تام م. آپوستل

حساب دیفرانسیل و انتگرال

جلد دوم

ترجمهٔ
علیرضا ذکائی
مهدی رضائی دلفی
علی اکبر عالم‌زاده
فرخ فیروزان

۱

فضاهای خطی

۱۰۱ مقدمه

در ریاضیات به نمونه‌های زیادی از اشیاء ریاضی برمی‌خوریم که می‌توانند با هم جمع و یا در اعداد حقیقی ضرب شوند. قبل از همه، اعداد حقیقی خود از این اشیاءاند. سایر مثالها عبارتند از توابع حقیقی، اعداد مختلط، سریهای نامتناهی، بردارها در فضای n، و توابع برداری. در این فصل یکی از مفاهیم کلی ریاضی، به نام ***فضای خطی***، را مطرح می‌کنیم که همهٔ این مثالها و بسیاری دیگر را به عنوان حالاتی خاص دربردارد.

بطور خلاصه، یک فضای خطی مجموعه‌ای است از عناصر از هر نوع که می‌توان بر آنها اعمالی (به‌نام جمع و ضرب در اعداد) را انجام داد. در تعریف فضای خطی نه سرشت عنصرها را مشخص می‌کنیم و نه می‌گوییم اعمال چطور صورت می‌گیرند. در عوض، قید می‌کنیم که اعمال خواص معینی دارند و آنها را اصول موضوع فضای خطی می‌انگاریم. حال به شرح مبسوط این اصول می‌پردازیم.

۲۰۱ تعریف فضای خطی

فرض کنیم V مجموعه‌ای ناتهی از اشیاء، که **عنصر** خوانده می‌شوند، باشد. V را درصورتی یک ***فضای خطی*** نامیم که در ده اصل موضوع زیر که به سه گروه تقسیم شده‌اند صدق کند:

اصول موضوع بسته بودن

اصل موضوع ۱. بسته بودن تحت جمع. به‌هر جفت عنصر x و y در V عنصر منحصر بفردی در V مربوط است به نام **مجموع** x و y که با $x + y$ نموده می‌شود.

اصل موضوع ۲. بسته بودن تحت ضرب در اعداد حقیقی. به هر x در V و هر عدد حقیقی a عنصری در V مربوط است بــه نام ***حاصل ضرب*** a و x که با ax نشان داده می‌شود.

اصول موضوع جمع

اصل موضوع ۳. قانون تعویضپذیری. به‌ازای‌هر x و y در V داریم $x + y = y + x$.

اصل موضوع ۴. قانون شرکتپذیری. به ازای هر x، y، و z در V داریم

$$(x + y) + z = x + (y + z)$$

اصل موضوع ۵. وجود عنصر صفر. عنصــری در V، کــه با O نموده می‌شود، هست بطوری که

$$\text{به‌ازای هر } x \text{ در } V\text{،}\quad x + O = x.$$

اصل موضوع ۶. وجود قرینه. به‌ازای‌هر x در V عنصر $(-1)x$ این‌خاصیت را داردکه

$$x + (-1)x = O.$$

اصول موضوع ضرب در اعداد

اصل موضوع ۷. قانون شرکتپذیری. به ازای هر x در V و هر دو عدد حقیقی a و b داریم

$$a(bx) = (ab)x.$$

اصل موضوع ۸. قانون پخشپذیری برای جمع در V. به ازای هــر x و y در V و هر a ی حقیقی داریم

$$a(x + y) = ax + ay.$$

اصل موضوع ۹. قانون پخشپذیری برای جمع اعداد. به ازای هــر x در V و هر a و b حقیقی داریم

$$(a + b)x = ax + bx.$$

اصل موضوع ۱۰. وجود همانی. به ازای هر x در V داریم $1x = x$.

گاهی فضاهای خطــی را، که در فوق تعریف شد، **فضاهای خطی حقیقی** می‌نامند تا بر ضرب عناصر V در اعداد حقیقی تاکید شده باشد. اگر در اصول موضوع ۲، ۷، ۸، و

۹ **عدد حقیقی** را با **عدد مختلط** عوض کنیم، نهاد حاصل **فضای خطی مختلط** نام خواهد داشت. گاهی فضای خطی را **فضای برداری خطی** و یا فقط **فضای برداری** می‌نامند؛ اعدادی که به‌عنوان ضریب به‌کار رفته **اسکالر** نیز خوانده می‌شوند. اسکالرهای یک فضای خطی حقیقی اعداد حقیقی و اسکالرهای یک فضای خطی مختلط اعداد مختلط هستند. ما عمدتاً با فضاهای خطی حقیقی سر و کار داریم، اما تمام قضایا برای فضاهای خطی مختلط نیز اعتبار دارند. هرگاه اصطلاح فضای خطی را بی‌توضیح به‌کار بردیم، فرض آن است که فضا می‌تواند حقیقی یا مختلط باشد.

۳.۱ چند مثال از فضاهای خطی

اگر مجموعهٔ V را مشخص کنیم و بگوییم چطور عنصرهایش با هم جمع و در اعداد ضرب می‌شوند، به نمونهٔ ملموسی از فضاهای خطی دست خواهیم یافت. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که هریک از مثالهای زیر در تمام اصول موضوع فضای خطی حقیقی صدق می‌کند.

مثال ۱. فرض کنیم $V = \mathbf{R}$، یعنی مجموعهٔ تمام اعداد حقیقی، و $x + y$ و ax جمع و ضرب معمولی اعداد حقیقی باشند.

مثال ۲. فرض کنیم $V = \mathbf{C}$، یعنی مجموعهٔ تمام اعداد مختلط، و $x + y$ را جمع معمولی اعداد مختلط و ax را ضرب عدد مختلط x در عدد حقیقی a تعریف می‌کنیم. با اینکه عنصرهای V مختلط‌اند، این یک فضای خطی حقیقی است، چونکه اسکالرهایش حقیقی هستند.

مثال ۳. فرض کنیم $V = V_n$، یعنی V فضای برداری تمام n تاییهای اعداد حقیقی باشد، که در آن جمع و ضرب در اسکالرها طبق معمول برحسب مؤلفه‌ها تعریف شده‌اند.

مثال ۴. فرض کنیم V مجموعهٔ تمام بردارهایی در V_n باشد که بر بردار معلوم و ناصفر N عمودند. اگر $n = 2$، این فضا خط مستقیمی است مار بر O که N یک بردار قائم آن است. اگر $n = 3$، این فضا صفحه‌ای است مار بر O که N یک بردار قائم آن می‌باشد.

مثالهای زیر **فضاهای تابعی** نام دارند. عنصرهای V توابعی حقیقی‌اند، و در آن

جمع دوتابع f و g طبق معمول تعریف می‌شود: به‌ازای هر x حقیقی دراشتراک قلمروهای f و g،

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)\,.$$

ضرب تابع f در اسکالرحقیقی a این‌طورتعریف خواهد شد: af تابعی است که مقدارش در هر x از قلمرو f مساوی $af(x)$ است. عنصر صفر تابعی است که مقادیرش همه جا صفرند. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که هریک از مجموعه‌های زیر یک فضای‌تابعی است.

مثال ۵. مجموعهٔ تمام توابعی که بر یک بازهٔ معلوم تعریف شده‌اند.

مثال ۶. مجموعهٔ تمام چند جمله‌ایها.

مثال ۷. مجموعهٔ تمام چند جمله‌ایها از درجهٔ نابیشتر از n که n ثابت است. (هرگاه این‌مجموعهٔ را درنظر گرفتیم، فرض است که چند جمله‌ای صفر نیز در آن قرار دارد.) مجموعهٔ تمام چند جمله‌ایها از درجهٔ n یک فضای خطی نیست، چونکه اصول موضوع بسته بودن برقرار نیستند. مثلاً، مجموع دو چندجمله‌ای از درجهٔ n لزوماً از درجهٔ n نیست.

مثال ۸. مجموعهٔ تمام توابع پیوسته بر یک بازهٔ معلوم. اگر بازه $[a,b]$ باشد، این فضا را به $C(a,b)$ نشان خواهیم داد.

مثال ۹. مجموعهٔ تمام توابعی که در یک نقطهٔ معلوم مشتقپذیرند.

مثال ۱۰. مجموعهٔ تمام توابعی که بریک بازهٔ معلوم انتگرالپذیرند.

مثال ۱۱. مجموعهٔ تمام توابع f که $f(1)=0$. دراین مثال عدد 0 مهم است. اگر 0 را با عدد ناصفر c عوض کنیم، اصول موضوع بسته بودن نقض خواهند شد.

مثال ۱۲. مجموعهٔ تمام جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل خطی‌وهمگن $y''+ay'+by=0$،

که درآن a و b ثابتهای معلومی هستند. دراینجا نیز 0 اهمیت دارد. مجموعهٔ جوابهای یک معادلهٔ دیفرانسیل غیرهمگن در اصول موضوع بسته بودن صدق نمی‌کند.

این امثله و بسیاری دیگر نشان می‌دهند که مفهوم فضای خطی چگونه در جبر، هندسه، وآنالیز نفوذ دارد. وقتی از اصول موضوع فضای خطی قضیه‌ای نتیجه‌شود، یکباره مطلبی حاصل می‌شود که برای هر نمونهٔ ملموس معتبر است. با یکی کردن مثالهای مختلف بدین راه بینش عمیقتری از هر یک به‌دست خواهد آمد. گاهی اطلاع ویژه‌ای از یک مثال خاص در پیش بینی و یا تعبیر نتایج برقرار برای سایر مثالها موثر است و روابطی را که جز این ممکن است از نظر دور بمانند آشکار خواهد ساخت.

۴۰۱ نتایج مقدماتی اصول موضوع

قضایای زیر به‌آسانی از اصول موضوع فضای خطی نتیجه می‌شوند.

قضیهٔ ۱۰۱. یکتایی عنصر صفر. *در هر فضای خطی یک و فقط یک عنصر صفر وجود دارد.*

برهان. اصول موضوع ۵ به‌ما می‌گوید که دست کم یک عنصر صفر وجود دارد. فرض‌کنیم دو عنصر صفر، مثلا" O_1 و O_2، وجود می‌داشت. با فرض $x = O_1$ و $O = O_2$ در اصل موضوع ۵ داریم $O_1 + O_2 = O_1$. همچنین، با اختیار $x = O_2$ و $O = O_1$ خواهیم داشت $O_2 + O_1 = O_2$. اما، طبق قانون تعویضپذیری، $O_1 + O_2 = O_2 + O_1$. درنتیجه، $O_1 = O_2$.

قضیهٔ ۲۰۱. یکتایی عنصر قرینه. *در هرفضای خطی هرعنصر درست یک قرینه دارد؛ یعنی، به‌ازای هر x، یک و فقط یک y هست که $x + y = O$.*

برهان. اصل موضوع ۶ به‌ما می‌گوید که x دست کم یک قرینه، یعنی $(-1)x$ را، دارد. فرض کنیم x دو قرینه، مثلا" y_1 و y_2 را، داشته باشد. دراین صورت، $x + y_1 = O$ و $x + y_2 = O$. با افزودن y_2 به دوطرف معادلهٔ اول و استفاده از اصل موضوع ۵، ۴، و

۳ داریم
$$y_2 + (x + y_1) = y_2 + O = y_2$$
و
$$y_2 + (x + y_1) = (y_2 + x) + y_1 = O + y_1 = y_1 + O = y_1.$$
بنابراین، $y_1 = y_2$ ؛ درنتیجه، x درست یک قرینه، یعنی $(-1)x$ را، خواهد داشت.

نماد گذاری. قرینهٔ x را با $-x$ نشان می‌دهیم، و تفاضل $y - x$ را مساوی مجموع $y + (-x)$ تعریف می‌کنیم.

قضیهٔ زیر چند خاصیت را که بر اعمال جبری مقدماتی یک فضای خطی حاکمند وصف می‌کند.

قضیهٔ ۱.۳. *فرض کنیم x و y عنصرهای دلخواه یک فضای خطی بوده و a و b اسکالرهای دلخواهی باشند. دراین صورت، خواص زیر را خواهیم داشت:*

(آ) $0x = O$؛

(ب) $aO = O$؛

(پ) $(-a)x = -(ax) = a(-x)$؛

(ت) هرگاه $ax = O$، آنگاه $a = 0$ یا $x = O$؛

(ث) هرگاه $ax = ay$ و $a \neq 0$، آنگاه $x = y$؛

(ج) هرگاه $ax = bx$ و $x \neq O$، آنگاه $a = b$؛

(چ) $-(x + y) = (-x) + (-y) = -x - y$؛

(ح) $x + x = 2x$، $x + x + x = 3x$، و بطور کلی، $\sum_{i=1}^{n} x = nx$.

ما (آ) و (ب) و (پ) را ثابت می‌کنیم و بقیه را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم.

برهان (آ). فرض کنیم $z = 0x$. می‌خواهیم ثابت کنیم $z = O$. با افزودن z به خودش و استفاده از اصل موضوع ۹، داریم
$$z + z = 0x + 0x = (0 + 0)x = 0x = z.$$
حال $-z$ را به‌طرفین فوق می‌افزاییم تا $z = O$ به‌دست آید.

برهان (ب). فرض کنیم $z = aO$، z را به‌خودش می‌افزاییم، و از اصل موضوع ۸ استفاده می‌کنیم.

برهان (پ). فرض کنیم $z = (-a)x$. با افزودن z به ax واستفاده‌از اصل‌موضوع ۹، داریم

$$z + ax = (-a)x + ax = (-a + a)x = 0x = O;$$

پس z قرینهٔ ax است: $z = -(ax)$. بهمین نحو، اگر $a(-x)$ را به ax اضافه و ازاصل موضوع ۸ و خاصیت (ب) استفاده کنیم، درمی‌یابیم که $a(-x) = -(ax)$.

۵۰۱ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۲۸ معین کنید که اگر جمع و ضرب در اسکالرهای حقیقی طبق معمول تعریف شوند، مجموعه‌ها فضای خطی حقیقی هستند یاخیر. برای آنهایی که نیستند بگویید کدام اصول موضوع برقرار نمی‌باشند. توابع تمرینهای ۱ تا ۱۷ حقیقی‌اند. در تمرینهای ۳ و ۴ و ۵ هر قلمرو شامل 0 و 1، و در تمرینهای ۷ تا ۱۲ حاوی تمام اعداد حقیقی است.

۱. تمام توابع گویا.

۲. تمام توابع گویای f/g که درجهٔ f ازدرجهٔ g نابیشتراست (به‌انضمام $f = 0$).

۳. تمام f هایی که $f(0) = f(1)$.

۴. تمام f هایی که $2f(0) = f(1)$.

۵. تمام f هایی که $f(1) = 1 + f(0)$.

۶. تمام توابع پله‌ای تعریف شده بر $[0, 1]$.

۷. تمام f هایی که وقتی $x \to +\infty$، $f(x) \to 0$.

۸. تمام توابع زوج.

۹. تمام توابع فرد.

۱۰. تمام توابع کراندار.

۱۱. تمام توابع صعودی.

۱۲. تمام توابع با دورهٔ تناوب 2π.

۱۳. تمام f های انتگرالپذیر بر $[0, 1]$ که $\int_0^1 f(x)\,dx = 0$.

۱۴ . تمام f های انتگرالپذیر بر $[0, 1]$ که $\int_0^1 f(x)\,dx \geq 0$.

۱۵ . تمام f هایی که در $f(x) = f(1 - x)$ به‌ازای هر x صدق می‌کنند .

۱۶ . تمام چند جمله‌ایهای تیلور[1] از درجهٔ نابیشتر از n به‌ازای n ی ثابت (به‌انضمام چند جمله‌ای صفر) .

۱۷ . تمام جوابهای یک معادلهٔ دیفرانسیل همگن مرتبهٔ دوم خطی

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0,$$

که در آن P و Q توابعی معلوم و همه‌جا پیوسته‌اند .

۱۸ . تمام دنباله‌های حقیقی کراندار .

۱۹ . تمام دنباله‌های حقیقی همگرا .

۲۰ . تمام سریهای حقیقی همگرا .

۲۱ . تمام سریهای حقیقی به‌طور مطلق همگرا .

۲۲ . تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که $z = 0$.

۲۳ . تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که $x = 0$ یا $y = 0$.

۲۴ . تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که $y = 5x$.

۲۵ . تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که $3x + 4y = 1$ و $z = 0$.

۲۶ . تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که مضربهای اسکالر $(1, 2, 3)$ اند .

۲۷ . تمام بردارهای (x, y, z) در V_3 که مؤلفه‌هایشان در یک دستگاه سه معادلهٔ خطی به شکل

$$a_{11}x + a_{12}y + a_{13}z = 0, \qquad a_{21}x + a_{22}y + a_{23}z = 0, \qquad a_{31}x + a_{32}y + a_{33}z = 0$$

صدق می‌کنند .

۲۸ . تمام بردارهایی در V_n که ترکیب خطی دو بردار معلوم A و B اند .

۲۹ . فرض کنید $V = \mathbf{R}^+$ ، یعنی مجموعهٔ اعداد حقیقی مثبت، باشد . "مجموع" x و y در V را حاصل ضرب $x \cdot y$ (به‌معنی معمولی) ، و "حاصل ضرب" x از V در اسکالر c را x^c تعریف کنید . ثابت کنید V یک فضای خطی حقیقی است که 1 عنصر صفر آن است .

۳۰ . (آ) ثابت کنید اصل موضوع ۱۰ را می‌توان از سایر اصلها نتیجه گرفت .

---

1. Taylor

(ب) ثابت کنید اگر اصل موضوع ۶ با اصل موضوع ′۶ زیر عوض شود، دیگر نمی‌توان اصل موضوع ۱۰ را از سایر اصول نتیجه گرفت.

اصل موضوع ′۶. به‌ازای هر x در V عنصری‌مثل y در V هست‌که $x + y = O$.

۳۱. فرض کنید S مجموعهٔ تمام جفتهای مرتب (x_1, x_2) از اعداد حقیقی باشد. درهر حالت معین کنید آیا S با اعمال جمع و ضرب در اسکالرهای تعریف شده یک‌فضای خطی هست یا نه. اگر مجموعه یک فضای خطی نیست، نشان دهید کدام اصول نقض شده‌اند:

(آ) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$ ، $a(x_1, x_2) = (ax_1, 0)$؛

(ب) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, 0)$ ، $a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$؛

(پ) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1, x_2 + y_2)$ ، $a(x_1, x_2) = (ax_1, ax_2)$؛

(ت) $(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (|x_1 + x_2|, |y_1 + y_2|)$ ، $a(x_1, x_2) = (|ax_1|, |ax_2|)$.

۳۲. قسمتهای (ت) تا (ح) قضیهٔ ۳۰۱ را ثابت کنید.

۶۰۱ زیرفضاهای یک فضای خطی

فرض کنیم V یک فضای خطی و S یک زیر مجموعهٔ ناتهی آن باشد. چنانچه S نیز با همان جمع و ضرب در اسکالرها یک فضای خطی باشد، S یک **زیر فضای** V نامیده‌می‌شود. قضیهٔ زیر در تعیین اینکه زیر مجموعه‌ای از یک فضای خطی زیر فضا هست یا نه محک ساده‌ای می‌باشد.

قضیهٔ ۴۰۱ . فرض‌کنیم S یک‌زیر مجموعهٔ ناتهی فضای خطی V باشد. در این‌صورت، S یک زیر فضاست اگر و فقط اگر در اصول موضوع بسته بودن صدق کند.

برهان. اگر S یک زیرفضا باشد، در تمام اصول موضوع یک فضای خطی صدق می‌کند؛ و درنتیجه، بخصوص، در اصول موضوع بسته بودن صدق خواهد کرد.

حال نشان می‌دهیم که اگر S در اصول موضوع بسته بودن صدق کند، در سایر اصول نیز صادق است. گوییم قوانین تعویضپذیری و شرکتپذیری جمع (اصول ۳ و ۴) و اصول موضوع ضرب در اسکالرها (اصول ۷ تا ۱۰) خودبخود در S برقرارند، زیرا برای تمام عناصر V چنین‌اند. می‌ماند تحقیق اصول ۵ و ۶، وجود عنصر صفر در S، و وجود قرینه

برای هر عنصر در S .

فرض کنیم x یک عنصر S باشد. (S ، چون ناتهی است، دست کم یک عنصر دارد.) بنابه اصل موضوع ۲، به‌ازای هر اسکالر a ، ax در S است. با فرض $a = 0$ نتیجه می‌شود که $0x$ در S می‌باشد. اما، طبق قضیهٔ ۱.۳ (آ)، $0x = O$. پس $O \in S$ و اصل موضوع ۵ برقرار است. با فرض $a = -1$ می‌بینیم که $(-1)x$ نیز در S است. اما $x + (-1)x = O$ ، زیرا x و $(-1)x$ هر دو در V هستند. لذا، اصل موضوع ۶ در S صادق است. بنابراین، S یک زیر فضای V می‌باشد.

تعریف. فرض‌کنیم S یک زیر مجموعهٔ ناتهی فضای خطی V باشد. عنصر x در V به شکل

$$x = \sum_{i=1}^{k} c_i x_i ,$$

که درآن $x_1 , \ldots , x_k$ همه در S بوده و $c_1 , \ldots , c_k$ اسکالر هستند، را یک **ترکیب خطی متناهی** از عناصر S می‌نامیم. مجموعهٔ تمام ترکیبات خطی متناهی از عناصر S دراصول موضوع بسته‌بودن صدق می‌کند؛ و در نتیجه، یک زیر فضای V است. ما این را **زیرفضای پیموده شده به‌وسیلهٔ** S ، یا **پیمای خطی** S ، می‌خوانیم و با $L(S)$ نشانش می‌دهیم. اگر S تهی باشد، $L(S)$ را مساوی $\{O\}$ ، یعنی مجموعه‌ای فقط مرکب از عنصر صفر، تعریف می‌کنیم.

مجموعه‌های مختلف می‌توانند یک زیر فضا را بپیمایند. مثلاً"، فضای V_2 به‌وسیلهٔ هریک از مجموعه بردارهای $\{i, j\}$ ، $\{i, j, i + j\}$ ، و $\{O, i, -i, j, -j, i + j\}$ پیموده می‌شود. فضای تمام چند جمله‌ایها از درجهٔ نابیشتر از n به وسیلهٔ مجموعهٔ

$$\{1, t, t^2, \ldots , t^n\}$$

مرکب از $n + 1$ چندجمله‌ای پیموده می‌شود. این فضا به وسیلهٔ مجموعه‌های $\{1, t/2, t^2/3, \ldots , t^n/(n + 1)\}$ و $\{1, (1 + t), (1 + t)^2, \ldots , (1 + t)^n\}$ نیز پیموده می‌شود. فضای تمام چند جمله‌ایها به‌وسیلهٔ مجموعهٔ نامتناهی $\{1, t, t^2, \ldots\}$ از چند جمله‌ایها پیموده خواهد شد.

در اینجا طبعاً "چند سؤال مطرح می‌شود. مثلاً"، چه فضاهایی به‌وسیلهٔ یک مجموعهٔ متناهی پیموده می‌شوند؟ اگر یک فضا را بتوان به وسیلهٔ مجموعه‌ای متناهی پیمود، دست

کم چند عنصر برای این‌کار لازم است ؟ برای بحث در باب اینها و مسائل مربوطه، مفاهیم ***وابستگی، استقلال، پایه‌ها***، و بعد را معرفی می‌کنیم . با این مفهومها در جلد یک در بررسی فضای برداری V_n برخوردیم . حال آنها را به فضاهای خطی کلی تعمیم می‌دهیم .

۷.۱ مجموعه‌های وابسته و مستقل در یک فضای خطی

تعریف. مجموعهٔ S از عناصر در فضای خطی V را **وابسته** نامیم هرگاه مجموعه‌ای متناهی از عنصرهای متمایز در S، مثلاً" $x_1, \ldots, x_k$، و مجموعهٔ نظیرش از اسکالرهای $c_1, \ldots, c_k$، که همه صفر نیستند، وجود داشته باشند بطوری که

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i = O .$$

هر معادله به شکل $\sum c_i x_i = O$، که در آن همهٔ c_i ها صفر نباشند، یک ***نمایش نابدیهی*** O نام دارد. مجموعهٔ S را **مستقل** نامیم اگر که وابسته نباشد. دراین‌حال، به‌ازای هر انتخاب از عناصر متمایز $x_1, \ldots, x_k$ در S و اسکالرهای $c_1, \ldots, c_k$،

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i = O \text{ ایجاب می‌کند که } c_1 = c_2 = \cdots = c_k = 0 .$$

با اینکه وابستگی و استقلال از خواص مجموعه‌هاست، ما آنها را برای خود عنصرها نیز به‌کار می‌بریم. مثلاً"، عنصرهای یک مجموعهٔ مستقل را عنصرهای مستقل خواهیم نامید.

درحالت متناهی بودن S، تعریف بالا بر تعریفی که در جلد یک برای V_n داده شد منطبق است. لیکن تعریف فوق به مجموعه‌های متناهی محدود نخواهد شد.

مثال ۱. اگر زیر مجموعهٔ T از S وابسته باشد، خود S نیز وابسته است. این منطقاً" معادل آن است که بگوییم هر زیر مجموعهٔ یک مجموعهٔ مستقل مستقل است.

مثال ۲. اگر عنصری در S مضرب اسکالری از دیگری باشد، S وابسته است.

مثال ۳. اگر $O \in S$، S وابسته است.

مثال ۴. مجموعهٔ تهی مستقل است.

بسیاری از مجموعه‌های وابسته و مستقل از بردارهای V_n در جلد یک بحث شدند. مثالهای‌زیر این مفهومها را در فضاهای تابعی نشان می‌دهند. در هرحالت، فضای‌خطی زمینهٔ V مجموعهٔ تمام توابع حقیقی است که برخط حقیقی تعریف شده‌اند.

مثال ۵. فرض کنیم به‌ازای هر t ی حقیقی $u_1(t) = \cos^2 t$ ، $u_2(t) = \sin^2 t$ ، و $u_3(t) = 1$. اتحاد فیثاغورس نشان می‌دهد که $u_1 + u_2 - u_3 = O$. بنابر این، سه تابع u_1 ، u_2 ، و u_3 وابسته می‌باشند.

مثال ۶. فرض کنیم به‌ازای $k = 0, 1, 2, \ldots$ و هر t ی حقیقی $u_k(t) = t^k$. مجموعهٔ $S = \{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$ مستقل است. برای اثبات این مطلب کافی است نشان دهیم به ازای هر n ، $n+1$ چند جمله‌ای $u_0, u_1, \ldots, u_n$ مستقل‌اند. گوییم هر رابطه به شکل $\sum c_k u_k = O$ به این معنی است که به‌ازای هر t ی حقیقی

$$\sum_{k=0}^{n} c_k t^k = 0 \tag{۱۰۱}$$

این، وقتی $t = 0$ ، نتیجه می‌دهد که $c_0 = 0$. با مشتقگیری از (۱۰۱) و گذاردن $t = 0$ درآن داریم $c_1 = 0$. با تکرار این عمل در می‌یابیم که هر ضریب c_k صفرمی‌باشد.

مثال ۷. هرگاه $a_1, \ldots, a_n$ اعداد حقیقی متمایزی باشند، n تابع نمایی

$$u_1(x) = e^{a_1 x}, \ldots, u_n(x) = e^{a_n x}$$

مستقل خواهند بود. این را می‌توان به استقرا بر n ثابت کرد. نتیجه وقتی $n = 1$ بدیهی است. پس فرض‌کنیم برای $n-1$ تابع نمایی درست باشد و اسکالرهای $c_1, \ldots, c_n$ را قسمی می‌گیریم که

$$\sum_{k=1}^{n} c_k e^{a_k x} = 0. \tag{۲۰۱}$$

فرض‌کنیم a_M ماکزیمم n عدد $a_1, \ldots, a_n$ باشد. با ضرب طرفین (۲۰۱) در $e^{-a_M x}$ داریم

$$\sum_{k=1}^{n} c_k e^{(a_k-a_M)x} = 0. \qquad (۳۰۱)$$

اگر $k \neq M$ ، عدد $a_k - a_M$ منفی است. پس، وقتی در (۳۰۱) $x \to +\infty$ ، هرجمله با $k \neq M$ به صفر میل می‌کند و خواهیم داشت $c_M = 0$. حال اگر از (۲۰۱) جملهٔ M م را حذف کرده فرض استقرا را به‌کار بریم، می‌بینیم که هر یک از $n-1$ ضریب باقیمانده نیز صفر است.

قضیهٔ ۵۰۱. فرض کنیم $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ یک مجموعهٔ مستقل از k عنصر در فضای خطی V بوده‌و $L(S)$ زیرفضای پیموده شده به‌وسیلهٔ آن باشد. دراین صورت، هرمجموعه از $k+1$ عنصر در $L(S)$ وابسته خواهد بود.

برهان. اثبات به‌استقرا بر k ، یعنی عدهٔ عنصرهای S ، صورت می‌گیرد. ابتدا فرض می‌کنیم $k = 1$. پس، طبق فرض، S از یک عنصر مانند x_1 تشکیل شده که، چون S مستقل است، $x_1 \neq O$. حال دو عنصر متمایز y_1 و y_2 را در $L(S)$ اختیار می‌کنیم. در این صورت، هریک مضرب اسکالر x_1 است، مثلاً $y_1 = c_1x_1$ و $y_2 = c_2x_1$ ، که در آنها c_1 و c_2 هر دو 0 نیستند. با ضرب y_1 در c_2 و y_2 در c_1 و تفریقشان از هم، داریم

$$c_2y_1 - c_1y_2 = O.$$

این یک نمایش نابدیهی O است؛ در نتیجه، y_1 و y_2 وابسته هستند. این مطلب قضیه را وقتی $k = 1$ ثابت می‌کند.

حال فرض‌کنیم قضیه برای $k-1$ درست باشد، و ثابت می‌کنیم برای k نیز چنین است. مجموعه‌ای‌مرکب‌از $k+1$ عنصردر $L(S)$ ، مثلاً "مجموعهٔ $T = \{y_1, y_2, \ldots, y_{k+1}\}$، را اختیار می‌کنیم. می‌خواهیم ثابت کنیم T وابسته است. گوییم چون هر y_i در $L(S)$ است، به‌ازای هر $i = 1, 2, \ldots, k+1$ می‌توان نوشت

$$y_i = \sum_{j=1}^{k} a_{ij}x_j. \qquad (۴۰۱)$$

تمام a_{i1} هاراکه در x_1 ضرب شده‌اند امتحان می‌کنیم و برهان را، بنابرآنکه‌این‌اسکالرها همه صفرند یا نه، به دو حالت تقسیم می‌کنیم:

حالت ۱. به‌ازای هر $i = 1, 2, \ldots, k+1$، $a_{i1} = 0$. دراین‌حالت، مجموع (۴۰۱)

شامل x_1 نیست ؛ در نتیجه، هر y_i در T در پیمای خطی مجموعهٔ $S' = \{x_2, \dots, x_k\}$ است. امـا S' مستقل‌است‌واز $k-1$ عنصر تشکیل شده است. بنابه فرض استقرا، قضیـه برای $k-1$ درست‌است، پس T وابسته می‌باشد. این قضیه را درحالت ۱ ثابت خواهد کـرد.

حالت ۲. همهٔ a_{i1} ها صفر نیستند. فرض‌کنیم $a_{11} \neq 0$. (در صورت لزوم، می‌توان y هارا مجددا" شماره‌گذاری کرد.) با فرض $i = 1$ در (۴۰۱) وضرب دوطرف آن در c_i ، که $c_i = a_{i1}/a_{11}$ ، داریم

$$c_i y_1 = a_{i1} x_1 + \sum_{j=2}^{k} c_i a_{1j} x_j .$$

اگر از این معادلهٔ (۴۰۱) را کم کنیم، به‌ازای $i = 2, \dots, k+1$خواهیم داشت

$$c_i y_1 - y_i = \sum_{j=2}^{k} (c_i a_{1j} - a_{ij}) x_j .$$

این‌معادله‌هریک از k عنصر $c_i y_1 - y_i$ را به‌صورت ترکیبی خطی از $k-1$ عنصرمستقل $x_2, \dots, x_k$ بیان می‌کند. بنابه فرض استقرا، k عنصر $c_i y_1 - y_i$ باید وابسته باشند. پس، به‌ازای اسکالرهایی چون $t_2, \dots, t_{k+1}$ که همه صفر نیستند، داریم

$$\sum_{i=2}^{k+1} t_i (c_i y_1 - y_i) = O ,$$

که از آن خواهیم داشت

$$\left(\sum_{i=2}^{k+1} t_i c_i\right) y_1 - \sum_{i=2}^{k+1} t_i y_i = O .$$

اما این یک ترکیب خطی نابدیهی‌از $y_1, \dots, y_{k+1}$ است که عنصر صفر را نمایش می‌دهد. پس عنصرهای $y_1, \dots, y_{k+1}$ باید وابسته باشند. این برهان را تمام خواهد کرد.

۸۰۱ پایه‌ها و بعد

تعریف. مجموعهٔ متناهی S از عنصرها درفضای خطی V را یک ***پایهٔ متناهی V*** گوییم هرگاه S مستقل بوده‌و V را بپیماید. V را ***با بعد متناهی*** نامیم هرگاه V پایهٔ متناهی داشته و یا فقط‌از O تشکیل شده باشد. در غیر این‌صورت، V ***با بعد نامتناهی*** خوانده

خواهد شد .

قضیهٔ ۶۰۱ . هرگاه V یک فضای خطی با بعد متناهی باشد ، پایه‌های متناهی V یک تعداد عنصر خواهند داشت .

برهان. فرض کنیم S و T دو پایهٔ متناهی از V باشند . همچنین ، S از k عنصر و T از m عنصر تشکیل شده باشد . چون S مستقل است و V را می‌پیماید ، قضیهٔ ۵۰۱ می‌گوید که هر مجموعه از $k+1$ عنصر در V وابسته است . لذا ، هر مجموعه با بیش از k عنصر در V وابسته می‌باشد . چون T یک مجموعهٔ مستقل است ، باید داشته باشیم $m \leq k$. همین استدلال با تعویض S و T با هم نشان می‌دهد که $k \leq m$. بنابراین، $k = m$.

تعریف. اگر فضای خطی V یک پایهٔ n عنصری داشته باشد ، عدد صحیح n **بعد** V نامیده می‌شود ، و می‌نویسیم $n = \dim V$. چنانچه $V = \{O\}$ ، می‌گوییم V دارای بعد 0 است .

مثال ۱. فضای V_n دارای بعد n است . یک پایه عبارت است از مجموعهٔ n برداریکهٔ مختصات .

مثال ۲. فضای تمام چند جمله‌ایهای $p(t)$ از درجهٔ نابیشتر از n دارای بعد $n+1$ است . یک پایه عبارت است از مجموعهٔ $n+1$ چندجمله‌ای $\{1, t, t^2, \ldots, t^n\}$. هرچند جمله‌ای از درجهٔ نابیشتر از n یک ترکیب خطی از این $n+1$ چند جمله‌ای است .

مثال ۳. فضای جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل $y'' - 2y' - 3y = 0$ دارای بعد 2 است . یک پایه از دو تابع $u_1(x) = e^{-x}$ و $u_2(x) = e^{3x}$ تشکیل شده است . هر جواب ترکیبی خطی از این دو تابع است .

مثال ۴. فضای تمام چند جمله‌ایهای $p(t)$ با بعد نامتناهی است . با آنکه مجموعهٔ

نامتناهی $\{1, t, t^2, \ldots\}$ این فضا را می‌پیماید، هیچ مجموعهٔ **متناهی** از چند جمله‌ایها فضا را نخواهد پیمود.

قضیهٔ ۷۰۱ . *فرض کنیم V یک فضای خطی با بعد متناهی بوده و $\dim V = n$. در این صورت،*

(آ) هرمجموعه از عنصرهای مستقل در V زیر مجموعه‌ای از یک پایهٔ V است؛

(ب) هرمجموعه از n عنصر مستقل یک پایهٔ V می‌باشد.

برهان. برای اثبات (آ)، فرض کنیم $S = \{x_1, \ldots, x_k\}$ مجموعهٔ مستقلی از عناصر V باشد. اگر $L(S) = V$ ، S یک پایه است. درغیر این‌صورت، عنصری چون y در V وجود دارد که در $L(S)$ نیست. این عنصر را به S می‌افزاییم و مجموعهٔ جدید $S' = \{x_1, \ldots, x_k, y\}$ را درنظر می‌گیریم. اگر این مجموعه وابسته می‌بود، اسکالرهایی چون $c_1, \ldots, c_{k+1}$ که همه صفر نیستند وجود می‌داشت بطوری که

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i + c_{k+1} y = O .$$

اما $c_{k+1} \neq 0$ ، زیرا $x_1, \ldots, x_k$ مستقل هستند. پس می‌شد این معادله را نسبت به y حل کرد و دید که $y \in L(S)$ ، متناقض‌با اینکه y در $L(S)$ نیست. لذا، مجموعهٔ S' مستقل ولی شامل $k + 1$ عنصر است. اگر $L(S') = V$ ، S' یک پایه است و، چون S زیر مجموعهٔ S' است، قسمت (آ) ثابت می‌شود. اگر S' پایه نباشد، می‌توان با S' مثل S استدلال کرد و مجموعهٔ جدید S'' راکه $k + 2$ عنصر داردو مستقل است به‌دست آورد. چنانچه S'' پایه باشد، قسمت (آ) ثابت می‌شود. در غیراین صورت، عمل را ادامه خواهیم داد. در چندمرحله باید به یک پایه برسیم، زیرا درغیر این‌صورت مآلا" مجموعهٔ مستقلی با $n + 1$ عنصر به‌دست می‌آید، که با قضیهٔ ۵۰۱ تعارض خواهد داشت. بنابراین، قسمت (آ) ثابت شده است.

برای اثبات (ب)، فرض‌کنیم S یک‌مجموعهٔ مستقل با n عنصر باشد. بنابرقسمت (آ)، S زیر مجموعهٔ یک پایه، مثلا" B ، است. اما، طبق قضیهٔ ۶۰۱ ، B درست n عنصر دارد؛ در نتیجه، $S = B$.

۹.۱ مولفه‌ها

فرض‌کنیم V یک فضای خطی با بعد n باشد، و پایه‌ای را با عنصرهای $e_1, \ldots, e_n$ و با همین‌ترتیب درنظر می‌گیریم. این پایهٔ مرتب را با n تایی $(e_1, \ldots, e_n)$ نشان می‌دهیم. اگر $x \in V$، می‌توان x را به‌صورت ترکیبی خطی از عنصرهای این پایه نوشت:

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i . \tag{۵.۱}$$

ضرایب این معادله n تایی مرتب $(c_1, \ldots, c_n)$ از اعداد را که به‌طور منحصر بفرد به‌وسیلهٔ x مشخص می‌شوند معین می‌کنند. در واقع، اگر نمایش دیگری از x به‌صورت ترکیبی خطی از $e_1, \ldots, e_n$ داشته باشیم، مثلاً "$x = \sum_{i=1}^{n} d_i e_i$، با تفریق این از (۵.۱) داریم $\sum_{i=1}^{n} (c_i - d_i)e_i = O$. اما چون عناصر پایه مستقل‌اند، این ایجاب می‌کند که به‌ازای هر i، $c_i = d_i$؛ در نتیجه، خواهیم داشت $(c_1, \ldots, c_n) = (d_1, \ldots, d_n)$.

مؤلفه‌های n تایی مرتب $(c_1, \ldots, c_n)$ که با معادلهٔ (۵.۱) مشخص می‌شوند **مؤلفه‌های** x **نسبت به پایهٔ مرتب** $(e_1, \ldots, e_n)$ نام دارند.

۱۰.۱ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۱۰، فرض کنید S مجموعهٔ تمام (x, y, z) هایی در V_3 باشد که مؤلفه‌هایشان در شرط داده شده صدق می‌کنند. تعیین کنید آیا S زیر فضای V_3 هست یا نه. در صورت زیر فضا بودن S، $\dim S$ را حساب کنید.

۱. $x = 0$.

۲. $x + y = 0$.

۳. $x + y + z = 0$.

۴. $x = y$.

۵. $x = y = z$.

۶. $x = y$ یا $x = z$.

۷. $x^2 - y^2 = 0$.

۸. $x + y = 1$.

۹. $y = 2x$ و $z = 3x$.

۱۰. $x + y + z = 0$ و $x - y - z = 0$.

فرض‌کنید P_n فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی از درجهٔ نابیشتر از n باشد، که n ثابت است. در تمرینهای ۱۱ تا ۲۰، S را مجموعهٔ تمام چند جمله‌ایهای f در P_n بینگارید که در شرط داده شده صدق می‌کنند. تعیین کنید آیا S زیر فضای P_n هست یا نه. درصورت زیر فضا بودن S، $\dim S$ را حساب کنید.

۱۱. $f(0) = 0$.

۱۲. $f'(0) = 0$.

۱۳ . $f''(0) = 0$.

۱۴ . $f(0) + f'(0) = 0$.

۱۵ . $f(0) = f(1)$.

۱۶ . $f(0) = f(2)$.

۱۷ . f زوج است .

۱۸ . f فرد است .

۱۹ . درجهٔ f از k ، که $k < n$ ، نابیشتر است یا $f = 0$

۲۰ . درجهٔ f مساوی k ، که $k < n$ ، است یا $f = 0$.

۲۱ . زیر فضایی را در فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی $p(t)$ وصف کنید که به وسیلهٔ هریک از زیر مجموعه‌های زیر از چند جمله‌ایها پیموده می‌شود ، و بعد این زیرفضا را مشخص نمایید :

(آ) $\{1, t^2, t^4\}$ ؛ (ب) $\{t, t^3, t^5\}$ ؛ (پ) $\{t, t^2\}$ ؛ (ت) $\{1 + t, (1 + t)^2\}$.

۲۲ . دراین تمرین ، $L(S)$ زیرفضایی است که به‌وسیلهٔ زیر مجموعهٔ S از فضای خطی V پیموده می‌شود . احکام (آ) تا (ج) را اثبات نمایید .

(آ) $S \subseteq L(S)$.

(ب) اگر $S \subseteq T \subseteq V$ و T زیر فضای V باشد ، $L(S) \subseteq T$. این خاصیت این‌طور توصیف می‌شود که می‌گویند $L(S)$ کوچکترین زیرفضایی از V است که شامل S می‌باشد .

(پ) زیرمجموعهٔ S از V زیرفضای V است اگر و فقط اگر $L(S) = S$.

(ت) اگر $S \subseteq T \subseteq V$ ، $L(S) \subseteq L(T)$.

(ث) اگر S و T زیرفضاهای V باشند ، $S \cap T$ نیز چنین است .

(ج) اگر S و T زیرمجموعه‌های V باشند ، $L(S \cap T) \subseteq L(S) \cap L(T)$.

(چ) مثالی بزنید که درآن $L(S \cap T) \neq L(S) \cap L(T)$.

۲۳ . فرض‌کنید V فضای خطی تمام توابع حقیقی باشد که‌برخط حقیقی تعریف شده‌اند . تعیین‌کنید آیا زیر مجموعه‌های زیراز V وابسته‌اند یا مستقل . بعد زیر فضای پیموده شده به‌وسیلهٔ هر مجموعه را حساب کنید .

(آ) $\{1, e^{ax}, e^{bx}\}, a \neq b$.

(ب) $\{e^{ax}, xe^{ax}\}$.

(پ) $\{1, e^{ax}, xe^{ax}\}$.

(ت) $\{e^{ax}, xe^{ax}, x^2e^{ax}\}$.

(ث) $\{e^x, e^{-x}, \cosh x\}$.

(ج) $\{\cos x, \sin x\}$.

(چ) $\{\cos^2 x, \sin^2 x\}$.

(ح) $\{1, \cos 2x, \sin^2 x\}$.

(خ) $\{\sin x, \sin 2x\}$.

(د) $\{e^x \cos x, e^{-x} \sin x\}$.

۲۴ . فرض کنید V یک فضای خطی با بعد متناهی باشد، و S را زیرفضایی از V بینگارید. هریک از احکام زیر را ثابت نمایید:

(آ) S با بعد متناهی است و $\dim S \le \dim V$ ؛

(ب) $\dim S = \dim V$ اگر و فقط اگر $S = V$ ؛

(پ) هرپایهٔ S بخشی از یک پایهٔ V است؛

(ت) یک پایهٔ V لازم نیست پایه‌ای از S را دربر داشته باشد.

۱۱۰۱ ضربهای داخلی، فضاهای اقلیدسی. نرمها

در هندسهٔ اقلیدسی معمولی، آن خواصی که به اندازه‌گیری طول پاره‌خطها و زوایای بین خطوط تکیه دارند خواص **متری** نامیده می‌شوند. دربررسی ما از V_n، طولها و زوایا به‌وسیلهٔ ضرب نقطه‌ای تعریف شدند. حال این مفهومها را به فضاهای خطی کلیتر تعمیم می‌دهیم. ابتدا تعمیم ضرب نقطه‌ای‌را، که *ضرب داخلی* نام دارد، معرفی کرده، سپس طول و زاویه را برحسب ضرب داخلی تعریف می‌کنیم.

درجلد یک حاصلضرب نقطه‌ای دوبردار $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, \ldots, y_n)$ در V_n با فرمول

$$x \cdot y = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i \qquad (۶۰۱)$$

تعریف شد. در فضای خطی کلی، به‌جای $x \cdot y$ می‌نویسیم (x, y)، و ضرب را، به عوض با یک فرمول، به‌طور اصل موضوعی تعریف می‌کنیم. یعنی، چند خاصیت را که می‌خواهیم ضربهای داخلی داشته باشند بیان می‌کنیم و آنها را به‌عنوان *اصول موضوع* درنظر می‌گیریم.

تعریف. گوییم فضای خطی و حقیقی V ضرب داخلی دارد هرگاه به هر جفت عنصر x و y در V عدد حقیقی منحصر بفردی چون (x, y) مربوط شده باشد که در اصول موضوع زیر به‌ازای هر x, y, z از V و هر اسکالر حقیقی c صدق نماید:

(۱) $(x, y) = (y, x)$ (تعویضپذیری یا تقارن)؛

(۲) $(x, y + z) = (x, y) + (x, z)$ (پخشپذیری یا خطی)؛

(۳) $c(x, y) = (cx, y)$ (شرکتپذیری یا همگنی)؛

(۴) اگر $x \neq O$، $(x, x) > 0$ (مثبتی).

یک فضای خطی حقیقی با ضرب داخلی یک **فضای اقلیدسی حقیقی** نامیده می‌شود .

تذکر . با فرض $c = 0$ در (۳) می‌بینیم که‌به‌ازای هر y ، $(O, y) = 0$.

در یک فضای‌خطی مختلط ، حاصل ضرب داخلی (x, y) عدد مختلطی است که در همان اصول موضوع صادق برای ضرب داخلی حقیقی صدق می‌کند ، جز آنکه اصل موضوع تقارن با رابطهٔ

$$(x, y) = \overline{(y, x)} \qquad \text{(تقارن هرمیتی*)} \tag{۱'}$$

که در آن $\overline{(y, x)}$ مزدوج‌مختلط (y, x) است ، عوض‌می‌شود . دراصل موضوع همگنی ، ضریب اسکالر c می‌تواند هر عدد مختلط باشد . از اصل موضوع همگنی و (۱') رابطهٔ لنگهٔ

$$(x, cy) = \overline{(cy, x)} = \bar{c}\overline{(y, x)} = \bar{c}(x, y) \tag{۳'}$$

به‌دست خواهد آمد .

هر فضای خطی مختلط دارای ضرب داخلی یک **فضای اقلیدسی مختلط** نام دارد . (گاهی اصطلاح *فضای یکه‌ای* نیز بدان اطلاق می‌شود .) یک مثال فضای برداری مختلط $V_n(\mathbf{C})$ است که در بخش ۱۶.۱۲ جلد یک به اختصار از آن بحث شد .

با آنکه عمدتاً " به فضاهای اقلیدسی‌حقیقی نظر داریم ، قضایای این فصل برای فضاهای اقلیدسی مختلط نیز معتبرند . هرگاه اصطلاح فضای اقلیدسی را بی‌توضیح بیشتر به‌کاربردیم ، فرض است که فضا می‌تواند حقیقی یا مختلط باشد .

خواننده باید تحقیق کند که هریک از مثالهای زیر در تمام اصول موضوع ضرب داخلی صدق می‌کند .

مثال ۱ . در V_n فرض می‌کنیم $(x, y) = x \cdot y$ ، یعنی حاصل ضرب نقطه‌ای معمولی x و y ، باشد .

مثال ۲ . اگر $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ دو بردار در V_2 باشند ، (x, y) را با فرمول

---

* *به افتخار شارل هرمیت (Charles Hermite , 1822-1901) ، ریاضیدان فرانسوی ، که در جبر و آنالیز تحقیقات زیادی کرده است .*

$$(x, y) = 2x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

تعریف می‌کنیم . ایـن مثال نشان می‌دهد که در یک فضای خطی ممکن است بیش از یک ضرب داخلی وجود داشته باشد .

مثال ۳ . فرض کنیم $C(a, b)$ فضای خطی تمام توابع حقیقی و پیوسته بر بازهٔ $[a, b]$ باشد . حاصل ضرب داخلی دو تابع f و g را با فرمول

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$$

تعریف می‌کنیم . این فرمول شبیه معادلهٔ (۶.۱) است ، که حاصل ضرب نقطه‌ای دوبردار در V_n را تعریف می‌کرد . مقادیر تابعی $f(t)$ و $g(t)$ نقش مؤلفه‌های x_i و y_i را دارند ، و انتگرالگیری جای جمعبندی را گرفته است .

مثال ۴ . در فضای $C(a, b)$ تعریف می‌کنیم

$$(f, g) = \int_a^b w(t)f(t)g(t)\,dt ,$$

که در آن w تابع مثبت ثابتی در $C(a, b)$ است . تابع w **تابع وزن** نامیده می‌شود . در مثال ۳ ، به‌ازای هر t داریم $w(t) = 1$.

مثال ۵ . در فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی تعریف می‌کنیم

$$(f, g) = \int_0^\infty e^{-t}f(t)g(t)\,dt .$$

این انتگرال مجازی ، بخاطر سازهٔ نمایی ، به‌ازای هر دو چند جمله‌ای f و g همگراست .

قضیهٔ ۸.۱ . *در فضای اقلیدسی V ، هر ضرب داخلی در نامساوی کشی[1] ـ شوارتز[2] صدق می‌کند :*

به‌ازای هر x و y در V ، $|(x, y)|^2 \leq (x, x)(y, y)$.

بعلاوه ، تساوی برقرار است اگر و فقط اگر x و y وابسته باشند .

برهان . اگر $x = O$ یا $y = O$ ، نتیجه واضح است . پس می‌توان فرض کرد که هردوی x

---

1. Cauchy 2. Schwarz

و y ناصفر باشند. فرض کنیم $z = ax + by$ ، که در آن a و b اسکالرهایی هستند که بعداً مشخص می‌شوند. بازای هر a و b داریم $(z, z) \geq 0$. هرگاه این نامساوی را برحسب x و y و با انتخاب مناسبی از a و b بنویسیم ، نامساوی کشی ــ شوارتز را خواهیم داشت.

برای بیان (z, z) برحسب x و y ، از خواص (۱´)، (۲)، و (۳´) استفاده می‌کنیم :

$$(z, z) = (ax + by, ax + by) = (ax, ax) + (ax, by) + (by, ax) + (by, by)$$
$$= a\bar{a}(x, x) + a\bar{b}(x, y) + b\bar{a}(y, x) + b\bar{b}(y, y) \geq 0.$$

با فرض $a = (y, y)$ و حذف سازهٔ مثبت (y, y) در این نامساوی داریم

$$(y, y)(x, x) + \bar{b}(x, y) + b(y, x) + b\bar{b} \geq 0.$$

حال فرض می‌کنیم $b = -(x, y)$. دراین‌صورت ، $\bar{b} = -(y, x)$ ونامساوی‌آخر به‌صورت زیر خلاصه می‌شود :

$$(y, y)(x, x) \geq (x, y)(y, x) = |(x, y)|^2.$$

این نامساوی کشی ــ شوارتز را ثابت می‌کند. تساوی در سراسر برهان برقرار است اگر و فقط اگر $z = O$. این، به نوبهٔ خود، برقرار است اگر و فقط اگر x و y وابسته باشند.

مثال. با اعمال قضیهٔ ۸۰۱ درمورد $C(a, b)$ مجهزبه‌ضرب داخلی $(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\,dt$ ، می‌بینیم که نامساوی کشی ــ شوارتز به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$\left(\int_a^b f(t)g(t)\,dt\right)^2 \leq \left(\int_a^b f^2(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g^2(t)\,dt\right).$$

از ضرب داخلی می‌توان برای معرفی مفهوم متری طول در هر فضای اقلیدسی استفاده کرد.

تعریف. در فضای اقلیدسی V ، عدد نامنفی $\|x\|$ ، که با معادلهٔ

$$\|x\| = (x, x)^{1/2}$$

تعریف می‌شود، نرم عنصر x نام دارد.

نامساوی کشی ــ شوارتز برحسب نرمها شکل زیر را خواهد یافت :

$$|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|.$$

چون ضرب داخلی به طرق مختلف تعریف می‌شود ، نرم یک عنصر به انتخاب ضرب داخلی بستگی دارد . ما این عدم یکتایی را انتظار داشتیم . این امر مشابه آن است که می‌توان ، بسته به انتخاب مقیاس یا واحد اندازه‌گیری ، هر عدد را طول یک پاره‌خط دانست . قضیهٔ زیر خواص اساسی نرمها را که به ضرب داخلی انتخاب شده بستگی ندارند به‌دست می‌دهد .

قضیهٔ ۹۰۱ . ***در یک فضای اقلیدسی ، هر نرم به‌ازای هر دو عنصر x و y و هر اسکالر c خواص زیر را دارد :***

(آ) ***اگر*** $x = O$ ، $\|x\| = 0$ ؛

(ب) ***اگر*** $x \neq O$ ، $\|x\| > 0$ ***(مثبتی)*** ؛

(پ) $\|cx\| = |c| \, \|x\|$ ***(همگنی)*** ؛

(ت) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ***(نامساوی مثلثی)*** .

در (ت) تساوی در صورتی برقرار است که $x = O$ ***یا*** $y = O$ ***یا به‌ازای*** $c > 0$ ***ای*** ، $y = cx$.

برهان . خواص (آ) و (ب) و (پ) فوراً از اصول موضوع ضرب داخلی نتیجه می‌شوند . برای اثبات (ت) توجه می‌کنیم که

$$\begin{aligned}\|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + (y, y) + (x, y) + (y, x) \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x, y) + \overline{(x, y)}.\end{aligned}$$

مجموع $(x, y) + \overline{(x, y)}$ حقیقی است . نامساوی کشی ـ شوارتز نشان می‌دهد که $|(x, y)| \leq \|x\| \, \|y\|$ و $|\overline{(x, y)}| \leq \|x\| \, \|y\|$. درنتیجه ، داریم

$$\|x + y\|^2 \leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \, \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2.$$

این (ت) را ثابت می‌کند . وقتی $y = cx$ ، که در آن $c > 0$ ، خواهیم داشت

$$\|x + y\| = \|x + cx\| = (1 + c) \, \|x\| = \|x\| + \|cx\| = \|x\| + \|y\|.$$

تعریف . در فضای اقلیدسی حقیقی V ، زاویهٔ بین دو عنصر ناصفر x و y مساوی عددی مانند θ در بازهٔ $0 \leq \theta \leq \pi$ تعریف می‌شود که در معادلهٔ

$$\cos\theta = \frac{(x, y)}{\|x\| \, \|y\|} \tag{۷۰۱}$$

صدق می‌کند .

تذکر. نامساوی کشی ــ شوارتز نشان می‌دهد که خارج قسمت سمت راست (۷۰۱) دربازهٔ $[-1, 1]$ واقع است ؛ در نتیجه، فقط یک θ در $[0, \pi]$ هست کـه کسینوس آن مساوی این خارج قسمت است .

۱۲۰۱ تعامد در فضای اقلیدسی

تعریف. در فضای اقلیدسی V ، دو عنصر x و y را **متعامد** گوییم هرگاه حاصل ضرب داخلی آنها صفر باشد . زیر مجموعهٔ S از V را **متعامد** نامیم هرگاه به‌ازای هر جفت عنصر متمایز x و y در S ، $(x, y) = 0$. یک مجمـوعهٔ متعامد را **متعامدیکه** نامیم هرگاه هر عنصر آن نرم یک داشته باشد .

عنصر صفر به هر عنصر V متعامد است ؛ این تنها عنصری است که به خودش متعامد است . قضیهٔ زیر رابطهٔ تعامد را با استقلال نشان می‌دهد .

قضیهٔ ۱۵۰۱ . *در فضای اقلیدسی V ، هرمجموعهٔ متعامد از عناصر ناصفر مستقل است . درحالت خـاص، در فضای اقلیدسی و با بعد متناهی V که $\dim V = n$ ، هر مجموعهٔ متعامد مرکب از n عنصر ناصفر یک پایهٔ V می‌باشد .*

برهان. فرض کنیم S یک مجموعهٔ متعامد از عناصر ناصفر در V بوده، و ترکیبی خطی و متناهی از عناصر S مساوی صفر باشد، مثلاً " داشته باشیم

$$\sum_{i=1}^{k} c_i x_i = O ,$$

که در آن هر $x_i \in S$. با ضرب داخلی دو طرف این رابطه در x_1 و استفاده از این امر که اگـر $i \neq 1$ ، $(x_1 , x_i) = 0$ ، خواهیـم داشت $c_1(x_1 , x_1) = 0$. اما چون $x_1 \neq O$ ، $(x_1 , x_1) \neq 0$ ؛ در نتیجه، $c_1 = 0$. با تکرار این استدلال برای x_j به‌جای x_1 ، معلوم می‌شود که هر $c_j = 0$. این ثابت می‌کند که S مستقل است . اگر $\dim V = n$ و S از n

عنصر تشکیل شده باشد، قضیهٔ ۷۰۱ (ب) نشان می‌دهد که S یک پایهٔ V می‌باشد.

مثال. فرض کنیم در فضای خطی و حقیقی $C(0, 2\pi)$ با ضرب داخلی $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$، S مجموعهٔ توابع مثلثاتی $\{u_0, u_1, u_2, \ldots\}$ باشد که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

$u_0(x) = 1$؛ و به‌ازای $n = 1, 2, \ldots$، $u_{2n-1}(x) = \cos nx$ و $u_{2n}(x) = \sin nx$.

اگر $m \neq n$، روابط تعامدی

$$\int_0^{2\pi} u_n(x)u_m(x)\,dx = 0$$

را داریم. در نتیجه، S یک مجموعهٔ متعامد است. چون هیچ عضو S عنصر صفر نیست، S مستقل می‌باشد. نرم هر عنصر S را می‌توان به‌آسانی حساب کرد. داریم $(u_0, u_0) = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi$ و، به‌ازای $n \geq 1$،

$$(u_{2n-1}, u_{2n-1}) = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx\,dx = \pi, \qquad (u_{2n}, u_{2n}) = \int_0^{2\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi.$$

بنابراین، $\|u_0\| = \sqrt{2\pi}$ و، به‌ازای $n \geq 1$، $\|u_n\| = \sqrt{\pi}$. باتقسیم هر u_n بر نرمش، مجموعهٔ متعامدیکهٔ $\{\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots\}$ به‌دست می‌آید که در آن $\varphi_n = u_n/\|u_n\|$. لذا، خواهیم داشت

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$ و، به‌ازای $n \geq 1$، $$\varphi_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}$$ و $$\varphi_{2n}(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}.$$

در بخش ۱۴۰۱ ثابت می‌کنیم هر فضای اقلیدسی با بعد متناهی دارای پایهٔ متعامد است. قضیهٔ بعدی طرز محاسبهٔ مؤلفه‌های یک عنصر را نسبت به این پایه نشان می‌دهد.

قضیهٔ ۱۱۰۱ . فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی با بعد متناهی n بوده، و $S = \{e_1, \ldots, e_n\}$ یک پایهٔ متعامد V باشد. اگر x به صورت ترکیبی خطی از عناصر پایه بیان شده باشد، مثلاً

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i, \tag{۸۰۱}$$

مولفه‌های آن نسبت به پایهٔ مرتب $(e_1, \ldots, e_n)$ از فرمولهای زیر به‌دست می‌آیند:

$$\text{به‌ازای } j = 1, 2, \ldots, n\text{،}\quad c_j = \frac{(x, e_j)}{(e_j, e_j)}. \tag{۹۰۱}$$

بخصوص، اگر S یک پایهٔ متعامدیکه باشد، هر c_j از

$$c_j = (x, e_j) \tag{۱۰۰۱}$$

به‌دست خواهد آمد.

برهان. با ضرب داخلی دوطرف (۸۰۱) در e_j داریم

$$(x, e_j) = \sum_{i=1}^{n} c_i(e_i, e_j) = c_j(e_j, e_j)$$

چراکه‌اگر $j \neq i$ ، $(e_i, e_j) = 0$. ازاین (۹۰۱) نتیجه می‌شود، و وقتی $(e_j, e_j) = 1$ ، (۱۰۰۱) را خواهیم داشت.

چنانچه $\{e_1, \ldots, e_n\}$ یک پایهٔ متعامد یکه باشد، معادلهٔ (۹۰۱) را می‌توان به شکل

$$x = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)e_i \tag{۱۱۰۱}$$

نوشت.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که در یک فضای اقلیدسی با بعد متناهی و با پایهٔ متعامد یکه، حاصل ضرب داخلی دو عنصر را می‌توان برحسب مؤلفه‌های آنها حساب کرد.

قضیهٔ ۱۲۰۱ . فرض‌کنیم V یک‌فضای‌اقلیدسی‌با بعد متناهی n بوده، و $\{e_1, \ldots, e_n\}$ یک پایهٔ متعامد یکهٔ آن باشد. دراین‌صورت، به ازای هر جفت عنصر x و y در V داریم

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)\overline{(y, e_i)} \qquad \text{(فرمول پارسوال[1])} \tag{۱۲۰۱}$$

بخصوص، وقتی $x = y$ ، خواهیم داشت

$$\|x\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |(x, e_i)|^2. \tag{۱۳۰۱}$$

---

1. Parseval

برهان. با ضرب دوطرف معادلهٔ (۱۱۰۱) در y و استفاده از خاصیت خطی ضرب داخلی، (۱۲۰۱) به‌دست می‌آید. وقتی $x = y$، معادلهٔ (۱۲۰۱) به (۱۳۰۱) تحویل می‌شود.

تذکر. معادلهٔ (۱۲۰۱) به‌افتخار پارسوال (حدود ۱۸۳۶ – ۱۷۷۶)، که‌این‌نوع‌فرمول را در یک فضای‌تابعی خاص به‌دست آورد، نامگذاری شده است. معادلهٔ (۱۳۰۱) تعمیم قضیهٔ فیثاغورس[1] است.

۱۳۰۱ تمرین

۱. فرض‌کنید $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, \ldots, y_n)$ بردارهای‌دلخواهی‌در V_n باشند. در هر حالت، که (x, y) با فرمولی تعریف شده، معین کنید که (x, y) یک ضرب داخلی‌برای V_n هست‌یا نه. در حالتی که نیست، بگویید کدام اصول موضوع‌برقرار نیستند:

(آ) $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i |y_i|$ ؛ (ب) $(x, y) = \left|\sum_{i=1}^{n} x_i y_i\right|$ ؛

(پ) $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} x_i \sum_{j=1}^{n} y_j$ ؛ (ت) $(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i^2 y_i^2\right)^{1/2}$ ؛

(ث) $(x, y) = \sum_{i=1}^{n} (x_i + y_i)^2 - \sum_{i=1}^{n} x_i^2 - \sum_{i=1}^{n} y_i^2$.

۲. فرض‌کنید سه اصل موضوع اول ضرب داخلی حقیقی (تقارن، خطی، همگنی) را نگهداشته‌واصل‌چهارم را با این‌اصل جدید عوض‌کرده باشیم: ($'$۴): $(x, x) = 0$ اگر و فقط‌اگر $x = O$. ثابت کنید یا به ازای هر $x \neq O$، $(x, x) > 0$ یا به ازای هر $x \neq O$، $(x, x) < 0$.

[**راهنمایی.** فرض کنید به‌ازای $x \neq O$ ی $(x, x) > 0$ و به ازای $y \neq O$ ی $(y, y) < 0$. در فضای پیموده شده به وسیلهٔ $\{x, y\}$ عنصری مانند $z \neq O$ بیابید که $(z, z) = 0$.]

ثابت کنید که احکام تمرینهای ۳ تا ۷ به‌ازای هر x و y در یک فضای اقلیدسی

1. Pythagoras

حقیقی معتبرند .

۳ . $(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر $\|x - y\| = \|x + y\|$.

۴ . $(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2$.

۵ . $(x, y) = 0$ اگر و فقط اگر به‌ازای هر c ی حقیقی $\|x\| \geq \|x + cy\|$.

۶ . $(x + y, x - y) = 0$ اگر و فقط اگر $\|y\| = \|x\|$.

۷ . هرگاه عنصرهای ناصفر x و y با هم زاویهٔ θ بسازند ، آنگاه

$\|x - y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 - 2\,\|x\|\,\|y\| \cos \theta .$

۸ . در فضای خطی و حقیقی $C(1, e)$ ، ضرب داخلی را با معادلهٔ

$$(f, g) = \int_1^e (\log x) f(x) g(x)\, dx$$

تعریف کنید .

(آ) اگر $f(x) = \sqrt{x}$ ، $\|f\|$ را محاسبه کنید .

(ب) چند جمله‌ای خطی $g(x) = a + bx$ را که به تابع ثابت $f(x) = 1$ متعامد است پیدا کنید .

۹ . در فضای خطی و حقیقی $C(-1, 1)$ قرار دهید $(f, g) = \int_{-1}^1 f(t) g(t)\, dt$ ، و سه‌تابع u_1, u_2, u_3 را که با

$$u_1(t) = 1, \qquad u_2(t) = t, \qquad u_3(t) = 1 + t$$

داده شده‌اند در نظر بگیرید . ثابت کنید دوتای آنها متعامدند ، دوتا با هم زاویهٔ $\pi/3$ می‌سازند ، و دوتا با هم زاویهٔ $\pi/6$ می‌سازند .

۱۰ . در فضای خطی P_n مرکب از تمام چند جمله‌ایهای حقیقی با درجهٔ نابیشتر از n تعریف کنید

$$(f, g) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) g\left(\frac{k}{n}\right)$$

(آ) ثابت کنید (f, g) یک ضرب داخلی برای P_n است .

(ب) (f, g) را وقتی $f(t) = t$ و $g(t) = at + b$ محاسبه کنید .

(پ) هرگاه $f(t) = t$ ، تمام چند جمله‌ایهای خطی متعامد به f را بیابید .

۱۱ . در فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی تعریف‌کنید $(f, g) = \int_0^\infty e^{-t} f(t) g(t)\, dt$.

(آ) ثابت کنید این انتگرال مجازی به ازای تمام چند جمله‌ایهای f و g به‌طور

مطلق همگراست .

(ب) اگر به ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$ ، $x_n(t) = t^n$ ، ثابت‌کنید $(x_n, x_m) = (m + n)!$.

(پ) (f,g) را وقتی $f(t) = (t + 1)^2$ و $g(t) = t^2 + 1$ محاسبه کنید .

(ت) تمام چند جمله‌ایهای خطی $g(t) = a + bt$ و متعامد به $f(t) = 1 + t$ را پیدا کنید .

۱۲ . در فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی ، تعیین کنید (f,g) که با فرمولی تعریف شده یک ضرب داخلی هست یا نه . درحالتی که نیست ، نشان دهید کدام اصول نقض شده‌اند . در (پ) ، f' و g' مشتق هستند :

(آ) $(f,g) = f(1)g(1)$ ؛ (ب) $(f,g) = \left| \int_0^1 f(t)g(t)\, dt \right|$ ؛

(پ) $(f,g) = \int_0^1 f'(t)g'(t)\, dt$ ؛ (ت) $(f,g) = \left(\int_0^1 f(t)\, dt\right)\left(\int_0^1 g(t)\, dt\right)$.

۱۳ . فرض‌کنید V از تمام دنباله‌های نامتناهی $\{x_n\}$ از اعداد حقیقی تشکیل شده که به ازای آنها سری Σx_n^2 همگراست . اگر $x = \{x_n\}$ و $y = \{y_n\}$ دو عنصر از V باشند ، تعریف کنید

$$(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} x_n y_n .$$

(آ) ثابت کنید این سری به‌طور مطلق همگراست .

[**راهنمایی .** با استفاده‌ازنامساوی‌کشی ــ شوارتز ، مجموع $\sum_{n=1}^{M} |x_n y_n|$ راتخمین بزنید .]

(ب) ثابت کنید V یک فضای خطی با ضرب داخلی (x, y) است .

(پ) هرگاه‌به‌ازای $n \geq 1$ ، $x_n = 1/n$ و $y_n = 1/(n + 1)$ ، (x, y) را محاسبه‌کنید .

(ت) هرگاه‌به‌ازای $n \geq 1$ ، $x_n = 2^n$ و $y_n = 1/n!$ ، (x, y) را محاسبه نمایید .

۱۴ . فرض‌کنید V مجموعهٔ تمام توابع حقیقی و پیوستهٔ f بر $[0, +\infty)$ باشد که انتگرال $\int_0^\infty e^{-t} f^2(t)\, dt$ همگراست ، و تعریف کنید $(f,g) = \int_0^\infty e^{-t} f(t)g(t)\, dt$.

(آ) ثابت کنید انتگرال معرف (f,g) به ازای هر جفت f و g در V به‌طورمطلق همگراست .

[**راهنمایی .** با استفاده از نامساوی کشی ــ شوارتز ، انتگرال $\int_0^M e^{-t} |f(t)g(t)|\, dt$ را تخمین بزنید .]

(ب) ثابت کنید V یک فضای خطی با ضرب داخلی (f,g) است.

(پ) هرگاه $f(t) = e^{-t}$ و $g(t) = t^n$ که $n = 0, 1, 2, \ldots$ ، (f,g) را محاسبه‌کنید.

۱۵ . ثابت‌کنید درهر فضای اقلیدسی مختلط، ضرب داخلی به‌ازای هر عنصر x ، y ، و z ، و هر a و b مختلط از خواص زیر برخوردار است:

(آ) $(ax, by) = a\bar{b}(x, y)$ ؛ (ب) $(x, ay + bz) = \bar{a}(x, y) + \bar{b}(x, z)$.

۱۶ . ثابت کنید در هر فضای اقلیدسی اتحادهای زیر برقرارند:

(آ) $\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + (x, y) + (y, x)$ ؛

(ب) $\|x + y\|^2 - \|x - y\|^2 = 2(x, y) + 2(y, x)$ ؛

(پ) $\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2$.

۱۷ . ثابت کنید که اگر در فضای تمام توابع مختلط پیوسته بر بازهٔ $[a, b]$ ضرب داخلی با فرمول

$$(f, g) = \int_a^b w(t) f(t) \overline{g(t)}\, dt,$$

که درآن w یک تابع مثبت ثابت و پیوسته بر $[a, b]$ است، تعریف شود، این فضا به یک فضای یکه‌ای تبدیل می‌شود.

۱۴.۱ ساختن مجموعه‌های متعامد. فرایند گرام[1]ـ اشمیت[2]

هر فضای خطی با بعد متناهی دارای پایهٔ متناهی است. چنانچه فضا اقلیدسی باشد، همیشه‌می‌توان یک پایهٔ **متعامد** را ساخت. این مطلب از یک قضیهٔ کلی نتیجه می‌شود که برهان آن طرز ساختن مجموعه‌های متعامد را در هر فضای اقلیدسی، با بعد متناهی یا نامتناهی، نشان می‌دهد. این ساختن به افتخار گرام (۱۹۱۶ ــ ۱۸۵۰) و اشمیت (۱۹۲۱ ــ ۱۸۴۵) **فرایند متعامد سازی گرام ـ اشمیت** نامیده شده است.

قضیهٔ ۱۳.۱ . قضیهٔ متعامد سازی. *فرض‌کنیم $x_1, x_2, \ldots$ دنباله‌ای متناهی یا نامتناهی ازعنصرها در فضای اقلیدسی V ، و $L(x_1, \ldots, x_k)$ زیر فضای پیموده شده به وسیلهٔ k عنصر اول باشد. دراین صورت، دنباله‌ای مانند $y_1, y_2, \ldots$ از عناصر V هست که به‌ازای هر عدد صحیح k از خواص زیر برخوردار است:*

---

1. Gram 2. Schmidt

(آ) عنصر y_k به هر عنصر زیر فضای $L(y_1, \ldots, y_{k-1})$ متعامد است؛
(ب) زیرفضای پیموده شده به وسیلهٔ $y_1, \ldots, y_k$ همان زیر فضای پیموده شده به‌وسیلهٔ $x_1, \ldots, x_k$ است:

$$L(y_1, \ldots, y_k) = L(x_1, \ldots, x_k);$$

(پ) دنبالهٔ $y_1, y_2, \ldots$، صرف نظر از سازه‌های اسکالر، منحصر بفرد است؛ یعنی، هرگاه $y_1', y_2', \ldots$ دنبالهٔ دیگری از عناصر V و دارای خواص (آ) و (ب) به‌ازای هر k باشد، آنگاه به‌ازای هر k اسکالری مانند c_k هست بطوری که $y_k' = c_k y_k$.

برهان. عنصرهای $y_1, y_2, \ldots$ را به‌استقرا می‌سازیم. در شروع، y_1 را مساوی x_1 می‌گیریم. حال فرض کنیم $y_1, \ldots, y_r$ را ساخته باشیم بطوری که (آ) و (ب) وقتی $k = r$ برقرار باشند، و y_{r+1} را با معادلهٔ

$$y_{r+1} = x_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} a_i y_i \qquad (۱۴\cdot۱)$$

تعریف می‌کنیم، که درآن باید اسکالرهای $a_1, \ldots, a_r$ تعیین شوند. به‌ازای $j \leq r$، حاصل ضرب داخلی y_{r+1} در y_j مساوی است با

$$(y_{r+1}, y_j) = (x_{r+1}, y_j) - \sum_{i=1}^{r} a_i(y_i, y_j) = (x_{r+1}, y_j) - a_j(y_j, y_j),$$

چرا که اگر $i \neq j$، $(y_i, y_j) = 0$. اگر $y_j \neq O$، می‌توان با فرض

$$a_j = \frac{(x_{r+1}, y_j)}{(y_j, y_j)} \qquad (۱۵\cdot۱)$$

y_{r+1} را به y_j متعامد ساخت. اگر $y_j = O$، y_{r+1} به‌ازای هر انتخابی از a_j به y_j متعامد است، و در این حالت a_j را صفر اختیار می‌کنیم. پس y_{r+1} تعریف شده است و به هر عنصر قبلی $y_1, \ldots, y_r$ متعامد است. لذا، به هر عنصر زیر فضای

$$L(y_1, \ldots, y_r)$$

متعامد می‌باشد. این (آ) را وقتی $k = r + 1$ ثابت خواهد کرد.

برای اثبات (ب) وقتی $k = r + 1$، باید نشان داد که اگر $L(y_1, \ldots, y_r) = L(x_1, \ldots, x_r)$، $L(y_1, \ldots, y_{r+1}) = L(x_1, \ldots, x_{r+1})$. r عنصر اول $y_1, \ldots, y_r$ در

$$L(x_1, \ldots, x_r)$$

قرار دارند؛ و در نتیجه، در زیر فضای وسیعتر $L(x_1, \ldots, x_{r+1})$ واقعند. عنصر جدید y_{r+1} که با (۱۴۰۱) داده شده تفاضل دو عنصر در $L(x_1, \ldots, x_{r+1})$ است؛ در نتیجه، آن نیز در $L(x_1, \ldots, x_{r+1})$ می‌باشد. این ثابت می‌کند که

$$L(y_1, \ldots, y_{r+1}) \subseteq L(x_1, \ldots, x_{r+1}).$$

معادلهٔ (۱۴۰۱) نشان می‌دهدکه x_{r+1} مجموع دو عنصر در $L(y_1, \ldots, y_{r+1})$ است؛ در نتیجه، استدلال مشابهی شمول در جهت دیگر را به‌ما می‌دهد:

$$L(x_1, \ldots, x_{r+1}) \subseteq L(y_1, \ldots, y_{r+1}).$$

این امر (ب) را وقتی $k = r + 1$ ثابت می‌کند. لذا، (آ) و (ب) به استقرا بر k ثابت شده‌اند.

بالاخره، (پ) را بـه استقرا بر k ثابت می‌کنیم. حالت $k = 1$ واضح است. پس فرض می‌کنیم (پ) به‌ازای $k = r$ درست باشد و عنصر y'_{r+1} را درنظر می‌گیریم. بخاطر (ب)، این عنصر در

$$L(y_1, \ldots, y_{r+1})$$

است؛ و درنتیجه، می‌توان نوشت

$$y'_{r+1} = \sum_{i=1}^{r+1} c_i y_i = z_r + c_{r+1} y_{r+1},$$

که در آن $z_r \in L(y_1, \ldots, y_r)$. می‌خواهیم ثابت کنیم $z_r = O$. گوییم، طبق خاصیت (آ)، هردوی y'_{r+1} و $c_{r+1}y_{r+1}$ به z_r متعامدند. پس تفاضلشان، z_r، نیز به z_r متعامد است. به عبارت دیگر، z_r به خودش متعامد است؛ و درنتیجه، $z_r = O$. این برهـان قضیهٔ متعامد سازی را تمام خواهد کرد.

در ساختن زیر، فرض کنید به‌ازای r ی داشته باشیم $y_{r+1} = O$. دراین صورت، از (۱۴۰۱) معلـوم می‌شود کـه x_{r+1} ترکیبی خطـی از $y_1, \ldots, y_r$، و در نتیجـه از $x_1, \ldots, x_r$، است. پس عنصـرهای $x_1, \ldots, x_{r+1}$ وابسته می‌باشند. به عبارت دیگر، اگر k عنصر اول $x_1, \ldots, x_k$ مستقل باشند، عنصرهای نظیرشان $y_1, \ldots, y_k$ **ناصفرهستند**. دراین حـالت ضرایب a_i در (۱۴۰۱) از (۱۵۰۱) به‌دست‌می‌آیند، و فرمولهای معرف $y_1, \ldots, y_k$ شکل زیر را خواهند یافت:

$$y_1 = x_1 \text{ ؛ به‌ازای } r = 1, 2, \ldots, k-1 \text{ ، } y_{r+1} = x_{r+1} - \sum_{i=1}^{r} \frac{(x_{r+1}, y_i)}{(y_i, y_i)} y_i \quad (۱۶۰۱)$$

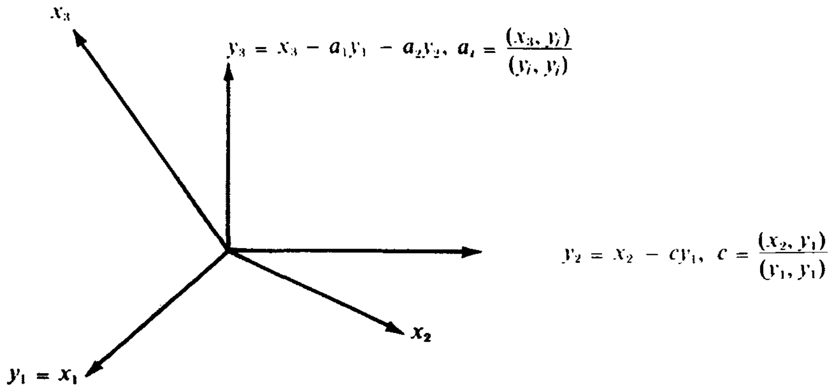
این فرمولها فرایندگرام ـ اشمیت را برای ساختن یک مجموعهٔ متعامد از عنصرهای ناصفر $y_1, \ldots, y_k$ که همان زیر فضای پیموده شده به وسیلهٔ مجموعهٔ مستقل $x_1, \ldots, x_k$ را می‌پیمایدتوصیف می کنند. درحالت خاص، اگر $x_1, \ldots, x_k$ پایهٔ یک فضای اقلیدسی با بعد متناهی باشد، $y_1, \ldots, y_k$ یک پایهٔ متعامد برای همان فضا می‌باشد. می‌توان این پایه‌را با **نرمیده کردن** هر عنصر y_i ، یعنی تقسیم آن بر نرمش، به یک پایهٔ متعامد یکه نیز بدل کرد. لذا، به عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ ۱۳۰۱، داریم

قضیهٔ ۱۴۰۱ . *هرفضای اقلیدسی با بعد متناهی دارای یک پایهٔ متعامد یکه‌است.*

اگر x و y عنصرهای یک فضای اقلیدسی باشند و $y \neq O$ ، عنصر

$$\frac{(x, y)}{(y, y)} y$$

تصویر x ***درامتداد*** y نامیده می‌شود. در فرایند گرام ـ اشمیت (۱۶۰۱)، ما عنصر y_{r+1} را با تفریق تصویر x_{r+1} در امتداد هر $y_1, \ldots, y_r$ از x_{r+1} می‌سازیم. شکل ۱۰۱ این ساختن را در فضای برداری V_3 به‌طور هندسی نشان می‌دهد.



شکل ۱۰۱ فرایند گرام ـ اشمیت در V_3 . مجموعهٔ متعامد $\{y_1, y_2, y_3\}$ از مجموعهٔ مستقل $\{x_1, x_2, x_3\}$ ساخته شده است.

مثال ۱. در V_4 ، برای زیرفضای پیموده شده به وسیلهٔ سه بردار $x_1 = (1, -1, 1, -1)$ ، $x_2 = (5, 1, 1, 1)$ ، و $x_3 = (-3, -3, 1, -3)$ یک پایهٔ متعامد یکه بیابید .

حل. با استفاده از فرایند گرام ـ اشمیت داریم

$$y_1 = x_1 = (1, -1, 1, -1),$$

$$y_2 = x_2 - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 = x_2 - y_1 = (4, 2, 0, 2),$$

$$y_3 = x_3 - \frac{(x_3, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1 - \frac{(x_3, y_2)}{(y_2, y_2)} y_2 = x_3 - y_1 + y_2 = (0, 0, 0, 0).$$

چون $y_3 = O$ ، سه بردار x_1, x_2, x_3 باید وابسته باشند . اما چون y_1 و y_2 ناصفرند ، بردارهای x_1 و x_2 مستقل می‌باشند . لذا ، $L(x_1, x_2, x_3)$ یک زیر فضا با بعد 2 است . مجموعهٔ $\{y_1, y_2\}$ یک پایهٔ متعامد برای این زیر فضاست . با تقسیم هریک از y_1 و y_2 بر نرمش به یک پایهٔ متعامد یکه مرکب از دو بردار

$$\frac{y_1}{\|y_1\|} = \tfrac{1}{2}(1, -1, 1, -1) \qquad \text{و} \qquad \frac{y_2}{\|y_2\|} = \frac{1}{\sqrt{6}}(2, 1, 0, 1)$$

دست می‌یابیم .

مثال ۲. چند جمله‌ایهای لژاندر[1] . در فضای خطی تمام چند جمله‌ایها با ضرب داخلی $(x, y) = \int_{-1}^{1} x(t)y(t)\,dt$ ، دنبالهٔ نامتناهی $x_0, x_1, x_2, \ldots$ را ، که در آن $x_n(t) = t^n$ ، در نظر می‌گیریم . با اعمال قضیهٔ متعامد سازی بر این دنباله ، دنبالهٔ دیگر $y_0, y_1, y_2, \ldots$ از چند جمله‌ایها به‌دست می‌آید که اول بار لژاندر (۱۷۵۲ – ۱۸۳۳) ، ریاضیدان فرانسوی ، در کارهایش در زمینهٔ نظریهٔ پتانسیل بـه آن برخورد کرد . چند جمله‌ایهای اول این دنباله به آسانی با فرایند گرام ـ اشمیت قابل محاسبه‌اند . قبل از همه ، داریم $y_0(t) = x_0(t) = 1$. و چون

$$(y_0, y_0) = \int_{-1}^{1} dt = 2 \qquad \text{و} \qquad (x_1, y_0) = \int_{-1}^{1} t\,dt = 0 \text{ ،}$$

---

1. Legendre

معلوم می‌شود که

$$y_1(t) = x_1(t) - \frac{(x_1, y_0)}{(y_0, y_0)} y_0(t) = x_1(t) = t.$$

حال، با استفاده از روابط

$$(x_2, y_0) = \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \tfrac{2}{3}, \quad (x_2, y_1) = \int_{-1}^{1} t^3\,dt = 0, \quad (y_1, y_1) = \int_{-1}^{1} t^2\,dt = \tfrac{2}{3},$$

داریم

$$y_2(t) = x_2(t) - \frac{(x_2, y_0)}{(y_0, y_0)} y_0(t) - \frac{(x_2, y_1)}{(y_1, y_1)} y_1(t) = t^2 - \tfrac{1}{3}.$$

بهمین ترتیب، معلوم می‌شود که

$$y_3(t) = t^3 - \tfrac{3}{5}t, \qquad y_4(t) = t^4 - \tfrac{6}{7}t^2 + \tfrac{3}{35}, \qquad y_5(t) = t^5 - \tfrac{10}{9}t^3 + \tfrac{5}{21}t.$$

ما با این چند جمله‌ایها مجدداً در فصل ۶ در بررسی بیشتر معادلات دیفرانسیل برمی‌خوریم، و ثابت خواهیم کرد که

$$y_n(t) = \frac{n!}{(2n)!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n.$$

چند جمله‌ایهای P_n، که از

$$P_n(t) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} y_n(t) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dt^n} (t^2 - 1)^n$$

به دست می‌آیند، به **چند جمله‌ایهای لژاندر** معروفند، و چند جمله‌ایها دردنبالهٔ متعامد یکهٔ نظیر $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$، که از $\varphi_n = y_n / \|y_n\|$ به دست می‌آیند، به‌**چند جمله‌ایهای نرمیدهٔ لژاندر** شهرت دارند. از فرمولهای فوق برای $y_0, \ldots, y_5$ معلوم می‌شود که

$$\varphi_0(t) = \sqrt{\tfrac{1}{2}}, \quad \varphi_1(t) = \sqrt{\tfrac{3}{2}}\, t, \quad \varphi_2(t) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{5}{2}}\,(3t^2 - 1), \quad \varphi_3(t) = \tfrac{1}{2}\sqrt{\tfrac{7}{2}}\,(5t^3 - 3t),$$

$$\varphi_4(t) = \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{9}{2}}\,(35t^4 - 30t^2 + 3), \qquad \varphi_5(t) = \tfrac{1}{8}\sqrt{\tfrac{11}{2}}\,(63t^5 - 70t^3 + 15t).$$

۱۵۰۱ متممهای متعامد. تصویرها

فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی و S زیر فضایی با بعد متناهی از آن باشد. مسئلهٔ تقریب زیر را مطرح می‌کنیم: به فرض معلوم بودن x در V، **می‌خواهیم عنصری را** در

S **تعیین کنیم کــه فاصله‌اش تا** x **حتی‌الامکان کوچک باشد** . فاصلهٔ بین عنصرهای x و y مساوی نرم $\|x-y\|$ تعریف می‌شود .

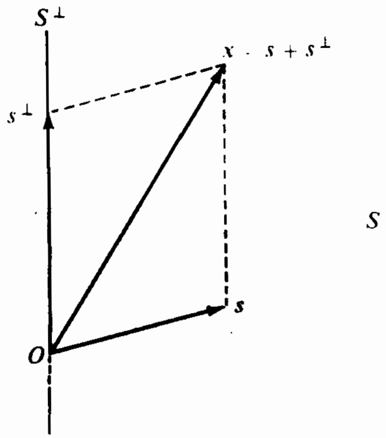
قبل از آنکه مسئله به شکل کلی مطرح شود ، حالت خاصی را که در شکل ۱ ۰ ۲ نموده شده درنظر مــی‌گیریم . در اینجا V فضای برداری V_3 و S یک زیر فضای دوبعدی آن ، یعنی یک صفحهٔ ماربر مبداء ، است . به فرض معلوم بودن x در V ، مسئله یافتن نقطهٔ s در S است که به x نزدیکترین باشد .

واضح است که اگر $x \in S$ ، $s = x$ جواب است . و اگر x در S نباشد ، نزدیکترین نقطهٔ s با وارد کــردن عمــود از x به صفحه به‌دست می‌آید . این مثال ساده راه حل مسئلهٔ کلی تقریب را گشوده و ما را به بحث زیر می‌کشاند .

تعریف . فرض کنیم S یک زیــر مجموعهٔ فضای اقلیدسی V باشد . یک عنصر در V را **متعامد** به S گوییم هرگاه به هر عنصر S متعامد باشد . مجموعهٔ تمام عناصر متعامد بــه S را با $S^{\perp}$ نموده و "عمود بر S " می‌نامیم .

به‌آسانی تحقیق می‌شود که $S^{\perp}$ ، چه‌خود S زیر فضای V باشد یا نه ، یک زیرفضای V است . درحالتی که S زیر فضاست ، $S^{\perp}$ **متمم متعامد** S نام دارد .

مثال . اگر ، مثل شکل ۱ ۰ ۲ ، S صفحه‌ای ماربر مبداء باشد ، $S^{\perp}$ خطی است ماربرمبداء



شکل ۱ ۰ ۲ تعبیر هندسی قضیهٔ تجزیهٔ متعامد در V_3

و عمود براین صفحه. این مثال تعبیر هندسی قضیهٔ بعدی نیز خواهد بود.

قضیهٔ ۱۵۰۱ . قضیهٔ تجزیهٔ متعامد. *فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی و S یک زیر فضای با بعد متناهی آن باشد. دراین صورت، هر عنصر x در V را می‌توان به‌طورمنحصر بفرد به‌صورت مجموع دوعنصر، یکی در S و یکی در $S^\perp$، بیان کرد؛ یعنی، داریم*

$$x = s + s^\perp \text{، که‌درآن } s \in S \text{ و } s^\perp \in S^\perp \text{ .} \qquad (۱۷۰۱)$$

بعلاوه، نرم x از فرمول فیثاغورس

$$\|x\|^2 = \|s\|^2 + \|s^\perp\|^2 \qquad (۱۸۰۱)$$

به‌دست خواهد آمد.

برهان. ابتدا ثابت می‌کنیم تجزیهٔ متعامد (۱۷۰۱) عملاً" وجود دارد. گوییم چون S با بعد متناهی است، S دارای یک پایهٔ متعامد یکهٔ متناهی، مثلاً" $\{e_1, \ldots, e_n\}$، است. به‌فرض معلوم بودن x، عنصرهای s و $s^\perp$ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)e_i, \qquad s^\perp = x - s. \qquad (۱۹۰۱)$$

توجه‌کنید که هر جملهٔ $(x, e_i)e_i$ تصویر x در امتداد e_i است. s مجموع تصاویر x در امتداد هر عنصر پایه است. چون s ترکیبی خطی از عناصر پایه است، s در S قرار دارد. تعریف $s^\perp$ نشان می‌دهد که معادلهٔ (۱۷۰۱) برقرار است. برای اثبات واقع بودن $s^\perp$ در $S^\perp$، حاصل ضرب داخلی $s^\perp$ را با هر عنصر پایهٔ e_j درنظر می‌گیریم. داریم

$$(s^\perp, e_j) = (x - s, e_j) = (x, e_j) - (s, e_j).$$

اما از (۱۹۰۱) درمی‌یابیم که $(s, e_j) = (x, e_j)$؛ در نتیجه، $s^\perp$ به e_j متعامد است. بنابراین، $s^\perp$ به هر عنصر در S متعامد است، که به این معنی است که $s^\perp \in S^\perp$.

حال ثابت می‌کنیم تجزیهٔ متعامد (۱۷۰۱) منحصر بفرد است. فرض کنیم x دو نمایش این چنینی، مثلاً"

$$x = s + s^\perp \quad \text{و} \quad x = t + t^\perp \text{ ،}$$

را داشته باشد، که درآنها s و t در S اند و $s^\perp$ و $t^\perp$ در $S^\perp$. می‌خواهیم ثابت کنیم $s = t$ و $s^\perp = t^\perp$. گوییم از (۲۰۰۱) داریم $s - t = t^\perp - s^\perp$؛ در نتیجه، کافی

است ثابت کنیم $s - t = O$. اما $s - t \in S$ و $t^\perp - s^\perp \in S^\perp$ ؛ در نتیجه، $s - t$ هم به $s^\perp - t^\perp$ متعامد است و هم با آن مساوی . چون عنصر صفر تنها عنصر متعامد به خود است، بایستی داشته باشیم $s - t = O$. این نشان می‌دهد که تجزیه منحصر بفرد است .

بالاخره، ثابت می‌کنیم نرم x از فرمول فیثاغورس به‌دست می‌آید . گوییم داریم

$$\|x\|^2 = (x, x) = (s + s^\perp, s + s^\perp) = (s, s) + (s^\perp, s^\perp),$$

بقیهٔ جملات، بدلیل متعامد بودن s و $s^\perp$ ، صفرند . این (۱۸۰۱) را ثابت خواهد کرد .

تعریف . فرض کنیم S یک زیرفضای با بعد متناهی فضای اقلیدسی V بوده، و $\{e_1, \ldots, e_n\}$ یک پایهٔ متعامد یکهٔ آن باشد . اگر $x \in V$ ، عنصر s که با معادلهٔ

$$s = \sum_{i=1}^{n} (x, e_i)e_i$$

تعریف می‌شود تصویر x بر زیر فضای S نامیده می‌شود .

حال ثابت می‌کنیم تصویر x بر S جواب مسئلهٔ تقریبی است که در آغاز این بخش مطرح شد .

۱۶۰۱ بهترین تقریب عنصرها در یک فضای اقلیدسی به‌وسیلهٔ عنصرهای یک‌زیرفضای با بعد متناهی

قضیهٔ ۱۶۰۱ . قضیهٔ تقریب . *فرض‌کنیم S یک‌زیرفضای با بعد متناهی فضای اقلیدسی V بوده، و x عنصر دلخواهی‌از V باشد . دراین صورت، تصویر x بر S از هر عنصر دیگر S به x نزدیکتر است؛ یعنی، اگر s تصویر x بر S باشد، به‌ازای‌هر t در S داریم*

$$\|x - s\| \le \|x - t\| \;;$$

تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $t = s$.

برهان . بنابر قضیهٔ ۱۵۰۱ می‌توان نوشت $x = s + s^\perp$ ، که درآن $s \in S$ و $s^\perp \in S^\perp$.

پس، به‌ازای هر t در S داریم

$$x - t = (x - s) + (s - t).$$

چون $s - t \in S$ و $x - s = s^{\perp} \in S^{\perp}$، این یک تجزیهٔ متعامد $x - t$ است؛ درنتیجه، نرم آن از فرمول فیثاغورس

$$\|x - t\|^2 = \|x - s\|^2 + \|s - t\|^2$$

به‌دست می‌آید. اما $\|s - t\|^2 \geq 0$. بنابراین، داریم $\|x - t\|^2 \geq \|x - s\|^2$، که در آن تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $s = t$. این برهان را تمام خواهد کرد.

مثال ۱. تقریب توابع پیوسته بر $[0, 2\pi]$ به وسیلهٔ چندجمله‌ایهای مثلثاتی. فرض کنیم $V = C(0, 2\pi)$، یعنی فضای خطی تمام توابع حقیقی پیوسته بر بازهٔ $[0, 2\pi]$ باشد، و ضرب داخلی را با معادلهٔ $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$ تعریف می‌کنیم. در بخش ۱۲۰۱ مجموعهٔ متعامد یکه از توابع مثلثاتی $\varphi_0, \varphi_1, \varphi_2, \ldots$ ارائه شد که در آن

$$\varphi_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\text{؛ و به‌ازای } k \geq 1\text{،}\quad \varphi_{2k-1}(x) = \frac{\cos kx}{\sqrt{\pi}} \quad\text{و}\quad \varphi_{2k}(x) = \frac{\sin kx}{\sqrt{\pi}}\cdot \tag{۲۱۰۱}$$

$2n + 1$ عنصر $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_{2n}$ زیرفضای S با بعد $2n + 1$ را می‌پیمایند، و عنصرهای S **چندجمله‌ایهای مثلثاتی** نامیده می‌شوند.

اگر $f \in C(0, 2\pi)$، f_n را تصویر f برزیرفضای S می‌انگاریم. دراین‌صورت، داریم

$$f_n = \sum_{k=0}^{2n} (f, \varphi_k)\varphi_k\text{، که‌درآن}\quad (f, \varphi_k) = \int_0^{2\pi} f(x)\varphi_k(x)\,dx\ \cdot \tag{۲۲۰۱}$$

اعداد (f, φ_k) **ضرایب فوریهٔ** f [1] نام دارند. با استفاده از این فرمولها در (۲۱۰۱)، می‌توان (۲۲۰۱) را به شکل

$$f_n(x) = \tfrac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{۲۳۰۱}$$

نوشت، که درآن به ازای $k = 0, 1, 2, \ldots, n$

$$a_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos kx\,dx, \qquad b_k = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin kx\,dx\ .$$

---

1. Fourier

قضیهٔ تقریب می‌گوید که چند جمله‌ای مثلثاتی (۲۳۰۱) f را بهتر از هر چند جمله‌ای مثلثاتی دیگر در S تقریب می‌کند، در این معنی که نرم $\|f - f_n\|$ حتی‌المقدور کوچک است.

مثال ۲. تقریب توابع پیوسته بر $[-1, 1]$ به وسیلهٔ چند جمله‌ایهای از درجهٔ نابیشتر از n. فرض کنیم $V = C(-1, 1)$، یعنی فضای توابع پیوستهٔ حقیقی بر $[-1, 1]$ بوده، و $(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$. $n + 1$ چندجمله‌ای نرمیده‌شدهٔ لژاندار $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_n$، که در بخش ۱۴۰۱ معرفی شد، زیرفضای S با بعد $n + 1$ مرکب از تمام چند جمله‌ایهای ازدرجهٔ نابیشتر از n رامی‌پیمایند. اگر $f \in C(-1, 1)$، f_n را تصویر f بر S می‌گیریم. در این صورت، داریم

$$f_n = \sum_{k=0}^{n} (f, \varphi_k)\varphi_k \text{ ، که در آن } (f, \varphi_k) = \int_{-1}^{1} f(t)\varphi_k(t)\,dt$$

این چند جمله‌ای از درجهٔ نابیشتر از n است که به‌ازای آن $\|f - f_n\|$ کوچکترین است. مثلاً، وقتی $f(x) = \sin \pi x$، ضرایب (f, φ_k) از

$$(f, \varphi_k) = \int_{-1}^{1} \sin\, \pi t\, \varphi_k(t)\,dt$$

به دست می‌آیند. بخصوص، داریم $(f, \varphi_0) = 0$ و

$$(f, \varphi_1) = \int_{-1}^{1} \sqrt{\frac{3}{2}}\, t \sin \pi t\, dt = \sqrt{\frac{3}{2}}\, \frac{2}{\pi}.$$

پس چند جمله‌ای خطی $f_1(t)$ که به $\sin \pi t$ بر $[-1, 1]$ نزدیکترین است عبارت خواهد بود از

$$f_1(t) = \sqrt{\frac{3}{2}}\, \frac{2}{\pi}\, \varphi_1(t) = \frac{3}{\pi}\, t.$$

چون $(f, \varphi_2) = 0$، این نزدیکترین تقریب درجهٔ دوم نیز می‌باشد.

۱۷۰۱ تمرین

۱. در هرحالت، برای زیر فضایی از V_3 که به‌وسیلهٔ بردارهای زیر پیموده می‌شود یک پایهٔ متعامد یکه بیابید:

(آ) $x_1 = (1, 1, 1), \quad x_2 = (1, 0, 1), \quad x_3 = (3, 2, 3)$؛

(ب) $x_1 = (1, 1, 1)$، $x_2 = (-1, 1, -1)$، $x_3 = (1, 0, 1)$.

۲ . در هر حالت، برای زیر فضایی از V_4 که به‌وسیلهٔ بردارهای زیر پیموده می‌شود یک پایهٔ متعامد یکه بیابید:

(آ) $x_1 = (1, 1, 0, 0)$، $x_2 = (0, 1, 1, 0)$، $x_3 = (0, 0, 1, 1)$، $x_4 = (1, 0, 0, 1)$؛

(ب) $x_1 = (1, 1, 0, 1)$، $x_2 = (1, 0, 2, 1)$، $x_3 = (1, 2, -2, 1)$.

۳ . در فضای خطی حقیقی $C(0, \pi)$ با ضرب داخلی $(x, y) = \int_0^\pi x(t)y(t)\,dt$، فرض کنید به ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$، $x_n(t) = \cos nt$، وثابت‌کنیدتابعهای $y_0, y_1, y_2, \ldots$ که

$$y_0(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \text{ و به‌ازای } n \geq 1 \text{ ، } y_n(t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos nt$$

یک مجموعهٔ متعامد یکه تشکیل می‌دهند که همان زیر فضای پیموده شده به وسیلهٔ $x_0, x_1, x_2, \ldots$ را می‌پیماید.

۴ . در فضای خطی تمام چندجمله‌ایهای حقیقی با ضرب داخلی $(x, y) = \int_0^1 x(t)y(t)\,dt$، فرض کنید به‌ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$، $x_n(t) = t^n$، و ثابت کنید تابعهای

$$y_0(t) = 1, \quad y_1(t) = \sqrt{3}\,(2t - 1), \quad y_2(t) = \sqrt{5}\,(6t^2 - 6t + 1)$$

یک مجموعهٔ متعامد یکه تشکیل می‌دهند که همان زیر فضای پیموده شده به وسیلهٔ $\{x_0, x_1, x_2\}$ را می‌پیماید.

۵ . فرض کنید V فضای خطی تمام توابع حقیقی و پیوستهٔ f بر $[0, +\infty)$ باشد که انتگرال $\int_0^\infty e^{-t} f^2(t)\,dt$ به‌ازای آنها همگراست. تعریف‌کنید $(f, g) = \int_0^\infty e^{-t} f(t)g(t)\,dt$، و فرض کنید $y_0, y_1, y_2, \ldots$ مجموعهٔ حاصل از اعمال فرایند گرام ــ اشمیت بر $x_0, x_1, x_2, \ldots$، که $x_n(t) = t^n$ به‌ازای $n \geq 0$، باشد. ثابت کنید $y_0(t) = 1$، $y_1(t) = t - 1$، $y_2(t) = t^2 - 4t + 2$، و $y_3(t) = t^3 - 9t^2 + 18t - 6$.

۶ . در فضای خطی حقیقی $C(1, 3)$ با ضرب داخلی $(f, g) = \int_1^3 f(x)g(x)\,dx$، فرض کنید $f(x) = 1/x$، و نشان دهید که نزدیکترین چند جمله‌ای ثابت g به f $g = \frac{1}{2}\log 3$ است. $\|g - f\|^2$ را به‌ازای این g حساب کنید.

۷ . در فضای خطی حقیقی $C(0, 2)$ با ضرب داخلی $(f, g) = \int_0^2 f(x)g(x)\,dx$، فرض کنید $f(x) = e^x$، و نشان دهید که نزدیکترین چند جمله‌ای ثابت g به f، $g = \frac{1}{2}(e^2 - 1)$ است. $\|g - f\|^2$ را به‌ازای این g حساب کنید.

۸ . در فضای خطی حقیقی $C(-1, 1)$ با ضرب داخلی $(f, g) = \int_{-1}^1 f(x)g(x)\,dx$، فرض

کنید $f(x) = e^x$ ، و نزدیکترین چند جمله‌ای خطی g به f را پیدا کنید .
$\|g - f\|^2$ را به‌ازای این g محاسبه نمایید .

۹ . در فضای خطی حقیقی $C(0, 2\pi)$ با ضرب داخلی $(f, g) = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)\,dx$ ، فرض کنید $f(x) = x$ ، و در زیر فضای پیموده شده به وسیله‌ٔ
$u_0(x) = 1$, $u_1(x) = \cos x$, $u_2(x) = \sin x$ ، نزدیکترین چند جمله‌ای مثلثاتی به f را بیابید .

۱۰ . در فضای خطی V تمرین ۵ ، فرض کنید $f(x) = e^{-x}$ ، و نزدیکترین چند جمله‌ای خطی به f را بیابید .

۲

تبدیلات خطی وماتریسها

۱۰۲ تبدیلات خطی

یکی از هدفهای غایی آنالیز بررسی جامع توابعی است که قلمرو و بردشان زیرمجموعه‌هایی از فضاهای خطی‌اند . این تابعها را **تبدیل** ، **نگاشت** ، یا **عملگر** می‌نامند ، و در این فصل ساده‌ترین آنها ، به‌نام تبدیلات **خطی** ، که در تمام شاخه‌های ریاضی دیده می‌شوند مطرح می‌گردند . خواص تبدیلات کلیتر را اغلب با تقریب آنها به وسیلهٔ تبدیلات خطی به‌دست می‌آورند .

ابتدا چند نماد و اصطلاح مربوط به تابعهای دلخواه را معرفی می‌کنیم . فرض کنیم V و W دو مجموعه باشند . علامت

$$T: V \to W$$

را برای بیان اینکه T تابعی است که قلمروش V بوده و مقادیرش در W اند به‌کار می‌بریم . به‌ازای هر x در V ، عنصر $T(x)$ در W را **نقش** x **تحت** T می‌نامیم ، و می‌گوییم T ، x **را بروی** $T(x)$ **می‌نگارد** . اگر A زیر مجموعهٔ V باشد ، مجموعهٔ تمام نقشهای $T(x)$ به ازای x در A **نقش** A **تحت** T نام دارد و با $T(A)$ نموده می‌شود . نقش قلمرو V ، یعنی $T(V)$ ، برد T می‌باشد .

حال فرض کنیم V و W فضاهایی خطی و دارای یک مجموعه از اسکالر باشند ، و تبدیل خطی را به صورت زیر تعریف می‌کنیم .

تعریف . هرگاه V و W فضاهایی خطی باشند ، تابع $T: V \to W$ در صورتی یک **تبدیل خطی** از V بتوی W است که از دو خاصیت زیر بهره‌مند باشد :

(آ) به‌ازای هر x و y در V ، $T(x+y) = T(x) + T(y)$:

(ب) به‌ازای هر x در V و هر اسکالر c ، $T(cx) = cT(x)$.

این خواص‌را می‌توان با لفظ بیان‌کرد و این‌طور گفت که T جمع و ضرب در اسکالر راحفظ می‌کند . دو خاصیت در یک فرمول خلاصه می‌شوند که می‌گوید به‌ازای هر x و y در V و هر دو اسکالر a و b

$$T(ax+by) = aT(x) + bT(y) \cdot$$

به استقرا ، رابطهٔ کلیتر

$$T\left(\sum_{i=1}^{n} a_i x_i\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i T(x_i)$$

را به‌ازای هر n عنصر $x_1, \ldots, x_n$ در V و هر n اسکالر $a_1, \ldots, a_n$ خواهیم داشت .

خواننده می‌تواند به‌آسانی تحقیق کند که مثالهای زیر تبدیلاتی خطی‌اند .

مثال ۱ . تبدیل همانی . تبـدیل $T: V \to V$ ، که به‌ازای هر x در V ، $T(x) = x$ ، **تبدیل همانی** نام دارد و با I یا I_V نموده می‌شود .

مثال ۲ . تبدیل صفر . تبدیل $T: V \to V$ ، که‌هر عنصر V رابروی O می‌نگارد، **تبدیل صفر** نام دارد و با O نموده می شود .

مثال ۳ . ضرب در اسکالر ثابت c . در اینجاداریم $T: V \to V$ ، که‌به‌ازای هر x در V ، $T(x) = cx$. وقتی $c = 1$ ، این‌همان‌تبدیل‌همانی است ؛ و وقتی $c = 0$ ، تبدیل صفر است .

مثال ۴ . معادلات خطی . فرض‌کنیم $V = V_n$ و $W = V_m$.با معلوم بودن mn عددحقیقی a_{ik} ، که $i = 1, 2, \ldots, m$ و $k = 1, 2, \ldots, n$ ، $T: V_n \to V_m$ را بـه‌این صورت تعریف می‌کنیـم : T هر بـردار $x = (x_1, \ldots, x_n)$ در V_n را طبـق معـادلات زیر بروی بردار $y = (y_1, \ldots, y_m)$ در V_m می‌نگارد :

به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, m$ ، $y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k$.

مثال ۵ . ضرب داخلی در یک عنصر ثابت. فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی حقیقی باشد. به‌ازای عنصر ثابت z در V ، $T: V \to \mathbf{R}$ را به‌این صورت تعریف می‌کنیم : اگر $x \in V$ ، $T(x) = (x, z)$ یعنی حاصل ضرب داخلی x در z .

مثال ۶ . تصویر بر یک زیر فضا. فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی و S یک زیر فضای بابعد متناهی‌آن باشد. $T: V \to S$ را به این صورت تعریف می‌کنیم : اگر $x \in V$ ، $T(x)$ عبارت است از تصویر x بر S .

مثال ۷ . عملگرمشتقگیری. فرض کنیم V فضای خطی تمام توابع حقیقی f باشد که بر بازهٔ باز (a, b) مشتقپذیر است. تبدیل‌خطیی‌که هر f در V را بروی مشتقش f' می‌نگارد **عملگر مشتقگیری** نام دارد و با D نموده می‌شود. بنابر این ، داریم $D: V \to W$ ، که به ازای هر f در V ، $D(f) = f'$. فضای W از تمام f' ها تشکیل شده است.

مثال ۸ . عملگرانتگرالگیری. فرض کنیم V فضای خطی تمام توابع حقیقی و پیوسته بر بازهٔ $[a, b]$ باشد. به ازای $f \in V$ ، $g = T(f)$ را تابعی در V می‌گیریم که به صورت زیر تعریف می‌شود :

$$\text{اگر}\ a \le x \le b\ ،\ g(x) = \int_a^x f(t)\,dt\ .$$

تبدیل T را ***عملگر انتگرالگیری*** می‌نامند.

۲ . ۲ فضای پوچ و برد

در این بخش، T یک تبدیل خطی از فضای خطی V بتوی فضای خطی W است.

قضیهٔ ۲ . ۱ . مجموعهٔ $T(V)$ (برد T) یک زیر فضای W است. بعلاوه، T عنصر صفر V را بروی عنصر صفر W می‌نگارد.

برهان. برای اثبات‌اینکه $T(V)$ زیر فضای W است، فقط کافی است اصول موضوع بسته بودن تحقیق شوند. دو عنصر $T(x)$ و $T(y)$ را از $T(V)$ اختیار می‌کنیم. پس $T(x) + T(y) = T(x + y)$ ؛ در نتیجه، $T(x) + T(y)$ در $T(V)$ است. همچنین، به

ازای‌هراسکالر c داریم $cT(x) = T(cx)$ ؛ در نتیجه، $cT(x)$ در $T(V)$ می‌باشد. بنابر-این، $T(V)$ یک زیر فضای W است. با اختیار $c = 0$ در $T(cx) = cT(x)$ معلوم می‌شود که $T(O) = O$.

تعریف. مجموعهٔ تمام عناصری از V که به‌وسیلهٔ T بروی O نگاشته می‌شوند **فضای پوچ** T نام دارد و با $N(T)$ نموده می‌شود. بنابر این، داریم

$$N(T) = \{x \mid T(x) = O \quad \text{و} \quad x \in V\}.$$

فضای پوچ گاهی هستهٔ T نیز نامیده می‌شود.

قضیهٔ ۲۰۲ . *فضای پوچ T یک زیر فضای V است.*

برهان. هرگاه x و y در $N(T)$ باشند، $x + y$ و cx به‌ازای‌هراسکالر c نیزچنین‌اند، زیـرا

$$T(x + y) = T(x) + T(y) = O \quad \text{و} \quad T(cx) = cT(x) = O.$$

مثالهای زیر، فضاهای پوچ تبدیلات خطی بخش ۱۰۲ را توصیف می‌کنند.

مثال ۱. تبدیل همانی. فضای پوچ $\{O\}$ است؛ یعنی، زیر فضایی که فقط از عنصر صفر تشکیل شده است.

مثال ۲. تبدیل صفر. چون هر عنصر V بروی صفر نگاشته می‌شود، فضای پوچ خود V است.

مثال ۳. ضرب در اسکالر ثابت c . اگر $c \neq 0$ ، فضای‌پوچ فقط شامل O است؛ و اگر $c = 0$ ، فضای پوچ V می‌باشد.

مثال ۴. معادلات خطی. فضای پوچ از تمام بردارهای $(x_1, \ldots, x_n)$ در V_n تشکیل شده که

به‌ازای $i = 1, 2, \ldots, m$ ، $\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = 0$.

مثال ۰۵ ضرب داخلی در عنصر ثابت z . فضای‌پوچ از تمام عنصرهایی در V تشکیل شده که به z متعامدند.

مثال ۰۶ تصویر بر زیر فضای S . به‌ازای $x \in V$ (بنابرقضیهٔ ۱۵۰۱) تجزیهٔ متعامد منحصربفرد $x = s + s^{\perp}$ را داریم. چون $T(x) = s$ ، $T(x) = O$ اگر و فقط اگر $x = s^{\perp}$. پس فضای پوچ مساوی $S^{\perp}$ ، یعنی متمم متعامد S ، است.

مثال ۰۷ عملگر مشتقگیری. فضای پوچ از تمام توابعی تشکیل شده که بر بازهٔ مفروض ثابت هستند.

مثال ۰۸ عملگر انتگرالگیری. فضای پوچ فقط از تابع صفر تشکیل شده است.

۳۰۲ پوچه و رتبه

مجددا" در این بخش T یک تبدیل خطی از فضای خطی V بتوی فضای خطی W است. ما به رابطهٔ بین بعدهای V ، فضای پوچ $N(T)$ ، و برد $T(V)$ نظر داریم. اگر V با بعد متناهی باشد، فضای پوچ نیز با بعد متناهی است، چونکه زیر فضای V است. بعد $N(T)$ را پوچهٔ T می‌نامیم. در قضیهٔ زیر ثابت می‌کنیم برد نیز با بعد متناهی است؛ بعدش رتبهٔ T نام دارد.

قضیهٔ ۳۰۲ . قضیهٔ پوچه بعلاوهٔ رتبه. *هرگاه V با بعد متناهی باشد، $T(V)$ نیز با بعد متناهی است و داریم*

$$\dim N(T) + \dim T(V) = \dim V . \qquad (۱۰۲)$$

به عبارت دیگر، پوچه بعلاوهٔ رتبهٔ یک تبدیل خطی مساوی بعد قلمروآن است.

برهان. فرض کنیم $n = \dim V$ ، و $e_1, \ldots, e_k$ پایه‌ای از $N(T)$ باشد که

$k = \dim N(T) \leq n$. طبق قضیهٔ ۷۰۱ ، این عنصرها بخشی از یک پایهٔ V ، مثلاً " پایهٔ

$$e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_{k+r}, \qquad (۲۰۲)$$

هستند که $k + r = n$. ثابت می‌کنیم r عنصر

$$T(e_{k+1}), \ldots, T(e_{k+r}) \qquad (۳۰۲)$$

یک پایهٔ $T(V)$ را تشکیل می‌دهند ؛ و لذا ، ثابت می‌شود که $\dim T(V) = r$. چون $k + r = n$ ، این (۱۰۲) را نیز ثابت خواهد کرد .

ابتدا نشان می‌دهیم که r عنصر (۳۰۲) $T(V)$ را می‌پیمایند . گوییم هرگاه $y \in T(V)$ ، به ازای x ی در V داریم $y = T(x)$ ، و می‌توانیم بنویسیم $x = c_1e_1 + \cdots + c_{k+r}e_{k+r}$. در نتیجه ، چون $T(e_1) = \cdots = T(e_k) = O$ ،

$$y = T(x) = \sum_{i=1}^{k+r} c_iT(e_i) = \sum_{i=1}^{k} c_iT(e_i) + \sum_{i=k+1}^{k+r} c_iT(e_i) = \sum_{i=k+1}^{k+r} c_iT(e_i) \cdot$$

این نشان می‌دهد که عنصرهای (۳۰۲) $T(V)$ را می‌پیمایند .

حال نشان می‌دهیم که این عنصرها مستقل‌اند . فرض کنیم اسکالرهایی چون $c_{k+1}, \ldots, c_{k+r}$ باشند بطوری که

$$\sum_{i=k+1}^{k+r} c_iT(e_i) = O\,.$$

این ایجاب می‌کند که

$$T\left(\sum_{i=k+1}^{k+r} c_ie_i\right) = O\,;$$

در نتیجه ، عنصر $x = c_{k+1}e_{k+1} + \cdots + c_{k+r}e_{k+r}$ در فضای پوچ $N(T)$ واقع است . این یعنی اسکالرهایی چون $c_1, \ldots, c_k$ وجود دارند بطوری که $x = c_1e_1 + \cdots + c_ke_k$ ؛ در نتیجه ، داریم

$$x - x = \sum_{i=1}^{k} c_ie_i - \sum_{i=k+1}^{k+r} c_ie_i = O\,.$$

اما ، چون عنصرهای (۲۰۲) مستقل‌اند ، این ایجاب می‌کند که تمام c_i ها صفر باشند . لذا ، عنصرهای (۳۰۲) مستقل می‌باشند .

تذکر. اگر V با بعد نامتناهی‌باشد ، دست کم یکی از $N(T)$ یا $T(V)$ با بعد نامتناهی

است. برهان مجمل این مطلب در تمرین ۳۰، بخش ۴۰۲، آمده است.

۴۰۲ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۱۰، تبدیل $T: V_2 \to V_2$ با فرمولی برای $T(x, y)$، که (x, y) نقطهٔ دلخواهی از V_2 است، تعریف شده است. در هر حالت معین کنید که T خطی است یا نه. در صورت خطی بودن T، فضای پوچ و برد آن را توصیف و پوچه و رتبهٔ آن را محاسبه کنید.

۱. $T(x, y) = (y, x)$.
۲. $T(x, y) = (x, -y)$.
۳. $T(x, y) = (x, 0)$.
۴. $T(x, y) = (x, x)$.
۵. $T(x, y) = (x^2, y^2)$.
۶. $T(x, y) = (e^x, e^y)$.
۷. $T(x, y) = (x, 1)$.
۸. $T(x, y) = (x + 1, y + 1)$.
۹. $T(x, y) = (x - y, x + y)$.
۱۰. $T(x, y) = (2x - y, x + y)$.

همین کار را در تمرینهای ۱۱ تا ۱۵ با تبدیل $T: V_2 \to V_2$ مذکور در آنها انجام دهید.

۱۱. T هر نقطه را بهقدر زاویهٔ φ حول مبداء میچرخاند؛ یعنی، T یک نقطه به مختصات قطبی (r, θ) را بهنقطه به مختصات قطبی $(r, \theta + \varphi)$، که φ ثابت است، مینگارد. همچنین، T، O را بهخود آن مینگارد.
۱۲. T هر نقطه را به منعکسش نسبت به خط ثابتی ماربر مبداء مینگارد.
۱۳. T هر نقطه را به نقطهٔ $(1, 1)$ مینگارد.
۱۴. T هرنقطهبهمختصات قطبی (r, θ) را به نقطه به مختصات قطبی $(2r, \theta)$ مینگارد. همچنین، T، O را بهخود آن مینگارد.
۱۵. T هر نقطه به مختصات قطبی (r, θ) رابهنقطهبه مختصات قطبی $(r, 2\theta)$ مینگارد. همچنین، T، O را بهخود آن مینگارد.

همینکار را در تمرینهای ۱۶ تا ۲۳ با تبدیل $T: V_3 \to V_3$ که با فرمولی برای $T(x, y, z)$، که (x, y, z) نقطهٔ دلخواهی از V_3 است، تعریف شده انجام دهید.

۱۶. $T(x, y, z) = (z, y, x)$.
۱۷. $T(x, y, z) = (x, y, 0)$.
۱۸. $T(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$.
۱۹. $T(x, y, z) = (x, y, 1)$.
۲۰. $T(x, y, z) = (x + 1, y + 1, z - 1)$.
۲۱. $T(x, y, z) = (x + 1, y + 2, z + 3)$.

۲۲ . $T(x, y, z) = (x, y^2, z^3)$.   ۲۳ . $T(x, y, z) = (x + z, 0, x + y)$.

در هر یک از تمرینهای ۲۴ تا ۲۷ ، تبدیل $T: V \to V$ بنحوی توصیف شده است . در هر حالت معین کنید که T خطی است یا نه . در صورت خطی بودن ، فضای پوچ وبرد آن را توصیف و پوچه و رتبهٔ آن را وقتی متناهی‌اند حساب کنید .

۲۴ . فرض کنید V فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی $p(x)$ از درجهٔ نابیشتر از n باشد . اگر $p \in V$ ، $q = T(p)$ یعنی به ازای هر x حقیقی $q(x) = p(x + 1)$.

۲۵ . فرض کنید V فضای خطی تمام توابع حقیقی مشتقپذیر بر بازهٔ باز $(-1, 1)$ باشد . اگر $f \in V$ ، $g = T(f)$ یعنی به ازای هر x در $(-1, 1)$ ، $g(x) = xf'(x)$.

۲۶ . فرض کنید V فضای خطی تمام توابع حقیقی پیوسته بر $[a, b]$ باشد . اگر $f \in V$ ، $g = T(f)$ یعنی

$$\text{به ازای } a \le x \le b \text{ ، } g(x) = \int_a^b f(t) \sin (x - t)\, dt \text{ .}$$

۲۷ . فرض کنید V فضای تمام توابع حقیقی دوبار مشتقپذیر بر بازهٔ باز (a, b) باشد . اگر $y \in V$ ، تعریف‌کنید $T(y) = y'' + Py' + Qy$ که در آن P و Q ثابتهای‌معینی هستند .

۲۸ . فرض کنید V فضای خطی‌تمام دنباله‌های حقیقی همگرا مانند $\{x_n\}$ باشد ، و تبدیل $T: V \to V$ را به‌این‌صورت تعریف کنید : هرگاه $x = \{x_n\}$ یک دنبالهٔ همگرا با حد a باشد ، قرار دهید $T(x) = \{y_n\}$ که در آن به ازای $n \ge 1$ ، $y_n = a - x_n$. ثابت کنید T خطی است و فضای پوچ و برد T را مشخص نمایید .

۲۹ . فرض کنید V فضای‌خطی‌تمام‌توابع حقیقی پیوسته بر بازهٔ $[-\pi, \pi]$ باشد . همچنین ، S را زیر مجموعهٔ V مرکب از جمیع f هایی بگیرید که در سه معادلهٔ

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\, dt = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos t\, dt = 0, \qquad \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \sin t\, dt = 0$$

صدق می‌کنند .

(آ) ثابت کنید S یک زیر فضای V است .

(ب) ثابت‌کنید S شامل $f(x) = \cos nx$ و $f(x) = \sin nx$ به‌ازای‌هر $n = 2, 3, \ldots$ است .

(پ) ثابت کنید S با بعد نامتناهی است .

فرض کنید تبدیل خطی $T: V \to V$ به این صورت تعریف شده باشد: اگر $f \in V$ ، $g = T(f)$ یعنی

$$g(x) = \int_{-\pi}^{\pi} \{1 + \cos(x - t)\} f(t)\, dt.$$

(ت) ثابت کنید $T(V)$ ، یعنی برد T ، با بعد متناهی است، و پایه‌ای برای $T(V)$ پیدا کنید.

(ث) فضای پوچ T را مشخص نمایید.

(ج) جمیع $c \neq 0$ های حقیقی و تمام f های ناصفر در V را که $T(f) = cf$ پیدا کنید. (توجه کنید که چنین f ی در برد T جای دارد.)

۳۰. فرض کنید $T: V \to W$ یک تبدیل خطی از فضای خطی V بتوی فضای خطی W باشد. ثابت کنید هرگاه V با بعد نامتناهی باشد، دست کم یکی از $T(V)$ یا $N(T)$ با بعد نامتناهی است.

[راهنمایی. فرض کنید $\dim N(T) = k$ ، $\dim T(V) = r$ ، $e_1, \ldots, e_k$ یک پایهٔ $N(T)$ ، $e_1, \ldots, e_k, e_{k+1}, \ldots, e_{k+n}$ ، که $n > r$ ، عنصرهایی مستقل در V باشند. عنصرهای $T(e_{k+1}), \ldots, T(e_{k+n})$ بدلیل $n > r$ وابسته‌اند. از این امر تناقض به‌دست آورید.]

۵.۲ اعمال جبری بر تبدیلات خطی

تابعهایی که مقادیرشان در فضای خطی W اند را می‌توان طبق تعریف زیر با هم جمع و یا در اسکالرهای در W ضرب کرد.

تعریف. فرض کنیم $S: V \to W$ و $T: V \to W$ دو تابع با قلمرو مشترک V و با مقادیر در فضای خطی W باشند. اگر c یک اسکالر در W باشد، مجموع $S + T$ و حاصل ضرب cT را به‌ازای هر x در V با معادلات زیر تعریف می‌کنیم:

$$(S + T)(x) = S(x) + T(x), \qquad (cT)(x) = cT(x). \tag{۴.۲}$$

ما بخصوص به‌حالتی نظر داریم که در آن V یک فضای خطی است و همان اسکالرهای W را دارد. در این حالت مجموعهٔ تمام تبدیلات خطی از V بتوی W را با $\mathscr{L}(V, W)$ نشان می‌دهیم.

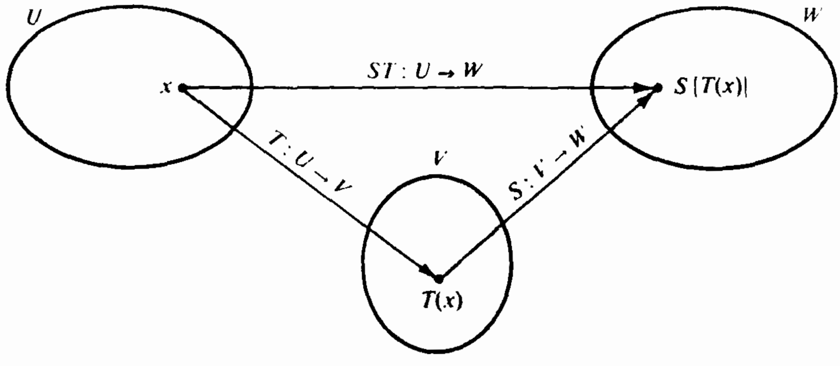
هرگاه S و T دو تبدیل خطی در $\mathscr{L}(V, W)$ باشند، به‌آسانی می‌توان تحقیق‌کرد که $S + T$ و cT نیز تبدیلاتی خطی در $\mathscr{L}(V, W)$ اند. از این بیشتر می‌توان گفت: با اعمالی‌که‌هم اینک‌تعریف شد، مجموعهٔ $\mathscr{L}(V, W)$ خود یک فضای خطی جدید می‌شود؛ تبدیل صفر به عنوان عنصر صفر این فضا، و تبدیل $(-1)T$ به عنوان قرینهٔ T عمل می‌کند. به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که هر ده اصل موضوع فضاهای خطی برقرارند. لذا، خواهیم داشت

قضیهٔ ۴۰۲ . *مجموعهٔ $\mathscr{L}(V, W)$ مرکب‌ازتمام‌تبدیلات خطی از V بتوی W با اعمال جمع و ضرب در اسکالر که در (۴۰۲) تعریف شد یک فضای خطی است.*

عمل جبری جالبتر بر تبدیلات خطی **ترکیب** یا **ضرب** تبدیلات است. در این عمل از نهاد جبری یک فضای خطی استفاده نمی‌شود و می‌توان آن را کاملاً" کلی و به‌صورت زیر تعریف کرد.

تعریف. فرض‌کنیم U, V, W مجموعه باشند. $T: U \to V$ را تابعی باقلمرو U و مقادیر در V، و $S: V \to W$ را تابعی با قلمرو V و مقادیر در W می‌انگاریم. در این صورت، ترکیب ST تابعی است مانند $ST: U \to W$ که با معادلهٔ زیر تعریف می‌شود:

به ازای هر x در U، $(ST)(x) = S[T(x)]$.



شکل ۱۰۲ نمایش ترکیب دو تبدیل

بنابراین، برای نگاشتن x به وسیلهٔ ST ، ابتدا x را به‌وسیلهٔ T و سپس $T(x)$ را به‌وسیلهٔ S می‌نگاریم. این مطلب در شکل ۱۰۲ توضیح شده است.

ما در بررسیمان از حساب دیفرانسیل و انتگرال بارها به ترکیب توابع حقیقی برخورده‌ایم، و دیده‌ایم که این عمل در حالت کلی تعویضپذیر نیست. لکن، مثل حالت توابع حقیقی، ترکیب در قانون شرکتپذیری صدق می‌کند.

قضیهٔ ۵۰۲ . هرگاه $T\colon U \to V$ ، $S\colon V \to W$ ، و $R\colon W \to X$ سه تابع باشند، آنگاه

$$R(ST) = (RS)T.$$

برهان. توابع $R(ST)$ و $(RS)T$ هر دو دارای قلمرو U و مقادیر در X اند، و به‌ازای هر x در U داریم

$$[(RS)T](x) = (RS)[T(x)] = R[S[T(x)]] \quad و \quad [R(ST)](x) = R[(ST)(x)] = R[S[T(x)]]$$

که $R(ST) = (RS)T$ را ثابت می‌کند.

تعریف. فرض کنیم $T\colon V \to V$ تابعی باشد که V را بتوی آن می‌نگارد. توانهای صحیح T به صورت زیر به استقرا تعریف می‌شوند:

$$T^0 = I \text{ ؛ و به‌ازای } n \geq 1 \text{ ، } T^n = TT^{n-1} \text{ .}$$

در اینجا I تبدیل همانی است. خواننده می‌تواند تحقیق کند که قانون شرکتپذیری قانون نماها، یعنی $T^mT^n = T^{m+n}$ ، را به‌ازای هر دو عدد صحیح و نامنفی m و n ایجاب می‌کند.

قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که ترکیب تبدیلات خطی مجدداً خطی است.

قضیهٔ ۶۰۲ . هرگاه U, V, W فضاهایی خطی و دارای یک اسکالر باشند و $T\colon U \to V$ و $S\colon V \to W$ تبدیلاتی خطی باشند، آنگاه ترکیب $ST\colon U \to W$ خطی خواهد بود.

برهان. به ازای هر x و y در U و هر اسکالر a و b داریم

$$(ST)(ax + by) = S[T(ax + by)] = S[aT(x) + bT(y)] = aST(x) + bST(y).$$

از تلفیق ترکیب با اعمال جبری جمع و ضرب اسکالرها در $\mathscr{L}(V, W)$ قضیهٔ زیر به دست می‌آید.

قضیهٔ ۲ . ۷ فرض کنیم U, V, W فضاهایی خطی و دارای یک اسکالر بوده، S و T در $\mathscr{L}(V, W)$ باشند، و c یک اسکالر دلخواه باشد.

(آ) به‌ازای هر تابع R با مقادیر در V داریم

$(S + T)R = SR + TR$ و $(cS)R = c(SR)$ ؛

(ب) و به‌ازای هر تبدیل خطی $R: W \to U$ خواهیم داشت

$R(S + T) = RS + RT$ و $R(cS) = c(RS)$.

اثبات، کاربرد مستقیم تعریف ترکیب است و به‌عنوان تمرین گذارده می‌شود.

۲ . ۶ معکوسها

ضمن بررسی توابع حقیقی آموختیم که چطور با معکوس‌کردن توابع یکنوا توابع جدیدی بسازیم. حال می‌خواهیم فرایند معکوس‌سازی را به ردهٔ کلیتری از توابع تعمیم دهیم.

به فرض معلوم بودن T ، هدف ما، در صورت امکان، یابش تابع دیگر S است که ترکیبش با T تبدیل همانی باشد. چون ترکیب درحالت کلی تعویض‌پذیر نیست، باید بین ST و TS فرق گذارده شود. لذا، دو نوع معکوس معرفی می‌کنیم، که ما آنها را معکوسهای چپ و راست خواهیم نامید.

تعریف. فرض کنیم V و W دومجموعه‌باشندو $T: V \to W$ یک تابع. تابع $S: T(V) \to V$ را در صورتی **معکوس چپ** T می‌نامیم که به‌ازای هر x در V ، $S[T(x)] = x$ ؛ یعنی، در صورتی که

$$ST = I_V,$$

که درآن I_V تبدیل همانی بر V است. تابع $R: T(V) \to V$ را در صورتی **معکوس راست** T می‌نامیم که به‌ازای هر y در $T(V)$ ، $T[R(y)] = y$ ؛ یعنی، درصورتی‌که

$$TR = I_{T(V)},$$

که در آن $I_{T(V)}$ تبدیل همانی بر $T(V)$ می‌باشد.

مثال. تابع بدون معکوس‌چپ ولی با دو معکوس‌راست. فرض‌کنیم $V = \{1, 2\}$ و $W = \{0\}$. $T: V \to W$ را به‌این صورت تعریف می‌کنیم: $T(1) = T(2) = 0$. این تابع دو معکوس راست $R: W \to V$ و $R': W \to V$ دارد که با

$$R(0) = 1, \qquad R'(0) = 2$$

تعریف می‌شوند. تابع نمی‌تواند معکوس چپی مثل S داشته باشد، زیرا این ایجاب خواهد کرد که

$$1 = S[T(1)] = S(0) \quad \text{و} \quad 2 = S[T(2)] = S(0).$$

این مثال ساده نشان می‌دهد که معکوسهای چپ الزاماً موجود نیستند و معکوسهای راست لزوماً منحصر بفرد نمی‌باشند.

هر تابع مانند $T: V \to W$ دست کم یک معکوس راست دارد. در واقع، هر y در $T(V)$ به ازای دست کم یک x در V به شکل $y = T(x)$ است. چنانچه یکی از این x ها را اختیار و تعریف کنیم $R(y) = x$، به‌ازای هر y در $T(V)$ خواهیم داشت $T[R(y)] = T(x) = y$؛ در نتیجه، R یک معکوس راست است. عدم یکتایی احتمالاً پیش می‌آید، چرا که ممکن است بیش از یک x در V بروی y مفروضی در $T(V)$ نگاشته شود. بزودی (در قضیهٔ ۲.۹) ثابت‌می‌کنیم که اگر هر y در $T(V)$ نقش دقیقاً "یک x در V باشد، معکوسهای راست منحصر بفرد می‌باشند.

ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر معکوس چپ موجود باشد منحصر بفرد است و، درعین حال، معکوس راست نیز هست.

قضیهٔ ۲.۸. تابع $T: V \to W$ می‌تواند حداکثر یک معکوس چپ داشته باشد. اگر T معکوس چپ S را دارا باشد، S معکوس راست نیز خواهد بود.

برهان. فرض کنیم T دو معکوس چپ داشته باشد: $S: T(V) \to V$ و $S': T(V) \to V$. y دلخواهی در $T(V)$ اختیار و ثابت می‌کنیم $S(y) = S'(y)$. گوییم به ازای x ی در

V ، $y = T(x)$ ؛ در نتیجه، چون هر دوی S و S' معکوسهای چپ‌اند ، داریم
$S[T(x)] = x$ و $S'[T(x)] = x$.

پس $S(y) = x$ و $S'(y) = x$ ؛ درنتیجه ، به‌ازای هر y در $T(V)$ ، $S(y) = S'(y)$. لذا ، $S = S'$ ، که ثابت می‌کند معکوسهای چپ منحصر بفرد هستند .

حال ثابت می‌کنیم هر معکوس چپ S معکوس راست نیز هست . عنصر دلخواهی مثل y در $T(V)$ اختیار و ثابت می‌کنیم $T[S(y)] = y$. گوییم چون $y \in T(V)$ ، به‌ازای x ی در V داریم $y = T(x)$. اما S یک معکوس چپ است . پس

$$x = S[T(x)] = S(y).$$

بااعمال T نتیجه می‌شود که $T(x) = T[S(y)]$. اما $y = T(x)$ ؛ در نتیجه ، $y = T[S(y)]$ ، که برهان را تمام خواهد کرد .

قضیهٔ زیر جمیع توابع معکوس چپ دار را توصیف می‌کند .

قضیهٔ ۹.۲ . *تابع $T: V \to W$ معکوس‌چپ دارد اگر و فقط اگر T عنصرهای متمایز V را به عنصرهای متمایز W بنگارد ؛ یعنی ، اگر و فقط اگر به‌ازای هر x و y در V ،*

$x \neq y$ ایجاب کند که $T(x) \neq T(y)$. (۵.۲)

تذکر . شرط (۵.۲) با عبارت زیر معادل است :

$T(x) = T(y)$ ایجاب کند که $x = y$. (۶.۲)

هرتابع مانند T که در (۵.۲) یا (۶.۲) به‌ازای هر x و y در V صدق کند یک به یک بر V نامیده می‌شود .

برهان . فرض کنیم T معکوس S داشته‌و $T(x) = T(y)$. می‌خواهیم ثابت کنیم $x = y$ ، با اعمال S معلوم می‌شود که $S[T(x)] = S[T(y)]$ ؛ چون $S[T(x)] = x$ و $S[T(y)] = y$ ، نتیجه می‌شود که $x = y$ ، و این ثابت می‌کند که هر تابع معکوس چپ دار بر قلمرو خود یک به یک است .

حال عکس قضیه را ثابت می‌کنیم . فرض‌کنیم T بر V یک به یک باشد . تابعی‌مانند $S: T(V) \to V$ نشان می‌دهیم که معکوس چپ T باشد . گوییم هرگاه $y \in T(V)$ ، به‌ازای

ی در V، $y = T(x)$. بنابر (۶۰۲) ، درست یک x در V هست که به ازای آن $y = T(x)$، $S(y)$ را مساوی این x تعریف می‌کنیم؛ یعنی، S را بر $T(V)$ به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$S(y) = x \quad \text{یعنی} \quad T(x) = y \cdot$$

در این صورت، به‌ازای هر x در V داریم $S[T(x)] = x$ ؛ در نتیجه، $ST = I_V$. لذا، این S یک معکوس چپ T می‌باشد.

تعریف. فرض کنیم $T: V \to W$ بر V یک به‌یک باشد. معکوس چپ منحصر بفرد T (که می‌دانیم معکوس راست نیز هست) با T^{-1} نموده می‌شود. می‌گوییم T **معکوسپذیر** است، و T^{-1} را **معکوس** T می‌نامیم.

نتایج این بخش در باب توابع دلخواه است. حال این مفاهیم را برای تبدیلات خطی به کار می‌بریم.

۷۰۲ تبدیلات خطی یک‌به‌یک

در این بخش، V و W فضاهایی خطی و دارای یک اسکالر هستند، و $T: V \to W$ یک تبدیل خطی در $\mathscr{L}(V, W)$ است. خطی بودن T به ما توان بیان خاصیت یک به یک را به چند طریق معادل می‌بخشد.

قضیهٔ ۱۰۰۲ . *فرض کنیم $T: V \to W$ یک تبدیل خطی در $\mathscr{L}(V, W)$ باشد. در این صورت، احکام زیر با هم معادل هستند:*

(آ) T بر V یک به یک است؛

(ب) T معکوسپذیر است، و معکوسش $T^{-1}: T(V) \to V$ خطی است؛

(پ) به‌ازای هر x در V، $T(x) = O$ ایجاب می‌کند که $x = O$ ؛ یعنی، فضای پوچ $N(T)$ فقط شامل عنصر صفر V است.

برهان. ثابت می‌کنیم (آ) ایجاب می‌کند (ب) را، (ب) ایجاب می‌کند (پ) را، و (پ) ایجاب می‌کند (آ) را. ابتدا فرض کنیم (آ) برقرار باشد. پس T (بنابر قضیهٔ

۹۰۲) معکوس‌دارد ، و باید نشان دهیم که T^{-1} خطی است . برای این‌کار دو عنصردلخواه u و v را در $T(V)$ اختیار می‌کنیم . دراین صورت ، به‌ازای x و y ی در V ، $u = T(x)$ و $v = T(y)$. چون T خطی است ، به‌ازای هر دو اسکالر a و b داریم

$$au + bv = aT(x) + bT(y) = T(ax + by).$$

پس، با اعمال T^{-1} ، داریم

$$T^{-1}(au + bv) = ax + by = aT^{-1}(u) + bT^{-1}(v) ;$$

در نتیجه ، T^{-1} خطی است . لذا ، (آ) حکم (ب) را ایجاب می‌کند .

حال فرض کنیم (ب) برقرار باشد . x ی در V اختیار می‌کنیم بطوری که $T(x) = O$. چون T^{-1} خطی است ، با اعمال آن داریم $x = T^{-1}(O) = O$. لذا ، (ب) نیز حکم (پ) را ایجاب می‌کند .

بالاخره ، فرض کنیم (پ) برقرار باشد . دو عنصر دلخواه u و v را در V که $T(u) = T(v)$ اختیار می‌کنیم . بنابر خطی بودن ، $T(u - v) = T(u) - T(v) = O$ ؛ در نتیجه ، $u - v = O$. لذا ، T بر V یک به یک است ، و برهان قضیه تمام خواهد بود .

زمانی که V با بعد متناهی است ، خاصیت یک به یک را می‌توان برحسب استقلال و بعدیت ، به صورت آمده در قضیهٔ زیر ، تنظیم کرد .

قضیهٔ ۱۱۰۲ . فرض‌کنیم $T: V \to W$ یک‌تبدیل‌خطی در $\mathscr{L}(V, W)$ بوده ، و V با بعد متناهی باشد ، مثلاً "$\dim V = n$. دراین صورت ، احکام زیر با هم معادل هستند :

(آ) T بر V یک بک یک است ؛

(ب) هرگاه $e_1, \ldots, e_p$ عنصرهایی مستقل در V باشند ، $T(e_1), \ldots, T(e_p)$ عنصرهایی مستقل در $T(V)$ اند ؛

(پ) $\dim T(V) = n$ ؛

(ت) هرگاه $\{e_1, \ldots, e_n\}$ یک‌پایهٔ V باشد ، $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ یک‌پایهٔ $T(V)$ می‌باشد .

برهان . ثابت می‌کنیم (آ) حکم (ب) ، (ب) حکم (پ) ، (پ) حکم (ت) ، و (ت) حکم (آ) را ایجاب می‌کند . فرض‌کنیم (آ) برقرار باشد . همچنین ، $e_1, \ldots, e_p$ عنصرهای مستقلی از V بوده و عنصرهای $T(e_1), \ldots, T(e_p)$ را در $T(V)$ در نظر می‌گیریم . فرض

کنیم به‌ازای اسکالرهایی چون $c_1, \ldots, c_p$

$$\sum_{i=1}^{p} c_i T(e_i) = O \quad \cdot$$

بنابر خطی بودن، داریم

$$T\left(\sum_{i=1}^{p} c_i e_i\right) = O\,;$$

و در نتیجه، چون T یک به یک است،

$$\sum_{i=1}^{p} c_i e_i = O \quad \cdot$$

اما $e_1, \ldots, e_p$ مستقل اند، پس $c_1 = \cdots = c_p = 0$. لذا، (آ) حکم (ب) را ایجاب می‌کند.

حال فرض‌کنیم (ب) برقرار باشد. $\{e_1, \ldots, e_n\}$ را یک پایهٔ V می‌انگاریم. بنابر (ب)، n عنصر $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ در $T(V)$ مستقل‌اند. بنابر این، $\dim T(V) \geq n$. اما، بنابر قضیهٔ ۳۰۲، داریم $\dim T(V) \leq n$. لذا، $\dim T(V) = n$ ؛ و در نتیجه، (ب) نیز حکم (پ) را ایجاب می‌کند.

حال فرض کنیم (پ) برقرار باشد، و $\{e_1, \ldots, e_n\}$ را یک پایهٔ V می‌انگاریم. عنصر دلخواه y را در $T(V)$ اختیار می‌کنیم. پس به‌ازای x ی در V، $y = T(x)$؛ و درنتیجه، خواهیم داشت

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \text{ ؛ و لذا، } y = T(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(e_i) \quad \cdot$$

بنابر این، $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ فضای $T(V)$ را می‌پیماید. اما فرض کرده‌ایم $\dim T(V) = n$ ، پس $\{T(e_1), \ldots, T(e_n)\}$ یک پایهٔ $T(V)$ می‌باشد. بنابر این، (پ) نیز حکم (ت) را ایجاب می‌کند.

بالاخره، فرض‌کنیم (ت) برقرار باشد. ثابت می‌کنیم $T(x) = O$ ایجاب می‌کند که $x = O$. فرض کنیم $\{e_1, \ldots, e_n\}$ پایه‌ای از V باشد. اگر $x \in V$ ، می‌توانیم بنویسیم

$$x = \sum_{i=1}^{n} c_i e_i \text{ ؛ و در نتیجه، } T(x) = \sum_{i=1}^{n} c_i T(e_i) \quad \cdot$$

اگر $T(x) = O$، چون $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ مستقل‌اند، $c_1 = \cdots = c_n = 0$. بنابراین، $x = 0$ ؛

درنتیجه، T بر V یک‌به‌یک است. پس (ت) نیز حکم (آ) را ایجاب می‌کند، و برهان تمام خواهد بود.

۸۰۲ تمرین

۱. فرض کنید $V = \{0, 1\}$، و تمام توابع $T: V \to V$ را توصیف کنید. رویهم چهار تابع وجود دارد. آنها را T_1, T_2, T_3, T_4 نامیده، جدول ضربی بسازید که ترکیب هر جفت از آنها را نشان دهد. کدام توابع بر V یک به یک اند و معکوسهای آنها چیستند؟

۲. فرض کنید $V = \{0, 1, 2\}$، و تمام توابع $T: V \to V$ را که $T(V) = V$ توصیف کنید. رویهم شش تابع وجود دارد. آنها را $T_1, \ldots, T_6$ نامیده، جدول ضربی بسازید که ترکیب هر جفت از آنها را نشان دهد. کدام توابع بر V یک به یک اند ومعکوسهای آنها چیستند؟

در تمرینهای ۳ تا ۱۲، تابع $T: V_2 \to V_2$ با فرمولی تعریف شده که $T(x, y)$ را، که (x, y) نقطهٔ دلخواهی در V_2 است، به‌دست می‌دهد. درهرحالت، معین کنید T بر V_2 یک به‌یک‌است یانه. درصورت بودن، بردآن $T(V_2)$ را توصیف کنید. فرض کنید به‌ازای هرنقطهٔ (u, v) در $T(V_2)$، $(x, y) = T^{-1}(u, v)$، وفرمولهایی برای تعیین x و y و برحسب u و v ارائه دهید.

۳. $T(x, y) = (y, x)$.
۴. $T(x, y) = (x, -y)$.
۵. $T(x, y) = (x, 0)$.
۶. $T(x, y) = (x, x)$.
۷. $T(x, y) = (x^2, y^2)$.
۸. $T(x, y) = (e^x, e^y)$.
۹. $T(x, y) = (x, 1)$.
۱۰. $T(x, y) = (x + 1, y + 1)$.
۱۱. $T(x, y) = (x - y, x + y)$.
۱۲. $T(x, y) = (2x - y, x + y)$.

در تمرینهای ۱۳ تا ۲۰، تابع $T: V_3 \to V_3$ با فرمولی تعریف شده که $T(x, y, z)$ را، که (x, y, z) نقطهٔ دلخواهی در V_3 است، به‌دست می‌دهد. درهر حالت، تعیین کنید T بر V_3 یک به یک است یانه. درصورت‌بودن، بردآن $T(V_3)$ را توصیف‌کنید. فرض کنید به ازای هر نقطهٔ (u, v, w) در $T(V_3)$، $(x, y, z) = T^{-1}(u, v, w)$، وفرمولهایی برای تعیین x، y، و z برحسب u، v، و w ارائه دهید.

۱۳. $T(x, y, z) = (z, y, x)$.
۱۴. $T(x, y, z) = (x, y, 0)$.

۱۵ . $T(x, y, z) = (x, 2y, 3z)$. ۱۶ . $T(x, y, z) = (x, y, x + y + z)$.

۱۷ . $T(x, y, z) = (x + 1, y + 1, z - 1)$. ۱۸ . $T(x, y, z) = (x + 1, y + 2, z + 3)$.

۱۹ . $T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z)$. ۲۰ . $T(x, y, z) = (x + y, y + z, x + z)$.

۲۱ . فرض کنید $T: V \to V$ تابعی باشد که V را بتوی آن می‌نگارد . توانها به استقرا وبا فرمولهای $T^0 = I$ ؛ به‌ازای $n \geq 1$ ، $T^n = TT^{n-1}$ تعریف می‌شوند . ثابت کنید قانون شرکتپذیری برای ترکیب قانون نماها ، یعنی $T^mT^n = T^{m+n}$ ، را ایجاب می‌کند . اگر T معکوسپذیر باشد ، ثابت کنید T^n نیز معکوسپذیر است و $(T^n)^{-1} = (T^{-1})^n$.

در تمرینهای ۲۲ تا ۲۵ ، S و T تابعهایی هستند با قلمرو V و مقادیر در V . در حالت کلی ، $ST \neq TS$. اگر $ST = TS$ ، می‌گوییم که S و T تعویض می‌شوند .

۲۲ . ثابت کنید که اگر S و T تعویض شوند ، به ازای هر عدد صحیح $n \geq 0$ ، $(ST)^n = S^nT^n$.

۲۳ . ثابت کنید هرگاه S و T معکوسپذیر باشند ، ST نیز معکوسپذیر است و $(ST)^{-1} = T^{-1}S^{-1}$. به عبارت‌دیگر ، معکوس ST ترکیب معکوسها ، به ترتیب عکس ، است .

۲۴ . ثابت کنید هرگاه S و T معکوسپذیر باشند و تعویض شوند ، معکوسهای آنها نیز تعویض می‌شوند .

۲۵ . فرض کنید V یک فضای خطی باشد ، و ثابت کنید که اگر S و T تعویض شوند ،

$$(S + T)^2 = S^2 + 2ST + T^2 \quad \text{و} \quad (S + T)^3 = S^3 + 3S^2T + 3ST^2 + T^3 .$$

این فرمولها در صورت $ST \neq TS$ چطور باید اصلاح شوند ؟

۲۶ . فرض کنید S و T تبدیلاتی خطی از V_3 بتوی V_3 باشند که با فرمولهای

$$S(x, y, z) = (z, y, x) \quad \text{و} \quad T(x, y, z) = (x, x + y, x + y + z) ،$$

که در آنها (x, y, z) نقطهٔ دلخواهی از V_3 است ، تعریف شده‌اند .

(آ) نقش (x, y, z) را تحت هریک از تبدیلات زیر معین کنید :

$$ST,\ TS,\ ST - TS,\ S^2,\ T^2,\ (ST)^2,\ (TS)^2,\ (ST - TS)^2 .$$

(ب) ثابت‌کنید S و T بر V_3 یک به یک است ، و نقش (u, v, w) را تحت هریک از تبدیلات زیر بیابید :

$$S^{-1},\ T^{-1},\ (ST)^{-1},\ (TS)^{-1}$$

(پ) نقش (x, y, z) را تحت $(T - I)^n$ به‌ازای هر $n \geq 1$ بیابید.

۲۷ . فرض کنید V فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی $p(x)$ باشد. همچنین، D عملگر مشتقگیری، و T عملگر انتگرالگیری باشد که هر چند جمله‌ای p را بروی چند جمله‌ای q که با $q(x) = \int_0^x p(t)\, dt$ داده می‌شود می‌نگارد. ثابت کنید $DT = I_V$ ولی $TD \neq I_V$، و فضای پوچ و برد TD را توصیف کنید.

۲۸ . فرض کنید V فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی $p(x)$ باشد. همچنین، D عملگر مشتقگیری بوده، و T تبدیل خطیی باشد که $p(x)$ را بروی $xp'(x)$ می‌نگارد.

(آ) فرض کنید $p(x) = 2 + 3x - x^2 + 4x^3$، ونقش p را تحت هریک از تبدیلات زیر بیابید:

$$D,\ T,\ DT,\ TD,\ DT - TD,\ T^2D^2 - D^2T^2 .$$

(ب) p هایی را در V بیابید که $T(p) = p$.

(پ) p هایی را در V بیابید که $(DT - 2D)(p) = O$.

(ت) p هایی را در V بیابید که $(DT - TD)^n(p) = D^n(p)$.

۲۹ . فرض کنید V و D مثل تمرین ۲۸ باشند ولی T تبدیل خطیی باشد که $p(x)$ را بروی $xp(x)$ می‌نگارد. ثابت کنید $DT - TD = I$ و، به‌ازای $n \geq 2$، $DT^n - T^nD = nT^{n-1}$.

۳۰ . فرض کنید T و S در $\mathscr{L}(V, V)$ بوده و $ST - TS = I$. ثابت کنید به ازای هر $n \geq 1$، $ST^n - T^nS = nT^{n-1}$.

۳۱ . فرض کنید V فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی $p(x)$ باشد. همچنین، R, S, T توابعی باشند که چند جمله‌ای دلخواه $p(x) = c_0 + c_1x + \cdots + c_nx^n$ در V را بروی چند جمله‌ایهای $r(x), s(x), t(x)$ می‌نگارند، که

$$r(x) = p(0), \qquad s(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k x^{k-1}, \qquad t(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^{k+1}.$$

(آ) فرض کنید $p(x) = 2 + 3x - x^2 + x^3$، و نقش p را تحت هریک از تبدیلات زیر بیابید:

$$R,\ S,\ T,\ ST,\ TS,\ (TS)^2,\ T^2S^2,\ S^2T^2,\ TRS,\ RST .$$

(ب) ثابت کنید R و S و T خطی‌اند، وفضای پوچ و برد هریک را مشخص کنید.

(پ) ثابت کنید T بر V یک به‌یک است، و معکوس آن را معین کنید.

(ت) اگر $n \geq 1$، $(TS)^n$ و S^nT^n را برحسب I و R بیان کنید.

۳۲ . به تمرین ۲۸ در بخش ۴۰۲ باز می‌گردیم . آیا T بر V یک به یک است ؟ درصورت بودن ، معکوس آن را وصف کنید .

۹۰۲ تبدیلات خطی با مقادیر مقرر

همانطور که قضیهٔ زیر توضیح داده ، اگر V با بعد متناهی باشد ، همیشه می‌توان تبدیل خطی $T: V \to W$ را طوری ساخت که در عنصرهای پایهٔ V مقادیر مقرر داشته باشد .

قضیهٔ ۱۲۰۲ . فرض‌کنیم $e_1, \ldots, e_n$ یک پایهٔ فضای خطی و n بعدی V بوده و $u_1, \ldots, u_n$ ، n عنصر دلخواه در فضای خطی W باشد . در این‌صورت ، یک‌و فقط یک‌تبدیل خطی مانند $T: V \to W$ هست که

$$\text{به‌ازای } k = 1, 2, \ldots, n \text{ ، } T(e_k) = u_k \cdot \qquad (۷۰۲)$$

این T عنصر دلخواه x در V را به‌این صورت‌می‌نگارد :

$$\text{هرگاه } x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \text{ ، } T(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k \cdot \qquad (۸۰۲)$$

برهان . هر x در V را می‌توان به‌طور منحصر بفرد به صورت ترکیبی خطی‌از $e_1, \ldots, e_n$ بیان کرد ، ضریبهای $x_1, \ldots, x_n$ مولفه‌های x نسبت به پایهٔ مرتب $(e_1, \ldots, e_n)$ اند . اگر T با (۸۰۲) تعریف شود ، به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که T خطی است . اگر به‌ازای k ای $x = e_k$ ، تمام مولفه‌های x جز مولفهٔ k ام که یک است ، صفرند ؛ و در نتیجه ، طبق مطلوب ، (۸۰۲) ایجاب می‌کند که $T(e_k) = u_k$.

برای اثبات اینکه فقط یک تبدیل خطی صادق در (۷۰۲) وجود دارد ، فرض‌کنیم T' تبدیل دیگری باشد و $T'(x)$ را حساب می‌کنیم . داریم

$$T'(x) = T'\left(\sum_{k=1}^{n} x_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} x_k T'(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k u_k = T(x).$$

چون به‌ازای هر x در V ، $T'(x) = T(x)$ ، خواهیم داشت $T' = T$ ، که برهان را تمام خواهد کرد .

مثال . تبدیل خطی $T: V_2 \to V_2$ را طوری معین کنید که عنصرهای پایهٔ $i = (1, 0)$ و

$j = (0, 1)$ را به‌صورت زیر بنگارد :

$$T(i) = i + j, \qquad T(j) = 2i - j.$$

حل. اگر $x = x_1 i + x_2 j$ عنصر دلخـواهی از V_2 باشند ، $T(x)$ از رابطهٔ زیر به دست می‌آید :

$$T(x) = x_1 T(i) + x_2 T(j) = x_1(i + j) + x_2(2i - j) = (x_1 + 2x_2)i + (x_1 - x_2)j$$

۱۰۰۲ نمایشهای ماتریسی تبدیلات خطی

قضیهٔ ۱۲۰۲ نشان می‌دهد که تبدیل خطی $T: V \to W$ از فضای خطی و بـا بعد متناهی V کاملا" بـا عملش بر مجموعهٔ مفروض $e_1, \ldots, e_n$ از بردارهای پایه مشخص می‌شود . حال فرض کنیم فضای W نیز با بعد متناهی بوده ، مثلا" $\dim W = m$ ، و $w_1, \ldots, w_m$ پایه‌ای از W باشد .

(بعدهای n و m ممکن است مساوی باشند یا نباشند .) چون T مقادیرش در W است ، هر عنصر $T(e_k)$ را می‌توان بـه‌طور منحصر بفـرد به‌صورت ترکیبی خطی از عناصر پایهٔ $w_1, \ldots, w_m$ نوشت ؛ مثلا" ، به‌صورت

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^{m} t_{ik} w_i ,$$

که در آن $t_{1k}, \ldots, t_{mk}$ مولفه‌هـای $T(e_k)$ نسبت به پایهٔ مرتب $(w_1, \ldots, w_m)$ اند . ما m تایی $(t_{1k}, \ldots, t_{mk})$ را به‌صورت قائم نشان می‌دهیم :

$$\begin{bmatrix} t_{1k} \\ t_{2k} \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ t_{mk} \end{bmatrix} . \qquad (۹۰۲)$$

این آرایه یک **بردار ستونی** یا یک **ماتریس ستونی** نـام دارد . بـرای هریک از n عنصر $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ یک بردار ستونی داریم . با گذاردنشان در کنار هم و قرار یک جفت کروشه در اطرافشان به آرایهٔ مستطیلی شکل زیر دست می‌یابیم :

$$\begin{bmatrix} t_{11} & t_{12} & \cdots & t_{1n} \\ t_{21} & t_{22} & \cdots & t_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ t_{m1} & t_{m2} & \cdots & t_{mn} \end{bmatrix}.$$

این آرایه یک **ماتریس** مرکب از m **سطر** و n **ستون** نامیده می‌شود.

ما آن را یک ماتریس m در n و یا یک ماتریس $m \times n$ می‌نامیم. سطر اول ماتریس $1 \times n$، $(t_{11}, t_{12}, \ldots, t_{1n})$ است. ماتریس $m \times 1$ (۹۰۲) ستون k ام است. اسکالرهای t_{ik} طوری اندیسگذاری شده‌اند که اولین زیرنویس، یعنی i، اولین **سطر**، و دومین زیر نویس، یعنی k، معرف **ستونی** است که t_{ik} درآن ظاهر می‌شود. ما t_{ik} را **درایه**ٔ ik یا **عنصر** ik ماتریس می‌نامیم. نماد فشرده‌تر

$$(t_{ik})_{i,k=1}^{m,n} \quad \text{یا} \quad (t_{ik})$$

نیز برای ماتریسی که درایهٔ ik آن t_{ik} است به‌کار می‌رود.

پس، هر تبدیل خطی T از فضای n بعدی V بتوی فضای m بعدی W یک ماتریس $m \times n$ مانند (t_{ik}) را به دست می‌دهدکه‌ستونهای آن از مولفه‌های $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ نسبت به پایهٔ $(w_1, \ldots, w_m)$ تشکیل شده است. این ماتریس را **نمایش ماتریسی** T نسبت به پایهٔ مرتب $(e_1, \ldots, e_n)$ از V و $(w_1, \ldots, w_m)$ از W می‌نامیم. به محض دانستن ماتریس (t_{ik})، مولفه‌های هر عنصر $T(x)$ نسبت به پایهٔ $(w_1, \ldots, w_m)$ را می‌توان بنحوی که درقضیهٔ زیروصف‌شده مشخص کرد.

قضیهٔ ۱۳۰۲. *فرض‌کنیم T یک تبدیل خطی در $\mathscr{L}(V, W)$ باشد، که $\dim V = n$ و $\dim W = m$. همچنین، $(e_1, \ldots, e_n)$ و $(w_1, \ldots, w_m)$ پایه‌های مرتبی از V و W بوده و (t_{ik}) ماتریس $m \times n$ می‌باشد که درایه‌هایش با معادلات زیر مشخص می‌شود:*

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^{m} t_{ik} w_i \text{ ،} \quad k = 1, 2, \ldots, n \text{ بەازای} \qquad (۱۰۰۲)$$

دراین صورت، عنصر دلخواه

$$x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k \qquad (۱۱۰۲)$$

در V با مولفه‌های $(x_1, \ldots, x_n)$ نسبت به $(e_1, \ldots, e_n)$ به وسیلهٔ T بروی عنصر

$$T(x) = \sum_{i=1}^{m} y_i w_i \qquad (۱۲۰۲)$$

در W با مولفه‌های $(y_1, \ldots, y_m)$ نسبت بـــه $(w_1, \ldots, w_m)$ نگاشته می‌شود. y_i ها با معادلات خطی زیر به مولفه‌های x مربوط می‌گردند:

$$\text{به‌ازای } i = 1, 2, \ldots, m \text{ ، } y_i = \sum_{k=1}^{n} t_{ik} x_k \text{ .} \qquad (۱۳۰۲)$$

برهان. با اعمال T در هر طرف (۱۱۰۲) و استفاده از (۱۰۰۲) نتیجه می‌شود که

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} x_k T(e_k) = \sum_{k=1}^{n} x_k \sum_{i=1}^{m} t_{ik} w_i = \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{k=1}^{n} t_{ik} x_k \right) w_i = \sum_{i=1}^{m} y_i w_i ,$$

که درآن هر y_i از (۱۳۰۲) به دست می‌آید. این برهان را تمام خواهد کرد.

بااختیارپایه‌های $(e_1, \ldots, e_n)$ و$(w_1, \ldots, w_m)$ برای V و W، هر تبدیل خطی $T: V \to W$صاحب یک نمایش ماتریسی مانند (t_{ik}) می‌شود. بعکس، اگر از mn اسکالر دلخواه که‌به شکل ماتریس مستطیلی شکل (t_{ik}) آراسته شده شروع و برای V و W یک‌جفت پایهٔ مرتب اختیار کنیم، به‌آسانی می‌توان ثابت کرد که درست یک تبدیل خطی مانند $T: V \to W$هست که این نمایش ماتریسی را دارد. برای این‌کار کافی است T را در عنصرهای پایهٔ V با معادلات (۱۰۰۲)تعریف‌کنیم. در این صورت، طبق قضیهٔ ۱۲۰۲، یک و فقط یک تبدیل خطی مانند $T: V \to W$ با این مقادیر مقرر وجود دارد. حال نقش $T(x)$ نقطهٔ دلخواه x در V از معادلات (۱۲۰۲) و (۱۳۰۲) به‌دست خواهد آمد.

مثال ۱. **ساختن تبدیل خطی یک ماتریس.** با ماتریس 2×3

$$\begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

شروع کرده، پایهٔ معمولی بردارهای یکهٔ مختصات را برای V_3 و اختیار می‌کنیم. پس ماتریس فوق نمایش تبدیل خطی $T: V_3 \to V_2$ است که بردار دلخواه (x_1, x_2, x_3) در V_3 را طبق معادلات خطی

$$y_1 = 3x_1 + x_2 - 2x_3 ,$$

$$y_2 = x_1 + 0x_2 + 4x_3$$

بروی بردار (y_1, y_2) در V_2 می‌نگارد.

مثال ۲. ساختن نمایش ماتریسی یک تبدیل خطی. فرض کنیم V فضای خطی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی $p(x)$ باشد که درجه‌شان از 3 نابیشتر است. این فضا دارای بعد 4 است، وپایهٔ $(1, x, x^2, x^3)$ رابرای‌آن‌اختیار می‌کنیم. فرض کنیم D عملگرمشتقگیری باشدکه‌هرچند جمله‌ای $p(x)$ در V را بروی مشتقش $p'(x)$ می‌نگارد. می‌توان D راتبدیلی خطی از V بتوی W گرفت، که W فضای 3 بعدی تمام‌چند جمله‌ایهای حقیقی با درجهٔ نابیشتراز 2 است. در W پایهٔ $(1, x, x^2)$ را اختیار می‌کنیم. برای یافتن نمایش‌ماتریسی D نسبت‌به این پایه‌ها، هر عنصر پایهٔ V را تبدیل (مشتق می‌گیریم) و آن را به‌صورت ترکیبی خطی از عنصرهای پایهٔ W بیان می‌کنیم. لذا، داریم

$$D(1) = 0 = 0 + 0x + 0x^2, \qquad D(x) = 1 = 1 + 0x + 0x^2,$$

$$D(x^2) = 2x = 0 + 2x + 0x^2, \qquad D(x^3) = 3x^2 = 0 + 0x + 3x^2.$$

ضرایب این چند جمله‌ایها **ستونهای** نمایش ماتریسی D را مشخص می‌کنند. پس نمایش مطلوب ماتریس 3×4 زیر می‌باشد:

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

برای تاکید در اینکه‌نمایش ماتریسی نه فقط‌به عناصر پایه بلکه به ترتیب آنها نیز بستگی دارد، ترتیب عناصر پایه در W را معکوس و، در عوض، از پایهٔ مرتب $(x^2, x, 1)$ استفاده می‌کنیم. دراین صورت، عناصر پایهٔ V به همان چند جمله‌ایهای بالا تبدیل می‌شوند، منتها مولفه‌های این چند جمله‌ایها نسبت به پایهٔ جدید $(x^2, x, 1)$ به ترتیب عکس ظاهر می‌شوند. لذا، نمایش ماتریسی D در اینجا

$$\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

خواهد شد .

حال ، با استفاده از پایهٔ $(1, 1 + x, 1 + x + x^2, 1 + x + x^2 + x^3)$ برای V و پایهٔ $(1, x, x^2)$ برای W ، نمایش ماتریسی سومی برای D پیدا می‌کنیم . عناصر پایهٔ V به صورت زیر تبدیل می‌یابند :

$$D(1) = 0, \qquad D(1 + x) = 1, \qquad D(1 + x + x^2) = 1 + 2x,$$

$$D(1 + x + x^2 + x^3) = 1 + 2x + 3x^2 \ ;$$

در نتیجه ، نمایش ماتریسی در این حالت عبارت است از

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

۱۱۰۲ ساختن نمایش ماتریسی به شکل قطری

چون از یک تبدیل خطی می‌توان با اختیار پایه‌های مختلف نمایشهای ماتریسی متفاوتی ساخت ، طبیعی‌است‌با اختیار پایه‌هایی سعی کنیم ماتریس حاصل‌شکل سادهٔ خاصی‌داشته باشد . قضیهٔ‌زیر نشان می‌دهدکه می‌توان تمام درایه‌ها را ، جز احتمالا" در امتدادقطری که از گوشهٔ بالایی‌چپ‌ماتریس شروع شده ، 0 گرداند . روی این قطر یک رشته یک داریم که‌پس‌از آن صفرها آمده‌اند ، تعداد یکها مساوی رتبهٔ تبدیل است . ماتریس (t_{ik}) که در آن وقتی $i \neq k$ ، $t_{ik} = 0$ ، یک **ماتریس قطری** نامیده می‌شود .

قضیهٔ ۱۴۰۲ . *فرض‌کنیم V و W فضاهایی‌خطی‌با بعدمتناهی‌باشند ،با $\dim V = n$ و $\dim W = m$.همچنین ، $T \in \mathscr{L}(V, W)$ و $r = \dim T(V)$ رتبهٔ T باشد . دراین صورت ، پایه‌ای مانند $(e_1, \ldots, e_n)$ از V و پایه‌ای مانند $(w_1, \ldots, w_m)$ از W هست بطوری‌که*

$$T(e_i) = w_i \text{ ، } i = 1, 2, \ldots, r \text{ به‌ازای} \qquad (۱۴۰۲)$$

و

$$\cdot\ T(e_i) = O \text{ ، } i = r + 1, \ldots, n \text{ به‌ازای} \qquad (۱۵۰۲)$$

لذا ، تمام درایه‌های ماتریس (t_{ik}) از T نسبت به این پایه‌ها صفرند جز r درایهٔ قطری

$$t_{11} = t_{22} = \cdots = t_{rr} = 1 .$$

برهان. ابتدا برای W یک پایه می‌سازیم. چون $T(V)$ زیر فضای W است و $\dim T(V) = r$، فضای $T(V)$ پایه‌ای r عنصری در W، مثلاً $w_1, \ldots, w_r$، را دارد. طبق قضیهٔ ۷۰۱، این عنصرها زیر مجموعه‌ای از یک پایهٔ W را تشکیل می‌دهند. پس می‌توان عنصرهای $w_{r+1}, \ldots, w_m$ را به این زیر مجموعه افزود بطوری که

$$(w_1, \ldots, w_r, w_{r+1}, \ldots, w_m) \tag{۱۶۰۲}$$

یک پایه برای W باشد.

حال برای V یک پایه می‌سازیم. هریک از r عنصر w_i در (۱۶۰۲) نقش دست‌کم یک عنصر در V است. یکی از این عنصرها را در V اختیار می‌کنیم و آن را e_i می‌نامیم. پس، به ازای $i = 1, 2, \ldots, r$، $T(e_i) = w_i$؛ در نتیجه، (۱۴۰۲) برقرار است. حال فرض کنیم k بعد فضای پوچ $N(T)$ باشد. بنابر قضیهٔ ۳۰۲، داریم $n = k + r$. چون $\dim N(T) = k$، فضای $N(T)$ پایه‌ای مرکب از k عنصر در V دارد که آنها را به $e_{r+1}, \ldots, e_{r+k}$ نشان می‌دهیم. معادلهٔ (۱۵۰۲) برای هریک از این عنصرها برقرار است. پس، برای اتمام برهان، باید نشان داد که مجموعهٔ مرتب

$$(e_1, \ldots, e_r, e_{r+1}, \ldots, e_{r+k}) \tag{۱۷۰۲}$$

یک‌پایهٔ V است. گوییم چون $\dim V = n = r + k$، کافی است نشان دهیم این عنصرها مستقل هستند. فرض کنیم ترکیبی خطی از آنها صفر باشد؛ مثلاً،

$$\sum_{i=1}^{r+k} c_i e_i = O. \tag{۱۸۰۲}$$

با اعمال T و استفاده از معادلات (۱۴۰۲) و (۱۵۰۲) درمی‌یابیم که

$$\sum_{i=1}^{r+k} c_i T(e_i) = \sum_{i=1}^{r} c_i w_i = O.$$

اما $w_1, \ldots, w_r$ مستقل‌اند؛ و در نتیجه، $c_1 = \cdots = c_r = 0$. بنابراین، r جملهٔ اول (۱۸۰۲) صفر هستند، پس (۱۸۰۲) به

$$\sum_{i=r+1}^{r+k} c_i e_i = O$$

تقلیل می‌یابد. اما $e_{r+1}, \ldots, e_{r+k}$ مستقل‌اند، زیرا یک پایه برای $N(T)$ تشکیل می‌دهند؛ و در نتیجه، $c_{r+1} = \cdots = c_{r+k} = 0$. لذا، تمام c_i ها در (۱۸۰۲) صفر می‌باشند؛ و در

نتیجه، عنصرهای (۱۷۰۲) یک پایه برای V تشکیل می‌دهند. این برهان را تمام خواهد کرد.

مثال. به مثال ۲ در بخش ۱۰۰۲ باز می‌گردیم، که در آن D عملگر مشتقگیری است که فضای V مرکب ازچند جمله‌ایهای با درجهٔ نابیشتر از 3 را بتوی فضای W مرکب ازچند جمله‌ایهای با درجهٔ نابیشتر از 2 می‌نگارد. در این مثال $T(V) = W$، پس T دارای رتبهٔ 3 است. روش اثبات قضیهٔ ۱۴۰۲ را به‌کار برده، پایه‌ای برای W، مثلاً" پایهٔ $(1, x, x^2)$ را، اختیار می‌کنیم. یک مجموعه از چند جمله‌ایها در V که بروی این عنصرها نگاشته می‌شوند عبارت است از $(x, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{3}x^3)$. این مجموعه را با افزودن چند جمله‌ای ثابت 1، که پایهٔ فضای پوچ D است، وسیع می‌سازیم تا پایه‌ای برای V به‌دست آید. لذا، اگر از پایهٔ $(x, \frac{1}{2}x^2, \frac{1}{3}x^3, 1)$ برای V و پایهٔ $(1, x, x^2)$ برای W استفاده کنیم، نمایش ماتریسی نظیر برای D به شکل قطری

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

خواهد بود.

۱۲۰۲ تمرین

در تمام تمرینهای مربوط به فضای برداری V_n، پایهٔ معمولی بردارهای یکهٔ مختصات اختیار شود مگرآنکه پایهٔ دیگری تصریح شده باشد. در تمرینهای مربوط به ماتریس‌تبدیل خطی $T: V \to W$ که $V = W$، در هر دوی V و W یک پایه اختیار شود مگر آنکه انتخابی جز این تصریح شده باشد.

۱. ماتریس هریک از تبدیلات خطی زیر از V_n بتوی V_n را مشخص کنید:

(آ) تبدیل همانی؛

(ب) تبدیل صفر؛

(پ) ضرب در اسکالر ثابت c.

۲. ماتریس هریک از تصویرهای زیر را مشخص کنید:

(آ) $T: V_3 \to V_2$، که در آن $T(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$؛

(ب) $T: V_3 \to V_2$، که درآن $T(x_1, x_2, x_3) = (x_2, x_3)$؛

(پ) $T: V_5 \to V_3$ ، که درآن $T(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = (x_2, x_3, x_4)$.

۳ . تبدیل خطی $T: V_2 \to V_2$ بردارهای پایهٔ i و j را اینطور می‌نگارد :

$$T(i) = i + j, \quad T(j) = 2i - j \cdot$$

(آ) $T(3i - 4j)$ و $T^2(3i - 4j)$ را برحسب i و j حساب کنید .

(ب) ماتریسهای T و T^2 را معین کنید .

(پ) قسمت (ب) را در حالتی حل کنید که (i, j) با (e_1, e_2) عوض شده‌باشد ، که‌در آن $e_1 = i - j, e_2 = 3i + j$.

۴ . تبدیل خطی $T: V_2 \to V_2$ به صورت زیر تعریف شده است : منعکس هر بردار (x, y) را نسبت به محور y به دست آورده بعد طولش را دوبرابر می‌کنیم تا $T(x, y)$ حاصل شود . ماتریسهای T و T^2 را مشخص نمایید .

۵ . فرض کنید $T: V_3 \to V_3$ یک تبدیل خطی باشد بطوری که

$$T(k) = 2i + 3j + 5k, \quad T(j + k) = i, \quad T(i + j + k) = j - k \cdot$$

(آ) $T(i + 2j + 3k)$ را حساب کنید و پوچه و رتبهٔ T را مشخص نمایید .

(ب) ماتریس T را مشخص کنید .

۶ . برای تبدیل خطی تمرین ۵ ، هر دو پایه را (e_1, e_2, e_3) بگیرید که‌درآن $e_1 = (2, 3, 5)$ ، $e_2 = (1, 0, 0)$ ، $e_3 = (0, 1, -1)$ ، وماتریس T را نسبت به پایه‌های جدید معین نمایید .

۷ . تبدیل خطی $T: V_3 \to V_2$ بردارهای پایه را به‌صورت زیر می‌نگارد :

$$T(i) = (0, 0), \ T(j) = (1, 1), \ T(k) = (1, -1) \cdot$$

(آ) $T(4i - j + k)$ را حساب کنید و پوچه و رتبهٔ T را مشخص نمایید .

(ب) ماتریس T را مشخص کنید .

(پ) ازپایهٔ (i, j, k) در V_3 وپایهٔ (w_1, w_2) در V_2 ، که $w_1 = (1, 1)$ ، $w_2 = (1, 2)$ ، استفاده کرده ، ماتریس T را نسبت به این پایه‌ها مشخص کنید .

(ت) مبناهای (e_1, e_2, e_3) برای V_3 و (w_1, w_2) برای V_2 را طوری‌بیابید که‌ماتریس T نسبت به آنها به شکل قطری باشد .

۸ . تبدیل خطی $T: V_2 \to V_3$ بردارهای پایه را به این صورت می‌نگارد :

$$T(i) = (1, 0, 1) \ , \ T(j) = (-1, 0, 1) \cdot$$

(آ) $T(2i - 3j)$ را حساب کنید و پوچه و رتبهٔ T را مشخص نمایید .

(ب) ماتریس T را مشخص کنید .

(پ) پایه‌های (e_1, e_2) رابرای V_2 و (w_1, w_2, w_3) رابرای V_3 طوری‌بیابید که‌ماتریس T نسبت به آنها به شکل قطری باشد.

۹ . تمرین ۸ را در حالتی حل کنید که $T(i) = (1, 0, 1)$ و $T(j) = (1, 1, 1)$.

۱۰ . فرض کنید V و W فضاهایی‌خطی هریک با بعد 2 و هریک با پایهٔ (e_1, e_2) باشند. همچنین، $T: V \to W$ یک تبدیل خطی باشد بطوری که

$$T(e_1 + e_2) = 3e_1 + 9e_2, \quad T(3e_1 + 2e_2) = 7e_1 + 23e_2 \cdot$$

(آ) $T(e_2 - e_1)$ را حساب کنید و پوچه و رتبهٔ T را مشخص نمایید.

(ب) ماتریس T را نسبت به پایهٔ مفروض مشخص کنید.

(پ) پایهٔ (e_1, e_2) را برای V به‌کار برید، و پایهٔ جدیدی برای W به شکل $(e_1 + ae_2, 2e_1 + be_2)$ بیابید که ماتریس T نسبت به آنها به شکل قطری باشد.

در فضای خطی تمام توابع حقیقی، هریک از مجموعه‌های زیر مستقل است ویک زیر فضای با بعد متناهی از V را می‌پیماید. مجموعه را پایه‌ای از V بگیرید و فرض کنید $D: V \to V$ عملگر مشتقگیری باشد. درهر حالت، ماتریسهای D و D^2 را نسبت به این پایه پیدا کنید.

۱۱ . $(\sin x, \cos x)$.

۱۲ . $(1, x, e^x)$.

۱۳ . $(1, 1 + x, 1 + x + e^x)$.

۱۴ . (e^x, xe^x) .

۱۵ . $(-\cos x, \sin x)$.

۱۶ . $(\sin x, \cos x, x \sin x, x \cos x)$.

۱۷ . $(e^x \sin x, e^x \cos x)$.

۱۸ . $(e^{2x} \sin 3x, e^{2x} \cos 3x)$.

۱۹ . پایهٔ $(1, x, x_2^2, x_3^3)$ را در فضای خطی V مرکب از همهٔ چندجمله‌ایهای حقیقی از درجهٔ نابیشتر از 3 اختیار کنید. فرض کنید D عملگر مشتقگیری بوده‌و $T: V \to V$ تبدیلی خطی باشد که $p(x)$ را بروی $x'p(x)$ می‌نگارد. ماتریس هریک از تبدیلات زیر را نسبت به پایهٔ داده شده معین کنید: (آ) T ؛ (ب) DT ؛ (پ) TD ؛ (ت) $TD - DT$ ؛ (ث) T^2 ؛ (ج) $T^2D^2 - D^2T^2$.

۲۰ . به تمرین ۱۹ بازمی‌گردیم. فرض کنید W نقش V تحت TD باشد. برای V و W پایه‌هایی بیابید که ماتریس DT نسبت به آنها به شکل قطری باشد.

۱۲۰۲ فضاهای خطی از ماتریسها

دیدیم که‌چطورماتریسها به‌طورطبیعی به‌صورت نمایشهای تبدیلات خطی ظاهر می‌شوند.

ماتریسها را می‌توان اشیائی موجود به ذات خود، بدون آنکه لزوماً به تبدیلات خطی مربوط باشند، نیز در نظر گرفت. بدین ترتیب، ماتریسها ردهٔ دیگری از اشیاء ریاضی را تشکیل می‌دهند که بر آنها می‌توان اعمال جبری تعریف کرد. ارتباطشان با تبدیلات خطی می‌تواند انگیزهٔ این تعریفها باشد، لکن این ارتباط فعلاً نادیده گرفته می‌شود.

فرض کنیم m و n دوعدد صحیح مثبت بوده، و $I_{m,n}$ مجموعهٔ تمام جفتهای (i,j) از اعداد صحیح باشد که $1 \leq i \leq m$ و $1 \leq j \leq n$. هرتابع مانند A که قلمروش $I_{m,n}$ باشد یک ***ماتریس*** $m \times n$ خوانده می‌شود. مقدار تابعی $A(i,j)$ ***درایهٔ*** ij یا **عنصر** ij ماتریس نام دارد و با a_{ij} نیز نموده می‌شود. رسم است که جمیع مقادیر تابعی را دریک آرایهٔ مستطیلی شکل مرکب از m سطر و n ستون نمایش می‌دهند، به این شکل:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

عناصر a_{ij} می‌توانند اشیاء دلخواهی از هر نوع باشند. معمولاً، این عنصرها اعدادی حقیقی یا مختلط هستند، اما گاهی بجاست ماتریسهایی در نظر گرفته شود که عنصرهای آن اشیاء دیگری، مثلاً تابع، باشند. ما ماتریسها را با نماد فشرده‌تر

$$A = (a_{ij}) \quad \text{یا} \quad A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$$

نیز نشان خواهیم داد. اگر $m = n$، ماتریس یک ***ماتریس مربعی*** نام دارد. هر ماتریس $1 \times n$ یک ***ماتریس سطری***، و هر ماتریس $m \times 1$ یک ***ماتریس ستونی*** نامیده می‌شود.

دو تابع مساوی‌اند اگر و فقط اگر دارای یک قلمرو بوده و در هر عنصر از قلمرو یک مقدار را بگیرند. چون ماتریسها تابع هستند، دو ماتریس $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ مساوی‌اند اگروفقط اگرتعداد سطرهاوستونهای آنها یکی بوده و به ازای هر جفت (i,j)، $a_{ij} = b_{ij}$.

حال فرض‌کنیم درایه‌ها اعداد (حقیقی یا مختلط) باشند، و جمع ماتریسها و ضرب در اسکالرها را به‌همان روش معمول برای توابع حقیقی یا مختلط تعریف می‌کنیم.

تعریف. هرگاه $A = (a_{ij})$ و $B = (b_{ij})$ دو ماتریس $m \times n$ بوده و c یک اسکالر باشد، ماتریسهای $A + B$ و cA را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A + B = (a_{ij} + b_{ij}), \qquad cA = (ca_{ij}).$$

مجموع فقط وقتی تعریف می‌شود که A و B یک اندازه داشته باشند.

مثال. هرگاه

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & 0 & 4 \end{bmatrix} \text{ و } B = \begin{bmatrix} 5 & 0 & 1 \\ 1 & -2 & 3 \end{bmatrix}،$$

داریم

$$A + B = \begin{bmatrix} 6 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 7 \end{bmatrix}, \qquad 2A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -2 & 0 & 8 \end{bmatrix},$$

$$(-1)B = \begin{bmatrix} -5 & 0 & -1 \\ -1 & 2 & -3 \end{bmatrix}.$$

ماتریس صفر O را ماتریس $m \times n$ تعریف می‌کنیم که تمام عناصر آن 0 اند. با این تعریفها، به آسانی می‌توان تحقیق کرد که گردآیهٔ تمام ماتریسهای $m \times n$ یک فضای خطی است. این فضای خطی را به $M_{m,n}$ نشان می‌دهیم. اگر درایه‌ها اعدادی حقیقی باشند، فضای $M_{m,n}$ یک فضای خطی حقیقی است. و اگر درایه‌ها مختلط باشند، $M_{m,n}$ یک فضای خطی مختلط می‌باشد. همچنین، به آسانی ثابت می‌شود که این فضا بعدش mn است. در واقع، یک پایهٔ $M_{m,n}$ از mn ماتریس تشکیل شده که یک درایهٔ مساوی 1 دارند و بقیه مساوی 0. مثلاً، شش ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

یک پایه برای مجموعهٔ تمام ماتریسهای 2×3 تشکیل می‌دهند.

۱۴.۲ یکریختی بین تبدیلات خطی و ماتریسها

حال به رابطهٔ بین ماتریسها و تبدیلات خطی باز می‌گردیم. فرض کنیم V و W فضاهایی خطی با بعد متناهی بوده و $\dim V = n$ و $\dim W = m$. پایهٔ $(e_1, \ldots, e_n)$ را برای V و پایهٔ $(w_1, \ldots, w_m)$ را برای W اختیار می‌کنیم. دراین بحث، این پایه را ثابت نگه

می‌داریم . فرض کنیم $\mathscr{L}(V, W)$ فضای خطی تمام تبدیلات خطی از V بتوی W باشد . اگر $T \in \mathscr{L}(V, W)$ ، $m(T)$ را ماتریس T نسبت به پایه‌های فوق می‌انگاریم . یادآور می‌شویم که $m(T)$ به این صورت تعریف می‌شود :

نقش هر عنصرپایه‌مانند e_k به صورت‌ترکیبی‌خطی از عناصر پایهٔ W بیان‌می‌شود :

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^{m} t_{ik} w_i \text{ ، } k = 1, 2, \ldots, n \text{ به‌ازای } . \qquad (۱۹\cdot۲)$$

ضریبهای اسکالر t_{ik} درایه‌های ik ماتریس $m(T)$ هستند . لذا ، داریم

$$m(T) = (t_{ik})_{i,k=1}^{m,n} . \qquad (۲۰\cdot۲)$$

معادلهٔ (۲۰۰۲) تابع جدید m راتعریف‌می‌کندکه‌قلمروش $\mathscr{L}(V, W)$ بوده ومقادیرش ماتریسهایی در $M_{m,n}$ اند . چون هر ماتریس $m \times n$ ماتریس $m(T)$ به ازای T ای در $\mathscr{L}(V, W)$ است ، برد m مساوی $M_{m,n}$ می‌باشد . قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که تبدیل $m: \mathscr{L}(V, W) \to M_{m,n}$ بر $\mathscr{L}(V, W)$ خطی و یک به یک است .

قضیهٔ ۱۵۰۲ . قضیهٔ یکریختی . *به‌ازای هر S و T در $\mathscr{L}(V, W)$ و هر اسکالر c داریم*

$$m(S+T) = m(S) + m(T) \text{ و } m(cT) = cm(T)$$

بعلاوه ،

$$m(S) = m(T) \text{ ایجاب می‌کند که } S = T \text{ ،}$$

در نتیجه ، m بر $\mathscr{L}(V, W)$ یک به‌یک می‌باشد .

برهان . ماتریس $m(T)$ از ضریبهای t_{ik} در (۱۹۰۲) تشکیل شده است . همچنین ، ماتریس $m(S)$ از ضریبهای s_{ik} در معادلات زیر متشکل است :

$$S(e_k) = \sum_{i=1}^{m} s_{ik} w_i \text{ ، } k = 1, 2, \ldots, n \text{ به‌ازای} \qquad (۲۱\cdot۲)$$

چون داریم

$$(S+T)(e_k) = \sum_{i=1}^{m} (s_{ik} + t_{ik}) w_i \quad \text{و} \quad (cT)(e_k) = \sum_{i=1}^{m} (ct_{ik}) w_i \text{ ،}$$

خواهیم داشت $m(S+T) = (s_{ik} + t_{ik}) = m(S) + m(T)$ و $m(cT) = (ct_{ik}) = cm(T)$. این خطی بودن m را ثابت می‌کند .

برای اثبات یک به یک بودن m ، فرض کنیم $m(S) = m(T)$ که در آن $S = (s_{ik})$ و $T = (t_{ik})$. معادلات (۱۹۰۲) و (۲۱۰۲) نشان می‌دهند که به ازای هر عنصر پایهٔ e_k ، $S(e_k) = T(e_k)$ ؛ در نتیجه، به‌ازای هر x در V ، $S(x) = T(x)$ ؛ و لذا $S = T$.

تذکر. تابع m یک **یکریختی** نامیده می‌شود. m ، به‌ازای پایه‌های مفروضی، یک تناظر یک به یک بین مجموعهٔ تبدیلات خطی $\mathscr{L}(V, W)$ و مجموعهٔ ماتریسهای $m \times n$ ، $M_{m,n}$ برقرار می‌کند. اعمال جمع و ضرب در اسکالرها تحت این تناظر حفظ می‌شوند. فضاهای خطی $\mathscr{L}(V, W)$ و $M_{m,n}$ **یکریخت** گفته می‌شوند. ضمناً، قضیهٔ ۱۱۰۲ نشان می‌دهد که قلمرو یک تبدیل خطی یک به یک بعد برد خود را دارد. بنابراین، $\dim \mathscr{L}(V, W) = \dim M_{m,n} = mn$.

هرگاه $V = W$ و برای V و W یک پایه اختیار کنیم، ماتریس $m(I)$ که نظیر تبدیل همانی $I: V \to V$ است یک ماتریس قطری $n \times n$ است که هر درایهٔ قطری آن 1 و بقیه مساوی 0 اند. این ماتریس **ماتریس همانی** یا **ماتریس یکه** نامیده و با I یا I_n نموده می‌شود.

۱۵۰۲ ضرب ماتریسها

بعضی از تبدیلات خطی را می‌توان به‌وسیلهٔ ترکیب در هم ضرب کرد. حال ضرب ماتریسها را طوری تعریف می‌کنیم که حاصل ضرب دو ماتریس نظیر ترکیب تبدیلات خطیی باشد که آنها را نمایش می‌دهند.

یادآور شویم که اگر $T: U \to V$ و $S: V \to W$ تبدیلاتی خطی باشند، ترکیب آنها $ST: U \to W$ تبدیلی است خطی که به صورت زیر تعریف می‌شود:

به‌ازای هر x در U ، $ST(x) = S[T(x)]$.

فرض کنیم U ، V ، و W با بعد متناهی باشند، مثلاً،

$$\dim U = n, \qquad \dim V = p, \qquad \dim W = m.$$

برای U و V و W پایه‌هایی اختیار می‌کنیم. نسبت به این پایه‌ها، ماتریس $m(S)$ یک ماتریس $m \times p$ ، ماتریس T یک ماتریس $p \times n$ ، و ماتریس ST یک ماتریس $m \times n$ است. با تعریف ضرب ماتریسی زیر می‌توانیم رابطهٔ $m(ST) = m(S)m(T)$ را نتیجه بگیریم.

این رابطه خاصیت یکریختی را به حاصل ضربها تعمیم می‌دهد .

تعریف. فرض کنیم A یک ماتریس $m \times p$ باشد و B یک ماتریس $p \times n$ ؛ مثلاً ،

$A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,p}$ و $B = (b_{ij})_{i,j=1}^{p,n}$.

در این صورت، حاصل ضرب AB مساوی ماتریس $m \times n$ ، $C = (c_{ij})$ تعریف می‌شود که درایهٔ ij آن از رابطهٔ

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik} b_{kj} \qquad (۲۲۰۲)$$

به دست می‌آید .

تذکر. حاصل ضرب AB را نمی‌توان تعریف کرد مگر اینکه تعداد ستونهای A مساوی عدهٔ سطرهای B باشد .

اگر سطر i م A را به A_i و ستون j م B را به B^j نشان داده و آنها را بردارهایی p بعدی فرض کنیم ، مجموع (۲۲۰۲) چیزی جز حاصل ضرب نقطه‌ای $A_i \cdot B^j$ نخواهد بود . به‌عبارت دیگر، درایهٔ ij ، AB حاصل ضرب نقطه‌ای سطر i م A با ستون j م B می‌باشد :

$$AB = (A_i \cdot B^j)_{i,j=1}^{m,n}.$$

بنابر این، ضرب ماتریسی را می‌توان تعمیمی از ضرب نقطه‌ای دانست .

مثال ۱. فرض کنیم $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 5 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$. چون A ماتریسی 2×3 و B ماتریسی 3×2 است ، حاصل ضرب AB ماتریس 2×2 زیر می‌باشد :

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \cdot B^1 & A_1 \cdot B^2 \\ A_2 \cdot B^1 & A_2 \cdot B^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 17 & 21 \\ 1 & -7 \end{bmatrix}.$$

درایه‌های AB به صورت زیر محاسبه می‌شوند :

$$A_1 \cdot B^1 = 3 \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 2 \cdot 0 = 17,$$

$$A_1 \cdot B^2 = 3 \cdot 6 + 1 \cdot (-1) + 2 \cdot 2 = 21,$$

$$A_2 \cdot B^1 = (-1) \cdot 4 + 1 \cdot 5 + 0 \cdot 0 = 1,$$

$$A_2 \cdot B^2 = (-1) \cdot 6 + 1 \cdot (-1) + 0 \cdot 2 = -7.$$

مثال ۲. فرض کنیم

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 2 \end{bmatrix} \cdot$$

در اینجا A ماتریسی 2×3 و B ماتریسی 3×1 است، پس AB ماتریس 2×1 زیر است:

$$AB = \begin{bmatrix} A_1 \cdot B^1 \\ A_2 \cdot B^1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -9 \\ 8 \end{bmatrix},$$

زیرا $A_1 \cdot B^1 = 2 \cdot (-2) + 1 \cdot 1 + (-3) \cdot 2 = -9$ و
$A_2 \cdot B^1 = 1 \cdot (-2) + 2 \cdot 1 + 4 \cdot 2 = 8$.

مثال ۳. اگر A و B ماتریسهایی مربعی و دارای یک اندازه باشند، AB و BA هر دو تعریف شده‌اند. مثلاً، اگر

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 3 & 4 \\ 5 & 2 \end{bmatrix},$$

داریم

$$AB = \begin{bmatrix} 13 & 8 \\ 2 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad BA = \begin{bmatrix} -1 & 10 \\ 3 & 12 \end{bmatrix}$$

این مثال نشان می‌دهد که در حالت کلی $AB \neq BA$. اگر $AB = BA$، می‌گوییم A و B **تعویض می‌شوند**.

مثال ۴. اگر I_p ماتریس همانی $p \times p$ باشد، به‌ازای هر ماتریس $n \times p$ مانند A،

$I_pA = A$ ، و به‌ازای هر ماتریس $m \times p$ مانند B ، $BI_p = B$. به عنوان مثال ،

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}2\\3\\4\end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1&2&3\\4&5&6\end{bmatrix}.$$

حال ثابت می‌کنیم که ماتریس ترکیب ST حاصل ضرب ماتریسهای $m(S)$ و $m(T)$ است .

قضیهٔ ۱۶۰۲ . فرض‌کنیم $T: U \to V$ و $S: V \to W$ تبدیلاتی‌خطی‌باشند ،که U, V, W فضاهایی خطی و با بعد متناهی هستند . در این صورت ، به‌ازای پایه‌هایی ثابت ، ماتریسهای S ، T ، و ST با معادلهٔ

$$m(ST) = m(S)m(T)$$

بهم مربوط می‌شوند .

برهان . فرض‌کنیم $\dim U = n$ ، $\dim V = p$ ، و $\dim W = m$.همچنین، $(u_1, \ldots, u_n)$ پایهٔ U ، $(v_1, \ldots, v_p)$ پایهٔ V ، و $(w_1, \ldots, w_m)$ پایهٔ W باشد . نسبت به این‌پایه‌ها داریم $m(S) = (s_{ij})_{i,j=1}^{m,p}$ ، که در آن به‌ازای $k = 1, 2, \ldots, p$ ، $S(v_k) = \sum_{i=1}^{m} s_{ik}w_i$ ؛ و $m(T) = (t_{ij})_{i,j=1}^{p,n}$ ، که درآن به‌ازای $j = 1, 2, \ldots, n$ ، $T(u_j) = \sum_{k=1}^{p} t_{kj}v_k$. بنابراین ، داریم

$$ST(u_j) = S[T(u_j)] = \sum_{k=1}^{p} t_{kj}S(v_k) = \sum_{k=1}^{p} t_{kj}\sum_{i=1}^{m} s_{ik}w_i = \sum_{i=1}^{m}\left(\sum_{k=1}^{p} s_{ik}t_{kj}\right)w_i ;$$

در نتیجه ، خواهیم داشت

$$m(ST) = \left(\sum_{k=1}^{p} s_{ik}t_{kj}\right)_{i,j=1}^{m,n} = m(S)m(T)$$

قبلا" دیدیم که ضرب ماتریسی همیشه در قانون تعویضپذیری صدق نمی‌کند . اما قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که در قوانین شرکتپذیری و پخشپذیری صدق می‌کند .

قضیهٔ ۱۷۰۲ . قوانین شرکتپذیری و پخشپذیری برای ضرب ماتریسی . *ماتریسهای* A و B و C مفروضند .

(آ) *اگرحاصل ضربهای* $A(BC)$ و $(AB)C$ *معنی داشته باشند ، داریم*

$$A(BC) = (AB)C \quad (\text{قانون شرکتپذیری}).$$

(ب) *فرض کنیم* A و B *دارای یک اندازه باشند . اگر* AC و BC *معنی داشته باشند ، داریم*

$$(A + B)C = AC + BC \quad (\text{قانون پخشپذیری از راست})$$

حال آنکه اگر CA و CB *معنی داشته باشند ، خواهیم داشت*

$$C(A + B) = CA + CB \quad (\text{قانون پخشپذیری از چپ}).$$

برهان . این خواص را می‌توان مستقیما" از تعریف ضرب ماتریسی نتیجه گرفت ، اما ما استدلال زیر را ترجیح می‌دهیم . فضاهای خطی با بعد متناهی U ، V ، W ، و X و تبدیلات خطی $T: U \to V$ ، $S: V \to W$ ، و $R: W \to X$ را در نظر می‌گیریم با این خاصیت که به‌ازای پایه‌های ثابتی داشته باشیم

$$A = m(R), \qquad B = m(S), \qquad C = m(T).$$

بنابرقضیهٔ ۱۶۰۲ داریم $m(RS) = AB$ و $m(ST) = BC$. از قانون شرکتپذیری برای ترکیب معلوم می‌شود که $R(ST) = (RS)T$. اگر قضیهٔ ۱۶۰۲ را بار دیگر بر این معادله اعمال کنیم ، خواهیم داشت $m(R)m(ST) = m(RS)m(T)$ یا $A(BC) = (AB)C$ ، که (آ) را ثابت می‌کند . برهان (ب) را می‌توان با گفتار مشابهی بیان داشت .

تعریف . اگر A یک ماتریس‌مربعی‌باشد ، توانهای‌صحیح A را به استقرا تعریف می‌کنیم : $A^0 = I$؛ به ازای $n \geq 1$ ، $A^n = AA^{n-1}$.

۱۶۰۲ تمرین

۱ . اگر $A = \begin{bmatrix} 1 & -4 & 2 \\ -1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$ ، $B = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 3 \\ 5 & -2 \end{bmatrix}$ ، و $C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 1 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$ ، $B + C$ ، AB ، BA ، AC ، CA ، و $A(2B - 3C)$ را حساب کنید .

۲ . فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ ، و تمام ماتریسهای 2×2 مانند B را بیابید که (آ) $AB = O$ ؛ (ب) $BA = O$.

۳ . در هر یک ازحالات زیر، a, b, c, d را طوری بیابید که در معادلهٔ داده شده صدق کنند :

(آ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 9 \\ 6 \\ 5 \end{bmatrix}$ ؛

(ب) $\begin{bmatrix} a & b & c & d \\ 1 & 4 & 9 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 9 & 8 & 4 \end{bmatrix}$.

۴ . $AB - BA$ را در هر یک از حالات زیر حساب کنید :

(آ) $B = \begin{bmatrix} 4 & 1 & 1 \\ -4 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix}$ ؛

(ب) $B = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -2 \\ 3 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 11 \end{bmatrix}, \quad A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.

۵ . ثابت کنید که اگر A یک ماتریس‌مربعی‌باشد ، به‌ازای‌هردوعددصحیح $m \geq 0, n \geq 0$ ، $A^n A^m = A^{m+n}$.

۶ . فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. تحقیق‌کنیدکه $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، و A^n را محاسبه نمایید .

۷ . فرض کنید $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. تحقیق کنید که $A^2 = \begin{bmatrix} \cos 2\theta & -\sin 2\theta \\ \sin 2\theta & \cos 2\theta \end{bmatrix}$ ، و A^n را محاسبه نمایید .

۸ . فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$. تحقیق کنید که $A^2 = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، و A^3 و A^4 را محاسبه‌نمایید .برای A^n یک فرمول کلی حدس بزنید و آن را به استقرا ثابت‌کنید .

۹ . فرض کنید $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$. ثابت کنید $A^2 = 2A - I$ ، و A^{100} را محاسبه نمایید .

۱۰ . تمام ماتریسهای 2×2 مانند A را بیابید که $A^2 = O$.

۱۱ . (آ) ثابت کنید ماتریس 2×2 ی A با هر ماتریس 2×2 تعویض می‌شود اگر و فقط اگر با هر یک از چهار ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

تعویض شود .

(ب) تمام این A ها را پیدا کنید .

۱۲ . هر یک از ماتریسهای 2×2

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ c & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & b \\ 0 & -1 \end{bmatrix},$$

که در آنها b و c اعدادحقیقی‌دلخواهی‌هستند ،درمعادلهٔ $A^2 = I$ صدق‌می‌کند . تمام ماتریسهای 2×2 ی A را بیابید که $A^2 = I$.

۱۳ . اگر $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 7 & 6 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}$ ، ماتریسهای 2×2 ی C و D را بیابید که $AC = B$ و $DA = B$.

۱۴ . (آ) تحقیق کنید که اتحادهای جبری

$$(A + B)^2 = A^2 + 2AB + B^2 \quad \text{و} \quad (A + B)(A - B) = A^2 - B^2$$

برای‌ماتریسهای 2×2 ی $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ برقرار نیستند .

(ب) طرفهای راست این اتحادها را طوری اصلاح کنید که برای تمام ماتریسهای مربعی A و B برقرار باشند .

(پ) اتحادهای مذکور در (آ) برای چه ماتریسهای A و B برقرارند ؟

۱۷۰۲ دستگاههای معادلات خطی

فرض کنیم $A = (a_{ij})$ یک‌ماتریس $m \times n$ از اعدادبوده و $c_1, \ldots, c_m$ ، m عدد باشند. هرمجموعه مرکب از m معادله به شکل

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = c_i \text{ ، بەازای } i = 1, 2, \ldots, m \qquad (۲۳۰۲)$$

یک‌دستگاه m **معادلهٔ خطی و n مجهول** نام‌دارد. در اینجا $x_1, \ldots, x_n$ مجهول گرفته می‌شوند. یک **جواب** دستگاه یک n تایی مانند $(x_1, \ldots, x_n)$ از اعداد است که به‌ازای آن تمام معادلات برقرارند. ماتریس A **ماتریس ضرایب** دستگاه نامیده می‌شود.

دستگاههای خطی را می‌توان به کمک تبدیلات خطی بررسی کرد. پایه‌های معمولی مرکب از بردارهای یکهٔ مختصات رادر V_n و V_m اختیار می‌کنیم. ماتریس ضرایب A تبدیل خطی $T: V_n \to V_m$ را مشخص می‌کند که بردار دلخواه $x = (x_1, \ldots, x_n)$ در V_n را بروی بردار $y = (y_1, \ldots, y_m)$ در V_m می‌نگارد که با m معادلهٔ خطی زیر مشخص می‌شود:

$$y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k \text{ ، بەازای } i = 1, 2, \ldots, m.$$

فرض‌کنیم $c = (c_1, \ldots, c_m)$ برداری‌در V_m باشد که مؤلفه‌هایش اعداد آمده در دستگاه (۲۳۰۲) اند. این دستگاه را می‌توان به شکل ساده‌تر

$$T(x) = c$$

نوشت. دستگاه جواب دارد اگر و فقط‌اگر c در برد T باشد. اگر درست یک x در V_n بروی c نگاشته‌شود، دستگاه‌دقیقا "یک جواب دارد. و اگر بیش از یک x بروی c نگاشته شود، دستگاه بیش از یک جواب خواهد داشت.

مثال ۱. یک دستگاه بدون جواب دستگاه $x + y = 1,\ x + y = 2$ جواب ندارد. مجموع دو عدد نمی‌تواند هم 1 و هم 2 باشد.

مثال ۲. یک دستگاه دارای فقط یک جواب. دستگاه $x + y = 1,\ x - y = 0$ درست یک جواب دارد: $(x, y) = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

مثال ۰۳ یک دستگاه با بیش از یک جواب . دستگاه $x + y = 1$ ، مرکب از یک معادلهٔ دو مجهولی ، بیش از یک جواب دارد . هر دو عدد که مجموعشان 1 باشد جواب است .

به هر دستگاه خطی (۲۳۰۲) می‌توان دستگاه دیگر زیر را مربوط ساخت :

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = 0 \text{ ، } i = 1, 2, \ldots, m \text{ به‌ازای }$$ ،

که از تعویض c_i در (۲۳۰۲) با 0 به دست می‌آید . این دستگاه را **دستگاه همگن** نظیر (۲۳۰۲) می‌نامند . اگر $c \neq O$ ، دستگاه (۲۳۰۲) یک **دستگاه غیر همگن** نامیده می‌شود . بردار x در V_n در دستگاه همگن صدق می‌کند اگر و فقط اگر

$$T(x) = O,$$

که در آن T تبدیل‌خطیی است که به وسیلهٔ ماتریس ضرایب مشخص می‌شود . دستگاه همگن‌همیشه‌یک‌جواب ، یعنی $x = O$ ، را دارد ، ولی ممکن است جوابهای دیگر نیزداشته باشد . مجموعهٔ جوابهای‌دستگاه‌همگن‌فضای‌پوچ T است . قضیهٔ زیر رابطهٔ بین جوابهای دستگاه همگن و جوابهای دستگاه غیر همگن را وصف می‌کند .

