

حساب دیفرانسیل و انتگرال

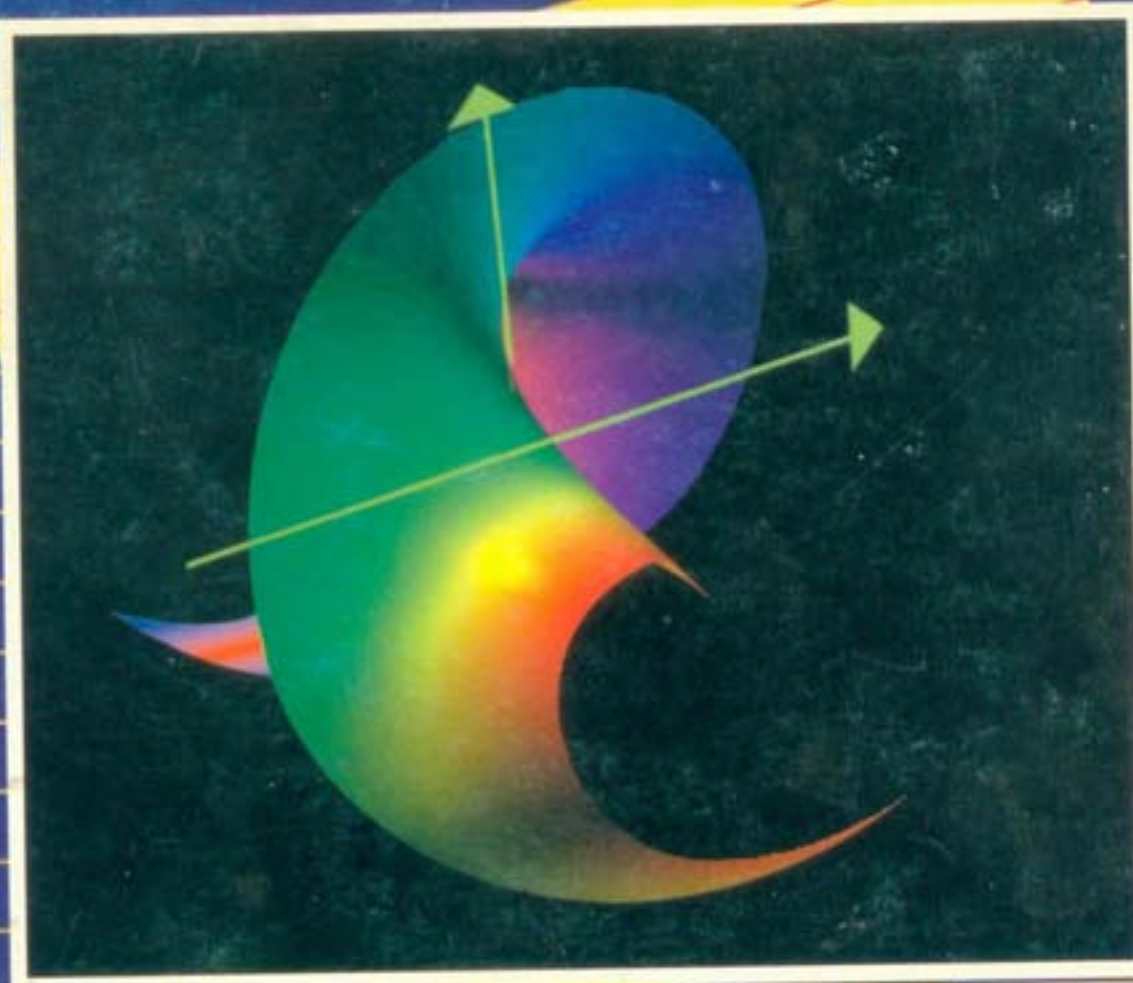
با هندسه تحلیلی

۲

«کتاب عام»

