دانشگاه علم و صنعت ایران

«شماره انتشارات ۱۸۸»

حساب تغییرات

ترجمه: دکتر احمد گل بابایی

حساب تغییرات

دکتر احمد گل بابایی

پیش گفتار

هدف از این کتاب تهیه مقدمه ای بر مسائل تغییراتی است. بعضی از این مسائل تاریخی طولانی دارد، امّا مطالعه سیستماتیک و توسعه این موضوع با کار *اویلر* و *لاگرانژ* به قرن هیجدهم مربوط می شود.

شروع کتاب با مواردی از نظریه *اویلر* - *لاگرانژ* است و با تعمیم هایی در نظریهٔ ها *میلتون* و *ژاکوبی* در ارتباط با برنامه ریزی دینامیک ادامه می یابد هم چنین مساله برابر - محیطی مورد بحث واقع شده و در فصل پایانی روش مستقیم به کار گرفته شده است.

مثال هایی با توضیح در سرتاسر کتاب آورده شده است، هم چنین کاربردهایی در زمینه مکانیک کلاسیک و مسائل مقدار کرانه ای در مورد معادلات دیفرانسیل در کتاب گنجانده شده است.

A. M ARTHURS

دانشگاه یورك انگلستان

مقدمه مترجم

کتاب حاضر ترجمه متن انگلیسی تحت عنوان Calculus of Variations می باشد که درطول تدریس برای دانشجویان دوره کارشناسی ارشد بخصوص در گرایش عمران مورد استفادهٔ مترجم قرار می گرفته و طی سالهای متمادی در بخشی از درس ریاضیات مهندسی پیشرفته به عنوان کتاب مرجع معرفی شده است مطالب نظری توام با مثالهایی که جنبه کاربردی دارند همراه است و برای دانشجویان و علاقه مندان ، این بخش از ریاضیات مفید و قابل استفاده می باشد.

احمد گل بابایی

دانشگاه علم و صنعت ایران

فهرست مطالب

فصل اول

فصل دوم

فصل سوم

فصل چهارم

فصل اوّل

مسائل تغییرات

۱ . مقدمه

حساب تغییرات، شاخه ای از آنالیز است که در ارتباط با مسائل بیشینه و کمینه است و نتایج آن در بسیاری از بخش های ریاضیات مورد استفاده قرار می گیرد. کاربرد حساب تغییرات، مخصوصاً در فیزیک و دانش مهندسی محسوس است. بعضی از مسائل حساب تغییرات تاریخچهٔ طولانی دارد که به زمان یونان باستان باز می گردد، امّا مطالعه سیستماتیک مسائل این بخش از ریاضیات به قرن هیجدهم، با کار *اویلر* ۱۷۰۷-۱۷۹۳ و *لاگرانژ* ۱۷۳۶-۱۸۱۳ سربوط می شود.

با بررسی چند مثال در ارتباط با مسائل تغییرات مطلب را شروع می نمایم؛ به صورتی که این مثالها زمینه را برای انواع سؤالاتی که در نظر داریم در موردشان بحث کنیم، فراهم می کند.

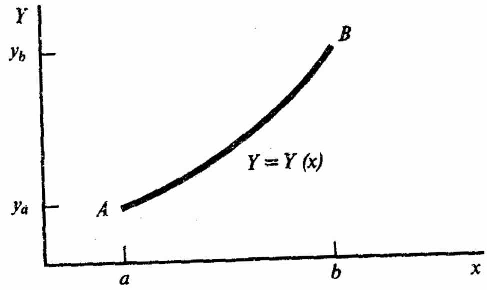
مثال ۱-۱ . مسالهٔ کوتاهترین مسیر

یکی از قدیمیترین مسائل تغییرات که مورد توجه یونانیان قرار گرفت، مسالهٔ یافتن کوتاهترین فاصله بین دو نقطه در صفحه بود.

اگر دو نقطه $A(a,y_a)$ و $B(b,y_b)$ موجود باشند طول منحنی $y=y(x)$ که این دو نقطه را به هم متصل می کند به وسیله انتگرال زیر به دست می آید:

$$J(Y) = \int_a^b \sqrt{1+(Y')^2}\,dx \qquad (Y' = dY/dx) \qquad (۱-۱)$$

انتگرال (۱-۱) را با $J(Y)$ نشان می دهیم تا بر این نکته تاکید کنیم که عدد J به منحنی $Y = Y(x)$ بستگی دارد. در عبارت (۱-۱)، مسالهٔ کوتاهترین فاصله، پیدا کردن تابع یا منحنی



شکل ۱

$Y = y(x)$ است که $J(Y)$ را کمینه می‌نماید. بینش هندسی به ما می‌گوید که منحنی y خط مستقیمی است که دو نقطه A و B را به هم وصل می‌کند، به هرحال این فرض کاملاً دور از واقعیت نیست که ثابت کنیم این جواب می‌باشد. کلی تر این که اگر A و B روی یک سطح باشند، کوتاهترین منحنی یک ژئودزیک است: به عنوان مثال، دایره بزرگی روی یک کره.

مثال ۲-۱. مسالهٔ مینیمال کردن سطوح

اگر منحنی $Y = Y(x)$ در شکل (۱) حول محور x ها دوران نماید سطحی به وجود می‌آید که مساحت این سطح به وسیلهٔ انتگرال زیر به دست می‌آید:

$$J(Y) = 2\pi\int_a^b Y\sqrt{1+(Y')^2}\,dx \qquad (۱-۲)$$

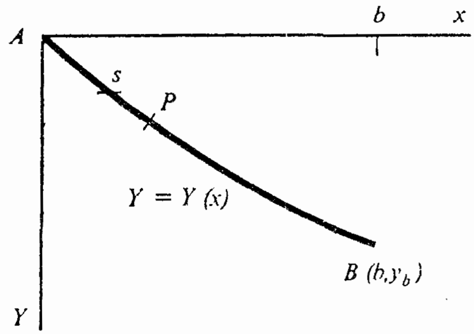
مسالهٔ کمینه کردن سطح، این است که منحنی ای مانند Y=y بیابیم، به طوری که مساحت (۲-۱) را حداقل نماید. در این حالت منحنی y کمانی از یک زنجیره[1] است و این منحنی جواب مساله می‌باشد.

شکل کلی این مسالهٔ می‌تواند مورد بحث قرار گیرد و این مجموعه مسائل جزء مسائل پلاتو (۱۸۰۱ - ۱۸۸۳) می‌باشد. بعد از آنکه فیزیکدانان با ورقه های صابون روی سیم ها آزمایش کردند یک درك فیزیکی از مسالهٔ حداقل سطح به وجود آمد.

1.catenery

مثال ۳-۱ . خم کوتاهترین زمان [1]

سومین مثال ما یک مسالهٔ پویا است . در این جا مسالهٔ پیدا کردن شکل یک سیم صافی است که دو نقطه از یک صفحه قائم را به هم وصل می کند، به طوری که یک مهره کوچک از بالا به پایین این مسیر بین دو نقطه را در کمترین زمان بپیماید. این همان مسالهٔ خم کوتاهترین زمان *گالیله* ۱۵۶۴-۱۶۴۲ و *برنولی*(۱۶۶۷-۱۷۴۸) می باشد.



شکل ۲

با استفاده از نمودار شکل ۲ می بینیم که سرعت مهره در نقطهٔp برابر است با :

$$\upsilon = \frac{ds}{dt}$$

از این رو زمان حرکت از A تا B از رابطهٔ زیر به دست خواهد آمد:

$$T(Y) = \int_{x=0}^{b} \frac{ds}{\upsilon} \qquad (۱-۳)$$

$$ds = \sqrt{1 + (Y')^2}\, dx \qquad (۱-۴)$$

با توجه به مکانیک مقدماتی، می دانیم که اگر ذره، از حالت سکون در نقطهٔ A شروع به حرکت کند، داریم:

$$\upsilon^2 = 2g\Delta Y \qquad (۱-۵)$$

2.Brachistochrone

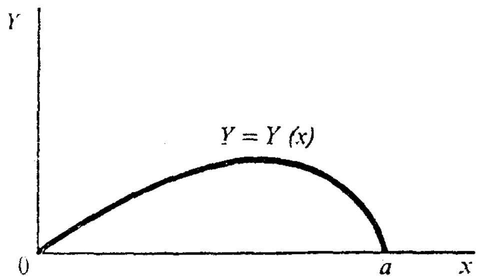
که در آنجا g همان *شتاب ثقل زمین* است. بنابراین انتگرالی که باید کمینه شود، عبارت است از :

$$T(Y) = \int_{\circ}^{b} \frac{\sqrt{\left(1+(Y')^{2}\right)}}{\sqrt{(2gY)}}\,dx \qquad (۱-۶)$$

جواب مساله یعنی y که یک کمان از سیکلوئید است، توسط چندین نفر به دست آمده است که عبارتند از *نیوتن* (۱۶۴۲-۱۷۲۷) *لایبنیتز* (۱۶۴۶-۱۷۱۶)، *جیمز برنولی* (۱۶۵۴-۱۷۰۵)، *جان برنولی* (۱۶۶۷—۱۷۴۸)

مثال ۴-۱ مسالهٔ برابر ـ محیطی

چهارمین مثال ما شاید قدیمیترین مسالهٔ تغییرات است که به وسیله یونیان مطرح شد. آن یک مساله هندسی است و در ارتباط با یافتن حداکثر سطح محصور یک منحنی بسته با طول داده شده می‌باشد.



شکل ۳

صورت سادهٔ این مساله به وسیلهٔ *پاپوس* حلّ شد. مساله عبارت بود از: تعیین سطح ناحیه ای از یک منحنی Y و فاصله ای از محور x ها (شکل ۳). در این حالت مساله یافتن تابع Y=y است به طوری که سطح

$$J = (Y) = \int_{\circ}^{b} Y\,dx \qquad (۱-۷)$$

را حداکثر نماید، با شرط آنکه طول منحنی ثابت باشد یعنی

$$k(Y) = \int_{\circ}^{b} \sqrt{\left(1+(Y')^{2}\right)}\,dx = \text{ثابت} \qquad (۱-۸)$$

برای این مسالهٔ جواب شهودی، کمانی از یک دایره، درست می باشد.

شرطی مانند (۸-۱) یک **انتگرال مقید** نامیده می شود و جمله **هم پیرامون** برای مسالهٔ تغییرات که شامل یک انتگرال مقید است به کار برده می شود.

یک افسانهٔ قدیمی است مبنی بر آنکه زمین شهر کارتاگ به وسیله حلّ مسالهٔ برابر-محیطی [1] تعیین شد. این شهر در سال ۸۱۴ قبل از میلاد به وسیله شاهزاده Dido بنیان نهاده شد. قرار بر این شد که شاهزاده به وسیله پوست یک گاو حداکثر زمین را به تصرف خود در آورد. شاهزاده با قوهٔ ابتکار شخصی پوست گاو را به صورت نوارهایی به شکل تسمه برید و سپس با متصل کردن این نوارها به هم آنها را به شکل دایره در آورد ودرنتیجه تا حد امکان زمین درون این دایره جای گرفت.

۲. مسالهٔ اصلی

در این قسمت مطالعهٔ سیستماتیک مسالهٔ تغییرات را آغاز می کنیم با توجه به اینکه هر یک از مثالهای (۳-۱)، (۱-۱) شکلهای مخصوصی از مسائل عمومی این بحث است. فرض کنیم که A و B دو نقطهٔ ثابت با مختصات (a,y_a) و (b,y_b) باشند و یک مجموعه از منحنی های

$$Y = Y(x) \qquad (۲-۱)$$

وجود دارد که دو نقطهٔ A و B را به هم وصل می کند. در این صورت مساله، یافتن یک عضو از این مجموعهٔ، مثلاً $Y=y$ است که انتگرال زیر

$$J(Y) = \int_a^b F(x, Y, Y')dx \qquad (۲-۲)$$

را کمینه کند.

این مساله شامل مثالهای فوق می باشد که در آنجا تابع F عبارت است از:

$$F = \sqrt{\left(1+(Y')\right)^2}$$

$$F = 2\pi Y\sqrt{\left(1+(Y')^2\right)}$$

1-Isoperimetric

$$F = \frac{\sqrt{\left(1+(Y')^2\right)}}{\sqrt{(2gY)}}$$

حال منحنی $Y = Y(x)$ ممکن است پیوسته یا گسسته باشد، مشتق پذیر باشد یا نباشد که اینها بر انتگرال $J(Y)$ اثر می گذارد. به هرحال ساده ترین حالت، آن است که منحنی $Y = Y(x)$ پیوسته باشد و در این دیباچه چنین تصور شده است و نیز تابع $Y = Y(x)$ را با مشتقات مراتب دلخواه (پیوسته) در نظر خواهیم گرفت. یک بار نوع منحنی هایی را که می خواهیم مشخص می کنیم، آنگاه یک مجموعه (فضا) Ω از توابع *پذیرفتنی*را تعریف کرده ایم. بنابراین مسالهٔ کمینه کردن انتگرال $J(Y)$ در (۲-۲) روی مجموعه توابع پذیرفتنی می باشد که از نقاط A و B می گذرند. این مسالهٔ معمولاً، مساله اصلی حساب تغییرات نامیده می شود.

تعمیم هایی از این مساله وجود دارد؛ به عنوان مثال اگر توابع زیر علامت انتگرال F به Y'' بستگی داشته باشد به Y', Y, x هم بستگی دارد و یا اگر F محتوی دو یا بیشتر از توابع مستقل از هم باشد، مانند $F\left(x, Y_1 Y_2 Y_1', Y_2'\right)$ ؛ که این حالتها بعداً بررسی می گردد.

این قسمت را با توجه به این نکته به پایان می بریم که انتگرال $J(Y)$ یک نمونه انتگرال های *تابعک* می باشد که به صورت زیر تعریف می شود:

تعریف: فرض کنیم R مجموعه اعداد حقیقی باشد و Ω فضایی از توابع، آنگاه تابع J یک *تابعک* نامیده می شود.

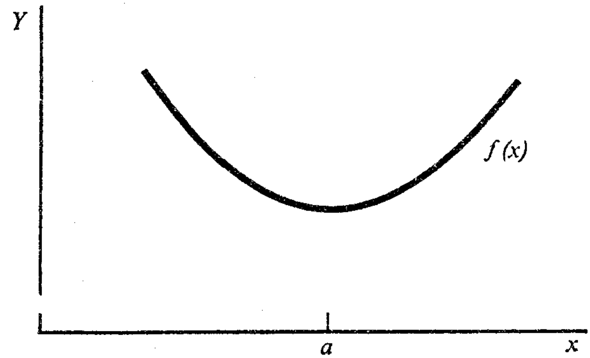
$$J : \Omega \to R$$

بر مبنای این تعریف می توانیم بگوییم که حساب تغییرات با بیشینه و کمینه کردن تابعک ها ارتباط دارد.

۳. حداکثر مقدار و حداقل مقدار

در حساب مقدماتی با نظریهٔ بیشترین مقدار و کمترین مقدار توابع یک متغیره از x آشنا شدیم. یک تابع $F(x)$ در نقطهٔ درونی $x=a$ دارای *حداقل مقدار* است، اگر

(۳-۳) بازای همهٔ مقادیر x نزدیک به a $$f(x) \geq f(a)$$



شکل ۴

و *حداکثر مقدار* با تعویض جهت نا مساوی فوق تعریف می شود. برای به دست آوردن شرایطی چند از (۱-۳) فرض می کنیم که f(x) دارای بسط تیلور حول نقطه x=a باشد که به صور زیر داده شده است:

$$f(a+h)=f(a)+hf'(a)+\frac{۱}{۲}h^{۲}f''(a+\theta h),\quad ۰\langle\theta\langle ۱ \qquad (۳-۲)$$

آنگاه (۱-۳) بازای کلیه h ها که به قدر کافی نزدیک صفر باشد، معادل خواهد بود با:

$$\Delta f\equiv f(a+h)-f(a)=hf'(a)+\frac{۱}{۲}h^{۲}f''(a+\theta h)\geq ۰ \qquad (۳-۳)$$

حال فرض کنیم که $f'(a)\neq ۰$ ، در این صورت اگر h به قدر کافی کوچک باشد، علامت Δf به وسیله $hf'(a)$ تعیین می شود و با تغییر علامت h مثبت یا منفی می شود. امّا در صورتی که $\Delta f\geq ۰$ بنابراین باید $hf'(a)=۰$ باشد. چون h اختیاری و مخالف صفر است، پس اجباراً

$$f'(a)=۰ \qquad (۳-۴)$$

این اولین شرط لازم برای یک اکسترمم (فرینه) است. بنابراین داریم:

قضیه ۱-۳: فرض کنیم تابع f(x) در فاصلهٔ $(x_۰ , x_۱)$ تعریف شده باشد. اگر f(x) دارای یک اکسترمم در نقطهٔ x=a، $x_۰\langle a\langle x_۱$ باشد،

آنگاه $f'(a) = 0$

نقطهٔ x=a، که در آنجا $f'(a) = 0$ است، یک *نقطهٔ بحرانی* یا *مانا* f(x) نامیده می‌شود و f(a) *مقدار مانای* f(x) است.

شرط مانایی (۳-۴) نمی‌تواند تعیین کند که آیا تابع f(x) دارای ماکزیمم یا مینیمم است و یا نقطهٔ x=a *نقطهٔ عطف* می‌باشد. برای تفکیک اینها، مشتق مرتبه دوّم تابع را در نظر می‌گیریم و از (۳-۳) داریم:

قضیه ۲-۳

فرض کنیم $f'(a) = 0$. آنگاه

(۳-۵) یک مینیمم $f''(a) > 0 \Rightarrow \Delta f \geq 0 \Rightarrow f(a)$

و

(۳-۶) یک ماکزیمم $f''(a) < 0 \Rightarrow \Delta f \leq 0 \Rightarrow f(a)$

اگر برای نقاط نزدیک x=a، $f''(a)$ تغییر علامت دهد، آنگاه این نقطه یک نقطهٔ عطف است.

نظریات حساب مقدماتی را به حساب تغییرات خواهیم برد و در این قسمت بررسی خود را روی نتیجه شرط مانایی (۳-۴) متمرکز می‌نماییم.

انتگرال زیر را از معادلهٔ (۲-۲) در نظر بگیرید:

$$J(Y) = \int_a^b F(x, Y, Y')\, dx \qquad (۳-۷)$$

و فرض کنید تابع قابل قبولی مانند y(x) موجود است که J(Y) را مینیمم می‌نماید. آنگاه داریم:

(۳-۸) بازای همهٔ مقادیر Y متعلق به Ω $\quad J(Y) \geq J(y)$

این اصل مینیمم شبیه به معادلهٔ (۳-۱) است، و متضمن مقایسه J برای توابع گوناگون Y است. اگر J(Y)، در اصل ماکزیمم صدق کند، می‌توانیم با استفاده از J(Y) به اصل مینیمم برسیم.