قضیهٔ ۱۸۰۲ . *فرض‌کنیم‌دستگاه‌غیرهمگن (۲۳۰۲) دارای جوابی ، مثلاً " b ، باشد .*
(آ) اگر بردار x یک جواب دستگاه غیر همگن باشد ، بردار $v = x - b$ یک جواب دستگاه همگن نظیر آن است .
(ب) اگر v یک جواب دستگاه همگن باشد ، بردار $x = v + b$ یک جواب دستگاه غیر همگن خواهد بود .

برهان . فرض کنیم $T: V_n \to V_m$ تبدیل خطیی باشد که به وسیلهٔ ماتریس ضرایب ، به صورت وصف شده در بالا ، مشخص می‌شود . چون b یک جواب دستگاه غیر همگن است ، داریم $T(b) = c$. فرض‌کنیم x و v دو بردار در V_n باشند بطوری که $v = x - b$. در این صورت ، داریم

$$T(v) = T(x - b) = T(x) - T(b) = T(x) - c.$$

بنابراین ، $T(x) = c$ اگر و فقط اگر $T(v) = O$. این هم (آ) و هم (ب) را ثابت خواهد کرد .

این قضیه نشان می‌دهد که مسئلهٔ یافتن تمام جوابهای یک دستگاه غیر همگن طبعاً به دو بخش تقسیم می‌شود: (۱) یافتن تمام جوابهای v دستگاه همگن، یعنی تعیین فضای پوچ T، و (۲) یافتن یک جواب خصوصی b دستگاه غیر همگن. بدین ترتیب، باافزودن b به هر بردار v در فضای‌پوچ T، تمام‌جوابهای $x = v + b$ دستگاه غیر همگن به‌دست خواهد آمد.

فرض‌کنیم k بعد $N(T)$ (پوچهٔ T) باشد. اگربتوان k جواب‌مستقل $v_1, \ldots, v_k$ دستگاه همگن را پیدا کرد، این جوابها یک پایه برای $N(T)$ تشکیل می‌دهند، و می‌توان هر v در $N(T)$ را با تشکیل تمام ترکیبات خطی ممکن مانند

$$v = t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k ,$$

که در آن $t_1, \ldots, t_k$ اسکالرهای دلخواهی هستند، به دست آورد. این ترکیب خطی **جواب‌عمومی دستگاه همگن** نامیده می‌شود. اگر b یک جواب خصوصی دستگاه غیر همگن باشد، تمام جوابها از رابطهٔ

$$x = b + t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k$$

به دست‌می‌آیند. این ترکیب خطی **جواب عمومی دستگاه غیر همگن** نامیده می‌شود. حال قضیهٔ ۱۸۰۲ را می‌توان به شکل زیر بیان کرد.

قضیهٔ ۱۹۰۲ . فرض کنیم $T: V_n \to V_m$ یک تبدیل خطی باشد بطوری که $T(x) = y$، که درآن $x = (x_1, \ldots, x_n)$، $y = (y_1, \ldots, y_m)$، و

$$\text{به‌ازای } i = 1, 2, \ldots, m \text{ ،} \quad y_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik} x_k \;.$$

همچنین، فرض‌کنیم k پوچهٔ T باشد. اگر $v_1, \ldots, v_k$ ، k جواب مستقل دستگاه‌همگن $T(x) = O$ بوده و b یک جواب‌خصوصی دستگاه غیر همگن $T(x) = c$ باشد، جواب عمومی دستگاه غیر همگن

$$x = b + t_1 v_1 + \cdots + t_k v_k$$

است، که در آن $t_1, \ldots, t_k$ اسکالرهای دلخواهی هستند.

این قضیه راه یافتن جواب خصوصی b دستگاه غیر همگن و همچنین طرز تعیین جوابهای $v_1, \ldots, v_k$ دستگاه همگن را به ما نمی‌گوید. فقط این را می‌گوید که وقت جواب

داشتن دستگاه‌غیر همگن باید منتظر چه بود . مثال زیر ، با اینکه خیلی ساده است ، قضیه را توضیح خواهد داد .

مثال . معادلهٔ $x + y = 0$ دستگاه همگن مربوط به دستگاه $x + y = 2$ است . پس فضای پوچ از تمام بردارهایی در V_2 به شکل $(t, -t)$ تشکیل شده که t دلخواه است . چون $(t, -t) = t(1, -1)$، این یک زیر فضای یک بعدی V_2 با پایهٔ $(1, -1)$ می‌باشد . یک جواب خصوصی دستگاه غیر همگن $(0, 2)$ است . پس جواب عمومی دستگاه غیر همگن عبارت است از

$$x = t, \quad y = 2 - t \quad \text{یا} \quad (x, y) = (0, 2) + t(1, -1)$$

که t دلخواه می‌باشد .

۱۸۰۲ روشهای محاسبه

حال به محاسبهٔ جوابهای یک دستگاه خطی غیر همگن می‌پردازیم . گرچه برای حل این مسئله روشهای متعددی تعبیه شده ، اما اگر دستگاه بزرگ باشد ، تمام آنها به محاسبهٔ زیادی نیاز خواهند داشت . مثلا" ، حل یک دستگاه ده معادله و به همین تعداد مجهول حتی به کمک یک ماشین حساب رومیزی ، چند ساعت وقت خواهد گرفت .

ما روش معروفی را مطرح می‌کنیم ، به نام روش حذف **گاوس**[1] **ـ ژردان**[2] ، که نسبتا" ساده است و می‌توان آن را برای کامپیوترهای الکترونیکی با سرعت زیاد به آسانی برنامه ریزی کرد . این روش از سه نوع عمل اساسی بر معادلات یک دستگاه خطی تشکیل شده است :

(۱) *تعویض دو معادله با هم ؛*

(۲) *ضرب تمام جملات یک معادله در یک اسکالر ناصفر ؛*

(۳) *افزودن مضربی از یک معادله به دیگری .*

هربار که یکی از این اعمال بر دستگاه صورت گیرد ، دستگاه جدیدی با همان جوابها به‌دست می‌آید . دو دستگاه این‌طوری **معادل** نامیده می‌شوند . با تکرار این اعمال به طرز اصولی ، مآلا" ، به یک دستگاه معادل می‌رسیم که می‌توان آن را با معاینه حل کرد .

---

1. Gauss 2. Jordan

ما این روش را با چند مثال خاص توضیح می‌دهیم. این کار طرز استفاده از روش را در حالت کلی روشن می‌سازد.

مثال ۱. یک دستگاه با جواب منحصر بفرد.

دستگاه

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 4z &= -3 \\ x - 2y + z &= 5 \\ x - 4y + 6z &= 10 \end{aligned}$$

را درنظر می‌گیریم. این دستگاه خاص جواب منحصر بفرد $x = 124, y = 75, z = 31$ را دارد، که ما آن را با فرایند حذف گاوس ـ ژردان به دست می‌آوریم. برای کاستن از زحمت کار، حروف x, y, z و علامت تساوی را نمی‌نویسیم، بلکه در عوض با ***ماتریس افزودهٔ***

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 10 \end{array}\right] \quad (۲۴۰۲)$$

کار می‌کنیم، که با الحاق طرفهای راست دستگاه به ماتریس ضرایب به دست می‌آید. سه عمل اساسی مذکور در بالا بر سطرهای ماتریس افزوده اعمال می‌شوند و ***اعمال سطری*** نام دارند. در هرمرحله از فرایند می‌توان حروف x, y, z را باز گرداند و علامات تساوی را در امتداد خط‌قائم گذاشت تا معادلات به دست آیند. هدف نهایی این است که پس از یک سری اعمال سطری به ماتریس افزودهٔ

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & 0 & 0 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \end{array}\right] \quad (۲۵۰۲)$$

برسیم. دستگاه معادلات نظیر عبارت است از $x = 124, y = 75, z = 31$، که جواب مطلوب را به‌دست می‌دهد.

اولین قدم یافتن 1 در گوشه بالایی چپ ماتریس است. این قدم را می‌توان با تعویض‌سطر اول‌ماتریس (۲۴۰۲) با سطر دوم یا سوم برداشت، و یا اینکه سطر اول رادر $\frac{1}{2}$ ضرب کرد. با تعویض سطرهای اول و دوم با هم خواهیم داشت

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & -4 & 6 & 10 \end{array}\right].$$

قدم بعد صفر کردن تمام درایه‌های باقیمانده در ستون اول، بدون دست زدن به سطراول، است. برای‌این‌کارسطراول را در -2 ضرب و حاصل را به سطر دوم می‌افزاییم. بعد سطر اول را در -1 ضرب ونتیجه را به سطر سوم اضافه می‌کنیم. پس از این دو عمل خواهیم داشت

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & -1 & 2 & -13 \\ 0 & -2 & 5 & 5 \end{array}\right]. \qquad (۲۶۰۲)$$

حال این عمل را بر ماتریس کوچکتر $\left[\begin{array}{rr|r} -1 & 2 & -13 \\ -2 & 5 & 5 \end{array}\right]$، که مجاور دو صفر ظاهر شده، انجام می‌دهیم. می‌توان باضرب سطر دوم (۲۶۰۲) در -1 در گوشهٔ بالایی چپ آن 1 به دست آورد. این کار ماتریس

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & -2 & 5 & 5 \end{array}\right]$$

را به ما می‌دهد. با ضرب سطر دوم در 2 و افزودن نتیجه به سطر سوم خواهیم داشت

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \end{array}\right]. \qquad (۲۷۰۲)$$

در این مرحله دستگاه معادلات نظیر عبارت است از

$$\begin{aligned} x - 2y + z &= 5 \\ y - 2z &= 13 \\ z &= 31. \end{aligned}$$

این معادلات را می‌توان با شروع از سومی و بازگشت به عقب حل کرد تا داشته باشیم

$$z = 31, \qquad y = 13 + 2z = 13 + 62 = 75,$$
$$x = 5 + 2y - z = 5 + 150 - 31 = 124.$$

و یا اینکه فرایند گاوس ـ ژردان را با صفر کردن تمام درایه‌های بالای عناصر قطری در ستونهای دوم و سوم ادامه داد. با ضرب سطر دوم (۲۷۰۲) در 2 و افزودن نتیجه به سطر اول خواهیم داشت

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -3 & 31 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \end{array}\right].$$

بالاخره، با ضرب سطر سوم در 3 و افزودن نتیجه به سطر اول، و سپس ضرب سطر سوم در 2 و اضافه کردن نتیجه به سطر دوم، ماتریس (۲۵۰۲) به دست خواهد آمد.

مثال ۲. یک دستگاه با بیش از یک جواب. دستگاه 3 معادله و 5 مجهول زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 4z + \ u - v &= -3 \\ x - 2y + \ z - \ u + v &= 5 \\ x - 4y + 6z + 2u - v &= 10. \end{aligned} \tag{۲۸۰۲}$$

ماتریس افزودهٔ نظیر عبارت است از

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 2 & -5 & 4 & 1 & -1 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & -1 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 6 & 2 & -1 & 10 \end{array}\right].$$

ضرایب x, y, z و طرفهای راست مثل مثال ۱ هستند. اگر همان اعمال سطری مثال ۱ را اعمال کنیم، مآلاً به ماتریس افزودهٔ

$$\left[\begin{array}{ccccc|c} 1 & 0 & 0 & -16 & 19 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & -9 & 11 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & -3 & 4 & 31 \end{array}\right]$$

خواهیم رسید. دستگاه معادلات نظیر را می‌توان نسبت به x ، y ، و z و برحسب u و v حل کرد، که خواهیم داشت

$$\begin{aligned} x &= 124 + 16u - 19v \\ y &= \ 75 + \ 9u - 11v \\ z &= \ 31 + \ 3u - \ 4v. \end{aligned}$$

اگر فرض کنیم $u = t_1$ و $v = t_2$ ، که در آنها t_1 و t_2 حقیقی و دلخواه هستند، و x, y, z را از این معادلات به دست آوریم، بردار (x, y, z, u, v) در V_5 به صورت

$$(x, y, z, u, v) = (124 + 16t_1 - 19t_2, 75 + 9t_1 - 11t_2, 31 + 3t_1 - 4t_2, t_1, t_2)$$

یک جواب خواهد بود. این بردار را می‌توان با جدا کردن قسمتهای شامل t_1 و t_2 این طور نوشت:

$$(x, y, z, u, v) = (124, 75, 31, 0, 0) + t_1(16, 9, 3, 1, 0) + t_2(-19\,, -11\,, -4\,, 0, 1).$$

این معادله جواب عمومی دستگاه است. بردار $(124, 75, 31, 0, 0)$ جواب خصوصی دستگاه غیرهمگن (۲۸۰۲) است. دو بردار $(16, 9, 3, 1, 0)$ و $(-19\,, -11\,, -4\,, 0, 1)$ جوابهای دستگاه همگن نظیر هستند. چون این بردارها مستقل‌اند، برای فضای تمام جوابهای دستگاه همگن یک پایه تشکیل می‌دهند.

مثال ۳. یک دستگاه بدون جواب. دستگاه

$$\begin{aligned} 2x - 5y + 4z &= -3 \\ x - 2y + \ z &= \ \ 5 \\ x - 4y + 5z &= \ 10 \end{aligned} \qquad (۲۹۰۲)$$

را در نظر می‌گیریم. این دستگاه تقریبا" با دستگاه مثال ۱ یکی است جز اینکه ضریب z در معادلهٔ سوم از 6 به 5 تغییر کرده است. ماتریس افزودهٔ نظیر عبارت است از

$$\left[\begin{array}{rrr|r} 2 & -5 & 4 & -3 \\ 1 & -2 & 1 & 5 \\ 1 & -4 & 5 & 10 \end{array}\right]$$

با استفاده از همان اعمال‌سطری مثال ۱ برای تبدیل (۲۴۰۲) به (۲۷۰۲)، به ماتریس افزوده‌ٔ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & -2 & 1 & 5 \\ 0 & 1 & -2 & 13 \\ 0 & 0 & 0 & 31 \end{array}\right] \qquad (۳۰۰۲)$$

خواهیم رسید. سطرپایینی به‌صورت معادله عبارت است از $31 = 0$. لذا، دستگاه اصلی جواب ندارد، چرا که دو دستگاه (۲۹۰۲) و (۳۰۰۲) معادل می‌باشند.

در هر یک از مثالهای پیش، تعداد معادلات از تعداد مجهولات بیشتر نبود. در حالتی که معادلات از مجهولات بیشتر باشند، باز هم فرایند گاوس ـ ژردان قابل به‌کار بردن است. مثلاً، دستگاه مثال ۱ را در نظر می‌گیریم، که‌دارای جواب $x = 124, y = 75, z = 31$ است. اگر به این دستگاه یک معادلهٔ جدید که همین سه‌تایی درآن صدق کند، مثلاً معادلهٔ $2x - 3y + z = 54$، را اضافه کنیم، روش حذف به ماتریس افزودهٔ

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right]$$

راکه سطری از صفر در پایین دارد منجر می‌شود. اما اگر در معادلهٔ جدید سه تایی $(124, 75, 31)$ صدق نکند، مثلاً "معادلهٔ $x + y + z = 1$، فرایند حذف به ماتریس افزوده‌ای به شکل

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 124 \\ 0 & 1 & 0 & 75 \\ 0 & 0 & 1 & 31 \\ 0 & 0 & 0 & a \end{array}\right]$$

ختم می‌شود، که درآن $a \neq 0$. در اینجا آخرین سطر، معادلهٔ تضاد دار $a = 0$ را به دست می‌دهد، مبین آنکه دستگاه جواب ندارد.

۱۹۰۲ معکوس ماتریسهای مربعی

فرض کنیم $A = (a_{ij})$ یک ماتریس مربعی $n \times n$ باشد. اگر ماتریس $n \times n$ دیگری چون B باشد بطوری که $BA = I$، که در آن I ماتریس‌همانی $n \times n$ است، A **نامنفرد** و B **معکوس چپ** A نامیده می‌شود.

پایهٔ معمولی مرکب از بردارهای یکهٔ مختصات در V_n را اختیار و فرض می‌کنیم $T: V_n \to V_n$ تبدیل‌خطیی باشد که ماتریسش $m(T) = A$ است. در این صورت، قضیهٔ زیر را خواهیم داشت.

قضیهٔ ۲۰۰۲ . *ماتریس A نامنفرد است اگر و فقط اگر T معکوسپذیر باشد. هرگاه $BA = I$، آنگاه $B = m(T^{-1})$.*

برهان فرض‌کنیم A نامنفردبوده‌و $BA = I$. ثابت‌می‌کنیم $T(x) = O$ تساوی $x = O$ را ایجاب می‌کند. گوییم فرض‌کنیم x طوری باشد که $T(x) = O$، و X را ماتریس‌ستونی $n \times 1$ ی می‌انگاریم که از مؤلفه‌های x تشکیل شده است. چون $T(x) = O$، ماتریس حاصل ضرب AX یک ماتریس ستونی $n \times 1$ است که از چند صفر تشکیل شده است؛ در نتیجه، $B(AX)$ نیز یک ماتریس ستونی متشکل از چند صفر است. اما $B(AX) = (BA)X = IX = X$، پس هر مولفهٔ x مساوی 0 است. لذا، T معکوسپذیر است، و معادلهٔ $TT^{-1} = I$ ایجاب می‌کند که $m(T)m(T^{-1}) = I$ یا $Am(T^{-1}) = I$. با ضرب این رابطه از چپ در B خواهیم داشت $m(T^{-1}) = B$. بعکس، اگر T معکوسپذیر باشد، $T^{-1}T$ تبدیل‌همانی است، پس $m(T^{-1})m(T)$ ماتریس همانی می‌باشد. بنابراین، A نامنفرد است و $m(T^{-1})A = I$.

تمام خواص تبدیلات خطی معکوسپذیر همتاهایی برای ماتریسهای نامنفرد دارند. بخصوص، معکوسهای چپ (درصورت وجود) منحصر بفردند، و هر معکوس چپ معکوس راست نیز هست. به عبارت دیگر، هرگاه A نامنفرد بوده و $BA = I$، آنگاه $AB = I$. ما B را **معکوس** A می‌نامیم و به A^{-1} نشان می‌دهیم. A^{-1} نیز نامنفرد است و معکوس آن A خواهد بود.

حال نشان می‌دهیم که مسئلهٔ تعیین درایه‌های معکوس یک ماتریس نامنفرد معادل

است با حل n دستگاه خطی غیر همگن و مستقل.

فرض کنیم $A = (a_{ij})$ نامنفردو $A^{-1} = (b_{ij})$ معکوس آن باشد. درایه‌های A و A^{-1} به وسیلهٔ n^2 معادلهٔ

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik} b_{kj} = \delta_{ij} \tag{۳۱۰۲}$$

بهم مربوط می‌شوند، که در آنها اگر $i = j$، $\delta_{ij} = 1$ و، اگر $i \neq j$، $\delta_{ij} = 0$. به‌ازای هر j ثابت می‌توان این را یک دستگاه غیر همگن مرکب از n معادلهٔ خطی و n مجهول $b_{1j}, b_{2j}, \ldots, b_{nj}$ گرفت. چون A نامنفرد است، هریک از این دستگاهها جواب منحصر بفرد دارد، که ستون j م B است. این دستگاهها همه دارای یک ماتریس ضرایب A هستند و فقط در طرفهای راست با هم فرق دارند. مثلاً"، اگر A یک ماتریس 3×3 باشد، 9 معادله در (۳۱۰۲) وجود دارد که می‌توان آنها را به‌صورت 3 دستگاه خطی مستقل با ماتریسهای افزودهٔ زیر بیان کرد:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 1 \end{array}\right].$$

اگرفرایند گاوس ــ ژردان رابه‌کاربریم، بترتیب به ماتریسهای افزودهٔ زیر خواهیم‌رسید:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_{11} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_{12} \\ 0 & 1 & 0 & b_{22} \\ 0 & 0 & 1 & b_{32} \end{array}\right], \quad \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{33} \end{array}\right].$$

در عمل از اینکه هرسه دستگاه یک ماتریس ضرایب دارند سود جسته و هر سه دستگاه را یکباره با کار بر ماتریس بزرگ شدهٔ

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & 0 & 1 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

حل می‌کنیم. در این صورت، فرایند حذف به ماتریس

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{12} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array}\right]$$

منجر می‌شود. ماتریس طرف راست خط قائم معکوس مطلوب است، و ماتریس سمت چپ خط ماتریس همانی 3×3 می‌باشد.

لازم نیست نامنفرد بودن A را از پیش بدانیم. در حالتی که A **منفرد** باشد (نامنفرد نباشد)، باز هم می‌توان روش گاوس ــ ژردان را به‌کار برد، اما جایی در عمل یکی از عناصر قطری صفر می‌شود، و امکان اینکه A به ماتریس همانی بدل شود وجود ندارد.

یک دستگاه n معادلهٔ خطی و n مجهول، مثلاً

$$\sum_{k=1}^{n} a_{ik}x_k = c_i\,, \qquad i = 1, 2, \ldots, n\,,$$

را می‌توان به‌طور ساده‌تر و به شکل یک معادلهٔ ماتریسی مانند

$$AX = C$$

نوشت، که در آن $A = (a_{ij})$ ماتریس ضرایب است، و X و C ماتریسهای ستونی

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad C = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ c_n \end{bmatrix}$$

می‌باشند. چنانچه A نامنفرد باشد، دستگاه جواب منحصر بفرد $X = A^{-1}C$ را خواهد داشت.

۲۰۰۲ تمرین

فرایند حذف گاوس ــ ژردان را در هر یک از دستگاههای زیر به‌کار برید. در صورت وجود یک جواب، جواب عمومی را معین نمایید.

۱ .
$$\begin{aligned} x + y + 3z &= 5 \\ 2x - y + 4z &= 11 \\ -y + z &= 3. \end{aligned}$$

۲ .
$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ 5x + 3y + 3z &= 2 \\ x + y - z &= 1. \end{aligned}$$

۳ .
$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ 5x + 3y + 3z &= 2 \\ 7x + 4y + 5z &= 3. \end{aligned}$$

۴ .
$$\begin{aligned} 3x + 2y + z &= 1 \\ 5x + 3y + 3z &= 2 \\ 7x + 4y + 5z &= 3 \\ x + y - z &= 0. \end{aligned}$$

۵ .
$$\begin{aligned} 3x - 2y + 5z + u &= 1 \\ x + y - 3z + 2u &= 2 \\ 6x + y - 4z + 3u &= 7. \end{aligned}$$

۶ .
$$\begin{aligned} x + y - 3z + u &= 5 \\ 2x - y + z - 2u &= 2 \\ 7x + y - 7z + 3u &= 3. \end{aligned}$$

۷ .
$$\begin{aligned} x + y + 2z + 3u + 4v &= 0 \\ 2x + 2y + 7z + 11u + 14v &= 0 \\ 3x + 3y + 6z + 10u + 15v &= 0. \end{aligned}$$

۸ .
$$\begin{aligned} x - 2y + z + 2u &= -2 \\ 2x + 3y - z - 5u &= 9 \\ 4x - y + z - u &= 5 \\ 5x - 3y + 2z + u &= 3. \end{aligned}$$

۹ . ثابت کنید دستگاه $x + y + 2z = 2,\ 2x - y + 3z = 2,\ 5x - y + az = 6$ در حالت $a \neq 8$ جواب منحصر بفرد دارد. تمام جوابها را وقتی $a = 8$ بیابید.

۱۰ . (آ) جمیع جوابهای دستگاه

$$\begin{aligned} 5x + 2y - 6z + 2u &= -1 \\ x - y + z - u &= -2 \end{aligned}$$

را مشخص کنید.

(ب) تمام جوابهای دستگاه

$$\begin{aligned} 5x + 2y - 6z + 2u &= -1 \\ x - y + z - u &= -2 \\ x + y + z \quad &= 6 \end{aligned}$$

را مشخص کنید.

۱۱ . این تمرین طرز تعیین کلیهٔ ماتریسهای 2×2 نامنفرد را بازگو می‌کند. ثابت کنید

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix} = (ad - bc)I,$$

و نتیجه بگیرید که $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ نامنفرد است اگر و فقط اگر $ad - bc \neq 0$ ، که در این

صورت معکوس آن عبارت است از

$$\frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}.$$

معکوس هریک از ماتریسهای تمرین ۱۲ تا ۱۶ را مشخص کنید .

۱۲ . $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$.

۱۳ . $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}$.

۱۴ . $\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 5 & -4 \\ 1 & -4 & 6 \end{bmatrix}$.

۱۵ . $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

۱۶ . $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 2 & 0 \end{bmatrix}$.

۲۱۰۲ تمرینات گوناگون درباب ماتریسها

۱ . ثابت کنید که اگر یک ماتریس مربعی یک سطر یا یک ستون صفر داشته باشد منفرد است .

۲ . برای هریک از احکام زیر درباب ماتریسهای $n \times n$ برهان بیاورید و یا مثال نقض بزنید :

(آ) هرگاه $AB + BA = O$ ، $A^2B^3 = B^3A^2$ ؛

(ب) هرگاه A و B نامنفرد باشند ، $A + B$ نامنفرد است ؛

(پ) هرگاه A و B نامنفرد باشند ، AB نامنفرد است ؛

(ت) هرگاه A و B و $A+B$ نامنفرد باشند، $A-B$ نامنفرد است؛

(ث) هرگاه $A^3=O$، $A-I$ نامنفرد است؛

(ج) هرگاه حاصل ضرب k ماتریس، یعنی $A_1\cdots A_k$، نامنفرد باشد، هریک از A_i ها نامنفرد است.

۳. هرگاه $A=\begin{bmatrix}1 & 2\\ 5 & 4\end{bmatrix}$، ماتریس نامنفرد P راطوری‌پیداکنید که $P^{-1}AP=\begin{bmatrix}6 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$.

۴. ماتریس $A=\begin{bmatrix}a & i\\ i & b\end{bmatrix}$، که درآن $i^2=-1$، $a=\frac{1}{2}(1+\sqrt{5})$، و $b=\frac{1}{2}(1-\sqrt{5})$، دارای این خاصیت است که $A^2=A$. جمیع ماتریسهای 2×2 ی A با درایه‌های مختلط که $A^2=A$ را به‌طور کامل توصیف نمایید.

۵. ثابت کنید که اگر $A^2=A$، $(A+I)^k=I+(2^k-1)A$.

۶. در نظریهٔ نسبیت خاص از مجموعه معادلاتی به شکل

$$x'=a(x-vt),\ y'=y,\ z'=z,\ t'=a(t-vx/c^2)$$

استفاده می‌شود. در اینجا v سرعت جسم متحرک، c سرعت نور، و $a=c/\sqrt{c^2-v^2}$ که $|v|<c$. تبدیل‌خطیی‌که‌برداردو بعدی (x,t) را بروی (x',t') می‌نگاردتبدیل‌لورنتس[1] نام دارد. ماتریس‌آن نسبت به پایه‌های معمولی به $L(v)$ نموده می‌شود و به‌صورت زیر است:

$$L(v)=a\begin{bmatrix}1 & -v\\ -vc^{-2} & 1\end{bmatrix}.$$

توجه کنید که $L(v)$ نامنفرداست و $L(0)=I$. ثابت کنید $L(v)L(u)=L(w)$، که‌در آن $w=(u+v)c^2/(uv+c^2)$. به عبارت دیگر، حاصل ضرب دو تبدیل لورنتس یک تبدیل لورنتس است.

۷. هرگاه سطرها و ستونهای ماتریس مستطیلی شکل A با هم عوض‌شوند، ماتریس به دست آمده *ترانهادهٔ* A نام دارد و با A^t نموده می‌شود. مثلاً، هرگاه

1. Lorentz

$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix}$ ، آنگاه $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}$.

ثابت کنید ترانهاده‌ها از خواص زیربرخوردارند :

(آ) $(A^t)^t = A$ ؛ (ب) $(A + B)^t = A^t + B^t$ ؛ (پ) $(cA)^t = cA^t$ ؛
(ت) $(AB)^t = B^tA^t$ ؛ (ث) اگر A نامنفرد باشد ، $(A^t)^{-1} = (A^{-1})^t$.

۸ . ماتریس مربعی A در صورتی یک **ماتریس متعامد** نامیده می‌شود که $AA^t = I$.

تحقیق کنید که ماتریس 2×2 ی $\begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ به ازای هر θ ی حقیقی متعامد است . ثابت کنید که اگر A یک ماتریس متعامد $n \times n$ باشد ، سطرهایش، به‌عنوان بردارهایی در V_n ، یک مجموعهٔ متعامد یکه تشکیل می‌دهند .

۹ . برای هریک‌از احکام‌زیر در باب ماتریسهای $n \times n$ یا برهان بیاورید یا مثال‌نقض:

(آ) هرگاه A و B متعامد باشند ، $A + B$ نیز متعامد است ؛
(ب) هرگاه A و B متعامد باشند ، AB نیز متعامد است ؛
(پ) هرگاه A و B متعامد باشند ، B نیز متعامد است .

۱۰ . **ماتریسهای هادامار**[1]، به‌نام‌ژاک هادامار(۱۹۶۳–۱۸۶۵)، ماتریسهای $n \times n$ ی هستند که خواص زیر را دارند :

I . هر درایه 1 یا 1- است ؛
II . هرسطر ، به‌صورت برداری در V_n ، طولش $\sqrt{n}$ است ؛
III. حاصل ضرب نقطه‌ای هر دو سطر متمایز 0 است .

ماتریسهای هادامار در بعضی از مسائل هندسه و نظریهٔ اعداد ظاهر می‌شوند ، و اخیرا" از آنها برای ساختن کلمات رمزی بهینه در ارتباطات فضایی استفاده شده است . با وجود سادگی آشکار آنها ، مسائل حل نشدهٔ بسیاری را موجب شده‌اند . درحال حاضر مسئلهٔ حل نشدهٔ اساسی تعیین کلیهٔ n هایی است که به‌ازای آنها یک‌ماتریس هادامار $n \times n$ وجود داشته‌باشد . این تمرین حل ناقصی از این مسئله را به اجمال شرح می‌دهد .

---

1. Hadamard

(آ) جمیع ماتریسهای هادامار 2×2 را مشخص کنید (دقیقاً 8 تا هستند).
(ب) این قسمت از تمرین، برهان ساده‌ای از قضیهٔ زیر را به اجمال شرح می‌دهد:
هرگاه A یک ماتریس هادامار $n \times n$ باشد که $n > 2$، آنگاه n مضربی از 4 می‌باشد.
برهان بر دو لم بسیار سادهٔ زیر در باب بردارهای در فضای n استوار است. این لمها را ثابت کنید و با اعمال آنها بر سطرهای ماتریس هادامار قضیه را اثبات نمایید.

لم ۱. **هرگاه X, Y, Z بردارهای متعامدی در V_n باشند، آنگاه داریم**

$$(X + Y) \cdot (X + Z) = \|X\|^2.$$

لم ۲. **می‌نویسیم**

$$X = (x_1, \ldots, x_n), \ \ Y = (y_1, \ldots, y_n), \ \ Z = (z_1, \ldots, z_n).$$

چنانچه مؤلفه‌های x_i, y_i, z_i یا 1 یا -1 باشند، حاصل ضرب $(x_i + y_i)(x_i + z_i)$ یا 0 یا 4 است.

۳
دترمینانها

۱۰۳ مقدمه

مفهوم دترمینان دربسیاری‌از کاربردهای جبر خطی در هندسه و آنالیز نقشی مهم دارد. در این فصل خواص اساسی دترمینانها و بعضی از کاربردهای آنها مطالعه می‌شوند.

دترمینانهای مرتبهٔ دو و سه در جلد یک به عنوان نمادهای مناسبی برای بیان فرمولها به شکل فشرده معرفی شدند. به‌یاد می‌آوریم که یک دترمینان مرتبهٔ دو بافرمول

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} \tag{۱۰۳}$$

تعریف شد. علیرغم تشابه در نماد، دترمینان $\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$ (که با خطوط قائم نوشته می‌شود) با ماتریس $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ (که با کروشه‌نوشته می‌شود) فرق معنی دارد. دترمینان عدد است که به ماتریس طبق فرمول (۱۰۳) مربوط می‌شود. برای تاکید براین ارتباط همچنین می‌نویسیم

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = \det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$$

دترمینانهای مرتبهٔ سه در جلد یک برحسب دترمینانهای مرتبهٔ دو با فرمول زیر تعریف شده بودند:

$$(\text{۲۰۳})\ \det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix} = a_{11}\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}.$$

در این فصل از حالت کلیتر دترمینان یک ماتریس مربعی از مرتبهٔ n به‌ازای هر عدد صحیح $n \geq 1$ بحث می‌شود. دیدگاه ما این است که دترمینان را تابعی بگیریم که به هر ماتریس‌مربعی A عددی به‌نام دترمینان A را مربوط می‌کند که با $\det A$ نموده می‌شود. می‌توان این تابع را با یک فرمول صریح که تعمیم یافتهٔ (۱۰۳) و (۲۰۳) است تعریف کرد. این فرمول مجموعی‌است شامل $n!$ حاصل‌ضرب از درایه‌های A. اگر n بزرگ باشد، این فرمول خیلی بزرگ است و بندرت در عمل به‌کار می‌رود. به‌نظر می‌رسد که بررسی دترمینانها از دیدگاهی دیگر که روشن‌تر بر خواص اصلی آنها تاکید کند ارجح باشد. این خواص، که درکاربردها اهمیت دارند، ***اصول موضوع*** تابع دترمینان گرفته می‌شوند. اصولا" برنامهٔ کار ما از سه قسمت تشکیل می‌شود: (۱) انگیزش انتخاب اصول موضوع؛ (۲) نتیجه‌گیری خواص دیگر دترمینانها از اصول موضوع؛ (۳) اثبات اینکه یک و فقط یک تابع وجود دارد که در اصول موضوع صدق می‌کند.

۲۰۳ انگیزهٔ انتخاب اصول موضوع برای تابع دترمینان

در جلد یک ثابت شد که حاصل ضرب سه‌گانهٔ اسکالر سه‌بردار A_1, A_2, A_3 در فضای 3 را می‌توان به صورت دترمینان یک ماتریس که سطرهایش این بردارها باشند بیان کرد؛ یعنی، داریم

$$A_1 \times A_2 \cdot A_3 = \det\begin{bmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{bmatrix},$$

که در آن $A_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13})$ ، $A_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23})$ ، و $A_3 = (a_{31}, a_{32}, a_{33})$.

اگر سطرها مستقل خطی باشند، حاصل ضرب سه‌گانهٔ اسکالر ناصفر است؛ قدرمطلق حاصل ضرب مساوی حجم متوازی‌السطوحی است که به‌وسیلهٔ سه بردار A_1, A_2, A_3 معین می‌شود. اگر سطرها وابسته باشند، حاصل ضرب سه‌گانهٔ اسکالر صفر است. دراین حالت بردارهای A_1, A_2, A_3 همصفحه‌اند و متوازی‌السطوح به یک شکل مسطح با حجم صفر تباه

می‌شود .

بعضی از خـواص ضرب سه‌گانهٔ اسکالر به‌عنوان انگیزش انتخاب اصول موضوع تابع دترمینان در بعدهای بالاتر به‌کار می‌روند . برای آنکه این خواص به شکلی مناسب تعمیم بیان شوند ، ضرب سه‌گانهٔ اسکالر را تابعی از سه‌بردار سطری A_1, A_2, A_3 می‌گیریم . این تابع را با d نشان می‌دهیم . بنابر این ،

$$d(A_1, A_2, A_3) = A_1 \times A_2 \cdot A_3.$$

حال توجه خود را به‌خواص زیر معطوف می‌کنیم :

(آ) **همگنی نسبت به هر سطر.** به‌عنوان مثال ، همگنی نسبت به سطر اول می‌گوید که

به‌ازای هر اسکالر t ، $d(tA_1, A_2, A_3) = t\, d(A_1, A_2, A_3)$ ؛

(ب) **جمعی نسبت به هر سطر.** به‌عنوان مثـال ، جمعی نسبت به سطر دوم می‌گوید که

به‌ازای هر بردار C ، $d(A_1, A_2 + C, A_3) = d(A_1, A_2, A_3) + d(A_1, C, A_3)$ ؛

(پ) حاصل ضرب سه‌گانهٔ اسکالر در صورتی صفر است که دو سطر مساوی باشند ؛

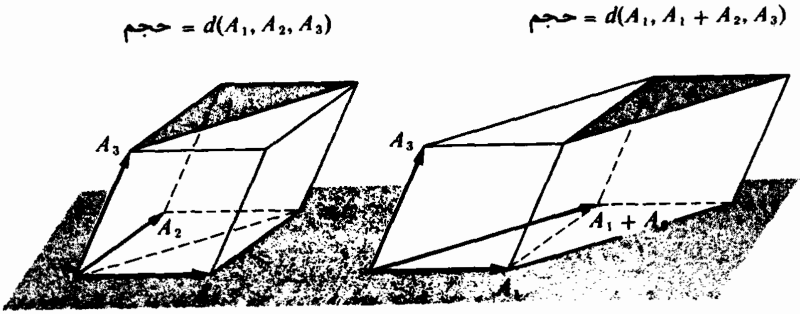
(ت) نرمیده سازی :

$d(i, j, k) = 1$ ، که درآن $i = (1, 0, 0), \quad j = (0, 1, 0), \quad k = (0, 0, 1)$.

هریک از این خواص را می‌توان به آسانی از خواص ضرب نقطه‌ای و خارجی به‌دست آورد . بعضی از اینها از رابطهٔ هندسی بین حاصل ضرب سه‌گانهٔ اسکالر و حجم متوازی السطوح معین شده به‌وسیلهٔ بردارهای هندسی A_1, A_2, A_3 ناشی می‌شوند . معنی‌هندسی خاصیت جمعـی (ب) در حـالتی خاص فایدهٔ بخصوصی دارد . اگر در (ب) فرض کنیم $C = A_1$ ، دومین‌جملهٔ سمت راست بخاطر (پ) صفر است ، و رابطهٔ (ب) خواهد شد

$$d(A_1, A_2 + A_1, A_3) = d(A_1, A_2, A_3). \tag{۳۰۳}$$

این خاصیت در شکل ۱۰۳ مجسم شده است ، که یک متوازی السطوح معین شده به وسیلهٔ A_1, A_2, A_3 ومتوازی السطـوح دیگـر معیـن شده به وسیلهٔ $A_1, A_1 + A_2, A_3$ را نشان می‌دهد . معـادلهٔ (۳۰۳) صرفـا" می‌گوید که این دو متوازی السطوح دارای یک حجم هستند . این امر از نظر هندسی واضح است ، زیرا متوازی‌السطوحها دارای یک ارتفاع‌اند و مساحت قاعده‌های آنها یکی است .



شکل ۳.۱۰

تعبیر هندسی خاصیت $d(A_1, A_2, A_3) = d(A_1, A_1 + A_2, A_3)$. دو متوازی السطوح دارای یک حجم‌اند.

۳.۳ مجموعهٔ اصول موضوع برای تابع دترمینان

خواص ضرب سه‌گانهٔ اسکالر مذکور در بخش پیش را می‌توان به‌طرز مناسبی تعمیم داد و به عنوان اصول موضوع برای دترمینانهای مرتبهٔ n به‌کار برد. فرض کنیم $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های حقیقی یا مختلط باشد، و سطرهای آن را با $A_1, \ldots, A_n$ نشان می‌دهیم. بنابر این، سطر i ام A برداری است در فضای n که عبارت است از

$$A_i = (a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{in}) .$$

دترمینان را تابعی از n سطر $A_1, \ldots, A_n$ می‌گیریم و مقادیر آن را با $d(A_1, \ldots, A_n)$ یا $\det A$ نشان می‌دهیم.

تعریف اصل موضوعی تابع دترمینان. تابع حقیقی یا مختلط d، که به ازای هر n تایی مرتب از بردارهای $A_1, \ldots, A_n$ در فضای n تعریف شده است، در صورتی یک ***تابع دترمینان*** از مرتبهٔ n نامیده می‌شود که در اصول موضوع زیر به‌ازای هر انتخابی از بردارهای $A_1, \ldots, A_n$ و C در فضای n صدق کند:

اصل موضوع ۱. همگنی نسبت به‌هر سطر. اگر سطر k ام A_k در اسکالر t ضرب شود، دترمینان نیز در t ضرب می‌شود:

$$d(\ldots, tA_k, \ldots) = t\, d(\ldots, A_k, \ldots) ;$$

اصل موضوع ۲. جمعی نسبت به هر سطر. به‌ازای هر k داریم

$$d(A_1, \ldots, A_k + C, \ldots, A_n) = d(A_1, \ldots, A_k, \ldots, A_n) + d(A_1, \ldots, C, \ldots, A_n);$$

اصل موضوع ۳. دترمینان درصورت تساوی دو سطر صفر می‌شود :

هرگاه به‌ازای i و j ای که $i \neq j$ ، $A_i = A_j$ ، آنگاه $d(A_1, \ldots, A_n) = 0$.

اصل موضوع ۴. دترمینان ماتریس همانی مساوی ۱ است :

$d(I_1, \ldots, I_n) = 1$ ، که در آن I_k بردار یکهٔ مختصات k ام است .

دو اصل موضوع اول می‌گویند که دترمینان یک ماتریس تابعی خطی از هر سطر آن است. این را اغلب این‌طور وصف می‌کنند که می‌گویند دترمینان یک تابع چند خطی از سطرهای خودش است. باچند بار استفاده از خاصیت خطی نسبت به سطر اول می‌توان نوشت

$$d\left(\sum_{k=1}^{p} t_k C_k, A_2, \ldots, A_n\right) = \sum_{k=1}^{p} t_k\, d(C_k, A_2, \ldots, A_n),$$

که در آن $t_1, \ldots, t_p$ اسکالربوده‌و $C_1, \ldots, C_p$ بردارهای دلخواهی در فضای n می‌باشند.

گاهی شکل ضعیفتر اصل موضوع ۳ را به‌کار می‌برند :

اصل موضوع ۳´. دترمینان در صورت تساوی دو سطر مجاور صفر می‌شود :

هرگاه به‌ازای $k = 1, 2, \ldots, n-1$ ای $A_k = A_{k+1}$ ، آنگاه $d(A_1, \ldots, A_n) = 0$.

نکتهٔ قابل توجه آن است که، به‌ازای n داده شده، یک و فقط یک تابع مانند d هست که در اصول موضوع ۱، ۲، ۳´، و ۴ صدق می‌کند. اثبات این امر را، که یکی از نتایج عمدهٔ این فصل است، بعداً" خواهیم داد. قضیهٔ بعدی خواصی از دترمینانها را می‌دهد که فقط از اصول موضوع ۱، ۲، و ۳´ نتیجه می‌شوند. یکی از این خواص اصل موضوع ۳ است. متذکر می‌شویم که اصل موضوع ۴ در برهان این قضیه به‌کار نرفته است. این امر بعداً" ، وقتی یکتایی تابع دترمینان را ثابت می‌کنیم، مفید خواهد افتاد.

قضیهٔ ۱۰۳ . تابع دترمینان صادق در اصول موضوع ۱ ، ۲ ، و ۳′ از خواص زیر نیز بهره‌مند است :

(آ) دترمینان در صورت O بودن سطری از آن صفر است ؛

هرگاه به‌ازای k ای $A_k = O$ ، آنگاه $d(A_1, \ldots, A_n) = 0$ ؛

(ب) دترمینان در صورت تعویض دو سطر مجاور با هم تغییر علامت می‌دهد :

$$d(\ldots, A_k, A_{k+1}, \ldots) = -d(\ldots, A_{k+1}, A_k, \ldots);$$

(پ) دترمینان در صورت تعویض هر دو سطر A_i و A_j که $i \neq j$ با هم تغییر علامت می‌دهد ؛

(ت) دترمینان در صورت تساوی دو سطر آن صفر است :

هرگاه به‌ازای i و j ای که $i \neq j$ ، $A_i = A_j$ ، آنگاه $d(A_1, \ldots, A_n) = 0$ ؛

(ث) دترمینان در صورتی که سطرهایش وابسته باشند صفر است .

برهان. برای اثبات (آ) کافی است در اصل موضوع ۱ قرار دهیم $t = 0$. برای اثبات (ب) ، فرض کنیم B ماتریسی باشد با همان سطرهای A جز سطر k و $k+1$. فرض کنیم هر دو سطر B_k و B_{k+1} مساوی $A_k + A_{k+1}$ باشند . دراین صورت ، طبق اصل‌موضوع ۳′ ، $\det B = 0$. بنابر این ، می‌توان نوشت

$$d(\ldots, A_k + A_{k+1}, A_k + A_{k+1}, \ldots) = 0.$$

با اعمال خاصیت جمعی در مورد سطرهای k و $k+1$ ، می‌توان این معادله را به‌صورت زیر نوشت :

$$d(\ldots, A_k, A_k, \ldots) + d(\ldots, A_k, A_{k+1}, \ldots) + d(\ldots, A_{k+1}, A_k, \ldots) + d(\ldots, A_{k+1}, A_{k+1}, \ldots) = 0.$$

جملات اول و چهارم ، طبق اصل موضوع ۳′ ، صفرند . لذا ، جملات دوم و سوم قرینهٔ یکدیگرند ، که (ب) را ثابت می‌کند .

برای اثبات (پ) می‌توان فرض کرد $i < j$. سطرهای A_i و A_j را می‌توان با تعویض سطرهای مجاور به‌تعدادی فرد بار با یکدیگر عوض کرد . ابتدا سطر A_j را متوالیا" با سطرهای مجاور قبلی $A_{j-1}, A_{j-2}, \ldots, A_i$ عوض می‌کنیم . این مستلزم $j - i$ تعویض است . بعد سطر A_i را متوالیا" با سطرهای مجاور بعدی $A_{i+1}, A_{i+2}, \ldots, A_{j-1}$ عوض می‌کنیم . این مستلزم $j - i - 1$ تعویض دیگر است . هر تعویض سطرهای مجاور علامت

دترمینان را عوض می‌کند . چون رویهم $(j-i)+(j-i-1)=2(j-i)-1$ تعویض (تعدادی فرد) وجود دارد ، دترمینان به تعدادی فرد بار تغییر علامت می‌دهد ، که این (پ) را ثابت خواهد کرد .

برای اثبات (ت) ، فرض کنیم B ماتریس حاصل از تعویض سطرهای A_i و A_j با هم در A باشد . چون $A_i = A_j$ ، داریم $B = A$ ؛ و در نتیجه ، $\det B = \det A$. اما ، طبق (پ) ، $\det B = -\det A$. بنابر این ، $\det A = 0$.

برای اثبات (ث) ، فرض کنیم اسکالرهایی چون $c_1, \ldots, c_n$ ، که همه صفر نیستند ، وجود داشته باشند بطوری که $\sum_{k=1}^{n} c_k A_k = O$. در این صورت ، هرسطر A_k که در آن $c_k \neq 0$ را می‌توان بـه صورت ترکیبی خطی از سطرهای دیگر نوشت . برای سادگی ، فرض کنیم A_1 ترکیبی خطی از سطرهای دیگر باشد ؛ مثلاً ، $A_1 = \sum_{k=2}^{n} t_k A_k$. بنابر خاصیت خطی نسبت به سطر اول داریم

$$d(A_1, A_2, \ldots, A_n) = d\left(\sum_{k=2}^{n} t_k A_k, A_2, \ldots, A_n\right) = \sum_{k=2}^{n} t_k\, d(A_k, A_2, \ldots, A_n).$$

اما هر جملهٔ $d(A_k, A_2, \ldots, A_n)$ در مجموع آخر صفر است ، زیرا A_k حداقل با یکی از $A_2, \ldots, A_n$ مساوی است . بنـابر این ، کل مجموع صفر است . چنانچه سطر A_i ترکیبی خطی از سطرهای دیگر باشد ، با استفاده از خاصیت خطی نسبت به سطر i م ، به همین نحو استدلال می‌کنیم . این امر (ث) را ثابت خواهد کرد .

۴.۳ محاسبهٔ دترمینانها

در این مرحله محاسبهٔ چند دترمینان ، فقط با استفاده از اصول موضوع و خواص مذکور در قضیهٔ ۱.۳ و ایـن فرض که توابع دترمینان وجود دارند ، ممکن است آموزنده باشد . در هریک از امثلهٔ زیر ، از اصل موضوع ۴ تا آخرین مرحلهٔ محاسبه استفاده نخواهد شد .

مثال ۱ . دترمینان یک ماتریس 2×2 . ثابت می‌کنیم که

$$\det \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}. \qquad (۴.۳)$$

بردارهای سطـری را بـه‌صورت ترکیبهایی خطی از بردارهای یکهٔ مختصات $i = (1, 0)$ و

$j = (0, 1)$ می‌نویسیم :

$$A_1 = (a_{11}, a_{12}) = a_{11}i + a_{12}j, \qquad A_2 = (a_{21}, a_{22}) = a_{21}i + a_{22}j.$$

با استفاده از خاصیت خطی نسبت به سطر اول داریم

$$d(A_1, A_2) = d(a_{11}i + a_{12}j, A_2) = a_{11}\, d(i, A_2) + a_{12}\, d(j, A_2).$$

حال با استفاده از خاصیت خطی نسبت به سطر دوم خواهیم داشت

$$d(i, A_2) = d(i, a_{21}i + a_{22}j) = a_{21}\, d(i, i) + a_{22}\, d(i, j) = a_{22}\, d(i, j),$$

زیرا $d(i, i) = 0$. بهمین نحو، به‌دست می‌آوریم که

$$d(j, A_2) = d(j, a_{21}i + a_{22}j) = a_{21}\, d(j, i) = -a_{21}\, d(i, j).$$

لذا، خواهیم داشت

$$d(A_1, A_2) = (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21})\, d(i, j).$$

اما، طبق اصل موضوع ۴، $d(i, j) = 1$ ؛ در نتیجه، همانطور که حکم شده،

$$d(A_1, A_2) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21} .$$

این استدلال نشان می‌دهد که اگر برای ماتریسهای 2×2 تابع دترمینان وجود داشته باشد، حتماً باید به شکل (۴۰۳) باشد. بعکس، به آسانی ثابت می‌شود که این فرمول معرف یک تابع دترمینان از مرتبهٔ 2 است. بنابراین، نشان داده‌ایم که یک و فقط یک تابع دترمینان از مرتبهٔ 2 وجود دارد.

مثال ۲. دترمینان یک ماتریس قطری. هرماتریس مربعی به شکل

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & & 0 \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$$

یک **ماتریس قطری** نامیده می‌شود. هر درایهٔ a_{ij} غیر واقع بر قطر اصلی $(i \neq j)$ صفر است. ثابت می‌کنیم دترمینان A مساوی حاصل ضرب عناصر قطری آن است :

$$\det A = a_{11}a_{22} \cdots a_{nn}. \tag{۵۰۳}$$

سطر k ام A چیزی جز مضرب اسکالر بردار یکهٔ k ام مختصات نیست : $A_k = a_{kk}I_k$. با استفادهٔ مکرر از خاصیت همگنی برای استخراج سازه‌ها یکی یکی، خواهیم داشت

$$\det A = d(A_1, \ldots, A_n) = d(a_{11}I_1, \ldots, a_{nn}I_n) = a_{11} \cdots a_{nn}\, d(I_1, \ldots, I_n).$$

این فرمول را می‌توان به شکل

$$\det A = a_{11} \cdots a_{nn} \det I$$

نوشت، که در آن I ماتریس همانی است. اصل موضوع ۴ به‌ما می‌گوید که $\det I = 1$؛ در نتیجه، (۵۰۳) به‌دست خواهد آمد.

مثال ۳. دترمینان ماتریس بالا مثلثی. هر ماتریس مربعی به شکل

$$U = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{12} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

یک ***ماتریس بالا مثلثی*** نام دارد. تمام درایه‌های زیر قطر اصلی صفرند. ثابت می‌کنیم دترمینان چنین ماتریسی مساوی حاصل ضرب عناصر قطری آن است:

$$\det U = u_{11}u_{22} \cdots u_{nn}.$$

ابتدا ثابت می‌کنیم که اگر یک عنصر قطری مانند u_{ii} مساوی 0 باشد، $\det U = 0$. اگر آخرین عنصر قطری u_{nn} صفر باشد، سطر آخر O است و، طبق قضیهٔ ۱۰۳ (آ)، $\det U = 0$. پس فرض کنیم عنصر قطری پیشتری مانند u_{ii} صفر باشد. برای مشخص بودن وضع، مثلاً $u_{22} = 0$. در این صورت، هریک از $n - 1$ بردار سطری $U_2, \ldots, U_n$ دارای دو مولفهٔ اول صفر است. از اینرو، این بردارها زیر فضایی با بعد حداکثر $n - 2$ را می‌پیمایند. بنابر این، این $n - 1$ سطر (و در نتیجه، ***تمام*** سطرها) وابسته‌اند. پس، بنابر قضیهٔ ۱۰۳ (ث)، $\det U = 0$. بهمین ترتیب، در می‌یابیم که اگر یکی از عنصرهای قطری صفر باشد، $\det U = 0$.

حال می‌پردازیم به حالت کلی. ابتدا سطر اول U_1 را به‌صورت مجموعی از دوبردار سطری می‌نویسیم:

$$U_1 = V_1 + V_1',$$

که در آن $V_1 = [u_{11}, 0, \ldots, 0]$ و $V_1' = [0, u_{12}, u_{13}, \ldots, u_{1n}]$. طبق خاصیت خطی نسبت به سطر اول داریم

$$\det U = \det(V_1, U_2, \ldots, U_n) + \det(V_1', U_2, \ldots, U_n).$$

اما $\det(V_1', U_2, \ldots, U_n) = 0$ ، زیرا دترمینان یک ماتریس بالامثلثی با یک عنصر قطری 0 است. بنابراین، داریم

$$\det U = \det(V_1, U_2, \ldots, U_n). \tag{۶.۳}$$

حال با بردار سطری U_2 همین‌کار را کرده، آن را به‌صورت یک مجموع بیان می‌کنیم:

$$U_2 = V_2 + V_2',$$

که درآن

$V_2 = [0, u_{22}, 0, \ldots, 0]$ و $V_2' = [0, 0, u_{23}, \ldots, u_{2n}]$.

با استفاده از اینها در طرف راست (۶.۳) و اعمال خاصیت خطی نسبت به سطر دوم، داریم

$$\det U = \det(V_1, V_2, U_3, \ldots, U_n), \tag{۷.۳}$$

زیرا $\det(V_1, V_2', U_3, \ldots, U_n) = 0$. با تکرار استدلال در مورد هرسطر بعدی در طرف راست (۷.۳)، مآلاً" خواهیم داشت

$$\det U = \det(V_1, V_2, \ldots, V_n),$$

که درآن $(V_1, V_2, \ldots, V_n)$ یک ماتریس قطری با همان عنصرهای قطری U است. لذا، طبق مثال ۲، داریم

$$\det U = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn},$$

که همان مطلوب می‌باشد.

مثال ۴. محاسبه به وسیلهٔ فرایند گاوس ــ ژردان. فرایند حذف گاوس ــ ژردان برای حل دستگاههای معادلات خطی نیز یکی از بهترین روشها برای محاسبهٔ دترمینانهاست. به‌یاد می‌آوریم که این روش مشتمل بود برسه نوع عمل در مورد سطرهای یک ماتریس:

(۱) تعویض دوسطر باهم؛

(۲) ضرب تمام عنصرهای یک سطر در یک اسکالر ناصفر؛

(۳) افزودن مضرب اسکالری از یک سطر به سطر دیگر.

با انجام پی‌درپی این اعمال بنحوی اصولی می‌توان هر ماتریس مربعی A را به‌یک ماتریس بالامثلثی U بدل کرد که اینک راه محاسبهٔ دترمینان آن را می‌دانیم. به‌آسانی می‌توان رابطهٔ بین $\det A$ و $\det U$ را مشخص نمود. هربار که عمل (۱) صورت گیرد،

دترمینان تغییرعلامت می‌دهد. هربار (۲) با اسکالر $c \neq 0$ انجام شود، دترمینان در c ضرب می‌شود. و هربار (۳) صورت گیرد، دترمینان تغییر نخواهد کرد. بنابراین، هرگاه عمل (۱) p بار انجام شود و $c_1, \ldots, c_q$ ضریبهای اسکالر ناصفری باشند که در عمل (۲) به‌کار رفته‌اند، آنگاه خواهیم داشت

$$\det A = (-1)^p (c_1 c_2 \cdots c_q)^{-1} \det U. \tag{۸۰۳}$$

مجددا" ملاحظه می‌شود که این فرمول فقط نتیجه‌ای است از سه اصل موضوع اول، وبرهان آن به‌اصل موضوع ۴ بستگی ندارد.

۵۰۳ قضیهٔ یکتایی

در مثال ۳ بخش پیش نشان دادیم که اصول موضوع ۱، ۲، و ۳ فرمول $\det U = u_{11}u_{22}\cdots u_{nn}\det I$ را ایجاب می‌کنند. از تلفیق این با (۸۰۳) می‌بینیم که به‌ازای‌هر ماتریس $n \times n$ مانند A اسکالری چون c (وابسته به A) وجود داردبطوری که

$$d(A_1, \ldots, A_n) = c\, d(I_1, \ldots, I_n). \tag{۹۰۳}$$

بعلاوه، این فرمول نتیجه‌ای است فقط از اصول موضوع ۱، ۲، و ۳. از این می‌توان به آسانی ثابت کرد که بیش از یک تابع دترمینان نمی‌تواند موجود باشد.

قضیهٔ ۲۰۳ . قضیهٔ یکتایی برای دترمینانها. *فرض کنیم تابع d در هر چهار اصل موضوع تابع دترمینان از مرتبهٔ n صدق کند، و f تابعی دیگر و صادق در اصول موضوع ۱، ۲، و ۳ باشد. در این صورت، به‌ازای هر انتخابی از بردارهای $A_1, \ldots, A_n$ در فضای n داریم*

$$f(A_1, \ldots, A_n) = d(A_1, \ldots, A_n) f(I_1, \ldots, I_n). \tag{۱۰۰۳}$$

بخصوص، اگر f در اصل موضوع ۴ نیز صدق کند، خواهیم داشت

$$f(A_1, \ldots, A_n) = d(A_1, \ldots, A_n).$$

برهان. فرض کنیم

$$g(A_1, \ldots, A_n) = f(A_1, \ldots, A_n) - d(A_1, \ldots, A_n) f(I_1, \ldots, I_n) \,.$$

ثابت می‌کنیم به‌ازای هرانتخابی از $A_1, \ldots, A_n$ داریم $g(A_1, \ldots, A_n) = 0$. گوییم

چون d و f هر دو در اصول موضوع ۱، ۲، و ۳ صدق می‌کنند، این در مورد g نیز صادق است. لذا، g نیز در معادلهٔ (۹۰۳) صدق می‌کند، زیرا این معادله فقط از سه اصل موضوع اول نتیجه شده بود. بنابراین، می‌توانیم بنویسیم

$$g(A_1, \ldots, A_n) = c\, g(I_1, \ldots, I_n), \tag{۱۱۰۳}$$

که در آن c یک اسکالر وابسته به A است. با اختیار $A = I$ در تعریف g و توجه به این امر که d در اصل موضوع ۴ صدق می‌کند، درمی‌یابیم که

$$g(I_1, \ldots, I_n) = f(I_1, \ldots, I_n) - f(I_1, \ldots, I_n) = 0.$$

بنابراین، معادلهٔ (۱۱۰۳) خواهد شد $g(A_1, \ldots, A_n) = 0$. این برهان را تمام خواهد کرد.

۶۰۳ تمرین

در این تمرینها می‌توانید وجود یک تابع دترمینان را دانسته بگیرید. دترمینانهای مرتبهٔ 3 را می‌توان با معادلهٔ (۲۰۳) حساب کرد.

۱. هریک از دترمینانهای زیر را حساب کنید:

(آ) $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 4 & -4 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix}$؛ (ب) $\begin{vmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 5 & 0 & 7 \\ -1 & 4 & 2 \end{vmatrix}$؛ (پ) $\begin{vmatrix} a & 1 & 0 \\ 2 & a & 2 \\ 0 & 1 & a \end{vmatrix}$.

۲. هرگاه $\det \begin{bmatrix} x & y & z \\ 3 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} = 1$، دترمینان هریک از ماتریسهای زیر را حساب کنید:

(آ) $\begin{bmatrix} 2x & 2y & 2z \\ \frac{3}{2} & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$؛ (ب) $\begin{bmatrix} x & y & z \\ 3x+3 & 3y & 3z+2 \\ x+1 & y+1 & z+1 \end{bmatrix}$؛

(پ) $\begin{bmatrix} x-1 & y-1 & z-1 \\ 4 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

۳. (آ) ثابت کنید که $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$.

(ب) فرمولهای نظیر را برای دترمینانهای

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix} \quad \text{و} \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a^2 & b^2 & c^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 \end{vmatrix}$$

پیدا کنید.

۴ . دترمینان هریک از ماتریسهای زیر را با تبدیلشان به یک ماتریس بالامثلثی حساب کنید:

(آ) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$؛ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^3 & b^3 & c^3 & d^3 \end{bmatrix}$؛ (پ) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ a & b & c & d \\ a^2 & b^2 & c^2 & d^2 \\ a^4 & b^4 & c^4 & d^4 \end{bmatrix}$؛

(ت) $\begin{bmatrix} a & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 4 & a & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & a & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & a & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & a \end{bmatrix}$؛ (ث) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & -1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 & 1 & 1 & -1 \end{bmatrix}$.

۵ . ماتریس پایین مثلثی $A = (a_{ij})$ ماتریسی است مربعی که تمام درایه‌های بالای قطر اصلی‌آن 0 اند؛ یعنی، هرگاه $i < j$ ، آنگاه $a_{ij} = 0$. ثابت کنید دترمینان این ماتریس مساوی حاصل ضرب درایه‌های قطری آن است: $\det A = a_{11}a_{22}\cdots a_{nn}$.

۶ . فرض کنید f_1, f_2, g_1, g_2 چهار تابع مشتقپذیر بر بازهٔ (a, b) باشند. به‌ازای هر x در (a, b) تعریف کنید

$$F(x) = \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix}$$

و ثابت کنید

$$F'(x) = \begin{vmatrix} f_1'(x) & f_2'(x) \\ g_1(x) & g_2(x) \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) \\ g_1'(x) & g_2'(x) \end{vmatrix}$$

۷ . تعمیم تمرین ۶ را برای دترمینان

$$F(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x) & f_3(x)\\ g_1(x) & g_2(x) & g_3(x)\\ h_1(x) & h_2(x) & h_3(x)\end{vmatrix}$$

بیان و اثبات کنید.

۸ . (آ) ثابت کنید هرگاه $F(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x)\\ f_1'(x) & f_2'(x)\end{vmatrix}$ ، آنگاه $F'(x)=\begin{vmatrix} f_1(x) & f_2(x)\\ f_1''(x) & f_2''(x)\end{vmatrix}$.

(ب) با فرض برقراری معادلهٔ (۲۰۳)، نتیجهٔ متناظر را برای دترمینانهای 3×3 بیان و اثبات کنید.

۹ . فرض‌کنید U و V دو ماتریس $n\times n$ بالا مثلثی باشند.

(آ) ثابت کنید هریک از $U+V$ و UV یک ماتریس بالامثلثی است.

(ب) ثابت کنید $\det(UV)=(\det U)(\det V)$.

(پ) هرگاه $\det U\neq 0$ ، ثابت کنید یک ماتریس بالامثلثی مانند U^{-1} هست بطوری که $UU^{-1}=I$ ، و نتیجه‌بگیرید که $\det(U^{-1})=1/\det U$.

۱۰ . $\det A$ ، $\det(A^{-1})$ ، و A^{-1} را در مورد ماتریس بالامثلثی

$$A=\begin{bmatrix} 2 & 3 & 4 & 5\\ 0 & 2 & 3 & 4\\ 0 & 0 & 2 & 3\\ 0 & 0 & 0 & 2\end{bmatrix}$$

حساب کنید.

۷۰۳ فرمول ضرب برای دترمینانها

در این بخش، با فرض وجود تابع دترمینان، از قضیهٔ یکتایی استفاده کرده ثابت می‌کنیم که دترمینان حاصل ضرب دوماتریس مربعی مساوی حاصل ضرب دترمینانهای آنهاست:

$$\det(AB)=(\det A)(\det B).$$

به‌یاد می‌آوریم که حاصل ضرب AB دوماتریس $A=(a_{ij})$ و $B=(b_{ij})$ ماتریسی است چون $C=(c_{ij})$ که درایهٔ i, j آن از فرمول

$$c_{ij}=\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \qquad (۱۲۰۳)$$

به‌دست می‌آیـد . حاصل ضرب فقط‌وقتی تعریف می‌شود که تعداد ستونهای سازهٔ سمت چپ ، یعنــی A ، مساوی تعداد سطرهای سازهٔ سمت راست ، یعنی B ، است . این در صورتی که A و B هر دو مربعی و به یک اندازه باشند همواره چنین است .

در اثبات فرمـول ضرب از رابطهٔ ساده‌ای استفاده می‌شود که بین سطرهای AB و سطرهای A برقرار است . مـا آن را به‌صورت یـک لم بیان می‌کنیم . طبق معمول ، فرض می‌کنیم A_i سطر i م ماتریس A باشد .

لم ۳۰۳ . هرگاه A یک ماتریس $m \times n$ و B یک ماتریس $n \times p$ باشد ، آنگاه‌داریم

$$(AB)_i = A_iB \cdot$$

یعنی ، سطر i م حاصل ضرب AB مساوی حاصل ضرب ماتریس سطری A_i در B است .

برهان . فرض‌کنیم B^j ستون j م B بوده‌و $C = AB$. دراین‌صورت ، مجموع (۱۲۰۳) را می‌توان حاصل ضرب نقطه‌ای سطر i م A در ستون j م B گرفت ؛

$$c_{ij} = A_i \cdot B^j .$$

بنابر این ، سطر i م C_i مساوی ماتریس سطری زیر است :

$$C_i = [A_i \cdot B^1, A_i \cdot B^2, \ldots, A_i \cdot B^p] .$$

اما این نیز نتیجه‌ای است از ضرب ماتریسی ماتریس سطری A_i در B ، زیرا

$$A_iB = [a_{i1}, \ldots, a_{in}] \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1p} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ b_{n1} & b_{n2} & \cdots & b_{np} \end{bmatrix} = [A_i \cdot B^1, \ldots, A_i \cdot B^p] .$$

بنابراین ، $C_i = A_iB$ ، که لم را ثابت خواهد کرد .

قضیهٔ ۴۰۳ . فرمول ضرب برای دترمینانها . ***برای هر دوماتریس $n \times n$ مانند A و B داریم***

$$\det(AB) = (\det A)(\det B) .$$

برهان . چون $(AB)_i = A_iB$ ، باید ثابت کنیم که

$$d(A_1B, \ldots, A_nB) = d(A_1, \ldots, A_n)\, d(B_1, \ldots, B_n).$$

با استفادهٔ مجدد از لم، نیز داریم $B_i = (IB)_i = I_iB$ ، که در آن I ماتریس همانی $n \times n$ است. بنابراین، $d(B_1, \ldots, B_n) = d(I_1B, \ldots, I_nB)$ ، و باید ثابت کنیم‌که

$$d(A_1B, \ldots, A_nB) = d(A_1, \ldots, A_n)\, d(I_1B, \ldots, I_nB).$$

B را ثابت می‌گیریم و تابع f را با فرمول

$$f(A_1, \ldots, A_n) = d(A_1B, \ldots, A_nB)$$

تعریف می‌کنیم. معادله‌ای که می‌خواهیم ثابت کنیم این‌طور می‌گوید که

$$f(A_1, \ldots, A_n) = d(A_1, \ldots, A_n) f(I_1, \ldots, I_n). \tag{۱۳۰۳}$$

اما تحقیق اینکه f در اصول موضوع ۱، ۲، و ۳ برای تابع دترمینان صدق می‌کند ساده است؛ در نتیجه، طبق قضیهٔ یکتایی، معادلهٔ (۱۳۰۳) به‌ازای هر ماتریس A برقرار می‌باشد. این برهان را تمام خواهد کرد.

کاربردهای فرمول ضرب در دو بخش بعدی داده شده‌اند.

۸۰۳ دترمینان معکوس یک ماتریس نامنفرد

به‌یاد می‌آوریم که ماتریس مربعی A را **نامنفرد** گوییم اگر که معکوس چپی چون B داشته باشد بطوری که $BA = I$. اگر معکوس چپ وجود داشته باشد، منحصر بفرد بوده ومعکوس راست نیز هست؛ یعنی، $AB = I$. معکوس را با A^{-1} نشان می‌دهیم. رابطهٔ بین $\det A$ و $\det A^{-1}$ به همان اندازه که انتظار می‌رود طبیعی است.

قضیهٔ ۵۰۳ . *هرگاه ماتریس A نامنفرد باشد، آنگاه $\det A \neq 0$ و داریم*

$$\det A^{-1} = \frac{1}{\det A}. \tag{۱۴۰۳}$$

برهان. از فرمول ضرب داریم

$$(\det A)(\det A^{-1}) = \det (AA^{-1}) = \det I = 1.$$

بنابر این، $\det A \neq 0$ و (۱۴۰۳) برقرار است.

قضیهٔ ۵۰۳ نشان می‌دهد که صفر نشدن $\det A$ شرطی لازم برای نامنفرد بودن A

است . بعــدا " ثابت می‌کنیم این شرط کافی نیز هست ؛ یعنی ، هرگاه $\det A \neq 0$ ، آنگاه A^{-1} وجود خواهد داشت .

۹.۳ دترمینانها و استقلال بردارها

از قضیهٔ ۵.۳ می‌توان محک ساده‌ای برای آزمودن استقلال بردارها نتیجه گرفت .

قضیهٔ ۶.۳ . یک مجموعهٔ مرکب از n بردار $A_1, \ldots, A_n$ در فضای n مستقل است اگر و فقط اگر $d(A_1, \ldots, A_n) \neq 0$.

برهان. قبلا " در قضیهٔ ۲.۳ (ث) ثابت شد که وابستگی ایجاب می‌کند که $d(A_1, \ldots, A_n) = 0$. برای اثبات عکس، فرض کنیم $A_1, \ldots, A_n$ مستقل باشند وثابت می‌کنیم $d(A_1, \ldots, A_n) \neq 0$.

فرض کنیم V_n فضای خطی n تاییهای اسکالرها باشد . چون $A_1, \ldots, A_n$ ، n عنصر مستقل در فضای n بعدی‌اند ، یک پایه برای V_n تشکیل می‌دهند . پس، طبق قضیهٔ ۱۲.۲ ، یک تبدیل خطی مانند $T: V_n \to V_n$ هست که این n بردار را بروی بردارهای یکهٔ مختصات می‌نگارد :

$$\text{به‌ازای } k = 1, 2, \ldots, n \text{ ،} \quad T(A_k) = I_k \text{ .}$$

بنابراین ، یک ماتریس $n \times n$ مانند B هست بطوری که

$$\text{به‌ازای } k = 1, 2, \ldots, n \text{ ،} \quad A_kB = I_k \text{ .}$$

اما ، طبق لم ۳.۳ ، داریم $A_kB = (AB)_k$ ، که درآن A ماتریسی است با سطرهای $A_1, \ldots, A_n$. بنابر این ، $AB = I$ ؛ در نتیجه ، A نامنفرد است و $\det A \neq 0$.

۱۰.۳ دترمینان یک ماتریس قطری قالبی

هر ماتریس مربعی C به شکل

$$C = \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix},$$

که درآن A و B ماتریسهایی مربعی بوده و هر O یک ماتریس صفر باشد ، یک ***ماتریس قطری قالبی*** با دو قالب قطری A و B نامیده می‌شود . یک نمونه ماتریس 5×5

$$C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 0 & 4 & 5 & 6 \\ 0 & 0 & 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

است . قالبهای قطری در این حالت عبارتند از

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}.$$

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که دترمینان یک ماتریس قطری قالبی مساوی حاصلضرب دترمینانهای قالبهای قطری آن است .

قضیهٔ ۷۰۳ . *برای هر دو ماتریس مربعی A و B داریم*

$$\det \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = (\det A)(\det B). \tag{۱۵۰۳}$$

برهان. فرض کنیم A ماتریسی $n \times n$ و B ماتریسی $m \times m$ باشد . ملاحظه می‌شود که ماتریس قطری قالبی را می‌توان به صورت حاصل ضرب

$$\begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A & O \\ O & I_m \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & B \end{bmatrix}$$

نوشت ، که در آن I_n و I_m بترتیب ماتریسهای همانی از مرتبهٔ n و m اند . بنابراین ، طبق فرمول ضرب برای دترمینانها ، داریم

$$\det \begin{bmatrix} A & O \\ O & B \end{bmatrix} = \det \begin{bmatrix} A & O \\ O & I_m \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & B \end{bmatrix}. \tag{۱۶۰۳}$$

حال دترمینان $\det \begin{bmatrix} A & O \\ O & I_m \end{bmatrix}$ را به‌عنوان تابعی از n سطر A درنظر می‌گیریم. این امر بخاطرقالب صفرها درگوشهٔ راست بالایی میسراست. به‌آسانی معلوم می‌شود که‌این تابـع در چهاراصل موضوع تابع دترمینان‌ازمرتبهٔ n صدق‌می‌کند. لذا، طبق‌قضیهٔ یکتایـی، باید داشته‌باشیم

$$\det \begin{bmatrix} A & O \\ O & I_m \end{bmatrix} = \det A .$$

استدلالی مشابه نشان می‌دهد که $\det \begin{bmatrix} I_n & O \\ O & B \end{bmatrix} = \det B$. بنابراین، (۱۶۰۳) رابطهٔ (۱۵۰۳) را ایجاب خواهد کرد.

۱۱۰۳ تمرین

۱. برای هریک از احکام زیر در مورد ماتریسهای مربعی یا برهان بیاورید یا مثال نقض:

(آ) $\det (A + B) = \det A + \det B$؛

(ب) $\det \{(A + B)^2\} = \{\det (A + B)\}^2$؛

(پ) $\det \{(A + B)^2\} = \det (A^2 + 2AB + B^2)$؛

(ت) $\det \{(A + B)^2\} = \det (A^2 + B^2)$.

۲. (آ) قضیهٔ ۷۰۳ را به‌ماتریسهای قطری قالبی با سه قالب قطری تعمیم دهید:

$$\det \begin{bmatrix} A & O & O \\ O & B & O \\ O & O & C \end{bmatrix} = (\det A)(\det B)(\det C).$$

(ب) تعمیم برای‌ماتریسهای‌قطری قالبی با هر تعداد قالب قطری را بیان و اثبات نمایید.

۳. فرض‌کنید $B = \begin{bmatrix} a & b & c & d \\ e & f & g & h \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ a & b & c & d \\ e & f & g & h \end{bmatrix}$، و ثابت کنید

$$\det A = \det \begin{bmatrix} c & d \\ g & h \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad \det B = \det \begin{bmatrix} a & b \\ e & f \end{bmatrix} .$$

۴ . تعمیم تمرین ۳ را برای ماتریسهای $n \times n$ بیان و اثبات کنید .

۵ . فرض‌کنید $A = \begin{bmatrix} a & b & 0 & 0 \\ c & d & 0 & 0 \\ e & f & g & h \\ x & y & z & w \end{bmatrix}$ ، و ثابت کنید $\det A = \det \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \det \begin{bmatrix} g & h \\ z & w \end{bmatrix}$.

۶ . تعمیم تمرین ۵ برای ماتریسهای $n \times n$ به شکل

$$A = \begin{bmatrix} B & O \\ C & D \end{bmatrix}$$

که در آن B, C, D ماتریسهایی مربعی بوده و O ماتریس صفر است ، را بیان و اثبات نمایید .

۷ . با استفاده از قضیهٔ ۶.۳ ، تعیین کنید آیا مجموعه‌های زیر از بردارها وابسته خطی‌اند یا مستقل خطی :

(آ) $A_1 = (1, -1, 0), A_2 = (0, 1, -1), A_3 = (2, 3, -1)$ ؛

(ب) $A_1 = (1, -1, 2, 1), A_2 = (-1, 2, -1, 0), A_3 = (3, -1, 1, 0), A_4 = (1, 0, 0, 1)$ ؛

(پ) $A_1 = (1, 0, 0, 0, 1), A_2 = (1, 1, 0, 0, 0), A_3 = (1, 0, 1, 0, 1), A_4 = (1, 1, 0, 1, 1)$
$A_5 = (0, 1, 0, 1, 0)$?

۱۲.۳ فرمولهای بسط برای دترمینانها . مینورها و همسازه‌ها

ما هنوز ، جز درحالت 2×2 ، نشان نداده‌ایم که یک تابع دترمینان عملاً " وجوددارد . در این بخش از خاصیت خطی و قضیهٔ یکتایی استفاده کرده نشان می‌دهیم که اگر دترمینانها وجود داشته باشند ، می‌توان آنها را با فرمولی حساب کرد که هر دترمینان مرتبهٔ n را به‌صورت ترکیبی خطی از دترمینانهای مرتبهٔ $n - 1$ بیان می‌کند . معادلهٔ (۲.۳) در بخش ۱.۳ نمونه‌ای است از این فرمول در حالت 3×3 . فرمول کلی روشی را برای اثبات وجود توابع دترمینان به وسیلهٔ استقرا به دست خواهد داد .

هر سطر یک ماتریس $n \times n$ مانند A را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از n بردار یکهٔ مختصات $I_1, \ldots, I_n$ بیان‌کرد . مثلاً " ، سطر اول A_1 را می‌توان به صورت زیرنوشت :

$$A_1 = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} I_j .$$

چون دترمینانها نسبت به سطر اول خطی‌اند ، داریم (۱۷۰۳)

$$d(A_1, A_2, \ldots, A_n) = d\left(\sum_{j=1}^{n} a_{1j} I_j, A_2, \ldots, A_n\right) = \sum_{j=1}^{n} a_{1j}\, d(I_j, A_2, \ldots, A_n).$$

لذا ، برای محاسبهٔ $\det A$ کافی است $d(I_j, A_2, \ldots, A_n)$ را برای هر بردار یکهٔ مختصات I_j حساب کنیم .

ازنماد A'_{1j} برای نمایش ماتریس حاصل از A به‌وسیلهٔ تعویض سطر اول A_1 با بردار یکهٔ I_j استفاده می‌کنیم . مثلا" ، اگر $n = 3$ ، سه ماتریس از این نوع وجود دارد :

$$A'_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A'_{12} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \quad A'_{13} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}.$$

توجه‌کنید که $\det A'_{1j} = d(I_j, A_2, \ldots, A_n)$. حال معادلهٔ (۱۷۰۳) را می‌توان به‌شکل زیر نوشت :

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{1j} \det A'_{1j}. \qquad (۱۸۰۳)$$

این فرمول یک **فرمول بسط** نامیده می‌شود ؛ این فرمول دترمینان A را به‌صورت ترکیبی خطی از عناصر سطر اول آن بیان می‌کند .

استدلالی که در اثبات (۱۸۰۳) بکار رفت را می‌توان به‌جای سطر اول برسطر k ام اعمال کرد . نتیجه فرمول بسطی است برحسب عناصر سطر k ام .

قضیهٔ ۸۰۳ . بسط نسبت به همسازه‌ها . *فرض‌کنیم A'_{kj} ماتریسی باشد که از A به‌وسیلهٔ تعویض سطر k ام A_k با بردار یکهٔ مختصات I_j به‌دست می‌آید . در این صورت، فرمول بسط*

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \det A'_{kj} \qquad (۱۹۰۳)$$

را خواهیم داشت ، که دترمینان A را به‌صورت ترکیبی خطی از عناصر سطر k ام بیان می‌کند . عدد $\det A'_{kj}$ همسازهٔ درایهٔ a_{kj} نامیده می‌شود .

در قضیهٔ بعد ثابت می‌کنیم هر همسازه ، صرف‌نظر از علامت بعلاوه یا منها ، مساوی دترمینان یک ماتریس از مرتبهٔ $n - 1$ است . این ماتریسهای کوچکتر ***مینورها*** نامیده می‌شوند .

تعریف. به‌فرض معلوم بودن ماتریس مربعی A از مرتبهٔ $n \geq 2$ ، ماتریس مربعی از مرتبهٔ $n-1$ که با حذف سطر k ام و ستون j م از A به دست می‌آید **مینور** k, j ، A نامیده شده و با A_{kj} نموده می‌شود.

مثال. ماتریس $A = (a_{kj})$ از مرتبهٔ 3 دارای نه مینور است. سه‌تا از آنها عبارتند از

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad A_{12} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{bmatrix}, \qquad A_{13} = \begin{bmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{bmatrix}.$$

معادلهٔ (۲۰۳) دترمینان یک ماتریس 3×3 را به‌صورت ترکیبی خطی از دترمینانهای این سه مینور بیان می‌کند. این فرمول را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\det A = a_{11} \det A_{11} - a_{12} \det A_{12} + a_{13} \det A_{13}.$$

قضیهٔ بعدی این فرمول را به‌حالت $n \times n$ به‌ازای هر $n \geq 2$ تعمیم می‌دهد.

قضیهٔ ۹۰۳ . بسط نسبت به‌مینورهای سطر k ام. *به‌ازای هر ماتریس $n \times n$ مانند A که $n \geq 2$ ، همسازهٔ a_{kj} به مینور A_{kj} با فرمول*

$$\det A'_{kj} = (-1)^{k+j} \det A_{kj} \tag{۲۰۰۳}$$

مربوط می‌شود. بنابراین، بسط $\det A$ نسبت به عنصرهای سطر k ام از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{k+j} a_{kj} \det A_{kj}. \tag{۲۱۰۳}$$

برهان. روش اثبات را ابتدا با توجه به حالت خاص $k = j = 1$ نشان می‌دهیم. ماتریس A'_{11} دارای شکل زیر است:

$$A'_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ \cdot & & & & \cdot \\ a_{n1} & a_{n2} & a_{n3} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

با انجام اعمال سطری مقدماتی از نوع (۳) می‌توان هر درایهٔ زیر ۱ درستون اول را، بی‌آنکه درایه‌های دیگر دست بخورند، صفر کرد. مثلاً، اگر سطر اول A'_{11} را در $-a_{21}$ ضرب کرده و حاصل را به سطر دوم بیافزاییم، سطر دوم جدید $(0, a_{22}, a_{23}, \ldots, a_{2n})$ می‌شود. با تکرار این اعمال سطری مقدماتی ماتریس جدیدی خواهیم داشت که آن را با A^0_{11} نشان می‌دهیم و دارای شکل زیر است؛

$$A^0_{11} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ 0 & a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

چون اعمال سطری از نوع (۳) دترمینان را تغییر نمی‌دهد، خواهیم داشت

$$\det A^0_{11} = \det A'_{11}. \qquad (۲۲ \cdot ۳)$$

اما A^0_{11} یک ماتریس قطری قالبی است؛ در نتیجه، طبق قضیهٔ ۷۰۳، داریم

$$\det A^0_{11} = \det A_{11},$$

که در آن A_{11} عبارت است از مینور $1, 1$ ماتریس A:

$$A_{11} = \begin{bmatrix} a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ a_{32} & \cdots & a_{3n} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

بنابر این، $\det A'_{11} = \det A_{11}$، که (۲۰۰۳) را به‌ازای $k = j = 1$ ثابت می‌کند.

اکنون حالت خاص $k = 1$ و j دلخواه را درنظر می‌گیریم، و ثابت می‌کنیم

$$\det A'_{1j} = (-1)^{j-1} \det A_{1j}. \qquad (۲۳ \cdot ۳)$$

همینکه (۲۳۰۳) ثابت شد، فرمول کلیتر (۲۰۰۳) فوراً نتیجه می‌شود، زیرا ماتریس A'_{kj} رامی‌توان با $k - 1$ تعویض‌پی در پی سطرهای مجاور به ماتریسی به شکل B'_{1j} تبدیل کرد. دترمینان در هر تعویض تغییر علامت می‌دهد؛ در نتیجه، داریم

$$\det A'_{kj} = (-1)^{k-1} \det B'_{1j}, \tag{۲۴.۳}$$

که در آن B یک ماتریس $n \times n$ است که سطر اول آن I_j بوده و مینور $1,j$ ماتریس B_{1j} ماتریس A_{kj} است. بنابر (۲۳.۳)، داریم

$$\det B'_{1j} = (-1)^{j-1} \det B_{1j} = (-1)^{j-1} \det A_{kj};$$

در نتیجه، از (۲۴.۳) معلوم می‌شود که

$$\det A'_{kj} = (-1)^{k-1}(-1)^{j-1} \det A_{kj} = (-1)^{k+j} \det A_{kj}.$$

بنابراین، اگر (۲۳.۳) را ثابت کنیم، (۲۰.۳) نیز ثابت شده است. حال می‌پردازیم به اثبات (۲۳.۳). ماتریس A'_{1j} دارای شکل زیر است:

$$A'_{1j} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 1 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{nj} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

با اعمال سطری مقدماتی از نوع (۳)، ستونی از صفر زیر 1 به‌وجود آورده و ماتریس را به‌ماتریس زیر تبدیل می‌کنیم:

$$A^0_{1j} = \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & 0 & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot & & & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & 0 & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

مثل قبل، دترمینان تغییر نمی‌کند؛ در نتیجه، $\det A^0_{1j} = \det A'_{1j}$. مینور $1,j$، A_{1j} دارای شکل زیر است:

$$A_{1j} = \begin{bmatrix} a_{21} & \cdots & a_{2,j-1} & a_{2,j+1} & \cdots & a_{2n} \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot & \cdot & & \cdot \\ a_{n1} & \cdots & a_{n,j-1} & a_{n,j+1} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

حال $\det A^0_{1j}$ را به‌عنوان تابعی از $n-1$ سطر A_{1j} در نظر می‌گیریم؛ مثلاً،

$\det A^0_{1j} = f(A_{1j})$. تابع f درسه‌اصل موضوع اول تابع دترمینان از مرتبهٔ $n-1$ صدق می‌کند . بنابراین ، طبق قضیهٔ یکتایی ، می‌توانیم بنویسیم

$$f(A_{1j}) = f(J)\det A_{1j}\,, \qquad (۲۵۰۳)$$

که در آن J ماتریس همانی از مرتبهٔ $n-1$ است . پس، برای اثبات (۲۳۰۳) باید نشان دهیم که $f(J) = (-1)^{j-1}$. اما $f(J)$ ، طبق تعریف ، دترمینان ماتریس زیر است:

$$C = \begin{array}{cc} \begin{bmatrix} 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 1 & & 0 & 0 & 0 & & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix} & \begin{array}{l} \\ \\ \\ \leftarrow \quad \text{سطر } j \text{ م} \\ \\ \\ \\ \end{array} \\ \begin{array}{c} \uparrow \\ \text{ستون } j \text{ م} \end{array} & \end{array}$$

درایه‌ها درامتداد خطوط مایل همه 1 هستند . درایه‌های دیگری که نموده نشده‌اند همه 0 می‌باشند . با تعویض پی در پی سطر اول C با سطرهای $2, 3, \ldots, j$ ، بعد از $j-1$ تعویض،به ماتریس همانی $n \times n$ ، I می‌رسیم . دترمینان در هر تعویض تغییر علامت می‌دهد ؛ در نتیجه ، $\det C = (-1)^{j-1}$. بنابر این ، $f(J) = (-1)^{j-1}$ ، که (۲۳۰۳) ؛ و لذا ، (۲۰۰۳) را ثابت می‌کند .

۱۳۰۳ وجود تابع دترمینان

در این بخش با استقرا بر n ، یعنی اندازهٔ یک ماتریس، ثابت می‌کنیم توابع دترمینان از هر مرتبه وجود دارند . قبلاً" به‌ازای $n = 2$ نشان داده‌ایم که تابع دترمینان وجود دارد . حالت $n = 1$ را نیز می‌توان با تعریف $\det\,[a_{11}] = a_{11}$ سامان‌داد .

اگر فرض کنیم یک تابع دترمینان از مرتبهٔ $n-1$ وجود دارد ، نامزد مناسب برای تابع دترمینان از مرتبهٔ n یکی از فرمولهای بسط قضیهٔ ۹۰۳ ، مثلاً" ، بسط نسبت به

مینورهای سطر اول است. لیکن، اگر فرمولی دیگر ولی مشابه که برحسب مینورهای ستون اول بیان شده است را به‌کار بریم، تحقیق اصول موضوع آسانتر خواهد بود.

قضیهٔ ۱۰۰۳ . فرض کنیم دترمینانهای مرتبهٔ $n-1$ وجود داشته باشند. به‌ازای هر ماتریس $n \times n$ مانند $A=(a_{jk})$ ، فرض کنیم f تابعی باشد که با فرمول

$$f(A_1, \ldots, A_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{j1} \det A_{j1} \qquad (۲۶۰۳)$$

تعریف شده است. در این صورت، f در چهار اصل موضوع یک تابع دترمینان از مرتبهٔ n صدق می‌کند. بنابراین، به استقرا، دترمینانهای مرتبهٔ n به‌ازای هر n وجود خواهند داشت.

برهان. هر جمله از مجموع در (۲۶۰۳) را تابعی از سطرهای A می‌گیریم و می‌نویسیم

$$f_j(A_1, \ldots, A_n) = (-1)^{j+1} a_{j1} \det A_{j1}.$$

اگر ثابت کنیم هر f_j در اصول موضوع ۱ و ۲ صدق می‌کند، این امر برای f نیز درست است.

به اثر ضرب سطر اول A در اسکالر t توجه می‌کنیم. مینور A_{11} تغییری نمی‌کند، زیرا به سطر اول ارتباطی ندارد. ضریب a_{11} در t ضرب شده است؛ در نتیجه، داریم

$$f_1(tA_1, A_2, \ldots, A_n) = ta_{11} \det A_{11} = tf_1(A_1, \ldots, A_n).$$

اگر $j>1$ ، سطر اول هر مینور A_{j1} در t ضرب شده است و ضریب a_{j1} تغییر نکرده است؛ در نتیجه، باز خواهیم داشت

$$f_j(tA_1, A_2, \ldots, A_n) = tf_j(A_1, A_2, \ldots, A_n).$$

بنابراین، هر f_j نسبت به سطر اول همگن است.

اگر سطر k ام A در t ضرب شود، که $k>1$ ، مینور A_{k1} تغییر نمی‌کند ولی a_{k1} در t ضرب می‌شود؛ در نتیجه، f_k نسبت به سطر k ام همگن می‌باشد. چنانچه $j \neq k$ ، ضریب a_{j1} تغییر نمی‌کند ولی سطری از A_{j1} در t ضرب می‌شود. بنابراین، هر f_j نسبت به سطر k ام همگن می‌باشد.

استدلالی مشابه نشان می‌دهد که هر f_j نسبت به هر سطر جمعی است؛ در نتیجه، f در اصول موضوع ۱ و ۲ صدق می‌کند. حال ثابت می‌کنیم f در اصل موضوع ‎۳′، یعنی

شکل ضعیف اصل موضوع ۳، صدق می‌کند، دراین صورت، از قضیهٔ ۱۰۳ نتیجه می‌شود که f در اصل موضوع ۳ نیز صدق خواهد کرد.

برای‌اثبات اینکه f در اصل موضوع ′۳ صدق می‌کند، فرض کنیم دو سطر مجاور A مساوی باشند؛ مثلاً" ، $A_k = A_{k+1}$. در این صورت، جز مینورهای A_{k1} و $A_{k+1,1}$ ، هر مینور A_{j1} دو سطر مساوی دارد؛ در نتیجه، $\det A_{j1} = 0$. لذا، مجموع (۲۶۰۳) فقط از دو جملهٔ نظیر به $j = k$ و $j = k + 1$ تشکیل شده است:

$$f(A_1, \ldots, A_n) = (-1)^{k+1} a_{k1} \det A_{k1} + (-1)^{k+2} a_{k+1,1} \det A_{k+1,1}. \quad (۲۷۰۳)$$

اما $A_{k1} = A_{k+1,1}$ و $a_{k1} = a_{k+1,1}$ ، زیرا $A_k = A_{k+1}$. بنابراین، دو جمله در (۲۷۰۳) فقط در علامت فرق دارند؛ در نتیجه، $f(A_1, \ldots, A_n) = 0$. بنابر این، f در اصل موضوع ′۳ صدق می‌کند.

بالاخره، ثابت می‌کنیم f در اصل موضوع ۴ صدق می‌کند. گوییم وقتی $A = I$ ، داریم $a_{11} = 1$ و، به‌ازای $j > 1$ ، $a_{j1} = 0$. همچنین، A_{11} ماتریس همانی از مرتبهٔ $n - 1$ است؛ در نتیجه، هر جمله در (۲۶۰۳) ، جز اولی که مساوی 1 است، صفر می‌باشد. بنابراین، $f(I_1, \ldots, I_n) = 1$ ؛درنتیجه، f در اصل موضوع ۴ صدق خواهد کرد

در برهان فوق می‌شد از تابع ′f که برحسب مینورهای ستون k ام A_{jk} به‌جای مینورهای ستون اول A_{j1} تعریف شده استفاده کرد. درواقع، اگر فرض کنیم

$$f(A_1, \ldots, A_n) = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+k} a_{jk} \det A_{jk}, \quad (۲۸۰۳)$$

درست همان نوع برهان‌نشان می‌دهد که این f در هر چهار اصل موضوع تابع دترمینان صدق می‌کند. چون توابع دترمینان منحصر بفرد هستند، فرمولهای بسط در (۲۸۰۳) و فرمولهای (۲۱۰۳) همه مساوی $\det A$ می‌باشند.

فرمولهای بسط (۲۸۰۳) نه فقط وجود توابع دترمینان را ثابت می‌کنند بلکه جنبهٔ جدیدی از نظریهٔ دترمینانها را نیز ظاهر می‌سازند، و آن رابطهٔ بین خواص سطری و خواص ستونی می‌باشد. این ارتباط در بخش بعد بیشتر مطرح می‌شود.

۱۴۰۳ دترمینان یک ترانهاده

به هر ماتریس A ماتریس دیگری، به‌نام *ترانهادهٔ* A ، مربوط است که با A^t نموده می‌شود. سطرهای A^t ستونهای A می‌باشند. مثلاً" ، هرگاه

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \text{، آنگاه } A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 2 & 5 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}.$$

تعریف صوری آن را می‌توان به شکل زیر داد:

تعریف ترانهاده. *ترانهادهٔ* یک ماتریس $m \times n$ مانند $A = (a_{ij})_{i,j=1}^{m,n}$ ماتریس $n \times m$ است مانند A^t که درایهٔ i, j آن a_{ji} است.

با آنکه ترانهش در مورد هر ماتریس مستطیلی شکل قابل انجام است، ما عمدتا "به ماتریسهای مربعی توجه داریم. اینک ثابت می‌کنیم که ترانهش یک ماتریس مربعی دترمینان آن را تغییر نمی‌دهد.

قضیهٔ ۱۱۰۳ . *به‌ازای هر ماتریس $n \times n$ مانند A داریم*

$$\det A = \det A^t.$$

برهان. اثبات به استقرا بر n است. به‌ازای $n = 1$ و $n = 2$ نتیجه به آسانی حاصل است. پس فرض کنیم قضیه برای ماتریسهای مرتبهٔ $n - 1$ درست باشد. فرض کنیم $A = (a_{ij})$ و $B = A^t = (b_{ij})$. با بسط $\det A$ نسبت به مینورهای ستون اول و $\det B$ نسبت به مینورهای سطر اول، داریم

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} a_{j1} \det A_{j1}, \qquad \det B = \sum_{j=1}^{n} (-1)^{j+1} b_{1j} \det B_{1j}.$$

اما از تعریف ترانهاده داریم $b_{1j} = a_{j1}$ و $B_{1j} = (A_{j1})^t$. چون صحت قضیه برای ماتریسهای مرتبهٔ $n - 1$ فرض شده است، خواهیم داشت $\det B_{1j} = \det A_{j1}$. بنابراین، مجموعهای فوق جمله به جمله مساوی‌اند؛ در نتیجه، $\det A = \det B$.

۱۵۰۳ ماتریس همسازه‌ای

قضیهٔ ۵۰۳ نشان داد که هرگاه A نامنفرد باشد، آنگاه $\det A \neq 0$. قضیهٔ بعدی عکس آن را ثابت می‌کند؛ یعنی، هرگاه $\det A \neq 0$، آنگاه A^{-1} وجود دارد. بعلاوه، فرمول صریحی برای بیان A^{-1} برحسب ماتریسی که از همسازه‌های درایه‌های A تشکیل می‌شود به

دست می‌دهد.

درقضیهٔ ۹۰۳ ثابت شد که همسازهٔ i, j درایهٔ a_{ij} مساوی $(-1)^{i+j} \det A_{ij}$ است، که در آن A_{ij} مینور i, j ماتریس A می‌باشد. این همسازه را با $\operatorname{cof} a_{ij}$ نشان می‌دهیم. بنابراین، طبق تعریف،

$$\operatorname{cof} a_{ij} = (-1)^{i+j} \det A_{ij}.$$

تعریف ماتریس همسازه‌ای. ماتریسی که درایهٔ i, j آن $\operatorname{cof} a_{ij}$ است ***ماتریس همسازه‌ای**** A نامیده و با $\operatorname{cof} A$ نموده می‌شود. بنابراین، داریم

$$\operatorname{cof} A = (\operatorname{cof} a_{ij})_{i,j=1}^{n} = ((-1)^{i+j} \det A_{ij})_{i,j=1}^{n}.$$

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که حاصل ضرب A و ترانهادهٔ ماتریس همسازه‌ای آن، صرف‌نظر از یک سازهٔ اسکالر، ماتریس همانی I است.

قضیهٔ ۱۲۰۳ . به‌ازای هر ماتریس $n \times n$ مانند A، که $n \geq 2$، داریم

$$A(\operatorname{cof} A)^{t} = (\det A) I. \qquad (۲۹۰۳)$$

بخصوص، اگر $\det A \neq 0$، معکوس A وجود دارد و از رابطهٔ

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} (\operatorname{cof} A)^{t}$$

به‌دست می‌آید.

برهان. با استفاده از قضیهٔ ۹۰۳، $\det A$ را برحسب همسازه‌های سطر k ام آن با فرمول

$$\det A = \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \operatorname{cof} a_{kj} \qquad (۳۰۰۳)$$

---

* *در بسیاری از نوشتجات ماتریسی انگلیسی، transpose (ترانهاده) ماتریس همسازه‌ای ماتریس A adjugate نامیده می‌شود. بعضی از کتب قدیمی‌تر آن را adjoint ماتریس A نامیده‌اند. لیکن، فرهنگ جاری انگلیسی اصطلاح adjoint را کلاً "به شیٔ دیگری، که در بخش ۸۰۵ مطرح می‌شود، اختصاص داده است.*

بیان می‌کنیم . k را ثابت می‌گیریم و این رابطه را درمورد ماتریس جدید B که سطر i ام آن مساوی سطر k ام A ، به‌ازای $i \neq k$ ی ، بوده و سطرهای دیگر آن همان سطرهای A اند به‌کار می‌بریم . در این صورت ، $\det B = 0$ ، زیرا سطرهای i م و k ام مساوی‌اند . با نوشتن $\det B$ برحسب همسازه‌های سطری i م خواهیم داشت

$$\det B = \sum_{j=1}^{n} b_{ij} \operatorname{cof} b_{ij} = 0 . \tag{۳۱۰۳}$$

اما ، چون سطر i م B مساوی سطر k ام A است ،

به‌ازای هر j ، $b_{ij} = a_{kj}$ و $\operatorname{cof} b_{ij} = \operatorname{cof} a_{ij}$.

بنابراین ، (۳۱۰۳) می‌گوید که

$$\text{اگر } k \neq i \text{ ، } \sum_{j=1}^{n} a_{kj} \operatorname{cof} a_{ij} = 0 \text{ .} \tag{۳۲۰۳}$$

معادلات (۳۰۰۳) و (۳۲۰۳) را می‌توان با هم به صورت زیر نوشت :

$$\sum_{j=1}^{n} a_{kj} \operatorname{cof} a_{ij} = \begin{cases} \det A & \text{اگر } i = k \text{ ،} \\ 0 & \text{اگر } i \neq k \text{ ،} \end{cases} \tag{۳۳۰۳}$$

اما مجموع سمت چپ (۳۳۰۳) همان درایهٔ k, i حاصل‌ضرب $A(\operatorname{cof} A)^t$ است . بنابراین ، (۳۳۰۳) رابطهٔ (۲۹۰۳) را ایجاب خواهد کرد .

به عنوان نتیجه‌ای مستقیم از قضایای ۵۰۳ و ۱۲۰۳ ، شرط لازم و کافی زیر را برای نامنفرد بودن یک ماتریس مربعی خواهیم داشت .

قضیهٔ ۱۳۰۳ . ***ماتریس مربعی A نامنفرد است اگر و فقط اگر*** $\det A \neq 0$.

۱۶۰۳ قاعدهٔ کرامر

قضیهٔ ۱۲۰۳ را نیز می‌توان به‌کار برد و فرمولهای صریحی برای جوابهای یک دستگاه معادلات خطی با ماتریس‌ضرایب نامنفرد به‌دست آورد . این فرمولها ، به افتخار ریاضیدان سوییسی گابریل کرامر[1] (۱۷۵۲ - ۱۷۰۴) ، ***قاعدهٔ کرامر*** نام یافته‌اند .

---

1. Gabriel Cramer

قضیهٔ ۱۴۰۳ . قاعدهٔ کرامر. هرگاه دستگاه

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_j = b_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n)$$

مرکب از n معادلهٔ خطی و n مجهول $x_1, \ldots, x_n$ دارای ماتریس ضرایب نامنفرد $A = (a_{ij})$ باشد، آنگاه برای دستگاه جواب منحصر بفردی وجود دارد که از فرمولهای زیر به‌دست می‌آید:

$$\text{به‌ازای } j = 1, 2, \ldots, n \text{ ،} \quad x_j = \frac{1}{\det A}\sum_{k=1}^{n} b_k \operatorname{cof} a_{kj} \text{ .} \tag{۳۴۰۳}$$

برهان. دستگاه را می‌توان به صورت یک معادلهٔ ماتریسی نوشت:

$$AX = B,$$

که در آن X و B ماتریسهایی ستونی‌اند:

$$X = \begin{bmatrix} x_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ x_n \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} b_1 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ b_n \end{bmatrix}$$

. چون A نامنفرد است، جواب منحصر بفرد X وجود دارد به‌این صورت

$$X = A^{-1}B = \frac{1}{\det A}(\operatorname{cof} A)^t B \tag{۳۵۰۳}$$

فرمولهای (۳۴۰۳) با متحد گرفتن مولفه‌ها در (۳۵۰۳) به‌دست می‌آیند.

باید توجه داشت که فرمول مربوط به x_j در (۳۴۰۳) را می‌توان به صورت خارج قسمت دو دترمینان نوشت:

$$x_j = \frac{\det C_j}{\det A},$$

که در آن C_j ماتریسی است که از A با تعویض ستون j ام A با ماتریس ستونی B به‌دست می‌آید.

۱۷۰۳ تمرین

۱ . ماتریس همسازه‌ای هریک از ماتریسهای زیر را تعیین کنید:

(آ) $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ ؛ (ب) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ؛ (پ) $\begin{bmatrix} 3 & 1 & 2 & 4 \\ 2 & 0 & 5 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & 6 \\ -2 & 3 & 2 & 3 \end{bmatrix}$.

۲ . معکوس هریک از ماتریسهای نامنفرد تمرین ۱ را مشخص نمایید .

۳ . تمام مقادیر اسکالر λ که به‌ازای آنها ماتریس $A - \lambda I$ منفرد است را بیابید مشروط بر اینکه A به‌صورت زیر باشد :

(آ) $\begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$ ؛ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \end{bmatrix}$ ؛ (پ) $\begin{bmatrix} 11 & -2 & 8 \\ 19 & -3 & 14 \\ -8 & 2 & -5 \end{bmatrix}$.

۴ . اگر A یک ماتریس $n \times n$ با $n \geq 2$ باشد ، هریک از خواص زیر را در مورد ماتریس همسازه‌ای آن ثابت کنید :

(آ) $\operatorname{cof}(A^t) = (\operatorname{cof} A)^t$ ؛ (ب) $(\operatorname{cof} A)^t A = (\det A) I$ ؛

(پ) $A(\operatorname{cof} A)^t = (\operatorname{cof} A)^t A$ (A با ترانهاده‌ٔ ماتریس همسازه‌ای خود تعویض می‌شود) .

۵ . دستگاههای زیر را با استفاده از قاعدهٔ کرامر حل کنید :

(آ) $x + 2y + 3z = 8, \quad 2x - y + 4z = 7, \quad -y + z = 1$ ؛

(ب) $x + y + 2z = 0, \quad 3x - y - z = 3, \quad 2x + 5y + 3z = 4$.

۶ . (آ) بگویید چرا هریک از معادلات زیر معادلهٔ دکارتی خط مستقیمی است درصفحهٔ xy که از دو نقطهٔ متمایز (x_1, y_1) و (x_2, y_2) می‌گذرد :

$$\det\begin{bmatrix} x - x_1 & y - y_1 \\ x_2 - x_1 & y_2 - y_1 \end{bmatrix} = 0; \qquad \det\begin{bmatrix} x & y & 1 \\ x_1 & y_1 & 1 \\ x_2 & y_2 & 1 \end{bmatrix} = 0.$$

(ب) روابط نظیر را برای یک صفحه در فضای 3 که از سه نقطهٔ متمایز می‌گذرد بیان و اثبات کنید .

(پ) روابط نظیر را برای یک دایره در صفحهٔ xy که از سه نقطهٔ غیر واقع بریک

استقامت بیان و اثبات کنید.

۷. فرض کنید n^2 تابع f_{ij} داده شده که هریک بر بازهٔ (a, b) مشتقپذیر است، و به ازای هر x در (a, b) تعریف کنید $F(x) = \det [f_{ij}(x)]$. ثابت کنید $F'(x)$ مجموع n دترمینان است؛

$$F'(x) = \sum_{i=1}^{n} \det A_i(x),$$

که در آن $A_i(x)$ ماتریسی است که با مشتقگیری از توابع سطر i م $[f_{ij}(x)]$ به دست می‌آید.

۸. هر ماتریس $n \times n$ از توابع به شکل $W(x) = [u_j^{(i-1)}(x)]$، که در آن هر سطر بعداز اولی مشتق سطر قبلی است، به‌افتخار ریاضیدان لهستانی رونسکی[1] (۱۸۵۳ – ۱۷۷۸) **ماتریس رونسکی** نامیده می‌شود. ثابت کنید مشتق دترمینان $W(x)$ دترمینان ماتریسی است که با مشتقگیری از هر درایه در سطر آخر $W(x)$ به دست می‌آید. [**راهنمایی.** تمرین ۷ را به‌کار برید..]

1. J. M. H. Wronski

۴

مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه

۱.۴ تبدیلات خطی با نمایشهای ماتریسی قطری

فرض کنیم $T: V \to V$ یک تبدیل خطی بر فضای خطی با بعد متناهی V باشد. خواصی از T که ازهردستگاه مختصات (پایه) برای V مستقل‌اند **خواص ذاتی** T نامیده می‌شوند. جمیع نمایشهای ماتریسی T در این خواص سهیم‌اند. اگر پایه طوری اختیار شود که ماتریس حاصل شکل سادهٔ خاصی داشته باشد، احتمالاً" می‌توان بعضی از خواص‌ذاتی را مستقیماً" از نمایش ماتریسی به‌دست آورد.

از جمله ساده‌ترین ماتریسها ماتریسهای قطری هستند. لذا، ممکن است بپرسیم آیا هر تبدیل خطی یک‌نمایش ماتریسی قطری دارد یا نه. در فصل ۲ مسئلهٔ یافتن نمایش ماتریسی قطری تبدیل خطی $T: V \to W$، که در آن $\dim V = n$ و $\dim W = m$، مطرح شد. درقضیهٔ ۱۴۰۲ ثابت کردیم که همیشه پایه‌ای مانند $(e_1, \ldots, e_n)$ برای V و پایه‌ای مانند $(w_1, \ldots, w_m)$ برای W وجود دارند بطوری که ماتریس T نسبت به این جفت پایه یک ماتریس قطری است. بخصوص، اگر $W = V$، ماتریس یک ماتریس قطری مربعی است. حالت جدید در اینجا این است که می‌خواهیم برای V و W **یک پایه** به‌کار بریم. با این قید، یافتن یک نمایش ماتریسی قطری برای T همیشه میسر نیست. لذا، به مسئلهٔ تعیین اینکه کدام تبدیلها دارای نمایش ماتریسی قطری اند می‌پردازیم.

نمادگذاری. اگر $A = (a_{ij})$ یک ماتریس قطری باشد، می‌نویسیم

$$A = \operatorname{diag}(a_{11}, a_{22}, \ldots, a_{nn}).$$

به‌آسانی می‌توان شرط لازم و کافی برای آنکه یک تبدیل خطی نمایش ماتریسی

فطری داشته باشد را بیان کرد.

قضیهٔ ۱۰۴. تبدیل خطی $T: V \to V$، که در آن $\dim V = n$، داده شده است. هرگاه T دارای نمایش ماتریسی قطری باشد، آنگاه مجموعهٔ مستقلی از عنصرهای $u_1, \ldots, u_n$ در V و مجموعهٔ نظیرش از اسکالرهای $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ وجود دارند بطوری که

$$T(u_k) = \lambda_k u_k \text{ ، } k = 1, 2, \ldots, n \text{ به‌ازای} \quad (۱۰۴)$$

بعکس، هرگاه مجموعهٔ مستقلی از عناصر $u_1, \ldots, u_n$ در V ومجموعهٔ نظیرش از اسکالرهای $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ صادق در (۱۰۴) وجود داشته باشند، آنگاه ماتریس

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$$

یک نمایش T نسبت به پایهٔ $(u_1, \ldots, u_n)$ می‌باشد.

برهان. ابتدا فرض می‌کنیم T یک نمایش ماتریسی قطری مانند $A = (a_{ik})$ نسبت به پایه‌ای چون $(e_1, \ldots, e_n)$ داشته باشد. عمل T بر عناصر پایه از فرمول

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i = a_{kk} e_k$$

به دست می‌آید، زیرا به‌ازای $i \neq k$، $a_{ik} = 0$. این رابطهٔ (۱۰۴) را به ازای $u_k = e_k$ و $\lambda_k = a_{kk}$ ثابت می‌کند.

حال فرض کنیم عناصر مستقل $u_1, \ldots, u_n$ و اسکالرهای $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ صادق در (۱۰۴) وجود داشته باشند. چون $u_1, \ldots, u_n$ مستقل‌اند، پس تشکیل یک‌پایه برای V می‌دهند. هرگاه تعریف کنیم $a_{kk} = \lambda_k$ و، به‌ازای $i \neq k$، $a_{ik} = 0$، آنگاه ماتریس $A = (a_{ik})$ یک ماتریس‌قطری‌است که T را نسبت به پایهٔ $(u_1, \ldots, u_n)$ نمایش می‌دهد.

بنابراین، مسئلهٔ یافتن نمایش ماتریسی قطری یک تبدیل خطی به مسئلهٔ دیگری تبدیل شده‌است، و آن یافتن عناصر مستقل $u_1, \ldots, u_n$ و اسکالرهای $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ صادق در (۱۰۴) است. عنصرهای u_k و اسکالرهای λ_k صادق در (۱۰۴) بترتیب **بردارهای ویژه و مقدارهای ویژهٔ** T نام دارند. در بخش بعد، بردارهای ویژه و مقدارهای ویژه*

---

* **بردار ویژه‌ومقدار ویژه در انگلیسی بترتیب** *eigenvector* **و** *eigenvalue* **گفته می‌شوند،**

را در محدودهٔ کلیتری بررسی خواهیم کرد .

۲۰۴ بردارهای ویژه و مقدارهای ویژهٔ یک تبدیل خطی

در این‌بحث ، V یک فضای‌خطی‌و S زیر فضایی از V است . فضاهای S و V لازم‌نیست با بعد متناهی باشند .

تعریف. فرض‌کنیم $T: S \to V$ یک تبدیل خطی از S بتوی V باشد . اسکالر λ یک **مقدار ویژهٔ** T نام دارد اگر عنصر ناصفری چون x در S باشد بطوری که

$$T(x) = \lambda x. \tag{۲۰۴}$$

عنصر x را یک **بردار ویژهٔ** T متعلق به λ می‌نامند . اسکالر λ یک مقدار ویژهٔ نظیر به x نامیده می‌شود .

نظیر به هر بردار ویژهٔ x دقیقا " یک مقدار ویژه وجود دارد . در واقع ، هرگاه‌به ازای $x \neq O$ی داشته باشیم $T(x) = \lambda x$ و $T(x) = \mu x$ ، آنگاه $\lambda x = \mu x$ ؛ در نتیجه ، $\lambda = \mu$.

تذکر. با اینکه‌معادلهٔ (۲۰۴) همیشه به‌ازای $x = O$ و هر اسکالر λ برقرار است ، تعریف O را به‌عنوان یک بردار ویژه مستثنی می‌کند . یک دلیل این تبعیض علیه O این است که برای هر بردار ویژهٔ x درست یک مقدار ویژهٔ λ داشته باشیم .

مثالهای زیر معنی این مفهومها را توضیح می‌دهند .

مثال ۱. ضرب در اسکالر ثابت. فرض‌کنیم $T: S \to V$ تبدیلی خطی باشد که با معادلهٔ $T(x) = cx$ به ازای هر x در S تعریف می‌شود ، و در آن c یک اسکالر ثابت

← که ترجمه‌های ناقص واژه‌های آلمانی *Eigenvektor* و *Eigenwert* می‌باشند . برخی از مولفان انگلیسی زبان از اصطلاحات *characteristic vector* یا *proper vector* به عنوان مترادفهایی برای *eigenvector* استفاده‌می‌کنند . *eigenvalues* نیز *characteristic values* ، *proper values* یا *latent roots* نامیده می شوند .

می‌باشد. در این مثال هر عنصر ناصفر S یک بردار ویژهٔ متعلق به اسکالر c است.

مثال ۲. فضای ویژهٔ $E(\lambda)$ مرکب از تمام x هایی که $T(x) = \lambda x$. فرض کنیم $T: S \to V$ یک تبدیل خطی با مقدار ویژهٔ λ باشد. فرض کنیم $E(\lambda)$ مجموعهٔ ***تمام*** عنصرهای x در S باشد که $T(x) = \lambda x$. این مجموعه شامل عنصر صفر O و تمام بردارهای ویژهٔ متعلق به λ است. به آسانی ثابت می‌شود که $E(\lambda)$ یک زیرفضای S است، زیرا که اگر x و y در $E(\lambda)$ باشند، به‌ازای هر اسکالر a و b داریم

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y) = a\lambda x + b\lambda y = \lambda(ax + by).$$

بنابراین، $(ax + by) \in E(\lambda)$؛ در نتیجه، $E(\lambda)$ یک زیرفضا می‌باشد. فضای $E(\lambda)$ **فضای ویژهٔ** نظیر به λ نامیده می‌شود. این فضا ممکن است با بعد متناهی یا نامتناهی باشد. هرگاه $E(\lambda)$ با بعد متناهی باشد، آنگاه $\dim E(\lambda) \geq 1$، زیرا $E(\lambda)$ شامل دست کم یک عنصر ناصفر مانند x نظیر به λ هست.

مثال ۳. وجود مقدارهای ویژهٔ صفر. اگر یک بردار ویژه وجود داشته باشد، بنا به تعریف، نمی‌تواند صفر باشد. اما اسکالر صفر ***می‌تواند*** یک مقدار ویژه باشد. در واقع، اگر 0 یک مقدار ویژه برای x باشد، $T(x) = 0x = O$؛ در نتیجه، x در فضای پوچ T است. بعکس، اگر فضای پوچ T شامل عناصر ناصفری باشد، هریک از آنها یک بردار ویژه با مقدار ویژهٔ 0 است. در حالت کلی، $E(\lambda)$ فضای پوچ $T - \lambda I$ می‌باشد.

مثال ۴. انعکاس در صفحهٔ xy. فرض کنیم $S = V = V_3(\mathbf{R})$ و T یک انعکاس در صفحهٔ xy باشد. یعنی، فرض کنیم T بر بردارهای پایهٔ $\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k}$ به صورت زیر عمل کند: $T(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i}, T(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{j}, T(\boldsymbol{k}) = -\boldsymbol{k}$. هربردار ناصفر در صفحهٔ xy یک بردار ویژه با مقدار ویژهٔ یک است. بردارهای ویژهٔ باقی به شکل $c\boldsymbol{k}$ اند، که $c \neq 0$؛ هریک از آنها دارای مقدار ویژهٔ -1 می‌باشد.

مثال ۵. دوران صفحه به اندازهٔ زاویهٔ ثابت α. این مثال فایدهٔ بخصوصی دارد، زیرا نشان می‌دهد که وجود بردارهای ویژه ممکن است به میدان زمینه از اسکالرها بستگی داشته باشد. صفحه را می‌توان به دو طریق مختلف یک فضای خطی انگاشت: (۱) به‌صورت

یک فضای خطی حقیقی 2 بعدی، $V = V_2(\mathbf{R})$ ، با دو عنصر پایهٔ $(1, 0)$ و $(0, 1)$ ، و با اعداد حقیقی به عنوان اسکالرها؛ یا (۲) به صورت یک فضای خطی **مختلط** 1 بعدی، $V = V_1(\mathbf{C})$ ، با یک عنصر پایهٔ 1 ، و اعداد مختلط به‌عنوان اسکالرها.

ابتدا تعبیر دوم را درنظر می‌گیریم. هر عنصر $z \neq 0$ از $V_1(\mathbf{C})$ را می‌توان به‌شکل قطبی، یعنی $z = re^{i\theta}$ ، بیان کرد. هرگاه T ، z را به‌اندازهٔ α بچرخاند، آنگاه $T(z) = re^{i(\theta+\alpha)} = e^{i\alpha}z$. لذا، هر $z \neq 0$ یک بردار ویژه با مقدار ویژهٔ $\lambda = e^{i\alpha}$ است. توجه کنید که مقدار ویژهٔ $e^{i\alpha}$ حقیقی نیست مگر آنکه α مضرب صحیحی از π باشد.

حال صفحه را به صورت یک فضای خطی **حقیقی**، یعنی $V_2(\mathbf{R})$ ، درنظر می‌گیریم. چون اسکالرهای $V_2(\mathbf{R})$ اعدادی حقیقی‌اند، دوران T فقط وقتی مقدارهای ویژهٔ حقیقی دارد که α مضرب صحیحی از π باشد. به عبارت دیگر، هرگاه α مضرب صحیحی از π نباشد، آنگاه T مقدار ویژهٔ حقیقی ندارد؛ و در نتیجه، بردار ویژه نخواهد داشت. بنابر این، وجود بردارهای ویژه و مقدارهای ویژه ممکن است به انتخاب اسکالرها برای V بستگی داشته باشد.

مثال ۶. عملگر مشتقگیری. فرض کنیم V فضای خطی تمام توابع حقیقی f باشد که‌بر بازهٔ باز معلومی از هر مرتبه مشتق دارند. همچنین، D تبدیلی خطی باشد که هر f را بروی مشتقش می‌نگارد، $D(f) = f'$. بردارهای ویژهٔ D ، f های ناصفری هستند که‌در معادله‌ای به شکل

$$f' = \lambda f ,$$

به‌ازای λ ای حقیقی، صدق می‌کنند. این یک معادلهٔ دیفرانسل خطی مرتبهٔ اول است. همهٔ جوابهای آن از فرمول

$$f(x) = ce^{\lambda x}$$

به‌دست می‌آیند، که در آن c ثابت حقیقی دلخواهی است. بنابر این، بردارهای‌ویژهٔ D تمام توابع نمایی $f(x) = ce^{\lambda x}$ ، با $c \neq 0$ می‌باشند. بردار ویژهٔ نظیر به $f(x) = ce^{\lambda x}$ عبارت است‌از λ . در مثالهایی مثل‌این‌که در آنها V یک فضای تابعی است، بردارهای ویژه ***تابعهای ویژه*** نامیده می‌شوند.

مثال ۷. عملگر انتگرالگیری. فرض‌کنیم V فضای خطی جمیع توابع حقیقی پیوسته بر

بازهٔ متناهی $[a, b]$ باشد. هرگاه $f \in V$ ، $g = T(f)$ را تابع زیر تعریف می‌کنیم:

اگر $a \leq x \leq b$ ، $g(x) = \int_a^x f(t)\, dt$.

تابعهای ویژهٔ T (در صورت وجود) f های ناصفری هستند که در معادله‌ای به‌شکل

$$\int_a^x f(t)\, dt = \lambda f(x), \qquad (۳۰۴)$$

به ازای λ ای حقیقی، صدق می‌کنند. اگر یک تابع ویژه وجود داشته باشد، می‌توان از این معادله مشتق گرفت و رابطهٔ $f(x) = \lambda f'(x)$ را به‌دست آورد، که از آن، مشروط بر اینکه $\lambda \neq 0$ ، خواهیم داشت $f(x) = ce^{x/\lambda}$. به عبارت دیگر، تنها نامزد برای تابعهای ویژه توابع نمایی به شکل $f(x) = ce^{x/\lambda}$ است با $c \neq 0$ و $\lambda \neq 0$. اما، اگر در (۳۰۴) قرار دهیم $x = a$ ، به‌دست می‌آوریم

$$0 = \lambda f(a) = \lambda c e^{a/\lambda}.$$

چون $e^{a/\lambda}$ هیچگاه صفر نیست، می‌بینیم که معادلهٔ $T(f) = \lambda f$ نمی‌تواند به‌ازای f ناصفر برقرار شود؛ در نتیجه، T تابع ویژه و مقدار ویژه نخواهد داشت.

مثال ۸. زیرفضای پیموده شده به‌وسیلهٔ یک بردار ویژه. فرض کنیم $T: S \to V$ تبدیلی خطی با مقدار ویژهٔ λ باشد. همچنین، x یک بردار ویژهٔ متعلق به λ بوده و $L(x)$ زیر فضای پیموده شده به وسیلهٔ x باشد. یعنی، $L(x)$ مجموعهٔ تمام مضارب اسکالر x باشد. به‌آسانی می‌توان نشان داد که T ، $L(x)$ **را** بتوی خودش می‌نگارد. در واقع، اگر $y = cx$ ، داریم

$$T(y) = T(cx) = cT(x) = c(\lambda x) = \lambda(cx) = \lambda y.$$

هرگاه $c \neq 0$ ، آنگاه $y \neq O$ ؛ درنتیجه، هر عنصر ناصفر y از $L(x)$ نیز یک بردار ویژهٔ متعلق به λ است.

زیر فضای U از S تحت T **پایا** است درصورتی که T هر عنصر U را بروی عنصری از U بنگارد. هم اکنون نشان دادیم که زیر فضای پیموده شده به وسیلهٔ یک بردار ویژه تحت T پایا است.

۳۰۴ استقلال خطی بردارهای ویژهٔ نظیر به مقدارهای ویژهٔ متمایز

یکی از مهمترین خواص مقدارهای ویژه درقضیهٔ زیرتوصیف شده است. مثل قبل، S یک زیرفضای فضای خطی V است.

قضیهٔ ۲۰۴ . فرض کنیم $u_1, \ldots, u_k$ بردارهای ویژهٔ تبدیل خطی $T: S \to V$ بوده، و مقدارهای ویژهٔ نظیر $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ متمایز باشند. در این صورت، بردارهای ویژهٔ $u_1, \ldots, u_k$ مستقل میباشند.

برهان. اثبات به استقرا بر k است. نتیجه وقتی $k = 1$ واضح است. پس فرض کنیم نتیجه برای هر مجموعهٔ مرکب از $k - 1$ بردار ویژه ثابت شده باشد. همچنین، $u_1, \ldots, u_k$، k بردار ویژهٔ متعلق به مقدارهای ویژهٔ متمایز بوده، و اسکالرهای c_i وجود داشته باشند بطوری که

$$\sum_{i=1}^{k} c_i u_i = O. \qquad (۴۰۴)$$

با اعمال T در دو طرف (۴۰۴) و استفاده از این امر که $T(u_i) = \lambda_i u_i$، درمییابیم که

$$\sum_{i=1}^{k} c_i \lambda_i u_i = O. \qquad (۵۰۴)$$

با ضرب (۴۰۴) در λ_k و تفریق آن از (۵۰۴)، معادلهٔ

$$\sum_{i=1}^{k-1} c_i(\lambda_i - \lambda_k) u_i = O$$

بهدست میآید. اما چون $u_1, \ldots, u_{k-1}$ مستقلاند، باید بهازای هر $i = 1, 2, \ldots, k - 1$ داشته باشیم $c_i(\lambda_i - \lambda_k) = 0$. چون مقدارهای ویژه متمایزند، بهازای $i \neq k$ داریم $\lambda_i \neq \lambda_k$؛ درنتیجه، بهازای $i = 1, 2, \ldots, k - 1$، $c_i = 0$. از (۴۰۴) مشاهده میشود که c_k نیز 0 است؛ در نتیجه، بردارهای ویژهٔ $u_1, \ldots, u_k$ مستقل میباشند.

توجه کنید که قضیهٔ ۲۰۴ در صورتی که عنصر صفر مجاز به بردار ویژه بودن باشد درست نیست. این دلیل دیگری است برای معاف کردن O از بردار ویژه بودن.

تذکار. عکس قضیهٔ ۲۰۴ برقرار نیست. یعنی، هرگاه T دارای بردارهای ویژهٔ مستقل

$u_1, \ldots, u_k$ باشد، مقدارهای ویژهٔ نظیر $\lambda_1, \ldots, \lambda_k$ الزاماً متمایز نیستند. مثلاً، هرگاه T تبدیل همانی باشد، به‌ازای هر x، $T(x) = x$، آنگاه هر $x \neq O$ یک بردار ویژه است اما فقط یک مقدار ویژه وجود دارد، $\lambda = 1$.

قضیهٔ ۲.۴ نتایج مهمی در ابعاد متناهی دارد.

قضیهٔ ۳.۴. **هرگاه $\dim V = n$، هر تبدیل خطی $T: V \to V$ حداکثر n مقدار ویژهٔ متمایز دارد. هرگاه T درست n مقدار ویژهٔ متمایز داشته باشد، بردارهای ویژهٔ نظیر یک پایه برای V تشکیل می‌دهند و ماتریس T نسبت به این پایه یک ماتریس قطری است که درایه‌های قطری آن مقدارهای ویژه می‌باشند.**

برهان. هرگاه $n + 1$ مقدار ویژهٔ متمایز وجود می‌داشت، آنگاه، طبق قضیهٔ ۲.۴، V شامل $n + 1$ عنصر مستقل می‌شد. این امر ممکن نیست، زیرا $\dim V = n$. حکم دوم از قضایای ۱.۴ و ۲.۴ نتیجه می‌شود.

تذکر. قضیهٔ ۳.۴ به‌ما می‌گوید که وجود n مقدار ویژهٔ متمایز شرطی است **کافی** برای آنکه T نمایش ماتریسی قطری داشته باشد. این شرط لازم نیست. تبدیلاتی خطی وجود دارند با تعداد مقادیر ویژهٔ متمایز کوچکتر از n که می‌توان آنها را با ماتریسهای قطری نمایش داد. تبدیل همانی یک نمونه از آنهاست. همهٔ مقدارهای ویژهٔ آن مساوی یک‌اند ولی می‌توان آن را با ماتریس همانی نمایش داد. قضیهٔ ۱.۴ به ما می‌گوید که وجود n بردار ویژهٔ مستقل **لازم و کافی** است برای آنکه T نمایش ماتریسی قطری داشته باشد.

۴.۴ تمرین

۱. (آ) ثابت کنید که اگر T مقدار ویژهٔ λ داشته باشد، aT مقدار ویژهٔ $a\lambda$ دارد.
(ب) ثابت کنید که اگر x یک بردار ویژه برای T_1 و T_2 باشد، x یک بردار ویژه برای $aT_1 + bT_2$ نیز هست. مقدارهای ویژه با هم چه ارتباطی دارند؟

۲. فرض کنید $T: V \to V$ دارای بردار ویژهٔ x متعلق به مقدار ویژهٔ λ باشد. ثابت کنید x یک بردار ویژهٔ T^2 متعلق به λ^2 است و، بطور کلی، x یک بردار ویژهٔ

T^n متعلق به λ^n است. سپس، با استفاده از تمرین ۱، نشان دهید که هرگاه P یک چندجمله‌ای باشد، x یک بردار ویژهٔ $P(T)$ متعلق به $P(\lambda)$ است.

۳ . صفحه را به صورت یک فضای خطی حقیقی در نظر بگیرید، یعنی $V = V_2(\mathbf{R})$ ، و فرض کنید T دوران V به‌اندازهٔ $\pi/2$ رادیان باشد. با آنکه T بردار ویژه ندارد، ثابت کنید هر بردار ناصفر یک بردار ویژه برای T^2 است.

۴ . هرگاه $T: V \to V$ این خاصیت را داشته باشد که T^2 دارای مقدار ویژهٔ نامنفی λ^2 باشد، ثابت کنید حداقل یکی از λ یا $\lambda-$ یک مقدار ویژه برای T است.

[**راهنمایی** . $T^2 - \lambda^2 I = (T + \lambda I)(T - \lambda I)$.]

۵ . فرض کنید V فضای خطی تمام توابع حقیقی مشتقپذیر بر $(0, 1)$ باشد. اگر $f \in V$ ، $g = T(f)$ را به‌این صورت تعریف کنید که به‌ازای هر t در $(0, 1)$ ، $g(t) = tf'(t)$ ثابت کنید هر λ ی حقیقی یک مقدار ویژه برای T است. و تابعهای ویژهٔ نظیر به λ را معین نمایید.

۶ . فرض کنید V فضای خطی تمام چندجمله‌ایهای حقیقی مانند $p(x)$ از درجهٔ نابیشتر از n باشد. اگر $p \in V$ ، $q = T(p)$ را به‌این صورت تعریف کنید که به ازای هر t ی حقیقی $q(t) = p(t + 1)$. ثابت کنید T فقط مقدار ویژهٔ 1 را دارد. تابعهای ویژهٔ متعلق به این مقدار ویژه چیستند؟

۷ . فرض کنید V فضای خطی تمام توابع پیوسته‌ای بر $(-\infty, +\infty)$ باشد که انتگرال $\int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ به‌ازای هر x حقیقی وجود دارد. اگر $f \in V$ ، $g = T(f)$ را با معادلهٔ $g(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)\,dt$ تعریف کنید. ثابت کنید هر λ ی مثبت یک مقدار ویژه برای T است و تابعهای ویژهٔ نظیر به λ را معین نمایید.

۸ . فرض کنید V فضای خطی تمام توابع پیوسته‌ای بر $(-\infty, +\infty)$ باشد که انتگرال $\int_{-\infty}^{x} t\,f(t)\,dt$ به‌ازای هر x حقیقی وجود دارد. اگر $f \in V$ ، $g = T(f)$ را با معادلهٔ $g(x) = \int_{-\infty}^{x} t\,f(t)\,dt$ تعریف کنید. ثابت کنید هر λ ی منفی یک مقدار ویژه برای T است و تابعهای ویژهٔ نظیر به λ را معین نمایید.

۹ . فرض کنید $V = C(0, \pi)$ فضای خطی حقیقی تمام توابع حقیقی پیوسته بر بازهٔ $[0, \pi]$ باشد. همچنین، S زیرفضای تمام توابع f ی باشد که دارای مشتق دوم پیوسته به‌صورت خطی‌اند و نیز در شرایط کرانه‌ای $f(0) = f(\pi) = 0$ صدق می‌کنند. فرض کنید $T: S \to V$ تبدیلی خطی باشد که هر f را بروی مشتق دوم آن می‌نگارد؛ یعنی،

$T(f) = f''$. ثابت کنید مقدارهای ویژهٔ T اعدادی به شکل $-n^2$ اند، که درآن $n = 1, 2, \ldots$ ، و تابعهای ویژهٔ نظیر به $-n^2$ عبارتند از $f(t) = c_n \sin nt$ ، که در آن $c_n \neq 0$.

۱۰ . فرض کنید V فضای خطی تمام دنبالههای همگرای حقیقی مانند $\{x_n\}$ باشد. $T: V \to V$ را بهصورت زیر تعریف کنید: اگر $x = \{x_n\}$ یک دنبالهٔ همگرا با حد a باشد، قرار دهید $T(x) = \{y_n\}$ ، که در آن به ازای $n \geq 1$ ، $y_n = a - x_n$. ثابت کنید T فقط دو مقدار ویژه دارد، $\lambda = 0$ و $\lambda = -1$ ، و بردارهای ویژهٔ متعلق به چنین λ ای را معین نمایید.

۱۱ . فرض کنید تبدیل خطی T دارای دو بردار ویژهٔ x و y متعلق به مقدارهای ویژهٔ متمایز λ و μ باشد. ثابت کنید که اگر $ax + by$ یک بردار ویژهٔ T باشد، $a = 0$ یا $b = 0$.

۱۲ . فرضکنید $T: S \to V$ یک تبدیلخطی بوده بطوری که هر عنصر ناصفر S یکبردار ویژه باشد. ثابت کنید اسکالری چون c هست بطوری که $T(x) = cx$. به عبارت دیگر، تنها تبدیل واجد این خاصیت مضرب اسکالری از همانی است.

[**راهنمایی.** از تمرین ۱۱ استفاده کنید.]

۵.۴ حالتابعاد متناهی. چندجملهایهای مشخص

هرگاه $\dim V = n$ ، مسئلهٔ یافتن مقدارهای ویژهٔ تبدیل خطی $T: V \to V$ را میتوان بهکمک دترمینانها حلکرد. میخواهیم آن اسکالرهای λ را بیابیم که معادلهٔ $T(x) = \lambda x$ دارای جواب $x \neq O$ باشد. معادلهٔ $T(x) = \lambda x$ را میتوان به شکل

$$(\lambda I - T)(x) = O$$

نوشت، که در آن I تبدیل همانی است. هرگاه فرض کنیم $T_\lambda = \lambda I - T$ ، آنگاه λ یک بردار ویژه است اگر و فقط اگر معادلهٔ

$$T_\lambda(x) = O \qquad (۶.۴)$$

دارای جواب ناصفری چون x باشد، که درآن حالت T_λ (بخاطر قضیهٔ ۱۰.۲) معکوسپذیر نیست. لذا، طبق قضیهٔ ۲۰.۲، یک جواب ناصفر از (۶.۴) وجود دارد اگر و فقط اگر T_λ منفرد باشد. هرگاه A یک نمایشماتریسی T باشد، آنگاه $\lambda I - A$ یک نمایش ماتریسی T_λ است. بنابر قضیهٔ ۱۳.۳، ماتریس $\lambda I - A$ منفرد است اگر و فقط اگر

$\det(\lambda I - A) = 0$. بنابر این ، اگر λ یک مقدار ویژهٔ T باشد ، در معادلهٔ

$$\det(\lambda I - A) = 0 \tag{۷۰۴}$$

صدق می‌کند . بعکس، هر λ در *میدان زمینه از اسکالرها* که در (۷۰۴) صدق کند یک مقدار ویژه است . این امر ما را به بررسی دترمینان $\det(\lambda I - A)$ به عنوان تابعی از λ وامی‌دارد .

قضیهٔ ۴۰۴ . هرگاه A یک ماتریس $n \times n$ بوده و I ماتریس همانی $n \times n$ باشد ، تابع f تعریف شده با

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

یک چندجمله‌ای از λ و از درجهٔ n است . بعلاوه، جمله با بالاترین درجه λ^n است ، و جملهٔ ثابت $f(0) = \det(-A) = (-1)^n \det A$ می‌باشد .

برهان . رابطهٔ $f(0) = \det(-A)$ فوراً از تعریف f نتیجه می‌شود . ثابت می‌کنیم f فقط در حالت $n \le 3$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ n است . اثبات در حالت کلی را می‌توان به استقرا انجام داد و به عنوان تمرین باقی می‌ماند . (ر.ک. تمرین ۹ در بخش ۸۰۴ .)

به‌ازای $n = 1$ دترمینان چندجمله‌ای خطی $f(\lambda) = \lambda - a_{11}$ است . به‌ازای $n = 2$ داریم

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} \end{vmatrix} = (\lambda - a_{11})(\lambda - a_{22}) - a_{12}a_{21}$$

$$= \lambda^2 - (a_{11} + a_{22})\lambda + (a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}),$$

که یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم از λ است . به‌ازای $n = 3$ خواهیم داشت

$$\det(\lambda I - A) = \begin{vmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & -a_{13} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{31} & -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix}$$

$$= (\lambda - a_{11})\begin{vmatrix} \lambda - a_{22} & -a_{23} \\ -a_{32} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} + a_{12}\begin{vmatrix} -a_{21} & -a_{23} \\ -a_{31} & \lambda - a_{33} \end{vmatrix} - a_{13}\begin{vmatrix} -a_{21} & \lambda - a_{22} \\ -a_{31} & -a_{32} \end{vmatrix}.$$

دو جملهٔ آخر چندجملهایهایی خطی از λ اند. جملهٔ اول یک چندجملهای درجهٔ سه است، جمله با بالاترین درجه λ^3 است.

تعریف. اگر A یک ماتریس $n \times n$ باشد، دترمینان

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$$

چندجملهای مشخص A نامیده می‌شود.

ریشه‌های چندجملهای مشخص A اعدادی مختلط‌اند، و بعضی از آنها ممکن است حقیقی باشند. چنانچه F میدان حقیقی $\mathbf{R}$ یا میدان مختلط $\mathbf{C}$ باشد، قضیهٔ زیر را خواهیم داشت:

قضیهٔ ۵.۴. *فرض کنیم $T: V \to V$ یک تبدیل خطی باشد، که در آن V اسکالرهایش در F بوده و $\dim V = n$. همچنین، A یک نمایش ماتریسی T باشد. در این صورت، مجموعهٔ مقدارهای ویژهٔ T از آن ریشه‌های چندجملهای مشخص A که در F اند تشکیل شده است.*

برهان. بحث قبل از قضیهٔ ۴.۴ نشان می‌دهد که هر مقدار ویژهٔ T در معادلهٔ $\det(\lambda I - A) = 0$ صدق می‌کند و هر ریشهٔ چندجملهای مشخص A که در F باشد یک مقدار ویژهٔ T است.

ماتریس A به انتخاب پایه برای V بستگی دارد، اما مقدارهای ویژهٔ T بی‌توسل به یک پایه تعریف شده بودند. از اینرو، **مجموعهٔ** ریشه‌های چندجملهای مشخص A باید از انتخاب پایه مستقل باشد. از این بیشتر می‌شود گفت. در یکی از بخشهای آتی ثابت می‌کنیم که چندجملهای مشخص خود از انتخاب پایه مستقل است. حال می‌پردازیم به محاسبهٔ مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه در حالت ابعاد متناهی.

۶.۴ محاسبهٔ مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه درحالت ابعاد متناهی

درحالت ابعاد متناهی، مقدارهای ویژه و بردارهای ویژهٔ تبدیل خطی T مقدارهای ویژه

وبردارهای ویژهٔ هرنمایش ماتریسی T نیز نامیده می‌شوند. بنابر این، مقدارهای ویژهٔ ماتریس مربعی A ریشه‌های چندجمله‌ای مشخص $f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ است. بردارهای ویژهٔ نظیر به‌مقدار ویژهٔ λ آن بردارهای ناصفر $X = (x_1, \ldots, x_n)$ هستند که به صورت ماتریسهای ستونی $n \times 1$ در معادلهٔ ماتریسی

$$(\lambda I - A)X = O \quad \text{یا} \quad AX = \lambda X$$

صدق می‌کنند. این یک دستگاه مرکب از n معادلهٔ خطی برای مولفه‌های $x_1, \ldots, x_n$ است. به‌محض دانستن λ، می‌توان بردارهای ویژه را با حل این دستگاه به دست‌آورد. این امر را با سه مثال که کیفیات مختلفی را نشان می‌دهند توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. ماتریس با مقدارهای ویژهٔ متمایز. ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

دارای چندجمله‌ای مشخص

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 & -4 \\ 1 & 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3)$$

است؛ در نتیجه، سه مقدار ویژهٔ متمایز وجود دارند: 1، -1، و 3. برای یافتن بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda = 1$، دستگاه $AX = X$، یا

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

را حل می‌کنیم. این نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= x_2 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 &= x_3, \end{aligned}$$

که می‌توان آن را به‌صورت

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -x_1 - \ \ x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

نوشت. با افزودن معادلات اول و سوم خواهیم داشت $x_3 = 0$؛ و در این صورت، هر سه معادله به $x_1 + x_2 = 0$ تحویل می‌شوند. بنابراین، بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda = 1$ عبارتند از $X = t(1, -1, 0)$، که در آنها t هر اسکالر ناصفر است.

با محاسباتی مشابه، بردارهای ویژهٔ $X = t(0, 1, -1)$ نظیر به $\lambda = -1$، و $X = t(2, 3, -1)$ نظیر به $\lambda = 3$، که در آنها t هر اسکالر ناصفر است، را خواهیم یافت. چون مقدارهای ویژه متمایزند، بردارهای ویژهٔ نظیر، یعنی $(1, -1, 0)$، $(0, 1, -1)$، و $(2, 3, -1)$، مستقل می‌باشند. نتایج را می‌توان در یک جدول به‌صورت زیر خلاصه کرد. در ستون سوم بعد فضای ویژهٔ $E(\lambda)$ را قید کرده‌ایم.

مقدار ویژه λ	بردارهای ویژه	$\dim E(\lambda)$
1	$t(1, -1, 0), \quad t \neq 0$	1
-1	$t(0, 1, -1), \quad t \neq 0$	1
3	$t(2, 3, -1), \quad t \neq 0$	1

مثال ۲. ماتریس با مقدارهای ویژهٔ مکرر. ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

دارای چند جمله‌ای مشخص

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

است. مقدارهای ویژه عبارتند از 2، 2، و 4. (ذکر مقدار ویژهٔ 2 دوبار برای

وبردارهای ویژهٔ هر نمایش ماتریسی T نیز نامیده می‌شوند. بنابر این، مقدارهای ویژهٔ ماتریس مربعی A ریشه‌های چندجمله‌ای مشخص $f(\lambda) = \det(\lambda I - A)$ است. بردارهای ویژهٔ نظیر به‌مقدار ویژهٔ λ آن بردارهای ناصفر $X = (x_1, \ldots, x_n)$ هستند که به صورت ماتریسهای ستونی $n \times 1$ در معادلهٔ ماتریسی

$$(\lambda I - A)X = O \quad \text{یا} \quad AX = \lambda X$$

صدق می‌کنند. این یک دستگاه مرکب از n معادلهٔ خطی برای مولفه‌های $x_1, \ldots, x_n$ است. به‌محض دانستن λ، می‌توان بردارهای ویژه را با حل این دستگاه به دست‌آورد. این امر را با سه مثال که کیفیات مختلفی را نشان می‌دهند توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. ماتریس با مقدارهای ویژهٔ متمایز. ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix}$$

دارای چندجمله‌ای مشخص

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 & -4 \\ 1 & 1 & \lambda + 2 \end{bmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3)$$

است؛ در نتیجه، سه مقدار ویژهٔ متمایز وجود دارند: 1، -1، و 3. برای یافتن بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda = 1$، دستگاه $AX = X$، یا

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix},$$

را حل می‌کنیم. این نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} 2x_1 + x_2 + x_3 &= x_1 \\ 2x_1 + 3x_2 + 4x_3 &= x_2 \\ -x_1 - x_2 - 2x_3 &= x_3, \end{aligned}$$

که می‌توان آن را به‌صورت

$$\begin{aligned} x_1 + \ \ x_2 + \ \ x_3 &= 0 \\ 2x_1 + 2x_2 + 4x_3 &= 0 \\ -x_1 - \ \ x_2 - 3x_3 &= 0 \end{aligned}$$

نوشت. با افزودن معادلات اول و سوم خواهیم داشت $x_3 = 0$ ؛ و در این صورت، هر سه معادله به $x_1 + x_2 = 0$ تحویل می‌شوند. بنابراین، بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda = 1$ عبارتند از $X = t(1, -1, 0)$ ، که در آنها t هر اسکالر ناصفر است.

با محاسباتی مشابه، بردارهای ویژهٔ $X = t(0, 1, -1)$ نظیر به $\lambda = -1$ ، و $X = t(2, 3, -1)$ نظیر به $\lambda = 3$ ، که در آنها t هر اسکالر ناصفر است، را خواهیم یافت. چون مقدارهای ویژه متمایزند، بردارهای ویژهٔ نظیر، یعنی $(1, -1, 0)$ ، $(0, 1, -1)$ ، و $(2, 3, -1)$ ، مستقل می‌باشند. نتایج را می‌توان در یک جدول به‌صورت زیر خلاصه کرد. در ستون سوم بعد فضای ویژهٔ $E(\lambda)$ را قید کرده‌ایم.

مقدار ویژه λ	بردارهای ویژه	$\dim E(\lambda)$
1	$t(1, -1, 0), \quad t \neq 0$	1
-1	$t(0, 1, -1), \quad t \neq 0$	1
3	$t(2, 3, -1), \quad t \neq 0$	1

مثال ۲. ماتریس با مقدارهای ویژهٔ مکرر. ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

دارای چندجمله‌ای مشخص

$$\det(\lambda I - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda - 2 & 1 & -1 \\ 0 & \lambda - 3 & 1 \\ -2 & -1 & \lambda - 3 \end{bmatrix} = (\lambda - 2)(\lambda - 2)(\lambda - 4)$$

است. مقدارهای ویژه عبارتند از 2 ، 2 ، و 4 . (ذکر مقدار ویژهٔ 2 دوبار برای

تاکید درآن است که ریشهٔ مضاعف چندجمله‌ای مشخص می‌باشد.) برای یافتن بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda = 2$ ، دستگاه $AX = 2X$ را حل می‌کنیم، که به دستگاه

$$-x_2 + x_3 = 0$$
$$x_2 - x_3 = 0$$
$$2x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

تحویل می‌شود. این دستگاه دارای جواب $x_2 = x_3 = -x_1$ است؛ در نتیجه، بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda = 2$ عبارتند از $t(-1, 1, 1)$ ، که در آنها $t \neq 0$. به همین نحو، بردارهای ویژهٔ $t(1, -1, 1)$ ، نظیر به مقدار ویژهٔ $\lambda = 4$ ، را به دست می‌آوریم. نتایج را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد:

مقدار ویژه	بردارهای ویژه	$\dim E(\lambda)$
2, 2	$t(-1, 1, 1), \quad t \neq 0$	1
4	$t(1, -1, 1), \quad t \neq 0$	1

مثال ۳. ماتریس دیگر با مقدارهای ویژهٔ مکرر. ماتریس

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

دارای چندجمله‌ای مشخص $(\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 7)$ است. وقتی $\lambda = 7$ ، دستگاه $AX = 7X$ به صورت زیر درمی‌آید:

$$5x_1 - x_2 - x_3 = 0$$
$$-2x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 0$$
$$-3x_1 - 3x_2 + 3x_3 = 0.$$

این معادله دارای جواب $x_2 = 2x_1, x_3 = 3x_1$ است؛ در نتیجه، بردارهای ویژهٔ نظیر به $\lambda = 7$ عبارتند از $t(1, 2, 3)$ ، که در آنها $t \neq 0$. به‌ازای مقدار ویژهٔ $\lambda = 1$ ، دستگاه $AX = X$ تکرار سه بار معادلهٔ

$$x_1 + x_2 + x_3 = 0$$

است. برای حل این معادله می‌توان فرض کرد $x_1 = a, x_2 = b$ ، که در آنها a و b

دلخواهند ، وسپس $x_3 = -a - b$ را اختیار نمود . لذا ،هر بردار ویژهٔ نظیر به $\lambda = 1$ به شکل

$$(a, b, -a-b) = a(1, 0, -1) + b(0, 1, -1)$$

است ، که در آن $a \neq 0$ یا $b \neq 0$. این یعنی بردارهای $(1, 0, -1)$ و $(0, 1, -1)$ یک پایه برای $E(1)$ تشکیل می‌دهند . بنابراین ، وقتی $\lambda = 1$ ، $\dim E(\lambda) = 2$. نتایج را می‌توان به صورت زیر خلاصه کرد :

مقدار ویژه	بردارهای ویژه	$\dim E(\lambda)$
7	$t(1, 2, 3), \quad t \neq 0$	1
1, 1	$a(1, 0, -1) + b(0, 1, -1)$، a و b هردو 0 نیستند	2

توجه کنید کــه در این مثال سه بردار ویژهٔ مستقل ولی فقط دو مقدار ویژهٔ متمایز وجود دارنــد .

۷.۴ اثر یک ماتریس

فرض کنیم $f(\lambda)$ چندجمله‌ای مشخص یک ماتریس $n \times n$ مانند A باشد . n ریشهٔ $f(\lambda)$ را با $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ نشان می‌دهیم ، بطوری که هر ریشه به قدر ضریب تکرارش آمده است . در این صورت ، تجزیهٔ

$$f(\lambda) = (\lambda - \lambda_1) \cdots (\lambda - \lambda_n)$$

را خواهیم داشت . می‌توان $f(\lambda)$ را برحسب توانهای نزولی از λ به صورت زیر نیزنوشت :

$$f(\lambda) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 .$$

از مقایسهٔ ایــن بــا شکل‌تجزیه شده معلوم می‌شود که جملهٔ ثابت c_0 و ضریب λ^{n-1} از فرمولهای

$$c_{n-1} = -(\lambda_1 + \cdots + \lambda_n) \text{ و } c_0 = (-1)^n \lambda_1 \cdots \lambda_n$$

به دست می‌آیند . چون نیز داریم $c_0 = (-1)^n \det A$ ، ملاحظه می‌شود که

$$\lambda_1 \cdots \lambda_n = \det A .$$

یعنی ، *حاصل ضرب ریشه‌های چندجمله‌ای مشخص A مساوی دترمینان A است* .

مجموع ریشه‌های $f(\lambda)$ *اثر* A نامیده و بــا $\operatorname{tr} A$ نموده می‌شود . لذا ، طبق تعریف ،

$$\operatorname{tr} A = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i .$$

ضریب λ^{n-1} از رابطهٔ $c_{n-1} = -\text{tr}\, A$ به دست می‌آید. همچنین، می‌توان این ضریب را از شکل دترمینانی $f(\lambda)$ حساب کرد و به دست آورد که

$$c_{n-1} = -(a_{11} + \cdots + a_{nn}) .$$

(اثبات این فرمول در تمرین ۱۲ از بخش ۸.۴ خواسته شده است). دو فرمول برای c_{n-1} نشان می‌دهند که

$$\text{tr}\, A = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} .$$

یعنی، **اثر A مساوی مجموع عناصر قطری A نیز هست.**

چون محاسبهٔ مجموع عناصر قطری آسان است، می‌توان از آن به عنوان یک امتحان عددی در محاسبات مقدارهای ویژه استفاده کرد. خواص دیگر اثر در مجموعه تمرینات زیر توصیف شده‌اند.

۸.۴ تمرین

مقدارهای ویژه و بردارهای ویژهٔ هریک از ماتریسهای تمرینات ۱ تا ۳ را معین کنید. همچنین، به‌ازای هر مقدار ویژهٔ λ، بعد فضای ویژهٔ $E(\lambda)$ را محاسبه نمایید.

۱. (آ) $\begin{bmatrix}1 & 0\\0 & 1\end{bmatrix}$؛ (ب) $\begin{bmatrix}1 & 1\\0 & 1\end{bmatrix}$؛ (پ) $\begin{bmatrix}1 & 0\\1 & 1\end{bmatrix}$؛ (ت) $\begin{bmatrix}1 & 1\\1 & 1\end{bmatrix}$.

۲. $\begin{bmatrix}1 & a\\b & 1\end{bmatrix}, a > 0, b > 0$.

۳. $\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}$.

۴. ماتریسهای

$$P_1 = \begin{bmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{bmatrix}, \quad P_2 = \begin{bmatrix}0 & -i\\i & 0\end{bmatrix}, \quad P_3 = \begin{bmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{bmatrix}$$

در نظریهٔ مکانیک کوانتمی چرخش الکترون می‌آیند و، به افتخار ولفگانگ پاولی[1]

---

1. Wolfgang Pauli

(۱۹۵۸ — ۱۹۰۰) فیزیکدان ، **ماتریسهای چرخش پاولی** نامیده می‌شوند . تحقیق کنید کـه همهٔ این ماتریسها دارای مقدارهای ویژهٔ 1 و $1-$ هستند . سپس، تمام ماتریسهای 2×2 با درایه‌های مختلط که دارای دو مقدار ویژهٔ 1 و $1-$ هستندرا مشخص نمایید .

۵ . جمیع ماتریسهای 2×2 با درایه‌های حقیقی را معین کنید که مقدارهای ویژهٔ آنها (آ) حقیقی و متمایز باشند ؛ (ب) حقیقی و مساوی باشند ؛ (پ) مزدوج مختلط باشند .

۶ . با این فـرض کـه بردارهای $(1, 1, 1)$ ، $(1-, 0, 1)$ ، و $(0, 1-, 1)$ بردارهـای ویژهٔ ماتریس

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{bmatrix}$$

هستند ، a, b, c, d, e, f را معین نمایید .

۷ . مقدارهای ویژه و بردارهای ویژهٔ هریک از ماتریسهای زیر را حساب کنید . همچنین ، بعد فضای ویژهٔ $E(\lambda)$ را بـه‌ازای هر مقدار ویژهٔ λ محاسبه نمایید :

(آ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -3 & 1 & 0 \\ 4 & -7 & 1 \end{bmatrix}$ ؛ (ب) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \\ 3 & 3 & 20 \end{bmatrix}$ ؛ (پ) $\begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ -1 & 4 & 2 \\ 3 & -6 & -4 \end{bmatrix}$.

۸ . مقدارهای ویژهٔ هریک از پنج ماتریس زیر را حساب کنید :

(آ) $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ ؛ (ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ ؛ (پ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ؛

(ت) $\begin{bmatrix} 0 & -i & 0 & 0 \\ i & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -i \\ 0 & 0 & i & 0 \end{bmatrix}$ ؛ (ث) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

این ماتریسها را، به‌افتخار پل دیراک[1] (– ۱۹۰۲)، فیزیکدان انگلیسی، **ماتریسهای دیراک** می‌نامند. این ماتریسها در حل معادلهٔ نسبی موج در مکانیک کوانتم ظاهر می‌شوند.

۹ . هرگاه A و B ماتریسهایی $n \times n$ باشند، و B یک ماتریس‌قطری باشد، (به‌استقرا) ثابت کنید که دترمینان $f(\lambda) = \det(\lambda B - A)$ یک چندجمله‌ای از λ است، بطوری که $f(0) = (-1)^n \det A$ و ضریب λ^n مساوی حاصل‌ضرب درایه‌های قطری B می‌باشد.

۱۰ . ثابت کنید که ماتریس‌قطری A و ترانهادهٔ آن A^t یک چندجمله‌ای مشخص دارند.

۱۱ . هرگاه A و B ماتریسهایی $n \times n$ باشند، و A نامنفرد باشد، ثابت کنید که AB و BA دارای یک مجموعه از مقدارهای ویژه‌اند. **تذکر.** می‌توان نشان داد که AB و BA، حتی اگر A منفرد باشد، یک چندجمله‌ای مشخص دارند، اما لازم نیست این را ثابت کنید.

۱۲ . فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ با چندجمله‌ای مشخص $f(\lambda)$ باشد. (به استقرا) ثابت کنید که ضریب λ^{n-1} در $f(\lambda)$ مساوی $-\operatorname{tr} A$ است.

۱۳ . فرض کنید A و B ماتریسهایی $n \times n$ بوده و $\det A = \det B$ و $\operatorname{tr} A = \operatorname{tr} B$. ثابت کنید که اگر $n = 2$، A و B یک چندجمله‌ای مشخص دارند، اما این مطلب در حالت $n > 2$ الزاماً درست نیست.

۱۴ . هریک از احکام زیر را در مورد اثر ثابت کنید:

(آ) $\operatorname{tr}(A + B) = \operatorname{tr} A + \operatorname{tr} B$؛

(ب) $\operatorname{tr}(cA) = c \operatorname{tr} A$؛

(پ) $\operatorname{tr}(AB) = \operatorname{tr}(BA)$؛

(ت) $\operatorname{tr} A^t = \operatorname{tr} A$.

۹.۴ ماتریسهایی که یک تبدیل خطی را نمایش می‌دهند. ماتریسهای متشابه

در این بخش ثابت می‌کنیم که دو نمایش ماتریسی مختلف یک تبدیل خطی دارای یک چندجمله‌ای مشخص‌اند. برای این‌کار رابطهٔ بین ماتریسهایی که نمایشگر یک تبدیل‌اند را دقیقتر بررسی می‌کنیم.

---

1. Paul A. M. Dirac

به یاد می‌آوریم که نمایشهای ماتریسی چگونه تعریف شده‌اند. فرض کنیم $T: V \to W$ یک تبدیل خطی از فضای n بعدی V بتوی فضای m بعدی W باشد. همچنین، $(e_1, \ldots, e_n)$ و $(w_1, \ldots, w_m)$ بترتیب پایه‌هایی مرتب برای V و W باشند. نمایش ماتریسی T نسبت به این پایه‌ها ماتریس $m \times n$ ای است که ستونهایش از مؤلفه‌های $T(e_1), \ldots, T(e_n)$ نسبت به پایهٔ $(w_1, \ldots, w_m)$ تشکیل شده است. با انتخاب پایه‌های مختلف نمایشهای ماتریسی مختلف به‌دست می‌آیند.

اکنون حالتی را درنظر می‌گیریم که در آن $V = W$، و برای V و W یک پایهٔ مرتب $(e_1, \ldots, e_n)$ اختیار می‌کنیم. فرض‌کنیم $A = (a_{ik})$ ماتریس T نسبت به‌این پایه باشد. این یعنی که چنین داریم:

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i \text{ ، } k = 1, 2, \ldots, n \text{ به‌ازای} \qquad (۸ \cdot ۴)$$

حال پایهٔ مرتب دیگر $(u_1, \ldots, u_n)$ را برای V و W اختیار کرده و فرض می‌کنیم $B = (b_{kj})$ ماتریس T نسبت به‌این پایهٔ جدید باشد. در این صورت، چنین خواهیم داشت:

$$T(u_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} u_k \text{ ، } j = 1, 2, \ldots, n \text{ به‌ازای} \qquad (۹ \cdot ۴)$$

چون هر u_j در فضای پیموده شده به‌وسیلهٔ $e_1, \ldots, e_n$ است، می‌توان به‌ازای اسکالرهایی چون c_{kj} چنین نوشت:

$$u_j = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} e_k \text{ ، } j = 1, 2, \ldots, n \text{ به‌ازای} \qquad (۱۰ \cdot ۴)$$

ماتریس $n \times n$ ، $C = (c_{kj})$ معین شده به وسیلهٔ این اسکالرها نامنفرد است، زیرا تبدیل خطیی را نمایش می‌دهد که یک پایهٔ V را بروی پایهٔ دیگر V می‌نگارد. بااعمال T در دو طرف (۱۰ ۰ ۴) معادلات زیر را نیز خواهیم داشت:

$$T(u_j) = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} T(e_k) \text{ ، } j = 1, 2, \ldots, n \text{ به‌ازای} \qquad (۱۱ \cdot ۴)$$

دستگاههای معادلات در (۸ ۰ ۴) تا (۱۱ ۰ ۴) را می‌توان، با معرفی ماتریسها با درایه‌های برداری، ساده‌تر به شکل ماتریسی نوشت. فرض کنیم

$$U = [u_1, \ldots, u_n] \quad \text{و} \quad E = [e_1, \ldots, e_n]$$

ماتریسهای سطری $n \times 1$ ی باشند که درایه‌های آنها عنصرهای پایهٔ مورد سوءال باشند. دراین‌صورت، مجموعهٔ معادلات در (۱۰.۴) را می‌توان به صورت یک معادلهٔ ماتریسی نوشت:

$$U = EC. \tag{۱۲.۴}$$

بهمین نحو، اگر معرفی کنیم

$E' = [T(e_1), \ldots, T(e_n)]$ و $U' = [T(u_1), \ldots, T(u_n)]$ ،

معادلات (۸.۴)، (۹.۴)، و (۱۱.۴) بترتیب خواهند شد

$$E' = EA, \quad U' = UB, \quad U' = E'C. \tag{۱۳.۴}$$

همچنین، از (۱۲.۴) داریم

$$E = UC^{-1}.$$

برای یافتن رابطهٔ بین A و B ، U' را به دو طریق برحسب U بیان می‌کنیم. از (۱۳.۴) داریم

$$U' = UB$$

و

$$U' = E'C = EAC = UC^{-1}AC.$$

بنابراین، $UB = UC^{-1}AC$. اما هر درایه دراین معادلهٔ ماتریسی ترکیبی خطی از بردارهای پایهٔ $u_1, \ldots, u_n$ است. چون u_i ها مستقل‌اند، باید داشته باشیم

$$B = C^{-1}AC.$$

بنابراین، قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیهٔ ۶.۴ . هرگاه‌دو ماتریس $n \times n$ ، A و B یک تبدیل خطی T را نمایش دهند، آنگاه ماتریس نامنفردی چون C هست بطوری که

$$B = C^{-1}AC.$$

بعلاوه، هرگاه A ماتریس T نسبت به پایهٔ $E = [e_1, \ldots, e_n]$ و B ماتریس T نسبت‌به پایهٔ $U = [u_1, \ldots, u_n]$ باشد، آنگاه‌می‌توان‌ماتریس نامنفرد C را طوری اختیار کرد که دو پایه را برطبق معادلهٔ ماتریسی $U = EC$ بهم ربط دهد.

عکس قضیهٔ ۶.۴ نیز درست است.

قضیهٔ ۷۰۴ . فرض‌کنیم A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند که با معادله‌ای به شکل $B = C^{-1}AC$ بهم مربوطند ، که در آن C یک ماتریس $n \times n$ نامنفرد است . در این صورت ، A و B یک تبدیل خطی را نمایش می‌دهند .

برهان . پایهٔ $E = [e_1, \dots, e_n]$ را برای‌فضای n بعدی V اختیار می‌کنیم . فرض کنیم $u_1, \dots, u_n$ بردارهایی باشد که با معادلات زیر معین می‌شوند :

$$u_j = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} e_k \text{ ، } \quad \text{به‌ازای } j = 1, 2, \dots, n \tag{۱۴۰۴}$$

که‌در‌آن اسکالرهای c_{kj} درایه‌های C می‌باشند . چون C نامنفرد است ، یک تبدیل‌خطی معکوسپذیر را نمایش می‌دهد ؛ در نتیجه، $U = [u_1, \dots, u_n]$ نیز یک پایهٔ V است ، و داریم $U = EC$.

فرض‌کنیم T تبدیل خطیی باشد که دارای نمایش ماتریسی A نسبت به پایهٔ E است ، و S تبدیلی باشد که دارای نمایش ماتریسی B نسبت به پایهٔ U است . دراین صورت ، چنین خواهیم داشت :

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i \text{ ، } \quad \text{به‌ازای } k = 1, 2, \dots, n \tag{۱۵۰۴}$$

و

$$S(u_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} u_k \text{ ، } \quad \text{به‌ازای } j = 1, 2, \dots, n \text{ .} \tag{۱۶۰۴}$$

با نشان دادن اینکه به ازای هر j ، $T(u_j) = S(u_j)$ ، ثابت می‌کنیم که $S = T$.

معادلات (۱۵۰۴) و (۱۶۰۴) را می‌توان ساده‌تر و به شکل ماتریسی زیر نوشت :

$$[T(e_1), \dots, T(e_n)] = EA, \qquad [S(u_1), \dots, S(u_n)] = UB.$$

همچنین ، با اعمال T بر (۱۴۰۴) رابطهٔ $T(u_j) = \sum c_{kj} T(e_k)$ به دست می‌آید ، یا اینکه

$$[T(u_1), \dots, T(u_n)] = EAC.$$

اما داریم

$$UB = ECB = EC(C^{-1}AC) = EAC,$$

که نشان می‌دهد که به‌ازای هر j ، $T(u_j) = S(u_j)$. بنابراین، به‌ازای هر x در V ،

ماتریسهای سطری $n \times 1$ ی باشند که درایه‌های آنها عنصرهای پایهٔ مورد سؤال باشند. دراین‌صورت، مجموعهٔ معادلات در (۱۰۰۴) را می‌توان به صورت یک معادلهٔ ماتریسی نوشت:

$$U = EC. \qquad (۱۲۰۴)$$

بهمین نحو، اگر معرفی کنیم

$$E' = [T(e_1), \ldots, T(e_n)] \quad \text{و} \quad U' = [T(u_1), \ldots, T(u_n)] ،$$

معادلات (۸۰۴)، (۹۰۴)، و (۱۱۰۴) بترتیب خواهند شد

$$E' = EA, \qquad U' = UB, \qquad U' = E'C. \qquad (۱۳۰۴)$$

همچنین، از (۱۲۰۴) داریم

$$E = UC^{-1}.$$

برای یافتن رابطهٔ بین A و B، U' را به دو طریق برحسب U بیان می‌کنیم. از (۱۳۰۴) داریم

$$U' = UB$$

و

$$U' = E'C = EAC = UC^{-1}AC.$$

بنابراین، $UB = UC^{-1}AC$. اما هر درایه دراین معادلهٔ ماتریسی ترکیبی خطی از بردارهای پایهٔ $u_1, \ldots, u_n$ است. چون u_i ها مستقل‌اند، باید داشته باشیم

$$B = C^{-1}AC.$$

بنابراین، قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ام.

قضیهٔ ۶۰۴. هرگاه دو ماتریس $n \times n$، A و B یک تبدیل خطی T را نمایش دهند، آنگاه ماتریس نامنفردی چون C هست بطوری که

$$B = C^{-1}AC.$$

بعلاوه، هرگاه A ماتریس T نسبت به پایهٔ $E = [e_1, \ldots, e_n]$ و B ماتریس T نسبت به پایهٔ $U = [u_1, \ldots, u_n]$ باشد، آنگاه می‌توان ماتریس نامنفرد C را طوری اختیار کرد که دو پایه را برطبق معادلهٔ ماتریسی $U = EC$ بهم ربط دهد.

عکس قضیهٔ ۶۰۴ نیز درست است.

قضیهٔ ۷۰۴ . فرض کنیم A و B دو ماتریس $n \times n$ باشند که با معادله‌ای به شکل $B = C^{-1}AC$ بهم مربوطند ، که در آن C یک ماتریس $n \times n$ نامنفرد است . در این صورت ، A و B یک تبدیل خطی را نمایش می‌دهند .

برهان . پایهٔ $E = [e_1, \ldots, e_n]$ را برای فضای n بعدی V اختیار می‌کنیم . فرض کنیم $u_1, \ldots, u_n$ بردارهایی باشد که با معادلات زیر معین می‌شوند :

$$u_j = \sum_{k=1}^{n} c_{kj} e_k \text{ ، به‌ازای } j = 1, 2, \ldots, n \tag{۱۴۰۴}$$

که‌درآن اسکالرهای c_{kj} درایه‌های C می‌باشند . چون C نامنفرد است ، یک تبدیل‌خطی معکوسپذیر را نمایش می‌دهد ؛ در نتیجه ، $U = [u_1, \ldots, u_n]$ نیز یک پایهٔ V است ، و داریم $U = EC$.

فرض کنیم T تبدیل خطیی باشد که دارای نمایش ماتریسی A نسبت به پایهٔ E است ، و S تبدیلی باشد که دارای نمایش ماتریسی B نسبت به پایهٔ U است . دراین صورت ، چنین خواهیم داشت :

$$T(e_k) = \sum_{i=1}^{n} a_{ik} e_i \text{ ، به‌ازای } k = 1, 2, \ldots, n \tag{۱۵۰۴}$$

و

$$S(u_j) = \sum_{k=1}^{n} b_{kj} u_k \text{ ، به‌ازای } j = 1, 2, \ldots, n \text{ .} \tag{۱۶۰۴}$$

با نشان دادن اینکه به ازای هر j ، $T(u_j) = S(u_j)$ ، ثابت می‌کنیم که $S = T$.

معادلات (۱۵۰۴) و (۱۶۰۴) را می‌توان ساده‌تر و به شکل ماتریسی زیر نوشت :

$$[T(e_1), \ldots, T(e_n)] = EA, \qquad [S(u_1), \ldots, S(u_n)] = UB.$$

همچنین ، با اعمال T بر (۱۴۰۴) رابطهٔ $T(u_j) = \sum c_{kj} T(e_k)$ به دست می‌آید ، یا اینکه

$$[T(u_1), \ldots, T(u_n)] = EAC.$$

اما داریم

$$UB = ECB = EC(C^{-1}AC) = EAC,$$

که نشان می‌دهد که به‌ازای هر j ، $T(u_j) = S(u_j)$. بنابراین ، به‌ازای هر x در V ،

$T(x) = S(x)$ ؛ در نتیجه، $T = S$. به عبارت دیگر، ماتریسهای A و B یک تبدیل خطی را نمایش می‌دهند.

تعریف. دو ماتریس $n \times n$ مانند A و B را **متشابه** گویند در صورتی‌که ماتریس نامنفردی چون C باشد بطوری‌که $B = C^{-1}AC$.

با تلفیق قضایای ۶۰۴ و ۷۰۴ می‌توان قضیهٔ زیر را به‌دست آورد.

قضیهٔ ۸۰۴ . ***دو ماتریس $n \times n$ متشابه‌اند اگر و فقط اگر هر دو یک تبدیل خطی را نمایش دهند.***

ماتریسهای متشابه در خواص زیادی سهیم هستند. مثلاً، دارای یک دترمینان‌اند، زیرا

$$\det (C^{-1}AC) = \det (C^{-1})(\det A)(\det C) = \det A .$$

این خاصیت قضیهٔ زیر را به‌ما خواهد داد.

قضیهٔ ۹۰۴ . ***ماتریسهای متشابه دارای یک چندجمله‌ای مشخص، و لذا مقدارهای ویژهٔ مساوی، می‌باشند.***

برهان. اگر A و B متشابه باشند، ماتریس نامنفردی چون C هست بطوری‌که $B = C^{-1}AC$. بنابراین، داریم

$$\lambda I - B = \lambda I - C^{-1}AC = \lambda C^{-1}IC - C^{-1}AC = C^{-1}(\lambda I - A)C .$$

این نشان می‌دهد که $\lambda I - B$ و $\lambda I - A$ متشابه‌اند؛ در نتیجه،

$$\det (\lambda I - B) = \det (\lambda I - A) \cdot$$

قضایای ۸۰۴ و ۹۰۴ با هم نشان می‌دهند که تمام نمایشهای ماتریسی تبدیل خطی T یک چندجمله‌ای مشخص دارند. این چندجمله‌ای چندجمله‌ای مشخص T نیز نامیده می‌شود.

قضیهٔ بعدی ترکیبی است از قضایای ۴.۵ ، ۴.۲ ، و ۴.۶ . در قضیهٔ ۴.۱۰ ، F یا میدان حقیقی $\mathbf{R}$ است یا میدان مختلط $\mathbf{C}$.

قضیهٔ ۴.۱۰ . فرض کنیم $T: V \to V$ تبدیلی خطی باشد ، که در آن V اسکالرهایش در F بوده و $\dim V = n$. همچنین ، چندجمله‌ای مشخص T دارای ریشه‌های متمایز $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ در F باشد . در این صورت ، خواهیم داشت

(آ) بردارهای ویژهٔ $u_1, \ldots, u_n$ نظیر یک پایه برای V تشکیل می‌دهند ؛

(ب) ماتریس T نسبت به پایهٔ مرتب $U = [u_1, \ldots, u_n]$ ماتریس قطری Λ است که مقدارهای ویژه را به‌عنوان درایه‌های قطری دارد :

$$\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) ;$$

(پ) هرگاه A ماتریس T نسبت به پایهٔ دیگر $E = [e_1, \ldots, e_n]$ باشد ، آنگاه

$$\Lambda = C^{-1}AC,$$

که در آن C ماتریس نامنفردی است که دو پایه را با معادلهٔ

$$U = EC$$

بهم مربوط می‌کند .

برهان . طبق قضیهٔ ۴.۵ ، هر ریشهٔ λ_i یک مقدار ویژه است . چون n ریشهٔ متمایز وجود دارد ، قضیهٔ ۴.۲ می‌گوید که بردارهای ویژهٔ $u_1, \ldots, u_n$ نظیر مستقل می‌باشند . لذا ، تشکیل یک پایه برای V می‌دهند . این (آ) را ثابت می‌کند . چون $T(u_i) = \lambda_i u_i$ ، ماتریس T نسبت به U ماتریس قطری Λ است ، که (ب) را ثابت می‌کند . برای اثبات (پ) از قضیهٔ ۴.۶ استفاده می‌کنیم .

تذکر . ماتریس نامنفرد C در قضیهٔ ۴.۱۰ یک **ماتریس‌قطری ساز** نامیده می‌شود . هرگاه $(e_1, \ldots, e_n)$ پایهٔ بردارهای یکهٔ مختصات $(I_1, \ldots, I_n)$ باشد . آنگاه معادلهٔ $U = EC$ در قضیهٔ ۴.۱۰ نشان می‌دهد که ستون k ام C از مولفه‌های بردار ویژهٔ u_k نسبت به $(I_1, \ldots, I_n)$ تشکیل شده است .

هرگاه مقدارهای‌ویژهٔ A متمایز باشند ، A با یک ماتریس قطری متشابه است . هرگاه مقدارهای‌ویژه متمایز نباشند ، A باز هم ممکن است متشابه یک ماتریس قطری باشد . این

رخ می‌دهد اگر و فقط اگر k بردار ویژهٔ مستقل نظیر به هر مقدار ویژه با ضریب تکرار k وجود داشته باشد. مثالهایی در مجموعه تمرینات زیر خواهند آمد.

۱۰۰۴ تمرین

۱. ثابت کنید که ماتریسهای $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ دارای مقدارهای ویژهٔ مساوی‌اند اما متشابه نیستند.

۲. در هر حالت، ماتریس نامنفرد C را طوری بیابید که $C^{-1}AC$ یک ماتریس قطری باشد یا توضیح دهید چرا چنین C ای وجود ندارد:

(آ) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$؛ (ب) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 5 & 4 \end{bmatrix}$؛ (پ) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$؛

(ت) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$.

۳. سه پایه در صفحه داده شده است. یک نقطه نسبت به این پایه‌ها بترتیب دارای مولفه‌های (x_1, x_2)، (y_1, y_2)، و (z_1, z_2) است. فرض کنید $[y_1, y_2] = [x_1, x_2]A$، $[z_1, z_2] = [x_1, x_2]B$، و $[z_1, z_2] = [y_1, y_2]C$، که در آنها A, B, C ماتریسهایی 2×2 می‌باشند. C را برحسب A و B بیان کنید.

۴. در هر حالت، نشان دهید که مقدارهای ویژهٔ A متمایز نیستند، اما A سه بردار ویژهٔ مستقل دارد. ماتریس نامنفرد C را طوری بیابید که $C^{-1}AC$ یک ماتریس قطری باشد:

(آ) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$؛ (ب) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 3 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$.

۵. نشان دهید که هیچیک از ماتریسهای زیر با یک ماتریس قطری متشابه نیست، اما هریک با یک ماتریس مثلثی شکل به صورت $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 1 & \lambda \end{bmatrix}$، که در آن λ یک مقدار ویژه است، متشابه می‌باشد:

(آ) $\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}$؛ (ب) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}$.

۶ . مقدارهای ویژه و بردارهای ویژهٔ ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & -3 & 3 \end{bmatrix}$ را تعیین کنید و، بدینوسیله، نشان دهید که این ماتریس با یک ماتریس قطری متشابه نیست.

۷ . (آ) ثابت کنید ماتریس مربعی A نامنفرد است اگر و فقط اگر 0 یک مقدار ویژهٔ A نباشد.

(ب) ثابت کنید که اگر A نامنفرد باشد، مقدارهای ویژهٔ A^{-1} معکوسهای مقادیر ویژهٔ A می‌باشند.

۸ . فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های حقیقی باشد بطوری که $A^2 = -I$، و احکام زیر را در مورد A ثابت کنید:

(آ) A نامنفرد است؛

(ب) n زوج است؛

(پ) A مقدار ویژهٔ حقیقی ندارد؛

(ت) $\det A = 1$.

۵

مقدارهای ویژهٔ عملگرهایی که بر فضاهای اقلیدسی عمل می‌کنند

۱.۵ مقدارهای ویژه و ضربهای داخلی

در این فصل چند خاصیت مقدارهای ویژه و بردارهای ویژهٔ تبدیلاتی خطی که برفضاهای اقلیدسی، یعنی فضاهایی خطی که ضرب داخلی دارند، عمل می‌کنند را توصیف می‌کنیم. ابتدا خواص اساسی ضربهای داخلی را یادآور می‌شویم.

در یک فضای اقلیدسی **حقیقی**، حاصل ضرب داخلی (x, y) دو عنصر x و y عددی است حقیقی که دارای خواص زیر است:

(۱) $(x, y) = (y, x)$ (تقارن)؛

(۲) $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$ (خطی)؛

(۳) $(cx, y) = c(x, y)$ (همگنی)؛

(۴) اگر $x \neq O$، $(x, x) > 0$ (مثبتی).

در یک فضای اقلیدسی **مختلط**، حاصل ضرب داخلی عددی است مختلط و برخوردار از همان خواص، با این تفاوت که تقارن با **تقارن هرمیتی** عوض می‌شود:

$$(x, y) = \overline{(y, x)}, \qquad (۱')$$

که در آن خط افقی نشانگر مزدوج مختلط است. در (۳) اسکالر c مختلط است. از (۱') و (۳) خواهیم داشت

$$(x, cy) = \bar{c}(x, y), \qquad (۳')$$

مبین آنکه اسکالرها، وقتی از سازهٔ دوم خارج می‌شوند، مزدوج خواهند شد. با فرض $x = y$ در (۱')، می‌بینیم که (x, x) حقیقی است؛ درنتیجه، خاصیت (۴) درحالتی که فضا مختلط است معنی دارد.

وقتی اصطلاح فضای اقلیدسی را بدون توضیح اضافی به‌کار می‌بریم فرض این است که فضا می‌تواند هم حقیقی و هم مختلط باشد. با آنکه اغلب کاربردهای ما درفضاهای با بعد متناهی است، این قید را در آغاز لازم نمی‌دانیم.

اولین قضیه نشان می‌دهد که مقدارهای ویژه را (در صورت وجود) می‌توان برحسب حاصل ضرب داخلی بیان کرد.

قضیهٔ ۱۰۵ . فرض کنیم E یک فضای اقلیدسی بوده، V زیر فضایی از E باشد، و $T: V \to E$ تبدیلی خطی دارای مقدار ویژهٔ λ با بردار ویژهٔ نظیر x باشد. دراین صورت، خواهیم داشت

$$\lambda = \frac{(T(x), x)}{(x, x)}. \qquad (۱۰۵)$$

برهان. چون $T(x) = \lambda x$ ، داریم

$$(T(x), x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x).$$

و چون $x \neq O$ ، می‌توان با تقسیم بر (x, x) رابطهٔ (۱۰۵) رابه‌دست‌آورد.

از معادلهٔ (۱۰۵) به‌آسانی چند خاصیت از مقدارهای ویژه نتیجه می‌شود. مثلاً، از تقارن هرمیتی ضرب داخلی فرمول لنگهٔ

$$\bar{\lambda} = \frac{(x, T(x))}{(x, x)} \qquad (۲۰۵)$$

را برای مزدوج مختلط λ داریم. از (۱۰۵) و (۲۰۵) می‌بینیم که λ حقیقی است ($\lambda = \bar{\lambda}$) اگر و فقط اگر $(T(x), x)$ حقیقی باشد؛ یعنی، اگر و فقط اگر

به‌ازای بردار ویژهٔ x ، $(T(x), x) = (x, T(x))$.

(این شرط در یک فضای اقلیدسی حقیقی بداهتاً برقرار است.) همچنین، λ موهومی محض است ($\lambda = -\bar{\lambda}$) اگر و فقط اگر $(T(x), x)$ موهومی محض باشد؛ یعنی، اگر و فقط اگر

به‌ازای بردار ویژهٔ x ، $(T(x), x) = -(x, T(x))$.

۲۰۵ تبدیلات هرمیتی و هرمیتی اریب

در این بخش دونوع مهم از عملگرهای خطی را که بر فضاهای اقلیدسی عمل می‌کنند معرفی

می‌کنیم . این عملگرها ، بسته به اینکه فضای اقلیدسی‌زمینه ضرب داخلی حقیقی یا مختلط داشته باشد ، دو دسته اسم مختلف دارند . در حالت حقیقی ، تبدیلها **متقارن** و **متقارن اریب** خوانده می‌شوند ؛ و در حالت مختلط، آنها را **هرمیتی** و **هرمیتی اریب** می‌نامند . این تبدیلات در کاربردهای مختلف بسیار ظاهر می‌شوند . مثلا" ، عملگرهای هرمیتی بر فضاهای با بعدنامتناهی‌نقش مهمی در مکانیک کوانتم دارند . ما عمدتا" حالت مختلط را مورد بحث قرار می‌دهیم ، زیرا این حالت مشکلات اضافی به‌بار نخواهد آورد .

تعریف. فرض کنیم E یک فضای‌اقلیدسی بوده و V زیر فضایی از E باشد . تبدیل‌خطی $T: V \to E$ بر V **هرمیتی** نامیده می‌شود اگر که

به‌ازای هر x و y در V ، $(T(x), y) = (x, T(y))$.

عملگر T بر V **هرمیتی اریب** خوانده می‌شود اگر که

به‌ازای هر x و y در V ، $(T(x), y) = -(x, T(y))$.

به عبارت دیگر ، عملگر هرمیتی T را می‌توان از یک سازهٔ یک حاصل ضرب‌داخلی به سازهٔ دیگر بدون تغییر مقدار حاصل ضرب انتقال داد ، ولی انتقال در یک عملگر هرمیتی اریب علامت حاصل ضرب را تغییر خواهد داد .

تذکر. همانطور که قبلا" ذکر شد ، اگر E یک فضای اقلیدسی **حقیقی** باشد ، تبدیلات هرمیتی **متقارن** نیز نامیده‌می‌شوند ؛ تبدیلات‌هرمیتی اریب **متقارن اریب** نیز نام دارند .

مثال ۱. تقارن و تقارن اریب درفضای $C(a, b)$. فرض کنیم $C(a, b)$ فضای تمام‌توابع حقیقی پیوسته بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ با ضرب داخلی‌حقیقی

$$(f, g) = \int_a^b f(t)g(t)\, dt$$

باشد . فرض کنیم V یک زیر فضای $C(a, b)$ باشد . هرگاه $T: V \to C(a, b)$ یک تبدیل خطی باشد ، آنگاه $(f, T(g)) = \int_a^b f(t)Tg(t)\, dt$ ، که در آن به‌جای $T(g)(t)$ نوشته‌ایم $Tg(t)$. بنابراین ، شرطهای تقارن و تقارن اریب به صورت زیر درمی‌آیند :

اگر T متقارن باشد ، $\int_a^b \{f(t)Tg(t) - g(t)Tf(t)\}\, dt = 0$ ؛ (۳۰۵)

واگر T متقارن‌اریب باشد ، $\int_a^b \{f(t)Tg(t) + g(t)Tf(t)\}\, dt = 0$. (۴۰۵)

مثال ۲ . ضرب در یک تابع ثابت . درفضای $C(a, b)$ مثال ۱ ، تابع ثابت p را اختیار و تعریف می‌کنیم $T(f) = pf$ ، یعنی مساوی حاصل‌ضرب p و f . به‌ازای‌این T ، معادلهٔ (۳۰۵) برای هر f و g در $C(a, b)$ برقرار است ، چونکه انتگرالدهٔ آن صفر است . لذا ، ضرب در یک تابع ثابت یک عملگر متقارن می‌باشد .

مثال ۳ . عملگر مشتقگیری . در فضای $C(a, b)$ مثال ۱ ، فرض کنیم V زیرفضای مرکب از تمام توابعی چون f باشد که در بازهٔ باز (a, b) مشتق پیوسته دارند و در **شرط کرانه‌ای** $f(a) = f(b)$ نیز صدق می‌کنند . همچنین ، $D: V \to C(a, b)$ عملگر مشتقگیری باشد که‌با $D(f) = f'$ داده می‌شود . به‌آسانی ثابت می‌شود که D متقارن اریب است . در این‌حالت ، انتگرالده‌در (۴۰۵) مشتق حاصل ضرب fg است ؛ در نتیجه ، انتگرال‌مساوی

$$\int_a^b (fg)'(t)\, dt = f(b)g(b) - f(a)g(a)$$

می‌باشد . چون هردوی f و g در شرط کرانه‌ای صدق می‌کنند ، داریم $f(b)g(b) - f(a)g(a) = 0$. لذا ، شرط کرانه‌ای تقارن اریب D را ایجاب خواهد کرد . تنها توابع ویژه‌درزیر فضای V توابع ثابت هستند . اینها به مقدار ویژهٔ 0 تعلق‌دارند .

مثال ۴ . عملگرهای اشتروم[1] ــ لیوویل[2] . این مثال در نظریهٔ معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی اهمیت دارد . فضای $C(a, b)$ مثال ۱ را دیگر بار به کار برده ، فرض می‌کنیم V زیر فضای تمام f هایی باشد که در $[a, b]$ مشتق دوم پیوسته دارد و نیز در دو شرط کرانه‌ای

$$p(a)f(a) = 0, \qquad p(b)f(b) = 0 \qquad (۵۰۵)$$

صدق می‌کند ، که در آنها p یک تابع ثابت در $C(a, b)$ با مشتق پیوسته بر $[a, b]$ است . فرض کنیم q تابع ثابت دیگری در $C(a, b)$ بوده و $T: V \to C(a, b)$ عملگری باشد که‌با معادلهٔ

---

1. Sturm 2. Liouville

$$T(f) = (pf')' + qf$$

تعریف می‌شود. این عملگر را **عملگر اشتروم ـ لیوویل** می‌نامند. برای آزمودن تقارن آن، ملاحظه می‌کنیم که $fT(g) - gT(f) = f(pg')' - g(pf')'$. با استفاده از این در (۳۰۵) و انتگرالگیری از $\int_a^b f \cdot (pg')'\, dt$ و $\int_a^b g \cdot (pf')'\, dt$ به طریقهٔ جزء به جزء، درمی‌یابیم که

$$\int_a^b \{fT(g) - gT(f)\}\, dt = fpg' \Big|_a^b - \int_a^b pg'f'\, dt - gpf' \Big|_a^b + \int_a^b pf'g'\, dt = 0,$$

زیرا f و g هر دو در شرایط کرانه‌ای (۵۰۵) صدق می‌کنند. لذا، T بر V متقارن می‌باشد. تابعهای ویژهٔ T، f های ناصفری هستند که، به‌ازای λ ای حقیقی، در یک معادلهٔ دیفرانسیل به شکل

$$(pf')' + qf = \lambda f$$

بر $[a, b]$، و نیز در شرایط کرانه‌ای (۵۰۵)، صدق می‌کنند.

۳۰۵ مقدارهای ویژه و بردارهای ویژهٔ عملگرهای هرمیتی و هرمیتی اریب

با توجه به مقادیر ویژه، قضیهٔ زیر را داریم.

قضیهٔ ۲۰۵ . *فرض‌کنیم T مقدارویژهٔ λ را دارا باشد. دراین صورت، خواهیم‌داشت*

(آ) هرگاه T هرمیتی باشد، λ حقیقی است: $\lambda = \bar{\lambda}$؛

(ب) هرگاه T هرمیتی اریب باشد، λ موهومی محض می‌باشد: $\lambda = -\bar{\lambda}$.

برهان. فرض کنیم x یک بردار ویژهٔ نظیر به λ باشد. در این صورت، داریم

$$\lambda = \frac{(T(x), x)}{(x, x)} \quad \text{و} \quad \bar{\lambda} = \frac{(x, T(x))}{(x, x)}.$$

هرگاه T هرمیتی باشد، داریم $(T(x), x) = (x, T(x))$؛ درنتیجه، $\lambda = \bar{\lambda}$. هرگاه T هرمیتی اریب باشد، خواهیم داشت $(T(x), x) = -(x, T(x))$؛ در نتیجه، $\lambda = -\bar{\lambda}$.

تذکر. اگر T **متقارن** باشد، قضیهٔ ۲۰۵ چیز نوی در باب مقادیر ویژهٔ T نمی‌گوید، چرا که اگر حاصل ضرب داخلی حقیقی باشد، تمام مقدارهای ویژه باید حقیقی باشند. اگر T ***متقارن اریب*** باشد، مقدارهای ویژهٔ T باید هم‌حقیقی و هم موهومی محض باشند.

بنابراین، تمام مقادیر ویژهٔ یک عملگر متقارن اریب (در صورت وجود) باید صفرباشند .

۴.۵ تعامد بردارهای ویژهٔ نظیر به مقدارهای ویژهٔ متمایز

مقادیرویژهٔ متمایز هرتبدیل خطی (طبق قضیهٔ ۲.۴) نظیرند به بردارهای ویژهٔ مستقل . در مورد تبدیلات هرمیتی و هرمیتی اریب سخن بیشتر است :

قضیهٔ ۳.۵ . فرض کنیم T یک تبدیل هرمیتی یا هرمیتی اریب بوده، و λ و μ مقدارهای ویژهٔ متمایز T با بردارهای ویــژهٔ نظیر x و y باشند . دراین صورت، x و y متعامد میباشند ؛ یعنی، $(x, y) = 0$.

برهان . مینویسیم $T(x) = \lambda x$ ، $T(y) = \mu y$ ، و دو حاصل ضرب داخلی $(T(x), y)$ و $(x, T(y))$ را با هم مقایسه میکنیم . داریم $(T(x), y) = (\lambda x, y) = \lambda(x, y)$ و $(x, T(y)) = (x, \mu y) = \bar{\mu}(x, y)$. این، در صورتی که T هرمیتی باشد، نتیجه میدهد که $\lambda(x, y) = \bar{\mu}(x, y) = \mu(x, y)$ ، زیرا $\mu = \bar{\mu}$. بنابراین، $(x, y) = 0$ ، زیرا $\lambda \neq \mu$. اگر T هرمیتی اریب باشد، خواهیم داشت $\lambda(x, y) = -\bar{\mu}(x, y) = \mu(x, y)$ ، که باز ایجاب میکند که $(x, y) = 0$.

مثال . قضیهٔ ۳.۵ را در مورد توابع ناصفری که در یک معادلهٔ دیفرانسیل به شکل

$$(pf')' + qf = \lambda f \qquad (۶.۵)$$

بر بازه‌ای چون $[a, b]$ صادق بوده و در شرایط کرانه‌ای $p(a)f(a) = p(b)f(b) = 0$ نیز صدق میکنند به‌کار میبریم . نتیجه میشود که هر دو جواب f و g نظیر به مقادیر متمایز از λ متعامدند . مثلاً ، معادلهٔ دیفرانسیل حرکت توافقی ساده را درنظر میگیریم :

$$f'' + k^2 f = 0$$

بر بازهٔ $[0, \pi]$ ، که در آن $k \neq 0$. این معادله به شکل (۶.۵) است با فرض $p = 1$ ، $q = 0$ ، و $\lambda = -k^2$. همهٔ جوابها از $f(t) = c_1 \cos kt + c_2 \sin kt$ به‌دست میآیند . شرط کرانه‌ای $f(0) = 0$ ایجاب میکند که $c_1 = 0$. شرط کرانه‌ای دوم، یعنی $f(\pi) = 0$ ، ایجاب میکند که $c_2 \sin k\pi = 0$. چون در یک جواب ناصفر $c_2 \neq 0$ ، باید داشته‌باشیم $\sin k\pi = 0$ ، به‌این معنی که k یک عدد صحیح میباشد . به عبارت دیگر، جوابهای

ناصفر صادق در شرایط کرانه‌ای وجود دارند اگر و فقط اگر k یک عدد صحیح باشد. این جوابها عبارتند از $f(t) = \sin nt,\ n = \pm1, \pm2, \ldots$. حال شرط تعامد ناشی از قضیهٔ ۳۰۵ به رابطهٔ آشنای

$$\int_0^\pi \sin nt \sin mt\, dt = 0,$$

در صورتی که m^2 و n^2 اعداد صحیح متمایزی باشند، تبدیل می‌شود.

۵۰۸ تمرین

۱. فرض کنید E یک فضای اقلیدسی، V یک زیر فضا، و $T: V \to E$ یک تبدیل خطی معلوم باشد. همچنین، λ یک اسکالر و x عنصر ناصفری از V باشد. ثابت کنید λ یک مقدار ویژهٔ T با x به عنوان یک بردار ویژه است اگر و فقط اگر به‌ازای هر y در E، $(T(x), y) = \lambda(x, y)$.

۲. فرض کنید به‌ازای هر x در فضای خطی V، $T(x) = cx$، که در آن c یک اسکالر ثابت است. ثابت کنید T در صورتی متقارن است که V یک فضای اقلیدسی حقیقی باشد.

۳. فرض‌کنید $T: V \to V$ یک تبدیل هرمیتی باشد.

(آ) ثابت کنید T^n به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت n هرمیتی است، و T^{-1} در صورتی که T معکوسپذیر باشد هرمیتی می‌باشد.

(ب) اگر T هرمیتی اریب باشد، در باب T^n و T^{-1} چه نتایجی می‌توان گرفت؟

۴. فرض کنید $T_1: V \to E$ و $T_2: V \to E$ دو تبدیل هرمیتی باشند.

(آ) ثابت کنید $aT_1 + bT_2$ به‌ازای هر دو اسکالر حقیقی a و b هرمیتی است.

(ب) ثابت‌کنید حاصل‌ضرب (ترکیب) T_1T_2 در صورتی که T_1 و T_2 تعویض شوند هرمیتی است؛ یعنی، هرگاه

$$T_1T_2 = T_2T_1.$$

۵. فرض کنید $V = V_3(\mathbf{R})$ با ضرب نقطه‌ای معمولی به عنوان ضرب داخلی باشد. همچنین، T انعکاس نسبت به صفحهٔ xy باشد؛ یعنی، $T(\boldsymbol{i}) = \boldsymbol{i}$، $T(\boldsymbol{j}) = \boldsymbol{j}$، و $T(\boldsymbol{k}) = -\boldsymbol{k}$. ثابت کنید T متقارن است.

۶. فرض کنید $C(0, 1)$ فضای‌خطی حقیقی تمام توابع پیوستهٔ حقیقی بر $[0, 1]$ با ضرب داخلی

$(f,g) = \int_0^1 f(t)g(t)\,dt$ باشد. همچنین، V زیرفضای تمام f هایی باشدکه $\int_0^1 f(t)\,dt = 0$. فرض کنید $T: V \to C(0, 1)$ عملگر انتگرالگیری باشد که با $Tf(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ تعریف می‌شود. ثابت کنید T متقارن اریب می‌باشد.

۷. فرض کنید V فضای اقلیدسی حقیقی تمام چند جمله‌ایهای حقیقی با ضرب داخلی $(f,g) = \int_{-1}^1 f(t)g(t)\,dt$ باشد. معین کنید از تبدیلات $T: V \to V$ زیر کدامها متقارن کدامها متقارن اریب‌اند:

(آ) $Tf(x) = f(-x)$؛ (ب) $Tf(x) = f(x)f(-x)$؛ (پ) $Tf(x) = f(x) + f(-x)$؛ (ت) $Tf(x) = f(x) - f(-x)$؟

۸. به مثال ۴ در بخش ۲۰۵ بازگشته، ضرب داخلی را به‌صورت

$$(f,g) = \int_a^b f(t)g(t)w(t)\,dt$$

تغییر دهید، که در آن w یک تابع ثابت مثبت در $C(a, b)$ است، و عملگر اشتروم ــ لیوویل T را به‌صورت

$$T(f) = \frac{(pf')' + qf}{w}$$

تعریف کنید. ثابت کنید که عملگر تغییر یافته بر زیر فضای V متقارن است.

۹. فرض کنید V یک زیرفضای فضای اقلیدسی مختلط E باشد. همچنین، $T: V \to E$ یک تبدیل خطی بوده، و تابع اسکالر Q را بر V به صورت زیر تعریف کنید:

به‌ازای هر x در V، $Q(x) = (T(x), x)$.

(آ) ثابت کنید‌که‌اگر T بر V هرمیتی باشد، $Q(x)$ به‌ازای‌هر x حقیقی‌می‌باشد.

(ب) ثابت کنیدکه اگر T هرمیتی اریب باشد، $Q(x)$ به‌ازای هر x موهومی محض است.

(پ) ثابت کنید به‌ازای هر اسکالر t، $Q(tx) = t\bar{t}Q(x)$.

(ت) ثابت کنید که $Q(x + y) = Q(x) + Q(y) + (T(x), y) + (T(y), x)$، وفرمول نظیر را برای $Q(x + ty)$ پیدا نمایید.

(ث) ثابت کنید که اگر به‌ازای هر x، $Q(x) = 0$، به‌ازای هر x، $T(x) = O$.

(ج) ثابت کنید که اگر به‌ازای هر x، $Q(x)$ حقیقی باشد، T هرمیتی می‌باشد.

[**راهنمایی.** از اینکه $Q(x + ty)$ به‌ازای‌هر‌اسکالر t مساوی‌مزدوجش‌است‌استفاده

نمایید .]

۱۰ . این تمرین نشان می‌دهد که چند جمله‌ایهای لژاندر (که در بخش ۱۴۰۱ معرفی شدند) تابعهای ویژهٔ یک عملگر اشتروم ـ لیوویل هستند . چند جمله‌ایهای لژاندر با معادلات زیر تعریف می‌شوند :

$$P_n(t) = \frac{1}{2^n n!} f_n^{(n)}(t) \quad \text{،} \quad \text{که‌درآن } f_n(t) = (t^2 - 1)^n \text{ .}$$

(آ) تحقیق کنید که $(t^2 - 1)f'_n(t) = 2nt f_n(t)$.

(ب) با مشتقگیری‌از معادلهٔ قسمت (آ) $n + 1$ بارو استفاده از فرمول لایب نیتز[1] (ر.ک. ص ۲۷۵ ، جلد یک) ، نتیجه بگیرید که

$$(t^2 - 1)f_n^{(n+2)}(t) + 2t(n + 1)f_n^{(n+1)}(t) + n(n + 1)f_n^{(n)}(t) =$$
$$2ntf_n^{(n+1)}(t) + 2n(n + 1)f_n^{(n)}(t).$$

(پ) نشان دهید که معادلهٔ قسمت (ب) را می‌توان به شکل

$$[(t^2 - 1)P'_n(t)]' = n(n + 1)P_n(t)$$

نیز نوشت . این نشان می‌دهد که $P_n(t)$ یک تابع ویژهٔ عملگر اشتروم ـ لیوویل T است که بر بازهٔ $[-1 , 1]$ با رابطهٔ $T(f) = (pf')'$ ، که در آن $p(t) = t^2 - 1$ ، داده‌می‌شود. تابع ویژهٔ $P_n(t)$ متعلق به مقدار ویژهٔ $\lambda = n(n + 1)$ است . دراین مثال ، شرایط‌کرانه‌ای تقارن خودبخود برقرارند ، زیرا $p(1) = p(-1) = 0$.

۶۰۵ وجود یک مجموعهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژه برای عملگرهای هرمیتی وهرمیتی اریب که بر فضاهای با بعد متناهی عمل می‌کنند

هردوقضیهٔ ۲۰۵و۳۰۵ مبتنی‌براین‌فرض‌اندکه T مقدارویژه‌دارد . همانطورکه‌میدانیم، مقادیر ویژه لزوما "وجودندارند .اما ،هرگاه T بریک‌فضای ***مختلط*** با***بعدمتناهی***عمل‌کند ،مقدارهای ویژه‌همیشه‌وجوددارند ،زیراریشه‌های‌چندجمله‌ای‌مشخص‌می‌باشند .اگر T هرمیتی باشد، همهٔ مقادیرویژه‌حقیقی‌اند واگر T هرمیتی‌اریب‌باشد ،همهٔ‌مقادیرویژه‌موهومی‌محض‌می‌باشند.

همچنین ، می‌دانیم که دو مقدار ویژهٔ متمایز در صورتی متعلق به بردارهای ویژهٔ متعامدند که T هرمیتی یا هرمیتی اریب باشد . با استفاده از این خاصیت می‌توان ثابت

---

1. Leibniz

کرد که T مجموعه‌ای متعامدیکه از بردارهای ویژه دارد که تمام فضا را می‌پیماید. (به‌یاد می‌آوریم که یک مجموعهٔ متعامد را متعامد یکه نامند در صورتی که نرم عنصرهایش ۱ باشد.)

قضیهٔ ۴۰۵ . فرض کنیم $\dim V = n$ و $T: V \to V$ هرمیتی یا هرمیتی اریب باشد. در این صورت، n بردار ویژهٔ $u_1, \ldots, u_n$ از T هست که یک پایهٔ متعامد یکه برای V تشکیل می‌دهند. بنابراین، ماتریس T نسبت به این پایه ماتریس قطری $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ است، که در آن λ_k مقدار ویژهٔ متعلق به u_k می‌باشد.

برهان. از استقرا بر بعد n استفاده می‌کنیم. هرگاه $n = 1$ ، آنگاه T دقیقا یک مقدار ویژه دارد. هر بردار ویژهٔ u_1 با نرم 1 یک پایهٔ متعامد یکه برای V می‌باشد.

حال فرض کنیم قضیه برای هر فضای اقلیدسی با بعد $n - 1$ درست باشد. برای اثبات اینکه‌برای V نیز درست‌است، یک مقدار ویژه مانند λ_1 برای T و یک بردار ویژهٔ u_1 نظیر آن با نرم 1 را اختیار می‌کنیم. دراین‌صورت، $T(u_1) = \lambda_1 u_1$ و $\|u_1\| = 1$. فرض کنیم S زیرفضای پیموده شده به‌وسیلهٔ u_1 باشد. فرض استقرا را بر زیر فضای $S^\perp$ مرکب از تمام عناصری در V که متعامد به u_1 اند، یعنی

$$S^\perp = \{x \mid x \in V, (x, u_1) = 0\},$$

اعمال‌می‌کنیم. برای این‌کار لازم است بدانیم که $\dim S^\perp = n - 1$ و T ، $S^\perp$ را بتوی خودش می‌نگارد.

از قضیهٔ ۷۰۱ (آ) می‌دانیم که u_1 جزئی از یک پایهٔ V ، مثلاً پایهٔ $(u_1, v_2, \ldots, v_n)$ ، است. می‌توان، بی‌آنکه به کلیت خللی وارد شود، فرض کرد این‌یک پایهٔ متعامد یکه است. (اگرنباشد، با اعمال فرایند گرام ــ اشمیت و با ثابت گرفتن u_1 به عنوان عنصر اول پایه، آن را به یک‌پایهٔ متعامد یکه تبدیل می‌کنیم.) حال x دلخواهی در $S^\perp$ اختیار کرده و می‌نویسیم

$$x = x_1u_1 + x_2v_2 + \cdots + x_nv_n .$$

در این صورت، $x_1 = (x, u_1) = 0$ ، زیرا پایه متعامد یکه است؛ در نتیجه، x درفضای پیموده شده به‌وسیلهٔ $v_2, \ldots, v_n$ می‌باشد. بنابراین، $\dim S^\perp = n - 1$.

حال نشان می‌دهیم که T ، $S^\perp$ را بتوی خودش می‌نگارد. فرض کنیم T هرمیتی باشد. اگر $x \in S^\perp$ ، داریم

$$(T(x), u_1) = (x, T(u_1)) = (x, \lambda_1 u_1) = \lambda_1(x, u_1) = 0\,;$$

در نتیجه، $T(x) \in S^{\perp}$. چون T بر $S^{\perp}$ هرمیتی است، می‌توان با اعمال فرض استقرا دریافت که T دارای $n-1$ بردار ویژهٔ $u_2, \ldots, u_n$ است که یک پایهٔ متعامد یکه برای $S^{\perp}$ تشکیل می‌دهند. بنابراین، مجموعهٔ متعامد $u_1, \ldots, u_n$ یک پایهٔ متعامد یکهٔ V است. این قضیه‌را درحالتی‌که T هرمیتی‌است ثابت می‌کند. حالتی که در آن T هرمیتی اریب است با استدلالی مشابه ثابت می‌شود.

۷۰۵ نمایشهای ماتریسی برای عملگرهای هرمیتی و هرمیتی اریب

در این بخش‌فرض‌می‌کنیم V یک فضای اقلیدسی با بعد متناهی باشد. یک تبدیل‌هرمیتی یا هرمیتی اریب را می‌توان برحسب عملش برعنصرهای یک پایه مشخص کرد.

قضیهٔ ۵۰۵ . فرض‌کنیم $(e_1, \ldots, e_n)$ یک‌پایهٔ V بوده و $T\colon V \to V$ تبدیلی خطی باشد. دراین صورت،

(آ) T هرمیتی است اگر و فقط‌اگر به‌ازای هر i و j ، $(T(e_j), e_i) = (e_j, T(e_i))$ ؛

(ب) T هرمیتی اریب است اگر و فقط‌اگر به‌ازای هر i و j ،

$$(T(e_j), e_i) = -(e_j, T(e_i))\,.$$

برهان. دو عنصردلخواه x و y رادر V اختیار و هریک را برحسب عناصر پایه، مثلاً به صورت $x = \sum x_j e_j$ و $y = \sum y_i e_i$ ، بیان می‌کنیم. دراین صورت، داریم

$$(T(x), y) = \left(\sum_{j=1}^{n} x_j T(e_j), y\right) = \sum_{j=1}^{n} x_j \left(T(e_j), \sum_{i=1}^{n} y_i e_i\right) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_j \bar{y}_i (T(e_j), e_i)\,.$$

بهمین نحو، خواهیم داشت

$$(x, T(y)) = \sum_{j=1}^{n}\sum_{i=1}^{n} x_j \bar{y}_i (e_j, T(e_i))\,.$$

حکمهای (آ) و (ب) فوراً از این معادلات نتیجه می‌شوند.