نوشته ریچارد ا. سیلورمن

ترجمه دکتر علی اکبر عالم زاده



جلد دوم

روشهای انتگرالگیری^۷

فرمولهای انتگرالگیری، که در فصلهای ۴ تا ۶ به دست آمدند، اگرچه بسیارند ولی حوایج حساب دیفرانسیل و انتگرال عملی را کلاً برنمی‌آورند. لذا، در فصل حاضر به مسئله محاسبه انتگرالها، هم نامعین و هم معین، شدیداً حمله می‌کنیم. دوروش انتگرالگیری که از همه مهمترند عبارتند از انتگرالگیری به وسیله جانشانی (ر.ک. بخش ۱۰۷) و انتگرالگیری جزء به جزء (ر.ک. بخش ۲۰۷). این روشها ابراز اصلی بخشهای آتی، که در آنها انتگرالهای مختلفی شامل توابع مثلثاتی و رادیکالها مطرح می‌شوند، نیز می‌باشند. علاوه بر این، تکنیکی کلی برای انتگرالگیری از یک تابع گویای دلخواه وجود دارد که در بخش ۶۰۷ داده خواهد شد.

ویژگی جالب این مبحث وجود انتگرالهای بسیاری است، بعضی با صورت ساده، که نمی‌توان آنها را "به شکل بسته" حساب کرد. مثلاً، هیچیک از انتگرالهای

$$(1) \quad \int e^{-x^2} dx, \quad \int \frac{\sin x}{x} dx, \quad \int \cos x^2 dx$$

را نمی‌توان با فرمول صریحی شامل تعدادی متناهی عمل جبری، به انضمام ترکیب و ریشه‌گیری بر توابع که در فصول قبل بررسی شدند، بیان کرد (هر تابع که قابل بیان با چنین فرمولی باشد مقدماتی نام دارد). برای پرداختن به انتگرالهایی چون (۱) باید به روشهای تقریب بخش ۸۰۷ پناه برد یا از سریهای نامتناهی استفاده کرد (ر.ک. فصل ۹). همچنین، می‌توان این گونه انتگرالها را توابع "جدیدی" گرفت و آنها را، همانطور که در مورد انتگرال $\int (1/x) dx$ معرف لگاریتم طبیعی کردیم، مطالعه نمود.

مفهوم انتگرال را می‌توان تعمیم داد تا انتگرالهای مجازی را نیز دربرگیرد؛ یعنی، انتگرالهایی با انتگرالدههای بی‌کران و انتگرالهاری بازه‌های بی‌کران. بخش ۹۰۷ به این مبحث مهم اختصاص دارد.

۱۰۷ انتگرالگیری به وسیلهٔ جانشانی

قاعدهٔ زنجیره‌ای برای مشتقگیری از یک تابع مرکب ما را به روش انتگرالگیری مهمی می‌رساند، به نام انتگرالگیری به وسیلهٔ جانشانی (یا انتگرالگیری به وسیلهٔ تغییر متغیر)، که می‌توان از آن برای محاسبهٔ انتگرالهای نامعین و معین استفاده کرد. ابتدا به انتگرالهای نامعین می‌پردازیم.

قضیهٔ ۱ (محاسبهٔ انتگرال نامعین به وسیلهٔ جانشانی). فرض کنیم $f(u)$ تابع پیوسته‌ای بوده، و $u = u(x)$ تابعی با مشتق پیوستهٔ $u'(x)$ باشد. در این صورت،

$$(1) \quad \int f(u(x))u'(x) dx = \int f(u) du \Big|_{u=u(x)},$$

که در آن نماد سمت راست یعنی پس از محاسبهٔ انتگرال $\int f(u) du$ جانشانی $u = u(x)$ صورت می‌گیرد.

برهان. برای اثبات تساوی دو انتگرال در (۱)، فرض کنیم F یک پادمشتق f باشد، که وجود F را پیوستگی f تضمین می‌کند (ر.ک. قضیهٔ ۵، ص ۴۰۵). در این صورت، طبق قاعدهٔ زنجیره‌ای،

$$\frac{d}{dx} F(u(x)) = F'(u(x))u'(x),$$

و در نتیجه،

$$(2) \quad \int f(u(x))u'(x) dx = \int F'(u(x))u'(x) dx = F(u(x)) + C,$$

که در آن C ثابت دلخواهی است. اما، از آن سو،

$$(2') \quad \int f(u) du \Big|_{u=u(x)} = [F(u) + C] \Big|_{u=u(x)} = F(u(x)) + C,$$

و مقایسهٔ (۲) و (۲') فوراً (۱) را نتیجه می‌دهد.