برای مقایسه J(Y) با J(y) از نظریهٔ (۳-۲) استفاده می‌کنیم، یعنی J(Y) را حول Y = y با انتخاب

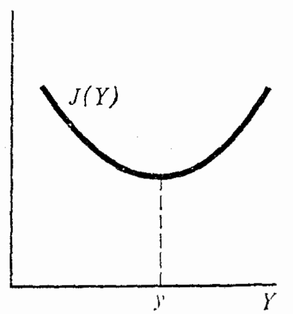
$$Y(x) = y(x) + \varepsilon\xi(x)\} \qquad (۳-۹)$$

بسط می دهیم، که در آنجا ξ یک ثابت کوچک و $\xi(x)$ یک تابع دلخواه است فقط با شرط آنکه $y + \varepsilon\xi$ تابع قابل قبولی باشد. یعنی متعلق به Ω است.

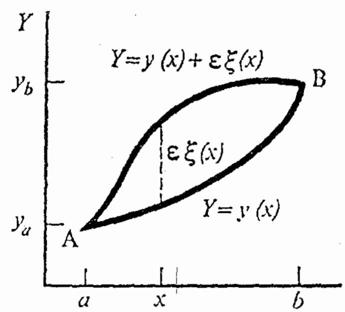
معادلهٔ (۹-۳) یک مجموعه از منحنی های گوناگون را حول $y(x)$ تعریف می کند.

از آنجائی که همه توابع مجاز Y، به انضمام y، از دو نقطهٔ A و B می گذرند خواهیم داشت:

$$\xi(a) = ۰ \quad , \quad \xi(b) = ۰ \qquad (۳-۱۰)$$



شکل (۵)



شکل (۶)

در شکل (۶) نتیجه (۱۰-۳) نشان داده شده است. بنابراین اصل مینیمم (۸-۳) تبدیل می شود به:

$$J(y + \varepsilon\xi) \geq J(y) \qquad y + \varepsilon\xi\varepsilon\Omega \qquad (۳-۱۱)$$

بازای همهٔ مقادیر $y + \varepsilon\xi$ متعلق به Ω

برای استفاده از (۱۱-۳) روشی را که برای (۱-۳) به کار رفته است اقتباس می کنیم، یعنی، $J(y + \varepsilon\xi)$ را به سری تیلور بسط می دهیم و داریم:

$$J(y + \varepsilon\xi) = \int_a^b F(x, y + \varepsilon\xi, y' + \varepsilon\xi')dx \qquad (۳-۱۲)$$

$$= \int_a^b \left\{F(x, y, y') + \varepsilon\xi\frac{\partial F}{\partial y} + \varepsilon\xi'\frac{\partial F}{\partial y'} + ۰(\varepsilon^۲)\right\}dx$$

$$= J(y) + \delta J + ۰(\varepsilon^۲)$$

که در

آنجا $$\frac{\partial F}{\partial y} \equiv \left\{\frac{\partial F}{\partial y}\left(x, Y, Y'\right)\right\}_{Y=y}$$

و $$\delta J = \int_a^b \left\{\varepsilon\xi \frac{\partial F}{\partial y} + \varepsilon\xi' \frac{\partial F}{\partial y'}\right\} dx$$

جملهٔ خطی برحسب ε را نشان می دهد و اولین تغییر J نامیده می شود. δJ مشابه جملهٔ خطی $hf'(a)$ در (۲-۳) می باشد. اگر جملهٔ ξ' در δJ را به روش جزء به جزء انتگراگیری نمائیم و (۱۰-۳) را مورد استفاده قرار دهیم، خواهیم داشت:

$$\delta J = \int_a^b \varepsilon\xi \left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right\} dx \qquad (۳-۱۳)$$

حال $\langle \circ \rangle$ را به صورت زیر تعریف می کنیم:

$$\langle \Phi, \psi \rangle = \int_a^b \Phi(x)\, \psi(x) dx \qquad (۳-۱۴)$$

و اگر بنویسیم:

$$J'(y) = \frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} \qquad (۳-۱۵)$$

ملاحظه می شود که

$$\delta J = \langle \varepsilon\xi \, , \, J'(y) \rangle \qquad (۳-۱۶)$$

بر مبنای این قرار داد، بسط (۱۲-۳) به صورت زیر خواهد بود:

$$J(y+\varepsilon\xi) = J(y) + \langle \varepsilon\xi, \, J'(y) \rangle + \circ\left(\xi^۲\right) \qquad (۳-۱۷)$$

که مشابه بسط (۲-۳) برای تابع $f(x)$ می باشد، یعنی

$$f(a+h) = f(a) + hf'(a) + \circ C\left(h^۲\right) \qquad (۳-۱۸)$$

معادلهٔ (۱۷-۳) بسط تعمیم یافته تیلور است و در داخل آن $J'(y)$ مشتق یا *گرادیان*، که برای

$J(y)$ در (۳-۷) با معادلهٔ (۳-۱۵) داده شده است.

در قضیهٔ (۳-۱) دیدیم که $hf'(a) = 0$ یک شرط لازم برای وجود اکسترمم تابع $f(x)$ است، با توجه به همان بحث داریم:

قضیه ۳-۳. یک شرط لازم برای آنکه $J(Y)$ در $Y=y$ اکسترمم داشته باشد، آن است که برای همهٔ توابع قابل قبول

$$\delta J = < \varepsilon\xi \, , \, J'(y) > = 0 \qquad (۳-۱۹)$$

برقرار باشد.

منحنی $Y=y$ ، که در آنجا $\delta J = 0$ ، *منحنی بحرانی* اکسترمال (extremal) نامیده می شود و مقدار نظیر $J(y)$ را مقدار *مانای انتگرال* می نامند.

مانند حالت توابع معمولی، شرط مانایی (۳-۱۹) به ما نمی گوید که $J(Y)$ برای $Y = y$ دارای ماکزیمم یا مینیمم است و یا $Y=y$ یک نقطه عطف است. برای تعیین این خواص باید جملات از مرتبه بالاتر در نظر گرفته شود و برای مسائل تغییراتی عموماً این بررسی ها کاملاً پیچیده هستند.

بعداً در فصل (۳) شکلهای ساده تری ارائه می گردد. حال بررسی را روی شرط مانایی (۳-۱۹) متمرکز خواهیم ساخت.

۴. معادلهٔ اویلر - لاگرانژ

حال بر می گردیم به نتایج شرط مانایی $\delta J = 0$ ، یعنی

$$< \varepsilon\xi, J'(y) > = 0 \qquad (۴-۱)$$

برای کلیه توابع قابل قبول $\varepsilon\xi$.

به وسیله قیاس با نتایج قضیه ۱-۳ برای توابع معمولی، از (۴-۱) می توانیم شرط

$$J'(y) = 0 \qquad (۴-۲)$$

را نتیجه بگیریم. این نتیجه در واقع درست است و از قضیه زیر ناشی می شود.

لم اویلر - لاگرانژ

اگر $u(x)$ در فاصله $[a,b]$ پیوسته باشد، و اگر برای هر تابع پیوسته $\xi(x)$ به طوری که

$$\xi(b) = 0 \, , \; \xi(a) = 0$$

$$< \xi , u > \equiv \int_a^b \xi(x)u(x)dx = 0 \qquad (۴-۳)$$

باشد، آنگاه

$$u(x) = 0 \ \forall x \in [a,b] \qquad (۴-۴)$$

اثبات. (اثبات به برهان خلف) فرض کنیم $u(x) \neq 0$ مثلاً $u(x)$ در بعضی از نقاط فاصلهٔ $[a,b]$ مثبت باشد. با توجه به پیوستگی، تابع $u(x)$ در فاصله ای مانند $[x_0 , x_1]$ که در داخل فاصله $[a,b]$ است، مثبت خواهد بود.

اگر قرار دهیم:

$$\xi(x) = 0(x - x_0)^2 - (x_1 - x_0)^2 \ , \ x_0 < x < x_1 \qquad (۴-۵)$$

سایر نقاط

آنگاه $\xi(x)$ در شرایط لم صدق می کند.

در حالی که

$$\int_a^b \xi(x)u(x)dx = \int_{x_0}^{x_1} (x - x_0)^2 (x_1 - x)^2 u(x)dx \rangle 0$$

در نتیجه تابع زیر علامت انتگرال در (x_0, x_1) مثبت است و این با شرط (۳-۴) متناقض است و در نتیجه $u(x)$ مخالف صفر نیست، که با این اثبات تمام می شود.

از آنجائی که $\xi(x)$ در (۱-۴) واجد شرایط لم می باشد، و نیز $J'(y)$ تابعی از x مانند $u(x)$ می باشد پس با توجه به لم خواهیم داشت:

$$J'(y) = 0 \qquad (۴-۶)$$

با توجه به تعریف در معادلهٔ (۱۵-۳)، عبارت (۶-۴) بدین معنی است که

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \qquad (۴-۷)$$

و این معادله به عنوان معادلهٔ *اویلر-لاگرانژ* معروف است.

بنابراین ثابت کرده ایم:

قضیه ۱-۴ . یک شرط لازم برای تابع

$$J(Y)=\int_a^b F(x,Y,Y')dx\ ,\ \ Y(a)=y_a\ ,\ \ Y(b)=y_b$$

که دارای اکسترمم برای تابع y باشد، آن است که y جواب معادلهٔ $J'(y)=0$ باشد.

یعنی ؛

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0 \qquad a\le x\le b$$

با

$$y(a)=y_a\ ,\ y(b)=y_b$$

این اصل پایهٔ تغییراتی *اویلر - لاگرانژ* است، همچنین شرطی برای مانایی انتگرال $J(Y)$ در منحنی بحرانی $Y=y$ می باشد.

حال این قضیه را در ارتباط با تعیین منحنی های بحرانی y برای بعضی از مثالهای بخش یک مورد استفاده قرار خواهیم داد.

مثال ۱-۴ . مسالهٔ کوتاهترین مسیر

برای این مساله

$$F(x,Y,Y')=\sqrt{(1+(y')^2} \qquad (۴-۸)$$

و بنابراین معادلهٔ *اویلر - لاگرانژ* برای منحنی بحرانی y عبارت است از :

$$0=\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=-\frac{d}{dx}\left\{\frac{y'}{\sqrt{1+(y')^2}}\right\} \qquad (۴-۹)$$

که نتیجه می دهد :

$$y'=\text{ثابت}$$

و یا (۴-۱۰)

$$y=\alpha x+\beta$$

در اینجا α و β ثابتهایی هستند که از روی شرایط مرزی $y(a)=y_a$ و $y(b)=y_b$ تعیین می شوند. نتیجه (۴-۱۰) نشان می دهد که منحنی بحرانی یک خط مستقیم است. این منحنی ای است که $J(Y)$ را مانا می نماید و برای اینکه ثابت کنیم این منحنی $J(Y)$ را مینیمم می نماید نیاز به

تحقیق بیشتری است، هر چند که از شکل هندسی مساله انتظار چنین جوابی می رود.

مثال ۲-۴. مسالهٔ حداقل سطح

برای این مساله

$$F(x,Y,Y') = ۲\pi Y\sqrt{\left(۱+(Y')^{۲}\right)} \qquad (۴-۱۱)$$

و معادلهٔ *اویلر-لاگرانژ* برای منحنی بحرانی y عبارت است از:

$$\sqrt{\left(۱+y'^{۲}\right)} - \frac{d}{dx}\left\{\frac{yy'}{۱+(y')^{۲}}\right\} = ۰ \qquad (۴-۱۲)$$

معادله (۱۲-۴) به

$$\left(۱+y'^{۲}\right)^{-۳/۲}\left\{۱+y'^{۲} - yy''\right\} = ۰$$

تبدیل می شود و برای y' معین در فاصله $a\langle x\langle b$ به دست می‌آوریم:

$$۱+y'^{۲} = yy'' \qquad (۴-۱۴)$$

با استفاده از تساوی $y'' = y'\frac{dy'}{d_y}$، می توان (۱۴-۴) را به صورت تفکیک پذیر زیر نوشت:

$$\frac{dy}{y} = \frac{۱}{۲}\,\frac{d\left(y'^{۲}\right)}{۱+y'^{۲}}$$

با یک بار انتگرال گیری، نتیجه می شود:

$$y = c\left(۱+y'^{۲}\right)^{۱/۲} \quad \text{و} \quad C=\text{ثابت} \qquad (۴-۱۵)$$

با استخراج y' از معادلهٔ فوق و انتگرال گیری مجدد تابع y را به صورت زیر بیان می کنیم:

$$y = C\cosh\left(\frac{x + c_1}{c}\right) \tag{۴-۱۶}$$

این منحنی بحرانی کمانی از یک زنجیره(catenary) است، که در آنجا ثابت C_1 و C با شرایط مرزی $y(a)=y_a$ و $y(b)=y_b$ تعیین خواهند شد. سطحی که از دوران این منحنی تولیدُ می شود زنجیره *وار* (Catenold) نامیده می شود. مانند مثال (۱-۴)، برای آنکه نشان دهیم منحنی بحرانی (۴-۱۶) یک مینیمم برای $J(Y)$ تولید می کند، نیاز به تحقیق بیشتری دارد.

در خاتمه این بخش در ارتباط با معادله اویلر- لاگرانژ یک حالت کلّی از مسالهٔ اصلی که در آن انتگرال پایه J به بیش از یک تابع بستگی دارد در نظر خواهیم گرفت. فرض کنیم؛

$$Y_1,\ Y_2,\ \ldots\ldots\ldots,Y_n$$

توابعی از x و مستقل از هم باشند و مسالهٔ تعیین مجموعه منحنی های $Y_1 = y_1, Y_2 = y_2, \ldots\ldots. Y_n = y_n$ است به طوری که انتگرال

$$J\left(Y_1, Y_2, \ldots\ldots Y_n\right) = \int_a^b F\left(x, Y_1, \ldots\ldots, Y_n, Y_1' \ \ Y_n'\right)dx \tag{۴-۱۷}$$

مینیمم باشد. در اینجا هر یک از منحنی های Y_j از نقاط ثابت A_j و B_j عبور می کنند به طوری که

$$Y_j(a) = y_{ja}\ \ ,\ \ Y_j(b) = y_{jb}\ \ ,\ \ j = 1,2,3,\ldots.,n \tag{۴-۱۸}$$

با انتخاب

$$Y_j = Y_j(x) + \varepsilon\xi_j(x) \tag{۴-۱۹}$$

که در آنجا ξ_j در نقاط انتهایی صفر است، با استفاده از بسط تیلور، اولین متغیر J عبارت است از:

$$\delta J = \sum_{j=1}^{n} < \varepsilon\xi_j\ ,\ J_y'\left(y_1, y_2, \ldots, y_n\right) >, \tag{۴-۲۰}$$

با

$$J_j'\left(y_1, y_2, \ldots y_n\right) = \frac{\partial F}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_j'} \quad (j = 1,2,\ldots,n) \tag{۴-۲۱}$$

برای یک اکسترمم باید شرط مانایی (قضیه ۳-۳) را برقرار کنیم یعنی $\delta J = 0$ و با (۲۰-۴) نتیجه

می شود:

$$\sum_{j=1}^{n} < \varepsilon\xi_j , J'_j >= 0 \qquad (۴-۲۲)$$

حال که همهٔ $\varepsilon\xi_j$ ها مستقل از هم هستند، (۲۲-۴) نتیجه می دهد:

$$< \varepsilon\xi_j , j'_j >= 0 \qquad (j = 1,2,....n) \qquad (۴-۲۳)$$

بالاخره، با استفاده از *لم اویلر- لاگرانژ* در (۳-۴) و (۴-۴)، شرط زیر را به دست می آوریم:

$$J'_j = 0 \;,\; (j = 1,2,...n) \qquad (۴-۲۴)$$

یعنی

$$\frac{\partial F}{\partial y'_j} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'_j} = 0 \qquad (j = 1,2,....n) \qquad (۴-۲۵)$$

بنابراین منحنی های بحرانی از حل دستگاه معادلات *اویلر- لاگرانژ* (۲۵-۴) با توجه به شرایط مرزی (۱۸-۴) به دست خواهند آمد.

