عدد صحیح زوج است } a\} = \{\dots, -2, 0, 2, 4, \dots\}$$

$$\{x \in \mathbb{R} \mid a \leq x \leq b\} = [a, b]$$

تابع $f: A \rightarrow B$ قاعده‌ای است که به هر $a \in A$ عضو مشخص $f(a)$ از B را مربوط می‌کند.

این امر که تابع f عضو a را به $f(a)$ می‌برد با علامت $a \mapsto f(a)$ نموده می‌شود. مثلاً،

با $f(x) = x^3/(1-x)$ به هر $x \neq 1$ در \mathbb{R} عدد $x^3/(1-x)$ را مربوط می‌کند. می‌توان تابع f

را با قاعده‌ای برای $f(x)$ مشخص کرد. مثلاً، "تابع f در بالا را می‌توان با قاعده"

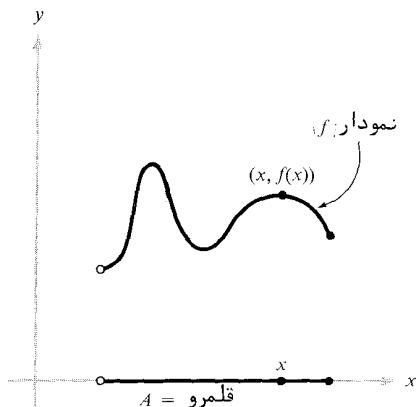
$x \mapsto x^3/(1-x)$ تعریف کرد.

اگر $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، $A \subset \mathbb{R}$ یعنی f به هر $x \in A$ مقداری مانند $f(x)$ از \mathbb{R} را مربوط

می‌کند. مجموعه A را قلمرو f می‌نامند، و گوییم f دارای برد \mathbb{R} است، زیرا مقادیر f از

آن گرفته می‌شود. نمودار f از نقاط $(x, f(x))$ در صفحه تشکیل شده است (شکل ۳۰۰). به

طور کلی،



شکل ۳۰۰

نمودار یک تابع با بازه نیمباز A به عنوان قلمرو

نگاشت (= تابع = تبدیل) $f: A \rightarrow B$ ، که در آن A و B مجموعه‌اند، قاعده‌ای است که

به هر $x \in A$ نقطه^۶ مشخصی مانند $f(x) \in B$ مربوط می‌کند.

نماد $\sum_{i=1}^n a_i$ یعنی $a_1 + \dots + a_n$ ، که در آن a_1, \dots, a_n اعداد داده شده‌ای

هستند. مجموع اولین n عدد صحیح عبارت است از

$$1 + 2 + \dots + n = \sum_{i=1}^n i = \frac{n(n+1)}{2}$$

مشتق تابع $f(x)$ با $f'(x)$ یا

$$\frac{df}{dx}$$

نموده، و انتگرال معین به صورت

$$\int_a^b f(x) dx$$

نوشته می‌شود. اگر قرار دهیم $y = f(x)$ ، مشتق با

$$\frac{dy}{dx}$$

نیز نموده می‌شود.

فرض است که خواننده با قاعده^۶ زنجیره‌ای، انتگرال‌گیری به طریقه^۶ جزء به جزء، و دیگر قواعد حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع یک متغیره آشناست. بخصوص، طرز مشتق‌گیری و انتگرال‌گیری از توابع نمایی، لگاریتمی، و مثلثاتی را می‌داند. در ضمیمه^۶ پ جدول کوتاهی از مشتقها و انتگرالها آمده است که نیازهای این کتاب را برمی‌آورد.

نمادهای زیر را مترادفا^۶ به کار خواهیم برد: $e^x = \exp(x)$ ، $\ln x = \log x$ ، و $\sin^{-1} x = \arcsin x$

فصل اول

هندسه فضای اقلیدسی

چهارتاها را از هامیلتون داریم . . . و اینها برای هرکس که به نوعی لمسشان کرده باشد شوم بوده‌اند. بردار موجودی است بی حاصل . . . و هیچ مخلوقی تا بحال از آن سود نبرده است.

لرد کلوین

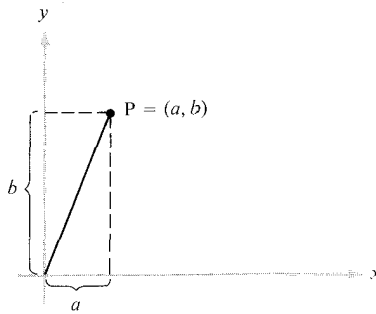
در این فصل اعمال اساسی بر بردارها در فضای سه‌بعدی را در نظر می‌گیریم: جمع برداری، ضرب اسکالر، و ضربهای نقطه‌ای و خارجی در بخش ۵.۱، بعضی از این مفاهیم به فضای n -بعدی تعمیم یافته، و برخی از خواص ماتریسها که در فصول ۲ و ۳ مورد نیازند مرور مختصر خواهند شد.

۱.۱ بردارها در فضای سه‌بعدی

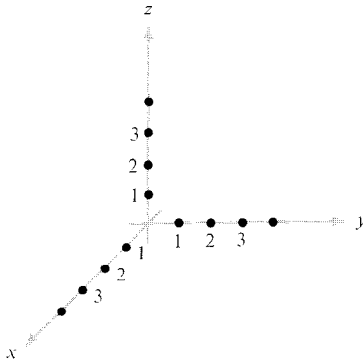
به یاد می‌آوریم که نقاط P در صفحه را می‌توان با جفت‌های مرتب (a, b) از اعداد حقیقی به نام مختصات دکارتی نمایش داد. اگر دو خط عمود برهم کشیده و آنها را محورهای x و y بنامیم، می‌توان عمودهایی از P برای این محورها مثل شکل ۱.۱.۱ فرود آورد. a مؤلفه x و b مؤلفه y نقطه P است.

به همین نحو، نقاط در فضا را می‌توان با سه‌تاییهای مرتب از اعداد حقیقی نمایش داد. برای ساختن چنین نمایش، سه خط دو به دو متعامد که در نقطه‌ای از فضا تلاقی دارند را اختیار می‌کنیم. این خطوط را محور x ، محور y ، و محور z ، و نقطه تلاقی را مبدأ

(این نقطه مرجع ماست) می‌نامند. مجموعهٔ محورهای اغلب دستگاه مختصات نامیده، و مانند شکل ۲۰۱۰۱ رسم می‌شود.



شکل ۱۰۱۰۱
مختصات دکارتی در صفحه

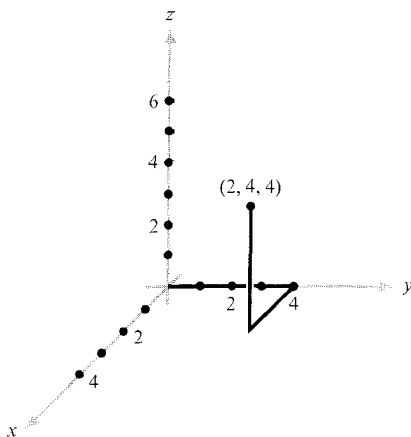


شکل ۲۰۱۰۱
مختصات دکارتی در فضا

هرگاه یک عدد حقیقی را با نقطه‌ای بر این محورها (به صورتی که در محور اعداد حقیقی کردیم) یکی کنیم، آنگاه می‌توانیم به هر نقطه P در فضا سه تایی مرتب منحصر به فردی مانند (a, b, c) از اعداد حقیقی را مربوط سازیم و، به عکس، به هر سه تایی می‌توانیم نقطه

منحصر به فردی در فضا را مربوط نماییم .

فرض کنیم سه تایی $(0, 0, 0)$ نظیر مبدأ دستگاه مختصات بوده ، و سهمهای محورهای جهات مثبت را نشان دهند . مثلاً " سه تایی $(2, 4, 4)$ نمایش نقطه‌ای است در فاصله 2 واحد در جهت مثبت در امتداد محور x ، 4 واحد در جهت مثبت در امتداد محور y ، و 4 واحد در جهت مثبت در امتداد محور z . این را می‌توان با هر ترتیب انجام داد (شکل ۳.۱.۱) .



شکل ۳.۱.۱

نمایش هندسی نقطه $(2, 4, 4)$ در مختصات دکارتی

چون به این ترتیب می‌توان نقاط در فضا و سه تاییهای مرتب را به هم مربوط کرد ، ما اغلب عبارت " نقطه (a, b, c) " را به جای عبارت طولیتر " نقطه P نظیر به سه تایی (a, b, c) " به کار می‌بریم . اگر سه تایی (a, b, c) نظیر به P باشد ، گوییم a مختص x (یا مختص اول) ، b مختص y (یا مختص دوم) ، و c مختص z (یا مختص سوم) است . با این روش نمایش نقاط ، می‌بینیم که محور x عبارت است از نقاطی به شکل $(a, 0, 0)$ ، که در آن a عدد حقیقی دلخواهی است ، محور y عبارت است از نقاط $(0, a, 0)$ ، و محور z عبارت است از نقاط $(0, 0, a)$. همچنین ، مرسوم است که نقاط در فضا را با حروف x ، y ، و z به جای a ، b ، و c نشان می‌دهند . لذا ، سه تایی (x, y, z) نمایش نقطه‌ای است که

مختص اولش x ، مختص دومش y ، و مختص سومش z می باشد.

آنچه هم اکنون ساختیم مدلی است از فضای سه بعدی. در چند بند بعد خواص ریاضی این مدل را بررسی کرده، و سپس تعبیر هندسی آن را در نظر می گیریم.

ما نمادهای زیر را برای خط، صفحه، و فضای سه بعدی به کار خواهیم برد.
(یک) خط حقیقی با \mathbb{R}^1 نموده می شود (لذا، \mathbb{R} و \mathbb{R}^1 یکی هستند).

(دو) مجموعه تمام جفتهای مرتب (x, y) از اعداد حقیقی با \mathbb{R}^2 نموده می شود.

(سه) مجموعه تمام جفتهای مرتب (x, y, z) از اعداد حقیقی با \mathbb{R}^3 نموده می شود.

وقتی کلاً از \mathbb{R}^1 ، \mathbb{R}^2 ، و \mathbb{R}^3 صحبت می کنیم، می نویسیم \mathbb{R}^n ، n مساوی 1، 2، یا 3. یا \mathbb{R}^m ، $m = 1, 2, 3$.

عمل جمع را می توان از \mathbb{R} به \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 تعمیم داد. در مورد \mathbb{R}^3 این عمل به صورت زیر

انجام می شود. به ازای دوسه تایی (x, y, z) و (x', y', z') ، مجموع آنها را با

$$(x, y, z) + (x', y', z') = (x + x', y + y', z + z')$$

تعریف می کنیم.

$$(1, 1, 1) + (2, -3, 4) = (3, -2, 5) \quad \text{مثال ۱.}$$

$$(x, y, z) + (0, 0, 0) = (x, y, z)$$

$$(1, 7, 3) + (2, 0, 6) = (3, 7, 9)$$

عنصر $(0, 0, 0)$ عنصر صفر \mathbb{R}^3 نام دارد. عنصر $(-x, -y, -z)$ معکوس جمعی (x, y, z)

نامیده می شود، و ما به جای $(x, y, z) + (-x', -y', -z')$ می نویسیم $(x, y, z) - (x', y', z')$. دو عمل ضرب بسیار مهم در \mathbb{R}^3 وجود دارند. یکی از اینها، به نام ضرب داخلی،

به هر جفت عنصر \mathbb{R}^3 عددی حقیقی نسبت می دهد. ما ضرب داخلی را مشروحاً "در بخش

۲.۱ مطرح خواهیم کرد. عمل ضرب مهم دیگر برای \mathbb{R}^3 ضرب اسکالر نام دارد (اصطلاح

"اسکالر" در اینجا مترادف "عدد حقیقی" است). این ضرب اسکالرها (اعداد

حقیقی) و عناصر \mathbb{R}^3 (جفتهای مرتب) را ترکیب کرده عنصرهایی از \mathbb{R}^3 به صورت زیر به

دست می دهد: به ازای اسکالر α و سه تایی (x, y, z) ، ضرب اسکالر یا حاصل ضرب اسکالر

را با

$$\alpha(x, y, z) = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

تعریف می کنیم.

مثال ۲. $2(4, e, 1) = (2 \cdot 4, 2 \cdot e, 2 \cdot 1) = (8, 2e, 2)$

$6(1, 1, 1) = (6, 6, 6)$

$1(x, y, z) = (x, y, z)$

$0(x, y, z) = (0, 0, 0)$

$$\begin{aligned} (\alpha + \beta)(x, y, z) &= ((\alpha + \beta)x, (\alpha + \beta)y, (\alpha + \beta)z) \\ &= (\alpha x + \beta x, \alpha y + \beta y, \alpha z + \beta z) \\ &= \alpha(x, y, z) + \beta(x, y, z) \end{aligned}$$

از تعاریف فوق " نتیجه می شود که جمع و ضرب اسکالر برای \mathbb{R}^3 در اتحادهای زیر صدق

می کنند:

(یک) $(\alpha\beta)(x, y, z) = \alpha(\beta(x, y, z))$ (شرکت پذیری)

(دو) $\begin{cases} (\alpha + \beta)(x, y, z) = \alpha(x, y, z) + \beta(x, y, z) \\ \alpha((x, y, z) + (x', y', z')) = \alpha(x, y, z) + \alpha(x', y', z') \end{cases}$ (پخش پذیری)

(چهار) $\begin{cases} \alpha(0, 0, 0) = (0, 0, 0) \\ 0(x, y, z) = (0, 0, 0) \end{cases}$ (خواص عناصر صفر)

(شش) $1(x, y, z) = (x, y, z)$ (خاصیت عنصر همانی)

جمع در \mathbb{R}^2 ، همانند در \mathbb{R}^3 ، به صورت

$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$

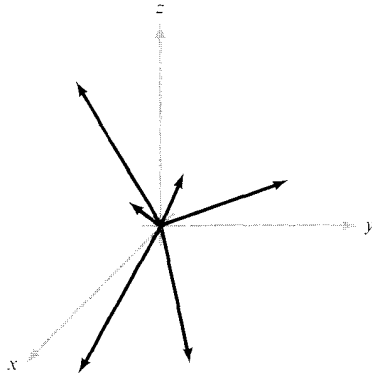
و ضرب اسکالر به صورت

$\alpha(x, y) = (\alpha x, \alpha y)$

تعریف می شود. ما اغلب \mathbb{R}^2 را با مجموعه سه تاییهای $(x, y, 0)$ یکی کرده و، به زبان هندسه، \mathbb{R}^2 را صفحه (یا دقیقتر، صفحه xy) می نامیم.

حال به هندسه مدل خود رومی آوریم. یکی از مفیدترین ابزار در ریاضیات و کاربردهای آن مفهوم بردار است. بردار (هندسی) را پاره خط جهت داری تعریف می کنیم که از مبدأ شروع می شود؛ یعنی، پاره خطی با اندازه و جهت معین که نقطه شروعش مبدأ است. نشنیده اید که خلبان بگوید: " ما در حال فرود برداری روی باند هستیم؟" او به برداری اشاره دارد که جهت و فاصله هواپیما تا باند را به دست می دهد. حاجت نیست بگوییم که در اینجا جهت و فاصله هر دو مهمند.

شکل ۴.۱.۱ چند بردار را نشان می دهد. لذا، بردارها را می توان سهمهایی تصور



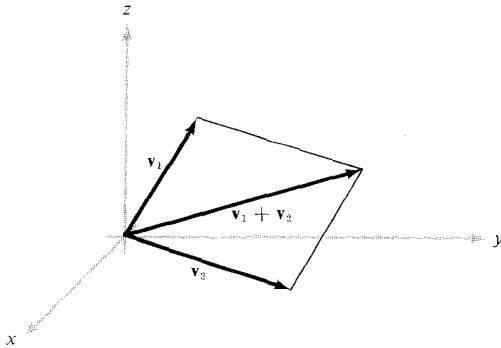
شکل ۴.۱.۱

به‌طور هندسی، بردارها سهمیهایی تصور می‌شوند که از مبدأ صادر شده‌اند.

کرد که از مبدأ شروع می‌شوند. بردارها معمولاً به صورت \mathbf{v} چاپ می‌شوند. با استفاده از این تعریف بردار، می‌توان به هر بردار \mathbf{v} نقطه (x, y, z) در فضا که به آن ختم می‌شود را مربوط کرد و، به عکس، به هر نقطه (x, y, z) در فضا می‌توان بردار \mathbf{v} را مربوط ساخت. لذا \mathbf{v} را با (x, y, z) یکی می‌کنیم، و می‌نویسیم $\mathbf{v} = (x, y, z)$. به این دلیل، عناصر \mathbb{R}^3 نه تنها سه تاییهای مرتبی از اعداد حقیقی‌اند، بلکه بردار نیز نامیده می‌شوند. سه تایی $(0, 0, 0)$ با $\mathbf{0}$ نموده می‌شود.

گوییم دو بردار مساوی‌اند اگر و فقط اگر یک جهت و یک اندازه داشته باشند. این شرط را می‌توان به‌طور جبری بیان کرد و گفت هرگاه $\mathbf{v}_1 = (x, y, z)$ و $\mathbf{v}_2 = (x', y', z')$ ، آنگاه $\mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ اگر و فقط اگر $x = x', y = y', z = z'$

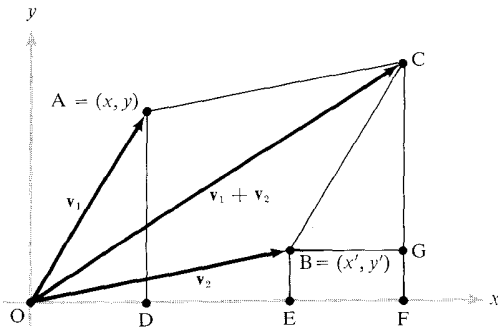
به‌طور هندسی، جمع برداری را چنین تعریف می‌کنیم. در صفحه بردارهای \mathbf{v}_1 و \mathbf{v}_2 (ر.ک. شکل ۵.۱.۱)، متوازی‌الاضلاعی می‌سازیم که یک ضلعش \mathbf{v}_1 و ضلع مجاور این ضلع \mathbf{v}_2 باشد. در این صورت، مجموع $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ پاره‌خط جهت‌دار در امتداد قطر متوازی‌الاضلاع است. همان‌طور که بعداً خواهیم دید، این تعبیر هندسی جمع برداری در بسیاری از وضعیتهای فیزیکی مفید است. به عنوان یک مثال ساده، پرنده یا هواپیمایی را در نظر می‌گیریم که با سرعت \mathbf{v}_1 در بادی با سرعت \mathbf{v}_2 پرواز می‌کند. سرعت برآیند، یعنی $\mathbf{v}_1 + \mathbf{v}_2$ ، چیزی است



شکل ۵.۱.۱
هندسه جمع برداری

که شما می بینید .

برای نشان دادن سازگاری تعریف هندسی جمع با تعریف جبری ما ، باید نشان دهیم که $v_1 + v_2 = (x + x', y + y', z + z')$. این نتیجه را در صفحه ثابت کرده ، و از خواننده می خواهیم حکم را برای فضای سه بعدی تنظیم کند . لذا ، می خواهیم نشان دهیم هرگاه $v_1 = (x, y)$ و $v_2 = (x', y')$ ، آنگاه $v_1 + v_2 = (x + x', y + y')$. در شکل ۶.۱.۱ فرض می کنیم $v_1 = (x, y)$ برداری با نقطه انتهای A بوده ، و



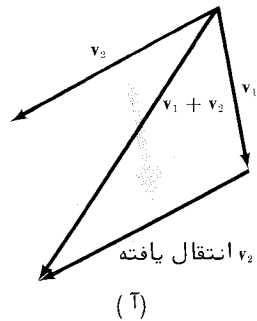
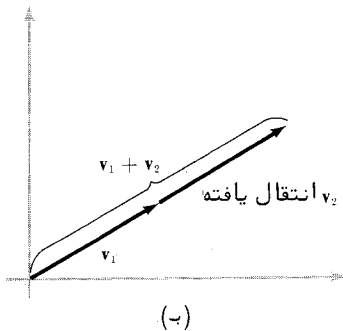
شکل ۶.۱.۱

ساختن برهان $(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y')$

$v_2 = (x', y')$ برداری با نقطه انتهایی B باشد. طبق تعریف، بردار $v_1 + v_2$ به رأس C از متوازی الاضلاع OBCA منتهی می شود. از اینرو، برای تحقیق $v_1 + v_2 = (x + x', y + y')$ کافی است نشان دهیم که مختصات C عبارتند از $(x + x', y + y')$.

از شکل ۶.۱۰.۱ واضح است که مثلث OAD با مثلث BCG هممنهشت است. بنابراین رابطه هممنهشتی، $BG = OD$ و چون $BGFE$ مستطیل است، داریم $EF = BG$. به علاوه، $OD = x$ و $OE = x'$. از اینرو، $OE = x + x'$ چون $OF = EF + OE$. نتیجه می شود که $OF = x + x'$. این نشان می دهد که مختص x نقطه C عبارت است از $x + x'$. اثبات برای مختص y به همین نحو است. با استدلالی مشابه برای ربعهای دیگر، می بینیم که تعریف هندسی جمع برداری با تعریف جبری برحسب مختصات معادل است.

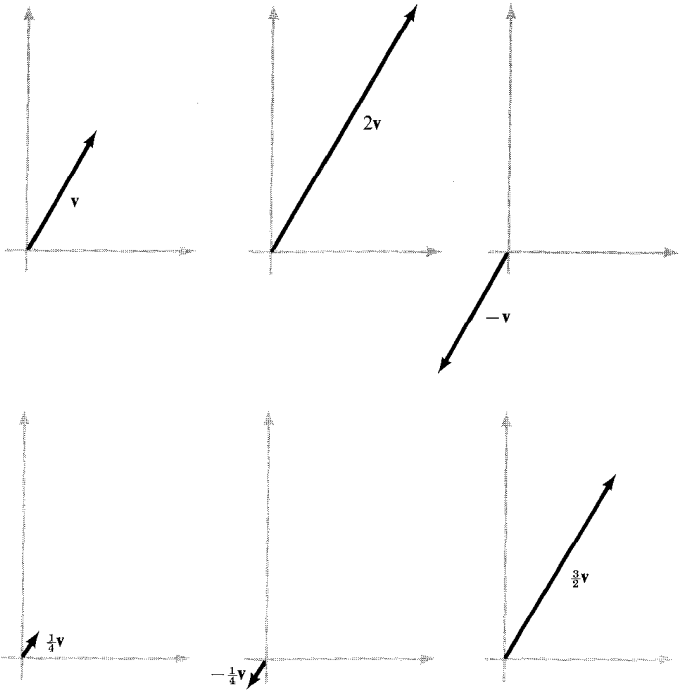
شکل ۷.۱۰.۱ (آ) شیوه دیگر نظاره به جمع برداری را نشان می دهد؛ یعنی، پاره خط جهتدار نمایش بردار v_2 را طوری (بدون دوران) انتقال می دهیم که از انتهای بردار v_1 شروع شود. نقطه انتهایی پاره خط جهتدار حاصل نقطه انتهایی بردار $v_1 + v_2$ است. توجه کنید که، وقتی v_2 و v_1 همخطاند، مثلث فرو می ریزد. این وضع در شکل ۷.۱۰.۱ (ب)



شکل ۷.۱۰.۱

جمع برداری را می توان برحسب مثلثها مانند متوازی الاضلاعها، مثل شکل (آ)، تعبیر کرد. اما، همانطور که از شکل (ب) دیده می شود، وقتی v_2 و v_1 همخطاند، مثلث فرو می ریزد.

مضارب اسکالر بردارها تعبیر هندسی مشابه دارند. اگر α اسکالر و v بردار باشد، αv برداری را تعریف می‌کند که α برابر v طولیتر بوده و همجهت v است اگر $\alpha > 0$ ، ولی اگر $\alpha < 0$ ، مختلف‌الجهت با آن خواهد بود. شکل ۸.۱۰.۱ چند مثال را نشان می‌دهد.



شکل ۸.۱۰.۱

چند مضرب اسکالر از بردار v

با استفاده از استدلالی وابسته به مثلثهای متشابه، می‌توان ثابت کرد هرگاه

$$v = (x, y, z) \text{، آنگاه}$$

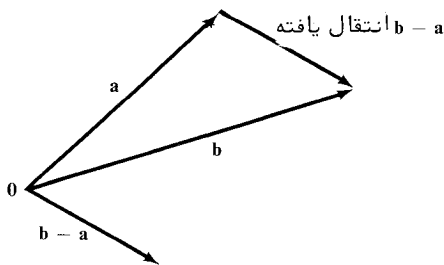
(۱)

$$\alpha v = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$$

یعنی، تعریف هندسی با تعریف جبری یکی است.

چگونه بردار $b - a$ را به‌طور هندسی نمایش دهیم؟ چون $a + (b - a) = b$

بردارى است که وقتى با a جمع شود حاصل b مى‌گردد. در پرتو این، مى‌توان نتیجه‌گرفت که $b - a$ بردارى موازى و هم‌اندازه با پاره‌خط جهتدارى است که از نقطه انتهایى a شروع و به نقطه انتهایى b ختم مى‌شود (ر.ک. شکل ۹.۱.۱).



شکل ۹.۱.۱

هندسه تفریق بردارى

فرض کنیم i بردارى بانقطه انتهایى $(1, 0, 0)$ ، j بردارى بانقطه انتهایى $(0, 1, 0)$ و k بردارى بانقطه انتهایى $(0, 0, 1)$ باشد. با استفاده از فرمول (۱) بالا، درمى‌یابیم که اگر $v = (x, y, z)$ ،

$$v = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1) = xi + yj + zk$$

از اینرو، مى‌توان هر بردار در فضای سه‌بعدى را برحسب بردارهای i ، j ، و k نمایش داد. به این دلیل، بردارهای i ، j ، و k را بردارهای پایه متعارف برای \mathbb{R}^3 مى‌نامند.

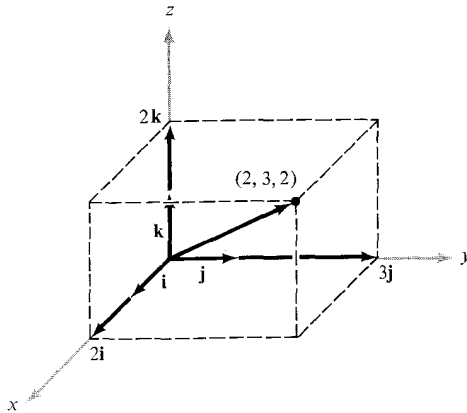
مثال ۳. بردار بانقطه انتهایى $(2, 3, 2)$ عبارت است از $2k + 3j + 2i$ ، و بردار بانقطه انتهایى $(0, -1, 4)$ عبارت است از $4k - j$ (ر.ک. شکل ۱۰.۱.۱). جمع و ضرب اسکالر را مى‌توان برحسب بردارهای پایه متعارف به صورت زیر نوشت:

$$(xi + yj + zk) + (x'i + y'j + z'k) = (x + x')i + (y + y')j + (z + z')k$$

و

$$\alpha(xi + yj + zk) = (\alpha x)i + (\alpha y)j + (\alpha z)k$$

به خاطر تناظر بین بردارها و نقاط، گاهی در شرایطى که a بردار تعریف شده است نقطه a مى‌نامیم. خواننده باید درک کند که منظور ما از این نقطه نقطه انتهایى بردار a

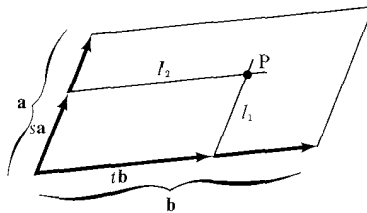


شکل ۱۰.۱.۱

نمایش $(2, 3, 2)$ برحسب پایه متعارف i, j, k و

است.

مثال ۴. به عنوان مثالی از موارد استعمال بردارها، نقاطی را توصیف می‌کنیم که در متوازی الاضلاعی به اضلاع مجاور بردارهای a و b قرار دارند. شکل ۱۱.۱.۱ را در نظر می‌گیریم. اگر P نقطه‌ای در متوازی‌الاضلاع مذکور باشد و از



شکل ۱۱.۱.۱

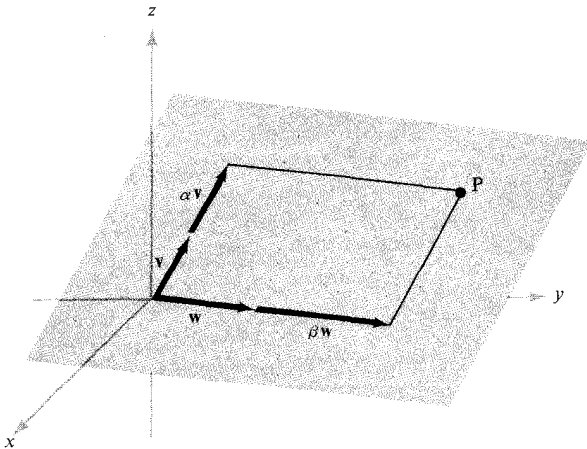
توصیف نقاط داخل متوازی‌الاضلاع تشکیل شده از بردارهای a و b

P خطوط l_1 و l_2 را به ترتیب موازی بردارهای a و b رسم کنیم، می‌بینیم که l_1 ضلع

متوازی‌الاضلاع را که با بردار \mathbf{b} معین می‌شود در نقطه‌ای مانند $t\mathbf{b}$ قطع می‌کند، که $0 \leq t \leq 1$. به همین نحو، l_2 ضلع معین شده با بردار \mathbf{a} را در نقطه‌ای مانند $s\mathbf{a}$ قطع می‌کند، که $0 \leq s \leq 1$.

چون نقطه P انتهای قطر متوازی‌الاضلاع به اضلاع مجاور $t\mathbf{b}$ و $s\mathbf{a}$ است، اگر بردار با نقطه P انتهای P باشد، می‌بینیم که $\mathbf{v} = s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$. لذا، تمام نقاط متوازی‌الاضلاع نقاط انتهای بردارهایی هستند به شکل $s\mathbf{a} + t\mathbf{b}$ ، که $0 \leq t \leq 1$ و $0 \leq s \leq 1$. با برگشتن این مراحل، به آسانی می‌بینیم که تمام بردارها به این شکل به متوازی‌الاضلاع ختم می‌شوند.

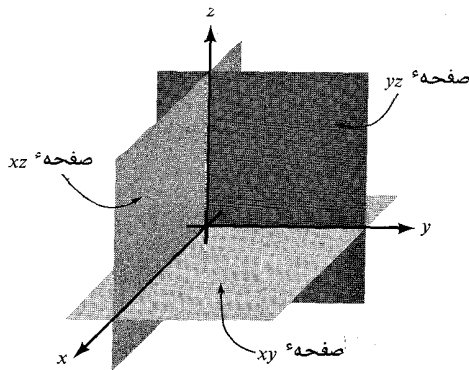
چون در خط ماربر مبداء یک صفحه را معین می‌کنند، دو بردار غیرموازی نیز یک صفحه را معین خواهند کرد. اگر استدلال مثال فوق را تکرار کنیم، می‌بینیم که صفحه تشکیل شده از دو بردار غیرموازی \mathbf{v} و \mathbf{w} از تمام نقاط به شکل $\alpha\mathbf{v} + \beta\mathbf{w}$ تشکیل شده است، که در آن α و β روی اعداد حقیقی تغییر می‌کنند. این مطلب از این امر ناشی می‌شود که هر نقطه P در صفحه تشکیل شده از دو بردار رأس مقابل متوازی‌الاضلاع حاصل از $\alpha\mathbf{v}$ و $\beta\mathbf{w}$ است، که در آنها α و β اسکالرهایی می‌باشند (ر.ک. شکل ۱۲.۱.۱).



شکل ۱۲.۱.۱

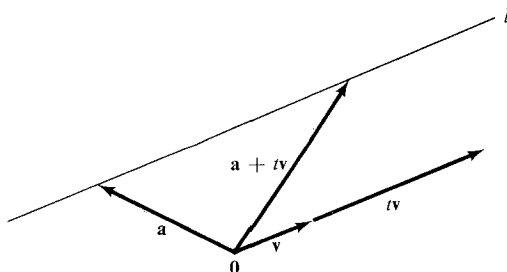
توصیف نقاط P در صفحه تشکیل شده از بردارهای \mathbf{v} و \mathbf{w}

صفحه^۶ معین شده به وسیله^۶ v و w صفحه^۶ تولید شده به وسیله^۶ v و w نامیده می شود. وقتی $v = \gamma w$ ، یعنی v مضربی از w ($w \neq 0$) باشد ، v و w موازیند و صفحه^۶ به خطی مستقیم تنبیه می شود. وقتی $v = w = 0$ (بردارهای صفر) ، فقط یک نقطه به دست می آوریم. سه صفحه^۶ خاص وجود دارند که در یک دستگاه مختصات به طور طبیعی ظاهر می شوند و بعدها برای ما مفید خواهند بود. صفحه^۶ xy صفحه^۶ تولید شده به وسیله^۶ بردارهای i و j ، صفحه^۶ yz صفحه^۶ تولید شده به وسیله^۶ j و k ، و صفحه^۶ xz صفحه^۶ تولید شده به وسیله^۶ i و k است. این صفحات در شکل ۱۳.۱.۱ نموده شده اند.



شکل ۱۳.۱.۱
سه صفحه^۶ مختصات

صفحات و خطوط اشیایی هستند هندسی که با معادلات نموده می شوند. ما تا بخش ۳.۱ از بررسی معادلات نمایش صفحات طرفه می رویم. اما ، با استفاده از تعبیر هندسی جمع برداری و ضرب اسکالر ، می توان معادله^۶ خط l ماربر نقطه^۶ انتهایی بردار a ، همراستا با بردار v ، را به دست آورد (ر.ک. شکل ۱۴.۱.۱). وقتی t تمام مقادیر حقیقی را بگیرد ، نقاط به شکل tv جمع مضارب اسکالر بردار v اند. و در نتیجه ، تمام نقاط خط مار بر مبدأ^۶ در راستای v می باشند. چون هر نقطه^۶ بر l نقطه^۶ انتهایی قطر متوازی الاضلاعی به اضلاع^۶ a و tv ، به ازای مقدار مناسبی از t ، است ، پس تمام نقاط واقع بر l به شکل $a + tv$ می باشند. لذا ، خط l را می توان با معادله^۶ $I(t) = a + tv$ بیان کرد. گوییم



شکل ۱۴۰.۱۰.۱

خط l ، که با معادله پارامتری $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$ داده شده است، همراستای \mathbf{v} بوده و از نوک \mathbf{a} می‌گذرد.

به طور پارامتری، با پارامتر t ، بیان شده است. در $t = 0$ ، $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a}$. وقتی t افزایش یابد، نقطه $\mathbf{l}(t)$ از \mathbf{a} در جهت \mathbf{v} دور می‌شود. وقتی t از $t = 0$ در مقادیر منفی کاهش یابد، $\mathbf{l}(t)$ در جهت $-\mathbf{v}$ دور می‌شود.

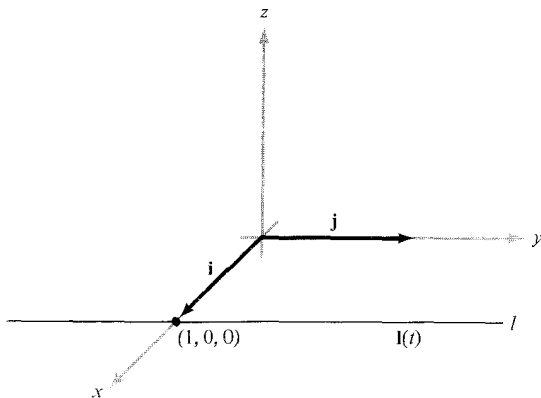
یک خط ممکن است پارامتری‌سازیهایی زیادی داشته باشد. اینها را می‌توان با انتخاب نقطه‌ای غیر از \mathbf{a} بر خط داده شده و تشکیل معادله پارامتری خط با شروع در آن نقطه و در راستای \mathbf{v} به دست آورد. مثلاً، "نقطه انتهایی $\mathbf{a} + \mathbf{v}$ بر خط $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$ واقع است؛ و لذا $\mathbf{l}_1(t) = (\mathbf{a} + \mathbf{v}) + t\mathbf{v}$ همان خط را نمایش می‌دهد. با توجه به اینکه اگر $\alpha \neq 0$ ، بردار $\alpha\mathbf{v}$ همان جهت \mathbf{v} (یا مخالف آن) را دارد، می‌توان پارامتری‌سازیهایی دیگری نیز به دست آورد. مثلاً، " $\mathbf{l}_2(t) = \mathbf{a} + t\alpha\mathbf{v}$ پارامتری‌سازی دیگری از $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t\mathbf{v}$ است.

مثال ۵. معادله خط ماربر نقطه $(1, 0, 0)$ را در راستای \mathbf{j} تعیین کنید.
خط مطلوب را می‌توان به طور پارامتری به صورت $\mathbf{l}(t) = \mathbf{i} + t\mathbf{j}$ بیان کرد (شکل ۱۵۰.۱۰.۱).
بر حسب مختصات، داریم

$$\mathbf{l}(t) = (1, 0, 0) + t(0, 1, 0) = (1, t, 0)$$

همچنین، می‌توان معادله خط مار بر نقاط انتهایی دو بردار معلوم \mathbf{a} و \mathbf{b} را به دست آورد.

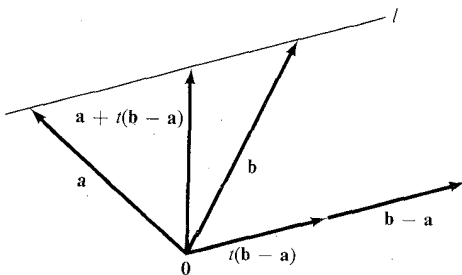
چون بردار $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ موازی پاره خط جهتدار از \mathbf{a} تا \mathbf{b} است، آنچه واقعا می‌خواهیم



شکل ۱۵.۱۰.۱

خط l ، که به طور پارامتری با $l(t) = i + tj$ بیان شده، از نوک i در راستای j می‌گذرد.

انجام دهیم محاسبه معادلات پارامتری خط مار بر a در راستای $b - a$ است (شکل ۱۶.۱۰.۱) لذا، $l(t) = a + t(b - a)$ ، یعنی $l(t) = (1 - t)a + tb$ ، وقتی t از ۰ تا ۱ افزایش



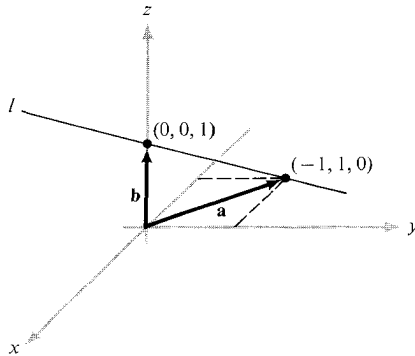
شکل ۱۶.۱۰.۱

خط l ، که به طور پارامتری با $l(t) = a + t(b - a)$ داده شده، از نوکهای a و b می‌گذرد.

یابد، $t(b - a)$ به صورت بردار صفر شروع شده و (با ماندن در جهت $b - a$) طولش

افزایش می‌یابد تا $t = 1$ که مساوی بردار $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ است. لذا، در $\mathbf{l}(t) = \mathbf{a} + t(\mathbf{b} - \mathbf{a})$ ، وقتی t از 0 تا 1 افزایش یابد، بردار $\mathbf{l}(t)$ از نقطه انتهایی \mathbf{a} تا نقطه انتهایی \mathbf{b} در امتداد پاره‌خط جهت‌دار از \mathbf{a} تا \mathbf{b} حرکت می‌کند.

مثال ۶. معادله خط ماربر $(-1, 1, 0)$ و $(0, 0, 1)$ را بیابید (ر.ک. شکل ۱۷.۱.۱).



شکل ۱۷.۱.۱

حالت خاصی از شکل قبل، که در آن $\mathbf{a} = (-1, 1, 0)$ و

$$\mathbf{b} = (0, 0, 1)$$

با فرض $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ، $\mathbf{b} = \mathbf{k}$ داریم

$$\begin{aligned}\mathbf{l}(t) &= (1-t)(-\mathbf{i} + \mathbf{j}) + t\mathbf{k} \\ &= -(1-t)\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}\end{aligned}$$

لذا، معادله این خط را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{l}(t) = (t-1)\mathbf{i} + (1-t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

یا، معادلاً،

$$x = t - 1, \quad y = 1 - t, \quad z = t$$

توجه می‌کنیم که هر بردار به شکل $\mathbf{c} = \lambda\mathbf{a} + \mu\mathbf{b}$ ، که در آن $\lambda + \mu = 1$ ، بر خط ماربر نقاط انتهایی \mathbf{a} و \mathbf{b} قرار دارد. برای مشاهده این امر، ملاحظه می‌کنیم که

$$\mathbf{c} = (1-\mu)\mathbf{a} + \mu\mathbf{b} = \mathbf{a} + \mu(\mathbf{b} - \mathbf{a})$$

برحسب مؤلفه‌ها، معادله خط مار بر دو نقطه (x_1, y_1, z_1) و (x_2, y_2, z_2) عبارت است

از

$$x = x_1 + t(x_2 - x_1) \quad y = y_1 + t(y_2 - y_1) \quad z = z_1 + t(z_2 - z_1)$$

این روابط را گاهی به صورت زیر می‌نویسند:

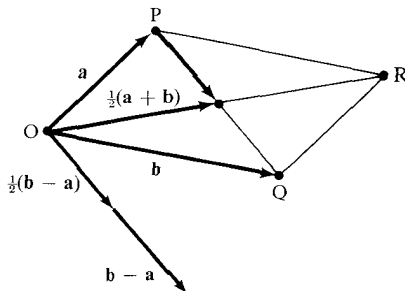
$$\frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

(با حذف t .)

مثال ۰۷. به عنوان مثالی از توان مفهوم بردار، این مطلب که اقطار یک متوازی‌الاضلاع منصف یکدیگرند را به‌طور ساده ثابت می‌کنیم.

فرض کنیم اضلاع مجاور یک متوازی‌الاضلاع با بردارهای a و b نموده شده باشند،

مثل شکل ۰۱۸.۰۱۰۱ ابتدا بردار تا نقطه میانی PQ را حساب می‌کنیم.



شکل ۰۱۸.۰۱۰۱

ساختهای به کار رفته در اثبات اینکه اقطار

یک متوازی‌الاضلاع همدیگر را قطع می‌کنند

چون $b - a$ موازی و هم‌طول پاره‌خط جهتدار از P تا Q است، $(b - a)/2$ موازی و هم‌طول

پاره‌خط جهتدار از P تا نقطه میانی PQ می‌باشد. لذا، بردار $a + (b - a)/2 =$

$(a + b)/2$ در نقطه میانی PQ ختم می‌شود.

حال بردار تا نقطه میانی OR را حساب می‌کنیم. می‌دانیم $a + b$ در R ختم می‌شود؛

لذا، $(a + b)/2$ در نقطهٔ میانی OR ختم خواهد شد. چون نشان داده‌ایم که بردار $(a + b)/2$ به نقطهٔ میانی OR و نقطهٔ میانی PQ ختم شده است، نتیجه می‌شود که OR و PQ یکدیگر را نصف می‌نمایند.

یادداشت تاریخی

بسیاری از دانشمندان، تا حدود ۱۹۰۰، از به‌کاربردن بردارها به احترام نظریهٔ پیچیده‌تر چهارتاها حذر می‌کردند. کتابی که روشهای برداری را عمومیت داد کتاب آنالیز برداری ای. بی. ویلسون^۱ بود (که توسط انتشارات داور در ۱۹۶۰ تجدید چاپ شده است) و مبتنی بر درسهایی بود که ج. دبلیو. گیس^۲ در دانشگاه ییل در سالهای ۱۹۰۰-۱۸۹۹ داده است. ویلسون به درس گیس اعتنایی نداشت، زیرا یک درس کامل یکساله در چهارتاها را در هاروارد تحت نظر ج. ام. پیرس^۳، قهرمان روشهای چهارتاها گذرانده بود، ولی به دستور رئیس دانشکده مجبور بود این درس را بگیرد. (برای شرح ماجرا، ر. ک. ام. ج. کرو^۴، تاریخچهٔ آنالیز برداری، انتشارات دانشگاه نوتردام، نوتردام ۱۹۶۷.)

تمرینات

۱. چه شرطهایی باید بر x ، y ، و z گذارد تا سه‌تایی (x, y, z) نمایش نقطه‌ای بر محور yz باشد؟ بر محور xz باشد؟ در صفحهٔ xz باشد؟ در صفحهٔ yz باشد؟
۲. بردارهای $v = (2, 3, -6)$ و $w = (-1, 1, 1)$ را رسم کنید. در رسم، بردارهای v ، $v + w$ ، $v - w$ ، و $2v$ را نشان دهید.
۳. (آ) ساخت هندسی شکل ۶.۱.۱ را تعمیم داده، نشان دهید هرگاه $v_1 = (x, y, z)$ و $v_2 = (x', y', z')$ آنگاه $v_1 + v_2 = (x + x', y + y', z + z')$.
- (ب) با استدلالی مبتنی بر مثلثهای متشابه، ثابت کنید وقتی $v = (x, y, z)$ ، $\alpha v = (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$.

1. E. B. Wilson, *Vector Analysis*

2. J. W. Gibbs

3. J. M. Pierce

4. M. J. Crowe, *A History of Vector Analysis*, University of Notre Dame Press, Notre Dame, 1967.

محاسبات زیر را کامل کنید .

۴ . $(3, 4, 5) + (6, 2, -6) = (?, ?, ?)$

۵ . $(-21, 23) - (?, 6) = (-25, ?)$

۶ . $3(133, -0.33, 0) + (-399, 0.99, 0) = (?, ?, ?)$

۷ . $(8a, -2b, 13c) = (52, 12, 11) + \frac{1}{2}(?, ?, ?)$

۸ . $(2, 3, 5) - 4i + 3j = (?, ?, ?)$

۹ . $800(0.03, 0, 0) = ?i + ?j + ?k$

در تمرینات ۱۰ تا ۱۶، همانند مثالهای ۴، ۵، و ۶، با استفاده از نماد بردار، نقاطی را توصیف کنید که در بیکرهمبندیهای داده شده قرار داشته باشند .

۱۰ . متوازی‌الاضلاعی به اضلاع مجاور $3k$ و $i - 2j$.

۱۱ . صفحه تولید شده به وسیله $v_1 = (2, 7, 0)$ و $v_2 = (0, 2, 7)$.

۱۲ . خط مار بر $(0, 2, 1)$ در راستای $k - 2i$.

۱۳ . خط مار بر $(-1, -1, -1)$ و $(1, -1, 2)$.

۱۴ . متوازی‌السطوحی که اضلاع بردارهای a ، b ، و c اند. (برای تصویری از ناحیه مورد نظر، ر. ک. شکل ۱.۳۰.۵)

۱۵ . نقاط داخل متوازی‌الاضلاع با یک گوشه (x_0, y_0, z_0) که اضلاع مار بر آن گوشه به یک اندازه در جهت بردارهای a و b باشند .

۱۶ . صفحه‌ای که به وسیله سه نقطه (x_0, y_0, z_0) ، (x_1, y_1, z_1) ، و (x_2, y_2, z_2) مسین شده است .

۱۷ . نشان دهید که میانه‌های هر مثلث در یک نقطه متقاطعند، و این نقطه هر میانه را به نسبت ۲:۱ تقسیم می‌کند .

۱۸ . نقاط اشتراک خط t $x = 3 + 2t$ ، $y = 7 + 8t$ ، $z = -2 - t$ یعنی $l(t) = (3 + 2t, 7 + 8t, -2 - t)$ و محورهای مختصات را بیابید .

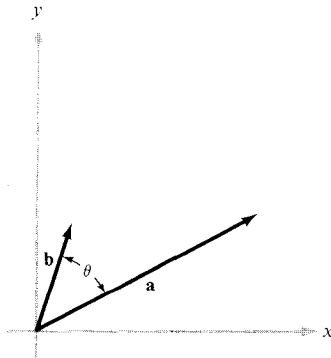
۱۹ . نشان دهید نقاطی چون (x, y, z) وجود ندارند که در $2x - 3y + z - 2 = 0$ صدق کرده و بر خط $v = (2, -2, -1) + t(1, 1, 1)$ واقع باشند .

۲۰ . نشان دهید که هر نقطه بر خط $v = (1, -1, 2) + t(2, 3, 1)$ در $5x - 3y - z - 6 = 0$ صدق می‌کند .

* ۲۱ . خطی را بیابید که در مجموعه تعریف شده با معادله $x^2 - y^2 - z^2 = 1$ قرار داشته باشد .

۲.۱ ضرب داخلی

در این بخش و بخش بعدی دوضرب بردارها را مورد بحث قرار می‌دهیم، یکی ضرب داخلی و دیگری ضرب خارجی. این ضربها در کاربردهای فیزیکی سودمندند و تعابیرهندسی جالبی دارند. ضرب اول ضرب داخلی نام دارد، و اغلب به آن ضرب نقطه‌ای نیز می‌گویند. فرض کنید دو بردار a و b را داشته باشیم (شکل ۱.۲.۱) و بخواهیم زاویه بین



شکل ۱.۲.۱

زاویه θ بین بردارهای a و b است.

آنها را تعیین کنیم. یعنی، کوچکترین زاویه بین a و b در صفحه تولید شده به وسیله آنها. ضرب داخلی به ما توان انجام این کار را می‌دهد. ابتدا مفهوم را به طور صعودی عرضه کرده و سپس ثابت می‌کنیم این ضرب ادعای ما را به ثبوت می‌رساند.

فرض کنیم $a = a_1i + a_2j + a_3k$ و $b = b_1i + b_2j + b_3k$ دو بردار در \mathbb{R}^3 باشند. حاصل ضرب داخلی a و b را، که به صورت $a \cdot b$ نوشته می‌شود، مساوی عدد حقیقی

$$a \cdot b = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

تعریف می‌کنیم. توجه کنید که حاصل ضرب داخلی دو بردار کمیتی اسکالر است. گاهی حاصل ضرب داخلی با $\langle a, b \rangle$ نموده می‌شود. این نماد اغلب به خاطر مزیتش در چاپ به کار می‌رود. لذا، $\langle a, b \rangle$ و $a \cdot b$ دقیقاً "به معنی یک چیز هستند.

بعضی از خواص ضرب داخلی فوراً "از تعریف نتیجه می‌شوند. هرگاه a ، b ، و c بردارهایی در \mathbb{R}^3 بوده، و α و β اعدادی حقیقی باشند، آنگاه

(یک) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$

$\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = 0$ اگر و فقط اگر $\mathbf{a} = \mathbf{0}$

(دو) $\alpha \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \alpha(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ و $\mathbf{a} \cdot \beta \mathbf{b} = \beta(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$

(سه) $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c}$ و $(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$

(چهار) $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$

برای اثبات (یک)، ملاحظه می‌کنیم که هرگاه $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ ، آنگاه $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a}$

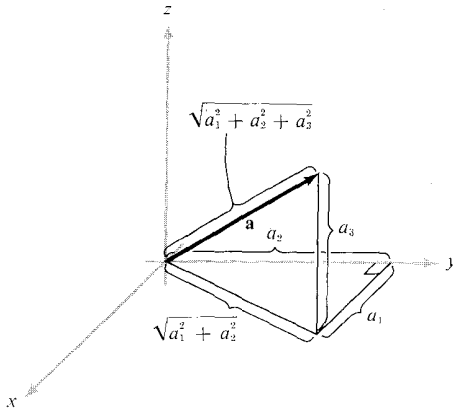
$= a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$. چون a_1, a_2, a_3 اعدادی حقیقی‌اند، $a_1^2 \geq 0, a_2^2 \geq 0, a_3^2 \geq 0$.

لذا، $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} \geq 0$. به علاوه، هرگاه $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = 0$ ، آنگاه $a_1 = a_2 = a_3 = 0$.

بنابراین، $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ (بردار صفر) . برهان سایر خواص ضرب داخلی نیز به آسانی به دست می‌آید .

از قضیه فیثاغورس معلوم می‌شود که طول بردار $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ مساوی است با

$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$ (ر. ک. شکل ۲۰۲۰۱) . طول بردار \mathbf{a} با $\|\mathbf{a}\|$ نموده می‌شود. این کمیت



شکل ۲۰۲۰۱

طول بردار $\mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3)$ از فرمول فیثاغورس

به دست می‌آید: $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$.

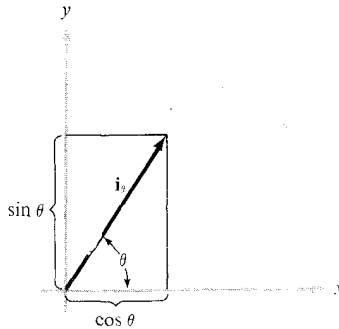
را اغلب نرم \mathbf{a} می‌نامند . چون $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2$ ، نتیجه می‌شود که

$\|\mathbf{a}\| = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{a})^{1/2}$

بردارهای با نرم 1 بردارهای یکه نام دارند. مثلاً، بردارهای \mathbf{i} , \mathbf{j} , \mathbf{k} بردارهای یکه‌اند. توجه کنید که به ازای هر بردار ناصفر \mathbf{a} ، $\|\mathbf{a}/\|\mathbf{a}\|\|$ یک بردار یکه است و گوییم \mathbf{a} را نرمالی کرده‌ایم.

در صفحه، بردار $\mathbf{i}_\theta = (\cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \theta)\mathbf{j}$ بردار یکه‌ای است که با محور x زاویه θ می‌سازد (ر. ک. شکل ۳.۲.۱). واضح است که

$$\|\mathbf{i}_\theta\| = (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta)^{1/2} = 1.$$



شکل ۳.۲.۱

مختصات \mathbf{i}_θ عبارتند از $\cos \theta$ و $\sin \theta$.

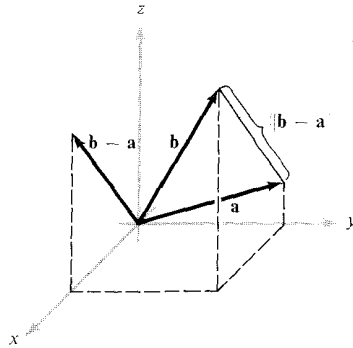
اگر \mathbf{a} و \mathbf{b} دو بردار باشند، دیدیم که بردار $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ موازی و هم‌طول پاره‌خط جهت‌دار از نقطه‌ای انتهایی \mathbf{a} تا نقطه‌ای انتهایی \mathbf{b} است. پس نتیجه می‌شود که فاصله نقطه‌ای انتهایی \mathbf{a} تا نقطه‌ای انتهایی \mathbf{b} مساوی است با $\|\mathbf{b} - \mathbf{a}\|$ (ر. ک. شکل ۴.۲.۱).

مثال ۱. فاصله نقطه‌ای انتهایی بردار \mathbf{i} ، یعنی نقطه $(1, 0, 0)$ ، تا نقطه‌ای انتهایی بردار \mathbf{j} ، یعنی $(0, 1, 0)$ ، مساوی است با

$$\sqrt{(0-1)^2 + (1-0)^2 + (0-0)^2} = \sqrt{2}$$

حال نشان می‌دهیم که حاصل ضرب داخلی واقعا "زاویه" بین دو بردار را اندازه

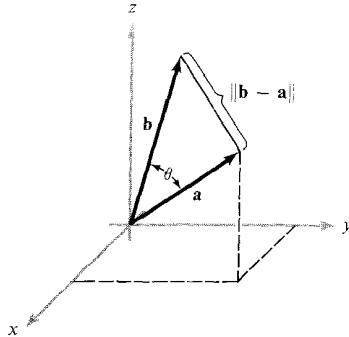
می‌گیرد.



شکل ۴.۲.۱

فاصله بین نوکهای a و b مساوی $\|b - a\|$ است.

قضیه ۱. فرض کنیم a و b دو بردار در \mathbb{R}^3 بوده و θ ، $0 \leq \theta \leq \pi$ ، زاویه بین آنها باشد (شکل ۵.۲.۱). در این صورت،



شکل ۵.۲.۱

بردارهای a, b و زاویه θ بین آنها: هندسه برای قضیه ۱ و برهان آن

اگر a و b بردارهای ناصفری باشند، θ ، $\cos \theta = \frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|}$

لذا، می‌توان زاویه بین a و b را به صورت زیر بیان کرد:

$$\theta = \cos^{-1} \frac{a \cdot b}{\|a\| \|b\|}$$

برهان. اگر بر مثلثی که یک رأسش مبدأ و دو ضلع مجاورش بردارهای a و b اند قانون کسینوسها از مثلثات را اعمال کنیم، نتیجه می‌شود که

$$\|b - a\|^2 = \|a\|^2 + \|b\|^2 - 2\|a\| \|b\| \cos \theta$$

چون $\|b - a\|^2 = (b - a) \cdot (b - a)$ ، $\|a\|^2 = a \cdot a$ ، و $\|b\|^2 = b \cdot b$ ، می‌توان معادله فوق را به صورت زیر نوشت:

$$(b - a) \cdot (b - a) = a \cdot a + b \cdot b - 2\|a\| \|b\| \cos \theta$$

اما

$$\begin{aligned} (b - a) \cdot (b - a) &= b \cdot (b - a) - a \cdot (b - a) \\ &= b \cdot b - b \cdot a - a \cdot b + a \cdot a \\ &= a \cdot a + b \cdot b - 2a \cdot b \end{aligned}$$

لذا،

$$a \cdot a + b \cdot b - 2a \cdot b = a \cdot a + b \cdot b - 2\|a\| \|b\| \cos \theta$$

یعنی،

$$a \cdot b = \|a\| \|b\| \cos \theta.$$

این نتیجه نشان می‌دهد که حاصل ضرب داخلی دوبردار مساوی حاصل ضرب طولهای آنها در کسینوس زاویه بین آنهاست. این رابطه اغلب در مسائلی که ماهیت هندسی دارند ارزشمند است.

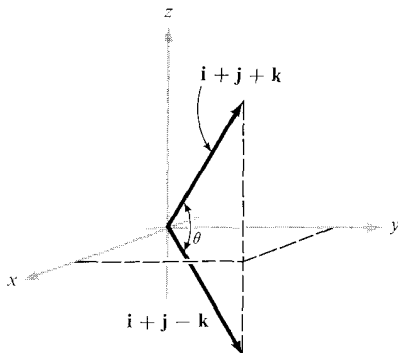
نتیجه (نامساوی کوشی^۱ - شوارتز^۲). به ازای هر دو بردار a و b ، داریم

$$|a \cdot b| \leq \|a\| \|b\|$$

که تساوی برقرار است اگر و فقط اگر a مضرب اسکالری از b یا یکی از آنها 0 باشد.

برهان. هرگاه a مضرب اسکالری از b نباشد، آنگاه $|\cos \theta| < 1$ و نامساوی برقرار است وقتی a مضرب اسکالری از b است، θ مساوی 0 یا π است و $|\cos \theta| = 1$.

مثال ۰۲. زاویه بین بردارهای $i + j + k$ و $i + j - k$ را بیابید (شکل ۶.۲.۱).



شکل ۶.۲.۱

یافتن زاویه بین $b = i + j - k$ و $a = i + j + k$

با استفاده از قضیه ۱، داریم

$$(i + j + k) \cdot (i + j - k) = \|i + j + k\| \|i + j - k\| \cos \theta$$

در نتیجه،

$$1 + 1 - 1 = (\sqrt{3})(\sqrt{3}) \cos \theta$$

از اینرو،

$$\cos \theta = \frac{1}{3}$$

یعنی،

$$\theta = \cos^{-1}\left(\frac{1}{3}\right) \approx 1.23 \text{ (71 رادیان)}$$

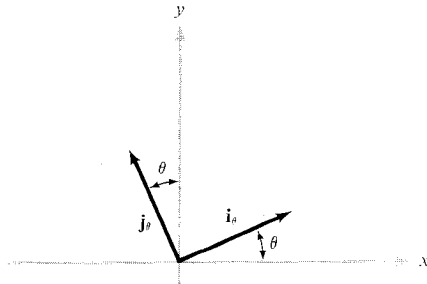
اگر a و b بردارهای ناصفری در \mathbb{R}^3 بوده و θ زاویه بین آنها باشد، می‌بینیم که

$a \cdot b = 0$ اگر و فقط اگر $\cos \theta = 0$. از این نتیجه می‌شود که حاصل ضرب داخلی دو بردار ناصفر، صفر است اگر و فقط اگر بردارها برهم عمود باشند. از اینرو، حاصل ضرب برداری روش مناسبی برای تعیین تعامد دو بردار به دست می‌دهد. ما اغلب بردارهای عمود برهم را متعامد گوئیم. بردارهای پایه متعارف i ، j ، و k دو به دو متعامد و به طول یک‌اند؛ هر چنین دستگاه را متعامد یکه می‌نامیم. این قرار را می‌پذیریم که بردار صفر به جمیع بردارها متعامد است.

مثال ۳. بردارهای $i_\theta = (\cos \theta)i + (\sin \theta)j$ و $j_\theta = -(\sin \theta)i + (\cos \theta)j$ متعامدند، زیرا

$$i_\theta \cdot j_\theta = -\cos \theta \sin \theta + \sin \theta \cos \theta = 0$$

(ر. ک. شکل ۷۰۲۰۱).

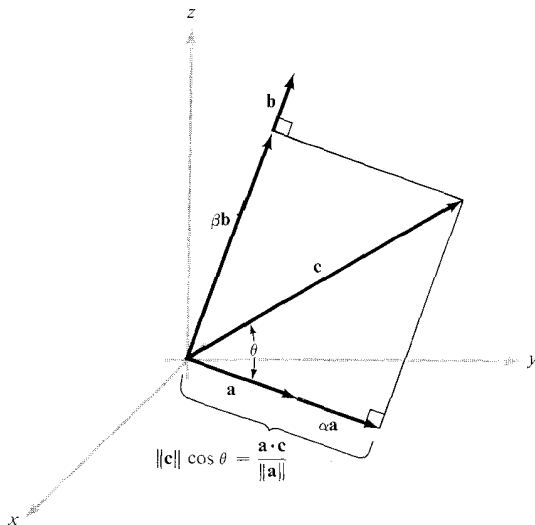


شکل ۷۰۲۰۱

بردارهای i_θ و j_θ متعامدند

مثال ۴. فرض کنیم a و b دو بردار متعامد ناصفر باشند. همچنین، c بردار دیگری در صفحه تولید شده به وسیله a و b باشد. همانطور که دیده شد، اسکالرهایی مانند α و β وجود دارند به طوری که $c = \alpha a + \beta b$. بردار αa مؤلفه c در امتداد a (یا مماس بر a)، و βb مؤلفه c در امتداد b نام دارد. لذا، $c = \alpha a + \beta b$ تجزیه c به دو بردار متعامد است. با استفاده از ضرب داخلی، α و β را تعیین کنید (ر. ک. شکل

(۸۰۲۰۱).



شکل ۸.۲۰۱

هندسه یافتن α و β که، مثل مثال ۲، $c = \alpha a + \beta b$

از حاصل ضرب داخلی a و c داریم

$$a \cdot c = a \cdot (\alpha a + \beta b) = \alpha a \cdot a + \beta a \cdot b$$

چون a و b متعامدند، $a \cdot b = 0$ و در نتیجه،

$$\alpha = \frac{a \cdot c}{a \cdot a} = \frac{a \cdot c}{\|a\|^2}$$

به همین نحو،

$$\beta = \frac{b \cdot c}{b \cdot b} = \frac{b \cdot c}{\|b\|^2}$$

مثال ۴ را می‌توان از تعبیر هندسی ضرب داخلی نتیجه‌گرفت. فرض کنیم l فاصله‌ای باشد که در امتداد a از مبدأ تا نقطه‌ای که عمود از c امتداد a را قطع می‌کند سنجیده می‌شود. داریم

$$l = \|c\| \cos \theta$$

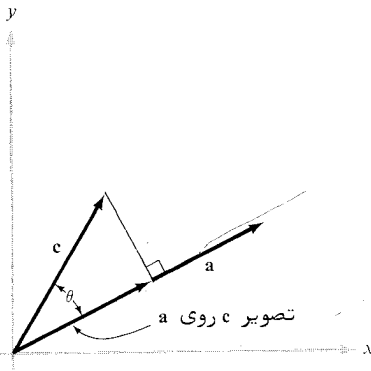
که در آن θ زاویه بین a و c است. به علاوه، $l = \alpha \|a\|$. از این نتایج خواهیم داشت

$$\alpha = \frac{\|c\| \cos \theta}{\|a\|} = \frac{\|c\|}{\|a\|} \left(\frac{a \cdot c}{\|c\| \|a\|} \right) = \frac{a \cdot c}{a \cdot a} \quad \text{یا} \quad \alpha \|a\| = \|c\| \cos \theta$$

در مثال ۴، بردار αa تصویر c روی a نام دارد. به همین نحو، بردار βb تصویر c روی b می‌باشد. به طور کلی، طول تصویر بردار c روی بردار a ، که θ زاویه بین a و c است، مساوی است با

$$\|c\| \cos \theta = \frac{|a \cdot c|}{\|a\|}$$

(شکل ۹۰۲۰۱).



شکل ۹۰۲۰۱

تصویر c روی a مساوی است با $(a \cdot c / \|a\|^2)a$.

تمرینات

۰۱. (\bar{A}) خواص (دو) و (سه) ضرب داخلی را ثابت کنید.
- (ب) ثابت کنید که $a \cdot b = b \cdot a$.
۰۲. $a \cdot b$ را در صورتی حساب کنید که $a = 2i + 10j - 12k$ و $b = -3i + 4k$.
۰۳. زاویه بین $7j + 19k - 2i$ را (با تقریب درجه) بیابید.
۰۴. $u \cdot v$ را در صورتی حساب کنید که $u = \sqrt{3}i - 315j + 22k$ و $v = u / \|u\|$.

۰۵ مقدار $\|8\mathbf{i} - 12\mathbf{k}\| \cdot \|6\mathbf{j} + \mathbf{k}\| - \|(8\mathbf{i} - 12\mathbf{k}) \cdot (6\mathbf{j} + \mathbf{k})\|$ (باتقریب یکدهم) چقدر است؟
در تمرینهای ۶ تا ۱۱، $\|\mathbf{u}\|$ ، $\|\mathbf{v}\|$ ، و $\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ را به ازای بردارهای داده شده حساب کنید.

۰۶ $\mathbf{u} = 15\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \mathbf{v} = \pi\mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$

۰۷ $\mathbf{u} = 2\mathbf{j} - \mathbf{i}, \mathbf{v} = -\mathbf{j} + \mathbf{i}$

۰۸ $\mathbf{u} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \mathbf{v} = \mathbf{i} + \mathbf{j} - \mathbf{k}$

۰۹ $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{v} = -2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}$

۰۱۰ $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = 4\mathbf{j}$

۰۱۱ $\mathbf{u} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 3\mathbf{k}, \mathbf{v} = -\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

۰۱۲ بردارهای تمرینات ۶ تا ۸ را نرمالی کنید.

۰۱۳ دو بردار ناموازی بیابید که هر دو به $(1, 1, 1)$ متعامد باشند.

۰۱۴ خطی بیابید مار بر $(3, 1, -2)$ که خط $x = -1 + t, y = -2 + t, z = -1 + t$ را قطع کرده و بر آن عمود باشد. (راهنمایی. اگر (x_0, y_0, z_0) نقطه اشتراک باشد، مختصاتش را بیابید.)

۳.۱ ضرب خارجی

در بخش ۲.۱ ضربی از بردارها را تعریف کردیم که حاصلش یک اسکالر بود. در این بخش ضربی از بردارها را تعریف می‌کنیم که حاصلش بردار است؛ یعنی، نشان می‌دهیم که، به ازای دو بردار \mathbf{a} و \mathbf{b} ، می‌توان بردار سومی مانند $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ ، به نام حاصل ضرب خارجی \mathbf{a} و \mathbf{b} ، تولید نمود. این بردار جدید دارای این خاصیت مطبوع هندسی است که بر صفحه تولید شده (معین شده) به وسیله \mathbf{a} و \mathbf{b} عمود است.

ابتدا ریاضیات صوری لازم برای بیان تعریف مفیدی از این ضرب را، که تا حدودی مفصل است، عرض می‌کنیم. پس از آن می‌توانیم نتایج هندسی ساختار ریاضی بنا شده را مطالعه کنیم.

با تعریف ماتریس 2×2 شروع می‌کنیم، و آن آرایه‌ای است مانند

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

که در آن $a_{11}, a_{12}, a_{21}, a_{22}$ چهار اسکالرند. مثلاً،

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 13 & 7 \\ 6 & 11 \end{bmatrix}$$

ماتریسهای 2×2 اند. دترمینان

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

از چنین ماتریسی عددی است حقیقی که با معادله^۶ زیر تعریف می شود:

$$(1) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

مثال ۱.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - 1 = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4 - 6 = -2$$

$$\begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = 40 - 42 = -2$$

حال به چند خاصیت ماتریسها و دترمینانهای 3×3 می پردازیم. یک ماتریس 3×3

آرایه‌ای است مانند

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}$$

که در آن باز هر a_{ij} اسکالر است؛ a_{ij} درایه‌ای است که در سطر i م و ستون j م یک آرایه قرار دارد. دترمینان یک ماتریس 3×3 را با قاعده^۶ زیر تعریف می‌کنیم:

$$(2) \quad \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

بدون روشی حفظی، به یاد آوردن فرمول (۲) مشکل است. قاعده این است که در امتداد سطر اول حرکت کنید، a_{1j} را در دترمینان ماتریس 2×2 حاصل از حذف سطر اول و ستون j م ضرب نمایید، و سپس، با گذاردن منها جلوی جمله^۶ a_{12} ، همه را باهم جمع نمایید.

مثلاً، دترمینانی که در وسط رابطه (۲) آمده است، یعنی

$$\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

از حذف سطر اول و ستون دوم ماتریس 3×3 داده شده به دست می‌آید:

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_{11}} & \cancel{a_{12}} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

مثال ۲.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - 0 \begin{vmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 0 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + 3 \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix} = -3 + 12 - 9 = 0$$

یک خاصیت مهم دترمینانها این است که تعویض دو سطر یا دو ستون باهم علامت آن را تغییر می‌دهد. برای دترمینانهای 2×2 ، این خاصیت فوراً از تعریف نتیجه می‌شود. برای سطرها داریم

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \\ &= -(a_{21}a_{12} - a_{11}a_{22}) = - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{11} & a_{12} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

و برای ستونها

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = -(a_{12}a_{21} - a_{11}a_{22}) = - \begin{vmatrix} a_{12} & a_{11} \\ a_{22} & a_{21} \end{vmatrix}$$

تحقیق این خاصیت برای دترمینای 3×3 را به خواننده وامی‌گذاریم. (ر.ک. تمرین ۱ در زیر)

خاصیت اساسی دوم دترمینانها این است که می‌توان عوامل اسکالر را از هر سطریا

ستون خارج کرد. این در مورد دترمینانهای 2×2 یعنی

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} \end{vmatrix}$$

به همین نحو، در مورد دترمینانهای 3×3 داریم

$$\begin{vmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \alpha a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \alpha \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{11} & \alpha a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & \alpha a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & \alpha a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

و از این قبیل. این نتایج به آسانی از تمرینها نتیجه می شوند. بخصوص، هرگاه سطر یا ستونی از صفر تشکیل شده باشد، آنگاه دترمینان مساوی صفر است.

نکته اساسی سوم در باب دترمینانها این است که اگر یک سطر (یا ستون) را با افزودن سطر (یا ستون) دیگر به آن تغییر دهیم، مقدار دترمینان تغییر نمی کند. این مطلب برای دترمینانهای 2×2 یعنی

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + a_1 & b_2 + a_2 \end{vmatrix} \\ = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 \\ b_1 + b_2 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_1 + a_2 \\ b_1 & b_1 + b_2 \end{vmatrix}$$

و برای دترمینانهای 3×3 یعنی

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + b_1 & a_2 + b_2 & a_3 + b_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 + a_2 & a_2 & a_3 \\ b_1 + b_2 & b_2 & b_3 \\ c_1 + c_2 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

و غیره. مجدداً، این خاصیت را می توان با استفاده از تعریف دترمینان ثابت کرد.

مثال ۳. فرض کنیم

$$\mathbf{a} = \alpha \mathbf{b} + \beta \mathbf{c} \quad \text{یعنی} \quad \mathbf{a} = (a_1, a_2, a_3) = \alpha(b_1, b_2, b_3) + \beta(c_1, c_2, c_3)$$

می دهیم که

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = 0$$

حالت $\alpha \neq 0, \beta \neq 0$ را ثابت می‌کنیم. حالت $\alpha = 0 = \beta$ بدیهی است، و حالتی که درست یکی از α, β صفر است تعدیل ساده‌ای از حالت اثبات شده است. با استفاده از خواص اساسی دترمینانها، دترمینان فوق مساوی است با

$$\begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ = -\frac{1}{\alpha} \begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} \\ \text{(با خارج کردن } -1/\alpha \text{ از سطر دوم)}$$

$$= \left(-\frac{1}{\alpha}\right) \left(-\frac{1}{\beta}\right) \begin{vmatrix} \alpha b_1 + \beta c_1 & \alpha b_2 + \beta c_2 & \alpha b_3 + \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix} \\ \text{(با خارج کردن } -1/\beta \text{ از سطر سوم)}$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta} \begin{vmatrix} \beta c_1 & \beta c_2 & \beta c_3 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix} \\ \text{(با افزودن سطر دوم به سطر اول)}$$

$$= \frac{1}{\alpha\beta} \begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 \\ -\alpha b_1 & -\alpha b_2 & -\alpha b_3 \\ -\beta c_1 & -\beta c_2 & -\beta c_3 \end{vmatrix} \\ \text{(با افزودن سطر سوم به سطر اول)}$$

$$= 0$$

یادداشت تاریخی

دترمینانها ظاهراً "توسط لایبنیتز" در ۱۶۹۳ ابداع و اولین بار در رابطه با جوابهای معادلات خطی به کار رفته است. ماکلورن^۲ و کرامر^۳ خواص آنها را در فاصله سالهای ۱۷۲۹ و ۱۷۵۰ نشان دادند؛ بویژه، ثابت کردند که جواب دستگاه معادلات

1. Leibniz

2. McLaurin

3. Cramer

$$a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = b_1$$

$$a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = b_2$$

$$a_{31}x_1 + a_{32}x_2 + a_{33}x_3 = b_3$$

عبارت است از

$$x_1 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} b_1 & a_{12} & a_{13} \\ b_2 & a_{22} & a_{23} \\ b_3 & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}, \quad x_2 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & b_1 & a_{13} \\ a_{21} & b_2 & a_{23} \\ a_{31} & b_3 & a_{33} \end{vmatrix},$$

و

$$x_3 = \frac{1}{\Delta} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & b_1 \\ a_{21} & a_{22} & b_2 \\ a_{31} & a_{32} & b_3 \end{vmatrix}$$

که در آن

$$\Delta = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

مطلبی که اینک به قاعده کرامر معروف است. بعدها، واندروند^۱ (۱۷۷۲) و کشی (۱۸۱۲)، به کمک لاپلاس^۲، ژاکوبی^۳، و دیگران، از دترمینانها به عنوان میحث جداگانه با ارزشی که توجه خاص می خواهد صحبت کردند، و آن را به طور اصولی تری گسترش دادند. فرمولهای حجم متوازی السطوحها برحسب دترمینانها (ر. ک. زیر و تمرین دوره ای ۱۵ (آ)) از آن لاگرانژ^۴ (۱۷۷۵) است. با آنکه در قرن نوزدهم ریاضیدانان ماتریسها و دترمینانها را مورد مطالعه قرار دادند، ولی این مباحث جدا از هم تلقی می شدند. برای تاریخچه کامل تا ۱۹۰۰، ر. ک. کتاب

نظریه دترمینانها به ترتیب تاریخی

نوشته تی. مویر^۵

1. Vandermonde

2. Laplace

3. Jacobi

4. Lagrange

5. T. Muir, *The Theory of Determinants in the*

His torical Order of Development, reprinted by Dover, New York, 1960.

حال که نتایج لازم در باب دترمینانها را به دست آورده و تاریخچه آنها را مورد بحث قرار داده ایم، آماده ایم ضرب خارجی بردارها را مطرح سازیم. فرض کنیم $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ بردارهایی در \mathbb{R}^3 باشند. حاصل ضرب خارجی \mathbf{a} و \mathbf{b} که با $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ نموده می شود، مساوی بردار زیر تعریف می گردد:

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

یا، با علامات،

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix}$$

مثال ۴.

$$(3\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}) \times (\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + 7\mathbf{k}$$

توجه کنید که حاصل ضرب خارجی دو بردار، برداری دیگر است؛ که گاهی آن را حاصل ضرب برداری می نامند.

بعضی از خواص جبری ضرب خارجی فوراً "از تعریف نتیجه می شود. هرگاه \mathbf{a} ، \mathbf{b} ، و \mathbf{c} بردار و α ، β ، و γ اسکالر باشند، آنگاه

$$\mathbf{a} \times \mathbf{b} = -(\mathbf{b} \times \mathbf{a}) \quad (\text{یک})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times (\beta\mathbf{b} + \gamma\mathbf{c}) &= \beta(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + \gamma(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) \\ (\alpha\mathbf{a} + \beta\mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= \alpha(\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + \beta(\mathbf{b} \times \mathbf{c}) \end{aligned} \quad (\text{دو})$$

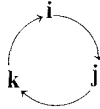
توجه کنید که، بنابر (یک)، $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{a})$ ، لذا، $\mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}$. بخصوص،

$$\mathbf{i} \times \mathbf{i} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{j} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

همچنین،

$$\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}, \quad \mathbf{j} \times \mathbf{k} = \mathbf{i}, \quad \mathbf{k} \times \mathbf{i} = \mathbf{j}$$

که می توان آنها را با جایگشت دوری $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ به صورت زیر به یاد آورد:



هدف بعدی ما تعبیر هندسی ضرب خارجی است. برای این کار، ابتدا ضرب سه‌گانه

را معرفی می‌کنیم. به ازای سه بردار \mathbf{a} ، \mathbf{b} ، و \mathbf{c} ، عدد حقیقی

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$$

را حاصل ضرب سه‌گانه \mathbf{a} ، \mathbf{b} ، و \mathbf{c} (به همین ترتیب) می‌نامند. حال فرمولی برای حاصل

ضرب سه‌گانه $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ به دست می‌آوریم. هرگاه $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}) \cdot \left(\begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \\ &= a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

این را می‌توان به طور خلاصه‌تر نوشت:

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$

حال فرض کنیم برداری در صفحه^۳ تولید شده به وسیله بردارهای \mathbf{b} و \mathbf{c} باشد.

این یعنی سطر اول در عبارت دترمینانی مربوط به $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ به شکل $\mathbf{a} = \alpha\mathbf{b} + \beta\mathbf{c}$ است؛ و لذا، بنابر مثال ۳، $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$. به عبارت دیگر، بردار $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ به هر بردار

در صفحه^۳ تولید شده به وسیله \mathbf{b} و \mathbf{c} ، بخصوص به هر دوی \mathbf{b} و \mathbf{c} ، متعامد است.

حال اندازه^۳ $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ را حساب می‌کنیم. توجه کنید که

$$\begin{aligned} \|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|^2 &= \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix}^2 + \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}^2 \\ &= (b_2c_3 - b_3c_2)^2 + (b_1c_3 - c_1b_3)^2 + (b_1c_2 - c_1b_2)^2 \end{aligned}$$

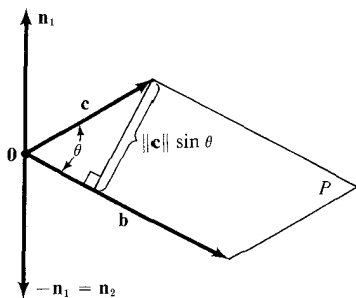
با بسط عبارت اخیر، می‌بینیم که این عبارت مساوی است با

$$\begin{aligned} (b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)(c_1^2 + c_2^2 + c_3^2) - (b_1c_1 + b_2c_2 + b_3c_3)^2 \\ = \|\mathbf{b}\|^2\|\mathbf{c}\|^2 - (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})^2 = \|\mathbf{b}\|^2\|\mathbf{c}\|^2 - \|\mathbf{b}\|^2\|\mathbf{c}\|^2 \cos^2 \theta \end{aligned}$$

$$= \|b\|^2 \|c\|^2 \sin^2 \theta$$

که در آن θ زاویه بین b و c بوده و $0 \leq \theta \leq \pi$.

نتیجه را تلفیق کرده، نتیجه می‌گیریم که $b \times c$ یک بردار عمود بر صفحه تولید شده به وسیله b و c به طول $\|b\| \|c\| \sin \theta$ است. اما دو بردار وجود دارند که در این شرایط صدق می‌کنند، زیرا دو جهت وجود دارند که بر صفحه P تولید شده به وسیله b و c عمود (یا قائم) اند. این مطلب از شکل ۱.۳.۱ واضح است، که n_1 و $-n_1 = n_2$ را عمود بر P



شکل ۱.۳.۱

n_2 و n_1 دو بردار ممکن متعامد به هر دوی b و c

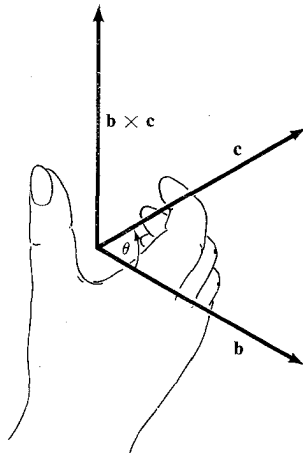
با نرم $\|b\| \|c\| \sin \theta$ است.

با نرم $\|n_1\| = \|-n_1\| = \|b\| \|c\| \sin \theta$ نشان می‌دهد.

کدام بردار $b \times c$ را نمایش می‌دهد، n_1 یا $-n_1$ ؟ جواب $n_1 = b \times c$ است. چند حالت، از قبیل $k = i \times j$ ، را امتحان کنید. "قاعده دست راست" جهت $b \times c$ را معین می‌کند.

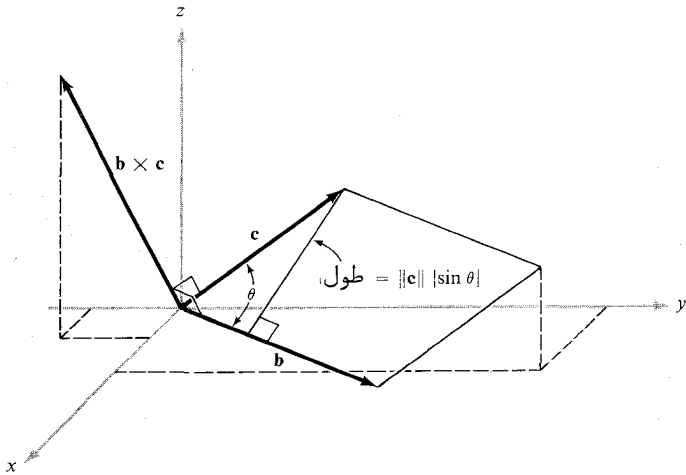
دست راست خود را طوری قرار دهید که خمیدگی انگشتانتان از b در جهت c به اندازه θ باشد. در این صورت، انگشت شست جهت $b \times c$ را نشان خواهد داد (شکل ۲.۳.۱).

اگر b و c همخط باشند، $\sin \theta = 0$ ؛ و در نتیجه، $b \times c = 0$ ؛ اگر b و c همخط نباشند، یک صفحه تولید می‌کنند و $b \times c$ برداری عمود بر این صفحه است. طول $b \times c$ یعنی $\|b\| \|c\| \sin \theta$ ، چیزی جز مساحت متوازی‌الاضلاع به اضلاع مجاور b و c نیست



شکل ۳.۳.۱

قاعده دست راست برای تعیین جهت $b \times c$



شکل ۳.۳.۱

طول $b \times c$ مساوی مساحت متوازی الاضلاع تشکیل شده به وسیله b و c است.

مثال ۵. یک بردار یکه متعامد به بردارهای $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ بیابید.
یک بردار عمود بر هر دو $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ بردار زیر است:

$$(\mathbf{i} + \mathbf{j}) \times (\mathbf{j} + \mathbf{k}) = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

چون $\|\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}\| = \sqrt{3}$ ، بردار

$$\frac{1}{\sqrt{3}}(\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k})$$

یک بردار یکه عمود بر $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ است.

با استفاده از ضرب خارجی ، می توان تعبیر هندسی اساسی از دترمینانها را به دست آورد .

فرض کنیم $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ و $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j}$ دو بردار در صفحه باشند . اگر زاویه بین \mathbf{b} و \mathbf{c} باشد ، دیدیم که $\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\| = \|\mathbf{b}\| \|\mathbf{c}\| |\sin \theta|$. همانطور که در بالا گفتیم $\|\mathbf{b}\| \|\mathbf{c}\| |\sin \theta|$ مساحت متوازی الاضلاع به اضلاع مجاور \mathbf{b} و \mathbf{c} است (ر.ک. شکل ۳.۳.۱) . با استفاده از تعریف ضرب خارجی ،

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ b_1 & b_2 & 0 \\ c_1 & c_2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

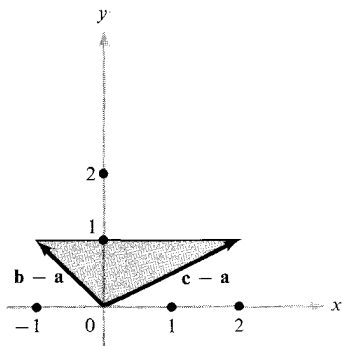
لذا ، $\|\mathbf{b} \times \mathbf{c}\|$ قدر مطلق دترمینان

$$\begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix} = b_1c_2 - b_2c_1$$

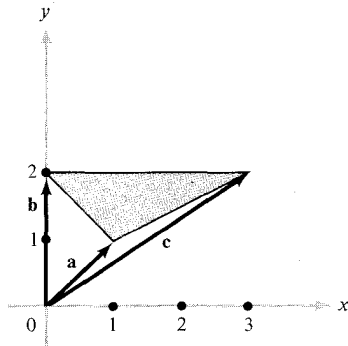
است . از این نتیجه می شود که قدر مطلق دترمینان فوق مساوی مساحت متوازی الاضلاع به اضلاع مجاور $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j}$ و $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j}$ است .

مثال ۶. مساحت مثلثی را بیابید که رئوسش نقاط $(1, 1)$ ، $(0, 2)$ ، و $(3, 2)$ می باشند (شکل ۴.۳.۱) .

فرض کنیم $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ، $\mathbf{b} = 2\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{c} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$. واضح است مساحت مثلثی که رئوسش نقاط انتهایی بردارهای \mathbf{a} ، \mathbf{b} ، و \mathbf{c} اند همان مساحت مثلث به رئوس $\mathbf{0}$ ، $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ ،



(ب)



(آ)

شکل ۴.۳.۱

مسئله: A مساحت مثلث سایه‌دار در (\bar{T}) را بیابید.
 حل: اضلاع را به صورت تفاضلهای برداری (ب) درمی‌آوریم

تا به دست آید $A = \frac{1}{2} \|(\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a})\|$

و $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ را دارد (شکل ۴.۳.۱). در واقع، مثلث دوم انتقال مثلث اول است. چون مساحت مثلث انتقال یافته نصف مساحت متوازی‌الاضلاع به اضلاع مجاور $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ و $\mathbf{c} - \mathbf{a}$ است، درمی‌یابیم که مساحت مثلث به رأسهای $(1, 1)$ ، $(0, 2)$ ، و $(3, 2)$ مساوی قدر مطلق

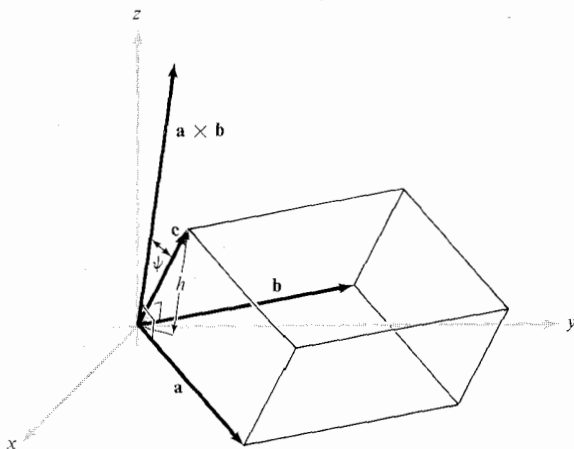
$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = -\frac{3}{2}$$

یعنی $3/2$ ، است.

تعبیری از دترمینان ماتریسهایی 3×3 به عنوان حجم وجود دارد که شبیه تعبیر دترمینان ماتریسهایی 2×2 به عنوان مساحت است. فرض کنیم $\mathbf{a} = a_1\mathbf{i} + a_2\mathbf{j} + a_3\mathbf{k}$ ، $\mathbf{b} = b_1\mathbf{i} + b_2\mathbf{j} + b_3\mathbf{k}$ و $\mathbf{c} = c_1\mathbf{i} + c_2\mathbf{j} + c_3\mathbf{k}$ بردارهایی در \mathbb{R}^3 باشند؛ نشان می‌دهیم که حجم متوازی‌السطوح به اضلاع مجاور \mathbf{a} ، \mathbf{b} ، و \mathbf{c} (شکل ۵.۳.۱) قدر مطلق دترمینان زیر است:

می‌دانیم که $\|\mathbf{a} \times \mathbf{b}\|$ مساحت متوازی‌الاضلاع به اضلاع مجاور \mathbf{a} و \mathbf{b} است. به علاوه،

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}$$



شکل ۵.۳.۱

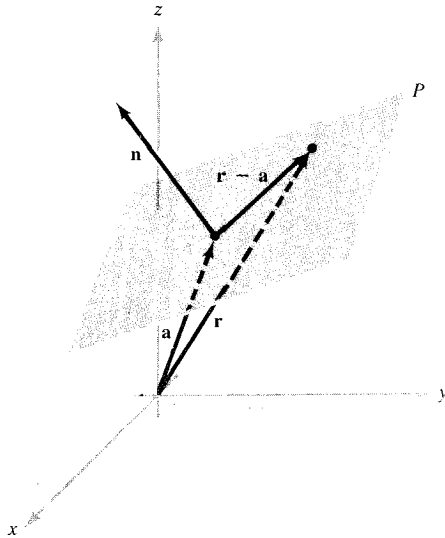
حجم متوازی‌السطوح تشکیل شده به وسیله a, b, c قدر مطلق دترمینان ماتریس 3×3 با سطرهای a, b, c است.

که در آن ψ زاویه حاده‌ای است که c با قائم به صفحه تولید شده به وسیله a و b می‌سازد. چون حجم متوازی‌السطوح به اضلاع مجاور a, b, c حاصل ضرب مساحت قاعده $\|a \times b\|$ ضربدر $\|c\| \cos \psi$ است، نتیجه می‌شود که حجم چیزی جز $|(a \times b) \cdot c|$ نیست. در صفحه ۴۰ دیدیم که $D = a \cdot (b \times c)$ با تعویض سطرها، داریم $(a \times b) \cdot c = c \cdot (a \times b) = -c \cdot (b \times a) = D$. بنابراین، قدرمطلق D حجم متوازی‌السطوح به اضلاع مجاور a, b, c و c می‌باشد.

در خاتمه این بخش، از روشهای برداری برای تعیین معادله یک صفحه در فضا استفاده می‌کنیم. فرض کنیم F یک صفحه در فضا، a یک بردار که انتهایش بر صفحه است، و n بردار قائمی به صفحه باشد (ر.ک. شکل ۶.۳.۱).

هرگاه r برداری در \mathbb{R}^3 باشد، آنگاه نقطه انتهای r بر صفحه P است اگر فقط اگر

$r - a$ موازی P باشد و، در نتیجه، اگر و فقط اگر $(r - a) \cdot n = 0$ بر هر بردار موازی P عمود است، ر.ک. شکل (۶.۳.۱). چون ضرب داخلی پخشپذیر است، شرط اخیر با



شکل ۶.۳.۱

نقاط r صفحه^۱ ما برابر a و عمود بر n در معادله^۲
 $(r - a) \cdot n = 0$ صدق می‌کنند.

$r \cdot n = a \cdot n$ معادل است. بنابراین، اگر $a = a_1i + a_2j + a_3k$ ، $n = Ai + Bj + Ck$ و $r = xi + yj + zk$ ، نتیجه می‌شود که نقطه^۱ انتهایی r بر P واقع است اگر و فقط اگر

(۳) $Ax + By + Cz = r \cdot n = a \cdot n = Aa_1 + Ba_2 + Ca_3$
 چون n و a ثابت اند، طرف راست معادله^۲ (۳) ثابت است؛ مثلاً، مساوی D . لذا، معادله^۱ صفحه^۱ P خواهد بود.

(۴) $Ax + By + Cz + D = 0$
 که در آن $Ai + Bj + Ck$ قائم به P است؛ به عکس، اگر A ، B ، و C همه صفر نباشند، مجموعه^۱ نقاط (x, y, z) صادق در معادله^۲ (۴) صفحه‌ای است با قائم $Ai + Bj + Ck$.

معادله^۴ (۴) نسبت به سه متغیر x, y, z خطی است، که از نظر هندسی نظیر به یک سطح خطی، یعنی یک صفحه، در \mathbb{R}^3 است.

چهار عدد A, B, C, D به طور منحصر به فرد با P معین نمی شوند. برای مشاهده این مطلب، توجه کنید که (x, y, z) در معادله^۴ (۴) صدق می کند اگر و فقط اگر در رابطه زیر، به ازای $\lambda \neq 0$ ، نیز صدق کند:

$$(\lambda A)x + (\lambda B)y + (\lambda C)z + (\lambda D) = 0$$

هرگاه A, B, C, D و A', B', C', D' هر دو صفحه^۴ P را معین کنند، آنگاه به ازای اسکالری مانند λ ، $A = \lambda A', B = \lambda B', C = \lambda C', D = \lambda D'$ می گوئیم. A, B, C, D ، با تقریب مضرب اسکالری، به طور منحصر به فرد به وسیله^۴ P معین می شود. به عکس، A, B, C, D و A', B', C', D' یک صفحه را معین می کنند اگر به ازای اسکالری چون λ ، $A = \lambda A', B = \lambda B', C = \lambda C', D = \lambda D'$ این امر در مثال ۸ زیر روشنتر خواهد شد.

مثال ۷. معادله^۴ صفحه^۴ عمود بر بردار $\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$ و شامل نقطه^۴ $(1, 0, 0)$ را تعیین کنید. از بحث فوق معلوم می شود که معادله^۴ صفحه به شکل $x + y + z + D = 0$ است. چون $(1, 0, 0)$ بر صفحه واقع است، $1 + 0 + 0 + D = 0$ ، یا $D = -1$ ؛ لذا، $x + y + z = 1$ معادله^۴ صفحه می باشد.

مثال ۸. معادله^۴ صفحه ای شامل نقاط $(1, 1, 1)$ ، $(2, 0, 0)$ ، و $(1, 1, 0)$ را بیابید. روش ۱. معادله^۴ هر صفحه به شکل $Ax + By + Cz + D = 0$ است. چون نقاط $(1, 1, 1)$ ، $(2, 0, 0)$ ، و $(1, 1, 0)$ بر صفحه واقعند، داریم

$$A + B + C + D = 0$$

$$2A + D = 0$$

$$A + B + D = 0$$

دستگاه فوق را با حذف به صورت زیر درمی آوریم

$$2A + D = 0 \quad (\text{معادله دوم})$$

$$2B + D = 0 \quad (\text{دوم - سوم} \times 2)$$

$$C = 0 \quad (\text{سوم - اول})$$

چون اعداد A, B, C, D فقط یا تقریب یک (مضریب) مضرب اسکالر معین می‌شوند، می‌توان با ثابت قرار دادن مقدار یکی از آنها، مقادیر دیگر را به طور منحصر به فرد معین کرد. هرگاه قرار دهیم $D = -2$ ، آنگاه $A = +1, B = +1, C = 0$. لذا، معادله صفحه شامل نقاط داده شده عبارت است از $x + y - 2 = 0$.

روش ۲. فرض کنیم $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i}, \mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$. هر بردار قائم به صفحه باید بر بردارهای $\mathbf{a} - \mathbf{b}$ و $\mathbf{c} - \mathbf{b}$ ، که موازی صفحه‌اند، عمود باشد. زیرا نقاط انتهایی آنها بر صفحه واقعند. لذا، $\mathbf{n} = (\mathbf{a} - \mathbf{b}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{b})$ قائم به صفحه است. با محاسبه حاصل ضرب، داریم

$$\mathbf{n} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -\mathbf{i} - \mathbf{j}$$

لذا، معادله صفحه به شکل $0 = -x - y + D$ است (با تقریب مضریب اسکالر). چون $(2, 0, 0)$ بر صفحه واقع است، $D = +2$. پس از جانشانی، خواهیم داشت $x + y - 2 = 0$.

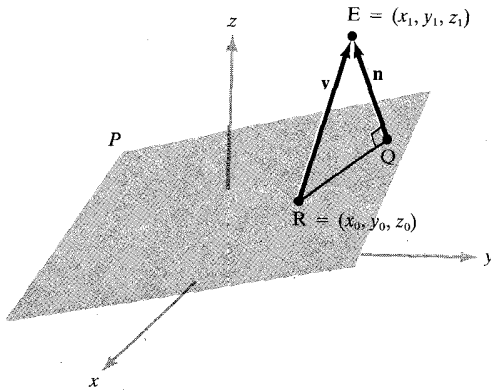
مثال ۹. فرض کنید $A(x - x_0) + B(y - y_0) + C(z - z_0) = 0$ معادله صفحه P ما بر نقطه $E = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ باشد. فاصله نقطه E تا صفحه را معین نمایید (ر. ک. شکل ۷.۳.۱). فاصله E تا صفحه به معادله $Ax + By + Cz + D = 0$ چقدر است؟
بردار

$$\mathbf{n} = \frac{A\mathbf{i} + B\mathbf{j} + C\mathbf{k}}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

را در نظر می‌گیریم که یک بردار قائم بیکه به صفحه است. حال از E عمودی بر صفحه فرود آورده و مثلث REQ شکل ۷.۳.۱ را می‌سازیم. فاصله $d = |EQ|$ طول تصویر $\mathbf{v} = \overline{RE}$ (بردار از E تا R) روی \mathbf{n} است؛ لذا،

$$\begin{aligned} \text{فاصله} &= |\mathbf{v} \cdot \mathbf{n}| = |[(x_1 - x_0)\mathbf{i} + (y_1 - y_0)\mathbf{j} + (z_1 - z_0)\mathbf{k}] \cdot \mathbf{n}| \\ &= \frac{|A(x_1 - x_0) + B(y_1 - y_0) + C(z_1 - z_0)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}} \end{aligned}$$

اگر صفحه به شکل $Ax + By + Cz + D = 0$ داده شده باشد، نقطه (x_0, y_0, z_0) را



شکل ۷.۳.۰۱

هندسه تعیین فاصله نقطه E تا صفحه P

بر آن اختیار و توجه می‌کنیم که $D = -(Ax_0 + By_0 + Cz_0)$. با گذاردن این در فرمول قبلی، نتیجه می‌شود که

$$\text{فاصله} = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

تمرینات

۱. تحقیق کنید که تعویض دو سطر یا دو ستون دترمینان 3×3 علامت دترمینان را

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix}$$

تغییر می‌دهد (دو سطر و دو ستون دلخواه اختیار کنید).

۲. دترمینانهای زیر را محاسبه کنید.

$$\begin{vmatrix} 36 & 18 & 17 \\ 45 & 24 & 20 \\ 3 & 5 & -2 \end{vmatrix} \quad (-) \quad \begin{vmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 4 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \end{vmatrix} \quad (\bar{T})$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 5 \\ 7 & 11 & 13 \\ 17 & 19 & 23 \end{vmatrix} \quad (\text{ت}) \qquad \begin{vmatrix} 1 & 4 & 9 \\ 4 & 9 & 16 \\ 9 & 16 & 25 \end{vmatrix} \quad (\text{پ})$$

۳. $a \times b$ را در صورتی حساب کنید که $a = i - 2j + k$ ، $b = 2i + j + k$
۴. $a \cdot (b \times c)$ را در صورتی حساب کنید که a و b همانهای تمرین ۳ بوده و $c = 3i - j + 2k$
۵. مساحت متوازی الاضلاع به اضلاع a و b تمرین ۳ را بیابید.
۶. حجم متوازی السطوح به اضلاع $i - 2j + k$ و $5i - 3k$ ، $2i + j - k$ چقدر است؟
- در تمرینهای ۷ تا ۱۰، تمام بردارهای یک‌ه متعامد به بردارهای داده شده را توصیف کنید.

۷. i, j

۸. $-5i + 9j - 4k, 7i + 8j + 9k$

۹. $-5i + 9j - 4k, 7i + 8j + 9k, 0$

۱۰. $2i - 4j + 3k, -4i + 8j - 6k$

۱۱. فاصله صفحه $12x + 13y + 5z + 2 = 0$ تا نقطه $(1, 1, -5)$ را تعیین کنید.
۱۲. فاصله صفحه مار بر مبداء که بر $i - 2j + k$ عمود است را تا نقطه $(6, 1, 0)$ بیابید.
۱۳. $u \times v$ و $v \times u$ را در صورتی حساب کنید که $u = i - 2j + k$ و $v = 2i - j + 2k$

۱۴. تمرین ۱۳ را برای $u = 3i + j - k, v = -6i - 2j - 2k$ تکرار نمایید.
۱۵. معادله صفحه‌ای را بیابید که

(آ) بر $v = (1, 1, 1)$ عمود بوده و از $(1, 0, 0)$ بگذرد؛

(ب) بر $v = (1, 2, 3)$ عمود بوده و از $(1, 1, 1)$ بگذرد.

۱۶. معادله صفحه‌ای را بیابید که از $(0, 0, 0)$ ، $(2, 0, -1)$ ، و $(0, 4, -3)$ می‌گذرد.

۱۷. (آ) اتحادهای حاصل ضرب سه گانه برداری $(A \times B) \times C = (A \cdot C)B - (B \cdot C)A$ و $C \times (A \times B) = (A \cdot C)B - (A \cdot B)C$ را ثابت کنید.

(ب) ثابت کنید $(u \times v) \times w = u \times (v \times w)$ اگر و فقط اگر $(u \times v) \times w = 0$

(پ) ثابت کنید $(u \times v) \times w + (v \times w) \times u + (w \times u) \times v = 0$ (اتحاد ژاکوبی).

۱۸. (آ) بدون توسل به هندسه، ثابت کنید

$$\begin{aligned} u \cdot (v \times w) &= v \cdot (w \times u) = w \cdot (u \times v) = -u \cdot (w \times v) \\ &= -w \cdot (v \times u) = -v \cdot (u \times w) \end{aligned}$$

(ب) ثابت کنید

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{u} \times \mathbf{v}) \cdot (\mathbf{u}' \times \mathbf{v}') &= (\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}')(\mathbf{v} \cdot \mathbf{v}') - (\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}')(\mathbf{u}' \cdot \mathbf{v}) \\
 &= \begin{vmatrix} \mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' & \mathbf{u} \cdot \mathbf{v}' \\ \mathbf{u}' \cdot \mathbf{v} & \mathbf{v} \cdot \mathbf{v}' \end{vmatrix}
 \end{aligned}$$

(راهنمایی: از (\bar{T}) و (\bar{T}) استفاده کنید.)

۱۹. قاعده کرامر، که در یادداشت تاریخی صفحه ۲۹ آمده است، را ثابت کنید.

۲۰. معادله صفحه مار بر $(2, -1, 3)$ و عمود بر $\mathbf{v} = (1, -2, 2) + t(3, -2, 4)$ را بیابید.

۲۱. معادله صفحه مار بر $(1, 2, -3)$ و عمود بر $\mathbf{v} = (0, -2, 1) + t(1, -2, 3)$ را بیابید.

۲۲. معادله خط مار بر $(1, -2, -3)$ و عمود بر صفحه $3x - y - 2z + 4 = 0$ را بیابید.

۲۳. معادله صفحه شامل دو خط

$$\mathbf{v}_2 = (2, -1, 0) + t(2, 3, -1) \quad \text{و} \quad \mathbf{v}_1 = (0, 1, -2) + t(2, 3, -1)$$

را بیابید.

۲۴. فاصله $(2, 1, -1)$ تا صفحه $x - 2y + 2z + 5 = 0$ را بیابید.

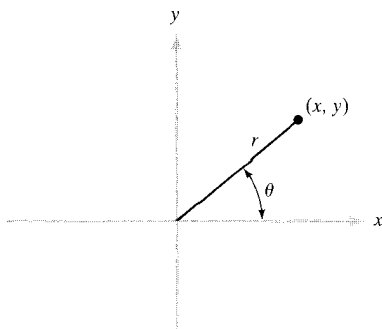
۲۵. معادله صفحه شامل خط $\mathbf{v} = (-1, 1, 2) + t(3, 2, 4)$ و عمود بر صفحه $2x + y - 3z + 4 = 0$ را بیابید.

۲۶. برای صفحه مار بر $(3, 2, -1)$ و $(1, -1, 2)$ و موازی خط $\mathbf{v} = (1, -1, 0) + t(3, 2, -2)$ معادله بیابید.

۲۷. تمرینهای ۱۹ و ۲۰ بخش ۱۰.۱ را با استفاده از ضرب نقطه‌ای و آنچه از قائمهای بر صفحات می‌دانید مجدداً حل کنید.

۴.۱ مختصات استوانه‌ای و کروی

یک راه متعارف برای نمایش یک نقطه در \mathbb{R}^2 مختصات قائم (x, y) است. با اینحال، همانطور که خواننده احتمالاً در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی آموخته است، مختصات قطبی در صفحه می‌توانند بی‌نهایت مفید باشند. همانطور که در شکل ۱۰.۴۰۱ ترسیم شده است، مختصات (r, θ) به وسیله فرمولهای $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ به (x, y) مربوط شده‌اند، که در آنها معمولاً " $r \geq 0$ و $0 \leq \theta < 2\pi$ " .



شکل ۱۰۴۰۱

مختصات قطبی (x, y) عبارتند از (r, θ) .

به خواننده^۶ ناآشنا با مختصات قطبی توصیه می‌کنیم که بخش مربوط به آن را در کتب حساب دیفرانسیل و انتگرال مطالعه کند. اکنون برای نمایش نقاط در فضا غیر از مختصات دکارتی (x, y, z) دو روش دیگر ارائه می‌دهیم. این دستگاه‌های مختصات برای بعضی از مسائل، نظیر محاسبه^۶ انتگرالها (بخش ۸۰۵)، بسیار مناسبند.

تعریف (ر. ک. شکل ۲۰۴۰۱). مختصات استوانه‌ای (r, θ, z) نقطه^۶ (x, y, z) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

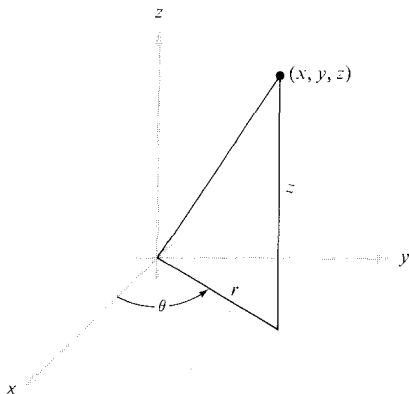
$$(1) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

یا، به طور صریح

$$r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad z = z, \quad \theta = \begin{cases} \tan^{-1}(y/x), & x > 0 \text{ و } y \geq 0 \\ \pi + \tan^{-1}(y/x) & x < 0 \\ 2\pi + \tan^{-1}(y/x) & x > 0 \text{ و } y < 0 \end{cases}$$

که در آن $u = \tan^{-1}$ بین $-\pi/2$ و $\pi/2$ است. هرگاه $x = 0$ ، آنگاه به ازای $y > 0$ ، $\theta = \pi/2$ و، به ازای $y < 0$ ، $\theta = 3\pi/2$. اگر $x = y = 0$ ، θ تعریف شده است.

به عبارت دیگر، به ازای هر نقطه^۶ (x, y, z) ، مختص اول و دومش را بر حسب مختصات قطبی نمایش داده و مختص سوم را ثابت می‌گذاریم. فرمول (۱) نشان می‌دهد که، به ازای (r, θ, z) داده شده، سه تایی (x, y, z) کاملاً "معین می‌شود و، بالعکس، اگر θ را سه بازه^۶



شکل ۲۰۴۰۱

نمایش نقطه (x, y, z) برحسب مختصات استوانه‌ای آن r, θ, z و

$[0, 2\pi[$ (گاهی برد $]-\pi, \pi]$ مناسب است) محدود کرده و شرط $r > 0$ را بگذاریم. دلیل استفاده از اصطلاح "مختصات استوانه‌ای" این است که اگر $0 \leq \theta < 2\pi$ ، $-\infty < z < \infty$ و $r = a$ ثابت مثبتی باشد، مکان هندسی این نقاط استوانه‌ای به شعاع a است (ر.ک. شکل ۲۰۴۰۱).

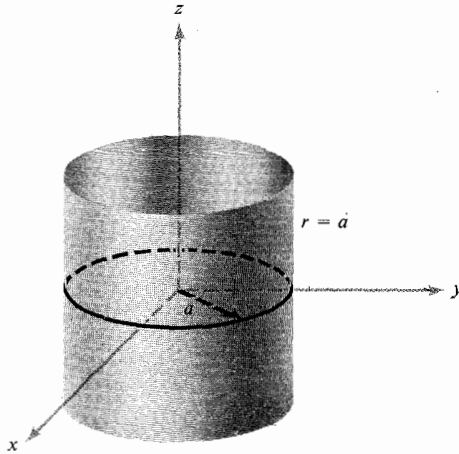
مثال ۱. (آ) مختصات استوانه‌ای $(6, 6, 8)$ را بیابید و آن را رسم کنید.

(ب) اگر نقطه‌ای به مختصات استوانه‌ای $(8, 2\pi/3, -3)$ باشد، مختصات دکارتی آن چه می‌باشند؟ آن را رسم کنید.

برای قسمت (آ)، داریم $r = \sqrt{6^2 + 6^2} = 6\sqrt{2}$ و $\theta = \tan^{-1}(6/6) = \tan^{-1}(1) = \pi/4$. این نقطه P در شکل ۲۰۴۰۱ است. برای قسمت (ب)، داریم

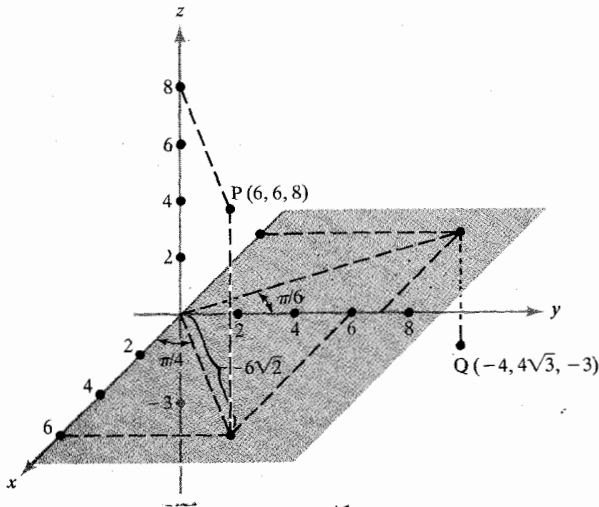
$$x = r \cos \theta = 8 \cos \frac{2\pi}{3} = -\frac{8}{2} = -4$$

$$y = r \sin \theta = 8 \sin \frac{2\pi}{3} = 8 \frac{\sqrt{3}}{2} = 4\sqrt{3}.$$



شکل ۳۰.۴۰.۱

نمودار نقاطی که مختصات استوانه‌های آنها در $r = a$ صدق کنند یک استوانه است.



شکل ۴۰.۴۰.۱

چند مثال از ارتباط بین مختصات دکارتی و استوانه‌ای

لذا، مختصات دکارتی عبارتند از $(-4, 4\sqrt{3}, -3)$. این نقطه Q در شکل است. مختصات استوانه‌ای تنها تعمیمهای ممکن مختصات قطبی به ابعاد سه نیستند. به یاد آورید که، در ابعاد دو، اندازه بردار $xi + yj$ (یعنی، $\sqrt{x^2 + y^2}$) در دستگاه مختصات قطبی است. در مختصات استوانه‌ای، طول بردار $xi + yj + zk$ ، یعنی

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

یکی از مختصات دستگاه نیست. ما فقط از اندازه $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ، زاویه θ ، و "ارتفاع" z استفاده می‌کنیم.

حال این وضع را با معرفی دستگاه مختصات کروی، که از ρ به عنوان یک مختص استفاده می‌کند، تعدیل می‌کنیم. مختصات کروی اغلب در مسائلی مفیدند که تقارن کروی (تقارن نسبت به یک نقطه) دارند، حال آنکه مختصات استوانه‌ای را می‌توان وقتی به کار برد که تقارن استوانه‌ای (تقارن نسبت به یک خط) وجود دارد.

به ازای نقطه $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ ، فرض می‌کنیم

$$\rho = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

و x و y را با مختصات قطبی در صفحه xy نمایش می‌دهیم:

$$(2) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ و θ با (۱) داده شده است. مختص z عبارت است از

$$z = \rho \cos \phi$$

که در آن ϕ زاویه (بین G و π و این مقادیر) بردار شعاعی $v = xi + yj + zk$ با محور z در صفحه شامل بردار v و محور z می‌باشد (ر.ک. شکل ۵.۴.۱). با استفاده از ضرب نقطه‌ای، می‌توان ϕ را به صورت زیر بیان کرد:

$$\cos \phi = \frac{v \cdot k}{\|v\|} \quad ; \quad \text{یعنی} \quad \phi = \cos^{-1} \frac{v \cdot k}{\|v\|}$$

کمیات ρ, θ, ϕ را مختصات می‌گیریم. چون

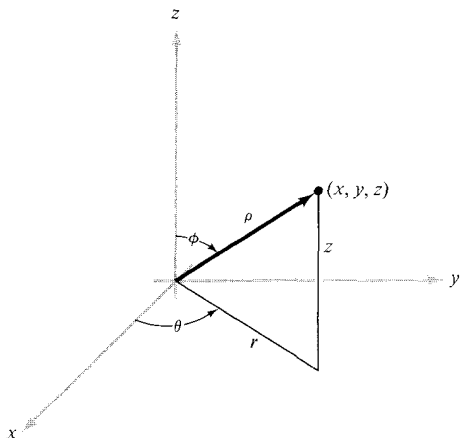
$$r = \rho \sin \phi$$

با استفاده از (۲)، می‌توان x, y, z را برحسب مختصات کروی ρ, θ, ϕ پیدا کرد. تعریف مختصات کروی (x, y, z) به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(3) \quad x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

که در آن

$$\rho \geq 0, \quad 0 \leq \theta < 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$



شکل ۵.۴.۱

مختصات کروی (ρ, θ, ϕ) ؛ نمودار نقاط صادق در $\rho = a$ یک کره است.

توجه کنید که، در مختصات کروی، معادله کره به شعاع a و مرکز مبدا شکل ساده

$$\rho = a$$

را می‌گیرد.

مثال ۲. (۱) سطح $xz=1$ و (۲) سطح $x^2+y^2-z^2=1$ را در مختصات کروی بیان کنید.
از (۳) داریم $x = \rho \sin \phi \cos \theta, z = \rho \cos \phi$ ؛ در نتیجه، سطح (۱) از تمام (ρ, θ, ϕ) هایی تشکیل شده است که

$$\rho^2 \sin \phi \cos \theta \cos \phi = 1$$

برای قسمت (۲) می‌توان نوشت

$$x^2 + y^2 - z^2 = x^2 + y^2 + z^2 - 2z^2 = \rho^2 - 2\rho^2 \cos^2 \phi$$

در نتیجه، سطح عبارت است از $\rho^2(1 - 2 \cos^2 \phi) = 1$ یا $-\rho^2 \cos(2\phi) = 1$.

تمرینات

۱. (\bar{T}) نقاط زیر در مختصات استوانه‌ای داده شده‌اند؛ آنها را در مختصات قائم و مختصات کروی بیان کنید:

$$(1, 45^\circ, 1), (2, \pi/2, -4), (0, 45^\circ, 10), (3, \pi/6, 4).$$

(ب) هریک از نقاط زیر را از مختصات دکارتی به مختصات کروی و به مختصات استوانه‌ای تغییر دهید:

$$(2, 1, -2), (0, 3, 4), (\sqrt{2}, 1, 1), (-2\sqrt{3}, -2, 3).$$

۲. نگاشتهای زیر را در مختصات استوانه‌ای تعبیر هندسی کنید.

$$(r, \theta, z) \mapsto (r, \theta, -z) \quad (\bar{T})$$

$$(r, \theta, z) \mapsto (r, \theta + \pi, -z) \quad (\bar{b})$$

۳. نگاشتهای زیر را در مختصات کروی تعبیر هندسی کنید.

$$(\rho, \theta, \phi) \mapsto (\rho, \theta + \pi, \phi) \quad (\bar{T})$$

$$(\rho, \theta, \phi) \mapsto (\rho, \theta, \pi - \phi) \quad (\bar{b})$$

۴. (\bar{T}) سطوح ثابت $r =$ ، ثابت $\theta =$ ، و ثابت $z =$ را در دستگاه مختصات استوانه‌ای توصیف نمایید.

(ب) سطوح ثابت $\rho =$ ، ثابت $\theta =$ ، و ثابت $\phi =$ را در دستگاه مختصات کروی توصیف نمایید.

۵. نشان دهید که برای نمایش هر نقطه در \mathbb{R}^3 به وسیله مختصات کروی فقط لازم است مقادیر θ را بین ۰ و 2π ، مقادیر ϕ را بین ۰ و π ، و مقادیر ρ را تا کمترین ۰ بگیریم. اگر اجازه دهیم $\rho \leq 0$ ، آیا مختصات منحصر به فردند؟

۶*. با استفاده از مختصات استوانه‌ای و بردارهای متعامد یک‌ه‌ e_θ ، e_ρ ، و e_z (ر. ک. شکل ۶.۴.۱)،

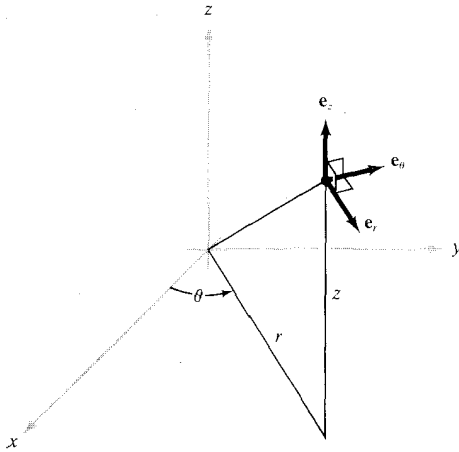
(\bar{T}) هر یک از e_θ ، e_ρ ، و e_z را برحسب i, j, k و (x, y, z) بیان کنید؛ و

(ب) $e_\theta \times z$ را به‌طور تحلیلی با استفاده از (\bar{T}) و به‌طور هندسی محاسبه نمایید.

۷*. با استفاده از مختصات کروی و بردارهای متعامد یک‌ه‌ \hat{e}_ρ ، \hat{e}_θ ، و \hat{e}_ϕ (ر. ک. شکل ۷.۴.۱)،

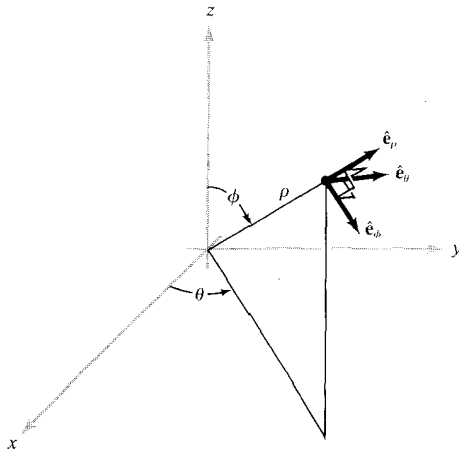
(\bar{T}) هر یک از \hat{e}_ρ ، \hat{e}_θ ، و \hat{e}_ϕ را برحسب i, j, k و (x, y, z) بیان کنید؛ و

(ب) $\hat{e}_\theta \times z$ و $\hat{e}_\phi \times z$ را به‌طور تحلیلی و به‌طور هندسی محاسبه نمایید.



شکل ۶.۴.۱

بردارهای متعامد یکه e_r ، e_θ ، e_z و مربوط به مختصات استوانه‌ای بردار e_r با خط به نمایش r موازی است.



شکل ۷.۴.۱

بردارهای متعامد یکه e_ρ ، e_θ ، e_ϕ و مربوط به مختصات کروی.

۵.۱ فضای اقلیدسی n بعدی

در بخشهای ۱.۱ و ۲.۱ فضاها $\mathbb{R}^1(\mathbb{R})$ ، \mathbb{R}^2 ، و \mathbb{R}^3 را مطالعه کردیم، و به آنها تعبیر هندسی بخشیدیم. مثلاً، "نقطه" (x, y, z) در \mathbb{R}^3 را می‌توان یک شئی هندسی گرفت؛ یعنی، پاره‌خط جهتدار یا برداری که از مبدا خارج شده و به نقطه (x, y, z) ختم شده است. بنابراین این، می‌توان \mathbb{R}^3 را به دو طریق در نظر گرفت:

(یک) به‌طور جبری، به صورت مجموعه‌ای از سه‌تاییهای (x, y, z) که در آن x ، y ، و z اعدادی حقیقی‌اند؛ یا

(دو) به‌طور هندسی، به صورت مجموعه‌ای از پاره‌خطهای جهتدار.

این دو راه نظاره به \mathbb{R}^3 معادلند. برای تعمیم، استفاده از تعریف (یک) آسانتر است. به‌طور مشخص، می‌توان \mathbb{R}^n ، که در آن n عدد صحیح مثبتی (احتمالاً "بزرگتر از 3") است، را مساوی مجموعه تمام n تاییهای مرتب (x_1, x_2, \dots, x_n) تعریف کرد، که در آن x_i ها اعدادی حقیقی‌اند. مثلاً، " $(1, \sqrt{5}, 2, \sqrt{3}) \in \mathbb{R}^4$ "، می‌توان، ولی مشکلتر است، که \mathbb{R}^n را مساوی مجموعه‌ای از اشیاء هندسی جهتدار تعریف کرد.

مجموعه \mathbb{R}^n تعریف شده در بالا (به فضای اقلیدسی n بعدی عناصرش $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ به بردارها یا بردارهای n بعدی معروف هستند. با فرض n مساوی 1، 2، یا 3، به ترتیب خط، صفحه، و فضای سه‌بعدی (\mathbb{R}^3) به دست می‌آیند.

بررسی فضای اقلیدسی n بعدی را با معرفی چند عمل جبری آغاز می‌کنیم. اینها با اعمال آمده در بخش ۱.۱ برای \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 مشابهت کامل دارند. دوتای اول، یعنی جمع و ضرب اسکالر، به صورت زیر تعریف می‌شوند:

$$(یک) \quad (x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

و

(دو) به ازای هر عدد حقیقی α

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n)$$

تعبیر هندسی این اعمال برای \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 در بخش ۱.۱ مورد بحث قرار گرفتند.

n بردار $e_1 = (1, 0, 0, \dots, 0)$ ، $e_2 = (0, 1, 0, \dots, 0)$ ، \dots ، $e_n = (0, 0, \dots, 0, 1)$ بردارهای

پایه متعارف \mathbb{R}^n نام دارند، و تعمیم سه بردار یکه دو به دو متعامد i, j, k از \mathbb{R}^3 می‌باشند.

بردار $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ را می‌توان به صورت $x = x_1 e_1 + x_2 e_2 + \dots + x_n e_n$

نوشت.

به ازای دو بردار $x = (x_1, x_2, x_3)$ و $y = (y_1, y_2, y_3)$ در \mathbb{R}^3 حاصل ضرب نقطه‌ای یا داخلی $x \cdot y$ را عدد حقیقی $x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + x_3 y_3$ تعریف کردیم. این تعریف به آسانی به \mathbb{R}^n قابل تعمیم است. یعنی، به ازای $x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \dots, y_n)$ تعریف می‌کنیم

$$x \cdot y = x_1 y_1 + x_2 y_2 + \dots + x_n y_n.$$

در \mathbb{R}^n ، نماد $\langle x, y \rangle$ اغلب به جای $x \cdot y$ برای حاصل ضرب داخلی به کار می‌رود. ادامه تشابه با \mathbb{R}^3 ما را به تعریف مفهوم مجرد طول یا نرم بردار x به وسیله فرمول زیر می‌رساند:

$$\text{طول } x = \|x\| = \sqrt{x \cdot x} = \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2}.$$

هرگاه x و y دو بردار در صفحه (\mathbb{R}^2) یا در فضا (\mathbb{R}^3) باشند، آنگاه θ زاویه بین

آنها از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$\cos \theta = \frac{x \cdot y}{\|x\| \|y\|}$$

طرف راست این معادله را می‌توان در \mathbb{R}^n مثل \mathbb{R}^2 تعریف کرد. این رابط بازم کسینوس زاویه بین x و y را نمایش می‌دهد. این زاویه تعریف شده است، زیرا x و y در یک زیر فضای دو بعدی از \mathbb{R}^n (صفحه‌ای که با x و y معین می‌شوند) قرار دارند. ضرب نقطه‌ای ابزار ریاضی نیرومندی است، که مفهوم هندسی زاویه بین دو بردار در \mathbb{R}^n را منعکس می‌سازد.

داشتن چند خاصیت جبری ضرب داخلی سودمند است. این خواص در قضیه بعد خلاصه می‌شوند (ر. ک. فرمولهای (یک)، (دو)، (سه)، و (چهار) در بخش ۲۰۱).

قضیه ۲. به ازای $x, y, z \in \mathbb{R}^n$ و α, β حقیقی، داریم

$$(یک) \quad (\alpha x + \beta y) \cdot z = \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z)$$

$$(دو) \quad x \cdot y = y \cdot x$$

$$(سه) \quad x \cdot x \geq 0$$

$$(چهار) \quad x \cdot x = 0 \text{ اگر و فقط اگر } x = 0.$$

برهان. هر یک از احکام فوق را می‌توان با محاسبه ساده‌ای ثابت کرد. مثلاً، "برای اثبات (یک)، می‌نویسیم

$$\begin{aligned}(\alpha x + \beta y) \cdot z &= (\alpha x_1 + \beta y_1, \alpha x_2 + \beta y_2, \dots, \alpha x_n + \beta y_n) \cdot (z_1, z_2, \dots, z_n) \\ &= (\alpha x_1 + \beta y_1)z_1 + (\alpha x_2 + \beta y_2)z_2 + \dots + (\alpha x_n + \beta y_n)z_n \\ &= \alpha x_1 z_1 + \beta y_1 z_1 + \alpha x_2 z_2 + \beta y_2 z_2 + \dots + \alpha x_n z_n + \beta y_n z_n \\ &= \alpha(x \cdot z) + \beta(y \cdot z).\end{aligned}$$

اثباتهای دیگر مشابه می‌باشند.

در بخش ۲.۱ خاصیت بسیار جالبی از ضربهای نقطه‌ای ثابت شد به نام نامساوی کشی - شوارتز (که گاهی نامساوی کشی - بونیاکوفسکی^۱ - شوارتز، یا فقط نامساوی CBS، نامیده می‌شود، زیرا حالات خاص مستقلا" توسط ریاضیدان فرانسوی، کشی، ریاضیدان روس، بونیاکوفسکی، و ریاضیدان آلمانی، شوارتز کشف شده است). در \mathbb{R}^2 ، برهان ما از قانون کسینوسها استفاده می‌کند. در \mathbb{R}^n ، اگر توجه خود را معطوف صفحه‌ای در \mathbb{R}^n کنیم، می‌توانیم از این روش نیز استفاده کنیم. با اینحال، می‌توان برهان کاملاً" جبری مستقیمی نیز ارائه داد.

قضیه ۳. فرض کنیم x, y بردارهایی در \mathbb{R}^n باشند. در این صورت،

$$|x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$$

برهان. فرض کنیم $a = y \cdot y$ و $b = -x \cdot y$. اگر $a = 0$ ، قضیه بوضوح برقرار است، زیرا در این صورت $y = 0$ و طرفین نامساوی به 0 تحویل می‌شوند. لذا، می‌توان فرض کرد $a \neq 0$. بنابراین قضیه ۲، داریم

$$\begin{aligned}0 \leq (ax + by) \cdot (ax + by) &= a^2 x \cdot x + 2abx \cdot y + b^2 y \cdot y \\ &= (y \cdot y)^2 x \cdot x - (y \cdot y)(x \cdot y)^2\end{aligned}$$

از تقسیم بر $y \cdot y$ نتیجه می‌شود

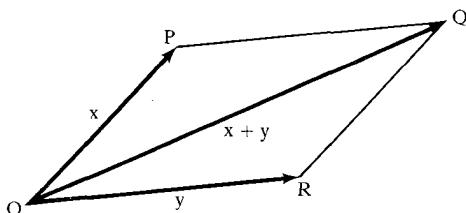
$$0 \leq (y \cdot y)(x \cdot x) - (x \cdot y)^2$$

یا

$$(x \cdot y)^2 \leq (x \cdot x)(y \cdot y) = \|x\|^2 \|y\|^2$$

با جذر گرفتن از طرفین این نامساوی نتیجه^۶ مطلوب به دست می‌آید.

نتیجه^۶ بسیار مفیدی از نامساوی کوشی – شوارتز برحسب طولها وجود دارد. نامساوی مثلثی در \mathbb{R}^3 به‌طور هندسی روشن است. در شکل ۱.۵.۱ داریم $\|OQ\| = \|x + y\|$ ،



شکل ۱.۵.۱

این هندسه نشان می‌دهد که $\|OQ\| \leq \|OR\| + \|RQ\|$ ، با نماد بردارها $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ، که نامساوی مثلثی است.

نتیجه^۷ ، فرض کنیم x, y بردارهایی در \mathbb{R}^n باشند. در این صورت ، $\|OP\| = \|x\| = \|RQ\|$ ، و $\|OR\| = \|y\|$. چون مجموع طولهای دو ضلع یک مثلث از طول ضلع سوم بزرگتر یا مساوی است ، داریم $\|OQ\| \leq \|OR\| + \|RQ\|$ ؛ یعنی ، $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. حالت مربوط به \mathbb{R}^n اینقدر واضح نیست ؛ لذا ، برهان تحلیلی برای آن می‌آوریم .

نتیجه^۸ ، فرض کنیم x, y بردارهایی در \mathbb{R}^n باشند. در این صورت ،

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + 2x \cdot y + \|y\|^2 \leq \|x\|^2 + 2\|x\| \|y\| + \|y\|^2$$

برهان . بنا بر قضیه^۳ ، $x \cdot y \leq |x \cdot y| \leq \|x\| \|y\|$ ؛ در نتیجه ،

$$\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$$

از اینرو ، به دست می‌آوریم $\|x + y\|^2 \leq (\|x\| + \|y\|)^2$ ؛ نتیجه با ریشه‌گیری به دست خواهد آمد .

اگر قضیه^۹ ۳ و نتیجه‌اش را به‌طور جبری بنویسیم ، نامساویهای نسبتاً "غیرواضح زیر

به دست می‌آیند:

$$\left| \sum_{i=1}^n x_i y_i \right| \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}$$

$$\left(\sum_{i=1}^n (x_i + y_i)^2 \right)^{1/2} \leq \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right)^{1/2} + \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right)^{1/2}$$

این نامساویها بسیار مفیدند؛ ما اغلب از آنها در آینده استفاده می‌کنیم، منتها عمدتاً "به شکل برداری".

مثال ۱. فرض کنیم $\mathbf{x} = (1, 2, 0, -1)$ و $\mathbf{y} = (-1, 1, 1, 0)$ در این صورت،

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 0^2 + (-1)^2} = \sqrt{6}$$

$$\|\mathbf{y}\| = \sqrt{(-1)^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2} = \sqrt{3}$$

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 1(-1) + 2 \cdot 1 + 0 \cdot 1 + (-1)0 = 1$$

$$\mathbf{x} + \mathbf{y} = (0, 3, 1, -1)$$

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \sqrt{0^2 + 3^2 + 1^2 + (-1)^2} = \sqrt{11}$$

در این حالت قضیه ۳ مستقیماً "به آسانی" تحقق می‌شود:

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = 1 \leq 4.24 \approx \sqrt{6}\sqrt{3} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$$

به همین نحو، می‌توان نتیجه آن را امتحان کرد:

$$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = \sqrt{11} \approx 3.32 \leq 4.18$$

$$= 2.45 + 1.73 \approx \sqrt{6} + \sqrt{3} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$$

در تشابه با \mathbb{R}^3 ، می‌توان مفهوم فاصله را در \mathbb{R}^n تعریف کرد؛ یعنی، اگر \mathbf{x} و \mathbf{y} نقاطی در \mathbb{R}^n باشند، فاصله بین \mathbf{x} و \mathbf{y} مساوی $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ ، یا طول بردار $\mathbf{x} - \mathbf{y}$ ، تعریف می‌شود. قید می‌کنیم که ضرب خارجی بر \mathbb{R}^n ، جز به ازای $n = 3$ ، تعریف نمی‌شود. فقط ضرب نقطه‌ای است که تعمیم می‌یابد.

با تعمیم ماتریسهای 2×2 و 3×3 (ر.ک. بخش ۳۰)، می‌توان ماتریسهای $n \times n$ یعنی آرایه‌هایی از n^2 عدد، در نظر گرفت:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

همچنین، می‌توان A را به صورت (a_{ij}) نوشت. حال ضرب ماتریسهای $n \times n$ را تعریف می‌کنیم. هرگاه $A = (a_{ij})$, $B = (b_{ij})$ ، آنگاه $AB = C$ دارای درایه‌های زیر است:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj}$$

که حاصل ضرب نقطه‌ای سطر i م A و ستون j م B است:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{n1} & \cdots & b_{nj} & \cdots & b_{nn} \end{bmatrix}$$

مثال ۰۲. فرض کنیم

$$B = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

در این صورت،

$$BA = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 3 \\ 3 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad AB = \begin{bmatrix} 0 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

به همین نحو، با همین قاعده می‌توان ماتریس $n \times m$ (n سطر، m ستون) را در ماتریس $m \times p$ (m سطر، p ستون) ضرب کرده یک ماتریس $n \times p$ (n سطر، p ستون) به دست آورد. توجه کنید که برای تعریف AB باید تعداد ستونهای A مساوی تعداد سطرهای B باشد.

مثال ۰۳. فرض کنیم

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \text{ و } A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$$

در این صورت،

$$AB = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 5 \\ 3 & 4 & 5 \end{bmatrix}$$

و BA تعریف نشده است.

مثال ۰۴. فرض کنیم

$$B = [2 \ 2 \ 1 \ 2] \text{ و } A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}$$

در این صورت،

$$BA = [13] \text{ و } AB = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 4 & 2 & 4 \\ 2 & 2 & 1 & 2 \\ 6 & 6 & 3 & 6 \end{bmatrix}$$

هر ماتریس $m \times n$ مانند A نگاهی از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^m به صورت زیر معین می‌کند. فرض کنیم $\mathbf{x} = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$. ماتریس ستونی $n \times 1$ مربوط به \mathbf{x} را در نظر می‌گیریم که مثلاً "آن را با \mathbf{x}^T نشان می‌دهیم:

$$\mathbf{x}^T = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

و A را در \mathbf{x}^T (به صورت یک ماتریس $n \times 1$) ضرب کرده ماتریس $m \times 1$ جدیدی به دست می‌آوریم:

$$Ax^T = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$$

در این صورت، برداری مانند $y = (y_1, \dots, y_m)$ به دست می‌آید. برای استفاده از ماتریس A برای دستیابی به نگاشتی از بردارهای $x = (x_1, \dots, x_n)$ به بردارهای $y = (y_1, \dots, y_m)$ برطبق معادله قبل، باید بردارها را به جای سطری مانند (x_1, \dots, x_n) به شکل ستونی

بنویسیم. این تغییر ناگهانی در نگارش x از سطری به ستونی در قراردادهای متعارف $\begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

بر ضرب لازم است. لذا، با آنکه این نگارش ممکن است در ضرب ماتریسی ابهام تولید

کند، $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $y = (y_1, \dots, y_m)$ را به صورت بردارهای ستونی $x = \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$

$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_m \end{bmatrix}$ می‌نویسیم؛ یعنی، این دو شکل نگارش بردارها را یکی می‌کنیم. لذا، T ی

روی x^T را حذف کرده و x و x^T را یکی می‌گیریم؛ یعنی، $x = x^T$.

لذا، $Ax = y$ "واقعا" به معنی زیر است: x را به صورت بردار ستونی نوشته‌آن را در A ضرب می‌کنیم، و فرض می‌کنیم y برداری باشد که مؤلفه‌هایش مؤلفه‌های بردار ستونی حاصل باشند. بنابراین، قاعده $x \mapsto Ax$ ، نگاشتی از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^m تعریف می‌کند. این نگاشت خطی است؛ یعنی، همانطور که به آسانی تحقیق می‌شود، در روابط زیر صدق می‌کند:

$$A(x + y) = Ax + Ay$$

$$A(\alpha x) = \alpha(Ax), \text{ اسکالر است } \alpha$$

در جبر خطی می‌آموزیم که، به عکس، هر تبدیل خطی از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^m را می‌توان به همین نحو با ماتریس $m \times n$ نمایش داد.

۱. اگر ریاضیدانان به جای Ax بنویسند xA ، و قواعد دیگری برای ضرب ماتریسی داشته باشند، x می‌تواند به صورت سطری باقی بماند.

هرگاه $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $m \times n$ بوده و e_j بردار پایه متعارف z م از \mathbb{R}^n باشد، آنگاه Ae_j برداری در \mathbb{R}^m است که مؤلفه‌هایش با مؤلفه‌های ستون j م A یکی است. یعنی، مؤلفه i م Ae_j مساوی a_{ij} می‌باشد. با علامت، $(Ae_j)_i = a_{ij}$.

مثال ۵. هرگاه

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

آنگاه $x \mapsto Ax$ از \mathbb{R}^3 به \mathbb{R}^4 نگاشتی است که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x_1 + 3x_3 \\ -x_1 + x_3 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 \\ -x_1 + 2x_2 + x_3 \end{bmatrix}$$

مثال ۶. ذیلاً " توضیح می‌دهیم که در نگارش یک نقطه به وسیله یک ماتریس 4×3 چهار خواهد داد:

$$Ae_2 = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 9 \\ 3 & 5 & 4 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 5 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \text{ستون دوم } A$$

ضرب ماتریسی در حالت کلی تعویض پذیر نیست. هرگاه A و B ماتریس‌هایی $n \times n$ باشند، آنگاه معمولاً

$$AB \neq BA$$

(ر. ک. مثالهای ۲، ۳، ۴). (برای آنکه هر دوی AB و BA تعریف شده باشند، A و B باید ماتریس‌هایی مربعی $(n \times n)$ باشند.)
یک ماتریس $n \times n$ را معکوس پذیر نامیم اگر ماتریس $n \times n$ ی مانند B موجود باشد به طوری که

$$AB = BA = I_n$$

که در آن

$$I_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

ماتریس همانی $n \times n$ است: I_n دارای این خاصیت است که به ازای هر ماتریس $n \times n$ مانند C ، $C I_n = C I_n = C$ ، $B \cdot I_n = I_n C = C$ را با A^{-1} نشان داده و A^{-1} را معکوس A می‌نامیم. معکوس، در صورت وجود، منحصر به فرد است.

مثال ۷. هرگاه

$$A^{-1} = \frac{1}{20} \begin{bmatrix} 4 & -8 & 4 \\ 3 & 4 & -2 \\ -6 & 12 & 4 \end{bmatrix} \text{، آنگاه } A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

زیرا $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$ ، که می‌توان آن را با ضرب ماتریسی تحقیق کرد.

روشهای محاسبه معکوسها در جبر خطی آموخته می‌شود؛ ما در این کتاب به این روشها نیاز نداریم. اگر A معکوسپذیر باشد، معادله $Ax = y$ را می‌توان با ضرب طرفین در A^{-1} نسبت به x حل کرد و به دست آورد $x = A^{-1}y$.

در بخش ۳.۱ دترمینان یک ماتریس 3×3 را تعریف کردیم. این را می‌توان به استقرا به دترمینانهای $n \times n$ تعمیم داد. در اینجا طرز نوشتن دترمینان یک ماتریس 4×4 را برحسب دترمینانهای ماتریسهای 3×3 توضیح می‌دهیم:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} = a_{11} \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{12} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix} \\ + a_{13} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{44} \end{vmatrix} - a_{14} \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} \end{vmatrix}$$

(ر.ک. فرمول (۲) از بخش ۳.۱؛ علایم متناوبا" خواهند بود. $\dots, -, +, -, +, \dots$ خواص اساسی دترمینانهای 3×3 که در بخش ۳.۱ مرور شد برای دترمینانهای $n \times n$ معتبرند. بخصوص، به این نکته توجه می‌کنیم که هرگاه A یک ماتریس $n \times n$ بوده و B ماتریس حاصل از افزودن مضرب اسکالری از سطر (ستون) k م به سطر (ستون) l م A باشد، آنگاه دترمینان A ($\det A$) مساوی دترمینان B ($\det B$) می‌باشد (ر.ک. مثال ۸ در زیر).

یک قضیه اساسی جبر خطی می‌گوید که ماتریس $n \times n$ ، A معکوسپذیر است اگر فقط اگر دترمینان A صفر نباشد. خاصیت اساسی دیگر این است که $\det(AB) = (\det A)(\det B)$. در این کتاب خیلی از جبر خطی استفاده نخواهیم کرد؛ لذا، این احکام را اثبات نشده می‌گذاریم.

مثال ۰.۸ فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$$

اگر $1 -$ برابر ستون اول را به ستون سوم بیفزاییم، به دست می‌آوریم

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{vmatrix} = 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

و با افزودن $1 -$ برابر ستون اول به ستون سوم این دترمینان 3×3 ، خواهیم داشت

$$\det A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = -2$$

لذا، $\det A = -2 \neq 0$ ؛ و در نتیجه، A دارای معکوس می‌باشد.

هرگاه سه ماتریس A ، B ، و C داشته باشیم به طوری که AB و BC تعریف شده

باشند، آنگاه حاصل ضربهای $(AB)C$ و $A(BC)$ تعریف شده‌اند و مساوی می‌باشند (یعنی، ضرب ماتریسی شرکتپذیر است). ما این را حاصل ضرب سه‌گانه ماتریسها نامیده و با ABC نشان می‌دهیم.

مثال ۰۹. فرض کنیم

$$C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} \text{ و } B = [1 \ 1] \text{ ، } A = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix}$$

در این صورت،

$$ABC = A(BC) = \begin{bmatrix} 3 \\ 5 \end{bmatrix} [3] = \begin{bmatrix} 9 \\ 15 \end{bmatrix}$$

مثال ۱۰

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

ضرب ماتریسی مهمترین عمل جبری غیرمقدماتی بر ماتریسهاست؛ چند عمل مقدماتی نیز وجود دارند که شایسته است نام برده شوند. اگر A و B دو ماتریس $m \times n$ باشند، می‌توان با جمع (تفریق) آنها ماتریس $m \times n$ جدید $C = A + B$ ($C = A - B$) را به دست آورد که درایه ij آن مجموع (تفاضل) a_{ij} و b_{ij} می‌باشد. واضح است که $A + B = B + A$.

مثال ۱۱

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 4 & 8 \end{bmatrix}$$

مثال ۱۲

$$[1 \ 2] + [0 \ -1] = [1 \ 1]$$

مثال ۱۳ .

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

اگر λ یک اسکالر و A یک ماتریس $m \times n$ باشد، می توان با ضرب A در λ ماتریس $m \times n$ جدید $\lambda A = C$ را به دست آورد، که درایه ij آن $c_{ij} = \lambda a_{ij}$ مساوی حاصل ضرب λ می باشد.

مثال ۱۴ .

$$3 \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -3 & 6 \\ 0 & 3 & 15 \\ 3 & 0 & 9 \end{bmatrix}$$

تمرینات

۱ . قسمتهای (دو) تا (چهار) قضیه ۲ را ثابت کنید .

۲ . در \mathbb{R}^n نشان دهید که

$$2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 = \|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 \quad (\text{آ})$$

(این به قانون متوازی الاضلاع معروف است .)

$$\|x + y\| \|x - y\| \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 \quad (\text{ب})$$

$$4\langle x, y \rangle = \|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 \quad (\text{پ})$$

(این اتحاد قطبی سازی نامیده می شود .)

این نتایج را به وسیله متوازی الاضلاع تشکیل شده از x و y تعبیر هندسی کنید .

۳ . نامساوی CBS و نامساوی مثلثی را در هر مورد زیر تحقیق نمایید :

$$x = (2, 0, -1), y = (4, 0, -2) \quad (\text{آ})$$

$$x = (1, 0, 2, 6), y = (3, 8, 4, 1) \quad (\text{ب})$$

$$x = (1, -1, 1, -1, 1), y = (3, 0, 0, 0, 2) \quad (\text{پ})$$

۴ . تحقیق کنید اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، نگاشت $x \mapsto Ax$ از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^n خطی است.

۵ . به فرض برقراری قانون $\det(AB) = (\det A)(\det B)$ ، تحقیق کنید که $(\det A)(\det A^{-1})$

۱ = و نتیجه بگیرید که هرگاه A معکوس داشته باشد، آنگاه $\det A \neq 0$.

۰.۶ $\det A$ ، $\det B$ ، $\det(AB)$ ، و $\det(A+B)$ را به ازای

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

حساب کنید.

۰.۷ تحقیق کنید که معکوس

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \text{ مساوی } \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \text{ است.}$$

۰.۸ با استفاده از جواب تمرین ۷، نشان دهید که جواب دستگاه

$$ax + by = e$$

$$cx + dy = f$$

مساوی است یا

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{ad-bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e \\ f \end{bmatrix}$$

۰.۹ به استقرا بر k ، ثابت کنید هرگاه $x_1, \dots, x_k \in \mathbb{R}^n$ ، آنگاه

$$\|x_1 + \dots + x_k\| \leq \|x_1\| + \dots + \|x_k\|$$

۰.۱۰ اتحاد لاگرانژ را با استفاده از جبر ثابت کنید: به ازای اعداد حقیقی x_1, \dots, x_n و

y_1, \dots, y_n داریم

$$\left(\sum_{i=1}^n x_i y_i \right)^2 = \left(\sum_{i=1}^n x_i^2 \right) \left(\sum_{i=1}^n y_i^2 \right) - \sum_{i < j} (x_i y_j - x_j y_i)^2$$

با استفاده از این، برهان دیگری از نامساوی کوشی - شوارتز در \mathbb{R}^n به دست آورید.

* ۰.۱۱ به استقرا ثابت کنید هرگاه A یک ماتریس $n \times n$ باشد، آنگاه

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det A \quad (\bar{A}) \quad \text{و}$$

(ب) هرگاه B ماتریس حاصل از A با ضرب یک سطر یا یک ستون در اسکالر λ باشد،

$$\det B = \lambda \det A.$$

در تمرینهای ۱۲، ۱۳، ۱۴، و A ، B ، و C ماتریسهایی $n \times n$ می‌باشند.

۰.۱۲ آیا $\det(A+B) = \det A + \det B$ ؟ دلیل بیاورید یا مثال نقض.

۱۳. آیا $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2 = (A)(A) - (B)(B)$ ؟

۱۴. ثابت کنید که $\det(ABC) = (\det A)(\det B)(\det C)$

۱۵. (در این تمرین انتگرالگیری از توابع یک متغیره پیوسته دانسته فرض می شود .) توجه

کنید که برهان نامساوی CBS (قضیه ۳) فقط به خواص ضرب داخلی مذکور در قضیه ۲ وابسته است . با استفاده از این مطلب ، نامساوی زیر را برای توابع پیوسته

$f, g: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ ثابت نمایید .

$$\left| \int_0^1 f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_0^1 [f(x)]^2 dx} \sqrt{\int_0^1 [g(x)]^2 dx}$$

این کار را با

(\bar{A}) تحقیق اینکه فضای توابع پیوسته از $[0, 1]$ به \mathbb{R} یک فضای برداری تشکیل می دهد ؛

یعنی ، می توان توابع f, g به طور مجرد " بردارهایی " گرفت که می شود آنها را با هم جمع یا در اسکالرها ضرب نمود ؛

(ب) با معرفی حاصل ضرب داخلی توابع به صورت زیر

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x) dx$$

تحقیق کنید که شرایط (یک) تا (چهار) قضیه ۲ برقرار می شود .

۱۶. A^T ترانسهاده ماتریس $n \times n$ را به این صورت تعریف کنید :

عنصر ij^{th} ام A^T مساوی a_{ji} است ، که در آن a_{ij} درایه ij^{th} م A می باشد و نشان دهید

که A^T به وسیله خاصیت زیر توصیف می شود . به ازای هر x, y در \mathbb{R}^n ،

$$(A^T x) \cdot y = x \cdot (Ay)$$

تمرینات دوره‌ای برای فصل ۱

۱. فرض کنید $v = 3i + 4j + 5k$ و $w = i - j + k$. بردارهای

$$v + w, 3v, 6v + 8w, -2v, v \cdot w, v \times w.$$

را محاسبه کنید . هر عمل را با رسم بردارها تعبیر هندسی نمایید .

۲. (\bar{A}) معادله خط مار بر $(0, 1, 0)$ در جهت $3i + k$ را بیابید .

(ب) معادله خط مار بر $(0, 1, 1)$ و $(0, 1, 0)$ را بیابید .

(پ) معادله صفحه عمود بر $(-1, 1, -1)$ و مار بر $(1, 1, 1)$ را بیابید .

۳. با استفاده از نماد بردار، مثلثی در فضا را توصیف کنید که رئوس مبدأ و نقاط انتهایی بردارهای a و b باشند.
۴. نشان دهید که سه بردار a, b, c در یک صفحه^۶ ماربر مبدأ واقعند اگر و فقط اگر سه اسکالر α, β, γ ، که همه صفر نیستند، وجود داشته باشند به طوری که $\alpha a + \beta b + \gamma c = 0$.
۵. به ازای اعداد حقیقی $a_1, a_2, a_3, b_1, b_2, b_3$ ، نشان دهید که
- $$(a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2)$$
۶. فرض کنید u, v, w بردارهای یک‌ای باشند که با یکدیگر متعامند. اگر $a = \alpha u + \beta v + \gamma w$ ،

نشان دهید که

$$\alpha = a \cdot u, \quad \beta = a \cdot v, \quad \gamma = a \cdot w$$

نتایج را تعبیر هندسی کنید.

۷. فرض کنید a, b دو بردار در صفحه بوده، $a = (a_1, a_2)$ ، $b = (b_1, b_2)$ ، و λ عددی حقیقی باشد، نشان دهید که مساحت متوازی‌الاضلاع تولید شده به وسیله a و λa مساوی مساحت متوازی‌الاضلاع تولید شده به وسیله a و b است. آن را رسم کنید. این نتیجه را به خاصیت معروفی از دترمینانها مربوط سازید.
۸. حجم متوازی‌السطوح معین شده با رئوس $(0, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 2, 0), (3, 1, 2)$ را بیابید.
۹. بردارهای ناصفر a و b در \mathbb{R}^3 داده شده‌اند. نشان دهید که بردار زاویه بین a و b

$$v = \frac{\|a\|b + \|b\|a}{\|a\| + \|b\|}$$

را نصف می‌کند.

۱۰. به روشهای برداری، ثابت کنید فاصله نقطه (x_1, y_1) تا خط $ax + by = c$ مساوی است با

$$\frac{|ax_1 + by_1 - c|}{\sqrt{a^2 + b^2}}$$

۱۱. تحقیق کنید که جهت $c \times b$ از قاعده دست راست، با گرفتن b, c مساوی بردارهای i, j, k ، به دست می‌آید.

۱۲. (آ) فرض کنید به ازای هر b ، $a \cdot b = a' \cdot b$. نشان دهید که $a = a'$.

(ب) فرض کنید به ازای هر b ، $a \times b = a' \times b$. آیا $a = a'$ ؟

۱۳. (آ) به روشهای برداری، نشان دهید که فاصله بین دو خط غیرموازی l_1 و l_2 عبارت

است از

$$d = \frac{|(v_2 - v_1) \cdot (a_1 \times a_2)|}{\|a_1 \times a_2\|}$$

که در آن v_1, v_2 به ترتیب نقاطی بر l_1 و l_2 اند، و a_1 و a_2 راستاهای l_1 و l_2 را نشان می‌دهند.

(راه‌نمایی. صفحه‌ماربر l_2 موازی l_1 را در نظر بگیرید. نشان دهید که $(a_1 \times a_2) / \|a_1 \times a_2\|$

قائم بیکه این صفحه است؛ حال $v_2 - v_1$ را روی این راستای قائم تصویر کنید.

(ب) فاصله بین خط l_1 تعیین شده به وسیله نقاط $(-1, -1, 1)$ و $(0, 0, 0)$ و خط l_2

تعیین شده به وسیله نقاط $(0, -2, 0)$ و $(2, 0, 5)$ را بیابید.

۱۴. نشان دهید که دو صفحه به معادلات $Ax + By + Cz + D_1 = 0$ و $Ax + By + Cz + D_2 = 0$

موازیند، و فاصله بین این دو صفحه مساوی است با

$$\frac{|D_1 - D_2|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

۱۵. (آ) ثابت کنید مساحت مثلث به رئوس $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$ در صفحه قدرمطلق

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

می‌باشد.

(ب) مساحت مثلث به رئوس $(1, 2), (0, 1), (-1, 1)$ را بیابید.

۱۶. نقاط زیر را از مختصات دکارتی به مختصات استوانه‌ای و کروی برگردانده و آنها را

رسم کنید:

$$(0, 3, 4) \quad (\bar{A}) \quad (-\sqrt{2}, 1, 0) \quad (\bar{B})$$

$$(0, 0, 0) \quad (\bar{P}) \quad (-1, 0, 1) \quad (\bar{T})$$

$$(-2\sqrt{3}, -2, 3) \quad (\bar{Z})$$

۱۷. نقاط زیر را از مختصات استوانه‌ای به مختصات دکارتی و کروی برگردانده و آنها را

رسم کنید:

$$(1, \pi/4, 1) \quad (\bar{A}) \quad (3, \pi/6, -4) \quad (\bar{B})$$

$$(0, \pi/4, 1) \quad (\bar{P}) \quad (2, -\pi/2, 1) \quad (\bar{T})$$

(ث) $(-2, -\pi/2, 1)$

۱۸. نقاط زیر را از مختصات کروی به مختصات دکارتی و مختصات استوانه‌ای برگردانده و آنها را رسم کنید:

(آ) $(1, \pi/2, \pi)$ (ب) $(2, -\pi/2, \pi/6)$

(پ) $(0, \pi/8, \pi/35)$ (ت) $(2, -\pi/2, -\pi)$

(ث) $(-1, \pi, \pi/6)$

۱۹. معادله $z = x^2 - y^2$ را با مختصات استوانه‌ای و مختصات کروی بنویسید.

۲۰. با استفاده از مختصات کروی، نشان دهید که

$$\phi = \cos^{-1}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{k} / \|\mathbf{u}\|)$$

که در آن $\mathbf{u} = xi + yj + zk$. این رابطه را تعبیر هندسی کنید.

۲۱. نامساویهای کشی - شوارتز و مثلثی را در مورد

$$\mathbf{x} = (3, 2, 1, 0) \quad \text{و} \quad \mathbf{y} = (1, 1, 1, 2)$$

تحقیق کنید.

۲۲. ماتریسهای

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad A = \begin{bmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

را در هم ضرب کنید. آیا $AB = BA$ ؟

۲۳. (آ) نشان دهید که به ازای دو ماتریس $n \times n$ ، A و B ، و $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^n$ ،

$$(AB)\mathbf{x} = A(B\mathbf{x})$$

(ب) از (آ) چه رابطه‌ای بین ترکیب نگاشتهای Ay و Bx ، $y \mapsto Ay$ و $x \mapsto Bx$ و ضرب ماتریسی

نتیجه می‌شود؟

۲۴. آیا

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

معکوسپذیر است؟

۲۵. تحقیق کنید که هر نگاشت خطی از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^n به وسیله یک ماتریس $n \times n$ معین

می‌شود؛ یعنی، از یک ماتریس $n \times n$ به روشی که در ص ۶۷ توصیف شد به دست می‌آید.

۲۶. معادله صفحه‌ای را بیابید که شامل نقطه $(3, -1, 2)$ و خط $v = (2, -1, 0) + t(2, 3, 0)$ باشد.

فصل دوم

مشتقگیری

من با ترس و وحشت از توابع شوم مصیبت باری که مشتق ندارند رومی گردانم .

شارل هرمیت

در نامه‌ای به توماس یان اشتیلیس

در این فصل حساب دیفرانسیل را از توابع یک متغیره به توابع چند متغیره تعمیم می‌دهیم. بحث را با بخشی در باب هندسه^۱ توابع حقیقی آغاز می‌کنیم. بررسی نمودار آنها در تجسم این توابع مفید می‌باشد.

در بخش ۲.۲ چند تعریف اساسی در رابطه با حدود و پیوستگی می‌آیند. این مبحث را به اختصار مطرح می‌کنیم، به این دلیل که بحث کامل آن نیاز به زمان و پختگی ریاضی دارد؛ و لذا، بهتر است به درس پیشرفته‌تری واگذار شود^۱.

خوشبختانه، به تمام ظرافتهای مفهوم حد نیاز نداریم؛ دانشجویی که این بخش را مشکل می‌یابد باید این مطلب را به خاطر داشته باشد. با اینحال، باید اضافه کنیم که مفهوم حد هسته^۲ تعریف مشتق است، ولی همانطور که قبلاً^۳ در حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره دیدیم، در محاسبه^۴ مشتق در مسائل خاص این‌طور نخواهد بود.

در بخشهای ۳.۲ و ۴.۲ به تعریف مشتق پرداخته، و چند قاعده^۵ اساسی حساب

۱. مثلاً "، ر.ک.

دیفرانسیل و انتگرال، یعنی طرز مشتقگیری از مجموع، حاصل ضرب، خارج قسمت، یا ترکیب را ثابت می‌کنیم. (چند مطلب تکنیکی‌تر در رابطه با نظریه حدود و حساب دیفرانسیل در ضمیمه ۴ آمده است.) در بخش ۵.۲ مشتقات جهتی و صفحات مماس را بررسی کرده، این مفاهیم را به مفاهیم بخش ۱۰.۲ مربوط می‌سازیم. بالاخره، در بخش ۶.۲ چند خاصیت از مشتقات مراتب بالاتر را در نظر می‌گیریم.

در تعمیم حساب دیفرانسیل و انتگرال از یک به چند بعدی، اغلب مناسب است (اگر چه مطلقاً "اساسی نیست") که از زبان جبر ماتریسی استفاده شود. مطالب مورد نیاز در بخش ۵.۱ خلاصه شده‌اند.

۱۰.۲ هندسه توابع حقیقی

بررسی توابع حقیقی را با ارائه روشهای تجسم آنها آغاز می‌کنیم. بخصوص، مفاهیم نمودار منحنی تراز، و سطح تراز این توابع را معرفی خواهیم کرد.

فرض کنیم f تابعی باشد که قلمروش زیر مجموعه A از \mathbb{R}^n بوده (یعنی، $A \subset \mathbb{R}^n$) و بردش مشمول \mathbb{R}^m باشد. این بدان معنی است که f به هر $x = (x_1, \dots, x_n) \in A$ مقدار $f(x)$ را مربوط می‌کند، که یک m تایی در \mathbb{R}^m است. چنین f را یک تابع برداری نامیم اگر $m > 1$ ، و یک تابع اسکالرنامیم اگر $m = 1$. به عنوان مثال $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}$ مجموعه A مرکب از $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ ها در \mathbb{R}^3 ($n = 3$ در این حالت) را به \mathbb{R} ($m = 1$) می‌نگارد. گاهی f را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$f: (x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}$$

توجه کنید که اغلب در \mathbb{R}^3 از نماد (x, y, z) به جای (x_1, x_2, x_3) استفاده می‌کنیم. به طور کلی، نماد $f(x) \mapsto x$ برای نمایش مقداری که نقطه $x \in \mathbb{R}^n$ به آن فرستاده می‌شود مفید است. برای نشان دادن اینکه A قلمرو f (در \mathbb{R}^n) بوده و بردش مشمول \mathbb{R}^m است می‌نویسیم $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. همچنین، از این عبارت که " f ، A را به توی \mathbb{R}^m می‌نگارد" استفاده خواهیم کرد.

۱. بعضی از ریاضیدانان این f را با حرف سیاه می‌نویسند، مانند $f(x)$ ، زیرا این یک تابع برداری است. ما این کار را نکردیم، و دلیلش چیزی جز سلیقه شخصی نبوده است. ما حروف سیاه را عمدتاً "برای نگاشتهایی که میدان برداری‌اند، که بعداً معرفی می‌شوند، به کار خواهیم برد.

تابع f را یک تابع چند متغیره نامیم اگر $n > 1$ ، $A \subset \mathbb{R}^n$. به عنوان مثالی دیگر، می‌توان تابع $g: \mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}^2$ را با قاعده^۶ زیر تعریف کرد:

$$g(x) = g(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5, x_6) = (x_1 x_2 x_3 x_4 x_5 x_6, \sqrt{x_1^2 + x_6^2})$$

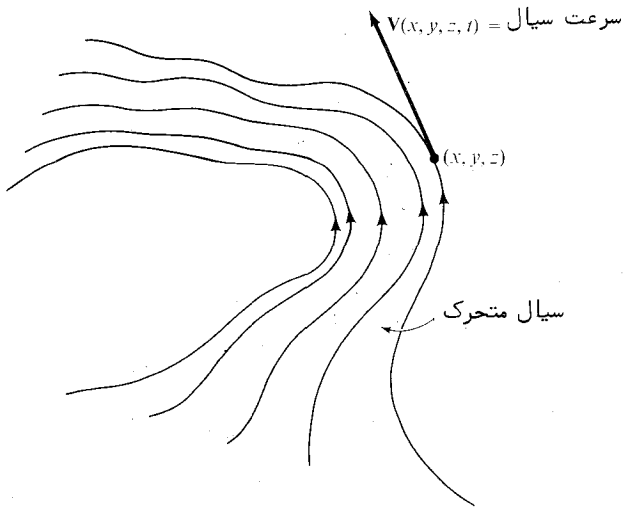
مختص اول مقدار g در x حاصل ضرب مختصات x است .

یادداشت تاریخی

مفهوم تابع در طول قرن‌ها تکامل، و تعریفش به حالاتی که رفته رفته ظاهر شده‌اند تعمیم یافته است. مثلاً^۷، در ۱۶۶۷، جیمز گریگوری^۱ تابع را این طور تعریف کرده‌است: "کمیتی است که از کمیات دیگر با یک رشته اعمال جبری یا هر عمل قابل تصور دیگر به دست می‌آید" در سال ۱۷۵۵، اویلر^۲ تعریف زیر را عرضه کرد: "هرگاه کمیاتی به کمیات دیگر طوری وابسته باشند که وقتی دسته^۳ اول تغییر می‌کنند دسته^۴ دوم نیز تغییر نمایند، آنگاه دسته^۵ دوم را توابعی از دسته^۶ اول می‌نامیم."

مهم است در اینجا بدانیم که توابع از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^m فقط تجربدهای ریاضی نیستند. اینها در مسائل تمام علوم به‌طور طبیعی ظاهر می‌شوند. مثلاً^۸، برای تعیین دمای T در ناحیه^۹ A از فضا به تابع $T: A \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ($n = 3, m = 1$) نیاز داریم. لذا، $T(x, y, z)$ دما در نقطه^{۱۰} (x, y, z) است. برای تعیین سرعت یک سیال متحرک در فضا نیاز به نگاشت $\mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^3$ داریم، که در آن بردار سرعت سیال در نقطه^{۱۱} (x, y, z) در فضا در لحظه^{۱۲} t است (ر. ک. شکل ۱۰.۱.۲). برای تعیین میزان واکنش یک محلول مرکب از شش ماده^{۱۳} شیمیایی واکنشی A, B, C, D, E, F به نسبت x, y, z, w, u, v نیاز به نگاشت $\mathbb{R}^6 \rightarrow \mathbb{R}$ داریم، که در آن $\sigma(x, y, z, w, u, v)$ میزان مطلوب به ازای نسبتهای فوق الذکر است. برای تعیین بردار قلبی (برداری که اندازه و جهت جریان الکتریکی در قلب را می‌دهد) در لحظه^{۱۴} t ، به نگاشت $\mathbb{R}^3, t \mapsto c(t)$ نیاز خواهیم داشت.

وقتی $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، گوئیم f یک تابع حقیقی از n متغیر یا قلمرو U است. دلیل اینکه می‌گوئیم n متغیر این است که ما مختصات نقطه^{۱۵} $x = (x_1, \dots, x_n) \in U$ را n متغیر می‌گیریم، و $f(x) = f(x_1, \dots, x_n)$ به این متغیرها وابسته می‌باشد. گوئیم حقیقی زیرا



شکل ۱.۱.۰۲

یک سیال متحرک میدان برداری v را با تعیین سرعت ذرات سیال در هر نقطه در فضا و زمان تعریف می‌کند.

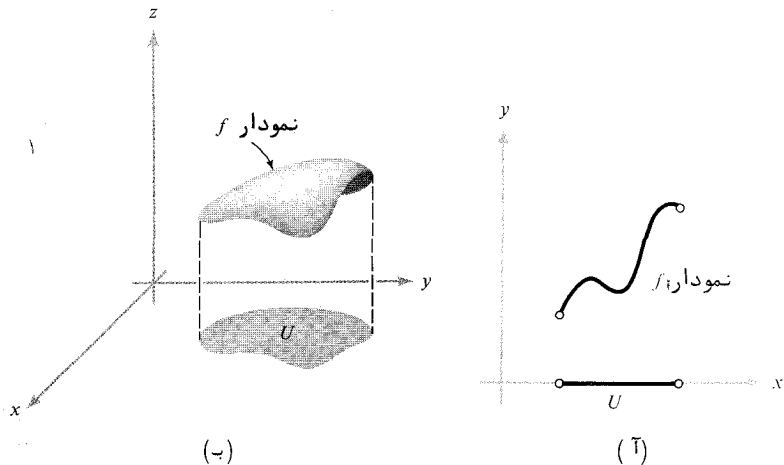
$f(x_1, \dots, x_n)$ یک عدد حقیقی است. مقدار زیادی از کارهای ما با توابع حقیقی است؛ لذا، به آنها توجه خاصی مبذول خواهیم داشت.

به ازای $f: U \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ($n = 1$)، نمودار f زیر مجموعه‌ای است از \mathbb{R}^2 مرکب از تمام نقاط $(x, f(x))$ در صفحه به ازای x در U . این زیرمجموعه را می‌توان یک منحنی در \mathbb{R}^2 تصور کرد. با علامات، این را به صورت زیر می‌نویسیم:

$$\text{نمودار } f = \{(x, f(x)) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in U\}$$

که در آن $\{ \}$ یعنی "مجموعه" تمام "و خط قائم خوانده می‌شود: "به طوری که". رسم نمودار تابع یک متغیره ابزار بسیار مفیدی در تجسم رفتار تابع است. (ر.ک. شکل ۰.۲.۱.۰۲). لذا، اگر بتوان ایده نمودار را به توابع چند متغیره تعمیم داد، بسیار مفید خواهد بود. این ما را به تعریف زیر می‌رساند.

تعریف. فرض کنیم $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$. نمودار f را زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R}^{n+1} مرکب از جمیع



شکل ۲.۱.۲

نمودارهای (a) یک تابع یک متغیره و (b) یک تابع دو متغیره

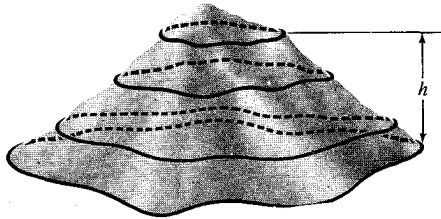
نقاط $(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n))$ در \mathbb{R}^{n+1} تعریف می‌کنیم که (x_1, \dots, x_n) در U است. با علامات،

$$f \text{ نمودار} = \{(x_1, \dots, x_n, f(x_1, \dots, x_n)) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid (x_1, \dots, x_n) \in U\}$$

در حالت $n = 1$ ، نمودار، به زبان شهودی، یک منحنی در \mathbb{R}^2 است، حال آنکه به ازای $n = 2$ یک سطح در \mathbb{R}^3 می‌باشد (ر.ک. شکل ۲.۱.۲). به ازای $n = 3$ ، تجسم نمودار مشکل است زیرا، ما که موجوداتی در جهان سه‌بعدی‌ایم، تجسم مجموعه‌ها در \mathbb{R}^4 مشکل است. برای غلبه بر این صفت، مفهوم مجموعه‌تراز را معرفی می‌کنیم.

فرض کنیم $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. در این صورت، یک مجموعه‌تراز زیر مجموعه‌ای است از \mathbb{R}^3 که f بر آن ثابت است؛ مثلاً، مجموعه‌ای که بر آن $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ یک مجموعه‌تراز برای f است. این مجموعه را می‌توان تجسم کرد. این یک کره به شعاع 1 در \mathbb{R}^3 است. رفتار یا ساختار یک تابع بعضاً از شکل مجموعه‌های تراز آن معین می‌شود؛ در نتیجه، درک این مجموعه‌ها به درک تابع مورد نظر کمک می‌کند. مفهوم مجموعه‌های تراز برای درک توابع دو متغیره $f(x, y)$ نیز مفید است، که در این حالت از منحنیهای تراز سخن خواهیم گفت.

این ایده به ایده‌ای که در تهیه نگاشتهای کنوری به کار می‌رود خیلی شبیه است. در آنجا خطوط نمایش ارتفاعات ثابت است؛ حرکت در امتداد چنین خطی حرکت در یک جاده صاف. در حالت صعود از تپه از صفحه xy ، نمودار تمام این منحنیهای تراز ایده خوبی از تابع $h(x, y)$ به ما می‌دهد، که نمایش ارتفاع تپه در نقطه (x, y) است (ر. ک. شکل ۳.۱.۲).



شکل ۳.۱.۲

کنتورهای تراز یک تابع به همان صورتی تعریف می‌شوند که خطوط کنوری یک نقشه جغرافیا به دست می‌آیند.

تعریف. فرض کنیم $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ و $c \in \mathbb{R}$. در این صورت، مجموعه تراز با مقدار عبارت است از مجموعه نقاطی مانند $x \in U$ که در آن $f(x) = c$. اگر $n = 2$ ، از منحنی تراز (با مقدار c)، و اگر $n = 3$ ، از سطح تراز صحبت خواهیم کرد. با علامات، مجموعه تراز با مقدار c به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$\{x \in U \mid f(x) = c\} \subset \mathbb{R}^n$$

توجه کنید که مجموعه تراز همواره در فضای قلمرو است.

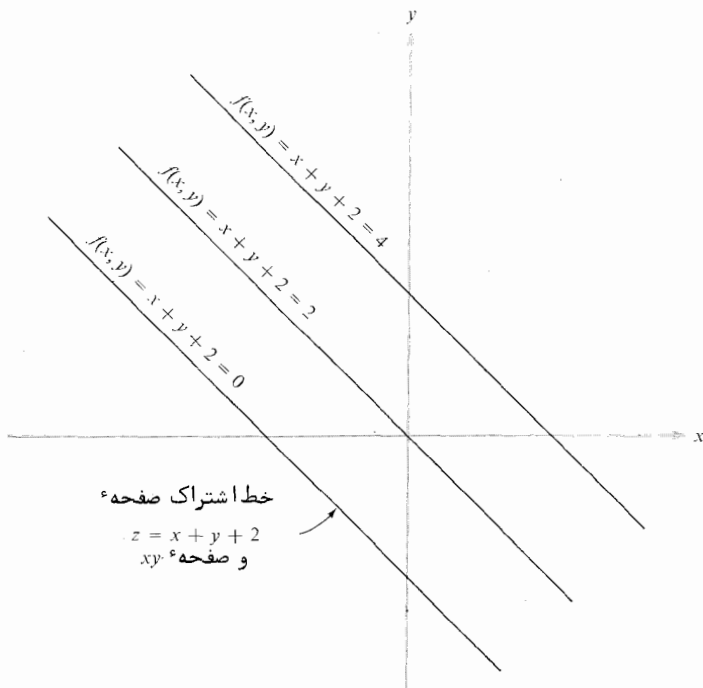
مثال ۱. تابع ثابت $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $(x, y) \mapsto 2$ ، یعنی، $f(x, y) = 2$ ، صفحه افقی $z = 2$ در \mathbb{R}^3 را به عنوان نمودار دارد. منحنی تراز با مقدار c تهی است اگر $c \neq 2$ ، و تمام صفحه xy است اگر $c = 2$.

مثال ۲. تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $(x, y) \mapsto x + y + 2$ ، صفحه مایل $z = x + y + 2$ را به عنوان نمودار دارد. این صفحه xy ($z = 0$) را در خط $y = -x - 2$ و محور z را

در نقطه $(0, 0, 2)$ قطع می‌کند. به ازای هر مقدار $c \in \mathbb{R}$ ، منحنی تراز با مقدار c خط مستقیم $y = -x + (c - 2)$ است، یا، با علامات، مجموعه زیر می‌باشد:

$$L_c = \{(x, y) \mid y = -x + (c - 2)\} \subset \mathbb{R}^2.$$

در شکل ۴.۱.۲ چند تا از این منحنیهای تراز را نشان داده‌ایم.

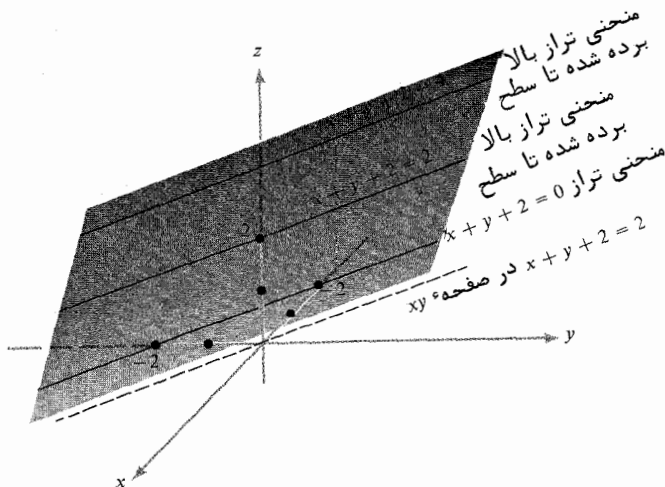


شکل ۴.۱.۲

منحنیهای تراز $f(x, y) = x + y + 2$ رفتار این تابع را نشان می‌دهند.

از منحنیهای تراز، که با مقدار یا "ارتفاع" تابع نموده می‌شوند، می‌توان شکل نمودار را با بالا رفتن ذهنی از هر منحنی، بدون کشیدن، کج کردن، یا سرازیر کردن آن، به ارتفاع مورد نظر، به دست آورد. اگر این روند به ازای جمیع منحنیهای تراز L_c ، یعنی به ازای جمیع مقادیر $c \in \mathbb{R}$ ، تجسم شود، همانطور که شکل ۵.۱.۲ در مثال ۲ نشان

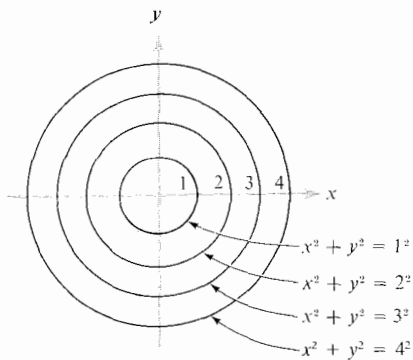
می‌دهد، از مجموع آنها کل نمودار f به دست می‌آید. چنانچه، طبق معمول، نمودار به ازای تعدادی متناهی منحنی تراز تجسم شود، مانند شکل ۴.۱.۲، نوعی مدل کنترولی به دست می‌دهد. با اینحال، اگر f یک تابع هموار باشد، نمودارش سطحی هموار است؛ در نتیجه، مدل کنترولی به طرز ذهنی هموار شده ایده‌مناسبی از نمودار به ما خواهد داد.



شکل ۴.۱.۲

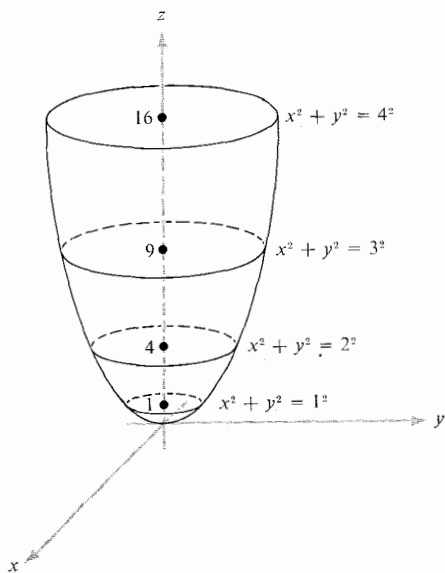
رابطه منحنیهای تراز شکل ۴.۱.۲ با نمودار تابع $f(x, y) = x + y + 2$ که صفحه $z = x + y + 2$ است.

مثال ۳. نمودار تابع درجه دوم $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x, y) = x^2 + y^2$ ، یک سهمی‌گون دوار است، که جهتش از مبدأ به بالا، حول محور z ، می‌باشد. منحنی تراز با مقدار c که $c < 0$ تهی است؛ به ازای $c > 0$ ، اگر بنویسیم $c = a^2$ ، منحنی تراز با مقدار c مجموعه $\{(x, y) | x^2 + y^2 = a^2\}$ است، که دایره‌ای به شعاع a در مبدأ است. لذا، در صفحه c بالای صفحه xy ، مجموعه تراز دایره‌ای است به شعاع \sqrt{c} ، که یک شکل سهموی را نشان می‌دهد (ر. ک. شکل‌های ۶.۱.۲ و ۷.۱.۲).



شکل ۶.۱۰.۲

چند منحنی تراز برای تابع $f(x, y) = x^2 + y^2$



شکل ۷.۱۰.۲

منحنیهای تراز شکل ۶.۱۰.۲ روی نمودار

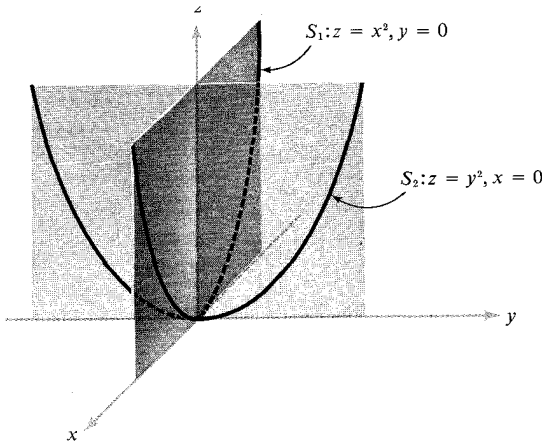
شکل یک نمودار را می‌توان به روش مقاطع نیز تعیین کرد. منظور از مقطع نمودار f یعنی اشتراک نمودار و یک صفحه (قائم) . مثلا " ، هرگاه P_1 صفحه yz در \mathbb{R}^3 باشد ، که با $y = 0$ تعریف می‌شود ، آنگاه مقطع f در مثال ۳ عبارت است از مجموعه

$$P_1 \cap f \text{ نمودار} = \{(x, y, z) | y = 0, z = x^2\}$$

که یک سهمی در صفحه xz است . به همین نحو ، هرگاه P_2 صفحه yz باشد که با $x = 0$ تعریف شده است ، آنگاه مقطع

$$P_2 \cap f \text{ نمودار} = \{(x, y, z) | x = 0, z = y^2\}$$

یک سهمی در صفحه yz است . (ر.ک. شکل ۸.۱.۲) . برای تکمیل اطلاعات مربوط به



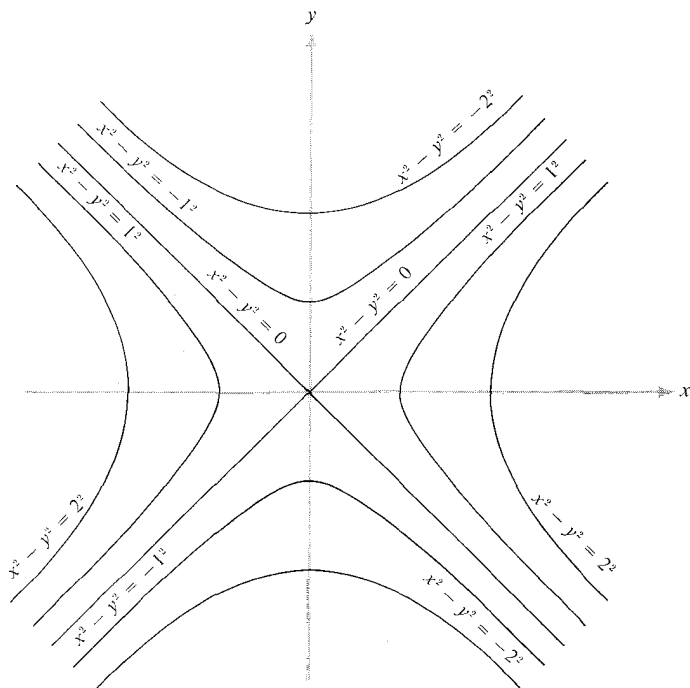
شکل ۸.۱.۲

دو مقطع نمودار $f(x, y) = x^2 + y^2$

مجموعه‌های تراز ، معمولاً " محاسبه دست کم یک مقطع مفید است .

مثال ۴. نمودار تابع درجه دوم $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x, y) = x^2 - y^2$ ، سطحی است که سهمی گون هذلولوی ، یا زین ، به مرکز مبدا نامیده می‌شود . برای تجسم این سطح ، ابتدا منحنیهای تراز را رسم می‌کنیم . برای تعیین منحنیهای تراز ، باید معادله $x^2 - y^2 = c$ را حل کنیم . مقادیری از c نزدیک صفر ، مثلا " $c = 0, \pm 1, \pm 4$ ، را در نظر می‌گیریم .

به ازای $c = 0$ داریم $y^2 = x^2$ یا $y = \pm x$ ؛ در نتیجه، این مجموعه تراز از دو خط مستقیم مار بر مبدا تشکیل شده است. به ازای $c = 1$ ، منحنی تراز عبارت است از $x^2 - y^2 = 1$ یا $y = \pm\sqrt{x^2 - 1}$ ، که هذلولیی است که به طور قائم از محور x در $(\pm 1, 0)$ گذشته است (ر. ک. شکل ۹.۱.۲). به همین نحو، به ازای $c = 4$ ، منحنی تراز با $y = \pm\sqrt{x^2 - 4}$ تعریف می شود، که هذلولیی است که به طور قائم از محور x در $(\pm 2, 0)$



شکل ۹.۱.۲

منحنیهای تراز برای تابع $f(x, y) = x^2 - y^2$

گذشته است. به ازای $c = -1$ ، منحنی $x^2 - y^2 = -1$ به دست می آید؛ یعنی، $x = \pm\sqrt{y^2 - 1}$ ، که هذلولیی است که به طور افقی از محور y در $(0, \pm 1)$ می گذرد. و به ازای $c = -4$ ، هذلولی مار بر $(0, \pm 2)$ به دست می آید. این منحنیهای تراز در

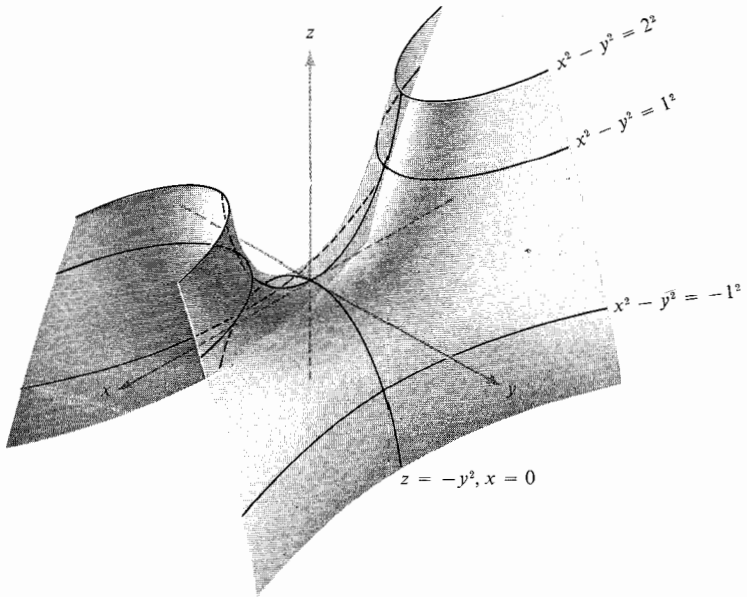
شکل ۱۰۲.۹۰ نموده شده‌اند. چون تجسم نمودار f فقط به کمک این داده‌ها آسان نیست، همانند مثال قبل، دو مقطع را محاسبه می‌کنیم. برای مقطع واقع در صفحه xz ، داریم

$$P_1 \cap f \text{ نمودار} = \{(x, y, z) \mid y = 0, z = x^2\}$$

که یک سهمی است که به بالا باز می‌شود، و در مورد صفحه yz ،

$$P_2 \cap f \text{ نمودار} = \{(x, y, z) \mid x = 0, z = -y^2\}$$

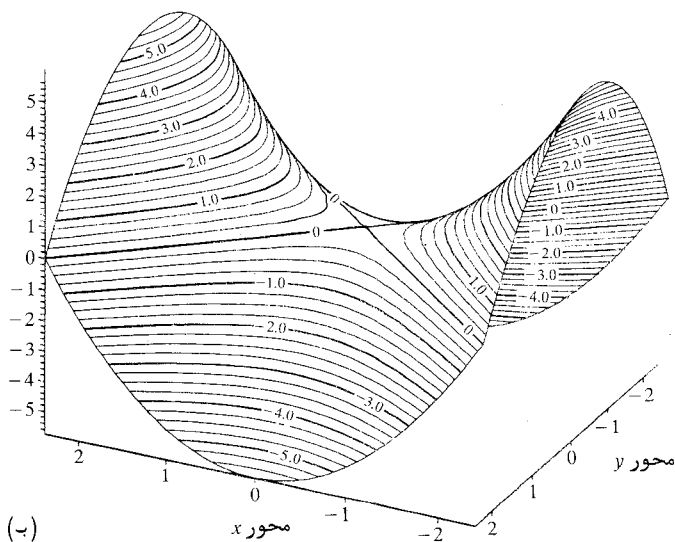
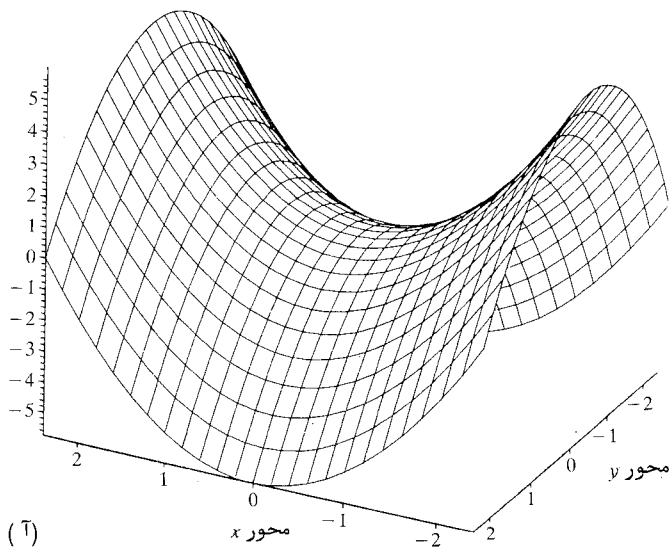
که یک سهمی است که به پایین باز می‌شود. حال می‌توان نمودار را با بالا بردن منحنیهای تراز به ارتفاعات مناسب و هموار کردن سطح حاصل تجسم کرد. جایگذاری آنها با محاسبه مقاطع سهموی انجام می‌شود. این روند زین هذلولوی شکل ۱۰۲.۱۰۰ را تولید می‌کند. این



شکل ۱۰۲.۱۰۰

چند منحنی تراز بر نمودار $f(x, y) = x^2 - y^2$

را با نمودارهای تولید شده به وسیله کامپیوتر در شکل ۱۱۰.۱۰۲ مقایسه کرد (توجه کنید که جهت محورها تغییر کرده‌اند).



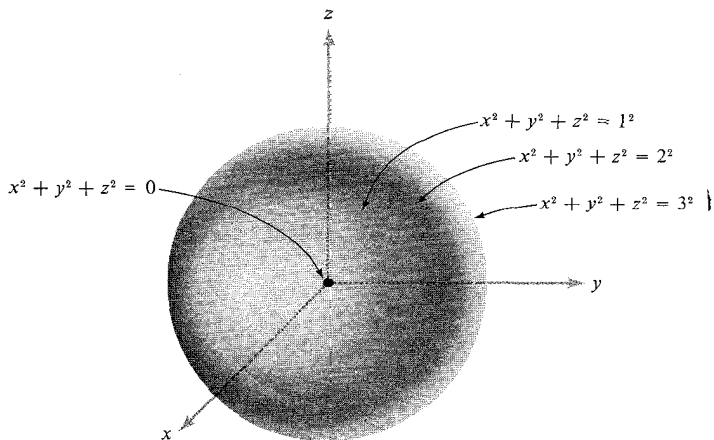
شکل ۱۱.۱۰.۲

قسمت (آ) یک نمودار از $z = x^2 - y^2$ که به وسیله کامپیوتر تولید شده است را نشان می‌دهد. قسمت (ب) این نمودار را با منحنیهای تراز در جای خود نشان می‌دهد.

مثال ۵. تابع $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ، را در نظر می‌گیریم. این مشابهه بعدی مثال ۳ است. در اینجا مجموعه‌های تراز سطوحی در قلمرو سه‌بعدی \mathbb{R}^3 اند. نمودار در \mathbb{R}^4 را نمی‌توان مستقیماً تجسم کرد، اما مقاطع را می‌توان به طور تحلیلی محاسبه نمود. مجموعه تراز با مقدار c عبارت است از مجموعه

$$L_c = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = c\}$$

که به ازای $c > 0$ کره‌ای است به مرکز مبدا و شعاع \sqrt{c} ، به ازای $c = 0$ یک نقطه است، و به ازای $c < 0$ تهی می‌باشد. در شکل ۱۲.۱۰۲، مجموعه‌های تراز به ازای $c = 0, 1, 4$



شکل ۱۲.۱۰۲

چند تراز برای $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

نموده شده‌اند. با محاسبه یک مقطع اطلاعات اضافی به دست می‌آید. مثلاً، هرگاه بنویسیم

$$S_{z=0} = \{(x, y, z, t) \mid z = 0\}$$

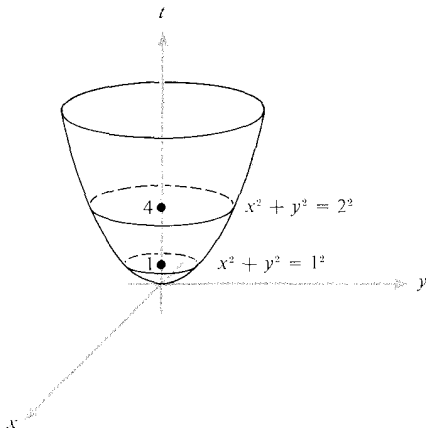
$$S_{z=0} \cap f \text{ نمودار} = \{(x, y, z, t) \mid t = x^2 + y^2, z = 0\}$$

نظر افکند.

چون در اینجا z در $z = 0$ ثابت گرفته شده است، می‌توان این مقطع از نمودار را

سطحی در \mathbb{R}^3 با متغیرهای x, y, t تجسم کرد (ر. ک. شکل ۱۳.۱۰۲).

این سطح یک سهمی‌گون دوار است.



شکل ۱۳.۱۰.۲

مقطع $z=0$ نمودار $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$

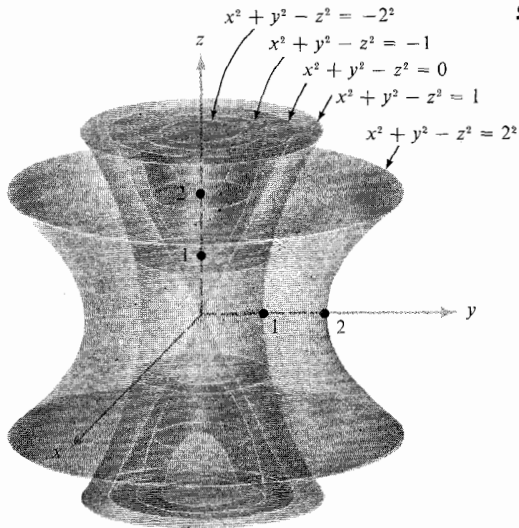
مثال ۶. تابع $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ ، شبیه سه بعدی مثال ۴ است، و این نیز یک زین نامیده می‌شود. سطوح تراز با

$$L_c = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 - z^2 = c\}$$

تعریف می‌شوند. به ازای $c = 0$ ، این مخروط $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2}$ حول محور z است. به ازای c منفی، مثلاً $c = -a^2$ ، به دست می‌آوریم $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 + a^2}$ که یک هذلولی گون دوبارچه حول محور z است که از نقاط $(0, 0, \pm a)$ می‌گذرد. به ازای c مثبت، مثلاً $c = b^2$ ، سطح تراز هذلولی گون دوار یکپارچه حول محور z تعریف شده با $z = \pm\sqrt{x^2 + y^2 - b^2}$ است که صفحه xy را در دایره‌ای به شعاع $|b|$ قطع می‌کند. این سطوح تراز در شکل ۱۴.۱۰.۲ رسم شده‌اند. چشم‌انداز دیگری از نمودار را می‌توان از یک مقطع به دست آورد. مثلاً، " زیر فضای $S_{y=0} = \{(x, y, z, t) \mid y = 0\}$ نمودار را در مقطع

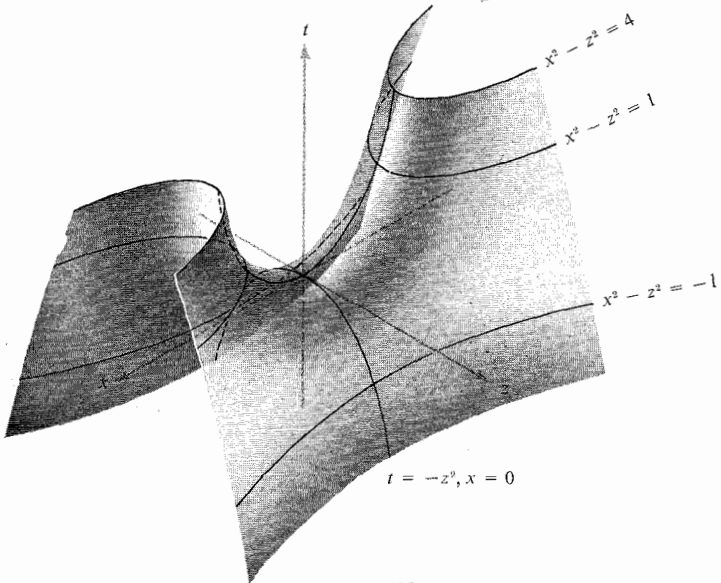
$$S_{y=0} \cap f \text{ نمودار} = \{(x, y, z, t) \mid y = 0, t = x^2 - z^2\}$$

قطع می‌کند؛ یعنی، مجموعه نقاطی به شکل $(x, 0, z, x^2 - z^2)$ که، همانند مثال قبیل، می‌توان آن را سطحی در فضای xzt در نظر گرفت (ر. ک. شکل ۱۵.۱۰.۲).



شکل ۱۴.۱۰.۲

چند سطح تراز تابع $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$



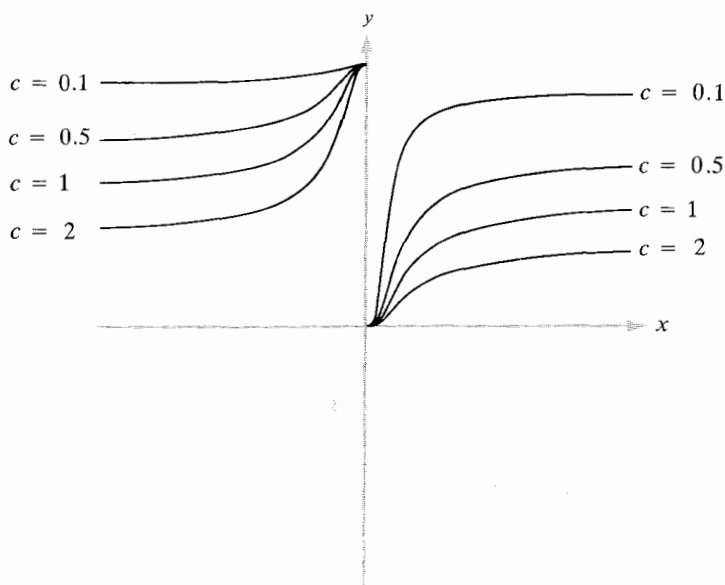
شکل ۱۵.۱۰.۲

مقطع $y = 0$ نمودار $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$

لذا، می‌بینیم که چطور با استفاده از روش مقاطع و روش مجموعه‌های تراز می‌توان رفتار یک تابع و نمودارهایش را درک کرد؛ این تکنیکها برای افرادی که بخواهند تجسم جامعی از داده‌های پیچیده داشته باشند کاملاً مفیدند.

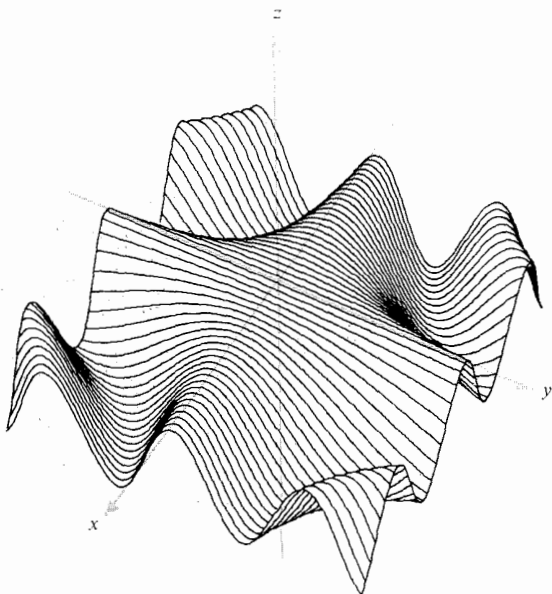
لیکن، برنامه‌های کامپیوتری بسیاری برای رسم یک‌تابع وجود دارند. برای توابع یک متغیره، این چیزی جز محاسبهٔ مقادیر انتخاب شده از تابع و رسم نقاط نیست. برای توابع دومتغیره، روش مقاطع به‌کار می‌رود. مثلاً، برای رسم $f(x, y)$ ، کامپیوتر با دادن مقادیری، مثلاً "به" y ، مقاطعی موازی محورهای انتخاب و نمودار نظیر را رسم می‌کند، و سپس با تغییر y عمل را تکرار می‌نماید. بدین ترتیب، بخشی از نمودار را می‌توان جارو کرد. در شکل‌های ۱۶.۱۰۲ و ۱۷.۱۰۲ چند مثال آورده شده است.

$$c = 0.1, 0.5, 1, 2 \text{ به ازای } y = 1/(1 + ce^{1/x})(T)$$

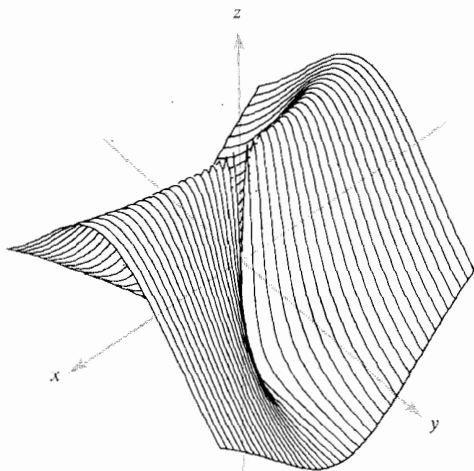


شکل ۱۶.۱۰۲

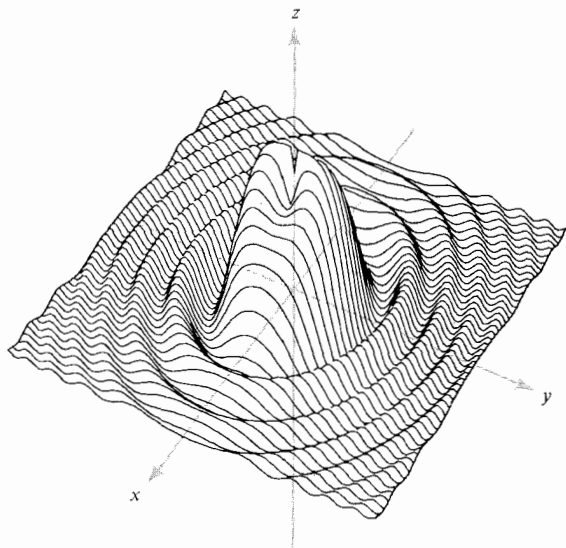
چند نمودار تولید شده به‌وسیلهٔ کامپیوتر



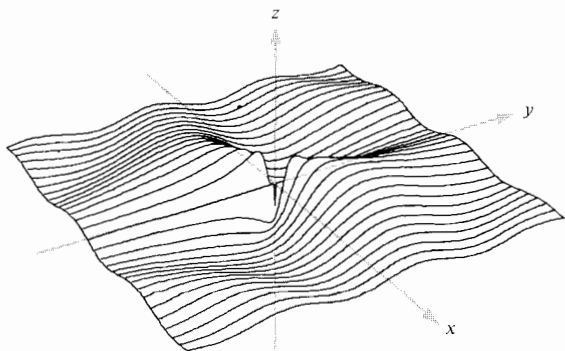
$$z = \cos(xy), -3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3 \quad (\text{ر})$$



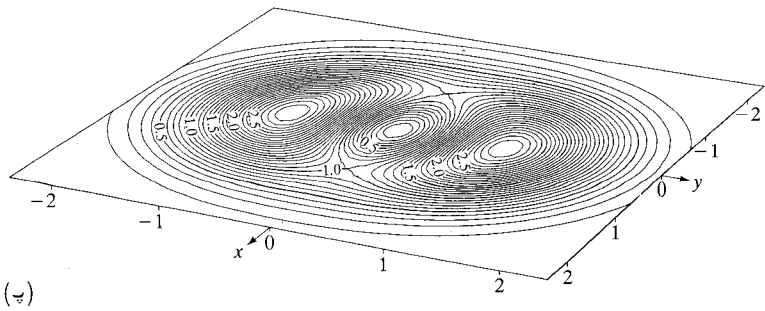
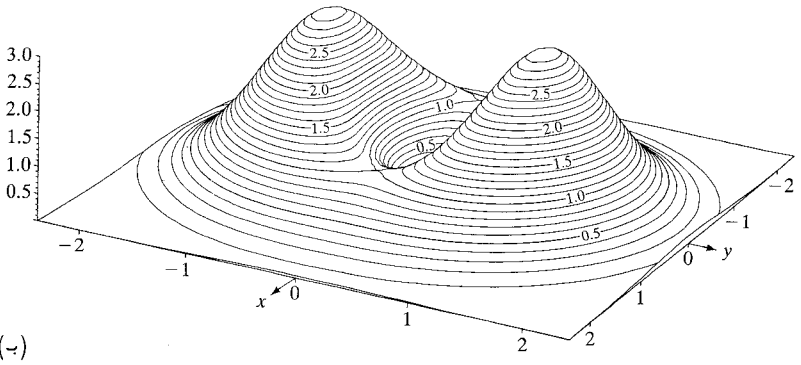
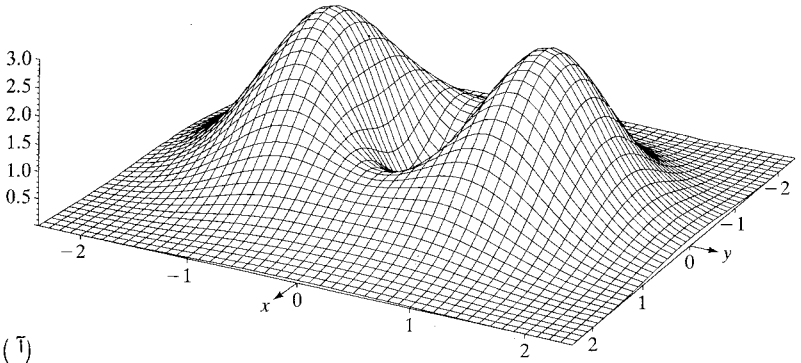
$$z = \frac{(x^2 - y^2)}{(x^2 + y^2)}, 0 < |x| \leq 1, 0 < |y| \leq 1 \quad (\text{ر})$$



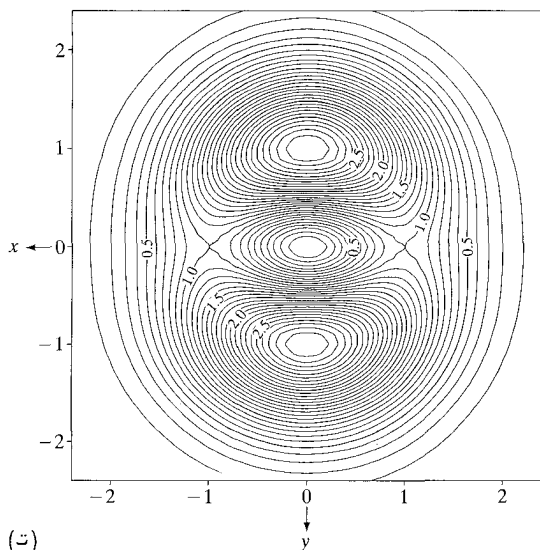
$$z = \frac{[\sin(2x^2 + 3y^2)]}{[x^2 + y^2]}, 0 < |x| \leq 3, 0 < |y| \leq 3 \quad (\text{ب})$$



$$z = \frac{(\sin xy)}{(x^2 + y^2)}, 0 < |x| \leq 3, 0 < |y| \leq 3 \quad (\text{ج})$$



شکل ۱۷.۱.۲



شکل ۱۷.۱۰۲

نمودار $z = (x^2 + 3y^2)\exp(1 - x^2 - y^2)$ تولید شده به وسیله کامپیوتر با چهار نمایش: (آ) به وسیله مقاطع؛ (ب) به وسیله منحنیهای تراز بر نمودار؛ (پ) به وسیله منحنیهای تراز در صفحه xy روایت شده در پرسپکتیو؛ و (ت) به وسیله منحنیهای تراز در صفحه xy روایت شده از بالا.

این برنامه خاص می تواند شکل پرسپکتیو را نیز به ما بدهد؛ در نتیجه، می توان آن را از هر زاویه یا هر فاصله روایت کرد.

تمرینات

۱. منحنیهای تراز و نمودار توابع زیر را رسم کنید.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x - y + 2 \quad (\text{آ})$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + 4y^2 \quad (\text{ب})$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy \quad (\text{پ})$$

۲. در مثالهای ۲، ۳، و ۴، مقطع نمودار تعریف شده با صفحه

$$S_\theta = \{(x, y, z) \mid y = x \tan \theta\}$$

به ازای ثابت معلوم θ ، را محاسبه کنید. معین کنید از توابع f کدامها این ویژگی را دارند که شکل نمودار $f \cap S_\theta$ از θ مستقل است.

در تمرینهای ۳ تا ۸، منحنیهای تراز (در صفحه xy) را برای تابع f و مقادیر داده شده c رسم کنید. نمودارهای $z = f(x, y)$ را بکشید.

$$f(x, y) = (100 - x^2 - y^2)^{1/2}, c = 0, 2, 4, 6, 8, 10 \quad ۳.$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)^{1/2}, c = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad ۴.$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2, c = 0, 1, 2, 3, 4, 5 \quad ۵.$$

$$f(x, y) = 3x - 7y, c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3 \quad ۶.$$

$$f(x, y) = x^2 + xy, c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3 \quad ۷.$$

$$f(x, y) = x/y, c = 0, 1, 2, 3, -1, -2, -3 \quad ۸.$$

در تمرینهای ۹ تا ۱۱، سطوح تراز و مقطع ای از نمودار تابع را تعیین کنید.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto -x^2 - y^2 - z^2 \quad ۹.$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto 4x^2 + y^2 + 9z^2 \quad ۱۰.$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 \quad ۱۱.$$

در تمرینهای ۱۲ تا ۱۶، نمودار هر تابع را با محاسبه چند مجموعه تراز و مقطع توصیف کنید.

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto xy \quad ۱۲.$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto xy + yz \quad ۱۳.$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto xy + z^2 \quad ۱۴.$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto |y| \quad ۱۵.$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \max(|x|, |y|) \quad ۱۶.$$

سطوح معادلات تمرینهای ۱۷ تا ۲۷ را رسم یا وصف کنید.

$$x^2 + y^2 + z^2 + 4x - by + 9z - b = 0 \quad ۱۷.$$

$$x + 2z = 4 \quad ۱۸.$$

$$4x^2 + y^2 = 16 \quad ۱۹.$$

$$x^2 + y^2 - 2x = 0 \quad ۲۰.$$

$$z^2 = y^2 + 4 \quad ۲۱.$$

$$\frac{y^2}{9} + \frac{z^2}{4} = 1 + \frac{x^2}{16} \quad \cdot 22$$

$$z = \frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{9} \quad \cdot 23$$

$$y^2 = x^2 + z^2 \quad \cdot 24$$

$$4x^2 - 3y^2 + 2z^2 = 0 \quad \cdot 25$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{12} + \frac{z^2}{9} = 1 \quad \cdot 26$$

$$\frac{x}{4} = \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} \quad \cdot 27$$

۲۸. منحنیهای تراز زیر را توصیف کنید:

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \begin{cases} \frac{2xy}{x^2 + y^2} & \text{اگر } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{اگر } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(راهنمایی. از مختصات قطبی استفاده کنید.)

۲۹. فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ در مختصات قطبی با $f(r, \theta) = (\cos 2\theta)/r^2$ داده شده

باشد. چند منحنی تراز نسبت به محورهای xy رسم کنید ($\mathbb{R}^2 \setminus \{0\} = \{x \in \mathbb{R}^2 | x \neq 0\}$).

۳۰. در شکل ۱۷.۱۰۲ (ت)، "منحنی" تراز $z = 3$ ظاهراً از دو نقطه تشکیل شده است.