توجه کنید که عامل اضافی $u'(x)$ سمت چپ معادلهٔ (۱) در دیفرانسیل du سمت راست پنهان شده است، زیرا $du = u'(x) dx$. حال می‌توان استفاده از نماد انتگرالها را درک کرد که در آن عبارت پس از علامت انتگرال به صورت حاصل ضرب تابعی که انتگره می‌شود (انتگرالده) و دیفرانسیل متغیر انتگرالگیری نوشته می‌شود. در واقع، اگر متغیر

انتگرالگیری تغییر کند، دیفرانسیل خود بخود عمل قاعده^۴ زنجیره‌ای را می‌پذیرد. کار با دیفرانسیلها نقشی کلیدی در مثالهای زیر ایفا می‌کند.

مثال ۱. $\int \sin^3 x \cos x \, dx$ را حساب کنید.

حل. فرض کنیم $u = \sin x$. در این صورت، $du = (D_x \sin x) \, dx = \cos x \, dx$ ، و

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \int u^3 \, du = \frac{1}{4} u^4 + C.$$

بنابراین، پس از تعویض u با $\sin x$ ،

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \frac{1}{4} \sin^4 x + C.$$

در اینجا، مثل هر مسئله^۴ محاسبه^۴ یک انتگرال نامعین، امتحان نتیجه^۴ کار با تحقیق اینکه مشتق جواب مساوی انتگرالده است فکر خوبی است (این کار را انجام دهید). در این مثال توابع آمده در قضیه^۱ عبارتند از $f(u) = u^3$ و $u = \sin x$ ، و معادله^۴ (۱) شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$\int \sin^3 x \cos x \, dx = \int u^3 \, du \Big|_{u=\sin x}$$

مثال ۲. $\int \sin^3 x \, dx$ را حساب کنید.

حل. در مثال ۱ جانشانی مناسب $u = u(x)$ فوراً مشخص شد، ولی در اینجا این انتخاب کمتر واضح است. ابتدا ممکن است اغوا شده همان جانشانی $u = \sin x$ را انجام دهیم، ولی این انتخاب نامناسب است، زیرا $du = \cos x \, dx$ و عاملی از $\cos x$ در انتگرال داده شده وجود ندارد. به جای این کار جانشانی $u = \cos x$ را انجام می‌دهیم. در این صورت $du = (D_x \cos x) \, dx = -\sin x \, dx$ ، و انتگرالده قبلاً "شامل $\sin x$ به‌عنوان عامل است؛ در نتیجه،

$$\int \sin^3 x \, dx = \int (-\sin^2 x) \, du.$$

حال پیشرفت بیشتر به عبارت $-\sin^2 x$ بر حسب متغیر u بستگی دارد. این کار به سهولت انجام می‌شود، زیرا

$$-\sin^2 x = \cos^2 x - 1 = u^2 - 1.$$

بنابراین،

$$\int \sin^3 x \, dx = \int (u^2 - 1) \, du = \frac{1}{3} u^3 - u + C,$$

که، پس از تعویض u با $\cos x$ ، نتیجه می‌دهد که

$$\int \sin^3 x \, dx = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C.$$

در اینجا توابع قضیه ۱ عبارتند از $f(u) = u^2 - 1$ و $u = \cos x$ ، و معادله (۱) شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$\int \sin^3 x \, dx = \int (u^2 - 1) \, du \Big|_{u=\cos x}$$

به محض گرفتن ایده انتگرالگیری به وسیله جانشانی، می‌توان بعضی از مراحل میانی حتی معرفی صریح متغیر کمکی u ، را حذف کرد. لذا، جواب فشرده‌تر مثال ۲ عبارت است از

$$\begin{aligned} \int \sin^3 x \, dx &= \int \sin^2 x \sin x \, dx = \int (-\sin^2 x) d(\cos x) \\ &= \int (\cos^2 x - 1) d(\cos x) = \frac{1}{3} \cos^3 x - \cos x + C, \end{aligned}$$

که در آن تمام عبارت $\cos x$ متغیر انتگرالگیری گرفته شده است.

مثال ۳. $\int x\sqrt{2+3x} \, dx$ را حساب کنید.