۵- تمرینات

۱- منحنی های بحرانی تابعکها را بیابید:

(الف) $\int_0^1 y'dx$ (ب) $\int_0^1 yy'dx$ (ج) $\int_0^1 xyy'dx$

که در هر یک $y(0) = 0 \;,\; y(1) = 1$ باشد

۲. منحنی های بحرانی تابعک را بیابید:

(الف) $\int_a^b \left(y^2 + (y'^2 - 2y \sin x\right)dx,$

(ب) $\int_a^b \left(y^2 - y'^2 - 2y \sin x\right)dx,$

(ج) $\int_a^b \left(y^2 - y'^2 - 2y \cosh x\right)dx.$

$$(د)\int_a^b \left(y^2 - y'^2 + 2y\, e^x\right)dx$$

۳. جواب عمومی معادلهٔ *اویلر* و *لاگرانژ* را برای تابعک زیر را بیابید؛

$$\int_a^b f(x)\left(1+y'^2\right)^{1/2} dx$$

و از آنجا در مورد حالت های خاص زیر تحقیق کنید:

$$الف\ f(x) = x^{1/2} \qquad و \qquad ب\ f(x) = x$$

۴. منحنی های بحرانی را برای حالتهای زیر بیابید:

$$(الف)\int_{-1}^{1} \left\{y\left(1+y'^2\right)^{\frac{1}{2}}\right\}dx \quad , \quad y(-1) = y(1) = b\rangle 0$$

$$(ب)\int_a^b \frac{1+y^2}{y'^2}dx \quad , \quad y(a) = A \ , \ y(b) = B$$

۵. نشان دهید معادلهٔ (۱۶-۴) از معادلهٔ (۱۵-۴) نتیجه می شود:

۶. منحنی بحرانی برای مسالهٔ خم کوتاهترین زمان را که در مثال (۳-۱) شرح داده شد، پیدا کنید:

۷. نتیجه معادلهٔ (۲۰-۴) را بنا کنید:

۸. نشان دهید معادله *اویلر- لاگرانژ* برای تابعک

$J(Y) = \int_a^b F(x, Y, Y', Y'')dx$ عبارت است از:

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} + \frac{d^2}{dx^2}\frac{\partial F}{\partial y''} = 0$$

فصل دوّم

برخی تعمیم ها

۶. معادلهٔ متعارف اویلر

در پایان بخش ۴ ، معادلهٔ *اویلر- لاگرانژ* را به دست آوردیم :

$$\frac{\partial F}{\partial y_j} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y_j'} = 0 \ , \ j = 1,2,3,\dots,n, \qquad (۶-۱)$$

که منحنی های بحرانی برای تابعک زیر را می دهد :

$$J\left(Y_1, Y_2, \dots, Y_n\right) = \int_a^b F\left(x, Y_1, Y_2, \dots, Y_n, Y_1', \dots Y_n'\right) dx \qquad (۶-۲)$$

معادلات (۱-۶) یک دستگاه n معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوّم را تشکیل می دهند، هدف از بازنویسی این معادلات به صورت ۲n دستگاه معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ یک می باشد. ابتدا متغیری مانند p_i را به صورت زیر تعریف می کنیم :

$$P_i = \frac{\partial F}{\partial y_j'} \ , \ i = 1,2,\dots,n \qquad (۶-۳)$$

p_i متغیر مزدوج y_i نامیده می شود. فرض کنیم معادلهٔ (۳-۶) را بتوانیم حل کنیم و y_i' را به صورت تابعی از x و $y_j, p_j (j = 1,2,\dots n)$ بیان کنیم. در آن صورت امکان تعریف یک تابع جدید، $H\left(x, y_1, y_2, \dots y_n, p_1, \dots p_n\right)$

به وسیله معادلهٔ

$$H\left(x, y_1, \dots y_n, p_1, \dots p_n\right) = \sum_{i=1}^{n} p_i y_i' - F\left(x, y_1, \dots, y_n, y_1', \dots, y_n'\right) \qquad (۶-۴)$$

وجود دارد. تابع H را *تناظر هامیلتونی* معادلهٔ (۲-۶) می نامند. دیفرانسیل تابع H در معادلهٔ

(۴-۶) به صورت زیر بیان می شود :

$$dH = \sum_{i=1}^{n}\left(p_i dy_i' + y_i' dp_i\right) - \frac{\partial F}{\partial x}dx \qquad (۶-۵)$$

$$-\sum_{j=1}^{n}\left(\frac{\partial F}{\partial y_i}dy_i + \frac{\partial F}{\partial y_i'}dy_i'\right) = -\frac{\partial F}{\partial X} + \sum_{i=1}^{n}\left(y_i' \, dp_i - \frac{\partial F}{\partial y_i}dy_i\right)$$

جملات dy_i' به دلیل رابطهٔ (۳-۶) حذف می شوند . بنابراین داریم :

یا

$$y_i' = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{\partial F}{\partial y_i} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad (۶-۶)$$

$$\frac{dy_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, -\frac{dp_i}{dx} = \frac{\partial H}{\partial y_i}, \qquad i = 1,2,\ldots n$$

که در آنجا از روابط (۱-۶) و (۱-۳) استفاده شده است . معادله۶-۶ ، *معادلهٔ متعارف اویلر* است که با انتگرال (۲-۶) در ارتباط می باشد .

این معادلات متعارف از روش جالب دیگری نیز به دست می‌آیند . اگر توابع P_i ، Y_i را به عنوان متغیرهای مستقل نشان دهیم ، می توانیم مانند (۲-۶) تابعک جدیدی به صورت زیر تعریف کنیم :

$$I\left(Y_1, Y_2, \ldots, Y_n, p_1, p_2, \ldots, p_n\right) = \int_a^b \left\{\sum_{j=1}^{n} p_j Y_j' - H\left(x, Y_1, \ldots Y_n, P_1, \ldots, P_n\right)\right\}dx \qquad (۶-۷)$$

آنگاه با (۱-۶) معادلات *اویلر-لاگرانژ* عبارتند از :

$$\left(\frac{\partial}{\partial y_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y_i'}\right)\left\{\sum_{j=1}^{n} p_j y_j' - H\right\} = 0, i = 1,2,\ldots n, \qquad (۶-۸)$$

$$\left(\frac{\partial}{\partial p_i} - \frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial p_i'}\right)\left\{\sum_{j=1}^{n} p_j y_j' - H\right\} = 0, i = 1,2,\ldots n. \qquad (۶-۹)$$

با انجام عملیات روی این عبارات به دست می آوریم:

و
$$-\frac{\partial H}{\partial y_i}-\frac{dp_i}{dx}=0,$$

و یا
$$y_i'\frac{\partial H}{\partial p_i}=0$$

$$\frac{dy_i}{dx}=\frac{\partial H}{\partial p_i},-\frac{dp_i}{dx}=\frac{\partial H}{\partial y_i},\qquad i=1,\dots,n \tag{۶-۱۰}$$

اینها دقیقاً معادلات متعارف داده شده در (۶-۶) هستند این معادلات یک دستگاه $2n$ معادله دیفرانسیل را تشکیل می دهند و جواب این دستگاه، یعنی $y_1,y_2,\dots y_n,p_1,p_2,\dots,p_n$ منحنی های بحرانی برای تابعک I در معادله (۶-۷) را تشکیل می دهند.

بعداً دستگاه معادلات متعارف (۶-۱۰) در این کتاب مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

مثال ۶-۱. برای توضیح این معادلات متعارف، $n=1$ را اختیار می کنیم و تابعک زیر را در نظر می گیریم:

$$J(Y)=\int_a^b\left(\alpha Y'^2+\beta Y^2\right)dx \tag{۶-۱۱}$$

برای این

$$F(x,y,y')=\alpha y'^2+\beta y^2$$

و
$$p=\frac{\partial F}{\partial y'}=2\alpha y'\Rightarrow y'=\frac{p}{2\alpha}$$

با (۶-۴) *هامیلتونی* H به صورت

$$H=py'-F=\frac{p^2}{4\alpha}-\beta y^2$$

از (۶-۶) معادلات متعارف زیر را می یابیم:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial H}{\partial p}=\frac{p}{2\alpha}\quad ;\quad -\frac{dp}{dx}=\frac{\partial H}{\partial y}=-2\beta y \tag{۶-۱۲}$$

معادلهٔ معمولی *اویلر- لاگرانژ* برای (۶-۱۱) به صورت زیر است:

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0\Rightarrow\ 2\beta y-\frac{d}{dx}(2\alpha y')=0$$

که هم ارز با رابطهٔ (۱۲-۶) است.

۷. نقاط انتهایی متغیر

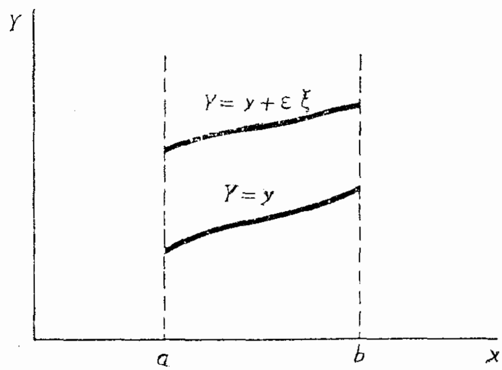
تا اینجا آن دسته از مسائل تغییراتی را بررسی نمودیم که از آنها مقادیر تابع مجاز در نقاط انتهایی $x=a$ و $x=b$ از پیش تعیین شده بودند. به هر حال حالات کلّی می تواند مطرح شود که مقادیر در نقاط انتهایی روی تابع اعمال نشود، که اکنون این حالات کلی را مطالعه خواهیم نمود.

حالت ۱ . ۷. نقاط متغیر انتهایی در امتداد y

مساله یافتن تابع $Y=y$ است که انتگرال

$$J(Y) = \int_a^b F(x, Y, Y')dx \tag{۷-۱}$$

را مینیمم نماید. که در آنجا تابع Y در $a \leq x \leq b$ تعریف شده ولی مقادیر آن در دو نقطهٔ انتهایی از



شکل ۷

پیش تعیین نشده است. به وسیلهٔ قضیهٔ(۳-۳)، شرط لازم برای آنکه $J(Y)$ بازای همهٔ توابع مجاز در $Y=y$ مینیمم داشته باشد. آن است که

$$\delta J(y+\varepsilon\xi) = 0 \tag{۷-۲}$$

برای این کار به اولین تغییر نیاز داریم، که از (۱-۷) نتیجه می شود:

$$J(y+\varepsilon\xi)=\int_a^b F(x,y+\varepsilon\xi,y'+\varepsilon\xi')dx$$
$$=\int_a^b\left\{F(x,y,y')+\varepsilon\xi\frac{\partial F}{\partial y}+\varepsilon\xi'\frac{\partial F}{\partial y'}+o(\varepsilon^2)\right\}dx\ .$$

بنابراین

$$\delta J=\int_a^b\left\{\varepsilon\xi\frac{\partial F}{\partial y}+\varepsilon\xi'\frac{\partial F}{\partial y'}\right\}dx\ , \qquad (۷-۳)$$

که قبلاً در بخش ۳ دیده شده است. با انتگرال گیری ξ به روش جزء به جزء به دست می‌آوریم:

$$\delta J=\int_a^b\varepsilon\xi\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right\}dx+\left[\varepsilon\xi\frac{\partial F}{\partial y'}\right]_a^b \qquad (۷-۴)$$

برای نقاط انتهایی ثابت، ξ در $x=a$ و $x=b$ صفر است و رابطهٔ (۴-۷) به عبارت معادلهٔ (۱۳-۳) تبدیل می‌شود. در حالی که در حالت اخیر احتیاجی نیست که نقاط انتهایی ثابت باشند (شکل ۷)، و این بدان معنی است که ξ در $x=a$ و $x=b$ دلخواه است.

حالا باید شرایط مانای $\partial J=0$ برای همهٔ توابع مجاز Y برقرار باشد و می‌توانیم این توابع را به چهار مجموعه تقسیم کنیم، یعنی توابعی مانند:

(الف) $\xi(a)=0\ ,\ \xi(b)=0$ (ب) $\xi(a)\neq 0\ ,\ \xi(b)=0$

(ج) $\xi(a)=0\ ,\ \xi(b)\neq 0$ (د) $\xi(a)\neq 0\ ,\ \xi(b)\neq 0$.

برای مجموعه (۱)، معادله (۴-۷) نتیجه می‌دهد:

$$\delta J=\int_a^b\varepsilon\xi\left\{\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right\}dx \qquad (۷-۵)$$

و بنابراین، با لم *اویلر-لاگرانژ*، $\delta J=0,$ نتیجه می‌دهد که y باید در معادله صدق کند.

$$\frac{\partial F}{\partial y}-\frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}=0\ ,\qquad a<x<b \qquad (۷-۶)$$

با در نظر گرفتن مجموعهٔ (ج) و به کار گیری (۶-۷) داریم:

$$\delta J = \left[\varepsilon \xi \frac{\partial F}{\partial y'} \right]_a^b \qquad (۷-۷)$$

برای آنکه δJ برای ξ دلخواه، صفر باشد، باید داشته باشیم :

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = ۰ \quad \text{در} \quad x=b \quad \text{و} \quad x=b \qquad (۷-۸)$$

بنابراین باید منحنی بحرانی در معادلهٔ *اویلر-لاگرانژ* (۶-۷) و شرایط مرزی (۸-۷) صدق کند. این شرایط مرزی را برای y ، *شرایط مرزی طبیعی* گویند، زیرا آنها از مسالهٔ تغییراتی به طور طبیعی ناشی می شوند. این وجه تمایزی از شرایط مرزی اصلی روی y در مسالهٔ نقطهٔ انتهایی ثابت است.

مثال ۱-۷. فرض کنیم:

$$J(Y) = \int_۰^۱ (Y')^۲ \, dx \qquad (۷-۹)$$

و مسالهٔ تعیین منحنی های بحرانی برای

الف ـ نقاط انتهایی ثابت و $y(۰) = ۰ \;,\; y(۱) = ۱$

ب ـ نقاط انتهایی آزاد، $y(۱) \;,\; y(۰)$ از پیش تعیین نشده اند.

معادلهٔ اویلر-لاگرانژ عبارت است از :

$$y'' = ۰ \qquad (۷-۱۰)$$

که دارای جواب عمومی با ثابتهای $\beta \;,\; \alpha$

$$y = \alpha x + \beta \qquad (۷-۱۱)$$

است.

برای (الف) شرایط مرزی منحنی بحرانی y=x را جواب می دهد، و $J(y) = ۱$.

برای (ب) شرایط مرزی طبیعی (۸-۷) ، یعنی

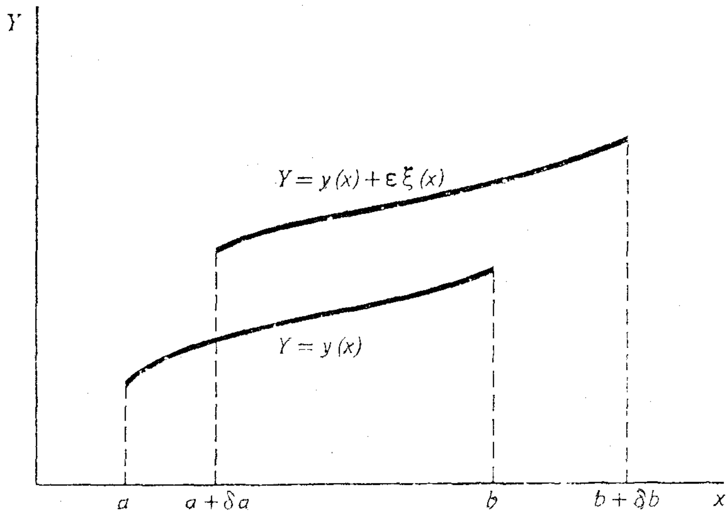
$$\frac{\partial F}{\partial y'} = ۲y' = ۰ \qquad \text{در} \quad x = ۰ \;.\; x = ۱$$

منحنی بحرانی $y = \beta$ را جواب می دهد، و $J(y) = ۰$.

این مساله بخشی از شرایط مرزی که در مسائل تغییراتی نقش دارند را نشان می دهد.

حالت ۲-۷ . نقاط انتهایی متغیر در امتدادهای xوy

در حالت ۱-۷ بحث روی نقاط انتهایی متغیر در امتداد y بود. اکنون این حالت را کلی تر عنوان می کنیم و فرض می نماییم که نقاط انتهایی در امتداد x و y تغییر کند (شکل ۸ ملاحظه گردد). این مساله به یک فرمول کلّی از اولین متغیر منجر می شود.



شکل ۸

فرض کنیم:

$$J(y) = \int_a^b F(x, y, y')dx \qquad (۷-۱۲)$$

همچنین؛

$$y(a) = y_a \ , \ y(b) = y_b \qquad (۷-۱۳)$$

فرض کنیم که منحنی متغیر $Y = y + \varepsilon\xi$ روی $(a + \delta a, b + \delta b)$ تعریف شده باشد. به طوری که

$$J(y + \varepsilon\xi) = \int_{a+\delta a}^{b+\delta b} F(x, y + \varepsilon\xi, y' + \varepsilon\xi')dx \qquad (۷-۱۴)$$

و در نقاط انتهایی منحنی قرار می دهیم:

$$y+\varepsilon\xi = y_a + \delta y_a \quad \text{در} \quad x = a+\delta a \qquad (۷-۱۵)$$
$$y+\varepsilon\xi = y_b + \delta y_b \quad \text{در} \quad x = b+\delta b$$

برای پیدا کردن اولین متغیر δJ باید جملاتی در $J(y+\varepsilon\xi)$ تعیین کنیم که بر حسب کمیتهای مرتبه اوّل $\varepsilon\xi, \delta a, \delta b, \delta y_a, \delta y_b$ خطی باشد.

عبارت زیر را در نظر می گیریم:

$$\Delta J = J(y+\varepsilon\xi) - J(y)$$
$$= \int_{a+\delta a}^{b+\delta b} F(x, y+\varepsilon\xi, y'+\varepsilon\xi')dx - \int_a^b F(x,y,y')dx$$

که به صورت زیر می شود:

$$\Delta J = \int_a^b \{F(x,y+\varepsilon\xi, y'+\varepsilon\xi') - F(x,y,y')\}dx \qquad (۷-۱۶)$$
$$+\int_a^{b+\delta B} F(x,y+\varepsilon\xi,y'+\varepsilon\xi')dx$$
$$\int_a^{a+\delta a} F(x,y+\varepsilon\xi,y'+\varepsilon\xi')dx$$

در اینجا باید فرض کنیم که y و $\varepsilon\xi$ در فاصلهٔ $[a, b+\delta b]$ تعریف شده است ،یعنی بسط های y و $y+\varepsilon\xi$ مورد نیاز هستند، (معادلات ۱۸-۷ و ۱۹-۷ در زیر ملاحظه گردد).

آنگاه

$$\Delta J = \int_a^b \left\{\varepsilon\xi \frac{\partial F}{\partial y} + \varepsilon\xi' \frac{\partial F}{\partial y'} + o(\varepsilon^۲)\right\}dx$$
$$+\int_a^{b+\delta b} \{F(x,y,y') + o(\varepsilon)\}dx$$
$$-\int_a^{a+\delta a} \{F(x,y,y') + o(\varepsilon)\}dx$$

و جملات خطی در این عبارت

$$\delta J = \int_a^b = \left\{\varepsilon\xi \frac{\partial F}{\partial y} + \varepsilon\xi' \frac{\partial F}{\partial y'}\right\}dx + [x,y,y']_x^b \qquad (۷-۱۷)$$

$$= \int_a^b \varepsilon\xi \left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right\}dx + \left[\varepsilon\xi \frac{\partial F}{\partial y'} + F(x,y,y')\delta x\right]_x^b$$

می باشند.

مرحله نهایی یافتن ξ در $x = b \quad , \quad x = a$ است. با به کارگیری (۷-۱۵) داریم :

$$
\begin{aligned}
y_a + \delta y_a &= y(a+\delta a) + \varepsilon\xi(a+\delta a) \\
&= y(a) + \delta a y'(a) + \ldots + \varepsilon\xi(a) + b\delta\varepsilon\xi'(a) + \ldots.
\end{aligned}
$$

و چون ، با استفاده از (۷-۱۳) ، $y_a = y(a)$ بنابراین

(۷-۱۸) . تا اولین مرتبه
$$\varepsilon\xi(a) = \delta y_a - \delta a y'(a)$$

همچنین ، رابطهٔ زیر را می یابیم :

(۷-۱۹) تا اولین مرتبه
$$\varepsilon\xi(b) = \delta y_b - \delta b y'(b)$$

اینها بسط هایی هستند که در متن بین معادلات (۷-۱۶)و (۷-۱۷) به آنها اشاره شد. با (۷-۱۸) و (۷-۱۹) می توانیم بنویسیم :

$$\delta J = \int_a^b \varepsilon\xi\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right\}dx + \left[\frac{\partial F}{\partial y'}\delta y - \left(y'\frac{\partial F}{\partial y'} - F\right)\delta x\right]_a^b \qquad (۷-۲۰)$$

این عبارت به عنوان *اولین تغیر کلّی* شناخته شده است.