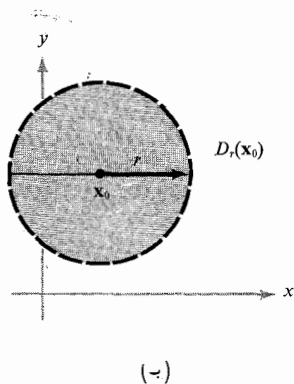
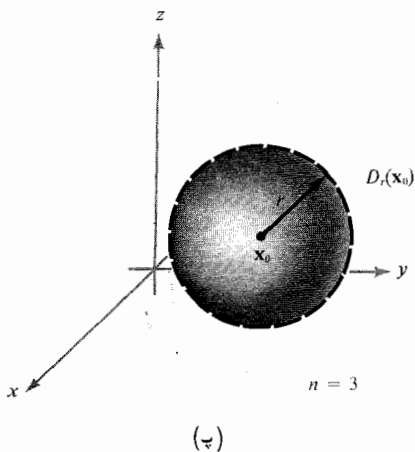
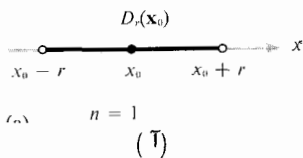
این مطلب را به طور جبری ثابت کنید.

۲۰۲ حدود و پیوستگی

در این بخش به چند اصطلاح مهم می‌پردازیم که به ما توان مطالعه مشتقگیری از توابع چند متغیره در بخش ۳۰۲ را می‌بخشند. این مطالب گرد مفاهیم مجموعه‌های باز، حدود، و پیوستگی جمع شده‌اند؛ مجموعه‌های باز برای درک حدود لازمند و حدود، به نوبه خود، برای درک پیوستگی و مشتقگیری مورد نیاز می‌باشند.

همانند حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی، برای پرداختن به حساب دیفرانسیل لازم نیست مفهوم حد را کاملاً بدانیم. به این دلیل، ممکن است استادان بخواهند مطالب زیر را با دقت‌های متفاوتی تدریس کنند. از اینرو، لازم است شاگردان از استاد خود در باب درک لازم استفسار نمایند.

بحث را با تنظیم مفهوم مجموعهٔ باز به وسیلهٔ قرص باز آغاز می‌کنیم. فرض کنیم $x_0 \in \mathbb{R}^n$ و r عدد حقیقی مثبتی باشد (قرص باز به شعاع r و مرکز x_0 مجموعهٔ تمام نقاط x تعریف می‌شود که $\|x - x_0\| < r$). این مجموعه را با $D_r(x_0)$ نشان می‌دهیم، و عبارت است از مجموعهٔ نقاطی چون x در \mathbb{R}^n که فاصله‌شان (ر. ک. بخش ۱.۵) تا x_0 کوچکتر از r است. توجه کنید که فقط x هایی را در مجموعه‌گذارده‌ایم که نامساوی اکید برقرار باشد. در شکل ۱.۲.۲، قرص $D_r(x_0)$ به‌ازای $n = 1, 2, 3$ ، در حالت $x_0 \in \mathbb{R}$ ، $n = 1$ ،



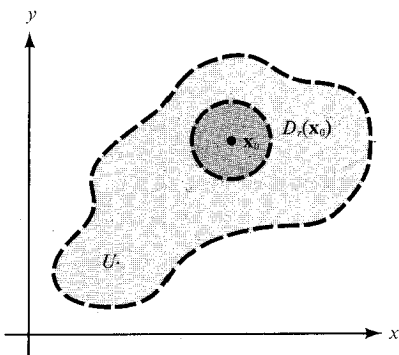
شکل ۱.۲.۲

شکل قرص $D_r(x_0)$ در فضای (T) ۱، (B) ۲، و (P) ۳ بعدی

قرص باز $D_r(x_0)$ بازهٔ باز $]x_0 - r, x_0 + r[$ است، که از تمام اعداد $x \in \mathbb{R}$ تشکیل شده است که اکیداً بین $x_0 - r$ و $x_0 + r$ اند. برای حالت $n = 2, x_0 \in \mathbb{R}^2$ ، $D_r(x_0)$ "داخل" قرص به شعاع r و مرکز x_0 است. برای حالت $n = 3, x_0 \in \mathbb{R}^3$ ، $D_r(x_0)$ "داخل" گوی به شعاع r و مرکز x_0 است.

حال آماده‌ایم مفهوم مجموعه‌ء باز را تعریف کنیم .

تعریف . فرض کنیم $U \subset \mathbb{R}^n$ (یعنی ، U زیر مجموعه‌ای از \mathbb{R}^n است) . U را یک مجموعه‌ء باز نامیم اگر به‌ازای هر نقطه‌ء x_0 در U ، $r > 0$ وجود داشته باشد به طوری که $D_r(x_0)$ مشمول U باشد ؛ با علامات ، $D_r(x_0) \subset U$ (ر.ک . شکل ۲.۲.۲) .



شکل ۲.۲.۲

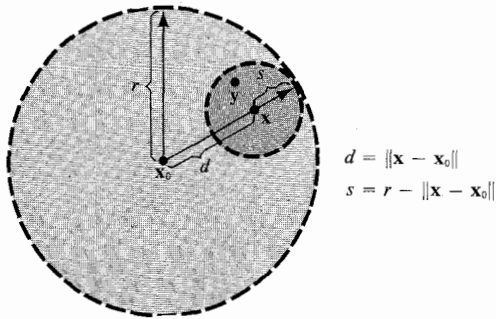
مجموعه‌ء باز U چنان است که در هر نقطه‌اش مانند x_0 قرصی مانند $D_r(x_0)$ را کاملاً دربردارد .

مهم است توجه شود که عدد $r > 0$ به نقطه‌ء x_0 وابسته است ، و عموماً " وقتی x_0 به " لبه " U نزدیک شود کوچک می‌شود . به بیان شهودی ، مجموعه‌ء U وقتی باز است که نقاط " مرزی " U در U واقع نباشند . در شکل ۲.۲.۲ ، خط منقطع جزو U نیست . همچنین ، می‌پذیریم که مجموعه‌ء تهی \emptyset (مجموعه‌ای مرکب از هیچ عنصر) باز است . ما قرص باز و مجموعه‌ء باز را تعریف کرده‌ایم . به نظر می‌رسد که یک قرص باز مجموعه‌ء باز نیز باشد . با کمی فکر می‌بینیم که این مطلب نیاز به اثبات دارد .

قضیه ۱ . به‌ازای هر $x_0 \in \mathbb{R}^n$ و $r > 0$ ، $D_r(x_0)$ یک مجموعه‌ء باز است .

برهان . فرض کنیم $x \in D_r(x_0)$ ؛ یعنی ، $\|x - x_0\| < r$. طبق تعریف مجموعه‌ء باز ،

باید $s > 0$ ی یافت به طوری که $D_s(x) \subset D_r(x_0)$. بامراجعه به شکل ۳.۲.۲، می بینیم که $s = r - \|x - x_0\|$ انتخابی مناسب است؛ توجه کنید که $s > 0$ ولی s با نزدیک



شکل ۳.۲.۲

هندسه اثبات مجموعه باز بودن یک قرص باز

شدن x به لبه $D_r(x_0)$ کوچک خواهد شد .

برای اثبات $D_s(x) \subset D_r(x_0)$ ، فرض کنیم $y \in D_s(x)$ ، یعنی، $\|y - x\| < s$.
 می خواهیم ثابت کنیم نیز $y \in D_r(x_0)$. اثبات این به وسیله r قرص مستلزم آن است که نشان دهیم $\|y - x_0\| < r$. این با استفاده از نامساوی مثلثی برای بردارها در \mathbb{R}^n صورت می گیرد (ر.ک. نتیجه قضیه ۳، بخش ۵.۱):

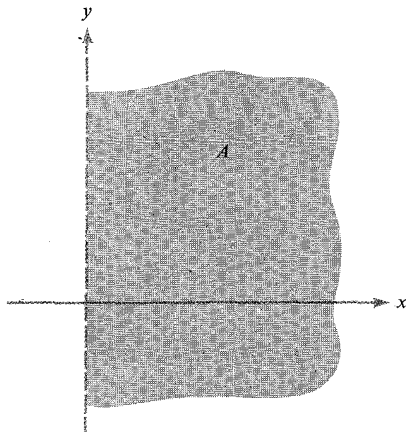
$$\begin{aligned} \|y - x_0\| &= \|(y - x) + (x - x_0)\| \\ &\leq \|y - x\| + \|x - x_0\| < s + \|x - x_0\| = r \end{aligned}$$

از اینرو، $\|y - x_0\| < r$

مثال زیر چند تکنیک را نشان می دهد که در اثبات باز بودن مجموعه ها مفیدند .

مثال ۱. ثابت کنید $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$ یک مجموعه باز است .

این مجموعه در شکل ۴.۲.۲ رسم شده است . این مجموعه به طور شهودی باز است ، زیرا هیچ نقطه روی " مرز " ، یعنی $x = 0$ ، مشمول مجموعه نیست . این گونه استدلال



شکل ۴.۲.۲

مسئله: نشان دهید A یک مجموعه باز است.

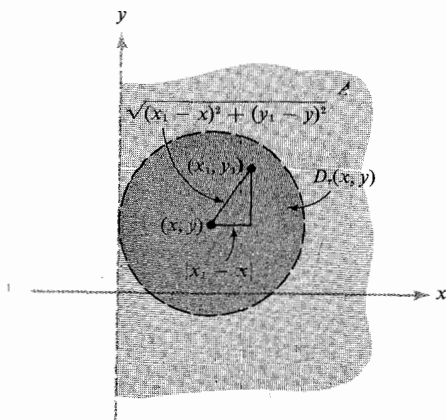
معمولا "پس از خوگرفتن با مفاهیم کافی است. اما، در ابتدا، باید تمام جزئیات را ذکر کرد. برای اثبات باز بودن A ، باید نشان داد که به ازای هر نقطه $(x, y) \in A$ ، $r > 0$ وجود دارد به طوری که $D_r(x, y) \subset A$. هرگاه $(x, y) \in A$ ، آنگاه $r = x \cdot x > 0$ را اختیار می‌کنیم. اگر $(x_1, y_1) \in D_r(x, y)$ داریم

$$|x_1 - x| = \sqrt{(x_1 - x)^2} \leq \sqrt{(x_1 - x)^2 + (y_1 - y)^2} < r = x$$

و در نتیجه، $x - x_1 < x$ و $x_1 - x < x$. نامساوی اخیر ایجاب می‌کند که $x_1 > 0$ ؛ یعنی، $(x_1, y_1) \in A$. از اینرو، $D_r(x, y) \subset A$ ؛ و لذا A باز است (ر.ک. شکل ۵.۲.۲). مفید است به مجموعه باز شامل نقطه x اسمی خاص اطلاق شود، زیرا این ایده اغلب در مطالعه حدود پیوستگی ظاهر می‌شود. منظور از همسایگی " \mathbb{R} " یعنی مجموعه بازی چون U شامل نقطه x . مثلا، "به ازای هر $r > 0$ ، $D_r(x_0)$ یک همسایگی x_0 است. مجموعه A در مثال ۱ همسایگی از $(3, -10)$ می‌باشد.

حال مفهوم نقطه مرزی را، که در مثال ۱ به آن اشاره شد، معرفی می‌کنیم.

تعریف. فرض کنیم " \mathbb{R}^n ". نقطه $x \in \mathbb{R}^n$ یک نقطه مرزی A است اگر هر همسایگی x



شکل ۵.۲.۲

ساختن قرص حول نقطه‌ای در A که کاملاً "مشمول A است

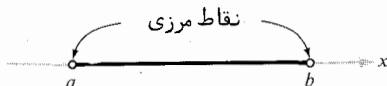
شامل دست کم یک نقطه در A و دست کم یک نقطه خارج A باشد.

در این تعریف، x ممکن است در A باشد یا نباشد؛ هرگاه $x \in A$ ، آنگاه x یک نقطه مرزی است اگر هر همسایگی x شامل دست کم یک نقطه باشد که در A نیست (A از قبل شامل نقطه‌ای از A ، یعنی x ، هست). به همین نحو، اگر x در A نباشد، این یک نقطه مرزی است اگر هر همسایگی A شامل دست کم یک نقطه از A باشد.

ما خصوصاً "به نقاط مرزی مجموعه‌های باز علاقه داریم. بنا بر تعریف مجموعه باز، هیچ نقطه از مجموعه باز A نمی‌تواند یک نقطه مرزی A باشد. لذا، نقطه x یک نقطه مرزی مجموعه باز A است اگر و فقط اگر x در A نبوده و هر همسایگی x اشتراکی ناتهی با A داشته باشد.

این ایده شهودی واقع بودن نقطه مرزی A بر "لبه" A را به طور دقیق بیان می‌کند. در اکثر مثالها، نقاط مرزی کاملاً واضح می‌باشند.

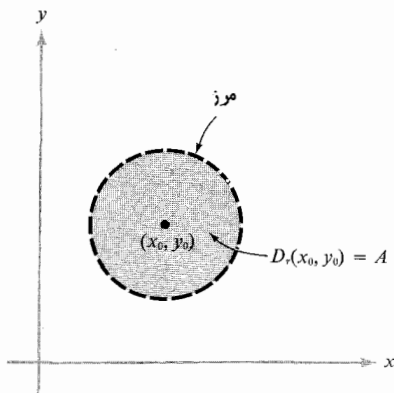
مثال ۰۲ (T) فرض کنیم $A =]a, b[$ در \mathbb{R} باشد. نقاط مرزی A عبارتند از a و b . این امر با شکل ۵.۲.۲ و تعریف روشن می‌شود. (در تمرین ۴ اثبات این امر خواسته شده است.)



شکل ۶.۲.۲

نقاط مرزی بازه $[a, b]$

(پ) فرض کنیم $A = D_r(x_0, y_0)$ یک قرص حول (x_0, y_0) در صفحه باشد. مرز متشکل از نقاط (x, y) است که $(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = r^2$ (شکل ۷.۲.۲).



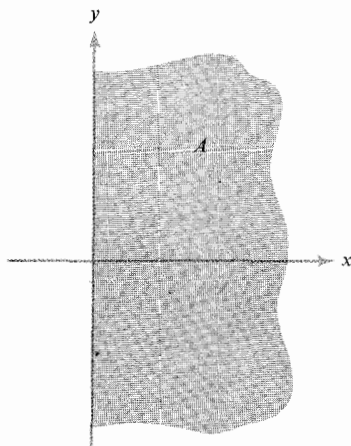
شکل ۷.۲.۲

مرز A از نقاط لبه A تشکیل شده است.

(پ) فرض کنید $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0\}$. مرز A از تمام نقاط محور y تشکیل شده است (ر.ک. شکل ۸.۲.۲).

(ت) فرض کنید A ، $D_r(x_0)$ منهای نقطه x_0 باشد (یک قرص "سوراخ شده" حول x_0). در این صورت x_0 یک نقطه مرزی A است.

حال توجه خود را به مفهوم حد معطوف می‌کنیم. در بحثهای زیر قلمرو تعریف تابع مجموعه باز A است. ما به یافتن حد f وقتی $x \in A$ به نقطه‌ای از A یا یک نقطه



شکل ۸.۲.۲

مرز A از تمام نقاط واقع بر محور y تشکیل شده است.

مرزی A نزدیک می شود علاقه مندیم.

خواننده توجه دارد که مفهوم حد ابزاری اصلی و مفید در تحلیل توابع است؛ با آن قادریم مشتقها، و در نتیجه، ماکزیمها و مینیمها، جانبها، و انتگرالهای مجازی و خصوصیات دیگر توابع را بررسی کنیم، و نیز در سریها و دنباله‌های نامتناهی مفید است. می‌خواهیم نظریهٔ حدود توابع چند متغیره را، به اختصار، طوری عرضه کنیم که نظریهٔ توابع یک متغیره را به عنوان حالتی خاص دربرداشته باشد.

دانشجو در حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره احتمالاً "باتعریف" $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$

تابع $f: A \subset \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ از زیر مجموعهٔ A از اعداد حقیقی به اعداد حقیقی مواجه شده است. این شهودا "یعنی وقتی x به x_0 نزدیک شود، مقادیر $f(x)$ به l نزدیک می‌شوند. برای آنکه این ایدهٔ شهودی بر پایهٔ ریاضی استواری قرار گیرد، معمولاً "نمادهای اسپیلن (ε) و (δ) یا مفهوم همسایگی معرفی می‌شوند - مفاهیمی که در تدقیق و کارا ساختن تعریف $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ لازمند. همین مطلب در مورد توابع چند متغیره درست است. در آنچه می‌آید،

همسایگی که به حد نزدیک می‌شود معرفی می‌گردد. روش اسپیلن - دلتا در آخرا این بخش

برای مطالعهٔ اختیاری گذارده شده است .

تعریف حد . فرض کنیم $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، که در آن A مجموعه‌ای باز است . همچنین، x_0 در A یا نقطهٔ مرزی A بوده، و N یک همسایگی از \mathbb{R}^m باشد . گوییم وقتی x به x_0 نزدیک شود، f "مآلا" در N است اگر همسایگی مانند U از x_0 موجود باشد به طوری که $x \in U$ ، $x \in A$ و $x \in N$ ایجاب کنند که $f(x) \in N$. (تعبیر هندسی این عبارت در شکل ۹.۲.۲ آمده است؛ توجه کنید که لازم نیست x_0 در مجموعهٔ A باشد؛ در نتیجه، $f(x_0)$ الزاما "تعریف نشده است" . گوییم وقتی x به x_0 نزدیک شود، $f(x)$ به b نزدیک می‌شود، یا با علامات

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \quad \text{یا وقتی } x \rightarrow x_0 \text{ ، } f(x) \rightarrow b$$

اگر، به ازای هر همسایگی N از b ، وقتی x به x_0 نزدیک شود، f مآلا "در N باشد (یعنی، "اگر x نزدیک x_0 باشد، $f(x)$ نزدیک b باشد") . ممکن است وقتی x به x_0 نزدیک شود، مقادیر $f(x)$ به عدد خاصی نزدیک نشوند . در این حالت گوییم $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ وجود ندارد.

از حالا به بعد، هر وقت نماد $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ را در نظر می‌گیریم، همواره فرض می‌کنیم x_0 متعلق

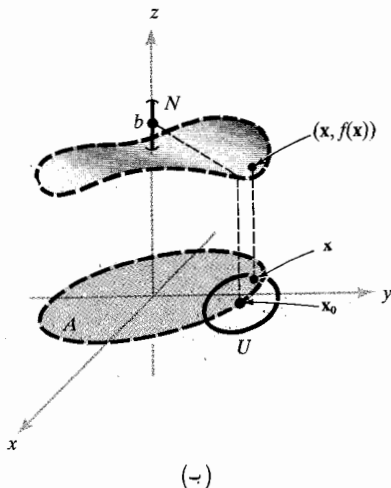
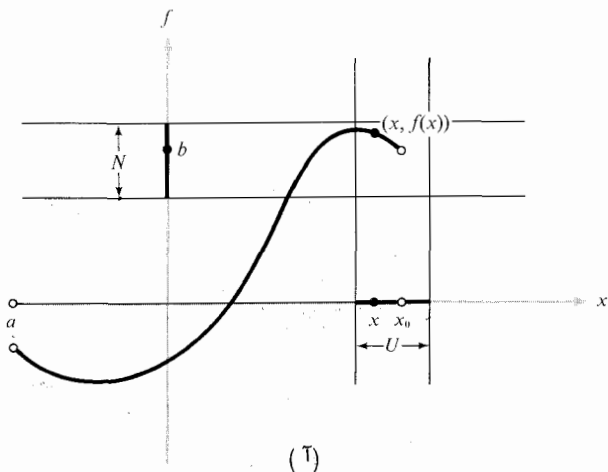
به مجموعهٔ بازی است که f بر آن تعریف شده است یا بر مرز این مجموعه قرار دارد . دلیل ما بر تأکید $x \neq x_0$ در تعریف حد این است که در حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره می‌خواهیم تعریف کنیم

$$f'(x_0) = \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

و این عبارت در $x = x_0$ تعریف نشده است .

مثال ۳ . (آ) این مثال حدی را نشان می‌دهد که وجود ندارد . تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می‌گیریم که به صورت زیر تعریف شده است:

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x > 0 \\ -1, & x \leq 0 \end{cases} \quad \text{اگر} \\ \text{اگر}$$



شکل ۹۰۲۰۲

حدود برحسب همسایگیها: هرگاه x در U باشد، آنگاه $f(x)$ در N است. (دوایر باز کوچک نشان می‌دهند که $(a, f(a))$ و $(x_0, f(x_0))$)

بر نمودار (\bar{I}) قرار ندارند. $f: A =]a, x_0[\rightarrow \mathbb{R}$ (\bar{I})

$f: A = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ (\bar{b}) (منحنی مقطع در نمودار f نیست.)

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$ وجود ندارد، زیرا نقاطی مانند x_1 بدلخواه نزدیک 0 وجود دارند که $f(x_1) = 1$

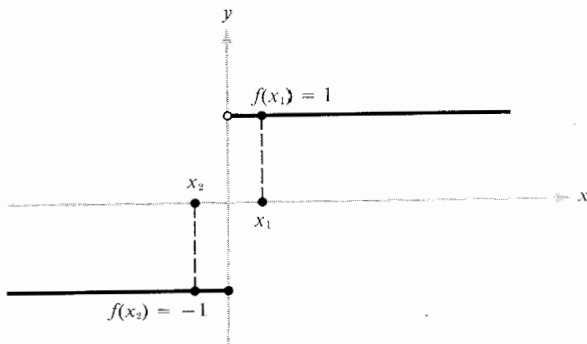
و نیز نقاطی مانند x_2 بدلخواه نزدیک 0 وجود دارند که $f(x_2) = -1$ ؛ یعنی، عدد واحدی وجود ندارد که وقتی x به 0 نزدیک شود، f به آن نزدیک گردد (ر.ک. شکل ۱۰.۲.۲). هرگاه f به قلمرو $[0, 1]$ یا $]-1, 0]$ محدود شود، آنگاه حد وجود خواهد داشت. آیا می‌توانید دلیلش را بگویید؟

(ب) این مثال حدی را نشان می‌دهد که وجود دارد ولی مقدار حدیش مساوی مقدار نقطهء حدی نیست. $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

$\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 0$ برقرار است، زیرا به ازای هر همسایگی U از 0، $x \in U$ و $x \neq 0$

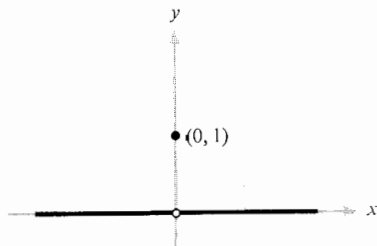
ایجاب می‌کند که $f(x) = 0$. هرگاه بر $x \neq x_0$ تأکید نشود، آنگاه حد (تعریف حد فوق را بدون شرط $x \neq x_0$ به کار می‌بریم) وجود ندارد. لذا، واقعا "می‌خواهیم بدانیم وقتی $x \rightarrow 0$ ، f به چه مقدار نزدیک می‌شود؛ همانطور که در نمودار شکل ۱۱.۲.۲ می‌بینیم، وقتی $x \rightarrow 0$ ، f به 0 نزدیک می‌گردد، و مهم نیست f در 0 مقدار دیگری را



شکل ۱۰.۲.۲

حد این تابع وقتی $x \rightarrow 0$ وجود ندارد.

بگیرد یا در آن تعریف نشده باشد.



شکل ۱۱.۲۰۲

حد این تابع، وقتی $x \rightarrow 0$ ، صفر است.

مثال ۴. با استفاده از تعریف، تحقیق می‌کنیم که "حد واضح" $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$ برقرار است،

که در آن x و x_0 در \mathbb{R} اند. فرض کنیم f تابع $f: x \mapsto x$ بوده و N همسایگی از x_0 باشد. باید نشان دهیم وقتی $x \rightarrow x_0$ ، $f(x)$ "مآلا" در N است. لذا، طبق تعریف، باید همسایگی مانند U از x_0 بیابیم با این خاصیت که هرگاه $x \in U$ و $x \neq x_0$ ، آنگاه $f(x) \in N$. $U = N$ را اختیار می‌کنیم. هرگاه $x \in U$ ، آنگاه $x \in N$ ؛ و چون $x = f(x)$ ، فوراً نتیجه می‌شود که $f(x) \in N$. لذا، نشان داده‌ایم که $\lim_{x \rightarrow x_0} x = x_0$. به همین نحو،

داریم

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} x = x_0, \text{ و غیره.}$$

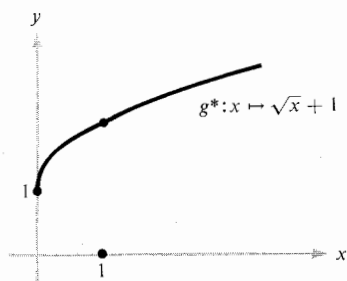
در آنچه می‌آید، دانشجو می‌تواند، بدون برهان، برقراری حدود را به اعتبار حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره بپذیرد. مثلاً، " $\lim_{x \rightarrow 1} \sqrt{x} = \sqrt{1} = 1$ " و $\lim_{\theta \rightarrow 0} \sin \theta = 0$

$$\sin 0 = 0$$

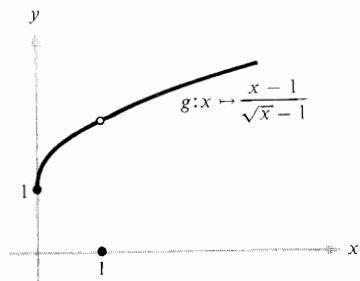
مثال ۵. این مثال حالت دیگری را نشان می‌دهد که در آن حد را نمی‌توان به آسانی از تعریف "خواند". $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ را می‌یابیم، که در آن

$$g: x \mapsto \frac{x - 1}{\sqrt{x} - 1}$$

این تابع در شکل ۱۲.۲.۲ رسم شده است. می‌بینیم که $g(1)$ تعریف نشده است، زیرا



(ب)



(آ)

شکل ۱۲.۲.۲

این نمودارها یکی‌اند جز آنکه در $g(\bar{A})$ در $x = 1$ تعریف نشده است، ولی در (ب) g^* به ازای هر $x \geq 0$ تعریف شده است.

تقسیم بر صفر تعریف نشده است، اما، اگر صورت و مخرج $g(x)$ را در $\sqrt{x} + 1$ ضرب کنیم، درمی‌یابیم که به ازای هر x در قلمرو g داریم

$$g(x) = \frac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x} + 1$$

عبارت $g^*(x) = \sqrt{x} + 1$ در $x = 1$ تعریف شده است و مقدار ۲ را می‌گیرد؛ از حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره، وقتی $x \rightarrow 1$ ، $g^*(x) \rightarrow 2$ ، اما، چون به ازای هر $x \geq 0$ $g^*(x) = g(x)$ ، نیز باید وقتی $x \rightarrow 1$ ، $g(x) \rightarrow 2$ ، $x \neq 1$.

برای آنکه بتوان از حد صحبت کرد، باید ثابت کنیم f ، وقتی $x \rightarrow x_0$ ، حداکثر می‌تواند یک حد داشته باشد. این شهوداً واضح است و اینک می‌توان آن را به‌طور صوری بیان کرد. (برای برهان ر.ک. ضمیمه ۲.)

قضیه ۲ (یکتایی حدود). هرگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b_1$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b_2$ نگاه $b_1 = b_2$.

برای انجام محاسبات عملی با حدود، به چند قاعده درباب آنها نیز نیاز داریم.

مثلاً، می‌خواهیم ثابت کنیم حد مجموع مساوی مجموع حدود است. این قواعد در نظریه زیر خلاصه شده‌اند (برای برهان، ر.ک. ضمیمه آ).

قضیه ۳. فرض کنیم $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، $g: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، x_0 در A یا نقطه مرزی A باشد، $b \in \mathbb{R}^m$ ، و $c \in \mathbb{R}$. در این صورت،

(یک) هرگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = cb$ ، که در آن $cf: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ با

$x \mapsto c(f(x))$ تعریف شده است؛

(دو) هرگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b_1$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b_2$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} (f+g)(x) = b_1 + b_2$ ،

که در آن $(f+g): A \rightarrow \mathbb{R}^m$ با $x \mapsto f(x) + g(x)$ تعریف شده است؛

(سه) هرگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b_1$ ، $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b_2$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = b_1 b_2$ ،

که در آن $(fg): A \rightarrow \mathbb{R}$ با $x \mapsto f(x)g(x)$ تعریف شده است؛

(چهار) هرگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \neq 0$ ، $m = 1$ ، و به ازای هر $x \in A$ ، $f(x) \neq 0$ ،

آنگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} 1/f = 1/b$ ، که در آن $1/f: A \rightarrow \mathbb{R}$ با $x \mapsto 1/f(x)$ تعریف شده است؛

(پنج) هرگاه $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ ، که در آن $f_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ ، $i = 1, \dots, m$ ، توابع مؤلفه f اند، آنگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b = (b_1, \dots, b_m)$ اگر و فقط اگر به ازای هر

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = b_i \quad i = 1, \dots, m$$

این نتایج شهوداً "واضحند. مثلاً"، قسمت (دو) می‌گوید هرگاه وقتی x نزدیک x_0 است، $f(x)$ نزدیک b_1 و $g(x)$ نزدیک b_2 باشد، آنگاه، وقتی x نزدیک x_0 است، $f(x) + g(x)$ نزدیک $b_1 + b_2$ می‌باشد. مثال زیر طرز کار آن را توضیح می‌دهد.

مثال ۶. فرض کنیم $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $(x, y) \mapsto x^2 + y^2 + 2$ ، $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} f(x, y)$ را محاسبه می‌کنیم.

در اینجا f مجموع سه تابع $(x, y) \mapsto x^2$ ، $(x, y) \mapsto y^2$ ، و $(x, y) \mapsto 2$ است. اما

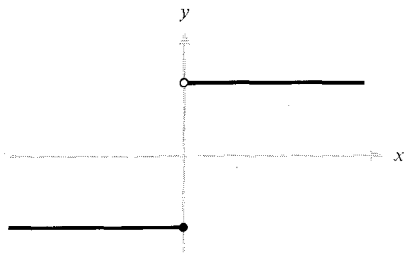
حد مجموع مساوی مجموع حدود، و حد حاصل ضرب مساوی حاصل ضرب حدود است (قضیه ۳). از اینرو، با استفاده از این امر که $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0^2$ (مثال ۴)، به دست می آوریم

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x^2 = (\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x) \times \lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} x = x_0$$

و، با همان دلیل، $\lim_{(x,y) \rightarrow (x_0,y_0)} y^2 = y_0^2$ ، در نتیجه، $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,1)} f(x,y) = 0^2 + 1^2 + 2 = 3$.

در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی آموختیم که ایده‌آه تابع پیوسته بر مفهوم شهودی نمودارش مبتنی است که یک منحنی ناشکسته است، یعنی یک منحنی بدون جهش، مانند مسیر یک ذره متحرک یا اثر یک مداد متحرک که از روی کاغذ برداشته نشود.

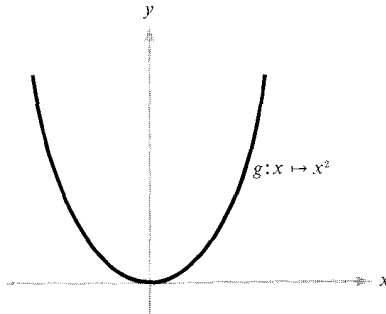
برای تحلیل مشروح توابع به مفاهیم دقیقتری از مفاهیم نسبتاً مبهم فوق نیاز داریم. مثال ممکن است این ایده‌ها را روشن سازد. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}_1$ که با $f(x) = -1$ اگر $x \leq 0$ و $f(x) = 1$ اگر $x > 0$ تعریف شده است را در نظر می‌گیریم. نمودار f در شکل ۱۳.۲.۲ نموده شده است.



شکل ۱۳.۲.۲

این تابع پیوسته نیست، زیرا، وقتی x از ۰ می‌گذرد، مقدارش ناگهان جهش می‌یابد.

(دایره کوچک باز نشان می‌دهد که $(0, 1)$ بر نمودار f قرار ندارد.) واضح است که نمودار f در $x = 0$ شکسته است. همچنین، تابع $g: x \mapsto x^2$ را در نظر می‌گیریم. این تابع در شکل ۱۴.۲.۲ رسم شده است. نمودار g در هیچ نقطه‌ای شکسته نیست. اگر توابع مانند f فوق، که نمودارشان در نقطه‌ای مانند x_0 شکسته است، و نیز توابعی مانند g فوق، که نمودارشان



شکل ۱۴.۲.۲

این تابع پیوسته است.

شکسته نیستند، را معاینه کنیم، می بینیم که تفاوت اساسی بین آنها این است که در مورد تابع g که نمودار ناشکسته دارد، مقادیر $g(x)$ با نزدیک شدن x به x_0 به $g(x_0)$ نزدیک می شوند. همین ایده برای توابع چند متغیره به کار می رود. اما مفهوم نزدیک شدن به عنوان یک تعریف ریاضی کامل نیست؛ لذا، این مفهوم را دقیقاً "بر حسب حدود تنظیم می کنیم.

تعریف. فرض کنیم $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ تابعی با قلمرو A باشد. همچنین، $x_0 \in A$ گوئیم f در x_0 پیوسته است اگر و فقط اگر

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

اگر فقط بگوئیم f پیوسته است، منظور این است که f در هر نقطه x_0 از A پیوسته می باشد.

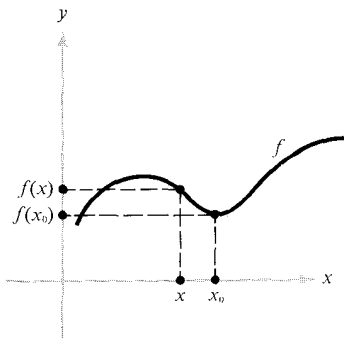
چون شرط $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ یعنی وقتی x نزدیک x_0 است، $f(x)$ نزدیک $f(x_0)$

می باشد، می بینیم که تعریف ما در واقع نظیر این شرط است که نمودار f ناشکسته است (ر.

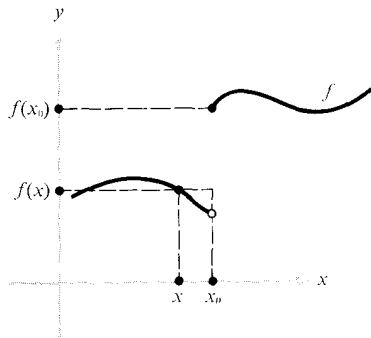
ک. شکل ۱۵.۲.۲، که در آن حالت $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ مجسم شده است). تجسم حالت چند

متغیره در صورتی که توابع حقیقی باشند، مثلاً " $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ "، آسانتر است. در این حالت

می توان f را با رسم نمودار تجسم کرد، که عبارت است از جمیع نقاط (x, y, z) در \mathbb{R}^3 که



(ب)

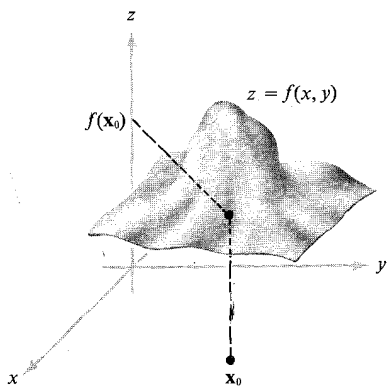


(آ)

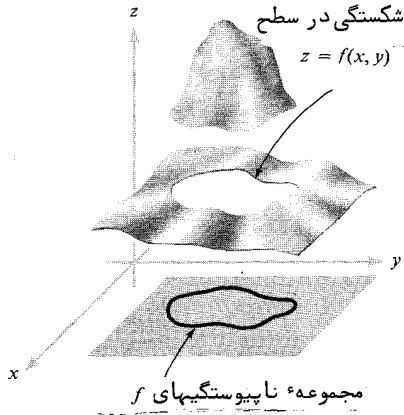
شکل ۱۵.۲.۴

یک تابع ناپیوسته^۴ (آ) ، که در آن $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ وجود ندارد ، و
 یک تابع پیوسته^۴ (ب) ، که در آن این حد موجود و مساوی $f(x_0)$ است .

$z = f(x, y)$. لذا ، پیوستگی f یعنی نمودارش " شکستگی " ندارد (ر.ک. شکل ۱۶.۲.۲).



(ب)



(آ)

شکل ۱۶.۲.۲

(آ) یک تابع دومتغیره^۴ ناپیوسته

(ب) یک تابع پیوسته

مثال ۰۷. هر چند جمله‌ای $p(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n$ از \mathbb{R} به \mathbb{R} پیوسته است. در واقع، از قضیه ۳ و مثال ۴ داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow x_0} (a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n) &= \lim_{x \rightarrow x_0} a_0 + \lim_{x \rightarrow x_0} a_1x + \dots + \lim_{x \rightarrow x_0} a_nx^n \\ &= a_0 + a_1x_0 + \dots + a_nx_0^n \end{aligned}$$

زیرا

$$\lim_{x \rightarrow x_0} x^n = \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right) \cdots \left(\lim_{x \rightarrow x_0} x \right) = x_0^n.$$

مثال ۰۸. فرض کنیم $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x, y) = xy$. f پیوسته است زیرا، طبق قضایای حدی و مثال ۴،

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} xy = \left(\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} x \right) \left(\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} y \right) = x_0y_0$$

به همین ترتیب، می‌توان دید که هر چند جمله‌ای $p(x, y)$ از x و y پیوسته است.

مثال ۰۹. تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ تعریف شده با

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{اگر } x \leq 0 \text{ یا } y \leq 0 \\ 0 & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

در $(0, 0)$ یا هر نقطه بر محور x مثبت یا محور y مثبت پیوسته نیست. در واقع، اگر $(x_0, y_0) = \mathbf{u}$ چنین نقطه‌ای بوده و $\delta > 0$ ، نقاطی مانند $(x, y) \in D_\delta(\mathbf{u})$ و همسایگی از \mathbf{u} وجود دارند که $f(x, y) = 1$ و در سایر نقاط $(x, y) \in D_\delta(\mathbf{u})$ ، $f(x, y) = 0$ ، لذا، درست نیست که وقتی $(x, y) \rightarrow (x_0, y_0) = \mathbf{u}$ ، $f(x, y) \rightarrow f(x_0, y_0) = 1$.

برای اثبات پیوستگی توابع می‌توان از قضایای حدی استفاده کرد (ر.ک. قضیه ۳ و مثال ۷). اگر آن نتایج را برحسب پیوستگی بنویسیم، فوراً "به قضیه زیر خواهیم رسید.

قضیه ۰۴. فرض کنیم $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، $g: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ عددی حقیقی باشد.

(یک) اگر f در x_0 پیوسته باشد، cf نیز چنین است، که در آن $(cf)(x) = c(f(x))$.

(دو) اگر f و g در x_0 پیوسته باشند، $f+g$ نیز چنین است، که در آن $(f+g)(x) = f(x) + g(x)$.

(سه) هرگاه f و g در x_0 پیوسته بوده و $m = 1$ ، آنگاه تابع حاصل ضرب fg تعریف شده با $(fg)(x) = f(x)g(x)$ در x_0 پیوسته است.

(چهار) هرگاه $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ در x_0 پیوسته بوده و بر A هیچ جا صفر نباشد، آنگاه خارج قسمت $1/f$ در x_0 پیوسته است، که در آن $(1/f)(x) = 1/f(x)$.

(پنج) هرگاه $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ و $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ ، آنگاه f در x_0 پیوسته است اگر و فقط اگر هر تابع حقیقی f_1, \dots, f_m در x_0 پیوسته باشد.

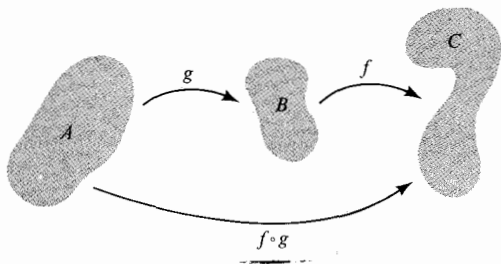
مثال ۱۰. فرض کنیم $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ ، $f(x, y) = (x^2y, (y + x^3)/(1 + x^2))$ ، نشان دهید که f پیوسته است.

برای این کار، طبق قسمت (پنج) در بالا، کافی است نشان دهیم که هر مؤلفه پیوسته است. لذا، ابتدا نشان می‌دهیم که $(x, y) \mapsto x^2y$ پیوسته است، اما $(x, y) \mapsto x$ پیوسته است (ر. ک. مثال ۴). در نتیجه، طبق (سه)، $(x, y) \mapsto x^2$ پیوسته است. چون $(x, y) \mapsto y$ پیوسته است، باز طبق (سه) $(x, y) \mapsto x^2y$ پیوسته می‌باشد. چون $1 + x^2$ پیوسته و ماصفر است، بنا بر (چهار) $1/(1 + x^2)$ پیوسته می‌باشد. از اینرو، $(y + x^3)/(1 + x^2)$ حاصل ضربی از توابع پیوسته و، بنا بر (سه)، پیوسته می‌باشد.

حال عمل اساسی دیگری را مطرح می‌کنیم که می‌تواند بر توابع اعمال شود. این عمل ترکیب نامیده می‌شود. اگر g ، A را به B و f ، B را به C بنگارد، ترکیب g با f ، یا $f \circ g$ ، که با $f \circ g$ نموده می‌شود، A را به وسیله $f(g(x))$ به C می‌نگارد (ر. ک. شکل ۱۷.۲۰۲).

مثلاً، " $\sin x^2$ ترکیب $x \mapsto x^2$ با $y \mapsto \sin y$ است. خواننده حتماً با این ایده در حساب

۱. طرز دیگر بیان (چهار) که اغلب به کار می‌رود چنین است: هرگاه $f(x_0) \neq 0$ و f پیوسته باشد، آنگاه در همسایگی x_0 ، $f(x) \neq 0$ ، در نتیجه، $1/f$ در آن همسایگی تعریف شده است، و f در x_0 پیوسته است.



شکل ۱۷.۲.۲

ترکیب f با g

دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره آشنا شده است.

قضیه ۵. فرض کنیم $f: B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ و $g: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ همچنین، $g(A) \subset B$. در نتیجه، $f \circ g$ بر A تعریف شده است. هرگاه g در $x_0 \in A$ و f در $y_0 = g(x_0)$ پیوسته باشد، آنگاه $f \circ g$ در x_0 پیوسته است.

شهود موجود در ورای این ایده درکی آسان دارد؛ برهان صوری آمده در ضمیمه آ به همین نحو به دست می‌آید. شهوداً باید نشان داد که وقتی x به x_0 نزدیک شود، $f(g(x))$ به $f(g(x_0))$ نزدیک می‌شود. اما وقتی x به x_0 نزدیک شود، $g(x)$ به $g(x_0)$ نزدیک می‌شود (بنابر پیوستگی g در x_0) و وقتی $g(x)$ به $g(x_0)$ نزدیک شود، $f(g(x))$ به $f(g(x_0))$ نزدیک می‌شود (بنابر پیوستگی f در $g(x_0)$).

مثال ۱۱. فرض کنید $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{30} + \sin z^3$. نشان دهید که f پیوسته است.

در اینجا می‌توان f را به صورت مجموعی از دو تابع $(x^2 + y^2 + z^2)^{30}$ و $\sin z^3$ نوشت؛ در نتیجه، کافی است نشان دهیم که هر یک از توابع پیوسته است. تابع اول ترکیبی از $(x, y, z) \mapsto (x^2 + y^2 + z^2)$ با $u \mapsto u^{30}$ است و تابع دوم ترکیب $(x, y, z) \mapsto z^3$ با $u \mapsto \sin u$ است؛ در نتیجه، بنابر قضیه ۵، پیوستگی خواهیم داشت.

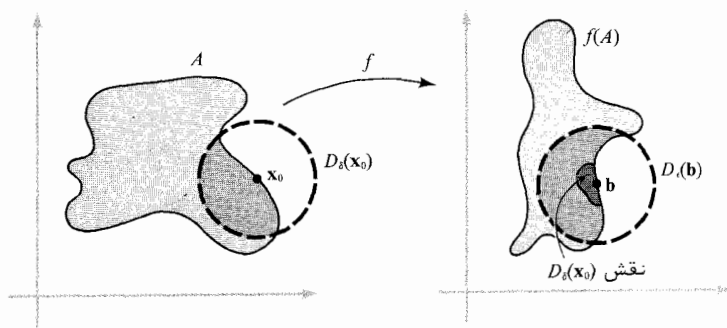
اختیاری

حدود برحسب ε و δ

حال قضیه‌ای بیان می‌کنیم که مفهوم حد را برحسب اپسیلن و دلتا تنظیم می‌کند. این تنظیم جدید کاملاً مفید است، و اغلب به عنوان تعریف حد گرفته می‌شود. این راه دیگری است برای دقیق ساختن حکم شهودی "وقتی x نزدیک x_0 است، $f(x)$ نزدیک b می‌باشد". برای کمک در فهم این تنظیم، لازم است خواننده آن را در رابطه با امثله پیشگفته در نظر بگیرد.

قضیه ۶. فرض کنیم $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ و x_0 در A بوده یا یک نقطه مرزی A باشد. در این صورت، $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ اگر و فقط اگر به ازای هر عدد $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای باشد به

طوری که به ازای هر $x \in A$ صادق در $0 < \|x - x_0\| < \delta$ ، داشته باشیم $\|f(x) - b\| < \varepsilon$ (ر.ک. شکل ۱۸.۲.۲).



شکل ۱۸.۲.۲

هندسه‌ای تعریف ε - δ ی حد

این قضیه در ضمیمه آ ثابت شده است.

برای توضیح مکانیسم روش اپسیلن - دلتا در قضیه ۶، مثالهای زیر را در نظر می‌گیریم.

مثال ۱۲. نشان دهید که $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} x = 0$

توجه کنید که اگر $\delta > 0$ ، $\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ ، ایجاب می‌کند که $\|x - 0\| = |x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$. لذا ، هرگاه $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ ، آنگاه $|x - 0| < \delta$ کمتر نیست . به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده باید $\delta > 0$ ای (عموماً "تابع ε) بیابیم با این خاصیت که $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ نامساوی $|x - 0| < \varepsilon$ را ایجاب کند . چه δ ای را برگزینیم ؟ از محاسبات فوق معلوم می‌شود که هرگاه $\delta = \varepsilon$ را اختیار کنیم ، آنگاه $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ ایجاب می‌کند که $|x - 0| < \varepsilon$ این نشان می‌دهد که

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x = 0$$

می‌توانستیم $\varepsilon/3$ یا $\varepsilon/2$ را نیز اختیار کنیم ، ولی کافی است فقط یک δ ی صادق در ملزومات تعریف حد پیدا شود .

به‌طورکلی ، به همین ترتیب می‌توان دید که

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (x_0, y_0)} x = x_0$$

این چیزی جز تنظیم اپسیلن - دلتای مثال ۴ نیست .

مثال ۱۳ . تابع

$$f(x, y) = \frac{\sin(x^2 + y^2)}{x^2 + y^2}$$

را در نظر می‌گیریم . با آنکه f در $(0, 0)$ تعریف نشده است ، می‌توان پرسید آیا وقتی (x, y) به $(0, 0)$ نزدیک می‌شود ، $f(x, y)$ به عددی نزدیک می‌شود یا نه . از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می‌دانیم که

$$\lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\sin \alpha}{\alpha} = 1$$

لذا ، معقول است حدس بزنیم که

$$\lim_{\mathbf{v} \rightarrow (0, 0)} f(\mathbf{v}) = \lim_{\mathbf{v} \rightarrow (0, 0)} \frac{\sin \|\mathbf{v}\|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} = 1$$

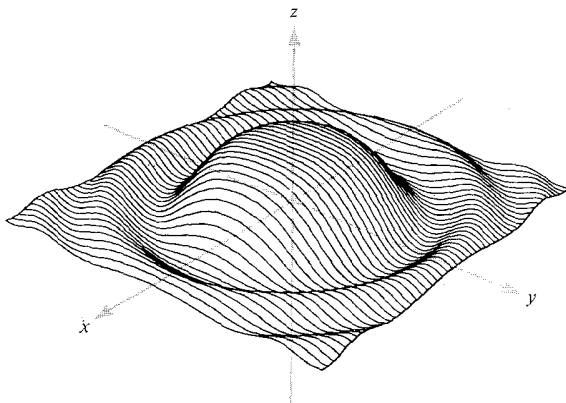
در واقع ، چون $\lim_{\alpha \rightarrow 0} (\sin \alpha)/\alpha = 1$ ، به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده می‌توان $\delta > 0$ ای با

خاصیت $\delta > 0$ یافت به طوری که $0 < |\alpha| < \delta$ نامساوی $|(\sin \alpha)/\alpha - 1| < \varepsilon$ را ایجاب کند . هرگاه $0 < \|\mathbf{v}\| < \delta$ ، آنگاه $0 < \|\mathbf{v}\|^2 < \delta^2 < \delta$ ؛ و در نتیجه ،

$$|f(\mathbf{v}) - 1| = \left| \frac{\sin\|\mathbf{v}\|^2}{\|\mathbf{v}\|^2} - 1 \right| < \varepsilon$$

لذا، $\lim_{\mathbf{v} \rightarrow (0,0)} f(\mathbf{v}) = 1$. در واقع ، اگر $(\sin(x^2 + y^2))/(x^2 + y^2)$ را با کامپیوتر رسم کنیم ،

نموداری به دست خواهیم آورد که در مجاورت $(0, 0)$ خوشرفتار است (شکل ۱۹.۲۰۲) .



شکل ۱۹.۲۰۲

نمودار رسم شده به وسیله کامپیوتر

مثال ۱۴ . نشان دهید که

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

باید نشان داد که وقتی (x, y) نزدیک مبدا باشد ، $x^2/\sqrt{x^2 + y^2}$ کوچک است . برای

این کار به نامساوی زیر نیاز داریم :

$$0 \leq \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (y^2 \geq 0)$$

$$= \sqrt{x^2 + y^2}$$

به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده ، $\delta = \varepsilon$ را اختیار می کنیم . در این صورت ، $\|(x, y) - (0, 0)\|$

در نتیجه، $\|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2}$ ؛ در نتیجه، $\|(x, y) - (0, 0)\| < \delta$ ایجاب می‌کند که

$$\left| \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 0 \right| = \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + y^2}} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \|(x, y) - (0, 0)\| < \delta = \varepsilon$$

لذا، شرایط قضیه ۶ برقرارند و حد اثبات شده است.

مثال ۱۵. آیا $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x^2/(x^2 + y^2)$ وجود دارد؟

اگر این حد موجود باشد، باید وقتی (x, y) نزدیک $(0, 0)$ شود $x^2/(x^2 + y^2)$ به مقدار معینی، مثلاً a ، نزدیک شود. بخصوص، هرگاه (x, y) در امتداد مسیری به صفر نزدیک شود، آنگاه $x^2/(x^2 + y^2)$ باید به مقدار حدی a نزدیک گردد. اگر (x, y) در امتداد خط $y = 0$ به $(0, 0)$ نزدیک شود، مقدار حدی بوضوح ۱ است (کافی است در عبارت بالا قرار دهیم $y = 0$ و به دست آوریم $x^2/x^2 = 1$). اگر (x, y) در امتداد خط $x = 0$ به $(0, 0)$ نزدیک شود، مقدار حدی عبارت است از

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{0^2}{0^2 + y^2} = 0 \neq 1$$

از اینرو، $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} x^2/(x^2 + y^2)$ وجود نخواهد داشت (ر.ک. شکل ۲۰.۲.۲۰).

مثال ۱۶. ثابت کنید (ر.ک. شکل ۲۱.۲.۲۰)

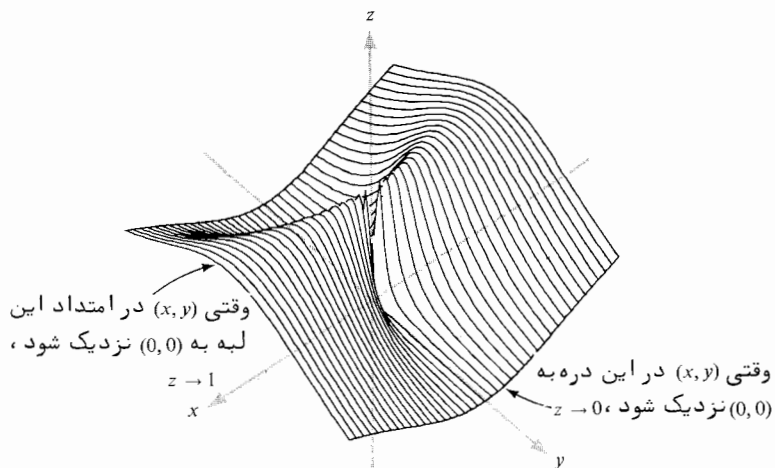
$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} = 0$$

در واقع، توجه کنید که

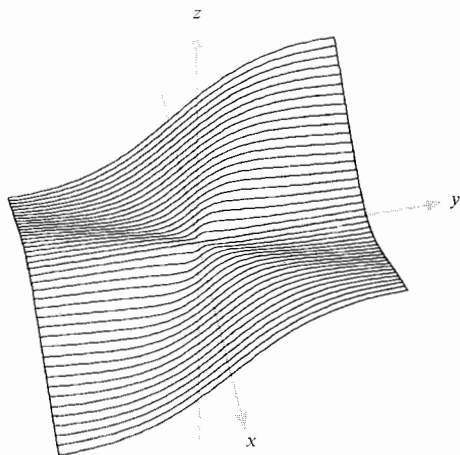
$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} \right| \leq \left| \frac{x^2 y}{x^2} \right| = |y|$$

لذا، به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، $\delta = \varepsilon$ را اختیار می‌کنیم؛ در نتیجه، $0 < \|(x, y) - (0, 0)\| = \sqrt{x^2 + y^2} < \delta$ ایجاب می‌کند که $|y| < \delta$ ؛ و لذا،

$$\left| \frac{x^2 y}{x^2 + y^2} - 0 \right| < \varepsilon$$



شکل ۲۰.۲.۲
این تابع در $(0, 0)$ حد ندارد.



شکل ۲۱.۲.۲
این تابع در $(0, 0)$ دارای حد ۰ است.

برای مثالهای دیگری از حدود، ر.ک. ضمیمه آ. نمادگذاری اسپیلن - دلتا ما را به تنظیم زیر از تعریف پیوستگی می‌رساند.

قضیه ۷. فرض کنیم $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ داده شده باشد. f در $x_0 \in A$ پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر عدد $\varepsilon > 0$ ، عددی مانند $\delta > 0$ باشد به طوری که $x \in A$ و $\|x - x_0\| < \delta$ ایجاب کنند که $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$.

قضیه سریعاً ثابت می‌شود. با اینحال، توجه کنید که در قضیه ۶ قید کرده‌ایم که $0 < \|x - x_0\|$ ، یعنی $x \neq x_0$. این قید در اینجا اعمال نشده است؛ در واقع، قضیه ۷ مسلماً "به ازای $x = x_0$ برقرار است. در نتیجه، حذف این حالت لازم نیست. در اینجا به مقدار f در x_0 اهمیت می‌دهیم؛ ما به f در نقاط مجاور نیاز داریم تا به این مقدار نزدیک باشند.

تمرینات

در تمرینات زیر، خواننده می‌تواند فرض کند که تابع نمایی، سینوس، و کسینوس توابع پیوسته‌ای از \mathbb{R} به \mathbb{R} هستند.

۱. نشان دهید که زیرمجموعه‌های زیر از صفحه بازند.

$$A = \{(x, y) \mid -1 < x < 1, -1 < y < 1\} \quad (\text{ا})$$

$$B = \{(x, y) \mid y > 0\} \quad (\text{ب})$$

$$C = \{(x, y) \mid 2 < x^2 + y^2 < 4\} \quad (\text{پ})$$

$$A \cup B \cup C \quad (\text{ت})$$

$$D = \{(x, y) \mid x \neq 0 \text{ و } y \neq 0\} \quad (\text{ث})$$

۲. ثابت کنید به ازای $x \in \mathbb{R}^n$ و $s < t$ ، $D_s(x) \subset D_t(x)$.

۳. ثابت کنید هرگاه U و V همسایگی‌هایی از \mathbb{R}^n باشند، آنگاه $U \cup V$ و $U \cap V$ نیز چنین‌اند.

۴. ثابت کنید نقاط مرزی $[a, b[\subset \mathbb{R}$ نقاط a و b می‌باشند.

۵. با استفاده از تنظیم ε - δ ی حدود، ثابت کنید وقتی $x \rightarrow 2$ ، $x^2 \rightarrow 4$. با استفاده از قضیه ۳، برهان کوتاه‌تری ارائه دهید.

۶. حدود زیر را محاسبه کنید .

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} x^3 y \quad (\bar{\Gamma})$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 1)} e^{xy} \quad (\bar{\beta})$$

(پ) $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x}$ (راهنمایی . به یاد آورید که $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{x} = 1$.)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin^2 x}{x^2} \quad (\bar{\tau})$$

۷. در حالات زیر، $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ را در صورت وجود محاسبه کنید .

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto |x|, x_0 = 1 \quad (\bar{\Gamma})$$

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto \|x\| \quad (\bar{\beta})$$

$$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, x \mapsto (x^2, e^x), x_0 = 1 \quad (\bar{\rho})$$

$$f: \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\} \rightarrow \mathbb{R}^2, (x, y) \mapsto (\sin(x - y), e^{x(y+1)} - x - 1) / \|(x, y)\|, x_0 = (0, 0)$$

۸. فرض کنید $A \subset \mathbb{R}^2$ قرص بیکه $D_1(0, 0)$ به اضافه نقطه $x_0 = (1, 0)$ بوده، و $f: A \rightarrow \mathbb{R}$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = 1 \quad \text{تابع ثابت } f(x) = 1 \text{ باشد. نشان دهید که}$$

۹. فرض کنید $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ حد $f(x, y, z) = (x^2 + 3y^2)/(x + 1)$.

$$\lim_{(x, y, z) \rightarrow (0, 0, 0)} f(x, y, z)$$

را محاسبه کنید .

۱۰. فرض کنید $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ داده شده و x_0 یک نقطه مرزی A باشد. گوییم $\lim_{x \rightarrow x_0}$

$f(x) = \infty$ اگر به ازای هر $N > 0$ ، $\delta > 0$ ای باشد به طوری که $0 < \|x - x_0\| < \delta$

ایجاب کند که $f(x) > N$.

$$\lim_{x \rightarrow 1} (x - 1)^{-2} = \infty \quad \text{ثابت کنید.} \quad (\bar{\Gamma})$$

$$(\bar{\beta}) \quad \lim_{x \rightarrow 0} 1/x = \infty \quad \text{یا} \quad \lim_{x \rightarrow 0} 1/|x| = \infty \quad \text{ثابت کنید ؟}$$

$$(\bar{\rho}) \quad \lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} 1/(x^2 + y^2) = \infty \quad \text{ثابت کنید}$$

۱۱* فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع باشد. می نویسیم $\lim_{x \rightarrow h^-} f(x) = L$ و می گوییم L حد چپ

f در b است اگر بازای هر $\epsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای باشد به طوری که $x < b$ و $0 < |x - b| < \delta$ نامساوی $|f(x) - L| < \epsilon$ را ایجاب کنند.

(آ) تعریف حد راست، یا $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x)$ ، را تنظیم کنید.

(ب) $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/(1 + e^{1/x})$ و $\lim_{x \rightarrow 0^+} 1/(1 + e^{1/x})$ را بیابید.

(پ) نمودار $1/(1 + e^{1/x})$ را رسم کنید.

۱۲. (آ) ثابت کنید عددی مانند $\delta > 0$ هست به طوری که هرگاه $|a| < \delta$ ، آنگاه

$$|a^3 + 3a^2 + a| < 1/100$$

(ب) ثابت کنید عددی مانند $\delta > 0$ هست به طوری که هرگاه $x^2 + y^2 < \delta^2$ ، آنگاه

$$|x^2 + y^2 + 3xy + 180xy^5| < 1/10,000.$$

۱۳. حدود زیر را حساب کنید (خواص توابع مربوطه را در صورت لزوم مرور نمایید).

$$\lim_{x \rightarrow 3} (x^2 - 3x + 5) \quad (\text{آ})$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \sin x \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \quad (\text{پ})$$

(ت) $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{e^h - 1}{h}$ (راهنمایی: قاعده هسپیتال^۱ را به یاد آورید).

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos x - 1}{x^2} \quad (\text{ث})$$

۱۴. حدود زیر را محاسبه کنید.

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 + y^2 + 3) \quad (\text{آ})$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{xy}{x^2 + y^2 + 2} \quad (\text{ب})$$

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{e^{xy}}{x + 1} \quad (\text{پ})$$

۱۵. ثابت کنید $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (\sin xy)/xy = 1$

۱۶. نشان دهید که نگاشت $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x) = x^2 e^x / (2 - \sin x)$ ، پیوسته است .

۱۷. نشان دهید f در x_0 پیوسته است اگر و فقط اگر

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \|f(x) - f(x_0)\| = 0$$

۱۸. نشان دهید که $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x) = (1-x)^8 + \cos(1+x^3)$ ، پیوسته است .

۱۹. اگر $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشند ، نشان دهید که توابع

$$f^2 g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (f(x))^2 g(x)$$

و

$$f^2 + g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, x \mapsto (f(x))^2 + g(x)$$

نیز پیوسته اند .

۲۰. ثابت کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x, y) = ye^x + \sin x + (xy)^4$ ، پیوسته است .

۲۱. فرض کنید x و y در \mathbb{R}^n بوده و $x \neq y$. نشان دهید که تابع پیوسته‌ای مانند $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

وجود دارد که $f(x) = 1$ ، $f(y) = 0$ ، و به ازای هر z در \mathbb{R}^n ، $0 \leq f(z) \leq 1$.

۲۲. نشان دهید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ در تمام نقاط پیوسته است اگر و فقط اگر نقش معکوس هر

مجموعه باز ، باز باشد .

۲۳. فرض کنید $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ به ازای هر x و y در A و ثابتهای مثبت K و α در

$\|f(x) - f(y)\| \leq K \|x - y\|^\alpha$ صدق کند . نشان دهید که f پیوسته است . (این گونه

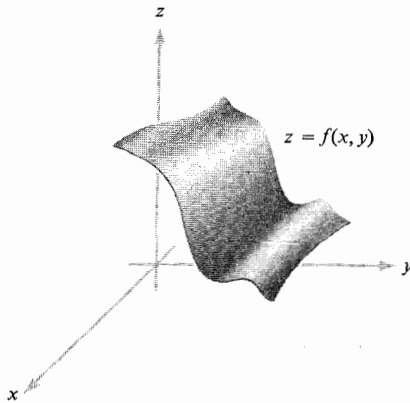
توابع را هولدر^۱ - پیوسته یا اگر $\alpha = 1$ ، لیپ شیتس^۲ - پیوسته می نامند .)

۳۰۲ مشتقگیری

در بخش ۱۰۲ چند روش برای رسم توابع ساده در نظر گرفته شد . اما فقط با این روشها نمی توان در زمانی معقول اطلاعاتی ، حتی برای درک ویژگیهای یک تابع پیچیده ، به دست آورد . از حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی می دانیم که ایده مشتق می تواند کمک بزرگی در این راه باشد ؛ مثلا " ، با آن می توان ماکزیمم و مینیمم را یافت و میزانهای تغییر را حساب کرد . مشتق کاربردهای بسیاری ورای این نیز دارد ، و مطمئنا " شاگرد این را در

حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی دریافته است.

شهوداً، از بخش ۲.۲ می‌دانیم که یک تابع پیوسته تابعی است که در نمودارش "شکستگی" ندارد. یک تابع مشتق‌پذیر از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R} باید چنان باشد که نه فقط نمودارش بلکه در هر نقطه از نمودار صفحه مماس تعریف شده وجود داشته باشد. لذا، باید نمودار لبه تیز، گوشه، یا نوک نداشته باشد (ر.ک. اشکال ۱۰.۳.۲ و ۲۰.۳.۲). به عبارت دیگر، نمودار باید هموار باشد.

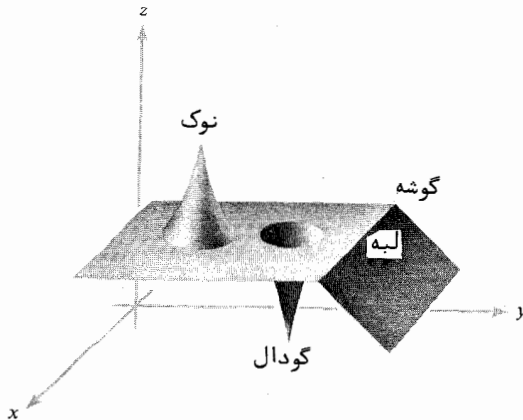


شکل ۱۰.۳.۲
یک نمودار هموار

برای دقیق ساختن این ایده‌ها به تعریف مناسبی نیاز داریم که منظور ما از اینکه $f(x_1, \dots, x_n)$ در $x = (x_1, \dots, x_n)$ مشتق‌پذیر است را بیان کند. در واقع، این آنقدرها که تصور می‌شود آسان نیست. برای این کار مفهوم مشتق جزئی را معرفی می‌کنیم. این مفهوم فقط به معلومات ما از حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره بستگی دارد. (توصیه می‌شود که در اینجا تعریف مشتق در حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره به سرعت مرور شود.)

تعریف. فرض کنیم $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی باشد. در این صورت، $\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n$ مشتقات جزئی f نسبت به متغیر اول، دوم، n نیز توابعی حقیقی از n متغیرند که در نقطه $x = (x_1, \dots, x_n)$ با

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_1, \dots, x_n) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x_1, x_2, \dots, x_j + h, \dots, x_n) - f(x_1, \dots, x_n)}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(\mathbf{x} + h\mathbf{e}_j) - f(\mathbf{x})}{h} \end{aligned}$$



شکل ۲.۳.۲

این نمودار هموار نیست.

در صورت وجود حدود، تعریف می‌شوند، که در آن $1 \leq j \leq n$ و \mathbf{e}_j بردار پایه متعارف $\mathbf{e}_j = (0, \dots, 1, \dots, 0)$ است که در موضع z م 1 قرار دارد (ر.ک. بخش ۵.۱).

به عبارت دیگر، چیزی جز مشتق f نسبت به متغیر x_j ، در حالی که متغیرهای دیگر ثابت گرفته شده‌اند، نیست. اگر $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ، اغلب از نمادهای $\partial f / \partial x$ ، $\partial f / \partial y$ ، $\partial f / \partial z$ به جای $\partial f / \partial x_1$ ، $\partial f / \partial x_2$ ، $\partial f / \partial x_3$ استفاده خواهیم کرد. هرگاه $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، آنگاه می‌توان نوشت

$$f(x_1, \dots, x_n) = (f_1(x_1, \dots, x_n), \dots, f_m(x_1, \dots, x_n))$$

در نتیجه، می‌توان از مشتقات جزئی هر مؤلفه استفاده کرد. مثلاً، "مشتق جزئی مؤلفه m نسبت به x_n ، یعنی متغیر n م، می‌باشد.

وجود مشتقات جزئی f در نقطه x اولین تعریفی است که ممکن است فکر کنیم عبارت " f در x مشتقپذیر است " را دقیقا "معنی دار می‌کند. در واقع، همانطور که ذیلا می‌بینیم، برای به دست آوردن بهترین نظریه باید این شرط قویتر شود. ضمنا، باید با محاسبه مشتقات جزئی کاملا آشنا شویم. چند مثال زیر ما را در این امر یاری می‌دهد.

مثال ۰.۱ اگر $f(x, y) = x^2y + y^3$ و $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ را بیابید.

برای یافتن $\partial f/\partial x$ ، y را ثابت گرفته و فقط نسبت به x مشتق می‌گیریم؛ این نتیجه می‌دهد که

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{d(x^2y + y^3)}{dx} = 2xy$$

به همین نحو، برای یافتن $\partial f/\partial y$ ، x را ثابت گرفته و فقط نسبت به y مشتق می‌گیریم:

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{d(x^2y + y^3)}{dy} = x^2 + 3y^2$$

اگر بخواهیم نشان دهیم که مشتق جزئی در نقطه‌ای خاص، مثلا " در (x_0, y_0) ، محاسبه می‌شود، می‌نویسیم

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)$$

وقتی برای متغیر وابسته می‌نویسیم $z = f(x, y)$ ، گاهی به جای $\frac{\partial z}{\partial x}$ خواهیم نوشت $\frac{\partial f}{\partial x}$. به بیان دقیق، این سوء استعمال از نماد است، ولی معمولا " این دو نماد به جای هم به کار می‌روند. (برای مشاهده خطرهای ناشی از نمادهای سست، ر.ک. تمرین ۲۲، بخش ۰.۴.۲)

مثال ۰.۲ اگر $z = \cos xy + x \cos y = f(x, y)$ و $(\partial z/\partial x)(x_0, y_0)$ و $(\partial z/\partial y)(x_0, y_0)$ را بیابید. ابتدا y_0 را ثابت گرفته و نسبت به x مشتق می‌گیریم. در نتیجه،

$$\begin{aligned} \frac{\partial z}{\partial x}(x_0, y_0) &= \left. \frac{d(\cos xy_0 + x \cos y_0)}{dx} \right|_{x=x_0} \\ &= -y_0 \sin xy_0 + \cos y_0 \Big|_{x=x_0} \end{aligned}$$

$$= -y_0 \sin x_0 y_0 + \cos y_0$$

مثال ۳. $\partial f / \partial x$ را در صورتی بیابید که $f(x, y) = xy / \sqrt{x^2 + y^2}$ بنا بر قاعده خارج قسمت، داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \frac{y\sqrt{x^2 + y^2} - xy(x/\sqrt{x^2 + y^2})}{x^2 + y^2} \\ &= \frac{y(x^2 + y^2) - xy(x)}{(x^2 + y^2)^{3/2}} = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^{3/2}} \end{aligned}$$

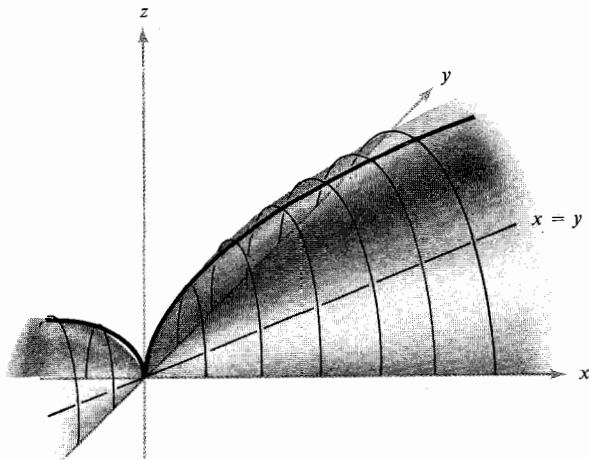
حال به مسائلی ناشی از تعریف " مشتق پذیری در x " می پردازیم که صرفاً به معنی وجود مشتقات جزئی است. مثال زیر را در نظر می گیریم.

مثال ۴. فرض کنیم $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$ طبق تعریف،

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(h, 0) - f(0, 0)}{h} = 0$$

و، به همین نحو، $(\partial f / \partial y)(0, 0) = 0$. واجب است از تعریف اصلی مشتق جزئی استفاده کنیم، زیرا توابع $x^{1/3}$ و $y^{1/3}$ در 0 مشتق پذیر نیستند. اما فرض کنیم f به خط $y = x$ محدود شود که در این صورت داریم $f(x, x) = x^{2/3}$ (ر. ک. شکل ۳.۳.۲). می توانیم جانشانی $y = x$ را به صورت ترکیب تابع $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ ، داده شده به وسیله $g(x) = (x, x)$ با $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، داده شده به وسیله $f(x, y) = x^{1/3}y^{1/3}$ در نظر گرفت. لذا، $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ با $(f \circ g)(x) = x^{2/3}$ معین می شود. خواننده می تواند تحقیق کند که f و g هر دو در 0 " مشتق پذیر " هستند، ولی $f \circ g$ در $x = 0$ مشتق پذیر نیست. به عبارت دیگر، اگر از تعریف موقت مشتق پذیری استفاده کنیم، به خلاف توابع یک متغیره ترکیب توابع مشتق پذیر مشتق پذیر نیست. داشتن تعریفی از مشتق پذیری که با آن ترکیب توابع مشتق پذیر مشتق پذیر باشد خیلی مفیدتر است.

دلیل دیگری برای عدم تمایل ما در مشتق پذیر نامیدن این تابع f در $(0, 0)$ وجود دارد. یعنی، صفحه مماس، با هر معنی معقول، بر نمودار در $(0, 0)$ وجود ندارد. صفحه xy بر نمودار در امتداد محورهای x و y مماس است، زیرا f در $(0, 0)$ در امتداد این



شکل ۳.۳.۲

قسمت " بالایی " نمودار $x^{1/3}y^{1/3}$

محورها شیب صفر دارد؛ یعنی، در $(0, 0)$ ، $\partial f/\partial x = 0$ و $\partial f/\partial y = 0$. لذا، اگر صفحه مماس وجود داشته باشد، باید صفحه xy باشد. با اینحال، همانطور که شکل ۳.۳.۲ نشان می‌دهد، صفحه xy بر نمودار در جهات دیگر مماس نیست؛ و در نتیجه، می‌توان گفت بر نمودار f مماس است.

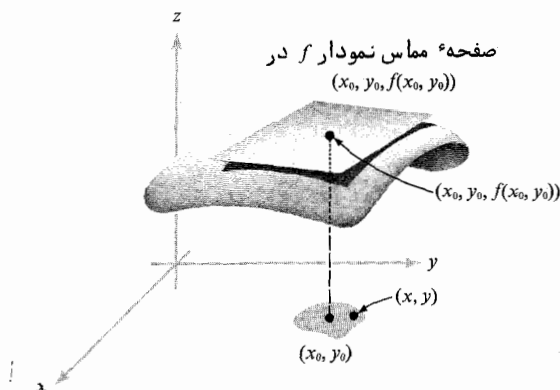
برای انگیزش تعریف‌نهایی ما از مشتق‌گیری، معادله صفحه مماس بر نمودار $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ در (x_0, y_0) را در صورتی حساب می‌کنیم که f به قدر کافی هموار باشد. در \mathbb{R}^3 ، یک صفحه مایل معادله‌ای به شکل

$$z = ax + by + c$$

دارد. اگر این بخواهد صفحه مماس بر نمودار f باشد، شیبها در امتداد محورهای x و y باید مساوی $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ ، یعنی میزانهای تغییر f نسبت به x و y ، باشند؛ لذا، $a = \partial f/\partial x$ ، $b = \partial f/\partial y$ (محاسبه شده در (x_0, y_0)). بالاخره، می‌توان c را از این امر که وقتی $x = x_0$ ، $y = y_0$ ؛ $z = f(x_0, y_0)$ تعیین کرد. لذا، خواهیم داشت

$$(1) \quad z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

که اگر f " به قدر کافی هموار باشد " ، باید معادلهٔ صفحهٔ مماس بر نمودار f در (x_0, y_0) باشد (ر.ک. شکل ۴.۳.۲).



شکل ۴.۳.۲

به ازای نقاط (x, y) نزدیک (x_0, y_0) ، نمودار صفحهٔ مماس نزدیک نمودار f است .

تعریف ما از مشتق‌پذیری معادل آن است که صفحهٔ (۱) یک تقریب " مناسب " f در مجاورت (x_0, y_0) باشد . برای به دست آوردن ایده‌ای از تقریب مناسب ، لحظه‌ای به حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره باز می‌گردیم . هرگاه f در نقطهٔ x_0 مشتق‌پذیر باشد، آنگاه می‌دانیم که

$$\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x} = f'(x_0)$$

این رابطه را به صورت زیر می‌نویسیم :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = f'(x_0)$$

که در آن $x = x_0 + \Delta x$. چون $\lim_{x \rightarrow x_0} f'(x_0) = f'(x_0)$ ، می‌توان معادلهٔ فوق را به صورت زیر نوشت :

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} = \lim_{x \rightarrow x_0} f'(x_0)$$

یا

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \left(\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} - f'(x_0) \right) = 0$$

یا

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{f(x) - f(x_0) - f'(x_0)(x - x_0)}{x - x_0} = 0$$

لذا، خط مماس l مار بر $(x_0, f(x_0))$ به شیب $f'(x_0)$ نزدیک f است یعنی تفاضل $f(x)$ و $l(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$ ، حتی وقتی بر $x - x_0$ تقسیم شده و x به x_0 رود، به صفر می‌رود. این مفهوم "تقریب مناسب" است که سعی داریم برای توابع چند متغیره داشته باشیم، که در آن خط مماس جایش را به صفحه مماس می‌دهد (ر.ک. معادله (۱) در بالا).

تعریف. فرض کنیم $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ گوییم f در (x_0, y_0) مشتق‌پذیر است اگر $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ در (x_0, y_0) موجود بوده و

$$(۲) \quad \frac{\left| f(x, y) - f(x_0, y_0) - \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \right|}{\|(x, y) - (x_0, y_0)\|} \rightarrow 0$$

$as (x, y) \rightarrow (x_0, y_0)$

این معادله منظور ما را از اینکه

$$f(x, y) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

تعریف مناسبی از تابع f است بیان می‌نماید.

در واقع، استفاده از این تعریف برای دیدن اینکه f مشتق‌پذیر است همیشه آسان نیست، ولی به آسانی می‌توان از محک دیگری که در قضیه ۹ مذکور در زیر داده شده استفاده کرد.

ما برای رسیدن به تعریف مشتقپذیری از مفهوم غیر صوری صفحه مماس بر نمودار یک تابع استفاده کرده ایم. حال آماده ایم تا تعریف صوری صفحه مماس را بپذیریم.

تعریف. فرض کنیم $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ در $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$ مشتقپذیر باشد. در این صورت، صفحه تعریف شده در \mathbb{R}^3 با معادله (۱):

$$z = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

صفحه مماس نمودار f در نقطه (x_0, y_0) نام دارد.

ماتریس سطری

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) \quad \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \right]$$

را به صورت $Df(x_0, y_0)$ می نویسیم. در نتیجه، تعریف مشتقپذیری می گوید که

$$\begin{aligned} (3) \quad & f(x, y) + Df(x_0, y_0) \begin{pmatrix} x - x_0 \\ y - y_0 \end{pmatrix} \\ & = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \end{aligned}$$

تقریب مناسب ما از f در مجاورت (x_0, y_0) است. (مثل بالا، "مناسب" یعنی تفاضل (۳) با $f(x, y)$ کوچکتر از چیزی ضریب $\sqrt{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2}$ است. گوییم (۳) بهترین تقریب خطی به f در مجاورت (x_0, y_0) است.

حال آماده ایم، با استفاده از بحث فوق به عنوان انگیزه، مشتقپذیری را برای نگاشتهای f از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^m تعریف کنیم. مشتق $Df(\mathbf{x}_0)$ از $f = (f_1, \dots, f_m)$ در نقطه \mathbf{x}_0 ماتریسی است با عناصر $t_{ij} = \partial f_i / \partial x_j$ که در \mathbf{x}_0 محاسبه می شوند.

۱. خواهیم دید که فقط کافی است وجود یک ماتریس فرض شود که بهترین تقریب خطی در مجاورت $\mathbf{x}_0 \in \mathbb{R}^n$ را به دست دهد، زیرا در واقع این ماتریس لزوماً ماتریسی است که درایه ij ام آن $\partial f_i / \partial x_j$ است (ر.ک. ضمیمه ۱).

تعریف. فرض کنیم U مجموعه‌ای باز در \mathbb{R}^n بوده و $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ تابع معلومی باشد گوییم f در $x_0 \in U$ مشتقپذیر است اگر مشتقات جزئی f در x_0 موجود بوده و

$$(۴) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

که در آن T ماتریسی است با عناصر $\partial f_i / \partial x_j$ که در x_0 حساب می‌شوند. T را مشتق f در x_0 نامیده و آن را با $Df(x_0)$ نشان می‌دهیم.

ما همیشه مشتق T از f در x_0 را با $Df(x_0)$ نشان می‌دهیم، اگرچه در بعضی کتب آن را با $df(x_0)$ نموده و دیفرانسیل f می‌نامند.

در حالت $m = 1$ ، ماتریس T چیزی جز ماتریس سطری

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x_1}(x_0) \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_0) \right]$$

نیست (گاهی، وقتی خطر ابهام در بین باشد، درایه‌ها را با ویرگول از هم جدا می‌کنیم). با فرض $n = 2$ و گذاردن این در معادله (۴)، معلوم می‌شود که شرایط (۲) و (۴) با هم سازگارند. لذا، با فرض $h = x - x_0$ ، یک تابع حقیقی n متغیره در نقطه x_0 مشتقپذیر است اگر

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|} \left| f(x_0 + h) - f(x_0) - \sum_{j=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0) h_j \right| = 0$$

زیرا

$$T h = \sum_{j=1}^n h_j \frac{\partial f}{\partial x_j}(x_0)$$

در حالت کلی که f زیر مجموعه‌ای از \mathbb{R}^n را به \mathbb{R}^m می‌نگارد، مشتق ماتریسی $m \times n$

است که با

$$Df(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

داده می‌شود، که در آن $\partial f_i / \partial x_j$ در x_0 محاسبه می‌شود. $Df(x_0)$ بحق ماتریس مشتقات

جزئی f در x_0 نامیده می شود .

مثال ۵. صفحه مماس بر نمودار $z = x^2 + y^4 + e^{xy}$ در نقطه $(1, 0, 2)$ را حساب کنید .
 در اینجا از فرمول (۱) ، به ازای $x_0 = 1$ ، $y_0 = 0$ ، $z_0 = f(x_0, y_0) = 2$ ، استفاده می کنیم . مشتقات جزئی عبارتند از

$$\frac{\partial z}{\partial y} = 4y^3 + xe^{xy} \quad \text{و} \quad \frac{\partial z}{\partial x} = 2x + ye^{xy}$$

در $(1, 0, 2)$ به ترتیب مساوی ۲ و ۱ می باشند . لذا ، بنا بر (۱) ، صفحه مماس عبارت است از

$$z = 2(x - 1) + 1(y - 0) + 2$$

یعنی ،

$$z = 2x + y$$

تعریف . حالت خاص $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ را در نظر می گیریم . در اینجا $Df(\mathbf{x})$ ماتریس $1 \times n$

$$Df(\mathbf{x}) = \left[\frac{\partial f}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial f}{\partial x_n} \right]$$

است . بردار نظیر $(\partial f / \partial x_1, \dots, \partial f / \partial x_n)$ گرادیان f نام دارد که با $\text{grad } f$ یا ∇f نموده می شود .

تعبیر هندسی گرادیان در بخش ۵.۲ مطرح می شود . می توان مشتق f را بر حسب حاصل ضربهای داخلی به صورت زیر نوشت :

$$Df(\mathbf{x})(\mathbf{h}) = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{h}.$$

مثال ۶. فرض کنیم $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x, y, z) = xe^y$. در این صورت ،

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (e^y, xe^y, 0)$$

از تعریف معلوم می شود که ، برای $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ،

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

حال آنکه، برای $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ،

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j}$$

مثال ۷. (ا) هرگاه $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ با $f(x, y) = e^{xy} + \sin xy$ داده شده باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} \nabla f(x, y) &= (ye^{xy} + y \cos xy)\mathbf{i} + (xe^{xy} + x \cos xy)\mathbf{j} \\ &= (e^{xy} + \cos xy)(y\mathbf{i} + x\mathbf{j}) \end{aligned}$$

(ب) هرگاه $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با $f(x, y) = (e^{x+y} + y, y^2x)$ تعریف شده باشد، آنگاه

$f_1(x, y) = e^{x+y} + y$ و $f_2(x, y) = y^2x$ ، لذا $Df(x, y)$ ماتریس 2×2 ی

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} e^{x+y} & e^{x+y} + 1 \\ y^2 & 2xy \end{bmatrix}$$

می‌باشد.

تا آخر این بخش چند قضیهٔ عمومی را مطرح می‌کنیم که بعضی از نتایج اساسی حساب

دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره را به چند متغیره تعمیم می‌دهند.

در حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره نشان داده‌ایم که هرگاه f مشتق‌پذیر باشد،

آنگاه f پیوسته است. در قضیهٔ ۸ گوئیم که این برای توابع چند متغیرهٔ مشتق‌پذیر نیز

درست است. همانطور که می‌دانیم، توابع زیادی از جمله $f(x) = |x|$ وجود دارند که

پیوسته‌اند ولی مشتق‌پذیر نیستند.

پیش از بیان نتیجه، تابعی مثال می‌زنیم که مشتقات جزئی آن در یک نقطه موجودند

ولی در آن نقطه پیوسته نیستند.

مثال ۸. فرض کنیم $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1, & x = 0 \text{ یا } y = 0 \\ 0, & \text{در غیر این صورت} \end{cases}$$

چون f بر محورهای x و y ثابت (مساوی ۱) اند،

$$\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 0$$

اما f در $(0, 0)$ پیوسته نیست، زیرا $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} f(x, y)$ وجود ندارد.

با اینحال، همانطور که قضیه زیر می‌گوید، می‌توان در باب توابع مشتقپذیر بیشتر رفت.

قضیه ۰۸. فرض کنیم $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ در $x_0 \in U$ مشتقپذیر باشد. در این صورت، f در x_0 پیوسته می‌باشد.
برای اثبات، ر.ک. ضمیمه آ.

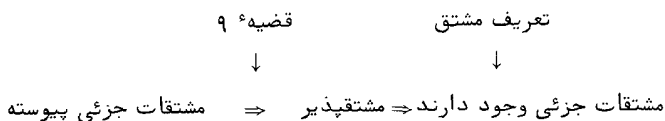
همانطور که دیدیم، معمولاً "گفتن اینکه چه وقت مشتقات جزئی یک تابع وجود دارند آسان است - ما فقط از معلومات خود از حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره استفاده می‌کنیم. اما تعریف مشتقپذیری به نوعی پیچیده می‌نماید و ممکن است تحقیق شرط تقریب لازم (۴) به نظر مشکل آید. خوشبختانه محک ساده‌ای، که در قضیه زیر داده شده، وجود دارد که به ما می‌گوید چه وقت یک تابع مشتقپذیر است.

قضیه ۰۹. فرض کنیم $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. همچنین، تمام مشتقات جزئی $\partial f_i / \partial x_j$ تابع f در همسایگی نقطه $x \in U$ پیوسته باشند. در این صورت، f در x مشتقپذیر است (پیوستگی مشتقات جزئی یعنی به ازای هر i, j ، نگاشت $U \rightarrow \mathbb{R}$ داده شده با

$$x \mapsto \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)$$

پیوسته است).

برهان در ضمیمه آ داده شده است. به سلسله مراتب زیر توجه کنید:



هر یک از احکام عکس، که با عکس کردن استلزام به دست می‌آید، نامعتبر است.^۱ گوییم تابعی که مشتقات جزئی آن موجود و پیوسته‌اند از رده C^1 است. لذا، قضیه ۹؛ می‌گوید که هر تابع C^1 مشتقپذیر است.

مثال ۹. فرض کنید

$$f(x, y) = \frac{\cos x + e^{xy}}{x^2 + y^2}$$

نشان دهید f در تمام نقاط $(x, y) \neq (0, 0)$ مشتقپذیر است.

این امر درست است، زیرا، بنا بر بخش ۲.۲، مشتقات جزئی

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{(x^2 + y^2)(ye^{xy} - \sin x) - 2x(\cos x + e^{xy})}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{(x^2 + y^2)xe^{xy} - 2y(\cos x + e^{xy})}{(x^2 + y^2)^2}$$

جز وقتی $x = 0$ و $y = 0$ ، پیوسته می‌باشند.

تمرینات

۱. $\partial f/\partial x$ ، $\partial f/\partial y$ را در صورتی بیابید که

$$f(x, y) = xy \quad (\text{آ})$$

$$f(x, y) = e^{xy} \quad (\text{ب})$$

$$f(x, y) = x \cos x \cos y \quad (\text{پ})$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^2)\log(x^2 + y^2) \quad (\text{ت})$$

۲. مشتقات جزئی $\partial z/\partial x$ ، $\partial z/\partial y$ را برای توابع داده شده در نقاط ذکر شده حساب کنید.

$$z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}; (0, 0), (a/2, a/2) \quad (\text{آ})$$

$$z = \log \sqrt{1 + xy}; (1, 2), (0, 0) \quad (\text{ب})$$

$$z = e^{ax} \cos(bx + y); (2\pi/b, 0) \quad (\text{پ})$$

۱. برای مثالی نقض جهت عکس استلزام اول، از $f(x) = x^2 \sin(1/x)$ ، $f(0) = 0$ ، استفاده

کنید. برای دومی، ر.گ. مثال ۲ در ضمیمه ۶.

۳. در هر یک از حالات زیر، مشتقات جزئی $\partial w/\partial x$, $\partial w/\partial y$ را بیابید.

$$w = \frac{x^2 + y^2}{x^2 - y^2} \quad (\text{ب}) \qquad w = xe^{x^2 + y^2} \quad (\text{آ})$$

$$w = x/y \quad (\text{ت}) \qquad w = e^{xy} \log(x^2 + y^2) \quad (\text{پ})$$

$$w = \cos(ye^{xy}) \sin x \quad (\text{ث})$$

۴. نشان دهید که هر یک از توابع زیر در هر نقطه از قلمروش مشتقپذیر است. از این توابع کدامها C^1 اند؟

$$f(x, y) = \frac{x}{y} + \frac{y}{x} \quad (\text{ب}) \qquad f(x, y) = \frac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} \quad (\text{آ})$$

$$f(x, y) = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{ت}) \qquad f(r, \theta) = \frac{1}{2} r \sin 2\theta, r > 0 \quad (\text{پ})$$

$$f(x, y) = \frac{x^2 y}{x^4 + y^2} \quad (\text{ث})$$

۵. نشان دهید که معادلهٔ صفحهٔ مماس بر سطح $z = x^2 + y^3$ در $(3, 1, 10)$ عبارت است از $z = 6x + 3y - 11$.

۶. صفحهٔ مماس بر نمودارهای توابع در تمرین ۱ در نقاط داده شده را حساب کنید.

$$(0, 1) \quad (\text{ت}) \qquad (0, \pi) \quad (\text{پ}) \qquad (0, 1) \quad (\text{ب}) \qquad (0, 0) \quad (\text{آ})$$

۷. مشتق توابع زیر را حساب کنید.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y) = (x, y) \quad (\text{آ})$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, f(x, y) = (xe^y + \cos y, x, x + e^y) \quad (\text{ب})$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, f(x, y, z) = (x + e^z + y, yx^2) \quad (\text{پ})$$

۸. چرا نمودارهای $f(x, y) = x^2 + y^2$ و $g(x, y) = -x^2 - y^2 + xy^3$ در $(0, 0)$ مماسند؟

۹. فرض کنید $f(x, y) = e^{xy}$. نشان دهید که $x(\partial f/\partial x) = y(\partial f/\partial y)$.

۱۰. با استفاده از عبارت (۱)، ص ۱۳۴، برای تقریب به یک تابع مناسب $f(x, y)$ ، $(e^{0.99})^8$ را تقریب نمایید.

۱۱. گرادیان توابع زیر را محاسبه کنید.

$$f(x, y, z) = x \exp(-x^2 - y^2 - z^2) \quad (\text{آ}) \quad (\text{توجه کنید که } \exp u = e^u)$$

$$f(x, y, z) = \frac{xyz}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{ب})$$

۱۲. فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ یک نگاشت خطی باشد. مشتق f چقدر است؟
۱۳. تمام توابع هولدر - پیوسته به ازای $\alpha > 1$ را توصیف کنید (ر. ک. تمرین ۲۳، بخش ۲.۲). مشتق یک چنین تابع چیست؟

۴.۲ خواص مشتق

در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی مشتقگیری از مجموع، حاصل ضرب، خارج قسمت، و ترکیب توابع را آموختیم. حال می‌خواهیم این ایده‌ها را به توابع چند متغیره تعمیم داده، و به مشتقگیری از توابع مرکب نظری بیندازیم. قاعده مشتقگیری از ترکیبها، به نام قاعده زنجیره‌ای، برای توابع چند متغیره شکل پیچیده‌تری تا توابع یک متغیره دارد. مثلاً، هرگاه f تابعی حقیقی از یک متغیر باشد، که به صورت $z = f(y)$ نوشته می‌شود، و y تابعی از x به صورت $y = g(x)$ باشد، آنگاه z با جانشانی تابعی از x خواهد شد. یعنی،

$$z = f(g(x)) \quad \text{و فرمول آشنای}$$

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \frac{dy}{dx}$$

یا، معادلاً،

$$z'(x) = f'(g(x))g'(x)$$

را خواهیم داشت. هرگاه f تابعی حقیقی از سه متغیر u, v, w ، و w باشد، که به شکل $z = f(u, v, w)$ نوشته می‌شود، و متغیرهای u, v, w هر یک تابعی از x به صورت $u = g(x), v = h(x), w = k(x)$ باشند، آنگاه، با گذاردن $g(x), h(x), k(x)$ به جای u, v, w ، z به صورت تابعی از x درمی‌آید: $z = f(g(x), h(x), k(x))$ ، و خواهیم داشت

$$\frac{dz}{dx} = \frac{\partial z}{\partial u} \frac{du}{dx} + \frac{\partial z}{\partial v} \frac{dv}{dx} + \frac{\partial z}{\partial w} \frac{dw}{dx}$$

یکی از هدفهای این بخش توضیح مشروح این فرمولهاست.

بحث را با قواعد مشتقگیری برای مجموع، حاصل ضرب، و خارج قسمت آغاز می‌کنیم.

قضیه ۱۰

(یک) قاعده ضرب ثابت. فرض کنیم $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ در x_0 مشتقپذیر بوده و c عددی حقیقی باشد. در این صورت، $h(x) = cf(x)$ در x_0 مشتقپذیر بوده و

$$Dh(x_0) = cDf(x_0) \quad (\text{تساوی ماتریسها})$$

(دو) قاعدهٔ مجموع. فرض کنیم $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ و $g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ در x_0 مشتقپذیر باشند. در این صورت، $h(x) = f(x) + g(x)$ در x_0 مشتقپذیر بوده و

$$Dh(x_0) = Df(x_0) + Dg(x_0) \quad (\text{مجموع ماتریسها})$$

(سه) قاعدهٔ حاصل ضرب. فرض کنیم $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ و $g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ در x_0 مشتقپذیر بوده و $h(x) = f(x)g(x)$ در این صورت، $h: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ در x_0 مشتقپذیر بوده و

$$Dh(x_0) = g(x_0)Df(x_0) + f(x_0)Dg(x_0)$$

(توجه کنید که هر طرف این معادله یک ماتریس $1 \times n$ است؛ یک قاعدهٔ حاصل ضرب کلیتر در تمرین ۲۳ در آخر این بخش ارائه شده است.)
(چهار) قاعدهٔ خارج قسمت. با قبول (سه)، فرض کنیم $h(x) = f(x)/g(x)$ و g هیچگاه بر U صفر نشود. در این صورت، h در x_0 مشتقپذیر بوده و

$$Dh(x_0) = \frac{g(x_0)Df(x_0) - f(x_0)Dg(x_0)}{(g(x_0))^2}$$

برهان. برهانهای (یک) تا (چهار) تقریباً "مانند حالت یک متغیره‌اند (منتها با اختلاف مختصری در نمادگذاری). برای نشان دادن این امر، قسمتهای (یک) و (دو) را ثابت کرده، قسمتهای (سه) و (چهار) را به عنوان تمرین می‌گذاریم (تمرین ۱۵).
(یک) برای اثبات $Dh(x_0) = cDf(x_0)$ باید نشان دهیم که

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|h(x) - h(x_0) - cDf(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

یعنی،

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|cf(x) - cf(x_0) - cDf(x_0)(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

(ر. ک. معادله (۴) از بخش ۳.۰۲). این مسلماً درست است، زیرا f مشتقپذیر بوده و می‌توان از ثابت c فاکتور گرفت (ر. ک. قضیه ۳ (یک)، بخش ۲.۰۲).
(دو) بنابر نامساوی مثلثی، می‌توان نوشت

$$\begin{aligned} & \frac{\|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - (Df(\mathbf{x}_0) + Dg(\mathbf{x}_0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &= \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) + g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - Dg(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &\leq \frac{\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ &+ \frac{\|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - Dg(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \end{aligned}$$

و وقتی $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ ، هر جمله به 0 نزدیک می‌شود . از اینرو ، قسمت (دو) برقرار می‌باشد .

مثال ۱ . فرمول مربوط به Dh در قسمت (چهار) فوق را به ازای $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ و $g(x, y, z) = x^2 + 1$ تحقیق کنید .
در اینجا

$$h(x, y, z) = \frac{x^2 + y^2 + z^2}{x^2 + 1}$$

در نتیجه ، مستقیماً

$$\begin{aligned} Dh(x, y, z) &= \left[\frac{\partial h}{\partial x}, \frac{\partial h}{\partial y}, \frac{\partial h}{\partial z} \right] \\ &= \left[\frac{(x^2 + 1)2x - (x^2 + y^2 + z^2)2x}{(x^2 + 1)^2}, \frac{2y}{x^2 + 1}, \frac{2z}{x^2 + 1} \right] \\ &= \left[\frac{2x(1 - y^2 - z^2)}{(x^2 + 1)^2}, \frac{2y}{x^2 + 1}, \frac{2z}{x^2 + 1} \right] \end{aligned}$$

بنابر فرمول قسمت (چهار) ، به دست می‌آوریم

$$Dh = \frac{gDf - fDg}{g^2} = \frac{(x^2 + 1)[2x, 2y, 2z] - (x^2 + y^2 + z^2)[2x, 0, 0]}{(x^2 + 1)^2}$$

که همانی است که مستقیماً " به دست آمد .

همانطور که در بالا ذکر شد ، در مشتگیری از توابع مرکب است که با تغییراتی اساسی

در فرمول یک متغیره مواجه می‌شویم. با اینحال، اگر از نماد D ، یعنی نماد ماتریس، استفاده کنیم، قاعدهٔ زنجیره‌ای چند متغیره شبیه قاعدهٔ یک متغیره می‌شود. به یاد آورید (ر. ک. مثال ۴، بخش ۳۰۲) که بی‌اعتباری قاعدهٔ زنجیره‌ای بود که ما را به تغییر تعریف موقت مشتقپذیری واداشت.

قضیهٔ ۱۱ (قاعدهٔ زنجیره‌ای). فرض کنیم $U \subset \mathbb{R}^n$ و $V \subset \mathbb{R}^m$ باز باشند. همچنین، $g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ و $f: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ توابع داده شده‌ای باشند که g ، U را به توی V می‌نگارد به طوری که $f \circ g$ تعریف شده باشد. فرض کنیم g در x_0 و f در $y_0 = g(x_0)$ مشتقپذیر باشد. در این صورت، $f \circ g$ در x_0 مشتقپذیر است و

$$D(f \circ g)(x_0) = Df(y_0)Dg(x_0)$$

طرف راست یک حاصل ضرب ماتریسی است.

حال قاعدهٔ زنجیره‌ای را با این فرض اضافی که مشتقات جزئی f پیوسته‌اند ثابت کرده، با ارائه دو حالت خاص که خود مهمند، حالت کلی را پایه‌گذاری می‌کنیم. (برهان کامل قضیهٔ ۱۱ بدون فرض اضافی پیوستگی در ضمیمهٔ آ داده شده است.)

اولین حالت خاص قاعدهٔ زنجیره‌ای. فرض کنیم $c: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ و $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. همچنین، $h(t) = f(c(t)) = f(x(t), y(t), z(t))$ که در آن $c(t) = (x(t), y(t), z(t))$ در این صورت،

$$\frac{dh}{dt} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{dz}{dt}$$

یعنی،

$$\frac{dh}{dt} = \nabla f(c(t)) \cdot c'(t)$$

که در آن $c'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$.

این در واقع حالت خاص قضیهٔ ۱۱ است، که در آن $c = g$ ، f حقیقی است، و

$m = 3$. توجه کنید که

$$\nabla f(c(t)) \cdot c'(t) = Df(c(t))Dc(t)$$

که در آن $Df(c(t))$ را یک ماتریس سطری و $Dc(t)$ را یک ماتریس ستونی می‌گیریم. بردارهای $\nabla f(c(t))$ و $c'(t)$ همان مؤلفه‌های ماتریسهای هم‌ارز آنها را دارند؛ تغییر نماد تغییر از ماتریسها به بردارها را نشان می‌دهد. نمودارهای زیر ممکن است خواننده را در درک این رابطه یاری نمایند:

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{c} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{f} & \mathbb{R} \\ & \searrow & & \searrow & \\ & & & & f \circ c \end{array} \qquad \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \xrightarrow{Dc} & \mathbb{R}^3 & \xrightarrow{Df} & \mathbb{R} \\ & \searrow & & \searrow & \\ & & & & D(f \circ c) = Df \cdot Dc \end{array}$$

برهان معادله (۲). طبق تعریف،

$$\frac{dh}{dt}(t_0) = \lim_{t \rightarrow t_0} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0}$$

می‌نویسیم

$$\begin{aligned} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} &= \frac{f(x(t), y(t), z(t)) - f(x(t_0), y(t_0), z(t_0))}{t - t_0} \\ &= \frac{f(x(t), y(t), z(t)) - f(x(t_0), y(t), z(t))}{t - t_0} \\ &\quad + \frac{f(x(t_0), y(t), z(t)) - f(x(t_0), y(t_0), z(t))}{t - t_0} \\ &\quad + \frac{f(x(t_0), y(t_0), z(t)) - f(x(t_0), y(t_0), z(t_0))}{t - t_0} \end{aligned}$$

حال از قضیه مقدار میانگین در حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره کمک می‌گیریم که می‌گوید: هرگاه $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ بر بازه $[a, b]$ پیوسته و مشتق‌پذیر باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند c در $[a, b]$ وجود دارد به طوری که $g(b) - g(a) = g'(c)(b - a)$. لذا، با اعمال قضیه مقدار میانگین بر f به عنوان تابعی از x ، می‌توان گفت که به ازای c ای بین x و x_0 ،

$$f(x, y, z) - f(x_0, y, z) = \frac{\partial f}{\partial x}(c, y, z)(x - x_0)$$

بدین ترتیب، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} \frac{h(t) - h(t_0)}{t - t_0} &= \frac{\partial f}{\partial x}(c, y(t), z(t)) \frac{x(t) - x(t_0)}{t - t_0} \\ &+ \frac{\partial f}{\partial y}(x(t), d, z(t)) \frac{y(t) - y(t_0)}{t - t_0} \\ &+ \frac{\partial f}{\partial z}(x(t), y(t), e) \frac{z(t) - z(t_0)}{t - t_0} \end{aligned}$$

که در آن $c : d : e$ و به ترتیب بین $x(t), x(t_0) ; y(t), y(t_0) ; z(t), z(t_0)$ واقعند. با گرفتن حد وقتی $t \rightarrow t_0$ و استفاده از مشتقات جزئی $\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z}$ و این امر که c, d, e و به ترتیب به $x(t_0), y(t_0), z(t_0)$ همگرایند، فرمول (۲) به دست می‌آید.

دومین حالت خاص قاعده زنجیره‌ای. فرض کنیم $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ می‌نویسیم $g(x, y, z) = (u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z))$ و فرض می‌کنیم $h(x, y, z) = f(g(x, y, z))$ در این صورت،

$$(3) \quad \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} & \frac{\partial h}{\partial z} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial u} & \frac{\partial f}{\partial v} & \frac{\partial f}{\partial w} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} & \frac{\partial u}{\partial z} \\ \frac{\partial v}{\partial x} & \frac{\partial v}{\partial y} & \frac{\partial v}{\partial z} \\ \frac{\partial w}{\partial x} & \frac{\partial w}{\partial y} & \frac{\partial w}{\partial z} \end{bmatrix}$$

در این حالت برای درستی اختیار کرده‌ایم $n = m = 3$ و $p = 1$ ، برای سادگی فرض کرده‌ایم $U = \mathbb{R}^3$ و $V = \mathbb{R}^3$ ، و حاصل ضرب ماتریسی $Df(y_0) \cdot Dg(x_0)$ را باز نوشته‌ایم (در ماتریسها شناسه‌های x_0 و y_0 حذف شده‌اند).

برهان دومین حالت خاص قاعده زنجیره‌ای. طبق تعریف، با مشتقگیری از h نسبت به x ، ضمن ثابت گرفتن y و z ، به دست می‌آید. اما، در این صورت، $v(x, y, z), w(x, y, z)$ را می‌توان یک تابع برداری از تنها متغیر x گرفت. اولین حالت خاص

در این وضع به کار می‌رود و، پس نامگذاری مجدد متغیرها، نتیجه می‌دهد که

$$(۳') \quad \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x}$$

به همین نحو،

$$(۳'') \quad \frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial y}$$

و

$$(۳''') \quad \frac{\partial h}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial z}.$$

این معادلات دقیقاً "همانهایی است که پس از ضرب ماتریسها در (۳) به دست می‌آیند.

برهان قضیه ۱۱. حالت کلی معادله (۱) را می‌توان با (\bar{T}) تعمیم معادله (۲) به m متغیر؛ یعنی، به ازای $f(x_1, \dots, x_m)$ و $\mathbf{c}(t) = (x_1(t), \dots, x_m(t))$ داریم

$$\frac{dh}{dt} = \sum_{i=1}^m \frac{\partial f}{\partial x_i} \frac{dx_i}{dt}$$

که در آن $h(t) = f(x_1(t), \dots, x_m(t))$ ؛ و (ب) اعمال (\bar{T}) برای به دست آوردن فرمول

$$\frac{\partial h_j}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^m \frac{\partial f_j}{\partial y_k} \frac{\partial y_k}{\partial x_i}$$

که در آن $f = (f_1, \dots, f_p)$ تابعی برداری از شناسه‌های y_1, \dots, y_m ، $g(x_1, \dots, x_n)$ ، $h_j(x_1, \dots, x_n) = f_j(y_1(x_1, \dots, x_n), \dots, y_m(x_1, \dots, x_n))$ ، و $y_m(x_1, \dots, x_n)$ است، شایست کرد. (استفاده از حرف y هم برای توابع و هم شناسه‌ها سوء استعمال از نماد است، ولی در به خاطر آوردن فرمول کمک خواهد بود.)

این فرمول با فرمول (۱) پس از ضرب ماتریسها معادل است.

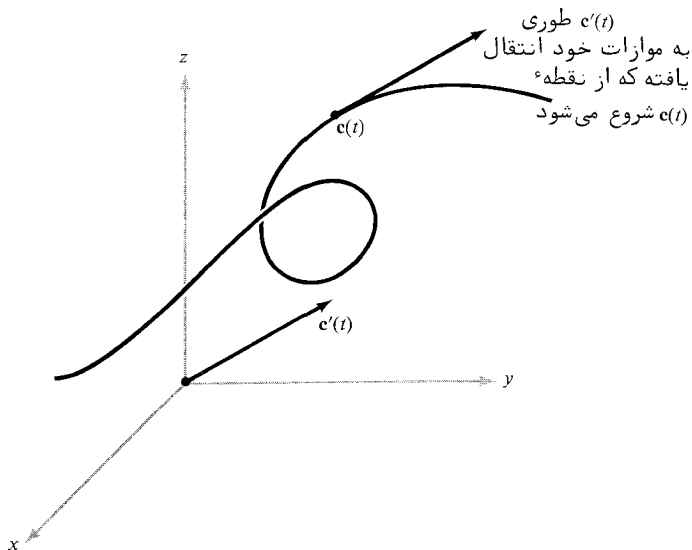
چون برهان مراحل (یک) و (ب) خیلی شبیه آنهایی است که هم‌اکنون مطرح شدند، می‌توان جزئیات را حذف کرد. این امر برهان فرمول (۱)، و در نتیجه قضیه ۱۱، را تمام خواهد کرد.

دانشجو با حل چند مثال دیگر طرح روشنی از قاعده زنجیره‌ای خواهد یافت. مثلاً،

$$\frac{\partial}{\partial x} f(u(x, y), v(x, y), w(x, y), z(x, y)) = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

با فرمول مشابهی برای $\partial f / \partial y$.

نگاشت c در اولین حالت خاص قاعدهٔ زنجیره‌ای نمایش یک منحنی است (شکل ۱۰۴۰۲) و $c'(t)$ را می‌توان یک بردار مماس (با بردار سرعت) منحنی تصور کرد. با آنکه



شکل ۱۰۴۰۲

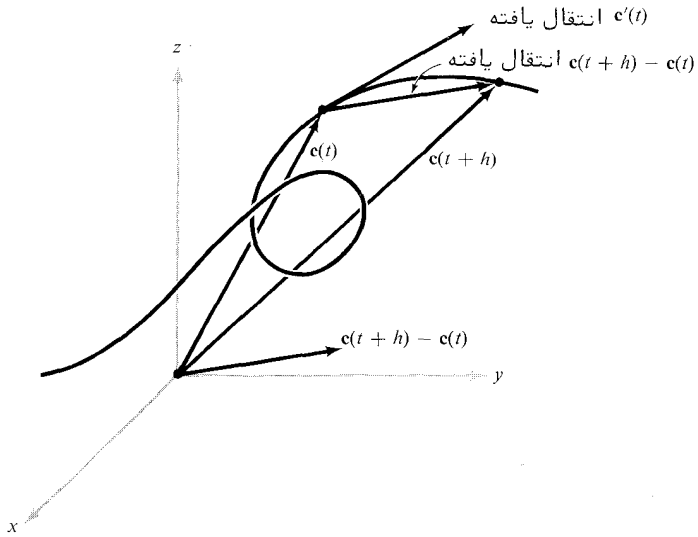
بردار $c'(t)$ نمایش بردار مماس (یا بردار سرعت)

منحنی $c(t)$ است.

این ایده با شرح بیشتر در فصل ۳ مطرح می‌شود، در اینجا می‌توان دلیل این تعبیر را ذکر کرد. با استفاده از تعریف مشتق تابع یک متغیره، می‌بینیم که

$$c'(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(t+h) - c(t)}{h}$$

این کسر نمایش وتری است که بردار مماس را وقتی $h \rightarrow 0$ تقریب می‌کند (ر. ک. شکل



شکل ۲.۴.۲

هندسه^۶ مربوط به فرمول

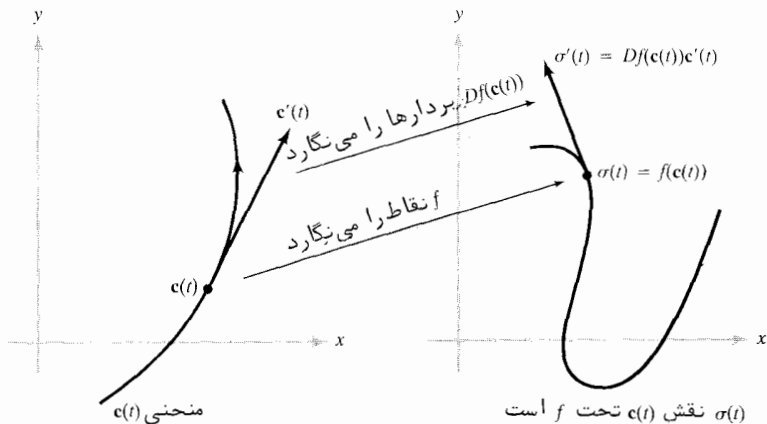
$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{c(t+h) - c(t)}{h} = c'(t).$$

قاعده^۶ زنجیره‌ای می‌تواند در درک رابطه^۶ بین هندسه^۶ نگاشت $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ و هندسه^۶ منحنیها در \mathbb{R}^2 کمک کند (می‌توان احکام مشابهی در باب \mathbb{R}^3 یا ، به‌طور کلی ، در باب \mathbb{R}^n بیان کرد). هرگاه $c(t)$ یک منحنی در صفحه باشد ، آنگاه $c'(t)$ بردار مماس (یا سرعت) منحنی $c(t)$ را نمایش می‌دهد و ، همانطور که شکل ۱.۴.۲ نشان داده ، نقطه^۶ شروع این بردار مماس (یا سرعت) را می‌توان $c(t)$ گرفت حال فرض کنیم $\sigma(t) = f(c(t))$ ، که در آن $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$. منحنی σ نمایش نقش منحنی $c(t)$ تحت نگاشت f است . بردار مماس بر σ با قاعده^۶ زنجیره‌ای داده می‌شود :

ضرب نقطه‌ای ضرب ماتریسی

$$\sigma'(t) = \underbrace{\nabla f(c(t))}_{\text{ماتریس بردار سطری}} \cdot \underbrace{c'(t)}_{\text{ماتریس بردار ستونی}} = \underbrace{Df(c(t))}_{\text{ماتریس بردار سطری}} \underbrace{Dc(t)}_{\text{ماتریس بردار ستونی}}$$

به عبارت دیگر، ماتریس مشتق f بردار مماس (یا سرعت) یک منحنی را به بردار مماس (یا سرعت) منحنی نقش نظیر می‌نگارد (ر.ک. شکل ۳.۴.۲). لذا، نقاط به وسیله f نگاشته می‌شوند، ولی بردارهای مماس بر منحنیها به وسیله مشتق f ، که در نقطه پایه



شکل ۳.۴.۲

بردارهای مماس به وسیله ماتریس مشتق نگاشته می‌شوند.

بردار مماس در قلمرو حساب شده، نگاشته می‌شوند.

مثال ۲. بردار مماس بر منحنی $c(t) = (t, t^2, e^t)$ در $t = 0$ را حساب کنید.

در اینجا $c'(t) = (1, 2t, e^t)$ ؛ در نتیجه، در $t = 0$ ، بردار مماس عبارت است از $(1, 0, 1)$.

مثال ۳. قاعده زنجیره‌ای به شکل فرمول (۳') را برای

$$f(u, v, w) = u^2 + v^2 - w$$

$$u(x, y, z) = x^2y$$

$$v(x, y, z) = y^2$$

$$w(x, y, z) = e^{-xz}$$

تحقیق نمایید .

در اینجا

$$\begin{aligned} h(x, y, z) &= f(u(x, y, z), v(x, y, z), w(x, y, z)) \\ &= (x^2y)^2 + y^4 - e^{-xz} \\ &= x^4y^2 + y^4 - e^{-xz} \end{aligned}$$

لذا، اگر مستقیماً " مشتق بگیریم "،

$$\frac{\partial h}{\partial x} = 4x^3y^2 + ze^{-xz}$$

از آن سو، با استفاده از قاعده زنجیره‌ای،

$$\begin{aligned} \frac{\partial h}{\partial x} &= \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} = 2u(2xy) + 2v \cdot 0 + ze^{-xz} \\ &= (2x^2y)(2xy) + ze^{-xz} \end{aligned}$$

که همان نتیجه فوق است .

مثال ۰۴. به فرض آنکه $g(x, y) = (x^2 + 1, y^2)$ و $f(u, v) = (u + v, u, v^2)$ مشتق $f \circ g$ را در $(1, 1)$ با استفاده از قاعده زنجیره‌ای حساب کنید . در واقع،

$$Dg(x, y) = \begin{bmatrix} 2x & 0 \\ 0 & 2y \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad Df(u, v) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial u} & \frac{\partial f_1}{\partial v} \\ \frac{\partial f_2}{\partial u} & \frac{\partial f_2}{\partial v} \\ \frac{\partial f_3}{\partial u} & \frac{\partial f_3}{\partial v} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2v \end{bmatrix}$$

وقتی $(x, y) = (1, 1)$ ، $g(x, y) = (u, v) = (2, 1)$. از اینرو،

$$D(f \circ g)(1, 1) = Df(2, 1)Dg(1, 1) = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

مشتق مطلوب می‌باشد .

مثال ۵. فرض کنید $f(x, y)$ داده شده باشد و جانشانی $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ (مختصات قطبی) را انجام داده، فرمولی برای $\partial f / \partial \theta$ بنویسید. بنا بر قاعده زنجیره‌ای،

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial \theta} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial \theta}$$

یعنی،

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

که فرمول مطلوب می‌باشد.

اختیاری

مثال ۶. فرض کنید $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ مشتقپذیر بوده، $g(x) = \sin(f(x) \cdot f(x))$ و $f = (f_1, \dots, f_m)$ را حساب کنید.

بنا بر قاعده زنجیره‌ای، $Dg(x) = \cos(f(x) \cdot f(x)) Dh(x)$ ، که در آن $h(x) = (f \cdot f)(x) = f_1^2(x) + \dots + f_m^2(x)$ در این صورت،

$$\begin{aligned} Dh(x) &= \left[\frac{\partial h}{\partial x_1} \quad \dots \quad \frac{\partial h}{\partial x_n} \right] \\ &= \left[2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_1} + \dots + 2f_m \frac{\partial f_m}{\partial x_1} \quad \dots \quad 2f_1 \frac{\partial f_1}{\partial x_n} + \dots + 2f_m \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \right] \end{aligned}$$

که می‌توان آن را به صورت $2f(x)Df(x)$ نوشت، که در آن f ماتریس سطری

$$Df = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix} \quad f = [f_1 \quad \dots \quad f_m]$$

گرفته می‌شود و

لذا، $Dg(x) = 2(\cos(f(x) \cdot f(x)))f(x)Df(x)$

تمرینات

۱. اگر $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ مشتقپذیر باشد، ثابت کنید $x \mapsto f^2(x) + 2f(x)$ نیز مشتقپذیر

است، و مشتقش را برحسب $Df(x)$ حساب کنید.

۲. ثابت کنید توابع زیر مشتقپذیرند، و مشتقات آنها را در یک نقطه دلخواه بیابید.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2 \quad (\text{آ})$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x + y \quad (\text{ب})$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto 2 + x + y \quad (\text{پ})$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2 \quad (\text{ت})$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto e^{xy} \quad (\text{ث})$$

$$f: U \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto \sqrt{1 - x^2 - y^2}, U = \{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\} \quad (\text{ج})$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^4 - y^4 \quad (\text{چ})$$

۳. قاعده زنجیره‌ای را برای هر یک از توابع زیر بنویسید.

$$h(x, y) = f(x, u(x, y)) \quad \text{که در آن } \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{آ})$$

$$h(x) = f(x, u(x), v(x)) \quad \text{که در آن } \frac{dh}{dx} \quad (\text{ب})$$

$$h(x, y, z) = f(u(x, y, z), v(x, y), w(x)) \quad \text{که در آن } \frac{\partial h}{\partial x} \quad (\text{پ})$$

حال، با استفاده از قضیه ۱۱، جواب خود را در هر حالت امتحان کنید.

۴. قاعده زنجیره‌ای را برای $\partial h / \partial x$ در صورتی تحقیق کنید که $h(x, y) = f(u(x, y), v(x, y))$

و

$$f(u, v) = \frac{u^2 + v^2}{u^2 - v^2}, \quad u(x, y) = e^{-x-y}, \quad v(x, y) = e^{xy}$$

۵. در هر یک از حالات زیر، اولین حالت خاص قاعده زنجیره‌ای را برای ترکیب $f \circ c$

تحقیق نمایید.

$$f(x, y) = xy, c(t) = (e^t, \cos t) \quad (\text{آ})$$

$$f(x, y) = x \exp(x^2 + y^2), c(t) = (t, -t) \quad (\text{ب})$$

$$f(x, y) = (x^2 + y^2) \log \sqrt{x^2 + y^2}, c(t) = (e^t, e^{-t}) \quad (\text{پ})$$

$$f(x, y) = e^{xy}, c(t) = (3t^2, t^3) \quad (\text{ت})$$

۶. بردار سرعت هر منحنی $c(t)$ در تمرین ۵ چیست؟

۷. فرض کنید $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ مشتقپذیر باشند. ثابت کنید

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f$$

۸. فرض کنید $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ مشتقپذیر باشد. با جانشانی

$$x = r \cos \theta \sin \phi, \quad y = r \sin \theta \sin \phi, \quad z = r \cos \phi$$

در $f(x, y, z)$ (مختصات کروی) $\partial f / \partial r$ ، $\partial f / \partial \theta$ ، و $\partial f / \partial \phi$ را حساب کنید.

*۹. این تمرین مثال دیگری است از این وضع که اگر f مشتقپذیر نباشد، قاعده زنجیره‌ای قابل اعمال نیست. تابع

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

را در نظر گرفته، نشان دهید که

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) \right) \text{ و } \left(\frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) \right) \text{ موجودند؛}$$

(ب) هرگاه $\mathbf{g}(t) = (at, bt)$ ، آنگاه $f \circ \mathbf{g}$ مشتقپذیر بوده و $(f \circ \mathbf{g})'(0) = ab^2/(a^2 + b^2)$

$$\text{ولی } \nabla f(0, 0) \cdot \mathbf{g}'(0) = 0$$

۱۰. $(\partial/\partial s)(f \circ T)(0, 0)$ را در صورتی بیابید که $f(u, v) = \cos u \sin v$ و $T(s, t) = (\cos t^2 s, \log \sqrt{1 + s^2})$

۱۱. (آ) فرض کنید $y(x)$ به طور ضمنی با $G(x, y(x)) = 0$ تعریف شده باشد، که در آن G

تابع معلومی از دو متغیر است. ثابت کنید هرگاه $y(x)$ و G مشتقپذیر باشند، آنگاه

$$\text{اگر } \frac{\partial G}{\partial y} \neq 0 \text{، } \frac{dy}{dx} = -\frac{\partial G / \partial x}{\partial G / \partial y}$$

(ب) فرمولی شبیه فرمول مذکور در قسمت (آ) را در صورتی بیابید که y_1, y_2 به طور

ضمنی با

$$G_1(x, y_1(x), y_2(x)) = 0$$

$$G_2(x, y_1(x), y_2(x)) = 0$$

تعریف شده باشند.

(پ) فرض کنید y به طور ضمنی با

$$x^2 + y^3 + e^y = 0$$

تعریف شده باشد. dy/dx را بر حسب x و y محاسبه کنید.

۱۲. فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ نگاشتی خطی باشد؛ در نتیجه، بنابر تمرین ۱۲، بخش ۳.۲، $Df(x)$ ماتریس f است. برقراری قاعده زنجیره‌ای را مستقیماً برای نگاشتهای خطی تحقیق کنید.

*۱۳. ثابت کنید که اگر $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ در $x_0 \in U$ مشتقپذیر باشد، همسایگی مانند V از \mathbb{R}^n و $0 \in \mathbb{R}$ تابعی چون $R_1: V \rightarrow \mathbb{R}$ وجود دارند به طوری که به ازای هر $h \in V$ ، $x_0 + h \in U$

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Df(x_0) \cdot h + R_1(h)$$

و

$$R_1(h)/\|h\| \rightarrow 0 \quad \text{وقتی} \quad h \rightarrow 0$$

*۱۴. به ازای چه اعداد صحیح $p > 0$

$$f(x) = \begin{cases} x^p \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

مشتقپذیر است؟ به ازای چه p ای مشتق پیوسته می‌باشد؟

*۱۵. قسمتهای (سه) و (چهار) قضیه ۱۵ را ثابت کنید. (راهنمایی. از طرفندهای جمع و تفریق مثل حالت یک متغیره و قضیه ۸ استفاده نمایید.)

۱۶. فرض کنید $f(x, y) = 1/\sqrt{x^2 + y^2}$. $\nabla f(x, y)$ را محاسبه کنید. جهت این بردار چیست؟

۱۷. معادله وضعیت دیتری^۱ برای یک گاز عبارت است از

$$P(V - b)e^{a/RVT} = RT$$

که در آن a ، b ، و R ثابت‌اند. حجم V را تابعی از دمای T و فشار P گرفته‌و ثابت کنید.

$$\frac{\partial V}{\partial T} = \left(R + \frac{a}{TV} \right) \left/ \left(\frac{RT}{V - b} - \frac{a}{V^2} \right) \right.$$

۱۸. در کتب ترمودینامیک^۱ از رابطه

$$\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)\left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)\left(\frac{\partial x}{\partial z}\right) = -1$$

استفاده می‌شود. معنی این معادله را توضیح داده و صحت آن را اثبات نمایید.

(راهنمایی. با رابطه‌ای چون $F(x, y, z) = 0$ شروع کنید که $x = f(y, z)$ ، $y = g(x, z)$ ، و

$z = h(x, y)$ را تعریف می‌کند و به‌طور ضمنی مشتق بگیرید.)

۱۹. فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$; $(x, y) \mapsto (e^{x+y}, e^{x-y})$. همچنین، $c(t)$ یک منحنی باشد که

$c(0) = (0, 0)$ و $c'(0) = (1, 1)$. بردار مماس بر نقش $c(t)$ تحت f در $t = 0$ چیست؟

* ۲۰. فرض کنید $x_0 \in \mathbb{R}^n$ و $0 \leq r_1 < r_2$. نشان دهید که یک تابع C^1 مانند $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

وجود دارد به طوری که به ازای $\|x - x_0\| \geq r_2$ ، $f(x) = 0$ ؛ به ازای $r_1 < \|x - x_0\| < r_2$

، $0 < f(x) < 1$ ؛ و به ازای $\|x - x_0\| \leq r_1$ ، $f(x) = 1$.

(راهنمایی. یک چندجمله‌ای مکعبی با خاصیت $g(r_1^2) = 1$ و $g(r_2^2) = g(r_1^2) = g(r_1^2) = 0$ را در نظر بگیرید.)

بر $\|x - x_0\|^2$ وقتی $r_1 < \|x - x_0\| < r_2$ ، اعمال نمایید.)

* ۲۱. نگاشتی C^1 مانند $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ بیابید که بردار $i + j + k$ با نقطه شروع مبدأ را

به بردار $i - j - k$ با نقطه شروع $(1, 1, 0)$ و بردار k با نقطه شروع $(1, 1, 0)$ را به بردار

$i - k$ با نقطه شروع مبدأ ببرد.

۲۲. چه ایرادی بر استدلال زیر وارد است؟ فرض کنید $w = f(x, y, z)$ و $z = g(x, y)$. بنا

بر قاعده زنجیره‌ای،

$$\frac{\partial w}{\partial x} = \frac{\partial w}{\partial x} + \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

از اینرو،

۱. ر. ک.

S. M. Binder, "Mathematical Methods in Elementary Thermodynamics," *J. Chem. Educ.* 43

(1966): 85-92.

درک کامل مشتقگیری جزئی استفاده زیادی در کاربردها دارد. مثلاً، ر. ک.

M. Feinberg, "Constitutive equation for ideal gas mixtures and ideal solutions as consequences of simple postulates" *Chem. Eng. Sci.* 32 (1977): 75-78.

$$0 = \frac{\partial w}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

در نتیجه، $\frac{\partial w}{\partial z} = 0$ یا $\frac{\partial z}{\partial x} = 0$ ، که در حالت کلی بی معنی است.

۲۳. فرض کنید $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ مشتقپذیر باشند. نشان دهید که تابع حاصل ضرب $h(x) = f(x)g(x)$ از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^m مشتقپذیر بوده و هرگاه x_0 و y در \mathbb{R}^n باشند، آنگاه

$$(Dh(x_0))(y) = f(x_0)Dg(x_0)(y) + (Df(x_0))(y) \cdot g(x_0)$$

*۲۴. نشان دهید که $h: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ مشتقپذیر است اگر و فقط اگر هر یک از m تابع مؤلفه $h_i: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ مشتقپذیر باشد. (راهنمایی. برای یک طرف استدلال از تابع تصویر مختصات و قاعده زنجیره‌ای استفاده کنید و، برای طرف دیگر، $\|h(x) - h(x_0) - Dh(x_0)(x - x_0)\| / \|x - x_0\|^2 = \sum_{i=1}^m (h_i(x) - h_i(x_0) - Dh_i(x_0)(x - x_0))^2 / \|x - x_0\|^2$ را در نظر بگیرید.)

۵.۲ گرادیانها و مشتقات جهتی

در بخش ۱.۲ نمودار توابع حقیقی را مطالعه کردیم. حال، با استفاده از روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال، مجدداً به این امر می‌پردازیم. ما، با استفاده از گرادیانها، فرمولی برای صفحه مماس بر یک سطح تراز به دست می‌آوریم. بحث را با یادآوری تعریف گرادیان آغاز می‌کنیم.

تعریف. اگر $f: U \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ مشتقپذیر باشد، گرادیان f در (x, y, z) برداری در فضای \mathbb{R}^3 است که با

$$\text{grad } f = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right)$$

داده می‌شود. این بردار با ∇f یا $\nabla f(x, y, z)$ نیز نموده می‌شود. لذا، ∇f چیزی جز ماتریس مشتق Df نیست که به صورت بردار نوشته شده است.

مثال. فرض کنیم $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = r$ ، یعنی فاصله از 0 تا (x, y, z) .

در این صورت،

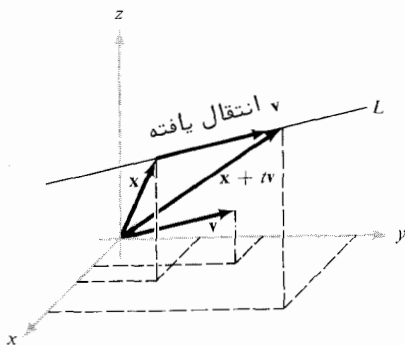
$$\begin{aligned} \nabla f(x, y, z) &= \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) \\ &= \left(\frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}, \frac{z}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r} \end{aligned}$$

که در آن \mathbf{r} نقطه (x, y, z) است. لذا، ∇f برداریکه در جهت (x, y, z) می باشد.

مثال ۲. هرگاه $f(x, y, z) = xy + z$ ، آنگاه

$$\nabla f(x, y, z) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y}, \frac{\partial f}{\partial z} \right) = (y, x, 1)$$

فرض کنیم $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی باشد. همچنین، \mathbf{v} و $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^3$ بردارهای ثابتی بوده و تابعی از \mathbb{R} به \mathbb{R} در نظر می گیریم که با $t \mapsto f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$ تعریف شده باشد. مجموعه نقاط به شکل $\mathbf{x} + t\mathbf{v}$ ، $t \in \mathbb{R}$ ، خط L است که از نقطه \mathbf{x} به موازات بردار \mathbf{v} می گذرد (ر.ک. شکل ۱۰۵.۲). بنابراین، تابع $t \mapsto f(\mathbf{x} + t\mathbf{v})$ نمایش تابع f است که به خط L محدود شده است. می توان پرسید: سرعت تغییر مقادیر f در امتداد L در نقطه



شکل ۱۰۵.۲

معادله L عبارت است از $\mathbf{l}(t) = \mathbf{x} + t\mathbf{v}$.

x چقدر است؟ چون میزان تغییر یک تابع با مشتق داده می‌شود، می‌توان گفت که جواب مقدار مشتق این تابع در $t = 0$ است (وقتی $t = 0$ ، $x + tv$ به x تحویل می‌شود). این مشتق f در x در جهت L ، یعنی در جهت v ، می‌باشد. این مفهوم را می‌توان به قرار زیر تنظیم نمود.

تعریف. اگر $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ، مشتق جهتی f در x در جهت برداریکه v با عبارت

$$\left. \frac{d}{dt} f(x + tv) \right|_{t=0}$$

در صورت وجود، تعریف می‌شود.

از تعریف می‌توان دید که مشتق جهتی را می‌توان با فرمول زیر نیز تعریف کرد:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(x + hv) - f(x)}{h}$$

قضیه ۱۲. هرگاه $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ مشتقپذیر باشد، آنگاه تمام مشتقات جهتی وجود دارند. مشتق جهتی در x و در جهت v عبارت است از

$$\begin{aligned} Df(x)v &= \text{grad } f(x) \cdot v = \nabla f(x) \cdot v \\ &= \frac{\partial f}{\partial x}(x)v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(x)v_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(x)v_3 \end{aligned}$$

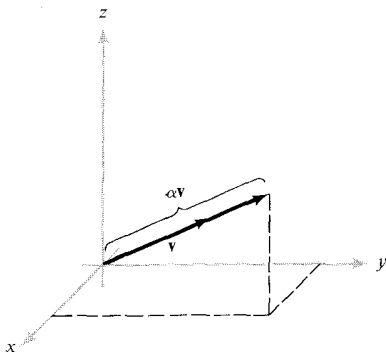
که در آن $\|v\| = 1$ و $v = (v_1, v_2, v_3)$.

برهان. فرض کنیم $c(t) = x + tv$ ؛ در نتیجه، $f(x + tv) = f(c(t))$. بنابر اولین حالت خاص قاعده زنجیره‌ای، $(d/dt)f(c(t)) = \nabla f(c(t)) \cdot c'(t)$. اما $c(0) = x$ و $c'(0) = v$ ؛ در نتیجه، همانطور که حکم شده،

$$\left. \frac{d}{dt} f(x + tv) \right|_{t=0} = \nabla f(x) \cdot v$$

لازم است توضیح دهیم که چرا در تعریف مشتق جهتی v برداریکه است. دو دلیل برای این کار وجود دارد. پیش از همه، اگر α عدد حقیقی مثبتی باشد، αv برداری است همجهت v ولی ممکن است بلندتر (اگر $\alpha > 1$) یا کوتاهتر (اگر $\alpha < 1$) از v باشد (ر.ک. شکل ۲۰.۵.۲). بنابراین قضیه ۱۲، مشتق جهتی f در جهت v عبارت است از

$$\nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v} = \frac{\partial f}{\partial x}(\mathbf{x})v_1 + \frac{\partial f}{\partial y}(\mathbf{x})v_2 + \frac{\partial f}{\partial z}(\mathbf{x})v_3$$



شکل ۲۰.۵.۲

ضرب بردار v در اسکالر α طول v را تغییر می دهد.

مشتق f "در جهت" αv عبارت است از $\langle \nabla f(\mathbf{x}), \alpha v \rangle = \alpha \langle \nabla f(\mathbf{x}), v \rangle$ ، که α برابر مشتق جهتی در جهت v بوده. و لذا، مساوی آن نمی باشد. در نتیجه، مشتق جهتی، اگر به ازای هر αv تعریف شده باشد، فقط وابسته به نقطه x و یک جهت نیست. برای حل این مسئله باید بردار v طولی متعارف، یعنی ۱، داشته باشد. در این صورت، بردار v جهتی را معین می کند، همان جهت معین شده به وسیله αv ، اگر $\alpha > 0$ ، ولی در اینجا مشتق جهتی به طور منحصر به فرد با $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot v$ تعریف می شود.

ثانیا، می توان $\nabla f(\mathbf{x}) \cdot v$ را میزان تغییر f در جهت v تعبیر کرد، زیرا وقتی $\|v\| = 1$ ، نقطه $x + tv$ با افزایش t به اندازه s به اندازه s حرکت می کند. در نتیجه، بر خط L در شکل ۱۰.۵.۲ مقیاسی اختیار کرده ایم.

با استفاده از قضیه ۱۲، به آسانی می توان مشتق جهتی را برحسب مشتقات جزئی

حساب کرد .

مثال ۳. فرض کنید $f(x, y, z) = x^2e^{-yz}$. میزان تغییر f را در جهت

$$\mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \text{ در } (1, 0, 0)$$

حساب کنید (توجه کنید که $\|\mathbf{v}\| = 1$)

میزان تغییر مطلوب عبارت است از

$$\text{grad } f \cdot \mathbf{v} = (2xe^{-yz}, -x^2ze^{-yz}, -x^2ye^{-yz}) \cdot (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$$

که در $(1, 0, 0)$ خواهد شد

$$(2, 0, 0) \cdot (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) = 2/\sqrt{3}$$

از قضیه ۱۲ می توان تعبیر هندسی گرادیان را نیز به دست آورد :

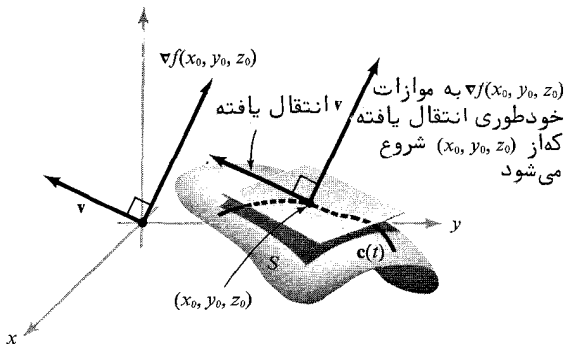
قضیه ۱۳. فرض کنیم $\text{grad } f(\mathbf{x}) \neq \mathbf{0}$. در این صورت ، $\text{grad } f(\mathbf{x})$ در جهتی است که f در آن بیشترین افزایش را دارد .

برهان . اگر \mathbf{n} یک بردار یکه باشد ، میزان تغییر f در جهت \mathbf{n} مساوی است با $\text{grad } f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{n}$. $\|\text{grad } f(\mathbf{x})\| \cos \theta$ ، که در آن θ زاویه بین \mathbf{n} و $\text{grad } f(\mathbf{x})$ می باشد . این وقتی ماکزیمم است که $\theta = 0$ ؛ یعنی ، وقتی \mathbf{n} و $\text{grad } f$ موازی باشند . (اگر $\text{grad } f(\mathbf{x}) = \mathbf{0}$ ، این میزان تغییر به ازای هر \mathbf{n} مساوی ۰ است .)

به عبارت دیگر ، اگر بخواهیم در جهتی حرکت کنیم که f بیشترین افزایش را دارد ، حرکت ما باید در جهت $\nabla f(\mathbf{x})$ باشد . این ایده را بعداز مثال ۴ به طور کاملتر مطرح خواهیم کرد .

حال می توان رابطه گرادیان تابع f را با سطوح تراز f پیدا کرد . گرادیان در جهتی است که مقادیر f بیشترین تغییر را دارند درحالی که یک سطح تراز در جهاتی قرار دارد که این مقادیر اصلاً تغییر نمی کنند . اگر f تا حدی خوش رفتار باشد ، گرادیان و سطح تراز برهم عمود خواهند بود .

قضیه ۱۴. فرض کنیم $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ یک نگاشت C^1 بوده و (x_0, y_0, z_0) بر سطح تراز S تعریف شده با $f(x, y, z) = k$ ، به ازای k ای ثابت ، قرار داشته باشد . در این صورت ، $\text{grad } f(x_0, y_0, z_0)$ به مفهوم زیر بر سطح تراز عمود است : هرگاه \mathbf{v} بردار مماس در $t = 0$ بر مسیر $\mathbf{c}(t)$ در S که $\mathbf{c}(0) = (x_0, y_0, z_0)$ باشد ، آنگاه $\text{grad } f \cdot \mathbf{v} = 0$ (ر.ک. شکل ۳۰۵۰۲).



شکل ۳۰۵۰۲

تعبیر هندسی گرادیان ∇f بر سطح S که f بر آن ثابت است عمود می‌باشد .

برهان . فرض کنیم $\mathbf{c}(t)$ در S واقع باشد ؛ پس $f(\mathbf{c}(t)) = k$. فرض کنیم \mathbf{v} طبق فرض باشد ؛ در این صورت ، $\mathbf{v} = \mathbf{c}'(0)$. از اینرو ،

$$\left. \frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t)) \right|_{t=0} = 0$$

بنابر قاعده زنجیره‌ای ، خواهیم داشت $\frac{d}{dt} f(\mathbf{c}(t)) = Df(x_0, y_0, z_0) \mathbf{v} = 0$ ؛ یعنی ،

$$\nabla f \cdot \mathbf{v} = 0$$

اگر قضیه ۱۴ را بررسی کنیم ، می‌بینیم که تعریف صفحه مماس بر S به صورت زیر نامعقول است .

تعریف. فرض کنیم سطح S مرکب از نقاطی چون (x, y, z) باشد که، به ازای ثابتی مانند k
 $f(x, y, z) = k$. صفحه مماس S در نقطه (x_0, y_0, z_0) از S با معادله

$$(1) \quad \nabla f(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0) = 0$$

تعریف می شود اگر $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ، یعنی، صفحه مماس مجموعه نقاطی چون (x, y, z) است که در (۱) صدق می کند.

این تعمیمی است از تعریفی که قبلاً " برای صفحه مماس نمودار یک تابع داده شد
 (ر. ک. تمرین ۷ در ص ۱۷۱).^۱

در قضیه ۱۴ و تعریف فوق می توانستیم به جای بعد سه در بعد دو باشیم. لذا،
 هرگاه داشته باشیم $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ و سطح تراز

$$C = \{(x, y) | f(x, y) = k\}$$

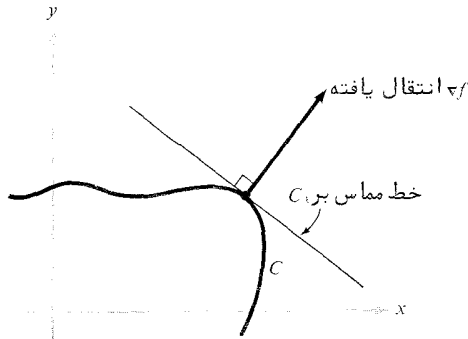
را داشته باشیم، آنگاه، به ازای هر نقطه (x_0, y_0) بر C ، $\nabla f(x_0, y_0)$ بر C عمود است.
 به همین نحو، خط مماس بر C در (x_0, y_0) به معادله

$$(2) \quad \nabla f(x_0, y_0) \cdot (x - x_0, y - y_0) = 0$$

است اگر $\nabla f(x_0, y_0) \neq 0$ ؛ یعنی، خط مماس مجموعه نقاطی چون (x, y) است که در
 معادله (۲) صدق می کنند (ر. ک. شکل ۴.۵.۲).

مثال ۴. معادله صفحه مماس بر سطح تعریف شده با $3xy + z^2 = 4$ در $(1, 1, 1)$ را

۱. در اینجا ممکن است خواننده تعریف مشخصی از سطح را طالب باشد. تا اینجا اصطلاح
 " سطح " به دو طریق به کار رفته است: یکی به عنوان نمودار یک تابع دو متغیره، و
 دیگری به عنوان سطح تراز یک تابع حقیقی سه متغیره. همچنین، صفحات مماس بر این
 سطوح را نیز تعریف کرده ایم. در بخش ۳.۶ سطوح پارامتری شده را مطرح خواهیم کرد.
 این تعاریف مختلف در نگاه اول متفاوت می نمایند. اما در بخش ۴.۴ نشان می دهد که
 یک مفهوم اصلی وجود دارد که این مفاهیم را متحد می سازد و آن این است که سطوح
 " موضعا " نمودار توابع می باشند. لذا، نشان می دهیم که سطح تراز S در قضیه ۱۴
 نمودار تابعی دو متغیره در همسایگی نقطه (x_0, y_0, z_0) است که $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ؛ به
 علاوه، نشان می دهیم که دو تعریف صفحه مماس یکی می باشند.



شکل ۴.۵.۲

در صفحه گرادیان ∇f بر منحنی ثابت $f =$ عمود است.

حساب کنید.

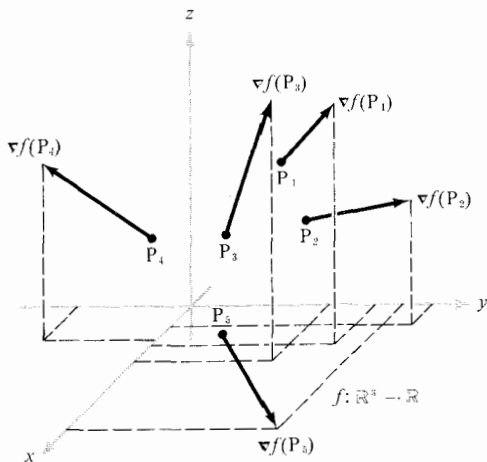
در اینجا $f(x, y, z) = 3xy + z^2$ و $\nabla f = (3y, 3x, 2z)$ که در $(1, 1, 1)$ بردار $(3, 3, 2)$ است. لذا، صفحه مماس عبارت است از

$$(x - 1, y - 1, z - 1) \cdot (3, 3, 2) = 0$$

$$3x + 3y + 2z = 8$$

ما اغلب از ∇f به عنوان یک میدان برداری گرادیان یاد می‌کنیم. توجه کنید که ∇f به هر نقطه در قلمرو f یک بردار نسبت می‌دهد (ر. ک. شکل ۴.۵.۲). در این شکل تابع ∇f با رسم نمودارش، که زیر مجموعه‌ای است از \mathbb{R}^6 ، توصیف نمی‌شود، بلکه با نمایش $\nabla f(P)$ ، به ازای هر نقطه P ، به صورت برداری با نقطه شروع P به جای مبداء توصیف می‌گردد. این روش ترسیم ∇f ، همانند نمودار، شامل نقطه P و مقدار $\nabla f(P)$ در تصویر می‌باشد.

میدان برداری گرادیان تعبیر هندسی مهمی دارد. این میدان جهت بیشترین افزایش f و جهت عمود بر سطوح تراز f را نشان می‌دهد. انجام همزمان این دو کار شهوداً "موجه" است. برای مشاهده این امر، تپه‌ای مانند شکل ۴.۵.۲ (آ) را در نظر می‌آوریم. فرض کنیم h تابع ارتفاع باشد، که یک تابع دو متغیره است. اگر منحنیهای تراز h را رسم کنیم،



شکل ۵.۵.۲

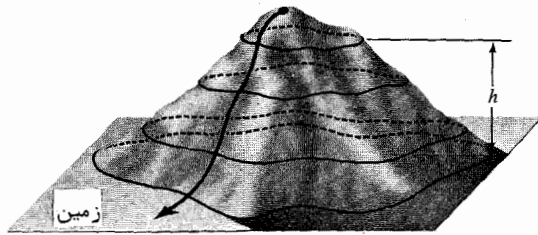
گرادیان ∇f تابع $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ یک میدان برداری بر \mathbb{R}^3 است. در هر نقطه P_i ، برداری با نقطه شروع P_i می‌باشد.

اینها چیزی جز کنتورهای تراز تپه نیستند. می‌توان آنها را مسیرهای تراز روی تپه تصور کرد (ر. ک. شکل ۶.۵.۲ (ب)). برای هر کوهنورد یک چیز روشن است: برای آنکه سریعتر به بالای تپه برسیم باید در جهت عمود بر کنتورهای تراز حرکت کنیم. این امر با قضایای فوق سازگار است، که می‌گویند جهت بیشترین افزایش (گرادیان) بر منحنیهای تراز عمود می‌باشد.

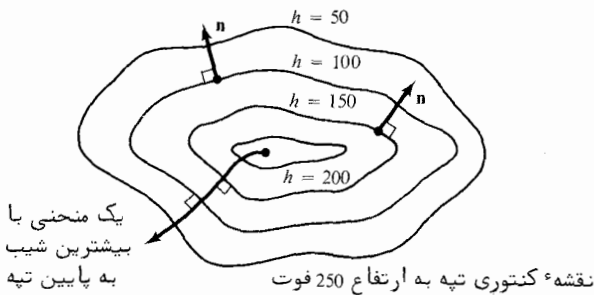
مثال ۵. نیروی ثقلی وارد بر جرم واحد در (x, y, z) ناشی از جرم M واقع در مبدا \mathbb{R}^3 ، طبق قانون ثقلی نیوتن، مساوی است با

$$\mathbf{F} = -\frac{GM}{r^2} \mathbf{n}$$

که در آن G ثابت بوده، $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ فاصله (x, y, z) تا مبدا است، و $\mathbf{n} = \mathbf{r}/r$ برداریکه در جهت $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ، یعنی بردار موضع از مبدا تا (x, y, z) ، می‌باشد.



(ت)



(ب)

شکل ۶.۵.۲

توصیف فیزیکی در مطلب $(\bar{T}) \nabla f$ جهت بیشترین افزایش f است و $(ب) \nabla f$ بر منحنیهای تراز عمود است.

توجه داریم که $\mathbf{F} = \nabla(GM/r) = -\nabla V$ ، یعنی \mathbf{F} قرینه گرادیان پتانسیل ثقلی $V = -GM/r$ می باشد. این را می توان همانند مثال ۱ تحقیق کرد. توجه کنید که \mathbf{F} در جهت مبدا است. همچنین، سطوح تراز V کرات می باشند. \mathbf{F} برای کرات عمود است، که قضیه ۱۴ را تأیید می کند.

مثال ۶. برداریکه قائم به سطح S با معادله $z = x^2y^2 + y + 1$ را در نقطه $(0, 0, 1)$ پیدا نمایید.

فرض کنیم $f(x, y, z) = x^2y^2 + y + 1 - z$ ، و سطح تعریف شده با معادله

$f(x, y, z) = 0$ را در نظر می‌گیریم. چون این سطح مجموعهٔ نقاطی مانند (x, y, z) است که $z = x^2y^2 + y + 1$ ، پس این سطح S می‌باشد. نمودار با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$\begin{aligned}\nabla f(x, y, z) &= \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} \\ &= 2xy^2 \mathbf{i} + (2x^2y + 1) \mathbf{j} - \mathbf{k}\end{aligned}$$

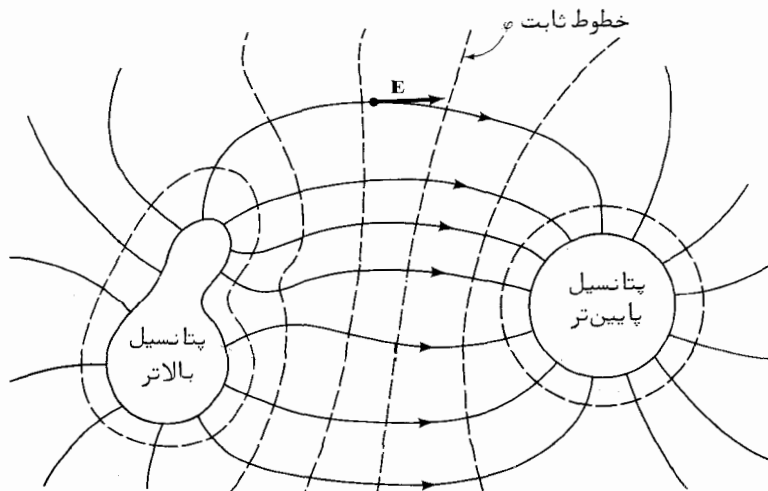
و در نتیجه،

$$\nabla f(0, 0, 1) = \mathbf{j} - \mathbf{k}$$

این بردار بر S در $(0, 0, 1)$ عمود است؛ لذا، برای یافتن قائم بیکهٔ \mathbf{n} ، این بردار را بر طولش تقسیم می‌کنیم تا به دست آید

$$\mathbf{n} = \frac{\nabla f(0, 0, 1)}{\|\nabla f(0, 0, 1)\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

مثال ۷. دو خازن در نظر می‌گیریم، که یکی به‌طور مثبت و دیگری به‌طور منفی پر شده باشد. بین آنها پتانسیل الکتریکی به‌وجود می‌آید. این پتانسیل تابعی است مانند $\phi: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. میدان الکتریکی با $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ داده می‌شود. از قضیهٔ ۱۴ می‌دانیم که \mathbf{E} بر سطوح تراز ϕ عمود است. این سطوح تراز همپتانسیل نام دارند، زیرا پتانسیل روی آنها ثابت است (ر. ک. شکل ۷.۵.۲).



شکل ۷.۵.۲

۱. ثابت کنید مشتق جهتی $f(x, y, z) = z^2x + y^3$ در $(1, 1, 2)$ در جهت $(1/\sqrt{5})\mathbf{i} + (2/\sqrt{5})\mathbf{j}$ مساوی $2\sqrt{5}$ است.

۲. مشتقات جهتی توابع زیر را در نقاط و جهات ذکر شده حساب کنید.

$$f(x, y) = x + 2xy - 3y^2, (x_0, y_0) = (1, 2), \mathbf{v} = \frac{3}{5}\mathbf{i} + \frac{4}{5}\mathbf{j} \quad (\text{آ})$$

$$f(x, y) = \log(\sqrt{x^2 + y^2}), (x_0, y_0) = (1, 0), \mathbf{v} = (1/\sqrt{5})(2\mathbf{i} + \mathbf{j}) \quad (\text{ب})$$

$$f(x, y) = e^x \cos(\pi y), (x_0, y_0) = (0, -1), \mathbf{v} = -(1/\sqrt{5})\mathbf{i} + (2/\sqrt{5})\mathbf{j} \quad (\text{پ})$$

$$f(x, y) = xy^2 + x^3y, (x_0, y_0) = (4, -2), \mathbf{v} = (1/\sqrt{10})\mathbf{i} + (3/\sqrt{10})\mathbf{j} \quad (\text{ت})$$

$$f(x, y) = x^e, (x_0, y_0) = (e, e), \mathbf{v} = \frac{2}{13}\mathbf{i} + \frac{12}{13}\mathbf{j} \quad (\text{ث})$$

$$f(x, y, z) = e^x + yz, (x_0, y_0, z_0) = (1, 1, 1), \mathbf{v} = (1/\sqrt{3}, -1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}) \quad (\text{ج})$$

$$f(x, y, z) = xyz, (x_0, y_0, z_0) = (1, 0, 1), \mathbf{v} = (1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2}) \quad (\text{چ})$$

۳. صفحات مماس بر سطوح زیر در نقاط ذکر شده را بیابید.

$$x^2 + 2y^2 + 3zx = 10, (1, 2, \frac{1}{3}) \quad (\text{آ})$$

$$y^2 - x^2 = 3, (1, 2, 8) \quad (\text{ب})$$

$$xyz = 1, (1, 1, 1) \quad (\text{پ})$$

$$z = x^3 + y^3 - 6xy, (1, 2, -3) \quad (\text{ت})$$

$$z = (\cos x)(\cos y), (0, \pi/2, 0) \quad (\text{ث})$$

$$z = (\cos x)(\sin y), (0, \pi/2, 1) \quad (\text{ج})$$

۴* فرض کنید $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ و $Df(x, y, z)$ را نگاشتی خطی از \mathbb{R}^3 به \mathbb{R} بگیرید. نشان دهید

که هسته آن (فضای پوچ) زیر فضایی خطی از \mathbb{R}^3 متعامد به ∇f است.

۵. قضایای ۱۳ و ۱۴ را برای $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ تحقیق کنید.

۶. نشان دهید که قائم بیکه به سطح $0 = x^3y^3 + y - z + 2$ در $(0, 0, 2)$ عبارت است از

$$\mathbf{n} = (1/\sqrt{2})(\mathbf{j} - \mathbf{k})$$

۷. نشان دهید که اگر نمودار را سطح ترازوی از $z = f(x, y)$ بگیریم، تعریف

بعد از قضیه ۱۴ فرمولی برای صفحه مماس بر نمودار $f(x, y)$ ، به عنوان حالتی خاص،

به دست می دهد (ر. ک. بخش ۳۰۲).

۸. گرادیان ∇f را برای هر یک از توابع زیر حساب کنید.

$$f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{آ})$$

$$f(x, y, z) = xy + yz + xz \quad (\text{ب})$$

$$f(x, y, z) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2} \quad (\text{پ})$$

۹. برای توابع $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ زیر، ∇f و g' را یافته و $(f \circ g)(1)$ را حساب کنید.

$$f(x, y, z) = xz + yz + xy, g(t) = (e^t, \cos t, \sin t) \quad (\text{آ})$$

$$f(x, y, z) = e^{xyz}, g(t) = (6t, 3t^2, t^3) \quad (\text{ب})$$

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2) \log \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, g(t) = (e^t, e^{-t}, t) \quad (\text{پ})$$

۱۰. مشتق جهتی را در جهات و نقاط داده شده حساب کنید.

$$f(x, y, z) = xy^2 + y^2z^3 + z^3x, P = (4, -2, -1), v = 1/\sqrt{14}(i + 3j + 2k) \quad (\text{آ})$$

$$f(x, y, z) = x^{yz}, P = (e, e, 0), v = \frac{1}{13}i + \frac{3}{13}j + \frac{4}{13}k \quad (\text{ب})$$

۱۱. فرض کنید $r = xi + yj + zk$ و $r = \|r\|$. ثابت کنید که

$$\nabla \left(\frac{1}{r} \right) = -\frac{r}{r^3}$$

۱۲. کاپیتان رالف خود را سمت آفتابی مریخ یافته و متوجه می‌شود که لباس فضایی اش در حال ذوب شدن است. دمای اطراف وی در دستگاه مختصات قائم عبارت است از

$$T(x, y, z) = e^{-x} + e^{-2y} + e^{-3z}$$

اگر او در نقطه $(1, 1, 1)$ باشد، در چه جهتی باید شروع به حرکت کند که سریع‌تر خنک شود؟

۱۳. تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ مستقل از متغیر دوم است اگر و فقط اگر تابعی مانند $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ وجود داشته باشد که به ازای هر x در \mathbb{R} ، $f(x, y) = g(x)$ ، در این حالت، ∇f را برحسب g' حساب کنید.

۱۴. فرض کنید f و g توابعی از \mathbb{R}^3 به \mathbb{R} باشند. همچنین، f مشتق‌پذیر بوده و $\nabla f(x) = g(x)x$. نشان دهید کرات به مرکز مبدأ مشمول مجموعه‌های تراز f می‌باشند. یعنی، f بر چنین کرات ثابت می‌باشد.

۱۵. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را زوج نامیم اگر به ازای هر x در \mathbb{R} ، $f(x) = f(-x)$. اگر f مشتق‌پذیر و زوج باشد، Df را در مبدأ پیدا نمایید.

۶.۲ مشتقات جزئی مکرر

در بخشهای پیش اطلاعات زیادی از مشتق یک تابع را به دست آورده، و هندسه^۴ مربوط به مشتق توابع حقیقی را با استفاده از گرادین بررسی کردیم. حال به مطالعه^۵ مشتقات مراتب بالاتر می پردازیم. چون این مطلب به تفصیل در فصل ۴ مطرح می شود، در اینجا به اختصار ذکر خواهد شد. هدف اصلی ما اثبات قضیه‌ای است که به تساوی "مشتقات جزئی مخلوط" حکم می کند. این نتیجه برای توابع با هر تعداد متغیر برقرار است، ولی ما در اینجا فقط به توابع حقیقی از دو یا سه متغیر توجه خواهیم داشت.

فرض کنیم $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ از رده^۶ C^1 باشد. به یاد آورید که این یعنی $\partial f/\partial x$ ، $\partial f/\partial y$ ، و $\partial f/\partial z$ موجود و پیوسته اند؛ و این ایجاب می کند که f مشتقپذیر باشد (قضیه^۷ ۹). اگر این مشتقات خود مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند، گوئیم f از رده^۸ C^2 است، یا دوبار به طور پیوسته مشتقپذیر می باشد. ذیلاً "چند نمونه از طرز نگارش این مشتقات بالاتر ذکر می شوند:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} = \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)$$

البته، این فرایند را می توان برای مشتقات مرتبه^۹ سوم و بیشتر تکرار کرد. هرگاه f فقط تابعی از x و y بوده و $\partial f/\partial x$ ، $\partial f/\partial y$ به طور پیوسته مشتقپذیر باشند، آنگاه، با گرفتن مشتق جزئی دوم، چهار تابع

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \quad \text{و} \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

به دست خواهند آمد.

مثال ۰۱. فرض کنیم $f(x, y) = xy + (x + 2y)^2$. در این صورت،

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y + 2(x + 2y), \quad \frac{\partial f}{\partial y} = x + 4(x + 2y)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 8$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = 5, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 5$$

مثال ۰۲. هرگاه $f(x, y) = \sin x \sin^2 y$ ، آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \cos x \sin^2 y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2 \sin x \sin y \cos y = \sin x \sin 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\sin x \sin^2 y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \sin x \cos 2y$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \cos x \sin 2y, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 2 \cos x \sin y \cos y = \cos x \sin 2y$$

مثال ۰۳. فرض کنیم $f(x, y, z) = e^{xy} + z \cos x$ در این صورت، مثلاً،

$$\frac{\partial f}{\partial x} = ye^{xy} - z \sin x, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^{xy}, \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \cos x$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} = -\sin x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} = -\sin x$$

در تمام این مثالها توجه کنید که مشتقات جزئی مخلوط، مانند $\partial^2 f / (\partial x \partial y)$ و $\partial^2 f / (\partial y \partial x)$ ، یا $\partial^2 f / (\partial z \partial x)$ و $\partial^2 f / (\partial x \partial z)$ ، مساویند. این معمولاً "چنین است و مطلبی است بسیار اساسی و تعجب‌آور. این موضوع در قضیه زیر برای توابع دومتغیره $f(x, y)$ ثابت می‌شود، ولی برهان را می‌توان به آسانی به توابع n متغیره تعمیم داد.

قضیه ۱۵. هرگاه $f \in C^2$ (دوبار به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر) باشد، آنگاه مشتقات مخلوط باهم مساویند؛ یعنی،

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$$

برهان. عبارت زیر را در نظر می‌گیریم:

$$(1) \quad f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)$$

y_0 و Δy را ثابت گرفته، و تابع

$$g(x) = f(x, y_0 + \Delta y) - f(x, y_0)$$

را معرفی می‌کنیم؛ در نتیجه، (1) مساوی است با $g(x_0 + \Delta x) - g(x_0)$. طبق قضیه مقدار میانگین برای توابع یک متغیره (ص ۱۴۸)، این به ازای \bar{x} ی بین x_0 و $x_0 + \Delta x$ مساوی $g'(\bar{x}) \Delta x$ است. از اینرو، (1) مساوی است با

$$\left[\frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0 + \Delta y) - \frac{\partial f}{\partial x}(\bar{x}, y_0) \right] \Delta x$$

مجدداً، با اعمال قضیه مقدار میانگین، برای (1) به دست می‌آوریم

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(\bar{x}, \bar{y}) \Delta x \Delta y$$

چون $\partial^2 f / \partial y \partial x$ پیوسته است، نتیجه می‌شود که

$$(2) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x_0, y_0) = \lim_{(\Delta x, \Delta y) \rightarrow (0, 0)} \frac{1}{\Delta x \Delta y} [f(x_0 + \Delta x, y_0 + \Delta y) - f(x_0 + \Delta x, y_0) - f(x_0, y_0 + \Delta y) + f(x_0, y_0)]$$

به همین نحو، می‌توان نشان داد که $\partial^2 f / \partial x \partial y$ با همان فرمول حدی (2) داده می‌شود، که نتیجه را ثابت می‌کند.

این قضیه اول بار توسط لئونارد اویلر در ۱۷۳۴ ضمن مطالعه هیدرودینامیک ثابت شد. مثلاً، از قضیه ۱۵ نتیجه می‌شود که، برای یک تابع C^3 ،

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x} \text{ etc.}$$

به عبارت دیگر، می‌توان مشتقات جزئی مکرر را با هر ترتیب حساب کرد.

مثال ۴. تساوی مشتقات جزئی مرتبه دوم مخلوط را برای تابع

$$f(x, y) = xe^y + yx^2$$

تحقیق کنید.

در اینجا

$$\frac{\partial f}{\partial x} = e^y + 2xy, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = xe^y + x^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = e^y + 2x, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = e^y + 2x$$

و در نتیجه، داریم

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$$

یادداشت تاریخی: معادلات دیفرانسیل جزئی. "فلسفه (طبیعت) در آن کتاب بزرگ نوشته شده است که تا ابد مقابل چشمان ماست - منظورم جهان است - ولی اگر ابتدایان را نیاموزیم و علایمی که با آن نگاشته شده درنیابیم نمی‌توانیم آن را درک کنیم. کتاب به زبان ریاضی نگاشته شده است، و علایم عبارتند از: مثلث، دایره، و اشکال دیگر هندسی که بدون آنها درک حتی یک کلمه از آن ناممکن است. بی‌آن شخص بیهوده در ظلمت سرگردان خواهد بود."

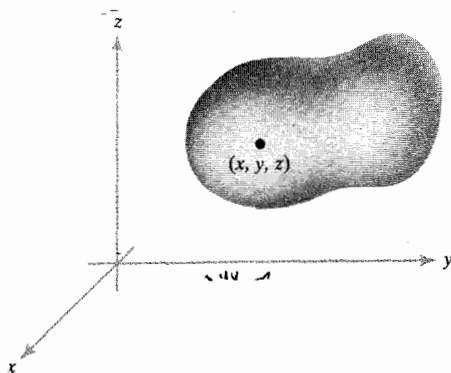
رنه دکارت

این گفته بیانگر این باور از دوره دکارت است که بخش اعظمی از طبیعت را می‌توان به ریاضیات تحویل کرد. در نیمه دوم قرن هفده، که نیوتن^۱ با استفاده از قانون ثقلی خود و حساب دیفرانسیل و انتگرال جدید، سه قانون حرکت سماوی کپلر را ثابت کرد، این فکر قوت تازه‌ای یافت (ر. ک. ۱۰۳). اثر این فلسفه بر ریاضیات زیاد بود، و بسیاری از ریاضیدانان به "ریاضی‌سازی" طبیعت پرداختند. نفوذ امروزه ریاضیات به علوم طبیعی (و، تا حدود زیادی، اقتصاد و علوم اجتماعی و انسانی) گواه موفقیت این تلاشها می‌باشد. بدین ترتیب، تلاش در ریاضی‌سازی طبیعت اغلب به کشفیات ریاضی جدیدی منجر گردید.

بسیاری از قوانین طبیعت برحسب معادلات دیفرانسیل معمولی (معادلاتی شامل

مشتقات توابع فقط یک متغیر، نظیر قانون ثقلی نیوتن (یا معادلات دیفرانسیل جزئی، یعنی معادلات شامل مشتقات جزئی توابع، توصیف شده بودند. برای آنکه به خواننده کمی از تاریخچه گفته و در وی انگیزه بررسی مشتقات جزئی ایجاد کنیم، سه تا از معروفترین معادلات دیفرانسیل جزئی، یعنی معادله گرما، معادله موج، و معادله پتانسیل (یا لاپلاس^۱)، را به اجمال شرح می‌دهیم. این سه معادله با عمق بیشتر در بخش ۵.۷ مطرح خواهند شد.

معادله گرما در اوایل قرن نوزده، ریاضیدان فرانسوی، ژوزف فوریه^۲ (۱۸۳۵ - ۱۷۶۸)، به مطالعه گرما پرداخت. شارش گرما کاربردهای روشنی در مسائل صنعتی و علمی دارد: مثلاً، درک بهتر آن گداختن بهتر فلزات را موجب شده و دانشمند می‌تواند دمای یک جسم با دمای مرز معلوم را تعیین کند و بدین ترتیب دمای درون زمین را تقریب نماید. فرض کنیم جسم همگن $B \subset \mathbb{R}^3$ (شکل ۱.۶.۲) با ناحیه‌ای در فضای ۳ بعدی نموده



شکل ۱.۶.۲
یک جسم همگن در فضا

شده باشد. همچنین، $T(x, y, z, t)$ دمای جسم در نقطه (x, y, z) در لحظه t باشد. فوریه ثابت کرد که، که بر مبنای اصول فیزیکی توصیف شده در بخش ۵.۷، T باید در معادله دیفرانسیل جزئی

$$(۱) \quad k \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right) = \frac{\partial T}{\partial t}$$

به نام " معادله گرما " صدق کند ، که در آن k ثابتی است که مقدارش به هدایت ماده تشکیل دهنده جسم بستگی دارد .

فوریه از این معادله در حل مسائل هدایت گرما استفاده کرد . در واقع ، بررسی جوابهای (۱) بود که وی را به کشف تازه‌ای در ریاضی به نام سری فوریه سوق داد .

معادله پتانسیل . در مثال ۵ از بخش ۵.۲ پتانسیل ثقلی V (که اغلب پتانسیل نیوتن نام دارد) حاصل از یک نقطه جرمی واقع در مبدأ را معرفی کردیم . این پتانسیل با $V = -GM/r$ داده می‌شود ، که در آن $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. پتانسیل V همه جا جز در مبدأ در معادله

$$(۲) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0$$

صدق می‌کند ، و خواننده می‌تواند با حل تمرین ۱۱ آن را تحقیق کند . این معادله به معادله لاپلاس معروف است . پیرسیمون دولاپلاس (۱۸۲۷ - ۱۷۴۹) روی جاذبه ثقلی جرمهای غیرنقطه‌ای کار کرده بود و اولین کسی بود که معادله (۲) را در رابطه با جاذبه ثقلی به کار گرفت . وی عنوان کرد (که بعداً " نادرست بودن آنها معلوم شد) که معادله (۲) برای هر جسم و هر نقطه چه داخل و چه خارج آن برقرار است . با اینحال ، لاپلاس اولین کسی نبود که معادله (۲) را نوشت . معادله پتانسیل اول بار در یکی از مقالات مهم اوپلر در ۱۷۵۲ ، یعنی " اصول حرکت مایعات " ، ظاهر شد ، که در آن وی معادله پتانسیل را در رابطه با حرکت مایعات (غیرقابل تراکم) به دست آورد . اوپلر گفت که راه حل معادله (۲) را نمی‌داند . ما معادلات مکانیک مایعات را در بخش ۵.۷ بررسی خواهیم کرد .

پواسون^۱ بعداً " نشان داد که هرگاه (x, y, z) داخل یک جسم جاذب باشد ، آنگاه V در معادله زیر صدق می‌کند :

$$(۳) \quad \frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = -4\pi\rho$$

که در آن ρ چگالی جسم جاذب است. امروزه معادله (۳) معادله پواسون خوانده می‌شود. پواسون همچنین اولین کسی بود که اهمیت این معادله را در مسائل مربوط به میدانهای الکتریکی گوشزد کرد.

توجه کنید که هرگاه دمای T نسبت به زمان ثابت باشد، آنگاه معادله گرما به معادله لاپلاس تحویل می‌شود (چرا؟).

معادله موج. معادله موج در فضا به شکل زیر است:

$$(۴) \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}.$$

معادله یک بعدی موج

$$(۴') \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

حدود ۱۷۲۷ به وسیله جان برنولی^۱ و چند سال بعد توسط ژان لوروند دالامبر^۲ ضمن تعیین حرکت یک سیم مرتعش (نظیر سیم ویلون) به دست آمد. معادله (۴) هم در بررسی اجسام مرتعش و هم الاستیسیته مفید واقع شده است. ما ضمن بررسی معادلات الکترو-مغناطیسی ماکسول^۳ در بخش ۵.۷ خواهیم دید که این معادله در مطالعه انتشار امواج الکترومغناطیسی و صوت نیز ظاهر خواهد شد.

تمرینات

۱. مشتقات جزئی دوم $\partial^2 f / \partial x^2$, $\partial^2 f / \partial x \partial y$, $\partial^2 f / \partial y \partial x$, $\partial^2 f / \partial y^2$ را برای هر یک از توابع زیر حساب کنید. قضیه ۱۵ را در هر حالت تحقیق نمایید.

$$f(x, y) = 2xy / ((x^2 + y^2)^2) \quad (A)$$

$$f(x, y, z) = e^z + 1/x + xe^{-y} \quad (B)$$

1. John Bernoulli

2. Jean Le Rond d'Alembert

3. Maxwell

$f(x, y) = \cos(xy^2)$ (پ)

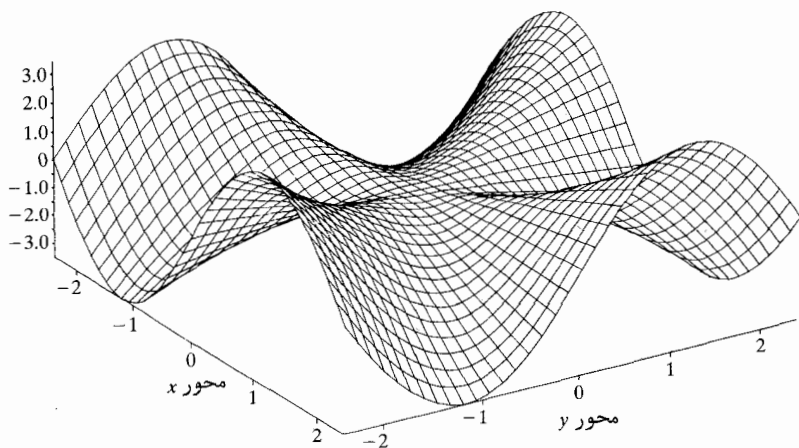
$f(x, y) = e^{-xy^2} + y^3x^4$ (ت)

$f(x, y) = 1/(\cos^2 x + e^{-y})$ (ث)

۲. فرض کنید

$$f(x, y) = \begin{cases} xy(x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0, & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

(ر. ک. . شکل ۲۰۶.۲)



شکل ۲۰۶.۲

نمودار کامپیوتری تابع تمرین ۲

(آ) اگر $(x, y) \neq (0, 0)$ ، $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ را حساب کنید .

(ب) نشان دهید که $(\partial f/\partial x)(0, 0) = 0 = (\partial f/\partial y)(0, 0)$

(پ) نشان دهید که $(\partial^2 f/\partial x \partial y)(0, 0) = 1$ ، $(\partial^2 f/\partial y \partial x)(0, 0) = -1$

(ت) چه چیز خطاست؟ چرا مشتقات جزئی مخلوط مساوی نیستند؟

۳. فرض کنید $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع C^2 بوده و $c(t)$ یک منحنی C^2 در \mathbb{R}^2 باشد . با دو

بار استفاده از قاعده زنجیره‌ای ، فرمولی برای $(f \circ c)(t)$ بنویسید .

۴. نشان دهید که $u(x, y) = e^x \sin y$ در معادله لاپلاس

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

صدق می‌کند .

۵. معادله صفحه مماس بر $z = x^2 + 2y^3$ در $(1, 1, 3)$ را بیابید .

۶. تساوی

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial z \partial y \partial x}$$

را برای $f(x, y, z) = ze^{xy} + yz^3x^2$ تحقیق کنید .

۷. تمام مشتقات جزئی اول و دوم توابع زیر را محاسبه کنید .

$$f(x, y) = x \arctan(x/y) \quad (\text{آ})$$

$$f(x, y) = \cos \sqrt{x^2 + y^2} \quad (\text{ب})$$

$$f(x, y) = \exp(-x^2 - y^2) \quad (\text{پ})$$

۸. مشتقات جهتی توابع تمرین ۷ را در نقطه $(1, 1)$ و در جهت $(1/\sqrt{2}, 1/\sqrt{2})$ بیابید .

۹. با استفاده از قضیه ۱۵، نشان دهید هرگاه $f(x, y, z)$ از رده C^3 باشد، آنگاه

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}$$

۱۰. فرض کنید توابع g و f از \mathbb{R} به \mathbb{R} دو بار مشتقپذیر باشند. قرار دهید $\phi(x, t) = f(x) + g(x+t) - g(x-t)$ و ثابت کنید ϕ در معادله موج

$$\frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \phi}{\partial x^2}$$

صدق می‌کند .

۱۱. نشان دهید که پتانسیل نیوتن V (ر. ک. مثال ۵، بخش ۵.۲) در معادله لاپلاس

صدق می‌کند :

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = 0, \quad (x, y, z) \neq (0, 0, 0)$$

تمرینات دوره‌ای برای فصل ۲

۱. نمودار توابع زیر را توصیف کنید .

$$f(x, y) = 3x^2 + y^2 \quad (\bar{1})$$

$$f(x, y) = xy + 3x \quad (\bar{2})$$

۲. چند سطح تراز و مقطع عرضی مناسب نمودارهای زیر را توصیف نمایید.

$$f(x, y, z) = 2x^2 + y^2 + z^2 \quad (\bar{1})$$

$$f(x, y, z) = x^2 \quad (\bar{2})$$

$$f(x, y, z) = xyz \quad (\bar{3})$$

۳. مشتق $Df(x)$ هر یک از توابع زیر را حساب کنید.

$$f(x, y) = (x^2y, e^{-xy}) \quad (\bar{1})$$

$$f(x) = (x, x) \quad (\bar{2})$$

$$f(x, y, z) = e^x + e^y + e^z \quad (\bar{3})$$

$$f(x, y, z) = (x, y, z) \quad (\bar{4})$$

۴. فرض کنید به ازای هر (x, y) ، $f(x, y) = f(y, x)$ ، ثابت کنید

$$(\partial f / \partial x)(a, b) = (\partial f / \partial y)(b, a).$$

۵. فرض کنید $f(x, y) = (1 - x^2 - y^2)^{1/2}$. نشان دهید که صفحه مماس بر نمودار f در

$$(x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \text{ بر بردار } (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) \text{ عمود است. تعبیر هندسی کنید.}$$

۶. فرض کنید $F(x, y) = (\partial f / \partial x) - (\partial f / \partial y)$ و f ، C^2 باشد. ثابت کنید

$$\frac{\partial F}{\partial x} + \frac{\partial F}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

۷. در موارد زیر، معادله صفحه مماس نمودار f در نقطه $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ را بیابید.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x - y + 2, \quad (x_0, y_0) = (1, 1) \quad (\bar{1})$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + 4y^2, \quad (x_0, y_0) = (2, -1) \quad (\bar{2})$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto xy, \quad (x_0, y_0) = (-1, -1) \quad (\bar{3})$$

$$f(x, y) = \log(x + y) + x \cos y + \arctan(x + y), \quad (x_0, y_0) = (1, 0) \quad (\bar{4})$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (x_0, y_0) = (1, 1) \quad (\bar{5})$$

$$f(x, y) = xy, \quad (x_0, y_0) = (2, 1) \quad (\bar{6})$$

۸. معادله صفحات مماس سطوح زیر را در نقاط ذکر شده حساب کنید.

$$x^2 + y^2 + z^2 = 3, \quad (1, 1, 1) \quad (\bar{1})$$

$$x^3 - 2y^3 + z^3 = 0, \quad (1, 1, 1) \quad (\bar{2})$$

$$(\cos x)(\cos y)e^z = 0, \quad (\pi/2, 1, 0) \quad (\text{پ})$$

$$e^{xyz} = 1, \quad (1, 1, 0) \quad (\text{ت})$$

۹. برای توابع زیر چند منحنی تراز رسم کنید .

$$f(x, y) = 1/xy \quad (\text{آ})$$

$$f(x, y) = x^2 - xy - y^2 \quad (\text{ب})$$

۱۰. تابع دمای $T(x, y) = x \sin y$ را در نظر بگیرید . چند منحنی تراز را رسم کنید .

∇T را محاسبه کرده و معنی آن را توضیح دهید .

۱۱. حدود زیر را در صورت وجود بیابید .

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{\cos xy - 1}{x} \quad (\text{آ})$$

$$\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \sqrt{|(x+y)/(x-y)|}, x \neq y \quad (\text{ب})$$

۱۲. مشتقات جزئی و گرادیانهای توابع زیر را محاسبه نمایید .

$$f(x, y, z) = xe^z + y \cos x \quad (\text{آ})$$

$$f(x, y, z) = (x + y + z)^{10} \quad (\text{ب})$$

$$f(x, y, z) = (x^2 + y)/z \quad (\text{پ})$$

۱۳. فرض کنید $\mathbf{F} = F_1(x, y)\mathbf{i} + F_2(x, y)\mathbf{j}$ یک میدان برداری C^1 باشد . نشان دهید هرگاه

به ازای f ی $\mathbf{F} = \nabla f$ ، آنگاه $\partial F_1/\partial y = \partial F_2/\partial x$. همچنین ، نشان دهید که

$$\mathbf{F} = y(\cos x)\mathbf{i} + x(\sin y)\mathbf{j} \quad \text{یک میدان برداری گرادیان نیست (ر.ک. ص ۱۶۷) .}$$

۱۴. فرض کنید $y(x)$ تابع مشتقپذیری باشد که به طور ضمنی با $F(x, y(x)) = 0$ تعریف شده

است . از مسئله ۱۱ (آ) ، بخش ۴.۲ ، می دانیم که

$$\frac{dy}{dx} = - \frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial y}$$

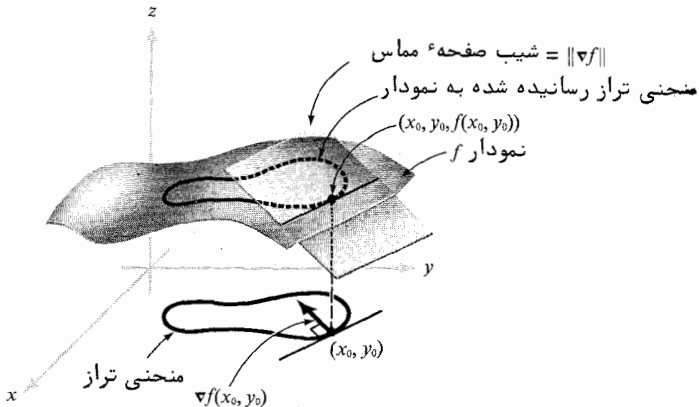
سطح $z = F(x, y)$ را در نظر گرفته و فرض کنید F به عنوان تابعی از x و به عنوان

تابعی از y صعودی است ؛ یعنی ، $\partial F/\partial x > 0$ و $\partial F/\partial y > 0$. با توجه به نمودار و

صفحه $z = 0$ ، نشان دهید که به ازای $z = 0$ ثابت ، y باید با افزایش x و x با

افزایش y نزول نماید . آیا این با علامت منها در فرمول dy/dx سازگار است ؟

۱۵. (آ) نمودار تابع $f(x, y)$ (شکل ۱۰.۲ م) را در نظر بگیرید .



شکل ۱۰.۲ م

رابطه بین گرادیان یک تابع و صفحه مماس
بر نمودار تابع (تمرین ۱۵ (آ))

فرض کنید (x_0, y_0) بر منحنی تراز C واقع باشد. در نتیجه، $\nabla f(x_0, y_0)$ بر این منحنی عمود است. نشان دهید که صفحه مماس نمودار صفحه‌ای است که (یک) شامل خط عمود بر $\nabla f(x_0, y_0)$ بوده و در صفحه افقی $z = f(x_0, y_0)$ قرار دارد، و (دو) نسبت به صفحه xy دارای شیب $\|\nabla f(x_0, y_0)\|$ می‌باشد. منظور از صفحه P نسبت به صفحه xy یعنی تنازنت زاویه θ ، $0 \leq \theta \leq \pi$ ، بین قائم رو به بالای \mathbf{p} به P و بردار \mathbf{k} .

(ب) با استفاده از این روش، نشان دهید که صفحه مماس نمودار $f(x, y) = (x + \cos y)x^2$ در $(1, 0, 2)$ همانند در شکل ۲۰ م است.

۱۶. صفحه مماس بر سطح $z = x^2 + y^2$ را در نقطه $(1, -2, 5)$ بیابید. برای این سطح،

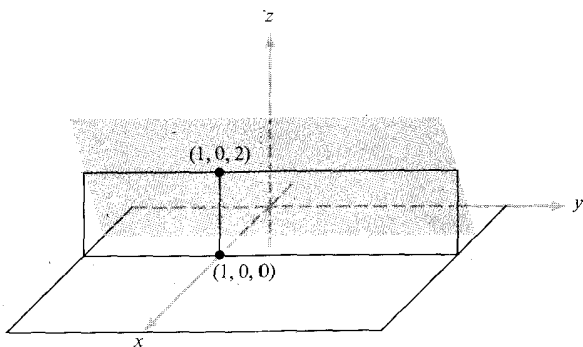
گرادیان $f(x, y) = x^2 + y^2$ را تعبیر هندسی کنید (ر. ک. تمرین ۱۵).

۱۷. مشتق جهتی $f(x, y) = (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ در $(1, 1)$ در چه جهتی مساوی صفر است؟

۱۸. مشتق جهتی تابع داده شده را در نقطه داده شده و در جهت بردار ذکر شده بیابید.

$$f(x, y, z) = e^x \cos(yz), p_0 = (0, 0, 0), \mathbf{v} = (2, 1, -2) \quad (\text{آ})$$

$$f(x, y, z) = xy + yz + zx, p_0 = (1, 1, 2), v = (10, -1, 2) \quad (ب)$$



شکل ۲۰.۲ م. ۲

صفحه ذکر شده در تمرین ۱۵ (ب)

۱۹. صفحه مماس و قائم هذلولی گون $x^2 + y^2 - z^2 = 18$ را در $(3, 5, -4)$ بیابید.
۲۰. جهتی را بیابید که در آن تابع $w = x^2 + xy$ در نقطه $(-1, 1)$ بیشترین افزایش را داشته باشد. اندازه ∇w در این جهت چیست؟ این اندازه را تعبیر هندسی کنید.
۲۱. فرض کنید f بر مجموعه S باز در \mathbb{R}^n تعریف شده است. گوئیم f روی S همگن از درجه p است اگر به ازای هر λ حقیقی و هر x در S که $f(\lambda x) = \lambda^p f(x)$ ، اگر این تابع در x مشتقپذیر باشد، نشان دهید که $x \cdot \nabla f(x) = pf(x)$. این امر به قضیه اویلر برای توابع همگن معروف است.
- (راهنمایی. به ازای x ثابت، تعریف کنید $g(\lambda) = f(\lambda x)$ و $g'(1)$ را محاسبه نمایید.)
۲۲. ثابت کنید اگر $f(x, y)$ در معادله لاپلاس

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

صدق کند، تابع زیر را نیز چنین می کند:

$$\phi(x, y) = f\left(\frac{x}{x^2 + y^2}, \frac{y}{x^2 + y^2}\right), \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

(هر تابع صادق در معادله لاپلاس یک تابع توافقی نام دارد.)

۲۳. ثابت کنید توابع

$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2) \quad (\text{آ})$$

$$g(x, y, z) = \frac{1}{(x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}} \quad (\text{ب})$$

$$h(x, y, z, w) = \frac{1}{x^2 + y^2 + z^2 + w^2} \quad (\text{پ})$$

به ترتیب در معادلات لاپلاس زیر صدق می‌کنند:

$$f_{xx} + f_{yy} = 0 \quad (\text{آ})$$

$$g_{xx} + g_{yy} + g_{zz} = 0 \quad (\text{ب}) \quad h_{xx} + h_{yy} + h_{zz} + h_{ww} = 0 \quad (\text{پ})$$

که در آنها $f_{xx} = \partial^2 f / \partial x^2$ و از این قبیل.

۲۴. اگر $z = f(x - y)/y$ ، نشان دهید که $z + y(\partial z / \partial x) + y(\partial z / \partial y) = 0$

۲۵. به فرض آنکه $w = f(x, y)$ ، که $x = u + v, y = u - v$ ، و f یک تابع C^2 است ، نشان دهید که

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial y^2}$$

۲۶. فرض کنید f دارای مشتقات جزئی $\partial f(x)/\partial x_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$) در هر نقطه x از بازه U در \mathbb{R}^n باشد. اگر f در نقطه x_0 از U دارای ماکزیمم موضعی یا مینیمم موضعی باشد ، نشان دهید به ازای هر i ، $\partial f(x_0)/\partial x_i = 0$.

۲۷. توابع تعریف شده در \mathbb{R}^2 با فرمولهای زیر را در نظر بگیرید .

$$(یک) \quad f(x, y) = xy/(x^2 + y^2) \quad \text{اگر } f(0, 0) = 0, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

$$(دو) \quad f(x, y) = x^2 y^2 / (x^2 + y^4) \quad \text{اگر } f(0, 0) = 0, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

(آ) در هر حالت نشان دهید که مشتقات جزئی $\partial f(x, y)/\partial x$ و $\partial f(x, y)/\partial y$ به ازای هر (x, y) در \mathbb{R}^2 وجود دارند و این مشتقات را صریحاً " بر حسب x و y محاسبه نمایید .
(ب) توضیح دهید چرا توابع توصیف شده در (یک) و (دو) در $(0, 0)$ مشتقپذیر نیستند .

۲۸. برای توابع زیر ، بردار گرادیان $\nabla f(x, y)$ را در هر نقطه (x, y) در \mathbb{R}^2 محاسبه نمایید.

$$(آ) \quad f(x, y) = x^2 y^2 \log(x^2 + y^2) \quad \text{اگر } f(0, 0) = 0, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

$$(ب) \quad f(x, y) = xy \sin(1/(x^2 + y^2)) \quad \text{اگر } f(0, 0) = 0, \quad (x, y) \neq (0, 0),$$

۲۹. تابع f در \mathbb{R}^2 تعریف شده است. فرض کنید $F(r, \theta) = f(r \cos \theta, r \sin \theta)$. نشان دهید که (آ) با فرض خواص مشتقپذیری مناسبی برای f ، نشان دهید که

$$\frac{\partial F}{\partial r}(r, \theta) = \cos \theta \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) + \sin \theta \frac{\partial}{\partial y} f(x, y)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial r^2} F(r, \theta) = \cos^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial x^2} f(x, y) + 2 \sin \theta \cos \theta \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} f(x, y) + \sin^2 \theta \frac{\partial^2}{\partial y^2} f(x, y)$$

که در آن $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$

(ب) فرمول

$$\|\nabla f(r \cos \theta, r \sin \theta)\|^2 = \left(\frac{\partial}{\partial r} F(r, \theta)\right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial}{\partial \theta} F(r, \theta)\right)^2$$

را تحقیق نمایید.

۳۰. فرض کنید $\mathbf{u} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{v} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 3\mathbf{k}$. این کمیات را پیدا کنید: $\|\mathbf{u}\|$ ،

$\mathbf{u} \cdot \mathbf{v}$ ، $\mathbf{u} \times \mathbf{v}$ و برداری همجهت \mathbf{u} متها با طول یک.

۳۱. فرض کنید $h(x, y) = 2e^{-x^2} + e^{-3y^2}$ ارتفاع یک کوه در نقطه (x, y) باشد. از نقطه

$(1, 0)$ در چه جهتی حرکت کنیم که سریعترین صعود را داشته باشیم؟

۳۲. معادله صفحه مماس بر نمودار

$$f(x, y) = \frac{e^x}{x^2 + y^2}$$

در $x = 1, y = 2$ را حساب کنید.

۳۳. (آ) شکل کلی قاعده زنجیره‌ای را بدقت بیان کنید.

(ب) فرض کنید $f(x, y) = x^2 + y$ و $\mathbf{h}(u) = (\sin 3u, \cos 8u)$ ، همچنین $g(u) = f(\mathbf{h}(u))$.

با استفاده از قاعده زنجیره‌ای محاسبه نمایید dg/du را در $u = 0$ مستقیماً.

۳۴. (آ) منحنیهای تراز $f(x, y) = -x^2 - 9y^2$ را به ازای $c = 0, -1, -10$ رسم نمایید.

(ب) در رسم خود ∇f را در $(1, 1)$ بکشید. در این مطلب بحث نمایید.

فصل سوم

توابع برداری

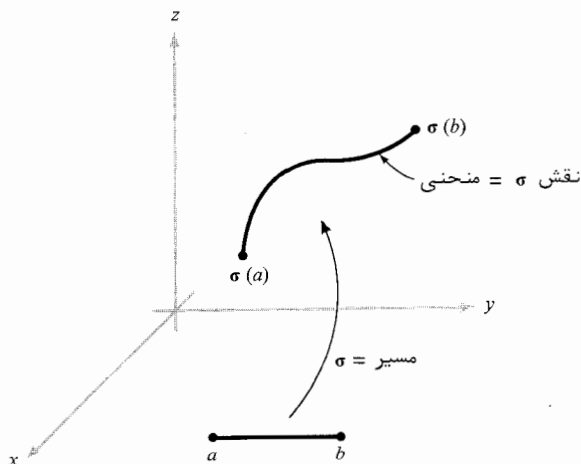
کسی که اول بار با قدرت یزدانی فکر، حرکات و اشکال سیاره‌ها، مسیر ستارگان دنباله‌دار، و جذر و مد دریاها را توضیح داده است.

کتابخانهٔ قبر نیوتن

یکی از نکات مورد توجه در فصل ۲ بررسی توابع حقیقی بود. در این فصل به توابعی می‌پردازیم که مقادیرشان بردارند. در بخش ۱۰.۳ با مسیرها آغاز می‌کنیم که نگاهشهایی از \mathbb{R} به \mathbb{R}^n می‌باشند. سپس به مطالعهٔ میدانهای برداری پرداخته، و اعمال اصلی حساب دیفرانسیل برداری غیر از گرادیان، یعنی دیورژانس و کرل، را معرفی می‌کنیم. در اینجا هندسهٔ این اعمال را، درست مثل گرادیان، در نظر می‌گیریم، ولی برای نتایجی که بیشترین اهمیت فیزیکی را دارند باید تا نظریهٔ انتگرالگیری صبر کرد.

۱۰.۳ مسیرها و سرعت

یک منحنی را اغلب خطی تصور می‌کنند که بر صفحهٔ کاغذ رسم می‌شود، مانند یک خط مستقیم، یک دایره، یا منحنی سینوس. برای آنکه به این اشیاء به طور مؤثری بپردازیم، شایسته است یک منحنی در \mathbb{R}^n را نقش، یا مجموعهٔ مقادیر، تابعی (نگاشتی) بر یک بازهٔ $[a, b]$ (یا گاهی بر تمام \mathbb{R}) به توی \mathbb{R}^n تصور نماییم. چنین نگاشتی را یک مسیر می‌نامیم. یک منحنی در صفحه است اگر $n = 2$ ، و در فضا است اگر $n = 3$. در این صورت، نقش مسیر نظیر به خطی است که روی صفحهٔ کاغذ دیده می‌شود (ر. ک. شکل



شکل ۱۰۱۰۳

نگاشت σ مسیر است؛ نقش آن منحنیی است که " دیده می شود "

در این بخش مفهوم مسیر را دقیقاً " تعریف کرده، چند مثال آورده، و نشان می دهیم چگونه مسیرها می توانند مسیر اشیاء متحرک باشند. سپس سرعت و شتاب مسیرها را تعریف کرده و این مفاهیم را در قانون دوم حرکت نیوتن و حرکت سیارات در مدارهای مستدیر به کار می بریم.

تعریف. هر مسیر در \mathbb{R}^n نگاشتی مانند $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ است. اگر σ مشتقپذیر (از رده C^1) باشد، گوئیم σ یک مسیر مشتقپذیر (C^1) است. نقاط $\sigma(a)$ و $\sigma(b)$ را نقاط انتهایی مسیر می نامیم.

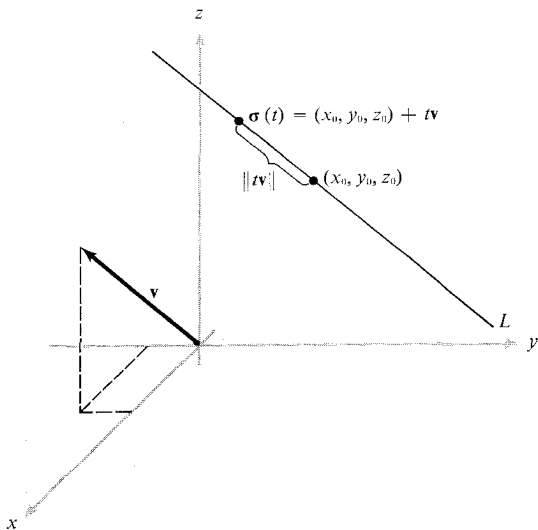
مفید است t را متغیر گرفته و تصور کنیم $\sigma(t)$ با تغییر t یک منحنی در \mathbb{R}^n را می پیماید. اغلب t را زمان گرفته و $\sigma(t)$ را موضع یک ذره متحرک در لحظه t تصور می کنیم. اگر σ مسیری در \mathbb{R}^3 باشد، می توان نوشت $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ،

و $z(t)$ را توابع مؤلفه σ می‌نامیم. به همین نحو می‌توان توابع مؤلفه در \mathbb{R}^2 یا، به طور کلیتر، در \mathbb{R}^n را تشکیل داد.

مثال ۱. خط مستقیم L در \mathbb{R}^3 مار بر نقطه (x_0, y_0, z_0) و در راستای بردار v نقش‌مسیر

$$\sigma(t) = (x_0, y_0, z_0) + tv$$

به ازای $t \in \mathbb{R}$ می‌باشد (ر.ک. ۲۰۱۰۳).



شکل ۲۰۱۰۳

L خط مستقیم ماربر (x_0, y_0, z_0) در راستای v در فضاست

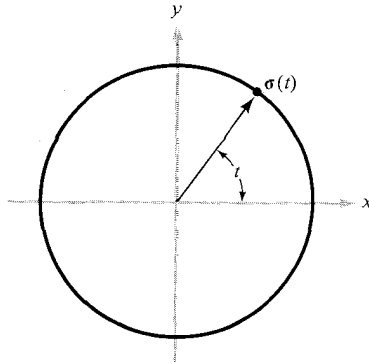
و معادله‌اش $\sigma(t) = (x_0, y_0, z_0) + tv$ خواهد بود.

مثال ۲. دایره σ یکه در صفحه با مسیر

$$\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad \sigma(t) = (\cos t, \sin t)$$

نموده می‌شود (ر.ک. شکل ۲۰۱۰۳). نقش σ ، یعنی مجموعه نقاط $\sigma(t) \in \mathbb{R}^2$ به ازای

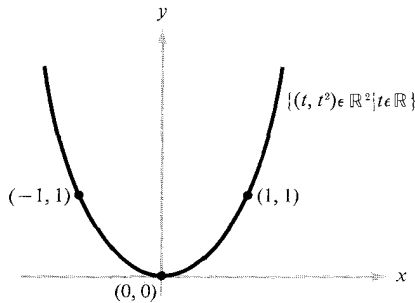
$t \in \mathbb{R}$ ، دایره σ یکه است.



شکل ۳.۱.۳

$\sigma(t) = (\cos t, \sin t)$ مسیری است که نقش آن دایره^۶ بیکه است .

مثال ۳. مسیر $\sigma(t) = (t, t^2)$ دارای نقشی است که یک قوس سهموی است . منحنی بانمودار $f(x) = x^2$ یکی است (ر.ک. شکل ۴.۱.۳) .

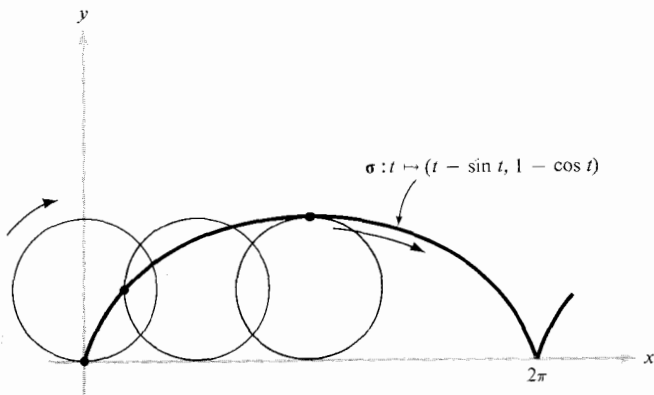


شکل ۴.۱.۳

نقش $\sigma(t) = (t, t^2)$ سهمی $y = x^2$ است .

مثال ۴. تابع $\sigma: t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$ تابع یک نقطه بر یک دایره^۶ غلطان

به شعاع ۱ است. دایره در صفحه xy قرار دارد و در امتداد محور x با مقدار سرعت ثابت می‌غلتد؛ یعنی، مرکز دایره با مقدار سرعت ثابت ۱ رادیان بر واحد زمان در امتداد خط $y = 1$ در حرکت است. حرکت نقطه $\sigma(t)$ پیچیده تر است؛ مکان هندسی آن چرخزاد نامیده می‌شود (ر. ک. شکل ۵۰۱۰۳).



شکل ۵۰۱۰۳

مسیر σ یک چرخزاد نام دارد. این مسیری است که توسط نقطه متحرکی از یک دایره متحرک پیموده می‌شود.

معمولا "حرکت ذرات در فضا بر منحنیهای هموار صورت می‌گیرد. مثلا"، ذرات معمولا "ناپدید و خود بخود در نقطه دیگر ظاهر نمی‌شوند یا دفعتا" تغییر سرعت نمی‌دهند. لذا، تا آخر این بخش نظرم را به مسیرهای به قدر کافی هموار، مثلا " C^1 ، معطوف می‌کنیم.

از فصل ۲ می‌دانیم که اگر σ مسیری در \mathbb{R}^3 باشد، مشتق σ ، یعنی $D\sigma(t)$ ، یک ماتریس 3×1 است.

$$D\sigma(t) = \begin{bmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{bmatrix}$$

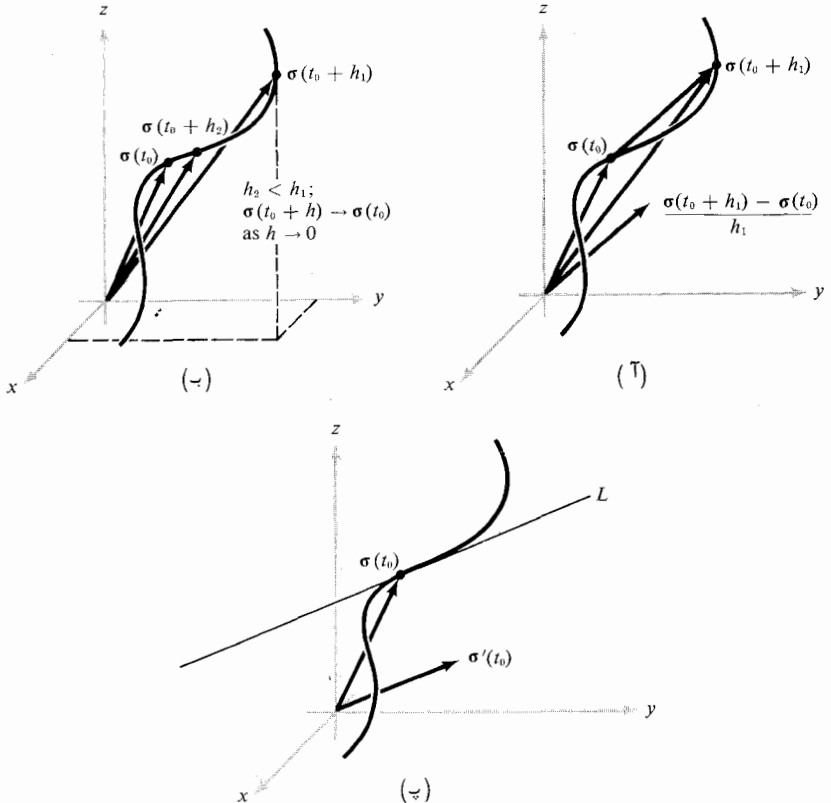
برای بردار (سطری) نظیر می‌نویسیم $\sigma'(t)$. لذا،

$$\sigma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$$

و در نتیجه،

$$\sigma'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0)}{h}$$

با توجه به شکل ۶.۱.۳ می توان شهوداً " استدلال کرد و گفت



شکل ۶.۱.۳

- تعبیر هندسی تعریف مشتق یک مسیر: $\sigma'(t_0) = \lim_{h \rightarrow 0} (\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0))/h$
- (a) $[\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0)]/h$ به ازای $h = h_1$ برداری از $\sigma(t_0)$ تا $\sigma(t_0 + h)$ است.
- (b) همین بردار به ازای نمونه کوچکتر $h = h_2$.
- (c) حالت حدی $h \rightarrow 0$

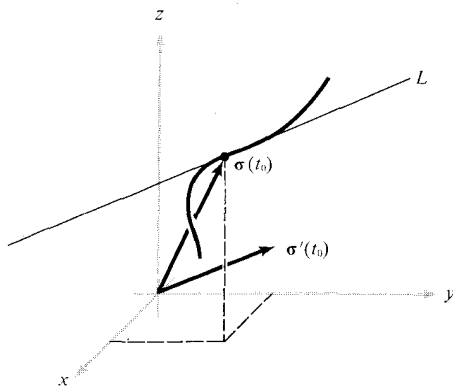
که بردار $\sigma'(t_0)$ باید موازی خط مماس L بر مسیر σ در نقطه $\sigma(t_0)$ باشد، و باید سرعت ذره را نمایش دهد. در واقع،

$$(\sigma(t_0 + h) - \sigma(t_0))/h$$

نمایش سرعت جهتدار متوسط در بازه زمانی از t_0 تا $t_0 + h$ (یعنی، تغییر مکان کل به زمان سیری شده) است. لذا، وقتی $h \rightarrow 0$ ، این عبارت به بردار سرعت لحظه‌ای نزدیک می‌شود. این امر ما را به تعریف زیر می‌رساند.

تعریف. فرض کنیم $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک مسیر C^1 باشد. بردار سرعت در $\sigma(t)$ عبارت است از $v(t) = \sigma'(t) = (x'(t), y'(t), z'(t))$ ، و سرعت ذره مساوی است با $S(t) = \|\sigma'(t)\|$ ، یعنی طول بردار $\sigma'(t)$.

می‌دانیم که بردار سرعت $\sigma'(t_0)$ موازی خط مماس L بر مسیر $\sigma(t) \mapsto t$ در نقطه $\sigma(t_0)$ است (شکل ۷.۱.۳).



شکل ۷.۱.۳

خط L مماس بر مسیر σ در $\sigma(t_0)$ دارای معادله $l(\lambda) = \sigma(t_0) + \lambda\sigma'(t_0)$ است.

لذا، معادله خط L مماس بر $\sigma(t) \mapsto t$ در $\sigma(t_0)$ با فرمول $\lambda \mapsto \sigma(t_0) + \lambda\sigma'(t_0)$ داده می‌شود، که در آن پارامتر λ روی اعداد حقیقی تغییر می‌کند (ر.ک. ص ۱۸).

تعریف: فرض کنیم σ یک منحنی C^1 در \mathbb{R}^3 باشد. خط مماس σ در $\sigma(t_0)$ به شکل پارامتری با

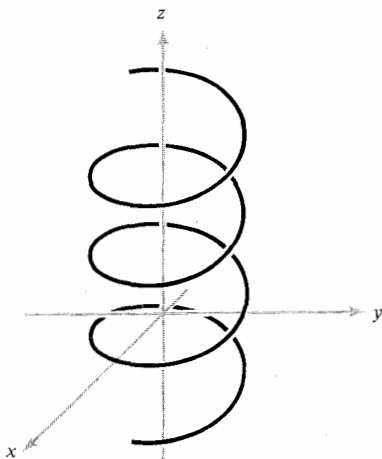
$$l(\lambda) = \sigma(t_0) + \lambda \sigma'(t_0)$$

داده می‌شود!

مثال ۰۵. هرگاه $\sigma: t \mapsto (\cos t, \sin t, t)$ ، آنگاه بردار سرعت عبارت است از $v(t) = \sigma'(t) = (-\sin t, \cos t, 1)$. تندی یک نقطه اندازهٔ سرعت است:

$$S(t) = \|v(t)\| = (\sin^2 t + \cos^2 t + 1)^{1/2} = \sqrt{2}$$

لذا، نقطه با تندی ثابت حرکت می‌کند، اگرچه سرعتش ثابت نیست، زیرا مرتب جهتش تغییر می‌کند. مسیر حرکت نقطه که با σ داده شده یک مارپیچ (مستدیر قائم) نام دارد (ر.ک. شکل ۸.۱.۰۳). مارپیچ بر یک استوانهٔ مستدیر قائم قرار دارد.

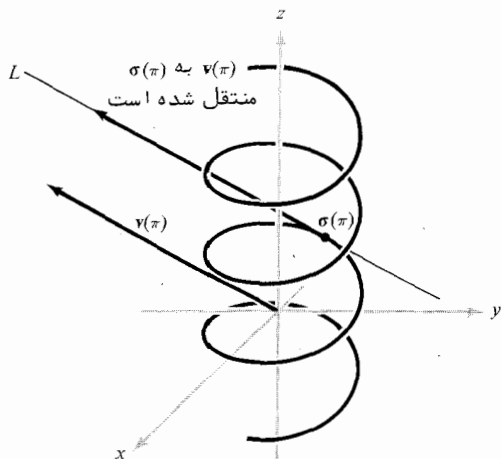


شکل ۸.۱.۰۳

$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t)$ یک مارپیچ مستدیر قائم است.

۰۱. به بیان دقیق، این تعریف فقط وقتی باید به کار رود که $\sigma'(t_0) \neq 0$. برای دیدن دلایل،

مثال ۶. ذره‌ای را در نظر می‌گیریم که بر مسیر توصیف شده در مثال ۵ حرکت می‌کند، که در آن t زمان می‌باشد. در لحظه $t = \pi$ ذره مسیر را ترک کرده و روی مماس بر مسیر حرکت می‌کند (مانند ذرات گل که از چرخ یک دو چرخه جدا می‌شوند). موضع ذره را در لحظه $t = 2\pi$ بیابید. فرض کنید پس از ترک مارپیچ نیرویی بر آن وارد نشود (ر. ک. شکل ۹.۱.۳).



شکل ۹.۱.۳

یافتن بردار سرعت مارپیچ مستدیر راست (ترسیم به اندازه صورت نگرفته است).

برای این کار، توجه می‌کنیم که $v(\pi) = (0, -1, 1)$ ؛ در نتیجه، ذره پس از ترک منحنی اول در امتداد خط L که موازی بردار سرعت $v(\pi) = \sigma'(\pi)$ است حرکت می‌کند. اگر $t \mapsto c(t)$ نمایش مسیر ذره به ازای $t \geq \pi$ باشد، بردار سرعت $c'(t)$ باید ثابت باشد، زیرا ذره پس از ترک منحنی نیرویی را تحمل نمی‌کند. در این صورت، $c'(t) = \sigma'(\pi) = v(\pi) = (0, -1, 1)$ و $c(\pi) = \sigma(\pi) = (-1, 0, \pi)$.

چون $t \mapsto c(t)$ مسیری مستقیم و موازی $v(\pi)$ است، معادله‌اش عبارت است از $w + t(0, -1, 1) = w + t(0, -1, 1)$ ، که در آن w بردار ثابتی می‌باشد. برای یافتن

توجه می‌کنیم که $\mathbf{c}(\pi) = \mathbf{w} + \pi(0, -1, 1) = \boldsymbol{\sigma}(\pi) = (-1, 0, \pi)$ در نتیجه $\mathbf{w} = (-1, 0, \pi) - \pi(0, -1, 1) = (-1, \pi, 0)$ بنا بر این $\mathbf{c}(2\pi) = (-1, \pi, 0) + 2\pi(0, -1, 1) = (-1, -\pi, 2\pi)$

برای یک ذره متحرک روی مسیر $\boldsymbol{\sigma}(t)$ ، طبیعی است میزان تغییر بردار سرعت را شتاب تعریف کنیم. لذا،

$$\mathbf{a}(t) = \boldsymbol{\sigma}''(t) = (x''(t), y''(t), z''(t))$$

اگر ذره‌ای به جرم m در \mathbb{R}^3 حرکت کند، نیروی \mathbf{F} وارد بر آن در نقطه $\boldsymbol{\sigma}(t)$ طبق قانون دوم نیوتن با شتاب مربوط می‌شود:

$$\mathbf{F}(\boldsymbol{\sigma}(t)) = m\mathbf{a}(t)$$

در مسئله جالب تعیین مسیر $\boldsymbol{\sigma}(t)$ یک ذره با جرم m ، موضع اولیه، سرعت، و نیروی معلوم، قانون نیوتن به صورت معادله دیفرانسیلی نسبت به $\boldsymbol{\sigma}(t)$ درمی‌آید، و می‌توان از تکنیکهای معادلات دیفرانسیل برای حل آن استفاده کرد. مثلاً، یک سیاره که در مسیر $\mathbf{r}(t)$ حول خورشید (که در مبدا \mathbb{R}^3 در نظر گرفته می‌شود) حرکت می‌کند از قانون زیر تبعیت می‌کند:

$$m\mathbf{r}''(t) = -\frac{GmM}{\|\mathbf{r}(t)\|^3} \mathbf{r}(t) = -\frac{GmM}{r^3(t)} \mathbf{r}(t)$$

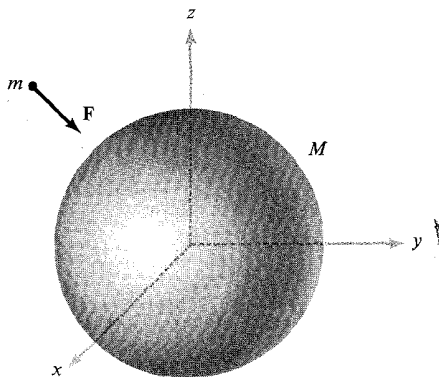
که در آن M جرم خورشید، m جرم سیاره، $r = \|\mathbf{r}\|$ ، و G ثابت ثقلی است. رابطه $\mathbf{F} = -GmM\mathbf{r}/r^3$ برای نیرو قانون ثقلی نیوتن نام دارد (ر.ک. شکل ۱۰.۱.۳). ما در این کتاب این نوع معادلات را بررسی نمی‌کنیم ولی به حالت خاص زیر قناعت خواهیم کرد.

