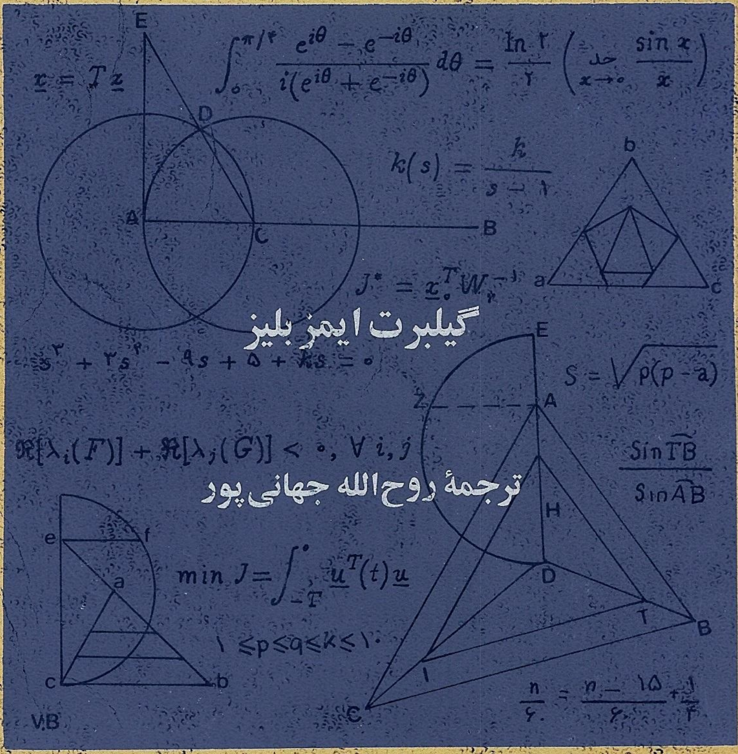
حساب تغییرات



گیلبرت ایمز بلیز

ترجمهٔ روح‌الله جهانی‌پور

حساب تغییرات بخشی از ریاضی است که از بررسی مسائلی از قبیل تعیین خم کوتاهترین زمان، رویهٔ دورانی با مساحت کمینه و کوتاهترین فاصله‌ها سرچشمه می‌گیرد. چون تمام این گونه مسائل را می‌توان به مسئلهٔ کمینه ساختن یک انتگرال تبدیل کرد، حساب تغییرات از همان آغاز با حسابان (حساب دیفرانسیل و انتگرال) درآمیخت و روشهای حسابان به طرز وسیعی در آن به کار می‌رفته است.

در این کتاب مؤلف سعی کرده است بدون استفاده از ابزارهای پیشرفته و تنها با دانسته فرض کردن اطلاعات اندکی از حسابان، ضمن بررسی روند تاریخی موضوع، حساب تغییرات را با معرفی مسائل یاد شده در بالا و نحوهٔ حل و بحث آنها توسط ریاضیدانان به خواننده معرفی کند. هر چند امروزه حساب تغییرات از دایرهٔ محدود بررسی چند مسئلهٔ خاص بسیار فراتر رفته است، ولی آشنایی با ایده‌هایی که ریاضیدانان حتی برای بررسی همان مسائل خاص اولیه به کار می‌برده‌اند، راه را برای درک نظریه پیشرفته حساب تغییرات باز می‌کند.

مجموعهٔ علوم ریاضی

گیلبرت ایمز بلیز، دیوید ر. کورتیس،
هربرت ا. اسلات

حساب تغییرات

ترجمهٔ روح‌الله جهانی‌پور

فهرست مطالب

توضیح ناشر

علوم ریاضی دریچه‌ای برای ورود به دنیای امروز و نگریستن به آن است. در واقع، با سه هدف مطرح می‌شود. اول به عنوان یکی از مبانی تمدن بشر، دیگر به عنوان یکی از آلاتِ تربیت فکر، و بالاخره اهمیت ریاضی درکاربرد آن. از این روست که امروز در جوامع بشری دانش ریاضی به عنوان یکی از ابزارهای اساسی توسعه مطرح است و عمومی کردن آن درکنار فعالیتهای پژوهشی پیشرفته جایگاهی ویژه یافته است.

«مجموعه علوم ریاضی» به قصد دست یافتن به اهدافی چون غنی‌ترکردن فرهنگ علوم ریاضی، معرفی شاخه‌های جدید، و تامین کتابهای مرجع و کمک آموزشی در زمینه‌های گوناگون علوم ریاضی سازمان یافته است.

هدفهای فوق با نشرکتابهای توصیفی ریاضی، متون کلاسیک، وکتابهای انگیزه‌ساز و آموزشی تحقق می‌یابد؛ کتابهایی که برای دانشجویان دوره‌های کارشناسی و بالاتر (بویژه در رشته‌های ریاضی، فیزیک و مهندسی) و همچنین دبیران، استادان، و دیگر علاقه‌مندان به ریاضیات مفید خواهد بود.

در اینجا لازم است از آقای دکتر یحیی تابش که دبیری مجموعه را بر عهده داشته‌اند و نیز ازگروه تخصصی مجموعه (آقایان دکتر ابوالقاسم لاله، دکتر سیاوش شهشهانی، و دکتر رؤیا درودی) و همچنین ازکلیهٔ همکاران بخشهای علمی‌ـفنی و تولید شرکت که در انتشار این مجموعه نهایت همکاری را مبذول داشته‌اند صمیمانه سپاسگزاری کنیم.

پیشگفتار مترجم

کتابی که ترجمهٔ آن را پیش رو دارید، نخستین شماره از سری تکنگاشتهای ریاضی کاروس است. تصور می‌کنم پیشگفتار مؤلف و مطالب فصل اول کتاب، آنقدر روشن و مفصل هستند که حتی خواننده‌ای را که نخستین بار است کتابی در حساب تغییرات مطالعه می‌کند، کاملاً با سرچشمه‌ها، نوع مسائل و مطالب مورد بحث، و نیز پیشرفتهای تاریخی این موضوع آشنا سازد. به همین دلیل در این پیشگفتار، دربارهٔ این موارد سخن نخواهیم گفت. با این حال تذکر چند مطلب ضروری به نظر می‌رسد: اولاً منابعی که نویسندهٔ کتاب از آنها سود جسته است عمدتاً مربوط به قرن نوزدهم و اوایل قرن بیستم هستند، بنابراین ممکن است سبک نوشتن این کتاب آن وضوحی را که کتابهای ریاضی کنونی دارند نداشته باشد و خواننده گهگاه در انبوه توضیحات نوشتاری مفصل، سررشتهٔ مطلب را از دست بدهد که طبعاً این ویژگی در ترجمه هم نفوذ می‌کند. بنابراین ضمن اینکه به خواننده توصیه می‌شود در خواندن کتاب دقت کافی مبذول دارد، مترجم خوشحال خواهد شد از نظرهای سودمند خوانندگان محترم دربارهٔ ترجمه بهره برد. ثانیاً در ترجمهٔ کتاب سعی شده است در انتخاب برابر نهادهٔ واژه‌های بیگانه از مصوبات انجمن ریاضی ایران که در کتاب واژه‌نامهٔ ریاضی و آمار چاپ مرکز نشر دانشگاهی گردآمده است پیروی شود و برای آن دسته از خوانندگان که فرصت دستیابی به این مرجع را ندارند، در پایان کتاب واژه‌نامهٔ کوتاهی مرکب از واژه‌های مهم موجود در کتاب آورده شده است.

روح‌الله جهانی‌پور

دانشگاه صنعتی شریف، شهریور ۱۳۷۲

پیشگفتار مؤلف

این کتاب نخستین جلد از یک رشته تکنگاشتهای ریاضی است که قرار است زیر نظر جامعهٔ ریاضی امریکا[1] انتشار یابد. انتشار این کتابها در نتیجهٔ بخشش بسیار سخاوتمندانهٔ خانم ماری هگلر کاروس[2]، عضو هیئت‌امنای شرکت سهامی ادوارد. س. هگلر امکانپذیر شده است. هدف این تکنگاشتها، در دسترس قراردادن و جذاب کردن بخشهای اساسی نظریه‌های متعدد ریاضی برای افرادی است که به ریاضی علاقه دارند، اما در نظریهٔ خاص مورد بحث تخصص ندارند. خانم کاروس این هدف را خیلی زیبا بیان می‌کند، می‌گوید: «هدف اشاعهٔ اندیشهٔ ریاضی و صوری به مثابه یاریگر علوم دقیقه و تفکر روشن، نه تنها در میان ریاضیدانان و معلمان ریاضی، بلکه در میان دیگر دانشمندان و کلاً عموم مردم است.»

نیل به این مقصود برای نویسندگانی هم که در شرح و بسط پیچیدگیهای موجود در قلمرو کاری خود ید طولایی دارند همیشه آسان نیست و با تغییر موضوع مورد بحث، خوانندگانی هم که عقلاً در صدد جلب توجه آنها هستند، تغییر می‌کنند. روشن است که نمی‌توان انتظار داشت این تلاش نخستین، تمام و کمال الگوی تکنگاشتهایی باشد که از این پس خواهند آمد. بی‌شک نویسندگان بعدی از تجربیات نویسندگان پیشین سود فراوانی خواهند برد اما تعدد موضوعات و تنوع خوانندگان

1) Mathematical Association of America 2) Mary Hegeler Carus

طرف توجه به همان میزان مستلزم تعدد روشهای عرضه‌اند. ممکن است برخی از این تکنگاشتها ماهیتی کاملاً توصیفی یا تاریخی داشته باشند، برخی دیگر به بررسی مفصل مسائل ریاضی خاص بدون پیش‌نیاز دقیق اختصاص داشته یا حتی بعضی از آنها هنوز نوشته نشده باشند، بلکه فقط برای چاپ در این سری در نظر گرفته شده‌اند. براحتی می‌توان پیش‌بینی کرد که این تکنگاشتها چه تأثیر سودمندی بر رشد و توسعهٔ نوشتارهای توصیفی ریاضی که درخور اهداف پسندیدهٔ این سری هستند، خواهد گذارد.

نظریه‌ای که تکنگاشت حاضر به آن اختصاص یافته است، حساب تغییرات، از آن نظریه‌هایی است که پیشرفت آن از آغاز با نظریهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال درآمیخت. نگاهی به فصلهای این کتاب نشان می‌دهد که بدون آگاهی از حسابان نیز بسادگی می‌توان دست کم تعبیرهای هندسی یا مکانیکی بسیاری از مسائل حساب تغییرات و نیز ماهیت جوابهای آنها را درک کرد. مثلاً، اگر دو نقطهٔ غیرواقع بر یک خط عمودی مفروض باشند، ممکن است بخواهیم خمی را بیابیم که آن دو نقطه را به هم وصل می‌کند و گلوله‌ای که با سرعت اولیهٔ مفروضی شروع به حرکت می‌کند درکوتاهترین زمان از یک نقطه به نقطهٔ دیگری بر روی آن فرو غلتد. جواب قطعه‌ای است از یک چرخزاد وارونه شده و چرخزاد هم خمی است که هنگام غلتیدن چرخی بر روی زمین به وسیلهٔ نقطه‌ای روی لبهٔ آن چرخ رسم می‌شود. یا اگر دو نقطه در بالای محور x مفروض باشند، ممکن است بخواهیم خمی را بیابیم که آن دو را به هم وصل می‌کند و در نتیجهٔ دوران حول محور xها رویهٔ دورانی با مساحت کمینه به وجود می‌آورد. از دو شکل ممکن، خم جواب، گاهی به یک شکل و گاهی به شکل دیگر ظاهر می‌شود. اولین شکل، خط شکسته‌ای است مرکب از دو خط عمود بر محور x از آن دو نقطه و بخشی از محور x بین این دو عمود که در این حالت رویهٔ کمینه متشکل از دو قرص مستدیر است. دومی کمانی است از یک زنجیره و شکل زنجیره هم شکلی است که یک زنجیر هنگام آویختن آن از دو میخ، به خود می‌گیرد. رویهٔ ایجاد شده در این حالت، سطح چرخ لنگر شکلی است که لایهٔ صابون معلق بین دو دایرهٔ سیمی با محور مشترک، پدید

می‌آورد.

با این حال، کشف و استنباط نتایجی که بیان شد، غیر از بیان سادهٔ آنها نیازمند آشنایی با اصول حسابان است و در صفحات آتی فرض می‌شود که خواننده با این اصول آشنایی دارد. این مطلب نباید آنهایی را که به واسطهٔ بررسی مقدمه‌های فصلهای گوناگون و قضایای ایرانیک موجود در سراسر کتاب به این موضوع علاقه‌مند شده‌اند دچار ترس و وحشت کند، زیرا از بسیاری از آنها می‌توان کاملاً چشم پوشید. فقط یک‌جا از نتایجی که معمولاً در درسهای عادی حسابان استنتاج نمی‌شوند استفاده خواهیم کرد و آن در فصل آخر است که به برخی از ویژگیهای معادلات دیفرانسیل احتیاج داریم که آنها هم در سه فصل قبل از آن بروشنی تشریح شده و در متن مفصل توضیح داده خواهد شد.

هنگام انتخاب مطلب برای ارائه در کتاب، شروع آن با بررسی مسائل خاص به جای نظریهٔ کلی، مطلوب به نظر می‌رسد. فصل اول این کتاب به زمینهٔ تاریخی رشد حساب تغییرات و ماهیت چند مسئلهٔ ساده‌تر می‌پردازد. سه فصل بعد به عرضهٔ مفصل نتایج شناخته شده برای سه مسئلهٔ خاص اختصاص دارند. این سه مسئله، مشخصه‌های اصلی نظریهٔ کلی فصل ۵ را که کتاب به آن خاتمه می‌یابد بسیار عالی روشن می‌سازند. نگارنده در این انتخاب تحت تأثیر ملاحظات متعددی بوده است. نخست آنکه نظریهٔ مسائل خاص که در اینجا ارائه شده است فقط محتاج نوعی تحلیل واقعی است که در آن علاوه بر تجربیات موجود که بعداً در درک مفاهیم نظریهٔ کلی کمک مؤثری می‌کنند، از شهود نیز کمک گرفته می‌شود. دوم آنکه نظریهٔ مربوط به این مسائل هرچند کاملاً شناخته شده است، در مکانهای متعدد در مقالات و رساله‌های مربوط به حساب تغییرات پراکنده‌اند و عرضهٔ جمع و جور شدهٔ آنها آموزنده و مفید است. بالاخره واقعیت این است که بخش اعظم نظریهٔ جدید حساب تغییرات در رساله‌های پیشرفتهٔ ریاضی است و جز برای متخصصان، بسادگی قابل دسترس نیست. بررسیهای مقدماتی این مسئله در رساله‌های وسیع‌تر و کلی‌تر دربارهٔ آنالیز و نیز به شکل جداگانه، معمولاً بر یافتن معادلات دیفرانسیل خمهای کمینه‌ساز مربوط به انواع گوناگونی از مسائل

و قدری هم بر جنبه‌های دیگر این نظریهٔ تأکید دارند. بدون شک عمدتاً به همین دلیل است که در ریاضیات کاربردی، از این معادلات دیفرانسیل و جوابهای آنها بیش از ویژگیهای دیگر کمانهای کمینه‌ساز استفاده شده است، هرچند معلوم شده است که در بسیاری از موارد آن ویژگیهای دیگر، ارتباط تنگاتنگی با شرایط جالب مربوط به پایداری در مسائل مکانیکی وابسته به معادلات دیفرانسیل دارند.

به این دلایل، نویسنده ترجیح می‌دهد نظریهٔ مسائل خاص را با توضیحات کامل ارائه کند، هرچند محدودیت‌مکانی باعث می‌شود که فقط تعداد کمی از آنها را بررسی کند. باید تصدیق کرد که در نوشته‌های حساب تغییرات، موارد خاصی که نظریهٔ کلی به طور کامل برای آن به کار رود زیاد نیستند. جمع و جور کردن بسیاری از مسائل در حد توانایی و تکمیل کردن بقیه، کار بسیار مفید و جالبی خواهد بود.

در انتهای فصل ۵، فهرستی از کتابهای حساب تغییرات همراه با چند مرجع مهم دیگر برای مباحث منظور شده در این متن وجود دارد. نکاتی که در متن با بالانویسهای پی‌درپی[۳] نشان داده شده‌اند پس از فهرست مراجع آمده‌اند.

گیلبرت ایمز بلیز
دانشگاه شیکاگو
اکتبر ۱۹۲۴

۳) این شماره‌ها در ترجمه، داخل علامتِ [ ] آورده شده‌اند تا با شماره‌های مربوط به پانوشت‌ها خلط نشوند.م.

فصل ۱

نمونه مسائلی از حساب تغییرات

۱. ابداع حسابان. هنگامی که دانشجوی ریاضی تصمیم می‌گیرد به کامیابیهای ریاضیدانان پیشین نظر افکند، با این واقعیت شگرف مواجه می‌شود که قرن هفدهم مهمترین عصر توسعهٔ آنالیز ریاضی نوین بوده است، زیرا ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال را به ریاضیدانان آن دوره مدیونیم. نظریهٔ حسابان، اگر می‌شد در آن زمان چنین نامی بر آن نهاد، آمیزه‌ای از روشهای نسبتاً خام و مهجور حل مسائل خاص بود. مثلاً در اوایل قرن هفدهم و در قلمرو آنچه امروزه حساب انتگرال خوانده می‌شود، کاوالیری[1]، ریاضیدان ایتالیایی (۱۵۹۸ ـ ۱۶۴۷)، یک فرایند مجموع‌یابی موسوم به روش تقسیم ناپذیرها ابداع کرد و به کمک آن توانست بسیاری از سطحها و حجمها را حساب کند. با این حال، توجیهی که برای درستی روش خود ارائه کرد، از نظر منطقی بقدری ناقص بود که حتی در آن عصر نسبتاً غیربحرانی هم مورد اعتراض و نارضایتی معاصران خویش واقع شد. اندکی بعد دو ریاضیدان فرانسوی به نامهای روبروال[2] (۱۶۰۲ ـ ۱۶۷۵) و پاسکال ۱۶۲۳ ـ ۱۶۶۲) و ریاضیدان انگلیسی، والیس[3] (۱۶۱۶ ـ ۱۷۰۳)، این روش را اصلاح کردند و آن را به روشهای مجموع‌یابی در حساب انتگرال کنونی بیشتر شبیه ساختند. در مورد حساب دیفرانسیل می‌بینیم که پیش از ربع آخر قرن هفدهم، دکارت

---

1) Covalieri 2) Roberval 3) Wallis 4) Fermat

(۱۵۹۶ ـ ۱۶۵۰)، روبروال، و فِرما[4] (۱۶۰۱ ـ ۱۶۶۵) در فرانسه و بَرو[5] (۱۶۳۰ ـ ۱۶۷۷) در انگلستان، همگی روشهایی برای رسم مماس بر خمها در اختیار داشتند، اما همهٔ آنها متوجه حل مسئلهٔ اساسی حساب دیفرانسیل، یعنی تعیین شیب خط مماس در نقطه‌ای از خم، به زبان امروزی بودند.

در این پردهٔ مهم، دو ریاضیدان با بصیرتی عالی بر روی صحنه ظاهر شدند. یکی نیوتن (۱۶۴۲ ـ ۱۷۲۷) در انگلستان و دیگری لایبنیتز[6] (۱۶۴۶ ـ ۱۷۱۶) در آلمان. این دو از دو دیدگاه تقریباً متفاوت، نظریه و کاربردهای حسابان را با گامهای عظیمی به پیش راندند. تصور اینکه این دو متفکر بزرگ، حسابان را بی‌پایه و اساس ابداع کردند اشتباه است، گرچه برای آسودگی خاطر خود اغلب این‌گونه فکر می‌کنیم. در واقع، نیوتن قرین آثار والیس و شاگرد برو، که او را پس از خود پروفسور ریاضی در کیمبریج قرار داد، بود. نیز می‌دانیم که لایبنیتز هم در همان عنفوان جوانی از پاریس و لندن دیدن کرد و در همانجا با بخش عمده‌ای از ریاضیات پیشرفتهٔ عصر خویش آشنا شد. با اینهمه، کسی منکر این واقعیت نیست که این دو نفر، تواناترین نظریه پردازان و محققان در جرگهٔ ریاضیدانان قرن هفدهم بودند و ما رشد تدریجی حسابان را به این دو مدیونیم.

با وجود تواناییهای بسیار نیوتن و لایبنیتز، اصول زیربنایی حسابان بدان‌گونه که آنان بیان داشتند، برای ما از دیدگاه جدید و نیز برای معاصران و اخلاف ایشان، قدری مبهم و آشفته می‌نماید. مشکل، فقدان وضوح در مفاهیم بی‌نهایت کوچک و حدود، که حسابان بر پایهٔ آنها بنا نهاده شده است، در آن دوره و نیز بیش از یک قرن پس از آن بود. مشکلی که تنها کوشی[7] (۱۷۸۹ـ۱۸۵۷) و به دنبال او وایرشتراس[8] (۱۸۱۵ـ۱۸۹۷)، ریمان[9] (۱۸۲۶ـ۱۸۶۶) و دیگران توانستند با بررسی سازمان یافتهٔ نظریهٔ حدود بر آن فائق آیند.

---

5) Barrow 6) Leibniz 7) cauchy 8) Weierstrass 9) Riemann

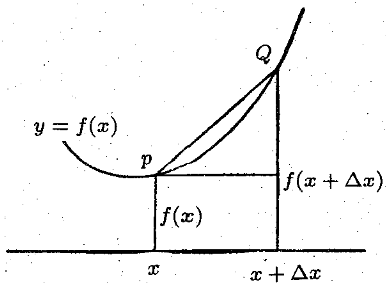
۲. بیشینه‌ها و کمینه‌ها. بین قدیمی‌ترین مسائلی که توجه متعلّمین حسابان را به خود جلب کرده مسائلی وجود دارد که در آنها به تعیین بیشینه یا کمینه نیاز است. در اوایل سال ۱۶۲۹، فرما روشی برای حل این‌گونه مسائل ابداع کرد که مبتنی بر اصولی بود که اساساً، البته نه به صورت نمادی، مشابه همان روشهای حساب دیفرانسیل کنونی است. روشهایی که نیوتن و لایبنیتز به کار می‌بردند به نوع استدلالی که اکنون در کاربردهای معمول استفاده می‌شود اندکی نزدیکتر بود. این روشها ضمناً مبین دو مفهوم بنیادی حساب دیفرانسیل آنها نیز بود. نیوتن در مقاله‌ای که در سال ۱۶۷۱ نوشت و اولین بار در سال ۱۷۳۶ منتشر گشت، ثابت کرد که اگر میزان تغییرات متغیری مثبت باشد، آن متغیر افزایشی و اگر میزان تغییرات آن منفی باشد کاهشی است، چنانکه در بیشینه یا کمینه این میزان باید صفر باشد. از آن سو، لایبنیتز در مقاله‌ای که در سال ۱۶۸۴ منتشر ساخت، دیدی هندسی به مسئله بخشید: در نقطهٔ بیشینه یا کمینهٔ یک خم، خط مماس باید افقی و شیب آن صفر باشد.

اکنون بخوبی می‌دانیم که از دیدگاه کاملاً تحلیلی، این دو روش یکسان هستند. مشتق تابع $f(x)$، یعنی

$$f'(x) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x+\Delta x) - f(x)}{\Delta x} \qquad (1)$$

هم میزان تغییر $f(x)$ نسبت به x را نشان می‌دهد و هم شیب خط مماس بر نقطه‌ای از نمودار $f(x)$. در تعبیر نخست، کسر طرف دوم معادلهٔ (۱)، میزان تغییر $f(x)$ نسبت به x در فاصلهٔ x تا $x+\Delta x$ است و حد آن وقتی این بازه کوچک می‌شود، میزان تغییر $f(x)$ با مقدار اولیهٔ x از این بازه خوانده می‌شود. در تعبیر دوم، کسر مذکور شیب قاطع PQ در شکل ۱ و حد آن، شیب مماس در نقطهٔ P است. از این رو چه با استدلال نیوتن و چه لایبنیتز، می‌دانیم که بیشینه‌ها و کمینه‌های $f(x)$ به ازای آن مقادیری از x به دست می‌آیند که $f'(x)$ صفر است.

درک این محک ساده که در بیشینه یا کمینهٔ $f(x)$ باید $f'(x)$ صفر شود، برای ریاضیدانان قرن هفدهم آنقدرها هم ساده نبود. ریاضیدان آن دوره به جای



شکل۱

بررسی نظریه‌های کلی، خود را در مطالعهٔ مسائل خاص غوطه‌ور کرده بود و هیچ روش حدگیری مستحکم یا نمادگذاری حسابانی که به او یاری رساند در اختیار نداشت. حتی برای او مشکل بود که یک گام فراتر نهد و اهمیت مشتق دوم را در تمایز بین مقدار بیشینه و کمینه درک کند. لایبنیتز اولین کسی بود که در مقالهٔ سال ۱۶۸۴ خود، این محک را ارائه کرد. امروزه می‌دانیم که $f'(a) = ۰$ و $f''(a) \geq ۰$، شرایط لازم برای کمینه بودن $f(a)$ هستند، حال آنکه شرایط $f'(a) = ۰$ و $f''(a) > ۰$ کافی‌اند تا از وجود یک کمینه اطمینان حاصل کنیم. در مورد بیشینه‌ها باید جهت علامتهای نابرابری را عوض کرد.

باید توجه کرد که شرایط لازم و شرایط کافی که اینک برای وجود کمینه بیان شد باهم یکسان نیستند. در فصل ۵ خواهیم دید که در حساب تغییرات نیز تفاوت بسیار فاحش و نامطلوبی از همین نوع اتفاق می‌افتد. مک‌لورن[۱۰] (۱۶۹۸ـ۱۷۴۶) ابهام حالت بینابینی را که در مسئلهٔ سادهٔ کمینه کردن تابع $f(x)$ پیش آمده بود، یعنی وقتی $f'(a)$ و $f''(a)$ هر دو صفرند، بر طرف کرد. او نشان داد که می‌توان مشتقات مراتب بالاتر را به کاربرد و محکهایی به دست آورد که هم لازمند و هم کافی. مسئلهٔ متناظر با مسئلهٔ بالا در حساب تغییرات، مشکلات عدیده‌ای به بار آورده و هنوز هم به‌طور کامل حل نشده است.

---
10) Maclaurin

۳. دو مسئله از حساب تغییرات با بیانی ساده. پس از درک این مطلب که ریاضیدانان اوایل قرن هفدهم با وجود مشکلاتی که گریبانگیر آنان بود، نخستین اصول بنیادی حسابان و کاربردهای آن را در مسائل مقدماتی بیشینه‌ها و کمینه‌ها نظیر آنچه اینک شرح داده شد پایه‌ریزی کردند، این نکته جلب توجه می‌کند که ایشان می‌بایست تصور یا حتی تلاش کرده باشند تا با همان ابزار تحلیلی نسبتاً خام خویش، مسائل بسیار مشکلتر بیشینه و کمینه در حساب تغییرات را نیز که تازه مطرح شده بودند، حل کنند. جالب است که حتی این مسائل مقدماتی به هیچ روی ساده‌ترین مسائل حساب تغییرات نبودند، اما ما کار خود را آسان کرده و با نگاهی به دو مثال دیگر ـ که تشریح آنها برای کسی که قبلاً در این خطه از ریاضیات به گشت و گذار نپرداخته آسانتر است ـ وارد مطلب می‌شویم.

ساده‌ترین مسئلهٔ حساب تغییرات، تعیین کوتاهترین کمان واصل بین دو نقطهٔ مفروض است. مختصات این دو نقطه را همواره با $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ نشان خواهیم داد و گاهی نیز برای سهولت، خود نقاط را با ۱ و ۲ نشان می‌دهیم. اگر معادلهٔ کمان را به صورت

$$y = y(x) \qquad (x_۱ \leq x \leq x_۲)$$

در نظر بگیریم، عبور این کمان از دو نقطهٔ مفروض معادل این است که

$$y(x_۱) = y_۱ \qquad , \qquad y(x_۲) = y_۲ \tag{۲}$$

و از حسابان می‌دانیم که طول این کمان از انتگرال زیر به دست می‌آید

$$I = \int_{x_۱}^{x_۲} \sqrt{۱ + y'^۲}dx,$$

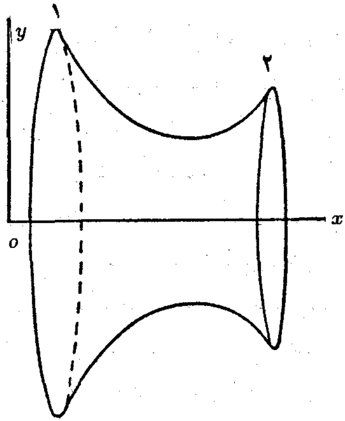
که در محاسبهٔ انتگرال به جای $y'(x)$، مشتق تابع $y(x)$ که معرف کمان است، y' را قرار داده‌ایم. بی‌نهایت خم $y = y(x)$ وجود دارد که نقاط ۱ و ۲ را به هم وصل می‌کنند. مسئلهٔ یافتن کوتاهترین خم از نظر تحلیلی، معادل آن است که در

ردهٔ همهٔ توابع $y(x)$ که در شرایط (۲) صدق می‌کنند، آن تابعی را بیابیم که I را کمینه سازد.

در مسئلهٔ کمینه‌سازی مقدماتی‌تر بند ۲ فوق، تابع $f(x)$ مفروض بود و در جست و جوی مقدار $x = a$ بودیم که به ازای آن مقدار نظیرش $f(a)$ کمینه باشد. در مسئلهٔ کوتاهترین فاصله، انتگرال I جایگزین $f(x)$ شده و به جای مقدار $x = a$ که مقدار کمینه، $f(a)$، را به دست می‌دهد، در پی یافتن کمانی چون $E_{۱۲}$ هستیم که نقاط ۱ و ۲ را به هم پیوند دهد و I را کمینه سازد. تشابه بین این دو مسئله زمانی روشن‌تر خواهد شد که به طول I به چشم تابعی چون $I(E_{۱۲})$ بنگریم که به ازای $E_{۱۲}$ مفروض، مقدار یکتا و معینی دارد، دقیقاً همان‌طور که در حالت اول $f(x)$ تابعی از متغیر x بود.

بار دیگر اصول حسابان را به کار گرفته، مسئلهٔ دیگری از حساب تغییرات را که جنبهٔ هندسی ـ مکانیکی دارد به صورت تحلیلی بیان می‌کنیم. اگر سیم مستدیری را در محلولی از صابون فرو برده سپس آن را خارج سازیم، قرص مستدیری از لایهٔ صابون محدود به دایره تشکیل می‌شود. اگر دایرهٔ کوچکتر دیگری را با این قرص تماس دهیم و سپس آن را دور کنیم، یک رویه از لایهٔ صابون تشکیل خواهد شد که دو دایره را به هم متصل می‌سازد. این رویه، رویهٔ دورانی خاصی است که در آن دایره‌ها موازی‌اند و مراکزشان بر محوری عمود بر صفحات آنها واقع است. این رویه در شکل ۲ نشان داده شده است. می‌توان به کمک اصول مکانیک ثابت کرد ـ هرچند به‌طور شهودی می‌توان خیلی ساده از روی ویژگیهای کشسانی لایهٔ صابون حدس زد ـ که رویهٔ دورانی که این‌گونه به وجود می‌آید کمترین سطح را داراست و از این رو مسئلهٔ تعیین شکل لایه، معادل است با تعیین رویهٔ دورانی کمینه‌ای که از دو دایره که وضعیت نسبی آنها مطابق شکل است می‌گذرد.

برای بیان تحلیلی این مسئله، فرض کنید محور مشترک دو دایره، محور xها و نقاط تقاطع دو دایره با صفحهٔ xy در طول محور، نقاط ۱ و ۲ باشد. اگر معادلهٔ خم نصف‌النهار این رویه در صفحهٔ xy، $y = y(x)$ باشد، فرمول مساحت رویه،



شکل۲

2π برابر مقدار انتگرال زیر است:

$$I = \int_{x_1}^{x_2} y\sqrt{1 + y'^2}dx\cdot$$

پس به‌طور تحلیلی، مسئلهٔ تعیین شکل رویهٔ صابون بین دو دایره همان مسئلهٔ یافتن کمانی در ردهٔ کمانهای $y = y(x)$ است که نقاط انتهایی آن ۱ و ۲ است و انتگرال اخیر را کمینه می‌سازد.

۴. مسئلهٔ نیوتن. پیش از این گفتیم که نخستین مسائل حساب تغییرات به هیچ وجه ساده‌ترین مسائل نبودند. نیوتن درکتاب پرینکیپیا[11] (۱۶۸۶)[۱]* ی خود، برای رویهٔ دورانی‌ای که هنگام حرکت در جهت محورش در یک محیط مقاوم با کمترین مقاومت رو به رو می‌شود، شرایط معینی را که آن رویه باید در آنها صدق کند بدون اثبات ارائه می‌دهد. حالت خاص مسئلهٔ یافتن رویه‌ای از این

11) Principia

*) شماره‌های مشخص شده با علامت [ ] مربوط به عناوین و مشخصات مراجعی است که اسامی آنها در آخر کتاب آمده است. این مشخصات در بخش نکته‌ها مورد بررسی قرار گرفته‌اند.

دست، مسئلهٔ مشهور تعیین شکل مسیر پرتابه‌ای است که به ازای سرعت اولیهٔ مشخص، طویلترین برد را دارد. در بالستیک عملی معلوم می‌شود که یکی از مشکلترین قسمتهای بررسی این مسئله آن است که قانون تأخیر را برای اجسامی که با سرعتهای بالا در هوا حرکت می‌کنند از راه آزمایش تعیین کنیم. نیوتن قانون مقاومت نسبتاً ساده‌ای را برای اجسامی که در محیطی مقاوم در حال حرکت هستند پذیرفت که با تجربهٔ ما دربارهٔ اجسام متحرک در هوا چندان سازگار نیست، اما بر مبنای همان قانون، او توانست شرط مشخص کنندهٔ خمهای نصف‌النهار رویهٔ دورانی‌ای را که با کمترین مقاومت رو به رو می‌شود بیابد. بلتسا[12] به کمک نامه‌ای که نیوتن احتمالاً در سال ۱۶۹۴ به دیوید گرگوری[13] نوشت، استدلالهایی را که نیوتن در دستیابی به این نتایج به کار برده است به طرز بسیار جالبی بازسازی می‌کند.[۱]

برای مقاصد این فصل مقدماتی کافی است بگوییم که اگر رویه با دوران کمانی به معادلهٔ $y = y(x)$ حول محور xها ایجاد شود، مقاومتی که هنگام حرکت در جهت محور x با آن رو به رو خواهد شد، جز یک عامل ثابت، برابر است با

$$I = \int_{x_۱}^{x_۲} \frac{yy'^۳}{۱+y'^۲}dx\cdot$$

بدین ترتیب، شکل تحلیلی مسئلهٔ نیوتن این است که در بین تمام کمانهای $y = y(x)$ که دو نقطهٔ مفروض ۱ و ۲ را به هم وصل می‌کنند، آن کمانی را بیابیم که این انتگرال را کمینه می‌سازد. عیناً به همان صورت می‌شود پرسید خم چگونه باشد تا مقاومت بیشینه گردد. اگر به جای قانون مقاومت نیوتن قانون دیگری قرار گیرد، روشهایی که اکنون برای حمله به مسئله می‌دانیم باز هم قابل استفاده خواهند بود. هرچند همان‌طور که تعدادی از نویسندگان نشان داده‌اند ممکن است نتایج متفاوت باشند.

۵. مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان. مسئلهٔ نیوتن که در سال ۱۶۸۶ در پرینکیپیا منتشر شد، بیش از یک دهه مورد بی‌اعتنایی قرار گرفت تا اینکه

12) Bolza 13) David Gregory

با ظهور مسئلهٔ دوم و مشهورتر حساب تغییرات، دلبستگی تازه‌ای ایجاد گشت و منجر به بررسی مجدد آن شد. این رخداد عجیبی نبود، زیرا توصیفی که نیوتن از نتایج خود ارائه کرد بسیار غیرصوری و مختصر بود. او هیچ اشاره‌ای به ردهٔ وسیعتر مسائل مشابه نکرد و هیچ روش حلی که بتوان برای چنین رده‌ای به کاربرد بیان نداشت. بنابراین برای کشف سرچشمه‌های تحقیق فعال در حساب تغییرات باید به محققان دیگر رجوع کنیم.

در دورهٔ پس از کشف و نشر روشهای حسابان نیوتن و لایبنیتز، دو تن از برجسته‌ترین و موفق‌ترین محققان آنالیز نوین، دو ریاضیدان سویسی به نامهای یاکوب برنویی[۱۴] (۱۶۵۴ـ۱۷۰۵)، پروفسور ریاضی در دانشگاه بال (بازل)[۱۵]، و برادرش یوهان[۱۶] (۱۶۶۷ـ۱۷۴۸) بودند. برادر کوچکتر شاگرد برادر بزرگتر بود و به خاطر تحقیقات ثمربخش و گوناگونش، بمراتب برجسته‌تر از همهٔ شاگردان یاکوب تا آن زمان بود. او تا سال ۱۶۹۰ که به عزم مسافرت و مطالعهٔ ریاضی در فرانسه، بال را ترک کرد، شاگرد یاکوب بود. در سال ۱۶۹۵، به فاصلهٔ کوتاهی از بازگشتنش به مقام استادی دانشگاه گرونینگن[۱۷] رسید و در سال ۱۷۰۵ در پی مرگ یاکوب برنویی، به بال مراجعت کرد تا بقیهٔ عمر خویش را به عنوان پروفسور ریاضی در شهر مادری خود بگذراند.

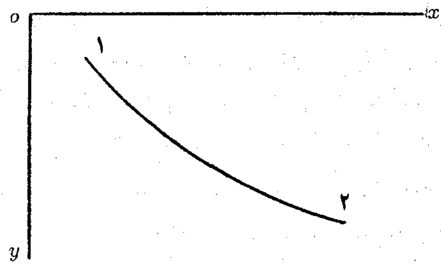
درست در سالهای پیش از ۱۶۹۵ رقابتی بین دو برادر درگرفت که علت آن بـدرستی معلوم نیست. این واقعه در آن زمان یک آبروریزی مضحک و از دیدگاه علمی توجیه ناپذیر بود، زیرا دو برادر با وجود طبعهای نسبتاً متفاوت، شایسته و درخور احترام فراوان بودند. در هر صورت اختلاف آنها هرچه بود، تحرک و تمایل غیرعادی‌ای به سرچشمه‌های حساب تغییرات بخشید. در ژوئن ۱۶۹۶، یوهان برنویی مسئلهٔ مشهور تعیین خم کوتاهترین زمان خود را مطرح کرد و مطابق رسمی که در آن زمان معمول بود،[۲] توجه عموم ریاضیدانان دنیا را برانگیخت. می‌دانیم که این مسئله باعث دلبستگی فراوانی شد و نیوتن، لایبنیتز، و هوپیتال[۱۸] (۱۶۶۱ـ۱۷۰۴)

---

14) James Bernoulli 15) Basle 16) John 17) Groningen
18) Hospital

و برادران برنویی جواب درست را یافتند.

مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان (زمان = $\chi\rho o\nu os$ و کوتاهترین = $\beta\rho\alpha\chi\iota\sigma\tau os$) عبارت است از تعیین مسیری که ذره‌ای در کوتاهترین زمان از نقطه‌ای مفروض به نقطهٔ دیگری در امتداد آن فرود می‌آید. مطابق شکل ۳، برای



شکل۳

سهولت فرض می‌کنیم محور y به‌طور عمودی به سمت پایین باشد و دو نقطه ثابت، ۱ و ۲ باشند. فرض می‌کنیم سرعت اولیهٔ $v_۱$ در نقطهٔ ۱ مفروض باشد. در فصل ۳ خواهیم دید که برای خمی که با معادلهٔ $y = y(x)$ تعریف می‌شود زمان فرود از ۱ به ۲، $\frac{۱}{\sqrt{۲g}}$ برابر مقدار انتگرال

$$I = \int_{x_۱}^{x_۲} \sqrt{\frac{۱ + y'^۲}{y - \alpha}} dx,$$

است که در آن g ثابت گرانش و α مقدار ثابت $\alpha = y_۱ - v_۱^۲/۲g$ است. بدین ترتیب مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان عبارت است از آنکه در بین خمهای $y = y(x)$ که از دو نقطهٔ ۱ و ۲ می‌گذرند، آن را بیابیم که انتگرال I را کمینه سازد.

تنهـا بررسیهـایی که در جواب به مسئلـهٔ یوهان برنویی به‌طـور کامل انتشار

یافت، از آن خود برادران برنویی و در مه ۱۶۹۷ بود، [۳] که جنبه‌های گوناگون مسئله را بررسی کردند. مقالهٔ یوهان امروز هم متنی بسیار زیبا و رضایتبخش است. او مشاهده کرد که خم سریعترین نزول با مسیر پرتونور در محیطی با ضریب شکست متغیر مناسب، یکسان است و ویژگی این مسیرها او را قادر ساخت تا خیلی سریع و راحت به جواب برسد. با این حال، روش او را فقط برای ردهٔ محدودی از مسائل مشابه می‌توان به کار برد. حل یاکوب هوشمندانه‌تر بود، ولی برای ما بسیار کم جذبه‌تر است، زیرا او به زبان نسبتاً نادقیق تحلیل هندسی پیش از ابداع حسابان سخن می‌گفت؛ زبانی که استفاده از آن مدتی بعد معمول شد. ولی روش وی کلی‌تر از روش برادر کوچکترش و نخستین مرحله از یک رشته تحقیقات طولانی بود که نظریهٔ حساب تغییرات را به صورتی که امروز می‌شناسیم در پی داشت.

یاکوب در کنار مقالهٔ خود، ریاضیدانان را فراخواند تا به‌طور کلی مسئلهٔ بسیار مشکلتر حساب تغییرات را که خودش طرح کرده بود مورد بررسی قرار دهند و بویژه جایزه‌ای نقدی به مبلغ پنجاه دوکات برای حل قابل قبول به یوهان پیشنهاد کرد. اما همان‌طور که انتظار می‌رفت دوکاتها دست نخورده ماند، زیرا گرچه یوهان ادعا کرد این کار را انجام داده است، در روشی که برای حل مسئله اتخاذ کرده بود کامیاب نشد و پس از جر و بحثهای نسبتاً تلخی که سالها طول کشید بالاخره در سال ۱۷۰۱ یاکوب حل خودش را منتشر کرد. دو مقالهٔ یاکوب برنویی در سالهای ۱۶۹۷ و ۱۷۰۱ سرآغاز تحقیقات اویلر[۱۹] (۱۷۰۷ـ۱۷۸۳)، متولد بال و شاگرد یوهان برنویی و یکی از بزرگترین ریاضیدانان دنیا، شد. همان‌طور که در فصلهای بعد نیز خواهیم دید نخستین نتیجهٔ مهم در نظریهٔ جدید حساب تغییرات را به اویلر مدیونیم.

اگر بخواهیم منصف باشیم باید بگوییم نظریهٔ حساب تغییرات ریشه در مسئلهٔ جالب تعیین خم کوتاهترین زمان یوهان برنویی دارد. البته نباید از این مطلب نتیجه گرفت که پیش از آن مسئله‌ای از حساب تغییرات شناخته نشده بود، زیرا قبلاً دیدیم

19) Euler

که نیوتن چنین مسئله‌ای را مطرح و ویژگی مشخصهٔ جواب آن را بیان کرده بود. به علاوه در سالهاي ۱۶۳۰ و ۱۶۳۸[۴] گالیله (۱۵۶۴ـ۱۶۴۲) هنگام مقایسهٔ زمان سقوط یک ذره روی کمانی از دایرهٔ قائم با زمان سقوط روی چند ضلعیهای محاط در آن کمان، مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان را به طورکم و بیش قطعی مدنظر قرار داده بود. چنین می‌نماید که او نتیجه گرفت زمان نزول روی کمان مستدیر کوتاهتر از زمانهای نزول روی همهٔ مسیرهای دیگر واصل نقاط انتهایی آن است. امروزه می‌دانیم که خم جواب نه دایره است نه خط مستقیم، بلکه چرخزاد است. این مطلب را در فصل ۳ ثابت خواهیم کرد. یکی از مسائل قدیمی‌تر حساب تغییرات، مسئلهٔ برابر محیطی یونانیان باستان است که در بند ۷ این فصل تشریح می‌شود. با اینهمه، هیچ یک از این مسائل را بدرستی نمی‌توان سرآغاز نظریهٔ حساب تغییرات دانست، چه در نخستین کارهایی که روی این مسائل انجام شد هیچ نشانی از مسائل دیگری از این نوع یا روشهای حل که از جهت کاربرد کلیت داشته باشند یافت نمی‌شود.

۶. یک مسئلهٔ کلی‌تر. بجز انتگرال موجود در مسئلهٔ نیوتن، تمام انتگرالهای مذکور در بندهای قبل به شکل

$$I = \int_{x_۱}^{x_۲} n(x,y)\sqrt{۱+y'^۲}\,dx, \qquad (۳)$$

هستند و بنابراین می‌توانیم این مسئله را برای خودمان مطرح کنیم: از میان همهٔ خمهای $y = y(x)$ که دو نقطهٔ مفروض را به هم وصل می‌کنند آن خمی را بیابید که این انتگرال را کمینه سازد. این مسئله نیز تعبیر فیزیکی دارد. زیرا فرض کنید در محیط شفاف مسطح، سرعت نور از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر تغییر کند و مقدار آن در نقطهٔ دلخواه (x, y) برابر با $v(x, y)$ باشد. مقدار ضریب شکست در آن نقطه بنابر تعریف برابر است با $n(x, y) = c/v(x, y)$، که در آن c ثابت است و زمان dt که طول می‌کشد تا یک آشفتگی، کمانی به طول ds گذرا از نقطهٔ

(x,y) را با سرعت $v(x,y)$ بپیماید تقریباً برابر است با:

$$dt = \frac{ds}{v(x,y)} = \frac{۱}{c} n(x,y)\sqrt{۱ + y'^{۲}}dx.$$

با انتگرالگیری بسهولت مشاهده می‌کنیم که انتگرال I متناسب با زمانی است که طول می‌کشد تا یک آشفتگی، کمان $y = y(x)$ واصل دو نقطهٔ مفروض ۱ و ۲ را بپیماید. بنابراین از دیدگاه فیزیکی ثابت شده است که مسیر یک پرتو نور در محیطی که در آن سرعت نور از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر تغییر می‌کند، همواره مسیری است که انتگرال زمانی I بر روی آن، دست کم برای کمانهای کوتاه کمینه است، بنابراین مسئلهٔ کمینه کردن I همان مسئلهٔ تعیین مسیرهای پرتوهای نور در محیط مسطحی است که ضریب شکست متغیر آن $n(x,y)$ است.

یوهان برنویی به این نکته توجه کرد که زمان سقوط یک ذره در امتداد خم $y = y(x)$ و زمان گذر یک پرتو در امتداد همان خم در محیطی با ضریب شکست $n(x,y) = c/\sqrt{y-\alpha}$، بجز یک عامل ثابت، هر دو از انتگرال (۳) که این ضریب در آن قرار داده شده است، به دست می‌آیند. به‌علاوه او می‌دانست که وقتی یک پرتو نور از محیطی به محیط دیگر می‌رود، سینوسهای زوایای تابش و شکست در سطح مرزی با ضریبهای شکست دو محیط متناسبند و با تصور اینکه این محیط از لایه‌های افقی بسیار نازک با ضرایب متفاوت تشکیل یافته است قادر بود شکل خم تندترین سقوط را استنتاج کند.

انتگرال (۳) هنوز هم مسئلهٔ نیوتن را به عنوان حالت خاص شامل نمی‌شود، هر چند آنقدر کلی است که اغلب مسائل خاص کلاسیک حساب تغییرات در صفحه را در بر گیرد. اما تا جایی که به ما مربوط می‌شود، بررسی انتگرال

$$I = \int_{x_۱}^{x_۲} f(x,y,y')dx, \qquad (۴)$$

که در آن انتگرالده تابعی است از سه متغیر x، y، و y' کاملاً ساده است. این کار را در فصل ۵ انجام خواهیم داد. از میان همهٔ کمانهای $y = y(x)$ واصل دو نقطهٔ

مفروض ۱ و ۲ به دنبال آن کمانی خواهیم گبشت که انتگرال (۴) را کمینه سازد. کلیت این مسئله آنقدر هست که همهٔ آن چیزهایی را که قبلاً به عنوان حالات خاص بیان کردیم در بر گیرد.

۷. مسائل دیگر حساب تغییرات. اشتباه است اگر تصور کنیم پروندهٔ مسائلی که حساب تغییرات به آنها اختصاص دارد، حتی با طرح مسئلهٔ کاملاً کلی بند قبل بسته می‌شود. می‌توانیم مسئله‌ای را که در آنجا بیان شد به این طریق که به دنبال خم کمینه‌ساز در بین خمهایی باشیم که به جای دو نقطهٔ ثابت، یک نقطهٔ ثابت را به یک خم ثابت یا دو خم ثابت را به هم می‌پیوندند، یا به طرق بسیار دیگر تغییر دهیم.

مسئلهٔ برابر محیطی مشهور قدما عبارت بود از یافتن خم بستهٔ ساده‌ای با طول مفروض که بیشترین مساحت را احاطه می‌کند. پاسخ دایره است، هرچند اثبات این مطلب خیلی هم ساده نیست. از دیدگاه تحلیلی می‌توان گفت این مسئله عبارت از یافتن کمانی است با معادلات پارامتری

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (t_1 \leq t \leq t_2)$$

که در شرایط

$$x(t_1) = x(t_2), \quad y(t_1) = y(t_2)$$

صدق کرده طور دیگری خودش را قطع نکند و با مفروض بودن مقدار ثابت l برای انتگرالِ طول

$$\int_{t_1}^{t_2} \sqrt{x'^2 + y'^2}\,dt$$

، انتگرال سطح، یعنی

$$\frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} (xy' - x'y)\,dt.$$

را بیشینه کند. مسائلی از حساب تغییرات که در آنها قرار است یک یا چند انتگرال مقدار ثابتی بگیرند و انتگرال دیگری کمینه یا بیشینه شود، از این پس، مسائل برابر محیطی خوانده می‌شوند. مسئله‌ای که یاکوب برنویی در سال ۱۶۹۷ مطرح کرد پس از مسئلهٔ یونانیان باستان قدیمی‌ترین مسئلهٔ برابر محیطی به شمار می‌آید.

بررسی مفصل بیش از یک مسئله از مسائل غیر برابر محیطی ساده‌تر در مکان محدود صفحات آتی، امکانپذیر نیست، هر چند علاوه بر آنهایی که قبلاً ذکر شد انواع دیگری هم وجود دارد.

نظریهٔ حساب تغییرات توسعهٔ بسیار یافته است، اما به آن وسعت برای موارد خاص به کار نرفته است و تعداد مسائل خاصی که به‌طور کامل مورد بررسی قرار گرفته‌اند بسیار اندک است. در فصلهای ۲ تا ۴ این کتاب سه تا از مسائلی را که در صفحات پیش بیان کردیم به‌طور مفصل بررسی خواهیم کرد. در فصل ۵، برخی از نتایج مربوط به مسئلهٔ کلی‌تری که در بند ۶ بیان شد همراه با روند تاریخی مختصری از پیشرفت این نظریه از زمان برنویی‌ها تاکنون، جمع‌بندی خواهد شد.

فصل ۲

کوتاهترین فاصله

۸. کوتاهترین کمان واصل دو نقطه. مسائل مربوط به تعیین کوتاهترین فاصله‌ها مدخل مقدماتی سودمندی به نظریهٔ حساب تغییرات است، چون ویژگیهای مشخص‌کنندهٔ جوابهای این مسائل، ویژگیهای آشنایی هستند که بسیاری از اصول کلی مشترک بین همهٔ مسائل بیان شده در فصل قبل را بخوبی آشکار می‌سازند. اگر بتوانیم آنچه دربارهٔ خطوط مستقیم و کوتاهترین فاصله‌ها می‌دانیم لحظه‌ای از ذهن خویش بزداییم، از کشف دوبارهٔ قضایای مشهور با روشهایی که در حل مسائل پیچیده‌تر نیز مفید خواهند بود لذت خواهیم برد.

بحث را با ساده‌ترین حالت ممکن آغاز می‌کنیم: مسئلهٔ تعیین کوتاهترین کمانی که دو نقطهٔ مفروض را به هم وصل می‌کند. انتگرالی را که باید کمینه شود، پیش از این در صفحهٔ ۵ فصل قبل دیدیم. اگر از نماد $f(y') = (1 + y'^2)^{\frac{1}{2}}$ استفاده کنیم، این انتگرال را می‌توان به صورت زیر نوشت

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(y')dx \qquad (1)$$

و شرط می‌کنیم که کمانهای $y = y(x) \quad (x_1 \leq x \leq x_2)$ که باید طولهایشان با یکدیگر مقایسه شود، همواره پیوسته و همانند شکل ۴ مرکب از تعداد متناهی کمان باشند که روی هر یک از آنها، مماس به‌طور پیوسته گردش می‌کند. از دیدگاه تحلیلی یعنی اینکه تابع $y(x)$ روی بازهٔ $x_1 \leq x \leq x_2$ پیوسته باشد و بتوان

این بازه را به بخشهایی تقسیم کرد که $y(x)$ روی هر یک از آنها مشتق پیوسته داشته باشد.[1] قرار می‌گذاریم که این توابع را توابع پذیرفتنی و کمانهایی را که تعریف می‌کنند کمانهای پذیرفتنی بنامیم. بدین ترتیب، مسئله این است که در بین همهٔ کمانهای پذیرفتنی که دو نقطهٔ مفروض ۱ و ۲ را به هم وصل می‌کنند، آن را بیابیم که انتگرال I را کمینه می‌سازد.

شکل۴

۹. نخستین شرط لازم. فرض کنید بپذیریم که کمان پذیرفتنی خاص $E_{۱۲}$ با معادلهٔ

$$y = y(x) \qquad\qquad (x_۱ \leq x \leq x_۲)$$

جواب مسئلهٔ ما باشد؛ حال بیایید ویژگیهایی را پیدا کنیم که این جواب را از کمانهای پذیرفتنی دیگری که نقاط ۱ و ۲ را به هم وصل می‌کنند متمایز می‌سازد. اگر تابع پذیرفتنی $\eta(x)$ را که در شرایط $\eta(x_۱) = \eta(x_۲) = ۰$ صدق می‌کند به‌طور دلخواه انتخاب کنیم، معادلهٔ

$$y = y(x) + a\eta(x) \qquad\qquad (x_۱ \leq x \leq x_۲), \qquad\qquad (۲)$$

شامل ثابت دلخواه a، خانوادهٔ یک پارامتری از خمها را نشان می‌دهد که کمان $E_{۱۲}$ را نیز به ازای مقدار خاص $a = ۰$ شامل می‌شود و همهٔ خمهای این خانواده

۱) به عبارت دیگر فرض می‌کنیم $y'(x)$ قطعه به قطعه پیوسته باشد (تمام پابرگها از مترجم است).

از ۱ و ۲، نقاط انتهایی E_{12}، می‌گذرند. مقدار انتگرال I در امتداد یک کمان این خانواده به مقدار a بستگی دارد و می‌توان آن را با علامت

$$I(a) = \int_{x_1}^{x_2} f(y' + a\eta')dx. \qquad (3)$$

نشان داد. در امتداد کمان اولیهٔ E_{12}، مقدار انتگرال برابر است با $I(0)$، و اگر بنا باشد این مقدار، در بین مقادیر انتگرال در امتداد تمامی کمانهای پذیرفتنی دیگری که ۱ و ۲ را به هم وصل می‌کنند، کمینه باشد، بویژه باید در بین مقادیر $I(a)$ در امتداد کمانهای خانوادهٔ (۲) نیز کمینه گردد. از این رو بنابر محکی که در صفحهٔ ۴ فصل قبل برای کمینهٔ یک تابع داده شد، باید داشته باشیم $I'(0) = 0$.

در اینجا باید تأکید کنیم که روش حساب تغییرات، آن طور که در گذشته عرضه شده، اساساً از سه قسمت تشکیل یافته است. اول، استنتاج شرایط لازمی که یک کمان کمینه‌ساز را مشخص می‌کنند؛ دوم اثبات اینکه این شرایط و شرایط دیگری که با تغییرات جزئی از آنها حاصل می‌شوند در تضمین وجود کمینهٔ مطلوب کافی‌اند؛ و سوم جست و جوی کمانی که در این شرایط کافی صدق کند. برای استنتاج شرایط لازم، می‌توان مقدار I را در امتداد کمان کمینه‌ساز با مقادیر آن در امتداد کمانهای پذیرفتنی خاصی که برای مقاصد برهان مورد نظر مناسبند، مثلاً در امتداد کمانهای خانوادهٔ (۲) مقایسه کرد، اما برهانهای کفایت را باید نسبت به همهٔ کمانهای پذیرفتنی واصل نقاط ۱ و ۲ انجام داد. سومین قسمت مسئله یعنی تعیین کمانی که در شرایط کافی صدق کند، معمولاً مشکلترین قسمت آن است و روشهای کلی شناخته شده برای آن بسیار اندکند. خوشبختانه در مسائل کوتاهترین فاصله‌ها، تعیین این کمان معمولاً آسان است.

اگر از عبارت (۳) نسبت به a مشتق بگیریم و سپس قرار دهیم $a = 0$، بسادگی دیده می‌شود که مقدار $I'(0)$ برابر است با

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} f_{y'}\eta' dx, \qquad (4)$$

که برای سهولت، به جای مشتق انتگرالده $f(y')$ نسبت به y' از نماد $f_{y'}$ استفاده کرده‌ایم. شرط می‌کنیم که همواره شناسهٔ f و مشتق آن، تابعی از $y'(x)$ هستند که مربوط به کمان E_{12} است، مگر آنکه مثل فرمول (۳) صریحاً خلاف آن عمل کنیم.

حال از لزوم برقراری شرط $I'(0) = 0$، چه نتایجی را می‌توان استخراج کرد؟ پاسخ این پرسش را باید در لم بند بعد یافت. این لم علاوه بر جوابهای مسائل کوتاهترین فاصله‌ها که این فصل به آنها اختصاص دارد، در فصلهای بعد نیز بارها به کار خواهد رفت.