با بحثی که در بخش ۶ شد، اگر متغیر متعارف P و هامیلیون H را معرفی کنیم،

$$p = \frac{\partial F}{\partial y'} \quad , \quad H = py' - F \qquad (۷-۲۱)$$

می توانیم δJ را چنین بنویسیم :

$$\delta J = \int_a^b \varepsilon\xi\left\{\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'}\right\}dx + \left[p\delta y - H\delta x\right]_{x=a}^{x=b} \qquad (۷-۲۲)$$

اگر تابعک $J(y)$ در (۷-۱۲) دارای یک اکسترمم در $Y = y$ باشد آنگاه (۷-۲۲) نشان دهندهٔ این است که y باید در شرایط زیر صدق کند :

$$\frac{\partial F}{\partial y} - \frac{d}{dx}\frac{\partial F}{\partial y'} = 0 \quad , \quad a < x < b \qquad (۷-۲۳)$$

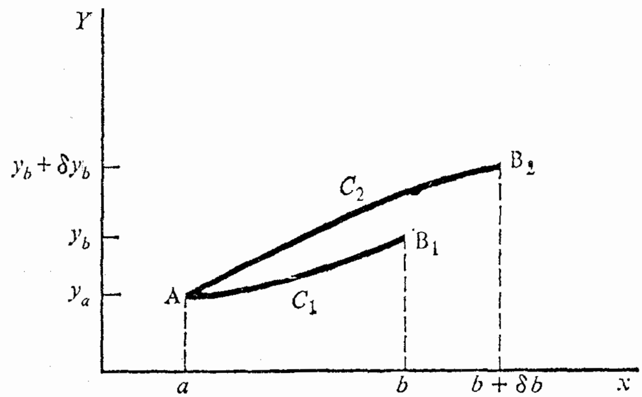
$$[p\delta y - H\delta x]_{x=a}^{x=b} = ۰ \qquad (۷-۲۴)$$

برای نقاط انتهایی ثابت، $\delta x = ۰$ و $\delta x = ۰$ این نتایج به نتایج بخش ۴ تبدیل می گردد.

برای نقاط انتهایی متغیر در امتداد y ، $\delta y = ۰$ و $\delta y = \varepsilon\xi$ باید از عبارت موجود در معادلهٔ (۴ـ۷) استفاده نمود.

۸. معادله ها میلتون ـ ژاکوبی

اولین تغییر کلی به دست آمده در بالا را می توان در تعیین یک نتیجهٔ مهم که به عنوان معادلهٔ هامیلتون ـ ژاکوبی است مورد استفاده قرارداد.



شکل ۹

انتگرال زیر را در نظر می گیریم:

$$J(Y) = \int_a^b F(x, y, y')dx \qquad (۸-۱)$$

و فرض کنیم که برای هر دو نقطهٔ انتهایی $A(a, y_a)$ و $B(b, y_b)$ تنها یک منحنی بحرانی c را داریم. نقطهٔ A را ثابت می گیریم و در سمت راست دونقطهٔ انتهایی در نظر می گیریم.

$$B_۱(b, y_b) \text{ و } B_۲(b + \delta b\ ,\ y_b + \delta y_b) \qquad (۸-۲)$$

در شکل (۹) منحنی های بحرانی متناظر نشان داده شده است.

اگر انتگرال (۱-۸) در مسیر هر منحنی بحرانی محاسبه شود، آنگاه نتیجه فقط تابعی در نقاط انتهایی A و B خواهد بود و چون A ثابت است می توانیم(۱-۸) را به عنوان تابعی از B به تنهایی در نظر بگیریم. بنابراین

$$J(C_1) = \int_{C_1} F(x, y, y')dx \qquad (۸-۳)$$

را با S که تابعی از B_1 است به صورت زیر می نویسیم:

$$S = S(b, y_b) \qquad (۸-۴)$$

و به طور مشابه

$$S + \delta S = S(b + \delta b, y_b + \delta y_b) \qquad (۸-۵)$$

مقدار متناظر برای منحنی بحرانی C_2 است که نقطهٔA رابه B_2 متصل می کند و از اینها نتیجه می شود:

$$\delta S = S(b + \delta b, y_b + \delta y_b) - S(b, y_b) \qquad (۸-۶)$$

بااستفاده از اولین تغییر کلّی (۲۲-۷) طرف راست عبارت(۵-۸) محاسبه می شود. تا مرتبه اوّل به دست می آوریم:

$$\delta s = p\delta y_b - H\delta b \qquad (۸-۷)$$

بنابراین

$$\frac{\partial S}{\partial y_b} = p\,,\ \ \frac{\partial S}{\partial b} = -H \qquad (۸-۸)$$

حال ممکن است $B_1(b, y_b)$ هر نقطهٔ انتهایی باشد و بنابراین می توانیم آن را با یک نقطهٔ عمومی $B(x, y)$ با تعویض b به x و y_b به y جایگزین کنیم. در آن صورت (۸-۸) به صورت زیر در می آید:

$$\frac{\partial S}{\partial y} = p\,,\ \ \frac{\partial S}{\partial x} = -H \qquad (۸-۹)$$

که در آنجا

$$p = p(x, y) = \frac{\partial F}{\partial y'} \tag{۸-۱۰}$$

و

$$H = H(x, y, p) = py' - F \tag{۸-۱۱}$$

در (۸-۱۰) y' مشتق $\frac{dy}{dx}$ محاسبه شد ه در نقطهٔ B برای اکسترمم منحنی C را نشان می دهند، منحنی C از A تا B می باشد. از (۸-۹) داریم:

$$\frac{\partial S}{\partial x} + H\left(x, y, \frac{\partial S}{\partial y}\right) = 0 \tag{۸-۱۲}$$

این معادله دیفرانسیل پاره ای ، که عموماً غیر خطی است، معادلهٔ *هامیلتون ژاکوبی* می باشد.

اگر جواب معادلهٔ *هامیلتون - ژاکوبی* را بتوان پیدا کرد، ممکن است مستقیماً منحنی های بحرانی را به دست آوریم. برای دیدن این موضوع فرض کنیم که

(۸-۱۳) یک منحنی بحرانی است $\quad y = y(x) \quad , \quad S = S(x, y.\alpha)$

یک جواب، (۸-۱۲) است که بستگی به پارامتر α دارد. آنگاه داریم:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha} + \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial \alpha}\frac{dy}{dx} \tag{۸-۱۴}$$

حال از (۸-۱۲) نسبت به α مشتق می گیریم. توجه داشته باشید که α تنها در سومیّن متغیر تابع H ظاهر می شود که شکل اصلی این متغیر با P نشان داده شده است. بنابراین

$$\frac{\partial^2 S}{\partial x \partial \alpha} = -\frac{\partial H}{\partial p}\frac{\partial^2 S}{\partial \alpha \partial y} \tag{۸-۱۵}$$

با قراردادن (۸-۱۵) در (۸-۱۴) می یابیم:

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial \alpha}\right) = \frac{\partial^2 S}{\partial y \partial \alpha}\left(\frac{dy}{dx} - \frac{\partial H}{\partial p}\right) \tag{۸-۱۶}$$

نظر به این که در مسیر هر منحنی بحرانی (معادله متعارف) $\frac{dy}{dx}=\frac{\partial H}{\partial p}$ است، از آنجا نتیجه می شود:

و یا

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)=0$$

(۸-۱۷) (روی هر منحنی بحرانی) مقدار ثابت = $\frac{\partial S}{\partial \alpha}$

بنابراین قضیهٔ زیر را ثابت کرده ایم.

قضیه ۱-۸ فرض می کنیم ؛ $S=S(x,y,\alpha)$

جواب معادله هامیلتون - ژاکوبی (۸-۱۲) باشد که بستگی به پارامتر α دارد(که α ثابت انتگرال گیری است) . آنگاه $\frac{\partial S}{\partial x}$ روی هر منحنی بحرانی مقدار ثابتی است. (ثابت= $\frac{\partial S}{\partial x}$).

مثال ۱-۸ . برای نشان دادن نتیجهٔ فوق انتگرال زیر را در نظر می گیریم:

$$J(y)=\int_a^b y'^2 dx \tag{۸-۱۸}$$

در اینجا

$$F(x,y,y')=y'^2,\ p=\frac{\partial F}{\partial y'}=2y'$$

بنابراین هامیلتونی با

$$H(x,y,p)=py'-F=\frac{1}{2}p^2-\frac{1}{4}p^2=\frac{1}{4}p^2$$

داده می شود.

معادلهٔ هامیلتون - *ژاکوبی* (۸-۱۲)

$$\frac{\partial S}{\partial x}+H\left(x,y,\frac{\partial S}{\partial y}\right)=0$$

به

$$\frac{\partial S}{\partial x}+\frac{1}{4}\left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2=0 \tag{۸-۱۹}$$

تبدیل می شود.

این یک معادلهٔ دیفرانسیل پاره ای غیر خطی مرتبه اول است. برای حل آن قرار می دهیم:

$$S = S(x,y) = u(x) + \upsilon(y) \qquad (۸-۲۰)$$

که نتیجه می شود:

$$\frac{du}{dx} + \frac{۱}{۴}\left(\frac{d\upsilon}{dy}\right)^{۲} = ۰ \qquad (۸-۲۱)$$

با توجه به معادلهٔ (۲۱-۸) باید $\frac{du}{dx}$ مقدار ثابت باشد، برای اینکه $\frac{du}{dx}$ به y بستگی ندارد و $\left(\frac{d\upsilon}{dy}\right)^{۲}$ به x وابسته نیست. بنابراین

$$u = -\alpha^{۲}x \qquad (\alpha = \text{ثابت})$$

که در نتیجه

$$-\alpha^{۲} + \frac{۱}{۴}\left(\frac{d\upsilon}{dy}\right)^{۲} = ۰$$

$$\frac{d\upsilon}{dy} = ۲\alpha$$

و یا

$$\upsilon = ۲\alpha y + \beta$$

که در آنجا β یک ثابت دیگر است. لذا با (۲۰-۸)

$$S = -\alpha^{۲}x + ۲\alpha y + \beta \qquad (۸-۲۲)$$

از قضیه (۱-۸)، منحنی های بحرانی به صورت زیر داده می شود:

$$Y = \alpha x + c \quad (\alpha \text{ و } C \text{ ثابت هستند}) \qquad \frac{\partial S}{\partial \alpha} = \text{ثابت}. \qquad (۸-۲۳)$$

$\frac{\partial S}{\partial \beta} =$ ثابت یک اتحاد است و چیز جدیدی را تعیین نمی کند. منحنی های بحرانی در (۲۳-۸) خطوط راست هستند که با نتیجه (۱۱-۷) در حلّ معادله *اویلر-لاگرانژ* برای انتگرال (۱۸-۸) یکسان است.

۹ . اصول تغییراتی در مکانیک

۱ . ۹ . اصل هامیلتون

حـال به دیدگاههـای تغـییـراتی مکانیک کـلاسیک برمی گردیم. نـقطهٔ مادی به جرم m و بردار وضعیت r در فضای سه بعدی (x,y,z) تحت نیروی F حرکت می کند، نیروی F یک نیروی پایا است به طوری که $F = -\text{grad}$ که در آنجـا $v = V(x,y,z)$ تابع پتـانسـیل است. قـانون حرکت نیوتن بیان می کند که

$$m\frac{d^{۲}r}{dt^{۲}} = F \qquad (۹-۱)$$

یا

$$m\ddot{x} + \frac{\partial V}{\partial x} = \circ\ ,\ m\ddot{y} + \frac{\partial V}{\partial y} = \circ\ ,\ m\ddot{z} + \frac{\partial V}{\partial z} = \circ \qquad (۹-۲)$$

معادلهٔ اوّل را در (۲-۹) در نظر می گیریم؛ می توانیم بنویسیم:

$$\frac{d}{dt}\frac{\partial}{\partial \dot{x}}\left(\frac{۱}{۲}m\dot{x}^{۲}\right) + \frac{\partial V}{\partial x} = \circ \qquad (۹-۳)$$

وچون $V = V(x,y,z)$ می باشد، به صورت زیر بازنویسی می شود:

$$\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = \circ \qquad (۹-۴)$$

که در آنجا

$$L = T - V$$

T انرژی جنبشی است؛

$$T = \frac{۱}{۲}m\dot{r}^{۲} = \frac{۱}{۲}m\left(\dot{x}^{۲} + \dot{y}^{۲} + \dot{z}^{۲}\right) \qquad (۹-۶)$$

همچنین

$$\frac{\partial L}{\partial y} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = \circ\ ,\ \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = \circ \qquad (۹-۷)$$

وازمطالبی که قبلاً گفته شد تشخیص می دهیم که (۴-۹) و(۷-۹) معادلات اویلر-لاگرانژ برای

انتگرال زیر است:

$$J(x,y,z) = \int_{t_1}^{t_2} L(t,x,y,z,\dot{x},\dot{y},\dot{z})dt \qquad (۹-۸)$$

بنابراین ارتباطی بین قانون نیوتن در حرکت (۱-۹) و منحنی های بحرانی (۸-۹) برقرار کرده ایم. این نتیجه مربوط به هامیلتون (۱۸۰۵-۱۸۶۵) می باشد و معروف است به :

اصل هامیلتون

اگر یک ذرّه در بازهٔ زمانی $t_1 \le t \le t_2$ از نقطهٔ A به نقطهٔ B حرکت کند، آنگاه مسیری که ذرّه دنبال می نماید، همان است که انتگرال (۸-۹) راماناً می سازد. بدین صورت که:

$$J\partial = \delta \int L dt = 0$$

بحث بالا را می توان برای دستگاهی که از ذرّات زیاد تشکیل شده است نیز تعمیم داد و همچنین برای دستگاههای مختصات دیگر. اگر یک دستگاه با مختصات $q_1 + q_2,\dots,q_n$ توصیف شوند و انرژی جنبشی با

$$T = (q_1,\dots,q_n,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_n) \qquad (۹-۹)$$

تعریف شود و انرژی جنبشی

$$V = V(q_1,\dots.q_n) \qquad (۹-۱۰)$$

باشد، اصل هامیلتون بدین صورت بیان می شود:

$$J(q_1,\dots q_n) = \int_{t_1}^{t_2} L(t,q_1,\dots,q_n;..\dot{q}_1\dots\dot{q}_n)dt \qquad (۹-۱۱)$$

که در آنجا L *لاگرانژین* با

$$L = T-V \qquad (۹-۱۲)$$

داده می شود.

منحنی های بحرانی، جوابهای معادلات زیر هستند:

$$J_1' = \frac{\partial L}{\partial q_i} - \frac{d}{dt}\frac{dL}{d\dot{q}_i} = 0\ ,\ i = 1,\dots,n \qquad (۹-۱۳)$$

که، در مکانیک کلاسیک، به *معادلات لاگرانژ* معروف هستند. بسادگی می توان نشان داد که این معادلات کلّی هم از معادلات حرکت نیوتن هستند[1]. معادلات (۴-۹) و (۷-۹) مثال هایی از معادلات لاگرانژ هستند.

بنابراین، معادلات *لاگرانژ*، معادلات نیوتن، و اصل تغییری *هامیلتون* روشهای یکسانی برای بیان قوانین فیزیکی در دینامیک کلاسیک هستند.

۲-۹. شکل متعارف اصل هامیلتون

نتایج بخش (۶) برای بیان *شکل متعارف اصل هامیلتون* می تواند مورد استفاده قرار گیرد. همانند معادلهٔ (۳-۶) می توانیم متغیرهای زیر را تعریف کنیم:

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i}\ ,\ i = 1,\dots,n, \qquad (۹-۱۴)$$

آنگاه هامیلتون H را همانند معادلهٔ (۴-۶) با

$$H(t, q_1,\dots,q_n, p_1\dots, p_n) = \sum_{i=1}^{n} p_i q_i' - L \qquad (۹-۱۵)$$

تعریف می کنیم:

به جای (۱۱-۹) تابعک زیر را تعریف می کنیم:

$$I(q_1,\dots q_n, p_1,\dots,p_n) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{ \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i - H \right\} dt \qquad (۹-۱۶)$$

و از آنجا شرط مانایی

$$\delta \mathbf{I} = 0 \qquad (۹-۱۷)$$

معادلات متعارف زیر را به دست می دهد:

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}\ ,\quad -\frac{dp_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial q_i}\ ,\quad i = 1,2,\dots n \qquad (۹-۱۸)$$

این 2n دستگاه معادلات در مکانیک، به معادلات *هامیلتون* معروف است و $\delta I = 0$ در (۱۷-۹)

[1] - برای مثال کتاب H. Godstein ملاحظه گردد.
classical mwchanics, Addison - Wesley 1950

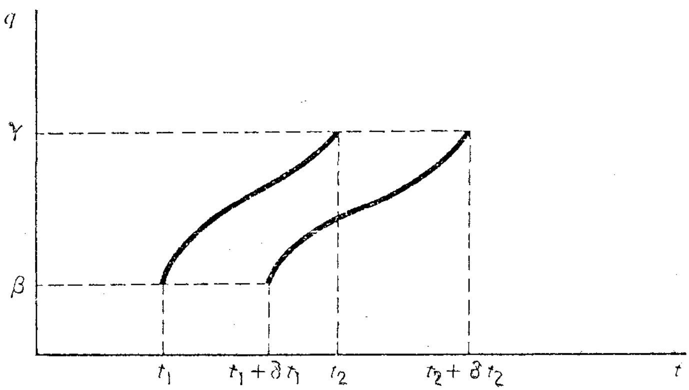
یک شکل متعارف برای اصل متغیری *هامیلتون* است.

۳-۹- اصل عمل مانایی

حال یک متغیر کلی تر از مسیر سیستم را در نظر خواهیم گرفت. در این حالت مجاز خواهیم بود که زمان گذر از حالت $q = \beta$ به حالت دیگر $q = \gamma$ را تغییر دهیم.