مثال ۷. ذره‌ای را به جرم m در نظر می‌گیریم که در مسیر مستدیری به شعاع r_0 با تندی ثابت S حرکت می‌کند. اگر حرکت را در صفحه xy در نظر بگیریم، می‌توان مؤلفه سوم را حذف کرد و نوشت

$$\mathbf{r}(t) = \left(r_0 \cos\left(\frac{tS}{r_0}\right), r_0 \sin\left(\frac{tS}{r_0}\right) \right)$$

زیرا این دایره‌ای است به شعاع r_0 و $\|\mathbf{r}'(t)\| = S$. در این صورت، می‌توان دید که

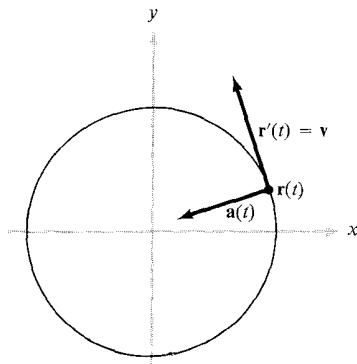
$$\mathbf{a}(t) = \mathbf{r}''(t) = \left(-\frac{S^2}{r_0} \cos\left(\frac{tS}{r_0}\right), -\frac{S^2}{r_0} \sin\left(\frac{tS}{r_0}\right) \right) = -\frac{S^2}{r_0^2} \mathbf{r}(t)$$



شکل ۱۰.۱.۳

اینکه جرم M جرم m را با نیروی F جذب می‌کند
بیان قانون ثقلی نیوتن $F = -GmMr/r^3$ است.

لذا، شتاب در جهتی مخالف $r(t)$ است؛ یعنی، به طرف مرکز دایره است (ر. ک. شکل ۱۱.۱.۳). حاصل ضرب این شتاب در جرم ذره نیروی مرکز گوا نام دارد. توجه کنید، با آنکه تندی ثابت است، جهت سرعت مرتب تغییر می‌کند، و به این دلیل شتاب تولید می‌شود.



شکل ۱۱.۱.۳

موضع یک ذره متحرک با تندی S بر دایره‌ای به شعاع r_0 از معادله

$$r(t) = (r_0 \cos(tS/r_0), r_0 \sin(tS/r_0)),$$

به دست می‌آید و شتابش عبارت است از

$$a(t) = -S^2 r(t)/r_0^2$$

حال فرض کنیم ماهواره‌ای به جرم m با تندی S روی مدار مستدیر به شعاع r_0 حول جسمی به جرم M در مرکز این مدار حرکت کند. در این صورت، طبق قوانین نیوتن،

$$-\frac{S^2 m}{r_0^2} \mathbf{r}(t) = -\frac{GmM}{r_0^3} \mathbf{r}(t)$$

طول بردارهای طرفین این معادله باید مساوی باشند. بنابراین،

$$S^2 = \frac{GM}{r_0}$$

هرگاه T دوره تناوب یک گردش باشد، آنگاه $2\pi r_0/T = S$ ؛ با قرار دادن S در معادله فوق و حل آن نسبت به T ، قاعده زیر به دست می‌آید:

$$T^2 = r_0^3 \frac{(2\pi)^2}{GM}$$

لذا، مربع دوره تناوب با مکعب شعاع متناسب است.

یادداشت تاریخی

مثال ۷ یکی از سه قانون مشهور کپلر^۱ را توضیح می‌دهد، که وی آن را پیش از تنظیم قوانین نیوتن به دست آورد. با آن می‌توان دوره تناوب یک ماهواره با شعاع حرکت معلوم را حساب کرد، و بالعکس. نیوتن از قانون ثقلی خود توانست سه قانون سماوی کپلر را به دست آورد. نظم زیبایی ریاضی جهان که توسط این افراد نموده شد اثری بسیار بر تفکرات قرن هجدهم داشته است.

نیوتن هیچگاه قوانین خود را به صورت معادلات تحلیلی نوشت. این کار اول بار توسط اوپلر حدود ۱۷۵۰ صورت گرفت (ر.ک. سی. تروزدل^۲) نیوتن نتایج خود را (دست کم به صورت منتشر شده) فقط با روشهای هندسی به دست آورد.

ما در رابطه با مسیر دو مفهوم اساسی را تعریف کرده‌ایم: سرعت و شتاب آن. هر دو

1. Kepler

2. C. Truesdell, *Essays in the History of Mechanics*, Springer, New York, 1968.

مفهوم مستلزم حساب دیفرانسیل می‌باشند. مفهوم اساسی طول یک مسیر، که مستلزم حساب انتگرال است، در بخش بعد مطرح می‌شود.

تمرینات

۱. در هر یک از حالات زیر، $\sigma'(t)$ و $\sigma'(0)$ را بیابید.

$$\sigma(t) = (\sin 2\pi t, \cos 2\pi t, 2t - t^2) \quad (\bar{A})$$

$$\sigma(t) = (e^t, \cos t, \sin t) \quad (\bar{B})$$

$$\sigma(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0) \quad (\bar{C})$$

$$\sigma(t) = (\sin 2t, \log(1+t), t) \quad (\bar{D})$$

۲. برای هر منحنی در زیر، بردارهای سرعت و شتاب، و معادله خط مماس در مقدار t داده شده را تعیین نمایید.

$$r(t) = 6ti + 3t^2j + t^3k, t = 0 \quad (\bar{A})$$

$$\sigma(t) = (\sin 3t, \cos 3t, 2t^{3/2}), t = 1 \quad (\bar{B})$$

$$\sigma(t) = (\cos^2 t, 3t - t^3, t), t = 0 \quad (\bar{C})$$

$$\sigma(t) = (0, 0, t), t = 1 \quad (\bar{D})$$

$$\sigma(t) = (t \sin t, t \cos t, \sqrt{3t}), t = 0 \quad (\bar{E})$$

$$r(t) = \sqrt{2}ti + e^tj + e^{-t}k, t = 0 \quad (\bar{J})$$

$$\sigma(t) = ti + tj + \frac{2}{3}t^3k, t = 9 \quad (\bar{C})$$

۳. در تمرین ۲ (\bar{A}) چه نیرویی بر ذره به جرم m در $t = 0$ وارد می‌شود؟

۴. فرض کنید σ مسیری در \mathbb{R}^3 با شتاب صفر باشد. ثابت کنید σ یک خط مستقیم بایک نقطه است.

۵. مسیر σ را طوری بیابید که $\sigma(0) = (0, -5, 1)$ و $\sigma'(t) = (t, e^t, t^2)$.

۶. مسیرهایی را بیابید که نمایش منحنیهای زیر باشند، و آنها را رسم کنید.

$$\{(x, y) \mid y = e^x\} \quad (\bar{A})$$

$$\{(x, y) \mid 4x^2 + y^2 = 1\} \quad (\bar{B})$$

(پ) خط مستقیمی در \mathbb{R}^3 از مبدأ و نقطه (a, b, c) گذشته است.

۷. مدارهای ماهواره‌های 500 کیلومتر بالای زمین به شکل مستدیرند. دوره تناوب آن را

حساب کنید. ($G = 6.67 \times 10^{-11}$)

جرم زمین = 5.98×10^{24} کیلوگرم M ، 6.37×10^3 کیلومتر = شعاع زمین .

G در دستگاه KMS است - کیلوگرم ، متر ، ثانیه .

۸ . فرض کنید ذره‌ای مسیر $(e^t, e^{-t}, \cos t)$ را تعقیب کرده و سپس روی مماس در

$t = 1$ ادامه دهد . ذره در $t = 2$ کجاست ؟

۹ . قواعد زیر را در مورد مسیرهای مشتق‌پذیر (در \mathbb{R}^n یا \mathbb{R}^3) ثابت کنید .

$$\frac{d}{dt} (\sigma(t) \cdot \rho(t)) = \frac{d\sigma}{dt} \cdot \rho(t) + \sigma(t) \cdot \frac{d\rho}{dt} \quad (\bar{\Gamma})$$

$$\frac{d}{dt} (\sigma(t) \times \rho(t)) = \frac{d\sigma}{dt} \times \rho(t) + \sigma(t) \times \frac{d\rho}{dt} \quad (\bar{\Gamma})$$

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \{ \sigma(t) \cdot [\rho(t) \times \tau(t)] \} &= \frac{d\sigma}{dt} \cdot [\rho(t) \times \tau(t)] + \sigma(t) \cdot \left[\frac{d\rho}{dt} \times \tau(t) \right] \\ &+ \sigma(t) \cdot \left[\rho(t) \times \frac{d\tau}{dt} \right] \quad (\bar{\Gamma}) \end{aligned}$$

۱۰ . فرض کنید $\sigma(t)$ یک مسیر ، $v(t)$ سرعت ، و $a(t)$ شتاب باشد . همچنین ، F یک میدان

بردارای بوده ، $m > 0$ ، و $F(\sigma(t)) = ma(t)$ (قانون دوم نیوتن) . ثابت کنید

$$\frac{d}{dt} (m\sigma(t) \times v(t)) = \sigma(t) \times F(\sigma(t))$$

(یعنی ، " لنگر = میزان تغییر گشتاور زاویه‌ای ") . اگر $F(\sigma(t))$ موازی $\sigma(t)$ باشد ،

چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت ؟ آیا در حرکت سیاره‌ها چنین است ؟

۱۱ . با ادامه بررسیهای تمرین ۱۰ ، این قانون کپلر را ثابت کنید که یک سیاره در صفحه

ثابتی حول خورشید حرکت می‌کند .

۲۰۳ طول قوس

مسیر $\sigma(t)$ را در نظر می‌گیریم . می‌توان $\sigma(t)$ را مسیر ذره‌ای با تندی $\|\sigma'(t)\|$ تصور

کرد ؛ این مسیر یک منحنی در فضا رسم می‌کند . طول این منحنی وقتی t مثلا " از a تا b

تغییر کند چقدر است ؟ شهودا " ، این نباید چیزی جز مسافت کل پیموده شده ، یعنی

$$\int_a^b S(t) dt$$
 ، باشد . این امر ما را به تعریف زیر می‌رساند .

تعریف . فرض کنیم $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$ یک مسیر C^1 باشد . طول σ به صورت زیر تعریف

می شود:

$$l(\sigma) = \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt$$

در \mathbb{R}^3 فرمول ما خوانده می شود

$$l(\sigma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

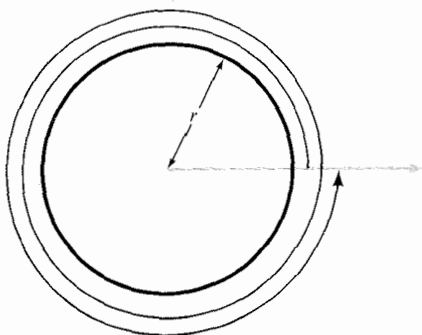
و، برای منحنیها در \mathbb{R}^2 ، فرمول خواهد بود

$$l(\sigma) = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} dt$$

مثال ۱. طول قوس منحنی $\sigma(t) = (r \cos t, r \sin t)$ ، به ازای $0 \leq t \leq 2\pi$ ، مساوی است با

$$l = \int_0^{2\pi} \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt = 2\pi r$$

که چیزی جز محیط یک دایره به شعاع r نیست. اگر فرض می کردیم $0 \leq t \leq 4\pi$ ، $4\pi r$ به دست می آمد، زیرا مسیر همان دایره را دوبار می پیماید (شکل ۱.۲.۳).



شکل ۱.۲.۳

طول قوس دایره‌ای که دوبار پیموده شود $4\pi r$ است.

مثال ۲. طول قوس مارپیچ $\rho: [0, 4\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ، $\rho(t) = (\cos 2t, \sin 2t, \sqrt{5}t)$ ، را بیابید. بردار

سرعت عبارت است از $\mathbf{p}'(t) = (-2 \sin 2t, 2 \cos 2t, \sqrt{5})$ ، که دارای اندازه^۶

$$\|\mathbf{p}'(t)\| = \sqrt{4(\sin 2t)^2 + 4(\cos 2t)^2 + 5} = \sqrt{9} = 3$$

است. بنابراین، طول عبارت است از

$$l(\mathbf{p}) = \int_0^{4\pi} \|\mathbf{p}'(t)\| dt = \int_0^{4\pi} 3 dt = 12\pi$$

مثال ۳. نقطه‌ای با تابع $\sigma: t \mapsto (t - \sin t, 1 - \cos t)$ در نظر می‌گیریم که چرخزاد

مثال ۴، بخش ۱۰۳، را می‌پیماید. بردار سرعت عبارت است از $\sigma'(t) = (1 - \cos t, \sin t)$

و تندی نقطه^۶ $\sigma(t)$ مساوی است با

$$\|\sigma'(t)\| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2 - 2 \cos t}$$

از اینرو، همانطور که قبلاً بحث شد، با آنکه $\sigma(t)$ با تندی متغیر حرکت می‌کند، دایره

با تندی ثابت مسی غلطد. به علاوه، وقتی t مضرب صحیحی از 2π باشد، مقدار

سرعت $\sigma'(t)$ صفر است. به ازای این مقادیر t ، مختص y نقطه^۶ $\sigma(t)$ صفر است. و در نتیجه،

نقطه بر محور x قرار دارد. طول قوس یک دور مساوی است با $l(\sigma) = \int_0^{2\pi} \sqrt{2 - 2 \cos t} dt$

این نمونه‌ای است از فرمول طول قوس که نمی‌توان آن را با روشهای مقدماتی حساب دیفرانسیل

و انتگرال آنتگرالگیری کرد.

اختیاری

(در این بند فرض می‌کنیم با انتگرال معین تعریف شده بر حسب مجموعهای ریمان آشنا

باشید. اگر در این زمینه ضعیف هستید، می‌توانید آن را تا اتمام فصل ۵ به تعویق

اندازید.)

در \mathbb{R}^3 راه دیگری برای توجیه فرمول مذکور در تعریف فوق برای $l(\sigma)$ وجود دارد.

این روش مبتنی است بر تقریبات چندضلعی و به صورت زیر عمل می‌شود. بازه^۶ $[a, b]$ را

به N زیر بازه^۶ متساوی‌الطول افراز می‌کنیم:

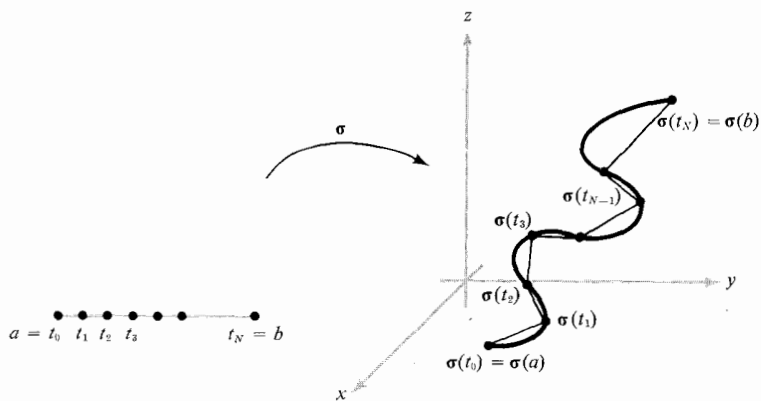
$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

$$t_{i+1} - t_i = \frac{b - a}{N}, \quad 0 \leq i \leq N - 1$$

به ازای

سپس خط چندضلعی حاصل از بهم پیوستن نقاط متوالی $\sigma(t_i), \sigma(t_{i+1})$ با ازای $0 \leq i \leq N - 1$

را در نظر می‌گیریم. با این کار یک تقریب چندضلعی به σ مثل شکل ۲۰.۲.۳ به دست می‌آید.



شکل ۳.۲.۳

نقش مسیر هموار $\sigma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ ، یعنی بتو چرخزاد: "هموار به نظر نمی‌رسد".

از فرمول فاصله در \mathbb{R}^3 نتیجه می‌شود که طول پاره‌خط بین $\sigma(t_i)$ و $\sigma(t_{i+1})$ مساوی است با

$$\|\sigma(t_{i+1}) - \sigma(t_i)\| = \sqrt{(x(t_{i+1}) - x(t_i))^2 + (y(t_{i+1}) - y(t_i))^2 + (z(t_{i+1}) - z(t_i))^2}$$

که در آن $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$. با اعمال قضیه مقدار میانگین در مورد $x(t)$ ، $y(t)$ و $z(t)$ بر $[t_i, t_{i+1}]$ ، سه نقطه t_i^* ، t_i^{**} ، و t_i^{***} به دست می‌آیند به طوری که

$$x(t_{i+1}) - x(t_i) = x'(t_i^*)(t_{i+1} - t_i)$$

$$y(t_{i+1}) - y(t_i) = y'(t_i^{**})(t_{i+1} - t_i)$$

$$z(t_{i+1}) - z(t_i) = z'(t_i^{***})(t_{i+1} - t_i)$$

لذا، طول پاره‌خط بین $\sigma(t_i)$ و $\sigma(t_{i+1})$ مساوی است با

$$\sqrt{(x'(t_i^*))^2 + (y'(t_i^{**}))^2 + (z'(t_i^{***}))^2}(t_{i+1} - t_i)$$

بنابراین، طول خط چندضلعی تقریب ساز برابر است با

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} \sqrt{(x'(t_i^*))^2 + (y'(t_i^{**}))^2 + (z'(t_i^{***}))^2}(t_{i+1} - t_i)$$

وقتی $N \rightarrow \infty$ ، این خط چندضلعی نقش σ را دقیقتر تقریب می‌کند. لذا، طول قوس σ

را مساوی حد دنباله S_N وقتی $N \rightarrow \infty$ ، در صورت وجود، تعریف می‌کنیم. چون مشتقات x' ، y' ، و z' همه بر $[a, b]$ پیوسته فرض شده‌اند، می‌توان نتیجه گرفت که این حد موجود و مساوی

$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \int_a^b \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2 + (z'(t))^2} dt$$

است.

(نظریه انتگرالگیری انتگرال را با فرمول

$$\int_a^b f(t) dt = \lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=0}^{N-1} f(t_i^*)(t_{i+1} - t_i),$$

به مجموعه‌ها ربط می‌دهد، که در آن t_0, \dots, t_N افزای از $[a, b]$ ، $t_i^* \in [t_i, t_{i+1}]$ دلخواه و f تابعی پیوسته است. در اینجا احتمالاً "نقاط مختلف t_i^* ، t_i^{**} ، و t_i^{***} داریم. لذا، باید این فرمول را قدری تعمیم بدهیم.)

نقش یک مسیر C^1 لزوماً "خیلی هموار" نیست؛ در واقع، ممکن است خمیدگی تیز یا تغییر جهت داشته باشیم. مثال، چرخزاد مثال فوق در تمام نقاطی که $\sigma(t)$ با محور x دارای تماس است (یعنی، به ازای $t = 2\pi n$ ، $n = 0, \pm 1, \dots$) نقطه بازگشت دارد. مثال دیگر بتو چرخزاد چهار بازگشتی $\sigma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ، $t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$ ، است که چهار نقطه بازگشت دارد (شکل ۳.۲.۳). اما خطوط مماس در همه نقاطی که $\sigma'(t) = 0$ تعریف شده نیستند، و تندی نقطه $\sigma(t)$ صفر است. واضح است که جهت $\sigma(t)$ در نقاطی که کند شده یا به حال سکون درمی‌آیند ممکن است ناگهان تغییر نماید.

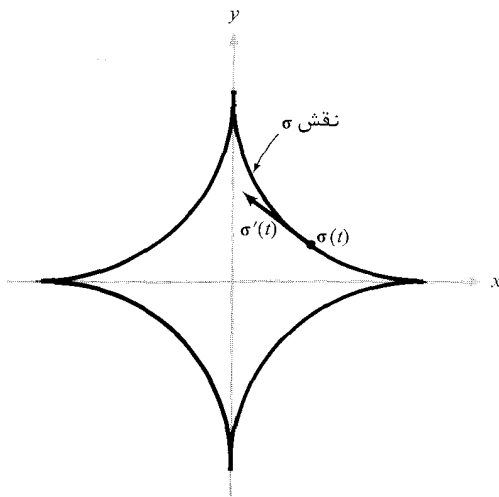
اگر $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ مسیری در \mathbb{R}^3 باشد، گاهی آن را با $s(t) = \sigma(t)$ نشان می‌دهند؛ در نتیجه،

$$\sigma'(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}$$

لذا،

$$\|\sigma'(t)\| = \left\| \frac{ds}{dt} \right\| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2}$$

طول قوس σ را می‌توان با این نماد به صورت زیر نوشت:



شکل ۲۰.۲.۳

مسیر σ را می‌توان با مسیر چند ضلعی حاصل از به هم پیوستن هر $\sigma(t_i)$ به $\sigma(t_{i+1})$ با خطی مستقیم تقریب کرد.

$$l(\sigma) = \int_a^b \|ds/dt\| dt$$

همچنین، معمولاً "تابع طول قوس $s(t)$ را با

$$s(t) = \int_a^t \|\sigma'(\tau)\| d\tau$$

تعریف می‌کنند؛ در نتیجه،

$$s'(t) = \|\sigma'(t)\| = \|ds/dt\|$$

و

$$l(\sigma) = \int_a^b s'(t) dt.$$

مثال ۴. ذره‌ای در امتداد بتوجرخزاد طبق معادلات

$$x = \cos^3 t \quad y = \sin^3 t \quad a \leq t \leq b$$

حرکت می‌کند. بردار سرعت ذره عبارت است از

$$\frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} = -(3 \sin t \cos^2 t) \mathbf{i} + (3 \cos t \sin^2 t) \mathbf{j}$$

و تندی آن مساوی است با

$$S(t) = s'(t) = \left\| \frac{ds}{dt} \right\| = (9 \sin^2 t \cos^4 t + 9 \cos^2 t \sin^4 t)^{1/2} \\ = 3 |\sin t| |\cos t|$$

اگر از بردار سرعت

$$\mathbf{v}(t) = \frac{ds}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}$$

ذره متحرک مشتق بگیریم، همانطور که دیدیم بردار شتاب آن به دست می‌آید. با این نماد، بردار شتاب از فرمول زیر حاصل می‌شود:

$$\mathbf{a}(t) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \mathbf{i} + \frac{d^2y}{dt^2} \mathbf{j} + \frac{d^2z}{dt^2} \mathbf{k}$$

مثال ۵. فرض کنیم $\sigma(t) = (e^t, t^2, \cos t)$. پس بردار شتاب مساوی است با $\mathbf{a}(t) = e^t \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + (\cos t) \mathbf{k}$.

تعریف طول قوس را می‌توان قسمی تعمیم داد که شامل مسیرهایی که C^1 نبوده ولی

از تعداد متناهی مسیر C^1 تشکیل شده‌اند نیز بشود. مسیر $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ، $t \mapsto (x(t), y(t), z(t))$ را قطعه قطعه C^1 نامند اگر افزایی از $[a, b]$ مانند

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

موجود باشد به طوری که تحدید تابع σ به هر بازه $[t_i, t_{i+1}]$ ، $0 \leq i \leq N-1$ ، به طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد. این بدان معنی است که مشتق بر (t_i, t_{i+1}) موجود و بر $[t_i, t_{i+1}]$ پیوسته است. در نقاط انتهایی، مشتق با استفاده از حدود داخل بازه (یعنی، حدود یکطرفه مثل ص ۱۲۷) حساب می‌شوند. در حالتی که مسیر قطعه قطعه C^1 است، طول قوس مسیر مجموع طول قوسهای مسیره‌های C^1 است که آن را می‌سازند. یعنی، اگر افزای

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

در شرایط فوق صدق کند، تعریف می‌کنیم

$$\sigma \text{ (طول قوس)} = \sum_{i=0}^{N-1} (t_{i+1} \text{ تا } t_i)$$

مثال ۶. مسیر $\sigma: [-1, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ، $t \mapsto (|t|, |t - \frac{1}{2}|, 0)$ ، یک مسیر C^1 نیست، زیرا نه

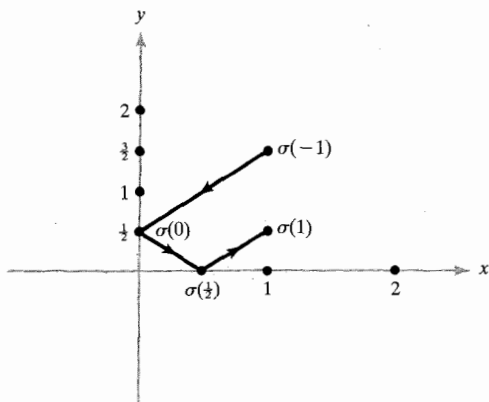
$\sigma_1: t \mapsto |t|$ در 0 مشتقپذیر است نه $\sigma_2: t \mapsto |t - \frac{1}{2}|$ در $\frac{1}{2}$. با اینحال، اگر افراز

$$-1 = t_0 < 0 = t_1 < \frac{1}{2} = t_2 < 1 = t_3$$

را اختیار کنیم، می‌بینیم که هر σ_i بر هر بازه $[\frac{1}{2}, 1]$ ، $[0, \frac{1}{2}]$ ، و $[-1, 0]$ ، به‌طور پیوسته

مشتقپذیر است؛ و لذا، σ بر هر بازه به‌طور پیوسته مشتقپذیر می‌باشد. بنابراین، σ

قطعه قطعه C^1 خواهد بود. (ر. ک. شکل ۴.۲.۳).



شکل ۴.۲.۳

یک مسیر C^1 : $\sigma(t) = |t|\mathbf{i} + |t - \frac{1}{2}|\mathbf{j}$ ، $-1 \leq t \leq 1$

بر $[-1, 0]$ داریم $\|ds/dt\| = \sqrt{2}$ ، $x(t) = -t$ ، $y(t) = -t + \frac{1}{2}$ ، $z(t) = 0$ ؛ در

نتیجه، طول قوس σ بین -1 و 0 مساوی است با $\int_{-1}^0 \sqrt{2} dt = \sqrt{2}$. به همین نحو، بر $[0, \frac{1}{2}]$ ،

و مجدداً $\|ds/dt\| = \sqrt{2}$ ؛ در نتیجه، طول

قوس σ بین 0 و $\frac{1}{2}$ مساوی است با $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. بالاخره، بر $[\frac{1}{2}, 1]$ داریم $x(t) = t$ ، $y(t) = t - \frac{1}{2}$ ، $z(t) = 0$ ؛ در نتیجه، طول

$z(t) = 0$ ، و طول قوس σ بین $\frac{1}{2}$ و ۱ خواهد بود $\frac{1}{2}\sqrt{2}$. لذا، کل طول قوس σ برابر $2\sqrt{2}$ می‌باشد.

تمرینات

۱. طول قوس منحنی داده شده را بر بازه ذکر شده حساب کنید.^۱

(آ) مسیر تمرین ۲ (آ)، بخش ۱۰.۳، $[0, 1]$

(ب) مسیر تمرین ۲ (ب)، بخش ۱۰.۳، $[0, 1]$

(پ) $s(t) = t\mathbf{i} + t(\sin t)\mathbf{j} + t(\cos t)\mathbf{k}$ ، $[0, \pi]$

(ت) $s(t) = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$ ، $[0, 2]$

(ث) مسیر تمرین ۲ (ث)، بخش ۱۰.۳، $[0, 1]$

(ج) مسیر تمرین ۲ (ج)، بخش ۱۰.۳، $[-1, 1]$

(چ) مسیر تمرین ۲ (چ)، بخش ۱۰.۳، $[t_0, t_1]$

۲. تابع طول قوس $s(t)$ برای مسیر $\sigma(t)$ ، که با $s(t) = \int_a^t \|\sigma'(\tau)\| d\tau$ تعریف می‌شود، نمایش

فاصله ذره‌ای است که از لحظه a شروع به حرکت کرده و مسیر σ را در زمان t پیموده

است. یعنی، طول σ بین $\sigma(a)$ و $\sigma(t)$. توابع طول قوس منحنیهای $(\cosh t, \sinh t, t)$

و $\beta(t) = (\cos t, \sin t, t)$ را به ازای $a = 0$ پیدا نمایید.

۳. فرض کنید σ مسیر $\sigma(t) = (2t, t^2, \log t)$ باشد که به ازای $t > 0$ تعریف شده است. طول

قوس σ بین نقاط $(2, 1, 0)$ و $(4, 4, \log 2)$ را بیابید.

۴. فرض کنید ذره‌ای که مسیر $\sigma(t) = (t^2, t^3 - 4t, 0)$ را تعقیب می‌کند روی مماس در $t = 2$

به پرواز درمی‌آید. موضع ذره را در $t = 3$ حساب کنید.

۵. فرض کنید $c(t)$ ، $a \leq t \leq b$ ، یک مسیر باشد. همچنین، $s = \alpha(t)$ متغیر جدیدی

باشد، که در آن α یک تابع C^1 اکیدا صعودی بر $[a, b]$ است. به ازای هر s در

$[x(a), x(b)]$ یک t منحصر به فرد وجود دارد که $\alpha(t) = s$. تابع $d: [x(a), x(b)] \rightarrow \mathbb{R}^3$

۱. در بعضی از این مسائل می‌توان از فرمول

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2}(x\sqrt{x^2 + a^2} + a^2 \log(x + \sqrt{x^2 + a^2})) + C$$

که در جدول انتگرالهای آخر کتاب آمده استفاده کرد.

را با $d(s) = c(t)$ تعریف کنید .

(\bar{T}) ثابت کنید منحنیهای نقش c و d یکسانند .

(ب) نشان دهید که c و d طول قوس مساوی دارند .

(پ) فرض کنید $s = \alpha(t) = \int_a^t \|c'(\tau)\| d\tau$. d را مثل فوق با $d(s) = c(t)$ تعریف کنید .

نشان دهید که

$$\left\| \frac{d}{ds} d(s) \right\| = 1.$$

مسیر $s \mapsto d(s)$ پارامتری‌سازی مجدد c نام دارد .

تمرینهای ۶ تا ۱۱ در باب هندسهٔ دیفرانسیل کلاسیک منحنیها می‌باشند .

۶. فرض کنید $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$. یک مسیر بی‌نهایت بار مشتقپذیر باشد (مشتقات از هر مرتبه وجود دارند) . همچنین ، به‌ازای هر t ، $\sigma'(t) \neq 0$. بردار $T(t) = \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|}$ در $\sigma(t)$ بر σ مماس است ، و چون $\|T(t)\| = 1$ ، مماس یکه بر σ نامیده می‌شود .

(\bar{T}) نشان دهید که $T'(t) \cdot T(t) = 0$. (راهنمایی : از $T(t) \cdot T(t) = 1$ مشتق بگیرید) .

(ب) برای $T'(t)$ فرمول بنویسید .

۷. (\bar{T}) گوئیم $\sigma(s)$ به وسیلهٔ طول قوس پارامتری شده است یا ، به عبارت معادل ، دارای

تندی یکه است اگر $\|\sigma'(s)\| = 1$. نشان دهید که برای یک مسیر پارامتری شده به

وسیلهٔ طول قوس بر $[a, b]$ داریم $l(\sigma) = b - a$.

(ب) انحنا در نقطهٔ $\sigma(s)$ بر یک مسیر پارامتری شده به وسیلهٔ طول قوس با $k = \|T'(s)\|$ تعریف می‌شود (ر. ک. تمرینهای ۶ و ۷ (\bar{T}) . نشان دهید که $k = \|\sigma''(s)\|$.

(پ) اگر σ بر حسب پارامتر دیگر t داده شده باشد و $\sigma(t)$ هیچگاه ۰ نشود ، با استفاده

از تمرین ۵ نشان دهید که $k = \|\sigma'(t) \times \sigma''(t)\| / \|\sigma'(t)\|^3$.

(ت) انحنا ی ماریچ $\sigma(t) = (1, \sqrt{2}(\cos t, \sin t, t))$ را حساب کنید . (این σ چیزی جز

مضرب اسکالری از ماریچ مستدیر قائم شکل ۸.۱.۳ نیست) .

۸. اگر $T(t) \neq 0$ ، از تمرین ۶ معلوم می‌شود که $N(t) = T'(t) / \|T'(t)\|$ قائم (یعنی، عمود)

به σ است . N بردار قائم اصلی نام دارد . B بردار یکهٔ سوم عمود بر T و N تعریف

شده با $B = T \times N$ بردار قائم دوم نام دارد . N ، T ، و B باهم یک دستگاه راست

دست از بردارهای دو به دو متعامد تشکیل می‌دهند که می‌توان آن را در امتداد مسیر

متحرک گرفت .

(آ) نشان دهید که $\frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{B} = 0$

(ب) نشان دهید که $\frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{T} = 0$

(پ) نشان دهید که $\frac{d\mathbf{B}}{dt}$ مضرب اسکالری از \mathbf{N} است.

۹. اگر $\sigma(s)$ با طول قوس پارامتری شده باشد، تابع اسکالر τ را با استفاده از تمرین ۸ (پ) چنین تعریف می‌کنیم:

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = -\tau\mathbf{N}$$

و آن را ثابت می‌نامیم.

(آ) نشان دهید که $\tau = [\sigma'(s) \times \sigma''(s)] \cdot \sigma'''(s) / \|\sigma'(s)\|^2$

(ب) نشان دهید که اگر σ بر حسب پارامتر دیگر داده شده باشد،

$$\tau = \frac{[\sigma'(t) \times \sigma''(t)] \cdot \sigma'''(t)}{\|\sigma'(t) \times \sigma''(t)\|^2}$$

این را با ۷ (پ) مقایسه نمایید.

(پ) تاب ماریچ $\sigma(t) = (1/\sqrt{2})(\cos t, \sin t, t)$ را محاسبه کنید.

*۱۰. نشان دهید که اگر مسیر در صفحه باشد، تاب صفر می‌باشد. این مطلب را با اثبات اینکه \mathbf{B} ثابت بوده و بر صفحه‌ای که σ در آن است عمود است ثابت نمایید. (اگر

تاب صفر نباشد، تاب سرعت برخاستن منحنی از صفحه \mathbf{T} و \mathbf{N} را می‌سنجد.)

۱۱. با استفاده از تمرینهای ۸ و ۹، فرمولهای فرته^۱ زیر را برای یک منحنی تند یکه ثابت کنید:

$$\frac{dT}{ds} = k\mathbf{N}; \quad \frac{dN}{ds} = -k\mathbf{T} + \tau\mathbf{B}; \quad \frac{dB}{ds} = -\tau\mathbf{N}$$

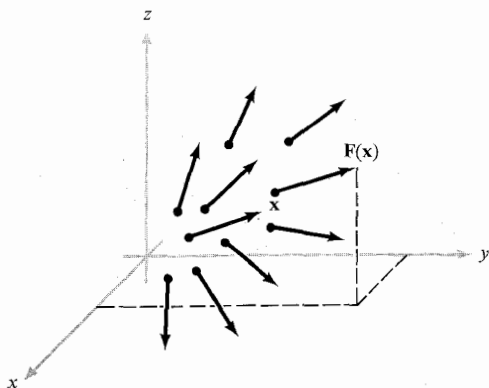
۳.۳ میدانهای برداری

۲ فصل ۲ میدانهای برداری را با ایده میدان برداری گرادینان معرفی کردیم. در این

بخش می‌خواهیم خواص کلیتر میدانهای برداری، از جمله اهمیت هندسی و فیزیکی آنها، را بررسی نماییم. درک روشنی از این امر برای بخشهای ۴.۳ و ۵.۳ و فصل ۷ اهمیت خواهد داشت.

تعریف. یک میدان برداری بر \mathbb{R}^n نگاشتی است چون $F: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ که به هر نقطه x در قلمرو A ی آن بردار $F(x)$ را نسبت می‌دهد.

F را می‌توان به‌طور هندسی رسم کرد به این نحو که به هر نقطه یک سهم متصل نمود (شکل ۱.۳.۳). به همین ترتیب، نگاشت $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ که به هر نقطه عددی



شکل ۱.۳.۳

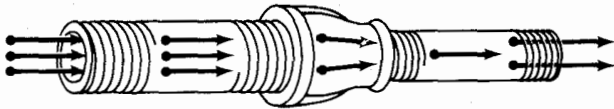
میدان برداری F به هر نقطه x از قلمروش بردار (یا سهم) $F(x)$ را نسبت می‌دهد.

نسبت می‌دهد یک میدان اسکالر نام دارد. مثلاً، میدان برداری $F(x, y, z)$ بر \mathbb{R}^3 دارای سه میدان اسکالر مؤلفه F_1 ، F_2 ، و F_3 است؛ در نتیجه، $F(x, y, z) = (F_1(x, y, z), F_2(x, y, z), F_3(x, y, z))$.

مناسب و کاملاً طبیعی است که سهم نمایش $F(x)$ را طوری بکشیم که پایش به جای مبدا (که برای رسم بردارها به کار می‌رود) در x باشد. ما این بردار جابجا شده با پای

x و بردار نظیر با پای 0 را معادل می‌گیریم. تا پایان کتاب عمدتاً "با میدانهای برداری \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 سروکار خواهیم داشت. در نتیجه، میدان برداری بر \mathbb{R}^2 یا \mathbb{R}^3 است مگر خلافتش تصریح شود.

مثال ۰۱. فرض کنیم یک سیال در لوله‌ای شارش یکنواخت دارد. اگر به هر نقطه سرعت سیال در آن نقطه وصل شود، میدان سرعت v مایع به دست می‌آید (ر.ک. شکل ۲۰۳.۳).



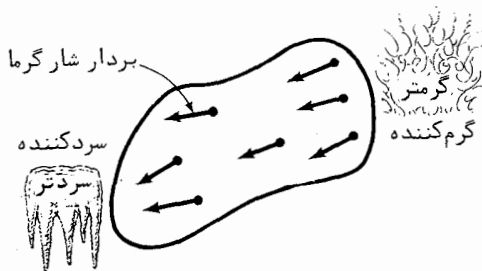
شکل ۲۰۳.۳

میدان برداری توصیف‌کنندهٔ سرعت شارش در یک لوله

توجه کنید که طول سهمها (تندی)، و همچنین جهت شارش، می‌تواند از یک نقطه به نقطهٔ دیگر تغییر نماید.

مثال ۰۲. یک قطعه فلز از یک طرف گرم و از طرف دیگر سرد می‌شود. دما در هر نقطهٔ داخل جسم یک میدان اسکالر مانند $T(x, y, z)$ است.

شارش واقعی گرما را می‌توان با میدانی از سهمها نشان داد که جهت و اندازهٔ شارش را نشان می‌دهند (شکل ۳۰۳.۳). این میدان برداری شار انرژی با $\mathbf{J} = -k \nabla T$ داده



شکل ۳۰۳.۳

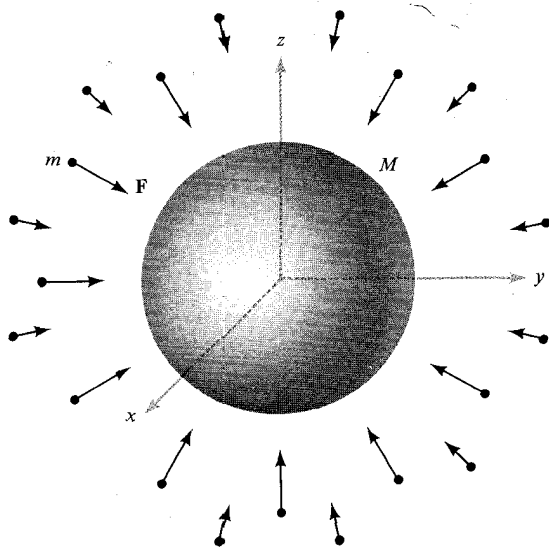
میدان برداری توصیف‌کنندهٔ جهت و اندازهٔ شارش گرما.

می‌شود، که در آن ثابت $k > 0$ ضریب هدایت نام داشته و ∇T گرادیان تابع حقیقی T می‌باشد. توجه کنید که گرما، چنانکه باید، از نواحی گرم به نواحی سرد شارش می‌یابد، زیرا $-\nabla T$ در جهت نزول T می‌باشد (ر.ک. بخش ۵.۲).

مثال ۳. نیروی جاذبه زمین به جرم m را می‌توان با یک میدان برداری بر \mathbb{R}^3 ، یعنی میدان نیروی ثقلی، توصیف کرد. بنابر قانون نیوتن، این میدان با (ر.ک. بخشهای ۵.۲ و ۱.۳)

$$\mathbf{F} = -\frac{mMG}{r^3} \mathbf{r}$$

داده می‌شود، که در آن $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ و $r = \|\mathbf{r}\|$ (ر.ک. شکل ۴.۳.۳). همانطور که قبلاً دیدیم (مثال ۵، بخش ۵.۲)، \mathbf{F} عملاً "یک میدان گرادیان است، $\mathbf{F} = -\nabla V$



شکل ۴.۳.۳

میدان برداری \mathbf{F} داده شده با قانون ثقلی نیوتن

که در آن $V = -(mMG)/r$. مجدداً توجه کنید که \mathbf{F} در جهت کاهش V است. با

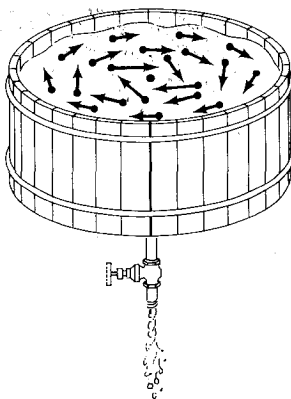
نوشتن F بر حسب مؤلفه‌ها، می‌بینیم که

$$F(x, y, z) = \left(\frac{-mMG}{r^3} x, \frac{-mMG}{r^3} y, \frac{-mMG}{r^3} z \right)$$

مثال ۴. در صفحه، یعنی \mathbb{R}^2 ، تابع $V: \mathbb{R}^2 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}^2$ تعریف شده با

$$V(x, y) = \frac{y\mathbf{i}}{x^2 + y^2} - \frac{x\mathbf{j}}{x^2 + y^2} = \left(\frac{y}{x^2 + y^2}, -\frac{x}{x^2 + y^2} \right)$$

یک میدان برداری بر \mathbb{R}^2 است. این میدان سرعتی است که میدان سرعت آب در حرکت دورانی "مثلاً" وقتی تویی یک لوله آب برداشته می‌شود، را تقریب می‌کند (شکل ۵.۳.۳).



شکل ۵.۳.۳

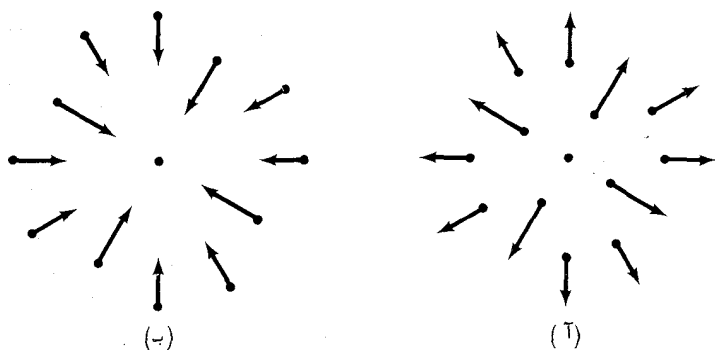
میدان برداری توصیف‌کننده شارش دورانی در یک لوله

مثال ۵. بنا بر قانون کولن^۱، نیروی وارد بر بار e در r از سوی بار Q در مبدا مساوی است با

1. Coulomb

$$\mathbf{F} = \frac{\varepsilon Qe}{r^3} \mathbf{r} = -\nabla V$$

که در آن $V = \varepsilon Qe/r$ ثابتی است که به واحدهای به کار رفته بستگی دارد. به ازای $Qe > 0$ (بارهای مشابه)، نیرو دافعه است (شکل ۶.۳.۳ (آ)) و به ازای $Qe < 0$ (بارهای غیر مشابه)، نیرو جاذبه می‌باشد (شکل ۶.۳.۳ (ب)). در این مثال، همچون



شکل ۶.۳.۳

میدانهای برداری مربوط به (آ) بارهای مشابه ($Qe > 0$) و

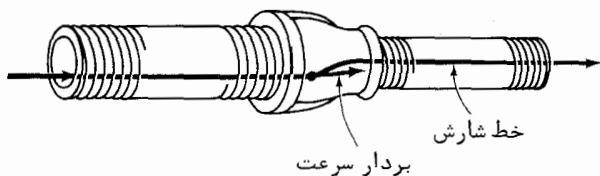
(ب) بارهای غیر مشابه ($Qe < 0$)

مثال ۳. سطوح تراز V سطوح همپتانسیل نام دارد، زیرا پتانسیل V روی آنها ثابت است. توجه کنید که میدان نیرو بر سطوح همپتانسیل عمود است (میدان نیرو شعاعی و سطوح همپتانسیل کره می‌باشند). این با نتیجه کلی در بخش ۵.۲ سازگار است. در حالت گرادیانهای دما که $\mathbf{F} = -k \nabla T$ ، سطوح با T ثابت همگرماها نامیده می‌شوند.

به طور کلی، هر میدان برداری لزوماً "یک میدان گرادیان نیست؛ یعنی، یک میدان برداری لازم نیست گرادیان یک تابع حقیقی باشد. این امر در فصول بعدی روشنتر خواهد شد. لذا، مفهوم سطح همپتانسیل فقط وقتی معنی دارد که میدان برداری یک میدان گرادیان باشد.

مفهوم مهم دیگر مفهوم خط شارش است. این ایده در مثال ۱ به ساده‌ترین وجه

قابل تجسم است. در آن حال، هر خط شارش چیزی جز مسیر یک ذره کوچک در مایع نیست (شکل ۷.۳.۳). این خطوط خطوط جریان یا منحنیهای انتگرال نیز نامیده



شکل ۷.۳.۳

بردار سرعت یک مایع بر خط شارش مماس است.

می‌شوند.

تعریف. اگر F یک میدان برداری باشد، یک خط شارش برای F مسیری است مانند $\sigma(t)$ به طوری که

$$(1) \quad \sigma'(t) = F(\sigma(t))$$

یعنی، F میدان سرعت مسیر $\sigma(t)$ را به دست می‌دهد.

به‌طور هندسی، مسئله یافتن خط جریان ماربر نقطه x_0 برای میدان برداری F رسم یک منحنی در میدان برداری است به نحوی که بردار مماس منحنی با میدان برداری یکی باشد، مثل شکل ۸.۳.۳

به‌طور تحلیلی، مسئله یافتن خط شارش ماربر نقطه x_0 در لحظه $t = 0$ مستلزم حل معادله دیفرانسیل (۱) با شرط اولیه x_0 است؛ یعنی،

$$\sigma'(t) = F(\sigma(t)); \quad \sigma(0) = x_0$$

معادله فوق را می‌توان با استفاده از مختصات (x, y, z) به صورت معادلات همزمان

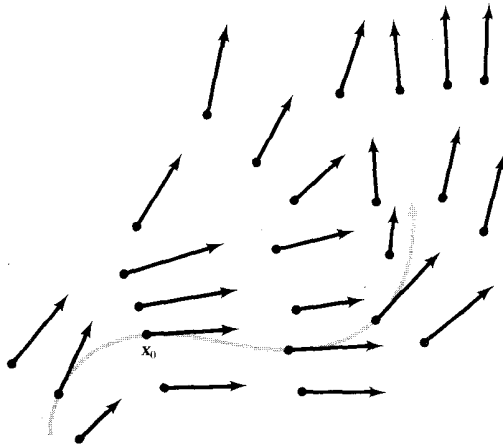
$$x'(t) = F_1(x(t), y(t), z(t))$$

$$y'(t) = F_2(x(t), y(t), z(t))$$

$$z'(t) = F_3(x(t), y(t), z(t))$$

با شرایط اولیه^۵

$$(x(0), y(0), z(0)) = (x_0, y_0, z_0)$$



شکل ۸.۳.۳

خط شارش در یک میدان برداری در صفحه

نوشت، که در آنها $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ در درس معادلات دیفرانسیل ثابت شده است که اگر F, C^1 باشد، به ازای هر x_0 جواب منحصر به فردی (که لزوماً به ازای هر t تعریف نشده است) وجود دارد.

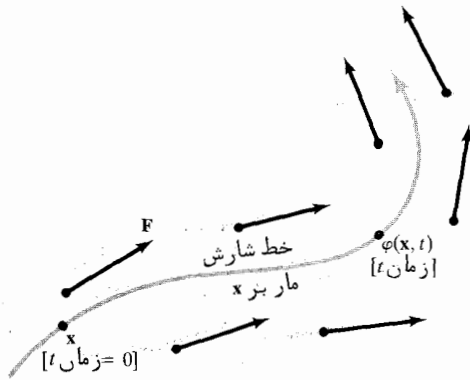
اختیاری

شارش میدانهای برداری

لازم است برای جواب منحصر به فرد مار بر یک نقطه در لحظه $t=0$ نماد خاص داشته باشیم؛ این نماد در مطالب اختیاری بخش بعد به کار خواهد رفت. قرار می‌دهیم

$$\phi(x, t) = \begin{cases} \text{موضع نقطه بر خط شارش} \\ \text{مار بر } x \text{ پس از گذشت زمان } t \end{cases}$$

لذا، با x به عنوان شرط اولیه، سیال در امتداد خط شارش تا موضع جدید $\phi(x, t)$ به مدت t جریان می‌یابد (ر.ک. شکل ۹.۳.۳). $\phi(x, t)$ به‌طور تحلیلی با



شکل ۳.۳: ۹۰

تعریف شارش $\phi(x, t)$ از F

$$(۲) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) &= F(\phi(x, t)) \\ \phi(x, 0) &= x \end{aligned} \right\}$$

تعریف می‌شود. نگاشت ϕ را، که تابعی از متغیرهای x و t در نظر گرفته می‌شود، شارش F می‌نامیم.

فرض کنیم D_x مشتگیری نسبت به x ، با ثابت گرفتن t ، باشد. در درس معادلات دیفرانسیل ثابت شده است که ϕ تابع مشتق‌پذیری از x است. لذا، با مشتق‌گیری از (۲) نسبت به x ، داریم

$$D_x \frac{\partial}{\partial t} \phi(x, t) = D_x [F(\phi(x, t))]$$

با استفاده از تساوی مشتقات جزئی مخلوط در طرف چپ این معادله و قاعده زنجیره‌ای در طرف راست، به دست می‌آوریم

$$(۳) \quad \frac{\partial}{\partial t} D_x \phi(x, t) = D_x F(\phi(x, t)) \cdot D_x \phi(x, t)$$

این معادله، که یک معادله دیفرانسیل خطی نسبت به $D_x \phi(x, t)$ است، معادله تغییراویل

نام دارد. این معادله در بحث دیورژانس و کرل بخش بعد مفید خواهد بود. توجه کنید که، در فضا، هر دوی $D_x \phi$ و $D_x F(\phi)$ ماتریسهای 3×3 اند، زیرا مقادیر F و ϕ در \mathbb{R}^3 اند و نسبت به $x \in \mathbb{R}^3$ مشتقگیری شده‌اند. به همین نحو، برای میدانهای برداری در صفحه، اینها ماتریسهای 2×2 می‌باشند.

تمرینات

۱. فرض کنید ذره‌ای به جرم m بر مسیر $r(t)$ در میدان نیروی $F = -\nabla V$ بر \mathbb{R}^3 طبق قانون نیوتن در حرکت باشد.

(\bar{T}) ثابت کنید انرژی $E = \frac{1}{2}m\|r'(t)\|^2 + V(r(t))$ نسبت به زمان ثابت است. (راهنمایی: مشتقگیری dE/dt را انجام دهید.)

(ب) اگر ذره بر یک سطح همپتانسیل حرکت کند، نشان دهید که تندی آن ثابت است.

۲. چند خط شارش میدانهای برداری زیر را رسم نمایید.

$$F(x, y) = (y, -x) \quad (\bar{T})$$

$$F(x, y) = (x, -y) \quad (\bar{B})$$

$$F(x, y) = (x, x^2) \quad (\bar{P})$$

۳. فرض کنید $c(t)$ یک خط شارش میدان گرادیان $F = -\nabla V$ باشد. ثابت کنید $V(c(t))$ تابعی نزولی از t است. توضیح دهید.

۴. میدان گرادیان $-\nabla V$ را برای $V(x, y) = (x + y)/(x^2 + y^2)$ رسم کنید. سطح همپتانسیل $V = 1$ را رسم نمایید.

۵. فرض کنید همگرماها در یک ناحیه تمام کرات متحدالمرکز به مرکز مبدا باشند. ثابت کنید میدان برداری شار انرژی یا به طرف مبدا است یا از مبدا به خارج می‌باشد.

۶* (\bar{A}) با فرض یکنایی خطوط شارش مار بر یک نقطه در لحظه‌ای معلوم، خاصیت زیر از شارش $\phi(x, t)$ میدان برداری F را ثابت کنید:

$$\phi(x, t + s) = \phi(\phi(x, s), t)$$

(ب) خاصیت نظیر برای $D_x \phi$ چیست؟

۷* اگر $f(x, t)$ تابعی حقیقی از x و t باشد، مشتق ماده‌ای f نسبت به میدان برداری F را به صورت زیر تعریف کنید:

$$\frac{Df}{Dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + \mathbf{V}f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{F}$$

نشان دهید که Df/Dt ، t -مشتق $f(\phi(\mathbf{x}, t), t)$ است (یعنی، t -مشتق f به وسیله شارش \mathbf{F} نقل و انتقال می‌یابد).

۴.۳ دیورژانس و کرل یک میدان برداری

در این بخش به دو عمل اساسی می‌پردازیم که بر میدانهای برداری C^1 اعمال می‌شوند. ابتدا کرل یک میدان برداری را در نظر می‌گیریم. این عمل به هر میدان برداری بر \mathbb{R}^3 مانند $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k} = (F_1, F_2, F_3)$ میدان برداری $\text{curl } \mathbf{F}$ را مربوط می‌کند که با

$$(1) \quad \text{curl } \mathbf{F} = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

تعریف می‌شود.

چنانچه این فرمول طویل را با استفاده از نماد "عملگر" بنویسیم به یاد آوردنش بسیار آسانتر است. علامت "دل" را به‌طور صوری معرفی می‌کنیم:

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z},$$

∇ یک عملگر است؛ یعنی، وقتی معنی دارد که بر توابع حقیقی اثر یا عمل کند. به‌طور مشخص، ∇f ، یعنی عمل ∇ بر f ، عبارت است از

$$(2) \quad \nabla f = \mathbf{i} \frac{\partial f}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial f}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial f}{\partial z}.$$

یعنی، گرادیان f . این نماد صوری نماد بسیار مفیدی است؛ هرگاه ∇ را برداری بامؤلفه‌های $\partial/\partial x$ ، $\partial/\partial y$ ، $\partial/\partial z$ در نظر بگیریم، آنگاه می‌توان حاصل ضرب خارجی صوری

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_1 & F_2 & F_3 \end{vmatrix}$$

$$= \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

$$= \text{curl } \mathbf{F}$$

را تشکیل داد. لذا، $\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F}$ ، و ما اغلب از عبارت اخیر استفاده خواهیم کرد.

مثال ۱. فرض کنیم $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + xy\mathbf{j} + \mathbf{k}$. مطلوب است $\nabla \times \mathbf{F}$. داریم

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & xy & 1 \end{vmatrix} = (0 - 0)\mathbf{i} - (0 - 0)\mathbf{j} + (y - 0)\mathbf{k}$$

بنابراین، $\nabla \times \mathbf{F} = y\mathbf{k}$.

قضیه زیر خاصیتی اساسی از کرل را بازگو می‌کند. آن را با این مطلب که به‌ازای هر بردار \mathbf{v} ، $\mathbf{v} \times \mathbf{v} = \mathbf{0}$ مقایسه نمایید.

قضیه ۱. به‌ازای هر تابع C^2 مانند f ، داریم

$$\nabla \times (\nabla f) = \mathbf{0}$$

یعنی، کرل هر گرادیان بردار صفر است.

برهان. مؤلفه‌های $\nabla \times (\nabla f)$ را می‌نویسیم. چون $\nabla f = (\partial f / \partial x, \partial f / \partial y, \partial f / \partial z)$ ، طبق تعریف داریم

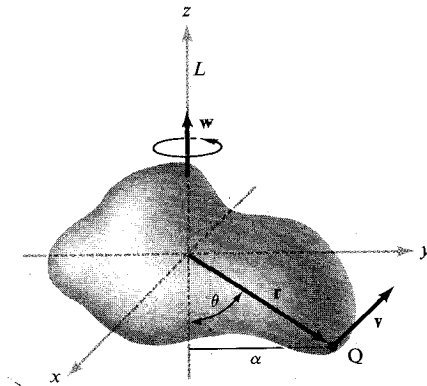
$$\nabla \times \nabla f = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} & \frac{\partial f}{\partial z} \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) \mathbf{j}$$

$$+ \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \right) \mathbf{k}$$

هر مؤلفه به خاطر خاصیت تقارن مشتقات جزئی مخلوط صفر است؛ لذا، نتیجه مطلوب حاصل می‌باشد.

اهمیت فیزیکی کامل کرل ذیلا" و نیز در فصل ۷، وقتی قضیه استوکس^۱ مطالعه می شود، مورد بحث قرار خواهد گرفت. اما اینک به وضع ساده ای می پردازیم که ارتباط کرل با دورانیها را نشان می دهد.

مثال ۲. فرض کنیم جسم جامد B حول محور L دوران می کند. حرکت دورانی جسم را می توان کاملاً با بردار w در امتداد محور دوران توصیف کرد که جهتش طوری اختیار شده است که جسم حول w مثل شکل ۱۰۴.۳ دوران می کند. به علاوه، طول $\omega = \|w\|$ را تندی زاویه ای جسم B می گیریم؛ یعنی، تندی مماسی یک نقطه در B بخش بر فاصله اش تا محور



شکل ۱۰۴.۳

سرعت v و سرعت زاویه ای w جسم دوار با $v = w \times r$ به هم مربوطند.

دوران L .

همچنین، فرض کنیم دستگاه مختصاتی اختیار کرده باشیم که L محور z باشد. فرض کنیم Q نقطه ای در B بوده و α فاصله Q تا L باشد. واضح است که

$$\alpha = \|r\| \sin \theta$$

که در آن r برداری است که نقطه شروعش مبدأ و نقطه پایانش Q می باشد. در این

صورت ، سرعت مماسی v ی Q در جهت خلاف عقربه ساعت در امتداد مماس بردایره‌ای موازی صفحه xy و به شعاع x است . اندازه v این سرعت مساوی است با

$$\|v\| = \omega x = \omega \|r\| \sin \theta = \|w\| \|r\| \sin \theta$$

دیدیم (ص ۴۱) که جهت و اندازه v ایجاب می‌کنند که

$$v = w \times r$$

به خاطر انتخاب ما از محورها ، می‌توان نوشت $w = \omega k, r = xi + yj + zk$. در نتیجه،

$$v = w \times r = -\omega yi + \omega xj$$

و ، به علاوه ،

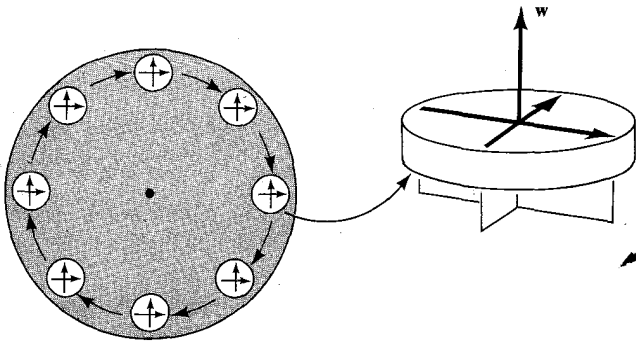
$$\operatorname{curl} v = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ -\omega y & \omega x & 0 \end{vmatrix} = 2\omega k = 2w$$

لذا ، در دوران یک جسم صلب ، کرل میدان بردار سرعت میدانی برداری است در جهت محور دوران و با اندازه‌های دوبرابر تندی زاویه‌ای .

هرگاه میدان برداری F شارش یک‌سیال را نمایش دهد (ر.ک. مثال ۱ ، بخش ۳.۳) ، آنگاه $\operatorname{curl} F = 0$ در P به معنی فیزیکی یعنی مایع در P فارغ از دوران است یا در P غیر دورانی است ؛ یعنی ، گرداب ندارد . توجیه این ایده و ، لذا ، استفاده از واژه غیردورانی به قضیه استوکس یا بحث (اختیاری) زیر بستگی دارد . اما به طور غیرصوری می‌توان گفت که $\operatorname{curl} F = 0$ یعنی اگر یک چرخ پاروی کوچک درسپال بگذاریم ، چرخ باسیال حرکت می‌کند ولی حول محورش نمی‌چرخد . مثلاً ، با آزمایش معلوم شده است که سیال کشیده شده از یک لوله معمولاً غیردورانی است جز در مرکز ، حتی اگر مایع حول لوله " دوران کند " (ر.ک. شکل ۲.۴.۳) . لذا ، خواننده باید متوجه باشد که واژه " غیر دورانی " ممکن است ابهام ایجاد نماید حال به چند نمونه از میدانهای دورانی و غیر دورانی می‌پردازیم .

مثال ۳ . تحقیق می‌کنیم که میدان برداری مثال ۴ ، بخش ۳.۳ ، در هر نقطه $(x, y) \neq (0, 0)$ غیردورانی است . در واقع ،

$$\begin{aligned} \nabla \cdot \mathbf{V} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ \frac{y}{x^2 + y^2} & \frac{-x}{x^2 + y^2} & 0 \end{vmatrix} \\ &= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + \left(\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{-x}{x^2 + y^2} \right) - \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{y}{x^2 + y^2} \right) \right) \mathbf{k} \\ &= \left(\frac{-(x^2 + y^2) + 2x^2}{(x^2 + y^2)^2} + \frac{-(x^2 + y^2) + 2y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right) \mathbf{k} \\ &= \mathbf{0} \end{aligned}$$



شکل ۲.۴.۳

میدان سرعت $\mathbf{V}(x, y, z) = (y\mathbf{i} - x\mathbf{j})/(x^2 + y^2)$ غیر دورانی است؛

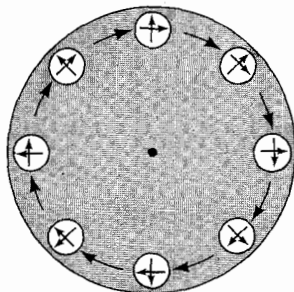
یک میدان "چرخ پارو" ی کوچک متحرک در مایع حول

محورش w دوران می‌کند.

مثال ۴. فرض کنید $\mathbf{V}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$. نشان دهید \mathbf{V} یک میدان گرادیان نیست. در واقع، هرگاه \mathbf{V} میدان گرادیان می‌بود، آنگاه طبق قضیه ۱۶ می‌داشتیم $\text{curl } \mathbf{V} = \mathbf{0}$ ، ولی

$$\text{curl } \mathbf{V} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & -x & 0 \end{vmatrix} = -2\mathbf{k} \neq \mathbf{0}$$

خطوط شارش برای این میدان برداری، درست مثل مثال ۳، دوایری حول مبدا^۳ در صفحه^۴ xy اند، ولی این میدان سرعت دارای دوران می باشد. در اینگونه شارشها، یک چرخ پارو وقتی حول مبدا^۳ دور می زند یکبار خواهد چرخید (شکل ۳.۴.۳).



شکل ۳.۴.۳

میدان سرعت $\mathbf{V}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ دورانی است؛
 یک "چرخ پارو"ی کوچک متحرک در مایع حول محورش
 می چرخد (ر.ک. شکل ۳.۴.۳).

عمل اساسی دیگر دیورژانس است که با

$$(۳) \quad \text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

تعریف می شود. با نماد عملگر، حاصل ضرب نقطه ای ∇ و \mathbf{F} است. توجه کنید که $\nabla \times \mathbf{F}$ یک میدان برداری است حال آنکه $\nabla \cdot \mathbf{F}: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. در نتیجه، $\nabla \cdot \mathbf{F}$ یک میدان اسکالر می باشد. $\nabla \cdot \mathbf{F}$ را "دیورژانس \mathbf{F} " می خوانیم.

اهمیت کامل دیورژانس در بحثی (اختیاری) و نیز در رابطه با قضیه گاوس در فصل ۷ ذکر شده است، ولی می توان بخشی از معنی فیزیکی آن را در اینجا توضیح داد.

هرگاه F را میدان سرعت یک گاز (یا مایع) تصور کنیم، آنگاه $\operatorname{div} F$ نمایش میزان انبساط بر واحد حجم گاز (یا مایع) می‌باشد. مثلاً، "هرگاه $F(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ، آنگاه $\operatorname{div} F = 3$ ؛ این یعنی گاز به میزان 3 واحد مکعب بر واحد حجم بر واحد زمان انبساط می‌یابد. این میزان معقول است، زیرا در این حالت F یک بردار شعاعی رو به خارج بوده، و گاز ضمن حرکت به خارج در امتداد خطوط شارش منبسط می‌شود. (برای بحثی از خطوط شارش، ر.ک. بخش ۳.۳).
قضیه^۲ زیر مشابه قضیه^۱ است.

قضیه ۰۲. به ازای هر میدان برداری C^2 ی F ،

$$\operatorname{div} \operatorname{curl} F = \nabla \cdot (\nabla \times F) = 0$$

یعنی، دیورژانس کرل مساوی صفر است.

برهان شبیه برهان قضیه^۱ بوده، و مبتنی بر تساوی مشتقات جزئی مخلوط است. بر دانشجوست که جزئیات را شرح دهد. دیدیم که $\nabla \times F$ به دورانها و $\nabla \cdot F$ به تراکمها و انبساطها مرتبط است. این ما را به اصطلاح متداول زیر می‌رساند. اگر $\nabla \cdot F = 0$ ، گوئیم F تراکم‌ناپذیر است، همانطور که F را غیردورانی نامیم اگر

$$\nabla \times F = \mathbf{0}.$$

مثال ۰۵. دیورژانس

$$F = x^2y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + xyz\mathbf{k}$$

را محاسبه کنید.
در واقع،

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial}{\partial x}(x^2y) + \frac{\partial}{\partial y}(z) + \frac{\partial}{\partial z}(xyz) = 2xy + 0 + xy = 3xy$$

مثال ۰۶. از قضیه^۲ می‌توان نتیجه گرفت که F مثال ۵ نمی‌تواند کرل میدان برداری دیگر باشد، چه در غیر این صورت دیورژانس صفر خواهد داشت.

بالاخره، عملگر لاپلاس ∇^2 را ذکر می‌کنیم که بر توابع f به صورت زیر عمل می‌کند:

$$\nabla^2 f = \nabla \cdot (\nabla f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$$

اگر $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ یک میدان برداری C^2 باشد، می‌توان $\nabla^2 \mathbf{F}$ را برحسب مؤلفه‌ها نیز تعریف کرد:

$$\nabla^2 \mathbf{F} = \nabla^2 F_1 \mathbf{i} + \nabla^2 F_2 \mathbf{j} + \nabla^2 F_3 \mathbf{k}$$

همانطور که در بخش ۶.۲ بحث شد، این عملگر نقش مهمی در بسیاری از قوانین فیزیکی دارد. این امور در فصل ۷ بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد.

اختیاری

هندسه دیورژانس و کرل،

حال تعبیر هندسی دیورژانس و کرل را با شرح بیشتری مطالعه می‌کنیم. این بحث به مفهوم شارش میدان برداری که در آخر بخش ۳.۳ ذکر شده بستگی دارد.

نقطه x را ثابت گرفته و سه بردار پایه متعارف $\mathbf{i}, \mathbf{j}, \mathbf{k}$ خارج شده از x را در نظر

می‌گیریم. فرض کنیم $\varepsilon > 0$ کوچک بوده و بردارهای پایه $\mathbf{v}_1 = \varepsilon \mathbf{i}, \mathbf{v}_2 = \varepsilon \mathbf{j}, \mathbf{v}_3 = \varepsilon \mathbf{k}$ را در نظر می‌گیریم. این بردارها متوازی‌السطوح $P(0)$ را تولید می‌کنند. با افزایش یا کاهش زمان، شارش $\phi(x, t)$ ، $P(0)$ را به شیئی انتقال می‌دهد. ϕ ، به ازای زمان ثابت، تابع مشتق‌پذیری از x است (یعنی، ϕ تابع مشتق‌پذیری از \mathbb{R}^3 به \mathbb{R}^3 است). وقتی ε کوچک باشد نقش $P(0)$ تحت ϕ را می‌توان با بردش تحت مشتق ϕ نسبت به x تقریب کرد. (ر. ک. بحث تقریب خطی به یک نگاهت در بخش ۳.۲). لذا، به ازای زمان ثابت و ε مثبت کوچک $P(0)$ تقریباً "به متوازی‌السطوح تولید شده به وسیله بردارهای $\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \mathbf{v}_3(t)$ که با

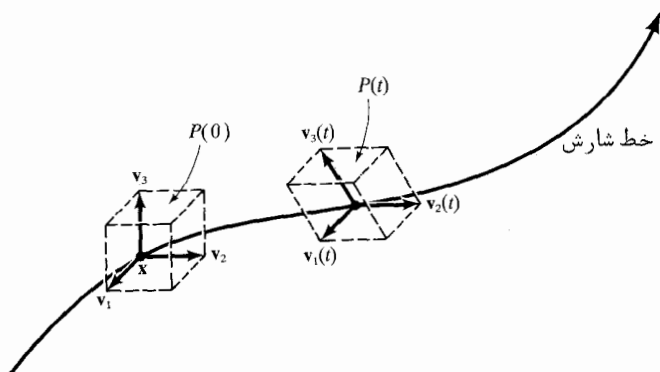
$$\mathbf{v}_1(t) = D_x \phi(x, t) \cdot \mathbf{v}_1$$

$$\mathbf{v}_2(t) = D_x \phi(x, t) \cdot \mathbf{v}_2$$

$$\mathbf{v}_3(t) = D_x \phi(x, t) \cdot \mathbf{v}_3$$

داده شده برده می‌شود. چون به ازای هر x ، $\phi(x, 0) = x$ ، نتیجه می‌شود که $\mathbf{v}_1(0) = \mathbf{v}_1$ ، $\mathbf{v}_2(0) = \mathbf{v}_2$ ، و $\mathbf{v}_3(0) = \mathbf{v}_3$ (این فرمول نگاهت بردارها در ص ۱۵۲ بحث شده است). بردارهای $\mathbf{v}_1(t), \mathbf{v}_2(t), \mathbf{v}_3(t)$ متوازی‌السطوح $P(t)$ را تولید می‌کنند که بازمان حرکت می‌نماید

(ر.ک. شکل ۴.۴.۳).



شکل ۴.۴.۳

پایه متحرک $v_1(t)$, $v_2(t)$, $v_3(t)$ و متوازی السطوح مربوطه

فرض کنیم حجم $P(t)$ با $\mathcal{V}(t)$ نموده شده باشد. تعبیر هندسی اصلی دیورژانس در قضیه زیر داده شده است.

$$\text{div } \mathbf{F}(\mathbf{x}) = \frac{1}{\mathcal{V}(0)} \left. \frac{d}{dt} \mathcal{V}(t) \right|_{t=0} \quad \text{قضیه ۳}$$

برهان. بنابر معادله (۳) بخش پیش، به ازای $i = 1, 2, 3$

$$(۴) \quad \frac{d}{dt} v_i(t) = D_x \mathbf{F}(\phi(\mathbf{x}, t)) \cdot D_x \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}_i$$

چون $\phi(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}$ ، ماتریس همانی است؛ لذا، محاسبه در $t = 0$ نتیجه می‌دهد که

$$\left. \frac{d}{dt} v_i(t) \right|_{t=0} = D_x \mathbf{F}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{v}_i$$

حجم $\mathcal{V}(t)$ با حاصل ضرب سه‌گانه (ر.ک. ص ۴۴)

$$\mathcal{V}(t) = \mathbf{v}_1(t) \cdot [\mathbf{v}_2(t) \times \mathbf{v}_3(t)]$$

داده می‌شود. با استفاده از تمرین ۹، بخش ۳.۱، و اتحادهای $\mathbf{v}_1 \cdot [\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3] = \mathbf{v}_2 \cdot [\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1] = \mathbf{v}_3 \cdot [\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2]$ ، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{V}}{dt} &= \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \cdot [\mathbf{v}_2(t) \times \mathbf{v}_3(t)] + \mathbf{v}_1(t) \cdot \left[\frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \times \mathbf{v}_3(t) \right] + \mathbf{v}_1(t) \cdot \left[\mathbf{v}_2(t) \times \frac{d\mathbf{v}_3}{dt} \right] \\ &= \frac{d\mathbf{v}_1}{dt} \cdot [\mathbf{v}_2(t) \times \mathbf{v}_3(t)] + \frac{d\mathbf{v}_2}{dt} \cdot [\mathbf{v}_3(t) \times \mathbf{v}_1(t)] + \frac{d\mathbf{v}_3}{dt} \cdot [\mathbf{v}_1(t) \times \mathbf{v}_2(t)] \end{aligned}$$

به ازای $t = 0$ ، جانشانی از فرمول (۴) و اینکه $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2 = \mathbf{v}_3$ ، $\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_2$ و $\mathbf{v}_3 \times \mathbf{v}_1 = \mathbf{v}_2$ نتیجه می‌دهد که $\mathbf{v}_2 \times \mathbf{v}_3 = \mathbf{v}_1$

$$(۵) \quad \left. \frac{d\mathcal{V}}{dt} \right|_{t=0} = \varepsilon^3 [D_x \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{i}] \cdot \mathbf{i} + \varepsilon^3 [D_x \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{j}] \cdot \mathbf{j} + \varepsilon^3 [D_x \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{k}] \cdot \mathbf{k}$$

اما $\mathcal{V}(0) = \varepsilon^3$ ، $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ ، $[D_x \mathbf{F}(\mathbf{x}) \mathbf{i}] \cdot \mathbf{i} = \partial F_1 / \partial x$ ، به همین نحو، جملات دوم و سوم (۵) عبارتند از $\varepsilon^3 (\partial F_2 / \partial y)$ و $\varepsilon^3 (\partial F_3 / \partial z)$. قضیه با قرار دادن اینها در (۵) و تقسیم بر ε^3 ثابت می‌شود.

خواننده آشنا با کمی جبر خطی می‌تواند این تعمیم قضیه ۳ را ثابت کند^۱: فرض

کنیم \mathbf{v}_1 ، \mathbf{v}_2 ، و \mathbf{v}_3 سه بردار غیر هم‌صفحه خارج شده از \mathbf{x} باشند که طبق فرمول

$$\mathbf{v}_i(t) = D_x \phi(\mathbf{x}, t) \cdot \mathbf{v}_i, \quad i = 1, 2, 3$$

شارش دارند. بردارهای $\mathbf{v}_1(t)$ ، $\mathbf{v}_2(t)$ ، $\mathbf{v}_3(t)$ متوازی‌السطوح $P(t)$ با حجم $\mathcal{V}(t)$ را تولید می‌کنند، و نتیجه زیر را داریم:

$$(۶) \quad \left. \frac{1}{\mathcal{V}(0)} \frac{d\mathcal{V}}{dt} \right|_{t=0} = \operatorname{div} \mathbf{F}(\mathbf{x})$$

به عبارت دیگر، دیورژانس \mathbf{F} در \mathbf{x} میزان تغییر احجام بر واحد حجم است. "میزان" یعنی میزان تغییر نسبت به زمان وقتی احجام به وسیله شارش انتقال می‌یابند. حال به بررسی کرل \mathbf{F} در نقطه \mathbf{x} می‌پردازیم که، بدون صدمه به کلیت، می‌توان آن

۱. خواننده باید طرز نوشتن ماتریس یک تبدیل خطی نسبت به یک پایه را دانسته و با این امر که اثر یک ماتریس از پایه مستقل است آشنا باشد.

را مبداء گرفت. کرل نحوه دوران بردارها توسط شارش را می‌سنجد. مطالب زیر نیاز به درک مثال ۲ دارد، که قبلاً در قسمت غیراختیاری این بخش آمده است.

دورانها ضرب برداری در \mathbb{R}^3 را حفظ می‌کنند. برای مطالعه "میزان" موجود دوران در شارش، با بررسی اثرات شارش بر ضرب داخلی شروع می‌کنیم. فرض کنیم v و w دو بردار خارج شده از مبداء بوده و به وسیله مشتق شارش به صورت زیر حرکت کنند:

$$v(t) = D_x \phi(0, t)v, \quad w(t) = D_x \phi(0, t)w$$

در نتیجه، در لحظه $t = 0$ و مبداء 0 در \mathbb{R}^3 ،

$$(Y) \quad \left. \frac{dv}{dt} \right|_{t=0} = D_x F(0) \cdot v \quad \text{and} \quad \left. \frac{dw}{dt} \right|_{t=0} = D_x F(0) \cdot w$$

در این صورت،

$$\frac{d}{dt} v \cdot w = \frac{dv}{dt} \cdot w + v \cdot \frac{dw}{dt}$$

و در نتیجه،

$$\left. \frac{d}{dt} v \cdot w \right|_{t=0} = [D_x F(0) \cdot v] \cdot w + v \cdot [D_x F(0) \cdot w]$$

ترانزاده A^T یک ماتریس در $A^T v \cdot w = v \cdot A w$ صدق می‌کند (ر.ک. تمرین ۱۶، بخش ۵.۱)؛ در نتیجه،

$$(A) \quad \left. \frac{d}{dt} v \cdot w \right|_{t=0} = [(D_x F(0) + [D_x F(0)]^T)v] \cdot w$$

لذا، میزان تغییر ضرب داخلی در مبداء در $t = 0$ به وسیله ماتریس $(D_x F(0) + [D_x F(0)]^T)$ معین می‌شود.

هر ماتریس مانند A را می‌توان (به طور منحصر به فرد) به صورت مجموع یک ماتریس

متقارن ($S^T = S$) و یک ماتریس پادمقارن ($W^T = -W$) به صورت زیر نوشت:

$$A = \frac{1}{2}(A + A^T) + \frac{1}{2}(A - A^T) = S + W$$

بخصوص، به ازای $A = D_x F(0)$ ،

$$S = \frac{1}{2}(D_x F(0) + [D_x F(0)]^T)$$

$$W = \frac{1}{2}(D_x F(0) - [D_x F(0)]^T)$$

S را ماتریس تغییر شکل و W را ماتریس دوران می‌نامیم. از (λ) معلوم می‌شود که این ماتریس تغییر شکل است که در تغییر ضرب داخلی شرکت دارد؛ و لذا، انتظار اینکه W نظیر بد دوران باشد معقول است. عناصر W ، به ازای ماتریس کلی A ، عبارتند از

$$w_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} - a_{ji})$$

و، به ازای $A = D_x F(0)$ ، این با نماد (x_1, x_2, x_3) به جای (x, y, z) خواهد شد

$$w_{ij} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_i}{\partial x_j} - \frac{\partial F_j}{\partial x_i} \right)$$

به‌طور صریح، $w_{12} = -\frac{1}{2}(\text{curl } F)_3$ ، $w_{23} = -\frac{1}{2}(\text{curl } F)_1$ ، $w_{31} = -\frac{1}{2}(\text{curl } F)_2$ و

قضیه ۴. فرض کنیم $w = \frac{1}{2}(\nabla \times F)(0)$ همچنین، محورها طوری اختیار شده باشند که w موازی محور z و در جهت k باشد. به‌علاوه، میدان برداری v با $v = w \times r$ داده شده باشد، که در آن $r = xi + yj + zk$ مثل مثال ۲ است؛ لذا، v میدان سرعت یک دوران حول محور w با سرعت زاویه‌ای $\omega = \|w\|$ و $\text{curl } v = 2w$ است. چون r تابعی از (x, y, z) است، v تابعی از (x, y, z) نیز می‌باشد. مشتق v در مبدأ عبارت است از

$$(9) \quad Dv(0) = W = \begin{pmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

این قضیه پیش از اثبات نیاز به توضیح داد. میدان برداری v نمایش دوران حول محور ثابت w است. شارش $\psi(x, t)$ از نقاط این میدان را دوران داده و، به‌ازای t ثابت مشتق $D_x \psi(x, t)$ بردارها را نیز دوران می‌دهد (مجدداً "ر. ک. بخش مشتق نگاشتها در ص ۱۵۲). فرض کنیم Y بردار دلخواهی بوده و قرار می‌دهیم $Y(t) = D_x \psi(x, t)Y$ وقتی t افزایش یا کاهش یابد، $Y(t)$ حول w می‌چرخد، و خواهیم داشت

$$(10) \quad \left. \frac{dY}{dt} \right|_{t=0} = D_x v(0)Y$$

(ر. ک. فرمول (۷). فرمول (۱۰) میزان تغییر Y در انتقال (دوران) به‌وسیله $D_x \psi$ را به دست می‌دهد. اما، مجدداً "طبق فرمول (۷)، میزان تغییر بردار X در مبدأ تحت انتقال به‌وسیله مشتق شارش $\phi(x, t)$ از F عبارت است از

$$\left. \frac{d\mathbf{X}}{dt} \right|_{t=0} = D_x \mathbf{F}(\mathbf{0})\mathbf{X} = (S + W)\mathbf{X}$$

لذا، این میزان تغییر \mathbf{X} دارای دو مؤلفه است: ماتریس تغییر شکل، که بر حاصل ضربهای داخلی اثر دارد، و ماتریس W . بنابراین مولهای (۹) و (۱۰)، ماتریس W دقیقاً "میزان تغییر بردار W تحت دوران بی‌نهایت کوچک حول محور $(\text{curl } \mathbf{F})(\mathbf{0}) = (\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{0})$ به وسیله نگاشت $D_x \psi(\mathbf{x}, t)$ است.

برهان قضیه ۴. بنابراین انتخاب ما از محورها،

$$\mathbf{w} = \frac{1}{2}(\nabla \times \mathbf{F})(\mathbf{0}) = \omega \mathbf{k}$$

طبق مثال ۲،

$$\mathbf{v} = -\omega y \mathbf{i} + \omega x \mathbf{j}$$

ولذا،

$$D\mathbf{v}(\mathbf{0}) = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

از آن سو، طبق تعاریف \mathbf{w} و $\nabla \times \mathbf{F}$ ،

$$\begin{aligned} W &= \begin{bmatrix} w_{11} & w_{12} & w_{13} \\ w_{21} & w_{22} & w_{23} \\ w_{31} & w_{32} & w_{33} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) & 0 & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_2}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_3}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial z} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) & 0 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 0 & -(\nabla \times \mathbf{F})_z & (\nabla \times \mathbf{F})_y \\ (\nabla \times \mathbf{F})_z & 0 & -(\nabla \times \mathbf{F})_x \\ -(\nabla \times \mathbf{F})_y & (\nabla \times \mathbf{F})_x & 0 \end{bmatrix} \end{aligned}$$

انتخاب ما از محورهای مختصات نتیجه می‌دهد

$$W = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

که قضیه را ثابت می‌کند .

ماتریس تغییر شکل S تمام تغییرات طولی و زاویه‌ای ناشی از شارش را به صورتی که گفته‌ایم به هم می‌آمیزد . بخصوص، تغییرات حجم مشمول S می‌باشند . در واقع ، اثر S دیورژانس است : $\text{tr } S = \text{div } \mathbf{F}(\mathbf{x})$. (اثر یک ماتریس مجموع درایه‌های قطری آن است .) قسمت فارغ از اثر S ، یعنی

$$S' = (S - \frac{1}{3}(\text{tr } S)I)$$

که در آن I ماتریس همانی 3×3 است ، قیچی نام دارد .

تمرینات

۱ . گرادیان ∇f را برای توابع زیر حساب کنید .

(آ) $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

(ب) $f(x, y, z) = xy + yz + xz$

(پ) $f(x, y, z) = 1/(x^2 + y^2 + z^2)$

۲ . دیورژانس $\nabla \cdot \mathbf{F}$ میدانهای برداری زیر را حساب کنید .

(آ) $\mathbf{F}(x, y, z) = xi + yj + zk$

(ب) $\mathbf{F}(x, y, z) = yzi + xzj + xyk$

(پ) $\mathbf{F}(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)(3i + 4j + 5k)$

۳ . کرل $\nabla \times \mathbf{F}$ هر یک از میدانهای برداری تمرین ۲ را حساب کنید .

۴ . تحقیق کنید که میدان برداری مثال ۴ ، بخش ۳.۳ ، تراکم‌ناپذیر است . آیا می‌توان

این نتیجه را تعبیر فیزیکی کرد؟

۵ . تحقیق کنید که $\mathbf{F} = yi + xz$ تراکم‌ناپذیر است .

۶ . فرض کنید $\mathbf{F}(x, y, z) = 3x^2yi + (x^3 + y^3)zj$

(آ) تحقیق کنید که $\text{curl } \mathbf{F} = \mathbf{0}$

(ب) تابع f را طوری بیابید که $\mathbf{F} = \nabla f$. (تکنیکهای خاص ساختن f در حالت کلی

در فصل ۷ داده شده‌اند. تکنیک این مسئله را باید مستقیماً پیدا کنید. (پ) آیا درست است که به ازای میدان برداری F چنین تابع f فقط وقتی می‌تواند موجود باشد که $\text{curl } F = 0$ ؟

۷. فرض کنید $f(x, y, z) = x^2y^2 + y^2z^2$. مستقیماً "تحقیق کنید که $\nabla \times \nabla f = 0$ ".
 ۸. نشان دهید که قسمتهای حقیقی و موهومی هر یک از توابع مختلط زیر مولفه‌های یک میدان برداری غیردورانی و تراکم‌ناپذیری در صفحه را تشکیل می‌دهند.

$$(x - iy)^2 \quad (\bar{A})$$

$$(x - iy)^3 \quad (\bar{B})$$

$$e^{x-iy} = e^x(\cos y - i \sin y) \quad (\bar{P})$$

۹. نشان دهید که $F = y(\cos x)\mathbf{i} + x(\sin y)\mathbf{j}$ یک میدان برداری گرادیان نیست.
 ۱۰. فرض کنید $\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. از تمرین ۳ (آ) می‌دانیم که $\nabla \times \mathbf{r} = 0$. آیا، با تجسم \mathbf{r} به صورت میدان سرعت یک مایع، می‌توانید دلیل این را به طور فیزیکی بگویید؟

۵.۳ حساب دیفرانسیل برداری

حال این اعمال اساسی در دست ماست. گرادیان، دیورژانس، کرل، و عملگر لاپلاس. در این بخش قدری بیشتر به خواص و روابط بین آنها می‌پردازیم. در جدول ۱۰.۳ چند فرمول کلی اساسی که در محاسبه میدانهای برداری مفیدند دیده می‌شوند. بعضی از اینها، مانند فرمولهای ۱۰ و ۱۴، در بخش ۴.۳ داده شده‌اند. سایرین در امثله و تمرینات ثابت شده‌اند. بعضی از عبارات این جدول نیاز به توضیح دارند.

جدول ۱۰.۳ چند فرمول معمول آنالیز برداری

$$\nabla(f + g) = \nabla f + \nabla g \quad ۰.۱$$

$$\nabla(cf) = c\nabla f, \quad c \text{ به ازای ثابت} \quad ۰.۲$$

$$\nabla(fg) = f\nabla g + g\nabla f \quad ۰.۳$$

$$\nabla(f/g) = (g\nabla f - f\nabla g)/g^2, \quad g(x) \neq 0 \quad ۰.۴$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{div} \mathbf{F} + \operatorname{div} \mathbf{G} \quad \cdot ۵$$

$$\operatorname{curl}(\mathbf{F} + \mathbf{G}) = \operatorname{curl} \mathbf{F} + \operatorname{curl} \mathbf{G} \quad \cdot ۶$$

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} + \mathbf{F} \times \operatorname{curl} \mathbf{G} + \mathbf{G} \times \operatorname{curl} \mathbf{F} \quad \cdot ۷$$

$$\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{div} \mathbf{F} + \mathbf{F} \cdot \nabla f \quad \cdot ۸$$

$$\operatorname{div}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{F} - \mathbf{F} \cdot \operatorname{curl} \mathbf{G} \quad \cdot ۹$$

$$\operatorname{div} \operatorname{curl} \mathbf{F} = 0 \quad \cdot ۱۰$$

$$\operatorname{curl}(f\mathbf{F}) = f \operatorname{curl} \mathbf{F} + \nabla f \times \mathbf{F} \quad \cdot ۱۱$$

$$\operatorname{curl}(\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{F} \operatorname{div} \mathbf{G} - \mathbf{G} \operatorname{div} \mathbf{F} + (\mathbf{G} \cdot \nabla)\mathbf{F} - (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} \quad \cdot ۱۲$$

$$\operatorname{curl} \operatorname{curl} \mathbf{F} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \mathbf{F} - \nabla^2 \mathbf{F} \quad \cdot ۱۳$$

$$\operatorname{curl} \nabla f = \mathbf{0} \quad \cdot ۱۴$$

$$\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}) = 2(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{F} + 2\mathbf{F} \times (\operatorname{curl} \mathbf{F}) \quad \cdot ۱۵$$

$$\nabla^2(fg) = f\nabla^2 g + g\nabla^2 f + 2(\nabla f \cdot \nabla g) \quad \cdot ۱۶$$

$$\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = 0 \quad \cdot ۱۷$$

$$\nabla \cdot (f\nabla g - g\nabla f) = f\nabla^2 g - g\nabla^2 f \quad \cdot ۱۸$$

$$\mathbf{H} \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = \mathbf{G} \cdot (\mathbf{H} \times \mathbf{F}) = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{G} \times \mathbf{H}) \quad \cdot ۱۹$$

$$\mathbf{H} \cdot ((\mathbf{F} \times \nabla) \times \mathbf{G}) = ((\mathbf{H} \cdot \nabla)\mathbf{G}) \cdot \mathbf{F} - (\mathbf{H} \cdot \mathbf{F})(\nabla \cdot \mathbf{G}) \quad \cdot ۲۰$$

$$\mathbf{F} \times (\mathbf{G} \times \mathbf{H}) = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{H})\mathbf{G} - \mathbf{H}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) \quad \cdot ۲۱$$

تذکره f و g میدان‌هایی اسکالرند؛ \mathbf{F} ، \mathbf{G} ، و \mathbf{H} میدان‌هایی برداری می‌باشند.
اولاً

$$\mathbf{V} = (\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G}$$

طبق تعریف، دارای مؤلفه‌های $V_i = \mathbf{F} \cdot (\nabla G_i)$ ، به ازای $i = 1, 2, 3$ ، است که در آن $\mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)$ ، ثانیاً، $\nabla^2 \mathbf{F}$ دارای مؤلفه‌های $\nabla^2 F_i$ است، که در آن $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ ، در عبارت $(\mathbf{F} \times \nabla) \times \mathbf{G}$ ، ∇ فقط روی \mathbf{G} عمل می‌کند؛ یعنی، $\mathbf{U} = (\mathbf{F} \times \nabla) \times \mathbf{G}$ ، دارای مؤلفه‌های $U_i = \mathbf{F} \times (\nabla G_i)$ ، $i = 1, 2, 3$ ، می‌باشد.

مثال ۰۱. فرمول ۸ در جدول ۱۰۳ را ثابت کنید.

$f\mathbf{F}$ دارای مؤلفه‌های fF_i ، به ازای $i = 1, 2, 3$ ، است؛ در نتیجه،

$$\operatorname{div}(f\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(fF_1) + \frac{\partial}{\partial y}(fF_2) + \frac{\partial}{\partial z}(fF_3)$$

لیکن، $\frac{\partial}{\partial x}(fF_1) = f \frac{\partial F_1}{\partial x} + F_1 \frac{\partial f}{\partial x}$ ، با عبارات مشابه برای جملات دیگر. بنابراین،

$$\begin{aligned} \operatorname{div}(f\mathbf{F}) &= f \left(\frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \right) + F_1 \frac{\partial f}{\partial x} + F_2 \frac{\partial f}{\partial y} + F_3 \frac{\partial f}{\partial z} \\ &= f(\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \nabla f \end{aligned}$$

مثال ۰۲. فرض کنید \mathbf{r} میدان برداری $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ (بردار موضع) بوده، و $\|\mathbf{r}\| = \nabla r \cdot \mathbf{r}$ و $\nabla \cdot (\mathbf{r}\mathbf{r})$ را حساب کنید. داریم

$$\nabla r = \left(\frac{\partial r}{\partial x}, \frac{\partial r}{\partial y}, \frac{\partial r}{\partial z} \right)$$

اما $r(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$ ؛ در نتیجه، به ازای $r \neq 0$ ، خواهیم داشت.

$$\frac{\partial r}{\partial x} = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}} = \frac{x}{r}$$

بنابراین،

$$\nabla r = \left(\frac{x}{r}, \frac{y}{r}, \frac{z}{r} \right) = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

برای قسمت دوم، با استفاده از فرمول ۸ می‌توان نوشت

$$\nabla \cdot (\mathbf{r}\mathbf{r}) = r(\nabla \cdot \mathbf{r}) + \mathbf{r} \cdot \nabla r$$

اما $\nabla \cdot \mathbf{r} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3$ ؛ و $\nabla r = \mathbf{r}/r$ را مثل فوق حساب می‌کنیم. چون $\mathbf{r} \cdot \mathbf{r}/r = r^2/r$ ، داریم

$$\nabla \cdot (\mathbf{r}\mathbf{r}) = 3r + \frac{r^2}{r} = 4r$$

مثال ۰۳. نشان دهید که $\nabla f \times \nabla g$ همواره تراکم ناپذیر است. در واقع، فرمول ۱۷ از جدول ۱۰۳ را از فرمول ۹ نتیجه بگیرید.

بنابر فرمول ۹،

$$\operatorname{div}(\nabla f \times \nabla g) = \nabla g \cdot (\nabla \times \nabla f) - \nabla f \cdot (\nabla \times \nabla g)$$

که صفر است، زیرا $\nabla \times \nabla f = 0$ و $\nabla \times \nabla g = 0$.

در تمرینات ۲ تا ۶ در آخرین بخش، خواننده با این نوع محاسبات آشنا می‌شود. بعدها از اتحادهای تمرین ۸ استفاده خواهیم کرد.

حال عبارات مربوط به گرادیان، دیورژانس، و کرل را در مختصات استوانه‌ای و کروی مطرح می‌کنیم؛ ابتدا نتایج را بیان کرده و سپس بعضی از آنها را در مثالها ثابت می‌کنیم (بقیه به عنوان تمرین گذارده می‌شوند). اما اثباتهای زیر به نوعی مغشوش‌اند و در صورت تمایل می‌توان حذفشان کرد.

قضیه ۵. فرمولهای زیر در مختصات استوانه‌ای برقرارند:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial r} \mathbf{e}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \mathbf{e}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{e}_z \quad (\text{یک})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rF_r) + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} (rF_z) \right] \quad (\text{دو})$$

و

$$\nabla \times \mathbf{F} = \frac{1}{r} \begin{vmatrix} \mathbf{e}_r & r\mathbf{e}_\theta & \mathbf{e}_z \\ \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & rF_\theta & F_z \end{vmatrix} \quad (\text{سه})$$

که در آن $\mathbf{e}_r, \mathbf{e}_\theta, \mathbf{e}_z$ بردارهای متعامد یکه‌نموده شده در شکل ۱۰.۵.۳ بوده و

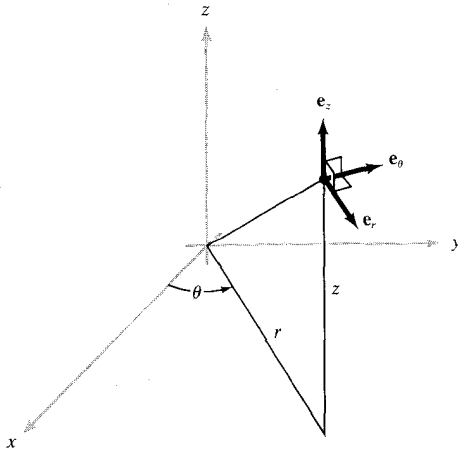
$$\mathbf{F} = F_r \mathbf{e}_r + F_\theta \mathbf{e}_\theta + F_z \mathbf{e}_z \quad \text{و نیز} \quad F_r = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_r, \quad F_\theta = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_\theta, \quad F_z = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_z$$

قضیه ۵. در مختصات استوانه‌ای (رگ. بخش ۴.۱)

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial \rho} \hat{\mathbf{e}}_\rho + \frac{1}{\rho} \frac{\partial f}{\partial \phi} \hat{\mathbf{e}}_\phi + \frac{1}{\rho \sin \phi} \frac{\partial f}{\partial \theta} \hat{\mathbf{e}}_\theta \quad (\text{یک})$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho^2 F_\rho) + \frac{1}{\rho \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \phi F_\phi) + \frac{1}{\rho \sin \phi} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} \quad (\text{دو})$$

$$\begin{aligned} \mathbf{V} \times \mathbf{F} = & \left(\frac{1}{\rho \sin \phi} \frac{\partial}{\partial \phi} (\sin \phi F_\theta) - \frac{1}{\rho \sin \phi} \frac{\partial F_\phi}{\partial \theta} \right) \hat{\mathbf{e}}_\rho \\ & + \left(\frac{1}{\rho \sin \phi} \frac{\partial F_\rho}{\partial \theta} - \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\theta) \right) \hat{\mathbf{e}}_\phi + \left(\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\phi) - \frac{1}{\rho} \frac{\partial F_\rho}{\partial \phi} \right) \hat{\mathbf{e}}_\theta \end{aligned}$$



شکل ۱.۵.۳

بردارهای متعامد یکه e_r ، e_θ ، و e_ϕ مربوط به مختصات استوانه‌ای

که در شکل ۳.۵.۳ نموده شده‌اند و $\mathbf{F} = F_\rho \mathbf{e}_\rho + F_\phi \mathbf{e}_\phi + F_\theta \mathbf{e}_\theta$

مثال ۴. قسمت (یک) قضیه ۵ را ثابت کنید.
داریم

$$(1) \quad \nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

از شکل ۱.۵.۳ خواهیم داشت

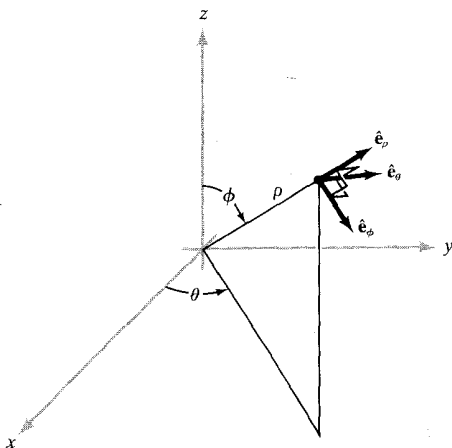
$$\mathbf{e}_r = \frac{x\mathbf{i} + y\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = \cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}$$

$$\mathbf{e}_\theta = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{\sqrt{x^2 + y^2}} = -\sin \theta \mathbf{i} + \cos \theta \mathbf{j}$$

در صفحه \mathbf{e}_r و \mathbf{e}_θ متعامدند (

و

$$\mathbf{e}_z = \mathbf{k}$$



شکل ۲۰.۵۰۳

بردارهای متعامد یکه \hat{e}_ρ ، \hat{e}_θ ، و \hat{e}_ϕ مربوط به مختصات کروی

(برای راه دیگر، ر.ک. تمرین ۶، بخش ۰.۴۰۱) با حل نسبت به \mathbf{i} ، \mathbf{j} ، و \mathbf{k} ، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{i} = \mathbf{e}_r \cos \theta - \mathbf{e}_\theta \sin \theta$$

(۲)

$$\mathbf{j} = \mathbf{e}_r \sin \theta + \mathbf{e}_\theta \cos \theta$$

$$\mathbf{k} = \mathbf{e}_z$$

بنابر قاعده زنجیره‌ای،

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \frac{\partial f}{\partial x} \frac{\partial x}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{\partial y}{\partial r} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial r}$$

یعنی،

$$\frac{\partial f}{\partial r} = \cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y}$$

به همین نحو،

$$\frac{\partial f}{\partial \theta} = -r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} \quad \text{and} \quad \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial f}{\partial z}$$

معادلات را حل می‌کنیم:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x} &= \cos \theta \frac{\partial f}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial y} &= \sin \theta \frac{\partial f}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f}{\partial z} &= \frac{\partial f}{\partial z} \end{aligned} \right\}$$

با گذاردن (۲) و (۳) در (۱) و ساده‌کردن، نتیجه مطلوب به دست می‌آید.

مثال ۵. قسمت (دو) قضیه "۵" را ثابت کنید.

داریم

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{F} = \frac{\partial F_1}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z}$$

بنابر قاعده زنجیره‌ای،

$$\frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial \rho} \frac{\partial \rho}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\partial F_1}{\partial \phi} \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

و با مشتقگیری ضمنی از روابط

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z = \rho \cos \phi$$

نسبت به x ، خواهیم داشت

$$1 = \frac{\partial \rho}{\partial x} \sin \phi \cos \theta + \rho \cos \phi \cos \theta \frac{\partial \phi}{\partial x} - \rho \sin \phi \sin \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial x} \sin \phi \sin \theta + \rho \cos \phi \sin \theta \frac{\partial \phi}{\partial x} + \rho \sin \phi \cos \theta \frac{\partial \theta}{\partial x}$$

و

$$0 = \frac{\partial \rho}{\partial x} \cos \phi - \rho \sin \phi \frac{\partial \phi}{\partial x}$$

با حل این معادلات نتیجه می‌شود که

$$(۶) \left. \begin{aligned} \frac{\partial \phi}{\partial x} &= \cos \theta \sin \phi \\ \frac{\partial \rho}{\partial x} &= \frac{\cos \theta \cos \phi}{\rho} \\ \frac{\partial \theta}{\partial x} &= -\frac{\sin \theta}{\rho \sin \phi} \end{aligned} \right\} (۳)$$

و با جانشانی (۶) و (۵) خواهیم داشت

$$(۷) \quad \frac{\partial F_1}{\partial x} = \frac{\partial F_1}{\partial \rho} \cos \theta \sin \phi + \frac{\partial F_1}{\partial \phi} \frac{\cos \theta \cos \phi}{\rho} - \frac{\partial F_1}{\partial \theta} \frac{\sin \theta}{\rho \sin \phi}$$

با عبارات مشابهی برای $\partial F_2 / \partial y$ و $\partial F_3 / \partial z$ (که خواننده باید آن را به دست آورد). همچنین،

$$F_r = \mathbf{F} \cdot \mathbf{e}_r = (F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}) \cdot (\cos \theta \mathbf{i} + \sin \theta \mathbf{j}) = F_1 \cos \theta + F_2 \sin \theta \quad (۴)$$

و به همین نحو $F_\theta = -F_1 \sin \theta + F_2 \cos \theta$. با گذاردن اینها و (۷) در (۴) و ساده کردن جواب مطلوب به دست می‌آید.

(۵) تمرینات

۰۱ فرض کنید $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$ و $\nabla \cdot \mathbf{G} = 0$. از میدانهای زیر کدامها دیورژانس صفر دارند؟

$$\mathbf{F} + \mathbf{G} \quad (\text{آ})$$

$$\mathbf{F} \times \mathbf{G} \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{F}(\mathbf{F} \cdot \mathbf{G}) \quad (\text{پ})$$

۰۲. فرمولهای ۱ تا ۶ جدول ۱۰۳ را ثابت کنید .
 ۰۳. فرمولهای ۷، ۹، و ۱۱ جدول ۱۰۳ را ثابت کنید .
 ۰۴. فرمولهای ۱۲، ۱۳، ۱۵، و ۱۶ جدول ۱۰۳ را ثابت کنید .
 ۰۵. فرض کنید $F = 2xz^2\mathbf{i} + \mathbf{j} + y^3zx\mathbf{k}$ ، $G = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ ، و $f = x^2y$. کمیات زیر را حساب کنید .

$$\nabla f \quad (\text{آ})$$

$$\nabla \times \mathbf{F} \quad (\text{ب})$$

$$(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{G} \quad (\text{پ})$$

$$\mathbf{F} \times \nabla f \quad (\text{ت})$$

۰۶. فرمولهای ۱۸ تا ۲۱ جدول ۱۰۳ را ثابت کنید .

۰۷. فرض کنید \mathbf{F} یک میدان برداری کلی باشد. آیا $\nabla \times \mathbf{F}$ بر \mathbf{F} عمود است؟

۰۸. فرض کنید $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$ و $\|\mathbf{r}\| = r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. اتحادهای زیر را ثابت کنید (از جدول ۱۰۳ تا جایی که بشود استفاده کنید) .

$$\nabla(1/r) = -\mathbf{r}/r^3, r \neq 0 \quad (\text{آ}) \quad \text{و، به طور کلی،} \quad \nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r} \quad \text{و} \quad \nabla(\log r) = \mathbf{r}/r^2$$

$$\nabla^2(1/r) = 0, r \neq 0 \quad (\text{ب}) \quad \text{و، به طور کلی،} \quad \nabla^2 r^n = n(n+1)r^{n-2}$$

$$\nabla \cdot (r^n \mathbf{r}) = 0 \quad (\text{پ}) \quad \text{و، به طور کلی،} \quad \nabla \cdot (r^n \mathbf{r}) = (n+3)r^n$$

$$\nabla \times \mathbf{r} = 0 \quad \text{و، به طور کلی،} \quad \nabla \times (r^n \mathbf{r}) = 0 \quad (\text{ت})$$

۰۹. قسمت (دو) قضیه ۵ را ثابت کنید .

- (ب) قسمت (سه) قضیه ۵ را ثابت کنید .

- *۱۰. (آ) قسمت (یک) قضیه ۵ را ثابت کنید .

- (ب) قسمت (سه) قضیه ۵ را ثابت کنید .

۱۱. نشان دهید که معادله لاپلاس

$$\nabla^2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$$

در مختصات قطبی شکل زیر را به خود می‌گیرد :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial u}{\partial r} = 0$$

- *۱۲. نشان دهید که معادله لاپلاس $\nabla^2 V = 0$ در مختصات کروی (ρ, θ, ϕ) شکل زیر را به خود می‌گیرد :

$$\frac{\partial}{\partial \mu} \left((1 - \mu^2) \frac{\partial V}{\partial \mu} \right) + \frac{1}{1 - \mu^2} \frac{\partial^2 V}{\partial \theta^2} + \rho \frac{\partial^2 (rV)}{\partial \rho^2} = 0$$

که در آن $\mu = \cos \phi$. (این شکل اصلی معادله لاپلاس است.) وقتی V در ϕ ثابت است، این معادله را با عبارت مسئله ۱۱ مقایسه کنید .

تمرینات دوره‌ای برای فصل ۳

۱. دیورژانس میدانهای برداری زیر را در نقاط ذکر شده حساب کنید .

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + 3xyz\mathbf{j} + z\mathbf{k}, \quad (0, 1, 0) \quad (\bar{1})$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + z\mathbf{j} + x\mathbf{k}, \quad (1, 1, 1) \quad (\bar{2})$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y)^3\mathbf{i} + (\sin xyz)\mathbf{j} + (\cos xyz)\mathbf{k}, \quad (2, 0, 1) \quad (\bar{3})$$

۲. کرل هر یک از میدانهای برداری تمرین ۱ را در نقاط ذکر شده حساب کنید .

۳. (1) فرض کنید $f(x, y, z) = xyz^2$. ∇f را محاسبه نمایید .

(2) فرض کنید $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zy\mathbf{k}$. $\nabla \times \mathbf{F}$ را حساب کنید .

(3) $\nabla \times (f\mathbf{F})$ را با استفاده از فرمول ۱۱ در جدول ۱۰.۳ حساب کنید . این را با

محاسبه مستقیم مقایسه نمایید .

۴. $\nabla \cdot \mathbf{F}$ و $\nabla \times \mathbf{F}$ را برای میدانهای برداری زیر را حساب کنید .

$$\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + 3y\mathbf{j} + 4z\mathbf{k} \quad (\bar{1})$$

$$\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k} \quad (\bar{2})$$

$$\mathbf{F} = (x + y)\mathbf{i} + (y + z)\mathbf{j} + (z + x)\mathbf{k} \quad (\bar{3})$$

۵. معادله صفحه مماس بر هر سطح در نقطه ذکر شده را بیابید .

$$z = x^2 + y^2, \quad (0, 0, 0) \quad (\bar{1})$$

$$z = x^2 - y^2 + x, \quad (1, 0, 2) \quad (\bar{2})$$

$$z = (x + y)^2, \quad (3, 2, 25) \quad (\bar{3})$$

۶. فرض کنید $\sigma: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک مسیر بوده و $h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع مشتقپذیر اکیدا صعودی

باشد. ترکیب $\sigma \circ h: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ پارامتری‌سازی مجدد σ به وسیله h باشد. ثابت کنید

$\sigma \circ h$ همان مسیر σ را دارد، و نیز ثابت کنید هرگاه $\alpha = \sigma \circ h$ ، آنگاه $\alpha'(t) = h'(t)\sigma'(h(t))$.

(ر.ک. تمرین ۵ (پ)، بخش ۲.۰۳)

۷. یک ماهواره چه ارتفاعی باید داشته باشد که از زمین ساکن به نظر رسد؟ (برای

واحدها، ر.ک. تمرین ۷، بخش ۰۱۰۳)

۸. (آ) فرض کنید α مسیر مشتق‌پذیری باشد که تندی آن هرگز صفر نشود. همچنین، $s(t)$ تابع طول قوس برای α باشد: $s(t) = \int_0^t \|\alpha'(\tau)\| d\tau$ و نیز $t(s)$ تابع معکوس s باشد.

ثابت کنید منحنی $\beta = \alpha \circ t$ تندی یک دارد؛ یعنی، $\|\beta'(s)\| = 1$.

(ب) فرض کنید σ مسیر $\sigma(t) = (a \cos t, a \sin t, bt)$ باشد. مسیر α را طوری بیابید

که همان مسیر σ را داشته باشد ولی دارای تندی یک باشد: $\|\alpha'(t)\| = 1$ ؛ یعنی، برای

σ یک پارامتری‌سازی مجدد با تندی یک بیابید (ر.ک. تمرینات ۵ و ۷ در بخش ۰۲۰۳)

۹. فرض کنید ذره‌ای به جرم m بر مسیر $\sigma(t) = (t^2, \sin t, \cos t)$ حرکت کند. نیروی وارد

بر ذره در $t = 0$ را حساب کنید.

۱۰. (آ) فرض کنید $c(t)$ مسیری با ثابت $\|c(t)\|$ باشد؛ یعنی، منحنی بر یک کره واقع

باشد. ثابت کنید $c'(t)$ متعامد به $c(t)$ است.

(ب) فرض کنید c مسیری باشد که تندی آن هرگز صفر نیست. نشان دهید که تندی

ثابت دارد اگرگر بردار شتاب c'' همواره بر بردار سرعت c' عمود است.

۱۱. فرض کنید ذره‌ای مسیر $c(t) = (t, t^2, t \cos t)$ را پیموده و، در لحظه $t = \pi$ ، از این

منحنی روی یک مماس برود. ذره در لحظه $t = 2\pi$ کجاست؟

۱۲. (آ) ∇f و g' را برای توابع $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ و $g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^3$ یافته و $(f \circ g)'(1)$ را حساب کنید.

(یک) $f(x, y, z) = xyz$, $g(t) = (t, \cos t, \sin t)$

(دو) $f(x, y, z) = xyz$, $g(t) = (6t, 3t^2, t^3)$

(ب) فرض کنید $f(x, y) = (e^x, x + y)$ و $g(u, v) = (u, \cos v, v + u)$ به دو راه مشتق

$g \circ f$ را در $(0, 0)$ حساب کنید.

۱۳. مشتق جهتی توابع زیر را در جهت و نقطه داده شده حساب کنید.

(آ) $f(x, y, z) = xyz$, $v = (1/\sqrt{14})(i + 3j + 2k)$, $(1, 1, 1)$

(ب) $f(x, y, z) = x^2 + y$, $v = \frac{1}{3}i + \frac{1}{3}j + \frac{4}{3}k$, $(1, 0, 0)$

۱۴. (آ) برهان عمود بودن $\nabla f(x, y, z)$ بر سطح ثابت $f(x, y, z) =$ را مرور کنید.

(ب) قائم یک به سطح $x^3y + xz = 1$ در نقطه $(1, 2, -1)$ را بیابید.

(پ) معادله صفحه مماس بر سطح در (ب) در نقطه داده شده را بیابید.

(ت) زاویه بین سطوح $x^2 + y^2 + z^2 = 3$ و $x^2 + y^2 - z^2 = 3$ در نقطه $(-1, 1, -1)$

را بیابید.

۱۵. فرض کنید $F(x, y, z) = (x^2, 0, z(1+x))$. نشان دهید که $\sigma(t) = (1/(1-t), 0, e^t/(1-t))$ یک خط شارش F است.

۱۶. فرض کنید $v = 3i + 2j + k$ و $w = i - j$.

(آ) $v \cdot w$ ، $v + 3w$ و $v \times w$ را حساب کنید.

(ب) مساحت متوازی‌الاضلاع تولید شده به وسیله v و w را حساب کنید.

۱۷. (آ) یک حشره، که خود را در محیطی که توسط ماده شیمیایی AEF مسموم شده

می‌یابد، تصمیم می‌گیرد در جهتی که در کوتاهترین مدت غلظت کاهش می‌یابد حرکت

نماید. اگر غلظت AEF با $\sigma(x, y, z) = e^{-3x} + \sin(yz) + e^{-z^2}$ داده شده باشد و حشره

در $(0, 0, 0)$ باشد، در چه جهت باید حرکت نماید؟

(ب) نظریه موجود ورای جوابتان به قسمت (آ) را مختصراً "مورد بحث قرار دهید.

۱۸. (آ) آیا $\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} (x^2 - y^2)/(x^2 + y^2)$ وجود دارد؟

(ب) توضیح دهید که پیوستگی $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ در $x_0 \in \mathbb{R}^n$ چه معنی دارد.

(تعریف دقیق را بیان نمایید.)

(پ) توضیح دهید که مشتقپذیری $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ در $x_0 \in \mathbb{R}^n$ چه معنی دارد.

(تعریف دقیق را بیان کنید.)

۱۹. صفحات مماس سطوح زیر در نقاط داده شده را حساب کنید.

(آ) $z = x^2 + 3y^3 + \sin(xy)$; $x = 1, y = 0$

(ب) $x^2 + 3y^2 + 4z^2 = 10$; $(0, \sqrt{2}, 1)$

۲۰. با استفاده از عبارات مربوط به grad ، div و curl در مختصات کروی، اتحادهای

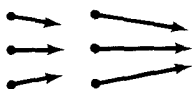
تمرین ۸، بخش ۵.۳، را تحقیق کنید.

۲۱. (آ) فرض کنید $F = 2xye^z i + e^z x^2 j + (x^2 ye^z + z^2) k$ و $\nabla \cdot F$ و $\nabla \times F$ را حساب

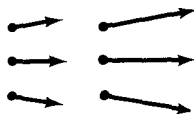
کنید.

(ب) تابع $f(x, y, z)$ را طوری بیابید که $F = \nabla f$. به اختصار بحث کنید.

۲۲. یکی از سه میدان برداری زیر دیورژانس صفر دارد. کدامیک؟



(پ)



(ب)



(آ)

فصل چهارم

مشتقات مراتب بالاتر، ماکزیممها و مینیممها

از آنجا که ساختمان جهان کامل بوده و صنعت دست قادر داناست، هیچ چیز در آن بدون قاعده ماکزیمم یا مینیمم رخ نخواهد داد.

لئونارد اویلر

در حساب دیفرانسیل یک متغیره، نقاط بحرانی x_0 را برای امتحان تابع $f(x)$ جهت ماکزیمم یا مینیمم موضعی جستجو می‌کنیم؛ یعنی، نقاطی مانند x_0 که $f'(x_0) = 0$ ، و در این نقاط علامت مشتق دوم $f''(x_0)$ را امتحان می‌کنیم. اگر $f''(x_0) < 0$ ، $f(x_0)$ ماکزیمم موضعی f است؛ اگر $f''(x_0) > 0$ ، $f(x_0)$ مینیمم موضعی f است؛ اگر $f''(x_0) = 0$ آزمون فرو می‌ریزد.

یکی از هدفهای این فصل تعمیم این روشها به توابع حقیقی چندمتغیره است. در بخش ۱۰۴ با قضیه تیلور شروع می‌کنیم؛ سپس با استفاده از آن در بخش ۲۰۴ آزمونهایی برای ماکزیممها، مینیممها، و نقاط زینتی به دست می‌آوریم. همانند توابع یک متغیره، این روشها در تجسم شکل نمودار یاری دهنده‌اند.

در بخش ۳۰۴ مسئله ماکزیمم‌سازی یک تابع حقیقی تحت شرایط اضافی، که قبود نیز نام دارند، بررسی می‌شود. مثلا، ممکن است بخواهیم $f(x, y, z)$ را به ازای (x, y, z) هایی که مقید به واقع بودن بر کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ اند ماکزیمم سازیم. در بخش ۴۰۴ یک قضیه تکنیکی مفید (قضیه تابع ضمنی) برای بررسی قبود ذکر می‌شود. این قضیه بعدها در مطالعه سطوح نیز مفید واقع می‌شود.

در بخش ۵.۴ چند کاربرد مطالب پیشگفته در رابطه با هندسه، اقتصاد، و نقاط تعادل دستگاههای فیزیکی و پایداری آنها توصیف خواهد شد.

۱.۴ قضیه تیلور

با استفاده از قضیه تیلور در حالت چندمتغیره، آزمونی برای انواع مختلف اکستریمها به دست آورده، بالاخره آزمونی شبیه آزمون مشتق دوم که در حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره آموختهایم به دست می‌آوریم. این قضیه کاربردهای مهم دیگری نیز دارد. اساساً، با استفاده از مشتقات بیش از مشتق اول تابع می‌توان به کمک قضیه تیلور تقریبات "مراتب بالاتری" به یک تابع به دست آورد.

به ازای توابع هموار یک متغیره $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، قضیه تیلور می‌گوید

$$f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(a)}{2!}(x - a)^2 + \dots$$

$$(1) \quad + \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x - a)^k + R_k(x, a)$$

که در آن

$$(1) \quad R_k(x, a) = \int_a^x \frac{(x-t)^k}{k!} f^{(k+1)}(t) dt$$

باقیمانده است. این خطای $R_k(x, a)$ به ازای x نزدیک a تا "مرتبه k " کوچک است. این بدان معنی است که

$$(2) \quad \frac{R_k(x, a)}{(x - a)^k} \rightarrow 0, \quad \text{وقتی } x \rightarrow a$$

به عبارت دیگر، $R_k(x, a)$ در مقایسه با کمیت (از قبل کوچک) $(x - a)^k$ کوچک است. هدف ما در این بخش اثبات قضیه مشابهی است که برای توابع چند متغیره برقرار باشد. قضیه برای توابع یک متغیره نتیجه‌ای از آن خواهد بود.

ما از قبل صورت مرتبه اول، یعنی $k = 1$ ، را می‌دانیم. در واقع، اگر $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$

در x_0 مشتق‌پذیر بوده، و تعریف کنیم

$$R_1(x, x_0) = f(x) - f(x_0) - Df(x_0) \cdot (x - x_0)$$

در نتیجه،

$$f(x) = f(x_0) + Df(x_0)(x - x_0) + R_1(x, x_0)$$

سپس، طبق تعریف مشتقپذیری،

$$\frac{|R_1(x, x_0)|}{\|x - x_0\|} \rightarrow 0 \text{ ، وقتی } x \rightarrow x_0$$

یعنی $R_1(x, x_0)$ تا مرتبه اول در x_0 صفر می شود. مطلب را خلاصه کرده، می نویسیم
 $R_1(x, x_0) = R_1(h, x_0)$ ، و $h = x - x_0$. (سوء استعمال مقبولی از نماد h) .

قضیه ۱ (قضیه تیلور مرتبه اول) . فرض کنیم $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ در $x_0 \in U$ مشتقپذیر باشد. در این صورت، می توان نوشت

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + R_1(h, x_0)$$

که در آن وقتی در \mathbb{R}^n ، $h \rightarrow 0$ ، داریم $R_1(h, x_0)/\|h\| \rightarrow 0$ فرمول تیلور مرتبه دوم به صورت زیر است.

قضیه ۲. فرض کنیم $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ مشتقات جزئی پیوسته از مرتبه سوم داشته باشد. در این صورت، می توان نوشت

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(x_0) + R_2(h, x_0)$$

که در آن وقتی $h \rightarrow 0$ ، $R_2(h, x_0)/\|h\|^2 \rightarrow 0$ ،

در جریان اثبات، فرمول صریح مفیدی برای باقیمانده R_2 به دست می آید (ر. ک).

۱. در این قضیه فقط کافی است f از رده C^2 باشد، ولی برای آنکه باقیمانده شکل مناسبی داشته باشد، فرض می کنیم $f \in C^3$ باشد. هرگاه صورت یک متغیره را مفروض بگیریم، آنگاه می توان با اعمال آن بر $g(t) = f(x_0 + th)$ صورت داده شده در اینجا برای توابع چند متغیره را به دست آورد.

رابطه (۵') در زیر). این فرمول تعمیمی از فرمول (۱') است.

برهان قضیه ۳. بنا بر قاعده زنجیره‌ای،

$$\frac{d}{dt} f(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) = Df(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) \cdot \mathbf{h} = \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) h_i$$

با انتگرالگیری از طرفین از $t = 0$ تا $t = 1$ ، خواهیم داشت

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = \int_0^1 \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) h_i dt$$

حال از عبارت طرف راست انتگرالگیری جزء به جزء می‌کنیم. فرمول کلی

$$\int_0^1 u \frac{dv}{dt} dt = - \int_0^1 v \frac{du}{dt} dt + uv \Big|_0^1$$

را به یاد می‌آوریم. در این حالت، فرض کنیم $u = \partial f / \partial x_i(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) h_i$ و $v = t - 1$ بنا بر این،

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^n \int_0^1 \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) h_i dt &= \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) h_i h_j dt \\ &+ \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \end{aligned}$$

چون طبق قاعده زنجیره‌ای

$$\frac{du}{dt} = \sum_{j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) h_j$$

و نیز

$$uv \Big|_0^1 = (t-1) \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) h_i \Big|_{t=0}^1 = \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) h_i$$

پس اتحاد زیر را ثابت کرده‌ایم:

$$\left. \begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) &= \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) h_i + R_1(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0) \\ R_1(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0) &= \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) h_i h_j dt \end{aligned} \right\} \text{که در آن}$$

(فرمول (۳) فرمول صریحی برای باقیمانده در قضیه ۱ به دست می‌دهد .)

اگر از عبارت مربوط به $R_1(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0)$ به ازای

$$v = -(t-1)^2/2 \quad \text{و} \quad u = \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j$$

انتگرالگیری جزء به جزء کنیم، به دست می‌آوریم

$$R_1(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0) = \sum_{i,j,k=1}^n \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j h_k dt \\ + \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0)h_i h_j$$

لذا، ثابت کرده‌ایم که

$$(۴) \quad \left. \begin{aligned} f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) &= f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) \\ &+ \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{که در آن} \\ R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0) = \sum_{i,j,k=1}^n \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})h_i h_j h_k dt \end{array}$$

انتگرالده تابع پیوسته‌ای از t بوده و لذا بر همسایگی کوچکی از \mathbf{x}_0 کراندار است (زیرا باید به مقدارش در \mathbf{x}_0 نزدیک باشد). لذا، به ازای ثابتی چون $M \geq 0$ و $\|\mathbf{h}\|$ کوچک،

$$|R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0)| \leq \|\mathbf{h}\|^3 M$$

بخصوص، همانطور که قضیه می‌خواهد،

$$\frac{|R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{h}\|^2} \leq \|\mathbf{h}\| M \rightarrow 0, \quad \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$$

استدلال مشابهی برای R_1 نشان می‌دهد که وقتی $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ ، $|R_1(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0)|/\|\mathbf{h}\| \rightarrow 0$ ، اگرچه همانطور که در صفحه ۲۵۱ گفتیم، این از تعریف مشتق‌پذیری نیز به دست می‌آید.

نتیجه (شکل صریح باقیمانده)

بک) در قضیه ۱

$$\begin{aligned}
 R_1(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0) &= \sum_{i,j=1}^n \int_0^1 (1-t) \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) h_i h_j dt \\
 (5) \quad &= \sum_{i,j=1}^n \frac{1}{2} \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{c}_{ij}) h_i h_j
 \end{aligned}$$

که در آن \mathbf{c}_{ij} بر خط واصل بین $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$ و \mathbf{x}_0 قرار دارد.
(دو) در قضیه ۲

$$\begin{aligned}
 R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0) &= \sum_{i,j,k=1}^n \int_0^1 \frac{(t-1)^2}{2} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h}) h_i h_j h_k dt \\
 (5) \quad &= \sum_{i,j,k=1}^n \frac{1}{3!} \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{c}_{ijk}) h_i h_j h_k
 \end{aligned}$$

که در آن \mathbf{c}_{ijk} بر خط واصل بین $\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}$ و \mathbf{x}_0 قرار دارد.

این فرمولهای انتگرال در جریان اثبات قضیه ۲ به دست آمده بودند (ر. ک. فرمولهای (۳) و (۴)). فرمولهای شامل \mathbf{c}_{ij} و \mathbf{c}_{ijk} (شکل لاگرانژ باقیمانده) از دومین قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها به دست می‌آیند. این قضیه می‌گوید

$$\int_a^b h(t)g(t) dt = h(c) \int_a^b g(t) dt$$

مشروط بر اینکه h و g بر $[a, b]$ پیوسته بوده و $g \geq 0$ ؛ در اینجا c عددی بین a و b است. ^۱ این قضیه در قسمت (یک) به ازای $h(t) = ([\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j])(\mathbf{x}_0 + t\mathbf{h})$ و $g(t) = 1 - t$ به کار رفته است.

به آسانی می‌توان مشکل کلی قضیه تیلور را حدس زد. مثلاً، فرمول تیلور مرتبه

۱. برهان. اگر $g = 0$ ، نتیجه بدیهی است؛ لذا، می‌توان فرض کرد $g \neq 0$. پس، می‌شود فرض نمود که $\int_a^b g(t) dt > 0$. فرض کنیم M و m ماکزیمم و مینیمم h باشند که به ترتیب در نقاط t_M و t_m گرفته شده‌اند. چون $g(t) \geq 0$ ،

$$m \int_a^b g(t) dt \leq \int_a^b h(t)g(t) dt \leq M \int_a^b g(t) dt$$

پس $(\int_a^b h(t)g(t) dt) / (\int_a^b g(t) dt)$ بین $m = h(t_m)$ و $M = h(t_M)$ قرار دارد؛ و لذا، طبق قضیه مقدار میانگین، به ازای c ای میانی مساوی $h(c)$ می‌باشد.

سوم عبارت است از

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{3!} \sum_{i,j,k=1}^n h_i h_j h_k \frac{\partial^3 f}{\partial x_i \partial x_j \partial x_k}(\mathbf{x}_0) + R_3(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0)$$

که در آن وقتی $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ ، $R_3(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0)/\|\mathbf{h}\|^3 \rightarrow 0$ ، و غیره. فرمول کلی را می‌توان با استفاده از برهان داده شده در صفحات ۲۵۲ تا ۲۵۳ به استقرا ثابت کرد.

مثال ۰۱. فرمول تیلور مرتبه دوم را برای $f(x, y) = (x + 2y)$ ، $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ حساب کنید. توجه کنید که

$$f(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = \cos(0 + 2 \cdot 0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 2 \cos(0 + 2 \cdot 0) = 2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$$

لذا،

$$f(\mathbf{h}) = f(h_1, h_2) = h_1 + 2h_2 + R_2(\mathbf{h}, \mathbf{0})$$

که در آن

$$R_2(\mathbf{h}, \mathbf{0})/\|\mathbf{h}\|^2 \rightarrow 0, \quad \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$$

مثال ۰۲. فرمول تیلور مرتبه دوم را برای $f(x, y) = e^x \cos y$ ، $\mathbf{x}_0 = (0, 0)$ حساب کنید. در اینجا

$$f(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0) = 0$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0) = -1, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$$

در نتیجه،

$$f(\mathbf{h}) = f(h_1, h_2) = 1 + h_1 + \frac{1}{2}h_1^2 - \frac{1}{2}h_2^2 + R_2(\mathbf{h}, \mathbf{0})$$

که در آن

$$R_2(\mathbf{h}, \mathbf{0}) / \|\mathbf{h}\|^2 \rightarrow 0 \quad \text{وقتی } \mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$$

در حالت توابع یک متغیره، می توان $f(x)$ را با یک سری توانی به نام سری تیلور نمایش داد:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + f'(x_0)h + \frac{f''(x_0)h^2}{2} + \dots + \frac{f^{(k)}(x_0)h^k}{k!} + \dots$$

مشروط بر اینکه بتوان ثابت کرد که وقتی $k \rightarrow \infty$ ، $R_k(h, x_0) \rightarrow 0$. به همین نحو، همانطور که در قضیه ۲ دیدیم، برای توابع چندمتغیره اصطلاحات فوق با اصطلاحات نظیر مستلزم مشتقات جزئی تعویض می شوند. مجدداً، می توان یک چنین تابع را با سری تیلور نمایش داد مشروط بر اینکه ثابت کنیم وقتی $k \rightarrow \infty$ ، $R_k \rightarrow 0$. این نکته در تمرین ۷ بیشتر پیگیری می شود.

تمرینات

در هر یک از تمرینات ۱ تا ۶، فرمول تیلور مرتبه دوم را برای تابع داده شده حول نقطه ذکر شده (x_0, y_0) معین نمایید.

۱. $f(x, y) = (x + y)^2, x_0 = 0, y_0 = 0$

۲. $f(x, y) = 1/(\hat{x}^2 + y^2 + 1), x_0 = 0, y_0 = 0$

۳. $f(x, y) = e^{x+y}, x_0 = 0, y_0 = 0$

۴. $f(x, y) = e^{-x^2-y^2} \cos(xy), x_0 = 0, y_0 = 0$

۵. $f(x, y) = \sin(xy) + \cos(xy), x_0 = 0, y_0 = 0$

۶. $f(x, y) = e^{(x-1)^2} \cos y, x_0 = 1, y_0 = 0$

*۷. تابع $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ را تحلیلی نامیم اگر

$$f(x + h) = f(x) + f'(x)h + \dots + \frac{f^{(k)}(x)}{k!} h^k + \dots$$

(یعنی، سری سمت راست همگرا بوده و مساوی $f(x + h)$ باشد).

(۱) فرض کنید f در شرط زیر صدق کند: بر هر بازه بسته $[a, b]$ ثابتی چون M موجود است که به ازای هر $k = 1, 2, 3, \dots$ و هر $x \in [a, b]$ ، $|f^{(k)}(x)| \leq M^k$. ثابت کنید f تحلیلی است.

(ب) فرض کنید $f(x) = \begin{cases} e^{-1/x} & x > 0 \\ 0 & x \leq 0 \end{cases}$. نشان دهید که f یک تابع C^∞ است ولی

f تحلیلی نیست .

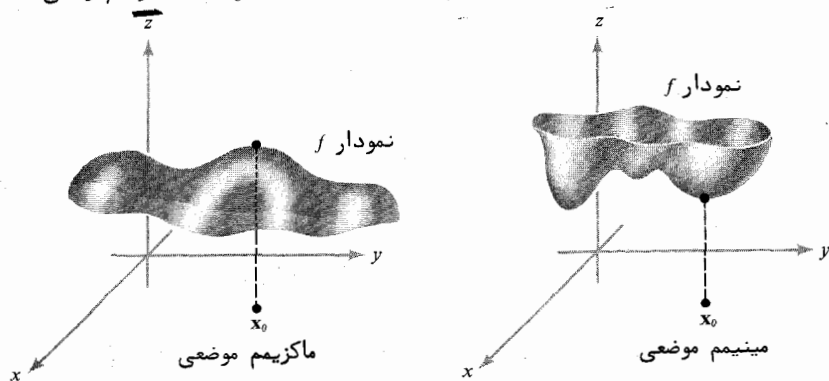
(پ) توابع تحلیلی از \mathbb{R}^n به \mathbb{R} را تعریف کنید . قسمت (آ) را به این رده از توابع تعمیم دهید .

(ت) $f(x, y) = e^{x+y}$ را به صورت یک سری توانی حول $x_0 = 0, y_0 = 0$ بسط دهید .

۲.۴ اکسترممهای توابع حقیقی

در بین اساسی‌ترین ویژگیهای هندسی نمودار یک تابع نقاط اکسترمیم آن قرار دارند که تابع در آنها به بیشترین و کمترین مقدار خود می‌رسد . در این بخش روشی برای تعیین این نقاط به دست می‌آوریم . در واقع ، این روش اکسترممهای موضعی را نیز آشکار می‌سازد . اینها نقاطی هستند که در آنها تابع به ماکزیمم یا مینیمم خود فقط نسبت به نقاط مجاور می‌رسد . بحث را با تعریف اصطلاحات خود آغاز می‌کنیم .

تعریف . اگر $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع اسکالر باشد ، نقطه $x_0 \in U$ یک مینیمم موضعی است اگر یک همسایگی از x_0 مانند V موجود باشد به طوری که به ازای هر نقطه $x \in V$ ، $f(x) \geq f(x_0)$. (ر.ک. شکل ۱.۰۲.۴) . به همین نحو ، $x_0 \in U$ یک ماکزیمم موضعی است



شکل ۱.۰۲.۴

مینیمم موضعی (آ) و ماکزیمم موضعی (ب) تابعی دومتغیره

اگر یک همسایگی مانند V از x_0 موجود باشد به طوری که به ازای هر $x \in V$ ، $f(x) \leq f(x_0)$ ، و نیز $x_0 \in U$ را یک اکسترمم موضعی یا نسبی نامیم اگر یک مینیمم موضعی یا ماکزیمم موضعی باشد. نقطه x_0 یک نقطه بحرانی f است اگر $Df(x_0) = 0$. یک نقطه بحرانی که اکسترمم موضعی نباشد یک نقطه زینی نام دارد.

جای اکسترممها مبتنی بر حقیقت زیر است که باید از حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره (حالت $n = 1$) با آن آشنا باشید: هر اکسترمم یک نقطه بحرانی است.

قضیه ۳. هرگاه $U \subset \mathbb{R}^n$ باز، $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ مشتقپذیر، و $x_0 \in U$ اکسترمم موضعی باشد، آنگاه $Df(x_0) = 0$ ، یعنی x_0 یک نقطه بحرانی f است.

برهان. فرض کنیم f در x_0 ماکزیمم موضعی داشته باشد. در این صورت، به ازای هر $h \in \mathbb{R}^n$ تابع $g(t) = f(x_0 + th)$ در $t = 0$ ماکزیمم موضعی دارد. لذا، از حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره داریم $g'(0) = 0$. از آن سو، بنابر قاعده زنجیره‌ای،

$$g'(0) = Df(x_0) \cdot h$$

لذا، به ازای هر h ، $Df(x_0) \cdot h = 0$ ، و در نتیجه، $Df(x_0) = 0$. حالتی که f در x_0 مینیمم موضعی دارد کاملاً مشابه می‌باشد.

اگر به یاد آوریم که $Df(x_0) = 0$ یعنی تمام مولفه‌های $Df(x_0)$ صفرند، می‌توان قضیه ۳ را این طور بیان کرد: هرگاه x_0 یک اکسترمم موضعی باشد، آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial x_i}(x_0) = 0, \quad i = 1, \dots, n$$

۱. اصطلاح نقطه زینی گاهی با این عمومیت به کار نمی‌رود.

۲. برهان. چون $g(0)$ ماکزیمم موضعی است، به ازای $i > 0$ کوچک داریم $g(t) \leq g(0)$. در

نتیجه، $g(t) - g(0) \leq 0$ ، و از اینرو، $g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^+} (g(t) - g(0))/t \leq 0$ ، که در آن

یعنی حد وقتی $t > 0$ ، $t \rightarrow 0$ ، به همین نحو، به ازای $t < 0$ کوچک داریم $g'(0) = \lim_{t \rightarrow 0^-} (g(t) - g(0))/t \geq 0$.

در نتیجه، $g'(0) = 0$.

یعنی، هر مشتق جزئی در x_0 صفر است. به عبارت دیگر، $\nabla f(x_0) = 0$ ، که در آن ∇f گرادیان f می باشد.

هرگاه در جستجوی اکسترممها یا اکسترممهای موضعی یک تابع باشیم، آنگاه قضیه ۳ می گوید که باید آنها را بین نقاط بحرانی بیابیم. گاهی این را می توان با امتحان به دست آورد، ولی معمولاً از آزمونهایی (که ذیلاً" ارائه می شوند) شبیه آزمون مشتق دوم در حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره استفاده می کنیم.

مثال ۱. تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x, y) = x^2 + y^2$ ، را در نظر می گیریم. البته از قبل می دانیم که این تابع در مبدأ مینیمم دارد، ولی این را نادیده گرفته و روش توصیف شده در بالا را اعمال می کنیم.

باید نقاط بحرانی f را با حل معادلات $\partial f(x, y)/\partial x = 0$ ، $\partial f(x, y)/\partial y = 0$ نسبت به x و y پیدا کنیم. اما

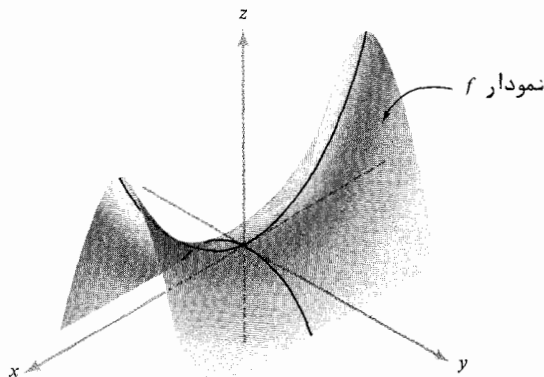
$$\frac{\partial}{\partial y} f(x, y) = 2y \quad \text{و} \quad \frac{\partial}{\partial x} f(x, y) = 2x$$

در نتیجه، تنها نقطه بحرانی مبدأ $(0, 0)$ است، که مقدار تابع در آن صفر است. چون $f(x, y) \geq 0$ ، این نقطه مینیمم نسبی است در واقع، مینیمم مطلق f است.

مثال ۲. تابع مثال ۴ از بخش ۱۰۲، یعنی $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x, y) = x^2 - y^2$ ، را در نظر می گیریم. یک لحظه فراموش می کنیم که این تابع نقطه زینی دارد و بدون اکسترمم است، روش قضیه ۳ را برای پیدا کردن اکسترممها به کار می بریم.

مثل مثال ۱، در می یابیم که f فقط یک نقطه بحرانی در مبدأ دارد، و مقدار f در آن صفر است. با امتحان مستقیم مقادیر f در نقاط نزدیک مبدأ، ملاحظه می کنیم که $f(x, 0) \geq f(0, 0)$ و $f(0, y) \leq f(0, 0)$. وقتی x یا y را بتوان بدلخواه کوچک گرفت، مبدأ نمی تواند مینیمم نسبی یا ماکزیمم نسبی باشد. بنابراین، این تابع می تواند اکسترمم نسبی نداشته باشد (ر.ک. شکل ۲۰۲۰۴).

پدیده ظاهر شده در این مثال، به نام نقطه بحرانی از نوع زینی، یا نقطه زینی ممکن است در حالت $n = 1$ نیز رخ دهد. در این حالت، وقتی نقطه ای بدون اکسترمم موضعی بدون نقطه بحرانی باشد، نقطه عطف نام دارد. مثلاً، $f(x) = x^3$ در $x = 0$



شکل ۲۰۲.۴

یک تابع دو متغیره با یک نقطهٔ زینی

نقطهٔ بحرانی دارد، ولی $x = 0$ اکسترم نسبی نیست.

مثال ۳. تمام نقاط بحرانی $z = x^2y + y^2x$ را بیابید.
با مشتقگیری خواهیم داشت

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 2xy + y^2, \quad \frac{\partial z}{\partial y} = 2xy + x^2$$

اگر مشتقات زیر را متحد صفر بگیریم، نتیجه می‌شود که

$$2xy + y^2 = 0, \quad 2xy + x^2 = 0$$

از تفریق به دست می‌آوریم $x^2 = y^2$. لذا، $x = \pm y$. با گذاردن $x = +y$ در اولین معادلهٔ فوق درمی‌یابیم که

$$2y^2 + y^2 = 3y^2 = 0$$

در نتیجه، $y = 0$ ؛ و لذا، $x = 0$. هرگاه $x = -y$ ، آنگاه

$$-2y^2 + y^2 = -y^2 = 0$$

در نتیجه، $y = 0$ ؛ و از اینرو، $x = 0$.

لذا، تنها نقطهٔ بحرانی $(0, 0)$ است. به ازای $x = y$ ، $z = 2x^3$ ، که به ازای x

نزدیک صفر هم مثبت و هم منفی است. لذا، $(0, 0)$ یک اکسترمم نسبی نیست.

تا آخر این بخش صرف به دست آمدن محکی (وابسته به مشتق دوم) برای اکسترمم نسبی بودن یک نقطه بحرانی می‌شود. در حالت خاص $n = 1$ ، محک ما به شرط‌آشنای $f''(x) > 0$ برای مینیمم و $f''(x) < 0$ برای ماکزیمم تحویل می‌شود. ولی، در حالت کلی مشتق دوم مفهوم ریاضی نسبتاً پیچیده‌ای است. برای بیان محک ما ابتدا صورتی از مشتق دوم به نام هسی را معرفی می‌کنیم.

مفهومی که می‌خواهیم معرفی کنیم مستلزم تابع درجه دوم است. توابع درجه دوم توابعی هستند مانند $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ که به ازای ماتریسی چون a_{ij} به شکل زیر می‌باشند:

$$g(h_1, \dots, h_n) = \sum_{i,j=1}^n a_{ij} h_i h_j$$

برحسب ضرب ماتریسی می‌توان نوشت

$$g(h_1, \dots, h_n) = [h_1 \ \dots \ h_n] \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ \vdots \\ h_n \end{bmatrix}$$

اگر مایل باشیم می‌توانیم a_{ij} را متقارن بگیریم؛ در واقع، g از تعویض a_{ij} با $b_{ij} = \frac{1}{2}(a_{ij} + a_{ji})$ تغییر نمی‌کند، زیرا $h_i h_j = h_j h_i$ و مجموع روی تمام i و j گرفته‌شده است. ماهیت درجه دومی g در اتحاد

$$g(\lambda h_1, \dots, \lambda h_n) = \lambda^2 g(h_1, \dots, h_n)$$

که از تعریف نتیجه می‌شود، منعکس است.

حال آماده‌ایم تا توابع هسی (به افتخار لودویگ اوتو هس که آنها را در ۱۸۴۴ معرفی کرد) تعریف کنیم.

تعریف. فرض کنیم $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ دارای مشتقات جزئی مرتبه دوم $(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)(\mathbf{x}_0)$ به ازای $i, j = 1, \dots, n$ در نقطه $\mathbf{x}_0 \in U$ باشد. در این صورت، هسی f در \mathbf{x}_0 تابع درجه دومی است که با

$$Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) h_i h_j$$

تعریف شده است.

این تابع معمولاً در نقاط بحرانی $x_0 \in U$ به کار می‌رود. در این حالت $Df(x_0) = 0$ و فرمول تیلور (ر.ک. قضیه ۲، بخش ۱۰.۴) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$f(x_0 + h) = f(x_0) + Hf(x_0)(h) + R_2(h, x_0)$$

لذا، هسی در یک نقطه بحرانی مساوی اولین جمله غیر ثابت در سری تیلور f است.

تابع درجه دوم $g: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ معین مثبت است اگر به ازای هر $h \in \mathbb{R}^n$ ، $g(h) \geq 0$ و فقط به ازای $h = 0$ ، $g(h) = 0$. به همین نحو، g معین منفی است اگر $g(h) \leq 0$ و فقط به ازای $h = 0$ ، $g(h) = 0$.

توجه کنید که اگر $n = 1$ ، $Hf(x_0)(h) = \frac{1}{2}f''(x_0)h^2$ ، که معین مثبت است اگر $f''(x_0) > 0$. حال آماده‌ایم تا محک را برای اکستریمهای نسبی بیان کنیم.

قضیه ۴. هرگاه $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ از رده C^3 ، $x_0 \in U$ یک نقطه بحرانی f ، و هسی $Hf(x_0)$ معین مثبت باشد، آنگاه x_0 یک مینیمم نسبی f است. به همین نحو، هرگاه $Hf(x_0)$ معین منفی باشد، آنگاه x_0 یک ماکزیمم نسبی می‌باشد.

در واقع، ثابت می‌کنیم که اکستریمها اکید هستند. ماکزیمم نسبی x_0 اکید نام دارد اگر به ازای هر $x \neq x_0$ نزدیک، $f(x) < f(x_0)$. مینیمم نسبی اکید به همین نحو تعریف می‌شود.

اختیاری

برهان قضیه ۴ نیاز به قضیه تیلور و نتیجه زیر از جبر خطی دارد.

لم ۱. هرگاه $B = (b_{ij})$ یک ماتریس حقیقی $n \times n$ بوده و تابع درجه دوم مربوطه

$$H: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}, (h_1, \dots, h_n) \mapsto \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n b_{ij} h_i h_j$$

معین مثبت باشد، آنگاه ثابتی چون $M > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $h \in \mathbb{R}^n$

$$H(h) \geq M \|h\|^2$$

برهان. به ازای $\|\mathbf{h}\| = 1$ قرار می‌دهیم $g(\mathbf{h}) = H(\mathbf{h})$. در این صورت، g تابع پیوسته‌ای از \mathbf{h} به ازای $\|\mathbf{h}\| = 1$ بوده؛ و در نتیجه، مینیمی چون M خواهد داشت.^۱ چون H درجه دوم است، به ازای هر $\mathbf{h} \neq \mathbf{0}$ داریم

$$H(\mathbf{h}) = \dot{H}\left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\|\mathbf{h}\|\right) = H\left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\right)\|\mathbf{h}\|^2 = g\left(\frac{\mathbf{h}}{\|\mathbf{h}\|}\right)\|\mathbf{h}\|^2 \geq M\|\mathbf{h}\|^2$$

توجه کنید که تابع درجه دوم مربوط به ماتریس $\frac{1}{2}(\partial^2 f / \partial x_i \partial x_j)$ دقیقاً " مساوی هسی می‌باشد.

برهان قضیه ۴. به یاد آورید که اگر $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ از رده C^3 بوده و $\mathbf{x}_0 \in U$ یک نقطه بحرانی باشد، قضیه تیلور را می‌توان به شکل

$$f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) = Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0)$$

بیان کرد، که در آن وقتی $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$

$$R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0) / \|\mathbf{h}\|^2 \rightarrow 0$$

چون $Hf(\mathbf{x}_0)$ طبق فرض معین مثبت است، ثابتی مانند $M > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $\mathbf{h} \in \mathbb{R}^n$

$$Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) \geq M\|\mathbf{h}\|^2$$

چون وقتی $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ ، $R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0) / \|\mathbf{h}\|^2 \rightarrow 0$ ، $\delta > 0$ ای وجود دارد به طوری که به ازای $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta$

$$|R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0)| < M\|\mathbf{h}\|^2$$

لذا، به ازای $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta$ ، $0 < Hf(\mathbf{x}_0)(\mathbf{h}) + R_2(\mathbf{h}, \mathbf{x}_0) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)$ ؛ در نتیجه، \mathbf{x}_0 یک مینیمم نسبی و در واقع یک مینیمم نسبی اکید می‌باشد.

برهان در حالت معین منفی مشابه است، یا اینکه می‌توان برهان فوق را بر $-f$ اعمال کرد، و این را به عنوان تمرین باقی می‌گذاریم.

مثال ۴. مجدداً تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x, y) = x^2 + y^2$ ، را در نظر می‌گیریم. در این

۱. در اینجا از قضیه بدون اثباتی استفاده می‌کنیم مشابه قضیه‌ای در حساب دیفرانسیل و

انتگرال که می‌گوید هر تابع پیوسته بر بازه $[a, b]$ ماکزیمم و مینیمم دارد.

صورت، $(0, 0)$ یک نقطه بحرانی است، و f به شکل قضیه تیلور مهیا است.

$$f((0, 0) + (h_1, h_2)) = f(0, 0) + (h_1^2 + h_2^2) + 0$$

مستقیماً می‌توان دید که هسی در $(0, 0)$ مساوی است با

$$Hf(\mathbf{0})(\mathbf{h}) = h_1^2 + h_2^2$$

که بوضوح معین مثبت است. لذا، $(0, 0)$ یک مینیمم نسبی می‌باشد. البته، این حالت خاص را می‌توان بدون حساب دیفرانسیل و انتگرال انجام داد. در واقع، واضح است که به ازای

$$\cdot f(x, y) > 0, (x, y) \neq (0, 0) \text{ هر}$$

هسی برای توابع دومتغیره $f(x, y)$ به صورت زیر نوشته می‌شود:

$$Hf(x, y)(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}[h_1, h_2] \begin{bmatrix} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} \\ \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix}$$

حال برای وقتی یک تابع درجه دوم تعریف شده با یک چنین ماتریس 2×2 معین مثبت است محک مفیدی ارائه می‌دهیم. این محک در قضیه ۴ اعمال خواهد شد.

لم ۰۲. فرض کنیم

$$H(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}[h_1, h_2]B \begin{bmatrix} h_1 \\ h_2 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

در این صورت، $H(\mathbf{h})$ معین مثبت است اگر و فقط اگر $a > 0$ و $\det B = ac - b^2 > 0$.

برهان. داریم

$$H(\mathbf{h}) = \frac{1}{2}[h_1, h_2] \begin{bmatrix} ah_1 + bh_2 \\ bh_1 + ch_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{2}(ah_1^2 + 2bh_1h_2 + ch_2^2)$$

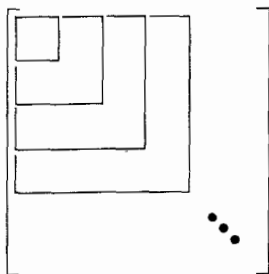
مربع را کامل کرده، می‌نویسیم

$$H(\mathbf{h}) = \frac{1}{2} \left(a \left(h_1 + \frac{b}{a} h_2 \right)^2 + \left(c - \frac{b^2}{a} \right) h_2^2 \right)$$

فرض کنیم H معین مثبت باشد. با فرض $h_2 = 0$ می‌بینیم که $a > 0$ و با قراردادن

اگر $h_1 = -(b/a)h_2$ به دست می‌آوریم $c - b^2/a > 0$ یا $ac - b^2 > 0$. بالعکس، اگر $a > 0$ و $c - b^2/a > 0$ ، $H(\mathbf{h})$ مجموع مربعات است؛ در نتیجه، $H(\mathbf{h}) \geq 0$. هرگاه $H(\mathbf{h}) = 0$ ، آنگاه هر مربع باید صفر باشد . این ایجاب می‌کند که هر دوی h_1 و h_2 باید صفر باشند؛ در نتیجه، $H(\mathbf{h})$ معین مثبت بی‌باشد .

به همین نحو، $H(\mathbf{h})$ معین منفی است اگر و فقط اگر $a < 0, ac - b^2 > 0$. محکهای مشابهی برای یک ماتریس $n \times n$ مانند B وجود دارند . n زیرماتریس مربعی در امتداد قطر را در نظر می‌گیریم (ر. ک. شکل ۳۰۲۰۴) . در این صورت، B معین مثبت است (یعنی



شکل ۳۰۲۰۴

زیرماتریسهای "قطری" به کار رفته در محک معین مثبت بودن؛ همه آنها باید دترمینان مثبت داشته باشند .

تابع درجه دوم مربوط به B معین مثبت است) اگر و فقط اگر دترمینانهای این زیرماتریسهای قطری همه بزرگتر از صفر باشند . برای معین منفی علامت باید متناوباً " < 0 " و " > 0 " باشد . ما این حالت کلی را در اینجا ثابت نمی‌کنیم^۱ .
با استفاده از لم ۲ و قضیه ۴ بی‌درنگ به نتیجه زیر خواهیم رسید .

۱. اثبات این را مثلاً "می‌توان در کتاب زیر یافت :

قضیه ۵. فرض کنیم $f(x, y)$ بر مجموعه باز U در \mathbb{R}^2 از رده C^3 باشد. نقطه (x_0, y_0) مینیم موضعی (اکید) f است مشروط بر اینکه سه شرط زیر برقرار باشند:

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) = 0 \quad (\text{یک})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x_0, y_0) > 0 \quad (\text{دو})$$

$$D = \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \right) \left(\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \right) - \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \right)^2 > 0 \quad (\text{سه})$$

(D مین نامیده می‌شود.) هرگاه در (دو) به جای < 0 داشته باشیم > 0 و شرط (سه) تغییر نکند، آنگاه ماکزیم موضعی (اکید) خواهیم داشت.

مثال ۵. تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x, y) = x^2 - 2xy + 2y^2$ ، را در نظر می‌گیریم. مثل مثال ۴، به آسانی معلوم می‌شود که مبدأ تنها نقطه بحرانی است، $f(0, 0) = 0$ ، و هسی مساوی است با

$$Hf(\mathbf{0})(\mathbf{h}) = h_1^2 - 2h_1h_2 + 2h_2^2 = (h_1 - h_2)^2 + h_2^2$$

که بوضوح معین مثبت است. لذا، f در $(0, 0)$ مینیم نسبی دارد. به صورت دیگر، می‌توان قضیه ۵ را به کار برد. در $(0, 0)$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2$ ، $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 4$ ، و $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = -2$. شرایط (یک)، (دو)، و (سه) برقرارند؛ در نتیجه، f در $(0, 0)$ مینیم نسبی دارد.

هرگاه در قضیه ۵ $D < 0$ ، آنگاه یک نقطه زینی داریم. در واقع، می‌توان ثابت کرد که وقتی از (x_0, y_0) در جهتی دور می‌شویم، $f(x, y)$ از $f(x_0, y_0)$ بزرگتر است و این در جهت قائم کوچکتر می‌باشد (ر. ک. تمرین ۱۴). لذا، شکل کلی مشابه شکل ۲.۲.۴ می‌باشد. شکل حالت $D = 0$ را باید با تحلیل بیشتر به دست آورد.

خلاصه کنیم، وقتی با توابع دو متغیره سروکار داریم، تمام نقاط بحرانی به دست می‌آیند و هسیهای مربوطه محاسبه می‌شوند، بعضی از این هسیها ممکن است معین مثبت باشند که مینیمهای نسبی را نشان می‌دهند؛ برخی ممکن است منفی باشند که ماکزیمهای نسبی را نشان می‌دهند؛ و برخی ممکن است هر دو مقدار مثبت و منفی را بگیرند که مبین نقاط زینی می‌باشند. نمودار در یک نقطه زینی که $D < 0$ شبیه شکل

۲۰۲۰۴ است. نقاط بحرانی که در آنها $D \neq 0$ (یا هسی معین مثبت یا منفی است) تباه نشده نام دارند. لذا، نقاط ماکزیم، مینیم، و زینی تباه نشده وجود دارند. سایر نقاط بحرانی، که در آنها $D = 0$ ، را می‌توان "با سطوح تراز و مقاطع (بخش ۱۰۲) یا روشی دیگر آزمود. چنین نقاط بحرانی تباه شده نام دارند، و روشهای این بخش نمی‌توانند تصویری از رفتار یک تابع در مجاورت چنین نقاط به دست دهند.

مثال ۶. نقاط ماکزیم، مینیم، و زینی تابع

$$f(x, y) = \log(x^2 + y^2 + 1)$$

را بیابید.

ابتدا باید نقاط بحرانی این تابع را بیابیم؛ لذا، طبق قضیه ۳ داریم

$$\nabla f(x, y) = \frac{2x}{x^2 + y^2 + 1} \mathbf{i} + \frac{2y}{x^2 + y^2 + 1} \mathbf{j}$$

لذا، $\nabla f(x, y) = \mathbf{0}$ اگر و فقط اگر $(x, y) = (0, 0)$ ؛ و در نتیجه، تنها نقطه بحرانی f عبارت است از $(0, 0)$. حال باید معین کنیم این نقطه ماکزیم، مینیم، یا زینی است. مشتقات جزئی مرتبه دوم عبارتند از

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(x^2 + y^2 + 1) - (2x)(2x)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2(x^2 + y^2 + 1) - (2y)(2y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

و

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{-2x(2y)}{(x^2 + y^2 + 1)^2}$$

در نتیجه،

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0) = 2 = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)$$

و

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = 0$$

که نتیجه می‌دهد .

$$D = 2 \cdot 2 = 4 > 0$$

چون $(\partial^2 f / \partial x^2)(0, 0) > 0$ ، از قضیه ۵ نتیجه می‌شود که $(0, 0)$ یک مینیمم موضعی است .
(آیا می‌توانید این را فقط از اینکه $\log t$ تابعی صعودی از $t > 0$ است نتیجه بگیرید ؟)

مثال ۷. نمودار تابع $g(x, y) = 1/xy$ سطحی مانند S در \mathbb{R}^3 است . نقاطی بر S بیابید که به مبدا $(0, 0, 0)$ نزدیکترین باشند .

فاصله (x, y, z) تا $(0, 0, 0)$ از فرمول زیر به دست می‌آید :

$$d(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

هرگاه $(x, y, z) \in S$ ، آنگاه d را می‌توان به صورت تابعی دومتغیره چون $d_*(x, y) = d(x, 1/xy)$ بیان کرد :

$$d_*(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2 + \frac{1}{x^2 y^2}}$$

توجه کند که مینیمم (در صورت وجود) نمی‌تواند خیلی نزدیک محور x یا محور y رخ دهد ، زیرا d_* به ازای $x = 0$ یا $y = 0$ تعریف نشده است ، و d_* با نزدیک شدن x یا y به محور x یا محور y بسیار بزرگ می‌شود .

چون $d_* > 0$ ، وقتی مینیمم می‌شود که $d_*^2(x, y) = x^2 + y^2 + (1/x^2 y^2) = f(x, y)$ مینیمم شود . (کارکردن با تابع f بسیار آسانتر است .) گرادیان

$$\nabla f(x, y) = \nabla d_*^2(x, y) = \left(2x - \frac{2}{x^3 y^2} \right) \mathbf{i} + \left(2y - \frac{2}{y^3 x^2} \right) \mathbf{j}$$

را حساب می‌کنیم . این 0 است اگر و فقط اگر

$$\left(2x - \frac{2}{x^3 y^2} \right) = 0 = \left(2y - \frac{2}{y^3 x^2} \right)$$

یعنی ، $x^4 y^2 - 1 = 0$ و $x^2 y^4 - 1 = 0$. از معادله اول به دست می‌آوریم $y^2 = 1/x^4$ ، و با گذاردن این در معادله دوم ، به دست می‌آوریم

$$\frac{x^2}{x^8} = 1 = \frac{1}{x^6}$$

لذا ، $x = \pm 1$ و $y = \pm 1$ ، و نتیجه می‌شود که f چهار نقطه بحرانی دارد ؛ یعنی ،

یا زینی بودن این نقاط، قضیه ۵ را به کار می‌بریم:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 2 + \frac{6}{x^4 y^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 + \frac{6}{x^2 y^4}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{4}{x^3 y^3}$$

در نتیجه،

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(a, b) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(a, b) = 8$$

که در آن (a, b) یکی از چهار نقطه بحرانی فوق بوده و $(\partial^2 f / \partial x \partial y)(a, b) = \pm 4$.
در هر حالت فوق می‌بینیم که $D = 64 - 16 = 48 > 0$ و $(\partial^2 f / \partial x^2)(a, b) > 0$ ؛
در نتیجه، هر نقطه بحرانی یک مینیمم موضعی است، و اینها همه مینیممهای موضعی f می‌باشند.

بالاخره، توجه کنید که به ازای همه این نقاط بحرانی، $d_{**}^2(a, b) = 3$ ؛ در نتیجه،
نقاط واقع بر سطح که به $(0, 0, 0)$ نزدیکترین اند عبارتند از $(1, 1, 1)$ ، $(1, -1, -1)$ ،
 $(-1, 1, -1)$ ، و $(-1, -1, 1)$ که در آنها $d_* = \sqrt{3}$. لذا، $d_* \geq \sqrt{3}$ و وقتی
 $(x, y) = (\pm 1, \pm 1)$ ، مساوی $\sqrt{3}$ می‌باشد.

مثال ۸. رفتار $z = x^5 y + xy^5 + xy$ را در نقاط بحرانی آن تحلیل نمایید.
مشتقات جزئی اول عبارتند از

$$\frac{\partial z}{\partial x} = 5x^4 y + y^5 + y = y(5x^4 + y^4 + 1)$$

و

$$\frac{\partial z}{\partial y} = x(5y^4 + x^4 + 1)$$

جملات $5x^4 + y^4 + 1$ و $5y^4 + x^4 + 1$ همواره بزرگتر یا مساوی ۱ هستند؛ در نتیجه
تنها نقطه بحرانی $(0, 0)$ می‌باشد.

مشتقات جزئی دوم عبارتند از

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} = 20x^3 y, \quad \frac{\partial^2 z}{\partial y^2} = 20xy^3$$

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} = 5x^4 + 5y^4 + 1$$

لذا، در $(0, 0)$ داریم $D = -1$ ؛ در نتیجه، $(0, 0)$ یک نقطهٔ زینی تپه‌نشدۀ بود و نمودار z در مجاورت $(0, 0)$ شبیه شکل ۲۰.۲۰۴ می‌باشد.

تمرینات

در تمرینهای ۱ تا ۱۰، نقاط بحرانی تابع داده شده را یافته و سپس معین کنید کدامیک از نقاط ماکزیم موضعی، مینیم موضعی، یا زینی اند.

$$f(x, y) = x^2 - y^2 + xy \quad ۰۱$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - xy \quad ۰۲$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 2xy \quad ۰۳$$

$$f(x, y) = x^2 + y^2 + 3xy \quad ۰۴$$

$$f(x, y) = e^{1+x^2-y^2} \quad ۰۵$$

$$f(x, y) = x^2 - 3xy + 5x - 2y + 6y^2 + 8 \quad ۰۶$$

$$f(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4 \quad ۰۷$$

$$f(x, y) = \sin(x^2 + y^2) \quad ۰۸ \quad (\text{فقط نقطهٔ بحرانی } (0, 0) \text{ را در نظر بگیرید})$$

$$f(x, y) = \cos(x^2 + y^2) \quad ۰۹ \quad (\text{فقط نقاط بحرانی } (0, 0), (\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2}), \text{ و } (0, \sqrt{\pi}) \text{ را در}$$

نظر بگیرید.)

$$f(x, y) = \log(2 + \sin xy) \quad ۰۱۰^*$$

۰۱۱. با بررسی تابع $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $f(x, y) = (y - 3x^2)(y - x^2)$ ، معلوم می‌شود که یافتن شرایطی که تضمین کنند یک نقطهٔ بحرانی اکسترم نسبی است وقتی قضیهٔ ۵ ناتوان است مشکل می‌باشد. نشان دهید که

(آ) مبدأ یک نقطهٔ بحرانی f است؛

(ب) f بر هر خط مستقیم ماربر $(0, 0)$ در $(0, 0)$ مینیم نسبی دارد؛ یعنی، هرگاه

$g(t) = (at, bt)$ ، آنگاه $f \circ g: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ به ازای هر a و b مینیم نسبی دارد؛

(پ) مبدأ یک مینیم نسبی f نیست.

۰۱۲. فرض کنید $f(x, y) = Ax^2 + E$. نقاط بحرانی f چه هستند؟ آیا اینها ماکزیم

موضعی اند یا مینیم موضعی؟

۱۳. فرض کنید $f(x, y) = x^2 - 2xy + y^2$. در اینجا $D = 0$. آیا می‌توانید بگویید که

نقاط بحرانی مینیم موضعی، ماکزیم موضعی، یا نقطه زینی اند؟

*۱۴. نشان دهید هرگاه (x_0, y_0) یک نقطه بحرانی تابع C^3 ی $f(x, y)$ بوده و $D < 0$ ،

آنگاه نقاطی مانند (x, y) نزدیک (x_0, y_0) وجود دارند که در آنها $f(x, y) > f(x_0, y_0)$ و ،

نیز، نقاطی که در آنها $f(x, y) < f(x_0, y_0)$.

۱۵. ماهیت نقاط بحرانی تابع

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 + xy$$

را تعیین کنید .

در تمرینهای ۱۶ تا ۲۰ ، فرض کنید D قرص یکه در \mathbb{R}^2 باشد ؛ یعنی ، $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ و

$$\partial D = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$$

*۱۶. فرض کنید u تابعی بر D باشد که " اکیدا " تحت توافقی " است ؛ یعنی ، $\nabla^2 u = (\partial^2 u)$ ،

$$D \setminus \partial D > 0 \text{ (} \partial^2 u / \partial y^2 \text{)} + \partial^2 x^2 \text{) . نشان دهید که } u \text{ نمی‌تواند نقطه ماکزیم در } D \setminus \partial D$$

(مجموعه نقاطی از D که در ∂D نیست) داشته باشد .

*۱۷. فرض کنید u یک تابع توافقی باشد ؛ یعنی ، $\nabla^2 u = 0$. نشان دهید که اگر u در $D \setminus \partial D$

ماکزیم داشته باشد ، بر ∂D نیز دارد . این را گاهی " اصل ماکزیم ضعیف " برای

توابع توافقی می‌نامند . (راهنمایی . $\nabla^2(u + \epsilon e^x)$ ، $\epsilon > 0$ ، را در نظر بگیرید . این

تمرین نیاز به مطلب زیر دارد که در کتب پیشرفته‌تر ثابت شده است :

به ازای دنباله $\{p_n\}$ ، $n = 1, 2, \dots$ ، در مجموعه کراندار بسته A در \mathbb{R}^2 یا \mathbb{R}^3 ،

نقطه‌ای مانند q وجود دارد به طوری که هر همسایگی q شامل دست کم یک عضو از

$\{p_n\}$ است . مجموعه A بسته است وقتی $A \subset \partial A$ و کراندار است وقتی در یک گوی

واقع باشد .)

*۱۸. مفهوم یک تابع تحت توافقی اکید u بر D را تعریف کنید . نشان دهید u نمی‌تواند در

$D \setminus \partial D$ مینیم داشته باشد .

*۱۹. فرض کنید u در D مثل تمرین ۱۷ توافقی باشد . نشان دهید که اگر u در $D \setminus \partial D$

مینیم داشته باشد بر ∂D نیز دارد . این را گاهی " اصل مینیم ضعیف " برای توابع

توافقی می‌نامند .

*۲۰. فرض کنید $\phi: \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ ؛ پیوسته بوده و T یک جواب $\nabla^2 T = 0$ ، $T = \phi$ بر ∂D ، باشد .

(آ) با استفاده از تمرین ۱۶ تا ۱۹، نشان دهید که یک چنین جواب، در صورت وجود، باید منحصر به فرد باشد.

(ب) فرض کنید $T(x, y)$ نمایش تابع دما باشد که مستقل از زمان بوده و ϕ نمایش دمای یک صفحه مستدیر در مرزش باشد. آیا می توان (آ) را تعبیر فیزیکی کرد؟

۳.۴ اکسترمهای مقید و ضرایب لاگرانژ

در مسائل اغلب می خواهیم یک تابع را تحت قیود یا شرایطی جنبی ماکزیم نماییم. یک چنین حالات مثلا در اقتصاد رخ می دهند. فرض کنید دو نوع کالا، مثلا I و II به ما فروخته شده باشد؛ همچنین، x و y تعداد فروخته شده از هر نوع باشد. و نیز $f(x, y)$ نمایش سود حاصل از فروش x واحد از نوع I و y واحد از نوع II باشد. اما تولید توسط سرمایه کنترل می شود. لذا، مقیدیم تحت رابطه‌ای، مثلا $g(x, y) = c$ ، کار کنیم. از اینرو، می خواهیم $f(x, y)$ را در بین (x, y) های صادق در $g(x, y) = c$ ماکزیم نماییم. شرط $g(x, y) = c$ را قید مسئله می نامیم.

هدف این بخش ذکر چند روش برای پرداختن به این مسئله و مسائل مشابه است.

قضیه ۶. فرض کنیم $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ و $g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ دو تابع هموار باشند. همچنین، $x_0 \in U$ ، $g(x_0) = c$ ، و S مجموعه تراز g با مقدار c باشد (به یاد آورید که این مجموعه نقاطی چون $x \in \mathbb{R}^n$ است که $g(x) = c$). فرض کنیم $\nabla g(x_0) \neq 0$. هرگاه $f|_S$ ، که تحدید f به S است، در x_0 دارای ماکزیم یا مینیم باشد، آنگاه عددی حقیقی مانند λ هست به طوری که

$$\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$$

برهان. درواقع، ابزار لازم برای اثبات کامل در دست نیست، ولی می توان نکات لازم را فراهم کرد. (نکات تکنیکی اضافی لازم در بخش ۴.۴ داده شده اند.)

به یاد آورید که، به ازای $n = 3$ ، فضای مماس یا صفحه مماس S در x_0 فضای متعامد به $\nabla g(x_0)$ تعریف می شود (ر.ک. بخش ۵.۲)، و به ازای n دلخواه می توان دقیقاً همین تعریف را برای فضای مماس S در x_0 داشت. این تعریف می تواند از توجه به مماس بر مسیرهای $\sigma(t)$ واقع در S به صورت زیر ناشی گردد: هرگاه $\sigma(t)$ مسیری در S بوده

و $x_0 = \sigma(0)$ ، آنگاه $\sigma'(0)$ یک بردار مماس بر S در x_0 است. ولی

$$\frac{d}{dt} g(\sigma(t)) = \frac{d}{dt} c = 0$$

و از آن سو، طبق قاعده زنجیره‌ای،

$$\left. \frac{d}{dt} g(\sigma(t)) \right|_{t=0} = \nabla g(x_0) \cdot \sigma'(0).$$

در نتیجه، $\nabla g(x_0) \cdot \sigma'(0) = 0$ ؛ یعنی، $\sigma'(0)$ متعامد به $\nabla g(x_0)$ می‌باشد.

هرگاه $f|_S$ در x_0 ماکزیم داشته باشد، آنگاه مسلماً " $f(\sigma(t))$ در $t = 0$ ماکزیم دارد. بنابر حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره، $df(\sigma(t))/dt|_{t=0} = 0$. از اینرو، طبق قاعده زنجیره‌ای،

$$0 = \left. \frac{d}{dt} f(\sigma(t)) \right|_{t=0} = \nabla f(x_0) \cdot \sigma'(0)$$

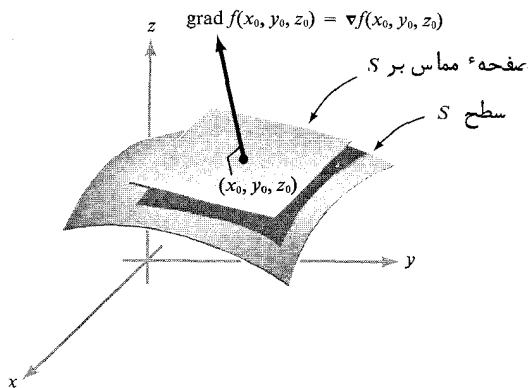
لذا، $\nabla f(x_0)$ بر مماس هر منحنی در S ، و در نتیجه بر فضای مماس S در x_0 ، عمود است. چون فضای عمود بر این فضای مماس یک خط است، $\nabla f(x_0)$ و $\nabla g(x_0)$ موازینند. چون $\nabla g(x_0) \neq 0$ ، نتیجه می‌شود که $\nabla f(x_0)$ مضربی از $\nabla g(x_0)$ است، که دقیقاً "حکم قضیه می‌باشد.

حال از این برهان تعبیر هندسی لازم را به دست می‌آوریم. مطالب را می‌توان به صورت زیر تنظیم کرد.

نتیجه. هرگاه f ، با محدود شدن به سطح S ، در x_0 ماکزیم یا مینیم داشته باشد، آنگاه $\nabla f(x_0)$ بر S در x_0 عمود است (ر.ک. شکل ۱.۳.۴).

این نتایج به ما می‌گویند که برای یافتن اکسترمهای مقید f باید در بین x_0 هایی بگردیم که در قضیه یا نتیجه آن صدق می‌کنند. برای نحوه به کارگیری آنها چند مثال ارائه می‌دهیم.

وقتی روش قضیه ۶ به کار می‌رود، باید نقطه‌ای مانند x_0 و ثابتی مانند λ ، به نام ضریب لاگرانژ، بیابیم که $\nabla f(x_0) = \lambda \nabla g(x_0)$. این روش از روش نتیجه قضیه ۶، که هندسی‌تر است، بیشتر تحلیلی می‌باشد.



شکل ۱۰۳۰۴
هندسهٔ اکسترمهای مقید

معادله (۱) می‌گوید که مشتقات جزئی f با مشتقات جزئی g متناسب اند. یافتن نقاط x_0 که در آنها این وضع رخ دهد یعنی حل معادلات همزمان

$$(۲) \quad \left. \begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1}(x_1, \dots, x_n) \\ \frac{\partial f}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_2}(x_1, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ \frac{\partial f}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) &= \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n}(x_1, \dots, x_n) \\ g(x_1, \dots, x_n) &= c \end{aligned} \right\}$$

نسبت به x_1, \dots, x_n و λ .

راه دیگر توجه به این معادلات به قرار زیر است: λ را یک متغیر اضافی گرفته و تابع

کمکی

$$h(x_1, \dots, x_n, \lambda) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda[g(x_1, \dots, x_n) - c].$$

را تشکیل می‌دهیم. در این صورت، قضیهٔ ۶ می‌گوید که برای یافتن نقاط اکستریم $f|_S$

باید نقاط بحرانی h را امتحان کنیم. این نقاط با حل معادلات زیر به دست می‌آیند:

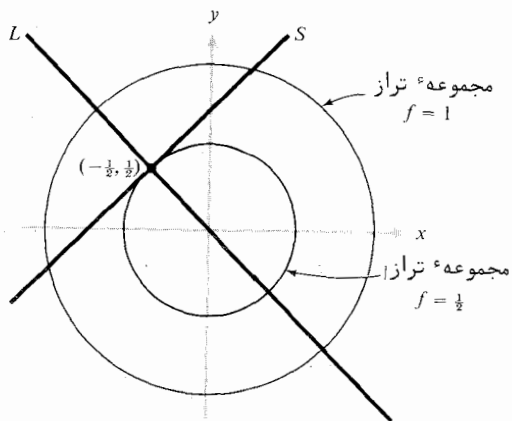
$$(3) \left. \begin{aligned} 0 &= \frac{\partial h}{\partial x_1} = \frac{\partial f}{\partial x_1} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_1} \\ &\vdots \\ 0 &= \frac{\partial h}{\partial x_n} = \frac{\partial f}{\partial x_n} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x_n} \\ 0 &= \frac{\partial h}{\partial \lambda} = g(x_1, \dots, x_n) - c \end{aligned} \right\}$$

که همان معادلات (۲) فوق می‌باشند.

در قضیه ۷ زیر، آزمونهای مشتق دوم برای ماکزیممها و مینیممها نظیر آزمونهای بخش ۲.۴ داده خواهند شد. با اینحال، در بسیاری از مسائل می‌توان ماکزیممها و مینیممها را با ابزارهای هندسی از هم تمیز داد. چون این معمولاً "ساده‌تر است، ابتدا چند مثال از نوع اخیر را در نظر می‌گیریم.

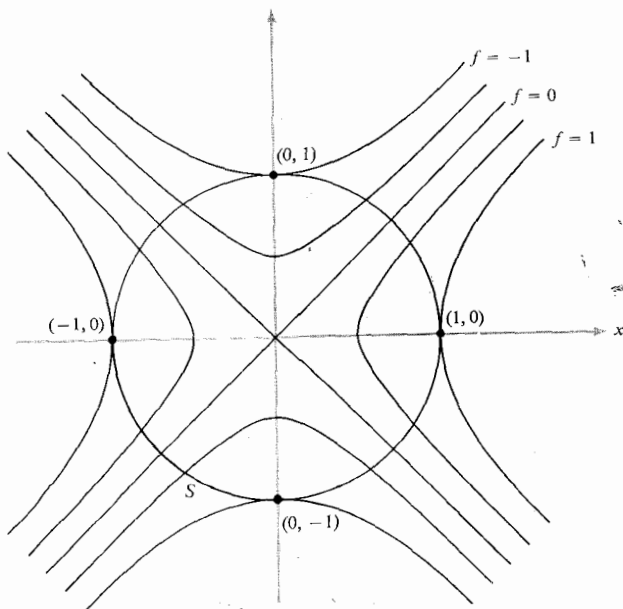
مثال ۱. فرض کنیم $S \subset \mathbb{R}^2$ خط ماربر $(-1, 0)$ با میل 45° بوده، و $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ در این صورت، $S = \{(x, y) \mid y - x - 1 = 0\}$. لذا، در اینجا قرار می‌دهیم $g(x, y) = y - x - 1$ و $c = 0$. داریم $\nabla g(x, y) = -\mathbf{i} + \mathbf{j} \neq \mathbf{0}$. اکستریمهای نسبی $f|_S$ را باید بین نقاطی جستجو کرد که در آنها ∇f بر S عمود است؛ یعنی، با میل -45° . اما $\nabla f(x, y) = (2x, 2y)$ ، که فقط وقتی شیب مطلوب را دارد که $x = -y$ یا وقتی (x, y) بر خط L ماربر مبدأ به میل -45° قرار داشته باشد. این در مجموعه S فقط در نقطه تقاطع L و S رخ می‌دهد (ر. ک. شکل ۲.۳.۴). با توجه به منحنیهای تراز f معلوم می‌شود که این نقطه، یعنی $(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ ، مینیم نسبی $f|_S$ (ولی نه f) می‌باشد.

مثال ۲. فرض کنیم $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $(x, y) \mapsto x^2 - y^2$ ، و S دایره به شعاع ۱ حول مبدأ باشد. لذا، S منحنی تراز برای g با مقدار ۱ است، که $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$. چون این دو تابع در مثالهای قبل بررسی شده‌اند، منحنیهای تراز آنها را می‌دانیم، و این منحنیها در شکل ۳.۳.۴ نموده شده‌اند. واضح است که گرادیان f در



شکل ۳.۳.۴

هندسه یافتن اکستریمهای $f(x, y) = x^2 + y^2$ مقید به $S = \{(x, y) | y - x - 1 = 0\}$



شکل ۳.۳.۴

هندسه یافتن اکستریمهای $x^2 - y^2$ بر $S = \{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$

چهار نقطه $(0, \pm 1)$ و $(\pm 1, 0)$ بر S عمود است، که اینها به ترتیب مینیمها و ماکزیمهای نسبی $f|_S$ می باشند.

این مسئله را به روش ضرایب لاگرانژ و به طور تحلیلی نیز حل می کنیم. واضح است که

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right) = (2x, -2y)$$

و

$$\nabla g(x, y) = (2x, 2y)$$

توجه کنید که اگر $x^2 + y^2 = 1$ ، $\nabla g(x, y) \neq 0$ ، لذا، طبق قضیه ۶، باید λ ای بیابیم که

$$(2x, -2y) = \lambda(2x, 2y)$$

و

$$x^2 + y^2 = 1 \text{ یعنی } (x, y) \in S$$

یعنی، از این شرایط سه معادله به دست می آیند که می توان آنها را نسبت به سه مجهول x, y, λ حل کرد. از $2x = \lambda 2x$ نتیجه می شود که $x = 0$ یا $\lambda = 1$. هرگاه $x = 0$ ، آنگاه $y = \pm 1$ و $-2y = \lambda 2y$ ایجاب می کند که $\lambda = -1$. هرگاه $\lambda = 1$ ، آنگاه $y = 0$ و $x = \pm 1$. لذا، مثل قبل، نقاط $(0, \pm 1)$ و $(\pm 1, 0)$ به دست می آیند. همانطور که قبلاً گفتیم، این روش فقط جای اکسترمهای پتانسیل را پیدا می کند؛ ماکزیم، مینیم، یا هیچکدام بودن آنها را باید به روشهای دیگر، نظیر استدلالهای هندسی یا آزمون مشتق دوم داده شده در زیر، تعیین نمود.^۱

مثال ۳. $f(x, y, z) = x + z$ را تحت قید $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ماکزیم نمایید.

مجدداً "از قضیه ۶ استفاده می کنیم. λ و (x, y, z) ی جستجو می کنیم که

$$1 = 2x\lambda$$

۱. در این مثالها، روی سطح S داریم $\nabla g(x_0) \neq 0$ ، که برای قضیه ۶ لازم است. هرگاه $\nabla g(x_0)$ در نقطه ای از S مانند x_0 صفر نبود، آنگاه باید آن را در زمره اکسترمهای ممکن قلمداد کرد.

$$0 = 2y\lambda$$

$$1 = 2z\lambda$$

و

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

از معادله اول یا سوم معلوم می‌شود که $\lambda \neq 0$. لذا، از معادله دوم خواهیم داشت $y = 0$. از معادلات اول و سوم داریم $x = z$ ؛ و در نتیجه، از معادله چهارم، از اینرو، نقاط مابعدرتنداز $(1/\sqrt{2}, 0, 1/\sqrt{2})$ و $(-1/\sqrt{2}, 0, -1/\sqrt{2})$. $x = \pm 1/\sqrt{2} = z$ از مقایسه مقادیر f در این نقاط می‌توان دید که نقطه اول ماکزیمم f و نقطه دوم مینیمم آن را به دست می‌دهد.

مثال ۴. بیشترین حجم یک جعبه مکعب مستطیل را تحت این قید که سطح آن ۱۰ مترمربع است پیدا کنید.

در اینجا اگر x, y, z طول اضلاع باشند، حجم مساوی است با $f(x, y, z) = xyz$. قید عبارت است از $2(xy + xz + yz) = 10$ ؛ یعنی، $xy + xz + yz = 5$. لذا، شرایط ما عبارتند از

$$yz = \lambda(y + z)$$

$$xz = \lambda(x + z)$$

$$xy = \lambda(y + x)$$

$$xy + xz + yz = 5$$

پیش از همه، $x \neq 0$ ، زیرا $x = 0$ ایجاب می‌کند که $yz = 5$ و $0 = \lambda z$ ؛ در نتیجه، $\lambda = 0$ و $yz = 0$. به همین نحو، $0 \neq x + y$ ، $z \neq 0$ ، $y \neq 0$ و غیره. با حذف λ از دو معادله اول نتیجه می‌شود که $xz/(x + z) = yz/(y + z)$ ، که خواهیم داشت $x = y$. به همین نحو، $y = z$. با گذاردن این مقادیر در آخرین معادله، به دست می‌آوریم $3x^2 = 5$ یا $x = \sqrt{5/3}$. لذا، $x = y = z = \sqrt{5/3}$ و $xyz = (5/3)^{3/2}$. این جواب است؛ از لحاظ هندسی واضح است که ماکزیمم وقتی روی می‌دهد که $x = y = z$.

در بخش ۵.۴، کاربرد اساسی‌تر ضرایب لاگرانژ در اقتصاد داده شده است.

در مسائلی از این قبیل ذکر چند راهنمایی کلی ممکن است مفید واقع شود. پیش از همه، هرگاه سطح S کراندار باشد (مانند یک بیضی گون)، آنگاه f باید بر S ماکزیمم و مینیمم داشته باشد.^۱ بخصوص، هرگاه f فقط دارای دو نقطهء طاق در شرایط قضیه ۶ یا نتیجهاش باشد، آنگاه یکی باید ماکزیمم و یکی باید مینیمم باشد. اما اگر بیش از دو نقطه با این خاصیت موجود باشند، بعضی می‌توانند نقطهء زینی نیز باشند. و نیز هرگاه S کراندار نباشد (مثلاً، یک هذلولی گون)، آنگاه لازم نیست f ماکزیمم یا مینیمم داشته باشد.

هرگاه سطح S با تعدادی قید مانند

$$(۴) \quad \left. \begin{aligned} g_1(x_1, \dots, x_n) &= c_1 \\ g_2(x_1, \dots, x_n) &= c_2 \\ &\vdots \\ g_k(x_1, \dots, x_n) &= c_k \end{aligned} \right\}$$

تعریف شده باشد، آنگاه قضیه ۶ را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد: اگر f در x_0 بر S ماکزیمم یا مینیمم داشته باشد، باید ثابتهایی چون $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ وجود داشته باشند به طوری که^۲

$$(۵) \quad \nabla f(x_0) = \lambda_1 \nabla g_1(x_0) + \dots + \lambda_k \nabla g_k(x_0)$$

این حالت را می‌توان با تعمیم روشی که برای اثبات قضیه ۶ به کار رفت ثابت کرد. استدلال را به خواننده وامی‌گذاریم. حال مثالی از طرز به کارگیری این تنظیم کلیتر عرضه می‌کنیم.

مثال ۵. نقاط اکسترمیم $f(x, y, z) = x + y + z$ را تحت شرایط $x^2 + y^2 = 2$ و $x + z = 1$ بیابید.

در اینجا دو قید وجود دارند:

۱. این امر در کتب پیشرفته‌تر ثابت شده است. مثلاً، ر.ک.

J. Marsden, *Elementary Classical Analysis*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1974.

Chapter 4.

۲. در اینجا، مثل فرض $\nabla g(x_0) \neq 0$ در قضیه ۶، باید فرض کنیم دترمینان ماتریسی که ستونهایش $\nabla g_1(x_0), \dots, \nabla g_k(x_0)$ اند ناصفر است، یعنی، بردارها مستقل خطی می‌باشند.

$$g_1(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2 = 0$$

$$g_2(x, y, z) = x + z - 1 = 0$$

لذا، باید x ، y ، z ، λ_1 و λ_2 را طوری بیابیم که

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda_1 \nabla g_1(x, y, z) + \lambda_2 \nabla g_2(x, y, z)$$

و

$$g_1(x, y, z) = 0$$

$$g_2(x, y, z) = 0$$

یعنی، با محاسبه گرادیانها و متحدگرفتن مؤلفه‌ها،

$$1 = \lambda_1 \cdot 2x + \lambda_2 \cdot 1$$

$$1 = \lambda_1 \cdot 2y + \lambda_2 \cdot 0$$

$$1 = \lambda_1 \cdot 0 + \lambda_2 \cdot 1$$

و

$$x^2 + y^2 = 2$$

$$x + z = 1$$

اینها پنج معادله نسبت به x ، y ، z ، λ_1 و λ_2 اند. از معادله سوم داریم $\lambda_2 = 1$ ؛ و در نتیجه، $2x\lambda_1 = 0$ ، $2y\lambda_1 = 1$ ، چون معادله دوم ایجاب می‌کند که $\lambda_1 \neq 0$ ، داریم $x = 0$ ، لذا، $y = \pm\sqrt{2}$ و $z = 1$. از اینرو، نقاط ما عبارتند از $(0, \pm\sqrt{2}, 1)$. با امتحان می‌توان نشان داد که $(0, \sqrt{2}, 1)$ ماکزیم و $(0, -\sqrt{2}, 1)$ مینیمم به دست می‌دهد.

اختیاری

آزمون مشتق دوم برای اکسترمهای مقید

در بخش ۲۰۴ آزمون مشتق دوم برای اکسترمهای توابع چند متغیره را با توجه به جمله درجه دوم در سری تیلور f عرضه کردیم. هرگاه ماتریس هسی مشتقات جزئی دوم در یک نقطه بحرانی f معین مثبت یا معین منفی باشد، آنگاه علامت ناشی از این جملات در f مستقل از جهتی است که در آن از نقطه بحرانی دور می‌شویم. لذا، می‌توان نتیجه گرفت که ما در یک ماکزیم نسبی یا مینیمم نسبی بوده‌ایم.

اما در این بخش ما به تمام مقادیر f علاقه‌مند نبوده بلکه فقط به آنهایی چشم داریم که با تحدید f به مجموعه‌ای مانند S که مجموعه تراز تابع دیگری چون g است به دست

می آیند. وضع پیچیده است، اولاً" به خاطر آنکه اکسترمهای مقید f لازم نیست در نقاط بحرانی f بیابند و، ثانياً"، متغیر فقط مجاز است در مجموعه S حرکت نماید. معیناً، آزمون مشتق دوم را می توان برحسب آنچه هسی لبه دار خوانده می شود ارائه داد. نشان خواهیم داد که این چگونه در حالت تابع دو متغیره $f(x, y)$ تحت قید $g(x, y) = c$ به وجود می آید.

بنابر نکات بعداز قضیه ϵ ، اکسترمهای مقید f با توجه به نقاط بحرانی تابع کمکی $h(x, y, \lambda) = f(x, y) - \lambda(g(x, y) - c)$ به دست آمدند. فرض کنیم (x_0, y_0, λ) یک چنین نقطه بوده و قرار می دهیم $v_0 = (x_0, y_0)$ ، یعنی،

$$\left. \frac{\partial f}{\partial x} \right|_{v_0} = \lambda \left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{v_0}$$

$$\left. \frac{\partial f}{\partial y} \right|_{v_0} = \lambda \left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{v_0}$$

$$g(x_0, y_0) = c$$

این به نوعی یک مسئله یک متغیره است. هرگاه تابع g معقول باشد، آنگاه مجموعه S تعریف شده با $g(x, y) = c$ یک منحنی است و ما به تغییر f ضمن حرکت در امتداد منحنی علاقه مندیم. هرگاه بتوان معادله $g(x, y) = c$ را نسبت به یک متغیر و برحسب دیگری حل کرد، آنگاه می توان این را صریح ساخته و از آزمون مشتق دوم یک متغیره استفاده نمود. هرگاه $\left. \frac{\partial g}{\partial y} \right|_{v_0} \neq 0$ ، آنگاه منحنی S در v_0 قائم نیست و انتظار حل نسبت به y به عنوان تابعی از x در همسایگی x_0 معقول است. در واقع، این امر در بخش ۴.۴ ثابت خواهد شد (اگر $\left. \frac{\partial g}{\partial x} \right|_{v_0} \neq 0$ ، می توان معادله را نسبت به x و به عنوان تابعی از y حل کرد.) فرض کنیم S نمودار $y = \phi(x)$ باشد. در این صورت، $f|_S$ را می توان به صورت تابع یک متغیره $f(x, y) = f(x, \phi(x))$ نوشت. قاعده زنجیره ای نتیجه می دهد که

$$\left. \begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d\phi}{dx} \\ \frac{d^2f}{dx^2} &= \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{d\phi}{dx} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2\phi}{dx^2} \end{aligned} \right\} \text{و}$$

رابطه $g(x, \phi(x)) = c$ را می توان برای یافتن $d\phi/dx$ و $d^2\phi/dx^2$ به کار برد. با

مشتفگی از طرفین $g(x, \phi(x)) = c$ نسبت به x ، نتیجه می‌شود که

$$\frac{\partial g}{\partial x} + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{d\phi}{dx} = 0$$

۳

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} + 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \frac{d\phi}{dx} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \left(\frac{d\phi}{dx} \right)^2 + \frac{\partial g}{\partial y} \frac{d^2 \phi}{dx^2} = 0.$$

لذا،

$$\left. \begin{aligned} \frac{d\phi}{dx} &= - \frac{\partial g / \partial x}{\partial g / \partial y} \\ \frac{d^2 \phi}{dx^2} &= - \frac{1}{\partial g / \partial y} \left[\frac{\partial^2 g}{\partial x^2} - 2 \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \frac{\partial g / \partial x}{\partial g / \partial y} + \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \left(\frac{\partial g / \partial x}{\partial g / \partial y} \right)^2 \right] \end{aligned} \right\} \quad (7)$$

و با گذاردن (۷) در (۶)، خواهیم داشت

$$\left. \begin{aligned} \frac{df}{dx} &= \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f / \partial y}{\partial g / \partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \\ \frac{d^2 f}{dx^2} &= \frac{1}{(\partial g / \partial y)^2} \left\{ \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f / \partial y}{\partial g / \partial y} \frac{\partial^2 g}{\partial x^2} \right] \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 \right. \\ &\quad \left. - 2 \left[\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial f / \partial y}{\partial g / \partial y} \frac{\partial^2 g}{\partial x \partial y} \right] \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} \right. \\ &\quad \left. + \left[\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} - \frac{\partial f / \partial y}{\partial g / \partial y} \frac{\partial^2 g}{\partial y^2} \right] \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 \right\} \end{aligned} \right\} \quad (8)$$

در v_0 می‌دانیم که $\partial f / \partial y = \lambda \partial g / \partial y$ و $\partial f / \partial x = \lambda \partial g / \partial x$. در نتیجه، (۸) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\left. \begin{aligned}
 \frac{df}{dx} \Big|_{x_0} &= \frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{x_0} - \lambda \frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{x_0} = 0 \\
 \frac{d^2f}{dx^2} \Big|_{x_0} &= \frac{1}{(\partial g / \partial y)^2} \left\{ \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right)^2 - 2 \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \frac{\partial g}{\partial x} \frac{\partial g}{\partial y} + \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right)^2 \right\} \\
 &= -\frac{1}{(\partial g / \partial y)^2} \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{vmatrix}
 \end{aligned} \right\}$$

که در آن کمیات در x_0 حساب شده و h تابع کمکی مذکور در فوق است. این دترمینان 3×3 هسی لبه دار نام دارد، و علامتش مخالف علامت d^2f/dx^2 می باشد. لذا، اگر منفی باشد، باید در مینیم موضعی باشیم. اگر مثبت باشد، در ماکزیم موضعی است و، اگر صفر باشد، آزمون بی حاصل است. این دلایل ما را به آزمون زیر می رساند.

قضیه ۷. فرض کنیم توابع $f: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ و $g: U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ هموار باشند. همچنین، $v_0 \in U$ ، $g(v_0) = c$ ، S منحنی تراز g با مقدار c باشد. و نیز $\nabla g(v_0) \neq 0$ و عددی حقیقی مانند λ موجود باشد به طوری که $\nabla f(v_0) = \lambda \nabla g(v_0)$. تابع کمکی $h = f - \lambda g$ و دترمینان هسی لبه دار

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial^2 h}{\partial x^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial x \partial y} & \frac{\partial^2 h}{\partial y^2} \end{vmatrix}$$

محاسبه شده در v_0 .

را تشکیل می دهیم.

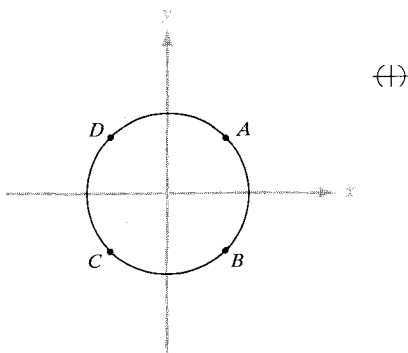
(یک) هرگاه $|\bar{H}| > 0$ ، آنگاه v_0 یک نقطه ماکزیم موضعی برای $f|_S$ است.

(دو) هرگاه $|\bar{H}| < 0$ ، آنگاه v_0 یک نقطهٔ مینیمم موضعی برای $f|_S$ است .
 (سه) هرگاه $|\bar{H}| = 0$ ، آنگاه آزمون بی حاصل بوده و v_0 می تواند مینیمم ، ماکزیمم ، یا هیچکدام باشد .

مثال ۶ . نقاط اکستریم $f(x, y) = (x - y)^n$ تحت قید $x^2 + y^2 = 1$ ($n \geq 1$) بیابید .
 مشتقات اول تابع کمکی $h(x, y, \lambda) = (x - y)^n - \lambda(x^2 + y^2 - 1)$ را مساوی ۰ قرار می دهیم ،

$$\begin{aligned} n(x - y)^{n-1} - 2\lambda x &= 0 \\ -n(x - y)^{n-1} - 2\lambda y &= 0 \\ -(x^2 + y^2 - 1) &= 0 \end{aligned}$$

از دو معادلهٔ اول معلوم می شود که $\lambda(x + y) = 0$. هرگاه $\lambda = 0$ ، آنگاه $x = y = \pm \sqrt{2}/2$ ، هرگاه $\lambda \neq 0$ ، آنگاه $x = -y$. در شکل ۴.۳.۴ چهار نقطهٔ بحرانی و مقادیر نظیر آنها از $f(x, y)$ ارائه و ذیلاً لیست شده اند .



شکل ۴.۳.۴

چهار نقطهٔ بحرانی مثال ۶

- | | | | | |
|-----|------------------|-------------------|-------------------------------|--------------------------|
| (A) | $x = \sqrt{2}/2$ | $y = \sqrt{2}/2$ | $\lambda = 0$ | $f(x, y) = 0$ |
| (B) | $x = \sqrt{2}/2$ | $y = -\sqrt{2}/2$ | $\lambda = n(\sqrt{2})^{n-2}$ | $f(x, y) = (\sqrt{2})^n$ |

$$(C) \quad x = -\sqrt{2}/2 \quad y = -\sqrt{2}/2 \quad \lambda = 0 \quad f(x, y) = 0$$

$$(D) \quad x = -\sqrt{2}/2 \quad y = +\sqrt{2}/2 \quad \lambda = (-1)^{n-2}n(\sqrt{2})^{n-2} \quad f(x, y) = (-\sqrt{2})^n$$

بامعاینه معلوم می شود که اگر n زوج باشد، A و C نقاط مینیمم و B و D نقاط ماکزیمم اند. هرگاه n فرد باشد، آنگاه B یک نقطه ماکزیمم، D یک نقطه مینیمم، و A و D هیچکدام خواهند بود. حال با این نکات ببینیم قضیه γ سازگار است یا خیر. ماتریس هسی لبه دار عبارت است از

$$|\bar{H}| = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & n(n-1)(x-y)^{n-2} - 2\lambda & -n(n-1)(x-y)^{n-2} \\ 2y & -n(n-1)(x-y)^{n-2} & n(n-1)(x-y)^{n-2} - 2\lambda \end{vmatrix}$$

$$= -4n(n-1)(x-y)^{n-2}(x+y)^2 + 8\lambda(x^2 - y^2)$$

اگر $n = 1$ یا $n \geq 3$ ، در نقاط A ، B ، C ، و D ، $|\bar{H}| = 0$.

اگر $n = 2$ ، در B و D ، $|\bar{H}| = 0$ و این در A و C مساوی -16 است. لذا، آزمون

مشتق دوم در A و C مینیمم می دهد و در تعیین ماکزیمم در B و D به ازای $n = 2$ ناکام است. همچنین، به ازای سایر مقادیر n عقیم می باشد.

درست مثل حالت بدون قید، برای توابع بیش از دو متغیر نیز یک آزمون مشتق دوم

وجود دارد. اگر بخواهیم نقاط اکستریم $f(x_1, \dots, x_n)$ را تحت شرط $g(x_1, \dots, x_n) = c$

بیابیم، ابتدا برای تابع کمکی $h(x_1, \dots, x_n) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda(g(x_1, \dots, x_n) - c)$ هسی لبه دار را به صورت زیر تشکیل می دهیم:

$$\begin{vmatrix} 0 & \partial g / \partial x_1 & \partial g / \partial x_2 & \cdots & \partial g / \partial x_n \\ \partial g / \partial x_1 & \partial^2 h / \partial x_1^2 & \partial^2 h / \partial x_1 \partial x_2 & \cdots & \partial^2 h / \partial x_1 \partial x_n \\ \partial g / \partial x_2 & \partial^2 h / \partial x_1 \partial x_2 & \partial^2 h / \partial x_2^2 & & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \partial g / \partial x_n & \partial^2 h / \partial x_1 \partial x_n & \partial^2 h / \partial x_2 \partial x_n & \cdots & \partial^2 h / \partial x_n^2 \end{vmatrix}$$

سپس دترمینانهای زیرماتریسهای قطری از مرتبه $n-3$ را در نقاط بحرانی h امتحان می کنیم. هرگاه همه منفی باشند،

$$\begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} \end{vmatrix} < 0, \quad \begin{vmatrix} 0 & \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial g}{\partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_1} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2^2} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3} \\ \frac{\partial g}{\partial x_3} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_1 \partial x_3} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_2 \partial x_3} & \frac{\partial^2 h}{\partial x_3^2} \end{vmatrix} < 0, \dots$$

آنگاه ما در مینیمم موضعی $f|S$ هستیم. هرگاه با علامت مثبت شروع و به تناوب تغییر علامت دهند (یعنی، $>0, <0, >0, <0, \dots$)، آنگاه در ماکزیمم موضعی می‌باشیم.^۱

مثال ۷. نقاط اکستریم موضعی $f(x, y, z) = xyz$ را با استفاده از آزمون مشتق دوم روی سطح کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ مطالعه می‌کنیم. با قرار دادن مشتقات جزئی تابع

کمکی $h(x, y, z, \lambda) = xyz - \lambda(x^2 + y^2 + z^2 - 1)$ مساوی صفر، داریم

$$yz = 2\lambda x$$

$$xz = 2\lambda y$$

$$xy = 2\lambda z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

لذا، $3xyz = 2\lambda(x^2 + y^2 + z^2) = 2\lambda$ ، اگر $\lambda = 0$ ، جوابها عبارتند از

$$(x, y, z, \lambda) = (1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0).$$

هرگاه $\lambda \neq 0$ ، آنگاه داریم $2\lambda = 3xyz = 6\lambda z^2$ و در نتیجه، $z^2 = \frac{1}{3}$. به همین نحو

۱. برای یک بحث مشروح، ر.ک.

C. Caratheodory, *Calculus of Variations and Partial Differential Equations*, Holden-Day, San Francisco, 1965.

یا

Y. Murata, *Mathematics for Stability and Optimization of Economic Systems*, Academic Press, New York, 1977, pp. 263-271.

لذا، جوابها عبارتند از $\lambda = 3xyz = \pm\sqrt{3}/6$. نقاط بحرانی h و مقادیر نظیر f در جدول ۱.۴ آمده‌اند. در این جدول می‌بینیم که نقاط E, F, G, H, I, J, K جدول ۱.۴ نقاط بحرانی h و مقادیر نظیر f

	x	y	z	λ	$f(x, y, z)$
A	1	0	0	0	0
B	0	1	0	0	0
C	0	0	1	0	0
D	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$
E	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$
F	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$
G	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$
H	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$
I	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$
J	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/3$	$\sqrt{3}/6$	$\sqrt{3}/9$
K	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/3$	$-\sqrt{3}/6$	$-\sqrt{3}/9$

مینیمم هستند. نقاط D, H, I, J ماکزیمم می‌باشند. برای سازگاری این امر با آزمون مشتق دوم، لازم است دو دترمینان را مورد نظر قرار دهیم. ابتدا به دترمینان زیر نگاه می‌کنیم:

$$|\bar{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & \partial g/\partial x & \partial g/\partial x \\ \partial g/\partial x & \partial^2 h/\partial x^2 & \partial^2 h/\partial x \partial y \\ \partial g/\partial y & \partial^2 h/\partial x \partial y & \partial^2 h/\partial y^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -2\lambda & z \\ 2y & z & -2\lambda \end{vmatrix} = 16\lambda(x^2 + y^2)$$

توجه کنید که $\text{sign}(|\bar{H}_2|) = \text{sign} \lambda = \text{sign}(xyz)$ ، که در آن $\alpha = +1$ اگر $\alpha > 0$ و مساوی -1 است اگر $\alpha < 0$. سپس دترمینان زیر را در نظر می‌گیریم:

$$|\bar{H}_3| = \begin{vmatrix} & \partial g/\partial x & \partial g/\partial y & \partial g/\partial z \\ \partial g/\partial x & \partial^2 h/\partial x^2 & \partial^2 h/\partial x \partial y & \partial^2 h/\partial x \partial z \\ \partial g/\partial y & \partial^2 h/\partial x \partial y & \partial^2 h/\partial y^2 & \partial^2 h/\partial y \partial z \\ \partial g/\partial z & \partial^2 h/\partial x \partial z & \partial^2 h/\partial y \partial z & \partial^2 h/\partial z^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y & 2z \\ 2x & -2\lambda & z & y \\ 2y & z & -2\lambda & x \\ 2z & y & x & -2\lambda \end{vmatrix}$$

که در نقاط A, B, C مساوی $+4$ و در 8 نقطه دیگر برابر $-16/3$ می باشد. در E, F, G و K داریم $|\bar{H}_2| < 0$ و $|\bar{H}_3| < 0$. در نتیجه، آزمون نشان می دهد که مینیمم موضعی وجود دارد. در D, H, I, J داریم $|\bar{H}_2| > 0$ و $|\bar{H}_3| < 0$. در نتیجه، آزمون می گوید که اینها ماکزیمم موضعی اند. در A, B, C آزمون مشتق دوم ناکام است.

تمرینات

در تمرینهای ۱ تا ۵، اکستریمهای f را تحت قیود بیان شده بیابید.

$$f(x, y, z) = x - y + z, x^2 + y^2 + z^2 = 2 \quad 0.1$$

$$f(x, y) = x - y, x^2 - y^2 = 2 \quad 0.2$$

$$f(x, y) = x, x^2 + 2y^2 = 3 \quad 0.3$$

$$f(x, y, z) = x + y + z, x^2 - y^2 = 1, 2x + z = 1 \quad 0.4$$

$$f(x, y) = 3x + 2y, 2x^2 + 3y^2 = 3 \quad 0.5$$

در تمرینهای ۶ تا ۹، اکستریمهای نسبی $f|S$ را بیابید.

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2, S = \{(x, 2) | x \in \mathbb{R}\} \quad 0.6$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 + y^2, S = \{(x, y) | y \geq 2\} \quad 0.7$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y) \mapsto x^2 - y^2, S = \{(x, \cos x) | x \in \mathbb{R}\} \quad 0.8$$

$$f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}, (x, y, z) \mapsto x^2 + y^2 + z^2, S = \{(x, y, z) | z \geq 2 + x^2 + y^2\} \quad 0.9$$

۱۰. می خواهیم یک جعبه مکعب مستطیل بدون در و با مساحتی برابر ۱۶ متر مربع داشته

باشیم. ابعادی از آن را بیابید که حجمش را ماکزیمم سازد.

۱۱. با استفاده از کمترین فلز، یک قوطی استوانه‌ای (با در) بسازید که گنجایش ۱ لیتر

آب را داشته باشد.

۱۲. نشان دهید که جوابهای معادله (Δ) در تناظر یک به یک بانقاط بحرانی $h(x_1, \dots,$

$$x_n, \lambda_1, \dots, \lambda_k) = f(x_1, \dots, x_n) - \lambda_1 [g_1(x_1, \dots, x_n) - c_1] - \dots - \lambda_k [g_k(x_1, \dots, x_n) - c_k]$$

می باشند.

۱۳*. فرض کنید A یک ماتریس 3×3 متقارن ناصفر باشد. لذا، درایه‌هایش در $a_{ij} = a_{ji}$

صدق می کنند. تابع $f(x) = \frac{1}{2}(Ax) \cdot x$ را در نظر بگیرید.

(آ) ∇f چیست؟

(ب) تحدید f به کره $S = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 = 1\}$ در \mathbb{R}^3 را در نظر

بگیرید. فرض کنید f بر S ماکزیمم و مینیمم داشته باشد (ر. ک. تبصره‌های ص ۲۷۹).

نشان دهید باید $x \in S$ و $\lambda \neq 0$ ای موجود باشد به طوری $AX = \lambda x$ (x را یک

بردار ویژه و λ را یک مقدار ویژه می‌نامند).

*۱۴. حال فرض کنید در تابع f تعریف شده در تمرین ۱۳، A ، لزو " متقارن نباشد.

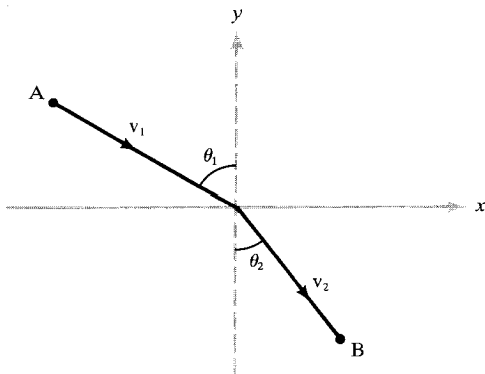
(آ) ∇f چیست؟

(ب) آیا می‌توان وجود بردار ویژه و مقدار ویژه را مثل تمرین ۱۳ نتیجه گرفت؟

۱۵. ماهیت اکسترممهای تمرینات ۱ و ۵ را با استفاده از آزمون مشتق دوم بررسی کنید.

۱۶. یک شعاع نورانی از نقطه A به نقطه B رفته از مرز بین دو محیط می‌گذرد (ر. ک.

شکل ۵.۳.۴). در محیط اول تندی آن v_1 و در محیط دوم v_2 است. نشان دهید که



شکل ۵.۳.۴

قانون شکست اسنل

این سفر وقتی کمترین زمان را می‌برد که قانون اسنل^۱ برقرار باشد:

$$\frac{\sin \theta_1}{\sin \theta_2} = \frac{v_1}{v_2}$$

۱۷. یک موءسهه^۲ حمل بسته شرط کرده است که ابعاد یک جعبه^۳ مکعب مستطیل باید چنان

باشد که طول به علاوه^۶، دو برابر عرض به علاوه^۶، دو برابر ارتفاع بیشتر از 108 اینچ نباشد
 $(l + 2w + 2h \leq 108)$. جعبه با بیشترین حجمی که اجازه^۶ حمل دارد چیست؟

اختیاری

۴.۴ قضیه^۶ تابع ضمنی

این بخش را با بیان برهان صورت خاصی از قضیه^۶ تابع ضمنی آغاز می‌کنیم. این صورت برای بررسی سطوح مناسب بوده و، بخصوص، اجازه^۶ تکمیل برهان قضیه^۶ در بخش ۳.۴ را می‌دهد. در اثبات این قضیه^۶، قضیه^۶ کلی تابع ضمنی (و معکوس وابسته به آن) را بدون برهان ذکر می‌کنیم. این بحث بعدها وقتی قضیه^۶ تغییر متغیر را بررسی می‌کنیم مفید خواهد بود. با اینحال، مطالب این بخش برای درک نتایج و کاربردهای اصلی این کتاب لازم نیستند.