۱۰. لم اساسی [۵]. در انتگرالده انتگرال (۴)، چون آوند $f_{y'}$، $y'(x)$، شیب کمان E_{12} است، ضریب η' در واقع تابعی از x است و بنابراین می‌توان این ضریب را با $M(x)$ نشان داد. باید توجه کرد که تابع $M(x)$ پیوسته است، مگر احتمالاً در مقادیری از x که گوشه‌های کمان E_{12} را تعریف می‌کنند و در آنها $y'(x)$ بتندی تغییر می‌کند. در این نقاط خم، $y'(x)$ دو مقدار دارد، یکی متناظر با شیب پَسرو و دیگری متناظر با شیب پیشرو. بدین ترتیب، لمی که می‌خواهیم ثابت کنیم به قرار زیر است:

لم اساسی. گیریم $M(x)$ تابعی از نوع یاد شده در بالا باشد یعنی یا روی بازهٔ $x_1 \leq x \leq x_2$ پیوسته است، یا اینکه می‌توان این بازه را به تعداد متناهی قسمت تقسیم کرد که روی هر یک از آنها $M(x)$ پیوسته باشد. اگر انتگرال

$$\int_{x_1}^{x_2} M(x)\eta'(x)dx$$

به ازای همهٔ توابع پذیرفتنی $\eta(x)$ که $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ صفر شود، $M(x)$ لزوماً تابع ثابت است.

برای اثبات این مطلب ابتدا توجه می‌کنیم که صفر شدن انتگرال مذکور در لم نتیجه می‌دهد که به ازای هر ثابت C

$$\int_{x_1}^{x_2} [M(x) - C]\eta'(x)dx = 0 \qquad (5)$$

زیرا توابع $\eta(x)$ به گونه‌ای اختیار شده‌اند که $\eta(x_۱) = \eta(x_۲) = ۰$. بدیهی است که مقدار تابع خاص $\eta(x)$ که با معادلهٔ

$$\eta(x) = \int_{x_۱}^{x} M(x)dx - C(x - x_۱) \qquad (۶)$$

تعریف می‌شود، در $x = x_۱$ برابر با صفر است و اگر C ثابتی باشد که در شرط

$$۰ = \int_{x_۱}^{x_۲} M(x)dx - C(x_۲ - x_۱)\cdot$$

صدق کند، که البته چنین فرض خواهیم کرد، $\eta(x)$ در $x = x_۲$ نیز صفر خواهد شد.

حال تابع $\eta(x)$ که با معادلهٔ (۶) تعریف شد و این مقدار C در آن وارد شده است یکی از آن توابعی است که باید در معادلهٔ (۵) صدق کند. چون مشتق یک انتگرال نسبت به حد بالایی آن وقتی انتگرالده در آن حد پیوسته است، برابر است با مقدار انتگرالده در آن حد، پس $\eta'(x) = M(x) - C$، جز در نقاطی که $M(x)$ ناپیوسته است. بنابراین برای تابع خاص $\eta(x)$، معادلهٔ (۵) شکل زیر را به خود می‌گیرد

$$\int_{x_۱}^{x_۲} [M(x) - C]^۲ dx = ۰$$

و چون این معادله فقط وقتی می‌تواند درست باشد که $M(x) \equiv C$، لم فوراً نتیجه می‌شود.

۱۱. اثبات اینکه خط مستقیم کوتاهترین است. در معادلهٔ $y = y(x) + a\eta(x)$ مربوط به خانوادهٔ خمهایی که از نقاط ۱ و ۲ می‌گذرند، تابع $\eta(x)$ کاملاً دلخواه بود، جز اینکه پذیرفتنی بود و در روابط $\eta(x_۱) = \eta(x_۲) = ۰$ صدق می‌کرد و دیدیم که برای هر خانواده‌ای از این دست، عبارت (۴) برای $I'(۰)$

باید صفر شود. بنابراین می‌توان لم بند پیش را به کار برد. این لم حاکی از آن است که در امتداد کمان کمینه‌ساز $E_{۱۲}$ باید معادلهٔ

$$f_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{۱+y'^{۲}}} = C$$

که در آن C ثابت است برقرار باشد. اگر این معادله را بر حسب y' حل کنیم، مشاهده می‌کنیم که y' نیز در امتداد $E_{۱۲}$ ثابت است و بنابراین یگانه کمان کمینه‌ساز ممکن، پاره خط مستقیم بدون گوشه‌ای است که نقطهٔ ۱ را به نقطهٔ ۲ وصل می‌کند.

تا اینجا لزوم ویژگی‌ای را که برای کوتاهترین کمان استنتاج شد برای یک کمینه به اثبات رسانده‌ایم، ولی هنوز به‌طور قطع نشان نداده‌ایم که پاره خط مستقیم $E_{۱۲}$ که ۱ را به ۲ وصل می‌کند از هر کمان پذیرفتنی دیگری که این نقاط را به هم متصل می‌سازد کوتاهتر است. حال برای اینکه این واقعیت را ثابت کنیم، فرض کنید $\eta(x)$ نشان دهندهٔ نموی باشد که باید به عرض $E_{۱۲}$ در مقدار x افزود تا عرض کمان پذیرفتنی دلخواه $C_{۱۲}$ که ۱ را به ۲ وصل می‌کند حاصل شود. بنابراین معادلهٔ $C_{۱۲}$ عبارت خواهد بود از

$$y = y(x) + \eta(x) \qquad (x_{۱} \le x \le x_{۲}).$$

به کمک فرمول تیلر[2] می‌توان تفاضل بین طولهای $C_{۱۲}$ و $E_{۱۲}$ را به شکل زیر بیان کرد

$$I(C_{۱۲}) - I(E_{۱۲}) = \int_{x_{۱}}^{x_{۲}} \{f(y'+\eta') - f(y')\}dx$$

$$= \int_{x_{۱}}^{x_{۲}} f_{y'}\eta' dx + \frac{۱}{۲}\int_{x_{۱}}^{x_{۲}} f_{y'y'}(y'+\theta\eta')\eta'^{۲}dx,$$

که در آن $I(C_{۱۲})$ و $I(E_{۱۲})$ مقادیر انتگرال I در امتداد این دو کمان؛ $f_{y'y'}$ مشتق دوم تابع f نسبت به y'؛ و θ مقداری بین ۰ و ۱ است که در فرمول تیلر ظاهر

2) Taylor

می‌شود. انتگرال ماقبل آخر مساوی صفر است، زیرا $f_{y'}$ در امتداد $E_{۱۲}$ ثابت است و $\eta(x)$، تفاضل عرضهای $C_{۱۲}$ و $E_{۱۲}$ با نقاط انتهایی یکسان، باید در $x_۱$ و $x_۲$ صفر شود[۳]. به‌علاوه انتگرال آخر هیچ وقت منفی نیست، چون مشتق دوم یعنی $f_{y'y'} = \frac{۱}{(۱+y'^۲)^{\frac{۳}{۲}}}$ همواره مثبت است. بنابراین می‌بینیم که $I(C_{۱۲}) - I(E_{۱۲})$ بزرگتر از صفر است مگر آنکه $\eta'(x)$ متحد با صفر باشد که در آن صورت خود $\eta(x)$ نیز علاوه بر $x_۱$ و $x_۲$ همه جا برابر مقدار ثابت صفر و در نتیجه، $C_{۱۲}$ بر $E_{۱۲}$ منطبق خواهد شد.

بنابراین ثابت شد که کوتاهترین کمان از نقطهٔ ۱ به نقطهٔ ۲، لزوماً پاره‌خط مستقیمی است که این نقاط را به هم وصل می‌کند و این پاره‌خط در واقع از هر کمان پذیرفتنی دیگر با همان نقاط انتهایی کوتاهتر است.

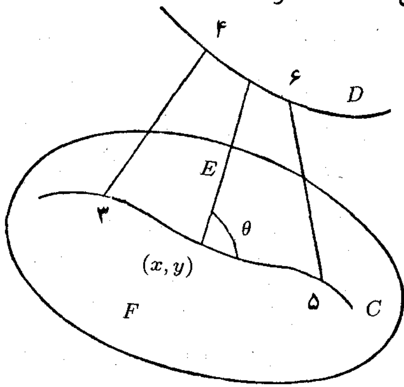
باید به نقشی که علامت مثبت مشتق $f_{y'y'}$ در تعیین ویژگی کمینه بودن بازی می‌کند دقت کرد. اگر علامت این مشتق منفی بود، تفاضل $I(C_{۱۲}) - I(E_{۱۲})$ هم منفی می‌شد و $I(E_{۱۲})$ به جای کمینه، بیشینه می‌گشت. این مطلب مشابه محکی است که در صفحهٔ ۴ برای نظریهٔ ساده‌تر بیشینه‌ها و کمینه‌های توابع یک متغیره ارائه شد.

۱۲. دو فرمول کمکی مهم. برهانی که در بند قبل به‌کار برده شد تا نشان داده شود که خط مستقیم واصل ۱ و ۲ کوتاهتر از هر کمان پذیرفتنی دیگری است که آن دو نقطه را به هم وصل می‌کند از نوع بسیار خاصی است که در حالت کلی برای مسائلی از حساب تغییرات که انتگرالده انتگرال I در آنها علاوه بر y' یک یا هر دو متغیر x و y را شامل است، قابل استفاده نیست. بنابراین ارزشمند خواهد بود اگر برهان دومی را اختیار کنیم که نتایجی را که قبلاً برای مسئلهٔ یافتن کوتاهترین فاصلهٔ بین دو نقطه به‌دست آوردیم، قدری گسترش دهد و آن را نه تنها برای مسائل کوتاهترین فاصله‌ها در این فصل، بلکه برای مسائلی که بعدها مطالعه

۳) در واقع با توجه به قضیهٔ اساسی حسابان داریم

$$\int_{x_۱}^{x_۲} f_{y'}\eta'\,dx = \int_{x_۱}^{x_۲} C\eta'\,dx = C\int_{x_۱}^{x_۲}\eta'\,dx = C(\eta(x_۲) - \eta(x_۱)) = ۰$$

خواهیم کرد نیز قابل استفاده سازد.



شکل۵

پیش از هر چیز به دو مورد خاص از فرمولهای کلی‌تری که مکرر در صفحات آینده به‌کار می‌رود، نیاز خواهیم داشت. فرض کنید $E_{۱۲}$ پاره‌خطی مستقیم با طول متغیر باشد که طوری حرکت کند که نقاط انتهایی آن همزمان دو خم C و D در شکل ۵ را رسم کنند و فرض کنید معادلات پارامتری این خمها عبارت باشند از

$$(C) \qquad x = x_۳(t), \quad y = y_۳(t),$$

$$(D) \qquad x = x_۴(t), \quad y = y_۴(t).$$

دیفرانسیل طول پاره‌خط $E_{۳۴}$، یعنی

$$I = \sqrt{(x_۴ - x_۳)^۲ + (y_۴ - y_۳)^۲}$$

برابر است با

$$dI = \frac{(x_۴ - x_۳)(dx_۴ - dx_۳) + (y_۴ - y_۳)(dy_۴ - dy_۳)}{\sqrt{(x_۴ - x_۳)^۲ + (y_۴ - y_۳)^۲}}.$$

اگر نماد $p = (y_۴ - y_۳)/(x_۴ - x_۳)$ را برای نشان دادن شیب خط $E_{۳۴}$ به کار بریم، این نتیجه را می‌توان با فرمول ساده‌تر موجود در قضیهٔ زیر بیان کرد:

اگر پاره‌خط مستقیم $E_{۳۴}$ طوری حرکت کند که مطابق شکل ۵، نقاط انتهایی آن ۳ و ۴ همزمان دو خم C و D را رسم کنند، دیفرانسیل I، طول $E_{۳۴}$، برابر است با

$$dI(E_{۳۴}) = \frac{dx + pdy}{\sqrt{۱ + p^۲}}\Big|_۳^۴ \qquad (۷)$$

که در آن خط عمودی نشان می‌دهد که مقدار عبارت قبل در نقطهٔ ۳ باید از مقدار آن در نقطهٔ ۴ کم شود. در این فرمول دیفرانسیلهای dx و dy در نقاط ۳ و ۴ مربوط به C و D می‌باشند و در ضمن p شیب پاره‌خط $E_{۳۴}$ است.

بارها باید از عبارت طرف دوم معادلهٔ (۷) در امتداد خمهایی نظیر C و D انتگرال بگیریم. این مطلب، مثلاً در امتداد C آشکارا توجیه‌پذیر است، زیرا شیب $p = (y_۴ - y_۳)/(x_۴ - x_۳)$ تابعی از t است و دیفرانسیلهای dx و dy را می‌توان از روی معادلات مربوط به C برحسب t و dt محاسبه کرد و بنابراین، این عبارت به شکل تابعی از t ضربدر dt درمی‌آید. وقتی p تابعی است از x و y، انتگرال I^* که با فرمول

$$I^* = \int \frac{dx + pdy}{\sqrt{۱ + p^۲}}$$

تعریف می‌شود نیز در امتداد خم دلخواه C خوش تعریف است، به شرط آنکه قرار بگذاریم مقدار I^* را بدین صورت حساب کنیم که به جای x، y، dx، و dy عبارتهای مربوط به این متغیرها را که از معادلات پارامتری C برحسب t و dt حاصل می‌شوند قرار دهیم.

گیریم $t_۳$ و $t_۵$ دو مقدار پارامتری باشند که نقاط ۳ و ۵ روی C، و در عین حال دو نقطهٔ متناظر ۴ و ۶ روی D را تعریف می‌کنند. شکل ۵ را ببینید. اگر از فرمول (۷) نسبت به t، از $t_۳$ تا $t_۵$ انتگرال بگیریم و از نماد I^* که اینک برای

انتگرال طرف دوم این فرمول معرفی شد استفاده کنیم، به عنوان نتیجه‌ای دیگر به دست می‌آوریم:

تفاضل $I(E_{۳۴})$ و $I(E_{۵۶})$، طولهای پاره‌خط متحرک در دو موضع $E_{۳۴}$ و $E_{۵۶}$ از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$I(E_{۵۶}) - I(E_{۳۴}) = I^*(D_{۴۶}) - I^*(C_{۳۵}). \qquad (۸)$$

این فرمول و فرمول (۷) همان دو فرمول مهمی هستند که در جست و جوی آنها هستیم. روشن است که اگر یکی از خمهای C یا D به یک نقطه تبه شود، این فرمولها حتی به شکلی ساده‌تر همچنان برقرار می‌مانند، زیرا در امتداد چنین خمی دیفرانسیلهای dx و dy صفرند.

انتگرالده انتگرال I^* در نقاط خم C که این انتگرال در امتداد آن گرفته می‌شود، تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. مثلاً در نقطهٔ (x,y) روی خم C در شکل ۵، کسینوسها و سینوسهای زاویه‌های بین محور x و خطوط مماس بر C و E به ترتیب عبارتند از:

$$\frac{x'}{\sqrt{x'^{۲}+y'^{۲}}},\ \frac{y'}{\sqrt{x'^{۲}+y'^{۲}}};\ \frac{۱}{\sqrt{۱+p^{۲}}},\ \frac{p}{\sqrt{۱+p^{۲}}}.$$

چون زاویهٔ θ بین این مماسها، و عنصر طول ds، با معادلات

$$\cos\theta = \frac{x' + py'}{\sqrt{(۱+p^{۲})(x'^{۲}+y'^{۲})}},\quad ds = \sqrt{x'^{۲}+y'^{۲}}dt \quad (۹)$$

تعریف می‌شوند، نتیجه می‌شود که انتگرال I^* را می‌توان به شکل ساده‌تر زیر نیز بیان کرد

$$I^* = \int \frac{dx + pdy}{\sqrt{۱+p^{۲}}} = \int \cos\theta ds. \qquad (۱۰)$$

۱۳. مفهوم میدان و دومین برهان کفایت. در صفحهٔ ۱۹ دیدیم که شرایط لازم روی کوتاهترین کمان را می‌توان با مقایسهٔ آن با انواع خاصی از کمانهای پذیرفتنی دیگر استنتاج نمود، اما می‌توان ثابت کرد که در واقع، کوتاهترین کمان یک خط خاص است؛ فقط باید آن را با همهٔ کمانهای پذیرفتنی که همان دو نقطه را به‌هم می‌پیوندند مقایسه کنیم. برهان کفایت این بند نه تنها برای کمانهایی که آنها را پذیرفتنی نامیدیم، بلکه برای کمانهایی که دارای معادلات پارامتری

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (t_۳ \leq t \leq t_۵). \qquad (۱۱)$$

هستند نیز برقرار است. همواره فرض می‌کنیم که توابع $x(t)$ و $y(t)$ پیوسته‌اند و بازهٔ[۴] $t_۳t_۵$ را می‌توان به یک یا چند قسمت تقسیم کرد، به‌طوری که روی هر یک از آنها $x(t)$ و $y(t)$ مشتقات پیوسته دارند و $x'^۲ + y'^۲ \neq ۰$. در این صورت خم نشان داده شده پیوسته است و در همهٔ نقاط، مگر احتمالاً تعداد متناهی گوشه، مماس پیوسته دارد. ردهٔ بسیار وسیعی از خمها را می‌توان به جای معادله $y = y(x)$ با معادلات پارامتری از این نوع نشان داد، زیرا در نمایش پارامتری هیچ قیدی روی شیب خم یا تعداد نقاطی از خم که ممکن است روی خط عرضی[۵] واقع شوند وجود ندارد، در حالی که شیب کمان پذیرفتنی $y = y(x)$ همواره باید متناهی باشد و روی هر خط عرضی حداکثر یک نقطهٔ آن قرار گیرد.

نخستین ریاضیدانی که برهانهای کفایت رضایتبخشی در حساب تغییرات ارائه کرد، وایرشتراس بود و تدبیر هوشمندانه‌ای که او در برهانهای خویش به‌کار برد، میدان نامیده می‌شود. برای مسائلی که در این فصل مد نظر داریم، میدان F، ناحیه‌ای است از صفحهٔ xy که خانواده‌ای یک پارامتری از پاره‌خطهای مستقیم به آن وابسته می‌گردد، به‌طوری که هر یک از این پاره‌خطها یک بار خم ثابت D را قطع می‌کنند و این ویژگی اضافی را نیز دارند که از هر نقطهٔ (x, y) از F یکی

---

۴) این بازه را به شکل $[t_۳, t_۵]$ نیز نشان می‌دهند.

۵) از این پس همه‌جا منظور از خط عرضی که آن را معادل ordinate گرفته‌ایم، خطی است موازی با محور عرضها. خط عرضی گذرا از یک نقطه، خطی است گذرا از آن نقطه و موازی محور عرضها یا yها.

و تنها یکی از این پاره‌خطها می‌گذرد. خم D ممکن است درون میدان یا مثل شکل ۵ در بیرون میدان قرار گیرد، یا در حالت خاص ممکن است به یک نقطهٔ ثابت تبه شود.

اگر صفحه را با دستگاهی از خطوط موازی بپوشانیم، کل صفحه یک میدان می‌شود که در این حالت خم D می‌تواند هر خط مستقیم یا خمی باشد که همهٔ این خطوط موازی را قطع می‌کند. اگر صفحه به استثنای نقطهٔ منفرد ۰ را با پرتوهای گذرنده از ۰ بپوشانیم و ۰ را یک خم تبه شده فرض کنیم، باز هم یک میدان به دست خواهد آمد. خطوط مماس بر دایره یک میدان را نمی‌پوشانند، زیرا از هر نقطه در خارج دایره دو مماس می‌گذرد و از هر نقطه در داخل دایره هیچ مماسی عبور نمی‌کند. با وجود این اگر نیمی از هر مماس را در نقطهٔ تماسش با دایره حذف کنیم، فقط یک خانوادهٔ یک پارامتری از نیم پرتوها بر جای می‌ماند که همگی متوجه یک جهت حول دایره‌اند و بدین ترتیب، خارج دایره به میدانی تبدیل می‌شود که به‌طور ساده با خانوادهٔ نیم پرتوها پوشیده می‌گردد.

در هر نقطهٔ (x, y) از میدان F، شیب خط مستقیم میدان برابر است با $p(x, y)$، و تابعی که بدین‌سان تعریف می‌شود تابع شیب میدان نامیده می‌شود. انتگرال I^* که در انتگرالده آن به جای p، تابع شیب قرارگرفته است در امتداد هر کمان $C_{۳۵}$ در میدان که معادلات آن به شکل (۱۱) است، مقدار معینی دارد. این مطلب را در صفحهٔ ۲۵ نیز ملاحظه کردیم. به کمک فرمولهای بند اخیر می‌توانیم ثابت کنیم که انتگرال I^* که به این طریق به میدان وابسته می‌شود دو ویژگی مفید زیر را داراست:

مقادیر I^* در امتداد همهٔ کمانهای $C_{۳۵}$ در میدان F که دارای نقاط انتهایی یکسان ۳ و ۵ هستند مساویند. به‌علاوه در امتداد هر بخش از یکی از خطوط مستقیم این میدان مقدار I^* با طول آن بخش برابر است.

برای اثبات گزارهٔ اول می‌توانیم خم $C_{۳۵}$ را که در میدان F شکل ۵ نشان داده شده است در نظر بگیریم. بنابر فرض، از هر نقطهٔ (x, y) از این خم، خط

مستقیمی از میدان F که قاطع D است عبور می‌کند و اگر فرمول (۸) در صفحهٔ ۲۶ را برای خانوادهٔ یک پارامتری پاره‌خطهای مستقیمی که بدین صورت توسط نقاط $C_{۳۵}$ معین می‌شوند به کار بریم، خواهیم داشت

$$I^*(C_{۳۵}) = I^*(D_{۴۶}) - I(E_{۵۶}) + I(E_{۳۴}).$$

اگر نقاط ۳ و ۵ در میدان مفروض باشند، مقادیر جملات سمت راست به‌طور کامل معین می‌شوند، و از شکل خم $C_{۳۵}$ که این دو نقطه را به هم می‌پیوندد، کاملاً مستقلند. این نشان می‌دهد که مقدار $I^*(C_{۳۵})$ برای همهٔ کمانهای $C_{۳۵}$ در میدان که نقاط انتهایی یکسان را به هم وصل می‌کنند یکی است، و این همان چیزی است که در قضیه بیان شد.

ویژگی دوم ناشی از این واقعیت است که در امتداد یک پاره‌خط مستقیم در میدان دیفرانسیلهای dx و dy در معادلهٔ $dy = pdx$ صدق می‌کنند و بنابراین انتگرالده I^* به $\sqrt{۱ + p^۲}dx$ که انتگرالده انتگرال طول است تبدیل می‌شود.

اکنون سازوکاری برای برهان کفایت که هدف این بند است در اختیار داریم. می‌خواهیم نشان دهیم که پاره‌خط مستقیم $E_{۱۲}$ که جفت نقاط ۱ و ۲ را به هم وصل می‌کند، از هر کمان دیگر واصل این نقاط کوتاهتر است. جهت نیل به این مقصود، میدان حاصل از پوشاندن صفحهٔ xy با خطوط موازی با $E_{۱۲}$ را در نظر می‌گیریم. اگر $C_{۱۲}$ کمانی در این میدان باشد که ۱ را به ۲ وصل کند و با معادلات پارامتری (۱۱) تعریف شود، ویژگیهایی که اندکی پیش برای انتگرال I^* استنتاج کردیم نتیجه می‌دهند

$$I(E_{۱۲}) = I^*(E_{۱۲}) = I^*(C_{۱۲}) = \int_{s_۱}^{s_۲} \cos\theta ds,$$

و بنابراین تفاضل بین مقادیر I در امتداد $C_{۱۲}$ و $E_{۱۲}$ برابر است با

$$I(C_{۱۲}) - I(E_{۱۲}) = \int_{s_۱}^{s_۲} (۱ - \cos\theta) ds \geq ۰$$

علامت برابری فقط وقتی برقرار است که $C_{۱۲}$ بر $E_{۱۲}$ مَنطبق گردد، زیرا اگر انتگرال موجود در معادلهٔ اخیر صفر شود، باید در هر نقطهٔ $C_{۱۲}$ داشته باشیم $\cos\theta = ۱$، که از آن نتیجه می‌شود که $C_{۱۲}$ در هر نقطه بر یکی از خطوط راست میدان مماس است و بنابراین در معادلهٔ $dy = pdx$ صدق می‌کند. این معادلهٔ دیفرانسیل فقط یک جواب گذرا از نقطهٔ آغازی ۱ دارد و آن جواب هم $E_{۱۲}$ است. بنابراین ثابت کرده‌ایم که $I(C_{۱۲})$، طول $C_{۱۲}$، همواره از طول $E_{۱۲}$ بزرگتر است مگر آنکه $C_{۱۲}$ بر $E_{۱۲}$ منطبق شود.

در اینجا بار دیگر تأکید می‌کنیم که برهان کفایتی که اینک ارائه شد بسیار فراگیرتر از برهان بند ۱۲ صفحهٔ ۲۳ است، چون این برهان بروشنی نشان می‌دهد که خط مستقیم واصل نقاط ۱ و ۲ نه‌تنها از همهٔ کمانهای پذیرفتنی دیگر $y = y(x)$ که این نقاط را به هم وصل می‌کنند، بلکه از هر خم دیگری با همان نقاط انتهایی که با معادلات پارامتری (۱۱) تعریف می‌شود نیز کوتاهتر است.

۱۴. کوتاهترین کمان واصل یک نقطه به یک خم. اگر به جای دو نقطهٔ ثابت، یک نقطهٔ ثابت ۱ و یک خم ثابت N مفروض باشند، روشن است که بار دیگر کوتاهترین کمان واصل آنها باید پاره خط مستقیم باشند، اما این ویژگی به تنهایی برای تضمین طول کمینه کافی نیست. دو شرط دیگر هم روی کوتاهترین خط از یک نقطه به یک خم وجود دارد که در بررسی مسائل فصل بعد، همانندهای جالبی برای آنها خواهیم یافت.

فرض کنید معادلات پارامتری خم N در شکل ۶ برحسب پارامتر τ عبارت باشند از

$$x = x(\tau), \qquad y = y(\tau),$$

و فرض کنید $\tau_{۲}$ مقدار پارامتری معرف نقطهٔ ۲، نقطهٔ برخورد N با کوتاهترین کمان $E_{۱۲}$ واصل ۱ و N باشد. روشن است که کمان $E_{۱۲}$ باید پاره‌خط مستقیم باشد، زیرا اگر در بین خمهایی که ۱ را به N وصل می‌کنند، کوتاهترین باشد

یقیناً کوتاهترین کمانی که ۱ را به ۲ وصل می‌کند نیز خواهد بود. طول پاره‌خط مستقیمی که نقطهٔ ۱ را به نقطهٔ دلخواه $(x(\tau), y(\tau))$ روی N می‌پیوندد، تابعی چون $I(\tau)$ است که باید در مقدار $\tau_۲$ معرف خط خاص $E_{۱۲}$، کمینه شود. روشن است که اگر در فرمول (۷) صفحهٔ ۲۵ به جای C، نقطهٔ ۱ و به جای D، N قرار دهیم، می‌توان آن فرمول را برای خانوادهٔ یک پارامتری خطوط مستقیم واصل ۱ و N به کار برد. چون در آن صورت دیفرانسیلهای dx و dy در امتداد C صفر می‌گردند، نتیجه می‌شود که دیفرانسیل تابع $I(\tau)$ در امتداد کمان $E_{۱۲}$ برابر است با

$$dI = \frac{dx + pdy}{\sqrt{۱ + p^۲}} \Big|^۲$$

که در آن منظور از خط عمودی آن است که مقدار این عبارت در نقطهٔ ۲ مد نظر است. چون dI به ازای یک کمینه باید صفر شود، نتیجه می‌شود که در نقطهٔ ۲، dx و dy، دیفرانسیلهای N، و p، شیب $E_{۱۲}$، در شرط $dx + pdy = ۰$ صدق می‌کنند و از این رو این دو خم باید با زاویهٔ قائمه همدیگر را قطع کنند.

حتی پاره‌خط مستقیمی که از ۱ می‌گذرد و N را با زاویهٔ قائمه قطع می‌کند، ممکن است کوتاهترین کمان واصل ۱ و N نباشد. به کمک ویژگی مشهور ریسمانی گستردهٔ[۶] N نیز می‌توان این مطلب را مشاهده کرد. بخشهایی از خطوط راست عمود بر N که توسط N و گستردهٔ آن G بریده می‌شوند، خانواده‌ای تشکیل می‌دهند که می‌توان فرمول (۸) صفحهٔ ۲۶ را برای آن به کار برد. اگر در آن فرمول به جای C، G و به جای D، N قرار دهیم،

$$I(E_{۵۶}) - I(E_{۳۲}) = I^*(N_{۲۶}) - I^*(G_{۳۵}).$$

اما مقادیر انتگرالهای طرف دوم این فرمول برابرند با

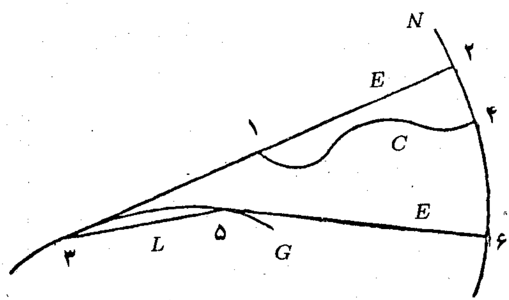
$$I^*(N_{۲۶}) = \int_{s_۱}^{s_۲} \cos\theta ds = ۰, \qquad I^*(G_{۳۵}) = I(G_{۳۵})$$

۶) گستردهٔ یک خم مفروض، خمی است که خطوط مماس بر آن بر خم اصلی عمود باشند.

زیرا در امتداد N، که خطوط راست این خانواده آن را با زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند، داریم $\cos\theta = ۰$ و در امتداد پوش G که این خطوط بر آن مماسند، داریم $\cos\theta = ۱$. از این رو از معادلهٔ ماقبل آخر، فرمول زیر را به دست می‌آوریم

$$I(E_{۳۲}) = I(G_{۳۵}) + I(E_{۵۶}).$$

این همان ویژگی ریسمانی گسترده است، چون ایجاب می‌کند که طولهای کمانهای $E_{۳۲}$ و $G_{۳۵} + E_{۵۶}$ برابر باشند، و از این رو نقطهٔ ۶، انتهای آزاد فنری که به نقطهٔ ۳ متصل شده و می‌تواند حول پوش G بپیچد، خم N را رسم خواهد کرد.



شکل۶

حال دیگر روشن است که اگر $E_{۱۲}$ در نقطهٔ ۳ با G، گستردهٔ N، در تماس باشد نمی‌تواند کوتاهترین خط از ۱ به N باشد، زیرا در آن صورت طول کمان مرکب $E_{۱۳} + G_{۳۵} + E_{۵۶}$ با طول $E_{۱۲}$ برابر می‌شود و کمان $E_{۱۳} + L_{۳۵} + E_{۵۶}$ که با پاره‌خط $L_{۳۵}$ تشکیل شده است کوتاهتر از $E_{۱۲}$ می‌شود. پس نتیجه می‌گیریم که

اگر بنا باشد کمان $E_{۱۲}$ که خم N را در نقطهٔ ۲ قطع می‌کند، کوتاهترین کمانی باشد که ۱ را به N وصل می‌کند، باید خط راستی باشد که در نقطهٔ ۲ بر N عمود است، و هیچ نقطهٔ تماسی با G، گستردهٔ N، ندارد.

باید به این حالت خاص نیز توجه کرد که ممکن است گستردهٔ G در نقطهٔ ۳ هیچ شاخه‌ای نداشته باشد که به سمت نقطهٔ ۲ امتداد یابد. وقتی N یک دایره است و گستردهٔ G، به یک نقطه تبه می‌شود یا وقتی گسترده در نقطهٔ ۳ گوشه‌ای دارد که جهت آن به سمت نقطهٔ ۲ است، چنین حالتی رخ می‌دهد. در این گونه موارد، برهان فوق‌الذکر دیگر به کار نمی‌آید، با این حال هنوز هم می‌توان ثابت کرد که وقتی $I(E_{۱۲})$ کمینه است، نقطهٔ ۳ نمی‌تواند بین ۱ و ۲ واقع گردد و فقط وقتی می‌تواند بر نقطهٔ ۱ منطبق شود که گستردهٔ G دارای هیچ شاخه‌ای که به سمت نقطهٔ ۲ امتداد یابد نباشد.

می‌توان به جست و جو برای یافتن ویژگیهای مشخصهٔ دیگر کوتاهترین کمان واصل نقطهٔ ۱ به خم N تا بی‌نهایت ادامه داد، اما اگر بتوانیم ثابت کنیم همان ویژگیهایی که قبلاً یافتیم کمینه را نیز تضمین می‌کنند پسندیده‌تر خواهد بود. از شکل ۶ صفحهٔ ۳۲ بسادگی نتیجه می‌گیریم که اگر نقطهٔ انتهایی ۱ بین ۳ و ۲ قرار گیرد، ناحیه‌ای چون F از صفحه ملحق به $E_{۱۲}$ وجود دارد که به طور ساده با خطوط عمود بر N در همسایگی $E_{۱۲}$ پوشیده می‌شود. برهان تحلیلی این گزاره در حالت کلی‌تر در بند ۶۰ صفحهٔ ۱۵۶ داده خواهد شد، ولی فعلاً به استنباط شکلی آن بسنده می‌کنیم. ناحیهٔ F که بدین صورت با خطوط عمود بر N پوشیده می‌شود میدانی از نوع یاد شده در بند ۱۳ صفحهٔ ۲۷ به‌وجود می‌آورد. انتگرال I^* که در انتگرالده آن $p(x,y)$، تابع شیب میدان قرار داده شده است مستقل از مسیر است و در امتداد پاره‌خط مستقیم $E_{۱۲}$ در میدان، مقدارش با مقدار I برابر است. به‌علاوه روی هر کمانی از N مقدارش صفر است، زیرا خطوط مستقیم میدان همگی بر N عمودند و بنابراین انتگرالده I^* در امتداد آن خم متحد با صفر می‌شود. از این رو برای کمان دلخواه $C_{۱۴}$ در F که همانند شکل ۶ صفحهٔ ۳۱، ۱ را به N وصل می‌کند داریم

$$I(E_{۱۲}) = I^*(E_{۱۲}) = I^*(C_{۱۴} + N_{۴۲}) = I^*(C_{۱۴}),$$

و اختلاف بین طولهای $C_{۱۴}$ و $E_{۱۲}$ برابر است با

$$I(C_{۱۴}) - I(E_{۱۲}) = I(C_{۱۴}) - I^*(C_{۱۴}) = \int_{s_۱}^{s_۲} (۱ - \cos\theta) ds.$$

مانند بند قبل می‌توانیم ثابت کنیم که این تفاضل مثبت است، مگر آنکه $C_{۱۴}$ با $E_{۱۲}$ یکی شود، و بنابراین قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم:

برای پاره‌خط مستقیم $E_{۱۲}$ که در نقطهٔ ۲ بر N عمود است و با G، گستردهٔ N، هیچ تماسی ندارد، یک همسایگی چون F وجود دارد که در آن $E_{۱۲}$ از هر کمان دیگری که ۱ را به N وصل می‌کند کوتاهتر است.

اگر چه در اینجا به این مطلب نخواهیم پرداخت، می‌توان ثابت کرد که وقتی نقطهٔ ۳ بر ۱ منطبق می‌شود و گستردهٔ G هیچ شاخه‌ای ندارد که از ۳ به سمت نقطهٔ ۲ تمدید یابد، کمان $E_{۱۲}$ باز هم ویژگی کمینه‌ای خود را حفظ می‌کند و تنها مورد استثنا وقتی است که N دایره است. اگر N دایره باشد و ۱ مرکز آن، طول همهٔ شعاعها مساوی است و می‌توان نشان داد که شعاعها از خمهای دیگری که ۱ را به N وصل می‌کنند کوتاهترند.

۱۵. کوتاهترین کمان از یک نقطه به یک بیضی.

کاربرد جالبی از نتایج بند قبل، مسئلهٔ تعیین کوتاهترین خمی است که نقطهٔ مفروض ۱ را به یک بیضی با معادلات پارامتری

$$x = a\cos t, \qquad y = b\sin t \qquad (۰ \le t \le ۲\pi).$$

وصل می‌کند. چون تابع

$$\phi(t) = \sqrt{(x_۱ - a\cos t)^۲ + (y_۱ - b\sin t)^۲},$$

که فاصله از نقطهٔ ۱ تا یک نقطهٔ متحرک روی بیضی را نشان می‌دهد، باید در مقداری چون $t_۲$ در بازهٔ $۰ \le t \le ۲\pi$، یعنی در نقطه‌ای چون ۲ روی بیضی،

کمینه شود به وجود کوتاهترین خم مذکور اطمینان داریم. آنگاه خط راست $E_{۱۲}$ که ۱ را به ۲ وصل می‌کند کوتاهتر از هر خط راست دیگری است که از ۱ به بیضی می‌پیوندد. اگر $C_{۱۴}$ خم دیگری باشد که ۱ را به نقطهٔ ۴ روی بیضی وصل کند، بین طولهای خطوط راست $E_{۱۲}$، $E_{۱۴}$، و طول خم $C_{۱۴}$ روابط زیر برقرار است

$$I(E_{۱۲}) \leq I(E_{۱۴}) < I(C_{۱۴})$$

برای اینکه کوتاهترین کمان $E_{۱۲}$ را به‌طور صریحتر مشخص سازیم، گستردهٔ بیضی را در نظر می‌گیریم. شعاع انحنای بیضی برابر است با

$$R = \frac{(x'^{۲} + y'^{۲})^{\frac{۳}{۲}}}{x'y'' - x''y'} = \frac{۱}{ab}(a^{۲} \sin^{۲} t + b^{۲} \cos^{۲} t)^{\frac{۳}{۲}},$$

و معادلات گسترده عبارتند از

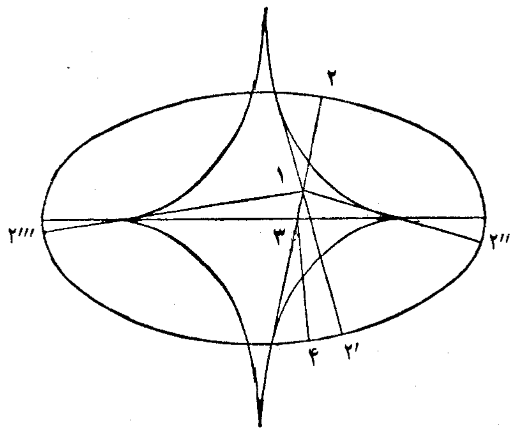
$$\zeta = x - R\sin\tau = \frac{a^{۲} - b^{۲}}{a} \cos^{۳} t,$$

$$\eta = y + R\cos\tau = \frac{b^{۲} - a^{۲}}{b} \sin^{۳} t, \qquad (۱۲)$$

که در آن (ζ, η) نقطهٔ متحرک روی گسترده است و τ زاویهٔ بین محور x و مماس بر بیضی در نقطه‌ای با مقدار پارامتری t است. گسترده ظاهر آشنایی دارد که در شکلهای ۷ و ۸ نشان داده شده است. واضح است که تعداد عمودهایی که می‌توان از ۱ بر بیضی رسم کرد با تعداد مماسهایی که از ۱ بر گسترده رسم می‌شود برابر است.

وقتی نقطهٔ ۱ درون گسترده است، همان‌طور که در شکل ۷ نشان داده شده است چهار عمود وجود دارد که از آن می‌گذرند و از اینها فقط پاره‌خطهای $E_{۱۲}$ و $E_{۱۲'}$ می‌توانند کوتاهترین فاصله باشند، زیرا دو تای دیگر بین ۱ و بیضی با گسترده نقطهٔ تماس دارند. نیز می‌دانیم که هر یک از کمانهای $E_{۱۲}$ و $E_{۱۲'}$ یک

کمینهٔ نسبی است، به این معنا که هر کدام یک همسایگی چون F دارد که دست کم در آن همسایگی از هر کمان دیگری که ۱ را به بیضی وصل می‌کند کوتاهتر است. یکی از این دو کمان باید از همهٔ کمانهایی که ۱ را به بیضی وصل می‌کنند کوتاهتر باشد یا به اصطلاح کمینهٔ مطلق باشد و از شکل ۷ بسادگی می‌بینیم که این، کمان $E_{۱۲}$ است.



شکل۷

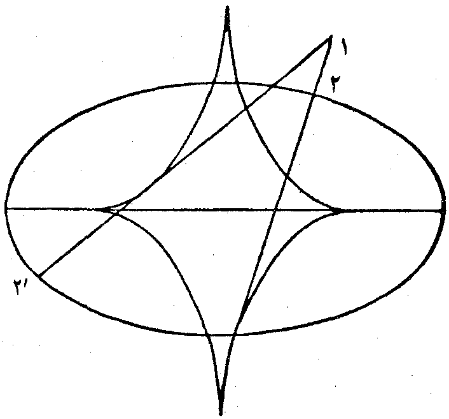
گزارهٔ اخیر را صریحتر هم می‌شود ثابت کرد. فقط باید توجه کرد که در شکل ۷ طول عمود $E_{۳۴}$ که از نقطهٔ ۳، محل برخورد $E_{۱۲}$ با محور x، رسم می‌شود بنابر تقارن با طول $E_{۳۲}$ برابر است. خط شکستهٔ $E_{۳۱} + E_{۱۳}$ درون میدانی چون F از خطوط عمود حول $E_{۳۴}$ که برهان کفایت بند پیش را در آن انجام دادیم قرار می‌گیرد و بنابراین رابطهٔ

$$I(E_{۳۱}) + I(E_{۱۲'}) > I(E_{۳۴}) = I(E_{۳۱}) + I(E_{۱۲})$$

را داریم که نشان می‌دهد $I(E_{۱۲'})$ از $I(E_{۱۲})$ بزرگتر است.

اما اگر نقطهٔ ۱ خارج گسترده باشد، همان‌طور که در شکل ۸ نشان داده شده

است، از آن نقطه دو عمود بر بیضی رسم می‌شود. فقط یکی از این دو، یعنی همان پاره‌خط $E_{۱۲}$ در شکل، کمینهٔ نسبی را به‌دست می‌دهد و در آن صورت باید کمینهٔ مطلق نیز باشد.

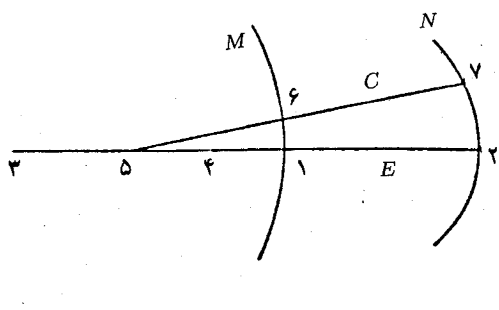


شکل۸

از این نتایج معلوم می‌شود که محور x، روی هر یک از خطوط عمود بر بیضی نقطه‌ای را ثبت می‌کند که بخشهایی از عمود که در بالای آن واقع می‌شوند، دیگر یک کمینهٔ مطلق را به دست نمی‌دهند. وقتی نقطهٔ ۱ مفروض باشد، کوتاهترین خط از آن نقطه به بیضی، پاره‌خط عمود یکتای گذرا از آن نقطه است که هیچ تماسی با گسترده ندارد و محور x را قطع نمی‌کند. وقتی نقطهٔ ۱ روی محور x یا روی گسترده است، چند حالت خاص وجود دارد که خواننده بسهولت آنها را برای خود تحلیل خواهد کرد. بویژه دقت کنیم که روی دو خط عمود بر دو انتهای محور اصلی بیضی، گسترده دارای شاخه‌هایی است که از بیضی دور می‌شوند. این مثالی است از شکل خاص گستردهٔ G که در بند قبل به آن اشاره شد.

۱۶. کوتاهترین کمان واصل دو خم. با در دست داشتن نتایج بندهای قبل، حل مسئلهٔ تعیین کوتاهترین فاصلهٔ بین دو خم، چندان مشکل نیست. فرض کنید M و N دو خم مفروض باشند که کمان سوم $E_{۱۲}$، همانند شکلهای ۹ و ۱۰، آنها را به ترتیب در نقاط ۱ و ۲ قطع کند. اگر $E_{۱۲}$ فاصلهٔ کمینه از M به N را به دست دهد، باید خط مستقیمی باشد که در نقاط تلاقی ۱ و ۲ بر آنها عمود است، چه بدیهی است که در بین کمانهایی که M را به ۲ یا N را به ۱ وصل می‌کنند، $E_{۱۲}$ باید کمینه باشد.

با این حال شرط دیگری روی انحناهای M و N در نقاط ۱ و ۲ لازم است. فرض کنید نقاط ۳ و ۴ به ترتیب مراکز انحنای M و N روی عمود مشترکشان، E، باشند. آنگاه شرط لازم جدید آن است که این نقاط و نقاط ۱ و ۲ باید به ترتیب دوری ۴۳۱۲ روی خط راست E قرار گیرند و هیچ انطباقی مجاز نیست، جز اینکه ممکن است ۳ روی ۴ بیفتد. منظور از ترتیب دوری، ترتیب این نقاط است بر روی خط E، اگر فرض کنیم دو انتهای بی‌نهایت خط به هم پیوند خورده یک کمان بسته به وجود آورده‌اند.



شکل۹

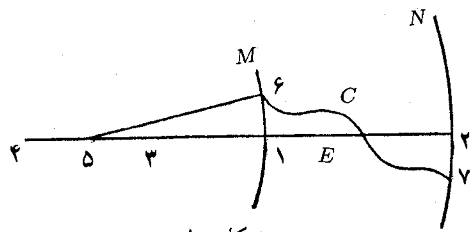
برای اثبات شرط لازم فوق‌الذکر فرض کنید همان‌طور که در شکل ۹ نشان داده شده است، نقطهٔ ۴ طوری روی پاره‌خط ۳۱۲ قرار گرفته است که ترتیب

دوری این چهار نقطه به صورت ۴۳۱۲ نیست. فرض کنید نقطهٔ ۵، طوری روی ۳۱۲ انتخاب شده است که نه ۱ در بازهٔ ۵۳ قرار می‌گیرد نه ۴. آنگاه بنابر قضیهٔ صفحهٔ ۳۲، در هر همسایگی $E_{۵۲}$ مثل F ، کمانی چون $C_{۵۷}$ وجود دارد که طولش از طول $E_{۵۲}$ کمتر است، زیرا نقطهٔ ۴، مرکز انحنای N، بین ۵ و ۲ واقع می‌شود. از آن سو، وقتی همسایگی F به اندازهٔ کافی کوچک است، قطعهٔ $C_{۵۶}$ از این کمان از $E_{۵۱}$ طویلتر است، زیرا بنابر قضیهٔ صفحهٔ ۳۴، نقطهٔ ۵ بین ۱ و ۳، مرکز انحنای M، قرار می‌گیرد. اگر نابرابریهای

$$I(C_{۵۶}) + I(C_{۶۷}) < I(E_{۵۱}) + I(E_{۱۲}), \qquad I(C_{۵۶}) \geq I(E_{۵۱})$$

را که مبین روابط پیشگفته‌اند از یکدیگر کم کنیم نتیجه می‌شود که $C_{۶۷}$ از $E_{۱۲}$ کوتاهتر است و از این رو در این حالت $E_{۱۲}$ نمی‌تواند کمینه را به دست دهد.

اگر نقاط ۳ و ۴ منطبق شوند، کمان $E_{۱۲}$ ممکن است کوتاهترین کمان واصل M و N باشد یا نباشد. در این حالت، دستیابی به نتیجه به بررسی مفصلتری از آنچه در اینجا ارائه خواهیم کرد نیازمند است.



شکل ۱۰

اکنون مطابق شکل ۱۰ فرض می‌کنیم که این چهار نقطه به ترتیب مطلوب ۴۳۱۲ روی E واقع شده و ۴ متمایز از ۳ باشد و بار دیگر فرض کنید که نقطهٔ ۵ را به‌طور دلخواه بین ۴ و ۳ انتخاب کرده‌ایم. بنابر قضیهٔ صفحهٔ ۳۴، در یک همسایگی به‌طور مناسب کوچک $E_{۵۲}$ مثل F، طول $E_{۵۲}$ از طول هر کمان دیگری که ۵ را به N وصل می‌کند کوتاهتر است. فرض کنید $C_{۶۷}$ کمان دلخواهی در F باشد که M و N را به ترتیب در ۶ و ۷ قطع می‌کند. از آنجا که نقطهٔ ۳، مرکز

انحنای M، بین ۵ و ۱ است می‌توانیم به کمک یک کمان $C_{۵۶}$ که از $E_{۵۱}$ طویلتر نیست، $C_{۶۷}$ را به نقطهٔ ۵ گسترش دهیم. اگر $C_{۶۷}$ همان $E_{۱۲}$ نباشد،

$$I(C_{۵۶}) + I(C_{۶۷}) > I(E_{۵۱}) + I(E_{۱۲}), \qquad I(C_{۵۶}) \leq I(E_{۵۱}).$$

اگر این نابرابریها را از هم کم کنیم، نتیجه می‌شود که طول هر کمان $C_{۶۷}$ در F که M را به N وصل می‌کند، از طول $E_{۱۲}$ کوتاهتر نیست. بنابراین نتایجی که به دست آورده‌ایم از این قرارند:

کوتاهترین کمانی که دو خم M و N را به هم وصل می‌کند، باید خط مستقیم $E_{۱۲}$ باشد که در نقاط انتهایی آن، ۱ و ۲ بر این خمها عمود است. نقاط ۳ و ۴ به ترتیب مراکز انحنای M و N روی E و نقاط ۱ و ۲ باید به ترتیب دوری ۴۳۱۲ قرار گیرند و هیچ انطباقی مجاز نیست جز اینکه ممکن است ۴ روی ۳ بیفتد.

اگر کمانی چون $E_{۱۲}$ این ویژگیها را دارا باشد و افزون بر آن ۴ متمایز از ۳ باشد، یک همسایگی از $E_{۱۲}$ مثل F وجود دارد که طول $E_{۱۲}$ مطمئناً از طول هر کمان دیگری در F که M را به N وصل می‌کند کمتر است.

فصل ۳

مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان

۱۷. اهمیت تمثیلی این مسئله. مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان از نظر تاریخی مهمترین مسئله در بین مسائل خاص مذکور در فصل ۱ است، زیرا همان‌طور که آنجا هم دیدیم، نخستین عامل محرک برای تحقیق سازمان یافته در حساب تغییرات بود. از زمان برادران برنویی تاکنون، نویسندگان این موضوع، این مسئله را مرتب به‌عنوان یک مثال به‌کار می‌برده‌اند و از جنبه‌های بسیاری، عالیترین نمونه است. متأسفانه این مسئله به صورتی که در ابتدا توسط برنویی‌ها مطرح شد به استفاده از یک شرط لازم مهم برای کمینه نیازی نداشت. این مطلب را نخستین بار ژاکوبی[1] در سال ۱۸۳۷، یعنی یک سده پس از آغاز مطالعهٔ سازمان یافتهٔ حساب تغییرات، بیان کرد. [۶] حالت خاص این شرط، قید واقع بر مرکز انحنا در مسئلهٔ یافتن کوتاهترین کمان از یک نقطه به یک خم است که در قضیهٔ صفحهٔ ۳۲ فصل قبل بیان شد. شاید در ابتدا عجیب باشد که چرا اهمیت چنین نمونهٔ ساده‌ای از این شرط از چشم محققان اولیهٔ حساب تغییرات مخفی مانده است، اما بررسی مقالات قدیمی‌تر بزودی مشکلات عظیم ناشی از کاربرد روشهای اولیه را معلوم می‌سازد. در سراسر قرن هجدهم اکثر محققان حساب تغییرات، پس از یافتن شکلها یا حتی در بسیاری از موارد فقط

1) Jacobi

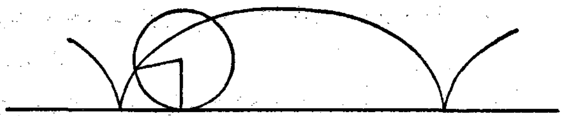
معادلات دیفرانسیل خمهای کمینه‌سازی که در جست و جویشان بودند، دست از کار می‌کشیدند.

طبیعی است که در نگاه اول فرض کنیم خط مستقیم مسیری است که یک ذره در کوتاهترین زمان از نقطهٔ مفروض ۱ به نقطهٔ دوم ۲ بر روی آن سقوط می‌کند، زیرا خط مستقیم کوتاهترین فاصلهٔ بین این دو نقطه است، اما قدری تأمل فوراً شخص را متقاعد می‌کند که این‌طور نیست. یوهان برنویی وقتی در سال ۱۶۹۶، مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان را به‌طور صوری مطرح کرد، خوانندگان خود را از چنین تصوری صریحاً برحذر داشت. این حدس که خم تندترین سقوط کمانی از یک دایره است معقولتر است، زیرا این اندیشه را که شیب و سرعت زیاد در آغاز سقوط موجب کاهش زمان نزول روی کل مسیر می‌گردد تأیید می‌کند. این حدس در یادداشتهای گالیله دربارهٔ مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان بیان شده بود. اما معلوم می‌شود که این کیفیت نیز می‌تواند اغراق آمیز باشد، در واقع میزان دقیق شیب لازم در آغاز حرکت را فقط با بررسی مناسب ریاضی می‌توان تعیین کرد.

در بررسی این مسئله در صفحات آتی، نخستین کاری که انجام می‌دهیم اثبات این مطلب است که خم کوتاهترین زمان واصل دو نقطهٔ مفروض باید چرخزاد باشد. با چرخزاد آشنا هستید. چرخزاد مکان هندسی قوسدار نقطه‌ای بر روی لبهٔ چرخی است که روی یک خط افقی می‌غلتد؛ مثل شکل ۱۱. بنابراین خم کوتاهترین زمان باید متشکل از قسمتی از وارون یافتهٔ یکی از این قوسها باشد و خط زیری که دایره روی آن می‌غلتد باید در ارتفاع کاملاً معینی بالای نقطهٔ مفروض شروع سقوط قرار گیرد.

پس از اثبات این مطالب، با این مسئله مواجه می‌شویم که آیا اصلاً چرخزادی وجود دارد که دو نقطهٔ دلخواه را به هم وصل کند یا نه. خوشبختانه تغییری که شوارتس[2] (۱۸۴۵-۱۹۲۳) در روش منسوب به برادران برنویی صورت داد، ما را قادر به اثبات این مطلب می‌سازد که همواره می‌توان دو نقطه را با یک و فقط یک

2) Schwarz



شکل۱۱

چرخزاد از نوع مطلوب به هم متصل کرد.

وقتی این نتایج حاصل شد، ریاضیدانان قرن هجدهم به پیشرفت خود قانع شدند، ولی ما به این سادگیها رضایت نمی‌دهیم چون می‌دانیم که در مسائل دیگر حساب تغییرات، کمان کمینه‌ساز به شرایط دیگری هم نیازمند است که ماهیتی کاملاً متفاوت با آنهایی دارند که تاکنون بیان کرده‌ایم. اما برهان کفایت تردیدهای ما را دربارهٔ این مسئلهٔ خاص برطرف خواهد کرد. این برهان به‌طور قطعی ثابت می‌کند که زمان فرود از نقطهٔ مفروض ۱ به نقطهٔمفروض ۲ روی چرخزادی که به‌طور مناسب اختیار شده است از زمان فرود روی هر خم دیگری که آن دو نقطه را به هم وصل می‌کند کوتاهتر است. روشی که به‌کار می‌رود مجدداً همان روش وایرشتراس است که حالت خاصی از آن، پیش از این، در بند ۱۳ صفحهٔ ۲۷ فصل قبل بررسی شد. استدلالی که در آنجا داده شد و آنکه در مورد مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان خواهیم دید، نمونه‌های عالی برهان مؤثر در مسائل کلی‌تر حساب تغییرات هستند.

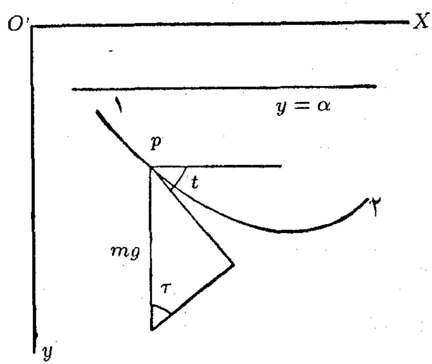
۱۸. بیان تحلیلی مسئله. برای آنکه مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان را به‌طور هوشمندانه بررسی کنیم، ابتدا باید انتگرالی را که زمان سقوط یک ذره تحت اثر جاذبهٔ زمین در امتداد خم دلخواه واصل نقاط ثابت ۱ و ۲ نشان می‌دهد، برای خود استنتاج کنیم. قرار می‌گذاریم v_1، سرعت اولیه در نقطهٔ ۱، از پیش مفروض باشد و ذره بدون اصطکاک و مقاومت

محیط اطراف، در امتداد خم سقوط کند. اگر اثر اصطکاک یا مقاومت محیط را نیز به حساب آوریم، مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان، بسیار پیچیده خواهد شد.

فرض کنید m جرم ذرهٔ متحرک P در شکل ۱۲ و s فاصله‌ای باشد که در مدت زمان t از نقطهٔ ۱ در امتداد خم نزول C سقوط کرده است. به‌منظور آسانتر کردن تحلیل خود، مطابق شکل، جهت مثبت محور y را به سمت پایین اختیار می‌کنیم. نیروی جاذبهٔ عمودی مؤثر روی P برابر است با حاصل ضرب جرم m در شتاب جاذبهٔ g، و تنها نیروی مؤثر روی P در جهت خط مماس بر خم، برابر است با $mg\sin\tau$، یعنی تصویر این نیروی جاذبهٔ عمودی روی آن خط. مؤلفهٔ نیرو در امتداد مماس را می‌توان با ضرب کردن جرم ذره در شتابش در امتداد خم، یعنی md^2s/dt^2، نیز محاسبه کرد. اگر این دو مقدار را مساوی هم قرار دهیم، معادلهٔ

$$\frac{d^2s}{dt^2} = g\sin\tau = g\frac{dy}{ds}$$

را به دست می‌آوریم که در آن عامل مشترک m حذف شده است و از فرمول



شکل ۱۲

معروف حسابان، $\sin\tau = \frac{dy}{ds}$، استفاده کرده‌ایم.