حل. فرض کنیم $u = 2 + 3x$. در این صورت، $x = \frac{1}{3}(u - 2)$ ، $dx = \frac{1}{3}du$ ، $du = 3 \, dx$ ؛ و در نتیجه،

$$\begin{aligned} \int x\sqrt{2+3x} \, dx &= \frac{1}{9} \int (u - 2) \sqrt{u} \, du = \frac{1}{9} \int (u^{3/2} - 2u^{1/2}) \, du \\ &= \frac{2}{45} u^{5/2} - \frac{4}{27} u^{3/2} + C \\ &= \frac{2}{45} (2 + 3x)^{5/2} - \frac{4}{27} (2 + 3x)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

این نتیجه را با مشتگیری مستقیم از عبارت سمت راست تحقیق کنید .

مثال ۰۴. $\int \sec x \, dx$ را حساب کنید .

حل. با همان شیوه‌ای که به فرمول (۴) ، صفحه ۴۹۸ ، برای انتگرال $\tan x$ منجر شد ، می‌توان دید که اگر $\sec x$ را به شکل زیر بنویسیم

$$\sec x = \sec x \frac{\sec x + \tan x}{\sec x + \tan x} = \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x},$$

صورت عبارت اخیر مشتق مخرج آن است! لذا ، با انتخاب $u = \sec x + \tan x$ ، داریم ،
 $du = (\sec x \tan x + \sec^2 x) dx$ و در نتیجه ،

$$\int \sec x \, dx = \int \frac{\sec x \tan x + \sec^2 x}{\sec x + \tan x} dx = \int \frac{du}{u} = \ln |u| + C.$$

لذا ،

$$(۳) \quad \int \sec x \, dx = \ln |\sec x + \tan x| + C.$$

به‌طور معادل ، (۳) را می‌توان با قرار دادن $f(x) = \sec x + \tan x$ در فرمول

$$(۴) \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln |f(x)| + C,$$

که در صفحه ۴۹۸ با مشتگیری مستقیم از $\ln |f(x)|$ ثابت شد ، به دست آورد . به عنوان تمرین ، رابطه (۴) را با جانشانی $u = f(x)$ تحقیق کنید .

حال مشابه قضیه ۱ را برای انتگرالهای معین در نظر می‌گیریم .

قضیه ۱' (محاسبه انتگرال معین به وسیله جانشانی) . فرض کنیم $u = u(x)$ و $f(u)$ در شرایط قضیه ۱ بر بازه $a \leq x \leq b$ و بر بازه $A \leq u \leq B$ که نقش $a \leq x \leq b$ تحت جانشانی $u = u(x)$ است صدق کنند . در این صورت ،

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du.$$

برهان . فرض کنیم F یک پادمشتق f باشد . در این صورت ، طبق فرمول (۲) و دو کاربرد

قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال،

$$\int_a^b f(u(x))u'(x) dx = F(u(x)) \Big|_a^b = F(u(b)) - F(u(a)) = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du.$$

توجه کنید که فرض نکرده‌ایم $u = u(x)$ بر $[a, b]$ یکنواست؛ در نتیجه، رابطهٔ لازم می‌بین $u(b)$ ، $u(a)$ و A, B وجود ندارد. از آن سو، جانماییهای یکنوا متداولترین جانمایی‌اند، و در این صورت، اگر u بر $[a, b]$ صعودی باشد، $A = u(a)$ و $B = u(b)$ ، و اگر u بر $[a, b]$ نزولی باشد، $A = u(b)$ و $B = u(a)$.

مثال ۵. $\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx$ را حساب کنید.

حل. با جانمایی $u = u(x) = \ln x$ ، داریم $du = dx/x$. به علاوه، $u(1) = \ln 1 = 0$ ، $u(e) = \ln e = 1$. پس از قضیهٔ ۱، معلوم می‌شود که

$$(5) \quad \int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \int_0^1 u du = \left[\frac{1}{2} u^2 \right]_0^1 = \frac{1}{2}.$$

به صورت دیگر، چون

$$\int \frac{\ln x}{x} dx = \int u du = \frac{1}{2} u^2 + C = \frac{1}{2} (\ln x)^2 + C,$$

می‌توان با استفاده از قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال نوشت

$$\int_1^e \frac{\ln x}{x} dx = \left[\frac{1}{2} (\ln x)^2 \right]_1^e = \frac{1}{2} (\ln e)^2 - \frac{1}{2} (\ln 1)^2 = \frac{1}{2},$$

ولی این راه مؤثر نیست، زیرا عملاً "نیازی به برگشت از u به متغیر اصلی x نیست". در واقع، به محض محاسبه شدن انتگرال (۵)، اولین انتگرال نیز معلوم است، زیرا هر دو انتگرال معین، و لذا عدد، می‌باشند.