حال این مفهومها را برحسب یک نمایش ماتریسی T توصیف می‌کنیم.

قضیهٔ ۶۰۵ . فرض‌کنیم $(e_1, \ldots, e_n)$ یک پایهٔ متعامد یکهٔ V بوده، و $A = (a_{ij})$

نمایش ماتریسی تبدیل خطی $T: V \to V$ نسبت به این پایه باشد. در این صورت،

(آ) T هرمیتی است اگر و فقط اگر به‌ازای هر i و j، $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$؛

(ب) T هرمیتی اریب است اگر و فقط اگر به‌ازای هر i و j، $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$.

برهان. چون A ماتریس T است، داریم $T(e_j) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k$. با ضرب داخلی $T(e_j)$ در e_i و استفاده از خاصیت خطی ضرب داخلی، خواهیم داشت

$$(T(e_j), e_i) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{kj} e_k, e_i\right) = \sum_{k=1}^{n} a_{kj} (e_k, e_i).$$

اما $(e_k, e_i) = 0$ مگر اینکه $k = i$؛ در نتیجه، مجموع آخر به $a_{ij}(e_i, e_i) = a_{ij}$ ساده می‌شود، زیرا $(e_i, e_i) = 1$. لذا، چنین داریم:

به‌ازای هر i, j، $a_{ij} = (T(e_j), e_i)$.

با تعویض نقش i و j، مزدوج گرفتن و استفاده از تقارن هرمیتی ضرب داخلی، در می‌یابیم که

به‌ازای هر i, j، $\bar{a}_{ji} = (e_j, T(e_i))$.

حال با اعمال قضیهٔ ۵.۵ برهان تمام خواهد شد.

۸.۵ ماتریسهای هرمیتی و هرمیتی اریب. الحاقی یک ماتریس

تعریف زیر را قضیهٔ ۶.۵ القا می‌کند.

تعریف. ماتریس مربعی $A = (a_{ij})$ را **هرمیتی** نامند درصورتی که به‌ازای هر i و j، $a_{ij} = \bar{a}_{ji}$. ماتریس A را **هرمیتی اریب** می‌نامند در صورتی که به‌ازای هر i و j، $a_{ij} = -\bar{a}_{ji}$.

قضیهٔ ۶.۵ بیان می‌کند که تبدیل T بر فضای با بعد متناهی V، بسته به اینکه ماتریسش نسبت به یک پایهٔ متعامد یکه هرمیتی یا هرمیتی اریب باشد، هرمیتی یا هرمیتی اریب است.

این ماتریسها را می‌توان به طریق دیگر نیز وصف کرد. فرض کنیم $\bar{A}$ ماتریس حاصل از تعویض هر درایهٔ A با مزدوج مختلط خود باشد. ماتریس $\bar{A}$ **مزدوج** A نامیده می‌شود.

ماتریس A هرمیتی است اگر وفقط اگر مساوی ترانهادهٔ مزدوج خود باشد؛ یعنی، $A = \bar{A}^t$. هرمیتی اریب است اگر که $A = -\bar{A}^t$.
ترانهادهٔ مزدوج خود نامی خاص دارد:

تعریف الحاقی یک ماتریس. به‌ازای هر ماتریس A ، ترانهادهٔ مزدوج آن، یعنی $\bar{A}^t$ ، *الحاقی* A نیز نامیده و با A^* نموده می‌شود.

بنابراین، ماتریس مربعی A هرمیتی است درصورتی که $A = A^*$ ، و هرمیتی اریب است درصورتی که $A = -A^*$. یک ماتریس هرمیتی **خود الحاقی** نیز نامیده می‌شود.

تذکر. در بسیاری از کتب قدیمی‌تر انگلیسی در باب ماتریسها، از اصطلاح *adjoint* (به معنی الحاقی) برای ترانهادهٔ ماتریس همسازه‌ای، که مفهوم کاملا" متفاوتی است، استفاده شده است. تعریف ما در اینجا همساز با فرهنگ جاری در نظریهٔ عملگرهای خطی است.

۹.۵ قطری سازی یک ماتریس هرمیتی یا هرمیتی اریب

قضیهٔ ۷.۵ . هر ماتریس $n \times n$ هرمیتی یا هرمیتی اریب A با ماتریس قطری $\Lambda = \text{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ از مقدارهای ویژهٔ آن متشابه است. بعلاوه، داریم

$$\Lambda = C^{-1}AC,$$

که در آن C یک ماتریس نامنفرد است که معکوسش الحاقی آن می‌باشد، $C^{-1} = C^*$.

برهان. فرض کنیم V فضای n تاییها از اعداد مختلط باشد، و $(e_1, \ldots, e_n)$ را پایهٔ متعامد یکه از بردارهای یکهٔ مختصات می‌گیریم. اگر $x = \sum x_i e_i$ و $y = \sum y_i e_i$ ، حاصل ضرب داخلی آنها را $(x, y) = \sum x_i \bar{y}_i$ فرض می‌کنیم. به‌ازای ماتریس معلوم A ، فرض می‌کنیم T تبدیلی باشد که نسبت به پایهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژهٔ $(u_1, \ldots, u_n)$ دارای نمایش ماتریسی قطری $\Lambda = \text{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ است، که در آن λ_k مقدار ویژهٔ متعلق به u_k است. چون A و Λ هردو T را نمایش می‌دهند، پس متشابهند؛ در نتیجه، داریم $\Lambda = C^{-1}AC$ ، که در آن $C = (c_{ij})$ ماتریس نامنفردی است که دو پایه را بهم مربوط می‌کند:

$$[u_1, \ldots, u_n] = [e_1, \ldots, e_n]C.$$

این معادله نشان می‌دهد که ستون j م C از مولفه‌های u_j نسبت به $(e_1, \ldots, e_n)$ تشکیل شده است. بنابراین، c_{ij} مولفهٔ i م u_j است. حاصل ضرب داخلی u_j و u_i ازرابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$(u_j, u_i) = \sum_{k=1}^{n} c_{kj}\bar{c}_{ki}.$$

چون $\{u_1, \ldots, u_n\}$ یک مجموعهٔ متعامد یکه است، این نشان می‌دهد که $CC^* = I$؛ در نتیجه، $C^{-1} = C^*$.

تذکر. برهان قضیهٔ ۷۰۵ طرز مشخص‌کردن ماتریس قطری ساز C را نیز بازگو می‌کند. یک مجموعهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژهٔ $u_1, \ldots, u_n$ را پیدا می‌کنیم و بعد ازمولفه‌های u_j (نسبت به پایهٔ بردارهای یکهٔ مختصات) به‌عنوان درایه‌های ستون j م C استفاده می‌کنیم.

مثال ۱. ماتریس‌هرمیتی‌حقیقی $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$ دارای‌مقدارهای‌ویژهٔ $\lambda_1 = 1$ و $\lambda_2 = 6$ است. بردارهای‌ویژهٔ متعلق به 1 عبارتند از $t(2, -1)$، که $t \neq 0$. و بردارهای ویژهٔ متعلق به 6 عبارتند از $t(1, 2)$، که $t \neq 0$. دو بردار ویژهٔ $u_1 = t(2, -1)$ و $u_2 = t(1, 2)$ به‌ازای $t = 1/\sqrt{5}$ یک مجموعهٔ متعامد یکه تشکیل می‌دهند. بنابراین، ماتریس

$$C = \frac{1}{\sqrt{5}}\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$$

یک ماتریس قطری ساز برای A است. دراین حالت، $C^* = C^t$، زیرا C حقیقی‌است. به‌آسانی تحقیق می‌شود که $C^tAC = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 6 \end{bmatrix}$.

مثال ۲. هرگاه A از قبل یک ماتریس قطری باشد، ماتریس قطری ساز C در قضیهٔ ۷۰۵ یا A را بی‌تغییر می‌گذارد و یا فقط درایه‌های قطری را تغییر آرایش می‌دهد.

۱۰۰۵ ماتریسهای یکه‌ای. ماتریسهای متعامد

تعریف. ماتریس مربعی A **یکه‌ای** نام دارد اگر که $AA^* = I$. و آن را **متعامد** خوانند اگر که $AA^t = I$.

تذکر. هر ماتریس یکه‌ای حقیقی متعامد است، زیرا $A^* = A^t$.

قضیهٔ ۷۰۵ می‌گوید که یک ماتریس هرمیتی یا هرمیتی اریب را همیشه می‌توان به وسیلهٔ یک ماتریس قطری حقیقی قطری کرد. این امر برای ماتریسهای هرمیتی اریب حقیقی درست نیست. (ر.ک. تمرین ۱۱ در بخش ۱۱۰۵.)

ما مفاهیم مربوطهٔ زیر را نیز داریم.

تعریف. ماتریس مربعی A با درایه‌های حقیقی یا مختلط **متقارن** نامیده می‌شود اگر که $A = A^t$؛ **متقارن اریب** است اگر که $A = -A^t$.

مثال ۰۳ هرگاه A حقیقی باشد، الحاقی آن مساوی ترانهادهٔ آن است، $A^* = A^t$. بنابراین، هرماتریس هرمیتی **حقیقی** متقارن است، اما یک ماتریس متقارن لزوما "هرمیتی نیست.

مثال ۰۴ هرگاه $A = \begin{bmatrix} 1+i & 2 \\ 3-i & 4i \end{bmatrix}$، آنگاه $\bar{A} = \begin{bmatrix} 1-i & 2 \\ 3+i & -4i \end{bmatrix}$،

$A^t = \begin{bmatrix} 1+i & 3-i \\ 2 & 4i \end{bmatrix}$، و $A^* = \begin{bmatrix} 1-i & 3+i \\ 2 & -4i \end{bmatrix}$.

مثال ۰۵ دو ماتریس $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} 1 & 2+i \\ 2-i & 3 \end{bmatrix}$ هرمیتی‌اند. اولی متقارن است، ولی دومی نیست.

مثال ۰۶ دو ماتریس $\begin{bmatrix} 0 & -2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix} i & -2 \\ 2 & 3i \end{bmatrix}$ هرمیتی اریب‌اند. اولی متقارن اریب است،

ولی دومی نیست .

مثال ۰۷ همهٔ عناصر قطری یک ماتریس هرمیتی حقیقی‌اند ، همهٔ عناصر قطری یک ماتریس هرمیتی اریب موهومی محض‌اند ، و همهٔ عناصر قطری یک ماتریس متقارن اریب صفر می‌باشند .

مثال ۰۸ به‌ازای هر ماتریس مربعی و دلخواه A ، ماتریس $B = \frac{1}{2}(A + A^*)$ هرمیتی است ، و ماتریس $C = \frac{1}{2}(A - A^*)$ هرمیتی اریب می‌باشد . مجموع آنها A است . پس ، هر ماتریس مربعی A را می‌توان به صورت مجموعی چون $A = B + C$ نوشت ، که در آن B هرمیتی و C هرمیتی اریب باشد . به‌آسانی تحقیق می‌شود که این تجزیه منحصر بفرد است . همچنین ، هر ماتریس مربعی A را می‌توان به‌طور منحصر بفرد به‌صورت مجموعی از یک ماتریس متقارن ، یعنی $\frac{1}{2}(A + A^t)$ ، و یک ماتریس متقارن اریب ، یعنی $\frac{1}{2}(A - A^t)$ ، بیان کرد .

مثال ۰۹ اگر A متعامد باشد ، داریم

$$1 = \det(AA^t) = (\det A)(\det A^t) = (\det A)^2 ;$$

در نتیجه ، $\det A = \pm 1$.

۱۱۰۵ تمرین

۱ . از ماتریسهای زیر کدامها متقارن ، کدامها متقارن اریب ، کدامها هرمیتی ، و کدامها هرمیتی اریب‌اند :

(آ) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ ؛ (ب) $\begin{bmatrix} 0 & i & 2 \\ i & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 4i \end{bmatrix}$ ؛ (پ) $\begin{bmatrix} 0 & i & 2 \\ -i & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ ؛

(ت) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ -2 & -3 & 0 \end{bmatrix}$ ؟

۲ . (آ) تحقیق کنید که ماتریس 2×2 ، $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ یک ماتریس متعامد

است .

(ب) فرض کنید T تبدیل خطی با ماتریس A ی فوق نسبت به پایهٔ معمولی $\{i,j\}$ باشد . ثابت کنید T هر نقطه در صفحه با مختصات قطبی (r, α) را بروی نقطه با مختصات قطبی $(r, \alpha + \theta)$ می‌نگارد . لذا ، T یک دوران صفحه حول مبداء است ، θ زاویهٔ دوران می‌باشد .

۳ . فرض کنید V فضای 3 حقیقی با بردارهای پایهٔ معمولی i, j, k باشد . ثابت کنید هریک از ماتریسهای زیر متعامد است و تبدیل نموده شده را نمایش می‌دهد :

(آ) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (انعکاس نسبت به صفحهٔ xy) ؛

(ب) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (انعکاس نسبت به محور x) ؛

(پ) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (انعکاس نسبت به مبداء) ؛

(ت) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (دوران حول محور x) ؛

(ث) $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & \cos\theta & -\sin\theta \\ 0 & \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$ (دوران حول محور x و پس از آن انعکاس نسبت به صفحهٔ yz) .

۴ . ماتریس متعامد و حقیقی A را **سره** نامند اگر که $\det A = 1$ ، و **ناسره** خوانند اگر که $\det A = -1$.

(آ) ثابت کنید که اگر A یک ماتریس 2×2 سره باشد ، به ازای θ ای $A = \begin{bmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{bmatrix}$. این ماتریس یک دوران به اندازهٔ زاویهٔ θ را نمایش می‌دهد .

(ب) ثابت کنید که $\begin{bmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{bmatrix}$ و $\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{bmatrix}$ ماتریسهایی ناسره‌اند. ماتریس اول نمایشگر یک انعکاس صفحهٔ xy نسبت به محور x است؛ دومی نمایشگر یک انعکاس نست به محور y می‌باشد. جمیع ماتریسهای 2×2 ناسره را پیدا کنید.

در تمرینهای ۵ تا ۸، (آ) یک مجموعهٔ متعامد از بردارهای ویژه برای A بیابید، و (ب) ماتریس یکه‌ای C را طوری بیابید که $C^{-1}AC$ یک ماتریس قطری باشد.

۵. $A = \begin{bmatrix}9 & 12\\ 12 & 16\end{bmatrix}$.

۶. $A = \begin{bmatrix}0 & -2\\ 2 & 0\end{bmatrix}$.

۷. $A = \begin{bmatrix}1 & 3 & 0\\ 3 & -2 & -1\\ 0 & -1 & 1\end{bmatrix}$.

۸. $A = \begin{bmatrix}1 & 3 & 4\\ 3 & 1 & 0\\ 4 & 0 & 1\end{bmatrix}$.

۹. از ماتریسهای زیر کدامها یکه‌ای‌اند و کدامها متعامد (a, b, θ حقیقی‌اند):

(آ) $\begin{bmatrix}e^{ia} & 0\\ 0 & e^{ib}\end{bmatrix}$؛ (ب) $\begin{bmatrix}\cos\theta & 0 & \sin\theta\\ 0 & 1 & 0\\ -\sin\theta & 0 & \cos\theta\end{bmatrix}$؛ (پ) $\begin{bmatrix}\frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{6}\sqrt{6}\\ 0 & \frac{1}{3}\sqrt{3} & \frac{1}{3}\sqrt{6}\\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{3}\sqrt{3} & -\frac{1}{6}\sqrt{6}\end{bmatrix}$؟

۱۰. در نظریهٔ نسبیت خاص از معادلات

$$x' = a(x - vt), \qquad y' = y, \qquad z' = z, \qquad t' = a(t - vx/c^2)$$

استفاده می‌شود. در اینجا v سرعت جسم متحرک، c سرعت نور، و $a = c/\sqrt{c^2 - v^2}$ است. تبدیل خطیی که (x, y, z, t) را بروی (x', y', z', t') می‌نگارد **تبدیل لورنتس** نام دارد.

(آ) فرض‌کنید $(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x, y, z, ict)$ و $(x_1', x_2', x_3', x_4') = (x', y', z', ict')$. نشان دهید که چهار معادله را می‌توان به صورت یک معادلهٔ ماتریسی نوشت:

$$[x_1', x_2', x_3', x_4'] = [x_1, x_2, x_3, x_4]\begin{bmatrix}a & 0 & 0 & -iav/c\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 0 & 1 & 0\\ iav/c & 0 & 0 & a\end{bmatrix}.$$

(ب) ثابت کنید که ماتریس 4×4 قسمت (آ) متعامد است ولی یکه‌ای نیست.

۱۱ . فرض کنید a یک عدد حقیقی ناصفرو A ماتریس متقارن اریب $A = \begin{bmatrix} 0 & a \\ -a & 0 \end{bmatrix}$
باشد .

(آ) برای A یک مجموعهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژه بیابید .

(ب) ماتریس یکه‌ای C را طوری بیابید که $C^{-1}AC$ یک ماتریس قطری باشد .

(پ) ثابت کنید ماتریس متعامد حقیقی مانند C نیست که $C^{-1}AC$ یک ماتریس قطری باشد .

۱۲ . ثابت کنید که اگر مقدارهای ویژهٔ ماتریس هرمیتی یا هرمیتی اریب A همه مساوی c باشند ، $A = cI$.

۱۳ . ثابت کنید که اگر A یک ماتریس متقارن اریب حقیقی باشد ، هر دوی $I - A$ و $I + A$ نامنفردند و $(I - A)(I + A)^{-1}$ متعامد می‌باشد .

۱۴ . برای هریک از احکام زیر درباب ماتریسهای $n \times n$ برهان بیاورید یا مثال نقض:

(آ) هرگاه A و B یکه‌ای باشند ، $A + B$ نیز یکه‌ای است ؛

(ب) هرگاه A و B یکه‌ای باشند ، AB نیز یکه‌ای است .

(پ) هرگاه A و AB یکه‌ای‌باشند ، B نیز یکه است ؛

(ت) هرگاه A و B یکه‌ای باشند ، $A + B$ یکه‌ای نیست .

۱۲۰۵ فرمهای درجهٔ دوم

فرض کنیم V یک‌فضای اقلیدسی **حقیقی** بوده و $T: V \to V$ یک عملگر متقارن باشد . این یعنی T را می‌توان از یک سازهٔ یک حاصل ضرب داخلی به سازهٔ دیگر انتقال داد :

به‌ازای هر x و y در V ، $(T(x), y) = (x, T(y))$.

با معلوم بودن T ، تابع حقیقی Q را بر V با معادلهٔ

$$Q(x) = (T(x), x)$$

تعریف می‌کنیم . تابع Q **فرم درجهٔ دوم** مربوط به T نامیده می‌شود . اصطلاح "درجهٔ دوم "را قضیهٔ زیر القا می‌کند ، که نشان می‌دهد که ، در حالت ابعاد متناهی ، $Q(x)$ یک چند جمله‌ای درجهٔ دوم از مولفه‌های x است .

قضیهٔ ۸۰۵ . فرض کنیم $(e_1, \ldots, e_n)$ یک پایهٔ متعامد یکه برای فضای اقلیدسی

حقیقی V باشد. همچنین، $T: V \to V$ یک تبدیل متقارن بوده، و $A = (a_{ij})$ ماتریس T نسبت به این پایه باشد. در این صورت، فرم درجهٔ دوم $Q(x) = (T(x), x)$ با A به صورت زیر مربوط می‌شود:

$$\text{اگر } x = \sum_{i=1}^{n} x_i e_i \text{ ،} \quad Q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \, . \tag{۷٠۵}$$

برهان. بنابر خاصیت خطی داریم $T(x) = \sum x_i T(e_i)$. بنابر این،

$$Q(x) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i), \sum_{j=1}^{n} x_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} x_i x_j (T(e_i), e_j).$$

این (۷٠۵) را ثابت می‌کند، زیرا $a_{ij} = a_{ji} = (T(e_i), e_j)$.

مجموع مذکور در (۷٠۵)، حتی اگر A متقارن هم نباشد، با معنی است.

تعریف. فرض کنیم V یک فضای اقلیدسی حقیقی با پایهٔ متعامد یکهٔ $(e_1, \ldots, e_n)$ بوده، و $A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ از اسکالرها باشد. تابع اسکالر Q که در هر عنصر $x = \sum x_i e_i$ از V با مجموع مضاعف

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_i x_j \tag{۸٠۵}$$

تعریف می‌شود، **فرم درجهٔ دوم مربوط به** A نامیده می‌شود.

هرگاه A یک ماتریس قطری باشد، آنگاه به‌ازای $i \neq j$، $a_{ij} = 0$؛ در نتیجه، مجموع (۸٠۵) فقط شامل جملات مربع است و می‌توان آن را ساده‌تر و به صورت

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii} x_i^2$$

نوشت. در این حالت، فرم درجهٔ دوم یک **فرم قطری** نام دارد.

مجموع مضاعف (۸٠۵) را می‌توان به صورت حاصل ضرب سه ماتریس نیز بیان کرد.

قضیهٔ ۹٠۵ . فرض کنیم $X = [x_1, \ldots, x_n]$ یک ماتریس سطری $1 \times n$ بوده، و

$A = (a_{ij})$ یک ماتریس $n \times n$ باشد. در این صورت، XAX^t یک ماتریس 1×1 با درایهٔ

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j \tag{۹.۵}$$

می‌باشد.

برهان. حاصل‌ضرب XA یک ماتریس $1 \times n$ است: $XA = [y_1, \ldots, y_n]$، که در آن درایهٔ y_j حاصل ضرب نقطه‌ای X با ستون j م A است:

$$y_j = \sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}.$$

بنابراین، حاصل ضرب XAX^t یک‌ماتریس 1×1 است که تنها درایه‌اش حاصل ضرب نقطه‌ای

$$\sum_{j=1}^{n} y_j x_j = \sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{i=1}^{n} x_i a_{ij}\right)x_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$$

می‌باشد.

تذکر. رسم است که ماتریس 1×1، XAX^t را با مجموع (۹.۵) یکی می‌گیرند و حاصل ضرب XAX^t را یک فرم درجهٔ دوم می‌نامند. معادلهٔ (۸.۵) به‌صورت ساده‌تر زیر نوشته می‌شود:

$$Q(x) = XAX^t.$$

مثال ۱. فرض کنیم $X = [x_1, x_2]$, $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$. در این صورت، داریم

$$XA = [x_1, x_2]\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -3 & 5 \end{bmatrix} = [x_1 - 3x_2, -x_1 + 5x_2];$$

و در نتیجه،

$$XAX^t = [x_1 - 3x_2, -x_1 + 5x_2]\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 - 3x_2x_1 - x_1x_2 + 5x_2^2.$$

مثال ۲. فرض کنیم $X = [x_1, x_2]$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}$. دراین صورت، داریم

$$XBX^t = [x_1, x_2]\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 5 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = x_1^2 - 2x_2x_1 - 2x_1x_2 + 5x_2^2.$$

در دو مثـال ۱ و ۲ ، مجموع دو جمله‌ٔ حاصل ضرب مخلوط می‌شود $-4x_1x_2$ ؛ در نتیجه ، $XAX^t = XBX^t$. این مثالها نشان می‌دهند که ماتریسهای مختلف می‌توانند به یک فرم درجه‌ٔ دوم ختم شونـد . توجه کنید که یکی از این ماتریسها متقارن است . این امر در قضیه‌ٔ بعدی توضیح شده است .

قضیه‌ٔ ۱۰۰۵ . بەازای هر ماتریس $n \times n$ ، A و هر ماتریس سطری $1 \times n$ ، X داریم $XAX^t = XBX^t$ ، که در آن B ماتریس متقارن $B = \frac{1}{2}(A + A^t)$ است .

برهان . چون XAX^t یک ماتریس 1×1 است ، پس مسـاوی ترانـهاده‌ٔ خودش است ، $XAX^t = (XAX^t)^t$. اما ترانـهاده‌ٔ یک حاصل ضرب مساوی حاصل ضرب ترانـهاده‌ها بـه ترتیب عکس است ؛ درنتیجه ، داریم $(XAX^t)^t = XA^tX^t$. بنابراین ،

$$XAX^t = \tfrac{1}{2}XAX^t + \tfrac{1}{2}XA^tX^t = XBX^t \cdot$$

۱۳۰۵ تحویل یک فرم درجه‌ٔ دوم حقیقی به شکل قطری

هر ماتریس متقارن و حقیقی A هرمیتی است . بنابر این ، طبق قضیه‌ٔ ۷۰۵ ، با مـاتریس قطری $\Lambda = \text{diag}\,(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ ازمقدارهای‌ویژه‌اش‌متشابه‌است. بعلاوه، داریم $\Lambda = C^tAC$ ، که در آن C یک ماتریس متعامد می‌بـاشد . حال نشان می‌دهیم که می‌توان ، با استفاده از C ، فرم درجه‌ٔ دوم XAX^t را به یک فرم قطری بدل کرد .

قضیه‌ٔ ۱۱۰۵ . فرض کنیم XAX^t فرم درجه‌ٔ دوم مربوط به ماتریس متقـارن و حقیقی A بوده ، و C یک ماتـریس متعامد باشد که A را به ماتریس قطری $\Lambda = C^tAC$ تبدیل می‌کند . در این صورت ، داریم

$$XAX^t = Y\Lambda Y^t = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i y_i^2,$$

که در آن $Y = [y_1, \ldots, y_n]$ ماتریس سطـری $Y = XC$ است ، و $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مقدارهای

ویژهٔ A می‌باشند .

برهان. چون C متعامد است ، داریم $C^{-1} = C^t$. بنابراین ، معادلهٔ $Y = XC$ ایجاب می‌کند که $X = YC^t$ ، و خواهیم داشت

$$XAX^t = (YC^t)A(YC^t)^t = Y(C^tAC)Y^t = Y\Lambda Y^t .$$

تذکر. قضیهٔ ۱۱۰۵ این‌طور توصیف می‌شود که می‌گویند تبدیل خطی $Y = XC$ فرم درجهٔ دوم XAX^t را به فرم قطری $Y\Lambda Y^t$ تحویل می‌کند .

مثال ۱. فرم درجهٔ دوم متعلق به ماتریس همانی مساوی است با

$$XIX^t = \sum_{i=1}^{n} x_i^2 = \|X\|^2;$$

یعنی ، مساوی مربع طول بردار $X = (x_1, \ldots, x_n)$. تبدیل خطی $Y = XC$ ، که در آن C یک ماتریس متعامد است ، فرم درجهٔ دوم جدید $Y\Lambda Y^t$ را به‌دست می‌دهد که $\Lambda = CIC^t = CC^t = I$. چون $XIX^t = YIY^t$ ، داریم $\|X\|^2 = \|Y\|^2$ ؛ درنتیجه، Y همان طول X را دارد . یک تبدیل‌خطی که طول هر بردار را حفظ کند یک **یکمتری** نامیده می‌شود . این تبدیلات با تفصیل بیشتر در بخش ۱۹۰۵ مطرح می‌شوند .

مثال ۲. ماتریس متعامد C را طوری تعیین کنید که فرم درجهٔ دوم

$$Q(x) = 2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$$

را به یک فرم قطری تحویل کند .

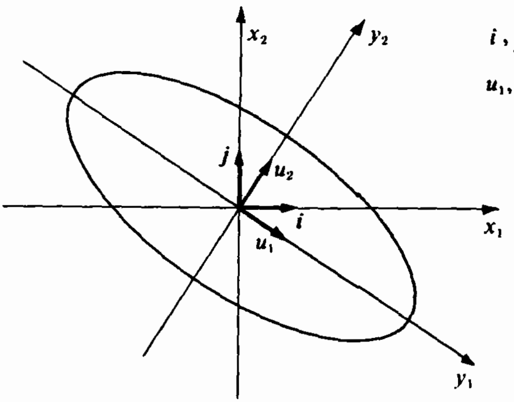
حل. می‌نویسیم $Q(x) = XAX^t$ ، که در آن $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$. این ماتریس متقارن در مثال ۱ بعد از قضیهٔ ۷۰۵ قطری شده بود . مقدارهای ویژه‌اش $\lambda_1 = 1 , \lambda_2 = 6$ هستند ، و یک مجموعهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژه عبارت است از u_1 , u_2 ، که

$$u_1 = t(2, -1),\ u_2 = t(1, 2),\ t = 1/\sqrt{5}\ .$$

یک ماتریس قطری ساز متعامد $C = t\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ است . فرم قطری نظیر خواهد بود

$$Y\Lambda Y^t = \lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 = y_1^2 + 6y_2^2.$$

نتیجهٔ مثال ۲ تعبیر هندسی ساده‌ای دارد که در شکل ۱۰۵ مجسم شده است. تبدیل خطی $Y = XC$ را می‌توان یک دوران دانست که پایهٔ i, j را بروی پایهٔ جدید u_1, u_2 می‌نگارد. یک نقطه به مختصات (x_1, x_2) نسبت به پایهٔ اول دارای مختصات جدید (y_1, y_2) نسبت به پایهٔ دوم است. چون $XAX^t = Y\Lambda Y^t$، مجموعه نقاط (x_1, x_2) صادق در معادلهٔ $XAX^t = c$ به ازای c ای، با مجموعه نقاط (y_1, y_2) صادق در $Y\Lambda Y^t = c$ یکی است. معادلهٔ دوم، نوشته شده به صورت $y_1^2 + 6y_2^2 = c$، معادلهٔ دکارتی یک بیضی است اگر $c > 0$.



شکل ۱۰۵ دوران محورها به وسیلهٔ یک ماتریس متعامد. بیضی در دستگاه x_1x_2 دارای معادلهٔ دکارتی $XAX^t = 9$، و در دستگاه y_1y_2 دارای معادلهٔ $Y\Lambda Y^t = 9$ است.

بنابراین، معادلهٔ $XAX^t = c$، نوشته شده به صورت $2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 = c$، همان بیضی در دستگاه مختصات اصلی را نمایش می‌دهد. شکل ۱۰۵ نشان می‌دهد که بیضی نظیر است به $c = 9$.

۱۴۰۵ چند کاربرد در هندسهٔ تحلیلی

با استفاده از تحویل یک فرم درجهٔ دوم به یک فرم قطری می‌توان مجموعهٔ تمام نقاط

(x, y) در صفحه که در یک معادلهٔ دکارتی به شکل

$$ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0 \tag{۱۰.۵}$$

صدق می‌کنند را شناسایی کرد. درخواهیم یافت که این مجموعه همیشه یک مقطع مخروطی است: یعنی، یک بیضی، هذلولی، سهمی، یا یکی از حالات تباه شدهٔ آنها (مجموعهٔ تهی، یک نقطهٔ تنها، یا یک یا دو خط مستقیم) است. نوع مخروطی را جملات درجهٔ دوم تعیین می‌کنند؛ یعنی، به وسیلهٔ فرم درجهٔ دوم $ax^2 + bxy + cy^2$ معین می‌شود. برای همسازی با نمادگذاری قبلی، به‌جای x می‌نویسیم x_1، به‌جای y می‌نویسیم x_2، و این فرم درجهٔ دوم را به‌صورت یک حاصل ضرب ماتریسی بیان می‌کنیم:

$$XAX^t = ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_2^2,$$

که در آن $X = [x_1, x_2]$ و $A = \begin{bmatrix} a & b/2 \\ b/2 & c \end{bmatrix}$. این فرم را با دوران $Y = XC$ به یک‌فرم قطری $\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2$ تحویل می‌کنیم، که در آن λ_1 , λ_2 مقدارهای ویژهٔ A هستند. یک مجموعهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژهٔ u_1 , u_2 محورهای مختصات جدیدی را مشخص می‌کند، که معادلهٔ دکارتی (۱۰.۵) نسبت به آنها خواهد شد

$$\lambda_1 y_1^2 + \lambda_2 y_2^2 + d'y_1 + e'y_2 + f = 0, \tag{۱۱.۵}$$

با ضرایب جدید d' و e' در جملات خطی. در این معادله جملهٔ حاصل ضرب مخلوط y_1y_2 وجود ندارد؛ در نتیجه، نوع مخروطی را می‌توان به‌آسانی با بررسی مقدارهای ویژهٔ λ_1 و λ_2 مشخص کرد. هرگاه مخروطی تباه شده نباشد، معادلهٔ (۱۱.۵) نمایشگر یک **بیضی** است اگر λ_1 , λ_2 یک علامت داشته باشند، یک **هذلولی** است اگر λ_1 , λ_2 مختلف العلامه باشند، و یک **سهمی** است اگر λ_1 یا λ_2 صفر باشد. سه حالت نظیر به $\lambda_1\lambda_2 > 0$، $\lambda_1\lambda_2 < 0$، و $\lambda_1\lambda_2 = 0$ می‌باشند. این امر را با چند مثال خاص توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. $2x^2 + 4xy + 5y^2 + 4x + 13y - \frac{1}{4} = 0$. این معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2 + 4x_1 + 13x_2 - \tfrac{1}{4} = 0. \tag{۱۲.۵}$$

فرم درجهٔ دوم $2x_1^2 + 4x_1x_2 + 5x_2^2$ همانی است که در مثال ۲ بخش پیش از آن بحث شد. ماتریس آن دارای مقدارهای ویژهٔ $\lambda_1 = 1 , \lambda_2 = 6$ است، و یک مجموعهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژه $u_1 = t(2, -1),\ u_2 = t(1, 2)$ می‌باشد، که $t = 1/\sqrt{5}$. یک ماتریس

قطری ساز متعامد $C = t\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ است . این ماتریس قسمت درجهٔ دوم (۱۲۰۵) را به شکل $y_1^2 + 6y_2^2$ تحویل می‌کند . برای تعیین اثر آن بر قسمت حقیقی ، معادلهٔ دوران $Y = XC$ را به‌شکل $X = YC^t$ می‌نویسیم و به‌دست می‌آوریم که

$$[x_1, x_2] = \frac{1}{\sqrt{5}}[y_1, y_2]\begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_2), \quad x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-y_1 + 2y_2).$$

بنابر این ، قسمت حقیقی $4x_1 + 13x_2$ به

$$\frac{4}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_2) + \frac{13}{\sqrt{5}}(-y_1 + 2y_2) = -\sqrt{5}\,y_1 + 6\sqrt{5}\,y_2$$

تبدیل می‌شود . معادلهٔ دکارتی تبدیل شده خواهد شد

$$y_1^2 + 6y_2^2 - \sqrt{5}\,y_1 + 6\sqrt{5}\,y_2 - \tfrac{1}{4} = 0.$$

با کامل کردن مربعها نسبت به y_1 و y_2 ، این رابطه را به‌صورت زیر می‌نویسیم :

$$(y_1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{5})^2 + 6(y_2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{5})^2 = 9.$$

این معادلهٔ یک بیضی است به مرکز $(\frac{1}{2}\sqrt{5}, -\frac{1}{2}\sqrt{5})$ در دستگاه y_1y_2 . همانطور که شکل ۲۰۵ نشان داده ، جهتهـای مثبت محورهای y_1 و y_2 به وسیلهٔ بردارهای ویژهٔ u_1 و u_2 معین می‌شوند .

این معادله را می‌توان با نوشتن

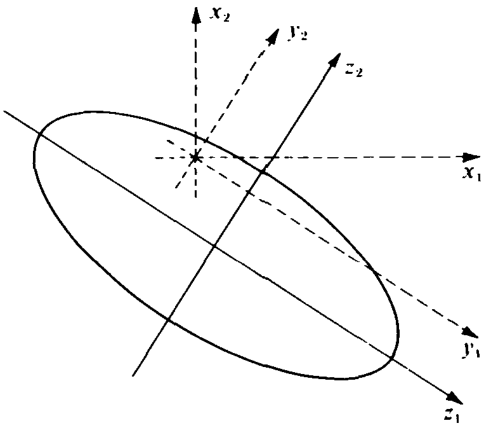
$$z_1 = y_1 - \tfrac{1}{2}\sqrt{5}, \qquad z_2 = y_2 + \tfrac{1}{2}\sqrt{5}$$

ساده‌ترکرد . از نظر هندسی ، این یعنی محورهای مختصات جدیدی انتخاب کنیم موازی محورهای y_1y_2 ولی مبداء جدید در مرکز بیضی باشد . در دستگاه z_1z_2 ، معادلهٔ بیضی فقط خواهد بود

$$z_1^2 + 6z_2^2 = 9 \quad \text{یا} \quad \frac{z_1^2}{9} + \frac{z_2^2}{3/2} = 1 \,.$$

این بیضی و هرسه دستگاه مختصات در شکل ۲۰۵ نموده شده است.

مثال ۲ . $2x^2 - 4xy - y^2 - 4x + 10y - 13 = 0$. این معـادله را بـه صورت زیر



شکل ۲۰۵ دوران و انتقال محورهای مختصات .
پس از دوران $Y = XC$ انتقال $z_1 = y_1 - \frac{1}{2}\sqrt{5},\ z_2 = y_2 + \frac{1}{2}\sqrt{5}$ آمده است .

می‌نویسیم :

$$2x_1^2 - 4x_1x_2 - x_2^2 - 4x_1 + 10x_2 - 13 = 0.$$

قسمت درجهٔ دوم XAX^t است ، که در آن $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ -2 & -1 \end{bmatrix}$. این ماتریس مقدارهای ویژهٔ $\lambda_1 = 3\ ,\ \lambda_2 = -2$ را دارد . یک مجموعهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژه عبارت است از $u_1 = t(2, -1),\ u_2 = t(1, 2)$ ، که $t = 1/\sqrt{5}$. یک ماتریس قطری ساز متعامد $C = t\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$ می‌باشد . معادلهٔ دوران $X = YC^t$ نتیجه می‌دهد که

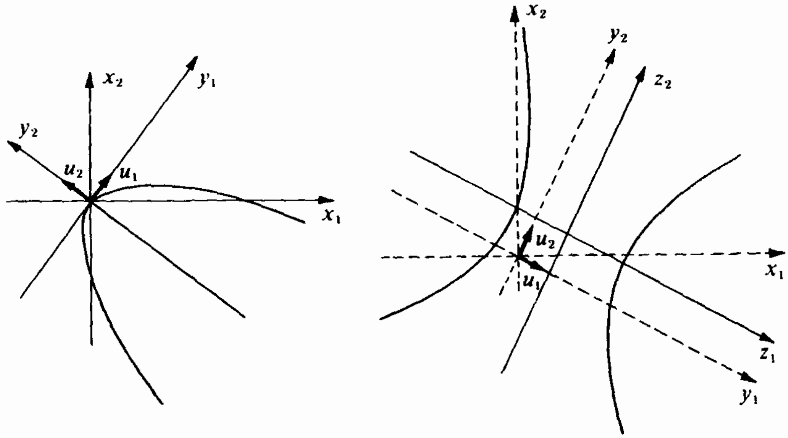
$$x_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_2), \qquad x_2 = \frac{1}{\sqrt{5}}(-y_1 + 2y_2).$$

بنابراین ، معادلهٔ تبدیل شده خواهد شد

$$3y_1^2 - 2y_2^2 - \frac{4}{\sqrt{5}}(2y_1 + y_2) + \frac{10}{\sqrt{5}}(-y_1 + 2y_2) - 13 = 0$$

یا

$$3y_1^2 - 2y_2^2 - \frac{18}{\sqrt{5}}y_1 + \frac{16}{\sqrt{5}}y_2 - 13 = 0.$$



(آ) هذلولی: $3z_1^2 - 2z_2^2 = 12$ (ب) سهمی: $y_1^2 + y_2 = 0$

شکل ۳۰۵ منحنیها در مثالهای ۲ و ۳

با کامل کردن مربعها نسبت به y_1 و y_2 ، معادلهٔ

$$3(y_1 - \tfrac{3}{5}\sqrt{5})^2 - 2(y_2 - \tfrac{4}{5}\sqrt{5})^2 = 12$$

به‌دست می‌آید، که‌نمایش‌یک هذلولی به مرکز $(\frac{3}{5}\sqrt{5}, \frac{4}{5}\sqrt{5})$ در دستگاه y_1y_2 است. انتقال $z_1 = y_1 - \frac{3}{5}\sqrt{5}, z_2 = y_2 - \frac{4}{5}\sqrt{5}$ این معادله را ساده‌تر خواهد کرد:

$$3z_1^2 - 2z_2^2 = 12 \quad \text{یا} \quad \frac{z_1^2}{4} - \frac{z_2^2}{6} = 1 \, .$$

هذلولی در شکل ۳۰۵ (آ) نشان داده شده است. بردارهای ویژهٔ u_1 و u_2 جهتهای محورهای مثبت y_1 و y_2 را معین خواهند کرد.

مثال ۳. $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 20x + 15y = 0$. این معادله را به‌صورت زیر می‌نویسیم:

$$9x_1^2 + 24x_1x_2 + 16x_2^2 - 20x_1 + 15x_2 = 0.$$

ماتریس‌متقارن برای قسمت درجهٔ دوم مساوی است با $A = \begin{bmatrix} 9 & 12 \\ 12 & 16 \end{bmatrix}$. مقدارهای ویژهٔ آن عبارتند از $\lambda_1 = 25 , \lambda_2 = 0$. یک مجموعهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژه

$u_1 = \frac{1}{5}(3, 4)$, $u_2 = \frac{1}{5}(-4, 3)$ است . یک ماتریس قطری ساز متعامد $C = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 4 & 3 \end{bmatrix}$ می‌باشد . معادلهٔ دوران $X = YC^t$ نتیجه می‌دهد که

$$x_1 = \tfrac{1}{5}(3y_1 - 4y_2), \qquad x_2 = \tfrac{1}{5}(4y_1 + 3y_2).$$

بنابر این ، معادلهٔ دکارتی تبدیل شده خواهد شد

$$25y_1^2 - \tfrac{20}{5}(3y_1 - 4y_2) + \tfrac{15}{5}(4y_1 + 3y_2) = 0.$$

این معادله به $y_1^2 + y_2 = 0$ ساده می‌شود ، معادلهٔ یک سهمی که راسش در مبداء است . این سهمی در شکل ۳۰۵ (ب) نموده شده است .

مثال ۴ . حالات تباه شده. اطلاعاتی فقط از مقدارهای ویژه ، این امر را که معادلهٔ دکارتی یک مقطع مخروطی تباه شده را نمایش می‌دهد یا نه مشخص نمی‌کند . مثلا " ، سه معادلهٔ $x^2 + 2y^2 = 1$ ، $x^2 + 2y^2 = 0$ ، و $x^2 + 2y^2 = -1$ همه دارای مقدارهای ویژهٔ یکسانند ؛ اولی نمایشگر یک بیضی تباه نشده است ، دومی فقط نقطهٔ $(x, y) = (0, 0)$ صادق درخود را دارد ؛ و سومی نمایشگر مجموعهٔ تهی است . دو حالت اخیر را می‌توان حالات تباه شده‌ای از بیضی دانست .

نمودار معادلهٔ $y^2 = 0$ محور x است . معادلهٔ $y^2 - 1 = 0$ دو خط موازی $y = 1$ و $y = -1$ را نمایش می‌دهد . اینها را می‌توان حالات تباه شده‌ای از سهمی گرفت . معادلهٔ $x^2 - 4y^2 = 0$ نمایشگر دوخط متقاطع است ، زیرا در صورتی برقرار است که $x - 2y = 0$ یا $x + 2y = 0$. این را می‌توان حالت تباه شده‌ای از هذلولی دانست .

بهرحال ، اگر معادلهٔ دکارتی $ax^2 + bxy + cy^2 + dx + ey + f = 0$ نمایشگر یک مقطع مخروطی تباه نشده باشد ، **نوع مخروطی** را می‌توان کاملا " آسان معین کرد . چند جمله‌ای مشخص ماتریس فرم درجهٔ دوم $ax^2 + bxy + cy^2$ عبارت است از

$$\det\begin{bmatrix} \lambda - a & -b/2 \\ -b/2 & \lambda - c \end{bmatrix} = \lambda^2 - (a + c)\lambda + (ac - \tfrac{1}{4}b^2) = (\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2).$$

پس ، حاصل ضرب مقدارهای ویژه مساوی است با

$$\lambda_1\lambda_2 = ac - \tfrac{1}{4}b^2 = \tfrac{1}{4}(4ac - b^2).$$

چون نوع مخروطی را علامت جبری حاصل ضرب $\lambda_1\lambda_2$ تعیین می‌کند ، ملاحظه می‌کنیم که مخروطی ، بسته به اینکه $4ac - b^2$ **مثبت ، منفی ، یا صفر** باشد ، **بیضی ، هذلولی ، یا**

سهمی خواهد بود . عدد $4ac - b^2$ مبین فرم درجهٔ دوم $ax^2 + bxy + cy^2$ نامیده می‌شود . در مثالهای ۱، ۲، و ۳، مبین بترتیب دارای مقادیر 34 ، $24-$ ، و 0 است .

۱۵۰۵ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۷، (آ) برای فرم درجهٔ دوم یک ماتریس متقارن مانند A بیابید ؛ (ب) مقدارهای ویژهٔ A را پیدا کنید ؛ (پ) یک مجموعهٔ متعامد یکه از بردارهای ویژه بیابید ؛ (ت) یک ماتریس قطری ساز متعامد مانند C پیدا کنید .

۱ . $4x_1^2 + 4x_1x_2 + x_2^2$.

۲ . x_1x_2 .

۳ . $x_1^2 + 2x_1x_2 - x_2^2$.

۴ . $34x_1^2 - 24x_1x_2 + 41x_2^2$.

۵ . $x_1^2 + x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3$.

۶ . $2x_1^2 + 4x_1x_3 + x_2^2 - x_3^2$.

۷ . $3x_1^2 + 4x_1x_2 + 8x_1x_3 + 4x_2x_3 + 3x_3^2$.

در تمرینهای ۸ تا ۱۸، مقطع مخروطی نموده شده با معادلهٔ دکارتی را شناسایی کرده و آن را بکشید .

۸ . $y^2 - 2xy + 2x^2 - 5 = 0$.

۹ . $y^2 - 2xy + 5x = 0$.

۱۰ . $y^2 - 2xy + x^2 - 5x = 0$.

۱۱ . $5x^2 - 4xy + 2y^2 - 6 = 0$.

۱۲ . $19x^2 + 4xy + 16y^2 - 212x + 104y = 356$.

۱۳ . $9x^2 + 24xy + 16y^2 - 52x + 14y = 6$.

۱۴ . $5x^2 + 6xy + 5y^2 - 2 = 0$.

۱۵ . $x^2 + 2xy + y^2 - 2x + 2y + 3 = 0$.

۱۶ . $2x^2 + 4xy + 5y^2 - 2x - y - 4 = 0$.

۱۷ . $x^2 + 4xy - 2y^2 - 12 = 0$.

۱۸ . $xy + y - 2x - 2 = 0$.

۱۹ . به‌ازای‌چه‌مقدار (یا مقادیری) از c ، نمودار معادلهٔ دکارتی $2xy - 4x + 7y + c = 0$ یک‌جفت خط است ؟

۲۰ . ثابت کنید که اگر معادلهٔ $ax^2 + bxy + cy^2 = 1$ نمایش یک بیضی باشد ، مساحت ناحیهٔ محدود به آن مساوی $2\pi/\sqrt{4ac - b^2}$ است . این امر به مبین $4ac - b^2$ معنی هندسی می‌بخشد .

* ۱۶۰۵ مقدارهای ویژهٔ یک تبدیل متقارن به‌عنوان مقادیر فرم درجهٔ دوم آن

حال شرط اینکه V با بعد متناهی باشد را حذف می‌کنیم و رابطهٔ بین مقدارهای ویژهٔ یک عملگر متقارن و فرم درجهٔ دوم آن را به‌دست می‌آوریم .

فرض کنیم x یک بردار ویژه با نرم 1 متعلق به مقدار ویژهٔ λ باشد . دراین‌صورت ، $T(x) = \lambda x$ ؛ درنتیجه، داریم

$$Q(x) = (T(x), x) = (\lambda x, x) = \lambda(x, x) = \lambda, \qquad (۱۳۰۵)$$

زیرا $(x, x) = 1$. مجموعهٔ تمام x های در V وصادق در $(x, x) = 1$ راکرهٔ **یکه** در V می‌نامند . معادلهٔ (۱۳۰۵) قضیهٔ زیر را ثابت می‌کند .

قضیهٔ ۱۲۰۵ . *فرض کنیم $T: V \to V$ یک تبدیل متقارن بر فضای اقلیدسی حقیقی V بوده، و $Q(x) = (T(x), x)$. در این صورت ، مقدارهای ویژهٔ T (در صورت وجود) در میان مقادیری است که Q بر کرهٔ یکه در V می‌گیرد .*

مثال . فرض کنیم $V = V_2(\mathbf{R})$ با پایهٔ معمولی $(\boldsymbol{i}, \boldsymbol{j})$ و ضرب نقطه‌ای معمولی به عنوان ضرب داخلی باشد . همچنین ، T تبدیل متقارن با ماتریس $A = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$ باشد . دراین صورت ، فرم درجهٔ دوم T عبارت است از

$$Q(x) = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} a_{ij}x_i x_j = 4x_1^2 + 8x_2^2.$$

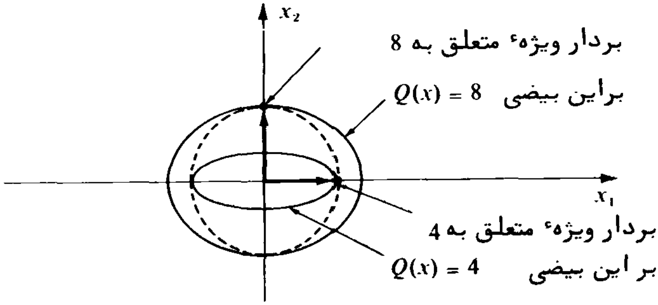
مقدارهای ویژهٔ T عبارتنداز $\lambda_1 = 4$, $\lambda_2 = 8$. به‌آسانی معلوم می‌شود که این مقدارهای ویژه بترتیب مینیمم و ماکزیممی است که Q بر دایرهٔ یکهٔ $x_1^2 + x_2^2 = 1$ می‌گیرد .
در واقع ، براین دایره داریم

$$Q(x) = 4(x_1^2 + x_2^2) + 4x_2^2 = 4 + 4x_2^2,$$

که‌درآن $-1 \le x_2 \le 1$. این کوچکترین مقدار خود ، یعنی 4 ، را وقتی دارد که $x_2 = 0$ ، و بزرگترین مقدار خود ، یعنی 8 ، را وقتی دارد که $x_2 = \pm 1$.

---

* *بخشهای ستاره دار را می‌توان ، بی‌آنکه به‌تسلسل مطلب خللی وارد شود ، حذف کرد یا به تعویق انداخت .*



شکل ۴۰۵ رابطهٔ هندسی بین مقدارهای ویژهٔ T
و مقادیر Q بر کرهٔ یکه با یک مثال دوبعدی مجسم شده است.

شکل ۴۰۵ دایرهٔ یکه و دو بیضی را نشان می‌دهد. بیضی داخلی دارای معادلهٔ دکارتی $4x_1^2 + 8x_2^2 = 4$ است، و از تمام نقاط $x = (x_1, x_2)$ در صفحه تشکیل شده که در $Q(x) = 4$ صدق می‌کنند. بیضی خارجی دارای معادلهٔ دکارتی $4x_1^2 + 8x_2^2 = 8$ است، و از جمیع نقاط صادق در $Q(x) = 8$ متشکل است. نقاط $(\pm 1, 0)$، که در آنها بیضی داخلی با دایرهٔ یکه تماس دارد، بردارهای ویژهٔ متعلق به مقدار ویژهٔ 4 هستند. نقاط $(0, \pm 1)$ واقع بر بیضی خارجی بردارهای ویژهٔ متعلق به مقدار ویژهٔ 8 می‌باشند.

مثال پیش خواص اکستریمی مقادیر ویژه را که به‌طور کلی برقرارند توصیف می‌کند. در بخش بعد ثابت می‌کنیم که کوچکترین و بزرگترین مقدار ویژه (درصورت وجود) همیشه مینیمم و ماکزیمم Q برکرهٔ یکه‌اند. در بحث ما از این خواص اکستریمی از قضیهٔ زیر درباب فرمهای درجهٔ دوم استفاده می‌شود. باید توجه داشت که در این قضیه لازم نیست V با بعد متناهی باشد.

قضیهٔ ۱۳۰۵ . فرض کنیم $T: V \to V$ یک تبدیل متقارن بر فضای اقلیدسی حقیقی V با فرم درجهٔ دوم $Q(x) = (T(x), x)$ باشد. همچنین، Q بر V تغییر علامت ندهد. در این صورت، اگر به‌ازای x ی در V، $Q(x) = 0$، نیز خواهیم داشت $T(x) = O$. به‌عبارت دیگر، اگر Q تغییر علامت ندهد، فقط بر فضای پوچ T صفر خواهد شد.

برهان. فرض کنیم بـه‌ازای x ی در V ، $Q(x) = 0$ ، و y عنصری در V باشد. t ی حقیقی و دلخواه را اختیار کرده و $Q(x + ty)$ را درنظر می‌گیریم. با استفاده ازخاصیت خطی T ، خاصیت خطی ضرب داخلی، و تقارن T ، داریم

$$Q(x + ty) = (T(x + ty), x + ty) = (T(x) + tT(y), x + ty)$$
$$= (T(x), x) + t(T(x), y) + t(T(y), x) + t^2(T(y), y)$$
$$= Q(x) + 2t(T(x), y) + t^2Q(y) = at + bt^2,$$

که $a = 2(T(x), y)$ و $b = Q(y)$. اگـر Q بر V نامنفی بـاشد، نامساوی زیر را خواهیم داشت:

$$\text{به‌ازای هر } t \text{ حقیقی، } at + bt^2 \geq 0 \,.$$

به عبـارت دیگر، چند جمله‌ای درجهٔ دوم $p(t) = at + bt^2$ مینیمم خود را در $t = 0$ دارد. لذا، $p'(0) = 0$. اما $p'(0) = a = 2(T(x), y)$ ؛ در نتیجه، $(T(x), y) = 0$ چون y دلخواه بود، می‌توان درحالت خاص $y = T(x)$ را اختیار کرد و به‌دست آورد که $(T(x), T(x)) = 0$. این ثابت می‌کند که $T(x) = O$.

اگر Q بر V نامثبت باشد، به‌ازای هر t خواهیم داشت $p(t) = at + bt^2 \leq 0$ ؛ درنتیجه، p ماکزیمم خود را در $t = 0$ دارد؛ و درنتیجه، مثل قبل، $p'(0) = 0$.

* ۱۷۰۵ خواص اکسترمال مقدارهای ویژهٔ یک تبدیل متقارن

حال ثابت مـی‌کنیم کـه مقادیر اکسترمال‌یک فرم درجهٔ دوم بر کرهٔ یکه مقدارهای ویژه می‌باشند.

قضیهٔ ۱۴۰۵ . *فرض کنیم $T: V \to V$ یک تبدیل‌خطی متقارن‌بر فضای اقلیدسی حقیقی V بوده، و $Q(x) = (T(x), x)$. فرض‌کنیم درمیان تمام مقادیری‌که Q برکرهٔ یکه می‌گیرد یک اکسترمم* (ماکزیمم یا مینیمم) درنقطهٔ u که $(u, u) = 1$ وجود داشته باشد. دراین*

---

* *اگر V با بعد نامتناهی باشد، فرم درجهٔ دوم Q لزوما " بر کرهٔ یکه اکسترمم ندارد. این حـالتی است که T مقدار ویژه ندارد. درحالت ابعاد متناهی، Q همیشه جایی برکرهٔ یکه ماکزیمم و مینیمم دارد. این امر نتیجه‌ای است از یک قضیهٔ کلیتر درباب مقادیر اکستریم توابع پیوسته. برای حالت خاصی از این قضیه، ر.ک. بخش ۱۶۰۹.*

صورت، u یک بردار ویژه برای T است؛ مقدار ویژهٔ نظیر $Q(u)$ است، یعنی مقدار اکستریم Q برکرهٔ یکه.

برهان. فرض کنیم Q در u مینیمم داشته باشد. در این صورت، چنین داریم:

$$Q(x) \geq Q(u) \quad \text{،} \quad (x, x) = 1 \text{ که } x \text{ به‌ازای هر } \qquad (۱۴\cdot۵)$$

فرض کنیم $\lambda = Q(u)$. اگر $(x, x) = 1$، داریم $Q(u) = \lambda(x, x) = (\lambda x, x)$؛ در نتیجه، نامساوی (۱۴۰۵) را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$(T(x), x) \geq (\lambda x, x) \qquad (۱۵\cdot۵)$$

مشروط براینکه $(x, x) = 1$. حال ثابت می‌کنیم (۱۵۰۵) به‌ازای هر x در V معتبر است. فرض کنیم $a = \|x\|$. پس $x = ay$، که در آن $\|y\| = 1$. بنابراین،

$$(T(x), x) = (T(ay), ay) = a^2(T(y), y) \quad \text{و} \quad (\lambda x, x) = a^2(\lambda y, y) \text{ .}$$

اما $(T(y), y) \geq (\lambda y, y)$، زیرا $(y, y) = 1$. با ضرب دو طرف این نامساوی در a^2، (۱۵۰۵) به‌ازای $x = ay$ به‌دست می‌آید.

چون

$$(T(x), x) - (\lambda x, x) = (T(x) - \lambda x, x) \text{ ،}$$

می‌توان نامساوی (۱۵۰۵) را به شکل $(T(x) - \lambda x, x) \geq 0$ نوشت، یا

$$(S(x), x) \geq 0 \text{ ، که در آن } S = T - \lambda I \text{ .} \qquad (۱۶\cdot۵)$$

وقتی $x = u$، نامساوی (۱۴۰۵)، و در نتیجه (۱۶۰۵)، را داریم. تبدیل خطی S متقارن است. نامساوی (۱۶۰۵) می‌گوید که فرم درجهٔ دوم Q_1، که با $Q_1(x) = (S(x), x)$ داده می‌شود، بر V نامنفی است. وقتی $x = u$، داریم $Q_1(u) = 0$. لذا، طبق قضیهٔ ۱۳۰۵، باید داشته باشیم $S(u) = O$. به عبارت دیگر، $T(u) = \lambda u$؛ در نتیجه، u یک بردار ویژه برای T است، و $\lambda = Q(u)$ مقدار ویژهٔ نظیر می‌باشد. این برهان را در صورتی که Q در u مینیمم داشته باشد تمام می‌کند.

اگر در u ماکزیمم وجود داشته باشد، نامساویهای برهان قبلی عکس می‌شوند و قضیهٔ ۱۳۰۵ را در مورد فرم درجهٔ دوم نامثبت Q_1 به‌کار می‌بریم.

✱ ۱۸۰۵ حالت ابعاد متناهی

حال فرض کنیم $\dim V = n$. دراین صورت، T دارای n مقدار ویژهٔ حقیقی است که

می‌توان آنها را به‌ترتیب صعودی آراست :

$$\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_n .$$

طبق قضیهٔ ۱۴۰۵ ، کوچکترین مقدار ویژهٔ λ_1 مینیمم Q برکرهٔ یکه است ، و بزرگترین مقدار ویژه ماکریمم Q برکرهٔ یکــه می‌باشد . حال نشان می‌دهیم که مقادیر ویژهٔ میانی نیز به‌عنوان مقادیر اکسترمم Q ، که به زیر مجموعه‌های معینی از کرهٔ یکه محدود شده ، ظاهر می‌شوند .

فرض کنیم u_1 یک بردار ویژه بر کرهٔ یکه باشد که Q را مینیمم می‌سازد . در این صورت ، $\lambda_1 = Q(u_1)$. اگر λ یک مقدار ویــژه غیر از λ_1 باشد ، هر بردار ویژهٔ متعلق به λ باید متعامد به u_1 باشد . لذا ، طبیعی است که این بردار ویژه را در متمم متعامد زیر فضای پیموده شده به وسیلهٔ u_1 جستجو کنیم .

فرض کنیــم S زیر فضای پیموده شده به‌وسیلهٔ u_1 باشد . متمم متعامد $S^{\perp}$ از تمام عناصری در V تشکیل شــده که به u_1 متعامدند . بخصوص ، $S^{\perp}$ از تمام بردارهای ویژهٔ متعلق به‌مقادیرویژهٔ $\lambda \neq \lambda_1$ تشکیل شده‌است . به‌آسانی تحقیق‌می‌شودکه $\dim S^{\perp} = n - 1$ و T ، $S^{\perp}$ را بتوی خود آن می‌نگارد .* فرض کنیم S_{n-1} کرهٔ یکه در زیر فضای $(n-1)$ بعدی $S^{\perp}$ باشد . (کرهٔ یکهٔ S_{n-1} زیر مجموعهٔ کرهٔ یکه در V است .) با اعمال قضیهٔ ۱۴۰۵ در مورد زیرفضای $S^{\perp}$ ، درمی‌یابیم کــه $\lambda_2 = Q(u_2)$ ، که در آن u_2 نقطه‌ای است که Q را بر S_{n-1} مینیمم می‌کند .

بردار ویــژهٔ بعدی λ_3 را می‌توان به همین نحو به صورت مقدار مینیمم Q برکرهٔ یکهٔ S_{n-2} در فضــای $(n-2)$ بعدی مرکب از تمام عناصر متعامد به u_1 و u_2 به دست آورد . با ادامهٔ این‌کار معلوم می‌شود که هر مقدار ویژهٔ λ_k مقدارمینیممی است که Q بر کرهٔ یکهٔ S_{n-k+1} در یک زیر فضای با بعد $n-k+1$ می‌گیرد . ماکزیمم این مینیممهانیز مقدار **ماکزیممی** است که Q بر هــر کــرهٔ S_{n-k+1} می‌گیرد . مجمــوعهٔ بــردارهای ویــژهٔ $u_1, \ldots, u_n$ نظیر یک پایهٔ متعامد یکه برای V تشکیل می‌دهند .

۱۹۰۵ تبدیلات یکه‌ای

این فصل را بــا بحثی مختصر از ردهٔ مهم دیگری از تبدیلات به‌نام تبدیلات یکه‌ای به

---

* *این اثبات در برهان قضیهٔ ۴۰۵ ، بخش ۶۰۵ ، صورت گرفت .*

پایان می‌بریم . این تبدیلات در حالت ابعاد متناهی با ماتریسهای یکه‌ای نمایش داده می‌شوند .

تعریف . فرض کنیم E یک فضای اقلیدسی و V زیر فضایی از E باشد . تبدیل خطی $T: V \to E$ بر V **یکه‌ای** نام دارد اگر که

به‌ازای هر x و y در V ، $(T(x), T(y)) = (x, y)$. (۱۷۰۵)

وقتی E یک فضای اقلیدسی حقیقی است ، تبدیل یکه‌ای **تبدیل متعامد** نیز نامیده می‌شود .

معادلهٔ (۱۷۰۵) این‌طور توصیف می‌شود که می‌گویند T حاصل ضربهای داخلی را حفظ می‌کند . بنابراین ، طبیعی است منتظر باشیم که T تعامد و نرمها را نیز حفظ کند ، چرا که اینها از ضرب داخلی مشتق می‌شوند .

قضیهٔ ۱۵۰۵ . هرگاه $T: V \to E$ یک تبدیل یکه‌ای بر V باشد ، آنگاه به‌ازای هر x و y در V

(آ) $(x, y) = 0$ *ایجاب می‌کند که* $(T(x), T(y)) = 0$ *(T تعامد را حفظ می‌کند)* ؛

(ب) $\|T(x)\| = \|x\|$ *(T نرمها را حفظ می‌کند)* ؛

(پ) $\|T(x) - T(y)\| = \|x - y\|$ *(T فواصل را حفظ می‌کند)* ؛

(ت) T **معکوسپذیر است ، و T^{-1} بر $T(V)$ یکه‌ای می‌باشد .**

برهان . قسمت (آ) فوراً" از معادلهٔ (۱۷۰۵) نتیجه می‌شود . قسمت (ب) با فرض $x = y$ در (۱۷۰۵) به‌دست می‌آید . قسمت (پ) از (ب) حاصل می‌شود ، زیرا

$$T(x) - T(y) = T(x - y).$$

برای اثبات (ت) ، (ب) را به‌کار می‌بریم که نشان می‌دهد که $T(x) = O$ تساوی $x = O$ را ایجاب می‌کند ؛ درنتیجه ، T معکوسپذیرمی‌باشد . هرگاه $x \in T(V)$ و $y \in T(V)$ ، می‌توانیم بنویسیم $x = T(u), y = T(v)$ ؛ درنتیجه ، خواهیم داشت

$$(T^{-1}(x), T^{-1}(y)) = (u, v) = (T(u), T(v)) = (x, y).$$

لذا ، T^{-1} بر $T(V)$ یکه‌ای می‌باشد .

با توجه به مقدارهای ویژه و بردارهای ویژه، قضیهٔ زیر را خواهیم داشت.

قضیهٔ ۱۶۰۵ . فرض کنیم $T: V \to E$ یک تبدیل یکه‌ای بر V باشد.

(آ) هرگاه T دارای بردار ویژهٔ λ باشد، آنگاه $|\lambda| = 1$.

(ب) هرگاه x و y بردارهای ویژهٔ متعلق به مقادیر ویژهٔ متمایز λ و μ باشند، آنگاه x و y متعامد می‌باشند.

(پ) هرگاه $V = E$ ، $\dim V = n$ ، و V یک فضای مختلط باشد، آنگاه بردارهای ویژه‌ای چون $u_1, \ldots, u_n$ از T وجود دارند که یک پایهٔ متعامد یکه برای V می‌سازند. ماتریس T نسبت به این پایه ماتریس قطری $\Lambda = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ است، که در آن λ_k مقدار ویژهٔ متعلق به u_k می‌باشد.

برهان. برای اثبات (آ) فرض کنیم x یک بردار ویژهٔ متعلق به λ باشد. پس $x \neq O$ و $T(x) = \lambda x$. با اختیار $x = y$ در معادلهٔ (۱۷۰۵) خواهیم داشت

$$(\lambda x, \lambda x) = (x, x) \qquad \text{یا} \qquad \lambda\bar{\lambda}(x, x) = (x, x)$$

چون $(x, x) > 0$ و $\lambda\bar{\lambda} = |\lambda|^2$ ، این ایجاب می‌کند که $|\lambda| = 1$.

برای اثبات (ب) می‌نویسیم $T(x) = \lambda x$ ، $T(y) = \mu y$ ، و حاصل ضرب داخلی $(T(x), T(y))$ را به‌دو راه حساب می‌کنیم. چون T یکه‌ای است، داریم

$$(T(x), T(y)) = (x, y) .$$

و نیز، چون x و y بردارهای ویژه‌اند، خواهیم داشت

$$(T(x), T(y)) = (\lambda x, \mu y) = \lambda\bar{\mu}(x, y) .$$

بنابراین، $\lambda\bar{\mu}(x, y) = (x, y)$ ؛ در نتیجه، $(x, y) = 0$ مگر آنکه $\lambda\bar{\mu} = 1$. اما، بنابر (آ)، $\lambda\bar{\lambda} = 1$ ؛ درنتیجه، اگر می‌داشتیم $\lambda\bar{\mu} = 1$ ، نیز خواهیم داشت $\lambda\bar{\lambda} = \lambda\bar{\mu}$ ، $\bar{\lambda} = \bar{\mu}$ ، $\lambda = \mu$ ، که با فرض متمایز بودن λ و μ در تضاد است. بنابر این، $\lambda\bar{\mu} \neq 1$ و $(x, y) = 0$.

قسمت (پ) به استقرا بر n و خیلی شبیه به اثبات قضیهٔ ۴۰۵ ، که نتیجهٔ نظیر برای عملگرهای هرمیتی است، ثابت می‌شود. تنها تغییر لازم در آن قسمت از برهان است که نشان می‌دهد T ، $S^{\perp}$ را بتوی خودش می‌نگارد، که

$$S^{\perp} = \{x \mid x \in V, \quad (x, u_1) = 0\}.$$

دراینجا u_1 یک‌بردارویژهٔ T با مقدار ویژهٔ λ_1 است . از معادلهٔ $T(u_1) = \lambda_1 u_1$ معلوم می‌شود که

$$u_1 = \lambda_1^{-1} T(u_1) = \bar{\lambda}_1 T(u_1) \,,$$

زیرا $\lambda_1 \bar{\lambda}_1 = |\lambda_1|^2 = 1$. حال x دلخواهی در $S^\perp$ اختیار و توجه می‌کنیم که

$$(T(x), u_1) = (T(x), \bar{\lambda}_1 T(u_1)) = \lambda_1 (T(x), T(u_1)) = \lambda_1 (x, u_1) = 0 \,.$$

بنابراین ، اگر $x \in S^\perp$ ، $T(x) \in S^\perp$ ؛ در نتیجه ، T ، $S^\perp$ را بتوی خودش می‌نگارد . بقیهٔ برهان مثل برهان قضیهٔ ۴۰۵ است ؛ لذا،جزئیات را تکرار نمی‌کنیم .

دو قضیهٔ بعدی خواص تبدیلات یکه‌ای بر یک فضای با بعد متناهی را توصیف می‌کنند . ما فقط نکات مهم برهانها را ذکر می‌کنیم .

قضیهٔ ۱۷۰۵ . فرض‌کنیم $\dim V = n$ ، و $E = (e_1, \ldots, e_n)$ یک پایهٔ ثابت V باشد . در این صورت ، تبدیل خطی $T: V \to V$ یکه‌ای است اگر و فقط اگر

به‌ازای هر i و j ، $(T(e_i), T(e_j)) = (e_i, e_j)$. (۱۸۰۵)

بخصوص ، اگر E متعامدیکه باشد ، T یکه‌ای است اگر و فقط اگر T ، E را بروی یک پایهٔ متعامد یکه بنگارد .

طرح برهان . می‌نویسیم $x = \sum x_i e_i$ ، $y = \sum y_j e_j$. در این صورت ، داریم

$$(x, y) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i e_i \,,\, \sum_{j=1}^{n} y_j e_j\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \bar{y}_j (e_i \,,\, e_j) \,,$$

و

$$(T(x), T(y)) = \left(\sum_{i=1}^{n} x_i T(e_i), \sum_{j=1}^{n} y_j T(e_j)\right) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} x_i \bar{y}_j (T(e_i), T(e_j)) .$$

حال (x, y) را با $(T(x), T(y))$ مقایسه می‌کنیم .

قضیهٔ ۱۸۰۵ . فرض کنیم $\dim V = n$ ، و $(e_1, \ldots, e_n)$ یک‌پایهٔ متعامدیکهٔ V باشد . همچنین ، $A = (a_{ij})$ نمایش‌ماتریسی تبدیل خطی $T: V \to V$ نسبت به این پایه باشد . در این صورت ، T یکه‌ای است اگر و فقط اگر A یکه‌ای باشد ؛ یعنی ، اگر و فقط اگر

$$A^* A = I . \qquad (۱۹۰۵)$$

طرح برهان. چون (e_i, e_j) درایهٔ ij ماتریس همانی است، معادلهٔ (۱۹۰۵) ایجاب می‌کند که

$$(e_i, e_j) = \sum_{k=1}^{n} \bar{a}_{ki} a_{kj} = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \bar{a}_{kj}. \tag{۲۰۰۵}$$

چون A ماتریس T است، خواهیم داشت $T(e_i) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k$ ، $T(e_j) = \sum_{r=1}^{n} a_{rj} e_r$ ؛ در نتیجه،

$$(T(e_i), T(e_j)) = \left(\sum_{k=1}^{n} a_{ki} e_k, \sum_{r=1}^{n} a_{rj} e_r\right) = \sum_{k=1}^{n} \sum_{r=1}^{n} a_{ki} \bar{a}_{rj} (e_k, e_r) = \sum_{k=1}^{n} a_{ki} \bar{a}_{kj}.$$

حال این را با (۲۰۰۵) مقایسه و از قضیهٔ ۱۷۰۵ استفاده می‌کنیم.

قضیهٔ ۱۹۰۵ . هر ماتریس یکه‌ای A دارای خواص زیر است:

(آ) A نامنفرد است و $A^{-1} = A^*$ ؛

(ب) هریک از A^t ، $\bar{A}$ ، و A^* یک ماتریس یکه‌ای است؛

(پ) مقدارهای ویژهٔ A اعدادی مختلط با قدر مطلق یک‌اند؛

(ت) $|\det A| = 1$ ؛ هرگاه A حقیقی باشد، آنگاه $\det A = \pm 1$.

اثبات قضیهٔ ۱۹۰۵ تمرین و به عهدهٔ خواننده است.

۲۰۰۵ تمرین

۱ . (آ) فرض کنیم $T: V \to V$ تبدیل $T(x) = cx$ باشد، که در آن c یک ثابت معین است. ثابت کنید T یکه‌ای است اگر و فقط اگر $|c| = 1$.

(ب) ثابت کنید که اگر V یک بعدی باشد، تنها تبدیلات یکه‌ای بر V همانهای وصف شده در (آ) هستند. بخصوص، اگر V یک فضای حقیقی یک بعدی باشد، فقط دو تبدیل متعامد وجود دارند: $T(x) = x$ و $T(x) = -x$.

۲ . احکام زیر را در مورد ماتریس متعامد حقیقی $n \times n$ ، A ثابت کنید:

(آ) هرگاه λ یک مقدار ویژهٔ حقیقی A باشد، آنگاه $\lambda = 1$ یا $\lambda = -1$ ؛

(ب) هرگاه λ یک مقدار ویژهٔ مختلط A باشد، آنگاه مزدوج مختلط $\bar{\lambda}$ نیز یک مقدار ویـژهٔ A است. به عبارت دیگر، مقدارهای ویژهٔ غیر حقیقی A به صورت

جفتهای مزدوج ظاهر می‌شوند؛

(پ) هرگاه n فرد باشد، آنگاه A دست کم یک مقدار ویژهٔ حقیقی دارد.

۳. فرض کنید V یک فضای اقلیدسی حقیقی با بعد n باشد. تبدیل متعامد $T: V \to V$ با دترمینان 1 یک **دوران** نامیده می‌شود. ثابت کنید که اگر n فرد باشد، 1 یک مقدار ویژه برای T است. این نشان می‌دهد که هر دوران یک فضای‌فرد بعدی دارای یک محور ثابت است. [**راهنمایی**. از تمرین ۲ استفاده نمایید.]

۴. فرض کنید A یک ماتریس متعامد حقیقی با مقدار ویژهٔ 1− و از درجهٔ تکرار k باشد. ثابت کنید که $\det A = (-1)^k$.

۵. ثابت کنید که اگر T خطی و نرم نگهدار باشد، T یکه‌ای است.

۶. ثابت کنید که اگر $T: V \to V$ یکه‌ای و هرمیتی باشد، $T^2 = I$.

۷. فرض کنید $(e_1, \ldots, e_n)$ و $(u_1, \ldots, u_n)$ دو پایهٔ متعامد یکه برای فضای اقلیدسی V باشند. ثابت کنید یک تبدیل یکه‌ای مانند T هست‌که یکی از این پایه‌ها را بروی دیگری می‌نگارد.

۸. a ی حقیقی را طوری بیابید که ماتریس زیر یکه‌ای باشد:

$$\begin{bmatrix} a & \frac{1}{2}i & \frac{1}{2}a(2i-1) \\ ia & \frac{1}{2}(1+i) & \frac{1}{2}a(1-i) \\ a & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2}a(2-i) \end{bmatrix}.$$

۹. ثابت کنید که‌اگر A یک‌ماتریس‌هرمیتی اریب باشد، $I - A$ و $I + A$ هر دومنفردند و $(I - A)(I + A)^{-1}$ یکه‌ای می‌باشد.

۱۰. ثابت کنید که اگر A یک ماتریس یکه‌ای بوده و $I + A$ نامنفرد باشد، $(I - A)(I + A)^{-1}$ هرمیتی اریب است.

۱۱. ثابت کنید که اگر A هرمیتی باشد، $A - iI$ نامنفرد است و $(A - iI)^{-1}(A + iI)$ یکه‌ای.

۱۲. ثابت کنید هر ماتریس یکه‌ای را می‌توان به وسیلهٔ یک ماتریس یکه‌ای قطری کرد.

۱۳. یک ماتریس مربعی را **نرمال** گویند اگر که $AA^* = A^*A$. از انواع ماتریسهای زیر کدامها نرمال‌اند:

(آ) ماتریسهای هرمیتی؛

(ب) ماتریسهای هرمیتی اریب؛

(پ) ماتریسهای متقارن؛

(ت) ماتریسهای متقارن اریب؛

(ث) ماتریسهای یکه‌ای؛

(ج) ماتریسهای متعامد؟

۱۴ . ثابت کنید که اگر A یک ماتریس نرمال بوده ($AA^* = A^*A$) و U یک ماتریس یکه‌ای باشد، U^*AU نرمال است.

۶

معادلات دیفرانسیل خطی

۱.۶ مقدمهٔ تاریخی

سرآغاز معادلات دیفرانسیل قرن هفدهم میلادی است ، و آن زمانی است که نیوتن[1] ، لایب نیتز ، و برنولیها[2] موفق به حل چند معادلهٔ دیفرانسیل مراتب اول و دوم ساده که از هندسه و مکانیک ناشی شده بودند گردیدند . این کشفیات اولیه ، که شروعشان حدود ۱۶۹۰ بود ، ظاهراً" این فکر را پیش‌آورد که جواب همهٔ معادلات دیفرانسیل مبتنی بر مسائل هندسی و فیزیکی را می‌توان برحسب توابع مقدماتی آشنای حساب دیفرانسیل و انتگرال بیان کرد . از اینرو ، اغلب کارهای اولیه در جهت دستیابی به روشهای ابتکاری برای حل معادلات دیفرانسیل به‌وسیلهٔ ابزارهای مقدماتی ، یعنی جمع ، تفریق ، ضرب ، تقسیم ، ترکیب ، و انتگرالگیری ، است که تعدادی متناهی بار بر توابع آشنای حساب دیفرانسیل و انتگرال صورت می‌گیرند .

چند روش خاص نظیر جداسازی متغیرها و استفاده از سازه‌های انتگرالگیری قبل از پایان قرن هفده بیش و کم به‌طور تصادفی طرح شده بودند . در قرن هجده روندهایی اصولی‌تر ، عمدتاً" به‌وسیلهٔ اویلر[3] ، لاگرانژ[4] ، و لاپلاس[5] ، ارائه شدند . بسرعت معلوم شد که معادلات دیفرانسیل نسبتاً" کمی را می‌توان با ابزارهای مقدماتی حل کرد . ریاضیدانان رفته رفته دریافتند که تلاش در کشف روشهایی برای حل همهٔ معادلات دیفرانسیل بیهوده است . درعوض ، پرسش دراین باب که یک معادلهٔ دیفرانسیل جواب دارد یا نه ، و درصورت داشتن ، سعی دریافتن خواص جواب از خود معادلهٔ دیفرانسیل

---

1. Newton 2. Bernoullis 3. Euler 4. Lagrange 5. Laplace

بیشتر مفیداست. دراین چارچوب، ریاضیدانان معادلات دیفرانسیل را منابع جدیدی از توابع یافتند.

یک دورهٔ مهم در تاریخ این نظریه اوایل قرن نوزدهم بود، که سبک کلی کار با روش دقیقتری در حساب دیفرانسیل و انتگرال همسو شد. در سالهای ۱۸۲۰ تا ۱۸۳۰، کشی اولین "قضیهٔ وجودی" معادلات دیفرانسیل را به‌دست آورد. وی ثابت کرد که هر معادلهٔ مرتبهٔ اول به شکل

$$y' = f(x, y),$$

در صورتی که طرف راست آن $f(x, y)$ در شرایط عمومی معینی صدق کند، دارای جواب است. یک نمونهٔ مهم معادلهٔ ریکاتی[1] است:

$$y' = P(x)y^2 + Q(x)y + R(x),$$

که در آن P ، Q ، و R توابعی معلوم‌اند. کارهای کشی وجود جواب معادلهٔ ریکاتی در هر بازهٔ باز مانند $(-r, r)$ حول مبداء، در صورتی که P ، Q ، و R در $(-r, r)$ بسط به صورت سری توانی داشته باشند، را ایجاب می‌کنند. در سال ۱۸۴۱، ژزف لیوویل (۱۸۰۹—۱۸۸۲) نشان داد که در بعضی حالات نمی‌توان این جواب را با وسایل مقدماتی به‌دست آورد.

تجربه نشان داده که جز در مواردی، به‌دست آوردن نتایج با عمومیت بسیار در باب جوابهای معادلات دیفرانسیل مشکل است. در بین این معادلات، معادلات دیفرانسیل **خطی** هستند، که با تنوع بسیار در مسائل علمی ظاهر می‌شوند. چند نوع سادهٔ آن در جلد یک مطرح شدند — معادلات خطی مرتبهٔ اول و معادلات خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت. بخش زیر مروری است بر نتایج اصلی مربوط به این معادلات.

۲.۶ مرور نتایج مربوط به معادلات خطی مراتب اول و دوم

یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اول معادله‌ای است به شکل

$$y' + P(x)y = Q(x), \tag{۱.۶}$$

که در آن P و Q توابعی معلوم‌اند. در جلد یک برای این معادله یک قضیهٔ وجودی-یکتایی ثابت کردیم (قضیهٔ ۳.۸)، که مجدداً آن را در اینجا بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۱.۶ . *فرض کنیم P و Q بر بازهٔ J پیوسته باشند. نقطهٔ a را در J اختیار کرده، فرض می‌کنیم b عدد حقیقی دلخواهی باشد. دراین صورت، یک و فقط یک تابع*

---

1. Ricatti

مانند $y = f(x)$ هست که در معادلهٔ دیفرانسیل (۱۰۶) و شرط اولیهٔ $f(a) = b$ صدق می‌کند. این تابع با فرمول صریح

$$f(x) = be^{-A(x)} + e^{-A(x)} \int_a^x Q(t)e^{A(t)}\,dt \tag{۲۰۶}$$

داده می‌شود، که در آن

$$A(x) = \int_a^x P(t)\,dt .$$

معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ دوم معادلاتی به شکل زیر می‌باشند:

$$P_0(x)y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = R(x).$$

اگر ضرایب P_0, P_1, P_2 و طرف راست R بر بازه‌ای چون J پیوسته بوده، و P_0 بر J هرگز صفر نباشد، قضیهٔ وجودی (مذکور در بخش ۵۰۶) همیشه وجود جوابها را روی بازهٔ J تضمین خواهد کرد. با این وجود، فرمولی کلی شبیه به (۲۰۶) برای بیان این جوابها برحسب P_0 ، P_1 ، P_2 ، و R وجود ندارد. از اینرو، حتی در این تعمیم نسبتا "سادهٔ" (۱۰۶)، نظریه جز در حالات خاص خیلی ناقص است. چنانچه ضرایب ثابت بوده و R صفر باشد، همهٔ جوابها را می‌توان به‌طور صریح برحسب توابع چندجمله‌ای، نمایی، و مثلثاتی به‌وسیلهٔ قضیهٔ زیر که در جلد یک ثابت شد (قضیهٔ ۷۰۸) معین کرد.

قضیهٔ ۲۰۶ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + ay' + by = 0 \tag{۳۰۶}$$

را درنظر می‌گیریم، که در آن a و b ثابتهای حقیقی معلومی هستند. فرض کنیم $d = a^2 - 4b$. دراین صورت، هر جواب (۳۰۶) بربازهٔ $(-\infty, +\infty)$ به شکل

$$y = e^{-ax/2}[c_1u_1(x) + c_2u_2(x)] \tag{۴۰۶}$$

است، که در آن c_1 و c_2 ثابت بوده، و توابع u_1 و u_2 طبق علامت جبری d به صورت زیر تعیین می‌شوند:

(آ) هرگاه $d = 0$ ، آنگاه $u_1(x) = 1$ و $u_2(x) = x$ ؛

(ب) هرگاه $d > 0$ ، آنگاه $u_1(x) = e^{kx}$ و $u_2(x) = e^{-kx}$ ، که در آنها $k = \frac{1}{2}\sqrt{d}$ ؛

(پ) هرگاه $d < 0$ ، آنگاه $u_1(x) = \cos kx$ و $u_2(x) = \sin kx$ ، که در آنها $k = \frac{1}{2}\sqrt{-d}$.

عدد $d = a^2 - 4b$ مبین معادلهٔ درجهٔ دوم

$$r^2 + ar + b = 0 \qquad (۵۰۶)$$

است. این معادله *معادلهٔ مشخص* معادلهٔ دیفرانسیل (۳۰۶) است. ریشه‌های آن عبارتند از

$$r_1 = \frac{-a + \sqrt{d}}{2}, \qquad r_2 = \frac{-a - \sqrt{d}}{2}.$$

علامت جبری d سرشت این ریشه‌ها را تعیین می‌کند. اگر $d > 0$، هر دو ریشه حقیقی‌اند و جواب (۴۰۶) را می‌توان به‌شکل

$$y = c_1 e^{r_1 x} + c_2 e^{r_2 x}$$

بیان کرد. اگر $d < 0$، ریشه‌های r_1 و r_2 اعداد مختلط مزدوج می‌باشند. هریک از توابع نمایی مختلط $f_1(x) = e^{r_1 x}$ و $f_2(x) = e^{r_2 x}$ یک جواب مختلط معادلهٔ دیفرانسیل (۳۰۶) است. جوابهای حقیقی را با معاینهٔ قسمتهای حقیقی و موهومی f_1 و f_2 به‌دست می‌آوریم. چنانچه بنویسیم $r_1 = -\frac{1}{2}a + ik$, $r_2 = -\frac{1}{2}a - ik$، که در آن $k = \frac{1}{2}\sqrt{-d}$، داریم

$$f_1(x) = e^{r_1 x} = e^{-ax/2} e^{ikx} = e^{-ax/2} \cos kx + i e^{-ax/2} \sin kx$$

و

$$f_2(x) = e^{r_2 x} = e^{-ax/2} e^{-ikx} = e^{-ax/2} \cos kx - i e^{-ax/2} \sin kx.$$

جواب عمومی به‌شکل معادلهٔ (۴۰۶) ترکیبی خطی از قسمتهای حقیقی و موهومی $f_1(x)$ و $f_2(x)$ است.

۳۰۶ تمرین

این تمرینها از فصل ۸ در جلد یک انتخاب شده است تا مروری باشد برمطالب مقدماتی معادلات دیفرانسیل خطی مراتب اول و دوم.

معادلات خطی مرتبهٔ اول. در تمرینهای ۱، ۲، و ۳، مسئله با مقدار اولیه را بر بازهٔ داده شده حل کنید.

۱. $y' - 3y = e^{2x}$ بر $(-\infty, +\infty)$، با $y = 0$ وقتی $x = 0$.

۲. $xy' - 2y = x^5$ بر $(0, +\infty)$، با $y = 1$ وقتی $x = 1$.

۳. $y' + y \tan x = \sin 2x$ بر $(-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi)$، با $y = 2$ وقتی $x = 0$.

۴. اگر تعدادی از یک نوع باکتری بمیزانی متناسب با تعداد آنها در هر لحظه رشد کنند و عدهٔ آنها در هر ساعت دو برابر گردد، افزایش آنها پس از دو ساعت چه خواهد بود؟

۵ یک منحنی با معادلهٔ دکارتی $y = f(x)$ از مبداء می‌گذرد. خطوط مرسوم از یک

نقطهٔ دلخواه منحنی به موازات محورهای مختصات یک مستطیل می‌سازند، که دو ضلعش بر محورها قرار دارند. منحنی هرچنین مستطیلی را به دو ناحیهٔ A و B تقسیم می‌کند، که یکی مساحتی n برابر دیگری دارد. تابع f را پیدا نمایید.

۶. (آ) فرض کنید u یک جواب ناصفر معادلهٔ مرتبهٔ دوم $y'' + P(x)y' + Q(x)y = 0$ باشد. نشان دهید که جانشانی $y = uv$ معادلهٔ

$$y'' + P(x)y' + Q(x)y = R(x)$$

را به یک معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول نسبت به v' تبدیل می‌کند.

(ب) یک جواب ناصفر معادلهٔ $y'' - 4y' + x^2(y' - 4y) = 0$ را با معاینه به‌دست آورده، با استفاده از روش قسمت (آ)، جوابی از معادلهٔ

$$y'' - 4y' + x^2 (y' - 4y) = 2xe^{-x^3/3}$$

را بیابید که، وقتی $x = 0$، $y = 0$ و $y' = 4$.

معادلات خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب ثابت. در تمرینهای ۷ تا ۱۰، همهٔ جوابهای بر $(-\infty, +\infty)$ را پیدا نمایید.

۷. $y'' - 4y = 0$.

۸. $y'' + 4y = 0$.

۹. $y'' - 2y' + 5y = 0$.

۱۰. $y'' + 2y' + y = 0$.

۱۱. تمام مقادیر ثابت k را طوری بیابید که معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + ky = 0$ یک جواب نابدیهی مانند $y = f_k(x)$ داشته باشد که $f_k(0) = f_k(1) = 0$. به‌ازای هر مقدار مجاز از k، جواب نظیر $y = f_k(x)$ را مشخص کنید. هم مقادیر مثبت و هم منفی k را درنظربگیرید.

۱۲. ثابت کنید که اگر (a, b) یک نقطه در صفحه بوده و m عددی حقیقی باشد، معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + k^2y = 0$ دقیقاً یک جواب دارد که نمودارش از نقطهٔ (a, b) گذشته و در آن دارای شیب m باشد. حالت $k = 0$ را جداگانه بررسی کنید.

۱۳. درهرحالت، یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم بیابید که u_1 و u_2 درآن صدق کنند.

(آ) $u_1(x) = e^x, \quad u_2(x) = e^{-x}$. (ب) $u_1(x) = e^{2x}, \quad u_2(x) = xe^{2x}$.

(پ) $u_1(x) = e^{-x/2} \cos x, \quad u_2(x) = e^{-x/2} \sin x$.

(ت) $u_1(x) = \sin (2x + 1), \quad u_2(x) = \sin (2x + 2)$.

(ث) $u_1(x) = \cosh x, \quad u_2(x) = \sinh x$.

۱۴. جسمی دارای حرکت توافقی ساده است. تغییر مکان اولیهٔ آن 1، سرعتش 1، و شتابش -12 است. تغییر مکان و شتاب را وقتی سرعت $\sqrt{8}$ است حساب کنید.

۴.۶ معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n

یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n معادله‌ای است به‌شکل

$$P_0(x)y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = R(x). \tag{۶.۶}$$

توابع $P_0, P_1, \ldots, P_n$ که در مشتقات مختلف تابع مجهول y ضرب شده‌اند **ضرایب** معادله نامیده می‌شوند. در بحث کلی ما از معادلهٔ خطی، فرض این است که تمام ضرایب بر بازه‌ای چون J پیوسته‌اند. واژهٔ "بازه" اشاره به یک بازهٔ کراندار یا بازهٔ بی‌کران‌دارد.

درمعادلهٔ دیفرانسیل (۶.۶)، ضریب پیشرو P_0 نقشی خاص دارد، چرا که مرتبهٔ معادله‌را مشخص می‌کند. نقاطی که در آنها $P_0(x) = 0$ **نقاط منفرد** معادله نامیده می‌شوند. نقاط منفرد گاهی مسائلی ایجاد می‌کنند که نیاز به بررسی خاص دارند. برای احتراز از این مسائل، فرض می‌کنیم تابع P_0 هرگز بر J صفر نمی‌شود. دراین صورت، می‌توان دوطرف معادلهٔ (۶.۶) را بر P_0 تقسیم کرد و معادلهٔ دیفرانسیل را به شکلی با ضریب پیشرو 1 نوشت. بنابراین، در بحث کلی ما، فرض می‌شود که معادلهٔ دیفرانسیل به‌شکل

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = R(x) \tag{۷.۶}$$

می‌باشد.

بحث معادلات خطی را می‌توان با استفاده از نماد عملگر ساده کرد. فرض کنیم $\mathscr{C}(J)$ فضای خطی تمام توابع حقیقی پیوسته بر بازهٔ J باشد. فرض کنیم $\mathscr{C}^n(J)$ زیر فضای مرکب از تمام توابع f باشد که n مشتق اول آن $f', f'', \ldots, f^{(n)}$ بر J موجود و پیوسته‌اند. فرض‌کنیم $P_1, \ldots, P_n$ ، n تابع در $\mathscr{C}(J)$ باشند، و عملگر $L: \mathscr{C}^n(J) \to \mathscr{C}(J)$ را که با

$$L(f) = f^{(n)} + P_1 f^{(n-1)} + \cdots + P_n f$$

داده شده است درنظر می‌گیریم. خود عملگر L را گاهی به‌صورت

$$L = D^n + P_1 D^{n-1} + \cdots + P_n$$

می‌نویسیم، که‌درآن D^k عملگر مشتق k ام می‌باشد. با نماد عملگر، معادلهٔ دیفرانسیل (۷.۶) به‌صورت سادهٔ

$$L(y) = R \tag{۸.۶}$$

نوشته می‌شود. یک جواب این معادله تابع y در $\mathscr{C}^n(J)$ است که بر بازهٔ J در (۸.۶) صدق کند.

به‌آسانی تحقیق می‌شود که $L(y_1 + y_2) = L(y_1) + L(y_2)$ ، و نیز، به‌ازای هرثابت

c ، $L(cy) = cL(y)$. بنابراین، L یک **عملگر خطی** است. به این دلیل، معادلهٔ $L(y) = R$ را یک معادلهٔ خطی می‌نامند. **عملگر L یک عملگر دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n** نامیده می‌شود.

به هر معادلهٔ خطی $L(y) = R$ می‌توان معادلهٔ

$$L(y) = 0$$

را مربوط کرد، که درآن طرف راست با صفر عوض شده است. این معادله **معادلهٔ همگن** نظیر به $L(y) = R$ نام دارد. وقتی R متحد صفر نباشد، معادلهٔ $L(y) = 0$ یک **معادلهٔ غیرهمگن** نامیده می‌شود. خواهیم دیدکه همیشه، وقتی معادلهٔ همگن نظیر قابل حل باشد، معادلهٔ غیر همگن نیز قابل حل است. از اینرو، بررسی خود را با معادلهٔ همگن آغاز می‌کنیم.

مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ همگن فضای پوچ $N(L)$ عملگر L است. این فضا، **فضای جواب** معادله نیز نام دارد. فضای جواب یک زیرفضای $\mathscr{C}^n(J)$ است. با اینکه $\mathscr{C}^n(J)$ با بعد نامتناهی است، ثابت می‌شود که فضای جواب $N(L)$ همیشه با بعد متناهی است. در واقع، ثابت خواهیم کرد که

$$\dim N(L) = n, \tag{۹.۶}$$

که درآن n مرتبهٔ عملگر L می‌باشد. معادلهٔ (۹.۶) **قضیهٔ بعدیت** برای عملگرهای دیفرانسیل خطی نام دارد. قضیهٔ بعدیت از قضیهٔ وجودی ـ یکتایی، که درزیر مطرح می‌شود، نتیجه خواهد شد.

۵.۶ قضیهٔ وجودی ـ یکتایی

قضیهٔ ۳.۶ . قضیهٔ وجودی ـ یکتایی برای معادلات خطی مرتبهٔ n . *فرض کنیم $P_1, P_2, \ldots, P_n$ توابع پیوسته‌ای بر بازهٔ باز J بوده، و L عملگر دیفرانسیل خطی*

$$L = D^n + P_1D^{n-1} + \cdots + P_n$$

باشد. هرگاه $x_0 \in J$ و $k_0, k_1, \ldots, k_{n-1}$ ، n عدد حقیقی باشند، آنگاه یک و فقط یک تابع مانند $y = f(x)$ هست که درمعادلهٔ دیفرانسیل همگن $L(y) = 0$ بر J و نیز در شرایط اولیهٔ

$$f(x_0) = k_0, f'(x_0) = k_1, \ldots, f^{(n-1)}(x_0) = k_{n-1}$$

صدق می‌کند.

تذکر. بردار $(f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(n-1)}(x_0))$ در فضای n **بردار مقدار اولیهٔ** f در x_0 خوانده می‌شود. قضیهٔ ۳.۶ به ما می‌گوید که اگر نقطهٔ x_0 را در J و یک بردار را در فضای n اختیار کنیم، معادلهٔ همگن $L(y) = 0$ دقیقاً" یک جواب $y = f(x)$ بر J با این بردار به‌عنوان بردار مقدار اولیه در x_0 دارد. مثلاً"، وقتی $n = 2$، دقیقاً" یک جواب با مقدار مقرر $f(x_0)$ و مشتق مقرر $f'(x_0)$ در نقطهٔ مقرر x_0 وجود خواهد داشت.

برهان قضیهٔ وجودی ــ یکتایی نتیجه‌ای است از قضایای وجودی ــ یکتایی کلیتر که در فصل ۷ مطرح می‌شوند. برهانی دیگر برای حالت معادلات با ضرایب ثابت در بخش ۹.۷ داده شده است.

۶.۶ بعد فضای جواب یک معادلهٔ خطی همگن

قضیهٔ ۴.۶ . قضیهٔ بعدیت. *فرض کنیم $L: \mathscr{C}^n(J) \to \mathscr{C}(J)$ یک عملگر دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n باشد که با*

$$L = D^n + P_1 D^{n-1} + \cdots + P_n \tag{۱۰.۶}$$

داده شده است. دراین صورت، فضای جواب معادلهٔ $L(y) = 0$ دارای بعد n می‌باشد.

برهان. فرض کنیم V_n فضای خطی n بعدی n تاییها از اسکالرها باشد. همچنین، T تبدیل خطیی باشد که هر تابع f در فضای جواب $N(L)$ را بروی بردار مقدار اولیهٔ f در x_0 می‌نگارد؛ یعنی،

$$T(f) = (f(x_0), f'(x_0), \ldots, f^{(n-1)}(x_0)),$$

که درآن x_0 یک نقطهٔ ثابت در J است. قضیهٔ یکتایی می‌گوید که $T(f) = 0$ ایجاب می‌کند که $f = 0$. از اینرو، طبق قضیهٔ ۱۰.۲، T بر $N(L)$ یک به یک می‌باشد. بنابراین، T^{-1} نیز یک به یک است و V_n را بروی $N(L)$ می‌نگارد، و قضیهٔ ۱۱.۲ نشان می‌دهد که

$$\dim N(L) = \dim V_n = n.$$

حال که می‌دانیم هر فضای جواب بعدش n است، هر مجموعه از n جواب مستقل یک پایه می‌باشد. لذا، به‌عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ بعدیت، داریم

قضیهٔ ۵.۶ . **فرض‌کنیم** $L: \mathscr{C}^n(J) \to \mathscr{C}(J)$ **یک عملگر دیفرانسیل خطی مرتبهٔ** n **باشد . هرگاه** $u_1, \ldots, u_n$ **،** n **جواب مستقل معادلهٔ دیفرانسیل همگن** $L(y) = 0$ **بر** J **باشد ، آنگاه هر جواب** $y = f(x)$ **بر** J **را می‌توان به‌شکل**

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x) \tag{۱۱.۶}$$

بیان کرد ، که درآن $c_1, \ldots, c_n$ **ثابت می‌باشند .**

تذکر. چون همهٔ جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل $L(y) = 0$ از فرمول (۱۱.۶) به‌دست می‌آیند ، ترکیب خطی سمت راست ، با ثابتهای دلخواه $c_1, \ldots, c_n$ ، را گاهی **جواب عمومی** معادلهٔ دیفرانسیل می‌نامند .

قضیهٔ بعدیت به‌ما می‌گوید که فضای جواب یک‌معادلهٔ دیفرانسیل خطی همگن مرتبهٔ n همیشه یک پایه‌مرکب از n جواب دارد ، اما طرز تعیین این پایه را به‌ما نمی‌گوید . درواقع ، برای تعیین یک پایه از جوابهای یک معادلهٔ خطی روش ساده‌ای وجود ندارد . بهرحال ، روشهای خاصی برای **معادلات خاص** تعبیه شده‌اند . از جملهٔ این معادلات ، معادلات دیفرانسیل با ضرایب ثابت‌اند ، که اینک به آنها می‌پردازیم .

۷.۶ جبر عملگرهای ثابت ضریب

یک عملگر ثابت ضریب A عملگری است خطی به شکل

$$A = a_0 D^n + a_1 D^{n-1} + \cdots + a_{n-1} D + a_n , \tag{۱۲.۶}$$

که‌درآن D عملگر مشتق بوده و $a_0, a_1, \ldots, a_n$ ثابتهایی حقیقی می‌باشند . اگر $a_0 \neq 0$ ، گوییم عملگر دارای مرتبهٔ n است . عملگر A را می‌توان بر هر تابع مانند y که بربازه‌ای n مشتق دارد اعمال کرد ؛ نتیجه تابعی است مانند $A(y)$ که با

$$A(y) = a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_{n-1} y' + a_n y$$

داده می‌شود . دراین بخش، نظرمان معطوف توابعی است که بر $(-\infty, +\infty)$ ازهرمرتبه مشتق دارند . مجموعهٔ تمام چنین توابع را با $\mathscr{C}^\infty$ نشان داده و آن را ردهٔ **توابع بی‌نهایت بار مشتقپذیر** می‌نامیم . هرگاه $y \in \mathscr{C}^\infty$ ، آنگاه $A(y)$ نیز در $\mathscr{C}^\infty$ می‌باشد .

اعمال جبری معمول بر تبدیلات خطی (**جمع ، ضرب دراسکالرها ، و ترکیب یا ضرب**)

را می‌توان، درحالت خاص، برعملگرهای ثابت ضریب اعمال کرد. فرض کنیم A و B دو عملگر ثابت ضریب (نه لزوماً" از یک مرتبه) باشند. چون مجموع $A + B$ و مضارب اسکالر λA نیز عملگرهایی ثابت ضریب‌اند، مجموعهٔ تمام عملگرهای ثابت ضریب یک فضای خطی می‌باشد. حاصل‌ضرب A و B (با هرترتیب) نیز یک عملگر ثابت ضریب است. بنابراین، مجموعها، حاصل‌ضربها، و مضارب اسکالر عملگرهای ثابت ضریب در قوانین معمولی تعویضپذیری، شرکتپذیری، و پخشپذیری صادق بـه‌وسیلهٔ تمام تبدیلات خطی صدق می‌کنند. همچنین، ازآنجاکه به‌ازای هر دوعدد صحیح و مثبت r و s داریم $D^rD^s = D^sD^r$، هر دوعملگر ثابت ضریب تعویض خواهند شد؛ $AB = BA$

به‌هر عملگر ثابت ضریب A چند جمله‌ٔ p_A به نام چند جمله‌ای مشخص A رامربوط می‌کنیم. اگر A با (۶.۱۲) داده شده باشد، p_A چند جمله‌ایی است که همان ضرایب A را دارد. یعنی، به‌ازای هرعدد حقیقی r، داریم

$$p_A(r) = a_0r^n + a_1r^{n-1} + \cdots + a_n.$$

بعکس، اگر چندجمله‌ای حقیقی p معلوم باشد، عملگر نظیری مانند A هست که ضرایبش با ضرایب p یکسان است. قضیهٔ زیر نشان می‌دهد که این ارتباط بین عملگرها و چند‌ـ جمله‌ایها یک تنـاظر یک به یک است. بعلاوه، این تناظر به مجموعها، حاصل‌ضربها، و مضارب اسکالر عملگرها بترتیب مجموعها، حاصل‌ضربها، و مضارب اسکالر چند جمله‌ایهای مشخص آنها را مربوط می‌نماید.

قضیهٔ ۶.۶ . فرض کنیم A و B عملگرهایی ثابت ضریب با چند جمله‌ایهای مشخص p_A و p_B بوده، و λ یک عدد حقیقی باشد. دراین صورت،

(آ) $A = B$ **اگر و فقط اگر** $p_A = p_B$؛

(ب) $p_{A+B} = p_A + p_B$؛

(پ) $p_{AB} = p_A \cdot p_B$؛

(ت) $p_{\lambda A} = \lambda \cdot p_A$.

برهان. ابتدا به قسمت (آ) می‌پردازیم. فرض کنیم $p_A = p_B$. می‌خواهیم ثابت کنیم که، به‌ازای هر y در $\mathscr{C}^\infty$، $A(y) = B(y)$. چون $p_A = p_B$، هردو چند جمله‌ای درجه

و ضرایب یکسان دارند . بنابراین، A و B مرتبه و ضرایب یکسان خواهند داشت؛ در نتیجه، به‌ازای هر y در $\mathscr{C}^\infty$ ، $A(y) = B(y)$.

حال ثابت می‌کنیم $A = B$ رابطهٔ $p_A = p_B$ را ایجاب می‌کند . رابطهٔ $A = B$ یعنی، به‌ازای هر y در $\mathscr{C}^\infty$ ، $A(y) = B(y)$. فرض کنیم $y = e^{rx}$ ، که درآن r یک ثابت است . چون به‌ازای هر $k \geq 0$ ، $y^{(k)} = r^k e^{rx}$ ، داریم

$$A(y) = p_A(r)e^{rx} \qquad \text{و} \qquad B(y) = p_B(r)e^{rx}.$$

معادلهٔ $A(y) = B(y)$ ایجاب می‌کند که $p_A(r) = p_B(r)$. چون r دلخواه است، باید داشته باشیم $p_A = p_B$. این برهان قسمت (آ) را کامل می‌کند .

قسمتهای (ب) ، (پ) ، و (ت) فوراً از تعریف چندجمله‌ای مشخص نتیجه‌خواهند شد .

از قضیهٔ ۶.۶ نتیجه می‌شود که‌هر رابطهٔ جبری مربوط به مجموعها ، حاصل‌ضربها ، و مضارب اسکالر چند جمله‌ایهای p_A و p_B در مورد عملگرهای A و B نیز برقرارند . بالاخص، اگر بتوان چندجمله‌ای مشخص p_A را به‌حاصل ضربی از دو یا چندچندجمله‌ای تجزیه کرد ، هر سازه بایدچندجمله‌ایِ مشخص یک عملگر ثابت ضریب باشد ؛ درنتیجه ، بنابر قضیهٔ ۶.۶ ، تجزیه‌ای نظیر برای عملگر A وجود دارد . مثلاً ، هرگاه $p_A(r) = p_B(r)p_C(r)$ ، آنگاه $A = BC$. هرگاه $p_A(r)$ به‌صورت حاصل ضربی از n سازهٔ خطی قابل تجزیه باشد ، مثلاً

$$p_A(r) = a_0(r - r_1)(r - r_2)\cdots(r - r_n), \tag{۱۳.۶}$$

آنگاه تجزیهٔ نظیر از A شکل

$$A = a_0(D - r_1)(D - r_2)\cdots(D - r_n)$$

را خواهد داشت .

قضیهٔ اساسی جبر به‌ما می‌گوید که هرچند جمله‌ای $p_A(r)$ از درجهٔ $n \geq 1$ دارای تجزیه‌ای است به شکل (۱۳.۶) ، که درآن $r_1, r_2, \ldots, r_n$ ریشه‌های معادلهٔ

$$p_A(r) = 0,$$

به‌نام **معادلهٔ مشخص** A ، می‌باشند . هرریشه به‌قدر درجهٔ تکرار آن نوشته می‌شود . ریشه‌ها ممکن‌است حقیقی یا مختلط باشند . چون $p_A(r)$ ضرایب حقیقی دارد ، ریشه‌های مختلط به‌صورت جفتهای مزدوج می‌باشند ، $\alpha + i\beta,\ \alpha - i\beta$ اگر $\beta \neq 0$. دوسازهٔ خطی نظیر

به‌هر جفت‌این‌چنینی را می‌توان در یک سازهٔ درجهٔ دوم$r^2 - 2\alpha r + \alpha^2 + \beta^2$ با ضرایب حقیقی تلفیق کرد. بنابراین، هرچند جمله‌ای $p_A(r)$ را می‌توان به‌صورت حاصل ضربی ازچندجمله‌ایهای خطی و درجهٔ دوم با **ضرایب حقیقی** تجزیه نمود. این تجزیه تجزیهٔ نظیری‌ازعملگر A به‌دست‌می‌دهدکه حاصل ضربی است از عملگرهای ثابت ضریب مرتبهٔ اول و مرتبهٔ دوم با ضرایب حقیقی.

مثال ۱. فرض‌کنیم $A = D^2 - 5D + 6$. چون چندجمله‌ای‌مشخص $p_A(r)$ دارای‌تجزیهٔ $r^2 - 5r + 6 = (r-2)(r-3)$ است، عملگر A دارای تجزیهٔ

$$D^2 - 5D + 6 = (D-2)(D-3)$$

می‌باشد.

مثال ۲. فرض کنیم $A = D^4 - 2D^3 + 2D^2 - 2D + 1$. چندجمله‌ای مشخص $p_A(r)$ دارای تجزیهٔ

$$r^4 - 2r^3 + 2r^2 - 2r + 1 = (r-1)(r-1)(r^2+1)$$

است؛ درنتیجه، A تجزیهٔ $A = (D-1)(D-1)(D^2+1)$ را خواهد داشت.

۸.۶ تعیین یک پایه از جوابها برای معادلات خطی با ضرایب ثابت به‌وسیلهٔ تجزیهٔ عملگرها

قضیهٔ زیرنشان می‌دهد که چگونه تجزیهٔ عملگرهای ثابت ضریب درحل معادلات دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت یاری دهنده است.

قضیهٔ ۷.۶. *فرض‌کنیم L یک‌عملگر ثابت ضریب باشد که بتوان آن را به‌صورت‌حاصل ضربی از عملگرهای ثابت ضریب، مثلا"*

$$L = A_1 A_2 \cdots A_k,$$

تجزیه کرد. دراین‌صورت، فضای‌جواب معادلهٔ دیفرانسیل خطی $L(y) = 0$ شامل فضای جواب هرمعادلهٔ دیفرانسیل $A_i(y) = 0$ است. به‌عبارت دیگر،

به‌ازای هر $i = 1, 2, \ldots, k$، $N(A_i) \subseteq N(L)$. (۱۴.۶)

برهان. اگر u در فضای پوچ آخرین سازهٔ A_k باشد، داریم $A_k(u) = 0$ ؛ درنتیجه،

$$L(u) = (A_1A_2 \cdots A_k)(u) = (A_1 \cdots A_{k-1})A_k(u) = (A_1 \cdots A_{k-1})(0) = 0 .$$

از اینرو، فضای پوچ L شامل فضای پوچ آخرین سازهٔ A_k است. اما، چون عملگرهای ثابت ضریب تعویض می‌شوند، می‌توان سازه‌ها را طوری آراست که هریک از آنها آخرین سازه‌باشد. این (۱۴۰۶) را ثابت خواهد کرد.

اگر $L(u) = 0$ ، عملگر L را **صفرساز** u می‌نامند. قضیهٔ ۷۰۶ می‌گوید که اگرسازهٔ A_i از L ، u را صفر کند، L نیز u را صفر خواهد ساخت.

نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان، با استفاده از این قضیه، معادلات دیفرانسیل همگن‌با ضرایب ثابت را حل کرد. مثالهای مختلفی می‌زنیم تا کیفیات مختلف مربوط به سرشت ریشه‌های معادلهٔ مشخص را نشان دهند.

حالت I . ریشه‌های متمایز حقیقی

مثال ۱. برای معادلهٔ دیفرانسیل

$$(D^3 - 7D + 6)y = 0 \qquad (۱۵۰۶)$$

یک پایه از جوابها پیدا کنید.

حل. این معادله به شکل $L(y) = 0$ است با

$$L = D^3 - 7D + 6 = (D-1)(D-2)(D+3) .$$

فضای پوچ $D - 1$ شامل $u_1(x) = e^x$ است، از آن $D - 2$ شامل $u_2(x) = e^{2x}$ است، و ازآن $D + 3$ شامل $u_3(x) = e^{-3x}$ می‌باشد. در فصل ۱ (ص ۱۰) ثابت کردیم که u_1, u_2, u_3 مستقل هستند. چون سه جواب مستقل یک معادلهٔ مرتبهٔ سوم یک‌پایه برای فضای جواب تشکیل می‌دهند، جواب عمومی (۱۵۰۶) با

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + c_3e^{-3x}$$

داده می‌شود.

به روشی که درحل مثال ۱ به‌کاررفت، می‌توان برای فضای جواب هر عملگر ثابت ضریب که قابل تجزیه به سازه‌های خطی متمایز است یک پایه به‌دست آورد.

قضیهٔ ۸.۶ . فرض‌کنیم L یک عملگر ثابت ضریب باشدکه‌معادلهٔ‌مشخصه‌اش $p_L(r) = 0$ دارای n ریشهٔ حقیقی و متمایز $r_1, r_2, \ldots, r_n$ است . دراین صورت ، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $L(y) = 0$ بربازهٔ $(-\infty, +\infty)$ از فرمول

$$y = \sum_{k=1}^{n} c_k e^{r_k x} \qquad (۱۶.۶)$$

به‌دست می‌آید .

برهان . تجزیهٔ زیر را داریم :

$$L = a_0(D - r_1)(D - r_2) \cdots (D - r_n).$$

چون‌فضای پوچ $(D - r_k)$ شامل $u_k(x) = e^{r_k x}$ است ، فضای پوچ L شامل n تابع

$$u_1(x) = e^{r_1 x}, \qquad u_2(x) = e^{r_2 x}, \ldots, u_n(x) = e^{r_n x} \qquad (۱۷.۶)$$

می‌باشد . درفصل ۱ (ص ۱۰) ثابت شد که این توابع مستقل هستند . بنابراین ، اینها یک پایه برای فضای جواب معادلهٔ $L(y) = 0$ تشکیل می‌دهند ؛ درنتیجه ، جواب عمومی با (۱۶.۶) داده خواهد شد .

حالت II . ریشه‌های حقیقی ، که بعضی تکرار شده‌اند.

اگر تمام ریشه‌ها حقیقی بوده ولی متمایز نباشند ، توابع (۱۷.۶) مستقل نیستند ؛ و در نتیجه ، یک پایه برای فضای جواب تشکیل نمی‌دهند . اگر ریشهٔ r از درجهٔ تکرار m باشد ، $(D - r)^m$ یک سازهٔ L خواهد بود . قضیهٔ زیر طرز به‌دست آوردن m جواب‌مستقل در فضای پوچ این سازه را نشان می‌دهد .

قضیهٔ ۹.۶ . m تابع

$$u_1(x) = e^{rx}, \qquad u_2(x) = xe^{rx}, \ldots, u_m(x) = x^{m-1}e^{rx}$$

m عنصر مستقل‌اند که به وسیلهٔ عملگر $(D - r)^m$ صفر می‌شوند .

برهان . استقلال این توابع از استقلال چندجمله‌ایهای $1, x, x^2, \ldots, x^{m-1}$ نتیجه می‌شود . برای اثبات اینکه $u_1, u_2, \ldots, u_m$ به‌وسیلهٔ $(D - r)^m$ صفر می‌شوند ، بر m استقرا می‌کنیم .

اگر $m = 1$ ، فقط یک تابع وجود دارد ، $u_1(x) = e^{rx}$ ، که بوضوح توسط $(D - r)$ صفر می‌شود . پس فرض کنیم قضیه به ازای $m - 1$ درست باشد . این یعنی توابعی چون $u_1, \ldots, u_{m-1}$ وجود دارند که به‌وسیلهٔ $(D - r)^{m-1}$ صفر می‌شوند . چون

$$(D - r)^m = (D - r)(D - r)^{m-1},$$

توابع $u_1, \ldots, u_{m-1}$ نیز به‌وسیلهٔ $(D - r)^m$ صفر می‌شوند . برای تکمیل برهان، باید نشان دهیم که $(D - r)^m$ نیز u_m را صفر می‌سازد . لذا ، رابطهٔ زیر رادرنظر می‌گیریم :

$$(D - r)^m u_m = (D - r)^{m-1}(D - r)(x^{m-1}e^{rx}).$$

داریم

$$\begin{aligned}(D - r)(x^{m-1}e^{rx}) &= D(x^{m-1}e^{rx}) - rx^{m-1}e^{rx}\\ &= (m - 1)x^{m-2}e^{rx} + x^{m-1}re^{rx} - rx^{m-1}e^{rx}\\ &= (m - 1)x^{m-2}e^{rx} = (m - 1)u_{m-1}(x).\end{aligned}$$

وقتی $(D - r)^{m-1}$ را در دو طرف معادلهٔ اخیر اعمال کنیم ، در طرف راست 0 به‌دست می‌آوریم ، زیرا $(D - r)^{m-1}$ ، u_{m-1} را صفر می‌سازد . بنابراین، $(D - r)^m u_m = 0$ ؛ درنتیجه ، u_m به‌وسیلهٔ $(D - r)^m$ صفر می‌شود . این برهان را تمام خواهد کرد .

مثال ۲ . جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل $L(y) = 0$ ، که‌درآن

$$L = D^3 - D^2 - 8D + 12,$$

را پیدا کنید .

حل . عملگر L دارای تجزیهٔ

$$L = (D - 2)^2(D + 3)$$

است . طبق قضیهٔ ۶.۹ ، دو تابع

$$u_1(x) = e^{2x}, \qquad u_2(x) = xe^{2x}$$

در فضای پوچ $(D - 2)^2$ هستند . تابع $u_3(x) = e^{-3x}$ در فضای پوچ $(D + 3)$ است . چون u_1, u_2, u_3 مستقل‌اند (ر.ک. تمرین ۱۷ از بخش ۶.۹) ، یک پایه برای فضای پوچ L تشکیل می‌دهند ؛ درنتیجه، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل عبارت است از

$$y = c_1e^{2x} + c_2xe^{2x} + c_3e^{-3x}.$$

قضیهٔ ۹.۶ طرز یافتن یک پایه از جوابها برای هر معادلهٔ خطی مرتبهٔ n م با ضرایب ثابت که معادلهٔ مشخص آن فقط ریشه‌های حقیقی، و برخی تکراری، دارد را بازگو می‌کند. اگر ریشه‌های متمایز $r_1, r_2, \ldots, r_k$ بوده و بترتیب از درجات تکرار $m_1, m_2, \ldots, m_k$ باشند، آن بخش از پایه که نظیر به r_p است با m_p تابع

$u_{q,p}(x) = x^{q-1}e^{r_p x}$ داده می‌شود، که $q = 1, 2, \ldots, m_p$.

وقتی p مقادیر $1, 2, \ldots, k$ را می‌گیرد، رویهم $m_1 + \cdots + m_k$ تابع خواهیم داشت. در تمرین ۱۷ از بخش ۹.۶ با برهانی به‌اختصار نشان دادیم که همهٔ این تابعها مستقل هستند. چون مجموع درجات تکرار $m_1 + \cdots + m_k$ مساوی n، یعنی مرتبهٔ معادله، است، توابع $u_{p,q}$ یک پایه برای فضای جواب معادله تشکیل می‌دهند.

مثال ۳. معادلهٔ $(D^6 + 2D^5 - 2D^3 - D^2)y = 0$ را حل کنید.

حل. داریم $D^6 + 2D^5 - 2D^3 - D^2 = D^2(D-1)(D+1)^3$. بخشی از پایه که نظیر به‌سازهٔ D^2 است مساوی است با $u_1(x) = 1$, $u_2(x) = x$؛ بخشی که نظیر به‌سازهٔ $(D-1)$ است مساوی $u_3(x) = e^x$ است؛ و بخشی که نظیر به سازهٔ $(D+1)^3$ است مساوی $u_4(x) = e^{-x}$, $u_5(x) = xe^{-x}$, $u_6(x) = x^2e^{-x}$ می‌باشد. شش تابع $u_1, \ldots, u_6$ مستقل هستند؛ در نتیجه، جواب عمومی معادله عبارت خواهد بود از

$$y = c_1 + c_2x + c_3e^x + (c_4 + c_5x + c_6x^2)e^{-x}.$$

حالت III. ریشه‌های مختلط

اگر نماییهای مختلط به‌کار رفته باشند، لازم نیست بین ریشه‌های حقیقی و مختلط معادلهٔ مشخص معادلهٔ دیفرانسیل $L(y) = 0$ فرق گذارده شود. اگر جوابهای حقیقی مطلوب باشند، عملگر L را به سازه‌های خطی و درجهٔ دوم با ضرایب حقیقی تجزیه می‌کنیم. هر جفت ریشهٔ مختلط مزدوج مانند $\alpha + i\beta$, $\alpha - i\beta$ به یک سازهٔ درجهٔ دوم مانند

$$D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2 \qquad (۱۸.۶)$$

نظیر است. فضای پوچ این عملگر مرتبهٔ دوم شامل دو تابع مستقل $u(x) = e^{\alpha x}\cos \beta x$ و $v(x) = e^{\alpha x}\sin \beta x$ است. اگر جفت ریشه‌های $\alpha \pm i\beta$ از درجهٔ تکرار m باشند، سازهٔ درجهٔ دوم به‌توان m خواهد بود. فضای پوچ عملگر

$$[D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2]^m$$

شامل $2m$ تابع مستقل

$$u_q(x) = x^{q-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad v_q(x) = x^{q-1}e^{\alpha x}\sin\beta x, \qquad q = 1, 2, \ldots, m$$

است. این مطلب را می‌توان به‌آسانی و به استقرا بر m ثابت کرد. (برهانها در تمرین ۲۰ از بخش ۹.۶ به‌اختصار بیان شده‌اند.) مثالهای زیر چند حالت را توضیح می‌دهند.

مثال ۴. $y''' - 4y'' + 13y' = 0$. معادلهٔ مشخص، یعنی $r^3 - 4r^2 + 13r = 0$، دارای ریشه‌های $0, 2 \pm 3i$ است؛ پس جواب عمومی عبارت خواهد بود از

$$y = c_1 + e^{2x}(c_2\cos 3x + c_3\sin 3x).$$

مثال ۵. $y''' - 2y'' + 4y' - 8y = 0$. معادلهٔ مشخص مساوی است با

$$r^3 - 2r^2 + 4r - 8 = (r-2)(r^2+4) = 0;$$

ریشه‌هایش عبارتند از $2, 2i, -2i$؛ درنتیجه، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل عبارت است از

$$y = c_1e^{2x} + c_2\cos 2x + c_3\sin 2x.$$

مثال ۶. $y^{(5)} - 9y^{(4)} + 34y''' - 66y'' + 65y' - 25y = 0$. معادلهٔ مشخص را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$(r-1)(r^2 - 4r + 5)^2 = 0;$$

ریشه‌هایش عبارتند از $1, 2 \pm i, 2 \pm i$؛ درنتیجه، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل خواهد شد

$$y = c_1e^{x} + e^{2x}[(c_2 + c_3x)\cos x + (c_4 + c_5x)\sin x].$$

۹.۶ تمرین

جواب عمومی معادلات دیفرانسیل تمرینهای ۱ تا ۱۲ را پیدا کنید.

۱. $y''' - 2y'' - 3y' = 0$.
۲. $y''' - y' = 0$.

۳. $y''' + 4y'' + 4y' = 0$.
۴. $y''' - 3y'' + 3y' - y = 0$

۵. $y^{(4)} + 4y''' + 6y'' + 4y' + y = 0$.
۶. $y^{(4)} - 16y = 0$.

۷ . $y^{(4)} + 16y = 0$. ۸ . $y''' - y = 0$.

۹ . $y^{(4)} + 4y''' + 8y'' + 8y' + 4y = 0$. ۱۰ . $y^{(4)} + 2y'' + y = 0$.

۱۱ . $y^{(6)} + 4y^{(4)} + 4y'' = 0$. ۱۲ . $y^{(6)} + 8y^{(4)} + 16y'' = 0$.

۱۳ . هرگاه m یک ثابت مثبت باشد ، جواب خصوصی $y = f(x)$ معادلهٔ دیفرانسیل

$$y''' - my'' + m^2y' - m^3y = 0$$

که در شرط $f(0) = f'(0) = 0, f''(0) = 1$ صدق می‌کند را پیدا نمایید .

۱۴ . یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت‌دارای‌معادلهٔ مشخص $f(r) = 0$ است . ثابت‌کنید اگر تمام ریشه‌های معادلهٔ مشخص‌منفی باشند، هر جواب‌معادلهٔ‌دیفرانسیل ، وقتی $x \to +\infty$ ، به‌صفر نزدیک می‌شود . اگرتمام ریشه‌های معادلهٔ مشخص‌نامثبت باشند ، چه نتیجه‌ای درباب رفتار تمام جوابها بر $[0, +\infty)$ حاصل می‌شود ؟

۱۵ . درهر حالت زیر ، یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی با ضرایب ثابت بیابید که توابع داده شده درآن صدق کنند :

(آ) $u_1(x) = e^x, \quad u_2(x) = e^{-x}, \quad u_3(x) = e^{2x}, \quad u_4(x) = e^{-2x}$ ؛

(ب) $u_1(x) = e^{-2x}, \quad u_2(x) = xe^{-2x}, \quad u_3(x) = x^2e^{-2x}$ ؛

(پ) $u_1(x) = 1, \quad u_2(x) = x, \quad u_3(x) = e^x, \quad u_4(x) = xe^x$ ؛

(ت) $u_1(x) = x, \quad u_2(x) = e^x, \quad u_3(x) = xe^x$ ؛

(ث) $u_1(x) = x^2, \quad u_2(x) = e^x, \quad u_3(x) = xe^x$ ؛

(ج) $u_1(x) = e^{-2x}\cos 3x, \quad u_2(x) = e^{-2x}\sin 3x, \quad u_3(x) = e^{-2x}, \quad u_4(x) = xe^{-2x}$ ؛

(چ) $u_1(x) = \cosh x, \quad u_2(x) = \sinh x, \quad u_3(x) = x\cosh x, \quad u_4(x) = x\sinh x$ ؛

(ح) $u_1(x) = \cosh x \sin x, \quad u_2(x) = \sinh x \cos x, \quad u_3(x) = x$

۱۶ . فرض کنید $r_1, \ldots, r_n$ ، n عدد حقیقی متمایز بوده ، و $Q_1, \ldots, Q_n$ ، n چندجمله‌ای باشند که هیچکدام چندجمله‌ای صفر نباشد . ثابت کنید n تابع

$$u_1(x) = Q_1(x)e^{r_1x}, \ldots, u_n(x) = Q_n(x)e^{r_nx}$$

مستقل می‌باشند .

طرح برهان . از استقرا بر n استفاده کنید . به‌ازای $n = 1$ و $n = 2$ نتیجه به آسانی تحقیق می‌شود . فرض کنید حکم به‌ازای $n = p$ درست بوده ، و $c_1, \ldots, c_{p+1}$ ، $p + 1$ اسکالر حقیقی باشند بطوری که

$$\sum_{k=1}^{p+1} c_k Q_k(x) e^{r_k x} = 0.$$

دوطرف این رابطه را در $e^{-r_{p+1}x}$ ضرب کرده از معادلهٔ حاصل مشتق بگیرید. بعد، با استفاده از فرض استقرا، نشان دهید که همهٔ c_k ها صفرند. می‌توان برهانی دیگر برمبنای مرتبهٔ بزرگی، وقتی $x \to +\infty$، بصورتی که در مثال ۷ از بخش ۷.۱ (ص ۱۲) شد، ارائه داد.

۱۷. فرض‌کنید $m_1, m_2, \ldots, m_k$، k عدد صحیح مثبت بوده، $r_1, r_2, \ldots, r_k$، k عدد حقیقی متمایز باشند، و $n = m_1 + \cdots + m_k$. به‌ازای هر جفت عدد صحیح p, q صادق در $1 \le p \le k, 1 \le q \le m_p$، قرار دهید

$$u_{q,p}(x) = x^{q-1} e^{r_p x}.$$

به‌عنوان مثال، وقتی $p = 1$، توابع نظیر عبارت خواهند بود از

$$u_{1,1}(x) = e^{r_1 x}, \qquad u_{2,1}(x) = x e^{r_1 x}, \ldots, u_{m_1,1}(x) = x^{m_1 - 1} e^{r_1 x}.$$

ثابت‌کنیدکه n تابع $u_{q,p}$ مستقل می‌باشند. [**راهنمایی.** از تمرین ۱۶ استفاده کنید.]

۱۸. فرض کنید L یک عملگر دیفرانسیل خطی ثابت ضریب مرتبهٔ n با چند جمله‌ای مشخص $p(r)$ باشد. همچنین، L' عملگر ثابت ضریبی باشدکه‌چندجمله‌ای مشخص آن مساوی مشتق $p'(r)$ است. مثلاً، اگر $L = 2D^2 - 3D + 1$، $L' = 4D - 3$. بطور کلی، مشتق m م $L^{(m)}$ را عملگری‌تعریف‌می‌کنیم‌که‌چندجمله‌ای مشخص آن مشتق m م $p^{(m)}(r)$ باشد. (عملگر $L^{(m)}$ را نباید با توان m م L^m خلط کرد.)

(آ) ثابت کنید که اگر u دارای n مشتق باشد،

$$L(u) = \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(0)}{k!} u^{(k)}.$$

(ب) ثابت کنید که اگر u دارای $n - m$ مشتق باشد،

به‌ازای $m = 0, 1, 2, \ldots, n$، $L^{(m)}(u) = \sum_{k=0}^{n-m} \frac{p^{(k+m)}(0)}{k!} u^{(k)}$، که درآن $L^{(0)} = L$.

۱۹. به‌نمادهای تمرین ۱۸ بازمی‌گردیم. ثابت‌کنیدکه‌اگر u و v دارای n مشتق‌باشند،

$$L(uv) = \sum_{k=0}^{n} \frac{L^{(k)}(u)}{k!} v^{(k)}.$$

[راهنمایی . از تمرین ۱۸ بهمراه فرمول لایب‌نیتز برای مشتق k ام حاصل ضرب ، یعنی

$$(uv)^{(k)} = \sum_{r=0}^{k} \binom{k}{r} u^{(k-r)} v^{(r)},$$

استفاده نمایید .]

۲۰ . (آ) فرض کنید $p(t) = q(t)^m r(t)$ ، که درآن q و r چندجمله‌ای بوده و m عدد صحیح مثبتی می‌باشد . ثابت کنید $p'(t) = q(t)^{m-1} s(t)$ ، که‌درآن s یک‌چندجمله‌ای است .

(ب) فرض کنید L یک عملگر ثابت ضریب باشد که u را صفر می‌کند ، که u تابع معلومی از x است . فرض کنید $M = L^m$ ، یعنی توان m م L ، که $m > 1$. ثابت کنید هریک از مشتقات $M', M'', \ldots, M^{(m-1)}$ نیز u را صفر می‌سازد .

(پ) با استفاده از قسمت (ب) و تمرین ۱۹ ، ثابت کنید M هریک از توابع $u, xu, \ldots, x^{m-1}u$ را صفر می‌کند .

(ت) با استفاده از قسمت (پ) ، نشان دهید که عملگر $(D^2 - 2\alpha D + \alpha^2 + \beta^2)^m$ هریک از توابع $x^q e^{\alpha x} \sin \beta x$ و $x^q e^{\alpha x} \cos \beta x$ ، به ازای $q = 1, 2, \ldots, m-1$ ، را صفر می‌کند .

۲۱ . فرض کنید L یک عملگر ثابت ضریب مرتبهٔ n با چندجمله‌ای مشخص $p(r)$ باشد . ثابت کنید اگر α ثابت بوده و u دارای n مشتق باشد ،

$$L(e^{\alpha x} u(x)) = e^{\alpha x} \sum_{k=0}^{n} \frac{p^{(k)}(\alpha)}{k!} u^{(k)}(x).$$

۱۰.۶ رابطهٔ بین معادلات همگن و غیرهمگن

حال بـه معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n کلی با ضرایبی که لزوماً ثابت نیستند باز می‌گردیم . قضیهٔ زیر رابطهٔ بین جوابهای معادلهٔ همگن $L(y) = 0$ و جوابهای معادلهٔ غیرهمگن $L(y) = R(x)$ را توضیح می‌دهد .

قضیهٔ ۱۰.۶ . فرض‌کنیم $L: \mathscr{C}_n(J) \to \mathscr{C}(J)$ یک عملگر دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n باشد . همچنین ، $u_1, \ldots, u_n$ ، n جواب مستقل معادلهٔ همگن $L(y) = 0$ بوده ، و y_1 یک‌جواب

خصوصي معـادلهٔ غيرهمگن $L(y) = R$ باشد ، كه درآن $R \in \mathscr{C}(J)$. دراين صورت ، هر جواب $y = f(x)$ معادلهٔ غيرهمگن بهشكل

$$f(x) = y_1(x) + \sum_{k=1}^{n} c_k u_k(x) \tag{۱۹.۶}$$

است ، كه درآن $c_1, \ldots, c_n$ ثابت میباشند .

برهان. بنابرخاصيت خطی ، داريم

$$L(f - y_1) = L(f) - L(y_1) = R - R = 0 .$$

ازاينرو ، $f - y_1$ فضایجواب معادلهٔ همگن $L(y) = 0$ است ؛ درنتيجه ، $f - y_1$ تركيبی خطی از $u_1, \ldots, u_n$ اسـت ؛ مثلا" ، $f - y_1 = c_1u_1 + \cdots + c_nu_n$. اين (۱۹.۶) را ثابت میكند .

چون همهٔ جوابهای $L(y) = R$ در (۱۹.۶) يـافت میشوند ، مجموع سمت راست (۱۹.۶) (با ثابتهای دلخواه $c_1, c_2, \ldots, c_n$) جواب عمومی معادلهٔ غيرهمگن ناميده میشود . قضيهٔ۶ . ۱۰ میگويد كه جواب عمومی معادلهٔ غيرهمگن با افزودن جوابعمومی معادلهٔ همگن به y_1 بهدست میآيد .

تذكر. قضيهٔ ۶ . ۱۰ مشابه هندسی سادهای دارد كه در آگاهی از معنی آن ياری دهنده است . برای تعيين تمام نقاط يک صفحه ،يکنقطهٔ خاص روی آن اختيار كرده و تمامنقاط صفحهٔ ماربر مبـداء و مـوازی آن را بهاين نقطه میافزاييم . برای يافتن تمام جوابهای $L(y) = R$ ، يک جـواب خصـوصیرا يافته و تمام جوابهای معادلهٔ همگن $L(y) = 0$ را بدان میافزاييم . مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ غيرهمگن شبيه به يک صفحهٔ ماربر يکنقطهٔ خاص است . فضای جواب معادلهٔ همگن شبيه صفحهای است ماربر مبداء و موازی با آن .

برای آنكهاز قضيهٔ ۶ . ۱۰ عملا" استفاده كنيم ، بايد دو مسئله را حل كنيم : (۱) جواب عمومی معادلهٔ همگن $L(y) = 0$ را پيدا كرده ، و (۲) يک جواب خصوصیمعادلهٔ غيرهمگن $L(y) = R$ را بيابيم . در بخش بعد نشان میدهيم كه هميشه ، اگر بتوانمسئلهٔ (۱) را حل كرد ، مسئلهٔ (۲) نيز قابل حل است .

۱۱.۶ تعیین یک جواب خصوصی معادلهٔ غیرهمگن. روش تغییر پارامتر

حال به مسئلهٔ تعیین یک جواب خصوصی y_1 معادلهٔ غیرهمگن $L(y) = R$ می‌پردازیم. روشی را توضیح می‌دهیم، به‌نام **تغییر پارامتر**، که به‌ما طرز تعیین y_1، در صورتی که n جواب مستقل $u_1, \ldots, u_n$ معادلهٔ همگن $L(y) = 0$ را بدانیم، را بازگو می‌کند. این روش جوابی خصوصی به شکل

$$y_1 = v_1 u_1 + \cdots + v_n u_n \tag{۲۰.۶}$$

به‌دست می‌دهد، که درآن $v_1, \ldots, v_n$ توابعی هستند که می‌توان آنها را برحسب $u_1, \ldots, u_n$ و طرف‌راست R حساب‌کرد. این روش به‌دستگاهی مرکب از n معادلهٔ جبری خطی منجر می‌شود که مشتقات $v'_1, \ldots, v'_n$ درآن صدق می‌کنند. این دستگاه همیشه قابل حل است، زیرا دارای ماتریس ضرایب ناصفر است. پس انتگرالگیری از مشتقات، توابع مطلوب $v_1, \ldots, v_n$ را خواهد داد. این روش برای اولین بار توسط یوهان برنولی[1] برای حل معادلات خطی مرتبهٔ اول به‌کار رفت، و سپس لاگرانژ آن را در ۱۷۷۴ برای حل معادلات خطی مرتبهٔ دوم به‌کار گرفت.

درحالت مرتبهٔ n م، جزئیات را می‌توان با استفاده از نمادهای بردار و ماتریس ساده کرد. طرف راست (۲۰.۶) را می‌توان به‌صورت حاصل ضرب داخلی، یعنی

$$y_1 = (v, u), \tag{۲۱.۶}$$

نوشت، که درآن v و u توابعی از بردارهای n بعدی هستند به صورت

$$v = (v_1, \ldots, v_n), \qquad u = (u_1, \ldots, u_n).$$

v را طوری اختیار می‌کنیم که حاصل ضرب داخلی معرف y_1، با فرض $L(u) = 0$ که $L(u) = (L(u_1), \ldots, L(u_n))$، درمعادلهٔ $L(y) = R$ صدق کند.

ابتدا به محاسبهٔ مشتق اول y_1 می‌پردازیم. داریم

$$y'_1 = (v, u') + (v', u). \tag{۲۲.۶}$$

n تابع $v_1, \ldots, v_n$ داریم که‌بایستی معین شوند؛ پس باید بتوان n شرط برآنها گذارد. اگر این شرط را بگذاریم که دومین جملهٔ سمت راست (۲۲.۶) باید صفر شود، فرمول مربوط به y'_1،

درصورتی که $(v', u) = 0$، به $y'_1 = (v, u')$ ساده می‌شود.

---

1. Johann Bernoulli

با مشتقگیری از رابطهٔ مربوط به y_1' ، درمی‌یابیم که

$$y_1'' = (v, u'') + (v', u').$$

اگر v را بتوان طوری اختیار کرد که $(v', u') = 0$ ، فرمول مربوط به y_1'' نیزساده شده‌و، درصورتی که نیز $(v', u') = 0$ ، $y_1'' = (v, u'')$.

اگر به‌همین نحو برای $n - 1$ مشتق اول y_1 ادامه دهیم ، درخواهیم یافت که، درصورتی که‌نیز $(v', u^{(n-2)}) = 0$ ، $y_1^{(n-1)} = (v, u^{(n-1)})$.

تا اینجا $n - 1$ شرط بر v گذارده‌ایم . اگر یکبار دیگر مشتق بگیریم ، خواهیم داشت

$$y_1^{(n)} = (v, u^{(n)}) + (v', u^{(n-1)}).$$

این‌بار شرط $(v', u^{(n-1)}) = R(x)$ را قایل شده‌ایم ، و آخرین معادله ، درصورتی که نیز $(v', u^{(n-1)}) = R(x)$ ، خواهد شد $y_1^{(n)} = (v, u^{(n)}) + R(x)$.

حال فرض کنیم بتوان n شرط برای v برقرار کرد . فرض کنیم

$$L = D^n + P_1(x)D^{n-1} + \cdots + P_n(x) \cdot$$

وقتی L را بر y_1 اعمال کنیم ، درمی‌یابیم که

$$\begin{aligned} L(y_1) &= y_1^{(n)} + P_1(x)y_1^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y_1 \\ &= \{(v, u^{(n)}) + R(x)\} + P_1(x)(v, u^{(n-1)}) + \cdots + P_n(x)(v, u) \\ &= (v, L(u)) + R(x) = (v, 0) + R(x) = R(x). \end{aligned}$$

بنابراین، $L(y_1) = R(x)$ ؛ درنتیجه ، y_1 یک جواب معادلهٔ غیرهمگن است .

این روش، درصورتی که بتوان n شرط‌گذارده شده بر v را برقرار کرد ، موفق خواهد بود . این شرطها می‌گویند که ، به‌ازای $k = 0, 1, \ldots, n - 2$ ، $(v', u^{(k)}) = 0$ ، و $(v', u^{(n-1)}) = R(x)$. این n معادله را می‌توان به‌صورت یک معادلهٔ ماتریسی واحد نوشت :

$$W(x)v'(x) = R(x)\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \qquad (۶.۲۳)$$

که درآن $v'(x)$ یک ماتریس ستونی $n \times 1$ گرفته شده ، و W یک تابع ماتریسی $n \times n$ است که سطرهایش از مولفه‌های u و مشتقات پی‌درپی آن تشکیل شده‌اند :

$$W = \begin{bmatrix} u_1 & u_2 & \cdots & u_n \\ u_1' & u_2' & \cdots & u_n' \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ u_1^{(n-1)} & u_2^{(n-1)} & \cdots & u_n^{(n-1)} \end{bmatrix}.$$

ماتریس W ، بخاطر ج.ام.اچ.رونسکی (۱۸۵۳–۱۷۷۸) ، **ماتریس رونسکی** $u_1, \ldots, u_n$ نامیده می‌شود.

دربخش بعد ثابت مـی‌کنیم که ماتریس رونسکی نامنفرد است. بنابراین، می‌توان دوطرف (۲۳۰۶) را در $W(x)^{-1}$ ضرب کرده به‌دست آورد که

$$v'(x) = R(x)W(x)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

دو نقطهٔ c و x را دربازهٔ J مورد نظـر اختیار می‌کنیم و از این معادلهٔ برداری روی بازهٔ از c تا x انتگرال می‌گیریم تا رابطهٔ زیر به‌دست آید :

$$v(x) = v(c) + \int_c^x R(t)W(t)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt = v(c) + z(x),$$

که درآن

$$z(x) = \int_c^x R(t)W(t)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} dt.$$

حال فرمول $y_1 = (u, v)$ برای جواب خصوصی خواهد شد

$$y_1 = (u, v) = (u, v(c) + z) = (u, v(c)) + (u, z).$$

اولین جملهٔ $(u, v(c))$ در معادلهٔ همگن صدق می‌کند ، چرا که ترکیبی خطی از $u_1, \ldots, u_n$ است . بنـابراین ، می‌توان این جمله را حذف و از جملهٔ دوم (u, z) به‌عنوان یک جواب

خصوصی معادلهٔ غیرهمگن استفاده نمود . به‌عبارت دیگر ، یک جواب خصوصی $L(y) = R$ با حاصل ضرب داخلی

$$(u(x), z(x)) = \left(u(x), \int_c^x R(t)W(t)^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix} dt\right)$$

داده می‌شود . توجه کنید که لازم نیست تابع R بربازهٔ J پیوسته باشد . آنچه لازم است این است که R بر $[c, x]$ انتگرالپذیر باشد .

نتایج این بخش را می‌توان در قضیهٔ زیر خلاصه کرد .

قضیهٔ ۱۱.۶ . فرض کنیم $u_1, \ldots, u_n$ ، n جواب مستقل معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n ، $L(y) = 0$ بربازهٔ J باشد . دراین صورت ، یک جواب خصوصی y_1 معادلهٔ غیرهمگن $L(y) = R$ از فرمول

$$y_1(x) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x)v_k(x)$$

به‌دست می‌آید ، که درآن $v_1, \ldots, v_n$ درایه‌های ماتریس ستونی $n \times 1$ ، v است که از معادلهٔ

$$v(x) = \int_c^x R(t)W(t)^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix} dt \qquad (۲۴.۶)$$

مشخص می‌شوند . دراین فرمول ، W ماتریس رونسکی $u_1, \ldots, u_n$ است ، و c نقطهٔ دلخواهی در J می‌باشد .

تذکر . انتگرال معین (۲۴.۶) را می‌توان با هر انتگرال نامعین

$$\int R(x)W(x)^{-1}\begin{bmatrix}0\\ \vdots\\ 0\\ 1\end{bmatrix} dx$$

عوض کرد .

مثال ۱ . جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' - y = \frac{2}{1+e^x}$$

را بربازهٔ $(-\infty, +\infty)$ پیدا کنید .

حل . معادلهٔ همگن $(D^2 - 1)y = 0$ دوجواب مستقل $u_1(x) = e^x$, $u_2(x) = e^{-x}$ دارد .
ماتریس رونسکی u_1 و u_2 عبارت است از

$$W(x) = \begin{bmatrix} e^x & e^{-x} \\ e^x & -e^{-x} \end{bmatrix}.$$

چون $\det W(x) = -2$ ، ماتریس نامنفرد است و معکوسش مساوی است با

$$W(x)^{-1} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -e^{-x} & -e^{-x} \\ -e^x & e^x \end{bmatrix}.$$

بنابراین ،

$$W(x)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\begin{bmatrix} -e^{-x} \\ e^x \end{bmatrix}$$

و داریم

$$R(x)W(x)^{-1}\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2}\,\frac{2}{1+e^x}\begin{bmatrix} -e^{-x} \\ e^x \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \dfrac{e^{-x}}{1+e^x} \\ \dfrac{-e^x}{1+e^x} \end{bmatrix}.$$

با انتگرالگیری از هر مؤلفهٔ بردار سمت راست ، درمی‌یابیم که

$$v_1(x) = \int \frac{e^{-x}}{1+e^x}\,dx = \int \left(e^{-x} - 1 + \frac{e^x}{1+e^x}\right) dx = -e^{-x} - x + \log(1+e^x)$$

و

$$v_2(x) = \int \frac{-e^x}{1+e^x}\,dx = -\log(1+e^x).$$

بنابراین ، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل خواهد بود

$$
\begin{aligned}
y &= c_1u_1(x) + c_2u_2(x) + v_1(x)u_1(x) + v_2(x)u_2(x) \\
&= c_1e^x + c_2e^{-x} - 1 - xe^x + (e^x - e^{-x}) \log (1 + e^x).
\end{aligned}
$$

۱۲۰۶ نامنفردی ماتریس رونسکی n جواب مستقل یک معادلهٔ خطی همگن

در این بخش ثابت می‌کنیم که ماتریس رونسکی W مرکب از n جواب مستقل $u_1, \ldots, u_n$ معادلهٔ همگن $L(y) = 0$ نامنفرد است. این‌کار را با اثبات اینکه دترمینان W یک تابع نمایی است که هرگز بر بازهٔ J موردنظر صفر نیست انجام می‌دهیم.

فرض کنیم به‌ازای هر x در J ، $w(x) = \det W(x)$ ، و معادلهٔ دیفرانسیل برقرار با $u_1, \ldots, u_n$ به‌شکل

$$
y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = 0 \qquad (۲۵۰۶)
$$

باشد. دراین صورت ، داریم

قضیهٔ ۱۲۰۶ . دترمینان رونسکی در معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول

$$
w' + P_1(x)w = 0 \qquad (۲۶۰۶)
$$

بر J صدق می‌کند. بنابراین، اگر $c \in J$ ، داریم

$$
w(x) = w(c) \exp\left[-\int_c^x P_1(t)\, dt\right] \qquad \text{(فرمول آبل[1])}. \qquad (۲۷۰۶)
$$

بعلاوه، به‌ازای هر x در J ، $w(x) \neq 0$.

برهان. فرض‌کنیم u بردار سطری $u = (u_1, \ldots, u_n)$ باشد. چون هر مولفهٔ u در معادلهٔ دیفرانسیل (۲۵۰۶) صدق می‌کند، u نیز چنین خواهد کرد. سطرهای ماتریس رونسکی W بردارهای $u, u', \ldots, u^{(n-1)}$ هستند. بنابراین، می‌توان نوشت

$$
w = \det W = \det (u, u', \ldots, u^{(n-1)}).
$$

مشتق w دترمینان ماتریسی است که با مشتقگیری از سطر آخر W به‌دست می‌آید (ر.ک. تمرین ۸ از بخش ۱۷۰۳) ؛ یعنی،

---

1. Abel

$$w' = \det(u, u', \dots, u^{(n-2)}, u^{(n)}).$$

با ضرب سطر آخر w در $P_1(x)$ ، نیز داریم

$$P_1(x)w = \det(u, u', \dots, u^{(n-2)}, P_1(x)u^{(n-1)}).$$

با افزودن دو معادلهٔ اخیر، درمی‌یابیم که

$$w' + P_1(x)w = \det(u, u', \dots, u^{(n-2)}, u^{(n)} + P_1(x)u^{(n-1)}).$$

اما سطرهای این دترمینان آخر وابسته‌اند، زیرا u در معادلهٔ دیفرانسیل (۶.۲۵) صدق می‌کند. بنابراین، دترمینان صفر است، که به‌معنی آن است که w در (۶.۲۶) صدق می‌نماید. با حل (۶.۲۶) فرمول آبل (۶.۲۷) به‌دست خواهد آمد.

حال ثابت می‌کنیم به‌ازای c ای در J ، $w(c) \neq 0$. این عمل را به برهان خلف انجام می‌دهیم. فرض کنیم به‌ازای هر t در J ، $w(t) = 0$. t ی ثابتی در J ، مثلاً $t = t_0$ ، اختیار کرده، دستگاه خطی

$$W(t_0)X = O$$

از معادلات جبری، که درآن X یک بردار ستونی است، را در نظر می‌گیریم. چون $\det W(t_0) = 0$ ، ماتریس $W(t_0)$ منفرد است؛ درنتیجه، این دستگاه یک جواب ناصفر، مثلاً $X = (c_1, \dots, c_n) \neq (0, \dots, 0)$ ، دارد. با استفاده از مولفه‌های این بردار ناصفر، فرض کنیم f ترکیب خطی

$$f(t) = c_1u_1(t) + \cdots + c_nu_n(t)$$

باشد. تابع f تعریف شده به‌این صورت در $L(f) = 0$ بر J صدق می‌کند، زیرا ترکیبی خطی از $u_1, \dots, u_n$ است. معادلهٔ ماتریسی $W(t_0)X = O$ ایجاب می‌کند که

$$f(t_0) = f'(t_0) = \cdots = f^{(n-1)}(t_0) = 0.$$

ازاینرو، f در $t = t_0$ دارای بردار مقدار اولیهٔ O است؛ درنتیجه، طبق قضیهٔ یکتایی، f جواب صفر است. این یعنی $c_1 = \cdots = c_n = 0$ ، که یک تناقض می‌باشد. بنابراین، به‌ازای t ای در J ، $w(t) \neq 0$. با اختیار c مساوی این t در فرمول آبل، ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای هر x در J ، $w(x) \neq 0$. این برهان قضیهٔ ۶.۱۲ را کامل خواهد کرد.

۱۳۰۶ روشهای خاص برای تعیین یک جواب خصوصی معادلهٔ غیرهمگن. تحویل به یک دستگاه معادلات خطی مرتبهٔ اول

اگرچه تغییر پارامتر روشی کلی برای تعیین یک جواب خصوصی $L(y) = R$ است، اما روشهای خاصی نیز هستند که اغلب، وقتی معادلات شکلهای خاص دارند، آسانتر به کار می‌روند. مثلاً، اگر معادله ضرایب ثابت داشته باشد، می‌توان مسئله را به حل رشته‌ای از معادلات خطی مرتبهٔ اول تحویل کرد. روش عمومی را با یک مثال ساده به بهترین وجه نشان می‌دهیم.

مثال ۱. یک جواب خصوصی معادلهٔ

$$(D-1)(D-2)y = xe^{x+x^2} \tag{۲۸.۶}$$

را بیابید.

حل. فرض کنیم $u = (D-2)y$. دراین صورت، معادله خواهد شد

$$(D-1)u = xe^{x+x^2}.$$

این یک معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول نسبت به u است، که می‌توان آن را با استفاده از قضیهٔ ۱.۶ حل کرد. یک جواب خصوصی برابر است با

$$u = \tfrac{1}{2}e^{x+x^2}.$$

با جانشانی این در معادلهٔ $u = (D-2)y$، داریم

$$(D-2)y = \tfrac{1}{2}e^{x+x^2},$$

که یک معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول نسبت به y است. با حل این به‌وسیلهٔ قضیهٔ ۱.۶، درمی‌یابیم که یک جواب خصوصی (با $y_1(0) = 0$) عبارت خواهد بود از

$$y_1(x) = \tfrac{1}{2}e^{2x}\int_0^x e^{t^2-t}\,dt.$$

با اینکه انتگرال را نمی‌توان برحسب توابع مقدماتی حساب کرد، ما آن را حل‌شده محسوب می‌کنیم، چرا که جواب برحسب انتگرالهای توابع آشنا بیان شده است. جواب عمومی (۲۸.۶) عبارت است از

$$y = c_1e^x + c_2e^{2x} + \tfrac{1}{2}e^{2x}\int_0^x e^{t^2-t}\,dt.$$

۱۴۰۶ روش صفرساز برای تعیین یک جواب خصوصی معادلهٔ غیرهمگن

حال روشی را توضیح می‌دهیم که از آن می‌توان، درصورتی که معادلهٔ $L(y) = R$ ضرایب ثابت داشته و طرف راست R به‌وسیلهٔ یک عملگر ثابت ضریب صفر شود، یعنی $A(R) = 0$، استفاده نمود. این روش، دراصل، خیلی ساده است. عملگر A را دردو طرف معادلهٔ دیفرانسیل $L(y) = R$ به‌کار می‌بریم و معادلهٔ جدید $AL(y) = 0$ را به‌دست می‌آوریم که تمام جوابهای معادلهٔ اصلی باید درآن صدق کنند. چون AL عملگر ثابت ضریب دیگری است، می‌توان فضای پوچ آن‌را با محاسبهٔ ریشه‌های معادلهٔ مشخص AL معین کرد. پس، مسئله‌ای که می‌ماند انتخاب تابع خاصی چون y_1 از این فضای پوچ است که در $L(y_1) = R$ صدق نماید. مثالهای زیر طرز عمل را نشان خواهند داد.

مثال ۱. یک جواب خصوصی معادلهٔ

$$(D^4 - 16)y = x^4 + x + 1$$

را بیابید.

حل. طرف راست، که‌یک‌چندجمله‌ای‌درجهٔ 4 است، به‌وسیلهٔ عملگر D^5 صفر می‌شود. بنابراین، هرجواب معادلهٔ فوق یک جواب معادلهٔ

$$D^5(D^4 - 16)y = 0 \qquad (۲۹۰۶)$$

است. ریشه‌های معادلهٔ مشخص عبارتند از $0, 0, 0, 0, 0, 2, -2, 2i, -2i$؛ درنتیجه، همهٔ جوابهای (۲۹۰۶) در ترکیب خطی

$$y = c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4 + c_6e^{2x} + c_7e^{-2x} + c_8\cos 2x + c_9\sin 2x$$

قرار دارند. می‌خواهیم c_i را طوری اختیار کنیم که $L(y) = x^4 + x + 1$، که‌درآن $L = D^4 - 16$. چون چهار جملهٔ آخر به‌وسیلهٔ L صفر می‌شوند، می‌توان فرض‌کرد $c_6 = c_7 = c_8 = c_9 = 0$ و $c_1, \ldots, c_5$ را طوری یافت که

$$L(c_1 + c_2x + c_3x^2 + c_4x^3 + c_5x^4) = x^4 + x + 1.$$

به‌عبارت دیگر، جواب‌خصوصی y_1 را جستجو می‌کنیم که یک چند جمله‌ای درجهٔ 4 باشد که در $L(y_1) = x^4 + x + 1$ صدق نماید. برای آنکه اعمال ساده شوند، می‌نویسیم

$$16y_1 = ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e.$$

این ایجاب می‌کند که $16y_1^{(4)} = 24a$؛ درنتیجه، $y_1^{(4)} = 3a/2$. باجانشانی درمعادلهٔ

دیفرانسیل $L(y_1) = x^4 + x + 1$ ، باید a, b, c, d, e را طوری تعیین کنیم که در

$$\tfrac{3}{2}a - ax^4 - bx^3 - cx^2 - dx - e = x^4 + x + 1$$

صدق کنند . با متحد گرفتن ضرایب همتوان x ، خواهیم داشت

$$a = -1\,, \quad b = c = 0\,, \quad d = -1\,, \quad e = -\tfrac{5}{2};$$

درنتیجه ، جواب خصوصی y_1 عبارت خواهد بود از

$$y_1 = -\tfrac{1}{16}x^4 - \tfrac{1}{16}x - \tfrac{5}{32}.$$

مثال ۲ . معادلهٔ دیفرانسیل $y'' - 5y' + 6y = xe^x$ را حل کنید .

حل . این معادلهٔ دیفرانسیل به‌شکل

$$L(y) = R \qquad (۳۰.۶)$$

است ، که درآن $R(x) = xe^x$ و $L = D^2 - 5D + 6$. معادلهٔ همگن نظیر را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$(D-2)(D-3)y = 0\,;$$

این معادله جوابهای مستقل $u_1(x) = e^{2x}$ ، $u_2(x) = e^{3x}$ را دارد . حال یک‌جواب خصوصی y_1 معادلهٔ غیرهمگن را جستجو می‌کنیم . تابع $R(x) = xe^x$ را یک‌جواب معادلهٔ همگن

$$(D-1)^2 y = 0$$

می‌گیریم . بنابراین ، اگر عملگر $(D-1)^2$ را در دوطرف (۳۰.۶) اعمال کنیم ، درمی‌یابیم که هر تابع صادق در (۳۰.۶) باید در معادلهٔ

$$(D-1)^2(D-2)(D-3)y = 0$$

نیز صدق نماید . این معادلهٔ دیفرانسیل دارای ریشه‌های مشخص 3 ,2 ,1 ,1 است ؛ درنتیجه ، تمام جوابهایش در ترکیب خطی

$$y = ae^x + bxe^x + ce^{2x} + de^{3x},$$

که درآن a, b, c, d ثابت‌اند ، یافت می‌شوند . می‌خواهیم a, b, c, d را طوری اختیار کنیم که جواب حاصل y_1 در $L(y_1) = xe^x$ صدق نماید . چون به‌ازای هر c و d ، $L(ce^{2x} + de^{3x}) = 0$ ، فقط کافی است a و b طوری اختیار شوند که $L(ae^x + bxe^x) = xe^x$ و $c = d = 0$ را اختیار می‌کنیم . اگر قرار دهیم

$$y_1 = ae^x + bxe^x,$$

داریم

$$D(y_1) = (a + b)e^x + bxe^x, \qquad D^2(y_1) = (a + 2b)e^x + bxe^x;$$

در نتیجه، معادلهٔ $(D^2 - 5D + 6)y_1 = xe^x$ خواهد شد

$$(2a - 3b)e^x + 2bxe^x = xe^x.$$

با حذف e^x و متحد گرفتن ضرایب همتوان x، درمی‌یابیم که $a = \frac{3}{4}, b = \frac{1}{2}$. بنابراین، $y_1 = \frac{3}{4}e^x + \frac{1}{2}xe^x$، و جواب عمومی $L(y) = R$ با فرمول

$$y = c_1e^{2x} + c_2e^{3x} + \tfrac{3}{4}e^x + \tfrac{1}{2}xe^x$$

داده می‌شود.

روش به‌کار رفته در امثلهٔ پیش **روش صفرساز** نامیده می‌شود. این روش همیشه، در صورتی که بتوان یک عملگر ثابت ضریب مانند A یافت که R را صفر کند، بکار است. از معادلات دیفرانسیل خطی همگن با ضرایب ثابت، می‌دانیم که تنها توابع حقیقی که به‌وسیلهٔ عملگرهای ثابت ضریب صفر می‌شوند ترکیبات خطی از جملاتی هستند به‌شکل

$$x^{m-1}e^{\alpha x}, \qquad x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x, \qquad x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x,$$

که درآنها m یک عدد صحیح مثبت بوده و α و β ثابتهایی حقیقی می‌باشند. تابع $y = x^{m-1}e^{\alpha x}$ جواب یک‌معادلهٔ دیفرانسیل با یک ریشهٔ مشخص α از درجهٔ تکرار m است. بنابراین، این تابع دارای صفرساز $(D - \alpha)^m$ است. هریک از توابع $y = x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$ و $y = x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$ جواب یک معادلهٔ دیفرانسیل با ریشه‌های مشخص مختلط $\alpha \pm i\beta$

جدول ۱۰۶

تابع	صفر ساز
$y = x^{m-1}$	D^m
$y = e^{\alpha x}$	$D - \alpha$
$y = x^{m-1}e^{\alpha x}$	$(D - \alpha)^m$
$y = \cos\beta x$ یا $y = \sin\beta x$	$D^2 + \beta^2$
$y = x^{m-1}\cos\beta x$ یا $y = x^{m-1}\sin\beta x$	$(D^2 + \beta^2)^m$
$y = e^{\alpha x}\cos\beta x$ یا $y = e^{\alpha x}\sin\beta x$	$D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)$
$y = x^{m-1}e^{\alpha x}\cos\beta x$ یا $y = x^{m-1}e^{\alpha x}\sin\beta x$	$[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^m$

است، که‌هریک از درجهٔ تکرار m می‌باشد؛ درنتیجه، اینها به‌وسیلهٔ عملگر $[D^2 - 2\alpha D + (\alpha^2 + \beta^2)]^m$ صفر می‌شوند. بخاطر سهولت در ارجاع، این صفرسازها را درجدول ۱۰۶، همراه با چند حالت خاص از آنها، دکر می‌کنیم.

باآنکه روش صفرساز عملا" خیلی کاراست، اما به‌معادلاتی محدود می‌شودکه طرف راست‌آنها R دارای یک صفرساز ثابت ضریب است. اگر $R(x)$ به شکل e^{x^2} ، $\log x$ ، یا $\tan x$ باشد، روش کارنخواهد کرد؛ دراین صورت، برای یافتن یک جواب خصوصی باید از روش تغییر پارامتر یا روشی دیگر استفاده کرد.

۱۵۰۶ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۱۰، جواب عمومی را بربازهٔ $(-\infty, +\infty)$ پیدا کنید.

۱. $y'' - y' = x^2$.

۲. $y'' - 4y = e^{2x}$.

۳. $y'' + 2y' = 3xe^x$.

۴. $y'' + 4y = \sin x$.

۵. $y'' - 2y' + y = e^x + e^{2x}$.

۶. $y''' - y' = e^x$.

۷. $y''' - y' = e^x + e^{-x}$.

۸. $y''' + 3y'' + 3y' + y = xe^{-x}$.

۹. $y'' + y = xe^x \sin 2x$.

۱۰. $y^{(4)} - y = x^2e^{-x}$.

۱۱. نشان‌دهید که اگر عملگر ثابت ضریب A ، f را، و عملگر ثابت ضریب B ، g را صفر کند، حاصل ضرب AB ، $f + g$ را صفر خواهد کرد.

۱۲. فرض‌کنید A یک عملگر ثابت ضریب با چندجمله‌ای مشخص p_A باشد.

(آ) با استفاده از روش صفرساز، ثابت کنید معادلهٔ دیفرانسیل $A(y) = e^{\alpha x}$ در صورتی یک جواب خصوصی به شکل

$$y_1 = \frac{e^{\alpha x}}{p_A(\alpha)}$$

دارد که α یک صفر چندجمله‌ای p_A نباشد.

(ب) ثابت‌کنیدکه‌اگر α یک‌صفرسادهٔ p_A (از درجهٔ تکرار 1) باشد، معادلهٔ $A(y) = e^{\alpha x}$ جواب خصوصی

$$y_1 = \frac{xe^{\alpha x}}{p'_A(\alpha)}$$

را خواهد داشت.

(پ) نتایج (آ) و (ب) ، وقتی α یک صفر p_A از درجهٔ تکرار m است ، راتعمیم دهید .

۱۳ . دو عملگر ثابت ضریب A و B داده شده است که چندجمله‌ایهای مشخص آنها صفر مشترک ندارند ، و فرض کنید $C = AB$.

(آ) ثابت کنید هر جواب معادلهٔ دیفرانسیل $C(y) = 0$ به شکل $y = y_1 + y_2$ است ، که درآن $A(y_1) = 0$ و $B(y_2) = 0$.

(ب) ثابت کنید توابع y_1 و y_2 قسمت (آ) به‌طور منحصر بفرد مشخص‌اند ؛ یعنی ، به‌ازای y صادق در $C(y) = 0$ ، فقط یک جفت y_1 , y_2 با خواص قسمت (آ) وجود دارد .

۱۴ . اگر $L(y) = y'' + ay' + by$ ، که درآن a و b ثابت‌اند ، f را آن‌جواب خصوصی $L(y) = 0$ بگیرید که در شرایط $f(0) = 0$ و $f'(0) = 1$ صدق می‌کند . نشان دهید که یک جواب خصوصی $L(y) = R$ از فرمول

$$y_1(x) = \int_c^x f(x - t)R(t)\, dt ,$$

به‌ازای انتخابی از c ، به‌دست می‌آید . بالاخص، اگرریشه‌های معادلهٔ مشخص مساوی باشند ، مثلاً $r_1 = r_2 = m$، نشان دهید که فرمول مربوط به $y_1(x)$ خواهد شد

$$y_1(x) = e^{mx} \int_c^x (x - t)e^{-mt}R(t)\, dt .$$

۱۵ . فرض کنید Q عملگر "ضرب در x " باشد ؛ یعنی ، به‌ازای هر y در ردهٔ $\mathscr{C}^\infty$ و هر x حقیقی ، $Q(y)(x) = x \cdot y(x)$. فرض کنید I عملگر همانی باشد ، که به‌ازای هر y در $\mathscr{C}^\infty$ با $I(y) = y$ تعریف می‌شود .

(آ) ثابت کنید که $DQ - QD = I$

(ب) نشان دهید که $D^2Q - QD^2$ یک عملگر ثابت ضریب مرتبهٔ اول است ، و این عملگر را صریحاً به‌صورت یک چند جمله‌ای خطی از D مشخص نمایید .

(پ) نشان دهید که $D^3Q - QD^3$ یک عملگر ثابت ضریب مرتبهٔ دوم است ، و این عملگر را صریحاً به‌صورت یک چندجمله‌ای درجهٔ دوم از D مشخص نمایید .

(ت) تعمیم مربوط به عملگر $D^nQ - QD^n$ را حدس بزنید ، و حدس خود را به‌استقرا ثابت کنید .

در تمرینهای ۱۶ تا ۲۰ ، جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل را دربازهٔ داده شده بیابید .

۱۶ . $(0, +\infty)$ ، $y'' - y = 1/x$.

۱۷ . $\left(-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right)$ ، $y'' + 4y = \sec 2x$.

۱۸ . $\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$ ، $y'' - y = \sec^3 x - \sec x$.

۱۹ . $(-\infty, +\infty)$ ، $y'' - 2y' + y = e^{e^x}(e^x - 1)^2$.

۲۰ . $(0, +\infty)$ ، $y''' - 7y'' + 14y' - 8y = \log x$.

۱۶.۶ تمرینات گوناگون درباب معادلات دیفرانسیل خطی

۱ . منحنی انتگرال $y = u(x)$ معادلهٔ دیفرانسیل $y'' - 3y' - 4y = 0$ منحنی انتگرال $y = v(x)$ معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + 4y' - 5y = 0$ را در مبداء قطع می‌کند . توابع u و v را درحالتی معین کنید که دو منحنی در مبداء یک شیب داشته و

$$\lim_{x\to\infty} \frac{[v(x)]^4}{u(x)} = \frac{5}{6}.$$

۲ . منحنی انتگرال $y = u(x)$ معادلهٔ دیفرانسیل $y'' - 4y' + 29y = 0$ منحنی انتگرال $y = v(x)$ معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + 4y' + 13y = 0$ را در مبداء قطع می‌کند . دو منحنی در مبداء دارای یک شیب هستند . u و v را در صورتی تعیین کنید که $u'(\pi/2) = 1$.

۳ . فرض کنید معادلهٔ دیفرانسیل $y'' + 4xy' + Q(x)y = 0$ دو جواب به‌شکل $y_1 = u(x)$ و $y_2 = xu(x)$ ، که $u(0) = 1$ ، داشته باشد . $u(x)$ و $Q(x)$ را صریحا" برحسب x معین کنید .

۴ . فرض‌کنید $L(y) = y'' + P_1y' + P_2y$. برای‌حل معادلهٔ غیرهمگن $L(y) = R$ به‌وسیلهٔ تغییر پارامتر ، نیاز است که دو جواب، مستقل خطی از معادلهٔ همگن را بدانیم . این‌تمرین نشان می‌دهد که اگر یک جواب u_1 از $L(y) = 0$ معلوم باشد ، و u_1 هرگز بر بازه‌ای چون J صفر نشود ، جواب دوم u_2 معادلهٔ همگن از فرمول‌زیر به‌دست می‌آید :

$$u_2(x) = u_1(x) \int_c^x \frac{Q(t)}{[u_1(t)]^2}\, dt,$$

که درآن $Q(x) = e^{-\int P_1(x)dx}$ ، و c نقطهٔ دلخواهی در J است. این دو جواب بر J مستقل می‌باشند.

(آ) ثابت کنید تابع u_2 در $L(y) = 0$ صدق می‌کند.

(ب) ثابت کنید u_1 و u_2 بر J مستقل هستند.

۵. جواب عمومی معادلهٔ

$$xy'' - 2(x+1)y' + (x+2)y = x^3e^{2x}.$$

به‌ازای $x > 0$ ، را با این فرض که معادلهٔ همگن جوابی به‌شکل $y = e^{mx}$ دارد بیابید.

۶. یک جواب ناصفر معادلهٔ دیفرانسیل

$$(y'' - 4y') + x^2(y' - 4y) = 0$$

را با تحقیق به‌دست آورده و، سپس، جواب عمومی معادله را پیدا نمایید.

۷. جواب عمومی معادلهٔ دیفرانسیل

$$4x^2y'' + 4xy' - y = 0$$

را، با این فرض که یک جواب خصوصی به‌شکل $y = x^m$ به‌ازای $x > 0$ دارد، پیدا نمایید.

۸. در معادلهٔ

$$x(1-x)y'' - (1-2x)y' + (x^2 - 3x + 1)y = (1-x)^3$$

یک جواب معادلهٔ همگن‌را با امتحان به‌دست آورده و، سپس، جواب عمومی معادلهٔ فوق را پیدا نمایید.

۹. جواب عمومی معادلهٔ

$$(2x - 3x^3)y'' + 4y' + 6xy = 0$$

را، با این‌فرض که جوابی به‌صورت یک چندجمله‌ای از x دارد، پیدا نمایید.

۱۰. جواب عمومی معادلهٔ

$$x^2(1-x)y'' + 2x(2-x)y' + 2(1+x)y = x^2$$

را، با این فرض که معادلهٔ همگن جوابی به شکل $y = x^c$ دارد، پیدا کنید.

۱۱. فرض‌کنید اگر $x > 0$ ، $g(x) = \int_1^x e^t/t\, dt$. (لازم نیست این انتگرال را حساب‌کنید.) تمام مقادیر ثابت a را طوری بیابید که تابع f تعریف شده با

$$f(x) = \frac{1}{x} e^{ag(x)}$$

در معادلهٔ دیفرانسیل خطی

$$x^2y'' + (3x - x^2)y' + (1 - x - e^{2x})y = 0$$

صدق نماید. بااستفاده‌ازاین‌اطلاعات، جواب عمومی معادله را بر بازهٔ $(0, +\infty)$ معین نمایید.

۱۷.۶ معادلات خطی مرتبهٔ دوم با ضرایب تحلیلی

گوییم تابع f بر بازهٔ $(x_0 - r, x_0 + r)$ تحلیلی است اگر که f در این بازه بسط به صورت سری توانی داشته باشد:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n ,$$

که به‌ازای $|x - x_0| < r$ همگراست. اگر ضرایب یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی و همگن

$$y^{(n)} + P_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + P_n(x)y = 0$$

در بازهٔ $(x_0 - r, x_0 + r)$ تحلیلی باشند، می‌توان نشان داد n جواب مستقل مانند $u_1, \ldots, u_n$ وجود دارند که هریک بَرهمان بازه تحلیلی می‌باشند. این قضیه را برای معادلات مرتبهٔ دوم ثابت می‌کنیم و، سپس، مثال مهمی را که در بسیاری از کاربردها ظاهر می‌شود مورد بحث قرار می‌دهیم.

قضیهٔ ۱۳.۶ . فرض‌کنیم P_1 و P_2 بربازهٔ باز $(x_0 - r, x_0 + r)$ تحلیلی‌باشند؛ مثلاً"،

$$P_1(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n , \qquad P_2(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x - x_0)^n .$$

در این‌صورت، معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \tag{۳۱.۶}$$

دو جواب مستقل u_1 و u_2 دارد که برهمان بازه تحلیلی می‌باشند.

برهان. جوابی پیدا می‌کنیم به‌صورت سری توانی به‌شکل

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x - x_0)^n , \tag{۳۲.۶}$$

که دربازهٔ داده‌شده همگرا باشد . برای این‌کار ، سری فوق را به‌جای P_1 و P_2 درمعادلهٔ دیفرانسیل قرارمی‌دهیم و ، بعد ، روابطی را به‌دست می‌آوریم که ضرایب a_n باید درآنها صدق کنند تا تابع y داده شده با (۳۲۰۶) در معادلهٔ صدق نماید .

مشتقات y' و y'' را می‌توان با مشتقگیری جمله به‌جمله از سری توانی برای y به دست آورد (ر.ک. قضیهٔ ۹۰۱۱ در جلد یک) . این نتیجه می‌دهد که

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n (x - x_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 1) a_{n+1} (x - x_0)^n ,$$

$$y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n - 1) a_n (x - x_0)^{n-2} = \sum_{n=0}^{\infty} (n + 2)(n + 1) a_{n+2} (x - x_0)^n .$$

حاصل ضربهای $P_1(x)y'$ و $P_2(x)y$ از سریهای توانی*

$$P_1(x)y' = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} (k + 1) a_{k+1} b_{n-k} \right) (x - x_0)^n$$

و

$$P_2(x)y = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{k=0}^{n} a_k c_{n-k} \right) (x - x_0)^n$$

به دست می‌آیند . وقتی این سریها را در معادلهٔ دیفرانسیل (۳۱۰۶) می‌گذاریم ، در می‌یابیم که

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left\{ (n + 2)(n + 1) a_{n+2} + \sum_{k=0}^{n} [(k + 1) a_{k+1} b_{n-k} + a_k c_{n-k}] \right\} (x - x_0)^n = 0 .$$

بنابراین ، معادلهٔ دیفرانسیل برقرار است اگر ضرایب a_n را طوری اختیار کنیم که در فرمول بازگشتی

$$(n + 2)(n + 1) a_{n+2} = - \sum_{k=0}^{n} [(k + 1) a_{k+1} b_{n-k} + a_k c_{n-k}] , \qquad (۳۳۰۶)$$

به‌ازای $n = 0, 1, 2, \ldots$ ، صدق نمایند . این فرمول a_{n+2} را برحسب ضرایب پیشتر $a_0, a_1, \ldots, a_{n+1}$ و ضرایب توابع معلوم P_1 و P_2 بیان می‌کند . برای دوضریب اول a_0 و

---

* خوانندهٔ ناآشنا با ضرب سریهای توانی می‌تواند به تمرین ۷ دربخش ۲۱۰۶ مراجعه کند .

a_1 مقادیر دلخواه اختیار کرده و، با استفاده از فرمول بازگشتی، بقیهٔ ضرایب $a_2, a_3, \ldots$ را برحسب a_0 و a_1 تعریف می‌نماییم. این صدق سری توانی (۳۲۰۶) در معادلهٔ دیفرانسیل (۳۱۰۶) را تضمین خواهد کرد. قدم بعدی در برهان این است که نشان دهیم که سریی که به‌این صورت تعریف شده به‌ازای هر x در بازهٔ $(x_0 - r, x_0 + r)$ همگرا می‌باشد. این کار با تحت تسلـط درآوردن سری (۳۲۰۶) به‌وسیلهٔ سری توانی دیگری که همگرایی‌اش معلوم است صورت می‌گیرد. بالاخره، نشان می‌دهیم که می‌توان a_0 و a_1 را طوری اختیار کرد که دوجواب مستقل داشته باشیم.

حال ثابت می‌کنیم سری (۳۲۰۶)، که ضرایبش با (۳۳۰۶) تعریف می‌شوند، در بازهٔ مطلوب همگرا است.

نقطهٔ ثـابت $x_1 \neq x_0$ را در بـازهٔ $(x_0 - r, x_0 + r)$ اختیار کـرده قرار می‌دهیم $t = |x_1 - x_0|$. چون سریهای مربوط به P_1 و P_2 به‌ازای $x = x_1$ به‌طور مطلق همگرایند، جملات این سریها کراندار می‌باشند؛ مثلاً"، به‌ازای $M_1 > 0, M_2 > 0$ ای،

$$|b_k|\, t^k \leq M_1 \quad \text{و} \quad |c_k|\, t^k \leq M_2 \;.$$

فرض کنیم M ماکزیمم M_1 و tM_2 باشد. دراین صورت، داریم

$$|b_k| \leq \frac{M}{t^k} \qquad \text{و} \qquad |c_k| \leq \frac{M}{t^{k+1}} \cdot$$

فرمول بازگشتی نامساوی زیر را ایجاب می‌کند:

$$\begin{aligned}(n+2)(n+1)\,|a_{n+2}| &\leq \sum_{k=0}^{n}\left\{(k+1)\,|a_{k+1}|\,\frac{M}{t^{n-k}} + |a_k|\,\frac{M}{t^{n-k+1}}\right\}\\ &= \frac{M}{t^{n+1}}\left\{\sum_{k=0}^{n}(k+1)\,|a_{k+1}|\,t^{k+1} + \sum_{k=0}^{n}|a_{k+1}|\,t^{k+1} + |a_0| - |a_{n+1}|\,t^{n+1}\right\}\\ &\leq \frac{M}{t^{n+1}}\left\{\sum_{k=0}^{n}(k+2)\,|a_{k+1}|\,t^{k+1} + |a_0|\right\} = \frac{M}{t^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}(k+1)\,|a_k|\,t^k.\end{aligned}$$

حال فـرض کنیـم $A_0 = |a_0|$ ، $A_1 = |a_1|$ ، و $A_2, A_3, \ldots$ را متوالیاً" با فرمول بازگشتی

$$(n+2)(n+1)A_{n+2} = \frac{M}{t^{n+1}}\sum_{k=0}^{n+1}(k+1)A_k t^k \qquad (۳۴۰۶)$$

به‌ازای $n \geq 0$ تعریف می‌کنیم. دراین صورت، به‌ازای هر $n \geq 0$ ، $|a_n| \leq A_n$ ؛ درنتیجه،

سری $\sum a_n(x-x_0)^n$ تحت تسلط سری $\sum A_n|x-x_0|^n$ است. حال، با استفاده از آزمون نسبت، نشان می‌دهیم که، اگر $|x-x_0|<t$، $\sum A_n|x-x_0|^n$ همگرا می‌باشد.

از تعویض n با $n-1$ در (۳۴۰۶) وتفریق t^{-1} برابر معادلهٔ حاصل‌از (۳۴۰۶)، درمی‌یابیم که $(n+2)(n+1)A_{n+2}-t^{-1}(n+1)nA_{n+1}=M(n+2)A_{n+1}$. بنابراین،

$$A_{n+2}=A_{n+1}\frac{(n+1)n+(n+2)Mt}{(n+2)(n+1)t},$$

و معلوم می‌شود که، وقتی $n\to\infty$،

$$\frac{A_{n+2}|x-x_0|^{n+2}}{A_{n+1}|x-x_0|^{n+1}}=\frac{(n+1)n+(n+2)Mt}{(n+2)(n+1)t}|x-x_0|\to\frac{|x-x_0|}{t}.$$

این حد، اگر $|x-x_0|<t$، از یک کمتر است. بنابراین، اگر $|x-x_0|<t$، $\sum a_n(x-x_0)^n$ همگرا می‌باشد. اما، چون $t=|x_1-x_0|$ و x_1 نقطهٔ دلخواهی دربازهٔ (x_0-r, x_0+r) بود، سری $\sum a_n(x-x_0)^n$ به‌ازای هر x در (x_0-r, x_0+r) همگرا می‌باشد.

دو ضریب اول a_0 و a_1 مقادیر اولیهٔ y و مشتق آن در x_0 را نمایش می‌دهند. هرگاه u_1 جواب به‌صورت سری توانی با $a_0=1$ و $a_1=0$ باشد، درنتیجه

$$u_1(x_0)=1 \quad \text{و} \quad u_1'(x_0)=0,$$

و u_2 جواب با $a_0=0$ و $a_1=1$ باشد، درنتیجه

$$u_2(x_0)=0 \quad \text{و} \quad u_2'(x_0)=1,$$

آنگاه جوابهای u_1 و u_2 مستقل خواهند بود. این برهان را تمام خواهد کرد.

۱۸۰۶ معادلهٔ لژاندر

در این بخش، جوابهای معادلهٔ لژاندر

$$(1-x^2)y''-2xy'+\alpha(\alpha+1)y=0, \tag{۳۵۰۶}$$

که درآن α ثابت حقیقی دلخـواه است، را به‌صورت سری توانی به‌دست می‌آوریم. این معادله در مسائل جذب و جریان گرما با تقارن کروی ظاهر می‌شود. وقتی α عددصحیح مثبتی باشد، درمی‌یابیم که معادله جوابهای چندجمله‌ای، به‌نام ***چندجمله‌ایهای لژاندر***، دارد. اینها همان چند جمله‌ایهایی هستند که قبلاً" در رابطه با فرایند

گرام ـ اشمیت (فصل ۱، صفحهٔ ۳۴) به‌آنها برخوردیم.

معادلهٔ لژاندر را می‌توان به‌صورت

$$[(x^2-1)y']' = \alpha(\alpha+1)y$$

نوشت، که به‌شکل

$$T(y) = \lambda y$$

است، که درآن T یک عملگر اشتروم ـ لیوویل می‌باشد، $T(f) = (pf')'$، با $p(x) = x^2 - 1$ و $\lambda = \alpha(\alpha+1)$. بنابراین، جوابهای ناصفر معادلهٔ لژاندر توابع ویژهٔ T متعلق به مقدار ویژهٔ $\alpha(\alpha+1)$ می‌باشند. چون $p(x)$ در شرایط کرانه‌ای

$$p(1) = p(-1) = 0$$

صدق می‌کند، عملگر T نسبت به ضرب داخلی

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\,dx$$

متقارن می‌باشد. نظریهٔ عمومی عملگرهای متقارن می‌گوید که توابع ویژهٔ متعلق به‌مقادیر ویژهٔ متمایز متعامد هستند (قضیهٔ ۳۰۵).

در معادلهٔ دیفرانسیل مذکور در قضیهٔ ۱۳۰۶، ضریب y'' مساوی یک است. معادلهٔ لژاندر را می‌توان با تقسیم بر $x^2 - 1$ به‌این شکل درآورد. از (۳۵۰۶) داریم

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0,$$

که درآن، اگر $x^2 \neq 1$،

$$P_1(x) = -\frac{2x}{1-x^2} \qquad \text{و} \qquad P_2(x) = \frac{\alpha(\alpha+1)}{1-x^2}\cdot$$

چون به‌ازای $|x| < 1$، $1/(1-x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$، هردوی P_1 و P_2 در بازهٔ باز $(-1, 1)$ بسط به‌صورت سری توانی دارند؛ درنتیجه، قضیهٔ ۱۳۰۶ قابل اعمال می‌باشد. برای یافتن فرمول بازگشتی برای ضریبها، ساده‌تر آن است که معادله را به‌شکل (۳۵۰۶) رها کرده، سعی کنیم یک جواب به‌صورت سری توانی به‌شکل

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

که دربازهٔ باز $(-1, 1)$ معتبراست بیابیم. با مشتقگیری جمله به جمله از این سری، داریم

$$y' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} \qquad \text{و} \qquad y'' = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1) a_n x^{n-2}$$

لذا، خواهیم داشت

$$2xy' = \sum_{n=1}^{\infty} 2na_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} 2na_n x^n,$$

و

$$\begin{aligned}(1 - x^2)y'' &= \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^{n-2} - \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} (n+2)(n+1)a_{n+2} x^n - \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)a_n x^n \\ &= \sum_{n=0}^{\infty} [(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n] x^n .\end{aligned}$$

اگر این سریها را در معادلهٔ دیفرانسیل (۳۵۰۶) بگذاریم، می‌بینیم که معادله برقرار است اگر و فقط اگر ضرایب در رابطهٔ

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - n(n-1)a_n - 2na_n + \alpha(\alpha+1)a_n = 0$$

به‌ازای هر $n \geq 0$ صدق نمایند. این معادله همان معادلهٔ

$$(n+2)(n+1)a_{n+2} - (n-\alpha)(n+1+\alpha)a_n = 0,$$

یا

$$a_{n+2} = -\frac{(\alpha - n)(\alpha + n + 1)}{(n+1)(n+2)} a_n, \qquad (۳۶۰۶)$$

است. با این رابطه می‌توان $a_2, a_4, a_6, \ldots$ را متوالیا" برحسب a_0 معین کرد. بهمین نحو، می‌توان $a_3, a_5, a_7, \ldots$ را برحسب a_1 حساب نمود. برای ضرایب با زیرنویسهای زوج داریم

$$a_2 = -\frac{\alpha(\alpha+1)}{1 \cdot 2} a_0,$$

$$a_4 = -\frac{(\alpha-2)(\alpha+3)}{3 \cdot 4} a_2 = (-1)^2 \frac{\alpha(\alpha-2)(\alpha+1)(\alpha+3)}{4!} a_0,$$

و، بطور کلی،

$$a_{2n} = (-1)^n \frac{\alpha(\alpha-2)\cdots(\alpha-2n+2)\cdot(\alpha+1)(\alpha+3)\cdots(\alpha+2n-1)}{(2n)!} a_0 .$$

این رابطه‌را می‌توان به‌استقرا ثابت کرد. برای ضرایب با زیرنویسهای فرد خواهیم داشت

$$u_1(x) = 1 + \frac{(m!)^2}{(2m!)} \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{(2m+2k)!}{(m-k)!\,(m+k)!\,(2k)!} x^{2k}. \tag{۴۰.۶}$$

به‌عنوان مثـال، وقتی $\alpha = 0, 2, 4, 6$ $(m = 0, 1, 2, 3)$، چندجمله‌ایهای نظیر خواهند بود

$$u_1(x) = 1, \qquad 1 - 3x^3, \qquad 1 - 10x^2 + \tfrac{35}{3}x^4, \qquad 1 - 21x^2 + 63x^4 - \tfrac{231}{5}x^6.$$

سری مربوط به $u_2(x)$، وقتی α زوج بـاشد، یک چند جمله‌ای نیست، زیرا ضریب x^{2n+1} هرگز صفر نمی‌باشد.

وقتی α یک عدد صحیح مثبت فرد باشد، نقشهای u_1 و u_2 عوض می‌شوند؛ سری مربوط به $u_2(x)$ یک چندجمله‌ای است و سری مربوط به $u_1(x)$ یک چندجمله‌ای نمی‌باشد. بطور مشخص، اگر $\alpha = 2m + 1$، داریم

$$u_2(x) = x + \frac{(m!)^2}{(2m+1)!} \sum_{k=1}^{m} (-1)^k \frac{(2m+2k+1)!}{(m-k)!\,(m+k)!\,(2k+1)!} x^{2k+1}. \tag{۴۱.۶}$$

مثلاً، وقتی $\alpha = 1, 3, 5$ $(m = 0, 1, 2)$، چندجمله‌ایهای نظیر خواهند بود

$$u_2(x) = x, \qquad x - \tfrac{5}{3}x^3, \qquad x - \tfrac{14}{3}x^3 + \tfrac{21}{5}x^5.$$

۱۹.۶ چند جمله‌ایهای لژاندر

بعضی از خـواص جوابهای چنـدجمله‌ای معادلهٔ لژاندر را می‌توان مستقیماً از معادلهٔ دیفرانسیل یا از فرمولهای (۴۰.۶) و (۴۱.۶) نتیجه گرفت. خواص دیگر از فرمول‌دیگر برای این چندجمله‌ایها، که اینک آنها را نتیجه می‌گیریم، آسانتر به‌دست می‌آیند.

ابتدا فرمولی به‌دست می‌آوریم که (صرف نظر از سازه‌های ثابت) شامل چندجمله‌ایهای (۴۰.۶) و (۴۱.۶) است. فرض کنیم

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n} \sum_{r=0}^{[n/2]} \frac{(-1)^r (2n-2r)!}{r!\,(n-r)!\,(n-2r)!} x^{n-2r}, \tag{۴۲.۶}$$

که درآن $[n/2]$ بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از $n/2$ است. بزودی نشان می‌دهیم که این *چندجمله‌ای لژاندر* از درجهٔ n است که در فصل ۱ معرفی شد. وقتی n زوج باشد، این چندجمله‌ای مساوی مضرب ثابتی از چندجمله‌ای $u_1(x)$ در معادلهٔ (۴۰.۶) است؛ وقتی n فرد باشد، این چند جمله‌ای مساوی مضرب ثابتی از چند جمله‌ای $u_2(x)$ در (۴۱.۶)

می‌باشد .* هفت چند جمله‌ای اول لژاندر با فرمولهای زیر داده می‌شوند :

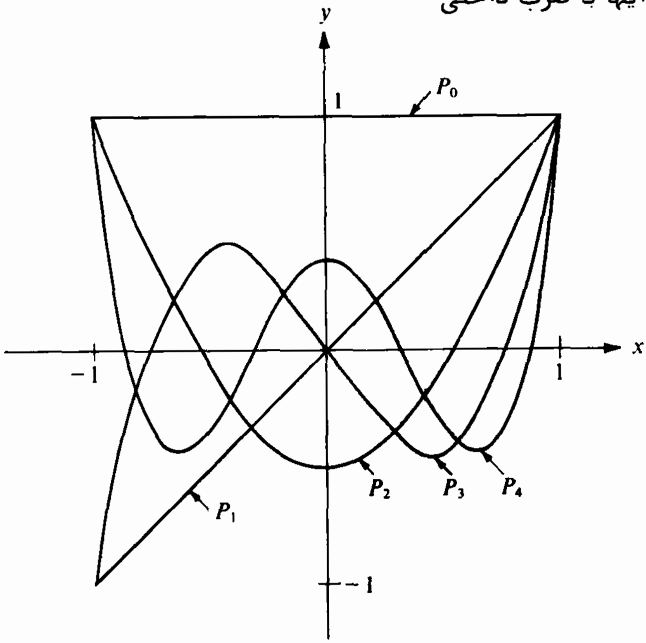
$$P_0(x) = 1, \quad P_1(x) = x, \quad P_2(x) = \tfrac{1}{2}(3x^2 - 1), \quad P_3(x) = \tfrac{1}{2}(5x^3 - 3x),$$

$$P_4(x) = \tfrac{1}{8}(35x^4 - 30x^2 + 3), \quad P_5(x) = \tfrac{1}{8}(63x^5 - 70x^3 + 15x),$$

$$P_6(x) = \tfrac{1}{16}(231x^6 - 315x^4 + 105x^2 - 5).$$

شکل ۱۰۶ نمودارهای پنج تابع اول را روی بازهٔ $[-1, 1]$ نشان می‌دهد .

حال می‌توان نشان داد که ، صرف نظر از سازه‌های اسکالر ، چندجمله‌ایهای لژاندر آنهایی هستند که از اعمال فرایند متعامد سازی گرام ــ اشمیت بر دنبالهٔ $1, x, x^2, \ldots$ از چندجمله‌ایها با ضرب داخلی



شکل ۱۰۶ نمودار چندجمله‌ایهای لژاندار روی‌بازهٔ $[-1, 1]$

---

* وقتی n زوج باشد ، مثلا " $n = 2m$ ، می‌توان اندیس جمعبندی k در معادلهٔ (۴۰.۶) را با اندیس جدید r ، که $r = m - k$ ، عوض کرد . با این‌کار می‌بینیم که مجموع (۴۰.۶) مضرب ثابتی از $P_n(x)$ است . بهمین نحو ، وقتی n فرد باشد ، هر تغییر اندیس مجموع (۴۱.۶) را به‌مضرب ثابتی از $P_n(x)$ بدل می‌سازد .

$$(f, g) = \int_{-1}^{1} f(x)g(x)\, dx$$

به‌دست می‌آیند.

ابتدا توجه می‌کنیم که، اگر $m \neq n$ ، چندجمله‌ایهای P_n و P_m متعامدند، زیرا توابع ویژهٔ یک عملگر متقارن متعلق به مقادیر ویژهٔ متمایز می‌باشند. همچنین، از آنجا که درجهٔ P_n مساوی n بوده و $P_0 = 1$ ، چندجمله‌ایهای $P_0(x), P_1(x), \ldots, P_n(x)$ همان زیرفضای پیموده شده به‌وسیلهٔ $1, x, \ldots, x^n$ را می‌پیمایند. در بخش ۱۴۰۱ ، مثال ۲ ، مجموعهٔ متعامد دیگری از چندجمله‌ایهای $y_0, y_1, y_2, \ldots$ ساختیم که $y_0(x), y_1(x), \ldots, y_n(x)$ همان زیرفضای پیموده شده به‌وسیلهٔ $1, x, \ldots, x^n$ را به‌ازای هر n می‌پیمایند. قضیهٔ متعامدسازی (قضیهٔ ۱۳۰۱) می‌گوید که، صرف نظر ازسازه‌های اسکالر، فقط یک مجموعه از توابع متعامد با این خاصیت وجود دارد. بنابر این، باید به‌ازای اسکالرهایی چون c_n داشته باشیم

$$P_n(x) = c_n y_n(x) \,.$$

ضریب x^n در $y_n(x)$ مساوی یک است؛ درنتیجه، c_n ضریب x^n در $P_n(x)$ می‌باشد. از (۴۲۰۶) می‌بینیم که

$$c_n = \frac{(2n)!}{2^n(n!)^2}\,.$$

۲۰۰۶ فرمول ردریگوز برای چندجمله‌ایهای لژاندر

در مجموع (۴۲۰۶) معرف $P_n(x)$ ملاحظه می‌شود که

$$\frac{(2n-2r)!}{(n-2r)!}\, x^{n-2r} = \frac{d^n}{dx^n}\, x^{2n-2r} \quad \text{و} \quad \frac{1}{r!\,(n-r)!} = \frac{1}{n!}\binom{n}{r} \text{،}$$

که درآن $\binom{n}{r}$ ضریب دوجمله‌ای است، و مجموع را به‌شکل زیر می‌نویسیم:

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!}\frac{d^n}{dx^n}\sum_{r=0}^{[n/2]} (-1)^r \binom{n}{r} x^{2n-2r}.$$

وقتی $[n/2] < r \le n$ ، جملهٔ x^{2n-2r} دارای درجه‌ای کمتر از n است؛ درنتیجه، مشتق n م آن صفر می‌باشد. بنابر این، اگر r مجاز به تغییر از 0 تا n باشد، مجموع تغییر نخواهد کرد. این نتیجه می‌دهد که

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} \sum_{r=0}^{n} (-1)^r \binom{n}{r} x^{2n-2r}.$$

حال می‌بینیم کـه مجموع سمت راست بسط دوجمله‌ای $(x^2 - 1)^n$ است. بنابراین، داریم

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n.$$

این فرمول، به‌افتخار اولیند ردریگوز[1] (۱۸۵۱ - ۱۷۹۴)، اقتصاددان و مصلح فرانسوی، به **فرمول ردریگوز** معروف شده است.

با استفاده‌ازفرمول ردریگوز و معادلهٔ دیفرانسیل، می‌توان چند خاصیت مهم چندجمله‌ایهای لژاندر را نتیجه گرفت. بعضی از این خواص درزیر ذکر شده‌اند. برهانهای آنها در مجموعه تمرینات بعدی به‌اختصار بیان می‌شوند.

به‌ازای هر $n \geq 0$ داریم

$$P_n(1) = 1.$$

بعلاوه، $P_n(x)$ تنها چندجمله‌ای است که در معادلهٔ لژاندر

$$(1 - x^2)y'' - 2xy' + n(n + 1)y = 0$$

صدق می‌کند و، وقتی $x = 1$، دارای مقدار 1 می‌باشد.

به‌ازای هر $n \geq 0$ داریم

$$P_n(-x) = (-1)^n P_n(x).$$

این‌نشان‌می‌دهد که P_n، وقتی n زوج باشد، یک تابع زوج، و، وقتی n فرد باشد، یک تابع فرد می‌باشد.

ما قبلاً رابطهٔ تعامدی را ذکر کرده‌ایم:

اگر $m \neq n$، $\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0$.

وقتی $m = n$، رابطهٔ نرمی زیر را داریم:

$$\|P_n\|^2 = \int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\, dx = \frac{2}{2n + 1}.$$

هرچند جملـه‌ای درجـهٔ n را می‌توان به صورت ترکیبی خطی از چند جمله‌ایهای

---

1. Olinde Rodrigues

لژاندر $P_0, P_1, \ldots, P_n$ بیان کرد. در واقع، اگر f یک چندجمله‌ای درجهٔ n باشد، داریم

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x),$$

که درآن

$$c_k = \frac{2k+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_k(x)\, dx .$$

ازرابطهٔ تعامدی نتیجه می‌شود که، به‌ازای هرچند جمله‌ای g از درجهٔ کمتر از n،

$$\int_{-1}^{1} g(x) P_n(x)\, dx = 0 \ .$$

این خاصیت را می‌توان به‌کاربرد و ثابت کرد که چندجمله‌ای لژاندر P_n دارای n صفر حقیقی متمایز است و همه دربازهٔ باز $(-1\ ,\ 1)$ قرار دارند.

۶.۲۱ تمرین

۱. معادلهٔ لژاندر (۶.۳۵) به‌ازای $\alpha = 0$ دارای جواب چندجمله‌ای $u_1(x) = 1$ و یک جواب u_2 است، که چندجمله‌ای نیست، و با سری معادلهٔ (۶.۴۱) داده‌می‌شود.

(آ) نشان دهید که مجموع سری مربوط به u_2 از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$u_2(x) = \frac{1}{2} \log \frac{1+x}{1-x} \ ، \quad |x| < 1 \text{ به‌ازای}$$

(ب) مستقیماً "تحقیق کنید که تابع u_2 در قسمت (آ)، وقتی $\alpha = 0$، یک‌جواب معادلهٔ لژاندر است.

۲. نشان دهید که تابع f تعریف شده با معادلهٔ

$$f(x) = 1 - \frac{x}{2} \log \frac{1+x}{1-x}$$

به‌ازای $|x| < 1$ در معادلهٔ لژاندر (۶.۳۵) به‌ازای $\alpha = 1$ صدق می‌کند. این تابع را به‌صورت ترکیبی‌خطی‌ازجوابهای u_1 و u_2 داده شده با معادلات (۶.۳۸) و (۶.۳۹) بیان نمایید.

۳. معادلهٔ لژاندر (۶.۳۵) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$[(x^2-1)y']' - \alpha(\alpha+1)y = 0.$$

(آ) هرگاه a, b, c ثابت بوده و $a > b$ و $4c+1>0$ ، نشان دهید که یک معادلهٔ دیفرانسیل از نوع

$$[(x-a)(x-b)y']' - cy = 0$$

را می‌توان با تغییر متغیری به‌شکل $x = At + B$ ، که $A > 0$ ، به یک معادلهٔ لژاندر تبدیل کرد. A و B را برحسب a و b معین نمایید.

(ب) با استفاده از روش قسمت (آ)، معادلهٔ

$$(x^2-x)y'' + (2x-1)y' - 2y = 0$$

را به یک معادلهٔ لژاندر تبدیل نمایید.

۴ . دو جواب مستقل به صورت سری توانی معادلهٔ هرمیتی

$$y'' - 2xy' + 2\alpha y = 0$$

را بر بازه‌ای به‌شکل $(-r, r)$ پیدا کنید. نشان دهید که یکی از اینها، وقتی α یک عدد صحیح نامنفی باشد، یک چندجمله‌ای می‌باشد.

۵ . یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$xy'' + (3+x^3)y' + 3x^2y = 0$$

را به‌صورت سری توانی بیابید که‌به‌ازای هر x معتبر باشد، جواب دوم را به شکل $y = x^{-2}\sum a_nx^n$ بیابید که به‌ازای هر $x \neq 0$ معتبر باشد.

۶ . یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2y'' + x^2y' - (\alpha x + 2)y = 0$$

را به‌صورت سری توانی بیابید که بر بازه‌ای به شکل $(-r, r)$ معتبر باشد.

۷ . فرض کنید دوتابع A و B بر بازهٔ $(x_0 - r, x_0 + r)$ تحلیلی باشند؛ مثلاً،

$$A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-x_0)^n, \qquad B(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n(x-x_0)^n.$$

می‌توان نشان داد که حاصل‌ضرب $C(x) = A(x)B(x)$ نیز بر $(x_0 - r, x_0 + r)$ تحلیلی است. این تمرین نشان می‌دهد که C دارای بسط به‌صورت سری توانی زیر است:

$$C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-x_0)^n \text{، که درآن } c_n = \sum_{k=0}^{n} a_kb_{n-k}.$$

(آ) با استفاده از قاعدهٔ لایب نیتز برای مشتق n م حاصل ضرب، نشان دهید

که مشتق n م C مساوی است با

$$C^{(n)}(x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} A^{(k)}(x) B^{(n-k)}(x).$$

(ب) حال، با استفاده از این امر که $A^{(k)}(x_0) = k!\, a_k$ و $B^{(n-k)}(x_0) = (n-k)!\, b_{n-k}$، نتیجه بگیرید که

$$C^{(n)}(x_0) = n! \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}.$$

چون $C^{(n)}(x_0) = n!\, c_n$ ، این فرمول مطلوب برای c_n را ثابت خواهد کرد.

در تمرینهای ۸ تا ۱۴ ، $P_n(x)$ چند جمله‌ای لژاندر درجهٔ n است. این تمرینها اثبات خواص چندجمله‌ایهای لژاندر را که در بخش ۶.۲۰ توصیف شده‌اند به‌اختصار شرح می‌دهند.

۸ . (آ) با استفاده از فرمول ردریگوز، نشان دهید

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n}(x+1)^n + (x-1)Q_n(x),$$

که در آن $Q_n(x)$ یک چندجمله‌ای است.

(ب) ثابت کنید $P_n(1) = 1$ و $P_n(-1) = (-1)^n$.

(پ) ثابت کنید $P_n(x)$ تنها جواب چندجمله‌ای معادلهٔ لژاندر (با $\alpha = n$) است که در $x = 1$ مقدار یک دارد.

۹ . (آ) با استفاده از معادلات دیفرانسیل برقرار به‌وسیلهٔ P_n و P_m ، نشان دهید که

$$[(1-x^2)(P_n P_m' - P_n' P_m)]' = [n(n+1) - m(m+1)] P_n P_m.$$

(ب) هرگاه $m \neq n$ ، با انتگرالگیری از معادلهٔ قسمت (آ) از -1 تا 1 ، برهان دیگری برای رابطهٔ تعامدی

$$\int_{-1}^{1} P_n(x) P_m(x)\, dx = 0$$

به دست آورید.

۱۰ . (آ) فرض‌کنید $f(x) = (x^2-1)^n$. با استفاده از انتگرالگیری به طریقهٔ جزءبه‌جزء، نشان دهید که

$$\int_{-1}^{1} f^{(n)}(x) f^{(n)}(x)\,dx = -\int_{-1}^{1} f^{(n+1)}(x) f^{(n-1)}(x)\,dx.$$

این فرمول را چندبار به‌کار برده، نتیجه بگیرید که انتگرال سمت چپ مساوی

$$2(2n)! \int_0^1 (1 - x^2)^n\,dx$$

است.

(ب) جانشانی $x = \cos t$ انتگرال $\int_0^1 (1 - x^2)^n\,dx$ را به $\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\,dt$ بدل می‌کند. با استفاده از رابطهٔ

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{2n+1} t\,dt = \frac{2n(2n-2)\cdots 2}{(2n+1)(2n-1)\cdots 3\cdot 1}$$

و فرمول ردریگوز، نتیجه بگیرید که

$$\int_{-1}^{1} [P_n(x)]^2\,dx = \frac{2}{2n+1}.$$

۱۱. (آ) نشان دهید

$$P_n(x) = \frac{(2n)!}{2^n (n!)^2} x^n + Q_n(x),$$

که درآن $Q_n(x)$ یک چندجمله‌ای از درجهٔ کمتر از n است.

(ب) چندجمله‌ای $f(x) = x^4$ را به‌صورت ترکیبی خطی از P_0 ، P_1 ، P_2 ، P_3 ، و P_4 بیان کنید.

(پ) نشان دهید که هرچند جمله‌ای f از درجهٔ n را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از چندجمله‌ایهای لژاندر $P_0, P_1, \ldots, P_n$ بیان کرد.

۱۲. (آ) اگر f یک چندجمله‌ای درجهٔ n باشد، می‌نویسیم

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k P_k(x).$$

[این امر، بجهت تمرین ۱۱ (پ)، میسر است.] به‌ازای یک m ثابت، که $0 \le m \le n$ ، دوطرف این معادله را در $P_m(x)$ ضرب کرده از -1 تا 1 انتگرال می‌گیریم. با استفاده از تمرینهای ۹ (ب) و ۱۰ (ب)، رابطهٔ زیر را نتیجه بگیرید:

$$c_m = \frac{2m+1}{2} \int_{-1}^{1} f(x) P_m(x)\,dx.$$

۱۳ . با استفاده از تمرینهای ۹ و ۱۱، نشان دهید که، به‌ازای هرچند جمله‌ای g از درجهٔ کمتر از n ، $\int_{-1}^{1} g(x)P_n(x)\,dx = 0$.

۱۴ . (آ) با استفاده از قضیهٔ رل، نشان دهید که P_n نمی‌تواند دربازهٔ باز $(-1, 1)$ صفر مکرر داشته باشد . به‌عبارت دیگر، هرصفر P_n واقع در $(-1, 1)$ باید یک صفر ساده باشد .