برای انتگرال‌گیری از این معادله از روش مرسوم استفاده و هر طرف را در $\frac{ds}{dt}$ ۲ ضرب می‌کنیم. بدین ترتیب پاد مشتق دو طرف براحتی محاسبه می‌شود و چون فقط در یک ثابت می‌توانند با هم اختلاف داشته باشند، داریم

$$(\frac{ds}{dt})^{۲} = ۲gy + c \qquad (۱)$$

اگر به یاد بیاوریم که مقادیر y و $v = \frac{ds}{dt}$ در ۱، نقطهٔ آغاز سقوط، به ترتیب عبارتند از $y_{۱}$ و $v_{۱}$، آنگاه مقدار ثابت c را می‌توان تعیین کرد. به ازای $t = ۰$، معادلهٔ اخیر تبدیل می‌شود به

$$v_{۱}^{۲} = ۲gy_{۱} + c.$$

به کمک مقدار c از این معادله، و نماد

$$\alpha = y_{۱} - \frac{v_{۱}^{۲}}{۲g}, \qquad (۲)$$

معادلهٔ (۱) تبدیل می‌شود به

$$(\frac{ds}{dt})^{۲} = ۲gy - ۲gy_{۱} + v_{۱}^{۲} = ۲g(y-\alpha). \qquad (۳)$$

اکنون با انتگرال‌گیری، نتیجه‌ای را که به دنبال آن هستیم به دست می‌آوریم:

زمان T لازم برای سقوط ذره‌ای که در امتداد یک خم، با سرعت اولیهٔ $v_{۱}$، از نقطهٔ ۱ به ۲ سقوط می‌کند از انتگرالهای

$$T = \frac{۱}{\sqrt{۲g}} \int_{۰}^{l} \frac{ds}{\sqrt{y-\alpha}} = \frac{۱}{\sqrt{۲g}} \int_{x_{۱}}^{x_{۲}} \sqrt{\frac{۱+y'^{۲}}{y-\alpha}}\, dx \qquad (۴)$$

به دست می‌آید که در آن l طول خم است و $\alpha = y_{۱} - \frac{v_{۱}^{۲}}{۲g}$.

روشن است کمانی که یکی از انتگرالهای مبین T را کمینه می‌سازد، وقتی عامل $\text{۱}/\sqrt{\text{۲}g}$ حذف شود، باز هم آن انتگرال را کمینه خواهد ساخت و برعکس. بنابراین بیایید برای انتگرالی که می‌خواهیم کمینه کنیم و انتگرالده آن، نمادهای زیر را به کار بریم

$$I \doteq \int_{x_\text{۱}}^{x_\text{۲}} f(y, y')dx, \qquad f(y, y') = \sqrt{\frac{\text{۱} + y'^\text{۲}}{y - \alpha}} \qquad (\text{۵})$$

چون مقدار تابع $f(y, y')$ به ازای $y = \alpha$ نامتناهی و وقتی $y < \alpha$، موهومی است، باید خمهایمان را به بخشی از صفحه که زیر خط $y = \alpha$ در شکل ۱۲ قرار دارد محدود کنیم. این مطلب قیدی بر مسئله قرار نمی‌دهد، زیرا معادلهٔ $v^\text{۲} = (\frac{ds}{dt})^\text{۲} = \text{۲}g(y - \alpha)$ که قبلاً به دست آوردیم نشان می‌دهد که ذره‌ای که با سرعت $v_\text{۱}$ در نقطهٔ ۱ روی خم شروع به حرکت می‌کند، وقتی به ارتفاع $y = \alpha$ روی خم می‌رسد می‌ایستد و هرگز نمی‌تواند از آن بالاتر رود. فعلاً این قید را روی خمهایمان قرار می‌دهیم که در نیم‌صفحهٔ $y > \alpha$ قرار گیرند. در بند بعد این فصل خواهیم دید که وقتی خمهایی را که با خط $y = \alpha$ نقطهٔ مشترک دارند پذیرفتنی می‌شماریم چه اتفاقی رخ می‌هد.

در بررسی مسائل کوتاهترین فاصله‌ها در فصل گذشته، خمهای مورد بحث را به شکل $y = y(x)(x_\text{۱} \leq x \leq x_\text{۲})$ در نظر گرفتیم که $y(x)$ پیوسته بود و بازه را هم می‌شد به بخشهایی تقسیم کرد که روی هرکدام از آنها $y'(x)$ پیوسته باشد. همواره فرض می‌کنیم که کمان پذیرفتنی در مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان علاوه بر اینکه این ویژگیها را داراست، این ویژگی اضافی را هم دارد که کاملاً در نیم‌صفحهٔ $y > \alpha$ قرار می‌گیرد. اما برای یک تابع پذیرفتنی، همواره تعریفی را که در صفحهٔ ۱۸ فصل قبل ارائه شد حفظ خواهیم کرد. بدین ترتیب، مسئله این است که بین کمانهای پذیرفتنی که نقاط ۱ و ۲ را به هم وصل می‌کنند، آن کمانی را بیابیم که انتگرال I را کمینه سازد.

۱۹. نخستین شرط لازم. مانند کاری که در مسائل تعیین کوتاهترین فاصله‌ها انجام دادیم، فرض می‌کنیم که کمان پذیرفتنی خاص $E_{۱۲}$ با معادلهٔ

$$y = y(x) \qquad (x_۱ \leq x \leq x_۲)$$

در واقع کمینهٔ انتگرال I را به‌دست می‌دهد و حالا سراغ معین کردن ویژگیهای آن می‌رویم. اگر $\eta(x)$ تابع پذیرفتنی باشد که $\eta(x_۱) = \eta(x_۲) = ۰$، آنگاه خانوادهٔ

$$y = y(x) + a\eta(x) \qquad (x_۱ \leq x \leq x_۲) \qquad (۶)$$

به ازای مقدار پارامتری $a = ۰$، $E_{۱۲}$ را در بر دارد و به ازای مقادیر کوچک a، به‌طور کامل از کمانهای پذیرفتنی که از نقاط ۱ و ۲ می‌گذرند تشکیل می‌شود. نباید a را خیلی بزرگ بگیریم وگرنه بخشی از خم متناظر آن در خانواده، در بالای خط $y = \alpha$ قرار می‌گیرد.

بین مقادیر انتگرال I در امتداد کمانهای خانوادهٔ (۶)، یعنی

$$I(a) = \int_{x_۱}^{x_۲} f(y + a\eta, y' + a\eta')dx \qquad (۷)$$

مقدار خاص $I(۰)$، که مقدار انتگرال در امتداد $E_{۱۲}$ است، باید کمینه باشد و بنابراین شرط لازم $I'(۰) = ۰$ را به‌دست می‌آوریم. مقدار $I'(۰)$ که با مشتق‌گیری از معادلهٔ (۷) نسبت به a و آنگاه قرار دادن $a = ۰$ یافت می‌شود، عبارت است از

$$I'(۰) = \int_{x_۱}^{x_۲} \{f_y\eta + f_{y'}\eta'\}\, dx, \qquad (۸)$$

که در آن f_y و $f_{y'}$ مشتقات جزئی $f(y, y')$ نسبت به آوندهای y و y'، که به کمان کمینه‌ساز $E_{۱۲}$ تعلق دارند، می‌باشند. اگر از فرمول سهل الوصول

$$\eta f_y = \frac{d}{dx}(\eta \int_{x_۱}^{x} f_y dx) - \eta' \int_{x_۱}^{x} f_y dx$$

و این واقعیت که $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$ استفاده کنیم، عبارت (۸) به این شکل درمی‌آید

$$I'(0) = \int_{x_1}^{x_2} \{f_{y'} - \int_{x_1}^{x} f_y dx\}\eta' dx\cdot$$

این عبارت باید به ازای هر خانواده‌ای از نوع (۶)، یعنی به ازای هر تابع پذیرفتنی $\eta(x)$ که $\eta(x_1) = \eta(x_2) = 0$، صفر شود و بار دیگر خود را در وضعیتی می‌یابیم که باید از لم اساسی صفحهٔ ۲۰ استفاده کنیم. از آن لم نتیجه می‌شود که

به ازای هر کمان کمینه‌ساز E_{12} باید ثابتی چون c موجود باشد که معادلهٔ

$$f_{y'} = \int_{x_1}^{x} f_y dx + c \tag{۹}$$

در هر نقطهٔ E_{12} برقرار باشد. روی هر زیرکمان E_{12} که مماس به‌طور پیوسته گردش می‌کند باید داشته باشیم

$$\frac{d}{dx} f_{y'} = f_y \tag{۱۰}$$

با مشتق‌گیری از معادلهٔ (۹) بسادگی می‌توان معادلهٔ اخیر را به دست آورد، زیرا روی یک زیر کمان E_{12} که مماس به‌طور پیوسته گردش می‌کند، تابع f_y پیوسته است و مشتق انتگرال موجود در (۹) برابر است با f_y.

معادلهٔ (۱۰) معادلهٔ دیفرانسیل مشهوری است که اویلر در سال ۱۷۴۴ به‌دست آورد و به افتخار او معادلهٔ دیفرانسیل اویلر نامیده می‌شود. [۷] جوابهای این معادله، فرین نامیده شده‌اند، چه آنها یگانه خمهایی هستند که انتگرال I را بیشینه یا کمینه یعنی فرینه می‌کنند. در صفحات آتی واژهٔ فرین را فقط برای آن جوابهای $y(x)$ که مماس پیوسته و مشتق دوم پیوسته دارند به‌کار خواهیم برد.

تاکنون هیچ فرضی مبنی بر وجود مشتق دوم $y''(x)$ در امتداد کمان کمینه‌ساز نکرده‌ایم. اما اگر وجود داشته باشد می‌توانیم مشتق‌گیریهای نشان داده شده در

معادلهٔ (۱۰) را انجام دهیم و به دست آوریم

$$\frac{d}{dx}f_{y'}-f_y=f_{y'y}y'+f_{y'y'}y''-f_y=0$$

که از آن نتیجه می‌شود که در امتداد یک کمان کمینه‌ساز با مشتق دوم $y''(x)$ داریم

$$\frac{d}{dx}(f-y'f_{y'})=y'(f_y-f_{y'y}y'-f_{y'y'}y'')=0$$

و از این رو

$$f-y'f_{y'}=\text{ثابت} \tag{۱۱}$$

استدلالی که معادلهٔ (۱۱) از آن به دست آمد، نه تنها برای تابع $f(y,y')=(1+y'^2)^{\frac{1}{2}}/(y-\alpha)^{\frac{1}{2}}$، تابع انتگرالده خاص مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان، بلکه برای تابع دلخواه $f(y,y')$ از دو متغیر y و y' که خود و مشتقاتش ویژگیهای پیوستگی مناسبی دارند نیز صادق است. همچنین بسادگی می‌توان ثابت کرد که برهانهای معادلات (۹) و (۱۰) نه تنها برای این حالت خاص، بلکه برای انتگرال کلی‌تر I که در فصل ۵ مورد بحث قرار می‌گیرد و انتگرالده آن تابعی است چون $f(x,y,y')$ از سه متغیر x، y، و y'، بدون هیچ تغییری برقرار است. بنابراین روشن است که نتایج این بند کلیت دارند و می‌توان آنها را برای ردهٔ وسیعی از مسائل حساب تغییرات به‌کار برد. البته نباید انتظار داشت که وقتی در تابع انتگرالده، x وجود دارد باز هم معادلهٔ (۱۱) برقرار باشد، زیرا در مشتق‌گیریهایی که منجر به یافتن آن شد، فرض بر این بود که تابع f فقط متغیرهای y و y' را دارد.

۲۰. کاربرد مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان. در مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان که حالت خاص به شمار می‌آید، انتگرالده $f(y,y')$ و مشتقات جزئی آن براحتی به دست می‌آیند

$$f=\sqrt{\frac{1+y'^2}{y-\alpha}},\; f_y=-\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1+y'^2}{(y-\alpha)^3}} \tag{۱۲}$$

$$f_{y'} = \frac{y'}{\sqrt{(y-\alpha)(1+y'^2)}},$$

و بنابراین شرط (۹) بند پیش را که باید در امتداد هر کمان کمینه‌ساز E_{12} برقرار باشد، می‌توان به این صورت بیان کرد

$$\frac{y'}{\sqrt{1+y'^2}} = \sqrt{y-a}\left\{c - \frac{1}{2}\int_{x_1}^{x}\sqrt{\frac{1+y'^2}{(y-\alpha)^3}}dx\right\}.$$

طرف دوم این معادله که آن را با $\phi(x)$ نشان می‌دهیم، تابعی پیوسته از x است، زیرا هم $(y-\alpha)$ و هم انتگرال موجود در این معادله در امتداد E_{12} پیوسته‌اند. اگر این معادله را بر حسب y' حل کنیم درمی‌یابیم که

$$y' = \frac{\phi}{\sqrt{1-\phi^2}}$$

نیز پیوسته است. حال اگر با در دست داشتن این نتیجه، بار دیگر به معادلهٔ ماقبل آخر باز گردیم، مشاهده می‌کنیم که مشتق $-\phi(x)$ طرف دوم آن معادله - نیز پیوسته است، زیرا از آنجا که y پیوسته است و مشتق پیوسته دارد، $(y-\alpha)$ و انتگرال موجود در آن معادله هم چنین هستند. از این رو، y' در معادلهٔ اخیر باید مشتق پیوسته داشته باشد و بنابراین نتیجهٔ زیر را به‌دست می‌آوریم:

در مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان، کمان کمینه‌ساز E_{12} که کاملاً زیر خط $y=\alpha$ واقع می‌شود نمی‌تواند گوشه داشته باشد و باید انحنای آن پیوسته باشد. به بیان تحلیلی، یعنی $y'(x)$ و $y''(x)$ موجود و در امتداد E_{12} پیوسته‌اند.

اکنون چون می‌دانیم که $y''(x)$ در امتداد کمان کمینه‌ساز موجود است، می‌توانیم مطمئن باشیم که معادلهٔ ثابت$=f-y'f_{y'}$ که در بند قبل به دست آمد نیز در امتداد آن کمان برقرار است. اگر مقادیر f و مشتقش $f_{y'}$ در مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان را از (۱۲) در این معادله قرار دهیم، خواهیم داشت

$$f - y'f_{y'} = \frac{1}{\sqrt{(y-\alpha)(1+y'^2)}} = \frac{1}{\sqrt{2b}} \qquad (13)$$

که در آن مقدار ثابت برای سهولت به شکل $\frac{۱}{\sqrt{۲b}}$ انتخاب شده است.

خمهایی را که در معادلهٔ دیفرانسیل (۱۳) صدق می‌کنند، می‌توان به طریق مرسوم با حل آن بر حسب $y' = \frac{dy}{dx}$ و سپس جداسازی متغیرها پیدا کرد، با این حال اگر از تجربهٔ دیگران سود جسته متغیر جدید u را که با معادلهٔ

$$y' = -\tan\frac{u}{۲} = -\frac{\sin u}{۱+\cos u}. \qquad (۱۴)$$

تعریف می‌شود معرفی کنیم، راحت‌تر می‌توانیم آنها را بیابیم. بدین ترتیب به کمک عملیات سادهٔ مثلثاتی از معادلهٔ دیفرانسیل (۱۳) نتیجه می‌شود که در امتداد کمان کمینه‌ساز $E_{۱۲}$ باید داشته باشیم

$$y-\alpha = \frac{۲b}{۱+y'^{۲}} = ۲b\cos^{۲}\frac{u}{۲} = b(۱+\cos u),$$

$$\frac{dx}{du} = \frac{dx}{dy}\frac{dy}{du} = ۲b\cos^{۲}\frac{u}{۲} = b(۱+\cos u),$$

$$x = a + b(u+\sin u),$$

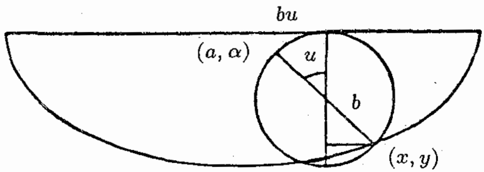
که معادلهٔ آخری با انتگرال‌گیری از معادلهٔ ماقبل آخر به دست می‌آید و a ثابت جدیدی است که در نتیجهٔ انجام این عمل به وجود می‌آید. در بند بعد نشان داده خواهد شد که خمهایی که در اولین و سومین معادله صدق می‌کنند، چرخزادهای مذکور در نتیجهٔ زیر هستند:

خمی که در امتداد آن، یک ذره با سرعت اولیهٔ $v_{۱}$ در نقطهٔ ۱، به نقطهٔ دوم ۲ سقوط می‌کند، لزوماً کمانی است با معادلات

$$x-a = b(u+\sin u), \qquad y-\alpha = b(۱+\cos u). \qquad (۱۵)$$

این معادلات نشان دهندهٔ مکان هندسی نقطهٔ ثابتی روی محیط یک دایره به شعاع b هستند وقتی دایره روی وجه پایینی خط $y = \alpha = y_{۱} - v_{۱}^{۲}/۲g$ می‌غلتد. این خم چرخزاد نامیده می‌شود.

۲۱. چرخزادها. اثبات این واقعیت که معادلات (۱۵)، چرخزادی از نوع یاد شده در قضیه را نشان می‌دهند، آسان است؛ زیرا فرض کنید مطابق شکل ۱۳، دایرهٔ به شعاع b در نقطه‌ای به مختصات (a, α) شروع به غلتیدن روی خط $y = \alpha$ کند. پس از گردشی به اندازهٔ زاویهٔ u رادیان، نقطهٔ تماس در فاصلهٔ bu از (a, α) واقع، و پایین‌ترین نقطه روی دایره به نقطهٔ (x, y) تبدیل می‌شود. اکنون با استفاده از شکل، براحتی می‌توان مقادیر x و y را بر حسب u محاسبه کرد. این مقادیر همانهایی هستند که با معادلات (۱۵) داده می‌شوند.

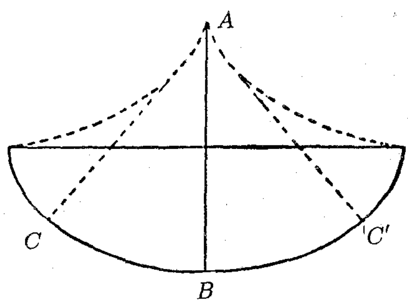


شکل۱۳

این واقعیت که خم تندترین سقوط باید یک چرخزاد باشد، نتیجه‌ای است که یاکوب و یوهان برنویی، آن را در سال ۱۶۹۷ کشف کردند و تقریباً همزمان تعدادی از ریاضیدانان دیگر نیز این مطلب را اظهار نمودند. چرخزاد و ویژگیهای برجستهٔ آن، موضوع بحثهای فراوانی در قرن هفدهم شده بود. بویژه هویگنس[۳] (۱۶۲۹ - ۱۶۹۵) نشان داده بود که گستردهٔ چرخزاد CC' در شکل ۱۴، چرخزادی است دقیقاً هم‌اندازهٔ آن و در محلی که در شکل با نقطه‌چین نشان داده شده قرارگرفته است و علاوه بر آن زمان فرود ذره‌ای که در نقطهٔ C از حال سکون شروع به حرکت و در امتداد چرخزاد به پایین‌ترین نقطهٔ آن، نقطهٔ B، سقوط می‌کند صرف‌نظر از محل نقطهٔ شروع C روی کمان چرخزادی، یکسان است. بنابر ویژگی ریسمانی

3) Huygens

گسترده که در صفحهٔ ۳۲ فصل قبل ثابت شد، اگر آونگی به طول $4b$، طوری در نقطهٔ A آویزان شود که ریسمان متصل به آن مجبور شود حول گستردهٔ نقطه‌چین شده بپیچد، آنگاه وزنهٔ آونگ روی کمان CC' از چرخزاد نوسان خواهد کرد. بنابر ویژگی یک‌زمانی هویگنس، دامنهٔ نوسان از C به C' هرقدر هم که بزرگ یا کوچک باشد، دورهٔ تناوب نوسان یکی خواهد بود. این موضوع کشف بسیار مهمی برای سازندگان ساعت به‌شمار می‌رفت، هرچند به‌ندرت می‌توان ابزاری را روی پیش بخاری منزل یافت که بر اساس این اصل ساخته شده باشد.



شکل۱۴

این ویژگیها و ویژگیهای دیگر چرخزاد تا پیش از انتهای قرن هفدهم کاملاً شناسایی شده بودند. این مطلب که چرخزاد، جواب مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان است نیز با تعجب و شگفتی مورد ملاحظهٔ برادران برنوییی قرار گرفته بود. ترجمهٔ نسبتاً آزادی از آنچه یوهان در این باره گفته، این‌گونه است: «انصافاً باید هویگنس را تحسین کنیم، چون او نخستین کسی بود که کشف کرد یک ذرهٔ سنگین، از هر نقطه‌ای روی یک چرخزاد حرکت خود را آغاز کند، مدت زمان سقوط آن تفاوتی نمی‌کند. ولی اگر بگوییم که این چرخزاد؛ یعنی خم همزمانی هویگنس، همان خم کوتاهترین زمان است که در پی آنیم حتماً از تعجب خشکتان خواهد زد.» یاکوب با بیانی سرشار از شور و احساس می‌نویسد: «بدین ترتیب برای این خم، که

بسیاری از ریاضیدانان بقدری آن را مورد تحقیق و تفحص قرار داده‌اند که گویی هیچ مطلب کشف نشده‌ای دربارهٔ آن باقی نمانده است، ویژگی جدیدی می‌یابیم. هرچند کشف این ویژگیها بار مسئولیت را از دوش قرنهای آینده برمی‌دارند ولی به هر حال این خم باید در انتهای این قرن به اوج تکامل برسد؛ قرنی که در ابتدای آن تولد این مسئله جشن گرفته شد و در میان تحقیقاتی که در خلال آن صورت پذیرفت، قرعهٔ فال به نام تمام ویژگیهای اندازه‌پذیر و بسیاری از مشخصه‌های زیبای دیگر زده شد.»

امروزه مطالب ریاضی با شور و احساس بیان نمی‌شود، اما دست کم در اندیشهٔ خود می‌توانیم در شادی برادران برنویی به‌خاطر کشف جالبشان شرکت جوییم. وقتی دربارهٔ مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان، شهودی فکر می‌کنیم روشن است که بسختی می‌توان قبول کرد خم تندترین سقوط خط‌مستقیم باشد، چون معلوم است که در امتداد خمی که شیب آغازی بیشتری دارد و سرعت اولیهٔ بیشتری به ذره می‌دهد، ذره سریعتر سقوط می‌کند. اما بسختی می‌توان پیش‌بینی کرد که برای پرهیز از شیب بسیار تدریجی نزدیک پایان سقوط، چه سراشیبی اولیه‌ای لازم است.

۲۲. چرخزاد یکتای گذرا از دو نقطه. در بند قبل دیدیم که کمان کمینه سازی که در جست و جوی آن هستیم، باید یکی از چرخزادهایی باشد که از غلتیدن دایره روی وجه پایینی خط $y = \alpha$ به‌وجود می‌آیند. ولی هنوز امکان یافتن چنین کمانی را که دو نقطهٔ دلخواه ۱ و ۲ را به هم وصل کند تضمین نکرده‌ایم. نمی‌توانیم مطمئن باشیم که چیزی مثل خم تندترین سقوط وجود دارد، مگر آنکه بتوانیم ثابت کنیم که این نقاط را می‌توان این‌گونه به‌هم متصل کرد. این موضوعی نیست که بشود از آن چشم پوشید، چون در مسئلهٔ تعیین رویهٔ دورانی با مساحت کمینه که در فصل بعد بررسی خواهد شد، آشکارتر رخ خواهد نمود. در آن مسئله می‌توان مکانهای موضعی نقاط ۱ و ۲ را طوری انتخاب کرد که هیچ کمانی وجود نداشته باشد که آنها را به هم وصل کند و به شکل $y = y(x)$

قابل بیان باشد. اما خوشبختانه در مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان می‌توانیم قضیهٔ زیر را ثابت کنیم:

از هر جفت نقاط ۱ و ۲ زیر خط $y = \alpha$، که روی یک خط عمودی قرار ندارند، یک و فقط یک چرخزاد می‌گذرد که از غلتیدن یک دایره روی وجه پایینی خط $y = \alpha$ ایجاد شده است.

در صورت لزوم همیشه می‌توانیم شماره‌گذاری نقاط ۱ و ۲ را طوری عوض کنیم که داشته باشیم $x_۱ < x_۲$. در بند بعد خواهیم دید که وقتی $x_۱ = x_۲$ که در این صورت نقاط ۱ و ۲ روی یک خط عمودی هستند، خم تندترین سقوط از یک نقطه به نقطهٔ دیگر، پاره‌خط راستی است که آنها را به هم وصل می‌کند.

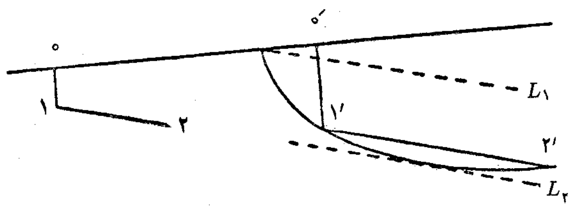
از دیدگاه تحلیلی، مسئله‌ای که در پیش‌رو داریم، عبارت است از تعیین چهار مقدار a، b، $u_۱$، و $u_۲$ که در چهار معادلهٔ زیر صدق کنند

$$x_۱ - a = b(u_۱ - \sin u_۱), \quad x_۲ - a = b(u_۲ + \sin u_۲), \tag{۱۶}$$

$$y_۱ - \alpha = b(۱ + \cos u_۱), \quad y_۲ - \alpha = b(۱ + \cos u_۲),$$

دو معادلهٔ نخست شرط عبور از نقطهٔ ۱ به ازای مقدار پارامتری $u_۱$ را بر چرخزاد تحمیل می‌کنند و دو معادلهٔ آخر معنای مشابهی برای $u_۲$ و نقطهٔ ۲ دارند. نویسندگان متعددی نشان داده‌اند که از نظر تحلیلی، این معادلات دارای جوابهای a، b، $u_۱$، و $u_۲$ هستند. [۸] در اینجا خود را متقاعد می‌سازیم که معادلات (۱۶) یک و فقط یک مجموعه جواب $(a, b, u_۱, u_۲)$ دارد یا به عبارت دیگر، چرخزادی یکتا از خانوادهٔ (۱۵) وجود دارد که از نقاط ۱ و ۲ می‌گذرد. این کار را به کمک استدلال هندسی منسوب به شوارتس، که توسیعی از استدلال خود برادران برنویی برای حالت خاص $v_۱ = ۰$ است، انجام خواهیم داد.

ابتدا مطابق شکل ۱۵ یکی از چرخزادهای (۱۵) را به دلخواه رسم کرده، آن را با خط $1'2'$ موازی با خط راست واصل ۱ و ۲ قطع می‌دهیم. اگر خط $1'2'$ را در حالی که همواره آن را موازی ۱۲ حفظ کرده‌ایم، از موقعیت L_1 به موقعیت مماسی L_2 حرکت دهیم، نسبت پاره خطهای $0'1'$ به $1'2'$ از صفر به بی‌نهایت افزایش می‌یابد و مقدار متناظر با نسبت ۰۱ به ۱۲ را فقط یک بار کسب می‌کند. در موقعیتی که برابری این نسبتها را به دست می‌دهد، طولهای $0'1'$ و $1'2'$ لزوماً به‌ترتیب با طولهای ۰۱ و ۱۲ برابر نیستند. اما با تغییر مقدار b، می‌توان چرخزاد



شکل۱۵

(۱۵) را به چرخزاد دیگری مشابه با خودش منبسط یا منقبض کرد که همان مرکز را داشته و پاره‌خطهای جدید $0''1''$ و $1''2''$ متناظر با $0'1'$ و $1'2'$ همان نسبت قبل را داشته باشند. اگر مقدار b بدرستی انتخاب شود، پاره‌خطهای $0''1''$ و $1''2''$ دقیقاً با ۰۱ و ۱۲ مساوی خواهند بود. تغییر مقدار a، صرفاً چرخزاد را در امتداد خط $y = \alpha$ از راست به چپ یا برعکس می‌سُراند، چنانکه با انتخاب مناسب a می‌توان نقاط $1''$ و $2''$ را بر ۱ و ۲ منطبق کرد و به این ترتیب قضیهٔ ما اثبات می‌شود.

۲۳. ساختن یک میدان. ریاضیدانان قرن هجدهم و اوایل قرن نوزدهم، ضمن بررسی مسائل حساب تغییرات، بین مجموعهٔ شرایط لازم برای کمینه و آنهایی که واقعاً برای تضمین وجود کمینه کافی‌اند، تمایز آشکاری نمی‌گذاردند.

نتیجه آن بود که مدت مدیدی پس از کشف هر شرط لازم جدید دربارهٔ کمان کمینه‌ساز، محققان این موضوع راضی می‌شدند که جوابهای کامل مسائلشان را یافته‌اند. وایرشتراس نخستین کسی بود که به لزوم در اختیار داشتن برهان کفایت اشاره کرد. او در دههٔ پیش از ۱۸۷۹، که در طی آن بارها در دانشگاه برلین دربارهٔ حساب تغییرات سخنرانی کرد، شرط لازم جدیدی کشف نمود و توانست ثابت کند که این شرط همراه با سه شرطی که قبلاً شناخته شده بود، برای وجود کمینه کافی‌اند. معلوم است که مانند شرطی که در صفحهٔ ۴ برای کمینهٔ تابع $f(x)$ دیدیم، باید در شرایط لازم اندک تغییراتی داد تا کافی هم بشوند.

در حالت خاص مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان دیدیم که کمان کمینه‌ساز باید یک چرخزاد باشد و یک چرخزاد یکتا وجود دارد که نقاط ۱ و ۲ را به هم وصل می‌کند، با این حال هنوز نمی‌دانیم که آیا این چرخزاد همیشه خم تندترین سقوط خواهد بود یا نه. در مسئلهٔ یافتن کوتاهترین فاصله از یک نقطهٔ ثابت ۱ تا یک خم، که در صفحهٔ ۳۰ و صفحات پس از آن مورد بررسی قرار گرفت، جواب لزوماً خط مستقیمی عمود بر خم بود، اما لازم بود این مطلب را هم ثابت کنیم که فاصلهٔ نقطهٔ ۱ تا خم نباید از فاصلهٔ مرکز انحنا روی این عمود تا خم بیشتر باشد. آیا در مورد مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان ممکن است روی کمان چرخزادی که ۱ را به ۲ وصل می‌کند، نقطه‌ای بحرانی وابسته به ۱ موجود باشد که در ورای آن دیگر ویژگی کمینه بودن کمان برقرار نباشد؟ در این مورد پاسخ منفی است، اگر چه در فصلهای ۴ و ۵ خواهیم دید که در حالت کلی وجود چنین نقطه‌ای انتظار می‌رود. برای اینکه از پاسخ خود مطمئن شویم، برهان کفایت لازم است و در این بند می‌خواهیم یکی از مراحل مهم را در برهان، یعنی ساختن چیزی که میدان فرین‌ها نامیده می‌شود، شرح دهیم.

کمان فرین خاص $E_{۱۲}$ واصل نقاط ۱ و ۲ را اختیار می‌کنیم. این کمان لزوماً یکی از چرخزادهای خانوادهٔ (۱۵) است که با دو مقدار ویژهٔ $a_۰$ و $b_۰$ از ثابتهای a و b مشخص می‌شود. اگر $a = a_۰$ را ثابت نگه داریم و بگذاریم b تغییر کند،

خانوادهٔ یک پارامتری کمانهای چرخزادی مقلوب حاصل

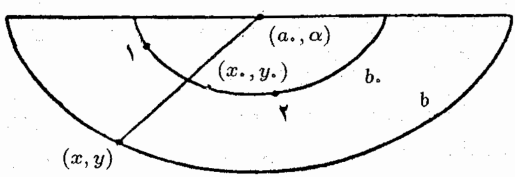
$$x - a_\circ = b(u + \sin u), \qquad y - \alpha = b(1 + \cos u),$$

$$(-\pi \leq u \leq \pi;\ \circ < b < \infty) \qquad (17)$$

دارای مرکز مشترک $(a_\circ, \alpha)$ خواهند بود. روی دو چرخزاد متفاوت این خانواده متناظر با مقادیر پارامتری $b_\circ$ و b، مقدار یکسان متغیر u، دو نقطهٔ $(x_\circ, y_\circ)$ و (x, y) را تعریف می‌کند که مختصاتشان در معادلات زیر صدق می‌کند

$$\frac{x - a_\circ}{x_\circ - a_\circ} = \frac{b}{b_\circ}, \qquad \frac{y - \alpha}{y_\circ - \alpha} = \frac{b}{b_\circ}.$$

معنای هندسی این معادلات این است که روی همهٔ شعاعهای گذرا بر مرکز $(a_\circ, \alpha)$، دو چرخزاد، پاره‌هایی را که متناسب با b و $b_\circ$ هستند می‌بُرند. بنابراین چرخزادها دارای شکلهای متشابهند. آن که متناظر با $b_\circ$ است از کمان E_{12} تشکیل می‌شود و آن که متناظر با b است، با تمدید آن در امتداد شعاعهای گذرنده از مرکز $(a_\circ, \alpha)$ به خم جدیدی که طول شعاعهایش $b/b_\circ$ برابر طول شعاعهای E_{12} است، به‌وجود می‌آید.



شکل ۱۶

ناحیه‌ای از صفحه که به‌طور ساده با خانواده‌ای یک پارامتری از فرین‌ها پوشیده می‌شود، میدان فرین‌ها یا به‌طور ساده میدان نامیده می‌شود. استدلالی که اینک

صورت گرفت نشان می‌دهد که در مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان، نیم‌صفحهٔ $y > a$ چنین میدانی است. این میدان به‌طور ساده با خانوادهٔ یک پارامتری چرخزادهای هم مرکز (۱۷) پوشیده می‌شود. از نظر تحلیلی این مطلب معادل است با اینکه بگوییم یک و فقط یک جفت از مقادیر b و u وجود دارد که در معادلات (۱۷) صدق می‌کنند و ما آنها را با $b(x,y)$ و $u(x,y)$ نشان می‌دهیم. در نقطهٔ (x,y) شیب فرین میدان که از این نقطه می‌گذرد از معادلهٔ (۱۴) یافت می‌شود و مقدارش عبارت است از

$$p(x,y) = -\tan\frac{u(x,y)}{۲} \qquad (۱۸)$$

و تابع $p(x,y)$ که بدین ترتیب تعریف می‌شود تابع شیب میدان نامیده می‌شود.

به منظور تکمیل نتایج بندهای بعد باید خود را متقاعد کنیم که توابع $b(x,y)$، $u(x,y)$ و $p(x,y)$ که متعلق به میدان هستند، پیوسته‌اند و مشتقات پیوسته دارند. برهانهای مربوط به این ویژگیها در بند بعد داده می‌شوند و خواننده اگر مایل باشد نتایجی از این دست را مسلم بپندارد، می‌تواند آن بند را حذف کند.

۲۴. ویژگیهای توابع میدانی. اگر بتوانیم ثابت کنیم که تابع $u(x,y)$ در بند قبل، پیوسته است و مشتقات پیوسته دارد، آنگاه این مطلب برای توابع

$$p(x,y) = -\tan\frac{u(x,y)}{۲}, \qquad b(x,y) = \frac{y-a}{۱+\cos u}$$

که از (۱۸) و معادلهٔ دوم از معادلات (۱۷) به‌دست می‌آیند نیز صادق است. مَخرج عبارت مربوط به $b(x,y)$ مخالف صفر است، چون روی کمانهای چرخزادیِ میدان همواره داریم $-\pi < u < +\pi$. بنابراین توجه خویش را به $u(x,y)$ معطوف می‌کنیم.

برای تعیین $u(x,y)$، با تقسیم کردن معادلات (۱۷) بر هم به دست می‌آوریم

$$\frac{x-a_۰}{y-\alpha} = \frac{u+\sin u}{۱+\cos u} \qquad (۱۹)$$

که به شکل $g(x,y) = h(u)$ است. اگر x و y را به Δx و Δy تبدیل کنیم و تغییر حاصل در u را با Δu نشان دهیم بسادگی به‌دست می‌آوریم

$$g(x+\Delta x, y+\Delta y) - g(x,y) = h(u+\Delta u) - h(u)$$

که به کمک فرمول تیلر می‌شود

$$g_x \Delta x + g_y \Delta y = h_u \Delta u \qquad (۲۰)$$

و در آن آوندهای مشتقات g_x و g_y عبارتند از $x+\theta\Delta x$ و $y+\theta\Delta y$ و آوند h_u، $u+\theta\Delta u$ است و $۰ < \theta < ۱$ از فرمول تیلر به دست می‌آید. h_u را بسادگی می‌توان یافت و مقدار آن عبارت است از

$$h_u = \frac{۲ + ۲\cos u + u \sin u}{(۱+\cos u)^۲} = \frac{۱ + \frac{u}{۲}\tan\frac{u}{۲}}{\cos^۲ \frac{u}{۲}}$$

که روی چرخزادهای میدان کمتر از واحد نمی‌شود، زیرا روی آنها همواره داریم $-(\pi/۲) < u/۲ < \pi/۲$. از این رو می‌توانیم (۲۰) را برحسب Δu حل کنیم و به دست آوریم

$$\Delta u = \frac{g_x}{h_u}\Delta x + \frac{g_y}{h_u}\Delta y \qquad (۲۱)$$

و این نشان می‌دهد که وقتی Δx و Δy به صفر میل می‌کنند، Δu به صفر میل می‌کند و از این رو تابع $u(x,y)$ پیوسته است.

برای یافتن مشتق جزئی u_x، در معادلهٔ (۲۱) قرار می‌دهیم $\Delta y = ۰$ و حد خارج قسمت $\Delta u/\Delta x$ را وقتی Δx به صفر میل می‌کند محاسبه می‌کنیم. روش مشابهی u_y را هم به دست می‌دهد و براحتی دیده می‌شود که نتایج عبارتند از

$$u_x = \frac{g_x(x,y)}{h_u(u)}, \qquad u_y = \frac{g_y(x,y)}{h_u(u)}$$

این توابع برحسب x و y پیوسته‌اند چون $u(x,y)$ پیوسته است.

توابع $u(x,y)$ و $b(x,y)$ در هر نقطهٔ (x,y) روی مرز $y=\alpha$ی میدان غیر از $(a_\circ,\alpha)$ نیز پیوسته‌اند. برای اثبات این مطلب ابتدا توجه می‌کنیم که مقادیر (u,b) موجود در بحث ما همگی در نابرابریهای $-\pi \leq u \leq \pi$ و $\circ < b < \infty$ که دقیقاً پس از معادلات (۱۷) نشان داده شد، صدق می‌کنند. حال آن همسایگی از نقاط (u,b) را که در نابرابری

$$\sqrt{(u-u_\circ)^\text{۲}+(b-b_\circ)^\text{۲}}<\varepsilon,$$

صدق می‌کند در نظر بگیرید. در این همسایگی ε دلخواه است و $(u_\circ,b_\circ) = (\pm\pi,b_\circ)$ جفتی است که نقطهٔ متناظرش، $(x_\circ,y_\circ)$ ناشی از معادلهٔ (۱۷)، روی خط $y=\alpha$ است؛ و فرض کنید δ فاصلهٔ کمینه از نقطهٔ $(x_\circ,y_\circ)$ تا نقاط (x,y) باشد که با مقادیر (u,b) خارج از این همسایگی تعریف می‌شوند. مقادیر $u(x,y)$ و $b(x,y)$ متناظر با نقاط (x,y) که در نابرابری

$$\sqrt{(x-x_\circ)^\text{۲}+(y-y_\circ)^\text{۲}}<\delta$$

صدق می‌کنند و روی یا زیر خط $y=\alpha$ واقع می‌شوند، همگی در $\varepsilon-$ همسایگی مذکور در فوق می‌افتند، زیرا هیچ (u,b) ای خارج از این همسایگی نمی‌تواند متناظر با نقطهٔ (x,y)ای باشد که فاصله‌اش تا $(x_\circ,y_\circ)$ کمتر از δ است. نتیجه می‌شود که توابع $u(x,y)$ و $b(x,y)$ در $(x_\circ,y_\circ)$ پیوسته‌اند، زیرا همان‌طور که نشان داده شد، می‌توانیم (u,b) را در $\varepsilon-$ همسایگی بدلخواه کوچک $(u_\circ,b_\circ)$ قرار دهیم، در صورتی که (x,y) را به اندازهٔ کافی به $(x_\circ,y_\circ)$ نزدیک بگیریم.

استدلال مشابهی نشان می‌دهد که حد $b(x,y)$ در $(x,y)=(a_\circ,\alpha)$ صفر است؛ و وقتی (x,y) در امتداد یک خم به این مرکز میل می‌کند، می‌توان به کمک معادلهٔ (۱۹) ثابت کرد که حد $u(x,y)$ جواب یکتای معادلهٔ

$$\frac{dx}{dy}=\frac{u+\sin u}{\text{۱}+\cos u},$$

است که در آن $\frac{dx}{dy}$ معکوس شیب خم میل در نقطهٔ $(a_\circ,\alpha)$ است.

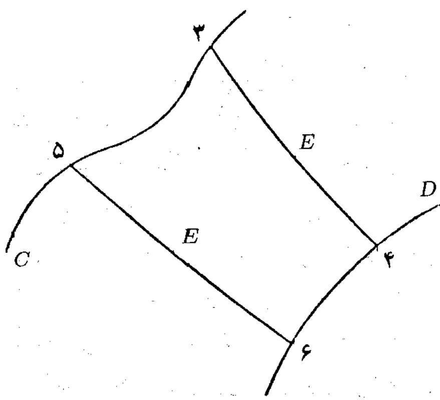
۲۵. دو فرمول کمکی مهم. به منظور بررسی بیشتر ویژگیهای کمینه‌ای چرخزادهایمان، به دو فرمول نیاز خواهیم داشت که مشابه فرمولهای (۷) و (۸) در صفحات ۲۵ و ۲۶ فصل قبل هستند که برای پاره‌خط راست عرضه شد. اگر پارهٔ E_{34} از چرخزاد طوری تغییر کند که نقاط انتهایی آن مطابق شکل ۱۷، دو خم C و D را رسم کنند، آنگاه می‌توان فرمولی برای دیفرانسیل مقدار انتگرال I در امتداد این پارهٔ متحرک و فرمولی مبین تفاضل مقادیر I در دو مکان این پاره به دست آورد.

وقتی a، b، u_3، و u_4 توابعی از پارامتر t باشند، معادلات

$$x = a(t) + b(t)(u + \sin u), \qquad y = \alpha + b(t)(1 + \cos u)$$

$$(u_3(t) \leq u \leq u_4(t)) \tag{22}$$

خانواده‌ای یک پارامتری از پاره‌های چرخزادی E_{34} را تعریف می‌کنند. وقتی t



شکل ۱۷

تغییر می‌کند، ۳ و ۴، نقاط انتهایی این پاره دو خم C و D را رسم می‌کنند که معادلات پارامتری آنها برحسب متغیر مستقل t به‌ترتیب با جایگزین کردن $u_3(t)$

و $u_۴(t)$ در معادلات (۲۲) به‌دست می‌آیند. این خمها و دوپاره چرخزادی که آنها را به هم وصل می‌کنند در شکل ۱۷ نشان داده شده‌اند.

اگر توجه کنیم که در امتداد هر یک از چرخزادهایمان، روابط

$$p = \frac{-\sin u}{۱ + \cos u}, \qquad ۱ + p^۲ = \frac{۲}{۱ + \cos u},$$

$$y - \alpha = b(۱ + \cos u), \qquad \frac{dx}{du} = b(۱ + \cos u). \quad (۲۳)$$

برقرارند، آنگاه مقدار انتگرال I در امتداد کمان خاص $E_{۳۴}$ بسهولت یافت می‌شود و عبارت است از

$$I(E_{۳۴}) = \int_{u_۳}^{u_۴} \sqrt{\frac{۱ + p^۲}{y - \alpha}\frac{dx}{du}}du = u\sqrt{۲b}\,\Big|_{۳}^{۴}, \qquad (۲۴)$$

و بدیهی است که می‌توان دیفرانسیل آن را برحسب db ، $du_۳$، و $du_۴$ بیان کرد. می‌توانستیم با جایگزین کردن دو تابع $u_۳(t)$ و $u_۴(t)$ در (۲۲) و دیفرانسیل‌گیری، da و این سه دیفرانسیل را از چهار معادلهٔ حاصل؛ یعنی دو تا برای خم C و دو تا برای D به‌دست آوریم. با وجود این اگر توجه کنیم که وقتی u و نیز a و b توابعی از t هستند، معادلات (۲۲) و (۲۳) نتیجه می‌دهند که

$$dx = da + (u + \sin u)db + b(۱ + \cos u)du,$$

$$dy = (۱ + \cos u)db - b\sin u du,$$

$$\frac{dx + pdy}{\sqrt{y - \alpha}\sqrt{۱ + p^۲}} = \frac{da + udb + ۲bdu}{\sqrt{۲b}} = \frac{da}{\sqrt{۲b}} + d(u\sqrt{۲b}).$$

آنگاه از (۲۴) نتیجهٔ مهم زیر را به‌دست می‌آوریم:

اگر پاره چرخزاد $E_{۳۴}$ طوری تغییر کند که نقاط انتهایی آن، ۳ و ۴، همزمان دو خم C و D را مطابق شکل ۱۷ رسم کنند، آنگاه دیفرانسیل مقدار انتگرال I در امتداد $E_{۳۴}$ برابر است با

$$dI = d(u\sqrt{۲b})\Big|_{۳}^{۴} = \frac{dx + pdy}{\sqrt{y-\alpha}\sqrt{۱+p^{۲}}}\Bigg|_{۳}^{۴} \qquad (۲۵)$$

در نقاط ۳ و ۴ دیفرانسیلهای dx و dy در این عبارت مربوط به C و D هستند و در ضمن p شیب پارهٔ $E_{۳۴}$ است.

اکنون اگر نماد I^* را برای نشان دادن انتگرال

$$I^* = \int \frac{dx + pdy}{\sqrt{y-\alpha}\sqrt{۱+p^{۲}}} \qquad (۲۶)$$

به کار بریم، آنگاه با انتگرال‌گیری از فرمول (۲۵) نسبت به t، از $t_۳$ تا $t_۵$ نتیجهٔ دیگری هم بدست می‌آوریم و آن اینکه:

تفاضل بین مقادیر I در دو مکان متمایز $E_{۳۴}$ و $E_{۵۶}$ از پاره چرخزاد متغیر، که در شکل ۱۷ نشان داده شده‌اند، از فرمول

$$I(E_{۵۶}) - I(E_{۳۴}) = I^*(D_{۴۶}) - I^*(C_{۳۵}). \qquad (۲۷)$$

به‌دست می‌آید.

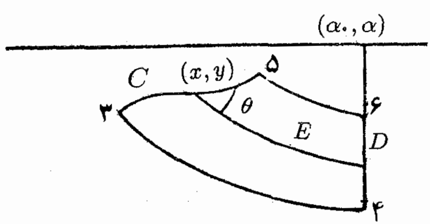
فرمولهای (۲۵) و (۲۷) برای چرخزادها، مانستهٔ فرمولهای (۷) و (۸) صفحات ۲۵ و ۲۶ برای خطوط راست هستند. خواهیم دید که این فرمولها کاربردهای متعددی در نظریهٔ خمهای کوتاهترین زمان دارند.

۲۶. انتگرال ناوردای میدان. اکنون میدان F را در نظر بگیرید که از کمانهای چرخزادی مقلوب هم مرکز تشکیل شده است که همان‌طور که در بند ۲۳ صفحهٔ ۵۷ تشریح شد، نیم صفحهٔ زیر خط $y = \alpha$ را می‌پوشانند، و فرض کنید

در انتگرالده انتگرال I^* که در معادلهٔ (۲۶) معرفی شد، به جای p، تابع شیب میدان، یعنی $p(x, y)$ را قرار دهیم. در امتداد هر یک از کمانهای $C_{۳۵}$ در میدان، از نوع یاد شده در صفحهٔ ۲۷، با معادلات

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (t_۳ \leq t \leq t_۵). \qquad (۲۸)$$

انتگرال I^* که به این صورت تشکیل می‌شود مقدار کاملاً معینی دارد که با جانشین کردن مقادیر x، y، dx، و dy از این معادلات در انتگرالده آن و سپس انتگرال‌گیری نسبت به t، از $t_۳$ تا $t_۵$ به‌دست می‌آید. همان‌طور که در شکل ۱۸ نشان داده شده است، از هر نقطهٔ کمان $C_{۳۵}$، یک کمان چرخزادی یکتای میدان می‌گذرد که خط عمودی D گذرا بر $(a_۰, \alpha)$، نقطهٔ مرکزی مشترک بین همهٔ چرخزادهای میدان، را نیز قطع می‌کند. دو نقطهٔ برخورد چرخزادهای خاص گذرا بر ۳ و ۵ با D را با ۴ و ۶ نشان می‌دهیم. حال معادلهٔ (۲۷) را می‌توان به کار برد. این معادله نشان می‌دهد که مقدار $I^*(C_{۳۵})$ تنها باید به نقاط انتهایی ۳ و ۵ بستگی داشته باشد و به هیچ وجه متکی بر شکل کمان $C_{۳۵}$ که آنها را به‌هم وصل می‌کند نیست، زیرا سه جملهٔ دیگر موجود در این معادله، واجد این ویژگی هستند. همچنین باید



شکل۱۸

توجه کرد که در امتداد یک کمان چرخزادی از میدان، دیفرانسیلهای dx و dy در معادلهٔ $dy = pdx$ صدق می‌کنند و بسهولت دیده می‌شود که برای این مقادیر، انتگرالده‌های I^* و I یکسان هستند. به این ترتیب قضیهٔ زیر را داریم:

مقدار انتگرال I^* که در انتگرالده آن $p(x,y)$، تابع شیب میدان قرار دارد، در امتداد همهٔ کمانهای میدان که دو نقطهٔ انتهایی یکسان ۳ و ۵ را به هم وصل می‌کنند، یکی است. به‌علاوه در امتداد کمان چرخزادی $E_{۱۲}$ از میدان مقدار I^* با مقدار I برابر است.

اگر از فرمول (۹) در صفحهٔ ۲۶ استفاده کنیم، عبارت بسیار فشرده و مفیدی برای انتگرال I^* به‌دست می‌آوریم

$$I^* = \int \frac{\cos\theta ds}{\sqrt{y-\alpha}} \qquad (۲۹)$$

این‌بار زاویهٔ θ در نقطهٔ (x,y) روی کمان $C_{۳۵}$ از میدان، زاویهٔ بین مماسهای $C_{۳۵}$ است با فرین گذرا از نقطهٔ (x,y) در میدان، و در ضمن s طول کمان است که در امتداد $C_{۳۵}$ اندازه‌گیری می‌شود.

۲۷. برهان کفایت. اکنون به کمک ویژگیهای انتگرال I^* مذکور در بند قبل، خیلی راحت می‌توان ثابت کرد که زمان لازم برای سقوط یک ذره در امتداد یک کمان چرخزادی از نقطهٔ ۱ تا نقطهٔ ۲، کوتاهتر از زمان مشابه روی هر کمان دیگری از نوع (۲۸) در صفحهٔ ۶۵ است که آن دو نقطه را به هم وصل می‌کند و زیر خط $y=\alpha$ واقع می‌شود. برهانی که در اینجا عرضه می‌شود اساساً همان برهانی است که ابتدا وایرشتراس در سخنرانیهای خود ارائه کرد، اما به سبب استفاده از انتگرال ناوردای I^*، شکل نهایی آن اندک تفاوتی دارد. تقریباً سی سال پس از آنکه وایرشتراس اثبات اولیهٔ خویش را ارائه کرد، هیلبرت[۴] نخستین کسی بود که بر اهمیت و مناسبت انتگرال I^* با این موضوع تأکید کرد.

فرض کنید $E_{۱۲}$ کمان چرخزادی یکتایی باشد که نقاط ۱ و ۲ را به هم وصل می‌کند. وجود این کمان در بند ۲۲ صفحهٔ ۵۴ تشریح شد. بنابر نتایج بند ۲۳ صفحهٔ ۵۶، این کمان، یکی از کمانهای میدان F است؛ میدانی مرکب از کمانهای

4) Hilbert

چرخزادی مقلوب هم مرکز که نیم صفحهٔ $y > \alpha$ را به‌طور ساده می‌پوشانند. فرض کنید $C_{۱۲}$ کمان دلخواهی در F باشد که آن هم نقاط ۱ و ۲ را به هم وصل می‌کند و دارای معادلات پارامتری به شکل (۲۸) است. چون در امتداد کمان چرخزادی $E_{۱۲}$، مقدار انتگرال I^* که با $p(x, y)$، تابع شیب میدان، تشکیل می‌شود با مقدار I برابر است و از آنجا که در امتداد همهٔ کمانهای دیگر موجود در میدان که ۱ را به ۲ وصل می‌کنند همین مقدار را دارد، نتیجه می‌شود که

$$I(E_{۱۲}) = I^*(E_{۱۲}) = I^*(C_{۱۲}).$$

از این رو به کمک عبارتهای (۵) و (۲۹) برای I و I^* مشاهده می‌شود که تفاضل بین مقادیر I روی کمانهای $C_{۱۲}$ و $E_{۱۲}$ عبارت است از

$$I(C_{۱۲}) - I(E_{۱۲}) = I(C_{۱۲}) - I^*(C_{۱۲}) = \int_{s_۱}^{s_۲} \frac{۱ - \cos\theta}{\sqrt{y - \alpha}} ds. \quad (۳۰)$$

روشن است که این تفاضل همواره مثبت یا صفر است و بنابراین داریم $I(C_{۱۲}) \geq I(E_{۱۲})$. علامت برابری فقط وقتی برقرار است که در امتداد کمان $C_{۱۲}$ داشته باشیم $\cos\theta = ۱$؛ یعنی فقط وقتی که $C_{۱۲}$ در هر نقطه بر یکی از چرخزادهای میدان مماس باشد و در نتیجه همه‌جا در معادلهٔ $dy = p(x, y)dx$ صدق کند. اما در این صورت $C_{۱۲}$ باید بر $E_{۱۲}$ منطبق گردد، زیرا معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول $dy = p(x, y)dx$ یک و فقط یک جواب گذرا از نقطهٔ ۱ دارد و آن هم خود $E_{۱۲}$ است.

در ارتباط با همین نتایج باید توجه کرد که در صفحهٔ ۴۶ قصد کردیم فقط کمانهای پذیرفتنی به شکل $y = y(x)$ را منظور کنیم، ولی در برهان کفایت در بند حاضر راحت‌تر آن است که کمانهای مقایسه‌ای $C_{۱۲}$ را به شکل پارامتری (۲۸) اختیار کنیم، زیرا در این صورت با آزادی بیشتری بین نقاط ۱ و ۲ پراکنده می‌شوند. بنابراین می‌توانیم یافته‌هایمان را به صورت زیر جمع‌بندی کنیم:

فرض کنید سرعت اولیهٔ $v_1 \neq 0$ و دو نقطهٔ ثابت ۱ و ۲ غیر واقع بر یک خط عمودی مفروض باشند. برای ذره‌ای که از نقطهٔ ۱ با سرعت اولیهٔ v_1 شروع به حرکت می‌کند، خم تندترین سقوط از نقطهٔ ۱ به نقطهٔ ۲ باید کمانی از یک چرخزاد باشد، که توسط نقطهٔ ثابتی روی محیط دایرهٔ غلتان بر وجه پایینی خط $y = \alpha = y_1 - v_1^2/2g$، به وجود می‌آید. یک و فقط یک چرخزاد از این دست وجود دارد که ۱ را به ۲ وصل می‌کند، (E_{12})، و زمان نزول روی E_{12} از زمان نزول روی کمانهای دیگری از نوع (۲۸) که ۱ را به ۲ وصل می‌کنند و زیر خط $y = \alpha$ واقعند، کوتاهتر است.

نتیجه‌ای که از قضیهٔ کفایت برای خمهای پارامتری عاید می‌شود قوی‌تر از چیزی است که از بیان اصلی مسئله طلب می‌شود.

۲۸. وقتی سرعت اولیه صفر است. در صفحهٔ ۴۶ دیدیم که در نقطه‌ای که $y = \alpha$، انتگرالده انتگرال I بی‌نهایت می‌شود و به همین دلیل تاکنون فقط خمهایی را در نظر گرفته‌ایم که زیر خط $y = \alpha$ قرار می‌گیرند. متأسفانه با این کار حالت جالبی را که ذره از حالت سکون شروع به حرکت می‌کند مستثنا کرده‌ایم، زیرا وقتی $v_1 = 0$، مقدار $\alpha = y_1 - v_1^2/2g$ برابر است با y_1 و نقطهٔ اولیهٔ ۱ روی خط $y = \alpha$ می‌افتد. با این حال، به کمک نتایجی که قبلاً به دست آوردیم و روش حدگیری که به نظر می‌رسد نخستین بار وایرشتراس آن را به کار گرفت، می‌توان این حالت را نیز مورد بررسی قرار داد.

اکنون فرض کنید $v_1 = 0$ و مجدداً فرض کنید، همچون شکل ۱۹، E_{12} کمان چرخزادی یکتایی باشد که نقطهٔ ۱ روی خط $y = \alpha$ را به نقطهٔ ۲ متصل می‌سازد. از هر نقطهٔ ۳ روی خم دلخواه C_{12} در نیم‌صفحهٔ $y \geq \alpha$ چرخزاد یکتایی چون E_{34} در میدان عبور می‌کند. این چرخزاد خط عمودی D گذرا از مرکز (a_0, α) را در نقطهٔ ۴ قطع می‌کند. وقتی نقطهٔ ۳ در امتداد کمان C_{12} از ۱ به ۲ حرکت می‌کند، مجموع $I(C_{13}) + I(E_{34})$ به‌طور پیوسته تغییر می‌کند؛ با مقدار $I(E_{12}) + I(E_{27})$ آغاز و به مقدار $I(C_{12}) + I(E_{27})$

ختم می‌شود. از این رو اگر بتوانیم نشان دهیم که این مجموع کاهش نمی‌یابد آنگاه $I(C_{۱۲}) \geq I(E_{۱۲})$.