مثال ۶. با شروع از تعریف لگاریتم طبیعی

$$\ln x = \int_1^x \frac{dt}{t}$$

برهان دیگری برای فرمول

$$\ln ab = \ln a + \ln b \quad (a \text{ و } b \text{ مثبت})$$

که قبلاً " در قضیه ۱، صفحه ۴۸۷، ثابت شد بیاورید.

حل. داریم

$$\ln b = \int_1^b \frac{dt}{t} = \int_1^b \frac{a dt}{at} = \int_a^{ab} \frac{du}{u},$$

که در آخرین مرحله به متغیر جدید $u = at$ رو آورده و تغییرات نظیر را در حدود انتگرال گیری انجام می‌دهیم. بنابراین، پس از بازگشت به متغیر انتگرالگیری (ظاهری) اصلی،

$$\ln b = \int_a^{ab} \frac{dt}{t},$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\ln ab = \int_1^{ab} \frac{dt}{t} = \int_1^a \frac{dt}{t} + \int_a^{ab} \frac{dt}{t} = \ln a + \ln b.$$

روش دیگر. تا اینجا، در اعمال روش انتگرالگیری به وسیله جانشانی، در جستجوی یک جانشانی $u = u(x)$ و یک تابع $f(u)$ با انتگرال آسان بوده‌ایم به طوری که تابعی که می‌خواهیم انتگره کنیم (آن را $g(x)$ می‌نامیم) را بتوان به شکل

$$(۶) \quad g(x) = f(u(x))u'(x)$$

در آورد. زیرا در این صورت، طبق قضیه ۱،

$$(۷) \quad \int g(x) dx = \int f(u) du \Big|_{u=u(x)},$$

و، طبق قضیه ۱،

$$(۷') \quad \int_a^b g(x) dx = \int_{u(a)}^{u(b)} f(u) du.$$

روش دیگر جانشانی به شکل $x = x(u)$ مستقیماً " در انتگرال $\int g(x) dx$ است. اگر $x(u)$ دارای مشتق پیوسته $x'(u)$ باشد، در نتیجه بخصوص $dx = x'(u) du$ ، این جانشانی $\int g(x) dx$ را به

$$\int g(x(u))x'(u) du = \int f(u) du.$$

" تبدیل می‌کند"، که در آن

$$(۸) \quad f(u) = g(x(u))x'(u),$$

و اگر جانشانی $x = x(u)$ بدقت انتخاب شده باشد، تابع $f(u)$ را می‌توان به خلاف تابع

اصلی $g(x)$ به آسانی انتگره کرد.

اختیاری. بین این دو روش انتگرالگیری با جانشانی رابطه ساده‌ای وجود دارد. فرض کنیم $x = x(u)$ تابع یک به یکی با معکوس $u = u(x)$ باشد. در این صورت، بنابر قضیه ۴۰، صفحه ۴۶۰، در باب مشتق یک تابع معکوس،

$$u'(x) = \frac{1}{x'(u)}$$

(در اینجا فرض اضافی ناصفر بودن $x'(u)$ را می‌پذیریم). در نتیجه،

$$x'(u) = \frac{1}{u'(x)}$$

با گذاردن این عبارت $x'(u)$ در فرمول (۸) فوراً به فرمول (۶)، و در نتیجه فرمولهای (۷) و (۷')، می‌رسیم. لذا، دو روش اساساً یکی می‌باشند.

مثال ۷. $\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})}$ را به دوراه حساب کنید.