(ب) فرض‌کنیم P_n در بازهٔ $(-1, 1)$ دارای m صفر باشد . اگر $m = 0$ ، فرض کنید $Q_0(x) = 1$ ؛ و اگر $m \geq 1$ ، فرض کنید

$$Q_m(x) = (x - x_1)(x - x_2) \cdots (x - x_m),$$

که درآن $x_1, x_2, \ldots, x_m$ ، m صفر P_n در $(-1, 1)$ اند . نشان دهید که، درهر نقطهٔ x از $(-1, 1)$ ، $Q_m(x)$ با $P_n(x)$ همعلامت است .

(پ) با استفاده از قسمت (ب)، همراه با تمرین ۱۳، نشان دهید که نامساوی $m < n$ به تناقض می‌رسد . این نشان می‌دهد که P_n دارای n صفر حقیقی متمایز است، که همهٔ آنها دربازهٔ باز $(-1, 1)$ قرار دارند .

۱۵ . (آ) نشان دهید که مقدار انتگرال $\int_{-1}^{1} P_n(x)P'_{n+1}(x)\,dx$ از n مستقل است .

(ب) انتگرال $\int_{-1}^{1} x\,P_n(x)P_{n-1}(x)\,dx$ را محاسبه نمایید .

۲۲۰۶ روش فروبنیوس

در بخش ۱۷۰۶ آموختیم که جوابهای به‌صورت سری توانی معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + P_1(x)y' + P_2(x)y = 0 \tag{۴۳۰۶}$$

در یک بازه حول نقطهٔ x_0 که درآن ضرایب P_1 و P_2 تحلیلی‌اند را چطور پیدا کنیم . اگر P_1 یا P_2 در مجاورت x_0 تحلیلی نباشد، جوابهای به‌صورت سری توانی معتبر در مجاورت x_0 ممکن است موجود باشند یا که نباشند . به‌عنوان مثال، فرض کنید بخواهیم یک جواب به‌صورت سری توانی معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2y'' - y' - y = 0 \tag{۴۴۰۶}$$

را درنزدیکی $x_0 = 0$ بیابیم . اگرفرض‌کنیم جوابی چون $y = \sum a_k x^k$ وجود داشته باشد، و این سری را در معادلهٔ دیفرانسیل بگذاریم، به‌فرمول بازگشتی

$$a_{n+1} = \frac{n^2 - n - 1}{n + 1}\, a_n$$

خواهیم رسید . اگرچه با این‌کار سری توانی $y = \sum a_k x^k$ حاصل می‌شود که به‌طور صوری در (۴۴۰۶) صدق می‌کند ، آزمون نسبت نشان می‌دهد که این سری توانی **فقط** به‌ازای $x = 0$ همگرا است . بنابراین، هیچ جوابی از (۴۴۰۶) به‌صورت سری توانی که دربازهٔ بازی حول $x_0 = 0$ معتبر باشدوجود ندارد . این مثال قضیهٔ ۱۳۰۶ را از کار نمی‌اندازد ، زیرا ، وقتی معادلهٔ (۴۴۰۶) را به‌شکل (۴۳۰۶) درمی‌آوریم ، درمی‌یابیم که ضرایب P_1 و P_2 عبارتند از

$$P_1(x) = -\frac{1}{x^2} \quad \text{و} \quad P_2(x) = -\frac{1}{x^2} \cdot$$

این توابع حول مبداء بسط به‌صورت سری توانی ندارند . مشکل در اینجا این است که ضریب y'' در (۴۴۰۶) ، وقتی $x = 0$ ، دارای مقدار 0 است ؛ به‌عبارت دیگر ، معادلهٔ دیفرانسیل در $x = 0$ نقطهٔ منفرد دارد .

برای درک مشکلات بررسی معادلات دیفرانسیل در مجاورت یک نقطهٔ منفرد به اطلاعاتی از نظریهٔ توابع یک متغیر مختلط نیاز داریم . با اینحال، چند حالت خاص و مهم ازمعادلات با نقاط منفرد وجود دارند که می‌توان آنها را با روشهای مقدماتی بررسی کرد . مثلاً ، فرض کنیم معادلهٔ دیفرانسیل (۴۳۰۶) بامعادله‌ای به شکل

$$(x - x_0)^2 y'' + (x - x_0)P(x)y' + Q(x)y = 0 \qquad (۴۵۰۶)$$

معادل باشد ، که درآن P و Q دربازهٔ بازی چون $(x_0 - r, x_0 + r)$ بسط به‌صورت سری توانی دارند . دراین حالت ، می‌گوییم x_0 یک نقطهٔ منفرد **منتظم** معادله است . اگر دو طرف (۴۵۰۶) را بر $(x - x_0)^2$ تقسیم کنیم ، معادله به‌ازای $x \neq x_0$ خواهد شد

$$y'' + \frac{P(x)}{x - x_0} y' + \frac{Q(x)}{(x - x_0)^2} y = 0 \ .$$

اگر $P(x_0) \neq 0$ یا $Q(x_0) \neq 0$ ، یا اگر $Q(x_0) = 0$ و $Q'(x_0) \neq 0$ ، ضریب y' یا ضریب y حول نقطهٔ x_0 بسط به صورت سری توانی ندارد ؛ درنتیجه، قضیهٔ ۱۳۰۶ قابل اجرا نیست . درسال ۱۸۷۳ ، ریاضیدان آلمانی ، گئورگ فروبنیوس[1] (۱۸۴۹ – ۱۹۱۷) ، روش مفیدی برای بررسی این معادلات ارائه‌داد . ما قضیهٔ فروبنیوس را ذکر می‌کنیم امابرهانش

---

1. Georg Frobenius

را عرضه نخواهیم کرد.* در بخش‌بعد، برهان حالت خاص و مهمی از آن، یعنی معادلهٔ بسل[1]، به تفصیل بیان خواهد شد.

قضیهٔ فروبنیوس، بسته به سرشت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم

$$t(t-1)+P(x_0)t+Q(x_0)=0, \qquad (۴۶.۶)$$

به‌دو قسمت تقسیم می‌شود. این معادلهٔ درجهٔ دوم *معادلهٔ اندیسی* معادلهٔ دیفرانسیل (۴۵.۶) است. ضرایب $P(x_0)$ و $Q(x_0)$ جملات ثابت در بسطهای P و Q به‌صورت سری توانی‌اند. فرض‌کنیم α_1 و α_2 ریشه‌های معادلهٔ اندیسی باشند. این ریشه‌ها ممکن است حقیقی یا مختلط، مساوی یا متمایز، باشند؛ نوع جوابی که به‌وسیلهٔ روش فروبنیوس به‌دست می‌آید تابع آن است که این ریشه‌ها به‌قدر عددی صحیح با هم تفاوت دارند یا نه.

قضیهٔ ۱۴.۶ . حالت اول قضیهٔ فروبنیوس. *فرض‌کنیم α_1 و α_2 ریشه‌های معادلهٔ اندیسی بوده و $\alpha_1-\alpha_2$ یک عدد صحیح نباشد. دراین صورت، معادلهٔ دیفرانسیل (۴۵.۶) دوجواب مستقل u_1 و u_2 به شکل زیر دارد:*

$$u_1(x)=|x-x_0|^{\alpha_1}\sum_{n=0}^{\infty}a_n(x-x_0)^n \quad \text{با} \quad a_0=1 \qquad (۴۷.۶)$$

$$u_2(x)=|x-x_0|^{\alpha_2}\sum_{n=0}^{\infty}b_n(x-x_0)^n \quad \text{با} \quad b_0=1\,. \qquad (۴۸.۶)$$

هر دو سری در بازهٔ $|x-x_0|<r$ همگرایند، ومعادلهٔ دیفرانسیل به‌ازای $0<|x-x_0|<r$ برقرار می‌باشد.

قضیهٔ ۱۵.۶ . حالت دوم قضیهٔ فروبنیوس. *فرض‌کنیم α_1 , α_2 ریشه‌های معادلهٔ اندیسی بوده، و $\alpha_1-\alpha_2=N$، یعنی مساوی عددی صحیح و نامنفی باشد. دراین*

---

* برای مشاهدهٔ برهانی از آن، ر.ک.

E. Hille, *Analysis*, Vol. II, Blaisdell Publishing Co., 1966

یا

E. A. Coddington, *An Introduction to Ordinary Differential Equations*, Prentice-Hall, 1961.

1. Bessel

صورت، معادلهٔ دیفرانسیل (۴۵۰۶) جوابی مانند u_1 به شکل (۴۷۰۶) و جواب مستقل دیگری مانند u_2 به شکل زیر دارد:

$$u_2(x) = |x - x_0|^{\alpha_2}\sum_{n=0}^{\infty} b_n(x - x_0)^n + C\, u_1(x) \log |x - x_0|, \qquad (۴۹۰۶)$$

که درآن $b_0 = 1$. ثابت C ، درصورت $N = 0$ ، ناصفر است. اگر $N > 0$ ، ثابت C ممکن است صفر باشد یا نباشد. مثل حالت ۱، هر دو سری در بازهٔ $|x - x_0| < r$ همگراست، و جوابها بهازای $0 < |x - x_0| < r$ معتبر میباشند.

۲۳۰۶ معادلهٔ بسل

در این بخش، با استفاده از روش فروبنیوس، معادلهٔ بسل

$$x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y = 0$$

را،که درآن α یک ثابت نامنفی است، حل میکنیم. این معادله در مسائل مربوط بهارتعاشات جدارهها، جریانگرما در سیلندرها، وانتشار جریانات الکتریکی درهادیهای استوانهای بهکار میآید. بعضی از جوابهای آن به **معادلات بسل** معروفند. توابع بسل در بعضی مسائل نظریهٔ تحلیلی اعداد نیز ظاهر میشوند.

این معادله، بااینکه قبلا" در تحقیقات دانیل برنولی[1] (۱۷۳۲) و اویلر (۱۷۶۴) آمده است، به افتخار ستارهشناسآلمانی، اف. دبلیو. بسل (۱۸۴۶ – ۱۷۸۴)، به معادلهٔ بسل معروف است.

معادلهٔ بسل به شکل (۴۵۰۶) است با $x_0 = 0$، $P(x) = 1$ ، و $Q(x) = x^2 - \alpha^2$؛ در نتیجه، نقطهٔ x_0 یک نقطهٔ منفرد منتظم است. چون P و Q بر تمام خط حقیقی تحلیلی است، سعی میکنیم جوابها را بهشکل

$$y = |x|^t\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad (۵۰۰۶)$$

پیدا کنیم با $a_0 \neq 0$ ، که بهازای هر x حقیقی با استثنای احتمالی $x = 0$ معتبرباشد.

ابتدا x را بزرگتر از 0 میگیریم؛ درنتیجه، $|x|^t = x^t$. مشتقگیری از (۵۰۰۶) نتیجه میدهد که

---

1. Daniel Bernoulli

$$y' = tx^{t-1}\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x^t \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} = x^{t-1}\sum_{n=0}^{\infty}(n+t)a_n x^n .$$

بهمین نحو ، داریم

$$y'' = x^{t-2}\sum_{n=0}^{\infty}(n+t)(n+t-1)a_n x^n.$$

اگر $L(y) = x^2y'' + xy' + (x^2 - \alpha^2)y$ ، معلوم می‌شود که

$$L(y) = x^t\sum_{n=0}^{\infty}(n+t)(n+t-1)a_n x^n + x^t\sum_{n=0}^{\infty}(n+t)a_n x^n$$

$$+ x^t\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+2} - x^t\sum_{n=0}^{\infty}\alpha^2 a_n x^n = x^t\sum_{n=0}^{\infty}[(n+t)^2 - \alpha^2]a_n x^n + x^t\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^{n+2}.$$

حال قرار می‌دهیم $L(y) = 0$ ، x^t را حذف می‌کنیم ، و سعی می‌کنیم a_n را طوری تعیین کنیم که ضریب هرتوان x صفر شود . برای جملهٔ ثابت لازم داریم که $(t^2 - \alpha^2)a_0 = 0$. چون جوابی را می‌خواهیم که درآن $a_0 \neq 0$ ، این ایجاب می‌کند که

$$t^2 - \alpha^2 = 0. \tag{۵۱.۶}$$

این **معادلهٔ اندیسی** است . ریشه‌هایش α و $-\alpha$ تنها مقادیر ممکن t اند که می‌توانند جوابی از نوع مطلوب به‌ما بدهند .

ابتدا انتخاب $t = \alpha$ را درنظر می‌گیریم . به‌ازای این t ، بقیهٔ معادلات برای تعیین ضرایب خواهند شد

(۵۲.۶) $[(1+\alpha)^2 - \alpha^2]a_1 = 0$ و $[(n+\alpha)^2 - \alpha^2]a_n + a_{n-2} = 0$ به‌ازای $n \geq 2$.

چون $\alpha \geq 0$ ، اولین معادله ایجاب می‌کند که $a_1 = 0$. دومین فرمول را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{(n+\alpha)^2 - \alpha^2} = -\frac{a_{n-2}}{n(n+2\alpha)}\,; \tag{۵۳.۶}$$

درنتیجه ، $a_3 = a_5 = a_7 = \cdots = 0$. برای ضرایب با زیرنویسهای زوج داریم

$$a_2 = \frac{-a_0}{2(2+2\alpha)} = \frac{-a_0}{2^2(1+\alpha)}, \qquad a_4 = \frac{-a_2}{4(4+2\alpha)} = \frac{(-1)^2 a_0}{2^4 2!\,(1+\alpha)(2+\alpha)},$$

$$a_6 = \frac{-a_4}{6(6+2\alpha)} = \frac{(-1)^3 a_0}{2^6 3!\,(1+\alpha)(2+\alpha)(3+\alpha)},$$

و، بطور کلی،

$$a_{2n} = \frac{(-1)^n a_0}{2^{2n} n!\,(1+\alpha)(2+\alpha)\cdots(n+\alpha)}.$$

بنابراین، انتخاب $t = \alpha$ به‌ما جواب

$$y = a_0 x^\alpha \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!\,(1+\alpha)(2+\alpha)\cdots(n+\alpha)}\right)$$

را می‌دهد. آزمون نسبت نشان می‌دهد که سری توانی دراین فرمول به‌ازای هر x حقیقی همگراست.

در این بحث فرض کرده‌ایم $x > 0$. اگر $x < 0$ ، می‌توان بحث را با تعویض x^t به $(-x)^t$ تکرار کرد. مجدداً درمی‌یابیم که t باید در معادلهٔ $t^2 - \alpha^2 = 0$ صدق کند. با اختیار $t = \alpha$ ، همان جواب به‌دست می‌آید، جز آنکه سازهٔ خارجی x^α با $(-x)^\alpha$ عوض شده است. بنابراین، تابع f_α که با معادلهٔ

$$f_\alpha(x) = a_0 |x|^\alpha \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!\,(1+\alpha)(2+\alpha)\cdots(n+\alpha)}\right) \qquad (۵۴\cdot۶)$$

داده‌شده، یک جواب معادلهٔ بسل است که به‌ازای هر $x \neq 0$ حقیقی معتبر می‌باشد. برای آن مقادیر α که $f'_\alpha(0)$ و $f''_\alpha(0)$ موجودند، جواب به‌ازای $x = 0$ نیز معتبر می‌باشد.

حال ریشهٔ $t = -\alpha$ معادلهٔ اندیسی را درنظر می‌گیریم. به‌جای (۵۲۰۶)، معادلات

$$[(1-\alpha)^2 - \alpha^2]a_1 = 0 \qquad \text{و} \qquad [(n-\alpha)^2 - \alpha^2]a_n + a_{n-2} = 0$$

را خواهیم داشت، که خواهند شد

$$(1-2\alpha)a_1 = 0 \qquad \text{و} \qquad n(n-2\alpha)a_n + a_{n-2} = 0 \,.$$

اگر 2α عددی صحیح نباشد، این معادلات نتیجه می‌دهند که $a_1 = 0$ و، به‌ازای $n \geq 2$ ،

$$a_n = -\frac{a_{n-2}}{n(n-2\alpha)}.$$

چون این فرمول بازگشتی همان فرمول (۵۳۰۶) است، با $-\alpha$ به‌جای α ، به‌جواب

$$f_{-\alpha}(x) = a_0 |x|^{-\alpha} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{2^{2n} n!\,(1-\alpha)(2-\alpha)\cdots(n-\alpha)}\right) \qquad (۵۵\cdot۶)$$

می‌رسیم، که به‌ازای هر $x \neq 0$ حقیقی معتبر است.

جواب $f_{-\alpha}$ با این فرض به‌دست آمده بود که 2α یک عدد صحیح مثبت نباشد. اما،

سری برای $f_{-\alpha}$ ، حتی اگر 2α عدد صحیح مثبت باشد، نیز با معنی است، البته تاجایی که α یک عدد صحیح مثبت نباشد. می‌توان تحقیق کرد که $f_{-\alpha}$ به‌ازای چنین α ای در معادلهٔ بسل صدق می‌کند. بنابراین، به‌ازای هر $\alpha \geq 0$ ، جواب به‌صورت سری f_α را داریم که با معادلهٔ (۵۴.۶) داده می‌شود؛ و اگر α یک عدد صحیح نامنفی نباشد، جواب دیگر $f_{-\alpha}$ را یافته‌ایم که با معادلهٔ (۵۵.۶) داده شده است. دو جواب f_α و $f_{-\alpha}$ مستقل‌اند، زیرا یکی از آنها، وقتی $x \to 0$ ، به ∞ میل می‌کند، و دیگری نخواهد کرد. حال شکل جوابها را ساده می‌نماییم. برای این‌کار، به‌چند خاصیت از تابع گامای اویلر نیاز داریم، و برای یادآوری این خواص کمی از بحث خود خارج می‌شویم.

به‌ازای هر $s > 0$ حقیقی، $\Gamma(s)$ را با انتگرال مجازی

$$\Gamma(s) = \int_{0+}^{\infty} t^{s-1}e^{-t}\,dt$$

تعریف می‌کنیم. این انتگرال اگر $s > 0$ همگرا و، اگر $s \leq 0$ ، واگراست. انتگرالگیری به‌طریقهٔ جزءبه‌جزء به معادلهٔ تابعی زیر منجر می‌شود:

$$\Gamma(s+1) = s\,\Gamma(s). \tag{۵۶.۶}$$

این ایجاب می‌کند که

$$\Gamma(s+2) = (s+1)\Gamma(s+1) = (s+1)s\,\Gamma(s),$$
$$\Gamma(s+3) = (s+2)\Gamma(s+2) = (s+2)(s+1)s\,\Gamma(s),$$

و، بطور کلی، به‌ازای هر عدد صحیح و مثبت n ،

$$\Gamma(s+n) = (s+n-1)\cdots(s+1)s\,\Gamma(s)\,. \tag{۵۷.۶}$$

چون $\Gamma(1) = \int_0^\infty e^{-t}\,dt = 1$ ، وقتی در (۵۷.۶) قرار دهیم $s = 1$ ، درمی‌یابیم که

$$\Gamma(n+1) = n!$$

بنابراین، تابع گاما تعمیمی است از تابع فاکتوریل از اعداد صحیح به اعداد حقیقی مثبت.

معادلهٔ تابعی (۵۶.۶) را می‌توان برای تعمیم تعریف $\Gamma(s)$ به مقادیر منفی s که اعدادی صحیح نیستند به‌کار برد. معادلهٔ (۵۶.۶) را به‌شکل زیر می‌نویسیم:

$$\Gamma(s) = \frac{\Gamma(s+1)}{s}. \tag{۵۸.۶}$$

طرف راست با معنی است اگر $0 < 1 + s$ و $s \neq 0$. بنابر این، می‌توان، با استفاده از این معادله، $\Gamma(s)$ را به‌ازای $-1 < s < 0$ **تعریف کرد**. حال طرف راست (۵۸۰۶) با معنی است اگر $s \neq 0, s \neq -1, s + 2 > 0$ ، و می‌توان، با استفاده از این معادله، $\Gamma(s)$ را به‌ازای $-2 < s < -1$ تعریف نمود. اگر به همین نحو ادامه دهیم، می‌توانیم تعریف $\Gamma(s)$ را به‌استقرا به هر بازهٔ باز به شکل $-n < s < -n + 1$ ، که درآن n یک عدد صحیح مثبت است، تعمیم داد. حال معادلهٔ تابعی (۵۶۰۶) و تعمیم آن به (۵۷۰۶) به‌ازای هر s حقیقی که دو طرف با معنی باشند معتبر است.

حال به بحث معادلهٔ بسل باز می‌گردیم. سری مربوط به f_α در معادلهٔ (۵۴۰۶) شامل حاصل ضرب $(1 + \alpha)(2 + \alpha)\cdots(n + \alpha)$ است. این حاصل‌ضرب را می‌توان، با اختیار $s = 1 + \alpha$ در (۵۷۰۶)، برحسب تابع گاما بیان کرد. این نتیجه می‌دهد که

$$(1 + \alpha)(2 + \alpha)\cdots(n + \alpha) = \frac{\Gamma(n + 1 + \alpha)}{\Gamma(1 + \alpha)}.$$

بنابراین، اگر $a_0 = 2^{-\alpha}/\Gamma(1 + \alpha)$ را در معادلهٔ (۵۴۰۶) اختیار کنیم، و تابع حاصل $f_\alpha(x)$ را، وقتی $x > 0$ ، با $J_\alpha(x)$ نشان دهیم، جواب به‌ازای $x > 0$ را می‌توان به صورت زیر نوشت:

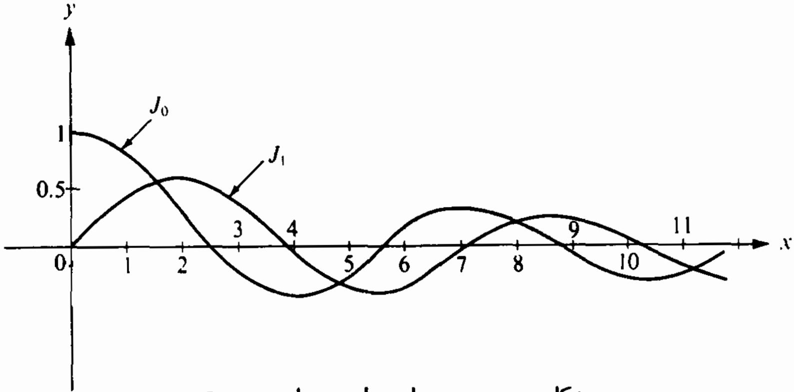
$$J_\alpha(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^\alpha \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n + 1 + \alpha)}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}. \qquad (۵۹۰۶)$$

تابع J_α تعریف شده با این معادله به‌ازای $x > 0$ و $\alpha \geq 0$ ***تابع بسل نوع اول مرتبهٔ*** α نامیده می‌شود. وقتی α یک عدد صحیح نامنفی باشد، مثلاً $\alpha = p$ ، تابع بسل J_p با سری توانی زیر داده می‌شود:

$$J_p(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,(n + p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n+p} \qquad (p = 0, 1, 2, \ldots).$$

این یک جواب معادلهٔ بسل به‌ازای $x > 0$ نیزهست. جداول مبسوطی از توابع بسل ساخته شده‌اند. نمودار دوتابع J_0 و J_1 در شکل ۲۰۶ نشان داده شده است.

حال تابع جدید $J_{-\alpha}$ را با تعویض α به $-\alpha$ در معادلهٔ (۵۹۰۶) تعریف می‌کنیم، درصورتی که α طوری باشد که $\Gamma(n + 1 - \alpha)$ معنی داشته باشد؛ یعنی، α یک عدد صحیح مثبت نباشد. بنابراین، اگر $x > 0$ و $\alpha > 0$ ، $\alpha \neq 1, 2, 3, \ldots$ ، تعریف می‌کنیم



شکل ۲۰۶ نمودار توابع بسل J_0 و J_1

$$J_{-\alpha}(x) = \left(\frac{x}{2}\right)^{-\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!\,\Gamma(n+1-\alpha)} \left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$

با فرض $s = 1 - \alpha$ در (۵۷۰۶)، خواهیم داشت

$$\Gamma(n+1-\alpha) = (1-\alpha)\,(2-\alpha)\cdots(n-\alpha)\,\Gamma(1-\alpha),$$

و ملاحظه می‌کنیم که سری مربوط به $J_{-\alpha}(x)$ همان سری مربوط به $f_{-\alpha}(x)$ در معادلهٔ (۵۵۰۶) به‌ازای $x > 0$، $a_0 = 2^{\alpha}/\Gamma(1-\alpha)$ است. بنابراین، اگر α یک عدد صحیح مثبت نباشد، $J_{-\alpha}$ یک جواب معادلهٔ بسل به‌ازای $x > 0$ می‌باشد.

اگر α یک عدد صحیح نباشد، دو جواب $J_{\alpha}(x)$ و $J_{-\alpha}(x)$ بر محور حقیقی مثبت (بدلیل اینکه نسبت آنها ثابت نیست) مستقل خطی‌اند، و جواب عمومی معادلهٔ بسل به‌ازای $x > 0$ مساوی است با

$$y = c_1 J_{\alpha}(x) + c_2 J_{-\alpha}(x).$$

اگر α یک عدد صحیح نامنفی باشد، مثلاً $\alpha = p$، فقط دریافته‌ایم که جواب J_p و ضرایب ثابت آن به‌ازای $x > 0$ معتبرند. جواب دیگر، مستقل از این یکی، را می‌توان به روش توصیف شده در تمرین ۴ از بخش ۱۶۰۶ به‌دست آورد. این روش بیان می‌کند که، اگر u_1 یک جواب $y'' + P_1 y' + P_2 y = 0$ باشد که هرگز بر بازهٔ I صفرنشود، جواب دوم u_2 مستقل از u_1 با انتگرال

$$u_2(x) = u_1(x) \int_c^x \frac{Q(t)}{[u_1(t)]^2}\,dt$$

داده می‌شود، که در آن $Q(x) = e^{-\int P_1(x)dx}$. برای معادلهٔ بسل داریم $P_1(x) = 1/x$ ؛ درنتیجه، $Q(x) = 1/x$ و جواب دوم u_2 با فرمول

$$u_2(x) = J_p(x) \int_c^x \frac{1}{t[J_p(t)]^2}\, dt \qquad (۶۰۰۶)$$

داده می‌شود، درصورتی‌که c و x دربازهٔ I که درآن J_p صفرنمی‌شودقرارداشته‌باشند.

این جواب دوم را می‌توان به شکلهای دیگر درآورد. مثلاً، از معادلهٔ (۵۹۰۶) می‌توان نوشت

$$\frac{1}{[J_p(t)]^2} = \frac{1}{t^{2p}}\, g_p(t),$$

که درآن $g_p(0) \neq 0$. دربازهٔ I ، تابع g_p دارای بسط به‌صورت سری توانی

$$g_p(t) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n$$

است، که می‌توان‌آن‌را با متحد گرفتن ضرایب دراتحاد $g_p(t)\, [J_p(t)]^2 = t^{2p}$ تعیین‌کرد. اگر وجود این بسط را فرض کنیم، انتگرالده در (۶۰۰۶) شکل زیر را خواهد گرفت:

$$\frac{1}{t[J_p(t)]^2} = \frac{1}{t^{2p+1}} \sum_{n=0}^{\infty} A_n t^n .$$

با انتگرالگیری جمله‌به‌جمله از این فرمول از c تا x ، یک جملهٔ لگاریتمی $A_{2p} \log x$ (از توان t^{-1}) به‌انضمام یک‌سری به شکل $x^{-2p} \sum B_n x^n$ به‌دست می‌آید. بنابراین، معادلهٔ (۶۰۰۶) شکل زیر را خواهد گرفت:

$$u_2(x) = A_{2p} J_p(x) \log x + J_p(x) x^{-2p} \sum_{n=0}^{\infty} B_n x^n .$$

می‌توان نشان داد که $A_{2p} \neq 0$. اگر $u_2(x)$ را در $1/A_{2p}$ ضرب کنیم، جواب حاصل با $K_p(x)$ نموده می‌شود و به‌شکل زیر می‌باشد:

$$K_p(x) = J_p(x) \log x + x^{-p} \sum_{n=0}^{\infty} C_n x^n .$$

این شکل جوابی است که حالت دوم قضیهٔ فروبنیوس قول داده است.

با رسیدن به‌این‌فرمول، می‌توان تحقیق کرد که یک جواب به‌این شکل عملاً وجود دارد، به‌این ترتیب که طرف راست را در معادلهٔ بسل گذاشته و ضرایب C_n را طوری

تعیین کرد که معادله برقرار شود. این محاسبات طولانی دارد و، درنتیجه، حذف شده است. نتیجهٔ نهایی را می‌توان به‌صورت زیر بیان نمود:

$$K_p(x) = J_p(x)\log x - \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{-p}\sum_{n=0}^{p-1}\frac{(p-n-1)!}{n!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n}$$
$$- \frac{1}{2}\left(\frac{x}{2}\right)^{p}\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{h_n + h_{n+p}}{n!\,(n+p)!}\left(\frac{x}{2}\right)^{2n},$$

که درآن $h_0 = 0$ و، به‌ازای $n \ge 1$، $h_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + 1/n$. سری سمت راست به‌ازای هر x حقیقی همگراست. تابع K_p، که به‌ازای $x > 0$ با این فرمول تعریف شده است، **تابع بسل نوع دوم مرتبهٔ** p نامیده می‌شود. چون K_p مضرب ثابتی از J_p نیست، جواب عمومی معادلهٔ بسل دراین حالت به‌ازای $x > 0$ عبارت است از

$$y = c_1J_p(x) + c_2K_p(x).$$

خواص دیگر توابع بسل در مجموعه تمرینات زیر مطرح شده‌اند.

۲۴.۶ تمرین

۱. (آ) فرض کنید f یک جواب معادلهٔ بسل مرتبهٔ α بوده و، به‌ازای $x > 0$، $g(x) = x^{1/2}f(x)$. نشان دهید که g در معادلهٔ دیفرانسیل

$$y'' + \left(1 + \frac{1 - 4\alpha^2}{4x^2}\right)y = 0$$

صدق می‌کند.

(ب) وقتی $4\alpha^2 = 1$، معادلهٔ دیفرانسیل در (آ) خواهد شد $y'' + y = 0$؛ جواب عمومی آن $y = A\cos x + B\sin x$ است. با این اطلاعات و معادلهٔ* $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$، نشان دهید که، به‌ازای $x > 0$،

$$J_{1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\sin x \quad \text{و} \quad J_{-1/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\cos x\,.$$

---

* تغییر متغیر $t = u^2$ نتیجه می‌دهد که

$$\Gamma(\tfrac{1}{2}) = \int_{0+}^{\infty} t^{-1/2}e^{-t}\,dt = 2\int_0^{\infty} e^{-u^2}\,du = \sqrt{\pi}.$$

(برای اثبات اینکه $2\int_0^\infty e^{-u^2}du = \sqrt{\pi}$، ر.ک. تمرین ۱۶ از بخش ۲۸.۱۱).

(پ) فرمولهای قسمت (ب) را مستقیما " از سریهای مربوط به $J_{1/2}(x)$ و $J_{-1/2}(x)$ نتیجه بگیرید.

۲. با استفاده از نمایش سری برای توابع بسل، نشان دهید که

(آ) $\dfrac{d}{dx}(x^{\alpha}J_{\alpha}(x)) = x^{\alpha}J_{\alpha-1}(x)$ ؛

(ب) $\dfrac{d}{dx}(x^{-\alpha}J_{\alpha}(x)) = -x^{-\alpha}J_{\alpha+1}(x)$.

۳. فرض‌کنید به‌ازای $x > 0$، $F_{\alpha}(x) = x^{\alpha}J_{\alpha}(x)$ و $G_{\alpha}(x) = x^{-\alpha}J_{\alpha}(x)$. توجه کنید که‌هر صفر مثبت J_{α} یک صفر F_{α} و نیز یک صفر G_{α} است. با استفاده از قضیه‌ٔ رل‌و تمرین ۲، ثابت کنید صفرهای مثبت J_{α} و $J_{\alpha+1}$ بهم بافته شده‌اند؛ یعنی، بین هر جفت صفر مثبت $J_{\alpha+1}$ یک صفر J_{α} ، و بین هر جفت صفر مثبت J_{α} یک صفر $J_{\alpha+1}$ قرار دارد. (ر.ک. شکل ۶.۲.)

۴. (آ) از روابط تمرین ۲ روابط بازگشتی

$$\frac{\alpha}{x}J_{\alpha}(x) + J_{\alpha}'(x) = J_{\alpha-1}(x) \quad \text{و} \quad \frac{\alpha}{x}J_{\alpha}(x) - J_{\alpha}'(x) = J_{\alpha+1}(x)$$

را نتیجه بگیرید.

(ب) با استفاده از روابط قسمت (آ)، فرمولهای

$$J_{\alpha-1}(x) + J_{\alpha+1}(x) = \frac{2\alpha}{x}J_{\alpha}(x) \quad \text{و} \quad J_{\alpha-1}(x) - J_{\alpha+1}(x) = 2J_{\alpha}'(x)$$

را نتیجه بگیرید.

۵. با استفاده از تمرین ۱ (ب) و یک فرمول بازگشتی مناسب، نشان دهید که

$$J_{3/2}(x) = \left(\frac{2}{\pi x}\right)^{1/2}\left(\frac{\sin x}{x} - \cos x\right).$$

فرمول مشابهی نیز برای $J_{-3/2}(x)$ پیدا کنید. **تذکر.** $J_{\alpha}(x)$ به‌ازای هر α که نصف یک عدد صحیح فرد باشد، یک تابع مقدماتی است.

۶. ثابت کنید که

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}(J_{\alpha}^2(x) + J_{\alpha+1}^2(x)) = \frac{\alpha}{x}J_{\alpha}^2(x) - \frac{\alpha+1}{x}J_{\alpha+1}^2(x)$$

و

$$\frac{d}{dx}(xJ_{\alpha}(x)J_{\alpha+1}(x)) = x(J_{\alpha}^2(x) - J_{\alpha+1}^2(x)).$$

۷. (آ) با استفاده از اتحادهای تمرین ۶، نشان دهید که

$$J_0^2(x) + 2\sum_{n=1}^{\infty} J_n^2(x) = 1 \quad \text{و} \quad \sum_{n=0}^{\infty}(2n+1)J_n(x)J_{n+1}(x) = \tfrac{1}{2}x \text{ .}$$

(ب) از قسمت (آ) نتیجه بگیرید که ، به‌ازای $n = 1, 2, 3, \ldots$ و هر $x \geq 0$ ،
$|J_0(x)| \leq 1$ و $|J_n(x)| \leq \frac{1}{2}\sqrt{2}$.

۸ . فرض کنید به‌ازای $x > 0$ ، $g_\alpha(x) = x^{1/2} f_\alpha(ax^b)$ ، که درآن a و b ثابتهای ناصفری هستند . نشان دهید که g_α در معادلهٔ دیفرانسیل

$$x^2y'' + (a^2b^2x^{2b} + \tfrac{1}{4} - \alpha^2b^2)y = 0$$

صدق می‌کند اگر و فقط اگر f_α یک جواب معادلهٔ بسل مرتبهٔ α باشد .

۹ . با استفاده از تمرین ۸ ، جواب عمومی هریک از معادلات دیفرانسیل زیر را برحسب توابع بسل به‌ازای $x > 0$ بیان نمایید :

(آ) $y'' + xy = 0$ ؛ (ب) $y'' + x^2y = 0$ ؛

(پ) $y'' + x^my = 0$ ؛ (ت) $x^2y'' + (x^4 + \frac{1}{8})y = 0$.

۱۰ . تمرین ۸ را ، وقتی f_α و g_α با معادلهٔ $g_\alpha(x) = x^c f_\alpha(ax^b)$ به‌ازای $x > 0$ بهم مربوط شده‌اند ، تعمیم دهید . سپس ، جواب عمومی هریک از معادلات زیر را برحسب توابع بسل به‌ازای $x > 0$ پیدا نمایید :

(آ) $xy'' + 6y' + y = 0$ ؛ (ب) $xy'' + 6y' + xy = 0$ ؛

(پ) $xy'' + 6y' + x^4y = 0$ ؛ (ت) $x^2y'' - xy' + (x+1)y = 0$.

۱۱ . یک اتحاد از توابع بسل وجود دارد به‌شکل

$$J_2(x) - J_0(x) = aJ_c''(x),$$

که درآن a و c ثابت هستند . a و c را مشخص نمایید .

۱۲ . یک جواب معادلهٔ دیفرانسیل $xy'' + y' + y = 0$ به صورت سری توانی بیابید که به‌ازای $-\infty < x < +\infty$ همگرا باشد . نشان دهید که به‌ازای $x > 0$ می‌توان آن را برحسب یک تابع بسل بیان کرد .

۱۳ . یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ دوم خطی به شکل

$$x^2A(x)y'' + xP(x)y' + Q(x)y = 0,$$

را درنظر بگیرید ، که درآن $A(x)$ ، $P(x)$ ، و $Q(x)$ بسط به صورت سری توانی دارند :

$$A(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_kx^k, \qquad P(x) = \sum_{k=0}^{\infty} p_kx^k, \qquad Q(x) = \sum_{k=0}^{\infty} q_kx^k,$$

با $a_0 \neq 0$ ، که هریک در بازهٔ باز $(-r, r)$ همگراست . هرگاه معادلهٔ دیفرانسیل جوابی به‌صورت سری به شکل

$$y = x^t \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n ,$$

داشته باشد ، که به‌ازای $0 < x < r$ معتبر است ، نشان دهید که t درمعادلهٔ‌درجهٔ دومی به شکل $t^2 + bt + c = 0$ صدق می‌کند ، و b و c را برحسب‌ضرایب سریهای مربوط‌به $A(x)$ ، $P(x)$ ، و $Q(x)$ معین کنید .

۱۴ . حالت خاص تمرین ۱۳ را درنظر بگیرید که در آن $A(x) = 1 - x$ ، $P(x) = \frac{1}{2}$ ، و $Q(x) = -\frac{1}{4}x$. یک جواب به صورت سری بیابید که t عددی صحیح نباشد .

۱۵ . معادلهٔ دیفرانسیل $2x^2y'' + (x^2 - x)y' + y = 0$ دو جواب مستقل به شکل

$$y = x^t \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n ,$$

دارد ، که به‌ازای $x > 0$ معتبرند . این جوابها را تعیین کنید .

۱۶ . معادلهٔ دیفرانسیل غیر خطی $y'' + y + \alpha y^2 = 0$ فقط‌وقتی "به طور ملایم" غیر خطی است که α ثابت ناصفر کوچکی باشد . فرض‌کنید جوابی وجود داشته باشد که بتوان آن را به‌صورت یک سری توانی از α به شکل زیر بیان کرد :

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} u_n(x)\alpha^n \quad (\text{معتبر در بازه‌ای چون } 0 < \alpha < r) ,$$

و این جواب در شرایط‌کرانه‌ای $y = 1$ و $y' = 0$ وقتی $x = 0$ صدق‌می‌کند . برای همسازی با این شرایط‌کرانه‌ای ، سعی می‌کنیم ضرایب $u_n(x)$ را طوری بگیریم که $u_0(0) = 1$ ، $u_0'(0) = 0$ ، و به‌ازای $n \geq 1$ ، $u_n(0) = u_n'(0) = 0$. باجانشانی این سری در معادلهٔ دیفرانسیل ، توانهای مناسب α را متحد گرفته و بدینوسیله $u_0(x)$ و $u_1(x)$ را معین نمایید .

۷

دستگاههای معادلات دیفرانسیل

۱۰۷ مقدمه

اگرچه بررسی معادلات دیفرانسیل در قرن ۱۷ آغاز شد ، اما تا قرن ۱۹ طول کشید تا ریاضیدانان دریافتند که تعداد نسبتا "کمی معادلهٔ دیفرانسیل را می‌توان به وسایل مقدماتی حل کرد . کارهای کشی ، لیوویل ، و دیگران اهمیت اثبات قضایایی کلی برای تضمین وجود جوابهای رده‌های خاصی از معادلات دیفرانسیل رانشان داد . در فصل ۶ استفاده از یک قضیهٔ وجودی ـ یکتایی در بررسی معادلات دیفرانسیل خطی توضیح شد . دراین فصل به برهانی از این قضیه و مطالب مربوط به‌آن خواهیم پرداخت .

نظریهٔ وجودی معادلات دیفرانسیل مراتب بالاتررا می‌توان با معرفی **دستگاه معادلات** به مرتبهٔ اول تحویل کرد . مثلا" ، معادلهٔ مرتبهٔ دوم

$$y'' + 2ty' - y = e^t \qquad (۱۰۷)$$

را می‌توان با معرفی توابع مجهول y_1 و y_2 ، که

$$y_1 = y, \qquad y_2 = y_1',$$

به یک دستگاه از دو معادلهٔ مرتبهٔ اول تبدیل نمود . دراین صورت ، داریم $y_2' = y_1'' = y''$ ؛ درنتیجه ، (۱۰۷) را می‌توان به صورت یک دستگاه از دو معادلهٔ مرتبهٔ اول نوشت :

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_1 - 2ty_2 + e^t. \end{aligned} \qquad (۲۰۷)$$

حل جداگانهٔ این معادلات به روشهای فصل ۶ ممکن نیست ، زیرا هریک از آنها شامل دو تابع مجهول هستند .

در این فصل ، دستگاههایی را درنظر می‌گیریم مرکب از n معادلهٔ دیفرانسیل خطی

مرتبهٔ اول که شامل n تابع مجهول $y_1, \ldots, y_n$ هستند. این معادلات به‌شکل زیر می‌باشند:

$$\begin{aligned} y_1' &= p_{11}(t)y_1 + p_{12}(t)y_2 + \cdots + p_{1n}(t)y_n + q_1(t) \\ &\ \ \vdots \\ y_n' &= p_{n1}(t)y_1 + p_{n2}(t)y_2 + \cdots + p_{nn}(t)y_n + q_n(t). \end{aligned} \tag{۳۰۷}$$

توابع p_{ik} و q_i در (۳۰۷) توابع معلومی هستند که بر بازهٔ معلومی چون J تعریف شده‌اند. توابع $y_1, \ldots, y_n$ توابع مجهولی هستند که باید تعیین شوند. دستگاههای از این نوع **دستگاههای خطی مرتبهٔ *اول*** نام دارند. درحالت کلی، هر معادله در این نوع دستگاه بیش از یک تابع مجهول را شامل است؛ و درنتیجه، معادلات را نمی‌توان جداگانه حل کرد.

یک معادلهٔ دیفرانسیل خطی مرتبهٔ n را همیشه می‌توان به یک دستگاه خطی بدل کرد. فرض کنیم معادلهٔ مرتبهٔ n م مفروض عبارت باشد از

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \cdots + a_n y = R(t), \tag{۴۰۷}$$

که درآن ضرایب a_i توابع معلومی هستند. برای تبدیل این معادله به یک دستگاه، می‌نویسیم $y_1 = y$ و هر مشتق متوالی y را یک تابع مجهول جدید می‌گیریم. یعنی، قرار می‌دهیم

$$y_1 = y, \qquad y_2 = y_1', \qquad y_3 = y_2', \ldots, y_n = y_{n-1}',$$

و معادلهٔ (۴۰۷) را به‌صورت دستگاه زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} y_1' &= y_2 \\ y_2' &= y_3 \\ &\ \ \vdots \\ y_{n-1}' &= y_n \\ y_n' &= -a_n y_1 - a_{n-1} y_2 - \cdots - a_1 y_n + R(t). \end{aligned} \tag{۵۰۷}$$

بحث دستگاهها را می‌توان با استفاده از نمادهای بردار و ماتریس به نحو قابل ملاحظه‌ای ساده کرد. دستگاه کلی (۳۰۷) را درنظر می‌گیریم، و توابع برداری $Y = (y_1, \ldots, y_n)$، $Q = (q_1, \ldots, q_n)$، و تابع ماتریسی $P = [p_{ij}]$، که با معادلات

$$Y(t) = (y_1(t), \ldots, y_n(t)), \qquad Q(t) = (q_1(t), \ldots, q_n(t)), \qquad P(t) = [p_{ij}(t)]$$

به‌ازای هر t در J تعریف می‌شود، را معرفی می‌کنیم. بردارها را به‌صورت ماتریسهای ستونی $n \times 1$ درنظر گرفته، دستگاه (۳۰۷) را به‌شکل ساده‌تر

$$Y' = P(t)Y + Q(t) \tag{۶۰۷}$$

می‌نویسیم.

مثلا"، در دستگاه (۲۰۷) داریم

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}, \quad P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2t \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ e^t \end{bmatrix}.$$

ودر دستگاه (۵۰۷) داریم

$$Y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ y_n \end{bmatrix}, \quad P(t) = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \\ -a_n & -a_{n-1} & -a_{n-2} & \cdots & -a_1 \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ 0 \\ R(t) \end{bmatrix}$$

یک مسئله بـا مقدار اولیه برای دستگاه (۶۰۷) یافتن یک تابع برداری مانند Y است که‌در (۶۰۷) صادق بوده و در یک شرط اولیه به شکل $Y(a) = B$، که درآن $a \in J$ و $B = (b_1, \ldots, b_n)$ یک بردار n بعدی معلوم است، نیز صدق نماید.

درحالت $n = 1$ (حالت اسکالر)، از قضیهٔ ۱۰۶ می‌دانیم که، اگر P و Q بر J پیوسته باشند، همهٔ جوابهای (۶۰۷) از فرمول صریح

$$Y(x) = e^{A(x)}Y(a) + e^{A(x)} \int_a^x e^{-A(t)}Q(t)\,dt \tag{۷۰۷}$$

به‌دست می‌آیند، که‌درآن $A(x) = \int_a^x P(t)\,dt$ و a نقطهٔ دلخواهی در J می‌باشد. نشان می‌دهیم که‌این فرمول رامی‌توان به‌نحو مناسبی برای دستگاهها تعمیم داد؛ یعنی، وقتی $P(t)$ یک تابع ماتریسی $n \times n$ و $Q(t)$ یک‌تابع‌برداری n بعدی باشد. برای این کار باید به انتگرال و نمـایی ماتریسها معنی ببخشیم. لذا، کمی از بحث خارج شده به حساب توابع ماتریسی می‌پردازیم.

۲۰۷ حساب توابع ماتریسی

تعمیم مفاهیم انتگرال و مشتق برای توابع ماتریسی سرراست است . اگر $P(t) = [p_{ij}(t)]$ ، انتگرال $\int_a^b P(t)\,dt$ را با معادلهٔ

$$\int_a^b P(t)\,dt = \left[\int_a^b p_{ij}(t)\,dt\right]$$

تعریف می‌کنیم . یعنی ، انتگرال ماتریس $P(t)$ ماتریسی است که با انتگرالگیری از هردرایهٔ $P(t)$ به‌دست می‌آید ، البته با این فرض که هر درایه بر $[a, b]$ انتگرالپذیر باشد . خواننده می‌تواند خواص خطی انتگرالها را برای توابع ماتریسی تعمیم یافته تحقیق نماید .

پیوستگی و مشتقپذیری توابع ماتریسی نیز برحسب درایه‌ها تعریف می‌شوند . گوییم تابع ماتریسی $P = [p_{ij}]$ در t پیوسته است درصورتی که هر درایهٔ p_{ij} در t پیوسته باشد . مشتق P' با مشتقگیری از هر درایه تعریف می‌شود :

$$P'(t) = [p'_{ij}(t)],$$

واین درصورتی است که تمام مشتقات $p'_{ij}(t)$ موجود باشند . قواعد اساسی مشتقگیری درباب مجموعها و حاصل ضربها به‌آسانی تحقیق می‌شوند . مثلاً ، اگر P و Q توابع ماتریسی مشتقپذیری باشند ، داریم

$$(P + Q)' = P' + Q' ;$$

و اگر P و Q دارای یک اندازه باشند ، نیز داریم

$$(PQ)' = PQ' + P'Q$$

و این درصورتی است که PQ تعریف شده باشد . قاعدهٔ زنجیره‌ای نیز برقرار است . یعنی ، هرگاه $F(t) = P[g(t)]$ ، که درآن P یک تابع ماتریسی مشتقپذیر بوده و g یک تابع اسکالر مشتقپذیر باشد ، آنگاه $F'(t) = g'(t)P'[g(t)]$. قضیهٔ مشتق صفر ، و اولین و دومین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نیز برای توابع ماتریسی معتبرند . اثبات این خواص در مجموعه تمرینات بعدی خواسته شده است .

تعریف نمایی یک ماتریس چندان ساده نیست و نیاز به آمادگی بیشتری دارد . این امر در بخش بعد مطرح می‌شود .

۳۰۷ سریهای نامتناهی از ماتریسها . نرم ماتریسها

فرض‌کنیم $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های حقیقی یا مختلط باشد . می‌خواهیم

نمایی e^A را طوری تعریف کنیم که بعضی از خواص اصلی نمایی حقیقی یا مختلط معمولی را داشته باشد. بخصوص، قانون نماها به شکل

$$e^{tA}e^{sA} = e^{(t+s)A} \quad \text{، به‌ازای هر } s \text{ و } t \text{ حقیقی} \tag{۸۰۷}$$

و رابطهٔ

$$e^{O} = I, \tag{۹۰۷}$$

که در آن O و I بترتیب ماتریسهای $n \times n$ صفر و همانی‌اند، را لازم داریم. ممکن است تعریف e^A مساوی ماتریس $[e^{a_{ij}}]$ طبیعی به‌نظر برسد، اما قابل قبول نیست، زیرا از هیچیک از خواص (۸۰۷) و (۹۰۷) برخوردار نیست. درعوض، e^A را با بسط به‌صورت سری توانی تعریف می‌کنیم:

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

می‌دانیم این فرمول درصورتی که A عددی حقیقی یا مختلط باشد برقرار است، وثابت می‌کنیم که از آن درصورتی که A یک ماتریس باشد خواص (۸۰۷) و (۹۰۷) نتیجه می‌شوند. پیش از این کار لازم است معنی یک سری همگرا از ماتریسها را توضیح دهیم.

تعریف یک سری همگرا از ماتریسها. دنبالهٔ نامتناهی $\{C_k\}$ از ماتریسهای $m \times n$ که درایه‌های آنها اعدادی حقیقی یا مختلط‌اند مفروض است، و درایهٔ ij ، C_k را با $c_{ij}^{(k)}$ نشان می‌دهیم. هرگاه تمام mn سری

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^{(k)} \qquad (i = 1, \ldots, m; j = 1, \ldots, n) \tag{۱۰۰۷}$$

همگرا باشند، گوییم سری $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ از ماتریسها همگراست، و مجموع آن ماتریس $m \times n$ی تعریف می‌شود که درایهٔ ij آن سری (۱۰۰۷) است.

یک آزمون ساده‌ومفید برای همگرایی یک سری از ماتریسها برحسب نرم یک ماتریس، که تعمیمی از قدر مطلق یک عدد است، قابل بیان است.

تعریف نرم یک ماتریس. هرگاه $A = [a_{ij}]$ یک ماتریس $m \times n$ با درایه‌های حقیقی یا مختلط باشد، نرم A ، که با $\|A\|$ نموده می‌شود، عدد نامنفیی تعریف می‌شود که با فرمول

زیر داده می‌شود :

$$\|A\| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|. \tag{۱۱۰۷}$$

به عبارت دیگر، نرم A مجموع قدرمطلقهای تمام درایه‌های آن است. تعریفهای دیگری از نرم وجود دارند که گهگاه به کار می‌روند، ولی ما این‌تعریف را از آنجهت برگزیده‌ایم که خواص زیر به آسانی با آن ثابت می‌شوند.

قضیهٔ ۱۰۷ . خواص اساسی نرمها. *به‌ازای ماتریسهای مستطیلی شکل A و B، و تمام اسکالرهای حقیقی یا مختلط c، داریم*

$$\|A + B\| \leq \|A\| + \|B\|, \|AB\| \leq \|A\| \, \|B\|, \|cA\| = |c| \, \|A\|.$$

برهان. نتیجه‌را فقط در مورد $\|AB\|$، با فرض اینکه A، $m \times n$ و B، $n \times p$ است، ثابت می‌کنیم. اثبات سایر روابط ساده‌تر است و به‌عنوان تمرین می‌ماند.

با نوشتن $A = [a_{ik}], B = [b_{kj}]$، داریم $AB = [\sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj}]$ ؛ درنتیجه، از (۱۱۰۷) خواهیم داشت

$$\|AB\| = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{p} \left| \sum_{k=1}^{n} a_{ik}b_{kj} \right| \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \sum_{j=1}^{p} |b_{kj}| \leq \sum_{i=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |a_{ik}| \, \|B\| = \|A\| \, \|B\|.$$

توجه کنید که، درحالت خاص $B = A$، نامساوی مربوط‌به $\|AB\|$ به‌صورت $\|A^2\| \leq \|A\|^2$ درمی‌آید. به استقرا، نیز داریم :

به‌ازای $k = 1, 2, 3, \ldots$ ، $\|A^k\| \leq \|A\|^k$.

این نامساویها در بحث ماتریس نمایی مفید خواهند بود.

قضیهٔ بعدی‌شرط کافی مفیدی‌برای همگرایی یک سری از ماتریسها به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۲۰۷ . آزمون‌همگرایی برای‌یک‌سری‌ماتریسی. *هرگاه $\{C_k\}$ دنباله‌ای‌از ماتریسهای $m \times n$ بوده بطوری که $\sum_{k=1}^{\infty} \|C_k\|$ همگرا باشد، آنگاه سری ماتریسی $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ نیز همگرا می‌باشد.*

برهان. فرض‌کنیم درایهٔ ij ، C_k مساوی $c_{ij}^{(k)}$ باشد. چون $\|C_k\| \le |c_{ij}^{(k)}|$ ، همگرایی $\sum_{k=1}^{\infty}\|C_k\|$ همگرایی مطلق هر سری $\sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^{(k)}$ را ایجاب می‌کند. بنابر این، هر سری $\sum_{k=1}^{\infty} c_{ij}^{(k)}$ همگراست؛ و درنتیجه، سری ماتریسی $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ همگرا می‌باشد.

۴۰۷ تمرین

۱. تحقیق‌کنید که خاصیت‌خطی انتگرالها برای انتگرال توابع ماتریسی نیز برقراراست.

۲. هریک از قواعد مشتقگیری زیر را، با فرض مشتقپذیر بودن P و Q ، برای توابع ماتریسی تحقیق‌کنید. در (آ)، P و Q باید به یک اندازه باشند تا $P + Q$ معنی داشته‌باشد. در (ب) و (ت) لازم نیست یک اندازه داشته باشند مشروط بر اینکه حاصل‌ضربها معنی داشته باشند. در (پ) و (ت)، Q نامنفرد فرض خواهد شد.

(آ) $(P + Q)' = P' + Q'$. (ب) $(PQ)' = PQ' + P'Q$.

(پ) $(Q^{-1})' = -Q^{-1}Q'Q^{-1}$. (ت) $(PQ^{-1})' = -PQ^{-1}Q'Q^{-1} + P'Q^{-1}$.

۳. (آ) فرض کنید P یک تابع ماتریسی مشتقپذیر باشد. ثابت کنید که مشتقات P^2 و P^3 از فرمولهای زیر به‌دست می‌آیند:

$$(P^2)' = PP' + P'P, \qquad (P^3)' = P^2P' + PP'P + P'P^2.$$

(ب) برای مشتق P^k یک فرمول کلی حدس بزنید و آن را به استقرا ثابت کنید.

۴. فرض کنید P یک تابع ماتریسی مشتقپذیربوده، و g یک تابع اسکالر مشتقپذیر باشد که‌بردش زیر مجموعه‌ای‌ازقلمرو P است. تابع مرکب $F(t) = P[g(t)]$ راتعریف کرده و قاعدهٔ زنجیره‌ای $F'(t) = g'(t)P'[g(t)]$ را ثابت کنید.

۵. قضیهٔ مشتق صفر را برای توابع ماتریسی ثابت کنید: *هرگاه به‌ازای هر t دربازهٔ بازی مانند (a, b) ، $P'(t) = O$ ، آنگاه تابع ماتریسی P بر (a, b) ثابت است.*

۶. تعمیمهای اولین‌و دومین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را برای توابع ماتریسی بیان و اثبات کنید.

۷. برای انتگرالگیری بـه طریقهٔ جزء به جزء یک فرمول که درآن انتگرالدهها توابعی ماتریسی باشند بیان و اثبات کنید.

۸. خواص زیر را که مربوط‌به نرم ماتریسهاست اثبات نمایید:

$$\|A + B\| \le \|A\| + \|B\|, \qquad \|cA\| = |c|\,\|A\|.$$

۹. ثابت کنید که اگر تابع ماتریسی P بر بازهٔ $[a, b]$ انتگرالپذیر باشد،

$$\left\|\int_a^b P(t)\,dt\right\| \le \int_a^b \|P(t)\|\,dt.$$

۱۰ . فرض کنید D یک ماتریس قطری $n \times n$ باشد ؛ مثلاً " ، $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.
ثابت کنید سری ماتریسی $\sum_{k=0}^{\infty} D^k/k!$ همگراست و یک ماتریس قطری نیز هست :

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{D^k}{k!} = \operatorname{diag}(e^{\lambda_1}, \ldots, e^{\lambda_n}).$$

(جملهٔ نظیر به $k = 0$ ماتریس همانی I فرض می‌شود .)

۱۱ . فرض کنید D یک ماتریس قطری $n \times n$ باشد :
$D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$. ثابت کنید اگر سری ماتریسی $\sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k$ همگرا باشد ،

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k D^k = \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_1^k, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty} c_k \lambda_n^k\right).$$

۱۲ . فرض کنید سری ماتریسی $\sum_{k=1}^{\infty} C_k$ همگرا باشد ، که در آن هر C_k یک ماتریس $n \times n$
است . ثابت کنید سری ماتریسی $\sum_{k=1}^{\infty} (AC_kB)$ نیز همگراست و مجموعش ماتریس

$$A\left(\sum_{k=1}^{\infty} C_k\right)B$$

می‌باشد . در اینجا A و B ماتریسهایی هستند که به‌ازای آنها AC_kB ها معنی‌دارند .

۵۰۷ ماتریس نمایی

با استفاده از قضیهٔ ۲۰۷ ، به‌آسانی ثابت می‌شود که سری ماتریسی

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!} \tag{۱۲۰۷}$$

به‌ازای هر ماتریس مربعی A با درایه‌های حقیقی یا مختلط همگراست . (جملهٔ نظیر به $k = 0$ ماتریس همانی I فرض می‌شود .) نرم هر جمله در نامساوی

$$\left\|\frac{A^k}{k!}\right\| \le \frac{\|A\|^k}{k!}$$

صدق می‌کند . چون سری $\sum a^k/k!$ به‌ازای هر a ی حقیقی همگراست ، قضیهٔ ۲۰۷ ایجاب می‌کند که سری (۱۲۰۷) به‌ازای هر ماتریس مربعی A همگرا باشد .

تعریف ماتریس نمایی . به‌ازای هر ماتریس $n \times n$ ، A با درایه‌های حقیقی یا مختلط، نمایی e^A را ماتریس $n \times n$ ی تعریف می‌کنیم که باسری همگرای (۱۲۰۷) داده می‌شود یعنی ،

$$e^A = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{A^k}{k!}.$$

توجه کنید که این تعریف $e^O = I$ را ایجاب می‌کند ، که درآن O یک ماتریس صفر است . خواص دیگر نمایی به‌کمک معادلات دیفرانسیل به‌دست می‌آیند .

۶.۷ معادلهٔ دیفرانسیل برقرار به‌وسیلهٔ e^{tA}

فرض کنیم t یک عدد حقیقی، A یک ماتریس $n \times n$ ، و $E(t)$ ماتریس $n \times n$ ی باشد که با

$$E(t) = e^{tA}$$

داده شده است . A را ثابت گرفته این ماتریس را به‌عنوان تابعی از t مطالعه می‌کنیم . ابتدا یک معادلهٔ دیفرانسیل برقرار به وسیلهٔ E را به‌دست می‌آوریم .

قضیهٔ ۳۰۷ . *به‌ازای هر t حقیقی، تابع ماتریسی E تعریف شده با $E(t) = e^{tA}$ در معادلهٔ دیفرانسیل ماتریسی*

$$E'(t) = E(t)A = AE(t)$$

صدق می‌کند .

برهان . از تعریف ماتریس نمایی داریم

$$E(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(tA)^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

فرض کنیم $c_{ij}^{(k)}$ درایهٔ ij ، A^k باشد . دراین صورت ، درایهٔ ij ، $t^k A^k/k!$ مساوی $t^k c_{ij}^{(k)}/k!$ است . از اینرو ، از تعریف یک سری ماتریسی ، داریم

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!} = \left[\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} c_{ij}^{(k)} \right]. \tag{۱۳۰۷}$$

هر درایهٔ سمت‌راست (۱۳۰۷) یک‌سری توانی از t است ، که‌به‌ازای هر t همگراست .

بنابراین، مشتقش به‌ازای t وجود دارد و از سری مشتقگیری‌شدهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{kt^{k-1}}{k!} c_{ij}^{(k)} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} c_{ij}^{(k+1)}.$$

این نشان می‌دهد که مشتق $E'(t)$ وجود دارد و با سری ماتریسی

$$E'(t) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^{k+1}}{k!} = \left(\sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k A^k}{k!}\right) A = E(t)A$$

داده می‌شود. درآخرین معادله از خاصیت $A^{k+1} = A^k A$ استفاده شده است. چون A با A^k تعویض می‌شود، نیز می‌شد بنویسیم $A^{k+1} = AA^k$ تا رابطهٔ $E'(t) = AE(t)$ به‌دست آید. این برهان را تمام خواهد کرد.

تذکر. برهان فوق همچنین نشان می‌دهد که A با e^{tA} تعویض می‌گردد.

۷.۷ قضیهٔ یکتایی برای معادلهٔ دیفرانسیل ماتریسی $F'(t) = AF(t)$

دراین بخش، یک قضیهٔ یکتایی ثابت می‌کنیم که جمیع جوابهای معادلهٔ دیفرانسیل ماتریسی $F'(t) = AF(t)$ را مشخص می‌کند. دربرهانش از قضیهٔ زیر استفاده می‌شود.

قضیهٔ ۴.۷ . نامنفردی e^{tA} . به‌ازای هر ماتریس $n \times n$ ، A و هراسکالر t داریم

$$e^{tA}e^{-tA} = I. \qquad (۱۴.۷)$$

لذا، e^{tA} نامنفرد است و معکوسش e^{-tA} می‌باشد.

برهان. فرض کنیم F تابع ماتریسی باشد که به‌ازای هر t حقیقی با معادلهٔ

$$F(t) = e^{tA}e^{-tA}$$

تعریف می‌شود. با نشان دادن اینکه مشتق $F'(t)$ ماتریس صفر است، ثابت می‌کنیم $F(t)$ ماتریس همانی I است. با مشتقگیری از F به‌عنوان یک حاصلضرب، و استفاده از قضیهٔ ۳.۷ ، درمی‌یابیم که

$$F'(t) = e^{tA}(e^{-tA})' + (e^{tA})'e^{-tA} = e^{tA}(-Ae^{-tA}) + Ae^{tA}e^{-tA}$$
$$= -Ae^{tA}e^{-tA} + Ae^{tA}e^{-tA} = O,$$

زیرا A با e^{tA} تعویض می‌شود. لذا، طبق قضیهٔ مشتق صفر، F یک ماتریس ثابت است. اما $F(0) = e^{0A}e^{0A} = I$ ؛ درنتیجه، به‌ازای هر t ، $F(t) = I$. این (۱۴.۷) را ثابت خواهد کرد.

قضیهٔ ۵۰۷ . قضیهٔ یکتایی . فرض کنیم A و B دو ماتریس $n \times n$ ثابت باشند . در اینصورت ، تنها تابع ماتریسی $n \times n$ ، F صادق در مسئله با مقدار اولیهٔ

$$F'(t) = AF(t), \qquad F(0) = B$$

بهازای $-\infty < t < +\infty$ عبارت است از

$$F(t) = e^{tA}B. \tag{۱۵۰۷}$$

برهان. ابتدا توجه میکنیم که $e^{tA}B$ یک جواب است . حال فرض کنیم F یک جواب بوده و تابع ماتریسی

$$G(t) = e^{-tA}F(t)$$

را درنظر میگیریم . با مشتقگیری از این حاصل ضرب ، داریم

$$G'(t) = e^{-tA}F'(t) - Ae^{-tA}F(t) = e^{-tA}AF(t) - e^{-tA}AF(t) = O.$$

بنابراین ، $G(t)$ یک ماتریس ثابت میباشد :

$$G(t) = G(0) = F(0) = B.$$

به عبارت دیگر ، $e^{-tA}F(t) = B$. با ضرب در e^{tA} و استفاده از (۱۴۰۷) ، (۱۵۰۷)را خواهیم داشت .

تذکر. برهانی مشابه نشان میدهد که $F(t) = Be^{tA}$ تنها جواب مسئله با مقدار اولیهٔ

$$F'(t) = F(t)A, \qquad F(0) = B$$

است .

۸۰۷ قانون نماها برای ماتریسهای نمایی

قانون نماها ، یعنی $e^Ae^B = e^{A+B}$ ، همیشه برای نماییهای ماتریسی درست نیست . مثال نقض در تمرین ۱۳ از بخش ۱۲۰۷ آمده است . با اینحال ، بهآسانی ثابت میشود که این فرمول برای ماتریسهای A و B که تعویض میشوند درست است .

قضیهٔ ۶۰۷ . فرضکنیم A و B دو ماتریس $n \times n$ باشندکهتعویضمیشوند: $AB = BA$. دراین صورت ، داریم

$$e^{A+B} = e^Ae^B. \tag{۱۶۰۷}$$

برهان. از معادلهٔ $AB = BA$ درمی‌یابیم که

$$A^2B = A(BA) = (AB)A = (BA)A = BA^2;$$

درنتیجه، B با A^2 تعویض می‌شود. بنابر استقرا، B با هرتوانی از A تعویض می‌شود. با نوشتن e^{tA} به صورت یک سری توانی، درمی‌یابیم که B نیز با e^{tA} به‌ازای هر t حقیقی تعویض می‌گردد.

حال فرض کنیم F تابع ماتریسی باشد که با معادلهٔ

$$F(t) = e^{t(A+B)} - e^{tA}e^{tB}$$

تعریف می‌شود. با مشتقگیری از $F(t)$ و استفاده از این امر که B با e^{tA} تعویض می‌شود، درمی‌یابیم که

$$\begin{aligned} F'(t) &= (A + B)e^{t(A+B)} - Ae^{tA}e^{tB} - e^{tA}Be^{tB} \\ &= (A + B)e^{t(A+B)} - (A + B)e^{tA}e^{tB} = (A + B)F(t). \end{aligned}$$

بنابرقضیهٔ یکتایی، داریم

$$F(t) = e^{t(A+B)}F(0).$$

اما $F(0) = O$ ؛ درنتیجه، به‌ازای هر t ، $F(t) = O$. بنابراین،

$$e^{t(A+B)} = e^{tA}e^{tB}.$$

وقتی $t = 1$ ، (۱۶۰۷) به‌دست خواهد آمد.

مثال. ماتریسهای sA و tA به‌ازای هراسکالر s و t تعویض می‌شوند. بنابراین، خواهیم داشت

$$e^{sA}e^{tA} = e^{(s+t)A}.$$

۹۰۷ قضایای وجودی و یکتایی برای دستگاههای خطی همگن با ضرایب ثابت

معادلهٔ دیفرانسیل برداری $Y'(t) = AY(t)$ ، که درآن A یک ماتریس ثابت $n \times n$ بوده و Y یک تابع برداری n بعدی (به صورت یک ماتریس ستونی $n \times 1$) باشد، یک‌دستگاه **خطی همگن با ضرایب ثابت** نامیده می‌شود. بااستفاده از ماتریس نمایی، برای جواب چنین دستگاه فرمول صریحی به‌دست می‌آوریم.

قضیهٔ ۷۰۷ . فرض کنیم A یک ماتریس ثابت $n \times n$ ، و B یک بردار n بعدی معلوم

باشد . دراین صورت ، مسئله با مقدار اولیهٔ

$$Y'(t) = AY(t), \qquad Y(0) = B, \tag{۱۷۰۷}$$

بر بازهٔ $-\infty < t < +\infty$ جواب منحصر بفرد دارد ، و این جواب با فرمول

$$Y(t) = e^{tA}B \tag{۱۸۰۷}$$

داده می‌شود . بطور کلی ، جواب منحصر بفرد مسئله با مقدار اولیهٔ

$$Y'(t) = AY(t), \qquad Y(a) = B,$$

مساوی $Y(t) = e^{(t-a)A}B$ می‌باشد .

برهان . مشتقگیری از (۱۸۰۷) نتیجه می‌دهد که $Y'(t) = Ae^{tA}B = AY(t)$. چون $Y(0) = B$ ، این یک جواب مسئله با مقدار اولیهٔ (۱۷۰۷) می‌باشد .

برای اثبات اینکه فقط یک جواب وجود دارد ، مثل برهان قضیهٔ ۵۰۷ استدلال می‌کنیم . فرض کنیم $Z(t)$ تابع برداری دیگری باشد که در $Z'(t) = AZ(t)$ با $Z(0) = B$ صدق می‌کند ، و نیز $G(t) = e^{-tA}Z(t)$. دراین صورت ، به‌آسانی تحقیق می‌شود که $G'(t) = O$ ؛ درنتیجه ، $G(t) = G(0) = Z(0) = B$. به عبارت دیگر ، $e^{-tA}Z(t) = B$. بنابراین ، $Z(t) = e^{tA}B = Y(t)$. حالت‌کلیتر با مقداراولیهٔ $Y(a) = B$ درست به‌همین نحو اثبات می‌شود .

۱۰۰۷ محاسبهٔ e^{tA}

قضیهٔ ۷۰۷ فرمول صریحی برای حل یک دستگاه همگن با ضرایب ثابت به‌دست می‌دهد ؛ با اینحال ، مشکل محاسبهٔ ماتریس نمایی e^{tA} هنوز برجاست . اگر می‌خواستیم e^{tA} را مستقیماً از تعریف سری حساب کنیم ، می‌بایستی تمام توانهای A^k را به‌ازای $k = 0, 1, 2, \ldots$ حساب‌کرده مجموع هر سری $\sum_{k=0}^{\infty} t^k c_{ij}^{(k)}/k!$ ، که درآن $c_{ij}^{(k)}$ درایهٔ ij A^k است ، را محاسبه کنیم . این درحالت کلی کاری است بی‌فرجام مگر اینکه A ماتریسی باشد که توانهایش به‌آسانی قابل محاسبه‌باشند . مثلاً ، اگر A یک ماتریس قطری باشد ، مثلاً

$$A = \operatorname{diag}(\lambda_1, \ldots, \lambda_n),$$

هر توان A نیز یک ماتریس قطری است ؛ درواقع ،

$$A^k = \operatorname{diag}(\lambda_1^k, \ldots, \lambda_n^k).$$

بنابراین، دراین حالت، e^{tA} یک ماتریس قطری است که با رابطهٔ زیر داده می‌شود:

$$e^{tA} = \operatorname{diag}\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\lambda_1^k, \ldots, \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}\lambda_n^k\right) = \operatorname{diag}(e^{t\lambda_1}, \ldots, e^{t\lambda_n}).$$

حالت سادهٔ دیگر وقتی است که A قطری می‌شود. مثلاً، اگر به‌ازای ماتریس نامنفردی چون C، $C^{-1}AC$ قطری باشد، مثلاً $C^{-1}AC = D$، خواهیم داشت

$$A = CDC^{-1},$$

که از آن درمی‌یابیم که

$$A^2 = (CDC^{-1})(CDC^{-1}) = CD^2C^{-1},$$

و، بطور کلی،

$$A^k = CD^kC^{-1}.$$

بنابراین، دراین حالت داریم

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kA^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}CD^kC^{-1} = C\left(\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^kD^k}{k!}\right)C^{-1} = Ce^{tD}C^{-1}.$$

دراینجا مشکل تعیین C و معکوس آن است. به محض دانستن اینها، e^{tA} به آسانی محاسبه می‌شود. البته، هر ماتریس قطری پذیر نیست؛ درنتیجه، درجهٔ مفید بودن نکات فوق محدود می‌باشد.

مثال ۱. e^{tA} را برای ماتریس 2×2، $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ حساب کنید.

حل. این ماتریس دارای مقادیر ویژهٔ متمایز $\lambda_1 = 6, \lambda_2 = 1$ است؛ درنتیجه، ماتریس نامنفردی چون $C = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ هست بطوری که $C^{-1}AC = D$، که درآن $D = \operatorname{diag}(\lambda_1, \lambda_2) = \begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$. برای تعیین C می‌توان نوشت $AC = CD$، یا

$$\begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 6 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

با ضرب ماتریسها، درمی‌یابیم که این معادله به‌ازای اسکالرهای a, b, c, d که

$a = 4c,\ b = -d$ برقرار است. با فرض $c = d = 1$ ، اختیار می‌کنیم

$$C = \begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \qquad C^{-1} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix}.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} e^{tA} = Ce^{tD}C^{-1} &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{6t} & 0 \\ 0 & e^{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 4 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} e^{6t} & e^{6t} \\ -e^{t} & 4e^{t} \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4e^{6t} + e^{t} & 4e^{6t} - 4e^{t} \\ e^{6t} - e^{t} & e^{6t} + 4e^{t} \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

مثال ۲. دستگاه خطی

$$\begin{aligned} y_1' &= 5y_1 + 4y_2 \\ y_2' &= y_1 + 2y_2 \end{aligned}$$

را با شرایط اولیهٔ $y_1(0) = 2,\ y_2(0) = 3$ حل کنید.

حل. دستگاه را می‌توان به شکل ماتریسی زیر نوشت:

$Y'(t) = AY(t)$ ، $Y(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ که درآن $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

بنابر قضیهٔ ۷.۷ ، جواب $Y(t) = e^{tA}Y(0)$ است. با استفاده از ماتریس e^{tA} که درمثال ۱ حساب شد، درمی‌یابیم که

$$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \frac{1}{5}\begin{bmatrix} 4e^{6t} + e^{t} & 4e^{6t} - 4e^{t} \\ e^{6t} - e^{t} & e^{6t} + 4e^{t} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix},$$

که از آن خواهیم داشت

$$y_1 = 4e^{6t} - 2e^{t}, \qquad y_2 = e^{6t} + 2e^{t}.$$

روشهای زیادی برای محاسبهٔ e^{tA} درصورت قطری پذیر نبودن A وجود دارند. غالب این روشها نسبتاً" پیچیده‌اند و به تبدیلات ماتریسی مقدماتی نیاز دارند، که این

نیاز بــه طبیعت درجات تکرار مقادیر ویژهٔ A بستگی دارد. در یکی از بخشهای بعدی، روشی عملــی و سر راست برای محاسبهٔ e^{tA} مطرح می‌شود که، چه A قطری پذیر باشد یا نه، قــابل به‌کار بــردن است. این روش به‌ازای هر ماتریس معتبر است و به هیچ نوع تبدیل مقــدماتی نیــاز ندارد. این روش به‌وسیلهٔ ای. ج. پوتزر[1] در مقــالــه‌ای در *American Mathematical Monthly*, Vol. 73 (1966), pp. 2-7 ارائــه شــده اســت. روش‌بر قضیهٔ معروفی منسوب به آرتورکیلی[2] (۱۸۹۵ — ۱۸۲۱) و ویلیام روان هامیلتون[3] (۱۸۶۵ — ۱۸۰۵) استوار است که می‌گوید هر ماتریس مربعی در معادلهٔ مشخص خود صدق می‌کند. ابتدا قضیهٔ کیلی ــ هامیلتون را ثابت می‌کنیم و بعد، با استفاده از آن، فرمولهای پوتزر را برای محاسبهٔ e^{tA} به‌دست می‌آوریم.

۱۱۰۷ قضیهٔ کیلی ــ هامیلتون

قضیهٔ ۸۰۷ . قضیهٔ کیلی ــ هامیلتون. فرض کنیم A یک ماتریس $n \times n$ بــوده و

$$f(\lambda) = \det(\lambda I - A) = \lambda^n + c_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + c_1\lambda + c_0 \qquad (۱۹۰۷)$$

چندجمله‌ای مشخص آن باشد. دراین‌صورت، $f(A) = O$. به‌عبارت دیگر، A درمعادلهٔ

$$A^n + c_{n-1}A^{n-1} + \cdots + c_1A + c_0I = O \qquad (۲۰۰۷)$$

صدق می‌کند.

برهان. برهان بر قضیهٔ ۱۲۰۳ استوار است که می‌گوید به‌ازای هر ماتریس مربعی A

$$A\,(\operatorname{cof} A)^t = (\det A)I. \qquad (۲۱۰۷)$$

این فرمول را با $\lambda I - A$ به‌جای A به‌کار می‌بریم. چون $\det(\lambda I - A) = f(\lambda)$، معادلهٔ (۲۱۰۷) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$(\lambda I - A)\{\operatorname{cof}(\lambda I - A)\}^t = f(\lambda)I. \qquad (۲۲۰۷)$$

این معادله بــه‌ازای هر λ حقیقی معتبر است. ایدهٔ اثبات نشان می‌دهد که این‌معادله به‌ازای A به‌جای λ نیز معتبراست.

درایه‌های ماتریس $\operatorname{cof}(\lambda I - A)$ همسازه‌های $\lambda I - A$ هستند. هرچنین‌همسازه‌ای، با تقریب سازه‌ای چون ± 1، دترمینانِ یک مینور $\lambda I - A$ از مرتبهٔ $n - 1$ است. لذا،

---

1. E. J. Putzer 2. Arthur Cayley 3. William Rowan Hamilton

هر درایهٔ $\operatorname{cof}(\lambda I - A)$ ، و درنتیجه هر درایهٔ $\{\operatorname{cof}(\lambda I - A)\}^t$ ، یک چند جمله‌ای از λ و از درجهٔ نابیشتر از $n-1$ است . بنابراین ،

$$\{\operatorname{cof}(\lambda I - A)\}^t = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k B_k ,$$

که درآن هرضریب B_k یک ماتریس $n \times n$ با درایه‌های اسکالر است . با استفاده از این در (۲۲۰۷) ، رابطهٔ

$$(\lambda I - A) \sum_{k=0}^{n-1} \lambda^k B_k = f(\lambda) I$$

به‌دست می‌آید ، که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت :

$$\lambda^n B_{n-1} + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k (B_{k-1} - AB_k) - AB_0 = \lambda^n I + \sum_{k=1}^{n-1} \lambda^k c_k I + c_0 I .$$

دراین مرحله ، با متحد گرفتن ضرایب همتوان λ در (۲۴۰۷) ، معادلات زیر به‌دست می‌آیند :

$$\begin{aligned} B_{n-1} &= I \\ B_{n-2} - AB_{n-1} &= c_{n-1} I \\ &\vdots \\ B_0 - AB_1 &= c_1 I \\ -AB_0 &= c_0 I . \end{aligned} \qquad (۲۵۰۷)$$

متحد گرفتن ضرایب مجاز است ، زیرا (۲۴۰۷) با n^2 معادلهٔ اسکالر معادل است ، که‌در هریک می‌توان ضرایب همتوان λ را متحد گرفت . حال معادلات (۲۵۰۷) را متوالیا" در $A^n, A^{n-1}, \ldots, A, I$ ضرب و نتایج را با هم جمع می‌کنیم . جملات سمت چپ حذف می‌شوند و به دست می‌آوریم که

$$O = A^n + c_{n-1} A^{n-1} + \cdots + c_1 A + c_0 I .$$

این قضیهٔ کیلی ــ هامیلتون را ثابت می‌کند .

تذکر . هامیلتون این قضیه را در ۱۸۵۳ برای ردهٔ خاصی ازماتریسها ثابت کرد . چند سال بعد ، کیلی اعلام کرد که قضیه برای جمیع ماتریسها درست است ، اما برهانی برای

آن ارائه نداد .

مثال. ماتریس $A = \begin{bmatrix} 5 & 4 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$ دارای چندجمله‌ای مشخص

$$f(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda - 6) = \lambda^3 - 9\lambda^2 + 20\lambda - 12$$

است . قضیهٔ کیلی ـ هامیلتون می‌گوید که A در معادلهٔ

$$A^3 - 9A^2 + 20A - 12I = O \qquad (۲۶۰۷)$$

صدق می‌کند . با استفاده از این معادله ، می‌توان A^3 و تمام توانهای بالاتر A را برحسب I ، A ، و A^2 بیان کرد . مثلاً ، داریم

$$A^3 = 9A^2 - 20A + 12I,$$
$$A^4 = 9A^3 - 20A^2 + 12A = 9(9A^2 - 20A + 12I) - 20A^2 + 12A$$
$$= 61A^2 - 168A + 108I.$$

همچنین ، می‌توان از آن برای بیان A^{-1} به‌صورت یک چندجمله‌ای از A استفاده کرد . رابطهٔ (۲۶۰۷) را به‌صورت $A(A^2 - 9A + 20I) = 12I$ می‌نویسیم ، و خواهیم داشت

$$A^{-1} = \tfrac{1}{12}(A^2 - 9A + 20I).$$

۱۲۰۷ تمرین

درهریک از تمرینهای ۱ تا ۴ ، (آ) A^{-1} ، A^2 ، و همهٔ توانهای بالاتر A را به‌صورت ترکیبی خطی از I و A بیان کنید (قضیهٔ کیلی ـ هامیلتون می‌تواند مفید باشد) ؛ (ب) e^{tA} را محاسبه نمایید .

۱ . $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$.

۲ . $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

۳ . $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

۴ . $A = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$.

۵ . (آ) هرگاه $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$ ، ثابت کنید که $e^{tA} = \begin{bmatrix} \cos t & \sin t \\ -\sin t & \cos t \end{bmatrix}$.

(ب) برای e^{tA} ، که $A = \begin{bmatrix} a & b \\ -b & a \end{bmatrix}$ و a و b حقیقی‌اند ، فرمول نظیر را پیدا

کنید .

۶ . هرگاه $F(t) = \begin{bmatrix} t & t-1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ ، ثابت کنید که $e^{F(t)} = eF(e^{t-1})$.

۷ . هرگاه $A(t)$ یک تابع اسکالراز t باشد ، مشتق $e^{A(t)}$ مساوی $e^{A(t)}A'(t)$ است . مشتق $e^{A(t)}$ وقتی $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ را محاسبه‌کرده نشان دهید که نتیجه مساوی هیچیک از حاصل‌ضربهای $e^{A(t)}A'(t)$ و $A'(t)e^{A(t)}$ نیست .

در هر یک از تمرینهای ۸، ۹، و ۱۰ ، (آ) A^n را محاسبه کرده A^3 را برحسب I, A, A^2 بیان کنید؛ (ب) e^{tA} را محاسبه نمایید .

۸ . $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

۹ . $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$.

۱۰ . $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

۱۱ . هرگاه $A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، e^{tA} را به‌صورت‌ترکیبی خطی‌از I, A, A^2 بیان‌کنید .

۱۲ . هرگاه $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ ، ثابت‌کنید که $e^A = \begin{bmatrix} x^2 & xy & y^2 \\ 2xy & x^2+y^2 & 2xy \\ y^2 & xy & x^2 \end{bmatrix}$ ، که در آن $x = \cosh 1$ و $y = \sinh 1$.

۱۳ . این مثال نشان می‌دهد که معادلهٔ $e^{A+B} = e^A e^B$ همیشه برای نماییهای ماتریسی درست نیست . هریک از ماتریسهای e^Ae^B, e^Be^A, e^{A+B} را وقتی $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ و $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ حساب کنید ، و توجه کنید که سه نتیجه متمایز می‌باشند .

۱۳۰۷ روش پوتزر برای محاسبهٔ e^{tA}

قضیهٔ کیلی ــ هامیلتون نشان می‌دهد که توان n م ماتریس $n \times n$ ، A را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از توانهای پایین‌تر $I, A, A^2, \ldots, A^{n-1}$ بیان کرد. از این نتیجه می‌شود، که هر توان بالاتر $A^{n+1}, A^{n+2}, \ldots$ را نیز می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی‌از $I, A, A^2, \ldots,$ A^{n-1} بیان داشت. بنابراین، در سری نامتناهی معرف e^{tA} ، هرجملهٔ $t^kA^k/k!$ ، که درآن $k \geq n$ ، ترکیبی خطی‌از $t^kI, t^kA, t^kA^2, \ldots, t^kA^{n-1}$ است. پس، می‌توان انتظار داشت که e^{tA} به‌صورت یک چندجمله‌ای از A به شکل

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{n-1} q_k(t)A^k \qquad (۲۷۰۷)$$

قابل بیان است، که درآن ضرایب اسکالر $q_k(t)$ به t بستگی دارند. پوتزر دوروش مفید برای بیان e^{tA} به‌صورت یک چندجمله‌ای از A ذکر می‌کند. قضیهٔ بعدی روش ساده‌تر را توضیح می‌دهد.

قضیهٔ ۹۰۷ . فرض کنیم $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مقادیر ویژهٔ ماتریس $n \times n$ ، A باشد، و یک دنباله از چندجمله‌ایها از A را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$P_0(A) = I \text{ ؛ و به‌ازای } k = 1, 2, \ldots, n \text{ ، } P_k(A) = \prod_{m=1}^{k} (A - \lambda_m I) \;. \qquad (۲۸۰۷)$$

دراین صورت، داریم

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t)P_k(A), \qquad (۲۹۰۷)$$

که درآن ضرایب اسکالر $r_1(t), \ldots, r_n(t)$ به‌طور بازگشتی از دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی زیر به‌دست می‌آیند:

$$(۳۰۰۷) \quad \begin{aligned} &r_1'(t) = \lambda_1 r_1(t), \qquad r_1(0) = 1, \\ &r_{k+1}'(t) = \lambda_{k+1} r_{k+1}(t) + r_k(t), \qquad r_{k+1}(0) = 0, \qquad (k = 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned}$$

تذکر. معادلهٔ (۲۹۰۷) e^{tA} را مستقیماً" به‌صورتی که در (۲۷۰۷) است بیان نمی‌کند، بلکه به‌صورت ترکیبی خطی از چند جمله‌ایهای $P_0(A), P_1(A), \ldots, P_{n-1}(A)$ بیان می‌کند. این چندجمله‌ایها به‌محض معلوم شدن مقادیر ویژهٔ A به‌آسانی محاسبه‌می‌شوند. همچنین،

ضرایب $r_1(t), \ldots, r_n(t)$ در (۳۰.۷) به‌آسانی حساب می‌شوند . با آنکه این‌کار به‌حل یک دستگاه معادلات دیفرانسیل خطی نیاز دارد ، این دستگاه خاص دارای یک ماتریس مثلثی شکل است و جوابها را می‌توان بتوالی معین نمود .

برهان . فرض کنیم $r_1(t), \ldots, r_n(t)$ توابع اسکالری باشندکه به‌وسیلهٔ (۳۰.۷) معین می‌شوند ، و تابع ماتریسی F را با معادلهٔ

$$F(t) = \sum_{k=0}^{n-1} r_{k+1}(t) P_k(A) \tag{۳۱.۷}$$

تعریف می‌کنیم . توجه‌کنیدکه $F(0) = r_1(0)P_0(A) = I$. با نشان دادن اینکه F درهمان معادلهٔ دیفرانسیل صادق به‌وسیلهٔ e^{tA} ، یعنی $F'(t) = AF(t)$ ، صدق می‌کند ، ثابت می‌کنیم که $F(t) = e^{tA}$.

با مشتقگیری از (۳۱.۷) و استفاده از فرمولهای بازگشتی (۳۰.۷) ، داریم

$$F'(t) = \sum_{k=0}^{n-1} r'_{k+1}(t) P_k(A) = \sum_{k=0}^{n-1} \{r_k(t) + \lambda_{k+1} r_{k+1}(t)\} P_k(A),$$

که درآن $r_0(t)$ مساوی 0 تعریف می‌شود . این رابطه را به‌شکل زیر می‌نویسیم :

$$F'(t) = \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}(t) P_{k+1}(A) + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_{k+1} r_{k+1}(t) P_k(A),$$

بعد ، با تفریق $\lambda_n F(t) = \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_n r_{k+1}(t) P_k(A)$ از آن ، رابطهٔ زیر را خواهیم داشت :

$$F'(t) - \lambda_n F(t) = \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}(t)\{P_{k+1}(A) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n) P_k(A)\}. \tag{۳۲.۷}$$

اما از (۲۸.۷) معلوم می‌شود که $P_{k+1}(A) = (A - \lambda_{k+1} I) P_k(A)$ ؛ درنتیجه ،

$$\begin{aligned} P_{k+1}(A) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n) P_k(A) &= (A - \lambda_{k+1} I) P_k(A) + (\lambda_{k+1} - \lambda_n) P_k(A) \\ &= (A - \lambda_n I) P_k(A). \end{aligned}$$

بنابراین ، معادلهٔ (۳۲.۷) خواهد شد

$$\begin{aligned} F'(t) - \lambda_n F(t) = (A - \lambda_n I) \sum_{k=0}^{n-2} r_{k+1}(t) P_k(A) &= (A - \lambda_n I)\{F(t) - r_n(t) P_{n-1}(A)\} \\ &= (A - \lambda_n I) F(t) - r_n(t) P_n(A). \end{aligned}$$

قضیهٔ‌کیلی ـ هامیلتون‌ایجاب می‌کندکه $P_n(A) = O$ ؛ درنتیجه ، معادلهٔ آخر به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$F'(t) - \lambda_n F(t) = (A - \lambda_n I)F(t) = AF(t) - \lambda_n F(t),$$

که از آن معلــوم می‌شود که $F'(t) = AF(t)$. چون $F(0) = I$ ، قضیهٔ یکتایی (قضیهٔ ۷۰۷) نشان می‌دهد که $F(t) = e^{tA}$.

مثال ۱. اگر A یک ماتریس 2×2 باشد که هر دو مقدار ویژه‌اش مساوی λ اند ، e^{tA} را به‌صورت ترکیبی خطی از I و A بیان نمایید .

حل. با نوشتن $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda$ ، باید دستگاه معادلات دیفرانسیل

$$r_1'(t) = \lambda r_1(t), \qquad r_1(0) = 1,$$

$$r_2'(t) = \lambda r_2(t) + r_1(t), \qquad r_2(0) = 0$$

را حل کنیم . باحل این معادلات مرتبهٔ اول بتوالی ، در می‌یابیم که

$$r_1(t) = e^{\lambda t}, \qquad r_2(t) = te^{\lambda t}.$$

چون $P_0(A) = I$ و $P_1(A) = A - \lambda I$ ، فرمول مطلوب برای e^{tA} عبارت خواهد بوداز

$$e^{tA} = e^{\lambda t}I + te^{\lambda t}(A - \lambda I) = e^{\lambda t}(1 - \lambda t)I + te^{\lambda t}A. \qquad (۳۳۰۷)$$

مثال ۲. مثال ۱ را درصــورتی حل کنید که مقادیر ویژهٔ A ، λ و μ بوده‌و $\lambda \neq \mu$.

حل. دراین حالت دستگاه معادلات دیفرانسیل به‌صورت زیر است :

$$r_1'(t) = \lambda r_1(t), \qquad r_1(0) = 1,$$
$$r_2'(t) = \mu r_2(t) + r_1(t), \qquad r_2(0) = 0.$$

جوابهای آن عبارتند از

$$r_1(t) = e^{\lambda t}, \qquad r_2(t) = \frac{e^{\lambda t} - e^{\mu t}}{\lambda - \mu}.$$

چون $P_0(A) = I$ و $P_1(A) = A - \lambda I$ ، فرمول مطلوب برای e^{tA} مساوی است با

$$e^{tA} = e^{\lambda t}I + \frac{e^{\lambda t} - e^{\mu t}}{\lambda - \mu}(A - \lambda I) = \frac{\lambda e^{\mu t} - \mu e^{\lambda t}}{\lambda - \mu}I + \frac{e^{\lambda t} - e^{\mu t}}{\lambda - \mu}A. \qquad (۳۴۰۷)$$

اگر مقادیر ویژهٔ λ, μ اعدادی مختلط باشند ، نماییهای $e^{\lambda t}$ و $e^{\mu t}$ نیز اعدادی

مختلط اند . اما ، اگر λ و μ مزدوجهای مختلط باشند ، اسکالرهای ضرب شده در I و A در (۳۴۰۷) حقیقی خواهند بود . مثلاً ، فرض کنیم

$$\lambda = \alpha + i\beta, \qquad \mu = \alpha - i\beta, \qquad \beta \neq 0.$$

دراین صورت ، $\lambda - \mu = 2i\beta$ ؛ درنتیجه ، معادلهٔ (۳۴۰۷) خواهد شد

$$\begin{aligned} e^{tA} &= e^{(\alpha+i\beta)t}I + \frac{e^{(\alpha+i\beta)t} - e^{(\alpha-i\beta)t}}{2i\beta}[A - (\alpha + i\beta)I] \\ &= e^{\alpha t}\left\{e^{i\beta t}I + \frac{e^{i\beta t} - e^{-i\beta t}}{2i\beta}(A - \alpha I - i\beta I)\right\} \\ &= e^{\alpha t}\left\{(\cos\beta t + i\sin\beta t)I + \frac{\sin\beta t}{\beta}(A - \alpha I - i\beta I)\right\}. \end{aligned}$$

جملات شامل i حذف می‌شوند و به‌دست می‌آوریم که

$$e^{tA} = \frac{e^{\alpha t}}{\beta}\{(\beta\cos\beta t - \alpha\sin\beta t)I + \sin\beta t\, A\}. \qquad (۳۵۰۷)$$

۱۴۰۷ روشهای دیگر برای محاسبهٔ e^{tA} در حالات خاص

روش‌پوتزر برای بیان e^{tA} به‌صورت یک چندجمله‌ای از A کاملاً کلی است ، چرا که‌برای جمیع ماتریسهای مربعی A اعتبار دارد . یک روش کلی همیشه ساده‌ترین روش برای‌استفاده در بعضی حالات خاص نیست . دراین بخش روشهای ساده‌تری برای محاسبهٔ e^{tA} درسه حالت‌خاص زیر ارائه می‌دهیم : (آ) وقتی همهٔ مقادیر ویژهٔ A مساویند ؛ (ب) وقتی همهٔ مقادیر ویـژهٔ A متمایزند ؛ و (پ) وقتی A دو مقدار ویژهٔ متمایز دارد که دقیقاً یکی درجهٔ تکرارش 1 است .

قضیهٔ ۱۰۰۷ . هرگاه A یک‌ماتریس $n \times n$ باشدکه‌همهٔ مقادیرویژه‌اش مساوی λ است ، آنگاه خواهیم داشت

$$e^{tA} = e^{\lambda t}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{t^k}{k!}(A - \lambda I)^k. \qquad (۳۶۰۷)$$

برهان . چون ماتریسهای λtI و $t(A - \lambda I)$ تعویض می‌شوند ، داریم

$$e^{tA} = e^{\lambda tI}e^{t(A-\lambda I)} = (e^{\lambda t}I)\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(A - \lambda I)^k .$$

قضیهٔ کیلـــی ــ هامیلتون ایجـاب می‌کنــد که، به‌ازای هر $k \geq n$ ، $(A - \lambda I)^k = O$ ؛ درنتیجه، قضیه ثابت می‌شود.

قضیهٔ ۱۱۰۷ . هرگاه A یک ماتریس $n \times n$ با n مقدارویژهٔ متمایز $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ باشد، آنگاه خواهیم داشت

$$e^{tA} = \sum_{k=1}^{n} e^{t\lambda_k} L_k(A) ,$$

که درآن $L_k(A)$ یک چنــدجمله‌ای از A از درجــهٔ $n - 1$ است کــه با فرمول زیر داده می‌شود:

به‌ازای $k = 1, 2, \ldots, n$ ، $L_k(A) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \dfrac{A - \lambda_j I}{\lambda_k - \lambda_j}$.

تذکر. چند جمله‌ایهای $L_k(A)$ را **ضرایب درونیابی لاگرانژ** می‌نامند.

برهان. تابع ماتریسی F را با معادلهٔ

$$F(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{t\lambda_k} L_k(A) \tag{۳۷۰۷}$$

تعریف‌کرده، تحقیق می‌کنیم که F در معادلهٔ دیفرانسیل $F'(t) = AF(t)$ با شرطاولیهٔ $F(0) = I$ صدق می‌کند. از (۳۷۰۷) معلوم می‌شود که

$$AF(t) - F'(t) = \sum_{k=1}^{n} e^{t\lambda_k}(A - \lambda_k I)L_k(A) .$$

بنابر قضیهٔ کیلی ــ هامیلتون، به‌ازای‌هر k داریم $(A - \lambda_k I)L_k(A) = O$ ؛ درنتیجه، F در معادلهٔ دیفرانسیل $F'(t) = AF(t)$ صدق می‌کند.

برای اتمام برهان باید نشان دهیم F در شرطاولیهٔ $F(0) = I$ صدق می‌کند، که به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$\sum_{k=1}^{n} L_k(A) = I . \tag{۳۸۰۷}$$

برهانی از (۳۸۰۷) در تمرین ۱۶ از بخش ۱۵۰۷ مختصرا " آمده است .

در قضیهٔ بعدی به حالتی می‌پردازیم که A دو مقدار ویژهٔ متمایز دارد که دقیقا " یکی از آنها درجهٔ تکرارش 1 است .

قضیهٔ ۱۲۰۷ . فرض‌کنیم A یک ماتریس $n \times n$ $(n \geq 3)$ باشد ، با دو مقدار ویژهٔ متمایز λ و μ ، که λ بادرجهٔ تکرار $n-1$ و μ با درجهٔ تکرار 1 باشد . دراین‌صورت ، داریم

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k + \left\{ \frac{e^{\mu t}}{(\mu - \lambda)^{n-1}} - \frac{e^{\lambda t}}{(\mu - \lambda)^{n-1}} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} (\mu - \lambda)^k \right\} (A - \lambda I)^{n-1}.$$

برهان. مثل برهان قضیهٔ ۱۰۰۷ ، شروع می‌کنیم به نوشتن

$$e^{tA} = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k = e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k + e^{\lambda t} \sum_{k=n-1}^{\infty} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k$$

$$= e^{\lambda t} \sum_{k=0}^{n-2} \frac{t^k}{k!} (A - \lambda I)^k + e^{\lambda t} \sum_{r=0}^{\infty} \frac{t^{n-1+r}}{(n-1+r)!} (A - \lambda I)^{n-1+r}.$$

حال ، با استفاده از قضیهٔ کیلی ــ هامیلتون ، سری را روی r در شکل بسته محاسبه می‌کنیم . چون

$$A - \mu I = A - \lambda I - (\mu - \lambda) I ,$$

در می‌یابیم که

$$(A - \lambda I)^{n-1}(A - \mu I) = (A - \lambda I)^n - (\mu - \lambda)(A - \lambda I)^{n-1}.$$

طرف چپ ، بنابر قضیهٔ کیلی ــ هامیلتون ، O است ؛ درنتیجه ،

$$(A - \lambda I)^n = (\mu - \lambda)(A - \lambda I)^{n-1}.$$

باچندبار استفاده از این رابطه ، درمی‌یابیم که

$$(A - \lambda I)^{n-1+r} = (\mu - \lambda)^r (A - \lambda I)^{n-1}.$$

لذا ، سری روی r خواهد شد

$$\sum_{r=0}^{\infty}\frac{t^{n-1+r}}{(n-1+r)!}(\mu-\lambda)^r(A-\lambda I)^{n-1}=\frac{1}{(\mu-\lambda)^{n-1}}\sum_{k=n-1}^{\infty}\frac{t^k}{k!}(\mu-\lambda)^k(A-\lambda I)^{n-1}$$
$$=\frac{1}{(\mu-\lambda)^{n-1}}\left\{e^{t(\mu-\lambda)}-\sum_{k=0}^{n-2}\frac{t^k}{k!}(\mu-\lambda)^k\right\}(A-\lambda I)^{n-1}.$$

این برهان را تمام می‌کند .

فرمول صــریح قضیهٔ ۱۲۰۷ را می‌تــوان با اعمال روش پوتزر نیز نتیجه گرفت ، اما جزئیات کار پیچیده‌تر است .

فرمولهای صریح قضایای ۱۰۰۷ ، ۱۱۰۷ ، و ۱۲۰۷ تمام ماتریسهای از مرتبهٔ $n \le 3$ را می‌پوشانند . چون اغلب در عمل با حالت 3×3 مواجهیم ، فرمولهای این حالت برای سهولت در ارجاع ذیلا" ذکر شده‌اند .

حالت ۱ . هرگاه ماتریس 3×3 ، A دارای مقادیر ویژهٔ $\lambda, \lambda, \lambda$ باشد ، آنگاه

$$e^{tA}=e^{\lambda t}\{I+t(A-\lambda I)+\tfrac{1}{2}t^2(A-\lambda I)^2\}.$$

حالت ۲ . هرگاه ماتریس 3×3 ، A دارای مقادیر ویژهٔ متمایز λ, μ, ν باشد ، آنگاه

$$e^{tA}=e^{\lambda t}\frac{(A-\mu I)(A-\nu I)}{(\lambda-\mu)(\lambda-\nu)}+e^{\mu t}\frac{(A-\lambda I)(A-\nu I)}{(\mu-\lambda)(\mu-\nu)}+e^{\nu t}\frac{(A-\lambda I)(A-\mu I)}{(\nu-\lambda)(\nu-\mu)}.$$

حالت ۳ . هرگاه ماتریس 3×3 ، A دارای مقادیر ویژهٔ λ, λ, μ ، که $\lambda \neq \mu$ ، باشد ، آنگاه

$$e^{tA}=e^{\lambda t}\{I+t(A-\lambda I)\}+\frac{e^{\mu t}-e^{\lambda t}}{(\mu-\lambda)^2}(A-\lambda I)^2-\frac{te^{\lambda t}}{\mu-\lambda}(A-\lambda I)^2.$$

مثال . e^{tA} را وقتی $A=\begin{bmatrix}0&1&0\\0&0&1\\2&-5&4\end{bmatrix}$ حساب کنید .

حل. مقادیرویژهٔ A عبارتند از $1, 1, 2$ ؛ درنتیجه، از فرمول حالت ۳ معلوم می‌شود کـه

$$e^{tA} = e^t\{I + t(A - I)\} + (e^{2t} - e^t)(A - I)^2 - te^t(A - I)^2. \qquad (۳۹.۷)$$

با دسته‌بندی توانهای A ، می‌توان این رابطه را به‌صورت زیر نیز نوشت :

$$e^{tA} = (-2te^t + e^{2t})I + \{(3t + 2)e^t - 2e^{2t}\}A - \{(t + 1)e^t - e^{2t}\}A^2. \qquad (۴۰.۷)$$

دراین مرحله می‌توان $(A - I)^2$ یا A^2 را محاسبه‌کردو، با انجام اعمال آمده در (۳۹.۷) یا (۴۰.۷) ، نتیجه را به‌صورت یک ماتریس 3×3 نوشت :

$$e^{tA} = \begin{bmatrix} -2te^t + e^{2t} & (3t + 2)e^t - 2e^{2t} & -(t + 1)e^t + e^{2t} \\ -2(t + 1)e^t + 2e^{2t} & (3t + 5)e^t - 4e^{2t} & -(t + 2)e^t + 2e^{2t} \\ -2(t + 2)e^t + 4e^{2t} & (3t + 8)e^t - 8e^{2t} & -(t + 4)e^t + 4e^{2t} \end{bmatrix}.$$

۱۵.۷ تمرین

برای هریک از ماتریسهای تمرینات ۱ تا ۶، e^{tA} را به‌صورت یک چندجمله‌ای از A بیان کنیـد .

۱. $A = \begin{bmatrix} 5 & -2 \\ 4 & -1 \end{bmatrix}$.

۲. $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

۳. $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$.

۴. $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$.

۵. $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

۶. $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

۷. (آ) می‌دانیم که‌همهٔ مقادیرویژهٔ ماتریس 3×3 ، A مساوی λ است. ثابت‌کنید کـه

$$e^{tA} = \tfrac{1}{2}e^{\lambda t}\{(\lambda^2t^2 - 2\lambda t + 2)I + (-2\lambda t^2 + 2t)A + t^2A^2\}.$$

(ب) فرمول نظیررا درصورتی‌که A یک‌ماتریس 4×4 باشدکه همهٔ مقادیرویژه‌اش

مساوی λ است پیداکنید .

در هریک از تمرینهای ۸ تا ۱۵ ، دستگاه $Y' = AY$ با شرط اولیهٔ داده شده را حل کنید .

۸ . $Y(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$.

۹ . $Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -5 & 3 \\ -15 & 7 \end{bmatrix}$.

۱۰ . $Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

۱۱ . $Y(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$.

۱۲ . $Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -6 & -11 & -6 \end{bmatrix}$.

۱۳ . $Y(0) = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -3 \\ 2 & 1 & -6 \\ -1 & -2 & 0 \end{bmatrix}$.

۱۴ . $Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$.

۱۵ . $Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

۱۶ . دراین تمرین، برهان مختصری برای معادلهٔ (۳۸۰۷) که در برهان قضیهٔ ۱۱۰۷ به

کاررفت ارائه می‌شود. فرض‌کنید $L_k(\lambda)$ چند جمله‌ایی از λ از درجهٔ $n-1$ باشد که با معادلهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$L_k(\lambda) = \prod_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{n} \frac{\lambda - \lambda_j}{\lambda_k - \lambda_j},$$

که درآن $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ ، n اسکالر متمایزند.

(آ) ثابت کنید که

$$L_k(\lambda_i) = \begin{cases} 0 \text{ ، اگر } \lambda_i \neq \lambda_k \\ 1 \text{ ، اگر } \lambda_i = \lambda_k \end{cases} \cdot$$

(ب) فرض کنید $y_1, \ldots, y_n$ ، n اسکالر دلخواه بوده، و

$$p(\lambda) = \sum_{k=1}^{n} y_k L_k(\lambda).$$

ثابت کنید $p(\lambda)$ تنها چندجمله‌ای ازدرجهٔ نابیشتراز $n-1$ است که در n معادلهٔ زیر صدق می‌کند:

$$\text{به‌ازای } k = 1, 2, \ldots, n \text{ ، } p(\lambda_k) = y_k \cdot$$

(پ) ثابت کنید به‌ازای هر λ ، $\sum_{k=1}^{n} L_k(\lambda) = 1$ ، و نتیجه بگیرید که به‌ازای هر ماتریس مربعی A داریم

$$\sum_{k=1}^{n} L_k(A) = I,$$

که درآن I ماتریس همانی می‌باشد.

۱۶.۷ دستگاههای خطی غیرهمگن با ضرایب ثابت

حال مسئله با مقدار اولیهٔ غیرهمگن

$$Y'(t) = AY(t) + Q(t), \qquad Y(a) = B, \tag{۴۱.۷}$$

بر بازهٔ J را درنظر می‌گیریم. دراینجا A یک ماتریس ثابت $n \times n$ ، Q یک تابع برداری n بعدی (به‌صورت یک‌ماتریس‌ستونی $n \times 1$) پیوسته بر J ، و a نقطهٔ مفروضی در J است. می‌توان با همان عملی که درحالت اسکالر به‌کار رفت به یک فرمول صریح برای جواب این مسئله دست یافت.

ابتدا طرفین (۴۱.۷) را در ماتریس‌نمایی e^{-tA} ضرب کرده، معادلهٔ دیفرانسیل

را به شکل

$$e^{-tA}\{Y'(t) - AY(t)\} = e^{-tA}Q(t) \tag{۴۲۰۷}$$

می‌نویسیم . طرف چپ (۴۲۰۷) مشتق حاصل ضرب $e^{-tA}Y(t)$ است . بنابر این ، اگر از طرفین (۴۲۰۷) از a تا x ، که $x \in J$ ، انتگرال بگیریم ، خواهیم داشت

$$e^{-xA}Y(x) - e^{-aA}Y(a) = \int_a^x e^{-tA}Q(t)\,dt\,.$$

با ضرب این رابطه‌در e^{xA} ، فرمول‌صریح (۴۳۰۷) به‌دست می‌آید که در قضیهٔ زیرآمده است .

قضیهٔ ۱۳۰۷ . فرض‌کنیم A یک‌ماتریس‌ثابت $n \times n$ ، و Q یک تابع برداری n بعدی پیوسته برбازهٔ J باشد . دراین صورت ، مسئله با مقدار اولیهٔ

$$Y'(t) = AY(t) + Q(t)\,, \qquad Y(a) = B\,,$$

جواب منحصر بفردی بر J دارد که با فرمول صریح

$$Y(x) = e^{(x-a)A}B + e^{xA}\int_a^x e^{-tA}Q(t)\,dt \tag{۴۳۰۷}$$

بیان می‌شود .

مثل‌حالت همگن ، مشکل به‌کار بردن این فرمول در عمل محاسبهٔ ماتریسهای نمایی است .

توجه کنید که جملهٔ اول ، یعنی $e^{(x-a)A}B$ ، جواب مسئلهٔ همگن $Y'(t) = AY(t),\ Y(a) = B$ است . جملهٔ دوم جواب مسئلهٔ غیرهمگن

$$Y'(t) = AY(t) + Q(t)\,, \qquad Y(a) = O$$

می‌باشد . قضیهٔ ۱۳۰۷ را با یک مثال توضیح می‌دهیم .

مثال . مسئله با مقدار اولیهٔ

$$Y'(t) = AY(t) + Q(t)\,, \qquad Y(0) = B\,,$$

را بر بازهٔ $(-\infty\,, +\infty)$ حل کنید ، که درآن

$$A = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{bmatrix}, \quad Q(t) = \begin{bmatrix} e^{2t} \\ 0 \\ te^{2t} \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}.$$

حل. بنابر قضیهٔ ۱۳۰۷ ، جواب به صورت زیر است :

$$Y(x) = e^{xA}\int_0^x e^{-tA}Q(t)\,dt = \int_0^x e^{(x-t)A}Q(t)\,dt. \tag{۴۴۰۷}$$

مقادیر ویژهٔ A عبارتند از 2 ، 2 ، و 4 . برای محاسبهٔ e^{xA} از فرمول حالت ۳ ، بخش ۱۴۰۷ ، استفاده می‌کنیم تا به‌دست آید که

$$\begin{aligned} e^{xA} &= e^{2x}\{I + x(A-2I)\} + \tfrac{1}{4}(e^{4x} - e^{2x})(A-2I)^2 - \tfrac{1}{2}xe^{2x}(A-2I)^2 \\ &= e^{2x}\{I + x(A-2I) + \tfrac{1}{4}(e^{2x} - 2x - 1)(A-2I)^2\}. \end{aligned}$$

می‌توان ازتعویض x با $x - t$ دراین‌فرمول $e^{(x-t)A}$ رابه‌دست‌آورد . بنابراین ، انتگرالده در (۴۴۰۷) عبارت است از

$$\begin{aligned} e^{(x-t)A}Q(t) = e^{2(x-t)}\{&I + (x-t)(A-2I) \\ &+ \tfrac{1}{4}[e^{2(x-t)} - 2(x-t) - 1](A-2I)^2\}Q(t) \end{aligned}$$

$$= e^{2x}\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ t \end{bmatrix} + (A-2I)e^{2x}\begin{bmatrix} x-t \\ 0 \\ t(x-t) \end{bmatrix} + \frac{1}{4}(A-2I)^2e^{2x}\begin{bmatrix} e^{2x}e^{-2t} - 2(x-t) - 1 \\ 0 \\ e^{2x}te^{-2t} - 2t(x-t) - t \end{bmatrix}.$$

با انتگرالگیری ، درمی‌یابیم که

$$Y(x) = \int_0^x e^{(x-t)A}Q(t)\,dt = e^{2x}\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ \frac{1}{2}x^2 \end{bmatrix} + (A-2I)e^{2x}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}x^2 \\ 0 \\ \frac{1}{6}x^3 \end{bmatrix}$$

$$+ \frac{1}{4}(A-2I)^2e^{2x}\begin{bmatrix} \frac{1}{2}e^{2x} - \frac{1}{2} - x - x^2 \\ 0 \\ \frac{1}{4}e^{2x} - \frac{1}{4} - \frac{1}{2}x - \frac{1}{2}x^2 - \frac{1}{3}x^3 \end{bmatrix}.$$

چون داریم

$$A - 2I = \begin{bmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{و} \quad (A-2I)^2 = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 2 \\ -2 & 0 & -2 \\ 2 & 0 & 2 \end{bmatrix} \text{ ،}$$

خواهیم داشت

$$Y(x) = e^{2x}\begin{bmatrix} x \\ 0 \\ \frac{1}{2}x^2 \end{bmatrix} + e^{2x}\begin{bmatrix} \frac{1}{6}x^3 \\ -\frac{1}{6}x^3 \\ x^2 + \frac{1}{6}x^3 \end{bmatrix} + e^{2x}\begin{bmatrix} \frac{3}{8}e^{2x} - \frac{3}{8} - \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \\ -\frac{3}{8}e^{2x} + \frac{3}{8} + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}x^2 + \frac{1}{6}x^3 \\ \frac{3}{8}e^{2x} - \frac{3}{8} - \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \end{bmatrix}$$

$$= e^{2x}\begin{bmatrix} \frac{3}{8}e^{2x} - \frac{3}{8} + \frac{1}{4}x - \frac{3}{4}x^2 \\ -\frac{3}{8}e^{2x} + \frac{3}{8} + \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}x^2 \\ \frac{3}{8}e^{2x} - \frac{3}{8} - \frac{3}{4}x + \frac{3}{4}x^2 \end{bmatrix}.$$

سطرهای این ماتریس توابع مطلوب y_1, y_2, y_3 می‌باشند.

۱۷۰۷ تمرین

۱ . فرض کنید Z یک جواب دستگاه غیرهمگن

$$Z'(t) = AZ(t) + Q(t)$$

بربازهٔ J با مقدار اولیهٔ $Z(a)$ باشد. ثابت کنید که دستگاه غیرهمگن

$$Y'(t) = AY(t) + Q(t)$$

بر J با مقدار اولیهٔ $Y(a)$ فقط یک جواب دارد و این جواب از فرمول

$$Y(t) = Z(t) + e^{(t-a)A}\{Y(a) - Z(a)\}$$

به‌دست می‌آید. اغلب روشهای خاصی برای تعیین یک جواب خصوصی $Z(t)$ که‌شبیه تابع معلوم $Q(t)$ است وجود دارند. تمرینهای ۲، ۳، ۵، و ۷ چنین روشهایی را برای $Q(t) = C$، $Q(t) = e^{\alpha t}C$، $Q(t) = t^m C$، و $Q(t) = (\cos \alpha t)C + (\sin \alpha t)D$، که درآنها C و D بردارهای ثابتی‌اند، توضیح می‌دهند. اگر جواب خصوصی $Z(t)$ که‌به‌این‌طریق به‌دست می‌آید مقدار اولیهٔ لازم را نداشته باشد، $Z(t)$ را همانطور که در تمرین ۱ نموده شده اصلاح می‌کنیم تا جواب دیگری مانند $Y(t)$ با مقدار اولیهٔ لازم به‌دست آید.

۲ . (آ) فرض کنید A یک ماتریس $n \times n$ ثابت بوده، و B و C بردارهای n بعدی ثابتی باشند. ثابت کنید جواب دستگاه

$$Y'(t) = AY(t) + C, \qquad Y(a) = B,$$

بر $(-\infty, +\infty)$ از فرمول

$$Y(x) = e^{(x-a)A}B + \left(\int_0^{x-a} e^{uA}\, du\right)C$$

به‌دست می‌آید.

(ب) هرگاه A نامنفرد باشد، نشان‌دهید که انتگرال قسمت (آ) دارای مقدار $\{e^{(x-a)A} - I\}A^{-1}$ است.

(پ) $Y(x)$ راوقتی

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} b \\ c \end{bmatrix}, \quad a = 0$$

به‌طور صریح حساب کنید.

۳ . فرض کنید A یک ماتریس ثابت $n \times n$ بوده، B و C بردارهایی ثابت و n بعدی باشند، و α اسکالر مفروضی باشد.

(آ) ثابت کنید دستگاه غیر همگن $Z'(t) = AZ(t) + e^{\alpha t}C$ جوابی به شکل $Z(t) = e^{\alpha t}B$ دارد اگر و فقط اگر $(\alpha I - A)B = C$.

(ب) هرگاه α یک مقدار ویژهٔ A نباشد، ثابت کنید بردار B را همیشه می‌توان طوری اختیار کرد که دستگاه قسمت (آ) جوابی به شکل $Z(t) = e^{\alpha t}B$ داشته باشد.

(پ) هرگاه α یک مقدار ویژهٔ A نباشد، ثابت کنید هر جواب دستگاه $Y'(t) = AY(t) + e^{\alpha t}C$ به شکل $Y(t) = e^{tA}(Y(0) - B) + e^{\alpha t}B$ است، که در آن $B = (\alpha I - A)^{-1}C$.

۴ . با استفاده از روش تمرین ۳، برای دستگاه غیرهمگن $Y'(t) = AY(t) + e^{2t}C$، که درآن

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \end{bmatrix}, \quad Y(0) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

جوابی پیدا کنید.

۵ . فرض‌کنید A یک ماتریس ثابت $n \times n$ بوده، B و C بردارهایی ثابت و n بعدی باشند، و m یک عدد صحیح مثبت باشد.

(آ) ثابت کنید دستگاه غیرهمگن $Y'(t) = AY(t) + t^m C,\ Y(0) = B$ جوابی خصوصی به‌شکل

$$Y(t) = B_0 + tB_1 + t^2B_2 + \cdots + t^mB_m\,,$$

که درآن $B_0, B_1, \ldots, B_m$ بردارهایی ثابت‌اند، دارد اگر و فقط اگر

$$C = -\frac{1}{m!}A^{m+1}B.$$

ضرایب $B_0, B_1, \ldots, B_m$ این جواب را معین نمایید.

(ب) ثابت کنید اگر A نامنفرد باشد، همیشه می‌توان بردار اولیهٔ B را طوری اختیار کرد که دستگاه قسمت (آ) جوابی به شکل معین داشته باشد.

۶. دستگاه غیر همگن

$$y_1' = 3y_1 + y_2 + t^3$$

$$y_2' = 2y_1 + 2y_2 + t^3$$

را درنظر بگیرید.

(آ) یک جواب خصوصی به شکل $Y(t) = B_0 + tB_1 + t^2B_2 + t^3B_3$ پیدا کنید.

(ب) یک جواب دستگاه را با شرایط $y_1(0) = y_2(0) = 1$ پیدا کنید.

۷. فرض‌کنید A یک ماتریس‌ثابت $n \times n$ بوده، B, C, D بردارهایی ثابت و n بعدی باشند، و α عدد حقیقی ناصفر معلومی باشد. ثابت کنید دستگاه غیرهمگن

$$Y'(t) = AY(t) + (\cos \alpha t)C + (\sin \alpha t)D, \qquad Y(0) = B,$$

جوابی خصوصی به شکل

$$Y(t) = (\cos \alpha t)E + (\sin \alpha t)F,$$

که درآن E و F بردارهایی ثابت‌اند، دارد اگر و فقط اگر

$$(A^2 + \alpha^2 I)B = -(AC + \alpha D).$$

برای‌این‌جواب، E و F را برحسب A, B, C معین‌کنید. توجه‌کنید که اگر $A^2 + \alpha^2 I$ نامنفرد باشد، همیشه‌می‌توان بردار اولیهٔ B را طوری اختیار کرد که دستگاه‌جوابی به شکل معین داشته باشد.

۸. (آ) یک جواب خصوصی دستگاه غیر همگن

$$y_1' = y_1 + 3y_2 + 4 \sin 2t$$

$$y_2' = y_1 - y_2$$

را بیابید.

(ب) یک جواب دستگاه با شرایط $y_1(0) = y_2(0) = 1$ را پیدا کنید.

در هر یک از تمرینهای ۹ تا ۱۲، دستگاه غیرهمگن $Y'(t) = AY(t) + Q(t)$ را با

شرط اولیهٔ داده شده حل کنید .

۹ . $Y(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$, $Q(t) = \begin{bmatrix} 0 \\ -2e^t \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$.

۱۰ . $Y(0) = \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \end{bmatrix}$, $Q(t) = \begin{bmatrix} e \\ e^{2t} \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 1 & -3 \end{bmatrix}$.

۱۱ . $Y(0) = \begin{bmatrix} -\frac{1007}{442} \\ \frac{707}{221} \end{bmatrix}$, $Q(t) = \begin{bmatrix} 7e^t - 27 \\ -3e^t + 12 \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -5 & -1 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$.

۱۲ . $Y(0) = \begin{bmatrix} 6 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$, $Q(t) = \begin{bmatrix} t^2 \\ 2t \\ t \end{bmatrix}$, $A = \begin{bmatrix} -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$.

۱۸۰۷ دستگاه خطی کلی، $Y'(t) = P(t)Y(t) + Q(t)$

قضیهٔ ۱۳۰۷ برای جواب دستگاه خطی

$$Y'(t) = AY(t) + Q(t), \qquad Y(a) = B,$$

که درآن A یک ماتـریس $n \times n$ ثابت بوده و $Q(t)$, $Y(t)$ ماتریسهای ستونی $n \times 1$ ی هستند ، یک فرمول صریح به‌دست می‌دهد . اینک به حالت کلیتر

$$Y'(t) = P(t)Y(t) + Q(t), \qquad Y(a) = B, \tag{۴۵۰۷}$$

می‌پردازیم ، که درآن ماتریس $n \times n$ ، $P(t)$ لزوما " ثابت نیست .

هرگاه P و Q بر بازهٔ بـاز J پیوسته باشند ، یک قضیهٔ وجودی ـ یکتایی کلی که در یکی از بخشهـای آتی ثابت می‌شود می‌گوید که به‌ازای هر a در J و هر بردار اولیهٔ B درست یک جواب برای مسئله با مقدار اولیهٔ (۴۵۰۷) وجود دارد . دراین بخش، با استفاده‌ازاین نتیجه ، فرمولی برای این جواب به‌دست می‌آوریم که قضیهٔ ۱۳۰۷ را تعمیم می‌دهد .

درحالت اسکالر $(n = 1)$ ، معادلهٔ دیفرانسیل (۴۵۰۷) را می‌توان به‌صورت زیر حل کرد . قرار می‌دهیم $A(x) = \int_a^x P(t)\,dt$.سپس، با ضرب طرفین (۴۵۰۷) در $e^{-A(t)}$ ، معادلهٔ دیفرانسیل را به‌شکل

$$e^{-A(t)}\{Y'(t) - P(t)Y(t)\} = e^{-A(t)}Q(t) \tag{۴۶۰۷}$$

می‌نویسیم . اما طرف چپ مشتق حاصل ضـرب $e^{-A(t)}Y(t)$ است . بنابرایـن ، می‌توان با انتگرالگیری از طرفین از a تا x ، که a و x نقاطی در J اند ، به‌دست آورد که

$$e^{-A(x)}Y(x) - e^{-A(a)}Y(a) = \int_a^x e^{-A(t)}Q(t)\,dt.$$

با ضرب این رابطه در $e^{A(x)}$ فرمول صریح

$$Y(x) = e^{A(x)}e^{-A(a)}Y(a) + e^{A(x)}\int_a^x e^{-A(t)}Q(t)\,dt \qquad (۴۷.۷)$$

به‌دست خواهد آمد .

تنها بخشی از این استدلال که مستقیماً در باب توابع ماتریسی به‌کار نمی‌رود این است که طرف چپ (۴۶.۷) مشتق حاصل ضرب $e^{-A(t)}Y(t)$ است . دراین مرحله از این استفاده‌شد که مشتق $e^{-A(t)}$ مساوی $-P(t)e^{-A(t)}$ اسـت . درحالت اسکالر ، این نتیجه‌ای است از فرمول زیر برای مشتقگیری از توابع نمایی :

هرگاه $E(t) = e^{A(t)}$ ، آنگاه $E'(t) = A'(t)e^{A(t)}$.

متاسفانه ، این فرمول مشتقگیری ، وقتی A یک تابع ماتریسی باشد ، همیشه درست نیست . مثلاً ، برای تابع ماتریسی 2×2 ، $A(t) = \begin{bmatrix} 1 & t \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$ درست نیست . (ر.ک. تمرین ۷ از بخش ۱۲.۷ .) ازاینرو ، برای تعمیم معادلهٔ (۴۷.۷) به‌حالت ماتریسی ، استدلالی اصلاح شده لازم است .

فرض کنید طرفین (۴۵.۷) را در یک ماتریس $n \times n$ نامعین مانند $F(t)$ ضرب‌کرده باشیم . این کار رابطهٔ

$$F(t)Y'(t) = F(t)P(t)Y(t) + F(t)Q(t)$$

را به‌ما می‌دهد . حال ، با افزودن $F'(t)Y(t)$ به طرفین این رابطه ، طرف چپ آن را به مشتق حـاصل‌ضرب $F(t)Y(t)$ تبدیل می‌کنیم . با این عمل ، معادلهٔ آخر نتیجه می‌دهد کـه

$$\{F(t)Y(t)\}' = \{F'(t) + F(t)P(t)\}Y(t) + F(t)Q(t).$$

اگر بتوان ماتریس $F(t)$ را طـوری اختیار کرد که مجموع $\{F'(t) + F(t)P(t)\}$ سمت راست ماتریس صفر باشد ، معادله آخر به

$$\{F(t)Y(t)\}' = F(t)Q(t)$$

ساده خواهد شد . با انتگرالگیری از این رابطه از a تا x ، خواهیم داشت

$$F(x)Y(x) - F(a)Y(a) = \int_a^x F(t)Q(t)\,dt\,.$$

هرگاه ، علاوه براین ، ماتریس $F(x)$ نامنفرد باشد ، فرمول صریح

$$Y(x) = F(x)^{-1}F(a)Y(a) + F(x)^{-1}\int_a^x F(t)Q(t)\,dt \tag{۴۸.۷}$$

را خواهیم داشت . این فرمول تعمیمی است از فرمول اسکالر (۴۷.۷) . این فرایند در صورتی بکاراست که بتوان تابع ماتریسی $n \times n$ ، $F(t)$ را طوری پیدا کرد که در معادلهٔ دیفرانسیل ماتریسی

$$F'(t) = -F(t)P(t)$$

صدق کرده و نامنفرد باشد .

توجه کنید که این معادلهٔ دیفرانسیل خیلی شبیه معادلهٔ دیفرانسیل اصلی (۴۵.۷) با $Q(t) = 0$ است ، جزآنکه تابع مجهول $F(t)$ به‌جای یک ماتریس ستونی بودن یک ماتریس مربعی است . همچنین ، تابع مجهول به‌جای آنکه از چپ در $P(t)$ ضرب شده باشد از راست در $-P(t)$ ضرب شده است .

حال ثابت می‌کنیم که معادلهٔ دیفرانسیل برای F همیشه یک جواب نامنفرددارد . اثبات به قضیهٔ وجودی زیر برای دستگاههای خطی همگن بستگی دارد .

قضیهٔ ۱۴.۷ . فرض‌کنیم $A(t)$ یک تابع ماتریسی $n \times n$ باشد که بر یک بازهٔ باز J پیوسته است . هرگاه $a \in J$ و B یک بردار n بعدی معلوم باشد ، دستگاه خطی همگن

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \qquad Y(a) = B,$$

یک جواب برداری n بعدی مانند Y بر J دارد .

برهانی از قضیهٔ ۱۴.۷ در بخش ۲۱.۷ داده می‌شود . به‌کمک این قضیه می‌توان قضیهٔ زیر را ثابت کرد .

قضیهٔ ۱۵.۷ . اگر P یک تابع ماتریسی $n \times n$ باشد که بر بازهٔ باز J پیوسته است ، و a نقطه‌ای در J باشد ، یک‌تابع ماتریسی $n \times n$ مانند F هست‌که در معادلهٔ دیفرانسیل

ماتریسی

$$F'(x) = -F(x)P(x) \tag{۴۹.۷}$$

بر J با مقدار اولیهٔ $F(a) = I$ صدق می‌کند. بعلاوه، $F(x)$ به‌ازای هر x در J نامنفرد می‌باشد.

برهان. فرض کنیم $Y_k(x)$ یک جواب برداری معادلهٔ دیفرانسیل

$$Y_k'(x) = -P(x)^t Y_k(x)$$

بر J با برداراولیهٔ $Y_k(a) = I_k$ ، که I_k ستون k ام ماتریس همانی $n \times n$ ، I است، باشد. دراینجا $P(x)^t$ ترانهادهٔ $P(x)$ است. فرض کنیم $G(x)$ ماتریس $n \times n$ ی باشد که ستون k امش $Y_k(x)$ است. دراین صورت، G در معادلهٔ دیفرانسیل ماتریسی

$$G'(x) = -P(x)^t G(x) \tag{۵۰.۷}$$

بر J بامقداراولیهٔ $G(a) = I$ صدق می‌کند. حال ازطرفین (۵۰.۷) ترانهاده می‌گیریم. چون ترانهادهٔ یک حاصل ضرب مساوی حاصل ضرب ترانهاده‌ها به‌ترتیب عکس است، داریم

$$\{G'(x)\}^t = -G(x)^t P(x).$$

همچنین، ترانهادهٔ مشتق G' مشتق‌ترانهادهٔ G^t است. بنابراین، ماتریس $F(x) = G(x)^t$ در معادلهٔ دیفرانسیل (۴۹.۷) با مقدار اولیهٔ $F(a) = I$ صدق می‌کند.

حال، بانشان دادن‌معکوس، ثابت می‌کنیم $F(x)$ نامنفرد است. فرض کنیم H تابع ماتریسی $n \times n$ ی باشد که ستون k امش جواب معادلهٔ دیفرانسیل

$$Y'(x) = P(x)Y(x)$$

با برداراولیهٔ (ستون k ام I) $Y(a) = I_k$ است. دراین صورت، H در مسئله بامقدار اولیهٔ

$$H'(x) = P(x)H(x), \qquad H(a) = I,$$

بر J صدق می‌کند. حاصل ضرب $F(x)H(x)$ دارای مشتق

$$F(x)H'(x) + F'(x)H(x) = F(x)P(x)H(x) - F(x)P(x)H(x) = O$$

به‌ازای هر x در J است. بنابراین، حاصل ضرب $F(x)H(x)$ ثابت است، $F(x)H(x) = F(a)H(a) = I$ ؛ درنتیجه، $H(x)$ معکوس $F(x)$ می‌باشد. این برهان راتمام خواهد کرد.

نتایج این بخش در قضیهٔ زیر خلاصه شده است .

قضیهٔ ۱۶۰۷ . اگر P یک‌تابع ماتریسی $n \times n$ و Q یک تابع برداری n بعدی باشد ، و هر دو بر بازهٔ باز J پیوسته باشند ، جواب مسئله با مقدار اولیهٔ

$$Y'(x) = P(x)Y(x) + Q(x), \qquad Y(a) = B, \tag{۵۱۰۷}$$

بر J با فرمول

$$Y(x) = F(x)^{-1}Y(a) + F(x)^{-1}\int_a^x F(t)Q(t)\,dt \tag{۵۲۰۷}$$

بیان می‌شود . ماتریس $n \times n$ ، $F(x)$ ترانهادهٔ ماتریسی است که ستون k امش جواب مسئله با مقدار اولیهٔ

$$Y'(x) = -P(x)^t Y(x), \qquad Y(a) = I_k, \tag{۵۳۰۷}$$

می‌باشد ، که درآن I_k ستون k ام ماتریس همانی I است .

اگرچه قضیهٔ ۱۶۰۷ فرمول صریحی برای جواب دستگاه خطی کلی (۵۱۰۷) به‌دست می‌دهد ، این فرمول بخاطرمشکلات تعیین تابع ماتریسی F ، همیشه‌برای محاسبهٔ جواب مفید نیست . تعیین F نیاز به حل n دستگاه خطی همگن (۵۳۰۷) دارد . در بخش بعد یک روش سری توانی توصیف می‌شود که گاهی برای حل دستگاههای خطی همگن به‌کار می‌رود .

بار دیگر متذکر می‌شویم که برهان قضیهٔ ۱۶۰۷ بر قضیهٔ ۱۴۰۷ ، یعنی قضیهٔ وجودی برای دستگاههای خطی همگن ، که هنوز ثابت نشده است ، استوار است .

۱۹۰۷ روش سری توانی برای حل دستگاههای خطی همگن

دستگاه خطی همگن

$$Y'(x) = A(x)Y(x), \qquad Y(0) = B, \tag{۵۴۰۷}$$

را درنظر می‌گیریم ، که درآن ماتریس $n \times n$ ، $A(x)$ بسط به صورت سری توانی از x دارد که در بازهٔ بازی شامل مبداء همگراست ؛ مثلاً ،

به‌ازای $|x| < r_1$ ، $A(x) = A_0 + xA_1 + x^2A_2 + \cdots + x^kA_k + \ldots$ ،

که‌درآن ضرایب $A_0, A_1, A_2, \ldots$ ماتریسهای $n \times n$ معلومی هستند . سعی می‌کنیم جوابی

به‌صورت سری توانی به شکل

$$Y(x) = B_0 + xB_1 + x^2B_2 + \cdots + x^kB_k + \cdots$$

با ضرایب برداری $B_0, B_1, B_2, \ldots$ بیابیم. چون $Y(0) = B_0$ ، شرط اولیه با اختیار (بردار اولیهٔ مقرر) $B_0 = B$ برقرار می‌شود. برای تعیین بقیهٔ ضرایب، سری توانی مربوط به $Y(x)$ را در معادلهٔ دیفرانسیل گذاشته، ضرایب جملات همتوان x را متحد قرار می‌دهیم تا دستگاه معادلات زیر به‌دست آید:

$$(۵۵\cdot۷)\cdot\ B_1 = A_0B, \qquad (k+1)B_{k+1} = \sum_{r=0}^{k} A_rB_{k-r} \text{ ، } k = 1, 2, \ldots \text{ به‌ازای}$$

این معادلات را می‌توان بتوالی نسبت به بردارهای $B_1, B_2, \ldots$ حل کرد. اگر سری توانی حاصل برای $Y(x)$ در بازه‌ای چون $|x| < r_2$ همگرا باشد، $Y(x)$ یک جواب مسئله با مقدار اولیهٔ (۵۴۰۷) در بازهٔ $|x| < r$ است، که درآن $r = \min\{r_1, r_2\}$.

مثلاً، اگر $A(x)$ یک ماتریس ثابت مانند A باشد، $A_0 = A$ و، به‌ازای $k \geq 1$ ، $A_k = O$ ؛ درنتیجه، دستگاه معادلات (۵۵۰۷) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$B_1 = AB \text{ ؛ به‌ازای } k \geq 1 \text{ ، } (k+1)B_{k+1} = AB_k\ .$$

با حل این معادلات بتوالی، درمی‌یابیم که

$$B_k = \frac{1}{k!}A^kB \text{ ، } k \geq 1 \text{ به‌ازای}$$

بنابراین، جواب به‌صورت سری دراین حالت خواهد شد

$$Y(x) = B + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}A^kB = e^{xA}B.$$

این با نتیجه‌ای که پیشتر برای دستگاههای خطی همگن با ضرایب ثابت به‌دست آمد مطابقت دارد.

۲۰۰۷ تمرین

۱. فرض کنید p یک تابع حقیقی و Q یک تابع ماتریسی $n \times 1$ باشد، و هر دو بر بازهٔ J پیوسته باشند. همچنین، A یک ماتریس ثابت $n \times n$ باشد. ثابت کنید مسئله با مقدار اولیهٔ

$$Y'(x) = p(x)AY(x) + Q(x), \qquad Y(a) = B,$$

دارای جواب

$$Y(x) = e^{q(x)A}B + e^{q(x)A}\int_a^x e^{-q(t)A}Q(t)\,dt$$

بر J است، که درآن $q(x) = \int_a^x p(t)\,dt$.

۲ . حالت خاص تمرین ۱ که درآن A نامنفرد است، $a = 0$ ، $p(x) = 2x$ ، و $Q(x) = xC$ ، که درآن C یک بردار ثابت است را درنظر بگیرید. نشان دهید که جواب به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$Y(x) = e^{x^2A}(B + \tfrac{1}{2}A^{-1}C) - \tfrac{1}{2}A^{-1}C.$$

۳ . فرض کنید $A(t)$ یک تابع ماتریسی $n \times n$ بوده و $E(t) = e^{A(t)}$. همچنین، $Q(t)$ ، $Y(t)$ ، و B ماتریسهای ستونی $n \times 1$ ی باشند. فرض کنید بر بازهٔ باز J

$$E'(t) = A'(t)E(t) \;.$$

هرگاه $a \in J$ و A' و Q بر J پیوسته باشند، ثابت کنید که مسئله با مقداراولیهٔ

$$Y'(t) = A'(t)Y(t) + Q(t), \qquad Y(a) = B,$$

دارای جواب زیر بر J است:

$$Y(x) = e^{A(x)}e^{-A(a)}B + e^{A(x)}\int_a^x e^{-A(t)}Q(t)\,dt.$$

۴ . فرض کنید $E(t) = e^{A(t)}$. این تمرین چند نمونه از توابع ماتریسی $A(t)$ را توصیف می‌کند که برای آنها $E'(t) = A'(t)E(t)$.

(آ) فرض‌کنید $A(t) = t^rA$ ، که‌درآن A یک ماتریس ثابت $n \times n$ بوده و r یک عدد صحیح مثبت است. ثابت کنید $E'(t) = A'(t)E(t)$ بر $(-\infty, \infty)$.

(ب) فرض کنید $A(t)$ یک چندجمله‌ای از t با ضرایب ماتریسی باشد؛ مثلاً،

$$A(t) = \sum_{r=0}^{m} t^rA_r,$$

که درآن ضرایب تعویض می‌شوند: به‌ازای هر r و s ، $A_rA_s = A_sA_r$. ثابت کنید $E'(t) = A'(t)E(t)$ بر $(-\infty, \infty)$.

(پ) دستگاه خطی همگن

$$Y'(t) = (I + tA)Y(t), \qquad Y(0) = B$$

بر بازهٔ $(-\infty, \infty)$ ، که درآن A یک ماتریس ثابت $n \times n$ است، را حل کنید.

۵ . فرض کنید تابع ماتریسی $n \times n$ ، $A(x)$ بسط به‌صورت سری توانی همگرا به‌ازای $|x| < r$ دارد. برای حل دستگاه خطی همگن مرتبهٔ دوم

$$Y''(x) = A(x)Y(x), \qquad Y(0) = B, \qquad Y'(0) = C$$

یک روند به‌صورت سری توانی ارائه دهید.

۶ . دستگاه مرتبهٔ دوم $Y''(x) + AY(x) = 0$ ، با $Y(0) = B,\ Y'(0) = C$ ، که درآن A یک ماتریس $n \times n$ ثابت است، را درنظر بگیرید. ثابت کنید دستگاه جواب به‌صورت سری توانی

$$Y(x) = \left(I + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k} A^k}{(2k)!}\right)B + \left(xI + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k x^{2k+1} A^k}{(2k+1)!}\right)C$$

دارد، که به‌ازای $-\infty < x < +\infty$ همگراست.

۲۱۰۷ اثبات قضیهٔ وجودی به روش تقریبات متوالی

دراین بخش وجود و یکتایی جواب دستگاه خطی همگن

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \tag{۵۶۰۷}$$

که درآن $A(t)$ یک تابع ماتریسی $n \times n$ بوده که بر بازهٔ باز J پیوسته است، را ثابت می‌کنیم. ثابت می‌کنیم به‌ازای هر نقطهٔ a در J و هر بردار اولیهٔ معلوم B درست یک جواب مانند $Y(t)$ بر J هست که در شرط اولیهٔ $Y(a) = B$ صدق می‌کند.

روش تقریبات متوالی را به‌کار می‌بریم، که روشی است تکراری که در مسائل بسیار دیگر نیز کاربرد دارد. این روش نخستین بار در ۱۸۳۸ به‌وسیلهٔ لیوویل در رابطه با معادلات دیفرانسیل خطی مرتبهٔ دوم انتشار یافت، و بعدها به‌وسیلهٔ ج. ساکه[1] در ۱۸۶۴، ال. فوکس[2] در ۱۸۷۰، و جی. پئانو[3] در ۱۸۸۸ به‌معادلات خطی مرتبهٔ n تعمیم یافت. در ۱۸۹۰، امیل پیکارد[4] (۱۹۴۱ — ۱۸۵۶) این روش‌راتعمیم داد تا معادلات دیفرانسیل غیرخطی را نیز دربرگیرد. بعضی ازنویسندگان برای تقدیر از کارهای اساسی او این روش را **روش پیکارد** می‌نامند. این روش‌نه فقط از حیث نظری جالب است، بلکه می‌توان با استفاده از آن در بعضی حالات تقریبهایی عددی از جوابها به‌دست آورد.

روش با حدس اولیه‌ای از یک جواب معادلهٔ (۵۶۰۷) شروع می‌شود. بردار اولیهٔ

---

1. J. Caqué 2. L. Fuchs 3. G. Peano 4. Émile Picard

B را حدس اولیه می‌گیریم ، گرچه این امر ضرورت ندارد . بعد این حدس را در طرف راست معادله می‌گذاریم و معادلهٔ دیفرانسیل جدید

$$Y'(t) = A(t)B$$

را به‌دست می‌آوریم . طرف راست این معادله دیگر شامل تابع مجهول نیست ؛ درنتیجه ، معادله را می‌توان فوراً با انتگرالگیری طرفین آن از a تا x ، که x یک نقطهٔ دلخواه در J است ، حل کرد . این معادله دقیقاً یک جواب مانند Y_1 بر J دارد که در شرط اولیهٔ $Y_1(a) = B$ صدق می‌کند ؛ یعنی ،

$$Y_1(x) = B + \int_a^x A(t)B\,dt .$$

حال درطرف راست معادلهٔ دیفرانسیل اصلی (۵۶۰۷) $Y(t)$ را با $Y_1(t)$ عوض می‌کنیم تا معادلهٔ دیفرانسیل جدید

$$Y'(t) = A(t)Y_1(t)$$

به‌دست آید . این معادله دارای جواب منحصر بفرد Y_2 بر J با خاصیت $Y_2(a) = B$ است :

$$Y_2(x) = B + \int_a^x A(t)Y_1(t)\,dt . \tag{۵۷۰۷}$$

سپس Y_2 را در طرف راست (۵۶۰۷) می‌گذاریم و معادلهٔ حاصل را حل کرده Y_3 را با خاصیت $Y_3(a) = B$ معین می‌کنیم ، و به‌همین ترتیب ادامه می‌دهیم تا آخر . این فرایند دنباله‌ای مانند $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ از توابع را تولید می‌کند ، که درآن $Y_0 = B$ و Y_{k+1} از Y_k به وسیلهٔ فرمول بازگشتی زیر معین می‌شود :

$$\text{به‌ازای } k = 0, 1, 2, \ldots \text{ ،} \quad Y_{k+1}(x) = B + \int_a^x A(t)Y_k(t)\,dt \;. \tag{۵۸۰۷}$$

هدف اثبات این امر است که دنبالهٔ توابعی که این‌طور تعریف می‌شود به یک تابع حدی مانند Y همگراست که جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل (۵۶۰۷) بر J است که درشرط اولیهٔ $Y(a) = B$ نیز صدق می‌کند . توابع $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ **تقریبات متوالی** به Y نامیده می‌شوند . پیش از بررسی همگرایی این فرایند ، روش را با یک مثال توضیح می‌دهیم .

مثال . مسئله با مقدار اولیهٔ $Y'(t) = AY(t),\ Y(0) = B$ ، که درآن A یک ماتریس

$n \times n$ ثابت است، را درنظر می‌گیریم. می‌دانیم جواب با فرمول $Y(x) = e^{xA}B$ به‌ازای هر x حقیقی داده می‌شود. نشان می‌دهیم که این جواب را چطور می‌توان به روش تقریبات متوالی بدست آورد.

حدس اولیه $Y_0(x) = B$ است. فرمول بازگشتی (۵۸۰۷) نتیجه می‌دهد که

$$Y_1(x) = B + \int_0^x AB\,dt = B + xAB,$$
$$Y_2(x) = B + \int_0^x AY_1(t)\,dt = B + \int_0^x (AB + tA^2B)\,dt = B + xAB + \tfrac{1}{2}x^2A^2B.$$

به استقرا درمی‌یابیم که

$$Y_k(x) = B + xAB + \tfrac{1}{2}x^2A^2B + \cdots + \frac{1}{k!}x^kA^kB = \left(\sum_{r=0}^{k}\frac{(xA)^r}{r!}\right)B.$$

مجموع طرف راست مجموع جزئی سری مربوط به e^{xA} است. بنابراین، وقتی $k \to \infty$، معلوم می‌شود که، به‌ازای هر x،

$$\lim_{k\to\infty} Y_k(x) = e^{xA}B \quad .$$

بنابراین، دراین مثال می‌توان مستقیما" نشان داد که تقریبات متوالی به جوابی ازمسئله با مقدار اولیه بر $(-\infty, +\infty)$ همگراست.

برهان همگرایی دنبالهٔ تقریبات متوالی. حال به دنبالهٔ کلیی که با فرمول بازگشتی (۵۸۰۷) تعریف شد باز می‌گردیم. برای اثبات همگرایی دنباله، هر جملهٔ $Y_k(x)$ را به صورت یک مجموع توی هم‌رو می‌نویسیم:

$$Y_k(x) = Y_0(x) + \sum_{m=0}^{k-1}\{Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\}. \tag{۵۹۰۷}$$

برای اثبات اینکه $Y_k(x)$، وقتی $k \to \infty$، به‌حدی میل می‌کند، ثابت می‌کنیم سری نامتناهی

$$\sum_{m=0}^{\infty}\{Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\} \tag{۶۰۰۷}$$

به‌ازای هر x در J همگراست. برای این منظور کافی است ثابت کنیم که سری

$$\sum_{m=0}^{\infty}\|Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\| \tag{۶۱۰۷}$$

همگراست . دراین سری از نرم ماتریسی که در بخش ۳۰۷ معرفی شد استفاده می‌کنیم ؛ نرم یک ماتریس مجموع قدر مطلقهای تمام درایه‌های آن است .

زیر بازهٔ بسته و کراندار J_1 از J را که شامل a است درنظر می‌گیریم . ثابت می‌کنیم سری (۶۱۰۷) به‌ازای هر x در J_1 تحت تسلط یک سری همگرا از ثابتهایی است که از x مستقل‌اند . این ایجاب می‌کند که سری بر J_1 **به‌طور یکنواخت** همگرا باشد .

برای تخمین اندازهٔ جملات در (۶۱۰۷) ، فرمول بازگشتی را چندبار به‌کارمی‌بریم . درآغاز ، داریم

$$Y_1(x) - Y_0(x) = \int_a^x A(t)B\,dt .$$

برای ساده بودن ، فرض کنیم $a < x$. دراین صورت ، می‌توان نوشت

$$\|Y_1(x) - Y_0(x)\| = \left\| \int_a^x A(t)B\,dt \right\| \le \int_a^x \|A(t)\|\, \|B\|\, dt . \qquad (۶۲۰۷)$$

چون هر درایهٔ $A(t)$ بر J پیوسته است ، هر درایه بر بازهٔ بسته و کراندار J_1 کراندار است . بنابراین ، $\|A(t)\| \le M$ ، که درآن M مجموع کرانهای همهٔ درایه‌های $A(t)$ بربازهٔ J_1 است . (عدد M به J_1 بستگی دارد .) بنابراین ، انتگرالده در (۶۲۰۷) به‌وسیلهٔ $M\,\|B\|$ کراندار است ؛ درنتیجه ، به‌ازای هر $x > a$ در J_1 داریم

$$\|Y_1(x) - Y_0(x)\| \le \int_a^x \|B\|\, M\,dt = \|B\|\, M(x-a) .$$

حال فرمول بازگشتی را بار دیگر به‌کار برده ، تفاضل $Y_2 - Y_1$ را برحسب $Y_1 - Y_0$ بیان می‌کنیم ، و سپس ، با استفاده از تخمینی که هم‌اینک برای $Y_1 - Y_0$ به‌دست آمد ، به‌ازای هر $x > a$ در J_1 خواهیم داشت

$$\|Y_2(x) - Y_1(x)\| = \left\| \int_a^x A(t)\{Y_1(t) - Y_0(t)\}\,dt \right\| \le \int_a^x \|A(t)\|\, \|B\|\, M(t-a)\,dt$$
$$\le \|B\|\, M^2 \int_a^x (t-a)\,dt = \|B\| \frac{M^2(x-a)^2}{2!} .$$

به‌استقرا ، درمی‌یابیم که

به‌ازای $m = 0, 1, 2, \ldots$ و هر $x > a$ در J_1 ،

$$\|Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\| \le \|B\| \frac{M^{m+1}(x-a)^{m+1}}{(m+1)!} .$$

اگر $x < a$ ، استدلالی مشابه همین نامساوی را با $|x-a|$ به‌جای $(x-a)$ به‌دست می‌دهد.
اگر L طول بـازهٔ J_1 باشد، بـه‌ازای هر x در J_1 داریم $|x-a| \le L$ ؛ درنتیجه، تخمین زیر را خواهیم داشت:
به‌ازای $m = 0, 1, 2, \dots$ و هر x در J_1 ،

$$\|Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\| \le \|B\| \frac{M^{m+1}L^{m+1}}{(m+1)!} \; .$$

بنابر این، سری (۶۱۰۷) تحت تسلط سری همگرای

$$\|B\| \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(ML)^{m+1}}{(m+1)!} = \|B\| (e^{ML} - 1)$$

است. این ثابت می‌کند که سری (۶۱۰۷) بر J_1 به‌طور یکنواخت همگراست.

استدلال فوق نشان می‌دهد که دنبالهٔ تقریبات متوالی همیشه همگراست و همگرایی بر J_1 یکنواخت است. فرض‌کنیم Y تابع حدی باشد. یعنی، $Y(x)$ را به‌ازای هر x در J_1 با معادلهٔ

$$Y(x) = \lim_{k \to \infty} Y_k(x)$$

تعریف می‌کنیم. ثابت می‌کنیم Y از خواص زیر بهره‌مند است:
(آ) Y بر J_1 پیوسته است؛
(ب) به‌ازای هر x در J_1 ، $Y(x) = B + \int_a^x A(t)Y(t)\,dt$ ؛
(پ) به‌ازای هر x در J_1 ، $Y(a) = B$ و $Y'(x) = A(x)Y(x)$.
قسمت (پ) نشان می‌دهد که Y یک جواب مسئله با مقدار اولیه بر J_1 است.

برهان (آ). هر تابع Y_k یک ماتـریس ستونی است که درایه‌هایش توابعی اسکالر و بر J_1 پیوسته‌اند. هر درایهٔ تابع حدی Y حد یک دنبالهٔ به‌طور یکنواخت همگرا از توابع پیوسته است؛ درنتیجه، بنابر قضیهٔ ۱۰۱۱ از جلد یک، هر درایهٔ Y نیز بر J_1 پیوسته است. بنابراین، خود Y بر J_1 پیوسته می‌باشد.

برهان (ب). فرمول بازگشتی (۵۸۰۷) می‌گوید که

$$Y_{k+1}(x) = B + \int_a^x A(t)Y_k(t)\,dt \,.$$

بنابراین،

$$Y(x) = \lim_{k\to\infty} Y_{k+1}(x) = B + \lim_{k\to\infty} \int_a^x A(t)Y_k(t)\,dt = B + \int_a^x A(t)\lim_{k\to\infty} Y_k(t)\,dt$$
$$= B + \int_a^x A(t)Y(t)\,dt.$$

تعویض علامت حد با علامت انتگرال، بدلیل همگرایی یکنواخت دنبالهٔ $\{Y_k\}$ بر J_1 ، مجاز می‌باشد.

برهان (پ). معادلهٔ $Y(a) = B$ فوراً از (ب) نتیجه می‌شود. بخاطر (آ)، انتگرالده در (ب) بر J_1 پیوسته است؛ درنتیجه، بنابراولین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل‌وانتگرال، $Y'(x)$ موجود و مساوی $A(x)Y(x)$ بر J_1 می‌باشد.

بازهٔ J_1 زیر بازهٔ بسته‌و کراندار دلخواهی از J شامل a بود. اگر J_1 بزرگ‌شود، فرایند به‌دست آوردن $Y(x)$ تغییر نمی‌کند، زیرا که فقط مستلزم انتگرالگیری از a تا x است. چون به‌ازای هر x در J یک زیربازهٔ بسته و کراندار از J شامل a و x وجود دارد، پس یک جواب روی بازهٔ کامل J وجود خواهد داشت.

قضیهٔ ۷.۱۷ . قضیهٔ یکتایی برای دستگاههای خطی همگن. ***هرگاه $A(t)$ بربازهٔ باز J پیوسته باشد، معادلهٔ دیفرانسیل***

$$Y'(t) = A(t)Y(t)$$

حداکثر یک جواب بر J دارد که در شرط اولیهٔ دادهٔ شدهٔ $Y(a) = B$ صدق می‌کند.

برهان. فرض کنیم Y و Z دو جواب بر J باشند. همچنین، J_1 زیر بازهٔ بسته و کرانداری از J شامل a باشد. ثابت می‌کنیم به‌ازای هر x در J_1 ، $Z(x) = Y(x)$. این ایجاب می‌کند که بر بازهٔ کامل J ، $Z = Y$.

چون هردوی Y و Z جوابند، داریم

$$Z'(t) - Y'(t) = A(t)\{Z(t) - Y(t)\}.$$

x را در J_1 اختیار کرده، از این معادله از a تا x انتگرال می‌گیریم تا به‌دست آید

$$Z(x) - Y(x) = \int_a^x A(t)\{Z(t) - Y(t)\}\,dt.$$

این رابطه نامساوی زیر را ایجاب می‌کند :

$$\|Z(x) - Y(x)\| \le M \left| \int_a^x \|Z(t) - Y(t)\| \, dt \right|, \tag{۶۳.۷}$$

که درآن M یک‌کران بالایی برای $\|A(t)\|$ بر J_1 است. فرض‌کنیم M_1 یک کران بالایی برای‌تابع پیوستهٔ $\|Z(t) - Y(t)\|$ بر J_1 باشد. دراین صورت، نامساوی (۶۳.۷) نتیجه می‌دهد که

$$\|Z(x) - Y(x)\| \le M M_1 |x - a|. \tag{۶۴.۷}$$

با استفاده از (۶۴.۷) در طرف راست (۶۳.۷)، خواهیم داشت

$$\|Z(x) - Y(x)\| \le M^2 M_1 \left| \int_a^x |t - a| \, dt \right| = M^2 M_1 \frac{|x - a|^2}{2}.$$

به استقرا، درمی‌یابیم که

$$\|Z(x) - Y(x)\| \le M^m M_1 \frac{|x - a|^m}{m!}. \tag{۶۵.۷}$$

طرف راست، وقتی $m \to \infty$، به 0 نزدیک می‌شود؛ درنتیجه، $Z(x) = Y(x)$. این برهان را تمام خواهد کرد.

نتایج این بخش را می‌توان در قضیهٔ وجودی ـ یکتایی زیر خلاصه کرد.

قضیهٔ ۱۸.۷ . فرض‌کنیم A یک تابع ماتریسی $n \times n$ باشد که بر بازهٔ باز J پیوسته است. هرگاه $a \in J$ و B یک بردار n بعدی باشد، دستگاه خطی همگن

$$Y'(t) = A(t)Y(t), \qquad Y(a) = B,$$

یک و فقط یک جواب برداری n بعدی بر J خواهد داشت.

۲۲.۷ روش تقریبات متوالی اعمال شده بر دستگاههای غیرخطی مرتبهٔ اول

روش‌تقریبات متوالی رامی‌توان بر بعضی از دستگاههای غیرخطی نیز اعمال کرد. دستگاه مرتبهٔ اول

$$Y' = F(t, Y) \tag{۶۶.۷}$$

را درنظر می‌گیریم، که درآن F یک تابع برداری n بعدی معلوم بوده، و Y یک تابع

برداری n بعدی مجهول است که باید تعیین شود. جوابی چون Y را جستجو می‌کنیم که در معادلهٔ

$$Y'(t) = F[t, Y(t)]$$

به‌ازای هر t در بازه‌ای مانند J صدق کرده و در شرط اولیهٔ مفروضی، مثلاً $Y(a) = B$ که $a \in J$ و B بردار n بعدی معلومی است، صادق باشد.

همانند حالت خطی، دنبالهٔ $Y_0, Y_1, Y_2, \ldots$ از تقریبات متوالی را با اختیار $Y_0 = B$ و تعریف Y_{k+1} برحسب Y_k با فرمول بازگشتی

$$Y_{k+1}(x) = B + \int_a^x F[t, Y_k(t)]\, dt \quad \text{به‌ازای} \quad k = 0, 1, 2, \ldots \qquad (۶۷.۷)$$

می‌سازیم. این دنباله تحت شرایطی بر F به یک تابع حدی مانند Y همگراست که در معادلهٔ دیفرانسیل و شرط اولیهٔ داده شده صدق می‌کند.

پیش از پرداختن به همگرایی این فرایند، در چند مثال یک بعدی بحث می‌کنیم که برخی از مشکلات ناشی در عمل را نشان می‌دهند.

مثال ۱. مسئله با مقدار اولیه و غیر خطی $y' = x^2 + y^2$ با $y = 0$ وقتی $x = 0$ را در نظر می‌گیریم. چند تقریب به‌حل آن را محاسبه می‌کنیم. $Y_0(x) = 0$ را اختیار و سه تقریب بعدی را به‌صورت زیر معین می‌کنیم:

$$Y_1(x) = \int_0^x t^2\, dt = \frac{x^3}{3},$$

$$Y_2(x) = \int_0^x [t^2 + Y_1^2(t)]\, dt = \int_0^x \left(t^2 + \frac{t^6}{9}\right) dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63},$$

$$Y_3(x) = \int_0^x \left[t^2 + \left(\frac{t^3}{3} + \frac{t^7}{63}\right)^2\right] dt = \frac{x^3}{3} + \frac{x^7}{63} + \frac{2x^{11}}{2079} + \frac{x^{15}}{59535}.$$

ملاحظه می‌شود که محاسبهٔ تقریبات دیگر کار زیادی لازم دارد. مثلاً، دو تقریب Y_4 و Y_5 بترتیب چندجمله‌ایهایی از درجهٔ 31 و 63 هستند.

مثال بعدی مشکل دیگری که ممکن است در محاسبهٔ تقریبات متوالی رخ دهد توضیح می‌دهد.

مثال ۲. مسئله با مقدار اولیه و غیر خطی $y' = 2x + e^y$ با $y = 0$ وقتی $x = 0$ رادر نظر می‌گیریم . با حدس اولیهٔ $Y_0(x) = 0$ شروع کرده، به‌دست می‌آوریم که

$$Y_1(x) = \int_0^x (2t + 1)\,dt = x^2 + x\,,$$

$$Y_2(x) = \int_0^x (2t + e^{t^2+t})\,dt = x^2 + \int_0^x e^{t^2+t}\,dt\,.$$

دراینجا بیش‌ازاین نمی‌توان پیش رفت ، به‌این دلیل که انتگرال آخر را نمی‌توان‌برحسب توابع مقدماتی حساب کرد . اما ، به‌ازای x معلوم ، می‌توان یک تقریب عددی به‌انتگرال را حساب کرد و بدین وسیله یک تقریب به $Y_2(x)$ را به‌دست آورد .

بخاطر مشکلاتی که در دو مثال اخیر توضیح شد ، روش تقریبات متوالی گاهی در تعیین صریح جوابها عملا" چندان‌مفیدنیست .ارزش‌واقعی‌روش‌دراستفاده‌از آن برای‌اثبات قضایای وجودی است .

۲۳۰۷ برهان قضیهٔ وجودی ـ یکتایی برای دستگاههای غیرخطی مرتبهٔ اول

حال بـه قضیهٔوجودی ـ یکتایی برای دستگاههای غیرخطی مرتبهٔ اول می‌پردازیم . با گذاردن قیود مناسب بر تابع سمت راست معادلهٔ دیفرانسیل

$$Y' = F(x,\ Y),$$

می‌توان روش اثبات برای حالت خطی در بخش ۲۱۰۷ را تعمیم داد .

فرض‌کنیم J بازهٔ بازی‌باشدکه‌جواب روی آن جستجو می‌شود . همچنین ، $a \in J$ و B یک بـردار n بعدی معلوم باشد . فرض‌کنیم S مجموعه‌ای در فضای $(n + 1)$ باشد به‌صورت

$$S = \{(x, Y) \mid \ |x - a| \le h,\ \|Y - B\| \le k\},$$

که‌درآن $h > 0$ و $k > 0$. [هرگاه $n = 1$ ، این مجموعه مستطیلی است به مرکز (a, B) و قاعدهٔ $2h$ و ارتفـاع $2k$.] فرض‌کنیم قلمرو F شامل مجموعه‌ای مانند S از این نوع بوده و F بر S کراندار باشد؛ مثلا" ، به‌ازای هر (x, Y) در S ،

$$\|F(x, Y)\| \le M\,, \qquad (۶۸۰۷)$$

که درآن M یک ثابت مثبت است .

حال‌فرض‌کنیم تابع مرکب $G(x) = F(x,\ Y(x))$ بر بازهٔ $(a - h\,, a + h)$ به‌ازای

هر تابع Y پیوسته‌بر $(a-h\,,\,a+h)$ وبااین‌خاصیت‌که‌به‌ازای‌هر x در $(a-h\,,\,a+h)$ ، $(x,\ Y(x)) \in S$ پیوسته باشد . این فرض وجود انتگرالهایی که در روش تقریبات متوالی ظاهر می‌شوند تضمین می‌کند ، و نیز پیوستگی توابعی را که به‌این ترتیب ساخته می‌شوند ایجاب می‌نماید .

بالاخره ، فرض‌کنیم F در شرطی به‌شکل

$$\|F(x,\ Y) - F(x, Z)\| \leq A\ \|Y - Z\|$$

به‌ازای هر جفت از نقاط $(x,\ Y)$ و (x, Z) در S صدق کند ، که درآن A یک ثابت مثبت است . این شرط‌را به‌افتخار رودلف لیپ شیتس[1] که اولین بار آن را در ۱۸۷۶ معرفی‌کرد **شرط لیپ شیتس** می‌نامند . شرط لیپ شیتس یک تابع را چندان محدود نمی‌کند و به‌کمک آن می‌توان برهان وجود و یکتایی را از حالت خطی به‌غیر خطی تعمیم داد .

قضیهٔ ۱۹۰۷ . وجود و یکتایی جوابهای دستگاههای غیرخطی مرتبهٔ اول . *فرض‌کنیم F در شرایط‌کرانداری ، پیوستگی ، و لیپ شیتس مذکور در فوق بر مجموعهٔ S صدق‌کند . همچنین ، I بازهٔ باز $(a-c\,,\,a+c)$ باشد ، که درآن $c = \min\{h, k/M\}$. دراین صورت ، یک و فقط یک تابع مانند Y هست که بر I با خاصیت $Y(a) = B$ تعریف شده و چنان است که $(x,\ Y(x)) \in S$ و*

به‌ازای هر x در I ، $Y'(x) = F(x,\ Y(x))$.

برهان . چون این برهان شبیه برهان حالت خطی است ، ما فقط مراحل اصلی آن را توضیح می‌دهیم . قرارمی‌دهیم $Y_0(x) = B$ و توابع برداری $Y_1, Y_2, \ldots$ را بر I بافرمول بازگشتی زیر تعریف می‌کنیم :

$$\text{به‌ازای } m = 0, 1, 2, \ldots \text{ ، } Y_{m+1}(x) = B + \int_a^x F[t,\ Y_m(t)]\,dt \quad \text{.} \qquad (۶۹.۷)$$

برای آنکه فرمول بازگشتی معنی‌دار باشد ، لازم است بدانیم که به‌ازای هر x در I ، $(x,\ Y_m(x)) \in S$. این را می‌توان به‌آسانی به استقرا بر m ثابت کرد . وقتی $m = 0$ ، داریم $(x,\ Y_0(x)) = (x, B)$ ، که در S است . سپس، فرض می‌کنیم به‌ازای m ی و هر

1. Rudolph Lipschitz

x در I ، $(x, Y_m(x)) \in S$. بااستفاده از (۶۹۰۷) و (۶۸۰۷) ، به‌دست می‌آوریم

$$\|Y_{m+1}(x) - B\| \leq \left| \int_a^x \|F[t, Y_m(t)]\| \, dt \right| \leq M \left| \int_a^x dt \right| = M\,|x - a|.$$

چون به‌ازای x در I ، $|x - a| \leq c$ ، این ایجاب می‌کند که

$$\|Y_{m+1}(x) - B\| \leq Mc \leq k,$$

نشانگرآنکه به‌ازای‌هر x در I ، $(x, Y_{m+1}(x)) \in S$. بنابراین، فرمول بازگشتی به‌ازای هر $m \geq 0$ و هر x در I معنی دارد.

حال همگرایی دنباله‌ٔ $\{Y_m(x)\}$ درست مثل بخش ۲۱۰۷ ثابت می‌شود. می‌نویسیم

$$Y_k(x) = Y_0(x) + \sum_{m=0}^{k-1} \{Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\}$$

و ثابت می‌کنیم $Y_k(x)$ ، وقتی $k \to \infty$ ، به‌حدی میل می‌کند به‌این طریق که ثابت‌می‌کنیم سری نامتناهی

$$\sum_{m=0}^{\infty} \|Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\|$$

بر I همگرا است. این مطلب از نامساوی

$$\|Y_{m+1}(x) - Y_m(x)\| \leq \frac{MA^m\,|x - a|^{m+1}}{(m+1)!} \leq \frac{MA^m c^{m+1}}{(m+1)!}$$

نتیجه می‌شود، که به استقرا، با استفاده از فرمول بازگشتی و شرط لیپ شیتس، ثابت‌شد. سپس، تابع حدی Y را با معادله‌ٔ

$$Y(x) = \lim_{m \to \infty} Y_m(x)$$

به‌ازای‌هر x در I تعریف‌کرده، تحقیق می‌کنیم که، درست مثل حالت خطی، درمعادله‌ٔ انتگرال

$$Y(x) = B + \int_a^x F[t, Y(t)]\, dt$$

صدق می‌نماید. این مطلب وجود یک جواب را ثابت خواهد کرد. سپس، یکتایی را می‌توان با همان روش به‌کار رفته در اثبات قضیه‌ٔ ۱۷۰۷ ثابت کرد.

۲۴۰۷ تمرین

۱ . مسئله با مقدار اولیه و خطی

$$y' + y = 2e^x \quad \text{با} \quad y = 1 \quad \text{وقتی} \quad x = 0$$

را درنظر بگیرید .

(آ) جواب دقیق Y این مسئله را بیابید .

(ب) روش تقریبات متوالی را ، با شروع از حدس اولیهٔ $Y_0(x) = 1$ ، به‌کار برید . $Y_n(x)$ را به‌طور صریح تعیین کرده ، نشان دهید که به‌ازای هر x حقیقی

$$\lim_{n\to\infty} Y_n(x) = Y(x) \ .$$

۲ . روش تقریبات متوالی را در مورد مسئله با مقدار اولیه و غیرخطی

$$y' = x + y^2 \quad \text{با} \quad y = 0 \quad \text{وقتی} \quad x = 0$$

به‌کار برید . $Y_0(x) = 0$ را حدس اولیه بگیرید و $Y_3(x)$ را حساب کنید .

۳ . روش تقریبات متوالی را در مورد مسئله با مقدار اولیه و غیرخطی

$$y' = 1 + xy^2 \quad \text{با} \quad y = 0 \quad \text{وقتی} \quad x = 0$$

به‌کار برید . $Y_0(x) = 0$ را حدس اولیه بگیرید و $Y_3(x)$ را حساب کنید .

۴ . روش تقریبات متوالی را در مورد مسئله با مقدار اولیه و غیرخطی

$$y' = x^2 + y^2 \quad \text{با} \quad y = 0 \quad \text{وقتی} \quad x = 0$$

به‌کار برید . با حدس اولیهٔ "نامناسب" $Y_0(x) = 1$ شروع کرده ، $Y_3(x)$ را حساب کنید ، و نتیجه را با نتایج مثال ۱ در بخش ۲۲۰۷ مقایسه نمایید .

۵ . مسئله با مقدار اولیه وغیرخطی

$$y' = x^2 + y^2 \quad \text{با} \quad y = 1 \quad \text{وقتی} \quad x = 0$$

را درنظر بگیرید .

(آ) روش‌تقریبات متوالی را ، با شروع از حدس اولیهٔ $Y_0(x) = 1$ ، به‌کاربرید و $Y_2(x)$ را محاسبه نمایید .

(ب) فرض کنید $R = [-1 , 1] \times [-1 , 1]$. کوچکترین Mی را بیابید که $|f(x, y)| \le M$ بر R . بازهٔ $I = (-c , c)$ راطوری بیابیدکه نمودار هر تابع تقریب Y_n روی I در R قرار داشته باشد .

(پ) فرض کنید جواب $y = Y(x)$ در همسایگی مبداء بسط به‌صورت سری توانی

داشته باشد . اولین شش جملهٔ ناصفر این بسط را معین کرده ، نتیجه را با نتیجهٔ قسمت (آ) مقایسه نمایید .

۶ . مسئله با مقدار اولیهٔ

$$y' = 1 + y^2 \text{ با } y = 0 \text{ وقتی } x = 0$$

را درنظر بگیرید .

(آ) روش تقریبات متوالی را ، با شروع از حدس اولیهٔ $Y_0(x) = 0$ به‌کار برید و $Y_4(x)$ را محاسبه کنید .

(ب) ثابت کنید هر تابع تقریب Y_n بر تمام محور حقیقی تعریف شده است .

(پ) با استفاده از قضیهٔ ۱۹۰۷ ، نشان دهید که مسئله با مقدار اولیه در هربازه به شکل $(-h, h)$ حداکثر یک جواب دارد .

(ت) معادلهٔ دیفرانسیل را با جداسازی متغیرها حل کرده ، بدین وسیله نشان دهید که مسئله با مقدار اولیه دقیقا" یک جواب مانند Y بر بازهٔ $(-\pi/2, \pi/2)$ داشته و بر هر بازهٔ بزرگتر جوابی ندارد . دراین مثال ، تقریبات متوالی بر تمام محور حقیقی تعریف شده‌اند ، اما فقط بر بازهٔ $(-\pi/2, \pi/2)$ به یک تابع حدی همگرا می‌باشند .

۷ . دو تابع مانند $y = Y(x)$ و $z = Z(x)$ را جستجو می‌کنیم که با هم در دستگاه معادلات

$$y' = z, \qquad z' = x^3(y + z)$$

با شرایط اولیهٔ $y = 1$ و $z = 1/2$ وقتی $x = 0$ صدق کنند . با حدسهای اولیهٔ $Y_0(x) = 1$, $Z_0(x) = 1/2$ شروع کرده ، با استفاده از روش تقریبات متوالی ، توابع تقریب

$$Y_3(x) = 1 + \frac{x}{2} + \frac{3x^5}{40} + \frac{x^6}{60} + \frac{x^9}{192},$$

$$Z_3(x) = \frac{1}{2} + \frac{3x^4}{8} + \frac{x^5}{10} + \frac{3x^8}{64} + \frac{7x^9}{360} + \frac{x^{12}}{256}$$

را به‌دست آورید .

۸ . دستگاه معادلات

$$y' = 2x + z, \qquad z' = 3xy + x^2z$$

با شرایط اولیهٔ $y = 2$ و $z = 0$ وقتی $x = 0$ را درنظر بگیرید . باحدسهای اولیهٔ

$Y_0(x) = 2,\ Z_0(x) = 0$ شروع کرده، از روش تقریبات متوالی استفاده کنید، و $Y_3(x)$ و $Z_3(x)$ را معین نمایید.

۹ . مسئله با مقدار اولیهٔ

$$y'' = x^2y' + x^4y \text{ با } y = 5 \text{ و } y' = 1 \text{ وقتی } x = 0$$

را درنظر بگیرید. این مسئله را به مسئلهٔ معادل آن که شامل یک دستگاه دو معادله و دو تابع مجهول $y = Y(x)$ و $z = Z(x)$ ، که $z = y'$ ، باشد تغییر دهید. سپس، روش تقریبات متوالی را به‌کار برید، ازحدسهای اولیهٔ $Y_0(x) = 5$ و $Z_0(x) = 1$ شروع کنید، و $Y_3(x)$ و $Z_3(x)$ رامعین نمایید.

۱۰ . فرض کنید f بر مستطیل $R = [-1, 1] \times [-1, 1]$ به صورت زیر تعریف شده‌باشد:

$$f(x, y) = \begin{cases} 0 & \text{، اگر } x = 0 \\ 2y/x & \text{، اگر } x \neq 0 \text{ و } |y| \leq x^2 \\ 2x & \text{، اگر } x \neq 0 \text{ و } y > x^2 \\ -2x & \text{، اگر } x \neq 0 \text{ و } y < -x^2 \end{cases}$$

(آ) ثابت کنید به‌ازای هر (x, y) در R ، $|f(x, y)| \leq 2$.

(ب) نشان دهید که f در شرط لیپ شیتس بر R صدق نمی‌کند.

(پ) به‌ازای هر C صادق در $|C| \leq 1$ ، نشان دهید که $y = Cx^2$ یک جواب مسئله با مقدار اولیهٔ $y' = f(x, y)$ با $y = 0$ وقتی $x = 0$ است. همچنین، نشان دهید که نمودار هریک از این جوابها روی $(-1, 1)$ در R قرار دارد.

(ت) روش تقریبات متوالی را در مورد این مسئله با مقدار اولیه، با شروع از حدس اولیهٔ $Y_0(x) = 0$ ، به‌کار برید. $Y_n(x)$ را تعیین کرده، نشان دهید که تقریبها به یک جواب مسئله بر بازهٔ $(-1, 1)$ همگرا می‌باشند.

(ث) قسمت (ت) را، با شروع از حدس اولیهٔ $Y_0(x) = x$ ، تکرار نمایید. $Y_n(x)$ را تعیین کرده، نشان دهید که توابع تقریب به جوابی متمایز از هر جواب درقسمت (پ) همگرا می‌باشند.

(ج) قسمت (ت) را، با شروع از حدس اولیهٔ $Y_0(x) = x^3$ ، تکرار کنید.

(چ) قسمت (ت) را، با شروع از حدس اولیهٔ $Y_0(x) = x^{1/3}$ ، تکرار کنید.

۲۵.۷ * تقریبات متوالی و نقاط ثابت عملگرها

ایدهٔ اصلی روش تقریبات متوالی نه‌فقط در اثبات قضایای وجودی معادلات دیفرانسیل به‌کار می‌رود بلکه از آن می‌توان برای مسائل مهم بسیار دیگر در آنالیز نیز استفاده کرد. تا پایان این فصل روش تقریبات متوالی را در محدوده‌ای تنظیم می‌کنیم که به دیدگاه کاربردی آن وسعت زیادی خواهد بخشید.

در برهان قضیهٔ ۱۸.۷ ، دنبالهٔ $\{Y_k\}$ از توابع را طبق فرمول بازگشتی

$$Y_{k+1}(x) = B + \int_a^x AY_k(t)\,dt$$

ساختیم. طرف راست این فرمول را می‌توان عملگری چون T دانست که بعضی توابع مانند Y را طبق معادلهٔ

$$T(Y) = B + \int_a^x AY(t)\,dt$$

به توابع جدید $T(Y)$ تبدیل می‌کند. در برهان قضیهٔ ۱۸.۷ دریافتیم که جواب Y مسئله با مقدار اولیهٔ $Y'(t) = AY(t),\ Y(a) = B$ در معادلهٔ انتگرال

$$Y = B + \int_a^x AY(t)\,dt$$

صدق می‌کند. با نماد عملگر، این می‌گوید که $Y = T(Y)$. به‌عبارت دیگر، جواب Y تحت عملگر T ثابت می‌ماند. چنین تابع Y یک ***نقطهٔ ثابت*** عملگر T نام دارد.

بسیاری از مسائل مهم در آنالیز را می‌توان طوری تنظیم کرد که جوابشان به‌وجود یک نقطهٔ ثابت عملگری وابسته باشد. از اینرو، مفید است سعی شود خواصی از عملگرها را کشف کنیم که وجود یک نقطهٔ ثابت را تضمین کنند. حال به بحث اصولی این مسئله می‌پردازیم.

۲۶.۷ * فضاهای خطی نرمدار

برای تنظیم روش تقریبات متوالی به شکل کلی، شایسته است که در چارچوب فضاهای خطی کار کنیم. فرض کنیم S یک فضای خطی دلخواه باشد. وقتی از تقریب عنصر x در S به وسیلهٔ عنصر دیگر y در S صحبت می‌کنیم، تفاضل $x - y$ را درنظر می‌گیریم، که آن را ***خطای*** تقریب می‌نامیم. برای سنجش اندازهٔ این خطا یک نرم در فضا معرفی

می‌کنیم .

تعریف نرم . فرض‌کنیم S یک فضای‌خطی باشد . تابع حقیقی N تعریف شده بر S یک نرم است اگر خواص زیر را دارا باشد :

(آ) به‌ازای هر x در S ، $N(x) \geq 0$ ؛

(ب) به‌ازای هر x در S و هر اسکالر c ، $N(cx) = |c|\, N(x)$ ؛

(پ) به‌ازای هر x و y در S ، $N(x+y) \leq N(x) + N(y)$ ؛

(ت) $N(x) = 0$ ایجاب می‌کند که $x = O$.

هر فضای خطی با یک نرم یک ***فضای خطی نرمدار*** نامیده می‌شود .

نرم x راگاهی به‌جای $N(x)$ به‌صورت $\|x\|$ می‌نویسند . با این نماد ، خواص اساسی خواهند شد :

(آ) به‌ازای هر x در S ، $\|x\| \geq 0$ ؛

(ب) به‌ازای هر x در S و هراسکالر c ، $\|cx\| = |c|\, \|x\|$ ؛

(پ) به‌ازای هر x و y در S ، $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$ ؛

(ت) $\|x\| = 0$ ایجاب می‌کند که $x = O$.

هرگاه x و y در S باشند ، $\|x-y\|$ را ***فاصلهٔ*** x تا y می‌نامیم .

اگر فضای S اقلیدسی باشد ، همواره نرمی دارد که از ضرب داخلی به‌ارث بردهٔ است ؛ یعنی ، $\|x\| = (x, x)^{1/2}$. ولی ما به‌نرم خاصی توجه داریم که از یک ضرب داخلی ناشی نشود .

مثال . نرم ماکزیمم . فرض کنیم $C(J)$ فضای خطی توابع حقیقی پیوسته بربازهٔ بسته و کراندار J باشد . اگر $\varphi \in C(J)$ ، تعریف می‌کنیم

$$\|\varphi\| = \max_{x \in J} |\varphi(x)|,$$

که درآن علامت سمت راست یعنی ماکزیمم قدر مطلق φ بر J . خواننده می‌تواند تحقیق

کند که این نرم چهار خاصیت اساسی را داراست.

نرم ماکزیمم از یک ضرب داخلی ناشی نمی‌شود. برای اثبات این‌مطلب، نشان می‌دهیم که نرم ماکزیمم از خاصیتی که همهٔ نرمهای ضرب داخلی دارند محروم است. مثلاً، اگر یک نرم از یک ضرب داخلی ناشی شده باشد، "قانون متوازی الاضلاع"

$$\|x + y\|^2 + \|x - y\|^2 = 2\,\|x\|^2 + 2\,\|y\|^2$$

به‌ازای هر x و y در S برقرار است. (ر.ک. تمرین ۱۶ در بخش ۱۳۰۱.) قانون متوازی الاضلاع همیشه به وسیلهٔ نرم ماکزیمم برقرار نیست. مثلاً، فرض کنیم x و y توابعی باشند که بر بازهٔ $[0, 1]$ با

$$x(t) = t, \qquad y(t) = 1 - t$$

داده‌می‌شوند. دراین‌صورت، داریم $\|x\| = \|y\| = \|x + y\| = \|x - y\| = 1$؛ درنتیجه، قانون متوازی الاضلاع نقض خواهد شد.

٭ ۲۷۰۷ عملگرهای انقباض

دراین بخش، فضای خطی‌نرمدار $C(J)$ مرکب‌ازهمهٔ‌توابع حقیقی‌پیوسته‌بربازهٔ‌کراندار‌بستهٔ J را درنظر می‌گیریم، که در آن $\|\varphi\|$ نرم ماکزیمم است. عملگر

$$T\colon C(J) \to C(J)$$

را درنظر می‌گیریم که قلمروش $C(J)$ و بردش زیر مجموعه‌ای از $C(J)$ است. یعنی، هرگاه φ بر J پیوسته باشد، آنگاه $T(\varphi)$ نیز بر J پیوسته است. فرمولهای زیر چند نمونهٔ ساده‌از این عملگرها را نشان می‌دهند. درهرحالت، φ یک تابع دلخواه در $C(J)$ است و $T(\varphi)(x)$ به‌ازای هر x در J با فرمول داده شده تعریف شده است:

$T(\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$، که درآن λ یک عدد حقیقی ثابت است؛

$T(\varphi)(x) = \int_c^x \varphi(t)\, dt$، که درآن c نقطهٔ‌مفروضی در J است؛

$T(\varphi)(x) = b + \int_c^x f[t, \varphi(t)]\, dt$، که درآن b ثابت بوده و ترکیب $f[t, \varphi(t)]$ بر J پیوسته است.

ما به آن عملگرهای T توجه داریم که به‌ازای آنها فاصلهٔ $\|T(\varphi) - T(\psi)\|$ از یک مضرب‌ثابت مانند $\alpha < 1$ از $\|\varphi - \psi\|$ کوچکتر باشد. این عملگرها را ***عملگرهای انقباض*** می‌نامند؛ این عملگرها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند:

تعریف یک عملگر انقباض. عملگر $T: C(J) \to C(J)$ یک ***عملگر انقباض*** نامیده می‌شود اگر ثابتی چون α صادق در $0 \le \alpha < 1$ باشد بطوری که به‌ازای هر جفت تابع φ و ψ در $C(J)$ داشته باشیم

$$\|T(\varphi) - T(\psi)\| \le \alpha \, \|\varphi - \psi\| . \tag{۷۰.۷}$$

ثابت α یک ***ثابت انقباض*** برای T نامیده می‌شود.

تذکر. نامساوی (۷۰.۷) برقرار است اگر و فقط اگر

به‌ازای هر x در J، $|T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)| \le \alpha \, \|\varphi - \psi\|$.

مثال ۱. فرض کنیم T عملگری باشد که با $T(\varphi)(x) = \lambda\varphi(x)$ تعریف می‌شود، که درآن λ یک ثابت است. چون

$$|T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)| = |\lambda| \, |\varphi(x) - \psi(x)| ,$$

داریم $\|T(\varphi) - T(\psi)\| = |\lambda| \, \|\varphi - \psi\|$. بنابراین، این عمل یک عملگر انقباض است اگروفقط‌اگر $|\lambda| < 1$ ، که‌دراین حالت $|\lambda|$ را می‌توان به‌عنوان یک ثابت انقباض به‌کار برد.

مثال ۲. فرض کنیم $T(\varphi)(x) = b + \int_c^x f[t, \varphi(t)] \, dt$ ، که‌درآن f در شرط لیپ شیتس به‌شکل

$$|f(x, y) - f(x, z)| \le K |y - z|$$

به‌ازای هر x در J و هر y و z حقیقی صدق می‌کند. در اینجا K یک ثابت‌مثبت‌است. فرض‌کنیم $L(J)$ طول بازهٔ J باشد. اگر $KL(J) < 1$ ، به‌آسانی می‌توان نشان داد که T یک عملگر انقباض با ثابت انقباض $KL(J)$ است. درواقع، به‌ازای هر x در J ، داریم

$$\begin{aligned} |T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)| &= \left| \int_c^x \{f[t, \varphi(t)] - f[t, \psi(t)]\} \, dt \right| \le K \left| \int_c^x |\varphi(t) - \psi(t)| \, dt \right| \\ &\le K \, \|\varphi - \psi\| \left| \int_c^x dt \right| \le KL(J) \, \|\varphi - \psi\| . \end{aligned}$$

هرگاه $KL(J) < 1$ ، آنگاه T یک عملگر انقباض با ثابت انقباض $\alpha = KL(J)$ است.

* ۲۸.۷ قضیهٔ نقطهٔ ثابت برای عملگرهای انقباض

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که هر عملگر انقباض دارای نقطهٔ ثابت منحصر بفرد است.

قضیهٔ ۲۵۰۷ . فرض کنیم $T: C(J) \to C(J)$ یک عملگر انقباض باشد . در این صورت ، یک و فقط یک تابع مانند φ در $C(J)$ هست بطوری که

$$T(\varphi) = \varphi . \tag{۷۱۰۷}$$

برهان. فرض کنیم φ_0 تابع دلخواهی در $C(J)$ باشد ، و دنبالهٔ $\{\varphi_n\}$ از توابع را با فرمول بازگشتی زیر تعریف می‌کنیم :

$$\varphi_{n+1} = T(\varphi_n) \text{ ، } n = 0, 1, 2, \ldots \text{ به‌ازای }$$

توجه کنید که به‌ازای هر n ، $\varphi_{n+1} \in C(J)$. ثابت می‌کنیم دنبالهٔ $\{\varphi_n\}$ به تابع حدی φ در $C(J)$ همگراست . روش اثبات شبیه روشی است که در برهان قضیهٔ ۱۸۰۷ به‌کار رفت . هر φ_n را به‌صورت یک مجموع توی هم‌رو می‌نویسیم :

$$\varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=0}^{n-1}\{\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\} \tag{۷۲۰۷}$$

و همگرایی $\{\varphi_n\}$ را با نشان دادن اینکه سری نامتناهی

$$\varphi_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty}\{\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\} \tag{۷۳۰۷}$$

بر J به‌طور یکنواخت همگراست ثابت می‌کنیم . سپس، نشان می‌دهیم که مجموع این سری نقطهٔ ثابت مطلوب است .

همگرایی یکنواخت سری از مقایسهٔ آن با سری هندسی و همگرای

$$M\sum_{k=0}^{\infty}\alpha^k ,$$

که درآن $M = \|\varphi_0\| + \|\varphi_1\|$ و α یک ثابت انقباض برای T است ، نتیجه می‌شود . مقایسه به‌وسیلهٔ نامساوی

$$|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| \le M\alpha^k \tag{۷۴۰۷}$$

صورت می‌گیرد ، که به‌ازای هر x در J و هر $k \ge 1$ برقرار است . برای اثبات (۷۴۰۷) ، توجه می‌کنیم که

$$|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| = |T(\varphi_k)(x) - T(\varphi_{k-1})(x)| \le \alpha \|\varphi_k - \varphi_{k-1}\| .$$

بنابراین ، نامساوی (۷۴۰۷) درصورتی ثابت می‌شود که نشان دهیم به‌ازای هر $k \ge 1$ ،

$$\|\varphi_k - \varphi_{k-1}\| \le M\alpha^{k-1} . \tag{۷۵۰۷}$$

حال (۷۵۰۷) را به استقرا ثابت می‌کنیم. به‌ازای $k = 1$، داریم

$$\|\varphi_1 - \varphi_0\| \leq \|\varphi_1\| + \|\varphi_0\| = M,$$

که همان (۷۵۰۷) است. برای اثبات اینکه (۷۵۰۷)، درصورت برقرار بودن به‌ازای k، به‌ازای $k + 1$ برقرار است، توجه می‌کنیم که

$$|\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| = |T(\varphi_k)(x) - T(\varphi_{k-1})(x)| \leq \alpha \|\varphi_k - \varphi_{k-1}\| \leq M\alpha^k.$$

چون این نامساوی به‌ازای هر x در J برقرار است، نیز باید داشته باشیم

$$\|\varphi_{k+1} - \varphi_k\| \leq M\alpha^k.$$

این (۷۵۰۷) را به‌استقرا ثابت می‌کند. بنابراین، سری (۷۳۰۷) بر J به‌طور یکنواخت همگراست. اگر $\varphi(x)$ را مجموع آن بگیریم، خواهیم داشت

$$\varphi(x) = \lim_{n \to \infty} \varphi_n(x) = \varphi_0(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \{\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\}. \qquad (۷۶۰۷)$$

تابع φ بر J پیوسته‌است، زیرامجموع یک‌سری‌به‌طوریکنواخت‌همگرااز توابع پیوسته است. برای‌اثبات اینکه φ یک نقطهٔ ثابت T است، $T(\varphi)$ را با $\varphi_{n+1} = T(\varphi_n)$ مقایسه می‌کنیم. با استفاده از خاصیت انقباض T، داریم

$$|T(\varphi)(x) - \varphi_{n+1}(x)| = |T(\varphi)(x) - T(\varphi_n)(x)| \leq \alpha\, |\varphi(x) - \varphi_n(x)|. \qquad (۷۷۰۷)$$

اما، از (۷۲۰۷) و (۷۶۰۷)، درمی‌یابیم که

$$|\varphi(x) - \varphi_n(x)| = \left| \sum_{k=n}^{\infty} \{\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)\} \right| \leq \sum_{k=n}^{\infty} |\varphi_{k+1}(x) - \varphi_k(x)| \leq M \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^k,$$

که درآخرین‌مرحله‌از (۷۴۰۷) استفاده کرده‌ایم. بنابر این، (۷۷۰۷) ایجاب می‌کندکه

$$|T(\varphi)(x) - \varphi_{n+1}(x)| \leq M \sum_{k=n}^{\infty} \alpha^{k+1}.$$

وقتی $n \to \infty$، سری سمت راست به 0 میل می‌کند؛ درنتیجه، $\varphi_{n+1}(x) \to T(\varphi)(x)$. اما چون، وقتی $n \to \infty$، $\varphi_{n+1}(x) \to \varphi(x)$، این ثابت می‌کندکه به‌ازای هر x در J، $\varphi(x) = T(\varphi)(x)$. بنابراین، $\varphi = T(\varphi)$؛ درنتیجه، φ یک نقطهٔ ثابت می‌باشد.

بالاخره، ثابت می‌کنیم نقطهٔ ثابت φ منحصر بفرد است. فرض کنیم ψ تابع دیگری در $C(J)$ باشد که $T(\psi) = \psi$. دراین صورت، داریم

$$\|\varphi - \psi\| = \|T(\varphi) - T(\psi)\| \leq \alpha\, \|\varphi - \psi\|.$$

ازاین نتیجه می‌شود که $(1 - \alpha)\, \|\varphi - \psi\| \leq 0$. چون $\alpha < 1$، می‌توان، با تقسیم بر

$\alpha - 1$ ، نامساوی $0 \leq \|\varphi - \psi\|$ رانتیجه‌گرفت. اما، چون نیز داریم $\|\varphi - \psi\| \geq 0$ ، این یعنی $\|\varphi - \psi\| = 0$ ؛ و درنتیجه، $\varphi - \psi = 0$ ، و برهان قضیهٔ نقطهٔ ثابت‌تمام خواهد بود.

* ۲۹.۷ کاربردهای قضیهٔ نقطهٔ ثابت

برای‌آنکه‌وسعت کاربردهای قضیهٔ‌نقطهٔ ثابت را نشان دهیم، از آن در اثبات دو قضیهٔ مهم استفاده می‌کنیم.

اولین قضیه شرطی کافی برای‌آنکه معادلهٔ $f(x, y) = 0$ معرف y به‌صورت تابعی از x باشد را به‌دست می‌دهد.

قضیهٔ ۲۱.۷ . قضیهٔ تابع ضمنی. *فرض‌کنیم f بر نوار مستطیلی شکل R :*

$$R = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, -\infty < y < +\infty\}$$

*تعریف شده باشد. همچنین، مشتق جزئی $D_2 f(x, y)$ موجود بوده**، *و درنامساویی به شکل*

$$0 < m \leq D_2 f(x, y) \leq M \tag{۷۸.۷}$$

به‌ازای هر (x, y) در R صدق کند، که درآن m و M ثابتهایی که $m \leq M$ می‌باشند. بعلاوه، به‌ازای‌هرتابع پیوستهٔ φ بر $[a, b]$ ، تابع مرکب $g(x) = f[x, \varphi(x)]$ بر $[a, b]$ پیوسته باشد. دراین‌صورت، یک و فقط یک تابع مانند $y = Y(x)$ وجود دارد، که بر $[a, b]$ پیوسته است، و به‌ازای هر x در $[a, b]$ ،

$$f[x, Y(x)] = 0 \,. \tag{۷۹.۷}$$

تذکر. این نتیجه را این‌طور توصیف می‌کنیم که می‌گوییم معادلهٔ $f(x, y) = 0$ ، y را به‌طور ضمنی به‌صورت تابعی از x در $[a, b]$ تعریف می‌کند.

برهان. فرض‌کنیم C فضای خطی توابع پیوسته بر $[a, b]$ بوده، و عملگر $T: C \to C$ را با معادلهٔ

---

* $D_2 f(x, y)$ مشتق $f(x, y)$ نسبت به y است درحالی که x ثابت گرفته شده است.

$$T(\varphi)(x) = \varphi(x) - \frac{1}{M} f[x, \varphi(x)]$$

به‌ازای هر x در $[a, b]$ تعریف می‌کنیم. دراینجا M ثابت مثبت در (۷۸۰۷) است. تابع $T(\varphi) \in C$ هر وقت $\varphi \in C$. ثابت می‌کنیم T یک عملگر انقباض است. به محض دانستن این، نتیجه می‌شود که T یک نقطهٔ ثابت منحصر بفرد مانند Y در C دارد. برای این تابع Y داریم $Y = T(Y)$، بدین معنی که، به‌ازای هر x در $[a, b]$،

$$Y(x) = Y(x) - \frac{1}{M} f[x, Y(x)] \cdot$$

این، همانطور که مطلوب است، (۷۹۰۷) را نتیجه می‌دهد.

برای نشان دادن اینکه T یک عملگر انقباض است، تفاضل

$$T(\varphi)(x) - T(\psi)(x) = \varphi(x) - \psi(x) - \frac{f[x, \varphi(x)] - f[x, \psi(x)]}{M} \tag{۸۰۰۷}$$

را درنظر می‌گیریم. بنابر قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتقها، داریم

$$f[x, \varphi(x)] - f[x, \psi(x)] = D_2 f[x, z(x)][\varphi(x) - \psi(x)],$$

که درآن $z(x)$ بین $\varphi(x)$ و $\psi(x)$ قرار دارد. بنابراین، (۸۰۰۷) نتیجه می‌دهد که

$$T(\varphi)(x) - T(\psi)(x) = [\varphi(x) - \psi(x)]\left(1 - \frac{D_2 f[x, z(x)]}{M}\right). \tag{۸۱۰۷}$$

فرض (۷۸۰۷) ایجاب می‌کند که

$$0 \le 1 - \frac{D_2 f[x, z(x)]}{M} \le 1 - \frac{m}{M}.$$

بنابراین، (۸۱۰۷) نامساوی زیر را به‌دست می‌دهد:

$$|T(\varphi)(x) - T(\psi)(x)| \le |\varphi(x) - \psi(x)| \left(1 - \frac{m}{M}\right) \le \alpha \|\varphi - \psi\|, \tag{۸۲۰۷}$$

که درآن $\alpha = 1 - m/M$. چون $0 < m \le M$، داریم $0 \le \alpha < 1$. نامساوی (۸۲۰۷) به‌ازای هر x در $[a, b]$ معتبر است. بنابراین، T یک عملگر انقباض می‌باشد. این برهان را تمام خواهد کرد.

کاربرد بعدی قضیهٔ نقطهٔ ثابت، یک قضیهٔ وجودی برای معادلهٔ انتگرال

$$\varphi(x) = \psi(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)\, dt \tag{۸۳۰۷}$$

را ثابت می‌کند. در اینجا ψ یک تابع معلوم پیوسته بر $[a, b]$ ، λ یک ثابت معلوم، و K تابع مفروضی است که بر مربع

$$S = \{(x, y) \mid a \leq x \leq b, a \leq y \leq b\}$$

تعریف شده و کراندار است. تابع K **هستهٔ** معادلهٔ انتگرال نام دارد. فرض کنیم C فضای خطی توابع پیوسته بر $[a, b]$ باشد. همچنین، هستهٔ K چنان باشد که عملگر T داده شده با

$$T(\varphi)(x) = \psi(x) + \lambda \int_a^b K(x, t)\varphi(t)\, dt$$

C را بتوی C بنگارد. به‌عبارت دیگر، فرض می‌کنیم $T(\varphi) \in C$ هر وقت $\varphi \in C$. یک جواب معادلهٔ انتگرال تابعی است چون φ در C که در (۸۳۰۷) صدق کند.

قضیهٔ ۲۲۰۷ . قضیهٔ وجودی برای معادلات انتگرال. *هرگاه، تحت شرایط پیشگفته، به‌ازای هر (x, y) در S ، و یک $M > 0$ ، داشته باشیم*

$$|K(x, y)| \leq M \,, \tag{۸۴۰۷}$$

آنگاه، به‌ازای هر λ که

$$|\lambda| < \frac{1}{M(b-a)} \tag{۸۵۰۷}$$

یک و فقط یک تابع مانند φ در C هست که در معادلهٔ انتگرال (۸۳۰۷) صدق می‌کند.

برهان. ثابت می‌کنیم T یک عملگر انقباض است. دو تابع دلخواه φ_1 و φ_2 را در C اختیار و تفاضل

$$T(\varphi_1)(x) - T(\varphi_2)(x) = \lambda \int_a^b K(x, t)[\varphi_1(t) - \varphi_2(t)]\, dt$$

را درنظر می‌گیریم. با استفاده از نامساوی (۸۴۰۷)، می‌توان نوشت

$$|T(\varphi_1)(x) - T(\varphi_2)(x)| \leq |\lambda|\, M(b-a)\, \|\varphi_1 - \varphi_2\| = \alpha\, \|\varphi_1 - \varphi_2\|,$$

که درآن $\alpha = |\lambda|\, M(b-a)$. بخاطر (۸۵۰۷)، داریم $0 \leq \alpha < 1$ ؛ درنتیجه، T یک عملگر انقباض با ثابت انقباض α می‌باشد. بنابراین، T نقطهٔ ثابت منحصر بفرد φ در C می‌باشد. این تابع φ در (۸۳۰۷) صدق می‌نماید.

۸

حساب دیفرانسیل میدانهای اسکالر و برداری

۱۰۸ توابع از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}^m$ میدانهای اسکالر و برداری

در قسمت ۱ این جلد عمدتا" با تبدیلات خطی

$$T: V \to W$$

از یک فضای خطی مانند V بتوی فضای خطی دیگری چون W سر و کار داشتیم. در قسمت ۲ شرط خطی بودن T را حذف ولی قید می‌کنیم که فضاهای V و W با بعد متناهی می‌باشند. بالاخص، توابع با قلمرو در فضای n ، $\mathbf{R}^n$ و برد در فضای m ، $\mathbf{R}^m$ را درنظر خواهیم گرفت.

چنین تابع، وقتی n و m هر دو مساوی یک‌اند، یک تابع حقیقی از یک متغیر حقیقی نامیده می‌شود. وقتی $n = 1$ و $m > 1$ ، این نوع تابع یک تابع برداری از یک متغیر حقیقی نام دارد.

نمونه‌هایی از این توابع به تفصیل در جلد یک مورد مطالعه قرار گرفتند.

در این فصل فرض آن است که $n > 1$ و $m \geq 1$. وقتی $m = 1$ ، تابع یک تابع حقیقی از یک متغیر برداری، یا، مختصرتر، یک ***میدان اسکالر***، نامیده می‌شود. وقتی $m > 1$ ، تابع یک‌تابع برداری‌از یک متغیر برداری، یا فقط یک ***میدان برداری***، نام‌دارد.

در این فصل مفاهیم حد، پیوستگی، و مشتق به میدانهای اسکالر و برداری تعمیم می‌یابد. در فصلهای ۱۰ و ۱۱ مفهوم انتگرال تعمیم خواهد یافت.

نمادگذاری. اسکالرها با حروف معمولی، و بردارها با حروف سیاه نموده می‌شوند. اگر f یک میدان اسکالر باشد که در نقطهٔ $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ در $\mathbf{R}^n$ تعریف شده است،

نمادهای $f(x)$ و $f(x_1, \ldots, x_n)$ هر دو برای نمودن مقدار f در آن نقطهٔ خاص به‌کار خواهند رفت. اگر f یک میدان برداری باشد، برای مقدار تابع در x می‌نویسیم $f(x)$ یا $f(x_1, \ldots, x_n)$. از حاصل ضرب داخلی

$$x \cdot y = \sum_{k=1}^{n} x_k y_k$$

و نرم نظیرش $\|x\| = (x \cdot x)^{1/2}$، که در آن $x = (x_1, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, \ldots, y_n)$، استفاده خواهیم کرد. نقاط در $\mathbf{R}^2$ را معمولاً با (x, y) به جای (x_1, x_2)، و نقاط در $\mathbf{R}^3$ را معمولاً با (x, y, z) به‌جای (x_1, x_2, x_3) نشان می‌دهیم.

میدانهای اسکالر و برداری تعریف شده بر زیر مجموعه‌های $\mathbf{R}^2$ و $\mathbf{R}^3$ مکرر در کاربردهای ریاضیات در علوم و مهندسی ظاهر می‌شوند. مثلاً، اگر به هر نقطهٔ x از هوا عددحقیقی $f(x)$ را، که‌نمایش‌دمادر x است، نسبت دهیم، تابع f که به این‌ترتیب تعریف‌می‌شود یک میدان اسکالر است. اگر به این نقطه یک بردار، که مبین سرعت باد است، نسبت داده شود، نمونه‌ای از یک میدان برداری خواهیم داشت.

در مسائل فیزیکی مربوط به میدانهای اسکالر یا برداری، مهم آن است که بدانیم میدان با رفتن از یک نقطه به نقطهٔ دیگر چگونه تغییر می‌کند. درحالت یک بعدی، مشتق یک ابزار ریاضی است که در مطالعهٔ این تغییرات به‌کار می‌رود. نظریهٔ مشتق در حالت یک بعدی به توابعی می‌پردازد که بر بازه‌های باز تعریف شده‌اند. برای تعمیم این نظریه به $\mathbf{R}^n$، تعمیم بازه‌های باز به مجموعه‌های *باز* را درنظر می‌گیریم.

۲۰۸ گویهای باز و مجموعه‌های باز

فرض‌کنیم a نقطه‌ای در $\mathbf{R}^n$، و r عددی مثبت باشد. مجموعهٔ تمام x هایی در $\mathbf{R}^n$ که

$$\|x - a\| < r$$

یک *گوی باز* به‌شعاع r ومرکز a است. این مجموعه‌را با $B(a)$ یا $B(a; r)$ نشان می‌دهیم.

گوی $B(a; r)$ از تمام نقاطی تشکیل شده است که فاصله‌شان تا a از r کمتر است. در $\mathbf{R}^1$، این چیزی جز یک بازهٔ باز به مرکز a نیست. در $\mathbf{R}^2$ یک قرص مستدیر، و در $\mathbf{R}^3$ یک کره توپر به‌مرکز a و شعاع r می‌باشد.

تعریف نقطهٔ درونی. فرض‌کنیم S زیر مجموعهٔ $\mathbf{R}^n$ بوده، و $a \in S$. دراین‌صورت،

a یک **نقطهٔ درونی** S نامیده می‌شود اگر n ـ گوی بازی به مرکز a وجود داشته باشدکه تمام نقاطش متعلق به S باشند.

به عبارت دیگر، هر نقطهٔ درونی a از S را می‌توان با یک n ـ گوی مانند $B(a)$ چنان محصور کرد که $B(a) \subseteq S$. مجموعهٔ تمام نقاط درونی S درون S نام دارد و با $\operatorname{int} S$ نموده می‌شود. یک مجموعهٔ باز شامل نقطهٔ a را گاهی یک *همسایگی* a می‌نامند.

تعریف مجموعهٔ باز. مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ *باز*نامیده می‌شوداگر تمام نقاطش نقاط درونی باشند. به عبارت دیگر، S باز است اگر و فقط اگر $S = \operatorname{int} S$.

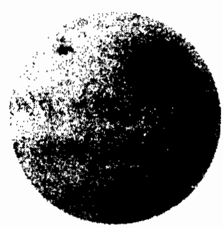
چند مثال. در $\mathbf{R}^1$ ساده‌ترین نوع مجموعهٔ باز بازهٔ باز است. اجتماع دو یا چند بازهٔ بازنیز باز است. بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ باز نیست، زیرا هیچ نقطهٔ انتهایی را نمی‌توان در یک 1 ـ گوی که جزء این بازه باشد جای داد.

2 ـ گوی $S = B(O; 1)$ در شکل ۱۰۸ نمونه‌ای است از یک مجموعهٔ باز در $\mathbf{R}^2$. هرنقطهٔ a از S مرکز قرصی است که کاملاً در S قرار دارد. در بعضی نقاط، شعاع این قرص خیلی کوچک است.

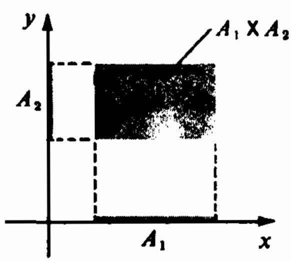
بعضی ازمجموعه‌های باز در $\mathbf{R}^2$ را می‌توان با ضرب دکارتی مجموعه‌های باز در $\mathbf{R}^1$ ساخت. اگر A_1 و A_2 زیرمجموعه‌هایی از $\mathbf{R}^1$ باشند، حاصل ضرب دکارتی آنها $A_1 \times A_2$ مجموعه‌ای است در $\mathbf{R}^2$ که به‌صورت زیر تعریف می‌شود:

$$A_1 \times A_2 = \{(a_1, a_2) \mid a_1 \in A_1 \quad , \quad a_2 \in A_2\}.$$

مثالی درشکل ۲۰۸ نموده شده است. مجموعه‌های A_1 و A_2 بازه‌اند، و $A_1 \times A_2$ مستطیل



شکل ۱۰۸ قرص $B(O; 1)$ یک مجموعهٔ باز در $\mathbf{R}^2$ است.



شکل ۲۰۸ حاصل ضرب دکارتی دو بازهٔ باز یک مستطیل باز است.