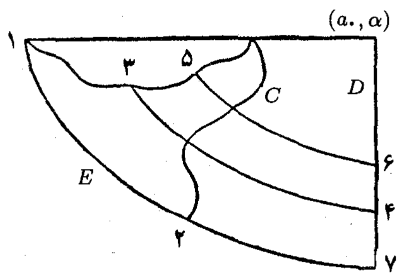
برای اینکه نشان دهیم مجموع مذکور افزایشی است، نقطهٔ دوم ۵ نزدیک به ۳ را روی کمان $C_{۱۲}$ در نظر می‌گیریم. با به‌کارگیری فرمول (۲۷) در صفحهٔ ۶۴ برای دو جملهٔ آخر عبارت

$$[I(C_{۱۵}) + I(E_{۵۶})] - [I(C_{۱۳}) + I(E_{۳۴})] = I(C_{۳۵}) + I(E_{۵۶}) - I(E_{۳۴})$$

مشاهده می‌کنیم مقدار این تفاضل برابر است با

$$I(C_{۳۵}) + I^*(D_{۴۶}) - I^*(C_{۳۵}).$$

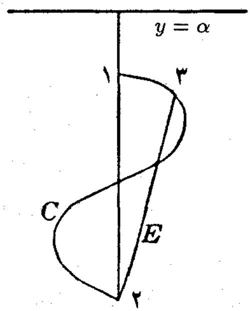
چون خط عمودی $D_{۴۶}$ بر چرخزادهای میدان عمود است، معادلهٔ $dx + pdy = ۰$ در امتداد این خط برقرار است و فرمول مربوط به I^* در صفحهٔ ۶۴ نشان می‌دهد که این انتگرال در امتداد $D_{۴۶}$ صفر می‌شود. تفاضل باقیمانده $I(C_{۳۵}) - I^*(C_{۳۵})$ بنابر همان استدلالی که درستی این مطلب را برای تفاضل (۳۰) نشان داد مثبت یا صفر است و فقط وقتی صفر است که کمان $C_{۳۵}$ بر یکی از کمانهای چرخزادی میدان منطبق شود. اگر هر یک از کمانهای جزئی $C_{۳۵}$ از خم C بر یکی از چرخزادهای میدان منطبق گردند، آنگاه $C_{۱۲}$ باید بر $E_{۱۲}$ منطبق



شکل ۱۹

شود، و بنابراین می‌بینیم که $I(E_{۱۲}) > I(C_{۱,۲})$ مگر آنکه $C_{۱۲}$ و $E_{۱۲}$ یکسان باشند.

استدلال چند پاراگراف اخیر را در حالتی که $v_۱ \neq ۰$ هم می‌توان به‌کار برد مشروط بر اینکه کمانهای مقایسه‌ای را اختیار کنیم که با خط $y = \alpha$ نقاط اشتراک دارند. [۳۷] وقتی نقاط ۱ و ۲ روی خط عمودی واحد $E_{۱۲}$ واقعند نیز این استدلال کارگر می‌افتد. در حالت اخیر هر نقطهٔ ۳ از خم دلخواه $C_{۱۲}$ را می‌توان با یک چرخزاد یا یک خط عمودی $E_{۱۲}$ به ۲ وصل کرد. وقتی نقطهٔ ۳ کمان C را می‌پیماید، مجموع $I(C_{۱۳}) + I(E_{۳۲})$ از مقدار $I(E_{۱۲})$ به مقدار $I(C_{۱۲})$ افزایش می‌یابد، چنانکه در این حالت خط عمودی $E_{۱۲}$، خم سریعترین نزول می‌شود.



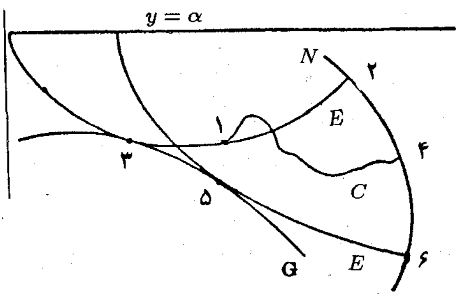
شکل ۲۰

۲۹. مسیر تندترین سقوط از یک نقطه به یک خم. نخستین شرایط لازم.

یاکوب برنویی در خاتمهٔ حل مشهورش از مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان که در سال ۱۶۹۷ منتشر شد، چند سؤال دیگر برای بقیهٔ ریاضیدانان و بویژه برادر خود مطرح کرد. یکی از این سؤالها، مسئلهٔ تعیین کمانی از یک نقطهٔ ثابت به یک خط راست عمودی ثابت است، به‌طوری که اگر ذره‌ای با سرعت اولیهٔ مفروض در امتداد آن شروع به حرکت کند، در کوتاهترین زمان سقوط نماید. این مسئله، حالت خاصی است از مسئلهٔ کلی‌تر تعیین خم کوتاهترین زمانی که یک

نقطهٔ ثابت چون ۱ را به یک خم ثابت دلخواه چون N وصل می‌کند. مطالبی که در بندهای پیشین استنتاج شد، بویژه فرمولهای (۲۵) و (۲۷) در صفحهٔ ۶۴ ما را قادر می‌سازد که جواب این مسئله را براحتی بیابیم.

فرض کنید نقطهٔ ۱، خم N، و E_{12}، مسیر تندترین سقوط، همانهایی باشند که در شکل ۲۱ نشان داده شده است و فرض کنید که سرعت اولیهٔ مفروض در نقطهٔ ۱ مجدداً v_1 باشد. روشن است که کمان کمینه‌ساز E_{12} باید یکی از چرخزادهایی باشد که در صفحات قبل تشریح شد، زیرا اگر این کمان مسیر سریعترین نزول از ۱ به خم N باشد، باید مسیر تندترین سقوط از ۱ به نقطهٔ تلاقی ۲ نیز باشد. از این رو بلافاصله نخستین شرط لازم دربارهٔ کمان کمینه‌ساز مورد نظر را به دست می‌آوریم؛ هرچند، این شرطی است که باید با دو ویژگی دیگر با خصلتی متفاوت تکمیل شود.



شکل۲۱

چون چرخزادی که بر اثر غلتیدن یک دایره روی وجه پایینی خط $y=\alpha$ ایجاد می‌شود و ۱ را به نقطهٔ دومی زیر آن خط وصل می‌کند یکتاست، نتیجه می‌شود که یک خانوادهٔ یک پارامتری از این‌گونه کمانهای چرخزادی وجود دارد که نقطهٔ ۱ را به نقاط متمایز خم N متصل می‌کنند. اگر بخواهیم کمان E_{12} خم سریعترین نزول باشد، انتگرال I باید در امتداد E_{12}، کمینه باشد و دیفرانسیل I باید در امتداد E_{12} صفر شود. برای محاسبهٔ این دیفرانسیل، فرمول (۲۵) در صفحهٔ ۶۴ را برای

خانوادهٔ یک پارامتری چرخزادهایی که ۱ را به N وصل می‌کنند به‌کار می‌بریم؛ به این ترتیب که به جای خم C در آن فرمول، نقطهٔ ثابت ۱ و به جای خم D، N قرار می‌دهیم. آنگاه

$$dI = \frac{dx_۲ + p_۲ dy_۲}{\sqrt{y_۲ - \alpha}\sqrt{۱ + p_۲^۲}}$$

را برای مقدار دیفرانسیل در امتداد $E_{۱۲}$ می‌یابیم زیرا در نقطهٔ ۱، $dx_۱$ و $dy_۱$ هر دو صفرند. چون $p_۲$ و $dy_۲/dx_۲$، شیبهای خمهای $E_{۱۲}$ و N، باید در نقطهٔ ۲ یعنی نقطهٔ برخورد این دو خم صفر شود، می‌توانیم شرایطی را که تاکنون برای کمان کمینه‌ساز به‌دست آورده‌ایم به این صورت جمع‌بندی کنیم:

برای ذره‌ای که با سرعت اولیهٔ $v_۱$ از نقطهٔ ۱ شروع به حرکت می‌کند، مسیر تندترین سقوط از ۱ به خم N لزوماً کمانی است چون $E_{۱۲}$ از یک چرخزاد. این چرخزاد را نقطه‌ای ثابت واقع بر محیط دایره‌ای که بر روی وجه پایینی خط $y = y_۱ - v_۱^۲/۲g$ می‌غلتد به وجود می‌آورد. به‌علاوه خم N باید مسیر $E_{۱۲}$ را در نقطهٔ ۲، نقطه برخوردشان، با زاویهٔ قائمه قطع کند.

۳۰. قضیهٔ پوش و مانستهٔ شرط ژاکوبی. برای چرخزادهای مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان که در دست بررسی داریم، قضیه‌ای وجود دارد که به‌طرز بسیار جالبی با ویژگی مشهور ریسمانی گستردهٔ یک خم که در صفحهٔ ۳۲ فصل قبل از آن یاد شد متناظر می‌گردد. برای استنتاج این ویژگی از این واقعیت ـ این مطلب در بند ۳۳ برای حالت کلی‌تر ثابت خواهد شد ـ استفاده خواهیم کرد که خم N دارای خانواده‌ای یک پارامتری از کمانهای چرخزادی وابسته به $E_{۱۲}$ است که خم N هر یک از آنها را از جمله $E_{۱۲}$، با زاویهٔ قائمه قطع می‌کند. این خانواده ممکن است همچون شکل ۲۱ دارای پوشی چون G باشد. اگر در فرمول (۲۷) صفحهٔ ۶۴ به جای $C_{۳۴}$، $G_{۳۵}$ و به جای $D_{۴۶}$، $N_{۲۶}$ قرار دهیم، آنگاه ملاحظه می‌شود که اختلاف بین مقادیر I در امتداد دو چرخزاد $E_{۵۶}$ و $E_{۳۲}$ از این خانواده

عبارت است از

$$I(E_{56}) - I(E_{32}) = I^*(N_{26}) - I^*(G_{35}).$$

مقدار انتگرال I^* در امتداد کمان N_{26} صفر است، زیرا جهت N در هر نقطه بر چرخزاد قاطع، عمود است و از این رو $dx + pdy$، صورت انتگرالده I^*، در امتداد N صفر می‌شود. از سوی دیگر کمان G_{35} در هر نقطه بر چرخزاد نظیر مماس است و بنابراین، همان‌طور که بسهولت از فرمول (۲۶) در صفحهٔ ۶۴ برای I^* دیده می‌شود، در امتداد G_{35} داریم $dy = pdx$ و مقدار $I^*(G_{35})$ برابر با $I(G_{35})$ است. بنابراین معادلهٔ اخیر هم‌ارز است با

$$I(E_{32}) = I(G_{35}) + I(E_{56}). \qquad (۳۱)$$

این، مانستهٔ بسیار جالب ویژگی فنری گسترده است که در بالا به آن اشاره شد و همانند آن ویژگی، حالت خاصی است از قضیهٔ کلی‌تر مربوط به انتگرالها که آن را در فصل ۵ بررسی خواهیم کرد. هرچند مدتهاست تعدادی از حالتهای خاص این قضیه شناخته شده‌اند، برهانهای مربوط به حالتهای کلی‌تر آن را نخستین بار داربو[5] (۱۸۴۲-۱۹۱۷) و زرملو[6] در سال ۱۸۹۴ و کنزر[7] در سال ۱۸۹۸ ارائه دادند. [۹] برای مسئلهٔ خاص این فصل، این قضیه را می‌توانیم به صورت زیر بیان کنیم:

قضیهٔ پوش. فرض کنید همچون شکل ۲۱ صفحهٔ ۷۱، G پوش خانوادهٔ یک پارامتری چرخزادهای E باشد که خم N هر یک از آنها را با زاویهٔ قائمه قطع می‌کند و این چرخزادها همگی توسط دایره‌هایی که روی وجه پایینی خط $y = \alpha$ می‌غلتند به وجود آمده باشند. آنگاه مدت زمان سقوط یک ذره در امتداد کمان E_{32} در شکل برابر است با مدت زمان سقوط روی کمان مرکب $G_{35} + E_{56}$ به شرط آنکه سرعت اولیه در نقطهٔ ۳ در هر حالت برابر باشد با $v_3 = \sqrt{2g(y_3 - \alpha)}$.

5) Darboux 6) Zermelo 7) Kneser

این نتیجه تعبیر دیگری از معادلهٔ (۳۱) فوق است. در این قضیه، سرعت اولیه در نقطهٔ ۳ باید مشخص شده باشد چون همان‌طور که با معادلهٔ (۳) نشان داده شد، انتگرالهای (۴) در صفحهٔ ۴۵ همواره مبین زمان سقوط ذره‌ای هستند که سرعتش در ارتفاع y برابر با $v = \sqrt{۲g(y-\alpha)}$ است.

قضیهٔ پوش به صورتی که در بالا بیان شد ما را قادر می‌سازد تا بدون هیچ مشکل دیگری، سومین شرط لازمی را که کمان تندترین سقوط از ۱ به N باید در آن صدق کند ثابت کنیم. در شکل ۲۱ نقطهٔ ۳ خارج از کمان $E_{۱۲}$ نشان داده شده است، اما اگر این نقطه بین ۱ و ۲ واقع می‌شد، $I(E_{۱۲})$ نمی‌توانست کمینه باشد، زیرا در هر همسایگی $E_{۱۲}$ کمان مرکبی چون $E_{۱۳} + G_{۳۵} + E_{۵۶}$ وجود می‌داشت که زمان سقوط در امتداد آن با زمان سقوط در امتداد $E_{۱۲}$ برابر بود و همواره می‌توانستیم به جای $G_{۳۵}$ کمان $V_{۳۵}$ را که زمان سقوط در امتداد آن کوتاهتر است قرار دهیم، زیرا $G_{۳۵}$ یکی از کمانهای چرخزادی ما نیست، هر چند اگر بنا بود زمان سقوط کمینه، بین نقاط انتهایی آن را به دست دهد، باید این‌گونه می‌بود. برای اینکه کاملاً مطمئن شویم $G_{۳۵}$ یکی از کمانهای چرخزادی ما نیست توجه می‌کنیم اگر x، y، و p مفروض باشند، معادلات

$$p = -\tan\frac{u}{۲}, \quad x = a + b(u + \sin u), \quad y = \alpha + b(۱ + \cos u)$$

فقط یک جواب چون u، a، و b دارند و بنابراین یک و فقط یک چرخزاد وجود دارد که از نقطهٔ مفروض (x, y) می‌گذرد و جهتش در آن نقطه، p است. کمان $G_{۳۵}$ در هر نقطه بر یک چرخزاد مماس است و از این رو نمی‌تواند یکی از خود آنها باشد.

شرط لازم دیگر دربارهٔ خم $E_{۱۲}$، خم تندترین سقوط از نقطهٔ ۱ به خم N، آن است که روی کمان $E_{۱۲}$ هیچ نقطهٔ تماسی با پوش G خانوادهٔ یک پارامتری کمانهای چرخزادی که خم N آنها را با زاویهٔ قائمه قطع می‌کند ـ وجود نداشته باشد. این پوش در شکل ۲۱ صفحهٔ ۷۱ نشان داده شده است.

شرط لازمی که اینک استنتاج شد، مانستهٔ شرط مذکور در پاراگراف نخست

این فصل است، و حالت کلی آن توسط ژاکوبی کشف شده است. تعامد کمان N بر چرخزاد E_{12} و شرط لازم دربارهٔ موضع نقطهٔ ۳، نقطهٔ تماس E_{12} با پوش G، به طرز قابل توجهی نظیر شرایط مشابه برای مسئلهٔ یافتن کوتاهترین فاصله از یک نقطه به یک خم است که در صفحهٔ ۳۳ تشریح شد. در اینجا هم مثل مسئلهٔ کوتاهترین فاصله‌ها باید به یک مورد استثنایی توجه کرد. اگر پوش G هیچ شاخه‌ای نداشته باشد که از نقطهٔ ۳ به سمت خم N امتداد یابد، آنگاه همچون قبل نمی‌توان شرط ژاکوبی را با استفاده از قضیهٔ پوش اثبات کرد. با وجود این برای نشان دادن اینکه وقتی نقطهٔ ۳، نقطهٔ تماس E_{12} با پوش G، بین ۱ و ۲ می‌افتد، مقدار $I(E_{12})$ هرگز نمی‌تواند کمینه باشد، از روشهای دیگری می‌توان استفاده کرد. کلاً وقتی نقطهٔ ۳ در ۱ است و پوش هیچ شاخه‌ای ندارد که به سمت نقطهٔ ۲ تصویر شود، این مقدار کمینه خواهد بود. اگر خم N بر چرخزادهای گذرا از نقطهٔ ۱ عمود باشد که البته در این صورت پوش G خود نقطهٔ ۱ خواهد بود، این حالت استثنایی رخ می‌دهد. نیز می‌توان ثابت کرد که همواره می‌توانیم انتظار داشته باشیم که پوش G در نقطهٔ ۳ نقطهٔ بازگشتی داشته باشد که وقتی شعاع انحنای N در نقطهٔ ۲ کمینه است، شاخه‌های آن از خم N دور می‌شوند.

۳۱. شرایط کافی. خانوادهٔ یک پارامتری چرخزادهای عمود بر خم N، کل نیم‌صفحهٔ زیر خط $y = \alpha$ را به این معنی که از هر نقطهٔ نیم‌صفحه یک و فقط یک چرخزاد از این خانواده بگذرد، به‌طور ساده نمی‌پوشاند. با بررسی ناحیهٔ مجاور پوش G در شکل ۲۱ صفحهٔ ۷۱ این مطلب بسهولت مشاهده می‌شود. اما به‌طور شهودی از شکل واضح است که اگر مطابق شکل، نقطهٔ ۳ خارج کمان E_{12} قرار گیرد، آنگاه یک همسایگی از این کمان وجود دارد که از هر نقطهٔ آن چرخزاد یکتایی از این خانواده می‌گذرد. همسایگیی که بدین ترتیب پوشیده می‌شود به معنای یاد شده در صفحهٔ ۵۹، میدان است. وجود این میدان البته نیازمند برهان دقیقتری است، اما در حال حاضر به تضمینی که تفسیر صوری در اختیار ما قرار می‌دهد بسنده می‌کنیم. در بند ۶۰ صفحهٔ ۱۵۶ برهانی تحلیلی برای وجود میدان

در حالت کلی‌تر داده می‌شود که وجود میدان مورد نیاز در اینجا را به‌طور کامل به اثبات می‌رساند.

فرض کنید $C_{۱۲}$ در شکل ۲۱ صفحهٔ ۷۱، کمانی در میدان F باشد که نقطهٔ ۱ را به خم N وصل می‌کند. اگر برهان کفایت بند ۲۷ صفحهٔ ۶۶ را قدری دستکاری کنیم، می‌توانیم ثابت کنیم که مقدار $I(C_{۱۴})$ بزرگتر از $I(E_{۱۲})$ است مگر آنکه $C_{۱۴}$ بر $E_{۱۲}$ منطبق شود. انتگرال I^* که در انتگرالده آن $p(x,y)$، تابع شیب میدان، قرار دارد همچون گذشته مقدارش در امتداد $E_{۱۲}$ همان مقدار I است و در امتداد همهٔ خمهای دیگر موجود در میدان با نقاط انتهایی یکسان ۱ و ۲ نیز همین مقدار را دارد. در نتیجه

$$I(E_{۱۲}) = I^*(E_{۱۲}) = I^*(C_{۱۴}) + I^*(N_{۴۲}).$$

در امتداد کمان $N_{۴۲}$، چرخزادهای میدان بر N عمودند، چنانکه $dx + p(x,y)dy = ۰$ و $I^*(N_{۴۲})$ صفر می‌شود. بنابر این، مانند گذشته داریم

$$I(C_{۱۴}) - I(E_{۱۲}) = I(C_{۱۴}) - I^*(C_{۱۴}) = \int_{s_۱}^{s_۴} \frac{۱ - \cos\theta}{\sqrt{y-\alpha}} ds.$$

همان‌طور که در صفحهٔ ۶۷ نشان داده شد، این عبارت همواره مثبت است مگر آنکه $C_{۱۴}$ بر $E_{۱۲}$ منطبق شود. پس نتیجه به این صورت است:

فرض کنید سرعت اولیهٔ $v_۱ \neq ۰$، نقطهٔ ثابت ۱، و خم ثابت N داده شده باشند. برای ذره‌ای که از نقطهٔ ۱ با سرعت اولیهٔ $v_۱$ شروع به حرکت می‌کند، کمان $E_{۱۲}$ در شکل ۲۱ صفحهٔ ۷۱، کمان سریعترین نزول از ۱ به خم N، باید ویژگیهای زیر را داشته باشد:

۱. باید کمانی از چرخزادی باشد که توسط یک نقطهٔ ثابت روی محیط دایره‌ای که بر وجه پایینی خط $y = y_۱ - v_۱^۲/۲g$ می‌غلتد به وجود می‌آید.

۲. باید N را در نقطهٔ ۲، نقطهٔ برخوردشان، با زاویهٔ قائمه قطع کند.

۳. نباید حاوی نقطهٔ تماس ۳ با پوش G خانوادهٔ یک پارامتری چرخزادهای عمود بر خم N، که خودش هم عضوی از آن است، باشد.

برای کمان $E_{۱۲}$ با این ویژگیها، یک همسایگی چون F وجود دارد که زمان سقوط روی $E_{۱۲}$ از زمان سقوط روی هر کمان دیگر واصل ۱ و N در F کوتاهتر است.

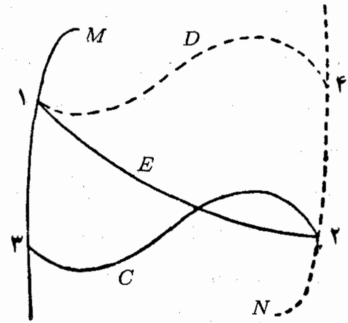
بدیهی است در حالتی که پوش G خانوادهٔ چرخزادهای عمود بر N، در نقطهٔ ۳ شاخه‌ای ندارد که به سمت خم N تصویر شود، گزاره‌های موجود در قضیه و برهانهایشان را باید کمی دستکاری کرد. می‌توان ثابت کرد که در این حالت، نقطهٔ تماس ۳ ممکن است بر ۱ منطبق شود و $I(E_{۱۲})$ هنوز هم یک کُمینه باشد.

حال اگر مطابق پرسشی که یاکوب برنویی مطرح کرد و در صفحهٔ ۷۰ ذکر شد، خم N یک خط راست عمودی باشد، آنگاه خانوادهٔ چرخزادهای عمود بر N، چنانکه در شکل ۱۹ صفحهٔ ۶۹ نموده شده است، یک خانوادهٔ هم‌مرکز بدون پوش G است و میدان F، کل نیم‌صفحهٔ $y > \alpha$ است. در این حالت همواره یک کمان $E_{۱۲}$ وجود دارد که در سه شرط قضیه صدق می‌کند و در میان همهٔ خمهای واصل ۱ و N زیر خط $y = \alpha$، کمینه را به دست می‌دهد. روشن است که در این حالت شرط ژاکوبی، شرط ۳ی قضیه، همواره برقرار است، زیرا خانوادهٔ چرخزادهای هم‌مرکز هیچ پوشی ندارد.

۳۲. مسیر تندترین سقوط از یک خم به یک نقطه. طبعاً انتظار داریم مسئلهٔ تعیین خم تندترین سقوط از خم ثابت M به نقطهٔ ثابت ۲، با مسائل بندهای قبل که در آنها ذره از نقطه‌ای ثابت شروع و به سمت یک خم ثابت سقوط می‌کرد، مشابه باشد. اما محکهای موجود کاملاً متفاوتند. اختلاف از این واقعیت ناشی می‌شود که خط $y = y_۱ - v_۱^۲/۲g$ که دایره‌های مولد چرخزاد بر روی آن می‌غلتند، دیگر ثابت نیست، زیرا مختص $y_۱$ نقطهٔ ۱ در امتداد خم متغیر است. خود لاگرانژ[8] در ابتدا تصور می‌کرد که جواب مسئله باید چرخزادی عمود بر خم M باشد، احتمالاً به این خاطر که او سرعت اولیهٔ $v_۱$ را که ذره هنگام ترک خم M باید داشته باشد بروشنی مشخص نکرده بود. [۱۰] استدلال او مورد انتقاد بُردا[9] (۱۷۳۳ـ۱۷۹۹) قرارگرفت. بردا شرط صحیح جهت خم M در نقطهٔ برخوردش

8) Lagrange 9) Borda

با چرخزاد، [۱۱] را ارائه داد و لاگرانژ از روی آن نشان داد که چگونه می‌توان با اصلاح تحلیل خودش، همان نتیجه را به‌دست آورد. [۱۲]



شکل۲۲

در عین حال می‌توانیم مسئلهٔ جدید را به کمک تبدیل هندسی ساده‌ای که دلایل عدم استمرار در به‌کار بردن محکهای قدیمی را نشان می‌دهد، به مورد پیشین تبدیل کنیم. فرض کنید $v_۱ \neq ۰$ سرعت مفروضی باشد که ذره با آن حرکت از خم M در شکل ۲۲ را آغاز می‌کند و فرض کنید $E_{۱۲}$ مسیر خاصی از M به نقطهٔ ۲ باشد. زمان سقوط در امتداد هر مسیر دیگری از این دست مثل $C_{۳۲}$ با زمان سقوط در امتداد $D_{۱۴}$ یکی است. $D_{۱۴}$ بر اثر حرکت دادن $C_{۳۲}$ به موازات خودش تا وقتی که نقطهٔ ابتدای آن، نقطهٔ ۳، روی نقطهٔ ۱ بیفتد به‌دست می‌آید. اگر M را حول مرکز خط راست واصل ۱ و ۲ به اندازهٔ ۱۸۰° دوران دهیم به موضع N در شکل خواهیم رسید. به این طریق هر کمان $C_{۳۲}$ واصل M و ۲، کمان $D_{۱۴}$ واصل ۱ و N را مشخص می‌کند و برعکس؛ و زمانهای سقوط روی کمانهای متناظر یکسان است به شرط آنکه ذره در هر حالت با سرعت اولیهٔ $v_۱$ شروع به حرکت کند. روشن است که مسئلهٔ این بند با مسئلهٔ تعیین مسیر تندترین سقوط از یک نقطهٔ ثابت ۱ به خم ثابت N معادل است.

ویژگیهای مشخصهٔ جواب مسئلهٔ دوم را از پیش می‌دانیم. کمان کمینه‌ساز، مثلاً $E_{۱۲}$، باید چرخزاد ایجاد شده توسط دایرهٔ غلتان بر روی خط $y = y_۱ - v_۱^۲/۲g$

باشد و خم N باید $E_{۱۲}$ را در نقطهٔ ۲ به‌طور عمودی قطع کند. یعنی باید جهت خم M در نقطهٔ برخوردش با $E_{۱۲}$، نقطهٔ ۱، بر مماس بر $E_{۱۲}$ در نقطهٔ ۲ عمود باشد. تبدیلی که انجام داده‌ایم بروشنی نشان می‌دهد که چرا جهت M در ۱، توسط جهت $E_{۱۲}$ در نقطهٔ ۲ (به جای نقطهٔ ۱) تعیین می‌گردد.

شرط لازم دیگر دربارهٔ کمان $E_{۱۲}$ که متناظر با شرط ۳ی قضیهٔ صفحهٔ ۷۷ است، بسادگی برحسب خم N قابل استنتاج است. اگر بخواهیم $E_{۱۲}$ مسیر تندترین سقوط از M به ۲ را به دست دهد، باید نقطهٔ تماس کمان $E_{۱۲}$، یا توسیع آن، با پوش G خانوادهٔ یک پارامتری چرخزادهای عمود بر N، خارج از این کمان واقع شود.

۳۳. تشخیص نقطهٔ کانونی. نقطهٔ ۳، محل تماس چرخزاد $E_{۱۲}$ در شکل ۲۱ صفحهٔ ۷۱ با پوش G خانوادهٔ چرخزادهای عمود بر خم N، به سبب تشابهش با کانون عدسی یا آینهٔ منحنی، نقطهٔ کانونی N روی E نامیده می‌شود. بخشی از قضیهٔ صفحهٔ ۷۶ که به موضع این نقطهٔ کانونی می‌پردازد ارزش عملی چندانی ندارد مگر آنکه نوعی روش صریح برای تعیین موضع این نقطه روی E در اختیار داشته باشیم. در پاراگرافهای آتی، ساختاری هندسی برای نقطهٔ کانونی بیان خواهیم کرد که می‌توان آن را برای ردهٔ وسیعی از مسائل که مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان حالت خاصی از آنهاست، به‌کار بست. این ساختار، اصلاح جزئی تعمیم جالبی است که دکتر آی.ا.بارنت[10] [۱۳] از ساختار طرح شدهٔ پروفسور ماری ای. سینکلر[11] [۱۴] برای مسئلهٔ رویهٔ دورانی با مساحت کمینه انجام داده است.

برای استنتاج این محک می‌توانیم محور x را منطبق بر خط $y = \alpha$ اختیار کنیم چنانکه معادلات چرخزادهایی که می‌خواهیم در نظر بگیریم عبارت می‌شوند از

$$x = a + b(u + \sin u), \qquad y = b(۱ + \cos u). \qquad (۳۲)$$

اگر اولین معادله از این معادلات نسبت به u به صورت تابعی از خارج قسمت $(x - a)/b$ حل و نتیجه در معادلهٔ دوم جایگزین می‌شد، معادلهٔ منفردی به

10) I.A.Barnett 11) Mary E.Sinclair

صورت

$$y = b\phi\left(\frac{x-a}{b}\right) \tag{۳۳}$$

برای چرخزادها به دست می‌آمد. اگر تابع ϕ نامشخص باشد، این معادله کلی‌تر از معادلهٔ مربوط به چرخزادهاست، با این حال معلوم می‌شود که برای همهٔ مسائل حساب تغییرات که فرین‌های آنها با معادله‌ای به این شکل نمایاندنی باشد، می‌توان ساختار هندسی واحدی را برای نقطهٔ کانونی به‌کار برد.

برای یافتن این ساختار فرض کنید معادلهٔ خم N به شکل پارامتری

$$x = \xi(\tau), \qquad y = \eta(\tau).$$

باشد. معادلاتی را که بیان می‌کنند خم (۳۳)، N را با زوایای قائمه قطع می‌کند می‌توان به شکل

$$\eta = b\phi(\vartheta), \qquad -\frac{\xi'}{\eta'} = \phi'(\vartheta), \qquad \vartheta = \frac{\xi - a}{b}, \tag{۳۴}$$

در نظر گرفت که در آن برای آسانتر کردن تحلیل متغیر جدید ϑ را معرفی کرده‌ایم. جوابهای این معادلات برای ϑ، a، و b، سه تابع $\vartheta(\tau)$، $a(\tau)$ و $b(\tau)$ هستند به‌طوری که هر یک از اعضای خانوادهٔ یک پارامتری خمهای

$$y = b(\tau)\phi\left(\frac{x - a(\tau)}{b(\tau)}\right) \tag{۳۵}$$

خم N را عمودی قطع می‌کند. بنابر قاعدهٔ مشهور حسابان، پوش G این خانواده را می‌توان با مساوی صفر قراردادن مشتق جزئی طرف دوم معادلهٔ اخیر نسبت به τ به‌دست آورد. اگر هنگام مشتق‌گیری، همه جا به جای ϕ و ϕ'، مقادیرشان از روابط $y = b\phi$ و $y' = \phi'$ را که در امتداد خم (۳۵) برقرارند قرار دهیم، معادلهٔ

$$a' + \frac{b'}{b}\left(x - a - \frac{y}{y'}\right) = 0 \tag{۳۶}$$

را برای تعیین نقطهٔ کانونی به‌دست می‌آوریم که در آن a' و b' مشتقات a و b نسبت به τ، و y' مشتق y نسبت به x است.

a' و b' در معادلهٔ اخیر با مشتق‌گیری از معادلات (۳۴) نسبت به τ و حل معادلات حاصل برحسب ϑ'، a'، و b' به‌دست می‌آیند. اگر نقطهٔ برخورد خم (۳۵) با N را مجدداً با ۲ نشان دهیم می‌توانیم همه جا به جای $\phi(u)$، $\phi'(\vartheta)$ و $\phi''(\vartheta)$، مقادیرشان $y_۲/b$، $y'_۲$، و $by''_۲$، برحسب مختص y خم (۳۵) و مشتقاتش در آن نقطهٔ برخورد را قرار دهیم. می‌توانیم فرض کنیم با افزایش τ، $\eta(\tau)$ در امتداد خم N افزایش می‌یابد چنانکه از معادلهٔ دوم (۳۴) روابط زیر را داریم

$$\sqrt{\xi'^۲ + \eta'^۲} = \eta'\sqrt{۱ + [\phi'(v)]^۲} = \eta'\sqrt{۱ + y_۲'^۲}$$

البته علامت رادیکالها همگی مثبت است. نیز یادآوری می‌کنیم که مقادیر ρ و r، شعاعهای انحنای N و خم (۳۵) به ترتیب عبارتند از

$$\rho = \frac{(\xi'^۲ + \eta'^۲)^{۳/۲}}{\xi'\eta'' - \xi''\eta'}, \qquad r = \frac{(۱ + y'^۲)^{۳/۲}}{y''}$$

با در نظر داشتن این نکات بدون مشکل جدی می‌توانیم از معادلات (۳۴) مشتقات زیر را بیابیم

$$v' = \frac{\eta' r_۲}{b\rho_۲}, \qquad \frac{b'}{b} = \frac{\eta'}{y_۲}\left(۱ - y'_۲\frac{r_۲}{\rho_۲}\right),$$

$$a' = \frac{\eta'}{y_۲}\left[\left(x_۲ - a - \frac{y_۲}{y'_۲}\right)y'_۲\frac{r_۲}{\rho'} - (x_۲ - a + y_۲y'_۲)\right]\cdot \quad (۳۷)$$

اکنون معادلهٔ (۳۶) برای تعیین نقطهٔ کانونی (x, y) تبدیل می‌شود به

$$\frac{x - \frac{y}{y'} - x_۲ + \frac{y_۲}{y'_۲}}{x_۲ + y_۲y'_۲ - x + \frac{y}{y'}} = -\frac{\rho_۲}{y'_۲ r_۲} = -\frac{\rho_۲\cos\theta_۲}{r_۲\sin\theta_۲}$$

که در آن $y'_{۲} = \tau\theta_{۲}$ شیب خم (۳۵) در نقطهٔ ۲ است. به کمک فرمولهای

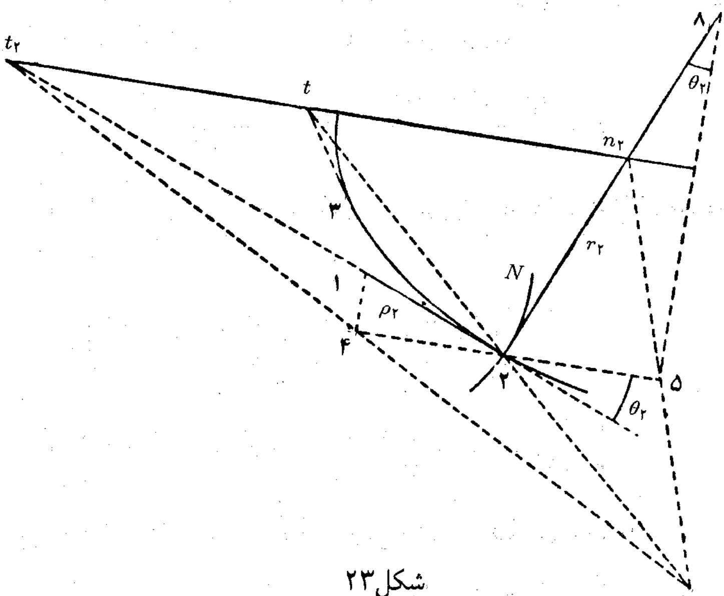
$$t = x - \frac{y}{y'}, \qquad n = x + yy'$$

برای t و n، طول از مبدأهای نقاط برخورد مماس و عمود بر خم در نقطهٔ (x, y) با محور x، معادلهٔ

$$\frac{t_{۲} - t}{t - n_{۲}} = -\frac{\rho_{۲}\cos\theta_{۲}}{r_{۲}\sin\theta_{۲}} \qquad (۳۸)$$

را که فقط شکل دیگر معادلهٔ (۳۶) است، به دست می‌آوریم.

معادلهٔ اخیر ساختار هندسی زیر را برای نقطهٔ کانونی به‌دست می‌دهد. این ساختار در شکل ۲۳ نشان داده شده است. [۳۸] ابتدا $r_{۲}$ و $\rho_{۲}$، شعاعهای انحنای



شکل۲۳

چرخزاد و خم N در نقطهٔ برخوردشان را رسم می‌کنیم، که البته اولی را اگر از معادلات چرخزاد حساب کنیم، منفی است چون $y''_۲$ منفی است. $-r_۲ \sin\theta_۲$ و $\rho_۲ \cos\theta_۲$، تصاویر آن دو روی خط گذرا از نقطهٔ ۲ و موازی محور xها عبارت از پاره‌خطهای ۴۲ و ۲۵ در شکل ۲۳ می‌باشند. خطوط $t_۲$۴ و $n_۲$۵ در نقطهٔ ۶ یکدیگر را قطع می‌کنند و سپس خط ۶۲ محور افقی را در نقطهٔ t قطع می‌کند به‌طوری که پاره‌خطهای $t_۲ - t$ و $t - n_۲$ بنابر تشابه مثلثها با ۴۲ و ۲۵ متناسبند. از این رو بر اساس معادلهٔ (۳۸) نقطهٔ تماس مماس بر چرخزاد در t عبارت است از ۳، نقطهٔ کانونی خم N روی چرخزاد E.

u، مقدار پارامتری این نقطهٔ کانونی N روی چرخزاد (۳۲) به‌طور تحلیلی با یک معادلهٔ ساده مشخص می‌شود. روی چرخزاد داریم

$$x - a - \frac{y}{y'} = ۲b\left(\frac{u}{۲} + \cot\frac{u}{۲}\right)\cdot$$

به این ترتیب، معادلهٔ (۳۶) شرط

$$\frac{u_۳}{۲} + \cot\frac{u_۳}{۲} = -\frac{a'}{۲b'}$$

را برای u، مقدار پارامتری نقطهٔ کانونی، به‌دست می‌دهد که در آن a' و b' مقادیر (۳۷) هستند که از معادلات (۳۴) معین می‌شوند. اگر مقدار کسر $-a'/۲b$ معلوم باشد، با علامت‌گذاری نقاطی که عرض از مبدأشان مساوی $-a'/۲b'$ است، روی نمودار تابع $u/۲ + \cot(u/۲)$ می‌توان مقدار تقریبی u، پارامتر نقطهٔ کانونی، را بسهولت مشخص کرد.

فصل ۴

رویه‌های دورانی با مساحت کمینه

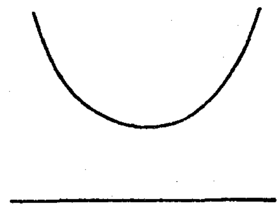
۳۴. نکات مقدماتی دربارهٔ این مسئله. مسئلهٔ تعیین رویهٔ دورانی‌ای که مساحت کمینه دارد، همچون مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان، یکی از نخستین مسائلی بود که مورد توجه محققان حساب تغییرات قرار گرفت و از جملهٔ آن مسائلی است که به کاملترین وجه بررسی شده است. این مسئله از جهات بسیار، رضایتبخش‌ترین تصوری است که از اصول نظریهٔ عمومی حساب تغییرات در صفحه در اختیار داریم. با وجود اینکه این مسئله ابتدا در قرن هجدهم مطرح شد و از آن زمان تاکنون بارها مورد مطالعهٔ مجدّد قرار گرفته است، در سالهای اخیر نتایج جالب و مهم تازه‌ای دربارهٔ آن یافت شده است.[۱]

در صفحات آتی ابتدا خواهیم دید که خم مسطح $y = y(x)$ که دو نقطهٔ مفروض در صفحه را به هم می‌پیوندد و با دوران حول محور x رویهٔ دورانی با مساحت کمینه را به وجود می‌آورد، باید کمانی از یک زنجیره با معادلهٔ

$$y = \frac{b}{۲}\left(e^{\frac{x-a}{b}} + e^{-\frac{x-a}{b}}\right) \qquad (۱)$$

باشد. یکی از این زنجیره‌ها در شکل ۲۴ نشان داده شده است. ولی آنها دارای اشکال بسیار گوناگونی هستند. با آویختن زنجیری به دو میخ می‌توان این اختلافات را به طور عملی ملاحظه کرد. وقتی میخها نزدیک یکدیگرند، زنجیر مانند زنجیرهٔ

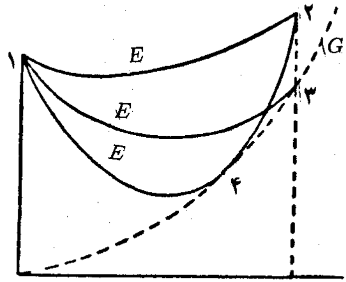
۱) این مطلب مربوط به زمان تألیف این کتاب است.



شکل۲۴

باریک و عمودی می‌آویزد و وقتی میخها از یکدیگر دورند، خم حاصل گشاد و پهن است. خمی که در شکل نشان داده شده است، از نوع میانی است.

اگر بپذیریم که وقتی دو نقطهٔ ۱ و ۲ در صفحه مفروض باشند، خم کمینه‌ساز $y = y(x)$ که آنها را به یکدیگر متصل می‌کند باید یکی از زنجیره‌های (۱) باشد، فوراً باید معین کنیم که آیا این دو نقطه را می‌توان با چنین خمی به یکدیگر وصل کرد یا نه. بررسی تحلیلی این مسئله، متضمن محاسباتی است که در بند بعد نشان داده خواهد شد، ولی اگر مایل باشیم که لحظه‌ای از اثباتها چشمپوشی کنیم، تحلیل هندسی نتایج ساده خواهد بود. در خانوادهٔ دو پارامتری زنجیره‌های (۱)، آنهایی که از نقطهٔ ۱ عبور می‌کنند خانواده‌ای یک پارامتری از خمها را تشکیل می‌دهند که در هر جهتی یکی از آنها از نقطهٔ ۱ می‌گذرد، و این خانوادهٔ یک پارامتری دارای پوشی همچون G است که در شکل ۲۵ نشان داده شده است. ثابت خواهد شد که اگر شیب آغازی زنجیره در نقطهٔ ۱، از منهای بی‌نهایت تا بعلاوهٔ بی‌نهایت افزایش یابد، نقطهٔ برخورد زنجیره با خط عمودی گذرنده از نقطهٔ ۲، ابتدا از بی‌نهایت تا نقطهٔ ۳ نزول و سپس بار دیگر به بی‌نهایت صعود می‌کند. وقتی نقطهٔ برخورد حین سیر نزولی خود به نقطهٔ ۲ در بالای پوش می‌رسد، روی کمان زنجیره‌ای واقع می‌شود که جایی بین ۱، ۲ با G تماس دارد، و وقتی هنگام صعود به نقطهٔ ۲ می‌رسد روی زنجیره‌ای واقع می‌شود که هیچ نقطهٔ تماسی با G ندارد. سپس بسهولت دیده می‌شود که هر نقطهٔ ۲ بالای پوش G، با دو زنجیره از خانوادهٔ (۱) به نقطهٔ ۱ وصل می‌شود که تنها یکی از آنها با پوش G تماس



شکل۲۵

دارد؛ همچنین فقط یک زنجیره وجود دارد که نقطهٔ ۲ روی G را به ۱ وصل می‌کند؛ و اگر نقطهٔ ۲ زیر G باشد هیچ زنجیره‌ای از این نوع موجود نیست. البته این نتایج را می‌توان بسادگی به طور شهودی از شکل استنتاج کرد. این وضعیتی است که با مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان تفاوت بسیار دارد؛ در آنجا همواره چرخزاد یکتایی که دو نقطهٔ مفروض را به هم وصل می‌کند موجود بود و به همین دلیل مسئلهٔ زنجیره از نمونه‌های بسیار برجستهٔ نتایجی است که در حالت کلی برای مسائل حساب تغییرات در صفحه، انتظار داریم.

نقطهٔ ۳ در شکل ۲۵ که نقطهٔ تماس یکی از زنجیره‌های E با پوش G است، نقطهٔ مزدوجِ ۱ روی E نامیده می‌شود. در بند بعد خواهیم دید که اگر مطابق شکل، نقطهٔ ۴ نقطهٔ تماس دومی روی پوش G باشد، مساحت رویهٔ دورانی‌ای که کمان مرکب $E_{۱۴} + G_{۴۳}$ ایجاد می‌کند همواره با مساحت رویهٔ دورانی‌ای که $E_{۱۳}$ ایجاد می‌کند مساوی است. این مطلب مانستهٔ بسیار جالب ویژگی ریسمانی گستردهٔ یک خم و نیز نمونهٔ دیگری از قضیهٔ پوش است که توسط داربو، زرملو، و کنزر به اثبات رسید. به کمک این مطلب قادر خواهیم بود شرط لازم ژاکوبی را ثابت کنیم. این شرط حاکی از آن است که کمان زنجیره‌ای $E_{۱۴۲}$ که نقطهٔ ۴ بر روی آن مزدوج ۱ است هرگز نمی‌تواند رویه‌ای دورانی با مساحت کمینه به دست دهد. همانطورکه پیش از این دیدیم، در مسائل فصل قبل، وقتی دو نقطهٔ انتهایی

خم کمینه‌ساز از پیش داده شده بود نیازی به استفاده از شرط لازم ژاکوبی نبود. با این حال، ژاکوبی در اصل، شرط مشهور خود را برای همین حالت بیان کرده بود؛ شرطی که به زیبایی حساب تغییرات را از نظریهٔ عادی بیشینه‌ها و کمینه‌های توابع یک یا چند متغیره متمایز ساخت.

حال که فهمیدیم یکی از زنجیره‌های واصل ۱ و ۲ نمی‌تواند پاسخ مسئلهٔ ما باشد، مهم است که بتوانیم ثابت کنیم کمان باقیمانده یعنی $E_{۱۲}$، نوعی کمینه به دست می‌دهد. این کار را به روش وایرشتراس که پیش از این برای مسائل فصل قبل تشریح شد انجام خواهیم داد. همواره یک همسایگی از $E_{۱۲}$ وجود دارد که در آن تمام کمانهای دیگری که ۱ را به ۲ وصل می‌کنند رویه‌های دورانی‌ای به وجود می‌آورند که از آن که خود کمان $E_{۱۲}$ ایجاد می‌کند، بزرگترند.

بدیهی است وقتی نقطهٔ ۲ بر روی پوش G یا زیر آن واقع است، نتایجی که تا کنون بیان کرده‌ایم دقیقاً معلوم نمی‌کنند که چه اتفاقی می‌افتد. وقتی ۲ روی G است، شرط ژاکوبی حاکی از آن است که زنجیرهٔ یکتایی که ۱ را به ۲ وصل می‌کند، احتمالاً نمی‌تواند موجد یک رویهٔ دورانی کمینه باشد؛ و وقتی ۲ زیر G است، هیچ یک از زنجیره‌های خانوادهٔ (۱)، ۱ را به ۲ وصل نمی‌کنند. در واقع، وقتی ۲ روی یا زیر G واقع است، هیچ خمی با معادلهٔ $y = y(x)$ وجود ندارد که یک رویهٔ دورانی کمینه ایجاد کند. خواهیم دید که در این حالت، رویهٔ کمینه را خط شکسته‌ای متشکل از خطوط عرضی گذرنده از نقاط ۱ و ۲ و بخشی از محور x که بین آنها واقع است به دست می‌دهد. این خم به افتخار گلدشمیت[۲]، نخستین کسی که آن را در سال ۱۸۳۱ کشف کرد، [۱۵] جواب ناپیوستهٔ گلدشمیت نامیده می‌شود؛ ناپیوسته به این دلیل که مماس بر آن در دو گوشهٔ واقع بر محور x به طور ناپیوسته می‌چرخد.

ثابت خواهد شد که جواب ناپیوستهٔ گلدشمیت، همچون زنجیرهٔ کمینه‌ساز بیان شده در فوق، همواره رویهٔ دورانی‌ای ایجاد می‌کند که از رویه‌های دورانی ایجاد شده توسط خمهایی که نقاط انتهایی آن را به هم می‌پیوندند و در همسایگی به

2) Goldschmidt

اندازهٔ کافی کوچک آن واقعند، کوچکتر است. وقتی نقطهٔ ۲ در بالای پوش G واقع است، هم زنجیره و هم جواب ناپیوسته وجود دارند، و دکتر هـ. ف. مکنیش[3] در سال ۱۹۰۵ نشان داد [۱۶] که چگونه می‌توان آن را که مولد رویهٔ کوچکتر است تشخیص داد. پروفسور ماری اِ. سینکلر [۱۷] ثابت کرده است که این رویهٔ کوچکتر، از رویه‌های دورانی ایجاد شده توسط همهٔ خمهای دیگری که نقاط ۱ و ۲ را به هم وصل می‌کنند نیز کوچکتر است. روشهای اثبات این احکام در صفحات آتی با آنچه این نویسندگان به کار برده‌اند اندک تفاوتی دارد، اما نتایج یکسانند.

۳۵. اثبات اینکه کمان کمینه‌ساز یک زنجیره است. همان طور که پیش از این در فصل ۱ اشاره کردیم، در مسئلهٔ تعیین رویهٔ دورانی با مساحت کمینه، انتگرالی که باید کمینه کنیم عبارت است از

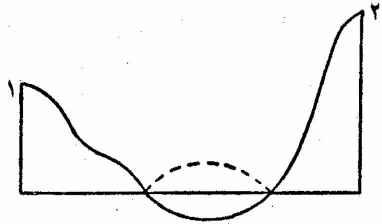
$$I = \int_{x_۱}^{x_۲} f(y, y')dx$$

که در اینجا مقدار $f(y, y')$ برابر است با

$$f(y, y') = y\sqrt{۱ + y'^۲} \tag{۲}$$

خمهایی که در این مسئله بررسی می‌کنیم، همگی باید در نیمه صفحهٔ بالایی $y \geq ۰$ واقع باشند، زیرا روی کمانی که بخشهایی از آن زیر محور x واقع است مقدار I برابر با تفاضل مساحت ایجاد شده توسط بخشهای واقع در بالا و پایین محور است، حال آنکه ما می‌خواهیم مجموع این مساحتها را در نظر بگیریم. اگر کمانی دارای بخشهایی زیر محور x باشد، همواره می‌توان خمی را که در بالای محور واقع است و همان رویه را ایجاد می‌کند جایگزین آن ساخت. این مطلب در شکل ۲۶ بوضوح دیده می‌شود. علاوه بر قید $y \geq ۰$ روی خمهای $y = y(x)$، همچون دو مثال پیش، می‌خواهیم همهٔ خمهای مفروض $y = y(x)$ پیوسته و

3) H. F. Mac Neish



شکل۲۶

دارای مماسهایی باشند که جز در تعداد متناهی نقطه، در بقیهٔ نقاط به طور پیوسته گردش می‌کنند. در نیم صفحهٔ بالایی، خمهایی از این دست را خمهای پذیرفتنی می‌نامیم.

بدین ترتیب، مسئله آن است بین همهٔ کمانهای پذیرفتنی که نقاط مفروض ۱ و ۲ را به هم وصل می‌کنند، آن کمانی را تعیین کنیم که انتگرال I را کمینه کند.

شرایط لازم که در بند ۱۹ صفحهٔ ۴۷ برای کمان کمینه‌ساز انتگرالی با انتگرالده $f(y, y')$ به دست آمد، عیناً شامل حال مسئلهٔ حاضر هم می‌شود. کمانهای کمینه‌ساز باید جوابهای معادلهٔ

$$f_{y'} = \int_{x_۱}^{x} f_y dx + c$$

باشند که برای تابع خاص (۲)، صورت

$$\frac{yy'}{\sqrt{۱ + y'^۲}} = \int_{x_۱}^{x} \sqrt{۱ + y'^۲}\, dx + c = s + c$$

را به خود می‌گیرد که در آن s اندازهٔ طول کمان کمینه‌ساز از نقطهٔ ۱ تا نقطهٔ به طول x است. در نقطه‌ای از کمان که $y > ۰$، این معادله را می‌توان بر حسب y' حل کرد و به دست آورد.

$$y' = \frac{s + c}{\sqrt{y^۲ - (s + c)^۲}} \qquad (۳)$$

و مشاهده می‌کنیم در چنین نقطه‌ای، y' پیوسته است، زیرا y و s هر دو پیوسته‌اند. اما اگر y' پیوسته باشد، y و s هر دو دارای مشتقهای پیوسته‌اند و معادلهٔ (۳) بار دیگر نشان می‌دهد که y' نیز باید مشتق پیوسته داشته باشد. بنابراین در تمام نقاط بالای محور x، کمان کمینه‌ساز ما دارای انحنای پیوسته است و هیچ گوشه‌ای ندارد.

اگر بدانیم که در امتداد یک کمان کمینه‌ساز y'' پیوسته است، معادلهٔ اویلر در صفحهٔ ۴۹ نتیجه می‌دهد: ثابت $= f - y'f_{y'}$، که برای تابع خاص (۲) به این شکل درمی‌آید.

$$\frac{y}{\sqrt{۱+y'^{۲}}} = b\cdot \qquad (۴)$$

با حل این معادله بر حسب y' و انتگرال‌گیری، می‌بینیم که جوابهای معادلهٔ اویلر در دو معادلهٔ

$$\frac{dy}{\sqrt{(\frac{y}{b})^{۲}-۱}} = dx, \qquad b.\log\left(\frac{y}{b}+\sqrt{\left(\frac{y}{b}\right)^{۲}-۱}\right) = x-a,$$

نیز صدق می‌کنند و با حل معادلهٔ آخر بر حسب y نتیجه می‌شود که فرین‌های مسئلهٔ ما عبارتند از زنجیره‌های

$$y = \frac{b}{۲}\left[e^{\frac{x-a}{b}} + e^{-\frac{x-a}{b}}\right] = b\ ch\frac{x-a}{b}\cdot \qquad (۵)$$

در اینجا و صفحات آتی از نمادهای $ch\ u$، $sh\ u$ برای کسینوس هذلولوی و سینوس هذلولوی استفاده می‌کنیم. این توابع با معادلات زیر تعریف می‌شوند

$$ch\ u = \frac{e^{u}+e^{-u}}{۲}, \quad sh\ u = \frac{e^{u}-e^{-u}}{۲}$$

هیچ ویژگی تعجب برانگیزی از این توابع مورد نیاز نخواهد بود، اما بعدها هنگام مواجهه با این فرمولها، دقت به این نکته مفید است که هر یک از این توابع مشتق دیگری است.

اگر فرین‌ها زنجیره‌های شکل ۲۴ صفحهٔ ۸۶ باشند، ممکن نیست کمان کمینه‌ساز $y = y(x)$ گوشه‌دار باشد. چون همان گونه که قبلاً ثابت شد، گوشه‌ها باید روی محور x واقع باشند و بخشهایی از کمان کمینه‌ساز که در بالای محور واقع است پاره‌هایی از زنجیره‌هایی هستند که هیچ نقطهٔ مشترکی با محور ندارند. بنابراین نتیجهٔ زیر را به دست می‌آوریم:

اگر ۱، ۲، دو نقطه در نیم صفحهٔ $y > 0$ باشند، کمان‌پذیرفتنی $y = y(x)$ که آنها را به هم می‌پیوندد و رویهٔ دورانی با مساحت کمینه ایجاد می‌کند، باید کمان یکتای بدون گوشه از یکی از زنجیره‌های (۵) باشد.

۳۶. خانوادهٔ یک پارامتری زنجیره‌های گذرا از یک نقطه.

قدم بعدی ما تعیین تعداد و مشخصهٔ آن زنجیره‌های (۵) است که از دو نقطهٔ مفروض ۱ و ۲ می‌گذرند. هدف آن است که معادلهٔ خانوادهٔ یک پارامتری زنجیره‌های گذرا از نقطهٔ ۱ را بیابیم و سپس تعیین کنیم که چه تعداد از آنها از نقطهٔ ۲ می‌گذرد. شرط آن که زنجیرهٔ (۵) از نقطهٔ ۱ عبور کند این است که

$$y_1 = b\ ch\ \frac{x_1 - a}{b}$$

براحتی می‌توان ثابت کرد که اگر a و b بر حسب پارامتر جدید α به صورت[۴]

$$a = x_1 - y_1\frac{\alpha}{ch\alpha}, \qquad b = \frac{y_1}{ch\alpha} \qquad (۶)$$

بیان شوند، معادلهٔ فوق برقرار است و بدین ترتیب، خانوادهٔ زنجیره‌های گذرا از نقطهٔ ۱ عبارت است از

$$y = \frac{y_1}{ch\alpha} ch\left(\alpha + \frac{x - x_1}{y_1} ch\alpha\right) = y(x, \alpha) \qquad (۷)$$

۴) این پارامتر جدید با قرار دادن $(x_1 - a)/b = \alpha$ به دست آمده است. بدین ترتیب بنابر شرط مذکور در متن داریم $y_1 = bch\alpha$ یا $b = y_1/ch\alpha$ که از آنجا حاصل می‌شود $a = x_1 - b\alpha = x_1 - y_1\frac{\alpha}{ch\alpha}$.

که در آن $y(x,\alpha)$ نماد ساده‌ای برای عبارت پیچیدهٔ پیش از آن است.

در استنتاج ویژگیهای خانوادهٔ یک پارامتری زنجیره‌های گذرا از نقطهٔ ۱، به مشتقات اول و دوم تابع $y(x,\alpha)$ در (۷) نسبت به x و α نیاز داریم. مشتقات تابع نسبت به x را با علامت پریم و نسبت به α را با زیرنویس نشان می‌دهیم، در ضمن زیرنویس ۱ مبین مقادیر x، y ، و y' در نقطهٔ ۱ خواهد بود. به کمک فرمولهای

$$\frac{d}{du}chu = shu, \qquad \frac{d}{du}shu = chu$$

که قبلاً ذکر کردیم، بسهولت مقادیر زیر را به دست می‌آوریم

$$y = \frac{y_۱}{ch\alpha} ch\left(\alpha + \frac{x - x_۱}{y_۱} ch\alpha\right) = y(x,\alpha)$$

$$y' = sh\left(\alpha + \frac{x - x_۱}{y_۱} ch\alpha\right), \qquad y'_۱ = sh\alpha \tag{۸}$$

$$y_\alpha = \frac{y' y'_۱}{ch\alpha}\left(x - \frac{y}{y'} - x_۱ + \frac{y_۱}{y'_۱}\right),$$

که در محاسبهٔ مشتق اخیر، بجز در یک مورد، همه جا به جای کسینوس و سینوس هذلولوی، مقادیرشان را بر حسب y، y' ، $y_۱$ ، و $y'_۱$ از سه معادلهٔ نخست قرار داده‌ایم.