حل. با توجه به اینکه \sqrt{x} دوبار در انتگرالده ظاهر شده است، جانشانی $u = \sqrt{x}$ را انجام می‌دهیم. در این صورت،

$$du = d\sqrt{x} = \frac{dx}{2\sqrt{x}}$$

در نتیجه، $dx = 2\sqrt{x} du = 2u du$. بنابراین،

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = 2 \int \frac{u du}{u(1+u)} = 2 \int \frac{du}{1+u} = 2 \ln |1+u| + C,$$

یا، پس از بازگشت به متغیر x ،

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = 2 \ln(1+\sqrt{x}) + C.$$

عبارت $2 \ln(1+\sqrt{x})$ را می‌توانید، در صورت تمایل، با $\ln(1+\sqrt{x})^2$ عوض کنید. به صورت دیگر، ظاهراً "جانشانی $x = u^2$ (معکوس $u = \sqrt{x}$) انتخاب مناسبی است زیرا رادیکال را از بین می‌برد. با این جانشانی، $dx = 2u du$ ، $\sqrt{x} = u$ ، و

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+\sqrt{x})} = \int \frac{2u du}{u(1+u)} = 2 \int \frac{du}{1+u},$$

که به همان نتیجه^۶ قبل ختم می‌شود.

مسائل

انتگرالهای زیر را با استفاده از انتگرالگیری به وسیله^۶ جانشانی حساب کنید.

$$\int (1+x^2)^{49} x dx \quad \cdot ۲ ✓$$

$$\int (1-2x)^9 dx \quad \cdot ۱ ✓$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\pi+2x}} \quad \cdot ۴ ✓$$

$$\int \sqrt{4+5x} dx \quad \cdot ۳ ✓$$

$$\int (x^2-4x+4)^{-5/3} dx \quad \cdot ۶ ✓$$

$$\int \frac{x}{\sqrt{3x-1}} dx \quad \cdot ۵ ✓$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^3+1}} dx \quad \cdot ۸ ✓$$

$$\int x\sqrt{1-x} dx \quad \cdot ۷ ✓$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}\sqrt{1-x}} \quad \cdot ۱۰ ✓$$

$$\int \left(\frac{2+\sqrt{x}}{x}\right)^{1/2} dx \quad \cdot ۹ ✓$$

$$\int \cos^3 x \sin x dx \quad \cdot ۱۲ ✓$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}} \quad \cdot ۱۱ ✓$$

$$\int \sin^4 x \cos x dx \quad \cdot ۱۴ ✓$$

$$\int \cos^3 x dx \quad \cdot ۱۳ ✓$$

$$\int \frac{\cos x}{1+\sin^2 x} dx \quad \cdot ۱۶ ✓$$

$$\int \sin^5 x dx \quad \cdot ۱۵ ✓$$

$$\int \cos(\tan x) \sec^2 x dx \quad \cdot ۱۸ ✓$$

$$\int \frac{\sin x}{\sqrt{1+2\cos x}} dx \quad \cdot ۱۷ ✓$$

$$\int \frac{\sec^2 x^{1/3}}{x^{2/3}} dx \quad \cdot ۲۰ ✓$$

$$\int x \sec x^2 \tan x^2 dx \quad \cdot ۱۹ ✓$$

$$\int \frac{e^{\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad \cdot ۲۲ ✓$$

$$\int e^{x^2} x dx \quad \cdot ۲۱ ✓$$

$$\int \frac{\sqrt{1+\ln x}}{x} dx \quad \cdot ۲۳ ✓$$

$$\int \frac{dx}{x(\ln x)^2} \quad \cdot ۲۲ ✓$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1+e^{-\sqrt{x}})} \cdot ۲۶ \checkmark$$

$$\int \frac{e^{3x}}{e^{3x}-1} dx \cdot ۲۵ \checkmark$$

$$\int \frac{2^x}{4^x+1} dx \cdot ۲۸ \checkmark$$

$$\int \frac{e^x}{e^{2x}+1} dx \cdot ۲۷ \checkmark$$

$$\int x \cosh x^2 dx \cdot ۳۰ \checkmark$$

$$\int \frac{2^x}{\sqrt{4^x+1}} dx \cdot ۲۹ \checkmark$$

$$\int \frac{\sqrt{\arctan x}}{x^2+1} dx \cdot ۳۲ \checkmark$$

$$\int \frac{\sinh \sqrt{x} \cosh \sqrt{x}}{\sqrt{x}} dx \cdot ۳۱ \checkmark$$

$$\int \frac{1}{x^2} \tan \frac{1}{x} dx \cdot ۳۳ \checkmark$$

۳۴. با استفاده از انتگرالگیری به وسیلهٔ جانشانی، قاعدهٔ (چهار)، صفحهٔ ۴۰۲، را تحقیق کنید که می‌گوید هرگاه F یک پادمشتق f باشد، آنگاه