قضیه^۸ (قضیه^۶ خاص تابع ضمنی). فرض کنیم $F: \mathbb{R}^{n+1} \rightarrow \mathbb{R}$ تابعی با مشتقات جزئی پیوسته باشد. همچنین، نقاط \mathbb{R}^{n+1} را با (x, z) نشان می‌دهیم، که در آن $x \in \mathbb{R}^n$ و $z \in \mathbb{R}$ و نیز (x_0, z_0) نقطه‌ای صادق در

$$\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, z_0) \neq 0 \quad \text{و} \quad F(x_0, z_0) = 0$$

باشد. در این صورت، گویی مانند U شامل x_0 در \mathbb{R}^n و همسایگی چون V از z_0 در \mathbb{R} وجود دارد به طوری که تابع منحصر به فردی مثل $z = g(x)$ تعریف شده به ازای x در U و z در V موجود است که در

$$F(x, g(x)) = 0$$

صدق می‌کند. به علاوه، $z = g(x)$ به طور پیوسته مشتق‌پذیر بوده و مشتقش از رابطه^۶ زیر به دست می‌آید:

$$Dg(x) = -\frac{1}{\frac{\partial F}{\partial z}(x, g(x))} \cdot D_x F(x, z)$$

که در آن $D_x F$ مشتق F نسبت به متغیر x است، یعنی $D_x F = [\partial F / \partial x_1, \dots, \partial F / \partial x_n]$ ،

$$(1) \quad \frac{\partial g}{\partial x_i} = -\frac{\partial F}{\partial x_i} / \frac{\partial F}{\partial z}, \quad i = 1, \dots, n$$

برهان. حالت $n = 2$ را ثابت می‌کنیم؛ یعنی، $F: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$. حالت n دلخواه مشابه است ولی باید نمادگذاری تعدیل شود. می‌نویسیم $\mathbf{x} = (x, y)$ و $\mathbf{x}_0 = (x_0, y_0)$. چون $(\partial F / \partial z)(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ، پس یا مثبت است یا منفی. برای مشخص بودن وضع، فرض کنیم مثبت باشد. بنابراین پیوستگی، می‌توان اعداد $a > 0$ و $b > 0$ را طوری یافت که هرگاه $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < a$ و $\|z - z_0\| < a$ ، آنگاه $(\partial F / \partial z)(\mathbf{x}, z) > b$. همچنین، فرض کنیم مشتقات جزئی دیگر در این ناحیه به عدد M کراندارند؛ یعنی، $|(\partial F / \partial x)(\mathbf{x}, z)| \leq M$ و $|(\partial F / \partial y)(\mathbf{x}, z)| \leq M$. این نیز از پیوستگی نتیجه می‌شود. حال می‌توان نوشت

$$(2) \quad \begin{aligned} F(\mathbf{x}, z) - F(\mathbf{x}_0, z) &= F(\mathbf{x}, z) - F(\mathbf{x}_0, z) = [F(\mathbf{x}, z) - F(\mathbf{x}_0, z)] \\ &+ [F(\mathbf{x}_0, z) - F(\mathbf{x}_0, z_0)] \end{aligned}$$

تابع

$$h(t) = F(t\mathbf{x} + (1-t)\mathbf{x}_0, z)$$

را به ازای \mathbf{x} و z ثابت در نظر می‌گیریم. بنابراین قضیه مقدار میانگین، عددی مانند θ بین 0 و 1 وجود دارد به طوری که

$$h(1) - h(0) = h'(\theta)$$

یعنی،

$$F(\mathbf{x}, z) - F(\mathbf{x}_0, z) = D_{\mathbf{x}}F(\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{x}_0, z)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)$$

از گذاردن این فرمول در (2) همراه با فرمول مشابهی برای جمله دوم معادله نتیجه می‌شود که

$$(3) \quad \begin{aligned} F(\mathbf{x}, z) &= D_{\mathbf{x}}F(\theta\mathbf{x} + (1-\theta)\mathbf{x}_0, z)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) \\ &+ \frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, \phi z + (1-\phi)z_0)(z - z_0) \end{aligned}$$

که در آن ϕ بین 0 و 1 است. فرض کنیم $a_0 < a$ در $0 < a_0 < a$ صدق کرده و $\delta > 0$ ای اختیار می‌کنیم که $\delta < a_0$ و $\delta < ba_0/2M$. در این صورت، اگر $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ ، هر دوی $|x - x_0|$ و $|y - y_0|$ از δ کوچکترند؛ در نتیجه، قدرمطلق هر یک از دو جمله در

$$D_x F(\theta \mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{x}_0, z)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0) = \frac{\partial F}{\partial x}(\theta \mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{x}_0, z)(x - x_0) \\ + \frac{\partial F}{\partial y}(\theta \mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{x}_0, z)(y - y_0)$$

از $M \cdot \delta < M (ba_0/2M) = ba_0/2$ کوچکتر است. لذا، $\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| < \delta$ ، ایجاب می‌کند که $|D_x F(\theta \mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{x}_0, z)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)| < ba_0$. بنابراین، از (۳) و انتخاب b معلوم می‌شود که $\delta < \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$ ایجاب می‌کند که

$$F(\mathbf{x}, z_0 + a_0) > 0 \quad \text{و} \quad F(\mathbf{x}, z_0 - a_0) < 0$$

اگر $(\partial F / \partial z)(\mathbf{x}_0, z_0) < 0$ ، نامساویها عکس می‌شوند . لذا ، طبق قضیه مقدار میانی اعمال شده بر $F(\mathbf{x}, z)$ به عنوان تابعی از z ، بازای هر \mathbf{x} یک z بین $z_0 - a_0$ و $z_0 + a_0$ وجود دارد که $F(\mathbf{x}, z) = 0$. این z منحصر به فرد است زیرا ، بنابر حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی ، هر تابع با مشتق مثبت صعودی است ؛ و لذا ، نمی‌تواند بیش از یک صفر داشته باشد .

فرض کنیم U گوی بازی به شعاع δ و مرکز \mathbf{x}_0 در \mathbb{R}^n بوده و V بازه بازی بر \mathbb{R} از $z_0 - a_0$ تا $z_0 + a_0$ باشد . ثابت کرده‌ایم که اگر \mathbf{x} به U محدود شود ، z منحصر به فردی در V هست به طوری که $F(\mathbf{x}, z) = 0$. این تابع $z = g(\mathbf{x}) = g(x, y)$ لازم در قضیه را تعریف می‌کند . بر خواننده است که با این ساخت ثابت کند که $z = g(x, y)$ یک تابع پیوسته است . کافی است مشتق‌پذیری پیوسته $z = g(\mathbf{x})$ را ثابت کنیم . از رابطه (۳) و اینکه $F(\mathbf{x}, z) = 0$ و $z_0 = g(\mathbf{x}_0)$ داریم

$$g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) = - \frac{D_x F(\theta \mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{x}_0, z)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)}{\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, \phi z + (1 - \phi)z_0)}$$

هرگاه قرار دهیم $\mathbf{x} = (x_0 + h, y_0)$ ، آنگاه این معادله به صورت زیر درمی‌آید :

$$\frac{g(x_0 + h, y_0) - g(x_0, y_0)}{h} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(\theta \mathbf{x} + (1 - \theta)\mathbf{x}_0, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(\mathbf{x}_0, \phi z + (1 - \phi)z_0)}$$

وقتی $h \rightarrow 0$ ، نتیجه می‌شود که $x \rightarrow x_0$ و $z \rightarrow z_0$ ؛ لذا ، خواهیم داشت

$$\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x_0 + h, y_0) - g(x_0, y_0)}{h} = - \frac{\frac{\partial F}{\partial x}(x_0, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, z)}$$

فرمول

$$\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0) = - \frac{\frac{\partial F}{\partial y}(x_0, z)}{\frac{\partial F}{\partial z}(x_0, z)}$$

به همین نحو ثابت می‌شود. با همین استدلال معلوم می‌شود که این نتیجه در هر نقطه‌ای در U برقرار است؛ در نتیجه، (۱) ثابت می‌شود. چون طرف راست (۱) پیوسته است. قضیه به ثبوت می‌رسد.

به محض معلوم شدن وجود و مشتق‌پذیری $z = g(x)$ ، فرمول (۱) را می‌توان با مشتق‌گیری ضمنی تحقیق کرد؛ یعنی، اعمال قاعده زنجیره‌ای بر $F(x, g(x)) = 0$ نتیجه می‌دهد که

$$D_x F(x, g(x)) + \frac{\partial F}{\partial z}(x, g(x)) \cdot Dg(x) = 0$$

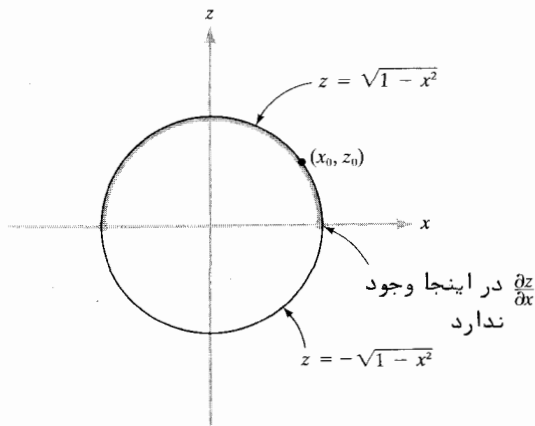
که با (۱) معادل است.

مثال ۱. در استفاده از قضیه ۸ باید کوچک بودن همسایگی‌های U و V درک شود. مثلاً، معادله

$$x^2 + z^2 - 1 = 0$$

را در نظر می‌گیریم. یعنی، $F(x, z) = x^2 + z^2 - 1$ با $n = 1$. در اینجا $(\partial F / \partial z)(x, z) = 2z$ ؛ در نتیجه، قضیه ۸ در مورد نقطه (x_0, z_0) صادق در $x_0^2 + z_0^2 - 1 = 0$ که $z_0 \neq 0$ اعمال می‌شود. لذا، در مجاورت این نقاط، z تابع منحصر به فردی از x است. این تابع به‌ازای $z_0 > 0$ مساوی $z = \sqrt{1 - x^2}$ و به‌ازای $z_0 < 0$ برابر $z = -\sqrt{1 - x^2}$ است. توجه کنید که z فقط به‌ازای $|x| < 1$ تعریف شده است (U نباید خیلی بزرگ باشد)

و z فقط وقتی منحصر به فرد است که نزدیک z_0 باشد (V نباید خیلی بزرگ باشد). البته این نکات و عدم وجود $\partial z / \partial x$ در $z_0 = 0$ از این امر که $x^2 + z^2 = 1$ دایره‌ای را در صفحه xz تعریف می‌کند واضح است (شکل ۱۰.۴.۴).



شکل ۱۰.۴.۴

در قضیه تابع ضمنی باید همسایگیهای کوچک اختیار کرد.

حال از قضیه ۸ در بررسی سطوح استفاده می‌کنیم. مثل قضیه ۶، به مجموعه تراز تابع $g: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ توجه داریم؛ یعنی، سطح S مرکب از مجموعه x هایی که در $g(x) = c_0$ صدق می‌کنند، که در آن $c_0 = g(x_0)$ و x_0 معلوم است. برای ملموس بودن وضع، $n = 3$ را اختیار می‌کنیم. لذا، با سطح تراز تابعی چون $g(x, y, z)$ سروکار داریم که از نقطه معلوم (x_0, y_0, z_0) می‌گذرد. مثل قضیه ۶، فرض می‌کنیم $\nabla g(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ این یعنی دست کم یکی از مشتقات جزئی g ناصفر است. برای قطعی بودن وضع، فرض کنیم $(\partial g / \partial z)(x_0, y_0, z_0) \neq 0$. با اعمال قضیه ۸ بر تابع $(x, y, z) \mapsto g(x, y, z) - c_0$ می‌دانیم تابع منحصر به فردی مانند $z = k(x, y)$ وجود دارد به طوری که به ازای (x, y) نزدیک (x_0, y_0) و z نزدیک z_0 ، $g(x, y, k(x, y)) = c_0$. لذا، در مجاورت z_0 ، سطح S نمودار تابع k است. چون k به طور پیوسته مشتق‌پذیر است، این سطح در (x_0, y_0, z_0) صفحه مماس دارد که به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$(۴) \quad z = z_0 + \frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0)$$

اما، بنابر (۱) ،

$$\frac{\partial k}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)} \quad \text{و} \quad \frac{\partial k}{\partial x}(x_0, y_0) = -\frac{\frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0)}{\frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0)}$$

با گذاردن این دو معادله در معادله (۴) ، توصیف معادل زیر را خواهیم داشت :

$$0 = (z - z_0) \frac{\partial g}{\partial z}(x_0, y_0, z_0) + (x - x_0) \frac{\partial g}{\partial x}(x_0, y_0, z_0) + (y - y_0) \frac{\partial g}{\partial y}(x_0, y_0, z_0)$$

یعنی ،

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \nabla g(x_0, y_0, z_0) = 0$$

لذا ، صفحه مماس بر سطح تراز g متعمد متعامد $\nabla g(x_0, y_0, z_0)$ ماربر نقطه (x_0, y_0, z_0) است . این با تعریف ص ۱۶۶ سازگار است .

حال آماده‌ایم تا برهان قضیه ۶ را تمام کنیم (ر.ک. برهان ناقص ص ۲۷۲) و باید نشان دهیم که هر بردار مماس بر S در (x_0, y_0, z_0) بر این منحنی در S مماس است . بنا بر قضیه ۸ ، کافی است این را برای نموداری به شکل $z = k(x, y)$ نشان دهیم . اما، هرگاه $v = (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$ بر نمودار مماس باشد (یعنی ، در (۴) صدق کند) ، آنگاه v بر منحنی در S داده شده با

$$c(t) = (x_0 + t(x - x_0), y_0 + t(y - y_0), k(x_0 + t(x - x_0)))$$

در $t = 0$ مماس است . این را می‌توان با استفاده از قاعده زنجیره‌ای تحقیق کرد . (ر.ک. شکل ۰.۲.۴.۴) در اینجا جزئیات فنی قضیه ۶ کامل می‌شود .

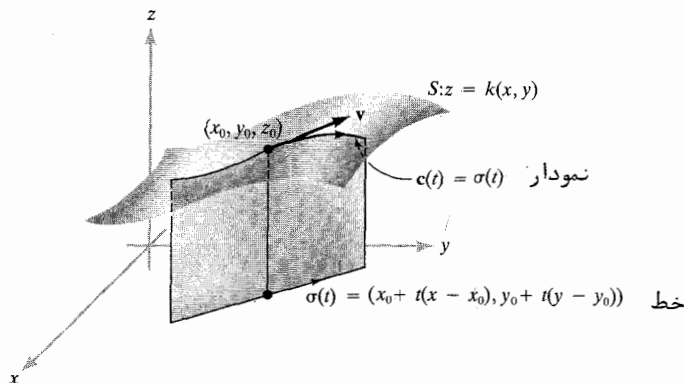
مثال ۰.۲. در مجاورت چه نقاطی سطح

$$x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3z^3y = 1$$

را می‌توان نمودار یک تابع مشتق‌پذیر $z = k(x, y)$ گرفت ؟

در اینجا $F(x, y, z) = x^3 + 3y^2 + 8xz^2 - 3z^3y - 1$ را اختیار کرده و سعی

می‌کنیم $F(x, y, z) = 0$ را نسبت به z و به صورت تابعی از (x, y) حل کنیم . بنا بر قضیه ۸ ،



شکل ۲.۴.۴

ساختن منحنی $c(t)$ در سطح S که بردار مماسش v است.

اگر $(\partial F / \partial z)(x_0, y_0, z_0) \neq 0$ ، یعنی اگر

$$z_0(16x_0 - 9z_0y_0) \neq 0$$

یعنی

$$16x_0 \neq 9z_0y_0 \quad \text{و} \quad z_0 \neq 0$$

این کار را می‌توان در مجاورت نقطه (x_0, y_0, z_0) انجام داد.

حال قضیه کلی تابع ضمنی را بدون برهان بیان می‌کنیم.^۱ به جای سعی در حل یک

۱. برای سه برهان متفاوت حالت کلی، ر.ک.

(a) E. Goursat, *A Course in Mathematical Analysis*, I, Dover, New York, 1959, p. 45.

(در این برهان، قضیه کلی از کاربرد مکرر قضیه ۸ به دست می‌آید.)

(b) T. M. Apostol, *Mathematical Analysis*, 2nd ed., Addison Wesley, Reading, Mass., 1974.

(c) J. E. Marsden, *Elementary Classical Analysis*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1974.

در دو منبع اخیر ایده‌ها از ایده‌هایی که معمولاً "در سال سوم در آنالیز مطرح می‌شوند پیچیده‌ترند. اما منبع اول را خواننده‌ای که کمی جبرخطی بداند به آسانی خواهد فهمید.

$$(1, 1, 1, 1) \text{ در } \Delta = \begin{vmatrix} \frac{\partial F_1}{\partial u} & \frac{\partial F_1}{\partial v} \\ \frac{\partial F_2}{\partial u} & \frac{\partial F_2}{\partial v} \end{vmatrix}$$

$$(1, 1, 1, 1) \text{ در } = \begin{vmatrix} x + 2yv & yu^2 \\ 3u^2x & 4y^2v^3 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 9$$

را تشکیل می‌دهیم. چون $\Delta \neq 0$ ، حلیپذیری را قضیه کلی تابع ضمنی تضمین می‌کند. برای یافتن $\partial u / \partial x$ ، از معادله داده شده با استفاده از قاعده زنجیره‌ای به طور ضمنی نسبت به x مشتق می‌گیریم:

$$x \frac{\partial u}{\partial x} + u + y \frac{\partial v}{\partial x} u^2 + 2yvu \frac{\partial u}{\partial x} = 0$$

$$3xu^2 \frac{\partial u}{\partial x} + u^3 + 4y^2v^3 \frac{\partial v}{\partial x} = 0$$

با فرض $(x, y, u, v) = (1, 1, 1, 1)$ نتیجه می‌شود که

$$3 \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial x} = -1$$

$$3 \frac{\partial u}{\partial x} + 4 \frac{\partial v}{\partial x} = -1$$

با ضرب معادله اول در 4 و تفریق داریم $\partial u / \partial x = -\frac{1}{3}$.

حالت خاصی از قضیه کلی تابع ضمنی قضیه تابع معکوس است. در اینجا سعی می‌کنیم n معادله

$$(۶) \quad \left. \begin{aligned} f_1(x_1, \dots, x_n) &= y_1 \\ &\dots \\ f_n(x_1, \dots, x_n) &= y_n \end{aligned} \right\}$$

را نسبت به x_1, \dots, x_n به صورت توابعی از y_1, \dots, y_n حل کنیم؛ یعنی، سعی می‌کنیم

دستگاه (۶) را عکس کنیم. این شبهه تشکیل معکوس توابعی مانند $\sin x = y$ و $e^x = y$ است که خواننده با آنها در حساب دیفرانسیل و انتگرال آشنا شده است. اما در اینجا به توابع چند متغیره علاقه داریم. حلپذیری را می توان با اعمال قضیه کلی تابع ضمنی بر تابعهای $y_i - f_i(x_1, \dots, x_n)$ با مجهولات x_1, \dots, x_n (که در بالا z_1, \dots, z_n نامیده شدند) پاسخ داد. شرط عبارت است از $\Delta \neq 0$ ، که در آن Δ دترمینان ماتریس $Df(x_0)$ است، $f = (f_1, \dots, f_n)$ ، و x_0 نقطه ای است که همسایگی آن مورد توجه است. کمیت Δ را معمولاً "یا $\partial(f_1, \dots, f_n)/\partial(x_1, \dots, x_n)$ یا $\partial(y_1, \dots, y_n)/\partial(x_1, \dots, x_n)$ ، یا $Jf(x_0)$ نشان داده و دترمینان ژاکوبی f می نامند. به طور صریح،

$$(۷) \quad \left. \frac{\partial(f_1, \dots, f_n)}{\partial(x_1, \dots, x_n)} \right|_{x=x_0} = Jf(x_0) = \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n}(x_0) \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1}(x_0) & \dots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n}(x_0) \end{vmatrix}$$

دترمینان ژاکوبی نقش مهمی در کارهای بعدی ما در انتگرالگیری دارد (ر. ک. بخش ۸.۵).
قضیه زیر این بحث را خلاصه می کند.

قضیه ۹ (قضیه تابع معکوس). فرض کنیم $U \subset \mathbb{R}^n$ باز بوده و $f_1: U \rightarrow \mathbb{R}, \dots, f_n: U \rightarrow \mathbb{R}$ مشتقات جزئی پیوسته داشته باشند. معادلات (۶) را در مجاورت جواب معلوم x_0, y_0 در نظر می گیریم. هرگاه $Jf(x_0) \neq 0$ (تعریف شده با (۷)) ناصفر باشد، آنگاه (۶) را می توان به طور منحصر به فرد به صورت $x = g(y)$ نسبت به x نزدیک x_0 و y نزدیک y_0 حل کرد. به علاوه، تابع g دارای مشتقات جزئی پیوسته می باشد.

مثال ۴. معادلات زیر را در نظر می گیریم:

$$x^4 + y^4/x = u(x, y), \quad \sin x + \cos y = v(x, y)$$

اینها را در مجاورت چه نقاط (x, y) می توان نسبت به x, y و بر حسب u, v حل کرد؟

در اینجا توابع عبارتند از $u(x, y) = f_1(x, y) = (x^4 + y^4)/x$ و $v(x, y) = f_2(x, y) = \sin x + \cos y$. نقطه ای را می خواهیم که بتوان معادلات را در مجاورت آنها نسبت به x, y به صورت توابعی از u و v حل کرد. بنابر قضیه تابع معکوس، ابتدا باید

$U = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \neq 0\}$ را مسأوی $f = (f_1, f_2)$ قلمرو حساب کنیم. $\partial(f_1, f_2)/\partial(x, y)$ را حساب کنیم. داریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f_1, f_2)}{\partial(x, y)} &= \begin{vmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x} & \frac{\partial f_1}{\partial y} \\ \frac{\partial f_2}{\partial x} & \frac{\partial f_2}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{3x^4 - y^4}{x^2} & \frac{4y^3}{x} \\ \cos x & -\sin y \end{vmatrix} \\ &= \frac{(\sin y)}{x^2} (y^4 - 3x^4) - \frac{4y^3}{x} \cos x \end{aligned}$$

بنابراین، در نقاطی که این صفر نشود می توان نسبت به x, y و برحسب u و v حل کرد. به عبارت دیگر، می توان در مجاورت x, y هایی که $0 \neq x$ و $(\sin y)(y^4 - 3x^4) \neq 4xy^3 \cos x$ نسبت به x, y حل کرد. این گونه شرایط را معمولاً "نمی توان به طور صریح حل نمود. مثلاً" اگر $x_0 = \pi/2, y_0 = \pi/2$ ، می توان در مجاورت x_0, y_0 نسبت به x, y حل کرد، زیرا در آنجا $\partial(f_1, f_2)/\partial(x, y) \neq 0$.

تمرینات

- فرض کنید $F(x, y) = 0$ یک منحنی مار در نقطه (x_0, y_0) در صفحه xy تعریف نماید. همچنین، $(\partial F/\partial y)(x_0, y_0) \neq 0$. نشان دهید که این منحنی را می توان با نمودار تابع $y = g(x)$ نمایش داد. نشان دهید که خط قائم به $\nabla F(x_0, y_0)$ با خط مماس بر نمودار $y = g(x)$ یکی است.
- نشان دهید که $xy + z + 3xz^5 = 4$ نسبت به z به عنوان تابعی از (x, y) در مجاورت $(1, 0, 1)$ حل پذیر است. $\partial z/\partial y$ و $\partial z/\partial x$ را در $(1, 0)$ حساب کنید.
- (آ) مستقیماً (یعنی، بدون استفاده از قضیه ۸) تحقیق کنید که می توان معادله $F(x, y) = y^2 + y + 3x + 1 = 0$ را نسبت به y و برحسب x حل کرد.
(ب) تحقیق کنید که جواب شما در (آ) با جوابی که از قضیه تابع ضمنی انتظار دارید سازگار است. dy/dx را حساب کنید.
- حل پذیر دستگاه

$$3x + 2y + z^2 + u + v^2 = 0$$

$$4x + 3y + z + u^2 + v + w + 2 = 0$$

$$x + z + w + u^2 + 2 = 0$$

را نسبت به u, v, w و برحسب x, y, z در مجاورت $x = y = z = 0$ ، $u = v = 0$ و $w = -2$ مورد بحث قرار دهید.

۵. حلپذیری

$$y + x + uv = 0$$

$$uxy + v = 0$$

را نسبت به u, v و برحسب x, y در مجاورت $x = y = u = v = 0$ مورد بحث قرار داده و آن را مستقیماً امتحان کنید.

۶. تحقیق کنید آیا دستگاه

$$u(x, y, z) = x + xyz$$

$$v(x, y, z) = y + xy$$

$$w(x, y, z) = z + 2x + 3z^2$$

را می‌توان نسبت به x, y, z و برحسب u, v, w در مجاورت $(0, 0, 0)$ حل کرد.

۷. تابع $f(x, y) = ((x^2 - y^2)/(x^2 + y^2), xy/(x^2 + y^2))$ را در نظر بگیرید. آیا این تابع

از $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ به \mathbb{R}^2 در مجاورت $(x, y) = (0, 1)$ معکوس موضعی دارد؟

۸. $x: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ را با $x(r, \theta) = r \cos \theta$ و $y: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ را با $y(r, \theta) = r \sin \theta$ تعریف کنید.

نشان دهید که

$$\left. \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right|_{(r_0, \theta_0)} = r_0$$

(ب) چه وقت می‌توان تابع معکوس هموار $r(x, y), \theta(x, y)$ را تشکیل داد؟ این مطلب

را مستقیماً و نیز به کمک قضیهٔ تابع معکوس امتحان کنید.

(پ) تبدیلات زیر برای مختصات کروی را در نظر بگیرید (ر. ک. بخش ۴.۱):

$$x(r, \phi, \theta) = \rho \sin \phi \cos \theta$$

$$y(r, \phi, \theta) = \rho \sin \phi \sin \theta$$

$$z(r, \phi, \theta) = \rho \cos \phi$$

نشان دهید که

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \phi, \theta)} = \rho^2 \sin \phi$$

(ت) چه وقت می‌توان دستگاه را نسبت به (ρ, ϕ, θ) و برحسب (x, y, z) حل کرد؟

۹. فرض کنید (x_0, y_0, z_0) نقطه‌ای از مکان هندسی تعریف شده با $z^2 + xy - a = 0$ ، $x^2 - y^2 - b = 0$ باشد.

(آ) تحت چه شرایطی می‌توان بخشی از مکان در مجاورت (x_0, y_0, z_0) را به شکل

$$x = f(z), y = g(z)$$

(ب) $f'(z)$ و $g'(z)$ را حساب کنید.

۱۰. آیا حل

$$xy^2 + xzu + yv^2 = 3$$

$$u^3yz + 2xv - u^2v^2 = 2$$

نسبت به $u(x, y, z)$ ، $v(x, y, z)$ و در مجاورت $(u, v) = (1, 1)$ ، $(x, y, z) = (1, 1, 1)$ امکان پذیر است؟ $\partial v / \partial y$ را در $(1, 1, 1)$ حساب کنید.

۱۱. مسئله تجزیه چند جمله‌ای $x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \dots + a_0$ به عوامل خطی به‌نوعی یک

مسئله "تابع معکوس" است. ضرایب a_i توابعی معلوم از n ریشه r_j هستند. به‌ازای

$n = 3$ ، قضیه تابع معکوس را برای مسئله اعمال کرده و بگویید راجع به امکان این

عمل چه می‌گوید.

۵.۴ چند کاربرد

در این بخش چند کاربرد از روشهای ریاضی را که در بخشهای پیش عرضه شده‌اند بیان می‌کنیم. این کاربردها در مکانیک، هندسه، و اقتصادند و از مکانیک شروع می‌شوند.

دانشجو می‌تواند در مورد کسب اجازه برای مطالعه این مثالها با مدرس مربوطه مشورت نماید.

فرض کنیم F یک میدان نیرو باشد که بر قلمرو معین U از \mathbb{R}^3 تعریف شده است. لذا،

$F: U \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک میدان برداری داده شده است. فرض کنیم یک ذره (به جرم m) در

امتداد مسیر $\sigma(t)$ طوری حرکت کند که قانون نیوتن برقرار باشد: نیرو = شتاب \times جرم؛

یعنی، مسیر $\sigma(t)$ در معادله

$$(1) \quad m\sigma''(t) = F(\sigma(t)).$$

صدق نماید. هرگاه F یک میدان پتانسیل بایتناسیل V باشد، یعنی هرگاه $F = -\text{grad } V$

آنگاه

$$(2) \quad \frac{1}{2}m\|\sigma'(t)\|^2 + V(\sigma(t)) = \text{constant}$$

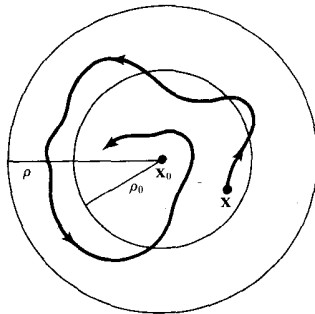
(جمله اول انرژی جنبشی نام دارد.) در واقع، با مشتقگیری به وسیله قاعده زنجیره‌ای،

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{1}{2} m \|\sigma'(t)\|^2 + V(\sigma(t)) \right\} = m\sigma'(t) \cdot \sigma''(t) + \text{grad } V(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$$

$$= [m\sigma''(t) + \text{grad } V(\sigma(t))] \cdot \sigma'(t) = 0$$

زیرا $m\sigma''(t) = -\text{grad } V(\sigma(t))$ این امر رابطه (۲) را ثابت خواهد کرد.

تعریف. نقطه $x_0 \in U$ یک موضع تعادل نام دارد اگر نیرو در این نقطه صفر باشد: $F(x_0) = 0$. نقطه x_0 که یک موضع تعادل است را پایدار گوئیم اگر به ازای $\rho > 0$ هر $\varepsilon > 0$ بتوان اعداد $\rho_0 > 0$ و $\varepsilon_0 > 0$ را طوری اختیار کرد که یک نقطه مادی واقع در فاصله‌ای کمتر از ρ_0 تا x_0 ، پس از دریافت انرژی جنبشی کمتر از ε_0 ، همواره در فاصله کمتر از ρ تا x_0 مانده و انرژی جنبشی کمتر از ε داشته باشد (ر. ک. شکل ۱۰۵۰۴).



شکل ۱۰۵۰۴

حرکت در مجاورت نقطه پایدار x_0

لذا، اگر یک موضع تعادل داشته باشیم، پایداری در x_0 یعنی یک ذره متحرک با حرکت کند در مجاورت x_0 همواره در مجاورت x_0 مانده و حرکت کندی خواهد داشت. هرگاه نقطه تعادل ناپایدار x_0 را داشته باشیم، آنگاه $\sigma(t) = x_0$ جواب معادله $m\sigma''(t) = F(\sigma(t))$ است. ولی جوابهای مجاور ممکن است با گذشت زمان از نقطه x_0 دور شوند. مثلاً، یک مداد که روی نوک خود در حال تعادل است یک وضع ناپایدار دارد، حال آنکه یک گوی آویز از یک فنر تعادل پایداری خواهد داشت.

قضیه ۱۰

(یک) نقاط بحرانی یک پتانسیل مواضع تعادل می‌باشند.

(دو) در یک میدان پتانسیل، نقطه x_0 که در آن پتانسیل مینیمم موضعی اکید دارد یک موضع تعادل پایدار است.

به یاد آورید که گفتیم تابع f در نقطه x_0 مینیمم موضعی اکید دارد اگر یک همسایگی مانند U از x_0 موجود باشد به طوری که به ازای هر x در U غیر از x_0 ، $f(x) > f(x_0)$.

برهان. حکم اول از تعریف $F = -\text{grad } V$ واضح است؛ نقاط تعادل x_0 دقیقاً "نقاط بحرانی V اند که در آنها $\nabla V(x_0) = 0$.

برای اثبات (دو)، از قانون بقای انرژی، یعنی معادله (۲)، استفاده می‌کنیم. داریم

$$\frac{1}{2}m\|\sigma'(t)\|^2 + V(\sigma(t)) = \frac{1}{2}m\|\sigma'(0)\|^2 + V(\sigma(0))$$

استدلال کمی غیر ضروری است تا ایده‌های اصلی کاملاً توضیح داده شوند. همسایگی کوچکی از x_0 اختیار کرده و به ذره انرژی جنبشی کوچکی می‌دهیم. وقتی t صعود کند، ذره روی مسیر $\sigma(t)$ از x_0 دور شده و $V(\sigma(t))$ صعود می‌کند (زیرا $V(\sigma(0))$ مینیمم اکید است). در نتیجه، انرژی جنبشی باید نزول کند. هرگاه انرژی جنبشی اولیه به قدر کافی کوچک باشد، آنگاه برای آنکه ذره از همسایگی x_0 که خارج آن V به میزان معینی صعود می‌کند، فرار نماید، باید انرژی جنبشی منفی گردد (که ممکن نیست). لذا، ذره نمی‌تواند از این همسایگی بگریزد.

مثال ۱. اگر میدان نیروی $F = F_x \mathbf{i} + F_y \mathbf{j} + F_z \mathbf{k}$ با $F_x = -k^2x$ ، $F_y = -k^2y$ ، $F_z = -k^2z$ ($k \neq 0$) داده شده باشد، نقاطی را بیابید که مواضع تعادل بوده و پایدار بودن یا نبودن آنها را تعیین کنید.^۱

میدان F یک میدان پتانسیل با پتانسیل $V = \frac{1}{2}k^2(x^2 + y^2 + z^2)$ است. تنها نقطه بحرانی V مبدا^۲ می‌باشد. هسی V در مبدا عبارت است از $HV(0, 0, 0)(h_1, h_2,$

۱. در این مثال، میدان نیرو همانی است که بر حرکت یک نوسانگر توافقی سه بعدی حاکم است.

فرض کنیم یک نقطه مادی در میدان پتانسیل V مقید است که در سطح تراز S داده شده با معادله $\phi(x, y, z) = 0$ ، که $\text{grad } \phi \neq 0$ ، همانند اگر در فرمول (۱) F را با مؤلفه F که موازی S است عوض کنیم، تضمین می‌کنیم که ذره بر S خواهد ماند. ^۱ بنابراین یک موضع تعادل پایدار می‌باشد.

فرض کنیم یک نقطه مادی در میدان پتانسیل V مقید است که در سطح تراز S داده شده با معادله $\phi(x, y, z) = 0$ ، که $\text{grad } \phi \neq 0$ ، همانند اگر در فرمول (۱) F را با مؤلفه F که موازی S است عوض کنیم، تضمین می‌کنیم که ذره بر S خواهد ماند. ^۱ بنابراین تشابه با قضیه ۱۰، داریم

قضیه ۱۱

(یک) هرگاه پتانسیل $V|_S$ در نقطه P بر سطح S دارای مقدار اکستریم باشد، آنگاه نقطه P یک موضع تعادل بر سطح می‌باشد.
 (دو) هرگاه نقطه $P \in S$ یک مینیمم موضعی اکید پتانسیل $V|_S$ باشد، آنگاه نقطه P یک موضع تعادل پایدار می‌باشد.

برهان این قضیه را حذف می‌کنیم. این برهان شبیه برهان قضیه ۱۰ است با این فرض که در معادله حرکت فقط مؤلفه F در امتداد سطح به کار می‌رود. ^۲

۱. اگر $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2$ ، ذره مقید است روی یک کره حرکت کند؛ مثلاً " ممکن است روی یک سیم بچرخد. قسمت تفریق شده از F برای موازی ساختنش با S قائم به S بوده و نیروی مرکز گرا نام دارد.

۲. این ایده‌ها را می‌توان در چند مسئله فیزیکی جالب نظیر ارتعاشات مولکولی به کار گرفت. پایداری این دستگاهها مسئله مهمی است. برای اطلاعات بیشتر، ر.ک. منابع فیزیک مانند

H. Goldstein, *Classical Mechanics*, Chapter 10. Addison-Wesley, Reading, Mass., 1950

و منابع ریاضی مانند

M. Hirsch and S. Smale, *Differential Equations, Dynamical Systems and Linear Algebra*,

Academic Press, New York, 1974

مثال ۲. فرض کنید F میدان ثقلی در مجاورت سطح زمین باشد؛ یعنی، $F = (F_x, F_y, F_z)$ که در آن $F_x = 0, F_y = 0, F_z = -mg$ و مواضع تعادل یک نقطه مادی به جرم m را در صورتی بیابید که به کره $\phi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0 (r > 0)$ مقید باشد. از این نقاط کدامها پایدارند؟

توجه کنید که F یک میدان پتانسیل با $V = mgz$ است. با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ که در بخش قبل برای تعیین ماکزیممهای ممکن معرفی شدند، معادلات زیر را داریم:

$$\nabla V = \lambda \nabla \phi$$

$$\phi = 0$$

یا، بر حسب مؤلفه‌ها،

$$0 = 2\lambda x$$

$$0 = 2\lambda y$$

$$mg = 2\lambda z$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0$$

و جواب دستگاه معادلات فوق عبارت است از $x = 0, y = 0, z = \pm r, \lambda = \pm mg/2r$. بنا بر قضیه ۱۱، نتیجه می‌شود که نقاط $P_1 = (0, 0, -r)$ و $P_2 = (0, 0, r)$ مواضع تعادل می‌باشند. با توجه به تابع پتانسیل $V = mgz$ و قضیه ۱۱ (دو)، معلوم می‌شود که P_1 یک مینیمم اکید و در نتیجه یک نقطه پایدار است حال آنکه P_2 چنین نمی‌باشد. این نتیجه باید به‌طور فیزیکی واضح باشد.

حال به یک کاربرد هندسی می‌پردازیم.

مثال ۳. فرض کنید یک منحنی با معادله زیر تعریف شده باشد:

$$\phi(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 - 1 = 0$$

ماکزیمم و مینیمم فاصله منحنی تا مبدا را بیابید. اینها را طول محورهای نیمه اطول و نیمه اقصر می‌نامند.

مسئله معادل آن است که مقادیر اکستریم $f(x, y) = x^2 + y^2$ را تحت شرط $\phi(x, y) = 0$

بیابیم. با استفاده از روش ضرایب لاگرانژ، معادلات زیر را خواهیم داشت:

$$(1) \quad 2x + \lambda(2Ax + 2By) = 0$$

$$(۲) \quad 2y + \lambda(2Bx + 2Cy) = 0$$

$$(۳) \quad Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$$

بالفزون $x \times (1)$ بد $y \times (2)$ به دست می آوریم $2(x^2 + y^2) + 2\lambda(Ax^2 + 2Bxy + Cy^2)$

$= 0$. بنابراین (۳)، نتیجه می شود که $x^2 + y^2 + \lambda = 0$ فرض کنیم. $t = -1/\lambda = 1/(x^2 + y^2)$

($\lambda = 0$) غیر ممکن است، زیرا $(0, 0)$ روی منحنی $\phi(x, y) = 0$ قرار ندارد. در این صورت، (۱) و (۲) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$2(A - t)x + 2By = 0$$

(۴)

$$2Bx + 2(C - t)y = 0$$

اگر این دو معادله بخواهند جواب نابدیهی داشته باشند (به یاد آورید که $(x, y) = (0, 0)$ بر منحنی ما نیست؛ و در نتیجه، جواب نمی باشد)، از یک قضیه در جبر خطی نتیجه می شود که دترمینان آنها صفر است:

$$\begin{vmatrix} A - t & B \\ B & C - t \end{vmatrix} = 0$$

چون این معادله نسبت به t از درجه دوم است، پس دو جواب مثلا " t_1 و t_2 را دارد. چون

$x^2 + y^2 = -\lambda$ ، داریم $\sqrt{x^2 + y^2} = \sqrt{-\lambda}$. اما $\sqrt{x^2 + y^2}$ فاصله نقطه (x, y)

تا مبدا است. لذا، اگر (x_1, y_1) و (x_2, y_2) جوابهای نابدیهی (۴) نظیر به t_1 و t_2 باشند،

خواهیم داشت $\sqrt{x_1^2 + y_1^2} = 1/\sqrt{t_1}$ و $\sqrt{x_2^2 + y_2^2} = 1/\sqrt{t_2}$. در نتیجه، اگر $t_1 > t_2$

طول محورهای نیمه اطول و نیمه اقصی به ترتیب مساویند با $1/\sqrt{t_1}$ و $1/\sqrt{t_2}$. اگر منحنی

بیضی باشد، هر دوی t_1 و t_2 حقیقی و مثبت می باشند. در مورد هذلولی یا سهمی چه رخ

خواهد داد؟

در خاتمه به کاربردی از اقتصاد می پردازیم.

مثال ۴. فرض کنید خروجی یک شرکت Q واحد از یک کالا باشد، که Q تابعی است از

۱. ماتریس ضرایب معادلات نمی تواند معکوس داشته باشد، زیرا این ایجاب می کند که

جواب صفر باشد. از بخش ۴.۱ می دانیم که یک ماتریس که معکوس نداشته باشد دترمینان

صفر خواهد داشت.

$f(K, L)$ که در آن K میزان تجهیزات (سرمایه) و L تعداد کارگران می باشد. اگر دستمزد کارگر p ، و میزان سرمایه q باشد، و شرکت بتواند حداکثر B دلار خرج کند، چطور می توان مقدار سرمایه و کار را یافت که خروجی Q ماکزیمم گردد؟ می توان انتظار داشت که با افزایش سرمایه یا تعداد کارگران، خروجی Q نیز افزایش یابد؛ یعنی،

$$\frac{\partial Q}{\partial L} \geq 0 \quad \text{و} \quad \frac{\partial Q}{\partial K} \geq 0$$

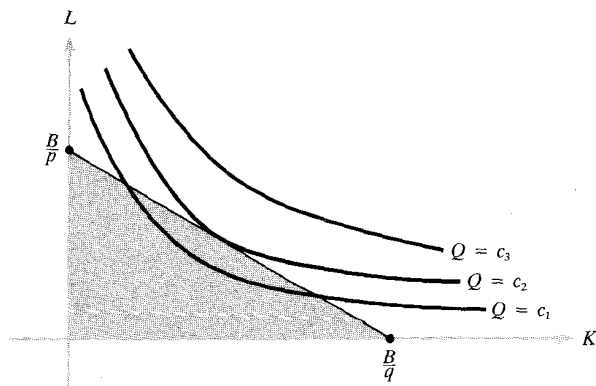
همچنین، انتظار داریم که اگر نیروی کار بیشتری به تجهیزات معینی افزوده شود، خروجی اضافی کمتری خواهیم داشت؛ یعنی،

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial L^2} < 0$$

به همین نحو،

$$\frac{\partial^2 Q}{\partial K^2} < 0$$

با این مفروضات بر Q ، انتظار می رود که منحنیهای تراز خروجی (به نام هم کمیتهای) $Q(K, L) = c$ شبیه منحنیهای شکل ۲.۵.۴ به ازای $c_1 < c_2 < c_3$ باشند.



شکل ۲.۵.۴

بزرگترین مقدار Q در مثلث سایه دار چقدر است؟

تحدب هم‌کمیتها را می‌توان به صورت زیر تعبیر کرد: وقتی در امتداد یک هم‌کمیت به راست حرکت می‌کنیم، برای تعویض یک واحد نیروی کار و تولید همان خروجی سرمایه بیشتری می‌خواهد. قید بودجه یعنی باید در داخل مثلث محدود به محورها و خط $pL + qK = B$ بمانیم. به طور هندسی، بیشترین تولید وقتی است که تمام پولمان را خرج کنیم که هم کمیتی اختیار شود که از خط بودجه نگذشته بلکه با آن تماس داشته باشد. چون نقطه ماکزیم روی مرز قلمروماست، برای یافتن آن روش ضرایب لاگرانژ را به کار می‌بریم. برای ماکزیم سازی $Q = f(K, L)$ تحت قید $pL + qK = B$ ، به جستجوی نقاط بحرانی تابع کمکی

$$h(K, L, \lambda) = f(K, L) - \lambda(pL + qK - B)$$

می‌پردازیم. لذا، می‌خواهیم

$$pL + qK = B \text{ و } \frac{\partial Q}{\partial L} = \lambda p \text{ ، } \frac{\partial Q}{\partial K} = \lambda q$$

اینها شرایطی هستند که برای ماکزیم شدن خروجی لازمند. (در تمرین ۷ حالت خاصی مطرح شده که حل آن را از خواننده می‌خواهیم.)

در این مثال، λ نمایش چیز جالبی است. فرض کنیم $k = qK$ و $l = qL$. در نتیجه k مقدار سرمایه به کار رفته به دلار و l دستمزد کارگر پرداخت شده به دلار است. در این صورت، دو معادله اول به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{\partial Q}{\partial k} = \frac{l}{q} \frac{\partial Q}{\partial K} = \lambda = \frac{l}{p} \frac{\partial Q}{\partial L} = \frac{\partial Q}{\partial l}$$

لذا، در نقطه تولید بهینه، تغییر حاشیه‌ای خروجی بر دلار سرمایه‌گذاری اضافی مساوی تغییر حاشیه‌ای خروجی بر دلار نیروی کار اضافی است، و λ این مقدار مشترک می‌باشد. در نقطه بهینه، معاوضه ارزش دلاری سرمایه با ارزش دلاری نیروی کار خروجی را تغییر نمی‌دهد. خروجی‌های حاشیه‌ای دور از نقطه بهینه باهم متفاوتند، یک تعویض خروجی را افزایش خواهد داد.

تمرینات

۱. فرض کنید ذره‌های در میدان پتانسیل داده شده با $V(x, y) = 3x^2 + 2xy + 2x + y^2 + y + 4$

- در \mathbb{R}^2 حرکت نماید. نقاط تعادل پایدار را در صورت وجود بیابید.
۲. فرض کنید ذره‌ای در میدان پتانسیل داده شده با $V(x, y) = x^2 - 2xy + y^2 + y^3 + x^4$ در \mathbb{R}^2 حرکت نماید. آیا $(0, 0)$ یک موضع تعادل پایدار است؟
۳. فرض کنید ذره‌های مقید به حرکت روی کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و تحت نیروهای ثقلی (مثل مثال ۲) و نیز پتانسیل اضافی $V(x, y, z) = x + y$ باشد نقاط تعادل پایدار را در صورت وجود بیابید.
۴. تعریف و قضیه‌ای تنظیم کنید که بگوید هرگاه یک پتانسیل در x_0 ماکزیمم داشته باشد، آنگاه x_0 موضع تعادل ناپایدار است. در استدلال مواظب چاله‌ها باشید.
۵. سعی کنید اکسترممهای $xy + yz$ را در بین نقاط صادق در $xz = 1$ بیابید.
۶. به سؤالات عنوان شده در آخرین خط مثال ۳ جواب دهید.
۷. تحلیل مثال ۴ را برای تابع تولید $Q(K, L) = AK^\alpha L^{1-\alpha}$ ، که در آن A و α ثابتهای مثبتی بوده و $0 < \alpha < 1$ ، انجام دهید. این یک تابع تولید کوب - دوگلاس نام دارد و گاهی به عنوان یک مدل ساده برای اقتصاد ملی به کار می‌رود. در این صورت، Q خروجی کل اقتصاد به ازای ورودی سرمایه و نیروی کار معلوم است.
۸. یک شرکت با استفاده از الیاف پشمی و نخ پارچه تولید می‌کند. مقدار پارچه تولید شده عبارت است از $Q(x, y) = xy - x - y + 1$ ، که در آن x وزن پشم به پوند و y وزن نخ به پوند است، و $x > 1$ و $y > 1$. اگر بهای پشم پوندی p دلار و نخ پوندی q دلار بوده، و شرکت بتواند B دلار صرف خرید مواد نماید، چه نسبتی از نخ به پشم بیشترین پارچه را تولید خواهد کرد؟

تمرینات دوره‌ای برای فصل ۴

۱. رفتار توابع زیر را در نقاط ذکر شده تحلیل کنید.
- (A) $z = x^2 - y^2 + 3xy$, $(x, y) = (0, 0)$
- (B) $z = x^2 + y^2 + Cxy$, $(x, y) = (0, 0)$
- [جواب به ثابت C بستگی خواهد داشت.]
۲. معادله صفحه مماس بر سطح در نقطه ذکر شده را بیابید.
- (A) $z = 2x^2 + y^2$, $(x, y) = (0, 0)$
- (B) $z = x^2 - 3y^2 + x$, $(x, y) = (1, 0)$

$$z = x + 2y, \quad (x, y) = (3, 2) \quad (\text{پ})$$

۳. معادله صفحه مماس بر سطح S داده شده با نمودار

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2) \quad \text{در } (1, 0, 2) \quad (\text{آ})$$

$$f(x, y) = \sqrt{x^2 + 2xy - y^2 + 1} \quad \text{در } (1, 1, \sqrt{3}) \quad (\text{ب})$$

را بیابید.

۴. مقادیر اکستریم توابع تعریف شده بر \mathbb{R}^2 به وسیله عبارات زیر را (در صورت وجود)

پیدا و رده بندی نمایید.

$$y^2 - x^3 \quad (\text{آ})$$

$$(x - 1)^2 + (x - y)^2 \quad (\text{ب})$$

$$x^2 + xy^2 + y^4 \quad (\text{پ})$$

۵. (آ) فاصله مینیم مبداء در \mathbb{R}^3 تا سطح $z = \sqrt{x^2 - 1}$ را بیابید.

(ب) قسمت (آ) را برای سطح $z = 6xy + 7$ تکرار نمایید.

۶. فرض کنید $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ و $z: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ ، C^1 باشند. تابع مرکب

$$h(x, y) = f(x, y, z(x, y))$$

را در نظر گرفته، نشان دهید که

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial x}$$

و

$$\frac{\partial h}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} \frac{\partial z}{\partial y}$$

۷. (آ) فرض کنید $f(x, y, z) = (xyz)^2$ ؛ ∇f را محاسبه نمایید.

(ب) فرض کنید $F(x, y, z) = x^2y\mathbf{i} + y^2z\mathbf{j} + z^2y\mathbf{k}$ ؛ $\nabla \times F$ را حساب کنید.

$\nabla \cdot F$ و $\nabla \times F$ را برای میدانهای برداری زیر حساب کنید.

$$F = 2x\mathbf{i} + 3yz\mathbf{j} + (4z + x^3)\mathbf{k} \quad (\text{پ})$$

$$F = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k} \quad (\text{ت})$$

$$F = (x + 3y)\mathbf{i} + (y + e^z)\mathbf{j} + (z + \cos x)\mathbf{k} \quad (\text{ث})$$

۸. چندجمله از بسط تیلور $f(x, y) = e^{xy} \cos x$ حول $x = 0, y = 0$ را بیابید.

۹. مقدار اکستریم $z = xy$ را تحت شرط $x + y = 1$ بیابید.

۱۰. مقادیر اکستریم $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ را تحت شرط $x + y = \pi/4$ پیدا کنید.
۱۱. نقاطی بر سطح $z^2 - xy = 1$ بیابید که نزدیکترین نقاط به مبدا باشند.
۱۲. (آ) فرض کنید به ازای هر (x, y) در قرص باز D ، $(\partial f/\partial x)(x, y) = (\partial f/\partial y)(x, y) = 0$ ، نشان دهید که $f(x, y)$ در D ثابت است.
- (ب) با استفاده از قسمت (آ) ، نشان دهید هرگاه در $\partial f/\partial x = \partial g/\partial x \cdot D$ و $\partial f/\partial y = \partial g/\partial y$ ، آنگاه f و g در یک ثابت باهم فرق دارند.
۱۳. کوتاهترین فاصله نقطه $(0, b)$ تا سهمی $x^2 - 4y = 0$ را بیابید. این مسئله را با استفاده از ضریب لاگرانژ و همچنین بدون استفاده از روش لاگرانژ حل نمایید.
۱۴. مسائل هندسی زیر را به روش لاگرانژ حل کنید.
- (آ) کوتاهترین فاصله نقطه (a_1, a_2, a_3) در \mathbb{R}^3 تا صفحه‌ای که معادله اش $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ است، که $(b_1, b_2, b_3) \neq (0, 0, 0)$ ، پیدا نمایید.
- (ب) نقطه‌ای بر فصل مشترک دو صفحه $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_0 = 0$ و $b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_0 = 0$ بیابید که نزدیکترین نقطه به مبدا باشد.
- (پ) نشان دهید که حجم بزرگترین مکعب مستطیل قابل محاط در بیضی‌گون

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

مساوی $8abc/3\sqrt{3}$ است.

۱۵. ذره‌ای در میدان پتانسیل $V(x, y) = x^3 - y^2 + x^2 + 3xy$ حرکت می‌نماید. آیا $(0, 0)$ یک نقطه تعادل پایدار است؟
۱۶. ماهیت تابع $f(x, y) = x^3 - 3xy^2$ را در مجاورت $(0, 0)$ مطالعه نمایید. نشان دهید که نقطه $(0, 0)$ یک نقطه بحرانی تباه شده است؛ یعنی، $D = 0$. این سطح یک "زین میمون" نام دارد.
۱۷. ماکزیمم $f(x, y) = xy$ بر منحنی $(x + 1)^2 + y^2 = 1$ را بیابید و رسم کنید.
۱۸. ماکزیمم و مینیمم $f(x, y) = xy - y + x - 1$ بر مجموعه $x^2 + y^2 \leq 2$ را بیابید.
- *۱۹. (برای حل این مسئله خواننده باید با تکنیک قطری‌سازی یک ماتریس 2×2 آشنا باشد.) فرض کنید $a(x)$ ، $b(x)$ ، و $c(x)$ سه تابع پیوسته باشند که بر $U \cup \partial U$ تعریف شده‌اند، که در آن U مجموعه‌ای باز و ∂U مجموعه نقاط مرزی آن است (ر.ک. بخش ۲۰.۲). از نمادگذاری لم ۲ در بخش ۲۰.۴ استفاده کرده، و فرض کنید به ازای هر

$x \in U \cup \partial U$ ، فرم مربعی تعریف شده با ماتریس

$$\begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

معین مثبت باشد. به ازای تابع C^2 ی v بر $U \cup \partial U$ ، عملگر دیفرانسیل L را با $Lv = a(\partial^2 v / \partial x^2) + 2b(\partial^2 v / \partial x \partial y) + c(\partial^2 v / \partial y^2)$ تعریف کنید. با این شرط معین مثبت بودن، یک چنین عملگر "بیضوی" نام دارد. گوئیم تابع v نسبت به L اکیدا "تحت توافقی" است اگر $Lv > 0$. نشان دهید که یک تابع اکیدا "تحت توافقی" نمی تواند در U نقطه ماکزیم داشته باشد.

* ۲۰. گوئیم تابع v در هسته ماکزیم L توصیف شده در تمرین ۱۹ است اگر بر $U \cup \partial U$ ، $Lv = 0$. با استدلالی شبیه تمرین ۱۷ از بخش ۲.۴، نشان دهید که اگر v بر U ماکزیم خود را بگیرد، آن را بر ∂U نیز خواهد گرفت. این اصل ماکزیم ضعیف برای عملگرهای بیضوی است.

* ۲۱. فرض کنید L یک عملگر دیفرانسیل بیضوی مثل تمرینهای ۱۹ و ۲۰ باشد.

(آ) مفهوم تابع تحت توافقی اکیدا را تعریف کنید.

(ب) نشان دهید که این توابع بر U مینیم ندارند.

(پ) هرگاه v مثل تمرین ۲۰ باشد، نشان دهید که اگر v بر U مینیم خود را بگیرد بر ∂U نیز خواهد گرفت.

* ۲۲. فرض کنید $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ، C^1 بوده و

$$u = f(x)$$

$$v = -y + xf(x)$$

و نیز $f'(x_0) \neq 0$ ، نشان دهید که این تبدیل از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R}^2 در مجاورت (x_0, y) معکوس پذیر است و معکوش عبارت است از

$$x = f^{-1}(u)$$

$$y = -v + uf^{-1}(u)$$

* ۲۳. نشان دهید که معادلات

$$x^2 - y^2 - u^3 + v^2 + 4 = 0$$

$$2xy + y^2 - 2u^2 + 3v^4 + 8 = 0$$

توابع $u(x, y)$ و $v(x, y)$ را در مجاورت $x = 2$ و $y = -1$ چنان معین می کنند که

$u(2, -1) = 2$ و $\partial u / \partial x \cdot v(2, -1) = 1$ را در $(2, -1)$ حساب کنید .

*۲۴. نشان دهید اعداد مثبتی مانند p و q وجود دارند به طوری که توابع منحصر به فردی چون u و v از $[p-1, -1]$ به توی $[q-1, 1]$ وجود دارند که در روابط

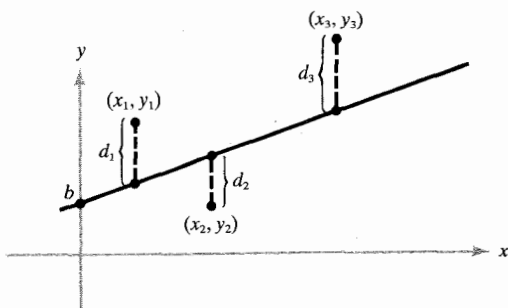
$$xe^{u(x)} + u(x)e^{v(x)} = 0 = xe^{v(x)} + v(x)e^{u(x)}$$

به ازای هر $x \in [p-1, -1]$ و $u(-1) = 1 = v(-1)$ صدق می کنند .

۲۵. کارخانه بارابو ویسکونزین شرکت بین المللی سازنده منگنز آلومینیم، آهن، و منیزیم برای تولید با کیفیت عالی استفاده می کند . کمیت منگنز تولید شده حاصل از x تن آلومینیم، y تن آهن، و z تن منیزیم عبارت است از $Q(x, y, z) = xyz$. بهای مواد خام عبارت است از آلومینیم تنی \$6، آهن تنی \$4، منیزیم تنی \$8. چند تن آلومینیم، آهن، و منیزیم باید برای ساختن 1,000 منگنز، با کمترین هزینه ممکن لازم است؟ (راهنمایی . برای تابعی و تحت قیدی مقدار اکستریم بیابید)

روش کمترین مربعات را در تمرینهای ۲۶ تا ۳۱ به کار برید .

اغلب نظریه موجود ورای یک آزمایش حاکی از آن است که داده های تجربی تقریباً در امتداد خط مستقیمی به شکل $y = mx + b$ قرار دارند . البته، نتایج عملی هرگز به طور دقیق با نظریه سازگار نیستند . سپس با مسئله یافتن خط مستقیمی مواجهیم که بهترین برازش را با داده های تجربی $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ مثل شکل ۱۰.۴ م داشته باشد . اگر حدس بزنیم که خط مستقیم $y = mx + b$ با داده ها برازش دارد، انحراف قائم هر نقطه از خط



شکل ۱۰.۴

روش کمترین مربعات برای یافتن خط مستقیمی که بهترین تقریب به مجموعه ای از داده ها باشد

$$d_i = y_i - (mx_i + b) \text{ مساوی است با}$$

ما یلیم m و b را طوری اختیار کنیم که اثر کل این انحرافات مینیمم باشد. اما چون بعضی منفی و بعضی مثبت اند، می توان حذفهای بسیار داشته و بازم برآزش نامناسبی داشته باشیم. از این نتیجه می شود که شاید بهترین سنجش خطای کل مجموع مربعات این انحرافات است. لذا، به مسئله یافتن m و b ای می رسیم که تابع زیر را مینیمم سازد:

$$s = f(m, b) = d_1^2 + d_2^2 + \dots + d_n^2 = \sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b)^2$$

که در آن x_1, \dots, x_n و y_1, \dots, y_n داده های ما می باشند.

۲۶. به ازای هر مجموعه از سه نقطه داده ای، نقاط را رسم کرده، تابع $f(m, b)$ را نوشته، m و b را طوری بیابید که به روش کمترین مربعات بهترین خط مستقیم برآزش را بدهد، و خط مستقیم را رسم نمایید.

$$\begin{array}{ll} (x_1, y_1) = (0, 0) & (x_1, y_1) = (1, 1) \\ (x_2, y_2) = (1, 2) & (-) \quad (x_2, y_2) = (2, 3) \quad (\bar{A}) \\ (x_3, y_3) = (2, 3) & (x_3, y_3) = (4, 3) \end{array}$$

۲۷. نشان دهید که اگر فقط دو نقطه داده ای (x_1, y_1) و (x_2, y_2) داشته باشیم، این روش خط مار بر (x_1, y_1) و (x_2, y_2) را به ما می دهد.

۲۸. نشان دهید که معادلات مربوط به یک نقطه بحرانی، $\partial s / \partial b = 0$ و $\partial s / \partial m = 0$ ، با معادلات زیر معادلند:

$$m(\sum x_i^2) + b(\sum x_i) = (\sum x_i y_i) \quad \text{و} \quad m(\sum x_i) + nb = (\sum y_i)$$

که در آنها مجموع از $i = 1$ تا $i = n$ تغییر می کند.

۲۹. اگر $y = mx + b$ بهترین خط مستقیم برآزش به نقاط داده ای $(x_1, y_1), \dots, (x_n, y_n)$ طبق روش کمترین مربعات باشد، نشان دهید که

$$\sum_{i=1}^n (y_i - mx_i - b) = 0$$

یعنی، انحرافات مثبت و منفی حذف می شوند (ر. ک. تمرین ۲۸).

۳۰. با استفاده از آزمون مشتق دوم، نشان دهید که نقطه بحرانی f عملاً "مینیمم تولید می کند".

۳۱. با استفاده از روش کمترین مربعات، خط مستقیمی را بیابید که به نقاط $(0, 1)$ ، $(1, 3)$

۰۱، (2, 2)، (3, 4) و (4, 5) بهترین برازش را داشته باشد^۱.

۱. روش کمترین مربعات را می‌توان به طرق مختلف تغییر و تعمیم داد. ایده^۲ اصلی را می‌توان در مورد معادلات منحنیهای پیچیده‌تر از خط مستقیم به کار برد. مثلاً "می‌توان از آن برای یافتن سهمی که بهترین برازش را با مجموعه^۳ معلومی از نقاط داده‌ای دارد استفاده کرد. با این ایده‌ها تا حدودی پایه‌های علم سبرنیتیک توسط نوربرت وینر ریخته شده است. صورت دیگر داده‌ها مسئله^۴ زیر از تقریب کمترین مربعات است: به ازای تابع تعریف شده و انتگرال‌پذیر f بر بازه^۵ $[a, b]$ ، چند جمله‌ای P از درجه^۶ نابیشتر از n را بیابیم که خطای میانگین مربعی

$$\int_a^b |f(x) - P(x)|^2 dx$$

حتی‌الامکان کوچک باشد.

فصل پنجم

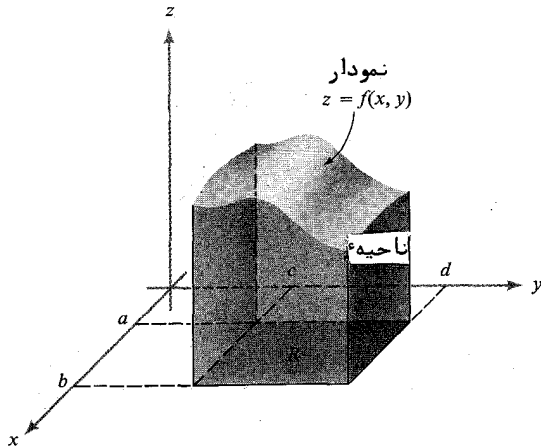
انتگرالگیری

ترتیب اعمال " پوشیدن جوراب " و " پوشیدن کفش " از اهمیت عملی برخوردار است .
جان ادیسون

در این فصل انتگرالگیری از توابع حقیقی چندمتغیره را بررسی می‌کنیم . بحث را با انتگرال توابع دو متغیره ، یا انتگرالهای مضاعف ، آغاز می‌کنیم . انتگرال مضاعف تعبیری هندسی به عنوان حجم دارد ، و می‌توان آن را به‌طور دقیق به صورت حد مجموعهای تقریب ساز تعریف کرد . ما چند تکنیک برای محاسبه انتگرالهای مضاعف عرضه کرده ، چند کاربرد ارائه داده و سپس انتگرالهای مجازی را مطرح می‌کنیم . در خاتمه ، انتگرال توابع سه متغیره ، یا انتگرالهای سه‌گانه ، را معرفی خواهیم کرد .

۱۰۵ مقدمه

در این بخش مقدماتی چند جنبه هندسی انتگرال مضاعف را به اختصار مطرح کرده ، بحث دقیقتر آن برحسب مجموعهای ریمان را تا بخش ۲۰۵ به تعویق می‌اندازیم .
پس فرض کنیم $f: R \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع دو متغیره پیوسته با قلمرو R باشد که مستطیلی یا اضلاع موازی محورهای مختصات می‌باشد . مستطیل R را می‌توان برحسب دو بازه بسته $[a, b]$ و $[c, d]$ توصیف کرد که ، طبق شکل ۱۰۱.۵ ، نمایش اضلاع R به ترتیب در امتداد محورهای x و y می‌باشند . در این حالت ، گوییم R حاصل ضرب دکارتی $[a, b]$ و $[c, d]$ است و می‌نویسیم $R = [a, b] \times [c, d]$.



شکل ۱۰۱۰۵

ناحیه V در فضا به نمودار f ، مستطیل R ، و چهار ضلع قائم نموده شده محدود است.

فرض کنیم بر R ، $f(x, y) \geq 0$. در این صورت، نمودار $z = f(x, y)$ سطحی است که بالای مستطیل R واقع است. این سطح، مستطیل R ، و چهار صفحه $x = a$ ، $x = b$ ، $y = c$ ، و $y = d$ مرز ناحیه V در فضا را تشکیل می‌دهند (ر. ک. شکل ۱۰۱۰۵). مسئله این است که حجم V باید با چه دقتی تعریف شود، و ما آن را در بخش ۲۰۵ به روش کلاسیک اشباع یا، با بیان جدید، روش مجموعه‌های ریمان حل خواهیم کرد. با اینحال، برای درک شهودی این روش، موقتاً فرض می‌کنیم حجم یک ناحیه تعریف شده باشد. این کار نامعقول نیست، زیرا شهوداً حس می‌کنیم هر ناحیه دارای حجم است. در این صورت، حجم ناحیه بالای R و تحت نمودار f انتگرال (مضاعف) f روی R نام دارد و با

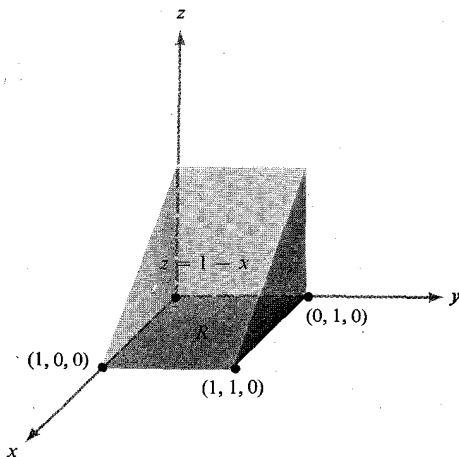
$$\int_R f, \quad \int_R f(x, y) dA, \quad \int_R f(x, y) dx dy, \quad \iint_R f(x, y) dx dy$$

نموده می‌شود.

مثال ۰۱. (T) هرگاه $f(x, y) = k$ ، که در آن k یک ثابت مثبت است، آنگاه $\int_R f(x, y) dA$

که در آن انتگرال مساوی حجم یک جعبه مکعب مستطیل به قاعده R و ارتفاع k می باشد.

(ب) هرگاه $f(x, y) = 1 - x$ و $R = [0, 1] \times [0, 1]$ ، آنگاه $\int_R f(x, y) dA = \frac{1}{2}$ زیرا انتگرال مساوی حجم جسم مثلی شکل ۲.۱.۵ است.



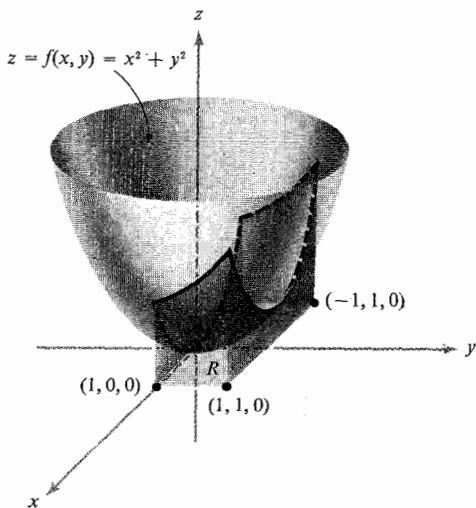
شکل ۲.۱.۵

حجم زیر نمودار $z = 1 - x$ روی $R = [0, 1] \times [0, 1]$

مثال ۲. فرض کنیم $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ و $R = [-1, 1] \times [0, 1]$. در این صورت، انتگرال $\int_R f = \int_R (x^2 + y^2) dx dy$ مساوی حجم جسم رسم شده در شکل ۳.۱.۵ است. این انتگرال را در مثال ۳ حساب خواهیم کرد.

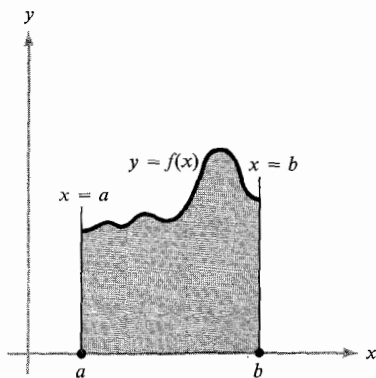
این ایده‌ها با ایده‌های انتگرال ساده $\int_a^b f(x) dx$ ، که اگر f نامنفی و مثلاً "پیوسته" باشد مساحت زیر نمودار f را نمایش می‌دهد، شبیه است. ر. ک. شکل ۴.۱.۵*.

* خواننده‌ای که قبلاً "با این ایده آشنا نیست باید بخشهای مناسبی از کتب حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی را مرور نماید.



شکل ۳۰۱۰۵ |

حجم زیر $z = x^2 + y^2$ روی $R = [-1, 1] \times [0, 1]$



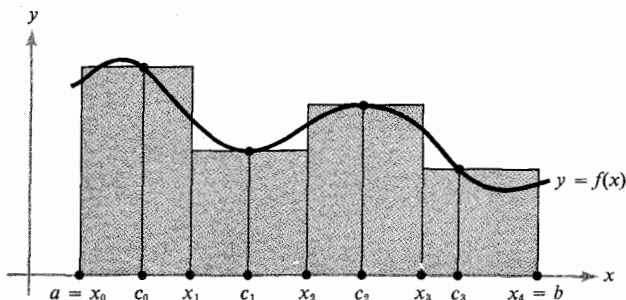
شکل ۴۰۱۰۵

مساحت زیر نمودار تابع پیوسته نامنفی f از $x = a$ تا $x = b$ مساوی $\int_a^b f(x) dx$ است.

به یاد می‌آوریم که $\int_a^b f(x) dx$ را می‌توان دقیقاً، بدون توسل به مفهوم مساحت، به صورت حد مجموع‌های ریمان تعریف کرد. لذا، با اختیار افزایش $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ از $[a, b]$ ، انتخاب نقاط $c_i \in [x_i, x_{i+1}]$ ، و تشکیل مجموع ریمان

$$\sum_{i=0}^{n-1} f(c_i)(x_{i+1} - x_i) \approx \int_a^b f(x) dx$$

تقریب کرد. (ر.ک. شکل ۵.۱.۵).



شکل ۵.۱.۵

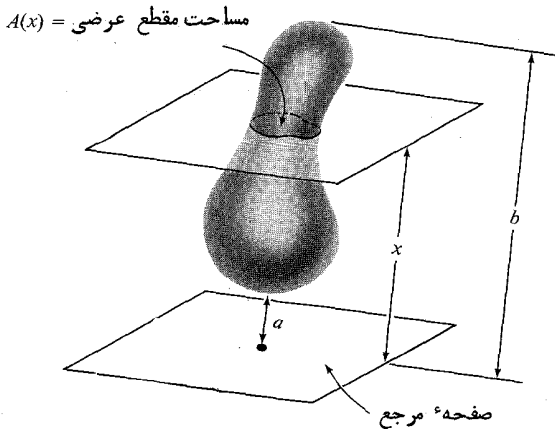
مجموع مساحات مستطیل‌های سایه‌دار یک مجموع ریمان است که مساحت زیر نمودار f از $x = a$ تا $x = b$ را تقریب می‌کند.

در بخش بعد فرایند مشابهی را برای انتگرال‌های مضاعف بررسی خواهیم کرد.

روشی برای محاسبه حجم وجود دارد که آن را اصل کاوالیری^۱ می‌نامند. فرض کنید جسم جامدی داشته باشیم و $A(x)$ مساحت مقطع عرضی در فاصله x تا صفحه مرجع باشد (شکل ۶.۱.۵). بنابراین اصل کاوالیری، حجم جسم مساوی است با

$$\text{حجم} = \int_a^b A(x) dx$$

که در آن a و b مینیمم و ماکزیمم فواصل تا صفحه مرجع می‌باشند. این را می‌توان شهوداً



شکل ۶.۱۰۵

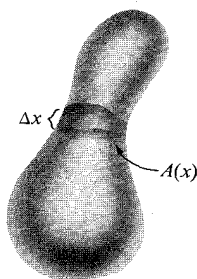
یک جسم جامد با مساحت مقطع عرضی $A(x)$ در فاصله x از یک صفحه مرجع

واضح ساخت. هرگاه $[a, b]$ را به $x_0 = a < x_1 < \dots < x_n = b$ افراز کنیم، آنگاه یک مجموع ریمان تقریب ساز برای انتگرال فوق عبارت است از

$$\sum_{i=0}^{n-1} A(c_i)(x_{i+1} - x_i)$$

اما این مجموع حجم جسم را نیز تقریب می‌کند، زیرا $A(x) \Delta x$ حجم یک ورقه با مساحت مقطع عرضی $A(x)$ و ضخامت Δx است (شکل ۶.۱۰۵). بنابراین، پذیرفتن فرمول فوق برای حجم معقول می‌باشد. توجه دقیقتر این روش ذیلاً داده شده است.

یادداشت تاریخی. بونا ونچورا کاوالیری (۱۶۴۲ - ۱۵۹۸) شاگرد گالیله^۱ و در بولونیا



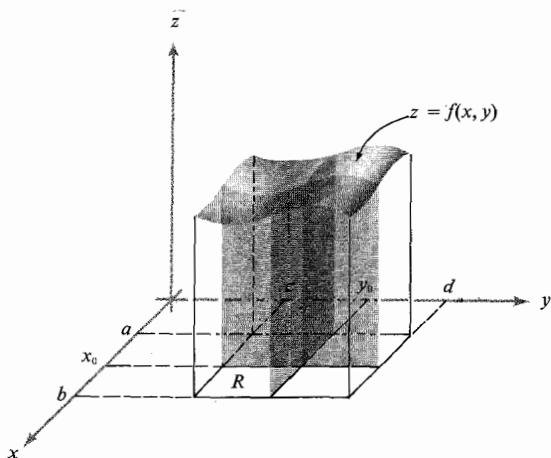
شکل ۷.۱۰۵

حجم یک ورقه با مساحت مقطع عرضی $A(x)$ و ضخامت Δx مساوی $A(x) \Delta x$ است. حجم کل جسم عبارت است از

$$\int_a^b A(x) dx$$

استاد بود. تحقیقات وی در مساحت و حجم پایه‌های حساب دیفرانسیل و انتگرال را ریختند. با آنکه روشهای وی مورد انتقاد معاصرانش قرار گرفتند، ایده‌های مشابهی توسط ارشمیدس^۱ در دوران باستان به کار رفته بودند و بعدها توسط "پدران" حساب دیفرانسیل و انتگرال، یعنی نیوتن و لایبنیتز، مورد استفاده قرار گرفتند.

حال به کمک اصل کاوالیری به محاسبه انتگرالهای مضاعف می‌پردازیم. ناحیه سه‌بعدی زیر نمودار $z = f(x, y)$ تعریف شده بر ناحیه $[a, b] \times [c, d]$ را در نظر می‌گیریم، که در آن f پیوسته و بزرگتر از صفر است. دو تابع طبیعی مساحت مقطع عرضی در نظر می‌گیریم: یکی با استفاده از صفحات قاطع عمود بر محور x و دیگری با استفاده از صفحات قاطع عمود بر محور y به دست می‌آید. مقطع عرضی $x = x_0$ ، از نوع اول، ناحیه مسطح زیر نمودار $z = f(x_0, y)$ تا $y = c$ تا $y = d$ تعیین شده به وسیله صفحه قاطع است (شکل ۷.۱۰۵). وقتی $x = x_0$ را ثابت می‌گیریم، تابع $f(x_0, y) \mapsto y$ را داریم که بر $[c, d]$ پیوسته است. لذا، مساحت مقطع عرضی $A(x_0)$ مساوی انتگرال $\int_c^d f(x_0, y) dy$ می‌باشد. پس مساحت مقطع عرضی تابع A دارای قلمرو $[a, b]$ است، و $A: x \mapsto \int_c^d f(x, y) dy$ می‌باشد. بنابراین اصل کاوالیری



شکل ۸.۱۰.۵

دو مقطع عرضی مختلف حجم یکسانی را زیر $z = f(x, y)$ جارو می‌کنند.

حجم V ناحیه زیر $z = f(x, y)$ باید مساوی

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

باشد. انتگرال $\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$ به انتگرال مکرر معروف است، زیرا از انتگرالگیری نسبت به y و سپس نسبت به x به دست می‌آید. چون $\int_R f(x, y) dA$ مساوی حجم V است،

$$(1) \quad \int_R f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

اگر در بحث فوق نقش x و y را باهم عوض کرده و از صفحات قاطع عمود بر محور y استفاده کنیم، به دست می‌آوریم

$$(2) \quad \int_R f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

عبارت سمت راست (۲) انتگرال مکرر حاصل از انتگرالگیری نسبت به x و سپس نسبت به y است.

لذا، اگر درک شهودی ما از احجام درست باشد، فرمولهای (۱) و (۲) باید معتبر

باشند. این در واقع وقتی درست است که مفاهیم مورد بحث دقیقاً "تعریف شده باشند، و به قضیه فوبینی شهرت دارد. ما در بخش بعد برهانی از این قضیه را خواهیم آورد. همانطور که امثله زیر نشان می‌دهند، مفهوم انتگرال مکرر و معادلات (۱) و (۲) روش توانایی برای محاسبه انتگرال مضاعف یک تابع دو متغیره به دست می‌دهد.

مثال ۳. فرض کنیم $z = f(x, y) = x^2 + y^2$ و $R = [-1, 1] \times [0, 1]$ انتگرال $\int_R (x^2 + y^2) dx dy$ را محاسبه می‌کنیم. بنابر معادله (۲)، داریم

$$\int_R (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^1 \left[\int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx \right] dy$$

برای یافتن $\int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx$ ، y را ثابت گرفته و نسبت به x انتگرال می‌گیریم. چون $x \mapsto x^3/3 + y^2x$ یک پادمشتق $x \mapsto x^2 + y^2$ است، می‌توان به روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی انتگرال گرفته به دست آورد

$$\int_{-1}^1 (x^2 + y^2) dx = \left[\frac{x^3}{3} + y^2x \right]_{x=-1}^1 = \frac{2}{3} + 2y^2$$

حال از $y \mapsto \frac{2}{3} + 2y^2$ نسبت به y از 0 تا 1 انتگرال گرفته، به دست می‌آوریم

$$\int_0^1 \left(\frac{2}{3} + 2y^2 \right) dy = \left[\frac{2}{3}y + \frac{2}{3}y^3 \right]_{y=0}^1 = \frac{4}{3}$$

لذا، حجم جسم شکل ۳.۱۰۵ مساوی $\frac{4}{3}$ است. برای کامل بودن، انتگرال $\int_R (x^2 + y^2) dx dy$ را با استفاده از (۱)، یعنی انتگرالگیری نسبت به y و سپس نسبت به x ، حساب می‌کنیم. داریم

$$\int_R (x^2 + y^2) dx dy = \int_{-1}^1 \left[\int_0^1 (x^2 + y^2) dy \right] dx$$

اگر x را در انتگرالگیری نسبت به y ثابت بگیریم، به دست می‌آوریم

$$\int_0^1 (x^2 + y^2) dy = \left[x^2y + \frac{y^3}{3} \right]_{y=0}^1 = x^2 + \frac{1}{3}$$

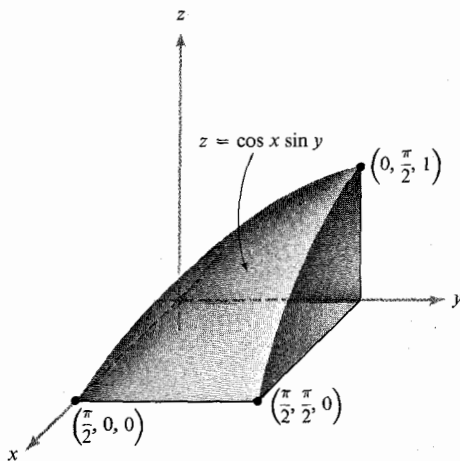
حال با محاسبه $\int_{-1}^1 (x^2 + \frac{1}{3}) dx$ به دست می‌آوریم

$$\int_{-1}^1 \left(x^2 + \frac{1}{3} \right) dx = \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{3} \right]_{x=-1}^1 = \frac{4}{3}$$

که با جواب قبلی ما سازگار است.

مثال ۰۴. $\int_S \cos x \sin y \, dx \, dy$ را، که در آن S مربع $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$ است، حساب می‌کنیم (ر.ک. شکل ۹۰۱۰۵). بنابراین معادله (۲)، داریم

$$\begin{aligned} \int_S \cos x \sin y \, dx \, dy &= \int_0^{\pi/2} \left[\int_0^{\pi/2} \cos x \sin y \, dx \right] dy \\ &= \int_0^{\pi/2} \sin y \, dy = 1 \end{aligned}$$



شکل ۹۰۱۰۵

حجم زیر $z = \cos x \sin y$ روی مستطیل $[0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

در بخش بعد، با استفاده از مجموعه‌های ریمان، انتگرال مضاعف را بدون توسل به حجم برای رده‌ء وسیعی از توابع دو متغیره به‌طور دقیق تعریف می‌کنیم. با آنکه شرط $f(x, y) \geq 0$ را حذف خواهیم کرد، معادلات (۱) و (۲) برقرار می‌مانند. لذا، انتگرال مکرر مجدداً "کلید محاسبات انتگرال مضاعف می‌باشد. در بخش ۳۰۵ انتگرالهای مضاعف

را روی نواحی کلیتر از مستطیلها مورد بحث قرار خواهیم داد.
 بالاخره، تذکار می‌دهیم که معمولاً در انتگرالهای مکرر مانند (۱) و (۲) فوق
 گروه‌ها را حذف کرده و می‌نویسیم

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

و

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

تمرینات

۱. انتگرالهای مکرر زیر را حساب کنید.

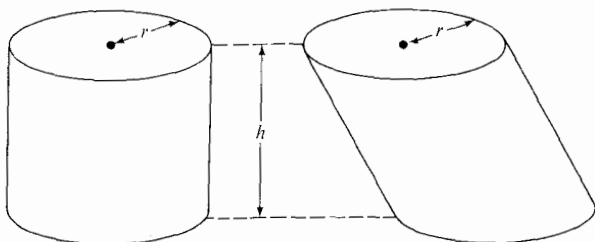
$$\int_0^{\pi/2} \int_0^1 (y \cos x + 2) dy dx \quad (\text{ب}) \qquad \int_{-1}^1 \int_0^1 (x^4 y + y^2) dy dx \quad (\text{آ})$$

$$\int_{-1}^0 \int_1^2 (-x \log y) dy dx \quad (\text{ت}) \qquad \int_0^1 \int_0^1 (xye^{x+y}) dy dx \quad (\text{پ})$$

۲. انتگرالهای تمرین ۱ را با انتگرالگیری نسبت به x و سپس نسبت به y حساب کنید.

۳. با استفاده از فرمول گاوالیری، نشان دهید که حجمهای دو استوانه با قاعده یکسان

و ارتفاع مساوی مساویند (ر. ک. شکل ۱۰.۱۰۵).

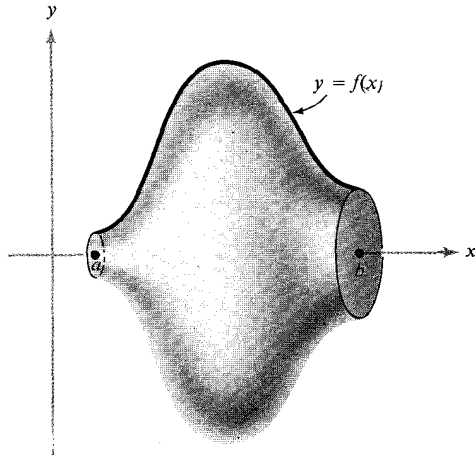


شکل ۱۰.۱۰۵

دو استوانه با قاعده و ارتفاع یکسان حجم برابر دارند.

۴. ثابت کنید حجم دوار شکل ۱۱.۱۰۵ مساوی است با

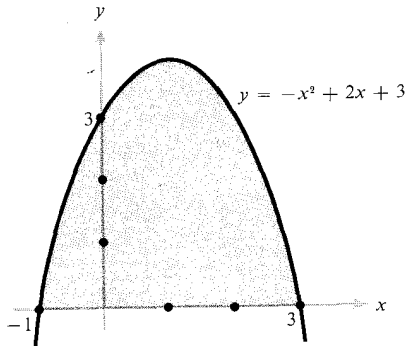
$$\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$$



شکل ۱۱۰۱۰۵

این جسم دوار دارای حجم $\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ است.

(ب) نشان دهید که حجم ناحیه حاصل از دوران نمودار سهمی $y = -x^2 + 2x + 3$ ، حول محور x مساوی $512\pi/15$ است (ر.ک. شکل ۱۲۰۱۰۵).



شکل ۱۲۰۱۰۵

ناحیه بین نمودار $y = -x^2 + 2x + 3$ و محور x .

۵. انتگرالهای مضاعف زیر را در صورتی حساب کنید که R مستطیل $[0, 2] \times [-1, 0]$ باشد.

$$\int_R (x^2 y^2 + x) dy dx \quad (\text{آ})$$

$$\int_R (|y| \cos \frac{1}{4} \pi x) dy dx \quad (\text{ب})$$

$$\int_R (-x e^x \sin \frac{1}{2} \pi y) dy dx \quad (\text{پ})$$

۶. حجم محدود به نمودار $f(x, y) = 1 + 2x + 3y$ ، مستطیل $[0, 1] \times [1, 2]$ ، و چهار ضلع مستطیل R مثل شکل ۱۰.۱۰۵ را بیابید.

۷. تمرین ۶ را در مورد سطح $f(x, y) = x^4 + y^2$ و مستطیل $[-1, 1] \times [-3, -2]$ تکرار نمایید.

۲.۵ انتگرال مضاعف روی یک مستطیل

حال آماده‌ایم تعریف دقیق انتگرال مضاعف را به صورت حد دنباله‌ای از مجموعها بیابیم. سپس از این برای تعریف حجم ناحیه زیر نمودار تابع $f(x, y)$ استفاده خواهد شد. لازم نیست $f(x, y) \geq 0$ ، ولی اگر $f(x, y)$ مقادیر منفی بگیرد، مشابه وضع مساحت زیر نمودار تابع یک متغیره، انتگرال را به صورت حجم تعبیر نمی‌کنیم. به علاوه، چند خاصیت جبری اساسی انتگرال مضاعف را مطرح کرده و قضیه فوبینی را ثابت می‌کنیم، که می‌گوید انتگرال مضاعف را می‌توان به عنوان یک انتگرال مکرر حساب کرد. برای شروع، چند نماد برای افرازها و مجموعها عرضه می‌کنیم.

مستطیل $R \subset \mathbb{R}^2$ را در نظر می‌گیریم که حاصل ضرب دکارتی $R = [a, b] \times [c, d]$ می‌باشد. منظور از افراز منتظم R از مرتبه n یعنی دو گردایه مرکب از $n + 1$ نقطه متساوی‌فاصله مانند $\{x_j\}_{j=0}^n$ و $\{y_k\}_{k=0}^n$ که

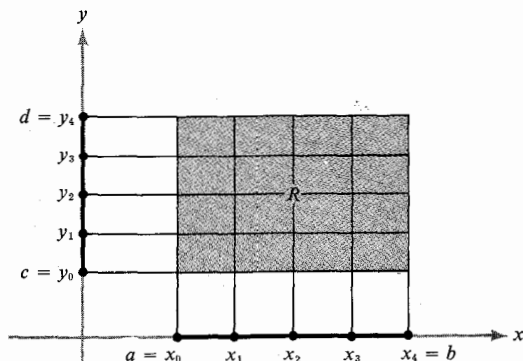
$$a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b, \quad c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$$

و

$$x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}, \quad y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n}$$

(ر.ک. شکل ۱۰.۲.۵).

فرض کنیم R_{jk} مستطیل $[x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$ بوده، c_{jk} نقطه دلخواهی در



شکل ۱۰۲۰۵

یک افراز منتظم مستطیل R با $n = 4$

R_{jk} باشد. همچنین، $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی کراندار باشد. مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$(1) \quad S_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta x \Delta y = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta A$$

که در آن

$$\Delta x = x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}, \quad \Delta y = y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n}$$

و

$$\Delta A = \Delta x \Delta y$$

این مجموع روی تمام j ها و k ها از ۰ تا $n-1$ گرفته شده است. در نتیجه، n^2 جمله وجود خواهند داشت. هر مجموع از این نوع یک مجموع ریمان^۱ برای f نام دارد.

تعریف. هرگاه دنباله $\{S_n\}$ با رفتن $n \rightarrow \infty$ به حد S همگرا بوده و حد S به ازای هر انتخاب نقاط c_{jk} در مستطیلهای R_{jk} یکسان باشد، آنگاه گوییم f روی R انتگرالپذیر است

و برای حد S می نویسیم

$$\int_R f, \quad \int_R f(x, y) dA, \quad \int_R f(x, y) dx dy, \quad \iint_R f(x, y) dx dy$$

لذا، می توان انتگرالپذیری را به صورت زیر نوشت: به ازای هر انتخاب $c_{jk} \in R_{jk}$ ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j, k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta x \Delta y = \int_R f$$

اثبات قضیه اساسی زیر مشکل نیست، ولی از آنجا که به چند نکته فنی نیاز دارد که در جریان کتاب لازم نمی شوند، ما آن را در ضمیمه ب آورده ایم.

قضیه ۱. هر تابع پیوسته تعریف شده بر مستطیل R انتگرالپذیر است.

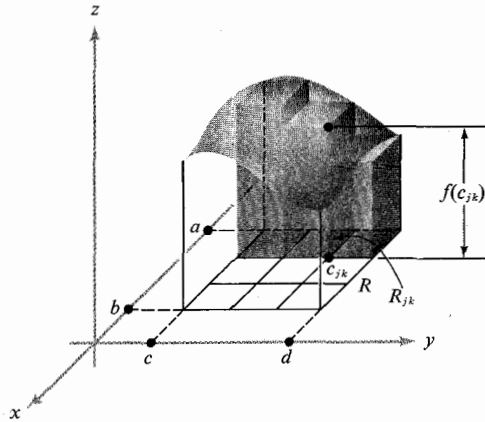
اگر $f(x, y) \geq 0$ ، وجود $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ تعبیر هندسی سراسستی دارد. نمودار $z = f(x, y)$

را بالای یک جسم می گیریم که قاعده اش مستطیل R است. هرگاه هر c_{jk} را نقطه ای بگیریم که $f(x, y)$ مینیمم خود را بر R_{jk} دارد، آنگاه $f(c_{jk}) \Delta x \Delta y$ نمایش حجم یک جعبه مکعب مستطیل به قاعده R_{jk} است. مجموع $\sum_{j, k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta x \Delta y$ مساوی حجم یک جسم محاطی است که بخشی از آن در شکل ۲۰۲۰۵ نموده شده است. به همین نحو، هرگاه c_{jk} نقطه ای باشد که $f(x, y)$ ماکزیمم خود بر R_{jk} را دارد، آنگاه مجموع $\sum_{j, k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta x \Delta y$ مساوی حجم یک جسم محاطی می باشد (ر. ک. شکل ۲۰۲۰۵). بنابراین، اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ موجود

و از $c_{jk} \in R_{jk}$ مستقل باشد، نتیجه می شود که حجم اجسام محاطی و محیطی با رفتن $n \rightarrow \infty$ به حد یکسانی نزدیک می شوند. لذا، معقول است که این حد را حجم دقیق جسم تحت نمودار f بنامیم. لذا، روش مجموعه های ریمان مفاهیم معرفی شده در بخش ۱۰۵ مبتنی بر شهود را حمایت می کند.

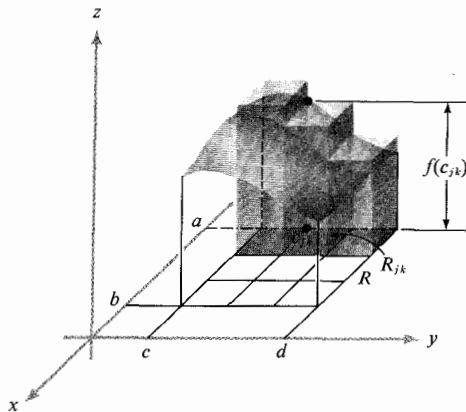
یک قضیه نیز موجود است که وجود انتگرال بعضی از توابع ناپیوسته را تضمین می کند. در بخش بعد، برای بحث انتگرال توابع روی نواحی کلیتر از مستطیلها به این نتیجه نیاز خواهیم داشت.

۱. به خاطر پیوستگی f ، یک چنین c_{jk} ها وجود دارند، ولی ما آن را ثابت نخواهیم کرد.



شکل ۲۰۲۰۵

مجموع جعبه‌های محاطی حجم زیر نمودار $z = f(x, y)$ را تقریب می‌کند.

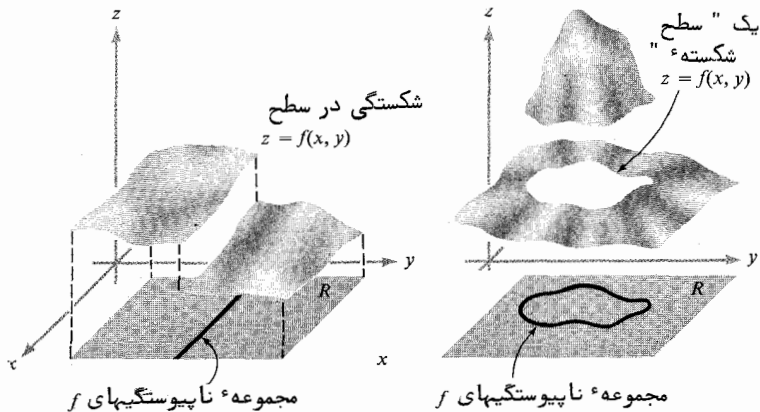


شکل ۳۰۲۰۵

حجم جعبه‌های محیطی نیز حجم زیر $z = f(x, y)$ را تقریب می‌کند.

ما به توابعی علاقه‌مندیم که ناپیوستگیهای آنها منحنیهایی در صفحه xy تشکیل

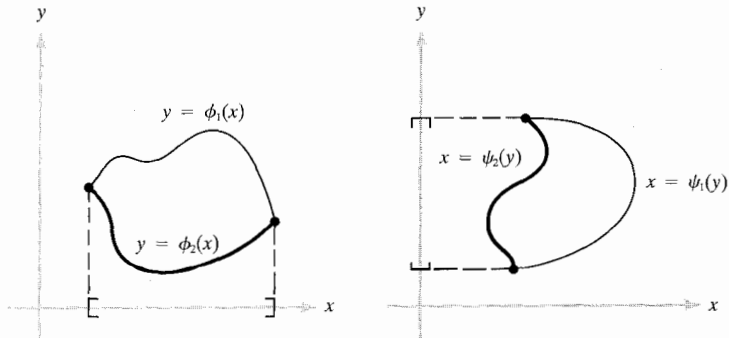
می دهند. شکل ۴.۲۰.۵ دو تابع تعریف شده بر مستطیل R را نشان می دهد که ناپیوستگیهایش



شکل ۴.۲۰.۵

شکل نمودار توابع ناپیوسته دو متغیره

در امتداد منحنیها قرار دارند. به عبارت دیگر، f در هر نقطه که در R بوده ولی بر منحنی نیست پیوسته می باشد. منحنیهای مفید نمودار توابعی هستند به شکل $y = \phi(x), a \leq x \leq b$ یا $x = \psi(y), c \leq y \leq d$ یا اجتماعاتی متناهی از این نمودارها. در شکل ۵.۲۰.۵ چند مثال نموده شده اند. قضیه زیر محک مهمی برای تعیین انتگرالپذیر



شکل ۵.۲۰.۵

منحنیها در صورت نمودارها

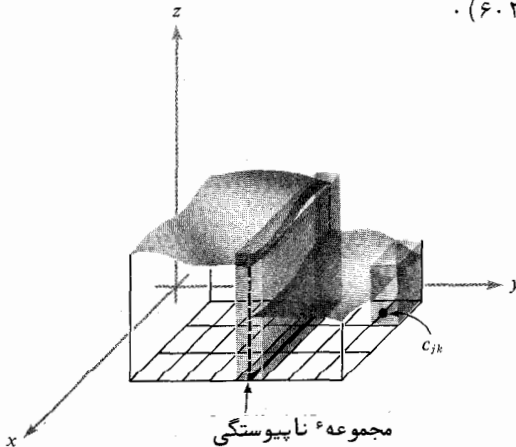
بودن یک تابع به دست می‌دهد. برهان در ضمیمه^۶ ب مطرح شده است.

قضیه^۶ ۰۲. فرض کنیم $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع حقیقی کراندار بر مستطیل R بوده، و مجموعه^۶ نقاط ناپیوسته^۶ f اجتماعی از نمودارهای توابع پیوسته را تشکیل دهد. در این صورت، f بر R انتگرالپذیر است.

به یاد آورید که یک تابع کراندار است اگر عددی مانند $M > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر (x, y) در قلمرو f ، $-M \leq f(x, y) \leq M$. تابع پیوسته بر یک مستطیل بسته همواره کراندار است ولی، مثلاً، " $f(x, y) = 1/x$ " بر $[0, 1] \times [0, 1]$ کراندار نیست، زیرا $1/x$ به ازای x های نزدیک x_0 بدخلخواه بزرگ می‌باشد.

با استفاده از قضیه^۶ ۲ و تذکرات پیش از آن، می‌بینیم که توابع رسم شده در شکل ۴۰۲۰۵ روی R انتگرالپذیرند، زیرا این توابع، جز بر نمودار توابع پیوسته، را کراندار و پیوسته می‌باشند.

به طور هندسی، قضیه^۶ ۲ ایجاب می‌کند که هرگاه تابع نامنفی f "خیلی بد رفتار" نباشد، آنگاه حجم اجسام محیطی و محاطی حجم "دقیق" زیر نمودار را تقریب می‌کنند (ر.ک. شکل ۶۰۲۰۵).



شکل ۶۰۲۰۵

نمودار یک تابع ناپیوسته و دو جعبه^۶ محیطی

از تعریف انتگرال به عنوان حد مجموعها و فضایی حدی، می توان چند خاصیت اساسی انتگرال $\int_R f(x, y) dA$ را نتیجه گرفت. این خواص اساساً همان خواص مربوط به انتگرال یک تابع حقیقی از یک متغیر می باشند.

فرض کنیم f و g توابع انتگرالپذیری بر مستطیل R بوده، و c یک ثابت باشد. در این صورت، $f + g$ و cf انتگرالپذیرند، و
(یک) (خطی بودن)

$$\int_R [f(x, y) + g(x, y)] dA = \int_R f(x, y) dA + \int_R g(x, y) dA$$

$$\int_R cf(x, y) dA = c \int_R f(x, y) dA \quad (\text{دو}) \quad (\text{همگنی})$$

(سه) (یکنوایی) هرگاه $f(x, y) \geq g(x, y)$ ، آنگاه

$$\int_R f(x, y) dA \geq \int_R g(x, y) dA$$

(چهار) (جمع) هرگاه R_i ، $i = 1, \dots, m$ مستطیلهای دو بدو از هم جدا باشند به طوری که f روی هر R_i انتگرالپذیر باشد و $Q = R_1 \cup R_2 \cup \dots \cup R_m$ یک مستطیل باشد، آنگاه هر تابع کراندار $f: Q \rightarrow \mathbb{R}$ روی Q انتگرالپذیر بوده و

$$\int_Q f(x, y) dA = \sum_{i=1}^m \int_{R_i} f(x, y) dA$$

خواص (یک) و (دو) نتیجه ای از تعریف انتگرال به عنوان حد یک مجموع و نکات زیر در مورد دنباله های همگرای $\{S_n\}$ و $\{T_n\}$ است که در کتب حساب دیفرانسل و انتگرال یک متغیره ثابت شده اند:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (T_n + S_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} T_n + \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (cS_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$$

برای نشان دادن یکنوایی، ابتدا ملاحظه می کنیم هرگاه $h(x, y) \geq 0$ و $\{S_n\}$ دنباله ای از مجموعهای ریمان همگرا به $\int_R h(x, y) dA$ باشد، آنگاه به ازای هر n ، $S_n \geq 0$ ؛ در نتیجه، $\int_R h(x, y) dA = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n \geq 0$. هرگاه به ازای هر $(x, y) \in R$ ، $f(x, y) \geq g(x, y)$ ، آنگاه به ازای هر (x, y) ، $(f - g)(x, y) \geq 0$ و با استفاده از (یک) و (دو)، داریم

$$\int_R f(x, y) dA - \int_R g(x, y) dA = \int_R [f(x, y) - g(x, y)] dA \geq 0$$

این قسمت (سه) را ثابت می‌کند. اثبات (چهار) تکنیکی تر بوده و حالت خاصی از آن در ضمیمه ب ثابت شده است. این امر شهوداً " باید واضح باشد .. نتیجه مهم دیگر نامساوی زیر است:

$$(۲) \quad \left| \int_R f \right| \leq \int_R |f|$$

برای مشاهده صحت (۲)، توجه می‌کنیم که، طبق تعریف قدرمطلق، $-|f| \leq f \leq |f|$ ؛ در نتیجه، از یکنوایی و همگنی انتگرالگیری (به ازای $c = -1$) داریم

$$-\int_R |f| \leq \int_R f \leq \int_R |f|$$

که با فرمول (۲) معادل است.

همانطور که انتگرالپذیری توابع مختلفی را دیده‌ایم، هنوز دقیقاً " روشی کلی برای محاسبه انتگرالها به دست نیاورده‌ایم. درحالت یک متغیر، با استفاده از قضیه اساسی حساب انتگرال، از محاسبه $\int_a^b f(x) dx$ به وسیله تعریفش به عنوان حد یک مجموع احتراز می‌کنیم. این قضیه مهم را به یاد می‌آوریم که می‌گوید هرگاه f پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a)$$

که در آن f یک پاد مشتق f است. یعنی، $F' = f$.

این تکنیک برای توابع دو متغیره $f(x, y)$ کار نمی‌کند. با اینحال، همانطور که در بخش ۱۰.۵ گفتیم، اغلب می‌توان یک انتگرال مضاعف روی یک مستطیل را به یک انتگرال مکرر تحویل کرد؛ در این صورت، قضیه اساسی را می‌توان بر این انتگرالهای ساده اعمال کرد. قضیه فوبینی، که در بخش اخیر ذکر شد، این تحویل به انتگرالهای مکرر را با استفاده از مجموعهای ریمان دقیقاً ثابت کرد. همانطور که در بخش ۱۰.۵ دیدیم، تحویل

$$\begin{aligned} \int_R f(x, y) dA &= \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \\ &= \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \end{aligned}$$

دست کم اگر $f(x, y) \geq 0$ ، نتیجه‌ای است از اصل کاوالیری . این بر حسب مجموعهای ریمان متناظر نامساوی زیر است :

$$\begin{aligned} \sum_{j, k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta x \Delta y &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta y \right) \Delta x \\ &= \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta x \right) \Delta y \end{aligned}$$

که می‌توان آن را به‌طور کلیتر به‌این صورت ثابت کرد : فرض کنیم $[a_{jk}]$ یک ماتریس $n \times n$ باشد ، $0 \leq j \leq n-1, 0 \leq k \leq n-1$. همچنین ، مجموع n^2 درایه‌های ماتریس باشد . در این صورت ،

$$(۳) \quad \sum_{j, k=0}^{n-1} a_{jk} = \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{jk} \right) = \sum_{k=0}^{n-1} \left(\sum_{j=0}^{n-1} a_{jk} \right)$$

در تساوی اول ، طرف راست نمایش جمع‌بندی درایه‌های ماتریس از طریق سطرهاست .

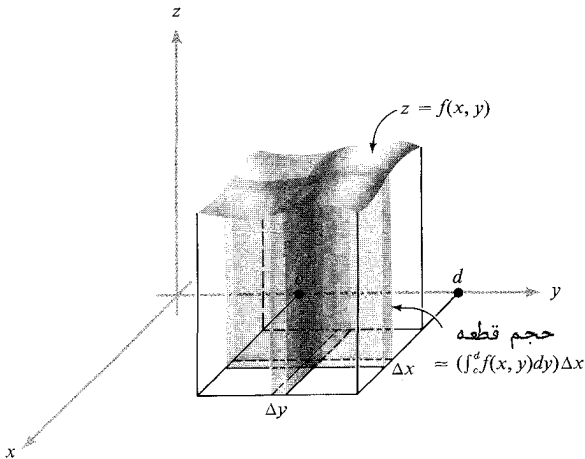
$$\begin{pmatrix} a_{00} & a_{01} & a_{02} & \cdots & a_{0(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{j0} & a_{j1} & \cdots & a_{jk} & \cdots & a_{j(n-1)} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{(n-1)0} & a_{(n-1)1} & \cdots & a_{(n-1)k} & \cdots & a_{(n-1)(n-1)} \end{pmatrix} \begin{matrix} \rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} a_{0k} \\ \vdots \\ \rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} a_{jk} \\ \vdots \\ \rightarrow \sum_{k=0}^{n-1} a_{(n-1)k} \\ \hline \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=0}^{n-1} a_{jk} \right) \end{matrix}$$

واضح است که این با $\sum_{j, k=0}^{n-1} a_{jk}$ ، یعنی مجموع تمام a_{jk} ها ، مساوی است . به‌همین نحو ، نمایش جمع‌بندی درایه‌های ماتریس از طریق ستونهاست . این رابطه (۳) را ثابت می‌کند ، و اگر به یاد آورید که انتگرالها را می‌توان با مجموعهای ریمان نظیر تقریب کرد ، این تحویل به انتگرالهای مکرر را کاملاً " توجیه می‌نماید . از این ایده در اثبات قضیه فوبینی استفاده خواهیم کرد .

پیش از اثبات یادآوری اینکه چگونه اصل کاوالیری فرمول

$$(۴) \quad \int_R f(x, y) dA = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy$$

را موجه می‌نماید مفید است. هرگاه حجم زیر نمودار f را به قطعاتی موازی محور y تقسیم کنیم، آنگاه می‌بینیم که حجم کل زیر نمودار تقریباً "مساوی مجموع کمیات $[\int_c^d f(x, y) dy] \Delta x$ است؛ یعنی، داریم $\int_R f(x, y) dA = \int_a^b [\int_c^d f(x, y) dy] dx$. به همین نحو، تساوی دوم فوق به وسیله تقسیم حجم به قطعاتی موازی محور x ثابت می‌شود (ر. ک. شکل ۷.۲.۵).



شکل ۷.۲.۵

تعبیر هندسی انتگرال مکرر

قضیه ۳ (قضیه فوبینی^۱). فرض کنیم f تابع پیوسته‌ای باشد که قلمروش مستطیل $R = [a, b] \times [c, d]$ است. در این صورت،

$$(۴) \quad \int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_R f(x, y) dA$$

برهان . ابتدا نشان می دهیم که

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_R f(x, y) dA$$

فرض کنیم $c = y_0 < y_1 < \dots < y_n = d$ افرازی از $[c, d]$ به n قسمت مساوی باشد .
تعریف می کنیم

$$F(x) = \int_c^d f(x, y) dy$$

در این صورت ،

$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x, y) dy$$

با استفاده از صورت انتگرالی قضیه مقدار میانگین^۱ ، به ازای هر x ثابت و هر k داریم (ر . ک . شکل ۸۰۲۰۵)

$$\int_{y_k}^{y_{k+1}} f(x, y) dy = f(x, Y_k(x))(y_{k+1} - y_k)$$

که در آن نقطه^۲ $Y_k(x)$ متعلق به $[y_k, y_{k+1}]$ بوده و ممکن است تابع x و n باشد . لذا ، نشان داده ایم که

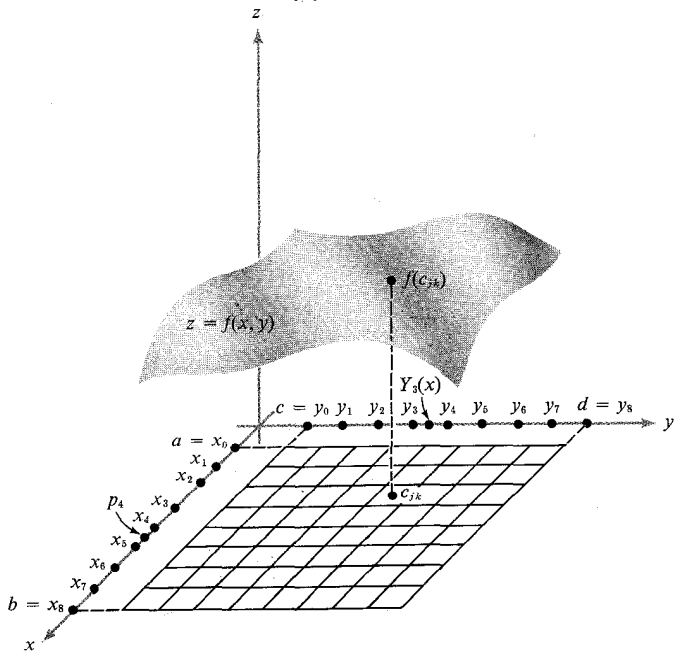
$$F(x) = \sum_{k=0}^{n-1} f(x, Y_k(x))(y_{k+1} - y_k)$$

اما ، بنا بر تعریف انتگرال یک متغیر ، به عنوان حد مجموعهای ریمان ،

$$\int_a^b F(x) dx = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx$$

$$= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(p_j)(x_{j+1} - x_j)$$

۱ . این قضیه می گوید که اگر $g(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته باشد ، به ازای نقطه ای مانند $c \in [a, b]$ ،
 $\int_a^b g(x) dx = g(c)(b - a)$. صورت کلیتری از قضیه مقدار میانگین در بخش ۱۰۴ ثابت شده است (ر . ک . ص ۲۵۴) .



شکل ۸.۲.۵

نمادهای لازم در برهان قضیه فوبینی، $n = 8$.

که در آن $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$ افزایش از بازه $[a, b]$ به n قسمت مساوی بوده و p_j نقطه‌ای در $[x_j, x_{j+1}]$ است. با قرار دادن $(p_j, Y_k(p_j)) \in R_{jk}$ خواهیم داشت (با گذاردن p_j به جای x در بالا)

$$F(p_j) = \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{jk})(y_{k+1} - y_k)$$

بنابراین،

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_a^b F(x) dx$$

$$\begin{aligned}
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} F(p_j)(x_{j+1} - x_j) \\
 &= \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{jk})(y_{k+1} - y_k)(x_{j+1} - x_j) \\
 &= \int_R f(x, y) dA
 \end{aligned}$$

لذا، ثابت کرده‌ایم که

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_R f(x, y) dA$$

یا همین استدلال می‌توان نشان داد که

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_R f(x, y) dA$$

این دو نتیجه دقیقاً "چیزی است که می‌خواستیم ثابت کنیم."

قضیهٔ فوبینی را می‌توان به حالتی که در آن f لزوماً پیوسته نیست تعمیم داد. در اینجا برهانی ارائه نمی‌دهیم، ولی صورت کلیتر آن را بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۳ (قضیهٔ فوبینی). فرض کنیم f تابع گرانداری باشد که قلمروش مستطیل $R = [a, b] \times [c, d]$ است، و نیز ناپیوستگیهای f اجتماعی متناهی از نمودارهای توابع پیوسته را تشکیل دهند. هرگاه

$$\int_c^d f(x, y) dy \text{ به ازای هر } x \in [a, b] \text{ موجود باشد،}$$

نگاه

$$\int_a^b \left[\int_c^d f(x, y) dy \right] dx \text{ وجود دارد}$$

و

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_R f(x, y) dA$$

به همین نحو، هرگاه

، به ازای هر $y \in [c, d]$ موجود باشد ،

نگاه

$$\int_c^d \left[\int_a^b f(x, y) dx \right] dy \text{ وجود دارد}$$

و

$$\int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_R f(x, y) dA$$

لذا ، اگر تمام این شرایط باهم برقرار باشند ،

$$\int_a^b \int_c^d f(x, y) dy dx = \int_c^d \int_a^b f(x, y) dx dy = \int_R f(x, y) dA$$

مفروضات این صورت از قضیه فوبینی از مفروضات قضیه ۳ پیچیده ترند . این فرضها لازمند ، چرا که اگر f ، مثلا " ، همه جا پیوسته نباشد ، تضمینی برای وجود $\int_c^d f(x, y) dy$ به ازای هر x وجود ندارد .

مثال ۰۳ . $\int_R (x^2 + y) dA$ را در صورتی حساب کنید که R مربع $[0, 1] \times [0, 1]$ باشد . بنا بر قضیه فوبینی ،

$$\int_R (x^2 + y) dA = \int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y) dx dy = \int_0^1 \left[\int_0^1 (x^2 + y) dx \right] dy$$

بنابر قضیه اساسی حساب انتگرال ، انتگرالگیری نسبت به x قابل انجام است :

$$\int_0^1 (x^2 + y) dx = \left[\frac{x^3}{3} + yx \right]_{x=0}^1 = \frac{1}{3} + y$$

لذا ،

$$\int_R (x^2 + y) dA = \int_0^1 \left[\frac{1}{3} + y \right] dy = \left[\frac{1}{3}y + \frac{y^2}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{6}$$

آنچه کرده ایم این است که y را ثابت گرفته ، نسبت به x انتگرال گرفته ایم و سپس نتیجه را بین حدود داده شده برای متغیر x حساب کرده ایم . سپس از تابع باقیمانده (فقط از

y نسبت به y انتگرال گرفته جواب نهایی را به دست آورده ایم.

یک نتیجه قضیه فوبینی این است که تعویض ترتیب انتگرالگیری در انتگرالهای مکرر جواب را تغییر نمی دهد. این امر را برای مثال فوق تحقیق می کنیم. داریم

$$\begin{aligned}\int_0^1 \int_0^1 (x^2 + y) dy dx &= \int_0^1 \left[x^2 y + \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^1 dx = \int_0^1 \left[x^2 + \frac{1}{2} \right] dx \\ &= \left[\frac{x^3}{3} + \frac{x}{2} \right]_0^1 = \frac{5}{6}\end{aligned}$$

پس می بینیم که وقتی بر $R = [a, b] \times [c, d]$ ، $f(x, y) \geq 0$ ، انتگرال $\int_R f(x, y) dA$ را می توان به عنوان حجم تعبیر کرد. هرگاه تابع مقادیر منفی نیز بگیرد، آنگاه انتگرال مضاعف را می توان مجموع تمام احجام واقع بین سطح $z = f(x, y)$ و صفحه $z = 0$ محدود به صفحات $x = a$ ، $x = b$ ، $y = c$ ، و $y = d$ گرفت. در اینجا احجام بالای $z = 0$ مثبت و احجام پایین آن منفی به حساب می آیند. اما قضیه فوبینی به صورت بیان شده، در حالت منفی بودن یا تغییر علامت دادن $f(x, y)$ بر R معتبر می ماند؛ یعنی، در مفروضات قضیه قیدی بر علامت f نمی گذاریم.

مثال ۴. فرض کنید R مستطیل $[0, 1] \times [-2, 1]$ بوده و $f(x, y) = y(x^3 - 12x)$ ؛
 $\int_R f(x, y) dx dy = \int_R y(x^3 - 12x) dx dy$ انتگرال $f(x, y)$ بر R مقادیر مثبت و منفی می گیرد. انتگرال $\int_R y(x^3 - 12x) dx dy$ را حساب کنید.

بنابر قضیه فوبینی، می توان نوشت

$$\int_R y(x^3 - 12x) dx dy = \int_0^1 \left[\int_{-2}^1 y(x^3 - 12x) dx \right] dy = \frac{57}{4} \int_0^1 y dy = \frac{57}{8}$$

به صورت دیگر، اگر ابتدا نسبت به y انتگرال بگیریم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\int_R y(x^3 - 12x) dy dx &= \int_{-2}^1 \left[\int_0^1 (x^3 - 12x)y dy \right] dx \\ &= \frac{1}{2} \int_{-2}^1 (x^3 - 12x) dx \\ &= \frac{1}{2} \left[\frac{x^4}{4} - 6x^2 \right]_{-2}^1 = \frac{57}{8}\end{aligned}$$

یادداشت تاریخی

با آنکه قضیه ۳ در مورد تساوی انتگرالهای مکرر به ریاضیدان ایتالیایی، گوئیدو فوبینی (۱۹۴۳ - ۱۸۷۹)، منسوب است، که در ۱۹۵۷ یک نتیجه بسیار کلی از این نوع را ثابت کرد، ولی مسلماً "کشی و معاصرانش می دانستند که این تساوی برای توابع پیوسته برقرار است. کشی اولین کسی بود که نشان داد این تساوی برای f بی کران لزوماً برقرار نیست و، کمی بعد، توابع کرانداری به دست آمدند که تساوی در مورد آنها برقرار نبود.

تمرینات

۱. هر یک از انتگرالهای زیر را در صورتی حساب کنید که $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

$$\int_R (x^3 + y^2) dA \quad (\text{آ})$$

$$\int_R ye^{xy} dA \quad (\text{ب})$$

$$\int_R (xy)^2 \cos x^3 dA \quad (\text{پ})$$

۲. هر یک از انتگرالهای زیر را در صورتی حساب کنید که $R = [0, 1] \times [0, 1]$.

$$\int_R (x^m y^n) dx dy \quad (\text{آ})$$

$$\int_R (ax + by + c) dx dy \quad (\text{ب})$$

$$\int_R \sin(x + y) dx dy \quad (\text{پ})$$

۳. فرض کنید f پیوسته و $f \geq 0$ بر مستطیل R باشد. اگر $\int_R f dA = 0$ ، ثابت کنید بر

$$f = 0 \text{ در } R$$

۴. حجم جسم محدود به صفحه xz ، صفحه yz ، صفحه xy ، صفحات $x = 1$ و $y = 1$ و سطح $z = x^2 + y^4$ را حساب کنید.

۵. فرض کنید f بر $[a, b]$ و g بر $[c, d]$ پیوسته باشند. نشان دهید

$$\int_R [f(x)g(y)] dx dy = \left[\int_a^b f(x) dx \right] \left[\int_c^d g(y) dy \right]$$

که در آن $R = [a, b] \times [c, d]$

۶. حجم جسم محدود به $z = \sin y$, $0 \leq y \leq \pi/2$, $0 \leq x \leq 1$ را محاسبه نمایید.
۷. حجم جسم محدود به $z = x^2 + y$ ، مستطیل $R = [0, 1] \times [1, 2]$ ، و "اضلاع قائم" R را حساب کنید.
۸. فرض کنید f بر $R = [a, b] \times [c, d]$ پیوسته باشد. به ازای $a < x < b$, $c < y < d$ تعریف کنید

$$F(x, y) = \int_a^x \int_c^y f(u, v) \, dv \, du$$

نشان دهید که $\partial^2 F / \partial x \partial y = \partial^2 F / \partial y \partial x = f(x, y)$. با استفاده از این مثال، رابطه بین قضیه فوبینی و تساوی مشتقات جزئی مخلوط را مورد بحث قرار دهید (ر. ک. بخش ۶.۲).

۹* فرض کنید $f: [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{گویا } x \\ 2y & \text{گنگ } x \end{cases}$$

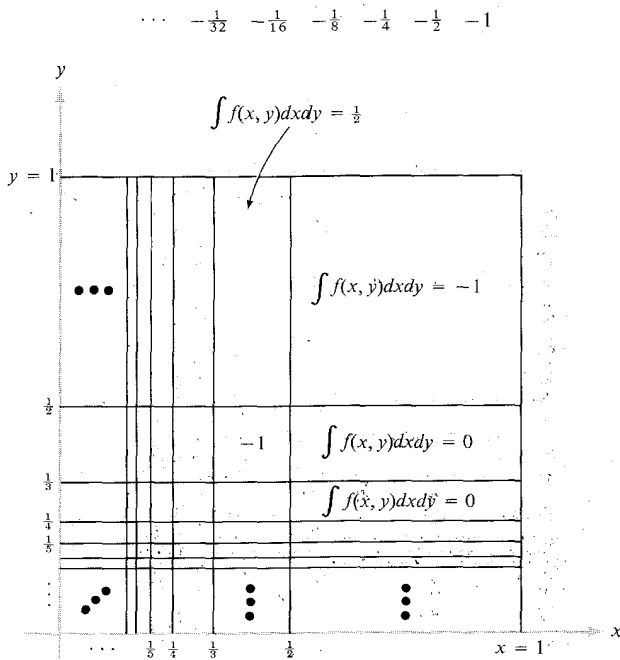
نشان دهید که انتگرال مکرر $\int_0^1 [\int_0^1 f(x, y) \, dy] \, dx$ وجود دارد ولی f انتگرالپذیر نیست.

۱۰* $\int_R \cosh xy \, dx \, dy$ را، که در آن $R = [0, 1] \times [0, 1]$ ، به صورت یک سری همگرا بیان کنید.

۱۱* با آنکه قضیه فوبینی برای اغلب توابع در عمل برقرار است، ولی باید در این باب محتاط بود. قضیه مسلماً "برای تمام توابع برقرار نیست. مثلاً"، می‌توان مربع بیکه را به بی‌نهایت مستطیل به شکل $[1/(n+1), 1/n] \times [1/(m+1), 1/m]$ ، مثل شکل ۹.۲.۵، تقسیم کرد. f را طوری تعریف کنید که حجم زیر نمودار f روی هر مستطیل طبق جدول زیر قرار بگیرد:

...	$\frac{1}{32}$	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	-1
...	$\frac{1}{16}$	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	-1	0
...	$\frac{1}{8}$	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	0
...	$\frac{1}{4}$	$\frac{1}{2}$	-1	0	0	0
...	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots

f را در $(0, 0)$ صفر تعریف کنید. هر سطر با صفر جمع می‌شود؛ در نتیجه، جمع سطرها و سپس ستونها نتیجه صفر می‌دهد. از آن سو، ستونها با



شکل ۹.۲.۵

ساختن تابعی که در قضیهٔ فوبینی صدق نمی‌کند (تمرین ۱۱)

جمع می‌شوند؛ در نتیجه، جمع سطرها و سپس ستونها نتیجهٔ ۲- را می‌دهد. چرا قضیهٔ فوبینی برای این تابع برقرار نیست؟

۳.۵ انتگرال مضاعف روی نواحی کلیتر

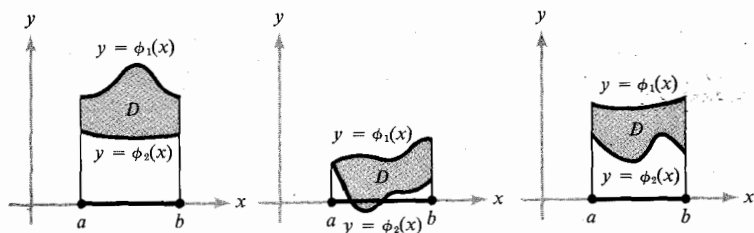
در این بخش دو هدف در پیش است. ابتدا انتگرال $\int_D f(x, y) dA$ را بر نواحی D که از مستطیلها کلیترند تعریف کرده و، سپس، تکنیک محاسبهٔ این نوع انتگرال را ارائه می‌دهیم. برای این کار، سه نوع خاص زیر مجموعه از صفحهٔ xy تعریف کرده، و سپس مفهوم انتگرال مضاعف را به آنها تعمیم می‌دهیم.

فرض کنید دو تابع حقیقی پیوسته $\phi_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}, \phi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ بستهٔ ما داده

باشند که به ازای هر $t \in [a, b]$ ، $\phi_2(t) \leq \phi_1(t)$. همچنین ، D مجموعه تمام نقاط (x, y) باشد به طوری که

$$x \in [a, b], \quad \phi_2(x) \leq y \leq \phi_1(x)$$

گوییم این ناحیه D از نوع ۱ است . شکل ۱۰۳۰۵ چند ناحیه از نوع ۱ را نشان می دهد .



شکل ۱۰۳۰۵

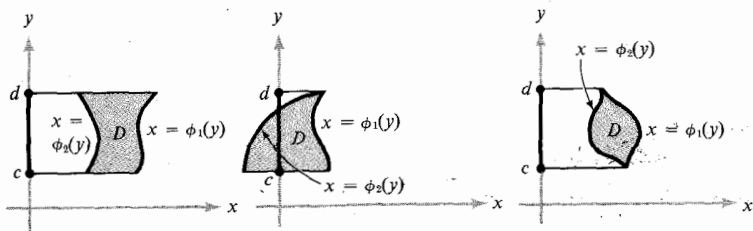
چند ناحیه از نوع ۱

منحنیها و پاره خطهای مستقیمی که ناحیه را در بردارند با هم مرز D را می سازند که با ∂D نموده می شود .

گوییم ناحیه D از نوع ۲ است اگر توابع پیوسته ای چون $\phi_1, \phi_2: [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ موجود باشند به طوری که D مجموعه نقاط (x, y) صادق در

$$y \in [c, d], \quad \phi_2(y) \leq x \leq \phi_1(y)$$

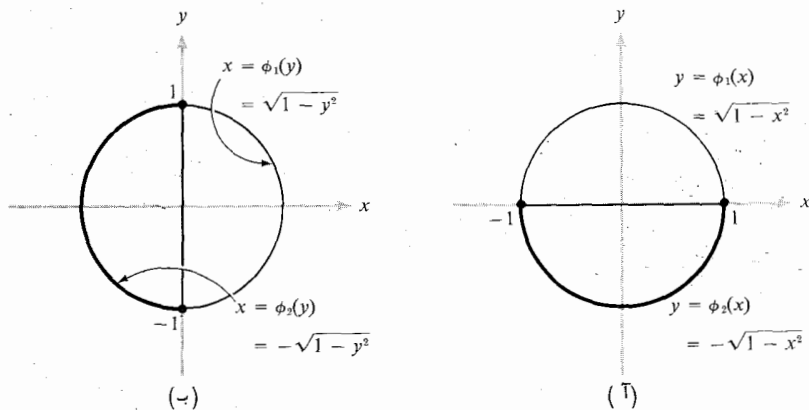
باشد که $\phi_2(t) \leq \phi_1(t), t \in [c, d]$. مجدداً ، منحنیهایی که ناحیه D را در بر می گیرند مرز ∂D آن را تشکیل می دهند . شکل ۲۰۳۰۵ چند ناحیه از نوع ۲ را به ما نشان می دهد .



شکل ۲۰۳۰۵

چند ناحیه از نوع ۲

بالاخره، یک ناحیه از نوع ۳ ناحیه‌ای است که هم از نوع ۱ و هم از نوع ۲ باشد؛ یعنی، ناحیه‌ای که بتوان آن را به عنوان یک ناحیه از نوع ۱ و یک ناحیه از نوع ۲ توصیف کرد. یک ناحیه از نوع ۳ قرص یکه است (شکل ۳.۳.۵).



شکل ۳.۳.۵

قرص یکه، یک ناحیه از نوع ۳: (T) به عنوان یک ناحیه از نوع ۱، و (ب) به عنوان یک ناحیه از نوع ۲

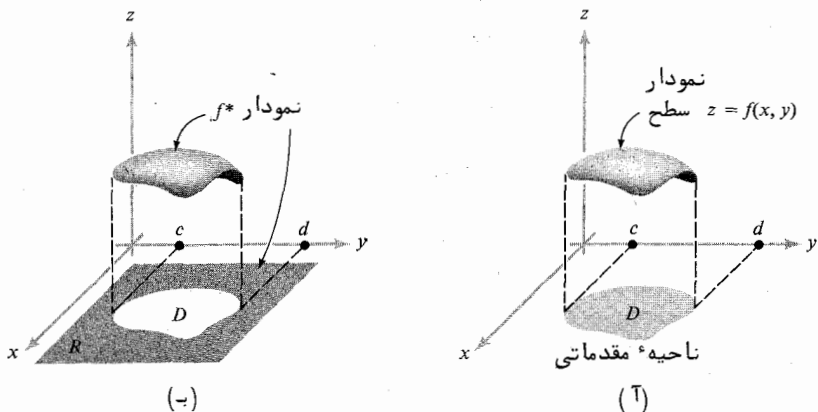
گاهی اوقات نواحی از نوع ۲، ۱، و ۳ را نواحی مقدماتی می‌نامیم. توجه کنید که مرز ∂D یک ناحیه مقدماتی مجموعه ناپیوستگیهای یک تابع در قضیه ۲ است.

تعریف. اگر D یک ناحیه مقدماتی در صفحه باشد، می‌توان مستطیل R را طوری یافت که شامل D باشد. فرض کنیم یک چنین R اختیار شده باشد. به ازای $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ ، که در آن f پیوسته (و در نتیجه، کراندار) است، می‌خواهیم $\int_D f(x, y) dA$ ، یعنی انتگرال f روی مجموعه D ، را تعریف کنیم. برای این کار، f را به تابع f^* "توسعه می‌دهیم" که بر تمام R به صورت زیر تعریف می‌شود.

$$f^*(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & (x, y) \in D \\ 0 & (x, y) \in R \text{ و } (x, y) \notin D \end{cases}$$

f^* جز احتمالاً "بر مرز D کراندار (زیرا f چنین است) و پیوسته است (ر. ک. شکل

۴۰۳۰۵. مرز D از نمودارهای توابعی پیوسته تشکیل شده است. در نتیجه، طبق قضیه ۲،



شکل ۴۰۳۰۵

(\bar{T}) نمودار سطح $z = f(x, y)$ روی ناحیه مقدماتی D . (\bar{b}) ناحیه سایه دار نمودار $z = f^*(x, y)$ را بر مستطیل R شامل D نشان می دهد. در این تصویر می بینیم که نقاط مرزی D ممکن است نقاط ناپیوستگی f^* باشد، زیرا نمودار $z = f^*(x, y)$ می توان در این نقاط شکست.

بخش ۲۰۵. f^* روی R انتگرالپذیر است. بنابراین، می توان تعریف کرد

$$\int_D f(x, y) dA = \int_R f^*(x, y) dA$$

وقتی بر D ، $f(x, y) \geq 0$ ، همانطور که از شکل ۴۰۳۰۵ دیده می شود، می توان انتگرال $\int_D f(x, y) dA$ را به صورت حجم ناحیه سه بعدی بین نمودار f و D تعبیر کرد. ما $\int_D f(x, y) dx dy$ را با انتخاب مستطیل R که D را دربرگیرد تعریف کرده ایم. بایستی شهودا " واضح باشد که مقدار $\int_D f(x, y) dx dy$ به انتخاب خاص R بستگی ندارد؛ این مطلب را در آخر این بخش نشان خواهیم داد.

اگر $R = [a, b] \times [c, d]$ مستطیلی شامل D باشد، با استفاده از نتایج در باب انتگرالهای مکرر در بخش ۲۰۵ می توان به دست آورد

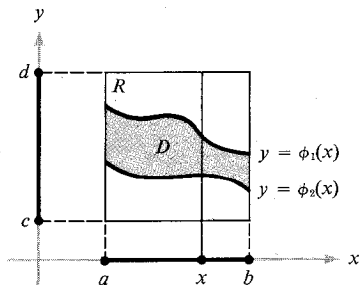
$$\int_D f(x, y) dA = \int_R f^*(x, y) dA = \int_a^b \int_c^d f^*(x, y) dy dx$$

$$= \int_c^d \int_a^b f^*(x, y) dx dy$$

که در آن، مثل بالا، f^* در D مساوی f و خارج آن برابر صفر است. فرض کنیم D ناحیه‌ای از نوع ۱ باشد که با توابع $\phi_1: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ و $\phi_2: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ معین می‌شود. انتگرال مکرر

$$\int_a^b \int_c^d f^*(x, y) dy dx$$

و، بخصوص، انتگرال داخلی $\int_c^d f^*(x, y) dy$ را به ازای x ثابتی در نظر می‌گیریم (شکل ۵.۳.۵). چون طبق تعریف اگر $y > \phi_1(x)$ یا $y < \phi_2(x)$ ، $f^*(x, y) = 0$ ، به دست



شکل ۵.۳.۵

ناحیه^۶ بین دو نمودار - یک ناحیه از نوع ۱

می‌آوریم

$$\int_c^d f^*(x, y) dy = \int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} f^*(x, y) dy = \int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} f(x, y) dy$$

حاصل بحث را در قضیه^۶ زیر خلاصه می‌کنیم.

قضیه^۶ ۴. هرگاه D یک ناحیه از نوع ۱ مثل شکل ۵.۳.۵ باشد، آنگاه

(۱)

$$\int_D f(x, y) dA = \int_a^b \int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} f(x, y) dy dx$$

در حالتی که به ازای هر $(x, y) \in D$ ، $f(x, y) = 1$ ، انتگرال $\int_D f(x, y) dA$

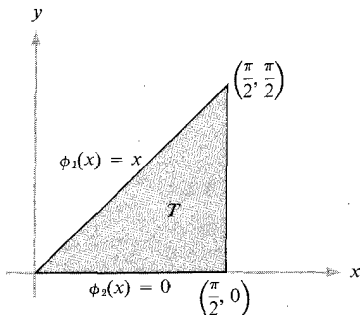
مساحت D است. این را می‌توان برای فرمول (۱) به این صورت تحقیق کرد:

$$\int_a^b \int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} f(x, y) dy dx = \int_a^b [\phi_1(x) - \phi_2(x)] dx = A(D)$$

که فرمولی برای مساحت D است که در حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی آموختیم.

مثال ۰۱. $\int_T (x^3 y + \cos x) dA$ را در صورتی بیابید که T مثلث حاصل از تمام نقاط (x, y)

باشد که $0 \leq x \leq \pi/2, 0 \leq y \leq x$. با مراجعه به شکل ۶.۳.۵



شکل ۶.۳.۵

مثلث T به عنوان یک ناحیه از نوع ۱

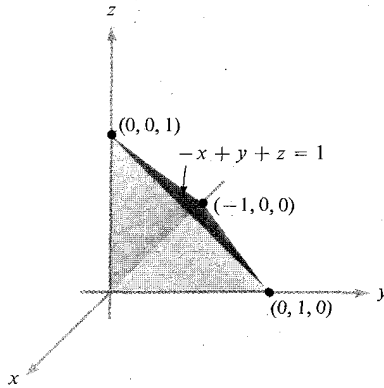
و فرمول (۱)، داریم

$$\begin{aligned} \int_T (x^3 y + \cos x) dA &= \int_0^{\pi/2} \int_0^x (x^3 y + \cos x) dy dx \\ &= \int_0^{\pi/2} \left[\frac{x^3 y^2}{2} + y \cos x \right]_{y=0}^x dx = \int_0^{\pi/2} \left(\frac{x^5}{2} + x \cos x \right) dx \\ &= \left[\frac{x^6}{12} \right]_0^{\pi/2} + \int_0^{\pi/2} (x \cos x) dx = \frac{\pi^6}{(12)(64)} + [x \sin x + \cos x]_0^{\pi/2} \\ &= \frac{\pi^6}{768} + \frac{\pi}{2} - 1 \end{aligned}$$

در مثال زیر، با استفاده از فرمول (۱)، حجم جسمی را که قاعده‌اش ناحیه غیر

مستطیلی D است پیدا می‌کنیم.

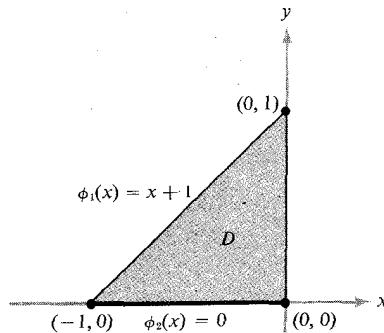
مثال ۲. حجم چهاروجهی محدود به صفحات $y = 0, z = 0, x = 0$ و صفحه $y - x + z = 1$ را بیابید (شکل ۷.۳.۵).



شکل ۷.۳.۵

یک چهاروجهی محدود به صفحات $y - x + z = 1$ و $y = 0, z = 0, x = 0$

ابتدا توجه می‌کنیم که چهاروجهی داده شده دارای قاعده مثلثی D است که نقاط (x, y) آن در $-1 \leq x \leq 0$ و $0 \leq y \leq 1 + x$ صدق می‌کنند. لذا، D ناحیه‌ای از نوع ۱ است. (در واقع، D از نوع ۳ است؛ ر.ک. شکل ۸.۳.۵)



شکل ۸.۳.۵

قاعده چهاروجهی شکل ۷.۳.۵ به صورت یک ناحیه از نوع ۱ نموده شده است.

به ازای هر نقطه (x, y) در D ، ارتفاع سطح z بالای (x, y) مساوی است با $1 - y + x$.
لذا، حجم مطلوب با انتگرال

$$\int_D (1 - y + x) dA$$

داده می‌شود. با استفاده از فرمول (۱) به ازای $\phi_1(x) = x + 1$ و $\phi_2(x) = 0$ ، داریم

$$\begin{aligned} \int_D (1 - y + x) dA &= \int_{-1}^0 \int_0^{1+x} (1 - y + x) dy dx \\ &= \int_{-1}^0 \left[(1+x)y - \frac{y^2}{2} \right]_{y=0}^{1+x} dx \\ &= \int_{-1}^0 \left[\frac{(1+x)^2}{2} \right] dx \\ &= \left[\frac{(1+x)^3}{6} \right]_{-1}^0 = \frac{1}{6} \end{aligned}$$

مثال ۳. فرض کنید D ناحیه‌ای از نوع ۱ باشد. مساحت $A(D)$ آن را به صورت حد مجموعهای ریمان توصیف نمایید.

اگر تعریف را به یاد آوریم، $A(D) = \int_D dx dy$ انتگرال تابع $f = 1$ روی مجموعه‌ای شامل مستطیل R است. یک مجموع ریمان S_n برای این انتگرال از تقسیم R به زیر مستطیلهای و تشکیل مجموع $\sum_{j,k=0}^{n-1} f^*(c_{jk}) \Delta x \Delta y$ مانند (۱)، بخش ۲۰۵، به دست می‌آید. اما $f^*(c_{jk})$ ، بسته به اینکه c_{jk} در D باشد یا نه، مساوی ۱ یا ۰ است. آن زیرمستطیلهای R_{jk} را در نظر می‌گیریم که D را قطع می‌کنند، و c_{jk} را در $D \cap R_{jk}$ اختیار می‌کنیم. لذا، مجموع مساحت زیر مستطیلهایی است که D را قطع می‌کنند و $A(D)$ حد آنها وقتی $n \rightarrow \infty$ می‌باشد. لذا، $A(D)$ حد مساحت مستطیلهای "محیطی" D می‌باشد. بر خواننده است شکلی را برای این بحث رسم نماید.

روشهای بررسی نواحی از نوع ۲ کاملاً "مشابهند". بالاخص، داریم.

قضیه ۴. هرگاه D مجموعه نقاط (x, y) باشد که $y \in [c, d]$ و $\phi_2(y) \leq x \leq \phi_1(y)$ ، و نیز f بر D پیوسته باشد، آنگاه

$$(۲) \quad \int_D f(x, y) dA = \int_c^d \left[\int_{\phi_2(y)}^{\phi_1(y)} f(x, y) dx \right] dy$$

برای یافتن مساحت D ، در فرمول (۲) قرار می‌دهیم $f = 1$ ؛ این کار نتیجه می‌دهد که

$$\int_D dA = \int_c^d (\phi_1(y) - \phi_2(y)) dy$$

مجدداً، توجه کنید که این نتیجه با نتایج حساب دیفرانسیل و انتگرال برای مساحت یک ناحیه بین دو منحنی سازگار است.

برای انتگرالهای روی نواحی نوع سوم از هر یک از روشها برای نوع ۱ و نوع ۲ می‌توان استفاده کرد.

همچنین، از فرمولهای (۱) و (۲) معلوم می‌شود که $\int_D f dA$ از انتخاب مستطیل R که D را در بر گرفته و در تعریف $\int_D f dA$ به کار رفته است مستقل است. پس فرمول (۱) برقرار است؛ به علاوه R در طرف راست این فرمول ظاهر نمی‌شود؛ و لذا، $\int_D f dA$ از R مستقل می‌باشد.

تمرینات

۱. انتگرالهای مکرر زیر را حساب و نواحی D را که حدودش معین شده اند رسم نمایید. بگویید کدام نواحی از نوع ۱، نوع ۲، یا هر دو هستند.

$$\int_1^2 \int_{2x}^{3x+1} dy dx \quad (ب) \quad \int_0^1 \int_0^{x^2} dy dx \quad (ت)$$

$$\int_0^1 \int_{x^3}^{x^2} y dy dx \quad (ث) \quad \int_0^1 \int_1^{e^x} (x+y) dy dx \quad (پ)$$

۲. تمرین ۱ را برای انتگرالهای مکرر زیر تکرار کنید.

$$\int_{-3}^2 \int_0^{y^2} (x^2 + y) dx dy \quad (ت)$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-2|x|}^{|x|} e^{x+y} dy dx \quad (ب)$$

$$\int_0^1 \int_0^{(1-x^2)^{1/2}} dy dx \quad (پ)$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos x} y \sin x dy dx \quad (ث)$$

$$\int_0^1 \int_{y^2}^y (x^n + y^m) dx dy, \quad m, n > 0 \quad (\text{ث})$$

$$\int_{-1}^0 \int_0^{2(1-x^2)^{1/2}} x dy dx \quad (\text{ج})$$

۳. مساحت یک دایره به شعاع r را با استفاده از انتگرالهای مضاعف حساب کنید.
۴. با استفاده از انتگرالهای مضاعف، مساحت یک بیضی با نیم محورها a و b را تعیین نمایید.
۵. یک انبار دارای قاعده^۶ مستطیلی 20 ft در 40 ft بوده، و دیوارهای قائم آن 30 ft ارتفاع در جلو (که فرض می‌کنیم روی ضلع 20-ft انبار است) و 40 ft در عقب دارد. حجم این انبار چقدر است؟ سقف انبار مسطح است.
۶. فرض کنید D ناحیه^۶ محدود به محورهای x و y و خط $3x + 4y = 10$ باشد. انتگرال

$$\int_D (x^2 + y^2) dA$$

را محاسبه نمایید.

۷. فرض کنید D ناحیه^۶ محدود به محور y و سهمی $x = -4y^2 + 3$ باشد. انتگرال

$$\int_D x^3 y dx dy$$

را محاسبه نمایید.

۸. انتگرال $\int_0^1 \int_0^{x^2} (x^2 + xy - y^2) dy dx$ را حساب کنید. این انتگرال مکرر را به صورت یک انتگرال مضاعف روی ناحیه^۶ D توصیف نمایید.
۹. فرض کنید ناحیه^۶ D به صورت مجموعه^۶ (x, y) هایی داده شده است که $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$ و $y \geq 0$. آیا D یک ناحیه^۶ مقدماتی است؟ انتگرال $\int_D f(x, y) dA$ را در صورتی حساب کنید که $f(x, y) = 1 + xy$.
۱۰. مساحت محصور به یک دوره^۶ تناوب تابع $\sin x$ و محور x را در بازه^۶ $0 \leq x \leq 2\pi$ بیابید.
۱۱. حجم ناحیه^۶ داخل سطح $z = x^2 + y^2$ و بین $z = 0$ و $z = 10$ را بیابید.
۱۲. حجم یک مخروط به شعاع قاعده^۶ r و ارتفاع h را حساب کنید.
۱۳. $\int_D y dA$ را در صورتی حساب کنید که D مجموعه^۶ نقاط (x, y) صادق در $0 \leq 2x/\pi \leq y, y \leq \sin x$ باشد.

۱۴. از تمرین ۵، بخش ۲۰.۵، می‌دانیم که $\int_a^b \int_c^d f(x)g(y) dy dx = (\int_a^b f(x) dx) \times (\int_c^d g(y) dy)$.
 آیا این امر در صورت انتگرالگیری از $f(x)g(y)$ روی هر ناحیه D (مثلاً "، یک ناحیه از نوع ۱) درست است؟

۱۵. فرض کنید ناحیه D به صورت مجموعه (x, y) ها با خاصیت $-\phi(x) \leq y \leq \phi(x)$ و $a \leq x \leq b$ داده شده باشد، که در آن ϕ یک تابع پیوسته نامنفی بر بازه $[a, b]$ است. همچنین، تابع $f(x, y)$ بر D چنان باشد که به ازای هر $(x, y) \in D$ ، $f(x, y) = -f(x, -y)$ ، ثابت کنید $\int_D f(x, y) dA = 0$.

۱۶. با استفاده از روشهای این بخش، نشان دهید که مساحت متوازی الاضلاع D معین شده به وسیله بردارهای a و b مساوی است با $|a_1 b_2 - a_2 b_1|$ ، که در آن $a = a_1 i + a_2 j$ ، $b = b_1 i + b_2 j$.

۱۷. مساحت $A(D)$ یک ناحیه را به عنوان حد مساحت مستطیلهای مخاطبی، مثل مثال ۳، توصیف نمایید.

۴.۵ تغییر ترتیب انتگرالگیری

فرض کنیم D ناحیه‌ای از نوع ۳ باشد. لذا، چون از نوع ۱ و ۲ است، می‌توان آن را به صورت مجموعه نقاط (x, y) نوشت که

$$a \leq x \leq b, \quad \phi_2(x) \leq y \leq \phi_1(x)$$

و نیز به صورت مجموعه نقاط (x, y) نوشت که

$$c \leq y \leq d, \quad \psi_2(y) \leq x \leq \psi_1(y)$$

لذا، فرمولهای زیر را خواهیم داشت:

$$\begin{aligned} \int_D f(x, y) dA &= \int_a^b \int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} f(x, y) dy dx \\ &= \int_c^d \int_{\psi_2(y)}^{\psi_1(y)} f(x, y) dx dy \end{aligned}$$

اگر بخواهیم یکی از انتگرالهای مکرر فوق را حساب کنیم، می‌توانیم انتگرال مکرر را دیگر محاسبه کنیم. این تکنیک تغییر ترتیب انتگرالگیری نام دارد. این تغییر اغلب در محاسبه انتگرالهای مکرر سودمند است؛ زیرا محاسبه یکی از انتگرالهای مکرر ممکن است از دیگری مشکلتر باشد.

مثال ۱. انتگرال مکرر

$$\int_0^a \int_0^{(a^2-x^2)^{1/2}} (a^2 - y^2)^{1/2} dy dx$$

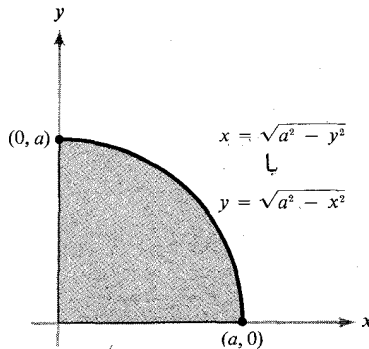
را با تغییر ترتیب انتگرالگیری حساب می‌کنیم. توجه کنید که x بین 0 و a تغییر می‌کند، و به ازای x ثابت، $0 \leq y \leq (a^2 - x^2)^{1/2}$ ، لذا، انتگرال مکرر فوق معادل انتگرال مضاعف

$$\int_D (a^2 - y^2)^{1/2} dy dx$$

است، که در آن D مجموعه نقاطی است چون (x, y) به طوری که $0 \leq x \leq a$ و $0 \leq y \leq (a^2 - x^2)^{1/2}$. اما این نمایش یک ربع (ربع مثبت) یک قرص به شعاع a است؛ در نتیجه، D را می‌توان مجموعه نقاطی چون (x, y) توصیف کرد که در

$$0 \leq y \leq a, \quad 0 \leq x \leq (a^2 - y^2)^{1/2}$$

صدق می‌کنند (ر. ک. شکل ۱.۴.۵). لذا،



شکل ۱.۴.۵

ربع مثبت یک قرص به شعاع a

$$\begin{aligned} \int_0^a \int_0^{(a^2-x^2)^{1/2}} (a^2 - y^2)^{1/2} dy dx &= \int_0^a \int_0^{(a^2-y^2)^{1/2}} (a^2 - y^2)^{1/2} dx dy \\ &= \int_0^a [x(a^2 - y^2)^{1/2}]_{x=0}^{(a^2-y^2)^{1/2}} dy \\ &= \int_0^a (a^2 - y^2) dy = \left[a^2 y - \frac{y^3}{3} \right]_0^a = \frac{2a^3}{3} \end{aligned}$$

می‌توانستیم انتگرال مکرر اصلی را مستقیماً "حساب کنیم، ولی می‌توان به آسانی دید که تغییر ترتیب انتگرال‌گیری محاسبات مسئله را خیلی آسان می‌سازد.

مثال زیر نشان می‌دهد که ممکن است محاسبه یک انتگرال مکرر "ناممکن" باشد، ولی بتوان انتگرال مکرر حاصل از تغییر ترتیب انتگرال‌گیری را محاسبه نمود.

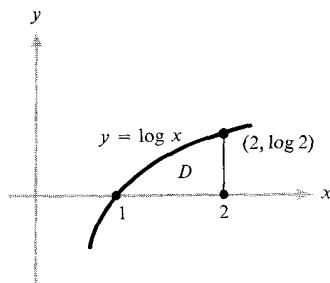
مثال ۲. انتگرال مکرر

$$\int_1^2 \int_0^{\log x} (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dy dx$$

را حساب کنید. ابتدا می‌بینیم که این انتگرال را نمی‌توان با استفاده از قضیه اساسی به دست آورد. با اینحال، انتگرال مساوی است با $\int_D (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dA$ ، که در آن D مجموعه (x, y) ‌هایی است که

$$0 \leq y \leq \log x \quad \text{و} \quad 1 \leq x \leq 2$$

ناحیه D از نوع ۳ است (ر.ک. شکل ۲.۴.۵)؛ و لذا، می‌توان



شکل ۲.۴.۵

D ناحیه انتگرال‌گیری مثال ۲ است.

آن را به صورت

$$e^y \leq x \leq 2 \quad \text{و} \quad 0 \leq y \leq \log 2$$

توصیف کرد. پس انتگرال مکرر داده شده مساوی است با

$$\begin{aligned}
 \int_0^{\log 2} \int_{e^y}^2 (x-1)\sqrt{1+e^{2y}} dx dy &= \int_0^{\log 2} \sqrt{1+e^{2y}} \left[\int_{e^y}^2 (x-1) dx \right] dy \\
 &= \int_0^{\log 2} \sqrt{1+e^{2y}} \left[\frac{x^2}{2} - x \right]_{e^y}^2 dy \\
 &= -\int_0^{\log 2} \left(\frac{e^{2y}}{2} - e^y \right) \sqrt{1+e^{2y}} dy \\
 &= -\frac{1}{2} \int_0^{\log 2} e^{2y} \sqrt{1+e^{2y}} dy \\
 &\quad + \int_0^{\log 2} e^y \sqrt{1+e^{2y}} dy
 \end{aligned}$$

(۱)

در انتگرال اول (۱) قرار می‌دهیم $u = e^{2y}$ و در انتگرال دوم می‌گذاریم $v = e^y$. بدین ترتیب، خواهیم داشت

$$(2) \quad -\frac{1}{4} \int_1^4 \sqrt{1+u} du + \int_1^2 \sqrt{1+v^2} dv$$

هر دو انتگرال (۲) را می‌توان با تکنیکهای حساب دیفرانسیل و انتگرال (یا با مراجعه به جدول انتگرالها در آخر کتاب) به آسانی حساب کرد. برای انتگرال اول داریم

$$\begin{aligned}
 (3) \quad \frac{1}{4} \int_1^4 \sqrt{1+u} du &= \left[\frac{1}{2}(1+u)^{3/2} \right]_1^4 = \frac{1}{6}[(1+4)^{3/2} - 2^{3/2}] \\
 &= \frac{1}{6}[5^{3/2} - 2^{3/2}]
 \end{aligned}$$

انتگرال دوم مساوی است با ر.ک. فرمول ۴۳، ص ۶۵۲)

$$\begin{aligned}
 (4) \quad \int_1^2 \sqrt{1+v^2} dv &= \frac{1}{2} [v\sqrt{1+v^2} + \log(\sqrt{1+v^2} + v)]_1^2 \\
 &= \frac{1}{2} [2\sqrt{5} + \log(\sqrt{5} + 2)] - \frac{1}{2} [\sqrt{2} + \log(\sqrt{2} + 1)]
 \end{aligned}$$

بالاخره، با تفریق (۳) از (۴) جواب به دست می‌آید:

$$\frac{1}{2} \left(2\sqrt{5} - \sqrt{2} + \log \frac{\sqrt{5} + 2}{\sqrt{2} + 1} \right) - \frac{1}{6} [5^{3/2} - 2^{3/2}]$$

این بخش را با یادی از مشابه مهم قضیه مقدار میانگین حساب انتگرال به پایان

قضیه ۵ (قضیه مقدار میانگین برای انتگرالهای مضاعف) . فرض کنیم $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته و D یک ناحیهء مقدماتی باشد . در این صورت ، به ازای نقطه‌ای مانند (x_0, y_0) در D داریم

$$\int_D f(x, y) dA = f(x_0, y_0) \cdot A(D)$$

که در آن $A(D)$ مساحت D می‌باشد .

برهان . اثبات دقیق این قضیه ممکن نیست ، زیرا به مفاهیمی از توابع پیوسته نیاز دارد که در این درس ثابت نشده‌اند ، لیکن می‌توان ایده‌های اصلی برهان را ترسیم کرد (ر . ک . برهان صورت یک متغیره قضیه در ص ۲۵۴) .

چون f بر D پیوسته است ، دارای ماکزیمم M و مینیمم m می‌باشد (این امر در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته ثابت شده است) . لذا ، به ازای هر $(x, y) \in D$ ،

$$(۵) \quad m \leq f(x, y) \leq M$$

بعلاوه ، به ازای (x_1, y_1) و (x_2, y_2) ای در D ، $f(x_1, y_1) = m$ و $f(x_2, y_2) = M$. از نامساوی (۵) نتیجه می‌شود که

$$mA(D) = \int_D m dA \leq \int_D f(x, y) dA \leq \int_D M dA = MA(D)$$

بنابراین ، از تقسیم بر $A(D)$ به دست می‌آوریم

$$(۶) \quad m \leq \frac{1}{A(D)} \int_D f(x, y) dA \leq M$$

چون یک تابع پیوسته بر D هر مقدار بین ماکزیمم و مینیمم خود را می‌گیرد (این قضیه مقدار میانی است که در حساب دیفرانسیل و انتگرال ثابت شده است) ، و عدد $\frac{1}{A(D)} \int_D f(x, y) dA$ طبق نامساوی (۶) بین این مقادیر است ، باید نقطه‌ای مانند $(x_0, y_0) \in D$ موجود باشد که

$$f(x_0, y_0) = \frac{1}{A(D)} \int_D f(x, y) dA$$

اما این درست همان قضیه ۵ است .

تمرینات

۱. در انتگرالهای زیر، ترتیب انتگرالگیری را تغییر دهید، نواحی نظیر را رسم کنید، و انتگرال را به هر دو طریق محاسبه نمایید.

$$\int_0^1 \int_x^1 xy \, dy \, dx \quad (\text{آ})$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{\cos \theta} \cos \theta \, dr \, d\theta \quad (\text{ب})$$

$$\int_0^1 \int_1^{2-y} (x+y)^2 \, dx \, dy \quad (\text{پ})$$

$$(\text{ت}) \int_a^b \int_a^y f(x,y) \, dx \, dy \quad (\text{جواب خود را برحسب پادمشتقها بیان دارید.})$$

۲. انتگرالهای

$$\int_{-3}^3 \int_{-\sqrt{(9-y^2)}}^{\sqrt{(9-y^2)}} x^2 \, dx \, dy \quad (\text{ب}) \quad \text{و} \quad \int_{-1}^1 \int_{|y|}^1 (x+y)^2 \, dx \, dy \quad (\text{آ})$$

را بیابید.

۳. اگر $f(x,y) = e^{\sin(x+y)}$ و $D = [-\pi, \pi] \times [-\pi, \pi]$ ، نشان دهید که

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \int_D f(x,y) \, dA \leq e$$

۴. ثابت کنید

$$2 \int_a^b \int_x^b f(x)f(y) \, dy \, dx = \left(\int_a^b f(x) \, dx \right)^2$$

۵. حجم یک بیضی گون به نیم محوره‌های a ، b ، c و c را حساب کنید.

(راهنمایی: از تقارن استفاده کرده و ابتدا حجم نصف بیضی گون را بیابید.)

۶. انتگرال $\int_D f(x,y) \, dA$ را در صورتی حساب کنید که $f(x,y) = y^2 \sqrt{x}$ و D مجموعه (x,y) هایی باشد که $x^2 - y < 10$ ، $y > x^2$ ، $x > 0$.

۷. حجم ناحیه معین شده به وسیله $z \geq 2$ ، $z^2 \leq x^2 + y^2 + z^2 \leq 10$ را بیابید.

۸. انتگرال $\iint_D e^{x-y} \, dx \, dy$ را در صورتی بیابید که D درون مثلث به رئوس $(0,0)$ ، $(1,3)$ ، و $(2,2)$ باشد.

۹. انتگرال $\iint_D y^3(x^2 + y^2)^{-3/2} \, dx \, dy$ را در صورتی حساب کنید که D ناحیه معین شده با شرایط $1/2 \leq y \leq 1$ و $x^2 + y^2 \leq 1$ باشد.

۱۰. فرض کنید انتگرال مضاعف $\iint_D f(x,y) \, dx \, dy$ تابع پیوسته و مثبت f مساوی انتگرال مکرر

۱۱. فرض کنید انتگرال مضاعف $\iint_D f(x, y) dx dy$ تابع پیوسته مثبت f مساوی انتگرال مکرر $\int_0^1 \left[\int_{x^2}^1 f(x, y) dy \right] dx$ باشد. ناحیه D را رسم کرده، ترتیب و انتگرالگیری را تغییر دهید.

۱۰. فرض کنید انتگرال مضاعف $\iint_D f(x, y) dx dy$ تابع پیوسته مثبت f مساوی انتگرال مکرر $\int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{2-y^2}} f(x, y) dx \right] dy$ باشد. ناحیه D را رسم کرده، و ترتیب انتگرالگیری را عوض کنید.

اختیاری

۵.۵ انتگرالهای مجازی

مفهوم انتگرال مجازی در بعضی از انتگرالها نظیر مساحت یک نیمکره مطرح می شود (این در مثال ۲، بخش ۴.۶ توضیح داده شد). لذا، برای کامل شدن نظریه انتگرالگیری، لازم است این انتگرالها مورد توجه قرار گیرند.

در بخشهای پیش مفهوم انتگرال برای توابع دو متغیره را تعریف کردیم، و محکمایی برای انتگرالپذیری f بر مجموعه D به دست آوردیم. به یاد آورید که یکی از مفروضات قضیه ۲ (بخش ۲.۵) کراندار بودن f بود. مثال زیر عدم همگرایی مجموع S_n به ازای f های بی کران را نشان می دهد.

فرض کنیم R مربع $[0, 1] \times [0, 1]$ بوده، و $f: R \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

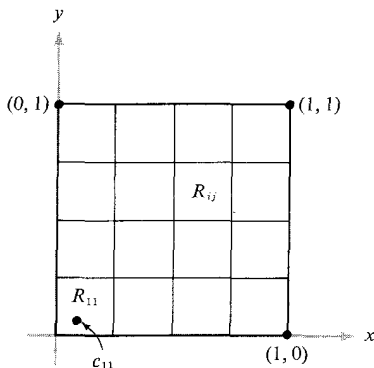
$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{x}} & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

کراندار نبودن f واضح است زیرا، وقتی f به صفر نزدیک شود، x بدلخواه بزرگ می شود. فرض کنیم R_{ij} یک افراز منتظم از R بوده، و مجموع (۱) در بخش ۲.۵ را تشکیل می دهیم:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(c_{ij}) \Delta x \Delta y$$

فرض کنیم R_{00} زیر مستطیلی شامل $(0, 0)$ بوده (ر. ک. شکل ۱.۵.۵) و $c_{00} \in R_{00}$ ی اختیار می کنیم. به ازای n ثابت، می توان S_n را با نزدیک ساختن c_{00} به $(0, 0)$ هر قدر بخواهیم بزرگ نماییم؛ لذا، $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ نمی تواند از انتخاب c_{ij} مستقل باشد.

با اینحال، به محاسبه صوری انتگرال مکرر f می پردازیم. در این راه از قواعد



شکل ۱۰.۵.۵

جای R_{11} در افراز $[0, 1] \times [0, 1]$

انتگرالگیری از تابع یک متغیره پیروی می‌کنیم. داریم

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy &= \int_0^1 \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} dy = \int_0^1 [2\sqrt{x}]_0^1 dy \\ &= \int_0^1 2 dy = 2 \end{aligned}$$

به‌علاوه، اگر مرتبه انتگرالگیری را عکس کنیم، نیز داریم

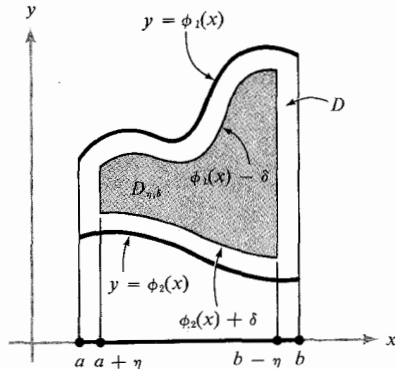
$$\int_0^1 \int_0^1 \frac{dy}{\sqrt{x}} dx = 2$$

لذا، این تابع به نوعی انتگرالپذیر است. سؤال این است که به چه نوع؟

طرز برخورد با انتگرال مجازی $\int_0^1 dx/\sqrt{x}$ را از حساب دیفرانسیل و انتگرال یک‌متغیره به یاد آورید: $1/\sqrt{x}$ را بر بازه $[0, 1]$ بی‌کران است، ولی $\int_0^1 (dx/\sqrt{x}) = 2$ ، و ما $\int_0^1 (dx/\sqrt{x})$ را مساوی این حد تعریف می‌کنیم. به همین نحو، برای حالت دومتغیره، اجازه می‌دهیم تابع در بعضی از نقاط مرز قلمروش بی‌کران باشد، و انتگرال مجازی را بافریندی حدی تعریف می‌کنیم.

به‌طور مشخص، فرض کنیم ناحیه D از نوع 1 بوده و $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ جز در بعضی نقاط مرز پیوسته و کراندار باشد. همچنین، D با $\phi_1(x) \leq y \leq \phi_2(x)$ ، $a \leq x \leq b$ توصیف شده

باشد. اعداد $\delta, \eta > 0$ را طوری می‌گیریم که $D_{\eta, \delta}$ زیر مجموعه‌ای از D باشد که از نقاط (x, y) با خاصیت $\phi_2(x) + \delta \leq y \leq \phi_1(x) - \delta$ تشکیل شده است (شکل ۲۰.۵.۵)، که در آن η و δ آنقدر کوچک اختیار شده‌اند که $D_{\eta, \delta} \subset D$. (اگر



شکل ۲۰.۵.۵

قلمرو منقبض $D_{\eta, \delta}$ برای انتگرالهای مجازی

$D_{\eta, \delta}$ باید این را کمی تعدیل کنیم زیرا در این حالت $\phi_2(a) = \phi_1(a)$ یا $\phi_2(b) = \phi_1(b)$ ممکن است زیر مجموعه D نباشد (ر.ک. مثال ۲). چون f بر $D_{\eta, \delta}$ پیوسته و کراندار است، انتگرال $\int_{D_{\eta, \delta}} f$ وجود دارد. حال ببینیم در صورت انبساط $D_{\eta, \delta}$ تا آنکه ناحیه D را پر کند، یعنی وقتی $(\eta, \delta) \rightarrow (0, 0)$ ، چه رخ می‌دهد. اگر

$$\lim_{(\eta, \delta) \rightarrow (0, 0)} \int_{D_{\eta, \delta}} f dA$$

موجود باشد، $\int_D f$ را مساوی این حد تعریف کرده و می‌گوییم این انتگرال مجازی f روی D است. این تعریف درست مشابه تعریف انتگرال مجازی تابع یک متغیره است. چون f روی $D_{\eta, \delta}$ انتگرالپذیر است، می‌توان قضیه فوبینی را به کار برده به دست

$$(۱) \quad \int_{D_{\eta, \delta}} f \, dA = \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_2(x)+\delta}^{\phi_1(x)-\delta} f(x, y) \, dy \, dx$$

در نتیجه، اگر f روی D' انتگرالپذیر باشد،

$$\int_D f \, dA = \lim_{(\eta, \delta) \rightarrow (0, 0)} \int_{a+\eta}^{b-\eta} \int_{\phi_2(x)+\delta}^{\phi_1(x)-\delta} f(x, y) \, dy \, dx$$

ممکن است کار با حدود مکرر

$$(۲) \quad \lim_{\eta \rightarrow 0} \int_{a+\eta}^{b-\eta} \left[\lim_{\delta \rightarrow 0} \int_{\phi_2(x)+\delta}^{\phi_1(x)-\delta} f(x, y) \, dy \right] dx$$

در صورت وجود راحت باشد. هرگاه حدود موجود باشند، آنگاه حد (۲) را با

$$\int_a^b \int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} f(x, y) \, dy \, dx$$

نشان داده و آن را *انتگرال مجازی مکرر* f روی D می‌نامیم. با استفاده از تکنیکهای پیشرفته‌تر می‌توان نشان داد هرگاه $|f|$ انتگرالپذیر باشد، آنگاه انتگرال مجازی مکرر در صورت وجود مساوی $\int_D f \, dA$ است؛ یعنی، از فرمول (۲) می‌توان برای محاسبه انتگرال مجازی استفاده کرد. همچنین، اگر $f \geq 0$ ، وجود حدود (۲) وجود حد مضاعف معرف $\int_D f \, dA$ را ایجاب می‌کند؛ در نتیجه، حد (۲) در این حالت مساوی $\int_D f \, dA$ است. تعریف وقتی D ناحیه‌ای از نوع ۲ باشد مشابه است.

بالاخره، حالتی را در نظر می‌گیریم که در آن D ناحیه‌ای از نوع ۳ بوده و f در نقاط ∂D بی‌کران است. مثلاً، " فرض کنیم D مجموعه نقاط (x, y) با خاصیت

$$a \leq x \leq b, \quad \phi_2(x) \leq y \leq \phi_1(x)$$

و نیز مجموعه نقاطی چون (x, y) باشد که

$$c \leq y \leq d, \quad \psi_2(y) \leq x \leq \psi_1(y)$$

هرگاه $|f|$ انتگرالپذیر بوده و

$$\int_a^b \int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} f(x, y) \, dy \, dx \quad \text{و} \quad \int_c^d \int_{\psi_2(y)}^{\psi_1(y)} f(x, y) \, dx \, dy$$

موجود باشند، آنگاه می‌توان نشان داد که هر دو انتگرال مکرر مساویند و مقدار مشترکشان مساوی $\int_D f \, dA$ می‌باشد. این همان قضیه فوبینی برای انتگرالهای مضاعف است.

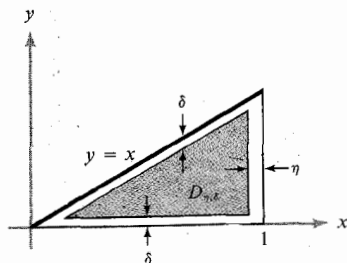
مثال ۱. انتگرال $\int_D f(x, y) dy dx$ را در صورتی حساب کنید که $f(x, y) = 1/\sqrt{1-x^2-y^2}$ و D قرص یکه $x^2 + y^2 \leq 1$ باشد.

D را می توان مجموعه نقاط (x, y) توصیف کرد که $-1 \leq x \leq 1$ ، $-\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2}$ اما چون ∂D مجموعه نقاطی چون (x, y) است که $x^2 + y^2 = 1$ در هر نقطه از ∂D تعریف نشده است، چرا که در این نقاط مخرج f مساوی ۰ است. انتگرالهای مجازی مکرر را حساب کرده، به دست می آوریم

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} \frac{dy dx}{\sqrt{1-x^2-y^2}} &= \int_{-1}^1 \left[\sin^{-1} \left(\frac{y}{\sqrt{1-x^2}} \right) \right]_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 [\sin^{-1}(1) - \sin^{-1}(-1)] dx \\ &= \pi \int_{-1}^1 dx = 2\pi \end{aligned}$$

در این مثال از این امر (که در بالا بیان شده است) استفاده شد که انتگرال مجازی مکرر مساوی انتگرال مجازی $1/(\sqrt{1-x^2-y^2})$ روی قرص یکه است.

مثال ۲. فرض کنید $f(x, y) = 1/(x-y)$ و D را مجموعه (x, y) هایی می گیریم که $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq x$. نشان دهید f روی D انتگرال پذیر نیست. چون مخرج f بر خط $y = x$ صفر است، f بر بخشی از مرز D بی کران می باشد. فرض کنیم $0 < \eta < 1$ و $0 < \delta < \eta$ ، و $D_{\eta, \delta}$ را مجموعه (x, y) هایی می گیریم که $\eta \leq x \leq 1 - \eta$ و $\delta \leq y \leq x - \delta$ (شکل ۳۰۵.۵).



شکل ۳۰۵.۵

قلمرو منقبض شده $D_{\eta, \delta}$ برای یک قلمرو مثلثی D

$\delta < \eta$ را اختیار می‌کنیم تا جزئیت $D_{\eta, \delta}$ در D را تضمین کند. داریم

$$\begin{aligned} \int_{D_{\eta, \delta}} f \, dA &= \int_{0+\eta}^{1-\eta} \int_{\delta}^{x-\delta} \frac{1}{x-y} \, dy \, dx \\ &= \int_{\eta}^{1-\eta} [-\log(x-y)]_{\delta}^{x-\delta} \, dx \\ &= \int_{\eta}^{1-\eta} [-\log(\delta) + \log(x-\delta)] \, dx \\ &= [-\log \delta] \int_{\eta}^{1-\eta} dx + \int_{\eta}^{1-\eta} \log(x-\delta) \, dx \\ &= -(1-2\eta)\log \delta + [(x-\delta)\log(x-\delta) - (x-\delta)]_{\eta}^{1-\eta} \end{aligned}$$

در آخرین مرحله از $\int \log u \, du = u \log u - u$ استفاده کرده‌ایم. با ادامه مجموعه نامساویهای زیر، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} &= -(1-2\eta)\log \delta + (1-\eta-\delta)\log(1-\eta-\delta) \\ &\quad - (1-\eta-\delta) - (\eta-\delta)\log(\eta-\delta) + (\eta-\delta) \end{aligned}$$

وقتی $(\eta, \delta) \rightarrow (0, 0)$ ، جمله دوم به $1 \log 1 = 0$ ، و جملات سوم و پنجم به ترتیب به 0 و همگرا می‌شوند. قرار می‌دهیم $v = \eta - \delta$. چون وقتی $v \rightarrow 0$ ، $v \log v \rightarrow 0$ (این حد در حساب دیفرانسیل و انتگرال ثابت شده است)، جمله چهارم با رفتن $(\eta, \delta) \rightarrow (0, 0)$ به صفر می‌رود. این جمله اول است که ما را با مشکل مواجه خواهد کرد. داریم

$$(3) \quad -(1-2\eta)\log \delta = -\log \delta + 2\eta \log \delta$$

و به آسانی می‌بینیم که این با رفتن $(\eta, \delta) \rightarrow (0, 0)$ همگرا نیست. مثلاً، فرض کنیم $\eta = 2\delta$ در این صورت، (۳) خواهد شد

$$-\log \delta + 4\delta \log \delta$$

مثل قبل، وقتی $\delta \rightarrow 0$ ، $4\delta \log \delta \rightarrow 0$ ، ولی وقتی $\delta \rightarrow 0$ ، $-\log \delta \rightarrow +\infty$ ، که نشان می‌دهد که (۳) همگرا نمی‌باشد. لذا $\lim_{(\eta, \delta) \rightarrow (0, 0)} \int_{D_{\eta, \delta}} f \, dA$ وجود ندارد؛ و در نتیجه، f انتگرالپذیر نخواهد بود.

توجه به انتگرالهای مجازی از اینرو اهمیت دارد که در مسائل طبیعی ظاهر می‌شوند. مثلاً، بعدها خواهیم دید که یکی از فرمولهای محاسبه مساحت سطح یک نیمکره ما را با انتگرال مجازی مثال ۱ مواجه خواهد ساخت.

تمرینات

۱. انتگرالهای زیر را در صورت وجود محاسبه کنید.

$$\int_D \frac{1}{\sqrt{xy}} dA, \quad D = [0, 1] \times [0, 1] \quad (\bar{1})$$

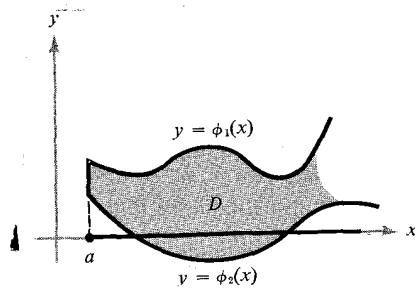
$$\int_D \frac{1}{\sqrt{|x-y|}} dx dy, \quad D = [0, 1] \times [0, 1] \quad (\bar{2}) \text{ (راهنمایی: } D \text{ را به دو قطعه تقسیم کنید.)}$$

$$\int_D y/x dx dy \quad (\bar{3}) \text{ به } x=1, x=y, \text{ و } x=2y \text{ محدود شده است}$$

$$\int_0^1 \int_0^{e^y} \log x dx dy \quad (\bar{4})$$

۲. (A) در تعریف $\int_D f dA$ وقتی D یک ناحیه بی کران است بحث کنید؛ مثلاً، D را

مجموعه (x, y) هایی بگیرید که $a \leq x < \infty$ و $\phi_2(x) \leq y \leq \phi_1(x)$ و $\phi_2 \leq \phi_1$ داده شده باشند (شکل ۴.۵.۵).



شکل ۴.۵.۵

یک ناحیه بی کران D

۳. (ب) انتگرال $\int_D xye^{-(x^2+y^2)} dx dy$ را در صورتی حساب کنید که $x \geq 0, 0 \leq y \leq 1$.
 با استفاده از تمرین ۲، از e^{-xy} به ازای $1 \leq y \leq 2, x \geq 0$ به دوراه انتگرال گرفته (قضیه فوبینی را دانسته فرض کنید)، نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-x} - e^{-2x}}{x} dx = \log 2$$

۴. نشان دهید که انتگرال $\int_0^a \int_0^a (x/\sqrt{a^2 - y^2}) dy dx$ موجود است، و مقدارش را حساب کنید.

۵*. در موجود بودن انتگرال

$$\int_D \frac{x+y}{x^2 + 2xy + y^2} dx dy$$

که در آن $D = [0, 1] \times [0, 1]$ ، بحث کنید. مقدارش را در صورت وجود محاسبه نمایید.

۶. فرض کنید f تابعی نامنفی باشد که بتواند بر مرز ناحیه^۶ مقدماتی D بی کران و ناپیوسته نیز باشد. همچنین، g تابع مشابهی باشد به طوری که هر وقت هر دو تعریف شده اند $f(x, y) \leq g(x, y)$ و نیز فرض کنید $\int_D g(x, y) dA$ موجود باشد. به طور غیر صوری ثابت کنید که این وجود $\int_D f(x, y) dA$ را ایجاب می کند.

۷. با استفاده از تمرین ۶، نشان دهید انتگرال

$$\int_D \frac{\sin^2(x-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy dx$$

که در آن D قرص یکه^۶ $x^2 + y^2 \leq 1$ است، وجود دارد.

۸. فرض کنید f همانند تمرین ۶ بوده، و g چنان تابعی باشد که هر وقت هر دو تعریف شده اند $0 \leq g(x, y) \leq f(x, y)$ و نیز فرض کنید $\int_D g(x, y) dA$ موجود نباشد. به طور صوری ثابت کنید $\int_D f(x, y) dA$ نمی تواند موجود باشد.

۹. با استفاده از تمرین ۸، نشان دهید

$$\int_D \frac{e^{x^2+y^2}}{x-y} dy dx$$

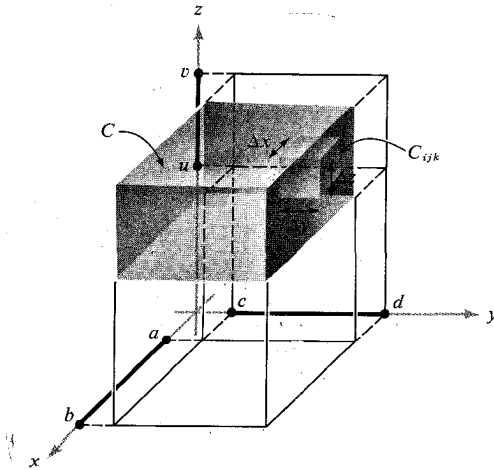
که در آن D مجموعه^۶ نقاطی است که $0 \leq x \leq 1$ و $0 \leq y \leq x$ ، وجود ندارد.

۵.۶ انتگرال سه گانه

فرض کنیم $f: C \rightarrow \mathbb{R}$ یک تابع پیوسته بوده، که در آن C مکعب مستطیلی در \mathbb{R}^3 است. می توان انتگرال f روی C را حد یک مجموع تعریف کرد درست به همان نحو که در مورد یک تابع دومتغیره کردیم. به طور خلاصه، سه ضلع C را به n قسمت مساوی افراز کرده، و مجموع زیر را تشکیل می دهیم:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{n-1} f(c_{ijk}) \Delta V$$

که در آن $c_{ijk} \in C_{ijk}$ ، یعنی متعلق به مکعب مستطیل (یا جعبه) ijk است. در افراز C است، و ΔV حجم C_{ijk} می باشد (ر.ک. شکل ۱۰۶۰۵).



شکل ۱۰۶۰۵

یک افراز از جعبه C به n^3 زیرجعبه C_{ijk}

تعریف. فرض کنیم f یک تابع کراندار سه متغیره‌ای باشد که بر C تعریف شده است. اگر $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ موجود بوده و حد از نقاط c_{ijk} مستقل باشد، حد S_n را انتگرال سه‌گانه (یا فقط

انتگرال) f روی C نامیده و آن را با

$$\int_C f dV, \quad \int_C f(x, y, z) dV, \quad \int_C f(x, y, z) dx dy dz,$$

یا $\iiint_C f(x, y, z) dx dy dz$

نشان می دهیم.

مثل قبل، می توان ثابت کرد که توابع پیوسته تعریف شده بر C انتگرالپذیرند. به

علاوه، توابع کرانداری که ناپیوستگیهایشان به نمودارهای توابع پیوسته (نظیر $x = \alpha(y, z)$ یا $y = \beta(x, z)$ یا $z = \gamma(x, y)$) محدودند انتگرالپذیر هستند. این امر مشابه قضیه ۲ از بخش ۲۰۵ می باشد.

فرض کنیم مکعب مستطیل C حاصل ضرب دکارتی $[u, v] \times [c, d] \times [a, b]$ باشد. در این صورت، بنابر تشابه با توابع دومتغیره، انتگرالهای مکرر مختلفی را می توان در نظر گرفت، از جمله

$$\int_u^v \int_c^d \int_a^b f(x, y, z) dx dy dz, \quad \int_u^v \int_a^b \int_c^d f(x, y, z) dy dx dz,$$

و $\int_a^b \int_u^v \int_c^d f(x, y, z) dy dz dx$ و غیره.

ترتیب dx ، dy ، و dz نحوه انتگرالگیری را نشان می دهد. مثلاً، اولین انتگرال در بالا به معنی

$$\int_u^v \left[\int_c^d \left(\int_a^b f(x, y, z) dx \right) dy \right] dz$$

می باشد. قضیه فوبینی، مانند حالت دومتغیره، برقرار است: هرگاه f پیوسته باشد، آنگاه شش انتگرال مکرر موجود همه باهم مساویند. به عبارت دیگر، یک انتگرال سه گانه را می توان به یک انتگرالگیری مکرر سه گانه تحویل کرد.

برای اتمام تشابه با انتگرال مضاعف، به محاسبه انتگرالهای سه گانه روی مجموعه های کراندار کلیتر $W \subset \mathbb{R}^3$ (یعنی، مجموعه هایی که بتوان آنها را در یک جعبه جا داد) می پردازیم. فرض کنیم $f: W \rightarrow \mathbb{R}$. f را به تابعی چون f^* تعمیم می دهیم که بر W با f یکی بوده و خارج W صفر باشد. اگر B جعبه ای شامل W بوده و ∂W از نمودارهای تعدادی متناهی تابع پیوسته تشکیل شده باشد، f^* انتگرالپذیر است و تعریف می کنیم

$$\int_W f(x, y, z) dV = \int_B f^*(x, y, z) dV$$

این انتگرال، مثل حالت دوبعدی، از انتخاب B مستقل می باشد.

مثل حالت دوبعدی، خود را به نواحی خاصی محدود می کنیم. ناحیه W از نوع ۱ است اگر از مجموعه تمام نقاطی چون (x, y, z) متشکل باشد که

$$(1) \quad \gamma_2(x, y) \leq z \leq \gamma_1(x, y) \quad \phi_2(x) \leq y \leq \phi_1(x) \quad a \leq x \leq b$$

در این تعریف، $\gamma_i: D \rightarrow \mathbb{R}$ ، $i = 1, 2$ ، توابعی پیوسته اند، D ناحیه ای از نوع ۱ است،

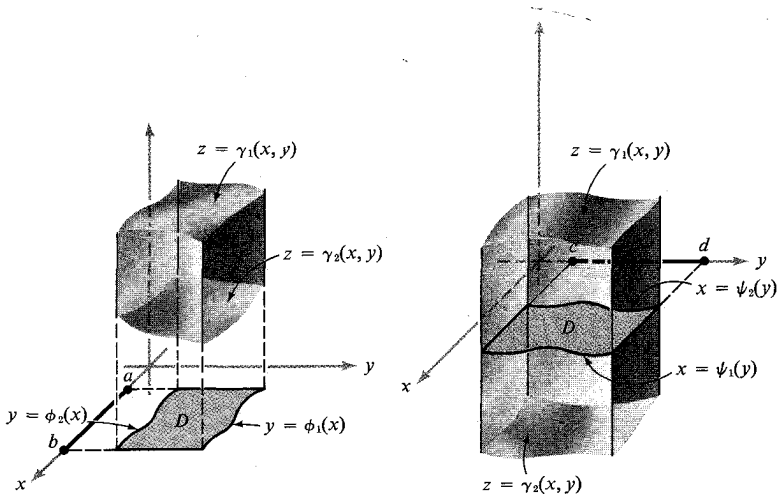
و $\gamma_1(x, y) = \gamma_2(x, y)$ ایجاب می کند که $(x, y) \in \partial D$. شرط آخر بدین معنی است که تقاطع سطوح $z = \gamma_1(x, y)$ و $z = \gamma_2(x, y)$ فقط به ازای $(x, y) \in \partial D$ صورت می گیرد.

یک ناحیه سه بعدی را نیز از نوع ۱ نامیم اگر بتوان آن را به صورت مجموعه ای از تمام (x, y, z) بیان کرد که

$$(2) \quad \gamma_2(x, y) \leq z \leq \gamma_1(x, y) \text{ و } \psi_2(y) \leq x \leq \psi_1(y), \quad c \leq y \leq d$$

که در آن $\gamma_i: D \rightarrow \mathbb{R}$ به صورت فوق بوده و D یک ناحیه دوبعدی از نوع ۲ است. شکل

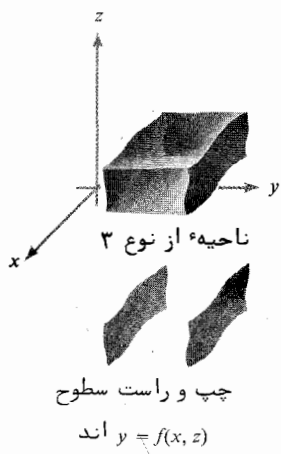
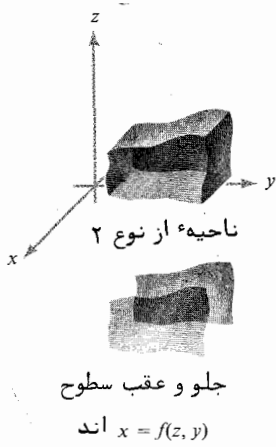
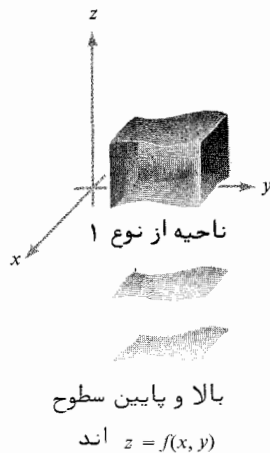
۲.۶.۵ دو ناحیه از نوع ۱ را نشان می دهد که به ترتیب با (۱) و (۲) توصیف می شوند.

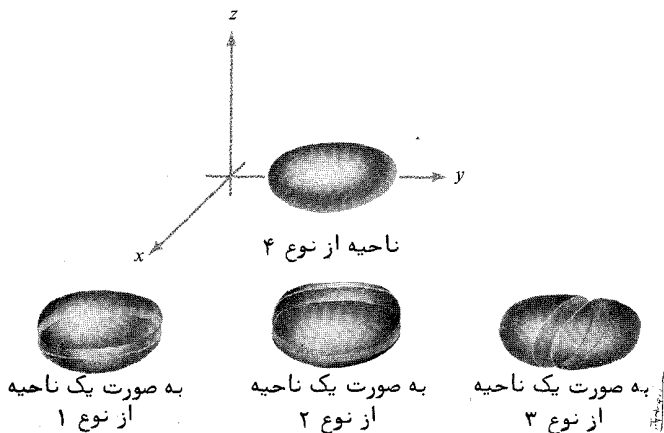


شکل ۲.۶.۵

چند ناحیه از نوع ۱ در فضا

ناحیه W از نوع ۲ است اگر بتوان آن را به شکل (۱) یا (۲) بیان کرد که در آن نقشهای x و z با هم عوض شده باشند، و W از نوع ۳ است اگر بتوان آن را به شکل (۱) یا (۲) بیان کرد که در آن نقشهای y و z با هم عوض شده باشند. اگر ناحیه W از نوع ۲، ۱ یا ۳ باشد، گوئیم از نوع ۴ است (شکل ۳.۶.۵). مثالی از یک ناحیه از نوع چهارگویی $x^2 + y^2 + z^2 \leq r^2$ به شعاع r است.





شکل ۳۰۶.۵

چهار نوع ممکن از نواحی در فضا

فرض کنیم W از نوع ۱ باشد. پس یا

$$\begin{aligned}
 \int_W f(x, y, z) \, dV &= \int_a^b \int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} \int_{\gamma_2(x, y)}^{\gamma_1(x, y)} f(x, y, z) \, dz \, dy \, dx \\
 (۳) \qquad &= \int_D \left[\int_{\gamma_2(x, y)}^{\gamma_1(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] dy \, dx
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \int_W f(x, y, z) \, dV &= \int_c^d \int_{\psi_2(y)}^{\psi_1(y)} \int_{\gamma_2(x, y)}^{\gamma_1(x, y)} f(x, y, z) \, dz \, dx \, dy \\
 (۴) \qquad &= \int_D \left[\int_{\gamma_2(x, y)}^{\gamma_1(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] dx \, dy
 \end{aligned}$$

و این بسته به آن است که W با (۱) تعریف شده است یا با (۲). بنابراین قضیه فوبینی برهانهای (۳) و (۴) همانند حالت دوبعدی اند. بر دانشجویان که اشکال مربوط به (۳) و (۴) را رسم یا دست کم تجسم نماید. پس از درک تمام اصطلاحات، یادآوری فرمولها آسان است. ممکن است اصل شهودی کاوالیری ناشی از قضیه فوبینی یاری دهنده باشد.

هرگاه به ازای هر $(x, y, z) \in W$ ، $f(x, y, z) = 1$ ، آنگاه به دست می آوریم

$$\int_W f(x, y, z) dV = \int_W 1 dV = \text{حجم } (W)$$

درحالتی که W از نوع ۱ و فرمول (۳) قابل به کارگیری باشد، فرمول زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \text{حجم } (W) &= \int_a^b \int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} \int_{\gamma_2(x, y)}^{\gamma_1(x, y)} dz dy dx \\ &= \int_a^b \int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} [\gamma_1(x, y) - \gamma_2(x, y)] dy dx \end{aligned}$$

آیا می توانید راه اثبات این فرمول را از اصل کاوالیری ببینید؟

مثال ۱. فرمول را برای حجم یک گوی تحقیق کنید: $\int_W dV = \frac{4}{3}\pi$ ، که در آن W گوی یکه^۹ $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ است.

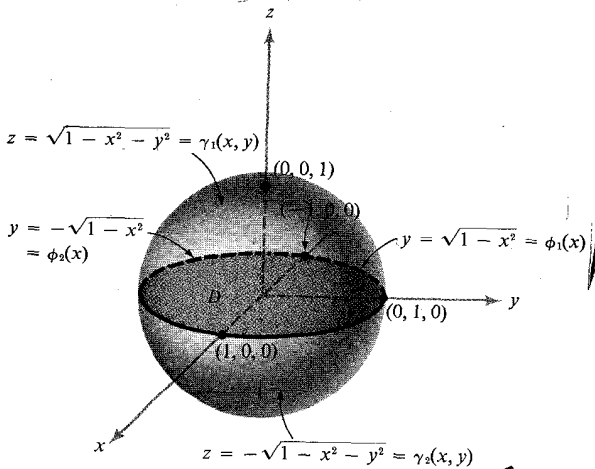
ناحیه^۹ W از نوع ۱ است؛ آن را می توان مجموعه^۹ (x, y, z) هایی توصیف کرد که در

$$-1 \leq x \leq 1, \quad -\sqrt{1-x^2} \leq y \leq \sqrt{1-x^2},$$

و

$$-\sqrt{1-x^2-y^2} \leq z \leq \sqrt{1-x^2-y^2}$$

صدق می کنند (ر.ک. شکل ۴۰۶۰۵). توصیف W به این صورت اغلب مشکلترین گام در



شکل ۴۰۶۰۵

گوی یکه^۹ بیان شده به صورت ناحیه ای از نوع ۱.

محاسبه یک انتگرال سه‌گانه است. پس از این کار، کافی است انتگرال سه‌گانه را با استفاده از انتگرال مکرری معادل آن حساب کنیم. در این حالت می‌توان فرمول (۳) را به‌کار برده به دست آورد

$$\int_W dV = \int_{-1}^1 \int_{-(1-x^2)^{1/2}}^{(1-x^2)^{1/2}} \int_{-(1-x^2-y^2)^{1/2}}^{(1-x^2-y^2)^{1/2}} dz dy dx$$

با ثابت گرفتن y و x و انتگرال‌گیری نسبت به z ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-(1-x^2)^{1/2}}^{(1-x^2)^{1/2}} \left[z \right]_{-(1-x^2-y^2)^{1/2}}^{(1-x^2-y^2)^{1/2}} dy dx \\ = 2 \int_{-1}^1 \left[\int_{-(1-x^2)^{1/2}}^{(1-x^2)^{1/2}} (1-x^2-y^2)^{1/2} dy \right] dx \end{aligned}$$

اما چون x در انتگرال شامل dy ثابت است، این انتگرال را می‌توان به صورت $\int_{-a}^a (a^2 - y^2)^{1/2} dy$ نوشت، که در آن $a = (1 - x^2)^{1/2}$. این انتگرال نمایش مساحت یک ناحیه نیمه‌مستدیر به شعاع a است؛ در نتیجه،

$$\int_{-a}^a (a^2 - y^2)^{1/2} dy = \frac{a^2}{2} \pi$$

(البته، انتگرال را می‌شد با استفاده از جدول انتگرالها در ضمیمه پ مستقیماً حساب کرد، ولی این ترفند از زحمت کار قدری می‌کاهد.) لذا،

$$\int_{-(1-x^2)^{1/2}}^{(1-x^2)^{1/2}} (1-x^2-y^2)^{1/2} dy = \frac{1-x^2}{2} \pi$$

و در نتیجه،

$$\begin{aligned} 2 \int_{-1}^1 \int_{-(1-x^2)^{1/2}}^{(1-x^2)^{1/2}} (1-x^2-y^2)^{1/2} dy dx &= 2 \int_{-1}^1 \pi \frac{1-x^2}{2} dx \\ &= \pi \int_{-1}^1 (1-x^2) dx \\ &= \pi \left[x - \frac{x^3}{3} \right]_{-1}^1 = \frac{4}{3} \pi \end{aligned}$$

مثال ۲. فرض کنید W ناحیه محدود به صفحات $z = 2$, $z = 0$, $y = 0$, $x = 0$ و سطح $z = x^2 + y^2$

باشد. انتگرال $\int_W x \, dx \, dy \, dz$ را محاسبه کنید.

ناحیه W در شکل ۵.۶.۵ (آ) رسم شده است. برای نوشتن این به صورت ناحیه‌ای

از نوع ۱، قرار می‌دهیم $z = 2 - x^2 - y^2$ ، $\gamma_1(x, y) = x^2 + y^2$ ، $\gamma_2(x, y) = x^2 + y^2$ ، $\phi_2(x) = 0$ ، $\phi_1(x) = \sqrt{2 - x^2}$.

لذا، طبق فرمول ۳، ص ۳۷۴،

$$\begin{aligned} \int_W x \, dx \, dy \, dz &= \int_0^{\sqrt{2}} \left[\int_0^{(2-x^2)^{1/2}} \left(\int_{x^2+y^2}^2 x \, dz \right) dy \right] dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \int_0^{(2-x^2)^{1/2}} x(2 - x^2 - y^2) \, dy \, dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} x \left[(2 - x^2)^{3/2} - \frac{(2 - x^2)^{3/2}}{3} \right] dx \\ &= \int_0^{\sqrt{2}} \frac{2x}{3} (2 - x^2)^{3/2} \, dx = \frac{-2(2 - x^2)^{5/2}}{15} \Big|_0^{\sqrt{2}} \\ &= 2 \cdot \frac{2^{5/2}}{15} = \frac{8\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$

همچنین، انتگرال را می‌توان با نوشتن W به صورت ناحیه‌ای از نوع ۲ حساب کرد.

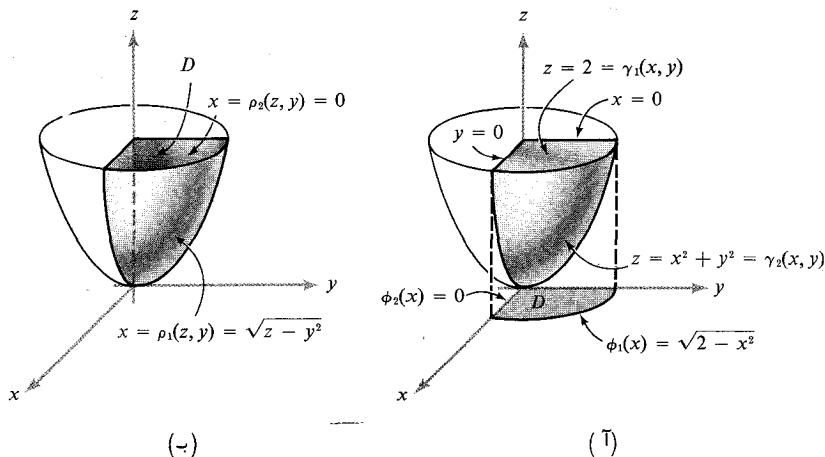
می‌بینیم که W را می‌توان به صورت مجموعه‌ای از (x, y, z) نوشت که $\rho_2(z, y) = 0 \leq x \leq$

و $0 \leq z \leq 2$ باشد که yz از صفحه $z = 2$ و D زیرمجموعه‌ای از صفحه $z = 2$ باشد که $(z, y) \in D$ و $(z - y^2)^{1/2} = \rho_1(z, y)$

۰ (ر. ک. شکل ۵.۶.۵ (ب)).

بنابراین،

$$\begin{aligned} \int_W x \, dx \, dy \, dz &= \int_D \left[\int_{\rho_2(z, y)}^{\rho_1(z, y)} x \, dx \right] dy \, dz \\ &= \int_0^2 \left[\int_0^{z^{1/2}} \left(\int_0^{(z-y^2)^{1/2}} x \, dx \right) dy \right] dz \\ &= \int_0^2 \int_0^{z^{1/2}} \left(\frac{z - y^2}{2} \right) dy \, dz = \frac{1}{2} \int_0^2 \left(z^{3/2} - \frac{z^{3/2}}{3} \right) dz \\ &= \frac{1}{2} \int_0^2 \frac{2}{3} z^{3/2} \, dz = \left[\frac{2}{15} z^{5/2} \right]_0^2 = \frac{2}{15} \cdot 2^{5/2} = \frac{8\sqrt{2}}{15} \end{aligned}$$



شکل ۵.۶.۵

(ب) در اینجا D ، که با سایه مشخص

شده است ، مجموعه (z, y) هایی که $0 \leq y \leq \sqrt{z}$ و $0 \leq z \leq 2$

تمرینات

۱. $\int_W x^2 dV$ را در صورتی حساب کنید که $W = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.
۲. $\int_W e^{-xy} dV$ را در صورتی حساب کنید که $W = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$.
۳. $\int_W x^2 \cos z dV$ را در صورتی حساب کنید که W ناحیه محدود به صفحات $z = 0$ ، $z = \pi$ ، $x = 0$ ، $y = 0$ ، و $x + y = 1$ باشد .
۴. حجم ناحیه محدود به $z = x^2 + 3y^2$ و $z = 9 - x^2$ را بیابید .
۵. انتگرال $\int_0^1 \int_0^{2x} \int_{x^2+y^2}^{x+y} dz dy dx$ را حساب و ناحیه انتگرالی را رسم نمایید .
۶. حجم جسم محدود به سطوح $x^2 + 2y^2 = 2$ ، $z = 0$ ، و $x + y + 2z = 2$ را بیابید .
۷. حجم جسم دوار $z^2 \geq x^2 + y^2$ زیر سطح $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ را پیدا کنید .
۸. با تغییر ترتیب در

$$\int_0^1 \int_0^x \int_0^y f(x, y, z) dz dy dx$$

پنج شکل دیگر آن را به دست آورید. ناحیه را رسم کنید.

۹* . فرض کنید f پیوسته بوده و B_ε گویی به شعاع ε و مرکز (x_0, y_0, z_0) باشد. همچنین، اگر $|B_\varepsilon|$ حجم B_ε باشد. ثابت کنید

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{|B_\varepsilon|} \int_{B_\varepsilon} f(x, y, z) dV = f(x_0, y_0, z_0)$$

۱۰ . حجم ناحیه محدود به سطوح $z = x^2 + y^2$ و $z = 10 - x^2 - 2y^2$ را یافته، آن را رسم نمایید.

۱۱ . فرض کنید W مجموعه کراندار باشد که مرز آن از نمودارهای توابع پیوسته‌ای تشکیل شده است. همچنین، W نسبت به صفحه xy متقارن باشد. $(x, y, z) \in W$ ایجاب کند که $(x, y, -z) \in W$ و نیز f بر W یک تابع پیوسته کراندار بوده و $f(x, y, z) = -f(x, y, -z)$. ثابت کنید $\int_W f(x, y, z) dV = 0$.

۱۲ . با استفاده از تمرین ۱۱، ثابت کنید $\int_W (1 + x + y) dV = 4\pi/3$ ، که در آن W گوی یکه، یعنی مجموعه (x, y, z) هایی که $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ ، باشد.

۱۳ . انتگرال $\iiint_S xyz \, dx \, dy \, dz$ را در صورتی حساب کنید که S ناحیه معین شده به وسیله $x \geq 0$ ، $y \geq 0$ ، $z \geq 0$ و $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ باشد.

۱۴ . فرض کنید B ناحیه معین شده به وسیله شرایط $0 \leq x \leq 1$ ، $0 \leq y \leq 1$ ، و $0 \leq z \leq xy$ باشد.

(آ) حجم B را بیابید. (ب) انتگرال $\iiint_B x \, dx \, dy \, dz$ را حساب کنید.

(پ) انتگرال $\iiint_B y \, dx \, dy \, dz$ را حساب کنید (ت) انتگرال $\iiint_B z \, dx \, dy \, dz$ را حساب کنید.

(ث) انتگرال $\iiint_B xy \, dx \, dy \, dz$ را حساب کنید.

۱۵ . به ازای هر یک از نواحی W در زیر، حدود مناسب $\phi_1(x)$ ، $\phi_2(x)$ ، $\gamma_1(x, y)$ و $\gamma_2(x, y)$ را یافته، و انتگرال سه‌گانه روی ناحیه W را به صورت یک انتگرال مکرر به شکل

$$\iiint_W f \, dV = \int_a^b \left[\int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} \left[\int_{\gamma_2(x, y)}^{\gamma_1(x, y)} f(x, y, z) \, dz \right] dy \right] dx$$

بنویسید.

$$W = \{(x, y, z) \mid \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\} \quad (\Gamma)$$

$$W = \{(x, y, z) \mid \frac{1}{2} \leq z \leq 1, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\} \quad (ب)$$

۱۶. فرض کنید B ناحیهء محدود به صفحات $x = 0$ ، $y = 0$ ، $z = 0$ ، $x + y = 1$ و $z = x + y$ باشد.

(ت) حجم B را بیابید.

(ب) انتگرال $\iiint_B x \, dx \, dy \, dz$ را حساب کنید.

(پ) انتگرال $\iiint_B y \, dx \, dy \, dz$ را حساب کنید.

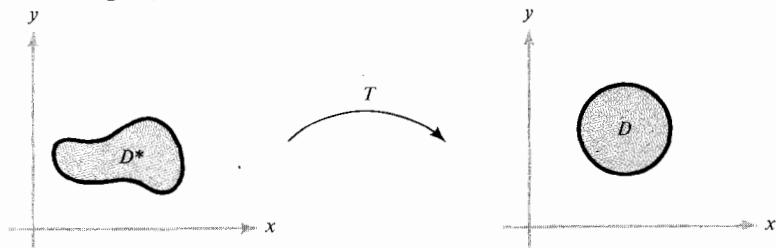
۷.۵ هندسهء نگاشتها از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R}^2

در فصل ۳ میدانهای برداری بر \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 را بررسی کردیم. حال می‌خواهیم این میدانها را از دیدگاه دیگری بررسی کنیم. ما به رفتار نگاشتهای از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 به \mathbb{R}^3 با زیرمجموعه‌های این فضاها علاقه‌مندیم. این درک هندسی در بحث فرمول تغییر متغیر برای انتگرالهای چندگانه مفید واقع می‌شود.

فرض کنیم D^* زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R}^2 باشد. تابع به طور پیوسته مشتقپذیر $T: D^* \rightarrow \mathbb{R}^2$ را در نظر می‌گیریم. پس T نقاط واقع در D^* را به نقاط در \mathbb{R}^2 می‌برد. این مجموعهء نقش از نقاط را با D یا $T(D^*)$ نشان می‌دهیم؛ لذا، $D = T(D^*)$ مجموعهء تمام نقاطی چون $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ است به طوری که

$$(x, y) = T(x^*, y^*) \quad (x^*, y^*) \in D^*$$

یک راه درک هندسهء نگاشت T این است که ببینیم چگونه D^* را تغییر شکل می‌دهد. مثلاً، شکل ۱.۷.۵ نگاشت T ای را نشان می‌دهد که یک ناحیهء کمی پیچ خورده را به یک



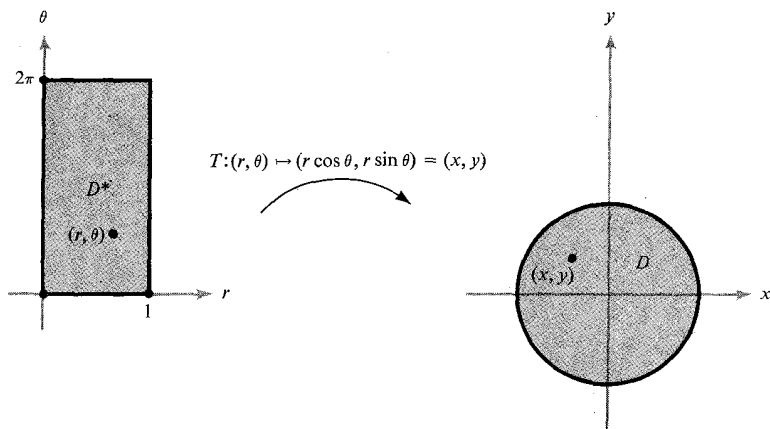
شکل ۱.۷.۵

تابع T از قلمرو D^* به قلمرو D

قرص می برد.

مثال ۱. فرض کنید $D^* \subset \mathbb{R}^2$ مستطیل $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ باشد. در این صورت، تمام نقاط واقع در D^* به شکل (r, θ) اند، که در آن $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، $0 \leq r \leq 1$. فرض کنید T را به صورت $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ مجموعه نقطه D را پیدا کنید.

قراری می دهیم $(x, y) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. چون $x^2 + y^2 = r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta = r^2 \leq 1$ ، مجموعه نقاط $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ که $(x, y) \in D$ دارای این خاصیت است که $x^2 + y^2 \leq 1$ ، و در نتیجه، D جزء قرص یکه است. علاوه بر این، هر نقطه (x, y) در قرص یکه را می توان به ازای $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و $0 \leq r \leq 1$ به صورت $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ نوشت. لذا، D قرص یکه می باشد (ر. ک. شکل ۲۰۷.۵)



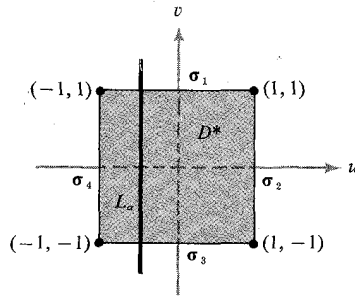
شکل ۲۰۷.۵

T مختصات قطبی را تغییر می دهد.
دایره یکه نقش یک مستطیل است.

مثال ۲. فرض کنید T با $T(x, y) = ((x + y)/2, (x - y)/2)$ تعریف شده باشد. همچنین، $D^* = [-1, 1] \times [-1, 1] \subset \mathbb{R}^2$ مربعی به ضلع ۲ و مرکز مبدا باشد. نقش D

حاصل از T بر D^* را تعیین کنید .

ابتدا اثر T بر خط $\sigma_1(t) = (t, 1)$ را، که $-1 \leq t \leq 1$ ، معین می‌کنیم . داریم
 $T(\sigma_1(t)) = ((t+1)/2, (t-1)/2)$. نگاشت $t \mapsto T(\sigma_1(t))$ یک پارامتری‌سازی خط
 $y = x - 1$ ، $0 \leq x \leq 1$ است . زیرا $(t-1)/2 = (t+1)/2 - 1$ (ر.ک. شکل
 ۳۰۷.۵) . فرض کنیم



شکل ۳۰۷.۵

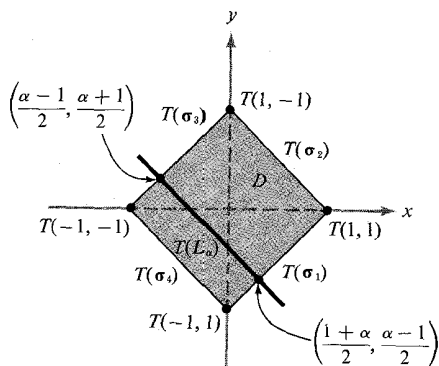
قلمرو تبدیل T مثال ۲

$$\sigma_2(t) = (1, t), \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$\sigma_3(t) = (t, -1), \quad -1 \leq t \leq 1$$

$$\sigma_4(t) = (-1, t), \quad -1 \leq t \leq 1$$

پارامتری‌سازی‌های اضلاع دیگر مربع D^* باشد . با استفاده از استدلالی مانند فوق، می‌بینیم
 که $T \circ \sigma_2$ پارامتری‌سازی خط $y = 1 - x$ ، $0 \leq x \leq 1$ ، $T \circ \sigma_3$ پارامتری‌سازی خط
 $y = x + 1$ ، $-1 \leq x \leq 0$ ، و $T \circ \sigma_4$ پارامتری‌سازی خط $y = -x - 1$ ، $-1 \leq x \leq 0$ ،
 می‌باشد . در اینجا این حدس که T مربع D^* را "برمی‌گرداند" و آن را به مربع D به رؤس
 $(1, 0), (0, 1), (-1, 0), (0, -1)$ می‌برد معقول است (شکل ۳۰۷.۵) . برای اثبات این امر ،
 فرض می‌کنیم $-1 \leq \alpha \leq 1$ ، و L_α (شکل ۳۰۷.۵) خط ثابتی به معادله پارامتری
 $T(\sigma(t)) = ((\alpha + t)/2, (\alpha - t)/2)$ ، باشد . در این صورت، $-1 \leq t \leq 1$ ، $\sigma(t) = (\alpha, t)$
 یک پارامتری‌سازی خط $y = -x + \alpha$ ، $(\alpha - 1)/2 \leq x \leq (\alpha + 1)/2$ ، است .