برحسب تغییر مختصات (X,Y)، مماسهای زنجیره در نقاط $(x_۱,y_۱)$ و (x,y) دارای معادلات

$$Y - y_۱ = y'_۱(X - x_۱), \qquad Y - y = y'(X - x)$$

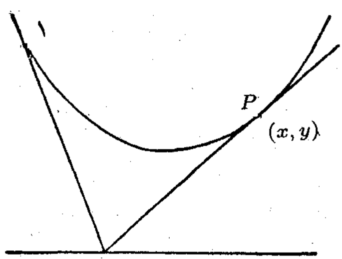
هستند که با حذف X، مختص Y نقطهٔ برخورد این دو پیدا می‌شود:

$$Y = \frac{y' y'_۱}{y' - y'_۱}\left(x - \frac{y}{y'} - x_۱ + \frac{y_۱}{y'_۱}\right),$$

و بنابراین مشتق y_α دارای مقدار زیر نیز می‌باشد

$$y_\alpha = \frac{y' - y'_۱}{ch\alpha}\, Y. \qquad (۹)$$

این فرمول، ساختار هندسی بسیار جالبی را برای نقطهٔ مزدوج با ۱ روی زنجیره ارائه می‌دهد که لیندلوف[5] (۱۸۲۷ـ۱۹۰۸) [۱۸] آن را در سال ۱۸۶۰ کشف کرد. زیرا در نقطهٔ تماس (x, y) خم $y = y(x, \alpha)$ با پوش G خانواده، بنابر محک مشهور حسابان باید y_α و به تبع آن مختص Y صفر شود و بنابر این، مماسهای زنجیره در نقطه ۱ و مزدوج آن (x, y)، مطابق شکل ۲۷ باید محور x را قطع کنند. بولتزا به همین نحو ثابت کرده است که ساختار لیندلوف برای نقطهٔ مزدوج، در حالت کلی‌تری که فرینه‌ها، مشابه بند ۳۳ صفحهٔ ۸۰ با معادلهٔ $y = b\phi\left[(x-a)/b\right]$ نشان داده می‌شوند، نیز برقرار است. [۱۹]



شکل۲۷

از شکل ۲۷ و فرمول (۹) واضح است که وقتی نقطهٔ (x, y) در امتداد زنجیرهٔ $y = y(x, \alpha)$ از نقطهٔ ۱ به سمت راست حرکت می‌کند مقدار y_α در ابتداد مثبت است، و تنها وقتی تغییر علامت می‌دهد که (x, y) از نقطه‌ای مزدوج با ۱

5) Lindelöf

بگذرد. از این رو نابرابری $y_\alpha > ۰$ در مقدار $x > x_۱$ ایجاب می‌کند که بین ۱ و (x, y) هیچ نقطهٔ مزدوجی وجود نداشته باشد، حال آنکه $y_\alpha < ۰$ مبین وجود یک نقطهٔ مزدوج است.

مشتقات دوم $y(x, \alpha)$ فقط در نقاط (x, y) که مزدوج ۱ هستند و داریم $x > x_۱$ مورد نیاز خواهند بود. از شکل ۲۷ برای ساختار لیندلوف مشاهده می‌کنیم که در این نقاط $y'_۱ < ۰, y' > ۰$. بدین ترتیب، با حذف تفاضل $x - x_۱$ به کمک معادلهٔ $y_\alpha = ۰$، از فرمول (۸) به دست می‌آوریم:

$$y'' = \frac{y}{y_۱^۲} ch^۲\alpha > ۰, \qquad y'_\alpha = \frac{y^۲ y'_۱}{y' y_۱^۲} ch\alpha < ۰, \qquad (۱۰)$$

$$y_{\alpha\alpha} = \frac{y' y_۱'^۲}{y_۱^۲} - ۱ \left[\left(\frac{y}{y'} \right)^۳ - \left(\frac{y_۱}{y'_۱} \right)^۳ \right] > ۰.$$

۳۷. برهانهای مربوط به خواص این خانواده. ابتدا می‌خواهیم بدانیم که وقتی $x > x_۱$ ثابت باشد و α از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند، چه بر سر عرض زنجیرهٔ $y = y(x, \alpha)$ می‌آید. اگر به کمک معادلهٔ (۷)، این عرض را به شکل

$$y(x, \alpha) = \left(\frac{\alpha}{ch\alpha} + \frac{x - x_۱}{y_۱} \right) \frac{y_۱ \, ch \left[\left(\frac{\alpha}{ch\alpha} + \frac{x - x_۱}{y_۱} \right) ch\alpha \right]}{\left(\frac{\alpha}{ch\alpha} + \frac{x - x_۱}{y_۱} \right) ch\alpha},$$

بیان کنیم، ملاحظه می‌کنیم که اگر α به هر یک از مقادیر $\pm\infty$ میل کند، $y(x, \alpha)$ به $+\infty$ میل می‌کند، زیرا بنابر قاعدهٔ محاسبهٔ صورت مبهم در حسابان، اگر u به علاوه یا منهای بی‌نهایت میل کند

$$\lim \frac{u}{chu} = \lim \frac{۱}{shu} = ۰$$

بعلاوه چون در فرمولهای (۱۰) بند قبل $y_{\alpha\alpha} > 0$، مشتق y_α وقتی صفر می‌شود، از منفی به مثبت تغییر علامت می‌دهد و بنابراین y_α فقط می‌تواند یک بار صفر شود.[۶] ملاحظه می‌کنیم که اگر $x > x_1$ ثابت باشد و α از $-\infty$ تا $+\infty$ تغییر کند، $y(x,\alpha)$ از $+\infty$ تا یک مقدار کمینه کاهش یافته، سپس بار دیگر به $+\infty$ افزایش می‌یابد، زیرا y_α ابتدا از منفی به صفر و بعد به مثبت تغییر مقدار می‌دهد.

به ازای یک x ثابت، فرض کنید $g(x)$ مقدار کمینهٔ $y(x,\alpha)$ باشد. معادلهٔ $y = g(x)$ خمی را تعریف می‌کند که بزودی ثابت می‌کنیم این خم همان پوش G خانوادهٔ زنجیره‌هاست. از استدلال پاراگراف قبل نتیجه می‌شود که از نقطهٔ ۲ در بالای این پوش دو زنجیره می‌گذرد که در نقطهٔ ۲ برروی آنها علامتهای y_α درست مخالف هم هستند. بنابر یادداشت صفحهٔ ۹۴، یکی از این زنجیره‌ها بین ۱ و ۲ نقطه‌ای مزدوج با ۱ دارد و دیگری چنین نقطه‌ای ندارد. از این رو قضیهٔ زیر را داریم:

نقطهٔ ۲ بالای پوش G در شکل ۲۵ صفحهٔ ۸۶ با دو زنجیره از خانوادهٔ $y = bch\left[(x-a)/b\right]$ به ۱ وصل می‌شود. روی یکی از آنها نقطه‌ای چون ۳ مزدوج با ۱ وجود دارد، ولی روی دیگری چنین نقطه‌ای وجود ندارد. نقطهٔ ۲ روی پوش G با زنجیرهٔ یکتایی از این خانواده به ۱ وصل می‌شود. روی این زنجیره نقطهٔ ۲ مزدوج نقطهٔ ۱ است. اگر نقطهٔ ۲ زیر G واقع باشد، با هیچ زنجیره‌ای از این خانواده به ۱ وصل نمی‌شود.

اگر به ازای یک x ثابت، مقدار α را که در آن، $y(x,\alpha)$ مقدار کمینهٔ خود را اخذ می‌کند با $\alpha(x)$ نشان دهیم، تابعی که بدین ترتیب تعریف می‌شود در معادلهٔ $y_\alpha = 0$ صدق می‌کند. با روشهایی کاملاً مشابه با روشهای بند ۲۴ صفحهٔ ۶۰، می‌توان نشان داد که $\alpha(x)$ پیوسته است و مشتق پیوسته دارد، بنابراین روابط زیر

۶) چون x ثابت فرض شده، y فقط تابعی از α است. نقطه‌ای که در آن $y_\alpha = 0$ یک فرینه است و چون $y_{\alpha\alpha} > 0$، بنابر آزمون مشتق دوم درحسابان، این نقطه یک کمینهٔ y است. پس سمت چپ این نقطه تابع نزولی است یعنی $y_\alpha < 0$ و سمت راست آن صعودی یعنی $y_\alpha > 0$.

را داریم.

$$y_\alpha\left(x, \alpha(x)\right) = \circ, \qquad y'_\alpha + y_{\alpha\alpha}\alpha' = \circ$$

$$g(x) = y\left(x, \alpha(x)\right), \qquad g'(x) = y' + y_\alpha \alpha' = y' > \circ,$$

$$g''(x) = y'' + y'_\alpha \alpha' = \frac{y y_1 y'^{3} ch^{2}\alpha}{y_1^{3} y'^{3} - y^{3} y_1'^{3}} > \circ.$$

آخرین رابطه با جاگذاری مقدار α' از رابطهٔ دوم و سپس وارد کردن مقادیر مشتقهای دوم y از معادلات (۱۰) حاصل می‌شود. معادلهٔ چهارم نشان می‌دهد که برای $x > x_1$، خم $y = g(x)$ همه جا بر یک زنجیره مماس است و صعود می‌کند، معادلهٔ آخر نیز نشان می‌دهد که انحنای این خم همه جا مثبت است. این مطلب در شکل ۲۵ صفحهٔ ۸۷ نشان داده شد.

بالاخره برای استنتاج شکل پوش G که در شکل ۲۵ نشان داده شده است باید این ویژگیها را هم ثابت کنیم[۷]

$$\lim_{x=x_1} g(x) = \circ, \qquad \lim_{x=x_1} g'(x) = \circ,$$

$$\lim_{x=+\infty} g(x) = +\infty, \qquad \lim_{x=+\infty} g'(x) = +\infty.$$

برای اثبات روابط سطر اول دقت می‌کنیم که وقتی α به $-\infty$ میل می‌کند، رأس

$$(a, b) = \left(x_1 - y_1\frac{\alpha}{ch\alpha}, \frac{y_1}{ch\alpha}\right)$$

۷) مطابق قراردادهای امروزی، این عبارتها را به ترتیب چنین می‌نویسیم

$$\lim_{x\to x_1} g(x) = \circ, \quad \lim_{x\to x_1} g'(x) = \circ, \quad \lim_{x\to+\infty} g(x) = +\infty, \quad \lim_{x\to+\infty} g'(x) = +\infty.$$

از زنجیرهٔ (۷) به نقطهٔ $(x_{۱},۰)$ میل می‌کند و با خطی که شیب آن، $-\frac{۱}{\alpha}$، به صفر میل می‌کند به آن نقطه وصل می‌شود. چون این رأس همواره بالای پوش G است نتیجه می‌شود که وقتی x به $x_{۱}$ میل می‌کند، هم $g(x)$ و هم $g'(x)$ باید به صفر میل کنند. سومین حد فوق بدیهی است، زیرا $g'(x)$ مثبت است و با افزایش x، افزایش می‌یابد و بنابراین، وقتی x به بی‌نهایت میل می‌کند، $g(x)$ باید به بی‌نهایت میل کند. آخرین حد هم درست است، زیرا در نقطهٔ مزدوج با ۱ روی زنجیره که طول آن $x = x_{۱} - \frac{y_{۱}}{y'_{۱}} + \frac{y}{y'}$ است، شیب زنجیره بنابر معادلهٔ (۸) صفحهٔ ۹۳ عبارت است از

$$sh\left(\alpha + \frac{x - x_{۱}}{y_{۱}} ch\alpha\right) = sh\left(\alpha - \frac{ch\alpha}{sh\alpha} + \frac{y}{y'}\frac{ch\alpha}{y_{۱}}\right)$$

که وقتی α از چپ به ۰ میل می‌کند به $+\infty$ می‌گراید، زیرا $-ch\alpha/sh\alpha$ به $+\infty$ میل می‌کند. چون پوش G در این نقطهٔ مزدوج بر هر زنجیره مماس است نتیجه می‌شود که همراه با x، $g'(x)$ نیز به بی‌نهایت میل می‌کند.

۳۸. دو فرمول کمکی مهم. به منظور بررسی بیشتر ویژگیهای کمینه‌سازی زنجیره‌ها، باید روشهای خاصی را که فقط مختص زنجیره‌هاست به کار گیریم. پیش از این نیز برای خطوط راست و چرخزادها چنین کاری کرده بودیم؛ ولی استنتاج این ویژگیها به کمک دو فرمول کلی‌تر کاملاً آسان خواهد شد. این دو فرمول را می‌توان در مطالعهٔ دیگر مسائل خاص حساب تغییرات و همچنین نظریهٔ کلی‌تری که در فصل ۵ ارائه می‌شود به کار بست. موارد خاص این فرمولها که قبلاً آنها را دیده‌ایم، فرمولهای (۷) و (۸) صفحه‌های ۲۵ و ۲۶ و فرمولهای (۲۵) و (۲۷) صفحهٔ ۶۴ هستند. برای ارائهٔ معادلات جدیدمان، خانوادهٔ یک پارامتری کمانهای فرین

$$y = y(x,b) \qquad (x_{۳} \le x \le x_{۴}) \qquad (۱۱)$$

را که در معادلهٔ دیفرانسیل اویلر

$$\frac{\partial}{\partial x} f_{y'} = f_y \qquad (۱۲)$$

صدق می‌کنند، در نظر می‌گیریم. نماد مشتق جزئی را به این خاطر به کار بردیم که در معادلاتمان همواره دو متغیر وجود دارد، یکی x و دیگری b. اگر $x_۳$ ، $x_۴$، و b همگی متغیر باشند مقدار انتگرال I در امتداد کمانی از این خانواده، تابعی است به شکل

$$I(x_۳, x_۴, b) = \int_{x_۳}^{x_۴} f\left(y(x,b), y'(x,b)\right) dx.$$

به کمک معادلهٔ اویلر (۱۲)، مشاهده می‌کنیم که در امتداد یک کمان فرین

$$\frac{\partial f}{\partial b} = f_y y_b + f_{y'} y'_b = y_b \frac{\partial}{\partial x} f_{y'} + y'_b f_{y'} = \frac{\partial}{\partial x}(f_{y'} y_b)$$

و بنابراین مقادیر سه مشتق جزئی تابع $I(x_۳, x_۴, b)$ عبارتند از

$$\frac{\partial I}{\partial x_۳} = -f\,|^{۳} \quad , \quad \frac{\partial I}{\partial x_۴} = f\,|^{۴} \quad ,$$

$$\frac{\partial I}{\partial b} = \int_{x_۳}^{x_۴} \{f_y y_b + f_{y'} y'_b\} dx = f_{y'} y_b \,|_{۳}^{۴} \quad ,$$

که در آن آوندهای f و مشتقات آن عبارتند از y و y' مربوط به خانوادهٔ (۱۱).

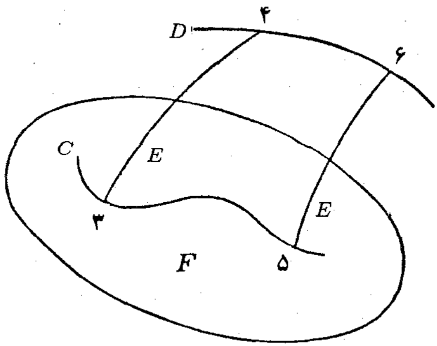
اینک فرض کنید متغیرهای $x_۳$ ، $x_۴$، و b توابعی به شکل $x_۳(t)$، $x_۴(t)$، و $b(t)$ از متغیر t باشند و ۳ و ۴، نقاط انتهایی فرین‌های خانوادهٔ (۱۱)، همزمان دو خم C و D در شکل ۲۸ به معادلات

$$x = x_۳(t), \quad y = y\left(x_۳(t), b(t)\right) = y_۳(t)$$

$$x = x_۴(t), \quad y = y\left(x_۴(t), b(t)\right) = y_۴(t). \qquad (۱۳)$$

را رسم کنند. با نسبت دادن زیرنویسهای مناسب ۳ یا ۴ به x،dx ، و dy در معادلات

$$dx = x'(t)dt \quad , \quad dy = y'dx + y_b db\cdot \qquad (۱۴)$$



شکل۲۸

دیفرانسیلهای $d_{x_۳}$ ، $d_{y_۳}$،و $d_{x_۴}$ ، $d_{y_۴}$ در امتداد این خمها به دست می‌آیند. حال با استفاده از فرمولهای مربوط به مشتقات I، دیفرانسیل I را به صورت

$$dI = \frac{\partial I}{\partial x_۳}dx_۳ + \frac{\partial I}{\partial x_۴}dx_۴ + \frac{\partial I}{\partial b}db = f\,dx + f_{y'}y_b db \Big|_۳^۴$$

به دست می‌آوریم که در آن خط عمودی نشان دهندهٔ تفاضل بین مقادیر کل عبارت سمت راست معادله در نقاط ۴ و ۳ است. از اینجا و به کمک دومین معادله از معادلات (۱۴)، نتیجهٔ مهم زیر حاصل می‌شود.

دیفرانسیل انتگرال I در امتداد خانوادهٔ یک پارامتری کمانهای فرین $E_{۳۴}$ که نقاط انتهایی آنها دو خم C و D در شکل ۲۸ را می‌پیمایند، عبارت است از

$$dI = f(y,p)dx + (dy - pdx)f_{y'}(y,p)\,\Big|_۳^۴, \qquad (۱۵)$$

که در نقاط ۳ و ۴ دیفرانسیلهای dx و dy مربوط به C و D هستند و در ضمن، y و p به ترتیب عرض و شیب E می‌باشند.

انتگرال$\int\{f(y,p)dx + (dy - pdx)f_{y'}(y,p)\}$ را با I^* نشان می‌دهیم. اگر از فرمول (۱۵) بین دو مقدار t که نقاط ۳ و ۵ در شکل ۲۸ را به دست

می‌دهند انتگرال بگیریم، رابطهٔ مفید زیر بین مقادیر این انتگرال و انتگرال اصلی I را می‌یابیم.

نتیجهٔ ۱. برای دو کمان $E_{۳۴}$ و $E_{۵۶}$ از خانوادهٔ فرین‌های شکل ۲۸، تفاضل مقادیر انتگرال I از فرمول زیر به دست می‌آید

$$I(E_{۵۶}) - I(E_{۳۴}) = I^*(D_{۴۶}) - I^*(C_{۳۵}). \qquad (۱۶)$$

ناحیهٔ F از صفحه، یک میدان نامیده می‌شود اگر خانواده‌ای یک پارامتری از فرین‌ها در آن موجود باشد که هر یک از آنها خمی همچون D را در یک نقطه قطع کرده و از هر نقطهٔ (x, y) از F، یک و تنها یک فرین از این خانواده بگذرد. شکل ۲۸ یک چنین میدانی را به تصویر می‌کشد. تابع $p(x, y)$ که شیب فرین موجود در این میدان را در نقطهٔ (x, y) تعریف می‌کند، تابع شیب میدان نامیده می‌شود. اگر تابع شیب را در انتگرالده انتگرال I^* جایگزین کنیم، I^* فقط به x ، y، dx ، و dy وابسته خواهد بود و خود انتگرال روی هر کمان $C_{۳۵}$ در F با معادلات

$$x = x(t), \qquad y = y(t) \qquad (t_۳ \le t \le t_۵)$$

از نوع یاد شده در صفحهٔ ۲۷، خوش تعریف است. علاوه بر این، نقاط انتهایی $C_{۳۵}$ دو کمان فرین $E_{۳۴}$ و $E_{۵۶}$ از میدان، و کمان متناظر $D_{۴۶}$، را معین می‌کنند که با معادله‌ای شبیه معادلهٔ (۱۶) به هم مربوط می‌شوند. آنگاه بدیهی است که مقدار $I^*(C_{۳۵})$ فقط به نقاط ۳ و ۵ وابسته است و اصلاً بر شکل کمان $C_{۳۵}$ که آنها را به هم وصل می‌کند متکی نیست، زیرا سه جملهٔ دیگر موجود در معادلهٔ (۱۶) این چنین هستند.

هیلبرت نخستین کسی بود که بر اهمیت انتگرال I^* در حساب تغییرات تأکید کرد و از این رو غالباً آن را انتگرال ناوردای هیلبرت می‌نامند. [۲۰] نتیجهٔ زیر دو تا از مفیدترین ویژگیهای این انتگرال را تشریح می‌کند.

نتیجهٔ ۲. برای میدان F که به طور ساده با خانواده‌ای از فرین‌ها که همهٔ آنها خم ثابت D را قطع می‌کنند پوشیده شده است، انتگرال هیلبرت I^* که با

تابع شیب میدان $p(x,y)$، تشکیل شده است، روی جمیع کمانهای $C_{۳۵}$ در F با نقاط انتهایی یکسان ۳ و ۵ دارای مقداری یکسان است. به علاوه روی یک کمان فرین در میدان، مقادیر I^* و I یکی است.

چون در امتداد یک فرین در میدان داریم $dy = pdx$ و انتگرالده I^* به عبارت سادهٔ $f(y,p)dx$ تبدیل می‌شود، گزارهٔ اخیر بسهولت نتیجه می‌شود.

دو فرمول مهمی که در پاراگراف نخست این بند به آنها اشاره شد، همین فرمولهای (۱۵) و (۱۶) هستند. این فرمولها در حالتهای ساده‌تری که یکی از خمهای $C_{۳۵}$ یا $D_{۴۶}$ به یک نقطه تبه می‌شود صادق می‌مانند، چه در آن صورت دیفرانسیلهای dx و dy در امتداد آن خم صفر هستند. توجه به این نکته نیز مفید است که اگر تنها یکی از کمانهای خانوادهٔ (۱۱) فرین باشد، فرمول (۱۵) دست کم برای آن کمان خاص برقرار است.

نتایج این بند، همچون بخشی از نتایج بند ۱۹ صفحهٔ ۴۷، در حالتی که انتگرالده انتگرال I تابع دلخواهی همچون $f(x,y,y')$ از سه متغیر x، y، y' است و نیز برای انتگرالده‌هایی نظیر آنهایی که در صفحات پیشین در نظر گرفته شد و در آنها متغیر x وجود نداشت صادق هستند. برهانهای مربوط به حالت کلی‌تر، عیناً با آنهایی که در بالا ارائه شد یکسانند، فقط باید دقت کنیم که ممکن است در تابع[۸] f متغیر x هم وجود داشته باشد.

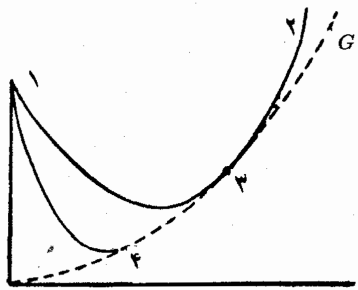
۳۹. قضیهٔپوش و شرط ژاکوبی . به کمک نتایج بند پیش می‌توانیم مانستهٔ قابل توجه دیگری را با ویژگی ریسمانی گستردهٔ یک خم که در صفحهٔ ۳۲ تشریح شد، برای خانوادهٔ یک پارامتری زنجیره‌های گذرا از نقطهٔ ۱ اثبات کنیم. این مانسته حالت خاص قضیهٔ کلی‌تر مذکور در صفحهٔ ۷۳ است؛ به همان شکلی که داربو، زرملو، و کنزر در سالهای ۱۸۹۴ و ۱۸۹۸ آن را در حالتهای گوناگون به اثبات رساندند، و در این کتاب نیز در بند ۵۵ از فصل ۵ اثبات خواهد شد. در اوایل سال ۱۸۶۰، لیندلوف خاصیتی از زنجیره‌ها را کشف کرد که به آنچه مدنظر

---

۸) در متن اصلی لغت « تابع» آمده است، اما «ضابطهٔ تابع» صحیح است.

ماست قدری شباهت دارد.[۲۱]

قضیهٔ‌پوش. اگر دو زنجیرهٔ $E_{۱۴}$ و $E_{۱۳}$ از خانوادهٔ زنجیره‌های گذرا از نقطهٔ مطابق شکل ۲۹، در نقاط ۴ و ۳ بر پوش G خانواده مماس باشند، مساحتهای



شکل ۲۹

رویه‌های دورانی‌ای که کمانهای $E_{۱۴}+G_{۴۳}$ و $E_{۱۳}$ ایجاد می‌کنند، مساوی هستند. این نتیجه را می‌توان با معادلهٔ

$$I(E_{۱۴})+I(G_{۴۳})=I(E_{۱۳}).$$

نیز بیان کرد.

به کمک فرمول (۱۶) صفحهٔ ۱۰۰، اثبات بسیار ساده است. در اینجا خانوادهٔ فرین‌های (۱۱) عبارت است از خانوادهٔ زنجیره‌های گذرا از نقطهٔ ۱، خم C در فرمول (۱۶) عبارت است از نقطهٔ ثابت ۱ و خم D، پوش G است. از این رو فرمول (۱۶) حاکی از آن است که

$$I(E_{۱۳})-I(E_{۱۴})=I^*(G_{۴۳}).$$

اما در هر نقطهٔ کمان G داریم $dy=pdx$، که در آن p، شیب زنجیرهٔ گذرا از آن

نقطه است و بنابراین

$$I^*(G_{۴۳}) = \int_{x_۴}^{x_۳} \{f(y,p)dx + (dy - pdx)f_{y'}(y,p)\}$$

$$= \int_{x_۴}^{x_۳} f(y,p)dx = I(G_{۴۳}).$$

اگر این مقدار را در معادلهٔ قبل جانشین کنیم، فرمول قضیه ثابت می‌شود.

قضیهٔ پوش ما را قادر می‌سازد تا شرط لازم مربوط به کمینه را در مسئلهٔ زنجیره براحتی ثابت کنیم. در سال ۱۸۳۷، ژاکوبی این شرط را با روشی بسیار متفاوت برای نظریهٔ کلی به اثبات رساند. در حالت خاصی که با آن مواجهیم، قضیهٔ ژاکوبی به صورت زیر است:

شرط لازم ژاکوبی. اگر کمان زنجیره‌ای $E_{۱۲}$ یک رویهٔ دورانی با مساحت کمینه ایجاد کند، نقطهٔ تماس این زنجیره با پوش G خانوادهٔ یک پارامتری زنجیره‌های گذرا از نقطهٔ ۱، یعنی نقطهٔ ۳ در شکل ۲۹، نباید روی کمان $E_{۱۲}$ واقع باشد.

دلیلش این است که کمان $E_{۱۴} + G_{۴۳} + E_{۳۲}$ در شکل ۲۹ همان مساحت سطحی را ایجاد می‌کند که $E_{۱۲}$ به وجود می‌آورد و همواره می‌توانیم به جای $G_{۴۳}$ کمانی از $C_{۴۳}, G_{۴۳}$ را که مساحت کوچکتری به وجود می‌آورد قرار دهیم، زیرا $G_{۴۳}$ کمانی از یک زنجیرهٔ (۵) نیست. برای اطمینان کامل از اینکه $G_{۴۳}$ نمی‌تواند کمانی زنجیره‌ای باشد، باید توجه کنیم که در هر نقطهٔ آن، معادلهٔ (۴) در صفحهٔ ۹۱، bای به دست می‌دهد که با b ی مربوط به زنجیرهٔ مماس بر G در آن نقطه یکسان است. اما این مقادیر همانطور که دومین معادلهٔ (۶) نشان می‌دهد، روی G از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر تغییر می‌کنند، در حالی‌که باید روی زنجیره‌های (۵) ثابت باشند.

۴۰. ساختن یک میدان

. اگر پیش از سال ۱۸۳۷، زمانی که ژاکوبی شرط لازم خود را منتشر ساخت، در حال مطالعه مسئلهٔ تعیین رویه‌های دورانی با مساحت کمینه بودیم، بی‌تردید به این نتیجه می‌رسیدیم که هر کمان زنجیره‌ای

واصل نقاط ۱ و ۲ یک سطح کمینه به وجود می‌آورد، ولی آخرین قضیهٔ بند قبل نشان می‌دهد که این مطلب برای کمان $E_{۱۳۲}$ که در شکل ۲۹ نموده شده است درست نیست. ممکن است در مرحلهٔ کنونی روند استدلال، نتیجه بگیریم که رویهٔ دورانی ایجاد شده توسط زنجیره‌ای که ۱ و ۲ را به هم وصل می‌کند و هیچ نقطهٔ مزدوجی بر روی آن نیست، کوچکتر از رویهٔ دورانی است که هر کمان دیگر $y = y(x)$ واصل ۱ و ۲ به دست می‌دهد. این نتیجه‌گیری تحت برخی شرایط نیز نادرست خواهد بود، زیرا با آنکه کمان زنجیره‌ای که هیچ نقطهٔ مزدوجی روی آن نیست در بین تمام خمهای دیگری که ۱ را به ۲ وصل می‌کنند و به اندازهٔ کافی نزدیک آن هستند انتگرال I را کمینه می‌سازد، در برخی موارد خمهایی وجود دارند که خیلی نزدیک نیستند، ولی مقدار کوچکتری به I می‌دهند. مصونیت منطقی فقط مبتنی بر نوعی برهان کفایت است که ویژگیهای کمینه‌سازی کمان ما را به طور صریحتر مشخص خواهد کرد.

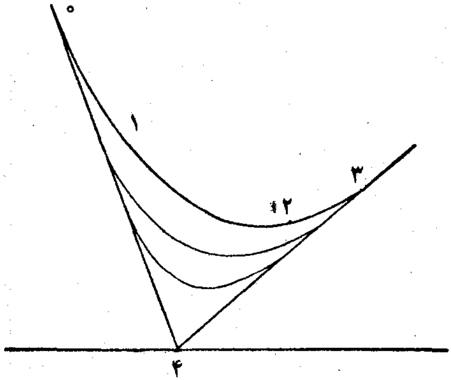
به منظور ارائهٔ برهان کفایت به سبک وایرشتراس، ابتدا لازم است میدانی از فرین‌ها، مشابه با میدانی که در بند ۲۳ صفحهٔ ۵۷ برای مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان تشریح شد بسازیم. فرض کنید که $E_{۱۲}$ کمان زنجیره‌ای باشد که هیچ نقطهٔ مزدوجی با ۱ بر روی آن واقع نیست و معادلهٔ آن عبارت است از

$$y = b_\circ ch\frac{x - a_\circ}{b_\circ}. \qquad (۱۷)$$

حال مطابق شکل ۳۰، نقطهٔ ۰ روی زنجیره را آنقدر نزدیک به ۱ می‌گیریم تا نقطهٔ ۳ که بنابر ساختار لیندلوف در صفحهٔ ۹۴ مزدوج ۰ است، سمت راست ۲ قرار گیرد. خطوط مماس بر زنجیره در ۰ و ۳ در نقطهٔ ۴ روی محور x، یکدیگر را قطع می‌کنند. تبدیل

$$x - x_۴ = \frac{b_\circ}{b}(X - x_۴), y = \frac{b_\circ}{b}Y \qquad (۱۸)$$

صفحه را طوری در امتداد شعاعهای گذرنده از نقطهٔ ۴ می‌کِشد که هر نقطهٔ (x, y) به نقطه‌ای چون (X, Y) تبدیل می‌شود که فاصلهٔ آن از ۴، $\frac{b}{b_\circ}$ برابر فاصلهٔ (x, y)



شکل ۳۰

از ۴ است. با جانشین کردن مقادیر y, x از معادلهٔ (۱۸) در (۱۷) یعنی معادلهٔ $E_{۱۲}$، می‌بینیم که نقاط (x, y) روی زنجیره تبدیل به نقاط (X, Y) می‌شوند که در معادلهٔ

$$y = bch\frac{۱}{b}\left[x - x_{۴} + \frac{b}{b_{۰}}(x_{۴} - a_{۰})\right] = y(x, b). \qquad (۱۹)$$

صدق می‌کنند. این معادله، زنجیره‌ای از خانوادهٔ $y = bch\left[(x-a)/b\right]$ با پارامترهای $a = x_{۴} - b(x_{۴} - a_{۰})/b_{۰}$ و b است. بنابراین اگر b را متغیر فرض کنیم، خانواده‌ای یک پارامتری از کمانهای زنجیره‌ای به دست می‌آوریم که به ازای مقدار خاص $b = b_{۰}$، زنجیرهٔ اصلی $E_{۰۳}$ را شامل می‌شود. هر یک از این کمانها بر دو خطی که نقطهٔ ۴ را به نقاط ۰ و ۳ وصل می‌کنند مماس است، چه هر یک از این خطها از $E_{۰۳}$ با امتداد دادن آن در مسیر شعاعهای گذرنده از نقطهٔ ۴ به دست می‌آید.

بسهولت مشاهده می‌کنیم که از هر نقطهٔ (x, y) از ناحیهٔ $V-$ شکل F محدود به دو شعاعی که ۴ را به نقاط ۰ و ۳ وصل می‌کنند، یک فرین یکتا از این خانواده می‌گذرد و به خاطر همین ویژگی است که F را میدان فرین‌ها نام نهادیم.

۴۱. ویژگیهای توابع میدانی . تعبیر تحلیلی یکتایی فرین گذرا از یک نقطهٔ میدان این است که به ازای هر نقطهٔ (x,y) در F معادلهٔ فرین‌های میدان، یعنی $y=y(x,b)$، دارای جواب یکتای $b(x,y)$ است. بدون هیچ مشکل جدی می‌توانیم ثابت کنیم که تابع $b(x,y)$ درون و روی مرز میدان $V-$ شکل F که در بند قبل تعریف شد، جز در نقطهٔ ۴، پیوسته است و نیز در درون میدان، مشتق پیوسته دارد. حال تابع شیب میدان یعنی$p(x,y)$ همان ویژگیها را داراست، زیرا به طور تحلیلی به این صورت برحسب $b(x,y)$ قابل بیان است:

$$p(x,y)=y'\left(x,b(x,y)\right)$$

که در آن پریم، مشتق جزئی $y(x,b)$ را نسبت به x نشان می‌دهد.

برای اثبات این احکام به مشتقات جزئی متعدد تابع $y(x,b)$ در معادلهٔ (۱۹) نیاز خواهیم داشت. اگر مشتق نسبت به x را با پریم، و نسبت به b را با زیرنویس نشان دهیم، بسهولت فرمولهای زیر را می‌یابیم

$$y=b\,ch\frac{۱}{b}\left[x-x_۴+\frac{b}{b_۰}(x_۴-a_۰)\right]=y(x,b),$$

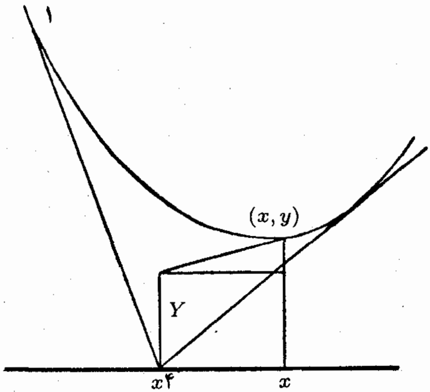
$$y'=sh\frac{۱}{b}\left[x-x_۴+\frac{b}{b_۰}(x_۴-a_۰)\right].$$

$$y_b=\frac{۱}{b}\left[y-(x-x_۴)y'\right]..$$

از شکل ۳۱ دیده می‌شود که y_b را می‌توان به صورت

$$y_b=\frac{۱}{b}Y.$$

بیان کرد که در آن Y فاصلهٔ عمودی نقطهٔ ۴ تا خط مماس بر زنجیرهٔ میدان در نقطهٔ (x,y) است. از این عبارت واضح است که y_b فقط وقتی صفر می‌شود که (x,y) روی مرز میدان واقع باشد.



شکل۳۱

اکنون فرض کنید که (x, y) و $(x + \Delta x, y + \Delta y)$ نقاط درونی میدان F و b و $b + \Delta b$ مقادیر متناظر برای b باشند که در معادلات

$$y = y(x, b), \qquad y + \Delta y = y(x + \Delta x, b + \Delta b).$$

صدق می‌کنند. اگر اولی را از دومی کم کنیم و فرمول تیلر را به کار بندیم، به دست می‌آوریم

$$\Delta y = y' \Delta x + y_b \Delta b \qquad (۲۰)$$

که در آن آوندهای مشتقهای y' و y_b عبارتند از $x + \theta \Delta x$ و $b + \theta \Delta b$ با قید $۰ < \theta < ۱$.

سپس با روشهایی که در بند ۲۴ صفحهٔ ۶۰ به کار رفت، نتیجه می‌شود که $b(x, y)$ در هر نقطهٔ (x, y) پیوسته است و مشتقات جزئی مرتبهٔ اول پیوسته دارد.

وقتی (x, y) روی مرز F واقع است، از معادلهٔ (۲۰)، دیگر همان نتایج به دست نمی‌آید، زیرا مشتق y_b روی مرز صفر می‌شود و این معادله را نمی‌توان بر حسب نمو Δb حل کرد. با این حال به کمک روشهایی که در صفحات ۶۱ و ۶۲

به کار رفت، می‌توان ثابت کرد که $b(x,y)$ جز در رأس ۴، در همه جای مرز F پیوسته است و حد آن در ۴ صفر است.

۴۲. برهان کفایت . مساحت رویهٔ دورانی ایجاد شده توسط کمان فرین $E_{۱۲}$ که بحث را با آن آغاز کردیم و میدان F را بر مبنای آن ساختیم، کوچکتر از مساحت رویهٔ دورانی ایجاد شده توسط هر یک از کمانهای دیگر $C_{۱۲}$ در میدان است که نقاط ۱ و ۲ را به هم وصل می‌کنند و دارای معادلات

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t_۱ \leq t \leq t_۲) \qquad (۲۱)$$

از نوع یاد شده در صفحهٔ ۲۷ می‌باشد، زیرا در امتداد چنین کمانی مقادیر انتگرال I و انتگرال هیلبرت، I^*، با تابع انتگرالده $f = y(۱ + y'^۲)^{\frac{۱}{۲}}$ مربوط به مسئلهٔ زنجیره، عبارتند از

$$I(C_{۱۲}) = \int_{t_۱}^{t_۲} y\sqrt{x'^۲ + y'^۲}\, dt = \int_{s_۱}^{s_۲} y ds,$$

$$I^*(C_{۱۲}) = \int_{t_۱}^{t_۲} y\frac{x' + py'}{\sqrt{۱ + p^۲}}\, dt = \int_{s_۱}^{s_۲} y\cos\theta ds,$$

که در آن مجدداً θ در یک نقطهٔ خم $C_{۱۲}$، زاویهٔ بین $C_{۱۲}$ و فرینی از میدان است که از آن نقطه می‌گذرد. از تساوی I^* و I روی کمان زنجیره‌ای میدان، و ویژگی ناوردایی I^*، نتیجه می‌شود که

$$I(E_{۱۲}) = I^*(E_{۱۲}) = I^*(C_{۱۲})$$

و از این رو

$$I(C_{۱۲}) - I(E_{۱۲}) = I(C_{۱۲}) - I^*(C_{۱۲})$$

$$= \int_{s_۱}^{s_۲} y(۱ - \cos\theta)ds \geq ۰,$$

و برای اینکه ثابت کنیم این تفاضل، جز وقتی $C_{۱۲}$ و $E_{۱۲}$ بر هم منطبقند همواره مثبت است، فقط کافی است استدلال صفحهٔ ۶۷ را تکرار کنیم

همهٔ نتایجی را که تا اینجا دربارهٔ زنجیره‌ها به دست آورده‌ایم، در قضیهٔ زیر جمع‌بندی می‌کنیم.

کمان پذیرفتنی $y = y(x)$ که $(x_۱ \leq x \leq x_۲)$ در نیم‌صفحهٔ $y > ۰$، که دو نقطهٔ ۱ و ۲ را به هم می‌پیوندد و وقتی حول محور x دوران می‌کند، رویهٔ دورانی با مساحت کمینه به وجود می‌آورد، باید واجد ویژگیهای زیر باشد:

۱. کمان یکتای بدون گوشه از یکی از زنجیره‌های $y = bch\,[(x-a)/b]$ باشد.

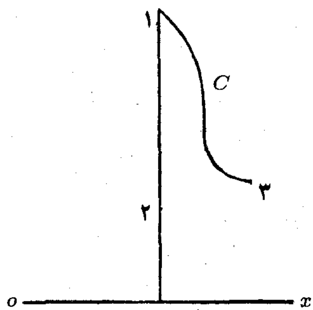
۲. با پوش G خانوادهٔ یک پارامتری زنجیره‌های گذرا از نقطهٔ ۱، هیچ نقطهٔ تماسی نداشته باشد.

اگر $E_{۱۲}$ کمانی واجد این دو ویژگی باشد، و اگر F یکی از نواحی $V-$ شکلی باشد که در شکل ۳۰ صفحهٔ ۱۰۶ نموده شد و $E_{۱۲}$ را در درون خود داشته و به دو خط مماس بر زنجیرهٔ E که روی محور x تلاقی می‌کنند محدود باشد، مساحت رویهٔ دورانی ایجاد شده توسط $E_{۱۲}$ از مساحت رویهٔ ایجاد شده توسط هر کمان دیگر $C_{۱۲}$ از نوع (۲۱) در ناحیهٔ F و واصل نقاط ۱ و ۲، کوچکتر است.

توجه کنید که این قضیه همچون مثالهای فصلهای قبل، جامعتر از آن چیزی است که برای مسئله به صورتی که در صفحهٔ ۹۰ بیان شد، نیاز داریم؛ زیرا این قضیه علاوه بر کمانهای پذیرفتنی $y = y(x)$، برای کمانهای پارامتری $C_{۱۲}$ نیز صادق است.

۴۳. جوابهای متشکل از پاره خطهای مستقیم. قضایای بندهای قبل حاکی از آنند که وقتی نقطهٔ ۲ روی یا زیر پوش G خانوادهٔ یک پارامتری زنجیره‌های $y = bch\,[(x-a)/b]$ که از نقطهٔ ۱ می‌گذرند واقع است، کمان کمینه‌سازی به شکل $y = y(x)$ که نقاط ۱ و ۲ را به هم وصل کند وجود ندارد. در حالت اول، تنها زنجیرهٔ واصل ۱ و ۲، مساحت کمینه را به دست نمی‌دهد چون در شرط

لازم ژاکوبی صدق نمی‌کند، و در حالت دوم، چنین زنجیره‌ای اصلاً وجود ندارد. همچنین وقتی نقاط ۱ و ۲ روی یک خط عمودی واقعند، وجود کمان کمینه‌ای به شکل $y = y(x)$، غیرممکن است، زیرا کمانی با این معادله روی هر خط عرضی فقط می‌تواند یک نقطه داشته باشد. به هر حال هنوز این پرسش باقی است که وقتی نقاط ۱ و ۲ در یکی از وضعیتهایی که اینک اشاره کردیم قرار داشته باشند، رویه‌های کمینه چگونه‌اند؟



شکل۳۲

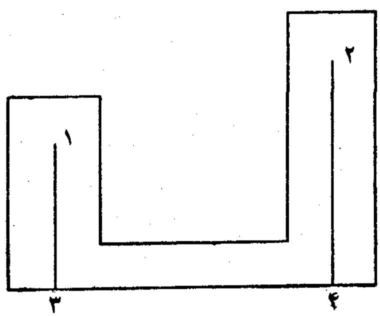
برای یافتن پاسخ این پرسش، ابتداد مطابق شکل ۳۲، قطعهٔ $E_{۱۲}$ از خط عمودی گذرا از نقطهٔ ۱ و کمان $C_{۱۳}$ به طول l، مساوی با طول $E_{۱۲}$، را در نظر می‌گیریم. فرض کنید عرضهای نقاطی از $E_{۱۲}$ و $C_{۱۳}$ که در فاصلهٔ s از ۱ واقعند، به ترتیب y و Y باشد. آنگاه تفاضل مساحتهای رویه‌های دورانی ایجاد شده توسط این دو کمان ۲π برابر تفاضل

$$I(C_{۱۳}) - I(E_{۱۲}) = \int_{۰}^{l} Y dx - \int_{۰}^{l} y ds = \int_{۰}^{l} (Y - y) ds \geq ۰ ,$$

است. علامت برابری تنها زمانی برقرار است که $C_{۱۳}$ منطبق بر $E_{۱۲}$ باشد، زیرا اگر یک نقطه Y از $C_{۱۳}$ متمایز از نقطهٔ نظیر y از $E_{۱۲}$ باشد، باید داشته باشیم $Y > y$ و بنابراین، انتگرال سمت راست یقیناً مثبت است. و قضیهٔ زیر را داریم:

اگر مطابق شکل ۳۲، خط مستقیم عمودی $E_{۱۲}$ در ۱، نقطهٔ انتهایی بالایی خود، با کمان $C_{۱۳}$ به همان طول، مشترک باشد مساحت رویهٔ دورانی حاصل از دوران $E_{۱۲}$ حول محور x، همواره از مساحت رویهٔ دورانی ایجاد شده توسط $C_{۱۳}$ کمتر است، مگر آنکه $C_{۱۳}$ و $E_{۱۲}$ منطبق باشند.

از این قضیه بلافاصله نتیجه می‌شود که اگر دو نقطهٔ ۱ و ۲ روی یک خط عمودی واقع باشند، پاره خط راستی که آن دو را به هم وصل می‌کند، رویهٔ دورانی‌ای به وجود می‌آورد که مساحت آن از مساحت رویه‌ای که توسط هر یک از دیگر کمانهای $C_{۱۲}$ با همان نقاط انتهایی ایجاد می‌شود کوچکتر است، زیرا چنین کمان $C_{۱۲}$ ای باید از $E_{۱۲}$ طویلتر باشد. اما از این قضیه می‌توان نتیجهٔ جالب دیگری نیز برای حالتی که نقاط ۱ و ۲ روی یک خط عمودی واقع نیستند به دست آورد. همانند شکل ۳۳، فرض کنید ۳ و ۴ نقاطی روی محور x و به ترتیب زیر ۱ و ۲



شکل ۳۳

باشند. اگر طول کمان $C_{۱۲}$ در نیم صفحهٔ $y \geq ۰$ بزرگتر از $y_۱ + y_۲$ باشد، قضیهٔ فوق نشان می‌دهد که مساحت رویهٔ دورانی ایجاد شده توسط $C_{۱۲}$ همواره بزرگتر یا مساوی مساحت رویه‌ای است که توسط خط شکسته $L_{۱۳۴۲}$ مرکب از خطوط عرضی نقاط ۱ و ۲ و قسمتی که بر روی محور x جدا می‌کنند، ایجاد می‌شود. اگر یک همسایگی از این خط شکسته را، از نوعی که در شکل ۳۳ نموده شده

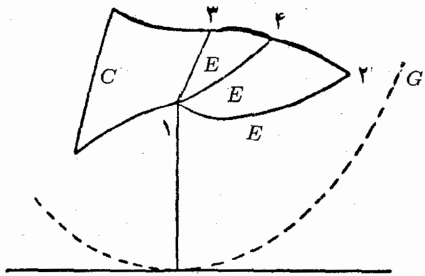
است، آنقدر کوچک اختیار کنیم که هر کمان $C_{۱۲}$ در آن که ۱ را به ۲ وصل می‌کند، لزوماً طولی بزرگتر از $y_۱ + y_۲$ داشته باشد، واضح است که دست کم در آن همسایگی خط $L_{۱۳۴۲}$، کمان کمینهٔ مسئلهٔ ماست، یعنی مسئلهٔ تعیین کمانی که ۱ را به ۲ وصل کند و رویهٔ دورانی با مساحت کمینه ایجاد کند. این خط شکسته، همان جواب ناپیوستهٔ گلدشمیت است که در صفحهٔ ۸۸، در بند اول این فصل به آن اشاره شد.

۴۴. میدان نوع دوم. بدیهی است که میدان Vـ شکل F که ثابت کردیم کمان زنجیره‌ای $E_{۱۲}$ موجود در آن، کمینه را به دست می‌دهد یکتا نیست، زیرا دو نقطهٔ ۰ و ۳ می‌توانند کمی به راست یا چپ تغییر مکان دهند بدون آنکه ویژگیهای لازم برای میدان از دست برود. بنابراین عجیب نیست اگر میدانی از نوع دیگر وجود داشته باشد که در آن زنجیرهٔ $E_{۱۲}$ ویژگیهای کمینه‌سازی خود را حفظ کند. در واقع می‌توانیم قضیهٔ زیر را ثابت کنیم.

اگر $E_{۱۲}$ زنجیره‌ای از خانوادهٔ $y = bch\,[(x-a)/b]$ باشد که جز احتمالاً در ۲، هیچ نقطه‌ای مزدوج با ۱ بر روی آن واقع نباشد، رویهٔ دورانی‌ای که این کمان ایجاد می‌کند کوچکتر از رویهٔ دورانی ایجاد شده توسط هرکمان دیگر $C_{۱۲}$ با معادلاتی از نوع (۲۱) در صفحهٔ ۱۰۸ است که ۱ را به ۲ وصل می‌کند و جز احتمالاً در ۲، به طور کامل در بالای پوش G خانوادهٔ یک پارامتری زنجیره‌های گذرا از نقطهٔ ۱ در شکل ۳۴، واقع می‌شود.

برای اثبات این قضیه، اولاً توجه می‌کنیم که همچون شکل ۳۴، از هر نقطهٔ ۳ متمایز از ۱، در بالای پوش G، یک فرین یکتای $E_{۱۳}$ می‌گذرد که هیچ نقطهٔ تماسی با G ندارد. اکنون بدیهی است برای آنکه این گزاره برای هر نقطهٔ میدان صادق باشد، باید خط مستقیم عمودی گذرا از نقطهٔ ۱ را نیز بین این فرین‌ها به حساب آوریم. در بند بعد خواهیم دید که مقدار انتگرال $I(E_{۱۲})$ به طور پیوسته نسبت به نقطهٔ ۳ تغییر می‌کند و وقتی ۳ به ۱ میل می‌کند، به مقدار صفر میل خواهد کرد.

اکنون یک کمان دلخواه $C_{۱۲}$ را در بالای پوش G در نظر بگیرید. از نتایج



شکل ۳۴

دو بند پیش می‌دانیم که اگر ابتدا یک نقطهٔ ۴ از این کمان انتخاب و پس از آن نقطهٔ دوم ۳، به اندازهٔ کافی نزدیک به آن انتخاب شود، مقدار $I(E_{۱۳} + C_{۳۴})$ از $I(E_{۱۴})$ بیشتر می‌شود مگر آن که کمان $E_{۱۳} + C_{۳۴}$ بر $E_{۱۴}$ منطبق گردد. از آنجا که

$$[I(C_{۱۴}) - I(E_{۱۴})] - [I(C_{۱۳}) - I(E_{۱۳})] = I(E_{۱۳} + C_{۳۴}) - I(E_{۱۴})$$

نتیجه می‌شود که وقتی نقطهٔ ۳، کمان $C_{۱۲}$ را از نقطهٔ ۱ تا نقطهٔ ۲ می‌پیماید، تفاضل $I(C_{۱۳}) - I(E_{۱۳})$ از صفر آغاز می‌شود و کاهش نمی‌یابد، بنابراین داریم $I(C_{۱۲}) \leq I(E_{۱۲})$.

علامت برابری فقط وقتی برقرار است که $C_{۱۲}$ و $E_{۱۲}$ برهم منطبق باشند، زیرا اگر نقطه‌ای چون ۳ وجود داشته باشد که بر $C_{۱۲}$ واقع بوده و روی $E_{۱۲}$ نباشد، نقطه‌ای چون ۴ نیز روی $C_{۱۲}$ بین ۲ و ۳ موجود است که $E_{۱۴}$ هم از $E_{۱۳}$ و هم از $E_{۱۲}$ متمایز است و به علاوه ۴ نخستین نقطهٔ برخورد $C_{۳۴}$ و $E_{۱۴}$ است. حال اگر ۳ را به اندازهٔ کافی نزدیک ۴ اختیار کنیم، همواره خواهیم داشت $I(E_{۱۳} + C_{۳۴}) > I(E_{۱۴})$ و از این رو وقتی ۳، $C_{۱۲}$ را می‌پیماید، تفاضل $I(C_{۱۳}) - I(E_{۱۳})$ افزایش می‌یابد، بنابراین $I(C_{۱۲}) > I(E_{۱۲})$.

۴۵. پیوستگی انتگرال فرین . براحتی می‌توان دید که وقتی ۳ به نقطهٔ ۱ میل می‌کند، مقدار انتگرال $I(E_{۱۳})$ به صفر میل می‌کند، زیرا در هیچ حالتی، نقطه‌ای مزدوج با ۱ روی $E_{۱۳}$ وجود ندارد و پاره خط مستقیم $L_{۱۳}$ که ۱ را به ۳ وصل می‌کند، همواره در یک میدان Vـ شکل برای $E_{۱۳}$، نظیر میدان مذکور در بند ۴۰ صفحهٔ ۱۰۴ قرار می‌گیرد. از این رو داریم $I(E_{۱۳}) < I(L_{۱۳})$ و روشن است که وقتی نقطهٔ ۳ به ۱ میل می‌کند، $I(L_{۱۳})$ به صفر میل می‌کند.

اگر یک نقطهٔ ۳ از میدان روی خط عرضی $x = x_۱$ نباشد، مقدار انتگرال فرین در امتداد کمان زنجیره‌ای $E_{۱۳}$ در میدان برابر است با

$$I(E_{۱۳}) = \int_{x_۱}^{x_۳} y(x, \alpha)\sqrt{۱ + y'^{۲}(x, \alpha)}dx.$$

در اینجا $y(x, \alpha)$ تابع (۷) صفحهٔ ۹۲ است که خانوادهٔ یک پارامتری زنجیره‌های گذرا از نقطهٔ ۱ را تعریف می‌کند و α تابعی تک مقداری از $x_۳$ و $y_۳$ است که در معادلهٔ $y_۳ = y(x_۳, \alpha)$ صدق می‌کند. با استفاده از روشهای بند ۲۴ صفحهٔ ۶۰ می‌توان ثابت کرد که تابع $\alpha(x_۳, y_۳)$ صادق در این معادله در تمام نقاط ۳ در درون و روی مرز میدان مفروض F، جز نقاط روی خط $x = x_۱$، پیوسته است. از این رو انتگرال $I(E_{۱۳})$ نیز در نقاط ۳ که روی این خط نیستند به طور پیوسته تغییر می‌کند.

بالاخره حالتی را در نظر بگیرید که نقطهٔ ۳ روی خط عرضی $x = x_۱$ قرار دارد. می‌خواهیم نشان دهیم وقتی نقطهٔ ۴ به ۳ میل می‌کند، $I(E_{۱۴})$ به $I(L_{۱۳})$ میل می‌کند. از نتایج بندهای پیش می‌دانیم که رویهٔ ایجاد شده توسط خط عمودی $L_{۱۳}$، از رویه‌ای که توسط هرکمان دیگر واصل نقاط انتهایی آن ایجاد می‌شود کوچکتر است و از این‌رو، به کمک یادداشتهای پاراگراف نخست این بند داریم که

$$I(L_{۱۳}) \leq I(E_{۱۴} + L_{۴۳}) \leq I(L_{۱۴} + L_{۴۳}).$$

اما از این نتیجه، بسهولت نابرابری زیر را به دست می‌آوریم.

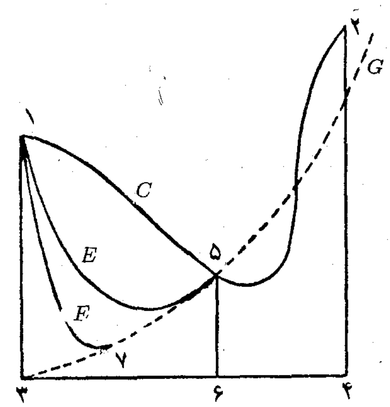
$$-I(L_{۴۳}) \leq I(E_{۱۴}) - I(L_{۱۳}) \leq I(L_{۱۴}) - I(L_{۱۳}).$$

وقتی نقطهٔ ۴ به نقطهٔ ۳ میل می‌کند، اولین و آخرین عضو این نابرابری به صفر میل می‌کنند، در نتیجه دومین عبارت نیز باید چنین باشد.

بدین ترتیب وقتی نقطهٔ ۳ در درون و روی مرز میدان F تغییر می‌کند، پیوستگی انتگرال $I(E_{۱۳})$ که در استدلال بند قبل بدون اثبات فرض شده بود، برای جمیع حالات اثبات می‌شود.

۴۶. کمینهٔ مطلق . چون می‌دانیم کمانهای زنجیره‌ای $E_{۱۲}$ که با G تماس ندارند، و $L_{۱۳۴۲}$، جواب ناپیوستهٔ گلدشمیت در شکل ۳۵، هر دو نسبت به خمهایی که نزدیک آنها قرار می‌گیرند کمینه را به دست می‌دهند، معقول خواهد بود اگر بپرسیم آیا در مقایسه با جمیع کمانهای $C_{۱۲}$ که در نیم صفحهٔ $y \geq ۰$، ۱ را به ۲ وصل می‌کنند نیز یکی از این دو می‌تواند کمینه باشد یا نه؟ کمانی را که دارای این ویژگی است کمینهٔ مطلق می‌خوانیم. برای پاسخ به این پرسش ابتدا می‌توانیم گزارهٔ زیر را ثابت کنیم:

هر کمان $C_{۱۲}$ که متمایز از $L_{۱۳۴۲}$ است و، همچون شکل ۳۵، در نقطهٔ ۵ با



شکل ۳۵

پوش G نقطهٔ اشتراک دارد، رویهٔ دورانی‌ای بزرگتر از جواب گلدشمیت به وجود می‌آورد.