می‌باشد.

هرگاه A_1 و A_2 زیرمجموعه‌های بازی از $\mathbf{R}^1$ باشند، $A_1 \times A_2$ یک زیر مجموعهٔ باز $\mathbf{R}^2$ است. برای اثبات این مطلب، نقطهٔ دلخواهی مانند $a = (a_1, a_2)$ را در $A_1 \times A_2$ اختیارمی‌کنیم. باید نشان دهیم که a یک نقطهٔ درونی $A_1 \times A_2$ است. چون A_1 و A_2 در $\mathbf{R}^1$ بازند، یک 1 ـ گوی مانند $B(a_1; r_1)$ در A_1، و یک 1 ـ گوی مانند $B(a_2; r_2)$ در A_2 وجود دارد. فرض کنیم $r = \min\{r_1, r_2\}$. به‌آسانی می‌توان نشان داد که 2 گوی $B(a; r) \subseteq A_1 \times A_2$. در واقع، اگر $x = (x_1, x_2)$ نقطه‌ای از $B(a; r)$ باشد، $\|x - a\| < r$؛ درنتیجه، $|x_1 - a_1| < r_1$ و $|x_2 - a_2| < r_2$. ازاینرو، $x_1 \in B(a_1; r_1)$ و $x_2 \in B(a_2; r_2)$. بنابراین، $x_1 \in A_1$ و $x_2 \in A_2$؛ درنتیجه، $(x_1, x_2) \in A_1 \times A_2$. این ثابت می‌کند که هر نقطهٔ $B(a; r)$ در $A_1 \times A_2$ است. بنابراین، هر نقطهٔ $A_1 \times A_2$ یک نقطهٔ درونی است؛ درنتیجه، $A_1 \times A_2$ باز می‌باشد.

لازم است توجه کنیم که یک زیر مجموعهٔ باز $\mathbf{R}^1$، وقتی زیر مجموعه‌ای از $\mathbf{R}^2$ گرفته شود، دیگر مجموعهٔ باز نیست، چرا که یک زیر مجموعهٔ $\mathbf{R}^1$ نمی‌تواند شامل یک 2 ـ گوی باشد.

تعریفهای برون و کرانه. گوییم نقطهٔ x برون مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ است اگر n ـ گویی مانند $B(x)$ وجود داشته باشد که شامل هیچ نقطه از S نباشد. مجموعهٔ تمام نقاط در $\mathbf{R}^n$ که برون S اند را برون S می‌نامیم و با $\operatorname{ext} S$ نشان می‌دهیم. یک نقطه که نه برون S و نه نقطهٔ درونی S باشد یک *نقطهٔ کرانه‌ای* S نامیده می‌شود. مجموعهٔ تمام نقاط کرانه‌ای S *کرانهٔ* S نام دارد و با ∂S نموده می‌شود.

این مفاهیم در شکل ۱۰۸ نموده شده‌اند. برون S مجموعهٔ تمام x هایی است که $\|x\| > 1$. کرانهٔ S از تمام x هایی تشکیل شده است که $\|x\| = 1$.

۳۰۸ تمرین

۱. فرض‌کنیم f یک میدان اسکالر باشد که بر مجموعه‌ای چون S تعریف شده است، و c عددحقیقی‌معلومی باشد. مجموعهٔ تمام x هایی در S که $f(x) = c$ یک مجموعهٔ

تراز f نام دارد. (بعداً "دراین‌فصل، مسائل هندسی وفیزیکی مربوط به مجموعه‌های تراز مورد بحث قرار خواهند گرفت.) در هر میدان اسکالر زیر، S تمام فضای $\mathbf{R}^n$ است. شکلی بکشید که مجموعه‌های تراز نظیر به مقادیر داده شده از c را توصیف کند.

(آ) $f(x, y) = x^2 + y^2, \quad c = 0, 1, 4, 9$.

(ب) $f(x, y) = e^{xy}, \quad c = e^{-2}, e^{-1}, 1, e, e^2, e^3$.

(پ) $f(x, y) = \cos(x + y), \quad c = -1, 0, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1$.

(ت) $f(x, y, z) = x + y + z, \quad c = -1, 0, 1$.

(ث) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2, \quad c = 0, 6, 12$.

(ج) $f(x, y, z) = \sin(x^2 + y^2 + z^2), \; c = -1, -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}\sqrt{2}, 1$.

۲. در هرحالت زیر، فرض‌کنید S مجموعهٔ تمام نقاط (x, y) ی درصفحه باشد که درنامساویهای داده شده صدق می‌کنند. مجموعهٔ S را رسم کنید و، با استدلالی هندسی، باز بودن یا نبودن S را توضیح دهید. در رسم خود کرانهٔ S را نشان دهید.

(آ) $x^2 + y^2 < 1$.

(ب) $3x^2 + 2y^2 < 6$.

(پ) $|x| < 1$ و $|y| < 1$.

(ت) $x \geq 0$ و $y > 0$.

(ث) $|x| \leq 1$ و $|y| \leq 1$.

(ج) $x > 0$ و $y < 0$.

(چ) $xy < 1$.

(ح) $1 \leq x \leq 2$ و $3 < y < 4$.

(خ) $1 < x < 2$ و $y > 0$.

(د) $x \geq y$.

(ذ) $x > y$.

(ر) $y > x^2$ و $|x| < 2$.

(ز) $(x^2 + y^2 - 1)(4 - x^2 - y^2) > 0$.

(ژ) $(2x - x^2 - y^2)(x^2 + y^2 - x) > 0$.

۳. در هر حالت زیر، S را مجموعهٔ تمام نقاط (x, y, z) در فضای 3 بگیرید که در نامعادلات داده شده صدق می‌کنند، و باز بودن یا نبودن S را مشخص کنید.

(آ) $z^2 - x^2 - y^2 - 1 > 0$.

(ب) $|x| < 1$، $|y| < 1$، $|z| < 1$.

(پ) $x + y + z < 1$.

(ت) $|x| \leq 1$، $|y| < 1$، $|z| < 1$.

(ث) $x + y + z < 1$ و $x > 0, y > 0, z > 0$.

(ج) $x^2 + 4y^2 + 4z^2 - 2x + 16y + 40z + 113 < 0$.

۴ . (آ) هرگاه A مجموعهٔ بازی در فضای n بوده و $x \in A$ ، نشان دهید که‌مجموعهٔ $A - \{x\}$ ، که با حذف x از A به‌دست می‌آید، باز است .

(ب) هرگاه A بازهٔ بازی بر خط حقیقی بوده و B زیر بازهٔ بسته‌ای از A باشد، نشان دهید که $A - B$ باز می‌باشد .*

(پ) هرگاه A و B بازه‌های بازی بر خط حقیقی باشند، نشان دهید که $A \cup B$ و $A \cap B$ باز می‌باشند .

(ت) هرگاه A بازهٔ بازی بر خط حقیقی باشد، نشان دهید که متمم آن (نسبت به تمام خط حقیقی) باز است .

۵ . خواص زیر از مجموعه‌های باز در $\mathbf{R}^n$ را ثابت کنید :

(آ) مجموعهٔ تهی $\varnothing$ باز است ؛

(ب) $\mathbf{R}^n$ باز است ؛

(پ) اجتماع هر گرد آیه از مجموعه‌های باز باز است .

(ت) اشتراک هر گردآیهٔ متناهی از مجموعه‌های باز باز است .

(ث) با یک مثال نشان دهید که اشتراک هر گردآیهٔ نامتناهی از مجموعه‌های باز لزوماً باز نیست .

مجموعه‌های بسته . مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ را بسته خوانند اگر متمم آن $\mathbf{R}^n - S$ باز باشد . در سه تمرین بعدی خواص مجموعه‌های بسته بحث می‌شوند .

۶ . در هر حالت زیر، فرض کنید S مجموعهٔ تمام نقاط (x, y) در $\mathbf{R}^2$ باشد که در شرایط داده شده صدق می‌کنند . S را رسم کنید و، با استدلالی هندسی، باز، بسته، هم باز و هم بسته، یا نه باز نه بسته بودن S را توضیح دهید .

(آ) $x^2 + y^2 \geq 0$.

(ب) $x^2 + y^2 < 0$.

(پ) $x^2 + y^2 \leq 1$.

(ت) $1 < x^2 + y^2 < 2$.

(ث) $1 \leq x^2 + y^2 \leq 2$.

(ج) $1 < x^2 + y^2 \leq 2$.

(چ) $1 \leq x \leq 2, 3 \leq y \leq 4$.

(ح) $1 \leq x \leq 2, 3 \leq y < 4$.

(خ) $y = x^2$.

(د) $y \geq x^2$.

---

* *هرگاه A و B مجموعه باشند، تفاضل $A - B$ (به‌نام متمم B نسبت به A) مجموعهٔ تمام عنصرهایی از A است که در B نیستند .*

(ذ) $y \geq x^2$ و $|x| < 2$.　　(ر) $y \geq x^2$ و $|x| \leq 2$.

۷ . (آ) هرگاه A یک مجموعهٔ بسته در فضای n بوده و x نقطه‌ای در A نباشد، ثابت کنید $A \cup \{x\}$ نیز بسته می‌باشد.

(ب) ثابت کنید بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ بر خط حقیقی یک مجموعهٔ بسته است.

(پ) هرگاه A و B بازه‌های‌بسته‌ای برخط حقیقی باشند، نشان دهید که $A \cup B$ و $A \cap B$ نیز بسته می‌باشند.

۸ . خواص زیراز مجموعه‌های بسته در $\mathbf{R}^n$ را ثابت کنید. می‌توانید از تمرین ۵ استفاده کنید:

(آ) مجموعهٔ تهی $\varnothing$ بسته است؛

(ب) $\mathbf{R}^n$ بسته است؛

(پ) اشتراک هر گردآیه از مجموعه‌های بسته بسته است؛

(ت) اجتماع تعدادی متناهی مجموعهٔ بسته بسته است؛

(ث) با یک‌مثال نشان دهید که اجتماع هر گردآیهٔ نامتناهی از مجموعه‌های بسته لزوماً بسته نیست.

۹ . فرض‌کنید S زیر مجموعه‌ای از $\mathbf{R}^n$ باشد.

(آ) ثابت کنید که $\text{int } S$ و $\text{ext } S$ هر دو مجموعه‌هایی باز هستند.

(ب) ثابت کنید که $\mathbf{R}^n = (\text{int } S) \cup (\text{ext } S) \cup \partial S$ ، یعنی اجتماعی از مجموعه‌های از هم جداست، و، با استفاده از این، نتیجه بگیرید که ∂S همواره یک مجموعهٔ بسته است.

۱۰ . S یک مجموعه در $\mathbf{R}^n$ و x نقطه‌ای است با این خاصیت که هرگوی $B(x)$ شامل هم نقاط درونی و هم نقاط برونی S است. ثابت کنید x یک نقطهٔ کرانه‌ای S است. آیا عکس‌این مطلب نیز درست است؟ یعنی، آیا هر نقطهٔ کرانه‌ای S لزوماً این خاصیت را دارد؟

۱۱ . فرض‌کنید S زیر مجموعه‌ای از $\mathbf{R}^n$ باشد. ثابت کنید که $\text{ext } S = \text{int}(\mathbf{R}^n - S)$.

۱۲ . ثابت کنید مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ بسته است اگر و فقط اگر $S = (\text{int } S) \cup \partial S$.

۴.۸ حدود و پیوستگی

مفاهیم حد و پیوستگی را می‌توان به‌آسانی به میدانهای اسکالر و برداری تعمیم داد.

تعریفها را برای میدانهای برداری تنظیم می‌کنیم ؛ این تعاریف در مورد میدانهای اسکالر نیز به‌کار می‌روند .

یک تابع مانند $f: S \to \mathbf{R}^m$ را درنظر می‌گیریم ، که درآن S زیر مجموعه‌ای از $\mathbf{R}^n$ است . هرگاه $\boldsymbol{a} \in \mathbf{R}^n$ و $\boldsymbol{b} \in \mathbf{R}^m$ ، می‌نویسیم

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{b} \quad (\text{یا ، وقتی } \boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a} \text{ ، } \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})\to\boldsymbol{b}) \qquad (۱۰۸)$$

به این معنی که

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\|\to 0} \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) - \boldsymbol{b}\| = 0. \qquad (۲۰۸)$$

علامت حد در معادلهٔ (۲۰۸) حد معمولی درحساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی‌است . دراین تعریف لزومی به اینکه $\boldsymbol{f}$ در خود نقطهٔ $\boldsymbol{a}$ تعریف شده باشد نیست .

هرگاه بنویسیم $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$ ، معادلهٔ (۲۰۸) خواهد شد

$$\lim_{\|\boldsymbol{h}\|\to 0} \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{h}) - \boldsymbol{b}\| = 0.$$

برای نقـاط‌در $\mathbf{R}^2$ ، به‌جای $\boldsymbol{x}$ می‌نویسیم (x, y) و به‌جای $\boldsymbol{a}$ می‌نویسیم (a, b) و رابطهٔ حدی (۱۰۸) را به‌صورت زیر بیان می‌کنیم :

$$\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = b.$$

برای نقاط در $\mathbf{R}^3$ ، قرار می‌دهیم $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ و $\boldsymbol{a} = (a, b, c)$ و می‌نویسیم

$$\lim_{(x,y,z)\to(a,b,c)} f(x, y, z) = \boldsymbol{b}.$$

تابع $\boldsymbol{f}$ را در $\boldsymbol{a}$ **پیوسته** گوییم هرگاه $\boldsymbol{f}$ در $\boldsymbol{a}$ تعریف شده باشد و

$$\lim_{\boldsymbol{x}\to\boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{a}).$$

گوییم $\boldsymbol{f}$ **بر مجموعهٔ** S **پیوسته** است اگر $\boldsymbol{f}$ در هر نقطه از S پیوسته باشد .

چون اینها تعمیمهای سر راست تعاریف در حالت یک بعدی اند ، اینکه بسیاری از خواص آشنای حدود و پیوستگی را نیز می‌توان تعمیم داد تعجبی ندارد . مثلا" ، قضایای معمولی حدود و پیوستگی مجموعها ، حاصل ضربها ، و خارج قسمتها برای میدانهای اسکالر نیز برقرارند . در مورد میدانهای بـــرداری ، خارج قسمتها تعریف نشده‌اند ، اما قضایای

زیر را در مورد مجموعها، ضرب در اسکالرها، حاصل ضربهای داخلی، و نرمها خواهیم داشت.

قضیهٔ ۸.۱ . هرگاه $\lim_{x\to a} f(x) = b$ و $\lim_{x\to a} g(x) = c$، آنگاه نیز داریم

(آ) $\lim_{x\to a} [f(x) + g(x)] = b + c$ ؛

(ب) به‌ازای هر اسکالر λ ، $\lim_{x\to a} \lambda f(x) = \lambda b$ ؛

(پ) $\lim_{x\to a} f(x)\cdot g(x) = b\cdot c$ ؛

(ت) $\lim_{x\to a} \|f(x)\| = \|b\|$.

برهان. فقط قسمتهای (پ) و (ت) را ثابت می‌کنیم؛ اثبات (آ) و (ب) به‌عنوان تمرین به خواننده محول می‌شود.

برای اثبات (پ)، می‌نویسیم

$$f(x)\cdot g(x) - b\cdot c = [f(x) - b]\cdot[g(x) - c] + b\cdot[g(x) - c] + c\cdot[f(x) - b].$$

حال، با استفاده از نامساوی مثلثی و نامساوی کشی ــ شوارتز، داریم

$$0 \le \|f(x)\cdot g(x) - b\cdot c\| \le \|f(x) - b\|\,\|g(x) - c\| + \|b\|\,\|g(x) - c\| + \|c\|\,\|f(x) - b\|.$$

چون وقتی $x \to a$ ، $\|f(x) - b\| \to 0$ و $\|g(x) - c\| \to 0$ ، این نشان می‌دهد که، وقتی $x \to a$ ، $\|f(x)\cdot g(x) - b\cdot c\| \to 0$ ، که (پ) را ثابت خواهد کرد.

با اختیار $f(x) = g(x)$ در قسمت (پ)، معلوم می‌شود که

$$\lim_{x\to a} \|f(x)\|^2 = \|b\|^2,$$

که از آن (ت) را خواهیم داشت.

مثال ۱. پیوستگی و مولفه‌های یک میدان برداری. هرگاه میدان برداری f مقادیرش در $\mathbf{R}^m$ باشند، هر مقدار تابعی $f(x)$ دارای m مولفه بوده و می‌توان نوشت

$$f(x) = (f_1(x), \ldots, f_m(x)).$$

m میدان اسکالر $f_1, \ldots, f_m$ **مولفه‌های** میدان برداری f نامیده می‌شوند. ثابت می‌کنیم f در یک نقطه پیوسته است اگر و فقط اگر هر مولفهٔ f_k در آن نقطه پیوسته باشد.

فرض کنیم e_k بردار یکهٔ k ام مختصات باشد (همهٔ مولفه‌های e_k صفرند جز مولفهٔ k ام، که مساوی یک است). دراین صورت، $f_k(x)$ از حاصل ضرب نقطه‌ای زیر به‌دست می‌آید:

$$f_k(x) = f(x) \cdot e_k .$$

بنابراین، قسمت (پ) قضیهٔ ۱۰۸ نشان می‌دهد که هر نقطهٔ پیوستگی f یک نقطهٔ پیوستگی f_k نیز هست. بعلاوه، چون داریم

$$f(x) = \sum_{k=1}^{m} f_k(x) e_k ,$$

چند بار استفاده از قسمتهای (آ) و (ب) قضیهٔ ۱۰۸ نشان می‌دهد که یک نقطهٔ پیوستگی تمام m مولفهٔ $f_1, \ldots, f_m$ یک نقطهٔ پیوستگی f نیز هست.

مثال ۲. پیوستگی تابع همانی. تابع همانی، یعنی $f(x) = x$ ، همه‌جا در $\mathbf{R}^n$ پیوسته است. بنابراین، مولفه‌هایش نیز همه‌جا در $\mathbf{R}^n$ پیوسته می‌باشند. اینها n میدان اسکالر هستند که با روابط زیر مشخص می‌شوند:

$$f_1(x) = x_1 , f_2(x) = x_2 , \ldots , f_n(x) = x_n .$$

مثال ۳. پیوستگی تبدیلات خطی. فرض کنیم $f: \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^m$ یک تبدیل خطی باشد. ثابت می‌کنیم f در هر نقطهٔ a در $\mathbf{R}^n$ پیوسته است. بنابر خاصیت خطی، داریم

$$f(a+h) = f(a) + f(h) .$$

لذا، کافی است ثابت کنیم که، وقتی $h \to O$ ، $f(h) \to O$. با نوشتن h برحسب مولفه‌هایش، داریم $h = h_1e_1 + \cdots + h_ne_n$. با استفادهٔ مجدد از خاصیت خطی، معلوم می‌شود که $f(h) = h_1f(e_1) + \cdots + h_nf(e_n)$. این نشان می‌دهد که، وقتی $h \to O$ ، $f(h) \to O$.

مثال ۴. پیوستگی چند جمله‌ایهای n متغیره. میدان اسکالر P تعریف شده بر $\mathbf{R}^n$ که با فرمولی به شکل

$$P(\mathbf{x}) = \sum_{k_1=0}^{p_1} \cdots \sum_{k_n=0}^{p_n} c_{k_1 \cdots k_n} x_1^{k_1} \cdots x_n^{k_n}$$

تعریف شده است یک **چند جمله‌ای از n متغیر** $x_1, \ldots, x_n$ نامیده می‌شود. یک چند جمله‌ای همه‌جا در $\mathbf{R}^n$ پیوسته است، زیرا یک مجموع متناهی از حاصل ضربهایی از میدانهای اسکالر است که همه‌جا در $\mathbf{R}^n$ پیوسته‌اند. مثلاً، یک چند جمله‌ای از دومتغیر x و y، که با

$$P(x, y) = \sum_{i=0}^{p} \sum_{j=0}^{q} c_{ij} x^i y^j$$

داده شده، در هر نقطهٔ (x, y) در $\mathbf{R}^2$ پیوسته است.

مثال ۵. پیوستگی توابع گویا. میدان اسکالر f که با $f(\mathbf{x}) = P(\mathbf{x})/Q(\mathbf{x})$ داده شده، که درآن P و Q چندجمله‌ایهایی از مولفه‌های $\mathbf{x}$ اند، یک ***تابع گویا*** نام دارد. یک تابع گویا در هر نقطه که $Q(\mathbf{x}) \neq 0$ پیوسته می‌باشد.

به کمک قضیهٔ بعدی که درباب پیوستگی توابع مرکب است، می‌توان مثالهای دیگری از توابع پیوسته ساخت.

قضیهٔ ۲.۸ . *فرض کنیم $\boldsymbol{f}$ و $\boldsymbol{g}$ چنان توابعی باشند که تابع مرکب $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ در $\boldsymbol{a}$ تعریف شده باشد، که*

$$(\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g})(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})].$$

هرگاه $\boldsymbol{g}$ در $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{f}$ در $\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$ پیوسته باشد، ترکیب $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ در $\boldsymbol{a}$ پیوسته می‌باشد.

برهان. فرض کنیم $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ و $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})$. دراین صورت، داریم

$$\boldsymbol{f}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})] - \boldsymbol{f}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})] = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b}).$$

طبق فرض، وقتی $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$، $\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{b}$؛ درنتیجه، داریم

$$\lim_{\|\boldsymbol{x}-\boldsymbol{a}\| \to 0} \|\boldsymbol{f}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})] - \boldsymbol{f}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})]\| = \lim_{\|\boldsymbol{y}-\boldsymbol{b}\| \to 0} \|\boldsymbol{f}(\boldsymbol{y}) - \boldsymbol{f}(\boldsymbol{b})\| = 0.$$

بنابراین، $\lim_{\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}} \boldsymbol{f}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{x})] = \boldsymbol{f}[\boldsymbol{g}(\boldsymbol{a})]$؛ درنتیجه، $\boldsymbol{f} \circ \boldsymbol{g}$ در $\boldsymbol{a}$ پیوسته خواهد بود.

مثال ۶. قضیهٔ فوق پیوستگی میدانهای اسکالری چون h را ایجاب می‌کند، که $h(x, y)$ با فرمولهایی نظیر

$$\sin(x^2y), \qquad \log(x^2+y^2), \qquad \frac{e^{x+y}}{x+y}, \qquad \log[\cos(x^2+y^2)]$$

بیان شده‌باشد. این مثالها در همهٔ نقاطی که توابع در آنها تعریف شده‌اند پیوسته‌اند. اولی درتمام نقاط صفحه، و دومی در تمام نقاط غیر از مبداء پیوسته است. سومی درتمام نقاط (x, y) که درآنها $x + y \neq 0$ پیوسته است، و چهارمی در تمام نقاطی که درآنها $x^2 + y^2$ مضرب فردی از $\pi/2$ نباشد پیوسته است.

[مجموعهٔ (x, y) هایی‌که $x^2 + y^2 = n\pi/2$ ($n = 1, 3, 5, \ldots$) خانواده‌ای است‌از دوایر به مرکز مبداء.] این مثالها نشان می‌دهند که ناپیوستگیهای یک تابع دو متغیره ممکن‌است‌ازنقاطی تنها، تمام نقاط یک منحنی، یا خانواده‌ای از منحنیها متشکل‌باشند.

مثال ۷. یک تابع دو متغیره ممکن است نسبت به هر متغیر جداگانه پیوسته بوده و به عنوان یک تابع دو متغیره با هم ناپیوسته باشد. این وضع با مثال زیر توضیح می‌شود:

اگر $(x, y) \neq (0, 0)$ ، $f(x, y) = \dfrac{xy}{x^2 + y^2}$ ؛ $f(0, 0) = 0$.

برای نقاط (x, y) روی محور x ، داریم $y = 0$ و $f(x, y) = f(x, 0) = 0$ ؛ درنتیجه، تابع همه‌جا بر محور x دارای مقدار ثابت 0 است. لذا، اگر قرار دهیم $y = 0$ و f را فقط تابعی از x بگیریم، f در $x = 0$ پیوسته می‌باشد. بهمین نحو، f در تمام نقاط محور y مقدار ثابت 0 رادارد؛ درنتیجه، اگر قرار دهیم $x = 0$ و f را فقط‌تابعی از y بگیریم، f در $y = 0$ پیوسته خواهد بود. با اینحال، به‌عنوان یک تابع دومتغیره، f در مبداء پیوسته‌نیست. درواقع، درهر نقطه از خط $y = x$ (جز مبداء)، تابع دارای مقدار ثابت $\frac{1}{2}$ است، زیرا $f(x, x) = x^2/(2x^2) = \frac{1}{2}$. چون نقاطی بر این خط‌وجود دارند بدلخواه نزدیک مبداء و $f(0, 0) \neq \frac{1}{2}$ ، تابع در $(0, 0)$ پیوسته نخواهد بود.

۵۰۸ تمرین

تمرینهای‌این بخش مربوطند به حدود و پیوستگی میدانهای اسکالر که بر زیرمجموعه‌هایی از صفحه تعریف شده‌اند.

۱ . در هریک از مثالهای زیر، میدان اسکالر f به‌ازای هر نقطهٔ (x, y) در صفحه با معادله‌ای‌که سمت راستش معنی دارد تعریف شده است . در هر مثال، مجموعهٔ‌نقاط (x, y) را که f در آنها پیوسته است معین نمایید .

(آ) $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.   (ب) $f(x, y) = \log (x^2 + y^2)$.

(پ) $f(x, y) = \frac{1}{y} \cos x^2$.   (ت) $f(x, y) = \tan \frac{x^2}{y}$.

(ث) $f(x, y) = \arctan \frac{y}{x}$.   (ج) $f(x, y) = \arcsin \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

(چ) $f(x, y) = \arctan \frac{x + y}{1 - xy}$.   (ح) $f(x, y) = \frac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}$.

(خ) $f(x, y) = x^{(y^2)}$.   (د) $f(x, y) = \arccos \sqrt{x/y}$.

۲ . هرگاه $\lim_{(x,y)\to(a,b)} f(x, y) = L$ و حدود یک بعدی

$$\lim_{x\to a} f(x, y) \quad و \quad \lim_{y\to b} f(x, y)$$

هر دو وجود داشته باشند ، ثابت کنید که

$$\lim_{x\to a} [\lim_{y\to b} f(x, y)] = \lim_{y\to b} [\lim_{x\to a} f(x, y)] = L.$$

دو حد این معادله حدود مکرر نامیده می‌شوند ؛ این تمرین نشان می‌دهد که وجود حددوبعدی‌ودو حد یک بعدی وجود و تساوی دو حد مکرر را ایجاب می‌کند . (عکس این مطلب همیشه درست نیست . مثال نقض در تمرین ۴ ذکر شده است .)

۳ . فرض‌کنید اگر $x + y \neq 0$ ، $f(x, y) = (x - y)/(x + y)$. نشان دهید که

$$\lim_{x\to 0} [\lim_{y\to 0} f(x, y)] = 1 \quad ولــی \quad \lim_{y\to 0} [\lim_{x\to 0} f(x, y)] = -1 .$$

با استفاده از این و تمرین ۲ ، نتیجه بگیرید که $f(x, y)$ ، وقتی $(x, y) \to (0, 0)$ ، به‌حدی میل نمی‌کند .

۴ . فرض‌کنید

هروقت $x^2y^2 + (x - y)^2 \neq 0$ ، $f(x, y) = \frac{x^2y^2}{x^2y^2 + (x - y)^2}$.

نشان دهید که

$$\lim_{x\to 0}\,[\lim_{y\to 0} f(x,y)] = \lim_{y\to 0}\,[\lim_{x\to 0} f(x,y)] = 0$$

ولی $f(x,y)$ ، وقتی $(x,y)\to(0,0)$ ، به‌حدی میل نخواهد کرد.
[**راهنمایی.** f را روی خط $y = x$ بررسی‌کنید.] این مثال نشان می‌دهد که‌عکس تمرین ۲ همیشه درست نیست.

۵ . فرض کنید

$$f(x,y) = \begin{cases} x\sin\dfrac{1}{y} & \text{، } y \neq 0 \text{ اگر} \\ 0 & \text{، } y = 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

نشان دهید که وقتی $(x,y)\to(0,0)$ ، $f(x,y)\to 0$ ، ولی

$$\lim_{y\to 0}\,[\lim_{x\to 0} f(x,y)] \neq \lim_{x\to 0}\,[\lim_{y\to 0} f(x,y)].$$

توضیح دهید چرا این با تمرین ۲ متناقض نیست.

۶ . فرض کنید اگر $(x,y)\neq(0,0)$ ، $f(x,y) = (x^2-y^2)/(x^2+y^2)$. حد $f(x,y)$ ، وقتی در امتداد خط $y = mx$ ، $(x,y)\to(0,0)$ ، را پیدا کنید. آیا می‌توان $f(0,0)$ را طوری تعریف کرد که f در $(0,0)$ پیوسته باشد؟

۷ . فرض کنید $f(x,y) = 0$ اگر $y \leq 0$ یا $y \geq x^2$ ، و $f(x,y) = 1$ اگر $0 < y < x^2$. نشان‌دهیدکه‌وقتی در امتداد هر خط مستقیم‌ماربر مبدأ $(x,y)\to(0,0)$ ، خواهیم داشت $f(x,y)\to 0$. منحنیی بیابید ماربر مبدأ که در امتداد آن (جز در مبدأ) $f(x,y)$ مقدار ثابت ۱ داشته باشد. آیا f در مبدأ پیوسته است؟

۸ . هرگاه‌وقتی $(x,y)\neq(0,0)$ ، $f(x,y) = [\sin(x^2+y^2)]/(x^2+y^2)$ ، $f(0,0)$ چطور باید تعریف شود که f در مبدأ پیوسته باشد؟

۹ . فرض‌کنید f یک میدان اسکالر باشد که در نقطهٔ درونی $\boldsymbol{a}$ مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ پیوسته است. هرگاه $f(\boldsymbol{a})\neq 0$ ، ثابت کنید n ـ گوی بازی چون $B(\boldsymbol{a})$ وجود دارد که درآن f با $f(\boldsymbol{a})$ هم‌علامت است.

۶.۸ مشتق یک میدان اسکالر نسبت به یک بردار

دراین بخش به‌معرفی مشتق میدانهای اسکالرمی‌پردازیم. مشتق‌میدانهای برداری در بخش

۱۸۰۸ مطرح خواهد شد .

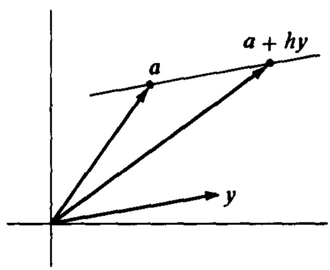
فرض کنیم f یک میدان اسکالر باشد که بر مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ تعریف شده است ، و $\boldsymbol{a}$ یک نقطهٔ درونی S باشد . می‌خواهیم ببینیم که با رفتن از $\boldsymbol{a}$ به نقطهٔ مجاور میدان چگونه تغییر می‌کند . مثلاً ، فرض کنیم $f(\boldsymbol{a})$ دمای یک اطاق بخاری دار با یک پنجرهٔ باز درنقطهٔ $\boldsymbol{a}$ باشد . اگربه‌سمت پنجره برویم ، دما کم می‌شود ، اما اگر به‌طرف بخاری برویم ، دما زیاد خواهد شد . درحالت کلی ، نحوهٔ تغییر یک میدان به جهت دور شدن از $\boldsymbol{a}$ بستگی دارد .

فرض کنیم این جهت با بردار دیگر $\boldsymbol{y}$ مشخص شده باشد . یعنی ، فرض کنیم از $\boldsymbol{a}$ به نقطهٔ دیگر $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{y}$ در امتداد پاره خط واصل بین $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{y}$ رفته باشیم . هر نقطه براین پاره خط به شکل $\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}$ است ، که درآن h یک عدد حقیقی است . مثالی درشکل ۳۰۸ نموده شده است . فاصلهٔ $\boldsymbol{a}$ تا $\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}$ مساوی است با $\|h\boldsymbol{y}\| = |h|\,\|\boldsymbol{y}\|$.

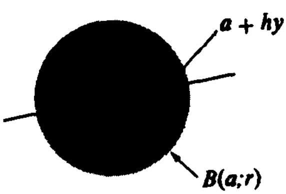
چون $\boldsymbol{a}$ یک‌نقطهٔ‌درونی S است ، یک n ـ گوی مانند $B(\boldsymbol{a}; r)$ وجود دارد که‌کاملاً در S واقع است . اگر h را طوری بگیریم که $|h|\,\|\boldsymbol{y}\| < r$ ، پاره خط از $\boldsymbol{a}$ تا $\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}$ در S قرار خواهدگرفت . (ر.ک. شکل ۴۰۸ .) h را مخالف 0 نگهداشته ولی آنقدرکوچک که $\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y} \in S$ ، و خارج قسمت تفاضلی

$$\frac{f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a})}{h} \qquad (۳۰۸)$$

را تشکیل می‌دهیم . صورت این کسر به‌ما می‌گوید که ، با رفتن از $\boldsymbol{a}$ تا $\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}$ ، تابع چقدر تغییر می‌کند . خود کسر را **میزان متوسط تغییر** f روی پاره خط واصل بین $\boldsymbol{a}$ و



شکل ۳۰۸ نقطهٔ $\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}$ برخط ماربر $\boldsymbol{a}$ موازی $\boldsymbol{y}$ قرار دارد .



شکل ۴۰۸ نقطهٔ $\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}$ در n ـ گوی $B(\boldsymbol{a}; r)$ قرار دارد اگر $\|h\boldsymbol{y}\| < r$.

$a + hy$ می‌نامیم . ما به رفتار این کسر ، وقتی $h \to 0$ ، علاقه‌مندیم . این امر به تعریف زیر منجر می‌گردد .

تعریف مشتق یک میدان اسکالر نسبت به یک بردار . $f: S \to \mathbf{R}$ یک میدان اسکالر است ، که در آن $S \subseteq \mathbf{R}^n$. فرض کنیم a یک نقطهٔ درونی S بوده و y نقطهٔ دلخواهی در $\mathbf{R}^n$ باشد . مشتق f در a نسبت به y با علامت $f'(a; y)$ نموده شده و با معادلهٔ

$$f'(a; y) = \lim_{h \to 0} \frac{f(a + hy) - f(a)}{h}, \qquad (۴ \cdot ۸)$$

در صورت وجود حد سمت راست ، تعریف می‌شود .

مثال ۱ . هرگاه $y = O$ ، خارج‌قسمت‌تفاضلی (۳ ・ ۸) به‌ازای هر $h \neq 0$ مساوی 0 است؛ درنتیجه ، $f'(a; O)$ همواره وجود داشته و مساوی 0 می‌باشد .

مثال ۲ . مشتق یک تبدیل خطی . هرگاه $f: S \to \mathbf{R}$ خطی باشد ، آنگاه $f(a + hy) = f(a) + hf(y)$ و خارج قسمت تفاضلی (۳ ・ ۸) مساوی $f(y)$ به‌ازای هر $h \neq 0$ است . دراین حالت ، $f'(a; y)$ همواره وجود داشته و از رابطهٔ

$$f'(a; y) = f(y)$$

به‌ازای هر a در S و هر y در $\mathbf{R}^n$ به‌دست می‌آید . به‌عبارت دیگر ، مشتق یک تبدیل خطی نسبت به y مساوی مقدار تابع در y است .

برای مطالعهٔ رفتار f بر خط ماربر a و $a + y$ به‌ازای $y \neq O$ ، تابع

$$g(t) = f(a + ty)$$

را معرفی می‌کنیم . قضیهٔ زیر مشتقهای $g'(t)$ و $f'(a + ty; y)$ را بهم مربوط می‌سازد .

قضیهٔ ۳ ・ ۸ . *فرض کنیم $g(t) = f(a + ty)$. هرگاه $g'(t)$ یا $f'(a + ty; y)$ وجود داشته باشد ، دیگری نیز وجود دارد و با هم مساوی‌اند ،*

$$g'(t) = f'(a + ty; y). \qquad (۵ \cdot ۸)$$

بخصوص ، وقتی $t = 0$ ، خواهیم داشت $g'(0) = f'(a; y)$.

برهان. با تشکیل خارج قسمت تفاضلی برای g ، داریم

$$\frac{g(t+h)-g(t)}{h}=\frac{f(a+ty+hy)-f(a+ty)}{h}.$$

با فرض $h\to 0$ ، (۵.۸) را خواهیم داشت .

مثال ۲. $f'(a;y)$ را درصورتی که به‌ازای هر x در $\mathbf{R}^n$ ، $f(x)=\|x\|^2$ محاسبه کنید .

حل. قرارمی‌دهیم

$$g(t)=f(a+ty)=(a+ty)\cdot(a+ty)=a\cdot a+2ta\cdot y+t^2y\cdot y\ .$$

بنابر این ، $g'(t)=2a\cdot y+2ty\cdot y$ ؛ و لذا ، $g'(0)=f'(a;y)=2a\cdot y$.

یک نتیجهٔ سادهٔ قضیهٔ ۳.۸ قضیهٔ مقدار میانگین برای میدانهای اسکالر است .

قضیهٔ ۴.۸ . قضیهٔ مقدار میانگین برای مشتقات میدانهای اسکالر. فرض‌کنیم $f'(a+ty;y)$ *به ازای هر* t *در بازهٔ* $0\le t\le 1$ *وجود داشته‌باشد . دراین صورت ، به‌ازای* θ *ای حقیقی دربازهٔ باز* $0<\theta<1$ *، داریم*

$$f(a+y)-f(a)=f'(z;y)\ ,\ \text{که درآن}\ z=a+\theta y\ .$$

برهان. فرض‌کنیم $g(t)=f(a+ty)$. با اعمال قضیهٔ مقدار میانگین یک بعدی درمورد g بر بازهٔ $[0,1]$ ، داریم

$$g(1)-g(0)=g'(\theta)\ ,\ \text{که درآن}\ 0<\theta<1\ .$$

چون $g(1)-g(0)=f(a+y)-f(a)$ و $g'(\theta)=f'(a+\theta y;y)$ ، این برهان را تمام خواهد کرد .

۷.۸ مشتقات جهتی و مشتقات جزئی

درحالت خاص، وقتی y یک بردار یکه باشد ، یعنی وقتی $\|y\|=1$ ، فاصلهٔ بین a و $a+hy$ مساوی $|h|$ است . دراین حالت ، خارج قسمت تفاضلی (۳.۸) نمایش میزان متوسط تغییر f *برواحدفاصله*درامتداد پاره‌خط واصل بین a و $a+hy$ است ؛ $f'(a;y)$

یک مشتق جهتی نام دارد.

تعریف مشتقات جهتی و جزئی. اگر y یک بردار یکه باشد، $f'(a;y)$ **مشتق جهتی** f در a درجهت y نامیده‌می‌شود. بخصوص، اگر $y = e_k$ (بردار یکهٔ k ام مختصات) ، مشتق جهتی $f'(a;e_k)$ مشتق جزئی نسبت به e_k نامیده و با $D_k f(a)$ نیز نموده می‌شود. بنابراین،

$$D_k f(a) = f'(a; e_k).$$

نمادهای زیر نیز برای مشتق جزئی $D_k f(a)$ به‌کار می‌روند:

$$D_k f(a_1, \ldots, a_n) \text{ ، } \frac{\partial f}{\partial x_k}(a_1, \ldots, a_n) \text{ ، و } f'_{x_k}(a_1, \ldots, a_n) \text{ .}$$

گاهی f'_{x_k} بی پریم و به‌صورت f_{x_k} نوشته می‌شود یا، حتی به‌صورت ساده‌تر f_k.

در $\mathbf{R}^2$ ، بردارهای یکهٔ مختصات با i و j نموده می‌شوند. اگر $a = (a, b)$ ، مشتقات جزئی $f'(a;i)$ و $f'(a;j)$ نیز بترتیب به صورت

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b) \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y}(a, b)$$

نوشته می‌شوند. در $\mathbf{R}^3$ ، اگر $a = (a, b, c)$ ، مشتقات جزئی $D_1 f(a)$ ، $D_2 f(a)$ ، و $D_3 f(a)$ نیز با

$$\frac{\partial f}{\partial x}(a, b, c) \text{ ، } \frac{\partial f}{\partial y}(a, b, c) \text{ ، و } \frac{\partial f}{\partial z}(a, b, c)$$

نموده خواهند شد.

۸.۸ مشتقات جزئی مراتب بالاتر

مشتقگیری جزئی از میدان اسکالر f میدانهای اسکالر جدید $D_1 f, \ldots, D_n f$ را تولید می‌کند. مشتقات جزئی $D_1 f, \ldots, D_n f$ را **مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم** f می‌نامند. در مورد توابع دو متغیره، چهار مشتق جزئی مرتبهٔ دوم وجود دارند، که به‌صورت زیر نوشته می‌شوند:

$$D_1(D_1 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}, \quad D_1(D_2 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y}, \quad D_2(D_1 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x}, \quad D_2(D_2 f) = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.$$

توجه‌کنیدکه $D_1(D_2f)$ یعنی مشتق‌جزئی D_2f نسبت به متغیر اول. گاهی از نماد $D_{i,j}f$ برای مشتق جزئی مرتبهٔ دوم $D_i(D_jf)$ استفاده می‌کنیم. مثلاً ، $D_{1,2}f = D_1(D_2f)$. با نماد ∂ ، مرتبهٔ مشتقها را این‌طور نشان می‌دهیم:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).$$

این ممکن است با مشتق جزئی مخلوط دیگر، یعنی

$$\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x} = \frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right),$$

مساوی باشدیانباشد. در بخش ۲۳۰۸ ثابت می‌کنیم که دو مشتق جزئی مخلوط $D_1(D_2f)$ و $D_2(D_1f)$ ، درصورتی که یکی از آنها در همسایگی یک نقطه پیوسته باشد، درآن نقطه مساوی می‌باشند. بخش ۲۳۰۸ نیز شامل مثالی است که در آن در یک نقطه $D_1(D_2f) \neq D_2(D_1f)$.

۹۰۸ تمرین

۱ . میدان‌اسکالر f بر $\mathbf{R}^n$ با معادلهٔ $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{x}$ تعریف شده است، که درآن $\boldsymbol{a}$ یک بردار ثابت است. $f'(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ را به‌ازای $\boldsymbol{x}$ و $\boldsymbol{y}$ دلخواه حساب کنید.

۲ . (آ) تمرین ۱ را به‌ازای $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x}\|^4$ حل کنید.

(ب) در (آ) فرض کنید $n = 2$ ، و تمام نقاط (x, y) را که به‌ازای آنها $f'(2\boldsymbol{i} + 3\boldsymbol{j}; x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}) = 6$ بیابید.

(پ) در (آ) فرض کنید $n = 3$ ، و تمام نقاط (x, y, z) را که به‌ازای آنها $f'(\boldsymbol{i} + 2\boldsymbol{j} + 3\boldsymbol{k}; x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}) = 0$ بیابید.

۳ . فرض کنید $T\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}^n$ یک تبدیل خطی باشد. $f'(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y})$ را برای میدان اسکالر تعریف شده بر $\mathbf{R}^n$ با معادلهٔ $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{x}\cdot T(\boldsymbol{x})$ محاسبه کنید.

در تمرینهای ۴ تا ۹، جمیع مشتقهای جزئی مرتبهٔ اول میدان اسکالر داده شده را حساب‌کنید. میدانهای تمرینات ۸ و ۹ بر $\mathbf{R}^n$ تعریف شده‌اند.

۴ . $f(x, y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$.   ۵ . $f(x, y) = \sqrt{x^2 + y^2}$.

۶ . $f(x, y) = \dfrac{x + y}{x - y}, \quad x \neq y$.   ۷ . $f(x, y) = \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}}, (x, y) \neq (0, 0)$.

۸ . $f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{a} \cdot \boldsymbol{x}$ ، $\boldsymbol{a}$ ثابت است . ۹ . $a_{ij} = a_{ji}$ ، $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}x_i x_j$.

درتمرینهای ۱۰ تا ۱۷ ، جمیع مشتقات جزئی مرتبهٔ اول را حساب کنید . در تمرینهای ۱۰ ، ۱۱ ، و ۱۲ تساوی مشتقات‌جزئی مخلوط $D_1(D_2 f)$ و $D_2(D_1 f)$ را تحقیق نمایید .

۱۰ . $f(x, y) = x^4 + y^4 - 4x^2y^2$.

۱۱ . $(x, y) \neq (0, 0)$ ، $f(x, y) = \log (x^2 + y^2)$.

۱۲ . $y \neq 0$ ، $f(x, y) = \dfrac{1}{y}\cos x^2$. ۱۳ . $y \neq 0$ ، $f(x, y) = \tan (x^2/y)$.

۱۴ . $x \neq 0$ ، $f(x, y) = \arctan (y/x)$. ۱۵ . $xy \neq 1$ ، $f(x, y) = \arctan \dfrac{x + y}{1 - xy}$.

۱۶ . $x > 0$ ، $f(x, y) = x^{(y^2)}$. ۱۷ . $y \neq 0$ ، $f(x, y) = \arccos \sqrt{x/y}$.

۱۸ . فرض‌کنید $v(r, t) = t^n e^{-r^2/(4t)}$.برای‌ثابت n مقداری‌بیابیدکه v درمعادلهٔ‌زیرصدق‌نماید:

$$\frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial v}{\partial r}\right).$$

۱۹ . فرض کنید $z = u(x, y)e^{ax+by}$ و $\partial^2 u/(\partial x\, \partial y) = 0$.برای‌ثابتهای a و b مقادیری‌بیابیدکه

$$\frac{\partial^2 z}{\partial x \partial y} - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} + z = 0.$$

۲۰ . (آ) فرض‌کنید به‌ازای هر $\boldsymbol{x}$ در n ــ گوی $B(\boldsymbol{a})$ و هر بردار $\boldsymbol{y}$ ، $f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = 0$. با استفاده از قضیهٔ مقدار میانگین ، ثابت کنید f بر $B(\boldsymbol{a})$ ثابت است .

(ب) فرض‌کنید به‌ازای بردار **ثابت** $\boldsymbol{y}$ و هر $\boldsymbol{x}$ در $B(\boldsymbol{a})$ ، $f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = 0$. دراین حالت برای f چه می‌توان نتیجه گرفت ؟

۲۱ . مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ محدب نامیده می‌شود اگر به‌ازای هر جفت نقطهٔ $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ در S ، پاره خط از $\boldsymbol{a}$ تا $\boldsymbol{b}$ نیز در S باشد؛ به‌عبارت دیگر ، به‌ازای هر t در بازهٔ $0 \leq t \leq 1$ ، $t\boldsymbol{a} + (1 - t)\boldsymbol{b} \in S$.

(آ) ثابت کنید که هر n ــ گوی محدب است .

(ب) هرگاه به‌ازای هر $\boldsymbol{x}$ در مجموعهٔ محدب باز S و به‌ازای هر $\boldsymbol{y}$ در $\mathbf{R}^n$ ، $f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = 0$ ، ثابت کنید که f بر S ثابت می‌باشد .

۲۲ . (آ) ثابت‌کنید میدان اسکالری چون f وجود ندارد که به‌ازای هر بردار ثابت $\boldsymbol{a}$ و هر بردار ناصفر $\boldsymbol{y}$ ، $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y}) > 0$.

(ب) میدان‌اسکالر f را طوری‌مثال بزنید که به‌ازای یک بردار ثابت مانند $\boldsymbol{y}$ وهر

بردار x ، $f'(x;y) > 0$.

۱۰۰۸ مشتقات جهتی و پیوستگی

در نظریهٔ یک بعدی، وجود مشتق تابع f در یک نقطه پیوستگی‌اش را در آن نقطه ایجاب می‌کند. این را می‌توان با اختیار $h \neq 0$ و نوشتن

$$f(a+h) - f(a) = \frac{f(a+h) - f(a)}{h} \cdot h$$

ثابت کرد. وقتی $h \to 0$ ، طرف راست به‌حد $f'(a) \cdot 0 = 0$ میل می‌کند؛ درنتیجه، $f(a+h) \to f(a)$. این نشان می‌دهد که وجود $f'(a)$ پیوستگی f در a را ایجاب می‌کند.

فرض کنید همین استدلال برای یک میدان اسکالر کلی بشود. همچنین، $f'(\boldsymbol{a};\boldsymbol{y})$ به‌ازای $\boldsymbol{y}$ ی وجود داشته باشد. دراین صورت، اگر $h \neq 0$ ، می‌توان نوشت

$$f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a}) = \frac{f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a})}{h} \cdot h$$

وقتی $h \to 0$ ، طرف راست به حد $f'(\boldsymbol{x};\boldsymbol{y}) \cdot 0 = 0$ میل می‌کند؛ درنتیجه وجود $f'(\boldsymbol{a};\boldsymbol{y})$ به‌ازای یک $\boldsymbol{y}$ معلوم ایجاب می‌کند که، به‌ازای همان $\boldsymbol{y}$ ،

$$\lim_{h \to 0} f(\boldsymbol{a} + h\boldsymbol{y}) = f(\boldsymbol{a})$$

این‌یعنی، وقتی *در امتداد خط ماربر* $\boldsymbol{a}$ *و با* جهت $\boldsymbol{y}$ ، $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$ ، داریم $f(\boldsymbol{x}) \to f(\boldsymbol{a})$. هرگاه $f'(\boldsymbol{a};\boldsymbol{y})$ به‌ازای هر بردار $\boldsymbol{y}$ وجود داشته باشد، آنگاه، وقتی در امتداد هر خط ماربر $\boldsymbol{a}$ ، $\boldsymbol{x} \to \boldsymbol{a}$ ، خواهیم داشت $f(\boldsymbol{x}) \to f(\boldsymbol{a})$. این ظاهرا" حکم می‌کند که f در $\boldsymbol{a}$ پیوسته‌است. با کمال تعجب، این نتیجه لزوما" درست نیست. در مثال زیر، یک میدان اسکالرتوصیف شده که درهر جهت در $\boldsymbol{O}$ مشتق جهتی دارد ولی در $\boldsymbol{O}$ پیوسته نیست.

مثال. فرض‌کنیم میدان اسکالر f بر $\mathbf{R}^2$ به صورت زیر تعریف شده باشد:

$$\text{اگر } x \neq 0 \text{ ، } f(x,y) = \frac{xy^2}{x^2+y^4} \text{ ؛ } f(0,y) = 0 \text{ .}$$

فرض‌کنیم $\boldsymbol{a} = (0,0)$ و $\boldsymbol{y} = (a,b)$ برداردلخواهی باشد. اگر $a \neq 0$ و $h \neq 0$ ، داریم

$$\frac{f(\boldsymbol{a}+h\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a})}{h} = \frac{f(h\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{O})}{h} = \frac{f(ha,hb)}{h} = \frac{ab^2}{a^2+h^2b^4} .$$

با فرض $h \to 0$ ، معلوم می‌شود که $f'(O; y) = b^2/a$. اگر $y = (0, b)$ ، به‌نحو مشابه معلوم می‌شود که $f'(O; y) = 0$. بنابراین، $f'(O; y)$ به‌ازای هرجهت y وجود دارد. همچنین، وقتی درامتدادهرخط مستقیم ماربرمبداء $x \to O$ ، خواهیم داشت $f(x) \to 0$. اما، درهرنقطه‌ازسهمی $x = y^2$ (جزمبداء)، تابع f دارای‌مقدار $\frac{1}{2}$ است. چون‌ازاین نقاط که بدلخواه نزدیک مبداء باشند زیادند و $f(O) = 0$ ، تابع f در O پیوسته‌نخواهدبود.

مثال‌فوق نشان می‌دهد که وجود همهٔ مشتقات جهتی در یک نقطه پیوستگی در آن نقطه را ایجاب نمی‌کند. به این دلیل، مشتق جهتی تعمیم مقنعی از مفهوم یک بعدی مشتق نیست. تعمیم مناسبتری وجود دارد که پیوستگی راایجاب می‌کندو، درعین حال، به ما اجازهٔ تعمیم قضایای اصلی نظریهٔ یک بعدی مشتق را به‌ابعاد بالاتر می‌دهد. این تعمیم **مشتق کل** نامیده می‌شود.

۱۱۰۸ مشتق کل

یادآور شویم که، درحالت یک بعدی، تابع f مشتقدار در a را می‌توان در مجاورت a با یک‌چندجمله‌ای‌تیلورخطی تقریب‌کرد. اگر $f'(a)$ وجودداشته‌باشد، به‌ازای $h \neq 0$ قرارمی‌دهیم

$$E(a, h) = \frac{f(a + h) - f(a)}{h} - f'(a) \qquad (۶۰۸)$$

و تعریف می‌کنیم $E(a, 0) = 0$. از (۶۰۸) فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$f(a + h) = f(a) + f'(a)h + hE(a, h),$$

معادله‌ای که به‌ازای $h = 0$ نیز برقرار است. این فرمول تیلور مرتبهٔ اول برای تقریب $f(a + h) - f(a)$ به وسیلهٔ $f'(a)h$ است. خطای مرتکب شده $hE(a, h)$ می‌باشد. از (۶۰۸) دیده می‌شود که، وقتی $h \to 0$ ، $E(a, h) \to 0$. بنابراین، خطای $hE(a, h)$ از مرتبهٔ کوچکتر از h به‌ازای h کوچک است.

خاصیت‌تقریب‌یک تابع مشتقپذیر به‌وسیلهٔ یک تابع خطی راهی برای تعمیم مفهوم مشتقپذیری به ابعاد بالاتر می‌گشاید.

فرض‌کنیم $f: S \to \mathbf{R}$ یک میدان‌اسکالر باشد که بر مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ تعریف شده است. همچنین، $\boldsymbol{a}$ یک نقطهٔ‌درونی S بوده، و $B(\boldsymbol{a}; r)$ یک n ـ گوی واقع در S باشد. فرض‌کنیم $\boldsymbol{v}$ یک بردار با $\|\boldsymbol{v}\| < r$ باشد بطوری که $\boldsymbol{a} + \boldsymbol{v} \in B(\boldsymbol{a}; r)$.

تعریف‌میدان اسکالر مشتقپذیر. گوییم f در a مشتقپذیر است اگر تبدیلی خطی مانند

$$T_a\colon \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$$

از $\mathbf{R}^n$ به $\mathbf{R}$ و تابعی اسکالر چون $E(a, v)$ وجود داشته باشند بطوری‌که ،به‌ازای $\|v\| < r$ ،

$$f(a + v) = f(a) + T_a(v) + \|v\|\, E(a, v), \tag{۷.۸}$$

که درآن، وقتی $\|v\| \to 0$ ، $E(a, v) \to 0$. تبدیل خطی T_a **مشتق کل** f در a نام خواهد داشت.

تذکر. مشتق کل T_a یک‌تبدیل خطی است، نه یک عدد. مقدار تابعی $T_a(v)$ یک عدد حقیقی‌است ،که‌به‌ازای‌هر نقطهٔ v در $\mathbf{R}^n$ تعریف شده است. مشتق کل به‌وسیلهٔ دبلیو. اچ.یانگ[1] در ۱۹۰۸ و به‌وسیلهٔ ام. فرشه[2] در ۱۹۱۱ در زمینه‌ای کلیتر معرفی شده‌بود.

معادلهٔ (۷.۸) ،که به‌ازای $\|v\| < r$ برقرار است، یک **فرمول تیلور مرتبهٔ اول** برای $f(a + v)$ نام دارد. این معادله یک تقریب خطی، یعنی $T_a(v)$ ، بـرای تفاضل $f(a + v) - f(a)$ به‌دست می‌دهد. خطای این تقریب $\|v\|\, E(a, v)$ است، جمله‌ای که وقتی $\|v\| \to 0$ ، از مرتبهٔ‌کوچکتر از $\|v\|$ مـی‌بـاشد: یعنـی، وقتـی $\|v\| \to 0$ ، $E(a, v) = o(\|v\|)$.

قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که اگر مشتق کل وجود داشته باشد، منحصر بفرد است. همچنین، طرز محاسبهٔ $T_a(y)$ را به‌ازای هر y در $\mathbf{R}^n$ بازگو می‌کند.

قضیهٔ ۵.۸ . فرض‌کنیم f در a مشتقپذیر بوده و دارای مشتق کل T_a باشد. دراین صورت، $f'(a; y)$ به‌ازای هر y در $\mathbf{R}^n$ وجود دارد و داریم

$$T_a(y) = f'(a; y). \tag{۸.۸}$$

بعلاوه، $f'(a; y)$ ترکیبی خطی از مولفه‌های y است. درواقع، اگر $y = (y_1, \ldots, y_n)$ ، خواهیم داشت

$$f'(a; y) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(a) y_k. \tag{۹.۸}$$

---

1. W. H. Young   2. M. Fréchet

برهان. معادلهٔ (۸.۸) درصورت $y = O$ بداهتاً" برقرار است، زیرا هم $T_a(O) = 0$ و هم $f'(a; O) = 0$. لذا، می‌توان فرض کرد که $y \neq O$.

چون f در a مشتقپذیر است، فرمول تیلور

$$f(a + v) = f(a) + T_a(v) + \|v\|\, E(a, v) \tag{۱۰.۸}$$

را داریم، که به‌ازای $r > 0$ ی و هر $\|v\| < r$ برقرار است و، وقتی $\|v\| \to 0$، $E(a, v) \to 0$. دراین فرمول فرض می‌کنیم $v = hy$، که درآن $h \neq 0$ و $|h|\,\|y\| < r$. دراین صورت، $\|v\| < r$. چون T_a خطی است، داریم $T_a(v) = T_a(hy) = hT_a(y)$. بنابراین، (۱۰.۸) نتیجه می‌دهد که

$$\frac{f(a + hy) - f(a)}{h} = T_a(y) + \frac{|h|\,\|y\|}{h} E(a, v). \tag{۱۱.۸}$$

چون وقتی $h \to 0$، $\|v\| \to 0$، و چون $|h|/h = \pm 1$، طرف راست (۱۱.۸)، وقتی $h \to 0$، به حد $T_a(y)$ میل می‌کند. لذا، طرف چپ نیز به‌همان حد میل می‌نماید. این (۸.۸) را ثابت می‌کند.

حال، بااستفاده از خطی بودن T_a، (۹.۸) نتیجه می‌شود. اگر $y = (y_1, \ldots, y_n)$، داریم $y = \sum_{k=1}^{n} y_k e_k$؛ درنتیجه،

$$T_a(y) = T_a\left(\sum_{k=1}^{n} y_k e_k\right) = \sum_{k=1}^{n} y_k T_a(e_k) = \sum_{k=1}^{n} y_k f'(a; e_k) = \sum_{k=1}^{n} y_k D_k f(a).$$

۱۲.۸ گرادیان یک میدان اسکالر

فرمول قضیهٔ ۵.۸، که $f'(a; y)$ را به‌صورت ترکیبی خطی از مولفه‌های y بیان می‌کند، را می‌توان به‌صورت یک حاصل ضرب نقطه‌ای نوشت:

$$f'(a; y) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(a) y_k = \nabla f(a) \cdot y,$$

که درآن $\nabla f(a)$ برداری است که مولفه‌هایش مشتقات جزئی f در a اند:

$$\nabla f(a) = (D_1 f(a), \ldots, D_n f(a)).$$

این را ***گرادیان*** f می‌نامیم. گرادیان ∇f یک میدان برداری است که درهر نقطهٔ a که‌درآن‌مشتقات‌جزئی $D_1 f(a), \ldots, D_n f(a)$ وجود دارندتعریف‌شده است. همچنین، برای ∇f می‌نویسیم $\operatorname{grad} f$. علامت ∇ تلفظ می‌شود "دل".

حال فرمول تیلور مرتبهٔ اول (۱۰۰۸) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$f(a + v) = f(a) + \nabla f(a) \cdot v + \|v\| \, E(a, v), \qquad (۱۲۰۸)$$

که‌درآن، وقتی $\|v\| \to 0$ ، $E(a, v) \to 0$. این فرمول در این شکل، شبیه فرمول یک‌بعدی تیلور است، که درآن بردار گرادیان $\nabla f(a)$ نقش مشتق $f'(a)$ را دارد.

از فرمول‌تیلورمی‌توان به‌آسانی ثابت کرد که مشتقپذیری پیوستگی راایجاب می‌کند.

قضیهٔ ۶۰۸ . *هرگاه‌میدان‌اسکالر f در a مشتقپذیر باشد، f در a پیوسته می‌باشد.*

برهان. از (۱۲۰۸) داریم

$$|f(a + v) - f(a)| = |\nabla f(a) \cdot v + \|v\| \, E(a, v)|.$$

با اعمال نامساوی مثلثی و نامساوی کشی ـ شوارتز، درمی‌یابیم که

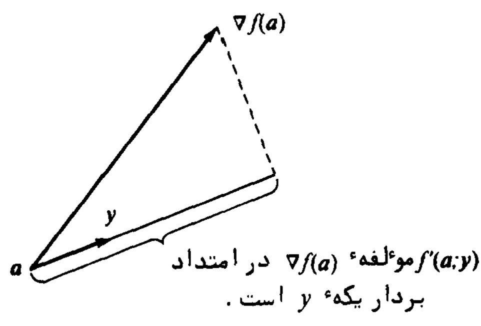
$$0 \le |f(a + v) - f(a)| \le \|\nabla f(a)\| \, \|v\| + \|v\| \, |E(a, v)|.$$

این‌نشان می‌دهد که، وقتی $\|v\| \to 0$ ، $f(a + v) \to f(a)$ ؛ درنتیجه، f در a پیوسته می‌باشد.

وقتی y یک‌برداریکه است، مشتق جهتی $f'(a; y)$ رابطهٔ هندسی ساده‌ای با بردار گرادیان دارد. فرض کنیم $\Delta f(a) \neq 0$ و θ زاویهٔ بین y و $\Delta f(a)$ باشد. دراین‌صورت داریم

$$f'(a; y) = \nabla f \cdot (a) . \, y = \|\nabla f(a)\| \|y\| \cos \theta = \nabla f(a)\| \cos \theta$$

این نشان می‌دهد که مشتق جهتی چیزی جز مؤلفهٔ بردار گرادیان در جهت y نیست. شکل ۵۰۸ بردارهای $\nabla f(a)$ و y مربوط به نقطهٔ a را نشان می‌دهد. مشتق جهتی‌وقتی ماکزیمم است که $\cos \theta = 1$ ؛ یعنی، y با $\nabla f(a)$ همجهت است. به عبارت دیگر،



شکل ۵۰۸ رابطهٔ هندسی‌مشتق جهتی با بردار گرادیان

در نقطهٔ معلوم a ، میدان اسکالر ماکزیمم میزان تغییر خود رادرجهت بردار گرادیان دارد؛ بعلاوه، این ماکزیمم مساوی طول بردار گرادیان است. وقتی $\nabla f(a)$ بر y عمود باشد، مشتق‌جهتی $f'(a;y)$ مساوی 0 می‌باشد.

در فضای 2 ، بردار گرادیان اغلب به صورت

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f(x, y)}{\partial x} i + \frac{\partial f(x, y)}{\partial y} j$$

نوشته می‌شود.

در فضای 3 ، فرمول نظیر عبارت است از

$$\nabla f(x, y, z) = \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial x} i + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial y} j + \frac{\partial f(x, y, z)}{\partial z} k.$$

۱۳۰۸ شرط کافی برای مشتقپذیری

اگر f در a مشتقپذیر باشد، همهٔ مشتقات جزئی $D_1f(a), \ldots, D_nf(a)$ وجود دارند. اما وجودهمهٔ این‌مشتقها لزوماً مشتقپذیری f در a را ایجاب نمی‌کند. یک مثال نقض عبارت است از تابع زیر:

اگر $x \neq 0$ ، $f(x, y) = \dfrac{xy^2}{x^2 + y^4}$ ؛ $f(0, y) = 0$ ،

که در بخش ۱۰۰۸ مطرح شد. برای این تابع، هر دو مشتق جزئی $D_1f(O)$ و $D_2f(O)$ وجود دارند اما f در O پیوسته نیست؛ درنتیجه، f نمی‌تواند در O مشتقپذیر باشد.

قضیهٔ‌بعدی نشان می‌دهد که وجود مشتقات جزئی پیوسته در یک نقطه مشتقپذیری را درآن نقطه ایجاب خواهد کرد.

قضیهٔ ۷۰۸ . شرط کافی برای مشتقپذیری. فرض کنیم مشتقات جزئی $D_1f, \ldots, D_nf$ در یک n ـ گوی مانند $B(a)$ وجود داشته و در a پیوسته باشند. دراین صورت، f در a مشتقپذیر می‌باشد.

تذکر. یک‌میدان‌اسکالرصادق در مفروضات قضیهٔ ۷۰۸ را در a **به‌طور پیوسته‌مشتقپذیر** می‌نامند.

برهان. تنهانامزد برای $T_a(v)$ عبارت است از $\nabla f(a) \cdot v$. نشان می‌دهیم

$$f(a + v) - f(a) = \nabla f(a) \cdot v + \|v\| E(a, v),$$

که درآن، وقتی $\|v\| \to 0$ ، $E(a, v) \to 0$. این قضیه را ثابت خواهد کرد.

فرض کنیم $\|v\| = \lambda$. پس $v = \lambda u$ ، که درآن $\|u\| = 1$. λ را آنقدر کوچک می‌گیریم که $a + v$ در گوی $B(a)$ که درآن مشتقات جزئی $D_1 f, \ldots, D_n f$ وجود دارند قرار گیرد. u را برحسب مولفه‌هایش بیان می‌کنیم:

$$u = u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n ,$$

که درآن $e_1, \ldots, e_n$ بردارهای یکهٔ مختصات‌اند. حال تفاضل $f(a+v) - f(a)$ را به صورت یک مجموع توی هم‌رو می‌نویسیم:

$$f(a+v) - f(a) = f(a+\lambda u) - f(a) = \sum_{k=1}^{n} \{f(a+\lambda v_k) - f(a+\lambda v_{k-1})\}, \tag{۱۳۰۸}$$

که در آن $v_0, v_1, \ldots, v_n$ بردارهایی در $\mathbf{R}^n$ اند بطوری که $v_0 = O$ و $v_n = u$. این بردارها را طوری می‌گیریم که در رابطهٔ بازگشتی $v_k = v_{k-1} + u_k e_k$ صدق کنند. یعنی، فرض می‌کنیم

$$v_0 = O, \qquad v_1 = u_1 e_1, \qquad v_2 = u_1 e_1 + u_2 e_2, \quad \ldots, \quad v_n = u_1 e_1 + \cdots + u_n e_n .$$

دراین صورت، جملهٔ k ام مجموع در (۱۳۰۸) خواهد شد

$$f(a + \lambda v_{k-1} + \lambda u_k e_k) - f(a + \lambda v_{k-1}) = f(b_k + \lambda u_k e_k) - f(b_k),$$

که درآن $b_k = a + \lambda v_{k-1}$. دو نقطهٔ b_k و $b_k + \lambda u_k e_k$ فقط در مولفهٔ k ام با هم فرق دارند. لذا، می‌توان قضیهٔ مقدار میانگین حساب دیفرانسیل را به‌کار برد و نوشت

$$f(b_k + \lambda u_k e_k) - f(b_k) = \lambda u_k\, D_k f(c_k), \tag{۱۴۰۸}$$

که درآن c_k بر پاره خط واصل بین b_k و $b_k + \lambda u_k e_k$ قرار دارد. توجه کنید که، وقتی $\lambda \to 0$ ، $b_k \to a$ ، و درنتیجه $c_k \to a$.

با استفاده از (۱۴۰۸) در (۱۳۰۸)، داریم

$$f(a+v) - f(a) = \lambda \sum_{k=1}^{n} D_k f(c_k) u_k .$$

اما $\nabla f(a) \cdot v = \lambda \nabla f(a) \cdot u = \lambda \sum_{k=1}^{n} D_k f(a) u_k$ ؛ درنتیجه،

$$f(a+v) - f(a) - \nabla f(a) \cdot v = \lambda \sum_{k=1}^{n} \{D_k f(c_k) - D_k f(a)\} u_k = \|v\|\, E(a, v),$$

که درآن

$$E(a, v) = \sum_{k=1}^{n} \{D_k f(c_k) - D_k f(a)\} u_k .$$

چون‌وقتی $\|v\| \to 0$ ، $c_k \to a$ ، و چون‌هرمشتق جزئی $D_k f$ در a پیوسته است، ملاحظه می‌شود که، وقتی $\|v\| \to 0$ ، $E(a, v) \to 0$. این برهان را تمام خواهد کرد.

۱۴۰۸ تمرین

۱ . برای میدانهای اسکالری که با معادلات زیر تعریف می‌شوند بردار گرادیان را درهر نقطه که وجود دارد پیدا کنید:

(آ) $f(x, y) = x^2 + y^2 \sin(xy)$ ؛ (ب) $f(x, y) = e^x \cos y$ ؛

(پ) $f(x, y, z) = x^2 y^3 z^4$ ؛ (ت) $f(x, y, z) = x^2 - y^2 + 2z^2$ ؛

(ث) $f(x, y, z) = \log(x^2 + 2y^2 - 3z^2)$ ؛ (ج) $f(x, y, z) = x^{y^z}$.

۲ . مشتقات جهتی میدانهای اسکالر زیر را در نقاط و جهتهای داده شده حساب‌کنید:

(آ) $f(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2$ در $(1, 1, 0)$ در جهت $i - j + 2k$ ؛

(ب) $f(x, y, z) = (x/y)^z$ در $(1, 1, 1)$ در جهت $2i + j - k$.

۳ . نقاط (x, y) و جهاتی که در آنهامشتق جهتی $f(x, y) = 3x^2 + y^2$ بیشترین مقداررا داردادرصورتی‌بیابیدکه (x, y) به دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ مقید شده باشد.

۴ . میدان‌اسکالرمشتقپذیر f درنقطهٔ $(1, 2)$ دارای‌مشتق جهتی $+2$ در جهت $(2, 2)$ ومشتق جهتی -2 در جهت $(1, 1)$ است. بردار گرادیان را در $(1, 2)$ معین کرده و مشتق جهتی را در جهت $(4, 6)$ حساب کنید.

۵ . ثابتهای a ، b ، و c را طوری بیابید که مشتق جهتی $f(x, y, z) = axy^2 + byz + cz^2x^3$ در نقطهٔ $(1, 2, -1)$ دارای ماکزیمم 64 در جهتی موازی محور z باشد.

۶ . یک میدان اسکالر مشتقپذیر در نقطهٔ a در $\mathbf{R}^2$ مفروض است. فرض‌کنید $f'(a; y) = 1$ و $f'(a; z) = 2$ ،که‌درآنها $y = 2i + 3j$ و $z = i + j$. مجموعهٔ تمام نقاط (x, y) را که $f'(a; xi + yj) = 6$ رسم کنید. همچنین، گرادیان $\nabla f(a)$ را محاسبه نمایید.

۷ . فرض‌کنیدمیدانهای‌اسکالر f و g بر مجموعهٔ باز S مشتقپذیر باشند. خواص زیر از گرادیان را به‌دست آورید:

(آ) اگر f بر S ثابت باشد، $\operatorname{grad} f = O$ ؛

(ب) $\operatorname{grad}(f + g) = \operatorname{grad} f + \operatorname{grad} g$ ؛

(پ) اگر c ثابت باشد، $\operatorname{grad}(cf) = c \operatorname{grad} f$؛

(ت) $\operatorname{grad}(fg) = f \operatorname{grad} g + g \operatorname{grad} f$؛

(ث) در نقاطی که $g \neq 0$، $\operatorname{grad}\left(\dfrac{f}{g}\right) = \dfrac{g \operatorname{grad} f - f \operatorname{grad} g}{g^2}$.

۸. در $\mathbf{R}^3$، فرض کنید $\boldsymbol{r}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ و $r(x, y, z) = \|\boldsymbol{r}(x, y, z)\|$.

(آ) نشان دهید که $\nabla r(x, y, z)$ یک بردار یکه در جهت $\boldsymbol{r}(x, y, z)$ است.

(ب) نشان دهید که اگر n عدد صحیح مثبتی باشد، $\nabla(r^n) = nr^{n-2}\boldsymbol{r}$.

[**راهنمایی.** از تمرین ۷ (ت) استفاده کنید.]

(پ) آیا فرمول قسمت (ب)، وقتی n یک عدد صحیح منفی یا صفر باشد، نیز برقرار است؟

(ت) میدان اسکالر f را طوری بیابید که $\nabla f = \boldsymbol{r}$.

۹. فرض کنید f در هر نقطهٔ n ـ گوی $B(\boldsymbol{a})$ مشتقپذیرباشد. اگربه‌ازای n بردارمستقل $\boldsymbol{y}_1, \ldots, \boldsymbol{y}_n$ و هر $\boldsymbol{x}$ در $B(\boldsymbol{a})$، $f'(\boldsymbol{x}; \boldsymbol{y}) = 0$، ثابت‌کنید f بر $B(\boldsymbol{a})$ ثابت‌می‌باشد.

۱۰. فرض کنید f در هر نقطهٔ n ـ گوی $B(\boldsymbol{a})$ مشتقپذیر باشد.

(آ) اگربه‌ازای‌هر $\boldsymbol{x}$ در $B(\boldsymbol{a})$، $\nabla f(\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{O}$، ثابت کنید f بر $B(\boldsymbol{a})$ ثابت‌است.

(ب) اگر به‌ازای هر $\boldsymbol{x}$ در $B(\boldsymbol{a})$، $f(\boldsymbol{x}) \le f(\boldsymbol{a})$، ثابت کنید که $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{O}$.

۱۱. شش‌حکم‌زیر را درباب میدان اسکالر $f: S \to \mathbf{R}$، که درآن $S \subseteq \mathbf{R}^n$ و $\boldsymbol{a}$ یک نقطهٔ درونی S است، درنظر بگیرید:

(آ) f در $\boldsymbol{a}$ پیوسته است؛

(ب) f در $\boldsymbol{a}$ مشتقپذیر است؛

(پ) $f'(\boldsymbol{a}; \boldsymbol{y})$ به‌ازای هر $\boldsymbol{y}$ در $\mathbf{R}^n$ وجود دارد؛

(ت) همهٔ مشتقات جزئی مرتبهٔ اول f در همسایگی $\boldsymbol{a}$ وجود دارند و در $\boldsymbol{a}$ پیوسته‌اند؛

(ث) $\nabla f(\boldsymbol{a}) = \boldsymbol{O}$؛

(ج) به‌ازای هر $\boldsymbol{x}$ در $\mathbf{R}^n$، $f(\boldsymbol{x}) = \|\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}\|$.

در جدولی‌مانند جدول زیر، اگر گزارهٔ سطر (x) همواره گزارهٔ‌ستون (y) را ایجاب می‌کند، در مربع مربوطه علامت T بگذارید. مثلا"، اگر (آ) همواره (ب) را ایجاب‌می‌کند، در دومین مربع سطر اول علامت T بگذارید. قطر اصلی قبلا" برای

	a	b	c	d	e	f
a	T					
b		T				
c			T			
d				T		
e					T	
f						T

شما پر شده است .

۱۵۰۸ قاعدهٔ زنجیره‌ای برای مشتقات میدانهای اسکالر

در نظریهٔ یک بعدی مشتق ، به‌وسیلهٔ قاعدهٔ زنجیره‌ای می‌توان مشتق تابع مرکب $g(t)=f[r(t)]$ را با فرمول

$$g'(t)=f'[r(t)]\cdot r'(t)$$

حساب کرد. دراین بخش تعمیمی از این فرمول را وقتی f با یک میدان اسکالر تعریف شده بر مجموعه‌ای در فضای n و r با تابعی برداری از یک متغیر حقیقی با مقادیر در قلمرو f عوض شده است به‌دست می‌آوریم .

در یکی از بخشهای آتی ، این فرمول را طوری تعمیم می‌دهیم که حالتی را که f و r هر دو میدانهایی برداری‌اند را شامل شود .

به‌آسانی می‌توان مثالهایی زد که در آنها ترکیب یک میدان اسکالر و یک میدان برداری‌وجود داشته باشد . مثلاً ، فرض کنیم $f(x)$ دما در نقطهٔ x از یک جسم درفضای 3 باشد ، و بخواهیم تغییرات دما را وقتی x در امتداد منحنی C واقع بر جسم تغییر می‌کند بدانیم . هرگاه منحنی با تابع برداری r بر بازهٔ $[a,b]$ توصیف شده باشد ، می‌توان تابع جدید g را با فرمول زیر معرفی کرد :

$$g(t)=f[r(t)] \quad \text{،} \quad a\le t\le b \quad \text{اگر}$$

تابع مرکب g دما را به‌صورت تابعی از پارامتر t بیان می‌کند، و مشتقش $g'(t)$ میزان تغییر دما را در امتداد منحنی اندازه می‌گیرد. با تعمیم زیر از قاعدهٔ زنجیره‌ای، می‌توان $g'(t)$ را بی‌آنکه $g(t)$ صریحاً مشخص شود حساب کرد.

قضیهٔ ۸۰۸ . قاعدهٔ زنجیره‌ای. فرض کنیم f یک میدان اسکالر باشد که بر مجموعهٔ باز S در $\mathbf{R}^n$ تعریف‌شده است، و $\boldsymbol{r}$ یک تابع برداری باشد که بازهٔ J در $\mathbf{R}^1$ را بتوی S می‌نگارد. تابع مرکب $g = f \circ \boldsymbol{r}$ را بر J با معادلهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

اگر $t \in J$ ، $g(t) = f[\boldsymbol{r}(t)]$.

فرض‌کنیم t نقطه‌ای‌در J باشدکه درآن $\boldsymbol{r}'(t)$ وجود دارد و f در $\boldsymbol{r}(t)$ مشتقپذیرباشد. دراین صورت، $g'(t)$ وجود دارد و مساوی حاصل ضرب نقطه‌ای زیر است:

$$g'(t) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{r}'(t) \text{ ، که درآن } \boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}(t) . \tag{۱۵۰۸}$$

برهان. فرض کنیم $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{r}(t)$ ، که درآن t نقطه‌ای در J است که درآن $\boldsymbol{r}'(t)$ وجود دارد. چون S باز است، یک n ـ گوی مانند $B(\boldsymbol{a})$ وجود دارد که در S واقع است. h را مخالف 0 می‌گیریم اما آنقدر کوچک که $\boldsymbol{r}(t+h)$ در $B(\boldsymbol{a})$ قرار گیرد، و فرض می‌کنیم $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)$. توجه کنید که، وقتی $h \to 0$ ، $\boldsymbol{y} \to \boldsymbol{O}$. اما داریم

$$g(t+h) - g(t) = f[\boldsymbol{r}(t+h)] - f[\boldsymbol{r}(t)] = f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a}).$$

با اعمال فرمول تیلور مرتبهٔ اول برای f ، خواهیم داشت

$$f(\boldsymbol{a}+\boldsymbol{y}) - f(\boldsymbol{a}) = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{y} + \|\boldsymbol{y}\|\, E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}),$$

که درآن وقتی $\|\boldsymbol{y}\| \to 0$ ، $E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}) \to 0$. چون $\boldsymbol{y} = \boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)$ ، این نتیجه می‌دهد که

$$\frac{g(t+h) - g(t)}{h} = \nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \frac{\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)}{h} + \frac{\|\boldsymbol{r}(t+h) - \boldsymbol{r}(t)\|}{h} E(\boldsymbol{a}, \boldsymbol{y}).$$

با فرض $h \to 0$ ، (۱۵۰۸) به‌دست خواهد آمد.

مثال ۱. مشتق جهتی درامتداد یک منحنی. وقتی تابع $\boldsymbol{r}$ منحنی C را توصیف می‌کند، $\boldsymbol{r}'$ بردار سرعت (مماس بر منحنی) است و g' در معادلهٔ (۱۵۰۸) مشتق f نسبت‌به بردار سرعت، با فرض $\boldsymbol{r}' \neq \boldsymbol{O}$ ، می‌باشد. اگر $T(t)$ بردار یکه در جهت $\boldsymbol{r}'(t)$ باشد

(T بردار یکهٔ مماس است) ، حاصل ضرب نقطه‌ای $\nabla f[r(t)] \cdot T(t)$ **مشتق جهتی f در امتداد C** یا در جهت C نامیده می‌شود . برای یک منحنی مسطح ، می‌توان نوشت

$$T(t) = \cos \alpha(t)\, i + \cos \beta(t)\, j.$$

که درآن $\alpha(t)$ و $\beta(t)$ زوایایی هستند که بردار $T(t)$ با محورهای مثبت x و y می‌سازد؛ مشتق جهتی f در امتداد C خواهد شد

$$\nabla f[r(t)] \cdot T(t) = D_1 f[r(t)] \cos \alpha(t) + D_2 f[r(t)] \cos \beta(t).$$

این فرمول اغلب به‌صورت ساده‌تر زیر نوشته می‌شود :

$$\nabla f \cdot T = \frac{\partial f}{\partial x} \cos \alpha + \frac{\partial f}{\partial y} \cos \beta.$$

بعضی‌مولفان برای مشتق جهتی $\nabla f \cdot T$ می‌نویسند df/ds . چون مشتق جهتی در امتداد C برحسب T تعریف‌شده ، مقدارش به نمایش پارامتری C بستگی دارد . یک تغییرنمایش می‌تواندجهت T را عکس‌کند؛ این ، درجای خود ، علامت مشتق جهتی را تغییر خواهد داد .

مثال ۲. مشتق جهتی میدان اسکالر $f(x, y) = x^2 - 3xy$ را در امتداد سهمی $y = x^2 - x + 2$ در نقطهٔ $(1,2)$ بیابید .

حل. در نقطهٔ دلخواه (x, y) ، بردار گرادیان عبارت است از

$$\nabla f(x, y) = \frac{\partial f}{\partial x} i + \frac{\partial f}{\partial y} j = (2x - 3y) i - 3x j.$$

در نقطهٔ $(1, 2)$ داریم $\nabla f(1, 2) = -4i - 3j$. سهمی را می‌توان به‌طور پارامتری با معادلهٔ برداری $r(t) = ti + (t^2 - t + 2)j$ نمایش داد . بنابراین ، $r(1) = i + 2j$ ، $r'(t) = i + (2t - 1)j$ ، و $r'(1) = i + j$. برای این نمایش C ، بردار یکهٔ مماس $T(1)$ عبارت است از $(i + j)/\sqrt{2}$ و مشتق جهتی مطلوب $\nabla f(1, 2) \cdot T(1) = -7/\sqrt{2}$ می‌باشد .

مثال ۳. فرض‌کنیم f یک میدان‌اسکالر ناثابت باشد که همه‌جا در صفحه مشتقپذیراست ، و c یک ثابت باشد . همچنین ، معادلهٔ دکارتی $f(x, y) = c$ منحنی C را که در هر

نقطه‌اش خط مماس دارد توصیف نماید. ثابت کنید f در هر نقطهٔ C دارای خواص زیر است:

(آ) بردار گرادیان ∇f قائم به C است؛

(ب) مشتق جهتی f در امتداد C صفر است؛

(پ) مشتق جهتی f در جهتی قائم به C بیشترین مقدارش را دارد.

حل. اگر $\boldsymbol{T}$ یک بردار یکهٔ مماس بر C باشد، مشتق جهتی f در امتداد C حاصل‌ضرب نقطه‌ای $\nabla f \cdot \boldsymbol{T}$ است. این حاصل ضرب صفر است اگر ∇f بر $\boldsymbol{T}$ عمود باشد، و بیشترین مقدار را دارد اگر ∇f موازی $\boldsymbol{T}$ باشد. بنابراین، هر دو حکم (ب) و (پ) نتایج (آ) می‌باشند. برای اثبات (آ)، منحنی مسطح Γ را با معادلهٔ برداری $\boldsymbol{r}(t) = X(t)\boldsymbol{i} + Y(t)\boldsymbol{j}$ در نظر می‌گیریم و تابع $g(t) = f[\boldsymbol{r}(t)]$ را معرفی می‌کنیم. طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای، داریم $g'(t) = \nabla f[\boldsymbol{r}(t)] \cdot \boldsymbol{r}'(t)$. وقتی $\Gamma = C$، تابع g دارای مقدار ثابت c است؛ درنتیجه، اگر $\boldsymbol{r}(t) \in C$، $g'(t) = 0$. چون $g' = \nabla f \cdot \boldsymbol{r}'$، این نشان می‌دهد که ∇f روی C بر $\boldsymbol{r}'$ عمود است؛ بنابراین، ∇f قائم به C می‌باشد.

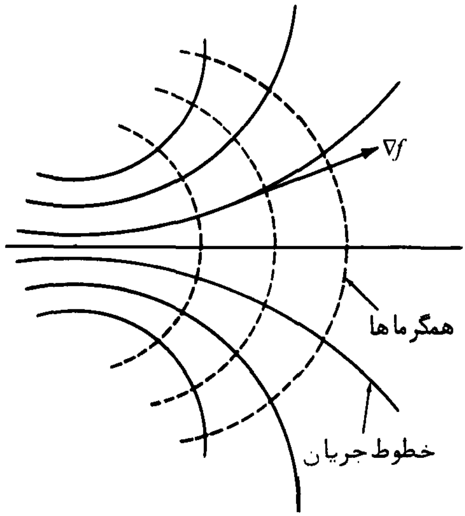
۱۶.۸ کاربرد در هندسه. مجموعه‌های تراز. صفحات مماس

با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای می‌توان خواص هندسی بردار گرادیان را نتیجه گرفت. فرض کنیم f یک میدان اسکالر باشد که بر مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ تعریف شده است، و $\boldsymbol{x}$ هایی در S را در نظر می‌گیریم که به‌ازای آنها $f(\boldsymbol{x})$ ثابت است؛ مثلاً، $f(\boldsymbol{x}) = c$. این مجموعه را با $L(c)$ نشان می‌دهیم؛ بنابراین،

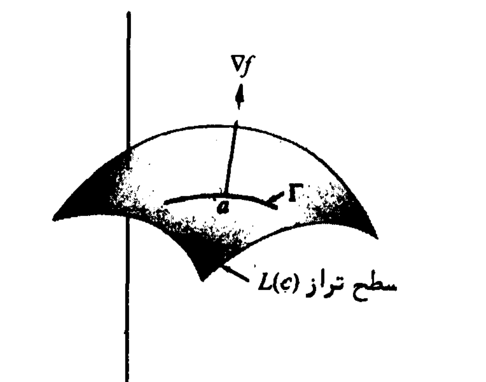
$$L(c) = \{\boldsymbol{x} \mid \boldsymbol{x} \in S \quad , \quad f(\boldsymbol{x}) = c\}.$$

مجموعهٔ $L(c)$ یک **مجموعهٔ تراز** f نام دارد. در $\mathbf{R}^2$، $L(c)$ یک **منحنی تراز** نامیده می‌شود؛ در $\mathbf{R}^3$، یک **سطح تراز** نام دارد.

خانواده‌های مجموعه‌های تراز در کاربردهای فیزیکی زیادی ظاهر می‌شوند. مثلاً، اگر $f(x, y)$ دما در (x, y) باشد، منحنیهای تراز f (منحنیها با دمای ثابت) **همگرما** نامیده می‌شوند. جریان گرما در جهتی صورت می‌گیرد که بیشترین تغییر در دما را داریم. همانطور که در مثال ۳ بخش پیش دیدیم، این جهت بر همگرماها عمود است. لذا، در یک ورقهٔ حلبی نازک، جریان‌گرما در امتداد یک خانواده از منحنیها که بر همگرماها



شکل ۶.۸ منحنیهای نقطه‌چین همگرماها هستند : $f(x, y) = c$. بردار گرادیان ∇f جهت خطوط جریان را نشان می‌دهد .



شکل ۷.۸ بردارگرادیان ∇f روی سطح تراز $f(x, y, z) = c$ بر هر منحنی Γ عمود است .

عمود است صورت می‌گیرد . اینهارا **خطوط جریان** می‌نامند ؛ اینها مسیرهای قائم همگرماها می‌باشند . مثالهایی در شکل ۶.۸ نموده شده‌اند .

حال میدان اسکالر f راکه بر مجموعهٔ باز S در $\mathbf{R}^3$ مشتقپذیر است درنظرمی‌گیریم ، و یکی از سطوح نراز آن ، یعنی $L(c)$ ، را بررسی می‌کنیم . فرض کنیم $\boldsymbol{a}$ نقطه‌ای براین سطح باشد ، و منحنی Γ که روی سطح قرار داشته و از $\boldsymbol{a}$ می‌گذرد را ، مثل شکل ۷.۸ ، درنظر می‌گیریم . ثابت می‌کنیم بردار گرادیان $\nabla f(\boldsymbol{a})$ براین منحنی در $\boldsymbol{a}$ عمود است . یعنی ، ثابت می‌کنیم $\nabla f(\boldsymbol{a})$ بر بردار مماس Γ در $\boldsymbol{a}$ عمود است . برای این کار ، فرض کنیم Γ با تابع برداری مشتقپذیر $\boldsymbol{r}$ که بر بازهٔ J در $\mathbf{R}^1$ تعریف شده پارامتریزه شده باشد . چون Γ روی سطح تراز $L(c)$ است ، تابع $\boldsymbol{r}$ در معادلهٔ زیر صدق می‌کند :

$$f[\boldsymbol{r}(t)] = c \text{ ، } J \text{ در } t \text{ به‌ازای هر } .$$

اگر به‌ازای t در J ، $g(t) = f[\boldsymbol{r}(t)]$ ، قاعدهٔ زنجیره‌ای می‌گوید که

$$g'(t) = \nabla f[\boldsymbol{r}(t)] \cdot \boldsymbol{r}'(t).$$

چون g بر J ثابت‌است ، بر J داریم $g'(t) = 0$. بخصوص ، بااختیار t_1 که $g(t_1) = \boldsymbol{a}$ ، درمی‌یابیم که

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot \boldsymbol{r}'(t_1) = 0.$$

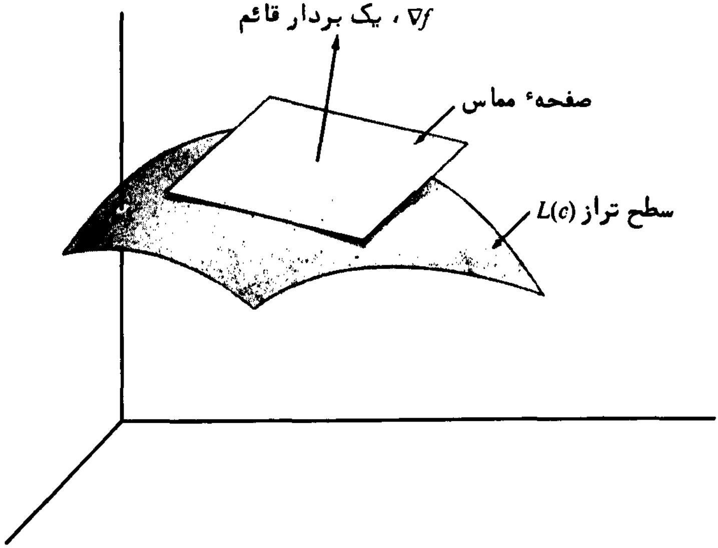
به عبارت دیگر ، همانطور که حکم شده ، گرادیان f در $\boldsymbol{a}$ بر بردار مماس $\boldsymbol{r}'(t_1)$ عمود است .

حال بر سطح تراز $L(c)$ خانواده‌ای از منحنیها را درنظر می‌گیریم که همه از نقطهٔ $\boldsymbol{a}$ می‌گذرند . مطابق بحث پیش ، بردارهای مماس تمام این منحنیها بر بردار گرادیان $\nabla f(\boldsymbol{a})$ عمود است . اگر $\nabla f(\boldsymbol{a})$ بردار صفر نباشد ، این بردارهای مماس یک صفحه معین می‌کنند ، و گرادیان $\nabla f(\boldsymbol{a})$ براین صفحه عمود است . (ر.ک. شکل ۸.۸) این صفحهٔ خاص **صفحهٔ مماس** سطح $L(c)$ در $\boldsymbol{a}$ نامیده می‌شود .

از جلد یک می‌دانیم که صفحهٔ ماربر $\boldsymbol{a}$ با بردار قائم N از نقاط $\boldsymbol{x}$ در $\mathbf{R}^3$ تشکیل شده‌که در $N \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = 0$ صدق می‌کنند . لذا ، صفحهٔ مماس بر سطح تراز $L(c)$ در $\boldsymbol{a}$ از همهٔ $\boldsymbol{x}$ هایی در $\mathbf{R}^3$ تشکیل شده که در

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) \cdot (\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}) = 0$$

صدق می‌کنند . برای بدست آوردن معادلهٔ دکارتی این صفحه ، $\boldsymbol{x}$ ، $\boldsymbol{a}$ ، و $\nabla f(\boldsymbol{a})$ رابر حسب مولفه‌هایشان بیان می‌کنیم . چنانچه بنویسیم $\boldsymbol{x} = (x, y, z)$ ، $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1, z_1)$ ،



شکل ۸۰۸ بردار گرادیان ∇f بر صفحهٔ مماس سطح تراز $f(x, y, z) = c$ عمود است.

و

$$\nabla f(\boldsymbol{a}) = D_1 f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{i} + D_2 f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{j} + D_3 f(\boldsymbol{a})\boldsymbol{k},$$

معادلهٔ دکارتی زیر به‌دست می‌آید:

$$D_1 f(\boldsymbol{a})(x - x_1) + D_2 f(\boldsymbol{a})(y - y_1) + D_3 f(\boldsymbol{a})(z - z_1) = 0.$$

برای میدانهای اسکالر تعریف شده در $\mathbf{R}^2$ بحث مشابهی خواهیم داشت. درمثال ۳ بخش پیش ثابت شد که بردار گرادیان $\nabla f(\boldsymbol{a})$ در نقطهٔ $\boldsymbol{a}$ یک منحنی تراز بر بردار مماس‌منحنی در $\boldsymbol{a}$ عمود است. لذا، خط‌مماس منحنی‌تراز $L(c)$ در نقطهٔ $\boldsymbol{a} = (x_1, y_1)$ به معادلهٔ دکارتی

$$D_1 f(\boldsymbol{a})(x - x_1) + D_2 f(\boldsymbol{a})(y - y_1) = 0$$

خواهد بود.

۱۷۰۸ تمرین

۱ . در این تمرین می‌توان وجود و پیوستگی همهٔ مشتقات تحت نظر را فرض دانست.

معادلات $u = f(x, y),\ x = X(t),\ y = Y(t)$ ، u را به‌عنوان تابعی از t ، مثلاً"

$u = F(t)$ ، تعریف می‌کند .

(آ) با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای ، نشان دهید

$$F'(t) = \frac{\partial f}{\partial x} X'(t) + \frac{\partial f}{\partial y} Y'(t),$$

که درآن $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ باید در $[X(t), Y(t)]$ حساب شوند .

(ب) بهمین‌ترتیب ، $F''(t)$ رابرحسب مشتقات f ، X ، و Y بیان کنید . به‌یاد بیاورید که مشتقات جزئی در فرمول قسمت (آ) توابع مرکب زیرند :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = D_1 f[X(t), Y(t)], \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = D_2 f[X(t), Y(t)].$$

۲ . به‌تمرین ۱ بازگشته ، درهریک‌ازحالات زیر $F'(t)$ و $F''(t)$ رابرحسب t حساب‌کنید :

(آ) $f(x, y) = x^2 + y^2,\ X(t) = t,\ Y(t) = t^2$ ؛

(ب) $f(x, y) = e^{xy} \cos (xy^2),\ X(t) = \cos t,\ Y(t) = \sin t$ ؛

(پ) $f(x, y) = \log [(1 + e^{x^2})/(1 + e^{y^2})],\ X(t) = e,\ Y(t)^t = e^{-t}$.

۳ . در هر حالت ، مشتق جهتی f را در نقطه و جهت داده شده حساب کنید :

(آ) $f(x, y, z) = 3x - 5y + 2z$ در $(2, 2, 1)$ در جهت قائم رو به خارج بـه کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ ؛

(ب) $f(x, y, z) = x^2 - y^2$ در یک نقطهٔ عمومی سطح $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ در جهت قائم رو به خارج در آن نقطه ؛

(پ) $f(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ در $(3, 4, 5)$ درامتداد منحنی فصل مشترک دوسطح $2x^2 + 2y^2 - z^2 = 25$ و $x^2 + y^2 = z^2$.

۴ . (آ) بردار $V(x, y, z)$ قائم به سطح

$$z = \sqrt{x^2 + y^2} + (x^2 + y^2)^{3/2}$$

را در نقطهٔ عمومی (x, y, z) از سطح ، که $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ ، پیدانمایید .

(ب) کسینوس‌زاویهٔ θ بین $V(x, y, z)$ ومحور z را بیابیدوحد $\cos \theta$ را ، وقتی $(x, y, z) \to (0, 0, 0)$ ، تعیین کنید .

۵ . دومعادلهٔ $e^u \cos v = x$ ، $e^u \sin v = y$ ، u و v رابه‌عنوان‌توابعی از x و y ، مثلا" $u = U(x, y)$ و $v = V(x, y)$ ، تعریف می‌کنند . برای $U(x, y)$ و $V(x, y)$ فرمولهای صریحی بیابید که بدازای $x > 0$ اعتبار داشته باشند ، و نشان دهید که بردارهای

گرادیان $\nabla U(x, y)$ و $\nabla V(x, y)$ در هر نقطهٔ (x, y) بر هم عمودند.

۶. فرض کنید $f(x, y) = \sqrt{|xy|}$.

(آ) تحقیق کنید که $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ هر دو در مبداء صفرند.

(ب) آیا سطح $z = f(x, y)$ در مبداء صفحهٔ مماس دارد؟

[**راهنمایی.** مقطع سطح را با صفحهٔ $y = x$ در نظر بگیرید.]

۷. هرگاه (x_0, y_0, z_0) نقطه‌ای بر سطح $z = xy$ باشد، دو خط $z = y_0 x, y = y_0$ و $z = x_0 y, x = x_0$ در (x_0, y_0, z_0) هم را قطع می‌کنند و بر سطح قرار دارند. تحقیق کنید که صفحهٔ مماس بر این سطح در نقطهٔ (x_0, y_0, z_0) شامل این دو خط است.

۸. معادلهٔ دکارتی صفحهٔ مماس بر سطح $xyz = a^3$ را در نقطهٔ عمومی (x_0, y_0, z_0) بیابید. نشان دهید که حجم چهاروجهی محدود به این صفحه و سه صفحهٔ مختصات $9a^3/2$ است.

۹. برای خط مماس بر دو سطح $x^2 + y^2 + 2z^2 = 4$ و $z = e^{x-y}$ در نقطهٔ $(1, 1, 1)$ یک جفت معادلهٔ دکارتی خطی بیابید.

۱۰. ثابت c را طوری بیابید که صفحات مماس در هر نقطهٔ فصل مشترک دو کرهٔ

$$x^2 + (y - 1)^2 + z^2 = 1 \quad \text{و} \quad (x - c)^2 + y^2 + z^2 = 3$$

بر هم عمود باشند.

۱۱. هرگاه r_1 و r_2 فاصلهٔ نقطهٔ (x, y) یک بیضی تا کانونهایش باشد، نشان دهید که معادلهٔ ثابت $= r_1 + r_2$ (برقرار به‌وسیلهٔ این فواصل) رابطهٔ

$$T \cdot \nabla(r_1 + r_2) = 0$$

را ایجاب می‌کند، که در آن T مماس یکه بر منحنی است. این نتیجه را تعبیر هندسی کنید، و بدین وسیله نشان دهید که مماس با خطوط واصل بین (x, y) و کانونها زوایای مساوی می‌سازد.

۱۲. هرگاه $\nabla f(x, y, z)$ همواره موازی $xi + yj + zk$ باشد، نشان دهید که f باید در نقاط $(0, 0, a)$ و $(0, 0, -a)$ مقادیر مساوی بگیرد.

۸.۱۸ مشتقات میدانهای برداری

نظریهٔ مشتق برای میدانهای برداری تعمیم سرراست این نظریه برای میدانهای اسکالر است. فرض کنیم $f: S \to \mathbf{R}^m$ میدانی برداری باشد که بر زیر مجموعهٔ S از $\mathbf{R}^n$ تعریف

شده است. هرگاه a یک نقطهٔ درونی S بوده و y برداری در $\mathbf{R}^n$ باشد، $f'(a;y)$ را با فرمول

$$f'(a;y)=\lim_{h\to 0}\frac{f(a+hy)-f(a)}{h}.$$

در صورت وجود حد، تعریف می‌کنیم. $f'(a;y)$ یک بردار در $\mathbf{R}^m$ است.

فرض کنیم f_k مولفهٔ k ام f باشد. توجه می‌کنیم که $f'(a;y)$ وجود دارد اگر و فقط اگر $f_k'(a;y)$ به‌ازای هر $k=1,2,\ldots,m$ وجود داشته باشد، که در این حالت داریم

$$f'(a;y)=(f_1'(a;y),\ldots,f_m'(a;y))=\sum_{k=1}^{m}f_k'(a;y)e_k,$$

که در آن e_k بردار یکهٔ k ام مختصات است.

گوییم f در نقطهٔ درونی a **مشتقپذیر** است اگر تبدیلی خطی مانند

$$T_a:\mathbf{R}^n\to\mathbf{R}^m$$

وجود داشته باشد بطوری که

$$f(a+v)=f(a)+T_a(v)+\|v\|\,E(a,v), \tag{۱۶۰۸}$$

که در آن، وقتی $v\to O$، $E(a,v)\to O$. فرمول تیلور مرتبهٔ اول (۱۶۰۸) باید به‌ازای $r>0$ ی و هر v که $\|v\|<r$ برقرار باشد. جملهٔ $E(a,v)$ یک بردار در $\mathbf{R}^m$ است. تبدیل خطی T_a **مشتق کل** f در a نامیده می‌شود.

برای میدانهای اسکالر ثابت کردیم که $T_a(y)$ حاصل ضرب نقطه‌ای بردار گرادیان $\nabla f(a)$ با y است. برای میدانهای برداری ثابت می‌کنیم که $T_a(y)$ برداری است که مولفهٔ k ام آن حاصل ضرب نقطه‌ای $\nabla f_k(a)\cdot y$ می‌باشد.

قضیهٔ ۹۰۸ . فرض کنیم f در a مشتقپذیر بوده و مشتق کل آن T_a باشد. دراین صورت، $f'(a;y)$ به‌ازای هر a در $\mathbf{R}^n$ وجود دارد، و داریم

$$T_a(y)=f'(a;y). \tag{۱۷۰۸}$$

بعلاوه، اگر $f=(f_1,\ldots,f_m)$ و $y=(y_1,\ldots,y_n)$، داریم

$$T_a(y)=\sum_{k=1}^{m}\nabla f_k(a)\cdot y\,e_k=(\nabla f_1(a)\cdot y,\ldots,\nabla f_m(a)\cdot y). \tag{۱۸۰۸}$$

برهان. مثل حالت اسکالر استدلال می‌کنیم. هرگاه $y=O$، آنگاه $f'(a;y)=O$ و

$T_a(O) = O$. از اینرو، می‌توان فرض کرد که $y \neq O$. با فرض $v = hy$ در فرمول تیلور (۱۶۰۸) ، داریم

$$f(a + hy) - f(a) = T_a(hy) + \|hy\| E(a, v) = hT_a(y) + |h| \|y\| E(a, v).$$

با تقسیم بر h و فرض $h \to 0$ ، (۱۷۰۸) به‌دست می‌آید .

برای اثبات (۱۸۰۸) کافی است توجه شود که

$$f'(a; y) = \sum_{k=1}^{m} f'_k(a; y)\, e_k = \sum_{k=1}^{m} \nabla f_k(a) \cdot y\, e_k .$$

معادلهٔ (۱۸۰۸) را می‌توان ساده‌تر و به‌صورت یک حاصل‌ضرب ماتریسی نوشت :

$$T_a(y) = Df(a)y ,$$

که درآن $Df(a)$ ماتریس $m \times n$ ی است که سطر k ام آن $\nabla f_k(a)$ است ، و y یک ماتریس ستونی $n \times 1$ درنظر گرفته می‌شود . ماتریس $Df(a)$ ***ماتریس ژاکوبی*** f در a نامیده می‌شود . درایهٔ kj آن مشتق جزئی $D_j f_k(a)$ می‌باشد . بنابراین ، داریم

$$Df(a) = \begin{bmatrix} D_1 f_1(a) & D_2 f_1(a) & \cdots & D_n f_1(a) \\ D_1 f_2(a) & D_2 f_2(a) & \cdots & D_n f_2(a) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ D_1 f_m(a) & D_2 f_m(a) & \cdots & D_n f_m(a) \end{bmatrix}.$$

ماتریس ژاکوبی $Df(a)$ در هر نقطه که mn مشتق جزئی $D_j f_k(a)$ وجود دارند تعریف شده است .

مشتق کل T_a به‌صورت $f'(a)$ نیز نوشته می‌شود . $f'(a)$ یک تبدیل خطی است ؛ ژاکوبی $Df(a)$ یک نمایش ماتریسی برای این تبدیل است .

فرمول تیلور مرتبهٔ اول شکل زیر را می‌گیرد :

$$f(a + v) = f(a) + f'(a)(v) + \|v\| E(a, v), \qquad (۱۹۰۸)$$

که درآن ، وقتی $v \to O$ ، $E(a, v) \to O$. این فرمول شبیه فرمول یک بعدی تیلور است . برای محاسبهٔ مولفه‌های بردار $f'(a)(v)$ ، می‌توان از حاصل ضرب ماتریسی $Df(a)v$ یا فرمول (۱۸۰۸) قضیهٔ ۹۰۸ استفاده کرد .

۱۹.۸ مشتقپذیری پیوستگی را ایجاب می‌کند

قضیهٔ ۱۰.۸ . هرگاه میدان برداری f در a مشتقپذیر باشد ، آنگاه f در a پیوسته است .

برهان . مثل حالت اسکالر ، از فرمول تیلور برای اثبات این قضیه استفاده می‌کنیم . اگر در (۱۹.۸) فرض کنیم $v \to O$ ، جملهٔ خطای $\|v\| E(a, v)$ به O میل می‌کند . قسمت خطی $f'(a)(v)$ نیز به O میل می‌کند ، زیرا تبدیلات خطی در O پیوسته می‌باشند . این برهان را تمام خواهد کرد .

دراین‌مرحله شایسته است یک نامساوی به‌دست آوریم که در برهان قاعدهٔ زنجیره‌ای در بخش بعد به‌کارخواهد رفت . این نامساوی مربوط به یک میدان برداری f است که در a مشتقپذیر است ، و می‌گوید

$$\|f'(a)(v)\| \le M_f(a)\,\|v\| \text{ ، که درآن } M_f(a) = \sum_{k=1}^{m} \|\nabla f_k(a)\| . \qquad (۲۰.۸)$$

برای اثبات این نامساوی ، اگر از معادلهٔ (۱۸.۸) همراه با نامساوی مثلثی و نامساوی کشی ــ شوارتز استفاده کنیم ، خواهیم داشت

$$\|f'(a)(v)\| = \left\| \sum_{k=1}^{m} \nabla f_k(a) \cdot v\, e_k \right\| \le \sum_{k=1}^{m} |\nabla f_k(a) \cdot v| \le \sum_{k=1}^{m} \|\nabla f_k(a)\|\, \|v\| .$$

۲۰.۸ قاعدهٔ زنجیره‌ای برای مشتقات میدانهای برداری

قضیهٔ ۱۱.۸ . قاعدهٔ زنجیره‌ای . فرض کنیم f و g میدانهایی برداری باشند بطوری که ترکیب $h = f \circ g$ در همسایگی نقطهٔ a تعریف شده‌است . همچنین ، g در a مشتق‌پذیر باشد با مشتق کل $g'(a)$ ، $b = g(a)$ ، و f در b مشتقپذیر باشد با مشتق کل $f'(b)$. دراین صورت ، h در a مشتقپذیر است ، و مشتق کل $h'(a)$ از

$$h'(a) = f'(b) \circ g'(a) ,$$

یعنی ترکیب تبدیلات خطی $f'(b)$ و $g'(a)$ ، به‌دست می‌آید .

برهان . تفاضل $h(a + y) - h(a)$ را به‌ازای $\|y\|$ کوچک‌درنظرمی‌گیریم ،ونشان می‌دهیم

که یک فرمول تیلور مرتبهٔ اول داریم . از تعریف h داریم

$$h(a+y)-h(a)=f[g(a+y)]-f[g(a)]=f(b+v)-f(b), \tag{۲۱.۸}$$

که درآن $v=g(a+y)-g(a)$. از فرمول تیلور برای $g(a+y)$ نتیجه می‌شود که

$$v=g'(a)(y)+\|y\|\,E_g(a,y) \text{ ، که درآن وقتی } y\to O \text{ ، } E_g(a,y)\to O \tag{۲۲.۸}$$

فرمول تیلور برای $f(b+v)$ نتیجه می‌دهد که

$$f(b+v)-f(b)=f'(b)(v)+\|v\|\,E_f(b,v), \tag{۲۳.۸}$$

که درآن وقتی $v\to O$ ، $E_f(b,v)\to O$. بااستفاده‌از (۲۲.۸) در (۲۳.۸) ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} f(b+v)-f(b)&=f'(b)g'(a)(y)+f'(b)(\|y\|\,E_g(a,y))+\|v\|\,E_f(b,v) \\ &=f'(b)g'(a)(y)+\|y\|\,E(a,y), \end{aligned} \tag{۲۴.۸}$$

که درآن $E(a,O)=O$ و ،

$$\text{اگر } y\neq O \text{ ، } E(a,y)=f'(b)(E_g(a,y))+\frac{\|v\|}{\|y\|}E_f(b,v) \text{ .} \tag{۲۵.۸}$$

برای تکمیل برهان کافی است نشان دهیم که ، وقتی $y\to O$ ، $E(a,y)\to O$.

جملهٔ اول سمت راست (۲۵.۸) ، وقتی $y\to O$ ، به O میل می‌کند ، زیرا ، وقتی $y\to O$ ، $E_g(a,y)\to O$ و تبدیلات خطی در O پیوسته‌اند .

در جملهٔ دوم سمت راست (۲۵.۸) سازهٔ $E_f(b,v)$ به O میل می‌کند زیرا ، وقتی $y\to O$ ، $v\to O$. خارج قسمت $\|v\|/\|y\|$ کراندار می‌ماند زیرا ، طبق (۲۲.۸) و (۲۰.۸) ، داریم

$$\|v\|\le M_g(a)\,\|y\|+\|y\|\,\|E_g(a,y)\|.$$

ازاینرو ، هر دو جملهٔ سمت راست (۲۵.۸) ، وقتی $y\to O$ ، به O میل می‌کنند : درنتیجه ، $E(a,y)\to O$.

بنابراین ، از (۲۴.۸) و (۲۱.۸) فرمول تیلور

$$h(a+y)-h(a)=f'(b)g'(a)(y)+\|y\|\,E(a,y)$$

به‌دست می‌آید ، که درآن وقتی $y\to O$ ، $E(a,y)\to O$. این ثابت می‌کند که h در a مشتقپذیر است و مشتق کل $h'(a)$ مساوی ترکیب $f'(b)\circ g'(a)$ است .

۲۱.۸ شکل ماتریسی قاعدهٔ زنجیره‌ای

فرض‌کنیم $h=f\circ g$ ، که درآن g در a و f در $b=g(a)$ مشتقپذیر است . قاعدهٔ

زنجیره‌ای می‌گوید که

$$h'(a) = f'(b) \circ g'(a).$$

قاعدهٔ زنجیره‌ای را می‌توان برحسب ماتریسهای ژاکوبی $Dh(a)$ ، $Df(b)$ ، و $Dg(a)$ ، که بترتیب نمایش تبدیلات خطی $h'(a)$ ، $f'(b)$ ، و $g'(a)$ اند، بیان کرد. چون ترکیب تبدیلات خطی متناظر ضرب ماتریسهای آنهاست، خواهیم داشت

$$Dh(a) = Df(b)\, Dg(a) \text{ ، که درآن } b = g(a) \cdot \qquad (۲۶.۸)$$

این را **شکل ماتریسی** قاعدهٔ زنجیره‌ای می‌نامند. این را می‌توان، با بیان هر ماتریس برحسب درایه‌هایش، به‌صورت مجموعه‌ای از معادلات اسکالر نوشت.

فرض‌کنیم $a \in \mathbf{R}^p$ ، $b = g(a) \in \mathbf{R}^n$ ، و $f(b) \in \mathbf{R}^m$. دراین‌صورت ، $h(a) \in \mathbf{R}^m$ و می‌توان نوشت

$$g = (g_1, \ldots, g_n), \qquad f = (f_1, \ldots, f_m), \qquad h = (h_1, \ldots, h_m).$$

دراین صورت ، $Dh(a)$ یک ماتریس $m \times p$ ، $Df(b)$ یک ماتریس $m \times n$ ، و $Dg(a)$ یک ماتریس $n \times p$ است ، که با روابط زیر داده می‌شوند :

$$Dh(a) = [D_j h_i(a)]_{i,j=1}^{m,p}, \qquad Df(b) = [D_k f_i(b)]_{i,k=1}^{m,n}, \qquad Dg(a) = [D_j g_k(a)]_{k,j=1}^{n,p}.$$

معادلهٔ ماتریسی (۲۶.۸) معادل mp معادلهٔ اسکالر زیر است :

$$D_j h_i(a) = \sum_{k=1}^{n} D_k f_i(b) D_j g_k(a) \text{ ، به‌ازای } i = 1, 2, \ldots, m \text{ و } j = 1, 2, \ldots, p \cdot$$

این معادلات مشتقات جزئی مولفه‌های h را برحسب مشتقات جزئی مولفه‌های f و g بیان می‌کنند.

مثال ۱. قاعدهٔ زنجیره‌ای تعمیم یافته برای میدانهای اسکالر. فرض‌کنیم f یک میدان اسکالرباشد $(m = 1)$. دراین‌صورت ، h نیز یک‌میدان اسکالراست و درقاعدهٔ زنجیره‌ای p معادله وجود دارند، برای هر مشتق جزئی h یکی :

$$D_j h(a) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(b) D_j g_k(a) \text{ ، به‌ازای } j = 1, 2, \ldots, p \cdot$$

به‌حالت خاص $p = 1$ قبلاً" در بخش ۱۵.۸ توجه شد. دراین حالت فقط یک معادله به‌دست آمد :

$$h'(a) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(b) g_k'(a).$$

حال فرض کنیم $p=2$ و $n=2$. می‌نویسیم $a=(s,t)$ و $b=(x,y)$. دراین صورت ، مولفه‌های x و y با معادلات

$$x=g_1(s,t),\qquad y=g_2(s,t)$$

به t و s مربوط می‌شوند . از قاعدهٔ زنجیره‌ای دومعادله برای مشتقات جزئی h به‌دست می‌آیند

$$D_1h(s,t)=D_1f(x,y)\,D_1g_1(s,t)+D_2f(x,y)\,D_1g_2(s,t),$$
$$D_2h(s,t)=D_1f(x,y)\,D_2g_1(s,t)+D_2f(x,y)\,D_2g_2(s,t).$$

با نماد ∂ ، این دو معادله را معمولا" به‌صورت زیر می‌نویسند :

$$\frac{\partial h}{\partial s}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial s}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial s},\qquad \frac{\partial h}{\partial t}=\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial t}+\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial t}. \tag{۲۷۰۸}$$

مثال ۲ . مختصات قطبی . دمای یک صفحهٔ نازک با میدان‌اسکالری چون f توصیف می‌شود ، دما در (x,y) عبارت‌است‌از $f(x,y)$. درمختصات‌قطبی $x=r\cos\theta,\ y=r\sin\theta$ دماتابعی از r و θ می‌شود که با معادلهٔ

$$\varphi(r,\theta)=f(r\cos\theta,\ r\sin\theta)$$

مشخص می‌گردد . مشتقات جزئی $\partial\varphi/\partial r$ و $\partial\varphi/\partial\theta$ را برحسب مشتقات جزئی $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ بیان نمایید .

حل . (r,θ) را به‌جای (s,t) و φ را به‌جای h نوشته ، از قاعدهٔ زنجیره‌ای به‌صورت (۲۷۰۸) استفاده می‌کنیم . معادلات

$$x=r\cos\theta,\qquad y=r\sin\theta$$

نتیجه می‌دهند که

$$\frac{\partial x}{\partial r}=\cos\theta,\qquad \frac{\partial y}{\partial r}=\sin\theta,\qquad \frac{\partial x}{\partial\theta}=-r\sin\theta,\qquad \frac{\partial y}{\partial\theta}=r\cos\theta.$$

با گذاردن این فرمولها در (۲۷۰۸) ، خواهیم داشت

$$\frac{\partial\varphi}{\partial r}=\frac{\partial f}{\partial x}\cos\theta+\frac{\partial f}{\partial y}\sin\theta,\qquad \frac{\partial\varphi}{\partial\theta}=-r\frac{\partial f}{\partial x}\sin\theta+r\frac{\partial f}{\partial y}\cos\theta. \tag{۲۸۰۸}$$

اینها فرمولهای مطلوب برای $\partial\varphi/\partial r$ و $\partial\varphi/\partial\theta$ می‌باشند .

مثال ۳. مشتقات‌جزئی مرتبهٔ دوم. به مثال ۲ بازگشته، مشتق جزئی مرتبهٔ دوم $\partial^2\varphi/\partial\theta^2$ را برحسب مشتقات جزئی f بیان دارید.

حل. با فرمول مربوط به $\partial\varphi/\partial\theta$ در (۲۸۰۸) شروع کرده و، با ثابت گرفتن r، نسبت به θ مشتق می‌گیریم. طرف راست دو جمله وجود دارند، که از هریک باید به‌عنوان یک حاصل ضرب مشتق گرفت. بنابراین، داریم

$$\text{(۲۹۰۸)}\quad \begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} &= -r\frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial(\sin\theta)}{\partial\theta} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) + r\frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial(\cos\theta)}{\partial\theta} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)\\ &= -r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} - r\sin\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} + r\cos\theta\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right).\end{aligned}$$

برای محاسبهٔ مشتقات $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ نسبت به θ باید در خاطر داشت که $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$، به‌عنوان توابعی از r و θ، **توابعی مرکب‌اند** که از

$$\frac{\partial f}{\partial y} = D_2 f(r\cos\theta, r\sin\theta) \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial x} = D_1 f(r\cos\theta, r\sin\theta)$$

به‌دست می‌آیند. بنابراین، مشتقهای آنها نسبت به θ باید از قاعدهٔ زنجیره‌ای به‌دست آیند. مجدداً، با استفاده از (۲۷۰۸)، با $D_1 f$ به‌جای f، خواهیم داشت

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right) = \frac{\partial(D_1 f)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial(D_1 f)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(-r\sin\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}(r\cos\theta).$$

بهمین نحو، بااستفاده از (۲۷۰۸) با $D_2 f$ به‌جای f، درمی‌یابیم که

$$\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right) = \frac{\partial(D_2 f)}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial\theta} + \frac{\partial(D_2 f)}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial\theta} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}(-r\sin\theta) + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(r\cos\theta).$$

وقتی این فرمولها در (۲۹۰۸) به‌کار روند، خواهیم داشت

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2\varphi}{\partial\theta^2} &= -r\cos\theta\frac{\partial f}{\partial x} + r^2\sin^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y\,\partial x}\\ &\quad - r\sin\theta\frac{\partial f}{\partial y} - r^2\sin\theta\cos\theta\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y} + r^2\cos^2\theta\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}.\end{aligned}$$

این‌همان فرمول مطلوب برای $\partial^2\varphi/\partial\theta^2$ است. فرمولهای مشابه برای مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم $\partial^2\varphi/\partial r^2$، $\partial^2\varphi/(\partial r\,\partial\theta)$، و $\partial^2\varphi/(\partial\theta\,\partial r)$ در تمرین ۵ بخش آتی خواسته‌شده‌اند.

۸.۲۲ تمرین

دراین تمرینها می‌توان مشتقپذیری همهٔ توابع تحت نظررا فرض دانست.

۱. جانشانی $t = g(x, y)$، $F(t)$ را به $f(x, y)$ تبدیل می‌کند، که‌درآن $f(x, y) = F[g(x, y)]$.

(آ) نشان دهید که

$$\frac{\partial f}{\partial x} = F'[g(x, y)]\,\frac{\partial g}{\partial x} \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = F'[g(x, y)]\,\frac{\partial g}{\partial y}.$$

(ب) حالت خاص $F(t) = e^{\sin t}$, $g(x, y) = \cos(x^2 + y^2)$ را در نظر بگیرید. $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ را بافرمولهای‌قسمت (آ) حساب کنید.برای‌امتحان نتیجهٔ حاصل، $f(x, y)$ را صریحا" برحسب x و y بیان کرده، $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ را مستقیما" از f حساب کنید.

۲. جانشانی $u = (x - y)/2, v = (x + y)/2$، $f(u, v)$ را به $F(x, y)$ تغییر می‌دهد. با استفاده‌ازقاعدهٔ‌زنجیره‌ای‌به‌شکل‌مناسب، مشتقات جزئی $\partial F/\partial x$ و $\partial F/\partial y$ رابرحسب مشتقات جزئی $\partial f/\partial u$ و $\partial f/\partial v$ بیان کنید.

۳. معادلات $u = f(x, y)$, $x = X(s, t)$, $y = Y(s, t)$، u رابه‌عنوان‌تابعی‌از s و t، مثلا" $u = F(s, t)$، تعریف می‌کنند.

(آ) با استفاده ازشکل مناسب قاعدهٔ‌زنجیره‌ای، مشتقات جزئی $\partial F/\partial s$ و $\partial F/\partial t$ را برحسب $\partial f/\partial x, \partial f/\partial y, \partial X/\partial s, \partial X/\partial t, \partial Y/\partial s, \partial Y/\partial t$ بیان کنید.

(ب) هرگاه $\partial^2 f/(\partial x\, \partial y) = \partial^2 f/(\partial y\, \partial x)$، نشان دهید که

$$\frac{\partial^2 F}{\partial s^2} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial^2 X}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}\left(\frac{\partial X}{\partial s}\right)^2 + 2\,\frac{\partial X}{\partial s}\,\frac{\partial Y}{\partial s}\,\frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial^2 Y}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\left(\frac{\partial Y}{\partial s}\right)^2.$$

(پ) برای مشتقات جزئی $\partial^2 F/(\partial s\, \partial t)$ و $\partial^2 F/\partial t^2$ فرمولهای مشابهی پیدا کنید.

۴. تمرین ۳ را درهر حالت خاص زیر حل کنید:

(آ) $X(s, t) = s + t, \quad Y(s, t) = st$؛

(ب) $X(s, t) = st, \quad Y(s, t) = s/t$؛

(پ) $X(s, t) = (s - t)/2, \quad Y(s, t) = (s + t)/2$.

۵. مختصات قطبی $f(x, y)$ را به $\varphi(r, \theta)$ تغییرمی‌دهند، که $x = r\cos\theta$ و $y = r\sin\theta$. مشتقات جزئی مرتبهٔ‌دوم $\partial^2\varphi/\partial r^2$، $\partial^2\varphi/(\partial r\, \partial\theta)$، و $\partial^2\varphi/(\partial\theta\, \partial r)$ را برحسب مشتقات

جزئی f بیان‌کنید. می‌توانید از فرمولهای مثال ۲ در بخش ۸.۱۰ ۲ استفاده کنید.

۶. معادلات $u = f(x, y, z)$ ، $x = X(r, s, t)$ ، $y = Y(r, s, t)$ ، و $z = Z(r, s, t)$ ، u را به‌عنوان تابعی از r ، s ، و t ، مثلاً $u = F(r, s, t)$ ، تعریف می‌کنند. با استفاده از شکل مناسب قاعدهٔ زنجیره‌ای، مشتقات جزئی $\partial F/\partial r$ ، $\partial F/\partial s$ ، و $\partial F/\partial t$ را برحسب مشتقات جزئی f ، X ، Y ، و Z بیان کنید.

۷. تمرین ۶ را درهریک از حالات خاص زیر حل کنید:

(آ) $X(r, s, t) = r + s + t,\ Y(r, s, t) = r - 2s + 3t,\ Z(r, s, t) = 2r + s - t$ ؛

(ب) $X(r, s, t) = r^2 + s^2 + t^2,\quad Y(r, s, t) = r^2 - s^2 - t^2,$

$Z(r, s, t) = r^2 - s^2 + t^2$.

۸. معادلات $u = f(x, y, z), x = X(s, t), y = Y(s, t), z = Z(s, t)$ ، u را به‌عنوان تابعی از s و t ، مثلاً $u = F(s, t)$ ، تعریف می‌کنند. بااستفاده از شکل مناسب قاعدهٔ زنجیره‌ای، مشتقات‌جزئی $\partial F/\partial s$ و $\partial F/\partial t$ را برحسب‌مشتقات‌جزئی f ، X ، Y ، و Z بیان کنید.

۹. تمرین ۸ را درهریک از حالات خاص زیر حل کنید:

(آ) $X(s, t) = s^2 + t^2,\qquad Y(s, t) = s^2 - t^2,\qquad Z(s, t) = 2st$ ؛

(ب) $X(s, t) = s + t,\qquad Y(s, t) = s - t,\qquad Z(s, t) = st$.

۱۰. معادلات $u = f(x, y), x = X(r, s, t), y = Y(r, s, t)$ ، u رابه‌عنوان‌تابعی‌از r ، s ، و t ، مثلاً $u = F(r, s, t)$ ، تعریف‌می‌کنند. بااستفاده‌ازشکل مناسب‌قاعدهٔ زنجیره‌ای،مشتقات جزئی $\partial F/\partial r$ ، $\partial F/\partial s$ ، و $\partial F/\partial t$ را برحسب مشتقات جزئی f ، X ، و Y بیان دارید.

۱۱. تمرین ۱۰ را درهریک از حالات خاص زیر حل کنید:

(آ) $X(r, s, t) = r + s,\qquad Y(r, s, t) = t$ ؛

(ب) $X(r, s, t) = r + s + t,\qquad Y(r, s, t) = r^2 + s^2 + t^2$ ؛

(پ) $X(r, s, t) = r/s,\qquad Y(r, s, t) = s/t$.

۱۲. فرض کنید $h(x) = f[g(x)]$ ، که‌درآن $g = (g_1, \ldots, g_n)$ یک میدان‌برداری‌مشتق‌پذیر در a بوده، و f یک میدان اسکالر مشتق‌پذیر در $b = g(a)$ باشد. بااستفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای، نشان دهید که گرادیان h را می‌توان به‌صورت ترکیبی خطی از بردارهای گرادیان مولفه‌های g به شکل زیر بیان کرد:

$$\nabla h(a) = \sum_{k=1}^{n} D_k f(b) \nabla g_k(a).$$

۱۳ . (آ) هرگاه $f(x, y, z) = xi + yj + zk$ ، ثابت کنید ماتریس ژاکوبی $Df(x, y, z)$ ماتریس همانی مرتبهٔ 3 است .

(ب) جمیع میدانهای برداری مشتقپذیر $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ که بهازای آنها ماتریس ژاکوبی $Df(x, y, z)$ ماتریس همانی مرتبهٔ 3 است را بیابید .

(پ) جمیع میدانهای برداری مشتقپذیر $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ که بهازای آنها ماتریس ژاکوبی یک ماتریس قطری بهشکل $\operatorname{diag}(p(x), q(y), r(z))$ است ، که درآن p ، q ، و r توابع پیوستهٔ معلومیاند ، را بیابید .

۱۴ . فرضکنید $f: \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ و $g: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ دو میدان برداری باشند که بهصورت زیر تعریف شدهاند :

$$f(x, y) = e^{x+2y} i + \sin(y + 2x) j,$$

$$g(u, v, w) = (u + 2v^2 + 3w^3) i + (2v - u^2) j.$$

(آ) هریک از ماتریسهای ژاکوبی $Df(x, y)$ و $Dg(u, v, w)$ را حساب کنید .

(ب) ترکیب $h(u, v, w) = f[g(u, v, w)]$ را حساب کنید .

(پ) ماتریس ژاکوبی $Dh(1, -1, 1)$ را محاسبه نمایید .

۱۵ . فرض کنید $f: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^2$ و $g: \mathbf{R}^3 \to \mathbf{R}^3$ دو میدان برداری باشند که بهصورت زیرتعریف شدهاند :

$$f(x, y, z) = (x^2 + y + z) i + (2x + y + z^2) j,$$

$$g(u, v, w) = uv^2w^2 i + w^2 \sin v\, j + u^2 e^v k.$$

(آ) هریک از ماتریسهای ژاکوبی $Df(x, y, z)$ و $Dg(u, v, w)$ را حساب کنید .

(ب) ترکیب $h(u, v, w) = f[g(u, v, w)]$ را حساب کنید .

(پ) ماتریس ژاکوبی $Dh(u, 0, w)$ را محاسبه نمایید .

* ۸ ۰ ۲۳ شرایط کافی برای تساوی مشتقات جزئی مخلوط

اگر f یک تابع حقیقی دو متغیره باشد ، دو مشتق جزئی مخلوط $D_{1,2}f$ و $D_{2,1}f$ لزوما" مساوی نیستند . منظور از $D_{1,2}f$ یعنی $D_1(D_2 f) = \partial^2 f/(\partial x\, \partial y)$ ، و منظور از $D_{2,1}f$ یعنی $D_2(D_1 f) = \partial^2 f/(\partial y\, \partial x)$. مثلا" ، اگر f با معادلات زیر تعریف شده باشد :

$$f(0,0)=0 \;;\; f(x,y) = xy\frac{x^2-y^2}{x^2+y^2} \;,\; (x,y)\neq(0,0)$$ به‌ازای ،

به‌آسانی ثابت‌می‌شود که $D_{2,1}f(0,0) = -1$ و $D_{1,2}f(0,0) = 1$. این را می‌توان به صورت زیر انجام داد:

تعریف $D_{2,1}f(0,0)$ می‌گوید که

$$D_{2,1}f(0,0) = \lim_{k\to 0}\frac{D_1f(0,k)-D_1f(0,0)}{k}. \qquad (۳۰\cdot۸)$$

اما داریم

$$D_1f(0,0) = \lim_{h\to 0}\frac{f(h,0)-f(0,0)}{h} = 0$$

و، اگر $(x,y)\neq(0,0)$ ، خواهیم داشت

$$D_1f(x,y) = \frac{y(x^4+4x^2y^2-y^4)}{(x^2+y^2)^2}.$$

بنابراین، اگر $k\neq 0$ ، خواهیم داشت $D_1f(0,k) = -k^5/k^4 = -k$ ؛ و درنتیجه،

$$\frac{D_1f(0,k)-D_1f(0,0)}{k} = -1.$$

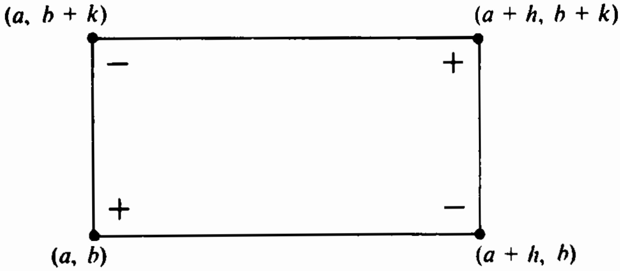
با استفاده‌از این در (۳۰۰۸) ، معلوم می‌شود که $D_{2,1}f(0,0) = -1$. استدلالی مشابه نشان می‌دهد که $D_{1,2}f(0,0) = 1$ ؛ و درنتیجه، $D_{2,1}f(0,0) \neq D_{1,2}f(0,0)$.

در مثالی که هم‌اکنون بحث شد، هر دو مشتق جزئی مخلوط $D_{1,2}f$ و $D_{2,1}f$ در مبداء پیوسته نیستند. می‌توان نشان داد که دو مشتق جزئی مخلوط در نقطهٔ (a,b) در صورتی **مساوی‌اند** که دست کم یکی از آنها در همسایگی این نقطه پیوسته باشد. ابتدا ثابت می‌کنیم که‌اگر هر دو پیوسته باشند، مساوی‌اند. به‌طور دقیقتر، قضیهٔ زیر راداریم.

قضیهٔ ۱۲۰۸ . شرط کافی برای‌تساوی مشتقات جزئی مخلوط. *فرض‌کنیم f یک میدان اسکالر باشد بطوری که مشتقات جزئی D_1f ، D_2f ، $D_{1,2}f$ ، و $D_{2,1}f$ بر مجموعهٔ بازی‌چون S وجودداشته‌باشند. هرگاه $D_{1,2}f$ و $D_{2,1}f$ هر دو در (a,b) از S پیوسته باشند، خواهیم داشت*

$$D_{1,2}f(a,b) = D_{2,1}f(a,b). \qquad (۳۱\cdot۸)$$

برهان. h و k ناصفر را طوری اختیار می‌کنیم که مستطیل $R(h, k)$ به راسهای (a, b) ، $(a + h, b)$ ، $(a + h, b + k)$ ، و $(a, b + k)$ در S قرار داشته باشند. (مثالی درشکل ۹۰۸ نموده شده است.)



شکل ۹۰۸ $\Delta(h, k)$ ترکیبی است از مقادیر f در راسها.

عبارت

$$\Delta(h, k) = f(a + h, b + k) - f(a + h, b) - f(a, b + k) + f(a, b)$$

را درنظرمی‌گیریم .این‌عبارت ترکیبی است از مقادیر f در رئوس $R(h, k)$ ، که با علامات جبری شکل ۹۰۸ گرفته می‌شوند. $\Delta(h, k)$ را برحسب $D_{2,1}f$ و نیز برحسب $D_{1,2}f$ بیان می‌کنیم.

تابع جدید و یک متغیرهٔ G را با معادلهٔ

$$G(x) = f(x, b + k) - f(x, b)$$

به‌ازای هر x بین a و $a + h$ تعریف می‌کنیم. (به‌طور هندسی، مقادیر f در نقاطی درنظر گرفته‌می‌شودکه‌درآنها یک خط قائم دلخواه اضلاع افقی $R(h, k)$ را قطع می‌کند.) دراین صورت، داریم

$$\Delta(h, k) = G(a + h) - G(a). \tag{۳۲۰۸}$$

با اعمال قضیهٔ مقدار میانگین یک بعدی در طرف راست (۳۲۰۸)، خواهیم داشت $G(a + h) - G(a) = hG'(x_1)$ ، کـــه درآن x_1 بین a و $a + h$ قـــرار دارد. چون $G'(x) = D_1f(x, b + k) - D_1f(x, b)$ ، معادلهٔ (۳۲۰۸) خواهد شد

$$\Delta(h, k) = h[D_1f(x_1, b + k) - D_1f(x_1, b)]. \tag{۳۳۰۸}$$

با اعمال قضیهٔ مقدار میانگین در طرف راست (۳۳۰۸)، خواهیم داشت

$$\Delta(h, k) = hkD_{2,1}f(x_1, y_1), \tag{۳۴۰۸}$$

که درآن y_1 بین b و $b+k$ قرار دارد. نقطهٔ (x_1, y_1) جایی در مستطیل $R(h, k)$ قرار دارد.

با همین روند در مورد تابع $H(y) = f(a+h, y) - f(a, y)$ ، عبارتی دیگر برای $\Delta(h, k)$ می‌یابیم؛ یعنی،

$$\Delta(h, k) = hkD_{1,2}f(x_2, y_2), \tag{۳۵۰۸}$$

که درآن (x_2, y_2) نیز در $R(h, k)$ قرار دارد. با متحد گرفتن عبارات مربوط‌به $\Delta(h, k)$ و حذف hk ، خواهیم داشت

$$D_{1,2}f(x_1, y_1) = D_{2,1}f(x_2, y_2)$$

حال‌فرض‌می‌کنیم $(h, k) \to (0, 0)$ و، با استفاده‌از پیوستگی $D_{1,2}f$ و $D_{2,1}f$ ، (۳۱۰۸) به‌دست خواهد آمد.

با پیرایش استدلال فوق، می‌توان صورت قویتر قضیهٔ ۱۲۰۸ را ثابت کرد.

قضیهٔ ۱۳۰۸ . *فرض کنیم f یک میدان‌اسکالر باشد بطوری که D_1f ، D_2f ، و $D_{2,1}f$ برمجموعهٔ‌باز S شامل (a, b) وجوددارند. همچنین، $D_{2,1}f$ بر S پیوسته‌باشد. دراین صورت، $D_{1,2}f(a, b)$ وجود دارد و خواهیم داشت*

$$D_{1,2}f(a, b) = D_{2,1}f(a, b).$$

برهان. $\Delta(h, k)$ را هماننددربرهان قضیهٔ ۱۲۰۸ تعریف می‌کنیم. آن قسمت از برهان که به معادلهٔ (۳۴۰۸) ختم می‌شود هنوز معتبر است، و نتیجه می‌دهد که، به‌ازای (x_1, y_1)ی در مستطیل $R(h, k)$ ،

$$\frac{\Delta(h, k)}{hk} = D_{2,1}f(x_1, y_1) . \tag{۳۶۰۸}$$

بقیهٔ برهان‌قابل‌انجام‌نیست، زیرا به‌وجود $D_{1,2}f(a, b)$ نیاز است، که اینک می‌خواهیم آن را ثابت کنیم.

تعریف $D_{1,2}f(a, b)$ می‌گوید که

$$D_{1,2}f(a, b) = \lim_{h\to 0} \frac{D_2f(a+h, b) - D_2f(a, b)}{h}. \tag{۳۷۰۸}$$

بایدثابت‌کنیم‌که‌این‌حدوجود دارد و دارای مقدار $D_{2,1}f(a,b)$ است. از تعریف $D_2 f$ داریم

$$D_2f(a,b)=\lim_{k\to 0}\frac{f(a,b+k)-f(a,b)}{k}$$

و

$$D_2f(a+h,b)=\lim_{k\to 0}\frac{f(a+h,b+k)-f(a+h,b)}{k}.$$

بنابراین، خارج قسمت تفاضلی (۳۷۰۸) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{D_2f(a+h,b)-D_2f(a,b)}{h}=\lim_{k\to 0}\frac{\Delta(h,k)}{hk}.$$

با استفاده از (۳۶۰۸) ی‌توان رابطهٔ فوق را به‌صورت زیر نوشت:

$$\frac{D_2f(a+h,b)-D_2f(a,b)}{h}=\lim_{k\to 0} D_{2,1}f(x_1\,,\,y_1). \tag{۳۸۰۸}$$

برای اتمام برهان باید نشان داد که

$$\lim_{h\to 0}\left[\lim_{k\to 0} D_{2,1}f(x_1\,,\,y_1)\right]=D_{2,1}f(a,b). \tag{۳۹۰۸}$$

وقتی $k\to 0$ ، $y_1\to b$ ، امارفتار x_1 به‌عنوان‌تابعی‌از k نامعلوم است. اگرمی‌دانستیم که وقتی $k\to 0$ ، x_1 به‌حدی، مثلا" $\bar{x}$ ، نزدیک می‌شود، می‌توانستیم با استفاده از پیوستگی $D_{2,1}f$ نتیجه بگیریم که

$$\lim_{k\to 0} D_{2,1}f(x_1\,,\,y_1)=D_{2,1}f(\bar{x},b).$$

دراین صورت، چون حد $\bar{x}$ باید در بازهٔ $a\le \bar{x}\le a+h$ قرار گیرد، می‌شد فرض کرد $h\to 0$ و (۳۹۰۸) را نتیجه گرفت. اما، این امر که $\bar{x}$ به طریقی نامعلوم تابع k است استدلال مختصر پیچیده‌تری را می‌طلبد.

بخاطر معادلهٔ (۳۸۰۸) معلوم می‌شود که حد

$$\lim_{k\to 0} D_{2,1}f(x_1\,,\,y_1)$$

وجود دارد. این‌حد را با $F(h)$ نشان می‌دهیم. برای اتمام برهان باید نشان داد که

$$\lim_{h\to 0} F(h)=D_{2,1}f(a,b).$$

برای این‌کار به تعریف پیوستگی $D_{2,1}f$ در (a,b) متوسل می‌شویم.

فرض‌کنیم ϵ یک عدد مثبت باشد. پیوستگی $D_{2,1}f$ در (a,b) یعنی قرص بازی

مانند N به مرکز (a, b) و شعاع δ هست بطوری که

هر وقت $(x, y) \in N$ ، $|D_{2,1}f(x, y) - D_{2,1}f(a, b)| < \frac{\epsilon}{2}$. (۴۰۰۸)

اگر h و k را طوری بگیریم که $|h| < \delta/2$ و $|k| < \delta/2$ ، تمام مستطیل شکل ۹۰۸ در همسایگی N واقع می‌شود و، بخصوص، نقطهٔ (x_1, y_1) در N خواهد بود. بنـابـرایـن، (۴۰۰۸) وقتی $(x, y) = (x_1, y_1)$ برقرار است و می‌توان نوشت

$$0 \leq |D_{2,1}f(x_1, y_1) - D_{2,1}f(a, b)| < \frac{\epsilon}{2}. \qquad (۴۱۰۸)$$

حال h را ثابت گرفته و فرض می‌کنیم $k \to 0$. جملهٔ $D_{2,1}f(x_1, y_1)$ به $F(h)$ نزدیک می‌شود و جملهٔ دیگر در (۴۱۰۸) از k مستقل است. بنابراین، داریم

$$0 \leq |F(h) - D_{2,1}f(a, b)| \leq \frac{\epsilon}{2} < \epsilon,$$

مشروط بر اینکه $0 < |h| < \delta/2$. اما این دقیقاً " یعنی

$$\lim_{h \to 0} F(h) = D_{2,1}f(a, b)$$

و، همانطور که قبلا" ذکر شد، این برهان را تمام خواهد کرد.

تذکر. باید توجه داشت که این قضیه در صورت تعویض نقشهای $D_{1,2}f$ و $D_{2,1}f$ با هم نیز برقرار است.

۲۴۰۸ تمرینات گوناگون

۱ . میدان اسکالر f را بیابید که در شرایط زیر صدق کند:

(آ) مشتقات جزئی $D_1f(0, 0)$ و $D_2f(0, 0)$ موجود و مساوی صفر باشند؛

(ب) مشتق جهتی در مبداء و در جهت بردار $i + j$ موجود و مقدارش 3 باشد.

بگویید چرا این f نمی‌تواند در $(0, 0)$ مشتقپذیر باشد.

۲ . فرض کنید f به‌صورت زیر تعریف شده باشد:

اگر $(x, y) \neq (0, 0)$ ، $f(x, y) = y\frac{x^2 - y^2}{x^2 + y^2}$ ؛ $f(0, 0) = 0$.

مشتقات جزئی زیر را ، درصورت وجود ، حساب کنید :

$$D_1f(0,0),\ D_2f(0,0),\ D_{2,1}f(0,0),\ D_{1,2}f(0,0)\ .$$

۳ . فرض کنید اگر $(x, y) \neq (0,0)$ ، $f(x, y) = \dfrac{xy^3}{x^3 + y^6}$ ، و تعریف‌کنید $f(0,0) = 0$.

(آ) ثابت‌کنیدکه $f'(O; a)$ به‌ازای هر بردار a وجود دارد و مقدارش را برحسب مولفه‌های a حساب کنید .

(ب) تعیین کنید f در مبداء پیوسته است یا نه .

۴ . به‌ازای $x > 0, y > 0$ ، تعریف کنید $f(x, y) = \int_0^{\sqrt{xy}} e^{-t^2}\, dt$. $\partial f/\partial x$ را برحسب x و y حساب کنید .

۵ . فرض‌کنیدمعادلات $u = f(x, y), x = X(t), y = Y(t)$ ، u رابه‌عنوان‌تابعی‌از t ، مثلا " $u = F(t)$ ، تعریف‌می‌کنند . مشتق سوم $F'''(t)$ را برحسب مشتقات f ، X ، و Y حساب کنید .

۶ . تغییر متغیرهای $x = u + v, y = uv^2$ ، $f(x, y)$ را به $g(u, v)$ تبدیل می‌کنند . مقدار $\partial^2 g/(\partial v\, \partial u)$ را در نقطه‌ای که $u = 1, v = 1$ در صورتی حساب کنید که درآن نقطه

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} = \frac{\partial^2 f}{\partial y\, \partial x} = 1\ .$$

۷ . تغییر متغیرهای $x = uv, y = \frac{1}{2}(u^2 - v^2)$ ، $f(x, y)$ را به $g(u, v)$ تبدیل می‌کنند .

(آ) $\partial g/\partial u$ ، $\partial g/\partial v$ ، و $\partial^2 g/(\partial u\, \partial v)$ را برحسب مشتقات جزئی f حساب کنید . (می‌توانید مشتقات‌جزئی مخلوط‌را مساوی بگیرید .)

(ب) هرگاه به‌ازای هر x و y ، $\|\nabla f(x, y)\|^2 = 2$ ، ثابتهای a و b را طوری تعیین کنید که

$$a\left(\frac{\partial g}{\partial u}\right)^2 - b\left(\frac{\partial g}{\partial v}\right)^2 = u^2 + v^2.$$

۸ . دو تابع یک متغیرهٔ F و G و تابع دو متغیرهٔ z با معادلهٔ زیر بهم مربوطند :

$$[F(x) + G(y)]^2\, e^{z(x,y)} = 2F'(x)G'(y)$$

اگر $F(x) + G(y) \neq 0$. نشان دهیدکه‌مشتق‌جزئی‌مخلوط $D_{2,1}z(x, y)$ هرگز صفر نیست . (می‌توانید وجود و پیوستگی همهٔ مشتقهای درکار را فرض بگیرید .)

۹ . میدان اسکالر f بر مستطیل $R = [a, b] \times [c, d]$ کراندار و پیوسته است . میدان اسکالر جدید g تعریف شده بر R به‌صورت زیر تعریف شده است :

$$g(u, v) = \int_c^v \left[\int_a^u f(x, y)\, dx \right] dy .$$

(آ) می‌توان نشان‌داد که به‌ازای هر u ثابت در $[a, b]$ ، تابع A تعریف شده بر $[c, d]$ با معادلهٔ $A(y) = \int_a^u f(x, y)\, dx$ بر $[c, d]$ پیوسته است. بااستفاده از این، ثابت‌کنید $\partial g/\partial v$ بر مستطیل باز $S = (a, b) \times (c, d)$ (درون R) موجود و پیوسته است.

(ب) فرض کنید به‌ازای هر (u, v) در R ،

$$\int_c^v \left[\int_a^u f(x, y)\, dx \right] dy = \int_a^u \left[\int_c^v f(x, y)\, dy \right] dx .$$

ثابت‌کنید g بر S مشتقپذیراست‌ومشتقات‌جزئی‌مخلوط $D_{1,2}g(u, v)$ و $D_{2,1}g(u, v)$ در هر نقطهٔ S موجود و مساوی $f(u, v)$ انـد.

۱۰. به تمرین ۹ باز گردید. فرض کنید u و v به‌صورت پارامتری $u = A(t)$ ، $v = B(t)$ بیان شده باشد، و قرار می‌دهیم $\varphi(t) = g[A(t), B(t)]$.

(آ) $\varphi'(t)$ را برحسب f ، A' ، و B' معین کنید.

(ب) وقتی $f(x, y) = e^{x+y}$ و $A(t) = B(t) = t^2$ ، $\varphi'(t)$ را برحسب t حساب کنید. (فرض کنید R در ربع اول واقع باشد.)

۱۱. هرگاه $f(x, y, z) = (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{A}) \cdot (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B})$ ، که درآن $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ و $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ بردارهای‌ثابتی‌باشند، نشان‌دهیدکه $\nabla f(x, y, z) = \boldsymbol{B} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{A}) + \boldsymbol{A} \times (\boldsymbol{r} \times \boldsymbol{B})$.

۱۲. فرض کنید $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ و $r = \|\boldsymbol{r}\|$. هرگاه $\boldsymbol{A}$ و $\boldsymbol{B}$ بردارهای ثابتی باشند، نشان دهید که

(آ) $\boldsymbol{A} \cdot \nabla\left(\dfrac{1}{r}\right) = -\dfrac{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r}}{r^3}$ ؛

(ب) $\boldsymbol{B} \cdot \nabla\left(\boldsymbol{A} \cdot \nabla\left(\dfrac{1}{r}\right)\right) = \dfrac{3\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{r}\, \boldsymbol{B} \cdot \boldsymbol{r}}{r^5} - \dfrac{\boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{B}}{r^3}$ ؛

۱۳. مجموعهٔ تمام نقاط (a, b, c) در فضای 3 را بیابید که به‌ازای آنها دوکرهٔ $(x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = 1$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ متعامداً" متقاطع باشند. (صفحات مماس آنها باید در هر نقطهٔ تقاطع بر هم عمود باشند.)

۱۴. یک استوانه‌که معادله‌اش $y = f(x)$ است بر سطح $z^2 + 2xz + y = 0$ در تمام نقاط مشترک دو سطح مماس است. $f(x)$ را پیدا نمایید.

۹

کاربردهای حساب دیفرانسیل

۱.۹ معادلات دیفرانسیل جزئی

قضایای حساب دیفرانسیل کـه در فصل ۸ ذکر شدند کاربردهای متنوعی دارند. دراین فصل، با چند مثال، موارد استعمال آنها را در معادلات دیفرانسیل جزئی، توابع ضمنی، و مسائل اکسترمم نشان می‌دهیم. با چند نکته درباب معادلات دیفرانسیل جزئی شروع می‌کنیم.

هر معادله شامل یک میدان اسکالر f ومشتقات جزئی آن یک **معادلهٔ دیفرانسیل جزئی** نامیده می‌شود. دو مثال ساده که در آنها f یک تابع دو متغیره است عبارتند از معادلهٔ مرتبهٔ اول

$$\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} = 0 \tag{۱.۹}$$

و معادلهٔ مرتبهٔ دوم

$$\frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x, y)}{\partial y^2} = 0. \tag{۲.۹}$$

هریک از اینهـا یک معـادلهٔ دیفرانسیل جزئی **خطی همگن** است. یعنی، هریک به شکل $L(f) = 0$ است، که در آن L یک عملگر دیفرانسیل خطی شامل یک یا چند مشتق جزئی می‌باشد. معادلهٔ (۲.۹) **معادلهٔ لاپلاس** دوبعدی نام دارد.

بخشی از نظریهٔ معادلات دیفرانسیل معمولی خطی را می‌توان به معادلات دیفرانسیل جزئی تعمیم داد. مثلاً، به‌آسانی می‌توان دید که مجموعهٔ جوابهای معادلات (۱.۹) و (۲.۹) یک فضـای خطی است. با اینحال، بین معادلات دیفرانسیل خطی معمولی و

جزئی اختلاف مهمی وجود دارد که بایستی در آغاز درک شود. این اختلاف را به‌وسیلهٔ مقایسهٔ معادلهٔ دیفرانسیل جزئی (۱۰۹) با معادلهٔ دیفرانسیل معمولی

$$f'(x) = 0 \qquad (۳۰۹)$$

توضیح می‌دهیم.

کلیترین تابعی که در (۳۰۹) صدق می‌کند $f(x) = C$ است، که درآن C یک‌ثابت دلخواه است. به‌عبارت دیگر، فضای جواب (۳۰۹) یک بعدی است. ولی کلیترین تابع صادق در (۱۰۹) عبارت است از

$$f(x, y) = g(y)\,،$$

که درآن g یک تابع دلخواه از y است، چون g دلخواه است، به‌آسانی می‌توان مجموعه‌ای نامتناهی از جوابهای مستقل به‌دست آورد. مثلاً، می‌توان $g(y) = e^{cy}$ را اختیار و فرض کرد که c روی تمام اعداد حقیقی تغییر می‌کند. بنابراین، فضای جواب (۱۰۹) با بعد **نامتناهی** است.

این مثال ازجهاتی نشانگروضع درحالت کلی است. درحل معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ اول، در مرحله‌ای برای حذف هر مشتق جزئی یک انتگرالگیری لازم است. دراین مرحله یک‌تابع دلخواه درجواب واردمی‌شود. این امر به‌یک فضای جواب با بعد نامتناهی منتج خواهد شد.

در بسیاری از مسائل معادلات دیفرانسیل جزئی، باید از بین جوابها جوابی خاص که در یک یا چند شرط کمکی صدق کند اختیار شود. همانطور که انتظار می‌رود، سرشت این شرطها اثر عمیقی بر وجود یا یکتایی جوابها دارد. بررسی اصولی این مسائل دراین کتاب صورت نمی‌گیرد. به‌جای آن، چند حالت خاص که مفاهیم داده شده در فصل ۸ را توضیح می‌دهند مطرح می‌شوند.

۲۰۹ معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ اول با ضرایب ثابت

معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ اول

$$3\,\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + 2\,\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \qquad (۴۰۹)$$

را درنظر می‌گیریم. همهٔ جوابهای آن را می‌توان به روش هندسی به‌دست آورد. طرف چپ را به‌صورت حاصل ضرب نقطه‌ای درآورده، و معادله را به‌شکل زیر می‌نویسیم:

$$(3i + 2j) \cdot \nabla f(x, y) = 0.$$

این می‌گوید که بردارگرادیان $\nabla f(x, y)$ به بردار $3i + 2j$ در هر نقطهٔ (x, y) متعامداست. اما نیز می‌دانیم که $\nabla f(x, y)$ به‌منحنیهای تراز f نیز متعامد است. لذا، این منحنیهای تراز باید خطوطی مستقیم موازی $3i + 2j$ باشند. به‌عبارت دیگر، منحنیهای تراز f خطوط

$$2x - 3y = c$$

هستند. ازاینرو، $f(x, y)$، وقتی $2x - 3y$ ثابت باشد، ثابت است. این پیشنهاد می‌کند که، به‌ازای تابعی چون g،

$$f(x, y) = g(2x - 3y) \cdot \tag{۵.۹}$$

حال تحقیق می‌کنیم که، به‌ازای هر تابع مشتقپذیر g، میدان اسکالر f تعریف شده با (۵.۹) در (۴.۹) صدق می‌کند. اگر از قاعدهٔ زنجیره‌ای برای محاسبهٔ مشتقات جزئی f استفاده کنیم، درمی‌یابیم که

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 2g'(2x - 3y), \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -3g'(2x - 3y),$$

$$3\frac{\partial f}{\partial x} + 2\frac{\partial f}{\partial y} = 6g'(2x - 3y) - 6g'(2x - 3y) = 0.$$

بنابراین، f در (۴.۹) صدق می‌کند.

بعکس، می‌توان نشان داد که هر f مشتقپذیر و صادق در (۴.۹) لزوما" باید به شکل (۵.۹) به‌ازای g ای باشد. برای این‌کار، تغییر متغیر خطی زیر را می‌دهیم:

$$x = Au + Bv, \qquad y = Cu + Dv. \tag{۶.۹}$$

این $f(x, y)$ را به‌تابعی از u و v، مثلا"

$$h(u, v) = f(Au + Bv, Cu + Dv),$$

بدل می‌کند. ثابتهای A, B, C, D را قسمی اختیار می‌کنیم که h در معادلهٔ ساده‌تر

$$\frac{\partial h(u, v)}{\partial u} = 0 \tag{۷.۹}$$

صدق کند. بعد این معادله را حل کرده نشان می‌دهیم f شکل مطلوب را دارد.

با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای، معلوم می‌شود که

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\frac{\partial x}{\partial u} + \frac{\partial f}{\partial y}\frac{\partial y}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}A + \frac{\partial f}{\partial y}C.$$

چون f در (۴۰۹) صــدق می‌کند ، داریم $\partial f/\partial y = -(3/2)(\partial f/\partial x)$ ؛ درنتیجه ، معادله نسبت به $\partial h/\partial u$ خواهد شد

$$\frac{\partial h}{\partial u} = \frac{\partial f}{\partial x}\left(A - \frac{3}{2}C\right)$$

ازاینرو، اگر $A = \frac{3}{2}C$ اختیارشود ، h در (۷۰۹) صدق می‌کند . با فرض $A = 3$ و $C = 2$ ، معلوم می‌شود که

$$x = 3u + Bv, \qquad y = 2u + Dv. \tag{۸۰۹}$$

به‌ازای‌این A و C ، تابع h در (۷۰۹) صدق می‌کند؛ درنتیجه ، $h(u, v)$ فقط تابعی از v است ؛ مثلا" ، به‌ازای تابعی چون g ،

$$h(u, v) = g(v) \cdot$$

برای‌آنکه v رابرحسب x و y بیان‌کنیم ، u رااز (۸۰۹) حذف می‌کنیم و خواهیم داشت $2x - 3y = (2B - 3D)v$. حال B و D را طوری می‌گیریم که $2B - 3D = 1$ ؛ مثلا" ، $B = 2$ ، $D = 1$. بــه‌ازای ایــن انتخــاب ، تبدیــل (۶۰۹) نــامنفرد اســت؛ داریم $v = 2x - 3y$ ؛ و درنتیجه ،

$$f(x, y) = h(u, v) = g(v) = g(2x - 3y).$$

این نشان می‌دهد که هر جواب مشتقپذیر f از (۴۰۹) به‌شکل (۵۰۹) است .

همین نوع استدلال قضیهٔ زیر را برای معادلات مرتبهٔ اول با ضرایب ثابت اثبات می‌کند .

قضیهٔ ۱۰۹ . فرض‌کنیم g بر $\mathbf{R}^1$ مشتقپذیربوده ، و میدان اسکالر f بر $\mathbf{R}^2$ بامعادلهٔ

$$f(x, y) = g(bx - ay) \tag{۹۰۹}$$

تعریف شده باشد ، که درآن a و b ثابت بوده و هر دو صفر نباشند . دراین صورت ، f همه‌جا در $\mathbf{R}^2$ ، در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی مرتبهٔ اول

$$a\frac{\partial f(x, y)}{\partial x} + b\frac{\partial f(x, y)}{\partial y} = 0 \tag{۱۰۰۹}$$

صدق می‌کند . بعکس، هر جواب مشتقپذیر (۱۰۰۹) لزوما" به‌ازای g ای به‌شکل (۹۰۹) می‌باشد .

۳۰۹ تمرین

در این مجموعه تمرینات ، می‌توان همهٔ توابع مورد نظر را مشتقپذیر گرفت .

۱ . جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل جزئی

$$4\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}+3\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$$

را معین کنید که در شرط $f(x,0)=\sin x$ به‌ازای هر x صدق کند .

۲ . جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل جزئی

$$5\frac{\partial f(x,y)}{\partial x}-2\frac{\partial f(x,y)}{\partial y}=0$$

را معین‌کنیدکه‌در شرطهای $f(0,0)=0$ و $D_1f(x,0)=e^x$ به‌ازای هر x صدق نماید

۳ . (آ) هرگاه $u(x,y)=f(xy)$ ، ثابت کنید u در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی

$$x\frac{\partial u}{\partial x}-y\frac{\partial u}{\partial y}=0$$

صدق می‌کند . جوابی را بیابید که‌به‌ازای هر x ، $u(x,x)=x^4e^{x^2}$.

(ب) هرگاه‌به‌ازای $y\neq 0$ ، $v(x,y)=f(x/y)$ ،ثابت‌کنید v در معادلهٔ‌دیفرانسیل جزئی

$$x\frac{\partial v}{\partial x}+y\frac{\partial v}{\partial y}=0$$

صدق‌می‌کند .جوابی‌رابیابیدکه $v(1,1)=2$ وبه‌ازای هر $x\neq 0$ ، $D_1v(x,1/x)=1/x$.

۴ . هرگاه $g(u,v)$ در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی

$$\frac{\partial^2 g(u,v)}{\partial u\,\partial v}=0$$

صدق کند ، ثابت کنید $g(u,v)=\varphi_1(u)+\varphi_2(v)$ ، که درآن $\varphi_1(u)$ فقط تابعی از u و $\varphi_2(v)$ فقط تابعی از v است .

۵ . فرض کنید f در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}-2\frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial y}-3\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}=0$$

صدق کند . تغییر متغیر خطی $x=Au+Bv,\ y=Cu+Dv$ بدهید ، که درآن

A, B, C, D ثابت‌اند ، و فـرض کنید $g(u, v) = f(Au + Bv, Cu + Dv)$. مقادیر صحیح‌ناصفر A, B, C, D راطوری حساب کنید که g در $\partial^2 g/(\partial u\, \partial v) = 0$ صدق کند . این معادله‌را نسبت به g حل کرده f را مشخص نمایید . (مشتقات جزئی مخلوط را مساوی بگیرید .)

۶ . تابع u با معادله‌ای به‌شکل

$$u(x, y) = xyf\left(\frac{x + y}{xy}\right)$$

تعریف شده‌است . نشان دهید که u در یک معادلهٔ دیفرانسیل جزئی به‌شکل

$$x^2 \frac{\partial u}{\partial x} - y^2 \frac{\partial u}{\partial y} = G(x, y)u$$

صدق می‌کند ، و $G(x, y)$ را به‌دست آورید .

۷ . جانشـانی $x = e^s, y = e^t$ ، $f(x, y)$ را بـه $g(s, t)$ بدل مـی‌کنـد ، کـه در آن $g(s, t) = f(e^s, e^t)$. هرگاه f در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = 0$$

صدق کند ، نشان دهید g در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s^2} + \frac{\partial^2 g}{\partial t^2} = 0$$

صدق خواهد کرد .

۸ . فرض کنید میـدان اسکالر f بر مجموعهٔ باز S در $\mathbf{R}^n$ مشتقپذیر باشد . گوییم f **همگن از درجهٔ** p بر S است درصورتی‌که‌بهازای‌هر $t > 0$ و هر x در S که $tx \in S$ ،

$$f(tx) = t^p f(x)$$

برای یک میدان اسکالر همگن از درجهٔ p ، نشان دهید که

بهازای هر x در S ، $x \cdot \nabla f(x) = pf(x)$.

این‌مطلب‌به‌قضیهٔ **اویلر برای توابع همگن** معروف است . هرگاه $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ، می‌توان آن را به‌صورت زیر بیان کرد :

$$x_1 \frac{\partial f}{\partial x_1} + \cdots + x_n \frac{\partial f}{\partial x_n} = pf(x_1, \ldots, x_n).$$

[**راهنمایی .** بهازای x ثابت، تعریف‌کنید $g(t) = f(tx)$ و $g'(1)$ را محاسبه‌نمایید .]

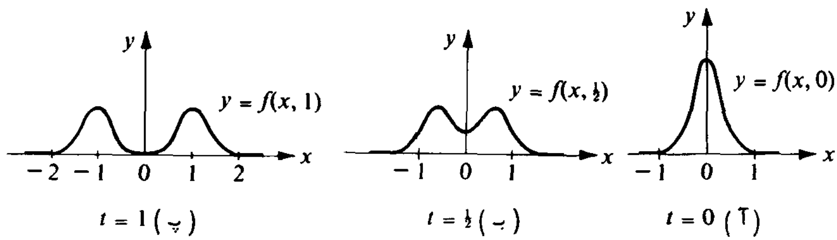
۹ . عکس قضیهٔ اویلر را ثابت کنید . یعنی ، ثابت کنید هرگاه f در $x \cdot \nabla f(x) = p f(x)$ بهازای هر x در مجموعهٔ باز S صدق کند ، آنگاه f باید همگن از درجهٔ p روی S باشد . [**راهنمایی .** بهازای x ثابت ، $g(t) = f(tx) - t^p f(x)$ را تعریف و $g'(t)$ را حساب کنید .]

۱۰ . تعمیم زیر از قضیهٔ اویلر برای توابع همگن از درجهٔ p درحالت 2 بعدی را ثابت کنید (مشتقات جزئی مخلوط را مساوی بگیرید) :

$$x^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + 2xy \frac{\partial^2 f}{\partial x\, \partial y} + y^2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = p(p-1)f.$$

۴.۹ معادلهٔ موج یک بعدی

فرض کنیم سیمی بهطول نامتناهی در امتداد محور x کشیده شده و در صفحهٔ xy نوسان می‌کند . تغییرمکان قائم سیم در نقطهٔ x و در لحظهٔ t را با $y = f(x, t)$ نشان می‌دهیم . فرض کنیم سیم در لحظهٔ $t = 0$ روی منحنی معلوم $y = F(x)$ باشد . مثالی در شکل ۱.۹ (آ) آورده شده است . شکلهای ۱.۹ (ب) و (پ) منحنیهای تغییر مکان را بهازای



شکل ۱.۹ منحنی تغییر مکان $y = f(x, t)$ بهازای مقادیر مختلف t نشان داده شده است .

مقادیر بعدی t نشان می‌دهند . تغییر مکان $f(x, t)$ را تابع مجهولی از x و t می‌گیریم که باید معین شود . یک نمونهٔ ریاضی برای این مسئله (که به وسیلهٔ مطالبی فیزیکی که در اینجا عنوان نمی‌شوند پیشنهاد می‌شود) معادلهٔ دیفرانسیل جزئی

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$$

است ، که درآن c ثابت مثبتی است که به مشخصات فیزیکی سیم بستگی دارد . این معادله

معادلهٔ موج یک بعدی نامیده می‌شود . ما این معادله را تحت چند شرط کمکی حل خواهیم کــرد .

چون تغییر مکان اولیه منحنی مفروض $y = F(x)$ است ، جوابی جستجو می‌کنیم که در شرط

$$f(x, 0) = F(x)$$

صدق کنــد . همچنین ، فرض می‌کنیم $\partial y/\partial t$ ، یعنی سرعت تغییر مکان قائم ، در لحظهٔ $t = 0$ معلوم باشد ؛ مثلاً " ،

$$D_2 f(x, 0) = G(x),$$

که درآن G تابع معلــومی می‌باشد . ظاهرا " این اطلاعات برای تعیین حرکت بعدی سیم کافی اســت . درواقع ، با تعیین تابع f برحسب F و G ، نشان می‌دهیم که این مطلب درست اســت . جــواب به شکلی که توسط ژان دالامبر[1] (۱۷۱۷ – ۱۷۸۳) ، ریاضیدان و فیلسوف فرانسوی، داده شده بیان می‌شود .

قضیهٔ ۲۰۹ . جواب دالامبر برای معادلهٔ موج . فرض‌کنیم F و G توابعی باشند بطوری که G مشتقپذیــر و F دوبار مشتقپذیر بر $\mathbf{R}^1$ باشد . دراین صورت ، تابعی که با فرمول زیر داده می‌شود :

$$f(x, t) = \frac{F(x + ct) + F(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(s)\, ds \qquad (۱۱ \cdot ۹)$$

در معادلهٔ موج یک بعدی

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \qquad (۱۲ \cdot ۹)$$

و شرطهای اولیهٔ

$$f(x, 0) = F(x), \qquad D_2 f(x, 0) = G(x) \qquad (۱۳ \cdot ۹)$$

صدق مــی‌کند . ***بعکس، هــر تــابع f با مشتقات جزئی مخلوط مساوی که در (۱۲۰۹) و (۱۳۰۹) صدق کند لزوما " به‌شکل (۱۱۰۹) خواهد بود .***

برهان . تحقیق اینکه تــابع f تعریف شده با (۱۱۰۹) در معادلهٔ موج و شرایط اولیهٔ

1. Jean d'Alembert

داده شده صدق می‌کند تمرین سر راستی است . این‌کار به خواننده محول می‌شود . ماعکس آن را ثابت خواهیم کرد .

یک طریقه این است که f را جوابی از معادلهٔ موج بگیریم ، تغییر متغیر خطی

$$x = Au + Bv, \qquad t = Cu + Dv$$

بدهیم که $f(x, t)$ را به‌تابعی از u و v ، مثلاً

$$g(u, v) = f(Au + Bv, Cu + Dv),$$

بدل کند ، و ثابتهای A, B, C, D را طوری اختیار کنیم که g در معادلهٔ ساده‌تر

$$\frac{\partial^2 g}{\partial u\, \partial v} = 0$$

صدق نماید .باحل این معادله‌نسبت به g ، معلوم می‌شود که $g(u, v) = \varphi_1(u) + \varphi_2(v)$ ، که‌درآن $\varphi_1(u)$ فقط‌تابع u و $\varphi_2(v)$ فقط‌تابع v است .ثابتهای A, B, C, D را می‌توان طوری اختیار کرد که $u = x + ct$ ، $v = x - ct$ ، که از آن خواهیم داشت

$$f(x, t) = \varphi_1(x + ct) + \varphi_2(x - ct). \tag{۱۴.۹}$$

بعد ، با استفاده از شرایط‌اولیهٔ (۱۳.۹) ، توابع φ_1 و φ_2 را برحسب توابع معلوم F و G مشخص می‌کنیم .

ما (۱۴.۹) را به‌روشی دیگر که‌از قضیهٔ ۱.۹ استفاده‌کرده و از تغییر متغیر اجتناب می‌کند به‌دست می‌آوریم . ابتدا معادلهٔ موج را به‌شکل

$$L_1(L_2 f) = 0 \tag{۱۵.۹}$$

می‌نویسیم ، که درآن L_1 و L_2 عملگرهای دیفرانسیل خطی مرتبهٔ اولند که با روابط

$$L_1 = \frac{\partial}{\partial t} - c\frac{\partial}{\partial x}, \qquad L_2 = \frac{\partial}{\partial t} + c\frac{\partial}{\partial x}$$

تعریف می‌شوند . فرض کنیم f جوابی از (۱۵.۹) بوده و

$$u(x, t) = L_2 f(x, t).$$

معادلهٔ (۱۵.۹) می‌گوید که u در معادلهٔ مرتبهٔ اول $L_1(u) = 0$ صدق می‌کند . ازاینرو ، طبق قضیهٔ ۱.۹ ، به‌ازای تابعی چون φ ، داریم

$$u(x, t) = \varphi(x + ct) \cdot$$

فرض کنیم Φ یک اولیهٔ φ باشد ؛ مثلاً ، $\Phi(y) = \int_0^y \varphi(s)\, ds$ ، و

$$v(x, t) = \frac{1}{2c}\Phi(x + ct).$$

نشان می‌دهیم که $L_2(v) = L_2(f)$. داریم

$$\frac{\partial v}{\partial x} = \frac{1}{2c}\Phi'(x+ct) \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial v}{\partial t} = \frac{1}{2}\Phi'(x+ct) \; ؛$$

درنتیجه،

$$L_2 v = \frac{\partial v}{\partial t} + c\frac{\partial v}{\partial x} = \Phi'(x+ct) = \varphi(x+ct) = u(x,t) = L_2 f.$$

به عبارت دیگر، تفاضل $f - v$ در معادلهٔ مرتبهٔ اول

$$L_2(f - v) = 0$$

صدق می‌کند. بنابر قضیهٔ ۱۰۹، باید بەازای تابعی چون ψ داشته باشیم $f(x,t) - v(x,t) = \psi(x - ct)$. بنابراین،

$$f(x,t) = v(x,t) + \psi(x - ct) = \frac{1}{2c}\Phi(x+ct) + \psi(x-ct).$$

این (۱۴۰۹) را بەازای $\varphi_1 = \frac{1}{2c}\Phi$ و $\varphi_2 = \psi$ ثابت می‌کند.

حال، با استفاده از شرایط اولیهٔ (۱۳۰۹)، توابع φ_1 و φ_2 را برحسب توابع معلوم F و G معین می‌کنیم. رابطهٔ $f(x,0) = F(x)$ ایجاب می‌کند که

$$\varphi_1(x) + \varphi_2(x) = F(x). \tag{۱۶۰۹}$$

شرط اولیهٔ دیگر، یعنی $D_2 f(x,0) = G(x)$ ، ایجاب می‌کند که

$$c\varphi_1'(x) - c\varphi_2'(x) = G(x). \tag{۱۷۰۹}$$

با مشتقگیری از (۱۶۰۹)، داریم

$$\varphi_1'(x) + \varphi_2'(x) = F'(x). \tag{۱۸۰۹}$$

با حل (۱۷۰۹) و (۱۸۰۹) نسبت به $\varphi_1'(x)$ و $\varphi_2'(x)$ ، معلوم می‌شود که

$$\varphi_1'(x) = \frac{1}{2}F'(x) + \frac{1}{2c}G(x), \qquad \varphi_2'(x) = \frac{1}{2}F'(x) - \frac{1}{2c}G(x).$$

و با انتگرالگیری از این روابط، خواهیم داشت

$$\varphi_1(x) - \varphi_1(0) = \frac{F(x) - F(0)}{2} + \frac{1}{2c}\int_0^x G(s)\,ds,$$

$$\varphi_2(x) - \varphi_2(0) = \frac{F(x) - F(0)}{2} - \frac{1}{2c}\int_0^x G(s)\,ds.$$

در معادلهٔ اول x را با $x + ct$ ، و در معادلهٔ دوم x را با $x - ct$ عوض می‌کنیم. سپس، با جمع دو معادلهٔ حاصل و استفاده از $\varphi_1(0) + \varphi_2(0) = F(0)$ ، به‌دست می‌آوریم که

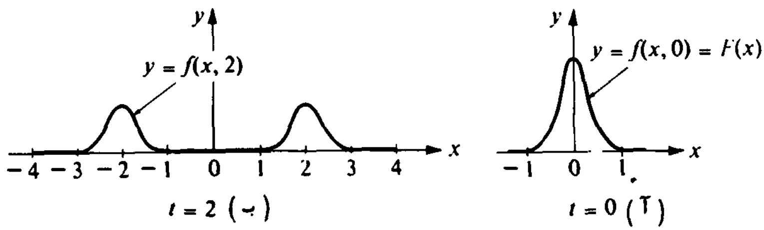
$$f(x, t) = \varphi_1(x + ct) + \varphi_2(x - ct) = \frac{F(x + ct) + F(x - ct)}{2} + \frac{1}{2c}\int_{x-ct}^{x+ct} G(s)\, ds.$$

این برهان را تمام خواهد کرد.

مثال. فرض کنیم تغییر مکان اولیه با فرمول زیر داده شده باشد:

$$F(x) = \begin{cases} 1 + \cos \pi x & \text{بەازای}\ -1 \le x \le 1 \\ 0 & \text{بەازای}\ |x| \ge 1 \end{cases}$$

نمودار F در شکلهای ۱۰۹ (آ) و ۲۰۹ (آ) نشان داده شده است.



شکل ۲۰۹ جواب معادلهٔ موج بەازای $t = 0$ و $t = 2$ نشان داده است.

فرض کنیم سرعت اولیه $G(x) = 0$ بەازای هر x باشد. دراین صورت، جواب معادلهٔ موج از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$f(x, t) = \frac{F(x + ct) + F(x - ct)}{2}.$$

شکلهای ۱۰۹ و ۲۰۹ منحنی $y = f(x, t)$ را بەازای مقادیر مختلف t نشان می‌دهند. این شکلها نشان می‌دهند که جواب معادلهٔ موج ترکیبی است از دو موج ایستاده، که یکی به راست و دیگری به‌چپ، با سرعت c ، می‌روند.

مثالهای دیگر، که موارد استعمال قاعدهٔ زنجیره‌ای را در مطالعهٔ معادلات دیفرانسیل

جزئی نشان می‌دهند . در مجموعه تمرینات بعدی داده شده‌اند .

۵۰۹ تمرین

دراین مجموعه تمرینات ، می‌توان تمام توابع مورد نظر را مشتقپذیر گرفت .

۱ . هرگاه k ثابت‌مثبتی بود، و $g(x, t) = \frac{1}{2}x/\sqrt{kt}$ ، قرار دهید

$$f(x, t) = \int_0^{g(x,t)} e^{-u^2}\, du .$$

(آ) نشان دهید که $\frac{\partial f}{\partial x} = e^{-g^2} \frac{\partial g}{\partial x}$ و $\frac{\partial f}{\partial t} = e^{-g^2} \frac{\partial g}{\partial t}$.

(ب) نشان دهید که f در معادلهٔ دیفرانسیل جزئی

$$k \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{\partial f}{\partial t} \quad \text{(معادلهٔ حرارت)}$$

صدق می‌کند .

۲ . میدان اسکالر f در $\mathbf{R}^2$ تعریف شده است بطوری که $f(x, y)$ فقط به‌فاصلهٔ r نقطهٔ (x, y) از مبداء بستگی دارد؛ مثلا" ، $f(x, y) = g(r)$ ، که درآن $r = (x^2 + y^2)^{1/2}$.

(آ) ثابت کنید به‌ازای هر $(x, y) \neq (0, 0)$ داریم

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{1}{r} g'(r) + g''(r).$$

(ب) حال فرض کنید f در معادلهٔ لاپلاس

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0,$$

به‌ازای هر $(x, y) \neq (0, 0)$ ، نیز صدق کند . با استفاده از قسمت (آ) ، ثابت کنید به‌ازای هر $(x, y) \neq (0, 0)$ ، $f(x, y) = a \log (x^2 + y^2) + b$ ، که درآن a و b ثابت‌اند .

۳ . تمرین ۲ را درحالت n بعدی، که $n \geq 3$ ، تکرار کنید . یعنی ، فرض کنید $f(x) = f(x_1, \ldots, x_n) = g(r)$ ، که‌درآن $r = \|x\|$. نشان دهید که ، به‌ازای $x \neq O$ ،

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = \frac{n-1}{r} g'(r) + g''(r) .$$

اگر f درمعادلهٔ **لاپلاس** n **بعدی**

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2} = 0,$$

به‌ازای‌هر $x \neq O$ صدق‌کند، نتیجه‌بگیرید که، به‌ازای $x \neq O$ ، $f(x) = a\|x\|^{2-n} + b$ ،
که درآن a و b ثابت هستند .

تذکر. عملگر خطی ∇^2 تعریف شده با معادلهٔ

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}$$

لاپلاسین n ***بعدی*** نامیده می‌شود .

۴ . **لاپلاسین دوبعدی** **در مختصات قطبی .** مختصات قطبی $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ ،
$f(x, y)$ را به $g(r, \theta)$ تبدیل می‌کند . فرمولهای زیر را تحقیق کنید :

(آ) $\|\nabla f(r\cos\theta, r\sin\theta)\|^2 = \left(\frac{\partial g}{\partial r}\right)^2 + \frac{1}{r^2}\left(\frac{\partial g}{\partial \theta}\right)^2$ ؛

(ب) $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r}$.

۵ . **لاپلاسین سه‌بعدی در مختصات کروی .** مختصات کروی

$$x = \rho\cos\theta\sin\varphi, \qquad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = \rho\cos\varphi$$

$f(x, y, z)$ را بــه $F(\rho, \theta, \varphi)$ بدل می‌کنند . این تمرین طرز بیان لاپلاسین $\nabla^2 f$ را
برحسب مشتقات جزئی F نشان می‌دهد .

(آ) ابتدا با مختصات قطبی $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ ، $f(x, y, z)$ را به $g(r, \theta, z)$
تبدیل کنید . با استفاده از تمرین ۴ ، نشان دهید که

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 g}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 g}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial g}{\partial r} + \frac{\partial^2 g}{\partial z^2}.$$

(ب) حال، بافرض $z = \rho\cos\varphi, r = \rho\sin\varphi$ ، $g(r, \theta, z)$ رابه $F(\rho, \theta, \varphi)$ تبدیل
کنید . توجه‌کنیدکه‌این تبدیل ، صرف نظر از تغییردرنماد ، همان‌تبدیل‌قسمت (آ)
است . نتیجه بگیرید که

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 F}{\partial \rho^2} + \frac{2}{\rho}\frac{\partial F}{\partial \rho} + \frac{1}{\rho^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \varphi^2} + \frac{\cos\varphi}{\rho^2\sin\varphi}\frac{\partial F}{\partial \varphi} + \frac{1}{\rho^2\sin\varphi}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}.$$

۶ . این تمــرین نشان می‌دهد که چگونه ، وقتی جوابهای معادلهٔ لاپلاس به‌شکل خاص جستجو می‌شوند ، معـادلهٔ دیفرانسیل لــژاندربه‌وجود می‌آید . فرض کنید f یک میدان اسکالر باشد که در معادلهٔ لاپلاس سه‌بعدی ، یعنی $\nabla^2 f = 0$ ، صدق می‌کند . مختصات کروی مذکور درتمرین ۵ را وارد کرده و فرض کنید $F(\rho, \theta, \varphi) = f(x, y, z)$.

(آ) فرض‌کنید جوابهایی چون f از معادلهٔ لاپلاس را جستجو می‌کنیم بطوری که $F(\rho, \theta, \varphi)$ مستقل از θ بوده و به‌شکل خاص $F(\rho, \theta, \varphi) = \rho^n G(\varphi)$ باشد. نشان‌دهید f درصورتی در معادلهٔ لاپلاس صدق می‌کند که G در معادلهٔ مرتبهٔ دوم

$$\frac{d^2G}{d\varphi^2} + \cot \varphi \frac{dG}{d\varphi} + n(n+1)G = 0$$

صدق نماید .

(ب) تغییــر متغیر $x = \cos \varphi$ ($\varphi = \arccos x,\ -1 \le x \le 1$) ، $G(\varphi)$ را به $g(x)$ بدل می‌کند . نشان دهید که g در معادلهٔ لژاندر

$$(1 - x^2)\frac{d^2g}{dx^2} - 2x\frac{dg}{dx} + n(n+1)g = 0$$

صدق می‌نماید .

۷ . **معادلهٔ موج دوبعدی .** یک غشاء نازک قابل انعطاف روی صفحهٔ xy کشیده شده و درحال ارتعـاش است . فــرض‌کنید $z = f(x, y, t)$ تغییر مکان قائم غشاء در نقطهٔ (x, y) در لحظــهٔ t باشد . ملاحظات فیزیکی می‌گویند که f در معادلهٔ موج دوبعدی

$$\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}\right)$$

صدق مــی‌کند ، که درآن c ثابت مثبتی است که به‌خصوصیات فیزیکی غشاء بستگی دارد . ایــن تمــرین رابطــهٔ بین این معادله و معادلهٔ دیفرانسیل بسل[1] را آشکار می‌سازد .

(آ) مختصــات قطبــی $x = r\cos\theta, y = r\sin\theta$ را وارد کرده ، و فــرض کنیــد $F(r, \theta, t) = f(r\cos\theta, r\sin\theta, t)$ ، اگــر f در معـادلهٔ موج صدق کند ، نشان دهید

---

1. Bessel

F در معادلهٔ

$$\frac{\partial^2 F}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r}\right)$$

صدق خواهد کرد.

(ب) هرگاه $F(r, \theta, t)$ مستقل از θ باشد، مثلاً" $F(r, \theta, t) = \varphi(r, t)$ ، معادلهٔ (آ) بـــه

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} = c^2\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right)$$

ساده می‌شود. حال فرض کنید φ یک جواب باشد بطوری که $\varphi(r, t)$ به تابعی از r ضربدر تابعی از t تجزیه شود؛ مثلاً"، $\varphi(r, t) = R(r)T(t)$. نشان دهید که هریک ازتوابع R و T دریک معادلهٔ دیفرانسیل خطی معمولی مرتبهٔ دوم صدق می‌کند.

(پ) هرگاه تابع T در قسمت (ب) متناوب با دورهٔ تناوب $2\pi/c$ باشد، نشان دهید R در معادلهٔ بسل $r^2R'' + rR' + r^2R = 0$ صدق می‌نماید.

۶.۹ مشتق توابعی که به‌طور ضمنی تعریف شده‌اند

برخی از سطوح در فضای 3 با معادلات دکارتی به‌شکل

$$F(x, y, z) = 0$$

توصیف می‌شوند. گوییم هرمعادله به‌این شکل یک **نمایش ضمنی** سطح است. مثلاً"، معادلهٔ $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ نمایش‌سطح کرهٔ یکه به‌مرکز مبداء است. گاهی می‌توان معادلهٔ $F(x, y, z) = 0$ رانسبت به یک‌متغیروبرحسب دوتای دیگر، مثلاً" نسبت به z وبرحسب x و y ، حل کرد. این‌کار به‌یک یا چند معادله به‌شکل

$$z = f(x, y)$$

منجر می‌شود. برای کره دو معادله داریم:

$$z = \sqrt{1 - x^2 - y^2} \quad \text{و} \quad z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2} \text{ ،}$$

یکی نمایش نیمکرهٔ بالایی و دیگری نیمکرهٔ پایینی.

درحالت کلی، ممکن‌است یافتن‌فرمول صریحی نسبت به z و برحسب x و y آسان نباشد. مثلاً"، برای‌حل معادلهٔ $y^2 + xz + z^2 - e^z - 4 = 0$ نسبت به z روش‌ساده‌ای وجودندارد. با اینحال، می‌توان، بااستفاده از قاعدهٔ‌زنجیره‌ای، خواص مختلف مشتقات

جزئی $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ را بدون هیچ اطلاع صریحی از $f(x,y)$ نتیجه گرفت. روند کار در این بخش توضیح خواهد شد.

فرض کنیم تابعی چون $f(x,y)$ وجود داشته باشد بطوری که، به‌ازای هر (x,y) در مجموعهٔ بازی مانند S ،

$$F[x,y,f(x,y)] = 0 \quad ، \tag{۱۹.۹}$$

اگرچه ممکن است برای محاسبهٔ $f(x,y)$ فرمولهای صریحی دردست نباشند. این امر را این‌طور توصیف می‌کنیم که می‌گوییم معادلهٔ $F(x,y,z)=0$ ، z را به‌عنوان تابعی از x و y به‌طور ضمنی تعریف می‌کند، و می‌نویسیم

$$z = f(x,y).$$

حال تابع کمکی g را بر S به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$g(x,y) = F[x,y,f(x,y)].$$

معادلهٔ (۱۹.۹) می‌گوید که، بر S ، $g(x,y)=0$ ؛ درنتیجه، مشتقات جزئی $\partial g/\partial x$ و $\partial g/\partial y$ نیزبر S صفرند. اما این‌مشتقات‌جزئی را می‌توان با قاعدهٔ زنجیره‌ای نیزحساب کرد. برای این‌کار، می‌نویسیم

$$g(x,y) = F[u_1(x,y), u_2(x,y), u_3(x,y)],$$

که درآن $u_1(x,y)=x$ ، $u_2(x,y)=y$ ، و $u_3(x,y)=f(x,y)$. قاعدهٔ زنجیره‌ای فرمولهای زیر را به‌ما می‌دهد:

$$\frac{\partial g}{\partial x} = D_1F\frac{\partial u_1}{\partial x} + D_2F\frac{\partial u_2}{\partial x} + D_3F\frac{\partial u_3}{\partial x} \quad \text{و} \quad \frac{\partial g}{\partial y} = D_1F\frac{\partial u_1}{\partial y} + D_2F\frac{\partial u_2}{\partial y} + D_3F\frac{\partial u_3}{\partial y} \text{ ،}$$

که درآنها هر مشتق جزئی D_kF باید در $(x,y,f(x,y))$ حساب شود. چون داریم

$$\frac{\partial u_1}{\partial x} = 1 \text{ ،} \qquad \frac{\partial u_2}{\partial x} = 0 \text{ ،} \qquad \frac{\partial u_3}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x} \text{ ،} \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial g}{\partial x} = 0 \text{ ،}$$

اولین معادله از معادلات فوق خواهد شد

$$D_1F + D_3F\frac{\partial f}{\partial x} = 0.$$

با حل این معادله نسبت به $\partial f/\partial x$ ، در نقاطی که $D_3F[x,y,f(x,y)] \neq 0$ ، خواهیم داشت

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{D_1F[x,y,f(x,y)]}{D_3F[x,y,f(x,y)]}. \tag{۲۰.۹}$$

با استدلالی مشابه، فرمول نظیر برای $\partial f/\partial y$ به‌دست می‌آید: در نقاطی که $D_3F[x, y, f(x, y)] \neq 0$،

$$\frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{D_2F[x, y, f(x, y)]}{D_3F[x, y, f(x, y)]} . \qquad (۲۱ \cdot ۹)$$

این فرمولها را معمولاً" خلاصه‌تر و به‌صورت زیر می‌نویسند:

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}.$$

مثال. فرض کنیم معادلهٔ $y^2 + xz + z^2 - e^z - c = 0$، z را به‌عنوان تابعی از x و y تعریف کند؛ مثلاً"، $z = f(x, y)$. ثابت c را طوری بیابید که $f(0, e) = 2$، و مشتقات‌جزئی $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ را درنقطهٔ $(x, y) = (0, e)$ حساب کنید.

حل. وقتی $x = 0$، $y = e$، و $z = 2$، معادله‌به‌صورت $e^2 + 4 - e^2 - c = 0$ درمی‌آید، و این معادله به ازای $c = 4$ برقرار است. فرض کنیم $F(x, y, z) = y^2 + xz + z^2 - e^z - 4$. از (۲۰·۹) و (۲۱·۹) داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{z}{x + 2z - e^z}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{2y}{x + 2z - e^z}.$$

وقتی $x = 0$، $y = e$، و $z = 2$، درمی‌یابیم که $\partial f/\partial x = 2/(e^2 - 4)$ و $\partial f/\partial y = 2e/(e^2 - 4)$. توجه کنید که می‌توان مشتقات جزئی $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ را فقط با استفاده از مقدار $f(x, y)$ در نقطهٔ $(0, e)$ حساب کرد.

بحث قبلی را می‌توان به توابع بیش از دو متغیر تعمیم داد.

قضیهٔ ۳۰۹ . فرض کنیم F یک‌میدان اسکالر مشتق‌پذیر برمجموعهٔ باز T در $\mathbf{R}^n$ باشد. همچنین، معادلهٔ

$$F(x_1, \ldots, x_n) = 0$$

x_n را به‌عنوان تابع مشتق‌پذیری از $x_1, \ldots, x_{n-1}$ به‌طورضمنی تعریف کند؛ مثلاً"، به‌ازای هر نقطهٔ $(x_1, \ldots, x_{n-1})$ در مجموعهٔ بازی چون S در $\mathbf{R}^{n-1}$،

$$x_n = f(x_1, \ldots, x_{n-1}) .$$

دراین صــورت ، بــهازای هــر $k = 1, 2, \ldots, n-1$ ، مشتق جزئی $D_k f$ در نقاطی که $D_n F \neq 0$ با فرمول زیر داده میشود :

$$D_k f = -\frac{D_k F}{D_n F} \quad . \qquad (۲۲.۹)$$

مشتقات جزئی $D_k F$ و $D_n F$ در (۲۲.۹) باید در نقطهٔ

$$(x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, f(x_1, \ldots, x_{n-1}))$$

حساب شوند.

اثبات تعمیم سر راست استدلالی است که برای معادلات (۲۰.۹) و (۲۱.۹) بهکار رفت ، و به خواننده محول میشود .

بحث را میتوان بهصورتی دیگر تعمیم داد. فرض کنیم دو سطح با نمایشهای ضمنی زیر داشته باشیم :

$$F(x, y, z) = 0, \qquad G(x, y, z) = 0. \qquad (۲۳.۹)$$

اگر این سطوح در امتداد منحنی C متقاطع باشند ، میتوان با حل دو معادلهٔ (۲۳.۹) نسبت به دو متغیر و برحسب سومی ، مثلاً" نسبت به x و y و برحسب z ، یک نمایش پارامتری از C را بهدستآورد. فرض کنیم حل نسبت به x و y امکانپذیر بوده و جوابها با معادلات

$$x = X(z), \qquad y = Y(z)$$

بهازای هر z در بازهٔ بازی چون (a, b) داده شده باشند. دراین صورت ، وقتی x و y بترتیب با $X(z)$ و $Y(z)$ عوض شوند ،دومعادلهٔ (۲۳.۹) بهصورت اتحاد برقرار میباشند . یعنی ، مـیتـوان بـهازای هـر z در (a, b) نـوشـت $F[X(z), Y(z), z] = 0$ و $G[X(z), Y(z), z] = 0$. مجدداً" ،بااستفاده ازقاعدهٔ زنجیرهای ،میتوان مشتقات $X'(z)$ و $Y'(z)$ را بدون هیچ اطلاع صریحی از $X(z)$ و $Y(z)$ حساب کرد. برای اینکار ، توابع جدید f و g را با معادلات

$$f(z) = F[X(z), Y(z), z] \qquad \text{و} \qquad g(z) = G[X(z), Y(z), z]$$

تعریف میکنیم .دراین صورت ، بهازای هر z در (a, b) ، $f(z) = g(z) = 0$ ؛ودرنتیجه ، مشتقـات $f'(z)$ و $g'(z)$ نیـز بـر (a, b) صفرند .بنابر قاعدهٔ زنجیرهای ، این مشتقها با

فرمولهای زیر داده می‌شوند:

$$f'(z) = \frac{\partial F}{\partial x} X'(z) + \frac{\partial F}{\partial y} Y'(z) + \frac{\partial F}{\partial z}, \qquad g'(z) = \frac{\partial G}{\partial x} X'(z) + \frac{\partial G}{\partial y} Y'(z) + \frac{\partial G}{\partial z}.$$

چون $f'(z)$ و $g'(z)$ هر دو صفرند، می‌توان $X'(z)$ و $Y'(z)$ را با حل دستگاه دو معادلهٔ خطی زیر معین کرد:

$$\frac{\partial F}{\partial x} X'(z) + \frac{\partial F}{\partial y} Y'(z) = -\frac{\partial F}{\partial z},$$
$$\frac{\partial G}{\partial x} X'(z) + \frac{\partial G}{\partial y} Y'(z) = -\frac{\partial G}{\partial z}.$$

این دستگاه‌درنقاطی که دترمینان دستگاه صفرنیست جواب منحصربفرد دارد، که می‌توان آن را، با استفاده از قاعدهٔ کرامر، به‌صورت زیر بیان کرد:

$$X'(z) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial z} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial z} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}, \qquad Y'(z) = -\frac{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial z} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial z} \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} & \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial G}{\partial x} & \frac{\partial G}{\partial y} \end{vmatrix}}. \tag{۲۴۰۹}$$

دترمینانهایی که در (۲۴۰۹) آمده‌اند دترمینانهای ماتریسهای ژاکوبی‌اند و دترمینانهای **ژاکوبی** نام دارند. اغلب برای دترمینانهای ژاکوبی نماد خاصی به‌کار می‌رود. می‌نویسیم

$$\frac{\partial(f_1, \ldots, f_n)}{\partial(x_1, \ldots, x_n)} = \det \begin{bmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x_1} & \frac{\partial f_1}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_1}{\partial x_n} \\ \vdots & & & \vdots \\ \frac{\partial f_n}{\partial x_1} & \frac{\partial f_n}{\partial x_2} & \cdots & \frac{\partial f_n}{\partial x_n} \end{bmatrix}.$$

با این نماد، فرمولهای (۲۴۰۹) را می‌توان به‌شکل ساده‌تر بیان کرد:

$$X'(z) = \frac{\partial(F, G)/\partial(y, z)}{\partial(F, G)/\partial(x, y)}, \qquad Y'(z) = \frac{\partial(F, G)/\partial(z, x)}{\partial(F, G)/\partial(x, y)}. \tag{۲۵.۹}$$

(علامت منفی با تعویض ستونها درصورت داخل شده است.)

این روش را می‌توان برای حالات کلیتری که درآنها m معادله از n متغیر داده شده‌اند و $n > m$ تعمیم داد، و معادلات را نسبت به m متغیر و برحسب $n - m$ متغیر باقیمانده حل‌کرد. مشتقات جزئی توابع جدید را می‌توان، با تعمیم (۲۵.۹)، به‌صورت خارج قسمتهای دترمینانهای ژاکوبی بیان نمود. یک مثال به‌ازای $m = 2$ و $n = 4$ درتمرین ۳ از بخش ۸.۹ توصیف شده است.

۷.۹ مثالهای حل شده

دراین بخش، چند مفهوم بخش پیش را با حل مسائل مختلف درباب توابعی که‌به‌طور ضمنی تعریف شده‌اند توضیح می‌دهیم.

مثال ۱. فرض‌کنید معادلهٔ $g(x, y) = 0$، y را به‌عنوان تابع مشتقپذیری از x معین کند؛ مثلاً"، به‌ازای هر x در بازهٔ بازی چون (a, b)، $y = Y(x)$. $Y'(x)$ را برحسب مشتقات جزئی g بیان نمایید.

حل. فرض کنیم به‌ازای x در (a, b)، $G(x) = g[x, Y(x)]$. دراین صورت، معادلهٔ $g(x, y) = 0$ ایجاب‌می‌کندکه، در (a, b)، $G(x) = 0$. طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای، داریم

$$G'(x) = \frac{\partial g}{\partial x} \cdot 1 + \frac{\partial g}{\partial y} Y'(x),$$

که از آن، در نقاط x در (a, b) که $\partial g/\partial y \neq 0$، خواهیم داشت

$$Y'(x) = -\frac{\partial g/\partial x}{\partial g/\partial y}. \tag{۲۶.۹}$$

مشتقات جزئی $\partial g/\partial x$ و $\partial g/\partial y$ از فرمولهای $\partial g/\partial x = D_1 g[x, Y(x)]$ و $\partial g/\partial y = D_2 g[x, Y(x)]$ به‌دست می‌آیند.

مثال ۲. وقتی y ازدومعادلهٔ $z = f(x, y)$ و $g(x, y) = 0$ حذف‌شود، نتیجه رامی‌توان

به‌شکل $z = h(x)$ بیان کرد. $h'(x)$ را برحسب مشتقات جزئی f و g بیان کنید.

حل. فرض کنیم بتوان معادلهٔ $g(x, y) = 0$ را نسبت به y و برحسب x حل کرد و $y = Y(x)$ به‌ازای‌هر x در بازهٔ باز (a, b) یک جواب باشد. دراین صورت، تابع h از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

اگر $x \in (a, b)$ ، $h(x) = f[x, Y(x)]$.

با اعمال قاعدهٔ زنجیره‌ای، داریم

$$h'(x) = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} Y'(x).$$

با استفاده از معادلهٔ (۲۶.۹) در مثال ۱، فرمول زیر به‌دست می‌آید.

$$h'(x) = \frac{\dfrac{\partial g}{\partial y}\dfrac{\partial f}{\partial x} - \dfrac{\partial f}{\partial y}\dfrac{\partial g}{\partial x}}{\dfrac{\partial g}{\partial y}}.$$

مشتقات جزئی سمت راست باید در نقطهٔ $(x, Y(x))$ حساب شوند. توجه کنید که صورت را می‌توان به‌شکل دِترمینان ژاکوبی نیز بیان کرد، که نتیجه می‌دهد

$$h'(x) = \frac{\partial(f, g)/\partial(x, y)}{\partial g/\partial y}.$$

مثال ۳. دو معادلهٔ $2x = v^2 - u^2$ و $y = uv$ ، u و v را به‌عنوان توابعی از x و y تعریف می‌کنند. برای $\partial u/\partial x, \partial u/\partial y, \partial v/\partial x, \partial v/\partial y$ فرمولهایی بیابید.

حل. اگر y را ثابت گرفته و از دو معادله نسبت به x مشتق بگیریم، و بخاطرمان باشد که u و v توابعی از x و y اند، خواهیم داشت

$$2 = 2v\frac{\partial v}{\partial x} - 2u\frac{\partial u}{\partial x} \qquad \text{و} \qquad 0 = u\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial x}.$$

با حل این دستگاه نسبت به $\partial u/\partial x$ و $\partial v/\partial x$ ، معلوم می‌شود که

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -\frac{u}{u^2 + v^2} \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{v}{u^2 + v^2}.$$

ازآن‌سو، اگر x را ثابت گرفته و از دو معادله نسبت به y مشتق بگیریم، معادلات زیررا خواهیم داشت:

$$0 = 2v\frac{\partial v}{\partial y} - 2u\frac{\partial u}{\partial y} \quad \text{و} \quad 1 = u\frac{\partial v}{\partial y} + v\frac{\partial u}{\partial y}\,.$$

با حل این دستگاه، خواهیم داشت

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{v}{u^2+v^2} \quad \text{و} \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{u}{u^2+v^2}\,.$$

مثال ۴. فرض کنیم u به‌عنوان تابعی از x و y با معادلهٔ

$$u = F(x+u, yu)$$

تعریف شده باشد. $\partial u/\partial x$ و $\partial u/\partial y$ را برحسب مشتقات جزئی F بیابید.

حل. فرض‌کنیم به‌ازای‌هر (x, y) در مجموعهٔ بازی چون S، $u = g(x, y)$. باگذاردن $g(x, y)$ به‌جای u در معادلهٔ اصلی، باید داشته‌باشیم

$$g(x, y) = F[u_1(x, y), u_2(x, y)], \tag{۲۷.۹}$$

که‌درآن $u_1(x, y) = x + g(x, y)$ و $u_2(x, y) = y\,g(x, y)$. حال اگر y راثابت گرفته و از طرفین (۲۷.۹)، با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای در سمت راست، برحسب x مشتق بگیریم، خواهیم داشت

$$\frac{\partial g}{\partial x} = D_1F\frac{\partial u_1}{\partial x} + D_2F\frac{\partial u_2}{\partial x}\,. \tag{۲۸.۹}$$

اما $\partial u_1/\partial x = 1 + \partial g/\partial x$ و $\partial u_2/\partial x = y\,\partial g/\partial x$. از اینرو، (۲۸.۹) خواهد شد

$$\frac{\partial g}{\partial x} = D_1F\cdot\left(1 + \frac{\partial g}{\partial x}\right) + D_2F\cdot\left(y\frac{\partial g}{\partial x}\right).$$

با حل‌این‌معادله‌نسبت به $\partial g/\partial x$ (و نوشتن $\partial u/\partial x$ به‌جای $\partial g/\partial x$)، به‌دست‌می‌آوریم

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{-D_1F}{D_1F + y\,D_2F - 1}\,.$$

بهمین ترتیب، معلوم می‌شود که

$$\frac{\partial g}{\partial y} = D_1F\frac{\partial u_1}{\partial y} + D_2F\frac{\partial u_2}{\partial y} = D_1F\frac{\partial g}{\partial y} + D_2F\left(y\frac{\partial g}{\partial y} + g(x, y)\right).$$

از این رابطه معادلهٔ زیر نتیجه می‌شود:

$$\frac{\partial u}{\partial y}=\frac{-g(x, y)\, D_2F}{D_1F+y\, D_2F-1}\,.$$

مشتقات جزئی D_1F و D_2F باید در نقطهٔ $(x+g(x,y), y\,g(x,y))$ حساب شوند.

مثال ۵. وقتی u از دو معادلهٔ $x=u+v$ و $y=uv^2$ حذف شود، معادله‌ای به شکل $F(x,y,v)=0$ به‌دست می‌آید که v را به‌عنوان تابعی از x و y به‌طور ضمنی تعریف می‌کند؛ مثلاً، $v=h(x,y)$. ثابت کنید

$$\frac{\partial h}{\partial x}=\frac{h(x, y)}{3h(x, y)-2x}$$

و فرمول مشابهی برای $\partial h/\partial y$ پیدا نمایید.

حل. باحذف u از دو معادلهٔ داده شده، رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$xv^2-v^3-y=0.$$

فرض کنیم F تابعی باشد که با معادلهٔ

$$F(x,y,v)=xv^2-v^3-y$$

تعریف شده است. حال بحث مذکور در بخش ۹.۶ قابل بیان است و می‌توان نوشت

$$\frac{\partial h}{\partial x}=-\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial v} \qquad \text{و} \qquad \frac{\partial h}{\partial y}=-\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial v}\,. \tag{۲۹.۹}$$

اما $\partial F/\partial x=v^2$، $\partial F/\partial v=2xv-3v^2$، و $\partial F/\partial y=-1$. ازاینرو، معادلات (۲۹.۹) خواهند شد

$$\frac{\partial h}{\partial x}=-\frac{v^2}{2xv-3v^2}=-\frac{v}{2x-3v}=\frac{h(x, y)}{3h(x, y)-2x}$$

و

$$\frac{\partial h}{\partial y}=-\frac{-1}{2xv-3v^2}=\frac{1}{2xh(x, y)-3h^2(x, y)}\,.$$

مثال ۶. معادلهٔ $F(x,y,z)=0$، z را به‌عنوان تابعی از x و y به‌طور ضمنی تعریف می‌کند؛ مثلاً، $z=f(x,y)$. با فرض $\partial^2F/(\partial x\,\partial z)=\partial^2F/(\partial z\,\partial x)$، نشان دهید که

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{\left(\frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2 - 2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right) + \left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\right)}{\left(\frac{\partial F}{\partial z}\right)^3}, \quad (۳۰.۹)$$

که درآن‌مشتقات جزئی سمت راست باید در $(x, y, f(x, y))$ حساب شوند.

حل. طبق معادلهٔ (۲۰.۹) از بخش ۶.۹ ، داریم

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z}. \quad (۳۱.۹)$$

باید بخاطر داشت که این خارج قسمت یعنی

$$-\frac{D_1F[x, y, f(x, y)]}{D_3F[x, y, f(x, y)]}.$$

فرض کنیم $G(x, y) = D_1F[x, y, f(x, y)]$ و $H(x, y) = D_3F[x, y, f(x, y)]$. هدف محاسبهٔ مشتق جزئی خارج قسمت

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{G(x, y)}{H(x, y)}$$

برحسب x است ،با ثابت گرفتن y . قاعدهٔمشتقگیری از خارج قسمت نتیجه می‌دهد که

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = -\frac{H\dfrac{\partial G}{\partial x} - G\dfrac{\partial H}{\partial x}}{H^2}. \quad (۳۲.۹)$$

چون G و H توابع مرکبی هستند ، با استفاده از قاعدهٔزنجیره‌ای ،مشتقات جزئی $\partial G/\partial x$ و $\partial H/\partial x$ راحساب می‌کنیم . برای $\partial G/\partial x$ داریم

$$\begin{aligned}\frac{\partial G}{\partial x} &= D_1(D_1F)\cdot 1 + D_2(D_1F)\cdot 0 + D_3(D_1F)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 F}{\partial z\,\partial x}\frac{\partial f}{\partial x}.\end{aligned}$$

بهمین نحو ، درمی‌یابیم که

$$\begin{aligned}\frac{\partial H}{\partial x} &= D_1(D_3F)\cdot 1 + D_2(D_3F)\cdot 0 + D_3(D_3F)\cdot\frac{\partial f}{\partial x}\\ &= \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial z} + \frac{\partial^2 F}{\partial z^2}\frac{\partial f}{\partial x}.\end{aligned}$$

با گذاردن اینها در (۳۲۰۹) و تعویض $\partial f/\partial x$ با کسر (۳۱۰۹)، فرمول (۳۰۰۹) بدست خواهد آمد.