برای این کار، فرمول (۲۰-۷) را برای اولین متغیر به کار می گیریم، که انتگرال (۱۱-۹) و متغیر در شکل ۱۰ نتیجه می شود.

$$\delta J = \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} \varepsilon \xi i \left\{ \frac{\partial L}{\partial qi} - \frac{d}{dt}\frac{\partial L}{\partial \dot{q}i} \right\} dt - \left[\left(\sum_{i=1}^{n} \dot{q}i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}i} - L \right) \delta t \right]_{t=t_1}^{t=t_2} \qquad (۹-۱۹)$$



شکل (۱۰)

اگر q_i در معادلات حرکت *لاگرانژ* (۱۳-۹) صدق کند، با (۱۴-۹)، و (۱۵ - ۹) داریم:

$$\delta J = -\left[\left(\sum_{i=1}^{n} \dot{q}_i \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} - L \right) \delta t \right]_{t=t_1}^{t=t_2} \qquad (۹-۲۰)$$

حال فرض کنیم H روی تمام مسیرهای مجاز یک مقدار ثابت باشد. آنگاه

$$\delta J = -H(\delta t_2 - \delta t_1) = -h\delta \int_{t_1}^{t_2} dt = -\delta \int_{t_1}^{t_2} H dt. \qquad (۹-۲۱)$$

امّا با توجه به شکل متعارف J که در (۱۶-۹) داده شده، داریم:

$$\delta J = \delta \int_{t_1}^{t_2} \sum_{i=1}^{n} p_i \dot{q}_i \, dt = 0 \qquad (۹-۲۲)$$

که این را *اصل عمل مانایی* می نامند. این اصل مانند اصل *هامیلتون* مفید نیست. علت این امر در ارتباط با شرطی است که باید H روی مسیرهای مجاز، مقدار ثابت یکسانی باشد. نکته جالب در این اصل آن است که ریشه اصلی آن اصل تغییر (۱۶۹۸-۱۷۵۹) Maupertuis و لایبنیتز (۱۶۴۶-۱۷۱۶) می باشد.

۱۰- تمرینات

۱. منحنی های بحرانی تابعک زیر را با شرایط مرزی تعیین کنید:

$$J(y,z) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \left(y'^2 + z'^2 + 2yz\right) dx$$

$$y(0) = 0, \quad y\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1, \quad z(0) = 0, \quad z\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

۲. نشان دهید تابعکهای $\int_a^b F(x, y_1, \ldots y_n, y'_1, \ldots y'_n) dx$

و

$$\int_a^b \left\{F(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots y'_n) + \Psi\left(x, y_1, \ldots, y_n, y'_1, \ldots, y'_n\right)\right\} dx$$

به معادلهٔ *اویلر-لاگرانژ* تبدیل می شوند، اگر

$$\Psi = \frac{\partial \phi}{\partial x} + \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \phi}{\partial y_i} y'_i$$

باشد. که در آنجا $\phi = \phi(x, y_1, \ldots y_n)$ هر تابعی دو بار مشتق پذیر پیوسته باشد.

۳ . معادلهٔ متناظر با *هامیلتون ـ ژاکوبی* تابعک زیر را حلّ کنید:

$$J(y) = \int_{x_0}^{x_1} f(y)\left(1 + y'^2\right)^{1/2} dx$$

و با استفاده از آن منحنی های بحرانی $J(y)$ را به دست آورید.

۴ . تابعکی که به معادلهٔ *هامیلتون ـ ژاکوبی* زیر ختم می شود را بیابید:

$$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^2 = 1$$

۵ . تابعک

$$J(x) = \frac{1}{2}\int_{t_1}^{t_2} \left(m\dot{x}^2 - kx^2\right)\, dt = \int_{t_1}^{t_2} L(t, x, \dot{x})dt$$

متناظر به یک نوسانگرهمساز ساده، یعنی یک نقطهٔ مادی به جرم m که تحت تاثیر نیروی $-Kx$ است. معادلهٔ حرکت لاگرانژ را نتیجه بگیرید و معادلهٔ (متعارف) حرکت هامیلتون را به دست آورید.

۶ . تابعک

$$J(r,\theta) = \int_{t_1}^{t_2} \left\{\frac{1}{2} m\left(\dot{r} + r^2\dot{\theta}^2\right) + \frac{k}{r}\right\}dt = \int_{t_1}^{t_2} L(t, r, \theta, \dot{r}, \theta)dt$$

متناظر با حرکت صفحه ای یک نقطهٔ مادی به جرم m به وسیلهٔ نیروی $-k/r^2$ به طرف مبدا جذب می شود، که در آنجا k یک عدد ثابت است و r و θ مختصات قطبی معمولی می باشد. معادلهٔ *لاگرانژ* را پیدا کنید، هامیلتونی H را تعیین کنید و معادلهٔ حرکت *هامیلتون* را بیابید.

فصل سوّم

اصول مینیمم

۱۱. مقدمه

در بخش ۳ مشاهده گردید که شرط لازم برای این که $J(Y)$ یک مینیمم در $Y = y$ داشته باشد، یعنی

$$J(y) \leq J(Y) \quad \forall\, Y \in \Omega \tag{۱۱-۱}$$

آن است که شرط مانایی

$$\delta J = < \varepsilon\xi, J'(y) > = 0 \tag{۱۱-۲}$$

برای تمام توابع مجاز $\varepsilon\xi$ برقرار باشد. نتایج مختلف این شرط مانایی در بخشهای بعدی مورد بررسی قرار گرفته است، امّا در واقع نتیجه مانایی روشن نمی کند که $J(Y)$ یک ماکزیمم، یا یک مینیمم یا هیچ یک از آن دو را در $Y = y$ دارد. باید جملات از مرتبه دو و بالاتر را برحسب ε در نظر گرفت تا یک وجود اکسترمم را ثابت کرد و هم اکنون به برررسی این مساله می پردازیم.

در برخی از مسائل تغییرات، مساله مینیمم را می توان مستقیماً با در نظر گرفتن تفاضل

$$\Delta J = J(Y) - J(y) \tag{۱۱-۳}$$

و نشان دادن $\Delta J \geq 0$ برای هر Y متعلق به Ω حلّ کرد.

برای مثال فرض کنید:

$$J(Y) = \int_0^1 \left\{ (Y')^2 + Y^2 \right\} dx, \quad Y(0) = 0, \; Y(1) = 1 \tag{۱۱-۴}$$

منحنی بحرانی به آسانی پیدا می شود و برابر است با :

$$y = \sinh\ x / \sinh\ ۱ \qquad (۱۱-۵)$$

با بسط $J(y)$ حول این تابع نتیجه می شود که برای کلیهٔ ξ ها

$$\Delta J = J(y+\varepsilon\xi) - J(y) = \varepsilon^۲ \int_۰^۱ \left\{(\xi')^۲ + \xi^۲\right\} dx \geq ۰ \qquad (۱۱-۶)$$

برقرار است . بنابراین تابع (۵-۱۱)، $J(Y)$ را مینیمم می سازد .
به عنوان دوّمین مثال ، تابعک زیر را در نظر می گیریم :

$$J(Y) = \int_۰^۱ \left\{(Y')^۲ + (Y')^۳\right\} dx\ ,\ Y(۰) = ۰ = Y(۱) \qquad (۱۱-۷)$$

این مساله دارای منحنی بحرانی $y = ۰$ می باشد و اگر حول این تابع بسط دهیم ، داریم :

$$\Delta J = J(y+\varepsilon\xi) - J(y) = \varepsilon^۲ \int_۰^۱ \xi'^۲ dx + \varepsilon^۳ \int_۰^۱ \xi'^۳ dx \qquad (۱۱-۸)$$

حال علامت ΔJ در(۸-۱۱) مشخص نیست و بنابراین $y = ۰$ لزوماً $J(y)$ را مینیمم نمی سازد .
به عبارت دیگر ، اگر منحنی های مجاز را مقیدبه منحنی هایی بسازیم که برای آنها $\varepsilon\xi$ به اندازهٔ کافی کوچک باشد ،
به طوری که

$$\Delta J = \int_۰^۱ \varepsilon^۲\xi'^۲(۱+\xi')dx \geq ۰\ \Delta J = \int_۰^۱ \varepsilon^۲\xi'^۲(۱+\xi')dx \geq ۰ \qquad (۱۱-۹)$$

یعنی لازم داریم که :

$$\varepsilon\xi' > -۱ \qquad (۱۱-۱۰)$$

آنگاه حتماً یک مینیمم برای J در $Y = y = ۰$ به دست می آوریم .
این مثال نشان می دهد که احکام مشخص بیشتری در مورد خواص منحنی های مجاز مورد نیاز است .

دو حالت متناظر به

(۱۱-۱۱) ξ' مقید است (تغییرات ضعیف)

(۱۱-۱۲) ξ' بدون قید است (تغییرات قوی)

در کتابهای پیشرفته مورد بحث قرار گرفته اند. روش معمول این است که جملات مرتبهٔ دوّم را در عبارت $J(y+\varepsilon\xi)$ مورد بررسی قرار دهیم، به همان روشی که در حساب معمولی در بخش ۳ توصیف شد. در اینجا توجه خود را به موارد ساده ای که مستلزم بحث پیچیده نمی باشد معطوف خواهیم ساخت.

۱۲ . مسائل درجه دوّم

یک دستهٔ جالب از مسائل تغییراتی شامل تابعهای درجه دوّم

$$J(Y) = \frac{1}{2}\int_a^b \left\{\left(Y'^{2}\right)\upsilon + wY^2 - 2rY\right\}dx \qquad (۱۲-۱)$$

با

$$Y(a) = y_a \ , \ Y(b) = y_b \qquad (۱۲-۲)$$

می باشند، که در آنجا υ ، W ، r در حالت کلّی توابع از پیش تعیین شده هستند.

معادلهٔ *اویلر- لاگرانژ* متناظر با آن عبارت است از:

$$-\frac{d}{dx}\left\{\upsilon\frac{dy}{dx}\right\} + wy = r \ , \ a < x < b \qquad (۱۲-۳)$$

با

$$y(a) = y_a \, , \, y(b) = y_b \qquad (۱۲-۴)$$

که شامل یک معادله *اشتورم -لیوویل* (۳-۱۲) می باشد. اگر y منحنی بحرانی باشد که در روابط (۳-۱۲) و (۴-۱۲) صدق کند، آنگاه از (۱-۱۲) نتیجه می شود:

$$\Delta J = J(y+\varepsilon\xi) - J(y) = \frac{1}{2}\int_a^b \left\{\upsilon(\varepsilon\xi')^2 + w(\varepsilon\xi)^2\right\}dx \qquad (۱۲-۵)$$

و هدف ما بررسی علامت این عبارت است که به اصل اکسترمم منجر می شود.

برای سادگی فرض کنیم که υ و w ثابت و υ مثبت باشد.

(اگر υ منفی باشد علامت J را تغییر خواهیم داد). آنگاه

$$\Delta J = \frac{1}{2}\upsilon\varepsilon^2\int_a^b \left\{(\xi')^2 + \frac{w}{\upsilon}\xi^2\right\}dx \qquad (۱۲-۶)$$

و نتیجه ای را دنبال خواهیم کرد که تضمین کند انتگرال (۶-۱۲) دارای یک علامت است.
بنابراین فرض کنیم:

$$k(\xi) = \int_a^b \left\{ (\xi')^2 + \frac{w}{\upsilon}\xi^2 \right\} dx \quad , \quad \xi(a) = \xi(b) = 0 \tag{۱۲-۷}$$

جملهٔ شامل ξ' را به روش جزء به جزء انتگرال گیری می نماییم و به دست می آوریم:

$$k(\xi) = \int_a^b \xi \left\{ -\frac{d^2}{dx^2} + \frac{w}{\upsilon} \right\} \xi dx \tag{۱۲-۸}$$

حال $\xi(x)$ در $x = a$ و $x = b$ برابر صفر است و می توان آن را به صورت سری توابع ویژه [1] ϕ_n از $\frac{-d^2}{dx^2}$ با همان شرایط مرزی بسط داد.

$$\xi = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \phi_n , \phi_n = \sin\left\{ \frac{n\pi(x-a)}{b-a} \right\} \tag{۱۲-۹}$$

آنگاه (۸-۱۲) به صورت زیر در می آید:

$$k(\xi) = \int_a^b \sum_{m=1}^{\infty} a_m \phi_m \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2} + \frac{w}{\upsilon} \right\} a_n \phi_n dx \tag{۱۲-۱۰}$$

و چون

$$\int_a^b \phi_n \phi_m dx = 0 \qquad \text{برای} \qquad n \neq m \tag{۱۲-۱۱}$$

آنگاه داریم:

$$k(\xi) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \left\{ \frac{n^2\pi^2}{(b-a)^2} + \frac{w}{\upsilon} \right\} \int_a^b \phi_n^2 dx \tag{۱۲-۱۲}$$

۱- برای مثال، کتاب زیر را مطالعه کنید:

N.Sneddon, Fourier Series, Routledge & Kegan London (1961)

بنابراین از (۱۲-۱۲) نتیجه می شود که اگر

$$\frac{\pi^{2}}{(b-a)^{2}} + \frac{w}{\upsilon} \geq 0 \tag{۱۲-۱۳}$$

آنگاه

$$k(\xi) \geq 0 \tag{۱۲-۱۴}$$

که به نوبهٔ خود بدین معنی است که

$$\Delta J \geq 0 \tag{۱۲-۱۵}$$

و در نتیجه اصل مینیمم را داریم.

اگر $w > 0$ ، $\upsilon > 0$ آنگاه چون ΔJ در (۶-۱۲) نا منفی است، امّا از رابطه (۱۳-۱۲) معلوم می شود که W می تواند منفی باشد، زیرا

$$w \geq -\frac{\upsilon\pi^{2}}{(b-a)^{2}} \tag{۱۲-۱۶}$$

تنها چیزی است که لازم است.

نتیجه (۷-۱۲) و (۱۳-۱۲) و (۱۴-۱۲) نا مساوی مفیدی است که آن را چنین بیان می کنیم:

قضیه ۱-۱۲.

$$\int_{a}^{b} (u')^{2} dx \geq \frac{\pi^{2}}{(b-a)^{2}} \int_{a}^{b} u^{2} dx \tag{۱۲-۱۷}$$

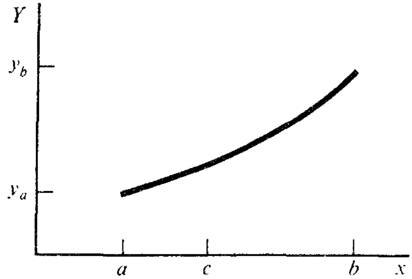
برای هر u که برای آن $u(a) = u(b) = 0$

۱۳ . برنامه ریزی دینامیک

در اینجا تئوری کلاسیک *اویلر ـ لاگرانژ* را برای یک لحظه رها می کنیم و به نظریهٔ قرن بیستم برای مسائل تغییراتی که به *برنامه ریزی دینامیک* معروف است بر می گردیم. این نام به وسیله *بلمن* [1] در سال ۱۹۵۷ معرفی شد و نظریه ای را توصیف می کند که تئوری *هامیلتون ـ ژاکوبی* [2] را در بخش ۸ به هم مربوط می سازد.

1.Bellman

2.Hamiltio-Jacobi



شکل ۱۱

برنامه ریزی دینامیک یک روش بهینه ساز قوی است که ممکن است برای هر مساله که حلّ آن یک فرایند تصمیم گیری چند مرحله ای را در بر دارد به کار رود. برای روشن شدن مطلب مسالهٔ تغییراتی بنیادی را برای انتگرال زیر در نظر می گیریم:

$$J(Y) = \int_a^b F(x, Y, Y')dx \;,\; Y(a) = y_a \;,\; Y(b) = y_b \qquad (۱۳-۱)$$

گیریم c نقطه ای در فاصله (a, b) باشد. فرض کنید در روی منحنی بحرانی y از نقطهٔ (a, y_a) تا نقطهٔ (c, y) حرکت کنیم. آنگاه برای این که بقیه منحنی در فاصلهٔ (c, b) بهینه باشد، مثلاً $J(Y)$ بر (a,b) مینیمم باشد باید انتگرال $\int_c^b F\,dx$ را مینیمم بسازیم. این مطلب برای تمام نقاط c در فاصلهٔ (a,b) به کار می رود و در این مثال یک فرایند تصمیم گیری چند مرحله ای داریم که در آن تعداد مراحل (متناظر با c) تا بی نهایت زیاد می شود.
این نظریه به صورت زیر فرموله شده است.

اصل بهینگی

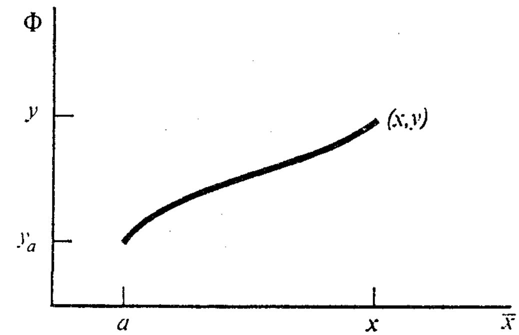
یک دنباله از تصمیمهای بهین در یک مساله فرایند تصمیم گیری چند مرحله ای دارای این خاصیت است که مرحلهٔ اوّلیه وضعیت و تصمیم گیری هر چه باشد، تصمیم گیری های باقی مانده باید متشکل از یک دنبالهٔ بهین از تصمیم ها برای بقیه مساله همراه با مرحله و حالت منتج شده از اولین تصمیم که به عنوان شرایط اوّلیه در نظر گرفته شده است، باشد. در اینجا منظور از **حالت**، نقطه (x,y) و از **مرحله**، کمان منحنی در فاصلهٔ (a,c) می باشد.

اکنون این اصل را برای بررسی مساله تغییراتی زیر به کار می بریم :

$$J(\phi) = \int_a^x F(\bar{x},\phi,\phi')d\bar{x}, \quad , \quad \phi' = \frac{d\phi}{d\bar{x}}, \qquad (۱۳-۲)$$

$$\phi(a) = y_a \quad , \quad \phi(x)y \qquad (۱۳-۳)$$

توجه کنید که نقطهٔ انتهایی راست (x,y) می باشد و Φ را به جای Y به کار برده ایم تا از اشتباه جلوگیری شود.



شکل (۱۲)

فرض کنیم که برای x و y داده شده، منحنی $\phi = \Phi$ وجود دارد که $J(\Phi)$ را مینیمم می سازد، می توانیم مینیمم را به صورت زیر تعریف کنیم :

$$S(x,y) = \min_{\phi}\left\{\int_a^x F(\bar{x},\Phi,\Phi')d\bar{x}\right\}, \qquad (۱۳-۴)$$

که همان تابع $S(x,y)$ در معادلهٔ (۴-۸) می باشد.