گیریم ۵ نخستین نقطهٔ برخورد C_{12} با G باشد. می‌توانیم نتیجه بگیریم که $I(C_{15}) > I(L_{1365})$. زیرا وقتی نقطهٔ ۷ روی G به اندازهٔ کافی نزدیک ۳ باشد، طول $E_{17} + G_{75}$ از $y_1 + y_5$ بزرگتر است و از این رو، بنابر قضایای صفحات ۱۱۲ و ۱۰۳ و پاراگراف آخر بند ۴۳ در صفحهٔ ۱۱۰، به طور متوالی داریم:

$$I(C_{15}) \geq I(E_{15}) = I(E_{17} + G_{75}) \geq I(L_{1365}).$$

علامت برابری فقط وقتی برقرار است که ۵، بر نقطهٔ ۳ و C_{15} بر L_{13} منطبق باشد. به علاوه اگر فرض کنیم که نقطهٔ ۵ در امتداد C_{12} به سمت نقطهٔ ۲ حرکت می‌کند، مشتق تفاضل

$$I(C_{15}) - I(L_{1365}) = \int_0^{s_5} y\,ds - \frac{1}{2}(y_1^2 + y_5^2),$$

که در آن s طول کمان در امتداد C_{15} است، نسبت به s_5، یعنی $y_5(1 - dy_5/ds_5)$، همواره مثبت یا صفر است، زیرا قدر مطلق dy_5/ds_5 هیچ وقت بیشتر از واحد نیست. از این رو وقتی ۵ روی کمان C_{12} به سمت ۲ می‌رود، این تفاضل هرگز نزولی نیست و چون در ابتدا که ۵ روی G است، مقدار آن مثبت یا صفر است، نتیجه می‌گیریم که وقتی ۵ به نقطهٔ ۲ می‌رسد داریم $I(C_{12}) - I(L_{1342}) \geq 0$. بسهولت می‌توان ثابت کرد که علامت برابری فقط وقتی برقرار است که C_{12} و L_{1342} یکی باشند. حال دیگر روشن است که

وقتی کمتر از دو زنجیره داریم که نقاط ۱ و ۲ را به هم وصل می‌کنند، جواب گلدشمیت همواره یک کمینهٔ مطلق است.

چه در آن صورت نقطهٔ ۲ روی یا زیرپوش G واقع است و هر خمی که ۱ را به ۲ وصل کند باید G را قطع نماید.

وقتی ۲ بالای G است، زنجیرهٔ E_{12} که هیچ تماسی با G ندارد، و جواب گلدشمیت L_{1342} هر دو در همسایگیهای خیلی کوچک، موجد کمینه هستند و آن

که مساحتی کوچکتر از دیگری به‌وجود می‌آورد، یقیناً کمینهٔ مطلق است.

مثلاً در حالتی که $I(E_{۱۲}) < I(L_{۱۳۴۲})$، بنابر قضیهٔ صفحهٔ ۱۱۲، $I(E_{۱۲})$ از همهٔ مقادیر I روی کمانهای $C_{۱۲}$ در بالای پوش G کوچکتر است و همچنین از مقادیر $I(C_{۱۲})$ به ازای خمهایی که G را قطع می‌کنند کوچکتر است، زیرا برای این خمها $I(E_{۱۲}) < I(L_{۱۳۴۲}) \leq I(C_{۱۲})$. در حالتی که $I(L_{۱۳۴۲}) < I(E_{۱۲})$، استدلال کاملاً مشابه است. اگر این دو مساوی باشند، هر یک از کمانهای $E_{۱۲}$ و $L_{۱۳۴۲}$ رویهٔ دورانی کوچکتری از دیگر کمانهای با همان نقاط انتهایی به وجود می‌آورند.

محک هندسی جالبی برای تعیین اینکه کدامیک از مقادیر $I(E_{۱۲})$ و $I(L_{۱۳۴۲})$ کوچکتر است وجود دارد که نخستین بار توسط مکنیش [۲۲] ارائه شد. تفاضل بین این دو مقدار برابر است با

$$I(E_{۱۲}) - I(L_{۱۳۴۲}) = \int_{۰}^{s_{۲}} y\,ds - \frac{۱}{۲}(y_{۱}^{۲} + y_{۲}^{۲}).$$

وقتی نقطهٔ ۲ در امتداد زنجیرهٔ ثابت E از ۱ شروع به حرکت می‌کند، مشتق این تفاضل یعنی $y_{۲}(۱ - dy_{۲}/ds_{۲})$ مثبت است، زیرا مماس بر زنجیره هیچ وقت عمودی نیست و بنابراین قدر مطلق مشتق $dy_{۲}/ds_{۲}$ بر روی آن هرگز به بزرگی واحد نمی‌شود. چون وقتی ۲ و ۱ منطبقند داریم، $I(E_{۱۲}) = ۰$ پس در این حالت تفاضل $I(E_{۱۲}) - I(L_{۱۳۴۲})$ منفی است؛ و چون وقتی ۲ روی G است، $I(L_{۱۳۴۲})$ از مقدار I روی هر خم دیگری که G را قطع می‌کند کوچکتر است، این تفاضل مثبت است. پس نتیجه می‌شود که فقط به ازای یکی از مکانهای نقطهٔ ۲ روی زنجیرهٔ E بین این دو حالت انتهایی، داریم $I(E_{۱۲}) = I(L_{۱۳۴۲})$. مکنیش با روشهایی مشابه با آنهایی که در تعیین شکل پوش G به کار برده شد، ماهیت مکان هندسی این نقاط ۲ را تعیین کرد. معادلات خانوادهٔ زنجیره‌های گذرا از نقطهٔ ۱، یعنی فرمول (۷) صفحهٔ ۹۲ را بر حسب پارامتر $u = \alpha + (x - x_{۱})ch\alpha/y_{۱}$

بدین صورت می‌توان نوشت

$$x = x_۱ + \frac{y_۱}{ch\alpha}(u - \alpha), \qquad y = y_۱ \frac{chu}{ch\alpha}, \tag{۲۲}$$

و مقادیر $I(E_{۱۲})$ و $I(L_{۱۳۴۲})$ برحسب پارامتر u مربوط به نقطهٔ ۲ بسادگی یافت می‌شوند. این مقادیر عبارتند از

$$I(E_{۱۲}) = \int_a^u y\sqrt{x_u^۲ + y_u^۲}du = \frac{۱}{۲} = \left(\frac{y_۱}{ch\alpha}\right)^۲ [u + shuchu]_\alpha^u,$$

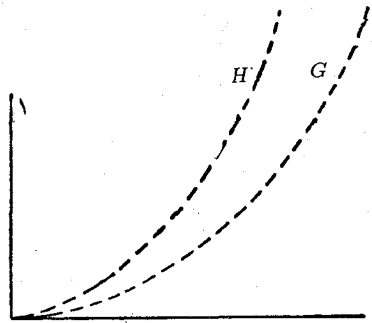
$$I(L_{۱۳۴۲}) = \frac{۱}{۲}(y_۱^۲ + y_۲^۲) = \frac{۱}{۲}\left(\frac{y_۱}{ch\alpha}\right)^۲ [ch^۲\alpha + ch^۲u].$$

وقتی

$$u + shuchu - ch^۲u = \alpha + sh\alpha ch\alpha + ch^۲\alpha.$$

این دو مقدار با هم مساویند. این معادله و معادلات (۲۲) مربوط به کمان زنجیره‌ای، مکان هندسی H متشکل از نقاطی که در آنها $I(E_{۱۲}) = I(L_{۱۳۴۲})$ را تعریف می‌کنند. مکنیش شکل خم H را بررسی و به کمک داده‌های عددی آن را رسم کرد. معلوم می‌شود که این خم که در شکل ۳۶ نشان داده شده است، شکلی مشابه پوش G دارد. به کمک این خمها، نتایجمان دربارهٔ کمینهٔ مطلق به صورت زیر قابل تشریح است.

برای نقطهٔ ۲ در بالای خم H در شکل ۳۶ جواب ناپیوستهٔ گلدشمیت $L_{۱۳۴۲}$ که ۱ را به ۲ وصل می‌کند، رویهٔ دورانی کمینه را نسبت به کمانهای دیگر از نوع (۲۱) صفحهٔ ۱۰۹ که همان دو نقطه را به هم وصل می‌کنند و در همسایگی به اندازهٔ کافی کوچک $L_{۱۳۴۲}$ واقع می‌شوند ایجاد می‌کند؛ اما کوچکترین رویه، یعنی کمینهٔ مطلق را کمان زنجیره‌ای یکتای $E_{۱۲}$ که ۱ را به ۲ می‌پیوند و هیچ نقطهٔ تماسی با پوش G ندارد به دست می‌دهد. اگر ۲ روی H باشد، رویه‌های ایجاد شده توسط $L_{۱۳۴۲}$ و $E_{۱۲}$ دارای مساحتهای برابر ولی کوچکتر از آنهایی هستند



شکل ۳۶.

که توسط کمانهای دیگر واصل این دو نقطه ایجاد می‌شوند. وقتی ۲ بین H و G است، کمان زنجیره‌ای، کمینهٔ نسبی؛ و جواب گلدشمیت، کمینهٔ مطلق را به دست می‌دهد. وقتی ۲ روی یا زیر G است، جواب گلدشمیت تنها کمان کمینهٔ واصل ۱ و ۲ و بنابراین یک کمینهٔ مطلق است.

۴۷. لایه‌های صابون . قبلاً در صفحهٔ ۷ اشاره شد که مسئله تعیین شکل لایهٔ صابونی که بین دو دایره با صفحات موازی تشکیل می‌شود و مراکز این دو دایره بر محور مشترکی عمود بر این صفحات واقعند، معادل با تعیین خمی است که دو نقطهٔ مفروض را به هم می‌پیوندد و رویهٔ دورانی با مساحت کمینه به وجود می‌آورد. دیده‌ایم که دست کم وقتی دایره‌ها به اندازهٔ کافی نزدیک به هم باشند، خم نصف‌النهار رویه باید یک زنجیره باشد. در شکل ۲ صفحهٔ ۷، اگر دایرهٔ سمت راستی را در جهت محور مشترک، به آرامی از دایرهٔ سمت چپی دور کنیم، زنجیرهٔ نصف‌النهار، موقعیتهای متوالی در خانوادهٔ یک پارامتری کمانهای زنجیره‌ای گذرا از نقطهٔ ۱ را اختیار می‌کند و وقتی به نقطهٔ معینی برسد، رویه ناپایدار می‌شود. سپس بدون آنکه دایره‌ها هیچ حرکت دیگری صورت دهند، لایهٔ صابون بتدریج منقبض و به دو بخش تقسیم می‌گردد. این دو بخش به سمت صفحات دایره‌ها پس رفته و

قرصهای مستدیری تشکیل می‌دهند که همان جواب ناپیوستهٔ گلدشمیت در مسئلهٔ کمینه است. لحظه‌ای که این پارگی رخ می‌دهد، همان لحظه‌ای است که نقطهٔ ۲ در حرکت افقی خود، به پوش G خانوادهٔ زنجیره‌های گذرا از نقطهٔ ۱ می‌رسد.

ممکن است انتظار آن برود که ناپایداری زمانی رخ بدهد که ۲ به مکان هندسی H که روی آن زنجیره و جواب گلدشمیت مساحتهای برابر دارند، برسد. اما در آن نقطه هم رویهٔ زنجیره‌وار، نسبت به رویه‌های دیگری که در همسایگی بلافصل ممتد بین دو دایره واقعند، باز یک کمینه است و تنها تأثیر اختلال اندک آن است که باعث پس‌نوسان آن به وضعیت اولیه‌اش می‌شود.

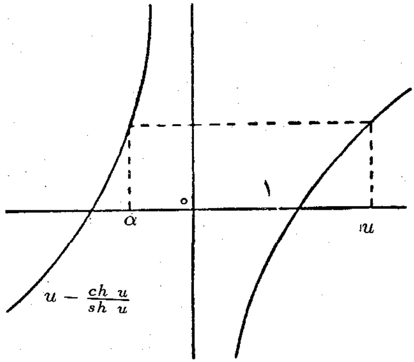
معادلاتی که موقعیت نسبی دو دایره در لحظهٔ ناپایداری را تعیین می‌کنند ماهیت متعالی دارند. اما تأمین داده‌های عددی با دقت کافی در مقابل داده‌های حاصل از آزمایش مشکل نیست. اگر بار دیگر از پارامتر u استفاده کنیم، پوش G مکان هندسی نقاطی چون (x,y) است که از سه معادلهٔ زیر به دست می‌آیند

$$\frac{x-x_۱}{y_۱}=\frac{u-\alpha}{ch\alpha},\qquad \frac{y}{y_۱}=\frac{chu}{ch\alpha},\qquad u-\frac{chu}{shu}=\alpha-\frac{ch\alpha}{sh\alpha}. \tag{۲۳}$$

اولین معادله شکل دیگری از معادلهٔ معرف u است؛ دومی از (۷) صفحهٔ ۹۲ به دست می‌آید؛ و آخری معادل شرط $y_\alpha=۰$ در امتداد G است و از مساوی صفر قرار دادن عبارت مربوط به y_α در صفحهٔ ۹۳، پس از وارد کردن مقادیر $y'=shu$ ، $y'_۱=sh\alpha$ و مقادیر x و y از دو معادلهٔ نخست (۲۳) حاصل می‌گردد. اگر تابع $u-chu/shu$ را بدقت رسم کنیم، همچون شکل ۳۷، به ازای هر مقدار منفی α، مقدار مثبتی از u را می‌توان به دست آورد که در سومین معادلهٔ (۲۳) صدق کند. نقطهٔ متناظر (ξ,η) که با معادلات

$$\xi=(u-\alpha)/ch\alpha,\qquad \eta=chu/ch\alpha$$

تعریف می‌شود، پوش خاص G را رسم می‌کند که در شکل ۲۵ صفحهٔ ۸۷، در حد مقیاس، برای نقطهٔ $(x_۱,y_۱)=(۰,۱)$ ترسیم شده است. برای آنکه در



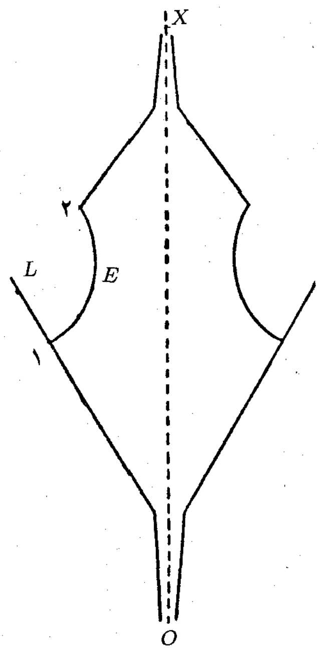
شکل ۳۷

حالت کلی‌تر، تفاضل طولهای ۱ و مزدوجش (x,y) یعنی $x - x_1$ را به طور تقریبی پیدا کنیم فقط باید روی نمودار G در شکل ۲۵ مقدار ξ متناظر با مقدار $\eta = y/y_1$ را بیابیم و آنگاه قرار دهیم $x - x_1 = \xi y_1$. اگر می‌خواستیم، می‌شد با استفاده از روشهای تقریب در جواب معادلات (۲۳)، وقتی y و y_1 مفروضند، جوابهای دقیق‌تری هم برای α, u، و $x - x_1$ به دست آورد.

پروفسور ماری اِ. سینکلر با روش بسیار جالبی، شکل اصلاح شدهٔ مسئلهٔ لایهٔ صابون را بررسی کرده است. [۲۳] اگر قیفی وارونه را در یک قیف بزرگتر قرار داده و آنها را به محلول صابون آغشته کنیم، وقتی قیف کوچکتر در جهت محورش بیرون کشیده می‌شود، رویهٔ دورانی‌ای تشکیل می‌گردد که مقطع آن همراه با مقطع قیفها در شکل ۳۸ نشان داده شده است. این مقطع، زنجیره واری است که یکی از دایره‌های کرانه‌ای آن همواره دهانهٔ قیف کوچکتر است، حال آنکه دیگری با تغییر فاصلهٔ بین دو قیف، روی سطح درونی قیف بزرگتر به بالا و پایین می‌لغزد. لایهٔ صابون و قیف بزرگتر در نقطهٔ برخوردشان، با زاویهٔ قائمه یکدیگر را قطع می‌کنند. وقتی با زیاد کردن فاصلهٔ بین دو قیف، رویه را می‌کشیم، رویه در نقطهٔ مشخصی ناپایدار و همچون گذشته پاره می‌شود.

مسئلهٔ تحلیلی متناظر با این آزمایش این است که در بین جمیع خمهایی که

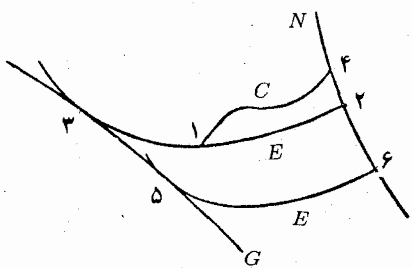
نقطهٔ مفروض ۲ را به خط راست مفروض L وصل می‌کنند، آن خمی را بیابیم که وقتی حول محور OX دوران می‌کند، یک سطح کمینه به وجود آورد. این خم در وهلهٔ اول باید زنجیره‌ای عمود بر خط راست L باشد. خانوادهٔ یک پارامتری زنجیره‌های عمود بر L، دارای پوشی مانند G است که با کمان زنجیره‌ای خاص $E_{۱۲}$ در نقطهٔ ۳ که نباید بین ۱ و ۲ قرارگیرد در تماس است. خانم سینکلر فاصلهٔ بین دو قیف را در لحظه‌ای که نقطهٔ ۲ به پوش G می‌رسد تعیین نمود، و با اندازه‌گیریهای واقعی ثابت کرد که وقتی دو قیف در این فاصله قرار می‌گیرند، لایهٔ صابون ناپایدار می‌شود. بین محاسبات او و نتایج حاصل از آزمایش، هماهنگی عجیبی برقرار بود.



شکل۳۸

۴۸. وقتی یکی از نقاط انتهایی متغیر است. مسئلهٔ لایهٔ صابون که اینک تشریح شد، حالت خاصی از یک مسئلهٔ کلی‌تر است؛ اینکه بین کمانهای پذیرفتنی که نقطهٔ ثابت ۱ را به خم ثابت N وصل می‌کنند، آن کمانی را بیابیم که رویهٔ دورانی کمینه را به وجود آورد. تحلیلی که ما را قادر به حل این مسئله می‌سازد مشابه همان تحلیل بندهای ۲۹ ـ ۳۱ صفحات ۷۰ ـ ۷۷ دربارهٔ تعیین مسیر تندترین سقوط از یک نقطه به یک خم است و ارائه مختصرتر آن به اندازهٔ کافی قابل درک خواهد بود:

کمان کمینه‌ساز $E_{۱۲}$ در شکل ۳۹، اولاً باید در مقایسه با کمانهای دیگری که نقاط ۱ و ۲ را به هم وصل می‌کنند، رویهٔ دورانی کمینه را به وجود آورد، زیرا هر کمانی از این نوع نیز ۱ را به N متصل می‌کند. از این رو این کمان باید کمان زنجیره‌ای بدون گوشه باشد.



شکل ۳۹

علاوه بر این، N باید این کمان را با زاویهٔ قائمه قطع کند، زیرا ــ همان گونه که در پاراگراف بعد صریحاً نشان داده خواهد شد ــ یک خانوادهٔ یک پارامتری از کمانهای $y = y(x, b)$ که ۱ را به N می‌پیوندند وجود دارد که $E_{۱۲}$ را نیز در ازای مقدار پارامتری خاص $b = b_{۰}$ شامل است. مقادیر I در امتداد اعضای این خانواده، در امتداد $E_{۱۲}$ دارای دیفرانسیل هستند که این دیفرانسیل از فرمول (۱۵) صفحهٔ ۱۰۰ به دست می‌آید، به این صورت که به جای خم C در آن فرمول،

نقطهٔ ۱ و به جای D، N قرار می‌دهیم. و در ضمن این کار توجه داریم که بنابر نکتهٔ صفحهٔ ۱۰۲ وقتی $E_{۱۲}$ تنها فرین این خانواده است، هنوز هم این فرمول را می‌توان به کار برد. برای تابع انتگرالده خاص $f = y(۱ + y'^{۲})^{\frac{۱}{۲}}$ در این فصل، با مراجعهٔ مستقیم به فرمول (۱۵)، برای دیفرانسیل I در امتداد $E_{۱۲}$ مقدار

$$dI = f\,dx + (dy - y'\,dx) f_{y'} \,\Big|^{۲} = y \frac{dx + y'dy}{\sqrt{۱ + y'^{۲}}} \,\Big|^{۲}$$

حاصل می‌شود. چون وقتی $I(E_{۱۲})$ کمینه است این مقدار باید صفر شود، نتیجه می‌شود که جهت N یعنی $dx : dy$ لزوماً بر جهت $E_{۱۲}$ در نقطهٔ ۲ یعنی $۱ : y'$ عمود است.

برای اثبات وجود خانوادهٔ یک پارامتری خمهای $y = y(x, b)$ از نوعی که در پاراگراف قبل به کار رفت، فرض کنید که N دارای معادلات پارامتری به شکل

$$x = g(b), \qquad y = h(b)$$

باشد و به ازای مقدار پارامتری $b_{۲}$، $E_{۱۲}$ را در نقطهٔ ۲ قطع کند. اگر معادلهٔ $E_{۱۲}$، $y = y(x)$ باشد، خانوادهٔ

$$y = y(x) + \frac{h(b) - y\left(g(b)\right)}{g(b) - x_{۱}}(x - x_{۱}) = y(x, b)$$

به ازای مقدار پارامتری $b = b_{۲}$ شامل $E_{۱۲}$ است و همهٔ کمانهای آن به ازای $x = x_{۱}$ از نقطهٔ ۱ می‌گذرند به ازای $x = g(b)$ ، N را قطع می‌کنند.

با همان روشهایی که در صفحهٔ ۸۱ برای خمهای خانوادهٔ $y = b\phi\left[(x - a)/b\right]$ تشریح شد، می‌توانیم خانواده‌ای یک پارامتری از زنجیره‌های $y = bch\left[(x - a)/b\right]$ را بسازیم که N را با زاویهٔ قائمه قطع می‌کنند. نقطهٔ ۳ محل تماس پوش G این خانواده با توسیع $E_{۱۲}$ در شکل ۳۹، نقطهٔ کانونی N روی $E_{۱۲}$ نامیده می‌شود. از فرمول (۱۶) در صفحهٔ ۱۰۱، یک قضیهٔ پوش

همانند صفحهٔ ۷۳ استنتاج می‌شود، با این مضمون که برای هر موضع نقطهٔ ۵ روی G، $I(G_{۳۵}) + I(E_{۵۶}) = I(E_{۳۲})$. به کمک این قضیه‌ثابت می‌کنیم که اگر قرار باشد $E_{۱۲}$ کمینه را به دست دهد، نقطهٔ کانونی ۳ نمی‌تواند روی کمان $E_{۱۲}$ واقع شود.

با استدلالی مشابه با استدلال بند ۳۱ صفحهٔ ۷۵ نشان می‌دهیم که اگر نقطهٔ کانونی ۳ روی $E_{۱۲}$ قرار نگیرد، خانوادهٔ یک پارامتری زنجیره‌های عمود بر N، میدانی مجاور $E_{۱۲}$ را می‌پوشانند و ثابت می‌کنیم در این میدان، $E_{۱۲}$ در واقع یک کمینه است. بدین ترتیب، برای این مسئله نتایج زیر را داریم:

گیریم نقطهٔ ثابت ۱ و خم ثابت N مفروض باشند. همانند شکل ۳۹ صفحهٔ ۱۲۴، کمان‌پذیرفتنی $E_{۱۲}$ که در مقایسه با رویه‌های ایجاد شده توسط کمانهای پذیرفتنی دیگر واصل ۱ و N رویهٔ دورانی کمینه را به وجود می‌آورد، دارای ویژگیهای زیر است:

۱ـ زنجیره‌ای است از خانوادهٔ $y = bch[(x-a)/b]$.

۲ـ در نقطهٔ برخوردش با N، N را با زاویهٔ قائمه قطع می‌کند.

۳. با پوش G خانوادهٔ یک پارامتری زنجیره‌های عمود بر خم N، که این کمان پذیرفتنی هم عضوی از آن است، هیچ نقطهٔ تماسی ندارد.

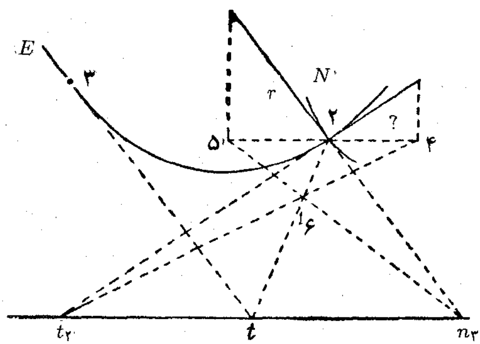
اگر کمان $E_{۱۲}$، ۱ را به N وصل کند و دارای ویژگیها باشد، همسایگیی چون F دارد که رویهٔ دورانی ایجاد شده توسط $E_{۱۲}$ از رویه‌های دورانی مربوط به هر کمان دیگر $C_{۱۴}$ از نوع (۲۱) صفحهٔ ۱۰۹ و واقع در F که N را به ۱ وصل می‌کند، کوچکتر است.

اگر پوش G در نقطهٔ ۳، نقطهٔ تماسش با خم $E_{۱۲}$، هیچ شاخه‌ای نداشته باشد که به سمت نقطهٔ ۲ تصویر گردد، این قضیه نیازمند تغییراتی است. در قضایای مشابه در صفحات ۳۴ و ۷۶ هم همین‌طور بود.

۴۹. ساختار هندسی نقطهٔ کانونی. خانوادهٔ زنجیره‌های $y = bch\,[(x-a)/b]$ که در مسئلهٔ تعیین رویه‌های دورانی با مساحت کمینه، کمانهای

کمینه را به دست می‌دهد حالت خاصی از خانوادهٔ خمهای $y = b\phi\left[(x-a)/b\right]$ است که در بند ۳۳ صفحهٔ ۷۹ در نظر گرفته شد. بنابراین انتظار داریم بتوانیم ساختار هندسی‌ای را که در آنجا برای نقطهٔ کانونی یک خم تشریح شد در اینجا نیز به کار بریم. لازم نیست تحلیلی را که منجر به آن ساختار شد تکرار کنیم، اما اگر شکلی برای فرین‌های فصل حاضر در اختیار داشته باشیم جالب خواهد بود، زیرا ظاهر آنها کاملاً متفاوت با آن چیزی است که در مورد چرخزادها داشتیم.

در شکل ۴۰، نقطهٔ کانونی خم N بر زنجیرهٔ E که در نقطهٔ ۲ آن را با زاویهٔ



شکل ۴۰

قائمه قطع می‌کند واقع است. می‌خواهیم این نقطه را تعیین کنیم. شعاعهای انحنای E و N در نقطهٔ ۲؛ یعنی ρ و r را رسم کنید. نقاط ۴ و ۵، نقاط انتهایی تصاویر این دو شعاع روی خط گذرا از نقطهٔ ۲ و موازی محور xها، را به ترتیب به $t_۲$ و $n_۲$، نقاط برخورد مماس و عمود بر زنجیرهٔ E در نقطهٔ ۲، وصل کنید. خطوطی که بدین ترتیب رسم می‌شوند در نقطهٔ ۶ تلاقی می‌کنند که اگر آن را به ۲ وصل کنیم، نقطهٔ t روی محور xها مشخص می‌گردد. مماس بر زنجیره از نقطهٔ t، نقطهٔ ۳ یعنی نقطهٔ کانونی N روی E را معین می‌سازد. بر اساس این ساختار آشکارا

داریم

$$\frac{n_۲ - t}{t - t_۲} = \frac{\overline{۵۲}}{\overline{۲۴}}$$

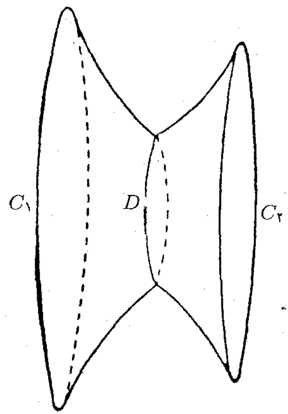
این رابطه مبین ویژگی مشخصهٔ نقطهٔ کانونی معین شده با معادلهٔ (۳۸) صفحهٔ (۸۳) است.

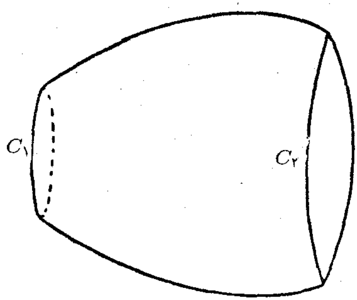
ساختاری که اینک ارائه شد، از پروفسور ماری اِ. سینکلر است. ایشان نخستین کسی بود که مشابه ساختار لیندلوف برای نقطهٔ مزدوج، برای نقطهٔ کانونی خم N روی یک زنجیره نیز یک ساختار هندسی تدبیر کرد.

۵۰. نکات دیگری دربارهٔ مسئلهٔ زنجیره. نباید تصور کرد بحثی که در اینجا دربارهٔ مسائل لایهٔ صابون ارائه و منجر به رویه‌های دورانی با مساحت کمینه شد کامل است. علاوه بر مسائلی که قبلاً به آنها اشاره شد، پروفسور سینکلر مسائل مربوط به تعیین شکل و پایداری لایهٔ صابونی را که دو دایرهٔ $C_۱$ و $C_۲$ را به هم پیوند می‌دهد و دارای قرص مرکزی D است نیز مورد بررسی قرار داده است؛ شکل ۴۱ را ببینید. زمانی که می‌کوشیم از طریق آزمایش به رویهٔ زنجیره‌وار ساده‌تر یاد شده در صفحهٔ ۷ دست یابیم، با چنین شکل و شمایلی روبه رو می‌شویم و توضیحی که پروفسور سینکلر برای این مسئله بیان می‌کند مانند توضیح مسئلهٔ قیف در صفحهٔ ۱۲۲ جالب است.

اگر دایره‌های $C_۱$ و $C_۲$ قرصهای توپر باشند و یکی از آنها دارای حفره‌ای باشد که هوا بتواند از آن به داخل فضای محدود به لایهٔ صابون و قرصها بوزد، مسئلهٔ مزبور عبارت از تعیین شکل لایهٔ صابونی است که همراه با این قرصها، مقدار مفروضی از هوا را محصور می‌کند. از دیدگاه تحلیلی، یعنی از بین خمهایی که دو نقطهٔ مفروض را به هم وصل می‌کنند و بر اثر دوران حول محور xها، اجسام دورانی با حجم مفروض به وجود می‌آورند، آن را مشخص می‌کنیم که در عین حال، رویهٔ دورانی با مساحت کمینه ایجاد می‌کند. خمهایی که ممکن است برای این مسئله کمینه یا بیشینه باشند، کاملاً شناخته شده‌اند. اینها خمهای به اصطلاح کشسان

هستند که توسط کانونهای بیضیها یا هذلولیهایی که روی محور xها می‌غلتند به‌وجود می‌آیند. آنهایی که توسط کانونهای بیضی به وجود می‌آیند غالباً موج‌وار و





شکل ۴۱

آنهایی که توسط کانونهای هذلولی ایجاد می‌شوند، گره‌وار نامیده می‌شوند. تحلیل این خمها مشکلتر از تحلیل زنجیره است و تاکنون هیچ روش مقدماتی برای ساختن نقاط مزدوج و کانونی، نظیر روشهایی که برای چرخزادها و زنجیره‌ها عرضه شد کشف نشده است.

فصل ۵

یک نظریهٔ کلی‌تر

۵۱. صورت‌بندی مسئله. در فصلهای پیش، مسائلی از حساب تغییرات را در نظر گرفتیم که در آنها انتگرالهایی که می‌بایست کمینه می‌شدند، همگی حالات خاصی از انتگرال کلی‌تر

$$I = \int_{x_1}^{x_2} f(x, y, y')dx \qquad (1)$$

بودند که انتگرالده آن علاوه بر متغیرهای y و y' که تاکنون وجود داشته‌اند، شامل متغیر x نیز می‌باشد. روشن است که اگر بتوانیم ویژگیهای مشخصهٔ کمانهای کمینهٔ این انتگرال را بیابیم، نتایج حاصل نه فقط برای مسائلی که پیش از این بررسی کردیم، بلکه برای ردهٔ بسیار متنوعتری از مسائل بیشینه و کمینه در حساب تغییرات قابل استفاده است.

در بررسی این مسئلهٔ کلی‌تر به رده‌ای از به اصطلاح کمانهای پذیرفتنی به شکل

$$y = y(x) \qquad (x_1 \leq x \leq x_2) \qquad (2)$$

نیاز خواهیم داشت که انتگرال I بر هر یک از آنها خوش تعریف است، و بدین سان مسئلهٔ ما آن خواهد بود که در بین جمیع کمانهای پذیرفتنی که دو نقطهٔ مفروض ۱ و ۲ را به یکدیگر وصل می‌کنند، آن کمانی را بیابیم

که انتگرال I را کمینه سازد. به طرق متعددی می‌توان این ردهٔ کمانهای پذیرفتنی را تعریف کرد که هر یک از آنها منجر به مسئلهٔ خاصی از حساب تغییرات می‌شود. در یک مسئلهٔ خاص، بخشی از ویژگیهای معرف این رده، ناشی از خصلت هندسی یا مکانیکی خود مسئله و در انتخاب بخش دیگر دستمان کاملاً باز است. مثالی از ویژگی نوع اول قیدی است که در مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان در نظر گرفتیم مبنی بر اینکه همهٔ خمهای مورد بررسی، زیر خط $y = \alpha$ قرار گیرند، زیرا روی کمانهای بالای این خط، انتگرال مبین زمان سقوط هیچ معنایی ندارد. از سوی دیگر، گهگاه مناسب می‌دانیم این قید دلخواه را نیز وضع کنیم که تمامی خمهایمان در همسایگی کوچک کمان خاصی واقع شوند که مشغول بررسی ویژگیهای کمینه‌سازی آن هستیم؛ می‌توانیم ویژگیهای پیوستگی ردهٔ خمهایی را که در بین آنها کمان کمینه‌ساز را می‌جوییم با آزادی زیادی مشخص کنیم و مدام به یاد داریم که انتگرال I باید روی هر یک از کمانهای این رده خوش تعریف باشد.

به منظور ارائهٔ تعریفی برای ردهٔ کمانهای پذیرفتنی که در حالت کلی به کار می‌بریم، ابتدا فرض کنید ناحیه‌ای چون R متشکل از مجموعه مقادیر (x, y, y') موجود باشد که در آن تابع انتگرالده انتگرال (۱) یعنی $f(x, y, y')$ پیوسته بوده و دارای مشتقات پیوسته تا هر مرتبه‌ای باشد که در نظریه‌مان مورد نیاز است. برای همهٔ مقاصد عادی، داشتن مشتقات جزئی دست کم تا مرتبهٔ چهارم کافی است. بجاست که مجموعهٔ مقادیر (x, y, y') درون ناحیهٔ R را مجموعهٔ پذیرفتنی بنامیم. اکنون کمانی از نوع (۲) را یک کمان پذیرفتنی می‌نامیم اگر پیوسته و دارای مماس پیوسته جز احتمالاً در تعداد متناهی گوشه باشد و مجموعه‌های مقادیر $(x, y(x), y'(x))$ بر روی آن همگی بر اساس تعریفی که اینک ارائه شد پذیرفتنی باشند. برای یک کمان پذیرفتنی همواره می‌توان بازهٔ $x_۱x_۲$ را به تعدادی بازهٔ جزئی تقسیم کرد که $y(x)$ روی هر یک از آنها پیوسته و دارای مشتق پیوسته

پیوسته باشد. به ازای مقداری از x که خم در آن گوشه دارد، مشتق $y'(x)$ دارای دو مقدار است که به ترتیب با شیبهای پسرو و پیشرو خم متناظرند. این دو را با $y'(x-\circ)$ و $y'(x+\circ)$ نشان می‌دهیم.[۱]

۵۲. جمع‌بندی نتایج

. در بیان شرایط ذیل، از تابع

$$E(x,y,y',Y') = f(x,y,Y') - f(x,y,y') - (Y'-y')f_{y'}(x,y,y')$$

استفاده خواهیم کرد. این تابع را وایرشتراس معرفی کرد و تابع E وایرشتراس نامیده می‌شود. اگر دقت کنیم که این تابع عبارت است از $f(x,y,Y')$ منهای دو جملهٔ نخست بسط این تابع به فرمول تیلر برحسب توانهای $(Y'-y')$، به خاطر سپردن شکل آن آسان خواهد شد.

در تمام چهار شرطی که در بندهای بعد ثابت خواهیم کرد و در اینجا آنها را بدون اثبات بیان می‌کنیم تا خواننده از پیش ایده‌هایی از مقاصد این فصل را در اختیار داشته باشد، به یک کمینه نیاز خواهیم داشت. با علم به اینکه معادلهٔ کمان کمینه‌ساز $E_{۱۲}$ عبارت است از $y = y(x)$، سه‌شرط نخست به صورت زیر هستند:

I. برای هر کمان کمینه‌ساز $E_{۱۲}$، ثابتی چون c موجود است که معادلهٔ

$$f_{y'}\left(x, y(x), y'(x)\right) = \int_{x_۱}^{x} f_y\left(x, y(x), y'(x)\right) dx + c \quad (۳)$$

در سرتاسر $E_{۱۲}$ برقرار است. [۲۴] نتیجهٔ فوری این معادله آن است که روی هر کمان $E_{۱۲}$ که مماس پیوسته دارد، معادلهٔ دیفرانسیل اویلر یعنی

$$\frac{d}{dx} f_{y'} - f_y = \circ \quad (۴)$$

---

۱) تابعی که روی یک بازه جز در تعداد متناهی گوشه پیوسته است، تابع پیوستهٔ قطعه‌ای نامیده می‌شود. $y(x)$های پذیرفتنی آنهایی هستند که $y'(x)$ آنها پیوستهٔ قطعه‌ای است.

نیز باید صادق باشد.

II (وایرشتراس). در هر عنصر (x, y, y') مربوط به کمان کمینه ساز $E_{۱۲}$ باید شرط

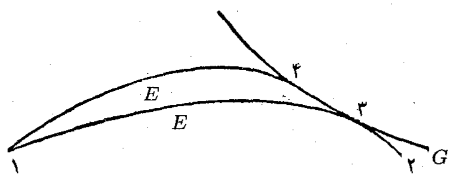
$$E(x, y, y', Y') \geq ۰$$

به ازای هر مجموعهٔ پذیرفتنی (x, y, Y') متمایز از (x, y, y') صادق باشد.

III (لژاندر[2]). در هر عنصر (x, y, y') مربوط به کمان کمینه‌ساز $E_{۱۲}$ باید شرط

$$f_{y'y'}(x, y, y') \geq ۰$$

برقرار باشد.



شکل۴۲

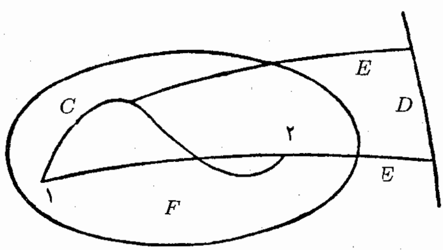
جوابهای $y = y(x)$ معادلهٔ دیفرانسیل اویلر (۴) که کمانهای پذیرفتنی هستند و به علاوه دارای مشتقات پیوستهٔ اول و دوم می‌باشند، فرین نامیده می‌شوند و خواهیم دید که از یک نقطهٔ ثابت ۱ در حالت کلی، یک خانوادهٔ یک پارامتری از این خمها می‌گذرد. اگر همانند شکل ۴۲، این خانواده دارای پوشی چون G باشد، نقطهٔ ۳ محل تماس یک کمان فرین $E_{۱۲}$ از این خانواده با پوش، نقطهٔ ۳، مزدوج ۱ روی $E_{۱۲}$ نامیده می‌شود.

2) Legendre

خواهیم دید که برای نظریهٔ کلی مورد بررسی در این فصل، یک قضیهٔ پوش وجود دارد که قضیهٔ صفحهٔ ۱۰۲ برای زنجیره‌ها حالت خاصی از آن به شمار می‌رود. این قضیه حاکی از آن است که مقدار انتگرال I در امتداد کمان مرکب $E_{۱۴} + G_{۴۳}$ در شکل با مقدارش در امتداد کمان $E_{۱۳}$ به ازای جمیع مکانهای نقطهٔ ۴ قبل از ۳ مساوی است. به کمک این قضیه این چهارمین شرط لازم را هم ثابت خواهیم کرد:

IV (ژاکوبی). روی یک کمان فرین کمینه‌ساز $E_{۱۲}$ که در همه جای آن $f_{y'y'} \neq ۰$، بین ۱ و ۲ هیچ نقطه‌ای چون ۳ مزدوج با ۱ نمی‌توان یافت.

ترتیب کشف این شرطها به صورت I، III، IV، و II بوده جز آنکه معادلهٔ دیفرانسیل اویلر در اصل از معادلهٔ (۳) به دست نیامده است. اما چون شرط لژاندر نتیجهٔ سهل‌الوصول شرط وایرشتراس است، ترتیبی که با حروف رومی نشان داده‌ایم نزد ما بر ترتیب تاریخی ارجحیت دارد.



شکل۴۳

وایرشتراس خدمت بسیار مهم دیگری نیز به نظریهٔ حساب تغییرات کرد و آن موقعی بود که ثابت کرد مجموعه شرایط معینی برای تضمین ویژگی کمینه‌ای یک کمان خاص، کافی است. چنین می‌نماید که تا زمان او، فراگیران این نظریه پس از کشف هر شرط لازم جدیدی به طور ضمنی می‌پذیرفتند که آن شرط برای کمینه بودن کافی نیز هست. این واقعیت که شرایط جدید، یکی پس از دیگری رخ

می‌نمایاندند ظاهراً بر وایرشتراس مسلم ساخته بود که یک شرط کافی مورد نیاز است. حال به پیروی از او، همچون فصل قبل، میدان را ناحیه‌ای چون F از صفحه تعریف می‌کنیم که خانواده‌ای یک پارامتری از کمانهای فرین به آن وابسته شود، به طوری که هر یک از آنها خم D را یک بار قطع کند و این خاصیت اضافی را هم داشته باشد که از هر نقطهٔ (x,y) از F، یک و فقط یک فرینهٔ خانواده بگذرد. یک چنین میدانی در شکل ۴۳ نشان داده شده است. به علاوه، تابع $p(x,y)$ را که معرف شیب فرین میدان در نقطهٔ (x,y) است تابع شیب می‌نامیم. قضیهٔ زیر، که بعداً آن را ثابت خواهیم کرد، در تمام برهانهای کفایت، اساسی است:

قضیهٔ اساسی کفایت. گیریم $E_{۱۲}$ کمان فرینی از یک میدان F باشد که در هر نقطهٔ (x,y) از F نابرابری

$$E\left(x,y,p(x,y),y'\right)\geq ۰ \qquad (۵)$$

به ازای هر مجموعهٔ پذیرفتنی (x,y,y') متمایز از (x,y,p) برقرار باشد. آنگاه $I(E_{۱۲})$ یک کمینه در F است، یا صریحتر، هر کمان پذیرفتنی $C_{۱۲}$ در F که ۱ را به ۲ وصل می‌کند، درنابرابری $I(E_{۱۲})\leq I\left(C_{۱۲}\right)$ صدق می‌کند. اگر در فرض (۵) علامت برابری را حذف کنیم آنگاه $I(E_{۱۲})<I(C_{۱۲})$، مگر آنکه $C_{۱۲}$ بر $E_{۱۲}$ منطبق گردد که در این صورت کمینهٔ مزبور به اصطلاح یک کمینهٔ سره می‌شود.

این قضیه در تعدادی از مسائل خاص بسیار سودمند است. مثلاً وقتی می‌خواستیم کمانی با کوتاهترین طول را بیابیم که دو نقطهٔ ۱ و۲ را به هم بپیوندد، دریافتیم که خط راست $E_{۱۲}$ که آن دو را به هم متصل می‌سازد یکی از فرین‌های میدان مرکب از صفحهٔ پوشیده شده با خطوط مستقیم موازی $E_{۱۲}$ بود و بسادگی می‌توان ثابت کرد که در این میدان، شرط (۵) مربوط به تابع انتگرالده موجود در آن مسئله، بدون علامت برابری برقرار است. نیز کمان چرخزاد $E_{۱۲}$ در مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان، یکی از فرین‌های میدان مرکب از نیم صفحهٔ زیر خط $y=\alpha$ است که با چرخزادهای هم مرکز با $E_{۱۲}$ پوشیده می‌شود و شرط قوی‌تر

(۵) در این حالت نیز برقرار است. بدین ترتیب، در هر یک از این مسائل، کمان فرین $E_{۱۲}$ در یک میدان بسیار وسیع، کمینهٔ مطلوب خواهد بود.

در حالت کلی نمی‌توان انتظار داشت میدانی به این وسعت و محیط بر یک فرین مفروض یافت شود. مسئلهٔ زنجیره شاهدی است بر این مدعا، ولی نشان خواهیم داد که یک کمان $E_{۱۲}$ وجود دارد که واجد ویژگیهای مناسبی است و دست‌کم کمان فرین میدانی با گستردگی معین خواهد بود. با استفاده از نمادگذاری بلتسا، شرطهای II و III را که علامت برابری از آنها حذف شده است با II' و III'، و شرط IV را که با حذف احتمال وجود نقطهٔ مزدوج روی $E_{۱۲}$ در نقطهٔ انتهایی ۲ و نیز بین ۱ و ۲ به آن قوت بخشیده‌ایم، با IV' نشان می‌دهیم. در بند بعد ثابت خواهد شد که برای یک کمان فرین $E_{۱۲}$ که در شرطهای I، III'، IV' صدق می‌کند، همواره همسایگیی چون F وجود دارد که این همسایگی میدانی پوشیده از یک خانوادهٔ یک پارامتری از فرین‌هاست و $E_{۱۲}$ عضوی از این خانواده است.

گوییم مقدار $I(E_{۱۲})$ یک کمینهٔ نسبی ضعیف است اگر یک همسایگی چون R' متشکل از مقادیر (x, y, y') روی $E_{۱۲}$ موجود باشد، به طوری که نابرابری $I(E_{۱۲}) \leq I(C_{۱۲})$، نه لزوماً برای همهٔ کمانهای پذیرفتنی $C_{۱۲}$، بلکه دست کم برای تمام آنهایی که عناصر (x, y, y') مربوط به آنها در R' واقع می‌شود، برقرار باشد. به کمک قضیهٔ کفایت و میدانی که در پاراگراف اخیر تشریح شد قادر خواهیم بود ثابت کنیم که کمان $E_{۱۲}$ که در شرطهای I ، III' و IV' صدق می‌کند، یقیناً مقدار $I(E_{۱۲})$ را دست کم یک کمینهٔ نسبی ضعیف می‌سازد. اگر R' را جانشین ناحیهٔ اصلی R نموده، R' را آنقدر کوچک اختیار کنیم که تمامی کمانهایی که نسبت به آن پذیرفتنی‌اند لزوماً در میدان F قرار گیرند، و به‌علاوه آنقدر کوچک باشد که شرط (۵) به شکل قوی‌تر خود در F برای تمامی مجموعه‌های (x, y, y') موجود در R' برقرار باشد، این نتیجه ثابت خواهد شد.

بار دیگر به پیروی از بلتسا فرض کنید II_b همان شرط II است منتها به این صورت آن را قوی کرده‌ایم که فرض کرده‌ایم این شرط نه تنها برای عناصر

(x, y, y') روی $E_{۱۲}$، بلکه برای عناصری از این قبیل واقع در همسایگی آنهایی که روی $E_{۱۲}$ می‌باشند نیز برقرار است. ثابت خواهد شد که برای کمانی که در شرایط I، II'_b، III'، و IV' صدق می‌کند، اندازهٔ میدان F حول $E_{۱۲}$ را که در نتیجهٔ برقراری شرطهای I، III'، و IV' وجود دارد می‌توان آنقدر محدود کرد که شرط قوی‌تر (۵) برای مجموعه‌های (x, y, y') در خود ناحیهٔ R در این میدان برقرار باشد. بنابراین مقدار $I(E_{۱۲})$ دوباره باید در F یک کمینه باشد. این مقدار یک کمینهٔ نسبی قوی‌نامیده می‌شود، زیرا برای همهٔ خمهای مقایسه‌ای پذیرفتنی C که نقاط (x, y) مربوط به عناصر (x, y, y') آنها در همسایگی کوچکی چون F از نقاط $E_{۱۲}$ قرار دارند، مؤثر است. در این حالت، جز تحدیدهای ناشی از تعریف ناحیهٔ اصلی R، هیچ قید دیگری روی شیبهای y' وضع نمی‌کنیم.

در حالتی که ناحیهٔ R دارای این ویژگی است که وقتی y' بین $y'_۱$ و $y'_۲$ است و $(x, y, y'_۱)$ و $(x, y, y'_۲)$ هر دو در R هستند، عنصر (x, y, y') هم در R واقع می‌شود، مجموعه شرایط ساده‌تری برای یک کمینهٔ نسبی قوی وجود دارد. فرض کنید III_b همان شرط III است منتها به این صورت آن را قوی کرده‌ایم که فرض کرده‌ایم این شرط به ازای همهٔ مجموعه‌های پذیرفتنی (x, y, y') که نقاط (x, y) آنها در همسایگی نقاط واقع بر $E_{۱۲}$ قرار دارند برقرار باشد. ثابت خواهد شد که اگر R دارای ویژگی فوق باشد، II'_b نتیجه‌ای از III'_b است و به دنبال آن از نتایج بیان شده در پاراگراف اخیر ثابت می‌شود که شرایط I، III'_b، و IV' برای تضمین یک کمینهٔ نسبی قوی کافی نیز هستند. مطالبی که تا اینجا بیان شد، فقط مختص کمینه‌ها بود نه بیشینه‌ها. اما در بندهای بعد، بدیهی خواهد بود که شرایط مربوط به بیشینه با شرایط مربوط به کمینه مشابه است؛ فقط باید جهت نابرابریها را در همه جا عوض کرد. همچنین می‌توانیم مسئلهٔ خود را اصلاح کنیم، بدین ترتیب که در میان ردهٔ کمانهای پذیرفتنی که به جای دو نقطه، یک نقطهٔ ثابت را به یک خم ثابت یا دو خم ثابت را به یکدیگر متصل می‌سازند، در پی یافتن یک کمان کمینه یا بیشینه باشیم. نتایج مربوط به این دو مسئله در بندهای ۶۳ تا ۶۵ مختصراً بررسی خواهد شد.

۵۳. نخستین شرط لازم و دو فرمول اساسی. لزومی ندارد برهان مورد نیاز برای نخستین شرط لازم را تکرار کنیم، زیرا دقیقاً همان برهان بند ۱۹ صفحهٔ ۴۷ است. وجود متغیر x در انتگرالده انتگرال ما به هیچ‌وجه لطمه‌ای به استدلالی که در آنجا برای معادلات

$$f_{y'} = \int_{x_1}^{x} f_y dx + c, \quad \frac{d}{dx} f_{y'} - f_y = 0 \qquad (۶)$$

روی یک کمان کمینه ساز، ارائه شد وارد نمی‌کند. یک فرین بنابر تعریف، کمان پذیرفتنی با مشتقات اول و دوم پیوسته است که در این معادلات صدق می‌کند و در مسئلهٔ کلی این فصل، همواره می‌توان معادلهٔ اویلر را در امتداد فرین مزبور به شکل

$$\frac{d}{dx} f_{y'} - f_y = f_{y'x} + f_{y'y} y' + f_{y'y'} y'' - f_y = 0 \qquad (۷)$$

نوشت. این یک معادلهٔ دیفرانسیل از مرتبهٔ دو است، چون مشتق y'' بالاترین مشتقی است که در آن وجود دارد. بدین ترتیب، استدلالهای بند ۳۸ صفحهٔ ۹۸ را برای انتگرال کلی‌ای که اکنون پیش رو داریم نیز می‌توان به کار گرفت. اگر کمان E_{34} طوری تغییر کند که نقاط انتهایی آن همزمان دو خم C و D را رسم کنند، هر وقت این کمان یک فرین بشود، دیفرانسیل مقدار I در امتداد آن عبارت است از:

$$dI(E_{34}) = f(x, y, p) dx + (dy - p dx) f_{y'}(x, y, p) \Big|_{3}^{4} \qquad (۸)$$

نگاهی به برهان بند ۳۸ نشان می‌دهد که اگر این کمان در معادلهٔ (۶) صدق کند باز این نتیجه به قوت خود باقی است. دیفرانسیلهای dx و dy همان دیفرانسیلهای کمانهای C و D در نقاط ۳ و ۴ در شکل ۲۸ صفحهٔ ۱۰۰ هستند و مقادیری که به جای p در تفاضل نشان داده شده می‌نشینند، عبارتند از شیبهای E_{34} در این دو نقطه.

اگر کمان متغیر E_{34} همواره یک فرین باشد، تفاضل بین مقادیر I روی کمانهای E_{34} و E_{56} در شکل ۲۸ برابر است با

$$I(E_{56}) - I(E_{34}) = I^*(D_{46}) - I^*(C_{35}), \qquad (۹)$$

که در آن I^*، انتگرال هیلبرت است:

$$I^* = \int \Big\{ f(x,y,p)dx + (dy - pdx) f_{y'}(x,y,p) \Big\}. \qquad (۱۰)$$

اگر مانند صفحهٔ ۱۰۱، تابع شیب میدان یعنی $p(x,y)$ را به جای p در انتگرالده این انتگرال قرار دهیم، در امتداد همهٔ کمانهای پذیرفتنی موجود در این میدان که نقاط انتهایی یکسان دارند، مقادیر I^* برابرند. این مطلب در همان صفحهٔ ۱۰۱ نیز به کمک فرمول (۹) که اینک ارائه شد، بسادگی ثابت شد. به علاوه روی هر یک ازکمانهای فرین میدان، مقدار I^* با مقدار I برابر است، زیرا در امتداد چنین کمانی $dy = pdx$.

فرمولهای (۸) و (۹) و ویژگیهای انتگرال هیلبرت، همچون مسائل خاص‌تر فصلهای قبل، در نظریهٔ کلی نیز مورد استفادهٔ فراوان خواهند داشت.

۵۴. شرایط لازم وایرشتراس و لژاندر . برای اثبات شرط لازم وایرشتراس، نقطهٔ ۳ را روی کمان کمینه‌ساز E_{12} به طور دلخواه انتخاب نموده، سپس نقطهٔ دوم ۴ بر این کمان را آنقدر نزدیک به ۳ می‌گیریم که هیچ یک از گوشه‌های E_{12} بین آنها قرار نگیرد. از نقطهٔ ۳ می‌توان خم دلخواهی چون C با معادلهٔ $y = Y(x)$ عبور داد و نقطهٔ متحرک ۵ بر روی C را می‌توان با خانواده‌ای یک پارامتری از کمانهای E_{54} که E_{34} را نیز به ازای حالتی که نقطهٔ ۵ در مکان ۳ قرار می‌گیرد در بر دارد، به نقطهٔ ثابت ۴ وصل کرد. خواهیم دید که بسادگی می‌توان این خانواده را ساخت. اگر انتگرال $I(E_{12})$ کمینه باشد، واضح است که وقتی نقطهٔ ۵ از نقطهٔ ۳ شروع به حرکت در امتداد C می‌کند، انتگرال

$$I(C_{35} + E_{54}) = \int_{x_3}^{x_5} f(x, Y, Y')dx + I(E_{54}) \qquad (۱۱)$$

نباید از مقدار اولیه‌اش یعنی $I(E_{34})$، که وقتی ۵ در نقطهٔ ۳ است به دست می‌آید، کمتر شود. بدیهی است که در نقطهٔ ۳، دیفرانسیل این انتگرال نسبت به x_5 نباید منفی شود.

اگر در فرمول (۸) بند قبل به جای خم D، نقطهٔ ثابت ۴ را که در آن $dx_4 = dy_4 = 0$ قرار دهیم، دیفرانسیل جملهٔ $I(E_{54})$ در عبارت (۱۱) در وضعیت E_{34}، به دست می‌آید؛ زیرا فرمول (۸) در امتداد هر کمانی از خانوادهٔ مورد بحث که در معادلات (۶) صدق می‌کند برقرار است و از پیش می‌دانیم که کمان کمینه‌ساز ما نیز باید در این معادلات صدق کند. چون مشتق نخستین انتگرال عبارت (۱۱) نسبت به حد بالایی آن با مقدار انتگرالده‌اش در آن حد برابر است، نتیجه می‌شود که وقتی ۵ در ۳ است، دیفرانسیل $I(C_{35} + E_{54})$ ، برابر است با مقدار کمیت

$$f(x, Y, Y')dx - f(x, y, y')dx - (dy - y'dx)f_{y'}(x, y, y').$$

در نقطهٔ ۳. دیفرانسیلهای موجود در این عبارت مربوط به کمان C هستند و در معادلهٔ $dy = Y'dx$ صدق می‌کنند و در نقطهٔ ۳ عرضهای C و E برابرند، بنابراین دیفرانسیل (۱۱) به شکل زیر نیز بیان کردنی است:

$$[f(x, y, Y') - f(x, y, y') - (Y' - y')f_{y'}(x, y, y')]\, dx \Big|^{3}. \tag{۱۲}$$

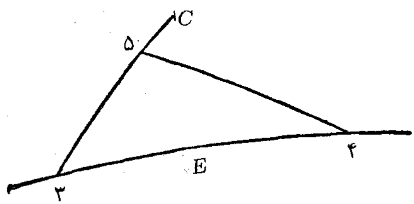
چون این دیفرانسیل باید به ازای نقطهٔ دلخواه ۳ و کمان C که از آن می‌گذرد، یعنی به ازای هر عنصر (x, y, y') روی E_{12} و هر عنصر پذیرفتنی (x, y, Y') مثبت یا صفر باشد، بدین ترتیب شرط لازم وایرشتراس یعنی شرط II در صفحهٔ ۱۳۴ را به اثبات رسانده‌ایم.