$$\int f(ax+b) dx = \frac{1}{a} F(ax+b) + C \quad (a \neq 0).$$

نشان دهید که

$$\int \csc x dx = -\ln |\csc x + \cot x| + C \cdot ۳۵ \\ = \ln |\csc x - \cot x| + C$$

$$\int \csc x dx = \ln \left| \tan \frac{x}{2} \right| + C, \cdot ۳۶$$

$$\int \sec x dx = \ln \left| \tan \left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{4} \right) \right| + C$$

$$\int \sec x dx = \tanh^{-1}(\sin x) + C, \cdot ۳۷$$

$$\int \csc x dx = -\tanh^{-1}(\cos x) + C$$

$$\int \sec x dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1+\sin x}{1-\sin x} + C, \cdot ۳۸$$

$$\int \csc x dx = \frac{1}{2} \ln \frac{1-\cos x}{1+\cos x} + C$$

۳۹. با استفاده از انتگرالگیری به وسیلهٔ جانشانی، نشان دهید که اگر f زوج باشد،

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 2 \int_0^a f(x) dx$$

ولی اگر f فرد باشد،

$$\int_{-a}^a f(x) dx = 0$$

و این قبلاً " در مسئله ۱۶، صفحه ۴۱۵، به روشی دیگر ثابت شده است. فرض کنید f بر $[-a, a]$ پیوسته باشد.

۴۰. به فرض آنکه f بر $[0, a]$ پیوسته باشد، نشان دهید که

$$\int_0^a f(a-x) dx = \int_0^a f(x) dx$$

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\int_0^2 s\sqrt{1+2s^2} ds \quad \cdot 42 \checkmark$$

$$\int_{-1}^1 (1+x^3)^7 x^2 dx \quad \cdot 41 \checkmark$$

$$\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{x+1}} dx \quad \cdot 44 \checkmark$$

$$\int_4^9 \frac{\sqrt{t}}{\sqrt{t-1}} dt \quad \cdot 43 \checkmark$$

$$\int_0^\pi \cos^4 t \sin t dt \quad \cdot 46 \checkmark$$

$$\int_1^3 \frac{ds}{\sqrt{s}(1+s)} \quad \cdot 45 \checkmark$$

$$\int_1^e \frac{dv}{v[1+(\ln v)^2]} \quad \cdot 48 \checkmark$$

$$\int_0^{\pi/2} \cos^5 u du \quad \cdot 47 \checkmark$$

$$\int_{-\pi/3}^{\pi/3} \sec x dx \quad \cdot 50 \checkmark$$

$$\int_0^2 \frac{3^w}{3^w+1} dw \quad \cdot 49 \checkmark$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} \sec x \csc x dx \quad \cdot 52 \checkmark$$

$$\int_{\pi/4}^{3\pi/4} \csc x dx \quad \cdot 51 \checkmark$$

۵۳. فرض کنید f بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته و متناوب با دوره تناوب p باشد؛ در نتیجه،

$$f(x+p) \equiv f(x) \quad \text{فرمول}$$

$$\int_a^{a+p} f(x) dx = \int_0^p f(x) dx \quad (a \text{ دلخواه})$$

را تحقیق کنید، که نشان می‌دهد f بر هر بازه به طول p انتگرال یکسان دارد.

۵۴. نشان دهید که

$$\int_a^{a+2\pi} \sin^3 x dx = 0 \quad (a \text{ دلخواه}).$$

۵۵. نشان دهید که

$$\int_{-1/2}^{1/2} \ln \frac{1+x}{1-x} \sin^{10} x \, dx = 0.$$

۵۶. با استفاده از مسئله ۴۰، نشان دهید هرگاه f بر $[0, 1]$ پیوسته باشد، آنگاه

$$\int_0^{\pi/2} f(\cos x) \, dx = \int_0^{\pi/2} f(\sin x) \, dx.$$

۲.۷ انتگرالگیری جزء به جزء

حال روش مهم دیگری از انتگرالگیری را در نظر می‌گیریم که نتیجه‌ای است از قاعده حاصل ضرب برای مشتقگیری. فرض کنیم $u = u(x)$ و $v = v(x)$ دو تابع مشتقپذیر با مشتقات پیوسته $u'(x)$ و $v'(x)$ باشند. با مشتقگیری از حاصل ضرب $u(x)v(x)$ نسبت به x ، خواهیم داشت