شکل ۴.۷.۵

اثر T بر ناحیه D^*

این خط از نقطه $((\alpha - 1)/2, (1 + \alpha)/2)$ (به ازای $t = -1$) شروع شده و به نقطه $((1 + \alpha)/2, (\alpha - 1)/2)$ ختم می‌شود. به آسانی معلوم می‌شود که این نقاط به ترتیب روی خطوط $T \circ \sigma_1$ و $T \circ \sigma_2$ قرار دارند. لذا، وقتی α بین -1 و 1 تغییر کند، مربع D^* را جارو می‌کند، ولی $T(L_\alpha)$ مربع D به رئوس $(-1, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, 0)$ ، و $(0, -1)$ را جارو خواهد کرد.

قضیه زیر راه آسانتری برای توصیف نقش $T(D^*)$ به دست می‌دهد.

قضیه ۶. فرض کنیم A یک ماتریس 2×2 با $\det A \neq 0$ بوده و T نگاشتی خطی از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R}^2 باشد که با $T(x) = Ax$ (ضرب ماتریسی) داده شده است؛ ر.ک. مثال ۴، بخش ۴.۲. در این صورت، T متوازی‌الاضلاعها را به متوازی‌الاضلاعها و رئوس را به رئوس می‌برد. به علاوه، اگر $T(D^*)$ متوازی‌الاضلاع باشد، D^* باید متوازی‌الاضلاع باشد.

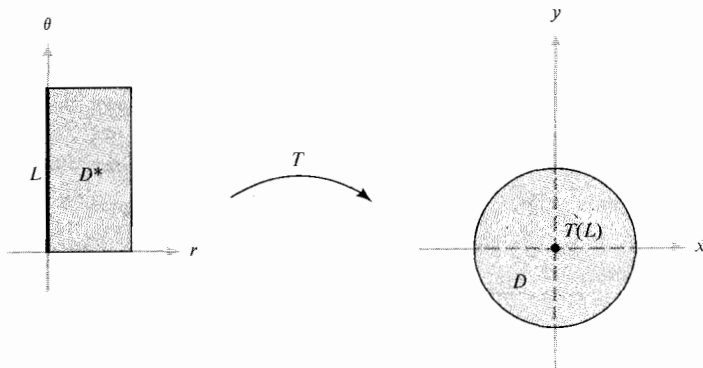
برهان قضیه ۶ را در آخر این بخش به عنوان تمرین می‌گذاریم (ر.ک. تمرین ۸). این قضیه نتیجه مثال ۲ را ساده می‌کند، چرا که کافی است رئوس $T(D^*)$ را یافته و آنها را با خطوطی مستقیم به هم وصل کنیم.

اگرچه نمودار تابع $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ قابل تجسم نیست، ولی در تغییر شکل زیر مجموعه‌ها به وسیله تابع یاری‌دهنده است. با اینحال، فقط با توجه به این تغییر شکلها نمی‌توان تصور کاملی از رفتار T به دست آورد. با استفاده از تناظر یک به یک، می‌توان T را بیشتر توصیف نمود.

تعریف. تابع f بر D^* یک به یک است اگر به ازای (u, v) و (u', v') متعلق به D^* ،
 $T(u, v) = T(u', v')$ ایجاب کند که $u = u'$ و $v = v'$.

به‌طور هندسی، این عبارت به این معنی است که T دو نقطه مختلف از D^* را به یک نقطه از D نمی‌فرستد. مثلاً، تابع $T(x, y) = (x^2 + y^2, y^4)$ یک به یک نیست، زیرا $T(1, -1) = (2, 1) = T(1, 1)$ ولی $(1, -1) \neq (1, 1)$. به عبارت دیگر، یک تابع وقتی یک به یک است که دو نقطه مختلف را به یک‌جا فرو نریزد.

مثال ۳. تابع $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ مثال ۱ را در نظر بگیرید: $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. نشان دهید اگر قلمرو T تمام \mathbb{R}^2 باشد، T یک به یک نخواهد بود. هرگاه $\theta_1 \neq \theta_2$ ، آنگاه $T(0, \theta_1) = T(0, \theta_2)$ ؛ و در نتیجه، T نمی‌تواند یک به یک باشد. این امر ایجاب می‌کند که هرگاه L ضلع مستطیل $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ باشد (شکل ۵.۷.۵).



شکل ۵.۷.۵

تبدیل مختصات قطبی T که خط L را به نقطه $(0, 0)$ می‌برد

که در آن $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و $r = 0$ ، آنگاه T تمام L را به یک نقطه، یعنی مرکز قرص بیکه D می نگارد.

ولی هرگاه مجموعه $S^* =]0, 1] \times]0, 2\pi]$ را در نظر بگیریم، آنگاه $T: S^* \rightarrow S$ یک به یک است (ر.ک. تمرین ۱). واضح است که در تعیین یک به یک بودن تابع باید قلمرو بدقت مورد توجه قرار گیرد.

مثال ۴. نشان دهید که تابع $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ مثال ۲ یک به یک است. فرض کنید

$$T(x, y) = T(x', y')$$

$$((x + y)/2, (x - y)/2) = ((x' + y')/2, (x' - y')/2)$$

و داریم

$$x + y = x' + y'$$

$$x - y = x' - y'$$

با افزودن اینها به هم داریم

$$2x = 2x'$$

لذا، $x = x'$ و در نتیجه، $y = y'$ ، که یک به یک بودن T (با قلمرو \mathbb{R}^2) را نشان می دهد. در واقع، T خطی است و $T(x) = Ax$ ، که در آن A ماتریس 2×2 ، کافی است نشان دهیم که $\det A \neq 0$ (ر.ک. تمرین ۶).

در مثالهای ۱ و ۲ نقش $D = T(D^*)$ ناحیه D^* تحت نگاشت T را تعیین کرده ایم. آنچه در بخش بعد تاحدودی مطرح است این مسئله می باشد؛ یعنی، اگر D و نگاشت یک به یک T از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R}^2 داده شده باشند، D^* را طوری بیابیم که $T(D^*) = D$. پیش از بررسی مشروح این مسئله، مفهوم "برو" را معرفی می کنیم.

تعریف. تابع T بروی D است اگر به ازای هر نقطه $(x, y) \in D$ ، نقطه ای مانند (u, v) در قلمرو T موجود باشد به طوری که $T(u, v) = (x, y)$.

لذا، اگر T برو باشد، می توان معادله $T(u, v) = (x, y)$ را به ازای هر $(x, y) \in D$ حل کرد. اگر T یک به یک نیز باشد، این جواب منحصر به فرد می باشد.

مفاهیم یک به یک و برو در نگاشتهای خطی T از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R}^2 (یا از \mathbb{R}^n به \mathbb{R}^n) معادلند

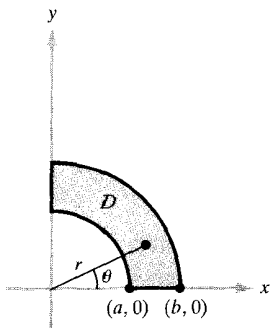
(ر. ک. . تمرینهای ۶ و ۷) .

اگر ناحیه D و نگاشت T داده شده باشند، تعیین نگاشت D^* که $T(D^*) = D$ فقط وقتی ممکن است که به ازای هر $(x, y) \in D$ ، (u, v) ای در قلمرو T باشد به طوری که $T(u, v) = (x, y)$ (یعنی، T باید بروی D باشد) . مثال زیر نشان می دهد که این همیشه امکان پذیر نیست .

مثال ۵. فرض کنیم $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ با $T(u, v) = (u, 0)$ داده شده باشد. همچنین، $D = [0, 1] \times [0, 1]$. چون T تمام \mathbb{R}^2 را به یک محور می برد، ممکن نیست D^* ی یافت شود که $T(D^*) = D$.

مثال ۶. فرض کنید T مثل مثال ۲ تعریف شده باشد، و D مربعی به رئوس $(-1, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(1, 0)$ ، $(0, -1)$ باشد. D^* را طوری بیابید که $T(D^*) = D$.
چون T خطی است و $T(x) = Ax$ که در آن A یک ماتریس 2×2 با $\det A \neq 0$ است، پس $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ برونست (ر. ک. . تمرینهای ۶ و ۷) ؛ و لذا، D^* را می توان به دست آورد. بنا بر قضیه ۵، D^* باید متوازی الاضلاع باشد. برای یافتن D^* کافی است چهار نقطه بیابیم که روی رئوس D نگاشته شوند، سپس، با وصل کردن این نقاط، D^* به دست می آید. به ازای رأس $(1, 0)$ از D باید $(x - y)/2 = 1$ و $(x + y)/2 = 0$ را حل کنیم؛ در نتیجه، $(x - y)/2 = 1$ و $(x + y)/2 = 0$. لذا، $(x, y) = (1, 1)$ یک رأس D^* است. با حل نسبت به سایر رئوس معلوم می شود که $D^* = [-1, 1] \times [-1, 1]$.

مثال ۷. فرض کنیم D ناحیه بین قوسهای دوایر $x^2 + y^2 = a^2$ ، $x^2 + y^2 = b^2$ ، $(0 < a < b)$ واقع در ربع اول باشد (ر. ک. . شکل ۶.۷.۵) . این دوایر به معادلات $r = a$ و $r = b$ در مختصات قطبی اند. فرض کنیم T تبدیل مختصات قطبی داده شده با $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta) = (x, y)$ باشد. D^* را طوری می یابیم که $T(D^*) = D$.
در ناحیه D داریم $a^2 \leq x^2 + y^2 \leq b^2$ ، و چون $r^2 = x^2 + y^2$ ، می بینیم که $a \leq r \leq b$ واضح است که در این ناحیه θ در نامساویهای $0 \leq \theta \leq \pi/2$ صدق می کند. لذا، اگر $D^* = [a, b] \times [0, \pi/2]$ ، به آسانی معلوم می شود که $T(D^*) = D$ و T یک به یک است .



شکل ۶۰.۷۰.۵

ناحیه D^* در صفحه θr را جستجو می‌کنیم که نقش آن تحت نگاشت مختصات قطبی D باشد.

اختیاری

تبصره در باب قضیه تابع معکوس و نگاشتهای از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R}^2

قضیه تابع معکوس مطرح شده در بخش ۴.۴ به مطالب اینجا ارتباط دارد. این قضیه می‌گوید که هرگاه دترمینان $DT(u_0, v_0)$ (که دترمینان ماتریس مشتقات جزئی T محاسبه شده در (u_0, v_0) است) صفر نباشد، آنگاه به ازای نزدیک (u, v) و (x, y) نزدیک $(x_0, y_0) = T(u_0, v_0)$ ، معادله $T(u, v) = (x, y)$ را می‌توان به‌طور منحصر به فرد نسبت به (u, v) به صورت تابعی از (x, y) حل کرد. بخصوص، بنا بر یکتایی T در مجاورت (u_0, v_0) یک به یک است؛ همچنین، T بروی همسایگی از (x_0, y_0) است، زیرا $T(u, v) = (x, y)$ در صورتی نسبت به (u, v) قابل حل است که (x, y) نزدیک (x_0, y_0) باشد. هرگاه D^* و D نواحی مقدماتی بوده و $T: D^* \rightarrow D$ واجد این خاصیت باشد که دترمینان $DT(u, v)$ به ازای هر (u, v) صفر نبوده و T ، D^* را بروی D بنگارد، آنگاه می‌توان یک به یک بودن T بر D^* را ثابت کرد. (این اثبات از حوصله این کتاب خارج است.)

تمرینات

- فرض کنید $S^* =]0, 1] \times]0, 2\pi]$ و تعریف کنید $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. مجموعه نقش S را معین نمایید. نشان دهید که T بر S^* یک به یک است.

۲. تعریف کنید که

$$T(x^*, y^*) = \left(\frac{x^* - y^*}{\sqrt{2}}, \frac{x^* + y^*}{\sqrt{2}} \right)$$

و نشان دهید که T مربع یکه $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ را دوران می‌دهد.

۳. فرض کنید $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ و T را بر D^* با $T(u, v) = (-u^2 + 4u, v)$ تعریف

نمایید. D را پیدا کنید. آیا T یک به یک است؟

۴. فرض کنید D^* متوازی‌الاضلاع محدود به خطوط $y = 3x - 4$ ، $y = 3x$ ، $y = \frac{1}{2}x$ ، و

$y = \frac{1}{2}(x + 4)$ باشد. همچنین، $D = [0, 1] \times [0, 1]$ را طوری بیابید که D نقش

D^* تحت T باشد.

۵. فرض کنید $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ با $(\rho, \phi, \theta) \mapsto (x, y, z)$ تعریف شده باشد، که در آن

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

فرض کنید D^* مجموعه نقاطی چون (ρ, ϕ, θ) باشد به طوری که $\rho \in [0, 1]$ ، $\phi \in [0, \pi]$ ، $\theta \in [0, 2\pi]$.

$D = T(D^*)$ را پیدا کنید. آیا T یک به یک است؟ اگر نیست، آیا می‌توان زیر

مجموعه‌ای از D^* را (همانطور که در تمرین ۱ در مورد D^* مثال ۱ شد) چنان حذف

کرد که T بر بقیه یک به یک باشد؟

در تمرینهای ۶ و ۷، فرض کنید $T(x) = Ax$ که در آن A یک ماتریس 2×2 است.

۶. نشان دهید T یک به یک است اگر و فقط اگر درمینان A صفر نباشد.

۷. نشان دهید $\det A \neq 0$ اگر و فقط اگر T برو باشد.

۸. فرض کنید $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ خطی باشد $T(x) = Ax$ ، که در آن A یک ماتریس 2×2 است.

نشان دهید که اگر $\det A \neq 0$ ، T متوازی‌الاضلاعها را بروی متوازی‌الاضلاعها می‌برد.

(راهنمایی. متوازی‌الاضلاع کلی در \mathbb{R}^2 را می‌توان با مجموعه نقاط $q = p + \lambda v + \mu w$

به ازای $\lambda, \mu \in [0, 1]$ توصیف کرد که در آن p, v, w بردارهایی در \mathbb{R}^2 است که v مضرب

اسکالری از w نیست.)

۹. فرض کنید $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ مثل تمرین ۸ بوده و $T(P^*) = P$ یک متوازی‌الاضلاع باشد.

نشان دهید که P^* نیز متوازی‌الاضلاع است.

۸.۵ قضیه تغییر متغیر

فرض کنیم D و D^* دو ناحیه از نوع ۱ یا ۲ در \mathbb{R}^2 ، T یک نگاشت مشتقپذیر بر D^* با نقش

D ، یعنی $T(D^*) = D$ ، و $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ تابع انتگرالپذیر حقیقی دلخواهی باشند. می‌خواهیم $\int_D f(x, y) dA$ را به صورت انتگرال تابع مرکب $f \circ T$ روی D^* بیان کنیم. در این بخش طرز انجام این امر را خواهیم دید.

فرض کنیم ناحیه D^* زیرمجموعه‌ای از \mathbb{R}^2 از نوع ۱ به مختصات (u, v) باشد. همچنین، D زیرمجموعه‌ای از نوع ۱ در صفحه xy باشد. نگاشت T با توابع مختصات زیر داده شده است:

$$T(u, v) = (x(u, v), y(u, v)), \quad (u, v) \in D^*$$

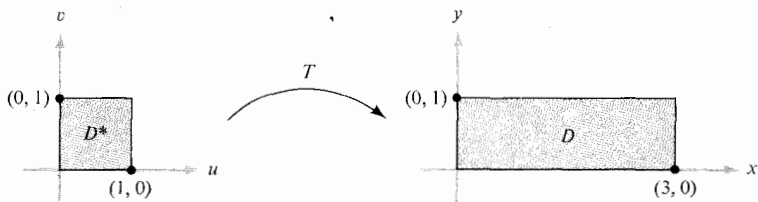
اولین حدس این است که

$$(1) \quad \int_D f(x, y) dx dy \stackrel{?}{=} \int_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) du dv$$

که در آن $f \circ T(u, v) = f(x(u, v), y(u, v))$ تابع مرکب تعریف شده بر D^* است. ولی هرگاه تابع $f: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ را که $f(x, y) = 1$ در نظر بگیریم، آنگاه معادله (۱) ایجاب می‌کند که

$$(2) \quad A(D) = \int_D dx dy \stackrel{?}{=} \int_{D^*} du dv = A(D^*)$$

به آسانی معلوم می‌شود که (۲) فقط در چند حالت خاص برقرار است نه به ازای نگاشت کلی T . مثلاً، T را با $T(u, v) = (-u^2 + 4u, v)$ تعریف می‌کنیم. T را به مربع یک‌کله $D^* = [0, 1] \times [0, 1]$ در صفحه uv محدود می‌کنیم (ر. ک. شکل ۱۰۸.۵). در این صورت، مثل تمرین ۳، بخش ۷.۵، T ، D^* را بروی $D = [0, 3] \times [0, 1]$ خواهد برد.



شکل ۱۰۸.۵

نگاشت $T: (u, v) \mapsto (-u^2 + 4u, v)$ مربع D^* را بروی مستطیل D می‌برد.

واضح است که $A(D) \neq A(D^*)$ ؛ و در نتیجه، فرمول (۲) برقرار نمی‌باشد.

آنچه در اینجا لازم است سنجش تغییر مساحت یک ناحیه به وسیله تبدیلی چون $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ می باشد. این امر با دترمینان ژاکوبی داده می شود که ذیلا " تعریف شده است .

تعریف . فرض کنیم $T: D^* \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک تبدیل C^1 باشد که با $x = x(u, v)$ و $y = y(u, v)$ داده شده است . ژاکوبی T ، که به صورت $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ نوشته می شود ، دترمینان ماتریس مشتق $DT(x, y)$ از T می باشد :

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

مثال ۱ . تابع از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R}^2 که مختصات قطبی را به مختصات دکارتی تبدیل می کند عبارت است از

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

و ژاکوبی آن مساوی است با

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r(\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) = r$$

اگر قیود مناسبی بر T بگذاریم ، می توانیم نشان دهیم که مساحت $D = T(D^*)$ با انتگرالگیری از قدر مطلق ژاکوبی $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ روی D^* به دست می آید ؛ یعنی ، معادلات زیر را داریم :

$$(۳) \quad A(D) = \int_D dx dy = \int_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

برای توضیح این امر ، از مثال ۱ در بخش ۷.۵ اختیار می کنیم $T: D^* \rightarrow D$ ، که در آن $D = T(D^*)$ مجموعه (x, y) هایی است که $x^2 + y^2 \leq 1$ و $D^* = [0, 1] \times [0, 2\pi]$ و $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$. بنابر فرمول (۳) :

$$(۴) \quad A(D) = \int_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta = \int_{D^*} r dr d\theta$$

(در اینجا r و θ نقشهای u و v را دارند) . از محاسبات فوق معلوم می شود که

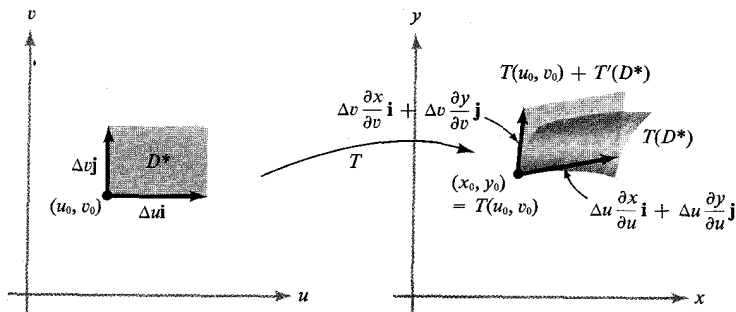
$$\int_{D^*} r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 r \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \left[\frac{r^2}{2} \Big|_0^1 \right] d\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} d\theta = \pi$$

مساحت D است ، و این فرمول (۳) را در این حالت تأیید می کند . در واقع ، از حساب دیفرانسیل و انتگرال سال اول به یاد می آوریم که (۴) فرمول صحیح مساحت یک ناحیه در مختصات قطبی است .

اثبات دقیق حکم (۳) (یعنی ، دترمینان ژاکوبی تغییر مساحت به وسیله یک تبدیل را می سنجد) آسان نیست . با اینحال ، اگر به طور اصولی به آن نگاه شود ، کاملاً " موجه جلوه خواهد کرد .

به یاد آورید که $A(D) = \int_D dx \, dy$ از تقسیم D به مستطیلهای کوچک ، جمع بندی مساحت آنها ، و سپس گرفتن حد از این مجموع وقتی اندازه زیرمستطیلهای به صفر میل کند به دست آمد (ر.ک. مثال ۳ ، بخش ۳۰۵) . مسئله این است که T مستطیلهای را به نواحی می نگارد که محاسبه مساحتش آسان نیست . حل این مسئله عبارت است از تقریب این نقشها به وسیله نواحی ساده تری که مساحت آنها قابل محاسبه می باشد . یک وسیله مفید برای این کار مشتق T است که (از فصل ۲) می دانیم بهترین تقریب خطی به T را به ما می دهد .

حال مستطیل کوچک D^* در صفحه uv آمده در شکل ۲۰۸.۵ را در نظر می گیریم .



شکل ۲۰۸.۵

اثر تبدیل T بر مستطیل کوچک D^*

فرض کنیم T' مشتق T باشد که در (u_0, v_0) حساب شده است؛ در نتیجه، T' یک ماتریس 2×2 است. از فصل ۲ (ر. ک. ص ۱۳۷) می‌دانیم که یک تقریب مناسب به $T(u, v)$ عبارت است از

$$T(u_0, v_0) + T' \begin{pmatrix} \Delta u \\ \Delta v \end{pmatrix}$$

که در آن $\Delta u = u - u_0$ و $\Delta v = v - v_0$. اما این نگاشت D^* را به متوازی‌الاضلاع به‌رأس $T(u_0, v_0)$ و اضلاع مجاور داده شده با بردارهای

$$T'(\Delta u \mathbf{i}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \Delta u \\ 0 \end{bmatrix} = \Delta u \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \\ \frac{\partial y}{\partial u} \end{bmatrix} = \Delta u \mathbf{T}_u$$

$$T'(\Delta v \mathbf{j}) = \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ \Delta v \end{bmatrix} = \Delta v \begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial v} \end{bmatrix} = \Delta v \mathbf{T}_v$$

که

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j}$$

$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j}$$

در (u_0, v_0) حساب شده‌اند می‌برد.

از بخش ۳.۱ می‌دانیم که مساحت متوازی‌الاضلاع به اضلاع $a\mathbf{i} + b\mathbf{j}$ و $c\mathbf{i} + d\mathbf{j}$ مساوی

قدرمطلق دترمینان

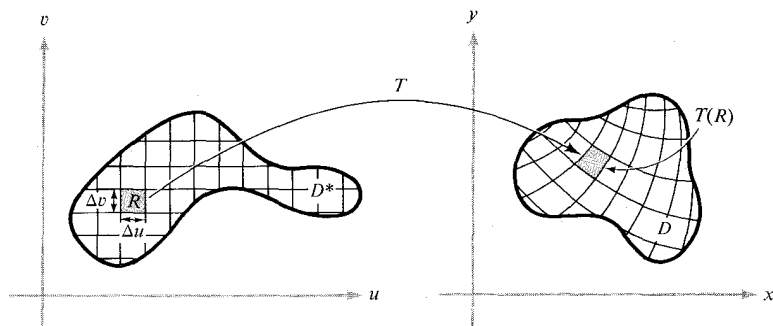
$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & c \\ b & d \end{vmatrix}$$

است. لذا، مساحت $T(D^*)$ تقریباً "مساوی قدرمطلق

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial x}{\partial v} \Delta v \\ \frac{\partial y}{\partial u} \Delta u & \frac{\partial y}{\partial v} \Delta v \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix} \Delta u \Delta v = \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \Delta u \Delta v$$

است که در (u_0, v_0) حساب شده است. اما قدرمطلق این چیزی جز $|\partial(x, y)/\partial(u, v)| \Delta u \Delta v$ نیست.

این مطلب و استدلال افراز باید فرمول (۳) را موجه جلوه دهد. در واقع، اگر D^* را به مستطیلهایی کوچک به طول اضلاع Δu و Δv افراز کنیم، نقش این مستطیلهای به وسیله متوازی الاضلاعی به اضلاع $T_u \Delta u$ و $T_v \Delta v$ ، و در نتیجه با مساحت $|\partial(x, y)/\partial(u, v)| \Delta u \Delta v$ تقریب می شوند. لذا، مساحت D^* تقریباً مساوی است با $\sum \Delta u \Delta v$ ، که در آن مجموع روی تمام مستطیلهای R داخل D^* گرفته شده است (ر. ک. شکل ۳۰۸.۵). لذا، مساحت $T(D^*)$



شکل ۳۰۸.۵

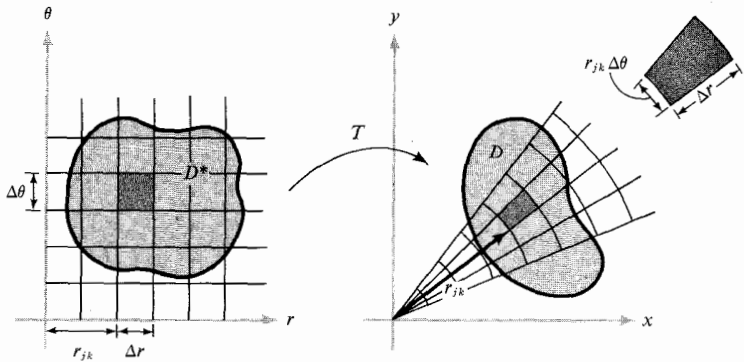
مساحت مستطیل کوچک R مساوی $\Delta u \Delta v$ است.

مساحت $T(R)$ تقریباً مساوی است با $|\partial(x, y)/\partial(u, v)| \Delta u \Delta v$.

تقریباً "مساوی مجموع $\sum |\partial(x, y)/\partial(u, v)| \Delta u \Delta v$ است. این مجموع در حد مساوی است با

$$\int_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv.$$

اکنون برای حالت خاص (۴) فرمول (۳)، یعنی حالت مختصات قطبی، دلیل دیگری می آوریم. ناحیه D در صفحه xy و یک شبکه نظیر به افرازی با متغیرهای r و θ را در نظر می گیریم (شکل ۴۰۸.۵). مساحت ناحیه سایه دار تقریباً مساوی است با $(\Delta r)(r_{jk} \Delta \theta)$ ، زیرا طول قوس قطعه‌ای از یک دایره به شعاع R مقابل به زاویه ϕ برابر $R\phi$ است. پس مساحت کل حد $\sum r_{jk} \Delta r \Delta \theta$ می باشد؛ یعنی، $\int_{D^*} r dr d\theta$. لذا، ایده کلیدی این است که "مستطیل قطبی" jk ام در شبکه به مساحت تقریبی $r_{jk} \Delta r \Delta \theta$ می باشد. (به ازای n

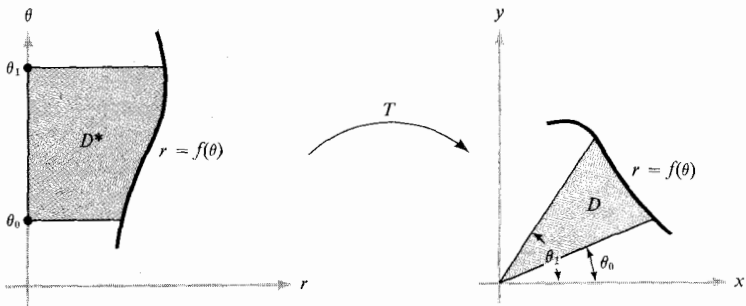


شکل ۴.۸.۵

D^* تحت نگاشت مختصات قطبی T به D نگاشته می شود.

بزرگ، مستطیل قطبی jk ام شبیه مستطیلی با اضلاع به طول $r_{jk} \Delta \theta$ و Δr خواهد بود. این باید علت آنکه می گوییم "عنصر مساحت $\Delta x \Delta y$ " به "عنصر مساحت $r \Delta r \Delta \theta$ " تبدیل می شود را روشن سازد. مثال زیر این ایده ها را در حالتی خاص توضیح می دهد.

مثال ۲. فرض کنیم ناحیه D در صفحه xy به نمودار معادله قطبی $r = f(\theta)$ محدود شده باشد، که در آن $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ و $f(\theta) \geq 0$ (ر.ک. شکل ۵.۸.۵). ناحیه D^*



شکل ۵.۸.۵

اثر نگاشت مختصات قطبی بر ناحیه D^*

از نوع ۲ را در صفحه $r\theta$ در نظر می‌گیریم، که در آن $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1$ و $0 \leq r \leq f(\theta)$ ناحیه D^* تحت تبدیل $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta$ بروی ناحیه D نگاشته می‌شود. داریم

$$\begin{aligned} A(D) &= \int_D dx dy = \int_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta \\ &= \int_{D^*} r dr d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left[\int_0^{f(\theta)} r dr \right] d\theta \\ &= \int_{\theta_0}^{\theta_1} \left[\frac{r^2}{2} \right]_0^{f(\theta)} d\theta = \int_{\theta_0}^{\theta_1} \frac{[f(\theta)]^2}{2} d\theta \end{aligned}$$

ما در حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره با این فرمول آشنا شده‌ایم. پیش از بیان فرمول تغییر متغیر، که ناشی از بحث فوق است، نتیجه نظیر را از حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره یادآور می‌شویم:

$$(۵) \quad \int_a^b f(x(u)) \frac{dx}{du} du = \int_{x(a)}^{x(b)} f(x) dx$$

که در آن f بر $[a, b]$ پیوسته بوده و $u \mapsto x(u)$ به طور پیوسته مشتق‌پذیر است.

برهان. فرض کنیم F یک پاد مشتق f باشد؛ یعنی، $F' = f$ ، که طبق قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال ممکن است. طرف راست (۵) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_{x(a)}^{x(b)} f(x) dx = F(x(b)) - F(x(a))$$

برای محاسبه طرف چپ (۵)، قرار می‌دهیم $G(u) = F(x(u))$. بنابر قاعده زنجیره‌ای،
 $G'(u) = F'(x(u))x'(u) = f(x(u))x'(u)$ ، لذا، مجدداً طبق قضیه اساسی،

$$\int_a^b f(x(u))x'(u) du = \int_a^b G'(u) du = G(b) - G(a) = F(x(b)) - F(x(a))$$

که همان مطلوب می‌باشد.

حال فرض کنیم تابع C^1 $u \mapsto x(u)$ بر $[a, b]$ یک به یک باشد. لذا، باید یا بر $[a, b]$ داشته باشیم $dx/du \geq 0$ یا بر $[a, b]$ داشته باشیم $dx/du \leq 0$. (اگر dx/du مثبت و سپس منفی باشد، تابع $x = x(u)$ صعود و سپس نزول می‌کند؛ و لذا، یک به یک

نیست؛ حکم مشابه در صورتی برقرار است که dx/du منفی و سپس مثبت باشد. (فرض کنیم I^* بازه $[a, b]$ بوده، و I بازه بسته با نقاط انتهایی $x(a)$ و $x(b)$ باشد. (لذا، $I = [x(a), x(b)]$ اگر $I = [x(a), x(b)]$ صعودی باشد و $I = [x(b), x(a)]$ اگر $x(u) \rightarrow x(a)$ نزولی باشد.) با این نمادها می‌توان فرمول (۵) را به صورت زیر نوشت:

$$\int_{I^*} f(x(u)) \left| \frac{dx}{du} \right| du = \int_I f(x) dx$$

این فرمولی است که به انتگرالهای مضاعف تعمیم می‌یابد: I^* به D^* و I به D بدل شده، و $|dx/du|$ با $|\partial(x, y)/\partial(u, v)|$ تعویض می‌گردد. حال نتیجه را به طور صوری بیان می‌کنیم (برهان تکنیکی حذف شده است).

قضیه ۷ (تغییر متغیر برای انتگرالهای مضاعف). فرض کنیم D و D^* نواحی مقدماتی در صفحه بوده و $T: D^* \rightarrow D$ ، C^1 باشد. همچنین، T بر D^* یک به یک باشد. علاوه، فرض کنید $D = T(D^*)$. در این صورت، به ازای هر تابع انتگرالپذیر $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ داریم

$$(۶) \quad \int_D f(x, y) dx dy = \int_{D^*} f(x(u, v), y(u, v)) \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

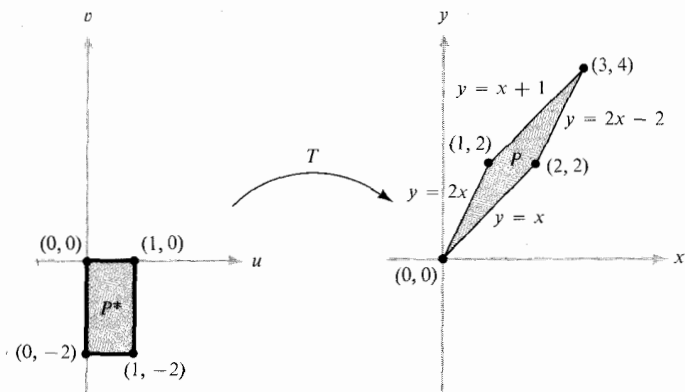
یکی از هدفهای قضیه تغییر متغیر تدارک روشی است که با آن بتوان انتگرالهای مضاعف را ساده کرد. در انتگرال $\int_D f da$ ممکن است انتگرالده f یا ناحیه D پیچیده بوده و محاسبات مستقیم مشکل باشند. لذا، T طوری اختیار شده است که محاسبه با انتگرالده جدید $f \circ T$ یا ناحیه جدید D^* (تعریف شده با $D = T(D^*)$) آسانتر است. متأسفانه، اگر T بدقت اختیار نشود، مسئله ممکن است پیچیده‌تر گردد.

مثال ۳. فرض کنید P متوازی‌الاضلاع محدود به $y = 2x$ ، $y = 2x - 2$ ، $y = x$ ، و $y = x + 1$ باشد (ر. ک. شکل ۶.۸.۵). انتگرال $\int_P xy dx dy$ را با تغییر متغیر

$$x = u - v, \quad y = 2u - v$$

یعنی $T(u, v) = (u - v, 2u - v)$ ، حساب کنید.

تبدیل T یک به یک است (ر. ک. تمرین ۶، بخش ۷.۵) و طوری است که مستطیل P^* محدود به $u = 0$ ، $u = 1$ ، $v = -2$ ، $v = 0$ بر روی P می‌نگارد. T ناحیه انتگرالگیری



شکل ۶.۸.۵

اثر $T(u, v) = (u - v, 2u - v)$ بر مستطیل P^*

را از P به P^* ساده می‌کند. به علاوه،

$$\left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| = \left| \det \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -1 \end{bmatrix} \right| = 1$$

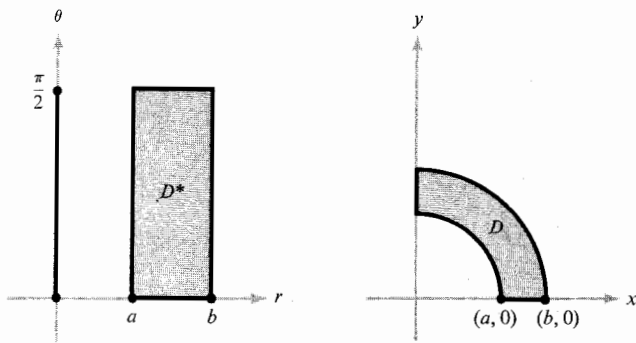
بنابراین،

$$\begin{aligned} \int_P xy \, dx \, dy &= \int_{P^*} (u - v)(2u - v) \, du \, dv \\ &= \int_{-2}^0 \int_0^1 (2u^2 - 3vu + v^2) \, du \, dv \\ &= \int_{-2}^0 \left[\frac{2}{3} u^3 - \frac{3u^2 v}{2} + v^2 u \right]_0^1 \, dv \\ &= \int_{-2}^0 \left[\frac{2}{3} - \frac{3}{2} v + v^2 \right] \, dv \\ &= \left[\frac{2}{3} v - \frac{3}{4} v^2 + \frac{v^3}{3} \right]_{-2}^0 = - \left[\frac{2}{3} (-2) - 3 - \frac{8}{3} \right] \\ &= - \left[-\frac{12}{3} - 3 \right] = 7 \end{aligned}$$

مثال ۴. انتگرال $\int_D \log(x^2 + y^2) dx dy$ را در صورتی حساب کنید که D ناحیه بین قوسهایی از دواير

$$x^2 + y^2 = a^2, \quad x^2 + y^2 = b^2 \quad (0 < a < b)$$

واقع در ربع اول باشد (ر.ک. شکل ۵.۸.۵). این دواير به معادلات ساده $r = a$ و



شکل ۵.۸.۷

نگاشت مختصات قطبی مستطیل D^* را روی بخشی از طوق D می نگارد.

در مختصات قطبی می باشند. به علاوه، $r^2 = x^2 + y^2$ در انتگرالده ظاهر می شود. لذا، با رفتن به مختصات قطبی، انتگرالده و ناحیه انتگرالگیری هر دو ساده می شوند. در

مثال ۷، بخش ۷.۵، دیدیم که تبدیل مختصات قطبی

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

مستطیل D^* داده شده با $0 \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ ، $a \leq r \leq b$ را بروی D می نگارد. این تبدیل بر D^* یک به یک است؛ و در نتیجه، طبق قضیه ۷، خواهیم داشت

$$\int_D \log(x^2 + y^2) dx dy = \int_{D^*} \log r^2 \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} \right| dr d\theta$$

اما، همانطور که قبلاً دیدیم، $|\partial(x, y)/\partial(r, \theta)| = r$ ؛ لذا، انتگرال طرف راست به صورت زیر درمی آید:

$$\int_a^b \int_0^{\pi/2} r \log r^2 d\theta dr = \frac{\pi}{2} \int_a^b r \log r^2 dr = \frac{\pi}{2} \int_a^b 2r \log r dr$$

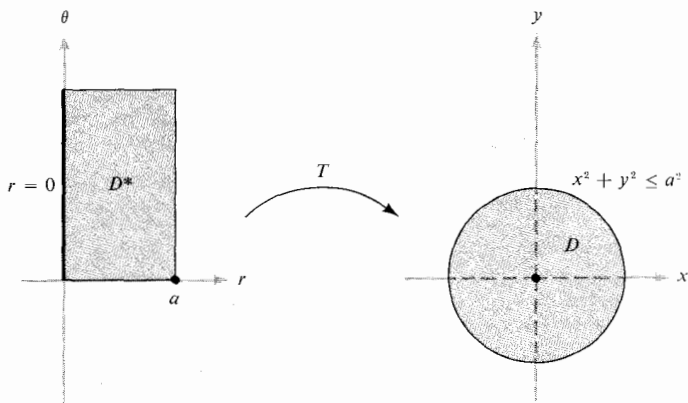
با استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء یا فرمول

$$\int x \log x \, dx = \frac{x^2}{2} \log x - \frac{x^2}{4}$$

از جدول انتگرالهای ضمیمه پ، نتیجه به دست می‌آید:

$$\frac{\pi}{2} \int_a^b 2r \log r \, dr = \frac{\pi}{2} \left(b^2 \log b - a^2 \log a - \frac{1}{2}(b^2 - a^2) \right)$$

مستطیل D^* تعریف شده با $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq a$ را در صفحه $r\theta$ در نظر می‌گیریم. در این صورت، تبدیل T داده شده با $T(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta)$ مستطیل D^* را بروی قرص D به معادله $x^2 + y^2 \leq a^2$ در صفحه xy می‌نگارد. این تبدیل نمایش تغییر از مختصات دکارتی به مختصات قطبی می‌باشد. با اینحال، T ، ملزومات قضیه تغییر متغیر را بر نمی‌آورد، چرا که هر یک به یک نیست؛ بخصوص T تمام نقاط با $r = 0$ را به $(0, 0)$ می‌فرستد (ر. ک. شکل ۸.۸.۵ و مثال ۳ از بخش ۷.۵). اما قضیه تغییر متغیر در این حالت نیز برقرار



شکل ۸.۸.۵

اگر مستطیل مقابل محور θ بین 0 و 2π باشد،
طوق به یک قرص بدل می‌شود.

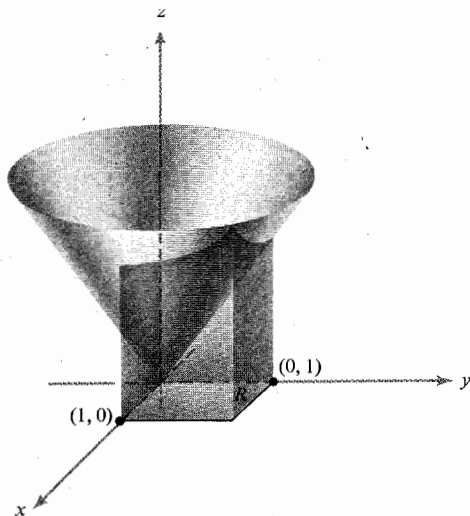
است. در واقع، دلیلش این است که مجموعه نقاطی که T بر آن یک به یک نیست روی

ضلعی از D^* قرار دارد که نمودار یک منحنی هموار نیست؛ و لذا، در انتگرالگیری می‌توان از آن چشم پوشید. به‌طور خلاصه، فرمول

$$(۷) \quad \int_D f(x, y) dx dy = \int_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta) r dr d\theta$$

وقتی برقرار است که T ، D^* را جز به ازای نقاط واقع بر مرز D^* به‌طور یک‌به‌یک بروی D بفرستد. در مثال ۲ حالت ساده‌ای این امر را که در آن $f(x, y)$ مساوی ۱ است می‌بینیم. حال مثال پیچیده‌تری را مطرح می‌کنیم.

مثال ۵. انتگرال $\int_R \sqrt{x^2 + y^2} dx dy$ را در صورتی حساب کنید که $R = [0, 1] \times [0, 1]$. این انتگرال مضاعف مساوی حجم ناحیه‌ای سه‌بعدی شکل ۹.۸.۵ است. محاسبه‌ای این

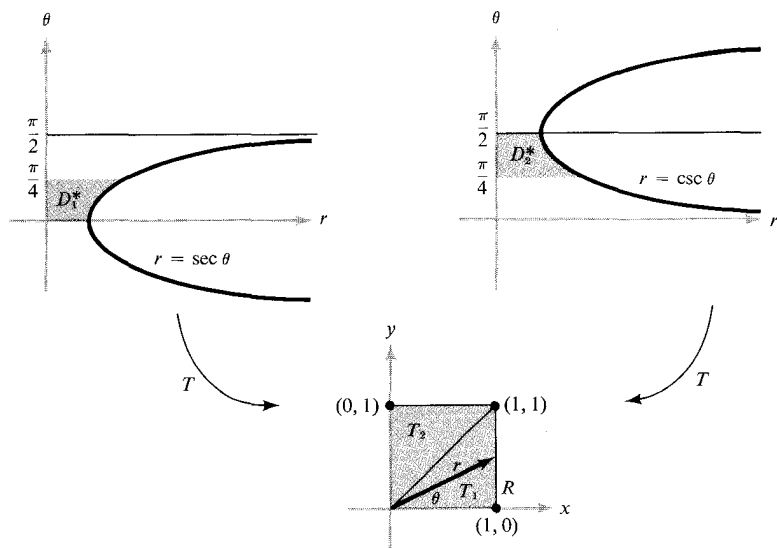


شکل ۹.۸.۵

حجم ناحیه‌ای زیر $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ روی $R = [0, 1] \times [0, 1]$

انتگرال به همین صورت مشکل است. چون انتگرالده تابع ساده $r^2 = x^2 + y^2$ است، مجدداً به مختصات قطبی می‌رویم. این کار سبب ساده شدن انتگرالده می‌شود ولی،

مناسفانه، قلمرو انتگرالگیری ساده نمی‌گردد. لیکن، ساده‌سازی برای محاسبه انتگرال کافی است. برای اعمال قضیه γ با مختصات قطبی، به شکل ۱۰.۸.۵ رجوع می‌کنیم.



شکل ۱۰.۸.۵

تبدیل مختصات قطبی D_1^* را به مثلث T_1

و D_2^* را به T_2 می‌برد

خواننده‌است تحقیق کند که R نقش ناحیه $D^* = D_1^* \cup D_2^*$ تحت $(r \cos \theta, r \sin \theta)$ است، که برای D_1^* داریم $0 \leq \theta \leq \frac{1}{4}\pi$ و $0 \leq r \leq \sec \theta$ و برای D_2^* داریم $\frac{1}{4}\pi \leq \theta \leq \frac{1}{2}\pi$ ، $0 \leq r \leq \csc \theta$. تبدیل T ، D_1^* را بروی مثلث T_1 و D_2^* را بروی مثلث T_2 می‌نگارد. تبدیل T جز وقتی $r = 0$ به یک به یک است؛ در نتیجه، می‌توان قضیه γ را به‌کار برد. از تقارن $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ بر R می‌توان دید که

$$\int_R \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy = 2 \int_{T_1} \sqrt{x^2 + y^2} \, dx \, dy$$

با اعمال فرمول (۷)، داریم

$$\int_{T_1} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \int_{D_1^*} \sqrt{r^2} r dr d\theta = \int_{D_1^*} r^2 dr d\theta$$

حال، با استفاده از انتگرالگیری مکرر، به دست می‌آوریم

$$\int_{D_1^*} r^2 dr d\theta = \int_0^{\pi/4} \left[\int_0^{\sec \theta} r^2 dr \right] d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{\pi/4} \sec^3 \theta d\theta$$

با مراجعه به جدول انتگرالها (ر.ک. آخر کتاب) برای یافتن $\int \sec^3 x dx$ داریم

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi/4} \sec^3 \theta d\theta &= \left[\frac{\sec \theta \tan \theta}{2} \right]_0^{\pi/4} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sec \theta d\theta \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sec \theta d\theta \end{aligned}$$

با مراجعه مجدد به جدول برای $\int \sec x dx$ درمی‌یابیم که

$$\frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} \sec \theta d\theta = \frac{1}{2} [\log|\sec \theta + \tan \theta|]_0^{\pi/4} = \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2})$$

از تلفیق این نتایج و توجه به عامل $\frac{1}{3}$ ، خواهیم داشت

$$\int_{D_1^*} r^2 dr d\theta = \frac{1}{3} \left(\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{1}{2} \log(1 + \sqrt{2}) \right) = \frac{1}{6} (\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}))$$

با ضرب در 2، جواب به دست خواهد آمد:

$$\int_{\mathbb{R}} \sqrt{x^2 + y^2} dx dy = \frac{1}{3} (\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}))$$

همچنین، فرمول تغییر متغیر برای انتگرالهای سه‌گانه در دست است که ذیلاً بیان شده است. ابتدا باید ژاکوبی یک تبدیل از \mathbb{R}^3 به \mathbb{R}^3 را تعریف کنیم؛ این تعمیم ساده‌ه حالت دوبعدی می‌باشد.

تعریف. فرض کنیم $T: W \subset \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک تابع C^1 باشد که با $x = x(u, v, w)$ ، $y = y(u, v, w)$ ، $z = z(u, v, w)$ تعریف شده است. در این صورت، ژاکوبی T ، که به صورت

$\partial(x, y, z)/\partial(u, v, w)$ نوشته می شود ، عبارت است از دترمینان

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} & \frac{\partial x}{\partial w} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} & \frac{\partial y}{\partial w} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} & \frac{\partial z}{\partial w} \end{vmatrix}$$

قدرمطلق این دترمینان مساوی حجم متوازی السطوحی است که با بردارهای

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_w = \frac{\partial x}{\partial w} \mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial w} \mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial w} \mathbf{k}$$

تعیین می شود (ر. ک. بخش ۳۰۱). درست مثل حالت دوبعدی، ژاکوبی نحوه تغییر قلمرو تبدیل T توسط آن را می سنجد. لذا، برای انتگرالهای (سه گانه) حجم، فرمول تغییر متغیر شکل زیر را خواهد یافت:

$$\int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{D^*} f(x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w)) \left| \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(u, v, w)} \right| du dv dw \quad (\lambda)$$

که در آن D^* یک ناحیه^۱ مقدماتی در فضای uvw نظیر به D در فضای xyz تحت تغییر مختصات $T: (u, v, w) \mapsto (x(u, v, w), y(u, v, w), z(u, v, w))$ است مشروط بر اینکه T ، جز بر مجموعه ای که اجتماعی از نمودارهای توابع دو متغیره اند، C^1 و یک به یک باشد.

حال فرمول (۸) را بر مختصات استوانه ای و کروی اعمال می کنیم (ر. ک. بخش ۴۰۱).
ابتدا ژاکوبی نگاشت تغییر به مختصات استوانه ای را حساب می کنیم. چون

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = z$$

داریم

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(r, \theta, z)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta & 0 \\ \sin \theta & r \cos \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$$

لذا، فرمول زیر را خواهیم داشت:

$$(۹) \quad \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{D^*} f(r \cos \theta, r \sin \theta, z) r dr d\theta dz$$

حال دستگاه مختصات کروی را در نظر می‌گیریم. این دستگاه با معادلات زیر مشخص می‌شود:

$$x = \rho \sin \phi \cos \theta, \quad y = \rho \sin \phi \sin \theta, \quad z = \rho \cos \phi$$

بنابراین، داریم

$$\frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} = \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \\ \cos \phi & 0 & -\rho \sin \phi \end{vmatrix}$$

با بسط نسبت به سطر آخر، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \frac{\partial(x, y, z)}{\partial(\rho, \theta, \phi)} &= \cos \phi \begin{vmatrix} -\rho \sin \phi \sin \theta & \rho \cos \phi \cos \theta \\ \rho \sin \phi \cos \theta & \rho \cos \phi \sin \theta \end{vmatrix} \\ &\quad - \rho \sin \phi \begin{vmatrix} \sin \phi \cos \theta & -\rho \sin \phi \sin \theta \\ \sin \phi \sin \theta & \rho \sin \phi \cos \theta \end{vmatrix} \\ &= -\rho^2 \cos^2 \phi \sin \phi \sin^2 \theta - \rho^2 \cos^2 \phi \sin \phi \cos^2 \theta \\ &\quad - \rho^2 \sin^3 \phi \cos^2 \theta - \rho^2 \sin^3 \phi \sin^2 \theta \\ &= -\rho^2 \cos^2 \phi \sin \phi - \rho^2 \sin^3 \phi \\ &= -\rho^2 \sin \phi \end{aligned}$$

لذا، به فرمول زیر می‌رسیم:

$$(۱۰) \quad \int_D f(x, y, z) dx dy dz = \int_{D^*} f(\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi) \rho^2 \sin \phi d\rho d\theta d\phi$$

برای اثبات برقراری (۱۰)، باید نشان داد که تبدیل S بر مجموعه D^* ، جز مجموعه‌ای که اجتماع تعدادی متناهی نمودار توابع پیوسته است، یک به یک می‌باشد. این امر را به عنوان تمرین رها می‌کنیم (ر.ک. تمرین ۱۸).

مثال ۶. انتگرال $\int_D \exp(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} dV$ را در صورتی حساب کنید که D گوی یکه در \mathbb{R}^3 باشد.

ابتدا توجه کنید که انتگرالگیری از این تابع با انتگرالهای مکرر آسان نیست (سعی کنید). لذا، تغییر متغیر می‌دهیم. ظاهراً "مختصات قطبی مناسب‌اند"، زیرا تمام کمیت $x^2 + y^2 + z^2$ را می‌توان به یک متغیر، یعنی ρ^2 ، بدل کرد. اگر D^* چنان ناحیه‌ای باشد که

$$0 \leq \rho \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

می‌توان فرمول (۱۰) را به کار برد و نوشت

$$\int_D \exp(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2} dV = \int_{D^*} \rho^2 e^{\rho^3} \sin \phi \, \rho \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

این انتگرال مساوی انتگرال مکرر

$$\begin{aligned} \int_0^1 \int_0^\pi \int_0^{2\pi} e^{\rho^3} \rho^2 \sin \phi \, d\theta \, d\phi \, d\rho &= 2\pi \int_0^1 \int_0^\pi e^{\rho^3} \rho^2 \sin \phi \, d\phi \, d\rho \\ &= -2\pi \int_0^1 \rho^2 e^{\rho^3} [\cos \phi]_0^\pi \, d\rho \\ &= 4\pi \int_0^1 e^{\rho^3} \rho^2 \, d\rho = \frac{4}{3}\pi \int_0^1 e^{\rho^3} (3\rho^2) \, d\rho \\ &= \left[\frac{4}{3}\pi e^{\rho^3} \right]_0^1 = \frac{4}{3}\pi(e - 1) \end{aligned}$$

است.

مثال ۷. فرض کنید D گویی به شعاع R و مرکز $(0, 0, 0)$ در \mathbb{R}^3 باشد. در این صورت $\int_D dx \, dy \, dz$ حجم D می‌باشد. این انتگرال را می‌توان با تحویل به انتگرال مکرر (مثال ۱، بخش ۶.۵) یا گرفتن D به عنوان یک حجم دوار حساب کرد، ولی ما در اینجا آن را با مختصات کروی حساب می‌کنیم. خواهیم داشت

$$\int_D dx \, dy \, dz = \int_0^R \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \rho^2 \sin \phi \, d\rho \, d\theta \, d\phi$$

$$= \frac{R^3}{3} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sin \phi \, d\theta \, d\phi = \frac{2\pi R^3}{3} \int_0^\pi \sin \phi \, d\phi$$

$$= \frac{2\pi R^3}{3} \{ -(\cos(\pi) - \cos(0)) \} = \frac{4\pi R^3}{3}$$

که فرمول آشنای حجم یک کره^۳ توپر است .

تمرینات

۱. فرض کنید D دایره^۴ یکه باشد . انتگرال

$$\int_D \exp(x^2 + y^2) \, dx \, dy$$

را با رفتن به مختصات قطبی حساب کنید .

۲. فرض کنید D ناحیه^۵ $0 \leq y \leq x$ و $0 \leq x \leq 1$ باشد . انتگرال

$$\int_D (x + y) \, dx \, dy$$

را با تغییر متغیر $x = u + v, y = u - v$ حساب کنید . جواب خود را با محاسبه^۶ مستقیم انتگرال به وسیله^۷ یک انتگرال مکرر امتحان نمایید .

۳. فرض کنید $T(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ نگاشت^۸ تعریف شده با $T(u, v) = (4u, 2u + 3v)$ باشد . همچنین ، D^* مستطیل $[0, 1] \times [1, 2]$ باشد . $D = T(D^*)$ را یافته و انتگرالهای

$$(A) \int_D xy \, dx \, dy \quad (B) \int_D (x - y) \, dx \, dy$$

با تغییر متغیر و محاسبه^۹ انتگرالهایی روی D^* محاسبه نمایید .

۴. تمرین ۳ را به ازای $T(u, v) = (u, v(1 + u))$ تکرار نمایید .

۵. انتگرال

$$\int_D \frac{dx \, dy}{\sqrt{1 + x + 2y}}$$

را ، که در آن $D = [0, 1] \times [0, 1]$ ، با قرار دادن $T(u, v) = (u, v/2)$ و محاسبه^{۱۰} انتگرالی روی D^* که $D = T(D^*)$ حساب کنید .

۶. تعریف کنید $T(u, v) = (u^2 - v^2, 2uv)$. همچنین ، D^* مجموعه^{۱۱} (u, v) هایی باشد که

۶. فرض کنید $T(u, v)$ مثل تمرین ۶ باشد. با این تغییر متغیر، انتگرال $\int_D dx dy$ را محاسبه نمایید.

۷. فرض کنید $T(u, v)$ مثل تمرین ۶ باشد. با این تغییر متغیر، انتگرال

$$\int_D \frac{dx dy}{\sqrt{x^2 + y^2}}$$

را محاسبه نمایید.

۸. فرض کنید D^* یک ناحیه از نوع ۱ در صفحه uv باشد که به ازای $a \leq u \leq b$ به

$$v = g(u), \quad v = h(u) \leq g(u)$$

محدود شده است. همچنین، $T: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ تبدیل داده شده با

$$x = u, \quad y = \psi(u, v)$$

باشد که در آن ψ ، C^1 بوده و $\partial\psi/\partial v$ هرگز صفر نیست. و نیز $T(D^*) = D$ یک ناحیه

از نوع ۱ باشد. نشان دهید هرگاه $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_D f(x, y) dx dy = \int_{D^*} f(u, \psi(u, v)) \left| \frac{\partial\psi}{\partial v} \right| du dv$$

۹. مساحت داخل منحنی $r = 1 + \sin \theta$ را بیابید.

۱۰. $\int_0^1 \int_0^2 xy dy dx$ را به صورت انتگرالی روی مثلث D^* ، که مجموعه (u, v) هایی

است که $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq u$ ، بیان دارید. (راهنمایی. نگاهی یک به یک مانند

T از D^* بروی ناحیه انتگرالگیری داده شده بیابید.)

(ب) این انتگرال را مستقیماً روی D^* محاسبه نمایید.

*۱۱. فرض کنید D ناحیه محدود به $x^{3/2} + y^{3/2} = a^{3/2}$ ، به ازای $x \geq 0, y \geq 0$ ، و محورهای

مختصات $x = 0, y = 0$ باشد. $\int_D f(x, y) dx dy$ را به صورت انتگرالی روی مثلث D^* ، که

مجموعه نقاط $0 \leq u \leq a, 0 \leq v \leq a - u$ است، بیان دارید.

۱۲. فرض کنید D قرص یک باشد. $\int_D (1 + x^2 + y^2)^{3/2} dx dy$ را به صورت انتگرالی روی مستطیل

$[0, 1] \times [0, 2\pi]$ بیان داشته و آن را محاسبه نمایید.

۱۳. با استفاده از مختصات قطبی، مساحت محدود به لمنیسکات $(x^2 + y^2)^2 = 2a^2(x^2 - y^2)$

را بیابید.

۱۴. تمرین ۱۱ از بخش ۳.۵ را با استفاده از تغییر متغیر حل کرده و دو نتیجه را باهم

مقایسه نمایید.

*۱۵. یک تغییر متغیر می‌تواند در یافتن مقدار یک انتگرال مجازی روی ناحیه بی‌کران \mathbb{R}^2

ما را یاری کند. انتگرال

$$\int_{\mathbb{R}^2} e^{-x^2-y^2} dx dy$$

را با تغییر به مختصات قطبی حساب کنید. آیا این انتگرال را می‌شود مستقیماً حساب کرد (ر. ک. تمرین ۲، بخش ۵.۵)؟

۱۶. فرض کنید $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$T(u, v, w) = (u \cos v \cos w, u \sin v \cos w, u \sin w)$$

(آ) نشان دهید که T بروی کره $u^2 = 1$ یکه است. یعنی، هر (x, y, z) که $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ را می‌توان به ازای (u, v, w) ای به صورت $(x, y, z) = T(u, v, w)$ نوشت.
(ب) نشان دهید T یک به یک نیست.

۱۷. معادلات منحنیها و سطوح زیر را در مختصات کروی و استوانه‌ای بنویسید.

$$(ب) \quad z^2 = x^2 + y^2 \quad (آ) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

$$(پ) \quad \text{خط } y = x = z \quad (ت) \quad z = \tan^{-1} \frac{y}{x}, x^2 + y^2 = 1$$

۱۸. نشان دهید که نگاشت تغییر به مختصات کروی $S(\rho, \theta, \phi) = (\rho \sin \phi \cos \theta, \rho \sin \phi \sin \theta, \rho \cos \phi)$ جز بر مجموعه‌ای که اجتماع تعدادی متناهی نمودار توابع پیوسته است، یک به یک می‌باشد.

۱۹. سطح $\sqrt{x^2 + y^2 + z^2} = \rho = \theta$ را توصیف کنید. نمایش دکارتی این سطح چیست؟

۲۰. سطح $r = z \cos \theta$ را در مختصات قائم توصیف کنید.

۲۱. فرض کنید D گوی یکه باشد. انتگرال

$$\int_D \frac{dx dy dz}{\sqrt{2 + x^2 + y^2 + z^2}}$$

را با تغییر متغیر مناسبی حساب کنید.

۲۲. انتگرال $\iint_A \frac{1}{(x^2 + y^2)^2} dx dy$ را در صورتی حساب کنید که A با شرطهای $x^2 + y^2 \leq 1$ و $x + y \geq 1$ معین گردد.

*۲۳. فرض کنید D هشت یک اول گوی $x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$ باشد، که در آن $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$

انتگرال مجازی

$$\int_D (x^2 + y^2 + z^2)^{1/4} / \sqrt{z + (x^2 + y^2 + z^2)^2} dx dy dz$$

را با تغییر متغیر حساب کنید.

۲۴. انتگرال $\iint_D x^2 dx dy$ را در صورتی حساب کنید که D با شرایط $0 \leq x \leq y$ و $x^2 + y^2 \leq 1$ معین گردد.

* ۲۵. فرض کنید D ناحیه بی کران تعریف شده با مجموعه (x, y, z) هایی باشد که $x^2 + y^2 + z^2 \geq 1$. انتگرال مجازی

$$\int_D \frac{dx dy dz}{(x^2 + y^2 + z^2)^2}$$

را با تغییر متغیر حساب کنید.

۲۶. انتگرالهای زیر را با استفاده از مختصات استوانه‌ای حساب کنید.

(آ) $\iiint_B z dx dy dz$ ، که در آن B ناحیه داخل استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و بالای صفحه xy و زیر مخروط $z = (x^2 + y^2)^{1/2}$ است.

(ب) $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} dx dy dz$ ، که در آن D ناحیه مشخص شده با شرایط $\frac{1}{2} \leq z \leq 1$ و $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ است.

۲۷. انتگرال $\iint_B (x + y) dx dy$ را حساب کنید، که در آن B مستطیل واقع در صفحه xy به رئوسهایی $(0, 1)$ ، $(1, 0)$ ، $(3, 4)$ ، و $(4, 3)$ است.

۲۸. انتگرال $\iint_D (x + y) dx dy$ را حساب کنید، که در آن D مربعی به رئوسهای $(0, 0)$ ، $(1, 2)$ ، $(3, 1)$ ، و $(2, -1)$ است.

۲۹. فرض کنید E بیضی گون $1 \leq (x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2)$ باشد، که در آن a ، b ، و c مثبت‌اند.

(آ) حجم E را بیابید.

(ب) انتگرال $\iiint_E [(x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2)] dx dy dz$ را حساب کنید. (راهنمایی: تغییر متغیر داده و سپس از مختصات کروی استفاده نمایید.)

تمرینات دوره‌ای برای فصل ۵

۱. انتگرالهای زیر را حساب کنید:

$$\int_0^3 \int_{-x^2+1}^{x^2+1} xy dy dx \quad (\bar{A})$$

(ب) $\int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 (x+y)^2 dy dx$

(پ) $\int_0^1 \int_{e^x}^{e^{2x}} x \ln y dy dx$

۲. ترتیب انتگرالگیری انتگرالها در تمرین ۱ را عکس کرده و آنها را حساب کنید.

۳. حجم بین سطوح $z = x^2 + y^2$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 2$ را بیابید.

۴. حجم محصور به مخروط $x^2 + y^2 = z^2$ و صفحه $2z - y - 2 = 0$ را بیابید.

۵*. با استفاده از ایده‌های تمرین ۲، بخش ۵.۵، انتگرال $\int_{\mathbb{R}^2} f(x, y) dx dy$ را در صورتی

حساب کنید که $f(x, y) = 1/(1 + x^2 + y^2)^{3/2}$ (راهنمایی). فرض کنید تغییر متغیر

و قضیه فوبینی برای انتگرالهای مجازی معتبرند.

۶*. در تمرین ۲، بخش ۵.۵، انتگرالها روی نواحی بی‌کران را مطرح کردیم. با رفتن

به مختصات قطبی، نشان دهید که $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$. (راهنمایی). با استفاده از

قضیه فوبینی (فرض کنید بفرار است)، نشان دهید که

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2 - y^2} dx dy$$

و از تمرین ۱۵، بخش ۸.۵، استفاده نمایید.

۷*. انتگرال $\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz$ را در صورتی حساب کنید که $f(x, y, z) = \exp(-(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2})$

$$+ z^2)^{3/2}$$

۸*. انتگرال $\int_{\mathbb{R}^3} f(x, y, z) dx dy dz$ را در صورتی حساب کنید که

$$f(x, y, z) = \frac{1}{(1 + (x^2 + y^2 + z^2)^{3/2})^{3/2}}$$

۹. یک سوراخ استوانه‌ای به قطر ۱ در کره‌ای به شعاع ۲ تعبیه شده است. با این فرض که

محور استوانه محور کره است، حجم جسم باقیمانده را بیابید.

۱۰. فرض کنید C_1 و C_2 دو استوانه با امتداد نامتناهی و به قطر ۲ باشند که محورهایشان

به ترتیب محورهای x و y می‌باشند. حجم $C_1 \cap C_2$ را پیدا نمایید.

۱۱*. فرض کنید D ناحیه بی‌کرانی بر \mathbb{R}^2 باشد که عبارت است از مجموعه (x, y) هایی که

$0 \leq x < \infty$ ، $0 \leq y \leq x$. فرض کنید که $f(x, y) = x^{-3/2} e^{y-x}$. آیا انتگرال مجازی

$\int_D f(x, y) dx dy$ وجود دارد؟

۱۲. انتگرال مکرر $\int_0^1 \int_1^{-x} \int_x^1 f(x, y, z) dz dy dx$ را به صورت انتگرالی روی یک ناحیه در \mathbb{R}^3

نوشته و سپس پنج شکل دیگر آن را با تغییر ترتیب انتگرالگیری به دست آورید.

۱۳. انتگرالهای مکرر زیر را حساب کنید.

$$\int_0^{\infty} \int_0^y x e^{-y^3} dx dy \quad (\text{ا})$$

$$\int_0^1 \int_y^{y^3} e^{x/y} dx dy \quad (\text{ب})$$

$$\int_0^{\pi/2} \int_0^{(\arcsin y)/y} y \cos xy dx dy \quad (\text{پ})$$

۱۴. انتگرالهای مکرر زیر را حساب کنید.

$$\int_0^1 \int_0^z \int_0^y xy^2 z^3 dx dy dz \quad (\text{ا})$$

$$\int_0^1 \int_0^y \int_0^{x/\sqrt{3}} \frac{x}{x^2 + z^2} dz dx dy \quad (\text{ب})$$

$$\int_1^2 \int_1^z \int_{1/y}^2 yz^2 dx dy dz \quad (\text{پ})$$

۱۵. حجم محدود به $x/a + y/b + z/c = 1$ و صفحات مختصات را بیابید.۱۶. حجم تعیین شده به وسیله $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$ و $z \leq 6 - x^2 - y^2$ را پیدا نمایید.۱۷. (ا) فرض کنید $\nabla \cdot \mathbf{F} = 3x^2 y \mathbf{i} + zx \mathbf{j} + e^{xy} \mathbf{k}$ و $\nabla \times \mathbf{F}$ را محاسبه نمایید.(ب) آیا رابطه $\nabla \times (\nabla \times \mathbf{F}) = \mathbf{0}$ همیشه درست است؟

۱۸. در قسمتهای (ا) تا (ت) زیر، تغییر متغیر خواسته شده را بدهید. (انتگرال را حساب نکنید.)

$$\int_0^1 \int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{(1-y^2)}}^{\sqrt{(1-y^2)}} (x^2 + y^2)^{1/2} dx dy dz \quad (\text{ا})$$

$$\int_{-1}^1 \int_{-\sqrt{(1-y^2)}}^{\sqrt{(1-y^2)}} \int_{-\sqrt{(4-x^2-y^2)}}^{\sqrt{(4-x^2-y^2)}} xyz dz dx dy \quad (\text{ب})$$

$$\int_{-\sqrt{2}}^{\sqrt{2}} \int_{-\sqrt{(2-y^2)}}^{\sqrt{(2-y^2)}} \int_{\sqrt{(x^2+y^2)}}^{\sqrt{(4-x^2-y^2)}} z^2 dz dx dy \quad (\text{پ})$$

$$\int_0^1 \int_0^{\pi/4} \int_0^{2\pi} \rho^3 \sin 2\phi d\theta d\phi d\rho \quad (\text{ت})$$

۱۹. انتگرال $\iint_B (x^4 + 2x^2 y^2 + y^4) dx dy$ را در صورتی حساب کنید که B بخشی از قرص بهشعاع ۲ (به مرکز $(0, 0)$) در ربع اول باشد.

۲۰. در انتگرال

$$\int_0^2 \int_{y/2}^1 (x+y)^2 dx dy$$

ترتیب انتگرالگیری را تغییر داده و آن را حساب کنید .

۲۱. انتگرال $\iint_B e^{-x^2-y^2} dx dy$ را در صورتی بیابید که B مرکب از نقاطی مانند (x, y) باشد

به طوری که $x^2 + y^2 \leq 1$ و $y \leq 0$. جواب خود را تعبیر هندسی نمایید .

۲۲. در انتگرال

$$\int_0^1 \int_{y/2}^1 (x^2 + y^3 x) dx dy$$

ترتیب انتگرالگیری را تغییر داده و آن را حساب کنید .

۲۳. فرض کنید D ناحیه‌ای در صفحه xy باشد که داخل دایره $x^2 + y^2 = 1$ باشد .

در هر مورد زیر ، انتگرال $\iint_D f(x, y) dx dy$ را محاسبه نمایید .

$$f(x, y) = x^3 y^3 \quad (\text{پ}) \quad f(x, y) = x^2 y^2 \quad (\text{ب}) \quad f(x, y) = xy \quad (\text{آ})$$

۲۴. انتگرال $\iiint_D (x^2 + y^2 + z^2) xyz dx dy dz$ را روی هر یک از نواحی زیر حساب کنید .

$$D = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} \quad \text{کره } (\text{آ})$$

$$D = \{(x, y, z) | r \geq 0 \text{ و } x^2 + y^2 + z^2 \leq R^2\} \quad \text{نیمکره } (\text{ب})$$

$$D = \{(x, y, z) | z^2 + y^2 + z^2 \leq R^2 \text{ و } z \geq 0, y \geq 0, x \geq 0\} \quad \text{هشت یک } (\text{پ})$$

۲۵. فرض کنید C ناحیه $\{(x, y, z) | \sqrt{x^2 + y^2} \leq z \leq 1\}$ مخروطی شکل ، و انتگرال

$$\iiint_C (1 + \sqrt{x^2 + y^2}) dx dy dz$$

۲۶. فرض کنید ρ, θ, ϕ مختصات کروی در \mathbb{R}^3 بوده ، و تابع پیوسته $\rho = f(\theta, \phi)$ سطحی حول

مبداء را توصیف نماید ، نشان دهید که حجم محصور به این سطح عبارت است از

$$V = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi (f(\theta, \phi))^3 \sin \phi d\phi d\theta$$

فرض کنید (۱) $f(\theta, \phi) = f(2\pi, \phi)$ ، (۲) به ازای $0 \leq \phi \leq \pi$ و $0 \leq \theta < 2\pi$ ، $f(\theta, \phi) > 0$ ؛

و (۳) $f(\theta, 0)$ و $f(\theta, \pi)$ ثابت باشند .

۲۷. انتگرال $\iint_B \exp[(y-x)/(y+x)] dx dy$ را در صورتی حساب کنید که B درون مثلثی به

به رئوس $(0, 0)$ ، $(0, 1)$ ، و $(1, 0)$ باشد .

۲۸. فرض کنید E بیضی گون توپر باشد : $E = \{(x, y, z) | (x^2/a^2) + (y^2/b^2) + (z^2/c^2) \leq 1\}$ ،

که در آن $a > 0$ ، $b > 0$ ، و $c > 0$. انتگرال

$$\iiint xyz \, dx \, dy \, dz$$

را

(آ) روی تمام بیضی گون؛ و

(ب) روی بخشی از آن که در ربع اول واقع است:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} \leq 1, \quad z \geq 0, \quad y \geq 0, \quad x \geq 0$$

(ر.ک. تمرین ۲۹ از بخش ۸.۵) حساب کنید.

۲۹. فرض کنید B ناحیه‌ای در ربع اول باشد که به منحنیهای $xy = 1$ ، $xy = 3$ ، $x^2 - y^2 = 1$ و $x^2 - y^2 = 4$ محدود است. انتگرال $\iint_B (x^2 + y^2) \, dx \, dy$ را محاسبه نمایید.

در تمرینهای ۳۰، ۳۱، و ۳۲ از مطلب زیر استفاده کنید: هرگاه چگالی جسمی در مجاورت

نقطه (x, y, z) با تابع $\rho(x, y, z)$ داده شده باشد، آنگاه جرم کل جسم مساوی است با

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

که در آن V ناحیه‌ای از فضا است که توسط جسم اشغال شده است. (توجه کنید که واحدهای

سنجش حجم در چگالی باید با واحدهای ناحیه انتگرالگیری سازگار باشند.)

۳۰. فرض کنید چگالی یک کره توپر به شعاع R مساوی $(1 + d^3)^{-1}$ باشد، که در آن d

فاصله تا مرکز کره است. جرم کل کره را پیدا نمایید.

۳۱. چگالی یک غشاء کروی به شعاع داخلی ۱ متر و شعاع خارجی ۲ متر مساوی $0.4 d^2 \text{ g/cm}^3$ است، که در آن d فاصله تا مرکز کره به متر است. جرم کل غشاء را پیدا کنید.

۳۲. اگر غشاء تمرین ۳۱ در یک بشکه پر از آب خالص بیفتد، آیا در آن شناور می ماند؟

اگر غشاء سوراخ باشد چطور؟ (فرض کنید چگالی آب دقیقاً 1 g/cm^3 باشد.)تمرینهای ۳۳، ۳۴، و ۳۵ مبتنی بر تعریف زیرند: مقدار متوسط تابع f روی ناحیه W به

صورت زیر تعریف می شود:

$$\bar{f} = \frac{\iiint_W f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz}{\iiint_W dx \, dy \, dz}$$

۳۳. دما در نقاط مکعب $C = \{(x, y, z) | -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1, -1 \leq z \leq 1\}$ مساوی

d^2 32 است، که در آن d فاصله تا مبدأ می‌باشد.

(آ) دمای متوسط چقدر است؟

(ب) در چه نقاطی از مکعب دما مساوی دمای متوسط است؟

۳۴. فرض کنید W یک ناحیهٔ همبند مسیری باشد. یعنی، به ازای هر دو نقطه از W ، یک مسیر پیوسته وجود دارد که آنها را به هم وصل می‌کند. اگر f تابع پیوسته‌ای بر W باشد، با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین نشان دهید دست کم یک نقطه در W هست که در آن مقدار f مساوی متوسط f روی W است. (این را با قضیهٔ مقدار میانگین برای انتگرالهای مضاعف که به صورت قضیهٔ ۵ بیان شد مقایسه نمایید.) اگر W همبند نباشد، چه رخ می‌دهد؟

۳۵. مرکز جرم یک جسم نقطه‌ای است که مختصاتش متوسط مختصات جسم است که طبق چگالی جرم وزندار شده‌اند. یعنی، اگر جسمی ناحیهٔ V را با چگالی $\rho(x, y, z)$ اشغال کرده باشد، مرکز جرم نقطهٔ $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ است، که در آن

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_V x \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\bar{y} = \frac{1}{M} \iiint_V y \rho(x, y, z) dx dy dz$$

$$\bar{z} = \frac{1}{M} \iiint_V z \rho(x, y, z) dx dy dz$$

و M جرم کل

$$M = \iiint_V \rho(x, y, z) dx dy dz$$

می‌باشد. مرکز جرم نیمکرهٔ توپر

$$V = \{(x, y, z) | x^2 + y^2 + z^2 \leq 1 \text{ and } z \geq 0\}$$

را در صورتی بیابید که چگالی ثابت باشد.

فصل ششم

انتگرالها روی مسیرها و سطوح

به نظر من: (۱) بخشهای کوچکی از فضا شبیه قسمتهای کوچکی از یک سطح اند که به طور متوسط تخت است؛ (۲) خاصیت خمیده شدن یا تغییر شکل یافتن پیوسته از یک قسمت از فضا به قسمت دیگر به وسیله موج انتقال می یابد؛ (۳) این تغییر انحنای فضا در واقع همان چیزی است که در پدیده حرکت ماده، چه ملموس یا غیرملموس، رخ می دهد؛ (۴) در این جهان فیزیکی چیزی جز این تغییر، تحت احتمالا "قانون پیوستگی، رخ نخواهد داد.

دبلیو. کا. کلیفورد (۱۸۷۰)

در فصل ۵، انتگرالگیری روی نواحی در \mathbb{R}^2 و \mathbb{R}^3 بررسی کردیم. مثلاً، طرز محاسبه انتگرالهایی مانند

$$\int_D f(x, y) dA$$

که در آن D ناحیه ای در \mathbb{R}^2 است، را آموختیم. در این فصل، انتگرالگیری روی مسیرها و سطوح را مورد بحث قرار می دهیم. این امر برای فهمیدن فصل ۷ اساسی است. در واقع، فصل مذکور نتایج ما در باب حساب دیفرانسیل برداری (فصل ۳) و حساب انتگرال برداری را با اثبات قضایای عمیق گرین^۱، گاوس^۲، و استوکس مربوط می سازد. در آن فصل چند

کاربرد فیزیکی مهم نیز بررسی خواهند شد.

۱.۶ انتگرال مسیری

در این بخش مفهوم انتگرال مسیری را معرفی می‌کنیم؛ این یکی از طرقی است که می‌توان انتگرال توابع یک متغیره را به انتگرال توابع چندمتغیره تعمیم داد. علاوه بر تعمیمات در فصل ۵، تعمیمات دیگری نیز وجود دارند که در بخشهای بعدی مطرح خواهند شد.

فرض کنیم تابع اسکالر $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ داده شده باشد؛ در نتیجه، f نقاط \mathbb{R}^3 را به اعداد حقیقی می‌فرستد. بسیار مفید است اگر بتوان از تابع f در امتداد مسیر $\sigma: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ که $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ، انتگرال گرفت. برای انگیزش این مفهوم، فرض می‌کنیم نقش σ نمایش یک سیم باشد. اگر $f(x, y, z)$ چگالی جرم در (x, y, z) باشد، ممکن است بخواهیم جرم کل سیم را بدانیم. اگر $f(x, y, z)$ دما باشد، ممکن است بخواهیم دمای متوسط در امتداد سیم را بدانیم. هر دو نوع مسئله به انتگرالگیری از $f(x, y, z)$ روی σ نیاز دارد.

تعریف. *انتگرال مسیری یا انتگرال* $f(x, y, z)$ *در امتداد مسیر* σ *وقتی تعریف می‌شود که* $\sigma: I = [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ *بوده و تابع مرکب* $f(x(t), y(t), z(t))$ *بر* I *پیوسته باشد. این انتگرال را با معادله*

$$\int_{\sigma} f \, ds = \int_a^b f(x(t), y(t), z(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt$$

تعریف می‌کنیم. گاهی اوقات $\int_{\sigma} f \, ds$ با $\int_{\sigma} f(x, y, z)$ نموده می‌شود. توجه کنید که طریقه دیگر نوشتن تعریف عبارت است از

$$\int_{\sigma} f \, ds = \int_a^b f(\sigma(t)) \|\sigma'(t)\| \, dt$$

اگر $\sigma(t)$ فقط قطعه قطعه C^1 یا $f(\sigma(t))$ قطعه قطعه پیوسته باشد، می‌توان با شکستن $[a, b]$ به قطعاتی که روی آنها $\|\sigma'(t)\| f(\sigma(t))$ پیوسته باشد و جمع‌بندی انتگرالها روی این قطعات، $\int_{\sigma} f \, ds$ را تشکیل داد.

اولاً توجه کنید که وقتی $f = 1$ ، تعریف طول قوس σ به دست می‌آید (ر. ک. بخش ۲.۳) و ثانیاً برای معنی داشتن تعریف فوق کافی است f بر منحنی نقش C از σ تعریف شده باشد

و لازم نیست بر تمام فضا چنین باشد.

مثال ۱. فرض کنیم σ مارپیچ $\mathbb{R}^3 \rightarrow [0, 2\pi] : \sigma : (\cos t, \sin t, t) \rightarrow t$ باشد (ر. ک. شکل ۱۰۳). و نیز $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$. برای محاسبه انتگرال $\int_{\sigma} f(x, y, z) ds$ ابتدا می بینیم که

$$\begin{aligned} \|\sigma'(t)\| &= \sqrt{\left[\frac{d(\cos t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{d(\sin t)}{dt}\right]^2 + \left[\frac{dt}{dt}\right]^2} \\ &= \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t + 1} = \sqrt{2} \end{aligned}$$

با گذاردن به جای x, y, z و در امتداد σ به دست می آوریم

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 = \cos^2 t + \sin^2 t + t^2 = 1 + t^2$$

از این نتیجه می شود که

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} f(x, y, z) ds &= \int_0^{2\pi} (1 + t^2) \sqrt{2} dt = \sqrt{2} \left[t + \frac{t^3}{3} \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{2\sqrt{2}\pi}{3} (3 + 4\pi^2) \end{aligned}$$

هرگاه مارپیچ را یک سیم و $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ را چگالی جرم بگیریم، آنگاه جرم کل سیم عبارت است از $(2\sqrt{2}\pi)(3 + 4\pi^2)/3$.

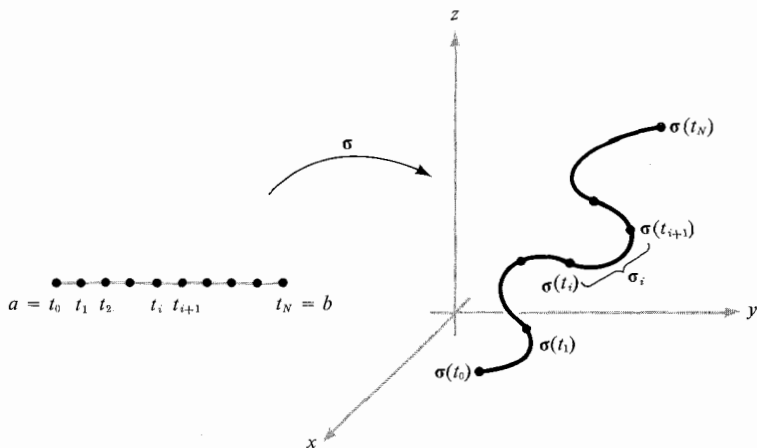
برای انگیزش تعریف انتگرال مسیری، مجموعه‌های "شبه ریمان" S_N را به همان طریقی که قبلاً" برای تعریف طول قوس انجام دادیم در نظر می گیریم. برای سادگی، فرض کنیم σ بر C^1 باشد. بازه $I = [a, b]$ را با افراز

$$a = t_0 < t_1 < \dots < t_N = b$$

تقسیم می کنیم. این افراز σ را به مسیره‌های σ_i تجزیه می کند (شکل ۱۰۶). که بر $[t_i, t_{i+1}]$ به ازای $0 \leq i \leq N - 1$ تعریف شده است. طول قوس σ_i را با Δs_i نشان می دهیم. لذا،

$$\Delta s_i = \int_{t_i}^{t_{i+1}} \|\sigma'(t)\| dt$$

وقتی N بزرگ باشد، طول قوس Δs_i کوچک بوده و $f(x, y, z)$ به ازای نقاط واقع بر σ_i تقریباً



شکل ۱۰۱.۰۶

شکستن σ به مسیرهای کوچکتر σ_i

ثابت است. مجموعه‌های

$$S_N = \sum_{i=0}^{N-1} f(x_i, y_i, z_i) \Delta S_i$$

را در نظر می‌گیریم، که در آنها به ازای $t \in [t_i, t_{i+1}]$ ای $(x_i, y_i, z_i) = \sigma(t)$. این مجموعه‌ها اساساً "مجموعه‌های ریمان‌اند"، و از نظریه آنها می‌توان نشان داد که

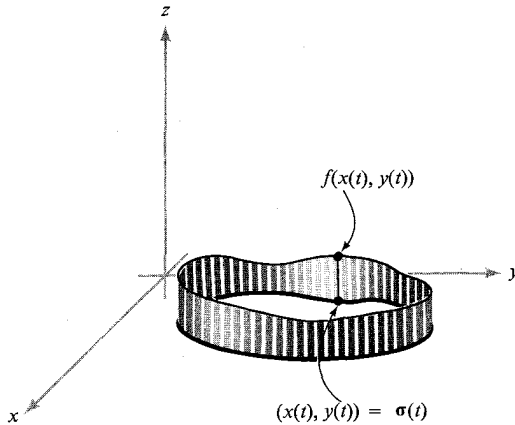
$$\lim_{N \rightarrow \infty} S_N = \int_I f(x(t), y(t), z(t)) \|\sigma'(t)\| dt = \int_{\sigma} f(x, y, z) ds$$

لذا، انتگرال مسیری را می‌توان به صورت حد مجموعه‌های ریمان بیان کرد.

یک حالت خاص مهم انتگرال مسیری وقتی است که مسیر σ یک منحنی مسطح را توصیف کند. این حالت را به تفصیل بررسی می‌کنیم. فرض کنیم تمام نقاط $\sigma(t)$ در صفحه xy واقع باشند. همچنین، f تابعی حقیقی از دو متغیر باشد. انتگرال مسیری f در امتداد σ مساوی است با

$$\int_{\sigma} f(x, y) ds = \int_a^b f(x(t), y(t)) \sqrt{x'(t)^2 + y'(t)^2} dt$$

وقتی $f(x, y) \geq 0$ ، این انتگرال دارای تعبیر هندسی طبیعی به صورت "مساحت یک حصار" است. می‌توان یک "حصار" به قاعدهٔ نقش σ و ارتفاع $f(x, y)$ در (x, y) ساخت (شکل ۲۰۱۰۶). اگر σ فقط یکبار دور نقش بپیچد، انتگرال $\int_{\sigma} f(x, y) ds$ مساحت یک طرف این



شکل ۲۰۱۰۶

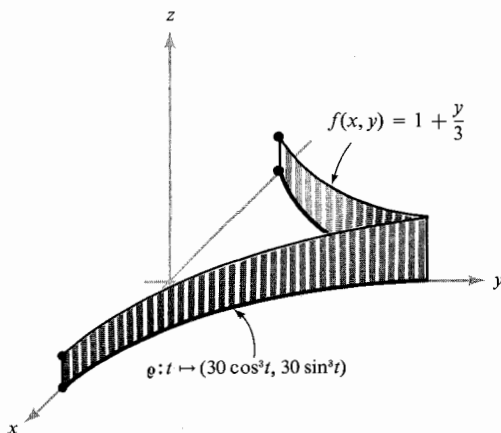
انتگرال مسیری به عنوان مساحت یک حصار

حصار است. برخواننده است این تعبیر را با استفاده از استدلالی شبیه آنکه در توجیه فرمول طول قوس به کار رفت توجیه نماید.

مثال ۲. عمهٔ تام سایر از وی خواسته است که دو طرف حصار قدیمی شکل ۳۰۱۰۶ را سفید کاری کند. تام تخمین می‌زند که به ازای هر 25 فوت مربع سفیدکاری از شخصی که این کار را برایش می‌کند 5 سنت بگیرد. با این فرض که عمه اش مواد سفیدکن را مجانی بدهد، تام چقدر می‌تواند درآمد داشته باشد؟

از شکل ۳۰۱۰۶ معلوم می‌شود که قاعدهٔ حصار در ربع اول مسیر $\mathbb{R}^2 \rightarrow [0, \pi/2]$ ، ρ :

$$f(x, y) = 1 + y/3 \text{ مساوی } (x, y) \text{ در حصار در } t \mapsto (30 \cos^3 t, 30 \sin^3 t)$$



شکل ۳.۱.۶

حصار تام سایر

می باشد. مساحت یک طرف نیمی از حصار مساوی است با انتگرال $\int_{\rho} f(x, y) ds = \int_{\rho} (1 + y/3) ds$ چون $\rho'(t) = (-90 \cos^2 t \sin t, 90 \sin^2 t \cos t)$ داریم $\|\rho'(t)\| = 90 \sin t \cos t$ ، لذا، انتگرال مساوی است با

$$\begin{aligned} \int_{\rho} \left(1 + \frac{y}{3}\right) ds &= \int_0^{\pi/2} \left(1 + \frac{30 \sin^3 t}{3}\right) 90 \sin t \cos t dt \\ &= 90 \int_0^{\pi/2} (\sin t + 10 \sin^4 t) \cos t dt \\ &= 90 \left[\frac{\sin^2 t}{2} + 2 \sin^5 t \right]_0^{\pi/2} \\ &= 90 \left(\frac{1}{2} + 2 \right) = 225 \end{aligned}$$

لذا، مساحت یک طرف حصار ۴۵۰ فوت مربع است. چون هر دو طرف باید سفیدکاری شوند، برای به دست آوردن مساحت کل باید در ۲ ضرب کنیم، که مساوی ۹۰۰ فوت مربع می شود. با تقسیم بر ۲۵ و ضرب در ۵ معلوم می شود که تام معادل \$1.80 در آمد خواهد داشت.

در فصل ۷، ضمن مطالعه آنالیز برداری، کاربردهای بسیار دیگری از انتگرال مسیری را

خواهیم دید.

در اینجا بررسی انتگرالگیری توابع اسکالر روی مسیره‌ها را پایان می‌دهیم. در بخش بعد، توجه خود را به انتگرالگیری از میدانهای برداری روی مسیره‌ها معطوف خواهیم کرد.

تمرینات

- فرض کنید $f(x, y, z) = y$ و $\sigma(t) = (0, 0, t)$ ، $0 \leq t \leq 1$. ثابت کنید که $\int_{\sigma} f \, ds = 0$.
- انتگرالهای مسیری $\int_{\sigma} f(x, y, z) \, ds$ را در صورتی حساب کنید که
 - $f(x, y, z) = x + y + z$ (آ) و $\sigma: t \mapsto (\sin t, \cos t, t)$ ، $t \in [0, 2\pi]$
 - $f(x, y, z) = \cos z$ ، σ مثل قسمت (آ) و
 - $f(x, y, z) = x \cos z$ ، $\sigma: t \mapsto t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ ، $t \in [0, 1]$.
- انتگرالهای مسیری $\int_{\sigma} f(x, y, z) \, ds$ را در صورتی حساب کنید که
 - $f(x, y, z) = \exp \sqrt{z}$ (آ) و $\sigma: t \mapsto (1, 2, t^2)$ ، $t \in [0, 1]$.
 - $f(x, y, z) = yz$ (ب) و $\sigma: t \mapsto (t, 3t, 2t)$ و $t \in [1, 3]$.
 - $f(x, y, z) = (x + y)/(y + z)$ (پ) و $\sigma: t \mapsto (t, \frac{2}{3}t^{3/2}, t)$ ، $t \in [1, 2]$.
- (آ) نشان دهید که انتگرال مسیری $f(x, y)$ در امتداد مسیری که در مختصات قطبی با $r = r(\theta)$ ، $\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$ ، داده شده است عبارت است از

$$\int_{\theta_1}^{\theta_2} f(r \cos \theta, r \sin \theta) \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta$$
 (ب) طول قوس $r = 1 + \cos \theta$ ، $0 \leq \theta \leq 2\pi$ ، را حساب کنید .
- فرض کنید $f: \mathbb{R}^3 \setminus \{xz\text{-plane}\} \rightarrow \mathbb{R}$ با $f(x, y, z) = 1/y^3$ تعریف شده باشد. انتگرال $\int_{\sigma} f(x, y, z) \, ds$ را در صورتی حساب کنید که $\sigma: [1, e] \rightarrow \mathbb{R}^3$ با $\sigma(t) = (\log t)\mathbf{i} + t\mathbf{j} + 2t\mathbf{k}$ تعریف شده باشد .
- حد زیر را به صورت انتگرال مسیری $f(x, y, z) = xy$ روی مسیری چون σ بر $[0, \pi]$ نوشته و حد

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^{N-1} \cos t_i^* \sin t_{i+1}^* (2 - 2 \cos t_{i+1} \cos t_i - \sin t_{i+1} \sin t_i)^{1/2}$$

را محاسبه نمایید (در اینجا t_1, \dots, t_N افزای از $[0, \pi]$ بوده و $t_i \leq t_i^* \leq t_{i+1}$) .

۷. فرض کنید $f(x, y) = 2x - y$ ، $x = t^4$ ، $y = t^4$ ، $-1 \leq t \leq 1$.

- (آ) انتگرال f را در امتداد این مسیر حساب کرده و جواب را تعبیر هندسی نمایید.
- (ب) تابع طول قوس $s(t)$ را حساب کرده و قسمت (آ) را بر حسب s به دست آورید (می‌توانید به تمرین ۲، بخش ۲۰۳، مراجعه کنید).
- تمرینهای ۸ تا ۱۲ مربوط به کاربرد انتگرال مسیری در تعریف مقدار متوسط یک تابع اسکالر در امتداد یک مسیر است. عدد

$$\frac{\int_{\sigma} f(x, y, z) ds}{l(\sigma)}$$

را مقدار متوسط f در امتداد σ تعریف می‌کنیم. در اینجا $l(\sigma)$ طول مسیر است:

$$l(\sigma) = \int_{\sigma} \|\sigma'(t)\| dt$$

(این مشابه متوسط یک تابع روی یک ناحیه است که در تمرین دوره‌ای ۳۳ در فصل ۵ تعریف شد.)

۸. (آ) با استفاده از مجموعهای ریمان، فرمول مقدار متوسط f در امتداد σ ، $\int_{\sigma} f(x, y, z) ds / l(\sigma)$ را توجیه کنید.

(ب) نشان دهید که مقدار متوسط f در امتداد σ در مثال ۱ مساوی است با $(1 + \frac{4}{3}\pi^2)$.

(پ) در تمرینهای ۲ (آ) و ۲ (ب) فوق، مقدار متوسط f روی منحنیهای داده شده را بیابید.

۹. متوسط مختص γ نقاط واقع بر نیمدایره به معادله پارامتری $\rho: [0, \pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ، $(0, a \sin \theta, a \cos \theta)$ ، $a > 0$ ، θ را بیابید.

۱۰. فرض کنید نیمدایره مثال ۹ از سیمی به چگالی یکنواخت ۲ گرم بر واحد طول ساخته شده باشد.

(آ) جرم کل سیم چقدر است؟

(ب) مرکز جرم این سیم کجاست؟ (ر. ک. تمرین دوره‌ای ۳۵ در فصل ۵).

۱۱. فرض کنید σ مسیر داده شده با $\sigma(t) = (t^2, t, 3)$ به ازای $t \in [0, 1]$ باشد.

(آ) $l(\sigma)$ ، یعنی طول مسیر، را بیابید.

(ب) متوسط مختص γ را در امتداد مسیر σ پیدا کنید.

۱۲. اگر $f: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ قطعه قطعه به طور پیوسته مشتقپذیر باشد، طول نمودار f بر $[a, b]$

را مساوی طول مسیر $t \mapsto (t, f(t))$ به ازای $t \in [a, b]$ تعریف کنید.

(آ) نشان دهید که طول نمودار f بر $[a, b]$ مساوی است با

$$\int_a^b \sqrt{1 + (f'(x))^2} dx$$

(ب) طول نمودار $y = \log x$ را از $x = 1$ تا $x = 2$ پیدا نمایید.

۱۳. جرم یک سیم به شکل اشتراک کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و صفحه $x + y + z = 0$ در صورتی بیابید که چگالی آن در (x, y, z) مساوی $\rho(x, y, z) = x^2$ گرم بر واحد طول سیم باشد.

۱۴. انتگرال $\int_{\sigma} f ds$ را در صورتی حساب کنید که $f(x, y, z) = z$ و به ازای $0 \leq t \leq t_0$ ،
 $\sigma(t) = (t \cos t, t \sin t, t)$

۲.۶ انتگرالهای خط

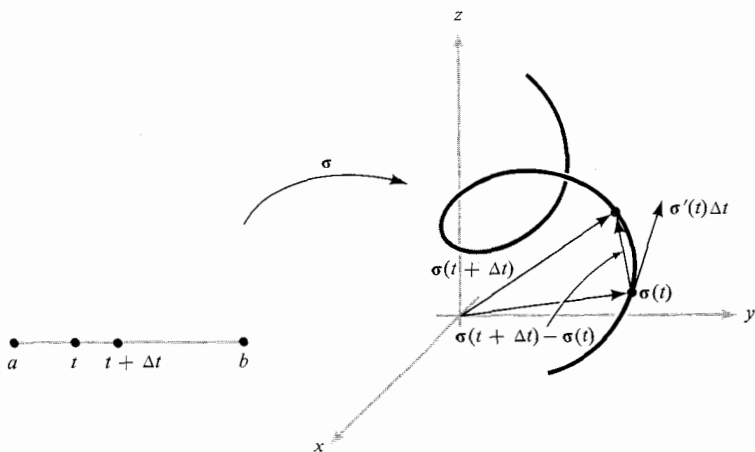
هرگاه \mathbf{F} یک میدان نیرو در فضا باشد، آنگاه یک ذره امتحانی (مثلاً، یک واحد بار کوچک در یک میدان نیروی الکتریکی یا واحد جرم در یک میدان ثقلی) نیروی \mathbf{F} را تحمل می‌کند. فرض کنیم ذره در امتداد نقش مسیر σ تحت اثر \mathbf{F} حرکت نماید. یکی از مفاهیم اساسی در فیزیک کار انجام شده توسط \mathbf{F} بر ذره است وقتی مسیر σ را طی می‌کند. هرگاه σ خط مستقیم تغییر مکان داده شده با بردار \mathbf{d} بوده و \mathbf{F} نیروی ثابتی باشد، آنگاه کار انجام شده توسط \mathbf{F} در حرکت ذره در امتداد مسیر مساوی $\mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$ می‌باشد.

(تغییر مکان در جهت نیرو) \times (نیرو) $= \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}$

به‌طور کلی، اگر مسیر خمیده باشد، می‌توان آن را مرکب از خطوط مستقیم بی‌نهایت کوچک گرفت یا فرض کرد با تعدادی متناهی خط مستقیم تقریب شده است. در این صورت (همانند اثبات فرمولهایی برای طول قوس در بخش ۲.۳ و انتگرال مسیری در بخش ۱۰.۶)، به فرمول زیر برای کار انجام شده توسط میدان نیروی \mathbf{F} بر ذره متحرک در امتداد مسیر $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ می‌رسیم:

$$\mathbf{F} \text{ کار انجام شده توسط } = \int_a^b \mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt$$

بدون اثبات کامل، می‌توان این فرمول را توجیه کرد. اگر t در بازه کوچک از t تا $t + \Delta t$ تغییر کند، ذره از $\sigma(t)$ تا $\sigma(t + \Delta t)$ ، یعنی به اندازه بردار تغییر مکان $\Delta \mathbf{s} = \sigma(t + \Delta t) - \sigma(t)$ حرکت می‌کند (ر.ک. شکل ۱۰.۲.۶).



شکل ۱.۲.۶

به ازای Δt کوچک، $\Delta s = \sigma(t + \Delta t) - \sigma(t) \approx \sigma'(t) \Delta t$

اما از تعریف مشتق تقریب $\Delta s \approx \sigma'(t) \Delta t$ را داریم. لذا، کار انجام شده از $\sigma(t)$ تا $\sigma(t + \Delta t)$ تقریباً "مساوی است با

$$\mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \Delta s \approx \mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) \Delta t$$

هرگاه بازه $[a, b]$ را به n قسمت مساوی $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ که $\Delta t = t_{i+1} - t_i$ تقسیم کنیم، آنگاه کار انجام شده به وسیله \mathbf{F} تقریباً "مساوی است با

$$\sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{F}(\sigma(t_i)) \cdot \Delta s \approx \sum_{i=0}^{n-1} \mathbf{F}(\sigma(t_i)) \cdot \sigma'(t_i) \Delta t$$

این تقریب، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، بهتر و بهتر می‌شود؛ لذا، شایسته است که کار را حد مجموع فوق وقتی $n \rightarrow \infty$ بگیریم. ولی این حد مساوی انتگرال

$$\int_a^b \mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt$$

است. این مفهوم اساسی فیزیک، یعنی کار، ما را به تعریف ریاضی زیر رهنمون می‌سازد.

تعریف. فرض کنیم \mathbf{F} یک میدان برداری بر \mathbb{R}^3 باشد که بر مسیر C^1 ، $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$

پیوسته است. انتگرال خط F در امتداد σ ، یعنی $\int_{\sigma} F \cdot ds$ ، را با فرمول زیر تعریف می‌کنیم:

$$\int_{\sigma} F \cdot ds = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt$$

یعنی، از حاصل ضرب نقطه‌ای F در σ' روی بازه $[a, b]$ انتگرال می‌گیریم. همانند توابع اسکالر، اگر

$$F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$$

فقط قطعه قطعه پیوسته باشد، بازهم تعریف $\int_{\sigma} F \cdot ds$ امکان‌پذیر است.

برای مسیرهای σ ای که در $\sigma'(t) \neq 0$ صدق می‌کنند، فرمول مفید دیگری برای انتگرال خط وجود دارد. اگر $T(t) = \sigma'(t)/\|\sigma'(t)\|$ بردار یکه‌ماس باشد، داریم

$$\int_{\sigma} F \cdot ds = \int_a^b F(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt \quad (\text{طبق تعریف})$$

$$= \int_a^b \left[F(\sigma(t)) \cdot \frac{\sigma'(t)}{\|\sigma'(t)\|} \right] \|\sigma'(t)\| dt \quad (\|\sigma'(t)\| \text{ حذف})$$

$$(1) \quad = \int_a^b [F(\sigma(t)) \cdot T(t)] \|\sigma'(t)\| dt$$

این فرمول می‌گوید که $\int_{\sigma} F \cdot ds$ شبیه انتگرال مسیری مؤلفه مماسی $F(\sigma(t)) \cdot T(t)$ میدان F در امتداد σ است. در واقع، می‌توان قسمت آخر (1) را انتگرال مسیری تابع f در امتداد σ در نظر گرفت، اگرچه از لحاظ تکنیکی همواره یک چنین عبارتی نخواهد بود. هرگاه σ خود را قطع کند (یعنی، اگر $\sigma(t_1) = \sigma(t_2)$ ایجاب کند که $t_1 = t_2$)، آنگاه هر نقطه P بر C (نقش منحنی σ) را می‌توان منحصرًا به ازای t ای به صورت $\sigma(t)$ نوشت. اگر تعریف کنیم $f(P) = f(\sigma(t)) = F(\sigma(t)) \cdot T(t)$ ، یک تابع بر C است، و، طبق تعریف، انتگرال مسیری آن در امتداد σ از (1) به دست می‌آید و مشکلی وجود نخواهد داشت. با آنکه وقتی σ خود را قطع کند، نمی‌توان f را به صورت تابعی بر C مثل فوق تعریف کرد (چرا؟)، گرفتن طرف راست (1) به عنوان یک انتگرال مسیری بازهم سودمند است. برای محاسبه انتگرال خط در یک حالت خاص، می‌توان از تعریف اصلی استفاده کرد یا از مؤلفه مماسی در امتداد σ ، طبق فرمول (1)، هرکدام که ساده‌تر یا مناسب‌تر باشد، انتگرال گرفت.

مثال ۱. فرض کنیم $\sigma(t) = (\sin t, \cos t, t)$ ، که در آن $0 \leq t \leq 2\pi$. همچنین ،

$$\mathbf{F}(\sigma(t)) = \mathbf{F}(\sin t, \cos t, t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

$$\sigma'(t) = (\cos t)\mathbf{i} - (\sin t)\mathbf{j} + \mathbf{k} \quad \text{و} \quad (\cos t)\mathbf{j} + t\mathbf{k}$$

$$\mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) = \sin t \cos t - \cos t \sin t + t = t$$

و در نتیجه ،

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} t \, dt = 2\pi^2 \uparrow$$

روش معمول دیگری برای نوشتن انتگرالهای خط عبارت است از

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\sigma} F_1 \, dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz$$

که در آن F_1 ، F_2 ، و F_3 مؤلفه‌های میدان برداری \mathbf{F} می‌باشند .

ما عبارت $F_1 \, dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz$ را یک فرم دیفرانسیل می‌نامیم^۱ . طبق تعریف، انتگرال

یک فرم دیفرانسیل مساوی است با

$$\int_{\sigma} F_1 \, dx + F_2 \, dy + F_3 \, dz = \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt = \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

مثال ۲. انتگرال $\int_{\sigma} x^2 \, dx + xy \, dy + dz$ را در صورتی حساب کنید که $\sigma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$

با $\sigma(t) = (t, t^2, 1) = (x(t), y(t), z(t))$ داده شده باشد .

داریم $dx/dt = 1$ ، $dy/dt = 2t$ ، $dz/dt = 0$. لذا ،

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} x^2 \, dx + xy \, dy + dz &= \int_0^1 \left([x(t)]^2 \frac{dx}{dt} + [x(t)y(t)] \frac{dy}{dt} \right) dt \\ &= \int_0^1 (t^2 + 2t^4) \, dt \\ &= \left[\frac{1}{3} t^3 + \frac{2}{5} t^5 \right]_0^1 = \frac{11}{15} \end{aligned}$$

۱. برای بحث کوتاهی از نظریه عمومی فرمهای دیفرانسیل ، ر.ک. بخش ۶.۷ .

مثال ۳. انتگرال $\int_{\sigma} \cos z \, dx + e^x \, dy + e^y \, dz$ را در صورتی حساب کنید که $\sigma(t) = (1, t, e^t)$ و $0 \leq t \leq 2$.

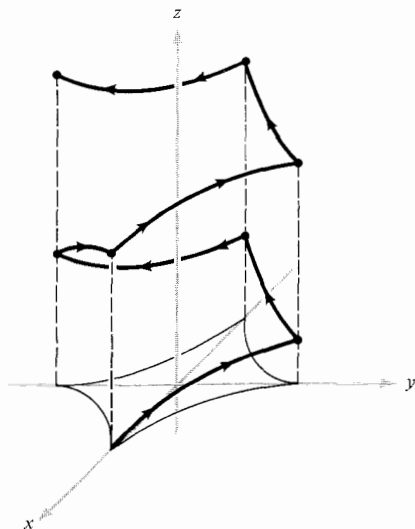
حساب می‌کنیم $dx/dt = 0, dy/dt = 1, dz/dt = e^t$ ؛ و در نتیجه،

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \cos z \, dx + e^x \, dy + e^y \, dz &= \int_0^2 (0 + e + e^{2t}) \, dt \\ &= [et + \frac{1}{2}e^{2t}]_0^2 = 2e + \frac{1}{2}e^4 - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

مثال ۴. فرض کنید σ مسیر زیر باشد:

$$x = \cos^3 \theta, \quad y = \sin^3 \theta, \quad z = \theta, \quad 0 \leq \theta \leq \frac{7\pi}{2}$$

(ر. ک. شکل ۲۰۲.۶). انتگرال $\int_{\sigma} (\sin z \, dx + \cos z \, dy - (xy)^{1/3} \, dz)$ را محاسبه نمایید.



شکل ۲۰۲.۶

نقش مسیر $0 \leq \theta \leq 7\pi/2$ ، $x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta, z = \theta$

$$\frac{dx}{d\theta} = -3 \cos^2 \theta \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = 3 \sin^2 \theta \cos \theta, \quad \frac{dz}{d\theta} = 1$$

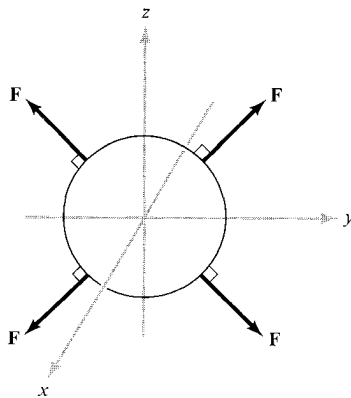
و در نتیجه، انتگرال مساوی است با

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \sin z \, dx + \cos z \, dy - (xy)^{1/3} \, dz \\ = \int_0^{7\pi/2} (-3 \cos^2 \theta \sin^2 \theta + 3 \sin^2 \theta \cos^2 \theta - \cos \theta \sin \theta) \, d\theta \\ = -\int_0^{7\pi/2} \cos \theta \sin \theta \, d\theta = -\left[\frac{1}{2} \sin^2 \theta\right]_0^{7\pi/2} = -\frac{1}{2} \end{aligned}$$

مثال ۵. فرض کنیم F میدان نیروی برداری $F(x, y, z) = x^3 \mathbf{i} + yz \mathbf{j} + z \mathbf{k}$ باشد. می‌توان یک دایره به شعاع a در صفحه yz را به صورت زیر پارامتری کرد:

$$x = 0, \quad y = a \cos \theta, \quad z = a \sin \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

چون میدان نیروی F در هر نقطه از دایره به آن عمود است، F بر ذره متحرک در امتداد دایره کار انجام نمی‌دهد (شکل ۳.۲.۶). لذا، کار انجام شده توسط F مساوی ۰ است.



شکل ۳.۲.۶

میدان برداری F عمود بر یک دایره در صفحه yz

این امر را می‌توان مستقیماً با محاسبه تحقیق کرد:

$$\begin{aligned} W &= \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\sigma} x^3 dx + y dy + z dz \\ &= \int_0^{2\pi} (0 - a^2 \cos \theta \sin \theta + a^2 \cos \theta \sin \theta) d\theta = 0 \end{aligned}$$

که همان نتیجه قبلی می‌باشد.

مثال ۶. اگر میدان و منحنی مثال ۴ را در نظر بگیریم، می‌بینیم کار انجام شده توسط میدان مساوی $\frac{1}{2}$ است که کمیتی منفی است. این یعنی میدان مانع حرکت در امتداد مسیر می‌گردد.

دیدیم که انتگرال خط $\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ نه فقط تابع میدان \mathbf{F} است بلکه به مسیر $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ نیز بستگی دارد. به طور کلی، اگر σ و ρ دو مسیر مختلف در \mathbb{R}^3 باشند، $\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq \int_{\rho} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ ، از آن سو، خواهیم دید که اگر ρ یک پارامتری سازی مجدد σ باشد، به ازای هر میدان برداری \mathbf{F} ، $\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \pm \int_{\rho} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$.

تعریف. فرض کنیم $h: I \rightarrow I_1$ یک تابع حقیقی C^1 و یک به یک بر بازه $I = [a, b]$ به روی بازه $I_1 = [a_1, b_1]$ دیگر باشد. همچنین، $\sigma: I_1 \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک مسیر قطعه قطعه C^1 می‌باشد. در این صورت، ترکیب

$$\rho = \sigma \circ h: I \rightarrow \mathbb{R}^3$$

یک پارامتری سازی مجدد σ است.

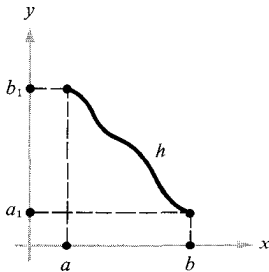
این بدان معنی است که $\rho(t) = \sigma(h(t))$. در نتیجه، h متغیر را تغییر می‌دهد؛ به بیان دیگر، می‌توان h را تندی یک نقطه متحرک در امتداد مسیر گرفت. در واقع، می‌بینیم که $\rho'(t) = \sigma'(h(t))h'(t)$ ؛ در نتیجه، طول بردار سرعت برای σ در عامل اسکالر $|h'(t)|$ ضرب شده است.

تعریف تلویحا "می‌گوید که h باید نقاط انتهایی را به نقاط انتهایی ببرد؛ یعنی، $h(a) = a_1$ و $h(b) = b_1$ یا $h(a) = b_1$ و $h(b) = a_1$. لذا، دو نوع پارامتری سازی مجدد تمیز می‌دهیم. هرگاه $\sigma \circ h$ یک پارامتری سازی مجدد σ باشد، آنگاه

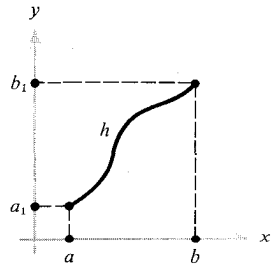
$$\sigma \circ h(b) = \sigma(b_1) \quad \text{و} \quad \sigma \circ h(a) = \sigma(a_1)$$

$$\sigma \circ h(b) = \sigma(a_1) \quad \text{و} \quad \sigma \circ h(a) = \sigma(b_1)$$

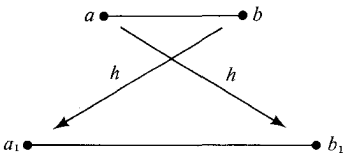
در حالت اول، پارامتری‌سازی مجدد جهت نگهدار نام دارد، و ذره‌ای که مسیر $\sigma \circ h$ را می‌پیماید با ذره‌ای که σ را می‌پیماید همجهت است. در حالت دوم، پارامتری‌سازی مجدد جهت برگردان نام دارد، و ذره‌ای که مسیر $\sigma \circ h$ را می‌پیماید با ذره‌ای که σ را می‌پیماید مختلف‌الجهت می‌باشد (شکل ۴۰۲۰۶).



نمودار h



نمودار h_1



جهت h را برمی‌گرداند

(ب)



جهت h را نگه می‌دارد

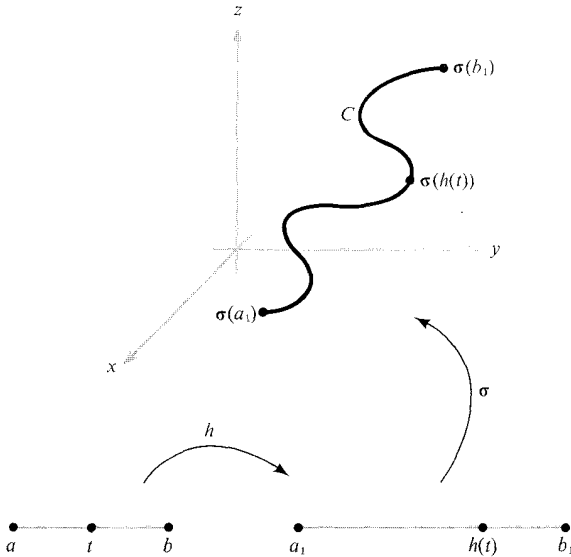
(آ)

شکل ۴۰۲۰۶

نمایش یک پارامتری‌سازی مجدد جهت نگهدار (آ) و یک پارامتری‌سازی مجدد جهت

برگردان (ب)

مثلاً، هرگاه C نقش مسیر σ در شکل ۵۰۲۰۶ باشد، یعنی $C = \sigma([a_1, b_1])$ ، و نیز h جهت نگهدار باشد، آنگاه $\sigma \circ h(t)$ ، وقتی t از a به b می‌رود، از $\sigma(a_1)$ به $\sigma(b_1)$ می‌رود؛ و اگر h جهت برگردان باشد، $\sigma \circ h(t)$ ، وقتی t از a به b می‌رود، از $\sigma(b_1)$ به $\sigma(a_1)$ خواهد رفت.



شکل ۵.۲.۶

مسیر $\rho = \sigma \circ h$ یک پارامتری‌سازی مجدد σ است

مثال ۷. فرض کنیم $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک مسیر قطعه قطعه C^1 باشد. در این صورت،
 (آ) مسیر $\sigma_{\text{op}}: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ، $t \mapsto \sigma(a + b - t)$ ، یک پارامتری‌سازی مجدد σ نظیر به نگاشت $t \mapsto a + b - t$ ، $h: [a, b] \rightarrow [a, b]$ است؛ ما σ_{op} را مسیر «قرینه» σ می‌نامیم. این پارامتری‌سازی مجدد جهت برگردان است.
 (ب) مسیر $\rho: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ، $t \mapsto \sigma(a + (b - a)t)$ ، یک پارامتری‌سازی مجدد جهت نگهدار σ نظیر به تغییر مختصات $h: [0, 1] \rightarrow [a, b]$ ، $t \mapsto a + (b - a)t$ ، می‌باشد.

قضیه ۱. فرض کنیم F یک میدان برداری پیوسته بر مسیر C^1 $\sigma: [a_1, b_1] \rightarrow \mathbb{R}^3$ بوده، و $\rho: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک پارامتری‌سازی مجدد σ باشد. هرگاه ρ جهت نگهدار باشد، آنگاه

$$\int_{\rho} \mathbf{F} \cdot ds = \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot ds$$

ولی هرگاه ρ جهت برگردان باشد، آنگاه

$$\int_{\rho} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = - \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

برهان. طبق فرض، نگاشتی چون h داریم به طوری که $\rho = \sigma \circ h$. بنابراین قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\rho'(t) = \sigma'(h(t))h'(t)$$

در نتیجه، داریم

$$\int_{\rho} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b [\mathbf{F}(\sigma(h(t))) \cdot \sigma'(h(t))]h'(t) dt$$

این با تغییر متغیر $s = h(t)$ (ر.ک. ص ۳۹۲) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_{h(a)}^{h(b)} \mathbf{F}(\sigma(s)) \cdot \sigma'(s) ds$$

$$= \begin{cases} \int_{a_1}^{b_1} \mathbf{F}(\sigma(s)) \cdot \sigma'(s) ds = \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} & \text{اگر } \rho \text{ جهت نگهدار} \\ & \text{باشد،} \\ \int_{b_1}^{a_1} \mathbf{F}(\sigma(s)) \cdot \sigma'(s) ds = - \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} & \text{اگر } \rho \text{ جهت برگردان} \\ & \text{باشد،} \end{cases}$$

قضیه ۱ برای مسیرهای قطعه قطعه C^1 نیز برقرار است، و این را می‌توان با شکستن بازه‌ها به قطعاتی که روی آنها مسیرها C^1 اند و جمع‌بندی انتگرالها روی این بازه‌ها نتیجه گرفت.

لذا، اگر در محاسبهٔ انتگرال نیاز به پارامتری‌سازی مجدد باشد، قضیه ۱ این اطمینان را به ما می‌دهد که انتگرال، جز احتمالاً "علامتی که به جهت بستگی دارد، تغییر نخواهد کرد.

مثال ۸. فرض کنید $\mathbf{F}(x, y, z) = yz\mathbf{i} + xz\mathbf{j} + xy\mathbf{k}$ و $\sigma: [-5, 10] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ، $t \mapsto$

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \text{ و } \int_{\sigma_{op}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \text{ را حساب کنید. } (t, t^2, t^3)$$

به ازای σ داریم $dx/dt=1$ ، $dy/dt=2t$ ، $dz/dt=3t^2$ و $\mathbf{F}(\sigma(t))=t^5\mathbf{i}+t^4\mathbf{j}+t^3\mathbf{k}$ ،

بنابراین،

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{-5}^{10} \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt \\ &= \int_{-5}^{10} (t^5 + 2t^5 + 3t^5) dt = [t^6]_{-5}^{10} = 984,375 \end{aligned}$$

از آن سو، به ازای

$$\sigma_{\text{op}}: [-5, 10] \rightarrow \mathbb{R}^3, t \mapsto \sigma(5-t) = (5-t, (5-t)^2, (5-t)^3)$$

داریم $dx/dt = -1$, $dy/dt = -10 + 2t = -2(5-t)$, $dz/dt = -75 + 30t - 3t^2$
 ، لذا ، $\mathbf{F}(\sigma_{\text{op}}(t)) = (5-t)^5 \mathbf{i} + (5-t)^4 \mathbf{j} + (5-t)^3 \mathbf{k}$ ، و $-3(5-t)^2$

$$\begin{aligned} \int_{\sigma_{\text{op}}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_{-5}^{10} (-5-t)^5 - 2(5-t)^5 - 3(5-t)^5 dt \\ &= [(5-t)^6]_{-5}^{10} = -984,375 \end{aligned}$$

ما از آنجهت به پارامتری‌سازی مجدد علاقه‌مندیم که اگر نقش σ ی خاصی را بتوان به طرف مختلف نمایش داد ، می‌خواهیم مطمئن باشیم که انتگرالها روی این نقش به پارامتری‌سازی خاصی بستگی ندارند. مثلا " ، در بعضی مسائل ، دایره‌ایکه را می‌توان با نگاشت ρ تعریف شده با

$$x(t) = \cos 2t, \quad y(t) = \sin 2t, \quad 0 \leq t \leq \pi$$

نمایش داد . قضیه ۱ تضمین می‌کند که هر انتگرال حساب شده به ازای این نمایش مساوی وقتی است که دایره با نگاشت σ ی تعریف شده با

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

نمایش داده باشیم ، چرا که $\rho = \sigma \circ h$ که در آن $h(t) = 2t$ و لذا ، ρ یک پارامتر سازی مجدد σ است . با اینحال ، توجه کنید که نگاشت γ ی داده شده با

$$x(t) = \cos t, \quad y(t) = \sin t, \quad 0 \leq t \leq 4\pi$$

یک پارامتری‌سازی مجدد σ نیست . با آنکه همان نقش (دایره) را می‌پیماید ، ولی این

پیمودن دوبار است . (چرا این پارامتری‌سازی مجدد بودن γ را نفی می‌کند ؟)

انتگرال خطی یک انتگرال جهتدار است ، بدین معنی که اگر جهت منحنی عکس شود ،

(همانطور که در قضیه ۱ دیدیم) علامتش تغییر می‌کند . انتگرال مسیری این خاصیت را

ندارد. این مطلب از این ناشی می‌شود که تغییر t به $-t$ (عکس‌کردن جهت) فقط علامت $\sigma'(t)$ را تغییر می‌دهد نه طولش را. این یکی از تفاوت‌های بین انتگرال خط و انتگرال مسیری است. قضیه زیر، که به همان روش قضیه ۱ ثابت می‌شود، نشان می‌دهد که انتگرال‌های مسیری تحت پارامتری‌سازی‌های مجدد بلا تغییر است.

قضیه ۲. فرض کنیم σ قطعه‌قطعه C^1 ، f یک تابع (حقیقی) پیوسته بر نقش σ ، و ρ یک پارامتری‌سازی مجدد σ باشد. در این صورت،

$$(۲) \quad \int_{\sigma} f(x, y, z) ds = \int_{\rho} f(x, y, z) ds$$

حال روشی ساده ولی اغلب بسیار مفید برای محاسبه انتگرال‌های خط در نظر می‌گیریم. به یاد آورید که میدان برداری F یک میدان برداری گرادینان است اگر به ازای تابعی حقیقی چون f ، $F = \nabla f$ ، لذا،

$$F = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k}$$

فرض کنیم $g: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ توابع پیوسته حقیقی بوده و $G' = g$. در این صورت، بنابر قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال،

$$\int_a^b g(x) dx = G(b) - G(a)$$

لذا، مقدار انتگرال g فقط تابع مقدار G در نقاط انتهایی بازه $[a, b]$ است. چون ∇f نمایش مشتق f است، می‌توان پرسید آیا $\int_{\sigma} \nabla f \cdot ds$ کاملاً "بامقدار f در نقاط انتهایی $\sigma(a)$ و $\sigma(b)$ معین می‌شود یا خیر. جواب را قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال تعمیم یافته زیر به ما خواهد داد.

قضیه ۳. فرض کنیم $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ، C^1 بوده و $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک مسیر قطعه‌قطعه C^1 باشد. در این صورت،

$$\int_{\sigma} \nabla f \cdot ds = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$$

برهان. قاعده^۶ زنجیره‌ای را بر تابع مرکب

$$F: t \mapsto f(\sigma(t))$$

اعمال می‌کنیم؛ به دست می‌آید:

$$F'(t) = (f \circ \sigma)'(t) = \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)$$

F یک تابع حقیقی از متغیر t است؛ و در نتیجه، بنا بر قضیه^۶ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال، خواهیم داشت

$$\int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a) = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \nabla f \cdot ds &= \int_a^b \nabla f(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt = \int_a^b F'(t) dt = F(b) - F(a) \\ &= f(\sigma(b)) - f(\sigma(a)) \end{aligned}$$

مثال ۹. فرض کنید σ مسیر $\sigma(t) = (t^4/4, \sin^3(t\pi/2), 0)$ ، $t \in [0, 1]$ ، باشد. انتگرال

$$\int_{\sigma} y dx + x dy$$

را (که به معنی $\int_{\sigma} y dx + x dy + 0 dz$ است) حساب کنید.

می‌بینیم که $y dx + x dy$ ، یا معادلاً "میدان برداری $0\mathbf{k} + x\mathbf{j} + y\mathbf{i}$ ، گرادیان

تابع $f(x, y, z) = xy$ است. لذا،

$$\int_{\sigma} y dx + x dy = f(\sigma(1)) - f(\sigma(0)) = \frac{1}{4} \cdot 1 - 0 = \frac{1}{4}$$

واضح است که اگر انتگرالده به صورت گرادیان درآید، محاسبه^۶ انتگرال خیلی آسانتر

می‌شود. مثلاً، خواننده می‌تواند انتگرال فوق را مستقیماً حساب کند. در حساب

دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره، هر انتگرال اصولاً با یافتن یک پادمشتق به دست می‌آید.

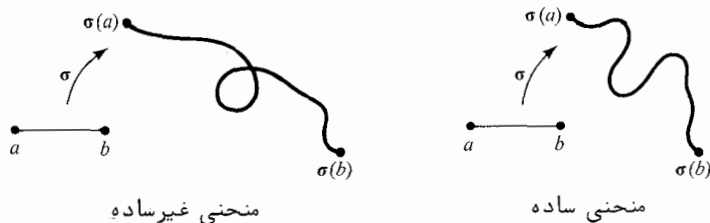
اما این امر برای میدانهای برداری همیشه درست نیست، زیرا یک میدان برداری لازم

نیست همیشه گرادیان باشد. در بخش، این نکته به تفصیل بررسی

خواهد شد.

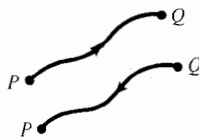
دیدیم چگونه انتگرالهای مسیری (انتگرالهای توابع اسکالر) و انتگرالهای خط (انتگرالهای توابع برداری) روی منحنیهای پارامتری شده تعریف می‌شوند. و نیز دیدیم اگر پارامتری‌سازی مناسبی اختیار شود، کار ما چقدر ساده خواهد شد. چون این انتگرالها از پارامتری‌سازی (جز در مورد علامت) مستقل است، طبیعی است سعی کنیم نظریه‌طوری نوشته‌شود که از پارامتری‌سازی مستقل، و بدین وسیله "هندسی" تر، باشد. در بحث زیر این کار به اختصار و به نوعی غیرصوری انجام می‌شود.

تعریف. ما یک منحنی ساده را نقش یک نگاشت قطعه قطعه C^1 مانند $\sigma: I \rightarrow \mathbb{R}^3$ تعریف می‌کنیم که بر بازه I یک به یک است. لذا، یک منحنی ساده خود را قطع نخواهد کرد (شکل ۶.۲.۶). اگر $I = [a, b]$ ، $\sigma(a)$ و $\sigma(b)$ را نقاط انتهایی منحنی می‌نامیم. هر منحنی ساده C دو جهت مربوط به خود دارد. هرگاه P و Q نقاط انتهایی منحنی باشند، آنگاه می‌توان C را از P به Q یا از Q به P در نظر گرفت. منحنی ساده C همراه با یک جهت منحنی ساده جهتدار نامیده می‌شود (شکل ۷.۲.۶).



شکل ۶.۲.۶

یک منحنی ساده بدون خود قطعی در سمت راست نموده شده است. در سمت چپ یک منحنی دارای خود قطعی آمده که، در نتیجه، ساده نمی‌باشد.



شکل ۷.۲.۶

روی یک منحنی دو جهت برای اتصال P به Q وجود دارد.

مثال ۱۰. هرگاه $I = [a, b]$ بازه بسته‌ای بر محور x باشد، آنگاه I ، به عنوان منحنی، دو جهت دارد؛ یکی نظیر به حرکت از a به b (چپ به راست) و دیگری نظیر به حرکت b به a (راست به چپ). اگر f یک تابع حقیقی پیوسته بر I باشد، چنانچه I با جهت اول را به I^+ و I با جهت دوم را به I^- نشان دهیم، خواهیم داشت

$$\int_{I^+} f(x) dx = \int_a^b f(x) dx = - \int_b^a f(x) dx = - \int_{I^-} f(x) dx$$

تعریف. منظور از یک منحنی بسته ساده یعنی نقش یک نگاشت قطعه قطعه C^1 مانند $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ که بر $[a, b]$ یک به یک بوده در $\sigma(a) = \sigma(b)$ صدق نماید (شکل ۸.۲.۶). اگر σ در شرط $\sigma(a) = \sigma(b)$ صدق کرده ولی لزوماً بر $[a, b]$ یک به یک نباشد، نقش آن را یک منحنی بسته می‌نامیم. منحنیهای بسته ساده دارای دو جهت‌اند که نظیر به دو جهت حرکت در امتداد منحنی می‌باشند (شکل ۹.۲.۶).



شکل ۸.۲.۶

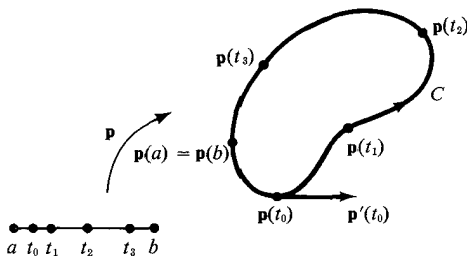
یک منحنی بسته ساده (راست) و یک منحنی بسته که ساده نیست (چپ)



شکل ۹.۲.۶

دو جهت ممکن برای منحنی بسته ساده C

فرض کنیم C یک منحنی ساده یا یک منحنی بسته ساده باشد. بنا بر قضایای ۲ و ۱،
 $\int_C f ds$ و (اگر C جهتدار باشد) $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ را می‌توان بدون ابهام نوشت (ما ثابت
 نکرده‌ایم که هر دو مسیر یک به یک مانند σ و η با نداشت یکسان باید پارامتری‌سازی مجدد
 یکدیگر باشد، ولی این نکته تکنیکی در اینجا حذف می‌شود). نکته‌ای که مایلیم در اینجا
 ذکر کنیم این است که اگرچه برای انتگرالگیری در امتداد یک منحنی باید آن را پارامتری
 کرد، ولی لازم نیست پارامتری‌سازی در نماد مربوط به انتگرال مشخص شود.
 یک منحنی بسته ساده را می‌توان به طرق مختلف پارامتری کرد. شکل ۱۰.۲۰۶



شکل ۱۰.۲۰۶

وقتی t از a به b می‌رود، $\mathbf{p}(t)$ در جهت ثابتی حول منحنی C حرکت می‌کند.

را به صورت نقش نگاشت \mathbf{p} نمایش می‌دهد، که در آن وقتی t از a تا b تغییر کند،
 $\mathbf{p}(t)$ در جهت صحیح حول منحنی جهتدار C حرکت می‌کند. توجه کنید که $\mathbf{p}'(t_0)$ نیز در این
 جهت اشاره دارد. تندی پیمایش C ممکن است از یک پارامتری‌سازی به دیگری تغییر کند،
 ولی انتگرال، طبق قضایای ۱ و ۲، تغییر نخواهد کرد.

در این رابطه احتیاط زیر لازم است. ممکن است دو نگاشت مانند σ و η با نقش
 یکسان داشته باشیم که این نقش از یک جهت برخوردار باشد ولی

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq \int_{\eta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

مثلاً، فرض کنیم $\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 0)$ و $\eta(t) = (\cos 2t, \sin 2t, 0)$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$ ، فرض کنیم
 در این صورت، $(y, 0, 0)$

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_0^{2\pi} F_1(\sigma(t)) \frac{dx}{dt} dt$$

(جملات شامل F_2 و F_3 صفرند)

$$= -\int_0^{2\pi} \sin^2 t \, dt = -\pi$$

اما $\int_{\eta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -2 \int_0^{2\pi} \sin^2 2t \, dt = -2\pi$ واضح است که σ و η نقش یکسانی دارند و آن دایره^۱ یک در صفحه xy است و، به علاوه، هر دو دایره^۲ یکسان را در یک جهت می‌پیمایند، ولی $\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq \int_{\eta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ دلیل این کار این است که σ یک به یک است ولی η چنین نیست (η دایره^۳ یک را دوبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌پیماید) . بنابراین، η یک پارامتری‌سازی دایره^۴ یک به عنوان یک منحنی بسته^۵ ساده نیست . لذا، اگر C یک منحنی ساده^۶ جهتدار یا یک منحنی بسته^۷ ساده^۸ جهتدار باشد، می‌توان تعریف کرد

$$(۳) \quad \int_C f \, ds = \int_{\sigma} f \, ds \quad \text{و} \quad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

که در آن σ یک پارامتری‌سازی جهت نگهدار C است . همانطور که گفتیم، انتگرالها به σ تا جایی که یک به یک (جز احتمالا^۹ در نقاط انتهایی) باشد بستگی ندارند . هرگاه $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ یک میدان برداری باشد، آنگاه با نماد فرم دیفرانسیل می‌نویسیم

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_C P \, dx + Q \, dy + R \, dz$$

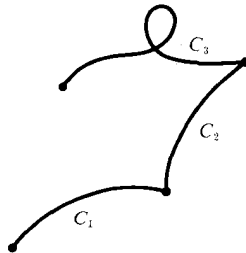
هرگاه C^- همان منحنی C ولی با جهت مخالف باشد، آنگاه

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = -\int_{C^-} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

هرگاه C یک منحنی (جهتدار) متشکل از چند منحنی مؤلفه^{۱۰} (جهتدار) C_i ، $i = 1, \dots, k$ ، مثل شکل ۱۱.۲.۶، باشد، آنگاه می‌توان نوشت $C = C_1 + C_2 + \dots + C_k$ چون C را می‌توان با پارامتری‌کردن C_1, \dots, C_k پارامتری کرد، خواهیم داشت

$$(۴) \quad \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{C_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \int_{C_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} + \dots + \int_{C_k} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

یک دلیل نوشتن یک منحنی به صورت مجموعی از مؤلفه‌ها این است که پارامتری‌کردن تک تک مؤلفه‌های C_i آسانتر از پارامتری‌کردن تمام C است . در این صورت، فرمول (۴) راه

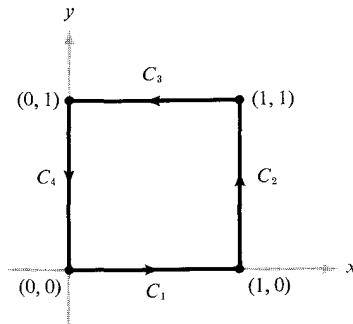


شکل ۱۱.۲.۰۶

یک منحنی را می‌توان از چند مولفه ساخ ساخت .

مناسبی برای محاسبه $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ به ما نشان می‌دهد .

مثال ۱۱. C ، یعنی محیط مربع بیکه در \mathbb{R}^2 ، را با جهت خلاف عقربه‌های ساعت در نظر بگیرید (ر.ک. شکل ۱۲.۲.۰۶). انتگرال خط $\int_C x^2 dx + xy dy$ را محاسبه نمایید .



شکل ۱۲.۲.۰۶

محیط مربع بیکه که در چهار قسمت پارامتری شده است

انتگرال را می‌توان با استفاده از پارامتری سازی C که جهت داده شده را القا می‌کند

حساب کرد . مثلاً ،

$$\sigma: [0, 4] \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad t \mapsto \begin{cases} (t, 0) & 0 \leq t \leq 1 \\ (1, t-1) & 1 \leq t \leq 2 \\ (3-t, 1) & 2 \leq t \leq 3 \\ (0, 4-t) & 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

در این صورت،

$$\begin{aligned} \int_C x^2 dx + xy dy &= \int_0^1 (t^2 + 0) dt + \int_1^2 (0 + (t-1)) dt \\ &\quad + \int_2^3 (-(3-t)^2 + 0) dt + \int_3^4 (0 + 0) dt \\ &= \frac{1}{3} + \frac{1}{2} + (-\frac{1}{3}) + 0 = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

حال این انتگرال خط را با استفاده از فرمول (۴) و پارامتری کردن تک تک C_i ها مجدداً حساب می‌کنیم. توجه کنید که منحنی که منحنی $C = C_1 + C_2 + C_3 + C_4$ ، که در آن C_i ها منحنیهای جهتدار شکل ۱۲.۲.۶ می‌باشند. این منحنیها را می‌توان به صورت زیر پارامتری کرد:

$$C_1: \sigma_1(t) = (t, 0), 0 \leq t \leq 1$$

$$C_2: \sigma_2(t) = (1, t), 0 \leq t \leq 1$$

$$C_3: \sigma_3(t) = (1-t, 1), 0 \leq t \leq 1$$

$$C_4: \sigma_4(t) = (0, 1-t), 0 \leq t \leq 1$$

در نتیجه،

$$\int_{C_1} x^2 dx + xy dy = \int_0^1 t^2 dt = \frac{1}{3}$$

$$\int_{C_2} x^2 dx + xy dy = \int_0^1 t dt = \frac{1}{2}$$

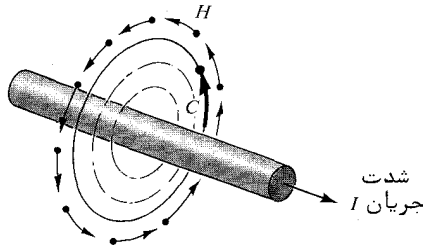
$$\int_{C_3} x^2 dx + xy dy = \int_0^1 -(1-t)^2 dt = -\frac{1}{3}$$

$$\int_{C_4} x^2 dx + xy dy = \int_0^1 0 dt = 0$$

لذا، مثل قبل،

$$\int_C x^2 dx + xy dy = \frac{1}{3} + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 0 = \frac{1}{2}$$

مثال ۱۲. یکی از کاربردهای جالب انتگرال خط تنظیم ریاضی قانون آمپر است که شدتهای جریان الکتریکی را به اثرات مغناطیسی آنها مربوط می‌سازد^۱. فرض کنیم H یک میدان مغناطیسی در \mathbb{R}^3 بوده، و C یک منحنی جهتدار بسته در \mathbb{R}^3 باشد. قانون آمپر می‌گوید که (با واحدهای فیزیکی مناسب) $\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I$ که در آن I شدت جریان خالص مار بربریک سطح محدود به C است (ر.ک. شکل ۱۳۰۲۰۶).



شکل ۱۳۰۲۰۶

میدان مغناطیسی H اطراف سیمی که از آن شدت جریان I می‌گذرد در قانون آمپر صدق می‌کند: $\int_C \mathbf{H} \cdot d\mathbf{s} = I$.

در پایان متذکر می‌شویم که انتگرال خط تعبیر فیزیکی مهم دیگری نیز دارد، و آن انتگرال $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ است، که در آن \mathbf{V} میدان سرعت یک مایع می‌باشد. این تعبیر در بخش ۲۰۷ مطرح خواهد شد. لذا، مفاهیم مختلف فیزیکی، از مفهوم کار گرفته تا میدانهای الکترومغناطیس و مایعها، را می‌توان به کمک انتگرالهای خط تحلیل کرد.

تمرینات

۱. فرض کنید $\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$. انتگرال \mathbf{F} را در امتداد مسیره‌های زیر حساب

۱. کشف اینکه شدت جریانهای الکتریکی اثرات مغناطیسی تولید می‌کنند حدود ۱۸۲۰ توسط اوستد صورت گرفت. برای بحثهای فیزیکی مربوطه، ر.ک. یک کتاب فیزیک مقدماتی.

کنید .

$$\sigma(t) = (t, t, t), \quad 0 \leq t \leq 1 \quad (\bar{A})$$

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, 0), \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (\bar{B})$$

۲. انتگرالهای زیر را محاسبه نمایید .

$$\int_{\sigma} x \, dy - y \, dx, \quad \sigma(t) = (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq 2\pi \quad (\bar{A})$$

$$\int_{\sigma} x \, dx + y \, dy, \quad \sigma(t) = (\cos \pi t, \sin \pi t), \quad 0 \leq t \leq 2 \quad (\bar{B})$$

(پ) $\int_{\sigma} yz \, dx + xz \, dy + xy \, dz$ ، که در آن σ از پاره‌خطهای مستقیم واصل از $(1, 0, 0)$ به $(0, 1, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ به $(0, 0, 1)$ تشکیل شده است .

۳. نیروی $F(x, y, z) = xi + yj + zk$ را در نظر بگیرید . کار انجام شده در حرکت یک ذره در امتداد سهمی $y = x^2, z = 0$ از $x = -1$ تا $x = 2$ را حساب کنید .

۴. فرض کنید σ یک مسیر هموار باشد .

(آ) اگر F بر $\sigma'(t)$ در $\sigma(t)$ عمود باشد ، نشان دهید که

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

(ب) اگر F با $\sigma'(t)$ در $\sigma(t)$ موازی باشد ، نشان دهید که

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\sigma} \|\mathbf{F}\| \, ds$$

(منظور از موازی با $\sigma'(t)$ یعنی $\mathbf{F}(\sigma(t)) = \lambda(t)\sigma'(t)$ که در آن $\lambda(t) > 0$)

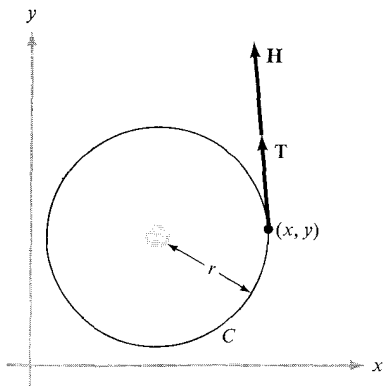
۵. فرض کنید σ به طول l بوده و $\|\mathbf{F}\| \leq M$. ثابت کنید

$$\left| \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \right| \leq Ml$$

۶. انتگرال $\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ را در صورتی حساب کنید که $F(x, y, z) = yi + 2xzj + yk$ و $\sigma(t) = ti$ ، $0 \leq t \leq 1$ ، $+t^2j + t^3k$.

۷. انتگرال $\int_{\sigma} y \, dx + (3y^3 - x) \, dy + z \, dz$ را به ازای هر مسیر $\sigma(t) = (t, t^n, 0)$ ، $0 \leq t \leq 1, n = 1, 2, 3, \dots$ محاسبه نمایید .

۸. این تمرین در رابطه با مثال ۱۲ است . فرض کنید L یک سیم بسیار طویل باشد که مقطع مسطحی از آن (با صفحه‌ای عمود بر سیم) در شکل ۱۴۰۲۰۶ نموده شده است . فرض کنید این صفحه صفحه xy باشد . آزمایش نشان می‌دهد که H بر هر دایره در



شکل ۱۴.۲۰.۶

مقطع مسطح یک سیم طویل و منحنی C دور آن

صفحه xy که مرکزش محور L است مماس بوده، و اندازه H بر هر چنین دایره C ثابت می باشد. لذا، $H = HT$ ، که در آن T یک بردار یکه مماس بر C بوده و H اسکالر می باشد. با این اطلاعات، نشان دهید $H = I/2\pi r$ ، که در آن r شعاع دایره C بوده و I شدت جریان داخل سیم می باشد.

۹. نقش $t \mapsto (\cos^3 t, \sin^3 t)$ ، $0 \leq t \leq 2\pi$ ، در صفحه در شکل ۱۵.۲۰.۶ نموده شده است.

انتگرال میدان برداری $F(x, y) = xi + yz$ را حول این منحنی حساب کنید.

۱۰. فرض کنید σ, ψ دو مسیر با نقاط انتهایی یکسان بوده، و F یک میدان برداری باشد.

نشان دهید که $\int_C F \cdot ds = \int_C \psi F \cdot ds$ با $\int_C F \cdot ds = 0$ معادل است، که در آن C

منحنی بسته حاصل از حرکت ابتدا حول σ و سپس حول ψ در جهت مخالف است.

۱۱. فرض کنید $\sigma(t)$ یک مسیر و T بردار یکه مماس باشد. $\int_C T \cdot ds$ چیست؟

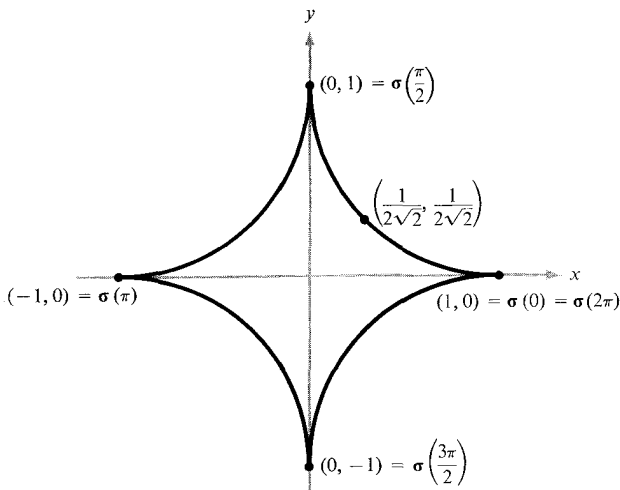
۱۲. فرض کنید $F = (z^3 + 2xy)i + x^2j + 3xz^2k$. نشان دهید که انتگرال F حول محیط مربع

یکه به رأسهای $(\pm 1, \pm 1)$ صفر است.

۱۳. با استفاده از مسیر تمرین ۹، می بینیم که نگاشت C^1 ، $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ می تواند نقشی

داشته باشد که "ظاهر هموار" ندارد. اگر $\sigma(t)$ همواره ناصفر باشد، فکرمی کنید این

امر رخ دهد؟



شکل ۱۵-۲۰-۶

بتوجرخزاد $\sigma(t) = (\cos^3 t, \sin^3 t)$ (تمرین ۹)

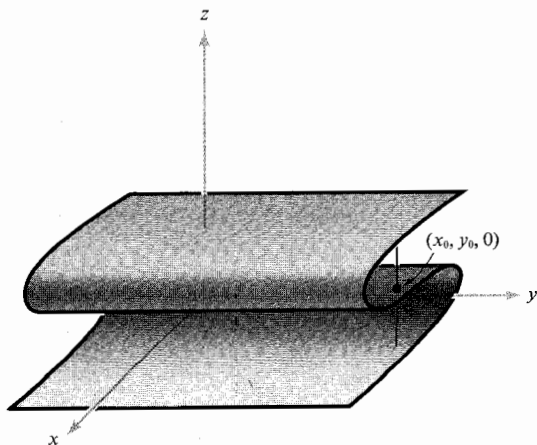
۱۴. مقدار انتگرال یک میدان گرادیان حول منحنی بسته C چقدر است؟
۱۵. انتگرال $\int_C 2xyz \, dx + x^2z \, dy + x^2y \, dz$ را در صورتی حساب کنید که C یک منحنی بسته جهتدار واصل بین $(1, 1, 1)$ و $(1, 2, 4)$ باشد.
۱۶. قضیه ۲ را ثابت کنید.
- ۱۷* فرض کنید $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک مسیر باشد به طوری که $\sigma'(t) \neq 0$. وقتی این شرط برقرار باشد، گوییم σ منتظم است. فرض کنید تابع f با $f(x) = \int_a^x \|\sigma'(t)\| \, dt$ تعریف شده باشد.
- (آ) df/dx چقدر است؟
- (ب) با استفاده از (آ) ثابت کنید $f: [a, b] \rightarrow [0, L]$ که در آن L طول σ است، دارای معکوس مشتقپذیر $g: [0, L] \rightarrow [a, b]$ صادق در $g \circ f(x) = x$ می باشد (می توان قضیه تابع معکوس یک متغیره در بخش ۴.۴ را به کار برد.)
- (پ) dg/ds را حساب کنید.
- (ت) به یاد آورید که مسیر $s \mapsto \rho(s)$ تندی یکه است یا با طول قوس پارامتری شده است

(ر.ک. تمرینات ۶ تا ۱۱، بخش ۲۰۳) اگر $\|\rho'(x)\| = 1$ نشان دهید که پارامتری سازی مجدد σ داده شده با $\rho(s) = \sigma \circ g(s)$ نیز تندی یکه می باشد. از این نتیجه بگیرید که هر مسیر منتظم را می توان با طول قوس پارامتری کرد. (لذا، مثلا، فرمولهای فرنه در بخش ۲۰۳ را می توان بر پارامتری سازی مجدد ρ اعمال نمود.)

۳.۶ سطوح پارامتری شده

در بخشهای ۱۰.۶ و ۲۰.۶ انتگرالهای توابع اسکالر و برداری در امتداد منحنیها بررسی شدند. حال به انتگرالها روی سطوح می پردازیم. بحث را با مطالعه هندسه خود سطوح آغاز می کنیم.

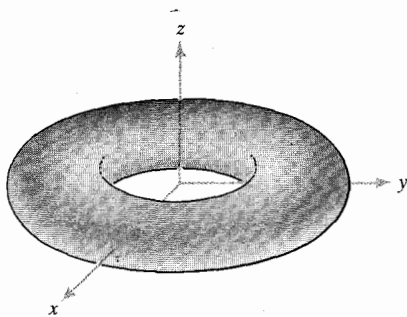
ما قبلا از یک نوع سطح، یعنی نمودار تابع $f(x, y)$ ، استفاده کرده ایم. نمودارها مشروحا در فصل ۲ بررسی شدند، و ما طرز محاسبه صفحات مماس آنها را می دانیم. با اینحال، فقط پرداختن به این حالت خیلی محدود کننده است. مثلا، بسیاری از سطوح به صورت تراز توابع ظاهر می شوند. فرض کنیم سطح S مجموعه نقاطی چون (x, y, z) باشد که $0 = x - z + z^3$ در اینجا یک پارچه (نسبت به صفحه xy) است که روی خودش دوبار برگشته است (ر.ک. شکل ۱۰.۳.۰۶). واضح است که می خواهیم S را یک سطح



شکل ۱۰.۳.۰۶

یک سطح که نمودار تابعی چون $z = f(x, y)$ نیست.

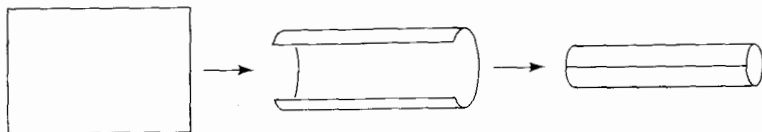
بنامیم ، زیرا چیزی جز یک صفحه چروک دار نیست . اما S نمودار تابعی چون $z = f(x, y)$ نیست ، چرا که این یعنی با ازای هر $(x_0, y_0) \in \mathbb{R}^2$ ، باید z_0 ی موجود باشد که $(x_0, y_0, z_0) \in S$ همانطور که شکل ۱.۳.۶ نشان می دهد ، این شرط نقض شده است .
 مثال دیگر چنبره یا سطح نان روغنی است که در شکل ۲.۳.۶ رسم شده است . همه



شکل ۲.۳.۶

چنبره نمودار یک تابع به شکل $z = f(x, y)$ نیست .

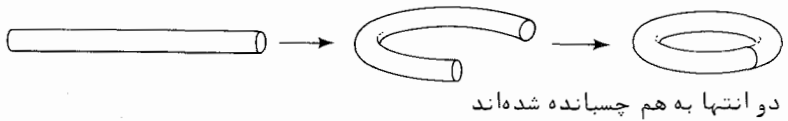
می خواهند چنبره را سطح بنامند ؛ ولی ، به همان دلیل فوق ، چنبره نمی تواند نمودار یک تابع دو متغیره مشتق پذیر باشد . این نکات ما را به تعمیم تعریف سطح وامی دارند . انگیزه تعریف زیر تاحدودی به این خاطر است که یک سطح را می توان از یک صفحه با " لوله کردن " ، " خم کردن " ، و " فشار دادن " به دست آورد . مثلاً ، برای به دست آوردن چنبره ، بخشی از صفحه را اختیار و آن را (مثل سیگار ، ر. ک . شکل ۳.۳.۶) لوله می کنیم ؛



شکل ۳.۳.۶

اولین مرحله برای به دست آوردن چنبره از یک مستطیل : ساختن استوانه

سپس دو انتهای آنها را به هم وصل می نمایم (شکل ۴.۳.۶) .



شکل ۴.۳.۶

خم کردن استوانه و چسباندن دو انتهای آن برای به دست آوردن نام روغنی

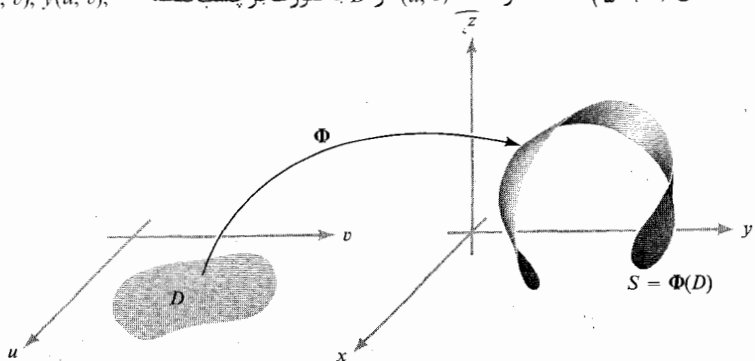
در سطوح، همانند منحنیها، می‌خواهیم یک نگاشت (یک پارامتری‌سازی) از نقش آن (یک شیئی هندسی) تمیز داده شود.

تعریف. یک سطح پارامتری شده تابعی است مانند $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ، که در آن D قلمروی در \mathbb{R}^2 است. سطح S نظیر به تابع Φ که نقش آن $S = \Phi(D)$ می‌باشد. می‌توانیم بنویسیم

$$\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

اگر Φ مشتق‌پذیر یا C^1 باشد (که معادل آن است که بگوییم $x(u, v)$ ، $y(u, v)$ و $z(u, v)$ توابعی مشتق‌پذیر یا C^1 از (u, v) اند؛ ر. ک. فصل ۲)، گوییم S یک سطح مشتق‌پذیر یا C^1 می‌باشد.

می‌توان Φ را پیچ دادن یا خمیدن D در صفحه تصور کرد که سطح S را به ما می‌دهد (ر. ک. شکل ۵.۳.۶). لذا، هر نقطه (u, v) در D به صورت برجسب نقطه $(x(u, v), y(u, v), z(u, v))$



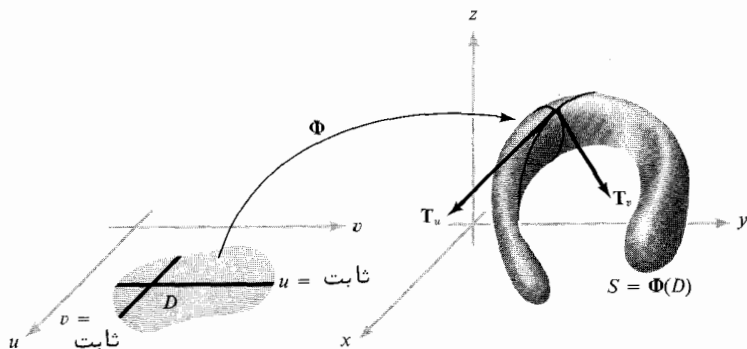
شکل ۵.۳.۶

Φ ناحیه D را "پیچ داده" و "خم کرده" تا سطح $S = \Phi(D)$ تولید شود.

$z(u, v)$ بر S درآمده است.

فرض کنیم Φ در $\mathbb{R}^2 \in (u_0, v_0)$ مشتقپذیر باشد. اگر u را ثابت و مساوی u_0 بگیریم، نگاشتی مانند $\mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ به دست می‌آید که با $t \mapsto \Phi(u_0, t)$ داده می‌شود و نقش آن یک منحنی بر سطح می‌باشد (شکل ۶.۳.۶). از فصلهای ۲ و ۳ می‌دانیم که بردار مماس بر این منحنی در نقطه $\Phi(u_0, v_0)$ عبارت است از

$$\mathbf{T}_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k}$$



شکل ۶.۳.۶

بردارهای مماس \mathbf{T}_u و \mathbf{T}_v که بر منحنیها روی سطح S ، و در نتیجه بر S ، مماسند.

به همین نحو، اگر v ثابت بوده و منحنی $t \mapsto \Phi(t, v_0)$ را در نظر بگیریم، بردار مماس بر این منحنی در $\Phi(u_0, v_0)$ به دست می‌آید که با

$$\mathbf{T}_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k}$$

داده می‌شود. چون بردارهای \mathbf{T}_u و \mathbf{T}_v بر دو منحنی روی سطح در نقطه $\Phi(u_0, v_0)$ مماسند، باید صفحه مماس بر سطح در این نقطه را معین نمایند؛ یعنی، $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ باید قائم به این سطح باشد.

گوییم سطح S در $\Phi(u_0, v_0)$ هموار^۱ است اگر در (u_0, v_0) داشته باشیم $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ ؛
 سطح هموار است اگر در تمام نقاط $\Phi(u_0, v_0) \in S$ هموار باشد. بردار ناصفر $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ قائم
 به S می باشد (به یاد آورید که حاصل ضرب برداری \mathbf{T}_u و \mathbf{T}_v بر صفحه پیموده شده به
 وسیله \mathbf{T}_u و \mathbf{T}_v عمود است)؛ ناصفر بودن آن وجود صفحه مماس را تضمین می کند. به طور
 شهودی، یک سطح هموار " گوشه " نخواهد داشت^۲.

مثال ۱. سطحی به معادلات

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u, \quad u \geq 0$$

را در نظر می گیریم. این معادلات سطح $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ را توصیف می کنند (برای تحقیق
 این امر، معادلات نسبت به x ، y ، و z را به توان دو برسانید)، که در شکل ۷.۳.۶
 نموده شده است. این سطح مخروطی است که یک " نقطه " در $(0, 0, 0)$ دارد؛ این سطح
 مشتق پذیر است، چرا که هر تابع مؤلفه مشتق پذیر می باشد. اما سطح در $(0, 0, 0)$ هموار
 نیست. برای مشاهده این امر، \mathbf{T}_u و \mathbf{T}_v را در $(0, 0) \in \mathbb{R}^2$ حساب می کنیم:

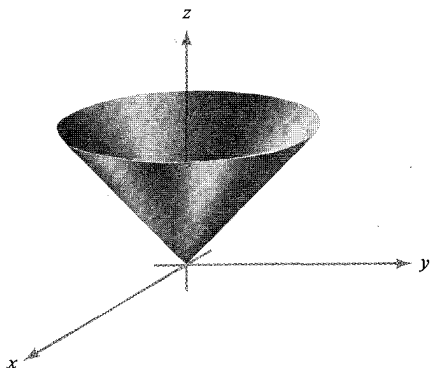
$$\begin{aligned} \mathbf{T}_u &= \frac{\partial x}{\partial u}(0, 0)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(0, 0)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(0, 0)\mathbf{k} \\ &= (\cos 0)\mathbf{i} + (\sin 0)\mathbf{j} + \mathbf{k} = \mathbf{i} + \mathbf{k} \end{aligned}$$

و به همین نحو،

$$\mathbf{T}_v = 0(-\sin 0)\mathbf{i} + 0(\cos 0)\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0}$$

۱. به بیان دقیق، هموار بودن به پارامتری سازی Φ وابسته است و نه فقط به نقش آن S .
 لذا، این اصطلاح تاحدودی نادقیق است؛ با اینحال، اصطلاحی توصیفی است و نباید
 ابهامی ایجاد نماید. ر.ک. تمرین ۹.

۲. در بخش ۴.۴ نشان دادیم که سطوح تراز $z = 0$ در واقع نمودار تابع دو متغیره
 در همسایگی نقطه ای مانند (x_0, y_0, z_0) اند که در $\nabla f(x_0, y_0, z_0) \neq \mathbf{0}$ صدق می کنند. این
 دو مفهوم از سطح را یکی می گرد. مجدداً، با استفاده از قضیه تابع ضمنی، می توان
 نشان داد که سطح پارامتری شده Φ در همسایگی نقطه (u_0, v_0) که در آن $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$
 نیز نمودار یک تابع دو متغیره است. لذا، همه تعاریف سطح باهم سازگار می باشند.
 (ر.ک. تمرین ۵)



شکل ۷.۳.۶

سطح $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ یک مخروط است.

لذا، $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = \mathbf{0}$ ؛ و در نتیجه، طبق تعریف، سطح در $(0, 0, 0)$ هموار نخواهد بود.

حال نتایج را در تعریفی صوری خلاصه می‌کنیم.

تعریف. اگر سطح پارامتری شده $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ در $\Phi(u_0, v_0)$ هموار باشد، یعنی در (u_0, v_0) داشته باشیم $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ ، صفحه مماس سطح در $\Phi(u_0, v_0)$ را صفحه معین شده به وسیله بردارهای \mathbf{T}_u و \mathbf{T}_v تعریف می‌کنیم. لذا، یک بردار قائم بوده، و معادله صفحه مماس در (x_0, y_0, z_0) بر سطح عبارت است از

$$(1) \quad (x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \mathbf{n} = 0$$

که در آن \mathbf{n} در (u_0, v_0) حساب شده است. هرگاه $\mathbf{n} = (n_1, n_2, n_3) = n_1\mathbf{i} + n_2\mathbf{j} + n_3\mathbf{k}$ آنگاه (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$(1') \quad n_1(x - x_0) + n_2(y - y_0) + n_3(z - z_0) = 0$$

مثال ۲. فرض کنیم $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ با

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = u^2 + v^2$$

داده شده باشد. در این صورت،

$$\mathbf{T}_u = (\cos v)\mathbf{i} + (\sin v)\mathbf{j} + 2u\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_v = -u(\sin v)\mathbf{i} + u(\cos v)\mathbf{j} + 2v\mathbf{k}$$

و صفحه مماس در $\Phi(u, v)$ مجموعه بردارهای مار بر $\Phi(u, v)$ و عمود بر

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = (-2u^2 \cos v + 2v \sin v, -2u^2 \sin v - 2v \cos v, u)$$

است اگر این بردار ناصفر باشد. چون $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ در $(u, v) = (0, 0)$ مساوی $\mathbf{0}$ است، در

، $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v \neq \mathbf{0}$ که $\Phi(0, 0) = (0, 0, 0)$ صفحه مماس وجود ندارد. اما در سایر نقاط،

می‌توان معادله صفحه مماس را به دست آورد. مثلاً، معادله صفحه مماس بر سطح مورد

نظر را در نقطه $\Phi(1, 0) = (1, 0, 1)$ پیدا می‌کنیم. در این نقطه داریم

$$\mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = (-2, 0, 1) = -2\mathbf{i} + \mathbf{k}$$

چون بردار \mathbf{n} قائم به سطح و نقطه $(1, 0, 1)$ واقع بر سطح را داریم، می‌توان با استفاده از

فرمول (۱') معادله صفحه مماس را به دست آورد:

$$-2(x - 1) + (z - 1) = 0$$

یعنی،

$$z = 2x - 1$$

مثال ۳. فرض کنیم سطح S نمودار تابع مشتق‌پذیر $g: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ باشد. این سطح در تمام

نقاط $(u_0, v_0, g(u_0, v_0)) \in \mathbb{R}^3$ هموار است.

برای نشان دادن این امر، S را به شکل پارامتری زیر می‌نویسیم:

$$x = u, \quad y = v, \quad z = g(u, v)$$

که همان $z = g(x, y)$ است. در این صورت،

$$\mathbf{T}_u = \mathbf{i} + \frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_v = \mathbf{j} + \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{k}$$

و به ازای $(u_0, v_0) \in \mathbb{R}^2$

$$(۲) \quad \mathbf{n} = \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = -\frac{\partial g}{\partial u}(u_0, v_0)\mathbf{i} - \frac{\partial g}{\partial v}(u_0, v_0)\mathbf{j} + \mathbf{k} \neq \mathbf{0}$$

این بردار ناصفر است، زیرا ضریب \mathbf{k} مساوی ۱ است؛ در نتیجه، پارامتری سازی

$(u, v) \mapsto (u, v, g(u, v))$ در تمام نقاط هموار می‌باشد. به علاوه، صفحه مماس در $(x_0, y_0, z_0) = (u_0, v_0, g(u_0, v_0))$ ، طبق فرمول (۱)، عبارت است از:

$$(x - x_0, y - y_0, z - z_0) \cdot \left(-\frac{\partial g}{\partial u}, -\frac{\partial g}{\partial v}, 1 \right) = 0$$

که در آن مشتقات جزئی در (u_0, v_0) حساب شده‌اند. با یادآوری $x = u$ و $y = v$ ، این معادله را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(3) \quad z - z_0 = \left(\frac{\partial g}{\partial x} \right) \cdot (x - x_0) + \left(\frac{\partial g}{\partial y} \right) \cdot (y - y_0)$$

که در آن $\partial g / \partial x$ و $\partial g / \partial y$ در (x_0, y_0) حساب شده‌اند.

این مثال همچنین نشان می‌دهد که تعریف صفحه مماس برای سطوح پارامتری شده با تعریف برای سطوح حاصل به عنوان نمودار یکی است، زیرا فرمول (۳) همان فرمولی است که (در فصل ۲) برای صفحه مماس بر S در $(x_0, y_0, z_0) \in S$ به دست آوردیم (ر. ک. ص ۱۳۷).

توجه به سطوح قطعه قطعه هموار، سطوح مرکب از تعدادی نقش سطوح پارامتری شده هموار، نیز سودمند است. مثلاً، "سطح مکعب در \mathbb{R}^3 یک چنین سطح است. این سطوح بخش ۴.۶ در نظر گرفته شده‌اند.

تمرینات

در تمرینهای ۱ تا ۳، معادله صفحه مماس بر سطح داده شده در نقطه مشخص شده را بیابید.

۱. در $(0, 1, 1)$ ، $x = 2u$ ، $y = u^2 + v$ ، $z = v^2$.

۲. در $(-\frac{1}{4}, \frac{1}{2}, 2)$ ، $x = u^2 - v^2$ ، $y = u + v$ ، $z = u^2 + 4v$.

۳. در $(13, -2, 1)$ ، $x = u^2$ ، $y = u \sin e^v$ ، $z = \frac{1}{3}u \cos e^v$.

۴. آیا سطوح تمرینهای ۱ و ۲ هموارند؟

۵. برای بردار یک‌ه‌قائم به سطح

$$x = \cos v \sin u, \quad y = \sin v \sin u, \quad z = \cos u$$

به ازای $u \in [0, \pi]$ و $v \in [0, 2\pi]$ یک عبارت پیدا کنید. این سطح را نام ببرید.

۰۶. تمرین ۵ را برای سطح

$$x = (2 - \cos v)\cos u, \quad y = (2 - \cos v)\sin u, \quad z = \sin v$$

به ازای $-\pi \leq u \leq \pi, -\pi \leq v \leq \pi$ تکرار کنید. آیا این سطح هموار است؟

۰۷. (آ) برای صفحه مماس بر سطح $x = h(y, z)$ فرمول به دست آورید.

(ب) برای $y = k(x, z)$ فرمول مشابهی به دست آورید.

۰۸. معادله صفحه مماس بر هر سطح در نقطه ذکر شده را بیابید.

(آ) $x = u^2, y = v^2, z = u^2 + v^2, u = 1, v = 1$

(ب) $z = 3x^2 + 8xy, x = 1, y = 0$

(پ) $x^3 + 3xy + z^2 = 2, x = 1, y = \frac{1}{3}, z = 0$

۰۹* سطوح $\Phi_1(u, v) = (u, v, 0)$ و $\Phi_2(u, v) = (u^3, v^3, 0)$ را در نظر بگیرید.

(آ) نشان دهید که نقش Φ_1 و Φ_2 صفحه xy است.

(ب) نشان دهید که Φ_1 یک سطح هموار را توصیف می کند، ولی Φ_2 این طور نیست.

از این نتیجه بگیرید که مفهوم هموار بودن سطح S به وجود دست کم یک پارامتری سازی هموار برای S بستگی دارد.

(پ) ثابت کنید صفحه مماس S تعریف شده و مستقل از پارامتری سازی هموار است (لازم است از قضیه تابع معکوس در بخش ۴.۴ استفاده نمایید).

(ت) پس از این نکات، آیا فکر می کنید می توانید یک پارامتری سازی هموار برای مخروط شکل ۷.۳.۶ پیدا کنید؟

۱۰* فرض کنید یک سطح هموار باشد؛ یعنی، Φ ، C^1 بوده و در (u_0, v_0) داشته باشیم

$$T_u \times T_v \neq 0$$

(آ) با استفاده از قضیه تابع ضمنی (بخش ۴.۴)، نشان دهید که نقش Φ در

مجاورت (u_0, v_0) نمودار یک تابع دو متغیره C^1 ، مثلاً " $z = f(x, y)$ " است (این در

صورتی برقرار است که مؤلفه z بردار $T_u \times T_v$ ناصفر باشد.)

(ب) نشان دهید که صفحه مماس در $\Phi(u_0, v_0)$ که با صفحه پیچیده شده توسط T_u و

T_v تعریف می شود با صفحه مماس نمودار $z = f(x, y)$ در این نقطه یکی است.

۱۱. سطحی در \mathbb{R}^3 در نظر بگیرید که با

$$\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta), \quad 0 \leq r \leq 1 \quad \text{and} \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

پارامتری شده است.

(آ) سطح را رسم و توصیف نمایید.

(ب) برای قائم یک به سطح عبارتی پیدا کنید.

(پ) برای صفحه مماس بر سطح در نقطه (x_0, y_0, z_0) معادله به دست آورید.

(ت) اگر (x_0, y_0, z_0) نقطه‌ای بر سطح باشد، نشان دهید که پاره‌خط افقی به طول یک

از محور z مار بر (x_0, y_0, z_0) در سطح و در صفحه مماس بر سطح در (x_0, y_0, z_0) جا دارد.

۱۲. کره‌ای به شعاع ۲ و مرکز مبدأ داده شده است. معادله صفحه مماس بر آن در نقطه

$(1, 1, \sqrt{2})$ را با توجه به کره به عنوان

(آ) یک سطح پارامتری به معادله $\Phi(\theta, \phi) = (2 \cos \theta \sin \phi, 2 \sin \theta \sin \phi, 2 \cos \phi)$ ؛

(ب) یک سطح تراز $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ؛ و

(پ) نمودار $g(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$

پیدا نمایید.

۱۳. (آ) برای هذلولی گون $x^2 + y^2 - z^2 = 1$ پارامتری‌سازی بیابید.

(آ) برای قائم یک به این سطح عبارت پیدا کنید.

(پ) معادله صفحه مماس بر این سطح در نقطه $(x_0, y_0, 0)$ را بیابید که $x_0^2 + y_0^2 = 1$.

(ت) نشان دهید که خطوط $(x_0, y_0, 0) + t(-y_0, x_0, 1)$ و $(x_0, y_0, 0) + t(y_0, -x_0, 1)$ در

سطح و در صفحه مماس به دست آمده در (پ) قرار دارند.

*۱۴. یک سطح پارامتری شده با تابع مشتق‌پذیر $\Phi: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ توصیف شده است. بنا بر

فصل ۲، مشتق باید تقریبی خطی به ما بدهد که از آن نمایشی از صفحه مماس به

دست می‌آید. این تمرین نشان می‌دهد که در واقع چنین است.

(آ) نشان دهید که نقش تبدیل خطی $D\Phi(u_0, v_0)$ صفحه پیموده شده به وسیله \mathbf{T}_u

و \mathbf{T}_v است. $(\mathbf{T}_v$ و \mathbf{T}_u در (u_0, v_0) حساب شده‌اند.)

(ب) نشان دهید که $w \perp \mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ اگر و فقط اگر w در برد $D\Phi(u_0, v_0)$ باشد.

(پ) نشان دهید که صفحه مماس به صورت تعریف شده در این بخش همان "صفحه

پارامتری شده"

$$(u, v) \mapsto \Phi(u_0, v_0) + D\Phi(u_0, v_0) \begin{pmatrix} u - u_0 \\ v - v_0 \end{pmatrix}$$

می‌باشد.

۴.۶ مساحت یک سطح

پیش از پرداختن به انتگرالهای سطح به طور کلی، ابتدا به محاسبه مساحت یک سطح توجه می‌کنیم، و نحوه کار مانند یافتن طول قوس یک منحنی است که پیش از انتگرالهای مسیری مطرح شد.

هدف ما در اینجا یافتن فرمولی برای مساحت یک سطح است. طرق مختلفی برای به دست آوردن این نوع فرمول وجود دارند. برای احتراز از مشکلات ناشی از به دست آوردن مساحت به وسیله فرایند حدی مستلزم مجموعه‌های ریمان، راه ساده‌تری اختیار و مساحت سطح را با انتگرال مضاعف تعریف می‌کنیم. سپس این تعریف را توجیه خواهیم کرد.

در بخش ۳.۶ سطح پارامتری شده S را نقش تابع $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ تعریف کردیم، که به صورت $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ نوشته می‌شود. نگاشت Φ را پارامتری سازی S نامیدیم. سپس گفتیم که S در S $\Phi(u, v) \in S$ هموار است اگر $T_u \times T_v \neq 0$ ، که در آن

$$T_u = \frac{\partial x}{\partial u}(u, v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial u}(u, v)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial u}(u, v)\mathbf{k}$$

و

$$T_v = \frac{\partial x}{\partial v}(u, v)\mathbf{i} + \frac{\partial y}{\partial v}(u, v)\mathbf{j} + \frac{\partial z}{\partial v}(u, v)\mathbf{k}$$

به یاد آورید که یک سطح هموار (به بیان نادقیق) سطحی است که گوشه یا شکستگی نداشته باشد. تا پایان این فصل و در فصل بعد، فقط سطوح قطعه قطعه همواری را در نظر می‌گیریم

که اجتماع نقشه‌هایی از سطوح پارامتری شده $\Phi_i: D_i \rightarrow \mathbb{R}^3$ باشند به طوری که (یک) D_i یک ناحیهء مقدماتی در صفحه باشد؛

(دو) Φ_i ، جز احتمالا "بر مرز D_i ، C^1 و یک به یک باشد؛ و

(سه) S_i ، یعنی نقش Φ_i ، جز احتمالا "در تعدادی متناهی نقطه هموار باشد.

تعریف. مساحت سطح $A(S)$ یک سطح پارامتری شده را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

۱. چون تابحال استقلال پارامتری سازی مطرح نشده است، ممکن است فکر کنیم $A(S)$ تابع پارامتری سازی Φ است. ما در بخش ۶.۶ استقلال پارامتری سازی را مورد بحث قرار می‌دهیم. استفاده از این نماد در اینجا ابهامی ایجاد نخواهد کرد.

$$(۱) \quad A(S) = \int_D \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| \, du \, dv$$

که در آن $\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|$ نرم $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ می باشد. اگر S اجتماعی از سطوح S_i باشد، مساحتش مجموع مساحت S_i ها می باشد.

به آسانی معلوم می شود که

$$(۲) \quad \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \sqrt{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\right]^2}$$

که در آن

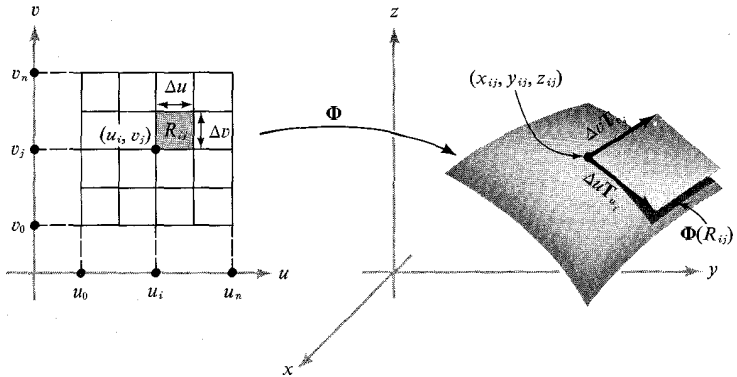
$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}$$

و غیره. لذا، فرمول (۱) به صورت زیر درمی آید:

$$(۳) \quad A(S) = \int_D \sqrt{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\right]^2} \, du \, dv$$

همچنین، این تعریف را می توان با تحلیل انتگرال $\int_D \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| \, du \, dv$ برحسب مجموعه های ریمان توجیه کرد. برای سادگی، فرض کنیم D مستطیل باشد. افراز منتظم n م D را در نظر گرفته، و فرض می کنیم R_{ij} مستطیل ij م در افراز به عوس $(u_i, v_j), (u_{i+1}, v_j), (u_i, v_{j+1}), (u_{i+1}, v_{j+1})$ و (u_{i+1}, v_{j+1}) با $0 \leq i \leq n-1, 0 \leq j \leq n-1$ مقادیر \mathbf{T}_u و \mathbf{T}_v در (u_i, v_j) را با \mathbf{T}_{u_i} و \mathbf{T}_{v_j} نشان می دهیم. بردارهای $\Delta u \mathbf{T}_{u_i}$ و $\Delta v \mathbf{T}_{v_j}$ را می توان مماس بر سطح در $\Phi(u_i, v_j) = (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij})$ گرفت، که $\Delta u = u_{i+1} - u_i, \Delta v = v_{j+1} - v_j$ در این صورت این بردارها متوازی الاضلاع P_{ij} را تشکیل می دهند که در صفحه مماس بر سطح در (x_{ij}, y_{ij}, z_{ij}) قرار دارند (ر. ک. شکل ۱.۴.۶). لذا، سطح توسط P_{ij} ها "پوشیده می شود". به ازای n بزرگ، مساحت P_{ij} تقریب مناسبی به مساحت $\Phi(R_{ij})$ است. چون مساحت متوازی الاضلاع پیموده شده به وسیله دو بردار \mathbf{v}_1 و \mathbf{v}_2 مساوی $\|\mathbf{v}_1 \times \mathbf{v}_2\|$ است (ر. ک. فصل ۱)، می بینیم که

$$A(P_{ij}) = \|\Delta u \mathbf{T}_{u_i} \times \Delta v \mathbf{T}_{v_j}\| = \|\mathbf{T}_{u_i} \times \mathbf{T}_{v_j}\| \Delta u \Delta v$$



شکل ۱.۴.۶

از سطح $S = \Phi(D)$ را تقریب می‌کند. مساحت متوازی‌الاضلاعی است که مساحت یک قطعه $\|T_{u_i} \times T_{v_j}\| \Delta u \Delta v$

بنابراین، مساحت پوشش مساوی است با

$$A_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} A(P_{ij}) = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} \|T_{u_i} \times T_{v_j}\| \Delta u \Delta v$$

وقتی $n \rightarrow \infty$ ، مجموعهای A_n به انتگرال

$$\int_D \|T_u \times T_v\| du dv$$

همگرا می‌باشد. چون با رفتن $n \rightarrow \infty$ باید مساحت سطح را بهتر و بهتر تقریب کند فرمول (۱) برای تعریف مناسبی از $A(S)$ به دست می‌آید.

مثال ۱. فرض کنیم D ناحیه‌ء معین شده به وسیله $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$ بوده، و

تابع $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ تعریف شده با

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = r$$

یک پارامتری سازی مخروط S باشد. داریم

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ \sin \theta & r \cos \theta \end{vmatrix} = r$$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin \theta & r \cos \theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -r \cos \theta$$

۹

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = r \sin \theta$$

در نتیجه، انتگرالده مساحت مساوی است با

$$\begin{aligned} \|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| &= \sqrt{r^2 + r^2 \cos^2 \theta + r^2 \sin^2 \theta} \\ &= r\sqrt{2} \end{aligned}$$

واضح است که $\|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\|$ به ازای $r = 0$ صفر می‌شود، ولی به ازای هر θ ، $\Phi(0, \theta) = (0, 0, 0)$ ، لذا، تنها نقطه‌ای است که سطح در آن هموار نمی‌باشد. داریم

$$\begin{aligned} \int_D \|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| \, dr \, d\theta &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{2}r \, dr \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{1}{2}\sqrt{2} \, d\theta \\ &= \sqrt{2}\pi \end{aligned}$$

برای تأیید مساحت بودن $\Phi(D)$ باید یک به یک بودن Φ را (به ازای نقاط غیرواقعی

برمرز D) تحقیق کنیم. فرض کنیم D^0 مجموعه (r, θ) ‌هایی باشد که $0 < r < 1$ و $0 < \theta < 2\pi$. لذا، D^0 مساوی D بدون مرز آن است. برای مشاهده یک به یک بودن $\Phi: D^0 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ، فرض کنیم به ازای (r, θ) و (r', θ') متعلق به D^0 باشند. در این صورت،

$$r \cos \theta = r' \cos \theta', \quad r \sin \theta = r' \sin \theta', \quad r = r'$$

از این معادلات معلوم می‌شود که $\cos \theta = \cos \theta'$ و $\sin \theta = \sin \theta'$. لذا، یا $\theta = \theta'$ یا $\theta = \theta' + 2\pi n$. اما حالت دوم ناممکن است، زیرا θ و θ' هر دو به بازه $[0, 2\pi[$ تعلق دارند؛ و لذا، نمی‌توانند اختلاف 2π رادیان داشته باشند. این ثابت می‌کند که Φ خارج از مرز یک به یک است. (آیا $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک به یک است؟)

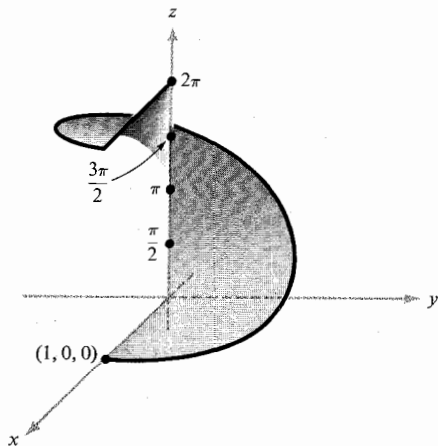
در مثالهای آتی معمولاً، وقتی شهوداً "یک به یک بودن پارامتری‌سازی واضح است

آن را تحقیق نخواهیم کرد.

مثال ۲. یک مارپیچگون با $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ تعریف شده است، که در آن

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad z = \theta$$

و D ناحیه‌ای است که $0 \leq r \leq 1$ و $0 \leq \theta \leq 2\pi$ (شکل ۲۰.۴.۶).



شکل ۲۰.۴.۶

مارپیچگون $x = r \cos \theta, y = r \sin \theta, z = \theta$

مثل قبل داریم ، و $\partial(x, y)/\partial(r, \theta) = r$

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \sin \theta & r \cos \theta \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \sin \theta$$

$$\frac{\partial(x, z)}{\partial(r, \theta)} = \begin{vmatrix} \cos \theta & -r \sin \theta \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \cos \theta$$

لذا، انتگرالده مساحت عبارت است از $\sqrt{r^2 + 1}$ که هیچگاه صفر نیست؛ در نتیجه، سطح هموار می‌باشد. مساحت مارپیچگون عبارت است از

$$\int_D \|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| \, dr \, d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} \, dr \, d\theta = 2\pi \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} \, dr$$

پس از کمی محاسبه (و استفاده از جداول انتگرال در ضمیمه پ)، معلوم می‌شود که این انتگرال مساوی است با

$$\pi(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}))$$

سطح S به معادله $z = f(x, y)$ ، که $(x, y) \in D$ ، پارامتری سازی

$$x = u, \quad y = v, \quad z = f(u, v)$$

به ازای $(u, v) \in D$ را می پذیرد. وقتی f ، C^1 باشد، این پارامتری سازی هموار است، و فرمول مساحت سطح به

$$(۴) \quad A(S) = \int_D \left(\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \right) dA$$

تحویل می شود، و این کار با اعمال فرمولهای

$$\mathbf{T}_u = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{k}$$

$$\mathbf{T}_v = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{k}$$

و

$$\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v = -\frac{\partial f}{\partial u} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial v} \mathbf{j} + \mathbf{k} = -\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

به صورت ذکر شده در مثال ۲ از بخش ۳.۶ انجام می گیرد.

اختیاری

مساحت سطح و انتگرالهای مجازی

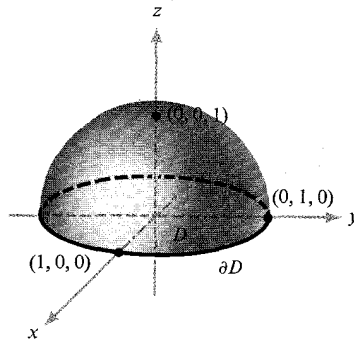
در فرمول (۴) فرض کردیم که $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ توابعی پیوسته (و در نتیجه، کراندار) بر D اند. لیکن، توجه به مساحت سطوحی که در آنها $(\partial f/\partial x)(x_0, y_0)$ یا $(\partial f/\partial y)(x_0, y_0)$ با نزدیک شدن (x_0, y_0) به مرکز D بدخواه بزرگ می شود اهمیت دارد. مثلاً، "نیمکره"

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$$

را در نظر می گیریم، که در آن ناحیه D $x^2 + y^2 \leq 1$ می باشد (ر.ک. شکل ۳.۴.۶). خواهیم داشت

$$(۵) \quad \frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y}{\sqrt{1 - x^2 - y^2}}$$

مرز D دایره یکه $x^2 + y^2 = 1$ است؛ یعنی، وقتی (x, y) به D نزدیک شود، مقدار



شکل ۳.۴.۶

نیمکره $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$.

$x^2 + y^2$ به 1 نزدیک می‌گردد. لذا، در (۵)، مخرجها به صفر میل خواهند کرد. می‌خواهیم به حالتی از این نوع بپردازیم؛ در نتیجه، مساحت $A(S)$ سطح S توصیف شده به وسیله $z = f(x, y)$ روی ناحیه D را، که در آن f مشتق‌پذیر بوده و احتمالاً " $\partial f/\partial x$ " و $\partial f/\partial y$ بر ∂D ناپیوستگی دارند را، به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A(S) = \int_D \left(\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2} + 1 \right) dA$$

مشروط بر اینکه $\sqrt{(\partial f/\partial x)^2 + (\partial f/\partial y)^2} + 1$ روی D انتگرال‌پذیر باشد، حتی‌اگر این انتگرال مجازی باشد؛ در واقع، این یکی از دلایل معرفی مفهوم انتگرال مجازی در فصل ۵ می‌باشد.

مثال ۳. مساحت سطح کره S توصیف شده به وسیله $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ را حساب کنید.

مساحت نیمکره بالایی S^+ را حساب می‌کنیم، که در آن

$$x^2 + y^2 + z^2 = 1, \quad z \geq 0$$

و سپس حاصل را در دو ضرب می‌نماییم. لذا، داریم

$$f(x, y) = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, \quad x^2 + y^2 \leq 1$$

فرض کنیم D ناحیه $x^2 + y^2 \leq 1$ باشد. در این صورت، با اعمال فرمول (۴) و محاسبات

(۵) در فوق، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} A(S^+) &= \int_D \left(\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1} \right) dA \\ &= \int_D \left(\sqrt{\frac{x^2}{1-x^2-y^2} + \frac{y^2}{1-x^2-y^2} + 1} \right) dA \\ &= \int_D \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy dx \end{aligned}$$

که یک انتگرال مجازی است. با اینحال، می توان قضیه فوبینی را در این حالت به کار برده، انتگرال مجازی مکرر زیر را به دست آورد:

$$\begin{aligned} \int_{-1}^1 \int_{-(1-x^2)^{1/2}}^{(1-x^2)^{1/2}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}} dy dx &= \int_{-1}^1 \left[\sin^{-1} \frac{y}{(1-x^2)^{1/2}} \right]_{-(1-x^2)^{1/2}}^{(1-x^2)^{1/2}} dx \\ &= \int_{-1}^1 \left[\frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \right] dx = \int_{-1}^1 \pi dx = 2\pi \end{aligned}$$

لذا، مساحت تمام کره مساوی 4π است. برای مشاهده راه محاسبه دیگری برای این مساحت بدون انتگرال مجازی، ر.ک. تمرین ۱.

در اکثر کتب حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره، نشان داده شده است که مساحت جانبی سطح حاصل از دوران نمودار تابع $y = f(x)$ حول محور x مساوی است با

$$(۶) \quad A_1 = 2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

اگر نمودار حول محور y دوران کند، خواهیم داشت

$$(۷) \quad A_2 = 2\pi \int_a^b |x| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx$$

ما فرمول (۶) را به روشهای ذکر شده در فوق به دست می آوریم؛ فرمول (۷) را می توان به روش مشابهی به دست آورد (تمرین ۱۵).

برای به دست آوردن فرمول (۶) از فرمول (۳)، باید S را پارامتری سازیم. این پارامتری سازی با

$$x = u, \quad y = f(u) \cos v, \quad z = f(u) \sin v$$

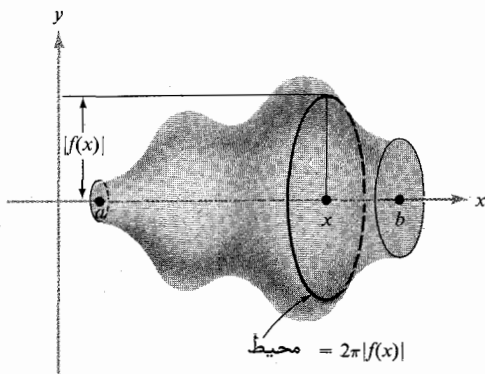
روی ناحیه D تعریف شده که در آن

$$a \leq u \leq b, \quad 0 \leq v \leq 2\pi$$

تعریف شده‌اند. این واقعا " یک پارامتری سازی S است، زیرا به ازای u ی ثابت،

$$(u, f(u)\cos v, f(u)\sin v)$$

دایره‌ای به شعاع $|f(u)|$ و مرکز $(u, 0, 0)$ را رسم می‌کند (شکل ۴.۴.۶).



شکل ۴.۴.۶

منحنی $y = f(x)$ حول محور x دوران کرده است.

۱۶

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = -f(u)\sin v, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = f(u)f'(u), \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} = f(u)\cos v,$$

در نتیجه، طبق فرمول (۳)،

$$\begin{aligned} A(S) &= \int_D \left(\sqrt{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \right]^2 + \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)} \right]^2} \right) du dv \\ &= \int_D \left(\sqrt{[f(u)]^2 \sin^2 v + [f(u)]^2 [f'(u)]^2 + [f(u)]^2 \cos^2 v} \right) du dv \\ &= \int_D |f(u)| \sqrt{1 + [f'(u)]^2} du dv \\ &= \int_a^b \int_0^{2\pi} |f(u)| \sqrt{1 + [f'(u)]^2} dv du \\ &= 2\pi \int_a^b |f(u)| \sqrt{1 + [f'(u)]^2} du \end{aligned}$$

که همان فرمول (۶) می‌باشد.

هرگاه S سطح دوار باشد، آنگاه $2\pi|f(x)|$ محیط مقطع عرضی قائم S در نقطه x است (شکل ۴.۴.۶). توجه کنید که می‌توان نوشت

$$2\pi \int_a^b |f(x)| \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_{\sigma} 2\pi|f(x)| ds$$

که در آن عبارت سمت راست انتگرال $2\pi|f(x)|$ در امتداد مسیر $\mathbb{R}^2 \rightarrow [a, b] : \sigma : t \mapsto (t, f(t))$ می‌باشد. بنابراین، مساحت سطح جانبی یک جسم دوار با انتگرالگیری از محیط مقطع عرضی در امتداد مسیر تعیین شده به وسیله تابع داده شده به دست می‌آید.

یادداشت تاریخی

به یاد آورید که حساب دیفرانسیل و انتگرال توسط اسحق نیوتن (۱۶۴۷ - ۱۷۲۷) حدود ۱۶۶۹ و توسط گوتفرید ویلهلم لایب نیتز (۱۷۱۶ - ۱۶۴۶) حدود ۱۶۸۴ ابداع (یا کشف؟) شده است. در آغاز قرن هجده، ریاضیدانان به یافتن مسیرهایی با کوتاهترین فاصله روی یک سطح، به کمک روشهای حساب دیفرانسیل و انتگرال، توجه داشتند. در این دوره سطوح را مرز اجسامی می‌گرفتند که با نامساویها تعریف می‌شدند (گوی $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ به کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ محدود است).

کریستین هویگنس^۱ (۱۶۹۵ - ۱۶۲۹) اولین شخص پس از ارشمیدس بود که مساحت چند سطح خاص غیر از کره را به دست آورد، و همو بود که مساحت بخشهایی از سطوح دوار، نظیر سهمی‌گون و هذلولی‌گون، را محاسبه کرد.

لئونارد اویلر (۱۷۸۳ - ۱۷۰۷)، ریاضیدان برجسته و پرکار، اولین کار اساسی در نظریه سطوح را عرضه داشت:

“Recherches sur la courbure des surfaces.”

و در این اثر است که برای اولین بار سطح به طور صوری به عنوان نمودار $z = f(x, y)$ تعریف شد. اویلر به انحای سطوح علاقه داشت، و در سال ۱۷۷۱ مفهوم سطوح پارامتری را که در این بخش توصیف شد معرفی نمود.

پس از گسترش سریع حساب دیفرانسیل و انتگرال در اوایل قرن هجده، فرمولهای

طول منحنیها و مساحت سطوح به دست آمدند. با آنکه نمی دانیم اول بار چه وقت فرمولهای مساحت آمده در این بخش به دست آمده اند، مسلماً "در آخر قرن هجده همه گیر بوده اند. پیش از این دوره، مفاهیم اساسی طول یک منحنی و مساحت یک سطح را شهودی می گرفتند، و استفاده از فرمولهای حساب دیفرانسیل و انتگرال برای محاسبه مساحت کار بسیار بزرگی به حساب می آید.

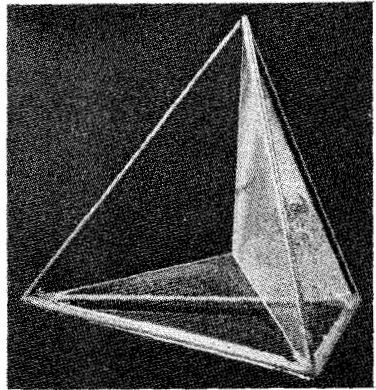
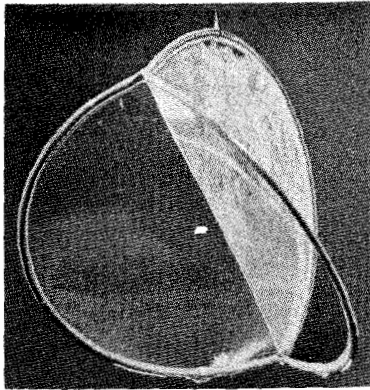
آگوستن لویی کشی (۱۸۵۷-۱۷۸۹) اولین کسی بود که به سوی تعریف کمیات طول و مساحت سطح به وسیله انتگرالها به صورتی که در این کتاب شد گام برداشت. تعریف مساحت سطح مستقل از انتگرالها بعداً " مطرح شد، ولی این کار مسائل مشکل بسیاری را مطرح کرد که تا پایان این قرن کاملاً حل نشدند.

این بخش را با مسئله کلاسیک جالب پلاتو، که تاریخچه ای طولانی در ریاضیات دارد، پایان می بخشیم. فیزیکدان بلژیکی، ژوزف پلاتو^۱ (۱۸۸۳-۱۸۰۱) در سالهای ۱۸۳۰ تا ۱۸۶۹ آزمایشهای زیادی روی کشش سطح و پدیده های موئینه گی انجام داد، آزمایشهایی که اثرات بسیار در آن زمان داشته و توسط فیزیکدانان برجسته قرن نوزده، نظیر میشل فارادی (۱۸۶۷-۱۷۹۱)، تکرار شدند.

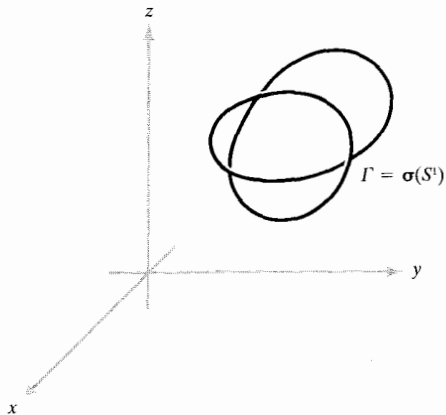
هرگاه سیمی را در محلول صابون یا گلیسیرین فرو برده و آن را بیرون بیاوریم، معمولاً "نوازی از صابون اطراف سیم دیده خواهد شد. در شکل ۵.۴.۶ چند مثال دیده می شوند، گرچه ممکن است خواننده خود بخواهد آزمایشی برای خود ترتیب بدهد.

پلاتو سوءال ریاضی زیر را مطرح کرد. به ازای یک مرز داده شده (سیم)، چگونه می توان وجود چنین سطح (نوار صابون) را ثابت کرد و چند سطح می توانند موجود باشند؟ زمینه فیزیکی این اصل زمینه این است که طبیعت تمایل به مینیم سازی مساحت دارد؛ یعنی، سطح تشکیل شده باید سطحی باشد که در بین تمام سطوح ممکن که مرزشان منحنی داده شده است کمترین مساحت را دارد.

پلاتو مسئله را به نحو خاصی تنظیم کرد. فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^2$ قرص یک-ه تعریف شده با $\{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ باشد؛ همچنین، $S^1 = \partial D$ مرز آن باشد. به علاوه، فرض کنیم $\sigma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک منحنی بسته ساده با نقش $\Gamma = \sigma([0, 2\pi])$ باشد که نمایش یک سیم در \mathbb{R}^3 است (شکل ۵.۴.۶).



شکل ۵.۴.۶
دو نوار فیلم در اطراف سیمها (فریتس گورو)



شکل ۶.۴.۶
 Γ مرز یک نوار صابون است .

فرض کنیم \mathcal{S} مجموعه تمام نگاشتهای $\mathbb{R}^3 \rightarrow D$ باشد به طوری که $\Phi(\partial D) = \Gamma$

Φ ، C^1 بوده، و ∂D بر یک به یک است. هر $\Phi \in \mathcal{S}$ نمایش یک سطح پارامتری C^1 است که سیم Γ را "می پیماید". به ازای هر $\Phi \in \mathcal{S}$ مساحت سطح نقش را داریم: $A(\Phi) = \int_D \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| du dv$. لذا، مساحت تابعی است که به هر سطح پارامتری مساحتش را منتسب می کند. پلاتومی پرسد آیا A بر \mathcal{S} مینیمم دارد؛ یعنی، آیا Φ_0 ی هست که به ازای هر $\Phi \in \mathcal{S}$ ، $A(\Phi_0) \leq A(\Phi)$ ، متأسفانه، روشهای این کتاب برای حل این مسئله کافی نیستند. مسائل یافتن مینیممهای توابع حقیقی چند متغیره را می توان تعقیب کرد، ولی بهیچوجه نمی توان مجموعه \mathcal{S} را یک ناحیه در \mathbb{R}^n به ازا n گرفت! مجموعه \mathcal{S} واقعا "یک فضا از توابع است، و مسئله یافتن مینیممهای توابعی چون A بر این گونه مجموعه ها بخشی از "حساب تغییرات" است، مبحثی که به اندازه خود حساب دیفرانسیل و انتگرال قدمت دارد. این نظام ارتباط نزدیکی با معادلات دیفرانسیل جزئی نیز دارد.

پلاتو نشان داد که اگر

$$\Phi_0(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$$

مینیمم داشته باشد، باید (پس از نرمالی سازی مناسب) در معادلات دیفرانسیل جزئی زیر صدق نماید:

$$\nabla^2 \Phi_0 = 0 \quad (\text{یک})$$

$$\frac{\partial \Phi_0}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Phi_0}{\partial v} = 0 \quad (\text{دو})$$

$$\left\| \frac{\partial \Phi_0}{\partial u} \right\| = \left\| \frac{\partial \Phi_0}{\partial v} \right\| \quad (\text{سه})$$

که در آنها $\|w\|$ "نرم" یا طول بردار w می باشد.

بیش از هفتاد سال ریاضیدانانی چون ریمن، وایراشتراس^۱، اچ. ا. شوارتز، داربو^۲، و لیب^۳ به این مسئله پلاتو اندیشیده اند. بالاخره، در سال ۱۹۳۱ مسئله سامان گرفت و آن زمانی بود که جسی داگلاس^۴ نشان داد که یک چنین Φ_0 وجود دارد. با اینحال، بسیاری از سوءالات در باب نوارهای صابون لاینحل مانده اند، و امروزه این حیطه از تحقیقات هنوز فعال می باشد.

1. Wierstrass

2. Darboux

3. Lebesgue

4. Jessie Douglas

تمرینات

۱. مساحت سطح کره^۳ یکه^۳ S با نمایش پارامتری $\Phi: D \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ را بیابید، که در آن D مستطیل $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq \phi \leq \pi$ بوده و Φ با معادلات زیر داده شده باشد:

$$x = \cos \theta \sin \phi, \quad y = \sin \theta \sin \phi, \quad z = \cos \phi$$

توجه کنید که نمایش پارامتری تمام کره ممکن است، ولی نمی‌توان آن را به شکل $z = f(x, y)$ نمایش داد. با مثال ۳ مقایسه کنید.

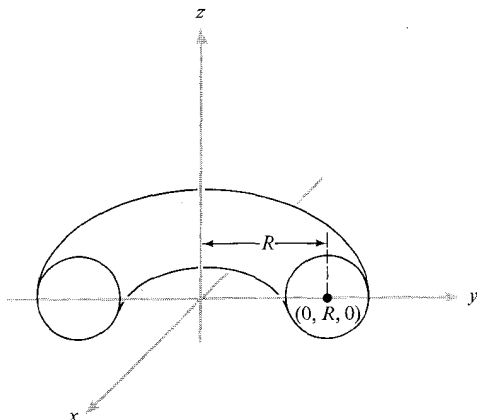
۲. در تمرین ۱، اگر ϕ از $-\pi/2$ تا $\pi/2$ تغییر کند؛ از ۰ تا 2π تغییر کند، چه رخ خواهد داد؟ چرا جوابهای متفاوت به دست می‌آیند؟

۳. اگر قلمرو D مساوی $0 \leq r \leq 1$ و $0 \leq \theta \leq 3\pi$ باشد، مساحت مارپیچ‌گون مثال ۲ را بیابید.

۴. چنبره^۳ T را می‌توان با تابع $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ پارامتری کرد، که در آن Φ با توابع مختصات

$$x = (R + \cos \phi) \cos \theta, \quad y = (R + \cos \phi) \sin \theta, \quad z = \sin \phi$$

مستطیل D مستطیل $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$ است؛ یعنی $0 \leq \theta, \phi \leq 2\pi$ ؛ و $R > 1$ ثابت می‌باشد (ر. ک. شکل ۷.۴.۶). نشان دهید $A(T) = (2\pi)^2 R$ ؛ ابتدا از فرمول (۳) و سپس از فرمول (۷)



شکل ۷.۴.۶

یک مقطع عرضی چنبره

استفاده کنید.

۵. فرض کنید $\Phi(u, v) = (u - v, u + v, uv)$ و D قرص یکه در صفحه uv باشد مساحت $\Phi(D)$ را پیدا نمایید.

۶. مساحت بخشی از کره $x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$ که توسط مخروط $x^2 + y^2 = z^2, z \geq 0$ از آن جدا می شود (ر. ک. تمرین ۱).

*۷. استوانه $x^2 + y^2 = x$ کره S را به دو ناحیه S_1 و S_2 تقسیم کرده است، که S_1 داخل استوانه و S_2 خارج آن است. نسبت مساحت $A(S_2)/A(S_1)$ را بیابید.

*۸. فرض کنید سطح S که نمودار تابع $z = f(x, y)$ ، $(x, y) \in D \subset \mathbb{R}^2$ ، است را بتوان با مجموعه $E \subset \mathbb{R}^3$ (x, y, z) هایی با $F(x, y, z) = 0$ نیز توصیف کرد (یک سطح تراز). فرمولی برای $A(S)$ بیابید که فقط شامل F باشد.

۹. بیضی گون E

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

را به طور پارامتری نمایش داده، و برای مساحت سطح $A(E)$ آن انتگرال بنویسید (انتگرال را حساب نکنید).

۱۰. فرض کنید منحنی $y = f(x)$ ، $a \leq x \leq b$ ، حول محور y دوران نماید. نشان دهید که مساحت سطح جارو شده مساوی است با

$$A = 2\pi \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} |x| dx$$

۱۱. مساحت سطح حاصل از دوران منحنی $y = x^2$ ، $0 \leq x \leq 1$ ، حول محور y را بیابید.

۱۲. با استفاده از فرمول (۴)، مساحت سطح مخروط مثال ۱ را حساب کنید.

۱۳. مساحت سطح تعریف شده با $x^2 + 2y^2 \leq 1, x + y + z = 1$ را بیابید.

۱۴. نشان دهید که به ازای بردارهای T_u و T_v داریم

$$\|T_u \times T_v\| = \sqrt{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\right]^2}$$

۱۵. مساحت سطح

$$x = r \cos \theta, \quad y = 2r \cos \theta, \quad z = \theta, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$$

را محاسبه کرده و آن را رسم نمایید.

۱۶. قضیه پاپوس^۱ را ثابت کنید: فرض کنید $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ یک مسیر C^1 باشد که نقش آن در نیمصفحه راست قرار داشته و منحنی بسته ساده‌ای باشد. مساحت سطح جانبی حاصل از دوران نقش σ حول محور y مساوی $2\pi \bar{x}(\sigma)$ است، که در آن \bar{x} مقدار متوسط مختصات x نقاط واقع بر σ بوده، و $\|\sigma\|$ طول σ می‌باشد. (برای بحث در مقادیر متوسط، ر.ک. تمرینهای ۸ تا ۱۲، بخش ۱۰.۶).

۱۷. یک قطعه سیم نازک اختیار کرده و آن را به شکل یک منحنی بسته ساده در آورید. یک کاسه کوچک پر از آب کرده، چند قطره مایع ظرفشویی در آن ریخته، و کاملاً هم بزنید. سیم را در این محلول فرو برده و به آرامی بیرون آورید. مشاهدات خود را در چند جمله بنویسید.

۵.۶ انتگرالهای توابع اسکالر روی سطوح

حال برای تعریف انتگرال تابع اسکالر f روی سطح S حاضر و آماده‌ایم. این مفهوم تعمیم طبیعی مساحت یک سطح است، که نظیر انتگرال تابع اسکالر $f(x, y, z) = 1$ روی S می‌باشد. این کاملاً شبیه گرفتن انتگرال مسیری به عنوان تعمیمی از طول قوس می‌باشد. در این بخش با انتگرال تابع برداری F روی یک سطح سروکار داریم. این مفاهیم نقش اساسی در آنالیز برداری، که در فصل آخر مطرح می‌شوند، خواهند داشت.

بحث را با سطح S به معادله پارامتری $\Phi: D \rightarrow S \subset \mathbb{R}^3$ ، $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ آغاز می‌کنیم.

تعریف. اگر $f(x, y, z)$ یک تابع پیوسته حقیقی تعریف شده بر S باشد، انتگرال f روی S را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$(۱) \quad \int_S f(x, y, z) dS = \int_D f \, dS = \int_D f(\Phi(u, v)) \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| \, du \, dv$$

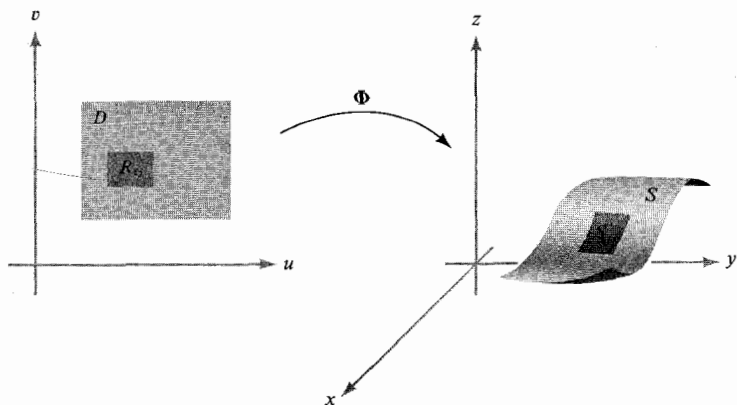
که در آن \mathbf{T}_u و \mathbf{T}_v همان معنی بخش ۳.۶ را دارند. معادله (۱) را به صورت بازمی‌نویسیم:

$$\int_S f \, dS =$$

$$(۲) \int_D f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{\left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)}\right]^2 + \left[\frac{\partial(x, z)}{\partial(u, v)}\right]^2} du dv$$

لذا، اگر f متحد 1 باشد، فرمول مساحت (۳) بخش ۴.۶ به دست می‌آید. انتگرال سطح، مانند مساحت سطح، از پارامتری سازی مستقل است. این امر در بخش ۴.۶ مورد بحث قرار خواهد گرفت.

باتوجه به این انتگرال به عنوان حد مجموعها، می‌توان اطلاعاتی شهودی راجع به آن به دست آورد. فرض کنیم مستطیل D به n^2 مستطیل R_{ij} افزاز شده باشد. همچنین، $S_{ij} = \Phi(R_{ij})$ بخشی از سطح $\Phi(D)$ باشد که نظیر به R_{ij} است (ر.ک. شکل (۱.۵.۶)).



شکل ۱.۵.۶

Φ بخش R_{ij} از D را به قسمتی از S می‌برد.

و $A(S_{ij})$ را مساحت این قسمت از سطح می‌گیریم. به ازای n بزرگ، f تقریباً "بر S_{ij} ثابت است، و مجموع زیر را تشکیل می‌دهیم:

$$(۳) S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(\Phi(u_i, v_j)) A(S_{ij})$$

که در آن $(u_i, v_j) \in R_{ij}$. اما در بخش ۴.۶ فرمول زیر برای $A(S_{ij})$ به دست آمد:

$$A(S_{ij}) = \int_{R_{ij}} \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| du dv$$

که، طبق قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها (ر. ک. ص ۳۵۷)، به ازای نقطه‌ای مانند (u_i^*, v_j^*) در R_{ij} مساوی است با $\Delta u \Delta v \|\mathbf{T}_{u_i^*} \times \mathbf{T}_{v_j^*}\|$. لذا، مجموع ما به صورت زیر درمی‌آید:

$$S_n = \sum_{i=0}^{n-1} \sum_{j=0}^{n-1} f(\Phi(u_i, v_j)) \|\mathbf{T}_{u_i^*} \times \mathbf{T}_{v_j^*}\| \Delta u \Delta v$$

که یک مجموع تقریب ساز برای آخرین انتگرال در (۱) می‌باشد. بنابراین $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \int_S f dS$ ، توجه کنید که هر جمله در مجموع (۳) مقدار f در نقطه‌ای مانند $\Phi(u_i, v_j)$ ضربدر مساحت S_{ij} است. این را با تعبیر مجموع ریمانی انتگرال مسیری در بخش ۱.۶ مقایسه نمایید.

هرگاه S اجتماعی از سطوح پارامتری شده S_i ، $i = 1, \dots, N$ باشد که جز در امتداد منحنیهای معرف مرزهایشان تقاطعی ندارند، آنگاه انتگرال f روی S ، طبق انتظار ما، با

$$\int_S f dS = \sum_{i=1}^N \int_{S_i} f dS$$

تعریف می‌شود. مثلاً، "انتگرال روی سطح یک مکعب را می‌توان به صورت مجموع انتگرالها روی وجه بیان داشت."