ضریب dx در فرمول (۱۲)، تابع E وایرشتراس است که می‌توان آن را به

کمک فرمول تیلر به شکل

$$E(x,y,y',Y') = \frac{۱}{۲}(Y'-y')^{۲} f_{y'y'}\left(x,y,y'+\theta(Y'-y')\right) \qquad (۱۳)$$

نوشت که در آن $۰ < \theta < ۱$. اگر در این فرمول Y' را به سمت y' میل دهیم، شرط لازم لژاندر (شرط III) را به عنوان نتیجهٔ بلافاصلهٔ شرط وایرشتراس (شرط II) به دست می‌آوریم.



شکل۴۴

اگرکسی بخواهد به طور قانع کننده‌تری از امکان ساختن خانواده‌ای ازکمانهای $E_{۵۴}$ از نوعی که در برهان پیشگفتهٔ شرط وایرشتراس به کار رفت اطمینان حاصل کند، تنها چاره‌اش آن است که معادلهٔ

$$y = y(x) + \frac{Y(a)-y(a)}{x_{۴}-a}(x_{۴}-x) = y(x,a).$$

را در نظر بگیرد. به ازای $x = x_{۴}$ این کمانها همگی از نقطهٔ ۴ می‌گذرند، و به ازای $x = a$، خم C را قطع می‌کنند. این خانواده شامل کمان فرین $E_{۳۴}$ در ازای $a = x_{۳}$ نیز می‌باشد، به این علت که در نقطهٔ برخورد $E_{۳۴}$ و C، یعنی نقطهٔ ۳، داریم $Y(x_{۳}) - y(x_{۳}) = ۰$ و معادلهٔ خانواده به معادلهٔ $y = y(x)$ مربوط به کمان $E_{۳۴}$ تبدیل می‌شود.

برهانی که اینک برای شرط لازم وایرشتراس ارائه شد، برای عنصر $(x, y, y'(x-0))$ از یک گوشه کمان کمینه‌ساز دیگر به کار نمی‌آید، زیرا همواره بین این عنصر و نقطهٔ ۴ که به دنبال آن روی $E_{۱۲}$ واقع است، یک گوشه وجود دارد. ولی با استفاده از نقطهٔ ۴ قبل از گوشه، بسادگی می‌توان برهان را اصلاح کرد و به همان نتایجی نایل گشت که برای عنصر مورد نظر در شرط بیان شد.

۵۵. قضیهٔ پوش و شرط ژاکوبی

. با استفاده از فرمول

$$I(E_{۵۶}) - I(E_{۳۴}) = I^*(D_{۴۶}) - I^*(C_{۳۵})$$

می‌توانیم قضیهٔ پوش را ثابت کنیم. در صفحهٔ ۱۳۵ به این قضیه اشاره‌ای شد و گفتیم که این قضیه تعمیم قضیه‌ای است که در صفحهٔ ۱۰۲ برای خانوادهٔ زنجیره‌ها ثابت شد. فرض کنید $E_{۱۴}$ و $E_{۱۳}$ دو تا از فرین‌های خانوادهٔ یک پارامتری گذرا از نقطهٔ ۱ باشند که مطابق شکل ۴۲ صفحهٔ ۱۳۴، در نقاط ۳ و ۴، نقاط انتهایی آنها، بر پوش G این خانواده مماسند. اگر به جای کمان $C_{۳۵}$ در فرمول فوق، نقطهٔ ثابت ۱ و به جای $D_{۴۶}$، $G_{۴۳}$ قرار دهیم معادلهٔ زیر را می‌یابیم

$$I(E_{۱۳}) - I(E_{۱۴}) = I^*(G_{۴۳})$$

به علاوه، دیفرانسیلهای dx و dy در هر نقطهٔ پوش G در معادلهٔ $dy = pdx$ که در آن p شیب مماس فرین در آن نقطه بر G است، صدق می‌کنند و در نتیجه مقدار انتگرال هیلبرت

$$I^* = \int \{f(x, y, p)dx + (dy - pdx)f_{y'}(x, y, p)\}$$

در امتداد $G_{۴۳}$، همان مقدار I است. از این رو داریم

قضیهٔ پوش. گیریم $E_{۱۴}$ و $E_{۱۳}$ دو عضو از خانوادهٔ یک پارامتری فرین‌های گذرا از نقطهٔ ۱ باشند که مطابق شکل ۴۲ در صفحهٔ ۱۳۴، در نقاط انتهایی‌شان،

۴ و ۳، بر پوش G این خانواده مماسند. آنگاه مقادیر انتگرال I در امتداد کمانهای $E_{۱۴}$، $E_{۱۳}$ و $G_{۴۳}$ به ازای همهٔ موقعیتهای نقطهٔ ۴ پیش از ۳ بر روی G در رابطهٔ

$$I(E_{۱۴}) + I(G_{۴۳}) = I(E_{۱۳})$$

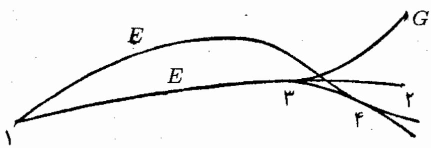
صدق می‌کنند.

برای اثبات شرط ژاکوبی، شرط IV در صفحهٔ ۱۳۵، توجه می‌کنیم که بنابر قضیهٔ پوش، مقدار I در امتداد کمان مرکب $E_{۱۴} + G_{۴۳} + E_{۳۲}$ در شکل ۴۲، همواره با مقدار آن در امتداد $E_{۱۲}$ برابر است. ولی $G_{۴۳}$ یک فرین نیست، بنابراین می‌توان به جای آن کمان $C_{۴۳}$ را که مقدار I را کوچکتر می‌کند قرار داد. در نتیجه، در هر همسایگی $E_{۱۳}$، یک کمان $E_{۱۴} + C_{۴۳} + E_{۳۲}$ وجود دارد که مقدار I در امتداد آن کوچکتر از $I(E_{۱۲})$ است، و بنابراین $I(E_{۱۲})$ نمی‌تواند یک کمینه باشد.

برای حصول اطمینان از اینکه $G_{۴۳}$ یک کمان فرین نیست، می‌توانیم از ویژگی مشهور معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم (۷) صفحهٔ ۱۳۹ استفاده کنیم؛ و آن اینکه اگر چنین معادله‌ای را بتوان برحسب y'' حل کرد، از هر نقطهٔ آغازی و جهت دلخواه $(x_۳, y_۳, y'_۳)$ ، یک و تنها یک جواب می‌گذرد. اما می‌دانیم که معادلهٔ (۷) در همسایگی کمان $E_{۱۲}$ برحسب y'' قابل حل است، زیرا از فرض شرط ژاکوبی لازم می‌آید که $f_{y'y'}$ در امتداد آن کمان مخالف صفر باشد. از این رو اگر $G_{۴۳}$ یک فرین می‌بود، لزوماً می‌بایست بر $E_{۱۳}$ منطبق می‌شد که در آن صورت تمامی کمانهای فرین این خانواده که از نقطهٔ ۱ می‌گذرند، بنابر همان ویژگی می‌بایست بر $E_{۱۳}$ مماس و منطبق می‌بودند. بدین ترتیب هیچ خانوادهٔ یک پارامتری از آن نوعی که قضیه پیش‌بینی می‌کند موجود نبود.

این برهانِ شرط لازم ژاکوبی برای بسیاری از مثالهایی که قصد استفاده از آن را داشته باشیم کافی است، ولی یک نقص هم دارد که پیش از این در موارد متعدد گوشزد کردیم. اگر پوش G هیچ شاخه‌ای نداشته باشد که بر روی کمان $E_{۱۲}$ از نقطهٔ ۳ به سمت نقطهٔ ۱ تصویر گردد، دیگر این برهان برقرار نیست. این وضع در موقعی که پوش G مثل شکل ۴۵ یک نقطهٔ بازگشت دارد یا وقتی به یک

نقطه تبه می‌شود ممکن است رخ دهد. مثلاً دایره‌های عظیمهٔ یک کره مجموعه‌ای



شکل۴۵

از فرین‌های یک مسئلهٔ حساب تغییرات هستند که پوش G آنها در هر حال یک نقطهٔ ثابت منفرد است. در بند ۶۲ صفحهٔ ۱۶۳ ثابت خواهیم کرد که اگر کمان $E_{۱۲}$ کمینهٔ مطلوب باشد، قطع نظر از شکل پوش، در هیچ موردی نقطهٔ تماس ۳ بین ۱ و ۲ واقع نمی‌شود. اگر نقطهٔ ۳ بر ۲ منطبق شود و پوش G یک نقطهٔ ثابت باشد یا شکلی مثل شکل ۴۵ داشته باشد، می‌توان ثابت کرد که کمان $E_{۱۲}$ ممکن است یک کمینه باشد، اما اگر پوش، هیچ شاخه‌ای نداشته باشد که از ۲ به سمت نقطهٔ ۱ تصویر گردد، هرگز چنین نخواهد شد.

۵۶. نتایج دیگری از نخستین شرط لازم. معادلهٔ شرط لازم I در صفحهٔ ۱۳۳، یعنی

$$f_{y'} = \int_{x_۱}^{x} f_y dx + c$$

دو نتیجه دارد که برای تشخیص کمان کمینه‌ساز سودمند می‌باشند. اولاً طرف دوم این معادله در هر نقطهٔ کمان $E_{۱۲}$ تابع پیوسته‌ای از x است و بنابراین طرف اول آن نیز باید پیوسته باشد، بنابراین داریم:

نتیجهٔ ۱. شرط گوشهٔ وایرشتراس ـ اردمان[3]. در یک گوشهٔ (x, y) از کمان کمینه‌ساز $E_{۱۲}$ باید شرط

$$f_{y'}\left(x, y, y'(x-\circ)\right) = f_{y'}\left(x, y, y'(x+\circ)\right)$$

برقرار باشد. [۲۵]

این شرط در نقطهٔ (x, y) غالباً مستلزم آن است که $y'(x-\circ)$ و $y'(x+\circ)$ برابر باشند، بنابراین کمان کمینه‌ساز نمی‌تواند در این نقطه گوشه داشته باشد. اگر مجموعه‌های (x, y, y') که y' آنها بین $y'(x-\circ)$ و $y'(x+\circ)$ واقع است همگی پذیرفتنی باشند و $f_{y'y'}$ همه جا مخالف صفر باشد، این برابری همواره برقرار است، زیرا در آن صورت اولین مشتق یعنی $f_{y'}$ به طور یکنوا نسبت به y' تغییر می‌کند و نمی‌تواند یک مقدار را دوبار اختیار کند. محک حاصل از این نتیجه کاربرد جالبی در دومین برهان شرط ژاکوبی دارد که در بند ۶۲ صفحهٔ ۱۶۳ ارائه خواهد شد.

تاکنون دربارهٔ وجود مشتق دوم، یعنی $y''(x)$، در امتداد کمان کمینه‌ساز هیچ فرضی نکرده‌ایم. اگر کمانی دارای مشتق دوم پیوسته باشد، معادلهٔ اویلر در امتداد آن را می‌توان به صورت

$$f_{y'x} + f_{y'y}y' + f_{y'y'}y'' - f_y = \circ$$

بیان کرد که در معادلهٔ (۷) صفحهٔ ۱۳۹ نشان داده شد. نتیجهٔ زیر از نخستین معادلهٔ این بند، حاوی محکی است که به وسیلهٔ آن می‌توانیم در بسیاری از مسائل ثابت کنیم کمان کمینه‌ساز باید مشتق دوم پیوسته داشته و از این رو فرینی باشد که در معادلهٔ آخر صدق می‌کند.

نتیجهٔ ۲. شرط دیفرانسیل پذیری هیلبرت. در مجاورت نقطه‌ای روی کمان $E_{۱۲}$ که در آن $f_{y'y'}$ مخالف صفر است، این کمان همواره مشتق دوم پیوسته دارد.[۲۶]

---
3) Erdmann

برای اثبات فرض می‌کنیم (x, y, y') مجموعهٔ مقادیری روی $E_{۱۲}$ باشدکه در آنها $f_{y'y'}$ مخالف صفر است و همچنین فرض کنید که $(x+\Delta x, y+\Delta y, y'+\Delta y')$ نیز روی $E_{۱۲}$ است و بین آن و مجموعهٔ قبلی هیچ گوشه‌ای موجود نیست. اگر مقادیر f_y متناظر با این دو مجموعه را با $f_{y'}$ و $f_{y'} + \Delta f_{y'}$ نشان دهیم، به کمک فرمول تیلر به دست می‌آوریم

$$\frac{\Delta f_{y'}}{\Delta x} = \frac{۱}{\Delta x}\left\{f_{y'}(x+\Delta x, y+\Delta y, y'+\Delta y') - f_{y'}(x, y, y')\right\}$$

$$= f_{y'x}(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y, y'+\theta\Delta y')$$

$$+ f_{y'y}(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y, y'+\theta\Delta y')\frac{\Delta y}{\Delta x}$$

$$+ f_{y'y'}(x+\theta\Delta x, y+\theta\Delta y, y'+\theta\Delta y')\frac{\Delta y'}{\Delta x}.$$

که در آن $۰ < \theta < ۱$. وقتی Δx به صفر میل می‌کند، طرف اول این عبارت، $\frac{\Delta f_{y'}}{\Delta x}$، حد متناهی دارد به این دلیل که f_y مشتق انتگرال موجود در نخستین معادلهٔ این بند است و دو جملهٔ نخست طرف دوم معادلهٔ اخیر نیز حدهای خوش تعریف دارند. بنابراین آخرین جمله باید مقدار حدی یکتا داشته باشد و چون $f_{y'y'} \neq ۰$، این مطلب فقط زمانی صحت دارد که $y'' = \lim \frac{\Delta y'}{\Delta x}$ موجود باشد. در همسایگی عنصر (x, y, y') و روی کمانی از $E_{۱۲}$ که گوشه ندارد و این عنصر بر روی آن واقع است $f_{y'y'}$ مخالف صفر می‌ماند. در نتیجه معادلهٔ اویلر را به شکلی که در صفحهٔ ۱۴۶ ارائه شد، می‌توان بر حسب y'' حل کرد و بسادگی نتیجه می‌شود که y'' باید در مجاورت هر عنصر (x, y, y') از نوع یاد شده در نتیجهٔ فوق، پیوسته باشد.

۵۷. فرین‌ها . حال که شرطهای لازم برای یک کمان کمینه‌ساز در بندهای پیش اثبات شدند، مسئلهٔ مهمی که گاه در حالات خاص مشکل عظیمی به بار می‌آورد، یافتن کمانی است که در آن شرایط صدق کند. از نتیجهٔ ۲ی بند قبل

می‌دانیم که کمان کمینه‌سازی که همه جا بر روی آن $f_{y'y'}$ مخالف صفر است باید مرکب از تعدادی کمانهای فرین باشد که در معادلهٔ اویلر به شکل (۷) صدق می‌کنند و بنابراین می‌طلبد که دربارهٔ جوابهای این معادله بیشتر مطلب بدانیم. چون معادلهٔ (۷) شامل متغیرهای x, y, y', y'' است، یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه دو است. بنابر تجربه‌ای که از مسائل فصلهای قبل کسب کرده‌ایم انتظار داریم جوابهای این معادله، یعنی فرین‌ها، خانواده‌ای دو پارامتری از خمهای

$$y = y(x, a, b) \qquad (۱۴)$$

باشند که در آن a و b ثابتهای دلخواه هستند. در مسائل کوتاهترین فاصله که فرین‌هایشان خطوط راست $y = ax + b$ بودند و در مسائل تعیین خم کوتاهترین زمان و زنجیره که فرین‌های آنها به ترتیب خانواده‌های دو پارامتری چرخزادها و زنجیره‌ها بودند، وضع همین گونه بود. در واقع، جوابهای یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دو همواره خمهایی از خانوادهٔ (۱۴) هستند که به دو ثابت دلخواه وابسته‌اند.

خوشبختانه معادلهٔ فرین‌ها شامل دو ثابت دلخواه است، زیرا لازمهٔ حل مسئلهٔ کمینه، یافتن کمان فرینی است که از دو نقطهٔ مفروض ۱ و ۲ می‌گذرد و تعداد شرطهایی که این استلزام روی ثابتهای a و b اعمال می‌کند دقیقاً دوتاست. در واقع، وقتی خم (۱۴) از ۱ و ۲ عبور می‌کند، معادلاتی که باید برقرار باشند عبارتند از

$$y_۱ = y(x_۱, a, b), \qquad y_۲ = y(x_۲, a, b)$$

در هر مسئله‌ای، جفت نقاطی وجود دارند که به ازای آنها این معادلات دارای جوابهای a و b هستند، مثلاً وقتی از پیش قرار بگذاریم که ۱ و ۲ روی یک فرین باشند، چنین وضعی رخ می‌دهد. ولی همان‌طورکه در مورد مسئلهٔ زنجیره دیدیم، برای وضعیتهای خاصی از ۱ و ۲ ممکن است هیچ جوابی موجود نباشد یا بیش از یک جواب موجود باشد.

اگر بخواهیم خانواده‌ای یک پارامتری از فرین‌های گذرا از نقطهٔ ثابت ۱ را بیابیم

باید معادله

$$y_1 = y(x_1, a, b)$$

را برای یکی از ثابتهای a و b بر حسب دیگری حل کنیم، یا مثلاً هر دوی آنها را به صورت توابعی چون $a(\alpha)$ و $b(\alpha)$ از پارامتر سوم α بیان نماییم طوری که در معادله صدق کنند. اگر جوابی را که بدین ترتیب معین می‌شود در معادلهٔ (۱۴) قرار دهیم، خانواده‌ای یک پارامتری از فرین‌های

$$y\left(x, a(\alpha), b(\alpha)\right) = y(x, \alpha)$$

را به دست می‌آوریم که هر یک از آنها از نقطهٔ ۱ عبور می‌کند.

در اینجا امکان بررسی مفصل قضیه‌هایی که می‌توان به کمک آنها از وجود و ماهیت خانوادهٔ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل اویلر اطمینان حاصل کرد وجود ندارد، اما به ازای هر کمان فرین پذیرفتنی E_{12} که در امتداد آن $f_{y'y'} \neq 0$ خانواده‌ای از فرین‌ها (۱۴) وجود دارد که به ازای مقادیر x ، a، و b صادق در شرایط

$$x_1 \leq x \leq x_2, \qquad a = a_0, \qquad b = b_0$$

شامل E_{12} می‌شود و توابع $y(x,a,b)$ و $y'(x,a,b)$ که متعلق به این خانواده هستند، در همسایگی این مقادیر دارای مشتقات جزئی پیوسته از مرتبه‌های اول و دوم می‌باشند. [۲۷] به‌علاوه این خانواده را می‌توان به گونه‌ای انتخاب کرد که در مقادیر (x_1, a_0, b_0) متناظر با نقطهٔ آغازی کمان E_{12} یعنی نقطهٔ ۱، دترمینان

$$\begin{vmatrix} y'_a(x,a,b) & y'_b(x,a,b) \\ y_a(x,a,b) & y_b(x,a,b) \end{vmatrix}$$

مخالف صفر باشد.

با بررسی جفت معادلات

$$\frac{dy}{dx} = y', \qquad \frac{dy'}{dx} = \frac{f_y - f_{y'x} - f_{y'y}y'}{f_{y'y'}} \tag{۱۵}$$

که جوابشان با جواب معادلهٔ دیفرانسیل اویلر معادل است قضیه‌های مزبور به دست می‌آیند. روشن است طرف دوم معادلهٔ آخر فقط وقتی حول کمان $E_{۱۲}$ مقادیر خوش تعریف دارد که $f_{y'y'}$ در امتداد کمان $E_{۱۲}$ مخالف صفر باشد که از این پس این فرض را حفظ می‌کنیم. قضیهٔ اساسی برای دستگاه معادلاتی از این نوع، آن است که از هر مجموعه مقادیر آغازی $(x_\circ, y_\circ, y'_\circ)$ یک و فقط یکی از جوابهای این معادلات عبور می‌کند. این جواب را با $y(x, x_\circ, y_\circ, y'_\circ)$ نشان می‌دهیم. به‌علاوه در همسایگی مجموعه‌های $x, x_\circ, y_\circ, y'_\circ$ که به مقادیر x و عناصر آغازی $(x_\circ, y_\circ, y'_\circ)$ روی کمان $E_{۱۲}$ وابسته‌اند، این تابع و مشتق آن $y'(x, x_\circ, y_\circ y'_\circ)$ دارای مشتقات جزئی پیوسته از هر مرتبه‌ای هستند که طرفهای دوم دستگاه معادلات دیفرانسیل دارا می‌باشند. معادلات

$$y_\circ = y(x_\circ, x_\circ, y_\circ, y'_\circ), \qquad y'_\circ = y'(x_\circ, x_\circ, y_\circ, y'_\circ)$$

مبین این واقعیت هستند که این جواب از عنصر آغازی $x_\circ, y_\circ, y'_\circ$ عبور می‌کند و اگر از اینها نسبت به $y_\circ$ و $y'_\circ$ مشتق بگیریم، به دست می‌آوریم

$$۱ = \frac{\partial}{\partial y_\circ} y(x_\circ, x_\circ, y_\circ, y'_\circ), \quad \circ = \frac{\partial}{\partial y_\circ} y'(x_\circ, x_\circ, y_\circ, y'_\circ),$$

$$\circ = \frac{\partial}{\partial y'_\circ} y(x_\circ, x_\circ, y_\circ, y'_\circ), \qquad ۱ = \frac{\partial}{\partial y'_\circ} y'(x_\circ, x_\circ, y_\circ, y'_\circ).$$

حال بیایید به $x_\circ$ مقدار ثابت $x_۱$ را نسبت داده، به جای پارامترهای متغیر a و b، $y_\circ$ و $y'_\circ$ را قرار دهیم. آنگاه خانوادهٔ خمهایی که تابع $y(x, x_۱, a, b)$ تعریف می‌کند، خانوادهٔ فرین‌هایی از نوع خانوادهٔ (۱۴) و با همان ویژگیهاست. بویژه چهار معادلهٔ اخیر حاکی از آنند که در نقطهٔ آغازی $E_{۱۲}$ یعنی ۱، دترمینان صفحهٔ قبل برای این خانواده مساوی با یک است.

۵۸. تعیین نقاط مزدوج . اگر بخواهیم شرط ژاکوبی را که در بندهای پیش از آن یاد کردیم، با موفقیت به کار بریم باید محکهای مناسبی در اختیار

داشته باشیم تا معین کنیم که آیا روی کمان فرین E_{12} نقطهٔ تماسی چون ۳ با پوش G خانوادهٔ یک پارامتری فرین‌های گذرا از نقطهٔ ۱ وجود دارد یا نه. اگر معادلهٔ این خانواده، $y = y(x, \alpha)$، در دست باشد بنابر قضیهٔ مشهور حسابان می‌دانیم که E_{12} در آن نقاطی با G تماس دارد که مختص x آنها در معادلهٔ $y_\alpha(x, \alpha_0) = 0$ صدق می‌کند که در آن α_0 مقدار پارامتری خاص معرف E_{12} در خانواده است.

تعیین معادلهٔ خانوادهٔ یک پارامتری فرین‌های گذرا از نقطهٔ ۱ همیشه آسان نیست، حتی وقتی خانوادهٔ دو پارامتری جوابهای معادلات دیفرانسیل اویلر از پیش معلوم باشد. به همین دلیل در اختیار داشتن محکی برای تعیین نقطهٔ مزدوج ۳ که بر حسب $y(x, a, b)$، معادلهٔ اصلی معرف آن فرین‌ها، بیان شود سودمند واقع می‌گردد. اگر به یاد بیاوریم که معادلهٔ خانوادهٔ یک پارامتری فرین‌های گذرا از ۱ به شکل

$$y = y(x, \alpha) = y\left(x, a(\alpha), b(\alpha)\right),$$

است که در آن توابع $a(\alpha)$ و $b(\alpha)$ به گونه‌ای انتخاب شده‌اند که در معادلهٔ

$$y_1 = y(x_1, a, b).$$

صدق کنند، بسادگی می‌توان این محک را استنتاج کرد. اگر از دو معادلهٔ اخیر نسبت به α مشتق بگیریم مشاهده می‌کنیم که

$$y_\alpha = y_a(x, a, b)a' + y_b(x, a, b)b',$$

$$0 = y_a(x_1, a, b)a' + y_b(x_1, a, b)b',$$

که در آن a' و b' مشتقهای a و b هستند. روشن است که اگر y_α صفر شود، دترمینان چهار ضریب a' و b' نیز باید صفر شود و بدین‌سان محکهای تعیین نقاط مزدوج را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

نقاط ۳ مزدوج با ۱ روی کمان فرین $E_{۱۲}$ به وسیلهٔ صفرهای $x \neq x_۱$ تابع $y_\alpha(x, \alpha_۰)$ که در آن $y = y(x, \alpha)$ معادله خانواده‌ای یک پارامتری فرین‌های گذرا از نقطهٔ ۱، و $\alpha_۰$ مقدار پارامتری خاصی است که $E_{۱۲}$ را مشخص می‌کند، معین می‌گردند. این نقاط از صفرهای $x \neq x_۱$ دترمینان

$$\Delta(x, x_۱) = \begin{vmatrix} y_a(x, a_۰, b_۰) & y_b(x, a_۰, b_۰) \\ y_a(x_۱, a_۰, b_۰) & y_b(x_۱, a_۰, b_۰) \end{vmatrix}$$

نیز به دست می‌آید. در این دترمینان $y = y(x, a, b)$ خانواده‌ای دو پارامتری از فرین‌هاست که به ازای مقادیر خاص $a_۰$ و $b_۰$، $E_{۱۲}$ را نیز به عنوان عضوی از خانواده شامل می‌گردد.

در مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان، معادلات فرین‌ها را به شکل پارامتری

$$x = g(u, a, b), \qquad y = h(u, a, b) \qquad (۱۶)$$

به دست آوردیم. در مسائلی که چنین وضعی پیش می‌آید، با حل کردن معادلهٔ اول بر حسب u به صورت تابعی به شکل $u = U(x, a, b)$ و سپس قرار دادن آن در معادلهٔ دوم، معادلهٔ فرین‌ها به شکل $y = y(x, a, b)$ یافت می‌شود. اگر این تابع را در معادلات (۱۶) جایگزین کنیم، اولین معادله به اتحادی بر حسب x، a، و b تبدیل می‌شود و با مشتق‌گیری، معادلات زیر را برای مشتقات $U(x, a, b)$ و $y(x, a, b)$ به دست می‌آوریم

$$۱ = g_u U_x, \qquad ۰ = g_u U_a + g_a, \qquad ۰ = g_u U_b + g_b,$$

$$y(x, a, b) = h(U, a, b,),$$

$$y_a = h_u U_a + h_a = \frac{۱}{g_u}(g_u h_a - g_a h_u),$$

$$y_b = h_u U_b + h_b = \frac{۱}{g_u}(g_u h_b - g_b h_u).$$

از این رو، اگر از نمادگذاری وایرشتراس، یعنی

$$\theta_1(u,a,b) = g_u h_a - g_a h_u, \qquad \theta_2(u,a,b) = g_u h_b - g_b h_u,$$

استفاده کنیم، در می‌یابیم که نقاط مزدوج با ۱ به وسیلهٔ صفرهای دترمینان

$$\theta(u,u_1) = \begin{vmatrix} \theta_1(u,a,b) & \theta_2(u,a,b) \\ \theta_1(u_1,a,b) & \theta_2(u_1,a,b) \end{vmatrix}$$

معین می‌شوند. u_1 در این دترمینان عبارت است از مقدار پارامتری معرف نقطهٔ ۱ روی فرین. بنابراین می‌توانیم نقاط مزدوج را مستقیماً از معادلات پارامتری فرین‌ها، (۱۶)، بی‌آنکه آنها را به شکل $y = y(x,a,b)$ بیان کنیم، معین نماییم. این روش در تعدادی از مسائل تسهیلات فراوانی ایجاد می‌کند.

۵۹. قضیهٔ اساسی کفایت . شرایطی را که تا اینجا برای یک کمینه به دست آورده‌ایم فقط شرایط لازمند، ولی در صفحات آتی خواهیم دید که با اندک تغییراتی می‌توان آنها را به شرایطی تبدیل کرد که برای تضمین وجود یک مقدار کمینه برای انتگرال ما کافی هم باشند. چون مقایسهٔ شرطهای لازم با کافی یکی از مشکلترین قسمتهای نظریهٔ حساب تغییرات است، پیش از آنکه دست به انجام این کار بزنیم، یک قضیهٔ کفایت مطرح می‌کنیم که گاه در حالات خاص چنان اطلاعات کاملی در اختیار ما می‌گذارد که پس از به کار بردن آن دیگر احتیاجی به پیگیری استفاده از نظریهٔ کلی نیست.

در یکی از پاراگرافهای صفحهٔ ۱۳۶، میدان فرین‌ها را ناحیه‌ای چون F از صفحهٔ xy تعریف کردیم که به طور ساده با خانوادهٔ یک پارامتری فرین‌هایی که همگی یک خم D را قطع می‌کنند پوشیده می‌شود. منظور از اینکه به‌طور ساده پوشیده می‌شود این است که از هر نقطهٔ F یک و فقط یک فرین عبور می‌کند. لزومی ندارد که خم D داخل میدان واقع شود و در حالت خاص ممکن است

صرفاً نقطهٔ ثابتی باشد که همهٔ فرین‌ها از آن می‌گذرند. شکل ۴۳ صفحهٔ ۱۳۵ یک میدان را نشان می‌دهد.

اگر بخواهیم تحلیل موجود در قضیهٔ کفایت را با موفقیت به انجام رسانیم، باید بر سر ویژگیهای خانوادهٔ کمانهای فرینی که میدان F را می‌پوشانند، به‌طور صریحتر توافق حاصل کنیم. فرض می‌شود که این خانواده دارای معادله‌ای به شکل

$$y = y(x, \alpha) \qquad (\alpha_۱ \leq \alpha \leq \alpha_۲ \quad ; \quad x_۱(\alpha) \leq x \leq x_۲(\alpha))$$

است که در آن توابع $y'(x, \alpha), y(x, \alpha)$ و مشتقات جزئی آنها تا مرتبهٔ دوم، و نیز توابع $x_۱(\alpha)$ و $x_۲(\alpha)$ که نقاط انتهایی کمانهای فرین را تعریف می‌کنند، پیوسته باشند، می‌دانیم که . نقطهٔ تقاطع D با هر یک از فرین‌ها با تابع $x = \xi(\alpha)$ تعریف می‌شود که خود و مشتق اولش روی بازهٔ $\alpha_۱\alpha_۲$ پیوسته‌اند و به‌علاوه y_α بر روی کمانهای فرین همه‌جا مخالف صفر است. به هر نقطه (x, y) از F مقداری چون $\alpha(x, y)$ متناظر می‌شود که فرین یکتای میدان گذرا از آن نقطه را تعریف می‌کند و در نتیجهٔ فرض مخالف صفر بودن y_α می‌توانیم به کمک روشهای بند ۲۴ در صفحهٔ ۵۹ ثابت کنیم که $\alpha(x, y)$ و مشتقات جزئی اول آن در F پیوسته‌اند و، بنابراین، برای تابع شیب میدان، یعنی $p(x, y) = y'\left(x, \alpha(x, y)\right)$، هم این مطلب صحت دارد. این ویژگیها مبانی تحلیلی نظریهٔ میدان را تشکیل می‌دهند و همواره آنها را از پیش دانسته فرض می‌کنیم. حال انتگرال هیلبرت

$$I^* = \int \{f(x, y, p)dx + (dy - pdx)f_{y'}(x, y, p)\}$$

که در آن به جای p تابع شیب میدان، $p(x, y)$ ، قرار داده شده است، روی هر کمان پذیرفتنی $C_{۱۲}$ درون میدان دارای مقدار معینی است. نیز، همان‌طور که در صفحهٔ ۱۴۰ ذکر کردیم، مقادیرش بر روی تمام آن کمانهای $C_{۱۲}$ای که نقاط انتهایی واحد دارند، یکسان است و اگر نقاط ۱ و ۲ نقاط انتهایی یک کمان فرین $E_{۱۲}$ در میدان باشند، این مقدار با مقدار انتگرال اصلی I برابر است. از این رو برای جفت

کمانهای $C_{۱۲}$ و $E_{۱۲}$ که در شکل ۴۳ صفحهٔ ۱۳۵ نشان داده شده‌اند بسهولت به دست می‌آوریم که

$$I(C_{۱۲}) - I(E_{۱۲}) = I(C_{۱۲}) - I^*(E_{۱۲}) = I(C_{۱۲}) - I^*(C_{۱۲})$$

و اگر به جای I و I^* مقادیرشان را به صورت انتگرال جانشین سازیم، نتیجه می‌شود که

$$I(C_{۱۲}) - I(E_{۱۲}) = \int_{x_۱}^{x_۲} E\,(x, y, p(x, y), y')\, dx\cdot \quad (۱۷)$$

در انتگرال سمت راست، y و مشتقش y' توابعی از x هستند که از معادلهٔ کمان پذیرفتنی $C_{۱۲}$، $y = y(x)$، حاصل می‌شوند.

قضیهٔ کفایت در صفحهٔ ۱۳۶ نتیجهٔ فوری این فرمول است، زیرا فرض (۵) مبنی بر اینکه تابع E درون میدان بزرگتر یا مساوی صفر است، بلافاصله نتیجه می‌دهد که $I(E_{۱۲}) \leq I(C_{۱۲})$. اگر تابع E تنها زمانی در میدان صفر شود که $y' = p$ آنگاه تساوی $I(E_{۱۲}) = I(C_{۱۲})$ فقط زمانی می‌تواند برقرار باشد که تمام نقاط $C_{۱۲}$ در معادلهٔ $y' = p(x, y)$ صدق کنند. ولی در این صورت $C_{۱۲}$ باید بر $E_{۱۲}$ منطبق شود، به این دلیل که معادلهٔ دیفرانسیل $y' = p(x, y)$ یک و فقط یک جواب گذرا از نقطهٔ آغازی ۱ دارد و آن هم $E_{۱۲}$ است.

برهانهای کفایت در سه فصل گذشته همگی کاربردهای حالات خاص فرمول (۱۷) و قضیهٔ صفحهٔ ۱۳۶ بودند. خواننده می‌تواند با مرور مجدد برهانهای بندهای ۱۳، ۲۷، و ۴۲ به ترتیب در صفحات ۲۷، ۶۶، و ۱۰۹ این مطلب را ملاحظه کند. در هر یک از مسائل خاص مفروض در آن بندها، $f_{y'y'}$ به ازای همهٔ مجموعه‌های پذیرفتنی (x, y, y') مثبت است و فرمول

$$E(x, y, p, y') = \frac{۱}{۲}(y' - p)^۲ f_{y'y'}(x, y, p + \theta(y' - p)) \quad (۰ < \theta < ۱) \quad (۱۸)$$

نشان می‌دهد که وقتی $y' \neq p$، تابع E مثبت است. این مطلب را در آخرین جملهٔ قضیهٔ کفایت از پیش دانسته فرض کردیم.

یک مسئلهٔ منظم، مسئله‌ای است که در آن $f_{y'y'}$ به ازای همهٔ مجموعه‌های پذیرفتنی (x,y,y') یک علامت دارد و همچنین اگر مجموعه‌های (x,y,y'_1) و (x,y,y'_2) پذیرفتنی باشند هر مجموعهٔ (x,y,y') که در آن $y'_1 < y' < y'_2$ نیز پذیرفتنی خواهد بود. فرمول (۱۸) نشان می‌دهد که در این‌گونه مسائل، فرض $E(x,y,p,y') > 0$ وقتی $y' \neq p$ یقیناً برقرار است، به شرط آنکه $f_{y'y'}$ مثبت باشد و نتیجهٔ زیر را از قضیهٔ آخر به دست می‌آوریم.

نتیجه. اگر E_{12} کمان فرین یک میدان F برای مسئلهٔ منظم با قید $f_{y'y'} > 0$ باشد، نابرابری $I(C_{12}) > I(E_{12})$ به ازای هر کمان پذیرفتنی C_{12} درون F که متمایز از E_{12} است و نقاط ۱ و ۲ را به هم وصل می‌کند برقرار می‌باشد.

مسائل سه فصل گذشته، همگی مسائل منظم با قید $f_{y'y'} > 0$ بودند.

۶۰. شرایط کافی برای کمینه‌های نسبی. اگر ابتدا لم زیر را ثابت کنیم، در تلاشی که برای ساختن مجموعه شرایط کافی از روی شرایط لازم I، II، III، و IV در پیش گرفته‌ایم، یاری خواهیم شد:

لم. هر کمان فرین E_{12} که در امتداد آن $f_{y'y'} \neq 0$ و هیچ نقطه‌ای مزدوج با ۱ بر روی آن نباشد، درون میدانی چون F است و یک کمان فرین آن میدان نیز هست.

در مرحلهٔ اول برهان باید نشان دهیم که کمان E_{12} به ازای $\alpha = 0$ عضوی از یک خانوادهٔ یک پارامتری از فرین‌های $y = y(x,\alpha)$ است که در امتداد E_{12} دارای $y_\alpha(x,0)$ مخالف صفر هستند. برای اثبات این مطلب ابتدا توجه می‌کنیم که بنابر یادداشتهای صفحهٔ ۱۵۰، اگر $f_{y'y'}$ در امتداد E_{12} مخالف صفر باشد، یقیناً یک خانوادهٔ دو پارامتری $y = y(x,a,b)$ وجود دارد که به ازای مقادیر پارامتری خاص a_0 و b_0، شامل E_{12} می‌شود و نیز به یاد می‌آوریم که این خانواده را به گونه‌ای می‌توان انتخاب کرد که مشتق دترمینان

$$\Delta(x,x_1) = \begin{vmatrix} y_a(x,a_0,b_0) & y_b(x,a_0,b_0) \\ y_a(x_1,a_0,b_0) & y_b(x_1,a_0,b_0) \end{vmatrix}$$

نسبت به x در نقطهٔ ۱ مخالف صفر باشد؛ شرطی که می‌توان آن را با نامساوی $\Delta'(x_1, x_1) \neq 0$ [۳۹] نیز بیان کرد. اکنون ثابت مثبت ϵ را طوری انتخاب می‌کنیم که به ازای هر جفت مقادیر (x, x_0) که در نابرابریهای

$$x_1 - \varepsilon \leq x_0 < x_1, \qquad x_1 - \varepsilon \leq x \leq x_1 + \varepsilon,$$

صدق می‌کنند، $\Delta'(x, x_0)$ مخالف صفر باشد. چنین انتخابی امکانپذیر است، به این دلیل که وقتی ε کوچک است جفتهای (x, x_0) که در این نابرابریها صدق می‌کنند، همگی در مجاورت جفت (x_1, x_1) واقع می‌شوند. به ازای هر مقدار ثابت x_0 در اولین بازه از دو بازهٔ فوق، دترمینان $\Delta(x, x_0)$ در x_0 صفر می‌شود. مشتق آن، $\Delta'(x, x_0)$ در همه جای بازهٔ $x_1 - \varepsilon \leq x \leq x_1 + \varepsilon$ مخالف صفر است و بنابراین به ازای مقادیر x در بازهٔ $x_1 \leq x \leq x_1 + \varepsilon$ نیز قطعاً مخالف صفر خواهد بود. به‌علاوه اگر مقدار x_0 به اندازهٔ کافی نزدیک x_1 انتخاب شود، Δ' دربازهٔ $x_1 + \varepsilon \leq x \leq x_2$ هم مخالف صفر خواهد بود؛ زیرا وقتی هیچ نقطه‌ای مزدوج با ۱ بر روی E_{12} وجود نداشته باشد، دترمینان $\Delta(x, x_1)$ که ریشه‌هایش نقاط مزدوج را معین می‌کنند، باید روی $x_1 + \varepsilon < x < x_2$ مخالف صفر باشد و وقتی x_0 نزدیک x_1 است، $\Delta(x, x_0)$ نیز این ویژگی را داراست. اکنون اگر قرار دهیم

$$k = y_b(x_0, a_0, b_0), \qquad l = -y_a(x_0, a_0, b_0)$$

خانوادهٔ یک پارامتری فرین‌های

$$y = y(x, a_0 + k\alpha, b_0 + l\alpha) = y(x, \alpha)$$

ویژگی یاد شده در آغاز این پاراگراف را دارد. چون به ازای مقدار پارامتری $\alpha = 0$، شامل E_{12} است و مشتق آن

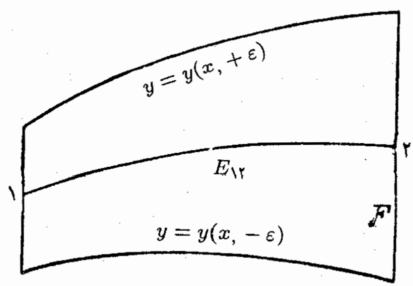
$$y_\alpha(x, 0) = y_a(x, a_0, b_0)k + y_b(x, a_0, b_0)l = \Delta(x, x_0)$$

در کل بازهٔ $x_۱ \leq x \leq x_۲$ مخالف صفر است.

خانوادهٔ فرین‌هایی که بدین ترتیب تعریف شد، میدان F مربوط به کمان $E_{۱۲}$ را به طور ساده می‌پوشاند، زیرا می‌توانیم ϵ را آنقدر کوچک اختیار کنیم که به ازای همهٔ مقادیر x و α صادق در نابرابریهای

$$x_۱ \leq x \leq x_۲ \quad , \quad |\alpha| \leq \varepsilon,$$

$y_\alpha(x, \alpha)$ مخالف صفر باشد. پس وقتی α از $-\varepsilon$ به $+\varepsilon$ افزایش می‌یابد روی هر خط مختصاتی ناحیه F در شکل ۴۶، مقدار $y(x, \alpha)$ به طوریکنوا از یک مرز به مرز دیگر.ناحیه تغییر می‌کند. بنابراین، از هر نقطهٔ F یک فرین یکتا می‌گذرد که البته



شکل ۴۶

این مثل این است که بگوییم به ازای هر نقطهٔ (x, y) در F ، معادلهٔ $y = y(x, \alpha)$ دارای جواب یکتای $\alpha(x, y)$ است. با روشهایی که در بند ۲۴ صفحهٔ به کار رفت می‌توان نشان داد که تابع $\alpha(x, y)$ و مشتقات جزئی اول آن در F پیوسته‌اند و آنگاه این مطلب برای تابع شیب میدان، $p(x, y) = y'(x, \alpha(x, y))$، نیز صحت خواهد داشت.

اکنون این موقعیت دست داده است که مجموعه‌های مهم شرایط کافی که تضمین کنندهٔ ویژگی کمینهٔ نسبی بودن کمان $E_{۱۲}$ هستند و نیز شرایط کافی را که

در صفحات ۱۳۸ ـ ۱۳۷ به طور مختصر نشان داده شد بررسی کنیم. در بند ۵۱ صفحات ۱۳۲ ـ ۱۳۱، دیدیم در انتخاب ناحیهٔ R که مسئلهٔ کمینهٔ این فصل را می‌توان در آن بررسی کرد کاملاً مختاریم. کمینه‌های نسبی در واقع کمینه‌های موجود در انواع معینی از زیر ناحیه‌های ناحیهٔ اصلی R هستند و وجودشان از شرایط بیان شده در دو قضیهٔ ذیل تضمین می‌شود.

شرایط کافی برای کمینهٔ نسبی ضعیف. فرض کنیم $E_{۱۲}$ کمان بدون گوشه‌ای باشد که واجد ویژگیهای زیر است:

۱) یک فرین است؛

۲) در هر مجموعه مقادیر (x, y, y') بر روی آن $f_{y'y'} > ۰$ ؛

۳) هیچ نقطه‌ای چون ۳ مزدوج با ۱ بر روی آن نیست.

این معادل است با اینکه بگوییم $E_{۱۲}$ در شرایط I، III'، و IV' صدق کند. آنگاه یقیناً $I(E_{۱۲})$ یک کمینهٔ نسبی ضعیف است، یا به عبارت دیگر به ازای هر کمان پذیرفتنی $C_{۱۲}$ متمایز از $E_{۱۲}$ که ۱ را به ۲ وصل می‌کند و تمام عناصر (x, y, y') آن در یک همسایگی به اندازهٔ کافی کوچک R' از عناصر روی $E_{۱۲}$ قرار دارند، نابرابری $I(E_{۱۲}) < I(C_{۱۲})$ برقرار است.

برای اثبات این قضیه، اولاً توجه می‌کنیم که به کمک نتیجهٔ ۲ در صفحهٔ ۱۴۶ بسادگی دیده می‌شود که شرایط I، III'، و IV' ویژگیهای ۱)، ۲)، و ۳)، مذکور در قضیه را برای $E_{۱۲}$ نتیجه می‌دهند و برعکس. به علاوه همان طور که در لم این بند نشان داده شد، این سه ویژگی وجود میدان F ی را هم که کمان $E_{۱۲}$یکی از فرین‌های آن است تضمین می‌کنند. اکنون همسایگی R' مرکب از مقادیر (x, y, y') بر $E_{۱۲}$ را آنقدر کوچک اختیار می‌کنیم که نقاط (x, y) مربوط به تمامی عناصر (x, y, y') در R'، در F قرار گیرند و برای تابع شیب $p = p\,(x, y)$ عناصر $(x, y, p + \theta(y' - p))$ با قید $۰ \leq \theta \leq ۱$ همگی پذیرفتنی باشند و $f_{y'y'} \neq ۰$. آنگاه تابع

$$E\,(x, y, p(x, y), y') = \frac{۱}{۲}(y' - p)^{۲} f_{y'y'}(x, y, p + \theta\,(y' - p))\,,$$

به ازای همهٔ عناصر (x, y, y') در R که $y' \neq p$ مثبت است و قضیهٔ اساسی کفایت در صفحهٔ ۱۳۶ که در تعریف مجموعه‌های پذیرفتنی آن به جای R'، R قرارگرفته است بلافاصله قضیه‌ای را که در صدد اثبات آن هستیم نتیجه می‌دهد.

شرایط کافی برای کمینهٔ نسبی قوی. فرض کنیم $E_{۱۲}$ کمان بدون گوشه‌ای باشد که علاوه بر ویژگیهای قضیهٔ قبل، این ویژگی را نیز دارد که

۴) در هر عنصر (x, y, y') در همسایگی نقاطی که روی $E_{۱۲}$ واقعند، شرط $E(x, y, y', Y') > ۰$ به ازای هر مجموعهٔ پذیرفتنی (x, y, Y') با قید $Y' \neq y'$ برقرار است.

این معادل است با اینکه بگوییم $E_{۱۲}$ در شرایط I ، II'_b،III' ، و IV' صدق می‌کند. آنگاه $I(E_{۱۲})$ یک کمینهٔ نسبی قوی است، یا به عبارت دیگر به ازای هر کمان پذیرفتنی $C_{۱۲}$ متمایز از $E_{۱۲}$ که ۱ را به ۲ وصل کرده و تمام نقاط (x, y) آن در همسایگی به اندازهٔ کافی کوچک نقاط واقع بر $E_{۱۲}$ قرار دارند، نابرابری $I(E_{۱۲}) < I(C_{۱۲})$ برقرار است.

ویژگیهای ۱)، ۲)، و ۳) دراین حالت نیزوجود میدان F ی راکه $E_{۱۲}$ یکی از کمانهای فرین آن است تضمین می‌کنند و طبق معمول می‌توانیم تابع شیب میدان را با $p(x, y)$ نشان دهیم. اگر میدان را بقدری کوچک اختیارکنیم که همهٔ عناصر $(x, y, p(x, y))$ متعلق به آن در همسایگی R' مذکور در ویژگی ۴) قرار گیرند، بنابر آن ویژگی، نابرابری $E\left(x, y, p(x, y), y'\right) > ۰$ به ازای هر عنصر پذیرفتنی (x, y, y') درون F متمایز از $(x, y, p(x, y))$ برقرار است و قضیهٔ کفایت در صفحهٔ ۱۳۶، بلافاصله نتیجهٔ مطلوب قضیه را به ما می‌دهد.

اگروقتی $(x, y, y'_۱)$ و $(x, y, y'_۲)$ در R هستند، همهٔ مجموعه‌های (x, y, y') با قید $y'_۱ < y < y'_۲$ هم در R باشند، شرط III'_b بنابر تعریف نتیجه می‌دهد که $f_{y'y'}$ به ازای همهٔ مجموعه‌های پذیرفتنی (x, y, y') که نقاط (x, y) آنها در همسایگی نقاط $E_{۱۲}$ قرار دارند، مثبت است. به این ترتیب، معادلهٔ (۱۳) در صفحهٔ ۱۴۲ نشان می‌دهد که II'_b نتیجهٔ شرط III'_b است و بنابراین، حکم زیر را نتیجه می‌گیریم:

نتیجه. اگر ناحیهٔ R دارای ویژگی مذکور در فوق باشد، شرایط I، III'_b، و IV' روی کمان $E_{۱۲}$ کافی‌اند تا $I(E_{۱۲})$ یک کمینهٔ نسبی قوی شود.

۶۱. نکاتی دربارهٔ نتایج قبل . تا کنون تنها کمینه‌های انتگرالهایمان را بررسی کرده‌ایم، با این حال بسادگی دیده می‌شود که تغییر جهت نابرابریهای موجود در شرایطی که در صفحات پیشگفتهٔ این فصل بررسی کردیم، این شرایط را به شرایط متناظر برای بیشینه مبدل می‌سازد. تنها باید دقت کرد که خمی که انتگرال I را بیشینه می‌سازد، قرینهٔ آن انتگرال را کمینه خواهد کرد.

متاسفانه آنچه با عنوان مجموعه شرایط لازم برای یک کمینه ثابت شد، همان مجموعه‌ای نیست که با نام شرایط کافی به اثبات رسید. مثلاً برای یک کمینهٔ نسبی ضعیف، شرایط لازم I، III، و IV فقط زمانی با چهرهٔ شرایط کافی رخ نمودند که قوی‌تر شده و به I ، III' و IV' تبدیل شده بودند؛ و در برهان کفایت برای یک کمینهٔ نسبی قوی به جای شرایط لازم I،II ، III، وIV ، مجموعهٔ بسیار قوی‌تر I، II'_b، III'، و IV' قرار داده شد. بلتسا شرط لازم پنجمی هم از یک نوع نسبتاً مصنوعی استنتاج کرده است که به پرکردن شکاف بین‌شرط لازم وایرشتراس، II، و شرط متناظرش II'_b در مجموعه شرایط کافی برای یک کمینهٔ نسبی قوی کمک می‌کند، ولی مشکل جدی دیگر اختلاف بین شرایط III و III' است. به کمک نتیجهٔ ۲ در صفحهٔ ۱۴۶ نمی‌توان نتیجه گرفت که کمان کمینه‌سازی که $f_{y'y'}$ بر روی آن گاهی صفر می‌شود، مشتق دوم پیوسته دارد و یک فرین است، و اگر هم چنین کمانی یک فرین باشد نمی‌توان مطمئن بود که متعلق به خانواده‌های فرین‌هایی نظیر آنهاست که در بند ۵۷ صفحهٔ ۱۴۷ تشریح شدند. اگر مخرج دومین معادلهٔ دیفرانسیل ۱۵ یعنی $f_{y'y'}$ همواره مخالف صفر نباشد، قضایای وجودی برای آن معادلات به کار نمی‌آیند. دربارهٔ این مورد استثنایی که در آن صفرهای $f_{y'y'}$ روی خم کمینه‌ساز قرار می‌گیرند چیز زیادی نمی‌دانیم و در آن مورد امکاناتی که می‌تواند پیش بیاید متعددند.

بدون آنکه خود را بیش از این درگیر این مشکلات سازیم، بیایید برای لحظه‌ای

ردهٔ مسائل منظم را که در صفحهٔ ۱۵۶ تعریف شد و خوشبختانه اکثر کاربردهای نظریه مربوط به آن است، در نظر بگیریم. در این‌گونه مسائل، $f_{y'y'}$ در هر عنصر پذیرفتنی (x, y, y') مخالف صفر است و اگر $(x, y, y'_۱)$ و $(x, y, y'_۲)$ پذیرفتنی باشند همهٔ مجموعه‌های (x, y, y') با قید $y'_۱ < y' < y'_۲$، نیز پذیرفتنی‌اند. همچون صفحهٔ ۱۴۶ می‌توانیم ثابت کنیم که در این حالت، کمان کمینه‌ساز $E_{۱۲}$ هیچ‌گوشه‌ای نداشته طبق نتیجهٔ صفحهٔ ۱۴۶ مشتق دوم پیوسته دارد و بنابراین یک فرین است. حال چون $f_{y'y'}$ هرگز در R صفر نمی‌شود III شرط III'_b را نتیجه می‌دهد. اگر پوش خانوادهٔ یک پارامتری فرین‌های گذرا از نقطهٔ ۱، شاخه‌ای داشته باشد که از نقطهٔ مزدوج ۳، پس تصویر گردد برهان شرط ژاکوبی در بند ۵۵ صفحهٔ ۱۴۳ نشان می‌دهد که ۳ نه می‌تواند بین ۱ و ۲ واقع شود و نه بر ۲ منطبق گردد. بنابراین شرط IV' نیز یک شرط لازم است. بدین ترتیب قضیهٔ زیر را داریم:

کمان کمینه‌ساز $E_{۱۲}$ برای یک مسئلهٔ منظم، باید فرینی باشد که در همه‌جای آن $f_{y'y'}$ بزرگتر از صفر است. اگر پوش خانوادهٔ یک پارامتری فرین‌های گذرا از نقطهٔ ۱، شاخه‌ای داشته باشد که از نقطهٔ ۳ مزدوج با ۱ روی $E_{۱۲}$ به سمت ۱ پس تصویر گردد، ۳ نه می‌تواند بین ۱ و ۲ واقع شود و نه در ۲. به علاوه کمان کمینه‌سازی چون $E_{۱۲}$ واجد این ویژگیها، مطمئناً یک کمینهٔ نسبی قوی خواهد بود. این معادل است با اینکه بگویم در حالتی که مسئله منظم است و پوش دارای شاخه‌ای است که ذکر شد، شرایط I، III، و IV' برای یک کمینهٔ نسبی قوی، هم لازمند و هم کافی.

حال باید دید وقتی پوش مذکور هیچ شاخه‌ای ندارد که به سمت نقطهٔ ۱ پس تصویر گردد، چه اتفاقی می‌افتد. در این حالت، برهان شرط ژاکوبی را که در بند ۵۵ صفحهٔ ۱۴۳ ارائه شد نمی‌توان به کار برد. با وجود این در بند بعد خواهیم دید که این شرط لازم است. همان طورکه در قضیهٔ اخیر هم بیان شد، وقتی کمان $E_{۱۲}$ یک فرین است و هیچ نقطهٔ مزدوجی بر روی آن نیست، یک کمینه را به دست می‌دهد و با کمی زحمت می‌توان ثابت کرد که اگر نقطهٔ ۲، مزدوج با ۱ باشد و

پوش، هیچ شاخه‌ای که از ۲ پس تصویر گردد نداشته باشد [۲۸]، کمان $E_{۱۲}$ باز هم یک کمینه، دست کم از یک نوع محدود، خواهد بود. بدین ترتیب، توصیفی از کمینه‌های نسبی برای مسائل منظم در اختیار داریم که از بعضی جهات کامل است.

۶۲. دومین برهان شرط ژاکوبی [۲۹] در صفحات پیش به این نکته اشاره شد که شرط ژاکوبی برهان دومی هم دارد که صرف نظر از شکل پوش خانوادهٔ یک پارامتری فرین‌های گذرا از نقطهٔ ۱، اطلاعاتی دربارهٔ محل نقطهٔ مزدوج روی کمان کمینه‌ساز در همهٔ حالات ارائه می‌دهد. برای بیان این برهان، بار دیگر مقادیر $I(a)$ انتگرال I در امتداد خمهای خانوادهٔ $y = y(x) + a\eta(x)$ را که در بند ۱۹ صفحهٔ ۴۷ تشریح شد در نظر می‌گیریم. برای اینکه مقدار $I(\circ)$ در امتداد $E_{۱۲}$ کمینه باشد، لازم است که نه تنها $I'(\circ) = \circ$، بلکه $I''(\circ) \geq \circ$. اولین شرط، ویژگیهای کمان کمینه‌ساز بیان شده در شرط لازم I در صفحهٔ ۱۳۳ را ارائه می‌کندو به‌کمک شرط دوم است که اکنون استنتاج تازهٔ شرط ژاکوبی را مطرح می‌کنیم. برای اثبات این شرط، همواره فرض بر این است که کمان کمینه‌ساز $E_{۱۲}$ یک فرین است و در امتداد آن $f_{y'y'} \neq \circ$

تابع $I(a)$ و مشتق اول آن عبارتند از

$$I(a) = \int_{x_۱}^{x_۲} f(x, y + a\eta, y' + a\eta')dx,$$

$$I'(a) = \int_{x_۱}^{x_۲} (f_y\eta + f_{y'}\eta')dx,$$

که در آن آوندهای f_y و $f_{y'}$، همان آوندهای f هستند و با مشتق‌گیری از عبارت اخیر بسادگی درمی‌یابیم که مشتق دوم، $I''(\circ)$، برابر است با

$$I''(\circ) = ۲\int_{x_۱}^{x_۲} \Omega(x, \eta, \eta')dx$$

که در آن

$$۲\Omega(x,\eta,\eta') = f_{yy}\eta^{۲} + ۲f_{yy'}\eta\eta' + f_{y'y'}\eta'^{۲}. \qquad (۱۹)$$

چون اکنون در مشتقات دوم f، آوندها عبارتند از مقادیر x، $y(x)$، و $y'(x)$ مربوط به کمان کمینه‌ساز $E_{۱۲}$ ، Ω تابعی است از x ، η، و η'. توجه به ویژگی

$$۲\Omega = \eta\Omega_\eta + \eta'\Omega_{\eta'} \qquad (۲۰)$$

برای فرم درجهٔ دوم Ω که می‌توان آن را بسادگی اثبات کرد سودمند است. نمادهای Ω_η و $\Omega_{\eta'}$، مشتقات جزئی Ω نسبت به η و η' را نشان می‌دهند.