۸۰۹ تمرین

در تمرینهای این بخش می‌توان وجود و پیوستگی جمیع مشتقات مورد نظر را فرض گرفت.

۱. دو معادلهٔ $x + y = uv$ و $xy = u - v$، x و y را به‌عنوان توابعی از u و v به‌طور ضمنی معین می‌کنند؛ مثلاً"، $x = X(u, v)$ و $y = Y(u, v)$. نشان دهید که اگر $x \neq y$، $\partial X/\partial u = (xv - 1)/(x - y)$، و فرمولهای مشابهی برای $\partial X/\partial v, \partial Y/\partial u, \partial Y/\partial v$ پیدا کنید.

۲. دو معادلهٔ $x + y = uv$ و $xy = u - v$، x و v را به‌عنوان توابعی از u و y معین می‌کنند؛ مثلاً"، $x = X(u, y)$ و $v = V(u, y)$. نشان‌دهیدکه‌اگر $1 + yu \neq 0$، $\partial X/\partial u = (u + v)/(1 + yu)$، و فرمولهای‌مشابهی برای $\partial X/\partial y, \partial V/\partial u, \partial V/\partial y$ پیدا نمایید.

۳. دو معادلهٔ $F(x, y, u, v) = 0$ و $G(x, y, u, v) = 0$، x و y را به‌عنوان توابعی از u و v به‌طور ضمنی معین می‌کنند؛ مثلاً"، $x = X(u, v)$ و $y = Y(u, v)$. نشان دهید در نقاطی که ژاکوبی $\partial(F, G)/\partial(x, y) \neq 0$

$$\frac{\partial X}{\partial u} = \frac{\partial(F, G)/\partial(y, u)}{\partial(F, G)/\partial(x, y)} ,$$

و فرمولهای مشابهی برای مشتقات جزئی $\partial X/\partial v$، $\partial Y/\partial u$، و $\partial Y/\partial v$ پیدا نمایید.

۴. فصل مشترک دو سطح به معادلات دکارتی $2x^2 + 3y^2 - z^2 = 25$ و $x^2 + y^2 = z^2$ شامل منحنیی است مانند C که از نقطهٔ $P = (\sqrt{7}, 3, 4)$ می‌گذرد. این معادلات‌را می‌توان نسبت به x و y و برحسب z حل کرد و نمایش پارامتری C را با z به عنوان پارامتر به‌دست آورد.

(آ) بردار یکهٔ مماس T بر C در نقطهٔ P را بدون استفادهٔ صریح از نمایش پارامتری به‌دست آورید.

(ب) نتیجهٔ قسمت (آ) را با تعیین نمایش پارامتری C با z به‌عنوان پارامتر امتحان کنید.

۵. سه‌معادلهٔ $F(u, v) = 0$، $u = xy$، و $v = \sqrt{x^2 + z^2}$ یک‌سطح‌در فضای xyz تعریف

می‌کنند . اگر بدانیم که $D_1F(1,2) = 1$ و $D_2F(1,2) = 2$ ، یک بردار قائم به ایـــن سطح در نقطهٔ $x = 1, y = 1, z = \sqrt{3}$ را به‌دست آورید .

۶ . سه معادلهٔ

$$x^2 - y\cos(uv) + z^2 = 0,$$
$$x^2 + y^2 - \sin(uv) + 2z^2 = 2,$$
$$xy - \sin u \cos v + z = 0,$$

x ، y ، و z را به‌عنوان‌توابعی‌از u و v تعریف می‌کنند . مشتقات جزئی $\partial x/\partial u$ و $\partial x/\partial v$ را در نقطهٔ $x = y = 1, u = \pi/2, v = 0, z = 0$ حساب کنید .

۷ . معـــادلهٔ $f(y/x, z/x) = 0$ ، z را به‌عنـــوان تابعی از x و y به‌طور ضمنی تعریف می‌کند؛ مثلاً" ، $z = g(x, y)$. نشان دهید در نقاطی که $D_2f[y/x, g(x, y)/x]$ صفر نباشـــد ،

$$x\frac{\partial g}{\partial x} + y\frac{\partial g}{\partial y} = g(x, y) \cdot$$

۸ . فرض کنید F یک تابع حقیقی از دو متغیر حقیقی بوده و مشتقات جزئی D_1F و D_2F هیچگاه صفـــر نباشند . همچنین ، u تابع حقیقی دیگری از دو متغیر حقیقی باشد بطوری که مشتقات جزئی $\partial u/\partial x$ و $\partial u/\partial y$ با معادلهٔ $F(\partial u/\partial x, \partial u/\partial y) = 0$ بـهم مربوط شده‌اند . نشان دهید که ثابتی مانند n وجود دارد بطوری که

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x\, \partial y}\right)^n,$$

و n را پیدا نمایید . فرض کنید $\partial^2 u/(\partial y\, \partial x) = \partial^2 u/(\partial x\, \partial y)$.

۹ . معادلـــهٔ $x + z + (y + z)^2 = 6$ ، z را به‌عنوان تـــابعی از x و y به‌طور ضمنی تعریف می‌کند؛ مثلاً" ، $z = f(x, y)$. مشتقات‌جزئی $\partial f/\partial x$ ، $\partial f/\partial y$ ، و $\partial^2 f/(\partial x\, \partial y)$ را برحسب x ، y ، و z حساب کنید .

۱۰ . معادلهٔ $\sin(x + y) + \sin(y + z) = 1$ ، z را بـــه‌عنوان تـــابعی از x و y به‌طور ضمنی تعریف می‌کند؛ مثلاً" ، $z = f(x, y)$. مشتق دوم $D_{1,2}f$ را برحسب x ، y ، و z حساب کنید .

۱۱ . معادلهٔ $F(x + y + z, x^2 + y^2 + z^2) = 0$ ، z را به‌عنوان تابعی از x و y تعریف می‌کند؛ مثـــلاً" ، $z = f(x, y)$. مشتقات جزئی $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ را برحسب x, y, z و

مشتقات جزئی D_1F و D_2F معین نمایید.

۱۲ . فرض کنید f و g توابعی از یک‌متغیر حقیقی بوده و تعریف کنید $F(x, y) = f[x + g(y)]$. برای‌تمام مشتقات جزئی مرتبهٔ اول و دوم F فرمولهایی برحسب مشتقات f و g پیدا کنید. رابطهٔ

$$\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} = \frac{\partial F}{\partial y}\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}$$

را اثبات نمایید.

۹.۹ ماکزیممها، مینیممها، ونقاط زینی

یک سطح که با معادله‌ای به شکل $z = f(x, y)$ به‌طور ضمنی توصیف شده را می‌توان یک‌سطح تراز میدان اسکالری مانند F گرفت که با معادلهٔ

$$F(x, y, z) = f(x, y) - z$$

تعریف شده است. اگر f مشتقپذیر باشد، گرادیان این میدان عبارت است از بردار

$$\nabla F = \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} - \boldsymbol{k}.$$

معادلهٔ خطی صفحهٔ مماس در نقطهٔ $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$z - z_1 = A(x - x_1) + B(y - y_1),$$

که درآن

$$A = D_1f(x_1, y_1) \qquad \text{و} \qquad B = D_2f(x_1, y_1).$$

وقتی ضرایب A و B هر دو صفر باشند، نقطهٔ P_1 را یک **نقطهٔ ایستای** سطح، ونقطهٔ (x_1, y_1) یک **نقطهٔ ایستا** یا **نقطهٔ بحرانی** تابع f نام دارد. صفحهٔ مماس در یک نقطهٔ ایستا افقی است. نقاط ایستای یک سطح معمولاً" به سه رسته تقسیم می‌شوند: ماکزیممها، مینیممها، ونقاط زینی. اگر سطح‌دامنهٔ یک کوه تصور شود، این رسته‌ها بترتیب متناظرند با قله‌ها، دره‌ها، و جاده‌های کوهستانی.

مفاهیم ماکزیممها، مینیممها، و نقاط زینی را می‌توان برای میدانهای اسکالر دلخواه تعریف شده بر زیرمجموعه‌های $\mathbf{R}^n$ نیز تعریف کرد.

تعریف. گوییم میدان اسکالر f در نقطهٔ $\boldsymbol{a}$ از مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ **ماکزیمم مطلق** دارد

اگر، به‌ازای هر x در S ،

$$f(x) \leq f(a) \cdot \qquad (۳۳۰۹)$$

عدد $f(a)$ **ماکزیمم مطلق** f بر S نامیده مـی‌شود. گوییم تابع f در a **ماکزیمم نسبی** دارد اگر نامساوی (۳۳۰۹) به‌ازای هر x در n ــگویی مانند $B(a)$ جزء S برقرار باشد.

به‌عبارت دیگر، ماکزیمم نسبی در a ماکزیمم مطلق در همسایگیی از a است. اصطلاحات **مینیمم مطلق** و **مینیمم نسبی** به‌همین نحـو، با استفاده از نـامساوی مخالف (۳۳۰۹)، تعریف می‌شوند. صفات **همه‌جایی** و **موضعی** نیز گاهی بترتیب به‌جای **مطلق** و **نسبی** به‌کار خواهند رفت.

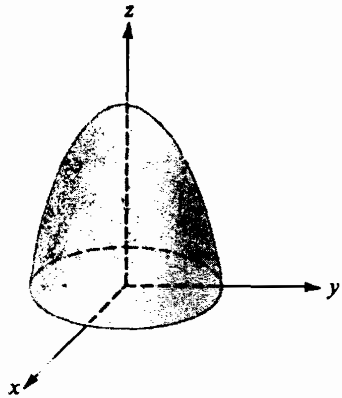
تعریف. عددی‌که‌ماکزیمم نسبی یا مینیمم نسبی f باشد یک ***اکسترمم*** f نامیده می‌شود.

اگر f در نقطهٔ درونی a اکسترمم داشته و در آن مشتقپذیر باشد، جمیع مشتقات جزئی‌مرتبهٔ‌اول $D_1f(a), \ldots, D_nf(a)$ بایدصفر باشند. به‌عبارت دیگر، $\nabla f(a) = O$. (این را مـی‌توان، با ثابت نگهداشتن هر مولفه و تحویل مسئله به‌حالت یک بعدی، به آسانی اثبات کرد.) ایـن، درحالت $n = 2$ ، یعنی یک صفحهٔ مماس افقی بر سطح $z = f(x, y)$ در نقطهٔ $(a, f(a))$ وجود دارد. از آن سو، بـه‌آسانی می‌توان مثالهایی یافت کـه در آنها صفر شدن تمام مشتقات جزئی در a لزوما" اکسترمم در a را ایجاب نمی‌کند. این امر در **نقاط زینی** روی می‌دهد، که به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

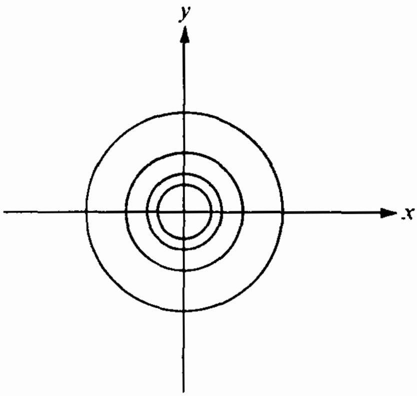
تعریف. فرض‌کنیـم f در a مشتقپذیر باشد. اگر $\nabla f(a) = O$ ، نقطهٔ a یک **نقطهٔ *ایستای*** f نامیده مـی‌شود. یـک نقطهٔ ایستا یک **نقطهٔ زینی** نام دارد اگر هر n ــگوی $B(a)$ شامل نقاطی که در آنها $f(x) < f(a)$ و نقاطی که در آنها $f(x) > f(a)$ باشد.

وضع بنوعی‌شبیه‌حالت‌یک بعدی است‌که درآن نقاط ایستای یک تابع به ماکزیممها، مینیممها، و نقاط عطـف تقسیم مـی‌شوند. مثالهای زیر چند نوع نقطهٔ ایستا را نشان می‌دهند. در هر حالت، نقطهٔ ایستای مورد نظر مبداء است.

مثال ۱. ماکزیمم نسبی. $z = f(x, y) = 2 - x^2 - y^2$. این سطح یک سهمی‌گون دوار

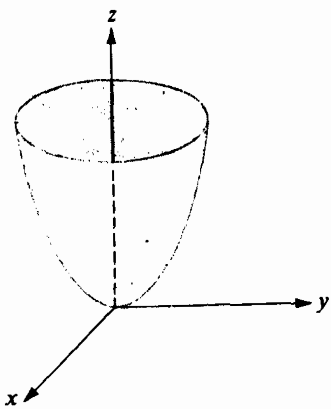


(آ) $z = 2 - x^2 - y^2$



(ب) منحنیهای تراز: $x^2 + y^2 = c$

مثال ۱. ماکزیمم نسبی در مبدأ



(پ) $z = x^2 + y^2$

مثال ۲. مینیمم نسبی در مبداء

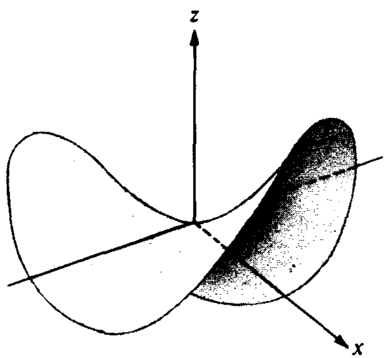
شکل ۹.۳۰ مثالهای ۱ و ۲

است. شکل ۹.۳۰ (آ) آن رادر مجاورت مبداء نشان می‌دهد. منحنیهای تراز آن دوایری هستند که بعضی از آنها در شکل ۹.۳۰ (ب) نموده شده‌اند. چون به‌ازای هر (x, y) ، $f(x, y) = 2 - (x^2 + y^2) \leq 2 = f(0, 0)$ ، نتیجه می‌شود که f نه فقط در $(0, 0)$

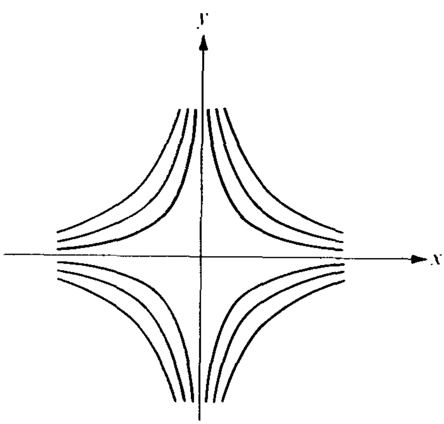
ماکزیمم نسبی دارد بلکــه در آنجا ماکزیمم مطلق نیز خواهد داشت. هر دو مشتق جزئی $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ در مبداء صفر می‌شوند.

مثال ۲. مینیمم نسبی. $z = f(x, y) = x^2 + y^2$. این مثـال، کـه سهمی‌گون دوار دیگری‌است، اساساً" همان مثال ۱ است، جز آنکه به‌جای ماکزیمم در مبداءمینیمم دارد. این سطح در شکل ۳۰۹ (پ) در نــزدیکی مبداء نموده شده است، و بعضی از منحنیهای تراز در شکل ۳۰۹ (ب) نشان داده شده‌اند.

مثال ۳. نقطهٔ زینی. $z = f(x, y) = xy$. این سطح یک سهمی‌گون هذلولوی است. همانطور که شکل ۴۰۹ (آ) نشان داده، سطح در نزدیکی مبداء زینی شکل است. هر دو مشتق جزئی $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ در مبداء صفرند، ولی در آنجا نه ماکزیمم نسبی وجوددارد نه‌مینیمم نسبی. درواقع، به‌ازای‌هر (x, y) در ربعهای‌اول‌وسوم، x و y متحدالعلامه‌اند، ونتیجه‌می‌شودکه $f(x, y) > 0 = f(0, 0)$، حال‌آنکه، به‌ازای نقاط ربعهای دوم وچهارم، x و y مختلــف‌العلامه‌اند، و نتیجه مــی‌شود که $f(x, y) < 0 = f(0, 0)$. لذا، در هر همسایگی مبــداء نقاطی وجود دارند که تابع در آنها کوچکتر از $f(0, 0)$ است، و نقاطی وجود دارند کــه تابع در آنها بزرگتر از $f(0, 0)$ است؛ درنتیجه، مبداء یک نقطهٔ زینی

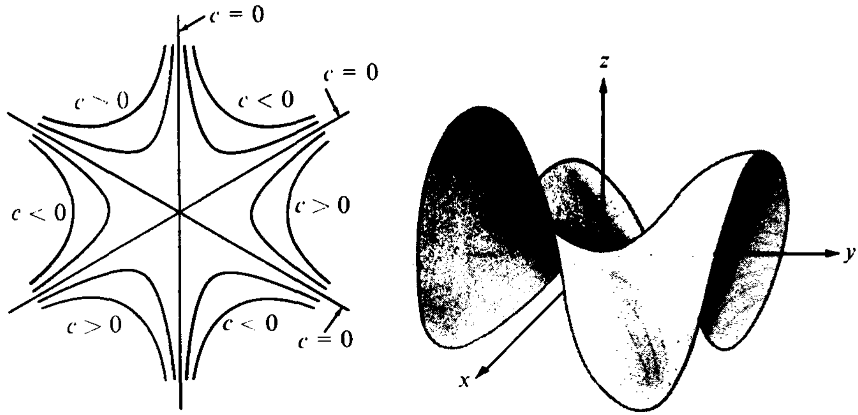


(آ) $z = xy$



(ب) منحنیهای تراز: $xy = c$

شکل ۴۰۹ مثال ۳. نقطهٔ زینی در مبداء



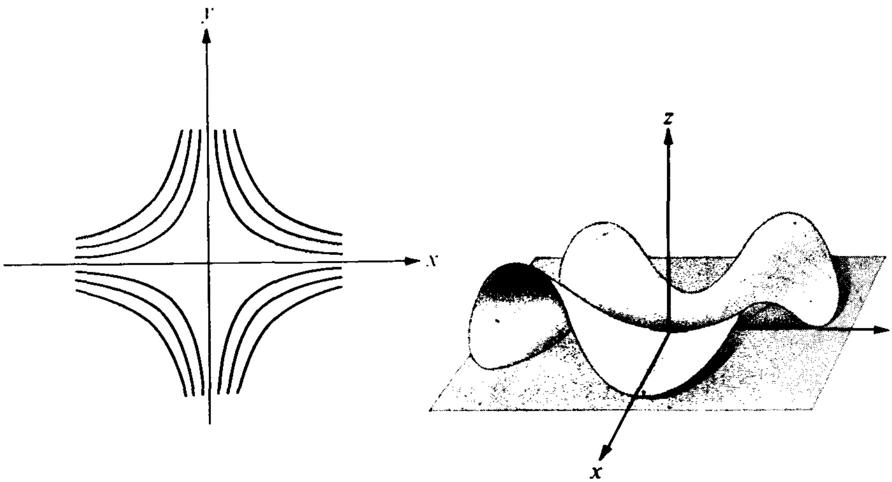
(آ) $z = x^3 - 3xy^2$ (ب) منحنیهای تراز: $x^3 - 3xy^2 = c$

شکل ۵۰۹ مثال ۴. نقطهٔ زینی در مبداء

می‌باشد. وجود نقطهٔ زینی با شکل ۴۰۹ (ب) نیز آشکار می‌شود، که چند منحنی تراز را نزدیک $(0, 0)$ نشان می‌دهد. اینها هذلولیهایی هستند که محورهای x و y مجانبهای آنها می‌باشند.

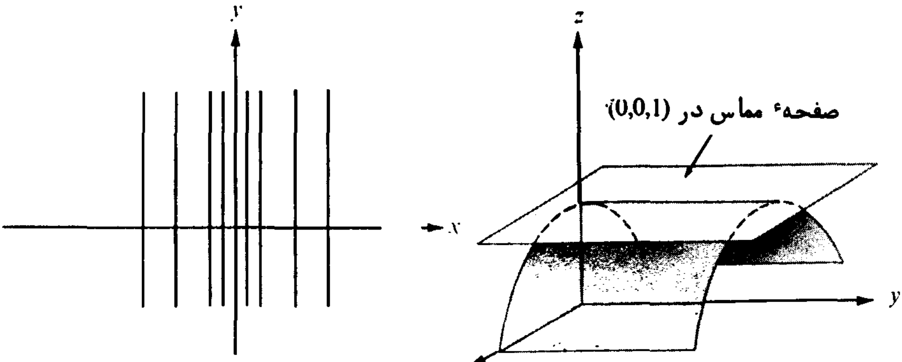
مثال ۴. نقطهٔ زینی. $z = f(x, y) = x^3 - 3xy^2$. این سطح، نزدیک مبداء، به‌شکل یک جادهٔ کوهستانی در مجاورت سه قله است. این سطح، که گاهی "زین میمون" خوانده می‌شود، در شکل ۵۰۹ (آ) نموده شده است. برخی از منحنیهای تراز در شکل ۵۰۹ (ب) نموده شده است. واضح است که در مبداء یک نقطهٔ زینی وجود دارد.

مثال ۵. مینیمم نسبی. $z = f(x, y) = x^2y^2$. همانطورکه‌شکل ۶۰۹ (آ) نشان‌داده، این سطح به شکل یک دره است که چهار کوه آن را احاطه کرده است. در مبداء مینیمم مطلق وجود دارد، زیرا، به‌ازای هر (x, y)، $f(x, y) \geq f(0, 0)$. منحنیهای تراز [که در شکل ۶۰۹ (ب) نموده شده‌اند] هذلولیهایی هستند که محورهای x و y مجانبهای آنهایند. توجه کنید که این منحنیهای تراز شبیه منحنیهای تراز مثال ۳ اند. اما، دراین حالت، تابع بر منحنیهای تراز خود فقط مقادیر نامنفی می‌گیرد.



$z = x^2y^2$ (آ)   (ب) منحنیهای تراز : $x^2y^2 = c$

شکل ۶.۹ مثال ۵. مینیمم نسبی در مبداء



$z = 1 - x^2$ (آ)   (ب) منحنیهای تراز : $1 - x^2 = c$

شکل ۷.۹ مثال ۶. ماکزیمم نسبی در مبداء

مثال ۶. ماکزیمم نسبی. $z = f(x, y) = 1 - x^2$. دراین حالت، همانطور که شکل ۷.۹ (آ) نشان داده، سطح یک استوانه است که مولدهایش موازی محور y اند. مقاطع عرضی با صفحات موازی محور x سهمیهایی هستند. واضح است که در مبداء ماکزیمم مطلق وجود دارد زیرا، بهازای هر (x, y) ، $f(x, y) = 1 - x^2 \leq 1 = f(0, 0)$. **همانطور**

که‌شکل ۹.۷ (ب) نشان داده، منحنیهای تراز خانواده‌ای از خطوط‌مستقیم موازی تشکیل می‌دهند.

۹.۱۰ فرمول تیلور مرتبهٔ دوم برای میدانهای اسکالر

اگر میدان اسکالر و مشتقپذیر f در a نقطهٔ ایستا داشته باشد، سرشت نقطهٔ ایستا را می‌توان با علامت جبری تفاضل $f(x) - f(a)$ به‌ازای x های نزدیک a مشخص کرد. اگر $x = a + y$، فرمول تیلور مرتبهٔ اول را داریم:

$f(a + y) - f(a) = \nabla f(a) \cdot y + \|y\| E(a, y)$، که در آن، وقتی $y \to O$، $E(a, y) \to 0$. درنقطهٔ ایستا داریم $\nabla f(a) = O$ و فرمول تیلور خواهد شد

$$f(a + y) - f(a) = \|y\| E(a, y).$$

برای‌تعیین‌علامت‌جبری $f(a + y) - f(a)$ به‌اطلاعات‌بیشتری‌ازجملهٔ‌خطای $\|y\| E(a, y)$ نیاز داریم. قضیهٔ بعدی نشان می‌دهد که اگر f مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم پیوسته در a داشته باشد، جملهٔ خطا مساوی یک فرم درجهٔ دوم است:

$$\frac{1}{2} \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_{ij} f(a) y_i y_j$$

بعلاوهٔ یک جملهٔ با مرتبه‌ای کوچکتر از $\|y\|^2$. ضرایب فرم درجهٔ دوم مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم $D_{ij} f = D_i(D_j f)$ اند که در a حساب شده‌اند. ماتریس $n \times n$ مشتقات مرتبهٔ دوم $D_{ij} f(x)$ **ماتریس هسی*** نام دارد و با $H(x)$ نموده می‌شود. بنابراین،

$$H(x) = [D_{ij} f(x)]_{i,j=1}^{n}$$

هروقت مشتقات وجود داشته باشند. فرم درجهٔ دوم را می‌توان با نماد ماتریس به‌صورت ساده‌تر نوشت:

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} D_{ij} f(a) y_i y_j = y H(a) y^t,$$

که درآن $y = (y_1, \ldots, y_n)$ به‌صورت یک ماتریس سطری $1 \times n$، و ترانهادهٔ آن y^t به‌صورت یک ماتریس ستونی $n \times 1$ در نظر گرفته شده است. وقتی مشتقات جزئی $D_{ij} f$

---

* *به‌نام لودویک اتوهس Ludwig Otto Hesse (۱۸۱۱ — ۱۸۷۴)، ریاضیدان آلمانی، که در نظریهٔ سطوح کارهای زیادی کرده است.*

پیوسته باشند، داریم $D_{ij}f = D_{ji}f$ و ماتریس $H(a)$ متقارن می‌باشد.

حال فرمــول تیلور، که تقریب درجهٔ دوم برای $f(a+y) - f(a)$ است، شکل زیر را بخود می‌گیرد.

قضیهٔ ۴۰۹ . فرمول تیلور مرتبهٔ دوم برای میدانهای اسکالر. *فرض کنیم f یک‌میدان اسکالر با مشتقات جزئی دوم‌پیوستهٔ $D_{ij}f$ در n گوی $B(a)$ باشد. دراین صورت، به‌ازای هر y در $\mathbf{R}^n$ که $a + y \in B(a)$، داریم*

$$f(a+y) - f(a) = \nabla f(a) \cdot y + \frac{1}{2!} yH(a+cy)y^t \text{، که درآن } 0 < c < 1 . \quad (۳۴.۹)$$

این را می‌توان به‌شکل زیر نوشت:

$$f(a+y) - f(a) = \nabla f(a) \cdot y + \frac{1}{2!} yH(a)y^t + \|y\|^2 E_2(a, y), \quad (۳۵.۹)$$

که درآن، وقتی $y \to O$، $E_2(a, y) \to 0$.

برهان. y را ثابت گرفته و $g(u)$ را به‌ازای هر u حقیقی با معادلهٔ

$$g(u) = f(a + uy) \quad \text{به‌ازای} \quad -1 \le u \le 1$$

تعــریف می‌کنیم. دراین صورت، $f(a+y) - f(a) = g(1) - g(0)$. قضیه را با اعمال فرمول تیلور مرتبهٔ دوم بر g و بر بازهٔ $[0, 1]$ ثابت می‌کنیم. خواهیم داشت

$$g(1) - g(0) = g'(0) + \frac{1}{2!} g''(c) \text{، که درآن } 0 < c < 1 . \quad (۳۶.۹)$$

دراینجا از شکل لاگرانژ باقیمانده استفاده شده است (ر.ک. بخش ۷.۷ از جلد یک).

چون g یک تابع مــرکب است که با $g(u) = f[r(u)]$ تعریف شده است، که در آن $r(u) = a + uy$، می‌توان مشتق آن را با قاعدهٔ زنجیره‌ای حساب کرد. داریم $r'(u) = y$؛ درنتیجه، از قاعدهٔ زنجیره‌ای خواهیم داشت

$$g'(u) = \nabla f[r(u)] \cdot r'(u) = \nabla f[r(u)] \cdot y = \sum_{j=1}^{n} D_j f[r(u)] y_j ,$$

مشروط بر اینکه $r(u) \in B(a)$. بخصوص، $g'(0) = \nabla f(a) \cdot y$. اگر یکبار دیگر از قاعدهٔ زنجیره‌ای استفاده کنیم، درمی‌یابیم که

$$g''(u) = \sum_{i=1}^{n} D_i\left(\sum_{j=1}^{n} D_j f[r(u)]y_j\right) y_i = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} D_{ij} f[r(u)]y_i y_j = yH[r(u)]y^t.$$

بنابراین، $g''(c) = yH(a+cy)y^t$ ؛ درنتیجه، معادلهٔ (۳۶.۹) به‌صورت (۳۴.۹) درمی‌آید.

برای اثبات (۳۵.۹)، $E_2(a, y)$ را با معادلهٔ زیر تعریف می‌کنیم:

اگر $y \neq O$ ، $\|y\|^2 E_2(a, y) = \frac{1}{2!} y\{H(a+cy) - H(a)\}y^t$ ، (۳۷.۹)

و فرض می‌کنیم $E_2(a, O) = 0$. دراین صورت، معادلهٔ (۳۴.۹) شکل زیر را بخود می‌گیرد:

$$f(a+y) - f(a) = \nabla f(a) \cdot y + \frac{1}{2!} yH(a)y^t + \|y\|^2 E_2(a, y).$$

برای اتمام برهان باید نشان دهیم که، وقتی $y \to O$ ، $E_2(a, y) \to 0$.

از (۳۷.۹) معلوم می‌شود که

$$\|y\|^2 |E_2(a, y)| = \frac{1}{2}\left|\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} \{D_{ij}f(a+cy) - D_{ij}f(a)\}y_i y_j\right|$$
$$\leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |D_{ij}f(a+cy) - D_{ij}f(a)|\, \|y\|^2.$$

با تقسیم بر $\|y\|^2$ ، نامساوی

$$|E_2(a, y)| \leq \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} |D_{ij}f(a+cy) - D_{ij}f(a)|$$

به‌ازای $y \neq O$ به‌دست می‌آید. چون هر مشتق جزئی مرتبهٔ دوم $D_{ij}f$ در a پیوسته است، وقتی $y \to O$ ، داریم $D_{ij}f(a+cy) \to D_{ij}f(a)$ ؛ درنتیجه، وقتی $y \to O$ ، $E_2(a, y) \to 0$. این برهان را تمام خواهد کرد.

۱۱.۹ سرشت نقطهٔ ایستا که با مقادیر ویژهٔ ماتریس هسی معین می‌شود

در نقطهٔ ایستا داریم $\nabla f(a) = O$ ؛ درنتیجه، فرمول تیلور در معادلهٔ (۳۵.۹) خواهد شد

$$f(a+y) - f(a) = \tfrac{1}{2} yH(a)y^t + \|y\|^2 E_2(a, y).$$

چون جملهٔ خطای $\|y\|^2 E_2(a, y)$ سریعتر از $\|y\|^2$ به‌صفر میل می‌کند، انتظار داریم علامت

جبری $f(a+y)-f(a)$ به‌ازای y های کوچک با علامت فرم درجهٔ دوم $yH(a)y^t$ یکی باشد. لـذا، سرشت نقطهٔ ایستا باید با علامت جبری فرم درجهٔ دوم معین شود. این بخش به اثبات این امر اختصاص یافته است.

ابتدا رابطهٔ بین علامت جبری یک فرم درجهٔ دوم و مقادیر ویژه‌اش را بیان می‌کنیم.

قضیهٔ ۵.۹ . فرض کنیم $A=[a_{ij}]$ یک ماتریس متقارن حقیقی $n \times n$ بوده، و

$$Q(y)=yAy^t=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}a_{ij}y_iy_j.$$

در این صورت،

(آ) به‌ازای هر $y \neq O$ ، $Q(y)>0$ اگر و فقط اگر همهٔ مقادیر ویژهٔ A مثبت باشند؛

(ب) به‌ازای هر $y \neq O$ ، $Q(y)<0$ اگر و فقط اگر همهٔ مقادیر ویژهٔ A منفی باشند.

تذکر. درحالت (آ)، فرم درجهٔ دوم مثبت معین نام دارد؛ درحالت (ب)، این‌فرم منفی معین نامیده می‌شود.

برهان. طبق قضیـهٔ ۱۱.۵، یـک ماتریس متعامد مانند C هست که فرم درجهٔ دوم yAy^t را به‌شکل قطری تحویل می‌کند. یعنی،

$$Q(y)=yAy^t=\sum_{i=1}^{n}\lambda_i x_i^2 \tag{۳۸.۹}$$

کـه درآن $x=(x_1,\ldots,x_n)$ ماتریس‌سطری $x=yC$ است و $\lambda_1,\ldots,\lambda_n$ مقادیر ویژهٔ A می‌باشند. مقادیر ویژه حقیقی‌اند، زیرا A متقارن می‌باشد.

اگر همـهٔ مقادیر ویژه مثبت باشند، معادلهٔ (۳۸.۹) نشان می‌دهد که، هر وقت $x \neq O$ ، $Q(y)>0$. اما چون $x=yC$ ، داریم $y=xC^{-1}$ ؛ درنتیجه، $x \neq O$ اگر و فقط‌اگر $y \neq O$. از اینرو، به‌ازای هر $y \neq O$ ، $Q(y)>0$.

بعکس، اگـر به‌ازای هر $y \neq O$ ، $Q(y)>0$ ، می‌توان y را طوری اختیار کرد که $x=yC$ بردار k ام مختصـات e_k باشد. به‌ازای‌این y ، معادلهٔ (۳۸.۹) ایجاب می‌کند که $Q(y)=\lambda_k$ ؛ درنتیجه، هر $\lambda_k>0$. این قسمت (آ) را ثابت می‌کند. برهان (ب) کاملا" مشابه خواهد بود.

قضیهٔ بعدی سرشت نقطهٔ ایستا را برحسب علامت جبری فرم درجهٔ دوم $yH(a)y^t$ توصیف می‌کند.

قضیهٔ ۶.۹ . فرض‌کنیم f یک میدان اسکالر با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم پیوستهٔ $D_{ij}f$ در n ـ گوی $B(a)$ بوده، و $H(a)$ ماتریس هسی در نقطهٔ ایستای a باشد. دراین صورت،

(آ) اگر همهٔ مقادیر ویژهٔ $H(a)$ مثبت باشند، f در a مینیمم نسبی دارد؛

(ب) اگر همهٔ مقادیر ویژهٔ $H(a)$ منفی باشند، f در a ماکزیمم نسبی دارد؛

(پ) اگر $H(a)$ مقادیر ویژهٔ مثبت و منفی داشته باشند، f در a نقطهٔ زینی خواهد داشت.

برهان. فرض کنیم $Q(y) = yH(a)y^t$. از فرمول تیلور نتیجه می‌شود که

$$f(a + y) - f(a) = \tfrac{1}{2}Q(y) + \|y\|^2 E_2(a, y), \qquad (۳۹.۹)$$

که درآن، وقتی $y \to O$ ، $E_2(a, y) \to 0$. ثابت می‌کنیم عدد مثبتی مانند r هست بطوری که، اگر $0 < \|y\| < r$ ، علامت جبری $f(a + y) - f(a)$ با $Q(y)$ یکی است.

ابتدا فرض‌کنیم همهٔ مقادیر ویژهٔ $H(a)$ ، $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ مثبت باشند. فرض کنیم h کوچکترین مقدار ویژه باشد. اگر $u < h$ ، n عدد

$$\lambda_1 - u, \ldots, \lambda_n - u$$

نیز مثبت هستند. این اعداد مقادیر ویژهٔ ماتریس متقارن حقیقی $H(a) - uI$ اند، که I ماتریس همانی $n \times n$ است. بنابر قضیهٔ ۵.۹ ، فرم درجهٔ دوم $y[H(a) - uI]y^t$ مثبت‌معین است؛ و درنتیجه، به‌ازای هر $y \neq O$ ، $y[H(a) - uI]y^t > 0$. لذا، به‌ازای هر $u < h$ حقیقی،

$$yH(a)y^t > y(uI)y^t = u\,\|y\|^2 \ .$$

با فرض $u = \tfrac{1}{2}h$ ، نامساوی

$$Q(y) > \tfrac{1}{2}h\,\|y\|^2$$

به‌ازای هر $y \neq O$ به‌دست می‌آید. چون وقتی $y \to O$ ، $E_2(a, y) \to O$ ، عدد مثبتی مانند r هست بطوری که، هر وقت $0 < \|y\| < r$ ، $|E_2(a, y)| < \tfrac{1}{4}h$. به‌ازای چنین y ی، داریم

$$0 \leq \|y\|^2 |E_2(a, y)| < \tfrac{1}{4}h\ \|y\|^2 < \tfrac{1}{2}Q(y),$$

و فرمول تیلور (۹.۳۹) نشان می‌دهد که

$$f(a + y) - f(a) \geq \tfrac{1}{2}Q(y) - \|y\|^2 |E_2(a, y)| > 0.$$

بنابر ایـــن، f در a مینیمم نسبی دارد، که قسمت (آ) را ثابت می‌کند. برای اثبات (ب)، می‌توان از استـــدلالی مشابه استفاده کرد و یا قسمت (آ) را درمورد $f-$ به‌کار بـــرد.

برای اثبـــات (پ)، فرض کنیم λ_1 و λ_2 دو مقدار ویژهٔ $H(a)$ با علامات مخالف باشند. قرار می‌دهیم $h = \min\{|\lambda_1|, |\lambda_2|\}$. دراین صورت، به‌ازای هر u حقیقی صادق در $-h < u < h$، اعداد

$$\lambda_1 - u \qquad \text{و} \qquad \lambda_2 - u$$

مقادیر ویـــژهٔ مختلف العلامه‌ای برای ماتریس $H(a) - uI$ اند. لذا، اگر $u \in (-h, h)$، فرم درجهٔ دوم $y[H(a) - uI]y^t$ در هر همسایگی $y = O$ مقادیر مثبت و منفی می‌گیرد. $r > 0$ را مثل بالا می‌گیریم بطوری که، هر وقت $0 < \|y\| < r$، $|E_2(a, y)| < \tfrac{1}{4}h$. در این صورت، اگر مثل بالا استدلال کنیم، می‌بینیم که، به‌ازای چنین y ی، علامت جبری $f(a + y) - f(a)$ با $Q(y)$ یکی است. چون وقتی $y \to O$، مقادیر مثبت و منفی وجود دارند، f در a نقطهٔ زینی خواهد داشت. این برهان را تمام خواهد کرد.

تذکر. اگر همهٔ مقادیر ویژهٔ $H(a)$ صفر باشند، قضیهٔ ۹.۶ اطلاعی از نقطهٔ ایستا به دست نمی‌دهد. برای بررسی چنین مثالهایی می‌توان از آزمونهایی شامل مشتقات مراتب بالاتر استفاده کرد، اما ما آنها را اینجا مطرح نمی‌کنیم.

۹.۱۲ آزمون مشتق دوم برای اکسترممهای توابع دومتغیره

سرشت نقطهٔ ایستا درحالت $n = 2$ را می‌توان به‌وسیلهٔ علامت جبری مشتق دوم $D_{1,1}f(a)$ و دترمینان ماتریس هسی نیز معین کرد.

قضیهٔ ۹.۷ . فرض کنیـــم a نقطهٔ ایستـــای میدان اسکالر $f(x_1, x_2)$ با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم پیوسته در 2 ـ گوی $B(a)$ باشد. همچنین،

$$A = D_{1,1}f(a), \qquad B = D_{1,2}f(a), \qquad C = D_{2,2}f(a),$$

و

$$\Delta = \det H(a) = \det \begin{bmatrix} A & B \\ B & C \end{bmatrix} = AC - B^2.$$

دراین صورت ،

(آ) اگر $\Delta < 0$ ، f در a نقطهٔ زینی دارد؛

(ب) اگر $\Delta > 0$ و $A > 0$ ، f در a مینیمم نسبی دارد؛

(پ) اگر $\Delta > 0$ و $A < 0$ ، f در a ماکزیمم نسبی دارد؛

(ت) اگر $\Delta = 0$ ، از آزمون نتیجه‌ای به‌دست نمی‌آید .

برهان . دراین‌حالت ، معادلهٔ مشخص $\det [\lambda I - H(a)] = 0$ یک معادلهٔ درجهٔ دوم است :

$$\lambda^2 - (A + C)\lambda + \Delta = 0.$$

مقادیر ویژهٔ λ_1, λ_2 با معادلات

$$\lambda_1 + \lambda_2 = A + C, \qquad \lambda_1\lambda_2 = \Delta$$

به ضرایب مربوط می‌شوند . اگر $\Delta < 0$ ، مقادیر ویژه مختلف العلامه‌اند؛ درنتیجه ، f در a نقطهٔ زینی دارد ، که (آ) را ثابت می‌کند . اگر $\Delta > 0$ ، مقادیر ویژه متحدالعلامه می‌باشند . دراین حالت ، $AC > B^2 \geq 0$ ؛ درنتیجه ، A و C متحد العلامه می‌باشند . این علامت باید علامت λ_1 و λ_2 باشد ، زیرا $A + C = \lambda_1 + \lambda_2$. این (ب) و (پ) را ثابت می‌کند .

برای اثبات (ت) ، به‌مثالهای ۴ و ۵ از بخش ۹.۹ رجوع می‌کنیم . در هر دو مثال ، در مبداء ، داریم $\Delta = 0$. در مثال ۴ مبداء یک نقطهٔ زینی است ، و در مثال ۵ یک مینیمم نسبی می‌باشد .

حتی وقتی قضیهٔ ۹.۷ قابل اجرا باشد ، ممکن است که ساده‌ترین راه برای تعیین سرشت نقطهٔ ایستا نباشد . مثلاً ، وقتی $f(x, y) = e^{1/g(x,y)}$ ، که در آن $g(x, y) = x^2 + 2 + \cos^2 y - 2\cos y$ ، آزمون قابل‌انجام است ، ولی محاسبات طولانی می‌باشند . دراین حالت ، می‌توان $g(x, y)$ را با نوشتن $g(x, y) = 1 + x^2 + (1 - \cos y)^2$ به‌صورت مجموع مربعات نوشت . فوراً دیده می‌شود که f در نقاطی که $x^2 = 0$ و $(1 - \cos y)^2 = 0$ دارای ماکزیمم نسبی است . اینها ، وقتی n عدد صحیح دلخواهی باشد ،

نقاط $(0, 2n\pi)$ می‌باشند.

۱۳۰۹ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۱۵، نقاطایستای (در صورت وجود) سطوحی که با معادلات دکارتی داده شده‌اند را پیدا و رده‌بندی کنید.

۱. $z = x^2 + (y-1)^2$ ·

۲. $z = x^2 - (y-1)^2$ ·

۳. $z = 1 + x^2 - y^2$ ·

۴. $z = (x - y + 1)^2$ ·

۵. $z = 2x^2 - xy - 3y^2 - 3x + 7y$ ·

۶. $z = x^2 - xy + y^2 - 2x + y$ ·

۷. $z = x^3 - 3xy^2 + y^3$ ·

۸. $z = x^2y^3(6 - x - y)$ ·

۹. $z = x^3 + y^3 - 3xy$ ·

۱۰. $z = \sin x \cosh y$ ·

۱۱. $z = e^{2x+3y}(8x^2 - 6xy + 3y^2)$ ·

۱۲. $z = (5x + 7y - 25)e^{-(x^2+xy+y^2)}$ ·

۱۳. $0 \le x \le \pi, 0 \le y \le \pi$ ، $z = \sin x \sin y \sin (x + y)$ ·

۱۴. $x > 0$ ، $z = x - 2y + \log \sqrt{x^2 + y^2} + 3 \arctan \dfrac{y}{x}$ ·

۱۵. $z = (x^2 + y^2)e^{-(x^2+y^2)}$ ·

۱۶. فرض‌کنید $f(x, y) = 3x^4 - 4x^2y + y^2$. نشان دهید که تابع بر هر خط $y = mx$ در $(0, 0)$ مینیمم دارد، ولی در هیچ همسایگی دو بعدی مبداء مینیمم نسبی وجود ندارد. مجموعهٔ نقاط (x, y) که درآنها $f(x, y) > 0$ و مجموعهٔ نقاطی که در آنها $f(x, y) < 0$ را رسم کنید.

۱۷. فرض کنید $f(x, y) = (3 - x)(3 - y)(x + y - 3)$ ·

(آ) مجموعهٔ نقاط (x, y) که درآنها $f(x, y) \ge 0$ را رسم کنید.

(ب) جمیع نقاط (x, y) درصفحه‌را بیابید که در آنها $D_1f(x, y) = D_2f(x, y) = 0$ ·

[**راهنمایی.** $(3 - y)$ یک سازهٔ $D_1f(x, y)$ است.]

(پ) از نقاطایستا کدامها ماکزیمم نسبی‌اند؟ کدامهامینیمم نسبی‌اند؟ کدامها هیچیک نیستند؟ برای جوابهای خود دلیل بیاورید.

(ت) آیا f بر تمام صفحه مینیمم مطلق یا ماکزیمم مطلق دارد؟ برای جوابهای خود دلیل بیاورید.

۱۸. همهٔ مقادیر اکسترمم نسبی و مطلق و نقاطزینی تابع $f(x, y) = xy(1 - x^2 - y^2)$ بر مربع $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1$ را تعیین کنید.

۱۹ . ثابتهای a و b را طوری تعیین کنید که انتگرال

$$\int_0^1 \{ax + b - f(x)\}^2\, dx$$

درصورتی‌که (آ) $f(x) = x^2$ ؛ (ب) $f(x) = (x^2 + 1)^{-1}$ حتی‌الامکان کوچک باشد .

۲۰ . فرض‌کنید $f(x, y) = Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 + 2Dx + 2Ey + F$ ، که درآن $A > 0$ و $B^2 < AC$.

(آ) ثابت‌کنیدنقطه‌ای‌مانند (x_1, y_1) هست‌که f در آن مینیمم دارد . [**راهنمایی .** قسمت درجهٔ دوم را به مجموع مربعات تبدیل کنید .]

(ب) ثابت کنید که دراین‌مینیمم $f(x_1, y_1) = Dx_1 + Ey_1 + F$.

(پ) نشان دهید که

$$f(x_1, y_1) = \frac{1}{AC - B^2}\begin{vmatrix} A & B & D \\ B & C & E \\ D & E & F \end{vmatrix}.$$

۲۱ . **روش کمترین‌مربعات .** به‌ازای n عددمتمایز $x_1, \ldots, x_n$ و n عدددیگر $y_1, \ldots, y_n$ (نه لـزوماً متمایز) ، عموماً خط‌مستقیمی مانند $f(x) = ax + b$ وجود دارد که از جمیع نقـاط (x_i, y_i) می‌گذرد ؛ یعنی ، به‌ازای هر i ، $f(x_i) = y_i$. بـهرحال ، می‌توان تابعی خطی جستجو کرد که "خطای مربعی کل" ، یعنی

$$E(a, b) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i) - y_i]^2 ,$$

رامینیمم کند . مقادیر a و b را طوری بیابید که این‌کار عملی باشد .

۲۲ . روش کمتـرین مـربعات را بـه فضـای 3 تعمیـم دهیـد . یعنـی ، تـابع خطـی $f(x, y) = ax + by + c$ را طوری بیابید که خطای مربعی کل

$$E(a, b, c) = \sum_{i=1}^{n} [f(x_i, y_i) - z_i]^2$$

رامینیمم‌کند ، که‌درآن (x_i, y_i) ، n نقطهٔ‌متمایزبوده‌و $z_1, \ldots, z_n$ ، n عددحقیقی می‌باشند .

۲۳ . فرض‌کنید $z_1, \ldots, z_n$ ، n نقطهٔ متمایز در فضای m باشند . اگر $x \in \mathbf{R}^m$ ، تعریف کنیـد

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} \|x - z_k\|^2 .$$

ثابت کنید f در نقطهٔ $a = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} z_k$ (مرکز گون) دارای مینیمم است .

۲۴ . فرض کنید a نقطهٔ ایستای میدان اسکالر f با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم پیوسته در n گوی $B(a)$ باشد . ثابت کنید اگر دست کم دو درایهٔ قطری ماتریس هسی $H(a)$ مختلف‌العلامه باشند ، f در a نقطهٔ زینی خواهد داشت .

۲۵ . تحقیق کنید که میدان اسکالر $f(x, y, z) = x^4 + y^4 + z^4 - 4xyz$ در $(1, 1, 1)$ نقطهٔ ایستادارد ، و سرشت این نقطهٔ ایستا را با محاسبهٔ مقادیر ویژهٔ ماتریس هسی آن مشخص نمایید .

۱۴.۹ اکسترممها با قیود . ضرایب لاگرانژ

این بخش را با دو مثال از مسائل اکسترمم با قیود آغاز می‌کنیم .

مثال ۱ . به فرض آنکه S سطحی است که از مبداء نمی‌گذرد ، نقاطی از S را که نزدیکترین به مبداء هستند مشخص نمایید .

مثال ۲ . اگر $f(x, y, z)$ دما در (x, y, z) باشد ، ماکزیمم و مینیمم دما را بر منحنی مفروض C در فضای 3 معین نمایید .

هر دو مثال حالات خاصی از مسئلهٔ کلی زیراند : *مقادیر اکستریم میدان اسکالر $f(x)$ را ، وقتی x در زیرمجموعهٔ مفروضی از قلمرو f باشد ، معین نمایید .*

در مثال ۱ ، میدان اسکالری که باید مینیمم شود تابع فاصله است :

$$f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2} ;$$

زیرمجموعهٔ قید گذار سطح مفروض S است . در مثال ۲ ، زیر مجموعهٔ قید گذار منحنی مفروض C می‌باشد .

مسائل اکسترمم مقید اغلب بسیار مشکل‌اند ؛ هیچ روش کلی برای حل آنها در کلیترین حالت وجود ندارد . وقتی زیر مجموعهٔ قید گذار نهاد نسبتا " ساده‌ای دارد ، مثلا "

سطحی است مانند مثال ۱ یا منحنیی مانند مثال ۲ ، روشهای خاصی در دست می‌باشند . دراین بخش، روش ضرایب لاگرانژ را برای حل این مسائل مطرح می‌کنیم . ابتدا روش را به‌شکل کلی توصیف می‌کنیم ، و سپس، با استدلالهایی هندسی ، نشان می‌دهیم که چرا در دو مثال فوق قابل انجام است .

روش ضرایب لاگرانژ. هرگاه میدان اسکالر $f(x_1, \ldots, x_n)$ تحت m قید ، مثلا"

$$g_1(x_1, \ldots, x_n) = 0, \quad \ldots, \quad g_m(x_1, \ldots, x_n) = 0, \tag{۴۰.۹}$$

که $m < n$ ، اکسترمم موضعی داشته باشد ، آنگاه m اسکالر $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ وجود دارند بطوری که ، در هر نقطهٔ اکسترمم ،

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \cdots + \lambda_m \nabla g_m . \tag{۴۱.۹}$$

برای تعیین نقاط اکسترمم در عمل ، دستگاه $m + n$ معادلهٔ حاصل از m معادلهٔ قیدی در (۴۰.۹) همراه با n معادلهٔ اسکالر ناشی از رابطهٔ برداری (۴۱.۹) را درنظر می‌گیریم . این معادلات باید (در صورت امکان) نسبت به $m + n$ مجهول $x_1, \ldots, x_n$ و $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ حل شوند . نقاط $(x_1, \ldots, x_n)$ که درآنها اکسترمم نسبی داریم بین جوابهای این معادلات قرار خواهند داشت .

اسکالرهای $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ ، که درحل این نوع مسائل کمک می‌کنند ، *ضرایب لاگرانژ* نام دارند .برای‌هرقید یک ضرب در کار می‌آید . میدان اسکالر f و توابع قیدی $g_1, \ldots, g_m$ مشتقپذیرفرض می‌شوند .روش درصورتی معتبر است که تعداد قیود ، یعنی m ، از تعدادمتغیرها ، یعنی n ، کمتر باشد ، و همهٔ دترمینانهای ژاکوبی توابع قیدی نسبت‌به m متغیراز $x_1, \ldots, x_n$ درمقدار اکستریم مورد بحث صفر باشند . اثبات اعتبار روش‌نتیجهٔ مهمی است درحساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته و دراینجا بحث نخواهد شد . (ر.ک. فصل ۷ کتاب *آنالیز ریاضی* اپوستل[1]) . درعوض،بااستدلالهایی هندسی ، نشان می‌دهیم که چرا این روش در دو مثال توصیف شده در ابتدای این بخش قابل انجام است .

---

[1] *Mathematical Analysis*, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.

حل هندسی مثال ۱. می‌خواهیم بــر سطح مفروض S نقاطی تعیین کنیم که نزدیکترین نقاط بــه‌مبداء باشند. نقطهٔ (x, y, z) در فضای 3 به فاصلهٔ r از مبداء قرار دارد اگر و فقط اگر بر کرهٔ

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2$$

واقع باشد. این کره یک سطح تراز تابع $f(x, y, z) = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ است که مینیمم شده است. اگر با $r = 0$ شروع کرده و r راافزایش دهیم تاسطح تراز نظیر ابتدا با سطح مفروض S تماس یــابد، هــرنقطهٔ تماس نقطه‌ای از S است که نزدیکترین نقطه به مبداء اســت.

برای تعیین مختصات نقاط تماس، فرض کنیم S با معادلهٔ دکارتی $g(x, y, z) = 0$ توصیف شده باشد. اگر S در نقطه‌ای از تماس صفحهٔ مماس داشته باشد، این صفحه‌باید بر سطح تراز تماس یافته نیز مماس باشد. لذا، بردار گرادیان سطح $g(x, y, z) = 0$ باید موازی بردار گرادیان سطح تراز تماس یافتهٔ $f(x, y, z) = r$ باشد. از اینرو، ثابتی چون λ هست بطوری که، در هر نقطهٔ تماس،

$$\nabla f(x, y, z) = \lambda \nabla g(x, y, z) \ .$$

این معادلهٔ‌برداری (۴۱۰۹) است که به روش لاگرانژ، وقتی یک قید وجود داشته باشد، به‌دست می‌آید.

حل هندسی مثال ۲. مقادیر اکستــریم تابع دمای $f(x, y, z)$ بر منحنی مفروض C را جستجو می‌کنیم. اگر منحنی C را فصل مشترک دو سطح، مثلاً"

$$g_1(x, y, z) = 0 \qquad \text{و} \qquad g_2(x, y, z) = 0$$

بگیریم، یــک مسئلهٔ اکسترمم با دو قید خواهیم داشت. دو بردار گرادیان ∇g_1 و ∇g_2 به ایــن سطوح قــائم هستند؛ در نتیجه، بــه C، یعنی منحنی فصل مشترک، نیز قائم خواهند بود. (ر.ک. شکل ۰۸۰۹) حال نشان می‌دهیم که بردار گرادیان ∇f تابع دما نیزدرهراکسترمم نسبی‌بر C قائم به C است. این ایجاب می‌کند که ∇f در صفحهٔ ∇g_1 و ∇g_2 قرارداشته‌باشد؛ لذا، اگر ∇g_1 و ∇g_2 مستقل باشند، می‌توان ∇f را بــه‌صورت ترکیبی خطی از ∇g_1 و ∇g_2 بیان کرد؛ مثلاً"،

$$\nabla f = \lambda_1 \nabla g_1 + \lambda_2 \nabla g_2 .$$

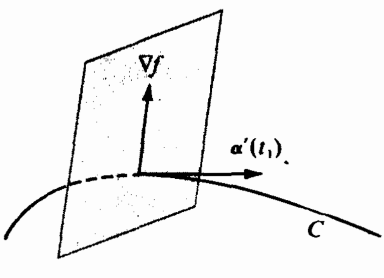
این معادلهٔ‌برداری (۴۱۰۹) است که به‌روش لاگرانژ، وقتی دو قید وجود دارند، به‌دست

می‌آیـد .

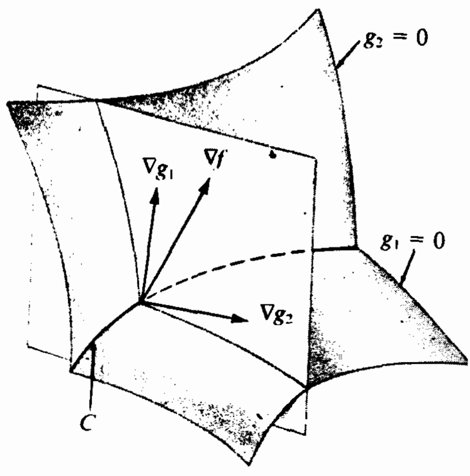
برای اثبات اینکه ∇f در یک اکسترمم قائم به C است ، فرض کنیم C با تابع برداری $\alpha(t)$ ، که t روی بازهٔ $[a, b]$ تغییر می‌کند ، توصیف شده باشد . بر منحنی C دماتابعی از t است ؛ مثلاً " ، $\varphi(t) = f[\alpha(t)]$. اگر φ یک اکسترمم نسبی در نقطهٔ درونی t_1 از $[a, b]$ باشد ، بـایـد داشته بـاشیم $\varphi'(t_1) = 0$. از آن سو ، قاعدهٔ زنجیره‌ای می‌گوید که $\varphi'(t)$ با حاصل ضرب نقطه‌ای

$$\varphi'(t) = \nabla f[\alpha(t)] \cdot \alpha'(t)$$

داده می‌شود . این حاصل ضرب نقطه‌ای در t_1 صفر است ؛ درنتیجه ، ∇f بر $\alpha'(t_1)$ عمود است . اما $\alpha'(t_1)$ بر C مماس است ؛ درنتیجه ، همانطورکه شکل ۹.۹ نشان داده ، $\nabla f[\alpha(t_1)]$ در صفحهٔ قائم به C قرار دارد .



شکل ۹.۹ بردار گرادیان ∇f در صفحهٔ قائم به C قرار دارد .



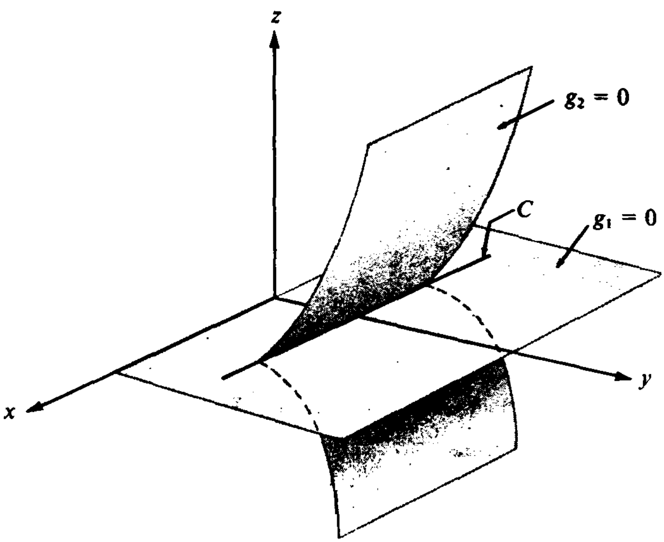
شکل ۸.۹ بردارهای ∇g_1 ، ∇g_2 ، و ∇f در یک صفحه قرار دارند .

دو بردار گرادیان ∇g_1 و ∇g_2 مستقل اند اگر و فقط اگر حاصل ضرب خارجی آنها ناصفر باشد . حاصل ضرب خارجی از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید ؛

$$\nabla g_1 \times \nabla g_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial g_1}{\partial x} & \dfrac{\partial g_1}{\partial y} & \dfrac{\partial g_1}{\partial z} \\ \dfrac{\partial g_2}{\partial x} & \dfrac{\partial g_2}{\partial y} & \dfrac{\partial g_2}{\partial z} \end{vmatrix} = \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(y, z)}\boldsymbol{i} + \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(z, x)}\boldsymbol{j} + \frac{\partial(g_1, g_2)}{\partial(x, y)}\boldsymbol{k}.$$

بنابراین، استقـلال ∇g_1 و ∇g_2 یعنی هرسه دترمینان ژاکوبی سمت راست صفر نیستند. همانطور کـه قبـلا" متذکر شدیم، روش لاگرانژ، وقتی این شرط برقرار باشد، قابل اجرا می‌باشد.

اگر ∇g_1 و ∇g_2 وابسته باشند، روش ممکن است قابل اجرا نباشد. مثلا"، سعی می‌کنیم روش لاگرانژ را برای یافتن مقادیر اکستریم $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ بر منحنی فصل مشترک دو سطح $g_1(x, y, z) = 0$ و $g_2(x, y, z) = 0$، که $g_1(x, y, z) = z$ و $g_2(x, y, z) = z^2 - (y-1)^3$، به‌کار بریم. دو سطـح، یعنی یک صفحه و یک استوانه، هم را در امتداد خط مستقیم C که در شکل ۱۰.۹ نشان داده شده قطع می‌کنند.



شکل ۱۰.۹ یک مثال که در آن روش لاگرانژ قابل اجرا نیست.

واضح است که مسئله جواب دارد ، زیرا $f(x, y, z)$ نمایش فاصلهٔ نقطهٔ (x, y, z) تامحور z است‌واین‌فاصله بر C وقتی مینیمم است که نقطه $(0, 1, 0)$ باشد . بهرحال ، بردارهای گرادیان دراین نقطه عبارتند از $\nabla g_1 = k$ ، $\nabla g_2 = O$ ، و $\nabla f = 2j$ ، و واضح است که اسکالرهایی چون λ_1 و λ_2 که در معادلهٔ (۴۱۰۹) صدق کنند وجود ندارند .

۱۵۰۹ تمرین

۱ . مقادیر اکستریم $z = xy$ را تحت شرط $x + y = 1$ پیدا کنید .

۲ . فواصل ماکزیمم و مینیمم مبدا تا منحنی $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 8$ را بیابید .

۳ . فرض کنید a و b اعداد مثبت ثابتی باشند .

(آ) مقادیر اکستریم $z = x/a + y/b$ را تحت شرط $x^2 + y^2 = 1$ بیابید .

(ب) مقادیر اکستریم $z = x^2 + y^2$ را تحت شرط $x/a + y/b = 1$ بیابید . درهر حالت ، مسئله را تعبیر هندسی نمایید .

۴ . مقادیر اکستریم $z = \cos^2 x + \cos^2 y$ را تحت شرط‌جانبی $x - y = \pi/4$ بیابید .

۵ . مقادیراکستریم میدان‌اسکالر $f(x, y, z) = x - 2y + 2z$ را بر کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ بیابید .

۶ . نزدیکترین نقاط سطح $z^2 - xy = 1$ را به مبداء بیابید .

۷ . کوتاهترین فاصلهٔ نقطهٔ $(1, 0)$ تا سهمی $y^2 = 4x$ را بیابید .

۸ . نزدیکترین نقاط منحنی فصل مشترک دو سطح

$$x^2 - xy + y^2 - z^2 = 1 \qquad \text{و} \qquad x^2 + y^2 = 1$$

به‌مبداء را بیابید .

۹ . هرگاه a ، b ، و c اعداد مثبتی باشند ، ماکزیمم $f(x, y, z) = x^a y^b z^c$ را تحت شرط‌جانبی $x + y + z = 1$ بیابید .

۱۰ . کمترین حجم محدود به صفحات $x = 0, y = 0, z = 0$ ، و صفحهٔ مماس بر بیضی‌گون

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

در یک نقطهٔ یکهشتم $x > 0, y > 0, z > 0$ را به‌دست آورید .

۱۱ . ماکزیمم $\log x + \log y + 3 \log z$ را بر بخشی از کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 5r^2$ که

$x > 0, y > 0, z > 0$ پیداکنید .بااستفاده‌از این نتیجه ، ثابت کنید به‌ازای اعداد حقیقی مثبت a, b, c ،

$$abc^3 \leq 27\left(\frac{a+b+c}{5}\right)^5.$$

۱۲ . مقطـع مخروطی $Ax^2 + 2Bxy + Cy^2 = 1$ ، که درآن $A > 0$ و $B^2 < AC$ ، مفروض است .فرض‌کنید m و M فواصل‌مبداء‌تا نزدیکترین و دورترین نقاط مخروطی باشند . نشان دهید که

$$M^2 = \frac{A + C + \sqrt{(A-C)^2 + 4B^2}}{2(AC - B^2)}$$

و فرمول لنگه را برای m^2 پیدا نمایید .

۱۳ . با استفاده از روش ضــرایب لاگــرانــژ ، بیشترین و کمترین فاصلهٔ یک نقطهٔ بیضی $x^2 + 4y^2 = 4$ تا خط مستقیم $x + y = 4$ را بیابید .

۱۴ . مقطع عــرضی یک تغار یک ذوزنقهٔ متساوی الساقین است . اگر تغار با خم کردن اضلاع یک نوار فلزی به‌عرض c اینچ ساخته شده باشد ، زاویهٔ میل اضلاع و پهنای قاعده چقدر باید باشند تا سطح مقطع عرضی ماکزیمم گردد؟

۱۶.۹ قضیهٔ مقدار اکستریم برای میدانهای اسکالر پیوسته

قضیهٔ مقداراکستریم برای توابع حقیقی پیوسته بر یک بازهٔ بسته و کراندار را می‌توان به میدانهای اسکالر تعمیم داد . ما میدانهای اسکالر پیوسته بر یک بازهٔ بستهٔ n بعدی را درنظرمی‌گیریم.چنین بازه به‌صورت حاصل ضرب دکارتی n بازهٔ بستهٔ یک بعدی تعریف می‌شود . اگر $\boldsymbol{a} = (a_1, \ldots, a_n)$ و $\boldsymbol{b} = (b_1, \ldots, b_n)$ ،می‌نویسیم

$$\begin{aligned}[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}] &= [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n] \\ &= \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1 \in [a_1, b_1], \ldots, x_n \in [a_n, b_n]\}.\end{aligned}$$

مثلا" ، وقتی $n = 2$ ، حاصل ضرب دکارتی $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ یک مستطیل است .

برهان قضیهٔ مقداراکستریم به موازات برهان حالت 1 بعدی که در جلد یک داده شده پیش می‌رود . ابتدا ثابت می‌کنیم پیوستگی f کرانداری آن را ایجاب می‌کند ، وبعد ثابت می‌کنیم f جایی در $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ ماکزیمم و مینیمم خود را خواهد گرفت .

قضیهٔ ۸.۹ . قضیهٔ کرانداری برای میدانهای اسکالر پیوسته. هرگاه f یک میدان اسکالر پیوسته درهر نقطهٔ a از بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ در $\mathbf{R}^n$ باشد، آنگاه f بر $[a, b]$ کراندار خواهد بود. یعنی، عددی مانند $C \geq 0$ وجود دارد بطوری که، بهازای هر x در $[a, b]$، $|f(x)| \leq C$.

برهان. با استفاده از روش تنصیف متوالی، به برهان خلف عمل می‌کنیم. شکل ۱۱.۹ روش را در حالت $n = 2$ نشان می‌دهد.

فرض‌کنیم f بر $[a, b]$ بی‌کران‌باشد. قرارمی‌دهیم $I^{(1)} = [a, b]$ و $I_k^{(1)} = [a_k, b_k]$؛ درنتیجه،

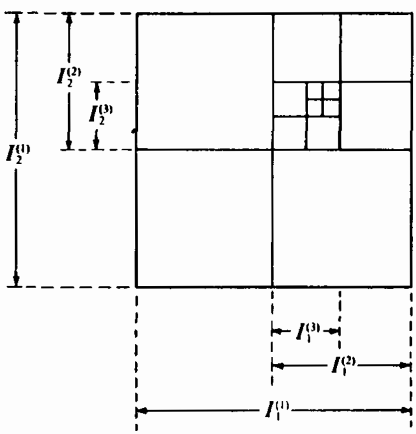
$$I^{(1)} = I_1^{(1)} \times \cdots \times I_n^{(1)}.$$

هر بازهٔ یک بعدی $I_k^{(1)}$ را به دو زیر بازه تنصیف می‌کنیم، نیمهٔ چپ $I_{k,1}^{(1)}$ و نیمهٔ راست $I_{k,2}^{(1)}$. حال تمام حاصل ضربهای دکارتی به‌شکل

$$I_{1,j_1}^{(1)} \times \cdots \times I_{n,j_n}^{(1)}$$

را درنظر می‌گیریم، که درآن هر j_i مساوی 1 یا 2 است.

دقیقاً "2^n حاصل‌ضرب این‌چنینی وجود دارند. هر حاصل ضرب یک زیر بازهٔ n بعدی از $[a, b]$ است، و اجتماع آنها مساوی $[a, b]$ می‌باشد. تابع f در لااقل یکی از این زیر بازه‌ها بی‌کران است (اگر در هریک کراندار می‌بود، بر $[a, b]$ کراندار می‌شد). یکی از



شکل ۱۱.۹ نمایش روش تنصیف متوالی در صفحه

اینها را با $I^{(2)}$ نشان می‌دهیم، و به‌صورت زیر بیان می‌کنیم :

$$I^{(2)} = I_1^{(2)} \times \cdots \times I_n^{(2)},$$

که درآن هر $I_k^{(2)}$ یکی از زیر بازه‌های یک بعدی $I_k^{(1)}$ به‌طول $\frac{1}{2}(b_k - a_k)$ است .

حال با $I^{(2)}$ همان عمل با $I^{(1)}$ را می‌کنیم ، هریک از بازه‌های مولف یک بعدی $I_k^{(2)}$ رانصف‌کرده‌به یک بازهٔ n بعدی مانند $I^{(3)}$ می‌رسیم که درآن f بی‌کران است . با ادامهٔ این عمــل ، یک مجموعهٔ‌نامتناهی از بازه‌های n بعدی $I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots$ به‌دست می‌آید ، با خاصیت $I^{(m+1)} \subseteq I^{(m)}$ ، که‌درهریک‌ازآنها f بی‌کران است . بازهٔ m م ، یعنی $I^{(m)}$ ، را می‌توان به شکل زیر بیان کرد :

$$I^{(m)} = I_1^{(m)} \times \cdots \times I_n^{(m)}.$$

چون هــر بــازهٔ یــک بعدی $I_k^{(m)}$ با $m-1$ تنصیف متوالی $[a_k, b_k]$ به‌دست می‌آید ، اگر بنویسیم $I_k^{(m)} = [a_k^{(m)}, b_k^{(m)}]$ ، داریم

$$b_k^{(m)} - a_k^{(m)} = \frac{b_k - a_k}{2^{m-1}} \quad \text{، } k = 1, 2, \ldots, n \text{ به‌ازای} \tag{۴۲۰۹}$$

لذا ، بـــه‌ازای هر k ثابت ، سوپرمم تمام نقاط‌انتهایی چپ $a_k^{(m)}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ باید مساوی اینفیمم تمام نقاط‌انتهایی راست $b_k^{(m)}$ $(m = 1, 2, \ldots)$ بوده و مقدار مشترک رابا t_k نشان می‌دهیم . نقطهٔ $t = (t_1, \ldots, t_n)$ در $[a, b]$ قرار دارد . بنابر پیوستگی f در t ، یک n ـ گوی مانند $B(t; r)$ وجود دارد که در آن

$$|f(x) - f(t)| \le 1 \quad \text{، } B(t; r) \cap [a, b] \text{ در } x \text{ به‌ازای هر} \quad .$$

این نامساوی ایجاب می‌کند که

$$|f(x)| < 1 + |f(t)| \quad \text{، } B(t; r) \cap [a, b] \text{ در } x \text{ به‌ازای هر} \quad ;$$

درنتیجه ، f بر مجموعهٔ $B(t; r) \cap [a, b]$ کراندار می‌باشد . اما این مجموعه ، وقتی m آنقدربزرگ باشدکه هر یک از n عدد (۴۲۰۹) از $r/\sqrt{n}$ کوچکتر باشد ، شامل تمام بازهٔ $I^{(m)}$ خواهد بــود . لــذا ، بـــه‌ازای هر چنین m ی ، تابع f بر $I^{(m)}$ کراندار است ، که با بی‌کران بودن f بر $I^{(m)}$ تناقض دارد . این تناقض برهان را تمام خواهد کرد .

اگر f بر $[a, b]$ کراندارباشد ، مجموعهٔ تمام مقادیر تابعی $f(x)$ مجموعه‌ای ازاعداد حقیقی‌است که ازبالا و پایین‌کرانـــدار اســـت . لذا ، این مجموعه سوپرمم و اینفیمم دارد ، که بترتیب آنها را با $\sup f$ و $\inf f$ نشان می‌دهیم . یعنی ، می‌نویسیم

$$\sup f = \sup \{f(x) \mid x \in [a, b]\}, \qquad \inf f = \inf \{f(x) \mid x \in [a, b]\}.$$

حال ثابت می‌کنیم یک تابع پیوسته مقادیر $\inf f$ و $\sup f$ را جایی در $[a, b]$ می‌گیرد .

قضیهٔ ۹.۹ . قضیهٔ مقدار اکستریم برای میدانهای اسکالر پیوسته . هرگاه f بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ در $\mathbf{R}^n$ پیوسته باشد ، نقاطی مانند c و d در $[a, b]$ وجود دارند بطوری‌که

$$f(c) = \sup f \quad \text{و} \quad f(d) = \inf f \ .$$

برهان . کافی است ثابت کنیم f سوپرمم خود را در $[a, b]$ می‌گیرد . سپس، نتیجه‌برای اینفیمم حاصل است ، زیرا اینفیمم f سوپرمم $-f$ است .

فرض‌کنیم $M = \sup f$. همچنین ، x ی در $[a, b]$ نباشد که $f(x) = M$ وتناقضی به‌دست‌می‌آوریم .فرض‌کنیم $g(x) = M - f(x)$. دراین‌صورت ،به‌ازای‌هر x در$[a, b]$، $g(x) > 0$ ؛ درنتیجه ، $1/g$ بر $[a, b]$ پیوسته می‌باشد . بنابر قضیهٔ کرانداری ، $1/g$ بر $[a, b]$ کراندار‌است ؛ مثلا" ،به‌ازای هر x در $[a, b]$ ، $1/g(x) < C$ ، که درآن $C > 0$. این ایجاب می‌کند که $M - f(x) > 1/C$ ؛ درنتیجه ، به‌ازای هر x در $[a, b]$ ، $f(x) < M - 1/C$. این نقیض‌آن‌است که M کوچکترین کران بالایی f بر $[a, b]$ است . بنابراین ، به‌ازای دست کم یک x در $[a, b]$ ، $f(x) = M$.

۱۷.۹ قضیهٔ پیماق کوچک برای میدانهای اسکالر پیوسته (پیوستگی یکنواخت)

فرض کنیم f بر بازهٔ بستهٔ کراندار $[a, b]$ در $\mathbf{R}^n$ پیوسته بوده ، و $M(f)$ و $m(f)$ بترتیب ماکزیمم و مینیمم f بر $[a, b]$ باشند . تفاضل

$$M(f) - m(f)$$

پیمای f بر $[a, b]$ نام دارد . مثل حالت یک بعدی ، قضیهٔ پیمای کوچک برای توابع پیوسته را داریم ، که می‌گوید می‌توان بازهٔ $[a, b]$ را طوری افراز کرد که پیمای f در هر زیربازه بدلخواه کوچک باشد .

می‌نویسیم $[a, b] = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ، و فرض می‌کنیم P_k مجموعه‌ای از نقاط

$$P_k = \{x_0, x_1, \ldots, x_{r-1}, x_r\}$$

باشد بطوری که $a_k = x_0 \le x_1 \le \cdots \le x_{r-1} \le x_r = b_k$. حاصل ضرب دکارتی

$$P = P_1 \times \cdots \times P_n$$

یک افــراز بــازهٔ $[a, b]$ نامیده مــی‌شود . حال قضیهٔ پیمای کوچک ، که قضیهٔ پیوستگی یکنواخت نیز نام دارد ، شکل زیر را خواهد گرفت .

قضیهٔ ۱۰۰۹ . *فرض کنیــم f یک میــدان اسکالر پیوسته بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ در $\mathbf{R}^n$ باشد . دراین صورت ، به‌ازای هر $\epsilon > 0$ ، افرازی از $[a, b]$ به تعدادی متناهی زیر بازه وجود دارد بطوری که پیمای f در هر زیر بازه کوچکتر از ϵ است .*

برهان . برهان کــاملا" شبیــه حالت یک بعدی است ؛ درنتیجه ، ما مراحل عمده را به اختصار شرح می‌دهیم .با استفاده از روش تنصیف متوالی ، به برهان خلف می‌رویم . فرض کنیم قضیه برقرار نباشد ؛ یعنی ، به‌ازای ϵ_0 ی ، بازهٔ $[a, b]$ را نتوان به تعدادی متناهی زیربازه افرازکردکه در هر یک پیمای f از ϵ_0 کمتر باشد . با تنصیف متوالی ، یک‌مجموعهٔ نامتناهی از زیــر بازه‌های $I^{(1)}, I^{(2)}, \ldots$ به‌دست می‌آید که درهریک پیمای f دست کم ϵ_0 است . بــا تــوجه بــه کــوچکترین کــران بــالایی نقاط‌انتهایی چپ بازه‌های مولــف $\ldots, I^{(1)}, I^{(2)}$ ، نقطه‌ای مانند t در $[a, b]$ به‌دست می‌آید که در همهٔ این بازه‌ها قرار دارد . بنــابر پیــوستگی f در t ، یک n ـ گــوی مــانند $B(t; r)$ هست که پیمای f در $B(t; r) \cap [a, b]$ از $\frac{1}{2}\epsilon_0$ کمتر است . امــا ، وقتی m به قدر کافی بزرگ باشد ، بازهٔ $I^{(m)}$ در مجمــوعهٔ $B(t; r) \cap [a, b]$ واقع می‌شود ؛ درنتیجه ، پیمای f در $I^{(m)}$ بزرگتر از $\frac{1}{2}\epsilon_0$ نیست ، که با این امر که پیمای f در $I^{(m)}$ دست کم ϵ_0 است تعارض دارد .

۱۰

انتگرالهای خط

۱۰.۱ مقدمه

درجلدیک انتگرال $\int_a^b f(x)\,dx$ ابتدابرای توابع حقیقی تعریف شده و کراندار بربازه‌های متناهی و سپس برای توابع بی‌کران و بازه‌های نامتناهی بحث شد. این مفهوم بعدا " به توابع برداری و، در فصل ۷ جلد دو، به توابع ماتریسی تعمیم یافت.

دراین فصل مفهوم انتگرال درجهتی دیگر تعمیم می‌یابد. بازهٔ $[a, b]$ با یک منحنی در فضای n که به‌وسیلهٔ تابعی برداری مانند α توصیف می‌شود، تعویض می‌گردد، و انتگرالده میدانی برداری مانند f بوده که براین منحنی تعریف شده و کراندار است. انتگرال حاصل ***انتگرال خط***، ***انتگرال منحنی‌الخط***، یا ***انتگرال کنتوری*** نام داشته و با $\int f \cdot d\alpha$ یا علامت مشابه نموده می‌شود. نقطه عمدا " برای القای حاصل ضرب داخلی‌دو بردار به‌کار رفته است. منحنی یک ***مسیر انتگرالگیری*** نامیده خواهد شد.

انتگرالهای خط در ریاضیات محض و کار بسته اهمیتی اساسی دارند. این انتگرالها در رابطه باکار، انرژی‌پتانسیل، جریان‌گرما، تغییردرآنتروپی، جریان مایعات، و هر وضعیت فیزیکی دیگرکه درآن رفتار یک بردار یا میدان اسکالر در امتداد یک منحنی مطالعه‌می‌شود ظاهر می‌شوند.

۱۰.۲ مسیرها و انتگرالهای خط

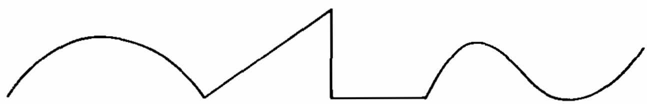
پیش از تعریف انتگرالهای خط، تعریف منحنی را که در جلد یک داده شد به یاد می‌آوریم. فرض‌کنیم α یک تابع برداری باشد که بر بازهٔ بستهٔ متناهی $J = [a, b]$ تعریف شده است. وقتی t در J تغییر کند، مقادیر تابعی $\alpha(t)$ مجموعه‌ای از نقاط در فضای n را

می‌پیماید به‌نام **نمودار** تابع . اگر α بر J پیوسته باشد ، نمودار یک **منحنی** ، به‌طور مشخص ، منحنیی که به‌وسیلهٔ α توصیف می‌شود ، نامیده می‌شود .

در بررسی منحنیها در جلد یک معلوم شد که توابع مختلف می‌توانند یک منحنی را به طرق مختلف ، مثلا" درجهات مختلف یا سرعتهای مختلف ، بپیمایند . در انتگرالهای خط ما نه فقط به مجموعهٔ نقاط یک منحنی بلکه به نحوهٔ پیمایش منحنی ، یعنی به خود تابع α ، نیز توجه داریم . چنین تابع یک **مسیر پیوسته** نامیده می‌شود .

تعریف . فرض‌کنیم $J = [a, b]$ یک بازهٔ بستهٔ متناهی در $\mathbf{R}^1$ باشد . تابع $\alpha : J \to \mathbf{R}^n$ که بر J پیوسته باشد یک **مسیر پیوسته** در فضای n نامیده می‌شود . مسیر را **هموار** گوییم اگرکه α' در بازهٔ باز (a, b) موجود و پیوسته باشد . مسیر را **قطعه قطعه هموار** گوییم اگر که بازهٔ $[a, b]$ را بتوان بـه تعدادی متناهی زیر بازه طوری افراز کرد که درهریک از آنها مسیرهموار باشد .

شکل ۱۰۰۱ نمودار یک مسیرقطعه قطعه‌هموار را نشان می‌دهد . دراین مثال ، منحنی



شکل ۱۰۰۱ نمودار یک مسیر قطعه قطعه هموار در صفحه

در همهٔ نقاط‌جز تعدادی متناهی نقطه خط‌مماس دارد . این نقاط‌استثنایی منحنی را به قوسهایی تقسیم می‌کنند که در امتداد هریک خط‌مماس به‌طور پیوسته در تغییر است .

تعریف انتگرال خط. فرض‌کنیم α یک مسیرقطعه قطعه هموار در فضای n باشد که بربازهٔ $[a, b]$ تعریف شده است ، و f میدانی برداری باشد که بر نمودار α تعریف شده وکراندار است . انتگرال خط f درامتداد α با علامت $\int f \cdot d\alpha$ نموده و با معادلهٔ

$$\int f \cdot d\alpha = \int_a^b f[\alpha(t)] \cdot \alpha'(t)\, dt, \qquad (۱۰۰۱)$$

هر وقت انتگرال سمت راست به‌صورت حقیقی یا مجازی موجود باشد ، تعریف می‌شود .

تذکر. دراغلب مثالهایی که در عمل پیش می‌آیند، حاصل ضرب نقطه‌ای $f[\alpha(t)]\cdot\alpha'(t)$ بر $[a, b]$ کراندار وجز احتمالاً" درتعدادی‌متناهی‌نقطه‌پیوسته‌است، که‌دراین‌حالت انتگرال به‌عنوان یک انتگرال حقیقی وجود دارد.

۳.۱۰ نمادهای دیگر برای انتگرالهای خط

اگر C نمودار α باشد، انتگرال خط $\int f\cdot d\alpha$ به‌صورت $\int_C f\cdot d\alpha$ نیز نوشته شده و ***انتگرال f در امتداد C*** نامیده می‌شود.

اگر $a = \alpha(a)$ و $b = \alpha(b)$ نقاط انتهایی C باشند، انتگرال خط گاهی به‌صورت $\int_a^b f$ یا $\int_a^b f\cdot d\alpha$ نوشته شده و انتگرال خط f از a تا b در امتداد α نامیده می‌شود. در استعمال نماد $\int_a^b f$ باید بخاطر داشت که انتگرال نه فقط به‌نقاط انتهایی a و b بلکه به مسیر α که آنها را بهم وصل می‌کند نیز بستگی دارد.

وقتی $a = b$، **مسیر بسته** نامیده می‌شود. علامت $\oint$ اغلب برای انتگرالگیری در امتداد یک مسیر بسته به‌کار می‌رود.

وقتی f و α برحسب مولفه‌هایشان بیان شده‌اند، مثلاً"

$$f = (f_1, \ldots, f_n) \quad \text{و} \quad \alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n),$$

انتگرال سمت راست (۱۰.۱) به‌صورت مجموعی از انتگرالها درمی‌آید:

$$\sum_{k=1}^{n} \int_a^b f_k[\alpha(t)]\alpha_k'(t)\, dt.$$

دراین حالت، انتگرال خط به‌صورت $\int f_1\, d\alpha_1 + \cdots + f_n\, d\alpha_n$ نیز نوشته می‌شود.

درحالت دو بعدی، مسیر α معمولاً" با یک جفت‌معادلهٔ پارامتری توصیف می‌شود:

$$x = \alpha_1(t), \qquad y = \alpha_2(t),$$

و انتگرال خط $\int_C f\cdot d\alpha$ به‌صورت $\int_C f_1\, dx + f_2\, dy$ یا $\int_C f_1(x, y)\, dx + f_2(x, y)\, dy$ نوشته می‌شود.

درحالت سه بعدی، از سه معادلهٔ پارامتری

$$x = \alpha_1(t), \qquad y = \alpha_2(t), \qquad z = \alpha_3(t)$$

استفاده می‌کنیم، و انتگرال خط $\int_C f\cdot d\alpha$ را به‌صورت $\int_C f_1\, dx + f_2\, dy + f_3\, dz$ یا

$$\int_C f_1(x, y, z)\, dx + f_2(x, y, z)\, dy + f_3(x, y, z)\, dz$$

می‌نویسیم .

مثال . فرض کنیم f یک میدان برداری دو بعدی باشد که به‌ازای هر (x, y) که $y \geq 0$ با

$$f(x, y) = \sqrt{y}\, i + (x^3 + y)j$$

داده شده است . انتگرال خط f را از $(0, 0)$ تا $(1, 1)$ در امتداد هریک از مسیرهای زیر حساب کنید :

(آ) خط به معادلات پارامتری $x = t, y = t, 0 \leq t \leq 1$ ؛

(ب) مسیر به معادلات پارامتری $x = t^2, y = t^3, 0 \leq t \leq 1$.

حل . برای مسیر قسمت (آ) اختیار می‌کنیم $\alpha(t) = ti + tj$. در این صورت ، $\alpha'(t) = i + j$ و $f[\alpha(t)] = \sqrt{t}\, i + (t^3 + t)j$. از اینرو ، حاصل‌ضرب نقطه‌ای $f[\alpha(t)]$ و $\alpha'(t)$ مساوی است با $\sqrt{t} + t^3 + t$ و معلوم می‌شود که

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} f \cdot d\alpha = \int_0^1 (\sqrt{t} + t^3 + t)\, dt = \frac{17}{12}.$$

برای مسیر قسمت (ب) اختیار می‌کنیم $\alpha(t) = t^2 i + t^3 j$. در این صورت ، $\alpha'(t) = 2ti + 3t^2 j$ و $f[\alpha(t)] = t^{3/2} i + (t^6 + t^3)j$. بنابراین ،

$$f[\alpha(t)] \cdot \alpha'(t) = 2t^{5/2} + 3t^8 + 3t^5;$$

درنتیجه ،

$$\int_{(0,0)}^{(1,1)} f \cdot d\alpha = \int_0^1 (2t^{5/2} + 3t^8 + 3t^5)\, dt = \frac{59}{42}.$$

این مثال نشان می‌دهد که انتگرال از یک نقطه به نقطهٔ دیگر ممکن است به مسیر بین دو نقطه بستگی داشته باشد .

حال ، با استفاده از همین منحنی ولی با نمایش پارامتری متفاوت ، محاسبهٔ قسمت (ب) را بار دیگر انجام می‌دهیم . همین منحنی را می‌توان با تابع

$\beta(t) = ti + t^{3/2} j$ که درآن $0 \leq t \leq 1$ ،

توصیف کرد . این نتیجه می‌دهد که

$$f[\beta(t)] \cdot \beta'(t) = (t^{3/4}i + (t^3 + t^{3/2})j) \cdot (i + \tfrac{3}{2}t^{1/2}j) = t^{3/4} + \tfrac{3}{2}t^{7/2} + \tfrac{3}{2}t^2,$$

که انتگرال آن از 0 تا 1 ، مثل قبل، مساوی 59/42 است. این محاسبه نشان میدهد که‌مقدارانتگرال‌از نمایش پارامتری منحنی مستقل است. این یک خاصیت کلی انتگرالهای خطاست که در بخش بعد ثابت می‌شود.

۴۰۱۰ خواص اساسی انتگرالهای خط

چون انتگرالهای خط برحسب انتگرالهای معمولی تعریف شده اند ، برخورداری آنها از بسیاری از خواص انتگرالهای معمولی تعجبی ندارد. مثلا" ، این انتگرالها نسبت به انتگرالده **خاصیت خطی** دارند:

$$\int (af + bg) \cdot d\alpha = a \int f \cdot d\alpha + b \int g \cdot d\alpha,$$

و نسبت به مسیر انتگرالگیری **خاصیت جمعی** دارند:

$$\int_C f \cdot d\alpha = \int_{C_1} f \cdot d\alpha + \int_{C_2} f \cdot d\alpha,$$

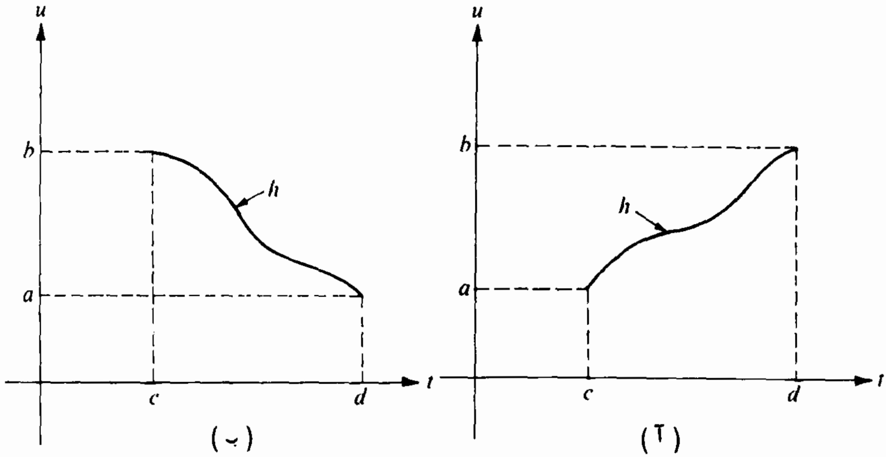
که درآن دو منحنی C_1 و C_2 منحنی C را تشکیل می‌دهند. یعنی، C با تابعی مانند α که بر بازهٔ $[a, b]$ تعریف شده توصیف می‌شود، و منحنیهای C_1 و C_2 به وسیلهٔ $\alpha(t)$ با تغییر t بترتیب درزیر بازه‌های $[a, c]$ و $[c, b]$ ، به‌ازای c ای که $a < c < b$ ، پیموده می‌شوند. این خواص فورا" از تعریف انتگرال خط نتیجه می‌شوند، و اثبات آنها به‌عنوان تمرین به خواننده محول می‌گردد.

حال رفتار انتگرالهای خط‌را تحت تغییر پارامتر بررسی می‌کنیم. فرض‌کنیم α یک مسیرپیوسته باشدکه بر بازهٔ $[a, b]$ تعریف‌شده است، u تابعی حقیقی باشد که مشتقپذیر بوده و u' بربازهٔ $[c, d]$ هیچگاه صفر نشود و برد u $[a, b]$ باشد. دراین صورت، تابع β که بر $[c, d]$ با معادلهٔ

$$\beta(t) = \alpha[u(t)]$$

تعریف می‌شود یک مسیر پیوسته است که همان نمودار α را دارد. دو مسیر α و β که این طور بهم مربوط‌باشند **معادل** نامیده می‌شوند. گوییم اینها نمایشهای پارامتری متفاوتی از یک منحنی هستند، و تابع u یک تغییر پارامتر را تعریف می‌کند.

فرض‌کنیم C نمودار مشترک دو مسیر معادل α و β باشد. اگر مشتق u همواره بر



شکل ۲۰۱۰ تغییرپارامتربا $u = h(t)$ تعریف شده است. در (آ)، تابع h جهت را نگه می‌دارد. در (ب)، تابع h جهت را برمی‌گرداند.

$[c, d]$ مثبت باشد، تابع u صعودی است و می‌گوییم دو مسیر α و β منحنی C را دریک جهت می‌پیمایند. اگرمشتق u همواره منفی باشد، گوییم α و β منحنی C را در جهات **مختلف** می‌پیمایند. درحالت اول تابع u را **جهت‌نگهدار**، و درحالت دوم **جهت‌برگردان** می‌نامیم. مثالی در شکل ۲۰۱۰ نشان داده شده است.

قضیهٔ زیرنشان می‌دهد که انتگرال خط تحت تغییر پارامتری که جهت را نگه‌می‌دارد تغییر نمی‌کند، و تحت تغییر پارامتری که جهت را برمی‌گرداند تغییر علامت می‌دهد فرض می‌کنیم هر دو انتگرال $\int f \cdot d\alpha$ و $\int f \cdot d\beta$ موجود باشند.

قضیهٔ ۱۰۱۰ . رفتارانتگرال خط تحت تغییرپارامتر. *فرض‌کنیم α و β مسیرهای قطعه قطعه هموارمعادلی باشند. دراین صورت، اگر α و β منحنی C را دریک جهت‌بپیمایند،*

$$\int_C f \cdot d\alpha = \int_C f \cdot d\beta ;$$

واگر α و β منحنی C را درجهت مخالف بپیمایند،

$$\int_C f \cdot d\alpha = -\int_C f \cdot d\beta .$$

برهان. کافی است قضیه را بـرای مسیرهای هموار ثابت کنیم؛ سپس، به کمک خاصیت جمعی نسبت به مسیر انتگرالگیری، مطلب را برای مسیرهای قطعه قطعه هموار نتیجه‌می‌گیریم.

اثبات کاربرد ساده‌ای از قاعدهٔ زنجیره‌ای است. مسیرهای $\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{\beta}$ با معادله‌ای به شکل $\boldsymbol{\beta}(t) = \boldsymbol{\alpha}[u(t)]$ بـهم مربوطند، که‌درآن u بربازهٔ $[c, d]$ و $\boldsymbol{\alpha}$ بربازهٔ $[a, b]$ تعریف شده است. از قاعدهٔ زنجیره‌ای داریم

$$\boldsymbol{\beta}'(t) = \boldsymbol{\alpha}'[u(t)]u'(t).$$

لذا، معلوم می‌شود که

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{\beta} = \int_c^d \boldsymbol{f}[\boldsymbol{\beta}(t)] \cdot \boldsymbol{\beta}'(t)\, dt = \int_c^d \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}[u(t)]) \cdot \boldsymbol{\alpha}'[u(t)]u'(t)\, dt.$$

در انتگرال اخیر، با جانشانی $v = u(t),\ dv = u'(t)\, dt$، به‌دست می‌آید

$$\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{\beta} = \int_{u(c)}^{u(d)} \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}(v)) \cdot \boldsymbol{\alpha}'(v)\, dv = \pm\int_a^b \boldsymbol{f}(\boldsymbol{\alpha}(v)) \cdot \boldsymbol{\alpha}'(v)\, dv = \pm\int_C \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha},$$

که درآن علامت $+$ درصورت $a = u(c)$ و $b = u(d)$، و علامت $-$ درصورت $a = u(d)$ و $b = u(c)$ به‌کار مـی‌رود. حالت اول وقتی است که $\boldsymbol{\alpha}$ و $\boldsymbol{\beta}$ منحنی C را دریک جهت، و حالت دوم وقتی است که اینها C را درجهات مختلف می‌پیمایند.

۵.۱۰ تمرین

درهریک از تمرینهای ۱ تا ۸، انتگرال خط میدان برداری $\boldsymbol{f}$ را در امتداد مسیر ذکر شده محاسبه کنید.

۱. $\boldsymbol{f}(x, y) = (x^2 - 2xy)\boldsymbol{i} + (y^2 - 2xy)\boldsymbol{j}$، از $(-1, 1)$ تـا $(1, 1)$ در امتداد سهمـی $y = x^2$.

۲. $\boldsymbol{f}(x, y) = (2a - y)\boldsymbol{i} + x\boldsymbol{j}$، در امتداد مسیر توصیف شده به‌وسیلهٔ

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = a(t - \sin t)\boldsymbol{i} + a(1 - \cos t)\boldsymbol{j},\ 0 \le t \le 2\pi.$$

۳. $\boldsymbol{f}(x, y, z) = (y^2 - z^2)\boldsymbol{i} + 2yz\boldsymbol{j} - x^2\boldsymbol{k}$، در امتداد مسیر توصیف شده به‌وسیلهٔ

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = t\boldsymbol{i} + t^2\boldsymbol{j} + t^3\boldsymbol{k},\ 0 \le t \le 1.$$

۴. $\boldsymbol{f}(x, y) = (x^2 + y^2)\boldsymbol{i} + (x^2 - y^2)\boldsymbol{j}$، از $(0, 0)$ تـا $(2, 0)$ در امتـــداد منحنـــی $y = 1 - |1 - x|$.

۵. $\boldsymbol{f}(x, y) = (x + y)\boldsymbol{i} + (x - y)\boldsymbol{j}$، یکبـار حول بیضی $b^2x^2 + a^2y^2 = a^2b^2$ درجهت

خلاف حرکت عقربه‌های ساعت .

۶ . $f(x, y, z) = 2xyi + (x^2 + z)j + yk$ ، از $(1, 0, 2)$ تا $(3, 4, 1)$ در امتداد یک پاره خط.

۷ . $f(x, y, z) = xi + yj + (xz - y)k$ ،از $(0, 0, 0)$ تا $(1, 2, 4)$ درامتدادیک‌پاره‌خط.

۸ . $f(x, y, z) = xi + yj + (xz - y)k$ ، درامتداد مسیر توصیف شده به‌وسیلهٔ $\alpha(t) = t^2i + 2tj + 4t^3k,\ 0 \le t \le 1$.

درهریک از تمرینهای ۹ تا ۱۲ ، مقدار انتگرال خط‌را حساب کنید .

۹ . $\int_C (x^2 - 2xy)\,dx + (y^2 - 2xy)\,dy$ ، که درآن C مسیری از $(-2,4)$ تا $(1,1)$ در امتداد سهمی $y = x^2$ است .

۱۰ . $\int_C \frac{(x+y)\,dx - (x-y)\,dy}{x^2 + y^2}$ ، که درآن C دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ است که یکبار درجهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود .

۱۱ . $\int_C \frac{dx + dy}{|x| + |y|}$ ، که درآن C مربعی است به راسهای $(1, 0)$ ، $(0, 1)$ ، $(-1, 0)$ ، و $(0, -1)$ که یکبار در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود .

۱۲ . $\int_C y\,dx + z\,dy + x\,dz$ ، که درآن

(آ) C منحنی فصل مشترک دوسطح $x + y = 2$ و $x^2 + y^2 + z^2 = 2(x + y)$ است . منحنی یکبار درجهتی پیموده می‌شود که از مبداء در جهت حرکت عقربه‌های‌ساعت دیده می‌شود .

(ب) C فصل مشترک دو سطح $z = xy$ و $x^2 + y^2 = 1$ است که یکبار در جهتی پیموده می‌شود که از بالای صفحهٔ xy در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دیده می‌شود .

۶.۱۰ مفهوم کار به‌صورت انتگرال خط

جسمی‌را درنظرمی‌گیریم که در امتداد یک منحنی و تحت میدان نیروی f در حرکت‌است . اگر منحنی نمودار مسیر قطعه قطعه هموار α باشد ، **کار** انجام شده به‌وسیلهٔ f مساوی انتگرال خط $\int f \cdot d\alpha$ تعریف می‌شود . مثالهای زیر چند خاصیت اساسی کار را توضیح می‌دهند .

مثال ۱. کار انجام شده به‌وسیلهٔ یک نیروی ثابت. اگر f نیروی ثابتی باشد، مثلاً $f = c$ ، می‌توان نشان داد که کار انجام شده به‌وسیلهٔ f در حرکت جسم از نقطهٔ a تا نقطهٔ b درامتداد هرمسیر قطعه قطعه هموار بین a و b مساوی است با $c \cdot (b - a)$ ، یعنی حاصل ضرب نقطه‌ای نیرو در بردار تغییر مکان $b - a$. این مطلب را درحالتی خاص ثابت می‌کنیم.

فرض کنیم $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ یک مسیر بین a و b باشد، و مثلاً $\alpha(a) = a$ و $\alpha(b) = b$ ، و می‌نویسیم $c = (c_1, \ldots, c_n)$. همچنین، α' بر $[a, b]$ پیوسته باشد. دراین صورت، کار انجام شده به‌وسیلهٔ f مساوی است با

$$\int f \cdot d\alpha = \sum_{k=1}^{n} c_k \int_a^b \alpha_k'(t)\, dt = \sum_{k=1}^{n} c_k[\alpha_k(b) - \alpha_k(a)] = c \cdot [\alpha(b) - \alpha(a)] = c \cdot (b - a).$$

برای این میدان نیرو، کارانجام شده فقط به نقاط انتهایی a و b بستگی دارد نه به منحنی واصل بین آنها. میدانهای نیرو همه این خاصیت را ندارند. آنهایی که دارند ***محافظه‌کار*** نامیده می‌شوند. مثال ص ۴۴۰ یک میدان نیروی غیر محافظه‌کار است. دریکی از بخشهای آتی همهٔ میدانهای نیروی محافظه‌کار معین خواهند شد.

مثال ۲. اصل کار و انرژی. جسمی به جرم m درامتداد یک منحنی و تحت میدان نیروی f حرکت می‌کند. اگر سرعت جسم در لحظهٔ t مساوی $v(t)$ باشد، انرژی جنبشی آن مساوی $\frac{1}{2}mv^2(t)$ تعریف می‌شود. ثابت کنید ***تغییر انرژی جنبشی در هر بازهٔ زمانی مساوی کار انجام شده به‌وسیلهٔ f در این بازه است.***

حل. فرض کنیم $r(t)$ موضع جسم در لحظهٔ t باشد. کار انجام شده به‌وسیلهٔ f در بازهٔ زمانی $[a, b]$ عبارت است از $\int_{r(a)}^{r(b)} f \cdot dr$. می‌خواهیم ثابت کنیم

$$\int_{r(a)}^{r(b)} f \cdot dr = \tfrac{1}{2}mv^2(b) - \tfrac{1}{2}mv^2(a).$$

از قانون دوم حرکت نیوتن داریم

$$f[r(t)] = mr''(t) = mv'(t),$$

که درآن $v(t)$ بردار سرعت در لحظهٔ t است. سرعت طول بردار سرعت است: $v(t) = \|v(t)\|$. بنابراین،

$$f[r(t)]\cdot r'(t)=f[r(t)]\cdot v(t)=mv'(t)\cdot v(t)=\tfrac{1}{2}m\frac{d}{dt}(v(t)\cdot v(t))=\tfrac{1}{2}m\frac{d}{dt}(v^2(t)).$$

با انتگرالگیری از a تا b ، خواهیم داشت

$$\int_{r(a)}^{r(b)} f\cdot dr=\int_a^b f[r(t)]\cdot r'(t)\,dt=\tfrac{1}{2}mv^2(t)\Big|_a^b=\tfrac{1}{2}mv^2(b)-\tfrac{1}{2}mv^2(a),$$

که مطلوب ما می‌باشد.

۷.۱۰ انتگرالهای خط نسبت به طول قوس

فرض‌کنیم α یک مسیر باشد که α' آن بر بازهٔ $[a,b]$ پیوسته است. نمودار α یک منحنی با طول متناهی است. در جلد یک ثابت شد که تابع طول قوس نظیر s با انتگرال

$$s(t)=\int_a^t \|\alpha'(u)\|\,du$$

داده می‌شود. مشتق طول قوس عبارت است از

$$s'(t)=\|\alpha'(t)\|.$$

فرض کنیم φ یک میدان اسکالر باشد که بر C ، یعنی نمودار α ، تعریف شده و کراندار است. ***انتگرال خط φ نسبت به طول قوس در امتداد C*** با علامت $\int_C \varphi\,ds$ نموده و با معادلهٔ

$$\int_C \varphi\,ds=\int_a^b \varphi[\alpha(t)]s'(t)\,dt,$$

درصورت موجود بودن انتگرال طرف راست، تعریف می‌شود.

حال میدان اسکالر φ راکه با $\varphi[\alpha(t)]=f[\alpha(t)]\cdot T(t)$، یعنی حاصل‌ضرب نقطه‌ای میدان برداری f تعریف شده بر C و بردار یکهٔ مماس $T(t)=(d\alpha/ds)$ ، داده می‌شود درنظر می‌گیریم. دراین حالت انتگرال خط $\int_C \varphi\,ds$ همان انتگرال خط $\int_C f\cdot d\alpha$ است، زیرا

$$f[\alpha(t)]\cdot\alpha'(t)=f[\alpha(t)]\cdot\frac{d\alpha}{ds}\frac{ds}{dt}=f[\alpha(t)]\cdot T(t)s'(t)=\varphi[\alpha(t)]s'(t).$$

وقتی f یک میدان سرعت باشد، حاصل ضرب نقطه‌ای $f\cdot T$ مولفهٔ مماسی سرعت است، وانتگرال خط $\int_C f\cdot T\,ds$ ***انتگرال جریان f*** درامتداد C نام دارد. وقتی C یک منحنی

بسته باشد ، انتگرال جریان جریان بستهٔ f در امتداد C نامیده می‌شود . این اصطلاحها درنظریهٔ جریان مایعات معمولاً به‌کار می‌روند .

۸.۱۰ کاربردهای دیگر انتگرالهای خط

انتگرالهای خط نسبت به طول قوس در مسائل مربوط به توزیع جرم در امتداد یک منحنی پدید می‌آیند . مثلاً ، C را یک منحنی در فضای 3 به‌صورت سیمی نازک بگیرید که از ماده‌ای با چگالی متغیر ساخته شده است . فرض کنیم چگالی با میدان اسکالر φ توصیف شود ، که درآن $\varphi(x, y, z)$ **جرم در واحد طول** در نقطهٔ (x, y, z) از C است . دراین صورت ، جرم کل M سیم مساوی انتگرال خط φ نسبت به طول قوس تعریف می‌شود :

$$M = \int_C \varphi(x, y, z)\, ds\,.$$

مرکز جرم سیم نقطهٔ $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ تعریف می‌شود که مختصاتش با معادلات زیر معین می‌شوند :

$$\bar{x}M = \int_C x\varphi(x, y, z)\, ds\,, \quad \bar{y}M = \int_C y\varphi(x, y, z)\, ds\,, \quad \bar{z}M = \int_C z\varphi(x, y, z)\, ds\,.$$

یک سیم با چگالی ثابت را **یکنواخت** می‌نامند . دراین حالت مرکز جرم **مرکزگون** نام دارد .

مثال ۱ . جرم M حلقه‌ای از یک فنر به شکل مارپیچ به معادلهٔ برداری

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = a\cos t\, \boldsymbol{i} + a\sin t\, \boldsymbol{j} + bt\boldsymbol{k}$$

را درصورتی که چگالی در (x, y, z) مساوی $x^2 + y^2 + z^2$ است حساب کنید .

حل . انتگرال برای M مساوی است با

$$M = \int_C (x^2 + y^2 + z^2)\, ds = \int_0^{2\pi} (a^2\cos^2 t + a^2\sin^2 t + b^2t^2)s'(t)\, dt\,.$$

چون $s'(t) = \|\boldsymbol{\alpha}'(t)\|$ و $\boldsymbol{\alpha}'(t) = -a\sin t\, \boldsymbol{i} + a\cos t\, \boldsymbol{j} + b\boldsymbol{k}$ ، داریم $s'(t) = \sqrt{a^2 + b^2}$ ؛ و درنتیجه ،

$$M = \sqrt{a^2 + b^2}\int_0^{2\pi}(a^2 + b^2t^2)\, dt = \sqrt{a^2 + b^2}\left(2\pi a^2 + \frac{8}{3}\pi^3 b^2\right).$$

دراین مثال ، مختص z مرکز جرم ، یعنی $\bar{z}$ ، عبارت است از

$$\bar{z}M = \int_C z(x^2 + y^2 + z^2)\, ds = \sqrt{a^2 + b^2} \int_0^{2\pi} bt(a^2 + b^2t^2)\, dt$$
$$= b\sqrt{a^2 + b^2}\,(2\pi^2a^2 + 4\pi^4b^2)\,.$$

مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ در تمرین ۱۵ از بخش ۹۰۱۰ خواسته شده‌اند .

انتگرالهای‌خط‌رامی‌توان‌برای تعریف گشتاور ماند یک سیم نسبت به یک محور به‌کار برد .اگر $\delta(x, y, z)$ نمایش فاصلهٔ عمودی‌نقطهٔ (x, y, z) از C تا محور L باشد ، گشتاور ماند I_L مساوی انتگرال خط

$$I_L = \int_C \delta^2(x, y, z)\varphi(x, y, z)\, ds$$

تعریف می‌شود،که درآن $\varphi(x, y, z)$ چگـالی در (x, y, z) است . گشتاورهای ماند حول محورهای مختصات با I_x ، I_y ، و I_z نموده می‌شوند .

مثال ۲ . گشتاور ماند I_z حلقهٔ فنر مثال ۱ را حساب کنید .

حل . دراینجا $\delta^2(x, y, z) = x^2 + y^2 = a^2$ و $\varphi(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2$ ؛ درنتیجه ، داریم

$$I_z = \int_C (x^2 + y^2)(x^2 + y^2 + z^2)\, ds = a^2 \int_C (x^2 + y^2 + z^2)\, ds = Ma^2\,,$$

که درآن M جرم ، بصورتی که در مثال ۱ حساب شد ، می‌باشد .

۹۰۱۰ تمرین

۱ . میدان‌نیروی f در فضای 3 با $f(x, y, z) = xi + yj + (xz - y)k$ داده‌شده‌است . کار انجـام شده بـه‌وسیلهٔ این نیرو در حرکت یک جسم از $(0, 0, 0)$ تا $(1, 2, 4)$ در امتداد پاره خط‌بین این دو نقطه را حساب کنید .

۲ . کار انجـام شده به‌وسیلهٔ نیروی $f(x, y) = (x^2 - y^2)i + 2xyj$ در حرکت یک جسم یکبار (درجهت خـلاف حـرکت عقربه‌های ساعت) حول مربع محدود به محورهای مختصات و خطوط $x = a$ و $y = a, a > 0$ را به‌دست آورید .

۳ . میدان نیروی دوبعدی f با معادلهٔ $f(x, y) = cxy\boldsymbol{i} + x^6y^2\boldsymbol{j}$ داده شده است ، که درآن c یک ثابت مثبت می‌باشد . این نیرو بر جسمی که باید از $(0, 0)$ تا خط $x = 1$ در امتداد منحنی

$$y = ax^b, \qquad a > 0 \,, \quad b > 0$$

حرکت کند وارد می‌شود . مقدار a (برحسب c) را طوری بیابید که کار انجام شده به‌وسیلهٔ این نیرو از b مستقل باشد .

۴ . میدان نیروی f در فضای 3 با فرمول $f(x, y, z) = yz\boldsymbol{i} + xz\boldsymbol{j} + x(y + 1)\boldsymbol{k}$ داده شده است . کار انجام شده به‌وسیلهٔ f در حرکت یکبار جسمی حول مثلث به‌رئوس $(0, 0, 0), (1, 1, 1), (-1, 1, -1)$ با همین ترتیب را محاسبه کنید .

۵ . کارانجام شده به‌وسیلهٔ میدان‌نیروی $f(x, y, z) = (y - z)\boldsymbol{i} + (z - x)\boldsymbol{j} + (x - y)\boldsymbol{k}$ درامتداد منحنی فصل مشترک کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ و صفحهٔ $z = y \tan \theta$ ، که $0 < \theta < \pi/2$ ، را محاسبه کنید . مسیر مورد نظر در جهتی پیموده می‌شود که از بالای صفحهٔ xy در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت دیده می‌شود .

۶ . کار انجام شده به‌وسیلهٔ میدان نیروی $f(x, y, z) = y^2\boldsymbol{i} + z^2\boldsymbol{j} + x^2\boldsymbol{k}$ در امتداد منحنی فصل مشترک کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و استوانهٔ $x^2 + y^2 = ax$ ، که $z \geq 0$ و $a > 0$ ، را حساب کنید . مسیر در جهتی پیموده می‌شود که از بالای صفحهٔ xy در جهت حرکت عقربه‌های ساعت دیده می‌شود .

در هریک از تمرینهای ۷ تا ۱۰ ، انتگرال خط‌را نسبت به طول قوس حساب کنید .

۷ . $\int_C (x + y)\, ds$ ، که درآن C مثلث به راسهای $(0, 0)$ ، $(1, 0)$ ، و $(0, 1)$ است که درجهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود .

۸ . $\int_C y^2\, ds$ ، که درآن C به معادلهٔ برداری زیر است :

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = a(t - \sin t)\boldsymbol{i} + a(1 - \cos t)\boldsymbol{j}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

۹ . $\int_C (x^2 + y^2)\, ds$ ، که درآن C به معادلهٔ برداری زیر است :

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = a(\cos t + t \sin t)\boldsymbol{i} + a(\sin t - t \cos t)\boldsymbol{j}, \qquad 0 \leq t \leq 2\pi.$$

۱۰ . $\int_C z\, ds$ ، که درآن C به معادلهٔ برداری زیر است :

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = t \cos t\, \boldsymbol{i} + t \sin t\, \boldsymbol{j} + t\boldsymbol{k}, \qquad 0 \leq t \leq t_0.$$

۱۱ . یک سیم نیمه مستدیر یکنواخت به شعاع a را درنظر بگیرید .

(آ) نشان دهید که مرکزگون بر محور تقارن و به فاصلهٔ $2a/\pi$ از مرکز قرار دارد .

(ب) نشان دهید که گشتاور ماند حول قطر ماربر نقاط انتهایی سیم مساوی $\frac{1}{2}Ma^2$ است، که درآن M جرم سیم است.

۱۲. سیمی به شکل دایرهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ است. جرم و گشتاور ماند آن را حول یک قطر درصورتی تعیین کنید که چگالی در (x, y) مساوی $|x| + |y|$ باشد.

۱۳. جرم سیمی به‌شکل منحنی فصل‌مشترک کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ و صفحهٔ $x + y + z = 0$ را درصورتی بیابید که چگالی سیم در (x, y, z) مساوی x^2 باشد.

۱۴. یک سیم یکنواخت به شکل قسمتی از منحنی فصل مشترک دو سطح $x^2 + y^2 = z^2$ و $y^2 = x$ بین نقاط $(0, 0, 0)$ و $(1, 1, \sqrt{2})$ است. مختص z مرکزگون آن را بیابید.

۱۵. مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ مرکز جرم حلقه فنر مثال ۱ از بخش ۸.۱۰ را معین کنید.

۱۶. برای حلقه فنر مذکور در مثال ۱ از بخش ۸.۱۰، گشتاورهای ماند I_x و I_y را حساب کنید.

۱۰.۱۰ مجموعه‌های همبند باز. استقلال از مسیر

فرض‌کنیم S مجموعهٔ بازی در $\mathbf{R}^n$ باشد. مجموعهٔ S را **همبند** نامیم اگر که هر جفت از نقاط در S را بتوان با یک مسیر قطعه قطعه هموار که نمودارش در S قرار دارد بهم وصل کرد. یعنی، به‌ازای هر جفت نقطهٔ $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ در S، یک مسیر قطعه قطعه هموار مانند α که بر $[a, b]$ تعریف شده وجود دارد بطوری‌که به‌ازای هر t در $[a, b]$، $\alpha(t) \in S$، و نیز $\alpha(a) = \boldsymbol{a}$ و $\alpha(b) = \boldsymbol{b}$.

سه مثال از مجموعه‌های همبند باز در صفحه در شکل ۳.۱۰ نموده شده‌اند. مثالهایی در فضای 3 شبیه به اینها عبارتند از (آ) بیضی‌گون‌توپر، (ب) چندوجهی‌توپر، و (پ) چنبرهٔ توپر؛ در هر مورد فقط نقاط درونی درنظر گرفته می‌شوند.

مجموعهٔ باز S را **ناهمبند** گوییم اگر که S اجتماع دو یا چند مجموعهٔ باز ناتهی از هم جدا باشد. مثالی در شکل ۴.۱۰ نموده شده است. می‌توان نشان داد که ردهٔ مجموعه‌های همبند باز با ردهٔ مجموعه‌های باز که ناهمبند نیستند یکی است.*

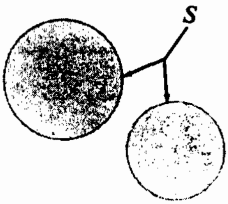
حال فرض‌کنیم $\boldsymbol{f}$ یک میدان برداری باشد که بر مجموعهٔ همبند باز S پیوسته‌است.

---

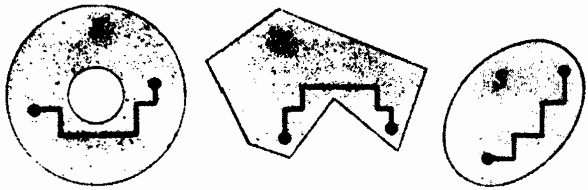
* *برای بحث بیشتر درباب همبندی، ر.ک. فصل ۸ کتاب اپوستل:*

Mathematical Analysis, Addison-Wesley, Reading, Mass., 1957.

دو نقطهٔ a و b در S اختیار کرده و انتگرال خط f از a تا b در امتداد یک مسیر قطعه قطعه هموار در S را درنظر می‌گیریم. مقدار این انتگرال، درحالت‌کلی، به مسیر بین a تا b بستگی دارد. برای بعضی از میدانهای برداری، این انتگرال فقط به نقاط انتهایی a و b بستگی دارد نه به مسیر بین آنها. دراین حالت گوییم انتگرال *از مسیر* **بین a تا b مستقل** است. گوییم انتگرال خط f *از مسیر در S* **مستقل** است اگر که، به ازای هر جفت نقطهٔ a و b در S، از مسیر بین a تا b مستقل باشد.



شکل ۴.۱۰ یک مجموعهٔ ناهمبند، که اجتماع دوقرص مستدیرازهم جداست



(پ) (ب) (آ)

شکل ۳.۱۰ چند نمونه از مجموعه‌های همبند باز

می‌پرسیم: **چه‌میدانهای برداری *انتگرالهای خط مستقل از مسیر دارند*؟** برای پاسخ دادن به این سئوال، اولین و دومین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال را به انتگرالهای خط تعمیم می‌دهیم.

۱۱.۱۰ دومین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال برای انتگرالهای خط

دومین قضیهٔ اساسی برای توابع حقیقی، بصورتی که در جلد یک (قضیهٔ ۳.۵) ثابت شد، می‌گوید که

$$\int_a^b \varphi'(t)\,dt = \varphi(b) - \varphi(a),$$

مشروط براینکه φ' بر بازهٔ بازی شامل هردوی a و b پیوسته باشد. برای تعمیم این نتیجه به انتگرالهای خط، به‌شکل قدری قویتر این قضیه نیاز است که درآن پیوستگی φ' فقط دربارهٔ باز (a,b) فرض باشد.

قضیهٔ ۲.۱۰ . فرض‌کنیم φ *تابعی حقیقی باشد که بر بازهٔ* بستهٔ $[a,b]$ پیوسته بوده،

و انتگرال $\int_a^b \varphi'(t)\,dt$ وجود داشته باشد. اگر φ' بر بازهٔ باز (a, b) پیوسته باشد، داریم

$$\int_a^b \varphi'(t)\,dt = \varphi(b) - \varphi(a).$$

برهان. به‌ازای هر x در $[a, b]$ تعریف می‌کنیم $f(x) = \int_a^x \varphi'(t)\,dt$. می‌خواهیم ثابت کنیم که

$$f(b) = \varphi(b) - \varphi(a). \tag{۲۰۱۰}$$

طبق قضیهٔ ۴۰۳ از جلد یک، f بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ پیوسته است. بنابر قضیهٔ ۱۰۵ از جلد یک، f بر بازهٔ باز (a, b) مشتقپذیر است، با $f'(x) = \varphi'(x)$ به‌ازای هر x در (a, b) . بنابر این، طبق قضیهٔ مشتق صفر (قضیهٔ ۲۰۵ از جلد یک)، تفاضل $f - \varphi$ بر بازهٔ باز (a, b) ثابت است. بنابر پیوستگی، $f - \varphi$ نیز بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ ثابت است. بخصوص، $f(b) - \varphi(b) = f(a) - \varphi(a)$. اما، چون $f(a) = 0$ ، این (۲۰۱۰) را ثابت می‌کند.

قضیهٔ ۳۰۱۰ . دومین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال برای انتگرالهای خط. ***فرض کنیم φ یک میدان اسکالر مشتقپذیر با گرادیان پیوستهٔ $\nabla\varphi$ بر مجموعهٔ همبند باز S در $\mathbf{R}^n$ باشد. دراین صورت، به‌ازای هر دو نقطهٔ $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ که با مسیر قطعه قطعه‌هموار $\boldsymbol{\alpha}$ در S بهم وصل شده‌اند، خواهیم داشت***

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \varphi(\mathbf{b}) - \varphi(\mathbf{a}).$$

برهان. دو نقطهٔ $\mathbf{a}$ و $\mathbf{b}$ را در S اختیارکرده و آنها را با مسیر قطعه قطعه هموار $\boldsymbol{\alpha}$ در S که بر $[a, b]$ تعریف شده بهم وصل می‌کنیم. ابتدا فرض می‌کنیم $\boldsymbol{\alpha}$ بر $[a, b]$ هموار باشد. دراین صورت، انتگرال خط $\nabla\varphi$ از $\mathbf{a}$ تا $\mathbf{b}$ در امتداد $\boldsymbol{\alpha}$ برابر است با

$$\int_{\mathbf{a}}^{\mathbf{b}} \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \int_a^b \nabla\varphi[\boldsymbol{\alpha}(t)] \cdot \boldsymbol{\alpha}'(t)\,dt.$$

بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای، داریم

$$\nabla\varphi[\boldsymbol{\alpha}(t)] \cdot \boldsymbol{\alpha}'(t) = g'(t),$$

که درآن g تابع مرکب است که بر $[a, b]$ با فرمول

$$g(t) = \varphi[\boldsymbol{\alpha}(t)]$$

تعریف شده‌است. g' بربازهٔ باز (a, b) پیوسته‌است، زیرا $\nabla\varphi$ بر S پیوسته و $\boldsymbol{\alpha}$ هموار می‌باشد. بنابراین، می‌توان قضیهٔ ۲۰۱۰ را در مورد g به‌کار برد و به‌دست آورد که

$$\int_a^b \nabla\varphi \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \int_a^b g'(t)\, dt = g(b) - g(a) = \varphi[\boldsymbol{\alpha}(b)] - \varphi[\boldsymbol{\alpha}(a)] = \varphi(\boldsymbol{b}) - \varphi(\boldsymbol{a}).$$

این قضیه را درصورت هموار بودن $\boldsymbol{\alpha}$ ثابت می‌کند.

وقتی $\boldsymbol{\alpha}$ قطعه قطعه هموار باشد، بازهٔ $[a, b]$ را به تعدادی متناهی (مثلا r) زیر بازهٔ $[t_{k-1}, t_k]$ تقسیم می‌کنیم که در هر یک $\boldsymbol{\alpha}$ هموار باشد، و نتیجه‌ای که هم اینک ثابت شد را درهر زیربازه اعمال می‌کنیم. این‌کار نتیجه می‌دهد که

$$\int_a^b \nabla\varphi = \sum_{k=1}^{r} \int_{\boldsymbol{\alpha}(t_{k-1})}^{\boldsymbol{\alpha}(t_k)} \nabla\varphi = \sum_{k=1}^{r} \{\varphi[\boldsymbol{\alpha}(t_k)] - \varphi[\boldsymbol{\alpha}(t_{k-1})]\} = \varphi(\boldsymbol{b}) - \varphi(\boldsymbol{a}),$$

که همان مطلوب می‌باشد.

به عنوان نتیجه‌ای از قضیهٔ ۳۰۱۰، ملاحظه می‌شود که انتگرال خط یک گرادیان ازهرمسیردرمجموعهٔ همبند بازی چون S که درآن گرادیان پیوسته است مستقل‌می‌باشد. درمورد یک مسیر بسته داریم $\boldsymbol{b} = \boldsymbol{a}$ ؛ درنتیجه، $\varphi(\boldsymbol{b}) - \varphi(\boldsymbol{a}) = 0$. به‌عبارت دیگر، ***انتگرال خط یک گرادیان پیوسته حول هر مسیر بستهٔ قطعه قطعه هموار در S صفر است.*** دربخش ۱۴۰۱۰ (درقضیهٔ ۴۰۱۰) ثابت خواهیم کرد که گرادیانها ***تنها*** میدانهای‌برداری پیوستهٔ دارای این خاصیت می‌باشند.

۱۲۰۱۰ کاربردهایی در مکانیک

اگرمیدان‌برداری $\boldsymbol{f}$ گرادیان میدان‌اسکالر φ باشد، φ یک ***تابع پتانسیل*** برای $\boldsymbol{f}$ نامیده می‌شود. در فضای 3 مجموعه‌های تراز φ را ***سطوح همپتانسیل***، و در فضای 2 آنها را ***خطوط همپتانسیل*** می‌نامند. (اگر φ دما باشد، واژهٔ "همپتانسیل" با "همگرما" عوض می‌شود؛ اگر φ فشار باشد، واژهٔ "همفشار" به‌کار می‌رود.)

مثال ۱. درفضای 3 ،فرض‌کنیم $\varphi(x, y, z) = r^n$ ، که درآن $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$.

به‌ازای هر عدد صحیح n ، داریم

$$\nabla(r^n) = nr^{n-2}\boldsymbol{r},$$

که در آن $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. (ر.ک. تمرین ۸ از بخش ۸.۱۴.) بنابراین، φ پتانسیل میدان برداری

$$\boldsymbol{f}(x, y, z) = nr^{n-2}\boldsymbol{r}$$

است. سطوح همپتانسیل φ کره‌های متحدالمرکزی به مرکز مبداء می‌باشند.

مثال ۲. پتانسیل نیوتنی. قانون جاذبهٔ نیوتن می‌گوید که نیروی $\boldsymbol{f}$ که جسمی به‌جرم M بر جسم دیگری به جرم m وارد می‌کند برداری است به‌طول GmM/r^2 ، که در آن G ثابت بوده و r فاصلهٔ بین دو جسم می‌باشد. مبداء را جسم به جرم M می‌گیریم، وفرض می‌کنیم $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ بردارموضع از مبداء تا جسم به جرم m باشد. دراین‌صورت، $r = \|\boldsymbol{r}\|$ و $-\boldsymbol{r}/r$ بردار یکه‌ای همجهت $\boldsymbol{f}$ است؛ درنتیجه، قانون نیوتن خواهد شد

$$\boldsymbol{f} = -GmMr^{-3}\boldsymbol{r}.$$

با اختیار $n = -1$ در مثال ۱، می‌بینیم که نیروی ثقل $\boldsymbol{f}$ گرادیان میدان اسکالر

$$\varphi(x, y, z) = GmMr^{-1}$$

است. این را **پتانسیل نیوتنی** می‌نامند.

کار انجام شده به‌وسیلهٔ نیروی ثقل در حرکت جسمی به جرم m از (x_1, y_1, z_1) تا (x_2, y_2, z_2) برابر است با

$$\varphi(x_1, y_1, z_1) - \varphi(x_2, y_2, z_2) = GmM\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right),$$

که در آن $r_1 = (x_1^2 + y_1^2 + z_1^2)^{1/2}$ و $r_2 = (x_2^2 + y_2^2 + z_2^2)^{1/2}$.
اگر دو نقطه بر یک سطح همپتانسیل واقع باشند، $r_1 = r_2$ و کاری انجام نشده است.

مثال ۳. اصل بقای انرژی مکانیکی. فرض کنیم $\boldsymbol{f}$ یک میدان نیروی پیوسته باشد که درمجموعهٔ همبندباز S دارای پتانسیل φ است. قضیهٔ ۱۰.۳ می‌گوید که کار انجام شده به‌وسیلهٔ $\boldsymbol{f}$ در حرکت جسمی از $\boldsymbol{a}$ تا $\boldsymbol{x}$ در امتداد یک مسیر قطعه قطعه هموار در S مساوی $\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{a})$ ، یعنی تغییر در تابع پتانسیل، است. در مثال ۲ از بخش ۱۰.۶ ثابت شد که این کار مساوی تغییر انرژی جنبشی جسم، یعنی $k(\boldsymbol{x}) - k(\boldsymbol{a})$ ، نیز هست، که

درآن $k(x)$ انرژی جنبشی جسم در موضع x است. بنابراین، داریم

$$k(x) - k(a) = \varphi(x) - \varphi(a),$$

یا

$$k(x) - \varphi(x) = k(a) - \varphi(a). \tag{۳۰.۱۰}$$

اسکالر $-\varphi(x)$ *انرژی پتانسیل** جسم نامیده می‌شود.

اگر a را ثابت‌گرفته و x روی مجموعهٔ S تغییر کند، معادلهٔ (۳۰.۱۰) می‌گویدکه مجموع $k(x)$ و $-\varphi(x)$ ثابت‌است. به‌عبارت دیگر، **اگر میدان نیروگرادیان باشد، مجموع انرژیهای جنبشی و پتانسیل یک جسم متحرک دراین میدان‌ثابت است.** در مکانیک این را اصل بقای انرژی (مکانیکی) می‌نامند. گوییم یک میدان نیرو با یک تابع پتانسیل **محافظه‌کار** است، زیرا انرژی کل، یعنی جنبشی بعلاوهٔ پتانسیل، حفظ می‌شود. دریک میدان محافظه‌کار، در حرکت یک جسم حول یک منحنی بسته تا نقطهٔ شروع کاری صورت نمی‌گیرد. اگر در دستگاه اصطکاک یا چسبندگی وجود داشته باشد، میدان‌نیرو محافظه‌کار نخواهد بود، زیرا اینها سعی می‌کنند انرژی مکانیکی را به‌انرژی حرارتی تبدیل کنند.

۱۲.۱۰ تمرین

۱. از مجموعه‌های‌باز S زیر در $\mathbf{R}^2$ کدامها همبند هستند؟ برای هر مجموعهٔ همبند، دونقطهٔ‌متمایزودلخواه در S اختیار کرده و طرز یافتن یک منحنی قطعه قطعه‌هموار در S که دو نقطه را بهم وصل‌کنند را توضیح دهید.

(آ) $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \geq 0\}$. (ب) $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 0\}$.

(پ) $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1\}$. (ت) $S = \{(x, y) \mid 1 < x^2 + y^2 < 2\}$.

(ث) $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 1 \quad , \quad (x-3)^2 + y^2 > 1\}$.

(ج) $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 < 1$ یا $(x-3)^2 + y^2 < 1\}$.

۲. میدان برداری دوبعدی

$$f(x, y) = P(x, y)\boldsymbol{i} + Q(x, y)\boldsymbol{j}$$

داده‌شده‌است، که‌درآن‌مشتقات‌جزئی $\partial P/\partial y$ و $\partial Q/\partial x$ بر مجموعهٔ‌باز S پیوسته‌اند.

---

* برخی مولفان $-\varphi$ را *تابع پتانسیل* f می‌نامند؛ درنتیجه، *انرژی پتانسیل در* x *مساوی مقدار تابع پتانسیل* φ *در* x *است.*

هرگاه f گرادیان پتانسیلی چون φ باشد، ثابت کنید در هر نقطهٔ S

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \cdot$$

۳ . به‌ازای هر میدان برداری زیر، با استفاده از تمرین ۲ ثابت کنید که f گرادیان نیست. سپس، مسیربستهٔ C را طوری بیابید که $\oint_C f \neq 0$.

(آ) $f(x, y) = yi - xj$.

(ب) $f(x, y) = yi + (xy - x)j$.

۴ . میدان برداری سه‌بعدی

$$f(x, y, z) = P(x, y, z)i + Q(x, y, z)j + R(x, y, z)k$$

داده شده است، که درآن مشتقات جزئی

$$\frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial y}$$

بر مجموعهٔ باز S پیوسته‌اند. هرگاه f گرادیان تابع پتانسیلی چون φ باشد، ثابت کنید در هر نقطه از S

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}, \quad \frac{\partial P}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial x}, \quad \frac{\partial Q}{\partial z} = \frac{\partial R}{\partial y} \cdot$$

۵ . به‌ازای هر میدان برداری زیر، با استفاده از تمرین ۴ ثابت کنید که f گرادیان نیست. سپس، مسیر بستهٔ C را طوری بیابید که $\oint_C f \neq 0$.

(آ) $f(x, y, z) = yi + xj + xk$.

(ب) $f(x, y, z) = xyi + (x^2 + 1)j + z^2k$.

۶ . میدان نیروی f در فضای 3 با معادلهٔ

$$f(x, y, z) = yi + zj + yzk$$

تعریف شده است.

(آ) معین کنید که f محافظه‌کار است یا نه.

(ب) کار انجام درحرکت یک جسم در امتداد منحنی توصیف شده به‌وسیلهٔ

$$\alpha(t) = \cos t\, i + \sin t\, j + e^t k \ ,$$

وقتی t از 0 تا π تغییر می‌کند، را حساب کنید.

۷ . میدان نیروی دوبعدی F به‌وسیلهٔ معادلهٔ

$$F(x, y) = (x + y)i + (x - y)j$$

توصیف می‌شود.

(آ) نشان دهیدکه کار انجام شده به‌وسیلهٔ این نیرو درحرکت یک جسم درامتداد منحنی

$$\alpha(t) = f(t)i + g(t)j, \quad a \le t \le b,$$

فقط به $f(a), f(b), g(a), g(b)$ بستگی دارد.

(ب) کار انجام شده وقتی $f(a) = 1, f(b) = 2, g(a) = 3, g(b) = 4$ را به‌دست آورید.

۸. یک میدان نیرو در مختصات قطبی با معادلهٔ

$$F(r,\theta) = -4 \sin \theta\, i + 4 \sin \theta\, j$$

داده شده است. کار انجام شده در حرکت یک جسم از نقطهٔ $(1, 0)$ تا مبداء در امتداد مارپیچ به معادلهٔ قطبی $r = e^{-\theta}$ را حساب کنید.

۹. میدان نیروی شعاعی یا "مرکزی" F در صفحه را می‌توان به‌شکل $F(x, y) = f(r)r$ نوشت، که‌درآن $r = xi + yj$ و $r = \|r\|$. نشان‌دهیدچنین‌میدان نیرویی‌محافظه‌کار است.

۱۰. کار انجام شده به‌وسیلهٔ نیروی $F(x, y) = (3y^2 + 2)i + 16xj$ در حرکت یک جسم از $(-1,0)$ تا $(1, 0)$ درامتدادنیمهٔ بالایی بیضی $b^2x^2 + y^2 = b^2$ را بیابید. کدام بیضی (یعنی، کدام مقدار از b) کار را مینیمم می‌کند؟

۱۴۰۱۰ اولین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال برای انتگرالهای خط

در بخش ۱۱۰۱۰ دومین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌انتگرالهای خط تعمیم یافت. دراین بخش، اولین قضیهٔ اساسی تعمیم خواهد یافت. به‌یاد می‌آوریم که اولین‌قضیهٔ‌اساسی‌می‌گوید که هر انتگرال نامعین تابع پیوستهٔ f مشتقی مساوی f دارد. یعنی، هرگاه

$$\varphi(x) = \int_a^x f(t)\, dt,$$

آنگاه در نقاط پیوستگی f داریم

$$\varphi'(x) = f(x).$$

برای تعمیم این قضیه به انتگرالهای خط، با میدان برداری f ، که بر مجموعهٔ همبند باز S پیوسته است، شروع کرده، و ازآن درامتداد منحنی قطعه قطعه هموار C از نقطهٔثابت a در S تا نقطهٔدلخواه x انتگرال‌می‌گیریم. سپس، فرض می‌کنیم φ میدان اسکالر تعریف شده با انتگرال خط

$$\varphi(x) = \int_a^x f \cdot d\alpha$$

باشد، که درآن α منحنی C را توصیف می‌کند. چون S همبند است، به هر نقطهٔ x در S می‌توان‌باچنین‌منحنیی رسید. برای آنکه این تعریف $\varphi(x)$ بی‌ابهام باشد، لازم است بدانیم که انتگرال فقط تابع x بوده و از مسیر خاص بین a و x مستقل است. از اینرو طبیعی است انتگرال خطی از f راجستجوکنیم که از مسیر در S مستقل باشد. تحت این شرایط، تعمیم اولین قضیهٔ اساسی شکل زیر را خواهد داشت.

قضیهٔ ۴۰۱۰ . اولین قضیهٔ اساسی برای انتگرالهای خط. *فرض کنیم f یک میدان برداری باشدکه بر مجموعهٔ‌همبندباز S در $\mathbf{R}^n$ پیوسته است، و نیز انتگرال خط f از مسیر در S مستقل باشد. همچنین، a نقطهٔ ثابتی از S بوده و میدان اسکالر φ بر S را با معادلهٔ*

$$\varphi(x) = \int_a^x f \cdot d\alpha$$

تعریف می‌کنیم، که درآن α یک مسیر قطعه قطعه هموار در S بین a و x است. دراین صورت، گرادیان φ موجود و مساوی f می‌باشد؛ یعنی،

$$\nabla\varphi(x) = f(x) \text{ ، } S \text{ در } x \text{ به‌ازای هر }$$

برهان. ثابت‌می‌کنیم مشتق جزئی $D_k\varphi(x)$ به‌ازای هر $k = 1, 2, \ldots, n$ و هر x در S موجود و مساوی $f_k(x)$ ، یعنی مولفهٔ k ام $f(x)$ ، است.

فرض کنیم $B(x; r)$ یک n ـ گوی به‌مرکز x و شعاع r باشد که در S واقع است. هرگاه y یک بردار یکه باشد، نقطهٔ $x + hy$ نیز به‌ازای هر h حقیقی صادق در $0 < |h| < r$ در S است، و می‌توان خارج قسمت تفاضلی

$$\frac{\varphi(x + hy) - \varphi(x)}{h}$$

را تشکیل داد. بخاطر خاصیت جمعی انتگرالهای خط، صورت این کسر را می‌توان به‌شکل

زیر نوشت :

$$\varphi(x + hy) - \varphi(x) = \int_{x}^{x+hy} f \cdot d\alpha,$$

و مسیر بین x و $x + hy$ می‌تواندهر مسیر قطعه قطعه هموار واقع در S باشد. بخصوص، می‌توان از پاره خط توصیف شده به‌وسیلهٔ

$$\alpha(t) = x + thy, \qquad 0 \le t \le 1$$

استفاده کرد. چون $\alpha'(t) = hy$ ، خارج قسمت تفاضلی خواهد شد

$$\frac{\varphi(x + hy) - \varphi(x)}{h} = \int_0^1 f(x + thy) \cdot y\, dt. \tag{۴.۱۰}$$

حال $y = e_k$ ، یعنی بردار یکهٔ k ام مختصات، را اختیار کرده، و توجه می‌کنیم که انتگرالده به‌صورت $f(x + thy) \cdot y = f_k(x + the_k)$ درمی‌آید. سپس، تغییر متغیر $u = ht$, $du = h\, dt$ داده و (۴.۱۰) را به‌شکل زیر می‌نویسیم :

$$\frac{\varphi(x + he_k) - \varphi(x)}{h} = \frac{1}{h}\int_0^h f_k(x + ue_k)\, du = \frac{g(h) - g(0)}{h}, \tag{۵.۱۰}$$

که درآن g تابعی است که بر بازهٔ باز $(-r, r)$ با معادلهٔ

$$g(t) = \int_0^t f_k(x + ue_k)\, du$$

تعریف‌می‌شود. چون‌هرمولفهٔ f_k بر S پیوسته‌است، اولین قضیهٔ اساسی برای‌انتگرالهای معمولی می‌گوید که $g'(t)$ به‌ازای هر t در $(-r, r)$ وجود دارد و

$$g'(t) = f_k(x + te_k).$$

بخصوص، $g'(0) = f_k(x)$. لذا، اگر در (۵.۱۰) فرض کنیم $h \to 0$ ، معلوم می‌شود که

$$\lim_{h\to 0} \frac{\varphi(x + he_k) - \varphi(x)}{h} = \lim_{h\to 0} \frac{g(h) - g(0)}{h} = g'(0) = f_k(x).$$

این ثابت می‌کند که مشتق جزئی $D_k\varphi(x)$ موجود و مساوی $f_k(x)$ است، که حکم مطلوب می‌باشد.

۱۵.۱۰ شرایط لازم و کافی برای گرادیان بودن یک میدان برداری

اولین و دومین قضیهٔ اساسی برای انتگرالهای خط با هم می‌گویند که شرط لازم و کافی

برای آنکه یک میدان برداری پیوسته بر مجموعهٔ باز همبندی گرادیان باشد آن است که انتگرال خط آن بین دو نقطه از مسیر مستقل باشد. حال ثابت می‌کنیم این شرط معادل این است که انتگرال خط حول هر مسیر قطعه قطعه هموار بسته صفر است. همهٔ این شرطها در قضیهٔ زیر خلاصه شده‌اند.

قضیهٔ ۵۰۱۰ . شرایط لازم و کافی برای گرادیان بودن یک میدان برداری. *فرض کنیم f یک میدان برداری پیوسته بر مجموعهٔ همبند باز S در $\mathbf{R}^n$ باشد. دراین صورت، سه حکم زیر معادل می‌باشند:*

(آ) f گرادیان تابع پتانسیلی در S است؛

(ب) انتگرال خط f از مسیر در S مستقل است؛

(پ) انتگرال خط f حول هر مسیر قطعه قطعه هموار بسته در S صفر است.

برهان. *ثابت می‌کنیم* (ب) حکم (آ)، (آ) حکم (پ)، و (پ) حکم (ب) را ایجاب می‌کند. حکم (ب) حکم (آ) را بخاطر اولین قضیهٔ اساسی ایجاب می‌کند. دومین قضیهٔ اساسی نشان می‌دهد که (آ) حکم (پ) را نتیجه می‌دهد.

برای اتمام برهان، نشان می‌دهیم (پ) حکم (ب) را ایجاب می‌کند. فرض کنیم (پ) برقرار بوده و C_1 و C_2 دو منحنی قطعه قطعه هموار در S با نقاط انتهایی یکسان باشند. همچنین، C_1 نمودار تابعی چون α باشد که بر بازهٔ $[a, b]$ تعریف شده است، و C_2 نمودار تابعی چون β باشد که بر $[c, d]$ تعریف شده است.

تابع جدید γ را به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\gamma(t) = \begin{cases} \alpha(t) & \text{اگر } a \le t \le b \\ \beta(b + d - t) & \text{اگر } b \le t \le b + d - c \end{cases}$$

دراین صورت، γ منحنی بستهٔ C را توصیف می‌کند بطوری که

$$\oint_C f \cdot d\gamma = \int_{C_1} f \cdot d\alpha - \int_{C_2} f \cdot d\beta .$$

چون‌بخاطر (پ) $\oint_C f \cdot d\gamma = 0$، داریم $\int_{C_1} f \cdot d\alpha = \int_{C_2} f \cdot d\beta$؛ درنتیجه، انتگرال f ازمسیرمستقل است. این (ب) را ثابت می‌کند. بنابراین، (آ)، (ب)، و (پ) معادل می‌باشند.

تذکر. اگر به‌ازای منحنی بستهٔ خاص C ، $\oint_C f \neq 0$ ، f گرادیان **نیست**. با اینحال، اگر انتگرال خط $\oint_C f$ به‌ازای منحنی بستهٔ خاصی چون C یا حتی به‌ازای بی‌نهایت منحنی بسته صفر باشد، f لزوما" گرادیان **نمی‌باشد**. مثلا" ،به‌آسانی می‌توان تحقیق کرد که انتگرال خط میدان برداری $f(x, y) = xi + xyj$ به‌ازای هر دایرهٔ C به مرکز مبداء صفر است. معهذا، این میدان برداری خاص گرادیان نیست.

۱۶.۱۰ شرایط لازم برای گرادیان بودن یک میدان برداری

با استفاده از اولین قضیهٔ اساسی، می‌توان گرادیان بودن یا نبودن یک میدان برداری بر مجموعهٔ همبند بازی چون S را معین کرد. اگر انتگرال خط f از مسیر در S مستقل باشد، میدان اسکالر φ را با انتگرالگیری از f از نقطهٔ ثابتی تا نقطهٔ دلخواه x در S درامتداد یک مسیر مناسب در S تعریف می‌کنیم. سپس، مشتقات جزئی φ را حساب کرده و $D_k\varphi$ را با f_k ، یعنی مولفهٔ k ام f ، مقایسه می‌کنیم. هرگاه به‌ازای هر x در S و هر k ، $D_k\varphi(x) = f_k(x)$ ، آنگاه f بر S گرادیان و φ پتانسیل است. هرگاه به‌ازای k و x ی $D_k\varphi(x) \neq f_k(x)$ ، آنگاه f بر S گرادیان **نمی‌باشد**.

قضیهٔ زیر آزمون دیگری برای تعیین گرادیان **نبودن** میدان برداری f به‌دست می‌دهد. این آزمون بخصوص در عمل مفید است، زیرا به‌انتگرالگیری نیازی ندارد.

قضیهٔ ۶.۱۰ . شرایط لازم برای گرادیان بودن یک میدان برداری . *فرض کنیم $f = (f_1, \ldots, f_n)$ یک میدان‌برداری به‌طور پیوسته مشتقپذیر بر مجموعهٔ باز S در R^n باشد. هرگاه f بر S گرادیان باشد، آنگاه مشتقات جزئی مولفه‌های f با معادلات زیر بهم مربوط می‌باشند. به‌ازای $i, j = 1, 2, \ldots, n$ و هر x در S ،*

$$D_i f_j(x) = D_j f_i(x) \,. \tag{۶.۱۰}$$

برهان. اگر f گرادیان باشد، به‌ازای تابع پتانسیلی چون φ ، $f = \nabla\varphi$. این یعنی به‌ازای هر $j = 1, 2, \ldots, n$ ،

$$f_j = D_j\varphi \,.$$

با مشتقگیری از طرفین این معادله نسبت به x_i ، معلوم می‌شود که

$$D_i f_j = D_i D_j \varphi \,.$$

بهمین نحو، داریم

$$D_j f_i = D_j D_i \varphi .$$

چون مشتقات جزئی $D_i f_j$ و $D_j f_i$ بر S پیوسته‌اند، دو مشتق جزئی مخلوط $D_i D_j \varphi$ و $D_j D_i \varphi$ باید بر S مساوی باشند. این (۶۰۱۰) را ثابت خواهد کرد.

مثال ۱. معین کنید که میدان برداری

$$f(x, y) = 3x^2 y\boldsymbol{i} + x^3 y\boldsymbol{j}$$

بر زیر مجموعهٔ بازی از $\mathbf{R}^2$ گرادیان هست یا نه.

حل. در اینجا داریم

$$f_1(x, y) = 3x^2 y, \qquad f_2(x, y) = x^3 y.$$

مشتقات جزئی $D_2 f_1$ و $D_1 f_2$ عبارتند از

$$D_2 f_1(x, y) = 3x^2, \qquad D_1 f_2(x, y) = 3x^2 y.$$

چون $D_2 f_1(x, y) \neq D_1 f_2(x, y)$ جز وقتی $x = 0$ یا $y = 1$، این میدان برداری بر هیچ زیرمجموعهٔ بازی از $\mathbf{R}^2$ گرادیان نیست.

مثال زیر نشان می‌دهد که شرایط قضیهٔ ۶۰۱۰ همیشه برای گرادیان بودن یک میدان برداری کافی نیستند.

مثال ۲. فرض کنیم S مجموعهٔ تمام $(x, y) \neq (0, 0)$ هایی در $\mathbf{R}^2$ باشد، و میدان برداری $\boldsymbol{f}$ بر S با معادلهٔ

$$f(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2}\boldsymbol{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\boldsymbol{j}$$

تعریف شده باشد. نشان دهید که همه‌جا بر S، $D_1 f_2 = D_2 f_1$ ولی، با اینحال، $\boldsymbol{f}$ بر S گرادیان نیست.

حل. به‌آسانی می‌شود تحقیق کرد که به‌ازای هر (x, y) در S، $D_1 f_2(x, y) = D_2 f_1(x, y)$. (ر.ک. تمرین ۱۷ در بخش ۱۸۰۱۰).

برای اثبات گرادیان نبودن f بر S ،انتگرال خط f را حول دایرهٔ یکهٔ

$$\alpha(t) = \cos t\, \boldsymbol{i} + \sin t\, \boldsymbol{j}, \qquad 0 \le t \le 2\pi$$

حساب می‌کنیم . خواهیم داشت

$$\oint \boldsymbol{f} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \int_0^{2\pi} \boldsymbol{f}[\boldsymbol{\alpha}(t)] \cdot \boldsymbol{\alpha}'(t)\, dt = \int_0^{2\pi} (\sin^2 t + \cos^2 t)\, dt = 2\pi .$$

چون انتگرال خط حول این مسیر بسته صفر نیست ، f بر S گرادیان نمی‌باشد . خواص دیگر این میدان برداری در تمرین ۱۸ از بخش ۱۸۰۱۰ مطرح می‌شوند .

در آخر این فصل ثابت می‌کنیم که شرایط لازم قضیهٔ ۶۰۱۰ اگر بر مجموعهٔ محدب بازی برقرار باشند کافی نیز هستند . (ر.ک. قضیهٔ ۹۰۱۰ .)

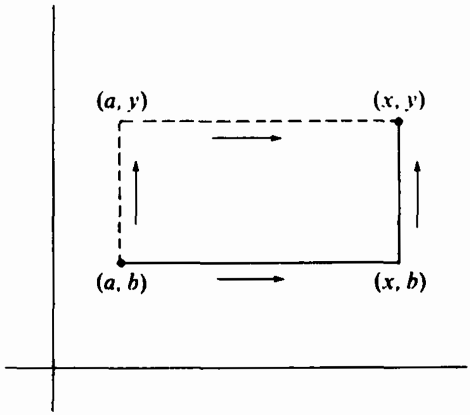
۱۷۰۱۰ روشهای خاص برای ساختن توابع پتانسیل

اولین قضیهٔ اساسی برای انتگرالهای خط روشی را نیز برای ساختن توابع پتانسیل به‌دست می‌دهد . هرگاه f گرادیان پیوسته‌ای بر مجموعهٔ همبند باز S باشد ، انتگرال خط f از مسیر در S مستقل است . بنابراین ، می‌توان پتانسیل φ را با صرفاً " انتگرالگیری از f از نقطهٔ ثابتی مانند a تا نقطهٔ دلخواه x در S ، با استفاده از یک مسیر قطعه قطعه هموار واقع در S ، به‌دست آورد . میدان اسکالر حاصل به نقطهٔ شروع a بستگی دارد . اگر با نقطهٔ شروع دیگری ، مثلا " b ، آغاز کنیم ، پتانسیل جدید ψ را خواهیم داشت . اما ، بخاطر خاصیت جمعی انتگرالهای خط، φ و ψ فقط می‌توانند در یک ثابت تفاوت داشته باشند ، و این ثابت انتگرال f از a تا b می‌باشد .

امثلهٔ زیر استفاده از مسیرهای مختلف انتگرالگیری را توضیح خواهند داد .

مثال ۱ . ساختن پتانسیل بر یک مستطیل باز . هرگاه f گرادیان پیوسته‌ای بر یک مستطیل باز در $\mathbf{R}^n$ باشد ، پتانسیل φ را می‌توان با انتگرالگیری از یک نقطهٔ ثابت تا نقطه‌ای دلخواه در امتداد مجموعه‌ای از پاره خطهای موازی محورهای مختصات ساخت . یک مثال دوبعدی در شکل ۵۰۱۰ نموده شده است .

می‌توان ابتدا از (a, b) تا (x, b) درامتداد یک پاره خط افقی ، بعد از (x, b) تا (x, y) در امتداد یک پاره خط قائم انتگرال گرفت . در امتداد پاره خط افقی از نمایش پارامتری



شکل ۵۰۱۰ دو مسیر چندضلعی از (a, b) تا (x, y)

$$\alpha(t) = ti + bj, \qquad a \leq t \leq x,$$

و در امتداد پاره خط قائم از نمایش

$$\alpha(t) = xi + tj, \quad b \leq t \leq y$$

استفاده می‌کنیم . اگر $f(x, y) = f_1(x, y)i + f_2(x, y)j$ ، فرمول حاصل برای پتانسیل $\varphi(x, y)$ عبارت است از

$$\varphi(x, y) = \int_a^x f_1(t, b)\, dt + \int_b^y f_2(x, t)\, dt. \tag{۷۰۱۰}$$

می‌شد ابتدا از (a, b) تا (a, y) در امتداد یک پاره خط قائم و سپس از (a, y) تا (x, y) در امتداد یک پاره خط افقی ، بصورتی که با خطوط منقطع در شکل ۵۰۱۰ نشان داده شده ، نیز انتگرال گرفت . با این‌کار فرمول دیگری برای $\varphi(x, y)$ به‌دست می‌آید :

$$\varphi(x, y) = \int_b^y f_2(a, t)\, dt + \int_a^x f_1(t, y)\, dt. \tag{۸۰۱۰}$$

هر دو فرمول (۷۰۱۰) و (۸۰۱۰) یک مقدار برای $\varphi(x, y)$ به‌دست می‌دهند ،زیرا انتگرال خط یک گرادیان از مسیر مستقل است .

مثال ۲ . ساختن تابع پتانسیل بااستفاده از انتگرالهای نامعین . انتگرالهای نامعین

اغلب درساده سازی محاسبات توابع پتانسیل یاری دهنده‌اند . مثلا" ، فرض‌کنیم میدان برداری سه‌بعدی $f=(f_1,f_2,f_3)$ گرادیان تابع پتانسیل φ بر مجموعهٔ باز S در $\mathbf{R}^3$ باشد . دراین صورت ، همه‌جا بر S داریم

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}=f_1, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial y}=f_2, \qquad \frac{\partial\varphi}{\partial z}=f_3 .$$

با استفاده از انتگرالهای نامعین و انتگرالگیری از معادلهٔ اول نسبت به x (ثابت گرفتن y و z) ، معلوم می‌شود که

$$\varphi(x, y, z) = \int f_1(x, y, z)\,dx + A(y, z),$$

که درآن $A(y,z)$ "ثابت‌انتگرالگیری" است‌که‌باید معین شود . بهمین نحو ، اگر ازمعادلهٔ $\partial\varphi/\partial y=f_2$ نسبت‌به y و از معادلهٔ $\partial\varphi/\partial z=f_3$ نسبت به z انتگرال بگیریم ، روابط دیگر

$$\varphi(x, y, z) = \int f_2(x, y, z)\,dy + B(x, z)$$

و

$$\varphi(x, y, z) = \int f_3(x, y, z)\,dz + C(x, y)$$

را خواهیم‌داشت ،که‌درآنها $B(x,z)$ و $C(x,y)$ توابعی هستند که باید معین شوند . یافتن φ یعنی یافتن سه تابع $A(y,z)$ ، $B(x,z)$ ، و $C(x,y)$ بطوری که طرفهای راست هر سه معادله‌برای $\varphi(x,y,z)$ یکی‌باشند . این ، همانطور که مثال زیر نشان می‌دهد ، دربسیاری حالات با امتحان صورت می‌گیرد .

مثال ۳. برای میدان برداری تعریف شده بر $\mathbf{R}^3$ با معادلهٔ

$$f(x, y, z) = (2xyz + z^2 - 2y^2 + 1)i + (x^2z - 4xy)j + (x^2y + 2xz - 2)k$$

تابع پتانسیل φ را پیدا کنید .

حل . بی‌آنکه از قبل بدانیم که f تابع پتانسیلی چون φ دارد یا نه ، سعی می‌کنیم ، با فرض وجود پتانسیل φ ، پتانسیلی همانند مثال ۲ که مختصرا" توضیح شده بسازیم .

با انتگرالگیری از مولفهٔ f_1 نسبت به x ، معلوم می‌شود که

$$\varphi(x, y, z) = \int (2xyz + z^2 - 2y^2 + 1)\, dx + A(y, z)$$
$$= x^2yz + xz^2 - 2xy^2 + x + A(y, z).$$

با انتگرالگیری از f_2 نسبت به y و سپس از f_3 نسبت به z ، داریم

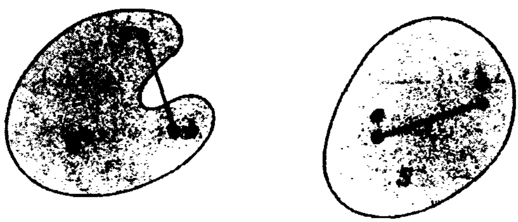
$$\varphi(x, y, z) = \int (x^2z - 4xy)\, dy + B(x, z) = x^2yz - 2xy^2 + B(x, z),$$
$$\varphi(x, y, z) = \int (x^2y + 2xz - 2)\, dz + C(x, y) = x^2yz + xz^2 - 2z + C(x, y).$$

با امتحان دیده می‌شود که انتخابهای $A(y, z) = -2z$ ، $B(x, z) = xz^2 + x - 2z$ ، و $C(x, y) = x - 2xy^2$ سه معادله را یکسان می‌کند؛ بنابراین، تابع φ که با معادلهٔ

$$\varphi(x, y, z) = x^2yz + xz^2 - 2xy^2 + x - 2z$$

داده می‌شود یک پتانسیل برای f بر $\mathbf{R}^3$ است.

مثال ۴. ساختن پتانسیل بر یک مجموعهٔ محدب. مجموعهٔ S در $\mathbf{R}^n$ را محدب نامیم اگر که هر جفت نقطه در S را بتوان با پاره خطی که همهٔ نقاطش در S است بهم وصل کرد. مثالی در شکل ۶.۱۰ نموده شده است. هر مجموعهٔ محدب باز همبند است.



نامحدب   محدب

شکل ۶.۱۰ در مجموعهٔ محدب S ، پاره خط واصل بین a و b به‌ازای هر دو نقطهٔ a و b در S در S است.

اگر f گرادیان پیوسته‌ای بر یک مجموعهٔ محدب باز باشد، پتانسیل φ را می‌توان با انتگرالگیری از f از نقطهٔ ثابت a در S تا نقطهٔ دلخواه x در امتداد پاره خط واصل بین a و x ساخت. این پاره خط را می‌توان با تابع

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = \boldsymbol{a} + t(\boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}), \quad 0 \le t \le 1,$$

پارامتریزه کرد. از این نتیجه می‌شود که $\boldsymbol{\alpha}'(t) = \boldsymbol{x} - \boldsymbol{a}$ ؛ درنتیجه، پتانسیل نظیر از

انتگرال

$$\varphi(x) = \int_0^1 f(a + t(x - a)) \cdot (x - a)\, dt \qquad (۹.۱۰)$$

به‌دست می‌آید.

اگر S شامل مبداء باشد، می‌توان $a = O$ را اختیار کرد و (۹.۱۰) را به‌طور ساده‌تر به‌صورت

$$\varphi(x) = \int_0^1 f(tx) \cdot x\, dt \qquad (۱۰.۱۰)$$

نوشت.

۱۸.۱۰ تمرین

درهریک از تمرینهای ۱ تا ۱۲، میدان برداری f با فرمولهای داده شده تعریف شده است. درهر حالت معین کنید که f گرادیان یک میدان اسکالر هست یا نه. وقتی f گرادیان است، تابع پتانسیل نظیر φ را بیابید.

۱. $f(x, y) = xi + yj$.

۲. $f(x, y) = 3x^2yi + x^3j$.

۳. $f(x, y) = (2xe^y + y)i + (x^2e^y + x - 2y)j$.

۴. $f(x, y) = (\sin y - y \sin x + x)i + (\cos x + x \cos y + y)j$.

۵. $f(x, y) = [\sin (xy) + xy \cos (xy)]i + x^2 \cos (xy)j$.

۶. $f(x, y, z) = xi + yj + zk$.

۷. $f(x, y, z) = (x + z)i - (y + z)j + (x - y)k$.

۸. $f(x, y, z) = 2xy^3i + x^2z^3j + 3x^2yz^2k$.

۹. $f(x, y, z) = 3y^4z^2i + 4x^3z^2j - 3x^2y^2k$.

۱۰. $f(x, y, z) = (2x^2 + 8xy^2)i + (3x^3y - 3xy)j - (4y^2z^2 + 2x^3z)k$.

۱۱. $f(x, y, z) = (y^2 \cos x + z^3)i - (4 - 2y \sin x)j + (3xz^2 + 2)k$.

۱۲. $f(x, y, z) = (4xy - 3x^2z^2 + 1)i + 2(x^2 + 1)j - (2x^3z + 3z^2)k$.

۱۳. مایعی در صفحهٔ xy جریان دارد. هر ذره به‌طور مستقیم از مبداء دور می‌شود. اگر یک ذره در فاصلهٔ r از مبداء سرعتش ar^n باشد که درآن a و n ثابت‌اند،

(آ) مقادیر a و n را طوری بیابید که میدان برداری سرعت گرادیان میدان اسکالری باشد؛

(ب) وقتی سرعت گرادیان است، تابع پتانسیلی برای آن به‌دست آورید. حالت $n = -1$ باید جداگانه بررسی شود.

۱۴. اگر φ و ψ هر دوتابع پتانسیل برای میدان برداری پیوستهٔ f بر مجموعهٔ همبند باز S در $\mathbf{R}^n$ باشند، ثابت کنید که $\varphi - \psi$ بر S ثابت است.

۱۵. فرض کنید S مجموعهٔ تمام $x \neq O$ های در $\mathbf{R}^n$ باشد. همچنین، $r = \|x\|$، و f میدان برداری تعریف شده بر S با معادلهٔ

$$f(x) = r^p x$$

باشد، که درآن p یک ثابت حقیقی است. برای f یک تابع پتانسیل بر S پیدا کنید. حالت $p = -2$ باید جداگانه بررسی شود.

۱۶. تمرین ۱۵ را برای میدان برداری تعریف شده با معادلهٔ

$$f(x) = \frac{g'(r)}{r}\, x,$$

که درآن g تابعی حقیقی است که همه‌جا بر $\mathbf{R}^1$ مشتق پیوسته دارد، حل کنید.

تمرینهای زیر در رابطه با میدان برداری f است که بر مجموعهٔ S مرکب از تمام نقاط $(x, y) \neq (0, 0)$ در $\mathbf{R}^2$ با معادلهٔ

$$f(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\, i + \frac{x}{x^2 + y^2}\, j$$

تعریف شده است. درمثال ۲ از بخش ۱۶.۱۰ نشان دادیم که، اگرچه همه‌جا بر S، $D_1 f_2 = D_2 f_1$، f یک گرادیان بر S نیست.

۱۷. تحقیق کنید که به‌ازای هر نقطهٔ (x, y) در S، داریم

$$D_1 f_2(x, y) = D_2 f_1(x, y) = \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2}.$$

۱۸. این تمرین نشان می‌دهد که f بر مجموعهٔ

$$T = \mathbf{R}^2 - \{(x, y) \mid y = 0, \quad x \leq 0\}$$

مرکب‌از تمام نقاط صفحهٔ xy جز نقاط واقع بر محور نامثبت x یک گرادیان است.

(آ) اگر $(x, y) \in T$، x و y را در مختصات قطبی

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

بیان کنید، که درآنها $r > 0$ و $-\pi < \theta < \pi$. ثابت کنید θ از فرمولهای زیربه دست می‌آید:

$$\theta = \begin{cases} \arctan\dfrac{y}{x} & \text{،} \quad x > 0 \quad \text{اگر} \\ \dfrac{\pi}{2} & \text{،} \quad x = 0 \quad \text{اگر} \\ \arctan\dfrac{y}{x} + \pi & \text{،} \quad x < 0 \quad \text{اگر} \end{cases}$$

[تعریف تابع آرک تانژانت را به‌یاد آورید: به‌ازای هر t حقیقی، $\arctan t$ عدد حقیقی منحصر بفرد φ است که در دو شرط $\tan\varphi = t$ و $-\pi/2 < \varphi < \pi/2$ صدق می‌کند.]

(ب) نتیجه بگیرید که به‌ازای هر (x, y) در T ،

$$\frac{\partial\theta}{\partial x} = -\frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad \frac{\partial\theta}{\partial y} = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

این ثابت می‌کند که θ یک تابع پتانسیل برای f بر مجموعهٔ T است. این تمرین نشان‌می‌دهدکه وجود تابع پتانسیل نه فقط‌به میدان برداری f بلکه به مجموعه‌ای که میدان برداری در آن تعریف شده نیز بستگی دارد.

۱۹۰۱۰ کاربردهایی در معادلات دیفرانسیل کامل مرتبهٔ اول

بعضی‌از معادلات دیفرانسیل مرتبهٔ اول را می‌توان به‌کمک توابع پتانسیل حل کرد. فرض کنیم یک معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول به‌شکل

$$y' = f(x, y)$$

داشته باشیم. اگر طرفین آن را در سازهٔ صفر نشو $Q(x, y)$ ضرب کنیم، این معادله به شکل $Q(x, y)y' - f(x, y)Q(x, y) = 0$ درمی‌آید. سپس، اگر به‌جای $-f(x, y)Q(x, y)$ بنویسیم $P(x, y)$ و، با استفاده از نماد لایب‌نیتز برای مشتقها، به‌جای y' بنویسیم dy/dx ، معادلهٔ دیفرانسیل شکل زیر را خواهد گرفت:

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0. \qquad (۱۱۰۱۰)$$

فرض‌کنیم P و Q بر مجموعهٔ همبند بازی چون S در صفحه پیوسته باشند. به‌هرچنین معادلهٔ دیفرانسیلی می‌توان یک میدان برداری مانند V مربوط‌کرد، که

$$V(x, y) = P(x, y)\boldsymbol{i} + Q(x, y)\boldsymbol{j}.$$

مولفه‌های P و Q ضرایب dx و dy درمعادلهٔ (۱۱۰۱۰) اند. معادلهٔ دیفرانسیل (۱۱۰۱۰) را در S **کامل** گویندا گرکه‌میدان برداری V گرادیان یک پتانسیل باشد؛ یعنی، اگربه‌ازای هرنقطهٔ (x, y) در S، $V(x, y) = \nabla\varphi(x, y)$، که‌درآن φ یک میدان اسکالر است. وقتی چنین φ ای موجود باشد، خواهیم داشت $\partial\varphi/\partial x = P$ و $\partial\varphi/\partial y = Q$، و معادلهٔ دیفرانسیل (۱۱۰۱۰) خواهد شد

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x}dx + \frac{\partial\varphi}{\partial y}dy = 0.$$

حال ثابت می‌کنیم هرجواب این معادلهٔ دیفرانسیل در رابطهٔ $\varphi(x, y) = C$ صدق می‌کند، که‌درآن C ثابت است. به‌طوردقیقتر، فرض کنیم جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل (۱۱۰۱۰) مانند Y وجود داشته باشد که بر بازهٔ باز (a, b) تعریف شده است بطوری که نقطهٔ $(x, Y(x))$ به‌ازای هر x در (a, b) در S می‌باشد. ثابت می‌کنیم به‌ازای ثابتی چون C،

$$\varphi[x, Y(x)] = C \quad .$$

برای این‌کار تابع مرکب g که بر (a, b) با معادلهٔ

$$g(x) = \varphi[x, Y(x)]$$

تعریف شده است را معرفی می‌کنیم. طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای، مشتق g عبارت است از

$$g'(x) = D_1\varphi[x, Y(x)] + D_2\varphi[x, Y(x)]Y'(x) = P(x, y) + Q(x, y)y', \qquad (۱۲۰۱۰)$$

که درآن $y = Y(x)$ و $y' = Y'(x)$. اگر y در (۱۱۰۱۰) صدق کند، $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$؛ درنتیجه، به‌ازای هر x در (a, b)، $g'(x) = 0$ و، لذا g بر (a, b) ثابت است. این ثابت می‌کند که هر جواب y در معادلهٔ $\varphi(x, y) = C$ صدق می‌کند.

حال می‌توان با همین استدلال در جهت عکس جوابی از معادلهٔ دیفرانسیل به‌دست آورد. فرض کنیم معادلهٔ

$$\varphi(x, y) = C \qquad (۱۳۰۱۰)$$

y رابه‌صورت تابع مشتقپذیری از x، مثلا" $y = Y(x)$ به‌ازای هر x در بازهٔ (a, b)، تعریف کند، و قرار می‌دهیم $g(x) = \varphi[x, Y(x)]$. معادلهٔ (۱۳۰۱۰) ایجاب می‌کند که g بر (a, b) ثابت باشد. لذا، طبق (۱۲۰۱۰)، $P(x, y) + Q(x, y)y' = 0$؛ درنتیجه، y یک جواب است. پس، قضیهٔ زیر را ثابت کرده‌ایم.

قضیهٔ ۷۰۱۰ . فرض کنیم معادلهٔ دیفرانسیل

$$P(x, y)\, dx + Q(x, y)\, dy = 0 \qquad (۱۴۰۱۰)$$

در مجموعهٔ همبندباز S کامل بوده، و φ یک میدان اسکالر باشد که همه جا در S در

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = P \quad \text{و} \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = Q$$

صدق می‌کند. دراین صورت، هر جواب $y = Y(x)$ از (۱۴۰۱۰) که نمودارش در S باشد در معادلهٔ $\varphi[x, Y(x)] = C$ به‌ازای ثابتی چون C صدق خواهد کرد. بعکس، هرگاه معادلهٔ

$$\varphi(x, y) = C$$

y را به‌طور ضمنی به‌صورت تابع مشتقپذیری از x تعریف کند، این تابع جواب معادلهٔ دیفرانسیل (۱۴۰۱۰) خواهد بود.

قضیهٔ فوق روش سرراستی برای حل معادلات دیفرانسیل کامل مرتبهٔ اول به‌دست می‌دهد. کافی است یک تابع پتانسیل مانند φ ساخت و سپس معادلهٔ $\varphi(x, y) = C$ را نوشت، که درآن C ثابت است. وقتی این معادله y را به‌طور ضمنی به‌صورت تابعی از x تعریف‌کند، این y در (۱۴۰۱۰) صدق‌خواهد کرد. لذا، می‌توان معادلهٔ (۱۳۰۱۰) را به‌عنوان نمایش یک خانوادهٔ یک پارامتری از منحنیهای انتگرال به‌کار برد. البته، تنها مقادیر مجاز C آنهایی هستند که به‌ازای (x_0, y_0) ی در S، $\varphi(x_0, y_0) = C$.

مثال ۱ . معادلهٔ دیفرانسیل

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{3x^2 + 6xy^2}{6x^2y + 4y^3}$$

را درنظر می‌گیریم. با از بین بردن مخرجها، می‌توان معادله را به‌صورت زیرنوشت:

$$(3x^2 + 6xy^2)\, dx + (6x^2y + 4y^3)\, dy = 0.$$

این حالت خاصی از (۱۴۰۱۰) است به ازای $P(x, y) = 3x^2 + 6xy^2$ و $Q(x, y) = 6x^2y + 4y^3$. با انتگرالگیری از P نسبت به x و انتگرالگیری از Q نسبت به y و مقایسهٔ نتایج، معلوم می‌شود که یک تابع پتانسیل مانند φ از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\varphi(x, y) = x^3 + 3x^2y^2 + y^4 .$$

طبق قضیهٔ ۷۰۱۰ ، هر جواب معادلهٔ دیفرانسیل به‌ازای C ای در

$$x^3 + 3x^2y^2 + y^4 = C$$

صدق می‌کند. این یک نمایش ضمنی خانواده‌ای از منحنیهای انتگرال است. دراین‌حالت خاص، معادله نسبت به y^2 از درجهٔ دو است و می‌توان با حل آن فرمول صریحی‌نسبت به y برحسب x و C به‌دست آورد.

مثال ۲. معادلهٔ دیفرانسیل مرتبهٔ اول

$$y\,dx + 2x\,dy = 0 \tag{۱۵۰۱۰}$$

را درنظر می‌گیریم. دراینجا $P(x, y) = y$ و $Q(x, y) = 2x$. چون $\partial P/\partial y = 1$ و $\partial Q/\partial x = 2$ ، این معادلهٔ دیفرانسیل کامل نیست. با اینحال، اگر طرفین را در y ضرب کنیم، معادله‌ای به‌دست می‌آید که کامل *است*:

$$y^2\,dx + 2xy\,dy = 0 . \tag{۱۶۰۱۰}$$

یک پتانسیل میدان برداری $y^2\boldsymbol{i} + 2xy\boldsymbol{j}$ عبارت است از $\varphi(x, y) = xy^2$ ، و هر جواب (۱۶۰۱۰) در رابطهٔ $xy^2 = C$ صدق می‌کند. این رابطه نیز نمایش خانواده‌ای از منحنیهای انتگرال برای معادلهٔ (۱۵۰۱۰) است.

ضریب y که (۱۵۰۱۰) را به‌یک معادلهٔ کامل بدل می‌کند ***سازهٔ انتگرالگیری*** نام دارد. درحالت کلی، اگر با ضرب یک معادلهٔ خطی مرتبهٔ اول در سازهٔ ناصفر $\mu(x, y)$ معادلهٔ کاملی حاصل شود، ضریب $\mu(x, y)$ را سازهٔ انتگرالگیری معادلهٔ اصلی می‌نامند. یک معادلهٔ دیفرانسیل ممکن است بیش از یک سازهٔ انتگرالگیری داشته باشد. مثلاً، $\mu(x, y) = 2xy^3$ سازهٔ انتگرالگیری دیگری از (۱۵۰۱۰) است. برخی از معادلات دیفرانسیل خاص که سازه‌های انتگرالگیری آنها ساده به‌دست می‌آیند در مجموعه تمرینات زیر مطرح شده‌اند.

۲۰۰۱۰ تمرین

نشان دهید که معادلات دیفرانسیل تمرینهای ۱ تا ۵ کامل‌اند، و درهر حالت یک خانوادهٔ یک پارامتری از منحنیهای انتگرال را پیدا کنید.

۱ . $(x + 2y)\,dx + (2x + y)\,dy = 0$.

۲ . $2xy\,dx + x^2\,dy = 0$.

۳ . $(x^2 - y)\,dx - (x + \sin^2 y)\,dy = 0$.

۴ . $4\sin x \sin 3y \cos x\,dx - 3\cos 3y \cos 2x\,dy = 0$.

۵ . $(3x^2y + 8xy^2)\,dx + (x^3 + 8x^2y + 12ye^y)\,dy = 0$.

۶ . نشان دهید که یک معادلهٔ مرتبهٔ اول خطی ، یعنی $y' + P(x)y = Q(x)$ ، دارای سازهٔ انتگرالگیری $\mu(x) = e^{\int P(x)dx}$ است . با استفاده از این ، معادله را حل کنید .

۷ . فرض کنید $\mu(x, y)$ یک سازهٔ انتگرالگیری معادلهٔ دیفرانسیل $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ باشد . نشان دهید که

$$\frac{\partial P}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial x} = Q\frac{\partial}{\partial x}\log|\mu| - P\frac{\partial}{\partial y}\log|\mu| .$$

با استفاده از این معادله ، قواعد زیر را برای یافتن سازه‌های انتگرالگیری نتیجه بگیرید :

(آ) هرگاه $(\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x)/Q$ فقط تابع x باشد ، مثلاً بصورت $f(x)$ ، آنگاه $e^{\int f(x)dx}$ یک سازهٔ انتگرالگیری است ؛

(ب) هرگاه $(\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y)/P$ فقط تابع y باشد ، مثلاً بصورت $g(y)$ ، آنگاه $e^{\int g(y)dy}$ یک سازهٔ انتگرالگیری است .

۸ . با استفاده از تمرین ۷ ، سازه‌های انتگرالگیری معادلات زیر را یافته ، و یک خانوادهٔ یک پارامتری از منحنیهای انتگرال را معین نمایید :

(آ) $y\,dx - (2x + y)\,dy = 0$ ؛

(ب) $(x^3 + y^3)\,dx - xy^2\,dy = 0$.

۹ . هرگاه $\partial P/\partial y - \partial Q/\partial x = f(x)Q(x, y) - g(y)P(x, y)$ ، نشان دهید که $\exp\{\int f(x)\,dx + \int g(y)\,dy\}$ یک سازهٔ انتگرالگیری معادلهٔ دیفرانسیل $P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$ است . این سازهٔ انتگرالگیری را برای هریک از معادلات زیر پیدا کرده و یک خانوادهٔ یک پارامتری از منحنیهای انتگرال را به‌دست آورید :

(آ) $(2x^2y + y^2)\,dx + (2x^3 - xy)\,dy = 0$ ؛

(ب) $(e^x \sec y - \tan y)\,dx + dy = 0$.

۱۰ . معادلات دیفرانسیل

$$(3y + 4xy^2)\,dx + (4x + 5x^2y)\,dy = 0,$$
$$(6y + x^2y^2)\,dx + (8x + x^3y)\,dy = 0$$

یک سازهٔ انتگرالگیری مشترک دارند. این سازهٔ انتگرالگیری را یافته و برای هر معادله یک خانوادهٔ یک پارامتری از منحنیهای انتگرال به‌دست آورید.

۲۱۰۱۰ توابع پتانسیل بر مجموعه‌های محدب

در قضیهٔ ۶۰۱۰ ثابت شد که شرایط

$$D_i f_j(x) = D_j f_i(x)$$

برای‌گرادیان‌بودن میدان برداری به‌طور پیوسته مشتقپذیر $f = (f_1, \ldots, f_n)$ بر مجموعهٔ بازی چون S در $\mathbf{R}^n$ لازم‌اند. بعد، با مثال، نشان دادیم که این شرایط همیشه کافی نیستند. دراین‌بخش‌ثابت می‌کنیم این شرایط درصورت محدب بودن مجموعهٔ S کافی‌اند. در اثبات‌خوداز قضیهٔ زیرکه مربوط به‌مشتقگیری زیر علامت انتگرال است استفاده‌می‌کنیم.

قضیهٔ ۸۰۱۰. فرض‌کنیم S یک بازهٔ بسته در $\mathbf{R}^n$ با درون ناتهی بوده و $J = [a, b]$ بازهٔ بسته‌ای در $\mathbf{R}^1$ باشد. همچنین، J_{n+1} بازهٔ بستهٔ $S \times J$ در $\mathbf{R}^{n+1}$ باشد. هر نقطه در J_{n+1} را به‌صورت (x, t) می‌نویسیم، که درآن $x \in S$ و $t \in J$:

$$(x, t) = (x_1, \ldots, x_n, t).$$

فرض‌کنیم ψ یک میدان اسکالر تعریف شده بر J_{n+1} باشد بطوری که مشتق جزئی $D_k\psi$ بر J_{n+1}، که k یکی از $1, 2, \ldots, n$ است، پیوسته می‌باشد. میدان اسکالر φ را بر S با معادلهٔ

$$\varphi(x) = \int_a^b \psi(x, t)\, dt$$

تعریف می‌کنیم. دراین صورت، مشتق جزئی $D_k\varphi$ در هر نقطهٔ درونی S موجود بوده‌و از فرمول

$$D_k\varphi(x) = \int_a^b D_k\psi(x, t)\, dt$$

به‌دست می‌آید. به عبارت دیگر، داریم

$$D_k \int_a^b \psi(x, t)\, dt = \int_a^b D_k\psi(x, t)\, dt\,.$$

تذکر. این قضیه را معمولا" این‌طور توصیف می‌کنند که می‌گویند می‌توان زیر علامت انتگرال مشتق گرفت.

برهان. نقطهٔ دلخواه x را در درون S اختیار می‌کنیم. چون S باز است، $r > 0$ ی هست بطوری که به‌ازای هر h صادق در $0 < |h| < r$، $x + he_k \in \text{int}\, S$. دراینجا e_k بردار یکهٔ k ام مختصات در $\mathbf{R}^n$ است. برای چنین h ی داریم

$$\varphi(x + he_k) - \varphi(x) = \int_a^b \{\psi(x + he_k, t) - \psi(x, t)\}\, dt. \qquad (۱۷.۱۰)$$

با اعمال قضیهٔ مقدار میانگین درمورد انتگرالده ،داریم

$$\psi(x + he_k, t) - \psi(x, t) = h\, D_k\psi(z, t),$$

که درآن z بر پاره خط‌واصل بین x و $x + he_k$ قرار دارد. لذا، (۱۷.۱۰) خواهد شد

$$\frac{\varphi(x + he_k) - \varphi(x)}{h} = \int_a^b D_k\psi(z, t)\, dt.$$

بنابراین،

$$\frac{\varphi(x + he_k) - \varphi(x)}{h} - \int_a^b D_k\psi(x, t)\, dt = \int_a^b \{D_k\psi(z, t) - D_k\psi(x, t)\}\, dt.$$

انتگرال اخیر قدر مطلقی بیش‌از

$$\int_a^b |D_k\psi(z, t) - D_k\psi(x, t)|\, dt \le (b - a) \max |D_k\psi(z, t) - D_k\psi(x, t)|$$

ندارد، که درآن ماکزیمم روی تمام z های واقع بر پاره خط‌بین x و $x + he_k$ و همهٔ t های در $[a, b]$ گرفته شده است. حال، به‌کمک پیوستگی یکنواخت D_k بر $S \times J$ (قضیهٔ ۹.۱۰)، نتیجه می‌گیریم که به‌ازای هر $\epsilon > 0$، $\delta > 0$ ای هست بطوری که‌این ماکزیمم، هر وقت $0 < |h| < \delta$، از $\epsilon/(b - a)$ کوچکتر است. بنابراین،

هروقت $0 < |h| < \delta$، $\left| \dfrac{\varphi(x + he_k) - \varphi(x)}{h} - \displaystyle\int_a^b D_k\psi(x, t)\, dt \right| < \epsilon$.

این ثابت‌می‌کند که، همانطور که مطلوب است، $D_k\varphi(x)$ موجود و مساوی $\int_a^b D_k\psi(x, t)\, dt$ می‌باشد.

حال ، با استفاده از این قضیه ، شرط لازم و کافی زیر را برای گرادیان بودن یک میدان برداری بر یک مجموعهٔ محدب اثبات می‌کنیم .

قضیهٔ ۹۰۱۰ . فرض کنیم $f = (f_1, \ldots, f_n)$ **یک میدان برداری به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر بر مجموعهٔ محدب باز** S **در** $\mathbf{R}^n$ **باشد . در این صورت ،** f **یک گرادیان بر** S **است اگر و فقط اگر به‌ازای هر** x **در** S **و هر** $k, j = 1, 2, \ldots, n$ **داشته باشیم**

$$D_k f_j(x) = D_j f_k(x) \,. \qquad (۱۸۰۱۰)$$

برهان . از قضیهٔ ۶۰۱۰ می‌دانیم که این شرایط لازمند . برای اثبات کافی بودن ، (۱۸۰۱۰) را فرض کرده و پتانسیل φ را بر S می‌سازیم .

بخاطر سادگی ،فرض می‌کنیم S شامل مبداء باشد . فرض کنیم $\varphi(x)$ انتگرال f در امتدادپاره خط از O تا نقطهٔ دلخواه x در S باشد . همانطور که قبلا" در معادلهٔ (۱۰۰۱۰) نشان داده شد ، داریم

$$\varphi(x) = \int_0^1 f(tx) \cdot x \, dt = \int_0^1 \psi(x, t) \, dt \,,$$

که درآن $\psi(x, t) = f(tx) \cdot x$. یک زیر بازهٔ n بعدی بسته از S مانند T با درون ناتهی وجود دارد بطوری که ψ در مفروضات قضیهٔ ۸۰۱۰ در $T \times J$ صدق می‌کند ، که $J = [0, 1]$. از اینرو ، مشتق جزئی $D_k\varphi(x)$ به‌ازای هر $k = 1, 2, \ldots, n$ وجود دارد و می‌توان آن را با مشتقگیری زیر علامت انتگرال حساب کرد :

$$D_k\varphi(x) = \int_0^1 D_k\psi(x, t) \, dt \,.$$

برای محاسبهٔ $D_k\psi(x, t)$ ، از حاصل‌ضرب نقطه‌ای $f(tx) \cdot x$ مشتق گرفته به‌دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} D_k\psi(x, t) &= f(tx) \cdot D_k x + D_k\{f(tx)\} \cdot x \\ &= f(tx) \cdot e_k + t(D_k f_1(tx), \ldots, D_k f_n(tx)) \cdot x \\ &= f_k(tx) + t(D_1 f_k(tx), \ldots, D_n f_k(tx)) \cdot x \,, \end{aligned}$$

که درآخرین مرحله از رابطهٔ (۱۸۰۱۰) استفاده شده است . بنابراین ، داریم

$$D_k\psi(x, t) = f_k(tx) + t\nabla f_k(tx) \cdot x \,.$$

حال قرار می‌دهیم $g(t) = f_k(tx)$. بنابر قاعدهٔ زنجیره‌ای، داریم

$$g'(t) = \nabla f_k(tx) \cdot x \ ;$$

درنتیجه، آخرین فرمول برای $D_k\psi(x, t)$ خواهد شد

$$D_k\psi(x, t) = g(t) + tg'(t) .$$

با انتگرالگیری از این از 0 تا 1 ، معلوم می‌شود که

$$D_k\varphi(x) = \int_0^1 D_k\psi(x, t) = \int_0^1 g(t)\, dt + \int_0^1 tg'(t)\, dt . \qquad (۱۹۰۱۰)$$

با انتگرالگیری به‌طریقهٔ جزءبه‌جزء در آخرین انتگرال، به‌دست می‌آید

$$\int_0^1 tg'(t)\, dt = tg(t)\Big|_0^1 - \int_0^1 g(t)\, dt = g(1) - \int_0^1 g(t)\, dt .$$

بنابر این، (۱۹۰۱۰) خواهد شد

$$D_k\varphi(x) = g(1) = f_k(x) .$$

این نشان می‌دهد که $\nabla\varphi = f$ بر S ، که برهان را تمام خواهد کرد.

۱۱

انتگرالهای چندگانه

۱۰۱۱ مقدمه

در جلد یک انتگرالهای $\int_a^b f(x)\,dx$ ، ابتدابرای توابع تعریف شده و کراندار بر بازه‌های متناهی ، و بعد برای توابع بی‌کران و بازه‌های نامتناهی ، بحث شدند . در فصل ۱۰ جلد دو این مفهوم با معرفی انتگرالهای خط تعمیم یافت . دراین فصل این مفهوم را درجهت دیگر تعمیم می‌دهیم . بازهٔ یک بعدی $[a, b]$ را با مجموعهٔ دوبعدی Q ، به‌نام **ناحیهٔ انتگرالگیری** ، عوض می‌کنیم . ابتدا ناحیه‌های مستطیلی شکل ، و بعدا" نواحی کلیتر با کرانه‌های منحنی‌الخط رادرنظر خواهیم گرفت . انتگرالده یک میدان اسکالر مانند f است که‌بر Q تعریف‌شده‌و کراندار است . انتگرال حاصل **انتگرال مضاعف** نام داشته و باعلامت

$$\iint_Q f(x, y)\,dx\,dy \quad \text{یا} \quad \iint_Q f$$

نموده می‌شود . مثل‌حالت‌یک بعدی ، علامات dx و dy نقشی در تعریف انتگرال مضاعف ندارند ؛ با اینحال ، در محاسبه و تبدیل انتگرال مفید خواهند بود .

طرح کاردراین فصل از چند مرحله تشکیل شده است . ابتدا تعریف انتگرال مضاعف را مطرح می‌کنیم . روش در اینجا شبیه حالت یک بعدی است که در جلد یک بحث شد . انتگرال ابتدا برای توابع پله‌ای و سپس برای توابع کلیتر تعریف شده است . این تعریف ، مثل حالت یک بعدی ، راه ساده‌ای برای محاسبهٔ عملی انتگرالها به‌ما نمی‌دهد . خواهیم دیدکه‌اغلب انتگرالهای مضاعف درعمل رامی‌توان‌با تکرار انتگرالگیری یک بعدی حساب کرد . همچنین ، به رابطه‌ای بین انتگرالهای مضاعف و انتگرالهای خط دست خواهیم یافت . کاربردهای انتگرالهای مضاعف در مسائل مربوط‌به مساحت ، حجم ، جرم ، مرکز جرم ، و

مفاهیم مربوطه نیز عرضه خواهند شد. بالاخره، شیوهٔ تعمیم این مفاهیم را به فضای n نشان خواهیم داد.

۲۰۱۱ افراز مستطیلها. توابع پله‌ای

فرض کنیم Q یک مستطیل باشد؛ یعنی، حاصل ضرب دکارتی دو بازهٔ بسته مانند $[a, b]$ و $[c, d]$:

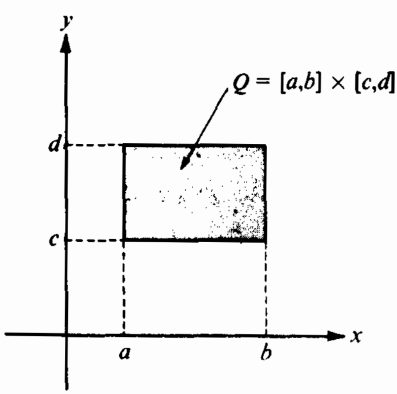
$$Q = [a, b] \times [c, d] = \{(x, y) \mid x \in [a, b] \quad , \quad y \in [c, d]\}.$$

مثالی در شکل ۱۰۱۱ نموده‌شده‌است. دو افراز P_1 و P_2 را بترتیب برای $[a, b]$ و $[c, d]$ درنظر می‌گیریم؛ مثلاً،

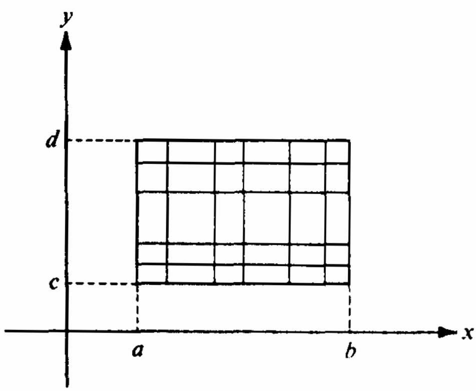
$$P_1 = \{x_0, x_1, \ldots, x_{n-1}, x_n\} \quad \text{و} \quad P_2 = \{y_0, y_1, \ldots, y_{m-1}, y_m\} ،$$

که درآنها $x_0 = a,\ x_n = b,\ y_0 = c,\ y_m = d$. گوییم حاصل ضرب دکارتی $P_1 \times P_2$ یک افراز Q است. چون P_1 بازهٔ $[a, b]$ را به n زیر بازه و P_2 بازهٔ $[c, d]$ را به m زیر بازه تقسیم می‌کند، افراز $P = P_1 \times P_2$ مستطیل Q را به mn زیر مستطیل تقسیم خواهد کرد. شکل ۲۰۱۱ افرازی از یک Q به 30 زیر مستطیل را نشان می‌دهد. گوییم افراز P' از Q از افراز P ظریفتراست اگر $P \subseteq P'$؛ یعنی، اگر هر نقطه در P در P' نیز باشد.

حاصل‌ضرب‌دکارتی دو زیر بازهٔ باز از P_1 و P_2 یک زیر مستطیل بدون اضلاع است. این زیر مستطیل یک زیر مستطیل باز P یا Q نامیده می‌شود.



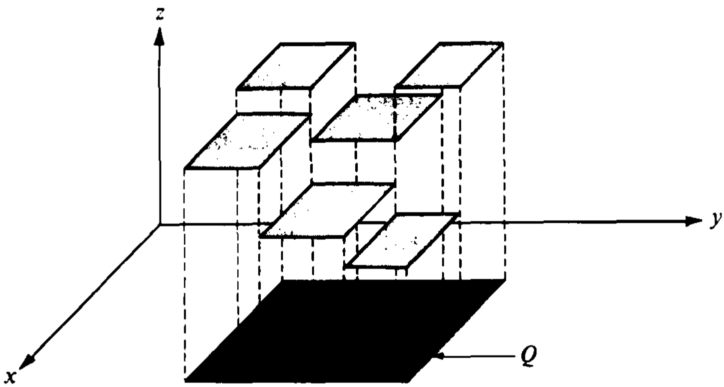
شکل ۱۰۱۱ مستطیل Q حاصل ضرب دکارتی دوبازه



شکل ۲۰۱۱ یک افراز مستطیل Q

تعریف تابع پله‌ای. تابع f تعریف شده بر مستطیل Q را یک ***تابع پله‌ای*** گوییم اگر افرازی از Q مانند P باشد بطوری که f بر هر زیر مستطیل باز P ثابت باشد.

نمودار یک تابع پله‌ای در شکل ۳.۱۱ نموده شده است. بخش اعظم این نمودار از



شکل ۳.۱۱ نمودار یک تابع پله‌ای تعریف شده بر مستطیل Q

قطعات مستطیلی شکل افقی تشکیل شده است. یک تابع پله‌ای در هر نقطهٔ کرانه‌ای زیر مستطیلها مقدار تعریف شده دارد، اما مقادیر آن دراین نقاط در نظریهٔ انتگرالگیری اهمیتی ندارند.

اگر f و g دوتابع پله‌ای‌تعریف‌شده‌برمستطیل Q باشند، ترکیب‌خطی $c_1f + c_2g$ نیز یک تابع پله‌ای است. درواقع، اگر P و P' افرازهایی از Q باشند بطوری که f بر زیرمستطیلهای‌باز P و g برزیرمستطیلهای‌باز P' ثابت‌باشد، $c_1f + c_2g$ برزیرمستطیلهای باز اجتماع $P \cup P'$ (که می‌توان آن را یک تظریف مشترک P و P' نامید) نیز ثابت است. لذا، مجموعهٔ توابع پله‌ای تعریف شده بر Q یک فضای خطی تشکیل می دهد.

۳.۱۱ انتگرال مضاعف یک تابع پله‌ای

فرض‌کنیم $P = P_1 \times P_2$ افرازی‌از مستطیل Q به mn زیر مستطیل بوده، و f تابعی‌پله‌ای باشد که بر زیرمستطیلهای باز Q ثابت است. زیرمستطیل معین شده به‌وسیلهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ و $[y_{j-1}, y_j]$ را با Q_{ij} نموده، وفرض می‌کنیم c_{ij} مقدار ثابتی باشد که f در نقاط درونی

Q_{ij} می‌گیرد. اگر f مثبت باشد، حجم جعبهٔ مکعب مستطیل به قاعدهٔ Q_{ij} و ارتفاع c_{ij} حاصل ضرب

$$c_{ij} \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1})$$

است. به‌ازای هر تابع پله‌ای f، مثبت یا نه، مجموع تمام این حاصل ضربها مساوی انتگرال مضاعف f روی Q تعریف می‌شود. لذا، تعریف زیر را خواهیم داشت.

تعریف انتگرال مضاعف یک تابع پله‌ای. فرض‌کنیم f یک تابع پله‌ای باشد که بر زیر مستطیل باز $(x_{i-1}, x_i) \times (y_{j-1}, y_j)$ از مستطیل Q مقدار ثابت c_{ij} را می‌گیرد. ***انتگرال مضاعف*** f روی Q با فرمول

$$\iint_Q f = \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij} \cdot (x_i - x_{i-1})(y_j - y_{j-1}) \tag{۱۰۱۱}$$

تعریف می‌شود.

مثل حالت یک بعدی، مقدار این انتگرال درصورت تعویض P با هر افراز ظریفتر P' عوض‌نمی‌شود. لذا، مقدار انتگرال، تا وقتی f بر زیر مستطیلهای باز Q ثابت‌باشد، از انتخاب P مستقل است.

برای اختصار، گاهی به‌جای $(x_i - x_{i-1})$ می‌نویسیم Δx_i و به جای $(y_j - y_{j-1})$ می‌نویسیم Δy_j، و مجموع آمده در (۱۰۱۱) خواهد شد

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} c_{ij}\, \Delta x_i\, \Delta y_j .$$

برای به‌یاد آوردن طرز تشکیل این مجموع، انتگرال را با علامت

$$\iint_Q f(x, y)\, dx\, dy$$

نشان می‌دهیم. این علامت صرفاً" نماد دیگری است برای $\iint_Q f$.

توجه‌کنیدکه‌اگر f درون Q ثابت باشد، مثلاً" وقتی $a < x < b$ و $c < y < d$، $f(x, y) = k$، بی‌توجه به مقدار f بر اضلاع Q، خواهیم داشت

$$\iint_Q f = k(b - a)(d - c). \tag{۲۰۱۱}$$

چون داریم

$$b - a = \int_a^b dx \qquad \text{و} \qquad d - c = \int_c^d dy ،$$

فرمول (۲۰۱۱) را می‌توان به‌صورت زیر نیز نوشت :

$$\iint_Q f = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx . \tag{۳۰۱۱}$$

انتگرالهای سمت راست انتگرالهایی یک بعدی‌اند ، و گوییم با این فرمول انتگرال مضاعف با **تکرار** انتگرالگیری یا انتگرالگیری **مکرر** حساب می‌شود . بخصوص ، وقتی f یک‌تابع پله‌ای از نوع بالا باشد ، می‌توان نوشت

$$\iint_{Q_{ij}} f = \int_{y_{j-1}}^{y_j}\left[\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x, y)\, dx\right] dy = \int_{x_{i-1}}^{x_i}\left[\int_{y_{j-1}}^{y_j} f(x, y)\, dy\right] dx.$$

با جمعبندی روی i و j واستفاده از (۱۰۱۱) ، معلوم می‌شود که (۳۰۱۱) برای توابع پله‌ای برقرار است .

خواص‌دیگر زیر از انتگرال مضاعف یک تابع پله‌ای تعمیمهای قضایای یک بعدی نظیر هستند . آنها را می‌توان مستقیما" از تعریف (۱۰۱۱) یا با استفاده از فرمول (۳۰۱۱) و قضایای نظیر برای انتگرالهای یک بعدی نتیجه گرفت . در قضایای زیر ، علامات s و t توابعی پله‌ای اند که بر مستطیلی چون Q تعریف شده‌اند . برای اجتناب از حالات خاص بدیهی ، فرض می‌کنیم Q یک مستطیل تباه نشده باشد ؛ به عبارت دیگر ، Q فقط یک نقطه یا یک پاره خط نباشد .

قضیهٔ ۱۰۱۱ . خاصیت خطی . به‌ازای هر دو عدد حقیقی c_1 و c_2 داریم

$$\iint_Q [c_1 s(x, y) + c_2 t(x, y)]\, dx\, dy = c_1 \iint_Q s(x, y)\, dx\, dy + c_2 \iint_Q t(x, y)\, dx\, dy .$$

قضیهٔ ۲۰۱۱ . خاصیت جمعی . هرگاه Q به دو مستطیل Q_1 و Q_2 تقسیم شده باشد ، آنگاه

$$\iint_Q s(x, y)\, dx\, dy = \iint_{Q_1} s(x, y)\, dx\, dy + \iint_{Q_2} s(x, y)\, dx\, dy .$$

قضیهٔ ۳۰۱۱. قضیهٔ مقایسه‌ای. هرگاه به‌ازای هر (x, y) در Q ، $s(x, y) \le t(x, y)$ ، آنگاه خواهیم داشت

$$\iint_Q s(x, y)\, dx\, dy \le \iint_Q t(x, y)\, dx\, dy .$$

بخصوص، هرگاه به‌ازای هر (x, y) در Q ، $t(x, y) \ge 0$ ، آنگاه

$$\iint_Q t(x, y)\, dx\, dy \ge 0 .$$

اثبات این قضایا را به‌عنوان تمرین می‌گذاریم.

۴۰۱۱ تعریف انتگرال مضاعف یک تابع تعریف شده و کراندار بر یک مستطیل

فرض‌کنیم f تابعی باشد که بر مستطیل Q تعریف شده و کراندار است؛ به‌طور مشخص، اگر $(x, y) \in Q$ ، $|f(x, y)| \le M$.
دراین‌صورت، f می‌تواند از بالا و پایین با دو تابع پله‌ای ثابت s و t محدود شود، که به‌ازای هر (x, y) در Q ، $s(x, y) = -M$ و $t(x, y) = M$. حال دو تابع پله‌ای **دلخواه** s و t تعریف شده بر Q را درنظر می‌گیریم بطوری که

به‌ازای هر نقطهٔ (x, y) در Q ، $s(x, y) \le f(x, y) \le t(x, y)$. (۴۰۱۱)

تعریف انتگرال یک تابع کراندار روی یک مستطیل. هرگاه یک و فقط یک عدد مانند I باشد بطوری که به‌ازای هر جفت تابع پله‌ای صادق در نامساویهای (۴۰۱۱) داشته‌باشیم

$$\iint_Q s \le I \le \iint_Q t , \qquad (۵۰۱۱)$$

آنگاه این I ***انتگرال مضاعف*** f روی Q نامیده و با علامت

$$\iint_Q f(x, y)\, dx\, dy \quad \text{یا} \quad \iint_Q f$$

نموده می‌شود. وقتی این I وجود دارد، گوییم تابع f بر Q ***انتگرالپذیر*** است.

۵۰۱۱ انتگرالهای مضاعف بالایی و پایینی

تعریف انتگرال مضاعف کاملاً" شبیه حالت یک بعدی است. انتگرالهای مضاعف بالایی و

پایینی را نیز می‌توان مثل حالت یک بعدی تعریف کرد .

فرض کنیم f بر مستطیل Q کراندار بوده، و s و t توابعی پله‌ای باشند که در (۴۰۱۱) صدق می‌کنند .گوییم s زیر f است ،و t روی f است ،و می‌نویسیم $s \le f \le t$. فرض‌کنیم S مجموعهٔ تمام اعداد $\iint_Q s$ ، وقتی s همهٔ توابع پله‌ای زیر f را می‌گیرد ، و T مجموعهٔ تمام اعداد $\iint_Q t$ ، وقتی t تمام توابع پله‌ای روی f را می‌گیرد ، باشد . هر دو مجموعهٔ S و T ناتهی‌اند ، زیرا f کراندار است . همچنین ،اگر $s \le f \le t$ ، $\iint_Q s \le \iint_Q t$ ؛ درنتیجه ، هر عدد در S کوچکتر از هر عدد در T است . لذا ، S دارای سوپرمم و T دارای اینفیمم است ، و اینها در نامساویهای

$$\iint_Q s \le \sup S \le \inf T \le \iint_Q t \text{ ,}$$

به‌ازای هر s و t صادق در $s \le f \le t$ ، صدق می‌کنند . این نشان می‌دهد که هر دو عدد $\sup S$ و $\inf T$ در (۵۰۱۱) صدق می‌کنند . لذا ، f بر Q انتگرالپذیر است اگر و فقط اگر $\sup S = \inf T$ ، که دراین حالت داریم

$$\iint_Q f = \sup S = \inf T.$$

عدد $\sup S$ ***انتگرال پایینی*** f نامیده و با $\underline{I}(f)$ نموده می‌شود . عدد $\inf T$ ***انتگرال بالایی*** f نامیده و با $\bar{I}(f)$ نموده می‌شود . لذا ، داریم

$$\underline{I}(f) = \sup\left\{\iint_Q s \mid s \le f\right\}, \qquad \bar{I}(f) = \inf\left\{\iint_Q t \mid f \le t\right\}.$$

استدلال فوق قضیهٔ زیر را ثابت می‌کند .

قضیهٔ ۴۰۱۱ . ***هر تابع f کراندار بر مستطیل Q دارای انتگرال پایینی $\underline{I}(f)$ و انتگرال بالایی $\bar{I}(f)$ است که در نامساویهای***

$$\iint_Q s \le \underline{I}(f) \le \bar{I}(f) \le \iint_Q t$$

به‌ازای هر دو تابع پله‌ای s و t که $s \le f \le t$ صدق می‌کنند . تابع f بر Q انتگرالپذیر است اگر و فقط اگر انتگرالهای بالایی و پایینی آن مساوی باشند ، که در این حالت خواهیم

داشت

$$\iint_Q f = \underline{I}(f) = \bar{I}(f).$$

چون تعاریف بالا کاملاً شبیه حالت یک بعدی‌اند ، برقراری خاصیت خطی ، خاصیت جمعی ، و قضیهٔ مقایسه‌ای مذکور برای توابع پله‌ای در بخش ۳۰۱۱ برای انتگرالهای مضاعف درحالت کلی تعجبی ندارد . برهانهای این احکام شبیه برهانها درحالت یک بعدی‌اند و لذا حذف می‌شوند .

۶۰۱۱ محاسبهٔ انتگرال مضاعف به‌وسیلهٔ تکرار انتگرالگیری یک‌بعدی

درنظریهٔ انتگرالگیری یک بعدی ، دومین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال روشی عملی برای محاسبهٔ انتگرالها می‌باشد . قضیهٔ زیر همین نتیجه در نظریهٔ دو بعدی خواهد بود . این قضیه به‌ما توان محاسبهٔ بعضی انتگرالهای مضاعف را به‌وسیلهٔ دو انتگرالگیری یک بعدی متوالی می‌دهد . این نتیجه تعمیمی است از فرمول (۳۰۱۱) ، که قبلاً آن را برای توابع پله‌ای ثابت کرده‌ایم .

قضیهٔ ۵۰۱۱ . *فرض کنیم f بر مستطیل $Q = [a, b] \times [c, d]$ تعریف شده و کراندار باشد ، و نیز f بر Q انتگرالپذیر باشد . به‌ازای هر y ثابت در $[c, d]$ ، انتگرال یک‌بعدی $\int_a^b f(x, y)\, dx$ را موجود گرفته و آن را با $A(y)$ نشان می‌دهیم . اگر انتگرال $\int_c^d A(y)\, dy$ موجود باشد ، مساوی انتگرال مضاعف $\iint_Q f$ است . به عبارت دیگر ، فرمول زیر را داریم :*

$$\iint_Q f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy. \tag{۶۰۱۱}$$

برهان. دو تابع پله‌ای s و t صادق در $s \le f \le t$ بر Q را اختیار می‌کنیم . با انتگرالگیری نسبت به x روی بازهٔ $[a, b]$ ، داریم

$$\int_a^b s(x, y)\, dx \le A(y) \le \int_a^b t(x, y)\, dx.$$

چون انتگرال $\int_c^d A(y)\,dy$ وجود دارد، می‌توان با انتگرالگیری از هر دو این نامساویها نسبت به y روی $[c, d]$ و استفاده از معادلهٔ (۳۰۱۱) ، به‌دست آورد

$$\iint_Q s \leq \int_c^d A(y)\,dy \leq \iint_Q t\,.$$

از اینرو، $\int_c^d A(y)\,dy$ عددی است که به‌ازای هر دو تابع پله‌ای s و t که بترتیب f را اززیر و رو تقریب می‌زنند بین $\iint_Q s$ و $\iint_Q t$ قرار دارد. چون f بر Q انتگرالپذیراست، تنها عددواجداین‌خاصیت‌انتگرال مضاعف f روی Q است. لذا، $\int_c^d A(y)\,dy = \iint_Q f$ ، که معادلهٔ (۶۰۱۱) را ثابت خواهد کرد.