مثال ۱. فرض کنیم مارپیچگون مثال ۲، بخش ۴.۶، در دست بوده، و $f(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}$ داده شده باشد. مثل قبل،

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(r, \theta)} = r, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(r, \theta)} = \sin \theta, \quad \frac{\partial(x, z)}{\partial(r, \theta)} = \cos \theta$$

همچنین، $f(r \cos \theta, r \sin \theta, \theta) = \sqrt{r^2 + 1}$ ، بنابراین

$$\begin{aligned} \int_S f(x, y, z) dS &= \int_D f(\Phi(r, \theta)) \|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^1 \sqrt{r^2 + 1} \sqrt{r^2 + 1} dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \frac{4}{3} d\theta = \frac{8}{3}\pi \end{aligned}$$

فرض کنیم S نمودار یک تابع C^1 مانند $z = g(x, y)$ باشد. در این صورت، S را

می‌توان با

$$x = u, \quad y = v, \quad z = g(u, v)$$

پارامتری کرد. در این حالت

$$\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2}$$

و در نتیجه،

$$(۴) \quad \int_S f(x, y, z) dS = \int_D f(x, y, g(x, y)) \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy$$

مثال ۲. فرض کنید سطح S با $z = x^2 + y^2$ تعریف شده باشد، که در آن ناحیه D ناحیه $0 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$ است. انتگرال $\int_S x dS$ را حساب کنید. اگر قرار دهیم $z = g(x, y) = x^2 + y^2$ ، از فرمول (۴) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \int_S x dS &= \int_D x \sqrt{1 + \left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2} dx dy \\ &= \int_{-1}^1 \int_0^1 x \sqrt{1 + 4x^2 + 1} dx dy \\ &= \frac{1}{8} \int_{-1}^1 \left[\int_0^1 [2 + 4x^2]^{1/2} (8x dx) \right] dy \\ &= \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{8} \int_{-1}^1 [(2 + 4x^2)^{3/2}]_0^1 dy \\ &= \frac{1}{12} \int_{-1}^1 [6^{3/2} - 2^{3/2}] dy = \frac{1}{6} [6^{3/2} - 2^{3/2}] \\ &= \sqrt{6} - \frac{\sqrt{2}}{3} = \sqrt{2} \left(\sqrt{3} - \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

مثال ۳. انتگرال $\int_S z^2 dS$ را در صورتی حساب کنید که S کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ باشد.

در این مسئله شایسته است کره را با معادلات پارامتری $x = \cos \theta \sin \phi, y = \sin \theta \sin \phi, z = \cos \phi$ روی ناحیه D در صفحه $\theta \sin \phi$ داده شده با $0 \leq \phi \leq \pi, 0 \leq \theta \leq 2\pi$ نمایش دهیم. از معادله (۱) داریم

$$\int_S z^2 dS = \int_D (\cos \phi)^2 \|\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi\| d\theta d\phi$$

اما کمی محاسبه [از فرمول (۲) در بخش ۴.۶ استفاده کنید] نشان می‌دهد که

$$\|\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi\| = |\sin \phi|$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} \int_S z^2 dS &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \phi |\sin \phi| d\phi d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \cos^2 \phi \sin \phi d\phi d\theta = \frac{1}{3} \int_0^{2\pi} [-\cos^3 \phi]_0^\pi d\theta \\ &= \frac{2}{3} \int_0^{2\pi} d\theta = \frac{4\pi}{3} \end{aligned}$$

که محاسبه انتگرال سطح را کامل می‌کند.

حال فرمولی برای انتگرالهای سطح به دست می‌آوریم که وقتی سطح قابل نمایش به صورت نمودار باشد به کار می‌رود. برای این کار، فرض کنیم S نمودار $z = g(x, y)$ بوده و فرمول (۴) را در نظر می‌گیریم؛ می‌خواهیم این نتیجه را تعبیر هندسی کنیم. حکم می‌کنیم که

$$(۵) \quad \int_S f(x, y, z) dS = \int_D \frac{f(x, y, g(x, y))}{\cos \theta} dx dy$$

که در آن θ زاویه قائم به سطح با بردار بیکه \mathbf{k} در نقطه $(x, y, g(x, y))$ است (ر.ک. شکل ۲۰.۵۶).

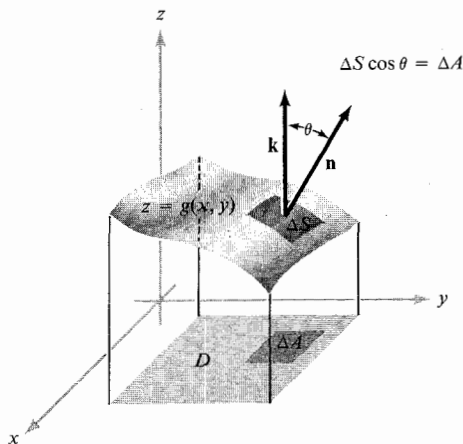
چون $z - g(x, y) = 0$ ، $\nabla \phi$ یک بردار قائم است؛ یعنی،

$$\mathbf{n} = -(\partial g / \partial x)\mathbf{i} - (\partial g / \partial y)\mathbf{j} + \mathbf{k}$$

(ر.ک. مثال ۳ از بخش ۳.۶، یا به یاد آورید که ∇g قائم به سطح ثابت $g(x, y, z)$ است.) لذا،

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{n} \cdot \mathbf{k}}{\|\mathbf{n}\|} = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial g}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial g}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

با گذاردن این فرمول در (۴)، فرمول (۵) نتیجه خواهد شد.



شکل ۲.۵.۶

مساحت قطعه ΔS روی قطعه ΔA مساوی است با $\Delta S = \Delta A / \cos \theta$ ،
 که در آن θ زاویه قائم n با k است .

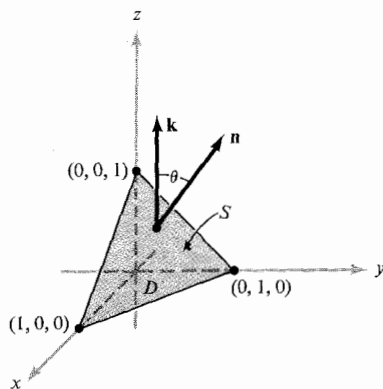
در واقع ، نتیجه فوق به طور هندسی واضح است ، چرا که اگر یک مستطیل کوچک در صفحه xy به مساحت ΔA باشد ، مساحت قسمت بالای آن بر سطح به مساحت $\Delta S = \Delta A / \cos \theta$ می باشد (شکل ۲.۵.۶) . این روش در به یاد آوردن فرمول (۵) و به کار بردن آن در مسائل کمک خواهد بود .

مثال ۴. انتگرال $\int_S x \, dS$ را در صورتی حساب کنید که S مثلثی به رئوس $(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)$ باشد (ر. ک. شکل ۳.۵.۶) .

این سطح صفحه ای است که با معادله $x + y + z = 1$ توصیف می شود . چون سطح صفحه است ، زاویه θ ثابت بوده و $n = (1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3}, 1/\sqrt{3})$ یک بردار یکه قائم است . لذا ، $\cos \theta = 1/\sqrt{3}$ ، و طبق (۵)

$$\int_S x \, dS = \sqrt{3} \int_D x \, dx \, dy$$

که در آن D قلمرو در صفحه xy می باشد . اما



شکل ۳.۵.۶

در محاسبهٔ یک انتگرال سطح، فرمولی برای قائم n به دست آورده و زاویهٔ θ را حساب می‌کنیم تا برای فرمول (۵) آماده باشیم.

$$\sqrt{3} \int_D x \, dx \, dy = \sqrt{3} \int_0^1 \int_0^{1-x} x \, dy \, dx = \sqrt{3} \int_0^1 x(1-x) \, dx = \frac{\sqrt{3}}{6}$$

انتگرالهای توابع روی سطوح در محاسبهٔ جرم سطح وقتی تابع چگالی جرم m معلوم است مفید می‌باشند. جرم کل یک سطح به چگالی جرم m عبارت است از

$$(۶) \quad M(S) = \int_S m(x, y, z) \, dS$$

مثال ۵. فرض کنید $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ پارامتری سازی مارپیچ‌گون $S = \Phi(D)$ مثال ۲ از بخش ۴.۶ باشد. به یاد آورید که $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$ که $0 \leq \theta \leq 2\pi, 0 \leq r \leq 1$. فرض کنید چگالی جرم S در $(x, y, z) \in S$ دوبرابر فاصلهٔ (x, y, z) تا محور مرکزی باشد (ر. ک. شکل ۲.۴.۶). یعنی، در دستگاه مختصات استوانه‌ای $m(x, y, z) = 2\sqrt{x^2 + y^2} = 2r$. جرم کل سطح را پیدا کنید.

با اعمال فرمول (۶)، داریم

$$M(S) = \int_S 2\sqrt{x^2 + y^2} dS = \int_S 2r dS = \int_D 2r \|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| dr d\theta$$

از مثال ۲ در بخش ۴.۶ معلوم می‌شود که $\|\mathbf{T}_r \times \mathbf{T}_\theta\| = \sqrt{1 + r^2}$. لذا ،

$$\begin{aligned} M(S) &= \int_D 2r\sqrt{1 + r^2} dr d\theta = \int_0^{2\pi} \int_0^1 2r\sqrt{1 + r^2} dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \left[\frac{2}{3}(1 + r^2)^{3/2} \right]_0^1 d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{2}{3}[2^{3/2} - 1] d\theta \\ &= \frac{4\pi}{3} [2^{3/2} - 1] \end{aligned}$$

تمرینات

۱. انتگرال $\int_S xy dS$ را در صورتی حساب کنید که S سطح چهار وجهی به وجوه $z = 0$ ، $y = 0$ ، $x + z = 1$ ، و $x = y$ باشد .

۲. فرض کنید $D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک پارامتری سازی سطح S باشد که با

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v)$$

تعریف شده است .

(\bar{T}) فرض کنید

$$\frac{\partial \Phi}{\partial u} = \left(\frac{\partial x}{\partial u}, \frac{\partial y}{\partial u}, \frac{\partial z}{\partial u} \right), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial v} = \left(\frac{\partial x}{\partial v}, \frac{\partial y}{\partial v}, \frac{\partial z}{\partial v} \right)$$

یعنی ، $\partial \Phi / \partial v = \mathbf{T}_v$ و $\partial \Phi / \partial u = \mathbf{T}_u$ ، و قرار دهید

$$E = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\|^2, \quad F = \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v}, \quad G = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|^2$$

نشان دهید که مساحت سطح S مساوی است با $\int_D \sqrt{EG - F^2} du dv$. با این نماد ،

چگونه می‌توان $\int_S f dS$ را به ازای تابع کلی f بیان کرد ؟

(ب) اگر بردارهای $\partial \Phi / \partial u$ و $\partial \Phi / \partial v$ متعامد باشند ، فرمول به چه صورتی درمی‌آید ؟

(پ) با استفاده از (\bar{T}) و (ب) ، مساحت سطح یک کره به شعاع a را حساب کنید .

۳. انتگرال $\int_S z dS$ را در صورتی حساب کنید که S نیمکره^۳ بالای به شعاع a باشد ؛

یعنی ، مجموعه^۴ (x, y, z) هایی که $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$.

۴. انتگرال $\int_S (x + y + z) dS$ را در صورتی حساب کنید که S مرز گوی یک^۵ B باشد ؛ یعنی ،

S مجموعه (x, y, z) هائی باشد که $x^2 + y^2 + z^2 = 1$. (راهنمایی . از تقارن مسئله استفاده نمایید .)

۵ . انتگرال $\int_S xyz \, dS$ را در صورتی حساب کنید که S مثلثی به رئوس $(1, 0, 0)$ ، $(0, 2, 0)$ ، و $(0, 1, 1)$ باشد .

۶ . فرض کنید سطح S به ازای هر (x, y) در قلمرو D از \mathbb{R}^2 به طور ضمنی با $F(x, y, z) = 0$ تعریف شده باشد . نشان دهید که

$$\int_S \left| \frac{\partial F}{\partial z} \right| dS = \int_D \sqrt{\left[\frac{\partial F}{\partial x} \right]^2 + \left[\frac{\partial F}{\partial y} \right]^2 + \left[\frac{\partial F}{\partial z} \right]^2} dx \, dy$$

با تمرین ۸ در بخش ۴.۶ مقایسه نمایید .

۷ . انتگرال $\int_S z \, dS$ را در صورتی حساب کنید که S سطح $z = x^2 + y^2$ ، $x^2 + y^2 \leq 1$ باشد .

۸ . انتگرال $\int_S z^2 \, dS$ را در صورتی حساب کنید که S مرز مکعب $C = [-1, 1] \times [-1, 1] \times [-1, 1]$ باشد . (راهنمایی . برای هر وجه جداگانه عمل کرده و نتایج را به هم بیفزایید .)

۹ . جرم سطح کروی S به شعاع R را طوری بیابید که چگالی جرم در هر نقطه $(x, y, z) \in S$ مساوی فاصله (x, y, z) تا نقطه ثابتی چون $(x_0, y_0, z_0) \in S$ باشد .

۱۰ . سطح فلزی S به شکل نیمکره $z = \sqrt{R^2 - x^2 - y^2}$ ، $0 \leq x^2 + y^2 \leq R^2$ است . چگالی جرم در $(x, y, z) \in S$ با $m(x, y, z) = x^2 + y^2$ داده شده است . جرم کل S را پیدا نمایید .

۱۱ . فرض کنید S کره‌ای به شعاع R باشد .

(۱) از تقارن نتیجه بگیرید که

$$\int_S x^2 \, dS = \int_S y^2 \, dS = \int_S z^2 \, dS$$

(ب) با استفاده از این و فکر خودتان ، انتگرال

$$\int_S x^2 \, dS$$

را با کمترین محاسبه حساب کنید .

(پ) آیا این به تمرین ۱۰ کمکی خواهد کرد ؟

۱۲ . (آ) با استفاده از مجموعه‌های ریمان ، فرمول

$$\frac{1}{A(S)} \int_S f(x, y, z) dS$$

را برای مقدار متوسط f روی سطح S توجیه نمایید.

(ب) در مثال ۳ از این بخش، نشان دهید که متوسط $f(x, y, z) = z^2$ مساوی $\frac{1}{3}$ است.

(پ) مرکز ثقل $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ سطح S را این طور تعریف کنید که \bar{x} ، \bar{y} ، و \bar{z} مقادیر متوسط

x ، y ، و z مختصات بر S باشند. نشان دهید که مرکز ثقل مثلث مثال ۴ در این

بخش عبارت است از $(\frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3})$.

۱۳. مختصات x ، y ، و z مرکز ثقل هشت یک‌گانه‌های شعاع R که با $x \geq 0$ ، $y \geq 0$ ، $z \geq 0$

معین شده است را بیابید. (راهنمایی. این هشت یک را به صورت یک سطح

پارامتری بنویسید؛ ر.ک. مثال ۱۳ از این بخش و تمرین ۱۲.)

۱۴. مختص z مرکز ثقل (متوسط مختص z) سطح یک نیمکره ($z \leq 0$) به شعاع R را بیابید

(ر.ک. تمرین ۱۲). به تقارن، ثابت کنید متوسط هر دو مختص x و y صفر

است.

*۱۵. فرض کنید تابعی دیریکله^۱ برای سطح پارامتری $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ به صورت زیر تعریف شده

باشد:

$$J(\Phi) = \frac{1}{2} \int_D \left(\left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\|^2 + \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|^2 \right) du dv$$

با استفاده از تمرین ۱۵ در بخش ۵.۱، ثابت کنید $J(\Phi) \leq$ مساحت $A(\Phi)$ و تساوی

وقتی برقرار است که

$$(\bar{T}) \quad \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial u} \right\|^2 = \left\| \frac{\partial \Phi}{\partial v} \right\|^2 \quad \text{و}$$

$$(\bar{B}) \quad \frac{\partial \Phi}{\partial u} \cdot \frac{\partial \Phi}{\partial v} = 0$$

این معادلات را با تمرین ۲ و تبصره‌های آخر بخش ۴.۶ مقایسه نمایید. پارامتری

سازی Φ صادق در (\bar{T}) و (\bar{B}) را همدیس می‌نامیم.

یادداشت تاریخی

تابعی دیریکله نقش مهمی در ریاضیات قرن نوزده داشته است. گئورگ فردریش برنهارد ریمان (۱۸۶۶-۱۸۲۶) از آن برای بسط نظریه توابع مختلط خود و اثبات قضیه معروف نگاشت ریمان استفاده کرد. امروزه نیز به عنوان ابزاری در معادلات دیفرانسیل جزئی به طور وسیع به کار گرفته می شود.

*۱۶. فرض کنید $D \subset \mathbb{R}^2$ و $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^2$ تابع هموار $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v))$ باشد که در قسمتهای (آ) و (ب) تمرین ۱۵ صدق می کند. نشان دهید که x و y در معادلات کشی - ریمان $\partial x/\partial u = \partial y/\partial v$, $\partial x/\partial v = -\partial y/\partial u$ یا معادلات کشی - ریمان مزدوج $\partial x/\partial u = -\partial y/\partial v$, $\partial x/\partial v = \partial y/\partial u$ صدق می کنند، و نتیجه بگیرید که $\nabla^2 \Phi = 0$ (یعنی، هر مؤلفه Φ توافقی است).

۱۷. (آ) مساحت قسمتی از مخروط $x^2 + y^2 = z^2$ با $z \geq 0$ را بیابید که داخل کره $x^2 + y^2 + z^2 = 2rz, r > 0$ قرار دارد.

(ب) مساحت قسمتی از کره که داخل مخروط است چقدر است؟

*۱۸. فرض کنید S کره‌ای به شعاع r بوده و p نقطه‌ای داخل یا خارج آن (ولی نه روی آن) باشد. نشان دهید که

$$\int_S \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{p}\|} dS = \begin{cases} 4\pi r & \text{اگر } S \text{ داخل } p \text{ باشد,} \\ 4\pi r^2/d & \text{اگر } S \text{ خارج } p \text{ باشد,} \end{cases}$$

که در آن d فاصله p تا مرکز کره است.

۱۹. مساحت سطح قسمتی از استوانه $x^2 + z^2 = a^2$ را بیابید که داخل استوانه

$x^2 + y^2 = 2ay$ و نیز در هشت یک مثبت ($x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$) قرار دارد. فرض کنید $a > 0$.

۶.۶ انتگرالهای سطح روی توابع برداری

در این بخش به انتگرالهای توابع برداری روی سطوح می پردازیم. تعریفی که می آوریم تعمیم طبیعی تعریفی است که برای توابع اسکالر آمده در بخش ۵.۶ می باشد.

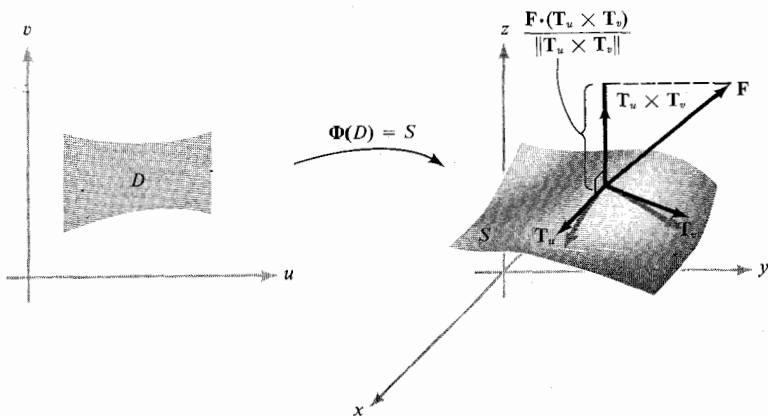
تعریف. فرض کنیم F یک میدان برداری بر S ، یعنی نقش سطح پارامتری شده Φ ، باشد. انتگرال سطح F روی Φ ، که با

$$\iint_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} \quad \text{یا گاهی با} \quad \int_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

نموده می‌شود، به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$\int_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) \, du \, dv$$

که در آن \mathbf{T}_u و \mathbf{T}_v همانند ص ۴۴۹ تعریف شده‌اند (ر.ک. شکل ۱۰۶.۶).



شکل ۱۰۶.۶

تعبیر هندسی $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)$

مثال ۱. فرض کنیم D مستطیلی در صفحه $\theta\phi$ باشد که با

$$0 \leq \theta \leq 2\pi, \quad 0 \leq \phi \leq \pi$$

تعریف شده است، و سطح S با پارامتری‌سازی $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ به معادلات

$$x = \cos \theta \sin \phi, \quad y = \sin \theta \sin \phi, \quad z = \cos \phi$$

تعریف شده باشد. لذا، θ و ϕ زوایای مختصات کروی بوده (ر.ک. ص ۵۵)، و S کره یکپاره پارامتری شده به وسیله Φ است. فرض کنیم بردار موضع $\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$

باشد. انتگرال $\int_{\Phi} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$ را به صورت زیر تعریف می‌کنیم. ابتدا داریم

$$\mathbf{T}_{\theta} = (-\sin \phi \sin \theta)\mathbf{i} + (\sin \phi \cos \theta)\mathbf{j}$$

$$\mathbf{T}_{\phi} = (\cos \theta \cos \phi)\mathbf{i} + (\sin \theta \cos \phi)\mathbf{j} - (\sin \phi)\mathbf{k}$$

و در نتیجه،

$$\mathbf{T}_{\theta} \times \mathbf{T}_{\phi} = (-\sin^2 \phi \cos \theta)\mathbf{i} - (\sin^2 \phi \sin \theta)\mathbf{j} - (\sin \phi \cos \phi)\mathbf{k}$$

سپس، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \mathbf{r} \cdot (\mathbf{T}_{\theta} \times \mathbf{T}_{\phi}) &= (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}) \cdot (\mathbf{T}_{\theta} \times \mathbf{T}_{\phi}) \\ &= [(\cos \theta \sin \phi)\mathbf{i} + (\sin \theta \sin \phi)\mathbf{j} + (\cos \phi)\mathbf{k}] \\ &\quad \cdot (-\sin \phi)[(\sin \phi \cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \phi \sin \theta)\mathbf{j} + (\cos \phi)\mathbf{k}] \\ &= (-\sin \phi)(\sin^2 \phi \cos^2 \theta + \sin^2 \phi \sin^2 \theta + \cos^2 \phi) \\ &= -\sin \phi \end{aligned}$$

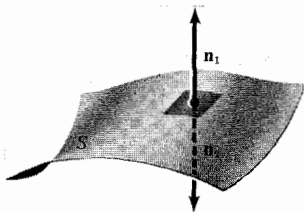
بنابراین،

$$\int_{\Phi} \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \int_D -\sin \phi \, d\phi \, d\theta = \int_0^{2\pi} (-2) \, d\theta = -4\pi$$

بین انتگرال سطح $\int_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ و انتگرال خط $\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ تشابهی وجود دارد. به یاد آورید که انتگرال خط یک انتگرال جهت‌دار است. برای تعمیم تعریف $\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ به انتگرالهای خط $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ روی منحنیهای جهت‌دار به مفهوم جهت یک منحنی نیاز داشتیم. می‌خواهیم تعریف $\int_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ را به همین نحو به سطوح تعمیم دهیم؛ یعنی، اگر سطح S با نگاشت Φ پارامتری شده باشد، تعریف کنیم $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ و نشان دهیم این تعریف، جز احتمالاً "در علامت"، مستقل از پارامتری سازی است. برای این کار به مفهوم جهت یک سطح نیاز داریم.

تعریف. هر سطح جهت‌دار یک سطح دوطرفه است که یک طرفش خارج یا طرف مثبت نام

دارد. اما طرف دیگر را داخل یا طرف منفی می‌نامیم^۱. در هر نقطه $(x, y, z) \in S$ دو بردار
یکه قائم \mathbf{n}_1 و \mathbf{n}_2 وجود دارند که $\mathbf{n}_1 = -\mathbf{n}_2$ (ر.ک. شکل ۲۰۶.۶). به هر یک از این



شکل ۲۰۶.۶

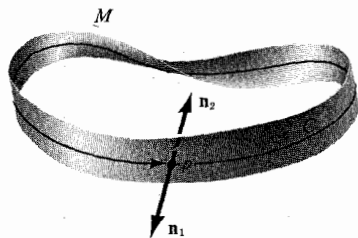
دو بردار یکه قائم به سطح در یک نقطه

قائمها می‌توان یک طرف سطح را مربوط کرد. لذا، برای مشخص کردن طرفی از سطح S ،
در هر نقطه بردار یکه قائم \mathbf{n} را اختیار می‌کنیم که از طرف مثبت S در آن نقطه دور
می‌شود.

در این تعریف فرض این است که سطح دو طرف دارد. باید سطحی مثال بزنیم که
فقط یک طرف داشته باشد. اولین مثال شناخته شده از این سطوح نوار موبیوس (به افتخار
ریاضیدان هلندی، ا. اف. موبیوس^۱، که همراه با ج. ب. لیستینگ^۲ آن را در ۱۸۵۸ کشف
کرد) است. این سطح در شکل‌های ۳۰۶.۶ و ۴۰۶.۶ نموده شده است.

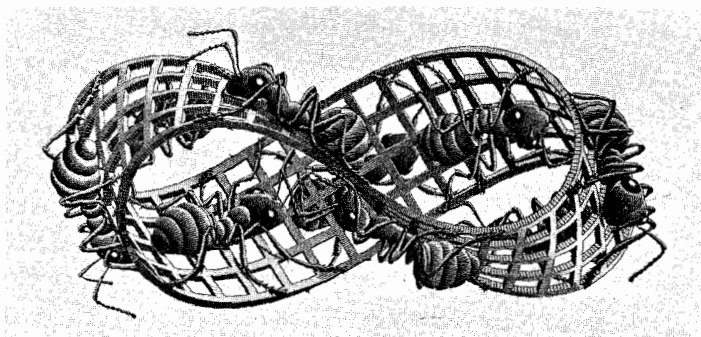
در هر نقطه از M دو قائم یکه \mathbf{n}_1 و \mathbf{n}_2 وجود دارند. اما \mathbf{n}_1 طرف منحصر به فردی
از M را مشخص نمی‌کند، و همین‌طور \mathbf{n}_2 . برای درک آن به طور شهودی، می‌توان \mathbf{n}_2 را
حول منحنی بسته C لغزانید (شکل ۳۰۶.۶). وقتی \mathbf{n}_2 به نقطه ثابت p بر C باز می‌گردد

۱. ما واژه "طرف" را به طور شهودی به کار می‌بریم. این مفهوم را می‌توان به طور
دقیق نیز عرضه کرد. همچنین، "خارج" نامیدن یک طرف اغلب (مثلاً، "گره")
توسط خود سطح دیکته می‌شود. در حالات دیگر این نامگذاری تاحدودی دلخواه
است (ر.ک. سطح رسم شده در شکل ۲۰۶.۶).



شکل ۳.۶.۶

نوار موبیوس: n_2 را یکبار حول C می‌لغزانیم؛ وقتی n_2 به نقطه شروع خود باز می‌گردد، n_2 با $n_1 = -n_2$ یکی می‌شود.



شکل ۴.۶.۶

راه رفتن مورچه روی نوار موبیوس

(*Moebius Strip II 1963, by M. C. Escher. Escher Foundation,*

Haaqs Gemeentemuseum, The Hague.)

بر n_1 منطبق می‌شود، و هر دوی n_1 و n_2 از یک طرف M به خارج اشاره دارند و، در نتیجه، M فقط یک طرف خواهد داشت.

شکل ۴.۶.۶ یک نوار موبیوس است که توسط ریاضیدان و هنرمند معروف قرن بیستم

ام. سی. اشر^۱، رسم شده است.

این شکل مورچه‌هایی را نشان می‌دهد که در امتداد نوار مویوس می‌خزند. پس از یک دور حرکت (بدون رد شدن از لبه) به " طرف مقابل " سطح خواهند رسید.

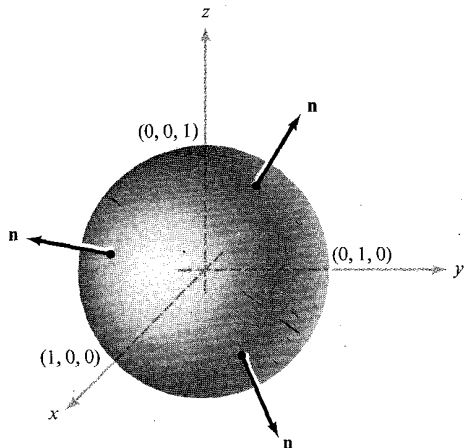
فرض کنیم $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک پارامتری سازی سطح جهتدار S بوده و S در $\Phi(u_0, v_0)$ هموار باشد؛ یعنی، بردار بیکه^۲ قائم $\frac{\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0}}{\|\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0}\|}$ تعریف شده است. اگر $\mathbf{n}(\Phi(u_0, v_0))$ قائم بیکه به S در $\Phi(u_0, v_0)$ باشد که اشاره به طرف مثبت S در این نقطه دارد، نتیجه می‌شود که $\frac{\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0}}{\|\mathbf{T}_{u_0} \times \mathbf{T}_{v_0}\|} = \pm \mathbf{n}(\Phi(u_0, v_0))$. پارامتری سازی Φ را جهت نگهدار گوئیم اگر در تمامی نقاط $(u, v) \in D$ که S در $\Phi(u, v)$ هموار است داشته باشیم $\frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} = \mathbf{n}(\Phi(u, v))$. به عبارت دیگر، Φ جهت نگهدار است اگر بردار $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ به خارج سطح اشاره داشته باشد. هرگاه $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ در هر نقطه $(u, v) \in D$ که S در $\Phi(u, v)$ هموار است اشاره به داخل داشته باشد، آنگاه گوئیم Φ جهت برگردان می‌باشد. این شرط، بانمادهای بالا، معادل $\frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} = -\mathbf{n}(\Phi(u, v))$ می‌باشد.

مثال ۲. به کره^۳ بیکه^۲ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ در \mathbb{R}^3 (شکل ۵.۶.۶) می‌توان با انتخاب بردار بیکه^۲ $\mathbf{n}(x, y, z) = \mathbf{r}$ ، که در آن $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ ، و به خارج سطح اشاره دارد جهت بخشید. این انتخاب نظیر مفهوم شهودی خارج برای کره می‌باشد.

حال که کره^۳ S سطحی جهتدار است، پارامتری سازی Φ از S که در مثال ۱ داده شد را در نظر می‌گیریم. حاصل ضرب خارجی بردارهای مماس \mathbf{T}_ϕ و \mathbf{T}_θ ، یعنی یک قائم به S ، مساوی است با

$$(-\sin \phi)[(\cos \theta \sin \phi)\mathbf{i} + (\sin \theta \sin \phi)\mathbf{j} + (\cos \phi)\mathbf{k}] = -\mathbf{r} \sin \phi$$

چون به ازای $0 \leq \phi \leq \pi$ ، $-\sin \phi \leq 0$ ، این بردار قائم به داخل کره اشاره دارد، لذا پارامتری سازی Φ جهت برگردان می‌باشد.



شکل ۵.۶.۶

کره‌ایکه که با قائم n رو به خارج خود جهتدار شده است.

مثال ۳. فرض کنیم S سطح توصیف شده با $z = f(x, y)$ باشد. در نقطه $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ دو بردار یکه‌قائم به S ، یعنی $\pm n$ ، وجود دارند، که

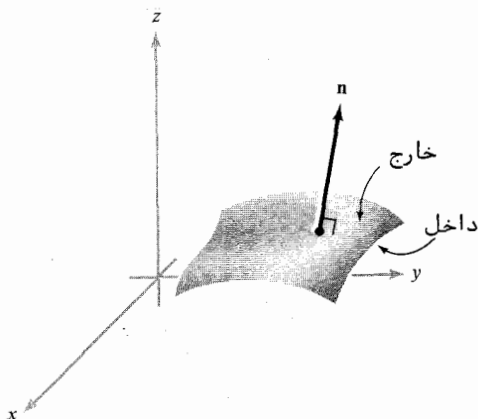
$$n = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)\right)^2 + 1}}$$

همه این سطوح را می‌توان با اختیار طرفی از S که n از آن دور می‌شود به‌عنوان طرف مثبت جهتدار کرد^۱ (شکل ۶.۶.۶).

لذا، طرف مثبت این سطح با بردار یکه n به مؤلفه k ی مثبت معین می‌شود. هرگاه این

۱. اگر تعریف دقیق جهت را داشتیم، می‌توانستیم با این استدلال نشان دهیم که کلیه سطوح $z = f(x, y)$ جهت‌پذیرند؛ یعنی، "دارای دو طرف می‌باشند".

سطح را با $\Phi(u, v) = (u, v, f(u, v))$ پارامتری کنیم، آنگاه Φ جهت نگهدار خواهد بود.



شکل ۶.۶.۶

n اشاره به خارج سطح دارد.

حال قضیه‌ای را بدون اثبات ذکر می‌کنیم که نشان می‌دهد انتگرال روی یک سطح جهت‌دار از پارامتری سازی مستقل است. برهان این قضیه مشابه برهان قضیه ۱ است (بخش ۲.۶). قلب برهان فرمول تغییر متغیر است که این بار بر انتگرالهای مضاعف اعمال می‌شود.

قضیه ۴. فرض کنیم S یک سطح جهت‌دار بوده و Φ_1 و Φ_2 دو پارامتری سازی جهت‌نگهدار هموار باشند. همچنین، F یک میدان برداری پیوسته بر S باشد. در این صورت،

$$\int_{\Phi_1} F \cdot dS = \int_{\Phi_2} F \cdot dS$$

هرگاه Φ_1 جهت نگهدار و Φ_2 جهت برگردان باشد، آنگاه

$$\int_{\Phi_1} F \cdot dS = - \int_{\Phi_2} F \cdot dS$$

هرگاه f یک تابع پیوسته حقیقی بر S بوده، و Φ_1 و Φ_2 پارامتری‌سازیهایی از S باشند،

$$\int_{\Phi_1} f \, dS = \int_{\Phi_2} f \, dS$$

اگر $f = 1$ ، خواهیم داشت

$$A(S) = \int_{\Phi_1} dS = \int_{\Phi_2} dS$$

و این نشانگر آن است که مساحت مستقل از پارامتری سازی است.

لذا، می توان نمود

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

(یا، اگر S اجتماعی از سطوح پارامتری شده باشد که فقط در امتداد منحنیهای مرزی خود متقاطعند، مجموعی از این انتگرالها) را بدون ابهام به کار برد، که در آن Φ یک پارامتری سازی جهت نگهدار است. قضیه ۴ عدم وابستگی مقدار انتگرال به Φ را تضمین خواهد کرد.

از فرمول (۱) در بخش ۲.۶ به یاد می آوریم که انتگرال خط $\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ را می توان انتگرال مسیری مؤلفه مماسی \mathbf{F} در امتداد \mathbf{F} گرفت (اگرچه در حالتی که σ خود را قطع کند، انتگرال حاصل از لحاظ تکنیکی یک انتگرال مسیری نیست). وضعیت مشابه برای انتگرالهای سطح وجود دارد، زیرا فرض کرده ایم (ر.ک. شکل ۴.۶) که نگاشت Φ معرف سطح S جز احتمالاً "روی مرز D "، که می توان در انتگرالگیری از آن چشم پوشید، یک به یک است. لذا، در تعریف انتگرالها روی سطح در این کتاب فرض می کنیم سطوح نامتقاطع باشند.

به ازای سطح هموار جهتدار S و پارامتری سازی جهت نگهدار Φ از S ، می توان $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ را به صورت انتگرال تابع حقیقی f روی سطح بیان نمود. فرض کنیم $\mathbf{n} = (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) / \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|$ قائم یکه ای باشد که اشاره به خارج S دارد. در این صورت،

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_{\Phi} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) \, du \, dv \\ &= \int_D \mathbf{F} \cdot \left(\frac{\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v}{\|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\|} \right) \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| \, du \, dv \end{aligned}$$

$$= \int_D (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) \|\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v\| du dv = \int_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = \int_S f dS$$

که در آن $f = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$. لذا، قضیه زیر را ثابت کرده ایم .

قضیه ۵. انتگرال $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ ، یعنی انتگرال سطح \mathbf{F} روی S ، مساوی انتگرال مؤلفه قائم \mathbf{F} روی سطح است . به طور خلاصه ،

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

همانطور که مثال ۴ زیر نشان می دهد ، این امر اغلب زحمت محاسبات را خیلی کم می کند .

اهمیت هندسی و فیزیکی انتگرال سطح را می توان با بیان آن به صورت حد مجموعهای ریمان درک کرد . برای سادگی ، فرض کنیم D یک مستطیل باشد . همچنین ، Φ یک پارامتری سازی از S باشد که جهت نگهدارنده و ناحیه D را به n^2 قطعه D_{ij} ، $0 \leq i \leq n-1$ ، $0 \leq j \leq n-1$ ، افزایش نماید . Δu را طول ضلع افقی D_{ij} و Δv را طول ضلع قائم D_{ij} می گیریم . فرض کنیم (u, v) نقطه ای در D_{ij} بوده ، و $(x, y, z) = \Phi(u, v)$ نقطه نظیر بر سطح باشد . متوازی الاضلاعی به اضلاع $\Delta u \mathbf{T}_u$ و $\Delta v \mathbf{T}_v$ در نظر می گیریم که در صفحه مماس بر S در (x, y, z) قرار دارد و متوازی السطوح تشکیل شده از \mathbf{F} ، $\Delta u \mathbf{T}_u$ ، و $\Delta v \mathbf{T}_v$ را در نظر می گیریم . حجم متوازی السطوح قدر مطلق حاصل ضرب سه گانه

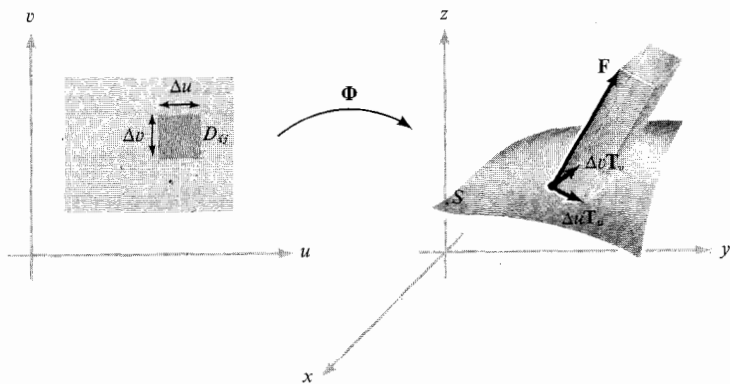
$$\mathbf{F} \cdot (\Delta u \mathbf{T}_u \times \Delta v \mathbf{T}_v) = \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) \Delta u \Delta v$$

می باشد . بردار $\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v$ در نقطه (x, y, z) به سطح عمود بوده و به خارج آن اشاره دارد . لذا ، $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v)$ وقتی مثبت است که متوازی السطوح خارج سطح واقع باشد (شکل ۷.۶.۶) .

به طور کلی ، متوازی السطوح در طرفی از سطح قرار دارد که \mathbf{F} از آن دور می شود . اگر \mathbf{F} را میدان سرعت سیالی بگیریم ، $\mathbf{F}(x, y, z)$ در جهتی اشاره دارد که سیال از سطح در مجاورت (x, y, z) عبور می کند . به علاوه ، عدد

$$|\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \Delta u \times \mathbf{T}_v \Delta v)|$$

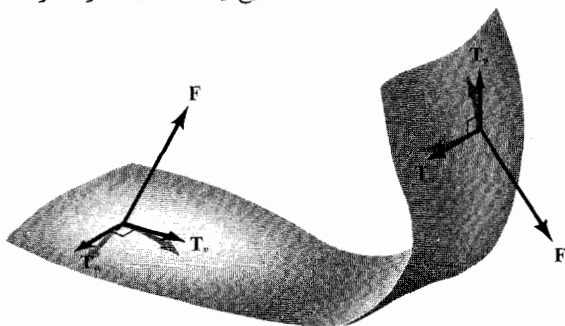
حجم سیالی را می سنجد که از متوازی الاضلاع مماس برواحد زمان عبور می کند . چون علامت



شکل ۷.۶.۶

وقتی متوازی‌السطوح تشکیل شده از $\Delta u \mathbf{T}_u$ ، $\Delta v \mathbf{T}_v$ و $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) > 0$ "خارج" سطح S واقع باشد،

$\mathbf{F} \cdot (\Delta u \mathbf{T}_u \times \Delta v \mathbf{T}_v)$ وقتی مثبت است که بردار \mathbf{F} در (x, y, z) به خارج اشاره دارد و وقتی منفی است که \mathbf{F} اشاره به داخل داشته باشد، مجموع $\sum_{i,j} \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) \Delta u \Delta v$ مایع خالصی را که در واحد زمان از سطح خارج می‌شود تقریب می‌کند. (به یاد آورید که "روبه خارج" یا "روبه داخل" به پارامتری‌سازی بستگی دارد. شکل ۸.۶.۶ هایی را نشان می‌دهد که، به ازای \mathbf{T}_u و \mathbf{T}_v داده شده، به خارج و به داخل اشاره دارند.) لذا، انتگرال



شکل ۸.۶.۶

(چپ) وقتی $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) > 0$ ، \mathbf{F} اشاره به خارج دارد؛ (راست) وقتی $\mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_u \times \mathbf{T}_v) < 0$ ، \mathbf{F} اشاره به داخل خواهد داشت.

$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ مقدار خالص سیالی است که در واحد زمان از سطح خارج می‌شود؛ یعنی، میزان شارش سیال. لذا، این انتگرال را نیز شار \mathbf{F} در امتداد سطح می‌نامند.

در حالتی که \mathbf{F} نمایش میدان الکتریکی یا مغناطیسی باشد، $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ را نیز معمولاً شار می‌نامند. خواننده ممکن است با قوانین فیزیکی (نظیر قانون فارادی) که شار یک میدان برداری را به گردش (یا شدت جریان) در یک حلقهء محدود ربط می‌دهد آشنا باشد. این پایهء تاریخی و فیزیکی قضیهء استوکس است، که در بخش ۲۰.۷ به آن خواهیم خورد. اصل نظیر در مکانیک سیالات قضیهء گردش کلویین نام دارد.

انتگرالهای سطح در بررسی شارش گرما نیز به کار می‌روند. فرض کنیم $T(x, y, z)$ دما در نقطهء $(x, y, z) \in W \subset \mathbb{R}^3$ باشد، که در آن W یک ناحیه بوده و T یک تابع C^1 باشد. در این صورت،

$$\nabla T = \frac{\partial T}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial T}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial T}{\partial z} \mathbf{k}$$

نمایش گرادیان دما بوده، و گرما با میدان برداری $-\mathbf{k} \nabla T = \mathbf{F}$ "شارش می‌یابد"، که در آن k یک ثابت مثبت می‌باشد (ر.ک. بخش ۵.۷). بنابراین، $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ میزان کل شارش گرما یا شار در امتداد سطح S می‌باشد.

مثال ۴. فرض کنید تابع دما به صورت $T(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ بوده، و S کرهء یکهء $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ باشد که با قائم رویه خارج جهتدار شده است (ر.ک. مثال ۲). شار گرما را در امتداد سطح S در صورتی بیابید که $k = 1$.

داریم

$$\mathbf{F} = -\nabla T(x, y, z) = -2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$$

بر S ، $\mathbf{n}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ قائم یکهء "رویه خارج" بر S در (x, y, z) بوده، و $f(x, y, z) = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = -2x^2 - 2y^2 - 2z^2 = -2$ مؤلفهء قائم \mathbf{F} است. از قضیهء ۵ می‌توان دید که انتگرال سطح \mathbf{F} مساوی انتگرال مؤلفهء قائم آن $f = \mathbf{F} \cdot \mathbf{n}$ روی S می‌باشد. لذا، $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S f \, dS = -2 \int_S dS = -2A(S) = -2(4\pi) = -8\pi$. شارش گرما به سمت مرکز کره است (چرا؟) لذا، این امر که $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S f \, dS$ زحمت محاسبات را به نحو چشمگیری کم کرده است.

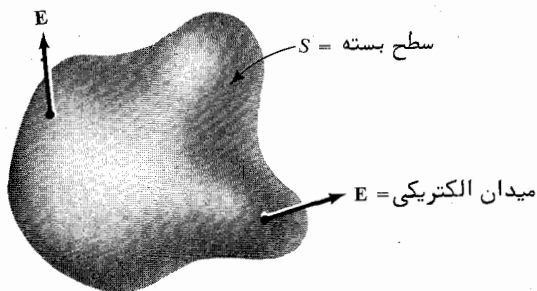
در این مثال $\mathbf{F}(x, y, z) = -2x\mathbf{i} - 2y\mathbf{j} - 2z\mathbf{k}$ می‌تواند نمایش یک میدان الکتریکی

نیز باشد، که در این حالت $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -8\pi$ شار الکتریکی در امتداد S می‌باشد.

مثال ۵. قانون فیزیکی مهمی وجود دارد، منسوب به ریاضیدان و فیزیکدان بزرگ، گاوس، که شار میدان الکتریکی \mathbf{E} روی سطح " بسته " S (مثلا " کره یا بیضی‌گون) را به بار خالص Q محصور به سطح ربط می‌دهد. یعنی، داریم

$$(1) \quad \int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

(ر.ک. شکل ۹.۶.۶). در فصل ۷، قانون گاوس به تفصیل مطرح خواهد شد.



شکل ۹.۶.۶

قانون گاوس: $\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q$ ، که در آن Q بار خالص داخل S است.

این قانون مشابه قانون آمپر است (ر.ک. مثال ۱۲، بخش ۲.۶). فرض کنیم $\mathbf{E} = E\mathbf{n}$ ؛ یعنی، \mathbf{E} مضرب اسکالر ثابتی از قائم یک به S است. در این صورت، قانون گاوس (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_S E dS = E \int_S dS = Q$$

لذا،

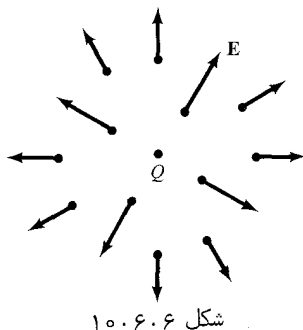
$$(2) \quad E = \frac{Q}{A(S)}$$

درحالتی که S یک کره به شعاع R است، رابطه (۲) به صورت زیر درمی‌آید:

(۳)

$$E = \frac{Q}{4\pi R^2}$$

(ر.ک. شکل ۱۰.۶.۶).



شکل ۱۰.۶.۶

میدان E ناشی از بار نقطه‌ای Q مساوی است با $E = Qn/4\pi R^2$.

حال فرض کنیم E از بار نقطه‌ای تنه‌ای Q ناشی شده باشد. از تقارن $E = En$ نتیجه می‌شود، که در آن n قائم یکه به هر کره به مرکز Q است. لذا، (۳) برقرار می‌باشد. بار نقطه‌ای دوم Q_0 را در نظر می‌گیریم که در فاصله R تا Q قرار دارد. نیروی F وارد بر Q_0 مساوی است با

$$F = EQ_0 = EQ_0 n = \frac{QQ_0}{4\pi R^2} n$$

اگر F اندازه F باشد، داریم

$$F = \frac{QQ_0}{4\pi R^2}$$

که قانون معروف کولن^۱ برای نیروی بین دو بار نقطه‌ای می‌باشد.

1. Coulomb

۲. گاهی با فرمول $F = (1/4\pi\epsilon_0)QQ_0/R^2$ مواجه می‌شویم. ثابت اضافی ϵ_0 وقتی می‌آید که سنجش بار در دستگاه MKS صورت گرفته باشد. ما از واحدهای CGS، یا واحدهای گاوسی، استفاده خواهیم کرد.

نوع مهمی از سطح، که در بخش قبل دیدیم، نمودار یک تابع است. حال فرمولهای انتگرال سطح را در این حالت به دست می آوریم. سطح S توصیف شده با $z = f(x, y)$ ، $(x, y) \in D$ را در نظر می گیریم که S طوری جهتدار شده باشد که

$$\mathbf{n} = \frac{-\frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

به خارج اشاره نماید. دیدیم که S را می توان با $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ $\Phi(x, y) = (x, y, f(x, y))$ پارامتری کرد. در این حالت، $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ را می توان به شکل بسیار ساده ای نوشت. داریم

$$\mathbf{T}_x = \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{k}, \quad \mathbf{T}_y = \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{k}$$

لذا، $\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y = -(\partial f / \partial x) \mathbf{i} - (\partial f / \partial y) \mathbf{j} + \mathbf{k}$ ، هرگاه $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ یک میدان برداری پیوسته باشد، فرمول زیر به دست می آید:

$$\begin{aligned} \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_D \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y) dx dy \\ (۴) \quad &= \int_D \left[F_1 \left(-\frac{\partial f}{\partial x} \right) + F_2 \left(-\frac{\partial f}{\partial y} \right) + F_3 \right] dx dy \end{aligned}$$

مثال ۶. معادلات

$$z = 12, \quad x^2 + y^2 \leq 25$$

قرصی به شعاع ۵ را توصیف می کنند که در صفحه $z = 12$ قرار دارد. فرض کنیم \mathbf{r} میدان برداری

$$\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

باشد. در این صورت، $\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S}$ به آسانی محاسبه می شود؛ داریم $\partial z / \partial x = \partial z / \partial y = 0$ زیرا روی قرص داریم $z = 12$ ؛ در نتیجه،

$$\mathbf{r}(x, y, z) \cdot (\mathbf{T}_x \times \mathbf{T}_y) = \mathbf{r}(x, y, z) \cdot (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) = \mathbf{r}(x, y, z) \cdot \mathbf{k} = z$$

و انتگرال به صورت زیر درمی آید:

$$\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \int_D z \, dx \, dy = \int_D 12 \, dx \, dy = 12(D \text{ مساحت}) = 300\pi$$

حل دوم. چون قرص موازی صفحه xy است، قائم بیکه^۱ روبه خارج \mathbf{k} است. پس $\mathbf{n}(x, y, z) = \mathbf{k}$ و $\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} = z$ اما $\|\mathbf{k}\| = 1$ ؛ در نتیجه، بنابر آنچه بعد از قضیه ۴ (ص ۴۸۸) گفته شد،

$$\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S z \, dS = \int_D 12 \, dx \, dy = 300\pi$$

به صورت دیگر، این مسئله را می توان مستقیماً "به کمک فرمول (۴) به ازای $z = 12$ $f(x, y) = 12$ و قرص $D: x^2 + y^2 \leq 25$ حل کرد:

$$\int_S \mathbf{r} \cdot d\mathbf{S} = \int_D [x \cdot 0 + y \cdot 0 + 12] \, dx \, dy = 12(D \text{ مساحت}) = 300\pi$$

تمرینات

- فرض کنید دمای یک نقطه در \mathbb{R}^3 با $T(x, y, z) = 3x^2 + 3z^2$ داده شده باشد. شار گرما را در امتداد سطح $x^2 + z^2 = 2, 0 \leq y \leq 2$ در صورتی حساب کنید که $k = 1$.
- شار گرما را در امتداد کره^۲ S در صورتی حساب کنید که $T(x, y, z) = x$ (ر. ک. مثال ۴). آیا می توانید جواب خود را تعبیر فیزیکی کنید؟
- فرض کنید S سطح بسته^۳ مرکب از نیمکره^۴ $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ و قاعده^۵ اش $x^2 + y^2 \leq 1, z = 0$ باشد. همچنین \mathbf{E} میدان الکتریکی تعریف شده با $\mathbf{E}(x, y, z) = 2xz\mathbf{i} + 2yz\mathbf{j} + 2zk\mathbf{k}$ باشد. شار الکتریکی در امتداد S را بیابید. (راهنمایی. S را به دو قطعه^۶ S_1 و S_2 شکسته و $\int_{S_1} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ و $\int_{S_2} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ را حساب کنید.)
- فرض کنید میدان سرعت یک مایع با $\mathbf{F} = \sqrt{y}\mathbf{j}$ (به متر بر ثانیه) توصیف شود. چند مترمکعب سیال بر ثانیه از سطح $x^2 + z^2 = y, 0 \leq y \leq 1$ عبور می کند؟
- انتگرال $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ را در صورتی حساب کنید که S سطح $x^2 + y^2 + 3z^2 = 1, z \leq 0$ بوده و $\mathbf{F} = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} + zx^3y^2\mathbf{k}$.
- انتگرال $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ را در صورتی حساب کنید که S و \mathbf{k} z^2 سطح $x^2 + y^2 + z^2 = 16, z \geq 0$ باشد. $\mathbf{F} = (x^2 + y - 4)\mathbf{i} + 3xy\mathbf{j} + (2xz + z^2)\mathbf{k}$.
- فرض کنید S سطح کره^۷ بیکه باشد. همچنین \mathbf{F} یک میدان برداری بوده و F_r مولفه^۸

شعاعی باشد. ثابت کنید

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\theta=0}^{2\pi} \int_{\phi=0}^{\pi} F_r \sin \phi \, d\phi \, d\theta$$

فرمول مربوط به توابع حقیقی f چگونه است؟

۸* قضیه مقدار میانگین برای انتگرالهای سطح را ثابت کنید: هرگاه \mathbf{F} یک میدان برداری پیوسته باشد، آنگاه، به ازای $Q \in S$ ای،

$$\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = [\mathbf{F}(Q) \cdot \mathbf{n}(Q)]A(S)$$

که در آن $A(S)$ مساحت S می باشد. (راهنمایی. ابتدا، با تحویل مسئله به مسئله‌ای در انتگرال مضاعف، آن را برای توابع حقیقی ثابت کنید: نشان دهید هرگاه $g \geq 0$ آنگاه، به ازای $Q \in D$ ای،

$$\int_D fg \, dA = f(Q) \int_D g \, dA$$

(این کار را با توجه به $(\int_D fg \, dA)/(\int_D g \, dA)$ و استفاده از قضیه مقدار میانی انجام دهید.)

۹. برای انتگرالگیری روی سطح یک استوانه، فرمولی مشابه فرمول تمرین ۷ به دست آورید.

۱۰. فرض کنید S سطحی در \mathbb{R}^3 باشد که در واقع زیرمجموعه‌ای مانند D از صفحه xy می باشد. نشان دهید که انتگرال تابع اسکالر $f(x, y, z)$ روی S به انتگرال مضاعف $f(x, y, z)$ روی D تحویل می شود. انتگرال سطح یک میدان برداری روی S چه خواهد شد؟

۱۱. فرض کنید میدان سرعت یک سیال با $\mathbf{F} = \mathbf{i} + x\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ (به متر بر ثانیه) توصیف شده باشد. چند متر مکعب سیال بر ثانیه از سطح توصیف شده به وسیله $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ عبور می کند؟

۱۲. (آ) یک سیال یکنواخت که به طور قائم پایین می آید (باران سنگین) به وسیله میدان برداری $\mathbf{F}(x, y, z) = (0, 0, -1)$ توصیف می شود. شار کل مار بر مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ را پیدا نمایید.

(ب) باران توسط باد طوری منحرف شده است که بارش آن با زاویه 45° صورت گرفته و به وسیله $\mathbf{F}(x, y, z) = (-\sqrt{2}/2, 0, \sqrt{2}/2)$ توصیف می شود. شار مار بر مخروط چگونه

است؟

۱۳. به ازای $a > 0, b > 0, c > 0$ ، فرض کنید S نیمه بالایی بیضی‌گون با جهت معین

$$S = \left\{ (x, y, z) \mid \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, z \geq 0 \right\}$$

شده به وسیله قائم روبه خارج باشد. انتگرال $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ را در صورتی حساب کنید که

$$\mathbf{F}(x, y, z) = (x^3, 0, 0)$$

۱۴. اگر S نیمکره بالایی $\{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0\}$ باشد که با بردار روبه خارج

کره جهتدار شده است، انتگرال $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ را در قسمتهای (آ) و (ب) زیر حساب کنید.

$$\mathbf{F}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} \quad (\text{آ})$$

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j} \quad (\text{ب})$$

(پ) به ازای هر یک از میدانهای برداری فوق، $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ و $\int_C \mathbf{F} \cdot ds$ را حساب

کنید، که C دایره یک در صفحه xy است که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت (از

محور z مثبت) پیموده می‌شود. (توجه کنید که C مرز S است. در فصل بعد، پدیده

ذکر شده در اینجا را، با استفاده از قضیه استوکس، به طور جامعتری مورد مطالعه

قرار خواهیم داد.

تمرینات دورهای برای فصل ۶

۱. از تابع $f(x, y, z) = xyz$ در امتداد مسیرهای زیر انتگرال بگیرید.

$$\sigma(t) = (e^t \cos t, e^t \sin t, 3), 0 \leq t \leq 2\pi \quad (\text{آ})$$

$$\sigma(t) = (\cos t, \sin t, t), 0 \leq t \leq 2\pi \quad (\text{ب})$$

$$\sigma(t) = \frac{3}{2}t^2\mathbf{i} + 2t^2\mathbf{j} + t\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1 \quad (\text{پ})$$

$$\sigma(t) = t\mathbf{i} + (1/\sqrt{2})t^2\mathbf{j} + (1/3)t^3\mathbf{k}, 0 \leq t \leq 1 \quad (\text{ت})$$

۲. در هر یک از حالات زیر، انتگرال f در امتداد مسیر σ را حساب کنید.

$$f(x, y, z) = x + y + yz; \sigma(t) = (\sin t, \cos t, t), 0 \leq t \leq 2\pi \quad (\text{آ})$$

$$f(x, y, z) = x + \cos^2 z; \sigma(t) = (\sin t, \cos t, t), 0 \leq t \leq 2\pi \quad (\text{ب})$$

$$f(x, y, z) = x + y + z; \sigma(t) = (t, t^2, \frac{2}{3}t^3), 0 \leq t \leq 1 \quad (\text{پ})$$

۳. انتگرالهای خط زیر را حساب کنید.

$$\int_C (\sin \pi x) dy - (\cos \pi y) dz \quad (\text{آ})$$

که در آن C مثلثی به رئوس $(0, 1, 0)$ ، $(1, 0, 0)$ و $(0, 0, 1)$ است.

(0, 0, 1) به همین ترتیب است.

(ب) $\int_C (\sin z) dx + (\cos z) dy - (xy)^{1/3} dz$ ، که در آن C مسیری به معادله پارامتری $\sigma(\theta) = (\cos^3 \theta, \sin^3 \theta, \theta)$ ، $0 \leq \theta \leq 7\pi/2$ ، است.

۴. اگر $F(x)$ در هر نقطه از منحنی $x = \sigma(t)$ بر $\sigma'(t)$ عمود باشد، درباب $\int_{\sigma} F \cdot ds$ چه می شود گفت؟

۵. کار انجام شده توسط نیروی $F(x, y) = (x^2 - y^2)i + 2xyj$ در حرکت یک ذره حول مربعی به رئوس $(0, 0)$ ، $(a, 0)$ ، (a, a) ، $(0, a)$ ، $a > 0$ ، در جهت خلاف عقربه های ساعت را بیابید.

۶. حلقه های به شکل $x^2 + y^2 = a^2$ از سیم نازکی به وزن $|y| + |x|$ گرم بر واحد طول در (x, y) تشکیل شده است. جرم حلقه را پیدا کنید.

۷. برای هر یک از سطوح زیر پارامتری سازی بیابید.

$$(A) \quad x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y = 12$$

$$(B) \quad 2x^2 + y^2 + z^2 - 8x = 1$$

$$(P) \quad 4x^2 + 9y^2 - 2z^2 = 8$$

۸. مساحت سطح تعریف شده به وسیله $\Phi: (u, v) \mapsto (x, y, z)$ در صورتی بیابید که

$$x = h(u, v) = u + v, \quad y = g(u, v) = u, \quad z = f(u, v) = v$$

سطح را رسم نمایید. $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 1$.

۹. برای مساحت سطح $\Phi: (r, \theta) \mapsto (x, y, z)$ در صورتی فرمول بنویسید که

$$x = r \cos \theta, \quad y = 2r \sin \theta, \quad z = r$$

سطح را رسم نمایید. $0 \leq r \leq 1, 0 \leq \theta \leq 2\pi$.

۱۰. فرض کنید $z = f(x, y)$ و $c > 0$ ، نشان دهید که مساحت نمودار f واقع بر ناحیه D در صفحه xy مساوی $\sqrt{1+c}$ برابر سطح D است.

۱۱. انتگرال $f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ را روی سطح تمرین ۸ حساب کنید.

۱۲. انتگرال $\int_S f \, dS$ را در حالات زیر بیابید.

(A) $f(x, y, z) = x$ ؛ بخشی از صفحه $x + y + z = 1$ است که در هشت یک مثبت

قرار دارد. $x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0$.

(B) $f(x, y, z) = x^2$ ؛ بخشی از صفحه $x = z$ است که داخل استوانه $x^2 + y^2 = 1$

قرار دارد.

۱۳. انتگرال $f(x, y, z) = xyz$ را روی مستطیل به رئوس $(1, 0, 1)$ ، $(2, 0, 0)$ ، $(1, 1, 1)$ و $(2, 1, 0)$ حساب کنید.
۱۴. انتگرال $x + y$ را روی سطح کره^۱ یک حساب کنید.
۱۵. انتگرال x را روی مثلث به رئوس $(1, 1, 1)$ ، $(2, 1, 1)$ و $(2, 0, 3)$ محاسبه نمایید.
۱۶. سهمی گون دوار S با $\Phi(u, v) = (u \cos v, u \sin v, u^2)$ ، $0 \leq u \leq 1$ ، $0 \leq v \leq 2\pi$ پارامتری شده است.
- (آ) معادله‌ای برحسب x ، y ، z بیابید که سطح را توصیف کند
- (ب) تعبیر هندسی پارامترهای u و v چیست؟
- (پ) بردار یکه‌ای عمود بر سطح در $\Phi(u, v)$ بیابید
- (ت) معادله^۲ صفحه^۳ مماس در $\Phi(u_0, v_0) = (1, 1, 2)$ را نوشته، و جواب خود را به دو طریق زیر بیان دارید:
- (یک) با u و v پارامتری کنید؛ و
- (دو) برحسب x ، y ، z بیان دارید.
- (ث) مساحت S را پیدا نمایید.
۱۷. فرض کنید $f(x, y, z) = xe^y \cos \pi z$.
- (آ) $F = \nabla f$ را حساب کنید.
- (ب) انتگرال $\int_C F \cdot ds$ را در صورتی حساب کنید که $c(t) = (3 \cos^4 t, 5 \sin^7 t, 0)$ ، $0 \leq t \leq \pi$.
۱۸. فرض کنید $F(x, y, z) = xi + yj + zk$. انتگرال $\int_S F \cdot dS$ را در صورتی حساب کنید که S نیمکره^۴ بالایی کره^۵ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ باشد.
۱۹. فرض کنید $F(x, y, z) = xi + yj + zk$. انتگرال $\int_C F \cdot ds$ را در صورتی حساب کنید که $c(t) = (e^t, t, t^2)$ ، $0 \leq t \leq 1$.
۲۰. فرض کنید $F = \nabla f$ که در آن f تابع اسکالر معلومی است. همچنین، $c(t)$ یک منحنی بسته باشد؛ یعنی، $c(b) = c(a)$. نشان دهید که $\int_C F \cdot ds = 0$.
۲۱. سطح $\Phi(u, v) = (u^2 \cos v, u^2 \sin v, u)$ را در نظر بگیرید. قائم یکه را در $u = 1$ ، $v = 0$ حساب کنید. معادله^۶ صفحه^۷ مماس در این نقطه را حساب کنید.
۲۲. فرض کنید S بخشی از مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ باشد که z بین ۱ و ۲ است و با قائمی

که اشاره به خارج مخروط دارد جهتدار شده باشد. انتگرال $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ را در صورتی

$$\cdot \mathbf{F}(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2)$$

۲۳. فرض کنید $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} + yz\mathbf{k}$ نمایش میدان سرعت یک سیال باشد (سرعت به متر

بر ثانیه است). چند مترمکعب سیال در ثانیه از مربع $0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1$ در صفحه xy می‌گذرد؟

۲۴. فرض کنید $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$ و $\text{div } \mathbf{F} = \nabla \cdot \mathbf{F}$ (ب) $\nabla \times \mathbf{F}$ را حساب کنید.

۲۵. فرض کنید S یک سطح و c یک منحنی بسته‌ای باشد که S را احاطه کرده است. تساوی

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_c \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

را در صورتی تحقیق کنید که \mathbf{F} یک میدان گرادیان باشد (از تمرین ۲۰ استفاده کنید).

۲۶. انتگرال $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ را در صورتی حساب کنید که $\mathbf{F}(x, y, z) = (x, y, -y)$ و S سطح استوانه‌ای

تعریف شده با $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$ و قائم اشاره به خارج استوانه باشد.

۲۷. فرض کنید S بخشی از استوانه $x^2 + y^2 = 4$ باشد که بین صفحات $z = 0$ و $z = x + 3$

قرار دارد. انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\int_S z^2 dS \quad (\text{پ}) \quad \int_S y^2 dS \quad (\text{ب}) \quad \int_S x^2 dS \quad (\text{آ})$$

۲۸. فرض کنید Γ فصل مشترک صفحه $z = ax + by$ با استوانه $x^2 + y^2 = 1$ باشد. جمع

اعداد حقیقی a و b را چنان بیابید که $a^2 + b^2 = 1$ و

$$\int_{\Gamma} y dx + (z - x) dy - y dz = 0$$

۲۹. یک مارپیچ مستدیر واقع بر استوانه $x^2 + y^2 = R^2$ با پای p را می‌توان با معادلات

پارامتری

$$x = R \cos \theta, \quad y = R \sin \theta, \quad z = p\theta, \quad \theta \geq 0$$

توصیف کرد. ذره‌ای تحت اثر ثقل (که موازی محور z اثر می‌کند) در امتداد مارپیچ

بدون اصطکاک می‌لغزد. هرگاه ذره از ارتفاع $z_0 > 0$ شروع به لغزیدن کند، آنگاه

وقتی به ارتفاع z ، $0 \leq z < z_0$ ، در امتداد مارپیچ می‌رسد، تندیش مساوی است

با

- که در آن s طول قوس در امتداد مارپیچ، g ثابت ثقل، و t زمان می‌باشد.
- (آ) طول بخشی از مارپیچ را بیابید که بین صفحات $z = z_0$ و $z = z_1$ و $0 \leq z_1 < z_0$ قرار دارد.
- (ب) زمان T_0 لازم برای رسیدن ذره به صفحه $z = 0$ را حساب کنید.

فصل هفتم

آنالیز برداری

تمام نظریه^۶ حرکت مایعات به حل فرمولهای تحلیلی تحویل یافته است .
ال . اوپلر

حال آماده‌ایم حساب دیفرانسیل برداری (ر . ک . فصل ۳) و حساب انتگرال برداری (ر . ک . فصل ۶) را به هم گره بزنیم . این کار با قضایای مهم گرین ، گاوس ، و استوکس صورت می‌گیرد . همچنین ، به بعضی از کاربردهای فیزیکی این قضایا در الکتریسیته و مغناطیس ، دینامیک مایعات ، هدایت گرما ، و معادلات دیفرانسیل اشاره می‌کنیم (آخری به وسیله^۶ آشنایی مختصری با نظریه^۶ پتانسیل) .

یادداشت تاریخی

بسیاری از این قضایای اساسی ریشه در فیزیک دارند . مثلاً^۱ ، قضیه^۶ گرین ، که حدود ۱۸۲۸ کشف شد ، در رابطه با نظریه^۶ پتانسیل ناشی شده است (این نظریه^۶ شامل پتانسیلهای ثقلی و الکتریکی می‌باشد) . قضیه^۶ گاوس ، یعنی قضیه^۶ دیورژانس ، در رابطه با الکتریسیته ساکن ناشی شده است (افتخار این قضیه را باید با ریاضیدان روسی ، استروگرادسکی^۱ ، قسمت کرد) . قضیه^۶ استوکس اول بار در ۱۸۵۰ توسط لرد کلوین^۲ فیزیکدان در نامه‌ای به استوکس پیشنهاد شده ، و توسط استوکس در امتحان جایزه^۶ اسمیت در ۱۸۵۴ به کار رفت .

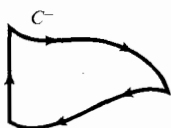
1. Ostrogradsky

2. Lord Kelvin

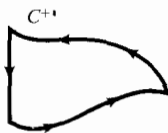
۱.۷ قضیه گرین

قضیه گرین انتگرال خط در امتداد منحنی بسته C در صفحه \mathbb{R}^2 را به انتگرال مضاعف روی ناحیه محصور به C را به هم ربط می‌دهد. این نتیجه مهمی است که در بخشهای زیر به منحنیها و سطوح در \mathbb{R}^3 تعمیم می‌یابد. ما به انتگرالهای خط حول منحنیهای اشاره داریم که مرز نواحی مقدماتی از نوع $2, 1$ ، و 3 هستند (ر.ک. بخش ۳.۰۵). برای درک ایده‌های این بخش لازم است به بخش ۲.۰۶ مراجعه نمایید.

منحنی بسته ساده C که مرز ناحیه‌ای از نوع $2, 1$ ، یا 3 است دو جهت دارد؛ خلاف جهت عقربه‌های ساعت (مثبت) و در جهت عقربه‌های ساعت (منفی). ما C را با جهت خلاف عقربه‌های ساعت به C^+ ، و با جهت عقربه‌های ساعت به C^- نشان می‌دهیم (شکل ۱.۰۷).



جهت منفی
(ب)



جهت مثبت
(آ)

شکل ۱.۰۷

جهت مثبت C (آ) و جهت منفی C (ب)

مرز ناحیه 1 را می‌توان به قسمتهای بالا و پایین C_1 و C_2 ، و (در صورت امکان) به قسمتهای قائم چپ و راست B_1 و B_2 تجزیه کرد. سپس، با توجه به شکل ۲.۰۷، می‌نویسیم

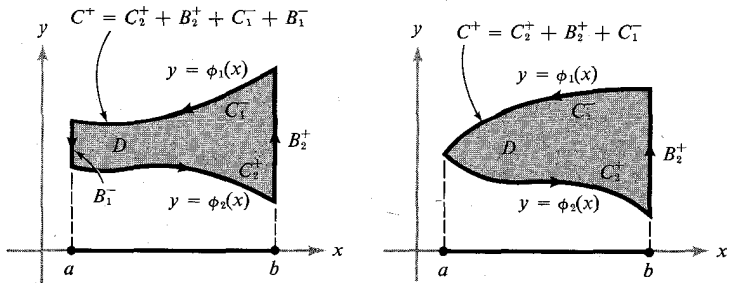
$$C^+ = C_2^+ + B_2^+ + C_1^- + B_1^-$$

که در آن به علاوه‌ها منحنیهای جهتدار در جهت چپ به راست یا پایین به بالا، و منهایها منحنیهای جهتدار از راست به چپ یا از بالا به پایین را نشان می‌دهند.

مرز یک ناحیه از نوع 2 به همین نحو به قسمتهای چپ و راست و (در صورت امکان) به قسمتهای افقی بالایی و پایینی تجزیه می‌شوند (شکل ۳.۰۷).

مرز یک ناحیه از نوع 3 دو تجزیه دارد، یکی به نیمه‌های بالایی و پایینی و دیگری به نیمه‌های چپ و راست.

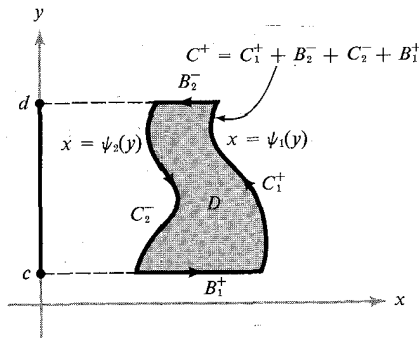
حال، برای آماده کردن زمینه جهت قضیه گرین، دو لم ثابت می‌کنیم.



شکل ۳.۱.۷

دو مثال از طرز شکستن مرز با جهت مثبت ناحیه D از نوع ۱ به مؤلفه‌های جهت‌دار

$$C^+ = C_2^+ + B_2^+ + C_1^- + B_1^-$$



شکل ۳.۱.۷

یک مثال که طرز شکستن مرز با جهت مثبت ناحیه D از

نوع ۲ را به مؤلفه‌های جهت‌دار نشان می‌دهد.

لم ۱. فرض کنیم D ناحیه‌ای از نوع ۱ بوده و C مرز آن باشد. همچنین، $P: D \rightarrow \mathbb{R}^1$ باشد. در این صورت،

$$\int_{C^+} P dx = - \int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy$$

(طرف چپ انتگرال خط $\int_{C^+} P dx + Q dy + R dz$ است ، که در آن $Q = 0$ و $R = 0$)

برهان . فرض کنیم D با

$$a \leq x \leq b, \quad \phi_2(x) \leq y \leq \phi_1(x)$$

توصیف شده است. C^+ را به صورت $C^+ = C_2^+ + B_2^+ + C_1^- + B_1^-$ تجزیه می‌کنیم (ر.ک. شکل ۲۰۱۰۷). بنا بر قضیه فوبینی^۱، می‌توان انتگرال مضاعف را به صورت انتگرال مکرر حساب کرد (ر.ک. ص ۳۵۰)

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dx dy &= \int_a^b \int_{\phi_2(x)}^{\phi_1(x)} \frac{\partial P}{\partial y}(x, y) dy dx \\ &= \int_a^b [P(x, \phi_1(x)) - P(x, \phi_2(x))] dx \end{aligned}$$

لیکن، چون C_2^+ را می‌توان با $x \mapsto (x, \phi_2(x))$ ، و C_1^- را با $x \mapsto (x, \phi_1(x))$ ، $a \leq x \leq b$ ، پارامتری کرد، داریم

$$\int_a^b P(x, \phi_2(x)) dx = \int_{C_2^+} P(x, y) dx$$

و

$$\int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx = \int_{C_1^-} P(x, y) dx$$

لذا، با عکس کردن جهتها،

$$-\int_a^b P(x, \phi_1(x)) dx = \int_{C_1^-} P(x, y) dx$$

بنابراین،

$$\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = -\int_{C_2^+} P dx - \int_{C_1^-} P dx$$

چون x بر B_1^- و B_2^+ ثابت است، خواهیم داشت

$$\int_{B_2^+} P dx = 0 = \int_{B_1^-} P dx$$

و در نتیجه،

$$\begin{aligned} \int_{C^+} P dx &= \int_{C_2^+} P dx + \int_{B_2^+} P dx + \int_{C_1^-} P dx + \int_{B_1^-} P dx \\ &= \int_{C_2^+} P dx + \int_{C_1^-} P dx \end{aligned}$$

لذا،

$$\int_D \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = - \int_{C_2^+} P dx - \int_{C_1^-} P dx = - \int_{C^+} P dx$$

حال لم مشابهی ثابت می‌کنیم که در آن نقشهای x و y باهم عوض شده‌اند.

لم ۲. فرض کنیم D یک ناحیه از نوع ۲ با مرز C باشد. در این صورت، اگر $Q: D \rightarrow \mathbb{R}$ ، C^1 باشد،

$$\int_{C^+} Q dy = \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy$$

در اینجا علامت منفی نخواهیم داشت، زیرا تعویض نقشهای x و y باهم متناظر تغییر جهت صفحه است.

برهان. فرض کنیم D با

$$\psi_2(y) \leq x \leq \psi_1(y), \quad c \leq y \leq d$$

داده شده باشد. با استفاده از نمادهای شکل ۳.۱.۷، داریم

$$\int_{C^+} Q dy = \int_{C_2^+ + B_1^+ + C_1^+ + B_2^-} Q dy = \int_{C_1^+} Q dy + \int_{C_2^-} Q dy$$

که در آن منحنی C_1^+ با $(\psi_1(y), y)$ ، $y \mapsto (\psi_1(y), y)$ ، و منحنی C_2^+ با $(\psi_2(y), y)$ ، $y \mapsto (\psi_2(y), y)$ ، $c \leq y \leq d$ ، پارامتری شده است. با اعمال قضیه فوبینی، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_D \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy &= \int_c^d \int_{\psi_2(y)}^{\psi_1(y)} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy \\ &= \int_c^d [Q(\psi_1(y), y) - Q(\psi_2(y), y)] dy \\ &= \int_{C_1^+} Q dy - \int_{C_2^-} Q dy = \int_{C_1^+} Q dy + \int_{C_2^+} Q dy \end{aligned}$$

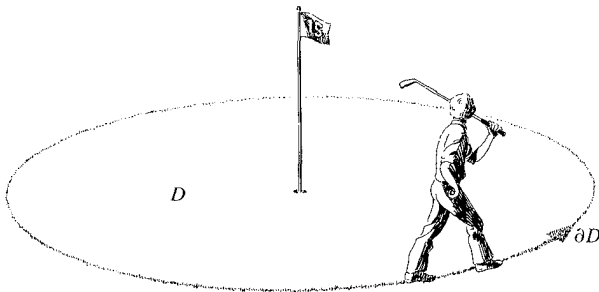
$$= \int_{C^+} Q dy$$

از تلفیق قضایای ۱ و ۲ قضیه مهم زیر ثابت خواهد شد .

قضیه ۱ (قضیه گرین) . فرض کنیم D ناحیه‌ای از نوع ۳ بوده و C مرز آن باشد. همچنین ، $P: D \rightarrow \mathbb{R}$ و $Q: D \rightarrow \mathbb{R}$ ، C^1 باشند . در این صورت ،

$$\int_{C^+} P dx + Q dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

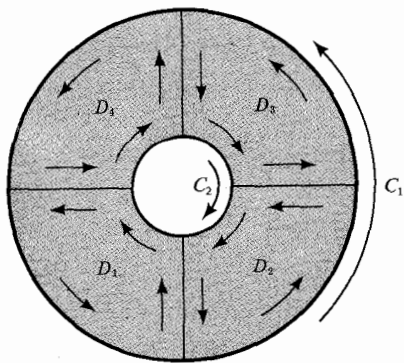
جهت صحیح (مثبت) برای منحنیهای مرزی ناحیه D را می توان با قاعده زیر به یاد آورد : " اگر در امتداد منحنی C در جهت صحیح حرکت کنید ، ناحیه D سمت چپ شما خواهد بود . " ر. ک . شکل ۴.۱.۷



شکل ۴.۱.۷

جهت صحیح برای مرز ناحیه D_1

قضیه گرین در مورد هر ناحیه " مناسب " در \mathbb{R}^2 به کار می رود . در تمرین ۸ قضیه گرین را برای نواحی که از نوع ۳ نبوده ولی قابل شکستن به چند ناحیه از نوع ۳ باشد تعمیم می دهیم . در شکل ۵.۱.۷ ناحیه D یک طوق است ؛ مرز از دو منحنی $C = C_1 + C_2$ با جهت های نموده شده تشکیل یافته است . (توجه کنید که جهت صحیح ناحیه داخلی



$$D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$$

شکل ۵.۱.۷

قضیه گرین در مورد $D = D_1 \cup D_2 \cup D_3 \cup D_4$ به کار رفته است.

جهت عقربه‌های ساعت است؛ قاعده ص ۵۰۸ برای به خاطر آوردن این جهت هنوز کار است. اگر قضیه ۱ بر هر ناحیه D_1, D_2, D_3, D_4 اعمال شده و نتایج باهم جمع شوند، تساوی قضیه گرین برای D و منحنی مرز C به دست می‌آید.

حال از نماد ∂D برای منحنی جهت‌دار C^+ استفاده می‌کنیم؛ یعنی، مرز منحنی D که در جهت صحیح طبق قاعده ص ۵۰۸ جهت‌دار شده است. در این صورت، می‌توان قضیه گرین را به صورت زیر نوشت:

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

قضیه گرین قضیه بسیار مهمی است، از اینرو که انتگرال خط حول مرز یک ناحیه را به انتگرال سطح در درون ناحیه ربط می‌دهد، و در بسیاری از حالات محاسبه انتگرال خط از محاسبه انتگرال مساحت آسانتر است. مثلاً، "اگر P روی مرز صفر شود، می‌توان فوراً" نتیجه گرفت که $\int_D (\partial P / \partial y) dx dy = 0$ حتی اگر $\partial P / \partial y$ در درون صفر نگردد. (آیامی نتوانیم یک چنین P را بر مربع بیکه بسازیم؟)

مثال ۱. قضیه گرین را به ازای $P(x, y) = x$ و $Q(x, y) = xy$ و قرصیکه $x^2 + y^2 \leq 1$

به عنوان D تحقیق نمایید.

می‌توان طرفین فرمول گرین را مستقیماً حساب کرد. مرز D دایره یک‌پارامتری شده با $x = \cos t$, $y = \sin t$, $0 \leq t \leq 2\pi$ ، است؛ در نتیجه،

$$\begin{aligned}\int_{\partial D} P dx + Q dy &= \int_0^{2\pi} [(\cos t)(-\sin t) + \cos t \sin t \cos t] dt \\ &= \left[\frac{\cos^2 t}{2} \right]_0^{2\pi} + \left[-\frac{\cos^3 t}{3} \right]_0^{2\pi} = 0\end{aligned}$$

از آن سو،

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \int_D y dx dy$$

که این صفر می‌باشد. لذا، قضیه گرین در این حالت برقرار می‌باشد.

با استفاده از قضیه گرین، می‌توان فرمولی برای مساحت یک ناحیه محدود به یک منحنی بسته ساده به دست آورد.

قضیه ۲. هرگاه C یک منحنی بسته ساده باشد که ناحیه‌ای که قضیه گرین بر آن اعمال می‌شود را محدود نماید، آنگاه مساحت ناحیه D محدود به C مساوی است با

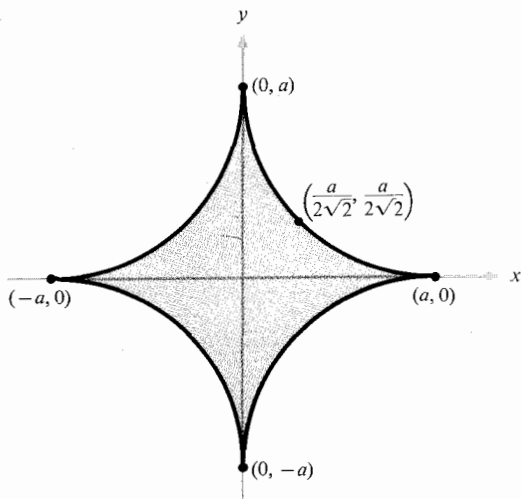
$$A = \frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx$$

برهان. فرض کنیم $x = Q(x, y)$, $y = -P(x, y)$ ؛ پس طبق قضیه گرین داریم

$$\begin{aligned}\frac{1}{2} \int_{\partial D} x dy - y dx &= \frac{1}{2} \int_D \left(\frac{\partial x}{\partial x} - \frac{\partial(-y)}{\partial y} \right) dx dy \\ &= \int_D dx dy = A\end{aligned}$$

مثال ۲. مساحت ناحیه محصور به بتو چرخزاد $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ را می‌توان با استفاده از پارامتری‌سازی

$x = a \cos^3 \theta, \quad y = a \sin^3 \theta, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi$
 حساب کرد (ر.ک. شکل ۶.۱.۷). لذا، داریم



شکل ۶.۱.۷

بتوجرخزاد $x = a \cos^3 \theta, y = a \sin^3 \theta, 0 \leq \theta \leq 2\pi$

$$\begin{aligned} A &= \frac{1}{2} \int_{\partial D} x \, dy - y \, dx \\ &= \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} [(a \cos^3 \theta)(3a \sin^2 \theta \cos \theta) - (a \sin^3 \theta)(-3a \cos^2 \theta \sin \theta)] \, d\theta \\ &= \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} [\sin^2 \theta \cos^4 \theta + \cos^2 \theta \sin^4 \theta] \, d\theta = \frac{3}{2} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 \theta \cos^2 \theta \, d\theta \\ &= \frac{3}{8} a^2 \int_0^{2\pi} \sin^2 2\theta \, d\theta = \frac{3}{8} a^2 \int_0^{2\pi} \left[\frac{1 - \cos 4\theta}{2} \right] \, d\theta \\ &= \frac{3}{16} a^2 \int_0^{2\pi} d\theta - \frac{3}{16} a^2 \int_0^{2\pi} \cos 4\theta \, d\theta = \frac{3}{8} \pi a^2 \end{aligned}$$

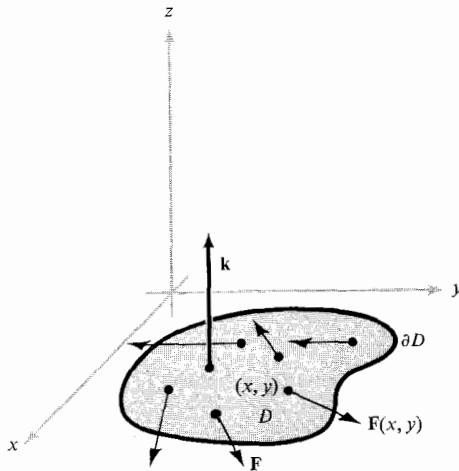
ما قضیه گربین در قالب قضیه ۱ را تعمیم نخواهیم داد. می‌توان این قضیه را به

زبان میدانهای برداری به نحو زیبایی بیان نمود.

قضیه ۳ (شکل برداری قضیه گرین) . فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^2$ ناحیه‌ای از نوع ۳ بوده و ∂D مرز آن باشد (که در خلاف جهت عقربه‌های ساعت جهتدار شده است) . همچنین ، $F = Pi + Qj$ یک میدان برداری C^1 بر D باشد . در این صورت ،

$$\int_{\partial D} F \cdot ds = \int_D (\text{curl } F) \cdot \mathbf{k} \, dA = \int_D (\nabla \times F) \cdot \mathbf{k} \, dA$$

(ر.ک. شکل ۷.۱.۷).



شکل ۷.۱.۷

جزئیات شکل برداری قضیه گرین

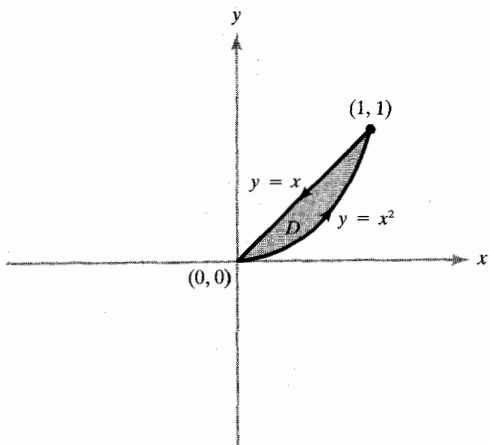
این نتیجه پس از شرح چند علامت به آسانی از قضیه ۱ به دست می‌آید. از خواننده می‌خواهیم جزئیات تمرین ۱۴ را بیان دارد.

مثال ۳. فرض کنید $F = (xy^2, y + x)$ از $(\nabla \times F) \cdot \mathbf{k}$ روی ناحیه‌ای در ربع اول انتگرال

بگیرید که به منحنیهای $y = x$ و $y = x^2$ محدود شده است.
روش ۱. در اینجا داریم

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(0, 0, \frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) = (1 - 2xy)\mathbf{k}.$$

لذا $(\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} = 1 - 2xy$ ، از این می توان با استفاده از انتگرال مکرر روی ناحیه D (ر.ک. شکل ۸.۱.۷) به صورت زیر انتگرال گرفت:



شکل ۸.۱.۷

ناحیه محدود به منحنیهای $y = x$ و $y = x^2$

$$\begin{aligned} \iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dx \, dy &= \int_0^1 \int_{x^2}^x (1 - 2xy) \, dy \, dx \\ &= \int_0^1 [y - xy^2]_{x^2}^x \, dx \\ &= \int_0^1 [x - x^3 - x^2 + x^5] \, dx = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{12} \end{aligned}$$

روش ۲. در اینجا با استفاده از قضیه ۳ داریم

$$\iint_D (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{k} \, dx \, dy = \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$$

انتگرال خط F در امتداد منحنی $y = x$ از چپ به راست مساوی است با

$$\int_0^1 F_1 dx + F_2 dy = \int_0^1 (x^3 + 2x) dx = \frac{1}{4} + 1 = \frac{5}{4}$$

در امتداد منحنی $y = x^2$ داریم

$$\int_0^1 F_1 dx + F_2 dy = \int_0^1 (x^5 dx + (x + x^2)(2x dx)) = \frac{1}{6} + \frac{2}{3} + \frac{1}{2} = \frac{4}{3}$$

لذا، با توجه به اینکه باید انتگرال در امتداد $y = x$ از راست به چپ، مثل شکل ۸.۰.۱.۷، گرفته شود،

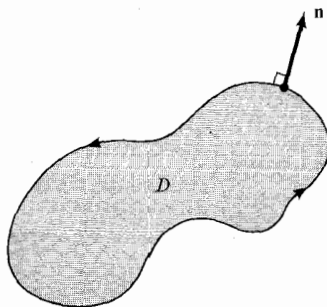
$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \frac{4}{3} - \frac{5}{4} = \frac{1}{12}$$

شکل دیگری از قضیه گرین وجود دارد که می توان آن را به \mathbb{R}^3 تعمیم داد.

قضیه ۴ (قضیه دیورژانس در صفحه). فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^2$ ناحیه ای از نوع ۳ بوده و ∂D مرز آن باشد. فرض کنیم \mathbf{n} قائم یکه رویه خارج به ∂D باشد که با

$$\mathbf{n} = (y'(t), -x'(t)) / \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$$

داده شده است، که در آن $\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ ، $\sigma(t) = (x(t), y(t))$ یک پارامتری سازی ∂D با جهت مثبت می باشد (ر.ک. شکل ۹.۰.۱.۷).



شکل ۹.۰.۱.۷

\mathbf{n} قائم یکه رویه خارج به ∂D است.

فرض کنیم $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ یک میدان برداری C^1 بر D باشد. در این صورت،

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA$$

برهان. چون $\sigma'(t) = (x'(t), y'(t))$ بر ∂D مماس است، پس $\mathbf{n} \cdot \sigma' = 0$ ؛ در نتیجه، \mathbf{n} بر مرز عمود خواهد بود. علامت \mathbf{n} طوری گرفته شده است که رو به خارج باشد (تا روبه داخل). طبق تعریف انتگرال مسیری (ر.ک. بخش ۱۰.۶)،

$$\begin{aligned} \int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds &= \int_a^b \left(\frac{P(x(t), y(t))y'(t) - Q(x(t), y(t))x'(t)}{\sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}} \right) \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2} \, dt \\ &= \int_a^b [P(x(t), y(t))y'(t) - Q(x(t), y(t))x'(t)] \, dt \\ &= \int_{\partial D} P \, dy - Q \, dx \end{aligned}$$

بنابر قضیه گرین، این مساوی است با

$$\int_D \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA$$

مثال ۴. فرض کنید $\mathbf{F} = y^3\mathbf{i} + x^5\mathbf{j}$. انتگرال مؤلفهء قائم \mathbf{F} حول مربع یکه را حساب کنید.

این را می‌توان با قضیه دیورژانس انجام داد. در واقع،

$$\int_{\partial D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = \int_D \operatorname{div} \mathbf{F} \, dA$$

اما $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$ ؛ در نتیجه، انتگرال صفر می‌باشد.

تمرینات

- انتگرال $\int_C y \, dx - x \, dy$ را در صورتی حساب کنید که C مرز مربع $[-1, 1] \times [-1, 1]$ با جهتی خلاف عقربه‌های ساعت باشد (از قضیه گرین استفاده کنید).
- مساحت قرص D به شعاع R را با استفاده از قضیه گرین بیابید.
- قضیه گرین را برای قرص D به مرکز $(0, 0)$ و شعاع R و توابع زیر تحقیق نمایید:

$$P(x, y) = xy^2, Q(x, y) = -yx^2 \quad (\Gamma)$$

$$P(x, y) = x + y, Q(x, y) = y \quad (\neg)$$

$$P(x, y) = xy = Q(x, y) \quad (\nabla)$$

۴. با استفاده از قضیه دیورژانس، نشان دهید $\int_{\Gamma D} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, ds = 0$ ، که در آن $\mathbf{F}(x, y) = y\mathbf{i} - x\mathbf{j}$ و D قرص یکه است. این مطلب را مستقیماً تحقیق کنید.

۵. مساحت محدود به یک قوس از چرخزاد $x = a(1 - \sin \theta)$ ، $y = a(1 - \cos \theta)$ ، $a > 0$ ، $0 \leq \theta \leq 2\pi$ و محور x را بیابید (از قضیه گرین استفاده کنید).

۶. تحت شرایط قضیه گرین، ثابت کنید که

$$\int_{\Gamma D} PQ \, dx + QP \, dy = \int_D \left[Q \left(\frac{\partial P}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) + P \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial Q}{\partial y} \right) \right] dx \, dy \quad (\Gamma)$$

$$\int_{\Gamma D} \left(Q \frac{\partial P}{\partial x} - P \frac{\partial Q}{\partial x} \right) dx + \left(P \frac{\partial Q}{\partial y} - Q \frac{\partial P}{\partial y} \right) dy \quad (\neg)$$

$$= 2 \int_D \left(P \frac{\partial^2 Q}{\partial x \partial y} - Q \frac{\partial^2 P}{\partial x \partial y} \right) dx \, dy$$

۷. انتگرال $\int_C (2x^3 - y^3) \, dx + (x^3 + y^3) \, dy$ را در صورتی حساب کنید که C دایره یکه باشد، و قضیه گرین را در این حالت تحقیق نمایید.

۸. تعمیم زیر از قضیه گرین را ثابت نمایید: فرض کنید D ناحیه‌ای در صفحه xy باشد که مرز آن از چند منحنی بسته ساده جهتدار تشکیل شده است. فرض کنید D را بتوان با چند قطعه خط موازی محورهای مختصات به تعداد متناهی ناحیه مانند D_i از نوع ۳ که جهت هر یک خلاف عقربه‌های ساعت است تجزیه شده باشد (ر. ک. شکل ۵.۱۰.۷). در این صورت، اگر P و Q بر D ، C^1 باشند،

$$\int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \, dy = \int_{\partial D} P \, dx + Q \, dy$$

که در آن ∂D مرز جهتدار D است. (راهنمایی. قضیه گرین را بر هر D_i اعمال کنید.)
 ۹. قضیه گرین را برای انتگرالده تمرین γ ($P = 2x^3 - y^3$ ، $Q = x^3 + y^3$) و ناحیه طوقی D توصیف شده به وسیله $a \leq x^2 + y^2 \leq b$ با مرزهای جهتدار مانند شکل ۵.۱۰.۷ تحقیق نمایید.

۱۰. فرض کنید D ناحیه‌ای باشد که در آن قضیه گرین برقرار است. همچنین، f توافقی

باشد؛ یعنی، بر D

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

ثابت کنید که

$$\int_{\partial D} \frac{\partial f}{\partial y} dx - \frac{\partial f}{\partial x} dy = 0$$

۱۱. (آ) قضیه دیورژانس را به ازای $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ و قرص یکه $x^2 + y^2 \leq 1$: D تحقیق نمایید.

(ب) انتگرال مؤلفه قائم $2xy\mathbf{i} - y^2\mathbf{j}$ را حول بیضی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ حساب کنید.

۱۲. فرض کنید $Q(x, y) = x/(x^2 + y^2)$ ، $P(x, y) = -y/(x^2 + y^2)$. اگر D قرص یکه باشد، چرا قضیه گرین برای این P و Q برقرار نیست.

۱۳. با استفاده از قضیه گرین، انتگرال $\int_C (y^2 + x^3) dx + x^4 dy$ را در صورتی حساب کنید که C^+ محیط $[0, 1] \times [0, 1]$ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت باشد.

۱۴. قضیه ۳ را تحقیق نمایید.

۱۵. با استفاده از قضیه ۲، مساحت داخل بیضی $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ را محاسبه کنید.

*۱۶. با استفاده از قضیه گرین، فرمول تغییر متغیر را در حالت خاص زیر ثابت نمایید:

به ازای تبدیل $(u, v) \mapsto (x(u, v), y(u, v))$

$$\int_D dx dy = \int_{D^*} \left| \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right| du dv$$

در برهان خود مفروضات لازم برای توابع $x = x(u, v)$ و $y = y(u, v)$ و $\partial(x, y)/\partial(u, v)$ را تنظیم نمایید.

۱۷. انتگرال $\int_0^1 \int_0^1 (x^5 - 2xy^3) dx - 3x^2y^2 dy$ را در صورتی حساب کنید که مسیر $\sigma(t) = (t^8, t^{10})$ باشد، $0 \leq t \leq 1$.

۱۸. اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$\int_{\partial D} \phi \nabla \phi \cdot \mathbf{n} ds = \int_D (\phi \nabla^2 \phi + \nabla \phi \cdot \nabla \phi) dA$$

۱۹. با استفاده از قضیه گرین، مساحت یک حلقه رز چهار بر $r = 3 \sin 2\theta$ را بیابید.

(راهنمایی: $x dy - y dx = r^2 d\theta$)

۲۰. نشان دهید هرگاه C یک منحنی بسته ساده اطراف ناحیه‌ای باشد که در آن قضیه گرین قابل اعمال است، آنگاه مساحت ناحیه D محدود به C مساوی است با

$$A = \int_{\partial D} x \, dy = - \int_{\partial D} y \, dx$$

نشان دهید چگونه این قضیه ۲ را ایجاب می‌کند.

تمرینهای ۲۱ تا ۲۸ کاربرد قضیه گرین را در معادلات دیفرانسیل جزئی نشان می‌دهند. این تمرینات بخصوص در رابطه با جوابهای معادله لاپلاس می‌باشند. در این تمرینها، فرض کنید D ناحیه‌ای بازی در \mathbb{R}^2 با مرز ∂D باشد. همچنین، $u: D \cup \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ تابع پیوسته‌ای باشد که در D ، C^2 است. فرض کنید $p \in D$ و قرصهای بسته $B_\rho = B_\rho(p)$ به شعاع ρ و مرکز p به ازای $0 < \rho \leq R$ جزء D باشند. $I(\rho)$ را با

$$I(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_{\partial B_\rho} u \, ds$$

تعریف نمایید.

* ۲۱. نشان دهید که $\lim_{\rho \rightarrow 0} I(\rho) = 2\pi u(p)$

* ۲۲. فرض کنید n قائم بیکه روبه‌خارج به ∂B_ρ بوده و $\nabla u \cdot n = \partial u / \partial n$. نشان دهید که

$$u(p) = \frac{1}{2\pi R} \int_{\partial B_R} u \, ds$$

* ۲۳. نشان دهید که $I'(\rho) = \frac{1}{\rho} \int_{\partial B_\rho} \nabla^2 u \, dA$

* ۲۴. فرض کنید u در معادله لاپلاس صدق کند: بر D ، $\nabla^2 u = 0$. با استفاده از تمرینهای قبل، نشان دهید که

$$\int_{\partial B} \frac{\partial u}{\partial n} \, ds = \iint_{B_\rho} \nabla^2 u \, dA$$

(این مبین آن است که مقدار یک تابع توافقی در یک نقطه با مقدارش بر محیط قرصی به مرکز آن تعیین می‌گردد.)

* ۲۵. با استفاده از تمرین ۲۴، نشان دهید هرگاه u توافقی باشد (یعنی، $\nabla^2 u = 0$)، آنگاه $u(p)$ را می‌توان به صورت یک انتگرال مساحت بیان کرد:

$$u(\mathbf{p}) = \frac{1}{\pi R^2} \iint_{B_R} u \, dA$$

*۲۶. فرض کنید u یک تابع توافقی باشد که بر D تعریف شده است (یعنی ، بر D ، $\nabla^2 u = 0$) و در نقطه \mathbf{p} از D ماکزیمم (یا مینیمم) موضعی داشته باشد .
(\bar{A}) نشان دهید u باید بر قرصی به مرکز \mathbf{p} ثابت باشد . (راهنمایی . از تمرین ۲۵ استفاده نمایید) .

(ب) فرض کنید D همبند مسیری باشد (یعنی ، به ازای هر دو نقطه \mathbf{p} و \mathbf{q} در D ، مسیر پیوسته‌ای مانند $D \rightarrow [0, 1] : \sigma$ موجود باشد به طوری که $\sigma(0) = \mathbf{p}$ و $\sigma(1) = \mathbf{q}$ و ماکزیمم (یا مینیمم) در \mathbf{p} مطلق باشد . (لذا ، به ازای هر \mathbf{q} در D ، $u(\mathbf{q}) \leq u(\mathbf{p})$ (یا $u(\mathbf{q}) \geq u(\mathbf{p})$) . نشان دهید u باید بر D ثابت باشد .

نتیجه تمرین ۲۶ را اصل ماکزیمم (یا مینیمم) قوی برای توابع توافقی می‌نامند . این را با تمرینهای ۱۶ تا ۱۹ در بخش ۲۰۴ مقایسه نمایید .

*۲۷. یک تابع را بر D تحت توافقی نامیم اگر در D ، $\nabla^2 u \geq 0$. اگر $\nabla^2 u \leq 0$ ، آن را فوق توافقی خواهیم نامید .

(\bar{A}) اصل ماکزیمم قوی را برای توابع تحت توافقی به دست آورید .

(ب) اصل مینیمم قوی را برای توابع فوق توافقی به دست آورید .

*۲۸. فرض کنید D قرص $\{(x, y) | x^2 + y^2 < 1\}$ و C دایره $\{(x, y) | x^2 + y^2 = 1\}$ باشد . در

بخش ۵۰۷ نشان می‌دهیم هرگاه f تابع حقیقی پیوسته‌ای بر C باشد ، آنگاه تابع پیوسته‌ای چون u بر $D \cup C$ وجود دارد که بر C با f یکی بوده و بر D توافقی باشد .

یعنی ، f توسیع توافقی به قرص دارد . با این فرض ، نشان دهید

(\bar{A}) هرگاه q تابع پیوسته غیر ثابتی بر $D \cup C$ باشد که بر D تحت توافقی باشد (ولی توافقی نباشد) ، آنگاه تابع پیوسته‌ای چون u بر $D \cup C$ وجود دارد که بر D توافقی

است به طوری که u بر C با q یکی بوده و همه‌جا بر D ، $q < u$.

(ب) همین حکم در صورت تعویض " تحت توافقی " با " فوق توافقی " و " $q < u$ " با " $q > u$ " برقرار می‌باشد .

۲۰۷ قضیه استوکس

قضیه استوکس انتگرال خط یک میدان برداری حول منحنی بسته ساده C در \mathbb{R}^3 را به

انتگرال روی سطح با مرز C مربوط می‌سازد، و از اینجهت شباهت زیادی به قضیه گرین دارد.

با یادآوری چند نکته از فصل ۶ آغاز می‌کنیم. سطح S را که نمودار تابع $f(x, y)$ است در نظر می‌گیریم؛ در نتیجه، S به صورت زیر پارامتری شده است: به ازای (u, v) در قلمروی مانند D ،

$$\begin{cases} x = u \\ y = v \\ z = f(u, v) = f(x, y) \end{cases}$$

در بخش ۶.۶، انتگرال تابع برداری \mathbf{F} روی S به صورت زیر عرضه شد:

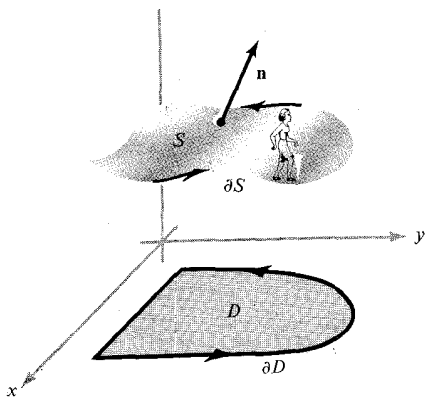
$$(1) \quad \int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_D \left[F_1 \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) + F_2 \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) + F_3 \right] dx dy$$

• $\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ در آن

در بخش ۱.۷ فرض شد که نواحی D مورد نظر از نوع ۳ هستند؛ این دربرهان قضیه گرین لازم بود، ولی در آنجا گفتیم که قضیه برای رده و وسیعتری از نواحی برقرار است. در این بخش فرض می‌کنیم D ناحیه‌ای است که مرزش منحنی بسته ساده بوده و در آن قضیه گرین قابل اعمال است. قضیه گرین مستلزم انتخاب جهت برای مرز D ، به صورت توضیح شده در بخش ۱.۷، است. انتخاب جهتی که قضیه گرین را با اعتبار سازد مثبت نامیده می‌شود. به یاد آورید که هرگاه D از نوع ۳ باشد، آنگاه جهت مثبت خلاف جهت عقربه‌های ساعت می‌باشد.

فرض کنیم $\mathbb{R}^2 \rightarrow [a, b] : \sigma = (x(t), y(t))$ ، یک پارامتری‌سازی از ∂D در جهت مثبت باشد. در این صورت، منحنی مرزی ∂S را منحنی بسته ساده جهت‌دار تعریف می‌کنیم که نقش نگاشت $\eta: t \mapsto (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ با جهت القا شده از η باشد (شکل ۱.۲.۷). برای به خاطر آوردن این جهت (یعنی، جهت مثبت) بر ∂S ، "ناظری" را تصور کنید که در امتداد مرز سطح با قائم روبه بالا حرکت کند؛ وی در صورتی در جهت مثبت حرکت می‌کند که سطح سمت چپ وی باشد. این جهت بر ∂S را اغلب جهت القا شده به وسیله قائم روبه بالای \mathbf{n} می‌نامند.

حال برای بیان و اثبات یکی از نتایج مهم این بخش حاضر و آماده‌ایم.



شکل ۱۰۲۰۷

جهت القا شده بر ∂S : وقتی حول مرز حرکت کنید، سطح باید سمت چپ شما باشد.

قضیه ۵ (قضیه استوکس برای نمودارها). فرض کنیم S سطح جهت‌داری باشد که با تابع C^2 $z = f(x, y)$ ، $(x, y) \in D$ ، تعریف شده باشد، و F یک میدان برداری C^1 بر S باشد. در این صورت، اگر ∂S منحنی مرزی جهت‌دار S تعریف شده در بالا باشد، خواهیم داشت

$$\int_S \text{curl } F \cdot dS = \int_S (\nabla \times F) \cdot dS = \int_{\partial S} F \cdot ds$$

به یاد آورید که $\int_{\partial S} F \cdot ds$ انتگرال مؤلفه مماسی F حول ∂S است، ولی $\int_S G \cdot dS$ انتگرال $G \cdot n$ ، یعنی مؤلفه قائم G ، روی S می‌باشد (ر.ک. بخش‌های ۲۰۶ و ۶۰۶). لذا، قضیه استوکس می‌گوید که انتگرال مؤلفه قائم گرل میدان برداری F روی سطح S مساوی انتگرال مؤلفه مماسی F حول مرز ∂S می‌باشد.

برهان. هرگاه $F = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$ ، آنگاه

$$\text{curl } F = \left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

لذا، با استفاده از فرمول (۱)، می‌نویسیم

$$(۲) \quad \int_S \operatorname{curl} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_D \left[\left(\frac{\partial F_3}{\partial y} - \frac{\partial F_2}{\partial z} \right) \left(-\frac{\partial z}{\partial x} \right) + \left(\frac{\partial F_1}{\partial z} - \frac{\partial F_3}{\partial x} \right) \left(-\frac{\partial z}{\partial y} \right) + \left(\frac{\partial F_2}{\partial x} - \frac{\partial F_1}{\partial y} \right) \right] dA$$

از آن سو،

$$\int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\eta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\eta} F_1 dx + F_2 dy + F_3 dz$$

که در آن $\eta: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ، پارامتری سازی جهت نگهدار $\eta(t) = (x(t), y(t), f(x(t), y(t)))$ ، پارامتری سازی جهت نگهدار منحنی بسته ساده جهت دار ∂S است که در بالا مطرح شد. لذا،

$$(۳) \quad \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \left(F_1 \frac{dx}{dt} + F_2 \frac{dy}{dt} + F_3 \frac{dz}{dt} \right) dt$$

اما، بنا بر قاعده زنجیره‌ای،

$$\frac{dz}{dt} = \frac{\partial z}{\partial x} \frac{dx}{dt} + \frac{\partial z}{\partial y} \frac{dy}{dt}$$

با گذاردن این عبارت در (۳)، به دست می‌آوریم

$$(۴) \quad \begin{aligned} \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_a^b \left[\left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right) \frac{dx}{dt} + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) \frac{dy}{dt} \right] dt \\ &= \int_a^b \left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \\ &= \int_{\partial D} \left(F_1 + F_3 \frac{\partial z}{\partial x} \right) dx + \left(F_2 + F_3 \frac{\partial z}{\partial y} \right) dy \end{aligned}$$

با اعمال قضیه گرین بر (۴) نتیجه می‌شود که (فرض می‌کنیم قضیه گرین بر D قابل اعمال باشد)

$$\int_D \left[\frac{\partial(F_2 + F_3 \partial z / \partial y)}{\partial x} - \frac{\partial(F_1 + F_3 \partial z / \partial x)}{\partial y} \right] dA$$

حال قاعده زنجیره‌ای را با توجه به اینکه F_1 ، F_2 ، و F_3 توابعی از x ، y بوده و z تابعی از x و y است به کار می‌بریم، خواهیم داشت

$$\int_D \left[\left(\frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_2}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + F_3 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} \right) - \left(\frac{\partial F_1}{\partial y} + \frac{\partial F_1}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial F_3}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} \cdot \frac{\partial z}{\partial x} + F_3 \cdot \frac{\partial^2 z}{\partial y \partial x} \right) \right] dA$$

دو جمله آخر در هر پرانتز یکدیگر را حذف می‌کنند، و می‌توان جملات را طوری تغییر آرایش داد که انتگرال (۲) به دست آید، و برهان تمام گردد.

مثال ۱. فرض کنید $\mathbf{F} = ye^z\mathbf{i} + xe^z\mathbf{j} + xye^z\mathbf{k}$. نشان دهید که انتگرال \mathbf{F} حول منحنی بسته ساده جهتدار C که مرز سطح S است ۰ می‌باشد. (فرض کنید S ، همانند قضیه ۵ نمودار یک تابع باشد.)

در واقع، طبق قضیه استوکس، $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ ، ولی داریم

$$\nabla \times \mathbf{F} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ ye^z & xe^z & xye^z \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

در نتیجه، $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$.

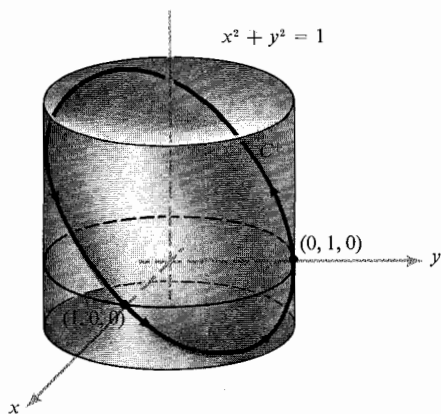
مثال ۲. با استفاده از قضیه استوکس، انتگرال خط

$$\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$$

را در صورتی حساب کنید که C فصل مشترک استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و صفحه $x + y + z = 1$ بوده و جهت C خلاف جهت عقربه‌های ساعت در صفحه xy باشد.

منحنی C سطح S تعریف شده با $z = 1 - x - y = f(x, y)$ به ازای (x, y) در $D = \{(x, y) | x^2 + y^2 \leq 1\}$ را محدود می‌کنند (شکل ۲۰۲۰۷). قرار می‌دهیم $\mathbf{F} = -y^3\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} - z^3\mathbf{k}$ که دارای کرل $\nabla \times \mathbf{F} = (3x^2 + 3y^2)\mathbf{k}$ می‌باشد. در این صورت، طبق قضیه استوکس، انتگرال خط مساوی انتگرال سطح

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$



شکل ۲۰۲۰۷

منحنی C فصل مشترک استوانه $x^2 + y^2 = 1$ و صفحه $x + y + z = 1$ است.

است. ولی $\nabla \times \mathbf{F}$ فقط مؤلفه k دارد. لذا، طبق فرمول (۱)، خواهیم داشت

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_D (3x^2 + 3y^2) dx dy$$

این انتگرال را می‌توان با رفتن به مختصات قطبی حساب کرد. با این کار، به دست می‌آوریم

$$3 \int_D (x^2 + y^2) dx dy = 3 \int_0^1 \int_0^{2\pi} r^2 \cdot r d\theta dr = 6\pi \int_0^1 r^3 dr = \frac{6\pi}{4} = \frac{3\pi}{2}$$

این نتیجه را مستقیماً با محاسبه انتگرال خط

$$\int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz$$

تحقیق می‌کنیم. منحنی ∂D را می‌توان با معادلات

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 0, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

پارامتری کرد. لذا، منحنی C را با معادلات

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = 1 - \sin t - \cos t, \quad 0 \leq t \leq 2\pi$$

پارامتری می‌کنیم.

لذا،

$$\begin{aligned} & \int_C -y^3 dx + x^3 dy - z^3 dz \\ &= \int_0^{2\pi} [(-\sin^3 t)(-\sin t) + (\cos^3 t)(\cos t) \\ &\quad - (1 - \sin t - \cos t)^3(-\cos t + \sin t)] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) dt - \int_0^{2\pi} (1 - \sin t - \cos t)^3(-\cos t + \sin t) dt \end{aligned}$$

انتگرال دوم به شکل $u^3 du$ است، که در آن $u = 1 - \sin t - \cos t$ ؛ و لذا، این انتگرال مساوی است با

$$\frac{1}{4}[1 - \sin t - \cos t]^4 \Big|_0^{2\pi} = 0$$

لذا، آنچه می ماند عبارت است از $\int_0^{2\pi} (\cos^4 t + \sin^4 t) dt$.

این انتگرال را می توان با استفاده از فرمولهای (۱۸) و (۱۹) ضمیمه پ حساب کرد.

همچنین، می توان به صورت زیر عمل کرد. با استفاده از اتحادهای مثلثاتی

$$\sin^2 t = \frac{1 - \cos 2t}{2}, \quad \cos^2 t = \frac{1 + \cos 2t}{2}$$

انتگرال فوق را به صورت زیر درمی آوریم:

$$\frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 + \cos^2 2t) dt = \pi + \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \cos^2 2t dt$$

مجدداً، " از اتحاد

$$\cos^2 2t = \frac{1 + \cos 4t}{2}$$

استفاده کرده، به دست می آوریم

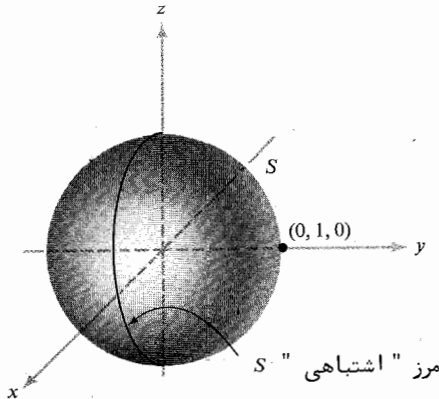
$$\begin{aligned} \pi + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} (1 + \cos 4t) dt &= \pi + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} dt + \frac{1}{4} \int_0^{2\pi} \cos 4t dt \\ &= \pi + \frac{\pi}{2} + 0 = \frac{3\pi}{2} \end{aligned}$$

برای ساده کردن برهان قضیه استوکس در بالا فرض کردیم سطح S قابل توصیف به

صورت نمودار تابع $z = f(x, y)$ ، $(x, y) \in D$ ، باشد که در آن D ناحیه‌ای است که در آن قضیه گرین به کار می‌رود. با اینحال، بدون زحمت زیاد، می‌توان قضیه کلیتری را برای سطوح پارامتری شده جهتدار به دست آورد. مشکل اصلی تعریف ∂S می‌باشد.

فرض کنیم $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک پارامتری‌سازی سطح S بوده و $\sigma(t) = (u(t), v(t))$ یک پارامتری‌سازی ∂D باشد. ممکن است اغوا شده ∂S را منحنی به معادله پارامتری $t \mapsto \eta(t) = \Phi(u(t), v(t))$ تعریف کنیم. اما، با این تعریف، ممکن است ∂S مرز S به معنی هندسی قابل قبول نباشد.

مثلاً، ممکن است نتیجه بگیریم که مرز کره S پارامتری شده با مختصات کروی در \mathbb{R}^3 نصف دایره عظیمه بر S است که در صفحه xz قرار دارد، اما از نظر هندسی واضح است که S سطح همواری است (بدون نقطه بازگشت) که مرز یا لبه ندارد (ر. ک. شکل ۳۰۲۰۷ و تمرین ۱۴). لذا، این دایره S یک مرز "اشتباهی" S می‌باشد.



شکل ۳۰۲۰۷

سطح S بخشی از یک کره است.

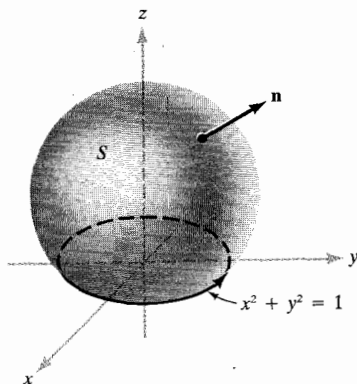
این مشکل را می‌توان با فرض یک به یک بودن Φ بر تمام D برطرف ساخت. در این صورت، نقش ∂D تحت Φ ، یعنی $\Phi(\partial D)$ ، مرز هندسی $S = \Phi(D)$ می‌باشد. اگر $\sigma(t) = (u(t), v(t))$ یک پارامتری‌سازی ∂D در جهت مثبت باشد، ∂S را منحنی بسته ساده جهتداری تعریف می‌کنیم که نقش نگاشت $t \mapsto \eta(t) = \Phi(u(t), v(t))$ بوده و جهتش به وسیله η القا شده باشد (ر.

قضیه ۶ (قضیه استوکس برای سطوح پارامتری شده) . فرض کنیم S یک سطح جهتدار تعریف شده با پارامتری سازی یک به یک $\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow S$ باشد. همچنین، ∂S مرز جهتدار S بوده و F یک میدان برداری C^1 بر S باشد. در این صورت،

$$\int_S (\nabla \times F) \cdot dS = \int_{\partial S} F \cdot ds$$

این مطلب همانند قضیه ۵ ثابت می شود.

مثال ۳. فرض کنید S شکل نموده شده در شکل ۴.۲.۷ با جهت ذکر شده باشد. همچنین، $F = yi - xz + e^{xz}k$. انتگرال $\int_S (\nabla \times F) \cdot dS$ را حساب کنید.



شکل ۴.۲.۷

مرز سطح S که با \mathbb{R}^3 $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ پارامتری شده نقش مرز D است فقط اگر Φ بر D یک به یک باشد.

این یک سطح پارامتری شده است و می توان آن را با مختصات کروی به مبداء مرکز کره پارامتری کرد. ولی برای حل این مسئله لازم نیست Φ صریحا " به دست آید. بنابراین

قضیه ۶، $\int_S (\mathbf{V} \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ ، و در نتیجه، اگر ∂S را با $x(t) = \cos t$ ، $y(t) = \sin t$ پارامتری کنیم، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} &= \int_0^{2\pi} \left[y \frac{dx}{dt} - x \frac{dy}{dt} \right] dt \\ &= \int_0^{2\pi} (-\sin^2 t - \cos^2 t) dt = -\int_0^{2\pi} dt = -2\pi \end{aligned}$$

بنابراین، $\int_S (\mathbf{V} \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = -2\pi$.

حال با استفاده از قضیه استوکس، $\mathbf{V} \times \mathbf{F}$ را بر حسب چرخهای پارو که در فصل ۳ عنوان شد تعبیر فیزیکی می‌کنیم. با توجه به قضیه ۶، داریم

$$\int_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S \text{curl } \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\partial S} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\partial S} F_T \, ds$$

که در آن F_T مؤلفه مماسی \mathbf{F} است. این رابطه می‌گوید که انتگرال مؤلفه قائم کرل یک میدان برداری روی سطح جهتدار S مساوی انتگرال خط \mathbf{F} روی ∂S است، که خود مساوی انتگرال مسیری مؤلفه مماسی \mathbf{F} روی ∂S می‌باشد.

فرض کنیم \mathbf{V} میدان برداری سرعت یک سیال باشد. نقطه P و بردار بیکه \mathbf{n} را در نظر می‌گیریم. S_ρ را قرص به شعاع ρ و مرکز P می‌گیریم که بر \mathbf{n} عمود باشد. بنا بر قضیه استوکس،

$$\int_{S_\rho} \text{curl } \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{S_\rho} \text{curl } \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\partial S_\rho} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$$

که در آن ∂S_ρ جهت القا شده به وسیله \mathbf{n} را دارد (ر.ک. شکل ۵.۲۰۷). به آسانی معلوم می‌شود (ر.ک. تمرین ۸، بخش ۶.۶) که نقطه‌ای مانند Q در S_ρ وجود دارد به طوری که

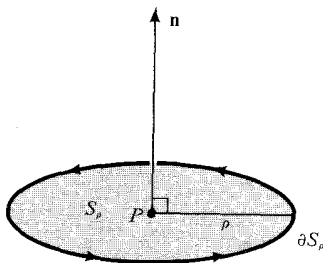
$$\int_{S_\rho} \text{curl } \mathbf{V} \cdot \mathbf{n} \, dS = (\text{curl } \mathbf{V}(Q) \cdot \mathbf{n}) A(S_\rho)$$

(این همان قضیه مقدار میانگین برای انتگرالهاست که در ص ۳۶۰ ثابت شد) که در آن $A(S_\rho) = \pi\rho^2$ مساحت S_ρ و $\mathbf{V}(Q)$ مقدار کرل \mathbf{V} در Q بوده، و \mathbf{n} نیز در Q حساب شده‌است. لذا،

$$\lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{A(S_\rho)} \int_{\partial S_\rho} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{A(S_\rho)} \int_{S_\rho} (\text{curl } \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{S}$$

$$= \lim_{\rho \rightarrow 0} \text{curl } \mathbf{V}(Q) \cdot \mathbf{n}$$

$$= \text{curl } \mathbf{V}(P) \cdot \mathbf{n}$$



شکل ۵.۲.۷

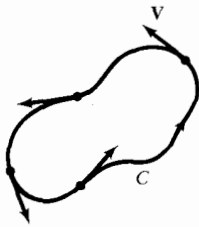
قائم \mathbf{n} به مرز ∂S_ρ قرص S_ρ جهتی القا می‌کند.

بنابراین^۱

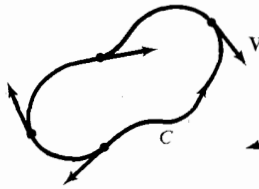
$$(۵) \quad \text{curl } \mathbf{V}(P) \cdot \mathbf{n}(P) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{A(S_\rho)} \int_{\partial S_\rho} \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$$

حال لحظه‌ای درنگ کرده، $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ را وقتی \mathbf{V} میدان سرعت یک سیال است تعبیر فیزیکی می‌کنیم (ر.ک. ص ۲۱۷). فرض کنیم، مثلاً، \mathbf{V} در جهت مماس به منحنی جهتدار C باشد (شکل ۶.۲.۷). در این صورت، واضح است که $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} > 0$ ، و ذرات روی C تمایل به دوران در جهت خلاف عقربه‌های ساعت دارند. اگر \mathbf{V} در جهت مخالف باشد، $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} < 0$. هرگاه \mathbf{V} بر C عمود باشد، آنگاه ذرات روی C اصلاً نمی‌چرخند و $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s} = 0$. به‌طورکلی، $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ ، که انتگرال مؤلفه مماسی \mathbf{V} است، میزان خالص دوران سیال در جهت خلاف عقربه‌های ساعت حول C می‌باشد. لذا، $\int_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{s}$ را گردش

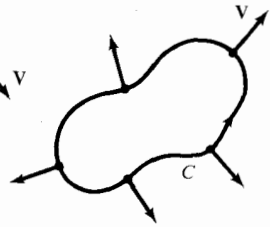
۱. بعضی از کتب فیزیک فرمول (۵) را تعریف کرل گرفته، و به کمک آن قضیه استوکس را به آسانی "ثابت می‌کنند". اما این خطر استدلال دوری را پیش می‌آورد، زیرا برای نشان دادن اینکه (۵) واقعاً "بردار" "گرل $\mathbf{V}(P)$ " را تعریف می‌کند به قضیه استوکس، یا چیز مشابهی، نیاز خواهیم داشت.



$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} > 0$$



$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} < 0$$



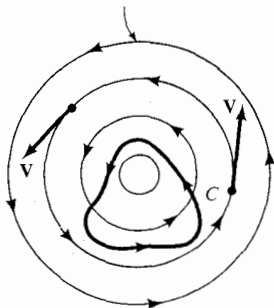
$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

شکل ۶۰۲۰۷

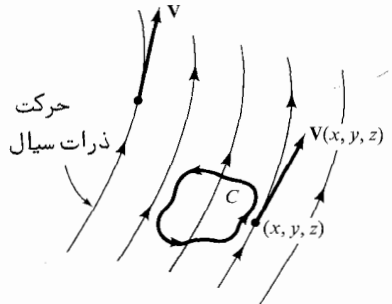
معنی شهودی علائم ممکن $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$

حول C می نامند (ر. ک. شکل ۷۰۲۰۷).

حرکت ذرات سیال



(ب)



(آ)

شکل ۷۰۲۰۷

گردش یک میدان برداری (میدان سرعت یک سیال) :

(آ) گردش حول C صفر است؛ (ب) گردش ناصفر حول C (" گرداب ")

این نتایج معنی $\text{curl } \mathbf{v}$ در حرکت یک سیال را برای ما روشن می سازد. گردش $\int_{\partial S_p} \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s}$ سرعت خالص سیال حول ∂S_p است؛ در نتیجه، $\text{curl } \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$ نمایش اثر دوران سیال حول محور

x است. به طور دقیقتر، فرمول (۵) می گوید که

$\text{curl } \mathbf{V}(P) \cdot \mathbf{n}$ گردش \mathbf{V} بر واحد مساحت روی

یک سطح عمود بر \mathbf{n} می باشد .

توجه کنید که اندازه $\text{curl } \mathbf{V} \cdot \mathbf{n}$ وقتی ماکزیمم است که $\mathbf{n} = \text{curl } \mathbf{V} / \|\text{curl } \mathbf{V}\|$. لذا ، اثر دورانی در P حول محور موازی $\|\text{curl } \mathbf{V}\|$ ماکزیمم می باشد . لذا ، $\text{curl } \mathbf{V}$ بحق بردار گردایی نامیده شده است .

مثال ۴ (قانون فارادی^۱) . یک قانون اساسی در نظریه الکترومغناطیس این است که اگر $\mathbf{E}(t, x, y, z)$ و $\mathbf{H}(t, x, y, z)$ میدانهای الکتریکی و مغناطیسی در لحظه t باشند ، $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{H} / \partial t$ که در آن $\nabla \times \mathbf{E}$ با ثابت گرفتن t و $\partial \mathbf{H} / \partial t$ با ثابت گرفتن x, y, z حساب شده اند .

حال این امر را با استفاده از قضیه استوکس تعبیر هندسی می کنیم . فرض کنیم S سطحی باشد که در آن قضیه استوکس اعمال می شود . در این صورت ،

$$\begin{aligned} \int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} &= \int_S (\nabla \times \mathbf{E}) \cdot d\mathbf{S} = - \int_S \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} \cdot d\mathbf{S} \\ &= - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S} \end{aligned}$$

(اگر \mathbf{H} ، C^1 باشد ، تساوی اخیر را می توان توجیه کرد) . لذا ، خواهیم داشت

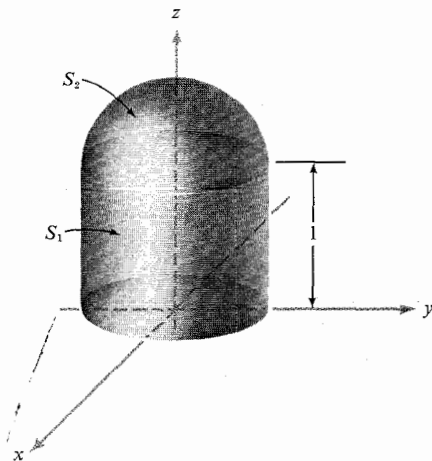
$$\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s} = - \frac{\partial}{\partial t} \int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$$

این تساوی به قانون فارادی معروف است . کمیت $\int_{\partial S} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{s}$ نمایش " ولتاژ " حول ∂S است ، و اگر ∂S یک سیم باشد ، شدت جریان با این ولتاژ متناسب خواهد بود . همچنین ، $\int_S \mathbf{H} \cdot d\mathbf{S}$ شار \mathbf{H} ، یا شار مغناطیسی ، نامیده می شود . لذا ، قانون فارادی می گوید که ولتاژ حول یک حلقه قرینه میزان تغییر شار مغناطیسی مار بر حلقه می باشد .

تمرینات

۱ . تمرین ۵ از بخش ۶ .۶ را با استفاده از قضیه استوکس حل کنید .

۲. تمرین ۶ از بخش ۶.۶ را با استفاده از قضیه استوکس حل کنید .
۳. قضیه استوکس را به ازای نیمکره بالایی $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}, z \geq 0$ و میدان بردار شعاعی $F(x, y, z) = xi + yz + zk$ تحقیق نمایید .
۴. فرض کنید S سطحی به مرز ∂S بوده، و E یک میدان الکتریکی عمود بر ∂S باشد. نشان دهید که شار مغناطیسی القایی در امتداد S نسبت به زمان ثابت است. (راهنمایی: از قانون فارادی استفاده کنید.)
۵. فرض کنید S سطح استوانه‌ای کلاه‌دار شکل ۸.۲.۷ باشد. S اجتماع دو سطح S_1 و S_2



شکل ۸.۲.۷

استوانه کلاه‌دار اجتماع S_1 و S_2 است.

است، که S_1 مجموعه (x, y, z) هایی است که $x^2 + y^2 = 1, 0 \leq z \leq 1$ و S_2 مجموعه (x, y, z) هایی است که $x^2 + y^2 + (z - 1)^2 = 1, z \geq 1$. قرار دهید $F(x, y, z) = (zx + z^2y + x)i + (z^3yx + y)j + z^4x^2k$. انتگرال $\int_S (\nabla \times F) \cdot dS$ را محاسبه کنید. (راهنمایی: قضیه استوکس برای این سطح برقرار است.)

۶. فرض کنید σ از خطوط مستقیم بین $(1, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ ، و $(0, 0, 1)$ تشکیل شده باشد، و S مثلث با این رئوس باشد. قضیه استوکس را مستقیماً "به‌ازای $F = yzi + xzj + xyk$ " محاسبه کنید.

تحقیق نمایید .

۷. ثابت کنید قانون فارادی ایجاب می‌کند که $\nabla \times \mathbf{E} = -\partial \mathbf{H} / \partial t$.

۸. فرض کنید S یک سطح بوده و \mathbf{F} بر مماس به مرز S عمود باشد . نشان دهید که

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

اگر \mathbf{F} یک میدان الکتریکی باشد ، تعبیر فیزیکی فرمول فوق چیست ؟

۹. دو سطح S_1 و S_2 با مرز مشترک ∂S را در نظر بگیرید . با شکل توضیح دهید چگونه باید S_1 و S_2 جهت‌دار شوند تا

$$\int_{S_1} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_2} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$$

۱۰. به ازای سطح S و بردار ثابت \mathbf{v} ، ثابت کنید

$$2 \int_S \mathbf{v} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\partial S} (\mathbf{v} \times \mathbf{r}) \cdot d\mathbf{s}$$

که در آن $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$

۱۱. به‌طور غیرصوری ثابت کنید هرگاه S سطح بسته‌ای باشد ، آنگاه

$$\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$$

(ر.ک. تمرین ۹) . (یک سطح بسته سطحی است که مرز ناحیه‌ای در فضا باشد ؛

مثلاً " کره یک سطح بسته است .)

۱۲. اگر منحنی بسته C مرز سطح S بوده و f و g توابع C^2 ای باشند ، نشان دهید که

$$\int_C f \nabla g \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla f \times \nabla g) \cdot d\mathbf{S} \quad (\text{آ})$$

$$\text{و}$$

$$\int_C (f \nabla g + g \nabla f) \cdot d\mathbf{s} = 0 \quad (\text{ب})$$

۱۳. اگر منحنی بسته C مرز سطح S بوده و \mathbf{v} بردار ثابتی باشد ، نشان دهید که

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

نشان دهید این فرمول حتی اگر C مرز سطح S نباشد نیز درست است .

۱۴. نشان دهید که پارامتری‌سازی $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ، $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ، $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ ، $\Phi(\phi, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi)$ ،

نشان دهید که پارامتری‌سازی $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ، $D = [0, \pi] \times [0, 2\pi]$ ، $\Phi(\phi, \theta) = (\cos \theta, \sin \theta \sin \phi, \sin \theta \cos \phi)$ ، کره $\sin \theta \sin \phi$ ، $\sin \theta \cos \phi$ ، $\cos \theta$ را به نصف دایره عظیمه‌ای بر S خواهد بود .

۱۵. قضیه ۶ را برای مارپیچ گون $[0, \pi/2] \times [0, 1]$ ، $(r, \theta) \in [0, 1] \times [0, \pi/2]$ و $\Phi(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, \theta)$ ، میدان برداری $F(x, y, z) = (z, x, y)$ تحقق نمایید .
 ۱۶*. قضیه ۶ را ثابت کنید .

۱۷. فرض کنید $F = x^2i + (2xy' + x)j + zk$. همچنین ، C دایره $x^2 + y^2 = 1$ و S قرص $x^2 + y^2 \leq 1$ در صفحه $z = 0$ باشد .

(آ) شار F خارج شده از S و

(ب) گردش F حول C را حساب کنید .

(پ) شار $\nabla \times F$ را پیدا کنید . قضیه استوکس را در این حالت مستقیماً "تحقیق نمایید .

۱۸*. قانون فارادی انتگرال خط میدان الکتریکی حول حلقه C را به انتگرال سطح میزان تغییر میدان مغناطیسی روی سطح S با مرز C مربوط می سازد . با توجه به معادله $\nabla \times E = -\partial H/\partial t$ به عنوان معادله اصلی ، (همانطور که در مثال ۴ دیدیم) قانون فارادی نتیجه ای از قضیه استوکس می باشد .

فرض کنید میدانهای الکتریکی و مغناطیسی داده شده ای در فضا در رابطه $\nabla \times E = -\partial H/\partial t$ صدق نمایند . همچنین ، C مرز نوار مویوس شکل $۳.۰.۶$ و $۴.۰.۶$ باشد . چون نوار مویوس نمی تواند جهتدار باشد ، قضیه استوکس به کار نخواهد رفت . قانون فارادی چه خواهد شد ؟ حدس می زنید $\int_C E \cdot ds$ مساوی چه باشد ؟

۱۹. از $\nabla \times F$ ، که در آن $F = (3y, -xz, yz^2)$ ، روی بخشی از سطح $z = x^2 + y^2$ که زیر صفحه $z = 2$ است هم مستقیماً " و هم با استفاده از قضیه استوکس انتگرال بگیرید .

۳.۷ میدانهای بقا

در بخش ۲.۰۶ دیدیم که ، در حالت میدان نیروی گرادیان $F = \nabla f$ ، انتگرالهای خط F به صورت زیر محاسبه می شوند :

$$\int_{\sigma} F \cdot ds = f(\sigma(b)) - f(\sigma(a))$$

مقدار انتگرال فقط به نقاط انتهایی $\sigma(a)$ و $\sigma(b)$ مسیر بستگی دارد . به عبارت دیگر ، اگر مسیر دیگری با همان نقاط انتهایی به کار ببریم ، همان جواب به دست می آید . لذا ، می گوئیم انتگرال مستقل از مسیر می باشد .

میدانهای گرادیان در مسائل فیزیکی بسیار مهم اند. معمولاً، $V = -f$ انرژی پتانسیل (ثقلی، الکتریکی، و غیره) بوده، و F نیرو می باشد. مثلاً، ذره‌ای به جرم m در میدان زمین را در نظر می‌گیریم. در این حالت f را مساوی GmM/r یا GmM/r^2 می‌گیریم، که در آن G ثابت ثقلی، M جرم زمین، و r فاصله تا مرکز زمین است. نیروی نظیر عبارت است از $F = (GmM/r^2)\mathbf{n}$ ، که در آن \mathbf{n} بردار یک‌ه شعاعی می باشد. (ذیلاً این حالت را بیشتر بررسی می‌کنیم). توجه کنید که F در نقطه $r=0$ تعریف نشده است.

حال می‌خواهیم آن میدانهای برداری را مشخص کنیم که به صورت گرادیان قابل بیانند. قضیه استوکس کار را به نحو قابل ملاحظه‌ای ساده می‌سازد.

قضیه ۷. فرض کنیم F یک میدان برداری C^1 باشد که بر \mathbb{R}^3 جز احتمالاً "چند نقطه" تعریف شده است. شرایط زیر بر F همه باهم معادلند:

$$\int_C F \cdot ds = 0, \quad C \text{ به ازای هر منحنی بسته ساده جهتدار مانند } C$$

(دو) به ازای هر دو منحنی ساده جهتدار C_1, C_2 با نقاط انتهایی یکسان،

$$\int_{C_1} F \cdot ds = \int_{C_2} F \cdot ds$$

(سه) F گرادیان تابعی f است؛ یعنی $F = \nabla f$ (و اگر F نقطه استثنایی داشته باشد که در آن تعریف نشده است، f نیز در آن نقطه تعریف نشده است).

$$\nabla \times F = 0 \quad (\text{چهار})$$

هر میدان برداری صادق در یکی (و در نتیجه، تمام) این شرایط یک میدان بقای برداری نام دارد.^۲

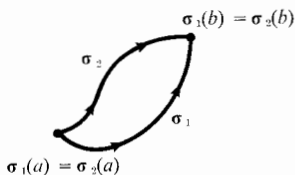
۱. هرگاه علامت منها به کار ببریم، آنگاه V در جهت F نزولی است. لذا، یک ذره تحت اثر F در جهت نزول پتانسیل حرکت خواهد کرد.

۲. در صفحه \mathbb{R}^2 نقاط استثنایی مجاز نیستند (ر.ک. تمرین ۱۲). اگر F فقط بر یک مجموعه محدب باز در \mathbb{R}^3 یا \mathbb{R}^2 تعریف شده و C^1 باشد، قضیه ۷ می‌تواند به همان نحو ثابت شود. (مجموعه D محدب است اگر $P, Q \in D$ ایجاب کند که پاره‌خط واصل بین P و Q متعلق به D باشد.)

برهان . استلزامهای زیر را ثابت می‌کنیم ، که از آن قضیه به ثبوت خواهد رسید :

$$(یک) \Rightarrow (چهار) \Rightarrow (سه) \Rightarrow (دو) \Rightarrow (یک)$$

ابتدا نشان می‌دهیم شرط (یک) شرط (دو) را ایجاب می‌کند . فرض کنیم σ_1 و σ_2 پارامتری‌سازیهایی از C_1 و C_2 با نقاط انتهایی یکسان باشند . منحنی بسته σ را این طور می‌سازیم که ابتدا σ_1 و سپس $\sigma_2 - \sigma_1$ را می‌پیماییم (شکل ۱۰۳۰۷) ، یا با علامت $\sigma = \sigma_1 - \sigma_2$.



(ب)



(T)

ساختن منحنی بسته ساده جهتدار $\sigma_1 - \sigma_2$ (T) از

دو منحنی ساده جهتدار (ب)

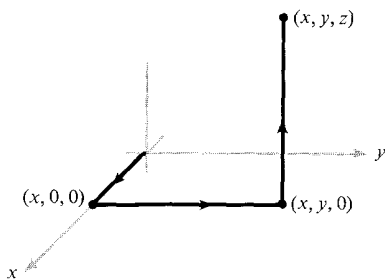
با فرض ساده بودن σ ، از (یک) نتیجه می‌شود که

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\sigma_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_{\sigma_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

در نتیجه ، قسمت (دو) برقرار است . (اگر σ ساده نباشد ، استدلالی اضافی ، که در اینجا حذف شده ، مورد لزوم خواهد بود .)

حال ثابت می‌کنیم (دو) قسمت (سه) را ایجاب می‌کند . فرض کنیم C یک منحنی ساده جهتدار باشد که نقطه $(0, 0, 0)$ را به (x, y, z) وصل کرده است ، و C با پارامتری‌سازی σ نمایش داده شده باشد (اگر $(0, 0, 0)$ نقطه استثنایی \mathbf{F} باشد ، می‌توان بدون تغییر استدلال نقطه شروع دیگری برای σ اختیار کرد) . f را مساوی $\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ تعریف می‌کنیم . بنابر (دو) ، f مستقل از C است . نشان می‌دهیم که $\mathbf{F} = \text{grad } f$. در واقع ، σ را مسیر آمده در شکل ۲۰۳۰۷ می‌گیریم ؛ در نتیجه ،

$$f(x, y, z) = \int_0^x F_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_2(x, t, 0) dt + \int_0^z F_3(x, y, t) dt$$



شکل ۲.۳.۷

یک مسیر که $(0, 0, 0)$ را به (x, y, z) وصل می‌کند

که در آن $\mathbf{F} = (F_1, F_2, F_3)$ در این صورت، فوراً معلوم می‌شود که $\partial f / \partial z = F_3$ به همین نحو، با جایگشت x, y, z می‌توان نشان داد که $\partial f / \partial x = F_1$ و $\partial f / \partial y = F_2$ ؛ یعنی، $\nabla f = \mathbf{F}$. ثالثاً، قسمت (سه) قسمت (چهار) را ایجاب می‌کند زیرا، همانطور که در بخش ۴.۳ ثابت شد،

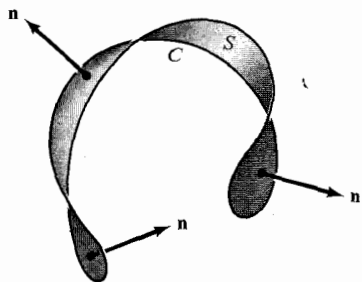
$$\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$$

بالاخره، فرض کنیم σ نمایش منحنی بسته C بوده، و S سطحی به مرز σ باشد (اگر \mathbf{F} نقطه‌استثنایی داشته باشد، S را دور از آنها می‌گیریم). شکل ۳.۳.۷ نشان می‌دهد که احتمالاً همیشه می‌توان یک چنین سطحی را یافت؛ ولی برهان صوری آن نیاز به ایده‌هایی ریاضی دارد که از مفاهیم عرضه شده در اینجا پیچیده‌ترند. بنابر قضیه استوکس،

$$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = \int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_S (\text{curl } \mathbf{F}) \cdot \mathbf{n} \, dS$$

چون $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ ، این انتگرال صفر می‌شود؛ در نتیجه، (یک) \Rightarrow (چهار).

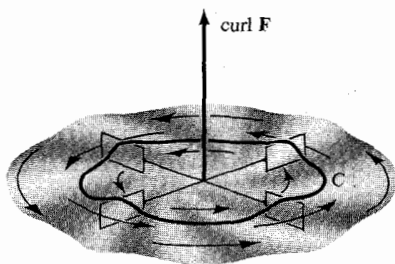
$\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ تعابیر فیزیکی مفید متعددی دارد. قبلاً دیدیم یک تعبیر کار انجام شده به وسیله \mathbf{F} در حرکت یک ذره در امتداد C است. تعبیر دوم مفهوم گردش است که در پایان بخش اخیر با آن مواجه شدیم. در این حالت \mathbf{F} را میدان سرعت یک سیال گرفتیم؛



شکل ۳.۳.۷

سطح S که منحنی C را می‌پیماید

یعنی F ، به هر نقطه P در فضا بردار سرعت سیال در P را نسبت می‌دهد. C را یک منحنی بسته گرفته، و ΔS را وتر جهتدار کوچکی از C می‌گیریم. در این صورت، $F \cdot \Delta S$ تقریباً مؤلفهٔ مماسی F ضربدر $\|\Delta S\|$ می‌باشد. انتگرال $\int_C F \cdot ds$ مؤلفهٔ مماسی خالص حول C خواهد بود. این یعنی اگر گردش سیال ناصفر باشد $\int_C F \cdot ds \neq 0$ ، یک چرخ پاروی کوچک واقع در سیال دوران خواهد کرد (ر.ک. شکل ۴.۳.۷). لذا، ما اغلب انتگرال خط



شکل ۴.۳.۷

$\int_C F \cdot ds \neq 0$ اینجاب می‌کند که چرخ پارو در سیالی با میدان سرعت F حول محورش نگردد.

$$\int_C F \cdot ds$$

را گردش F حول C می نامیم .

تعبیر مشابهی در نظریه الکترومغناطیس وجود دارد: هرگاه F نمایش یک میدان الکتریکی باشد، آنگاه، در صورت $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} \neq 0$ ، جریان حول حلقه C شارش می یابد. بنابر قضیه $\nabla \cdot \mathbf{F}$ میدان F بدون گردش است اگر و فقط اگر $\text{curl } \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ ، لذا، یک میدان برداری در \mathbb{R}^3 غیردورانی است اگر و فقط اگر میدان گرادینان تابعی باشد؛ یعنی، اگر و فقط اگر $\mathbf{F} = \nabla f$. تابع f یک پتانسیل برای F نام دارد.

مثال ۱. میدان برداری F بر \mathbb{R}^3 تعریف شده با

$$\mathbf{F}(x, y, z) = y\mathbf{i} + (z \cos yz + x)\mathbf{j} + (y \cos yz)\mathbf{k}$$

را در نظر بگیرید. نشان دهید F غیردورانی است و یک پتانسیل برای F پیدا نمایید. $\nabla \times \mathbf{F}$ را حساب می کنیم:

$$\begin{aligned} \nabla \times \mathbf{F} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ y & x + z \cos yz & y \cos yz \end{vmatrix} \\ &= (\cos yz - yz \sin yz - \cos yz + yz \sin yz)\mathbf{i} \\ &\quad + (0 - 0)\mathbf{j} + (1 - 1)\mathbf{k} \\ &= 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k} = \mathbf{0} \end{aligned}$$

در نتیجه، F غیردورانی می باشد. یافتن پتانسیل اسکالر به طرق مختلف میسر است. روش ۱. از تکنیکی که در اثبات (سه) از (دو) به کار رفت استفاده کرده، قرار می دهیم

$$\begin{aligned} f(x, y, z) &= \int_0^x F_1(t, 0, 0) dt + \int_0^y F_2(x, t, 0) dt + \int_0^z F_3(x, y, t) dt \\ &= \int_0^x 0 dt + \int_0^y x dt + \int_0^z y \cos yt dt \\ &= 0 + xy + \sin yz = xy + \sin yz \end{aligned}$$

به آسانی معلوم می شود که $\nabla f = \mathbf{F}$ که همان نتیجه مطلوب است:

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f}{\partial y} \mathbf{j} + \frac{\partial f}{\partial z} \mathbf{k} = y\mathbf{i} + (x + z \cos yz)\mathbf{j} + (y \cos yz)\mathbf{k}$$

روش ۲. چون f وجود دارد، می‌توان معادلات

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = x + z \cos yz$$

$$\frac{\partial f}{\partial z} = y \cos yz$$

را نسبت به $f(x, y, z)$ حل کرد. این معادلات با معادلات همزمان زیر معادلند: به ازای توابع h_1, h_2, h_3 (به ترتیب) مستقل از x, y, z ، و

$$f(x, y, z) = xy + h_1(y, z) \quad (\bar{1})$$

$$f(x, y, z) = \sin yz + xy + h_2(x, z) \quad (\bar{2})$$

$$f(x, y, z) = \sin yz + h_3(x, y) \quad (\bar{3})$$

وقتی $h_1(y, z) = \sin yz$ ، $h_2(x, z) = 0$ و $h_3(x, y) = xy$ ، سه معادله سازگار بوده و پتانسیل F را به دست می‌دهند. با اینحال، حدس ما فقط در مقادیر h_1, h_2, h_3 بوده است. برای به دست آوردن f به طور اصولیتر، توجه می‌کنیم که چون $f(x, y, z) = xy + h_1(y, z)$ و $\partial f / \partial z = y \cos yz$ ، درمی‌یابیم که

$$\frac{\partial h_1(y, z)}{\partial z} = y \cos yz$$

یا

$$h_1(y, z) = \int y \cos yz \, dz + g(y) = \sin yz + g(y)$$

لذا، با گذاردن این در $(\bar{1})$ ، به دست می‌آوریم

$$f(x, y, z) = xy + \sin yz + g(y)$$

اما، طبق $(\bar{2})$ ،

$$g(y) = h_2(x, z)$$

چون طرف راست این معادله تابعی از x و z و طرف چپ فقط تابعی از y است، باید مساوی ثابتی چون C باشند. لذا،

$$f(x, y, z) = xy + \sin yz + C$$

و f با تقریب یک ثابت معین شده است.

مثال ۲. جرم M در مبداء \mathbb{R}^3 نیرویی به اندازه GM/r^2 و در جهت مبداء بر واحد جرم در $\mathbf{r} = (x, y, z)$ وارد می‌سازد. در اینجا G ثابت ثقلی است که به واحدهای سنجش بستگی دارد، و $r = \|\mathbf{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. اگر به یاد آوریم که $-\mathbf{r}/r$ بردار یکه‌ای در جهت مبداء است، می‌توان میدان نیرو را به صورت زیر نوشت:

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -\frac{GM\mathbf{r}}{r^3}$$

نشان می‌دهیم \mathbf{F} غیر دورانی است و یک میدان اسکالر برای \mathbf{F} پیدا می‌کنیم. توجه کنید که \mathbf{F} در مبداء تعریف نشده است، ولی قضیه ۷ هنوز به کار می‌رود، زیرا نقطه استثنایی را مجاز می‌دارد.

ابتدا تحقیق می‌کنیم که $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$. با مراجعه به فرمول ۱۱ جدول بخش ۵.۳، به دست می‌آوریم

$$\nabla \times \mathbf{F} = -GM \left\{ \nabla \left(\frac{1}{r^3} \right) \times \mathbf{r} + \frac{1}{r^3} \nabla \times \mathbf{r} \right\}$$

اما $\nabla(1/r^3) = -3r/r^5$ (ر.ک. تمرین ۸، بخش ۵.۳). در نتیجه، اولین جمله صفر می‌شود، زیرا $\mathbf{r} \times \mathbf{r} = \mathbf{0}$. جمله دوم نیز صفر است، چرا که

$$\nabla \times \mathbf{r} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ x & y & z \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z} \right) \mathbf{i} + \left(\frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x} \right) \mathbf{j} + \left(\frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right) \mathbf{k} = \mathbf{0}$$

بنابراین، $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ (به ازای $\mathbf{r} \neq \mathbf{0}$).

هرگاه فرمول $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\mathbf{r}$ را به یاد آوریم (تمرین ۸، بخش ۵.۳)، آنگاه با امتحان می‌توان یک پتانسیل اسکالر برای \mathbf{F} به دست آورد. داریم $\mathbf{F} = -\nabla\phi$ ، که در آن $\phi(x, y, z) = -GM/r$ انرژی پتانسیل ثقلی نام دارد.

بنابر قضیه ۳ از بخش ۲.۶، کار انجام شده توسط \mathbf{F} در حرکت ذره‌ای به جرم یک از نقطه P_1 تا P_2 مساوی است با

$$\phi(P_1) - \phi(P_2) = GM \left(\frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_1} \right)$$

که در آن r_1 فاصله شعاعی P_1 تا مبدا است، و r_2 به همین نحو تعریف می شود.

با همان برهان، قضیه ∇ برای میدانهای برداری هموار \mathbb{R}^2 نیز برقرار است. لیکن، در این حالت \mathbf{F} نمی تواند نقاط استثنایی داشته باشد؛ یعنی، \mathbf{F} باید همه جا هموار باشد (ر.ک. تمرین ۱۲).

هرگاه $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ ، آنگاه

$$\nabla \times \mathbf{F} = \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) \mathbf{k}$$

و در نتیجه، شرط $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ به رابطه

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

تحویل می شود. لذا، خواهیم داشت

نتیجه. هرگاه \mathbf{F} یک میدان برداری C^1 بر \mathbb{R}^2 به شکل $P\mathbf{i} + Q\mathbf{j}$ باشد که $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ ، آنگاه به ازای f ی بر \mathbb{R}^2 ، $\mathbf{F} = \nabla f$.

مثال ۳. (آیا میدان برداری

$$\mathbf{F} = e^{xy}\mathbf{i} + e^{x+y}\mathbf{j}$$

یک میدان گرادیان است؟

در اینجا $P(x, y) = e^{xy}$ و $Q(x, y) = e^{x+y}$ ؛ در نتیجه، داریم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = xe^{xy}, \quad \frac{\partial Q}{\partial x} = e^{x+y}$$

اینها باهم مساوی نیستند؛ در نتیجه، \mathbf{F} نمی تواند تابع پتانسیل داشته باشد.

(ب) قسمت (آ) را برای

$$\mathbf{F} = (2x \cos y)\mathbf{i} - (x^2 \sin y)\mathbf{j}$$

تکرار کنید.

در این حالت داریم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = -2x \sin y = \frac{\partial Q}{\partial x}$$

و در نتیجه، F دارای تابع پتانسیل f است. برای به دست آوردن f ، معادلات

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2x \cos y, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -x^2 \sin y$$

را حل می‌کنیم. داریم

$$f(x, y) = x^2 \cos y + h_1(y)$$

و

$$f(x, y) = x^2 \cos y + h_2(x)$$

اگر $h_1 = h_2 = 0$ ، هر دو معادله برقرارند، و $f(x, y) = x^2 \cos y$ یک پتانسیل برای F می‌باشد.

مثال ۴. فرض کنید $\sigma: [1, 2] \rightarrow \mathbb{R}^2$ با

$$x = e^{t-1}, \quad y = \sin(\pi/t)$$

داده شده باشد. انتگرال

$$\int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot ds = \int_{\sigma} 2x \cos y \, dx - x^2 \sin y \, dy$$

را در صورتی حساب کنید که $\mathbf{F} = (2x \cos y)\mathbf{i} - (x^2 \sin y)\mathbf{j}$

داریم $\sigma(1) = (1, 0)$ و $\sigma(2) = (e, 1)$ چون $\partial(-x^2 \sin y)/\partial x = \partial(2x \cos y)/\partial y$ ، F غیردورانی بوده؛ و در نتیجه (همانطور که در مثال ۳ دیدیم)، یک میدان بررداری گرادینان می‌باشد. لذا، طبق قضیه ۷، می‌توان σ را با یک منحنی قطعه قطعه C^1 با همان نقاط انتهایی، بخصوص با یک مسیر چندضلعی از $(1, 0)$ به $(e, 0)$ و سپس به $(e, 1)$ عوض کرد. در نتیجه، انتگرال خط باید مساوی

$$\begin{aligned} \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot ds &= \int_1^e 2t \cos 0 \, dt + \int_0^1 -e^2 \sin t \, dt \\ &= (e^2 - 1) + e^2(\cos 1 - 1) = e^2 \cos 1 - 1 \end{aligned}$$

باشد.

به صورت دیگر، با استفاده از قضیه ۳ از بخش ۲.۶، داریم

$$\int_{\sigma} 2x \cos y \, dx - x^2 \sin y \, dy = \int_{\sigma} \nabla f \cdot ds \\ = f(\sigma(2)) - f(\sigma(1)) = e^2 \cos 1 - 1$$

زیرا $f(x, y) = x^2 \cos y$ یک تابع پتانسیل برای F می باشد. این تکنیک بوضوح از محاسبه مستقیم انتگرال ساده تر است.

این بخش را با قضیه‌ای پایان می دهیم که از لحاظ جوهر شبیه قضیه ۷ می باشد. قضیه ۷ تا حدودی عکس این مطلب است که به ازای هر تابع C^1 مانند $f: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ ، $\text{curl } \nabla f = 0$ ، یا هرگاه $\text{curl } F = 0$ ، آنگاه $F = \nabla f$. همچنین، می دانیم (فرمول ۱۰ در جدول بخش ۵.۳) که به ازای هر میدان برداری C^2 مانند G ، $\text{div}(\text{curl } G) = 0$. حال عکس این حکم را استفسار می کنیم: اگر $\text{div } F = 0$ ، آیا G کرل یک میدان برداری مانند G است؟ قضیه زیر پاسخ مثبتی به این سؤال می دهد.

قضیه ۸. هرگاه F یک میدان برداری C^1 بر \mathbb{R}^3 با $\text{div } F = 0$ باشد، آنگاه یک میدان برداری C^1 مانند G وجود دارد که $F = \text{curl } G$.

برهان این قضیه در تمرین ۱۴ به اختصار آمده است. در اینجا به خواننده تذکار می دهیم که، برخلاف F در قضیه ۷، میدان برداری F در قضیه ۸ مجاز به داشتن نقطه استثنایی نیست. مثلاً، میدان نیروی ثقلی $F = -(GM\mathbf{r}/r^3)$ دارای خاصیت $\text{div } F = 0$ است، ولی بازهم G ای نیست که $F = \text{curl } G$ (ر.ک. تمرین ۲۱). قضیه ۸ قابل اعمال نیست، زیرا میدان نیروی ثقلی F در \mathbb{R}^3 تعریف نشده است.

تمرینات

۱. نشان دهید که هر دو تابع پتانسیل برای یک میدان برداری حداکثر در یک ثابت تفاوت دارند.
۲. (آ) فرض کنید $F(x, y) = (xy, y^2)$ و σ مسیر $y = 2x^2$ و σ واصل بین $(0, 0)$ و $(1, 2)$ در \mathbb{R}^2 باشد. انتگرال $\int_{\sigma} F \cdot ds$ را حساب کنید.

(ب) آیا انتگرال قسمت (آ) به مسیر بین $(0, 0)$ و $(1, 2)$ بستگی دارد؟

۳. فرض کنید $F(x, y, z) = (2xyz + \sin x)\mathbf{i} + x^2z\mathbf{j} + x^2y\mathbf{k}$. تابع f را طوری بیابید که $\mathbf{F} = \nabla f$.

۴. انتگرال $\int_0^\pi \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ را در صورتی حساب کنید که $\sigma(t) = (\cos^5 t, \sin^3 t, t^4)$ ، $0 \leq t \leq \pi$ ، و \mathbf{F} همانند تمرین ۳ باشد .

۵. کار نیروی $\mathbf{F} = -r/|r|^3$ در حرکت ذره‌ای از نقطه $\mathbf{r}_0 \in \mathbb{R}^3$ تا ∞ را در صورتی بیابید که $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$.

۶. در تمرین ۵ نشان دهید که $\mathbf{F} = \nabla(1/r)$ ، $r \neq 0$ ، $r = ||\mathbf{r}||$. به چه معنی انتگرال \mathbf{F} از مسیر مستقل است؟

۷. فرض کنید $F(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + zk$. آیا تابعی چون f می‌تواند باشد که $\mathbf{F} = \nabla f$ ؟
 ۸* فرض کنید $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$ و هر F_k در شرط همگنی

$$F_k(tx, ty, tz) = tF_k(x, y, z), \quad k = 1, 2, 3$$

صدق نماید . و نیز $\nabla \times \mathbf{F} = 0$. ثابت کنید $\mathbf{F} = \nabla f$ ، که در آن

$$2f(x, y, z) = xF_1(x, y, z) + yF_2(x, y, z) + zF_3(x, y, z)$$

(راهنمایی . می‌توانید از تمرین دوره‌ای ۲۱ ، فصل ۲ ، استفاده کنید .)

۹. فرض کنید سیالی به میدان سرعت $\mathbf{F}(x, y, z) = (e^x \sin y)\mathbf{i} + (e^x \cos y)\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ باشد .
 انتگرال $\int_0^1 \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s}$ را در صورتی حساب کنید که $\sigma(t) = (\sqrt{t}, t^3, \exp\sqrt{t})$ ، $0 \leq t \leq 1$.
 ۱۰. فرض کنید سیالی به میدان سرعت $\mathbf{F}(x, y, z) = xy\mathbf{i} + yz\mathbf{j} + xz\mathbf{k}$ باشد . گردش حول دایره e یک چیست؟ جواب خود را تعبیر نمایید .

۱۱. جرم زمین تقریباً 6×10^{27} g بوده و جرم خورشید 330,000 برابر آن است . ثابت ثقلی 6.7×10^{-8} meters²/second² بوده ، و فاصله زمین تا خورشید تقریباً 1.5×10^{12} cm می‌باشد . کار لازم برای آنکه فاصله زمین تا خورشید 1 cm افزایش یابد تقریباً چقدر است؟

۱۲. (آ) نشان دهید $\int_C (x dy - y dx)/(x^2 + y^2) = 2\pi$ ، که در آن C دایره e یک است .
 (ب) نتیجه بگیرید که میدان برداری مربوطه $\mathbf{j} + (x/(x^2 + y^2))\mathbf{i} - (y/(x^2 + y^2))\mathbf{j}$ یک میدان بقا نیست .

(پ) با اینحال ، نشان دهید که $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. آیا این قضیه γ را نقض نمی‌کند؟ اگر نمی‌کند ، دلیلش چیست؟

۱۳. از میدانهای برداری F زیر در صفحه کدامها گرادیان یک تابع اسکالر f اند؟ اگر این f وجود دارد، آن را بیابید.

$$F(x, y) = xi + yz \quad (\bar{1})$$

$$F(x, y) = xyi + xyz \quad (\bar{2})$$

$$F(x, y) = (x^2 + y^2)\mathbf{i} + 2xyz \quad (\bar{3})$$

۱۴. قضیه ۸ را ثابت کنید. (راهنمایی: $G = G_1\mathbf{i} + G_2\mathbf{j} + G_3\mathbf{k}$ را با

$$G_1(x, y, z) = \int_0^z F_2(x, y, t) dt - \int_0^y F_3(x, t, 0) dt$$

$$G_2(x, y, z) = -\int_0^z F_1(x, y, t) dt$$

و $G_3(x, y, z) = 0$ تعریف نمایید.)

۱۵. آیا میدانهای برداری زیر کرل میدان برداری دیگری هستند؟ اگر چنین است، آن میدان برداری را بیابید.

$$F = xi + yz + zk \quad (\bar{1})$$

$$F = (x^2 + 1)\mathbf{i} + (z - 2xy)\mathbf{j} + y\mathbf{k} \quad (\bar{2})$$

۱۶. فرض کنید $F = xzi - yzj + yk$. تحقیق کنید که $\nabla \cdot F = 0$ را طوری بیابید که $F = \nabla \times G$.

۱۷. $F = \nabla \times G$ را طوری بیابید که $F = (x \cos y)\mathbf{i} - (\sin y)\mathbf{j} + (\sin x)\mathbf{k}$.

۱۸. با استفاده از مسیرهای مختلف از $(0, 0, 0)$ تا (x, y, z) ، نشان دهید که تابع f تعریف شده در برهان قضیه ۷ برای "قسمت (دو) ایجاب می‌کند قسمت (سه) را" در $\frac{\partial f}{\partial x} = F_1$ و $\frac{\partial f}{\partial y} = F_2$ صدق می‌کند.

۱۹. فرض کنید F یک میدان برداری بر \mathbb{R}^3 باشد که با $F = -y\mathbf{i} + xz\mathbf{j}$ داده شده است. $(\bar{1})$ نشان دهید F دورانی است؛ یعنی، F غیردورانی نیست.

(ب) فرض کنید F میدان برداری سرعت یک سیال باشد. نشان دهید که اگر یک چوب‌پنبه در این سیال قرار دهیم، در صفحه‌ای به موازات صفحه xy و در مسیری مستدیر حول محور z می‌چرخد.

(پ) جهت چرخش چوب‌پنبه چیست؟

* ۲۰. فرض کنید G یک میدان برداری بر $\mathbb{R}^3 \setminus \{z\}$ باشد که با

$$G = \frac{-y}{x^2 + y^2} \mathbf{i} + \frac{x}{x^2 + y^2} \mathbf{j}$$

تعریف شده است .

(آ) نشان دهید G غیردورانی است .

(ب) نشان دهید ۱۹ (ب) برای G نیز برقرار است .

(پ) چطور ثابت کنیم که مسیرهای F و G یکی هستند (مستدیر حول محور z) ولی F دورانی است و G چنین نمی باشد؟ (راهنمایی . خاصیت دورانی بودن یک شرط موضعی است ؛ یعنی ، خاصیتی از سیال در همسایگی یک نقطه .)

* ۲۱ . فرض کنید $F = -(GM/r^3)$ میدان نیروی ثقلی تعریف شده بر $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ باشد .

(آ) نشان دهید که $\operatorname{div} F = 0$.

(ب) نشان دهید که به ازای هر میدان برداری C^1 مانند G بر $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ ، $F \neq \operatorname{curl} G$.

۴.۷ قضیه گاوس

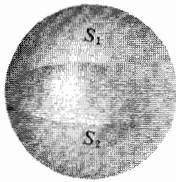
قضیه گاوس می گوید که شار یک میدان برداری از یک سطح بسته مساوی انتگرال دیورژانس میدان روی حجم محصور به سطح است . این نتیجه به موازات قضیه استوکس و گرین است از این باب که انتگرال روی یک شیء هندسی بسته (منحنی یا سطح) را به انتگرال روی ناحیه محصور (سطح یا حجم) ربط می دهد .

ابتدا از خواننده می خواهیم نواحی مختلفی در فضا را که در زمان توجه به انتگرال حجم معرفی شدند مرور نماید ؛ این نواحی در شکل ۳.۶.۵ مجسم شده اند . همانطور که این شکل نشان می دهد ، مرز یک ناحیه از نوع ۱ ، ۲ ، یا ۳ در \mathbb{R}^3 سطحی است که از چند (حداکثر شش ، حداقل دو) سطح تشکیل شده که آنها را می توان به صورت نمودار توابعی از \mathbb{R}^2 به \mathbb{R} توصیف کرد . این نوع سطح بسته نام دارد ؛ این سطح دارای مرز نیست . سطوح S_1, S_1, \dots, S_N که سطح بسته را می سازند وجوه آن نامیده می شوند .

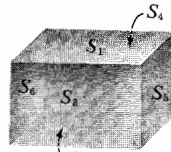
مثال ۱ . مکعب شکل ۱.۴.۷ ناحیه ای از نوع ۴ است (به یاد آورید که این یعنی از نوع ۱ ، ۲ ، و ۳ با هم) ، که شش مربع مرزش را تشکیل می دهند . کره مرز یک گوی توپر است ، که این نیز یک ناحیه از نوع ۴ می باشد .

سطوح بسته را می توان به دو راه جهت دار کرد . جهت رو به خارج که در آن قائم به سمت فضاست ، و جهت روبه داخل که در آن قائم به ناحیه کراندار اشاره دارد

(شکل ۲۰۴۰۷).



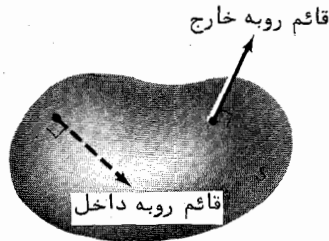
(ب)



(آ)

شکل ۱۰۴۰۷

نواحی از نوع ۴ (آ) و سطوح S_i (ب) مرزهای آنها را تشکیل می‌دهند



شکل ۲۰۴۰۷

دو جهت ممکن برای یک سطح بسته

فرض کنیم S یک سطح بسته جهتدار به یکی از این دو طریق بوده و F یک میدان برداری بر S باشد. در این صورت، همانطور که در بالا تعریف شد (ص ۴۸۹)،

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \sum_i \int_{S_i} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

اگر S جهت رویه خارج داشته باشد، انتگرال $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ شار کل F به خارج S را می‌سنجد. یعنی، اگر F را میدان سرعت سیالی بگیریم، $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ مقدار سیالی خواهد بود که ناحیه محدود به S را در واحد زمان ترک می‌کند. اگر به S جهت رویه داخل بدهیم، انتگرال $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ شار کل F به داخل S را خواهد سنجد.

راه معمول دیگر نوشتن این انتگرالهای سطح را به یاد می‌آوریم، راهی که جهت S را

صریحا " مشخص می‌کند . فرض کنیم جهت S با بردار یکه^۱ قائم $\mathbf{n}(x, y, z)$ در هر نقطه از S داده شده باشد . در این صورت ، انتگرال جهتدار زیر را داریم :

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS$$

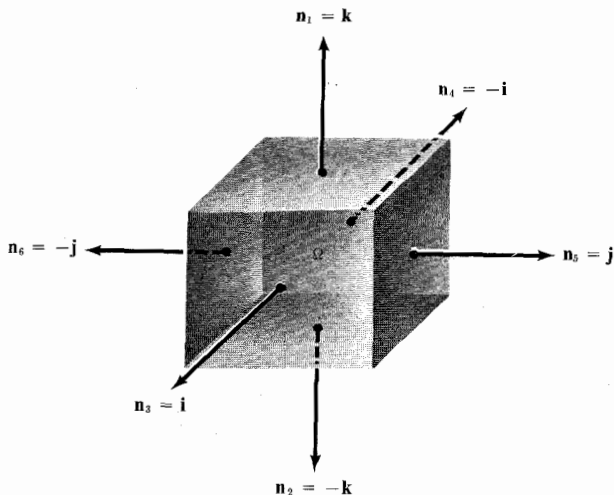
یعنی ، انتگرال مؤلفه^۲ قائم \mathbf{F} روی S . تا پایان این بخش ، اگر S سطح بسته‌ای دور ناحیه^۳ Ω باشد ، می‌پذیریم که $S = \partial\Omega$ جهت روبه‌خارج با قائم یکه^۴ $\mathbf{n}(x, y, z)$ در هر نقطه^۵ $(x, y, z) \in S$ دارد . به‌علاوه ، سطح با جهت مخالف (روبه‌داخل) را با $\partial\Omega_{op}$ نشان می‌دهیم . در این صورت ، جهت قائم یکه^۶ مربوط به این جهت $-\mathbf{n}$ خواهد بود . لذا ،

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_S (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS = - \int_S (\mathbf{F} \cdot (-\mathbf{n})) dS = - \int_{\partial\Omega_{op}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

مثال ۲ . مکعب یکه^۷ Ω داده شده با

$$0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1$$

یک ناحیه در فضا از نوع ۴ است (ر.ک . شکل ۳۰۴۰۷) .



شکل ۳۰۴۰۷

جهت روبه‌خارج روی مکعب

سطوح را به صورت زیر می نویسیم:

$$\begin{aligned} S_1: z = 1, & \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ S_2: z = 0, & \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq y \leq 1 \\ S_3: x = 1, & \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1 \\ S_4: x = 0, & \quad 0 \leq y \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1 \\ S_5: y = 1, & \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1 \\ S_6: y = 0, & \quad 0 \leq x \leq 1, \quad 0 \leq z \leq 1 \end{aligned}$$

در شکل ۳۰۴۰۷ می بینیم که

$$\mathbf{n}_1 = \mathbf{k} = -\mathbf{n}_2$$

$$\mathbf{n}_3 = \mathbf{i} = -\mathbf{n}_4$$

$$\mathbf{n}_5 = \mathbf{j} = -\mathbf{n}_6,$$

در نتیجه، به ازای میدان برداری پیوسته^۹ $\mathbf{F} = F_1\mathbf{i} + F_2\mathbf{j} + F_3\mathbf{k}$

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{S_1} F_3 \, dS - \int_{S_2} F_3 \, dS + \int_{S_3} F_1 \, dS \\ &\quad - \int_{S_4} F_1 \, dS + \int_{S_5} F_2 \, dS - \int_{S_6} F_2 \, dS \end{aligned}$$

حال به آخرین قضیه از سه قضیه^۹ مرکزی این فصل می رسیم. این قضیه انتگرالهای سطح را به انتگرالهای حجم مربوط می کند. این قضیه می گوید: هرگاه Ω ناحیه ای در \mathbb{R}^3 باشد، آنگاه شار میدان \mathbf{F} به خارج سطح بسته^{۱۰} $\partial\Omega$ مساوی انتگرال $\operatorname{div} \mathbf{F}$ روی Ω است. (برای تعبیر انتگرالهای سطح بر حسب شار، ر. ک. ص ۴۹۲.)

قضیه^۹ (قضیه^۹ دیورژانس گاوس). فرض کنیم Ω ناحیه ای از نوع ۴ در فضا باشد. سطح بسته^{۱۰} جهتدار اطراف Ω را با $\partial\Omega$ نشان می دهیم. فرض کنیم \mathbf{F} یک میدان برداری هموار بر Ω باشد. در این صورت،

$$\int_{\Omega} (\mathbf{V} \cdot \mathbf{F}) \, dV = \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$$

یا معادلاً "

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{F}) dV = \int_{\partial\Omega} (\mathbf{F} \cdot \mathbf{n}) dS$$

برهان . هرگاه $\mathbf{F} = P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}$ ، طبق تعريف، $\operatorname{div} \mathbf{F} = \partial P/\partial x + \partial Q/\partial y + \partial R/\partial z$ درنتيجه، مي توان (با استفاده از جمعي بودن انتگرال حجم) نوشت

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dV + \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dV + \int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dV$$

از آن سو، انتگرال سطح مورد نظر مساوي است با

$$\begin{aligned} \int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS &= \int_{\partial\Omega} (P\mathbf{i} + Q\mathbf{j} + R\mathbf{k}) \cdot \mathbf{n} dS \\ &= \int_{\partial\Omega} P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\partial\Omega} Q\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS + \int_{\partial\Omega} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS \end{aligned}$$

قضيه در صورت اثبات سه نامساوي

$$(1) \quad \int_{\partial\Omega} P\mathbf{i} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \frac{\partial P}{\partial x} dV$$

$$(2) \quad \int_{\partial\Omega} Q\mathbf{j} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \frac{\partial Q}{\partial y} dV$$

$$(3) \quad \int_{\partial\Omega} R\mathbf{k} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dV$$

نتيجه خواهد شد . ما فقط (۳) را ثابت مي كنيم . دو معادله ديگر را مي توان به طريق مشابه ثابت كرد .

چون Ω ناحيه اي از نوع ۱ (و نيز از نوع ۲ و ۳) است ، يك جفت تابع مانند

$$z = f_1(x, y), \quad z = f_2(x, y)$$

با فلامرو مشترك D كه ناحيه اي مقدماتي در صفحه xy است وجود دارند به طوري كه مجموعه تمام نقاط (x, y, z) صادق در

$$f_2(x, y) \leq z \leq f_1(x, y), \quad (x, y) \in D$$

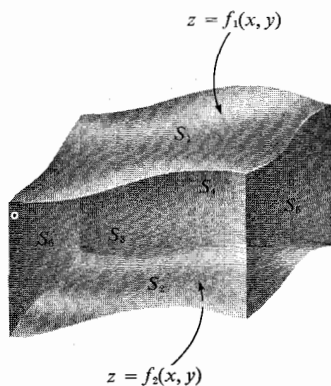
است . بنا بر فرمول (۴) از بخش ۶.۵، داريم

$$\int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dV = \int_D \left(\int_{z=f_2(x, y)}^{z=f_1(x, y)} \frac{\partial R}{\partial z} dz \right) dx dy$$

و درنتيجه،

$$(۴) \quad \int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dV = \int_D [R(x, y, f_1(x, y)) - R(x, y, f_2(x, y))] dx dy$$

مرز Ω سطح بسته‌ای است که بالای S_1 آن نمودار $z = f_1(x, y)$ و پایین آن S_2 نمودار $z = f_2(x, y)$ ، $(x, y) \in D$ ، می‌باشد. چهار طرف دیگر $\partial\Omega$ از سطوح S_3 ، S_4 ، S_5 و S_6 تشکیل شده‌اند که قائمهایشان همواره بر محور z عمودند. (مثلاً "ر. ک. شکل ۴.۴.۷". توجه کنید که بعضی از چهار طرف دیگر ممکن است غایب باشند؛ مثلاً، اگر Ω



شکل ۴.۴.۷

ناحیه Ω از نوع ۱ که در آن $\int_{\Omega} (\partial R / \partial z) dV = \int_{\partial\Omega} Rk \cdot n dS$ چهار طرف $\partial\Omega$ ، یعنی S_3, S_4, S_5, S_6 ، قائمهای عمود بر محور z دارند.

یک گوی توپر و $\partial\Omega$ یک کره باشد، ولی این وضع اثری بر استدلال نخواهد داشت. (تعریف،

$$\int_{\partial\Omega} Rk \cdot n dS = \int_{S_1} Rk \cdot n_1 dS + \int_{S_2} Rk \cdot n_2 dS + \sum_{i=3}^6 \int_{S_i} Rk \cdot n_i dS$$

چون قائم n_i در هر S_3, S_4, S_5 ، و S_6 بر k عمود است، در امتداد این وجوه داریم $k \cdot n = 0$ ؛ و در نتیجه، انتگرال به

$$\int_{\partial\Omega} Rk \cdot n dS = \int_{S_1} Rk \cdot n_1 dS + \int_{S_2} Rk \cdot n_2 dS$$

تحویل می شود. سطح S_2 با $z = f_2(x, y)$ تعریف می شود. در نتیجه،

$$\mathbf{n}_2 = \frac{\frac{\partial f_2}{\partial x} \mathbf{i} + \frac{\partial f_2}{\partial y} \mathbf{j} - \mathbf{k}}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

(چون S_2 قسمت پایینی Ω است، برای آنکه \mathbf{n}_2 به خارج اشاره کند باید مؤلفه \mathbf{k} منفی باشد؛ ر.ک. مثال ۲). لذا،

$$\mathbf{n}_2 \cdot \mathbf{k} = \frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

و

$$\int_{S_2} R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_2) dS = \int_D R(x, y, f_2(x, y)) \left(\frac{-1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + 1}} \right) \times$$

$$\left(\sqrt{\left(\frac{\partial f_2}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_2}{\partial y}\right)^2 + 1} \right) dA$$

$$(۶) \quad = - \int_D R(x, y, f_2(x, y)) dx dy$$

بین معادله از فرمول (۴) در بخش ۵.۶ نیز به دست می آید. به همین نحو، روی وجه بالایی S_1 داریم

$$\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_1 = \frac{1}{\sqrt{\left(\frac{\partial f_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f_1}{\partial y}\right)^2 + 1}}$$

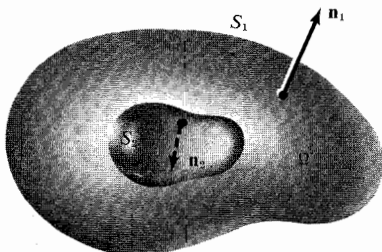
و لذا،

$$(۷) \quad \int_{S_1} R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}_1) dS = \int_D R(x, y, f_1(x, y)) dx dy$$

با گذاردن (۶) و (۷) در معادله (۵) و مقایسه با (۴)، خواهیم داشت

$$\int_{\Omega} \frac{\partial R}{\partial z} dV = \int_{\partial\Omega} R(\mathbf{k} \cdot \mathbf{n}) dS$$

بقیه^۱ تساویهای (۱) و (۲) را می‌توان به همین نحو ثابت و برهان را تمام کرد. خواننده باید توجه داشته باشد که برهان شبیه برهان قضیه^۲ گرین است. به روش تمرین ۸ در بخش ۱۰.۷ می‌توان قضیه^۳ گاوس را به هر ناحیه که قابل تجزیه به زیرناحیه‌هایی از نوع ۴ باشد تعمیم داد. این شامل تمام نواحی که در اینجا مورد توجه‌اند می‌شود. به عنوان مثال، ناحیه^۴ بین دو سطح بسته، که یکی داخل دیگری است، را در نظر می‌گیریم. سطح این ناحیه از دو قطعه^۵ جهتدار مثل شکل ۵.۴.۷ تشکیل شده است. ذیلاً^۶ در اثبات



شکل ۵.۴.۷

ناحیه^۷ کلیتری که قضیه^۸ گاوس در آن به کار می‌رود

قانون گاوس در قضیه^۹ ۱۰، قضیه^{۱۰} دیورژانس را بر چنین ناحیه اعمال می‌کنیم.

مثال ۳. $\mathbf{F} = 2x\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k}$ را در نظر بگیرید. فرض کنید S کره^{۱۱} $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ باشد. انتگرال $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$ را حساب کنید.

بنابر قضیه^{۱۲} گاوس،

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{F}) \, dV = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

که در آن Ω گوی محدود به کره می‌باشد. انتگرال سمت چپ مساوی است با

$$2 \int_{\Omega} (1 + y + z) \, dV = 2 \int_{\Omega} 1 \, dV + 2 \int_{\Omega} y \, dV + 2 \int_{\Omega} z \, dV$$

از تقارن نتیجه می‌شود که $\int_{\Omega} y \, dV = \int_{\Omega} z \, dV = 0$ (مثلاً^{۱۳}، ر.ک. تمرین ۱۱، بخش ۶.۵). لذا،

$$2 \int_{\Omega} (1 + y + z) dV = 2 \int_{\Omega} dV = \frac{8\pi}{3}$$

(زیرا گوی یکبه به حجم $4\pi/3$ است؛ ر.ک. مثال ۱، بخش ۶.۵). خواننده می‌تواند تحقیق کند که محاسبهٔ مستقیم $\int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$ پر زحمت می‌باشد.

مثال ۴. با استفاده از قضیهٔ دیورژانس، انتگرال

$$\int_{\partial W} (x^2 + y + z) dS$$

را در صورتی حساب کنید که W گوی توپر $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ باشد. برای اعمال قضیهٔ دیورژانس گاوس، باید میدانی برداری مانند

$$\mathbf{F} = F_1 \mathbf{i} + F_2 \mathbf{j} + F_3 \mathbf{k}$$

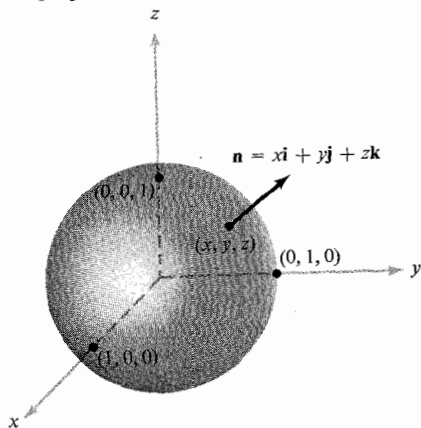
بر W یافت که

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = x^2 + y + z$$

در هر نقطهٔ $(x, y, z) \in \partial W$ قائم یکبهٔ روبه‌خارج \mathbf{n} به ∂W مساوی است یا

$$\mathbf{n} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

زیرا بر ∂W داریم $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ ، و بردار شعاعی $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$ به کرهٔ ∂W عمود است (شکل ۶.۴.۷). بنابراین، هرگاه \mathbf{F} میدان برداری مطلوب باشد، آنگاه



شکل ۶.۴.۷

\mathbf{n} قائم یکبه به ∂W ، یعنی مرکز گوی W ، است.

$$\mathbf{F} \cdot \mathbf{n} = F_1x + F_2y + F_3z$$

قرار می‌دهیم

$$F_1x = x^2, \quad F_2y = y, \quad F_3z = z$$

و با حل آن نسبت به F_1 ، F_2 ، و F_3 به دست می‌آوریم

$$\mathbf{F} = x\mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

از محاسبه $\operatorname{div} \mathbf{F}$ خواهیم داشت

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = 1 + 0 + 0 = 1$$

لذا، طبق قضیه دیورژانس گاوس،

$$\int_{\partial W} (x^2 + y + z) dS = \int_W dV = \text{حجم}(W) = \frac{4}{3}\pi$$

تعبیر فیزیکی دیورژانس این است که $\operatorname{div} \mathbf{F}(P)$ در نقطه P میزان خالص شار رویه خارج در P بر واحد حجم می‌باشد. این امر از قضیه گاوس و قضیه مقدار میانگین برای انتگرالها (و نیز از بحث اختیاری در بخش ۴.۳) نتیجه می‌شود: هرگاه Ω_ρ گویی در \mathbb{R}^3 به شعاع ρ و مرکز \mathbf{p} باشد، آنگاه نقطه‌ای مانند $Q \in \Omega_\rho$ وجود دارد به طوری که

$$\int_{\partial \Omega_\rho} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega_\rho} \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \operatorname{div} \mathbf{F}(Q) \quad (\text{حجم } \Omega_\rho)$$

و در نتیجه،

$$\operatorname{div} \mathbf{F}(P) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \operatorname{div} \mathbf{F}(Q) = \lim_{\rho \rightarrow 0} \frac{1}{V(\Omega_\rho)} \int_{\partial \Omega_\rho} \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} dS$$

این با شکل حدی کرل که در آخر بخش ۲.۷ داده شد تشابه دارد. لذا، اگر $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) > 0$ را منبع می‌گیریم، زیرا یک شارش رویه خارج خالص نزدیک P وجود دارد. اگر $\operatorname{div} \mathbf{F}(P) < 0$ یک چاله برای \mathbf{F} نامیده می‌شود.

میدان برداری C^1 ، \mathbf{F} تعریف شده بر \mathbb{R}^3 را فارغ از دیورژانس گوئیم اگر $\operatorname{div} \mathbf{F} = 0$. اگر \mathbf{F} فارغ از دیورژانس باشد، به ازای هر سطح بسته S خواهیم داشت $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$. عکس این مطلب را نیز می‌توان فوراً با استفاده از قضیه گاوس ثابت کرد: هرگاه به ازای جمیع سطوح بسته S ، $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = 0$ ، آنگاه \mathbf{F} فارغ از دیورژانس است. اگر \mathbf{F} فارغ از دیورژانس باشد، شار \mathbf{F} در امتداد هر سطح بسته S مساوی ۰ است. در نتیجه، اگر \mathbf{F} میدان

سرعت یک مایع باشد، مقدار خالص مایع خارج شده از یک ناحیه 0 می باشد. لذا، هر قدر مایع (در واحد زمان) به داخل ناحیه برود همان مقدار خارج خواهد شد. لذا، هر مایع با این خاصیت را تراکم ناپذیر می نامند. (این اصطلاح در تمرین ۱۸ بیشتر توجیه شده است.)

مثال ۵. انتگرال $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ را در صورتی حساب کنید که $\mathbf{F}(x, y, z) = xy^2\mathbf{i} + x^2y\mathbf{j} + y\mathbf{k}$ و S سطح استوانه $x^2 + y^2 = 1$ بوده، $-1 < z < 1$ ، و $x^2 + y^2 \leq 1$ وقتی $z = \pm 1$. مثال را تعبیر فیزیکی کنید.

این انتگرال را می توان مستقیماً "حساب کرد ولی، مثل حالات بی شمار دیگر، استفاده از قضیه دیورژانس آسانتر است.

اما S مرز ناحیه Ω است که با $-1 \leq z \leq 1$ ، $x^2 + y^2 \leq 1$ داده شده است. لذا، $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{F}) dV$ به علاوه،

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} (\operatorname{div} \mathbf{F}) dV &= \int_{\Omega} (x^2 + y^2) dx dy dz = \int_{-1}^1 \left(\int_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy \right) dz \\ &= 2 \int_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy \end{aligned}$$

پیش از محاسبه انتگرال مضاعف، ملاحظه می کنیم که $\int_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy > 0$ این بدان معنی است که $\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ ، یعنی شار خالص \mathbf{F} خارج از استوانه، مثبت است، که با $\operatorname{div} \mathbf{F} = x^2 + y^2 \geq 0$ داخل استوانه سازگار می باشد. انتگرال مضاعف را با رفتن به مختصات قطبی حساب می کنیم:

$$\begin{aligned} x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta, \quad 0 \leq r \leq 1, \quad 0 \leq \theta \leq 2\pi \\ \text{لذا، داریم } x^2 + y^2 = r^2 \text{ و } \partial(x, y)/\partial(r, \theta) = r \text{ در نتیجه،} \end{aligned}$$

$$\int_{x^2+y^2 \leq 1} (x^2 + y^2) dx dy = \int_0^{2\pi} \left(\int_0^1 r^3 dr \right) d\theta = \frac{1}{2}\pi$$

بنابراین، $\int_{\Omega} \operatorname{div} \mathbf{F} dV = \pi$

همانطور که در بالا گفتیم، قضیه دیورژانس گوس را می توان بر نواحی در فضا به کار برد که از نواحی از نوع ۴ کلیترند. برای پایان دادن به این بخش، از این مطلب

استفاده کرده نتیجه مهم زیر را به دست می آوریم .

قضیه ۱۰ (قانون گاوس) . فرض کنیم M یک ناحیه از نوع ۴ در \mathbb{R}^3 باشد . در این صورت ، اگر $(0, 0, 0) \notin \partial M$ ، خواهیم داشت

$$\int_{\partial M} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \begin{cases} 4\pi & ; (0, 0, 0) \in M \\ 0 & ; (0, 0, 0) \notin M \end{cases}$$

که در آن

$$\mathbf{r}(x, y, z) = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k}$$

و

$$r(x, y, z) = \|\mathbf{r}(x, y, z)\| = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$$

اختیاری

برهان . ابتدا فرض می کنیم $(0, 0, 0) \notin M$. در این صورت ، \mathbf{r}/r^3 یک میدان برداری C^1 بر M و ∂M است . در نتیجه ، طبق قضیه دیورژانس ،

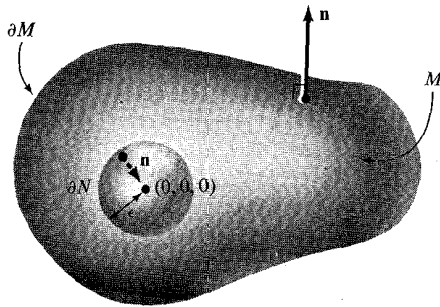
$$\int_{\partial M} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \int_M \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) dV$$

اما به آسانی می توان تحقیق کرد که به ازای $r \neq 0$ ، $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = 0$. (ر.ک. تمرین ۸ ، بخش ۵.۳) . لذا ،

$$\int_{\partial M} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = 0$$

حال فرض کنیم $(0, 0, 0) \in M$. دیگر نمی توان از روش فوق استفاده کرد ، زیرا \mathbf{r}/r^3 به خاطر انفراد در $\mathbf{r} = (0, 0, 0)$ ، بر M هموار نیست . چون $(0, 0, 0) \in M$ ، $\varepsilon > 0$ ی وجود دارد به طوری که گوی N به شعاع ε و مرکز $(0, 0, 0)$ "کاملاً" داخل M است . حال فرض کنیم Ω ناحیه بین M و N باشد . در این صورت ، Ω دارای مرز $\partial N \cup \partial M = S$ می باشد . اما جهت ∂M القا شده به وسیله قائم روبه خارج بر Ω قرینه جهت حاصل از N است (ر. ک. شکل ۷.۴.۷) . اما بر Ω داریم $\nabla \cdot (\mathbf{r}/r^3) = 0$. در نتیجه ، طبق قضیه دیورژانس (تعمیم یافته) ،

$$\int_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \int_{\Omega} \nabla \cdot \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right) = 0$$



شکل ۷.۴.۷

جهت روبه‌خارج القایی بر S

چون

$$\int_S \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \int_{\partial M} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS + \int_{\partial N} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS$$

که در آن \mathbf{n} قائم روبه‌خارج S است، خواهیم داشت

$$\int_{\partial M} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = - \int_{\partial N} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS$$

اما بر ∂N داریم $\mathbf{n} = -\mathbf{r}/r$ و $r = \varepsilon$ ، زیرا ∂N کره‌ای به شعاع ε است؛ در نتیجه،

$$- \int_{\partial N} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^3} dS = \int_{\partial N} \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon^4} dS = \frac{1}{\varepsilon^2} \int_{\partial N} dS$$

ولی $\int_{\partial N} dS = 4\pi\varepsilon^2$ ؛ یعنی، مساحت سطح کره به شعاع ε . این امر نتیجه را به ثبوت خواهد رسانید.

قانون گاوس از تعبیر فیزیکی زیر برخوردار است. پتانسیل ناشی از بار نقطه‌ای Q در

$(0, 0, 0)$ مساوی است با

$$\phi(x, y, z) = \frac{Q}{4\pi r} = \frac{Q}{4\pi\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}}$$

و میدان الکتریکی نظیر برابر است با

$$\mathbf{E} = -\nabla\phi = \frac{Q}{4\pi} \left(\frac{\mathbf{r}}{r^3} \right)$$

لذا، قضیهٔ ۰ (می‌گوید که شار الکتریکی کل $\int_{\partial M} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S}$ (یعنی، شار \mathbf{E} به خارج سطح بستهٔ ∂M) مساوی Q است اگر بار داخل M باشد و در غیر این صورت صفر می‌باشد. (تعمیم در تمرین ۰ (آمده است. توجه کنید که حتی اگر $(0, 0, 0) \notin M$ ، هنوز بر M ناصفر است.

در یک توزیع پیوستهٔ بار با چگالی ρ ، میدان \mathbf{E} با رابطهٔ

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho$$

به چگالی ρ مربوط می‌شود. لذا، طبق قضیهٔ گاوس،

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} \rho \, dV = Q$$

یا شار خارج شده از یک سطح مساوی کل بار داخل آن است.

تمرینات

۰.۱ فرض کنید S یک سطح بسته باشد. با استفاده از قضیهٔ گاوس، نشان دهید هرگاه \mathbf{F} یک میدان برداری C^2 باشد، آنگاه $\int_S (\mathbf{V} \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S} = 0$. (قس. تمرین ۸ از بخش

(۰.۲۰۷)

۰.۲ فرض کنید $\mathbf{F} = x^3\mathbf{i} + y^3\mathbf{j} + z^3\mathbf{k}$. انتگرال سطح \mathbf{F} روی کرهٔ یکه را حساب کنید.

۰.۳ انتگرال $\int_{\partial\Omega} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ را در صورتی حساب کنید که $\mathbf{F} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j} - z\mathbf{k}$ و Ω مکعب یکه (در

هشت یک اول) باشد. محاسبات را مستقیماً انجام داده و با استفاده از قضیهٔ

دیورژانس آن را امتحان کنید.

۰.۴ تمرین ۳ را به ازای

$$\mathbf{F} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k} \quad (\text{آ}) \quad \text{و}$$

$$\mathbf{F} = x^2\mathbf{i} + y^2\mathbf{j} + z^2\mathbf{k} \quad (\text{ب})$$

تکرار نمایید.

۵. فرض کنید $F = yi + zj + xzk$. انتگرال $\int_{\partial\Omega} F \cdot dS$ را به ازای هر یک از نواحی Ω حساب کنید.

$$(A) \quad x^2 + y^2 \leq z \leq 1$$

$$(B) \quad x \geq 0 \text{ و } x^2 + y^2 \leq z \leq 1$$

$$(C) \quad x \leq 0 \text{ و } x^2 + y^2 \leq z \leq 1$$

۶. تمرین ۵ را به ازای $F = (x - y)i + (y - z)j + (z - x)k$ تکرار کنید.

۷. فرض کنید S سطح ناحیه Ω باشد. نشان دهید که

$$\int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} \, dS = 3 \text{ برابر حجم } (\Omega)$$

این مطلب را به طور هندسی توضیح دهید. (راهنمایی. فرض کنید $(0, 0, 0) \in \Omega$ و مخروط مایل به رأس $(0, 0, 0)$ ، قاعده ΔS ، و ارتفاع $\|\mathbf{r}\|$ را در نظر بگیرید. حجم مساوی است با $\frac{1}{3}(\Delta S) \cdot (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n})$.)

۸. انتگرال $\int_S F \cdot \mathbf{n} \, dS$ را در صورتی حساب کنید که $F = 3xy^2i + 3x^2yzj + z^3k$ و S سطح کره $\frac{1}{2}$ باشد.

۹*. نشان دهید $\int_{\partial\Omega} (\mathbf{r} \cdot \mathbf{n} / r^2) \, dS = \int_{\Omega} (1/r^2) \, dx \, dy \, dz$ ، که در آن $\mathbf{r} = xi + yj + zk$.

۱۰. بردارهای $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_k \in \mathbb{R}^3$ و اعداد (" بارهای ") q_1, \dots, q_k داده شده‌اند. قرار

دهید $\phi(x, y, z) = \sum_{i=1}^k q_i / (4\pi \|\mathbf{r} - \mathbf{v}_i\|)$ ، که در آن $\mathbf{r} = (x, y, z)$. نشان دهید که به

ازای سطح بسته S و $\mathbf{E} = -\nabla\phi$ ،

$$\int_S \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = Q$$

که در آن Q بار کل داخل S می‌باشد. (قانون گاوس در قضیه ۱۰ را مفروض گرفته‌و

فرض کنید هیچیک از بارها بر S واقع نباشد.)

۱۱. اتحادهای گرین را ثابت کنید:

$$\int_{\partial\Omega} f \nabla g \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} [f \nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g] \, dV$$

$$\int_{\partial\Omega} (f \nabla g - g \nabla f) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\Omega} (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dV$$

۱۲. فرض کنید F در $\text{div } F = 0$ و $\text{curl } F = 0$ صدق نماید. نشان دهید می‌توان نوشت

$$F = \nabla f, \quad \text{که در آن } \nabla^2 f = 0$$

۱۳*. فرض کنید ρ تابع پیوسته‌ای بر \mathbb{R}^3 باشد به طوری که رابطه $\rho(\mathbf{q}) = 0$ جز به ازای \mathbf{q}

های واقع در ناحیه Ω برقرار باشد. همچنین، $\mathbf{q} \in \Omega$ را با $\mathbf{q} = (x, y, z)$ نشان دهید.

پتانسیل ρ با تابع زیر تعریف می‌شود:

$$\phi(\mathbf{p}) = \int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{q})}{4\pi\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|} dV(\mathbf{q})$$

که در آن $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|$ فاصله بین \mathbf{p} و \mathbf{q} می‌باشد.

(آ) با استفاده از روش قضیه ۱۰، نشان دهید به ازای نواحی W که قابل افراز به

$$\cdot \int_{\partial W} \nabla\phi \cdot \mathbf{n} dS = -\int_W \rho dV$$

(ب) نشان دهید ϕ در معادله پواسون

$$\nabla^2\phi = -\rho$$

صدق می‌کند (راهنمایی. از قسمت (آ) استفاده کنید).

(توجه کنید هرگاه ρ چگالی بار باشد، آنگاه انتگرال معرف ϕ را می‌توان مجموع

پتانسیل‌های ناشی از بارهای نقطه‌ای روی Ω در \mathbf{p} گرفت که طبق چگالی ρ توزیع

شده‌اند.)

۱۴. فرض کنید F بر سطح بسته S از ناحیه Ω مماس باشد. ثابت کنید

$$\int_{\Omega} (\operatorname{div} F) dV = 0$$

* ۱۵. با استفاده از قانون گاوس و تقارن، ثابت کنید میدان الکتریکی ناشی از بار Q که

روی سطح یک کره یکنواخت توزیع شده در خارج آن مساوی میدان الکتریکی ناشی از

بار نقطه‌ای Q است که در مرکز کره قرار دارد. میدان در داخل کره چیست؟

* ۱۶. تمرین ۱۵ را برحسب میدانهای ثقلی تنظیم کنید.

۱۷. نشان دهید چگونه از قانون گاوس می‌توان قسمت (ب) تمرین ۲۱ در بخش ۳.۷ ثابت کرد.

* ۱۸. (قضیه انتقال). فرض کنید $\phi(x, t)$ شارش میدان الکتریکی F بر \mathbb{R}^3 بوده (ر. ک.

بخش ۴.۳)، و $J(x, t)$ ژاکوبی نگاشت $\phi: \mathbf{x} \mapsto \phi(x, t)$ به ازای t ثابت باشد.

(آ) با استفاده از برهان قضیه ۳ در بخش ۴.۳، نشان دهید که

$$\frac{\partial}{\partial t} J(x, t) = [\operatorname{div} F(x)]J(x, t)$$

(ب) با استفاده از قضیه تغییر متغیر و قسمت (آ)، نشان دهید هرگاه $f(x, y, z, t)$

تابعی معلوم بوده و $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ ناحیه دلخواهی باشد، آنگاه

$$\frac{d}{dt} \iiint_{\Omega_t} f(x, y, z, t) dx dy dz = \iiint_{\Omega_t} \left(\frac{Df}{Dt} + f \operatorname{div} \mathbf{F} \right) dx dy dz \quad (\text{معادله انتقال})$$

که در آن $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$ و ناحیه‌ای است که با شارش حرکت می‌کند، و $Df/Dt = \partial f/\partial t +$

$$D_x f \cdot \mathbf{F} \quad (\text{تمرین ۷، بخش ۳.۳}).$$

(پ) با فرض $f = 1$ در (ب)، نشان دهید که احکام زیر باهم معادلند.

$$(\text{یک}) \quad \operatorname{div} \mathbf{F} = 0$$

(دو) حجم $(\Omega) =$ حجم (Ω_t) و

$$J(x, t) = 1 \quad (\text{سه})$$

*۱۹. فرض کنید ϕ, J, \mathbf{F}, f مثل تمرین ۱۸ باشد. شکل برداری قضیه انتقال را ثابت کنید؛ یعنی،

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} (f \mathbf{F}) dx dy dz = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial}{\partial t} (f \mathbf{F}) + \mathbf{F} \cdot \nabla (f \mathbf{F}) + (f \mathbf{F}) \operatorname{div} \mathbf{F} \right) dx dy dz$$

که در آن $\mathbf{F} \cdot \nabla (f \mathbf{F})$ ماتریس مشتق 3×3 ، $D(f \mathbf{F})$ است که بر بردار ستونی \mathbf{F} عمل می‌کند؛ در مختصات دکارتی، $\mathbf{F} \cdot \nabla \mathbf{G}$ برداری است که مؤلفه i م آن مساوی است با

$$\sum_{j=1}^3 F_j \frac{\partial G^i}{\partial x_j}$$

(x, y, z) را با (x_1, x_2, x_3) نشان داده‌ایم).

اختیاری

۵.۷ کاربرد در فیزیک و معادلات دیفرانسیل^۱

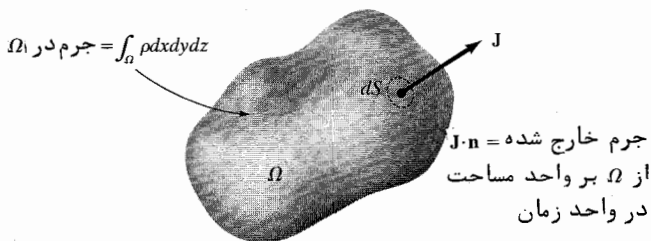
از مفاهیم این فصل می‌توان برای تنظیم نظریه‌های فیزیکی استفاده کرد. ابتدا معادله مهمی را مطرح می‌کنیم که به آن معادله بقا می‌گویند. این معادله در سیالات بقای جرم و در نظریه الکترومغناطیس بقای بار را بیان می‌کند. ما این معادله را در هدایت گرما و الکترومغناطیس به کار می‌گیریم.

۱. برای امثله دیگر، خواننده می‌تواند به اثر زیر مراجعه نماید:

فرض کنیم $\mathbf{V}(t, x, y, z)$ یک میدان برداری C^1 بر \mathbb{R}^3 به ازای هر t بوده و $\rho(t, x, y, z)$ یک تابع حقیقی C^1 باشد. منظور از معادله بقای جرم برای \mathbf{V} و ρ یعنی شرط

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \, dV = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

به ازای جمیع نواحی Ω در \mathbb{R}^3 برقرار است، که در آن $\mathbf{J} = \rho \mathbf{V}$. ر.ک. شکل ۱.۵.۷.



شکل ۱.۷.۵

میزان تغییر جرم در Ω مساوی میزان عبور جرم از $\partial\Omega$ است.

اگر ρ را چگالی جرم بگیریم (ρ می‌تواند چگالی بار نیز باشد)، یعنی جرم بر واحد حجم، و \mathbf{V} میدان سرعت یک مایع باشد، شرط فوق می‌گوید که میزان تغییر جرم کل در Ω مساوی میزان شارش جرم به داخل Ω می‌باشد. به یاد آورید که $\int_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS$ شار \mathbf{J} نامیده می‌شود. ما به نتیجه زیر نیاز خواهیم داشت.

قضیه ۱۱. به ازای \mathbf{V} و ρ تعریف شده بر \mathbb{R}^3 ، قانون بقای جرم برای \mathbf{V} و ρ با شرط زیر معادل است:

$$(1) \quad \operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

یعنی،

$$(1') \quad \rho \operatorname{div} \mathbf{V} + \mathbf{V} \cdot \nabla \rho + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

تذکره. در اینجا $\text{div } \mathbf{J}$ یعنی $\text{div } \mathbf{J}$ را به ازای t ثابت حساب می‌کنیم، و $\partial\rho/\partial t$ یعنی از ρ نسبت به t ضمن ثابت گرفتن x, y, z مشتق می‌گیریم.

برهان. ابتدا می‌بینیم که $\int_{\Omega} (\partial\rho/\partial t) dx dy dz = (d/dt) \int_{\Omega} \rho dx dy dz$ ، و بنابر قضیه دیورژانس

$$\int_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS = \int_{\Omega} \text{div } \mathbf{J} dV$$

لذا، بقای جرم معادل شرط زیر می‌باشد:

$$\int_{\Omega} \left(\text{div } \mathbf{J} + \frac{\partial\rho}{\partial t} \right) dx dy dz = 0$$

چون این برای جميع نواحی Ω برقرار است، این با $\text{div } \mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$ معادل می‌باشد.

معادله $\text{div } \mathbf{J} + \partial\rho/\partial t = 0$ پیوستگی نام دارد. این تنها معادله حاکم بر حرکت سیال نیست و حرکت سیال را معین نمی‌کند، بلکه یکی از معادلاتی است که باید برقرار باشد. بعدها در این بخش معادلات دیگری که برای تعیین شارش لازمند به دست خواهیم آورد. خواننده با استفاده از قضیه انتقال (تمرین ۱۸، بخش ۴.۷) می‌تواند معادل بودن معادله پیوستگی را با شرط

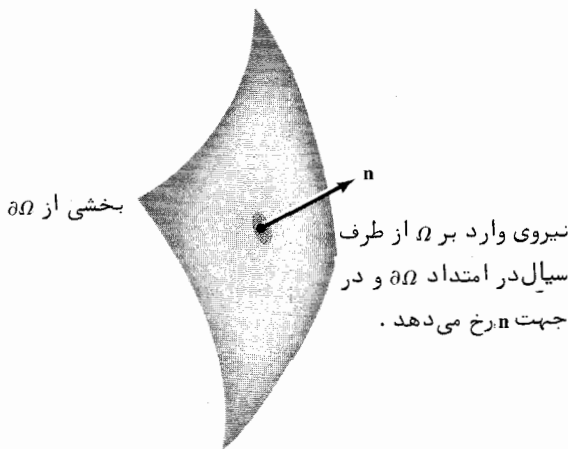
$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho dx dy dz = 0$$

تحقیق نماید، که می‌گوید جرم یک ناحیه متحرک با سیال نسبت به زمان ثابت است. (نماد Ω_t در همان تمرین توضیح داده شده است.)

مایعهای تحت تسلط معادله پیوستگی می‌توانند تراکم پذیر باشند. اگر $\text{div } \mathbf{V} = 0$ (حالت تراکم ناپذیر) و ρ ثابت باشد، معادله (۱) خود بخود نتیجه می‌شود. اما در حالت کلی، حتی در سیالات تراکم ناپذیر، معادله خود بخود برقرار نیست، زیرا ρ می‌تواند تابع (x, y, z) و t باشد. لذا، ممکن است $\text{div } \mathbf{V} = 0$ ، ولی $\text{div}(\rho\mathbf{V}) \neq 0$.

حال معادله اویلر برای یک سیال کامل را مطرح می‌کنیم. یک سیال غیرچسبنده همگن در نظر می‌گیریم که با میدان سرعت \mathbf{V} در فضا حرکت می‌کند. "کامل بودن" سیال یعنی

اگر Ω بخشی از سیال باشد، نیروهای فشار وارد بر مرز Ω بر آن عمودند. فرض کنیم نیروی وارد بر واحد مساحت $\partial\Omega$ مساوی $-pn$ باشد، که در آن $p(x, y, z, t)$ تابعی به نام فشار می‌باشد. ر.ک. شکل ۲.۵.۷. لذا،



شکل ۲.۵.۷

نیروی وارد بر واحد مساحت $\partial\Omega$ مساوی $-pn$ است.

نیروی کل وارد بر Ω مساوی است با

$$F_{\partial\Omega} = \text{نیرو} = - \int_{\partial\Omega} pn \, dS$$

این یک کمیت برداری است؛ مؤلفه i م $F_{\partial\Omega}$ انتگرال مؤلفه i م pn روی سطح $\partial\Omega$ است (لذا، این انتگرال سطح یک تابع حقیقی می‌باشد). اگر e بردار ثابتی در فضا باشد خواهیم داشت

$$F_{\partial\Omega} \cdot e = - \int_{\partial\Omega} pe \cdot n \, dS$$

که انتگرال یک اسکالر روی $\partial\Omega$ می‌باشد.

توجه کنید که، بنابر قضیه دیورژانس و اتحاد ۸، ص ۲۳۷،

$$\begin{aligned} \mathbf{e} \cdot \mathbf{F}_{\partial\Omega} &= - \int_{\Omega} \operatorname{div}(p\mathbf{e}) \, dx \, dy \, dz \\ &= - \int_{\Omega} (\operatorname{grad} p) \cdot \mathbf{e} \, dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

در نتیجه ،

$$\mathbf{F}_{\partial\Omega} = - \int_{\Omega} \nabla p \, dx \, dy \, dz$$

حال قانون دوم نیوتن را بر ناحیه^۲ متحرک Ω_t اعمال می‌کنیم . در اینجا $\Omega_t = \phi_t(\Omega)$ ، که در آن $\phi_t(\mathbf{x}) = \phi(\mathbf{x}, t)$ شارش \mathbf{V} می‌باشد . میزان تغییر گشتاور Ω_t مساوی نیروی وارد بر آن است :

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho \mathbf{V} \, dx \, dy \, dz = \mathbf{F}_{t\Omega_t} = - \int_{\Omega_t} \nabla p \, dx \, dy \, dz$$

با اعمال شکل برداری قضیه^۳ انتقال برطرف چپ (تمرین ۱۹ ، بخش ۴۰۷) ، به دست می‌آوریم

$$\int_{\Omega_t} \left\{ \frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) + \mathbf{V} \cdot \nabla (\rho \mathbf{V}) + \rho \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{V} \right\} dx \, dy \, dz = - \int_{\Omega_t} \nabla p \, dx \, dy \, dz .$$

چون Ω_t دلخواه است ، این با

$$\frac{\partial}{\partial t} (\rho \mathbf{V}) + \mathbf{V} \cdot \nabla (\rho \mathbf{V}) + \rho \mathbf{V} \operatorname{div} \mathbf{V} = - \nabla p$$

معادل می‌باشد . با استفاده از معادله^۴ پیوستگی (۱) ساده می‌کنیم ، خواهیم داشت

$$(۲) \quad \rho \left(\frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{V} \right) = - \nabla p$$

این معادله^۵ اوپلر برای یک سیال کامل است . در سیالات تراکم پذیر ، p یک تابع معلوم از ρ است (مثلاً ، در بسیاری از گازها ، $p = A \rho^\gamma$ ، که در آن A و γ ثابت‌اند) . از آن سو ، اگر سیال تراکم ناپذیر باشد ، p از شرط $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$ تعیین خواهد شد . در این صورت ، معادلات (۱) و (۲) کاملاً " حرکت سیال را در کنترل خود دارند . (یک مثال که جوابهای مختلط (۱) و (۲) را نشان می‌دهد در آخر کتاب آمده است .)