اینکه مشتق دوم، $I''(۰)$، باید به ازای همهٔ توابع پذیرفتنی $\eta(x)$ مثبت یا صفر باشد و در $x_۱$ و $x_۲$ صفر شود، بلافاصله مسئلهٔ کمینهٔ جدیدی را در صفحهٔ $x\eta$، مشابه با مسئلهٔ اصلی در صفحهٔ xy پیش می‌کشد. در این مسئلهٔ جدید، انتگرال $I''(۰)$ جای I را می‌گیرد و نقاط $(x,\eta) = (x_۱, ۰)$ و $(x,\eta) = (x_۲, ۰)$ مانسته‌های نقاط ۱ و ۲ هستند. روشن است که چون $\Omega_{\eta'\eta'} = f_{y'y'}$ مخالف صفر است، این مسئله یک مسئلهٔ منظم است و بنابر تذکری که در صفحهٔ ۱۶۲ داده شد، هیچ یک از خمهای کمینه‌ساز آن نمی‌تواند گوشه داشته باشد.

معادلهٔ دیفرانسیل خمهای کمینه‌ساز که مشابه معادلهٔ اویلر (۴) در صفحهٔ ۱۳۳ است، عبارت است از

$$\frac{d}{dx}\Omega_{\eta'} - \Omega_\eta = \frac{d}{dx}(f_{y'y}\eta + f_{y'y'}\eta') - (f_{yy}\eta + f_{yy'}\eta') = ۰ \qquad (۲۱)$$

این یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دو بر حسب η، η' و η'' است و چون ژاکوبی نخستین کسی بود که اهمیت آن را در حساب تغییرات نشان داد، معادلهٔ دیفرانسیل ژاکوبی خوانده می‌شود. در این معادله، ضریب η''، برابر با $f_{y'y'} \neq ۰$ است و بنابراین، می‌توان معادله را بر حسب η'' حل کرد. در نتیجه هیچ جواب $\eta = u(x)$ از معادلهٔ ژاکوبی موجود نیست که خود و مشتقش در یک مقدار $x_۰$ صفر شوند، مگر آنکه متحد با صفر باشد، زیرا همان طورکه در صفحهٔ ۱۵۰ بیان

شد، یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم برحسب η، که برای η'' قابل حل است، یک و فقط یک جواب دارد که از عنصر آغازی $(x_\circ, o, \circ) = (x, \eta, \eta')$ می‌گذرد و بسادگی ملاحظه می‌شود که برای معادلهٔ خطی ژاکوبی، این جواب عبارت است از $\eta = \circ$.

اگر معادلهٔ ژاکوبی جوابی چون $\eta = u(x)$ داشته باشد که در $x_\text{۱}$ و $x_\text{۲}$ صفر شود، ولی بین این دو مقدار متحد با صفر نباشد، در این صورت خواهیم دید که نقطهٔ متناظر با $x_\text{۲}$ روی کمان اصلی $E_\text{۱۲}$، مزدوج با ۱ است. بنابراین هدف این است که ثابت کنیم بین $x_\text{۱}$ و $x_\text{۲}$ هیچ مقدار $x_\text{۳}$ای وابسته به $x_\text{۱}$ وجود ندارد.

برای اثبات، فرض کنید که معادلهٔ ژاکوبی جوابی چون $u(x)$ دارد که در $x_\text{۱}$ و یک مقدار $x_\text{۳} < x_\text{۲}$ صفر می‌شود، اما بین آن دو متحد با صفر نیست. آنگاه خمی که در صفحهٔ $x\eta$ با معادلات

$$\eta = u(x) \qquad (x_\text{۱} \le x \le x_\text{۳})$$

$$\eta = \circ \qquad (x_\text{۳} \le x \le x_\text{۲}) \qquad (\text{۲۲})$$

تعریف می‌شود در نقطهٔ $(x_\text{۳}, \circ)$ گوشه دارد، زیرا بنابر تذکر بالا، اگر $u'(x_\text{۳})$ و $u(x_\text{۳})$ صفر شوند، $u(x)$ متحد با صفر خواهد بود. به علاوه خمی که این گونه تعریف می‌شود در معادلهٔ دیفرانسیل ژاکوبی صدق و $I''(\circ)$ را صفر می‌کند، زیرا به کمک معادلات (۲۰) و (۲۱)، در امتداد این خم داریم

$$\text{۲}\Omega(x, \eta, \eta') = \eta\Omega_\eta + \eta'\Omega_{\eta'} = \frac{d}{dx}(\eta\Omega_{\eta'}),$$

$$I''(\circ) = \int_{x_\text{۱}}^{x_\text{۳}} \frac{d}{dx}(\eta\Omega_{\eta'})dx = \eta\Omega_{\eta'}\,\Big|_{x_\text{۱}}^{x_\text{۳}} = \circ$$

صفری که بدین ترتیب از کمان (۲۲) حاصل می‌شود نمی‌تواند مقدار کمینهٔ $I''(\circ)$ باشد زیرا همان طور که دیدیم، این کمان در $(x_\text{۳}, \circ)$ گوشه دارد و هیچ کمانی که

گوشه داشته باشد نمی‌تواند کمینهٔ یک $x\eta$ ـ مسئله باشد. بنابراین توابعی چون $\eta(x)$ وجود خواهند داشت که در x_1 و x_2 صفر می‌شوند و $I''(0)$ را منفی می‌کنند. البته اگر کمان اولیهٔ ما، E_{12}، انتگرال اولیهٔ I در صفحهٔ xy را کمینه سازد، چنین چیزی غیرممکن است. حال روشن است که وقتی $I(E_{12})$ یک کمینه است، هیچ مقدار x_3 ای نظیر آن که گفته شد بین x_1 و x_2 وجود ندارد.

در نگاه اول چنین به نظر می‌آید که نقطه‌ای که در این بند با مقدار x_3 تعریف شد و نقطهٔ مزدوج در صفحهٔ ۱۳۴ کاملاً متفاوتند، ولی بسهولت می‌توان ثابت کرد که در حقیقت یکی هستند. روی یک فرین خانواده یک پارامتری فرین‌های $y = y(x, \alpha)$ گذرا از نقطهٔ ۱، نقطهٔ تماس با پوش G؛ یعنی ۳، نقطه‌ای است که در آن y_α صفر می‌شود. اگر از اتحاد $y_1 = y(x_1, \alpha)$ که مبین عبور تمام فرین‌های خانواده از نقطهٔ ۱ است نسبت به α مشتق بگیریم، مشاهده می‌کنیم که y_α در نقطهٔ ۱ نیز صفر می‌شود. به علاوه y_α در معادلهٔ دیفرانسیل ژاکوبی صدق می‌کند، زیرا اگر از اتحاد

$$\frac{d}{dx} f_{y'}\left(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)\right) - f_y\left(x, y(x, \alpha), y'(x, \alpha)\right) \equiv 0,$$

که در امتداد همهٔ فرین‌های $y = y(x, \alpha)$ برقرار است، نسبت به α مشتق بگیریم به دست می‌آوریم

$$\frac{d}{dx}(f_{y'y} y_\alpha + f_{y'y'} y'_\alpha) - (f_{yy} y_\alpha + f_{yy'} y'_\alpha) \equiv 0$$

اکنون فرض کنید که $u(x)$ آن جوابی از معادلهٔ ژاکوبی باشد که در x_1 صفر شود، اما متحد با صفر نباشد. فرض کنید ثابت k طوری تعیین شده باشد که

$$y'_\alpha(x_1, \alpha_0) - k u'(x_1) = 0,$$

که در آن α_0 مقدار پارامتری معرف کمان E_{12} است. تفاضل $y_\alpha(x, \alpha_0) - k u(x)$ جوابی از معادلهٔ ژاکوبی برای E_{12} خواهد بود که خود و مشتقش در x_1 صفر

می‌شوند و از این رو متحد با صفر است. در نتیجه، نقاط مزدوج تعریف شده با صفرهای $y_\alpha = ku$ همان نقاطی هستند که با صفرهای u تعریف می‌شوند و بدین سان مشاهده می‌کنیم که مقادیر $x_۳$ در این بند با آن مقادیری که نقاط مزدوج را تعریف می‌کنند یکسانند.

به همین نحو می‌توان ثابت کرد که دو جواب متفاوت معادلهٔ ژاکوبی که در $x_۱$صفر می‌شوند، نقاط مزدوج یکسانی را معین می‌کنند و بنابراین انتخاب یک جواب خاص برای یافتن این نقاط بسهولت امکانپذیر است. بسادگی می‌توانیم ببینیم که دترمینان

$$\Delta(x, x_۱) = \begin{vmatrix} y_a(x, a_۰, b_۰) & y_b(x, a_۰, b_۰) \\ y_a(x_۱, a_۰, b_۰) & y_b(x_۱, a_۰, b_۰) \end{vmatrix}$$

که در صفحهٔ ۱۵۲ برای تعیین نقاط مزدوج مورد استفاده قرارگرفت، یک چنین جوابی است؛ زیرا با روشی که در پاراگراف اخیر برای y_α به کار رفت می‌توانیم نشان دهیم که $y_a(x, a_۰, b_۰)$ و $y_b(x, a_۰, b_۰)$ جوابهای معادلهٔ ژاکوبی هستند. دترمینان $\Delta(x, x_۱)$ که ترکیب خطی y_a و y_b با ضرایب ثابت است نیز در معادلهٔ ژاکوبی صدق می‌کند و بالبداهه در $x_۱$ صفر می‌شود.

۶۳. شرایط لازم وقتی یک نقطهٔ انتهایی متغیر است. اگر به جای جست و جوی کمان کمینه‌ساز در میان کمانهای پذیرفتنی که دو نقطهٔ ۱ و ۲ را به هم وصل می‌کنند، آن را در بین کمانهای پذیرفتنی که نقطهٔ ثابت ۱ را به خم ثابت N وصل می‌کنند بجوییم، گوییم مسئله در امتداد خم N نقطهٔ انتهایی متغیر دارد. روشن است که در این مسئله، کمان کمینه‌ساز $E_{۱۲}$ که خم N را در نقطهٔ ۲ قطع می‌کند، باید کمان کمینه‌ساز مسئله‌ای با نقاط انتهایی ثابت ۱ و ۲ باشد و از این رو دست کم باید در سه شرط لازم نخست موجود در بند ۵۲ صفحهٔ ۱۳۳ صدق کند. برای پرهیز از پیچیدگیهای غیرضروری، فقط حالتی را در نظر خواهیم گرفت که نقطهٔ ۲، یک نقطهٔ انتهایی یا یک نقطهٔ منفرد خم N نیست.

در مسئله با یک نقطهٔ انتهایی متغیر، شرط لازم جدیدی موسوم به شرط تراگردی برای کمینه وجود دارد که متضمن جهتهای خمهای $E_{۱۲}$ و N در نقطهٔ برخوردشان، نقطهٔ ۲، است. به کمک فرمول (۸) صفحهٔ ۱۳۹ بسادگی می‌توان این شرط را ثابت کرد. فرض کنید نقاط N را با خانواده‌ای یک پارامتری از کمانها که $E_{۱۲}$ یکی از اعضای این خانواده است، به نقطهٔ ۱ روی $E_{۱۲}$ وصل کرده‌ایم. اگر در فرمولی که اینک ذکر کردیم به جای خم C، نقطهٔ ثابت ۱ و به جای خم D، N را قرار دهیم، این فرمول نشان می‌دهد که دیفرانسیل I در امتداد کمانهای این خانوادهٔ یک پارامتری، در کمان خاص $E_{۱۲}$، عبارت است از

$$dI = f(x,y,y')dx + (dy - y'dx)f_{y'}(x,y,y')\Big|^{۲},$$

که در نقطهٔ ۲، دیفرانسیلهای dx و dy همان دیفرانسیلهای N و عنصر (x,y,y') متعلق به $E_{۱۲}$ است. اگر بخواهیم $I(E_{۱۲})$ در بین مقادیر I در امتداد کمانهای این خانواده، کمینه باشد، dI باید در امتداد $E_{۱۲}$ صفر باشد و بنابراین، نتیجهٔ زیر را داریم:

شرط تراگردی. اگر برای کمان‌پذیرفتنی $E_{۱۲}$ که نقطهٔ ثابت ۱ را به خم ثابت N وصل می‌کند مقدار $I(E_{۱۲})$ در بین مقادیر I در امتداد کمانهای پذیرفتنی واصل ۱ و N در مجاورت $E_{۱۲}$ کمینه باشد، در نقطهٔ برخورد $E_{۱۲}$ و N، نقطهٔ ۲، جهت $dx:dy$ خم N و عنصر (x,y,y') از $E_{۱۲}$ باید در رابطهٔ

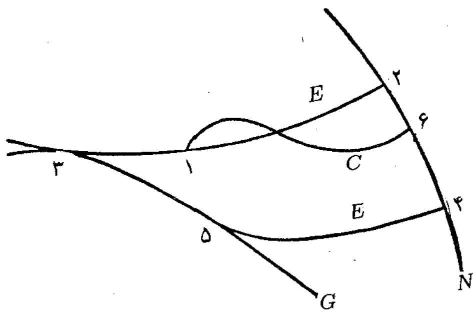
$$f(x,y,y')dx + (dy - y'dx)f_{y'}(x,y,y') = ۰ \qquad (۲۳)$$

صدق کنند.

اگر این شرط برقرار باشد، می‌گوییم کمان N، خم $E_{۱۲}$ را به طور تراگرد در نقطهٔ ۲ قطع می‌کند. در بسیاری از مسائل شرط تراگردی نتیجه می‌دهد که E و N باید یکدیگر را با زاویهٔ قائمه قطع کنند. در سه مسئله‌ای که در فصل ۲ تا ۴ بررسی شدند، وضع همین گونه بود، با این حال می‌توان ثابت کرد که این مطلب در حالت کلی درست نیست.

خانوادهٔ یک پارامتری فرین‌ها که به طور تراگرد توسط N قطع می‌شوند، تعمیمی از خانوادهٔ یک پارامتری خطوط مستقیم عمود بر N است و برای این خانوادهٔ فرین‌ها، تعمیم جالب ویژگی ریسمانی گستردهٔ خم را داریم که در قضیهٔ زیر تشریح می‌شود.

قضیهٔ پوش. در یک خانوادهٔ یک پارامتری از فرین‌ها که همانند شکل ۴۷، هر کدام به‌طور مورب توسط N قطع می‌شوند، فرض کنید $E_{۳۲}$ و $E_{۵۴}$ دو فرین



شکل ۴۷

باشند که در نقاط ۳ و ۵ با پوش G در تماس هستند. آنگاه مقادیر I در امتداد کمانهای $E_{۳۲}$ ، $E_{۳۵}$، و $E_{۵۴}$ در رابطهٔ

$$I(G_{۳۵}) + I(E_{۵۴}) = I(E_{۳۲}).$$

صدق می‌کنند.

اثبات این فرمول، به کمک فرمول (۹) در صفحهٔ ۱۳۹ و با روشی که معمولاً برای قضایای پوش بندهای قبل به کار می‌رفت، صورت می‌پذیرد. مطابق این فرمول داریم:

$$I(E_{۵۴}) - I(E_{۳۲}) = I^*(N_{۲۴}) - I^*(G_{۳۵}).$$

اما به لحاظ برقراری شرط تراگردی (۳۲) در امتداد کمان $N_{۲۴}$ بسادگی دیده می‌شود که مقدار $I^*(N_{۲۴})$ صفر است و در امتداد کمان $G_{۳۵}$ داریم $dy = pdx$؛ در نتیجه، $I^*(G_{۳۵}) = I(G_{۳۵})$ که در برهانهای قبل به این مطلب اشاره شد. بنابراین، فرمول اخیر معادل است با فرمول قضیه‌ای که می‌خواهیم ثابت کنیم.

نقطهٔ ۳ که در آن کمان فرین $E_{۳۲}$ با پوش G در تماس است، نقطهٔ کانونی خم N روی $E_{۳۲}$ نامیده می‌شود. این نقطه، تعمیم مرکز انحنای N است چون مرکز انحنای N، نقطهٔ تماس خط مستقیم عمود بر N با گستردهٔ آن خم می‌باشد. شرط لازم زیر که نظیر شرطی است که ژاکوبی در مورد دو نقطهٔ انتهایی ثابت کشف کرد نتیجه‌ای از قضیهٔ پوش با برهانی مشابه برهان صفحهٔ ۱۴۴ است.

مانستهٔ شرط ژاکوبی. فرض کنیم $E_{۱۲}$ کمان فرینی باشد که نقطه ثابت ۱ را به خم ثابت N وصل می‌کند و در امتداد آن $f_{y'y'} \neq ۰$ و در نقطهٔ ۲، به‌طور تراگرد توسط N قطع می‌شود. اگر مقدار $I(E_{۱۲})$ در بین مقادیر I روی کمانهای پذیرفتنی واصل ۱ و N در همسایگی $E_{۱۲}$، کمینه باشد، روی کمان $E_{۱۲}$ هیچ یک از نقاط کانونی خم N بین ۱ و ۲ واقع نمی‌شوند، یعنی هیچ نقطهٔ تماسی با پوش G خانوادهٔ یک پارامتری فرین‌هایی که به‌طور مورب توسط N قطع می‌شوند و $E_{۱۲}$ عضوی از آن خانواده است وجود ندارد. شکل ۴۷ را ببینید.

در حالتی که پوش G به یک نقطه تبه می‌شود یا در نقطهٔ ۳ دارای تیزه‌ای است که شاخه‌های آن از نقطهٔ ۲ دور می‌شوند، این برهان دیگر به کار نمی‌آید، ولی با برهان تحلیلی باز هم می‌توان نشان داد که نقطهٔ کانونی ۳ نمی‌تواند بین ۱ و ۲ قرار گیرد.

۶۴. شرایط کافی وقتی یک نقطهٔ انتهایی متغیر است. در حالتی که یک نقطهٔ انتهایی متغیر است، قضایای کفایت با قضیه‌های صفحات ۱۵۹ و ۱۶۰، دست کم در وجود شرط اضافی تراگردی، فرق می‌کنند. این شرایط را می‌توانیم به قرار زیر بیان کنیم:

اگر کمان پذیرفتنی بدون گوشهٔ $E_{۱۲}$ واجد ویژگیهای زیر باشد

الف) یک فرین باشد؛
ب) در هر مجموعه مقادیر (x, y, y') بر روی آن $f_{y'y'} > \circ$؛
ج) در نقطهٔ ۲ بر روی آن که خم N آن را به طور تراگرد قطع می‌کند، $f \neq \circ$؛
د) هیچ یک از نقاط کانونی N (نقاط ۳) روی آن نباشد؛

آنگاه $I(E_{۱۲})$ دست کم یک کمینهٔ نسبی ضعیف است. اگر $E_{۱۲}$ ویژگی ۴) در قضیهٔ کفایت صفحهٔ ۱۶۰ را نیز داشته باشد، $I(E_{۱۲})$ دست کم یک کمینهٔ نسبی قوی است. در مورد بیشینه باید جهت نابرابریهای شرایط ب) و ۴) را عوض کرد.

همان‌طور که در صفحهٔ ۱۴۹ تشریح شد، ویژگیهای الف) و ب) تضمین می‌کنند که $E_{۱۲}$ به ازای مقادیر خاص $a_\circ$ و $b_\circ$، عضوی از خانوادهٔ دوپارامتری فرین‌های $y = y(x, a, b)$ است. فرض کنیم معادلات پارامتری خم N عبارت باشند از

$$x = x(\alpha), \qquad y = y(\alpha) \tag{۲۴}$$

که $\alpha = \alpha_۲$ معرف نقطهٔ ۲ است و $x(\alpha)$ و $y(\alpha)$ در همسایگی این مقدار، مشتقات اول و دوم پیوسته دارند. اگر بتوانیم معادلات

$$f\left[x(\alpha), y(\alpha), p\right] x'(\alpha) + \left[y'(\alpha) - p x'(\alpha)\right] f_{y'}\left[x(\alpha), y(\alpha), p\right] = \circ,$$

$$y'\left(x(\alpha), a, b\right) = p, \qquad y\left(x(\alpha), a, b\right) = y(\alpha) \tag{۲۵}$$

را بر حسب متغیرهای p ، a، و b به شکل توابعی چون $p(\alpha), a(\alpha), b(\alpha)$ که در شرایط اولیهٔ $a(\alpha_۲) = a_\circ$ و $b(\alpha_۲) = b_\circ$ صدق می‌کنند، حل کنیم، خانوادهٔ یک پارامتری کمانهای فرین

$$y = y\left(x, a(\alpha), b(\alpha)\right) = y(x, \alpha) \tag{۲۶}$$

در ازای $\alpha = \alpha_۲$، کمان $E_{۱۲}$ را شامل است و تمامی اعضای آن در نقاط $x = x(\alpha)$، توسط خم N به‌طور تراگرد قطع می‌شوند. در واقع، در حالت

خاص می‌توان با حل کردن معادلات ثابت کرد که جوابهای $p(a)$، $a(\alpha)$ و $b(\alpha)$ وجود دارند؛ گرچه این مطلب نتیجهٔ قضایای مشهور وجودی برای توابع ضمنی نیز هست. به لحاظ فرض ج) قضیه، معادلات (۲۵) دارای جواب خاص $(\alpha, p, a, b) = (\alpha_۲, p_۲, a_۰, b_۰)$ است که در آن $p_۲$ شیب $E_{۱۲}$ در نقطهٔ ۲ است و $\alpha_۲$، $a_۰$، و $b_۰$ همان معانی‌ای را دارند که قبلا به آنها نسبت داده شد. بسادگی می‌توان دترمینان مشتقات طرفهای اول معادلات (۲۵) را نسبت به p ، a، و b به دست آورد که عبارت است از

$$(y' - px')f_{y'y'} \begin{vmatrix} y'_a\,(x(\alpha), a, b) & y'_b\,(x(\alpha), a, b) \\ y_a\,(x(\alpha), a, b) & y_b\,(x(\alpha), a, b) \end{vmatrix}$$

در جواب $(\alpha_۲, p_۲, a_۰, b_۰)$، سه سازهٔ این عبارت همگی مخالف صفرند. عامل اول مخالف صفر است چون در نقطهٔ ۲، معادلهٔ $y' - px' = ۰$ و اولین معادلهٔ (۲۵) نتیجه می‌دهند که $x' = ۰$. در شرط ج) قضیه فرض بر این بود که f در نقطهٔ ۲ روی $E_{۱۲}$ مخالف صفر است و لذا دو معادلهٔ $y' - px' = x' = ۰$ نتیجه می‌دهند که نقطهٔ ۲ یک نقطهٔ منفرد برای N است که در فرض قضیه این امکان را مستثنا کردیم؛ دومین عامل به خاطر شرط ب) قضیه صفر نمی‌شود؛ و بالاخره همان‌طور که در صفحهٔ ۱۴۹ نیز توضیح داده شد می‌توان خانوادهٔ $y = y(x, a, b)$ را طوری انتخاب کرد که دترمینان در نقطهٔ ۲ مخالف صفر باشد. اما وقتی معادلات (۲۵) دارای جوابی چون $(\alpha_۲, p_۲, a_۰, b_۰)$ باشند که در آن، دترمینان تابعی طرفهای اول نسبت به p، a، و b صفر نشود، آنگاه قضایای وجودی برای توابعی ضمنی [۳۰] حاکی از آنند که سه تابع $p(\alpha)$، $a(\alpha)$ و $b(\alpha)$ وجود دارند که به ازای هر α در معادلات صدق می‌کنند و به ازای $\alpha = \alpha_۲$ به $p_۲$، $a_۰$ و $b_۰$ تبدیل می‌شوند. به علاوه این توابع پیوسته‌اند و مشتقات پیوسته دارند.

باید توجه کنیم که مشتق خانوادهٔ (۲۶)، y_α، در نقطهٔ ۲ مخالف صفر است، زیرا توابع $x(\alpha)$ و $y(\alpha)$ که خم N را تعریف می‌کنند در اتحاد $y(\alpha) = y\,(x(\alpha), \alpha)$ صدق می‌کنند و وقتی از این اتحاد مشتق بگیریم، $y'(\alpha_۲) - p_۲x'(\alpha_۲) =$

$y_\alpha(x_۲, \alpha_۲)$ به دست می‌آید و همان طور که در پاراگراف قبل دیدیم این عبارت مخالف صفر است. اگر فرض د) قضیه برآورده شود، بمشتق y_α خانوادهٔ یک پارامتری فرین‌های (۲۶) که اینک ساخته شد نیز در امتداد تمامی کمانهای باقی‌ماندهٔ $E_{۱۲}$ مخالف صفر است. از این‌رو، همان طور که در صفحهٔ ۱۵۸ دیدیم، فرین‌های خانواده به طور ساده میدان F را می‌پوشاند؛ میدانی که می‌توان دو ویژگی اساسی انتگرال هیلبرت را در آن ثابت کرد. به کمک این میدان می‌توان قضایای کفایت را که در اینجا مد نظر داریم اثبات کرد، زیرا فرض کنید همچون شکل ۴۷، $C_{۱۶}$ کمان پذیرفتنی در F باشد که ۱ را به N وصل می‌کند. آنگاه داریم:

$$
\begin{aligned}
I(C_{۱۶}) - I(E_{۱۲}) &= I(C_{۱۶}) - I^*(E_{۱۲}) \\
&= I(C_{۱۶}) - I^*(C_{۱۶} + N_{۶۲}) \\
&= I(C_{۱۶}) - I^*(C_{۱۶})
\end{aligned}
$$

چون، همان طور که دیدیم مقدار I^* روی کمان $N_{۶۲}$ که در امتداد آن شرط تراگردی برقرار است برابر صفر است، پس بقیهٔ برهان به همان صورت است که در صفحهٔ ۱۵۵ آمد.

۶۵. حالتی که هر دو نقطهٔ انتهایی متغیرند. [۳۱] در اینجا امکان آن نیست که برهانهای مربوط به شرایط لازم و کافی را در حالتی که در جست و جوی کمان کمینه‌ساز در میان کمانهای پذیرفتنی هستیم که دو خم مفروض M و N را به هم می‌پیوندند به تفصیل بررسی کنیم؛ با وجود این، می‌توانیم نتایج را جمع‌بندی و چند نمونه از روشهایی را ارائه کنیم که به وسیلهٔ آنها می‌توان نتایج مذکور را ثابت کرد. این روشها مشابه همان روشهایی است که در فصلهای پیش به کار رفت.

فرض کنید برای حالت خاصی که در شکل ۱۰ صفحهٔ ۳۹ نشان داده شد، کمان کمینه‌ساز $E_{۱۲}$ خم M را در ۱ و N را در ۲ قطع کند. بویژه چون $E_{۱۲}$ باید

در مقایسه با کمانهای پذیرفتنی دیگری که ۱ و ۲ را به هم می‌پیوندند کمینهٔ مطلوب باشد، باید دست کم در نخستین سه شرط لازم بند ۵۲ در صفحهٔ ۱۳۳ صدق کند. به علاوه چون E_{12} در مقایسه با کمانهای پذیرفتنی دیگری که M را به نقطهٔ ۲ وصل می‌کنند، لزوماً یک کمینه را به دست می‌دهد، مشاهده می‌کنیم که این خم باید در نقطهٔ ۲، E_{12} را به طور تراگرد قطع کند و، با استدلالی مشابه، N نیز باید E_{12} را به طور تراگرد در ۲ قطع نماید.

شرایط لازم دیگر، کاملاً مشابه شرایط بند ۱۶ در صفحهٔ ۳۸ هستند و با استدلالهای مشابه ثابت می‌شوند. به جای مراکز انحنا در آن بند باید نقاط کانونی خمهای M و N روی کمان E_{12}؛ یعنی نقاط ۳ و ۴ را قرار داد. جهت حصول اطمینان از وجود دو خانوادهٔ یک پارامتری فرین‌ها که به طور تراگرد توسط M و N قطع می‌شوند و این نقاط کانونی را تعریف می‌کنند، فرض کنید که کمان کمینه‌ساز E_{12} ، فرینی است که در امتداد آن $f_{y'y'} \neq 0$ و روی کمان E_{12} در نقاط ۱ و ۲ داریم $f \neq 0$. آنگاه ساختار بند قبل هم برای M و هم برای N امکانپذیر است. به علاوه می‌توانیم توجه خود را به حالتی معطوف کنیم که پوشهای دو خانوادهٔ یک پارامتری فرین‌ها که به طور تراگرد توسط M و N قطع می‌شوند، هر دو در نقاط کانونی این خمها دارای شاخه‌هایی هستند که به ترتیب به سمت ۱ و ۲ تصویر می‌شوند. به کمک نتایجی که اینک برای حالت یک نقطهٔ انتهایی متغیر یافتیم همراه با روشهای بند ۱۶ در صفحهٔ ۳۸، می‌توانیم ثابت کنیم که نقاط برخورد ۱ و ۲ و نقاط کانونی ۳ و ۴، باید به ترتیب دُوری ۴۳۱۲ بر روی E قرار گیرند و اگر بخواهیم E_{12} یک کمینه باشد، هیچ انطباقی مجاز نیست جز اینکه ممکن است ۴ بر ۳ منطبق شود.

نیز می‌توانیم ثابت کنیم که کمان بدون گوشهٔ E_{12} در صورتی که ویژگیهای زیر را داشته باشد، یک کمینهٔ نسبی ضعیف را به دست خواهد داد:

الف) یک فرین باشد؛

ب) در هر عنصر (x, y, y') بر روی آن $f_{y'y'} > 0$؛

ج) در نقاط ۱ و ۲ که به ترتیب M و N آنها را به طور تراگرد قطع می‌کنند،

$.f \neq \circ$

د) نقاط ۱ و ۲ و نقاط کانونی ۳ و ۴ روی کمان E به ترتیب مربوط به M و N، از یکدیگر متمایز باشند و به ترتیب دوری ۴۳۱۲ روی E واقع شوند.

اگر شرط ۴) در قضیهٔ صفحهٔ ۱۶۰ را نیز اضافه کنیم، $I(E_{۱۲})$ دست‌کم یک کمینهٔ نسبی قوی است.

۶۶. یادداشت تاریخی . اگر در اینجا به طور مختصر، سهم ریاضیدانان مشهوری را که تحقیقاتشان پی در پی بر دانش ما از حساب تغییرات افزوده است مرور کنیم جالب خواهد بود. دیدیم که یونانیان باستان می‌دانستند خمی با محیط مفروض که بیشترین مساحت را احاطه می‌کند، دایره است و گالیله (۱۵۶۴ ـ ۱۶۴۲) وقتی زمان فرود روی یک پاره خط مستدیر را با زمانهای مشابه روی چندضلعیهای محاط و دیگر کمانهایی که نقاط انتهایی آن پاره خط را به هم وصل می‌کردند مقایسه می‌کرد، دست کم به طور جزئی مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان را بررسی کرد. [۴] در سال ۱۶۸۶، نیوتن (۱۶۴۲ ـ ۱۷۲۷) مسئلهٔ رویهٔ دورانی با مقاومت کمینه را مطرح و ویژگی مشخصهٔ خمی را که جواب آن مسئله است، بدون اثبات ارائه کرد. [۱]

با این حال، عرضهٔ سازمان یافتهٔ نظریهٔ حساب تغییرات، در واقع، از زمانی آغاز شد که یوهان برنویی (۱۶۶۷ ـ ۱۷۴۸) مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان را بار دیگر در سال ۱۶۹۶ مطرح ساخت. [۲] روش حل او که آن را در سال ۱۶۹۷ ارائه کرد متکی بر تشابه با مسئلهٔ تعیین مسیر پرتو نور در محیطی با ضریب شکست متغیر بود و نمی‌شد آن را به طور وسیع برای مسائل دیگر به کار برد. اما روشهایی که یاکوب برنویی (۱۶۵۴ ـ ۱۷۰۵) در همان سال برای مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان و در سال ۱۷۰۱ برای مسئلهٔ برابر محیطی که در جواب برادرش مطرح نمود به کاربرد، آنقدر نیرومند بود که برای انواع زیادی از مسائل بیشینه و کمینه مؤثر باشد. [۳]

اویلر (۱۷۰۷ ـ ۱۷۸۳) شاگرد یوهان برنویی در بال بود و بی‌شک با کارهای

یوهان و برادرش آشنایی کامل داشت. او روشهای هندسی ـ تحلیلی یاکوب برنویی را به طور استادانه‌ای به کار بست و نتایجی را که برای رده‌های کلی مسائل به دست آورده بود در مقالهٔ جامع سال ۱۷۴۴ گردآوری کرد. [۷] یکی از مهمترین کارهایی که وی انجام داد کشف معادلهٔ دیفرانسیل $df_{y'}/dx - f_y = 0$ بود که نام او را هم برخود دارد.

با مطرح شدن مسائل مشکلتر روشهای اویلر نیز پیچیده‌تر می‌شد. لاگرانژ (۱۷۳۶ ـ ۱۸۱۳) در مقالات سالهای ۱۷۶۲ و ۱۷۷۰، روشی تحلیلی عرضه کرد که استنتاج معادلات دیفرانسیل خمهای کمینه‌ساز مربوط به مسائل کلی حساب تغییرات را بسادگی امکانپذیر می‌ساخت. رده‌های شگفت‌آوری از مسائل بیشینه وکمینه در مکانیک و فیزیک، نمونه‌هایی از این نوع مسائل هستند.[۳۲] وی در انتگرالهایی که بررسی می‌کرد به جای تابع $y(x)$ که معرف یک خم بود، تابع جدید $y(x) + \delta y(x)$ را قرار می‌داد. این کار باعث می‌شد انتگرال I نموی بگیرد که جملات مرتبهٔ اول بر حسب δy و مشتقاتش با δI نشان داده می‌شدند. اویلر بی‌درنگ روشها و نمادگذاریهای لاگرانژ را پذیرفت و $\delta y(x)$ را تغییر تابع $y(x)$ ، و δI را تغییر انتگرال نامید. از آن پس نظریه‌ای که در دست مطالعه داریم حساب تغییرات نامیده شد.

یاکوب برنویی مسئلهٔ یافتن مسیر تندترین سقوط از یک نقطهٔ ثابت به یک خط مستقیم عمودی ثابت را مطرح کرد. لاگرانژ تحلیل جدید خود را چنان بیان کرد که برای مسائل کلی‌تر با نقاط انتهایی متغیر نیز قابل استفاده باشد و شرایط تراگردیی را یافت که می‌بایست در نقاط تلاقی خم کمینه‌ساز با خمها یا رویه‌های ثابتی که نقاط انتهایی خمهای مقایسه‌ای او مجاز به تغییر بر روی آنها بودند، برقرار می‌بودند.

شرایط مذکور در پاراگرافهای قبل، مشابه شرط $f'(a) = 0$ در $f(a)$ ، بیشینه یا کمینهٔ تابع $f(x)$، هستند و برای بیشینه یا کمینه یکسانند. در سال ۱۷۸۶، لژاندر (۱۷۵۲ ـ ۱۸۳۳) دست به کار بررسی آزمون به اصطلاح تغییر دوم $\delta^2 I$ انتگرال شد تا محکی بیابد که بیشینه را از کمینه تمیز دهد. [۳۲]به کمک تبدیلی که آن را

بدرستی توجیه نکرد، شرایط $f_{y'y'} \geq 0$ در امتداد خم کمینه‌ساز و $f_{y'y'} \leq 0$ در امتداد خم بیشینه‌ساز را که در صفحات پیش تشریح شد به دست آورد.

طی نیم‌قرن پس از این کشف لژاندر، نظریهٔ مسائل حساب تغییرات که دردست مطالعه داریم آرام آرام از حرکت باز ایستاد. مانستگیهای بین تغییرات لژاندار و دیفرانسیلهای حسابان معمولی توجه فراگیران این موضوع را به خود جلب کرد، اما آنها را نادقیق و بدون آنکه فایدهٔ چندانی برای نظریه داشته باشد بررسی می‌کردند. در سال ۱۸۳۷، ژاکوبی (۱۸۰۴ ـ ۱۸۵۱) تبدیل تغییر دوم را که لژاندر مطرح کرده بود، مورد بررسی مجدد قرار داد و چگونگی تمیز میان حالتها را وقتی این آزمون مؤثر واقع نمی‌شد، پیدا کرد. [۳۲] نتیجه عبارت از کشف نقطهٔ مزدوج و اهمیت آن و روش ماهرانهٔ تعیین آن به کمک مشتقات جوابهای معادلهٔ اویلر نسبت به ثابتهای انتگرال گیری بود.

مقالات و رساله‌های مربوط به حساب تغییرات تا نیمهٔ دوم قرن نوزدهم معمولاً شخص را نسبت به درستی روشها و ماهیت دقیق نتایج حاصل از آنها سر درگم می‌گذاردند. خطا کم نبود، تا آنجا که ابهام در اظهارات و توضیحات مسائل حتی در بین تواناترین نویسندگان نیز رایج بود. احساس فقدان قطعیت راجع به این نوشتارها چیزی نیست که مختص زمان حال و برپایهٔ مقررات سخت منطقی در تحلیلهای امروزی باشد؛ چون همان طورکه منابع صریحاً نشان می‌دهند، نویسندگان آن زمان هم بارها دچار این احساس شده بودند. وایرشتراس (۱۸۱۵ ـ ۱۸۹۷)، علاوه بر دیگر شاخه‌های ریاضی، تأثیر بسزایی در گسترش اندیشهٔ دقیق در نظریهٔ حساب تغییرات داشت. او مسائل خود را با احتیاط بسیار بیان کرد و شرط لازم جدیدی دربارهٔ تابع $E(x, y, p, y')$ خود یافت؛ وی بوضوح بین شرایطی که برای یک کمینه لازمند و آنهایی که کافی‌اند تمایز گذارد و برای نخستین بار برهان کفایت را به کمک روش بسیار مدبرانهٔ خود اثبات کرد؛ و با اتخاذ نمایش پارامتری خمهایی که از آنها انتگرال می‌گرفت، زمینهٔ هندسی بسیار جامعی به مسائل خود داد. متأسفانه ایده‌های او نسبتاً دیر شناخته شد، زیرا او فقط در سخنرانیهایش به آنها عمومیت می‌بخشید اما مطالب فوق قبلاً در سال ۱۸۷۹ حین تدریس دربارهٔ

حساب تغییرات بیان شده بود. [۳۳]

مسئلهٔ یافتن کوتاهترین کمان روی یک رویه که می‌توان آن را به زبان مسائلی از حساب تغییرات که مورد بررسی قرار داده‌ایم بیان کرد، توسط داربو (۱۸۴۲ - ۱۹۱۷) در کتابش با عنوان نظریهٔ رویه‌ها[4] (۱۸۹۴) به تفصیل مورد بررسی قرار گرفت. علاقهٔ اصلی ما در اینجا متوجه قضیهٔ پوش است. حالتهای خاص آن قبلاً شناخته شده بود، اما داربو نخستین فردی بود که آن را برای این حالت بسیار کلی به اثبات رساند. زرملو و کنزر، به ترتیب در سالهای ۱۸۹۴ و ۱۸۹۸ این قضیه را برای کلی‌ترین نوع مسائلی که در صفحه در نظر گرفتیم، ثابت کردند. [۳۴] در صفحات قبل دوتا از دستاوردهای هیلبرت را هم مشاهده کردیم. یکی شرط دیفرانسیل پذیری برای کمان کمینه‌ساز و دیگری اصلاح برهان کفایت وایرشتراس در نتیجهٔ دخالت دادن انتگرال ناوردای I^*. [۳۵]

هیچ بحثی دربارهٔ پیشرفت حساب تغییرات در سالهای اخیر، بدون اشاره به تأثیر الهامبخشی که رساله‌های بلتسا و آدامار[5] روی فراگیران معاصر این موضوع داشته است، کامل نخواهد بود. بویژه بلتسا، هوشمندانه، پنجمین شرط لازم دربارهٔ یک کمینه را استنتاج کرد [۳۶] و این نظریه را از جنبه‌های مهم بسیاری تکامل بخشید. کتاب او که به طرز بسیار استادانه‌ای نگاشته شده، نقطهٔ آغاز کارهای تحقیقاتی بسیاری از محققان بوده است.

خواننده ضمن پیگیری روند تاریخی مذکور در پاراگرافهای پیش درخواهد یافت که این روند تنها مبین دستاوردهایی است که به بخش بسیار محدودی از نظریهٔ حساب تغییرات، یعنی آنهایی که در این کتاب ارائه شد، مربوط می‌شود. مثلاً به قضیهٔ وجودی برای کمینه که توسط هیلبرت ثابت شد و تونلی[6] آن را به طرز بسیار جالبی از نظر ظاهر و سودمندی توسعه داد یا مسائل پیچیده‌تر حساب تغییرات که توسط تسلبسخ[7] و میر[8] مورد بررسی قرار گرفتند و بسیاری از مطالب دیگر، هیچ اشاره‌ای نشد. منابع این موضوع بسیار وسیع است.

4) Théorie des surfaces 5) Hadamard 6) Tonelli 7) Clebsch
8) Mayer

فهرستی از رساله‌های مربوط به حساب تغییرات و چند مرجع جالب دیگر در صفحات آتی داده خواهد شد، خواننده می‌تواند به مقالات دایرةالمعارفها و کتابنامهٔ لکات[۹] مراجعه کند؛ آنجا فهرستهای وسیعتری از مقالات وجود دارد.□

9) Lecat

فهرست مراجع

در فهرست زیر، تاریخهای انتشار داخل پرانتز آورده شده‌اند و در بخشهای II و III مراجع به ترتیب تاریخی آورده شده‌اند. جز در چند مورد، همه عناوین، رساله هستند. برای شخص مبتدی، مراجع بخش III مهمترین مراجعند چون حاوی روشهای جدیدی هستند که به وسیلهٔ وایرشتراس و نویسندگان بعدی عرضه شد. با خواندن شرح مختصر نظریهٔ حساب تغییرات در کتاب گورسا[1]، درسی در آنالیز[2]، و سپس کتابهای جذاب بلتسا و آدامار، می‌توان بخوبی با این نظریه آشنا شد. مراجع بخش II، شرح بسیار جالبی از روشها و همچنین توسعهٔ تاریخی نظریه‌های اولیهٔ حساب تغییرات را در اختیار خواننده‌ای که در سطح بالاتری است قرار می‌دهند.

I. مراجع تاریخی و کتابنامه‌ای

II. رساله‌هایی که شامل نظریه‌های وایرشتراس و اخلاف او نیستند.

III. رساله‌های شامل نظریهٔ وایرشتراس و نویسندگان پس از او.

1) Goursat   2) Coursd' Analyse

نکته‌ها

اعداد داخل قلاب به مراجع موجود در فهرست قبل اشاره دارند.

۱) صفحات ۸، ۹، ۱۷۵. مسئلهٔ نیوتن. کتاب پرینکیپیا، مقالهٔ دوم، بند *VII* با عنوان تفسیرگزارهٔ *xxxiv*، ترجمهٔ مُته، ص ۳۲۸ را ملاحظه کنید. برای بازسازی استدلال نیوتن که بلتسا انجام داد، *Bibliotheca Mathematica*، جلد ۱۳ (۱۹۱۳)، صفحهٔ ۱۴۶ را ملاحظه کنید.

۲) صفحات ۱۰ و ۱۷۵. حکم یوهان برنویی دربارهٔ مسئله تعیین خم کوتاهترین زمان. (۵)، شمارهٔ ۴۶، صفحهٔ ۳ را ببینید.

۳) صفحات ۱۱ و ۱۷۵. راه حلهای برنوییها. (۵)، شمارهٔ ۴۶، صص ۶۰ ـ ۲۰ را ببینید.

۴) صفحات ۱۲ و ۱۷۵. برای یادداشتهای گالیله دربارهٔ مسئله تعیین خم کوتاهترین زمان، کتاب او با عنوان *Dialog Über die beiden hauptsächlichtsen Weltsysteme* (۱۶۳۰) ترجمهٔ اشتراوس، صص. ۴۷۱ ـ ۴۷۲ و نیز کتاب دیگر او با عنوان *Dialogues concerning Two New Sciences* (۱۶۳۸)، ترجمهٔ کرو و دسالویو، ص. ۲۳۹ را ببینید.

۵) صفحهٔ ۲۰. لم اساسی . (۲۴)، ص ۵۴۶ را ببینید.

۶) صفحهٔ ۴۱. مقالهٔ سال ۱۸۳۷ ژاکوبی. (۵)، شمارهٔ ۴۷، ص ۸۷ را ببینید.

۷) صفحات ۴۸، ۱۷۵. مقالهٔ سال ۱۷۴۴ اویلر. (۵) شمارهٔ ۴۶، ص ۵۴ را ملاحظه کنید.

۸) صفحهٔ ۵۶. تعیین ثابتهای مربوط به مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان. رجوع کنید به Bolza، *Bulletin of the American Mathematical Society*، جلد ۱۰ (۱۹۰۳)، ص ۱۸۵ و ای . هـ. مور، همان منبع، ص ۳۳۷.

۹) ص ۷۳. (۱۸۹۴) Darboux, *Lecon sur la théorie générale des surfaces,* جلد سوم، صفحه ۸۸؛
Zermelo, *Untersuchungen zur Variationrechnung,*(۱۸۹۴)
، ص ۹۶. و بالاخره
ص. ۲۷،(۱۸۹۸)Kneser, *Mathematische Annalen*, Vol 50

۱۰) صفحهٔ ۷۷. نخستین یادداشتهای لاگرانژ دربارهٔ مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان برای مسئلهٔ فضایی بود. رجوع کنید به (۵)، شمارهٔ ۴۷، ص. ۱۱.

۱۱) صفحهٔ ۷۷. نقد بُردا *Mémoires de lÁcadémie des Sciences.* (۱۸۶۷)، ص. ۵۵۸.

۱۲) صفحهٔ ۷۷. بررسی دوم لاگرانژ دربارهٔ مسئلهٔ تعیین خم کوتاهترین زمان. رجوع کنید به (۵)، شمارهٔ ۴۷، ص. ۵۶

۱۳) صفحهٔ ۷۹. ساختار هندسی بارنُت برای نقطهٔ کانونی *Annals of Mathematics* جلد ۱۹، (۱۹۱۷)، ص. ۵۷

۱۴) صفحهٔ ۷۹. ساختار هندسی سینکلر برای نقطهٔ کانونی. *Annals of Mathematics,* جلد ۸، (۱۹۰۷). ص. ۱۸۲.

۱۵) صفحهٔ ۸۸. جواب ناپیوستهٔ گلدشمیت رجوع کنید به (۴)، ص ۳۴۰. و (۱۵) ، ص ۶۰.

۱۶) صفحهٔ ۸۹. Macneish, *Annals of Mathematics,* جلد ۷، (۱۹۰۵)، ص. ۷۲.

۱۷) صفحهٔ ۸۹. Sinclair, *Annals of Mathematics,* جلد ۹، (۱۹۰۸)، ص. ۱۵۱.

۱۸) صفحهٔ ۹۴. ساختار لیندلوف. رجوع کنید به (۱۳)، صص . ۱۰ ـ ۲۰۹.

۱۹) صفحهٔ ۹۴. تعمیم ساختار لیندلوف.

Bolza. *Bulletin of American Mathematical Society,* جلد ۱۸، (۱۹۱۱)، ص. ۱۰۷.

۲۰) صفحهٔ ۱۰۱. انتگرال ناوردای هیلبرت. *Göttingen Nachrichten* (۱۹۰۰)، ص ۲۹۱.

۲۱) صفحهٔ ۱۰۳. قضیهٔ پوش لیندلوف برای زنجیره‌ها، رجوع کنید به (۱۳)، ص. ۲۱۳.

۲۲) صفحهٔ ۱۱۸. محک مکنیش. رجوع کنید به نکتهٔ ۱۶ .

۲۳) صفحهٔ ۱۲۲، مسئلهٔ لایهٔ صابون سینکلر. رجوع کنید به نکتهٔ ۱۴.

۲۴) صفحهٔ ۱۳۳. برای معادلهٔ (۳) در متن رجوع کنید به (۲۲) ، ص. ۳۰، و Du Bois Roymond, *Mathematische Annalen,* جلد ۱۵، (۱۸۷۹)، ص. ۳۱۳.

۲۵) صفحهٔ ۱۴۶. شرط گوشهٔ وایرشتراس ـ اردمان. رجوع کنید به (۲۲)، ص ۳۶۶.

۲۶) صفحهٔ ۱۴۶. شرط دیفرانسیل پذیری هیلبرت. رجوع کنید به (۲۲)، ص. ۳۰.

۲۷) صفحهٔ ۱۴۷. جوابهای معادلات دیفرانسیل

Bliss, *Bulletin of American Mathematical Society* , جلد ۲۵، (۱۹۱۸)، ص ۱۵۰.

۲۸) صفحهٔ ۱۶۳. وقتی نقاط انتهایی مزدوجند. Osgood, *Transactions of the American Mathematical Society,* جلد ۲، (۱۹۰۱)، ص. ۱۶۶.

۲۹) صفحه ۱۶۳. برای این روش اثبات شرط ژاکوبی، در حالت پارامتری، رجوع کنید به Bliss, *Transactios of the American Mathematical Society* جلد ۱۷، (۱۹۱۶)، ص. ۱۹۵.

۳۰) صفحهٔ ۱۷۲ توابع ضمنی. رجوع کنید به Goursat-Hedrick, *Acourse in Analysis.* جلد ۱، ص ۴۵.

۳۱) صفحهٔ ۱۷۳. مسئله با دو نقطهٔ انتهایی متغیر.

جلد ۵۸ (۱۹۰۴)، ص. ۷۰. Bliss, *Mathematatische Annalen*,

۳۲) صفحات ۱۷۵، ۱۷۶، ۱۷۷. مقاله‌های برنوییها، اویلر، لاگرانژ، لژاندر، و ژاکوبی در مرجع شمارهٔ (۵) گردآوری شده‌اند.

۳۳) صفحهٔ ۱۷۸. نویسنده از پروفسور اُ. بلتسا به خاطر در اختیار گذاشتن متن دستنوشته بسیار جالب دربارهٔ سخنرانیهای وایرشتراس در سال ۱۸۷۹ سپاسگزار است.

۳۴) صفحهٔ ۱۷۸. برای مراجع مربوط به قضیهٔ پوش رجوع کنید به نکتهٔ ۹.

۳۵) صفحهٔ ۱۷۸. برای این دستاوردهای هیلبرت رجوع کنید به نکات ۲۰ و ۲۶ فوق، نیز (۲۲)، صص ۱۰۶ ـ ۹.

۳۶) صفحهٔ ۱۷۸. پنجمین شرط لازم بلتسا. رجوع کنید به (۲۲). ص ۱۱۷.

۳۷) صفحهٔ ۷۰. تونلی (مرجع شمارهٔ ۲۵ ، مجلد II، ص. ۴۰۶ را ببینید) به این مطلب توجه کرد که اگر به جای پاره‌ای از یک کمان که نقاط انتهایی آن، P و Q در یک سطح هستند و در جاهای دیگر، بالای این سطح قرار می‌گیرد، خط مستقیم افقی PQ را قرار دهیم، زمان سقوط در امتداد آن کاهش می‌یابد. این مطلب بررسی کمانهایی را که با خط $y = \alpha$ نقطهٔ اشتراک دارند ساده می‌کند.

۳۸) صفحهٔ ۸۲. دکتر و. ج. گرو ساختار ساده‌تری ارائه می‌کند. در شکل ۲۳، نقاط ۷ و ۸ مراکز انحنای N و E، را به هم وصل کنید. خط $۲t$ بر ۷۸ عمود است. این مطلب از ضرب فرمول (۳۸) در $\sin\theta_۲/\cos\theta$ که حاکی از برابر بودن تانژانتهای زوایای ۷۲t و ۲۸۷ است نتیجه می‌شود.

۳۹) صفحهٔ ۱۵۷. استدلال این صفحه و صفحهٔ بعد را می‌توان ساده‌تر کرد. برای تابع

$$u(x) = ky_a(x, a_۰, b_۰) + ly_b(x, a_۰, b_۰)$$

با

$$k = y_b(x_۱, a_۰, b_۰), l = -y_a(x_۱, a_۰, b_۰)$$

روی بازهٔ به اندازهٔ کافی کوچک $x_۱ - \varepsilon \leq x \leq x_۱ + \varepsilon$ داریم $u(x_۱) = ۰$،

$u'(x) \neq 0$، زیرا $u'(x_1) = \Delta'(x_1, x_1) \neq 0$ و به لحاظ شرط IV'، روی بازهٔ $x_1 + \varepsilon \leq x \leq x_2$ داریم $u(x) \neq 0$. ثابتهای k و l را می‌توان اندکی تغییر داد که دو ویژگی آخری $u(x)$ حفظ شوند، اما طوری که $u(x_1)$ و $u(x_1 - \varepsilon)$ مختلف‌العلامه باشند. آنگاه برای تابع $y(x, \alpha)$ در انتهای صفحهٔ ۱۵۷ داریم $y_\alpha(x, 0) = u(x) \neq 0$ روی $x_1 \leq x \leq x_2$ ، چون $u(x)$ فقط یک بار روی بازهٔ $x_1 - \varepsilon$ تا $x_1 + \varepsilon$ صفر می‌شود و آن هم پیش از x_1 است و هیچ جای دیگر بازهٔ $x_1 + \varepsilon \leq x \leq x_2$ صفر نمی‌شود.

واژه‌نامهٔ فارسی ـ انگلیسی

آغازی	initial
آونگ	pendulum
اختلال	perturbation
انتگرال	integral
ـ سطح	surface integral
ـ طول	length integral
ـ فرین	extermal integral
ـ ناوردا	invariant integral
انتگرالده	integrand
انحنا	curvature
انطباق	coincidence
بازه	interval
بخش (← پاره)	segment
بخشی از خم	segment of a curve
به طور تراگرد	transversally
به طور یکنوا	monotonically
بیشینه	maximum
بیشینه‌ساز	maximizing
پارامتر	parameter
پاره(← بخش)	segment
پاره‌خط مستقیم	straight line - segment
پایداری	stabality
پرتو	ray
ـ نور	ray of light
پوش	envelope
پیوسته	continuous
تابع	function
ـ پذیرفتنی	admissible function
ـ شیب	slope function

ـ میدانی	field function
تبدیل	transformation
تبه شده	degenerated
تحلیلی	analytic
ترتیب	order
ـ دوری	cyclic order
تصویر	projection
تغییر	variation
ـ اول	first variation
ـ دوم	second variation
تفاضل	difference
تیزه (نقطهٔ بازگشت)	cusp
ثابت	constant
ـ انتگرال‌گیری	integration constant
جاذبه	gravity
جفت	pair
ـ نقاط	pair of points
جواب	solution
جهت	direction
چرخزاد	cycloid
حد	limit
حسابان	calculus
حساب انتگرال	integral calculus
ـ تغییرات	calculus of variations
ـ دیفرانسیل	differential calculus
خانواده	family
ـ یک‌پارامتری	one - parameter family
ـ دوپارامتری	two - parameter family
خط	line
ـ مستقیم	straight line
ـ افقی	horizontal line
ـ عمودی	vertical line
خم	curve
ـ بیشینه‌ساز	maximizing curve
تندترین سقوط	quickest descend curve
ـ جواب	solution curve
ـ کمینه‌ساز	minimizing curve
ـ کوتاهترین زمان	brachistochrone curve
ـ نصف‌النهار	meridian curve
ـ همزمانی	tautochrone curve
خوش تعریف	well - defined
دایره	circle
دترمینان	determinant
دو پارامتری	two - parameteric

دوری cyclic
رویه surface
ـ دورانی surface of revolution
زاویه angle
ـ قائمه righ angle
زنجیره catenary
زنجیره‌وار catenoid
زیرکمان subarc
زیرناحیه subregion
سازه(عامل) factor
ساختار construction
ـ هندسی
geometric construction
سرعت velocity
ـ اولیه initial velocity
سقوط descend, fall
شاخه branch
شرط condition
ـ لازم necessary condition
ـ کافی sufficient condition
ـ لازم‌ژاکوبی
Jacobi necessary condition
ـ تراگردی
transversality condition
ـ دیفرانسیل پذیری هیلبرت
Hilbert's differentiability condition
ـ گوشهٔ وایرشتراس ـ اردمان
weierstrass - Erdman corner condition
شعاع radius
ـ انحنا radius of curvature
شناسه argument
شیب slope
ـ آغازی initial slope
صفحه plane
ضریب coefficient
طول length
ـ کمان length of an arc
عرض ordinate
عضو member
عنصر element
فرمول formula
ـ تیلر Taylor's formula
فرین extermal
قضیه theorem
ـ پوش envelope theorem
ـ تابع ضمنی
implicit function theorem
کمان arc
ـ بیشینه‌ساز maximizing arc
ـ پذیرفتنی admissible arc

circumference	محیط
coordinate	مختص
conjugate	مزدوج
problem	مسئله
	ـ تعیین خم‌کوتاهترین زمان
brachistochron problem	
regular problem	ـ منظم
area	مساحت
path	مسیر
	ـ تندترین سقوط
quickest descend path	
orthogonal path	ـ متعامد
derivative	مشتق
first derivate	ـ اول
second derivative	ـ دوم
characteristic	مشخصه
equation	معادله
	ـ دیفرانسیل
differential equation	
Euler	ـ اویلر ـ
Jacobi	ـ ژاکوبی ـ
locus	مکان هندسی
tangent	مماس
unduloid	موج‌وار
field	میدان
field of extermals	ـ فرین‌ها
cycloid arc	ـ چرخزادی
catenary arc	ـ زنجیره‌ای
extermal arc	ـ فرین
composite arc	ـ مرکب
minimum	کمینه
absolute minimum	ـ مطلق
relative minimum	ـ نسبی
	ـ نسبی ضعیف
weak relative minimum	
stronge relative minimum	
	ـ نسبی قوی
minimizing	کمینه‌ساز
nodoid	گره‌وار
evolute	گسترده
evolute of a curve	ـ خم
corner	گوشه
soap - film	لایهٔ صابون
	لم اساسی
fundamental lemma	
analogue	مانسته
similar	متشابه
variable	متغیر
set	مجموعه
admissible set	ـ پذیرفتنی
criterion	محک
axis	محور

ناحیه	region
ناوردا	invariant
نسبت	ratio
نقطه	point
ـ آغازی	initial point
ـ انتهایی	end point
ـ بحرانی	critical point
ـ کانونی	focal point
ـ مزدوج	conjugate point
نماد	notation
نمو	increment
نیرو	force
نیم‌صفحه	half - plane
واصل	joining
وجود	existance
ویژگی	property
هذلولی	hyperbola
هذلولوی	hyperbolic
هندسی	geometric
یکتا	unique