گوییم با فرمول (۶۰۱۱)انتگرال مضاعف به‌وسیلهٔ تکرار انتگرالگیری ویاانتگرالگیری مکررحساب می‌شود. روند کار این طور توصیف می‌شود که ابتدا از f نسبت به x از a تا b (باثابت‌گرفتن y) انتگرال گرفته، و سپس‌از حاصل نسبت به y از c تا d انتگرال می‌گیریم. اگر ترتیب انتگرالگیری را عوض کنیم، فرمول مشابهی خواهیم داشت؛ یعنی،

$$\iint_Q f(x, y)\,dx\,dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\,dy\right] dx\,, \tag{۷۰۱۱}$$

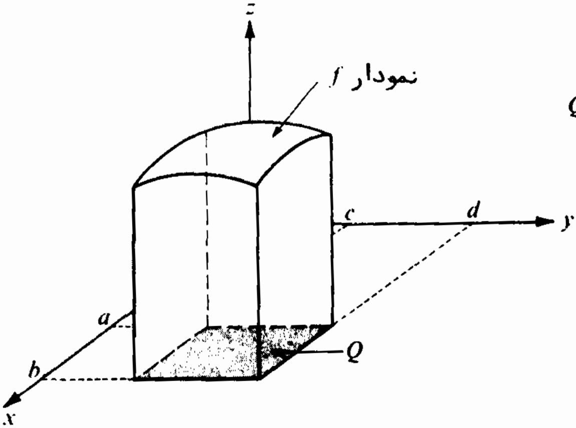
که‌بافرض وجود $\int_c^d f(x, y)\,dy$ به‌ازای‌هر x ثابت در $[a, b]$ و انتگرالپذیربودن بر $[a, b]$ برقرار می‌باشد.

۷۰۱۱ تعبیر هندسی انتگرال مضاعف به عنوان حجم

قضیهٔ ۵۰۱۱ تعبیر هندسی ساده‌ای دارد، که در شکل ۴۰۱۱ نموده شده است. اگر f نامنفی باشد، مجموعهٔ S مرکب از نقاط (x, y, z) در فضای 3 که (x, y) در Q بوده و $0 \leq z \leq f(x, y)$ **مجموعهٔ عرضی f روی Q** نامیده می‌شود. این مجموعه از نقاط بین مستطیل Q و سطح $z = f(x, y)$ تشکیل شده است. (ر.ک. شکل ۴۰۱۱ (آ) .) به‌ازای هر y دربازهٔ $[c, d]$ ، انتگرال

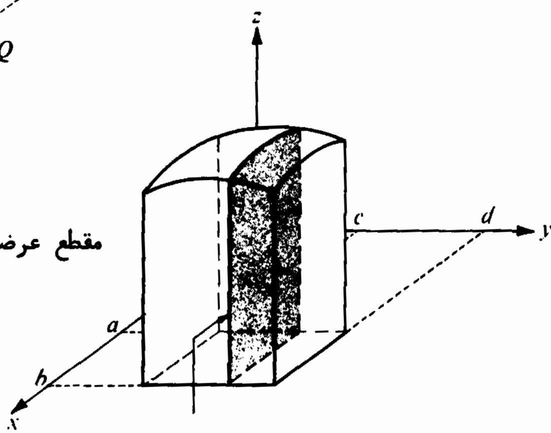
$$A(y) = \int_a^b f(x, y)\,dx$$

مساحت مقطع عرضی S با یک صفحهٔ موازی صفحهٔ xz است (ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۴۰۱۱ (ب)) . چون مساحت مقطع عرضی $A(y)$ بر $[c, d]$ انتگرالپذیر است، قضیهٔ ۷۰۲



مجموعهٔ عرضی S، f روی Q
(آ)

مقطع عرضی به مساحت $A(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$
(ب)



شکل ۴.۱۱ حجم S انتگرال مساحت مقطع عرضی است:

$$v(S) = \int_c^d A(y)\, dy.$$

از جلد یک می‌گوید که انتگرال $\int_c^d A(y)\, dy$ مساوی $v(S)$، یعنی حجم S، است. لذا، به‌ازای انتگرالدهای نامنفی، قضیهٔ ۵.۱۱ نشان می‌دهد که حجم مجموعهٔ عرضی f روی Q مساوی انتگرال مضاعف $\iint_Q f$ می‌باشد.

معادلهٔ (۷.۱۱) راه دیگر محاسبهٔ حجم مجموعهٔ عرضی را به‌دست می‌دهد. این بار از مساحت مقاطع عرضی حاصل از صفحات موازی صفحهٔ yz انتگرال می‌گیریم.

۸.۱۱ مثالهای حل شده

دراین بخش قضیهٔ ۵.۱۱ را با دو مثال عددی توضیح می‌دهیم.

مثال ۱ . اگر $Q = [-1, 1] \times [0, \pi/2]$ ، $\iint\limits_Q (x \sin y - ye^x)\, dx\, dy$ را با فرض وجود حساب کنید . ناحیهٔ انتگرالگیری در شکل ۵.۱۱ نموده شده است .

حل . اگر ابتدا نسبت به x انتگرال گرفته و نتیجه را $A(y)$ بنامیم ، داریم

$$A(y) = \int_{-1}^{1} (x \sin y - ye^x)\, dx = \left(\frac{x^2}{2} \sin y - ye^x\right) \Big|_{x=-1}^{x=1} = -ey + y/e.$$

با اعمال قضیهٔ ۵.۱۱ ، معلوم می‌شود که

$$\iint\limits_Q (x \sin y - ye^x)\, dx\, dy = \int_0^{\pi/2} A(y)\, dy = \int_0^{\pi/2} (-ey + y/e)\, dy$$

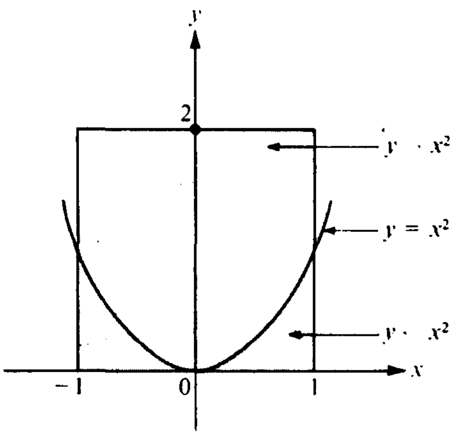
$$= (1/e - e) \int_0^{\pi/2} y\, dy = (1/e - e)\pi^2/8.$$

برای امتحان محاسبات ، می‌توان ابتدا نسبت به y انتگرال گرفت :

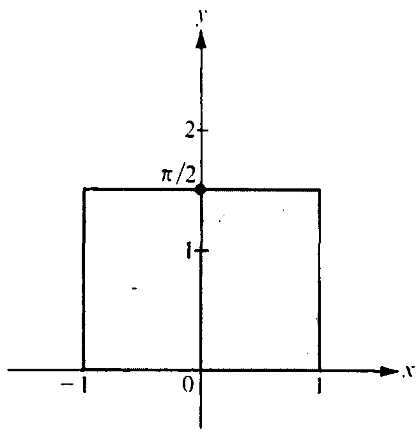
$$\iint\limits_Q (x \sin y - ye^x)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} \left[\int_0^{\pi/2} (x \sin y - ye^x)\, dy\right] dx$$

$$= \int_{-1}^{1} \left(-x \cos y - \tfrac{1}{2} y^2 e^x\right) \Big|_{y=0}^{y=\pi/2} dx$$

$$= \int_{-1}^{1} (-\pi^2 e^x/8 + x)\, dx = (1/e - e)\pi^2/8.$$



شکل ۶.۱۱ ناحیهٔ انتگرالگیری
برای مثال ۲



شکل ۵.۱۱ ناحیهٔ انتگرالگیری
برای مثال ۱

مثال ۲. اگر $Q = [-1, 1] \times [0, 2]$ ، انتگرال مضاعف $\iint_Q \sqrt{|y - x^2|}\, dx\, dy$ را ، با فرض وجود ، حساب کنید .

حل. اگر ابتدا نسبت به y انتگرال گرفته و نتیجه را $H(x)$ بنامیم ، داریم $H(x) = \int_0^2 \sqrt{|y - x^2|}\, dy$. ناحیهٔ انتگرالگیری مستطیلی است که در شکل ۶.۱۱ نموده شده است . سهمی $y = x^2$ نیز بخاطر وجود $|y - x^2|$ در انتگرالده نشان داده شده است . بالای این سهمی داریم $y > x^2$ و پایین آن داریم $y < x^2$. این پیشنهاد می‌کند که انتگرال مربوط به $H(x)$ را به‌صورت زیر تجزیه کنیم :

$$H(x) = \int_0^2 \sqrt{|y - x^2|}\, dy = \int_0^{x^2} \sqrt{x^2 - y}\, dy + \int_{x^2}^2 \sqrt{y - x^2}\, dy .$$

به‌یاد می‌آوریم که x در هر یک از این انتگرالها ثابت گرفته می‌شود . در انتگرال اول تغییرمتغیر $t = x^2 - y$ داده ،و درانتگرال دوم قرار می‌دهیم $t = y - x^2$. این نتیجه می‌دهد که

$$H(x) = \int_0^2 \sqrt{|y - x^2|}\, dy = -\int_{x^2}^0 \sqrt{t}\, dt + \int_0^{2-x^2} \sqrt{t}\, dt = \tfrac{2}{3}x^3 + \tfrac{2}{3}(2 - x^2)^{3/2}.$$

با اعمال قضیهٔ ۵.۱۱ ، معلوم می‌شود که

$$\iint_Q \sqrt{|y - x^2|}\, dx\, dy = \int_{-1}^1 \left[\tfrac{2}{3} x^3 + \tfrac{2}{3} (2 - x^2)^{3/2}\right] dx = \tfrac{4}{3} \int_0^1 (2 - x^2)^{3/2} dx$$

$$= \frac{1}{3}\left[x(2 - x^2)^{3/2} + 3x\sqrt{2 - x^2} + 6 \arcsin \left(\frac{x}{\sqrt{2}}\right)\right] \Big|_0^1 = \frac{4}{3} + \frac{\pi}{2} .$$

همین نتیجه را می‌توان با انتگرالگیری ابتدا نسبت به x به‌دست آورد ، اما محاسبات مشکلتر خواهند بود .

۹.۱۱ تمرین

انتگرالهای مضاعف تمرینهای ۱تا ۸ را ، با فرض وجود ، با تکرار انتگرالگیری حساب کنید .

۱. $\iint_Q xy(x + y)\, dx\, dy$ ، که در آن $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.

۲ . $\iint\limits_Q (x^3 + 3x^2y + y^3)\, dx\, dy$ ، که درآن $Q = [0, 1] \times [0, 1]$.

۳ . $\iint\limits_Q (\sqrt{y} + x - 3xy^2)\, dx\, dy$ ، که درآن $Q = [0, 1] \times [1, 3]$.

۴ . $\iint\limits_Q \sin^2 x \sin^2 y\, dx\, dy$ ، که درآن $Q = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

۵ . $\iint\limits_Q \sin (x + y)\, dx\, dy$ ، که درآن $Q = [0, \pi/2] \times [0, \pi/2]$.

۶ . $\iint\limits_Q |\cos (x + y)|\, dx\, dy$ ، که درآن $Q = [0, \pi] \times [0, \pi]$.

۷ . $\iint\limits_Q f(x + y)\, dx\, dy$ ، که درآن $Q = [0, 2] \times [0, 2]$ و $f(t)$ بزرگترین عدد صحیح نابیشتر از t است .

۸ . $\iint\limits_Q y^{-3} e^{tx/y}\, dx\, dy$ ، که درآن $Q = [0, t] \times [1, t], t > 0$.

۹ . اگر Q یک مستطیل‌باشد ، نشان دهید که انتگرال مضاعف $\iint\limits_Q f(x)g(y)\, dx\, dy$ مساوی حاصل‌ضرب دوانتگرال یک‌بعدی‌است . مفروضات مربوط به وجود که مورد استفاده‌اند را بیان نمایید .

۱۰ . فرض کنید f بر مستطیل $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ به صورت زیر تعریف شده باشد :

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 - x - y \text{ ، اگر } x + y \leq 1 \\ 0 \text{ ، درغیراین‌صورت} \end{cases}$$

مجموعهٔ عرضی f روی Q را رسم‌کرده‌و حجم‌این مجموعهٔ عرضی را با انتگرالگیری مضاعف حساب کنید . (فرض کنید این انتگرال موجود باشد .)

۱۱ . تمرین ۱۰ را درصورتی حل کنید که

$$f(x, y) = \begin{cases} x + y \text{ ، اگر } x^2 \leq y \leq 2x^2 \\ 0 \text{ ، درغیر این‌صورت} \end{cases}$$

۱۲ . تمرین ۱۰ را درصورتی حل کنید که $Q = [-1, 1] \times [-1, 1]$ و

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + y^2 \text{ ، } & x^2 + y^2 \le 1 \text{ اگر} \\ 0 & \text{، درغیر اینصورت} \end{cases}$$

۱۳ . فرض کنید f بر مستطیل $Q = [1, 2] \times [1, 4]$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد :

$$f(x, y) = \begin{cases} (x + y)^{-2} \text{ ، } & x \le y \le 2x \text{ اگر} \\ 0 & \text{، درغیر اینصورت} \end{cases}$$

به کمک‌ترسیم ، آن بخش از Q را که درآن f ناصفر است نشان داده و مقدارانتگرال مضاعف $\iint_Q f$ را ، با فرض وجود ، حساب کنید .

۱۴ . فرض کنید f بر مستطیل $Q = [0, 1] \times [0, 1]$ به‌صورت زیر تعریف شده باشد :

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 \text{ ، } & x = y \text{ اگر} \\ 0 \text{ ، } & x \ne y \text{ اگر} \end{cases}$$

ثابت کنید انتگرال مضاعف $\iint_Q f$ موجود و مساوی 0 است .

۱۰۰۱۱ انتگرالپذیری توابع پیوسته

با استفاده از قضیهٔ پیمای کوچک (قضیهٔ ۱۰۰۹) ، می‌توان انتگرالپذیری تابعی که بریک مستطیل پیوسته است را اثبات کرد .

قضیهٔ ۶۰۱۱ . انتگرالپذیری توابع پیوسته. ***هرگاه تابع f بر مستطیل $Q = [a, b] \times [c, d]$ پیوسته باشد ، آنگاه f بر Q انتگرالپذیر است . بعلاوه ، مقدار انتگرال را می‌توان با انتگرالگیری مکرر به‌دست آورد :***

$$\iint_Q f = \int_c^d \left[\int_a^b f(x, y)\, dx\right] dy = \int_a^b \left[\int_c^d f(x, y)\, dy\right] dx . \qquad (۸۰۱۱)$$

برهان . قضیهٔ ۸۰۹ نشان می‌دهد که f بر Q کراندار است ؛ درنتیجه ، f انتگرال بالایی و انتگرال پایینی دارد . ثابت می‌کنیم $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$. $\epsilon > 0$ را اختیار می‌کنیم . طبق قضیهٔ پیمای کوچک ، به‌ازای این ϵ افرازی از Q مانند P به تعدادی متناهی (مثلاً n) زیر مستطیل $Q_1, \ldots, Q_n$ هست بطوری که‌پیمای f در هر زیر مستطیل کمتر از ϵ است . ماکزیمم و مینیمم مطلق f در Q_k را بترتیب با $M_k(f)$ و $m_k(f)$ نشان

می‌دهیم. دراین صورت، به‌ازای هر $k = 1, 2, \ldots, n$ ، داریم

$$M_k(f) - m_k(f) < \epsilon \cdot$$

حال‌فرض‌کنیم s و t دو تابع پله‌ای باشند که درون هر Q_k به‌صورت زیر تعریف‌شده‌اند:

اگر $x \in \operatorname{int} Q_k$ ، $s(x) = m_k(f), \quad t(x) = M_k(f)$.

در نقاط کرانه‌ای تعریف می‌کنیم $s(x) = m$ و $t(x) = M$ ، که m و M بترتیب مینیمم و ماکزیمم مطلق f بر Q اند. دراین صورت، به‌ازای هر x در Q ، داریم $s \le f \le t$. همچنین، داریم

$$\iint_Q s = \sum_{k=1}^{n} m_k(f) a(Q_k) \qquad \text{و} \qquad \iint_Q t = \sum_{k=1}^{n} M_k(f) a(Q_k) ،$$

که درآنها $a(Q_k)$ مساحت مستطیل Q_k است. تفاضل بین این دو انتگرال عبارت است از

$$\iint_Q t - \iint_Q s = \sum_{k=1}^{n} \{M_k(f) - m_k(f)\} a(Q_k) < \epsilon \sum_{k=1}^{n} a(Q_k) = \epsilon a(Q),$$

که درآن $a(Q)$ مساحت Q است. چون $\iint_Q s \le \underline{I}(f) \le \bar{I}(f) \le \iint_Q t$ ، نامساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$0 \le \bar{I}(f) - \underline{I}(f) \le \epsilon a(Q).$$

با فرض $\epsilon \to 0$ ، می‌بینیم که $\underline{I}(f) = \bar{I}(f)$ ؛ درنتیجه، f بر Q انتگرالپذیر می‌باشد.

حال‌ثابت‌می‌کنیم که انتگرال مضاعف مساوی اولین انتگرال مکرر در (۸۰۱۱)است. به‌ازای هر y ثابت در $[c, d]$ ، انتگرال یک بعدی $\int_a^b f(x, y)\, dx$ ، بدلیل پیوستگی انتگرالده بر Q ، وجود دارد. فرض‌کنیم $A(y) = \int_a^b f(x, y)\, dx$. ثابت می‌کنیم که A بر $[c, d]$ پیوسته است. اگر y و y_1 دو نقطهٔ دلخواه در $[c, d]$ باشند، داریم

$$A(y) - A(y_1) = \int_a^b \{f(x, y) - f(x, y_1)\}\, dx ،$$

که از این معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} |A(y) - A(y_1)| &\le (b - a) \max_{a \le x \le b} |f(x, y) - f(x, y_1)| \\ &= (b - a)\, |f(x_1, y) - f(x_1, y_1)| ، \end{aligned}$$

که درآن x_1 نقطه‌ای در $[a, b]$ است که $|f(x, y) - f(x, y_1)|$ به ماکزیمم خود می‌رسد. این نامساوی نشان می‌دهد که، وقتی $y \to y_1$ ، $A(y) \to A(y_1)$ ؛ درنتیجه، A در y_1 پیوسته می‌باشد. لذا، انتگرال $\int_c^d A(y)\, dy$ وجود دارد و، طبق قضیهٔ ۵۰۱۱ ، مساوی

$\iint_Q f$ می‌باشد. درحالتی که تکرار بترتیب عکس صورت می‌گیرد، استدلال مشابهی به‌کار خواهد آمد.

۱۱۰۱۱ انتگرالپذیری توابع کراندار با ناپیوستگیها

فرض کنیم f بر مستطیل Q تعریف شده و کراندار باشد. در قضیهٔ ۶۰۱۱ ثابت شد که انتگرال مضاعف f روی Q در صورت پیوستگی f همه‌جا بر Q وجود دارد. دراین بخش ثابت‌می‌کنیم این‌انتگرال درصورتی که f در Q ناپیوستگی داشته باشد نیز موجود است، به‌شرط‌آنکه مجموعهٔ ناپیوستگیها چندان بزرگ نباشد. برای سنجش اندازهٔ مجموعهٔ ناپیوستگیها، مفهوم زیر را معرفی می‌کنیم.

تعریف مجموعهٔ کراندار با محتوای صفر. فرض‌کنیم A زیر مجموعهٔ کرانداری از صفحه باشد. گوییم A دارای **محتوای صفر** است اگر که به‌ازای هر $0 < \epsilon$ مجموعه‌ای متناهی از مستطیلها باشد که اجتماعشان شامل A بوده و مجموع مساحات آنها از ϵ تجاوز نکند.

به عبارت‌دیگر، یک مجموعهٔ مسطح کراندار با محتوای صفر را می‌توان در اجتماعی از مستطیلها گنجاند که مساحت کل آنها بدلخواه کوچک باشد.

احکام‌زیرمربوط به مجموعه‌های کراندار با محتوای صفر نتایج سادهٔ این تعریف‌اند. اثبات آنها به‌عنوان تمرین به خواننده محول می‌شود.

(آ) هر مجموعهٔ متناهی از نقاط در صفحه دارای محتوای صفر است.

(ب) اجتماع تعدادی متناهی از مجموعه‌های کراندار با محتوای صفر نیز با محتوای صفر است.

(پ) هر زیر مجموعه از یک مجموعه با محتوای صفر دارای محتوای صفر است.

(ت) هر پاره خط دارای محتوای صفر است.

قضیهٔ ۷۰۱۱. *فرض کنیم f بر مستطیل $Q = [a, b] \times [c, d]$ تعریف شده و کراندار باشد. هرگاه مجموعهٔ ناپیوستگیهای f در Q مجموعه‌ای با محتوای صفر باشد، آنگاه انتگرال مضاعف $\iint_Q f$ وجود خواهد داشت.*

برهان. فرض کنیم $M > 0$ چنان باشد که بر Q ، $|f| \leq M$. همچنین، D مجموعهٔ ناپیوستگیهای f در Q باشد. به‌ازای $\delta > 0$ ، P را افرازی از Q می‌گیریم که مجموع مساحات همهٔ زیر مستطیلهای P که شامل نقاطی از D اند کمتر از δ باشد. (این امکان دارد، زیرا D دارای محتوای صفر است.) براین زیر مستطیلها توابع پله‌ای s و t را به صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$s(x) = -M, \qquad t(x) = M.$$

بر زیر مستطیلهای باقی P ، s و t را بصورتی که در برهان قضیهٔ ۶.۱۱ شد تعریف می‌کنیم. دراین‌صورت، سرتاسر Q داریم $s \leq f \leq t$. با استدلالی شبیه آنکه دربرهان ۶.۱۱ شد، نامساوی زیر به‌دست می‌آید:

$$\iint_Q t - \iint_Q s \leq \epsilon a(Q) + 2M\delta. \tag{۹.۱۱}$$

اولین‌جمله، یعنی $\epsilon a(Q)$ ، از تخمین انتگرال $t - s$ روی زیر مستطیلهایی که فقط شامل نقاط پیوستگی f اند می‌آید. دومین جمله، یعنی $2M\delta$ ، از تخمین انتگرال $t - s$ روی زیر مستطیلهایی که شامل نقاط D اند ناشی می‌شود. از (۹.۱۱) نامساوی زیر را خواهیم داشت:

$$0 \leq \bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leq \epsilon a(Q) + 2M\delta.$$

با فرض $\epsilon \to 0$ ، معلوم می‌شودکه $0 \leq \bar{I}(f) - \underline{I}(f) \leq 2M\delta$. چون δ دلخواه است، این ایجاب می‌کند که $\bar{I}(f) = \underline{I}(f)$ ؛ درنتیجه، f بر Q انتگرالپذیر می‌باشد.

۱۲.۱۱ تعمیم انتگرالهای مضاعف روی ناحیه‌های کلیتر

تا اینجا انتگرال مضاعف فقط‌برای نواحی انتگرالگیری مستطیلی شکل تعریف شده است. لیکن، تعمیم این مفهوم به نواحی کلیتر مشکل نیست.

فرض کنیم S یک ناحیهٔ کراندار بوده، و S را در مستطیلی مانند Q قرار داده باشیم. همچنین، f بر S تعریف شده و کراندار باشد. تابع جدید $\tilde{f}$ را بر Q به‌صورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$\tilde{f}(x, y) = \begin{cases} f(x, y) & \text{اگر } (x, y) \in S \\ 0 & \text{اگر } (x, y) \in Q - S \end{cases} \tag{۱۰.۱۱}$$

به‌عبارت‌دیگر، باصفر گرفتن‌مقادیرتابع در خارج‌از S ، تعریف f را به تمام مستطیل Q

تعمیم می‌دهیم . حال می‌پرسیم : آیا تابع تعمیم یافتهٔ $\tilde{f}$ بر Q انتگرالپذیر است یا نه .
اگر چنین باشد ، گوییم f بر S انتگرالپذیر است و ، طبق تعریف ،

$$\iint_S f = \iint_Q \tilde{f}.$$

ابتدا مجموعه‌هایی از نقاط مانند S در صفحهٔ xy را به‌صورت زیر درنظر می‌گیریم :

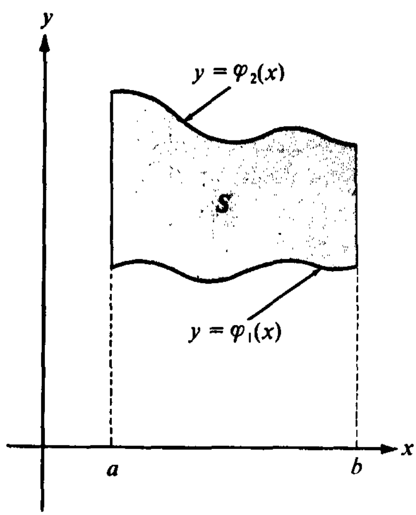
$$S = \{(x, y) \mid a \le x \le b \ , \ \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\} ,$$

که درآن φ_1 و φ_2 توابع پیوسته‌ای بر بازهٔ بستهٔ $[a, b]$ و صادق در $\varphi_1 \le \varphi_2$ می‌باشند . مثالی از این نوع ناحیه ، که آن را یک ناحیه از نوع یک نامیم ، در شکل ۷۰۱۱ نموده‌شده است . دریک ناحیه از نوع یک ، به‌ازای هر نقطهٔ t در $[a, b]$ ، خط قائم $x = t$ مجموعهٔ S را در پاره خطی که منحنی $y = \varphi_1(x)$ را به $y = \varphi_2(x)$ وصل می‌کند قطع می‌نماید . این ناحیه کراندار است ، زیرا φ_1 و φ_2 پیوسته‌اند ؛ و درنتیجه ، بر $[a, b]$ کراندار می‌باشند .

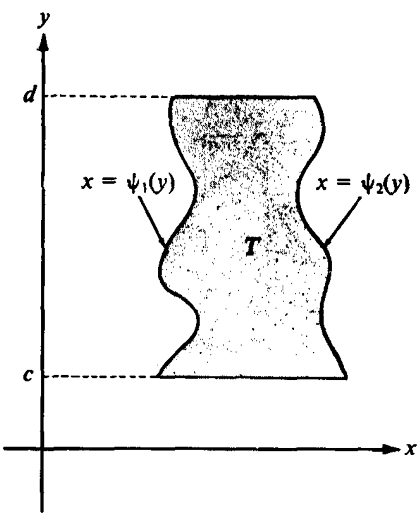
نوع دیگر ناحیه (از نوع دو) را می‌توان به‌صورت زیر توصیف کرد :

$$T = \{(x, y) \mid c \le y \le d \quad , \quad \psi_1(y) \le x \le \psi_2(y)\} ,$$

که درآن ψ_1 و ψ_2 بر بازهٔ $[c, d]$ پیوسته بوده و $\psi_1 \le \psi_2$. مثالی در شکل ۸۰۱۱ نموده شده است . دراین حالت ،



شکل ۷۰۱۱ ناحیهٔ S از نوع یک



شکل ۸۰۱۱ ناحیهٔ T از نوع دو

خطوط افقی T را در پاره خطهایی قطع می‌کنند. نواحی از نوع دو نیز کراندارند. همهٔ نواحی موردنظر ما یا از این دو نوعند و یا می‌توان آنها را به تعدادی متناهی قطعه تجزیه کرد که هریک از یکی از این دو نوع می‌باشد.

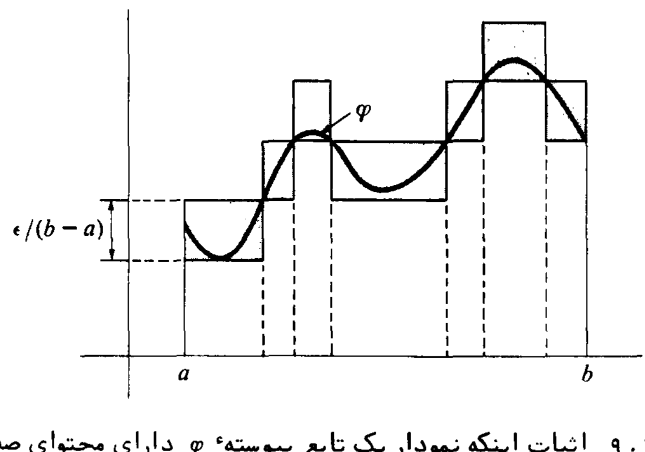
فرض کنیم f بر ناحیهٔ S از نوع یک تعریف شده و کراندار باشد. S را درمستطیل Q جا داده و $\tilde{f}$ را بر Q با معادلهٔ (۱۰.۱۱) تعریف می‌کنیم. ناپیوستگیهای $\tilde{f}$ در Q عبارت است از ناپیوستگیهای f در S بعلاوهٔ نقاطی بر کرانهٔ S که در آنها f ناصفر است. کرانهٔ S از نمودار φ_1، نمودار φ_2، و دو پاره خط قائم واصل بین این نمودارها تشکیل شده است. هریک از این پاره خطها دارای محتوای صفر است. قضیهٔ بعد نشان می‌دهد که هریک از این نمودارها نیز دارای محتوای صفر می‌باشد.

قضیهٔ ۸.۱۱ . *فرض کنیم φ یک تابع حقیقی باشد که بر بازهٔ $[a, b]$ پیوسته است. در این‌صورت، نمودار φ دارای محتوای صفر می‌باشد.*

برهان. فرض کنیم A نمودار φ باشد؛ یعنی،

$$A = \{(x, y) \mid y = \varphi(x) \quad , \quad a \le x \le b\}.$$

$0 < \epsilon$ را اختیار می‌کنیم. با اعمال قضیهٔ پیمای کوچک (قضیهٔ ۱۳.۰۳ از جلد یک)، افراز P از $[a, b]$ به تعدادی متناهی زیر بازه به‌دست می‌آید که پیمای φ در هر زیربازه از P کمتر از $\epsilon/(b-a)$ است. لذا، روی هر زیر بازهٔ P، نمودار φ داخل مستطیلی



شکل ۹.۱۱ اثبات اینکه نمودار یک تابع پیوستهٔ φ دارای محتوای صفر است

به‌ارتفاع $\epsilon/(b-a)$ قرارمی‌گیرد. ازاینرو، تمام نمودار φ در اجتماعی متناهی ازمستطیلها که مجموع مساحات آنها ϵ است قرار دارد. (مثالی در شکل ۹.۱۱ نموده شده است.) این ثابت می‌کند که نمودار φ دارای محتوای صفر است.

قضیهٔ بعد نشان می‌دهد که انتگرال مضاعف $\iint_S f$ در صورت پیوسته بودن f بر $\text{int}\, S$، یعنی درون S، وجود دارد. این مجموعه عبارت است از

$$\text{int}\, S = \{(x, y) \,|\, a < x < b \quad , \quad \varphi_1(x) < y < \varphi_2(x)\}.$$

قضیهٔ ۹.۱۱ . *فرض کنیم S ناحیه‌ای از نوع یک باشد، بین نمودارهای φ_1 و φ_2. همچنین، f بر S تعریف‌شده‌و کراندار باشد و f درون S پیوسته باشد. دراین‌صورت، انتگرال مضاعف $\iint_S f$ وجود دارد و می‌توان آن را با تکرار انتگرالگیری یک بعدی‌محاسبه کـرد:*

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\right] dx. \qquad (۱۱.۱۱)$$

برهان. فرض کنیم $Q = [a, b] \times [c, d]$ مستطیلی حاوی S بوده، و $\tilde{f}$ به‌وسیلهٔ (۱۰.۱۱) تعریف شده باشد. تنها نقاط ناپیوستگی ممکن $\tilde{f}$ نقاط کرانه‌ای S اند. چون کرانهٔ S محتوای‌صفر دارد، $\tilde{f}$ بر Q انتگرالپذیر است. به‌ازای هر x ثابت در (a, b)، انتگرال یک بعدی $\int_c^d \tilde{f}(x, y)\, dy$ موجود است، زیرا انتگرالده حداکثر دوناپیوستگی بر $[c, d]$ دارد. با اعمال صورتی از قضیهٔ ۵.۱۱ که با معادلهٔ (۷.۱۱) داده شده، داریم

$$\iint_Q \tilde{f} = \int_a^b \left[\int_c^d \tilde{f}(x, y)\, dy\right] dx. \qquad (۱۲.۱۱)$$

اما، اگر $\varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)$، $\tilde{f}(x, y) = f(x, y)$، و به‌ازای مقادیر باقی از y در $[c, d]$، $\tilde{f}(x, y) = 0$. لذا،

$$\int_c^d \tilde{f}(x, y)\, dy = \int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy;$$

و درنتیجه، معادلهٔ (۱۲.۱۱) معادلهٔ (۱۱.۱۱) را ایجاب می‌کند.

البته ،قضیهٔ مشابهی برای ناحیهٔ T از نوع دو نیز وجود دارد . اگر f بر T تعریف شده وکراندار باشد و نیز درون T پیوسته باشد ، f بر T انتگرالپذیر است و فرمول مربوط به تکرار انتگرالگیری خواهد شد

$$\iint_T f(x, y)\, dx\, dy = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx\right] dy. \qquad (۱۳۰۱۱)$$

برخی ازناحیه‌ها از هر دو نوع یک و دواند . (نواحی محدود به دوایر و بیضیها از این قماشند .) دراین حالت ، ترتیب انتگرالگیری مهم نیست ومی‌توان نوشت

$$\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy\right] dx = \int_c^d \left[\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x, y)\, dx\right] dy.$$

دربعضی حالات ، ممکن است محاسبهٔ یکی از این انتگرالها از دیگری آسانتر باشد . معمولا" ، پیش از محاسبهٔ یک انتگرال مضاعف ، بهتر است هر دو را امتحان کنیم .

۱۳۰۱۱ کاربردهایی در مساحت و حجم

فرض کنیم S ناحیه‌ای از نوع یک به صورت زیر باشد :

$$S = \{(x, y) \mid a \le x \le b \quad , \quad \varphi_1(x) \le y \le \varphi_2(x)\}.$$

با اعمال قضیهٔ ۹۰۱۱ با $f(x, y) = 1$ به‌ازای هر (x, y) در S ، به‌دست می‌آید که

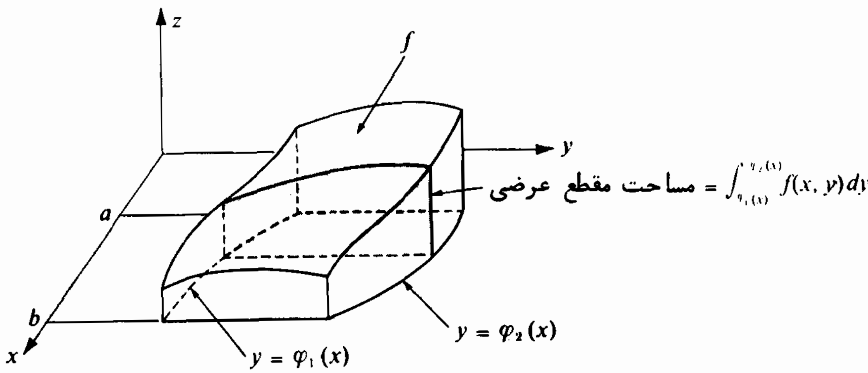
$$\iint_S dx\, dy = \int_a^b [\varphi_2(x) - \varphi_1(x)]\, dx.$$

طبق قضیهٔ ۲۰۱ از جلد یک ، انتگرال سمت راست مساوی مساحت ناحیهٔ S است . لذا ، انتگرالهای مضاعف را می‌توان برای محاسبهٔ مساحات به‌کار برد .

اگر f نامنفی باشد ، مجموعهٔ نقاط (x, y, z) در فضای 3 که $(x, y) \in S$ و $0 \le z \le f(x, y)$ **مجموعهٔ عرضی** f روی S نامیده می‌شود . مثالی در شکل ۱۰۰۱۱ نموده شده است . اگر f بر S نامنفی و پیوسته باشد ، انتگرال

$$\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\, dy$$

مساحت یک مقطع عرضی حاصل از تقاطع یک صفحهٔ موازی صفحهٔ yz با مجموعهٔ عرضی را نمایش می‌دهد (ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۱۰۰۱۱) . فرمول (۱۱۰۱۱) قضیهٔ ۹۰۱۱ نشان می‌دهد که انتگرال مضاعف f روی S مساوی انتگرال مساحت مقطع عرضی است . لذا ،



شکل ۱۰۰۱۱ انتگرال $\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy$ مساحت یک مقطع عرضی مجموعهٔ عرضی است.
انتگرال مکرر $\int_a^b \left[\int_{\varphi_1(x)}^{\varphi_2(x)} f(x, y)\,dy\right] dx$ حجم مجموعهٔ عرضی می‌باشد.

انتگرال مضاعف $\iint_S f$ مساوی حجم مجموعهٔ عرضی f روی S می‌باشد. (ر.ک. قضیهٔ ۷۰۲ از جلد یک، ص ۱۴۲.)

بطور کلی، اگر f و g هر دو بر S پیوسته بوده و $f \le g$ ، انتگرال مضاعف $\iint_S (g - f)$ مساوی حجم جسم واقع بین نمودارهای توابع f و g است. البته، نکات مشابهی را می‌توان درباب نواحی از نوع دو بیان کرد.

۱۴۰۱۱ مثالهای حل شده

مثال ۱. حجم جسم محصور به بیضی‌گون

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

را حساب کنید.

حل. جسم مورد نظر بین نمودارهای دو تابع f و g قرار دارد، که
$g(x, y) = c\sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}$ و $f(x, y) = -g(x, y)$.
در اینجا $(x, y) \in S$ ، که S ناحیهٔ بیضوی

$$S = \left\{(x, y) \,\middle|\, \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \le 1\right\}$$

است . با اعمال قضیهٔ ۹۰۱۱ و استفاده از تقارن ، معلوم می‌شود که حجم V جسم بیضی گون عبارت است از

$$V = \iint_S (g - f) = 2\iint_S g = 8c\int_0^a \left[\int_0^{b\sqrt{1-x^2/a^2}} \sqrt{1 - x^2/a^2 - y^2/b^2}\, dy\right] dx .$$

فرض کنیم $A = \sqrt{1 - x^2/a^2}$. دراین صورت ، انتگرال داخلی عبارت است از

$$\int_0^{bA} \sqrt{A^2 - y^2/b^2}\, dy = A\int_0^{bA} \sqrt{1 - y^2/(Ab)^2}\, dy .$$

با استفاده از تغییر متغیر $y = Ab\sin t, dy = Ab\cos t\, dt$ ، معلوم می‌شود که آخرین انتگرال مساوی است با

$$A^2 b\int_0^{\pi/2} \cos^2 t\, dt = \frac{\pi}{4}A^2 b = \frac{\pi b}{4}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) .$$

بنابراین ،

$$V = 8c\int_0^a \frac{\pi b}{4}\left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right) dx = \frac{4}{3}\pi abc .$$

درحالت خاص $a = b = c$ ، جسم کره‌ای است به شعاع a و حجم $\frac{4}{3}\pi a^3$

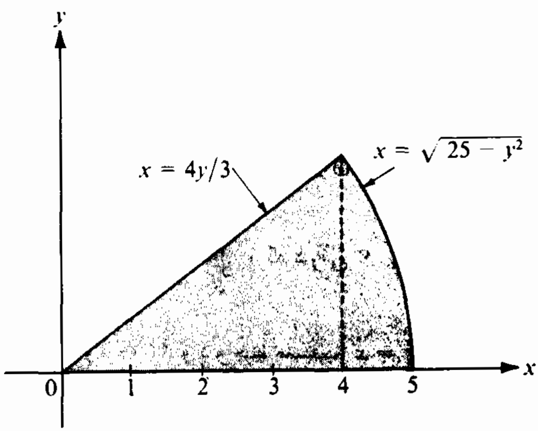
مثال ۲ . انتگرال مضاعف تابع مثبت f ، یعنی $\iint_S f(x, y)\, dx\, dy$ ، به انتگرال مکرر

$$\int_0^1 \left[\int_{x^2}^{x} f(x, y)\, dy\right] dx$$

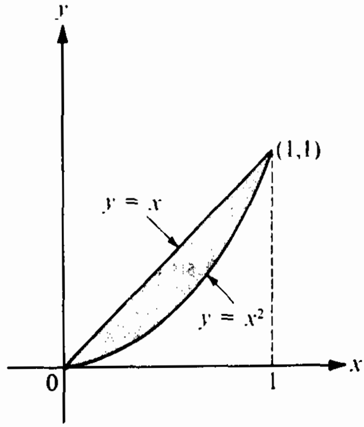
تحویل می‌شود . ناحیهٔ S را تعیین کرده و ترتیب انتگرالگیری را تغییر دهید .

حل . به‌ازای‌هر x ثابت‌بین 0 و 1 ، انتگرالگیری نسبت به y روی بازهٔ از x^2 تا x است . این یعنی ناحیه از نوع یک است و بین دو منحنی $y = x^2$ و $y = x$ قرار دارد . ناحیهٔ S مجموعهٔ نقاط بین‌این‌دومنحنی‌وروی‌بازهٔ $[0, 1]$ است . (ر . ک . شکل ۱۱۰۱۱ .) چون S نیز از نوع دو است ، می‌توان با تغییر ترتیب انتگرالگیری به‌دست آورد

$$\int_0^1 \left[\int_y^{\sqrt{y}} f(x, y)\, dx\right] dy .$$



شکل ۱۲۰۱۱ مثال ۳



شکل ۱۱۰۱۱ مثال ۲

مثال ۳. انتگرال مضاعف تابع مثبت f ، یعنی $\iint_S f(x, y)\, dx\, dy$ ، به انتگرال مکرر

$$\int_0^3 \left[\int_{4y/3}^{\sqrt{25-y^2}} f(x, y)\, dx\right] dy$$

تحویل می‌شود. ناحیهٔ S را تعیین کرده و ترتیب انتگرالگیری را تغییر دهید.

حل. به‌ازای هر y ثابت بین 0 و 3 ، انتگرالگیری نسبت به x روی بازه از $4y/3$ تا $\sqrt{25 - y^2}$ است. لذا، ناحیهٔ S از نوع دو است و بین دو منحنی $x = 4y/3$ و $x = \sqrt{25 - y^2}$ قرار دارد. این ناحیه، که در شکل ۱۲۰۱۱ نموده شده است، قطاعی از یک دایره است. وقتی ترتیب انتگرالگیری عکس شود، ناحیه باید به‌دو ناحیه از نوع یک تجزیه گردد؛ نتیجه مجموع دو انتگرال می‌باشد:

$$\int_0^4 \left[\int_0^{3x/4} f(x, y)\, dy\right] dx + \int_4^5 \left[\int_0^{\sqrt{25-x^2}} f(x, y)\, dy\right] dx .$$

۱۵۰۱۱ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۵ ، ناحیهٔ انتگرالگیری را رسم و انتگرال مضاعف را حساب کنید.

۱. $\iint_S x \cos (x + y)\, dx\, dy$ ، که درآن S یک ناحیهٔ مثلثی شکل به راسهای $(0, 0), (\pi, 0), (\pi, \pi)$ است.

۲ . $\iint\limits_S (1+x)\sin y\, dx\, dy$ ، که‌درآن S یک‌ذوزنقه‌به‌راسهای $(0,0), (1,0), (1,2), (0,1)$ است .

۳ . $\iint\limits_S e^{x+y}\, dx\, dy$ ، که درآن $S = \{(x,y) \mid |x| + |y| \le 1\}$.

۴ . $\iint\limits_S x^2y^2\, dx\, dy$ ، که درآن S بخش کراندار ربع اول واقع بین دو هذلولی $xy = 1$ و $xy = 2$ و دو خط مستقیم $y = x$ و $y = 4x$ است .

۵ . $\iint\limits_S (x^2 - y^2)\, dx\, dy$ ، که درآن S به منحنی $y = \sin x$ و بازهٔ $[0, \pi]$ محدود شده است .

۶ . یک هرم به سه صفحهٔ مختصات و صفحهٔ $x + 2y + 3z = 6$ محدود شده است . آن را رسم کرده و حجمش را با انتگرالگیری مضاعف حساب کنید .

۷ . جسمی به سطح $z = x^2 - y^2$ ، صفحهٔ xy ، وصفحات $x = 1$ و $x = 3$ محدودشده است . آن را رسم کرده و حجمش را با انتگرالگیری مضاعف حساب کنید .

۸ . با انتگرالگیری‌مضاعف ، حجم مجموعهٔ عرضی f را روی S در صورتی حساب کنید کـه

(آ) $f(x,y) = x^2 + y^2$ و $S = \{(x,y) \mid |x| \le 1, |y| \le 1\}$ ؛

(ب) $f(x,y) = 3x + y$ و $S = \{(x,y) \mid 4x^2 + 9y^2 \le 36, x > 0, y > 0\}$ ؛

(پ) $f(x,y) = y + 2x + 20$ و $S = \{(x,y) \mid x^2 + y^2 \le 16\}$.

در تمرینهای ۹ تا ۱۸ فرض است که انتگرال مضاعف تابع مثبت f روی ناحیهٔ S به انتگرال‌مکرر داده شده تحویل می‌شود . در هر حالت ، ناحیهٔ S را رسم کرده وترتیب انتگرالگیری را تغییر دهید .

۹ . $\int_0^1 \left[\int_0^y f(x,y)\, dx\right] dy$.

۱۰ . $\int_0^2 \left[\int_{y^2}^{2y} f(x,y)\, dx\right] dy$.

۱۱ . $\int_1^4 \left[\int_{\sqrt{x}}^2 f(x,y)\, dy\right] dx$.

۱۲ . $\int_1^2 \left[\int_{2-x}^{\sqrt{2x-x^2}} f(x,y)\, dy\right] dx$.

۱۳ . $\int_{-6}^2 \left[\int_{(x^2-4)/4}^{2-x} f(x,y)\, dy\right] dx$.

۱۴ . $\int_1^e \left[\int_0^{\log x} f(x,y)\, dy\right] dx$.

۱۵ . $\int_{-1}^{1}\left[\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x^2} f(x,y)\,dy\right]dx$. ۱۶ . $\int_{0}^{1}\left[\int_{x^3}^{x^2} f(x,y)\,dy\right]dx$.

۱۷ . $\int_{0}^{\pi}\left[\int_{-\sin(x/2)}^{\sin x} f(x,y)\,dy\right]dx$. ۱۸ . $\int_{0}^{4}\left[\int_{-\sqrt{4-y}}^{(y-4)/2} f(x,y)\,dx\right]dy$.

۱۹ . وقتی برای حجم V جسم تحت سهمی‌گون $z = x^2 + y^2$ و بالای ناحیهٔ S ازصفحهٔ xy انتگرال مضاعف تشکیل دادیم ، مجموع زیر از انتگرالهای مکرر به‌دست آمد :

$$V = \int_{0}^{1}\left[\int_{0}^{y} (x^2 + y^2)\,dx\right]dy + \int_{1}^{2}\left[\int_{0}^{2-y} (x^2 + y^2)\,dx\right]dy.$$

ناحیهٔ S را رسم کرده و V را به‌صورت انتگرال مکرری که درآن ترتیب انتگرالگیری عکس شده است بیان دارید . همچنین ، انتگرالگیری را انجام داده و V را محاسبه نمایید .

۲۰ . وقتی برای حجم V جسم تحت سطح $z = f(x,y)$ و بالای ناحیهٔ S از صفحهٔ xy انتگرال مضاعف تشکیل دادیم ، مجموع زیر از انتگرالهای مکرر به‌دست آمد :

$$V = \int_{0}^{a\sin c}\left[\int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{b^2-y^2}} f(x,y)\,dx\right]dy + \int_{a\sin c}^{b\sin c}\left[\int_{y\cot c}^{\sqrt{b^2-y^2}} f(x,y)\,dx\right]dy.$$

به‌ازای $0 < a < b$ و $0 < c < \pi/2$ داده شده، ناحیهٔ S را رسم کرده و معادلات همهٔ منحنیهایی که کرانهٔ آن را می‌سازند بنویسید .

۲۱ . وقتی برای حجم V جسم تحت سطح $z = f(x,y)$ و بالای ناحیهٔ S از صفحهٔ xy انتگرال مضاعف تشکیل دادیم ، مجموع زیر از انتگرالهای مکرر به‌دست آمد :

$$V = \int_{1}^{2}\left[\int_{x}^{x^3} f(x,y)\,dy\right]dx + \int_{2}^{8}\left[\int_{x}^{8} f(x,y)\,dy\right]dx.$$

(آ) ناحیهٔ S را رسم کرده و V را به‌صورت یک انتگرال مکرر که درآن ترتیب انتگرالگیری عکس شده است بیان دارید .

(ب) انتگرالگیری را وقتی $f(x,y) = e^x(x/y)^{1/2}$ انجام داده‌و V رامحاسبه نمایید .

۲۲ . فرض کنید $A = \int_0^1 e^{-t^2}\,dt$ و $B = \int_0^{1/2} e^{-t^2}\,dt$. انتگرال مکرر

$$I = 2\int_{-1/2}^{1}\left[\int_{0}^{x} e^{-y^2}\,dy\right]dx$$

رابرحسب A و B حساب کنید .اینها اعداد صحیح مثبتی‌مانند m و n اند بطوری که

$$I = mA - nB + e^{-1} - e^{-1/4}.$$

با استفاده از این، جواب خود را امتحان کنید.

۲۳ . مخروط توپری با اتصال هر نقطه از ناحیهٔ مسطح S به راسی که در صفحهٔ S نیست به‌دست آمده است. فرض کنید A مساحت S بوده، و h ارتفاع مخروط باشد. ثابت کنید

(آ) مساحت مقطع عرضی حاصل به‌وسیلهٔ یک صفحهٔ موازی قاعده در فاصلهٔ t از راس مساوی $(t/h)^2A$ است اگر $0 \le t \le h$ ؛

(ب) حجم مخروط مساوی است با $\frac{1}{3}Ah$.

۲۴ . با عکس کردن ترتیب انتگرالگیری، فرمول زیر را نتیجه بگیرید:

$$\int_0^a \left[\int_0^y e^{m(a-x)} f(x)\, dx\right] dy = \int_0^a (a-x)e^{m(a-x)} f(x)\, dx,$$

که درآن a و m ثابت بوده و $a > 0$.

۱۶.۱۱ کاربردهای دیگری از انتگرالهای مضاعف

قبلاً دیدیم که انتگرالهای مضاعف را می‌توان در محاسبهٔ حجم اجسام و مساحت نواحی مسطح به‌کار برد. بسیاری از مفاهیم دیگر نظیر جرم، مرکز جرم، و گشتاور ماند را نیز می‌توان به کمک انتگرالهای مضاعف تعریف و محاسبه کرد. این بخش شامل بحث کوتاهی از این مباحث است. این نکات در فیزیک و مهندسی از اهمیت خاصی برخوردارند.

فرض کنیم P برداری از مبداء تا یک نقطهٔ دلخواه در فضای 3 باشد. اگر n جرم مثبت $m_1, m_2, \ldots, m_n$ را بترتیب در نقاط $P_1, P_2, \ldots, P_n$ قرار داده باشیم، **مرکز جرم** دستگاه نقطهٔ C تعریف می‌شود که با معادلهٔ برداری

$$C = \frac{\sum_{k=1}^n m_k P_k}{\sum_{k=1}^n m_k}$$

معین می‌گردد. مخرج، یعنی $\sum m_k$ ، **جرم کل** دستگاه نامیده می‌شود.

اگرهرجرم m_k با بردار معلوم A به نقطهٔ جدید Q_k ، که $Q_k = P_k + A$ ، انتقال داده شود، مرکز جرم نیز به‌وسیلهٔ A انتقال می‌یابد، زیرا داریم

$$\frac{\sum m_k Q_k}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k (P_k + A)}{\sum m_k} = \frac{\sum m_k P_k}{\sum m_k} + A = C + A.$$

این را می‌توان این‌طور توصیف کرد که گفت موضع مرکز جرم فقط به نقاط $P_1, P_2, \ldots, P_n$ و جرمها بستگی دارد، و از مبداء مستقل است. مرکز جرم کمیتی است به طور نظری محاسبه شده که، به زبانی، "نقطهٔ تعادل" فرضی دستگاه را نمایش می‌دهد.

هرگاه جرمها در یک صفحه و در نقاطی به مختصات $(x_1, y_1), \ldots, (x_n, y_n)$ واقع بوده و مرکز جرم به مختصات $(\bar{x}, \bar{y})$ باشد، رابطهٔ برداری معرف C را می‌توان به‌صورت دو معادلهٔ اسکالر بیان کرد:

$$\bar{x} = \frac{\sum m_k x_k}{\sum m_k} \qquad \text{و} \qquad \bar{y} = \frac{\sum m_k y_k}{\sum m_k}.$$

درصورت کسر معرف $\bar{x}$، جملهٔ k ام مجموع، یعنی $m_k x_k$، را **گشتاور** جرم m_k حول محور y می‌نامند. اگر جرم m مساوی جرم کل دستگاه باشد که در مرکز جرم گذارده شده است، گشتاور آن حول محور y مساوی گشتاور دستگاه است:

$$m\bar{x} = \sum_{k=1}^{n} m_k x_k .$$

وقتی در دستگاه ما جرم کل به‌جای درچند نقطهٔ مجزا در سراسر یک ناحیه درصفحه توزیع شده باشد، مفاهیم جرم، مرکز جرم، و گشتاور به‌جای مجموع با انتگرال تعریف می‌شوند. مثلاً"، یک صفحهٔ نازک به شکل ناحیهٔ مسطح S را درنظر می‌گیریم. فرض کنیم ماده روی این صفحه با چگالی (جرم در واحد مساحت) معلوم توزیع شده باشد. این یعنی تابعی نامنفی مانند f وجود دارد که بر S تعریف شده است و $f(x, y)$ جرم درواحد مساحت در نقطهٔ (x, y) را نمایش می‌دهد. اگر صفحه از مادهٔ همگنی ساخته شده باشد، چگالی ثابت است. دراین حالت جرم کل صفحه مساوی حاصل ضرب چگالی در مساحت صفحه تعریف می‌شود.

وقتی چگالی نقطه به نقطه تغییر کند، از انتگرال مضاعف چگالی به عنوان تعریف جرم کل استفاده می‌شود. به عبارت دیگر، اگر تابع چگالی f روی S انتگرالپذیر باشد، جرم کل $m(S)$ صفحه را با معادلهٔ

$$m(S) = \iint_S f(x, y)\, dx\, dy$$

تعریف می‌کنیم. خارج قسمت

$$\frac{\text{جرم}}{\text{مساحت}} = \frac{\iint\limits_S f(x, y)\,dx\,dy}{\iint\limits_S dx\,dy}$$

چگالی متوسط صفحه‌نامیده‌می‌شود. اگر S را به‌جای صفحهٔ نازک یک شکل هندسی‌بگیریم، این خارج قسمت **مقدار متوسط** یا **میانگین** تابع f روی ناحیهٔ S نامیده می‌شود. دراین حالات لازم نیست f نامنفی باشد.

برای تشابه با حالت متناهی، **مرکز جرم** صفحه را نقطهٔ $(\bar{x}, \bar{y})$ تعریف می‌کنیم که‌با معادلات

$$(۱۴\cdot۱۱)\quad \bar{y}m(S) = \iint\limits_S yf(x, y)\,dx\,dy \quad \text{و} \quad \bar{x}m(S) = \iint\limits_S xf(x, y)\,dx\,dy$$

معین می‌شود. انتگرالهای‌طرف راست بترتیب‌گشتاورهای صفحه حول محور y ومحور x نامیده می‌شوند. وقتی چگالی ثابت باشد، مثلاً $f(x, y) = c$ ، سازهٔ c در هر یک از معادلات (۱۴۰۱۱) حذف شده و خواهیم داشت

$$\bar{y}a(S) = \iint\limits_S y\,dx\,dy \quad \text{و} \quad \bar{x}a(S) = \iint\limits_S x\,dx\,dy ،$$

که درآنها $a(S)$ مساحت S است. دراین حالت، نقطهٔ $(\bar{x}, \bar{y})$ **مرکزگون** صفحه (یاناحیهٔ S) نامیده خواهد شد.

هرگاه L خطی‌دراین صفحه باشد، $\delta(x, y)$ را فاصلهٔ عمودی نقطهٔ (x, y) در S تا خط L می‌گیریم. دراین صورت، عدد I_L تعریف شده با معادلهٔ

$$I_L = \iint\limits_S \delta^2(x, y)f(x, y)\,dx\,dy$$

گشتاور ماند صفحه حول L نام دارد. وقتی $f(x, y) = 1$ ، I_L گشتاور ماند **یاگشتاوردوم** ناحیهٔ S حول L نام دارد. گشتاورهای ماند بترتیب حول محورهای x و y بـا I_x و I_y نموده، و با انتگرالهای زیر داده می‌شوند:

$$I_x = \iint\limits_S y^2 f(x, y)\,dx\,dy \quad \text{و} \quad I_y = \iint\limits_S x^2 f(x, y)\,dx\,dy.$$

مجموع این دو انتگرال **گشتاور ماند قطبی** I_0 حول مبداء نام دارد:

$$I_0 = I_x + I_y = \iint\limits_S (x^2 + y^2)f(x, y)\,dx\,dy.$$

تذکر. جرم‌ومرکز جرم یک صفحه از خواص جسم بوده و از موضع مبداء و جهات‌محورهای مختصات مستقل‌اند. گشتاور ماند قطبی تابع موضع مبداء است ولی از جهات محورهای مختصات مستقل است. گشتاورها و گشتاورهای ماند حول محورهای x و y تابع موضع مبداء و جهات محورها می‌باشند. اگر یک صفحه با چگالی ثابت محور تقارن داشته باشد، مرکزگون آن براین محور واقع است. اگر دو محور تقارن وجود داشته باشند، مرکزگون بر نقطهٔ‌برخورد آنها قرار دارد. این احکام، که از تعاریف پیش قابل اثبات‌اند، اغلب در ساده کردن محاسبات مرکز جرم و گشتاور ماند کمک خواهند بود.

مثال ۱. یک صفحهٔ نازک به چگالی ثابت c به دو دایرهٔ متحدالمرکز با شعاعهای a و b محدود شده، که $0 < b < a$، و مرکزش در مبداء است. گشتاور ماند قطبی آن را حساب کنید.

حل. انتگرال مربوط به I_0 عبارت است از

$$I_0 = c \iint_S (x^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

که درآن $S = \{(x, y) \mid b^2 \leq x^2 + y^2 \leq a^2\}$. برای ساده‌کردن محاسبات، انتگرال فوق را به‌صورت تفاضل دو انتگرال می‌نویسیم:

$$I_0 = c \iint_{S(a)} (x^2 + y^2)\, dx\, dy - c \iint_{S(b)} (x^2 + y^2)\, dx\, dy,$$

که درآن $S(a)$ و $S(b)$ بترتیب قرصهای مستدیر به شعاعهای a و b اند. می‌توان از انتگرالگیری مکرر برای محاسبهٔ انتگرال روی $S(a)$ استفاده کرد، و معلوم داشت که

$$\iint_{S(a)} (x^2 + y^2)\, dx\, dy = 4 \int_0^a \left[\int_0^{\sqrt{a^2 - x^2}} (x^2 + y^2)\, dy \right] dx = \frac{\pi a^4}{2}.$$

(جزئیات محاسبه را حذف کرده‌ایم، زیرا این انتگرال را می‌توان با استفاده از مختصات قطبی، که در بخش ۱۱.۲۷ بحث می‌شود، ساده‌تر حساب کرد.) بنابراین،

$$I_0 = \frac{\pi c}{2}(a^4 - b^4) = \pi c(a^2 - b^2)\frac{(a^2 + b^2)}{2} = m\,\frac{a^2 + b^2}{2},$$

که درآن $m = \pi c(a^2 - b^2)$ جرم صفحه است.

مثال ۲ . مرکزگون ناحیهٔ مسطح محدود به یک قوس از منحنی سینوس را معین کنید .

حل . ناحیهٔ S محدود به منحنی $y = \sin x$ و بازهٔ $0 \le x \le \pi$ را اختیار می‌کنیم . بنابر تقارن ، مختص x مرکزگون مساوی است با $\bar{x} = \pi/2$. مختص y آن ، یعنی $\bar{y}$ ، از رابطهٔ زیر به‌دست می‌آید :

$$\bar{y} = \frac{\iint\limits_S y\,dx\,dy}{\iint\limits_S dx\,dy} = \frac{\int_0^\pi [\int_0^{\sin x} y\,dy]\,dx}{\int_0^\pi \sin x\,dx} = \frac{\int_0^\pi \frac{1}{2}\sin^2 x\,dx}{2} = \frac{\pi}{8}.$$

۱۷۰۱۱ دو قضیه از پاپوس[1]

پاپوس اسکندری ، که حدود ۳۰۰ ب.م . می‌زیسته ، یکی از آخرین هندسه‌دانان مدرسهٔ ریاضیات یونانی دراسکندریه است . وی هشت کتاب نوشت و در آنها بخش اعظم اطلاعات ریاضی زمان خود را تلخیص کرد .(شش تای آخر و بخشی از کتاب دوم به‌جا مانده‌اند .) پاپوس چند خاصیت جالب مرکزگونها را کشف کرد ، که دوتای آنها در این بخش توصیف می‌شوند . اولین خاصیت مرکزگون یک ناحیهٔ مسطح را با حجم جسم دوار حاصل ازدوران این ناحیه حول خطی در صفحهٔ آن مربوط می‌کند .

ناحیهٔ مسطح Q را که بین نمودارهای دو تابع پیوستهٔ f و g روی بازهٔ $[a, b]$ ، که $0 \le g \le f$ ، قرار دارد درنظر می‌گیریم . فرض کنیم S جسم دوار حاصل از دوران Q حول محور x باشد . همچنین ، $a(Q)$ مساحت Q ، $v(S)$ حجم S ، و $\bar{y}$ مختص y مرکزگون Q باشد . وقتی Q برای‌تولید S می‌چرخد ، مرکزگون در امتداد دایره‌ای به‌شعاع $\bar{y}$ حرکت می‌کند . قضیهٔ پاپوس می‌گوید که ***حجم S مساوی محیط این دایره ضربدر مساحت Q است*** ؛ یعنی ،

$$v(S) = 2\pi\bar{y}a(Q). \tag{۱۵۰۱۱}$$

برای اثبات این فرمول کافی است توجه کنیم که حجم از انتگرال

$$v(S) = \pi \int_a^b [f^2(x) - g^2(x)]\,dx$$

---

1. Pappus

و $\bar{y}$ از فرمول زیر بەدست می‌آید:

$$\bar{y}a(Q) = \iint_Q y\,dy\,dx = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{f(x)} y\,dy \right] dx = \int_a^b \tfrac{1}{2}[f^2(x) - g^2(x)]\,dx .$$

از مقایسهٔ این دو فرمول فوراً " (۱۵۰۱۱) بەدست خواهد آمد.

مثال ۱. حجم یک چنبره. فرض کنیم S چنبرهٔ حاصل از دوران قرص مستدیر Q به شعاع R حول محوری در فاصلهٔ $b > R$ از مرکز Q باشد. حجم S بەآسانی از قضیهٔ پاپوس حساب می‌شود. داریم $\bar{y} = b$ و $a(Q) = \pi R^2$ ؛ درنتیجه،

$$v(S) = 2\pi\bar{y}a(Q) = 2\pi^2R^2b.$$

مثال بعدی نشان می‌دهد که قضیهٔ پاپوس را می‌توان برای محاسبهٔ مرکزگونها نیز بەکار بــرد.

مثال ۲. مرکزگون یک قرص نیمه مستدیر. فرض کنیم $\bar{y}$ مختص y مرکزگون قرص نیمه مستدیـر

$$Q = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le R^2, \quad y \ge 0\}$$

باشد. مساحت Q مساوی است با $\frac{1}{2}\pi R^2$. وقتی Q حول محور x بچرخد، یک کرهٔ توپر به حجم $\frac{4}{3}\pi R^3$ تولید می‌کند. طبق فرمول پاپوس، داریم

$$\tfrac{4}{3}\pi R^3 = 2\pi\bar{y}(\tfrac{1}{2}\pi R^2);$$

درنتیجه، $\bar{y} = \dfrac{4R}{3\pi}$.

قضیهٔ بعدی پاپوس می‌گوید که ***مرکزگون اجتماع دو ناحیهٔ مسطح از هم جدای A و B بر پاره خط واصل بین مرکزگون A و مرکزگون B واقع است.*** بطور کلی، فرض کنیم A و B دو صفحهٔ نازک باشند یا از هم‌جدا و یا در مجموعه‌ای با محتوای صفر یکدیگر را قطع کنند. همچنین، $m(A)$ و $m(B)$ جرمهای آنها بوده، و C_A و C_B بردارهایی از مبداء تا مراکز جرم آنها باشند. دراین صورت، اجتماع $A \cup B$ به جرم $m(A) + m(B)$ بوده، و مرکز جرم آن با بردار C معین می‌شود، که

$$C = \frac{m(A)C_A + m(B)C_B}{m(A) + m(B)}. \qquad (۱۶۰۱۱)$$

کسرمربوط به C ترکیبی است خطی به شکل $aC_A + bC_B$ ، که درآن a و b اسکالرهایی نامنفی‌بامجموع 1 می‌باشند. هرترکیب‌خطی به این شکل یک ترکیب محدب از C_A و C_B نامیده می‌شود. نقطهٔ انتهایی C بر پاره خط‌واصل بین نقاط‌انتهایی C_A و C_B واقع است.

فرمول‌پاپوس(۱۶۰۱۱)فورا" از تعریف مرکز جرم که با (۱۴۰۱۱) داده شده نتیجه می‌شود. اثبات را به‌عنوان تمرین به خواننده محول می‌کنیم. قضیه را می‌توان به‌طرز روشن به اجتماع سه یا چند ناحیه تعمیم داد. این قضیه بویژه در عمل وقتی صفحه‌ای با چگالی ثابت از چند قطعه ساخته شده است و هر قطعه دارای تقارن هندسی است‌سودمند است. مرکزگون هر قطعه را معین کرده و سپس،برای‌یافتن‌مرکزگون اجتماع، ترکیب محدب مناسبی را تشکیل می‌دهیم. مثالهایی در تمرین ۲۱ بخش بعد آورده شده‌اند.

۱۸۰۱۱ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۸ ، ناحیهٔ S به یک یا چند منحنی که با معادلاتی توصیف شده‌اند محدود شده است. درهر حالت ناحیهٔ S را رسم کرده و مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ مرکزگون را معین نمایید.

۱. $y = x^2, \quad x + y = 2$ ·
۲. $y^2 = x + 3, \quad y^2 = 5 - x$ ·
۳. $x - 2y + 8 = 0, \quad x + 3y + 5 = 0, \quad x = -2, \quad x = 4$ ·
۴. $y = \sin^2 x, \quad y = 0, \quad 0 \le x \le \pi$ ·
۵. $y = \sin x, \quad y = \cos x, \quad 0 \le x \le \frac{\pi}{4}$.
۶. $y = \log x, \quad y = 0, \quad 1 \le x \le a$ ·
۷. $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1, \quad x = 0, \quad y = 0$.
۸. $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ ، $x = 0, \quad y = 0$ ، در ربع اول.
۹. یک صفحهٔ نازک به یک قوس از سهمی $y = 2x - x^2$ و بازهٔ $0 \le x \le 2$ محدود شده است. اگر چگالی در هر نقطهٔ (x, y) مساوی $(1 - y)/(1 + x)$ باشد، جرم آن را معین نمایید.
۱۰. مرکز جرم یک صفحهٔ نازک به شکل مستطیل $ABCD$ را در صورتی بیابید که چگالی در هر نقطه حاصل ضرب فواصل آن نقطه تا دو ضلع مجاور AB و AD باشد.

در تمرینهای ۱۱ تا ۱۶ ، گشتاورهای ماند I_x و I_y صفحهٔ نازک S در صفحهٔ xy

که با یک یا چند منحنی به معادلات داده شده توصیف شده‌اند را محاسبه کنید.
درهر حالت، $f(x, y)$ چگالی در نقطهٔ دلخواه (x, y) از S است.

۱۱. $f(x,y) = 1$؛ $y = \sin^2 x, \quad y = -\sin^2 x, \quad -\pi \le x \le \pi$.

۱۲. $f(x,y) = 1$؛ $\frac{x}{a} + \frac{y}{b} = 1, \quad \frac{x}{c} + \frac{y}{b} = 1, \quad y = 0, \quad 0 < c < a, \quad b > 0$.

۱۳. $f(x,y) = 1$؛ $(x-r)^2 + (y-r)^2 = r^2, x = 0, y = 0, 0 \le x \le r, 0 \le y \le r$.

۱۴. $f(x,y) = 1$؛ $xy = 1, \quad xy = 2, \quad x = 2y, \quad y = 2x, \quad x > 0, \quad y > 0$.

۱۵. $f(x,y) = xy$؛ $y = e^x, \quad y = 0, \quad 0 \le x \le a$.

۱۶. $f(x,y) = |x - y|$؛ $y = \sqrt{2x}, \quad y = 0, \quad 0 \le x \le 2$.

۱۷. فرض کنید S یک صفحهٔ نازک به جرم m بوده، و L_0 و L دوخط موازی در صفحهٔ S باشند بطوری که L_0 از مرکز جرم S بگذرد. قضیهٔ محور موازی را اثبات کنید:

$$I_L = I_{L_0} + mh^2,$$

که درآن h فاصلهٔ عمودی بین دو خط L و L_0 است.
[**راهنمایی.** انتخاب دقیق محورهای مختصات کار را ساده می‌کند.]

۱۸. کرانهٔ یک صفحهٔ نازک یک بیضی با نیم محورهای a و b است. فرض کنید L خطی دراین صفحه باشد که از مرکز بیضی گذشته و با محور به طول $2a$ زاویهٔ α می‌سازد. اگر چگالی ثابت بوده و جرم صفحه m باشد، نشان دهید که گشتاور ماند I_L مساوی است با $\frac{1}{4}m(a^2 \sin^2 \alpha + b^2 \cos^2 \alpha)$.

۱۹. فاصلهٔ متوسط یک گوشه از یک مربع به ضلع h تا نقاط داخل مربع را پیدا کنید.

۲۰. فرض کنید δ فاصلهٔ نقطهٔ دلخواه P داخل یک دایره به شعاع r تا نقطهٔ ثابت P_0 که فاصله‌اش تا مرکز دایره h است باشد. متوسط تابع δ^2 روی ناحیهٔ محصور به دایره را پیدا نمایید.

۲۱. فرض کنید A, B, C مستطیلهای زیر در صفحهٔ xy باشند:

$$A = [0,4] \times [0,1], \qquad B = [2,3] \times [1,3], \qquad C = [2,4] \times [3,4].$$

با استفاده از قضیهٔ پاپوس، مرکزگون هریک از اشکال زیر را معین نمایید:
(آ) $A \cup B$؛ (ب) $A \cup C$؛ (پ) $B \cup C$؛ (ت) $A \cup B \cup C$.

۲۲. مثلث متساوی‌الساقین T به‌قاعدهٔ 1 و ارتفاع h است. قاعدهٔ T بر یکی از اضلاع مستطیل R به قاعدهٔ 1 و ارتفاع 2 منطبق شده است. مقدار h را طوری بیابید که مرکزگون $R \cup T$ بر ضلع مشترک R و T قرار گیرد.

۲۳ . مثلث متساوی‌الساقین T به قاعدهٔ $2r$ و ارتفاع h است . قاعدهٔ T بر ضلع قرص نیمه مستدیر D به شعاع r منطبق شده است . رابطه‌ای که باید بین r و h برقرار باشد تا مرکزگون $T \cup D$ داخل مثلث قرار گیرد را معین کنید .

۱۹۰۱۱ قضیهٔ گرین[1] در صفحه

دومین‌قضیهٔ‌اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال برای انتگرالهای خط می‌گوید که انتگرال خط گرادیان ∇f در امتداد یک مسیر بین نقاط $\boldsymbol{a}$ و $\boldsymbol{b}$ را می‌توان برحسب مقادیر تابعی $f(\boldsymbol{a})$ و $f(\boldsymbol{b})$ بیان‌کرد . مشابه دو بعدی این قضیــه وجود دارد که انتگرال مضاعف روی یک ناحیهٔ مسطح مانند R را به‌صورت انتگرال خط‌بیان می‌کند که در امتداد منحنی بستهٔ متشکل از کرانهٔ R گرفته شده است . این قضیه را معمولا" قضیهٔ گرین می‌گویند .*آن را می‌توان به چند طریق بیان کرد ، که متداولترین آنها اتحاد زیر است :

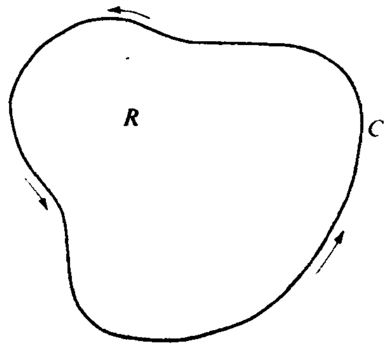
$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_C P\, dx + Q\, dy . \tag{۱۷۰۱۱}$$

منحنی C در سمت‌راست‌کرانهٔ‌ناحیهٔ R است ،وعلامت انتگرالگیری $\oint$ می‌گوید ،همانطور که‌شکل۱۳۰۱۱ نشان داده ، منحنی باید در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده شــود .

برای برقراری این اتحاد به دو نوع فرض نیاز داریم . اولا" ، قیودی بر توابع P و Q برای‌وجودانتگرالها اعمال می‌شوند . مفروضات معمول این است که P و Q بر مجموعهٔ بازی چون S شامل ناحیهٔ R به‌طور پیوسته مشتقپذیر باشند . این امر پیوستگی P و Q بر C و نیزپیوستگی $\partial P/\partial y$ و $\partial Q/\partial x$ بر R راایجاب می‌کند ، اگرچه این قضیه بامفروضات ضعیفتر نیز معتبر است . ثانیا" ، شرایطی وجود دارند با طبیعت هندسی که بر ناحیهٔ R و کرانه‌اش منحنی C اعمال می‌شوند . منحنی C می‌تواند هر منحنی بستهٔ سادهٔ با

1. Green

* *به‌افتخار جرج گرین(George Green (1793-1841) ، ریاضیدان انگلیسی که دربارهٔ کاربردهای ریاضیات در الکتریسیته ومغناطیس،جریان‌مایعات ،وانعکاس و تفرق نور و صوت‌مطالبی‌نوشته است . قضیه که‌نام گرین رادارد قبلا "درتحقیقات‌گاوس و لاگرانژ آمده است .*



شکل ۱۳۰۱۱ منحنی C کرانهٔ R است ، که در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود .

طول متناهی باشد . البته ، واژهٔ "با طول متناهی" یعنی C دارای طول قوس متناهی است . برای توضیح معنی یک منحنی بستهٔ ساده ، به تابع برداری که منحنی را توصیف می‌کند متوسل می‌شویم .

فرض‌کنیم C با تابع برداری پیوستهٔ α که بر بازهٔ $[a, b]$ تعریف شده توصیف شده باشد . اگر $\alpha(a) = \alpha(b)$ ، منحنی **بسته** است . یک منحنی بسته که به‌ازای هر جفت مقدار $t_1 \neq t_2$ دربازهٔ نیمباز $(a, b]$ ، $\alpha(t_1) \neq \alpha(t_2)$ یک منحنی بستهٔ **ساده** نامیده می‌شود . این یعنی ، جز نقاط انتهایی بازهٔ $[a, b]$ ، مقادیر متمایز از t نقاط متمایز بر منحنی را به دست می‌دهند . دایره نمونه‌ای است از یک منحنی بستهٔ ساده .

منحنیهای بستهٔ ساده واقع در یک صفحه را معمولا" ، به افتخار کامیل ژردان[1] (۱۹۲۲ ــ ۱۸۳۸) ، ریاضیدان مشهور فرانسوی که اغلب کارهای اولیه بر مفاهیمی نظیر منحنیهای بستهٔ ساده و طول قوس را انجام داده است ، **منحنیهای ژردان** می‌نامند . هر منحنی‌ژردان C صفحه‌را به دو مجموعهٔ همبند باز از هم جدا که منحنی C کرانهٔ مشترک آنهاست تجزیه می‌کند . یکی از این نواحی **کراندار** است و **درون** (یا **ناحیهٔ داخلی**) C نام دارد . (مثلا" ، ناحیهٔ سایه دار شکل ۱۳۰۱۱ .) دیگری بی‌کران است و **برون** (یا **ناحیهٔ خارجی**) C نامیده‌می‌شود . دربعضی از منحنیهای ژردان آشنا نظیر دوایر ، بیضیها ،

1. Camille Jordan

یا چند ضلعیهای مقدماتی ، شهودا " واضح است که منحنی صفحه را به یک ناحیهٔ داخلی وخارجی تقسیم می‌کند ، ولی اثبات این امر برای یک منحنی ژردان *دلخواه* آسان نیست . ژردان اولین کسی بود که لزوم اثبات این امر را متذکر شد . این مطلب امروزه به **قضیهٔ منحنی ژردان** معروف است . در اواخر قرن ۱۹ ، ژردان و دیگران برهانهای ناقصی منتشر کردند . درسال ۱۹۰۵ ، ریاضیدان امریکایی اسوالد وبلن[1] (۱۹۶۰ — ۱۸۸۰) ، اولین برهان کامل این قضیه را ارائه داد . قضیهٔ گرین درصورتی که C یک منحنی ژردان باطول متناهی بوده و ناحیهٔ R اجتماع C و درونش باشد معتبر است .* چون انتگرالهای خط درامتداد منحنیهای با طول متناهی دلخواه تعریف نشده‌اند ، بحث خود را در اینجا به منحنیهای قطعه قطعه هموار محدود می‌کنیم .

مشکل فنی دیگری نیز در تنظیم قضیهٔ گرین وجود دارد . قبلا " گفتیم که، برای برقراری اتحاد (۱۷۰۱۱) ، باید منحنی C در جهت خلاف حرکت ساعت پیموده شود . بطور شهودی ، این یعنی شخصی که در امتداد منحنی دراین جهت حرکت کند همیشه ناحیهٔ R را سمت چپ خود دارد . مجددا " ، در بعضی از منحنیهای ژردان آشنا ، نظیر آنهایی که پیشتر ذکر شدند ، معنی عبارت "پیمودن یک منحنی در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت" شهودا " واضح است . با اینحال ، در بیان کاملا " دقیق قضیهٔ گرین ، این عبارت باید به‌طور کاملا " تحلیلی تعریف شود ؛ یعنی ، برحسب تابع برداری α که منحنی را توصیف می‌کند . یکی از تعاریف ممکن در بخش ۲۴۰۱۱ به اختصار شرح داده شده است .

حال که به چند مشکل در تنظیم قضیهٔ گرین اشاره شد ، قضیه را به شکل نسبتا " کلی بیان کرده سپس مختصرا " صحت آن را برای چند ناحیهٔ خاص نشان می‌دهیم . در این بحث معنی "خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت" شهودی است ؛ درنتیجه ، بحث کاملا " دقیق نخواهد بود .

قضیهٔ ۱۰۰۱۱ . قضیهٔ گرین برای نواحی مسطح محدود به منحنیهای ژردان قطعه‌قطعه

---

1. Oswald Veblen

* *برهان قضیهٔ گرین برای نواحی با این عمومیت را می‌توان در فصل ۱۰ کتاب آنالیز ریاضی اپوستل یافت .*

هموار. فرض‌کنیم P و Q میدانهایی اسکالر باشند که بر مجموعهٔ باز S در صفحهٔ xy به‌طور پیوسته مشتقپذیر هستند. همچنین، C یک منحنی ژردان قطعه قطعه هموار بوده، و R اجتماع C با درونش‌باشد. فرض‌کنیم R زیر مجموعه‌ای از S باشد. دراین صورت، اتحاد زیر را داریم

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_C P\, dx + Q\, dy, \qquad (۱۸.۱۱)$$

که درآن انتگرال خط حول C و در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت گرفته شده‌است.

تذکر. اتحاد (۱۸.۱۱) با دو فرمول

$$\iint_R \frac{\partial Q}{\partial x}\, dx\, dy = \oint_C Q\, dy \qquad (۱۹.۱۱)$$

و

$$-\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = \oint_C P\, dx \qquad (۲۰.۱۱)$$

معادل است. درواقع، اگرهر دوی اینها درست باشند، (۱۸.۱۱) با جمع نتیجه‌می‌شود. بعکس، اگر (۱۸.۱۱) درست باشد، می‌توان (۱۹.۱۱) و (۲۰.۱۱) را به‌عنوان حالاتی خاص بترتیب با فرض $P = 0$ و $Q = 0$ به‌دست آورد.

برهان برای نواحی خاص. (۲۰.۱۱) را برای ناحیهٔ R از نوع یک ثابت می‌کنیم. یک چنین ناحیه به شکل زیر است:

$$R = \{(x, y) \mid a \le x \le b \quad , \quad f(x) \le y \le g(x)\},$$

که درآن f و g بر $[a, b]$ پیوسته بوده و $f \le g$. کرانهٔ C ی R از چهار بخش تشکیل شده است، قوس پایینی C_1 (نمودار f)، قوس بالایی C_2 (نمودار g)، و دو پاره‌خط قائم، که در جهات نموده شده در شکل ۱۴.۱۱ پیموده می‌شوند.

ابتدا انتگرال مضاعف $-\iint_R (\partial P/\partial y)\, dx\, dy$ را با انتگرالگیری مکرر حساب می‌کنیم. اگر ابتدا نسبت به y انتگرال بگیریم، داریم

$$-\iint_R \frac{\partial P}{\partial y}\, dx\, dy = -\int_a^b \left[\int_{f(x)}^{g(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\right] dx = \int_a^b \left[\int_{g(x)}^{f(x)} \frac{\partial P}{\partial y}\, dy\right] dx \qquad (۲۱.۱۱)$$

$$= \int_a^b P[x, f(x)]\, dx - \int_a^b P[x, g(x)]\, dx .$$

از آن سو، انتگرال خط $\int_C P\, dx$ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\int_C P\, dx = \int_{C_1} P\, dx + \int_{C_2} P\, dx ,$$

زیرا انتگرال خط درامتداد هر پاره خط‌قائم صفر است. برای محاسبهٔ انتگرال در امتداد C_1، از نمایش برداری $\alpha(t) = ti + f(t)j$ استفاده کرده به‌دست می‌آوریم

$$\int_{C_1} P\, dx = \int_a^b P[t, f(t)]\, dt .$$

برای محاسبهٔ انتگرال در امتداد C_2، از نمایش $\alpha(t) = ti + g(t)j$ استفاده کرده، با محسوب کردن جهت عکس، به‌دست می‌آوریم

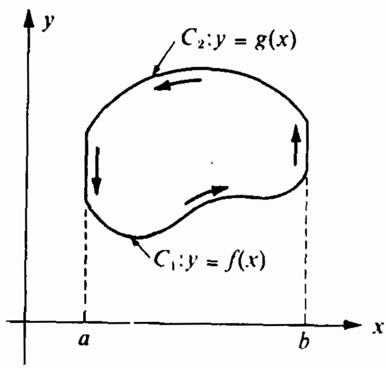
$$\int_{C_2} P\, dx = -\int_a^b P[t, g(t)]\, dt .$$

لذا، داریم

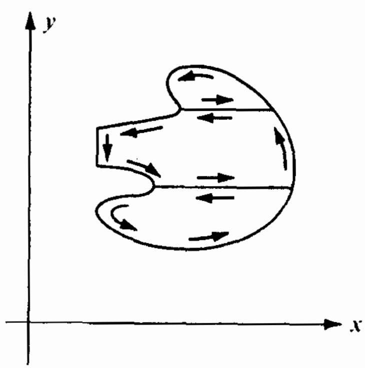
$$\int_C P\, dx = \int_a^b P[t, f(t)]\, dt - \int_a^b P[t, g(t)]\, dt .$$

از مقایسهٔ این معادله با فرمول (۲۱۰۱۱)، (۲۰۰۱۱) را به‌دست خواهیم آورد.

با استدلال مشابهی، می‌توان (۱۹۰۱۱) را برای نواحی از نوع دو اثبات کرد.



شکل ۱۴۰۱۱ برهان قضیهٔ گرین برای یک ناحیهٔ خاص



شکل ۱۵۰۱۱ برهان قضیهٔ گرین برای یک ناحیهٔ کلیتر

بدین طریق ، برهان قضیهٔ گرین برای نواحی هم از نوع یک هم از نوع دو به‌دست می‌آید . پس از این کار ، قضیه را می‌توان برای نواحی R که قابل تجزیه به تعدادی متناهی ناحیه از هر دو نوع‌اند اثبات کرد . "برشهای عرضی" مثل شکل ۱۱.۱۵ وارد کار می‌شوند ، قضیه بر هر زیر ناحیه اعمال می‌شود ، و نتایج با هم جمع می‌گردند . همانطور که شکل نشان می‌دهد ، انتگرالهای خط در امتداد برشهای عرضی جفت جفت حذف می‌شوند ، و مجموع انتگرالهای خط در امتداد کرانه‌های زیر ناحیه‌ها مساوی انتگرال خط در امتداد کرانهٔ R است .

۱۱.۲۰ چند کاربرد قضیهٔ گرین

مثالهای زیر چند کاربرد قضیهٔ گرین را توضیح می‌دهند .

مثال ۱ . با استفاده از قضیهٔ گرین ، کار انجام شده به‌وسیلهٔ میدان نیروی $f(x, y) = (y + 3x)i + (2y - x)j$ در حرکت جسمی حول بیضی $4x^2 + y^2 = 4$ درجهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت را محاسبه کنید

برهان . این کار مساوی است با $\int_C P\,dx + Q\,dy$ ، که درآن $P = y + 3x$ ، $Q = 2y - x$ ، و C بیضی است . چون $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = -2$ ، قضیهٔ گرین نتیجه می‌دهد که

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \iint_R (-2)\,dx\,dy = -2a(R),$$

که درآن $a(R)$ مساحت ناحیهٔ محصور به بیضی است . چون این بیضی دارای نیم محورهای $a = 1$ و $b = 2$ است ، مساحت آن مساوی است با $\pi ab = 2\pi$ و مقدار انتگرال خط برابر -4π می‌باشد .

مثال ۲ . انتگرال خط $\int_C (5 - xy - y^2)\,dx - (2xy - x^2)\,dy$ را درصورتی که C مربعی به رئوس $(0, 0), (1, 0), (1, 1), (0, 1)$ بوده و درجهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده شود حساب کنید .

حل . در اینجا $P = 5 - xy - y^2$ ، $Q = x^2 - 2xy$ ، و $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 3x$

لذا، طبق قضیهٔ گرین، داریم

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = 3\iint_R x\,dx\,dy = 3\bar{x},$$

که درآن $\bar{x}$ مختص x مرکزگون مربع است. چون $\bar{x}$ بوضوح $\frac{1}{2}$ است، مقدار انتگرال خط $\frac{3}{2}$ می‌باشد.

مثال ۳. مساحت بیان شده با یک انتگرال خط. انتگرال مضاعف برای مساحت $a(R)$ ناحیهٔ R را می‌توان به شکل زیر بیان کرد:

$$a(R) = \iint_R dx\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

که درآن P و Q طوری‌هستندکه $\partial Q/\partial x - \partial P/\partial y = 1$. مثلاً، می‌توان $Q(x, y) = \frac{1}{2}x$ و $P(x, y) = -\frac{1}{2}y$ را اختیارکرد. اگر R ناحیهٔ محصور به منحنی ژردان C باشد، می‌توان، با اعمال قضیهٔ گرین، $a(R)$ را به‌صورت انتگرال خط بیان کرد:

$$a(R) = \int_C P\,dx + Q\,dy = \frac{1}{2}\int_C -y\,dx + x\,dy.$$

اگر منحنی کرانهٔ C با معادلات پارامتری توصیف شده باشد، مثلاً

$$x = X(t), \qquad y = Y(t), \qquad a \le t \le b,$$

انتگرال خط برای مساحت خواهد شد

$$a(R) = \frac{1}{2}\int_a^b \{-Y(t)X'(t) + X(t)Y'(t)\}\,dt = \frac{1}{2}\int_a^b \begin{vmatrix} X(t) & Y(t) \\ X'(t) & Y'(t) \end{vmatrix} dt.$$

۱۱.۲۱ شرط لازم و کافی برای گرادیان بودن یک میدان برداری دوبعدی

فرض کنیم میدان برداری $f(x, y) = P(x, y)\boldsymbol{i} + Q(x, y)\boldsymbol{j}$ بر مجموعهٔ باز S درصفحه به‌طور پیوسته مشتقپذیر باشد. اگر f یک گرادیان بر S باشد، همه‌جا بر S داریم

$$\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \tag{۱۱.۲۲}$$

به عبارت دیگر، شرط (۱۱.۲۲) شرطی *لازم* برای گرادیان بودن f است. همانطور که قبلاً دیدیم، این شرط کافی نیست. مثلاً، میدان برداری

$$f(x, y) = \frac{-y}{x^2 + y^2} i + \frac{x}{x^2 + y^2} j$$

همه‌جا بر مجموعهٔ $S = \mathbf{R}^2 - \{(0, 0)\}$ در (۱۱۰۲۲) صدق می‌کند، ولی f یک‌گرادیان بر S نیست. درقضیهٔ ۱۰٫۹ثابت کردیم که اگر مجموعهٔ S محدب باشد، شرط(۱۱۰۲۲) هم لازم و هم کافی برای گرادیان بودن f بر S است. به‌کمک قضیهٔ گرین می‌توان این نتیجه‌را به ردهٔ کلیتری از مجموعه‌های مسطح به‌نام **مجموعه‌های همبندساده** تعمیم داد. این مجموعه‌ها به‌صورت زیر تعریف می‌شوند.

تعریف مجموعهٔ مسطح همبند ساده. فرض کنیم S یک مجموعهٔ همبند باز در صفحه باشد. S را همبند *ساده* گوییم اگر، به‌ازای هر منحنی ژردان C واقع در S، ناحیهٔ داخلی C نیز زیر مجموعهٔ S باشد.

یک طوق (مجموعهٔ نقاط بین دو دایرهٔ متحدالمرکز) همبند ساده نیست، زیرا ناحیهٔ داخلی یک دایرهٔ متحدالمرکز با دوایر کرانه و شعاعی بین شعاعهای آنها زیر مجموعه‌ای‌ازطوق نیست. بطور شهودی، S را وقتی همبند ساده گوییم که دارای "سوراخ" نباشد. راه دیگر توصیف همبندی ساده این است که بگوییم منحنی C_1 در S که دونقطه را بهم وصل می‌کندرا می‌توان‌به هر منحنی دیگر C_2 در S که این دو نقطه را بهم وصل می‌کندبه‌طورپیوسته تغییر داد، بطوری که همهٔ منحنیهای میانی درطول تغییر شکل‌کاملا" در S قرار داشته باشند. تعریف دیگر، که می‌توان معادل بودنش را با تعریف فوق نشان داد، می‌گوید که مجموعهٔ همبند باز S همبند ساده است اگر متمم آن (نسبت به تمام صفحه) همبند باشد. مثلا"، یک طوق همبند ساده نیست، زیرا متمم آن ناهمبند است. یک مجموعهٔ همبند باز که همبند ساده نباشد **همبند چندگانه** نام دارد.

قضیهٔ ۱۱٫۱۱ . *فرض‌کنیم میدان برداری* $f(x, y) = P(x, y)i + Q(x, y)j$ *برمجموعهٔ همبندسادهٔ باز* S *درصفحه به‌طورپیوسته مشتقپذیر باشد. دراین صورت،* f *یک‌گرادیان بر* S *است اگر و فقط‌اگر*

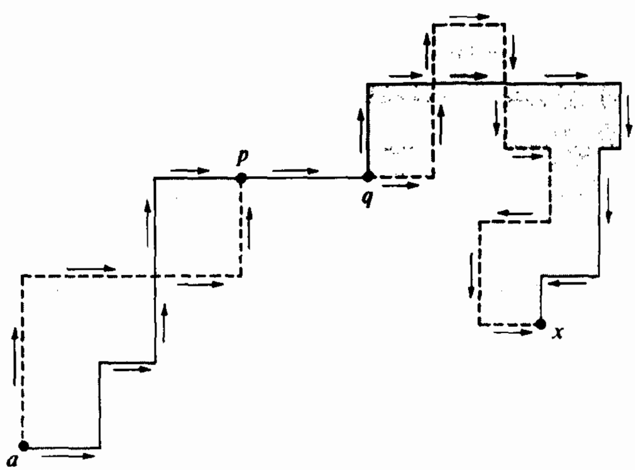
$$\text{همه‌جا بر } S \text{ داشته باشیم } \quad \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}. \qquad (۱۱۰۲۳)$$

برهان. همانطور که قبلاً دیدیم، شرط (۲۳۰۱۱) شرطی لازم برای گرادیان بودن f است. حال ثابت می‌کنیم این شرط کافی نیز هست.

می‌توان نشان داد که، در هر مجموعهٔ مسطح همبند باز S، هر جفت نقطهٔ a و x را می‌توان با یک‌چندضلعی پله‌ای ساده، یعنی چند ضلعیی که اضلاعش موازی محورهای مختصات بوده و خود قطعی ندارد، بهم وصل کرد. اگر انتگرال خط f از a تا x به‌ازای هر چند ضلعی‌پله‌ای‌ساده‌در S واصل‌بین a و x یک مقدار داشته باشد، دقیقاً "استدلال به‌کار رفته در اثبات قضیهٔ ۴۰۱۰ نشان می‌دهد که f یک گرادیان بر S است. لذا، کافی است تحقیق کنیم که انتگرال خط f از a تا x، به‌ازای هر چند ضلعی پله‌ای ساده در S واصل بین a و x، دارای یک مقدار است.

فرض کنیم C_1 و C_2 دو چند ضلعی پله‌ای ساده در S واصل بین a و x باشند. بخشهایی‌از این چند ضلعیها ممکن است در امتداد پاره خطهایی منطبق باشند. بخشهای دیگر حداکثر تعدادی متناهی بار متقاطعند، وکرانه‌های تعدادی متناهی ناحیهٔ چند ضلعی، مثلاً " $R_1, \ldots, R_m$، را تشکیل می‌دهند. چون S همبند ساده فرض شده است، هریک از نواحی R_k زیر مجموعه‌ای از S است. مثالی در شکل ۱۶۰۱۱ نموده شده است. خط ممتدنمایش C_1 است، خط منقطع نمایش C_2 است، ونواحی‌سایه‌دارنمایش $R_1, \ldots, R_m$ می‌باشند. (این دو چند ضلعی خاص در امتداد پاره خط pq بر هم منطبق‌اند.)

حال می‌بینیم که انتگرال خط f از a تا x در امتداد C_1 بعلاوهٔ انتگرال از x تا



شکل ۱۶۰۱۱ استقلال مسیر در یک ناحیهٔ همبند ساده

a در امتداد C_2 صفر است ، زیرا انتگرال در امتداد مسیر بسته مجموع انتگرالهایی است که‌روی پاره خطهای مشترک در C_1 و C_2 گرفته می‌شوند بعلاوهٔ مجموع انتگرالهایی که‌حول کرانه‌های نواحی R_k گرفته‌می‌شوند . انتگرالها روی پاره خطهای مشترک جفت جفت حذف می‌شوند ، زیرا هر پاره‌خط مشترک دوبار ، در جهتهای مخالف ، پیموده می‌شوند ، و مجموع آنها صفر می‌باشد . انتگرال روی کرانهٔ Γ_k ی هر ناحیهٔ R_k نیز صفر است ، زیرا ، طبق قضیهٔ گرین ، می‌توان نوشت

$$\int_{\Gamma_k} P\,dx + Q\,dy = \pm \iint_{R_k} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

و انتگرالده انتگرال مضاعف بخاطر فرض $\partial Q/\partial x = \partial P/\partial y$ صفر است . از اینجا نتیجه می‌شود که‌انتگرال‌از a تا x در امتداد C_1 مساوی انتگرال در امتداد C_2 است . همانطور که قبلاً " دیدیم ، این ایجاب می‌کند که f یک گرادیان در S باشد .

۲۲۰۱۱ تمرین

۱ . با استفاده از قضیهٔ گرین ، انتگرال خط $\oint_C y^2\,dx + x\,dy$ را وقتی

(آ) C مربعی به راسهای $(0, 0), (2, 0), (2, 2), (0, 2)$ باشد ؛

(ب) C مربعی به راسهای $(\pm 1, \pm 1)$ باشد ؛

(پ) C مربعی به راسهای $(\pm 2, 0), (0, \pm 2)$ باشد ؛

(ت) C دایره‌ای به شعاع 2 و مرکز مبداء باشد ؛

(ث) C به معادلهٔ برداری $\alpha(t) = 2\cos^3 t\,i + 2\sin^3 t\,j,\ 0 \le t \le 2\pi$ باشد

را حساب کنید .

۲ . هرگاه $P(x, y) = xe^{-y^2}$ و $Q(x, y) = -x^2 y e^{-y^2} + 1/(x^2 + y^2)$ ، انتگرال خط $\oint P\,dx + Q\,dy$ را حول کرانهٔ مربعی به ضلع $2a$ که با نامعادلات $|x| \le a$ و $|y| \le a$ معین می‌شود حساب کنید .

۳ . فرض‌کنید C یک منحنی بستهٔ ساده در صفحهٔ xy بوده ، و I_z گشتاور ماند (حول محور z) ناحیهٔ محصور به C باشد . نشان دهید که عددی صحیح مانند n هست بطوری که

$$nI_z = \oint_C x^3\,dy - y^3\,dx.$$

۴ . دو میدان اسکالر u و v داده شده‌اند که بر مجموعهٔ بازی شامل قرص مستدیر R که کرانه‌اش دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ است به‌طور پیوسته مشتقپذیر می‌باشند. دو میدان برداری f و g را به‌صورت زیر تعریف کنید:

$$f(x, y) = v(x, y)\boldsymbol{i} + u(x, y)\boldsymbol{j}, \qquad g(x, y) = \left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\boldsymbol{j}.$$

اگر بر کرانهٔ R داشته باشیم $u(x, y) = 1$ و $v(x, y) = y$ ، مقدار انتگرال مضاعف $\iint_R f \cdot g \, dx \, dy$ را پیدا نمایید.

۵ . هرگاه f و g در مجموعهٔ همبند باز S در صفحه به‌طور پیوسته مشتقپذیرباشند، نشان دهید که به‌ازای هر منحنی ژردان قطعه قطعه هموار C در S ، $\oint_C f \nabla g \cdot d\alpha = -\oint_C g \nabla f \cdot d\alpha$.

۶ . فرض کنید میدانهای اسکالر u و v در مجموعهٔ همبند باز S در صفحه دارای مشتقات جزئی مراتب اول و دوم پیوسته‌باشند. همچنین، R ناحیه‌ای در S باشد که به منحنی ژردان قطعه قطعه هموار C محدود شده است. نشان دهید که

(آ) $\oint_C uv \, dx + uv \, dy = \iint_R \left\{v\left(\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial y}\right) + u\left(\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial v}{\partial y}\right)\right\} dx \, dy$ ؛

(ب) $\frac{1}{2}\oint_C \left(v\frac{\partial u}{\partial x} - u\frac{\partial v}{\partial x}\right) dx + \left(u\frac{\partial v}{\partial y} - v\frac{\partial u}{\partial y}\right) dy = \iint_R \left(u\frac{\partial^2 v}{\partial x \, \partial y} - v\frac{\partial^2 u}{\partial x \, \partial y}\right) dx \, dy$.

مشتقهای قائم. دربخش ۱۰.۷ انتگرالهای خط را نسبت به طول قوس طوری تعریف کردیم که معادلهٔ زیر برقرار باشد:

$$\int_C P \, dx + Q \, dy = \int_C f \cdot T \, ds,$$

که درآن $f = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j}$ و T بردار یکهٔ مماس بر C است. (حاصل ضرب نقطه‌ای $f \cdot T$ مولفهٔ مماسی f در امتداد C نام دارد.) اگر C یک منحنی ژردان باشدکه باتابع به‌طورپیوسته‌مشتقپذیر α ، مثلاً $\alpha(t) = X(t)\boldsymbol{i} + Y(t)\boldsymbol{j}$ ، توصیف می‌شود، **قائم یکهٔ خارجی** n از C ، وقتی $\|\alpha'(t)\| \neq 0$ ، با معادلهٔ زیر تعریف می‌شود:

$$n(t) = \frac{1}{\|\alpha'(t)\|}\left(Y'(t)\boldsymbol{i} - X'(t)\boldsymbol{j}\right) .$$

اگر φ یک میدان اسکالر با گرادیان $\nabla\varphi$ بر C باشد، **مشتق قائم** $\partial\varphi/\partial n$ بر C با

معادلهٔ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = \nabla \varphi \cdot \boldsymbol{n}$$

تعریف می‌شود. البته، این مشتق جهتی φ در جهت $\boldsymbol{n}$ است. این مفاهیم دربقیهٔ تمرینات این بخش ظاهر خواهند شد.

۷ . هرگاه $\boldsymbol{f} = Q\boldsymbol{i} - P\boldsymbol{j}$ ، نشان دهید که

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_C \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\,ds.$$

(حاصل ضرب نقطه‌ای $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}$ مولفهٔ قائم $\boldsymbol{f}$ در امتداد C نام دارد.)

۸ . فرض‌کنید میدانهای اسکالر f و g بر مجموعهٔ باز S در صفحه دارای مشتقات جزئی مراتب اول و دوم پیوسته باشند. همچنین، R ناحیه‌ای (در S) باشد که کرانه‌اش یک منحنی ژردان قطعه قطعه هموار مانند C است. اتحادهای زیر را ثابت کنید، که در آنها $\nabla^2 u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2$:

(آ) $$\oint_C \frac{\partial g}{\partial n}\,ds = \iint_R \nabla^2 g\,dx\,dy \;;$$

(ب) $$\oint_C f\frac{\partial g}{\partial n}\,ds = \iint_R (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\,dx\,dy \;;$$

(پ) $$\oint_C \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) ds = \iint_R (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dx\,dy \,.$$

اتحاد (پ) به فرمول گرین معروف است. این فرمول نشان می‌دهد که هرگاه هردوی f و g بر R توافقی باشند (یعنی، وقتی بر R ، $\nabla^2 f = \nabla^2 g = 0$)،

$$\oint_C f\frac{\partial g}{\partial n}\,ds = \oint_C g\frac{\partial f}{\partial n}\,ds \,.$$

۹ . فرض کنید معادلهٔ دیفرانسیل

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

دارای سازهٔ انتگرالگیری $\mu(x, y)$ باشد که به یک خانوادهٔ یک پارامتری از جوابها به شکل $\varphi(x, y) = C$ منجر می‌شود. اگر شیب منحنی $\varphi(x, y) = C$ در (x, y) مساوی $\tan\theta$ باشد، بردار یکهٔ قائم $\boldsymbol{n}$ به معنی

$$n = \sin\theta\, i - \cos\theta\, j$$

گرفته مـی‌شود. یک میدان اسکالر مانند $g(x, y)$ وجود دارد بطوری که مشتق قائم φ از فرمول زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \mu(x, y)g(x, y),$$

که درآن $\partial\varphi/\partial n = \nabla\varphi \cdot n$. برای $g(x, y)$ یک فرمول صریح برحسب $P(x, y)$ و $Q(x, y)$ پیدا کنید.

* ۲۳۰۱۱ قضیهٔ گرین برای ناحیه‌های همبند چندگانه

قضیهٔ گرین را می‌توان طوری تعمیم داد که بر پاره‌ای از نواحی همبند چندگانه قابل اعمال باشد.

قضیهٔ ۱۲۰۱۱ . قضیهٔ گرین برای نواحی همبند چندگانه. *فرض کنیم $C_1, \ldots, C_n$ ، n منحنی ژردان قطعه قطعه هموار با خواص زیر باشند:*

(آ) هیچ دو منحنی متقاطع نباشند؛

(ب) منحنیهای $C_2, \ldots, C_n$ همه درون C_1 واقع باشند؛

(پ) به‌ازای هر $i \neq j, i > 1, j > 1$ ، منحنی C_i برون منحنی C_j واقع باشد.

فرض کنیم R ناحیهٔ متشکل از C_1 با آن بخش از درون C_1 باشد که داخل هیچیک از منحنیهای $C_2, C_3, \ldots, C_n$ قرار ندارد. (مثالی از چنین ناحیه در شکل ۱۷۰۱۱ نموده شده‌است.) همچنین، P و Q بر مجموعهٔ باز S شامل R به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد. دراین صورت، اتحاد زیر را خواهیم داشت:

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_{C_1} (P\, dx + Q\, dy) - \sum_{k=2}^{n} \oint_{C_k} (P\, dx + Q\, dy). \qquad (۲۴۰۱۱)$$

قضیه را می‌تـوان با استفاده از برشهای عرضی که R را به اجتماع تعدادی متناهی ناحیهٔ همبند سادهٔ محدود به منحنیهای ژردان تبدیل می‌کنند ثابت کرد. قضیهٔ گرین بر هر بخش جـداگانه اعمال شده، و نتایج بهم افزوده می‌شوند. نشان می‌دهیم که این اثبات، وقتـی $n = 2$ ، چگونه صـورت می‌گیرد. حالت کلیتر را می‌توان با استفاده از

معادلهٔ

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \nabla\varphi \cdot \boldsymbol{n}$$

تعریف‌می‌شود .البته ، این مشتق جهتی φ در جهت $\boldsymbol{n}$ است . این مفاهیم دربقیهٔ تمرینات این بخش ظاهر خواهند شد .

۷ . هرگاه $\boldsymbol{f} = Q\boldsymbol{i} - P\boldsymbol{j}$ ، نشان دهید که

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_C \boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}\,ds .$$

(حاصل ضرب نقطه‌ای $\boldsymbol{f} \cdot \boldsymbol{n}$ مولفهٔ قائم $\boldsymbol{f}$ درامتداد C نام دارد .)

۸ . فرض‌کنیدمیدانهای اسکالر f و g بر مجموعهٔ باز S در صفحه دارای مشتقات‌جزئی مراتب‌اول‌ودوم‌پیوسته باشند . همچنین، R ناحیه‌ای(در S)باشد که کرانه‌اش یک منحنی ژردان قطعه قطعه هموار مانند C است . اتحادهای زیر را ثابت کنید ، که در آنها $\nabla^2 u = \partial^2 u/\partial x^2 + \partial^2 u/\partial y^2$:

(آ) $$\oint_C \frac{\partial g}{\partial n}\,ds = \iint_R \nabla^2 g\,dx\,dy \;؛$$

(ب) $$\oint_C f\frac{\partial g}{\partial n}\,ds = \iint_R (f\nabla^2 g + \nabla f \cdot \nabla g)\,dx\,dy \;؛$$

(پ) $$\oint_C \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) ds = \iint_R (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\,dx\,dy \,.$$

اتحاد (پ) به فرمول گرین معروف است . این فرمول نشان می‌دهد که هرگاه هردوی f و g بر R توافقی باشند (یعنی ، وقتی بر R ، $\nabla^2 f = \nabla^2 g = 0$) ،

$$\oint_C f\frac{\partial g}{\partial n}\,ds = \oint_C g\frac{\partial f}{\partial n}\,ds \;.$$

۹ . فرض کنید معادلهٔ دیفرانسیل

$$P(x, y)\,dx + Q(x, y)\,dy = 0$$

دارای سازهٔ انتگرالگیری $\mu(x, y)$ باشد که به یک خانوادهٔ یک پارامتری از جوابها به شکل $\varphi(x, y) = C$ منجر می‌شود . اگرشیب منحنی $\varphi(x, y) = C$ در (x, y) مساوی $\tan\theta$ باشد ، بردار یکهٔ قائم $\boldsymbol{n}$ به معنی

$$\boldsymbol{n} = \sin\theta\, \boldsymbol{i} - \cos\theta\, \boldsymbol{j}$$

گرفته مـی‌شود . یک میدان اسکالر مانند $g(x, y)$ وجود دارد بطوری که مشتق قائم φ از فرمول زیر به‌دست می‌آید :

$$\frac{\partial\varphi}{\partial n} = \mu(x, y)g(x, y),$$

که درآن $\partial\varphi/\partial n = \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{n}$. برای $g(x, y)$ یک‌فرمول صریح برحسب $P(x, y)$ و $Q(x, y)$ پیدا کنید .

* ۲۳۰۱۱ قضیهٔ گرین برای ناحیه‌های همبند چندگانه

قضیهٔ گرین را می‌توان طوری تعمیم داد که بر پاره‌ای از نواحی همبند چندگانه قابل اعمال باشـد .

قضیهٔ ۱۲۰۱۱ . قضیهٔ گرین برای نواحی همبند چندگانه. *فرض کنیم $C_1, \ldots, C_n$ ، n منحنی ژردان قطعه قطعه هموار با خواص زیر باشند :*

(آ) هیچ دو منحنی متقاطع نباشند ؛

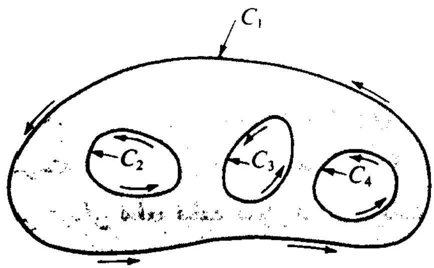
(ب) منحنیهای $C_2, \ldots, C_n$ همه درون C_1 واقع باشند ؛

(پ) به‌ازای هر $i \neq j, i > 1, j > 1$ ، منحنی C_i برون منحنی C_j واقع باشد .

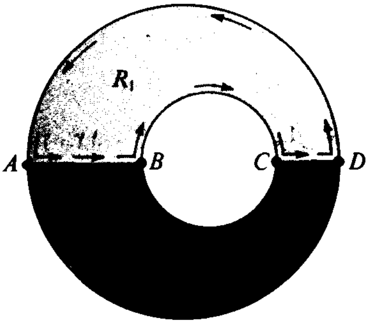
فرض کنیـم R ناحیهٔ متشـکل از C_1 با آن بخش از درون C_1 باشد که داخل هیچیک از منحنیهای $C_2, C_3, \ldots, C_n$ قرارندارد . (مثالی ازچنین ناحیه در شکل ۱۷۰۱۱ نموده شده‌است .) همچنین ، P و Q بر مجموعهٔ باز S شامل R به‌طور پیوسته مشتقپذیرباشد . دراین صورت ، اتحاد زیر را خواهیم داشت :

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_{C_1} (P\, dx + Q\, dy) - \sum_{k=2}^{n} \oint_{C_k} (P\, dx + Q\, dy). \qquad (۲۴۰۱۱)$$

قضیه را می‌تـوان با استفاده از برشهای عرضی که R را به اجتماع تعدادی متناهی ناحیهٔ همبند سادهٔ محدود به منحنیهای ژردان تبدیل می‌کنند ثابت کرد . قضیهٔ گرین بر هر بخش جـداگانه اعمال شده ، و نتایج بهم افزوده می‌شوند . نشان می‌دهیم که این اثبات ، وقتـی $n = 2$ ، چگونه صـورت می‌گیرد . حالت کلیتر را می‌توان با استفاده از



شکل ۱۷۰۱۱ یک ناحیهٔ همبند چندگانه



شکل ۱۸۰۱۱ اثبات قضیهٔ گرین برای یک ناحیهٔ همبند چندگانه

استقرا بر تعداد n منحنـی ثابت کرد .

ایدهٔ اثبات درحالت $n = 2$ با مثالی در شکل ۱۸۰۱۱ نموده شده است ، که درآن C_1 و C_2 دو دایـره بوده و C_1 دایرهٔ بزرگتراست . برشهای عرضی AB وCD را ، مطابق شکل ، وارد کار می‌کنیم . فرض‌کنیم K_1 منحنی ژردان مرکب از نیمهٔ بالایی C_2 ، نیمهٔ بالایی C_1 ، و پاره خطهایAB وCD باشد . همچنین ، K_2 منحنی ژردان مرکب از نیمهٔ پایینی C_1 ، نیمهٔ پـایینی C_2 ، و دو پاره خطABوCD باشد . حال قضیهٔ گرین را بر هر نـاحیهٔ محـدود بـه K_1 و K_2 اعمال کـرده و دو اتحاد حاصل را بهم می‌افزاییم . انتگرالهای خط در امتـداد برشهای عرضی حذف می‌شوند (چون هر برش عرضی در هر جهت یکبار پیموده می‌شود) ، و معادلهٔ زیر نتیجه خواهد شد :

$$\iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \oint_{C_1} (P\, dx + Q\, dy) - \oint_{C_2} (P\, dx + Q\, dy).$$

علامت منهـا بخاطر جهتی است که C_2 در آن جهت پیموده می‌شود . این همان معادلهٔ (۲۴۰۱۱) ، وقتی $n = 2$ ، می‌باشد .

برای یـک ناحیهٔ همبند ساده ، شرط $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ ایجاب می‌کند که انتگرال خط $\int P\, dx + Q\, dy$ از مسیر مستقل باشد (قضیهٔ ۱۱۰۱۱) . همانطور که قبلاً دیدیم ، اگر S همبند ساده نباشد ، شرط $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ لزوماً "استقلال مسیر را ایجاب نمی‌کند .

با اینحال ، در این حالت جانشینی برای استقلال هست که می‌تواند از قضیهٔ ۱۲۰۱۱ نتیجه شود .

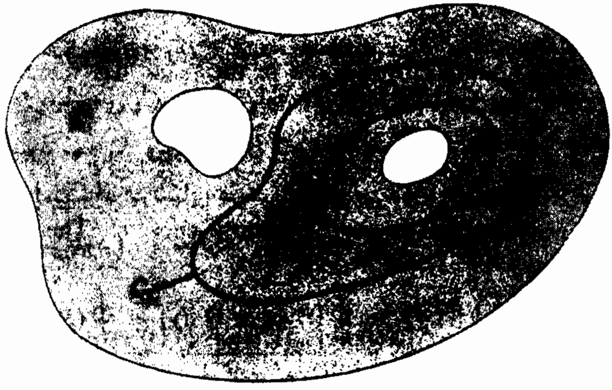
قضیهٔ ۱۳۰۱۱ . پایایی انتگرال خط تحت تغییر شکل مسیر . **فرض کنیم P و Q بر مجموعهٔ همبند باز S در صفحه به‌طور پیوسته مشتقپذیر بوده ، و همه‌جا بر S ، $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. همچنین ، C_1 و C_2 دو منحنی ژردان قطعه قطعه هموار در S بوده و در شرایط زیر صدق کنند :**

(آ) C_2 درون C_1 واقع باشد ؛

(ب) نقاط داخل C_1 که خارج C_2 واقع‌اند در S قرار داشته باشند . (شکل ۱۹۰۱۱ مثالی را نشان می‌دهد .) در این صورت ، داریم

$$\oint_{C_1} P\,dx + Q\,dy = \oint_{C_2} P\,dx + Q\,dy, \qquad (۲۵۰۱۱)$$

که در آن هر دو منحنی در یک جهت پیموده می‌شوند .



شکل ۱۹۰۱۱ پایایی انتگرال خط تحت تغییر شکل مسیر

برهان . با شرطهای بیان شده ، معادلهٔ (۲۴۰۱۱) وقتی $n = 2$ قابل اعمال است . ناحیهٔ R از نقاط بین دو منحنی C_1 و C_2 و خود منحنیها تشکیل شده است . چون در S ، $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ ، طرف چپ معادلهٔ (۲۴۰۱۱) صفر است و (۲۵۰۱۱) به‌دست می‌آید .

قضیهٔ ۱۳۰۱۱ گاهی این‌طور توصیف می‌شود که می‌گویند اگر در S، $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$، مقدار یک انتگرال خط در امتداد یک منحنی بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار در S با تغییر شکل مسیر به منحنی بستهٔ سادهٔ قطعه قطعه هموار دیگر در S ثابت می‌ماند، مشروط بر اینکه همهٔ منحنیهای میانی در طول تغییر شکل در S بمانند. مجموعهٔ S باز و همبند گرفته شده است ـ لازم نیست همبند ساده باشد.

* ۲۴۰۱۱ عدد گردشی

دیدیم که مقدار یک انتگرال خط اغلب هم به منحنی که در امتدادش انتگرالگیری صورت می‌گیرد و هم به جهت پیموده شدن منحنی بستگی دارد. مثلاً، در اتحاد قضیهٔ گرین باید انتگرال خط در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت گرفته شود. در بحث کاملاً دقیق قضیهٔ گرین لازم است معنی پیمودن یک منحنی بسته در "جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت" به‌طور تحلیلی معلوم شود. برای بعضی از منحنیهای خاص، این را می‌توان با عبارات خاصی در باب تابع برداری α که منحنی را توصیف می‌کند انجام داد. مثلاً، تابع برداری α تعریف شده بر $[0, 2\pi]$ با معادلهٔ

$$\alpha(t) = (a\cos t + x_0)\boldsymbol{i} + (a\sin t + y_0)\boldsymbol{j} \qquad (۲۶۰۱۱)$$

یک دایره به شعاع a و به مرکز (x_0, y_0) را توصیف می‌کند. گوییم این تابع خاص دایره را در جهت مثبت یا **خلاف حرکت عقربه‌های ساعت** توصیف می‌کند. از آن سو، اگر درسمت راست (۲۶۰۱۱) t را با $-t$ عوض کنیم، تابع جدیدی به‌دست می‌آید که گوییم دایره را درجهت منفی یا **حرکت عقربه‌های ساعت** توصیف می‌کند. بدین طریق، توصیف کاملاً تحلیلی "درجهت حرکت عقربه‌های ساعت" و "درجهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت" برای یک دایره به‌دست می‌آید. با اینحال، توصیف این ایده برای یک منحنی بستهٔ **دلخواه** چندان ساده نیست. برای منحنیهای قطعه قطعه هموار، این‌کار را می‌توان با مفهوم **عدد گردشی** انجام داد، روشی تحلیلی که به ما راه دقیق ریاضی شمارش دفعاتی که بردار شعاعی α حول یک نقطهٔ معلوم درپیمایش یک منحنی بستهٔ مفروض می‌گردد به ما می‌دهد. دراین بخش به اختصار روشی را برای معرفی عدد گردشی توصیف می‌کنیم. سپس طرز استفاده از آن برای دادن جهت مثبت یا منفی به منحنیهای بسته را نشان می‌دهیم.

فرض کنیم C یک منحنی بستهٔ قطعه قطعه هموار در صفحه باشد که به‌وسیلهٔ تابع برداری α تعریف شده بر بازهٔ $[a, b]$، مثلاً

$$\alpha(t) = X(t)i + Y(t)j \text{ ، } a \leq t \leq b \text{ اگر}$$

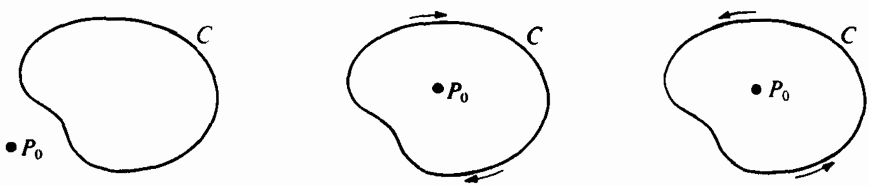
توصیف می‌شود . فرض‌کنیم نقطهٔ $P_0 = (x_0, y_0)$ برمنحنی C واقع نباشد . دراین صورت ، عدد گردشی α نسبت به نقطهٔ P_0 با $W(\alpha; P_0)$ نموده می‌شود ، و با انتگرال زیرتعریف می‌گردد :

$$W(\alpha; P_0) = \frac{1}{2\pi}\int_a^b \frac{[X(t) - x_0]Y'(t) - [Y(t) - y_0]X'(t)}{[X(t) - x_0]^2 + [Y(t) - y_0]^2}\, dt. \qquad (۲۷\cdot۱۱)$$

این همان انتگرال خط

$$\frac{1}{2\pi}\oint_C \frac{-(y - y_0)\, dx + (x - x_0)\, dy}{(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2} \qquad (۲۸\cdot۱۱)$$

می‌باشد . می‌توان نشان داد که مقدار این انتگرال همیشه یک **عدد صحیح** ، مثبت ، منفی ، یا صفر ، است . بعلاوه ، هرگاه C یک **منحنی ژردان** (منحنی بستهٔ **ساده**) باشد ، این عدد 0 است اگر P_0 **خارج** C باشد و 1+ یا 1− است اگر P_0 **داخل** C باشد . (ر.ک. شکل۱۱ ۰ ۲۰ .)بعلاوه ، $W(\alpha; P_0)$ بەازای هر نقطهٔ P_0 داخل C 1+ است یا بەازای



عدد گردشی 0   عدد گردشی 1−   عدد گردشی 1+

شکل ۲۰۰۱۱ مقادیر ممکن عدد گردشی منحنی ژردان C نسبت به P_0

هر چنین نقطه 1− می‌باشد . با این می‌توان جهتهای مثبت و منفی برای C را این‌طور تعریف‌کرد : اگر بەازای‌هر نقطهٔ P_0 داخل C عدد گردشی $W(\alpha; P_0)$ مساوی 1+ باشد ، گوییم α منحنی C را **درجهت مثبت** یا **خلاف حرکت عقربه‌های ساعت** رسم می‌کند.اگر عددگردشی 1− باشد ، گوییم α منحنی C را **درجهت منفی** یا **حرکت عقربه‌های ساعت** رسم می‌کند. [بەنمونەای از انتگرال (۲۸۰۱۱) که بەازای $x_0 = y_0 = 0$ به دست می‌آید قبلاً" در مثال ۲ از بخش ۱۶۰۱۰ برخوردیم .]

برای اثبات اینکه انتگرال معرف عدد گردشی بەازای یک منحنی بستهٔ ساده حول

(x_0, y_0)همیشه $+1$ یا -1 است ،از قضیهٔ ۱۳۰۱۱ استفاده می‌کنیم . فرض کنیم S ناحیهٔ همبند باز مرکب از تمام نقاط در صفحه جز(x_0, y_0) باشد . دراین صورت ، انتگرال خط در (۲۸۰۱۱) را می‌تـوان به صورت $\int_C P\,dx + Q\,dy$ نوشت ، و به‌آسانی ثابت می‌شود که ، همه‌جا در S ، $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$. لذا ، اگـر(x_0, y_0)داخل C باشد ، قضیهٔ ۱۳۰۱۱ می‌گوید کـه می‌توان بدون تغییر مقدار انتگرال ، منحنی C را با دایره‌ای به مرکز(x_0, y_0) عوض کرد . حال تحقیق می‌کنیم که ، برای یک دایره ، انتگرال معرف عدد گردشی ، بسته به اینکه دایره به‌طور مثبت یا منفی جهتدار شده باشد ، $+1$ یا -1 است . برای‌یک‌دایرهٔ جهتدار با جهت مثبت ، می‌توان از نمایش مذکور در معادلهٔ (۲۶۰۱۱) استفاده کـرد . دراین حالت ، داریم

$$X(t) = a\cos t + x_0, \qquad Y(t) = a\sin t + y_0,$$

و انتگرالده در (۲۷۰۱۱) متحد 1 است . لذا ، خواهیم داشت.

$$W(\alpha; P_0) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} 1\,dt = 1 .$$

با استدلالی مشابه ، معلوم می‌شود که این انتگرال ، وقتی C جهتدار با جهت منفی باشد ، -1 است . این ثابت می‌کند که ، به‌ازای هر منحنی بستهٔ ساده حول نقطهٔ (x_0, y_0) ، عدد گردشی $+1$ یا -1 است .

* ۲۵۰۱۱ تمرین

۱ . فرض کنید $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 > 0\}$ ، و اگر $(x, y) \in S$ ،

$$P(x, y) = \frac{y}{x^2 + y^2}, \qquad Q(x, y) = \frac{-x}{x^2 + y^2} .$$

همچنین ، C یک منحنی ژردان قطعه قطعه هموار در S باشد .

(آ) اگر $(0, 0)$ داخل C باشد ،نشان‌دهیدکه‌انتگرال خط $\int_C P\,dx + Q\,dy$ دارای مقدار $\pm 2\pi$ است ، و توضیح دهید چه‌وقت علامت بعلاوه خواهیم داشت .

(ب) مقدار انتگرال خط $\int_C P\,dx + Q\,dy$ ، وقتی $(0, 0)$ خارج C است ، را حساب کنیـد .

۲ . اگر $r = xi + yj$ و $r = \|r\|$ ، به‌ازای $r > 0$ قرار دهید

$$f(x, y) = \frac{\partial(\log r)}{\partial y}i - \frac{\partial(\log r)}{\partial x}j .$$

فرض‌کنید C یک منحنی ژردان قطعه قطعه هموار در طوق $1 < x^2 + y^2 < 25$ بوده، و تمام مقادیر ممکن انتگرال خط f در امتداد C را بیابید.

۳. یک ناحیهٔ مسطح همبند که درست یک "سوراخ" داشته باشد **همبند مضاعف** نامیده می‌شود. (طوق $1 < x^2 + y^2 < 2$ یک نمونه است.) اگر P و Q بر ناحیهٔ همبند مضاعف باز R به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر بوده، و همه‌جا در R، $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$، انتگرالهای خط $\int_C P\,dx + Q\,dy$ چند مقدار متمایز حول منحنیهای ژردان قطعه قطعه هموار در R بخود می‌گیرند؟

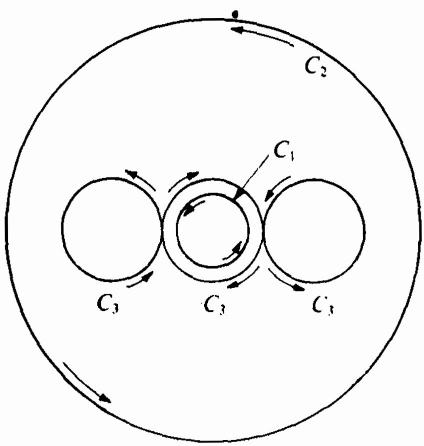
۴. تمرین ۳ را برای نواحی همبند سه‌گانه، یعنی نواحی مسطح همبندی که درست دو سوراخ دارند، حل کنید.

۵. فرض‌کنید P و Q دومیدان‌اسکالر دارای مشتقات پیوسته باشند که همه‌جا درصفحه جز درسه نقطه در $\partial P/\partial y = \partial Q/\partial x$ صدق می‌کنند. همچنین، C_1, C_2, C_3 سه‌دایرهٔ نامتقاطع به مرکزاین سه‌نقطه، مثل شکل ۲۱۰۱۱، بوده، و $I_k = \oint_{C_k} P\,dx + Q\,dy$.

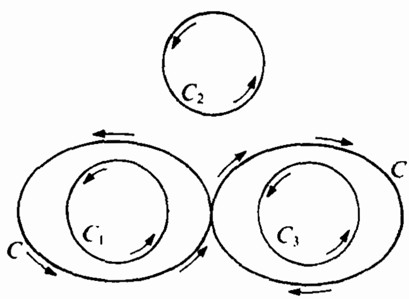
فرض کنید $I_1 = 12, I_2 = 10, I_3 = 15$.

(آ) مقدار $\int_C P\,dx + Q\,dy$، که در آن C منحنی شکل هشت نموده شده است، را پیدا کنید.

(ب) منحنی‌بستهٔ‌دیگر Γ را طوری‌رسم‌کنید که در امتدادش $\int P\,dx + Q\,dy = 1$. روی آن جهت پیمایش Γ را نشان دهید.



شکل ۲۲۰۱۱ تمرین ۶



شکل ۲۱۰۱۱، تمرین ۵

(پ) اگر $I_1 = 12$ ، $I_2 = 9$ ، و $I_3 = 15$ ، نشان دهید که منحنی بسته‌ای چون Γ نیست که در امتدادش $\int P\,dx + Q\,dy = 1$.

۶ . فرض کنید $I_k = \oint_{C_k} P\,dx + Q\,dy$ ، که در آن

$$P(x, y) = -y\left[\frac{1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{1}{x^2 + y^2} + \frac{1}{(x+1)^2 + y^2}\right]$$

و

$$Q(x, y) = \frac{x-1}{(x-1)^2 + y^2} + \frac{x}{x^2 + y^2} + \frac{x+1}{(x+1)^2 + y^2}.$$

در شکل ۲۲۰۱۱ ، C_1 کوچکترین دایره یعنی $x^2 + y^2 = \frac{1}{8}$ است (که در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده شده است) ، C_2 بزرگترین دایره یعنی $x^2 + y^2 = 4$ (که در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده شده است) ، و C_3 از سه دایرهٔ میانی $(x-1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ ، $x^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ ، و $(x+1)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$ تشکیل شده که در جهت‌نموده پیموده شده است . اگر $I_2 = 6\pi$ و $I_3 = 2\pi$ ، مقدار I_1 را پیدا کنید .

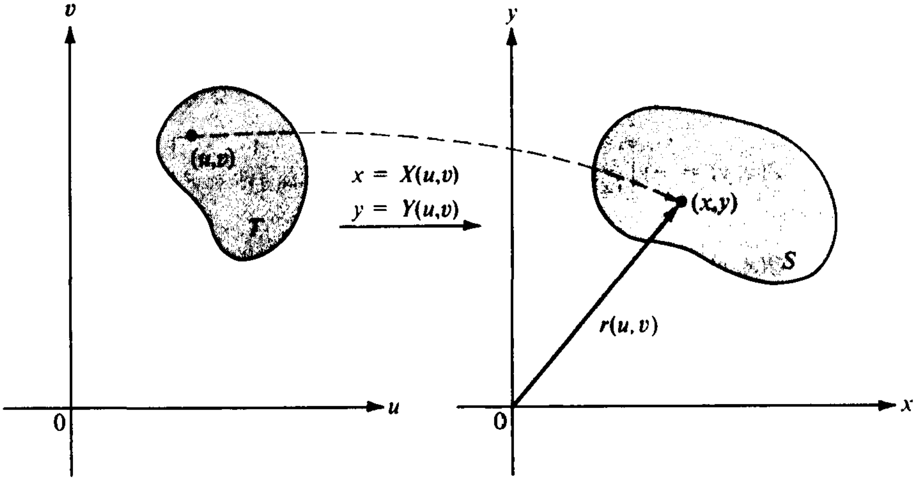
۲۶۰۱۱ تغییر متغیر در انتگرال مضاعف

در نظریهٔ انتگرالگیری یک بعدی اغلب به روش جانشانی می‌توان انتگرالهای پیچیده را با تبدیلشان به انتگرالهای ساده‌تر یا به‌انواعی که بشود ساده‌تر آنها را شناخت محاسبه کرد . روش کار مبتنی بر فرمول

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_c^d f[g(t)]g'(t)\,dt \qquad (۲۹۰۱۱)$$

است ، که در آن $a = g(c)$ و $b = g(d)$. این فرمول را (در جلد یک) با این مفروضات که g مشتق پیوسته بر بازهٔ $[c, d]$ داشته و f بر مجموعهٔ مقادیر $g(t)$ ، وقتی t در بازهٔ $[c, d]$ تغییر می‌کند ، پیوسته است ثابت شد .

مشابه دو بعدی (۲۹۰۱۱) ، به‌نام فرمول تغییر متغیر در انتگرال مضاعف ، وجود دارد . این فرمول یک انتگرال به‌شکل $\iint_S f(x, y)\,dx\,dy$ ، که روی ناحیهٔ S در صفحهٔ xy گرفته شده ، را به انتگرال مضاعف دیگر $\iint_T F(u, v)\,du\,dv$ ، که روی ناحیهٔ جدید T درصفحهٔ uv گرفته‌شده ، تبدیل می‌کند . رابطهٔ دقیق بین نواحی T و S وانتگرالده $f(x, y)$ و $F(u, v)$ عنقریب مورد بحث قرار می‌گیرد . روش جانشانی برای انتگرالهای‌مضاعف



شکل ۱۱.۲۳ نگاشت تعریف شده با معادلهٔ برداری $\boldsymbol{r}(u, v) = X(u, v)\boldsymbol{i} + Y(u, v)\boldsymbol{j}$

از حالت یک‌بعدی پیچیده‌تر است، زیرا باید دو جانشانی صوری انجام داد، یکی برای x و دیگری برای y. این یعنی، در اینجا به‌جای یک تابع g که در معادلهٔ (۱۱.۲۹) ظاهر شده، دو تابع، مثلاً X و Y، داریم که x, y را با u, v به صورت زیر مربوط می‌سازند:

$$x = X(u, v), \qquad y = Y(u, v). \tag{۱۱.۳۰}$$

دو معادله در (۱۱.۳۰) نگاشتی را تعریف می‌کنند که نقطهٔ (u, v) در صفحهٔ uv را به نقطهٔ (x, y) در صفحهٔ xy می‌برد. مجموعهٔ T از نقاط در صفحهٔ uv بروی مجموعهٔ دیگر S در صفحهٔ xy، مثل شکل ۱۱.۲۳، نگاشته می‌شود. این نگاشت را می‌توان با یک تابع برداری نیز توصیف کرد. از مبداء در صفحهٔ xy بردار شعاعی $\boldsymbol{r}$ را به نقطهٔ دلخواه (x, y) از S، مثل شکل ۱۱.۲۳، رسم می‌کنیم. بردار $\boldsymbol{r}$ تابع هم u و هم v است، و می‌توان آن را یک تابع برداری دو متغیره گرفت که با معادلهٔ زیرتعریف می‌شود:

$$\boldsymbol{r}(u, v) = X(u, v)\boldsymbol{i} + Y(u, v)\boldsymbol{j} \quad \text{اگر} \quad (u, v) \in T. \tag{۱۱.۳۱}$$

این معادله یک **معادلهٔ برداری** این نگاشت نامیده می‌شود. وقتی (u, v) نقاط T را بگیرد، نقطهٔ انتهایی $\boldsymbol{r}(u, v)$ نقاط S را رسم خواهد کرد.

گاهی دو معادلهٔ (۳۰.۱۱) را می‌توان نسبت به u و v و برحسب x و y حل کرد. درصورت امکان آن، می‌توان نتیجه را به‌شکل

$$u = U(x, y), \qquad v = V(x, y)$$

بیان کرد. این معادلات نگاشتی از صفحهٔ xy به‌صفحهٔ uv تعریف می‌کنند، به‌نام **نگاشت معکوس** نگاشت تعریف شده با (۳۰.۱۱)، زیرا نقاط S را به نقاط T برمی‌گردانند. **نگاشتهای یک به یک** از اهمیت ویژه‌ای برخوردارند. اینها نقاط **متمایز** T را به نقاط **متمایز** S می‌برند. به عبارت دیگر، هیچ دو نقطهٔ متمایز T با یک نگاشت یک به یک روی یک نقطه از S نگاشته نمی‌شوند. هرچنین نگاشتی یک تناظر یک به یک بین نقاط T و نقاط S برقرار می‌کند، و می‌توان (دست کم به‌طور نظری) با نگاشت معکوس (که، البته، آن نیز یک به یک است) از S به T برگشت.

نگاشتهایی را درنظر می‌گیریم که در آنها توابع X و Y بر S پیوسته بوده و دارای مشتقات جزئی پیوستهٔ $\partial X/\partial u$، $\partial X/\partial v$، $\partial Y/\partial u$، و $\partial Y/\partial v$ براین مجموعه باشند. فرضهای مشابهی برای توابع U و V می‌شود. اینها قیودی جدی نیستند، زیرا اغلب توابع موجود در عمل از آنها تبعیت می‌کنند.

فرمول تبدیل انتگرالهای مضاعف را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \iint_T f[X(u, v), Y(u, v)]\, |J(u, v)|\, du\, dv. \qquad (۳۲.۱۱)$$

سازهٔ $J(u, v)$ در انتگرالدهٔ سمت راست نقش سازهٔ $g'(t)$ در فرمول یک بعدی (۲۹.۱۱) را دارد. این سازه **دترمینان ژاکوبی** نگاشت تعریف شده با (۳۰.۱۱) نامیده می‌شود، و مساوی است با

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial u} \\[2mm] \dfrac{\partial X}{\partial v} & \dfrac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

گاهی به‌جای $J(u, v)$ از علامت $\partial(X, Y)/\partial(u, v)$ برای نمایش دترمینان ژاکوبی استفاده می‌شود.

ما کلیترین شرایطی که فرمول تبدیل (۳۲.۱۱) تحت آنها معتبر است را مطرح

نکردیم . می‌توان نشان داد* که اگر، علاوه بر فرضهای پیوستگی فوق درباب X ، Y ، U ، و V ، فرض کنیم نگاشت از T به S یک به‌یک بوده و ژاکوبی $J(u,v)$ هرگز صفر نباشد ، (۳۲۰۱۱) برقرار می‌باشد . این فرمول درصورت یک به یک نبودن نگاشت بر زیرمجموعه‌ای از T با محتوای صفر ، یا صفر شدن ژاکوبی برزیر مجموعه‌ای با محتوای صفر ، نیز معتبر است .

در بخش ۳۰۰۱۱ نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان فرمول تبدیل (۳۲۰۱۱) را به عنوان نتیجه‌ای از یک حالت خاص، یعنی حالتی که در آن S یک مستطیل بوده و تابع f در هر نقطهٔ S مقدار ثابت 1 دارد ، به‌دست آورد . دراین حالت خاص، (۳۲۰۱۱) خواهد شد

$$\iint_S dx\,dy = \iint_T |J(u,v)|\,du\,dv. \tag{۳۳۰۱۱}$$

حتی دراین حالت نیز برهان ساده نیست . در بخش ۲۹۰۱۱ برهانی از (۳۳۰۱۱) به کمک قضیهٔ گرین داده شده است . باقی این بخش استدلال هندسی ساده‌ای به‌دست می‌دهد که دلیل اینکه چرا بایدفرمولی شبیه (۳۳۰۱۱) برقرار باشد را توضیح می‌دهد .

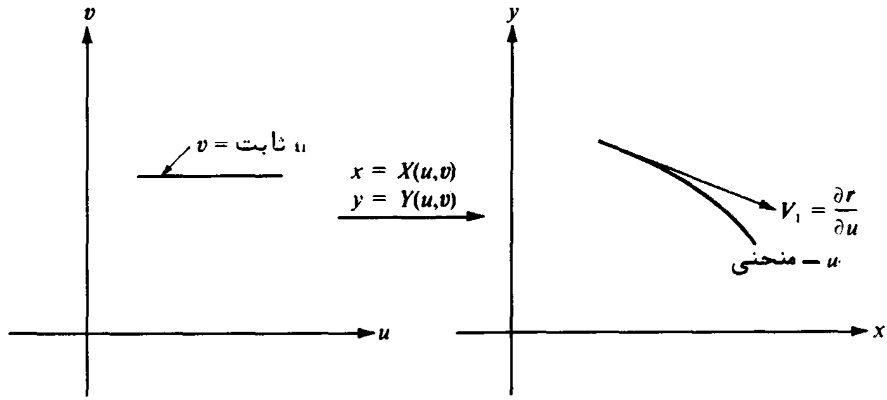
انگیزهٔ هندسی معادلهٔ (۳۳۰۱۱) . ناحیهٔ T رادرصفحهٔ uv ، مثل شکل ۲۳۰۱۱ ، اختیار کرده ، و فرض می‌کنیم S مجموعهٔ نقاطی در صفحهٔ xy باشد که T با تابع برداری $\mathbf{r}$ داده‌شده‌با (۳۱۰۱۱) بروی آن نگاشته می‌شود . حال دو تابع برداری جدید V_1 و V_2 را معرفی می‌کنیم که با مشتق جزئی گرفتن از مولفه‌های $\mathbf{r}$ بترتیب نسبت به u و v به‌دست می‌آیند . یعنی ، تعریف می‌کنیم

$$V_1 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u}\,\mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial u}\,\mathbf{j} \quad \text{و} \quad V_2 = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v}\,\mathbf{i} + \frac{\partial Y}{\partial v}\,\mathbf{j} \ .$$

این بردارها را می‌توان این‌طور تعبیر هندسی کرد : در صفحهٔ uv یک پاره خط افقی درنظر می‌گیریم (v برچنین پاره‌خطی ثابت است) . تابع برداری $\mathbf{r}$ این پاره‌خط را بروی یک منحنی (به نام u ــ منحنی) در صفحهٔ xy ، مثل شکل ۲۴۰۱۱ ، می‌نگارد . اگر u را پارامتری نمایش‌زمان بگیریم ، بردار V_1 نمایش سرعت موضع $\mathbf{r}$ بوده، و لذا ،

---

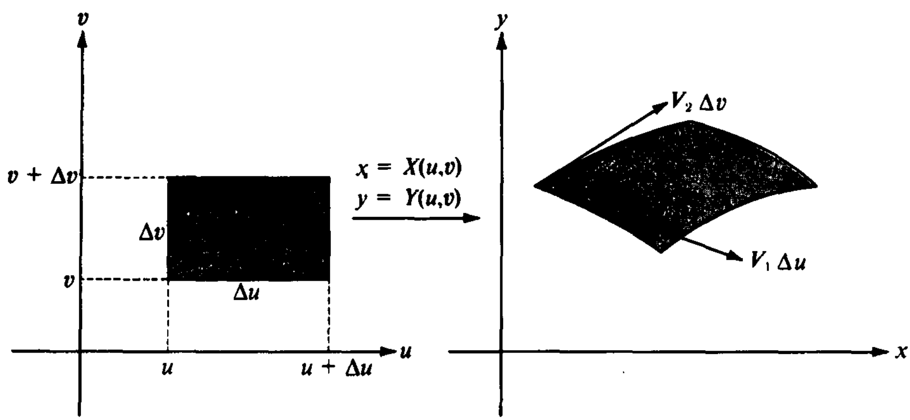
* ر.ک. قضیهٔ ۳۰۰۱۰ کتاب آنالیز ریاضی اپوستل .



شکل ۱۱٫۲۴ یک u ـ منحنی و یک بردار سرعت نظیر

بر منحنی رسم شده به‌وسیلهٔ نوک r مماس است. بهمین‌نحو، هر بردار V_2 نمایش‌بردار سرعت یک v ـ منحنی است که با قرار دادن ثابت$=u$ به‌دست می‌آید. از هر نقطهٔ ناحیهٔ S یک u ـ منحنی و یک v ـ منحنی می‌گذرد.

حال یک مستطیل کوچک به‌ابعاد Δu و Δv ، مثل شکل ۱۱٫۲۵ ، را درنظر می‌گیریم. هرگاه Δu طول یک بازهٔ زمانی کوچک باشد، آنگاه در مدت Δu یک نقطه از یک u ـ منحنی



شکل ۱۱٫۲۵ نقش یک ناحیهٔ مستطیلی شکل در صفحهٔ uv یک متوازی الاضلاع منحنی الخط در صفحهٔ xy است.

در امتداد منحنی مسافتی تقریبا" مساوی حاصل ضرب $\|V_1\|\,\Delta u$ طی می‌کند (چون $\|V_1\|$ نمایش سرعت و Δu نمایش زمان است). بهمین نحو، یک نقطه واقع بر یک v منحنی در مدت Δv مسافتی تقریبا" مساوی $\|V_2\|\,\Delta v$ طی خواهد کرد. لذا، ناحیهٔ مستطیلی شکل به ابعاد Δu و Δv در صفحهٔ uv روی بخشی از صفحهٔ xy نگاشته‌می‌شود که تقریبا" یک متوازی الاضلاع است که، طبق شکل ۱۱.۲۵، اضلاعش بردارهای $V_1\,\Delta u$ و $V_2\,\Delta v$ می‌باشند. مساحت این متوازی الاضلاع اندازهٔ حاصل ضرب خارجی دوبردار $V_1\,\Delta u$ و $V_2\,\Delta v$ است، و مساوی است با

$$\|(V_1\,\Delta u) \times (V_2\,\Delta v)\| = \|V_1 \times V_2\|\,\Delta u\,\Delta v.$$

اگر حاصل ضرب خارجی $V_1 \times V_2$ را برحسب مولفه‌های V_1 و V_2 حساب کنیم، معلوم می‌شود که

$$V_1 \times V_2 = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial u} & 0 \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} & \dfrac{\partial Y}{\partial v} & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial u} \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} & \dfrac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix} \boldsymbol{k} = J(u, v)\boldsymbol{k}.$$

لذا، اندازهٔ $V_1 \times V_2$ دقیقا" $|J(u, v)|$ است، و مساحت متوازی الاضلاع منحنی الخط شکل ۱۱.۲۵ تقریبا" مساوی $|J(u, v)|\,\Delta u\,\Delta v$ می‌باشد.

اگر به‌ازای هرنقطه در T، $J(u, v) = 1$، "متوازی الاضلاع" همان مساحت مستطیل را دارد و نگاشت مساحات را حفظ می‌کند. درغیر این‌صورت، برای به‌دست آوردن مساحت متوازی الاضلاع، باید مساحت مستطیل را در $|J(u, v)|$ ضرب کنیم. این پیشنهاد می‌کند که ژاکوبی را می‌توان یک "سازهٔ بزرگ کن" برای مساحات تصور کرد.

حال فرض کنیم P یک افراز از مستطیل بزرگ R که تمام ناحیهٔ T را در برگرفته باشد، و یک زیر مستطیل نوعی P، مثلا"، به ابعاد Δu و Δv را درنظر می‌گیریم. اگر Δu و Δv کوچک باشند، تابع ژاکوبی J براین زیر مستطیل تقریبا" ثابت است؛ و در نتیجه، J بر R بنوعی مثل یک تابع پله‌ای عمل می‌کند. (J را خارج T صفر تعریف می‌کنیم.) اگر J را یک تابع پله‌ای بگیریم، انتگرال مضاعف $|J|$ روی R (و درنتیجه، روی T) مجموع حاصل ضربهایی به شکل $|J(u, v)|\,\Delta u\,\Delta v$ است، و از نکات فوق برمی‌آید که این مجموع تقریبا" مساوی مساحت S است، که می‌دانیم مساوی انتگرال مضاعف

$\iint_S dx\,dy$ می‌باشد.

این بحث‌هندسی ،که‌صرفا" می‌گوید چرا انتظار برقراری معادله‌ای چون (۳۳۰۱۱) را داریم، می‌تواند مبنای یک برهان دقیق قرار گیرد، ولی جزئیاتش طولانی و نسبتا" پیچیده‌است. همانطور که در بالا گفته شد، برهانی از (۳۳۰۱۱)، مبتنی بر روشی‌کاملا" متفاوت، در یکی از بخشهای آتی داده خواهد شد.

اگر در نقطهٔ خاص (u, v) ، $J(u, v) = 0$ ، دو بردار V_1 و V_2 موازی‌اند (زیرا حاصل‌ضرب خارجی آنها بردار صفر است) و متوازی الاضلاع به یک پاره خط تباه‌می‌شود. چنین نقاط را **نقاط منفرد** نگاشت می‌نامند. همانطور که قبلا" ذکر شد، وقتی تعدادی متناهی نقطهٔ منفرد وجود داشته باشند یا، بطور کلی، نقاط منفرد مجموعه‌ای با محتوای صفربسازند ،فرمول تبدیل (۳۲۰۱۱) باز هم معتبر است. همهٔ نگاشتهای مورد استفادهٔ ما چنین‌اند. در بخش بعد، از فرمول (۳۲۰۱۱) در دو مثال مهم استفاده می‌کنیم.

۲۷۰۱۱ حالات خاص فرمول تبدیل

مثال ۱ . مختصات‌قطبی . دراین حالت ،به‌جای u و v می‌نویسیم r و θ ، و نگاشت را با دو معادلهٔ

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta$$

توصیف می‌کنیم . یعنی، $X(r, \theta) = r\cos\theta$ و $Y(r, \theta) = r\sin\theta$. برای‌آنکه نگاشت یک به یک باشد، $r > 0$ را گرفته و θ را به بازه‌ای به شکل $\theta_0 \le \theta < \theta_0 + 2\pi$ محدود می‌کنیم . مثلا"، نگاشت بر هر زیر مجموعه از مستطیل $(0, a] \times [0, 2\pi)$ در صفحهٔ $r\theta$ یک به یک است. دترمینان ژاکوبی این نگاشت عبارت است از

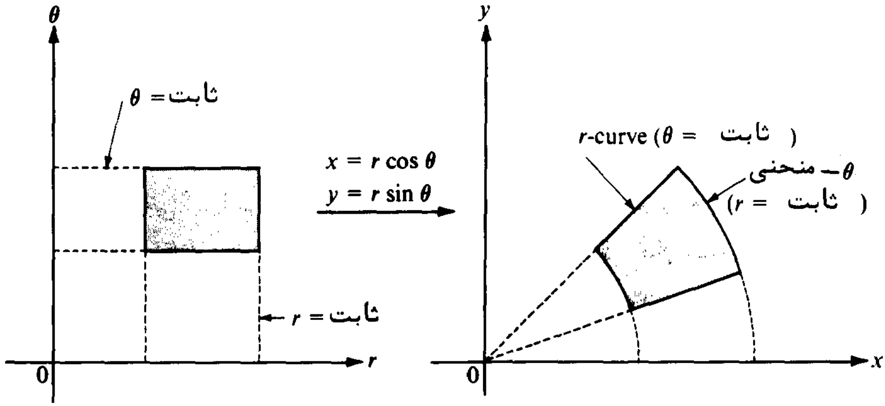
$$J(r, \theta) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial r} & \dfrac{\partial Y}{\partial r} \\[2ex] \dfrac{\partial X}{\partial \theta} & \dfrac{\partial Y}{\partial \theta} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta \\ -r\sin\theta & r\cos\theta \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r .$$

لذا، فرمول تبدیل (۳۲۰۱۱) خواهد شد

$$\iint_S f(x, y)\,dx\,dy = \iint_T f(r\cos\theta, r\sin\theta)\,r\,dr\,d\theta .$$

r-منحنیها خطوط مستقیم ماربر مبداء، و θ-منحنیها دوایری به مرکز مبداءاند. نقش

یک‌مستطیل‌در صفحهٔ $r\theta$ یک "متوازی‌الاضلاع" در صفحهٔ xy است که به دو خط شعاعی و دو قوس مستدیر، مثل شکل ۲۶.۱۱ ، محدود شده است. دترمینان ژاکوبی، وقتی



شکل ۲۶.۱۱ تبدیل به وسیلهٔ مختصات قطبی

$r = 0$، صفر می‌شود، ولی این بر اعتبار فرمول تبدیل اثری ندارد، زیرا مجموعهٔ نقاط دارای $r = 0$ با محتوای صفر است.

چون $V_1 = \cos\theta\, i + \sin\theta\, j$ ، داریم $\|V_1\| = 1$ ؛ درنتیجه، فواصل در امتداد r ــ منحنیها تغییر نمی‌کنند. از آن سو، داریم

$$V_2 = -r\sin\theta\, i + r\cos\theta\, j, \qquad \|V_2\| = r;$$

در نتیجه، فواصل در امتداد θ ــ منحنیها در سازهٔ r ضرب می‌شوند.

مختصات قطبی بویژه وقتی مناسب‌اند که ناحیهٔ انتگرالگیری در امتدادی که r یا θ ثابت است کرانه دارند. مثلاً، انتگرال حجم یکهشتم یک کره به شعاع a را درنظر می‌گیریم:

$$\iint_S \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}\, dx\, dy,$$

که‌در آن ناحیهٔ S ربع اول قرص مستدیر $x^2 + y^2 \le a^2$ است. این انتگرال درمختصات قطبی خواهد شد

$$\iint_T \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr\, d\theta,$$

که در آن ناحیهٔ انتگرالگیری T مستطیل $[0, a] \times [0, \frac{1}{2}\pi]$ است. اگر ابتدا نسبت به

θ و سپس نسبت به r انتگرال بگیریم ، به‌دست می‌آید

$$\iint_T \sqrt{a^2 - r^2}\, r\, dr\, d\theta = \frac{\pi}{2}\int_0^a r\sqrt{a^2 - r^2}\, dr = \frac{\pi}{2}\cdot\frac{(a^2 - r^2)^{3/2}}{-3}\Bigg|_0^a = \frac{\pi a^3}{6}.$$

همین نتیجه را می‌توان با انتگرالگیری در مختصات قائم به‌دست آورد ،ولی محاسبات کمی مشکلتر است .

مثال ۲ . تبدیلات خطی . تبدیل خطی تعریف شده با دو معادلهٔ

$$x = Au + Bv, \qquad y = Cu + Dv \tag{۳۴۰۱۱}$$

را درنظر می‌گیریم ، که در آن A, B, C, D ثابتهایی معلومند . دترمینان ژاکوبی عبارت است از

$$J(u, v) = AD - BC,$$

و برای آنکه معکوس داشته باشیم ، فرض می‌کنیم $AD - BC \neq 0$. این به ما اطمینان می‌دهدکه‌دو معادلهٔ خطی در (۳۴۰۱۱) را می‌توان نسبت به u و v و برحسب x و y حل کرد .

تبدیلات خطی خطوط موازی را به خطوط‌موازی می‌برند . بنابراین ، نقش یک‌مستطیل درصفحهٔ uv یک‌متوازی الاضلاع در صفحهٔ xy است ، و مساحتش مساحت مستطیل‌ضربدر سازهٔ $|J(u, v)| = |AD - BC|$ می‌باشد . فرمول تبدیل (۳۲۰۱۱) خواهد شد

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = |AD - BC| \iint_T f(Au + Bv, Cu + Dv)\, du\, dv.$$

به عنوان مثالی که در آن تغییر خطی متغیرها مفید است ، انتگرال

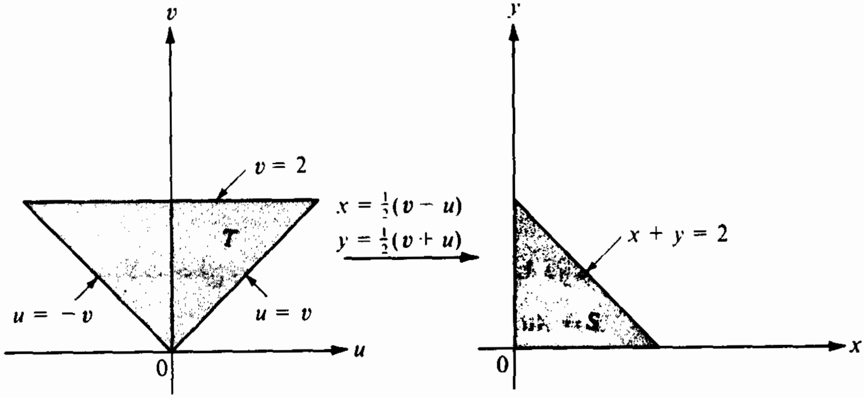
$$\iint_S e^{(y-x)/(y+x)}\, dx\, dy$$

را درنظر می‌گیریم ، که در آن S مثلث محدود به خط $x + y = 2$ و دو محور مختصات است . (ر.ک. شکل ۲۷۰۱۱ .) وجود $y - x$ و $x + y$ در انتگرالده تغییر متغیرهای

$$u = y - x, \qquad v = y + x$$

را پیشنهاد می‌کند . با حل آنها نسبت به x و y ، معلوم می‌شود که

$$x = \frac{v - u}{2} \quad \text{و} \quad y = \frac{v + u}{2}\,\cdot$$



شکل ۲۷۰۱۱ نگاشتن به‌وسیلهٔ یک تبدیل خطی

دترمینان ژاکوبی عبارت است از $J(u, v) = -\frac{1}{2}$. برای یافتن نقش T از S در صفحهٔ uv ، توجه می‌کنیم که خطوط $x = 0$ و $y = 0$ بترتیب روی خطوط $u = v$ و $u = -v$ نگاشته می‌شوند؛ خط $x + y = 2$ روی خط $v = 2$ نگاشته می‌شود. نقاط داخل S در $0 < x + y < 2$ صدق می‌کنند، و اینها به نقاطی از T که در $0 < v < 2$ صادقند برده می‌شوند. لذا، ناحیهٔ جدید انتگرالگیری T یک ناحیهٔ مثلثی شکل است، مثل شکل ۲۷۰۱۱ . انتگرال مضاعف مورد نظر خواهد شد

$$\iint_S e^{(y-x)/(y+x)}\, dx\, dy = \frac{1}{2}\iint_T e^{u/v}\, du\, dv.$$

اگر اول نسبت به u انتگرال بگیریم، درمی‌یابیم که

$$\frac{1}{2}\iint_T e^{u/v}\, du\, dv = \frac{1}{2}\int_0^2\left[\int_{-v}^{v} e^{u/v}\, du\right] dv = \frac{1}{2}\int_0^2 v\left(e - \frac{1}{e}\right) dv = e - \frac{1}{e}.$$

۲۸۰۱۱ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۵ ، ناحیهٔ S را رسم کرده، و انتگرال مضاعف $\iint_S f(x, y)\, dx\, dy$ را به صورت انتگرال مکرری در مختصات قطبی بیان دارید.

۱ . $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le a^2\}$ ، که در آن $a > 0$.

۲ . $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 2x\}$.

۳ . $S = \{(x, y) \mid a^2 \le x^2 + y^2 \le b^2\}$ ، که در آن $0 < a < b$.

۴ . $S = \{(x, y) \mid 0 \le y \le 1 - x, 0 \le x \le 1\}$.

۵ . $S = \{(x, y) \mid x^2 \le y \le 1, -1 \le x \le 1\}$.

در تمرینهای ۶ تا ۹ ، انتگرال را به مختصات قطبی برده و مقدارش را حساب کنید . (a یک ثابت مثبت است .)

۶ . $\int_0^{2a}\left[\int_0^{\sqrt{2ax-x^2}}(x^2 + y^2)\,dy\right]dx$.

۷ . $\int_0^a\left[\int_0^x \sqrt{x^2 + y^2}\,dy\right]dx$.

۸ . $\int_0^1\left[\int_{x^2}^x (x^2 + y^2)^{-1/2}\,dy\right]dx$.

۹ . $\int_0^a\left[\int_0^{\sqrt{a^2-y^2}} (x^2 + y^2)\,dx\right]dy$.

در تمرینهای ۱۰ تا ۱۳ ، انتگرالها را به یک یا چند انتگرال مکرر در مختصات قطبی تبدیل کنید .

۱۰ . $\int_0^1\left[\int_0^1 f(x, y)\,dy\right]dx$.

۱۱ . $\int_0^2\left[\int_x^{x\sqrt{3}} f(\sqrt{x^2 + y^2})\,dy\right]dx$.

۱۲ . $\int_0^1\left[\int_{1-x}^{\sqrt{1-x^2}} f(x, y)\,dy\right]dx$.

۱۳ . $\int_0^1\left[\int_0^{x^2} f(x, y)\,dy\right]dx$.

۱۴ . با استفاده از یک تبدیل خطی مناسب ، انتگرال مضاعف

$$\iint_S (x - y)^2 \sin^2 (x + y)\,dx\,dy ,$$

که در آن S متوازی الاضلاع به راسهای $(\pi, 0), (2\pi, \pi), (\pi, 2\pi), (0, \pi)$ است ، را حساب کنید .

۱۵ . متوازی‌الاضلاع S درصفحهٔ xy دارای رئوس $(0, 0)$ ، $(2, 10)$ ، $(3, 17)$ ، و $(1, 7)$ است .

(آ) تبدیل خطی $u = ax + by, v = cx + dy$ را بیابید که S را بروی مستطیل R در صفحهٔ uv با رئوس متقابل $(0, 0)$ و $(4, 2)$ بنگارد . راس $(2, 10)$ باید به نقطه‌ای بر محور u نگاشته شود .

(ب) انتگرال مضاعف $\iint_S xy\,dx\,dy$ را با تبدیلش به یک انتگرال معادل روی مستطیل R قسمت (آ) حساب کنید .

۱۶ . اگر $r > 0$ ، قرار دهید $I(r) = \int_{-r}^{r} e^{-u^2}\,du$.

(آ) نشان دهید $I^2(r)=\iint_R e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy$ ، که در آن R مربع $R=[-r,r]\times[-r,r]$ است.

(ب) هرگاه C_1 و C_2 قرصهای مستدیر محاط و محیط بر R باشند، نشان دهید که

$$\iint_{C_1} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy < I^2(r) < \iint_{C_2} e^{-(x^2+y^2)}\,dx\,dy.$$

(پ) انتگرالهای روی C_1 و C_2 را در مختصات قطبی بیان کرده و، با استفاده از (ب)، نتیجه بگیرید که وقتی $r\to\infty$ ، $I(r)\to\sqrt{\pi}$. این ثابت می‌کند که $\int_0^\infty e^{-u^2}\,du=\sqrt{\pi}/2$.

(ت) با استفاده از قسمت (پ)، نتیجه بگیرید $\Gamma(\frac{1}{2})=\sqrt{\pi}$ ، که در آن Γ تابع گاما است.

۱۷ . نگاشت تعریف شده با معادلات

$$x=u+v,\qquad y=v-u^2$$

را درنظر بگیرید.

(آ) دترمینان ژاکوبی $J(u,v)$ را حساب کنید.

(ب) مثلث T در صفحهٔ uv دارای رئوس $(0,0),\ (2,0),\ (0,2)$ است. با ترسیم، نقش S در صفحهٔ xy را توصیف کنید.

(پ) مساحت S را به‌وسیلهٔ یک انتگرال مضاعف روی S و نیز به‌وسیلهٔ یک انتگرال مضاعف روی T حساب کنید.

(ت) $\iint_S (x-y+1)^{-2}\,dx\,dy$ را حساب کنید.

۱۸ . نگاشت تعریف شده با دو معادلهٔ $x=u^2-v^2,\ y=2uv$ را درنظر بگیرید.

(آ) دترمینان ژاکوبی $J(u,v)$ را حساب کنید.

(ب) فرض کنید T مستطیل در صفحهٔ uv به‌رئوس $(1,1),\ (2,1),\ (2,3),\ (1,3)$ باشد. با ترسیم، نقش S در صفحهٔ xy را توصیف کنید.

(پ) انتگرال مضاعف $\iint_C xy\,dx\,dy$ را با تغییر متغیرهای $x=u^2-v^2,\ y=2uv$ حساب کنید، که در آن $C=\{(x,y)\mid x^2+y^2\le 1\}$.

۱۹ . انتگرال مضاعف

$$I(p, r) = \iint_R \frac{dx\, dy}{(p^2 + x^2 + y^2)^p}$$

را روی قرص مستدیر $R = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le r^2\}$ حساب کنید. مقادیری از p را تعیین کنید که به‌ازای آنها $I(p, r)$ ، وقتی $r \to +\infty$ ، به‌حدی میل نماید.

در تمرینهای ۲۰ تا ۲۲ ، معادلات را با تغییر متغیرهای مناسب ثابت کنید.

۲۰ . $\iint_S f(x+y)\, dx\, dy = \int_{-1}^{1} f(u)\, du$ ، که در آن $S = \{(x, y) \mid |x| + |y| \le 1\}$.

۲۱ . $\iint_S f(ax + by + c)\, dx\, dy = 2\int_{-1}^{1} \sqrt{1 - u^2} f(u\sqrt{a^2 + b^2} + c)\, du$ ، که در آن $S = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \le 1\}$ و $a^2 + b^2 \ne 0$.

۲۲ . $\iint_S f(xy)\, dx\, dy = \log 2 \int_1^2 f(u)\, du$ ، که در آن S ناحیهٔ محدود به منحنیهای $xy = 1, xy = 2, y = x, y = 4x$ در ربع اول است.

۲۹.۱۱ برهان فرمول تبدیل در حالت خاص

همانطور که قبلاً ذکر شد، فرمول تبدیل

$$\iint_S f(x, y)\, dx\, dy = \iint_T f[X(u, v), Y(u, v)]\, |J(u, v)|\, du\, dv \qquad (۳۵.۱۱)$$

را می‌توان به عنوان حالتی خاص که در آن S مستطیل بوده و f متحد 1 است به‌دست آورد. دراین حالت، فرمول به

$$\iint_R dx\, dy = \iint_{R^*} |J(u, v)|\, du\, dv \qquad (۳۶.۱۱)$$

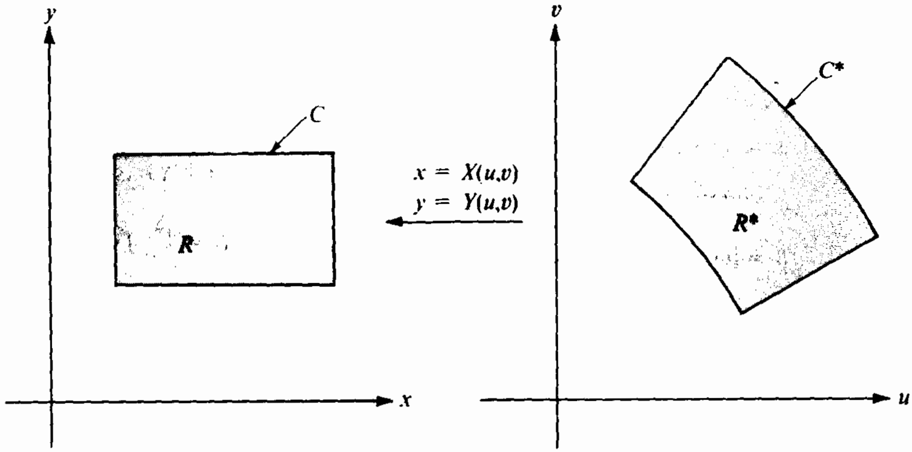
ساده می‌شود. در اینجا R یک مستطیل در صفحهٔ xy بوده، و R^* نقش آن در صفحهٔ uv (ر.ک. شکل ۲۸.۱۱) تحت نگاشت یک به یک

$$u = U(x, y), \qquad v = V(x, y)$$

است. نگاشت معکوس عبارت است از

$$x = X(u, v), \qquad y = Y(u, v),$$

و $J(u, v)$ دترمینان ژاکوبی است:



شکل ۱۱ ۰ ۲۸ قانون تبدیل انتگرالهای مضاعف حاصل از قضیهٔ گرین

$$J(u, v) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial X}{\partial v} \\ \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial v} \end{vmatrix}.$$

دراین بخش، (۱۱ ۰ ۳۶) را با استفاده از قضیهٔ گرین ثابت می‌کنیم ، و در بخش بعد فرمول کلیتر (۱۱ ۰ ۳۵) را از حالت خاص (۱۱ ۰ ۳۶) نتیجه می‌گیریم .

برای اثبات ، فرض‌کنیم توابع X و Y مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم پیوسته داشته و دارای ژاکوبیی باشد که در R^* هرگز 0 نیست . دراین صورت ، $J(u, v)$ همه‌جا مثبت یا همه‌جا منفی است . معنی علامت $J(u, v)$ یعنی وقتی نقطهٔ (x, y) کرانهٔ R را درجهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیماید ، نقطهٔ نقش (u, v) کرانهٔ R^* را در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت می‌پیماید اگر $J(u, v)$ مثبت باشد ، و درجهت خلاف آن می‌پیماید اگر $J(u, v)$ منفی باشد . دربرهان فرض می‌کنیم $J(u, v) > 0$.

ایدهٔ اثبات این است که، با استفاده از قضیهٔ گرین ، هر انتگرال مضاعف در (۱۱ ۰ ۳۶) را به‌صورت یک انتگرال خط بیان می‌کنیم . سپس، با بیان انتگرالها به شکل پارامتری ، تساوی دو انتگرال خط‌را اثبات می‌کنیم .

با انتگرال مضاعف در صفحهٔ xy شروع کرده ، می‌نویسیم

$$\iint_R dx\,dy = \iint_R \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy,$$

که در آن $Q(x, y) = x$ و $P(x, y) = 0$. طبق‌قضیهٔ‌گرین ،این انتگرال مضاعف مساوی است با انتگرال خط

$$\int_C P\,dx + Q\,dy = \int_C x\,dy.$$

در اینجا C کرانهٔ R است که در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده‌می‌شود .

بهمین نحو ، انتگرال مضاعف در صفحهٔ uv را به‌یک انتگرال خط‌حول کرانهٔ C^* از R^* تبدیل می‌کنیم . انتگرالده ، یعنی $J(u, v)$ ، را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$J(u, v) = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u}\frac{\partial Y}{\partial v} + X\frac{\partial^2 Y}{\partial u\,\partial v} - X\frac{\partial^2 Y}{\partial v\,\partial u} - \frac{\partial X}{\partial v}\frac{\partial Y}{\partial u}$$
$$= \frac{\partial}{\partial u}\left(X\frac{\partial Y}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(X\frac{\partial Y}{\partial u}\right).$$

با اعمال قضیهٔ گرین بر انتگرال مضاعف روی R^* ، درمی‌یابیم که

$$\iint_{R^*} J(u, v)\,du\,dv = \int_{C^*}\left(X\frac{\partial Y}{\partial u}\,du + X\frac{\partial Y}{\partial v}\,dv\right).$$

لذا ، برای اتمام برهان (۳۶۰۱۱) فقط‌کافی است ثابت کنیم

$$\int_C x\,dy = \int_{C^*}\left(X\frac{\partial Y}{\partial u}\,du + X\frac{\partial Y}{\partial v}\,dv\right). \tag{۳۷۰۱۱}$$

برای C^* پارامتری سازی درنظر گرفته و ، با استفاده از آن ، نمایشی برای C پیدا می‌کنیم . فرض کنیم C^* با تابع α تعریف شده بر $[a, b]$ توصیف شده باشد ؛ مثلاً ،

$$\alpha(t) = U(t)\mathbf{i} + V(t)\mathbf{j}.$$

قرار می‌دهیم

$$\beta(t) = X[U(t), V(t)]\mathbf{i} + Y[U(t), V(t)]\mathbf{j}.$$

دراین صورت ، وقتی t روی بازهٔ $[a, b]$ تغییر می‌کند ، بردار $\alpha(t)$ منحنی C^* و بردار $\beta(t)$ منحنی C را طی می‌کند . طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای ، مشتق β عبارت است از

$$\beta'(t) = \left[\frac{\partial X}{\partial u}U'(t) + \frac{\partial X}{\partial v}V'(t)\right]\mathbf{i} + \left[\frac{\partial Y}{\partial u}U'(t) + \frac{\partial Y}{\partial v}V'(t)\right]\mathbf{j}.$$

لذا.

$$\int_C x\,dy = \int_a^b X[U(t), V(t)]\left(\frac{\partial Y}{\partial u} U'(t) + \frac{\partial Y}{\partial v} V'(t)\right) dt.$$

آخرین انتگرال روی $[a, b]$ با پارامتریزه کردن انتگرال خط روی C^* در (۳۷۰۱۱) نیز به‌دست می‌آید. پس، دو انتگرال خط در (۳۷۰۱۱) مساوی‌اند، که (۳۶۰۱۱) را ثابت می‌کند.

۳۰۰۱۱ برهان فرمول تبدیل در حالت کلی

دراین بخش، فرمول کلی تبدیل

$$\iint_S f(x, y)\,dx\,dy = \iint_T f[X(u, v), Y(u, v)]\,|J(u, v)|\,du\,dv \tag{۳۸۰۱۱}$$

را از حالت خاص زیر که در بخش پیش مطرح شد:

$$\iint_R dx\,dy = \iint_{R^*} |J(u, v)|\,du\,dv, \tag{۳۹۰۱۱}$$

که درآن R یک مستطیل و R^* نقش‌آن در صفحهٔ uv است، نتیجه خواهیم گرفت.

ابتدا ثابت می‌کنیم

$$\iint_R s(x, y)\,dx\,dy = \iint_{R^*} s[X(u, v), Y(u, v)]\,|J(u, v)|\,du\,dv, \tag{۴۰۰۱۱}$$

که در آن s یک تابع پله‌ای تعریف شده بر R است. برای این‌کار، فرض‌کنیم P یک افراز R به mn زیر مستطیل R_{ij} به ابعاد Δx_i و Δy_j بوده، و c_{ij} مقدار ثابت s بر زیر مستطیل باز R_{ij} باشد. با اعمال (۳۹۰۱۱) بر مستطیل R_{ij}، درمی‌یابیم که

$$\Delta x_i\,\Delta y_j = \iint_{R_{ij}} dx\,dy = \iint_{R_{ij}^*} |J(u, v)|\,du\,dv.$$

با ضرب طرفین در c_{ij} و جمعبندی روی i و j، داریم

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij} \iint_{R_{ij}^*} |J(u, v)|\,du\,dv. \tag{۴۱۰۱۱}$$

چون s یک تابع پله‌ای است، این مساوی است با

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} c_{ij}\,\Delta x_i\,\Delta y_j = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m} \iint_{R_{ij}^*} s[X(u, v), Y(u, v)]\,|J(u, v)|\,du\,dv. \tag{۴۲۰۱۱}$$

بااستفاده‌از خاصیت جمعی انتگرالهای‌مضاعف، می‌بینیم که (۴۲۰۱۱) همان (۴۰۰۱۱) است. لذا، (۴۰۰۱۱) نتیجه‌ای از (۳۹۰۱۱) می‌باشد.

حال نشان می‌دهیم تابع پله‌ای s در (۴۰۰۱۱) را می‌توان با هر تابع f که به ازای‌آن‌طرفین (۴۰۰۱۱) وجود دارند عوض کرد. فرض‌کنیم f بر مستطیل R انتگرالپذیر بوده، و توابع پله‌ای s و t صادق در نامساویهای

$$s(x, y) \le f(x, y) \le t(x, y), \tag{۴۳۰۱۱}$$

به‌ازای هر نقطهٔ (x, y) در R، را اختیار می‌کنیم. دراین صورت، به‌ازای هر نقطهٔ (u, v) در نقش R^*، نیز داریم

$$s[X(u, v), Y(u, v)] \le f[X(u, v), Y(u, v)] \le t[X(u, v), Y(u, v)]. \tag{۴۴۰۱۱}$$

برای‌اختصار، به‌جای $s[X(u, v), Y(u, v)]$ می‌نویسیم $S(u, v)$، وبهمین‌ترتیب، $F(u, v)$ و $T(u, v)$ را تعریف می‌کنیم. با ضرب نامساویهای (۴۴۰۱۱) در $|J(u, v)|$ و انتگرالگیری روی R^*، خواهیم داشت

$$\iint_{R^*} S(u, v)\,|J(u, v)|\,du\,dv \le \iint_{R^*} F(u, v)\,|J(u, v)|\,du\,dv \le \iint_{R^*} T(u, v)\,|J(u, v)|\,du\,dv.$$

بخاطر (۴۰۰۱۱)، نامساویهای پیشگفته مساوی‌اند با

$$\iint_R s(x, y)\,dx\,dy \le \iint_{R^*} F(u, v)\,|J(u, v)|\,du\,dv \le \iint_R t(x, y)\,dx\,dy.$$

بنابراین، $\iint_{R^*} F(u, v)\,|J(u, v)|\,du\,dv$ عددی‌است‌که، به‌ازای‌هردوتابع پله‌ای s و t صادق‌در (۴۳۰۱۱)، بین انتگرالهای $\iint_R s(x, y)\,dx\,dy$ و $\iint_R t(x, y)\,dx\,dy$ قرار دارد. چون f انتگرالپذیر است، این ایجاب می‌کند که

$$\iint_R f(x, y)\,dx\,dy = \iint_{R^*} F(u, v)\,|J(u, v)|\,du\,dv\ ;$$

و درنتیجه، (۳۸۰۱۱) برای توابع انتگرالپذیر تعریف شده بر مستطیلها معتبر است.

حال که (۳۸۰۱۱) برای مستطیلها معتبر است، به‌آسانی می‌توان آن را، با روش معمول محاط کردن S در یک مستطیل مانند R و تعمیم تابع f به تابع جدید $\tilde{f}$ که بر

S با f یکی بوده و خارج S صفر است ، به ناحیهٔ کلیتر S تعمیم داد . دراین صورت ، توجه می‌کنیم که

$$\iint_S f = \iint_R \tilde{f} = \iint_{R^*} \tilde{f}[X(u, v),\ Y(u, v)]\,|J(u, v)|\,du\,dv = \iint_T F(u, v)\,|J(u, v)|\,du\,dv$$

و این ثابت می‌کند که (۱۱۰۳۸) درواقع نتیجه‌ای است از (۱۱۰۳۹) .

۱۱۰۳۱ تعمیم به ابعاد بالاتر

مفهوم انتگرال چندگانه را می‌توان از فضای 2 به فضای n ، به‌ازای هر $n \geq 3$ ، تعمیم داد . چون این تعمیم کاملا" شبیه حالت $n = 2$ است ، فقط نتایج عمده را مختصرا" شرح می‌دهیم .

انتگرالده یک میدان اسکالر مانند f است که بر مجموعهٔ S در فضای n تعریف شده است . انتگرال f روی S ، به‌نام انتگرال n گانه ، با علامت

$$\int_S \cdots \int f \quad \text{یا} \quad \int_S \cdots \int f(x_1, \ldots, x_n)\, dx_1 \cdots dx_n ،$$

با n علامت انتگرال ، یا ساده‌تر با یک علامت انتگرال ، یعنی $\int_S f(x)\,dx$ که درآن $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ، نموده می‌شود . وقتی $n = 3$ ، به‌جای (x_1, x_2, x_3) می‌نویسیم (x, y, z) و انتگرالهای سه‌گانه را با

$$\iiint_S f \quad \text{یا} \quad \iiint_S f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz ،$$

نشان می‌دهیم .

ابتدا انتگرال n گانه را برای یک تابع پله‌ای تعریف شده بر بازهٔ n بعدی تعریف می‌کنیم . به‌یاد می‌آوریم که بازهٔ بستهٔ n بعدی $[a, b]$ حاصل ضرب دکارتی n بازهٔ بستهٔ یک بعدی $[a_k, b_k]$ است ، که درآن $a = (a_1, \ldots, a_n)$ و $b = (b_1, \ldots, b_n)$. بازهٔ باز n بعدی (a, b) حاصل ضرب دکارتی n بازهٔ باز (a_k, b_k) است . حجم $[a, b]$ یا (a, b) مساوی حاصل ضرب طولهای بازه‌های مولف ، یعنی

$$(b_1 - a_1) \cdots (b_n - a_n) ،$$

تعریف می‌شود .

هرگاه $P_1, \ldots, P_n$ بترتیب افزارهایی از $[a_1, b_1], \ldots, [a_n, b_n]$ باشند ، حاصل

ضرب دکارتی $P = P_1 \times \cdots \times P_n$ یک افراز $[a,b]$ نامیده می‌شود. تابع f تعریف شده بر $[a,b]$ را یک تابع پله‌ای نامند اگر بر هر زیر بازهٔ باز معین شده با افرازی چون P ثابت باشد. انتگرال n گانهٔ چنین تابع پله‌ای با فرمول

$$\int_{[a,b]} \cdots \int f = \sum_i c_i v_i$$

تعریف می‌شود، که در آن c_i مقدار ثابت f بر زیر بازهٔ باز i م و v_i حجم زیر بازهٔ i م است. مجموع یک مجموع متناهی است که روی همهٔ زیر بازه‌های P گرفته می‌شود.

حال که انتگرال n گانه برای توابع پله‌ای تعریف شد، به‌روش معمول، این انتگرال را برای توابع کراندار کلیتر تعریف شده بر بازه‌ها تعریف می‌کنیم. فرض کنیم s و t توابعی پله‌ای باشند بطوری که، بر $[a,b]$، $s \leq f \leq t$. هرگاه به‌ازای هر s و t صادق در $s \leq f \leq t$ یک و فقط یک عدد مانند I باشد که

$$\int_{[a,b]} \cdots \int s \leq I \leq \int_{[a,b]} \cdots \int t \ ,$$

گوییم f بر $[a,b]$ انتگرالپذیر است، و عدد

$$I = \int_{[a,b]} \cdots \int f$$

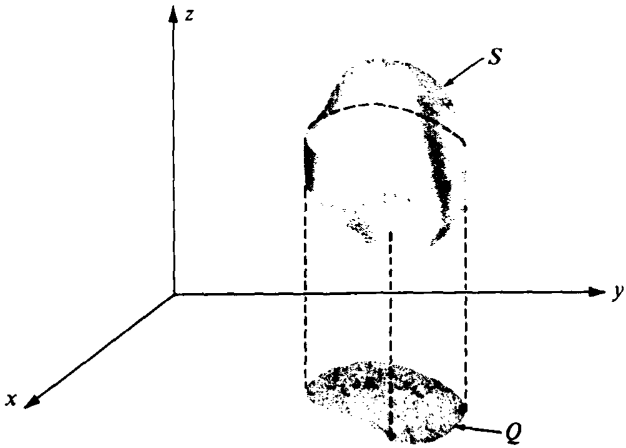
را انتگرال n گانهٔ f می‌نامیم.

مثل‌حالت‌دوبعدی، این انتگرال درصورت پیوسته بودن f بر $[a,b]$ وجود دارد. همچنین، اگر f بر $[a,b]$ کراندار بوده و مجموعهٔ ناپیوستگیهای f با محتوای n بعدی 0 باشد، وجود خواهد داشت. مجموعهٔ کراندار S با محتوای n بعدی 0 است اگر به ازای هر $\epsilon > 0$، گردآیه‌ای‌متناهی‌از بازه‌های n بعدی باشد که اجتماعشان شامل S بوده و مجموع حجمهایشان از ϵ تجاوز نکند.

برای تعریف انتگرال n گانهٔ تابع کراندار f روی مجموعهٔ کراندار و کلیتر S، f را به‌تابع جدید $\tilde{f}$ توسیع می‌دهیم که با f بر S یکی بوده و خارج S مقدار صفر داشته باشد؛ انتگرال f روی S مساوی انتگرال $\tilde{f}$ روی بازه‌ای شامل S تعریف می‌شود.

بعضی از انتگرالهای چندگانه را می‌توان با استفاده از انتگرالهای مکرر با بعد پایین‌تر حساب کرد. مثلاً، فرض کنیم S مجموعه‌ای در فضای 3 به‌صورت زیر باشد:

$$S = \{(x, y, z) \mid (x, y) \in Q, \ \varphi_1(x, y) \leq z \leq \varphi_2(x, y)\} \ , \qquad (۴۵.۱۱)$$



شکل ۲۹۰۱۱ جسم S و تصویرش Q در صفحهٔ xy

که در آن Q یک ناحیهٔ دوبعدی، به‌نام تصویر S بر صفحهٔ xy ، بوده، و φ_1 ،φ_2 بر S پیوسته می‌باشند. (مثالی در شکل ۲۹۰۱۱ نموده شده است.) مجموعه‌های این نوعی به دو سطح به معادلات دکارتی $z = \varphi_1(x, y)$ و $z = \varphi_2(x, y)$ و (احتمالا") بخشی از استوانهٔ تولید شده به‌وسیلهٔ خط متحرک موازی محور z در امتداد کرانهٔ Q محدود شده‌اند. خطوط موازی محور z این مجموعه را در پاره‌خطهایی قطع می‌کنند که سطح پایینی را به سطح بالایی وصل می‌نمایند. اگر f درون S پیوسته باشد، فرمول مکرر زیر را خواهیم داشت:

$$(۴۶۰۱۱) \quad \iiint_S f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iint_Q \left[\int_{\varphi_1(x,y)}^{\varphi_2(x,y)} f(x, y, z)\, dz\right] dx\, dy .$$

یعنی، به‌ازای x و y ثابت، اولین انتگرالگیری نسبت به z از سطح کرانه‌ای پایینی تا سطح بالایی انجام می‌گیرد. این امر محاسبات را بـه انتگـرال مضاعفـی روی تصویـر Q تحویل می‌کند، که می‌توان‌آن را به روشهای قبلا" ذکر شده حل کرد.

دونوع دیگر مجموعه‌شبیه (۴۵۰۱۱) وجود دارند، که‌درآنها محورهای x و y نقش محور z را داشته، و تصاویر بترتیب در صفحهٔ yz یا xz گرفته می‌شود. انتگرالهای سه‌گانه روی چنین مجموعه‌ها را می‌توان با فرمولهایی شبیه (۴۶۰۱۱) ، با تکرار، حساب کرد. اغلب‌مجموعه‌های 3 بعدی که با آنها مواجه خواهیم شد یکی از این سه نوعند و یا می‌توان

آنها را به‌تعدادی متناهی قطعه تقسیم کرد بطوری که هرکدام یکی از این سه‌نوع باشد.

برای‌انتگرالهای n گانه ،وقتی $n > 3$ ، فرمولهای‌تکرار زیادی وجود دارند. مثلاً ، اگر Q یک‌بازهٔ k بعدی‌و R یک‌بازهٔ m بعدی‌باشد ، انتگرال $(m + k)$ گانه روی $Q \times R$ تکرار یک انتگرال m گانه با یک انتگرال k گانه است :

$$\int_{Q\times R} \cdots \int f = \int_{Q} \cdots \int \left[\int_{R} \cdots \int f\, dx_1 \cdots dx_m\right] dx_{m+1} \cdots dx_{m+k},$$

مشروط براینکه همهٔ انتگرالهای چندگانهٔ مورد بحث وجود داشته باشند. بعداً دراین فصل ،استفاده‌از انتگرالهای چندگانهٔ مکرر در محاسبهٔ حجم یک کرهٔ n بعدی نشان‌داده خواهد شد.

۳۲۰۱۱ تغییر متغیر در انتگرال n گانه

فرمول تغییر متغیر در یک انتگرال مضاعف تعمیم سرراستی برای انتگرالهای n گانه دارد. متغیرهای جدید $u_1, \ldots, u_n$ را وارد می‌کنیم ، که با n معادلهٔ

$$x_1 = X_1(u_1, \ldots, u_n), \qquad \ldots, \qquad x_n = X_n(u_1, \ldots, u_n)$$

به $x_1, \ldots, x_n$ مربوط می‌شوند. فرض‌کنیم $x = (x_1, \ldots, x_n)$ ، $u = (u_1, \ldots, u_n)$ ، و $X = (X_1, \ldots, X_n)$. دراین صورت ، این معادلات نگاشت برداری

$$X: T \to S$$

را از مجموعهٔ T در فضای n به مجموعهٔ دیگر S در فضای n تعریف می‌کند. فرض‌کنیم نگاشت X بر T یک‌به‌یک و به‌طور پیوسته مشتقپذیر باشد. فرمول تبدیل برای انتگرالهای n گانه شکل زیر را بخود می‌گیرد :

$$\int_S f(x)\, dx = \int_T f[X(u)]\, |\det DX(u)|\, du, \tag{۴۷۰۱۱}$$

که درآن $DX(u) = [D_j X_k(u)]$ ماتریس ژاکوبی میدان برداری X است. برحسب‌مولفه‌ها ، داریم

$$DX(u) = \begin{bmatrix} D_1X_1(u) & D_2X_1(u) & \cdots & D_nX_1(u) \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ D_1X_n(u) & D_2X_n(u) & \cdots & D_nX_n(u) \end{bmatrix}.$$

مثل حالت‌دوبعدی ،فرمول‌تبدیل ، درصورتی که X بر T یک به‌یک بوده ودترمینان ژاکوبی $J(\boldsymbol{u}) = \det DX(\boldsymbol{u})$ هرگز بر T صفر نشود ، معتبر است . همچنین ، این نگاشت ، درصورت یک به‌یک نبودن برزیرمجموعه‌ای از T با محتوای n بعدی صفر ، و یا صفر شدن دترمینان ژاکوبی بر چنین زیرمجموعه‌ای ، نیز اعتبار دارد .

درحالت سه‌بعدی ،به‌جای (x_1, x_2, x_3) می‌نویسیم (x, y, z) ، به‌جای (u_1, u_2, u_3) می‌نویسیم (u, v, w) ، و به جای (X_1, X_2, X_3) می‌نویسیم (X, Y, Z) . فرمول‌تبدیل انتگرالهای سه‌گانه شکل زیر را خواهد گرفت :

$$\iiint_S f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_T f[X(u, v, w), Y(u, v, w), Z(u, v, w)]\, |J(u, v, w)|\, du\, dv\, dw, \qquad (۴۸.۱۱)$$

که در آن $J(u, v, w)$ دترمینان ژاکوبی است :

$$J(u, v, w) = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Z}{\partial u} \\ \dfrac{\partial X}{\partial v} & \dfrac{\partial Y}{\partial v} & \dfrac{\partial Z}{\partial v} \\ \dfrac{\partial X}{\partial w} & \dfrac{\partial Y}{\partial w} & \dfrac{\partial Z}{\partial w} \end{vmatrix}.$$

در فضای 3 ، دترمینان ژاکوبی را می‌توان سازهٔ بزرگ کن حجم تصور کرد . درواقع ، اگر تابع برداری $\boldsymbol{r}$ را با معادلهٔ

$$\boldsymbol{r}(u, v, w) = X(u, v, w)\boldsymbol{i} + Y(u, v, w)\boldsymbol{j} + Z(u, v, w)\boldsymbol{k},$$

و بردارهای زیر را با روابط

$$V_1 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u}\boldsymbol{i} + \frac{\partial Y}{\partial u}\boldsymbol{j} + \frac{\partial Z}{\partial u}\boldsymbol{k},$$

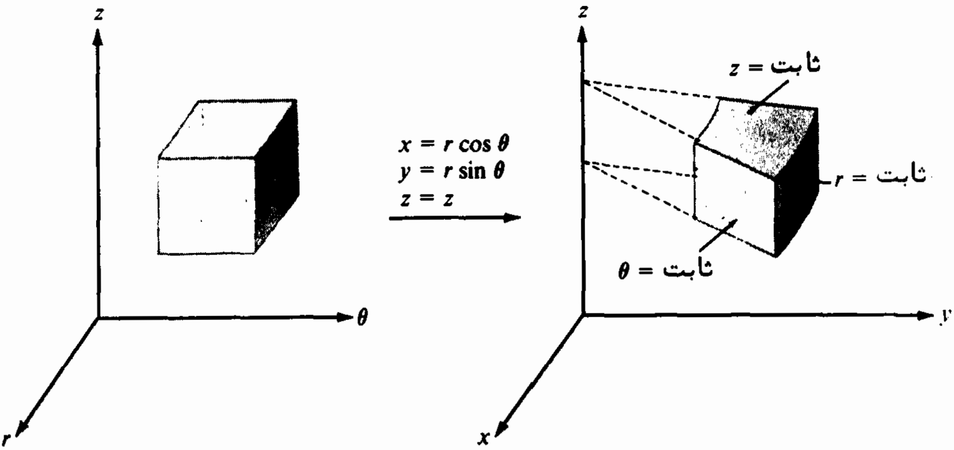
$$V_2 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v}\boldsymbol{i} + \frac{\partial Y}{\partial v}\boldsymbol{j} + \frac{\partial Z}{\partial v}\boldsymbol{k},$$

$$V_3 = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial w} = \frac{\partial X}{\partial w}\boldsymbol{i} + \frac{\partial Y}{\partial w}\boldsymbol{j} + \frac{\partial Z}{\partial w}\boldsymbol{k}$$

تعریف کنیم ، استدلالی شبیه استدلال بخش ۲۶.۱۱ پیشنهاد می‌کند که یک مکعب

مستطیل به‌ابعاد $\Delta u, \Delta v, \Delta w$ در فضای uvw به‌جسمی برده می‌شود که تقریبا" یک "متوازی السطوح" منحنی الخط در فضای xyz است که با سه بردار $V_1\,\Delta u$ ، $V_2\,\Delta v$ ، و $V_3\,\Delta w$ معین می‌شود (ر.ک. شکل ۳۰۰۱۱).کرانه‌های این جسم سطوحی هستند که بترتیب با فرض ثابت = u ، ثابت = v ، و ثابت = w به‌دست می‌آیند . حجم یک متوازی‌السطوح مساوی قدر مطلق حاصل ضرب سه‌گانهٔ اسکالر سه بردار معین کنندهٔ آن است ؛ درنتیجه ، حجم متوازی السطوح منحنی الخط تقریبا" مساوی است با

$$|(V_1\,\Delta u)\cdot(V_2\,\Delta v)\times(V_3\,\Delta w)| = |V_1\cdot V_2\times V_3|\,\Delta u\,\Delta v\,\Delta w =$$
$$|J(u, v, w)|\,\Delta u\,\Delta v\,\Delta w.$$



شکل ۳۰۰۱۱ تبدیل به‌وسیلهٔ مختصات استوانه‌ای

۳۳۰۱۱ مثالهای حل شده

دو حالت خاص مهم (۴۸۰۱۱) در دو مثال زیر مطرح می‌شوند .

مثال ۱ . مختصات استوانه‌ای. در اینجا به‌جای u, v, w می‌نویسیم r, θ, z ، و نگاشت را با معادلات

$$x = r\cos\theta, \qquad y = r\sin\theta, \qquad z = z \tag{۴۹۰۱۱}$$

تعریف می‌کنیم . به عبارت دیگر، x و y را با مختصات قطبی‌شان در صفحهٔ xy عوض کرده و z را بی‌تغییر می‌گذاریم . باز، برای آنکه نگاشت یک به یک باشد ، باید r را

بزرگتر از 0 گرفته و θ را به‌بازه‌ای به شکل $\theta_0 \le \theta < \theta_0 + 2\pi$ محدود کنیم. شکل ۳۰.۱۱ آنچه را که در مورد یک مکعب مستطیل در فضای $r\theta z$ رخ داده نشان می‌دهد.

دترمینان ژاکوبی نگاشت (۴۹.۱۱) عبارت است از

$$J(r, \theta, z) = \begin{vmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -r\sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r(\cos^2\theta + \sin^2\theta) = r;$$

و درنتیجه، فرمول تبدیل (۴۸.۱۱) خواهد شد

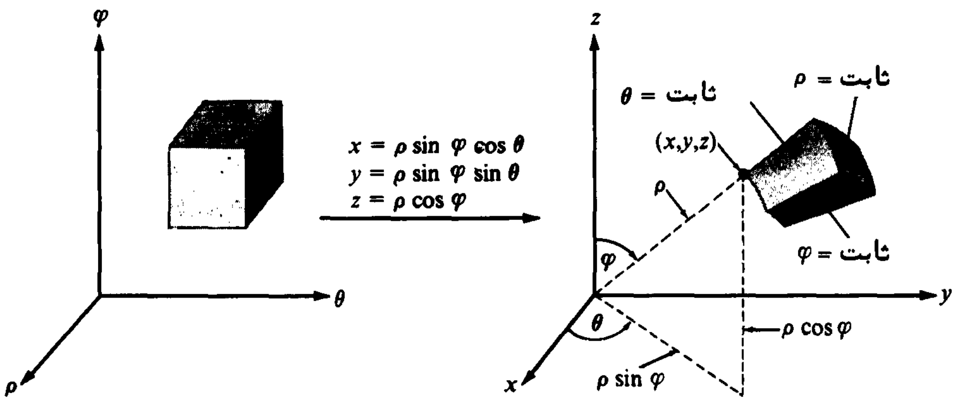
$$\iiint_S f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz = \iiint_T f(r\cos\theta, r\sin\theta, z)r\,dr\,d\theta\,dz.$$

دترمینان ژاکوبی، وقتی $r = 0$، صفر می‌شود، ولی این بر اعتبار فرمول تبدیل اثری ندارد، زیرا مجموعهٔ نقاط دارای $r = 0$ با محتوای 3 بعدی 0 است.

مثال ۲. مختصات کروی. دراین‌حالت، به‌جای u, v, w علامات ρ, θ, φ به‌کارمی‌روند، و نگاشت با معادلات

$$x = \rho\cos\theta\sin\varphi, \qquad y = \rho\sin\theta\sin\varphi, \qquad z = \rho\cos\varphi$$

تعریف می‌شود. ρ ، θ ، و φ در شکل ۳۱.۱۱ تعبیر هندسی شده‌اند. برای داشتن



شکل ۳۱.۱۱ تبدیل به وسیلهٔ مختصات کروی

نگاشت یک به یک، $\rho > 0$ ، $0 \le \theta < 2\pi$ ، و $0 \le \varphi < \pi$ را نگه می‌داریم. سطوح

ثابت $=\rho$ کراتی به مرکز مبداء، سطوح ثابت $=\theta$ صفحاتی ماربر محور z ، و سطوح ثابت $=\varphi$ مخروطهایی مستدیربامحورهایی در امتداد محور z می‌باشند. لذا، یک‌جعبهٔ مکعب‌مستطیل در فضای $\rho\theta\varphi$ روی یک جسم از نوع نموده در شکل ۳۱.۱۱ نگاشته می‌شود.

دترمینان ژاکوبی نگاشت عبارت است از

$$J(\rho, \theta, \varphi) = \begin{vmatrix} \cos\theta\sin\varphi & \sin\theta\sin\varphi & \cos\varphi \\ -\rho\sin\theta\sin\varphi & \rho\cos\theta\sin\varphi & 0 \\ \rho\cos\theta\cos\varphi & \rho\sin\theta\cos\varphi & -\rho\sin\varphi \end{vmatrix} = -\rho^2\sin\varphi.$$

چون اگر $0 \le \varphi < \pi$ ، $\varphi \ge 0$ ، داریم $|J(\rho, \theta, \varphi)| = \rho^2\sin\varphi$ و فرمول تبدیل انتگرالهای سه‌گانه خواهد شد

$$\iiint\limits_S f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz = \iiint\limits_T F(\rho, \theta, \varphi)\rho^2\sin\varphi\, d\rho\, d\theta\, d\varphi,$$

که در آن $F(\rho, \theta, \varphi) = f(\rho\cos\theta\sin\varphi, \rho\sin\theta\sin\varphi, \rho\cos\varphi)$. با آنکه دترمینان ژاکوبی، به‌ازای $\varphi = 0$ ، صفر است، فرمول تبدیل هنوز معتبر است، زیرا مجموعهٔ نقاط دارای $\varphi = 0$ با محتوای 3 بعدی 0 است.

مفهوم حجم را می‌توان به رده‌ای از مجموعه‌ها (به‌نام مجموعه‌های اندازه‌پذیر) در فضای n چنان تعمیم داد که اگر S اندازه‌پذیر باشد، حجمش مساوی انتگرال تابع ثابت 1 روی S باشد. یعنی، اگر $v(S)$ حجم S باشد، داشته باشیم

$$v(S) = \int\limits_S \cdots \int dx_1 \cdots dx_n.$$

ما به توصیف ردهٔ مجموعه‌هایی که این فرمول برایشان معتبر است نمی‌پردازیم. درعوض، نشان می‌دهیم چگونه این انتگرال را می‌توان در چند حالت‌خاص محاسبه‌کرد.

مثال ۳. حجم یک بازهٔ n بعدی. هرگاه S یک بازهٔ n بعدی باشد، مثلاً $S = [a_1, b_1] \times \cdots \times [a_n, b_n]$ ، انتگرال چندگانهٔ مربوط‌به $v(S)$ حاصل ضرب n بازهٔ یک بعدی است:

$$v(S) = \int_{a_1}^{b_1} dx_1 \cdots \int_{a_n}^{b_n} dx_n = (b_1 - a_1)\cdots(b_n - a_n).$$

این با فرمولی که پیشتر برای حجم یک بازهٔ n بعدی دادیم سازگار است .

مثال ۴ . حجم یک کرهٔ n بعدی . فرض کنیم $S_n(a)$ کرهٔ توپر n بعدی (یا n ــ گوی) به شعاع a باشد :

$$S_n(a) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid x_1^2 + \cdots + x_n^2 \le a^2\},$$

و برای حجم $S_n(a)$ قرار می‌دهیم

$$V_n(a) = \int_{S_n(a)} \cdots \int dx_1 \cdots dx_n .$$

ثابت می‌کنیم

$$V_n(a) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}n + 1)}\, a^n, \qquad (۵۰ \cdot ۱۱)$$

که در آن Γ تابع گاما است . به‌ازای $n = 1$ ، این فرمول نتیجه می‌دهد که $V_1(a) = 2a$ ، یعنی طول بازهٔ $[-a, a]$. به‌ازای $n = 2$ ، نتیجه می‌دهد که $V_2(a) = \pi a^2$ ، یعنی مساحت یک قرص مستدیر به‌شعاع a . حال فرمول (۵۰ · ۱۱) را برای $n \ge 3$ ثابت می‌کنیم .

ابتدا ثابت می‌کنیم ، به‌ازای هر $a > 0$ ،

$$V_n(a) = a^n V_n(1). \qquad (۵۱ \cdot ۱۱)$$

به عبارت دیگر ، حجم یک کره به شعاع a ، a^n برابر حجم یک کره به شعاع 1 است . برای اثبات این امر ، از تغییر متغیر خطی $x = au$ استفاده کرده $S_n(1)$ را بروی $S_n(a)$ می‌نگاریم . این نگاشت دارای دترمینان ژاکوبی a^n است . از اینرو ،

$$V_n(a) = \int_{S_n(a)} \cdots \int dx_1 \cdots dx_n = \int_{S_n(1)} \cdots \int a^n\, du_1 \cdots du_n = a^n V_n(1).$$

این (۵۱ · ۱۱) را ثابت می‌کند . پس ، برای اثبات (۵۰ · ۱۱) کافی است ثابت شود که

$$V_n(1) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}n + 1)}. \qquad (۵۲ \cdot ۱۱)$$

ابتدا توجه می‌کنیم که $x_1^2 + \cdots + x_n^2 \le 1$ اگر و فقط اگر

$x_1^2 + \cdots + x_{n-2}^2 \le 1 - x_{n-1}^2 - x_n^2$ و $x_{n-1}^2 + x_n^2 \le 1$.

پس، برای $V_n(1)$ می‌توان انتگرالی به‌صورت تکرار یک انتگرال $(n-2)$ گانه و یک انتگرال مضاعف نوشت:

(۵۳.۱۱)

$$V_n(1) = \iint\limits_{x_{n-1}^2+x_n^2\le 1} \Big[\int\limits_{x_1^2+\cdots+x_{n-2}^2\le 1-x_{n-1}^2-x_n^2} \cdots \int dx_1 \cdots dx_{n-2}\Big]\, dx_{n-1}\, dx_n .$$

انتگرال داخلی روی کرهٔ $(n-2)$ بعدی $S_{n-2}(R)$، که $R=\sqrt{1-x_{n-1}^2-x_n^2}$، گرفته شده است؛ درنتیجه، مساوی است با

$$V_{n-2}(R) = R^{n-2}V_{n-2}(1) = (1-x_{n-1}^2-x_n^2)^{n/2-1}\, V_{n-2}(1).$$

حال به‌جای x_{n-1} می‌نویسیم x، و به‌جای x_n می‌نویسیم y. دراین صورت، (۵۳.۱۱) خواهد شد

$$V_n(1) = V_{n-2}(1) \iint\limits_{x^2+y^2\le 1} (1-x^2-y^2)^{n/2-1}\, dx\, dy .$$

انتگرال مضاعف را با تبدیلش به مختصات قطبی حساب کرده، به‌دست می‌آوریم

$$V_n(1) = V_{n-2}(1)\int_0^{2\pi}\int_0^1 (1-r^2)^{n/2-1} r\, dr\, d\theta = V_{n-2}(1)\,\frac{2\pi}{n}.$$

به عبارت دیگر، اعداد $V_n(1)$ در فرمول بازگشتی

$$V_n(1) = \frac{2\pi}{n} V_{n-2}(1) \quad \text{،} \quad n \ge 3 \text{ اگر}$$

صدق می‌کنند. اما دنبالهٔ $\{f(n)\}$ از اعداد تعریف شده با

$$f(n) = \frac{\pi^{n/2}}{\Gamma(\frac{1}{2}n+1)}$$

در همان فرمول بازگشتی صدق می‌کند، زیرا $\Gamma(s+1) = s\Gamma(s)$. همچنین، $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$ (ر.ک. تمرین ۱۶، بخش ۲۸.۱۱)؛ درنتیجه، $\Gamma(\frac{3}{2}) = \frac{1}{2}\sqrt{\pi}$ و $f(1) = V_1(1) = 2$، و نیز، $f(2) = V_2(1) = \pi$. پس، به‌ازای هر $n \ge 1$، داریم $f(n) = V_n(1)$. این (۵۲.۱۱) را ثابت خواهد کرد.

۳۴.۱۱ تمرین

هریک از انتگرالهای سه‌گانهٔ تمرینهای ۱ تا ۵ را حساب کنید. ناحیهٔ انتگرالگیری را در هر حالت رسم کنید. وجود همهٔ انتگرالهایی که با آنها مواجهید را دانسته بگیرید.

۱. $\iiint_S xy^2z^3\,dx\,dy\,dz$ ، که درآن S جسم محدود به سطح $z = xy$ و صفحات $y = x$ ، $x = 1$ ، و $z = 0$ است.

۲. $\iiint_S + x + y + z)^{-3}\,dx\,dy\,dz$ ، که درآن S جسم محدود به سه صفحهٔ مختصات و صفحهٔ $x + y + z = 1$ است.

۳. $\iiint_S xyz\,dx\,dy\,dz$ ، که درآن $S = \{(x, y, z) \mid x^2 + y^2 + z^2 \leq 1, x \geq 0, y \geq 0, z \geq 0\}$.

۴. $\iiint_S \left(\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2}\right) dx\,dy\,dz$ ، که در آن S جسم محدود به بیضی‌گون $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$ است.

۵. $\iiint_S \sqrt{x^2 + y^2}\,dx\,dy\,dz$ ، که در آن S جسم حاصل از پارچهٔ بالایی مخروط $z^2 = x^2 + y^2$ و صفحهٔ $z = 1$ است.