یادداشت تاریخی

معادلات حرکت یک سیال اول بار توسط لئونارد اویلر در ۱۷۵۵، در مقاله‌ای به نام "اصول کلی حرکت سیالات"، به دست آمدند. اویلر کارهایی اساسی در مکانیک و ریاضیات محض دارد؛ او در واقع مبحث مکانیک تحلیلی (در مقابل روشهای هندسی به کار رفته توسط نیوتن) را گشود. وی کاشف معادلات جسم صلب (مانند یک ماهواره در حال سقوط) بوده و بسیاری از معادلات مکانیک را به صورت اصول مینیمم تنظیم کرده است. اویلر اولین کتاب جامع حساب دیفرانسیل و انتگرال را نوشت و تقریباً "در تمام شاخه‌های ریاضی دست داشت. وی پس از آنکه کاملاً "کور شد چندین کتاب و صدها مقاله تحقیقی نوشت، و در زمان مرگ در ۱۷۸۳ روی مقاله جدیدی در مکانیک سیالات کار می‌کرد. معادلات اویلر در سیالات مآلاً "توسط ناویه^۱ و استوکس تعدیل شدند تا اثرات چسبندگی را دربرگیرند؛ معادلات ناویه - استوکس تقریباً "در هر کتاب درسی مکانیک سیالات توصیف شده‌اند. البته، استوکس نیز بانی قضیه استوکس است که یکی از نتایج اساسی در این کتاب می‌باشد.

حال به معادله گرما رومی آوریم، که یکی از مهمترین معادلات ریاضی کاربردی است. این معادله انگیزه اصلی معادلات دیفرانسیل جزئی بوده و خواهد بود.

بحث را به طور شهودی دنبال می‌کنیم. هرگاه $T(t, x, y, z)$ (یک تابع C^2) دمای یک جسم در لحظه t باشد، آنگاه ∇T گرادیان دما بوده و گرما بامیدان برداری $-\nabla T = \mathbf{F}$ "شارش می‌یابد". توجه کنید که ∇T در جهت افزایش T است (فصل ۳). چون گرما از گرمی به سردی شارش دارد، علامت منها گذارده‌ایم. چگالی انرژی، یعنی انرژی بر واحد حجم، مساوی $c\rho_0 T$ است، که در آن c ثابت (گرمای مشخص) بوده و ρ_0 چگالی جرم است که ثابت گرفته شده است. (این احکام را از فیزیک مقدماتی می‌پذیریم.) بردار شار انرژی عبارت است از $\mathbf{J} = \kappa \mathbf{F}$ ، که در آن κ ثابتی به نام ضریب هدایت می‌باشد. می‌خواهیم انرژی حفظ شود. این به‌طور صوری یعنی \mathbf{J} و $\rho = c\rho_0 T$ باید از قانون بقای جرم تبعیت کنند که در آن ρ نقش "جرم" را دارد؛ یعنی،

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega} \rho \, dV = - \int_{\partial\Omega} \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

بنابر قضیه ۱۱، این حکم معادل است با

$$\operatorname{div} \mathbf{J} + \frac{\partial \rho}{\partial t} = 0$$

اما $\nabla^2 T = \partial^2 T / \partial x^2 + \partial^2 T / \partial y^2 + \partial^2 T / \partial z^2$ (به یاد آورید که $\operatorname{div} \mathbf{J} = \operatorname{div}(-\kappa \nabla T) = -\kappa \nabla^2 T$ و ∇^2 عملگر لاپلاس می باشد.) با ادامه کار، خواهیم داشت $\partial \rho / \partial t = \partial(c\rho_0 T) / \partial t = c\rho_0 (\partial T / \partial t)$ لذا، معادله (۱) در این حالت به صورت زیر درمی آید:

$$(۳) \quad \frac{\partial T}{\partial t} = \frac{\kappa}{c\rho_0} \nabla^2 T = k \nabla^2 T$$

که در آن $k = \kappa / c\rho_0$ ضریب پخش نام دارد. معادله (۳) معادله مهم گرما می باشد. همانطور که معادلات (۱) و (۲) بر شارش یک سیال ایده آل حاکمند، معادله (۳) بر هدایت گرما به معنی زیر تسلط دارد. هرگاه $T(0, x, y, z)$ توزیع دمای اولیه ای باشد، آنگاه $T(t, x, y, z)$ منحصر به فردی وجود دارد که در معادله (۳) صدق می کند. به عبارت دیگر، شرط اولیه (در $t = 0$) نتیجه را به ازای $t > 0$ به ما می دهد. توجه کنید که هرگاه T با زمان تغییر نکند (حالت پایدار)، آنگاه باید داشته باشیم $\nabla^2 T = 0$ (معادله لاپلاس).

حال معادلات ماکسول را مطرح می کنیم که بر میدانهای الکترومغناطیس حکومت می کنند. شکل این معادلات به واحدهای فیزیکی به کار رفته بستگی دارد، و با تغییر واحدها عاملی چون 4π ، سرعت نور، و غیره ظاهر می شود. ما دستگاهی اختیار می کنیم که معادلات ماکسول ساده ترین وجه را داشته باشند.

فرض کنیم $\mathbf{E}(t, x, y, z)$ و $\mathbf{H}(t, x, y, z)$ توابع C^1 از (t, x, y, z) بوده و به ازای هر t میدان برداری باشند. این توابع (طبق تعریف) در صورتی در معادلات ماکسول با چگالی بار $\rho(t, x, y, z)$ و چگالی جریان $\mathbf{J}(t, x, y, z)$ صدق می کنند که روابط زیر برقرار باشند:

$$(۴) \quad \nabla \cdot \mathbf{E} = \rho \quad (\text{قانون گاوس})$$

$$(۵) \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0 \quad (\text{عدم وجود منبع مغناطیسی})$$

$$(۶) \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \mathbf{0} \quad (\text{قانون فارادی})$$

$$(۷) \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \mathbf{J} \quad (\text{قانون آمپر}^1)$$

از اینها، قوانین (۴) و (۶) قبلاً در بخشهای ۴.۷ و ۲.۷ به شکل انتگرال مورد بحث قرار گرفتند؛ از نظر تاریخی، این قوانین به صورت قوانین فیزیکی به این شکل دیده شده‌اند. در مثال ۱۲، بخش ۲.۶، قانون آمپر درحالتی خاص ذکر شد.

در فیزیک \mathbf{E} میدان الکتریکی و \mathbf{H} میدان مغناطیسی تعبیر می‌شود. با گذشت زمان t ، این میدانها با بارها و جریانهایی که دارند طبق معادلات فوق برهم اثر می‌کنند. مثلاً، انتشار امواج الکترومغناطیس درخلاء تحت اثر این معادلات به‌ازای $\mathbf{J} = \mathbf{0}$ و $\rho = 0$ می‌باشند. چون $\nabla \cdot \mathbf{H} = 0$ ، می‌توان قضیه ۸ از بخش ۳.۷ را به کار برده نتیجه گرفت که به‌ازای میدان برداری \mathbf{A} ، $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ (فرض کرده‌ایم \mathbf{H} بر تمام \mathbb{R}^3 در هر لحظه t تعریف شده است). میدان برداری \mathbf{A} منحصر به فرد نیست و می‌توان از $\mathbf{A}' = \mathbf{A} + \nabla f$ به‌ازای هر تابع $f(t, x, y, z)$ نیز استفاده کرد، زیرا $\nabla \times \nabla f = \mathbf{0}$. (این آزادی در انتخاب \mathbf{A} را درجه آزادی می‌نامند) به‌ازای هر چنین \mathbf{A} ای، طبق (۶) داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{0} &= \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial t} = \nabla \times \mathbf{E} + \frac{\partial}{\partial t} \nabla \times \mathbf{A} \\ &= \nabla \times \mathbf{E} + \nabla \times \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = \nabla \times \left(\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) \end{aligned}$$

از اینرو، طبق قضیه ۷ در بخش ۳.۷، تابعی حقیقی مانند ϕ بر \mathbb{R}^3 هست به طوری که

$$\mathbf{E} + \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} = -\nabla \phi$$

با گذاردن این معادله و $\mathbf{H} = \nabla \times \mathbf{A}$ در معادله (۷) و استفاده از اتحاد زیر در جدول

۱.۳

$$\nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) = \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A}$$

به دست می‌آوریم

$$\mathbf{J} = \nabla \times \mathbf{H} - \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial t} = \nabla \times (\nabla \times \mathbf{A}) - \frac{\partial}{\partial t} \left(-\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \nabla \phi \right)$$

1. Ampère.

$$= \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) - \nabla^2 \mathbf{A} + \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \phi)$$

لذا،

$$\nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mathbf{J} + \nabla(\nabla \cdot \mathbf{A}) + \frac{\partial}{\partial t}(\nabla \phi)$$

یعنی،

$$(۸) \quad \nabla^2 \mathbf{A} - \frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\mathbf{J} + \nabla\left(\nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t}\right)$$

مجدداً، با استفاده از معادله $\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t = -\nabla \phi$ ، به دست می‌آوریم

$$\rho = \nabla \cdot \mathbf{E} = \nabla \cdot \left(-\nabla \phi - \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} \right) = -\nabla^2 \phi - \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t}$$

یعنی،

$$(۹) \quad \nabla^2 \phi = -\rho - \frac{\partial(\nabla \cdot \mathbf{A})}{\partial t}$$

حال از آزادی انتخاب \mathbf{A} بهره می‌گیریم. " شرط "

$$(۱۰) \quad \nabla \cdot \mathbf{A} + \frac{\partial \phi}{\partial t} = 0$$

را اعمال می‌کنیم. باید از انجام این کار مطمئن باشیم. فرض کنیم \mathbf{A}_0 و ϕ_0 ی نظیر آن داده شده باشد. آیا می‌توان $\mathbf{A} = \mathbf{A}_0 + \nabla f$ جدید و سپس ϕ ی جدیدی اختیار کرد که $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial \phi / \partial t = 0$ ؟ با این \mathbf{A} ی جدید، ϕ ی جدید $\phi_0 - \partial f / \partial t$ است؛ اثبات این امر را به صورت تمرین می‌گذاریم. در این صورت، شرط (۱۰) بر f به شکل زیر درمی‌آید:

$$0 = \nabla \cdot (\mathbf{A}_0 + \nabla f) + \frac{\partial(\phi_0 - \partial f / \partial t)}{\partial t} = \nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \nabla^2 f + \frac{\partial \phi_0}{\partial t} - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$$

یا

$$(۱۱) \quad \nabla^2 f - \frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = -\left(\nabla \cdot \mathbf{A}_0 + \frac{\partial \phi_0}{\partial t}\right)$$

لذا، برای آنکه بتوان \mathbf{A} و ϕ ای صادق در $\nabla \cdot \mathbf{A} + \partial \phi / \partial t = 0$ انتخاب کرد، باید

بتوان معادله (۱۱) را نسبت به f حل نمود. در واقع، این کار تحت شرایطی کلی امکان پذیر است، اگرچه ما آن را در اینجا ثابت نخواهیم کرد. معادله (۱۱) معادله موج غیرهمگن نام دارد.

هرگاه بپذیریم که A و ϕ صادق در $\nabla \cdot A + \partial\phi/\partial t = 0$ قابل انتخابند، آنگاه معادلات (۸) و (۹) نسبت به A و ϕ خواهند شد.

$$(۸') \quad \nabla^2 A - \frac{\partial^2 A}{\partial t^2} = -J$$

$$(۹') \quad \nabla^2 \phi - \frac{\partial^2 \phi}{\partial t^2} = -\rho$$

معادله (۹') از (۹) با گذاردن $-\partial\phi/\partial t$ به جای $\nabla \cdot A$ به دست می آید. لذا، معادله موج مجدداً ظاهر می شود.

به عکس، هرگاه A و ϕ در معادلات $\nabla^2 \phi - \partial^2 \phi/\partial t^2 = -\rho$ و $\nabla \cdot A + \partial\phi/\partial t = 0$ صدق کنند، آنگاه $\nabla^2 A - \partial^2 A/\partial t^2 = -J$ و $H = \nabla \times A$ و $E = -\nabla\phi - \partial A/\partial t$ معادلات ماکسول صدق می نمایند. لذا، این روند معادلات ماکسول را به بررسی معادله موج تحویل خواهد کرد.^{۱)}

این جای خوشوقتی است، زیرا جوابهای معادله موج کاملاً "بررسی شده اند" (روش حل آنها در اغلب درسهای معادلات دیفرانسیل آموخته می شود). برای نشان دادن ماهیت موجی جوابها، مثلاً "توجه کنید که به ازای هر تابع f ،

$$\phi(t, x, y, z) = f(x - t)$$

جواب معادله موج $(\partial^2 \phi/\partial t^2) - \nabla^2 \phi = 0$ است. این جواب نمودار f را همچون موج انتشار می دهد؛ لذا، می توان حدس زد که جوابهای معادلات ماکسول ماهیت موجی دارند. این از نظر تاریخی کشف بزرگی از ماکسول بود، و بزودی به کشف امواج رادیویی توسط هرتز

۱. این روند صورتهای مختلفی دارد. برای جزئیات بیشتر، مثلاً "ریگ".

G. F. D. Duff and D. Naylor, *Differential Equations of Applied Mathematics*, Wiley, New York, 1966.

یا کتبی راجع به نظریه الکترومغناطیس نظیر

J. D. Jackson, *Classical Electrodynamics*, Wiley, New York, 1962.

منجر شد .

حال به اختصار نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان از آنالیز برداری برای حل معادلات دیفرانسیل به "روش نظریه پتانسیل" یا "روش تابع گرین" استفاده کرد. طرز کار کاملاً غیرصوری است؛ خواننده برای اطلاع بیشتر می‌تواند به مراجع ذکر شده در پانویس قبل مراجعه نماید .

فرض کنید بخواهیم معادله پواسون $\nabla^2 u = \rho$ را نسبت به $u(x, y, z)$ حل کنیم ، که در آن $\rho(x, y, z)$ تابع معلومی می‌باشد (اگر $\mathbf{E} = \nabla u$ ، این معادله از قانون گاوس ناشی می‌شود) .

تابع $G(x, y)$ با خواص

$$(12) \quad \nabla^2 G(x, y) = \delta(x - y) \quad \text{و} \quad G(x, y) = G(y, x)$$

(در این عبارت y ثابت است) ، یعنی جواب معادله دیفرانسیل با ρ به جای δ ، تابع گرین برای این معادله دیفرانسیل نام دارد . در اینجا $\delta(x - y)$ تابع دلتای دیراک است که به صورت زیر "تعریف می‌شود" ^۱:

$$(یک) \quad \text{به ازای } x \neq y, \quad \delta(x - y) = 0$$

$$(دو) \quad \int_{\mathbb{R}^3} \delta(x - y) dy = 1$$

این تابع خاصیت عملیاتی زیر را دارد که به‌طور صوری از (یک) و (دو) نتیجه می‌شود:

به ازای هر تابع پیوسته $f(x)$ ،

$$(13) \quad \int_{\mathbb{R}^3} f(y) \delta(x - y) dy = f(x)$$

این خاصیت را گاهی خاصیت تفکیک δ می‌نامند .

قضیه ۱۲ . هرگاه $G(x, y)$ در معادله دیفرانسیل $\nabla^2 u = \rho$ به جای $\delta(x - y)$ صدق کند ، آنگاه

$$(14) \quad u(x) = \int_{\mathbb{R}^3} G(x, y) \rho(y) dy$$

۱. این تعریف دقیق نیست. معیناً ، در اینجا کافی است δ یک عبارت علامتی با خاصیت عملیاتی (۱۳) فرض شود. برای تعریف دقیقتر δ ، ر.ک. مراجع در پانویس قبل .

جوابی از $\nabla^2 u = \rho$ می‌باشد.

برهان. برای مشاهده این امر، توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}\nabla^2 \int_{\mathbb{R}^3} G(x, y) \rho(y) dy &= \int_{\mathbb{R}^3} (\nabla^2 G(x, y)) \rho(y) dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^3} \delta(x - y) \rho(y) dy \quad \text{بنابر (۱۲)} \\ &= \rho(x) \quad \text{بنابر (۱۳)}\end{aligned}$$

"تابع" $\rho(x) = \delta(x)$ نمایش بار یک‌ه مت مرکز در یک نقطه است (ر. ک. شرایط یک) و (دو) فوق). لذا، $G(x, y)$ نمایش پتانسیل x ناشی از بار واقع در y است. حکم می‌کنیم که معادله (۱۲) به ازای انتخاب

$$(۱۵) \quad G(x, y) = -\frac{1}{4\pi\|x - y\|}$$

برقرار است. واضح است که $G(x, y) = G(y, x)$. برای تحقیق در قسمت دوم (۱۲)، باید ثابت کنیم $\nabla^2 G(x, y)$ از دو خاصیت صوری تابع δ بهره‌مند است:

(یک) به ازای $x \neq y$ ، $\nabla^2 G(x, y) = 0$ ؛ و

$$(دو) \quad \int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 G(x, y) dy = 1$$

خاصیت (یک) برقرار است، زیرا گرادینان G مساوی است با

$$\nabla G(x, y) = \frac{\mathbf{r}}{4\pi r^3}$$

که در آن $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ بردار از \mathbf{y} به \mathbf{x} بوده و $r = \|\mathbf{r}\|$ (ر. ک. تمرین ۸، بخش ۵.۳). در نتیجه، به ازای $r \neq 0$ ، $\nabla \cdot \nabla G(x, y) = 0$ (مثل تمرینی که فوقاً ذکر شد). مورد (دو)، فرض کنیم B گویی به مرکز x باشد؛ بنابر (یک)،

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla^2 G(x, y) dy = \int_B \nabla^2 G(x, y) dy$$

این، به نوبه خود، بنابر قضیه گاوس، مساوی است با

$$\int_{\partial B} \nabla G(x, y) \cdot \mathbf{n} dS$$

لذا، طبق قضیه ۱۰،

$$\int_{\partial B} \nabla G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \cdot \mathbf{n} \, dS = \int_{\partial B} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{4\pi r^3} \, dS = 1$$

که قسمت (دو) را ثابت می‌کند.

لذا، جواب $\nabla^2 u = \rho$ طبق قضیه ۱۲ مساوی است با

$$(16) \quad u(\mathbf{x}) = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{-\rho(\mathbf{y})}{4\pi \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \, dy$$

در بعد دو، به همین نحو می‌توان نشان داد که

$$(17) \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{2\pi} \log \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$$

در نتیجه، جواب $\nabla^2 u = \rho$ مساوی است با

$$(18) \quad u(\mathbf{x}) = \frac{1}{2\pi} \int_{\mathbb{R}^2} \rho(\mathbf{y}) \log \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| \, dy$$

حال، با استفاده از توابع گرین، به حل معادله پواسون در یک ناحیه V کراندار یا شرایط مرزی داده شده می‌پردازیم. برای این کار، به اتحادهای اول و دوم گرین نیاز داریم، که از قضیه دیورژانس می‌توان آنها را به دست آورد. با اتحاد

$$\int_V \nabla \cdot \mathbf{F} \, dV = \int_S \mathbf{F} \cdot \mathbf{n} \, dS$$

شروع می‌کنیم، که در آن V ناحیه‌ای در فضا است، S مرز آن است، و \mathbf{n} قائم بیکه روبه‌خارج در هر نقطه از S می‌باشد. از تعویض \mathbf{F} با $f \nabla g$ ، که در آن f و g توابعی اسکالرند، به دست می‌آوریم

$$(19) \quad \int_V \nabla f \cdot \nabla g \, dV + \int_V f \nabla^2 g \, dV = \int_S f \frac{\partial g}{\partial n} \, dS$$

که در آن $\partial g / \partial n = \nabla g \cdot \mathbf{n}$. این نامساوی اول گرین است. اگر فقط f و g را با هم عوض کرده، و نتیجه را از معادله فوق کم کنیم، اتحاد دوم گرین به دست می‌آید:

$$(20) \quad \int_V (f \nabla^2 g - g \nabla^2 f) \, dV = \int_S \left(f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n} \right) \, dS$$

این اتحادی است که به کار خواهیم برد .
معادله پواسون

$$\nabla^2 u = \rho$$

را در ناحیه‌ای چون V در نظر گرفته ، و معادلات نظیر برای تابع گرین را مورد توجه قرار می‌دهیم :

$$\nabla^2 G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) \quad \text{و} \quad G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$$

با گذاردن u و G در (۲۰) ، به دست می‌آوریم

$$\int_V (u \nabla^2 G - G \nabla^2 u) dV = \int_S \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

اگر متغیر انتگرالگیری را \mathbf{y} گرفته واز $G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = G(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ استفاده کنیم ، رابطه فوق به صورت زیر درمی‌آید :

$$\int_V [u(\mathbf{y})\delta(\mathbf{x} - \mathbf{y}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rho(\mathbf{y})] d\mathbf{y} = \int_S \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

یعنی ،

$$(۲۱) \quad u(\mathbf{x}) = \int_V G(\mathbf{x}, \mathbf{y})\rho(\mathbf{y}) d\mathbf{y} + \int_S \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

توجه کنید که این رابطه در یک ناحیه بی‌کران با نتیجه قبلی ما (۱۴) به ازای تمام فضا یکی می‌شود . معادله (۲۱) به ما کمک می‌کند که ، با تلفیق شرایطی که u باید بر S داشته باشد ، در یک ناحیه کراندار که $\rho = 0$ نسبت به u حل کنید .

اگر $\rho = 0$ ، معادله (۲۱) به صورت

$$u = \int_S \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

یا به‌طور کامل

$$(۲۲) \quad u(\mathbf{x}) = \int_S \left[u(\mathbf{y}) \frac{\partial G}{\partial n}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) - G(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \frac{\partial u}{\partial n}(\mathbf{y}) \right] dS(\mathbf{y})$$

درمی‌آید ، که در آن u در هر دو طرف معادله ظاهر شده است . نکته مهم در محاسبه این انتگرال آن است که فقط رفتار u بر S مورد نیاز می‌باشد . معمولاً ، " u بر مرز (مسئله

دیریکله) یا $\partial u / \partial n$ بر مرز (مسئله نویمان^۱) داده می‌شود. اگر u بر مرز معلوم باشد، می‌خواهیم $G \partial u / \partial n$ را روی مرز صفر کرده بدین ترتیب انتگرال را محاسبه نماییم. لذا، اگر u بر S داده شده باشد، باید G را طوری بیابیم که $G(x, y)$ به ازای y روی S صفر شود. این تابع گرین دیریکله برای ناحیه V نام دارد. به عکس، اگر $\partial u / \partial n$ بر S داده شده باشد، باید G را طوری بیابیم که $\partial G / \partial n$ بر S صفر شود. این تابع گرین نویمان می‌باشد.

لذا، تابع گرین دیریکله $G(x, y)$ به ازای x و y در حجم V تعریف شده و در سه شرط زیر صدق می‌کند:

$$G(x, y) = G(y, x) \quad (\bar{A})$$

$$\nabla^2 G(x, y) = \delta(x - y) \quad (\bar{B})$$

(پ) وقتی y بر S ، یعنی مرز ناحیه V ، قرار داشته باشد، $G(x, y) = 0$ (توجه کنید که، بنابر (\bar{A}))، می‌توان در (\bar{B}) و (\bar{B}) را بدون تغییر شرط باهم عوض کرد).

شاید تعجب‌آور باشد که شرط (\bar{A}) در واقع نتیجه‌ای از (\bar{B}) و (\bar{C}) است مشروط بر اینکه

(\bar{B}) و (\bar{C}) پس از تعویض x و y نیز برقرار بمانند.

برای مشاهده این امر، y را ثابت گرفته و از (\bar{C}) به ازای $f(x) = G(x, y)$ و

$g(x) = G(y, x)$ استفاده می‌کنیم. بنابر (\bar{B}) $\nabla^2 f(x) = \delta(x - y)$ و $\nabla^2 g(x) = \delta(x - y)$ ،

و بنابر (\bar{C}) ، f و g بر S صفر می‌شود. لذا، (\bar{C}) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_V f(x) \delta(x - y) - g(x) \delta(x - y) dV = 0$$

یا

$$f(x) - g(x) = 0.$$

بنابراین، $G(x, y) = G(y, x)$. این یعنی در مثالها لازم نیست شرط (\bar{A}) امتحان شود.

(این نتیجه را گاهی اصل تقابل می‌نامند.)

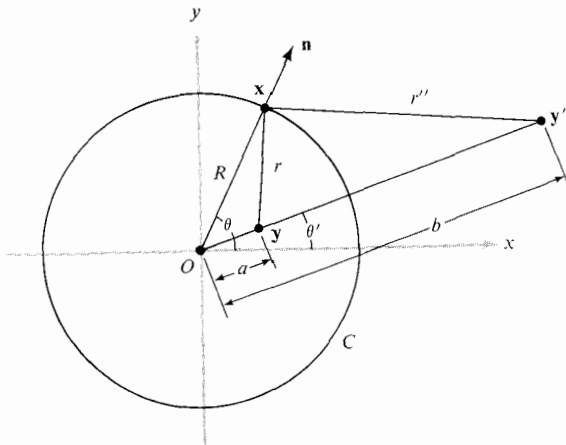
لذا، یک مسئله دیریکله یا نویمان به معنی یافتن تابع گرین مناسبی می‌باشد. ما

این کار را با تعدیل تابع گرین برای معادلات لاپلاس بر تمام \mathbb{R}^2 یا \mathbb{R}^3 ، یعنی (16) و (17)

انجام می‌دهیم.

حال، به عنوان مثال، از روش تابع گرین دوبعدی برای ساختن تابع گرین دیریکله

در مورد قرصی به شعاع R استفاده می‌کنیم (ر. ک. شکل ۳.۵.۷). این به ما توان حل $\nabla^2 u = 0$ (یا $\nabla^2 u = \rho$) را به ازای u واقع بر دایره^۱ مرزی می‌بخشد.



شکل ۳.۵.۷

هندسه^۲ ساختن تابع گرین برای یک قرص

در شکل ۳.۵.۷ نقطه^۳ x را روی محیط گرفته‌ایم، زیرا جایی است که می‌خواهیم G صفر شود^۴. البته، تابع گرین $G(x, y)$ را که خواهیم یافت به ازای هر x, y واقع در قرص معتبر است. نقطه^۵ y' نمایش "منعکس" نقطه^۶ y در ناحیه^۷ خارج دایره است به طوری که $ab = R^2$. اما وقتی $x \in C$ ، بنابر تشابه مثلثهای xOy و $xO'y'$ ،

$$\frac{r}{R} = \frac{r''}{b}$$

یا

$$r = \frac{r''R}{b} = \frac{r''a}{R}$$

۱. طبق روند فوق، $G(x, y)$ به ازای x یا y واقع بر C صفر فرض می‌شود. ما در شروع x را روی C گرفته‌ایم.

در نتیجه، اگر تابع گرین را مساوی

$$(۲۳) \quad G(x, y) = \frac{1}{2\pi} \left(\log r - \log \frac{r''a}{R} \right)$$

بگیریم، می‌بینیم G به ازای x واقع بر C صفر می‌باشد. چون وقتی y بر C باشد $r''a/R$ به r تحویل می‌شود، G نیز به ازای y واقع بر C صفر می‌شود. هرگاه بتوان نشان داد که G در دایره در $\nabla^2 G = \delta(x - y)$ صدق می‌کند، آنگاه ثابت کرده‌ایم G تابع گرین دیریکله است. از (۱۷) می‌دانیم که $\nabla^2(\log r)/2\pi = \delta(x - y)$ ؛ در نتیجه،

$$\nabla^2 G(x, y) = \delta(x - y) - \delta(x - y')$$

ولی y' همیشه خارج دایره است؛ در نتیجه، x هرگز نمی‌تواند مساوی y' باشد؛ و لذا، $\delta(x - y')$ همواره صفر می‌باشد. از اینرو،

$$\nabla^2 G(x, y) = \delta(x - y)$$

و لذا، G تابع گرین دیریکله برای دایره می‌باشد.

حال به حل

$$\nabla^2 u = 0$$

در این دایره می‌پردازیم که در آن $f(\theta) = u(R, \theta)$ شرط مرزی داده شده می‌باشد. بنا بر (۲۲)، جواب

$$u = \int_C \left(u \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial u}{\partial n} \right) dS$$

را خواهیم داشت. اما بر C داریم $G = 0$ ؛ در نتیجه، انتگرال

$$u = \int_C u \frac{\partial G}{\partial n} dS$$

باقی می‌ماند، که در آن u را می‌توان با $f(\theta)$ عوض کرد، چرا که انتگرال حول C می‌باشد. لذا، حل مسئله دیریکله در دایره به یافتن $\partial G / \partial n$ تحویل می‌شود. از رابطه (۲۳) می‌توان نوشت

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{1}{r} \frac{\partial r}{\partial n} - \frac{1}{r''} \frac{\partial r''}{\partial n} \right)$$

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \nabla r \cdot \mathbf{n}$$

و

$$\nabla r = \frac{\mathbf{r}}{r}$$

که در آن $\mathbf{r} = \mathbf{x} - \mathbf{y}$ ؛ در نتیجه،

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r} = \frac{r \cos(nr)}{r} = \cos(nr)$$

که در آن (nr) نمایش زاویه بین \mathbf{n} و \mathbf{r} می‌باشد. به همین ترتیب،

$$\frac{\partial r''}{\partial n} = \cos(nr'')$$

اما در مثلث xyO ، طبق قانون کسینوس، داریم

$$a^2 = r^2 + R^2 - 2rR \cos(nr)$$

و در مثلث $xy'O$ خواهیم داشت

$$b^2 = (r'')^2 + R^2 - 2r''R \cos(nr'')$$

و در نتیجه،

$$\frac{\partial r}{\partial n} = \cos(nr) = \frac{R^2 + r^2 - a^2}{2rR}$$

و

$$\frac{\partial r''}{\partial n} = \cos(nr'') = \frac{R^2 + (r'')^2 - b^2}{2r''R}$$

بنابراین،

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \frac{1}{2\pi} \left[\frac{R^2 + r^2 - a^2}{2r^2R} - \frac{R^2 + (r'')^2 - b^2}{2(r'')^2R} \right]$$

با استفاده از رابطه بین r و r'' وقتی \mathbf{x} بر C است، به دست می‌آوریم

$$\left. \frac{\partial G}{\partial n} \right|_{\mathbf{x} \in C} = \frac{1}{2\pi} \left(\frac{R^2 - a^2}{Rr^2} \right)$$

لذا، جواب را می توان به صورت زیر نوشت:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_C f(\theta) \frac{R^2 - a^2}{Rr^2} ds$$

حال این رابطه را به شکل صریحتر و رامتر می نویسیم. اولاً، " می بینیم که در مثلث xyO می توان نوشت

$$r = [a^2 + R^2 - 2aR \cos(\theta - \theta')]^{1/2}$$

که در آن θ و θ' به ترتیب زوایای قطبی در فضای x و y می باشند. ثانیاً، " جواب ما باید به ازای هر y در دایره معتبر باشد؛ لذا، باید فاصله y تا مبدا^۱ متغیر باشد، که ما آن را r' می نامیم. بالاخره، توجه کنید که $ds = R d\theta$ ؛ در نتیجه، می توان جواب را در مختصات قطبی به صورت زیر نوشت:

$$u(r', \theta) = \frac{R^2 - (r')^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{f(\theta) d\theta}{(r')^2 + R^2 - 2r'R \cos(\theta - \theta')}$$

این معادله به فرمول دوبعدی پواسون معروف است^۱. بر خواننده است که با استفاده از این جواب $\rho = \nabla^2 u$ را وقتی u تابع معلوم $f(\theta)$ بر مرز است بنویسد.

تمرینات

۱. (آ) حکم ص ۵۶۲ که

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho dx dy dz = 0$$

معادل قانون بقای جرم است را کامل کنید.

(ب) با استفاده از (آ) و قضیه^۲ تغییر متغیر، نشان دهید که $\rho(x, t)$ را می توان برحسب

۱. این فرمول معروف به چند طریق به دست می آید. برای روش متغیرهای مختلط، ر. ک.

J. Marsden, *Basic Complex Analysis*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1973, p. 145.

برای روش سری فوریه، ر. ک.

J. Marsden, *Elementary Classical Analysis*, W. H. Freeman and Company, 1974, p. 466.

ژاکوبی $J(x, t)$ نگاشت شارش $\phi(x, t)$ و $\rho(x, 0)$ با معادله^۴

$$\rho(x, t)J(x, t) = \rho(x, 0)$$

بیان کرد.

(پ) از (ب) چه می‌توان برای شارش تراکم ناپذیر استنباط کرد؟

۲. فرض کنید V یک میدان برداری با شارش $\phi(x, t)$ بوده و V و ρ در قانون بقای جرم صدق کنند. همچنین، Ω_t ناحیه^۵ انتقال یافته با شارش باشد. صورت زیر از قضیه^۶ انتقال را ثابت کنید (ر. ک. تمرین ۱۸، بخش ۴.۷):

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho f \, dx \, dy \, dz = \int_{\Omega_t} \rho \frac{Df}{Dt} \, dx \, dy \, dz$$

۳. (قانون برنولی) (آ) فرض کنید V, ρ در قانون بقای جرم و معادله^۷ (۲) معادله^۸ اوپلر برای یک سیال کامل (صدق کنند. همچنین، V غیردورانی بوده، و در نتیجه به ازای تابعی چون ϕ ، $V = \nabla\phi$. نشان دهید هرگاه C مسیری بین P_1 و P_2 باشد، آنگاه

$$\left(\frac{\partial\phi}{\partial t} + \frac{1}{2} \|\mathbf{V}\|^2 \right) \Big|_{P_1}^{P_2} + \int_C \frac{dp}{\rho} = 0$$

(راهنمایی. به اتحاد

$$(\mathbf{V} \cdot \nabla)\mathbf{V} = \frac{1}{2} \nabla(\|\mathbf{V}\|^2) + (\nabla \times \mathbf{V}) \times \mathbf{V}$$

از جدول ۱۰.۳، ص ۲۳۷، نیاز دارید.)

(ب) اگر در (آ) ایستا باشد، یعنی $\partial\mathbf{V}/\partial t = 0$ ، و ρ ثابت باشد، نشان دهید که

$$\frac{1}{2} \|\mathbf{V}\|^2 + \frac{p}{\rho}$$

در فضا ثابت است. در این وضع نتیجه بگیرید که " فشار بیشتر با تندی کمتر سیال در ارتباط است."

۴. با استفاده از تمرین ۳، نشان دهید هرگاه ϕ در معادله^۹ لاپلاس $\nabla^2\phi = 0$ صدق کند، آنگاه $\mathbf{v} = \nabla\phi$ یک جواب ایستای معادله^{۱۰} اوپلر برای یک سیال تراکم ناپذیر کامل است.

۵. تحقیق کنید که معادلات ماکسول معادله^{۱۱} پیوستگی برای \mathbf{j} و ρ را ایجاب خواهد کرد.

۶. فرض کنید H نیمصفحه^{۱۲} بالایی $z \geq 0$ باشد. به ازای نقطه^{۱۳} $\mathbf{x} = (x, y, z)$ در H ،

$G(x, y) = -1/4\pi\|x - y\|$ فرض کنید x, y بگیرید. نسبت به صفحه xy بگیرید. $R(x) = (x, y, -z)$ را منعکس x نسبت به صفحه xy بگیرید. تابع گرین برای تمام \mathbb{R}^3 باشد.

(آ) تحقیق کنید که تابع \bar{G} تعریف شده با

$$\bar{G}(x, y) = G(x, y) - G(R(x), y)$$

تابع گرین برای لاپلاسین در H می باشد.

(ب) برای جواب u مسئله

$$\nabla^2 u = \rho \text{ در } H$$

$$u(x, y, 0) = \phi(x, y)$$

فرمول بنویسید.

۷. (آ) با نمادهای شکل ۳.۵.۷، نشان دهید که مسئله دیریکله برای کره به شعاع R در ابعاد سه دارای توابع گرین

$$G(x, y) = \frac{1}{4\pi} \left(\frac{R}{ar'} - \frac{1}{r} \right)$$

می باشد.

(ب) فرمول سه بعدی پواسون را ثابت نمایید:

$$u(y) = \frac{R(R^2 - a^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(\theta, \phi) \sin \theta \, d\theta \, d\phi}{(R^2 + a^2 - 2Ra \cos \gamma)^{3/2}}$$

که در آن $f(\theta, \phi)$ بر کره مرزی داده شده است، $\|y\| = a$ ، و γ زاویه بین y و نقطه

$x = (R \cos \theta \sin \phi, R \sin \theta \sin \phi, R \cos \phi)$ بر سطح کره می باشد.

تمرینهای ۸ تا ۱۴ چند کاربرد حساب برداری در امواج ضربهای به دست می دهند.

۸. معادله

۱۰. برای جزئیات بیشتر، ر.گ.

A. J. Chorin and J. E. Marsden, *A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics*, Springer-Verlag, New York, 1979, and P. D. Lax, "The Formation and Decay of Shock Waves, *Am. Math. Monthly*, 79 (1972): 227-241.

ما از جوئل اسمولر (Joel Smoller) به خاطر پیشنهاد این سری تمرینات قدرتمندی می گنیم.

$$u_t + uu_x = 0$$

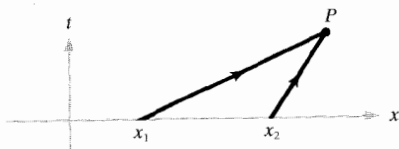
را برای تابع $u(x, t)$ ، $t \geq 0$ و $-\infty < x < \infty$ در نظر بگیرید ، که در آن $u_t = \partial u / \partial t$ و $u_x = \partial u / \partial x$. فرض کنید $u(x, 0) = u_0(x)$ مقدار u در $t = 0$ باشد . منحنیهای $(x(s), t(s))$ که در صفحه xt با

$$\dot{x} = u, \quad \dot{t} = 1$$

تعریف می شوند منحنیهای مشخص نام دارند (نقطه . مشتق نسبت به s را نشان می دهد) .

(آ) با اثبات اینکه $\dot{u} = 0$ ، نشان دهید u در امتداد هر منحنی مشخص ثابت است .
 (ب) نشان دهید که شیبهای منحنیهای مشخص عبارتند از $dt/dx = 1/u$ ، و با استفاده از آن ثابت کنید منحنیهای مشخص خطوط مستقیمی هستند که با داده های اولیه معین می شوند .

(پ) فرض کنید $x_1 < x_2$ و $u_0(x_1) > u_0(x_2) > 0$. نشان دهید که دو منحنی مشخص مار بر نقاط $(x_1, 0)$ و $(x_2, 0)$ در نقطه $P = (\bar{x}, \bar{t})$ متقاطع اند که $\bar{t} > 0$. نشان دهید این همراه با (آ) ایجاب می کنند که جواب نمی تواند در P پیوسته باشد (ر.ک. شکل ۴.۵.۷) .



شکل ۴.۵.۷

مشخصهای معادله $u_t + uu_x = 0$

(ت) \bar{t} را محاسبه نمایید .

تمرین ۸ را برای معادله ۹

$$(۲۴) \quad u_t + f(u)_x = 0$$

تکرار کنید ، که در آن $f'' > 0$ و $f'(u_0(x_2)) > 0$. در اینجا مشخصها با $\dot{x} = f'(u)$ ، $\dot{t} = 1$. در اینجا مشخصها به شکل دیورژانس می نامیم . (این تمرین نشان می دهد که جواب پیوسته ، قطع نظر از همواری f ، عموماً "ناممکن است")

۱۰. (جوابهای ضعیف) چون معادلات به شکل تمرین ۹ در کاربردهای فیزیکی بسیاری (دینامیک گازها ، دینامیک مغناطیسی سیالات ، نور غیرخطی (لیزر) ظاهر می شوند و وجود جواب در هر لحظه (t) مطبوع است ، مایلیم در صورت ظهور ناپیوستگی معادله را با تعبیر مجدد با معنی سازیم . برای این کار فرض کنید $\phi = \phi(x, t)$ یک تابع C^1 باشد . همچنین ، D مستطیلی در صفحه xt باشد که با $-a \leq x \leq a$ و $0 \leq t \leq T$ تعیین می شود ، به طوری که به ازای $x = \pm a$ ، $x = T$ ، $x = 0$ ، و به ازای هر (x, t) در نیمصفحه بالایی خارج D ، $\phi(x, t) = 0$. فرض کنید u یک جواب " اصلی " (۲۴) باشد .

(\bar{T}) نشان دهید که

$$(25) \quad \iint_{t \geq 0} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dx dt + \int_{t=0} u_0(x)\phi(x, 0) dx = 0$$

(راهنمایی . با انتگرال $\iint_D (u_t + f(u)_x)\phi dx dt = 0$ شروع کنید .) لذا ، هرگاه u یک جواب هموار باشد . آنگاه (۲۵) به ازای هر ϕ ی فوق برقرار می باشد . ما را یک جواب ضعیف (۲۴) نامیم اگر (۲۵) به ازای هر چنین ϕ ای برقرار باشد .

(- نشان دهید هرگاه u یک جواب ضعیف باشد که در مجموعه Ω باز در نیمصفحه بالایی صفحه xt ، C^1 است ، آنگاه u یک جواب اصلی (۲۴) در Ω می باشد .

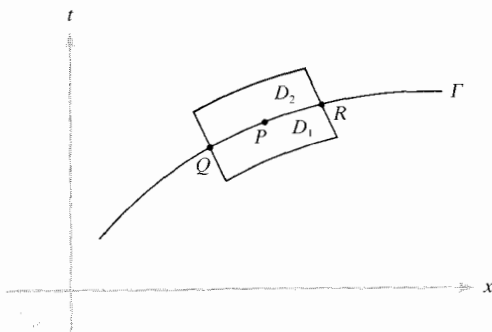
۱۱. (شرط جهشی ، که در دینامیک گازها به شرط رانکین - هوگونیو نیز معروف است) تعریف جواب ضعیف داده شده در تمرین ۱۰ جوابهای ناپیوسته را مجاز می دارد . خواننده می تواند تحقیق کند که هر نوع ناپیوستگی مجاز نیست ، زیرا رابطه ای بین منحنی ناپیوستگی و مقادیر جواب در دو طرف ناپیوستگی وجود دارد .

فرض کنید u یک جواب (ضعیف) (۲۴) بوده و Γ یک منحنی هموار در صفحه xt باشد به طوری که u را در امتداد منحنی Γ " جهش داشته باشد " . یعنی ، u جز به ازای یک ناپیوستگی جهشی در امتداد C^1 ، Γ باشد . ما Γ را یک موج ضربه ای می نامیم . نقطه $P \in \Gamma$ را اختیار کرده و " مستطیل " $D = D_1 \cup D_2$ را مثل شکل ۵.۵.۷ در مجاورت P بسازید . ϕ را طوری بگیرید که ϕ بر D و خارج آن صفر باشد .

(\bar{T}) نشان دهید که

$$\iint_D (u\phi_t + f(u)\phi_x) dx dt = 0$$

$$\iint_{D_1} (u\phi_t + f(u)\phi_x) dx dt = \iint_{D_1} [(u\phi)_t + (f(u)\phi)_x] dx dt$$



شکل ۵.۵.۷

جواب u در امتداد Γ از u_1 به u_2 جهش می‌کند.

(ب) فرض کنید u در امتداد Γ از u_1 به u_2 جهش نماید؛ در نتیجه، وقتی (x, t) بر Γ از ∂D_1 به (x_0, t_0) نزدیک شود، $u(x, t)$ به $u_1(x_0, t_0)$ نزدیک می‌گردد. نشان دهید که

$$0 = \int_{\partial D_1} \phi \{-udx + f(u) dt\} + \int_{\partial D_2} \phi \{-udx + f(u) dt\}$$

و نتیجه بگیرید که

$$0 = \int_{\Gamma} \phi \{[-u] dx + [f(u)] dt\}$$

که در آن $[x(u)] = x(u_2) - x(u_1)$ جهش کمیت $x(u)$ در امتداد Γ می‌باشد.

(پ) اگر منحنی Γ ، x را به صورت تابعی ضمنی از t تعریف کرده، و ∂D ، Γ را در $Q = (x(t_1), t_1)$ و $R = (x(t_2), t_2)$ قطع کند، نشان دهید که

$$0 = \int_Q^R \phi \{[-u] dx + [f(u)] dt\} = \int_{t_1}^{t_2} \phi \left\{ [-u] \frac{dx}{dt} + [f(u)] \right\} dt$$

(ت) نشان دهید که در نقطه P بر Γ ،

$$[u] \cdot s = [f(u)]$$

که در آن در P ، $s = dx/dt$ ، عدد s تندی ناپیوستگی نام دارد. معادله (۲۶) شرط جهشی نام دارد؛ این رابطه‌ای است که هر جواب ناپیوسته باید در آن صدق نماید. ۱۲. (فقدان یکتایی) یکی از عیوب پذیرش جوابهای ضعیف فقدان یکتایی است. (در دینامیک گازها، بعضی از جوابهای ریاضی اضافی بوده و شرایط فیزیکی آنها را رد می‌کنند. مثلاً، جوابهای ناپیوسته موج ضربه‌ای از نوع نادر رد می‌شوند، زیرا این جوابها نشان می‌دهند که آنتروپی در امتداد ناپیوستگی کاهش می‌یابد.) معادله

$$u_t + \left(\frac{u^2}{2}\right)_x = 0 \quad \text{را با داده‌های اولیه} \quad u(x, 0) = \begin{cases} -1, & x \geq 0 \\ 1, & x < 0 \end{cases} \quad \text{در نظر بگیرید. نشان}$$

دهید که به ازای هر $\alpha \geq 1$ ، یک جواب ضعیف است و به صورت زیر تعریف می‌شود:

$$u_\alpha(x, t) = \begin{cases} 1, & x \leq \frac{1-\alpha}{2}t \\ -\alpha, & \frac{1-\alpha}{2}t \leq x \leq 0 \\ \alpha, & 0 \leq x \leq \frac{\alpha-1}{2}t \\ -1, & \frac{\alpha-1}{2}t < x \end{cases}$$

(می‌توان نشان داد که اگر $f'' > 0$ ، یکتایی را می‌توان با اعمال قید اضافی بر جوابها به دست آورد. لذا، جواب منحصر به فردی وجود دارد که در شرط "آنتروپی"

$$\frac{u(x+a, t) - u(x, t)}{a} \leq \frac{E}{t}$$

به ازای $E > 0$ ای و هر $a \neq 0$ صدق می‌کند. لذا، به ازای t ثابت، $u(x, t)$ با افزایش x فقط "به پایین جهش داشته باشد". در مثال ما، این فقط برای جواب به ازای $\alpha = 1$ برقرار باشد.)

۱۳. (جواب (۲۴) به شکل دیورژانس خاص به کار رفته بستگی دارد.) معادله

$$u_t + uu_x = 0$$

$$u_t + \left(\frac{1}{2}u^2\right)_x = 0 \quad (\text{یک})$$

$$\left(\frac{1}{2}u^2\right)_t + \left(\frac{1}{3}u^3\right)_x = 0 \quad (\text{دو})$$

نشان دهید که یک جواب ضعیف (یک) لازم نیست جواب ضعیفی از (دو) باشد.
 (راهنمایی. معادلات شرایط جهشی مختلفی دارند: در (یک) $s = \frac{1}{2}(u_2 + u_1)$ ولی

$$\text{در (دو) } s = \frac{2}{3}(u_2^2 + u_1 u_2 + u_1^2)/(u_2 + u_1) \text{ .}$$

۱۴. (غیرپایایی جوابهای ضعیف تحت تبدیل غیرخطی). معادله (۲۴) را در نظر

بگیرید که در آن $f'' > 0$.

(آ) نشان دهید که تبدیل $v = f'(u)$ این معادله را به

$$(۲۷) \quad v_t + v v_x = 0$$

می برد.

(ب) نشان دهید که تبدیل فوق لزوماً جوابهای ناپیوسته (۲۴) را به جوابهای

ناپیوسته (۲۷) نخواهد برد. (راهنمایی. شرایط جهشی را امتحان کنید: برای

$$(۲۷) \quad s[v] = \frac{1}{2}[v^2] \text{ ایجاب می کند که } s[f'(u)] = \frac{1}{2}[f''(u)^2] \text{ برای (۲۴) } s[u] = [f(u)] \text{ .}$$

۶.۷ فرمهای دیفرانسیل

نظریه فرمهای دیفرانسیل راهی مناسب و زیبا برای بیان قضایای گرین، استوکس، و گاوس به دست می دهد. در واقع، با استفاده از فرمهای دیفرانسیل معلوم می شود که این قضایا همه جلوه های یک نظریه ریاضی اند، و زبان لازم برای تعمیم آنها به ابعاد n را تدارک می بینند. در این بخش بحثی بسیار مقدماتی از نظریه فرمها خواهیم داشت. چون هدف اصلی نشان دادن این است که قضایای گرین، استوکس، و گاوس همه جلوه های یک پدیده اند، با صورتهای ضعیف این قضایا قناعت می کنیم. به علاوه، فرمها را به صورت اصل موضوعی و غیرساختنی معرفی کرده، بدین وسیله از پیشنیازهای جبری صوری عظیمی که معمولاً برای ساختنشان لازم است دوری می جویم. لذا، روش ما در نظر محض گرا خیلی از کامل بودن بدور است، ولی در چشم دانشجو ممکن است جامع باشد. امیدواریم این بحث دانشجو را به غور بیشتر در نظریه فرمهای دیفرانسیل وادارد.
 بحث را با معرفی 0-فرم آغاز می کنیم.

تعریف. فرض کنیم K یک مجموعه \mathbb{R}^3 باز در \mathbb{R}^3 باشد. یک 0-فرم بر K تابعی حقیقی مانند $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ است. وقتی یکبار از f مشتق می گیریم، فرض می کنیم C^1 باشد، و وقتی دوبار مشتق می گیریم، آن را C^2 خواهیم گرفت.

فرض کنیم f_1 و f_2 دو 0- فرم بر K باشند. می توان آنها را به طور معمول به هم افزود و 0- فرم جدید $f_1 + f_2$ را به دست آورد یا با ضرب آنها در هم به 0- فرم $f_1 f_2$ رسید.

مثال ۱. فرض کنیم $f_1(x, y, z) = xy + yz$ و $f_2(x, y, z) = y$ ، 0- فرمهایی بر \mathbb{R}^3 باشند. در این صورت،

$$(f_1 + f_2)(x, y, z) = xy + yz + y \sin xz$$

و

$$(f_1 f_2)(x, y, z) = y^2 x \sin xz + y^2 z \sin xz$$

تعریف ۱. فرمهای اساسی عباراتی از dx ، dy ، و dz اند. ما فعلاً این عبارات را فقط علایم صوری می گیریم 1۰- فرم ω بر مجموعه K باز یک ترکیب خطی صوری مانند

$$\omega = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

یا فقط

$$\omega = P dx + Q dy + R dz$$

است، که در آن P ، Q ، و R توابعی حقیقی بر K می باشند. منظور از عبارت $P dx$ یعنی 1- فرم $P dx + 0 \cdot dy + 0 \cdot dz$ ، و به همین ترتیب در مورد $Q dy$ و $R dz$. همچنین، ترتیب $P dx$ ، $Q dy$ ، و $R dz$ اهمیت ندارد؛ در نتیجه،

$$P dx + Q dy + R dz = R dz + P dx + Q dy \text{ و غیره.}$$

اگر $\omega_1 = P_1 dx + Q_1 dy + R_1 dz$ و $\omega_2 = P_2 dx + Q_2 dy + R_2 dz$ دو 1- فرم باشند، می توان با افزودن آنها به هم 1- فرم جدید $\omega_1 + \omega_2$ را به دست آورد که به صورت زیر تعریف می شود:

$$\omega_1 + \omega_2 = (P_1 + P_2) dx + (Q_1 + Q_2) dy + (R_1 + R_2) dz$$

و اگر f یک 0- فرم باشد، می توان 1- فرم $f\omega_1$ را به صورت زیر تعریف کرد:

$$f\omega_1 = (fP_1) dx + (fQ_1) dy + (fR_1) dz$$

مثال ۲. فرض کنیم $\omega_1 = (x + y^2) dx + (zy) dy + (e^{xyz}) dz$ و $\omega_2 = \sin y dx + \sin x dy$ ، 1- فرم باشند. در این صورت،

$$\omega_1 + \omega_2 = (x + y^2 + \sin y) dx + (zy + \sin x) dy + (e^{xyz}) dz$$

هرگاه $f(x, y, z) = x$ ، آنگاه

$$f\omega_2 = x \sin y \, dx + x \sin x \, dy$$

تعریف ۲- فرمهای اساسی عبارات صوری $dx \, dy$ ، $dy \, dz$ ، و $dz \, dx$ می‌باشند. این عبارات را باید حاصل ضربهای dx و dy ، dy و dz ، و dz و dx تصور کرد.

یک ۲- فرم بر K مانند η عبارتی است صوری به شکل

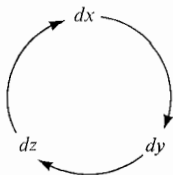
$$\eta = F \, dx \, dy + G \, dy \, dz + H \, dz \, dx$$

که در آن F ، G ، و H توابعی حقیقی بر K می‌باشند. ترتیب $F \, dx \, dy$ ، $G \, dy \, dz$ ، و $H \, dz \, dx$ اهمیت ندارد؛ مثلاً،

$$F \, dx \, dy + G \, dy \, dz + H \, dz \, dx = H \, dz \, dx + F \, dx \, dy + G \, dy \, dz$$

و غیره

در اینجا مفید است متذکر شویم که در یک ۲- فرم اساسی ۱- فرمهای dx ، dy ، و dz همیشه در جفتهای دوری ظاهر می‌شوند (ر. ک. شکل ۱۰۶۰۷)؛ یعنی، $dx \, dy$ ، $dy \, dz$ ، و $dz \, dx$.



شکل ۱۰۶۰۷

ترتیب دوری dx ، dy ، و dz

به تشابه ۰- فرمها و ۱- فرمها، می‌توان ۲- فرمهای

$$\eta_i = F_i \, dx \, dy + G_i \, dy \, dz + H_i \, dz \, dx, \quad i = 1, 2$$

را به هم افزود و ۲- فرم جدید

$$\eta_1 + \eta_2 = (F_1 + F_2) \, dx \, dy + (G_1 + G_2) \, dy \, dz + (H_1 + H_2) \, dz \, dx$$

را به دست آورد. به همین نحو، اگر f یک ۰- فرم و η یک ۲- فرم باشد، می‌توان حاصل ضرب

$$f\eta = (fF) \, dx \, dy + (fG) \, dy \, dz + (fH) \, dz \, dx$$

را تشکیل داد. بالاخره، منظور از عبارت $F dx dy$ یعنی 2- فرم $F dx dy + 0 \cdot dy dz + 0 \cdot dz dx$.

مثال ۳. عبارات

$$\eta_1 = x^2 dx dy + y^3 x dy dz + \sin zy dz dx$$

و

$$\eta_2 = y dy dz$$

2- فرم هستند. مجموعشان مساوی است با

$$\eta_1 + \eta_2 = x^2 dx dy + (y^3 x + y) dy dz + \sin zy dz dx$$

هرگاه $f(x, y, z) = xy$ ، آنگاه

$$f\eta_2 = xy^2 dy dz$$

تعریف. یک 3- فرم اساسی عبارتی صوری مانند $dx dy dz$ (به ترتیب دوری، شکل ۱۰۶۰۷) است. یک 3- فرم مانند v بر مجموعه $K \subset \mathbb{R}^3$ عبارتی است به شکل $v = f(x, y, z) dx dy dz$ که در آن f تابعی حقیقی بر K می باشد.

دو 3- فرم را می توان با هم جمع کرد و آنها را می توان در 0- فرمها به طرز روشن ضرب نمود. ظاهراً "تفاوت مختصری بین 0- فرم و 3- فرم وجود دارد، چرا که هر دو مستلزم یک تابع حقیقی می باشند. ولی به دلیلی که در ضرب و مشتگیری از فرمها روشن خواهد شد آنها را متمایز می گیریم.

مثال ۴. فرض کنیم $v_1 = y dx dy dz$ ، $v_2 = e^{x^2} dx dy dz$ و $f(x, y, z) = xyz$. در این صورت، $fv_1 = y^2 xz dx dy dz$ و $v_1 + v_2 = (y + e^{x^2}) dx dy dz$.

تذکار. با آنکه می توان دو 0- فرم، دو 1- فرم، دو 2- فرم، یا دو 3- فرم را به هم افزود، هرگز نمی توان یک k - فرم را با یک j - فرم که $k \neq j$ جمع کرد. مثلاً، "هیچگاه نخواهیم داشت

$$f(x, y, z) dx dy + g(x, y, z) dz$$

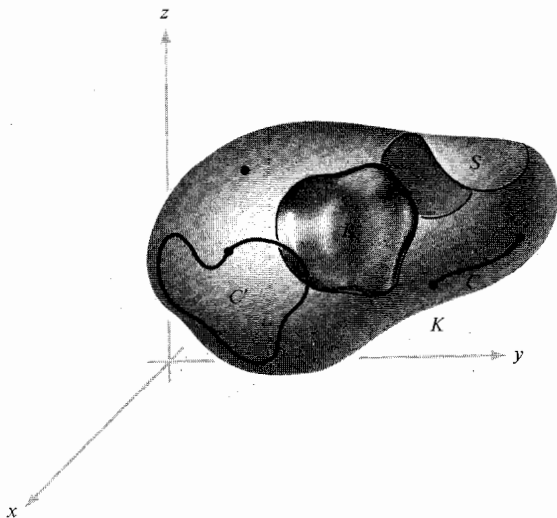
حال که این اشیاء صوری (فرمها) تعریف شده اند، می توان از سودمندی آنها، طرز

به کار بردنشان، و شاید مهمتر از همه معنی آنها سؤال کرد. با جواب اولین سؤال ادامه بحث روشن می شود، ولی طرز به کار بردن و تعبیر آنها بی درنگ قابل توصیف است.

یک تابع حقیقی بر قلمرو K در \mathbb{R}^3 قاعده‌ای است که به هر نقطه در K عددی حقیقی منتسب می کند. فرمهای دیفرانسیل، از یک باب، تعمیم توابع حقیقی اند که در حساب دیفرانسیل و انتگرال مطالعه می شود. در واقع، 0 -فرمها بر مجموعه K چیزی جز توابع روی K نیستند. مثلاً، 0 -فرم f نقاط K را به اعداد حقیقی می برد.

k -فرمها ($k \geq 1$) را نباید توابعی از نقاط K تعبیر کنیم بلکه باید آنها را توابعی بر اشیاء هندسی نظیر منحنیها و سطوح بگیریم. بسیاری از هندسه دانان یونان باستان خطوط و منحنیها را متشکل از بی نهایت نقطه، و صفحات و سطحها را مرکب از بی نهایت منحنی می گرفتند. در نتیجه، این رشته تعبیرات هندسی فرمهای دیفرانسیل لااقل توجیه تاریخی دارد.

به ازای زیر مجموعه $K \subset \mathbb{R}^3$ ، چهار نوع زیرمجموعه از K تمیز می دهیم (ر. ک. شکل ۲۰۶۰۷):



شکل ۲۰۶۰۷

چهار نوع هندسی از زیرمجموعه‌های مجموعه $K \subset \mathbb{R}^3$ که نظریه فرمها بر آنها اعمال می شود.

(یک) نقاط در K ؛

(دو) منحنیهای بسته جهتدار و منحنیهای بسته ساده جهتدار C در K ؛

(سه) سطوح جهتدار $S \subset K$ ؛

(چهار) زیر ناحیههای مقدماتی (از نوع ۱ تا ۴) $R \subset K$.

بحث را با ۱- فرمها آغاز می‌کنیم. فرض کنیم

$$\omega = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

یک ۱- فرم بر K بوده و C یک منحنی ساده جهتدار مثل شکل ۲۰۶.۷ باشد. عددی حقیقی ω به C منسوب می‌کند از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$(۱) \quad \int_C \omega = \int_C P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy + R(x, y, z) dz$$

به یاد آورید (ر. ک. بخش ۲۰۶) که این انتگرال به صورت زیر حساب می‌شود. فرض

کنیم $\sigma: [a, b] \rightarrow K$ ، $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ ، یک پارامتری‌سازی جهت نگهدار C باشد. در این صورت،

$$\int_C \omega = \int_a^b \omega = \int_a^b \left[P(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{dx}{dt} + Q(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{dy}{dt} + R(x(t), y(t), z(t)) \cdot \frac{dz}{dt} \right] dt$$

فضیه ۱ در بخش ۲۰۶ عدم وابستگی $\int_C \omega$ به پارامتری‌سازی σ را تضمین خواهد کرد.

لذا، می‌توان ۱- فرم ω بر K را قاعدهای تعبیر کرد که به هر منحنی $C \subset K$ عددی

حقیقی منتسب می‌کند؛ به همین نحو، ۲- فرم η قاعدهای است که به هر سطح $S \subset K$

عددی حقیقی منتسب می‌کند؛ و ۳- فرم ν قاعدهای است که به هر زیر ناحیه مقدماتی K

عددی حقیقی منتسب می‌سازد. قواعد ارتباط اعداد حقیقی به منحنیها، سطوح، و نواحی

کاملاً" در عبارت صوری تعریف شده گنجانده شده‌اند.

مثال ۵. فرض کنیم $\omega = xy dx + y^2 dy + dz$ یک ۱- فرم بر \mathbb{R}^3 بوده و C منحنی ساده

جهتدار در \mathbb{R}^3 باشد که با پارامتری‌سازی $\sigma(t) = (t^2, t^3, 1)$ ، $0 \leq t \leq 1$ ، توصیف می‌شود.

C را جهتدار می‌کنیم به این نحو که جهت مثبت C را جهت پیمایش C توسط $\sigma(t)$ می‌گیریم

وقتی t از ۰ تا ۱ می‌رود. در این صورت، بنابر فرمول (۱)،

$$\int_C \omega = \int_0^1 [t^5(2t) + t^6(3t^2) + 0] dt = \int_0^1 [2t^6 + 3t^8] dt = \frac{13}{21}$$

لذا، این ۱- فرم ω به هر منحنی ساده جهتدار و هر منحنی بسته ساده جهتدار C در \mathbb{R}^3 عدد $\int_C \omega$ را منتسب می‌نماید.

۲- فرم η بر مجموعه $K \subset \mathbb{R}^3$ را می‌توان به همین نحو به صورت تابعی تعبیر کرد که به هر سطح جهتدار $S \subset K$ عددی حقیقی مربوط می‌کند. این کار به وسیله مفهوم انتگرالگیری از ۲- فرم روی سطوح صورت می‌گیرد. فرض کنیم

$$\eta = F(x, y, z) dx dy + G(x, y, z) dy dz + H(x, y, z) dz dx$$

یک ۲- فرم بر K بوده، و $S \subset K$ سطح جهتداری باشد که با تابع $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ، $D \subset \mathbb{R}^2$ ، $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ پارامتری شده است (ر. ک. بخش ۳.۶).

تعریف. اگر S یک چنین سطح بوده و η یک ۲- فرم بر K باشد، $\int_S \eta$ را با فرمول زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} \int_S \eta &= \int_S F dx dy + G dy dz + H dz dx \\ &= \int_D \left[F(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right. \\ &\quad + G(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} \\ &\quad \left. + H(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \cdot \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} \right] du dv \end{aligned} \quad (۲)$$

که در آن

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \\ \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y}{\partial u} & \frac{\partial y}{\partial v} \\ \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \end{vmatrix}, \quad \frac{\partial(z, x)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial z}{\partial u} & \frac{\partial z}{\partial v} \\ \frac{\partial x}{\partial u} & \frac{\partial x}{\partial v} \end{vmatrix}$$

اگر S از چند قطعه S_i ، $i = 1, \dots, k$ ، مثل شکل ۴.۴.۷، هر یک با پارامتری‌سازی Φ_i ،

تشکیل شده باشد، تعریف می‌کنیم

$$\int_S \eta = \sum_{i=1}^k \int_{S_i} \eta$$

باید تحقیق کرد که $\int_S \eta$ به پارامتری‌سازی Φ بستگی ندارد. این نتیجه از قضیه ۴، بخش ۶.۶ (ولی نه بوضوح) دیده می‌شود.

مثال ۶. فرض کنید $\eta = z^2 dx dy$ یک ۲-فرم بر \mathbb{R}^3 بوده، و S نیمکره یکه بالایی در \mathbb{R}^3 باشد. انتگرال $\int_S \eta$ را حساب کنید.

S را به صورت زیر پارامتری می‌کنیم:

$$\Phi(u, v) = (\sin u \cos v, \sin u \sin v, \cos u),$$

که در آن $(u, v) \in D = [0, \pi/2] \times [0, 2\pi]$. در نتیجه، طبق فرمول ۲،

$$\int_S \eta = \int_D \cos^2 u \left[\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} \right] du dv$$

که در آن

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} \cos u \cos v & -\sin u \sin v \\ \cos u \sin v & \sin u \cos v \end{vmatrix}$$

$$= \sin u \cos u \cos^2 v + \cos u \sin u \sin^2 v = \sin u \cos u$$

بنابراین،

$$\int_S \eta = \int_D \cos^2 u \cos u \sin u du dv$$

$$= \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^3 u \sin u du dv = \int_0^{2\pi} \left[-\frac{\cos^4 u}{4} \right]_0^{\pi/2} dv = \frac{\pi}{2}$$

مثال ۷. انتگرال $\int_S x dy dz + y dx dy$ را در صورتی حساب کنید که S سطح جهتدار توصیف

شده با پارامتری‌سازی $(u, v) \in D = [0, 1] \times [0, 1]$ ، $x = u + v$ ، $y = u^2 - v^2$ ، $z = uv$ باشد.

طبق تعریف، داریم

$$\frac{\partial(y, z)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 2u & -2v \\ v & u \end{vmatrix} = 2(u^2 + v^2)$$

$$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2u & -2v \end{vmatrix} = -2(u + v)$$

در نتیجه ،

$$\begin{aligned} & \int_S x \, dy \, dz + y \, dx \, dy \\ &= \int_D [(u + v)(2)(u^2 + v^2) + (u^2 - v^2)(-2)(u + v)] \, du \, dv \\ &= 4 \int_D [v^3 + uv^2] \, du \, dv = 4 \int_0^1 \int_0^1 [v^3 + uv^2] \, du \, dv \\ &= 4 \int_0^1 \left[uv^3 + \frac{u^2 v^2}{2} \right]_0^1 \, dv = 4 \int_0^1 \left[v^3 + \frac{v^2}{2} \right] \, dv \\ &= \left[v^4 + \frac{2v^3}{3} \right]_0^1 = 1 + \frac{2}{3} = \frac{5}{3} \end{aligned}$$

بالاخره ، باید 3- فرمها را توابعی بر زیر ناحیه‌های مقدماتی (از نوع ۱ تا ۴) از K تعبیر نماییم . فرض کنیم $v = f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$ یک 3- فرم بوده و $R \subset K$ یک زیر ناحیه مقدماتی از K باشد . در این صورت ، به هر چنین $R \subset K$ عدد

$$(۳) \quad \int_R v = \int_R f(x, y, z) \, dx \, dy \, dz$$

را منتسب می‌کنیم ، که انتگرال سه‌گانه معمولی f روی R است که در بخش ۶.۵ توصیف شد.

مثال ۸. فرض کنیم $v = (x + z) \, dx \, dy \, dz$ و $R = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$. در این صورت ،

$$\begin{aligned} \int_R v &= \int_R (x + z) \, dx \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^1 \int_0^1 (x + z) \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{x^2}{2} + zx \right]_0^1 \, dy \, dz = \int_0^1 \int_0^1 \left[\frac{1}{2} + z \right] \, dy \, dz = \int_0^1 \left[\frac{1}{2} + z \right] \, dz \\ &= \left[\frac{z}{2} + \frac{z^2}{2} \right]_0^1 = 1 \end{aligned}$$

حال باید جبر (یا قواعد ضرب) فرمها را مطرح کنیم تا، همراه با مشتقگیری از فرمها، توان بیان قضایای گرین، استوکس، و گاوس را برحسب فرمهای دیفرانسیل داشته باشیم.

اگر ω یک- k فرم و η یک- l فرم بر K بوده و $0 \leq k+l \leq 3$ ، حاصل ضربی به نام حاصل ضرب گوهای $\omega \wedge \eta$ از ω و η وجود دارد، که یک- $k+l$ فرم بر K است. حاصل ضرب گوهای در قوانین زیر صدق می‌کند:

(یک) به ازای هر k یک- k فرم صفر به علامت 0 وجود دارد به طوری که به ازای هر k -فرم ω ، $0 + \omega = \omega$ ، و به ازای هر l -فرم η که $0 \leq k+l \leq 3$ ، $0 \wedge \eta = 0$.
(دو) (پخشپذیری) هرگاه f یک-0 فرم باشد، آنگاه

$$(f\omega_1 + \omega_2) \wedge \eta = f(\omega_1 \wedge \eta) + (\omega_2 \wedge \eta)$$

(سه) (پاد تعویضپذیری) $(-1)^{kl}(\eta \wedge \omega)$

(چهار) (شرکتپذیری) هرگاه $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ به ترتیب k_1, k_2, k_3 فرم بوده و $3 \leq k_1+k_2+k_3$ آنگاه

$$\omega_1 \wedge (\omega_2 \wedge \omega_3) = (\omega_1 \wedge \omega_2) \wedge \omega_3$$

(پنج) (همگنی نسبت به توابع) هرگاه f یک-0 فرم باشد، آنگاه

$$\omega \wedge (f\eta) = (f\omega) \wedge \eta = f(\omega \wedge \eta)$$

توجه کنید که قسمت‌های (دو) و (سه) قسمت (پنج) را ایجاب می‌کنند.
(شش) قواعد ضرب زیر برای 1- فرمها برقرارند:

$$dx \wedge dy = dx dy$$

$$dy \wedge dx = -dx dy = (-1)(dx \wedge dy)$$

$$dy \wedge dz = dy dz = (-1)(dz \wedge dy)$$

$$dz \wedge dx = dz dx = (-1)(dx \wedge dz)$$

$$dx \wedge dx = 0, \quad dy \wedge dy = 0, \quad dz \wedge dz = 0$$

$$dx \wedge (dy \wedge dz) = (dx \wedge dy) \wedge dz = dx dy dz$$

(هفت) هرگاه f یک-0 فرم و ω یک- k فرم باشد، آنگاه $f \wedge \omega = f\omega$. حال، با استفاده از قوانین (یک) تا (هفت) می‌توان حاصل ضرب منحصر به فرد l -فرم η و k -فرم ω ، که $0 \leq k+l \leq 3$ را به دست آورد.

مثال ۹. نشان دهید که $dx \wedge dy \wedge dz = dx \, dy \, dz$.

بنابر قسمت (شش)، $dy \wedge dz = dy \, dz$ ، بنابراین،

$$dx \wedge dy \wedge dz = dx \wedge (dy \wedge dz) = dx \, dy \, dz$$

مثال ۱۰. اگر $\omega = x \, dx + y \, dy \, dz$ و $\eta = zy \, dx + xz \, dy + xy \, dz$ را بیابانماید.

با محاسبه $\omega \wedge \eta$ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= (x \, dx + y \, dy) \wedge (zy \, dx + xz \, dy + xy \, dz) \\ &= [(x \, dx + y \, dy) \wedge (zy \, dx)] + [(x \, dx + y \, dy) \wedge (xz \, dy)] \\ &\quad + [(x \, dx + y \, dy) \wedge (xy \, dz)] \\ &= xyz(dx \wedge dx) + zy^2(dy \wedge dx) + x^2z(dx \wedge dy) + xyz(dy \wedge dy) \\ &\quad + x^2y(dx \wedge dz) + xy^2(dy \wedge dz) \\ &= -zy^2 \, dx \, dy + x^2z \, dx \, dy - x^2y \, dz \, dx + xy^2 \, dy \, dz \\ &= (x^2z - y^2z) \, dx \, dy - x^2y \, dz \, dx + xy^2 \, dy \, dz \end{aligned}$$

مثال ۱۱. اگر $\omega = x \, dx - y \, dy \, dz$ و $\eta = x \, dy \, dz + z \, dx \, dy$ را بیابید.

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta &= (x \, dx - y \, dy) \wedge (x \, dy \, dz + z \, dx \, dy) \\ &= [(x \, dx - y \, dy) \wedge (x \, dy \, dz)] + [(x \, dx - y \, dy) \wedge (z \, dx \, dy)] \\ &= (x^2 \, dx \wedge dy \, dz) - (xy \, dy \wedge dy \, dz) \\ &\quad + (xz \, dx \wedge dx \, dy) - (yz \, dy \wedge dx \, dy) \\ &= [x^2 \, dx \wedge (dy \wedge dz)] - [xy \, dy \wedge (dy \wedge dz)] \\ &\quad + [xz \, dx \wedge (dx \wedge dy)] - [yz \, dy \wedge (dx \wedge dy)] \\ &= x^2 \, dx \, dy \, dz - [xy(dy \wedge dy) \wedge dz] \\ &\quad + [xz(dx \wedge dx) \wedge dy] - [yz(dy \wedge dx) \wedge dy] \\ &= x^2 \, dx \, dy \, dz - xy(0 \wedge dz) + xz(0 \wedge dy) + [yz(dy \wedge dy) \wedge dx] \\ &= x^2 \, dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

آخرین گام مهم در بسط این نظریه نشان دادن طرز مشتقگیری از فرمهاست. اگر $k < 3$ ، مشتق یک- k -فرم یک $(k+1)$ -فرم است، و مشتق یک- 3 -فرم همواره صفر می‌باشد.

اگر ω یک k -فرم باشد، مشتق ω را با $d\omega$ نشان می‌دهیم. عمل d از خواص زیر برخوردار می‌باشد:

(۱) هرگاه $f: K \rightarrow \mathbb{R}$ یک ۰-فرم باشد، آنگاه

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

(۲) (خطی بودن) هرگاه ω_1 و ω_2 دو k -فرم باشند، آنگاه

$$d(\omega_1 + \omega_2) = d\omega_1 + d\omega_2$$

(۳) اگر ω یک k -فرم و η یک l -فرم باشد،

$$d(\omega \wedge \eta) = (d\omega \wedge \eta) + (-1)^k(\omega \wedge d\eta)$$

(۴) $d(d\omega) = 0$ و $d(dx) = d(dy) = d(dz) = 0$ یا، به طور ساده، $d^2 = 0$. خواص (۱)

تا (۴) به ما اجازه مشتقگیری به طور منحصر به فرد از هر فرم را می‌دهند.

مثال ۱۲. فرض کنید $\omega = P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy$ یک ۱-فرم بر مجموعه $K \subset \mathbb{R}^3$ باشد. $d\omega$ را پیدا نمایید.

$$\begin{aligned} d[P(x, y, z) dx + Q(x, y, z) dy] &= d[P(x, y, z) \wedge dx] + d[Q(x, y, z) \wedge dy] \quad (\text{با استفاده از } ۲) \\ &= [dP \wedge dx] + [P \wedge d(dx)] + [dQ \wedge dy] + [Q \wedge d(dy)] \quad (\text{با استفاده از } ۳) \\ &= (dP \wedge dx) + (dQ \wedge dy) \\ &= \left[\frac{\partial P}{\partial x} dx + \frac{\partial P}{\partial y} dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \right] \wedge dx + \left[\frac{\partial Q}{\partial x} dx + \frac{\partial Q}{\partial y} dy + \frac{\partial Q}{\partial z} dz \right] \wedge dy \\ &\quad (\text{با استفاده از } ۱) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \left(\frac{\partial P}{\partial x} dx \wedge dx \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial y} dy \wedge dx \right) + \left(\frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx \right) \\ &\quad + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial y} dy \wedge dy \right) + \left(\frac{\partial Q}{\partial z} dz \wedge dy \right) \\ &= -\frac{\partial P}{\partial y} dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial Q}{\partial x} dx \wedge dy - \frac{\partial Q}{\partial z} dy \wedge dz \\ &= \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z} dz \wedge dx - \frac{\partial Q}{\partial z} dy \wedge dz \end{aligned}$$

مثال ۱۳. فرض کنید f یک- 0 -فرم باشد. فقط با استفاده از قواعد مشتگیری (۱) تا (۳) و اینکه $d(dx) = d(dy) = d(dz) = 0$ ، نشان دهید که $d(df) = 0$. بنا بر (۱)،

$$df = \frac{\partial f}{\partial x} dx + \frac{\partial f}{\partial y} dy + \frac{\partial f}{\partial z} dz$$

$$d(df) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial y} dy\right) + d\left(\frac{\partial f}{\partial z} dz\right)$$

اگر فقط با جمله اول کار کرده و از (۳) استفاده کنیم، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} d\left(\frac{\partial f}{\partial x} dx\right) &= d\left(\frac{\partial f}{\partial x} \wedge dx\right) = d\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) \wedge dx + \frac{\partial f}{\partial x} \wedge d(dx) \\ &= \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz\right) \wedge dx + 0 \\ &= \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dy \wedge dx + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz \wedge dx \\ &= -\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} dx \wedge dy + \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} dz \wedge dx \end{aligned}$$

به همین نحو، معلوم می‌شود که

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial y} dy\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} dx \wedge dy - \frac{\partial^2 f}{\partial z \partial y} dy \wedge dz$$

و

$$d\left(\frac{\partial f}{\partial z} dz\right) = -\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} dz \wedge dx + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z} dy \wedge dz$$

با افزودن اینها به هم، طبق تساوی جزئیهای مخلوط، به دست می‌آوریم $d(df) = 0$.

مثال ۱۴. نشان دهید که $d(dx \wedge dy)$ ، $d(dy \wedge dz)$ ، و $d(dz \wedge dx)$ همه صفرند. برای اثبات حالت اول، از خاصیت (۳) استفاده می‌کنیم:

$$d(dx \wedge dy) = d(dx \wedge dy) = [d(dx) \wedge dy - dx \wedge d(dy)] = 0$$

حالات دیگر به همین نحو می‌باشند.

مثال ۱۵. اگر $d\eta = F(x, y, z) dx dy + G(x, y, z) dy dz + H(x, y, z) dz dx$ را پیدا نماییم.

بنابر خاصیت (۲)،

$$d\eta = d(F dx dy) + d(G dy dz) + d(H dz dx)$$

حال $d(F dx dy)$ را حساب می‌کنیم. مجدداً "با استفاده از (۳) داریم

$$d(F dx dy) = d(F \wedge dx dy) = dF \wedge (dx dy) + F \wedge d(dx dy)$$

بنابر مثال ۱۴، $d(dx dy) = 0$ ؛ در نتیجه، آنچه می‌ماند عبارت است از

$$\begin{aligned} dF \wedge (dx dy) &= \left(\frac{\partial F}{\partial x} dx + \frac{\partial F}{\partial y} dy + \frac{\partial F}{\partial z} dz \right) \wedge (dx \wedge dy) \\ &= \left[\frac{\partial F}{\partial x} dx \wedge (dx \wedge dy) \right] + \left[\frac{\partial F}{\partial y} dy \wedge (dx \wedge dy) \right] + \left[\frac{\partial F}{\partial z} dz \wedge (dx \wedge dy) \right] \end{aligned}$$

اما

$$dx \wedge (dx \wedge dy) = (dx \wedge dx) \wedge dy = 0 \wedge dy = 0$$

$$dy \wedge (dx \wedge dy) = -dy \wedge (dy \wedge dx)$$

$$= -(dy \wedge dy) \wedge dx = 0 \wedge dx = 0$$

و

$$dz \wedge (dx \wedge dy) = (-1)^2(dx \wedge dy) \wedge dz = dx dy dz$$

در نتیجه،

$$d(F dx dy) = \frac{\partial F}{\partial z} dx dy dz$$

به همین نحو، به دست می‌آوریم

$$d(H dz dx) = \frac{\partial H}{\partial y} dx dy dz \quad \text{و} \quad d(G dy dz) = \frac{\partial G}{\partial x} dx dy dz$$

بنابراین،

$$d\eta = \left(\frac{\partial F}{\partial z} + \frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \right) dx dy dz$$

لذا، تمام مفاهیم لازم برای تنظیم قضایای گرین، استوکس، و گاوس به زبان فرمها

عرضه شده‌اند.

قضیه ۱۳ (قضیه گرین). فرض کنیم D یک ناحیهء مقدماتی در صفحه xy باشد که ∂D جهتی خلاف عقربه‌های ساعت دارد. همچنین، $\omega = P(x, y) dx + Q(x, y) dy$ یک ۱-فرم در مجموعهء بازی چون K در \mathbb{R}^3 باشد که شامل D است. در این صورت،

$$\int_{\partial D} \omega = \int_D d\omega$$

در اینجا $d\omega$ یک ۲-فرم بر K بوده و D در واقع سطحی در \mathbb{R}^3 است که به وسیله $\Phi: D \rightarrow \mathbb{R}^3$ ، $\Phi(x, y) = (x, y, 0)$ ، پارامتری شده است. چون P و Q توابع صریحی از z نیستند، پس $\partial P/\partial z$ و $\partial Q/\partial z$ صفر می‌باشند، و طبق مثال ۱۳، $d\omega = (\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y) dx dy$ ، لذا، قضیه ۱۳ چیزی جز

$$\int_{\partial D} P dx + Q dy = \int_D \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy$$

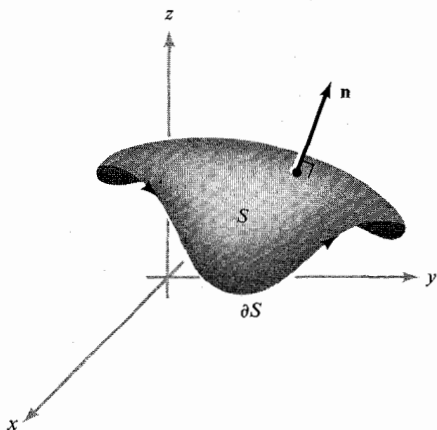
نیست، که دقیقاً همان قضیه گرین در بخش ۱۰.۷ می‌باشد. لذا، قضیه ۱۳ برقرار می‌باشد. به همین ترتیب، قضایای زیر را خواهیم داشت.

قضیه ۱۴ (قضیه استوکس). فرض کنیم S یک سطح جهتدار در \mathbb{R}^3 باشد که مرزش منحنی بستهء ساده ∂S است (شکل ۳.۶.۷) که به عنوان مرز S جهتدار شده است (ر.ک. شکل ۱۰.۲.۷). فرض کنیم ω یک ۱-فرم بر مجموعهء بازی چون K باشد که شامل S است. در این صورت،

$$\int_{\partial S} \omega = \int_S d\omega$$

قضیه ۱۵ (قضیه گاوس). فرض کنیم $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ یک ناحیهء مقدماتی باشد که $\partial\Omega$ جهت روبرو خارج داشته باشد (ر.ک. بخش ۴.۷). هرگاه η یک ۲-فرم بر ناحیهء K شامل Ω باشد، آنگاه

$$\int_{\partial\Omega} \eta = \int_{\Omega} d\eta$$



شکل ۳.۶.۷

یک سطح جهتدار که در آن قضیه استوکس و نیز نظریه فرمها به کار می‌رود.

خواننده احتمالاً متوجه تشابه قوی در صورت این قضایا شده است. در تنظیمهای میدان برداری از دیورژانس برای نواحی در \mathbb{R}^3 (قضیه گاوس)، و از کرل برای سطوح در \mathbb{R}^3 (قضیه استوکس) و نواحی در \mathbb{R}^2 (قضیه گرین) استفاده کردیم. در اینجا از مفهوم متحدکننده فرم دیفرانسیل برای هر سه قضیه استفاده می‌کنیم؛ و، در واقع، با معرفی چند اصطلاح دیگر، هر سه قضیه را یکجا بیان می‌کنیم.

منظور از چند گونای 2 بعدی جهتدار با موز در \mathbb{R}^3 یعنی سطحی در \mathbb{R}^3 که مرزش یک منحنی بسته ساده با جهت توصیف شده در بخش ۲.۷ است. منظور از یک چند گونای 3 بعدی جهتدار در \mathbb{R}^3 یعنی یک ناحیهء مقدماتی در \mathbb{R}^3 (فرض می‌کنیم مرزش، که یک سطح است، جهت روبه‌خارج که در بخش ۴.۷ مطرح شد داشته باشد). قضیه متحدساز زیر را، چنانکه مرسوم است، "قضیه استوکس" می‌نامیم.

قضیه ۱۶ (قضیه استوکس). فرض کنیم M یک چند گونای k بعدی جهتدار ($2 \leq k = 3$) باشد که جزء مجموعه K است. همچنین، ω یک $(k-1)$ -فرم بر K باشد. در

این صورت ،

$$\int_{\partial M} \omega = \int_M d\omega$$

تمرینات

۱. $\omega \wedge \eta$ را در صورتی بیابید که

$$\begin{array}{ll} \omega = x dx - y dy & (\neg) \quad \omega = 2x dx + y dy \quad (\bar{\Gamma}) \\ \eta = y dx + x dy & \eta = x^3 dx + y^2 dy \end{array}$$

$$\begin{array}{ll} \omega = xy dy dz + x^2 dx dy & (\bar{\Gamma}) \quad \omega = x dx + y dy + z dz \quad (\bar{\Gamma}) \\ \eta = dx + dz & \eta = z dx dy + x dy dz + y dz dx \end{array}$$

$$\begin{array}{l} \omega = e^{xyz} dx dy \quad (\bar{\Gamma}) \\ \eta = e^{-xyz} dz \end{array}$$

۲. ثابت کنید که

$$(a_1 dx + a_2 dy + a_3 dz) \wedge (b_1 dy dz + b_2 dz dx + b_3 dx dy) = \left(\sum_{i=1}^3 a_i b_i \right) dx dy dz$$

۳. در مثالهای زیر $d\omega$ را بیابید .

$$\omega = y^2 \cos x dy + xy dx + dz \quad (\neg) \quad \omega = x^2 y + y^3 \quad (\bar{\Gamma})$$

$$\omega = x dx dy + z dy dz + y dz dx \quad (\bar{\Gamma}) \quad \omega = xy dy + (x + y)^2 dx \quad (\bar{\Gamma})$$

$$\omega = (x^2 + y^2 + z^2) dz \quad (\bar{\Gamma}) \quad \omega = (x^2 + y^2) dy dz \quad (\bar{\Gamma})$$

$$\omega = x^2 y dy dz \quad (\bar{\Gamma}) \quad \omega = \frac{-x}{x^2 + y^2} dx + \frac{y}{x^2 + y^2} dy \quad (\bar{\Gamma})$$

۴. فرض کنید $V: K \rightarrow \mathbb{R}^3$ یک میدان برداری تعریف شده با

$$V(x, y, z) = G(x, y, z)\mathbf{i} + H(x, y, z)\mathbf{j} + F(x, y, z)\mathbf{k}$$

بوده ، و η یک 2-فرم بر K باشد که با

$$\eta = F dx dy + G dy dz + H dz dx$$

داده شده است . نشان دهید که $d\eta = (\text{div } V) dx dy dz$

۵. اگر $V = A(x, y, z)\mathbf{i} + B(x, y, z)\mathbf{j} + C(x, y, z)\mathbf{k}$ یک میدان برداری بر \mathbb{R}^3 باشد .

عمل 2-فرمها \rightarrow میدانهای برداری : Form_2 را به صورت زیر تعریف کنید :

$$\text{Form}_2(V) = A dy dz + B dz dx + C dx dy$$

(۱) نشان دهید که $\text{Form}_2(\alpha V_1 + V_2) = \alpha \text{Form}_2(V_1) + \text{Form}_2(V_2)$ ، که در آن α عددی حقیقی می‌باشد.

(ب) نشان دهید که $\text{Form}_2(\text{curl } V) = d\omega$ ، که در آن $\omega = A dx + B dy + C dz$.

۶. با استفاده از صورت فرم دیفرانسیلی قضیه استوکس، صورت میدان برداری آن در

بخش ۲.۷ را ثابت کنید. این مطلب را برای قضیه گاوس تکرار نمایید.

۷. قضیه ۱۶ را در حالت $k = 1$ تعبیر نمایید.

۸. فرض کنید $\omega = (x + y) dz + (y + z) dx + (x + z) dy$ ، و S قسمت بالایی کره یک

باشد؛ یعنی، S مجموعه (x, y, z) هایی باشد که $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و $z \geq 0$.

دایره یک در صفحه xy است. انتگرال $\int_{\partial S} \omega$ را مستقیماً و با استفاده از قضیه استوکس حساب کنید.

۹. فرض کنید T جسم مثلثی محدود به صفحه xy ، صفحه xz ، صفحه yz ، و صفحه

$$2x + 3y + 6z = 12 \text{ باشد. انتگرال}$$

$$\int_{\partial T} F_1 dx dy + F_2 dy dz + F_3 dz dx$$

را مستقیماً و با استفاده از قضیه گاوس در صورتی حساب کنید که

$$(۱) \quad F_1 = 3y, F_2 = 18z, F_3 = -12 \quad \text{و}$$

$$(ب) \quad F_1 = z, F_2 = x^2, F_3 = y$$

۱۰. انتگرال $\int_S \omega$ را که در آن $\omega = z dx dy + x dy dz + y dz dx$ و S کره یک است مستقیماً

و با استفاده از قضیه گاوس محاسبه کنید.

۱۱. فرض کنید R یک ناحیه مقدماتی در \mathbb{R}^3 باشد. نشان دهید که حجم R از فرمول زیر

به دست می‌آید:

$$v(R) = \frac{1}{3} \int_{\partial R} x dy dz + y dz dx + z dx dy$$

۱۲. در بخش ۲.۳ دیدیم که طول $l(\sigma)$ منحنی $(\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t)))$ ، $a \leq t \leq b$ ، از فرمول

زیر به دست می‌آید:

$$l(\sigma) = \int ds = \int_a^b \left(\frac{ds}{dt} \right) dt$$

که در آن، به بیان نادقیق،

$$(ds)^2 = (dx)^2 + (dy)^2 + (dz)^2$$

یا

$$\frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}$$

حال فرض کنید سطح S به معادله پارامتری $\Phi(u, v) = (x(u, v), y(u, v), z(u, v))$ ، $(u, v) \in D$ داده شده باشد. نشان دهید که مساحت S را می توان به صورت زیر بیان کرد:

$$A(S) = \int_D dS$$

که در آن $(dS)^2 = (dx \wedge dy)^2 + (dy \wedge dz)^2 + (dz \wedge dx)^2$ (راهنمایی).

$$dx = \frac{\partial x}{\partial u} du + \frac{\partial x}{\partial v} dv$$

و به همین ترتیب در مورد dy و dz . از قانون فرمها برای 1- فرمهای اساسی du و dv استفاده کنید. در این صورت، dS به صورت یک تابع ضربدر 2- فرم اساسی $du dv$ در می آید، که از آن می توان روی D انتگرال گرفت.

تمرینات دوره ای برای فصل ۷

۱. با استفاده از قضیه گرین، مساحت یک حلقه از منحنی $x = a \sin \theta \cos \theta, y = a \sin^2 \theta$ را به ازای $a > 0$ و $0 \leq \theta \leq \pi$ بیابید.
۲. فرض کنید $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z), r = \|\mathbf{r}\|$. نشان دهید که $\nabla^2(\log r) = 1/r^2$ و $\nabla^2(r^n) = n(n+1)r^{n-2}$.
۳. فرض کنید m یک میدان برداری ثابت بوده و $\phi = \frac{\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^3}, \mathbf{F} = \frac{\mathbf{m} \times \mathbf{r}}{r^3}$. $\nabla \phi, \nabla \cdot \mathbf{F}, \nabla \times \mathbf{F}$ را محاسبه نمایید.
۴. اگر $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ و $\nabla \times \mathbf{G} = \mathbf{0}$ ، ثابت کنید $\nabla \cdot (\mathbf{F} \times \mathbf{G}) = 0$.
۵. ثابت کنید هرگاه $\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$ ، آنگاه به ازای f ، $\mathbf{F} = \mathbf{G} + \nabla f$.
۶. اتحاد زیر را ثابت کنید:

$$(\mathbf{F} \cdot \nabla)\mathbf{F} = \frac{1}{2}\nabla(\mathbf{F} \cdot \mathbf{F}) + (\nabla \times \mathbf{F}) \times \mathbf{F}$$

۷. فرض کنید $\mathbf{F} = 2yzi + (-x + 3y + 2)j + (x^2 + z)k$. انتگرال $\int_S (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot d\mathbf{S}$ را در صورتی حساب کنید که S استوانه $x^2 + y^2 = a^2, 0 \leq z \leq 1$ (بدون بالا و پایین) باشد. این انتگرال را در صورت گنجانده شدن بالا و پایین محاسبه نمایید.
۸. فرض کنید Ω یک ناحیه در \mathbb{R}^3 با مرز $\partial\Omega$ باشد. اتحاد زیر را ثابت نمایید:

$$\int_{\partial\Omega} [\mathbf{F} \times (\nabla \times \mathbf{G})] \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Omega} (\nabla \times \mathbf{F}) \cdot (\nabla \times \mathbf{G}) dV - \int_{\Omega} \mathbf{F} \cdot (\nabla \times \nabla \times \mathbf{G}) dV$$

۹. فرض کنید $\mathbf{F} = x^2yi + z^8j - 2xyzk$. انتگرال \mathbf{F} روی سطح مکعب یکه را حساب کنید.
۱۰. قضیه گرین را برای انتگرال خط

$$\int_C x^2y dx + y dy$$

- در حالتی تحقیق کنید که C مرز ناحیه بین منحنیهای $y = x$ و $y = x^3$ ، $0 \leq x \leq 1$ باشد.

۱۱. (آ) نشان دهید $\mathbf{F} = (x^3 - 2xy^3)i - 3x^2yz^2j + 3x^2y^2z^2k$ یک میدان برداری گرادیان است.
- (ب) انتگرال \mathbf{F} را در امتداد مسیر $x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta$ ، $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ، حساب کنید.

۱۲. آیا می توان قضیه گرین در صفحه را از قضیه گاوس نتیجه بگیرید؟

۱۳. (آ) نشان دهید که $\mathbf{F} = 6xy(\cos z)i + 3x^2(\cos z)j - 3x^2y(\sin z)k$ یک میدان بقاست (ر. ک. بخش ۳.۷).

(ب) f را طوری بیابید که $\mathbf{F} = \nabla f$.

- (پ) انتگرال \mathbf{F} را در امتداد منحنی $x = \cos^3 \theta, y = \sin^3 \theta, z = 0$ ، $0 \leq \theta \leq \pi/2$ ، حساب کنید.

۱۴. فرض کنید $\nabla \cdot \mathbf{F}(x_0, y_0, z_0) > 0$. نشان دهید که به ازای کره به قدر کافی کوچک S به مرکز (x_0, y_0, z_0) ، شار \mathbf{F} به خارج S مثبت است.

۱۵. فرض کنید سرعت سیالی با $\mathbf{F} = 6xzi + x^2yj + yzk$ توصیف شده باشد. میزان خروج سیال از مکعب یکه را حساب کنید.

۱۶. فرض کنید $\mathbf{F} = x^2i + (x^2y - 2xy)j - x^2zk$. آیا \mathbf{G} ای هست که $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$ ؟

۱۷. فرض کنید \mathbf{a} یک بردار ثابتی بوده و $\mathbf{F} = \mathbf{a} \times \mathbf{r}$ [طبق معمول $\mathbf{r}(x, y, z) = (x, y, z)$].

آیا F یک میدان بقا است؟ اگر چنین است، یک پتانسیل برای آن بیابید.

* ۱۸. یک مایع تراکم‌ناپذیر با میدان سرعت F و چگالی ρ را در نظر بگیرید.

(آ) هرگاه ρ به ازای هر t ی ثابت ثابت باشد، آنگاه نشان دهید ρ نسبت به t نیز ثابت است.

(ب) هرگاه ρ نسبت به t ثابت باشد، آنگاه نشان دهید که $F \cdot \nabla \rho = 0$.

۱۹. (آ) فرض کنید $f(x, y, z) = 3xye^{z^2}$ را محاسبه کنید.

(ب) فرض کنید $\sigma(t) = (3 \cos^3 t, \sin^2 t, e^t)$ ، $0 \leq t \leq \pi$. انتگرال

$$\int_{\sigma} \nabla f \cdot ds$$

را حساب کنید.

(پ) قضیه استوکس را برای میدانهای برداری گرادیان $F = \nabla f$ مستقیماً "تحقیق کنید.

۲۰. انتگرال $\int_C x^3 dy - y^3 dx$ را با قضیه گرین، یا به نحو دیگر، در صورتی حساب کنید که C دایره $(x^2 + y^2 = 1)$ باشد.

۲۱. انتگرال $\int_S F \cdot dS$ را در صورتی حساب کنید که $F = xi + yj + 3k$ و S سطح کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ باشد.

۲۲. (آ) قضیه استوکس را برای سطوح در \mathbb{R}^3 بیان کنید.

(ب) فرض کنید F یک میدان برداری بر \mathbb{R}^3 باشد که در $\nabla \times F = 0$ صدق می‌نماید. با استفاده از قضیه استوکس، نشان دهید $\int_C F \cdot ds = 0$ که در آن C یک منحنی بسته است.

۲۳. درستی یا نادرستی احکام زیر را معین نمایید.

(آ) یک تابع پیوسته همیشه مشتق‌پذیر است.

(ب) هرگاه مشتقات جزئی f موجود و پیوسته باشند، آنگاه f مشتق‌پذیر می‌باشد.

(پ) $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x^2 + y^2 > 0\}$ یک مجموعه باز است.

(ت) اندازه کرل میدان برداری F مقدار گردش صفحه‌قائم به $\nabla \times F$ بر واحد مساحت را نمایش می‌دهد.

(ث) همواره $v \cdot (v \times w) = 0$.

(ج) همواره $\nabla \cdot (\nabla f) \geq 0$.

(چ) $\int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dx dy = \int_0^1 \int_0^1 f(x, y) dy dx$ (چ) به ازای جمیع توابع پیوسته $f(x, y)$ برقرار است.

(ح) مساحت ناحیه^۴ محصور به منحنی بسته C از $A = \int_C x dy$ به دست می آید.

(خ) هرگاه S یک سطح بوده و F بر مرز S عمود باشد، آنگاه $\int_S (\nabla \times F) \cdot dS = 0$.

(د) هرگاه ارتفاع یک تپه با تابع $h(x, y)$ توصیف شده باشد، آنگاه یک اسکی باز که بخواهد سریعتر پایین بیاید باید در جهت عمود بر ∇h حرکت کند.

(ذ) $\nabla \times (\nabla \times F)$ همیشه مساوی 0 است.

۲۴. انتگرال $\int_C yz dx + xz dy + xy dz$ را در صورتی حساب کنید که C فصل مشترک استوانه^۵ $x^2 + y^2 = 1$ و سطح $z = y^2$ باشد.

۲۵. انتگرال $\int_C (x + y) dx + (2x - z) dy + (y + z) dz$ را در صورتی حساب کنید که C محیط مثلثی به رئوس $(2, 0, 0)$ ، $(0, 3, 0)$ ، و $(0, 0, 6)$ به همین ترتیب باشد.

۲۶. از میدانهای زیر کدامها میدان بقا بر \mathbb{R}^3 اند؟ برای آنهایی که چنین اند، تابع f را طوری بیابید که $F = \nabla f$.

$$F(x, y, z) = 3x^2y\mathbf{i} + x^3\mathbf{j} + 5\mathbf{k} \quad (\bar{A})$$

$$F(x, y, z) = (x + z)\mathbf{i} - (y + z)\mathbf{j} + (x - y)\mathbf{k} \quad (\bar{B})$$

$$F(x, y, z) = 2xy^3\mathbf{i} + x^2z^3\mathbf{j} + 3x^2yz^2\mathbf{k} \quad (\bar{C})$$

۲۷. دو میدان برداری زیر در \mathbb{R}^3 را در نظر بگیرید.

$$F(x, y, z) = y^2\mathbf{i} - z^2\mathbf{j} + x^2\mathbf{k} \quad (\text{یک})$$

$$G(x, y, z) = (x^3 - 3xy^2)\mathbf{i} + (y^3 - 3x^2y)\mathbf{j} + z\mathbf{k} \quad (\text{دو})$$

(\bar{A}) از این میدانها کدامها میدان بقا بر \mathbb{R}^3 اند (یعنی، میدان گرادیان اند). برای جواب خود دلیل بیاورید.

(ب) پتانسیل میدانهای بقای فوق را پیدا کنید.

(پ) فرض کنید α مسیری از $(0, 0, 0)$ به $(1, 1, 1)$ باشد که در امتداد پیلهای مکعب

$0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1, 0 \leq z \leq 1$ از $(0, 0, 0)$ به $(0, 0, 1)$ به $(0, 1, 1)$ به $(1, 1, 1)$ می رود.

همچنین، β مسیری از $(0, 0, 0)$ به $(1, 1, 1)$ که مستقیماً "در امتداد قطر مکعب باشد" مقادیر

انتگرالهای خط

$$\int_{\alpha} F \cdot ds, \quad \int_{\alpha} G \cdot ds, \quad \int_{\beta} F \cdot ds, \quad \int_{\beta} G \cdot ds$$

را پیدا کنید.

۲۸. میدان برداری ثابت $F(x, y, z) = i + 2j - k$ در \mathbb{R}^3 را در نظر بگیرید.

(آ) میدان اسکالر $\phi(x, y, z)$ در \mathbb{R}^3 را طوری بیابید که در \mathbb{R}^3 ، $\nabla\phi = F$ و $\phi(0, 0, 0) = 0$

(ب) جمیع نقاطی از کره Σ به شعاع ۲ حول مبدأ را بیابید که در آنها

(یک) ϕ ماکزیمم است و

(دو) ϕ مینیمم است.

(پ) ماکزیمم و مینیمم ϕ بر Σ را حساب کنید.

ضمایم

ریاضیات مشکل است ، حتی برای ریاضیدانان .

رینهولد برهمه

برهان قضایا باید در زمینه وسیعتری عنوان شوند .

کنت راس

ضمیمه آ چند قضیه تکنیکی در باب مشتقگیری

ضمیمه ب چند قضیه تکنیکی در باب انتگرالگیری

ضمیمه پ جدولها

۱. توابع مثلثاتی

۲. مشتقات

۳. انتگرالها

ضمیمه ت جواب تمرینات با شماره‌های فرد

ضمیمه ث چند علامت مهم

ضمیمه آ

چند قضیه تکنیکی در باب مشتقگیری

در این ضمیمه تعریف مشتق را با تفصیل بیشتر بررسی کرده و برهانهای حذف شده در بخشهای ۲۰۲، ۳۰۲، و ۴۰۲ را ذکر می‌نماییم .

مطلب را با ذکر برهانهای قضایای حدی مذکور در بخش ۲۰۲ آغاز می‌کنیم (شماره

قضایا با فصل ۲ انطباق دارد .) ابتدا تعریف حد را یادآور می‌شویم .

تعریف حد. فرض کنیم $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ که در آن A باز است. همچنین، x_0 در A یا یک نقطه مرزی A بوده، و N همسایگی از \mathbb{R}^m باشد. گوییم وقتی x به x_0 نزدیک می‌شود f "مآلاً" در N جا می‌گیرد اگر همسایگی مانند U از x_0 موجود باشد به طوری که $x \neq x_0$ ، $x \in U$ و $x \in A$ ایجاب می‌کند که $f(x) \in N$. گوییم وقتی x به x_0 نزدیک شود $f(x)$ به b نزدیک می‌شود، یا با علامات

$$\text{وقتی } x \rightarrow x_0, \text{ یا } \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b, \text{ یا } f(x) \rightarrow b,$$

اگر به ازای هر همسایگی b ، وقتی x به x_0 نزدیک شود، f مآلاً "در N جا گیرد. ممکن است وقتی x به x_0 نزدیک می‌شود، مقادیر $f(x)$ به عددی خاص نزدیک نشوند. در این حالت گوییم $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ موجود نیست.

ابتدا ثابت می‌کنیم این با تنظیم δ - ε ی حدود معادل است.

قضیه ۲. فرض کنیم $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ و x_0 نقطه‌ای در A یا بر مرز A باشد. در این صورت $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ اگر و فقط اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ی موجود باشد به طوری که به ازای $x \in A$ و $0 < \|x - x_0\| < \delta$ داشته باشیم $\|f(x) - b\| < \varepsilon$.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$. به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، ε -همسایگی $N = D_\varepsilon(b)$ ، یعنی گوی یا قرص به شعاع ε و مرکز b ، را در نظر می‌گیریم. طبق تعریف حد، وقتی x به x_0 نزدیک می‌شود، f مآلاً "در $D_\varepsilon(b)$ جا می‌گیرد. بدین معنی که همسایگی از x_0 مانند U وجود دارد به طوری که اگر $x \in U$ و $x \neq x_0$ ، $f(x) \in D_\varepsilon(b)$. اما چون U باز بوده و $x_0 \in U$ ، $\delta > 0$ ای وجود دارد به طوری که $D_\delta(x_0) \subset U$. در نتیجه، $0 < \|x - x_0\| < \delta$ و $x \in A$ ایجاب می‌کنند که $x \in D_\delta(x_0) \subset U$ ، لذا $f(x) \in D_\varepsilon(b)$ ، که نامساوی $\|f(x) - b\| < \varepsilon$ را نتیجه می‌دهد. این همان حکم δ - ε است که می‌خواستیم ثابت کنیم.

هنوز عکس مطلب برای اثبات باقی است. فرض کنیم به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای وجود داشته باشد به طوری که $0 < \|x - x_0\| < \delta$ و $x \in A$ نامساوی $\|f(x) - b\| < \varepsilon$ را ایجاب کنند. فرض کنیم N یک همسایگی از b باشد. باید نشان دهیم که وقتی $x \rightarrow x_0$ ، f مآلاً "در N جا دارد؛ یعنی، باید مجموعه‌ای $U \subset \mathbb{R}^n$ بیابیم که $x \in U$

$x \in A$ ، و $x \neq x_0$ تعلق $f(x) \in N$ را ایجاب نمایند. اما چون N باز است ، $\varepsilon > 0$ ی وجود دارد به طوری که $D_\varepsilon(b) \subset N$. هرگاه $U = D_\delta(x)$ (طبق فرض) اختیار کنیم ، آنگاه $x \in U$ ، $x \in A$ ، و $x \neq x_0$ نتیجه می دهد که $\|f(x) - b\| < \varepsilon$. یعنی ،

$$f(x) \in D_\varepsilon(b) \subset N$$

قضیه ۳ (یکتایی حدود) . هرگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b_1$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b_2$ ، آنگاه $b_1 = b_2$.

برهان . شایسته است از تنظیم δ - ε ی قضیه ۲ استفاده کنیم . فرض کنیم وقتی $x \rightarrow x_0$ ، $f(x) \rightarrow b_1$ و $f(x) \rightarrow b_2$. طبق فرض ، به ازای $\varepsilon > 0$ می توان $\delta_1 > 0$ ی یافت به طوری که هرگاه $x \in A$ و $0 < \|x - x_0\| < \delta_1$ ، آنگاه $\|f(x) - b_1\| < \varepsilon$ ، و به همین نحو ، $\delta_2 > 0$ ای هست به طوری که $\delta_2 < \|x - x_0\| < \delta_2$ ایجاب می کند که $\|f(x) - b_2\| < \varepsilon$. فرض کنیم δ کوچکتر از δ_1 و δ_2 باشد . x را طوری می گیریم که $0 < \|x - x_0\| < \delta$ و $x \in A$. یک چنین x وجود دارد ، زیرا x_0 در A یا یک نقطه مرزی A است . پس با استفاده از نامساوی مثلثی ، داریم

$$\begin{aligned} \|b_1 - b_2\| &= \|(b_1 - f(x)) + (f(x) - b_2)\| \\ &\leq \|b_1 - f(x)\| + \|f(x) - b_2\| < \varepsilon + \varepsilon = 2\varepsilon \end{aligned}$$

لذا ، به ازای هر $\varepsilon > 0$ خواهیم داشت $\|b_1 - b_2\| < 2\varepsilon$. از اینرو ، $b_1 = b_2$ ، چرا که اگر $b_1 \neq b_2$ ، می توان $\varepsilon = \|b_1 - b_2\|/2 > 0$ را گرفت و در این صورت خواهیم داشت $\|b_1 - b_2\| < \|b_1 - b_2\|$ ، که غیرممکن می باشد .

قضیه ۴ . فرض کنیم $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، $g: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، x_0 در A یا یک نقطه مرزی A بوده ، $b \in \mathbb{R}^m$ ، و $c \in \mathbb{R}$. در این صورت ، احکام زیر برقرار می باشند :

(یک) هرگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} cf(x) = cb$ ، که در آن $cf: A \rightarrow \mathbb{R}^m$ با $x \mapsto c(f(x))$ تعریف شده است .

(دو) هرگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b_1$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b_2$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} (f + g)(x) = b_1 + b_2$.

که در آن $(f + g): A \rightarrow \mathbb{R}^m$ با $x \mapsto f(x) + g(x)$ تعریف می شود .

(سه) هرگاه $m = 1$ ، $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b_1$ ، و $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x) = b_2$ ، آنگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} (fg)(x) = b_1 b_2$.

که در آن $x \mapsto f(x)g(x)$ ، $(fg): A \rightarrow \mathbb{R}$

(چهار) هرگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b \neq 0$ ، $m = 1$ و به/زای هر $x \in A$ ، $f(x) \neq 0$ ، آنگاه

که در آن $x \mapsto 1/f(x)$ ، $1/f: A \rightarrow \mathbb{R}$ $\lim_{x \rightarrow x_0} 1/f = 1/b$

(پنج) هرگاه $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ که در آن $f_i: A \rightarrow \mathbb{R}$ ، $i = 1, \dots, m$ ، توابع

مؤلفه f اند، آنگاه $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = \mathbf{b} = (b_1, \dots, b_m)$ اگر و فقط اگر به/زای هر $i = 1, \dots, m$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f_i(x) = b_i$$

برهان. تکنیک برهان را با اثبات (یک) و (دو) توضیح می دهیم. برهان سایر احکام کمی پیچیده تر است و آن را به خواننده محول می کنیم. در هر حالت، تنظیم δ - ε ی قضیه ۲ محتملا "مناسبتین روش خواهد بود.

برای اثبات (یک) ، فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. باید عدد $\delta > 0$ را طوری بیابیم که اگر $\delta > 0 < \|x - x_0\|$ ، $0 < \|cf(x) - cb\| < \varepsilon$ ، اگر $c = 0$ ، هر δ مناسب است؛ در نتیجه، می توان فرض کرد $c \neq 0$. فرض کنیم $\varepsilon' = \varepsilon/|c|$. از تعریف حد معلوم می شود که δ ای وجود دارد که $0 < \|x - x_0\| < \delta$ نامساوی $\|f(x) - b\| < \varepsilon'$ را ایجاب می کند. لذا، از $\delta > 0 < \|x - x_0\|$ نتیجه می شود که $\|cf(x) - cb\| = |c| \|f(x) - b\| < \varepsilon$ و این (یک) را ثابت خواهد کرد.

برای اثبات (دو) ، مجدداً فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده باشد. $\delta_1 > 0$ را طوری می گیریم که $\delta_1 > 0 < \|x - x_0\| < \delta_1$ نامساوی $\|f(x) - b_1\| < \varepsilon/2$ را ایجاب نماید. به همین نحو، $\delta_2 > 0$ ای اختیار می کنیم که $\delta_2 > 0 < \|x - x_0\| < \delta_2$ نامساوی $\|g(x) - b_2\| < \varepsilon/2$ را ایجاب نماید. فرض کنیم δ از مینیمم δ_1 و δ_2 کوچکتر باشد. در این صورت $\delta > 0 < \|x - x_0\| < \delta$ ایجاب می کند که

$$\|f(x) + g(x) - b_1 - b_2\| \leq \|f(x) - b_1\| + \|g(x) - b_2\| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

لذا، ثابت کرده ایم که وقتی $x \rightarrow x_0$ ، $(f + g)(x) \rightarrow b_1 + b_2$.

تعریف. فرض کنیم $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ تابعی با قلمرو A باشد. همچنین، $x_0 \in A$ گوئیم f در x_0 پیوسته است اگر و فقط اگر

$$\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$$

اگر فقط بگوییم f پیوسته است منظورمان این است که f در هر نقطه x_0 از A پیوسته است.

از قضیه ۲ می‌توان قضیه ۷ را به دست آورد: f در $x_0 \in A$ پیوسته است اگر و فقط اگر به ازای هر عدد $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای موجود باشد به طوری که

$$\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon \quad \text{که } \|x - x_0\| < \delta \text{ ایجاب می‌کنند}$$

یکی از خواص توابع پیوسته که در بخش ۲.۲ بدون برهان ذکر شد چنین است.

قضیه ۵. فرض کنیم $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ و $g: B \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$. همچنین، $f(A) \subset B$ ؛ در نتیجه، $g \circ f$ بر A تعریف شده است. هرگاه f در $x_0 \in A$ و g در $y_0 = f(x_0)$ پیوسته باشد، آنگاه $g \circ f$ در x_0 پیوسته می‌باشد.

برهان. از محک ε - δ برای پیوستگی استفاده می‌کنیم. لذا، به ازای $\varepsilon > 0$ داده‌شده، باید $\delta > 0$ ای چنان یافت که به ازای $x \in A$

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \text{نامساوی } \|(g \circ f)(x) - (g \circ f)(x_0)\| < \varepsilon \text{ را ایجاب نماید.}$$

چون g در $y_0 = f(x_0) \in B$ پیوسته است، $\gamma > 0$ ای وجود دارد به طوری که به ازای

$$y \in B$$

$$\|y - y_0\| < \gamma \quad \text{نامساوی } \|g(y) - g(y_0)\| < \varepsilon \text{ نتیجه می‌شود.}$$

و چون f در $x_0 \in A$ پیوسته است، به ازای این $\gamma > 0$ ، $\delta > 0$ ای هست به طوری که به ازای

$$x \in A$$

$$\|x - x_0\| < \delta \quad \text{نامساوی } \|f(x) - f(x_0)\| < \gamma \text{ را}$$

ایجاب می‌کند و این به نوبه خود نامساوی

$$\|g(f(x)) - g(f(x_0))\| < \varepsilon$$

را ایجاب خواهد کرد، که همان نتیجه مطلوب می‌باشد.

در بخش ۳.۲ برای ساده شدن مطلب وجود مشتقات جزئی f را در تعریف $Df(x_0)$ گنجاندم. هدف بعدی ما نشان دادن آن است که این فرض را می‌توان حذف کرد. بحث را با تعریف مجدد "مشتق‌پذیر" آغاز می‌کنیم. قضیه ۱۶ نشان می‌دهد که این تعریف با تعریف قدیم معادل است.

تعریف. فرض کنیم U مجموعه‌ای باز در \mathbb{R}^n بوده و $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ تابع معلومی باشد. گوئیم f در $x_0 \in U$ مشتقپذیر است اگر و فقط اگر ماتریس $m \times n$ ی مانند T باشد به طوری که

$$(1) \quad \lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(x) - f(x_0) - T(x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

ما T را مشتق f در x_0 نامیده و آن را با $Df(x_0)$ نشان می‌دهیم. با نماد ماتریس، $T(x - x_0)$ به معنی

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 - x_{01} \\ \vdots \\ x_n - x_{0n} \end{bmatrix}$$

است، که در آن $x = (x_1, \dots, x_n)$ و $x_0 = (x_{01}, \dots, x_{0n})$. گاهی $T(y)$ را به صورت $T \cdot y$ یا فقط Ty خواهیم نوشت.

با فرض $h = x - x_0$ می‌توان شرط (۱) را به صورت زیر نوشت:

$$(2) \quad \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Th\|}{\|h\|} = 0$$

رابطه (۲) با نماد ε - δ می‌گوید: به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای وجود دارد به طوری که $0 < \|h\| < \delta$ نامساوی

$$\frac{\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Th\|}{\|h\|} < \varepsilon$$

یا، به بیان دیگر،

$$\|f(x_0 + h) - f(x_0) - Th\| < \varepsilon \|h\|$$

را ایجاب می‌کند. توجه کنید که چون U باز است، اگر δ به قدر کافی کوچک باشد، $\|h\| < \delta$ ایجاب می‌کند که $x_0 + h \in U$.

کار ما نشان دادن آن است که ماتریس T لزوماً "ماتریس مشتقات جزئی است" و در نتیجه، این تعریف مجرد با تعریف مشتقپذیری ذکر شده در بخش ۳.۲ سازگار می‌باشد.

قضیه ۱۶. فرض کنیم $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ در $x_0 \in \mathbb{R}^n$ مشتقپذیر باشد. در این صورت، همه مشتقات جزئی f در نقطه x_0 وجود دارند و ماتریس $m \times n$ عبارت است از

$$(t_{ij}) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)$$

یعنی،

$$T = Df(x_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & \vdots \\ \frac{\partial f_m}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial f_m}{\partial x_n} \end{bmatrix}$$

که در آن $\partial f_i / \partial x_j$ در x_0 حساب شده است. بخصوص، این ایجاب می کند که T به طور منحصراً به فرد معین است؛ یعنی، ماتریس دیگری که در شرط (۱) صادق باشد وجود ندارد.

برهان. بنا بر قضیه ۴ (پنج)، شرط (۲) عبارت است از

$$\lim_{\mathbf{h} \rightarrow 0} \frac{|f_i(x_0 + \mathbf{h}) - f_i(x_0) - (T\mathbf{h})_i|}{\|\mathbf{h}\|} = 0, \quad 1 \leq i \leq m$$

در اینجا $(T\mathbf{h})_i$ مؤلفه i م بردار ستونی $T\mathbf{h}$ است. حال فرض کنیم $\mathbf{h} = a\mathbf{e}_j = (0, \dots, a, \dots, 0)$ عدد a در جای j م بوده و سایر جاها صفر می باشد. داریم

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{|f_i(x_0 + a\mathbf{e}_j) - f_i(x_0) - a(T\mathbf{e}_j)_i|}{|a|} = 0$$

یا، به بیان دیگر،

$$\lim_{a \rightarrow 0} \left| \frac{f_i(x_0 + a\mathbf{e}_j) - f_i(x_0)}{a} - (T\mathbf{e}_j)_i \right| = 0$$

در نتیجه،

$$\lim_{a \rightarrow 0} \frac{f_i(x_0 + a\mathbf{e}_j) - f_i(x_0)}{a} = (T\mathbf{e}_j)_i$$

اما این حد چیزی جز مشتق جزئی $\partial f_i / \partial x_j$ که در نقطه \mathbf{x}_0 حساب شده نیست. لذا، ثابت کرده‌ایم که $\partial f_i / \partial x_j$ موجود و مساوی $(Te_j)_i$ می‌باشد. اما $(Te_j)_i = t_{ij}$ (ر. ک. بخش ۱.۵۰)؛ لذا، قضیه نتیجه خواهد شد.

کار بعدی ما نشان دادن آن است که مشتق پذیری پیوستگی را ایجاب می‌کند.

قضیه ۸. فرض کنیم $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ در \mathbf{x}_0 مشتق پذیر باشد. در این صورت، f در \mathbf{x}_0 پیوسته است و، به علاوه، به ازای ثابتی چون M_1 و \mathbf{x} نزدیک به \mathbf{x}_0 که $\mathbf{x} \neq \mathbf{x}_0$ ، داریم

$$\|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)\| < M_1 \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$$

برهان. تمرین ۲ در آخر این بخش لازم می‌شود؛ یعنی، $\|Df(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}\| \leq M \|\mathbf{h}\|$ ، که در آن M جذر مجموع مربعات عناصر ماتریسی در $Df(\mathbf{x}_0)$ است.

$\varepsilon = 1$ را اختیار می‌کنیم. در این صورت، طبق تعریف مشتق (ر. ک. فرمول (۲))، $\delta_1 > 0$ ی هست به طوری که $0 < \|\mathbf{h}\| < \delta_1$ ایجاب می‌کند که

$$\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - Df(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}\| < \varepsilon \|\mathbf{h}\| = \|\mathbf{h}\|$$

اما می‌بینیم هرگاه $\|\mathbf{h}\| < \delta_1$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| &= \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - Df(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h} + Df(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}\| \\ &\leq \|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - Df(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}\| + \|Df(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}\| \\ &< \|\mathbf{h}\| + M \|\mathbf{h}\| = (1 + M) \|\mathbf{h}\| \end{aligned}$$

(توجه کنید که در اینجا از نامساوی مثلثی استفاده شده است.) با فرض $M_1 = 1 + M$ حکم دوم قضیه ثابت می‌شود.

حال فرض کنیم ε' عدد مثبتی بوده، و δ کوچکتر از δ_1 و $\varepsilon'/(1 + M)$ باشد. در این صورت، $\delta < \|\mathbf{h}\|$ ایجاب می‌کند که

$$\|f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0)\| < (1 + M) \varepsilon' / (1 + M) = \varepsilon'$$

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x_0 + h) = f(x_0)$$

یا پیوسته بودن f در x_0 را ثابت می‌کند.

در بخش ۳.۲ گفتیم که یک محک مهم برای مشتقپذیری وجود و پیوسته بودن مشتقات جزئی است. حال به اثبات این امر می‌پردازیم.

قضیه ۹. فرض کنیم $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$. همچنین، مشتقات جزئی $\partial f_i / \partial x_j$ تابع f همه در همسایگی نقطه $x \in U$ موجود و پیوسته باشند. در این صورت، f در x مشتقپذیر خواهد بود.

برهان. (در این برهان از قضیه مقدار میانگین آمده در حساب دیفرانسیل و انتگرال یک متغیره استفاده می‌کنیم. برای صورت این قضیه، ر.ک. ص ۰۱۱۹.)
کافی است به همان دلایل برهان قضیه ۱۶، حالت $m = 1$ را در نظر بگیریم. لذا، فرض کنیم $f: U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ باید نشان دهیم که

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\left| f(x + h) - f(x) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(x) h_i \right|}{\|h\|} = 0$$

می‌نویسیم

$$\begin{aligned} & f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_n) \\ &= f(x_1 + h_1, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) \\ &+ f(x_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n) - f(x_1, x_2, x_3 + h_3, \dots, x_n + h) + \dots \\ &+ f(x_1, \dots, x_{n-1} + h_{n-1}, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + h_n) \\ &+ f(x_1, \dots, x_{n-1}, x_n + h_n) - f(x_1, \dots, x_n) \end{aligned}$$

(این را یک "مجموع توی هم رو" می‌نامند، زیرا هر جمله با جمله قبل یا بعد خود، جز جملات اول و آخر، حذف می‌شود.) بنا بر قضیه مقدار میانگین، این عبارات را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) = \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}_1)h_1 + \frac{\partial f}{\partial x_2}(\mathbf{y}_2)h_2 + \cdots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}_n)h_n$$

که در آن $\mathbf{y}_1 = (c_1, x_2 + h_2, \dots, x_n + h_n)$ و c_1 بین x_1 و $x_1 + h_1$ است؛
 $\mathbf{y}_2 = (x_1, c_2, x_3 + h_3, \dots, x_n + h_n)$ و c_2 بین x_2 و $x_2 + h_2$ است؛ و
 $\mathbf{y}_n = (x_1, \dots, x_{n-1}, c_n)$ و c_n بین x_n و $x_n + h_n$ می باشد. لذا، می توان نوشت

$$\begin{aligned} & \left| f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})h_i \right| \\ &= \left| \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right) h_1 + \cdots + \left(\frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right) h_n \right| \end{aligned}$$

بنابر نامساوی مثلثی، این عبارت نابیشتر است از

$$\begin{aligned} & \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right| |h_1| + \cdots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right| |h_n| \\ & \leq \left\{ \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right| + \cdots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right| \right\} \|\mathbf{h}\| \end{aligned}$$

زیرا $|\mathbf{h}_i| \leq \|\mathbf{h}\|$. لذا، ثابت کرده ایم که

$$\begin{aligned} & \frac{\left| f(\mathbf{x} + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}) - \sum_{i=1}^n \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x})h_i \right|}{\|\mathbf{h}\|} \\ & \leq \left| \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{y}_1) - \frac{\partial f}{\partial x_1}(\mathbf{x}) \right| + \cdots + \left| \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{y}_n) - \frac{\partial f}{\partial x_n}(\mathbf{x}) \right| \end{aligned}$$

اما چون مشتقات جزئی طبق فرض پیوسته اند، طرف راست وقتی $\mathbf{h} \rightarrow \mathbf{0}$ به 0 نزدیک می شود؛
 در نتیجه، طرف چپ نیز به 0 نزدیک خواهد شد.

بالاخره، قاعده بسیار مهم زنجیره ای را ثابت می کنیم.

قضیه ۱۱. فرض کنیم $U \subset \mathbb{R}^n$ و $V \subset \mathbb{R}^m$ باز باشند. همچنین، $g: U \rightarrow \mathbb{R}^m$ و $f: V \subset \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^p$ چنان توابعی باشند که g ، U را به V نگارد؛ در نتیجه، $f \circ g$ تعریف شده باشد. فرض کنیم g در \mathbf{x}_0 و f در $\mathbf{y}_0 = g(\mathbf{x}_0)$ مشتق پذیر باشد. در این صورت، $f \circ g$

در x_0 مشتقپذیر بوده و

$$D(f \circ g)(x_0) = Df(y_0)Dg(x_0)$$

برهان. طبق تعریف مشتق، باید تحقیق کنیم که

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \frac{\|f(g(x)) - f(g(x_0)) - Df(y_0)Dg(x_0) \cdot (x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} = 0$$

ابتدا صورت را بازنویسی کرده و نامساوی مثلثی را به صورت زیر به کار می‌بریم:

$$\begin{aligned} & \|f(g(x)) - f(g(x_0)) - Df(y_0) \cdot (g(x) - g(x_0)) \\ & \quad + Df(y_0) \cdot [g(x) - g(x_0) - Dg(x_0) \cdot (x - x_0)]\| \\ & \leq \|f(g(x)) - f(g(x_0)) - Df(y_0) \cdot (g(x) - g(x_0))\| \\ & \quad + \|Df(y_0) \cdot [g(x) - g(x_0) - Dg(x_0) \cdot (x - x_0)]\| \end{aligned}$$

همانند قضیه ۸، به ازای ثابتی چون M ، $\|Df(y_0) \cdot \mathbf{h}\| \leq M\|\mathbf{h}\|$ ، لذا، عبارت فوق نایبتر است از

$$(۳) \quad \|f(g(x)) - f(g(x_0)) - Df(y_0) \cdot (g(x) - g(x_0))\| + M\|g(x) - g(x_0) - Dg(x_0) \cdot (x - x_0)\|$$

چون g در x_0 مشتقپذیر است، به ازای $\varepsilon > 0$ ، $\delta_1 > 0$ وجود دارد به طوری که

$$0 < \|x - x_0\| < \delta_1$$

$$\frac{\|g(x) - g(x_0) - Dg(x_0) \cdot (x - x_0)\|}{\|x - x_0\|} < \frac{\varepsilon}{2M}$$

را ایجاب می‌کند. این جمله دوم معادله (۳) را از $\varepsilon\|x - x_0\|/2$ کمتر می‌سازد.

حال به جمله اول می‌پردازیم. بنا بر قضیه ۸، به ازای ثابتی چون M_1 ، اگر x

نزدیک x_0 باشد، مثلاً $0 < \|x - x_0\| < \delta_2$ ، داریم $\|g(x) - g(x_0)\| < M_1\|x - x_0\|$.

δ_3 را طوری می‌گیریم که $0 < \|y - y_0\| < \delta_3$ ایجاب کند که

$$\|f(y) - f(y_0) - Df(y_0) \cdot (y - y_0)\| < \varepsilon\|y - y_0\|/2M_1$$

چون $y = g(x)$ و $y_0 = g(x_0)$ ، اگر $\|x - x_0\| < \delta_3/M_1^*$ و $\|x - x_0\| < \delta_2$ ، داریم

$$\|y - y_0\| < \delta_3 \quad ; \quad \text{در نتیجه،}$$

$$\|f(g(\mathbf{x})) - f(g(\mathbf{x}_0)) - Df(\mathbf{y}_0) \cdot (g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0))\| < \varepsilon \|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)\| / 2M_1 < \varepsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| / 2$$

لذا، اگر $\delta = \min(\delta_1, \delta_2, \delta_3/M_1)$ ، عبارت (۳) کمتر است از

$$\varepsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| / 2 + \varepsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| / 2 = \varepsilon \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|$$

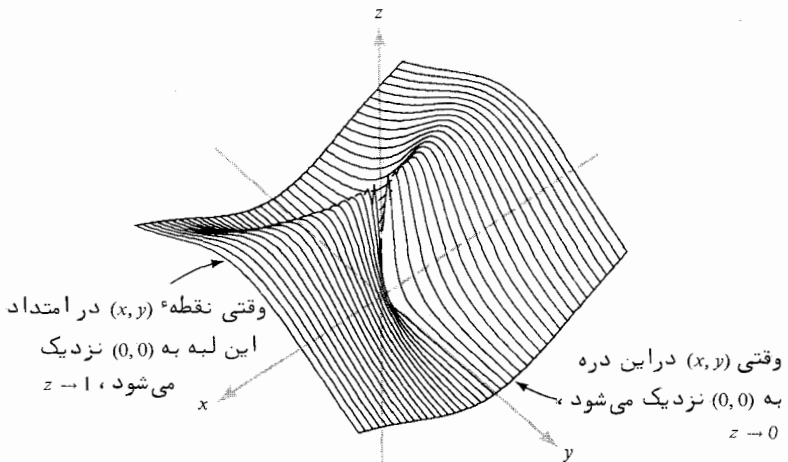
و در نتیجه، به ازای $\delta > 0$ ،

$$\frac{\|f(g(\mathbf{x})) - f(g(\mathbf{x}_0)) - Df(\mathbf{y}_0)Dg(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)\|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon$$

این قضیه را ثابت خواهد کرد.

دانشجو قبلاً "با چند مثال که قضایای فوق را توضیح می دهند برخورد کرده است. حال دو مثال را که ماهیت تکنیکی تری دارند مطرح می کنیم.

مثال ۱ (شکل ض ۱). فرض کنیم



شکل ض ۱

این تابع در $(0, 0)$ مشتقپذیر نیست.

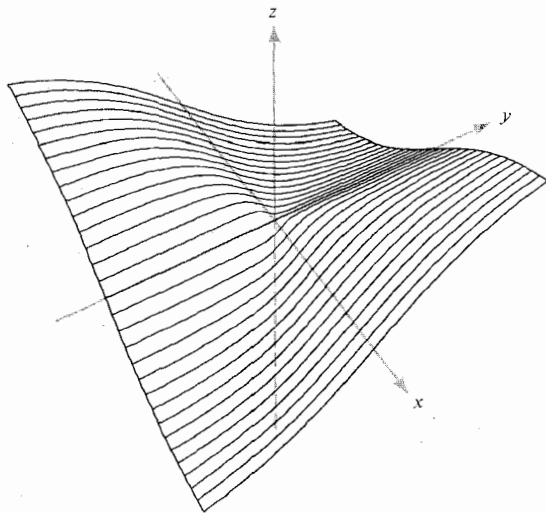
$$z = \frac{x^2}{x^2 + y^2} \quad -1 \leq x \leq 1, -1 \leq y \leq 1$$

$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2}{x^2 + y^2} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

آیا f مشتقپذیر است؟

f بر $\mathbb{R}^2 \setminus (0, 0)$ مشتقپذیر است، زیرا بر این مجموعه مشتقات جزئی پیوسته دارد. اما f در $(0, 0)$ مشتقپذیر نیست؛ در واقع، f حتی در این نقطه پیوسته نیست. برای مشاهده این امر، در امتداد خط $x = y$ به $(0, 0)$ نزدیک می‌شویم. واضح است که $f(x, x) = \frac{1}{2}$ ؛ وقتی $x \rightarrow 0$ ، این به 0 همگرا نمی‌باشد (مثلاً، ر.ک. ص ۱۵، ۱۲۴).

مثال ۰۲. (شکل ض ۲). فرض کنیم



شکل ض ۲

این تابع در $(0, 0)$ مشتقپذیر نیست، زیرا "پیچ و تاب" خورده است.

$$z = \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad -3 \leq x \leq 3, -3 \leq y \leq 3$$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

آیا f در $(0, 0)$ مشتقپذیر است؟ جواب بلافاصله معلوم نیست. لیکن، توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x, 0) - f(0, 0)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{(x \cdot 0) / \sqrt{x^2 + 0} - 0}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{0 - 0}{x} = 0 \end{aligned}$$

و، به همین نحو، $\partial f / \partial y(0, 0) = 0$. لذا، مشتقات جزئی در $(0, 0)$ وجود دارند. و نیز، هرگاه $(x, y) \neq (0, 0)$ ، آنگاه

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{y\sqrt{x^2 + y^2} - 2x(xy)/2\sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} = \frac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - \frac{x^2 y}{(x^2 + y^2)^{3/2}}$$

که وقتی $(x, y) \rightarrow (0, 0)$ حد ندارد. می‌توان با فرض $x = My$ دید که به ازای مسیرهای مختلف نزدیکی حدود مختلفی به دست می‌آید. لذا، مشتقات جزئی در $(0, 0)$ پیوسته نیستند؛ در نتیجه، نمی‌توان از قضیه ۹ استفاده کرد.

حال نشان می‌دهیم که f مشتقپذیر نیست (f پیوسته است؛ در نتیجه، روش مثال ۱ کار نخواهد کرد). اگر $Df(0, 0)$ وجود داشته باشد، بنابر قضیه ۱۶ باید ماتریس صفر باشد، زیرا $\partial f / \partial x$ و $\partial f / \partial y$ در $(0, 0)$ صفرند. لذا، طبق تعریف مشتقپذیری، به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای هست به طوری که $\delta > 0 < \|(h_1, h_2)\| < \delta$ نامساوی

$$\frac{|f(h_1, h_2) - f(0, 0)|}{\|(h_1, h_2)\|} < \varepsilon$$

را ایجاب می‌کند؛ یعنی،

$$|f(h_1, h_2)| < \varepsilon \|(h_1, h_2)\|$$

یا

$$|h_1 h_2| < \varepsilon (h_1^2 + h_2^2)$$

اما اگر $h_1 = h_2$ را اختیار کنیم، نامساوی بالا خواهد شد.

$$\frac{1}{2} < \varepsilon$$

که با اختیار $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ نادرست است. لذا، f در $(0, 0)$ مشتقپذیر نخواهد بود.

تمرینات

- فرض کنید $f(x, y, z) = (e^x, \cos y, \sin z)$ را حساب کنید. به طور کلی، چه وقت Df یک ماتریس قطری است؟
- (\bar{A}) فرض کنید $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ یک تبدیل خطی باشد که با ماتریس $A = (a_{ij})$ داده می شود. در نتیجه، دارای مؤلفه های $Ax = \sum a_{ij}x_j$ می باشد. $y_i = \sum a_{ij}x_j$ است. قرار دهید $M = (\sum a_{ij}^2)^{1/2}$. با استفاده از نامساوی شوارتز، ثابت کنید $\|Ax\| \leq M\|x\|$.
(ب) با استفاده از نامساوی (\bar{A})، نشان دهید که تبدیل خطی $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ داده شده با ماتریس $T = (t_{ij})$ پیوسته است.
(پ) فرض کنید $A: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ تبدیل خطی داده شده با یک ماتریس باشد. اگر

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{Ax}{\|x\|} = 0$$

نشان دهید که $A = 0$.

- فرض کنید $f: A \rightarrow B$ و $g: B \rightarrow C$ نگاشتهایی بین مجموعه های باز فضای اقلیدسی بوده، و x_0 در A یا یک نقطه مرزی A بوده و y_0 در B یا نقطه ای مرزی از B باشد.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) \quad \text{نشان دهید که} \quad \lim_{y \rightarrow y_0} g(y) = w \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = y_0 \quad (\bar{A})$$

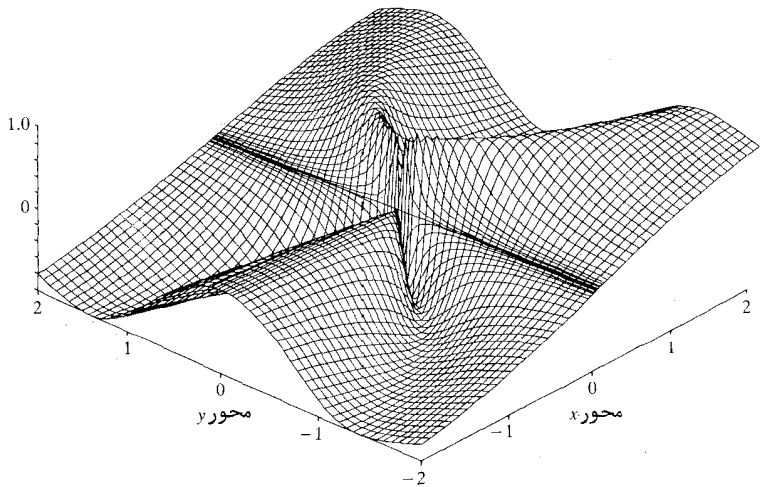
لازم نیست مساوی w باشد.

$$\lim_{x \rightarrow x_0} g(f(x)) = w \quad \text{نشان دهید که} \quad w = g(y_0) \quad \text{و} \quad y_0 \in B \quad (\text{ب})$$

- تابع $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ را به طور یکنواخت پیوسته نامیم هرگاه به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای موجود باشد به طوری که به ازای هر $p, q \in A$ ، $\|p - q\| < \delta$ نامساوی $\|f(p) - f(q)\| < \varepsilon$ را ایجاب کند. (توجه کنید که یک تابع به طور یکنواخت پیوسته پیوسته است. خاصیت اضافی یک تابع به طور یکنواخت پیوسته را صریحا "توصیف کنید.)

(\bar{A}) ثابت کنید هرنگاشت خطی $T: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ به طور یکنواخت پیوسته است. (راهنمایی. از تمرین ۲ استفاده کنید.)

- (ب) ثابت کنید $x \mapsto 1/x^2$ بر $]0, 1]$ پیوسته است، ولی به طور یکنواخت پیوسته نیست.
۵. فرض کنید $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ متقارن باشد (یعنی، $a_{ij} = a_{ji}$) و تعریف کنید $f(x) = x \cdot Ax$. در نتیجه، $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ نشان دهید که $\nabla f(x)$ بردار $2Ax$ است.
۶. تابع زیر در شکل ۳ رسم شده است.



شکل ۳

رسم کامپیوتری نمودار $z = 2xy^2/(x^2 + y^4)$

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{2xy^2}{x^2 + y^4} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

- نشان دهید که $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ همه جا وجود دارند؛ در واقع، تمام مشتقات جهتی موجودند. ولی نشان دهید f در $(0, 0)$ پیوسته نیست. آیا f مشتقپذیر است؟
۷. فرض کنید $f(x, y) = g(x) + h(y)$ ، g در x_0 و h در y_0 مشتقپذیر باشند. ثابت کنید f در (x_0, y_0) مشتقپذیر است.
۸. با استفاده از نامساوی شوارتز، ثابت کنید به ازای هر بردار $v \in \mathbb{R}^n$

$$\lim_{x \rightarrow x_0} v \cdot x = v \cdot x_0$$

۹. ثابت کنید هرگاه به ازای $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ ، $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = b$ ، آنگاه

$$\lim_{x \rightarrow x_0} \sqrt{|f(x)|} = \sqrt{|b|} \quad \text{و} \quad \lim_{x \rightarrow x_0} (f(x))^2 = b^2$$

(می توانید از تمرین ۳ (ب) استفاده کنید .)

۱۰. در قضیه ۹ به ازای $m = 1$ نشان دهید کافی است $n - 1$ مشتق جزئی پیوسته گرفته و تنها مشتق مانده وجود داشته باشد. آیا این با انتظار شما وقتی $n = 1$ سازگار است ؟

۱۱. $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ را به صورت زیر تعریف کنید :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{1/2}} & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

نشان دهید که f پیوسته است (ر. ک. مثال ۲) .

۱۲. آیا $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x}{x^2 + y^2}$ وجود دارد ؟

(ب) آیا $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{x^3}{x^2 + y^2}$ وجود دارد ؟

۱۳. $\lim_{(x, y) \rightarrow (0, 0)} \frac{xy^2}{\sqrt{x^2 + y^2}}$ را بیابید .

۱۴. ثابت کنید $s: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^1$ ، $(x, y) \mapsto x + y$ ، پیوسته است .

۱۵. با استفاده از تعریف پیوستگی ، ثابت کنید f در x پیوسته است اگر و فقط اگر

$$\lim_{h \rightarrow 0} f(x + h) = f(x)$$

۱۶. (آ) دنباله x_n از نقاط در \mathbb{R}^m را همگرا به x گفته ، و می نویسیم وقتی $n \rightarrow \infty$ ،

$\|x - x_n\| < \varepsilon$ ، $x_n \rightarrow x$ ، اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، N ی باشد به طوری که $n \geq N$ نامساوی $\|x - x_n\| < \varepsilon$ را ایجاب نماید . نشان دهید y یک نقطه مرزی مجموعه A باز است اگر و فقط اگر y در A نبوده و دنباله ای از نقاط متمایز A همگرا به y موجود باشد .

(ب) فرض کنید $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ و y در A یا یک نقطه مرزی A باشد . در این صورت ،

$\lim_{x \rightarrow y} f(x) = b$ اگر و فقط اگر به ازای هر دنباله x_n از نقاط در A که $x_n \rightarrow y$ ،

$f(x_n) \rightarrow b$

(پ) اگر $U \subset \mathbb{R}^m$ ، نشان دهید که $f: U \rightarrow \mathbb{R}^p$ پیوسته است اگر و فقط اگر $x_n \rightarrow x \in U$

ایجاب کند که $f(x_n) \rightarrow f(x)$

۱۷. هرگاه به ازای هر $x \neq a$ ، $f(x) = g(x)$ و $\lim_{x \rightarrow a} f(x) = b$ ، نشان دهید $\lim_{x \rightarrow a} g(x) = b$

۱۸. فرض کنید $A \subset \mathbb{R}^m$ و x_0 یک نقطه مرزی A باشد. همچنین ، $f: A \rightarrow \mathbb{R}$ و $g: A \rightarrow \mathbb{R}$

توابعی بر A باشند که $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x)$ و $\lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$ وجود داشته باشند ، و نیز به ازای هر x

در همسایگی سفته‌ای از x_0 ، $f(x) \leq g(x)$. (یک همسایگی سفته x_0 همسایگی است

از x_0 بدون x_0 .)

(آ) ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) \leq \lim_{x \rightarrow x_0} g(x)$

(راهنمایی. تابع $\phi(x) = g(x) - f(x)$ را در نظر بگیرید؛ ثابت کنید $\lim_{x \rightarrow x_0} \phi(x) \geq 0$.)

و سپس از این امر که حد مجموع دو تابع مجموع حدود آنهاست استفاده نمایید .)

(ب) اگر $f(x) < g(x)$ ، آیا لزوماً نامساوی حدود نیز اکید است؟

۱۹. اگر $f: A \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ ، گوئیم "وقتی $x \rightarrow 0$ ، f ، $o(x)$ است" اگر $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/\|x\| = 0$

(آ) اگر وقتی $x \rightarrow 0$ ، f_1 و f_2 ، $o(x)$ باشند ، ثابت کنید وقتی $x \rightarrow 0$ ، $f_1 + f_2$ نیز

$o(x)$ می‌باشد $(f_1 + f_2)(x) = f_1(x) + f_2(x)$.)

(ب) فرض کنید تابع $g: A \rightarrow \mathbb{R}$ واجد این خاصیت باشد که عددی مانند $c > 0$ موجود

باشد به طوری که به ازای هر x در A ، $|g(x)| \leq c$ (گوئیم g گراندار است) . اگر وقتی

$x \rightarrow 0$ ، f ، $o(x)$ باشد ، ثابت کنید وقتی $x \rightarrow 0$ ، gf نیز $o(x)$ است $(gf)(x) = g(x)f(x)$.)

(پ) نشان دهید وقتی $x \rightarrow 0$ ، $f(x) = x^2$ ، $o(x)$ است . آیا وقتی $x \rightarrow 0$ ، $g(x) = x$ ،

$o(x)$ است؟

ضمیمه ب

چند قضیه تکنیکی در باب انتگرالگیری

در این ضمیمه ایده‌های اصلی برهانهای وجود و جمع‌ی بودن انتگرال را که در بخش ۲۰۵ ذکر شدند تدارک می‌بینیم. این برهانها به مفاهیم پیشرفته‌تری از برهانهای آمده در متن نیاز دارند. مفاهیم پیوستگی یکنواخت و تمامیت اعداد حقیقی، که هر دو معمولاً در آنالیز حقیقی یا نظریه متغیرهای حقیقی بیان می‌شوند، ذیلاً ذکر می‌گردند.

تعریف. فرض کنیم $D \subset \mathbb{R}^n$ و $f: D \rightarrow \mathbb{R}$. به یاد آورید که گوییم f در $x \in D$ پیوسته است اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای موجود باشد به طوری که هرگاه $x \in D$ و $\|x - x_0\| < \delta$ آنگاه $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$. گوییم f بر D پیوسته است اگر در هر نقطه از D پیوسته باشد. گوییم تابع f بر D به طور یکنواخت پیوسته است اگر به ازای هر عدد $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای موجود باشد به طوری که هر وقت $x, y \in D$ و $\|x - y\| < \delta$ ، آنگاه $\|f(x) - f(y)\| < \varepsilon$.

خواننده با لحظه‌ای درنگ و تعمق در این تعاریف درخواهد یافت که اگر f به طور یکنواخت پیوسته باشد، باید پیوسته نیز باشد؛ ولی عکس این مطلب درست نیست. لذا، پیوستگی یکنواخت ظاهراً "قویتر" است. برای نشان دادن اینکه از پیوستگی پیوستگی یکنواخت نتیجه نمی‌شود، و لذا دومی قویتر است، کافی است تابع پیوسته‌ای مثال بزنیم که پیوسته یکنواخت نباشد. یک چنین تابع در تمرین ۲ آمده است.

تمایز بین پیوستگی و پیوستگی یکنواخت فقط در نکته ذی‌بزر است: اگر تابع f پیوسته بوده ولی به طور یکنواخت پیوسته نباشد، δ را نمی‌توان مستقل از نقاط قلمرو (x_0 در تعریف) اختیار کرد. تعریف پیوستگی یکنواخت صریحاً "می‌گوید که اگر $\varepsilon > 0$ داده شده باشد، δ

را می‌توان مستقل از نقاط D به دست آورد.

تعریف. مجموعه $D \subset \mathbb{R}^n$ کراندار است اگر عددی مانند $M > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $\|x\| < M$ ، $x \in D$ ، یک مجموعه بسته است اگر شامل تمام نقاط مرزی‌اش باشد.

لذا، یک مجموعه کراندار است اگر بتوان آن را در یک گوی (بزرگ) گنجانده قضیه بعد می‌گوید که یک تابع پیوسته، تحت شرایطی، به طور یکنواخت پیوسته است.

قضیه γ (اصل پیوستگی یکنواخت): هر تابع که بر مجموعه بسته و کراندار D در \mathbb{R}^n پیوسته باشد بر D به طور یکنواخت پیوسته است.

اثبات این قضیه ما را از بحث دور می‌سازد؛ لیکن، می‌توان حالت خاصی از آن را ثابت کرد که در بسیاری از حالات آمده در این کتاب کفایت می‌کند.

برهان حالت خاصی از قضیه γ . فرض کنیم $D = [a, b]$ بازه بسته‌ای بر خط $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته، df/dx بر بازه باز $]a, b[$ موجود، و df/dx کراندار باشد (یعنی، ثابتی چون $C > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر x در $]a, b[$ ، $|(df/dx)(x)| \leq C$). برای اثبات آنکه این شرایط پیوستگی یکنواخت f را ایجاب می‌کنند، از قضیه مقدار میانگین به صورت زیر استفاده می‌کنیم: فرض کنیم $\varepsilon > 0$ داده شده و x, y در D باشند. بنا بر قضیه مقدار میانگین (بیان شده در ص ۱۴۸)، به ازای c ای بین x و y ،

$$f(x) - f(y) = f'(c)(x - y)$$

چون مشتق کراندار فرض شده است،

۱. برهان قضیه را می‌توان در هر کتاب آنالیز ریاضی یافت. مثلاً، ر. ک.

J. Marsden, *Elementary Classical Analysis*, W. H. Freeman and Company, San Francisco, 1974,

یا

W. Rudin, *Principles of Mathematical Analysis*, 3rd ed., McGraw-Hill, New York, 1976.

$$|f(x) - f(y)| \leq C|x - y|$$

فرض کنید $\delta = \varepsilon/C$. هرگاه $|x - y| < \delta$ ، آنگاه

$$|f(x) - f(y)| < C \cdot \frac{\varepsilon}{C} = \varepsilon$$

لذا، f به طور یکنواخت پیوسته است. (توجه کنید که قسمت مهم تعریف این است که δ نه تابع x است نه y .)

این برهان برای نواحی محدب در \mathbb{R}^n نیز صادق است؛ یعنی، نواحی چون D که به ازای هر دو نقطه x, y در آن، پاره خط $\sigma(t) = tx + (1-t)y$ ، $0 \leq t \leq 1$ ، واصل بین آنها نیز در D واقع است. فرض کنیم f (بر مجموعه‌ء بازی شامل D) مشتقپذیر بوده و به ازای ثابتی چون C ، $\|\nabla f(x)\| \leq C$. در این صورت، قضیه‌ء مقدار میانگین اعمال شده بر تابع $h(t) = f(\sigma(t))$ نتیجه می‌دهد که

$$h(1) - h(0) = h'(c)$$

یا، طبق قاعده‌ء زنجیره‌ای،

$$f(x) - f(y) = h'(c) = \nabla f(\sigma(c)) \cdot \sigma'(c) = \nabla f(\sigma(c)) \cdot (x - y)$$

لذا، طبق نامساوی کشی - شوارتز،

$$|f(x) - f(y)| \leq \|\nabla f(\sigma(c))\| \|x - y\| \leq C\|x - y\|$$

در این صورت، مثل بالا، به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده می‌توان فرض کرد $\delta = \varepsilon/C$.

حال به مفهوم دنباله‌ء کشی از اعداد حقیقی می‌پردازیم. به یاد آورید که در تعریف مجموعه‌های ریمان دنباله‌ء $\{S_n\}$ ، $n = 1, \dots$ ، از اعداد به دست آمد. جالب بود اگر این دنباله از اعداد به S همگرا می‌شد (یا حد S را داشت)، ولی چگونه می‌توان این حد را به دست آورد؟ در یک محدوده‌ء مجرد تنها چیزی که از S_n می‌دانیم این است که مجموع ریمان یک تابع (مثلاً، پیوسته) است، و این، اگرچه هنوز ثابت نشده، برای همگرایی کافی می‌باشد.

لذا، باید خاصیتی از دنباله‌ها را بیابیم که همگرایی آنها را تضمین کند. یک‌رده از

دنباله به نام دنباله‌های کشی را تعریف کرده، و سپس، به عنوان اصلی از دستگاه اعداد حقیقی، فرض می‌کنیم تمام این دنباله‌ها به حدی همگرا باشند^۱. تشخیص لزوم این اصل در قرن نوزده برای مبانی حساب دیفرانسیل و انتگرال کشف مهمی در تاریخ ریاضیات بوده و زمینه را برای یک آنالیز ریاضی دقیق و نوین فراهم ساخته است. بزودی در این باب بیشتر سخن خواهیم گفت.

تعریف. دنباله $\{S_n\}$ ، $n = 1, \dots$ ، از اعداد حقیقی را کشی گوئیم اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ N ی موجود باشد به طوری که به ازای هر $m, n \geq N$ ، $|S_n - S_m| < \varepsilon$.

هرگاه دنباله S_n همگرا به حد S باشد، آنگاه S_n یک دنباله کشی است. برای مشاهده این امر، تعریف را به یاد می‌آوریم: به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، N ی هست به طوری که به ازای هر $n \geq N$ ، $|S_n - S| < \varepsilon$. به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده N_1 را طوری می‌گیریم که اگر $|S_n - S| < \varepsilon/2$ ، $n \geq N_1$ (از تعریف با $\varepsilon/2$ به جای ε استفاده کنید). در این صورت، اگر $m, n \geq N_1$

$$|S_n - S_m| = |S_n - S + S - S_m| \leq |S_n - S| + |S - S_m| < \varepsilon/2 + \varepsilon/2 = \varepsilon$$

که حکم ما را ثابت می‌کند. اصل موضوع تمامیت می‌گوید که عکس مطلب نیز برقرار است.

اصل موضوع تمامیت اعداد حقیقی. هر دنباله کشی $\{S_n\}$ به حدی چون S همگراست.

یادداشت تاریخی

آگوستن لویی کشی (۱۸۵۷-۱۷۸۹)، که یکی از بزرگترین ریاضیدانان تمام اعصار بوده است، دنباله‌های کشی را در "Cours d'analyse" که در ۱۸۲۱ منتشر شد تعریف کرده است. این کتاب شامل مبانی آنالیز است، اگرچه با معیارهای امروز کمی سست نوشته شده است. کشی می‌دانست که یک دنباله همگرا "کشی" است و متذکر شد که یک دنباله کشی همگرا

۱. کتب آنالیز ریاضی، نظیر آنهایی که در پانوشته قبل آمده‌اند، از اصول موضوع مختلفی مانند خاصیت کوچکترین کران بالایی استفاده می‌کنند. در این صورت، اصل تمامیت ما به شکل قضیه درخواست خواهد آمد.

است. وی برهانی برای آن نداشت، و نباید هم می‌داشت، چه این برهان به دستگاه اعداد حقیقی دقیقی نیاز دارد که تا سال ۱۸۷۲ که توسط ریاضیدان آلمانی، گئورگ کانتور^۱ (۱۸۴۵-۱۹۱۸)، ارائه شد در دسترس نبوده است.

حال روشن است که برای همگرایی مجموعه‌های ریمان $\{S_n\}$ "مثلاً" یک تابع پیوسته به حدی چون S چه باید انجام داد، که ثابت می‌شود توابع پیوسته بر مستطیلها انتگرالپذیر می‌باشند؛ باید نشان دهیم $\{S_n\}$ یک دنباله گشی است. در انجام این کار از پیوستگی یکنواخت استفاده می‌کنیم. انتگرالپذیری توابع پیوسته نتیجه‌ای است از دو لم زیر.

لم ۱. فرض کنیم f تابع پیوسته‌ای بر مستطیل R در صفحه بوده، و $\{S_n\}$ دنباله‌ای از مجموعه‌های ریمان برای f باشد. در این صورت، $\{S_n\}$ به عددی چون S همگرا خواهد بود.

برهان. فرض کنیم $R \subset \mathbb{R}^2$ مستطیل $R = [a, b] \times [c, d]$ باشد. افراز منتظم بخش ۲.۵ مطرح شد. به یاد آورید که

$$\Delta x = x_{j+1} - x_j = \frac{b-a}{n}, \quad \Delta y = y_{k+1} - y_k = \frac{d-c}{n}$$

و

$$S_n = \sum_{j,k=0}^{n-1} f(c_{jk}) \Delta x \Delta y$$

که در آن نقطه دلخواهی در $R_{jk} = [x_j, x_{j+1}] \times [y_k, y_{k+1}]$ است. دنباله $\{S_n\}$ فقط با انتخاب نقاط c_{jk} معین می‌شود.

برای اثبات نمادهایی کمی پیچیده ولی بسیار دقیق را معرفی می‌کنیم؛ یعنی، قرار

می‌دهیم

$$\Delta x^n = \frac{b-a}{n}$$

$$\Delta y^n = \frac{d - c}{n}$$

با این نمادها داریم

$$(1) \quad S_n = \sum_{j,k}^{n-1} f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x^n \Delta y^n$$

برای اثبات کشی بودن $\{S_n\}$ باید نشان دهیم که به ازای $\varepsilon > 0$ ، N ی وجود دارد به طوری که به ازای هر $n, m \geq N$ ، $|S_n - S_m| < \varepsilon$ ، بنا بر پیوستگی یکنواخت، f بر R به طور یکنواخت پیوسته است. لذا، به ازای $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای هست به طوری که اگر $\|x - y\| < \delta$ ، $x, y \in R$ ، خواهیم داشت [2 برابر مساحت (R)] $|f(x) - f(y)| < \varepsilon / [2 \text{ برابر مساحت } (R)]$ به جای ε در تعریف به کار می رود. فرض کنیم N آنقدر بزرگ باشد که به ازای هر $m \geq N$ ، قطر هر زیرمستطیل R_{jk} در افراز منتظم m از δ کوچکتر باشد. لذا، اگر x, y نقاطی در یک زیر مستطیل باشند، خواهیم داشت [2 برابر مساحت (R)] $|f(x) - f(y)| < \varepsilon /$

$m, n \geq N$ را ثابت می گیریم. نشان می دهیم که $|S_n - S_m| < \varepsilon$. این نشان می دهد که $\{S_n\}$ کشی و در نتیجه همگراست. افراز منتظم m (ضربدر n) $m = (m \cdot n)$ R را در نظر می گیریم. در این صورت،

$$S_{mn} = \sum_{r,1} f(\tilde{\mathbf{c}}_{r1}) \Delta x^{mn} \Delta y^{mn}$$

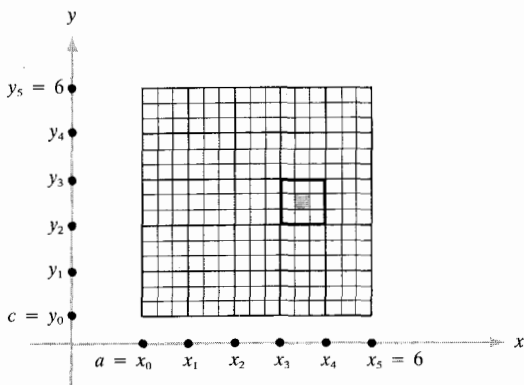
که در آن $\tilde{\mathbf{c}}_{r1}$ نقطه ای در زیر مستطیل (rt) ام می باشد. توجه کنید که هر زیرمستطیل افراز (mn) زیرمستطیلی از هر دو افراز منتظم m و n است (ر. ک. شکل ب ۱).

زیر مستطیل های واقع در تقسیم mn را با \tilde{R}_{r1} و آنهایی واقع در تقسیم n را با R_{jk} نشان می دهیم. لذا، به ازای jk ای، $\tilde{R}_{r1} \subset R_{jk}$ ؛ و در نتیجه، (۱) را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(1') \quad S_n = \sum_{j,k}^{n-1} \left(\sum_{\tilde{R}_{r1} \subset R_{jk}} f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x^{mn} \Delta y^{mn} \right)$$

در اینجا از این استفاده می کنیم که

$$\sum_{\bar{R}_{rt} \subset R_{jk}} f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x^{mn} \Delta y^{mn} = f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x^n \Delta y^n$$



شکل ب ۱

مربع سایه‌دار زیرمستطیلی در افراز mn ، و مربع
با لبه‌های سیاه زیرمستطیلی در افراز m را نشان می‌دهد.

که در آن مجموع روی تمام زیرمستطیل‌های تقسیم mn گرفته می‌شود که در زیرمستطیل ثابت R_{jk} در تقسیم n جای دارند. همچنین، اتحاد زیر را داریم:

$$(۲) \quad S_{mn} = \sum_{r,t}^{mn-1} f(\bar{\mathbf{c}}_{rt}) \Delta x^{mn} \Delta y^{mn}$$

این رابطه را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$(۲) \quad S_{mn} = \sum_{j,k} \sum_{\bar{R}_{rt} \subset R_{jk}} f(\bar{\mathbf{c}}_{rt}) \Delta x^{mn} \Delta y^{mn}$$

که در آن ابتدا روی زیرمستطیل‌هایی در افراز mn جمع‌بندی می‌کنیم که در R_{jk} ی ثابتی قرار دارند و سپس روی k, j جمع‌بندی می‌نماییم. با تفریق (۲') از (۱')، به دست می‌آوریم

$$|S_n - S_{mn}| = \left| \sum_{jk} \sum_{\tilde{R}_{rt} \subseteq R_{jk}} [f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x^{mn} \Delta y^{mn} - f(\tilde{\mathbf{c}}_{rt}) \Delta x^{mn} \Delta y^{mn}] \right|$$

$$\leq \sum_{jk} \sum_{\tilde{R}_{rt} \subseteq R_{jk}} |f(\mathbf{c}_{jk}) - f(\tilde{\mathbf{c}}_{rt})| \Delta x^{mn} \Delta y^{mn}$$

بنابر انتخاب ما از δ و N ، $[2 \text{ برابر مساحت } (R)] \cdot \varepsilon > |f(\mathbf{c}_{jk}) - f(\tilde{\mathbf{c}}_{rt})|$ ؛ و در نتیجه، نامساوی فوق به صورت زیر درمی آید:

$$|S_n - S_{mn}| \leq \sum_{jk} \sum_{\tilde{R}_{rt} \subseteq R_{jk}} (\varepsilon/[2 \text{ برابر مساحت } (R)]) \Delta x^{mn} \Delta y^{mn} = \varepsilon/2$$

لذا، $|S_n - S_{mn}| < \varepsilon/2$ و به همین نحو می توان نشان داد که $|S_m - S_{mn}| < \varepsilon/2$ چون به ازای $m, n \geq N$ ،

$$|S_n - S_m| = |S_n - S_{mn} + S_{mn} - S_m| \leq |S_n - S_{mn}| + |S_{mn} - S_m| < \varepsilon$$

کشی بودن $\{S_n\}$ ثابت می شود؛ و لذا، این دنباله حد S را خواهد داشت.

قبلا "گفتیم که هر مجموع ریمان به انتخاب نقاط c_{jk} بستگی دارد. برای اثبات آنکه یک تابع پیوسته بر مستطیل R انتگرالپذیر است، باید نشان دهیم که حد S به دست آمده در لم ۱ از انتخاب نقاط c_{jk} مستقل است.

لم ۲. حد S در لم ۱ به نقاط c_{jk} بستگی ندارد.

برهان. فرض کنید با انتخاب دو مجموعه نقاط مختلف، مثلا " c_{jk} و c_{jk}^* "، در هر افراز n م دو دنباله $\{S_n\}$ و $\{S_n^*\}$ از مجموعهای ریمان به دست آورده باشیم. بنابر لم ۱، $\{S_n\}$ به عددی چون S و $\{S_n^*\}$ به عددی مانند S^* همگراست. می خواهیم نشان دهیم $S = S^*$ ، و این کار را با اثبات اینکه به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $|S - S^*| < \varepsilon$ انجام می دهیم، که ایجاب می کند که S باید مساوی S^* باشد (چرا؟).

ابتدا می دانیم f بر R به طور پیوسته یکنواخت است. در نتیجه، به ازای $\varepsilon > 0$ ، δ ای وجود دارد به طوری که هر وقت $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\| < \delta$ ، $|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{y})| < \varepsilon/[3 \text{ برابر مساحت } (R)]$ ، N را آنقدر بزرگ می گیریم که هر وقت $n \geq N$ ، قطر هر زیرمستطیل در افراز منتظم n م از

δ کوچکتر باشد. چون $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$ و $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n^* = S^*$ ، می توان N را آنقدر بزرگ گرفت که $n \geq N$ نامساویهای $|S_n - S| < \varepsilon/3$ و $|S_n^* - S^*| < \varepsilon/3$ را ایجاب نماید. همچنین، به ازای N ، از پیوستگی یکنواخت معلوم می شود که اگر \mathbf{c}_{jk}^* و \mathbf{c}_{jk}^* نقاطی در زیرمستطیل R_{jk} افزای n م باشند، آنگاه [3 برابر مساحت (R)] $|f(\mathbf{c}_{jk}) - f(\mathbf{c}_{jk}^*)| < \varepsilon/3$ ، لذا،

$$\begin{aligned} |S_n - S_n^*| &= \left| \sum_{jk} f(\mathbf{c}_{jk}) \Delta x^n \Delta y^n - \sum_{jk} f(\mathbf{c}_{jk}^*) \Delta x^n \Delta y^n \right| \\ &\leq \sum_{jk} |f(\mathbf{c}_{jk}) - f(\mathbf{c}_{jk}^*)| \Delta x^n \Delta y^n < \varepsilon/3 \end{aligned}$$

حال می نویسیم

$$\begin{aligned} |S - S^*| &= |S - S_n + S_n - S_n^* + S_n^* - S^*| \\ &\leq |S - S_n| + |S_n - S_n^*| + |S_n^* - S^*| < \varepsilon \end{aligned}$$

و در نتیجه، لم به اثبات خواهد رسید.

از تلفیق لمهای ۱ و ۲ قضیه ۱ در بخش ۲.۵ ثابت خواهد شد.

قضیه ۱. هر تابع پیوسته تعریف شده بر مستطیل R انتگرالپذیر است.

یادداشت تاریخی

کشی اولین برهان این قضیه را در چکیده مقاله اش در ۱۸۲۳ عرضه کرد، و در این مقاله نیاز به اثبات وجود انتگرال به عنوان حد یک مجموع را متذکر شد. او در این مقاله ابتدا (مثل ما در اینجا) به توابع پیوسته پرداخت، منتها بر بازه $[a, b]$. (برهان اساسا " یکی است.) اما برهانش به خاطر فقدان مفهوم پیوستگی یکنواخت که در آن زمان در دسترس نبود، دقت نداشت.

مفهوم مجموع ریمان S_n برای تابع f مسلما " به دوران پیش از برنهارد ریمان (۱۸۶۶-۱۸۲۶) تعلق دارد. احتمالاً این مجموعهها به خاطر آن به وی منتسب شده اند که او در مقاله ای اساسی در مورد سربهای مثلثاتی در سال ۱۸۵۴ روشی نظری برای بررسی

انتگرالگیری عرضه کرده است. روش وی، اگرچه بعداً "توسط داربو (۱۸۷۵) و اشتیلیس^۱ (۱۸۹۴) تعمیم یافت، بیش از نیم قرن حاکم بود تا آنکه در ۱۹۰۲ به وسیله نظریه لبگ توسعه یافت. روش اخیر در نظریه انتگرالگیری معمولاً "در دوره‌های فوق لیسانس ریاضی مورد مطالعه قرار می‌گیرد.

اثبات قضیه ۲ (بخش ۲۰۵) در تمرینات ۴ تا ۶ آخر این ضمیمه به خواننده محول شده است. ایده‌های اصلی در برهان قضیه ۱ آمده‌اند، اگرچه برهان قضیه ۲ مشکل دیگری را شامل است.

هدف بعدی ما اثبات خاصیت (چهار) انتگرال در صفحه ۳۳۵، یعنی خاصیت خطی، است. اما، به خاطر چند مشکل تکنیکی در اثبات تعمیم کامل آن، فقط خاصیت را در حالتی ثابت می‌کنیم که در آن f پیوسته است.

قضیه (جمعی بودن انتگرال). فرض کنیم R_1 و R_2 دو مستطیل از هم جدا باشند (یعنی، اشتراکشان شامل مستطیلی نباشد) و چنان باشند که $Q = R_1 \cup R_2$ نیز مستطیل باشد. هرگاه f تابع پیوسته‌ای بر Q و در نتیجه بر هر R_i باشد، آنگاه

$$(۳) \quad \int_Q f = \int_{R_1} f + \int_{R_2} f$$

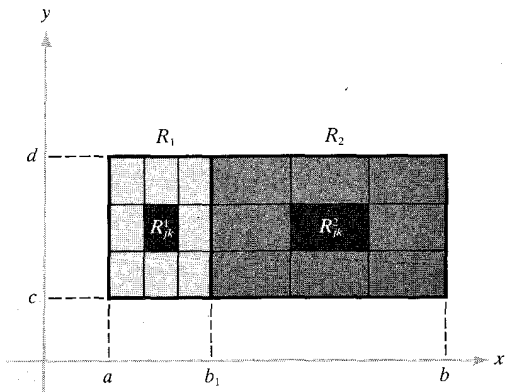
برهان. برهان تابع ایده‌هایی است که قبلاً "در برهان قضیه ۱ ارائه شده‌اند. انتگرالپذیر بودن f روی Q ، R_1 ، و R_2 از قضیه ۱ نتیجه می‌شود. لذا، هر سه انتگرال مذکور در معادله (۳) وجود دارند، و فقط کافی است تساوی را ثابت نماییم. بی‌آنکه به کلیت خللی وارد شود، می‌توان فرض کرد $R_1 = [a, b_1] \times [c, d]$ و $R_2 = [b_1, b] \times [c, d]$ (ر.ک. شکل ب ۲). مجدداً، باید چند نماد معرفی کنیم. فرض کنیم

$$\Delta y^n = \frac{d-c}{n} \quad \text{و} \quad \Delta x^n = \frac{b-a}{n}, \quad \Delta x_2^n = \frac{b-b_1}{n}, \quad \Delta x_1^n = \frac{b_1-a}{n}$$

$$(۴) \quad S_n^1 = \sum_{j,k} f(c_{jk}^1) \Delta x_1^n \Delta y^n$$

$$(۵) \quad S_n^2 = \sum_{j,k} f(c_{jk}^2) \Delta x_2^n \Delta y^n$$

$$(۶) \quad S_n = \sum_{j,k} f(c_{jk}) \Delta x^n \Delta y^n$$



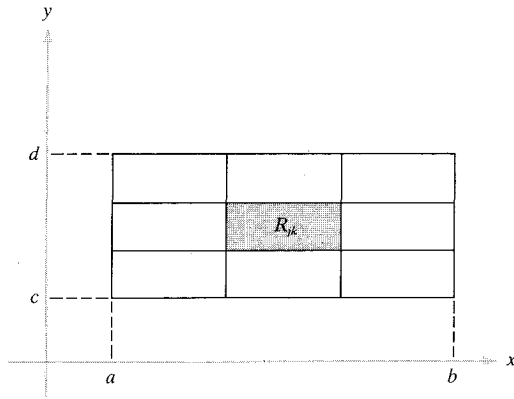
شکل ب ۲

اجزاء یک افراز منتظم از R_2 و R_1

که در آن c_{jk}^1 ، c_{jk}^2 ، و c_{jk} به ترتیب نقاطی در زیرمستطیل jk ام افراز منتظم n R_1 ، R_2 ، Q می باشد. فرض کنیم $S^i = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n^i$ ، که در آن $i = 1, 2$ ، و $S = \lim_{n \rightarrow \infty} S_n$ باید نشان دهیم که $S = S^1 + S^2$ ، که می توان آن را با اثبات اینکه به ازای هر $\varepsilon > 0$ دلخواه $|S - S^1 - S^2| < \varepsilon$ به ثبوت رسانید.

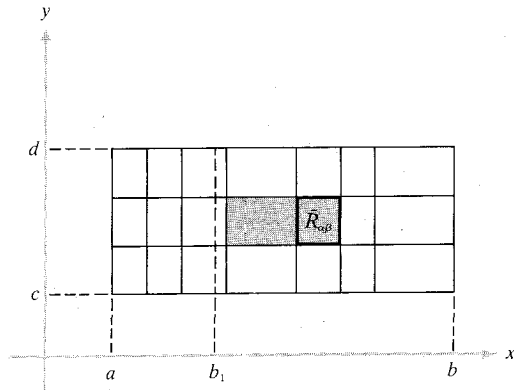
بنابر پیوستگی یکنواخت f بر Q ، به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای هست به طوری که هر وقت $\|x - y\| < \delta$ ، داریم $|f(x) - f(y)| < \varepsilon$. فرض کنیم N آنقدر بزرگ باشد که به ازای $n \geq N$ ، $|S_n - S| < \varepsilon/3$ و $|S_n^i - S^i| < \varepsilon/3$ ، $i = 1, 2$ ، و هرگاه x, y دو نقطه دلخواه در زیرمستطیل افراز n م R_2 ، R_1 ، یا Q باشند، آنگاه [3 برابر مساحت (Q) $|f(x) - f(y)| < \varepsilon/3$]. حال افراز منتظم n م R_2 ، R_1 ، و Q را در نظر می گیریم. اینها گردایه ای از زیرمستطیلها را تشکیل می دهند که به ترتیب با R_{jk}^1 ، R_{jk}^2 ، R_{jk} نشان می دهیم

(ر.ک. شکلهای ب ۲ و ب ۳).



شکل ب ۳
یک افراز منتظم Q

اگر تقسیم Q را بر تقسیمات n م R_1 و R_2 بگذاریم، گردایه جدیدی از مستطیلهای، مثلاً " $\bar{R}_{\alpha\beta}$ "، $\beta = 1, \dots, n$ و $\alpha = 1, \dots, m$ ، به دست می آید (ر.ک. شکل ب ۴).



شکل ب ۴
خطوط قائم و افقی این تقسیم با گرفتن اجتماع خطوط قائم و افقی شکلهای ب ۲ و ب ۳ به دست می آیند.

هر $\bar{R}_{\alpha\beta}$ جزء یک زیرمسططیل مانند R_{jk} از Q و جزء زیرمسططیلی از افزاز n م R_1 یا R_2 می باشد. تساویهای (۴)، (۵)، و (۶) فوق را در نظر می گیریم. این تساویها را می توان به صورت زیر نوشت:

$$(۴') \quad S_n = \sum_{j,k} \sum_{\bar{R}_{\alpha\beta} \subset R_i} f(\mathbf{c}_{jk}^i) \text{Area}(\bar{R}_{\alpha\beta})$$

$$(۵') \quad = \sum_{\substack{\alpha\beta \\ \bar{R}_{\alpha\beta} \subset R_i}} f(\bar{\mathbf{c}}_{\alpha\beta}) \text{Area}(\bar{R}_{\alpha\beta})$$

که در آنها اگر $\bar{R}_{\alpha\beta} \subset R_{jk}^i$ ، $(i = 1, 2)$ ، $\bar{\mathbf{c}}_{\alpha\beta} = \mathbf{c}_{jk}^i$ ، و

$$(۶') \quad S_n = \sum_{j,k} \sum_{\bar{R}_{\alpha\beta} \subset R_{jk}} f(\mathbf{c}_{jk}) \text{Area}(\bar{R}_{\alpha\beta}) = \sum_{\alpha\beta} f(\mathbf{c}_{\alpha\beta}^*) \text{Area}(\bar{R}_{\alpha\beta})$$

که در آن اگر $\bar{R}_{\alpha\beta} \subset R_{jk}$ ، $\mathbf{c}_{\alpha\beta}^* = \mathbf{c}_{jk}$ ،

خواننده های که اولین بار با این گونه نماد اندیسیدار برخورد کرده است، باید متوجه باشد

که

$$\sum_{\substack{\alpha\beta \\ \bar{R}_{\alpha\beta} \subset R_i}}$$

یعنی جمع بندی روی آن α ها و β هایی صورت می گیرد که مستطیل نظیر $\bar{R}_{\alpha\beta}$ جزء مستطیل R_i است.

حال مجموع S_n را به دو جزء تقسیم می کنیم:

$$S_n = \sum_{\substack{\alpha\beta \\ \bar{R}_{\alpha\beta} \subset R_1}} f(\mathbf{c}_{\alpha\beta}^*) (\text{مساحت } \bar{R}_{\alpha\beta}) + \sum_{\substack{\alpha\beta \\ \bar{R}_{\alpha\beta} \subset R_2}} f(\mathbf{c}_{\alpha\beta}^*) (\text{مساحت } \bar{R}_{\alpha\beta})$$

از این نمایشها و نامساوی مثلثی معلوم می شود که

$$|S_n - S_n^1 - S_n^2| \leq \left| \sum_{\substack{\alpha\beta \\ \bar{R}_{\alpha\beta} \subset R_1}} (f(\mathbf{c}_{\alpha\beta}^*) - f(\bar{\mathbf{c}}_{\alpha\beta})) (\text{مساحت } \bar{R}_{\alpha\beta}) \right|$$

$$+ \left| \sum_{\substack{\alpha\beta \\ \bar{R}_{\alpha\beta} \subset R_2}} (f(\mathbf{c}_{\alpha\beta}^*) - f(\bar{\mathbf{c}}_{\alpha\beta})) (\text{مساحت } \bar{R}_{\alpha\beta}) \right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{3} \sum_{\substack{\alpha\beta \\ \bar{R}_{\alpha\beta} \subset R_1}} (\text{مساحت } \bar{R}_{\alpha\beta})$$

برای هر مساحت Q

$$+ \frac{\varepsilon}{Q} \sum_{\substack{\alpha\beta \\ \bar{R}_{\alpha\beta} = R_2}} (\bar{R}_{\alpha\beta}) < \varepsilon/3$$

در این مرحله از پیوستگی یکنواخت f استفاده کرده‌ایم. لذا، به ازای $n \geq N$ ، همانند
 لم ۲، از نامساوی مثلثی معلوم می‌شود که $|S - S^1 - S^2| < \varepsilon$ ، که برهان تمام خواهد
 شد.

تمرینات

۱. نشان دهید هرگاه a و b چنان اعدادی باشند که به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $|a - b| < \varepsilon$ ،
 آنگاه $a = b$.

۲. (آ) فرض کنید تابع f بر بازه نیمباز $]0, 1]$ یا $f(x) = 1/x$ تعریف شده باشد. نشان
 دهید f در هر نقطه $]0, 1]$ پیوسته است ولی به‌طور یکنواخت پیوسته نیست.
 (ب) این مثال را به \mathbb{R}^2 تعمیم دهید.

۳. فرض کنید R مستطیل $[a, b] \times [c, d]$ بوده و f تابع کران‌داری باشد که بر R انتگرال‌پذیر
 است.

(آ) نشان دهید f بر $[(a + b)/2, b] \times [c, d]$ انتگرال‌پذیر است.

(ب) فرض کنید N عدد صحیح مثبتی باشد. نشان دهید f بر $[(a + b)/N, b] \times [c, d]$
 انتگرال‌پذیر است.

تمرینهای ۴ تا ۶ برهانی از قضیه ۲ در بخش ۲.۵ را شامل‌اند.

۴. فرض کنید C نمودار تابع پیوسته $\phi: [a, b] \rightarrow R$ باشد. همچنین، $\varepsilon > 0$ عددی مثبت
 باشد. نشان دهید C را می‌توان در تعدادی متناهی جعبه‌مانند $B_i = [a_i, b_i] \times [c_i, d_i]$
 چنان قرار داد که C شامل هیچ نقطه مرزی $B_i \cup$ نبوده و $\varepsilon < \text{مساحت}(\Sigma(B_i))$
 (راهنمایی. از اصل پیوستگی یکنواخت آمده در این ضمیمه استفاده کنید.)

۵. فرض کنید R و B مستطیل بوده و $B \subset R$. افراز منتظم n م R را در نظر گرفته و b_n
 را مجموع مساحت تمام مستطیلهای در این افراز بگیرد که اشتراک نامتناهی با B دارند.
 نشان دهید که مساحت $(B) = \lim_{n \rightarrow \infty} b_n$.

۶. فرض کنید R مستطیل و $C \subset R$ نمودار تابع پیوسته ϕ باشد. همچنین، $f: R \rightarrow \mathbb{R}$

جز بر C کراندار و پیوسته باشد. با استفاده از تمرینهای ۴ و ۵ فوق و تکنیکهای برهان قضیه ۱ این ضمیمه، نشان دهید که f روی R انتگرالپذیر است.

۷. (آ) با استفاده از اصل پیوستگی یکنواخت، نشان دهید هرگاه $\phi: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ تابع پیوسته‌ای باشد، آنگاه ϕ کراندار است.

(ب) با تعمیم قسمت (آ) نشان دهید تابع پیوسته $f: [a, b] \times [c, d] \rightarrow \mathbb{R}$ کراندار است.

(پ) با تعمیم بیشتر قسمت (ب) نشان دهید تابع $f: D \rightarrow \mathbb{R}$ پیوسته بر مجموعه بسته و کراندار $D \subset \mathbb{R}^n$ کراندار است.

ضمیمہ پ

جدولہا

جدول ۱ توابع مثلثاتی

زاویہ				زاویہ					
تائزانت کسینوس سینوس رادیان درجہ				تائزانت کسینوس سینوس رادیان درجہ					
0°	0.000	0.000	1.000	0.000					
1°	.017	.017	1.000	.017	46°	0.803	0.719	0.695	1.036
2°	.035	.035	0.999	.035	47°	.820	.731	.682	1.072
3°	.052	.052	.999	.052	48°	.838	.743	.669	1.111
4°	.070	.070	.998	.070	49°	.855	.755	.656	1.150
5°	.087	.087	.996	.087	50°	.873	.766	.643	1.192
6°	.105	.105	.995	.105	51°	.890	.777	.629	1.235
7°	.122	.122	.993	.123	52°	.908	.788	.616	1.280
8°	.140	.139	.990	.141	53°	.925	.799	.602	1.327
9°	.157	.156	.988	.158	54°	.942	.809	.588	1.376
10°	.175	.174	.985	.176	55°	.960	.819	.574	1.428
11°	.192	.191	.982	.194	56°	.977	.829	.559	1.483
12°	.209	.208	.978	.213	57°	.995	.839	.545	1.540
13°	.227	.225	.974	.231	58°	1.012	.848	.530	1.600
14°	.244	.242	.970	.249	59°	1.030	.857	.515	1.664
15°	.262	.259	.966	.268	60°	1.047	.866	.500	1.732
16°	.279	.276	.961	.287	61°	1.065	.875	.485	1.804
17°	.297	.292	.956	.306	62°	1.082	.883	.470	1.881
18°	.314	.309	.951	.325	63°	1.100	.891	.454	1.963
19°	.332	.326	.946	.344	64°	1.117	.899	.438	2.050
20°	.349	.342	.940	.364	65°	1.134	.906	.423	2.145
21°	.367	.358	.934	.384	66°	1.152	.914	.407	2.246
22°	.384	.375	.927	.404	67°	1.169	.921	.391	2.356

جدول ۱ (ادامہ)

23°	.401	.391	.921	.425	68°	1.187	.927	.375	2.475
24°	.419	.407	.914	.445	69°	1.204	.934	.358	2.605
25°	.436	.423	.906	.466	70°	1.222	.940	.342	2.747
26°	.454	.438	.899	.488	71°	1.239	.946	.326	2.904
27°	.471	.454	.891	.510	72°	1.257	.951	.309	3.078
28°	.489	.470	.883	.532	73°	1.274	.956	.292	3.271
29°	.506	.485	.875	.554	74°	1.292	.961	.276	3.487
30°	.524	.500	.866	.577	75°	1.309	.966	.259	3.732
31°	.541	.515	.857	.601	76°	1.326	.970	.242	4.011
32°	.559	.530	.848	.625	77°	1.344	.974	.225	4.331
33°	.576	.545	.839	.649	78°	1.361	.978	.208	4.705
34°	.593	.559	.829	.675	79°	1.379	.982	.191	5.145
35°	.611	.574	.819	.700	80°	1.396	.985	.174	5.671
36°	.628	.588	.809	.727	81°	1.414	.988	.156	6.314
37°	.646	.602	.799	.754	82°	1.431	.990	.139	7.115
38°	.663	.616	.788	.781	83°	1.449	.993	.122	8.144
39°	.681	.629	.777	.810	84°	1.466	.995	.105	9.514
40°	.698	.643	.766	.839	85°	1.484	.996	.087	11.43
41°	.716	.656	.755	.869	86°	1.501	.998	.070	14.30
42°	.733	.669	.743	.900	87°	1.518	.999	.052	19.08
43°	.750	.682	.731	.933	88°	1.536	.999	.035	28.64
44°	.768	.695	.719	.966	89°	1.553	1.000	.017	57.29
45°	.785	.707	.707	1.000	90°	1.571	1.000	.000	∞

جدول ٢ مشتقات

$\frac{d(u+v)}{dx} = \frac{du}{dx} + \frac{dv}{dx}$. ٢	$\frac{dau}{dx} = a \frac{du}{dx}$. ١
$\frac{d(u/v)}{dx} = \frac{v(du/dx) - u(dv/dx)}{v^2}$. ٤	$\frac{d(uv)}{dx} = u \frac{dv}{dx} + v \frac{du}{dx}$. ٣
$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx} + u^n(\log u) \frac{dv}{dx}$. ٦	$\frac{d(u^n)}{dx} = nu^{n-1} \frac{du}{dx}$. ٥
$\frac{d(e^{au})}{dx} = ae^{au} \frac{du}{dx}$. ٨	$\frac{d(e^u)}{dx} = e^u \frac{du}{dx}$. ٧
$\frac{d(\log u)}{dx} = \frac{1}{u} \frac{du}{dx}$. ١٠	$\frac{da^u}{dx} = a^u(\log a) \frac{du}{dx}$. ٩
$\frac{d \sin u}{dx} = \cos u \frac{du}{dx}$. ١٢	$\frac{d(\log_a u)}{dx} = \frac{1}{u(\log a)} \frac{du}{dx}$. ١١
$\frac{d \tan u}{dx} = \sec^2 u \frac{du}{dx}$. ١٤	$\frac{d \cos u}{dx} = -\sin u \frac{du}{dx}$. ١٣
$\frac{d \sec u}{dx} = \tan u \sec u \frac{du}{dx}$. ١٦	$\frac{d \cot u}{dx} = -\csc^2 u \frac{du}{dx}$. ١٥
$\frac{d \arcsin u}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$. ١٨	$\frac{d \csc u}{dx} = -(\cot u)(\csc u) \frac{du}{dx}$. ١٧
$\frac{d \arctan u}{dx} = \frac{1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$. ٢٠	$\frac{d \arccos u}{dx} = \frac{-1}{\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx}$. ١٩
$\frac{d \operatorname{arcsec} u}{dx} = \frac{1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$. ٢٢	$\frac{d \operatorname{arccot} u}{dx} = \frac{-1}{1+u^2} \frac{du}{dx}$. ٢١
$\frac{d \sinh u}{dx} = \cosh u \frac{du}{dx}$. ٢٤	$\frac{d \operatorname{arccsc} u}{dx} = \frac{-1}{u\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx}$. ٢٣
$\frac{d \tanh u}{dx} = \operatorname{sech}^2 u \frac{du}{dx}$. ٢٦	$\frac{d \cosh u}{dx} = \sinh u \frac{du}{dx}$. ٢٥

(جدول ۲ (ادامہ))

$$\frac{d \operatorname{sech} u}{dx} = -(\operatorname{sech} u)(\tanh u) \frac{du}{dx} \cdot ۲۸ \quad \frac{d \operatorname{coth} u}{dx} = -(\operatorname{csch}^2 u) \frac{du}{dx} \cdot ۲۷$$

$$\frac{d \sinh^{-1} u}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx} \cdot ۳۰ \quad \frac{d \operatorname{csch} u}{dx} = -(\operatorname{csch} u)(\operatorname{coth} u) \frac{du}{dx} \cdot ۲۹$$

$$\frac{d \tanh^{-1} u}{dx} = \frac{1}{1-u^2} \frac{du}{dx} \cdot ۳۲ \quad \frac{d \cosh^{-1} u}{dx} = \frac{1}{\sqrt{u^2-1}} \frac{du}{dx} \cdot ۳۱$$

$$\frac{d \operatorname{sech}^{-1} u}{dx} = \frac{-1}{u\sqrt{1-u^2}} \frac{du}{dx} \cdot ۳۴ \quad \frac{d \operatorname{coth}^{-1} u}{dx} = \frac{1}{u^2-1} \frac{du}{dx} \cdot ۳۳$$

$$\frac{d \operatorname{csch}^{-1} u}{dx} = \frac{-1}{|u|\sqrt{1+u^2}} \frac{du}{dx} \cdot ۳۵$$

جدول ۳ انتگرالها (به هر انتگرال می توان ثابت دلخواهی افزود .)

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} \quad (n \neq -1) \quad \cdot 1$$

$$\int \frac{1}{x} dx = \log|x| \quad \cdot 2$$

$$\int e^x dx = e^x \quad \cdot 3$$

$$\int a^x dx = \frac{a^x}{\log a} \quad \cdot 4$$

$$\int \sin x dx = -\cos x \quad \cdot 5$$

$$\int \cos x dx = \sin x \quad \cdot 6$$

$$\int \tan x dx = -\log|\cos x| \quad \cdot 7$$

$$\int \cot x dx = \log|\sin x| \quad \cdot 8$$

$$\int \sec x dx = \log|\sec x + \tan x| = \log|\tan(\frac{1}{2}x + \frac{1}{4}\pi)| \quad \cdot 9$$

$$\int \csc x dx = \log|\csc x - \cot x| = \log|\tan \frac{1}{2}x| \quad \cdot 10$$

$$\int \arcsin \frac{x}{a} dx = x \arcsin \frac{x}{a} + \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > 0) \quad \cdot 11$$

$$\int \arccos \frac{x}{a} dx = x \arccos \frac{x}{a} - \sqrt{a^2 - x^2} \quad (a > 0) \quad \cdot 12$$

$$\int \arctan \frac{x}{a} dx = x \arctan \frac{x}{a} - \frac{a}{2} \log(a^2 + x^2) \quad (a > 0) \quad \cdot 13$$

جدول ۳ (ادامہ)

$$\int \sin^2 mx \, dx = \frac{1}{2m} (mx - \sin mx \cos mx) \cdot ۱۴$$

$$\int \cos^2 mx \, dx = \frac{1}{2m} (mx + \sin mx \cos mx) \cdot ۱۵$$

$$\int \sec^2 x \, dx = \tan x \cdot ۱۶$$

$$\int \csc^2 x \, dx = -\cot x \cdot ۱۷$$

$$\int \sin^n x \, dx = -\frac{\sin^{n-1} x \cos x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x \, dx \cdot ۱۸$$

$$\int \cos^n x \, dx = \frac{\cos^{n-1} x \sin x}{n} + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x \, dx \cdot ۱۹$$

$$\int \tan^n x \, dx = \frac{\tan^{n-1} x}{n-1} - \int \tan^{n-2} x \, dx \quad (n \neq 1) \cdot ۲۰$$

$$\int \cot^n x \, dx = -\frac{\cot^{n-1} x}{n-1} - \int \cot^{n-2} x \, dx \quad (n \neq 1) \cdot ۲۱$$

$$\int \sec^n x \, dx = \frac{\tan x \sec^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx \quad (n \neq 1) \cdot ۲۲$$

$$\int \csc^n x \, dx = -\frac{\cot x \csc^{n-2} x}{n-1} + \frac{n-2}{n-1} \int \csc^{n-2} x \, dx \quad (n \neq 1) \cdot ۲۳$$

$$\int \sinh x \, dx = \cosh x \cdot ۲۴$$

$$\int \cosh x \, dx = \sinh x \cdot ۲۵$$

$$\int \tanh x \, dx = \log|\cosh x| \cdot ۲۶$$

$$\int \coth x \, dx = \log|\sinh x| \cdot ۲۷$$

$$\int \operatorname{sech} x \, dx = \operatorname{arc} \tan(\sinh x) \quad \cdot ۲۸$$

$$\int \operatorname{csch} x \, dx = \log \left| \tanh \frac{x}{2} \right| = -\frac{1}{2} \log \frac{\cosh x + 1}{\cosh x - 1} \quad \cdot ۲۹$$

$$\int \sinh^2 x \, dx = \frac{1}{4} \sinh 2x - \frac{1}{2} x \quad \cdot ۳۰$$

$$\int \cosh^2 x \, dx = \frac{1}{4} \sinh 2x + \frac{1}{2} x \quad \cdot ۳۱$$

$$\int \operatorname{sech}^2 x \, dx = \tanh x \quad \cdot ۳۲$$

$$\int \sinh^{-1} \frac{x}{a} \, dx = x \sinh^{-1} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 + a^2} \quad (a > 0) \quad \cdot ۳۳$$

$$\int \cosh^{-1} \frac{x}{a} \, dx = \begin{cases} x \cosh^{-1} \frac{x}{a} - \sqrt{x^2 - a^2} & \left[\cosh^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) > 0, a > 0 \right] \\ x \cosh^{-1} \frac{x}{a} + \sqrt{x^2 - a^2} & \left[\cosh^{-1} \left(\frac{x}{a} \right) < 0, a > 0 \right] \end{cases} \quad \cdot ۳۴$$

$$\int \tanh^{-1} \frac{x}{a} \, dx = x \tanh^{-1} \frac{x}{a} + \frac{a}{2} \log |a^2 - x^2| \quad \cdot ۳۵$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 + x^2}} \, dx = \log (x + \sqrt{a^2 + x^2}) = \sinh^{-1} \frac{x}{a} \quad (a > 0) \quad \cdot ۳۶$$

$$\int \frac{1}{a^2 + x^2} \, dx = \frac{1}{a} \operatorname{arc} \tan \frac{x}{a} \quad (a > 0) \quad \cdot ۳۷$$

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} \, dx = \frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} \quad (a > 0) \quad \cdot ۳۸$$

$$\int (a^2 - x^2)^{3/2} \, dx = \frac{x}{8} (5a^2 - 2x^2) \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{3a^4}{8} \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} \quad (a > 0) \quad \cdot ۳۹$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2}} \, dx = \operatorname{arc} \sin \frac{x}{a} \quad (a > 0) \quad \cdot ۴۰$$

جدول ۳ (ادامہ)

$$\int \frac{1}{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2a} \log \left| \frac{a+x}{a-x} \right| \quad \cdot ۴۱$$

$$\int \frac{1}{(a^2 - x^2)^{3/2}} dx = \frac{x}{a^2 \sqrt{a^2 - x^2}} \quad \cdot ۴۲$$

$$\int \sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{x}{2} \sqrt{x^2 \pm a^2} \pm \frac{a^2}{2} \log |x + \sqrt{x^2 \pm a^2}| \quad \cdot ۴۳$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \log |x + \sqrt{x^2 - a^2}| = \cosh^{-1} \frac{x}{a} \quad (a > 0) \quad \cdot ۴۴$$

$$\int \frac{1}{x(a+bx)} dx = \frac{1}{a} \log \left| \frac{x}{a+bx} \right| \quad \cdot ۴۵$$

$$\int x \sqrt{a+bx} dx = \frac{2(3bx - 2a)(a+bx)^{3/2}}{15b^2} \quad \cdot ۴۶$$

$$\int \frac{\sqrt{a+bx}}{x} dx = 2\sqrt{a+bx} + a \int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}} dx \quad \cdot ۴۷$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a+bx}} dx = \frac{2(bx - 2a)\sqrt{a+bx}}{3b^2} \quad \cdot ۴۸$$

$$\begin{aligned} \int \frac{1}{x\sqrt{a+bx}} dx &= \frac{1}{\sqrt{a}} \log \left| \frac{\sqrt{a+bx} - \sqrt{a}}{\sqrt{a+bx} + \sqrt{a}} \right| \quad (a > 0) \quad \cdot ۴۹ \\ &= \frac{2}{\sqrt{-a}} \arctan \sqrt{\frac{a+bx}{-a}} \quad (a < 0) \end{aligned}$$

$$\int \frac{\sqrt{a^2 - x^2}}{x} dx = \sqrt{a^2 - x^2} - a \log \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| \quad \cdot ۵۰$$

$$\int x \sqrt{a^2 - x^2} dx = -\frac{1}{3}(a^2 - x^2)^{3/2} \quad \cdot ۵۱$$

$$\int x^2 \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{x}{8}(2x^2 - a^2)\sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^4}{8} \arcsin \frac{x}{a} \quad (a > 0) \quad \cdot ۵۲$$

جدول ۳ (ادامہ)

$$\int \frac{1}{x\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\frac{1}{a} \log \left| \frac{a + \sqrt{a^2 - x^2}}{x} \right| \quad \cdot ۵۳$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\sqrt{a^2 - x^2} \quad \cdot ۵۴$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{a^2 - x^2}} dx = -\frac{x}{2} \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{a^2}{2} \arcsin \frac{x}{a} \quad (a > 0) \quad \cdot ۵۵$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 + a^2} - a \log \left| \frac{a + \sqrt{x^2 + a^2}}{x} \right| \quad \cdot ۵۶$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - a^2}}{x} dx = \sqrt{x^2 - a^2} - a \arccos \frac{a}{|x|} \quad \cdot ۵۷$$

$$= \sqrt{x^2 - a^2} - a \operatorname{arcsec} \left(\frac{x}{a} \right) \quad (a > 0)$$

$$\int x\sqrt{x^2 \pm a^2} dx = \frac{1}{3}(x^2 \pm a^2)^{3/2} \quad \cdot ۵۸$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 + a^2}} dx = \frac{1}{a} \log \left| \frac{x}{a + \sqrt{x^2 + a^2}} \right| \quad \cdot ۵۹$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{x^2 - a^2}} dx = \frac{1}{a} \arccos \frac{a}{|x|} \quad (a > 0) \quad \cdot ۶۰$$

$$\int \frac{1}{x^2\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \mp \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{a^2 x} \quad \cdot ۶۱$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{x^2 \pm a^2}} dx = \sqrt{x^2 \pm a^2} \quad \cdot ۶۲$$

$$\int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \log \left| \frac{2ax + b - \sqrt{b^2 - 4ac}}{2ax + b + \sqrt{b^2 - 4ac}} \right| \quad (b^2 > 4ac) \quad \cdot ۶۳$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4ac - b^2}} \arctan \frac{2ax + b}{\sqrt{4ac - b^2}} \quad (b^2 < 4ac)$$

جدول ۳ (ادامہ)

$$\int \frac{x}{ax^2 + bx + c} dx = \frac{1}{2a} \log|ax^2 + bx + c| - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{ax^2 + bx + c} dx \quad .۶۴$$

$$\int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \quad .۶۵$$

$$= \frac{1}{\sqrt{a}} \log|2ax + b + 2\sqrt{a}\sqrt{ax^2 + bx + c}| \quad (a > 0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-a}} \arcsin \frac{-2ax - b}{\sqrt{b^2 - 4ac}} \quad (a < 0)$$

$$\int \sqrt{ax^2 + bx + c} dx \quad .۶۶$$

$$= \frac{2ax + b}{4a} \sqrt{ax^2 + bx + c} + \frac{4ac - b^2}{8a} \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx = \frac{\sqrt{ax^2 + bx + c}}{a} - \frac{b}{2a} \int \frac{1}{\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \quad .۶۷$$

$$\int \frac{1}{x\sqrt{ax^2 + bx + c}} dx \quad .۶۸$$

$$= \frac{-1}{\sqrt{c}} \log \left| \frac{2\sqrt{c}\sqrt{ax^2 + bx + c} + bx + 2c}{x} \right| \quad (c > 0)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{-c}} \arcsin \frac{bx + 2c}{|x|\sqrt{b^2 - 4ac}} \quad (c < 0)$$

$$\int x^3 \sqrt{x^2 + a^2} dx = \left(\frac{1}{5}x^2 - \frac{2}{15}a^2\right) \sqrt{(a^2 + x^2)^3} \quad .۶۹$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 \pm a^2}}{x^4} dx = \frac{\mp \sqrt{(x^2 \pm a^2)^3}}{3a^2 x^3} \quad .۷۰$$

$$\int \sin ax \sin bx dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \quad (a^2 \neq b^2) \quad .۷۱$$

جدول ٣ (ادامه)

$$\int \sin ax \cos bx \, dx = -\frac{\cos(a-b)x}{2(a-b)} - \frac{\cos(a+b)x}{2(a+b)} \quad (a^2 \neq b^2) \quad \cdot ٧٢$$

$$\int \cos ax \cos bx \, dx = \frac{\sin(a-b)x}{2(a-b)} + \frac{\sin(a+b)x}{2(a+b)} \quad (a^2 \neq b^2) \quad \cdot ٧٣$$

$$\int \sec x \tan x \, dx = \sec x \quad \cdot ٧٤$$

$$\int \csc x \cot x \, dx = -\csc x \quad \cdot ٧٥$$

$$\begin{aligned} \int \cos^m x \sin^n x \, dx &= \frac{\cos^{m-1} x \sin^{n+1} x}{m+n} + \frac{m-1}{m+n} \int \cos^{m-2} x \sin^n x \, dx \quad \cdot ٧٦ \\ &= -\frac{\sin^{n-1} x \cos^{m+1} x}{m+n} + \frac{n-1}{m+n} \int \cos^m x \sin^{n-2} x \, dx \end{aligned}$$

$$\int x^n \sin ax \, dx = -\frac{1}{a} x^n \cos ax + \frac{n}{a} \int x^{n-1} \cos ax \, dx \quad \cdot ٧٧$$

$$\int x^n \cos ax \, dx = \frac{1}{a} x^n \sin ax - \frac{n}{a} \int x^{n-1} \sin ax \, dx \quad \cdot ٧٨$$

$$\int x^n e^{ax} \, dx = \frac{x^n e^{ax}}{a} - \frac{n}{a} \int x^{n-1} e^{ax} \, dx \quad \cdot ٧٩$$

$$\int x^n \log ax \, dx = x^{n+1} \left[\frac{\log ax}{n+1} - \frac{1}{(n+1)^2} \right] \quad \cdot ٨٠$$

$$\int x^n (\log ax)^m \, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} (\log ax)^m - \frac{m}{n+1} \int x^n (\log ax)^{m-1} \, dx \quad \cdot ٨١$$

$$\int e^{ax} \sin bx \, dx = \frac{e^{ax}(a \sin bx - b \cos bx)}{a^2 + b^2} \quad \cdot ٨٢$$

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax}(b \sin bx + a \cos bx)}{a^2 + b^2} \quad \cdot ٨٣$$

جدول ۳ (ادامہ)

$$\int \operatorname{sech} x \tanh x \, dx = -\operatorname{sech} x \quad \cdot ۸۴$$

$$\int \operatorname{csch} x \coth x \, dx = -\operatorname{csch} x \quad \cdot ۸۵$$

ضمیمهء ت

جواب تمرینات با شماره های فرد

بعضی از حل‌هایی که نیاز به اثبات دارند ناقص بوده و یا حذف شده‌اند.

بخش ۱.۱

$$x = 0, z = 0, y \in \mathbb{R}; x = 0, y = 0, z \in \mathbb{R}; y = 0, x, z \in \mathbb{R}; x = 0, y, z \in \mathbb{R} \quad 0.1$$

۰.۳ (ب) "اولا" تشابه $\Delta((0, 0, 0), (x, 0, 0), (x, y, 0))$ به $\Delta((0, 0, 0), (\alpha x, 0, 0), (\alpha x, \alpha y, 0))$ نشان

می‌دهد که $(0, 0, 0), (x, y, 0), (\alpha x, \alpha y, 0)$ و $(\alpha x, \alpha y, 0)$ همخط اند. ثانیا، "تشابه" $\Delta((0, 0, 0), (x, y, 0), (x, y, z))$

با $\Delta((0, 0, 0), (\alpha x, \alpha y, 0), (\alpha x, \alpha y, \alpha z))$ نشان می‌دهد که $(0, 0, 0), (x, y, z), (\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ و $(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$

همخط اند. لذا، $(\alpha x, \alpha y, \alpha z)$ در جهت مناسب αv می‌باشد. بالاخره، با استفاده از

قضیه فیثاغورس نشان دهید که طول صحیح است.

$$4; 17 \quad 0.5$$

$$(-104 + 16a, -24 - 4b, -22 + 26c) \quad 0.7$$

$$24i + 0j + 0k = 24i \quad 0.9$$

$$\{(2s, 7s + 2t, 7t) | s \in \mathbb{R}, t \in \mathbb{R}\} \quad 0.11$$

$$l(t) = (2t - 1)i - j + (3t - 1)k \quad 0.13$$

$$\{(x_0, y_0, z_0) + sa + tb | 0 \leq s \leq 1, 0 \leq t \leq 1\} \quad 0.15$$

۰.۱۷ اگر $v \neq 0$ ، w باشند، نقاط میانی اضلاع Δ طبق مثال ۷ عبارتند از $\frac{1}{2}v$ ، $\frac{1}{2}w$ و $\frac{1}{2}(v+w)$.

این معادلات را امتحان کنید: $(\frac{2}{3})(\frac{1}{2})(v+w) = \frac{1}{2}v + \frac{1}{3}(w - \frac{1}{2}v) = \frac{1}{2}w + \frac{1}{3}(v - \frac{1}{2}w)$

۰.۱۹ هرگاه (x, y, z) بر خط واقع باشد، آنگاه $x = 2 + t$ ، $y = -2 + t$ ، و $z = -1 + t$

لذا، $2x - 3y + z - 2 = 4 + 2t + 6 - 3t - 1 + t - 2 = 7$ ، که صفر نیست.

بنابراین، هیچ (x, y, z) ی در هر دو شرط صدق نمی‌کند.

۲۱. $(1, 0, 0)$ در مجموعه است. هرگاه خط عبارت باشد از $(1, 0, 0) + t(a, b, c)$ ، آنگاه

$$(1 + at)^2 - (tb)^2 - (tc)^2 = 1 \quad . \text{ یعنی } t[2a + (a^2 - b^2 - c^2)t] = 0$$

ازای هر t برقرار باشد. در نتیجه، $a = 0$ و $b^2 = c^2$. در مجموعه دو خط مار بر

$(1, 0, 0)$ وجود دارد؛ یعنی، $I_1(t) = (1, 0, 0) + t(0, 1, 1)$ و $I_2(t) = (1, 0, 0) + t(0, 1, -1)$.

بخش ۲۰۱

۱. (آ) عبارات را برحسب مؤلفه‌ها نوشته و از خواص شرکتپذیری و پخشپذیری اعداد

استفاده کنید.

(ب) از تعویضپذیری ضرب اعداد بر مختصات استفاده نمایید.

۳. 99°

۵. 75.7

۷. $\|u\| = \sqrt{5}, \|v\| = \sqrt{2}, u \cdot v = -3$

۹. $\|u\| = \sqrt{11}, \|v\| = \sqrt{62}, u \cdot v = -14$

۱۱. $\|u\| = \sqrt{14}, \|v\| = \sqrt{26}, u \cdot v = -17$

۱۳. هر (x, y, z) با خاصیت $x + y + z = 0$

بخش ۳۰۱

۱. ؛ و غیره.
$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 8 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 8 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -8$$

۳. $-3i + j + 5k$

۵. $\sqrt{35}$

۷. $\pm k$

۹. $\pm(113i + 17j - 103k)/\sqrt{23667}$

۱۱. $2/\sqrt{338} = \sqrt{2}/13$

۱۳. $u + v = 3i - 3j + 3k; u \cdot v = 6; \|u\| = \sqrt{6}; \|v\| = 3; u \times v = -3i + 3k$

۱۵. $x + y + z - 1 = 0 \quad (\bar{T})$

$$x + 2y + 3z - 6 = 0 \quad (\text{ب})$$

۱۷. (آ) اولی را با کار روی مختصات انجام دهید، سپس با استفاده از آن و

$$A \times (B \times C) = -(B \times C) \times A \quad \text{دومی را به دست آورید.}$$

(ب) با استفاده از (آ)، کمیت مربوطه را برحسب حاصل ضربهای داخلی

بنویسید.

(پ) از (آ) استفاده کرده جملات را دسته بندی نمایید.

۱۹. نتایج قاعده کرامر را حساب کرده و تحقیق کنید که ادر معادله صدق

می کنند.

$$x - 2y + 3z + 12 = 0 \quad . ۲۱$$

$$4x - 6y - 10z = 14 \quad . ۲۲$$

$$10x - 17y + z + 25 = 0 \quad . ۲۵$$

بخش ۴.۱

۱. (آ)

استوانه‌ای

قائم

r	θ	z	x	y	z
1	45°	1	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{2}/2$	1
2	$\pi/2$	-4	0	2	-4
0	45°	10	0	0	10
3	$\pi/6$	4	$3\sqrt{3}/2$	$3/2$	4

کروی

ρ	θ	ϕ
$\sqrt{2}$	45°	45°
$2\sqrt{5}$	$\pi/2$	$\pi - \arccos(2\sqrt{5}/5)$
10	45°	0
5	$\pi/6$	$\arccos(4/5)$

(ب) گروه قائم

x	y	z	ρ	θ	ϕ
2	1	-2	3	$\arctan 1/2$	$\pi/2 + \arccos \sqrt{5}/3$
0	3	4	5	$\pi/2$	$\arcsin 3/5$
$\sqrt{2}$	1	1	2	$\arcsin \sqrt{3}/3$	$\pi/3$
$-2\sqrt{3}$	-2	3	5	$7\pi/6$	$\arccos 3/5$

استوانه‌ای

r	θ	z
$\sqrt{5}$	$\arctan 1/2$	-2
3	$\pi/2$	4
$\sqrt{3}$	$\arcsin \sqrt{3}/3$	1
4	$7\pi/6$	3

۳. (آ) دوران به اندازه π حول محور z

(ب) انعکاس نسبت به صفحه xy

۵. خیر: $(r, \theta, \phi) = (-r, \theta + \pi, \pi - \phi)$

۷. $\hat{e}_\rho = (x\mathbf{i} + y\mathbf{j} + z\mathbf{k})/\sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$

$\hat{e}_\theta = (-y\mathbf{i} + x\mathbf{j})/\sqrt{x^2 + y^2}$

$\hat{e}_\phi = (xz\mathbf{i} - yz\mathbf{j} + (x^2 + y^2)\mathbf{k})/r\rho$

$\hat{e}_\theta \times \mathbf{j} = -y\mathbf{k}/\sqrt{x^2 + y^2}$, $\hat{e}_\phi \times \mathbf{j} = (xz/r\rho)\mathbf{k} - (r/\rho)\mathbf{i}$

بخش ۵.۱

۱. (دو) برحسب مؤلفه‌ها بیان کرده و از تعویضپذیری ضرب اعداد استفاده نمایید.

(سه) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ مجموعی از مربعات اعداد حقیقی است.

(چهار) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}$ مجموع مربعات مؤلفه‌های \mathbf{x} است. این می‌تواند فقط وقتی ۰ باشد که

هر مؤلفه ۰ باشد.

۲. (آ) $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| = 10 = \sqrt{5}\sqrt{20} = \|\mathbf{x}\| \|\mathbf{y}\|$

$\|\mathbf{x} + \mathbf{y}\| = 3\sqrt{5} = \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$

$$\begin{aligned} |x \cdot y| &= 17 < \sqrt{3690} = \|x\| \|y\| & (\text{ب}) \\ \|x + y\| &= \sqrt{165} < 15 < \sqrt{41} + 3\sqrt{10} = \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |x \cdot y| &= 5 < \sqrt{65} = \|x\| \|y\| & (\text{پ}) \\ \|x + y\| &= \sqrt{28} < \sqrt{5} + \sqrt{13} = \|x\| + \|y\| \end{aligned}$$

$$(\det A)(\det A^{-1}) = \det(AA^{-1}) = \det(I) = 1 \quad .5$$

۷ حاصل ضرب ماتریسی در هر دو ترتیب را حساب کنید .

۹ راهنمایی . به ازای $k = 2$ ، از نامساوی مثلثی استفاده کرده نشان دهید که

$$\|x_1 + x_2\| \leq \|x_1\| + \|x_2\| \quad ; \quad \text{سپس به ازای } k = i + 1 \text{ توجه کنید که}$$

$$\|x_1 + x_2 + \dots + x_{i+1}\| \leq \|x_1 + x_2 + \dots + x_i\| + \|x_{i+1}\|$$

۱۱ (آ) $n = 1$ و $n = 2$ را مستقیماً امتحان کنید . سپس یک دترمینان $n \times n$ را به

مجموعی از $(n-1) \times (n-1)$ دترمینان تحویل کرده و از فرض استقرار براینها استفاده نمایید .