برای اینکه اصل بهینگی را به کار بریم فاصلهٔ $[a,x]$ را به دو قسمت تقسیم می کنیم :

$$[a,x] = [a,x-\Delta x] + [x-\Delta x,x]. \qquad (۱۳-۵)$$

Φ را در فاصلهٔ $[a,x-\Delta x]$ بهین می گیریم، در حالی که Φ در فاصلهٔ $[x-\Delta x,x]$ دلخواه

است به استثنای اینکه مقدار انتهایی $\Phi(x)=y$ می باشد.

آنگاه داریم:

$$\int_a^x F(\bar{x},\Phi,\Phi')d\bar{x}=\int_a^{x-\Delta x}F(\bar{x},\Phi,\Phi')d\bar{x}$$

$$+\int_{x-\Delta x}^{x} F(\bar{x},\Phi,\Phi')d\bar{x}=J_1+J_2 \qquad (۱۳-۶)$$

و بنابراین

$$S(x,y)\le J_1+J_2 \qquad (۱۳-۷)$$

حال با توجه به (۴-۱۳) و این که Φ بر $[a,x-\Delta x]$ بهین است،

$$J_1=S(x-\Delta x,\Phi(x-\Delta x))=S\left(x-\Delta x,y-y'\Delta x+o\left(\Delta x^2\right)\right),$$

که در آنجا

$$y=\Phi(x) \quad \text{و} \quad y'=\Phi'(x) \qquad (۱۳-۹)$$

همچنین

$$J_2=F(x,y,y')\Delta x+o\left(\Delta x^2\right) \qquad (۱۳-۱۰)$$

که در آنجا از (۹-۱۳) استفاده کرده ایم. در (۸-۱۳) و (۱۰-۱۳) تابع y' دلخواه است که مقدار آن Φ' در x می باشد. از (۷-۱۳) و (۸-۱۳) و (۱۰-۱۳)

نتیجه می شود:

$$S(x,y)\le F(x,y,y')\Delta x+o\left(\Delta x^2\right)+S\left(x-\Delta x,y-y'\Delta x+o\left(\Delta x^2\right)\right)$$

اگر طرف راست را بر روی y' مینیمم سازیم، داریم:

$$S(x,y)=\min\left\{F(x,y,y')\Delta x+o\left(\Delta x^2\right)+S\left(x-\Delta x,y-y'\Delta x+o\left(\Delta x^2\right)\right)\right\}$$

با بسط دادن آخرین جمله داریم:

$$S(x,y)=\min_{y'}\left\{F(x,y,y')\Delta x+S(x,y)-\frac{\partial S}{\partial x}\Delta x-\frac{\partial S}{\partial y}y'\Delta x+o\left(\Delta x^2\right)\right\}$$

وقتی که $\Delta x \to 0$ ، نتیجه می شود:

$$0 = \min_{y'}\left\{F(x,y,y') - \frac{\partial S}{\partial x} - y'\frac{\partial S}{\partial y}\right\} \qquad (۱۳-۱۱)$$

این معادلهٔ دیفرانسیل جزیی، پایهٔ برنامه ریزی دینامیک می باشد. قبلاً در سال ۱۹۳۵ با ملاحظاتی متفاوت به وسیلهٔ *کاراتئودری*[1] ۱۸۷۳-۱۹۵۰ به دست آمد.

اگر در (۱۱-۱۳) مینیمم روی $y' = \ell$ رخ دهد، داریم:

$$F = \frac{\partial S}{\partial x} + y'\frac{\partial S}{\partial y} \qquad \text{در} \quad y' = \ell \qquad (۱۳-۱۲)$$

و

$$\frac{\partial F}{\partial y'} = \frac{\partial S}{\partial y} \qquad \text{در} \quad y' = \rho \qquad (۱۳-۱۳)$$

معادلات (۹-۸) و (۱۰-۸) ملاحظه گردد.

حال $P = \dfrac{\partial F}{\partial y'}$ و بنابراین (۱۲-۱۳) و (۱۳-۱۳) نتیجه می دهد:

$$F = \frac{\partial S}{\partial x} + y'\frac{\partial F}{\partial y'}$$

و یا

$$\frac{\partial S}{\partial x} + H\left(x, y\,,\ \frac{\partial S}{\partial y}\right) = 0 \qquad (۱۳-۱۴)$$

که در آنجا H هامیلتونی است. معادلهٔ (۱۴-۱۳) معادلهٔ *هامیلتون ـ ژاکوبی* می باشد که در بخش ۸ باروش دیگری به دست آمد.

۱۴ . مساله های برابر - محیطی

در مثال (۴-۱) یکی از قدیمی ترین مسائل تغییراتی مربوط به مساحت محصور بین منحنی و فاصله ای از محور x (شکل ۳ ملاحظه گردد) را توصیف نمودیم. مساله به این صورت بود که تابع

1.Cratheodory

Y=y را پیدا کنیم به طوری که مساحت

$$J(Y) = \int_b^a Y dx \quad , \quad Y(\circ) = Y(a) = \circ \qquad (۱۴-۱)$$

ماکزیمم باشد به شرطی که طول منحنی ثابت باشد، یعنی

$$k(Y) = \int_\circ^a \sqrt{\left(1 + Y'^{۲}\right)}\, dx = \text{ثابت} = K \qquad (۱۴-۲)$$

این مساله برابر - محیطی مثالی است از یک مساله کلی در ارتباط با پیدا کردن تابعی مانند Y =y به طوری که

$$J(Y) = \int_a^b F(x, Y, Y')dx, \quad Y(a) = y_a, \quad Y(b) = y_b \qquad (۱۴-۳)$$

یک اکسترمم باشد در صورتی که قید انتگرالی زیر را داشته باشیم:

$$K(Y) = \int_a^b G(x, Y, Y')dx = \qquad \text{ثابت} \qquad (۱۴-۴)$$

مساله (۳-۱۴) و (۴-۱۴) را *اویلر* حل کرد.

فرض کنیم Y=y(x) منحنی بحرانی باشد ومنحنی های مجاز به شکل زیر را در نظر می گیریم:

$$Y(x) = y(x) + \varepsilon_۱ \xi(x) + \varepsilon_۲ \eta(x) \qquad (۱۴-۵)$$

که در آنجا ξ و η در x=a وx=b صفرهستند به طوری که Y(x) در شرایط مرزی (۳-۱۴) صدق می کند . آنگاه

$$J(y + \varepsilon_۱\xi + \varepsilon_۲\xi) = J(y) + < \varepsilon_۱\xi + \varepsilon_۲\eta, J'(y) > + o(\varepsilon^۲) \qquad (۱۴-۶)$$

و

$$K(y + \varepsilon_۱\xi + \varepsilon_۲\eta) = K(y) + < \varepsilon_۱\xi + \varepsilon_۲\eta, K'(y) > + o(\varepsilon^۲) \qquad ۱۴-۷)$$

با به کار بردن روش مضربهای لاگرانژ ، قرار می دهیم:

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_۱}\left\{\lambda_\circ J(y + \varepsilon_۱\xi + \varepsilon_۲\eta) + \lambda_۱ K(y + \varepsilon_۱\xi + \varepsilon_۲\eta)\right\} = \circ \ \text{برای} \ \varepsilon_۱ = \varepsilon_۲ = \circ \quad (۱۴-۸)$$

و

$$\frac{\partial}{\partial \varepsilon_2}\{\lambda_0 J(y+\varepsilon_1\xi+\varepsilon_2\eta)+\lambda_1 K(y+\varepsilon_1\xi+\varepsilon_2\eta)\}=0 \quad \text{برای} \quad \varepsilon_1=\varepsilon_2=0 \qquad (۱۴-۹)$$

که در آنجا λ_0 , λ_1 پارامترهای مجهول در این مرحله می باشند. از (۱۴-۶) و (۱۴-۷) نتیجه می شود:

$$\lambda_0 <\xi, J'(y)> + \lambda_1 <\xi, K'(y)> = 0 \qquad (۱۴-۱۰)$$

و

$$\lambda_0 <\eta, J'(y)> + \lambda_1 <\eta, K'(y)> = 0 \qquad (۱۴-۱۱)$$

حال از (۱۴-۱۰) نتیجه می شود که λ_0/λ_1 مستقل از η است. چون η در (a,b) دلخواه است از معادلهٔ (۱۴-۱۱) نتیجه می شود:

$$\lambda_0 J'(y)+\lambda_1 K'(y)=0 \qquad (۱۴-۱۲)$$

اگر فرض کنیم که y یک منحنی بحرانی $k(Y)$ نباشد، یعنی $K'(y)\neq 0$ ، از معادلهٔ (۱۴-۱۲) نتیجه می شود که y جواب معادلهٔ زیر است:

$$J'(y)+\lambda K'(y)=0 \quad (\lambda = \lambda_1/\lambda_0), \qquad (۱۴-۱۳)$$

یعنی

$$\frac{\partial}{\partial y}(F+\lambda G)-\frac{d}{dx}\frac{\partial}{\partial y'}(F+\lambda G)=0 \qquad (۱۴-۱۴)$$

این *قانون اویلر* است. معادلهٔ (۱۴-۱۴) در حالت کلّی یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبه دوّم است و بنابراین دارای دو مقدار ثابت انتگرال گیری می باشد که پارامتر مجهول λ و ثابتها با استفاده از شرایط مرزی $y(a)=y_a$ و $y(b)=y_b$ و قید (۱۴-۴) تعیین می شوند.

البته، آنچه که در اینجا نتیجه گرفته ایم شرط مانایی است. خاصیت اکسترمم معمولاً از صورت مساله آشکار است.

مثال ۱-۱۴. اکنون قانون *اویلر* را برای مسالهٔ برابر- محیطی در معادلات (۱۴-۱) ، (۱۴-۲) به کار

می بریم. برای آن حالت داریم:

$$F = Y \quad , \quad G = \sqrt{\left(1 + Y'^{2}\right)} \tag{۱۴-۱۵}$$

بنابر (۱۴-۱۴) برای

$$F + \lambda G = Y + \lambda \sqrt{\left(1 + Y'^{2}\right)} \tag{۱۴-۱۶}$$

به معادلهٔ *اویلر* احتیاج داریم.

با قرار دادن (۱۴-۱۶) در (۱۴-۱۴) به دست می آوریم:

$$1 - \lambda \frac{d}{dx}\left\{ y'\left(1 + y'^{2}\right)^{-\frac{1}{2}} \right\} = 0$$

با یک بار انتگرال گیری، نتیجه می شود:

$$x - \lambda y'\left(1 + y'^{2}\right)^{-\frac{1}{2}} = C_1$$

که در آنجا C_1 ثابت انتگرال گیری است. با حل معادلهٔ بر حسب y' و انتگرال گیری مجدد، داریم:

$$\left(x - C_1\right)^{2} + \left(y - c_2\right)^{2} = \lambda^{2} \tag{۱۴-۱۷}$$

که در آنجا C_2 ثابت دیگر انتگرال گیری است. منحنی های (۱۴-۱۷) کمان هایی از دایره هایی به مرکز $\left(C_1, C_2\right)$ و شعاع λ می باشند. مقادیر C_1, C_2 و λ با شرایط

$y(0) = y(a) = 0$ و $\int_0^a \left(1 + y'^{2}\right)^{\frac{1}{2}} dx = k.$ تعیین می شوند

مثال ۲-۱۴ . یک مسالهٔ مقدار ویژه

یک مسالهٔ جالب مقید دیگر وقتی پیش می آید که بخواهیم انتگرال

$$J(Y) = \int_0^1 \left(Y'\right)^{2} dx \quad , \quad Y(0) = Y(1) = 0 \tag{۱۴-۱۸}$$

را مینیمم بنماییم، مشروط بر این که

$$k(Y) = \int_{0}^{1} Y^{2} dx = 1 \qquad (14\text{-}19)$$

معادلهٔ *اویلر* (۱۴-۱۴) برای این مساله به صورت:

$$y'' - \lambda y = 0 \quad , \quad 0 < x < 1 \qquad (14\text{-}20)$$

می باشد، برای اینکه در شرایط مرزی صدق کند، داریم:

$$y = A \sin n\pi x \quad , \quad n = 1, 2, \ldots, \qquad (14\text{-}21)$$

که در آنجا

$$-\lambda = n^{2}\pi^{2} \quad , \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (14\text{-}22)$$

مضرب ساز λ نقش مقدار ویژه را در (۱۴-۲۰) دارد. برای توابع (۱۴-۲۱)، قید (۱۴-۱۹) ملزم می دارد. که $A = \sqrt{2}$. آنگاه

$$J(y) = A^{2}\int_{0}^{1} n^{2}\pi^{2} \cos^{2} n\pi x \, dx = n^{2}\pi^{2}, \quad n = 1, 2, \ldots \qquad (14\text{-}23)$$

بنابراین کوچکترین مقدار $J(y)$ برابر است با:

$$J(y) = \pi^{2}$$

که متناظر با $n = 1$ است و $y = \sqrt{2} \sin \pi x$ می باشد.

۱۵ . تمرینات

۱ . منحنی ای را پیدا کنید که دو نقطهٔ (۱، ۱-) و (۱، ۱) را به هم وصل کند و تابع

$$J(y) = \int_{-1}^{1} \left(x^{2} y'^{2} + 12 y^{2}\right) dx$$

را مینیمم سازد.

۲ . منحنی ای را پیدا کنید که دو نقطهٔ (۳، ۱) و (۵، ۲) را به هم متصل کند و تابع

$$J(y) = \int_{1}^{2} y'\left(1 + x^{2} y'\right) dx$$

را مینیمم سازد.

۳ . نشان دهید که $y = \sin 2x - 1$ یک ماکزیمم (قوی) برای تابع

$$J(y) = \int_{0}^{\pi/4} \left(4y^{2} - y'^{2} + 8y\right) dx \quad \text{و} \quad y(0) = -1 , \quad y\left(\frac{\pi}{4}\right) = 0$$

فراهم می سازد.

۴ . منحنی ای پیدا کنید که تابع

$$J(y)=\int_0^1\left(y'^2+y^2+2ye^{2x}\right)dx$$

را مینیمم سازد در صورتی که

$$y(1)=\frac{1}{3}e^2\ ,\ y(0)=\frac{1}{3}$$

۵ . منحنی های بحرانی مساله برابر ـ محیطی

$$J(y)=\int_0^1\left(y'^2+x^2\right)dx\quad,\quad y(0)=y(1)=0$$

با قید انتگرالی $\int_0^1 y^2dx=2$ را پیدا کنید.

۶ . تابعی را پیدا کنید که تابعک

$$J(y)=\int_0^1 y''^2dx\ ,\ y(0)=0\quad,\quad y(1)=1$$

را مینیمم سازد در صورتی که $\int_0^1 ydx=\frac{1}{3}$

۷ . تابع y را پیدا کنید که انتگرال زیر را ماکزیمم نماید،

$$J(y)=-\int_{-\infty}^{\infty}y\ \log\ y\ dx\quad(y\ge 0)$$

در صورتی که دو قید انتگرالی

$$\int_{-\infty}^{\infty}y\ dx=1\ ,\ \int_{-\infty}^{\infty}x^2y\ dx=\sigma^2$$

داشته باشیم که در آنجا $y\to 0$ وقتی که $x\to\pm\infty$ ، این مساله در تئوری احتمال پیش می آید که در آنجا y چگالی احتمال و $J(y)$ مقداری است که به انتروپی موسوم است.

۸ . مسالهٔ برابر- محیطی را برای $J(y)=\int_0^1 y''^2dx$ بررسی کنید؛ در صورتی که داشته باشیم:

$$y(0)=0\quad,\quad y(1)=1\ ,\ K(y)=\int_0^1\left(1+y'^2\right)^{1/2}dx=2$$

فصل چهارم

روشهای مستقیم

۱۶ . روش ریلی- ریتز[1]

تا به حال در این کتاب برخورد ما با مسائل تغییراتی چنین بود که آنها را به مسائلی در معادلات دیفرانسیل برگردانیم، (نظریه اویلر - لاگرانژ) و سپس آنها را برای منحنی های بحرانی حل کنیم. اما برای بسیاری از مسائل معادلات *اویلر- لاگرانژ* دقیقاً قابل حل نمی باشد و بنابراین روش کلاسیک خیلی مفید نیست. مثلاً، مساله تغییراتی برای

$$J(Y)=\int_{۰}^{۱}\left\{\frac{۱}{۲}(Y')^{۲}+e^{Y}\right\}dx \qquad Y(۰)=۰ \quad , \quad Y(۱)=۱ \tag{۱۶-۱}$$

دارای معادله *اویلر - لاگرانژ*

$$y''=e^{y} \quad , \quad ۰<x<۱ \tag{۱۶-۲}$$

با شرایط مرزی

$$y(۰)=۰ \quad , \quad y(۱)=۱ \tag{۱۶-۳}$$

خواهد بود و این معادلهٔ دیفرانسیل غیر خطی را نمی توان دقیقاً حل کرد و این وضعیت باعث گسترش روشهای تغییر مستقیم شده است که در آن مستقیماً با تابعک $J(Y)$ کار خواهد شد تا با معادلهٔ دیفرانسیل *اویلر - لاگرانژ*.

یکی از روشهای مستقیم که به طور وسیعی به کار می رود مرهون زحمات *ریلی* و *ریتز* می باشد که در اینجا به تشریح آن خواهیم پرداخت.

این روش را در یک مسالهٔ تغییراتی سادهٔ درجه دوم توضیح خواهیم داد، هر چند که نظریه های آن

1-Rayieigh- Ritz

دارای کاربرد های وسیعی می باشد.