در تمرینهای ۶، ۷، و ۸، انتگرال سه‌گانهٔ $\iiint_S f(x, y, z)\,dx\,dy\,dz$ یک تابع مثبت به انتگرال مکرر داده شده تحویل می‌شود. در هر حالت، ناحیهٔ انتگرالگیری S را رسم کرده، تصویرش را بر صفحهٔ xy نشان دهید. سپس، انتگرال سه‌گانه را به‌صورت یک یا چند انتگرال مکرر که اولین انتگرالگیری نسبت به y باشد بیان دارید.

۶. $\int_0^1\left(\int_0^{1-x}\left[\int_0^{x+y} f(x, y, z)\,dz\right]dy\right)dx$.

۷. $\int_{-1}^1\left(\int_{-\sqrt{1-x^2}}^{\sqrt{1-x^2}}\left[\int_{\sqrt{x^2-y^2}}^1 f(x, y, z)\,dz\right]dy\right)dx$.

۸. $\int_0^1\left(\int_0^1\left[\int_0^{x^2+y^2} f(x, y, z)\,dz\right]dy\right)dx$.

۹. نشان دهید که

$$\int_0^x\left(\int_0^v\left[\int_0^u f(t)\,dt\right]du\right)dv = \frac{1}{2}\int_0^x (x - t)^2 f(t)\,dt.$$

انتگرالهای‌تمرینات ۱۰ ، ۱۱ ، و ۱۲ را با تبدیل به مختصات استوانه‌ای حساب کنید . وجود همهٔ انتگرالهایی که با آنها مواجهید را دانسته بگیرید .

۱۰ . $\iiint_S (x^2 + y^2)\, dx\, dy\, dz$ ، که‌درآن S جسم محدود به سطح $x^2 + y^2 = 2z$ وصفحهٔ $z = 2$ است .

۱۱ . $\iiint_S dx\, dy\, dz$ ،که‌درآن S جسم محدودبه‌سه صفحهٔ مختصات ، سطح $z = x^2 + y^2$ ، و صفحهٔ $x + y = 1$ است .

۱۲ . $\iiint_S (y^2 + z^2)\, dx\, dy\, dz$ ، که‌درآن S یک مخروط مستدیر قائم به ارتفاع h وقاعده‌ای در صفحهٔ xy به شعاع a و محوری در امتداد محور z است .

انتگرالهای تمرینات ۱۳ ، ۱۴ ، و ۱۵ را با تبدیل به مختصات کروی حساب کنید .

۱۳ . $\iiint_S dx\, dy\, dz$ ، که در آن S کرهٔ توپر به شعاع a و به مرکز مبداء است .

۱۴ . $\iiint_S dx\, dy\, dz$ ، که درآن S جسم محدود به دو کرهٔ متحدالمرکز به شعاعهای a و b ، که $0 < a < b$ ، و به مرکز مبداء است .

۱۵ . $\iiint_S [(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2]^{-1/2}\, dx\, dy\, dz$ ، که در آن S کرهٔ توپر به شعاع R و مرکز مبداء بوده ، و (a, b, c) نقطهٔ ثابتی خارج این کره است .

۱۶ . مختصات کروی تعمیم یافته را می‌توان با نگاشت زیر تعریف کرد :

$$x = a\rho \cos^m \theta \sin^n \varphi, \qquad y = b\rho \sin^m \theta \sin^n \varphi, \qquad z = c\rho \cos^n \varphi,$$

که‌درآن a ، b ، c ، m ، و n ثابتهای‌مثبتی هستند . نشان دهید که‌دترمینان ژاکوبی مساوی است با

$$-abcmn\rho^2 \cos^{m-1} \theta \sin^{m-1} \theta \cos^{n-1} \varphi \sin^{2n-1} \varphi.$$

انتگرالهای سه‌گانه را می‌توان برای محاسبهٔ حجم ،جرم ،مرکزجرم ،گشتاورماند،ومفاهیم دیگر فیزیکی مربوط به اجسام به‌کار گرفت . اگر S یک جسم باشد ، حجمش از انتگرال سه‌گانهٔ

$$V = \iiint_S dx\, dy\, dz$$

به‌دست می‌آید . اگر به جسم در هر نقطهٔ (x, y, z) آن چگالی $f(x, y, z)$ (جرم درواحد حجم) نسبت داده شود ، جرمش M مساوی

$$M = \iiint_S f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

تعریف می‌شود ، و مرکز جرمش نقطهٔ $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ به مختصات

$$\bar{x} = \frac{1}{M} \iiint_S x f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz\,,$$

و از این قبیل ، خواهد بود . گشتاور ماند I_{xy} حول صفحهٔ xy با معادلهٔ

$$I_{xy} = \iiint_S z^2 f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

تعریف می‌شود ، و فرمولهایی مشابه برای تعریف I_{yz} و I_{zx} به‌کار می‌روند . گشتاور ماند I_L حول خط L با

$$I_L = \iiint_S \delta^2(x, y, z) f(x, y, z)\, dx\, dy\, dz$$

تعریف‌می‌شود ، که در آن $\delta(x, y, z)$ فاصلهٔ عمودی نقطهٔ دلخواه (x, y, z) از S تا خط L است .

۱۷ . نشان دهید که گشتاورهای ماند حول محورهای مختصات عبارتند از

$$I_x = I_{xy} + I_{xz}\,, \qquad I_y = I_{yx} + I_{yz}\,, \qquad I_z = I_{zx} + I_{zy}\,.$$

۱۸ . حجم جسمی‌که‌ازبالا به‌کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 5$ و ازپایین به‌سهمی‌گون $x^2 + y^2 = 4z$ محدود شده است را بیابید .

۱۹ . حجم جسم محدود به صفحهٔ xy ، استوانهٔ $x^2 + y^2 = 2x$ ، و مخروط $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ را بیابید .

۲۰ . جرم جسم واقع بین دو کرهٔ متحدالمرکز به شعاعهای a و b ، که $0 < a < b$ ، را درصورتی حساب کنید که چگالی در هر نقطه مساوی مربع فاصلهٔ این نقطه تا مرکز باشد .

۲۱ . یک مخروط مستدیر قائم همگن توپر دارای ارتفاع h است . ثابت کنید فاصلهٔ مرکزگون آن تا قاعده مساوی $h/4$ است .

۲۲ . مرکزجرم یک‌مخروط مستدیر قائم به ارتفاع h را درصورتی تعیین کنید که چگالی‌اش در هر نقطه متناسب با فاصلهٔ این نقطه تا قاعده باشد .

۲۳ . مرکزجرم یک‌مخروط مستدیر قائم به ارتفاع h را درصورتی تعیین کنید که چگالی‌اش در هر نقطه متناسب با فاصلهٔ این نقطه تا محور مخروط باشد .

۲۴ . جسمی به دو نیمکرهٔ متحدالمرکز به شعاعهای a و b ، که $0 < a < b$ ، محدود است . اگر چگالی ثابت باشد ، مرکز جرم را بیابید .

۲۵ . مرکزجرم یک مکعب به ضلع h را درصورتی بیابید که چگالی‌اش در هر نقطه‌متناسب با مربع فاصلهٔ این نقطه تا یک گوشهٔ قاعده باشد . (قاعده را در صفحهٔ xy گرفته و اضلاع را روی محورهای مختصات بگذارید .)

۲۶ . یک مخروط مستدیر قائم به ارتفاع h ، شعاع قاعدهٔ a ، چگالی ثابت ، و جرم M است . گشتاور ماند آن حول محور ماربر راس و موازی قاعده را بیابید .

۲۷ . گشتاورماندیک کره به شعاع R و جرم M را حول یک قطر درصورتی بیابید که‌چگالی ثابت باشد .

۲۸ . گشتاور ماند یک استوانه به شعاع a و جرم M را درصورتی بیابید که چگالی‌اش در هر نقطه متناسب با فاصلهٔ این نقطه تا محور استوانه باشد .

۲۹ . ساقهٔ یک قارچ استوانهٔ مستدیر قائمی به قطر ۱ و طول 2 بوده ، و کلاهک آن یک نیمکره‌به‌شعاع R است . اگر قارچ یک جسم همگن با محور تقارن بوده ، و مرکزجرمش در صفحه‌ای باشد که ساقه به کلاهک وصل می‌شود ، R را پیدا نمایید .

۳۰ . یک سفینهٔ فضایی جدید دارای بدنهٔ غیر قابل شکست هموار است که از بخشهایی از دو استوانهٔ مستدیر با قطرهایی مساوی D که محورهایش در زوایای قائمه هم را تلاقی می‌کنندساخته شده‌است . قرار است سفینه در یک جعبهٔ مکعبی به بعدداخلی D حمل شود . ثابت کنید یکسوم فضای جعبه خالی می‌باشد .

۳۱ . فرض کنید $S_n(a)$ مجموعهٔ زیر در فضای n باشد ، که در آن $a > 0$:

$$S_n(a) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid |x_1| + \cdots + |x_n| \le a\}.$$

وقتی $n = 2$ ، مجموعه‌یک‌مربع به‌رئوس $(\pm a, 0)$ و $(0, \pm a)$ است . وقتی $n = 3$ ، یک هشت وجهی به رئوس $(\pm a, 0, 0)$ ، و $(0, \pm a, 0)$ ، $(0, 0, \pm a)$ می‌باشد . فرض کنید $V_n(a)$ حجم $S_n(a)$ باشد ، که با

$$V_n(a) = \int_{S_n(a)} \cdots \int dx_1 \cdots dx_n$$

داده می‌شود .

(آ) ثابت کنید $V_n(a) = a^n V_n(1)$.

(ب) به‌ازای $n \ge 2$ ، انتگرال مربوط‌به $V_n(1)$ را به‌صورت تکرار یک انتگرال یک

بعدی و یک انتگرال $(n-1)$ گانه بیان کرده، و نشان دهید

$$V_n(1) = V_{n-1}(1)\int_{-1}^{1}(1-|x|)^{n-1}\,dx = \frac{2}{n}V_{n-1}(1).$$

(پ) با استفاده از قسمتهای (آ) و (ب)، نتیجه بگیرید که $V_n(a) = \dfrac{2^n a^n}{n!}$.

۳۲ . فرض کنید $S_n(a)$ مجموعهٔ زیر در فضای n باشد، که در آن $a > 0$ و $n \geq 2$:

$S_n(a) = \{(x_1, \ldots, x_n) \mid |x_i| + |x_n| \leq a$ ، $i = 1, \ldots, n-1$ به‌ازای هر $\}$.

(آ) $S_n(1)$ ، وقتی $n = 2$ و وقتی $n = 3$ ، را رسم کنید.

(ب) فرض‌کنید $V_n(a) = \int\cdots\int_{S_n(a)} dx_1 \cdots dx_n$ ، و نشان‌دهیدکه $V_n(a) = a^n V_n(1)$.

(پ) انتگرال مربوط به $V_n(1)$ را به‌صورت تکراری از یک انتگرال یک بعدی و یک انتگرال $(n-1)$ گانه بیان کرده، و نتیجه بگیرید که $V_n(a) = 2^n a^n/n$.

۳۳ . (آ) به مثال ۴، ص ۵۵۶ ، باز می‌گردیم. انتگرال مربوط‌به $V_n(1)$ ، یعنی حجم کرهٔ یکهٔ n بعدی، را به‌صورت تکراری از یک انتگرال $(n-1)$ گانه و یک انتگرال‌یک بعدی بیان کرده، و بدینوسیله ثابت کنید

$$V_n(1) = 2V_{n-1}(1)\int_{0}^{1}(1-x^2)^{(n-1)/2}\,dx.$$

(ب) با استفاده از قسمت (آ) و معادلهٔ (۵۲۰۱۱) ، نتیجه بگیرید که

$$\int_0^{\pi/2}\cos^n t\,dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}\,\frac{\Gamma\left(\dfrac{n+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\dfrac{n}{2}+1\right)}.$$

۱۲

انتگرالهای سطح

۱۰۱۲ نمایش پارامتری سطح

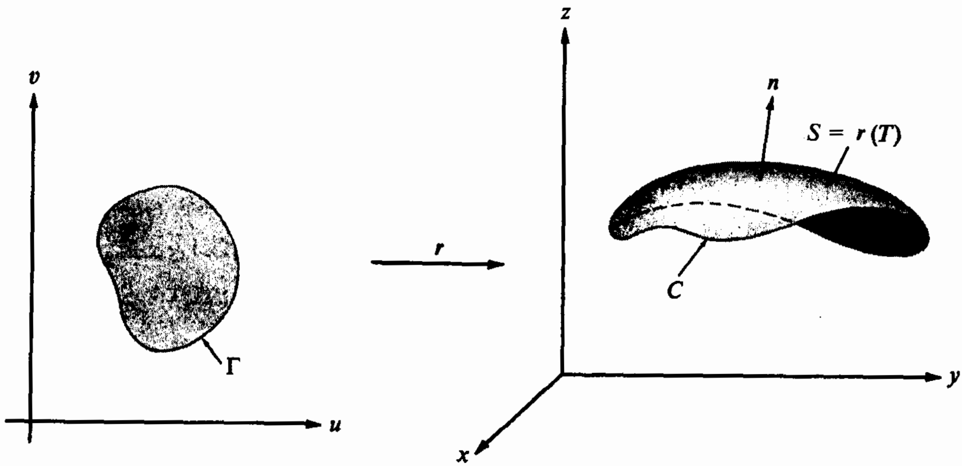
دراین‌فصل‌به بحث انتگرالهای سطح وکاربردهایشان‌می‌پردازیم . انتگرال سطح را می‌توان شبیه دوبعدی انتگرال خط دانست ، که در آن ناحیهٔ انتگرالگیری به جای منحنی سطح است . پیش ازآنکه‌بتوان‌انتگرالهای‌سطح را دقیقاً مطرح کرد ، باید در معنی سطح توافق داشته باشیم .

به بیان نادقیق ، یک سطح مکان هندسی یک نقطهٔ متحرک در فضا با دو درجهٔ آزادی است . در بررسی هندسهٔ تحلیلی در جلد یک ، دو روش برای توصیف این مکان به‌وسیلهٔ فرمولهای‌ریاضی داده‌شد . یکی **نمایش ضمنی** است ، که در آن یک سطح مجموعهٔ نقاطی چون (x, y, z) است که در معادله‌ای به شکل $F(x, y, z) = 0$ صدق می‌کنند .گاهی می‌توان‌این‌معادله‌را نسبت‌به یکی از مختصات وبرحسب دوتای دیگر ، مثلاً نسبت‌به z وبرحسب x و y ، حل‌کرد . درصورت امکان ، یک **نمایش صریح** به‌دست می‌آید که با یک یا چند معادله به شکل $z = f(x, y)$ بیان می‌شود . مثلاً ، کره به شعاع 1 و مرکز مبداء دارای نمایش ضمنی $x^2 + y^2 + z^2 - 1 = 0$ است . وقتی این معادله نسبت به z حل شود ، به‌دو معادله منجر می‌شود ، $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ و $z = -\sqrt{1 - x^2 - y^2}$.اولی نمایش صریح نیمکرهٔ بالایی ، و دومی از آن نیمکرهٔ پایینی است .

روش سوم برای توصیف سطوح در بررسی انتگرالهای‌سطح مفیدتر است ؛ این نمایش **پارامتری یا برداری** است ، کـه در آن سه معادله داریم که x ، y ، و z را برحسب دو پارامتر u و v بیان می‌کنند :

$$x = X(u, v), \qquad y = Y(u, v), \qquad z = Z(u, v). \tag{۱۰۱۲}$$

در اینجا نقطهٔ (u, v) روی یک مجموعهٔ همبند دوبعدی T در صفحهٔ uv تغییر می‌کند، و نقاط متناظر (x, y, z) یک سطح در فضای xyz می‌پیمایند. این روش توصیف یک سطح شبیه نمایش یک منحنی فضایی با سه معادلهٔ پارامتری شامل یک پارامتر است. وجود دو پارامتر در (۱۰۱۲) انتقال دودرجهٔ آزادی را به نقطهٔ (x, y, z) ، همانند شکل ۱۰۱۲، ممکن می‌سازد. راه دیگر توصیف همین ایده این است که بگوییم یک سطح نقش یک ناحیهٔ مسطح T تحت نگاشت (۱۰۱۲) است.



شکل ۱۰۱۲ نمایش پارامتری یک سطح

اگر بردار شعاعی $\boldsymbol{r}$ از مبداء تا نقطهٔ دلخواه (x, y, z) سطح را معرفی کنیم، می‌توان سه معادلهٔ پارامتری (۱۰۱۲) را در یک معادلهٔ برداری به شکل

$$\boldsymbol{r}(u, v) = X(u, v)\boldsymbol{i} + Y(u, v)\boldsymbol{j} + Z(u, v)\boldsymbol{k} \quad \text{که در آن} \quad (u, v) \in T \quad (۲۰۱۲)$$

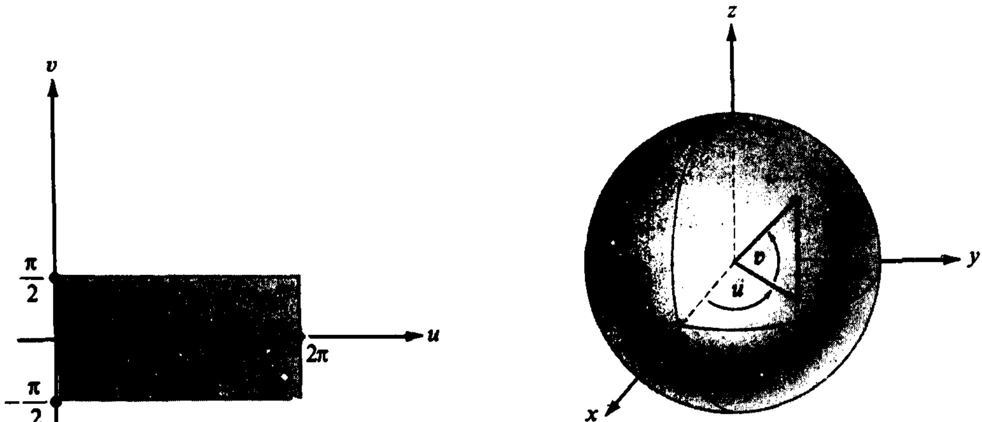
تلفیق کرد. این را یک **معادلهٔ برداری** برای سطح می‌نامند.

البته، برای یک سطح نمایشهای پارامتری زیادی وجود دارند. یکی از اینها را همیشه می‌توان از شکل صریح $z = f(x, y)$ بافرض $X(u, v) = u$, $Y(u, v) = v$, $Z(u, v) = f(u, v)$ به‌دست آورد. از آن سو، اگر دو معادلهٔ اول (۱۰۱۲) را نسبت به u و v و برحسب x و y حل کرده و در معادلهٔ سوم قرار دهیم، یک نمایش صریح مانند $z = f(x, y)$ به دست خواهد آمد.

مثال ۱. نمایش پارامتری کره. سه معادلهٔ

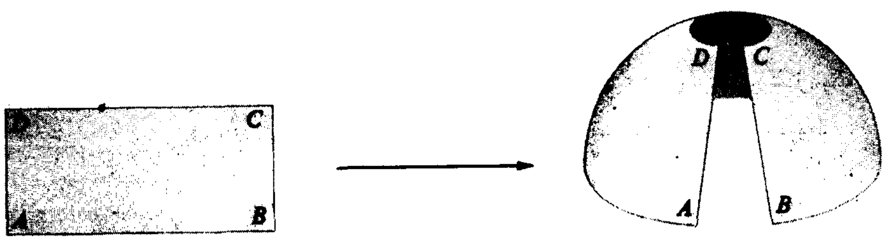
$$x = a\cos u \cos v, \qquad y = a \sin u \cos v, \qquad z = a \sin v \tag{۳.۱۲}$$

معادلات پارامتری یک کره به شعاع a و مرکز مبداء است. اگر سه معادلهٔ (۳.۱۲) را مجذورکرده‌و بهم بیفزاییم، درمی‌یابیم که $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$، و می‌بینیم که هرنقطهٔ (x, y, z) صادق در (۳.۱۲) بر کره قرار دارد. دراین مثال، پارامترهای u و v را می‌توان به‌صورت زوایای شکل ۲.۱۲ تعبیر هندسی کرد.



شکل ۲.۱۲ نمایش پارامتری کره

اگر نقطهٔ (u, v) روی مستطیل $T = [0, 2\pi] \times [-\frac{1}{2}\pi, \frac{1}{2}\pi]$ تغییر کند، نقاط معین شده به‌وسیلهٔ (۳.۱۲) تمام کره را می‌پیمایند. نیمکرهٔ بالایی نقش مستطیل $[0, 2\pi] \times [0, \frac{1}{2}\pi]$ و نیمکرهٔ پایینی نقش $[0, 2\pi] \times [-\frac{1}{2}\pi, 0]$ است. شکل ۳.۱۲ ایدهٔ ملموسی



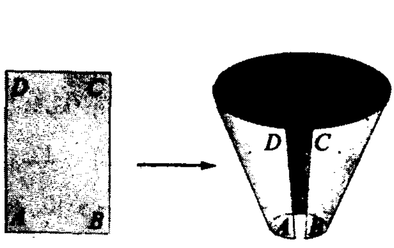
شکل ۳.۱۲ تغییر شکل یک مستطیل به یک نیمکره

از طـرز نـگاشت مستطیل $[0, 2\pi] \times [0, \frac{1}{2}\pi]$ روی نیمکرهٔ بالایی را بـه‌ما می‌دهد. فرض کنید مستطیل از یک‌مادهٔ پلاستیکی قابل انعطاف که می‌تواند منبسط یا منقبض شود ساخته شده باشد. شکل ۳۰۱۲ نشان می‌دهد که مستطیل به یک نیمکره تغییر یافته است. قاعدهٔ AB مآلا" استوا شـده، اضلاع مقـابل AD و BC برهم منطبق می‌شوند، و ضلع فوقانی DC به یک نقطه منقبض می‌گردد (قطب شمال).

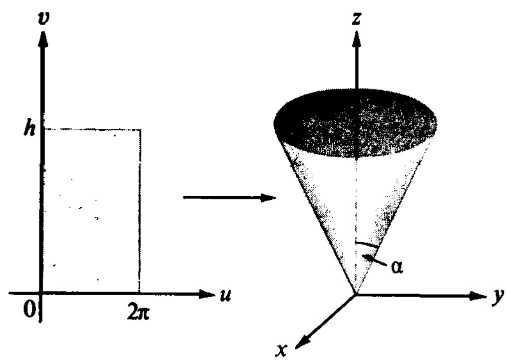
مثال ۲۰ نمایش پارامتری مخروط. معادلهٔ برداری

$$\boldsymbol{r}(u, v) = v \sin\alpha \cos u\, \boldsymbol{i} + v \sin\alpha \sin u\, \boldsymbol{j} + v \cos\alpha\, \boldsymbol{k}$$

نمایش مخـروط مستدیر قائم در شکل ۴۰۱۲ است، که در آن α نصف زاویهٔ راس است. مجددا"، پـارامترهای u و v را می‌توان تعبیـر هندسی کرد؛ v فاصلهٔ راس تا نقطهٔ (x, y, z) برمخروط، و u مختص قطبی زاویه است. وقتی (u, v) روی یک مستطیل به‌شکل $[0, 2\pi] \times [0, h]$ تغییرکند، نقاط‌نظیر (x, y, z) یک‌مخروط‌به‌ارتفاع $h\cos\alpha$ رامی‌پیمایند. یک مستطیل پـلاستیکی را می‌توان بـا انطبـاق اضـلاع AD و BC، بـه شکـل ۵۰۱۲، و انقبـاض ضلع AB به یک نقطه (راس مخـروط)، به یک مخروط تغییر داد. سطح شکل ۸۰۱۲ یک مرحلهٔ میانی تغییر شکل را نشان می‌دهد.



شکل ۵۰۱۲ تغییر شکل یک مستطیل به یک مخروط



شکل ۴۰۱۲ نمایش پارامتری یک مخروط

در بررسی کلی سطوح، توابع X، Y، و Z در معادلات پارامتری (۱۰۱۲) یادر معادلهٔ برداری (۲۰۱۲) بر T پیوسته فرض می‌شوند. نقش T تحت نگاشت $\boldsymbol{r}$ یک سطح

پارامتری نام دارد و با علامت $r(T)$ نموده‌می‌شود. در بسیاری از مثالهای مورد بحث‌ما، T یک مستطیل، یک قرص مستدیر، یامجموعهٔ همبند سادهٔ دیگری که به یک منحنی‌بستهٔ ساده محدود شده می‌باشد. اگر تابع r بر T یک به یک باشد، نقش $r(T)$ یک **سطح پارامتری ساده** نام دارد. در چنین حالت، نقاط متمایز T به نقاط متمایز سطح نگاشته می‌شود. بخصوص، هر منحنی بستهٔ ساده در T روی یک منحنی بستهٔ ساده بر سطح نگاشته می‌شود.

سطح پارامتری $r(T)$ ممکن است به یک نقطه یا یک منحنی تباه شود. مثلاً، اگر هر سه تابع X، Y، و Z ثابت باشند، نقش $r(T)$ یک نقطه است. اگر X، Y، و Z مستقل از v باشند، نقش $r(T)$ یک منحنی است. مثال دیگر از یک سطح تباه شده وقتی است که $X(u, v) = u + v$، $Y(u, v) = (u + v)^2$، و $Z(u, v) = (u + v)^3$، که در آن $T = [0, 1] \times [0, 1]$. اگر بنویسیم $t = u + v$، سطح به منحنی فضایی به معادلات پارامتری $x = t$، $y = t^2$، و $z = t^3$، که $0 \le t \le 2$، تباه می‌شود. از این تباهی می‌توان با گذاردن قیودی دیگر بر نگاشت r، بصورتی که در بخش بعد توصیف می‌شود، احتراز کرد.

۲۰۱۲ حاصل ضرب برداری اساسی

سطحی را درنظر می‌گیریم که با معادلهٔ برداری

$$r(u, v) = X(u, v)i + Y(u, v)j + Z(u, v)k \text{ ، که } (u, v) \in T \text{ ،}$$

توصیف شده است. به فرض مشتقپذیر بودن X، Y، و Z بر T، دو بردار

$$\frac{\partial r}{\partial u} = \frac{\partial X}{\partial u} i + \frac{\partial Y}{\partial u} j + \frac{\partial Z}{\partial u} k$$

و

$$\frac{\partial r}{\partial v} = \frac{\partial X}{\partial v} i + \frac{\partial Y}{\partial v} j + \frac{\partial Z}{\partial v} k$$

را درنظر می‌گیریم. حاصل ضرب خارجی این دو بردار $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ را **حاصل ضرب برداری اساسی** نمایش r می‌نامیم. مولفه‌های آن را می‌توان به‌صورت دترمینانهای ژاکوبی بیان کرد. در واقع، داریم

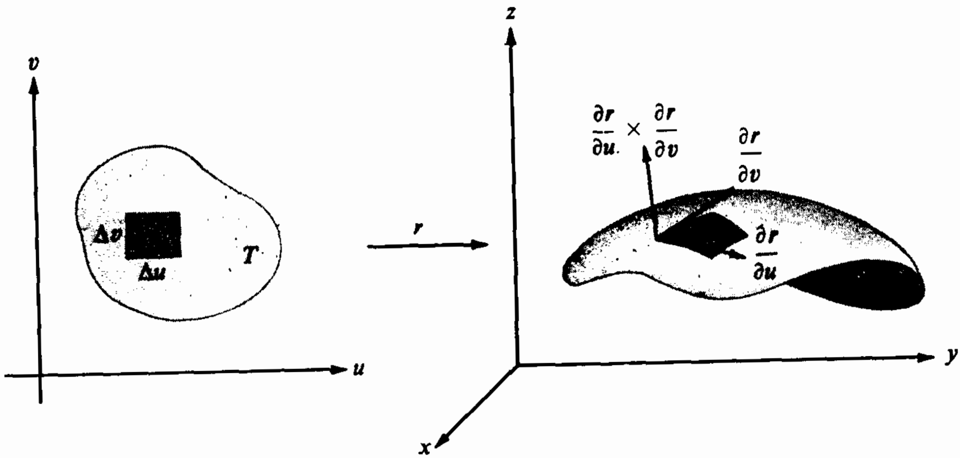
$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k}\\ \dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial X}{\partial v} & \dfrac{\partial Y}{\partial v} & \dfrac{\partial Z}{\partial v}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}\dfrac{\partial Y}{\partial u} & \dfrac{\partial Z}{\partial u}\\ \dfrac{\partial Y}{\partial v} & \dfrac{\partial Z}{\partial v}\end{vmatrix}\boldsymbol{i}+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial Z}{\partial u} & \dfrac{\partial X}{\partial u}\\ \dfrac{\partial Z}{\partial v} & \dfrac{\partial X}{\partial v}\end{vmatrix}\boldsymbol{j}+\begin{vmatrix}\dfrac{\partial X}{\partial u} & \dfrac{\partial Y}{\partial u}\\ \dfrac{\partial X}{\partial v} & \dfrac{\partial Y}{\partial v}\end{vmatrix}\boldsymbol{k}$$

$$=\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}\boldsymbol{i}+\frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}\boldsymbol{j}+\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\boldsymbol{k}. \qquad (۴۰۱۲)$$

اگر (u, v) نقطه‌ای در T باشد که در آن $\partial \boldsymbol{r}/\partial u$ و $\partial \boldsymbol{r}/\partial v$ پیوسته بوده و حاصل ضرب برداری‌اساسی ناصفر باشد ، نقطهٔ نقش $\boldsymbol{r}(u, v)$ یک **نقطهٔ منتظم** $\boldsymbol{r}$ نامیده‌می‌شود . نقاطی که در آنها $\partial \boldsymbol{r}/\partial u$ یا $\partial \boldsymbol{r}/\partial v$ پیوسته نبوده یا $\partial \boldsymbol{r}/\partial u \times \partial \boldsymbol{r}/\partial v = \boldsymbol{O}$ **نقاط منفرد** $\boldsymbol{r}$ نامیده می‌شوند . سطح $\boldsymbol{r}(T)$ را **هموار** گویند اگر همهٔ نقاطش نقاط منتظم باشند . هر سطح بیش ازیک نمایش پارامتری دارد . بعضی از مثالهای زیر نشان می‌دهند که یک‌نقطه از یک سطح ممکن است یک نقطهٔ منتظم یک نمایش پارامتری ولی‌نقطهٔ منفرد نمایش دیگر باشد . معنی هندسی نقاط منتظم و منفرد را می‌توان به‌صورت زیر توضیح داد :

یک پاره خط افقی را در T درنظر می‌گیریم . نقش‌آن تحت $\boldsymbol{r}$ یک منحنی (به نام یک u ـ منحنی)است که برسطح $\boldsymbol{r}(T)$ قراردارد . به‌ازای v ثابت ، پارامتر u رانمایش زمان می‌گیریم . بردار $\partial \boldsymbol{r}/\partial u$ بردار سرعت این منحنی است . وقتی u به قدر Δu تغییر کند ، نقطه‌ای که درآغاز در $\boldsymbol{r}(u, v)$ است در امتداد یک u ـ منحنی به‌قدر تقریبا" $\|\partial \boldsymbol{r}/\partial u\|\,\Delta u$ حرکت می‌کند ، زیرا $\|\partial \boldsymbol{r}/\partial u\|$ نمایش مقدار سرعت در امتدا u ـ منحنی‌است. بهمین نحو ، به‌ازای u ثابت ، یک نقطه از یک v ـ منحنی در زمان Δv به‌قدر تقریبا" $\|\partial \boldsymbol{r}/\partial v\|\,\Delta v$ حرکت می‌کند . یک مستطیل در T به مساحت $\Delta u\,\Delta v$ بروی بخشی از $\boldsymbol{r}(T)$ نگاشته می‌شود که آن را بامتوازی الاضلاع معین شدهٔ به‌وسیلهٔ بردارهای $(\partial \boldsymbol{r}/\partial u)\,\Delta u$ و $(\partial \boldsymbol{r}/\partial v)\,\Delta v$ تقریب می‌زنیم . (ر.ک. شکل ۱۲ ۶۰ .) مساحت متوازی الاضلاع پیموده شده به‌وسیلهٔ $(\partial \boldsymbol{r}/\partial u)\,\Delta u$ و $(\partial \boldsymbol{r}/\partial v)\,\Delta v$ اندازه حاصل ضرب خارجی آنهاست :

$$\left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\Delta u\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\Delta v\right\|=\left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\times\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right\|\Delta u\,\Delta v.$$



شکل ۶.۱۲ تعبیر هندسی بردارهای $\partial r/\partial u$، $\partial r/\partial v$، و $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$

پس طول حاصل‌ضرب برداری اساسی را می‌توان یک سازهٔ بزرگ‌کن موضعی مساحات دانست. در نقاطی که این حاصل ضرب برداری صفر است، متوازی الاضلاع به یک منحنی یا یک نقطه فرو می‌ریزد، و تباهی به‌بار می‌آورد. درهر نقطهٔ منتظم، بردارهای $\partial r/\partial u$ و $\partial r/\partial v$ صفحه‌ای معین می‌کنند که بردار $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ یک قائم آن است. در بخش بعد، ثابت می‌کنیم $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ بر هر منحنی هموار روی سطح عمود است؛ به این دلیل، صفحهٔ معین شده به‌وسیلهٔ $\partial r/\partial u$ و $\partial r/\partial v$ **صفحهٔ مماس** سطح نام دارد. پیوستگی $\partial r/\partial u$ و $\partial r/\partial v$ پیوستگی $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ را ایجاب می‌کند؛ این، به نوبهٔ خود، یعنی صفحهٔ مماس بر یک سطح هموار به‌طور پیوسته تغییر می‌نماید. لذا، می‌بینیم پیوستگی $\partial r/\partial u$ و $\partial r/\partial v$ از وجود ضلعهای تیز یا گوشه‌ها بر سطح ممانعت می‌کند؛ صفر نشدن $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ از تباهی جلوگیری خواهد کرد.

مثال ۱. سطوح با نمایش صریح $z = f(x, y)$. برای یک سطح با نمایش صریح $z = f(x, y)$، می‌توان x و y را پارامتر گرفت، که معادلهٔ برداری

$$r(x, y) = xi + yj + f(x, y)k$$

را به‌ما می‌دهد. این نمایش همواره یک سطح پارامتری ساده به‌دست می‌دهد. ناحیهٔ T تصویر سطح روی صفحهٔ xy نام دارد. (مثالی در شکل ۷.۱۲، ص ۵۷۵، نموده

شده‌است .) برای محاسبهٔ حاصل‌ضرب برداری‌اساسی ، توجه می‌کنیم که، اگر f مشتقپذیر باشد ،

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} = \boldsymbol{i} + \frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{k} \quad \text{و} \quad \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \boldsymbol{j} + \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{k}.$$

این نتیجه می‌دهد که

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ 1 & 0 & \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ 0 & 1 & \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{vmatrix} = -\frac{\partial f}{\partial x}\boldsymbol{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\boldsymbol{j} + \boldsymbol{k}. \tag{۵۰۱۲}$$

چون مولفهٔ z ، $\partial \boldsymbol{r}/\partial x \times \partial \boldsymbol{r}/\partial y$ مساوی 1 است ، حاصل ضرب برداری اساسی هرگزصفر نیست .لذا ،تنها نقاط منفرد این نمایش نقاطی است که در آنها دست کم یکی ازمشتقات جزئی $\partial f/\partial x$ یا $\partial f/\partial y$ پیوسته نباشد .

یک حالت مشخص معادلهٔ $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$ است ، که اگر $x^2 + y^2 \leq 1$ ، نمایش یک نیمکره به شعاع 1 و مرکز مبداء است . معادلهٔ برداری

$$\boldsymbol{r}(x, y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + \sqrt{1 - x^2 - y^2}\boldsymbol{k}$$

قرص یکهٔ $T = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq 1\}$ را به‌طوریک به یک روی نیمکره می‌نگارد . مشتقات جزئی $\partial \boldsymbol{r}/\partial x$ و $\partial \boldsymbol{r}/\partial y$ همه‌جا درون این قرص موجود و پیوسته‌اند ، ولی بر روی کرانه وجود ندارند . بنابراین ، هر نقطه روی استوا یک نقطهٔ منفرد این نمایش می‌باشد .

مثال ۲ . نیمکرهٔ مثال ۱ را درنظر می‌گیریم ، ولی این‌بار به‌عنوان نقش مستطیل $T = [0, 2\pi] \times [0, \frac{1}{2}\pi]$ تحت نگاشت

$$\boldsymbol{r}(u, v) = a\cos u \cos v\,\boldsymbol{i} + a\sin u \cos v\,\boldsymbol{j} + a\sin v\,\boldsymbol{k}.$$

بردارهای $\partial \boldsymbol{r}/\partial u$ و $\partial \boldsymbol{r}/\partial v$ از فرمولهای زیر به‌دست می‌آیند :

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} = -a\sin u \cos v\,\boldsymbol{i} + a\cos u \cos v\,\boldsymbol{j},$$

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = -a\cos u \sin v\,\boldsymbol{i} - a\sin u \sin v\,\boldsymbol{j} + a\cos v\,\boldsymbol{k}.$$

محاسبه‌ای ساده نشان می‌دهد که حاصل ضرب خارجی آنها مساوی است با

$$\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = a \cos v\, \boldsymbol{r}(u, v).$$

نقش T یک سطح پارامتری ساده نیست ،زیرا این نگاشت بر T یک به یک نیست . درواقع ، هر نقطه بر پاره خط $v = \frac{1}{2}\pi ,\ 0 \le u \le 2\pi$ به نقطهٔ $(0, 0, a)$ (قطب شمال) نگاشته می‌شود . همچنین ، بخاطر تناوب سینوس و کسینوس، $\boldsymbol{r}$ در نقاط $(0, v)$ و $(2\pi, v)$ مقادیر یکسان می‌گیرد ؛ درنتیجه ، اضلاع راست و چپ T روی یک منحنی نگاشته می‌شوند ، روی یک‌قوس مستدیر که قطب شمال را به نقطهٔ $(a, 0, 0)$ روی استوا وصل می‌کند . (ر.ک. شکل ۱۲ . ۳) بردارهای $\partial \boldsymbol{r}/\partial u$ و $\partial \boldsymbol{r}/\partial v$ همه‌جا در T پیوسته‌اند . چون $\|\partial \boldsymbol{r}/\partial u \times \partial \boldsymbol{r}/\partial v\| = a^2 \cos v$ ، تنها نقاط منفرد این نمایش به‌ازای $\cos v = 0$ است . قطب شمال تنها نقطه از این نوع خواهد بود .

۳.۱۲ حاصل ضرب برداری اساسی به‌عنوان قائم به سطح

سطح پارامتری هموار $\boldsymbol{r}(T)$ را درنظر گرفته ، فرض می‌کنیم C^* یک منحنی هموار در T باشد . دراین صورت ، نقش $C = \boldsymbol{r}(C^*)$ یک منحنی هموار واقع روی سطح است . ثابت می‌کنیم ، همانطور که شکل ۱۲ . ۶ نشان داده ، بردار $\partial \boldsymbol{r}/\partial u \times \partial \boldsymbol{r}/\partial v$ در هر نقطه از C قائم به C است .

فرض‌کنیم C^* به وسیلهٔ تابع $\boldsymbol{\alpha}$ تعریف شده بر بازهٔ $[a, b]$ توصیف شده باشد ؛ مثلا" ،

$$\boldsymbol{\alpha}(t) = U(t)\boldsymbol{i} + V(t)\boldsymbol{j}.$$

دراین صورت ، منحنی نقش C به وسیلهٔ تابع مرکب

$$\boldsymbol{\rho}(t) = \boldsymbol{r}[\boldsymbol{\alpha}(t)] = X[\boldsymbol{\alpha}(t)]\boldsymbol{i} + Y[\boldsymbol{\alpha}(t)]\boldsymbol{j} + Z[\boldsymbol{\alpha}(t)]\boldsymbol{k}$$

توصیف می‌شود . می‌خواهیم ثابت کنیم مشتق $\boldsymbol{\rho}'(t)$ بر بردار $\partial \boldsymbol{r}/\partial u \times \partial \boldsymbol{r}/\partial v$ ، وقتی مشتقات‌جزئی $\partial \boldsymbol{r}/\partial u$ و $\partial \boldsymbol{r}/\partial v$ در $(U(t), V(t))$ حساب‌شوند ،عمود است . برای‌محاسبهٔ $\boldsymbol{\rho}'(t)$ ، ازهرمولفهٔ $\boldsymbol{\rho}(t)$ با قاعدهٔ زنجیره‌ای (قضیهٔ ۸ . ۸) مشتق می‌گیریم تا به‌دست آید

$$\boldsymbol{\rho}'(t) = \nabla X \cdot \boldsymbol{\alpha}'(t)\boldsymbol{i} + \nabla Y \cdot \boldsymbol{\alpha}'(t)\boldsymbol{j} + \nabla Z \cdot \boldsymbol{\alpha}'(t)\boldsymbol{k}, \tag{۶.۱۲}$$

که در آن بردارهای گرادیان ∇X ، ∇Y ، و ∇Z در $(U(t), V(t))$ حساب می‌شوند . معادلهٔ (۶.۱۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت :

$$\mathbf{p}'(t) = \frac{\partial r}{\partial u} U'(t) + \frac{\partial r}{\partial v} V'(t),$$

که درآن مشتقات $\partial r/\partial u$ و $\partial r/\partial v$ در $(U(t), V(t))$ حساب می‌شوند. چون $\partial r/\partial u$ و $\partial r/\partial v$ هریک بر حاصل ضرب خارجی $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ عمود است، همین امر برای $\mathbf{p}'(t)$ درست می‌باشد. این ثابت می‌کند که، طبق حکم، $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ قائم به C است. به این دلیل، حاصل ضرب برداری $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ را قائم به سطح $r(T)$ گویند. در هر نقطهٔ منتظم P از $r(T)$، بردار $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ ناصفر است؛ صفحهٔ ماربر P با این بردار قائم صفحهٔ مماس بر سطح در P نامیده می‌شود.

۴۰۱۲ تمرین

در تمرینهای ۱ تا ۶، با حذف پارامترهای u و v یک معادلهٔ دکارتی به‌دست آورده، بدینوسیله نشان دهید که معادلهٔ برداری داده شده بخشی از سطح نامبرده را نمایش می‌دهد. همچنین، حاصل‌ضرب برداری اساسی $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ را برحسب u و v حساب کنید.

۱. صفحه:

$$r(u, v) = (x_0 + a_1 u + b_1 v)i + (y_0 + a_2 u + b_2 v)j + (z_0 + a_3 u + b_3 v)k.$$

۲. سهمی‌گون بیضوی:

$$r(u, v) = au \cos v\, i + bu \sin v\, j + u^2 k.$$

۳. بیضی‌گون:

$$r(u, v) = a \sin u \cos v\, i + b \sin u \sin v\, j + c \cos u\, k.$$

۴. سطح دوار:

$$r(u, v) = u \cos v\, i + u \sin v\, j + f(u)k.$$

۵. استوانه:

$$r(u, v) = ui + a \sin v\, j + a \cos v\, k.$$

۶. چنبره:

$$r(u, v) = (a + b \cos u) \sin v\, i + (a + b \cos u) \cos v\, j + b \sin u\, k,$$

که درآن $0 < b < a$. تعابیر هندسی a و b چیستند؟

در تمرینهای ۷ تا ۱۰، اندازهٔ حاصل ضرب برداری $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ را حساب کنید.

۷ . $r(u,v) = a\sin u \cosh v\, i + b\cos u \cosh v\, j + c\sinh v\, k$.

۸ . $r(u,v) = (u+v)i + (u-v)j + 4v^2k$.

۹ . $r(u,v) = (u+v)i + (u^2+v^2)j + (u^3+v^3)k$.

۱۰ . $r(u,v) = u\cos v\, i + u\sin v\, j + \frac{1}{2}u^2\sin 2v\, k$.

۵.۱۲ مساحت یک سطح پارامتری

فرض‌کنیم $S = r(T)$ یک سطح پارامتری باشد که به‌وسیلهٔ تابع برداری r تعریف شده بر ناحیهٔ T درصفحهٔ uv توصیف شده است. در بخش ۲.۱۲ دریافتیم که طول حاصل ضرب‌برداری‌اساسی $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ را می‌توان‌به‌عنوان‌یک‌سازهٔ بزرگ کن موضعی‌مساحات تعبیر کرد. (ر.ک. شکل ۶.۱۲ .) یک مستطیل در T به مساحت $\Delta u\, \Delta v$ به وسیلهٔ r روی یک متوازی‌الاضلاع منحنی الخط بر S به مساحتی تقریبا" مساوی

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| \Delta u\, \Delta v$$

نگاشته می‌شود. این ملاحظات تعریف زیر را پیشنهاد می‌کنند.

تعریف مساحت یک منحنی پارامتری. مساحت S ،که با $a(S)$ نموده می‌شود، به‌وسیلهٔ انتگرال مضاعف

$$a(S) = \iint_T \left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| du\, dv \qquad (۷.۱۲)$$

تعریف می‌شود.

به عبارت دیگر، برای تعیین مساحت S ، ابتدا حاصل ضرب برداری اساسی $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ را حساب کرده‌و سپس‌از طول آن روی ناحیهٔ T انتگرال می‌گیریم. وقتی $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ به‌وسیلهٔ معادلهٔ (۴.۱۲) برحسب مولفه‌هایش بیان شود، خواهیم داشت

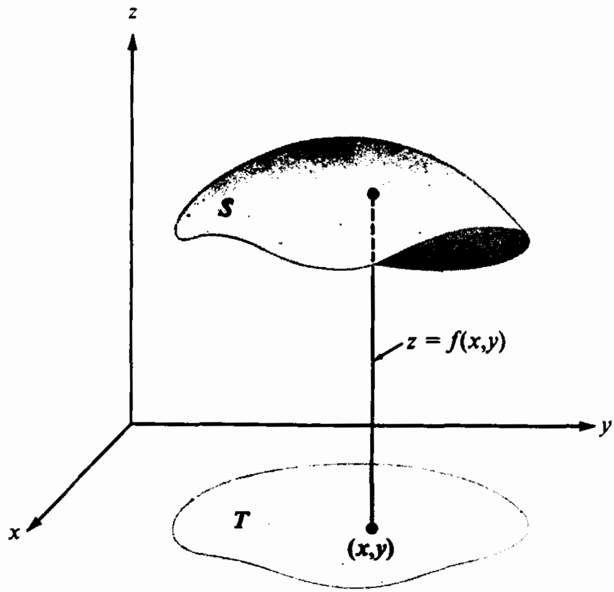
$$a(S) = \iint_T \sqrt{\left(\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}\right)^2 + \left(\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\right)^2}\, du\, dv. \qquad (۸.۱۲)$$

به‌این شکل، انتگرال مساحت سطح شبیه انتگرال طول قوس یک منحنی است. *

اگر S به‌طور صریح با معادله‌ای به شکل $z = f(x, y)$ داده شده باشد، می‌توان x و y را به‌عنوان پارامتر به‌کار برد. حاصل ضرب برداری اساسی با معادلهٔ (۵۰۱۲) داده می‌شود؛ درنتیجه، داریم

$$\left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x} \times \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial y} \right\| = \left\| -\frac{\partial f}{\partial x}\mathbf{i} - \frac{\partial f}{\partial y}\mathbf{j} + \mathbf{k} \right\| = \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}.$$

دراین حالت، انتگرال مساحت سطح خواهد شد :



شکل ۷۰۱۲ سطح S با نمایش صریح $z = f(x, y)$. ناحیهٔ T تصویر S برصفحهٔ xy است.

---

* چون انتگرال (۷۰۱۲) مستلزم r است، مساحت یک سطح به تابع توصیف کنندهٔ سطح بستگی دارد. در بحث انتگرالهای سطح، ثابت می‌کنیم (در بخش ۸۰۱۲) که، تحت چند شرط کلی، مساحت از نمایش پارامتری مستقل است. نتیجه شبیه قضیهٔ ۱۰۱۰ است، که در آن پایایی انتگرالهای خط تحت تغییر پارامتر بحث شده است.

$$a(S)=\iint_T \sqrt{1+\left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\,dx\,dy, \tag{۹.۱۲}$$

که‌درآن، همانطورکه‌شکل ۷.۱۲ نشان داده، ناحیهٔ T تصویر S روی صفحهٔ xy است.

وقتی S در یک صفحهٔ موازی صفحهٔ xy باشد، تابع f ثابت است؛ درنتیجه، $\partial f/\partial x=\partial f/\partial y=0$، و معادلهٔ (۹.۱۲) خواهد شد

$$a(S)=\iint_T dx\,dy.$$

این با فرمول معمولی مساحت نواحی مسطح یکی است.

معادلهٔ (۹.۱۲) را می‌توان بشکلی دیگر که اطلاعات بیشتری از معنی هندسی‌اش بدهدنوشت. درهرنقطه‌از S، فرض‌کنیم γ زاویهٔ‌بین‌بردار قائم $N=\partial \boldsymbol{r}/\partial x\times\partial \boldsymbol{r}/\partial y$ و بردار یکهٔ مختصات $\boldsymbol{k}$ باشد. (ر.ک. شکل ۸.۱۲.) چون مولفهٔ z، N مساوی 1 است، داریم

$$\cos\gamma=\frac{N\cdot \boldsymbol{k}}{\|N\|\,\|\boldsymbol{k}\|}=\frac{1}{\|N\|}=\frac{1}{\left\|\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial x}\times\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial y}\right\|};$$

و درنتیجه، $\|\partial \boldsymbol{r}/\partial x\times\partial \boldsymbol{r}/\partial y\|=1/\cos\gamma$. لذا، معادلهٔ (۹.۱۲) خواهد شد

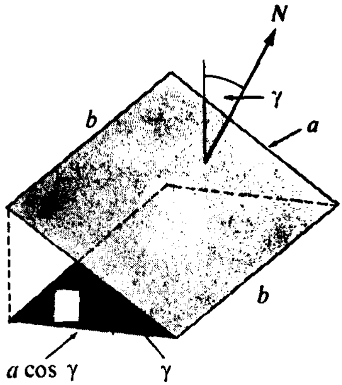
$$a(S)=\iint_T \frac{1}{\cos\gamma}\,dx\,dy. \tag{۱۰.۱۲}$$

حال فرض‌کنیم S در صفحه‌ای که بر صفحهٔ xy عمود نیست واقع باشد. دراین صورت، γ ثابت است و معادلهٔ (۱۰.۱۲) می‌گوید که $\cos\gamma$/(مساحت T) = مساحت S، یا

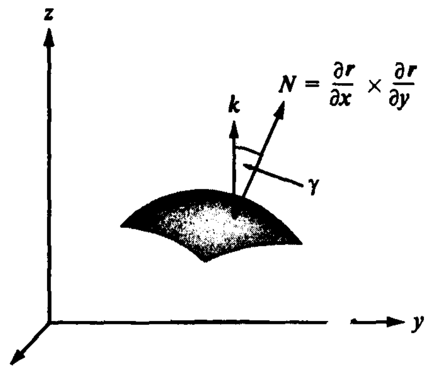
$$a(T)=a(S)\cos\gamma. \tag{۱۱.۱۲}$$

معادلهٔ (۱۱.۱۲) را گاهی ***اصل کسینوسی مساحت*** می‌نامند. این معادله می‌گوید که اگر ناحیهٔ S در یک صفحه روی ناحیهٔ T در صفحهٔ دیگر، که با صفحهٔ اول زاویهٔ γ می‌سازد، تصویر شود، مساحت T، $\cos\gamma$ برابر مساحت S است. این فرمول بوضوح وقتی S مستطیل‌شکل ۹.۱۲ باشد درست‌است، زیرا فواصل در یک جهت به‌وسیلهٔ‌سازهٔ $\cos\gamma$ کوتاه‌می‌شوند، ولی در یک جهت عمود به وسیلهٔ تصویر تغییر نمی‌کنند. معادلهٔ

(۱۱.۱۲) این خاصیت را به هر ناحیهٔ مسطح S مساحت دار تعمیم می‌دهد.



شکل ۹.۱۲ اصل کسینوسی مساحت برای یک مستطیل



شکل ۸.۱۲ طول $\text{۸} = \frac{\partial r}{\partial x} \times \frac{\partial r}{\partial v}$ مساوی $1/\cos\gamma$ است.

حال فرض کنیم S دارای نمایش ضمنی $F(x, y, z) = 0$ باشد. اگر S را بتوان به طوریک به یک بر صفحهٔ xy تصویر کرد، معادلهٔ $F(x, y, z) = 0$ ، z را به‌عنوان‌تابعی از x و y ، مثلاً" به‌صورت $z = f(x, y)$ ، تعریف می‌کند، و مشتقات جزئی $\partial f/\partial x$ و $\partial f/\partial y$ با مشتقات‌جزئی F به‌وسیلهٔ معادلات

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{\partial F/\partial x}{\partial F/\partial z} \quad \text{و} \quad \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{\partial F/\partial y}{\partial F/\partial z}$$

در نقاطی که $\partial F/\partial z \neq 0$ بهم مربوط می‌شوند. با گذاردن این کسرها در (۹.۱۲)، معلوم می‌شود که

$$a(S) = \iint_T \frac{\sqrt{(\partial F/\partial x)^2 + (\partial F/\partial y)^2 + (\partial F/\partial z)^2}}{|\partial F/\partial z|}\, dx\, dy. \qquad (۱۲.۱۲)$$

مثال ۱. مساحت نیمکره. نیمکرهٔ S به‌شعاع a و مرکزمبداء را درنظر می‌گیریم. نمایش ضمنی $x^2 + y^2 + z^2 = a^2, z \geq 0$ نمایش صریح $z = \sqrt{a^2 - x^2 - y^2}$ ، و نمایش پارامتری

$$r(u, v) = a\cos u\cos v\, \boldsymbol{i} + a\sin u\cos v\, \boldsymbol{j} + a\sin v\, \boldsymbol{k} \qquad (۱۳۰۱۲)$$

را داریم .

برای محاسبهٔ مساحت S از نمایش ضمنی ، به معادلهٔ (۱۲۰۱۲) و

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - a^2$$

متوسل‌می‌شویم . مشتقات جزئی F عبارتند از $\partial F/\partial x = 2x$, $\partial F/\partial y = 2y$, $\partial F/\partial z = 2z$. نیمکرهٔ S به‌طور یک بـه یک روی قرص مستدیر $D = \{(x, y) \mid x^2 + y^2 \leq a^2\}$ در صفحهٔ xy تصویرمی‌شود . معادلهٔ (۱۲۰۱۲) را مستقیما" نمی‌توان به‌کار برد ، زیرا مشتق جزئی $\partial F/\partial z$ برکرانهٔ D صفراست . اما ، مشتق $\partial F/\partial z$ همه‌جا درون D ناصفر است ؛ درنتیجه ، می‌توان قرص متحدالمرکز کوچکتر $D(R)$ به شعاع R ، که $R < a$ ، را درنظر گرفت . اگر $S(R)$ بخش نظیرنیمکرهٔ بالایی‌باشد ، معادلهٔ (۱۲۰۱۲) قابل به‌کار بردن است و معلوم می‌شود که

$$\text{مساحت } S(R) = \iint_{D(R)} \frac{\sqrt{(2x)^2 + (2y)^2 + (2z)^2}}{|2z|}\, dx\, dy$$

$$= \iint_{D(R)} \frac{a}{z}\, dx\, dy = a \iint_{D(R)} \frac{1}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2}}\, dx\, dy .$$

انتگرال آخری رامی‌توان به آسانی بااستفاده ازمختصات قطبـی حسـاب کـرد ، کـه نتیجه

$$\text{مساحت } S(R) = a \int_0^{2\pi} \left[\int_0^R \frac{1}{\sqrt{a^2 - r^2}}\, r\, dr \right] d\theta = 2\pi a (a - \sqrt{a^2 - R^2}) .$$

می‌دهد وقتـی $R \to a$ ، این به حد $2\pi a^2$ نزدیک خواهد شد .

در محاسبات فوق می‌توان ، با استفاده از نمایش پارامتری (۱۳۰۱۲) ، از حدگیری اجتناب کرد . محاسبات مثال ۲ در بخش ۲۰۱۲ نشان می‌دهند که

$$\left\| \frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v} \right\| = \| a\cos v\, r(u, v) \| = a^2 |\cos v| .$$

لذا ، با فرض مستطیل $[0, 2\pi] \times [0, \frac{1}{2}\pi]$ به عنوان ناحیهٔ T ، می‌توان معادلهٔ (۷۰۱۲) را به‌کار برد ؛ خواهیم داشت

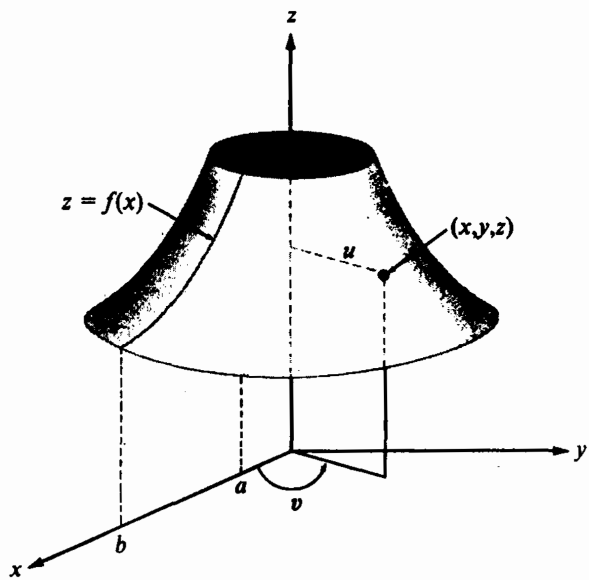
$$a(S) = a^2 \iint_T |\cos v|\, du\, dv = a^2 \int_0^{2\pi} \left[\int_0^{\pi/2} \cos v\, dv \right] du = 2\pi a^2 .$$

مثال ۲ . قضیهٔ دیگری از پاپوس. یکی از قضایای پاپوس می‌گوید که سطح دوار حاصل از دوران یک منحنی مسطح به‌طول L حول محوری در صفحهٔ منحنی دارای مساحت $2\pi Lh$ است ، که در آن h فاصلهٔ مرکزگون منحنی تا محور دوران می‌باشد . با استفاده از معادلهٔ (۷۰۱۲) ، این قضیه را ثابت می‌کنیم .

فرض‌کنیم منحنی C ، که ابتدا در صفحهٔ xz است ، حول محور z چرخیده‌باشد . فرض کنیم معادلهٔ آن در صفحهٔ xz عبارت باشد از $z = f(x)$ ، که در آن $a \le x \le b,\ a \ge 0$. سطح دوار حاصل S را می‌توان با معادلهٔ برداری

$$r(u, v) = u \cos v\, i + u \sin v\, j + f(u) k$$

توصیف کرد ، که در آن $(u, v) \in [a, b] \times [0, 2\pi]$. پارامترهای u و v را می‌توان ، مثل شکل ۱۰۰۱۲ ، شعاع و زاویهٔ مختصات قطبی تعبیر کرد . اگر $a \le u \le b$ ، همهٔ نقاط



شکل ۱۰۰۱۲ مساحت سطح دوار معین شده به‌وسیلهٔ قضیهٔ پاپوس

(x, y, z) با فاصلهٔ معلوم u از محور z دارای مختص z یکسانند ، یعنی $f(u)$ ؛ در نتیجه ، همه بر سطح قرار دارند . حاصل ضرب برداری اساسی این نمایش عبارت است از

$$\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}=\begin{vmatrix} i & j & k \\ \cos v & \sin v & f'(u) \\ -u\sin v & u\cos v & 0\end{vmatrix}=-uf'(u)\cos v\,i-uf'(u)\sin v\,j+uk;$$

و درنتیجه ،

$$\left\|\frac{\partial r}{\partial u}\times\frac{\partial r}{\partial v}\right\|=u\sqrt{1+[f'(u)]^2}.$$

لذا ، معادلهٔ (۷۰۱۲) خواهد شد

$$a(S)=\int_0^{2\pi}\left[\int_a^b u\sqrt{1+[f'(u)]^2}\,du\right]dv=2\pi\int_a^b u\sqrt{1+[f'(u)]^2}\,du.$$

انتگرال‌آخری‌را می‌توان به‌صورت $\int_C x\,ds$ ، یک انتگرال خط نسبت به طول قوس منحنی C ، بیان کرد . این انتگرال، به این صورت ، مساوی است با $\bar{x}L$ ، که $\bar{x}$ x مختص مرکزگون C و L طول C است . (ر.ک. بخش ۸۰۱۰ .) لذا ، مساحت S مساوی $2\pi L\bar{x}$ می‌باشد . این قضیهٔ پاپوس را ثابت خواهد کرد .

۶۰۱۲ تمرین

۱ . فرض کنیم S یک متوازی الاضلاع غیر موازی با صفحات مختصات باشد . همچنین ، S_1 ، S_2 ، و S_3 مساحات تصاویر S روی سه صفحهٔ مختصات باشند . نشان دهید که مساحت S مساوی $\sqrt{S_1^2+S_2^2+S_3^2}$ است .

۲ . مساحت‌ناحیهٔ‌حاصل‌ازقطع صفحهٔ $x+y+z=a$ به وسیلهٔ استوانهٔ $x^2+y^2=a^2$ را حساب کنید .

۳ . مساحت‌آن‌قسمت از کرهٔ $x^2+y^2+z^2=a^2$ که تحت استوانهٔ $x^2+y^2=ay$ ، که در آن $a>0$ ، قرار دارد را حساب کنید .

۴ . مساحت آن قسمت از سطح $z^2=2xy$ که بالای ربع اول صفحهٔ xy قرار داشته و به وسیلهٔ صفحات $x=2$ و $y=1$ جدا می‌شود را حساب کنید .

۵ . سطح پارامتری S با معادلهٔ برداری

$$r(u,v)=u\cos v\,i+u\sin v\,j+u^2k$$

توصیف شده است ، که در آن $0\le u\le 4$ و $0\le v\le 2\pi$.

(آ) نشان‌دهید که S بخشی‌از یک سطح دوار است . شکل بکشید و تعابیر هندسی

پارامترهای u و v سطح را توضیح دهید.

(ب) حاصل‌ضرب برداری اساسی $\partial r/\partial u \times \partial r/\partial v$ را برحسب u و v حساب کنید.

(پ) مساحت S مساوی $\pi(65\sqrt{65}-1)/n$ است، که در آن n عددی صحیح است. مقدار n راحساب کنید.

۶. مساحت آن قسمت از سطح مخروطی $x^2 + y^2 = z^2$ که بالای صفحهٔ xy قرار داشته و به وسیلهٔ کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 2ax$ جدا می‌شود را حساب کنید.

۷. مساحت آن قسمت از سطح مخروطی $x^2 + y^2 = z^2$ که بین دو صفحهٔ $z = 0$ و $x + 2z = 3$ قرار دارند را حساب کنید.

۸. مساحت آن قسمت از سهمی‌گون $x^2 + z^2 = 2ay$ که به‌وسیلهٔ صفحهٔ $y = a$ جدا می‌شود را حساب کنید.

۹. مساحت چنبرهٔ توصیف شده با معادلهٔ برداری

$$r(u, v) = (a + b\cos u)\sin v\, \boldsymbol{i} + (a + b\cos u)\cos v\, \boldsymbol{j} + b\sin u\, \boldsymbol{k},$$

که در آن $0 < b < a$ و $0 \le u \le 2\pi,\ 0 \le v \le 2\pi$، را حساب کنید. [**راهنمایی.** از قضیهٔ پاپوس استفاده کنید.]

۱۰. یک کره در یک استوانهٔ مستدیر قائم محاط شده است. این کره با دو صفحهٔ موازی عمود بر محور استوانه بریده می‌شود. نشان دهید که بخشهایی از کره و استوانه که بین این دو صفحه‌اند مساحت مساوی دارند.

۱۱. فرض کنید T قرص یکه در صفحهٔ uv باشد: $T = \{(u, v) \mid u^2 + v^2 \le 1\}$، و نیز

$$r(u, v) = \frac{2u}{u^2 + v^2 + 1}\boldsymbol{i} + \frac{2v}{u^2 + v^2 + 1}\boldsymbol{j} + \frac{u^2 + v^2 - 1}{u^2 + v^2 + 1}\boldsymbol{k}.$$

(آ) نقش هریک از مجموعه‌های زیر را تحت r معین کنید: دایرهٔ یکهٔ $u^2 + v^2 = 1$؛ بازهٔ $-1 \le u \le 1$؛ آن بخش از خط $u = v$ که در T قرار دارد.

(ب) سطح $S = r(T)$ یک سطح آشناست. نام آن را گفته و آن را رسم کنید.

(پ) نقش صفحهٔ uv تحت r را معین کنید. با رسم در فضای xyz، پارامترهای u و v را تعبیر هندسی کنید.

۱۲.۷ انتگرالهای سطح

انتگرالهای سطح از بسیاری جهات شبیه انتگرالهای خط اند؛ انتگرالگیری به‌جای منحنی

در امتداد سطح صورت می‌گیرد . ما انتگرالهای خط را برحسب نمایش پارامتری منحنی تعریف کردیم . بهمین نحو ، انتگرالهای سطح را برحسب نمایش پارامتری سطح تعریف می‌کنیم . بعد ثابت می‌کنیم که ، تحت شرایطی کلی ، مقدار انتگرال از نمایش مستقل است .

تعریف انتگرال سطح. فرض کنیم $S = \boldsymbol{r}(T)$ یک سطح پارامتری باشد که بوسیلهٔ تابع مشتقپذیر $\boldsymbol{r}$ تعریف شده بر ناحیهٔ T در صفحهٔ uv توصیف شده است ، و f یک میدان اسکالر باشد که بر S تعریف شده و کراندار است . انتگرال سطح f روی S با علامت $\iint_{\boldsymbol{r}(T)} f\,dS$ [یا با $\iint_S f(x, y, z)\,dS$] نموده شده و با معادلهٔ

$$\iint_{\boldsymbol{r}(T)} f\,dS = \iint_T f[\boldsymbol{r}(u, v)] \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right\| du\,dv\,, \tag{۱۴۰۱۲}$$

وقتی انتگرال مضاعف سمت راست وجود دارد ، تعریف می‌شود .

مثالهای زیر چند کاربرد انتگرالهای سطح را توضیح می‌دهند .

مثال ۱ . مساحت سطح. وقتی $f = 1$ ، معادلهٔ (۱۴۰۱۲) می‌شود

$$\iint_{\boldsymbol{r}(T)} dS = \iint_T \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right\| du\,dv\,.$$

انتگرال مضاعف سمت راست قبلا" در بخش ۵۰۱۲ برای تعریف مساحت سطح به‌کار رفت . لذا ، مساحت S مساوی انتگرال سطح $\iint_{\boldsymbol{r}(T)} dS$ است . به این دلیل ، گاهی علامت dS را "عنصر مساحت سطح" می‌نامند ، و می‌گویند که انتگرال سطح $\iint_{\boldsymbol{r}(T)} f\,dS$ انتگرال f نسبت به عنصر مساحت سطح است که روی سطح $\boldsymbol{r}(T)$ گرفته شده است .

مثال ۲ . مرکزجرم . گشتاور ماند . اگرمیدان اسکالر f را چگالی (جرم درواحد مساحت) یک جسم نازک به شکل سطح S بگیریم ، جرم کل m سطح با معادلهٔ

$$m = \iint_S f(x, y, z)\,dS$$

تعریف می‌شود . مرکز جرم آن نقطهٔ $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ است که با معادلات

$$\bar{x}m = \iint_S xf(x, y, z)\, dS, \quad \bar{y}m = \iint_S yf(x, y, z)\, dS, \quad \bar{z}m = \iint_S zf(x, y, z)\, dS$$

تعیین می‌شود. گشتاور ماند I_L ، S حول محور L با معادلهٔ

$$I_L = \iint_S \delta^2(x, y, z) f(x, y, z)\, dS$$

تعریف می‌شود، که در آن $\delta(x, y, z)$ فاصلهٔ عمودی نقطهٔ دلخواه (x, y, z) از S تا خط L می‌باشد.

برای توضیح، مرکز جرم یک سطح نیمکرهٔ یکنواخت به شعاع a را معین می‌کنیم. از نمایش پارامتری

$$r(u, v) = a \cos u \cos v\, i + a \sin u \cos v\, j + a \sin v\, k,$$

که در آن $(u, v) \in [0, 2\pi] \times [0, \frac{1}{2}\pi]$ ، استفاده می‌کنیم. این نمایش خاص قبلاً" درمثال ۲ از بخش ۱۲.۲ مطرح شد، و در آنجا دیدیم که اندازهٔ حاصل ضرب برداری اساسی مساوی $a^2 |\cos v|$ است. دراین مثال، چگالی f ثابت است، مثلاً" $f = c$ ، و جرم m مساوی $2\pi a^2 c$ ، یعنی مساحت S ضربدر c ، می‌باشد. بخاطر تقارن، مختصات $\bar{x}$ و $\bar{y}$ مرکز جرم 0 است. مختص $\bar{z}$ عبارت است از

$$\bar{z}m = c \iint_S z\, dS = c \iint_T a \sin v \cdot a^2 |\cos v|\, du\, dv$$
$$= 2\pi a^3 c \int_0^{\pi/2} \sin v \cos v\, dv = \pi a^3 c = \frac{a}{2} m\,;$$

در نتیجه، $\bar{z} = a/2$.

مثال ۳. جریان مایع گذرنده از یک سطح. یک مایع را به‌عنوان گردآیه‌ای از نقاط به نام *ذرات* درنظر می‌گیریم. به هر ذرهٔ (x, y, z) بردار $V(x, y, z)$ را مربوط می‌کنیم که نمایش سرعت آن ذرهٔ خاص است. این میدان سرعت جریان است. میدان سرعت ممکن است با زمان تغییر کند یا نکند. ما فقط جریانهای *حالت ـ پایدار* را درنظر می‌گیریم؛ یعنی، جریانهایی که در آنها سرعت $V(x, y, z)$ فقط به موضع ذره، نه به زمان، بستگی دارد.

چگالی (جرم در واحد حجم) مایع در نقطهٔ (x, y, z) را با $\rho(x, y, z)$ نشان می‌دهیم. اگر مایع غیر قابل تراکم باشد، چگالی ρ در طول مایع ثابت است. برای یک

مایع قابل تراکم ، نظیر گاز ، چگالی ممکن است از یک نقطه به نقطهٔ دیگر تغییر کند . در هر حالت ، چگالی یک میدان اسکالر مربوط به جریان است . حاصل ضرب چگالی و سرعت را با $\boldsymbol{F}$ نشان می‌دهیم ؛ یعنی ،

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = \rho(x, y, z)\boldsymbol{V}(x, y, z).$$

این یک میدان برداری است به نام **چگالی شار** جریان . بردار $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ همان جهت سرعت را دارد ، و طولش دارای ابعاد زیر است :

$$\frac{\text{جرم}}{\text{واحدحجم}} \cdot \frac{\text{فاصله}}{\text{واحد زمان}} = \frac{\text{جرم}}{(\text{واحدمساحت})\ (\text{واحدزمان})} .$$

به عبارت دیگر ، بردار چگالی شار $\boldsymbol{F}(x, y, z)$ به ما می‌گوید که چه مقدار جرم مایع در واحد مساحت و در واحد زمان در جهت $\boldsymbol{V}(x, y, z)$ در نقطهٔ (x, y, z) در جریان است .

فرض کنیم $S = \boldsymbol{r}(T)$ یک سطح پارامتری ساده باشد . در هر نقطهٔ منتظم S ، $\boldsymbol{n}$ را قائم یکه همجهت با حاصل ضرب برداری اساسی می‌گیریم . یعنی ،

$$\boldsymbol{n} = \frac{\dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \dfrac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right\|}. \qquad (۱۵۰۱۲)$$

حاصل ضرب نقطه‌ای $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}$ نمایش مولفهٔ بردار چگالی شار در جهت $\boldsymbol{n}$ است . جرم مایع گذرنده از سطح S در واحد زمان و در جهت $\boldsymbol{n}$ مساوی انتگرال سطح

$$\iint_{\boldsymbol{r}(T)} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_{T} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right\| du\, dv$$

می‌باشد .

۸۰۱۲ تغییر نمایش پارامتری

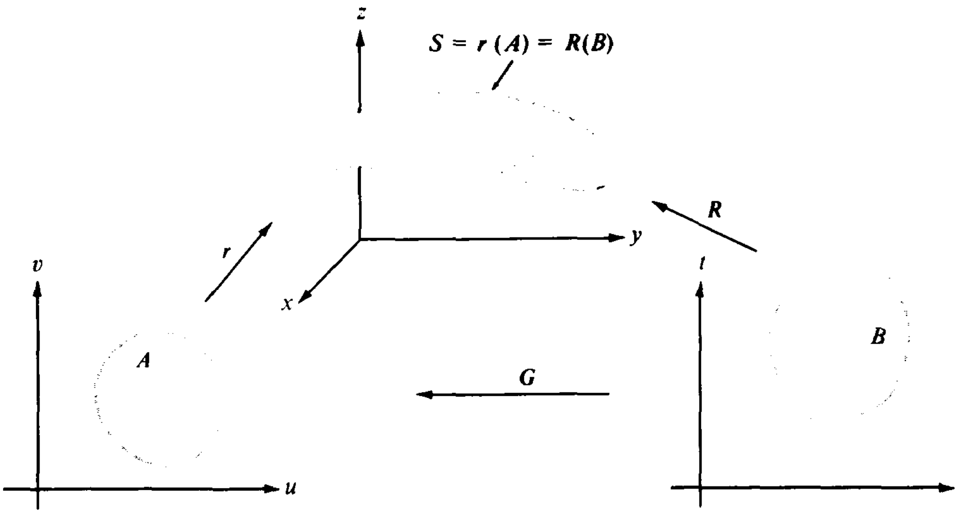
حال در استقلال انتگرالهای سطح تحت تغییر نمایش پارامتری بحث می‌کنیم . فرض کنیم تابع $\boldsymbol{r}$ ناحیهٔ A درصفحهٔ uv را روی سطح پارامتری $\boldsymbol{r}(A)$ بنگارد . همچنین ، A نقش ناحیهٔ B درصفحهٔ st تحت نگاشت یک به یک به‌طور پیوسته مشتقپذیر $\boldsymbol{G}$ باشد که به صورت زیر داده شده است :

$$\text{اگر}\quad (s, t) \in B \quad , \quad \boldsymbol{G}(s, t) = U(s, t)\boldsymbol{i} + V(s, t)\boldsymbol{j}\,. \qquad (۱۶۰۱۲)$$

تابع $\boldsymbol{R}$ که بر B با معادلهٔ

$$R(s, t) = r[G(s, t)] \qquad (۱۷۰۱۲)$$

تعریف شده است را درنظر می‌گیریم.(ر.ک. شکل ۱۱۰۱۲ .)



شکل ۱۱۰۱۲ دو نمایش پارامتری از یک سطح

دو تابع r و R که به این ترتیب با هم مربوطند **به‌طور هموار معادل** نامیده می‌شوند. توابع به‌طور هموار معادل یک سطح را توصیف می‌کنند. یعنی، $r(A)$ و $R(B)$ به عنوان مجموعه‌هایی از نقاط یکی‌اند. (این فوراً از طبیعت یک به یک G نتیجه می‌شود.) قضیهٔ زیر رابطهٔ بین حاصل‌ضربهای برداری اساسی آنها را توصیف می‌کند.

قضیهٔ ۱۰۱۲ . فرض‌کنیم r و R توابعی به‌طور هموار معادل باشند که با معادلهٔ (۱۷۰۱۲) بهم مربوط شده‌اند، که در آن $G = Ui + Vj$ یک نگاشت یک به یک به‌طور پیوسته مشتقپذیر از ناحیهٔ B در صفحهٔ st روی ناحیهٔ A در صفحهٔ uv است که با معادلهٔ (۱۶۰۱۲) داده می‌شود. دراین صورت، داریم

$$\frac{\partial R}{\partial s} \times \frac{\partial R}{\partial t} = \left(\frac{\partial r}{\partial u} \times \frac{\partial r}{\partial v}\right)\frac{\partial(U, V)}{\partial(s, t)}, \qquad (۱۸۰۱۲)$$

که در آن مشتقات جزئی $\partial r/\partial u$ و $\partial r/\partial v$ در نقطهٔ $(U(s, t), V(s, t))$ حساب می‌شوند. به عبارت دیگر، حاصل ضرب برداری اساسی R مساوی حاصل ضرب برداری اساسی r ضربدر دترمینان ژاکوبی نگاشت G است.

برهان. مشتقات $\partial \boldsymbol{R}/\partial s$ و $\partial \boldsymbol{R}/\partial t$ را می‌توان با مشتقگیری از معادلهٔ (۱۷۰۱۲) حساب کرد. اگر قاعدهٔ زنجیره‌ای (قضیهٔ ۸۰۸) را بر هر مولفهٔ $\boldsymbol{R}$ اعمال کرده و جملات را تجدید آرایش دهیم، درمی‌یابیم که

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial s} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial s} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial s} \quad \text{و} \quad \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u}\frac{\partial U}{\partial t} + \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\frac{\partial V}{\partial t}\text{،}$$

که در آنها مشتقات $\partial \boldsymbol{r}/\partial u$ و $\partial \boldsymbol{r}/\partial v$ در $(U(s,t), V(s,t))$ حساب می‌شوند. حال این دو معادله را ضرب خارجی کرده و، با توجه به ترتیب سازه‌ها، به‌دست می‌آوریم

$$\frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t} = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right)\left(\frac{\partial U}{\partial s}\frac{\partial V}{\partial t} - \frac{\partial U}{\partial t}\frac{\partial V}{\partial s}\right) = \left(\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right)\frac{\partial(U,V)}{\partial(s,t)}.$$

این برهان را تمام خواهد کرد.

حال پایایی انتگرالهای سطح تحت نمایشهای پارامتری به‌طور هموار معادل نتیجهٔ آسان قضیهٔ ۱۰۱۲ است.

قضیهٔ ۲۰۱۲. *فرض‌کنیم $\boldsymbol{r}$ و $\boldsymbol{R}$ توابعی به‌طور هموار معادل، به‌صورت توصیف شده در قضیهٔ ۱۰۱۲، باشند. اگر انتگرال سطح $\iint_{\boldsymbol{r}(A)} f\,dS$ وجود داشته‌باشد، انتگرال‌سطح $\iint_{\boldsymbol{R}(B)} f\,dS$ نیز وجود دارد و داریم*

$$\iint_{\boldsymbol{r}(A)} f\,dS = \iint_{\boldsymbol{R}(B)} f\,dS.$$

برهان. طبق تعریف انتگرال سطح، داریم

$$\iint_{\boldsymbol{r}(A)} f\,dS = \iint_{A} f[\boldsymbol{r}(u,v)]\left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right\| du\,dv.$$

حال، با استفاده از نگاشت $\boldsymbol{G}$ قضیهٔ ۱۰۱۲، این را به یک انتگرال مضاعف روی ناحیهٔ B در صفحهٔ st تبدیل می‌کنیم. فرمول تبدیل انتگرالهای مضاعف می‌گوید که

$$\iint_{A} f[\boldsymbol{r}(u,v)]\left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right\| du\,dv = \iint_{B} f\{\boldsymbol{r}[\boldsymbol{G}(s,t)]\}\left\|\frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\right\|\left|\frac{\partial(U,V)}{\partial(s,t)}\right| ds\,dt,$$

که در آن مشتقات $\partial \boldsymbol{r}/\partial u$ و $\partial \boldsymbol{r}/\partial v$ سمت راست در $(U(s,t), V(s,t))$ حساب می‌شوند. بخاطر معادلهٔ (۱۸۰۱۲)، انتگرال روی B مساوی است با

$$\iint_B f[\boldsymbol{R}(s,t)] \left\| \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial s} \times \frac{\partial \boldsymbol{R}}{\partial t} \right\| ds\, dt .$$

این، به‌نوبهٔ خود، تعریف انتگرال سطح $\iint_{R(B)} f\, dS$ است. در اینجا برهان تمام خواهد بود.

۹.۱۲ نمادهای دیگر برای انتگرالهای سطح

هرگاه $S = \boldsymbol{r}(T)$ یک‌سطح پارامتری‌باشد، حاصل‌ضرب‌برداری‌اساسی $\boldsymbol{N} = \partial \boldsymbol{r}/\partial u \times \partial \boldsymbol{r}/\partial v$ درهرنقطهٔ‌منتظم S قائم به‌سطح‌است. درهرچنین‌نقطه‌دوقائم‌یکه‌وجود دارند، قائم‌یکهٔ $\boldsymbol{n}_1$ که همجهت $\boldsymbol{N}$ است، و قائم یکهٔ $\boldsymbol{n}_2$ که جهت مخالف دارد. لذا،

$$\boldsymbol{n}_1 = \frac{\boldsymbol{N}}{\|\boldsymbol{N}\|} \quad \text{و} \quad \boldsymbol{n}_2 = -\boldsymbol{n}_1 \,.$$

فرض‌کنیم $\boldsymbol{n}$ یکی ازدو قائم $\boldsymbol{n}_1$ یا $\boldsymbol{n}_2$ باشد. همچنین، $\boldsymbol{F}$ یک میدان برداری تعریف شده بر S بوده، و انتگرال سطح $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ موجود باشد. در این صورت، می‌توان نوشت

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \iint_T \boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}(u,v)] \cdot \boldsymbol{n}(u,v) \left\| \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} \right\| du\, dv \tag{۱۹.۱۲}$$

$$= \pm \iint_T \boldsymbol{F}[\boldsymbol{r}(u,v)] \cdot \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v}\, du\, dv ,$$

که در آن علامت + درصورت $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_1$، و علامت − درصورت $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_2$ به‌کار می‌رود.

حال $\boldsymbol{F}$ و $\boldsymbol{r}$ را برحسب مولفه‌های آنها بیان می‌کنیم؛ مثلاً،

$$\boldsymbol{F}(x,y,z) = P(x,y,z)\boldsymbol{i} + Q(x,y,z)\boldsymbol{j} + R(x,y,z)\boldsymbol{k}$$

و

$$\boldsymbol{r}(u,v) = X(u,v)\boldsymbol{i} + Y(u,v)\boldsymbol{j} + Z(u,v)\boldsymbol{k} .$$

دراین‌صورت، حاصل ضرب برداری اساسی $\boldsymbol{r}$ عبارت است از

$$\boldsymbol{N} = \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \boldsymbol{r}}{\partial v} = \frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)} \boldsymbol{i} + \frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)} \boldsymbol{j} + \frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)} \boldsymbol{k} .$$

اگر $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_1$، معادلهٔ (۱۹.۱۲) خواهد شد

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS = \iint_T P[\boldsymbol{r}(u,v)]\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}\,du\,dv$$

$$+\iint_T Q[\boldsymbol{r}(u,v)]\frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}\,du\,dv+\iint_T R[\boldsymbol{r}(u,v)]\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}\,du\,dv\,; \qquad (۲۰\cdot۱۲)$$

اگر $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_2$ ، هر انتگرال مضاعف سمت راست را باید با قرینه‌اش عوض کرد . اغلب مجموع انتگرالهای مضاعف سمت راست را به‌طور مختصرتر زیر می‌نویسند :

$$\iint_S P(x,y,z)\,dy\wedge dz+\iint_S Q(x,y,z)\,dz\wedge dx+\iint_S R(x,y,z)\,dx\wedge dy, \qquad (۲۱\cdot۱۲)$$

یا ، به‌طور مختصرتر زیر :

$$\iint_S P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy. \qquad (۲۲\cdot۱۲)$$

انتگرالهایی کـه در (۲۱۰۱۲) و (۲۲۰۱۲) آمده‌اند را نیز انتگرالهای سطح می‌نامند . لذا ، مثلا" ، انتگرال سطح $\iint_S P\,dy\wedge dz$ با معادلهٔ زیر تعریف می‌شود :

$$\iint_S P\,dy\wedge dz=\iint_T P[\boldsymbol{r}(u,v)]\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}\,du\,dv. \qquad (۲۳\cdot۱۲)$$

این نماد را فرمول تغییر متغیر در یک انتگرال مضاعف پیشنهاد می‌کند .

با وجود تشابه نمادها ، انتگرال سمت چپ (۲۳۰۱۲) یک انتگرال مضاعف نیست . قبل‌از همه ، P یک تابع سه متغیره است . همچنین ، باید ترتیب آمدن علامات dy و dz در انتگرال سطح را درنظر گرفت ، زیرا

$$\frac{\partial(Y,Z)}{\partial(u,v)}=-\frac{\partial(Z,Y)}{\partial(u,v)}\,;$$

و درنتیجه ،

$$\iint_S P\,dy\wedge dz=-\iint_S P\,dz\wedge dy.$$

با این نماد ، فرمول (۲۰۰۱۲) در صورت $\boldsymbol{n}=\boldsymbol{n}_1$ خواهد شد

$$\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS=\iint_S P\,dy\wedge dz+Q\,dz\wedge dx+R\,dx\wedge dy\,. \qquad (۲۴\cdot۱۲)$$

اگر $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_2$ ، انتگرال سمت راست باید بـا قرینه‌اش عوض شود . این فرمول با فرمول زیر برای انتگرالهای خط شباهت دارد :

$$\int_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha} = \int_C P\,dx + Q\,dy + R\,dz\,.$$

هرگاه قائم یکهٔ $\boldsymbol{n}$ بر حسب کسینوسهای هادی خود بیان شده باشد ، مثلاً

$$\boldsymbol{n} = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k}\,,$$

آنگاه $\boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} = P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma$ ، و می‌توان نوشت

$$\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,dS = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS\,.$$

این معادله وقتی $\boldsymbol{n}$ مساوی $\boldsymbol{n}_1$ یا $\boldsymbol{n}_2$ باشد برقرار است . کسینوسهای هادی به انتخاب قائم بستگی دارند . اگر $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_1$ ، می‌توان با استفاده از (۲۴۰۱۲) نوشت

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = \iint_S P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy\,. \tag{۲۵۰۱۲}$$

اگر $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{n}_2$ ، در عوض داریم

$$\iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\,dS = -\iint_S P\,dy \wedge dz + Q\,dz \wedge dx + R\,dx \wedge dy\,. \tag{۲۶۰۱۲}$$

۱۰۰۱۲ تمرین

۱ . فرض کنید S نیمکرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 1,\ z \geq 0$ بوده ، و $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}$. همچنین ، $\boldsymbol{n}$ قائم یکهٔ رو به خارج S باشد . مقدار انتگرال سطح $\iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\,dS$ را با استفاده از

(آ) نمایش برداری $\boldsymbol{r}(u, v) = \sin u \cos v\,\boldsymbol{i} + \sin u \sin v\,\boldsymbol{j} + \cos u\,\boldsymbol{k}$ ؛

(ب) نمایش صریح $z = \sqrt{1 - x^2 - y^2}$

حساب کنید .

۲ . نشان دهید که گشتاور ماند یک گلولهٔ کروی همگن حول یک قطر مساوی $\frac{2}{3}ma^2$ است ، که در آن m جرم گلوله و a شعاع آن است .

۳ . مرکز جرم آن بخش از سطح نیمکروی همگن $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ که بالای ربع اول در صفحهٔ xy است را بیابید .

۴ . فرض‌کنید S سطح مسطحی باشد که کرانه‌اش مثلثی است به راسهای $(1,0,0)$ ، $(0,1,0)$ ، و $(0,0,1)$ ، و نیز $F(x,y,z) = xi + yj + zk$. همچنین، n قائم یکه به S با مولفهٔ z نامنفی باشد. انتگرال سطح $\iint_S F \cdot n\, dS$ را با استفاده‌از

(آ) نمایش برداری $r(u,v) = (u+v)i + (u-v)j + (1-2u)k$ ؛

(ب) یک نمایش صریح به شکل $z = f(x,y)$

حساب کنید.

۵ . فرض کنید S یک سطح پارامتری باشد که با فرمول صریح $z = f(x,y)$ توصیف شده است، که‌درآن (x,y) روی ناحیهٔ مسطح T ، که تصویر S درصفحهٔ xy است، تغییر می‌کند. فرض کنید $F = Pi + Qj + Rk$ ، و n قائم یکه‌به S بامولفهٔ z نامنفی‌باشد. با استفاده از نمایش پارامتری $r(x,y) = xi + yj + f(x,y)k$ ، نشان دهید

$$\iint_S F \cdot n\, dS = \iint_T \left(-P\frac{\partial f}{\partial x} - Q\frac{\partial f}{\partial y} + R \right) dx\, dy,$$

که درآن هریک از P ، Q ، و R در $(x,y,f(x,y))$ حساب می‌شوند.

۶ . فرض‌کنید S همان سطح تمرین ۵ بوده، و φ یک میدان اسکالر باشد. نشان دهید که

(آ) $$\iint_S \varphi(x,y,z)\, dS = \iint_T \varphi[x,y,f(x,y)] \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy \;;$$

(ب) $$\iint_S \varphi(x,y,z)\, dy \wedge dz = -\iint_T \varphi[x,y,f(x,y)] \frac{\partial f}{\partial x}\, dx\, dy \;;$$

(پ) $$\iint_S \varphi(x,y,z)\, dz \wedge dx = -\iint_T \varphi[x,y,f(x,y)] \frac{\partial f}{\partial y}\, dx\, dy \,.$$

۷ . هرگاه S سطح کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ باشد، مقدار انتگرال سطح

$$\iint_S xz\, dy \wedge dz + yz\, dz \wedge dx + x^2\, dx \wedge dy$$

را حساب کنید. نمایشی‌اختیار کنید که، به‌ازای‌آن، حاصل ضرب برداری‌اساسی در جهت قائم رو به خارج باشد.

۸ . استوانهٔ $x^2 + y^2 = 2x$ از پارچهٔ بالایی مخروط $x^2 + y^2 = z^2$ بخشی از یک سطح

مانند S را جدا می‌کند.
مقدار انتگرال سطح

$$\iint_S (x^4 - y^4 + y^2z^2 - z^2x^2 + 1)\,dS$$

را حساب کنید.

۹. یک گلولهٔ کروی همگن به شعاع a به وسیلهٔ یک پارچه از یک مخروط مستدیر قائم که راسش در مرکز کره است قطع می‌شود. اگر زاویهٔ راس مخروط α باشد، که $0 < \alpha < \pi$، مرکزجرم آن بخش از گلولهٔ کروی که داخل مخروط است را (برحسب a و α) معین کنید.

۱۰. یک کاغذ همگن مستطیلی شکل به قاعدهٔ $2\pi a$ و ارتفاع h را لوله کرده و سطح استوانه‌ای مستدیر S به شعاع a راساخته‌ایم. گشتاور ماند S را حول محوری ماربر یک قطر قاعدهٔ مستدیر حساب کنید.

۱۱. به تمرین ۱۰ باز می‌گردیم. گشتاور ماند S حول محوری در صفحهٔ قاعده و مماس بر لبهٔ مستدیر قاعده را حساب کنید.

۱۲. یک جریان مایع دارای بردار چگالی شار $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} - (2x + y)\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ است. فرض کنید S نیمکرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 0$ بوده، و $\boldsymbol{n}$ قائم یکه‌ای باشد که اشاره به خارج کره دارد. جرم مایع گذرنده از S در واحد زمان و در جهت $\boldsymbol{n}$ را حساب کنید.

۱۳. تمرین ۱۲ را درصورتی حل کنید که S شامل قاعدهٔ مسطح نیمکره نیز باشد. بر قاعدهٔ پایینی، قائم یکه عبارت است از $-\boldsymbol{k}$.

۱۴. فرض کنید S بخشی از صفحهٔ $x + y + z = t$ باشد که به وسیلهٔ کرهٔ یکهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ جدا شده است. همچنین، اگر (x, y, z) داخل این کره باشد، $\varphi(x, y, z) = 1 - x^2 - y^2 - z^2$، و درغیر این صورت، $\varphi(x, y, z)$ مساوی 0 باشد. نشان دهید که

$$\iint_S \varphi(x, y, z)\,dS = \begin{cases} \dfrac{\pi}{18}(3 - t^2)^2 & \text{اگر } |t| \leq \sqrt{3}\text{ ،} \\ 0 & \text{اگر } |t| > \sqrt{3}\text{ ،} \end{cases}$$

[**راهنمایی.** مختصات جدید (x_1, y_1, z_1) را وارد کنید که محور z_1 قائم به صفحهٔ

$t = x + y + z$ باشد. از مختصات قطبی در صفحهٔ x_1y_1 به عنوان پارامتر برای S استفاده کنید.]

۱۱۰۱۲ قضیهٔ استوکس

بقیهٔ این فصل عمدتاً به دو تعمیم از دومین قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال مستلزم انتگرالهای سطح اختصاص دارد. اینها بترتیب به قضیهٔ استوکس[1] و قضیهٔ دیورژانس شهرت دارند. در این بخش، قضیهٔ استوکس مطرح می‌شود. قضیهٔ دیورژانس در بخش ۱۹۰۱۲ بحث خواهد شد.

قضیهٔ استوکس تعمیم مستقیم قضیهٔ گرین است، که می‌گوید

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_C P\, dx + Q\, dy ,$$

که در آن S یک ناحیهٔ مسطح محدود به منحنی بستهٔ ساده‌ای مانند C است که درجهت مثبت (خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت) پیموده می‌شود. قضیهٔ استوکس یک انتگرال سطح را به یک انتگرال خط ربط می‌دهد، و می‌توان آن را به‌صورت زیر بیان کرد.

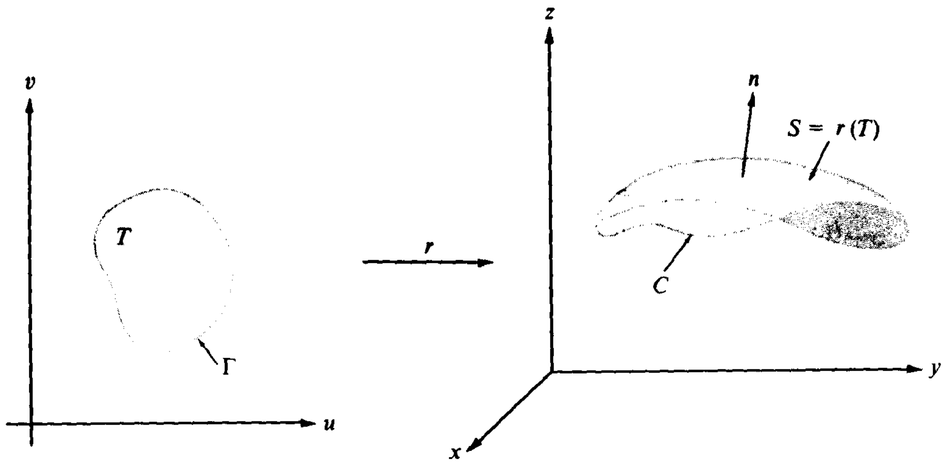
قضیهٔ ۳۰۱۲ . قضیهٔ استوکس. *فرض کنیم S یک سطح پارامتری سادهٔ هموار، مثلاً $S = r(T)$ ، باشد، که در آن T یک ناحیه در صفحهٔ uv است که به منحنی ژردان قطعه قطعه هموارى چون Γ محدود شده است. (ر.ک. شکل ۱۲۰۱۲.) همچنین، r یک نگاشت یک به یک باشد که مولفه‌هایش بر مجموعهٔ بازی شامل $T \cup \Gamma$ مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم پیوسته دارند. فرض کنیم C نقش Γ تحت r بوده، و P ، Q ، و R میدانهای اسکالر به‌طور پیوسته مشتقپذیری بر S باشند. در این صورت، خواهیم داشت*

$$\iint_S \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right) dy \wedge dz + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right) dz \wedge dx + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx \wedge dy$$

$$= \int_C P\, dx + Q\, dy + R\, dz . \qquad (۲۷۰۱۲)$$

---

[1] به افتخار جی. جی. استوکس (1903 – 1819) G. G. Stokes ، ریاضیدان ایرلندی، که در دینامیک مایعات و نورکارهای اساسی بسیار کرده است.



شکل ۱۲۰۱۲ یک سطح که قضیهٔ استوکس برآن قابل اعمال است.

منحنی Γ در جهت مثبت *(خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت)*، و منحنی C درجهت *القا شده از* Γ به‌وسیلهٔ نگاشت r پیموده می‌شود.

برهان. برای اثبات قضیه کافی است سه فرمول زیر را ثابت کنیم:

$$\int_C P\,dx = \iint_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y}\,dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z}\,dz \wedge dx\right), \qquad (۲۸۰۱۲)$$

$$\int_C Q\,dy = \iint_S \left(-\frac{\partial Q}{\partial z}\,dy \wedge dz + \frac{\partial Q}{\partial x}\,dx \wedge dy\right),$$

$$\int_C R\,dz = \iint_S \left(-\frac{\partial R}{\partial x}\,dz \wedge dx + \frac{\partial R}{\partial y}\,dy \wedge dz\right).$$

جمع این سه معادله فرمول (۲۷۰۱۲) در قضیهٔ استوکس را به‌دست می‌دهد. چون سه معادله مشابهند، فقط معادلهٔ (۲۸۰۱۲) را ثابت می‌کنیم.

برهان به این شکل است که انتگرال سطح را به‌صورت یک انتگرال مضاعف روی T بیان می‌کنیم. بعد، با استفاده از قضیهٔ گرین، انتگرال مضاعف روی T را به‌صورت یک انتگرال خط روی Γ بیان می‌داریم. بالاخره، نشان می‌دهیم که این انتگرال خط مساوی

است با $\int_C P\,dx$.

می‌نویسیم

$$r(u, v) = X(u, v)i + Y(u, v)j + Z(u, v)k$$

و انتگرال سطح روی S را به شکل زیر بیان می‌کنیم:

$$\iint_S \left(-\frac{\partial P}{\partial y}dx \wedge dy + \frac{\partial P}{\partial z}dz \wedge dx\right) = \iint_T \left\{-\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)}\right\} du\,dv.$$

حال فرض کنیم p تابع مرکب زیر باشد:

$$p(u, v) = P[X(u, v),\ Y(u, v), Z(u, v)].$$

انتگرالده آخری را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$(۲۹\cdot۱۲) \qquad -\frac{\partial P}{\partial y}\frac{\partial(X, Y)}{\partial(u, v)} + \frac{\partial P}{\partial z}\frac{\partial(Z, X)}{\partial(u, v)} = \frac{\partial}{\partial u}\left(p\frac{\partial X}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(p\frac{\partial X}{\partial u}\right).$$

اثبات (۲۹٫۱۲) در تمرین ۱۳ از بخش ۱۳٫۱۲ به اختصار صورت گرفته است. با اعمال قضیهٔ گرین بر انتگرال مضاعف روی T ، به‌دست می‌آید

$$\iint_T \left\{\frac{\partial}{\partial u}\left(p\frac{\partial X}{\partial v}\right) - \frac{\partial}{\partial v}\left(p\frac{\partial X}{\partial u}\right)\right\} du\,dv = \int_\Gamma p\frac{\partial X}{\partial u}du + p\frac{\partial X}{\partial v}dv,$$

که در آن Γ در جهت مثبت پیموده می‌شود. Γ را به‌وسیلهٔ تابع γ که بر بازهٔ $[a, b]$ تعریف شده است پارامتریزه کرده، و فرض می‌کنیم

$$(۳۰\cdot۱۲) \qquad \alpha(t) = r[\gamma(t)]$$

پارامتری سازی نظیر C باشد. با بیان هر انتگرال خط برحسب نمایش پارامتری‌اش، درمی‌یابیم که

$$\int_\Gamma p\frac{\partial X}{\partial u}du + p\frac{\partial X}{\partial v}dv = \int_C P\,dx,$$

که برهان (۲۸٫۱۲) را تمام خواهد کرد.

۱۲٫۱۲ کرل و دیورژانس یک میدان برداری

انتگرال سطح در قضیهٔ استوکس را می‌توان ساده‌تر و برحسب **کرل** یک میدان برداری بیان کرد. فرض کنیم F یک میدان برداری مشتقپذیر به‌صورت زیر باشد:

$$F(x, y, z) = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}.$$

کرل F میدان برداری دیگری است که با معادلهٔ

$$\text{curl } F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k} \qquad (۳۱\cdot۱۲)$$

تعریف می‌شود. مولفه‌های $\text{curl } F$ توابعی هستند کـه در انتگـرال سطح فرمول استوکـس (۲۷۰۱۲) ظاهر شده‌اند. لذا، این انتگرال سطح را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\iint_S (\text{curl } F) \cdot \boldsymbol{n}\, dS,$$

که در آن $\boldsymbol{n}$ بردار یکهٔ قـائم همجهت با حاصل ضرب برداری اساسی سطح است؛ یعنی،

$$\boldsymbol{n} = \frac{\dfrac{\partial r}{\partial u} \times \dfrac{\partial r}{\partial v}}{\left\| \dfrac{\partial r}{\partial u} \times \dfrac{\partial r}{\partial v} \right\|}.$$

انتگرال خط در فرمول استوکس (۲۷۰۱۲) را می‌توان به‌صورت $\int_C F \cdot d\alpha$ نوشت، که در آن α نمـایش C است که با (۳۰۰۱۲) داده می‌شود. لذا، قضیهٔ استوکس شکل ساده‌تر

$$\iint_S (\text{curl } F) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_C F \cdot d\alpha$$

را خواهد گرفت.

برای حالت خاصی که درآن S ناحیه‌ای در صفحهٔ xy بوده و $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{k}$، این فرمول به قضیهٔ گرین تحویل می‌شود:

$$\iint_S \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\, dy = \int_C P\, dx + Q\, dy.$$

معادلهٔ (۳۱۰۱۲) معرف کرل را می‌توان، با نوشتنش به‌صورت بسط یک دترمینان 3×3، به‌آسانی به‌یاد آورد:

$$\text{curl } F = \begin{vmatrix} \boldsymbol{i} & \boldsymbol{j} & \boldsymbol{k} \\ \dfrac{\partial}{\partial x} & \dfrac{\partial}{\partial y} & \dfrac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)\boldsymbol{i} + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)\boldsymbol{j} + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)\boldsymbol{k}.$$

این دترمینان را باید نسبت به مینورهای سطر اول بسط داد ، ولی هر "حاصل ضرب"، نظیر $\partial/\partial y$ ضربدر R ، باید به عنوان یک مشتق جزئی ،یعنی $\partial R/\partial y$ ، تعبیر شود . همچنین ، این فرمول را می‌توان به صورت یک حاصل ضرب خارجی نوشت :

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{F} = \nabla \times \boldsymbol{F},$$

که در آن با علامت ∇ به عنوان بردار رفتار می‌شود :

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

اگر "حاصل ضرب نقطه‌ای" $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ را به‌طور صرفا" صوری تشکیل دهیم ، و باز حاصل ضربهایی نظیر $\partial/\partial x$ ضربدر P را $\partial P/\partial x$ تعبیر کنیم ، درمی‌یابیم که

$$\nabla \cdot \boldsymbol{F} = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}. \qquad (۳۲ \cdot ۱۲)$$

معادلهٔ (۳۲۰۱۲) یک میدان اسکالر به نام دیورژانس $\boldsymbol{F}$ تعریف می‌کند ، که به صورت $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ نیز نوشته می‌شود . ما قبلا" از علامت $\nabla\varphi$ برای نمایش گرادیان میدان اسکالر φ استفاده کرده‌ایم ، که با رابطه زیر داده می‌شود :

$$\nabla\varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z}\boldsymbol{k}.$$

این فرمول را می‌توان به صورت ضرب صوری بردار علامتی ∇ در میدان اسکالر φ تعبیر کرد . لذا ، گرادیان ، دیورژانس، و کرل را می‌توان با سه حاصل ضرب $\nabla\varphi$ ، $\nabla \cdot \boldsymbol{F}$ ، و $\nabla \times \boldsymbol{F}$ به‌طور علامتی نمایش داد .

برخی از قضایایی که پیشتر ثابت شدند را می‌توان برحسب کرل بیان کرد . مثلا" ، درقضیهٔ ۹۰۱۰ ثابت شد که میدان برداری $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_n)$ ، که بر مجموعهٔ محدب باز S درفضای n به‌طور پیوسته مشتقپذیر است ، یک گرادیان بر S است اگر و فقط اگر مشتقات جزئی مولفه‌های $\boldsymbol{f}$ در روابط

$$D_k f_j(\boldsymbol{x}) = D_j f_k(\boldsymbol{x}) \qquad (j, k = 1, 2, \ldots, n) \qquad (۳۳ \cdot ۱۲)$$

صدق کنند . در حالت 3 بعدی، قضیهٔ ۹۰۱۰ را می‌توان به صورت زیر بیان کرد .

قضیهٔ ۴۰۱۲ . فرض کنیم $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ یک میدان برداری به‌طور پیوسته مشتقپذیر بر مجموعهٔ محدب باز S در فضای 3 باشد . دراین صورت ، $\boldsymbol{F}$ یک گرادیان

بر S است اگر و فقط اگر

$$\text{بر } S \text{ ، } \operatorname{curl} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{O} \text{ .} \qquad (۳۴.۱۲)$$

برهان. در حالت 3 بعدی، روابط (۳۳.۱۲) معادل آنند که $\operatorname{curl} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{O}$.

۱۳.۱۲ تمرین

درهریک از تمرینات ۱ تا ۴ ، با استفاده از قضیهٔ استوکس، انتگرال سطح $\iint_S (\operatorname{curl} \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$ را به یک انتگرال خط تبدیل کرده، سپس انتگرال خط را حساب کنید .

۱. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = y^2\boldsymbol{i} + xy\boldsymbol{j} + xz\boldsymbol{k}$ ، که در آن S نیمکرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 1 , z \geq 0$ بوده، و $\boldsymbol{n}$ قائم یکه با مولفهٔ z نامنفی است .

۲. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = y\boldsymbol{i} + z\boldsymbol{j} + x\boldsymbol{k}$ ، که در آن S بخشی از سهمی‌گون $z = 1 - x^2 - y^2$ بوده که $z \geq 0$ ، و $\boldsymbol{n}$ قائم یکه با مولفهٔ z نامنفی است .

۳. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = (y - z)\boldsymbol{i} + yz\boldsymbol{j} - xz\boldsymbol{k}$ ، که در آن S از پنج وجه مکعب $0 \leq x \leq 2$ ، $0 \leq y \leq 2$ ، $0 \leq z \leq 2$ که در صفحهٔ xy نیستند تشکیل شده است . قائم یکهٔ $\boldsymbol{n}$ قائم رو به خارج است.

۴. $\boldsymbol{F}(x, y, z) = xz\boldsymbol{i} - y\boldsymbol{i} + x^2y\boldsymbol{k}$ ، که در آن S از سه وجه چهار وجهی محدود به سه صفحهٔ مختصات و صفحهٔ $3x + y + 3z = 6$ که در صفحهٔ xz نیستند تشکیل شده است . قائم $\boldsymbol{n}$ قائم یکه است که اشاره به خارج چهار وجهی دارد .

در تمرینهای ۵ تا ۱۰ ، با استفاده از قضیهٔ استوکس، نشان دهید که انتگرالهای خط مقادیر داده شده را دارند . درهر حالت ، طرز پیمودن C برای رسیدن به جواب داده شده را توضیح دهید .

۵. $\int_C y\, dx + z\, dy + x\, dz = \pi a^2\sqrt{3}$ ، که درآن C منحنی فصل مشترک کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = a^2$ و صفحهٔ $x + y + z = 0$ است .

۶. $\int_C (y + z)\, dx + (z + x)\, dy + (x + y)\, dz = 0$ ، که در آن C منحنی فصل مشترک استوانهٔ $x^2 + y^2 = 2y$ و صفحهٔ $y = z$ است .

۷. $\int_C y^2\, dx + xy\, dy + xz\, dz = 0$ ، که در آن C منحنی تمرین ۶ است .

۸. $\int_C (y - z)\, dx + (z - x)\, dy + (x - y)\, dz = 2\pi a(a + b)$ ، که در آن C فصل مشترک استوانهٔ $x^2 + y^2 = a^2$ و صفحهٔ $x/a + z/b = 1, a > 0, b > 0$ است .

۹ . $\int_C (y^2+z^2)\,dx + (x^2+z^2)\,dy + (x^2+y^2)\,dz = 2\pi ab^2$ ، که‌در آن C فصل مشترک نیمکره‌ٔ $x^2+y^2+z^2=2ax,\ z>0$ و استوانه‌ٔ $x^2+y^2=2bx$ است،که $0<b<a$.

۱۰ . $\int_C (y^2-z^2)\,dx + (z^2-x^2)\,dy + (x^2-y^2)\,dz = 9a^3/2$ ، که‌در آن C منحنی جدا شده از کرانهٔ مکعب $0\le x\le a,\ 0\le y\le a,\ 0\le z\le a$ به وسیلهٔ صفحهٔ $x+y+z=3a/2$ است .

۱۱ . هرگاه $\boldsymbol{r}=x\boldsymbol{i}+y\boldsymbol{j}+z\boldsymbol{k}$ و $P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}=\boldsymbol{a}\times\boldsymbol{r}$ ، که در آن $\boldsymbol{a}$ بردار ثابتی است ، نشان دهید $\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz = 2\iint_S \boldsymbol{a}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ ، که در آن منحنی C کرانهٔ سطح پارامتری S بوده و $\boldsymbol{n}$ یک قائم مناسب به S است .

۱۲ . فرض کنید $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ ، که در آن $P=-y/(x^2+y^2),\ Q=x/(x^2+y^2)$ $R=z$ و D چنبرهٔ حاصل از دوران دایرهٔ $(x-2)^2+z^2=1,\ y=0$ حول محور z باشد . نشان دهید که در D ، $\operatorname{curl}\boldsymbol{F}=\boldsymbol{O}$ ،ولی اگر C دایرهٔ $z=0$, $x^2+y^2=4$ باشد ، $\int_C P\,dx+Q\,dy+R\,dz$ صفر نیست .

۱۳ . در این تمرین ، برهان معادلهٔ (۲۹۰۱۲) ، که در برهان قضیهٔ استوکس به کار رفت ، را به‌اختصار شرح می‌دهیم .

(آ) با استفاده از فرمول مشتقگیری از حاصل ضرب ، نشان دهید که

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(p\,\frac{\partial X}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(p\,\frac{\partial X}{\partial u}\right)=\frac{\partial p}{\partial u}\,\frac{\partial X}{\partial v}-\frac{\partial p}{\partial v}\,\frac{\partial X}{\partial u}\,.$$

(ب) حال فرض کنید $p(u,v)=P[X(u,v),\ Y(u,v),\ Z(u,v)]$. $\partial p/\partial u$ و $\partial p/\partial v$ را با قاعدهٔ زنجیره‌ای حساب کرده و ، با استفاده از قسمت (آ) ، معادلهٔ (۲۹۰۱۲) رانتیجه بگیرید :

$$\frac{\partial}{\partial u}\left(p\,\frac{\partial X}{\partial v}\right)-\frac{\partial}{\partial v}\left(p\,\frac{\partial X}{\partial u}\right)=-\frac{\partial P}{\partial y}\,\frac{\partial(X,Y)}{\partial(u,v)}+\frac{\partial P}{\partial z}\,\frac{\partial(Z,X)}{\partial(u,v)}\,.$$

۱۴۰۱۲ خواص دیگر کرل و دیورژانس

کرل و دیورژانس یک میدان برداری به ماتریس ژاکوبی مربوطند . اگر $\boldsymbol{F}=P\boldsymbol{i}+Q\boldsymbol{j}+R\boldsymbol{k}$ ، ماتریس ژاکوبی $\boldsymbol{F}$ عبارت است از

$$DF(x, y, z) = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial P}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial y} & \dfrac{\partial P}{\partial z} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial Q}{\partial y} & \dfrac{\partial Q}{\partial z} \\ \dfrac{\partial R}{\partial x} & \dfrac{\partial R}{\partial y} & \dfrac{\partial R}{\partial z} \end{bmatrix}.$$

اثـر ایـن‌ماتریس (مجموع عناصر قطری آن) دیورژانس F است.

هرماتریس‌حقیقی A را می‌توان به صورت یک ماتریس متقارن، یعنی $\frac{1}{2}(A + A^t)$ ، و یک ماتـریس متقارن اریب، یعنی $\frac{1}{2}(A - A^t)$ ، نوشت. وقتی A ماتریس ژاکوبی DF باشد، قسمت متقارن اریب خواهد شد

$$\frac{1}{2}\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{\partial P}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial x} & \dfrac{\partial P}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial x} \\ \dfrac{\partial Q}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial y} & 0 & \dfrac{\partial Q}{\partial z} - \dfrac{\partial R}{\partial y} \\ \dfrac{\partial R}{\partial x} - \dfrac{\partial P}{\partial z} & \dfrac{\partial R}{\partial y} - \dfrac{\partial Q}{\partial z} & 0 \end{bmatrix}. \qquad (۳۵\cdot۱۲)$$

عناصر نـاصفر این ماتریس مولفه‌های $\operatorname{curl} \boldsymbol{F}$ و قرینه‌های آنند. اگر ماتریس ژاکوبی DF متقارن باشد، هر درایه در (۳۵٫۱۲) صفر است و $\operatorname{curl} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{O}$.

مثال ۱. فرض‌کنیم $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$. دراین صورت، داریم

$$P(x, y, z) = x, \qquad Q(x, y, z) = y, \qquad R(x, y, z) = z,$$

و ماتریس ژاکوبی نظیر ماتریس همانی 3×3 است. بنابراین،

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 3 \quad \text{و} \quad \operatorname{curl} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{O}.$$

بطـور کلی، اگر $\boldsymbol{F}(x, y, z) = f(x)\boldsymbol{i} + g(y)\boldsymbol{j} + h(z)\boldsymbol{k}$ ، ماتریس ژاکوبـی دارای عناصر $f'(x), g'(y), h'(z)$ بر قطر اصلی است و همه‌جای دیگر صفر است؛ درنتیجه،

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = f'(x) + g'(y) + h'(z) \quad \text{و} \quad \operatorname{curl} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{O}.$$

مثال ۲. فرض‌کنیم $\boldsymbol{F}(x, y, z) = xy^2z^2\boldsymbol{i} + z^2 \sin y\,\boldsymbol{j} + x^2e^y\boldsymbol{k}$. ماتریس‌ژاکوبی‌عبارت

است از

$$\begin{bmatrix} y^2z^2 & 2xyz^2 & 2xy^2z \\ 0 & z^2\cos y & 2z\sin y \\ 2xe^y & x^2e^y & 0 \end{bmatrix}.$$

بنابراین ،

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = y^2z^2 + z^2\cos y$$

و

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{F} = (x^2e^y - 2z\sin y)\boldsymbol{i} + (2xy^2z - 2xe^y)\boldsymbol{j} - 2xyz^2\boldsymbol{k}.$$

مثال ۳ . دیورژانس و کرل گرادیان . فرض کنیم $\boldsymbol{F}$ یک گرادیان باشد ؛ مثلاً ، $\boldsymbol{F} = \operatorname{grad}\varphi = \partial\varphi/\partial x\, \boldsymbol{i} + \partial\varphi/\partial y\, \boldsymbol{j} + \partial\varphi/\partial z\, \boldsymbol{k}$. ماتریس ژاکوبی عبارت است از

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial x} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial x} \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial y} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z\,\partial y} \\ \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial x\,\partial z} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial y\,\partial z} & \dfrac{\partial^2\varphi}{\partial z^2} \end{bmatrix}. \tag{۳۶ . ۱۲}$$

بنابراین ،

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F} = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}.$$

عبارت سمت راست *لاپلاسین* φ نام دارد ، و اغلب به شکل مختصرتر $\nabla^2\varphi$ نوشته‌می‌شود . مثلا ، دیورژانس‌گرادیان $\nabla\varphi$ لاپلاسین φ است . باعلامات ،این‌را به‌صورت زیرمی‌نویسند :

$$\operatorname{div}(\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi. \tag{۳۷ . ۱۲}$$

وقتی $\nabla^2\varphi = 0$ ،تابع φ *توافقی* نام دارد . معادلهٔ (۳۷ . ۱۲) نشان می‌دهد که‌گرادیان یک تابع توافقی دارای دیورژانس صفر است . وقتی مشتقات جزئی مخلوط در ماتریس (۳۶ . ۱۲) پیوسته باشند ، ماتریس متقارن است و $\operatorname{curl} \boldsymbol{F}$ صفر می‌باشد . به عبارت دیگر ، به‌ازای هر میدان اسکالر φ با مشتقات جزئی مرتبهٔ دوم مخلوط پیوسته ،

$$\operatorname{curl}(\operatorname{grad}\varphi) = \boldsymbol{O}.$$

این مثـال نشان می‌دهد که شرط $\operatorname{curl} \boldsymbol{F} = 0$ برای گرادیان بودن میدان برداری به‌طور پیوسته مشتقپذیر $\boldsymbol{F}$ لازم است. به‌عبارت دیگر، اگر بر مجموعهٔ باز S، $\operatorname{curl} \boldsymbol{F} \neq \boldsymbol{O}$، $\boldsymbol{F}$ یک‌گرادیان‌بر S نیست. همچنین، از قضیهٔ ۴۰۱۲ می‌دانیم که اگر بر مجموعهٔ محدب باز S، $\operatorname{curl} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{O}$، $\boldsymbol{F}$ یک گرادیان بر S است. یک میدان با کرل صفر **غیر دورانی** نامیده می‌شود.

مثال ۴. میدان بـرداری بـا دیـورژانس و کرل صفـر. فرض کنیم S مجموعهٔ تمـام $(x, y) \neq (0, 0)$ ها بوده و، اگر $(x, y) \in S$،

$$\boldsymbol{F}(x, y) = -\frac{y}{x^2 + y^2}\boldsymbol{i} + \frac{x}{x^2 + y^2}\boldsymbol{j}\ .$$

از مثال ۲ در بخش ۱۶۰۱۰ می‌دانیـم کـه $\boldsymbol{F}$ **یک گرادیان** بر S نیست (اگر چه $\boldsymbol{F}$ برهر مستطیل غیر شامل مبداء گرادیان است). ماتریس ژاکوبی عبارت است از

$$D\boldsymbol{F}(x, y) = \begin{bmatrix} \dfrac{2xy}{(x^2 + y^2)^2} & \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & 0 \\[2ex] \dfrac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} & \dfrac{-2xy}{(x^2 + y^2)^2} & 0 \\[2ex] 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

و فوراً" می‌بینیم که بر S، $\operatorname{div} \boldsymbol{F} = 0$ و $\operatorname{curl} \boldsymbol{F} = \boldsymbol{O}$.

مثال ۵. دیورژانس وکرل یک کرل. هرگاه $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$، کرل $\boldsymbol{F}$ یک‌میدان‌برداری جدیداست، و می‌توان دیورژانس و کرل آن را حساب کرد. ماتریس ژاکوبی $\operatorname{curl} \boldsymbol{F}$ عبارت است از

$$\begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 R}{\partial x\, \partial y} - \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x\, \partial z} & \dfrac{\partial^2 R}{\partial y^2} - \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y\, \partial z} & \dfrac{\partial^2 R}{\partial z\, \partial y} - \dfrac{\partial^2 Q}{\partial z^2} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial z} - \dfrac{\partial^2 R}{\partial x^2} & \dfrac{\partial^2 P}{\partial y\, \partial z} - \dfrac{\partial^2 R}{\partial y\, \partial x} & \dfrac{\partial^2 P}{\partial z^2} - \dfrac{\partial^2 R}{\partial z\, \partial x} \\[2ex] \dfrac{\partial^2 Q}{\partial x^2} - \dfrac{\partial^2 P}{\partial x\, \partial y} & \dfrac{\partial^2 Q}{\partial y\, \partial x} - \dfrac{\partial^2 P}{\partial y^2} & \dfrac{\partial^2 Q}{\partial z\, \partial x} - \dfrac{\partial^2 P}{\partial z\, \partial y} \end{bmatrix}.$$

اگر همهٔ مشتقات جزئی مخلوط را پیوسته بگیریم ، درمی‌یابیم که

$$\operatorname{div}(\operatorname{curl}\boldsymbol{F}) = 0$$

و

$$\operatorname{curl}(\operatorname{curl}\boldsymbol{F}) = \operatorname{grad}(\operatorname{div}\boldsymbol{F}) - \nabla^2\boldsymbol{F}, \tag{۳۸٫۱۲}$$

که در آن $\nabla^2\boldsymbol{F}$ با معادلهٔ

$$\nabla^2\boldsymbol{F} = (\nabla^2 P)\boldsymbol{i} + (\nabla^2 Q)\boldsymbol{j} + (\nabla^2 R)\boldsymbol{k}$$

تعریف می‌شود . اتحاد (۳۸٫۱۲) هرچهار عملگر ، گرادیان ، کرل ، دیورژانس ، ولاپلاسین رابهم مربوط می‌کند . اثبات (۳۸٫۱۲) در تمرین ۷ از بخش ۱۵٫۱۲ خواسته شده است .

کرل و دیورژانس درچند خاصیت کلی با مشتقات معمولی سهیم‌اند . اولاً ، اینها *عملگرهایی خطی* اند . یعنی ، اگر a و b ثابت باشند ، داریم

$$\operatorname{div}(a\boldsymbol{F} + b\boldsymbol{G}) = a\operatorname{div}\boldsymbol{F} + b\operatorname{div}\boldsymbol{G}, \tag{۳۹٫۱۲}$$

و

$$\operatorname{curl}(a\boldsymbol{F} + b\boldsymbol{G}) = a\operatorname{curl}\boldsymbol{F} + b\operatorname{curl}\boldsymbol{G}. \tag{۴۰٫۱۲}$$

همچنین ، خاصیتی شبیه فرمول مشتقگیری از حاصل ضرب را دارند :

$$\operatorname{div}(\varphi\boldsymbol{F}) = \varphi\operatorname{div}\boldsymbol{F} + \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{F}, \tag{۴۱٫۱۲}$$

و

$$\operatorname{curl}(\varphi\boldsymbol{F}) = \varphi\operatorname{curl}\boldsymbol{F} + \nabla\varphi\times\boldsymbol{F}, \tag{۴۲٫۱۲}$$

که در آن φ یک میدان اسکالر مشتقپذیر است . این خواص نتایج فوری تعریفهای کرل و دیورژانس‌اند ؛ اثبات آنها در تمرین ۶ از بخش ۱۵٫۱۲ خواسته شده است .

اگر از بردار علامتی

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x}\boldsymbol{i} + \frac{\partial}{\partial y}\boldsymbol{j} + \frac{\partial}{\partial z}\boldsymbol{k}$$

یکبار دیگر استفاده کنیم ، هریک از فرمولهای (۴۱٫۱۲) و (۴۲٫۱۲) شکلی می‌گیرند که با قاعدهٔ معمولی مشتقگیری از حاصل ضرب شباهت بیشتری دارند :

$$\nabla\cdot(\varphi\boldsymbol{F}) = \varphi\nabla\cdot\boldsymbol{F} + \nabla\varphi\cdot\boldsymbol{F},$$

و

$$\nabla\times(\varphi\boldsymbol{F}) = \varphi\nabla\times\boldsymbol{F} + \nabla\varphi\times\boldsymbol{F}.$$

در مثال ۳ ، لاپلاسین یک میدان اسکالر ، یعنی $\nabla^2\varphi$ ، مساوی

$\partial^2\varphi/\partial x^2 + \partial^2\varphi/\partial y^2 + \partial^2\varphi/\partial z^2$ تعریف‌شد. درمثال ۵، لاپلاسین $\nabla^2 F$ یک میدان‌برداری را با مولفه‌ها تعریف کردیم. اگر ∇^2 را عملگر علامتی

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}$$

تعبیر کنیم، فرمولهای صحیحی برای هردوی $\nabla^2\varphi$ و $\nabla^2 F$ به‌دست می‌آوریم. فرمول فوق برای ∇^2 ازضرب نقطه‌ای‌بردارعلامتی ∇ درخودش‌نیزناشی می‌شود. لذا، داریم $\nabla^2 = \nabla \cdot \nabla$، و می‌توانیم بنویسیم

$$\nabla^2 F = (\nabla \cdot \nabla) F \quad \text{و} \quad \nabla^2\varphi = (\nabla \cdot \nabla)\varphi.$$

حال‌فرمول $\nabla \cdot \nabla\varphi$ را درنظر می‌گیریم. این را می‌توان خواند $(\nabla \cdot \nabla)\varphi$، که مساوی $\nabla^2\varphi$ است؛ یا خواند $\nabla \cdot (\nabla\varphi)$، که مساوی $\operatorname{div}(\nabla\varphi)$ است. در مثال ۳ نشان دادیم که $\operatorname{div}(\nabla\varphi) = \nabla^2\varphi$؛ درنتیجه، داریم

$$(\nabla \cdot \nabla)\varphi = \nabla \cdot (\nabla\varphi);$$

لذا، بدون خطر ابهام، برای هریک از این عبارات می‌توان نوشت $\nabla \cdot \nabla\varphi$. اما این‌وقتی φ با میدان برداری F عوض‌می‌شود درست نیست. عبارت $(\nabla \cdot \nabla)F$ مساوی $\nabla^2 F$ است، که تعریف شده است. اما $\nabla \cdot (\nabla F)$ بی معنی است، زیرا ∇F تعریف نشده است. لذا، عبارت $\nabla \cdot \nabla F$ فقط وقتی معنی دارد که به عنوان $(\nabla \cdot \nabla)F$ گرفته شود. این نکات توضیح می‌دهند که، اگرچه فرمولهای علامتی گاهی نمادگذاری ساده‌ای بوده و در بخاطر سپردن کمک‌اند، در اعمال با آنها بایستی احتیاط کرد.

۱۵۰۱۲ تمرین

۱. برای هریک از میدانهای برداری‌زیر، ماتریس ژاکوبی را معین کرده و کرل ودیورژانس را حساب کنید.

(آ) $F(x, y, z) = (x^2 + yz)i + (y^2 + xz)j + (z^2 + xy)k$.

(ب) $F(x, y, z) = (2z - 3y)i + (3x - z)j + (y - 2x)k$.

(پ) $F(x, y, z) = (z + \sin y)i - (z - x\cos y)j$.

(ت) $F(x, y, z) = e^{xy}i + \cos xy\, j + \cos xz^2 k$.

(ث) $F(x, y, z) = x^2 \sin y\, i + y^2 \sin xz\, j + xy \sin(\cos z)k$.

۲. اگر $r = xi + yj + zk$ و $r = \|r\|$، $\operatorname{curl}[f(r)r]$، که درآن f یک تابع مشتقپذیر

است ، را حساب کنید .

۳ . اگر $r = xi + yj + zk$ و A یک بردارثابت‌باشد ،نشان‌دهیدکه $\operatorname{curl}(A \times r) = 2A$.

۴ . اگر $r = xi + yj + zk$ و $r = \|r\|$ ، جمیع اعداد صحیح n را بیابید که به‌ازای آنها $\operatorname{div}(r^n r) = 0$.

۵ . یک‌میدان برداری بیابید که کرل آن $xi + yj + zk$ باشد ، یا ثابت کنید این میدان برداری وجود ندارد .

۶ . خواص مقدماتی کرل و دیورژانس مذکور در معادلات (۳۹۰۱۲) تا (۴۲۰۱۲) را ثابت کنید .

۷ . ثابت‌کنید هرگاه مولفه‌های F مشتقات‌جزئی مرتبهٔ دوم مخلوط پیوسته داشته‌باشند ،

$$\operatorname{curl}(\operatorname{curl} F) = \operatorname{grad}(\operatorname{div} F) - \nabla^2 F \cdot$$

۸ . اتحاد

$$\nabla \cdot (F \times G) = G \cdot (\nabla \times F) - F \cdot (\nabla \times G),$$

که در آن F و G میدانهای برداری مشتقپذیری‌اند ، را ثابت کنید .

۹ . میدان برداری F گرادیان یک پتانسیل نیست مگر آنکه $\operatorname{curl} F = O$. با اینحال ، ممکن است میدان اسکالر ناصفر μ را طوری یافت که μF یک گرادیان باشد . ثابت کنید اگر چنین μ ای وجود داشته باشد ، F همیشه بر کرل خود عمود است . وقتی میدان دو بعدی باشد ، مثلا" $F = Pi + Qj$ ، این‌تمرین‌شرط‌لازم برای آنکه‌معادلهٔ دیفرانسیل $P\,dx + Q\,dy = 0$ سازه انتگرالگیری‌داشته‌باشد را به‌ما می‌دهد . (عکس این نیز درست است . یعنی ، اگر در یک ناحیهٔ مناسب $F \cdot \operatorname{curl} F = 0$ ، یک μ ی ناصفر هست بطوری که μF گرادیان است . اثبات عکس لازم نیست .)

۱۰ . فرض‌کنید $F(x, y, z) = y^2z^2 i + z^2x^2 j + x^2y^2 k$. نشان دهید که $\operatorname{curl} F$ همیشه صفر نیست ،ولی $F \cdot \operatorname{curl} F = 0$. میدان‌اسکالر μ را طوری‌بیابیدکه μF گرادیان‌باشد .

۱۱ . فرض‌کنید $V(x, y) = y^c i + x^c j$ ، که در آن c یک ثابت مثبت است ، و نیز $r(x, y) = xi + yj$. همچنین ، R یک‌ناحیهٔ‌مسطح محدود به منحنی ژردان قطعه‌قطعه هموار C باشد . $\operatorname{div}(V \times r)$ و $\operatorname{curl}(V \times r)$ راحساب‌کرده و، با استفاده از قضیهٔ گرین ، نشان دهید

$$\oint_C V \times r \cdot d\alpha = 0,$$

که در آن α ، C را توصیف می‌کند .

۱۲ . نشان دهید که قضیهٔ گرین را می‌توان به‌صورت زیر بیان کرد :

$$\iint_R (\operatorname{curl} \boldsymbol{V}) \cdot \boldsymbol{k}\, dx\, dy = \oint_C \boldsymbol{V} \cdot \boldsymbol{T}\, ds,$$

که در آن $\boldsymbol{T}$ مماس یکه بر C و s طول قوس است .

۱۳ . ناحیهٔ مسطح R به منحنی ژردان قطعه‌قطعه هموار C محدود است . گشتاورهای ماند R حول محورهای x و y بترتیب عبارتند از a و b . انتگرال خط

$$\oint_C \nabla(r^4) \cdot \boldsymbol{n}\, ds$$

رابرحسب a و b حساب‌کنید . در اینجا $r = \|x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j}\|$ ، $\boldsymbol{n}$ قائم یکهٔ روبه‌خارج C ، و s طول قوس است . منحنی در جهت خلاف حرکت عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود .

۱۴ . فرض‌کنید $\boldsymbol{F}$ یک میدان برداری دوبعدی باشد . برای انتگرال خط برداری $\int_C \boldsymbol{F} \times d\boldsymbol{\alpha}$ تعریفی بیان کنید . تعریف باید طوری باشد که فرمول زیر نتیجه‌ای از قضیهٔ گرین باشد :

$$\int_C \boldsymbol{F} \times d\boldsymbol{\alpha} = \boldsymbol{k} \iint_R (\operatorname{div} \boldsymbol{F})\, dx\, dy,$$

که در آن R یک ناحیهٔ مسطح محدود به منحنی بستهٔ ساده‌ای مانند C است .

* ۱۶.۱۲ بازسازی یک میدان برداری از کرل خود

در بررسی گرادیان دیدیم که چطور گرادیان بودن یا نبودن یک میدان برداری را معین کنیم . حال سوال مشابه را در مورد کرل می‌کنیم . به‌ازای میدان برداری $\boldsymbol{F}$ ، آیا $\boldsymbol{G}$ ای هست‌که $\operatorname{curl} \boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}$ ؟ می‌نویسیم $\boldsymbol{F} = P\boldsymbol{i} + Q\boldsymbol{j} + R\boldsymbol{k}$ و $\boldsymbol{G} = L\boldsymbol{i} + M\boldsymbol{j} + N\boldsymbol{k}$. برای حل معادلهٔ $\operatorname{curl} \boldsymbol{G} = \boldsymbol{F}$ ، باید دستگاه معادلات دیفرانسیل جزئی

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = P, \qquad \frac{\partial L}{\partial z} - \frac{\partial N}{\partial x} = Q, \qquad \frac{\partial M}{\partial x} - \frac{\partial L}{\partial y} = R \qquad (۴۳.۱۲)$$

را نسبت به سه تابع مجهول L ، M ، و N ، وقتی P ، Q ، و R معلومند ، حل‌کنیم .

امکان حل این دستگاه همیشه وجود ندارد . مثلاً ، در بخش ۱۴.۱۲ ثابت شد که دیورژانس یک کرل همواره صفر است . لذا ، برای جواب داشتن دستگاه (۴۳.۱۲) در مجموعهٔ باز S ، باید همه‌جا در S داشته باشیم

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = 0\,. \tag{۴۴۰۱۲}$$

همانطور که خواهیم دید ، اگر مجموعهٔ S را که در آن (۴۴۰۱۲) برقرار است محدود کنیم ، شرط فوق شرطی کافی برای جواب داشتن دستگاه (۴۳۰۱۲) نیز هست . حال ثابت می‌کنیم شرط (۴۴۰۱۲) ، وقتی S یک بازهٔ سه بعدی است ، کافی است .

قضیهٔ ۵۰۱۲ . *فرض‌کنیم F بربازهٔ باز S در فضای 3 به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد . دراین صورت ، یک میدان برداری مانند G هست که $\operatorname{curl} G = F$ اگر و فقط اگر ، همه‌جا در S ، $\operatorname{div} F = 0$.*

برهان . لزوم شرط $\operatorname{div} F = 0$ قبلاً " اثبات شده است ، زیرا دیورژانس کرل همواره صفر است . برای اثبات کفایت ، باید سه تابع L ، M ، و N نشان داد که در سه معادلهٔ (۴۳۰۱۲) صدق کنند . با اختیار $L = 0$ به‌این کار می‌پردازیم . دراین صورت ، معادلات دوم و سوم (۴۳۰۱۲) خواهند شد

$$\frac{\partial M}{\partial x} = R \quad \text{و} \quad \frac{\partial N}{\partial x} = -Q\,.$$

این یعنی باید داشته باشیم

$$N(x, y, z) = -\int_{x_0}^{x} Q(t, y, z)\, dt + f(y, z)$$

و

$$M(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} R(t, y, z)\, dt + g(y, z),$$

که در آنها انتگرالگیری درامتداد یک پاره‌خط در S صورت گرفته ، و "ثابتهای انتگرالگیری" $f(y, z)$ و $g(y, z)$ مستقل از x اند . به یافتن جوابی با $f(y, z) = 0$ می‌پردازیم . معادلهٔ اول در (۴۳۰۱۲) عبارت است از

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = P. \tag{۴۵۰۱۲}$$

به‌ازای M و N ی که اینک توصیف شد ، داریم

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = -\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} Q(t, y, z)\,dt - \frac{\partial}{\partial z}\int_{x_0}^{x} R(t, y, z)\,dt - \frac{\partial g}{\partial z}. \tag{۴۶۰۱۲}$$

دراین مرحله، با استفاده از قضیهٔ ۸۰۱۰، دو عمل مشتقگیری جزئی و انتگرالگیری را با هم عوض می‌کنیم. یعنی، می‌نویسیم

$$\frac{\partial}{\partial y}\int_{x_0}^{x} Q(t, y, z)\,dt = \int_{x_0}^{x} D_2Q(t, y, z)\,dt \tag{۴۷۰۱۲}$$

و

$$\frac{\partial}{\partial z}\int_{x_0}^{x} R(t, y, z)\,dt = \int_{x_0}^{x} D_3R(t, y, z)\,dt. \tag{۴۸۰۱۲}$$

دراین صورت، معادلهٔ (۴۶۰۱۲) خواهد شد

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = \int_{x_0}^{x} [-D_2Q(t, y, z) - D_3R(t, y, z)]\,dt - \frac{\partial g}{\partial z}. \tag{۴۹۰۱۲}$$

با استفاده از شرط (۴۴۰۱۲)، می‌توان انتگرالده در (۴۹۰۱۲) را با $D_1P(t, y, z)$ عوض کرد؛ معادلهٔ (۴۹۰۱۲) خواهد شد

$$\frac{\partial N}{\partial y} - \frac{\partial M}{\partial z} = \int_{x_0}^{x} D_1P(t, y, z)\,dt - \frac{\partial g}{\partial z} = P(x, y, z) - P(x_0, y, z) - \frac{\partial g}{\partial z}.$$

از اینرو، اگر g را طوری بگیریم که $\partial g/\partial z = -P(x_0, y, z)$، (۴۵۰۱۲) برقرار خواهد بود. لذا، مثلاً، می‌توان

$$g(y, z) = -\int_{z_0}^{z} P(x_0, y, u)\,du$$

را اختیار کرد. این بحث ما را به میدان برداری $G = Li + Mj + Nk$ می‌رساند، که در آن $L(x, y, z) = 0$ و

$$M(x, y, z) = \int_{x_0}^{x} R(t, y, z)\,dt - \int_{z_0}^{z} P(x_0, y, u)\,du, \quad N(x, y, z) = -\int_{x_0}^{x} Q(t, y, z)\,dt.$$

به‌ازای این L، M، و N، به‌آسانی، به‌کمک (۴۷۰۱۲) و (۴۸۰۱۲)، ثابت می‌شود که سه معادلهٔ (۴۳۰۱۲) برقرارند، و به ما، همانطور که می‌خواستیم، $\operatorname{curl} G = F$ را خواهد داد.

باید توجه داشت که برهان فوق نه فقط وجود میدان برداری G که کرل آن F است

را ثابت می‌کند ، بلکه روش سرراستی برای تعیین G به‌وسیلهٔ انتگرالگیری مستلزم مولفه‌ها ی F نیز به‌دست می‌دهد .

به‌ازای F معلوم ، میدان برداری G ساخته شده تنها جواب معادلهٔ $\operatorname{curl} G = F$ نیست . اگر به‌این G گرادیان به‌طور پیوسته مشتقپذیر $\nabla\varphi$ را بیفزاییم ، جواب دیگری‌خواهیم داشت ، زیرا ، بدلیل $\operatorname{curl}(\nabla\varphi) = O$ ،

$$\operatorname{curl}(G + \nabla\varphi) = \operatorname{curl} G + \operatorname{curl}(\nabla\varphi) = \operatorname{curl} G = F .$$

بعلاوه ، به‌آسانی می‌توان نشان داد که همهٔ جوابهای به‌طور پیوسته مشتقپذیر باید به‌شکل $G + \nabla\varphi$ باشند . درواقع ، اگر H جوابی دیگر باشد ، $\operatorname{curl} H = \operatorname{curl} G$ ؛ درنتیجه ، $\operatorname{curl}(H - G) = O$. طبق قضیهٔ ۹۰۱۰ ، نتیجه می‌شود که به‌ازای یک گرادیان به‌طور پیوسته مشتقپذیر مانند $\nabla\varphi$ ، $H - G = \nabla\varphi$. لذا، همانطورکه‌حکم شده، $H = G + \nabla\varphi$.

گاهی میدان برداری F که‌به‌ازای‌آن $\operatorname{div} F = 0$ سولنوئیدی‌نامیده می‌شود . قضیهٔ ۵۰۱۲ می‌گوید که یک میـــدان برداری بر بازهٔ باز S در فضای 3 سولنوئیدی است اگر و فقط اگر کرل میدان برداری دیگری بر S باشد .

مثال زیر نشان می‌دهد که این حکم برای مجموعه‌های باز **دلخواه** درســت نیست .

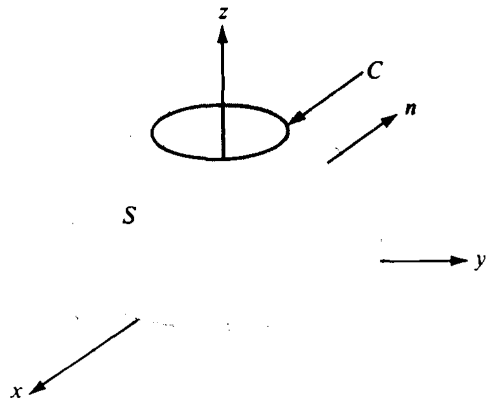
مثال . میدان برداری‌سولنوئیدی‌که‌کرل نیست . فرض‌کنیم D بخشی از فضای 3 باشد که بین دو کرهٔ متحدالمرکز به مرکز مبداء و شعاعهای a و b ، که $0 < a < b$ ، قرار دارد . همچنین ، $V = r/r^3$ ، که درآن $r = xi + yj + zk$ و $r = \|r\|$. به‌آسانی ثابت می‌شود که همه‌جا در D ، $\operatorname{div} V = 0$. در واقع ، فرمول کلی

$$\operatorname{div}(r^n r) = (n + 3)r^n$$

را داریــم ، و دراین مثال $n = -3$. با استفاده از قضیهٔ استوکس، ثابت می‌کنیم این V یک کرل در D نیست (اگرچه‌بر هربازهٔ سه بعدی غیر شامل مبداء کرل هست) . برای این‌کار، فرض‌کنیم میدانی برداری مانند U باشد بطوری که در D ، $V = \operatorname{curl} U$ ، و تناقض به‌دست می‌آوریم . طبق قضیهٔ استوکس، می‌توانیم بنویسیم

$$\iint_S (\operatorname{curl} U) \cdot n \, dS = \oint_C U \cdot d\alpha , \tag{۵۰۰۱۲}$$

که درآن S و C سطح و منحنــی شـکل ۱۳۰۱۲ اند . برای ساختن S ، یک سطح کروی متحدالمرکز بــه شعــاع R با کــرانهٔ D ، که $a < R < b$ ، درنظر گرفته، و از آن یک



شکل ۱۳۰۱۲ سطح S و منحنی C در معادلهٔ (۵۰۰۱۲)

"عرقچین" کـوچک مطابق شکل برمی‌داریم. قسمت باقیمانده سطح S است. منحنی C لبهٔ مستدیر نموده شده است. فرض کنیم $\boldsymbol{n}$ قائم یکهٔ رو به خارج S باشد؛ درنتیجه، $\boldsymbol{n} = \boldsymbol{r}/r$. چون $\operatorname{curl} \boldsymbol{U} = \boldsymbol{V} = \boldsymbol{r}/r^3$ ، داریم

$$(\operatorname{curl} \boldsymbol{U}) \cdot \boldsymbol{n} = \frac{\boldsymbol{r}}{r^3} \cdot \frac{\boldsymbol{r}}{r} = \frac{1}{r^2}.$$

برسطح S ، این حاصل ضرب نقطه‌ای مقدار ثابت $1/R^2$ را دارد. لذا، داریم

$$\iint_S (\operatorname{curl} \boldsymbol{U}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \frac{1}{R^2} \iint_S dS = \frac{S \text{ مساحت}}{R^2}.$$

وقتی عــرقچین به یک نقطه جمع شود، مساحت S به $4\pi R^2$ (مساحت کل کره) نزدیک می‌شود و، لذا، مقدار انتگرال سطح در (۵۰۰۱۲) به 4π نزدیک خواهد شد.

حال انتگـرال خـط در (۵۰۰۱۲) را معاینه می‌کنیم. به‌آسانی ثابت می‌شود که، به‌ازای هر انتگرال خط $\int_C \boldsymbol{U} \cdot d\boldsymbol{\alpha}$ ، نامساوی زیر را داریم:

$$\left| \int_C \boldsymbol{U} \cdot d\boldsymbol{\alpha} \right| \le M \cdot (\, C \text{ طول }),$$

که در آن M یک ثابت وابسته به $\boldsymbol{U}$ است. (در واقع، M را می‌توان مقدار ماکزیمم $\|\boldsymbol{U}\|$ بر C گرفت.) ازاینرو، اگر عرقچین به یک نقطه جمع شود، طول C و مقدار انتگرال خط

هر دو به صفر نزدیک می‌شوند. لذا، تناقض خواهیم داشت؛ انتگرال سطح (۵۰۰۱۲) را می‌توان بدلخواه به 4π نزدیک کرد، و انتگرال خط نظیر مساوی با آن را می‌توان بدلخواه به 0 نزدیک ساخت. بنابراین، تابع U که کرل آن V باشد در ناحیهٔ D وجود ندارد.

مشکل اینجا از نهاد هندسی ناحیهٔ D ناشی شده است. با آنکه این ناحیه همبند ساده است (یعنی، هر منحنی بستهٔ ساده در D لبهٔ یک سطح پارامتری است که کاملاً در D قرار دارد)، سطوح بسته‌ای در D هستند که کرانه‌های کامل اجسامی که کاملاً در D باشند نیستند. مثلاً، هیچ کره‌ای حول مبداء کرانهٔ کامل یک جسم که کاملاً در D باشد نیست. اگر ناحیهٔ D دارای این خاصیت باشد که هر سطح بسته در D کرانهٔ یک جسم کاملاً در D باشد، می‌توان نشان داد که میدانی برداری مانند U وجود دارد که، در D، $V = \operatorname{curl} U$ اگر و فقط اگر، همه‌جا در D، $\operatorname{div} V = 0$. اثبات این حکم مشکل است و در اینجا داده نخواهد شد.

✱ ۱۷۰۱۲ تمرین

۱. میدان برداری $G(x, y, z)$ را طوری بیابید که کرل آن همه‌جا در فضای 3، $2i + j + 3k$ باشد. کلیترین میدان برداری به‌طور پیوسته مشتقپذیر با این خاصیت چیست؟

۲. نشان دهید که میدان برداری $F(x, y, z) = (y - z)i + (z - x)j + (x - y)k$ سولنوئیدی است، و میدان برداری G را طوری بیابید که همه‌جا در فضای 3، $F = \operatorname{curl} G$.

۳. فرض‌کنید $F(x, y, z) = -zi + xyk$. میدان برداری به‌طور پیوسته مشتقپذیر G به شکل $G(x, y, z) = L(x, y, z)i + M(x, y, z)j$ را طوری بیابید که، همه‌جا در فضای 3، $F = \operatorname{curl} G$. کلیترین G به این شکل چیست؟

۴. اگر دو میدان برداری U و V غیر دورانی باشند، نشان‌دهید که میدان برداری $U \times V$ سولنوئیدی است.

۵. فرض‌کنید $r = xi + yj + zk$ و $r = \|r\|$. نشان‌دهید $n = -3$ تنها مقدار n است که $r^n r$، به‌ازای $r \neq 0$، سولنوئیدی است. به‌ازای این n، یک بازهٔ 3 بعدی S غیرشامل مبداء اختیار و $r^{-3}r$ را به‌صورت کرل در S بیان نمایید. تذکر. با آنکه $r^{-3}r$ در هرچنین S ی یک کرل است، بر مجموعهٔ تمام نقاط غیر از $(0, 0, 0)$ کرل نیست.

۶ . کلیترین تابع به‌طور پیوسته مشتقپذیر f از یک متغیر حقیقی را بیابید که میدان‌برداری $f(r)\boldsymbol{r}$ سولنوئیدی باشد، که در آن $\boldsymbol{r} = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + z\boldsymbol{k}$ و $r = \|\boldsymbol{r}\|$.

۷ . فرض‌کنید V یک میدان برداری باشد که بر بازهٔ باز S در فضای 3 به‌طور پیوسته مشتقپذیر است . دو حکم زیر را درباب V در نظر بگیرید :

(یک) $\operatorname{curl} V = O$ و ،به‌ازای‌یک‌میدان برداری به‌طور پیوسته مشتقپذیر مانند U ، $V = \operatorname{curl} U$ (همه‌جا بر S) ؛

(دو) یک‌میدان‌اسکالر مانند φ هست بطوری که $\nabla\varphi$ به‌طور پیوسته مشتقپذیراست و ،

همه‌جا بر S ، $V = \operatorname{grad} \varphi$ و $\nabla^2\varphi = 0$.

(آ) ثابت کنید حکم (یک) حکم (دو) را ایجاب می‌کند . به‌عبارت دیگر، یک میدان‌برداری که هم غیر دورانی و هم سولنوئیدی در S باشد گرادیان‌یک‌تابع‌توافقی S است .

(ب) ثابت کنید حکم (دو) حکم (یک) را ایجاب می‌کند ، یا مثال نقض بزنید .

۸ . همهٔ میدانهای برداری مورد نظر را بر بازهٔ بازی چون S به‌طور پیوسته مشتقپذیر بگیرید . همچنین ، فرض کنید $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}$ ، که در آن $\boldsymbol{F}$ سولنوئیدی و $\boldsymbol{G}$ غیر دورانی‌است . دراین‌صورت ، میدانی برداری‌مانند U هست بطوری‌که $\boldsymbol{F} = \operatorname{curl} \boldsymbol{U}$ ، و میدانی اسکالر مانند φ هست بطوری که در S ، $\boldsymbol{G} = \nabla\varphi$. نشان دهید که U و φ در معادلات دیفرانسیل جزئی زیر در S صدق می‌کنند :

$$\nabla^2\varphi = \operatorname{div} \boldsymbol{H}, \qquad \operatorname{grad}(\operatorname{div} \boldsymbol{U}) - \nabla^2\boldsymbol{U} = \operatorname{curl} \boldsymbol{H}$$

تذکر. این تمرین کاربردهای متنوعی دارد ، زیرا می‌توان نشان داد که هرمیدان برداری به‌طور پیوسته مشتقپذیر $\boldsymbol{H}$ بر S را می‌توان به شکل $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}$ نوشت، که در آن $\boldsymbol{F}$ سولنوئیدی و $\boldsymbol{G}$ غیر دورانی باشد .

۹ . فرض کنید $\boldsymbol{H}(x, y, z) = x^2y\boldsymbol{i} + y^2z\boldsymbol{j} + z^2x\boldsymbol{k}$. میدانهای برداری $\boldsymbol{F}$ و $\boldsymbol{G}$ ، که $\boldsymbol{F}$ یک کرل و $\boldsymbol{G}$ یک گرادیان است ، را طوری بیابید که $\boldsymbol{H} = \boldsymbol{F} + \boldsymbol{G}$

۱۰ . فرض کنید میدانهای اسکالر u و v بر بازهٔ باز R در فضای 3 به‌طور پیوسته مشتقپذیر باشند .

(آ) نشان دهید یک میدان برداری مانند $\boldsymbol{F}$ هست بطوری که، همه‌جا در R ، $\nabla u \times \nabla v = \operatorname{curl} \boldsymbol{F}$.

(ب) از سه میدان برداری زیر کدامها را می‌توان به عنوان F در قسمت (آ) به‌کار برد: (یک) $\nabla(uv)$ ؛ (دو) $u\nabla v$ ؛ (سه) $v\nabla u$.

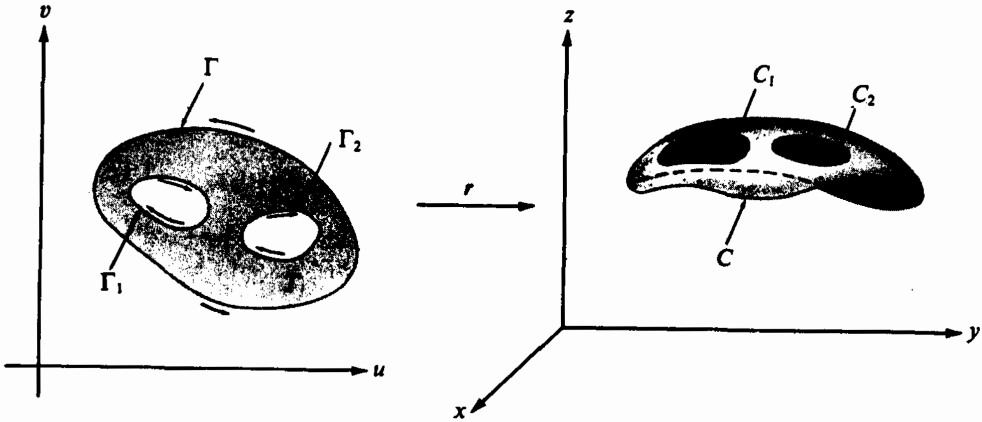
(پ) هرگاه $u(x, y, z) = x^3 - y^3 + z^2$ و $v(x, y, z) = x + y + z$، انتگرال سطح

$$\iint_S \nabla u \times \nabla v \cdot \boldsymbol{n}\, dS,$$

که در آن S نیمکرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ بوده‌و $\boldsymbol{n}$ قائم یکه‌با مولفهٔ z نامنفی است، را حساب کنید.

۱۸۰۱۲ تعمیمهای قضیهٔ استوکس

قضیهٔ استوکس‌را می‌توان به‌سطوح هموار سادهٔ کلیتر تعمیم داد. اگر T یک ناحیهٔ همبند چندگانه مانند شکل ۱۴۰۱۲ (با تعدادی متناهی حفره) باشد، نقش یک به یک $S = \boldsymbol{r}(T)$



شکل ۱۴۰۱۲ تعمیم قضیهٔ استوکس برای سطوحی که نقشهای یک به یک نواحی همبند چند گانه‌اند

شامل همان تعداد حفرهٔ T است. برای تعمیم قضیهٔ استوکس به این سطوح، دقیقاً" از همان‌برهان قضیهٔ استوکس استفاده می‌کنیم، جز اینکه قضیهٔ گرین را برای نواحی همبند چندگانه (قضیهٔ ۱۲۰۱۱) به‌کار می‌بریم. به‌جای انتگرال خط در معادلهٔ (۲۷۰۱۲) به مجموعی از انتگرالهای خط، با علامات مناسب، نیاز داریم، که روی نقشهای منحنیهایی که کرانهٔ T را می‌سازند گرفته‌شده‌اند. مثلاً"، اگر T، مثل شکل ۱۴۰۱۲، دو حفره

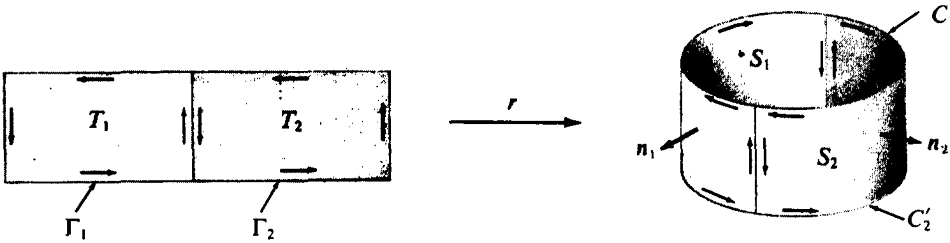
داشته باشد، و کرانهٔ منحنیهای Γ ، Γ_1 ، و Γ_2 در جهتهای نموده شده پیموده شوند، اتحاد قضیهٔ استوکس شکل زیر را میگیرد:

$$\iint_S (\operatorname{curl} \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \oint_C \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\rho} + \oint_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\rho}_1 + \oint_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\rho}_2,$$

که درآن C ، C_1 ، و C_2 بترتیب نقشهای Γ ، Γ_1 ، و Γ_2 بوده، و $\boldsymbol{\rho}$ ، $\boldsymbol{\rho}_1$ ، و $\boldsymbol{\rho}_2$ توابع مرکب $\boldsymbol{\rho}(t) = \boldsymbol{r}[\boldsymbol{\gamma}(t)],\ \boldsymbol{\rho}_1(t) = \boldsymbol{r}[\boldsymbol{\gamma}_1(t)],\ \boldsymbol{\rho}_2(t) = \boldsymbol{r}[\boldsymbol{\gamma}_2(t)]$ میباشند. در اینجا $\boldsymbol{\gamma}$ ، $\boldsymbol{\gamma}_1$ ، و $\boldsymbol{\gamma}_2$ توابعی هستند که Γ ، Γ_1 ، و Γ_2 را درجهتهای نموده شده توصیف میکنند. منحنیهای C ، C_1 ، و C_2 در جهتهای القا شده از Γ ، Γ_1 ، و Γ_2 بهوسیلهٔ نگاشت $\boldsymbol{r}$ پیموده خواهند شد.

قضیهٔ استوکس را نیزمیتوان به بعضی (نه همهٔ) سطوح هموار که ساده نیستند تعمیم داد. چند مورد را با مثال توضیح میدهیم.

ابتدا استوانهٔ شکل ۱۵۰۱۲ را درنظر میگیریم. این استوانه اجتماع دو سطح پارامتری هموار و سادهٔ S_1 و S_2 ، یعنی نقشهای دو مستطیل مجاور T_1 و T_2 تحت



شکل ۱۵۰۱۲ تعمیم قضیهٔ استوکس به استوانه

نگاشتهای $\boldsymbol{r}_1$ و $\boldsymbol{r}_2$ ،است. اگر $\boldsymbol{\gamma}_1$ کرانهٔ جهتدار با جهت مثبت Γ_1 از T_1 ، و $\boldsymbol{\gamma}_2$ کرانهٔ جهتدار با جهت مثبت Γ_2 از T_2 را توصیف کند، توابع $\boldsymbol{\rho}_1$ و $\boldsymbol{\rho}_2$ تعریف شده با

$$\boldsymbol{\rho}_1(t) = \boldsymbol{r}_1[\boldsymbol{\gamma}_1(t)], \qquad \boldsymbol{\rho}_2(t) = \boldsymbol{r}_2[\boldsymbol{\gamma}_2(t)]$$

بترتیب نقشهای C_1 و C_2 از Γ_1 و Γ_2 را توصیف میکنند. در این مثال، نمایشهای $\boldsymbol{r}_1$ و $\boldsymbol{r}_2$ را میتوان طوری گرفت که بر فصل مشترک $\Gamma_1 \cap \Gamma_2$ یکی باشند. اگر قضیهٔ استوکس را بر هر قطعهٔ S_1 و S_2 اعمال کرده و دو اتحاد را بهم بیفزاییم، خواهیم داشت

$$\iint_{S_1} (\operatorname{curl} \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}_1 \, dS + \iint_{S_2} (\operatorname{curl} \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}_2 \, dS = \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\rho}_1 + \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\rho}_2, \qquad (۵۱\cdot۱۲)$$

که در آن $\boldsymbol{n}_1$ و $\boldsymbol{n}_2$ بترتیب قائمهای معین‌شده به‌وسیلهٔ حاصل‌ضربهای برداری‌اساسی $\boldsymbol{r}_1$ و $\boldsymbol{r}_2$ اند.

حال فرض‌کنیم $\boldsymbol{r}$ نگاشت $T_1 \cup T_2$ باشدکه با $\boldsymbol{r}_1$ بر T_1 و با $\boldsymbol{r}_2$ بر T_2 یکی بوده، و $\boldsymbol{n}$ قائم یکهٔ نظیر معین‌شده به‌وسیلهٔ حاصل ضرب برداری اساسی $\boldsymbol{r}$ باشد. چون قائمهای $\boldsymbol{n}_1$ و $\boldsymbol{n}_2$ بر $S_1 \cap S_2$ همجهت‌اند، قائم یکهٔ $\boldsymbol{n}$ بر S_1 مساوی $\boldsymbol{n}_1$، و بر S_2 مساوی $\boldsymbol{n}_2$ می‌باشد. لذا، مجموع انتگرالهای سطح در طرف چپ (۵۱۰۱۲) مساوی است با

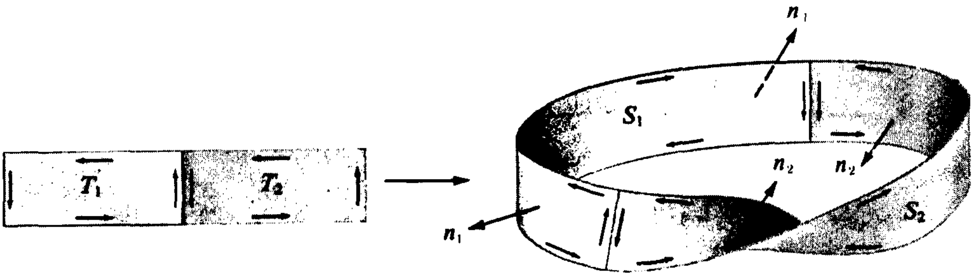
$$\iint_{S_1 \cup S_2} (\operatorname{curl} \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} \, dS .$$

دراین‌مثال، نمایشهای $\boldsymbol{r}_1$ و $\boldsymbol{r}_2$ را می‌توان طوری گرفت که $\boldsymbol{\rho}_1$ و $\boldsymbol{\rho}_2$، همانطور که‌سهمها درشکل ۱۵۰۱۲ نشان می‌دهند، بر هر قوس فصل مشترک $C_1 \cap C_2$ جهتهای مخالف‌معین کنند. دوانتگرال خط سمت‌راست (۵۱۰۱۲) را می‌توان با مجموعی از انتگرالهای خط در امتداد دودایرهٔ C_1' و C_2' که لبه‌های‌بالایی و پایینی $S_1 \cup S_2$ را می‌سازند عوض کرد، زیرا انتگرالهای‌خط درامتداد هر قوس فصل مشترک $C_1 \cap C_2$ حذف می‌شوند. بنابراین، معادلهٔ (۵۱۰۱۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\iint_{S_1 \cup S_2} (\operatorname{curl} \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n} \, dS = \int_{C_1'} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\rho}_1 + \int_{C_2'} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\rho}_2, \qquad (۵۲\cdot۱۲)$$

که در آن انتگرالهای خط‌در جهتهای القا شده از Γ_1 و Γ_2 پیموده می‌شوند. گوییم دو دایرهٔ C_1' و C_2' کرانهٔ کامل $S_1 \cup S_2$ را می‌سازند. معادلهٔ (۵۲۰۱۲) انتگرال سطح $(\operatorname{curl} \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}$ را روی $S_1 \cup S_2$ به‌صورت یک انتگرال خط‌روی کرانهٔ کامل $S_1 \cup S_2$ بیان می‌کند. این معادله تعمیم قضیهٔ استوکس برای یک استوانه است.

حال همین مفاهیم را در مورد سطح شکل ۱۶۰۱۲ اعمال می‌کنیم. این سطح‌مجددا" اجتماع دو سطح پارامتری ساده و هموار S_1 و S_2، یعنی نقشهای دو مستطیل مجاور T_1



شکل ۱۶.۱۲ نوارموبیوس به‌صورت اجتماعی ازدو سطح پارامتری ساده. قضیهٔ استوکس به نوار موبیوس قابل تعمیم نیست.

و T_2 ، است. این سطح خاص **نوار موبیوس** نام دارد؛* مدلی که به‌آسانی می‌توان آن را ازیک‌نوار مستطیلی شکل طویل کاغذی بادادن نیم‌چرخش به‌یک انتهایش و سپس چسباندن دو انتها بهم ساخت. ρ_1 ، ρ_2 ، C_1 ، و C_2 را برای نوار موبیوس مثل استوانه تعریف می‌کنیم. لبهٔ $S_1 \cup S_2$ در این حالت، به‌جای دو منحنی، یک منحنی بستهٔ سادهٔ C' است. این منحنی کرانهٔ کامل نوار موبیوس نامیده می‌شود.

اگر قضیهٔ استوکس‌را برهر قطعهٔ S_1 و S_2 ، همانند استوانه، اعمال کنیم، معادلهٔ (۵۱.۱۲) به‌دست می‌آید. اما، اگر بخواهیم دو انتگرال سطح و دو انتگرال خط‌را مثل بالا یکی‌کنیم، با دو مشکل مواجه‌می‌شویم. اولاً، دو قائم n_1 و n_2 همه‌جا بر فصل‌مشترک $C_1 \cap C_2$ همجهت نیستند. (ر.ک. شکل ۱۶.۱۲) لذا، نمی‌توان قائم n را با فرض $n = n_1$ بر S_1 و $n = n_2$ بر S_2 ، مثل استوانه، برتمام‌سطح تعریف کرد. اما این یک‌مشکل جدی‌نیست، زیرا می‌توان n را بر S_1 و $C_1 \cap C_2$ مساوی n_1 تعریف کرد، و جاهای‌دیگر مساوی n_2 گرفت. بااین کار یک قائم ناپیوسته به‌دست می‌آید، ولی ناپیوستگیهای‌حاصل مجموعه‌ای‌با محتوای صفر در صفحهٔ uv تشکیل می‌دهند و بر وجود یا مقدار انتگرال‌سطح

---

* *بخاطرا. اف. موبیوس* A. F. Möbius (1790 –1868)*، یکی‌از شاگردان گاوس. در سن ۲۶ سالگی‌استاد نجوم درلاپیزیک‌شد، و این مقام را تا زمان مرگش حفظ‌کرد. وی‌کارهای زیادی‌درمکانیک‌سماوی‌کرد، ولی مهمترین تحقیقاتش در هندسه و در نظریهٔ اعداد بوده است.*

$$\iint_{S_1} (\text{curl}\, \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}_1\, dS + \iint_{S_2} (\text{curl}\, \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}_2\, dS = \int_{C_1} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\rho}_1 + \int_{C_2} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\rho}_2, \quad (۵۱\cdot۱۲)$$

که در آن $\boldsymbol{n}_1$ و $\boldsymbol{n}_2$ بترتیب قائمهای معین‌شده به‌وسیلهٔ حاصل‌ضربهای برداری‌اساسی $\boldsymbol{r}_1$ و $\boldsymbol{r}_2$ اند.

حال‌فرض‌کنیم $\boldsymbol{r}$ نگاشت $T_1 \cup T_2$ باشدکه‌با $\boldsymbol{r}_1$ بر T_1 و با $\boldsymbol{r}_2$ بر T_2 یکی بوده، و $\boldsymbol{n}$ قائم یکهٔ نظیرمعین‌شده‌به‌وسیلهٔ حاصل ضرب برداری اساسی $\boldsymbol{r}$ باشد. چون قائمهای $\boldsymbol{n}_1$ و $\boldsymbol{n}_2$ بر $S_1 \cap S_2$ همجهت‌اند، قائم یکهٔ $\boldsymbol{n}$ بر S_1 مساوی $\boldsymbol{n}_1$، و بر S_2 مساوی $\boldsymbol{n}_2$ می‌باشد. لذا، مجموع انتگرالهای سطح در طرف چپ (۵۱۰۱۲) مساوی است با

$$\iint_{S_1 \cup S_2} (\text{curl}\, \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS.$$

دراین‌مثال، نمایشهای $\boldsymbol{r}_1$ و $\boldsymbol{r}_2$ را می‌توان طوری گرفت که $\boldsymbol{\rho}_1$ و $\boldsymbol{\rho}_2$، همانطور که‌سهمها درشکل ۱۵۰۱۲ نشان می‌دهند، بر هر قوس فصل مشترک $C_1 \cap C_2$ جهتهای *مخالف*معین کنند. دوانتگرال خط سمت‌راست (۵۱۰۱۲) را می‌توان با مجموعی از انتگرالهای خط در امتداد دودایرهٔ C_1' و C_2' که لبه‌های‌بالایی و پایینی $S_1 \cup S_2$ را می‌سازند عوض کرد، زیرا انتگرالهای‌خط درامتداد هر قوس فصل مشترک $C_1 \cap C_2$ حذف می‌شوند. بنابراین، معادلهٔ (۵۱۰۱۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\iint_{S_1 \cup S_2} (\text{curl}\, \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = \int_{C_1'} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\rho}_1 + \int_{C_2'} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\rho}_2, \quad (۵۲\cdot۱۲)$$

که در آن انتگرالهای خط‌در جهتهای القا شده از Γ_1 و Γ_2 پیموده می‌شوند. گوییم دو دایرهٔ C_1' و C_2' کرانهٔ کامل $S_1 \cup S_2$ را می‌سازند. معادلهٔ (۵۲۰۱۲) انتگرال سطح $(\text{curl}\, \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}$ را روی $S_1 \cup S_2$ به‌صورت یک انتگرال خط‌روی کرانهٔ کامل $S_1 \cup S_2$ بیان می‌کند. این معادله تعمیم قضیهٔ استوکس برای یک استوانه است.

حال‌همین مفاهیم را در مورد سطح شکل ۱۶۰۱۲ اعمال می‌کنیم. این سطح‌مجدداً اجتماع دو سطح پارامتری ساده و هموار S_1 و S_2، یعنی نقشهای دو مستطیل مجاور T_1

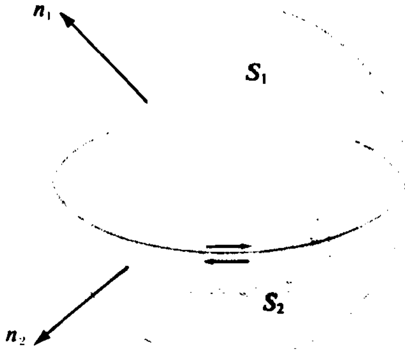
$$\iint_{S_1 \cup S_2} (\text{curl}\, \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS$$

اثری ندارند.

مشکل جدیتروقتی پیش می‌آیدکه بخواهیم انتگرالهای خط را یک کاسه کنیم. دراین مثال، نمی‌توان نگاشتهای r_1 و r_2 را طوری گرفت که ρ_1 و ρ_2 بر هر قوس فصل مشترک $C_1 \cap C_2$ جهتهای مخالف معین کنند. این امر در شکل ۱۶۰۱۲ با سهم نموده شده‌است؛ یکی از ایـن قوسها در یک جهت دوبار پیموده شده است. براین قوس، انتگرالهای خط نظیرلزوما"، مثل استوانه، حذف نمی‌شوند. لذا، مجموع انتگرالهای خط در (۵۱۰۱۲) لزوما" مساوی انتگرال خط روی کرانهٔ کامل $S_1 \cup S_2$ نیست، و قضیهٔ استوکس را نمی‌توان به نوار موبیوس تعمیم داد.

تذکر. استوانه‌و نوار موبیوس بترتیب مثالهایی از سطوح جهت‌پذیر و جهت *نا*پذیراند. ما بـه تعریف دقیق این اصطلاحات نمی‌پردازیم، اما به چند تفاوت آنها اشاره می‌کنیم. برای سطح جهت‌پذیر $S_1 \cup S_2$ حاصل ازدو سطح پارامتری ساده و هموار به‌صورت توصیف شده در بالا، نگاشتهای r_1 و r_2 را همیشه می‌توان طوری گرفت که ρ_1 و ρ_2 بر هر قوس فصل مشترک $C_1 \cap C_2$ جهتهای مخالف معین کنند. برای یک سطح جهت ناپذیر این کار ممکن نیست. در یک سطح جهت پذیر هموار، می‌توان قائم یکهٔ پیوسته‌ای روی تمام سطح تعریف کرد. برای یک سطح جهت ناپذیر، تعریف چنین قائم عملی نیست. مدل کاغذی یک سطح جهت‌پذیر همیشه دو طرف دارد که می‌توان آنها را به‌وسیلهٔ رنگ زدن با دورنگ مختلف از هم تمیز داد. سطوح جهت‌ناپذیر فقط یک طرف دارند. برای بحث دقیقـی از اینها و خـواص دیگر سطـوح جهت پذیر و جهت ناپذیر، ر.ک. کتابی درباب توپولوژی ترکیباتی. قضیهٔ استوکس را می‌توان، با روندی شبیه آنکه برای استوانه در بالا به‌اختصار گفته شد، برای سطوح جهت‌پذیر تعمیم داد.

سطح جهت‌پذیر دیگر کرهٔ شکل ۱۷۰۱۲ است. این سطح اجتماع دو سطح پارامتری ساده (نیمکره) S_1 و S_2 است، که می‌توان آنها را بترتیب نقشهای یک قرص مستدیر در صفحهٔ xy تحت نگاشتهای r_1 و r_2 گرفت. ما به $r, \rho_1, \rho_2, C_1, C_2$ همان معانی داشته در مثالهای فوق را می‌دهیم. دراین حالت، منحنیهای C_1 و C_2 به وسیلهٔ نگاشت r کاملا" همساز می‌شوند (اینها درامتداد استوا هم را قطع می‌کنند)، و سطح $S_1 \cup S_2$ را



شکل ۱۷۰۱۲ تعمیم قضیهٔ استوکس به کره

بسته می‌گوییم . بعلاوه، r_1 و r_2 را می‌توان طوری گرفت که، همانطور که سهمها در شکل ۱۷۰۱۲ نشان می‌دهند، جهتهای معین شده به‌وسیلهٔ ρ_1 و ρ_2 بر C_1 و C_2 مخالف هم باشند . (این بخاطر جهت پذیر بودن $S_1 \cup S_2$ است .) اگر قضیهٔ استوکس را بر هر نیمکره اعمال کرده و نتایج را بهم بیفزاییم ، مثل قبل، معادلهٔ (۵۱۰۱۲) به‌دست می‌آید . قائمهای n_1 و n_2 بر فصل مشترک $C_1 \cap C_2$ یکی هستند ، و می‌توان انتگرالهای روی S_1 و S_2 را در یک انتگرال روی تمام کره گنجاند . دو انتگرال خط سمت راست (۵۱۰۱۲) کاملاً" حذف می‌شوند ، و فرمول

$$\iint_{S_1 \cup S_2} (\operatorname{curl} \boldsymbol{F}) \cdot \boldsymbol{n}\, dS = 0$$

باقی می‌ماند . این نه تنها برای یک کره ، بلکه برای هر سطح بستهٔ جهت پذیر ، برقرار است .

۱۹۰۱۲ قضیهٔ دیورژانس (قضیهٔ گاوس)

قضیهٔ استوکس رابطهٔ بین انتگرال روی یک سطح و انتگرال خط روی یک یا چند منحنی سازندهٔ کرانهٔ این سطح را بیان می‌کند . قضیهٔ دیورژانس رابطهٔ بین انتگرال سه‌گانه روی یک جسم و انتگرال سطح روی کرانهٔ این جسم را بیان خواهد کرد .

قضیهٔ ۶۰۱۲ . قضیهٔ دیورژانس. فرض‌کنیم V جسمی در فضای 3 باشد که به سطح

بسته و جهت پذیر S محدود شده است، و n قائم یکهٔ رو به خارج به S باشد. هرگاه F یک میدان برداری به‌طور پیوسته مشتقپذیر بر V باشد، خواهیم داشت

$$\iiint_V (\operatorname{div} \boldsymbol{F})\, dx\, dy\, dz = \iint_S \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n}\, dS. \tag{۵۳۰۱۲}$$

تذکر. هرگاه F و n را برحسب مولفه‌های آنها بیان کنیم؛ مثلاً،

$$\boldsymbol{F}(x, y, z) = P(x, y, z)\boldsymbol{i} + Q(x, y, z)\boldsymbol{j} + R(x, y, z)\boldsymbol{k}$$

و

$$\boldsymbol{n} = \cos\alpha\, \boldsymbol{i} + \cos\beta\, \boldsymbol{j} + \cos\gamma\, \boldsymbol{k},$$

آنگاه معادلهٔ (۵۳۰۱۲) را می‌توان به‌صورت زیر نوشت:

$$\iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}\right) dx\, dy\, dz = \iint_S (P\cos\alpha + Q\cos\beta + R\cos\gamma)\, dS.$$

(۵۴۰۱۲)

برهان. کافی است سه معادلهٔ

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\, dx\, dy\, dz = \iint_S P\cos\alpha\, dS,$$

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\, dx\, dy\, dz = \iint_S Q\cos\beta\, dS,$$

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_S R\cos\gamma\, dS$$

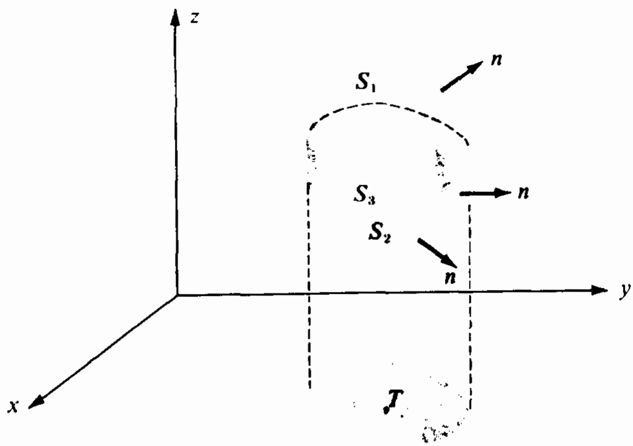
را ثابت کرده، و این نتایج را جمع کنیم تا (۵۴۰۱۲) به‌دست آید. با معادلهٔ سوم شروع کرده، آن را برای اجسام از نوع بسیار خاص ثابت می‌کنیم.

فرض کنیم V مجموعه‌ای از نقاط (x, y, z) صادق در رابطه‌ای به شکل

$$g(x, y) \le z \le f(x, y) \quad \text{به‌ازای } (x, y) \text{ در } T$$

باشد، که در آن T یک ناحیهٔ همبند در صفحهٔ xy بوده، و f و g توابعی پیوسته بر T اند که به‌ازای هر (x, y) در T، $g(x, y) \le f(x, y)$. به‌طور هندسی، این یعنی T تصویر V روی صفحهٔ xy است. هر خط ماربر T موازی محور z جسم V را در امتدادپاره

خطی که سطح $z = g(x, y)$ را به سطح $z = f(x, y)$ وصل می‌کند قطع می‌نماید. سطح کرانه‌ای S ازعرقچین‌فوقانی S_1، که با فرمول صریح $z = f(x, y)$ داده می‌شود؛ قسمت تحتانی S_2، که‌با $z = g(x, y)$ داده می‌شود؛ و (احتمالا") بخش S_3 از استوانه، که‌با خط متحرکی موازی‌محور z در امتداد کرانهٔ T تولید می‌شود تشکیل می‌گردد. قائم روبه خارج‌به S دارای‌مولفهٔ z نامنفی‌بر S_1 و مولفهٔ نامثبت بر S_2 است، و بر S_3 باصفحهٔ xy موازی است. اجسام از این نوع "xy—تصویرپذیر" نامیده می‌شوند. (مثالی در شکل ۱۸۰۱۲ نمـوده شده است.) اینها شامل تمام اجسام محدب‌اند (مثلا"، کره‌های توپر،



شکل ۱۸۰۱۲ مثالی از یک جسم که xy ــ تصویرپذیر است

بیضی‌گونها، مکعبها)، و بسیاری از اجسام که محدب نیستند (مثلا"، چنبره‌های توپر با محورهای موازی محور z).

ایدهٔ اثبات‌کاملا "ساده است. انتگرال سه‌گانه را به‌صورت یک انتگرال مضاعف روی تصویر T بیان‌می‌کنیم. بعد نشان می‌دهیم این انتگرال مضاعف همان مقدار انتگرال‌سطح مورد نظر را دارد. با فرمول

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\, dx\, dy\, dz = \iint_T \left[\int_{g(x,y)}^{f(x,y)} \frac{\partial R}{\partial z}\, dz\right] dx\, dy$$

شروع می‌کنیم. انتگرال یک بعـدی‌نسبت به z را می‌توان با دومین قضیهٔ اساسی حساب

دیفرانسیل و انتگرال حساب کرد، و نتیجه گرفت که

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_T \{R[x, y, f(x, y)] - R[x, y, g(x, y)]\}\,dx\,dy. \quad (۵۵ \cdot ۱۲)$$

برای انتگرال سطح می‌توان نوشت

$$\iint_S R\cos\gamma\,dS = \iint_{S_1} R\cos\gamma\,dS + \iint_{S_2} R\cos\gamma\,dS + \iint_{S_3} R\cos\gamma\,dS. \quad (۵۶ \cdot ۱۲)$$

بر S_3، قائم $\boldsymbol{n}$ مساوی صفحهٔ xy است؛ درنتیجه، $\cos\gamma = 0$ و انتگرال روی S_3 صفر است. بر سطح S_1 از نمایش

$$\boldsymbol{r}(x, y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + f(x, y)\boldsymbol{k},$$

و بر S_2 از نمایش

$$\boldsymbol{r}(x, y) = x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j} + g(x, y)\boldsymbol{k}$$

استفاده می‌کنیم. بر S_1، قائم $\boldsymbol{n}$ همان جهت حاصل ضرب برداری $\partial\boldsymbol{r}/\partial x \times \partial\boldsymbol{r}/\partial y$ را دارد؛ درنتیجه، می‌توان نوشت [ر.ک. معادلهٔ (۲۵ · ۱۲)، ص ۵۸۸]

$$\iint_{S_1} R\cos\gamma\,dS = \iint_{S_1} R\,dx\wedge dy = \iint_T R[x, y, f(x, y)]\,dx\,dy.$$

بر S_2، قائم $\boldsymbol{n}$ جهت مخالف با $\partial\boldsymbol{r}/\partial x \times \partial\boldsymbol{r}/\partial y$ را دارد؛ درنتیجه، طبق معادلهٔ (۲۶ · ۱۲)، داریم

$$\iint_{S_2} R\cos\gamma\,dS = -\iint_{S_2} R\,dx\wedge dy = -\iint_T R[x, y, g(x, y)]\,dx\,dy.$$

لذا، معادلهٔ (۵۶ · ۱۲) خواهد شد

$$\iint_S R\cos\gamma\,dS = \iint_T \{R[x, y, f(x, y)] - R[x, y, g(x, y)]\}\,dx\,dy.$$

از مقایسهٔ این با معادلهٔ (۵۵ · ۱۲)، معلوم می‌شود که

$$\iiint_V \frac{\partial R}{\partial z}\,dx\,dy\,dz = \iint_S R\cos\gamma\,dS.$$

در برهان فوق، بخاطر فرض xy ـ تصویر پذیر بودن V می‌توان انتگرال سه‌گانه‌روی V را به‌صورت یک انتگرال مضاعف روی تصویرش T در صفحهٔ xy بیان کرد. واضح است که اگر V، yz ـ تصویرپذیر باشد، می‌توان، با همین نوع استدلال، اتحاد

$$\iiint_V \frac{\partial P}{\partial x}\,dx\,dy\,dz = \iint_S P\cos\alpha\,dS$$

را ثابت نمود؛ و اگر V، xz تصویرپذیر باشد، به‌دست آورد که

$$\iiint_V \frac{\partial Q}{\partial y}\,dx\,dy\,dz = \iint_S Q\cos\beta\,dS\,.$$

لذا، می‌بینیم که قضیهٔ دیورژانس برای همهٔ اجسام تصویرپذیر بر هر سه صفحهٔ مختصات معتبر است. بالاخص، برای هر جسم محدب برقرار خواهد بود.

یک چنبرهٔ توپر با محور موازی محور z، xy ـ تصویرپذیر است ولی xz ـ تصویرپذیر یا yz ـ تصویر پذیر نیست. برای تعمیم قضیهٔ دیورژانس به چنین جسمی، چنبره را با صفحات مار بر محور آن و موازی صفحات xz و yz به چهار قسمت تقسیم کرده، و قضیهٔ دیورژانس را بر هر قسمت اعمال می‌نماییم. انتگرال سه‌گانه روی تمام چنبره مجموع انتگرالهای سه‌گانه روی چهار قسمت است. وقتی انتگرالهای سطح روی چهار قسمت را با هم جمع کنیم، درمی‌یابیم که قسمتهای ناشی از وجوه مشترک بخشهای مجاور هم را حذف می‌کنند، زیرا قائمهای رو به خارج بر دو وجه این چنینی جهتهای مخالف دارند. لذا، مجموع انتگرالهای سطح روی چهار قسمت مساوی انتگرال سطح روی تمام چنبره است. این مثال طرز تعمیم قضیهٔ دیورژانس به بعضی از اجسام نامحدب را توضیح می‌دهد.

۲۰۰۱۲ کاربردهای قضیهٔ دیورژانس

مفاهیم کرل و دیورژانس میدان برداری $F = Pi + Qj + Rk$ در بخش ۱۲۰۱۲ با فرمولهای

$$\operatorname{div} F = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \tag{۵۷۰۱۲}$$

و

$$\operatorname{curl} F = \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}\right)i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}\right)j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)k \tag{۵۸۰۱۲}$$

معرفی شدند .برای محاسبهٔ $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ و $\operatorname{curl} \boldsymbol{F}$ از این فرمولها ، باید از مولفه‌های $\boldsymbol{F}$ اطلاع داشته باشیم . این مولفه‌ها ، به نوبهٔ خود ، به محورهای مختصات در فضای 3 بستگی دارند . یک تغییر در محورهای مختصات یعنی تغییر در مولفه‌های $\boldsymbol{F}$ و ، احتمالاً ، تغییر درتوابع $\operatorname{div} \boldsymbol{F}$ و $\operatorname{curl} \boldsymbol{F}$. به کمک قضیهٔ استوکس و قضیهٔ دیورژانس می‌توان فرمولهایی برای دیورژانس و کرل به‌دست آورد که مستلزم مولفه‌های $\boldsymbol{F}$ نباشند . این فرمولها نشان می‌دهند که کرل و دیورژانس خواص ذاتی میدان برداری $\boldsymbol{F}$ را نمایش داده و به محورهای مختصات خاصی بستگی ندارند . ابتدا فرمول دیورژانس را مورد بحث قرار می‌دهیم .

قضیهٔ ۷۰۱۲ . *فرض کنیم $V(t)$ کره‌ای توپر به شعاع $0 < t$ و مرکز $\boldsymbol{a}$ در فضای 3 بوده ، و $S(t)$ کرانهٔ $V(t)$ باشد . همچنین ، $\boldsymbol{F}$ یک میدان برداری به‌طور پیوسته مشتقپذیر بر $V(t)$ باشد . در این صورت ، اگر $|V(t)|$ حجم $V(t)$ بوده و $\boldsymbol{n}$ قائم یکهٔ رو به خارج به S باشد ، خواهیم داشت*

$$\operatorname{div} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t \to 0} \frac{1}{|V(t)|} \iint_{S(t)} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, dS . \tag{۵۹۰۱۲}$$

برهان. فرض کنیم $\varphi = \operatorname{div} \boldsymbol{F}$. اگر $0 < \epsilon$ مفروض باشد ، باید $0 < \delta$ ای یافت بطوری که

$$\text{هر وقت } 0 < t < \delta \text{ ،} \quad \left| \varphi(\boldsymbol{a}) - \frac{1}{|V(t)|} \iint_{S(t)} \boldsymbol{F} \cdot \boldsymbol{n} \, dS \right| < \epsilon . \tag{۶۰۰۱۲}$$

چون φ در $\boldsymbol{a}$ پیوسته است ، به‌ازای ϵ داده شده، یک 3 ـ گوی مانند $B(\boldsymbol{a}; h)$ هست بطوری که

$$\text{هر وقت } \boldsymbol{x} \in B(\boldsymbol{a}; h) \text{ ،} \quad |\varphi(\boldsymbol{x}) - \varphi(\boldsymbol{a})| < \frac{\epsilon}{2} .$$

لذا ، اگر بنویسیم $\varphi(\boldsymbol{a}) = \varphi(\boldsymbol{x}) + [\varphi(\boldsymbol{a}) - \varphi(\boldsymbol{x})]$ و از طرفین این معادله روی کرهٔ توپر $V(t)$ به شعاع $t < h$ انتگرال بگیریم ، خواهیم داشت

$$\varphi(\boldsymbol{a}) \, |V(t)| = \iiint_{V(t)} \varphi(\boldsymbol{x}) \, dx \, dy \, dz + \iiint_{V(t)} [\varphi(\boldsymbol{a}) - \varphi(\boldsymbol{x})] \, dx \, dy \, dz .$$

اگر قضیهٔ دیورژانس را بر اولین انتگرال سه‌گانهٔ سمت راست اعمال کرده و بعد این جمله را به سمت چپ ببریم ، رابطهٔ زیر را به‌دست خواهیم آورد :

$$\left| \varphi(\boldsymbol{a})\,|V(t)| - \iint_{S(t)} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS \right| \le \iiint_{V(t)} |\varphi(\boldsymbol{a}) - \varphi(\boldsymbol{x})|\,dx\,dy\,dz \le \frac{\epsilon}{2}|V(t)| < \epsilon\,|V(t)|.$$

وقتی‌این‌نامساوی را بر $|V(t)|$ تقسیم کنیم ، می‌بینیم که (۶۰۰۱۲) به‌ازای $\delta = h$ برقرار است . این قضیه را ثابت خواهد کرد .

در برهان فوق از کره بودن $V(t)$ هیچ‌استفاده‌ای نشد . اگر به‌جای کرات از اجسام $V(t)$ که قضیهٔ‌دیورژانس برایشان برقرارنداستفاده شود ،همین قضیه درست خواهد بود ، مشروط‌براینکه این‌اجسام‌شامل نقطهٔ $\boldsymbol{a}$ بوده و ، وقتی $t \to 0$ ، به نقطهٔ $\boldsymbol{a}$ جمع شوند . مثلا" ، هر $V(t)$ را می‌توان مکعبی محاط شده در یک کره به شعاع t حول $\boldsymbol{a}$ گرفت . در این حالت ، دقیقا" همان برهان قابل انجام است .

با استفاده از قضیهٔ ۷۰۱۲ ، می‌توان دیورژانس را تعبیر فیزیکی کرد . فرض کنیم $\boldsymbol{F}$ بردار چگالی شار یک جریان پایدار باشد . دراین صورت ، انتگرال سطح $\iint_{S(t)} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ جرم کل مایع گذران از S در واحد زمان و در جهت $\boldsymbol{n}$ را می‌سنجد . کسر $\iint_{S(t)} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS/|V(t)|$ نمایش جرم در واحد حجم است که از S در واحد زمان و در جهت $\boldsymbol{n}$ می‌گذرد . وقتی $t \to 0$ ، حد این کسر دیورژانس $\boldsymbol{F}$ در $\boldsymbol{a}$ است . لذا ، دیورژانس در $\boldsymbol{a}$ را می‌توان میزان تغییر زمانی جرم در واحد حجم و در واحد زمان در $\boldsymbol{a}$ تعبیر کرد .

در بعضی کتابهای آنالیز برداری ، معادلهٔ (۵۹۰۱۲) به‌عنوان تعریف دیورژانس گرفته می‌شود . با این تعریف می‌توان فورا" به دیورژانس معنی فیزیکی داد . همچنین ، فرمول (۵۹۰۱۲) مستلزم مولفه‌های $\boldsymbol{F}$ نیست . لذا ، در هر دستگاه مختصات برقرار است . اگر $V(t)$ رایک‌مکعب با اضلاع موازی محورهای مختصات xyz و مرکز $\boldsymbol{a}$ بگیریم ، می‌توان ، بااستفاده ازمعادلهٔ (۵۹۰۱۲) ، فرمول (۵۷۰۱۲) را نتیجه گرفت ، که $\operatorname{div}\boldsymbol{F}$ رابرحسب مولفه‌های $\boldsymbol{F}$ بیان‌می‌کند . این روند در تمرین ۱۴ از بخش ۲۱۰۱۲ به‌اختصار توضیح‌داده شده است .

فرمولی شبیه (۵۹۰۱۲) وجود دارد که گاهی به عنوان تعریف کرل به‌کار می‌رود . این فرمول می‌گوید که

$$\operatorname{curl} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{|V(t)|} \iint_{S(t)} \boldsymbol{n} \times \boldsymbol{F}\, dS, \tag{۶۱۰۱۲}$$

که‌درآن $V(t)$ و $S(t)$ همان معانی داشته در قضیهٔ ۷۰۱۲ را دارند. انتگرال سطح سمت راست دارای انتگرالده برداری است. این انتگرالها را می‌توان برحسب مولفه‌ها تعریف کرد. برهان (۶۱۰۱۲) شبیه برهان قضیهٔ ۷۰۱۲ است.

فرمول دیگری‌دررابطه‌با کرل‌وجود دارد که می‌توان آن را از (۶۱۰۱۲) و یامستقلاً به‌دست آورد. این فرمول می‌گوید که

$$\boldsymbol{n} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) = \lim_{t\to 0} \frac{1}{|S(t)|} \oint_{C(t)} \boldsymbol{F} \cdot d\boldsymbol{\alpha}. \tag{۶۲۰۱۲}$$

دراین فرمول، $S(t)$ یک قرص مستدیر به شعاع t و مرکز $\boldsymbol{a}$ است، و $|S(t)|$ مساحت آن را نشان می‌دهد. بردار $\boldsymbol{n}$ یک قائم یکه به $S(t)$ است، و $\boldsymbol{\alpha}$ تابعی است که $C(t)$ را در جهتی که وقتی از نوک $\boldsymbol{n}$ نظاره شود خلاف حرکت عقربه‌های ساعت است می‌پیماید. میدان برداری $\boldsymbol{F}$ بر $S(t)$ به‌طور پیوسته مشتقپذیر فرض می‌شود. برهانی از (۶۲۰۱۲) را می‌توان با همان روشی که (۵۹۰۱۲) اثبات شد ارائه داد. قرار می‌دهیم $\varphi(x) = \boldsymbol{n} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{F}(x)$ و مثل قبل استدلال می‌کنیم، جز آنکه به‌جای انتگرالهای سه‌گانه از انتگرالهای سطح، و به‌جای قضیهٔ دیورژانس از قضیهٔ استوکس استفاده می‌کنیم.

اگر $\boldsymbol{F}$ یک میدان سرعت‌باشد، انتگرال‌خط‌روی $C(t)$ جریان‌بستهٔ $\boldsymbol{F}$ درامتداد $C(t)$ نامیده می‌شود. حد در (۶۲۰۱۲) نمایش‌جریان‌بسته‌درواحدمساحت در نقطهٔ $\boldsymbol{a}$ است. لذا، $\boldsymbol{n} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$ رامی‌توان "چگالی‌جریان‌بستهٔ $\boldsymbol{F}$" درنقطهٔ $\boldsymbol{a}$ نسبت‌به‌صفحه‌ای‌عمود بر $\boldsymbol{n}$ در $\boldsymbol{a}$ درنظر گرفت.

وقتی $\boldsymbol{n}$ مقادیرمتوالی $\boldsymbol{i}$، $\boldsymbol{j}$، و $\boldsymbol{k}$ را بگیرد، حاصل‌ضربهای نقطه‌ای $\boldsymbol{i} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{F}$، $\boldsymbol{j} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{F}$، و $\boldsymbol{k} \cdot \operatorname{curl} \boldsymbol{F}$ مولفه‌های $\operatorname{curl} \boldsymbol{F}$ در مختصات قائم اند. وقتی معادلهٔ (۶۱۰۱۲) را نقطهٔ شروع تعریف کرل بگیریم، فرمول (۵۸۰۱۲) برای مولفه‌های قائم $\operatorname{curl} \boldsymbol{F}$ را می‌توان از (۶۲۰۱۲) درست به همین روش نتیجه گرفت.

۲۱۰۱۲ تمرین

۱. فرض کنید S سطح‌مکعب‌یکهٔ $0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1, 0 \le z \le 1$ بوده، و $\boldsymbol{n}$ قائم یکهٔ روبه‌خارج به S باشد. اگر $\boldsymbol{F}(x, y, z) = x^2\boldsymbol{i} + y^2\boldsymbol{j} + z^2\boldsymbol{k}$، با استفاده‌ازقضیهٔ

دیورژانس، انتگرال سطح $\iint_S \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ را حساب کنید. نتیجه را با محاسبهٔ مستقیم انتگرال سطح تحقیق کنید.

۲ . کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 25$ به‌وسیلهٔ صفحهٔ $z = 3$ قطع می‌شود. بخش کوچکتر جسم V را تشکیل می‌دهد که به سطح بستهٔ S_0 مرکب از دو قسمت محدود شده است، یک قسمت کروی S_1 و یک قسمت مسطح S_2. هرگاه قائم یکهٔ رو به خارج V، $\cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k}$ باشد، انتگرال سطح

$$\iint_S (xz\cos\alpha + yz\cos\beta + \cos\gamma)\,dS$$

را حساب کنید اگر (آ) S عرقچین کروی S_1 باشد؛ (ب) S قاعدهٔ مسطح S_2 باشد؛ (پ) S کرانهٔ کامل S_0 باشد. قسمت (پ) را با استفاده از قسمتهای (آ) و (ب)، و نیز با استفاده از قضیهٔ دیورژانس، حل کنید.

۳ . فرض کنید $\boldsymbol{n} = \cos\alpha\,\boldsymbol{i} + \cos\beta\,\boldsymbol{j} + \cos\gamma\,\boldsymbol{k}$ قائم یکهٔ رو به خارج به سطح بستهٔ S باشد که جسم همگن V از نوع توصیف شده در قضیهٔ دیورژانس را محدود می‌کند. فرض کنید مرکز جرم $(\bar{x}, \bar{y}, \bar{z})$ و حجم $|V|$ جسم V معلوم باشند. انتگرالهای سطح زیر را برحسب $|V|$ و $\bar{x}, \bar{y}, \bar{z}$ حساب کنید:

(آ) $\iint_S (x\cos\alpha + y\cos\beta + z\cos\gamma)\,dS$؛

(ب) $\iint_S (xz\cos\alpha + 2yz\cos\beta + 3z^2\cos\gamma)\,dS$؛

(پ) $\iint_S (y^2\cos\alpha + 2xy\cos\beta - xz\cos\gamma)\,dS$؛

(ت) $\iint_S (x^2 + y^2)(x\boldsymbol{i} + y\boldsymbol{j})\cdot\boldsymbol{n}\,dS$ را برحسب حجم $|V|$ و گشتاور ماند جسم بیان کنید.

در تمرینهای ۴ تا ۱۰، $\partial f/\partial n$ و $\partial g/\partial n$ مشتقات جهتی میدانهای اسکالر f و g در جهت قائم یکهٔ رو به خارج $\boldsymbol{n}$ به سطح بستهٔ S که جسم V از نوع توصیف شده درقضیهٔ دیورژانس را محدود می‌کند را نشان می‌دهند. یعنی، $\partial f/\partial n = \nabla f\cdot\boldsymbol{n}$ و $\partial g/\partial n = \nabla g\cdot\boldsymbol{n}$. درهریک از این تمرینها، حکم داده‌شده را ثابت نمایید. همهٔ مشتقات مربوطه رامی‌توانید پیوسته بگیرید.

۴ . $\displaystyle\iint_S \frac{\partial f}{\partial n}\,dS = \iiint_V \nabla^2 f\,dx\,dy\,dz$.

۵ . $\iint_S \frac{\partial f}{\partial n}\, dS = 0$ ، هر وقت f در V توافقی باشد .

۶ . $\iint_S f\frac{\partial g}{\partial n}\, dS = \iiint_V f\nabla^2 g\, dx\, dy\, dz + \iiint_V \nabla f\cdot \nabla g\, dx\, dy\, dz$

۷ . $\iint_S \left(f\frac{\partial g}{\partial n} - g\frac{\partial f}{\partial n}\right) dS = \iiint_V (f\nabla^2 g - g\nabla^2 f)\, dx\, dy\, dz$.

۸ . $\iint_S f\frac{\partial g}{\partial n}\, dS = \iint_S g\frac{\partial f}{\partial n}\, dS$ اگر هردوی f و g در V توافقی باشند .

۹ . $\iint_S f\frac{\partial f}{\partial n}\, dS = \iiint_V |\nabla f|^2\, dx\, dy\, dz$ اگر f در V توافقی باشد .

۱۰ . $\nabla^2 f(a) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{|V(t)|}\iint_{S(t)} \frac{\partial f}{\partial n}\, dS$ ، که در آن $V(t)$ یک کرهٔ توپر به شعاع t و مرکز a است ، $S(t)$ سطح $V(t)$ است ، و $|V(t)|$ حجم $V(t)$ می‌باشد .

۱۱ . فرض کنید V یک ناحیهٔ محدب در فضای 3 باشد که کرانه‌اش سطح بستهٔ S بوده و n قائم یکهٔ رو به خارج به S است . همچنین ، F و G میدانهای برداری به‌طور پیوسته مشتقپذیری باشند بطوری که

همه‌جا در V ، $\operatorname{curl} F = \operatorname{curl} G$ و $\operatorname{div} F = \operatorname{div} G$ ،

و

همه‌جا بر S ، $G\cdot n = F\cdot n$.

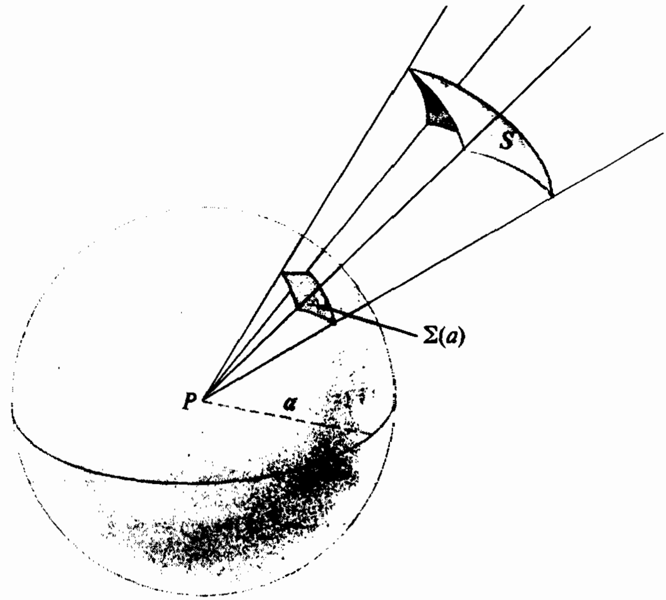
ثابت‌کنید همه‌جا در V ، $F = G$. [راهنمایی . فرض کنید $H = F - G$ ، میدان اسکالر f را طوری بیابید که $H = \nabla f$ ، و ، با استفاده از اتحادی مناسب ، ثابت کنید که $\iiint_V \|\nabla f\|^2\, dx\, dy\, dz = 0$. از این نتیجه بگیرید که ، در V ، $H = O$.]

۱۲ . میدان برداری G و دو میدان اسکالر f و g ، که بر جسم محدب V محدود به سطح بستهٔ S به‌طور پیوسته مشتقپذیراند ، داده شده‌اند . همچنین ، n قائم یکهٔ

رو به خارج به S می‌باشد. ثابت کنید حداکثر یک میدان برداری مانند F هست که در سه شرط زیر صدق می‌کند:

در V ، $\operatorname{curl} F = G$ و $\operatorname{div} F = g$ ؛ بر S ، $F \cdot n = f$.

۱۳ . فرض کنید S یک سطح پارامتری هموار با این خاصیت باشد که هر خط صادر شده از نقطهٔ P ، S را حداکثر یکبار قطع کند. همچنین، $\Omega(S)$ مجموعهٔ خطوط صادر شده از P و مار بر S باشد. (ر.ک. شکل ۱۲.۱۹.) مجموعهٔ



شکل ۱۲.۱۹ زاویهٔ فضایی $\Omega(S)$ به راس P مقابل سطح S است. این زاویه با کسر $\dfrac{\text{مساحت } \Sigma(a)}{a^2} = |\Omega(S)|$ سنجیده می‌شود.

$\Omega(S)$ **زاویهٔ فضایی** به راس P و مقابل S نامیده می‌شود. فرض کنید $\Sigma(a)$ فصل مشترک $\Omega(S)$ با سطح کره به شعاع a و مرکز P باشد. کسر

$$\frac{\text{مساحت } \Sigma(a)}{a^2}$$

با $|\Omega(S)|$ نموده شده، و برای سنجش زاویهٔ فضایی $\Omega(S)$ به‌کار می‌رود.

(آ) ثابت کنید این کسر مساوی انتگرال سطح

$$\iint_S \frac{\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{n}}{r^3}\,dS$$

است، که در آن $\boldsymbol{r}$ بردار شعاعی از P تا یک نقطهٔ دلخواه S بوده، و $r = \|\boldsymbol{r}\|$. بردار $\boldsymbol{n}$ قائم یکه‌به S در جهت خارج از P است. این نشان می‌دهد که کسر مربوط به $|\Omega(S)|$ از شعاع a مستقل است. بنابراین، زاویهٔ فضایی را می‌توان به‌وسیلهٔ مساحت فصل مشترک $\Omega(S)$ و کرهٔ یکه حول P سنجید. [**راهنمایی.** قضیهٔ دیورژانس را برآن بخش از $\Omega(S)$ که بین S و $\Sigma(a)$ واقع است اعمال کنید.]

(ب) دو صفحه در امتداد قطری از یک کره به مرکز P هم را قطع می‌کنند. زاویهٔ تقاطع θ است، که $0 < \theta < \pi$. فرض کنید S بخش کوچکتر جدا شده از سطح کره به وسیلهٔ دو صفحه باشد. نشان دهید که $|\Omega(S)| = 2\theta$.

۱۴ . فرض کنید $V(t)$ مکعبی به ضلع $2t$ و مرکز $\boldsymbol{a}$ بوده، و $S(t)$ کرانهٔ مکعب باشد. همچنین، $\boldsymbol{n}$ قائم یکهٔ رو به خارج $S(t)$ بوده، و $|V(t)|$ حجم مکعب باشد. فرض کنید، به‌ازای میدان برداری $\boldsymbol{F}$ که در $\boldsymbol{a}$ به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر است، حد زیر موجود باشد:

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{|V(t)|}\iint_{S(t)} \boldsymbol{F}\cdot\boldsymbol{n}\,dS,$$

و این حد را تعریف دیورژانس، یعنی $\operatorname{div}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a})$ ، بگیرید. محورهای مختصات xyz را موازی اضلاع $V(t)$ گرفته، و P ، Q ، و R را مولفه‌های $\boldsymbol{F}$ نسبت به این دستگاه مختصات بدانید. ثابت کنید که $\operatorname{div}\boldsymbol{F}(\boldsymbol{a}) = D_1P(\boldsymbol{a}) + D_2Q(\boldsymbol{a}) + D_3R(\boldsymbol{a})$.
[**راهنمایی.** انتگرال سطح را به‌صورت مجموع شش انتگرال مضاعف روی وجوه مکعب بیان کنید. سپس نشان دهید که $1/|V(t)|$ ضرب‌در مجموع دو انتگرال مضاعف روی وجوه عمود بر محور z ، وقتی $t\to 0$ ، به حد $D_3R(\boldsymbol{a})$ نزدیک می‌شود. برای جملات باقیمانده به همین نحو استدلال کنید.]

۱۵ . میدان اسکالر φ که هرگز صفر نیست دارای خواص زیر است:

$$\|\nabla\varphi\|^2 = 4\varphi \quad \text{و} \quad \operatorname{div}(\varphi\nabla\varphi) = 10\varphi \ .$$

انتگرال سطح $\iint_S \frac{\partial\varphi}{\partial n}\,dS$ را، که‌در آن S سطح یک کره یکه به مرکز مبداء بوده و $\partial\varphi/\partial n$ مشتق جهتی φ در جهت قائم یکهٔ رو به خارج به S است، را حساب کنید.