(ب) استدلال شبیه (آ) است . فرض کنید سطر اول در λ ضرب شده باشد . جمله اول

مجموع حاصل ضرب λa_{11} در یک دترمینان $(n-1) \times (n-1)$ بدون عواملی از λ است .

سایر جملات (با بسط نسبت به سطر اول) به همین نحو به دست می آیند .

$$.13 \quad \text{نه لزوماً} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \text{ را امتحان کنید .}$$

۱۵ (آ) مجموع دو تابع پیوسته و ضرب اسکالری از یک تابع پیوسته پیوسته‌اند .

$$\begin{aligned} (xf + \beta g) \cdot k &= \int_0^1 (xf + \beta g)(x)h(x) dx & (\text{ب}) \quad (\text{یک}) \\ &= \int_0^1 f(x)h(x) dx + \beta \int_0^1 g(x)h(x) dx \\ &= xf \cdot h + \beta g \cdot h \end{aligned}$$

$$f \cdot g = \int_0^1 f(x)g(x) dx = \int_0^1 g(x)f(x) dx = g \cdot f \quad (\text{دو})$$

در (سه) و (چهار) انتگرالده مجذور کامل است . در نتیجه ، انتگرال نامنفی است و

فقط وقتی می‌تواند 0 باشد که انتگرالده همه جا 0 باشد . هرگاه به ازای x ، $f(x) \neq 0$ ،

آنگاه به خاطر پیوستگی همسایگی x مثبت است ، و انتگرال مثبت

می‌باشد .

تمرینات دوره‌ای برای فصل ۱

$v + w = 4i + 3j + 6k; 3v = 9i + 12j + 15k; 6v + 8w = 26i + 16j + 38k; -2v = -6i - 8j - 10k; v \cdot w = 4; v \times w = 9i + 2j - 7k$. ۱

$\{sta + s(1-t)b \mid 0 \leq s \leq 1 \text{ و } 0 \leq t \leq 1\}$. ۳

۵. فرض کنید $v = (a_1, a_2, a_3), w = (b_1, b_2, b_3)$ و نامساوی CBS را به کار ببرید .

۷. مساحت قدرمطلق

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 + \lambda a_1 & b_2 + \lambda a_2 \end{vmatrix}$$

است (می‌توان یک سطر دترمینان را بدون تغییر در مقدارش به سطر دیگر افزود .)

۹. کسینوسهای دو قسمت زاویه مساویند، زیرا

$$a \cdot v / \|a\| \|v\| = (a \cdot b + \|a\| \|b\|) / \|v\| = b \cdot v / \|b\| \|v\|.$$

$$i \times j = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = k \quad \text{و غیره} \quad \text{۱۱} \cdot$$

۱۳. (\bar{T}) راهنمایی . طول تصویر بردار بین هر جفت از نقاط ، بر هر خط یکی ، روی

($a_1 \times a_2$) / $\|a_1 \times a_2\|$ مساوی d است . (

(ب) $\sqrt{2}$

۱۵. (\bar{T}) توجه کنید که

$$\frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x_1 & x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_1 & y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix} = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} x_2 - x_1 & x_3 - x_1 \\ y_2 - y_1 & y_3 - y_1 \end{vmatrix}$$

(ب) $\frac{1}{2}$

۱۷. کروی قائم

(\bar{T}) $(\sqrt{2}/2, \sqrt{2}/2, 1)$ (\bar{T}) $(\sqrt{2}, \pi/4, \pi/4)$

(ب) $(3\sqrt{3}/2, \frac{3}{2}, -4)$ (ب) $(5, \pi/6, \arccos(-\frac{4}{5}))$

(پ) $(0, 0, 1)$ (پ) $(1, \pi/4, 0)$

(ت) $(0, -2, 1)$ (ت) $(\sqrt{5}, -\pi/2, \arccos(\sqrt{5}/5))$

(ث) $(0, 2, 1)$ (ث) $(\sqrt{5}, \pi/2, \arccos(\sqrt{5}/5))$

۱۹. $z = r^2 \cos 2\theta; \cos \phi = r \sin^2 \phi \cos 2\theta$

$$|x \cdot y| = 6 < \sqrt{98} = \|x\| \|y\|; \|x + y\| = \sqrt{33} < \sqrt{14} + \sqrt{7} = \|x\| + \|y\| \quad ۰۲۱$$

۰۲۳. (آ) قانون شرکتپذیری برای ضرب ماتریسی را می‌توان به صورت زیر امتحان کرد:

$$\begin{aligned} [(AB)C]_{ij} &= \sum_{k=1}^n (AB)_{ik} C_{kj} = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^n A_{il} B_{lk} C_{kj} \\ &= \sum_{l=1}^n A_{il} (BC)_{lj} = [A(BC)]_{ij} \end{aligned}$$

از این و توجه به C به عنوان یک بردار ستونی استفاده کنید.

(ب) ماتریس ترکیب ماتریس حاصل ضربی است.

۰۲۵. \mathbb{R}^n به وسیله بردارهای e_1, e_2, \dots, e_n پیموده شده است. هرگاه $v \in \mathbb{R}^n$ ، آنگاه

، در نتیجه، $Av = A(\sum_{i=1}^n (v \cdot e_i) e_i) = \sum_{i=1}^n (v \cdot e_i) A e_i$. فرض کنید $a_{ij} = (A e_j \cdot e_i)$.

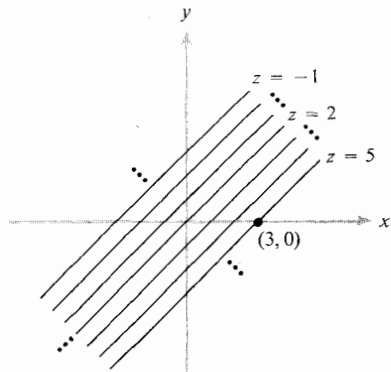
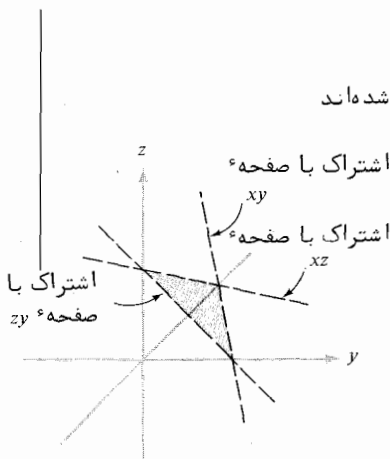
، یعنی، هرگاه $A e_j = \sum_{i=1}^n a_{ij} e_i$. در این صورت، $Av \cdot e_k = \sum_{i=1}^n (v \cdot e_i) a_{ki}$.

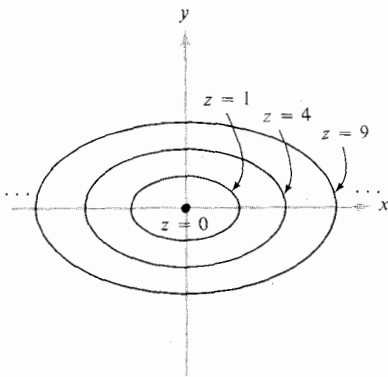
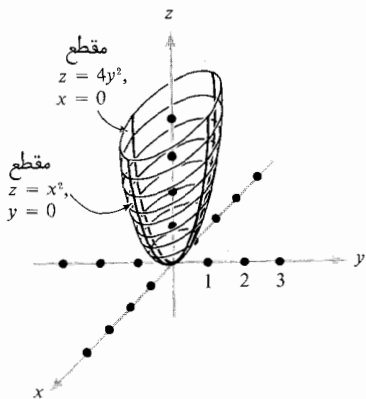
$$Av = \begin{bmatrix} a_{11} & \cdots & a_{1n} \\ \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} \text{ آنگاه } v = \begin{bmatrix} v_1 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix}$$

و این همان مطلوب است.

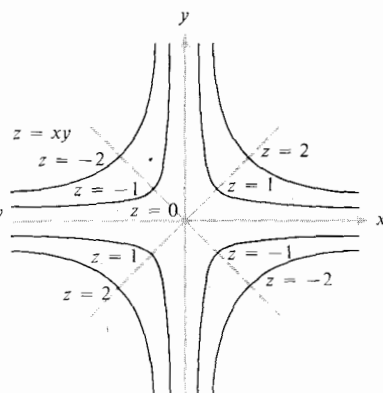
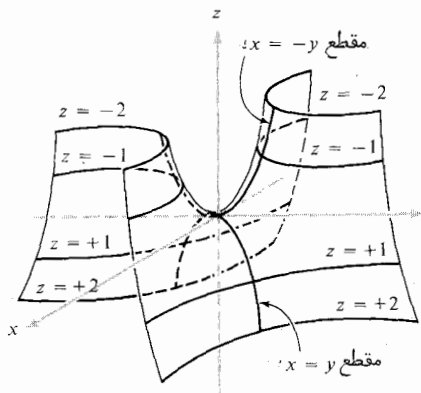
بخش ۱.۲

۰۱. منحنیهای تراز و نمودارها ذیلا "رسم شده‌اند"



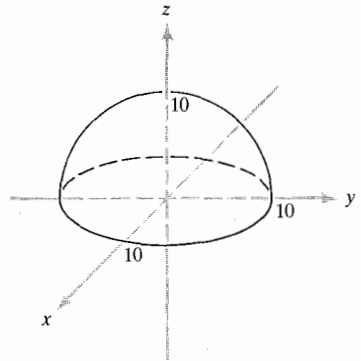
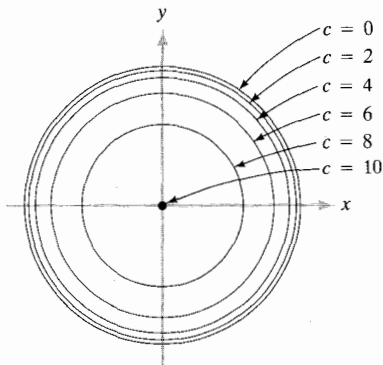


مسئله ۱ (ب)



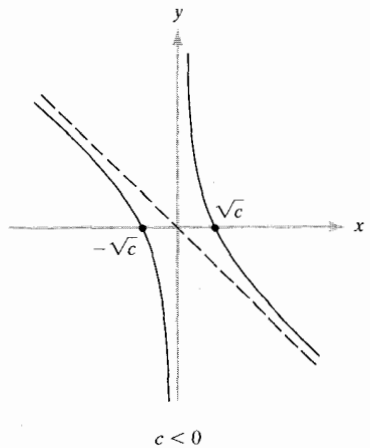
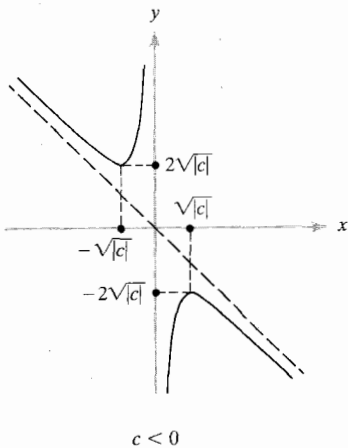
مسئله ۱ (پ)

نمودار (پ) یک سهمی‌گون هذلولوی مانند نمودار مثال ۴ است ولی به اندازه 45° چرخیده و به طور قائم به اندازه عامل $\frac{1}{4}$ تخت شده است. برای مشاهده این امر، از متغیرهای $u = x + y$ و $v = x - y$ استفاده کنید. در این صورت $z = (u^2 - v^2)/4$.
 ۳. منحنیهای تراز دواپر $x^2 + y^2 = 100 - c^2$ به ازای $c \leq 10$ هستند. نمودار نیمکره بالای $x^2 + y^2 + z^2 = 100$ می‌باشد.



۵. منحنیهای تراز دایره بوده، و نمودار یک سهمی‌گون دوار است. ر. ک. مثال ۳ از این بخش.

۷. اگر $c = 0$ ، منحنی تراز خط مستقیم $y = -x$ است. هرگاه $c \neq 0$ ، آنگاه $y = -x + (c/x)$ است. منحنی تراز هذلولی با محور y و خط $y = -x$ به عنوان مجانب است. نمودار یک سهمی‌گون هذلولوی است. مقاطع در امتداد خط $y = ax$ سهمیهای $z = (1 + a)x^2 = (1 + a)r^2/(1 + a^2)$ می‌باشند.

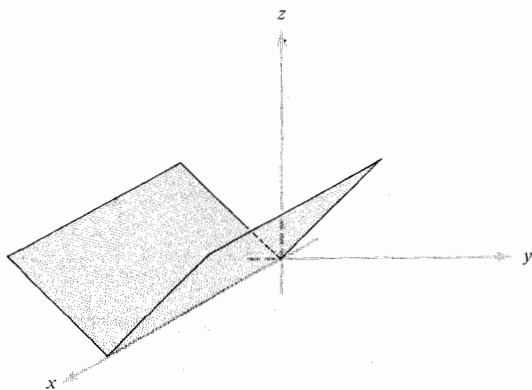


۹. اگر $c > 0$ ، سطح تراز $f(x, y, z) = c$ تهی است . اگر $c = 0$ ، سطح تراز نقطه $(0, 0, 0)$ است . اگر $c < 0$ ، سطح تراز کره‌ای به شعاع \sqrt{c} و مرکز $(0, 0, 0)$ می‌باشد . مقطع نمودار با صفحه $z = a$ عبارت است از $t = -x^2 - y^2 - a^2$ ، که یک سهمی‌گون دوار است که در فضای (x, y, t) به پایین باز می‌شود .

۱۱. اگر $c < 0$ ، سطح تراز تهی است . اگر $c = 0$ ، سطح تراز محور z است . اگر $c > 0$ ، استوانه مستدیر قائم $x^2 + y^2 = c$ به شعاع \sqrt{c} است که محورش محور z می‌باشد . مقطع نمودار با صفحه $z = a$ سهمی‌گون دوار $t = x^2 + y^2$ می‌باشد . مقطع با صفحه $x = b$ یک " تغار " یا مقطع عرضی سهمی $t(y, z) = y^2 + b^2$ می‌باشد .

۱۳. $u = (x - z)/\sqrt{2}$ و $v = (x + z)/\sqrt{2}$ محورهای u و v را می‌دهند که از دوران محورهای x و z به اندازه 45° حول محور y به دست می‌آیند . چون $f = v y \sqrt{2}$ ، سطوح تراز $f = c$ " استوانه‌هایی " عمود بر صفحه xy اند ($z = -x$) که مقاطع عرضی آنها هذلولیهای $xy = c/\sqrt{2}$ می‌باشند . مقطع نمودار $S_{x=a} \cap (f)$ سهمی‌گون هذلولوی $t = (z + a)y$ در فضای yzt می‌باشد (ر. ک. تمرین ۱ (پ)). مقطع نمودار $S_{y=b} \cap (f)$ صفحه zxt است . مقطع نمودار $S_{z=b} \cap (f)$ سهمی‌گون هذلولوی $t = y(x + b)$ در فضای xyt می‌باشد .

۱۵



اگر $c < 0$ ، سطح تراز تهی است . اگر $c = 0$ ، منحنی تراز محور x است اگر $c > 0$

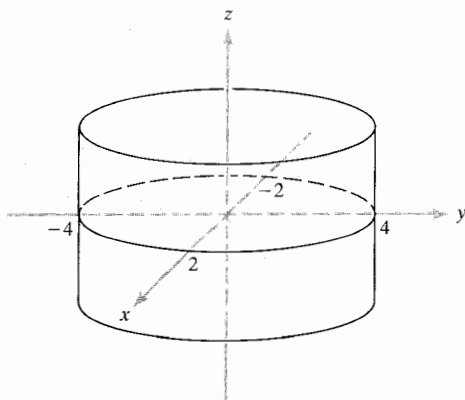
جفت خطوط موازی $|y| = c$ است. مقاطع نمودار با x ثابت منحنیهای V شکل $x = |y|$ در صفحه yz می‌باشند. نمودار در ص ۶۶۶ رسم شده است.

۱۷. با کامل کردن مربع به دست آورید $(x+2)^2 + (y-b/2)^2 + (z+9/2)^2 = (b^2 + 4b + 97)/4$.

این یک بیضی‌گون به مرکز $(-2, b/2, -9/2)$ و محورهای موازی محورهای مختصات است.

۱۹. مقدار z مهم نیست؛ در نتیجه، یک "استوانه" از مقطع عرضی بیضوی موازی محور

z و قاطع با صفحه xy در بیضی $x^2 + y^2 = 16$ به دست می‌آوریم.

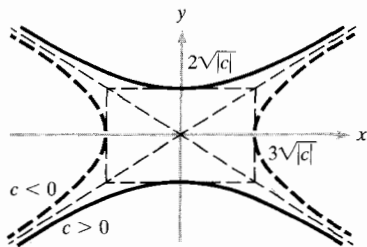
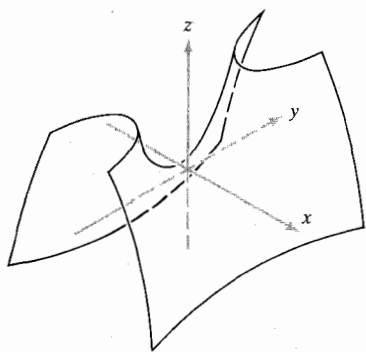


۲۱. مقدار x مهم نیست؛ در نتیجه، یک "استوانه" موازی با محور x از مقطع عرضی

هذلولوی و قاطع با صفحه yz در هذلولوی $z^2 - y^2 = 4$ به دست می‌آوریم.

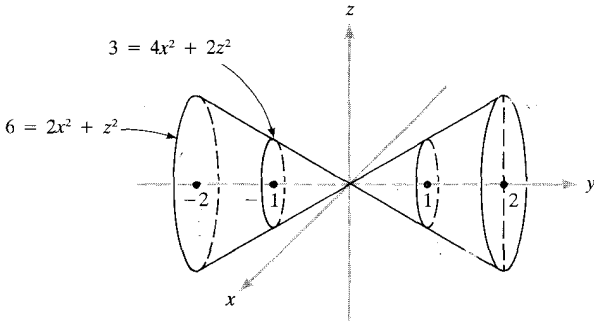
۲۳. این یک سطح زمینی مشابه شکل مثال ۴ است ولی هذلولیها، که منحنیهای ترازند،

دیگر مجانبهای عمود برهم ندارند.

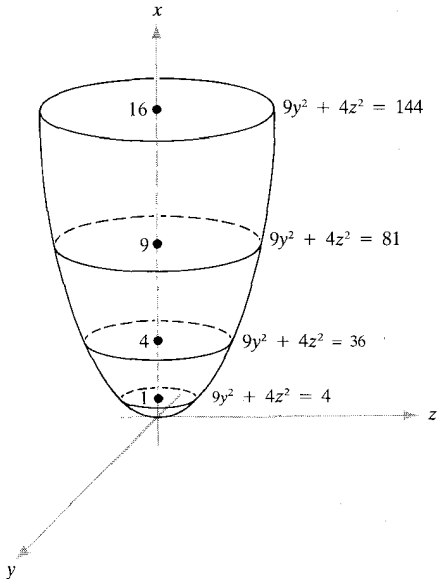


منحنیهای تراز

۲۵. یک مخروط مضاعف با محوری در امتداد محور y و مقاطع عرضی بیضوی



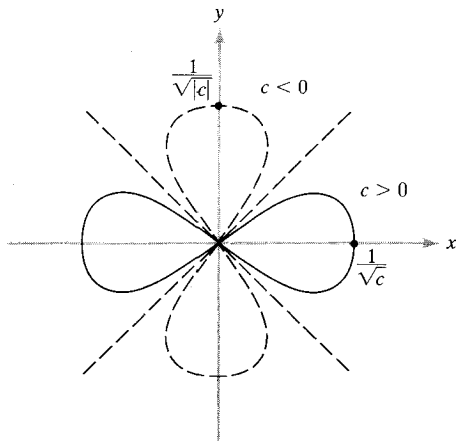
۲۷. یک سهمی‌گون بیضوی با محوری در امتداد محور x



۲۹. منحنیهای تراز با $\cos 2\theta = cr^2$ توصیف شده‌اند. هرگاه $c > 0$ ، آنگاه $-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4$

یا $3\pi/4 \leq \theta \leq 5\pi/4$. هرگاه $c < 0$ ، آنگاه $\pi/4 \leq \theta \leq 3\pi/4$ یا $5\pi/4 \leq \theta \leq 7\pi/4$.

در هر حال یک شکل ۸ مار بر مبداء به دست می‌آورد که لمنیسکات نام دارد. (این اشکال اول بار توسط ژاک برنولی بررسی شدند و گاهی لمنیسکاتهای برنولی نام دارند.)



بخش ۲.۲

۱. (آ) هرگاه $(x_0, y_0) \in A$ ، آنگاه $|x_0| < 1$ و $|y_0| < 1$. فرض کنید $r < 1 - |x_0|$ و

$D_r(x_0, y_0) \subset A$ به‌طور تحلیلی یا با رسم شکل ثابت کنید $r < 1 - |y_0|$.

(ب) هرگاه $(x_0, y_0) \in B$ و $0 < r < y_0$ (مثلاً $r = y_0/2$)، آنگاه $D_r(x_0, y_0) \subset B$

(به‌طور تحلیلی یا با رسم شکل ثابت کنید).

(پ) فرض کنید $r = \min(4 - \sqrt{x_0^2 + y_0^2}, \sqrt{x_0^2 + y_0^2} - 2)$

(ت) فرض کنید r مینیمم سه عدد به کار رفته در (آ)، (ب) و (پ) باشد.

(پ) فرض کنید $r = \min(|x_0|, |y_0|)$

۳. فرض کنید $y \in U \cap V$. هرگاه s و t به‌قدر کافی کوچک باشند، آنگاه $D_s(y) \subset U$ و

$D_t(y) \subset V$ ، و هرگاه $r = \min(s, t)$ ، آنگاه $D_r(y) \subset U \cap V$. هرگاه $z \in U \cup V$ ،

آنگاه قرصی حول z جزء U یا V ای که شامل z است وجود دارد.

۵. به ازای $\delta < \sqrt{\varepsilon + 4} - 2$ داریم $|x - 2| < \delta \Rightarrow |x^2 - 4| = |x - 2||x + 2| < \delta(\delta + 4) < \varepsilon$.

بنابراین قضیه ۳ (سه)، $\lim_{x \rightarrow 2} x^2 = (\lim_{x \rightarrow 2} x)^2 = 2^2 = 4$ ، (سه)

۰۷ (آ) 1 ؛ (ب) $\|x_0\|$ ؛ (پ) $(1, e)$ ؛

(ت) حد وجود ندارد (به تک تک حدود به ازای $x = 0$ و $y = 0$ نگاه کنید).

۰۹

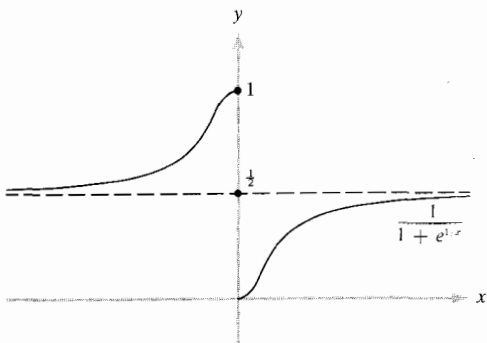
۰۱۱ (آ) $\lim_{x \rightarrow b^+} f(x) = L$ اگر به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای باشد به طوری که $x > b$

و $0 < x - b < \delta$ ایجاب کنند که $|f(x) - L| < \varepsilon$.

(ب) $\lim_{t \rightarrow -\infty} e^t = 0$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1/x) = -\infty$ ، در نتیجه، $\lim_{x \rightarrow 0^-} e^{1/x} = 0$ ، لذا $\lim_{x \rightarrow 0^-} 1/(1 + e^{1/x}) = 1$.

حد دیگر 0 می باشد.

(پ)



۰۱۳ (آ) 5 ؛ (ب) 0 ؛ (پ) $2x$ ؛ (ت) 1 ؛ (ث) $-\frac{1}{2}$

۰۱۵ $f(x, y) = xy$ را با $g(t) = (\sin t)/t$ به ازای $t \neq 0$ و $g(0) = 1$ ترکیب کنید.

۰۱۷ این را می توان با استفاده از قضیه ۷ ثابت کرد. یعنی، f در x_0 پیوسته است اگر و

فقط اگر $\lim_{x \rightarrow x_0} f(x) = f(x_0)$ به بیان معادل، به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای هست

به طوری که $0 < \|x - x_0\| < \delta$ نامساوی $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon$ را ایجاب می کند. نامساوی

اخیر را به صورت $\|f(x) - f(x_0)\| < \varepsilon < 0$ بنویسید، و این نامساوی می گوید که

$\lim_{x \rightarrow x_0} \|f(x) - f(x_0)\| = 0$

۰۱۹ از قسمتهای (دو) و (سه) قضیه ۴ استفاده کنید.

۰۲۱ فرض کنید $r = \|x - y\|/2$. اگر $\|z - y\| \leq r$ ، قرار دهید $f(z) = \|z - y\|/r$

اگر $\|z - y\| > r$ ، قرار دهید $f(z) = 1$.

۲۳ . اگر $\varepsilon > 0$ و x_0 داده شده باشند ، قرار دهید $\delta = (\varepsilon/K)^{1/\alpha}$. در این صورت ، اگر

$\|x - x_0\| < \delta$ ، $\|f(x) - f(x_0)\| < K\delta^\alpha = \varepsilon$. توجه کنید که انتخاب δ به بستگی

ندارد . این بدان معنی است که f به طور پیوسته یکنواخت می‌باشد .

بخش ۳.۲

$$\partial f / \partial x = y; \quad \partial f / \partial y = x \quad (\bar{1}) \quad . 1$$

$$\partial f / \partial x = ye^{xy}; \quad \partial f / \partial y = xe^{xy} \quad (\bar{2}) \quad .$$

$$\partial f / \partial x = \cos x \cos y - x \sin x \cos y \quad (\bar{3})$$

$$\partial f / \partial y = -x \cos x \sin y$$

$$\partial f / \partial x = 2x(1 + \log(x^2 + y^2)) \quad (\bar{4})$$

$$\partial f / \partial y = 2y(1 + \log(x^2 + y^2)); \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

$$\partial w / \partial x = (1 + 2x^2)\exp(x^2 + y^2); \quad \partial w / \partial y = 2xy \exp(x^2 + y^2) \quad (\bar{5}) \quad . 3$$

$$\partial w / \partial x = -4xy^2/(x^2 - y^2)^2; \quad \partial w / \partial y = 4yx^2/(x^2 - y^2)^2 \quad (\bar{6})$$

$$\partial w / \partial x = ye^{xy} \log(x^2 + y^2) + 2xe^{xy}/(x^2 + y^2) \quad (\bar{7})$$

$$\partial w / \partial y = xe^{xy} \log(x^2 + y^2) + 2ye^{xy}/(x^2 + y^2)$$

$$\partial w / \partial x = 1/y; \quad \partial w / \partial y = -x/y^2 \quad (\bar{8})$$

$$\partial w / \partial x = -y^2 e^{xy} \sin ye^{xy} \sin x + \cos ye^{xy} \cos x \quad (\bar{9})$$

$$\partial w / \partial y = (xye^{xy} + e^{xy})(-\sin ye^{xy} \sin x)$$

$$z = f(3, 1) + (\partial f / \partial x)(3, 1)(x - 3) + (\partial f / \partial y)(3, 1)(y - 1) \quad . 5$$

$$= 10 + 6(x - 3) + 3(y - 1) = 6x + 3y - 11$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & e^z \\ 2xy & x^2 & 0 \end{bmatrix} \quad (\bar{10}) \quad ; \quad \begin{bmatrix} e^x & xe^y - \sin y \\ 1 & 0 \\ 1 & e^y \end{bmatrix} \quad (\bar{11}) \quad ; \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\bar{12}) \quad . 7$$

۹ . هر دو مساوی xye^{xy} اند

$$\nabla f = (e^{-x^2 - y^2 - z^2}(-2x^2 + 1), -2xye^{-x^2 - y^2 - z^2}, -2xze^{-x^2 - y^2 - z^2}) \quad (\bar{13}) \quad . 11$$

$$\nabla f = (x^2 + y^2 + z^2)^{-2}(yz(y^2 + z^2 - x^2), xz(x^2 + z^2 - y^2), xy(x^2 + y^2 - z^2)) \quad (\bar{14}) \quad (\text{ب})$$

۱۳ . آنها ثابت‌اند . (راهنمایی . پاره‌خط بین x و y را به n قطعه تقسیم کنید تا به دست

آید $\|f(x) - f(y)\| \leq n^{1-\alpha} K \|y - x\|^\alpha$ مشتق ماتریس صفر است .

بخش ۴.۲

۱. از قسمتهای (یک) ، (دو) ، و (سه) قضیه ۱۰ استفاده کنید . مشتق در x مساوی $2f(x) + 1$ است .

$$h(x, y) = f(x, u(x, y)) = f(p(x), u(x, y)) \quad (1)$$

در اینجا p فقط به عنوان نمودار معرفی می شود: $p(x) = x$

$$\text{بنویسید } \frac{dp}{dx} = \frac{dx}{dx} = 1 \text{ ، زیرا } \frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p} \frac{dp}{dx} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$$

توجه . (p, u) را متغیرهای f بنامید . برای استفاده از قاعده زنجیره‌ای ، باید h را به صورت ترکیبی از توابع بیان کنیم ؛ یعنی ، ابتدا g را طوری بیابیم که $h(x, y) = f(g(x, y))$ فرض کنید $g(x, y) = (p(x), u(x, y))$. لذا ، $Dh = Df \cdot Dg$. در این صورت ،

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} \frac{\partial h}{\partial x} & \frac{\partial h}{\partial y} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{\partial g_1}{\partial x} & \frac{\partial g_1}{\partial y} \\ \frac{\partial g_2}{\partial x} & \frac{\partial g_2}{\partial y} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial p} & \frac{\partial f}{\partial u} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial y} \end{bmatrix} \end{aligned}$$

در نتیجه ، $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial p} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$. می توان دید که $\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x}$ یک جواب است .

این به خاطر ابهام در معنی $\partial f / \partial x$ نیاز به تعبیر دقیق دارد ، که چرا p به کار رفته است .

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} \quad (ب)$$

$$\frac{\partial h}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial u} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial v} \frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial w} \frac{\partial w}{\partial x} \quad (پ)$$

۵. هر یک را به دو راه حساب کنید ؛ جوابها عبارتند از

$$(f \circ c)(t) = e^t(\cos t - \sin t) \quad (1)$$

$$(f \circ c)(t) = 15t^4 \exp(3t^5) \quad (ب)$$

$$(f \circ c)(t) = (e^{2t} - e^{-2t})(1 + \log(e^{2t} + e^{-2t})) \quad (\text{پ})$$

$$(f \circ c)(t) = (1 + 4t^2)\exp(2t^2) \quad (\text{ت})$$

۷. از قضیه ۱۰ (سه) استفاده کرده و ماتریسها را با بردارها عوض کنید.

$$\partial f / \partial x(0, 0) = \partial f / \partial y(0, 0) = \lim_{t \rightarrow 0} ((0/t^2) - 0)/t = 0 \quad (\text{آ}) \quad ۹$$

$$(f \circ g)(t) = (ab^2/(a^2 + b^2))t; \nabla f(0, 0) \cdot g'(0) = (0, 0) \cdot (a, b) = 0 \quad (\text{ب})$$

$$\frac{\partial G}{\partial x} + \frac{\partial G}{\partial y} \frac{dy}{dx} = 0 \quad \text{؛ در نتیجه، } G(x, y(x)) = 0 \quad (\text{آ}) \quad ۱۱$$

۷. که در آن -1 یعنی ماتریس معکوس.

$$\begin{bmatrix} \frac{dy_1}{dx} \\ \frac{dy_2}{dx} \end{bmatrix} = - \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial y_1} & \frac{\partial G_1}{\partial y_2} \\ \frac{\partial G_2}{\partial y_1} & \frac{\partial G_2}{\partial y_2} \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \frac{\partial G_1}{\partial x} \\ \frac{\partial G_2}{\partial x} \end{bmatrix} \quad (\text{ب})$$

مؤلفه اول این معادله عبارت است از

$$\frac{dy_1}{dx} = \frac{-\frac{\partial G_1}{\partial x} \frac{\partial G_2}{\partial y_2} + \frac{\partial G_2}{\partial x} \frac{\partial G_1}{\partial y_2}}{\frac{\partial G_1}{\partial y_1} \frac{\partial G_2}{\partial y_2} - \frac{\partial G_2}{\partial y_1} \frac{\partial G_1}{\partial y_2}}$$

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-2x}{3y^2 + e^y} \quad (\text{پ})$$

۱۳. تعریف کنید $R_1(\mathbf{h}) = f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h}) - f(\mathbf{x}_0) - Df(\mathbf{x}_0) \cdot \mathbf{h}$

۱۵. برهان قسمت (سه) به صورت زیر است:

$$\begin{aligned} & \frac{|h(\mathbf{x}) - h(\mathbf{x}_0) - (f(\mathbf{x}_0)Dg(\mathbf{x}_0) + g(\mathbf{x}_0)Df(\mathbf{x}_0))(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ & \leq |f(\mathbf{x}_0)| \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0) - Dg(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ & \quad + |g(\mathbf{x}_0)| \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0) - Df(\mathbf{x}_0)(\mathbf{x} - \mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \\ & \quad + \frac{|f(\mathbf{x}) - f(\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \frac{|g(\mathbf{x}) - g(\mathbf{x}_0)|}{\|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\|} \|\mathbf{x} - \mathbf{x}_0\| \end{aligned}$$

وقتی $\mathbf{x} \rightarrow \mathbf{x}_0$ ، دو جمله اول با مشتگیری از f و g به ۰ می‌روند. جمله سوم نیز

چنین می‌کند، زیرا $\|f(x) - f(x_0)\|$ و $\|g(x) - g(x_0)\|$ بر گوی کوچکی چون $D_r(x_0)$ به ثابتی مانند M کراندار است. برای مشاهده این امر، r را آنقدر کوچک می‌گیریم که اگر $\|x - x_0\| < r$ ، $\|f(x) - f(x_0)\|$ در فاصله کمتر از ۱ از $Df(x_0)(x - x_0)$ قرار دارد. در این صورت، بنابر نامساوی کشی - شوارتز، داریم

$$\|f(x) - f(x_0)\| \leq M_1 + |Df(x_0)(x - x_0)| = M_1 + \|\nabla f(x_0)\| \cdot \|x - x_0\|$$

قسمت (چهار) از قسمت (سه) و حالت خاص قاعده خارج‌قسمت با f متحد ۱ به دست می‌آید. یعنی، $D(1/g)(x_0) = (-1/g(x_0)^2)Dg(x_0)$. برای به دست آوردن این جواب، توجه کنید که بر گوی کوچکی چون $D_r(x_0)$ ، $g(x) > m > 0$. با استفاده از مثلث و نامساوی شوارتز، نشان دهید که

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{g(x)} - \frac{1}{g(x_0)} + \frac{1}{g(x_0)^2} Dg(x_0)(x - x_0) \right| \|x - x_0\| \\ & \leq \frac{1}{|g(x)|} \frac{1}{|g(x_0)|} \frac{|g(x) - g(x_0) - Dg(x_0)(x - x_0)|}{\|x - x_0\|} \\ & \quad + \frac{|g(x) - g(x_0)|}{|g(x)|g(x_0)^2} \frac{|Dg(x_0)(x - x_0)|}{\|x - x_0\|} \\ & \leq \frac{1}{m^2} \frac{|g(x) - g(x_0) - Dg(x_0)(x - x_0)|}{\|x - x_0\|} + \frac{\|\nabla g(x_0)\|}{m^3} |g(x) - g(x_0)| \end{aligned}$$

این دو به ۰ می‌روند، زیرا g مشتق‌پذیر و پیوسته است.

۱۷. قاعده زنجیره‌ای را بر $\partial G/\partial T$ اعمال کنید، که در آن $G(t(T, P), P(T, P), V(T, P))$

$$P(T, P) = P \text{ و } t(T, P) = T \text{؛ متحد } 0 \text{ است؛ } P(V - b)e^{nRV/T} - RT$$

$$(2, 0) \quad ۱۹$$

۲۱. فرض کنید g_1 و g_2 توابعی C^1 از \mathbb{R}^3 به \mathbb{R} باشند به طوری که به ازای $\|x\| < \sqrt{2}/3$ ،

$$g_1(x) = 1 \text{؛ به ازای } \|x\| > 2\sqrt{2}/3 \text{، } g_1(x) = 0 \text{؛ به ازای } \|x - (1, 1, 0)\| < \sqrt{2}/3$$

$$g_2(x) = 1 \text{؛ و به ازای } \|x - (1, 1, 0)\| > 2\sqrt{2}/3 \text{، } g_2(x) = 0 \text{؛ فرض کنید}$$

$$h_2(x) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} \text{ و } h_1(x) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$f(x) = g_1(x)k_1(x) + g_2(x)k_2(x) \text{ و قرار دهید}$$

۲۳. بنابر تمرین ۲۲ و قضیه ۱۰ (سه)، هر مولفه^{۱۰} k مشتقپذیر بوده و

$$Dk_i(x_0) = f(x_0)Dg_i(x_0) + g_i(x_0)Df(x_0) \text{ چون } Dg_i(x_0)(y) \text{ مولفه } i \text{ م}$$

بوده و $Df(x_0)(y)$ عدد $\nabla f(x_0) \cdot y$ است، به دست می‌آوریم

$$Dk(x_0)(y) = f(x_0)Dg(x_0)(y) + (Df(x_0)(y))g(x_0) = f(x_0)Dg(x_0)(y) + (\nabla f(x_0) \cdot y)g(x_0)$$

بخش ۵.۲

$$\nabla f(1, 1, 2) \cdot v = (4, 3, 1) \cdot (1/\sqrt{5}, 2/\sqrt{5}, 0) = 2\sqrt{5} \quad . ۱$$

$$4y - 2x = 6 \quad (\text{ب}) \quad 3x + 8y + 3z = 20 \quad (\text{ا}) \quad . ۳$$

$$6y - 9x - z = 6 \quad (\text{ت}) \quad x + y + z = 3 \quad (\text{پ})$$

$$z = 1 \quad (\text{ج}) \quad y + z = \pi/2 \quad (\text{ث})$$

۵. $\nabla f(x, y, z) = 2(x, y, z)$ دوبرابر بردار شعاعی به x است. اما $f(x)$ مساوی $\|x\|^2$ است

و این، طبق قضیه ۱۳، با بیشترین افزایش مستقیماً از ۰ دور می‌شود. سطوح تراز

کراتی به مرکز مبدا هستند. بنابر قضیه ۱۴، بردار شعاعی به این کرات، و لذا به

هر منحنی در آنها، عمود است.

۷. نمودار f سطح تراز $0 = F(x, y, z) = f(x, y) - z$ است. در نتیجه، صفحه مماس عبارت

است از

$$0 = \nabla F(x_0, y_0, z_0) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0), \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0), -1 \right) \cdot (x - x_0, y - y_0, z - z_0)$$

چون $z_0 = f(x_0, y_0)$ ، این مساوی است با

$$(\partial f / \partial y)(x_0, y_0)(y - y_0)$$

$$\nabla f = (x + y, z + x, x + y), \mathbf{g}'(t) = (e^t, -\sin t, \cos t), (f \circ \mathbf{g}')(1) = 2e \cos 1 + 1 \quad (\text{ا}) \quad . ۹$$

$$\cos^2 1 - \sin^2 1$$

$$\nabla f = (yze^{xyz}, xze^{xyz}, xye^{xyz}), \mathbf{g}'(t) = [6, 6t, 3t^2], (f \circ \mathbf{g}')(1) = 108e^{18} \quad (\text{ب})$$

$$\nabla f = (x, yz), \mathbf{g}'(t) = (e^t, -e^{-t}, 1), (f \circ \mathbf{g}')(1) = e^2 - e^{-2} + 1 \quad (\text{پ})$$

۱۱. فرض کنید $f(x, y, z) = 1/r = (x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2}$ ، $\mathbf{r} = (x, y, z)$

$$-(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2}(x, y, z) = -(1/r^3)\mathbf{r}$$

$$\nabla f = (g'(x), 0) \quad . ۱۳$$

$$Df(0, 0, \dots, 0) = [0, \dots, 0] \quad \cdot ۱۵$$

بخش ۶.۲

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 24 \frac{x^3 y - xy^3}{(x^2 + y^2)^4}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 24 \frac{-x^3 y + xy^3}{(x^2 + y^2)^4} \quad (\Gamma) \quad \cdot ۱$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-6x^4 + 36x^2 y^2 - 6y^4}{(x^2 + y^2)^4}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2}{x^3}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = xe^{-x}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -e^{-y} \quad (\varphi)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -y^4 \cos(xy^2), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2x \sin(xy^2) - 4x^2 y^2 \cos(xy^2), \quad (\psi)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2y \sin(xy^2) - 2xy^3 \cos(xy^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = y^4 e^{-xy^2} + 12x^2 y^3, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = -2xe^{-xy^2} + 4x^2 y^2 e^{-xy^2} + 6yx^4, \quad (\zeta)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = -2ye^{-xy^2} + 2xy^3 e^{-xy^2} + 12x^3 y^2$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{2(\cos^2 x + e^{-y})\cos 2x + 2 \sin^2 2x}{(\cos^2 x + e^{-y})^3}, \quad (\theta)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{e^{-y} - \cos^2 x}{e^y(\cos^2 x + e^{-y})^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{2 \sin 2x}{e^y(\cos^2 x + e^{-y})^3}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} \frac{dx}{dt} \frac{dy}{dt} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \frac{\partial f}{\partial x} \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\partial f}{\partial y} \frac{d^2 y}{dt^2} \quad \cdot ۳$$

که در آن

$$2x + 6y - z = 5 \quad \cdot ۵$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \arctan \frac{x}{y} + \frac{xy}{x^2 + y^2} \quad (\bar{\Gamma}) \quad \cdot ۷$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-x^2}{x^2 + y^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{y^3}{(x^2 + y^2)^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{2x^2 y}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = \frac{-2xy^2}{(x^2 + y^2)^2}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-x \sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{-y \sin(\sqrt{x^2 + y^2})}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (\text{ب})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{x^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{x^2 \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} - \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{y^2 \sin \sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{y^2 \cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} - \frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{1/2}}$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = xy \left[\frac{\sin \sqrt{x^2 + y^2}}{(x^2 + y^2)^{3/2}} - \frac{\cos \sqrt{x^2 + y^2}}{x^2 + y^2} \right]$$

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -2x \exp(-x^2 - y^2); \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -2y \exp(-x^2 - y^2); \quad (\text{پ})$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = (4x^2 - 2)\exp(-x^2 - y^2); \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (4y^2 - 2)\exp(-x^2 - y^2)$$

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} = 4xy \exp(-x^2 - y^2)$$

۹. چون f و $\partial f / \partial z$ هر دو C^2 اند، داریم

$$\frac{\partial^3 f}{\partial x \partial y \partial z} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial^2}{\partial y \partial x} \frac{\partial f}{\partial z} = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z} \right) = \frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial^2 f}{\partial z \partial x} \right) = \frac{\partial^3 f}{\partial y \partial z \partial x}$$

$$۱۱. \quad V = -GM/r = -GM(x^2 + y^2 + z^2)^{-1/2} \quad \text{تحقیق کنید که}$$

$$\frac{\partial^2 V}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

$$= GM(x^2 + y^2 + z^2)^{-3/2} [3 - 3(x^2 + y^2 + z^2)(x^2 + y^2 + z^2)^{-2/2}] = 0$$

تمرینات دوره‌ای برای فصل ۲

۱. سهمی گون بیضوی (A)

(ب) فرض کنید $z = y + 3$ و y' و xy' می‌نویسیم z . این یک سهمی گون هذلولوی (انتقال یافته) است.

$$Df(x, y) = \begin{bmatrix} 2xy & x^2 \\ -ye^{-xy} & -xe^{-xy} \end{bmatrix} \quad (\bar{1}) \quad . ۳$$

$$Df(x) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (\bar{۲})$$

$$Df(x, y, z) = [e^x \quad e^y \quad e^z] \quad (\bar{۳})$$

$$Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (\bar{۴})$$

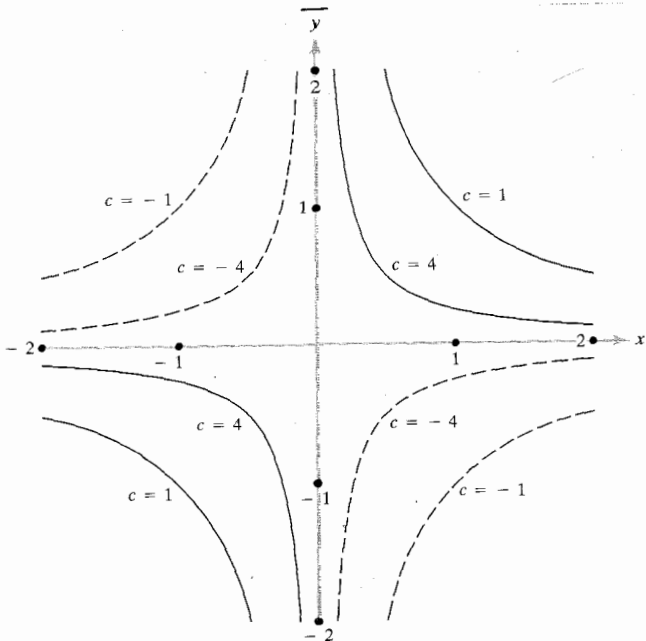
۵. صفحه مماس بر کره در (x_0, y_0, z_0) بر خطواصل بین مرکز و (x_0, y_0, z_0) عمود است.

$$z = 4x - 8y - 8 \quad (\bar{۲}) \quad z = x - y + 2 \quad (\bar{1}) \quad . ۷$$

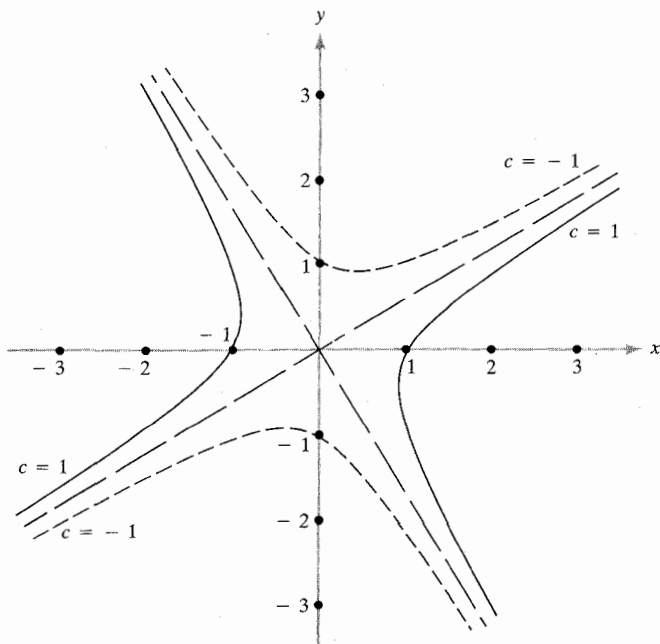
$$10x + 6y - 4z = 6 - \pi \quad (\bar{۴}) \quad x + y + z + 1 = 0 \quad (\bar{۳})$$

$$x + 2y - z = 2 \quad (\bar{۵}) \quad 2z = \sqrt{2}x + \sqrt{2}y \quad (\bar{۳})$$

۹۵. $(\bar{1})$ منحنیهای تراز هذلولیهای $xy = 1/c$ می باشند.



$$c = x^2 - xy - y^2 = \left(x - \frac{1 + \sqrt{5}}{2}y\right)\left(x - \frac{1 - \sqrt{5}}{2}y\right) \quad (-)$$



۱۱. (آ) 0

(ب) حد وجود ندارد.

۱۳. هرگاه $F = \nabla f$ ، آنگاه $\partial F_1 / \partial y = \partial^2 f / \partial y \partial x$ و $\partial F_2 / \partial x = \partial^2 f / \partial x \partial y$. چون F ، C^1 است، مشتقات جزئی لازم f پیوسته و لذا، طبق قضیه ۱۵، مساویند. هرگاه $F_1 = y \cos x$ و $F_2 = x \sin y$ ، آنگاه $\partial F_1 / \partial y = \cos x$ و $\partial F_2 / \partial x = \sin y$. چون اینها مساوی نیستند، F گرادیان چیزی نیست.

۱۵. (آ) خط $L(t) = (x_0, y_0, f(x_0, y_0)) + t(a, b, c)$ در صفحه $z = f(x_0, y_0)$ قرار دارد اگر $c = 0$ و بر $\nabla f(x_0, y_0)$ عمود است اگر $a(\partial f / \partial x)(x_0, y_0) + b(\partial f / \partial y)(x_0, y_0) = 0$. امتداد L داریم

$$\begin{aligned} f(x_0, y_0) + \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0)(x - x_0) + \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0)(y - y_0) \\ = f(x_0, y_0) + at \frac{\partial f}{\partial x}(x_0, y_0) + bt \frac{\partial f}{\partial y}(x_0, y_0) \\ = f(x_0, y_0) = z \end{aligned}$$

بنابراین، L در صفحه مماس قرار دارد. یک قائم یکه روبه بالا به صحنه مماس عبارت است از $\mathbf{p} = (1 + \|\nabla f\|^2)^{-1/2} (-(\partial f/\partial x)(x_0, y_0), -(\partial f/\partial y)(x_0, y_0), 1)$. در نتیجه،

$$\tan \theta = \sin \theta / \cos \theta = \text{، و همانطور که حکم شده ، } \cos \theta = \mathbf{p} \cdot \mathbf{k} = (1 + \|\nabla f\|^2)^{-1/2} (\|\nabla f\|^2 / (1 + \|\nabla f\|^2))^{1/2} / (1 + \|\nabla f\|^2)^{-1/2} = \|\nabla f\|$$

(ب) صفحه مماس شامل خط افقی ماربر $(1, 0, 2)$ عمود بر $(5, 0)$ ، یعنی موازی محور y ، است. این صفحه با صفحه xy زاویه $\approx 78.7^\circ = \arctan 5 = \|\nabla f(1, 0)\|$ می سازد.

۱۷. $(1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$ یا $(-1/\sqrt{2}, -1/\sqrt{2})$

۱۹. یک قائم یکه عبارت است از $(\sqrt{2}/10)(3, 5, 4)$. صفحه مماس عبارت است از $3x + 5y + 4z = 18$.

۲۱. چون g ترکیب $\lambda \mapsto \lambda x \mapsto f(\lambda x)$ است، از قاعده زنجیره‌ای نتیجه می‌شود که

$$g'(\lambda) = Df(\lambda \mathbf{x}) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

لذا،

$$g'(1) = Df(\mathbf{x}) \begin{bmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \nabla f(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{x}$$

اما نیز $g(\lambda) = \lambda^p f(\mathbf{x})$ ؛ در نتیجه، $g'(\lambda) = p\lambda^{p-1}f(\mathbf{x})$ و $g'(1) = pf(\mathbf{x})$.

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 2 \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} + 2 \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} = 0 \quad (1) \quad 23$$

$$\begin{aligned} g_{xx} + g_{yy} + g_{zz} &= \frac{y^2 + z^2 - 2x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 - z^2 - 2y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \quad (-) \\ &+ \frac{x^2 + y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} = 0 \end{aligned}$$

$$h_{xx} + h_{yy} + h_{zz} + h_{ww} = \frac{6x^2 - 2y^2 - 2z^2 - 2w^2}{(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^3} + \frac{6y^2 - 2x^2 - 2z^2 - 2w^2}{(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^3} \quad (\text{پ})$$

$$+ \frac{6z^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2w^2}{(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^3} + \frac{6w^2 - 2x^2 - 2y^2 - 2z^2}{(x^2 + y^2 + z^2 + w^2)^3} = 0$$

۲۵. با استفاده از قاعده زنجیره‌ای و قضیه ۱۵،

$$\frac{\partial^2 w}{\partial u \partial v} = \frac{\partial}{\partial u} \left(\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial y} \right) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x} - \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$$

۲۷. (آ) هرگاه $(x, y) \neq (0, 0)$ ، نگاه $\nabla(x^3 - y^3)/(x^2 + y^2)^2$ ، $\partial f/\partial x = (y^3 - yx^2)/(x^2 + y^2)^2$ و $\partial f/\partial y = (x^3 - xy^2)/(x^2 + y^2)^2$

اگر $x = y = 0$ ، با استفاده مستقیم از تعریف، ثابت کنید هر دو مشتق جزئی ۰ هستند.

مشتق جزئی ۰ هستند.

(ب) (یک) در $(0, 0)$ پیوسته نیست؛ (دو) مشتقپذیر است ولی مشتق پیوسته نیست.

۲۹. (آ) از قاعده زنجیره‌ای و فرض f بودن C^2 استفاده کنید؛ در نتیجه، $\partial^2 f/\partial x \partial y = \partial^2 f/\partial y \partial x$

$$\left(\frac{\partial F}{\partial r} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(\frac{\partial F}{\partial \theta} \right)^2 = \left(\cos \theta \frac{\partial f}{\partial x} + \sin \theta \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 + \frac{1}{r^2} \left(-r \sin \theta \frac{\partial f}{\partial x} + r \cos \theta \frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 \quad (\text{ب})$$

$$= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + (\sin^2 \theta + \cos^2 \theta) \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2$$

$$= \left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2 = \|\nabla f\|^2$$

۳۱. $(-4e^{-1}, 0)$

۳۳. (آ) ر.ک. قضیه ۱۱

$g(u) = (\sin 3u)^2 + \cos 8u$	$\nabla f = (2x, 1)$	(ب)
$g'(u) = 6 \sin 3u \cos 3u - 8 \sin 8u$	$\nabla f(h(0)) = \nabla f(0, 1) = (0, 1)$	
$g'(0) = 0$	$h'(u) = (3 \cos 3u, -8 \sin 8u)$	
	$g'(0) = \nabla f(h(0)) \cdot h'(0) = (0, 1) \cdot (3, 0)$	
	$= 0$	

بخش ۱۰.۳

۱. $\sigma'(t) = (2\pi \cos 2\pi t, -2\pi \sin 2\pi t, 2 - 2t)$ ، $\sigma'(0) = (2\pi, 0, 2)$ (آ)

(ب) $\sigma'(t) = (e^t, -\sin t, \cos t)$ ، $\sigma'(0) = (1, 0, 1)$

(پ) $\sigma'(t) = (2t, 3t^2 - 4, 0)$ ، $\sigma'(0) = (0, -4, 0)$

(ت) $\sigma'(t) = (2 \cos 2t, 1/(1+t), 1)$ ، $\sigma'(0) = (2, 1, 1)$

۳. $6mj$ ، که در آن m جرم ذره است

$$\sigma(t) = \left(\frac{t^2}{2}, e^t - 6, \frac{t^3}{3} + 1 \right) \quad ۵$$

۷. ۱.۵۷ ساعت = ۵۶۶۲ ثانیه T

۹. (\vec{T}) هرگاه $\sigma(t) = (\sigma_1(t), \dots, \sigma_n(t))$ و $\rho(t) = (\rho_1(t), \dots, \rho_n(t))$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(\sigma(t) \cdot \rho(t)) &= \frac{d}{dt} \sum_{i=1}^n \sigma_i(t) \rho_i(t) = \sum_{i=1}^n \sigma'_i(t) \rho_i(t) + \sum_{i=1}^n \sigma_i(t) \rho'_i(t) \\ &= \sigma'(t) \cdot \rho(t) + \sigma(t) \cdot \rho'(t) \end{aligned}$$

$$\frac{d}{dt}(\sigma(t) \times \rho(t)) = \frac{d}{dt} [(\sigma_2 \rho_3 - \sigma_3 \rho_2) \mathbf{i} - (\sigma_1 \rho_3 - \sigma_3 \rho_1) \mathbf{j} + (\sigma_1 \rho_2 - \sigma_2 \rho_1) \mathbf{k}] \quad (ب)$$

$$= [\sigma'_2 \rho_3 + \sigma_2 \rho'_3 - \sigma'_3 \rho_2 - \sigma_3 \rho'_2] \mathbf{i} - [\sigma'_1 \rho_3 + \sigma_1 \rho'_3 - \sigma'_3 \rho_1 - \sigma_3 \rho'_1] \mathbf{j}$$

$$+ [\sigma'_1 \rho_2 + \sigma_1 \rho'_2 - \sigma'_2 \rho_1 - \sigma_2 \rho'_1] \mathbf{k}$$

$$= [(\sigma'_2 \rho_3 - \sigma'_3 \rho_2) \mathbf{i} - (\sigma'_1 \rho_3 - \sigma'_3 \rho_1) \mathbf{j} + (\sigma'_1 \rho_2 - \sigma'_2 \rho_1) \mathbf{k}]$$

$$+ [(\sigma_2 \rho'_3 - \sigma_3 \rho'_2) \mathbf{i} - (\sigma_1 \rho'_3 - \sigma_3 \rho'_1) \mathbf{j} + (\sigma_1 \rho'_2 - \sigma_2 \rho'_1) \mathbf{k}]$$

$$= (\sigma'(t) \times \rho(t)) + (\sigma(t) \times \rho'(t))$$

(پ) از قسمتهای (\vec{T}) و (ب) استفاده کنید.

۱۱. $\sigma(t) \times \sigma'(t)$ به صفحه مدار در لحظه t عمود است. مثل تمرین ۱۰، مشتق ۰ است؛

در نتیجه، صفحه مداری ثابت می باشد.

بخش ۲۰۳

$$۱. \quad (A) \quad 7 \quad ; \quad (B) \quad 4\sqrt{2} - 2$$

$$(پ) \quad \frac{1}{2} \pi \sqrt{2 + \pi^2} + \log(\pi + \sqrt{2 + \pi^2}) - \frac{1}{2} \log 2$$

$$(ت) \quad \sqrt{21} + \frac{5}{4} [\log(4 + \sqrt{21}) - \log \sqrt{5}]$$

$$(ث) \quad \frac{1}{2} \sqrt{5} + 2 \log(1 + \sqrt{5}) - 2 \log 2$$

(ج) با استفاده از جانشانی $u = e^t$ ، نشان دهید که انتگرال مساوی $2(e - e^{-1})$

است.

$$(چ) \quad \frac{2}{3} [(t_1 + 2)^{3/2} - (t_0 + 2)^{3/2}]$$

$$۳. \quad 3 + \log 2$$

۵. (آ) چون x اکیدا " صعودی است، $[a, b]$ را به طور یک به یک به روی $[\alpha(a), \alpha(b)]$

می‌نگارد. طبق تعریف، \mathbf{v} نقش c است اگر و فقط اگر t ای در $[a, b]$ باشد که $\mathbf{c}(t) = \mathbf{v}$.
 یک نقطه مانند s در $[\alpha(a), \alpha(b)]$ وجود دارد که $s = \alpha(t)$ ؛ در نتیجه، $\mathbf{d}(s) = \mathbf{c}(t) = \mathbf{v}$.
 بنابراین، نقش c جزء نقش d است. به همین نحو، برای شمول در جهت دیگر از α^{-1} استفاده کنید.

$$\begin{aligned} l_a &= \int_{\alpha(a)}^{\alpha(b)} \|d'(s)\| ds = \int_{s=\alpha(a)}^{s=\alpha(b)} \|d'(\alpha(t))\| \alpha'(t) dt \quad (\text{ب}) \\ &= \int_{t=a}^{t=b} \|d'(\alpha(t))\alpha'(t)\| dt = \int_a^b \|\mathbf{c}'(t)\| dt = l_c \end{aligned}$$

$$l_a = \int_a^b \|\sigma'(s)\| ds = \int_a^b ds = b - a \quad (\text{ت}) \quad \cdot 7$$

(ب) $\mathbf{T}(s) = \sigma'(s)/\|\sigma'(s)\| = \sigma'(s)$ ؛ در نتیجه، $\mathbf{T}'(s) = \sigma''(s)$. پس $k = \|\mathbf{T}'\| = \|\sigma''(s)\|$.
 (پ) نشان دهید که اگر \mathbf{v} و \mathbf{w} در \mathbb{R}^3 باشند، $\|\mathbf{v} \times \mathbf{w}\| = \|\mathbf{w} - (\mathbf{v} \cdot \mathbf{w}/\|\mathbf{v}\|^2)\mathbf{v}\| \cdot \|\mathbf{v}\|$.
 با استفاده از این نشان دهید هرگاه $\rho(t) = (x(t), y(t), z(t))$ (دو) هرگز $(0, 0, 0)$ بوده و $\mathbf{f}(t) = \rho(t)/\|\rho(t)\|$ آنگاه

$$\left\| \frac{d\mathbf{f}}{dt} \right\| = \frac{\|\rho(t) \times \rho'(t)\|}{\|\rho(t)\|^2} \quad \text{و} \quad \frac{d\mathbf{f}}{dt} = \frac{1}{\|\rho(t)\|} \left(\rho'(t) - \frac{\rho(t) \cdot \rho'(t)}{\|\rho(t)\|^2} \rho(t) \right)$$

که در آن $\rho(t) = \sigma'(t)$ ، (دو) نتیجه می‌دهد که

$$\|\mathbf{T}'(t)\| = \frac{\|\sigma'(t) \times \sigma''(t)\|}{\|\sigma'(t)\|^2} \quad \text{و} \quad \mathbf{T}'(t) = \frac{\sigma''(t)}{\|\sigma'(t)\|} - \frac{\sigma'(t) \cdot \sigma''(t)}{\|\sigma'(t)\|^3} \sigma'(t)$$

اگر s طول قوس σ باشد، $ds/dt = \|\sigma'(t)\|$ ؛ و در نتیجه،

$$\left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right\| = \left\| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \frac{ds}{dt} \right\| = k \|\sigma'(t)\|$$

لذا،

$$k = \frac{1}{\|\sigma'(t)\|} \left\| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right\| = \frac{\|\sigma'(t) \times \sigma''(t)\|}{\|\sigma'(t)\|^3}$$

(این نتیجه در تمرین ۹ سودمند خواهد بود.)

(ت) $1/\sqrt{2}$

(آ) چون σ به وسیله طول قوس پارامتری شده است، $\mathbf{T}(s) = \sigma'(s)$ و $\mathbf{N}(s) = \sigma''(s)/\|\sigma''(s)\|$.

با استفاده از تمرین ۹ در بخش ۱۰.۳ و تمرین ۷، نشان دهید که

$$\frac{d\mathbf{B}}{ds} = \left(\boldsymbol{\sigma}'' \times \frac{\boldsymbol{\sigma}''}{\|\boldsymbol{\sigma}''\|} \right) + \boldsymbol{\sigma}' \times \left(\frac{\boldsymbol{\sigma}'''}{\|\boldsymbol{\sigma}''\|} - \frac{\boldsymbol{\sigma}'' \cdot \boldsymbol{\sigma}'''}{\|\boldsymbol{\sigma}''\|^3} \boldsymbol{\sigma}'' \right)$$

9

$$\tau = -\frac{d\mathbf{B}}{ds} \cdot \mathbf{N} = -\frac{(\boldsymbol{\sigma}' \times \boldsymbol{\sigma}''') \cdot \boldsymbol{\sigma}''}{\|\boldsymbol{\sigma}''\|^2} = \frac{(\boldsymbol{\sigma}' \times \boldsymbol{\sigma}'') \cdot \boldsymbol{\sigma}'''}{\|\boldsymbol{\sigma}''\|^2}$$

(ب) $\|\mathbf{T}(t)\|$ و $\mathbf{T}'(t)$ را مثل تمرین ۷ به دست آورید. \mathbf{B} بردار یکه‌ای در جهت $\mathbf{B} = (\boldsymbol{\sigma}' \times \boldsymbol{\sigma}')/\|\boldsymbol{\sigma}' \times \boldsymbol{\sigma}'\|$ ، در نتیجه، $\boldsymbol{\sigma}' \times \mathbf{T}' = (\boldsymbol{\sigma}' \times \boldsymbol{\sigma}')/\|\boldsymbol{\sigma}'\|$ (دو) در حل مسئله ۷ به ازای $\boldsymbol{\rho} = \boldsymbol{\sigma}' \times \boldsymbol{\sigma}''$ و تمرین ۹ از بخش ۱۰.۳، به دست آورید $\frac{d\mathbf{B}}{dt} = (\boldsymbol{\sigma}' \times \boldsymbol{\sigma}'')/\|\boldsymbol{\sigma}' \times \boldsymbol{\sigma}''\| - \{[(\boldsymbol{\sigma}' \times \boldsymbol{\sigma}') \cdot (\boldsymbol{\sigma}' \times \boldsymbol{\sigma}'')]/\|\boldsymbol{\sigma}' \times \boldsymbol{\sigma}''\|^3\}(\boldsymbol{\sigma}' \times \boldsymbol{\sigma}')$ ، و با استفاده از مقادیر \mathbf{T}' و $\|\mathbf{T}'\|$ ، به دست آورید $\mathbf{N} = (\|\boldsymbol{\sigma}'\|/\|\boldsymbol{\sigma}' \times \boldsymbol{\sigma}''\|)(\boldsymbol{\sigma}'' - (\boldsymbol{\sigma}' \cdot \boldsymbol{\sigma}'')/\|\boldsymbol{\sigma}'\|^2 \boldsymbol{\sigma}')$ ، به دست آورید که بالاخره، از قاعده زنجیره‌ای و حاصل ضرب داخلی اینها، نتیجه بگیرید که

$$\tau = -\left[\frac{d\mathbf{B}}{ds}(s(t)) \right] \cdot \mathbf{N}(s(t)) = -\frac{1}{|ds/dt|} \frac{d\mathbf{B}}{dt} \cdot \mathbf{N} = \frac{(\boldsymbol{\sigma}' \times \boldsymbol{\sigma}'') \cdot \boldsymbol{\sigma}'''}{\|\boldsymbol{\sigma}' \times \boldsymbol{\sigma}''\|^2}$$

- $\sqrt{2}/2$ (پ)

۱۱. \mathbf{N} به صورت $\|\mathbf{T}'\|/\|\mathbf{T}'\| = k\mathbf{N}$ ، در نتیجه، $\mathbf{T}' = \|\mathbf{T}'\|\mathbf{N}$ ، چون $\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}' = 0$ و \mathbf{B} و \mathbf{N} در یک پایه متعامد یک‌جه برای \mathbb{R}^3 قرار دارند. مشتگیری از $\mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{B}(s) = 1$ و $\mathbf{B}(s) \cdot \mathbf{T}(s) = 0$ نشان می‌دهد که $\mathbf{B}' \cdot \mathbf{B} = 0$ و $\mathbf{B}' \cdot \mathbf{T} + \mathbf{B} \cdot \mathbf{T}' = 0$ ، ولى $\mathbf{T}' \cdot \mathbf{B} = \|\mathbf{T}'\|\mathbf{N} \cdot \mathbf{B} = 0$ ، در نتیجه، نیز داریم $\mathbf{B}' \cdot \mathbf{T} = 0$ ، لذا، $\mathbf{N} \cdot \mathbf{N} = 1$ ، لذا، $\mathbf{N}' = (\mathbf{N}' \cdot \mathbf{T})\mathbf{T} + (\mathbf{N}' \cdot \mathbf{B})\mathbf{B}$ ، اما مشتگیری از $\mathbf{N} \cdot \mathbf{T} = 0$ و $\mathbf{N} \cdot \mathbf{B} = 0$ نتیجه می‌دهد که $\mathbf{N}' \cdot \mathbf{T} = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{T}' = -k$ و $\mathbf{N}' \cdot \mathbf{B} = -\mathbf{N} \cdot \mathbf{B}' = \tau$ ، در نتیجه، معادله میانی به دست می‌آید.

بخش ۳.۳

$$\frac{dE}{dt} = \frac{1}{2} m \cdot 2 \langle \mathbf{r}'(t), \mathbf{r}''(t) \rangle + \langle \text{grad } V(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t) \rangle \quad (1)$$

$$= \langle \mathbf{r}'(t), -\text{grad } V(\mathbf{r}(t)) \rangle + \langle \text{grad } V(\mathbf{r}(t)), \mathbf{r}'(t) \rangle = 0$$

(ب) از (1) استفاده نمایید

$$\frac{d}{dt} V(\mathbf{c}(t)) = \langle \nabla V(\mathbf{c}(t)), \mathbf{c}'(t) \rangle = -\langle \nabla V(\mathbf{c}(t)), \nabla V(\mathbf{c}(t)) \rangle \leq 0 \quad . ۳$$

یک ذره مایل به حرکت به سوی ناحیه‌ای است که انرژی پتانسیل کمتری دارد. (آب به پایین تپه سرازیر می‌شود.)

۵. از این امر استفاده کنید که $-\nabla T$ بر سطح ثابت $T = \text{عمود}$ است.

۷. هرگاه $\mathbf{x} = (x_1, x_2, x_3)$ ، $\phi(\mathbf{x}, t) = (\phi_1, \phi_2, \phi_3)$ ، و $f = f(x_1, x_2, x_3, t)$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}(f(\phi(\mathbf{x}, t), t)) &= \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + \sum_{i=1}^3 \frac{\partial f}{\partial x_i}(\phi(\mathbf{x}, t), t) \frac{\partial \phi_i}{\partial t}(\mathbf{x}, t) \\ &= \frac{\partial f}{\partial t}(\mathbf{x}, t) + [\nabla f(\phi(\mathbf{x}, t), t)] \cdot [\mathbf{F}(\phi(\mathbf{x}, t))] \end{aligned}$$

بخش ۴.۳

$$\nabla f = \mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|, \mathbf{r} = (x, y, z) \quad (\bar{T}) \quad . ۱$$

$$\nabla f = (y + z, x + z, y + x) \quad (\bar{b})$$

$$\nabla f = -2\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^4, \mathbf{r} = (x, y, z) \quad (\bar{c})$$

$$\cdot (10y - 8z, 6z - 10x, 8x - 6y) \quad (\bar{c}) \quad ; \quad 0 \quad (\bar{b}) \quad ; \quad 0 \quad (\bar{T}) \quad . ۳$$

$$\nabla \cdot \mathbf{F} = (\partial/\partial x)y + (\partial/\partial y)x = 0 + 0 = 0 \quad . ۵$$

$$\begin{aligned} \nabla f &= (2xy^2, 2x^2y + 2yz^2, 2y^2z); \quad \nabla \times \nabla f = (4yz - 4yz, 0 - 0, 4xy - 4xy) \quad . ۷ \\ &= (0, 0, 0) \end{aligned}$$

۹. هرگاه $\mathbf{F} = \nabla f$ ، آنگاه چون $\mathbf{F} \in C^1$ است، f باید $\nabla \times \mathbf{F} = (0, 0, \sin y - \cos x)$ باشد. $\nabla \times \mathbf{F} = \nabla \times \nabla f = 0$ مساوی ۰ باشد، که چنین نیست.

بخش ۵.۳

$$\text{فقط } (\bar{T}) \quad . ۱$$

۳. هر یک از عبارات را برحسب مختصات بنویسید.

$$2xy\mathbf{i} + x^2\mathbf{j} \quad (\bar{T}) \quad . ۵$$

$$3y^2z\mathbf{i} + (4xz - y^3z)\mathbf{j} \quad (\bar{b})$$

$$4x^2z^2\mathbf{i} + 2y\mathbf{j} + 2y^3z^2\mathbf{k} \quad (\bar{c})$$

(ت) $4x^2z^2y + x^2$

(ث) $-y^3zx^3i + 2x^2y^4zj + (2x^3z^2 - 2xy)k$

۰.۷ خیر، $F = xi + xyzj + k$ را در نظر بگیرید. $\nabla \times F = yk$ ، که بر F عمود نیست.

۰.۹ (ا) $\nabla \cdot F = (\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z) \cdot (F_r e_r + F_\theta e_\theta + F_z e_z)$

$$\begin{aligned} &= \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta}, \frac{\partial}{\partial z} \right) \\ &\quad \cdot (F_r(\cos \theta i + \sin \theta j) + F_\theta(-\sin \theta i + \cos \theta j) + F_z k) \\ &= \left(\cos \theta \frac{\partial}{\partial r} - \frac{\sin \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (F_r \cos \theta - F_\theta \sin \theta) \\ &\quad + \left(\sin \theta \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\cos \theta}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \right) (F_r \sin \theta + F_\theta \cos \theta) + \frac{\partial F_z}{\partial z} \\ &= \frac{\partial F_r}{\partial r} + \frac{1}{r} F_r + \frac{1}{r} \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial F_z}{\partial z} = \frac{1}{r} \left[\frac{\partial}{\partial r} (rF_r) + \frac{\partial F_\theta}{\partial \theta} + \frac{\partial}{\partial z} (rF_z) \right] \end{aligned}$$

(برشماست که این روابط را تحقیق کنید. ر. ک. مثال ۰.۴)

(ب) با جانشانی $\partial/\partial x, \partial/\partial y, \partial/\partial z$ و i, j, k و F_x, F_y و F_z به دست آمده در مثال ۰.۴

قسمت (ا) و انجام اعمال ستونی مقدماتی، در ترمینان $\begin{vmatrix} i & j & k \\ \partial/\partial x & \partial/\partial y & \partial/\partial z \\ F_x & F_y & F_z \end{vmatrix}$ را به

$$\begin{vmatrix} e_r & r e_\theta & e_z \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} & \frac{\partial}{\partial \theta} & \frac{\partial}{\partial z} \\ F_r & F_\theta & F_z \end{vmatrix} \text{ تبدیل کنید.}$$

(اعمال ستونی قابل اعمالند، زیرا تمام اعمال خطی بوده و ما همیشه بردارها را با بردارها، عملگرها را با عملگرها، و توابع را با توابع جمع می‌کنیم.)

۱.۱ مختصات قطبی را مختصات استوانه‌ای بگیرید که در آنها مختص z یا 0 یا غایب است تا ببینید که تبدیلات مطلوب آنهایی هستند که از قضیه ۵ به دست می‌آیند. ابتدا ∇u را از قسمت (یک) نتیجه‌گیری کنید، سپس، با استفاده از (دو)، $\nabla \cdot \nabla u$ را به دست آورید.

تمرینات دوره‌ای برای فصل ۳

$$\nabla f = yz^2 \mathbf{i} + xz^2 \mathbf{j} + 2xyz \mathbf{k} \quad (\bar{1}) \quad . 3$$

$$\nabla \times F = (x - y) \mathbf{i} - x \mathbf{k} \quad (\bar{2})$$

$$(2xyz^3 - 3z^2xy^2) \mathbf{i} - (y^2z^3 - 2x^2y^2z) \mathbf{j} + (y^2z^3 - 2x^2yz^2) \mathbf{k} \quad (\bar{3})$$

$$z = 10x + 10y - 25 \quad (\bar{4}) \quad ; \quad z = 1 + x \quad (\bar{5}) \quad ; \quad z = 0 \quad (\bar{6}) \quad . 5$$

$$35,880 \text{ کیلومتر} \quad . 7$$

$$F = (2m, 0, -m) \quad . 9$$

$$(2\pi, 3\pi^2, -2\pi) \quad . 11$$

$$\frac{1}{3} \quad (\bar{7}) \quad ; \quad 6/\sqrt{14} \quad (\bar{8}) \quad . 13$$

$$\sigma'(t) = ((1-t)^{-2}, 0, (e^t/(1-t))(1-t)) \quad \text{و} \quad z(t) = e^t/(1-t) \quad ; \quad y(t) = 0 \quad ; \quad x(t) = 1/(1-t) \quad . 15$$

$$+ 1/(1-t)) = (x(t)^2, 0, z(t)(1+x(t)) = F(\sigma(t))$$

$$; (3, 0, 0) \quad (\bar{9}) \quad . 17$$

(ب) بردار $\nabla \sigma$ در جهت سریعترین افزایش تراکم است؛

در نتیجه، $-\nabla \sigma$ در جهت سریعترین کاهش می باشد.

$$8z + 6\sqrt{2}y = 20 \quad (\bar{10}) \quad ; \quad 2x - z = 1 \quad (\bar{11}) \quad . 19$$

$$\nabla \cdot F = 2ye^z + x^2ye^z + 2z; \quad \nabla \times F = 0 \quad (\bar{12}) \quad . 21$$

(ب) $f(x, y, z) = x^2ye^z + z^3/3 + C$ چون F ، C^1 بوده، یک f موثر C^2 می باشد؛

در نتیجه، $\nabla \times F = \nabla \times \nabla f = 0$. لذا، برای موجود بودن جوابی از (ب) لازم است

$$\nabla \times F = 0$$

بخش ۱۰۴

$$(R_2(\mathbf{h}, 0) = 0 \text{ حالت در این حالت}) \quad f(h_1, h_2) = h_1^2 + 2h_1h_2 + h_2^2 \quad . 1$$

$$f(h_1, h_2) = 1 + h_1 + h_2 + \frac{h_1^2}{2} + h_1h_2 + \frac{h_2^2}{2} + R_2(\mathbf{h}, 0) \quad . 3$$

$$f(h_1, h_2) = 1 + h_1h_2 + R_2(\mathbf{h}, 0) \quad . 5$$

$$|R_k(x, a)| \leq AB^{k+1}/(k+1), \quad [a, b] \text{ وثابت در بازه } A, B \text{ نشان دهید که به ازای ثابتهای } A, B \quad . 7$$

ثابت کنید وقتی $k \rightarrow \infty$ ، $R_k \rightarrow 0$. (از همگرایی سری $\sum e^x/k! = e^x$ و قضیه تیلور

استفاده کنید.)

(ب) تنها مشکل احتمالی در $x = 0$ است. با استفاده از قاعده هوییتال، نشان

دهید که به ازای هر چند جمله‌ای $p(t)$ ،

$$\lim_{t \rightarrow \infty} p(t)e^t = \infty$$

با استفاده از این ، ثابت کنید به ازای هر تابع گویای $p(x)$ ، $\lim_{x \rightarrow 0^+} p(x)e^{-1/x} = 0$ ،

و با استفاده از این نشان دهید به ازای هر k ، $f^{(k)}(0) = 0$ ،

(پ) اگر سری

$$f(\mathbf{x}_0) + \sum_{i=1}^n h_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(\mathbf{x}_0) + \frac{1}{2} \sum_{i,j=1}^n h_i h_j \frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(\mathbf{x}_0) + \dots$$

$$+ \frac{1}{k!} \sum_{i_1, \dots, i_k=1}^n h_{i_1} h_{i_2} \dots h_{i_k} \frac{\partial^k f}{\partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}}(\mathbf{x}_0) + \dots$$

به ازای هر $\mathbf{h} = (h_1, \dots, h_n)$ در قرص به قدر کافی کوچک $\|\mathbf{h}\| < \varepsilon$ به $f(\mathbf{x}_0 + \mathbf{h})$ همگرا

باشد ، $f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ در \mathbf{x}_0 تحلیلی می‌باشد . تابع f تحلیلی است اگر به ازای هر

$R > 0$ ، ثابتی چون M موجود باشد به طوری که به ازای هر مشتق مرتبه k ام در

هر \mathbf{x} صادق در $\|\mathbf{x}\| \leq R$ داشته باشیم $|\partial^k f / \partial x_{i_1} \dots \partial x_{i_k}(\mathbf{x})| < M^k$.

$$f(x, y) = 1 + x + y + \frac{1}{2}(x^2 + 2xy + y^2) + \dots + \frac{1}{k!} \sum_{j=0}^k \binom{k}{j} x^j y^{k-j} + \dots \quad (ت)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} (x + y)^k .$$

بخش ۲.۴

۱. $(0, 0)$ ، نقطهٔ زینی

۳. نقاط بحرانی بر خط $y = -x$ قرار دارند ؛ اینها مینیمم موضعی اند ، زیرا $f(x, y) = (x + y)^2$

≥ 0 که فقط وقتی متحد صفر است که $x = -y$.

۵. $(0, 0)$ ، نقطهٔ زینی

۷. $(-1/4, -1/4)$ ، مینیمم موضعی

۹. $(0, 0)$ ، مینیمم موضعی (آزمونها از کار می‌افتند ، ولی از $\cos(z) \leq 1$ استفاده کنید.)

مینیمم موضعی $(\sqrt{\pi/2}, \sqrt{\pi/2})$ ،

مینیمم موضعی $(0, \sqrt{\pi})$ ،

۱۱. (ب) نشان دهید که در $t = 0$ ، $f(g(t)) = 0$ ، و اگر $|t| < |b|/3a^2$ ، $f(g(t)) \geq 0$.
 (پ) f بر سهمی $y = 2x^2$ منفی است.
۱۳. نقاط بحرانی بر خط $y = x$ واقع بوده و اینها مینیمم موضعی‌اند.
 (ر. ک. تمرین ۳).
۱۵. تنها نقطه بحرانی $(0, 0, 0)$ است. این یک مینیمم است، زیرا

$$f(x, y, z) \geq \frac{x^2 + y^2}{2} + z^2 + xy = \frac{1}{2}(x + y)^2 + z^2 \geq 0$$

۱۷. هرگاه $u_n(x, y) = u(x, y) + (1/n)e^x$ ، آنگاه $\nabla^2 u_n = (1/n)e^x > 0$ ، لذا u_n اکیدا "تحت توافقی است و می‌تواند ماکزیمم را فقط بر ∂D ، مثلا" در $p_n = (x_n, y_n)$ ، داشته‌باشد اگر $(x_0, y_0) \in D$ ، تحقیق کنید که $u(x_n, y_n) > u(x_0, y_0) - \epsilon/n$. لذا، باید نقطه‌ای چون $q = (x_x, y_x) \in \partial D$ باشد به طوری که به ازای n به قدر مطلوب بزرگ بتوان (x_n, y_n) ی بدخواه نزدیک q به دست آورد. از پیوستگی u نتیجه بگیرید که $u(x_x, y_x) \geq u(x_0, y_0)$

بخش ۳.۴

۱. ماکزیمم در $\sqrt{3}(1, -1, 1)$ ، مینیمم در $\sqrt{3}(-1, 1, -1)$.
۳. ماکزیمم در $(\sqrt{3}, 0)$ ، مینیمم در $(-\sqrt{3}, 0)$.
۵. ماکزیمم در $(\frac{9}{\sqrt{70}}, \frac{4}{\sqrt{70}})$ ، مینیمم در $(-\frac{9}{\sqrt{70}}, -\frac{4}{\sqrt{70}})$.
۷. مینیمم ۴ در $(0, 2)$ به دست می‌آید. به جای ضرایب لاگرانژ، از شکل هندسی استفاده کنید.
۹. $(0, 0, 2)$ یک مینیمم f است.
۱۱. قطر باید مساوی ارتفاع باشد، $20/\sqrt{2}\pi$ cm.
۱۳. $\nabla f(x) = Ax$ (آ)
- (ب) S با تابع قید $g(x) = x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - 1$ تعریف شده است. چون $\nabla g(x) = 2x$ مساوی ۰ نیست، قضیه ۶ به کار می‌رود. در x که f اکستريم است، $\lambda/2$ ای وجود دارد به طوری که $\nabla f(x) = (\lambda/2)\nabla g(x)$. یعنی، $Ax = \lambda x$.
۱۵. برای تمرین ۱، همسپهای لبه‌دار مطلوب عبارتند از

$$|\bar{H}_2| = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y \\ 2x & -2\lambda & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda \end{vmatrix} = 8\lambda(x^2 + y^2)$$

$$|\bar{H}_3| = \begin{vmatrix} 0 & 2x & 2y & 2z \\ 2x & -2\lambda & 0 & 0 \\ 2y & 0 & -2\lambda & 0 \\ 2z & 0 & 0 & -2\lambda \end{vmatrix} = -16\lambda(x^2 + y^2 + z^2)$$

در $(1, -1, 1)$ ضرب لاگرانژ عبارت است از $\lambda = \sqrt{6}/4 > 0$ که ماکزیمم در $(1, -1, 1)$ را نشان می دهد، و $\lambda = -\sqrt{6}/4 < 0$ مینیمم در $(-1, 1, -1)$ را نشان خواهد داد. در تمرین ۵، $|\bar{H}| = 24\lambda(4x^2 + 6y^2)$ ؛ در نتیجه، $\lambda = \sqrt{70}/12 > 0$ ماکزیمم در $(9/\sqrt{70}, 4/\sqrt{70})$ و $\lambda = -\sqrt{70}/12 < 0$ مینیمم در $(-9/\sqrt{70}, -4/\sqrt{70})$ را نشان خواهد داد.

۱۷. $11,664 \text{ in}^3$

بخش ۴.۴

۱. از قضیه ۸ به ازای $n = 1$ استفاده کنید. (ر. ک. مثال ۱). خط (یک) عبارت است از $0 = (x - x_0, y - y_0) \nabla F(x_0, y_0) = (x - x_0)(\partial F/\partial x)(x_0, y_0) + (y - y_0)(\partial F/\partial y)(x_0, y_0)$ در خط (دو)، از قضیه ۸ نتیجه می شود که $dy/dx = -(\partial F/\partial x)/(\partial F/\partial y)$ ؛ در نتیجه، خطوط سازگار بوده و با $y = y_0 - [(\partial F/\partial x)(x_0, y_0)]/[(\partial F/\partial y)(x_0, y_0)](x - x_0)$ داده می شوند.

۳. (آ) اگر $x < -\frac{1}{4}$ ، می توان با استفاده از فرمول درجه دو نسبت به y و برحسب x حل کرد.

(ب) $\partial F/\partial y = 2y + 1$ به ازای $\{y | y < -\frac{1}{2}\}$ و $\{y | y > -\frac{1}{2}\}$ ناصفر است. این نواحی نظیر نیمه های بالایی و پایینی یک سهمی افقی به رأس $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{2})$ و علامت مناسب در فرمول درجه دو اند. مشتق $dy/dx = -3/(2y + 1)$ روی نیمه بالایی سهمی منفی و روی نیمه پایینی مثبت می باشد.

۵. به ازای $F_1 = y + x + uv$ و $F_2 = uxy + v$ ، در قضیه تابع ضمنی کلی درمیان مساوی است با

$$\begin{vmatrix} \partial F_1 / \partial u & \partial F_1 / \partial v \\ \partial F_2 / \partial u & \partial F_2 / \partial v \end{vmatrix} = v - uxy,$$

که در $(0, 0, 0, 0)$ مساوی ۰ است. لذا، قضیهٔ تابع ضمنی به کار نخواهد رفت. اگر مستقیماً سعی کنیم، درمی‌یابیم که $v = -uxy$ ؛ در نتیجه، $x + y = u^2xy$. به‌ازای انتخاب خاصی از (x, y) نزدیک $(0, 0)$ ، یا جوابی نسبت به (u, v) وجود ندارد یا دو جواب وجود دارد.

۷. خیر. $f(x, y) = (-1, 0)$ بی‌نهایت جواب دارد؛ یعنی، به‌ازای هر y ، $(x, y) = (0, y)$.

۹. $x_0^2 + y_0^2 \neq 0$ (آ)

(ب) $f'(z) = -(x + 2y)/(x^2 + y^2)z$; $g'(z) = (y - 2x)/(x^2 + y^2)z$

۱۱. با ضرب و متحدگرفتن ضرایب a_0, a_1, a_2 و a_2 به صورت توابعی از r_1, r_2, r_3 و r_3 به‌دست

می‌آیند. سپس دترمینان ژاکوبی $\partial(a_0, a_1, a_2) / \partial(r_1, r_2, r_3) = (r_3 - r_2)(r_1 - r_2)(r_1 - r_3)$

را حساب کنید. اگر ریشه‌ها متمایز باشند، این دترمینان صفر نیست. لذا، قضیهٔ

تابع معکوس نشان می‌دهد که ریشه‌ها را می‌توان در همسایگی هر نقطه که در آن ریشه‌ها

متمایزند به صورت توابعی از ضرایب به دست آورد. یعنی، هرگاه ریشه‌های r_1, r_2, r_3

از $x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0$ همه متمایز باشند، آنگاه همسایگیهای V از (r_1, r_2, r_3) و W

از (a_0, a_1, a_2) وجود دارند به طوری که ریشه‌های واقع در V توابع همواری از ضرایب

در W می‌باشند.

بخش ۵.۴

۱. $(-\frac{1}{4}, -\frac{1}{4})$

۳. نقطهٔ تعادل زینی $(2 + m^2g^2)^{-1/2}(-1, -1, -mg)$

۵. بدون نقاط بحرانی؛ بدون ماکزیمم یا مینیمم

۷. در بهینه، $qk/x = pL/(1 - \alpha)$

تمرینات دوره‌ای برای فصل ۴

۱. (آ) نقطهٔ زینی

(ب) اگر $|C| < 2$ ، مینیمم اکید؛ اگر $|C| > 2$ ، نقطهٔ زینی؛ اگر $C = \pm 2$ ، مینیمم

۳. (آ) $z = 3x - 1$

$$z\sqrt{3} = 2x + 1 \quad (\text{ب})$$

$$1 \quad (\text{آ}) \quad .5$$

$$\sqrt{83}/6 \quad (\text{ب})$$

$$(2xy^2z^2, 2x^2yz^2, 2x^2y^2z) \quad (\text{آ}) \quad .7$$

$$(z^2 - y^2)\mathbf{i} - x^2\mathbf{k} \quad (\text{ب})$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{F} = 9; \quad \mathbf{V} \times \mathbf{F} = -3x^2\mathbf{j} \quad (\text{پ})$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{F} = 2x + 2y + 2z; \quad \mathbf{V} \times \mathbf{F} = \mathbf{0} \quad (\text{ت})$$

$$\mathbf{V} \cdot \mathbf{F} = 3; \quad \mathbf{V} \times \mathbf{F} = e^2\mathbf{i} + \cos x \mathbf{j} - 3\mathbf{k} \quad (\text{ث})$$

$$z = \frac{1}{4} \quad .9$$

$$(0, 0, \pm 1) \quad .11$$

۱۳. اگر $b \geq 2$ ، فاصله مینیم عبارت است از $2\sqrt{b-1}$ ؛ اگر $b \leq 2$ ، فاصله مینیم

مساوی است با $|b|$.

۱۵. پایدار نیست

$$f(-\frac{3}{2}, -\sqrt{3}/2) = 3\sqrt{3}/4 \quad .17$$

۱۹. یک پایه متعامد بیکه جدید می توان یافت که فرم درجه دو داده شده با ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ b & c \end{bmatrix}$$

به شکل قطری درآید. این تغییر پایه متغیرهای جدید ξ و η را تعریف می کند که توابعی خطی از x و y اند. با استفاده از جبر خطی و قاعده زنجیره ای معلوم (می شود) که $Lv = \lambda(\partial^2 v / \partial \xi^2) + \mu(\partial^2 v / \partial \eta^2)$. اعداد λ و μ مقادیر ویژه A بوده و مثبت اند ، زیرا فرم درجه دو معین مثبت می باشد. در یک ماکزیمم ، $\partial v / \partial \xi = \partial v / \partial \eta = 0$. به علاوه ، $\partial^2 v / \partial \eta^2 \leq 0$ و $\partial^2 v / \partial \xi^2 \leq 0$ ، چرا که اگر یکی از آنها از 0 بزرگتر می بود ، مقطع عرضی نمودار در آن جهت مینیم می داشت. در این صورت ، $Lv \leq 0$ ، که با اکیدا " تحت توافقی بودن در تضاد بود .

۲۱. نامساویهای تمرینات ۱۹ و ۲۰ را عکس نمایید .

۲۳. درمیان لازم در قضیه تابع ضمنی کلی صفر نیست. در نتیجه ، می توان نسبت به

$$u \text{ و } v \text{ حل کرد. } (\partial u / \partial x)(2, -1) = \frac{1}{3\sqrt{2}} \quad .$$

$$x = (20/3)\sqrt[3]{3}; \quad y = 10\sqrt[3]{3}; \quad z = 5\sqrt[3]{3} \quad .25$$

۲۷. معادلات نقطه بحرانی، یعنی $\partial s / \partial m = \partial s / \partial b = 0$ ، وقتی نسبت به m و b حل شوند نتیجه می دهند که $m = (y_1 - y_2) / (x_1 - x_2)$ و $b = y_2 x_1 - y_1 x_2$ پس خط $y = mx + b$ از (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می گذرد.

۲۹. در مینیمم s داریم

$$y = \frac{9}{10}x + \frac{6}{5} \quad ۳۰$$

بخش ۱۰۵

۱. $\frac{13}{15}$ (آ) ؛ $\pi + \frac{1}{2}$ (ب) ؛ ۱ (پ) ؛ $\log 2 - 1/2$ (ت)

۳. برای اثبات تساوی حجم دو استوانه، نشان دهید که توابع مساحت آنها مساویند.

۵. $\frac{26}{9}$ (آ) ؛ $2/\pi$ (ب) ؛ $(2/\pi)(e^2 + 1)$ (پ)

۷. 196/15

بخش ۲۰۵

۱. $\frac{7}{12}$ (آ) ؛ $e - 2$ (ب) ؛ $(1/9) \sin 1$ (پ)

۳. اگر $f(x_0, y_0) > 0$ ، با استفاده از پیوستگی نشان دهید یک مستطیل کوچک مانند R_1

شامل (x_0, y_0) وجود دارد که بر R_1 ، $f(x, y) > \frac{1}{2}f(x_0, y_0)$ فرض کنید $g(x, y)$ بر R_1

مساوی $\frac{1}{2}f(x_0, y_0)$ بوده و سایر جاها 0 باشد. بنابر قضیه ۲، g انتگرال پذیر است.

با استفاده از خواص (سه) و (چهار) انتگرال، نشان دهید این ایجاب می کند که

$$\int_R f \, dx \, dy > \frac{1}{2}f(x_0, y_0) \text{ مساحت } (R_1)$$

۵. با استفاده از قضیه قویبنی، بنویسید

$$\int_R [f(x)g(y)] \, dx \, dy = \int_c^d g(y) \left[\int_a^b f(x) \, dx \right] dy$$

و توجه کنید که $\int_a^b f(x) \, dx$ ثابت است؛ و لذا، می توان آن را خارج کرد.

۷. $\frac{1}{6}$

۹. چون $\int_0^1 dy = \int_0^1 2y \, dy = 1$ ، داریم $\int_0^1 [\int_0^1 f(x, y) \, dy] \, dx = 1$. در هر افراز

$R = [0, 1] \times [0, 1]$ ، هر مستطیل R_{jk} شامل نقاط $(x_1^{(1)}, y_1^{(1)})$ با x گویا و $(x_2^{(2)}, y_2^{(2)})$ با x گنگ است.

اگر در افراز منظم از مرتبه n ، $c_{jk} = c_{jk}^{(1)}$ را در مستطیلهایی اختیار کنیم که $0 \leq y \leq \frac{1}{2}$

و وقتی $y > \frac{1}{2}$ ، $c_{jk} = c_{jk}^{(2)}$ ، مجموعه های تقریب ساز همان مجموعه های مربوط به

$$g(x, y) = \begin{cases} 1 & 0 \leq y \leq \frac{1}{2} \\ 2y & \frac{1}{2} < y \leq 1 \end{cases}$$

می باشند. چون g انتگرالپذیر است، مجموعهای تقریب ساز به $\frac{7}{8}$ همگرایند. اما اگر تمام $c_{ij} = c_{jk}^{(1)}$ ها را اختیار می کردیم، تمام مجموعهای تقریب ساز مقدار 1 را می داشتند.

۱۱. تابع f کراندار نیست، زیرا باید روی هر مربع قطری به مساحت $1/[n(n+1)]^2$ حجم 1- موجود باشد.

بخش ۳.۵

۱. $(\bar{A}) \frac{1}{3}$ ، هر دو؛ $(\bar{B}) \frac{5}{2}$ ، هر دو؛ $(\bar{C}) \frac{1}{4}(e^2 - 1)$ ، هر دو؛ $(\bar{D}) \frac{1}{35}$ ، هر دو

$$A = \int_{-r}^r \int_{-\sqrt{r^2-x^2}}^{\sqrt{r^2-x^2}} dy dz = 2 \int_{-r}^r \sqrt{r^2-x^2} dx = r^2(\arcsin(1) - \arcsin(-1)) = \pi r^2$$

۰۵. 28,000 ft³

۰۷. 0

۰۹. از نوع ۱؛ $\pi/2$

۱۱. 50π

۱۳. $\pi/24$

۱۵. ابتدا انتگرال نسبت به y را حساب کنید. آن را به انتگرالهای روی $[-\phi(x), 0]$ و $[0, \phi(x)]$ تجزیه کرده و در انتگرال اول تغییر متغیر بدهید.

۱۷. فرض کنید $\{R_{ij}\}$ افزای از مستطیل R شامل D بوده و f بر D مساوی 1 باشد. لذا، f^* بر D مساوی 1 و بر R/D مساوی 0 است. فرض کنید اگر R_{ij} تماما "جزء D نباشد، $c_{jk} \in R/D$. مجموع ریمان تقریب ساز مجموع مساحات مستطیلهایی از افزای است که جزء D می باشند.

بخش ۴.۵

۱. $(\bar{A}) \frac{1}{8}$ ؛ $(\bar{B}) \pi/4$ ؛ $(\bar{C}) -\frac{1}{12}$

(ت) $G(b) - G(a)$ ، که در آن $dG/dy = F(y, y) - F(a, y)$ و $\partial F/\partial x = f(x, y)$

۳. توجه کنید که ماکزیمم f بر D مساوی e و مینیمم f بر D مساوی $1/e$ است. با استفاده از ایده های برهان قضیه ۴، نشان دهید که

$$\frac{1}{e} \leq \frac{1}{4\pi^2} \int f(x, y) dA \leq e$$

۰.۵ $\frac{4}{3}\pi abc$

۰.۷ $\pi(20\sqrt{10} - 52)/3$

۰.۹ $\sqrt{3}/4$

۰.۱۱ شبیه برشی از یک کیک است .

$$\int_0^1 \left[\int_0^x f(x, y) dy \right] dx + \int_1^{\sqrt{2}} \left[\int_0^{\sqrt{2}-x^2} f(x, y) dy \right] dx$$

بخش ۵.۵

۰.۱ (آ) 4 ؛ (ب) $\frac{8}{3}$ ؛ (پ) $\frac{3}{16}$ ؛ (ت) $2 - e$

۰.۳ حاصل انتگرالگیری از $\iint e^{-xy} dx$ ابتدا نسبت به x سپس نسبت به y مساوی $\log 2$

است. عکس کردن ترتیب انتگرال سمت چپ تساوی مذکور در تمرین را می‌دهد.

۰.۵ با انتگرالگیری روی $[\varepsilon, 1] \times [\varepsilon, 1]$ و فرض $\varepsilon \rightarrow 0$ معلوم می‌شود که انتگرال مجازی موجود

و مساوی $2 \log 2$ است .

۰.۷ از نامساوی

$$\frac{\sin^2(x-y)}{\sqrt{1-x^2-y^2}} \leq \frac{1}{\sqrt{1-x^2-y^2}}$$

استفاده کنید .

۰.۹ از نامساوی $e^{x^2+y^2}/(x-y) \geq 1/(x-y)$ روی ناحیهء داده شده استفاده کنید .

بخش ۶.۵

۰.۱ $\frac{1}{3}$

۰.۳ 0

۰.۵ $-\frac{1}{6}$

۰.۷ $(4\pi/3)(1 - \sqrt{2}/2)$

۰.۹ به ازای $\varepsilon_1 > 0$ ، پیوستگی f نشان می‌دهد که $\varepsilon_2 > 0$ وجود دارد که $\varepsilon < \varepsilon_2$ نامساویهای

$f(x_0, y_0, z_0) - \varepsilon_1 < f(x, y, z) < f(x_0, y_0, z_0) + \varepsilon_1$ را به ازای $(x, y, z) \in B_\varepsilon$ ایجاب می‌کند .

با انتگرالگیری خواهیم داشت

$$|B_\varepsilon|(f(x_0, y_0, z_0) - \varepsilon_1) < \int_{B_\varepsilon} f(x, y, z) dV < |B_\varepsilon|(f(x_0, y_0, z_0) + \varepsilon_1)$$

حال بر $|B|$ تقسیم کرده و فرض کنید $\varepsilon \rightarrow 0$.

۱۱. شرایط بر f و W نشان می‌دهند که انتگرال وجود دارد. برای یافتن مقدار آن می‌توان از مجموعه‌های ریمان تقریب‌ساز استفاده کرد. توضیح دهید چطور از جعبه‌های افراز نقاط اختیار شوند که سهم جعبه‌ها با z مثبت به وسیله سهم جعبه‌ها با z منفی خنثی گردد.

$$13. \frac{1}{48}$$

$$15. (A) \quad a = -1; \quad b = 1; \quad \phi_2(x) = -\sqrt{1-x^2}; \quad \phi_1(x) = \sqrt{1-x^2}$$

$$\gamma_2(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}; \quad \gamma_1(x, y) = 1$$

$$(B) \quad a = -\sqrt{3}/2; \quad b = \sqrt{3}/2; \quad \phi_2(x) = -\sqrt{\frac{3}{4}-x^2}; \quad \phi_1(x) = \sqrt{\frac{3}{4}-x^2}$$

$$\gamma_2(x, y) = \frac{1}{2}; \quad \gamma_1(x, y) = \sqrt{1-x^2-y^2}$$

بخش ۷.۵

۱. قرص یکه منهای مرکز S

۳. $D = [0, 3] \times [0, 1]$ ؛ بلی

۵. D مجموعه‌ای (x, y, z) هایی است که $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ (گوی یکه) T یک به یک نیست، ولی بر $[0, 2\pi] \times [0, \pi] \times [0, 1]$ یک به یک می‌باشد.

۷. اثبات بر بودن T معادل آن است که دستگاه $ax + by = e$ $cx + dy = f$ همیشه نسبت به x و y قابل حل است، که در آن

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

وقتی این کار با قاعده حذف یا کرامر صورت گرفت، بر $\det A$ تقسیم نمایید. لذا، اگر $\det A \neq 0$ ، همواره می‌توان معادلات را حل کرد.

۹. چون $\det A \neq 0$ ، T ، \mathbb{R}^2 را به‌طور یک به یک روی \mathbb{R}^2 می‌نگارد. فرض کنید T^{-1} تبدیل معکوس باشد. نشان دهید که T^{-1} دارای ماتریس A^{-1} بوده، و $\det(A^{-1}) = 1/\det A \neq 0$ ، و بنابر تمرین ۸، $P^* = T^{-1}(P)$ یک متوازی‌الاضلاع است.

بخش ۸.۵

۱) $\pi(e - 1)$

۳) ناحیه D ناحیه e $0 \leq x \leq 4, \frac{1}{2}x + 3 \leq y \leq \frac{1}{2}x + 6$ (T) ؛ ۱۴۰ (-) : ۴۲-

۵) ناحیه D^* ناحیه e $0 \leq u \leq 1, 0 \leq v \leq 2$ ؛ $\frac{2}{3}(9 - 2\sqrt{2} - 3\sqrt{3})$ ؛

۷) π

۹) $3\pi/2$

۱۱) $\frac{4}{3}a^{2/3} \int_{D^*} f((au^2)^{1/3}, (av^2)^{1/3})u^{-1/3}v^{-1/3} du dv$

۱۳) $2a^2$

۱۵) π

۱۷) (T) کروی $a^2b^2c^2/\rho^2$ ؛ $b^2c^2 \cos^2 \theta \sin^2 \phi + a^2c^2 \sin^2 \theta \sin^2 \phi + a^2b^2 \cos^2 \phi = a^2b^2c^2/\rho^2$

استوانه‌ای $b^2c^2r^2 \cos^2 \theta + a^2c^2r^2 \sin^2 \theta + a^2b^2z^2 = a^2b^2c^2$ ؛

(-) کروی $\cos^2 \phi = \sin^2 \phi$ or $\phi = \pi/4$ or $3\pi/4$ ؛

استوانه‌ای $z^2 = r^2$ ؛

(پ) کروی $\theta = \pi/4, \cot \phi = \sqrt{2}/2$ ؛

استوانه‌ای $\theta = \pi/4, z = \sqrt{2}r/2$ ؛

(ت) کروی $\rho \cos \phi = \theta$ ؛ اگر $0 \leq \theta < \pi/2$ ، اگر $\theta - \pi < \theta < 3\pi/2$.

اگر $\theta - 2\pi < \theta < 2\pi$ ، $\rho^2 \sin^2 \phi = 1$ ؛

استوانه‌ای $r = 1, z = \theta$ ؛

۱۹) $y/x = \tan(\sqrt{x^2 + y^2 + z^2})$ (چیزی شبیه یک صدف دریایی مارپیچ) .

۲۱) $4\pi(\sqrt{3}/2 - \log(1 + \sqrt{3}) + \log\sqrt{2})$ ؛

۲۳) $\frac{2}{3}\pi[(1 + a^3)^{3/2} - a^{9/2} - 1]$ ؛

۲۵) 4π ؛

۲۷) 24 (try $x = u - v; y = u + v$) ؛

۲۹) (T) $\frac{4}{3}\pi abc$ ؛ (-) $\frac{4}{3}\pi abc$ ؛

تمرینات دوره‌ای برای فصل ۵

۱) (T) $\frac{81}{2}$ ؛ (-) $\frac{29}{70}$ ؛ (-) $\frac{1}{4}e^2 - e + \frac{9}{4}$ ؛

۳) $\frac{1}{3}\pi(4\sqrt{2} - \frac{7}{2})$ ؛

۰۵ 2π

۰۷ $4\pi/3$

۰۹ $(5\pi/2)\sqrt{15}$

۱۱. ابتدا انتگرال را نسبت به y روی ناحیه $D_{\varepsilon, L} = \{(x, y) | \varepsilon \leq x \leq L, 0 \leq y \leq x\}$ حساب کنید تا به دست آید $I_{\varepsilon, L} = \iint_{D_{\varepsilon, L}} f \, dx \, dy = \int_{\varepsilon}^L x^{-3/2}(1 - e^{-x}) \, dx$. انتگرالده

مثبت است؛ در نتیجه، وقتی $\varepsilon \rightarrow 0$ ، $I_{\varepsilon, L}$ صعود می‌کند و $L \rightarrow \infty$. کران بالایی

e^{-x} به ازای $0 < x < 1$ مساوی x و به ازای $1 < x < \infty$ برابر ۱ است؛ پس $I_{\varepsilon, L}$ کراندار بوده؛ و در نتیجه، باید همگرا باشد. انتگرال مجازی موجود می‌باشد.

۱۳. $\frac{1}{6}$ (آ) ؛ $-\frac{1}{2}$ (ب) ؛ $\pi^2/8$ (پ)

۱۵. $abc/6$

۱۷. (\bar{A}) ؛ $6xy$ ؛ $(z - 3x^2)\mathbf{k} + (ye^{xy})\mathbf{j} - (xe^{xy} - z)\mathbf{i}$ ؛ (ب) خیر. $F = y^2\mathbf{i}$ را امتحان کنید.

۱۹. $16\pi/3$

۲۱. $\frac{1}{2}\pi(1 - 1/e)$ ؛ حجم تحت نمودار $z = e^{-x^2 - y^2}$ روی بخشی از قرص بیکه که $y < 0$

۲۳. 0 (آ) ؛ $\pi/24$ (ب) ؛ 0 (پ)

۲۵. $\pi/2$

۲۷. $(e - e^{-1})/4$ (تغییر متغیر بدهید: $u = y - x, v = y + x$)

۲۹. ۳ (تغییر متغیر بدهید: $u = x^2 - y^2, v = xy$)

۳۱. $(9.92 \times 10^6)\pi$ گرم

۳۳. 32 (آ)

(ب) این در نقاط کره $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ محاط شده در مکعب رخ می‌دهد.

۳۵. $(0, 0, 3/8)$

بخش ۱۰.۶

۱. $\int_a^b f(x, y, z) \, ds = \int_t^1 f(x(t), y(t), z(t)) \cdot |\sigma'(t)| \, dt = \int_0^1 y(t) \cdot 1 \, dt = \int_0^1 0 \cdot 1 \, dt = 0$

۳. 2 (آ)

(ب) $52\sqrt{14}$

(پ) $\frac{16}{3} - 2\sqrt{3}$

۵. $-\frac{1}{3}(1 + 1/e^2)^{3/2} + \frac{1}{3}(2^{3/2})$

۰۷. (آ) مسیر عبارت است از خط مستقیم از $(0, 0)$ تا $(1, 1)$ و بازگشت به $(0, 0)$ در صفحه xy . روی مسیر، نمودار f خط مستقیم از $(0, 0, 0)$ تا $(1, 1, 1)$ است. انتگرال مساحت مثلث حاصل است که دوبار پوشیده شده است و مساوی $\sqrt{2}$ می‌باشد.

$$s(t) = \begin{cases} \sqrt{2}(1 - t^4), & -1 \leq t \leq 0 \text{ وقتی} \\ \sqrt{2}(1 + t^4), & 0 < t \leq 1 \text{ وقتی} \end{cases}$$

مسیر عبارت است از

$$\sigma(s) = \begin{cases} (1 - s/\sqrt{2})(1, 1), & 0 \leq s \leq \sqrt{2} \text{ وقتی} \\ (s/(\sqrt{2} - 1))(1, 1), & \sqrt{2} \leq s \leq 2\sqrt{2} \text{ وقتی} \end{cases}$$

$$\int_{\sigma} f ds = \sqrt{2}$$

$$2a/\pi \quad ۰۹$$

$$(2\sqrt{5} + \log(2 + \sqrt{5}))/4 \quad (\text{آ}) \quad ۰۱۱$$

$$(5\sqrt{5} - 1)/(6\sqrt{5} + 3 \log(2 + \sqrt{5})) \quad (\text{ب})$$

۰۱۳. مسیر دایره θ یک‌به‌مرکز $(0, 0, 0)$ در صفحه $x + y + z = 0$ است. و در نتیجه، می‌تواند با $\sigma(\theta) = (\cos \theta)\mathbf{w} + (\sin \theta)\mathbf{v}$ پارامتری شود، که در آن \mathbf{v} و \mathbf{w} بردارهای یک‌به‌متعامدی در آن صفحه‌اند. مثلاً، $\mathbf{v} = (1/\sqrt{2})(-1, 0, 1)$ و $\mathbf{w} = (1/\sqrt{6})(1, -2, 1)$ مناسب این کارند. جرم کل مساوی است با $2\pi/3$ گرم.

بخش ۲۰۶

$$0 \quad (\text{ب}) \quad ۰۱$$

$$9 \quad ۰۳$$

۰۵. بنابر نامساوی کشی - شوارتز، به ازای هر t ، $\|\mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)\| \leq \|\mathbf{F}(\sigma(t))\| \|\sigma'(t)\|$ ، لذا،

$$\left| \int_{\sigma} \mathbf{F} \cdot ds \right| = \left| \int_a^b \mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t) dt \right| \leq \int_a^b |\mathbf{F}(\sigma(t)) \cdot \sigma'(t)| dt$$

$$\leq \int_a^b \|\mathbf{F}(\sigma(t))\| \|\sigma'(t)\| dt \leq M \int_a^b \|\sigma'(t)\| dt = Ml$$

$$\frac{3}{4} - (n-1)/(n+1) \quad ۰۷$$

$$0 \quad ۰۹$$

۱۱. طول σ

۱۳. هرگاه $\sigma'(t)$ هیچگاه 0 نباشد، آنگاه بردار یکه $\|\sigma'(t)\|$ تابع پیوسته‌ای از t است؛ و در نتیجه، مماس با گردشی هموار بر منحنی می‌باشد. جواب منفی است.

۱۵. 7

۱۷. $\|\sigma'(x)\|$ (T)

(ب) بنا بر قضیه تابع ضمنی، معکوس به طور موضعی وجود دارد. در واقع، معکوس برای تمام باز 0 تعریف شده است، زیرا $df/dx > 0$ ، $f(a) = 0$ و $f(b) = L$. این بدان معنی است که f اکیدا " صعودی است؛ و در نتیجه، $[a, b]$ را به طور یک به یک بر $[0, L]$ می‌نگارد.

$$(پ) \quad g'(s) = \|\sigma'(g(s))\|^{-1}$$

(ت) با استفاده از قسمت (پ) $\|\sigma'(g(s))\| \|g'(s)\| = 1$ و $\|dp/ds\| = \|\sigma'(g(s))g'(s)\|$

بخش ۳.۶

$$z = 2(y - 1) + 1 \quad ۰۱$$

$$18z - 4y - x - 13 = 0 \quad یا \quad 18(z - 1) - 4(y + 2) - (x - 13) = 0 \quad ۰۳$$

۰۵. بردار $\mathbf{n} = (\cos v \sin u, \sin v \sin u, \cos u) = (x, y, z)$ سطح کره یکه به مرکز مبدأ است.

$$(T) \quad x = x_0 + (y - y_0)(\partial h / \partial y)(y_0, z_0) + (z - z_0)(\partial h / \partial z)(y_0, z_0)$$

در (x_0, y_0, z_0) که $x = h(y, z)$ را توصیف می‌کند.

$$(پ) \quad y = y_0 + (x - x_0)(\partial k / \partial x)(x_0, z_0) + (z - z_0)(\partial k / \partial z)(x_0, z_0)$$

(T) $u \mapsto u$ ، $v \mapsto v$ ، $u \mapsto u^3$ ، $v \mapsto v^3$ و همه \mathbb{R} را به روی \mathbb{R} می‌نگارند.

(پ) $T_u \times T_v = (0, 0, 1)$ برای Φ_1 ، و این هرگز 0 نیست. $T_u \times T_v = 9u^2v^2(0, 0, 1)$.

برای Φ_2 ، و این بردار در امتداد محورهای u و v مساوی 0 می‌باشد.

(پ) می‌خواهیم نشان دهیم هر دو پارامتری‌سازی یک سطح که در مجاورت یک نقطه

هموار باشند صفحه مماس یکسانی در آنجا به دست می‌دهند. لذا، فرض کنید

$$\Phi: D \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3 \quad و \quad \Psi: B \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(یک) \quad \Phi(u_0, v_0) = (x_0, y_0, z_0) = \Psi(x_0, t_0)$$

و

$$(دو) \quad (T_u^\Psi \times T_v^\Psi)|_{(s_0, t_0)} \neq 0 \quad و \quad (T_u^\Phi \times T_v^\Phi)|_{(u_0, v_0)} \neq 0$$

در نتیجه، Φ و Ψ در همسایگیهای (u_0, v_0) و (s_0, t_0) ، که می‌توان آنها را D و B فرض کرد، هموار و یک به یک می‌باشند. به علاوه، فرض کنید اینها صفحه مماس یکسانی را توصیف کنند؛ یعنی، $\Phi(D) = \Phi(B)$ ، برای آنکه اینها صفحه مماس یکسانی در (x_0, y_0, z_0) به دست دهند، نشان دهید مجموعه‌ء بازی چون C با $(u_0, v_0) \in C \subset D$ و نگاشت مشتق‌پذیری مانند $f: C \rightarrow B$ وجود دارند به طوری که به ازای $(u, v) \in C$ ، $\Phi(u, v) = \Psi(f(u, v))$ پس از این کار، محاسبه‌ای عادی نشان می‌دهد که بردارهای قائم با رابطه $T_u^\Phi \times T_v^\Phi = [\partial(s, t)/\partial(u, v)] T_s^\Psi \times T_t^\Psi$ به هم مربوطند.

برای مشاهده وجود چنین f ، توجه کنید که چون $T_s^\Psi \times T_t^\Psi \neq 0$ ، دست کم یکی از درمیانهای 2×2 در حاصل ضرب خارجی صفر نیست. مثلاً، فرض کنید

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial s} \\ \frac{\partial x}{\partial t} & \frac{\partial y}{\partial t} \end{vmatrix} \neq 0$$

حال، با استفاده از قضیهء تابع معکوس، (s, t) را در همسایگی از (x_0, y_0) به صورت تابع مشتق‌پذیری از (x, y) بنویسید.
(ت) خیر.

۱۱. (آ) سطح یک مارپیچ‌گون است. این سطح شبیه یک سربالایی مارپیچ است که حول محور z می‌گردد. (ر. ک. مثال ۲ از بخش ۰۴.۰۶) این سطح دوبار می‌گردد، زیرا 4π می‌رسد.

$$\mathbf{n} = \pm(1/\sqrt{1+r^2})(\sin \theta, -\cos \theta, r) \quad (\text{ب})$$

$$y_0x - x_0y + (x_0^2 + y_0^2)z = (x_0^2 + y_0^2)z_0 \quad (\text{پ})$$

(ت) هرگاه $(x_0, y_0, z_0) = (r_0 \cos \theta_0, r_0 \sin \theta_0, \theta_0)$ ، آنگاه با نمایش پاره‌خط به صورت $\{(r \cos \theta, r \sin \theta, \theta) \mid 0 \leq r \leq 1\}$ نشان دهید که خط در صفحه قرار دارد. بانمایش خط به صورت $\{(tx_0, ty_0, z_0) \mid 0 \leq t \leq 1/(x_0^2 + y_0^2)\}$ و گذاردن آن در (پ)، نشان دهید خط در صفحه مماس در (x_0, y_0, z_0) قرار دارد.

۱۳. (آ) مختصات استوانه‌ای مارا به پارامتری‌سازی $(z, \theta) = ((1+z^2)\cos \theta, (1+z^2)\sin \theta, z)$ ، به عنوان یک جواب ممکن می‌رساند؛

$$\mathbf{n} = (1/\sqrt{1+4z^2})(\cos \theta, \sin \theta, -2z) \quad (\text{ب})$$

۰۳ πa^3

۰۵ $\sqrt{6}/30$

۰۷ $\frac{\pi}{4} \left(\frac{5\sqrt{5}}{3} + \frac{1}{15} \right)$

۰۹ $16\pi R^3/3$

۱۱. (آ) کره از هر سه محور یکسان به نظر می‌رسد؛ در نتیجه، مقدار سه انتگرال باید روی محورهای مختلف یکی باشند.

(ب) $4\pi R^4/3$

(پ) $4\pi R^4/3$

۱۳. $(R/2, R/2, R/2)$

۱۵. چون $\|\partial\Phi/\partial u\| - \|\partial\Phi/\partial v\| \geq 0$ ، $\|\partial\Phi/\partial u\|^2 - 2\|\partial\Phi/\partial u\| \|\partial\Phi/\partial v\| + \|\partial\Phi/\partial v\|^2 = (\|\partial\Phi/\partial u\| - \|\partial\Phi/\partial v\|)^2 \geq 0$ داریم

که در $\|\partial\Phi/\partial u\| \times \|\partial\Phi/\partial v\| = \|\partial\Phi/\partial u\| \|\partial\Phi/\partial v\| |\sin\theta(u, v)| \leq \frac{1}{2}(\|\partial\Phi/\partial u\|^2 + \|\partial\Phi/\partial v\|^2)$

آن θ زاویه بین $\partial\Phi/\partial u$ و $\partial\Phi/\partial v$ است. این ما را به $A(\Phi) \leq J(\Phi)$ می‌رساند. با فرض پیوستگی، مساوی فقط وقتی می‌تواند برقرار باشد که در هر نقطه

$\|\partial\Phi/\partial u\| \|\partial\Phi/\partial v\| |\sin\theta| = \frac{1}{2}(\|\partial\Phi/\partial u\|^2 + \|\partial\Phi/\partial v\|^2) = \frac{1}{2}(\|\partial\Phi/\partial u\| - \|\partial\Phi/\partial v\|)^2 + \|\partial\Phi/\partial u\| \|\partial\Phi/\partial v\|$

این در صورتی می‌تواند رخ دهد که $|\sin\theta| = 1$ و $\|\partial\Phi/\partial u\| = \|\partial\Phi/\partial v\|$. لذا،

$\partial\Phi/\partial u \cdot \partial\Phi/\partial v = 0$ ، یعنی $|\cos\theta| = 0$

۱۷. (آ) $2\sqrt{2}\pi r^2$ ؛ (ب) $2\pi r^2$

۱۹. $2a^2$

بخش ۶.۶

۱. $\pm 48\pi$ (علامت تابع جهت است.)

۳. 4π

۵. 2π (یا -2π ، اگر جهت دیگری اختیار کنید)

۷. با پارامتری‌سازی مختصات قطبی، $\mathbf{T}_\theta \times \mathbf{T}_\phi = -\sin\phi \mathbf{r}$ (ر.ک. مثال ۱). لذا،

$$\begin{aligned} \iint_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} &= \iint \mathbf{F} \cdot (\mathbf{T}_\phi \times \mathbf{T}_\theta) \, d\phi \, d\theta = \iint (\mathbf{F} \cdot \mathbf{r}) \sin\phi \, d\phi \, d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^\pi F_r \sin\phi \, d\phi \, d\theta \end{aligned}$$

$$\cdot x_0x + y_0y = 1 \quad (\text{پ})$$

(ت) مختصات در امتداد این خطوط را در معادله معرف سطح و قسمت (پ) بگذارید.

بخش ۴.۶

۱. 4π

۳. $\frac{3}{2}\pi(\sqrt{2} + \log(1 + \sqrt{2}))$

۵. $\frac{1}{3}\pi(6\sqrt{6} - 8)$

۷. $A(E) = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \sqrt{a^2b^2 \sin^2 \phi \cos^2 \phi + b^2c^2 \sin^4 \phi \cos^2 \theta + a^2c^2 \sin^4 \phi \sin^2 \theta} d\phi d\theta$

۹. $(2\pi + 4)/(2\pi - 4)$

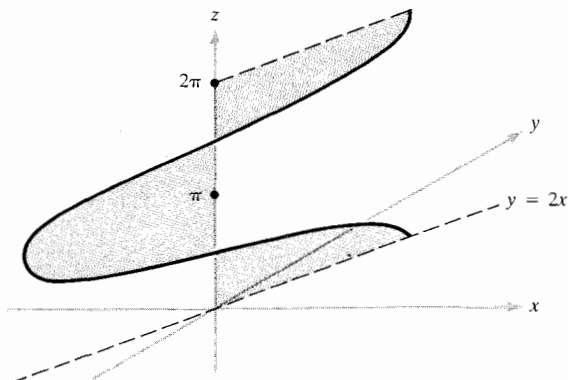
۱۱. $(\pi/6)(5\sqrt{5} - 1)$

۱۳. $(\pi/2)\sqrt{6}$

۱۵. $4\sqrt{5}$ ؛ به ازای θ ی ثابت، در امتداد پاره‌خط افقی (x, y, z) ، $y = 2x$ ، $z = \theta$ از محور

z نه شعاع $|\cos \theta| \sqrt{5}$ در ربع اول می‌رود اگر $\cos \theta > 0$ و به ربع سوم می‌رود اگر

$\cos \theta < 0$



بخش ۵.۶

۱. $\frac{5\sqrt{2} + 3}{24}$

$$\int_S f \, dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f \sin \phi \, d\phi \, d\theta.$$

۹. به ازای یک استوانه به شعاع $R = 1$ و مؤلفه قائم F_r ،

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_a^b \int_0^{2\pi} F_r \, d\theta \, dz$$

۰۱۱ $2\pi/3$

۰۱۳ $\frac{2}{3}a^3bc\pi$

تمرینات دوره‌ای برای فصل ۶

۰۱ (آ) $3\sqrt{2}(1 - e^{6\pi})/13$

(ب) $-\pi\sqrt{2}/2$

(پ) $(236158\sqrt{26} - 8)/35 \cdot (25)^3$

(ت) $8\sqrt{2}/189$

۰۳ (آ) $2/\pi + 1$

(ب) $-\frac{1}{2}$

۰۵ $2a^3$

۰۷ (آ) یک کره به شعاع ۵ و مرکز $(2, 3, 0)$ ؛

$\Phi(\theta, \phi) = (2 + 5 \cos \theta \sin \phi, 3 + 5 \sin \theta \sin \phi, 5 \cos \phi)$;

$0 \leq \theta \leq 2\pi; 0 \leq \phi \leq \pi$

(ب) یک بیضی‌گون به مرکز $(2, 0, 0)$ ؛

$\Phi(\theta, \phi) = (2 + (1/\sqrt{2})3 \cos \theta \sin \phi, 3 \sin \theta \sin \phi, 3 \cos \phi)$;

$0 \leq \theta < 2\pi, 0 \leq \phi < \pi$

(پ) یک هذلولی‌گون بیضوی یکپارچه؛

$\Phi(\theta, z) = (\frac{1}{2}\sqrt{8 + 2z^2} \cos \theta, \frac{1}{3}\sqrt{8 + 2z^2} \sin \theta, z)$

$0 \leq \theta < 2\pi, -\infty < z < \infty$

۰۹ Φ پارچه بالایی یک مخروط با مقاطع عرضی افقی $A(\Phi) = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} \sqrt{3 \cos^2 \theta + 5} \, d\theta$

بیضوی را توصیف می‌کند.

$$11\sqrt{3}/6 \cdot ۱۱$$

$$\sqrt{2}/3 \cdot ۱۳$$

$$5\sqrt{5}/6 \cdot ۱۵$$

$$(e^y \cos \pi z, xe^y \cos \pi z, -\pi xe^y \sin \pi z) \quad (\bar{T}) \cdot ۱۷$$

$$0 \quad (\bar{ب})$$

$$\frac{1}{2}(e^2 + 1) \cdot ۱۹$$

$$\mathbf{n} = (1/\sqrt{5})(-1, 0, 2), 2z - x = 1 \cdot ۲۱$$

$$0 \cdot ۲۳$$

۲۵ هرگاه $\mathbf{F} = \nabla\phi$ ، \bar{T} نگاه $\nabla \times \mathbf{F} = \mathbf{0}$ (دست کم اگر $\phi \in C^2$ باشد؛ ر.ک. قضیه ۱،

بخش ۴.۳). قضیه ۳ در بخش ۲.۶ نشان می‌دهد که $\int_C \nabla\phi \cdot ds = 0$ زیرا C یک منحنی بسته است.

$$60\pi \quad (\bar{ب}) \quad 24\pi \quad (\bar{ب}) \quad 24\pi \quad (\bar{T}) \cdot ۲۷$$

$$[2z_0(R^2 + p^2)/gp^2]^{1/2} \quad (\bar{ب}) \quad \sqrt{R^2 + p^2} (z_0 - z_1)/p \quad (\bar{T}) \cdot ۲۹$$

بخش ۱۰.۷

$$-8 \cdot ۱$$

$$0 \quad (\bar{ب}) \quad -\pi R^2 \quad (\bar{ب}) \quad 0 \quad (\bar{T}) \cdot ۳$$

$$3\pi a^2 \cdot ۵$$

$$3\pi/2 \cdot ۷$$

$$3\pi(b^2 - a^2)/2 \cdot ۹$$

$$2\pi \quad (\bar{ب}) \quad 0 \quad (\bar{T}) \cdot ۱۱$$

$$0 \cdot ۱۳$$

$$\pi ab \cdot ۱۵$$

$$-\frac{5}{6} \cdot ۱۷$$

$$9\pi/8 \cdot ۱۹$$

۲۱ اگر $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای وجود دارد به طوری که هر وقت $\rho < \delta$ ، $\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\| = \rho$ ،

$|u(\mathbf{q}) - u(\mathbf{p})| < \varepsilon$ ، $\partial B_\rho(\mathbf{p})$ را با $\mathbf{q}(\theta) = \mathbf{p} + \rho(\cos \theta, \sin \theta)$ پارامتری کنید. در این

صورت،

$$|I(\rho) - 2\pi u(\mathbf{p})| \leq \int_0^{2\pi} |u(\mathbf{q}(\theta)) - u(\mathbf{p})| d\theta \leq 2\pi\epsilon$$

۲۳. $\partial B_\rho(\mathbf{p})$ را مثل تمرین ۲۱ پارامتری کنید. هرگاه $\mathbf{p} = (p_1, p_2)$ ، آنگاه

$$I(\rho) = \int_0^{2\pi} u(p_1 + \rho \cos \theta, p_2 + \rho \sin \theta) d\theta$$

می شود که

$$\frac{dI}{d\rho} = \int_0^{2\pi} \nabla u \cdot (\cos \theta, \sin \theta) d\theta = \int_0^{2\pi} \nabla u \cdot \mathbf{n} d\theta = \frac{1}{\rho} \int_{\partial B_\rho} \frac{\partial u}{\partial \mathbf{n}} ds = \frac{1}{\rho} \int_{B_\rho} \nabla^2 u dA$$

(در نامساوی آخر از تمرین ۲۲ استفاده می شود).

۲۵. با استفاده از تمرین ۲۴،

$$\begin{aligned} 2\pi u(\mathbf{p}) \leq I(\rho) &= \frac{1}{\rho} \int_0^{2\pi} u(\mathbf{p} + \rho(\cos \theta, \sin \theta)) \rho d\theta \\ &\leq (2\pi - 2\delta)u(\mathbf{p}) + 2\delta(u(\mathbf{p}) - d) \leq 2\pi u(\mathbf{p}) - 2\delta d \end{aligned}$$

۲۷. فرض کنید u تحت توافقی باشد. احکام نظیر به تمرین ۲۶ (آ) و (ب) را ثابت می کنیم.

استدلال در مورد توابع فوق توافقی کاملاً "به همین نحو و با نامساویهای معکوس است.

فرض کنیم $\nabla^2 u \geq 0$ و به ازای هر \mathbf{q} در $B_R(\mathbf{p})$ ، $u(\mathbf{p}) \geq u(\mathbf{q})$. بنا بر تمرین ۲۳، به ازای

$0 < \rho \leq R$ ، $I(\rho) \geq 0$ ؛ در نتیجه، تمرین ۲۴ نشان می دهد که به ازای $0 < \rho \leq R$

$2\pi u(\mathbf{p}) \leq I(\rho) \leq I(R)$. هرگاه به ازای $\mathbf{q} = \mathbf{p} + \rho(\cos \theta_0, \sin \theta_0) \in B_R(\mathbf{p})$ ، $u(\mathbf{q}) > u(\mathbf{p})$ ،

آنگاه، طبق پیوستگی، قوسی مانند $[\theta_0 - \delta, \theta_0 + \delta]$ بر $\partial B_\rho(\mathbf{p})$ وجود دارد که در

آن به ازای $d > 0$ ، $u < u(\mathbf{p}) - d$. این بدان معنی است که

$$\begin{aligned} \iint_{B_R} u dA &= \int_0^R \int_0^{2\pi} u(\mathbf{p} + \rho(\cos \theta, \sin \theta)) \rho d\theta d\rho \\ &= \int_0^R \left(\int_{\partial B_\rho} u ds \right) d\rho = \int_0^R 2\pi \rho u(\mathbf{p}) d\rho = \pi R^2 u(\mathbf{p}) \end{aligned}$$

این تناقض نشان می دهد که باید به ازای هر \mathbf{q} در $B_R(\mathbf{p})$ داشته باشیم $u(\mathbf{q}) = u(\mathbf{p})$.

اگر ماکزیم \mathbf{p} به ازای D مطلق باشد، بند آخر نشان می دهد که به ازای هر x در

قرصی حول \mathbf{p} ، $u(x) = u(\mathbf{p})$. هرگاه $\sigma: [0, 1[\rightarrow D$ مسیری از \mathbf{p} به \mathbf{q} باشد، آنگاه به

ازای هر t در بازه ای چون $[0, b[$ ، $u(\sigma(t)) = u(\mathbf{p})$. فرض کنیم b_0 بزرگترین $b \in [0, 1[$

باشد که به ازای هر $t \in [0, b[$ ، $u(\sigma(t)) = u(\mathbf{p})$. (به بیان دقیق، این نیاز به مفهوم

کوچکترین کران بالایی از یک کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال مناسب دارد. چون u پیوسته است، $u(\sigma(b_0)) = u(p)$ ، هرگاه $b_0 \neq 1$ ، آنگاه بند آخر در $\sigma(b_0)$ اعمال می‌شود و u به طرز ثابت مساوی $u(p)$ روی قرصی حول $\sigma(b_0)$ می‌باشد. بخصوص، $\delta > 0$ ای وجود دارد به طوری که بر $[0, b_0 + \delta]$ ، $u(\sigma(t)) = u(\sigma(b_0)) = u(p)$ ، این ماکزیمال بودن b_0 را نقض می‌کند؛ در نتیجه، باید داشته باشیم $b_0 = 1$ ، یعنی $\sigma(q) = \sigma(p)$ ، چون q نقطه دلخواهی در D است، u بر D ثابت می‌باشد.

بخش ۲.۷

۰.۱ -2π

۰.۳ ۰

۰.۵ ۰

۰.۷ با استفاده از قانون فارادی، به ازای هر سطح S ، $\int_S [\mathbf{V} \times \mathbf{E} - \partial \mathbf{H} / \partial t] \cdot d\mathbf{S} = 0$ ، هرگاه انتگرالده بردار صفری در یک نقطه بود، آنگاه، طبق پیوستگی، انتگرال روی قرص کوچکی به مرکز آن نقطه و عمود بر این بردار ناصفر می‌شد.

۰.۹ جهت‌های $\partial S_1 = \partial S_2$ باید باهم سازگار باشند.

۰.۱۱ فرض کنید حلقه بسته C بر سطح طوری رسم شده باشد که آن را به دو قطعه S_1 و S_2 تقسیم کند. برای سطح یک نان روغنی (چنبره) باید از دو حلقه استفاده کنید. می‌توانید بگویید چرا؟ C هر دوی S_1 و S_2 را محدود می‌کند ولی با جهت مثبت نسبت به یکی و جهت منفی نسبت به دیگری. بنابراین،

$$\int_S \mathbf{V} \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{V} \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{V} \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} - \int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$$

$$\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_S \mathbf{V} \times \mathbf{v} \cdot d\mathbf{S} = \int_S \mathbf{0} \cdot d\mathbf{s} = 0, \quad C = \partial S \text{ اگر } (\bar{T}) \quad 0.13$$

$\sigma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^3$ ، که در آن $\int_C \mathbf{v} \cdot d\mathbf{s} = \int_a^b \mathbf{v} \cdot \sigma'(t) dt = \mathbf{v} \cdot \int_a^b \sigma'(t) dt = \mathbf{v} \cdot (\sigma(b) - \sigma(a))$ (ب) یک پارامتری سازی C است. (انتگرال برداری برداری است که مؤلفه‌هایش انتگرال‌های توابع مؤلفه‌اند.) اگر C بسته باشد، عبارت اخیر ۰ است.

۰.۱۵ هر دو انتگرال $\pi/4$ به دست می‌دهند.

$$\pi \quad (\text{پ}) \quad \pi \quad (\text{ب}) \quad 0 \quad (\bar{T}) \quad 0.17$$

۰.۱۹ 20π

بخش ۳.۷

۱. هرگاه $F = \nabla f = \nabla g$ ، C و یک منحنی از v به w باشد ، آنگاه $(f - g)(w) - (f - g)(v) = \int_C \nabla(f - g) \cdot ds = 0$.

در نتیجه ، $f - g$ ثابت می باشد .

۲. $x^2yz - \cos x$.

۵. $-1/|r_0|$

۷. خیر ؛ $\nabla \times F = (0, 0, x) \neq 0$.

۹. $e \sin 1 + \frac{1}{3}e^3 - \frac{1}{3}$.

۱۱. 3.54×10^{29} ergs .

۱۳. $f = x^2/2 + y^2/2 + C$ (\bar{T})

(ب) F یک میدان گرادیان نیست (پ) $f = \frac{1}{3}x^3 + xy^2 + C$

۱۵. (\bar{T}) خیر

(ب) $(\frac{1}{2}z^2, xy - z, x^2y)$ یا $(\frac{1}{2}z^2 - 2xyz - \frac{1}{2}y^2, -x^2z - z, 0)$

۱۷. $(-z \sin y + y \sin x, xz \cos y, 0)$ (جوابهای دیگر نیز امکان دارد .)

۱۹. (\bar{T}) $\nabla \times F = (0, 0, 2) \neq 0$.

(ب) فرض کنید $\sigma(t)$ مسیر یک شیء درسیال باشد . در این صورت ، $F(\sigma(t)) = \sigma'(t)$.

فرض کنید $\sigma(t) = (x(t), y(t), z(t))$ پس $\sigma'(t) = (x', y', z')$ ، و $z' = 0$ ، در نتیجه ، z ثابت بوده و حرکت موازی صفحه xy است . همچنین ، $x' = -y$ ، $y' = x$ ، و $x'' + x = 0$ ، $y'' + y = 0$ ، با گذاردن این مقادیر در

لذا ، $x = A \cos t + B$ و $y = C \cos t + D$.

به دست می آوریم $x' = -y$ ، $y' = x$ ، $C = -B$ ، $D = A$. در نتیجه ، $x^2 + y^2 = A^2 + B^2$ ،

و یک دایره خواهیم داشت .

(پ) خلاف جهت عقربه های ساعت

$F = -\frac{GM}{(x^2 + y^2 + z^2)^{3/2}}(x, y, z)$; (\bar{T}) ۲۱

$\nabla \cdot F = -GM \left\{ \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3x^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3y^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} + \frac{x^2 + y^2 + z^2 - 3z^2}{(x^2 + y^2 + z^2)^{5/2}} \right\}$

$= 0$

(ب) فرض کنید S کره e یکه ، S_1 نیمکره e بالایی ، S_2 نیمکره e پایینی ، و C دایره e یکه

باشد . هرگاه $F = \nabla \times G$ ، آنگاه

$$\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_{S_1} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} + \int_{S_2} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_C \mathbf{G} \cdot ds - \int_C \mathbf{G} \cdot ds = 0$$

اما $\int_S \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = -GM \int_S (\mathbf{r}/\|\mathbf{r}\|^3) \cdot \mathbf{n} dS = -4\pi GM$ زیرا بر S ، $\|\mathbf{r}\| = 1$ و $\mathbf{r} = \mathbf{n}$ ، لذا $\mathbf{F} = \nabla \times \mathbf{G}$ ناممکن است .

بخش ۴.۷

$$\int_S \nabla \times \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S} = \int_V \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{F}) dV = \int_V \left\{ \left(\frac{\partial^2 F_1}{\partial y \partial z} - \frac{\partial^2 F_1}{\partial z \partial y} \right) + \left(\frac{\partial^2 F_2}{\partial z \partial x} - \frac{\partial^2 F_2}{\partial x \partial z} \right) + \left(\frac{\partial^2 F_3}{\partial x \partial y} - \frac{\partial^2 F_3}{\partial y \partial x} \right) \right\} dV \quad ۱$$

این در صورت C^2 بودن \mathbf{F} برابر ۰ است ، زیرا مشتقات دوم مخلوط توابع مؤلفه آن مساوی می باشند .

۱ ۰۳

$$-\frac{4}{15} \quad (\nabla) \quad \frac{4}{15} \quad (\nabla) \quad 0 \quad (\bar{\nabla}) \quad ۰۵$$

$$\int_S \mathbf{r} \cdot \mathbf{n} ds = \int_\Omega \nabla \cdot \mathbf{r} dV = \int_\Omega 3 dV = 3 \text{ حجم } (\Omega) \quad \text{هرگاه } S = \partial\Omega \text{ ، آنگاه } ۰۷$$

هرگاه $\mathbf{F} = \mathbf{r}/r^2$ ، آنگاه $\nabla \cdot \mathbf{F} = 1/r^2$ ، اگر $(0, 0, 0) \notin \Omega$ ، نتیجه از قضیه گاوس به دست می آید . اگر $(0, 0, 0) \in \Omega$ ، انتگرال را با حذف گوی کوچکی چون $B_\epsilon = \{(x, y, z) | (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} < \epsilon\}$ حول مبدا و سپس فرض $\epsilon \rightarrow 0$ حساب می کنیم:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \frac{1}{r^2} dV &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\Omega \setminus B_\epsilon} \frac{1}{r^2} dV = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_{\partial(\Omega \setminus B_\epsilon)} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2} dS \\ &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2} dS - \int_{\partial B_\epsilon} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2} dS \right) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \left(\int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2} dS - 4\pi\epsilon \right) \\ &= \int_{\partial\Omega} \frac{\mathbf{r} \cdot \mathbf{n}}{r^2} dS \end{aligned}$$

انتگرال روی ∂B_ϵ از قضیه ۱۰ (قانون گاوس) به دست می آید ، زیرا همه جا بر B_ϵ

$$r = \epsilon$$

۱۱ از فرمول ۸ در جدول ۱۰۳ و قضیه دیورژانس برای قسمت (آ) استفاده کنید . برای

(ب) فرمول ۱۸ را به کار برید .

$$۱۳ \quad \text{هرگاه } \phi(\mathbf{p}) = \int_\Omega \rho(\mathbf{q}) / (4\pi \|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|) dV(\mathbf{q}) \text{ ، آنگاه}$$

$$\begin{aligned}\nabla\phi(\mathbf{p}) &= \int_{\Omega} [\rho(\mathbf{q})/4\pi] \nabla_{\mathbf{p}}(1/|\mathbf{p} - \mathbf{q}|) dV(\mathbf{q}) \\ &= -\int_{\Omega} [\rho(\mathbf{q})/4\pi](\mathbf{p} - \mathbf{q})/|\mathbf{p} - \mathbf{q}|^3 dV(\mathbf{q})\end{aligned}$$

که در آن $\nabla_{\mathbf{p}}$ یعنی گرادیان نسبت به مختصات \mathbf{p} و انتگرال برداری است که مؤلفه‌هایش انتگرالهای مؤلفه می‌باشند. اگر \mathbf{p} در $\partial V \cup V$ بوده و \mathbf{n} قائم یکه روجه خارج به ∂V باشد، می‌توان حاصل ضرب داخلی را با استفاده از این مؤلفه‌ها و دسته‌بندی اجزا به صورت زیر به دست آورد:

$$\nabla\phi(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} = -\int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{q})}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^3} (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} dV(\mathbf{q})$$

لذا،

$$\int_{\partial V} \nabla\phi(\mathbf{p}) \cdot \mathbf{n} dV(\mathbf{p}) = -\int_{\partial V} \left(\int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{q})}{4\pi} \frac{1}{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^3} (\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n} d\mathbf{q} \right) dV(\mathbf{p})$$

در اینجا اساساً پنج متغیر انتگرالگیری وجود دارند، که سه تا \mathbf{q} را در Ω و دو تا \mathbf{p} را بر ∂V قرار می‌دهند. با استفاده از قضیه فوبینی، داریم

$$\int_{\partial V} \nabla\phi \cdot \mathbf{n} \cdot dS = -\int_{\Omega} \frac{\rho(\mathbf{q})}{4\pi} \left(\int_{\partial V} \frac{(\mathbf{p} - \mathbf{q}) \cdot \mathbf{n}}{\|\mathbf{p} - \mathbf{q}\|^3} dS(\mathbf{p}) \right) dV(\mathbf{q})$$

اگر V ناحیه‌ای از نوع ۴ باشد، قضیه ۱۰ می‌گوید که انتگرال داخلی 4π است اگر $\mathbf{q} \in V$ و ۰ است اگر $\mathbf{q} \notin V$. در نتیجه،

$$\int_{\partial V} \nabla\phi \cdot \mathbf{n} dS = -\int_{\Omega \cap V} \rho(\mathbf{q}) dV(\mathbf{q})$$

چون خارج Ω ، $\rho = 0$ ، داریم

$$\int_{\partial V} \nabla\phi \cdot \mathbf{n} dS = -\int_V \rho(\mathbf{q}) dV(\mathbf{q})$$

اگر V از نوع ۴ نباشد، آن را به مجموعی از این نواحی تقسیم می‌کنیم. معادله بر هر قطعه برقرار است و، با جمع کردن آنها، انتگرالهای مرزی همراه با جهت مناسبی از مرزها حذف شده، نتیجه مطلوب را به جا می‌گذارند.

(ب) بنابر قضیه ۹، $\int_{\partial V} \nabla\phi \cdot \mathbf{n} \cdot dS = \int_V \nabla^2\phi dV$ ، در نتیجه، $\int_V \nabla^2\phi dV = -\int_V \rho dV$ ، چون هر دوی ρ و $\nabla^2\phi$ پیوسته بوده و این برای نواحی کوچک دلخواه برقرار است، باید داشته باشیم $\nabla^2\phi = -\rho$.

۱۵. اگر بار Q روی کره S به شعاع R و مرکز مبدأ به طور یکنواخت توزیع شده باشد، چگالی بار بر واحد مساحت $Q/4\pi R^2$ است. هرگاه p نقطه‌ای غیرواقع بر S بوده و $q \in S$ ، آنگاه اثر بار مجاور q بر میدان الکتریکی در p در جهت بردار $p - q$ می‌باشد. چون توزیع بار یکنواخت است، مؤلفه مماسی این توزیع با مؤلفه مماسی در نقطه متقارن سمت دیگر کره و در همان فاصله از p حذف می‌شود. (شکل بکشید.) میدان کل حاصل باید شعاعی باشد. چون S از هر نقطه به فاصله $\|p\|$ تا مبدأ یکسان دیده می‌شود، میدان باید فقط تابع شعاع و به شکل $E = f(r)r$ باشد. اگر به کره Σ به شعاع $\|p\|$ باشد، داریم

$$\begin{aligned} (\text{بار داخل } \Sigma) &= \int_{\Sigma} \mathbf{E} \cdot d\mathbf{S} = \int_{\Sigma} f(\|p\|)r \cdot \mathbf{n} \, dS \\ &= f(\|p\|)\|p\| \text{ area } \Sigma = 4\pi\|p\|^3 f(\|p\|) \end{aligned}$$

اگر $\|p\| < R$ ، باری داخل Σ نیست؛ اگر $\|p\| > R$ ، بار داخل Σ مساوی Q است؛ در نتیجه،

$$\mathbf{E}(p) = \begin{cases} \frac{1}{4\pi} \frac{Q}{\|p\|^3} p, & \|p\| > R \\ 0, & \|p\| < R \end{cases}$$

۱۷. بنابر قضیه ۱۰، به ازای هر سطح در برگیرنده $0 \neq \int_{\partial M} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{S}$ ، اما، هرگاه \mathbf{F} کرل‌میدانی باشد، آنگاه انتگرال روی چنین سطح بسته‌ای باید ۰ باشد.

۱۹. هرگاه v_i مؤلفه i م بردار v باشد، آنگاه تمرین ۱۸ (ب) نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} \left[\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f \mathbf{F} \, dx \, dy \, dz \right]_i &= \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} (f \mathbf{F})_i \, dx \, dy \, dz = \frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} f F_i \, dx \, dy \, dz \\ &= \int_{\Omega_t} \left(\frac{D(f F_i)}{Dt} + (f F_i) \operatorname{div} \mathbf{F} \right) dx \, dy \, dz \\ &= \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial}{\partial t} (f F_i) + D_x (f F_i) \cdot \mathbf{F} + (f F_i) \operatorname{div} \mathbf{F} \right) dx \, dy \, dz \\ &= \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial}{\partial t} (f F_i) + \nabla (f F_i) \cdot \mathbf{F} + (f F_i) \operatorname{div} \mathbf{F} \right) dx \, dy \, dz \\ &= \int_{\Omega_t} \left[\left(\frac{\partial}{\partial t} (f \mathbf{F}) \right) + (D(f \mathbf{F}) \mathbf{F})_i + ((f \mathbf{F}) \operatorname{div} \mathbf{F})_i \right] dx \, dy \, dz \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 &= \int_{\Omega_t} \left[\frac{\partial}{\partial t} (f\mathbf{F}) + D(f\mathbf{F})\mathbf{F} + (f\mathbf{F})\text{div } \mathbf{F} \right]_i dx dy dz \\
 &= \left[\int_{\Omega_t} \frac{\partial}{\partial t} (f\mathbf{F}) + D(f\mathbf{F})\mathbf{F} + (f\mathbf{F})\text{div } \mathbf{F} \right]_i dx dy dz \\
 &= \left[\int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial}{\partial t} (f\mathbf{F}) + (\mathbf{F} \cdot \nabla)(f\mathbf{F}) + (f\mathbf{F})\text{div } \mathbf{F} \right) dx dy dz \right]_i
 \end{aligned}$$

چون مؤلفه‌ها مساویند، بردارها مساوی می‌باشند.

بخش ۵.۷

۱. (T) بنابر تمرین ۱۸، بخش ۴.۷.

$$\frac{d}{dt} \int_{\Omega_t} \rho dV = \int_{\Omega_t} \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \rho \cdot \mathbf{V} + \rho \text{div } \mathbf{V} \right) dV$$

بنابر قضیه ۱۱، قانون بقا برای ۰ با صفر بودن انتگرالده سمت راست معادل است. و در نتیجه، انتگرال سمت چپ نیز ۰ است. به عکس، اگر Ω ناحیه کوچکی باشد، نیز چنین است. هرگاه انتگرالهای سمت راست به ازای جمیع نواحی به قدر کافی کوچک ۰ باشند، آنگاه انتگرالده (بنابریوستگی) باید ۰ باشد.

(ب) به ازای هر t ، تغییر متغیر $(u, v, w) = \phi((x, y, z), t)$ نتیجه می‌دهد که

$$\int_{\Omega_t} \rho(u, v, w, 0) du dv dw = \int_{\Omega} \rho(x, y, z, t) \frac{\partial(u, v, w)}{\partial(x, y, z)} dx dy dz$$

بنابر (T)، طرف چپ نسبت به زمان ثابت است؛ و لذا، مساوی مقدارش در $t = 0$ می‌باشد:

$$\int_{\Omega} \rho(x, y, z, 0) dx dy dz = \int_{\Omega} \rho(x, y, z, t) J(x, y, z, t) dx dy dz$$

چون این به ازای جمیع نواحی کوچک برقرار است، انتگرالدهها باید طبق پیوستگی مساوی باشند.

(پ) بنابر تمرین ۱۸، بخش ۴.۷، $\text{div } \mathbf{V} = 0$ ایجاب می‌کند که $J(x, t) = 1$. با اعمال این بر (ب)، $\rho(x, t) = \rho(x, 0)$. چگالی در هر نقطه نسبت به زمان ثابت است؛ در نتیجه، $\partial \rho / \partial t = 0$ و قانون بقا به صورت $\nabla \cdot \rho \mathbf{V} = 0$ درمی‌آید. شارش بر گرادیان ρ

عمود است؛ در نتیجه، خطوط شارش در سطوح با چگالی ثابت قرار دارند.

۳. (آ) چون $\mathbf{V} = \nabla\phi$ ، داریم $\nabla \times \mathbf{V} = \mathbf{0}$ ؛ و لذا، $\nabla \cdot \nabla\phi = \frac{1}{2}\nabla(\|\mathbf{V}\|^2)$ ، معادلهٔ اوپلر به صورت زیر درمی‌آید:

$$-\frac{\nabla p}{\rho} = \frac{d\mathbf{V}}{dt} + \frac{1}{2}\nabla(\|\mathbf{V}\|^2) = \nabla\left(\frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{2}\|\mathbf{V}\|^2\right)$$

هرگاه σ مسیری از P_1 به P_2 باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} -\int_{\sigma} \frac{1}{\rho} dp &= -\int_{\sigma} \frac{1}{\rho} \nabla p \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t) dt = \int_{\sigma} \nabla\left(\frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{2}\|\mathbf{V}\|^2\right) \cdot \boldsymbol{\sigma}'(t) dt \\ &= \left(\frac{d\phi}{dt} + \frac{1}{2}\|\mathbf{V}\|^2\right)\Big|_{P_1}^{P_2} \end{aligned}$$

(به) هرگاه $d\mathbf{V}/dt = \mathbf{0}$ و ρ ثابت باشد، آنگاه $\nabla(p/\rho) = -(\nabla p)/\rho = -\frac{1}{2}\nabla(\|\mathbf{V}\|^2)$ ؛ و در نتیجه، $\nabla(\frac{1}{2}\|\mathbf{V}\|^2 + p/\rho) = \mathbf{0}$

۵. بنابر قانون آمپر، $\nabla \cdot \mathbf{J} = \nabla \cdot (\nabla \times \mathbf{H}) - \nabla \cdot (\partial \mathbf{E} / \partial t) = -\nabla \cdot (\partial \mathbf{E} / \partial t) = -(\partial / \partial t)(\nabla \cdot \mathbf{E})$

بنابر قانون گاوس، این مساوی $-\partial \rho / \partial t$ است. لذا، $\nabla \cdot \mathbf{J} + \partial \rho / \partial t = 0$

۷. (آ) هرگاه $\mathbf{x} \in S$ ، آنگاه $r' = R/a$ ؛ در نتیجه، $G = 0$ ، به‌طورکلی، $r = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ و $r'' = \|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|$ ؛ و لذا،

$$\nabla_{\mathbf{x}} G = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{R}{a} \frac{\mathbf{y}' - \mathbf{x}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}'\|^3} - \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \right] \quad \text{و} \quad G = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{R}{a} \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}'\|} - \frac{1}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|} \right]$$

و درست مثل تحلیل معادله (۱۵) ($\mathbf{y}' \neq \mathbf{x}$ زیرا \mathbf{x} داخل و \mathbf{y}' خارج کره قرار دارد)

وقتی $\mathbf{x} \neq \mathbf{y}$ ، $\nabla_{\mathbf{x}}^2 G = 0$ ؛ از قضیهٔ ۱۰ نتیجه می‌شود که $\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}')$ (که $\mathbf{x}' = \mathbf{y}$)، $\nabla_{\mathbf{x}}^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$ و لی جملهٔ دوم همواره ۰ است، زیرا \mathbf{x} هرگز \mathbf{y} نیست. در نتیجه، به ازای \mathbf{x} و \mathbf{y} در کره، $\nabla_{\mathbf{x}}^2 G = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{y})$

(ب) هرگاه \mathbf{x} بر سطح S واقع باشد، آنگاه $\mathbf{n} = \mathbf{x}/R$ قائم بیکهٔ روبه‌خارج است، و

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{R}{a} \nabla\left(\frac{1}{r'}\right) \cdot \mathbf{n} - \nabla\left(\frac{1}{r}\right) \cdot \mathbf{n} \right] = \frac{1}{4\pi} \left[\frac{R}{a} \frac{\mathbf{y}' - \mathbf{x}}{\|\mathbf{y}' - \mathbf{x}\|^3} - \frac{\mathbf{y} - \mathbf{x}}{\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^3} \right] \cdot \mathbf{n}$$

هرگاه γ زاویهٔ بین \mathbf{x} و \mathbf{y} باشد، آنگاه $\|\mathbf{x} - \mathbf{y}\|^2 = r^2 = R^2 + a^2 - 2aR$

$$\|\mathbf{x} - \mathbf{y}'\|^2 = r'^2 = R^2 + b^2 - 2bR \quad \gamma = (R^2/a^2)r^2$$

در نتیجه،

$$\frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} = \frac{1}{4\pi r^3} \left[\frac{R \mathbf{y}' - \mathbf{x}}{a (R/a)^3} - (\mathbf{y} - \mathbf{x}) \right] \cdot \mathbf{n}$$

ولی $\mathbf{n} = \mathbf{x}/R$ و $\mathbf{x} \cdot \mathbf{n} = R$ در نتیجه، رابطه فوق به صورت زیر درمی آید:

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} &= \frac{1}{4\pi r^3} \left[\frac{a^2}{R^3} \mathbf{y}' \cdot \mathbf{x} - \frac{a^2}{R} - \frac{\mathbf{y} \cdot \mathbf{x}}{R} + R \right] \\ &= \frac{1}{4\pi r^3 R} \left[\frac{a^2}{R^2} \|\mathbf{y}'\| R \cos \gamma - \|\mathbf{y}\| R \cos \gamma + R^2 - a^2 \right] \\ &= \frac{R^2 - a^2}{4\pi R} \frac{1}{r^3} \quad \text{since} \end{aligned}$$

زیرا $\|\mathbf{y}'\| = R^2/a$ ،

با انتگرالگیری روی سطح کره،

$$\begin{aligned} u(\mathbf{y}) &= \int_S f \frac{\partial G}{\partial \mathbf{n}} dS = \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \left(f(\theta, \phi) \frac{R^2 - a^2}{4\pi R} \frac{1}{r^3} R^2 \sin \phi \right) d\phi d\theta \\ &= \frac{R(R^2 - a^2)}{4\pi} \int_0^{2\pi} \int_0^\pi \frac{f(\theta, \phi) \sin \phi d\phi d\theta}{(R^2 + a^2 - 2aR \cos \gamma)^{3/2}} \end{aligned}$$

$$\dot{u} = d/ds\{u(x(s), t(s))\} = u_x \dot{x} + u_t \dot{t} = u_x f'(u) + u_t = 0 \quad (\bar{T}) \quad .9$$

(ب) اگر منحنی مشخص $u(x, t) = c$ (بنا بر قسمت (\bar{T})) را به طور ضمنی به صورت تابعی از x تعریف کند، داریم $u_x + u_t(dt/dx) = 0$ اما نیز $u_t + f(u)_x = 0$ یعنی، $u_t + f'(u)u_x = 0$ این دو معادله باهم نتیجه می دهند که $1/f'(u) = 1/f'(c)$ $dt/dx = 1/f'(u)$ در نتیجه، منحنی خط مستقیمی به شیب $1/f'(c)$ می باشد.

(پ) هرگاه $x_1 < x_2$ ، $u_0(x_1) > u_0(x_2) > 0$ ، و $f'(u_0(x_2)) > 0$ ، آنگاه $f'' > 0$ زیرا $f'(u_0(x_1)) > f'(u_0(x_2)) > 0$ منحنی مشخص مار بر $(x_1, 0)$ به شیب $1/f'(u_0(x_1))$ است که از $1/f'(u_0(x_2))$ (که شیب منحنی مشخص مار بر $(x_2, 0)$ است) کمتر می باشد. در نتیجه، این خطوط باید از $P = (\bar{x}, \bar{T})$ که در آن $\bar{x} > x_2$ و $\bar{T} > 0$ بگذرند. چون این خطوط مار بر P مقادیر مختلفی در آن به دست می دهند، جواب باید در این نقطه ناپیوسته باشد.

$$\bar{T} = (x_2 - x_1)/(f'(u_0(x_1)) - f'(u_0(x_2))) \quad (\bar{T})$$

(آ) چون "مستطیل" D با محور x تماس نداشته و بر ∂D ، و خارج D ، $\phi = 0$ ،

رابطه (۲۵) به صورت زیر درمی آید:

$$(یک) \quad \iint (u\phi_t + f(u)\phi_x) = 0$$

چون $(u\phi)_t + (f(u)\phi)_x = (u_t + f(u)_x)\phi + (u\phi_t + f(u)\phi_x)$ داریم

$$\iint_{D_i} (u\phi_t + f(u)\phi_x) = \iint_{D_i} ((u\phi)_t + (f(u)\phi)_x) - \iint_{D_i} (u_t + f(u)_x)\phi$$

اما u درون D_i ، C^1 است؛ در نتیجه، تمرین ۱۰ (ب) می گوید که در آنجا $u_t + f(u)_x = 0$ ، لذا

$$(دو) \quad \iint_{D_i} (u\phi_t + f(u)\phi_x) = \iint_{D_i} ((u\phi)_t + (f(u)\phi)_x)$$

(ب) بنابر قضیه گرین،

$$\iint_{D_i} ((f(u)\phi)_x - (-u\phi)_t) dx dt = \int_{\partial D_i} ((-u\phi) dx + f(u)\phi dt)$$

در نتیجه، (دو) به صورت زیر درمی آید:

$$\iint (u\phi_t + f(u)\phi_x) = \int_{\partial D_i} \phi \{-u dx + f(u) dt\}$$

با افزودن روابط بالا به ازای $i = 1, 2$ به هم و استفاده از (یک)، داریم

$$0 = \int_{\partial D_1} \phi \{-u dx + f(u) dt\} + \int_{\partial D_2} \phi \{-u dx + f(u) dt\}$$

اجتماع این دو مرز یکبار ∂D و آن قسمت از Γ که در D است را یکبار در هر جهت می پیماید، یکبار با مقادیر u_1 و یکبار با مقادیر u_2 . چون خارج D و روی ∂D داریم

$$\phi = 0 \quad ، \quad \text{این به صورت } 0 = \int_{\Gamma} \phi \{[-u] dx + [f(u)] dt\} \text{ درخواهد آمد.}$$

(پ) چون خارج D داریم $\phi = 0$ ، انتگرال اول همان نتیجه دوم قسمت (ب) است.

انتگرال دوم از پارامتری کردن Γ با $\alpha(t) = (x(t), t)$ ، $t_1 \leq t \leq t_2$ به دست می آید.

(ت) هرگاه در P ، $[-u]s + [f(u)] = c > 0$ ، آنگاه می توان قرص کوچکی چون B_ϵ به

مرکز P و جزء D (توصیف شده در بالا) را طوری اختیار کرد که بر قسمتی از Γ که

داخل B_ϵ است $[-u](dx/dt) + [f(u)] > c/2$. حال قرصی کمی کوچکتر مانند $B_\delta \subset B_\epsilon$

به مرکز P اختیار کرده و ϕ را طوری می گیریم که بر B_δ ، $\phi \equiv 1$ ، بر طوق $B_\epsilon \setminus B_\delta$ ،

$0 \leq \phi \leq 1$ ، و خارج B_ϵ ، $\phi \equiv 0$. هرگاه $\alpha(t_0) = P$ ، آنگاه t_3 و t_4 ی با خاصیت

$t_1 < t_3 < t_0 < t_4 < t_2$ وجود دارند و به ازای $t_3 < t < t_4$ ، $\alpha(t) \in B_\delta$ ، اما ، در این صورت ،

$$\int_{t_1}^{t_2} \phi \left\{ [-u] \frac{dx}{dt} + [f(u)] \right\} dt > \frac{c}{2} (t_4 - t_3) > 0$$

که با قسمت (پ) تناقض دارد . اگر $c < 0$ ، استدلالی مشابه (با عکس کردن علامت) کارا خواهد بود .

۱۳ . با فرض $P = g(u)\phi$ و $Q = -f(u)\phi$ ، اعمال قضیه گرین بر مستطیل R ، و استفاده از تابع ϕ در تمرین ۱۰ ، نشان دهید هرگاه u جوابی از $g(u)_t + f(u)_x = 0$ باشد ، آنگاه

$$\iint_{t \geq 0} (g(u)\phi_t + f(u)\phi_x) dx dt + \int_{t=0} g(u_0(x))\phi(x, 0) dx = 0$$

این مشابه مناسبی از (۲۵) است که جوابهای ضعیف $g(u)_t + f(u)_x = 0$ را تعریف می کند . لذا ، u ای می خواهیم که

$$\iint_{t \geq 0} (u\phi_t + \frac{1}{2}u^2\phi_x) dx dt + \int_{t=0} u_0(x)\phi(x, 0) dx = 0 \quad (\text{یک - ضعیف})$$

به ازای هر ϕ ی مجاز برقرار باشد ولی

$$\iint_{t \geq 0} (\frac{1}{2}u^2\phi_t + \frac{1}{3}u^3\phi_x) dx dt + \int_{t=0} \frac{1}{3}u_0^3(x)\phi(x, 0) dx = 0 \quad (\text{دو - ضعیف})$$

به ازای ϕ ای مجاز برقرار نباشد . روش تمرین ۱۱ شرط جهشی $s[g(u)] = [f(u)]$ را تولید می کند . برای (۱) ، این عبارت است از $(\frac{1}{2}u_2^2 - \frac{1}{2}u_1^2)$ یا

$$s = \frac{1}{2}(u_2 + u_1) \quad (\text{یک - جهش})$$

برای (ب) ، این مساوی است با $(\frac{1}{3}u_2^3 - \frac{1}{3}u_1^3)$ یا

$$s = \frac{2}{3} \frac{u_2^2 + u_1u_2 + u_1^2}{u_2 + u_1} \quad (\text{دو - جهش})$$

اگر برای $u_0(x)$ تابع (هوی ساید) تعریف شده با $u_0(x) = 0$ به ازای $x < 0$ و $u_0(x) = 1$ به ازای $x > 0$ را تعریف کنیم ، باید تابع $u(x, t) = 0$ وقتی $t > 2x$ و $u(x, t) = 1$ وقتی $t \leq 2x$ را در نظر بگیریم . لذا ، $u_1 = 1, u_2 = 0$ ، و منحنی ناپیوسته Γ با $t = 2x$ داده می شود . لذا ، شرط جهشی (یک - جهش) (یعنی ، $dx/dt = \frac{1}{2}(u_1 + u_2)$) برقرار می باشد . به ازای ϕ ی خاص ، اعدادی چون T و a وجود دارند به طوری که به

ازای $\phi(x, t) = 0$ ، $t \geq T$ و $x \geq a$ اگر Ω راناحیه^۰ $0 \leq x \leq a$ و $0 \leq t \leq T$ بگیریم، شرط (یک - ضعیف) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} 0 &= \iint_{\Omega} (\phi_t + \frac{1}{2}\phi_x) dx dt + \int_0^a \phi(x, 0) dx \\ &= \int_{t=0}^T \left(-\phi dx + \frac{\phi}{2} dt \right) + \int_0^a \phi(x, 0) dx \\ &= -\int_0^a \phi(x, 0) dx + \int_0^{T/2} \{ -\phi(x, 2x)(-dx) + \frac{1}{2}\phi(x, 2x)(-2 dx) \} \\ &\quad + \int_0^a \phi(x, 0) dx \\ &= 0 \end{aligned}$$

لذا (یک - ضعیف)، به‌ازای هر ϕ برقرار بوده، و u یک جواب ضعیف (\bar{A}) می‌باشد. اما (دو - ضعیف) نمی‌تواند به‌ازای هر ϕ برقرار باشد، زیرا شرط جهش (دو - جهش) برقرار نیست. در واقع، اگر (دو - ضعیف) را در 2 ضرب کرده و به جای u قرار دهیم، (دو - ضعیف) به صورت زیر درمی‌آید:

$$0 = \iint_{\Omega} (\phi_t + \frac{2}{3}\phi_x) dx dt + \int_0^a \phi(x, 0) dx$$

عامل $1/2$ به $2/3$ تغییر یافته است، و رابطه^۰ فوق به صورت زیر درمی‌آید:

$$0 = -\frac{1}{3} \int_0^{\pi/2} \phi(x, 2x) dx$$

که مسلماً هر ϕ ی مجاز در آن صدق نمی‌کند.

بخش ۶.۷

۱. (آ) $(2xy^2 - yx^3) dx dy$ (ب) $(x^2 + y^2) dx dy$
- (پ) $(x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$ (ت) $(xy + x^2) dx dy dz$
- (ث) $dx dy dz$
۳. (آ) $2xy dx + (x^2 + 3y^2) dy$ (ب) $-(x + y^2 \sin x) dx dy$
- (پ) $-(2x + y) dx dy$ (ت) $dx dy dz$
- (ث) $2x dx dy dz$ (ج) $2y dy dz - 2x dz dx$

$$2xy \, dx \, dy \, dz \quad (\text{ح}) \quad - \frac{4xy}{(x^2 + y^2)^2} \, dx \, dy \quad (\text{چ})$$

$$\begin{aligned} \text{Form}_2(\alpha \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2) &= \text{Form}_2((\alpha A_1 + A_2), \alpha B_1 + B_2, \alpha C_1 + C_2) \quad (\text{ط}) \quad \cdot 5 \\ &= (\alpha A_1 + A_2) \, dy \, dz + (\alpha B_1 + B_2) \, dz \, dx \\ &\quad + (\alpha C_1 + C_2) \, dx \, dy \\ &= \alpha(A_1 \, dy \, dz + B_1 \, dz \, dx + C_1 \, dx \, dy) \\ &\quad + (A_2 \, dy \, dz + B_2 \, dz \, dx + C_2 \, dx \, dy) \\ &= \alpha \text{Form}_2(\mathbf{V}_1) + \text{Form}_2(\mathbf{V}_2) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} d\omega &= \left[\frac{\partial A}{\partial x} \, dx + \frac{\partial A}{\partial y} \, dy + \frac{\partial A}{\partial z} \, dz \right] \wedge dx - A(dx)^2 \quad (\text{ق}) \\ &\quad + \left[\frac{\partial B}{\partial x} \, dx + \frac{\partial B}{\partial y} \, dy + \frac{\partial B}{\partial z} \, dz \right] \wedge dy - B(dy)^2 \\ &\quad + \left[\frac{\partial C}{\partial x} \, dx + \frac{\partial C}{\partial y} \, dy + \frac{\partial C}{\partial z} \, dz \right] \wedge dz - C(dz)^2 \end{aligned}$$

ولی $(dx)^2 = (dy)^2 = (dz)^2 = dx \wedge dx = dy \wedge dy = dz \wedge dz = 0$, $dy \wedge dx = -dx \wedge dy$, $dz \wedge dy = -dy \wedge dz$, and $dx \wedge dz = -dz \wedge dx$.

در نتیجه،

$$\begin{aligned} d\omega &= \left[\frac{\partial C}{\partial y} - \frac{\partial B}{\partial z} \right] dy \, dz + \left[\frac{\partial A}{\partial z} - \frac{\partial C}{\partial x} \right] dz \, dx + \left[\frac{\partial B}{\partial x} - \frac{\partial A}{\partial y} \right] dx \, dy \\ &= \text{Form}_2(\text{curl } \mathbf{V}) \end{aligned}$$

۷. هر چند گونای 1 بعدی جهتدار یک منحنی است. مرز آن یک جفت نقطه است که می‌توان آنها را چند گونای 0 بعدی تلقی کرد. در نتیجه، ω یک 0 فرم یا تابع است، و اگر منحنی M از a تا b کشیده شده باشد، $\int_{\partial M} \omega = \omega(b) - \omega(a)$ ، به علاوه، $d\omega$ به شکل $(\partial\omega/\partial x) \, dx + (\partial\omega/\partial y) \, dy$ می‌باشد. لذا، $\int_M d\omega$ انتگرال خط $\int_M (\partial\omega/\partial x) \, dx + (\partial\omega/\partial y) \, dy = \int_M \nabla\omega \cdot ds$ خواهد بود. بنابراین، قضیه ۳ از بخش ۲.۶ به دست می‌آید: $\int_M \nabla\omega \cdot ds = \omega(b) - \omega(a)$.

۹. قرار دهید $d\omega = F_1 \, dx \, dy + F_2 \, dy \, dz + F_3 \, dz \, dx$. انتگرال به صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_{\partial T} \omega = \int_T d\omega = \int_T \left[\frac{\partial F_1}{\partial z} + \frac{\partial F_2}{\partial x} + \frac{\partial F_3}{\partial y} \right] dx \, dy \, dz$$

۱۱) $\omega = x \, dy \, dz + y \, dz \, dx + z \, dx \, dy$ را در نظر بگیرید. $d\omega$ را حساب کنید؛ در نتیجه،

$$\frac{1}{3} \int_{\mathcal{R}} \omega = \frac{1}{3} \int_{\mathcal{R}} d\omega = \int_{\mathcal{R}} dx \, dy \, dz = v(\mathcal{R})$$

تمرینات دوره‌ای برای فصل ۷

۱) $\pi a^2 4$

۳) $\nabla \phi = \frac{\mathbf{m}}{r^3} - \frac{3\mathbf{m} \cdot \mathbf{r}}{r^5} \mathbf{r}$ (آ)

(ب) $\nabla^2 \phi = 0$

(پ) $\nabla \cdot \mathbf{F} = 0$

(ت) $\nabla \times \mathbf{F} = \frac{2}{r^3} \mathbf{m} - \frac{3}{r^5} \mathbf{r} \times (\mathbf{m} \times \mathbf{r})$

۵) $\nabla \times (\mathbf{F} - \mathbf{G}) = 0$ ؛ در نتیجه، $\mathbf{F} - \mathbf{G}$ یک میدان گرادیان است.

۷) $2\pi a^2$ (آ)

۹) 0

$f = x^4/4 - x^2y^3$

۱۱) (آ) تحقیق کنید که $\nabla \times \mathbf{F} = 0$

(ب) $f = 3x^2y \cos z$ ؛ (پ) 0

$-\frac{1}{4}$

۱۵) $\frac{23}{6}$

۱۷) خیر؛ $\nabla \times (\mathbf{a} \times \mathbf{r}) = 2\mathbf{a}$

۱۹) $\nabla f = 3ye^{z^2}\mathbf{i} + 3xe^{z^2}\mathbf{j} + 6xyze^{z^2}\mathbf{k}$ (آ)

(ب) 0

(پ) هر دو طرف 0 است

۲۱) $8\pi/3$

۲۳) (آ) نادرست (ب) درست (پ) درست

(ت) درست (ت) درست (ت) نادرست

(چ) نادرست (ح) درست درست

(د) نادرست (ذ) نادرست

۲۵) 21

۲۷) (آ) \mathbf{G} یک میدان بقاست؛ \mathbf{F} چنین نیست.

- (ب) اگر $\phi = (x^4/4) + (y^4/4) - \frac{3}{2}x^2y^2 + \frac{1}{2}z^2 + C$ ثابت است، $\mathbf{G} = \nabla\phi$ ،
 $\int_{\Sigma} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 0$; $\int_{\Sigma} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} = -1/2$; $\int_{\beta} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{s} = 1/3$; $\int_{\beta} \mathbf{G} \cdot d\mathbf{s} = -\frac{1}{2}$ (پ)

ضمیمهٔ آ

$$Df(x, y, z) = \begin{bmatrix} e^x & 0 & 0 \\ 0 & -\sin y & 0 \\ 0 & 0 & \cos z \end{bmatrix} \quad .1$$

Df قطری است اگر هر یک از توابع مؤلفه f_i فقط به x_i بستگی داشته باشد.

- (آ) فرض کنید $A = B = C = \mathbb{R}$ با $f(x) = 0$ و $g(x) = 0$ اگر $x \neq 0$ و $g(0) = 1$. ۳

در این صورت، $w = 0$ و به ازای هر x ، $g(f(x)) = 1$.

(ب) اگر $\varepsilon > 0$ ، فرض کنید δ_1 و δ_2 آنقدر کوچک باشند که $D_{\delta_1}(y_0) \subset B$ و هر وقت

$$0 < \|y - y_0\| < \delta_2 \text{ و } y \in B \text{، چون } \|g(y) - w\| < \varepsilon \text{،}$$

رامی توان برداشت. فرض کنید δ آنقدر کوچک باشد که هر وقت $x \in A$ و $0 < \|x - x_0\| < \delta$

در این صورت، به ازای چنین x ، $\|f(x) - y_0\| < \min(\delta_1, \delta_2)$.

نتیجه، $f(x) \in B$ و $g(f(x))$ تعریف شده‌اند. همچنین، $\|f(x) - y_0\| < \delta_2$ ؛ در نتیجه،

$$\|g(f(x)) - w\| < \varepsilon$$

- فرض کنید $x = (x_1, \dots, x_n)$ و اندیس k را ثابت بگیرید. در این صورت، . ۵

$$f(\mathbf{x}) = a_{kk}x_k^2 + \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n a_{ki}x_kx_i + \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^n a_{kj}x_kx_j + [\text{جملاتی که شامل } x_k \text{ نیستند}]$$

و لذا،

$$\frac{\partial f}{\partial x_k} = 2a_{kk}x_k + \sum_{i \neq k} a_{ki}x_i + \sum_{i \neq k} a_{ki}x_i = 2 \sum_{j=1}^n a_{kj}x_j = (2Ax)_k$$

چون مؤلفه‌های k ام به ازای هر k سازگارند، $\nabla f(\mathbf{x}) = 2Ax$.

- ماتریس T از مشتقات جزئی به‌وسیلهٔ تعویض $Dg(x_0)$ و $Dh(y_0)$ کنار هم تشکیل می‌شود؛ . ۷

در نتیجه،

$$T(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0) = Dg(x_0)(x - x_0) + Dh(y_0)(y - y_0).$$

حال، با استفاده از نامساوی مثلثی و بزرگتر بودن $\|(x - x_0, y - y_0)\|$ از $|x - x_0|$ و

$|y - y_0|$ ، نشان دهید که

$$\|f(x, y) - f(x_0, y_0) - T(x_0, y_0)(x - x_0, y - y_0)\| / \|(x - x_0, y - y_0)\|$$

به 0 می‌رود .

۹. از قضایای حدی و پیوستگی $g(x) = \sqrt{|x|}$ استفاده کنید . حکم اخیر را ثابت نمایید .

۱۱. برای پیوستگی در $(0, 0)$ ، از نامساوی

$$\left| \frac{xy}{(x^2 + y^2)^{1/2}} \right| \leq \frac{|xy|}{(x^2)^{1/2}} = |y|$$

یا $|xy| \leq (x^2 + y^2)/2$ استفاده کنید .

۱۳. 0 (ر.ک. تمرین ۱۱) .

۱۵. فرض کنید x نقش x_0 و h نقش x در تعریف را برعهده گیرند .

۱۷. بردار a جای x_0 در تعریف حد یا در قضیه ۲ را برعهده می‌گیرد . در هر حالت ،

حد فقط به مقادیر $f(x)$ به ازای x های نزدیک x_0 بستگی دارد ، نه به $x = x_0$. لذا ،

$f(x) = g(x)$ به ازای $x \neq a$ برای تساوی حدود کفایت می‌کند .

$$\lim_{x \rightarrow 0} (f_1 + f_2)(x)/|x| = \lim_{x \rightarrow 0} f_1(x)/|x| + \lim_{x \rightarrow 0} f_2(x)/|x| = 0 \quad (\bar{A}) \quad ۱۹$$

(ب) فرض کنید $\varepsilon > 0$. چون $f, o(x)$ است ، $\delta > 0$ ای وجود دارد به طوری که هر

وقت $0 < \|x\| < \delta$ ، $\|f(x)/|x|\| < \varepsilon/c$. پس $\|(gf)(x)/|x|\| \leq g(x) \|f(x)/|x|\| < \varepsilon$.

در نتیجه ، $\lim_{x \rightarrow 0} (gf)(x)/|x| = 0$.

(پ) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)/|x| = \lim_{x \rightarrow 0} |x| = 0$ در نتیجه ، $f(x), o(x)$ می‌باشد . اما $\lim_{x \rightarrow 0} g(x)/|x|$

وجود ندارد ، زیرا $g(x)/|x| = \pm 1$ (وقتی x مثبت یا منفی است) . بنابراین ، $g(x)$

$o(x)$ نمی‌باشد .

ضمیمهٔ ب

۱. اگر $a \neq b$ ، قرار دهید $\varepsilon = |a - b|/2$.

۳. فرض کنید $e = 2d - c$. در نتیجه ، $d = (c + e)/2$. "مضاعف" قائم R تعریف شده

با $Q = R \cup R_1$ را در نظر بگیرید ، که در آن $R_1 = [a, b] \times [d, e]$. هرگاه f بر قسمت

اضافی 0 گرفته و آن را توسعه دهیم ، آنگاه f ، طبق خاصیت جمعی ، روی Q انتگرالپذیر

است . افراز منتظم n م $[c, d] \times [(a + b)/2, b]$ بخشی از افراز منتظم $2n$ م Q است .

به ازای n بزرگ ، مجموعه‌های ریمان برای افراز $2n$ م نمی‌توانند در تغییر انتخاب

نقاط از زیر مستطیلهای از ε بیشتر شوند، بخصوص، اگر فقط نقاط در $[(a+b)/2, b] \times [c, d]$ را تغییر دهیم. این تغییرات نظیر تغییرات مجموعه‌های ریمان به ازای افزایش n م $[(a+b)/2, b] \times [c, d]$ اثبات قسمت (ب) به همین نحو خواهد بود.

۵. فرض کنید $R = [a, b] \times [c, d]$ و $B = [e, f] \times [g, h]$. چون مستطیلهای افزایش R فقط در امتداد اضلاع متقاطع اند، می‌توان مساحت آنها را به هم افزود، و b_n مساحت اجتماع تمام زیرمستطیلهای افزایش منتظم n م R است که B را قطع می‌کنند. چون B جزء این اجتماع است، $b_n \leq$ مساحت (B) . از آن سو، هرگاه (x, y) در این اجتماع باشد، آنگاه $(b-a)/n \leq x \leq f + (b-a)/n$ و $\varepsilon - (b-a)/n \leq y \leq h + (d-c)/n$ و $g - (d-c)/n \leq y \leq h + (d-c)/n$ این نتیجه می‌شود که $4(a-b)(d-c)/n^2 + 2[(b-a)(h-g) + (d-c)(f-e)]/n$ مساحت $(B) \leq b_n$. فرض $n \rightarrow \infty$ و تلفیق نامساویها حکم را به ثبوت می‌رساند.

۷. (آ) روش کار رفتن از یک نقطه به نقطه دیگر در $[a, b]$ با گامهای کوتاه و افزودن تغییرات به هم است. چون ϕ به طور پیوسته یکنواخت است، به ازای $\varepsilon > 0$ ، $\delta > 0$ ای وجود دارد به طوری که هر وقت $|x - y| < \delta$ ، $|\phi(x) - \phi(y)| \leq \varepsilon$. فرض کنید $x \in [a, b]$ و نقاط میانی $x = x_n < x_{n-1} < \dots < x_1 < x_0 = a$ را که $x_{i+1} - x_i < \delta$ معرفی نمایید. این کار با تعدادی پاره خط نه بیشتر از $1 + [(b-a)/\delta]$ صورت می‌گیرد. بنابر نامساوی مثلثی،

$$|\phi(x) - \phi(a)| \leq \sum_{i=1}^n |\phi(x_i) - \phi(x_{i-1})| \leq \left(\frac{b-a}{\delta} + 1\right) \varepsilon$$

لذا، به ازای هر x در $[a, b]$ ، $|\phi(x)| \leq |\phi(a)| + ((b-a)/\delta + 1)\varepsilon$.
 (ب) با استفاده از استدلالی شبیه قسمت (آ)، در مستطیل $[a, b] \times [c, d]$ با گامهای کوتاه حرکت کنید.

(پ) این قسمت پیچیده‌تر است، زیرا D ممکن است از تعدادی قطعات ناهمبند تشکیل شده باشد و نتوان در D گامهای کوتاهی برداشت. معیناً، طبق اصل کراننداری یکنواخت، به ازای ε ، δ ای هست به طوری که هر وقت x و y در D بوده و $\|x - y\| < \delta$ داریم $|f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$. چون D کراندار است، می‌توان "مکعب" بزرگی چون R به طول ضلع L طوری یافت که $D \subset R$. با تقسیم هر ضلع R به m قسمت، آن را به زیرمکعبهایی تقسیم کنید. قطر هر زیرمکعب به طول $\sqrt{n}L/m$ است. اگر $m > \sqrt{n}L/\delta$ ، فاصله هر دو نقطه در یک زیرمکعب از δ کمتر است، و m زیرمکعب وجود دارند.

۷۲۳ جواب تمرینات با شماره‌های فرد

اگر R_1, \dots, R_N آنهایی باشند که D را قطع می‌کنند، $x_i \in D \cap R_i$ را اختیار نمایید.
به ازای هر $x \in D$ داریم $|f(x)| < \varepsilon + \max(|f(x_1)|, \dots, |f(x_n)|)$.

ضمیمهٔ ث

چند علامت مهم

علائم به ترتیب آمدن در کتاب لیست شده‌اند

نام	علامت
اعداد حقیقی ۱	\mathbb{R}
اعداد گویا ۱	\mathbb{Q}
بازهٔ بستهٔ $\{x a \leq x \leq b\}$ ۲	$[a, b]$
بازهٔ باز $\{x a < x < b\}$ ۲	$]a, b[$
بازهٔ نیمباز $\{x a \leq x < b\}$ ۲	$[a, b[$
بازهٔ نیمباز $\{x a < x \leq b\}$ ۲	$]a, b]$
قدر مطلق a ۲	$ a $
فضای n بعدی ۸	\mathbb{R}^n
پایهٔ متعارف در \mathbb{R}^3 ۱۴	i, j, k
۲۴ حاصل ضرب داخلی دوبردار	$v \cdot w$
۲۵ نرم یک بردار	$\ \cdot\ $
۳۹ حاصل ضرب خارجی	$v \times w$
۵۲ مختصات استوانه‌ای	(r, θ, z)
۵۵ مختصات کروی	(ρ, θ, ϕ)
۱۰۲ قرص به شعاع r حول x_0	$D_r(x_0)$
۱۰۹ حد وقتی x به b نزدیک شود	$\lim_{x \rightarrow b}$

۱۲۷	حد چپ	limit $x \rightarrow b$
۱۳۰	مشتق جزئی	$\frac{\partial f}{\partial x}$
۱۳۸	مشتق f در x_0	$Df(x_0)$
۱۳۹	گرادیان f ، grad f	∇f
۱۴۲	به طور پیوسته مشتقپذیر	C^1
۱۷۳	دوبار به طور پیوسته مشتقپذیر	C^2
۱۹۰	یک مسیر	σ
۲۲۲	دل	∇
۲۲۲	کرل ، curl F	$\nabla \times F$
۲۲۷	دیورژانس ، div F	$\nabla \cdot F$
۲۲۹	لایپلاسن ،	∇^2
۲۶۱	هسی	$Hf(x_0)$
۳۱۸	انتگرال مضاعف	$\int_D f dA = \int_D f(x, y) dx dy$
۳۷۰	انتگرال سه گانه	$\int_W f dV = \int_W f(x, y, z) dx dy dz$
۳۹۰	ژاکوبی	$\frac{\partial(x, y)}{\partial(u, v)}$
۴۱۶	انتگرال مسیری	$\int_C f ds$
۴۲۵	انتگرال خط	$\int_C F \cdot ds$
۴۳۱	مسیر قرینه	σ_{op}
۴۷۱	انتگرال سطح! اسکالر	$\int_S f dS$
۴۸۱	انتگرال سطح برداری (شار)	$\int_S F \cdot dS = \int_S F \cdot n ds$

واژه نامه فارسی به انگلیسی

test	آزمون
second derivative	مشتق دوم
entropy	آنتروپی
identity	اتحاد
polarization	قطبی سازی
union	اجتماع
Sets	مجموعه ها
independence	استقلال
of path	از مسیر
scalar	اسکالر
product	حاصل ضرب
field	میدان
intersection	اشتراک
principle	اصل
uniform continuity	پیوستگی یکنواخت
axiom	اصل موضوع
completeness	تمامیت
partition	افراز

regular	منتظم
economics	اقتصاد
extremum	اکسترمم
constrained	مقید
relative	نسبی
strictly	"اکیدا"
subharmonic	تحت توافقی
n-tuples	n-تاییها
integral	انتگرال
line	خط
surface	سطح
triple	سه‌گانه
improper	مجازی
double	مضاعف
iterated	مکرر
curve	منحنی
curvature	انحناء
momentum	اندازهٔ حرکت
angular	زاویه‌ای
energy	انرژی
kinetic	جنبشی
interval	بازه
open	باز
closed	بسته
remainder	باقیمانده
hypocycloid	بتوجرخزاد
range	برد

vector	بردار
basis	پایه
column	ستونی
length	طول
principal normal	قائم اصلی
binormal	قائم دوم
normalized	نرمالی شده
eigen	ویژه
unit	یکه
tangent	مماس
conservation	بقا
of energy	انرژی
of mass	جرم
equation	معادله
price	بها
of capital	سرمایه
of labor	کار
best	بهترین
linear approximation	تقریب خطی
parametrically	به طور پارامتری
continuously	به طور پیوسته
differentiable	مشتق پذیر
uniformly	به طور یکنواخت
continuous	پیوسته
elliptic	بیضوی
ellipsoid	بیضی گون
anticommutativity	پاد تعویض پذیری

antiderivative	پادمشتق
parametrization	پارامتری سازی
orientation - reversing	جهت برگردان
orientation - preserving	جهت نگهدار
parametrized	پارامتری شده
by arc length	به وسیله طول قوس
surface	سطح
line segment	پاره خط
directed	جهتدار
potential	پتانسیل
electric	الکتریکی
energy	انرژی
gravitational	ثقلی
field	میدان
diffusivity	پخشیدیری
of wedge product	حاصل ضرب خارجی
span	پیمای
continuity	پیوستگی
uniform	یکنواخت
torsion	تاب
function	تابع
integrable	انتگرال پذیر
vector - valued	برداری
continuous	پیوسته
subharmonic	تحت توافق
production	تولید
real - valued	حقیقی

quadratic	درجهٔ دو
delta	دلتا
C^1	C^1
superharmonic	فوق توافق
bounded	کراندار
auxiliary	کمکی
homogeneous	همگن
one - to - one	یک به یک
functional	تابعی
analytic	تحلیلی
level	تراز
surface	سطح
set	مجموعهٔ
curve	منحنی
transpose	ترانهاده
composition	ترکیب
equality	تساوی
radiation	تشعشع
electromagnetic	الکترومغناطیسی
projection	تصویر
equilibrium	تعادل
commutative	تعویضپذیر
subtraction	تفریق
approximation	تقریب
polygonal	چندضلعی
good	مناسب
speed	تندی

angular	زاویه‌ای
unit	یکه
distribution	توزیع
gravitational	ثقلی
potential	پتانسیل
force	نیرو
mass	جرم
center of	مرکز
body	جسم
rotating	دوار
rigid	صلب
box	جعبه
pair	جفت
ordered	مرتب
addition	جمع
of matrices	ماتریسها
additivity	جمعپذیری
of integral	انتگرال
solution	جواب
weak	ضعیف
oriented	جهتدار
integral	انتگرال
surface	سطح
simple curve	منحنی ساده
jump	جهش

paddle wheel	چرخ پارو
cycloid	چرخزاد
density	چگالی
torus	چنبره
polynomial	چندجمله‌ای
manifold	چندگونا
quaternion	چهارتا
product	حاصل ضرب
inner	داخلی
cartesian	دکارتی
triple	سه‌گانه
dot	نقطه‌ای
cross product	حاصل ضرب خارجی
volume	حجم
limit	حد
left - hand	چپ
right - hand	راست
rotational motion	حرکت دورانی
fence	حصار
sink	حفره
outside	خارج
of a surface	یک سطح
linearity	خاصیت خطی
line	خط
integral	انتگرال
stream	جریان

real	حقیقی
flow	شارش
straight	مستقیم
linear	خطی
transformation	تبدیل
approximation	تقریب
mapping	نگاشت
inside	داخل
of surface	سطح
circle	دایره
unit	یکه
determinant	دترمینان
2- manifold	2- چندگونا
period	دورهء تناوب
2- form	2- فرم
differetial	دیفرانسیل
form	فرم
four -leafed rose	رز چهاربر
root	ریشه
angle	زاویه
Submatrix	زیرماتریس
saddle	زین
monkey	میمون
column	ستون (ی)

vector	بردار
of a matrix	یک ماتریس
velocity	سرعت
vector	بردار
fluid	سیال
average directed	متوسط جهتدار
investment	سرمایه
surface	سطح
closed	بسته
level	تراز
oriented	جهتدار
normal	قائم
bounded	کراندار
smooth	هموار
row	سطر
of a matrix	یک ماتریس
equipotential surfaces	سطوح همپتانسیل
3- manifold	3- چند گونا
3- form	3- فرم
triple	سه تایی
Ordered	مرتب
paraboloid	سه می گون
hyperbolic	هذلولوی
flux	شار
magnetic	مغناطیسی
flow	شارش

heat	گرما
of vector field	میدان برداری
acceleration	شتاب
condition	شرط
associativity	شرکتپذیری
of wedge product	حاصل ضرب خارجی
of matrix multiplication	ضرب ماتریسی
slope	شیب
plane	صفحه
equation	معادله
tangent	مماس
curve	منحنی
o - form	o - فرم
conductivity	ضریب هدایت
torque	طوق
length	طول
of vector	بردار
arc	قوس
of path	مسیر
of curve	منحنی
of graph	نمودار
integer	عدد صحیح
number	عدد
irrational	گنگ

rational	گویا
element	عنصر
zero	صفر
irrotational	غیر دورانی
incompressible	غیر قابل تراکم
free	فارغ
divergence	از واگرایی
distance	فاصله
between two lines	بین دو خط
between two planes	بین دو صفحه
point to line	نقطه تا خط
point to plane	نقطه تا صفحه
form	فرم
differential	دیفرانسیل
pressure	فشار
n - space	فضای n بعدی
euclidean	اقلیدسی
normal	قائم
to surface	به سطح
to plane	به صفحه
component	مؤلفه
law	قانون
of conservation	بقا
of energy	انرژی
value	قدر

absolute	مطلق
disc	قرص
open	باز
punctured	سوراخ شده
piecewise	قطعه قطعه
continuous	پیوسته
smooth surface	سطح هموار
C^1 path	مسیر C^1 ...
domain	قلمرو
arc	قوس
parabolic	سهوی
shear	قیچی
constraint	قید
work	کار
labor	کار
curl	کرل
sphere	کره
least	کمترین
squares	مربعات
gradient	گرادیان
vector field	میدان برداری
circulation	گردش
ball	گوی
unit	یکه
lemniscate	لمنیسکات

tube	لوله
matrix	ماتریس
antisymmetric	پادمتقارن
rotation	دوران
symmetric	متقارن
invertible	معکوسپذیر
helix	مارپیچ
right - circular	مستدیر راست
maximum	ماکزیمم
strict	اکید
local	موضعی
relative	نسبی
eventually	"مالا"
origin	مبداء
discriminant	مبین
orthogonal	متعامد
orthonormal	متعامد بیکه
parallelogram	متوازی الاضلاع
parallelepiped	متوازی السطوح
positive	مثبت
orientation	جهت
definite	معین
sum	مجموع
of n - tuples	n - تاییها
of vectors	بردارها
telescoping	توی هم رو
set	مجموعه

باز

تهی

کراندار

محور

نیمه اطول

نیمه اقصر

محیط

یک دایره

مختصات

استوانه‌ای

دکارتی

قطبی

کروی

مخروط

مرز (ی)

نقطهء

مرکز

جرم

مساحت

سطح

مسیر

اننگرال

قرینه

مشتق‌پذیر

مشتق (ات)

جزئی

ماده‌ای

مخلوط

iterated	مکرر
directional	جهتی
differentiable	مشتقپذیر
continuously	به طور پیوسته
function	تابع
path	مسیر
differentiation	مشتقگیری
implicit	ضمنی
equation	معادله
conservation	بقا
heat	گرما
wave	موج
inerse	معکوس
additive	جمععی
definite	معین
positive	مثبت
negative	منفی
value	مقدار
average	متوسط
eigen	ویژه
section	مقطع
cube	مکعب
unit	یکه
tangent	مماس
vector	بردار
line	خط
plane	صفحه
space	فضا

source	منبع
curve	منحنی
integral	انتگرال
closed	بسته
level	تراز
directed	جهتدار
simple	ساده
characteristic	مشخص
wave	موج
shock	ضربه
position	موضع
vector	بردار
local	موضعی
extremum	اکسترمم
maximum	ماکزیمم
minimum	مینیمم
component	مؤلفه
tangetial	ماسی
field	میدان
electric	الکتریکی
conservative	بقا
magnetic	مغناطیسی
rate	میزان
of fluid flow	شارش سیال
minimum	مینیمم
strict	اکید
local	موضعی
relative	نسبی

region	ناحیه
unbounded	بی کران
between two grahs	بین دو نمودار
elementary	مقدماتی
type 1	نوع ۱
inequality	نامساوی
triangle	مثلثی
norm	نرم
approach (to)	نزدیک شدن
point	نقطه
critical	بحرانی
degenerate	تباه شده
nondegenerate	تباه نشده
inflection	عطف
map	نگاشت
graph	نمودار
force	نیرو
centripetal	مرکزگرا
hemisphere	نیمکره
divergence	واگرایی
face	وجه
voltage	ولتاژ
hyperboloid	هذلولی گون
single -sheeted	یک پارچه
conformal	همدیس
neighborhood	همسایگی

deleted	سفته
isoquants	هم‌کوانتا
convergence	همگرایی
isotherms	همگرماها
homogeneity	همگنی
geometry	هندسه
uniqueness	یکتایی
l- form	۱- فرم
monotonicity	یکنوایی
of integral	انتگرال

واژه نامه انگلیسی به فارسی

absolute	مطلق
value	قدر
acceleration	شتاب
addition	جمع
additive	جمعی
inverse	معکوس
additivity	جمعپذیری
of integral	انتگرال
analytic	تحلیلی
angle	زاویه
between two vectors	بین دو بردار
angular	زاویهای
momentum	اندازهء حرکت
speed	تندی
anticommutativity	پادتعویضپذیری
antiderivative	پادمشتق
antisymmetric	پادمتقارن
matrix	ماتریس
approximation	تقریب

good	مناسب
arc	قوس
length	طول
function	تابع
area	مساحت
element	عنصر
associativity	شرکتپذیری
auxiliary	کمکی
function	تابع
average	متوسط
directed velocity	سرعت جهتدار
value	مقدار
axis	محور
semi -major	نیمه اطول
semi -minor	نیمه اقصر
basic	اساسی
1- form	۱- فرم
vector	بردار
best	بهترین
approximation	تقریب
linear	خطی
binormal	قائم دوم
vector	بردار
boundary	مرز (ی)
orientation of	جهت
point	نقطه
bounded	کراندار

function	تابع
set	مجموعه ^۶
surface	سطح
C^1	C^1
function	تابع
piecewise	قطعه قطعه
surface	سطح
cartesian	دکارتی
coordinates	مختصات
Product	حاصل ضرب
center	مرکز
of mass	جرم
centripetal	مرکزگرا
force	نیروی
chain	زنجیر (های)
rule	قاعده ^۶
change	تغییر
of variable	متغیر
of order	ترتیب
charge	بار
distribution	توزیع
characteristic	مشخص
curve	منحنی
circle	دایره
circulation	گردش
circumference	محیط
of a circle	یک دایره

closed	بسته
curve	منحنی
interval	بازه
surface	سطح
column	ستون (ی)
of a matrix	یک ماتریس
vector	بردار
commutative	تعویضپذیر
completeness	تمامیت
axiom	اصل موضوع
component	مؤلفه
function	تابع
tangential	مماسی
composition	ترکیب
computer	کامپیوتری (ی)
generated graphs	نمودارهای
conductivity	ضریب هدایت
conductor	هادی
cone	مخروط
conformal	همدیس
conservation	بقا
of energy	انرژی
equation	معادله
of mass	جرم
conservative	بقا
field	میدان
constant	ثابت
multiple	چندگانه

rule	قاعده
constrained	مقید
extremum	اکسترمم
constraint	قید
continuity	پیوستگی
uniform	یکنواخت
continuous	پیوسته
function	تابع
continuously	به طور پیوسته
differentiable	مشتق پذیر
contour	کنتور (ی)
map	نگاشت
convergence	همگرایی
of a sequence	یک دنباله
coordinates	مختصات
cartesian	دکارتی
cylindrical	استوانه‌ای
polar	قطبی
spherical	کروی
critical	بحرانی
point	نقطه
degenerate	تباه شده
nondegenerate	تباه نشده
cross product	حاصل ضرب خارجی
curl	کرل
curvature	انحناء
curve	منحنی
closed	بسته

directed	جهتدار
integral	انترگرال
level	تراز
oriented	جهتدار
simple	ساده
cycloid	چرخزاد
definite	معین
negative	منفی
positive	مثبت
degenerate	تباه شده
critical point	نقطه بحرانی
deleted	سفته
neighborhood	همسایگی
density	چگالی
derivative	مشتق
directional	جهتی
partial	جزئی
interated	مکرر
mixed	مخلوط
determinant	دترمینان
domain	قلمرو
divergence	واگرایی
free	فارغ از
distributivity	پخشپذیری
distance	فاصله
between two lines	بین دو خط
between two planes	بین دو صفحه

point to line	نقطه تا خط
point to plane	نقطه تا صفحه
discriminant	مبین
disc	قرص
directional	جهتی
derivative	مشتق
directed	جهتدار
simple curve	منحنی ساده
line segment	پاره خط
diffusivity	پخشپذیری
differentiation	مشتقگیری
differential	دیفرانسیل
form	فرم
differentiable	مشتقپذیر
continuously	به طور پیوسته
function	تابع
path	مسیر
diagonal	قطری
submatrix	زیرماتریس
dot product	حاصل ضرب نقطه‌ای
double	مضاعف
integral	انتگرال
economics	اقتصاد
eigenvalue	مقدار ویژه
eigenvector	بردار ویژه
electric	الکتریکی
field	میدان

potential	پتانسیل
electromagnetic	اکترومغناطیسی
radiation	تشعشع
elementary	مقدماتی
region	ناحیه
ellipsoid	بیضی گون
elliptic	بیضوی
empty	تهی
set	مجموعه
energy	انرژی
kinetic	جنبشی
entropy	آنتروپی
equality	تساوی
of vectors	بردارها
equation	معادله
conservation	بقا
of continuity	پیوستگی
heat	گرما
of line	خط
equilibrium	تعادل
equipotential	همپتانسیل
surface	سطح
euclidean	اقلیدسی
extremum	اکسترمم
local	محلی
relative	نسبی
strict	اکید

face	وجه
fence	حصار
first	اول
variation	تغییر
flow	شارش
line	خط
of vector	بردار
field	میدان
fluid	سیال
velocity	سرعت
flux	شار
force	نیرو
gravitational	ثقلی
form	فرم
differential	دیفرانسیل
function	تابع
bounded	کراندار
C^1	C^1
composite	ترکیب
continuous	پیوسته
graph	نمودار
homogeneous	همگن
integrable	انتگرالپذیر
of several variables	چندمتغیره
onto	برو
one - to - one	یک به یک
real valued	حقیقی
subharmonic	تحت توافق

superharmonic	فوق توافقی
vector valued	بررداری
geometry	هندسه
of map	نگاشت
good	مناسب
approximation	تقریب
gradient	گرادیان
graph	نمودار
gravitational	ثقلی
constant	ثابت
force	نیروی
potential	پتانسیل
energy	انرژی
heat	گرما
equation	معادله
flow	شارش
helicoid	مارپیچ
hemisphere	نیمکره
hessian	هسی
homogeneity	همگنی
of integral	انتگرال
of wedge product	حاصل ضرب خارجی
hyperbolic	هذلولوی
paraboloid	سهمی گور
hyperboloid	هذلولوی گور
single -sheeted	یکپارچه

of two sheets	دوپارچه
hypocycloid	بتوجرخزاد
of four cusps	چهاربازگشتی
identity	اتحاد
implicit	ضمنی
differentiation	مشتقگیری
improper	مجازی
integral	انتگرال
interated	مکرر
incompressible	تراکم ناپذیر
independence	استقلال
of path	از مسیر
inflection	عطف
point	نقطهء
inner	داخلی
product	حاصل ضرب
inhomogeneous	غیرهمگن
wave	موج
equation	معادلهء
inside	داخل
of surface	سطح
integer	عدد صحیح
integral	انتگرال
along a path	در امتداد یک مسیر
curve	منحنی
of a differential form	یک فرم دیفرانسیل
improper	مجازی

line	خط
oriented	جهتدار
integration	انتگرالگیری
by part	جزء به جزء
intersection	اشتراک
of sets	مجموعهها
interval	بازه
inverse	معکوس
invertible	معکوسپذیر
investment	سرمایه
irrational	گنگ
number	عدد
irrotational	غیردورانی
isoquant	هم کوانتا
isotherm	همگرما
iterated	مکرر
integral	انتگرال
partial	جزئی
derivatives	مشتقات
jacobian	ژاکوبی
determinant	دترمینان
jump	جهتی
kinetic	جنبشی
energy	انرژی
labor	کارگر

lateral	جانبی
surface	سطح
area	مساحت
law	قانون
conservation	بقا
energy	انرژی
least	کمترین
square	مربع
left hand	چپ
limit	حد
lemniscate	لمنیسکات
length	طول
of curve	منحنی
of graph	نمودار
of path	مسیر
of vector	بردار
level	تراز
curve	منحنی
set	مجموعه
surface	سطح
limit	حد
infinite	نامتناهی
left-hand	چپ
right-hand	راست
line	خط
equation	معادله
integral	انتگرال
linear	خطی

approximation	تقریب
mapping	نگاشت
transformation	تبدیل
linearly	خطی
local	موضعی
extremum	اکسترمم
maximum	ماکزیمم
minimum	مینیمم
magnetic	مغناطیسی
field	میدان
flux	شار
manifold	چندگونا
mapping	نگاشت
mass	جرم
center	مرکز
density	چگالی
material	ماده (ای)
derivative	مشتق
matrix	ماتریس
invertible	معکوسپذیر
multiplication	ضرب
rotation	دوران
symmetric	متقارن
maximum	ماکزیمم
local	موضعی
strict	اکید
mean	میانگین

value
 method
 minimum
 local
 strict
 mixed
 partial
 monkey
 saddle
 monotonicity
 of integral

 n - space
 n - tuple
 n - vector
 negative
 definite
 neighborhood
 deleted
 nondegenerate
 critical
 point
 norm
 normal
 component
 to plane
 to surface
 normalized

vector	بردار
1- form	۱- فرم
one - to - one function	یک به یک تابع
open disc	باز قرص
interval set	بازه مجموعه
opposite path	قربینه مسیر
ordered pair	مرتب جفت
triple	سه تایی
orientation - preserving parametrization	جهت نگهدار پارامتری سازی
reparametrization	پارامتری سازی مجدد
orientation - reversing parametrization	جهت برگردان پارامتری سازی
reparametrization	پارامتری سازی مجدد
oriented integral	جهتدار انتگرال
simple curve	منحنی ساده
surface	سطح
origin	مبداء
orthogonal	متعامد
orthonormal	متعامد بیکه

paddle wheel	چرخ پارو
parabolic	سه‌موی
arc	قوس
paraboloid	سه‌می‌گون
hyperbolic	هذلولوی
parallelepiped	متوازی‌السطوح
parallelogram	متوازی‌الاضلاع
area	مساحت
parametrically	به‌طور پارامتری
parametrization	پارامتری‌سازی
orientation - preserving	جهت‌نگهدار
orientation - reversing	جهت‌برگردان
parametrized	پارامتری شده
by arc length	به‌وسیله طول قوس
surface	سطح
path	مسیر
differentiable	مشتق‌پذیر
end - points	نقاط انتهایی
independent	مستقل
integral	انتگرال
opposite	قرینه
partial	جزئی
derivative(s)	مشتق (ات)
iterated	مکرر
mixed	مخلوط
partition	افراز
perfect	کامل
fluid	سیال

period	دوره ^۱ تناوب
piecewise	قطعه قطعه
C^1 path	مسیر C^1
continuous	پیوسته
Smooth	هموار
surface	سطح
plane	صفحه
curve	منحنی
equation	معادله ^۱
tangent	مماس
point	نقطه
polar	قطبی
coordinate	مختص
polarization	قطبی سازی
polygonal	چندضلعی
approximatio	تقریب
polynomial	چند جمله ای
position	موضع
of equilibriu	تعادل
vector	بردار
positive	مثبت
definite	معین
orientation	جهت
potential	پتانسیل
electric	الکتریکی
energy	انرژی
equation	معادله ^۱
gravitational	ثقلی

pressure	فشار
price	بها
of capital	سرمایه
of labor	کار
principal normal	قائم اصلی
vector	بردار
product	حاصل ضرب
cartesian	دکارتی
cross	خارجی
dot	نقطه‌ای
inner	داخلی
scalar	اسکالر
triple	سه تایی
projection	تصویر
punctured	سوراخ شده
disc	قرص
quadratic	درجه دو
function	تابع
quaternion	چهارتا
range	برد
rate	میزان
of expansion	انبساط
of fluid flow	شارش سیال
rational	گویا
number	عدد
real	حقیقی

line	خط
real - valued function	حقیقی تابع
region	ناحیه
elementary	مقدماتی
path connected	همیند مسیری
unbounded	بی کران
regular	منتظم
partition	افراز
relative	نسبی
extremum	اکسترمم
maximum	ماکزیمم
minimum	مینیمم
remainder	باقیمانده
reparametrization	پارامتری سازی مجدد
orientation - preserving	جهت نگهدار
orientation - reversing	جهت برگردان
right - hand	راست
limit	حد
right - circular helix	مستدیر راست مارپیچ
rigid	صلب
body	جسم
root	ریشه
of polynomial	چند جمله‌ای
rotating	دوار
body	جسم
rotational	دورانی

motion	حرکت
row	سطر
matrix	ماتریس
saddle	زین (ی)
monkey	میمون
point	نقطه
scalar	اسکالر
field	میدان
product	حاصل ضرب
section	مقطع
semi -major	نیمه طول
axis	محور
semi -minor	نیمه اقصر
axis	محور
shear	قیچی
shock	ضربه (ای)
wave	موج
simple	ساده
closed	بسته
curve	منحنی
single -sheeted	یکپارچه
hyperboloid	هذلولی گون
of revolution	دوار
sink	حفره
slope	شیب
of a plane	یک صفحه
smooth	هموار

surface	سطح
solid	جسم
of revolution	دوار
source	منبع
span	پیمما
speed	تندی
sphere	کره
spherical	کروی
Coordinate	مختص
stable	پایدار
point	نقطهء
of equilibrium	تعادل
standard	متعارف
straight	مستقیم
line	خط
streamline	خط جریان
strict	اکید
extremum	اکسترمم
strictly	"اکیدا"
subharmonic	تحت توافقی
strong	قوی
maximum	ماکزیمم
principal	اصل
subharmonic	تحت توافقی
function	تابع
subtraction	تفریق
of vectors	بردارها
sum	مجموع

rule	قاعدهء
superharmonic	فوق توافقی
function	تابع
surface	سطح
area	مساحت
integral	انتگرال
closed	بسته
level	تراز
normal	قائم
oriented	جهتدار
parametrized	پارامتری شده
smooth	هموار
Symmetric	متقارن
matrix	ماتریس
tangent	مماس
line	خط
plane	صفحه
space	فضا
vetor	بردار
tangential	مماسی
component	مولفهء
telescoping	توی هم رو
sum	مجموع
3- form	3- فرم
3- manifold	3- چندگونا
torque	طوق
torsion	تاب

torus	چنبره
transpose	ترانسهاده
triangle	مثلث (ی)
inequality	نامساوی
triple	سه‌گانه
integral	انتگرال
product	حاصل ضرب
tube	لوله
type 1 region	ناحیه نوع ۱
2- form	۲-فرم
2- manifold	۲-چندگونا
uniform	یکنواخت
continuity	پیوستگی
uniformly	به‌طور یکنواخت
continuous	پیوسته
union	اجتماع
of sets	مجموعه‌ها
uniqueness	یکتایی
of limit	حد
unit	یکه
ball	گوی
circle	دایره
cube	مکعب
speed	تندی
tangent	ماس
vector	بردار

vector (s)	بردار (ها)
addition	جمع
basis	پایه
column	ستون
orthogonal	متعامد
vector -valued	برداری
function	تابع
voltage	ولتاژ
volume	حجم
wave	موج
equation	معادله
weak	ضعیف
solution	جواب
work	کار
x - axis	محور x
x - component	مولفه x
xy - plane	صفحه xy
zero	صفر
element	عنصر
o-form	o-فرم