مساله را برای انتگرال

$$J(Y)=\int_{0}^{1}\left\{\frac{1}{2}(Y')^{2}+\frac{1}{2}wY^{2}-qY\right\}dx \ , \quad Y(0)=Y(1)=0 \qquad (16-4)$$

که در آنجا w را نا منفی در نظر خواهیم گرفت. از نتایج بخش ۱۲ چنین بر می آید که این انتگرال دارای یک مینیمم است و منحنی بحرانی در معادلهٔ زیر صدق می کند:

$$\frac{-d^{2}y}{dx^{2}}+wy=q \ , \quad 0<x<1 \qquad (16-5)$$

$$y(0)=y(1)=0 \qquad (16-6)$$

حال معادلهٔ *اویلر - لاگرانژ* (۵-۱۶) را رها و کار را بر اصل مینیمم متمرکز می نماییم.

$$J(y)\le J(Y) \ , \quad Y\in\Omega \qquad (16-7)$$

یعنی

$$J(y)=\min_{Y\in\Omega} J(Y) \qquad (16-8)$$

در روش *ریلی* - *ریتز* $J(Y)$ را برای تمام توابع مجاز فضای Ω مینیمم نمی سازیم، بلکه برای یک فضای متناهی R_n از توابع مینیمم خواهیم ساخت. آنگاه داریم:

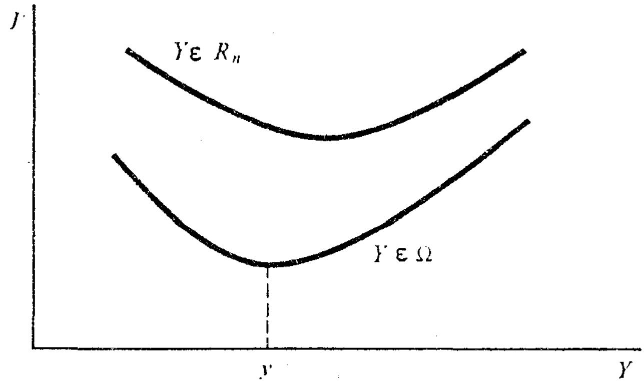
$$J(y)=\min_{Y\in\Omega} J(Y)\le \min_{Y\in R_n} J(Y). \qquad (16-9)$$

بنابراین نظریه این است که مقدار طرف راست (۹-۱۶) را دقیقاً محاسبه کنیم و در نتیجه یک کران بالا برای $J(y)$ به دست خواهیم آورد.

در عین حال تابع مینیمم شونده Y در R_n یک تقریب برای تابع واقعی y می باشد.

برای مثال می توانیم با $n=1$ شروع کنیم و فرض کنیم:

$$Y_{1}=\alpha_{1}x(1-x) \qquad (16-10)$$



شکل ۱۳

که در شرایط مرزی (۴-۱۶) صدق می کند، که در آنجا α_1 یک پارامتر است. تابع J_1 را در $J(Y)$ قرار می دهیم که نتیجه تابعی از α_1 خواهد شد، $J(\alpha_1)$ ، آنگاه با حل معادلهٔ

$$\frac{dJ}{d\alpha_1} = \tag{16-11}$$

$J(\alpha_1)$ را مینیمم می سازیم. مقدار بهینه α_1 و به دست آمده را در $J(\alpha_1)$ قرار می دهیم و از اینجا یک کران بالا برای $J(y)$ به دست می آید.

$$J(y) \le \min_{Y_1} J(Y_1) \tag{16-12}$$

این فرایند را می توان ادامه داد، مثلاً با انتخاب

$$Y_2 = \alpha_1 x(1-x) + \alpha_2 x^2(1-x^2) \tag{16-13}$$

و با تعیین مقادیر بهینه برای α_1 α_2 از معادلات

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_1} = 0 \quad , \quad \frac{\partial J}{\partial \alpha_2} = 0 \tag{16-14}$$

از اینجا نتیجه می شود که:

$$J(y) \le \min_{Y_2} J(Y_2) \le \min_{Y_1} J(Y_1) \tag{16-15}$$

نا مساوی اخیر در (۱۵-۱۶) به این دلیل به وجود می آید که $Y_۲$ نمی تواند کران بدتری از $Y_۱$ بدهد زیرا برای $\alpha_۲ = ۰$ ، $Y_۲ = Y_۱$ و عموماً $Y_۲$ کران بهتری خواهد داد.
به طور کلی می توانستیم یک تابع مانند

$$Y_n = \sum_{i=۱}^{n} \alpha_i \Phi_i(x) \qquad (۱۶-۱۶)$$

بگیریم که در آنجا Φ_i توابع معلومی باشند و پارامترهای α_i از روابط زیر تعیین شوند:

$$\frac{\partial J}{\partial \alpha_i} = ۰ \qquad \text{و} \qquad i = ۱,\ldots,n \qquad (۱۶-۱۷)$$

از اینجا یک کران بالا برای $J(y)$ فراهم می شود و همین طور یک تقریب Y_n برای مقدار واقعی y به دست می آید.
بدیهی است که همین روش برای یک اصل ماکزیمم به کار خواهد رفت، مقادیر تقریبی J کرانهای پایین را در این حالت ایجاد می کند.
اگر بتوان این فرایند را برای $n \to \infty$ ادامه داد، شهوداً می توان انتظار داشت که تحت شرایط خاصی:

$$J(y) = \lim_{n\to\infty} J(Y_n) \qquad (۱۶-۱۸)$$

و این که

$$\lim_{n\to\infty} Y_n = y \qquad (۱۶-۱۹)$$

جواب دقیق مسالهٔ تغییرات است.
چنین نتیجه ای را می توان ثابت کرد و این پایهٔ تمام روشهای مستقیم می باشد. نتیجه را صرفاً به صورت زیر بیان می کنیم. برای آن که مساله معنی داشته باشد باید فرض کنیم که توابعی در Ω وجود دارند که برای آنها $J(y) < +\infty$ و همچنین

$$\inf_{Y} J(Y) = k > -\infty$$

آنگاه یک دنبالهٔ نا متناهی از توابع $\{Y_n\}$ وجود دارد به طوری که

$$\operatorname{Lim}_{n\to\infty} j(Y_n) = k$$

اگر y حد دنباله $\{Y_n\}$ باشد و اگر بتوانیم بنویسیم:

$$J\left(\lim_{n\to\infty} Y_n\right) = \lim_{n\to\infty} J(Y_n)$$

بنابراین $$J(y) = \lim_{n\to\infty} J(Y_n)$$

آنگاه $$J(y) = k$$

و y جواب مسالهٔ تغییرات است. همچنین توابع مینیمم کنندهٔ دنبالهٔ $\{Y_n\}$ را می توان جوابهای تقریبی معادله دیفرانسیل معادلهٔ *(اویلر-لاگرانژ)* وابسته به این مسالهٔ دانست.

مثال ۱-۱۶. در معادلهٔ ۴-۱۶ فرض کنید: $w = ۱$, $q = ۱$ باشد و تابع مجاز را به صورت

$$Y_۱ = \alpha x(۱-x) = \alpha\Phi \qquad (۱۶-۲۰)$$

بگیرید. اگر اینها را در (۴-۱۶) قرار دهیم نتیجه می شود:

$$J(Y_۱) = \frac{۱}{۲}A\alpha^۲ - B\alpha \qquad (۱۶-۲۱)$$

که در آنجا $$A = \int_۰^۱\left[(\Phi')^۲ + \Phi^۲\right]dx = \frac{۱۱}{۳۰}$$

و $$B = \int_۰^۱ \Phi dx = \frac{۱}{۶}$$

مقدار مینیمم J در (۲۱-۱۶) وقتی حاصل می شود که α را از رابطهٔ $\frac{\partial J}{\partial \alpha} = ۰$ تعیین کنیم، یعنی

$$\alpha = \frac{B}{A} = \frac{۵}{۱۱} \qquad (۱۶-۲۲)$$

اگر این مقادیر را در (۲۱-۱۶) قرار دهیم، داریم:

$$\min_{\alpha} J(Y_۱) = -\frac{B^۲}{۲A} = -\frac{۵}{۲A} = -\frac{۵}{۱۳۲} = -۰/۰۳۷۸۷۹ \qquad (۱۶-۲۳)$$

نتیجه (۲۳-۱۶) یک کران بالا برای $J(y)$ می باشد و

$$Y_1 = \frac{5}{11}x(1-x)$$

یک تقریب ساده تغییرات برای تابع دقیق y است.

۱۷ . اصول تغییرات متمم

انتگرال در معادلهٔ (۱۶-۴) خاصیت مینیمم دارد در صورتی که

$$J(y) \le J(Y)$$

و در مثال (۱ـ۱۶) $J(Y)$ را برای یک تابع ساده $Y = \alpha x(1-x)$ محاسبه کردیم. به این ترتیب یک کران بالا برای $J(y)$ به دست آوردیم. اما در واقع اطلاعی در مورد دوری کران $J(Y)$ از $J(y)$ در دست نیست. برای این که یک تخمین دقیق از $J(y)$ به دست آوریم به اطلاعات بیشتری نیاز داریم مثلاً علاوه بر کران بالا یک کران پایین به طوری که

$$\text{کران پایین} \le J(y) \le \text{کران بالا} \qquad (۱۷-۱)$$

آنگاه هر قدر این کرانها به هم نزدیک باشند، تخمین ما از $J(y)$ بهتر خواهد بود. بنابراین سؤال این است که آیا می توان در این وضعیت یک کران پایین پیدا کرد؟.

در اوایل قرن بیستم نتایج منفردی مربوط به این سؤال به طور عمده در تئوری کشسانی و الکتریسته پیدا شد. در اینجا توصیف یکسانی در مورد این سؤال مطرح خواهد شد که یکی از آنها بر مبنای تئوری متعارف بخش ۶ می باشد.

بحث را در مورد انتگرال در معادلهٔ (۱۶-۴) انجام خواهیم داد، یعنی؛

$$J(Y) = \int_0^1 \left\{ \frac{1}{2}(Y')^2 + \frac{1}{2}wY^2 - qY \right\} dx \ , \ Y(0) = Y(1) = 0 \qquad (۱۷-۲)$$

در اینجا

$$F = \frac{1}{2}(Y')^2 + \frac{1}{2}wY^2 - qY \qquad (۱۷-۳)$$

و با معرفی متغیر

$$P = \frac{\partial F}{\partial Y'} = Y' \tag{۱۷-۴}$$

فرم متعارف و هامیلتونی

$$H(P, Y) = PY' - F = \frac{۱}{۲}P^{۲} - \frac{۱}{۲}wY^{۲} + qY \tag{۱۷-۵}$$

به دست می آید.
آنگاه به جای $J(Y)$ در (۲-۱۷)، تابعک زیر را در نظر می گیریم:

$$I(P, Y) = \int_{۰}^{۱}\{PY' - H(P, Y)\}dx - [PY]_{۰}^{۱}, \tag{۱۷-۶}$$

$$= \int_{۰}^{۱}\{-P'Y - H(P, Y)\}dx, \tag{۱۷-۷}$$

که در آنجا جملهٔ مرزی در (۶-۱۷) اضافه شده است تا به شرایط $y(۰) = y(۱) = ۰$ منجر شود (تمرین ۳ در بخش ۲۰ ملاحظه گردد). از تئوری متعارف در بخش ۶ چنین بر می آید که $I(P, Y)$ در p, y مانا است و در آنجا p و y جوابهای معادلات زیر هستند:

$$\frac{dY}{dx} = \frac{\partial H}{\partial P} = P, \tag{۱۷-۸}$$

$$-\frac{dp}{dx} = \frac{\partial H}{\partial Y} = -wY + q, \tag{۱۷-۹}$$

با

$$Y(۰) = ۰\ ,\ \ Y(۱) = ۰ \tag{۱۷-۱۰}$$

حال، تابعک $I(P, Y)$ ممکن است به دو طریق به کار رود.

الف) قرار می دهیم:

$$J(Y) = I(P(Y), Y) \tag{۱۷-۱۱}$$

به وسیلهٔ (۶-۱۷)، که در آنجا $P(Y)$ از حل اولین معادلهٔ متعارف (۸-۱۷) به دست می آید، یعنی

$$P(Y) = Y' \qquad (۱۷-۱۲)$$

و از اینجا نتیجه می شود:

$$J(Y) = \int_{\circ}^{۱}\left\{\frac{۱}{۲}(Y')^{۲} + \frac{۱}{۲}wY^{۲} - qY\right\}dx \qquad (۱۷-۱۳)$$

اگر شرایط

$$Y(\circ) = Y(۱) = \circ \qquad (۱۷-۱۴)$$

را اعمال کنیم تابعک $J(Y)$ در (۱۳-۱۷) همان است که در (۲-۱۷) می باشد؛ همان طور که انتظار می رفت. زیرا طرز عمل در اینجا مساله را از شکل متعارف به شکل *اویلر - لاگرانژ* تبدیل می کند.

اگر

$$w \geq \circ \qquad (۱۷-۱۵)$$

می دانیم که (مانند بخش ۱۲ و ۱۶) $J(Y)$ در اصل مینیمم صدق می کند:

$$J(y) \leq J(Y) \qquad (۱۷-۱۶)$$

همچنین از تعریف J در (۱۱-۱۷) چنین بر می آید که

$$J(y) = I(p, y), \qquad (۱۷-۱۷)$$

که در آنجا y, p توابع بحرانی هستند، یعنی جوابهای (۸-۱۷) و (۱۰-۱۷).

ب) روش دوم کاربرد $I(p,y)$ بدین صورت است که Y را حذف کنیم، با تعریف

$$G(p) = I(P, Y(P)) \qquad (۱۷-۱۸)$$

به وسیلهٔ (۷-۱۷)، که در آنجا $Y(P)$ جواب دومین معادلهٔ متعارف (۹-۱۷) است، یعنی

$$Y(p) = \frac{1}{w}(q + p'), \qquad (17-19)$$

که در آنجا $w \neq 0$ است . از اینجا داریم :

$$G(P) = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left\{P^2 + \frac{1}{w}(q + P')^2\right\}dx. \qquad (17-20)$$

اگر p ، منحنی بحرانی را نشان دهد که در معادلهٔ (۱۷-۸) و (۱۷-۹) صدق می کند، آنگاه از (۱۷-۲۰) داریم :

$$\Delta G = G(p + \varepsilon\eta) - G(p) = -\frac{1}{2}\int_0^1 \left\{(\varepsilon\eta)^2 + \frac{1}{w}(\varepsilon\eta')^2\right\}dx,$$

جملهٔ خطی برحسب ε از سمت راست صفر است چون $\delta G = 0$ است .
بنابراین ، اگر

$$w > 0 \qquad (17-21)$$

ملاحظه می شود که اصل ماکزیمم برقرار است ، یعنی

$$G(P) \leq G(p) \qquad (17-22)$$

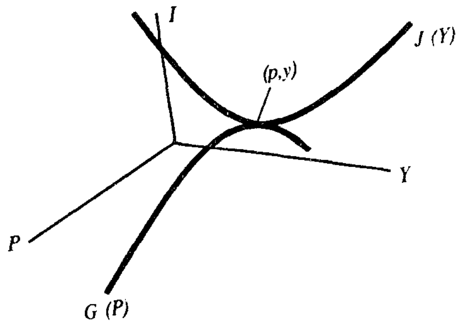
که در آنجا p تابع بحرانی است . همچنین ، از تعریف G در (۱۷-۱۸) داریم :

$$G(p) = I(p, y). \qquad (17-23)$$

بنابراین (۱۷-۲۲) یک کران پایین برای $I(p, y)$ فراهم می سازد. بنابراین با ترکیب (۱۷-۱۶) و (۱۷-۲۲) داریم :

$$G(P) \leq G(p) = I(p, y) = J(y) \leq J(Y) \qquad (17-24)$$

که در آنجا $w > 0$. چون J و G کرانهای متقابل برای $I(p, y)$ فراهم می سازند، گفته می شود که *اصول تغییراتی متمم* را ایجاد می کنند .



شکل (۱۴)

در (۲۴-۱۷)، Y هر تابع مجازی است که در $Y(\circ) = Y(\text{۱}) = \circ$ صدق می کند، و p هر تابع مجازی است که لازم نیست در شرط مرزی صدق کند.

چون توابع دقیق y, p با رابطهٔ $p = \frac{dy}{dx}$ به هم بستگی دارند، معادلهٔ (۸-۱۷ ملاحظه گردد)، مفید خواهد بود که p را به شکل زیر در نظر بگیریم؛

$$p = \frac{dv}{dx} \qquad (\text{۱۷-۲۵})$$

که در آنجا V تقریبی است برای تابع y . آنگاه از (۲۴-۱۷) نتیجه می شود:

$$G(v') \le I(p,y) \le J(Y) \quad (w > \circ). \qquad (\text{۱۷-۲۶})$$

در اینجا $J(Y)$ با (۱۳-۱۷) و (۱۴-۱۷) داده شده است، $G(V')$ با (۲۰-۱۷) تعیین می شود، با $I(p,y)$

$$I(p,y) = J(y) = -\frac{\text{۱}}{\text{۲}}\int_\circ^\text{۱} qy\, dx, \qquad (\text{۱۷-۲۷})$$

داده شده است که در آنجا، در تعیین (۲۷-۱۷)، از حقیقتی که y در (۸-۱۷) و (۱۰-۱۷) صدق می کند استفاده کرده ایم که معادل رابطهٔ زیر است:

$$-\frac{d^\text{۲}y}{dx^\text{۲}} + wy = q, \quad \circ < x < \text{۱}, \qquad (\text{۱۷-۲۸})$$

با

$$Y(0) = Y(1) = 0$$

مثال ۱-۱۷ . گیریم در (۲۰-۱۷)، $q = 1$ ، $w = 1$ ، و تابع مجاز

$$V_1 = \beta x(1-x) = \beta\Phi. \tag{۱۷-۲۹}$$

را انتخاب می کنیم . با قرار دادن این در (۲۰-۱۷) به دست می آوریم :

$$G(V_1') = -\frac{1}{2}A\beta^2 - B\beta - C, \tag{۱۷-۳۰}$$

که در آنجا

$$A = \int_0^1 \{(C\Phi')^2 + (\Phi'')^2\} dx = \frac{13}{3}$$

$$B = \int_0^1 \Phi'' dx = -2,$$

و

$$C = \frac{1}{2}$$

مقدار ماکزیمم G در (۳۰-۱۷) وقتی حاصل می شود که β از معادلهٔ $\frac{\partial G}{\partial \beta} = 0$ تعیین شود، یعنی

$$\beta = -\frac{B}{A} = \frac{6}{13} \tag{۱۷-۳۱}$$

با قرار دادن این مقدار در (۳۰-۱۷) نتیجه می شود :

$$\max_{\beta} G(V_1') = \frac{B^2}{2A} - C = -\frac{1}{26} = -0/038461. \tag{۱۷-۳۲}$$

نتیجه (۳۲-۱۷) یک کران پایین برای $I(p,y)$ یا $J(y)$ است که برای $q = 1$ با (۲۷-۱۷) داده شده است . اگر این را با نتیجهٔ کران بالای مثال ۱۶-۱ در (۲۳-۱۶) ترکیب کنیم، داریم :

$$-0/038461 \le J(y) \le -0/037879 \tag{۱۷-۳۳}$$

که جواب $J(y)$ از مساله تغییراتی را در فاصلهٔ ۲ درصد جایگزین می نماید . دقت بالاتر را می توان

با کاربرد توابع تغییراتی بهتر نظیر آنها که در معادلهٔ (۳-۱۶) آمده است، به دست آورد.

با حل (۲۸-۱۷) و به کاربردن نتیجهٔ (۲۷-۱۷) ممکن است مقدار واقعی $J(y)$ را در این مثال پیدا کنیم (جواب تمرینهای فصل ۴ ملاحظه گردد). هرچند جوابهای دقیق مسائل تغییراتی در حالت کلی در دسترس نمی باشد ولی داشتن کرانهای بالا و پایین برای آنها از اهمیت ویژه ای برخوردارست.

۱۸. مسائل مقدار مرزی

بسیاری از مسائل در معادلات دیفرانسیل ابتدا به عنوان مسائل مرزی بیان شده اند، نظیر مسالهٔ

$$y'' = e^y \ , \ \ ۰ < x < ۱.$$

$$y(۰) = ۰ \ , \ \ y(۱) = ۱$$

که در بخش ۱۶ ذکر شد. بیشتر این مسائل مرزی را نمی توان به طور دقیق حل کرد، بنابراین توسعه روشهای جدید بررسی آنها دارای اهمیت می باشد. یک روش این است که مساله مقدار مرزی را به مساله تغییراتی برگردانیم و در صورت امکان معادلهٔ دیفرانسیل داده شده را به صورت معادلهٔ *اویلر-لاگرانژ* مسالهٔ تغییراتی در نظر گرفته شود که بعد آن را با کاربرد روشهای مستقیم حل کنیم. تابع تغییراتی Y در این صورت، تقریبی برای مقدار واقعی y که جواب مساله مقدار مرزی است، می باشد.

بعلاوه، مقدار واقعی تابعک $J(y)$ از مساله تغییراتی ممکن است مورد نظر باشد و کرانها برای آن مفید خواهند بود. اگر اصول متممی را بتوان یافت که منجر به کرانهای بالا و پائین برای $J(y)$ شوند، ممکن است نتایج بیشتری به دست آید.

روشی که در فوق خلاصه شد، می توان به صورت زیر خلاصه نمود:

معادله دیفرانسیل مسالهٔ $D(y) = ۰$	⟵	معادله $D(y) = ۰$ را به عنوان معادلهٔ *اویلر- لاگرانژ* یا *معادلات متعارف* مشخص کنید:
		↓
روش مستقیم را استفاده کنید تا جواب تقریبی را برای Y به دست آورید	⟵	تابعک متناظر $J(Y)$ یا $I(p,y)$ را انتخاب کنید

برای این که این نظریه را نشان دهیم مسالهٔ مقدار مرزی در معادلهٔ (۳-۱۲) را در نظر می گیریم:

$$-\frac{d}{dx}\left\{\upsilon\frac{dy}{dx}\right\}+wy=r\ ,\quad \circ<x<\text{۱} \qquad (\text{۱۸-۱})$$

با

$$y(\circ)=\circ \qquad y(\text{۱})=\circ \qquad (\text{۱۸-۲})$$

معادلهٔ (۱-۱۸) برای تابعک $J(Y)$ در معادلهٔ (۱-۱۲) معادلهٔ *اویلر -لاگرانژ* است. به هر حال فرض کنیم که بخواهیم یک صورت *متعارف* به دست آوریم که بعداً تابعک های متمم J و G را نتیجه بگیریم.

معادلهٔ (۱-۱۸) را به صورت زیر می نویسیم:

$$\frac{dY}{dx}=\frac{\text{۱}}{\upsilon}P=\frac{\partial H}{\partial P}, \qquad (\text{۱۸-۳})$$

$$-\frac{dP}{dx}=-wY+r=\frac{\partial H}{\partial Y}, \qquad (\text{۱۸-۴})$$

جوابهای این معادلات را با p, y نشان می دهیم. یک هامیلتونی مناسب H عبارت است از:

$$H(P,Y)=\frac{\text{۱}}{\text{۲}\upsilon}P^{\text{۲}}-\frac{\text{۱}}{\text{۲}}wY^{\text{۲}}+rY \qquad (\text{۱۸-۵})$$

بنابراین معادلهٔ دیفرانسیل (۱-۱۸) را به صورت *معادله متعارف اویلر* (۳-۱۸) و (۴-۱۸) بیان نمودیم و گام بعدی نوشتن تابعک نظیر $I(P,Y)$ می باشد. این مطلب در بخش ۱۷ برای شرایط مرزی (۲-۱۸) داده شده است و عبارت است از:

$$I(P,Y)=\int_{\circ}^{\text{۱}}\{PY'-H(P,Y)\}dx-[PY]_{\circ}^{\text{۱}} \qquad (\text{۱۸-۶})$$

$$=\int_{\circ}^{\text{۱}}\{-P'Y-H(P,Y)\}dx. \qquad (\text{۱۸-۷})$$

با استفاده از هامیلتونی H در (۵-۱۸) و با توجه به روش بخش ۱۷، توابع J و G را به دست

می آوریم:

$$J(Y)=\int_{0}^{1}\left\{\frac{1}{2}(Y')^{2}\upsilon+\frac{1}{2}wY^{2}-rY\right\}dx,\quad Y(0)=Y(1)=0 \tag{18-8}$$

و

$$G(P)=-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}\left\{\frac{1}{\upsilon}p^{2}+\frac{1}{w}(r+p')^{2}\right\}dx\quad(\upsilon\neq 0) \tag{18-9}$$

اگر حالت $\upsilon > 0$ $w > 0$ را در نظر بگیریم، ملاحظه می کنیم که اصول متمم

$$G(P)\leq I(p,y)\leq J(Y) \tag{18-10}$$

برقرار است.

چون p و y دقیقاً ب ارابطه $p=\upsilon\frac{dy}{dx}$ ارتباط دارند، با معادلهٔ (۳-۱۸) ، مفید خواهد بود که قرار دهیم:

$$p=\upsilon\frac{dV}{dx} \tag{18-11}$$

که در آنجا V یک تقریب برای y است.

گام نهایی این است که $J(Y)$ را مینیمم و $G(P)$ را با انتخاب توابع مناسب ماکزیمم نماییم، همان طوری که در بخش ۱۶ تشریح شد. به این ترتیب کرانهای بالا و پایین برای $I(p,y)$ تعیین می شود که برای (۱-۱۸) و (۲-۱۸) به وسیله رابطهٔ زیر بیان می شود:

$$I(p,y)=-\frac{1}{2}\int_{0}^{1}ry\,dx \tag{18-12}$$

بعلاوه ، Y تقریبی برای مقدار واقعی y خواهد بود.

این روش مطالعه برای مسائل مقدار مرزی از سال ۱۹۶۰ شروع شده و دارای کاربردهای وسیعی است.

۱۹ . کران ریلی برای مقادیر ویژه

مسائل مقادیر ویژه مربوط به یافتن اعداد λ است که در معادلاتی نظیر

$$Ly=\lambda y \tag{19-1}$$

ظاهر می شوند که در آنجا L یک عملگر و y در شرایط مرزی صدق می کند. برای مثال، ممکن است دنبال مقادیر ویژه معادلهٔ زیر باشیم:

$$-\frac{d^2y}{dx^2} = \lambda y, \quad 0 < x < 1 \qquad (19-2)$$

با

$$y(0) = y(1) = 0 \qquad (19-3)$$

مسالهٔ مقدار ویژه آن اندازه ساده است که می توان جواب دقیق آن را به دست آورد. زیرا

$$y = A \sin\sqrt{(\lambda)}x + B \cos\sqrt{(\lambda)}x \qquad (19-4)$$

جواب عمومی، معادلهٔ (۲-۱۹) است و شرایط مرزی (۳-۱۹) ایجاب می کند که

$$B = 0 \text{ و } \sin\sqrt{(\lambda)} = 0 , \sqrt{(\lambda)} = n\pi , \; n = 1,2,\ldots \qquad (19-5)$$

بنابراین

$$\lambda = n^2\pi^2 \;, \; n = 1,2,\ldots \qquad (19-6)$$

معادلهٔ (۶-۱۹) مقادیر ویژهٔ ممکن را می دهد و معادلهٔ (۴-۱۹) توابع ویژه را که

$$y_n = A_n \sin n\pi x \;, \; n = 1,2,\ldots$$

بطور کلی مسائل مقدار ویژه را نمی توان به طور دقیق حل نمود و بنابراین مطلوب خواهد بود که روش تقریبی برای تخمین مقادیر ویژه داشته باشیم. در اینجا چنین روشی را که به نام *ریلی* است توضیح خواهیم داد. مسالهٔ (۲-۱۹) و (۳-۱۹) را در نظر خواهیم گرفت، فرض کنیم λ_1 کوچکترین مقدار ویژهٔ مساله باشد و گیریم Ω یک دسته از توابع که دارای مشتقات مرتبه دوم پیوسته در فاصله (۰، ۱) باشد و در نقاط انتهایی این بازه صفر باشند، آنگاه نتیجه می شود:

$$J(Y) = \int_0^1 Y\left(-\frac{d^2}{dx^2} - \lambda_1\right)Y\, dx \geq 0 \text{ برای همه } Y \in \Omega. \qquad (19-7)$$

برای تحقیق این، $Y \in \Omega$ را برحسب سری توابع ویژه $y_n = A_n \sin n\pi x$ از $-\frac{d^2}{dx^2}$ بسط می دهیم:

$$Y = \sum_{n=1}^{\infty} a_n y_n \qquad n = 1$$

آنگاه
$$J(Y) = \int_0^1 \sum_{m=1}^{\infty} a_m y_m \sum_{n=1}^{\infty} (\lambda_n - \lambda_1) a_n y_n \, dx.$$

چون $n \neq m$ برای $\int_0^1 y_n y_m \, dx = 0$

داریم:
$$J(Y) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 (\lambda_n - \lambda_1) \int_0^1 y_n^2 \, dx \geq 0$$

چون λ_1 پایین ترین مقدار ویژه است.

اگر (۷-۱۹) را دوباره بنویسیم داریم:

$$\lambda_1 \leq \frac{\left\langle Y, -\frac{d^2 Y}{dx^2} \right\rangle}{\langle Y, Y \rangle} = \wedge(Y) \qquad (19\text{-}8)$$

که در آنجا $< Y_1, Y_2 >= \int_0^1 Y_1 Y_2 \, dx$. بنابراین $\wedge(Y)$ یک کران بالا برای کوچکترین مقدار ویژهٔ λ_1 فراهم می سازد. این کران بالای *ریلی* است و واضح است که $\wedge(y_1) = \lambda_1$ که در آنجا y_1 تابع ویژه کوچکترین مقدار ویژه است.

مثال ۱-۱۹. به عنوان مثال ساده از کران ریلی فرض کنیم که $Y = x(1-x)$ در (۸-۱۹) باشد و متوجه می شویم که $\wedge(Y) = \frac{1/3}{1/30} = 10$

که فقط اندکی بیشتر از مقدار دقیق $\lambda_1 = \pi^2 \cong 9/87$ است همانطور که در (۶-۱۹) داده شده است.

بطورکلی اگر مسالهٔ مقدار ویژه با (۱-۱۹) و با شرایط مرزی مناسب داده شده باشد، کران ریلی برای λ_1 عبارت است از:

$$\lambda_1 \leq \frac{\langle Y, LY \rangle}{Y, Y} \qquad (19\text{-}9)$$

همچنین کرانهای پایین برای مقادیر ویژه در بعضی حالات را نمی توان به دست آورد، اما تئوری این قسمت خارج از حد این کتاب است.

۲۰ـ تمرینات

۱. مقدار دقیق $J(y)$ را در مثال ۱-۱۶ محاسبه کنید.

۲. با استفاده از روش ریلی - ریتز یک جواب تقریبی برای مینیمم کردن تابعک زیر تعیین کنید.

$$J(y)=\frac{1}{2}\int_0^1\left(y'^2+y^2+2xy\right)dx\ ,\ \ Y(0)=y(2)=0$$

جواب به دست آمده را با جواب دقیق مقایسه کنید.

۳. نشان دهید تابعک $I(p,Y)$ در معادلهٔ (۶-۱۷) و (۷-۱۷) در (p,y) مانا است و در آنجا (p,y) در معادلات (۱۰-۷) و (۸-۱۷) صدق می کنند.

۴. نشان دهید که مسالهٔ متمم در تمرین ۲ درگیر ماکزیمم نمودن تابعک

$$G(\psi')=-\frac{1}{2}\int_0^2\left\{(\psi')^2+(\psi''-x)^2\right\}dx,$$

می شود و با استفاده از آن دومین جواب تقریبی را به وجود آورید.

۵. برای معادلهٔ دیفرانسیل مسالهٔ مقدار مرزی اصول تغییراتی متمم را نتیجه بگیرید:

$$\frac{d^2y}{dx^2}-k^2y=1\ ,\quad 0<x<a,$$

$$Y(0)=y(a)=0$$

نشان دهید کران بالا و پایین برای $\int_0^a y\,dx$ به دست می آید که در آنجا y جواب مسالهٔ مرزی است.

۶. فرض کنیم $L=\frac{d^4}{dx^4}$ برای دسته توابعی از y با مشتقات مرتبهٔ چهارم پیوسته در بازه $0<x<1$ تعریف شده باشد، که در آنجا

$$y(0)=y(1)=y'(0)=y'(1)=0$$

از روش ریلی استفاده کنید و یک کران بالا برای کمترین مقدار ویژهٔ عملگر L تعیین کنید.

جواب تمرینات

فصل اول

۱. (الف) و (ب) هر تابع مجاز y .

(ج) منحنی پیوسته بحرانی وجود ندارد.

۲.

الف) $$y = \frac{۱}{۲}\ \sin\ x + Ae^{x} + Be^{-x}$$

ب) $$y = -\frac{۱}{۲}x\ \cos\ x + A\cos x + B\sin x.$$

ج) $$y = \frac{۱}{۲}\cosh x + A\cos x + b\sin x.$$

د) $$y = \frac{۱}{۲}xe^{x} + Ae^{x} + Be^{-x}$$

۳. $$y = A\int \left\{f^{۲} - A^{۲}\right\}^{-۱/۲} dx + B.$$

الف) $$f = x^{۱/۲}, y = ۲A\left(x - A^{۲}\right)^{۱/۲} + B.$$

ب) $$f = x, y = A\ \cosh^{-۱}(x/A) + B.$$

۴. الف) $$y = A\left(۱ + \frac{x^{۲}}{۴A^{۲}}\right), A = \frac{۱}{۲}b \pm \frac{۱}{۲}\left(b^{۲} - ۱\right)^{۱/۲}$$

برای $b = ۱$ یک جواب و برای $b > ۱$ دو جواب داریم و $b < ۱$ جواب ندارد

$$y = \sinh\ (Cx + D).$$

۱. $y = z = \sinh x / \sinh \pi/۲.$

۳. $$\left(\frac{\partial S}{\partial x}\right)^{۲} + \left(\frac{\partial S}{\partial y}\right)^{۲} = f^{۲}(y).$$

منحنی های بحرانی $x - \alpha\int^{y}\{f^{۲}(\lambda) - \alpha^{۲}\}^{-۱/۲} d\lambda = \beta$ که در آنجا α در β ثابت هستند.

۴. $$\int\left(۱ + y'^{۲}\right)^{۱/۲} dx$$

۵. معادلهٔ لاگرانژ. $m\ddot{x} = -kx.$

معادلهٔ هامیلتون $$\frac{dx}{dt} = \frac{p}{m}, \quad -\frac{dp}{dt} = kx$$

۶. معادلات لاگرانژ $$mr\theta^{۲} - \frac{k}{r^{۲}} - m\ddot{r} = ۰$$

$$\frac{d}{dt}\left(mr^{۲}\dot{\theta}\right) = ۰$$

$$H = \frac{۱}{۲m}\left(p_r^{۲} + \frac{۱}{r^{۲}} p_\theta^{۲}\right) - \frac{k}{r},$$

که در آنجا $$p_r = \frac{\partial L}{\partial \dot{r}}, p_\theta = \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$$

معادلات هامیلتون $$\frac{dr}{dt} = \frac{pr}{m}, \quad -\frac{dp_r}{dt} = -\frac{p_\theta^{۲}}{mr^{۳}} + \frac{k}{r^{۲}},$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{p_\theta}{mr^{۲}}, \quad -\frac{dp}{dt} = ۰.$$

فصل سوم

۱. $y = x^{۳}$

۲. $y = ۷ - \frac{۴}{x}$

۴. $y = \frac{۱}{۳} e^{۲x}$

۵. $y = \sum_{n=۱}^{\infty} a_n \ \sin\ n\pi x ,$

که در آنجا $\sum_{n=۱}^{\infty} a_n^{۲} = ۴$

۶. $y = x^{۲}$

۷. $y = \left(\frac{۱}{۲\pi\sigma^{۲}}\right)^{۱/۲} \exp\left\{-\frac{x^{۲}}{۲\sigma^{۲}}\right\},$

یعنی توزیع نرمال

۸. با قانون اویلر $y = x$. اما برای این، $k(y) = \sqrt{۲} \neq ۲$. یعنی قیـد انتگرالی برقرار نیست. دلیل این امر آن است که $y = x$ یک منحنی بحرانی $k(y)$ است.

فصل چهارم

۱. $J(y) = -\frac{۱}{۲} + \frac{e-۱}{e+۱} = -۰/۰۳۷۸۸۳$

۲. برای $Y = \alpha x(۲-x),$

$\min_{\alpha} J(Y) = -\frac{۵}{۲۱} = -۰/۲۳۸$, در $\alpha = -\frac{۵}{۱۴}$

مقدار دقیق $J(y) = -۰/۲۵۹$

۴. برای $\psi = \beta x(۲ - x)$ $\max_{\beta} \; G(\psi') = -\frac{۷}{۱۲} = -۰/۵۸۳$

در $\beta = -\frac{۳}{۸}$

۶. برای $Y = x^۲(۱-x)^۲$ ، کران بالا برابر است با ۵۰۴ مقدار دقیق اندکی بیشتر از $\left(\frac{۳\pi}{۲}\right)^۴ \approx ۵۰۰$ است.

ARTHURS, A. M., *Complementary Variational Principles,* Clarendon Press, Oxford, 1970.

BELLMAN, R., *Dynamic Programming,* Princeton University Press, 1957.

GELFAND, I, M. and FOMIN, S. V., *Calculus of Variations,* Prentice-Hall, Englewood Cliffs , New Jersey , 1963.

GOULD , S. H. , *Variational Methods for Eigenvalue Problems,* 2nd edition, University of Toronto Press 1966.

LANCZOS, C., *The Variational Principles of Mechanics,* 3rd edition, University of Toronto Press, 1966.

MOISEIWITSCH, B. L., *Variational Principles,* Interscience Publishers, New York, 1966.

YOUNG, L. C. , Lectures on the Calculus of *Variations and Optimal Control Theory,* Saunders, Philadelphia, 1969.