$$\frac{d}{dx} [u(x)v(x)] = [u(x)v(x)]' = u'(x)v(x) + u(x)v'(x),$$

یا معادلاً

$$(1) \quad u(x)v'(x) = [u(x)v(x)]' - v(x)u'(x).$$

پس انتگرالگیری از طرفین (۱) نتیجه می‌دهد که

$$\int u(x)v'(x) \, dx = \int [u(x)v(x)]' \, dx - \int v(x)u'(x) \, dx.$$

اما

$$\int [u(x)v(x)]' \, dx = u(x)v(x) + C,$$

و در نتیجه،

$$(2) \quad \int u(x)v'(x) \, dx = u(x)v(x) - \int v(x)u'(x) \, dx,$$

که در آن می‌توان C را حذف کرد، زیرا در هر یک از دو انتگرال نامعین یک ثابت انتگرالگیری وجود دارد. با معرفی دیفرانسیل‌های

$$du = u'(x) \, dx, \quad dv = v'(x) \, dx,$$

و حذف شناسه‌های تابع به خاطر سادگی، می‌توان (۲) به شکل فشرده‌تر زیر نوشت:

$$(3) \quad \int u \, dv = uv - \int v \, du.$$

معادله (۳)، به نام فرمول انتگرالگیری جزء به جزء، یکی از با ارزشترین تکنیکهای انتگرالگیری است که، همانطور که امثله زیر نشان می‌دهند، اغلب یک انتگرال مشکل را برحسب انتگرالهای آسانتر بیان می‌کند.

برای یافتن فرمول نظیر به انتگرالهای معین، از طرفین (۱) نسبت به x از a تا b انتگرال می‌گیریم. از این نتیجه می‌شود که

$$\int_a^b u(x)v'(x) dx = \int_a^b [u(x)v(x)]' dx - \int_a^b v(x)u'(x) dx.$$

اما، بنابر قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال،

$$\int_a^b [u(x)v(x)]' dx = u(x)v(x) \Big|_a^b,$$

و در نتیجه،

$$(۲') \quad \int_a^b u(x)v'(x) dx = u(x)v(x) \Big|_a^b - \int_a^b v(x)u'(x) dx,$$

یا، به طور خلاصه‌تر،

$$(۳') \quad \int_a^b u dv = uv \Big|_a^b - \int_a^b v du,$$

که در آن $uv \Big|_a^b$ اختصاری است برای

$$u(x)v(x) \Big|_a^b = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

توجه کنید که (۳') از (۳) با گذاردن حدود انتگرالگیری در انتگرالهای نامعین $\int u dv$ و $\int v du$ و تعویض تابع uv با تفاضل $uv \Big|_a^b$ ، که البته عدد است، به دست می‌آید.

مثال ۱. $\int x \sin x dx$ را حساب کنید.

حل. فرض کنیم $u = x$, $dv = \sin x dx$. پس $du = dx$, $v = -\cos x$ و در نتیجه، بنابر (۳)،

$$\begin{aligned} \int x \sin x dx &= -x \cos x - \int (-\cos x) dx \\ &= -x \cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C, \end{aligned}$$

که در آن C ثابت انتگرالگیری دلخواه است.

انتخاب مناسب جزءها. در مثال ۱ $u = x$ را به جای $u = \sin x$ اختیار می‌کنیم، زیرا x برخلاف $\sin x$ با مشتقگیری ساده می‌شود. تمام نکته انتگرالگیری جزء به جزء این است که محاسبه $\int v du$ با انتخاب "جزء‌های" u و dv به‌طور مناسب از انتگرال $\int u dv$ آسانتر است. اگر $u = \sin x$ ، $dv = x dx$ را انتخاب می‌کردیم، آنگاه $v = \frac{1}{2}x^2$ ، $du = \cos x dx$ ، و فرمول (۳) ما را به

$$\int x \sin x dx = \frac{1}{2} x^2 \sin x - \frac{1}{2} \int x^2 \cos x dx$$

می‌رساند، که در آن انتگرال سمت راست از انتگرال اصلی سمت چپ مشکلتر است! در انتگرالگیری جزء به جزء، برای رفتن از dv به v لازم نیست ثابت انتگرالگیری اضافی k را وارد کنیم (لذا، در مثال ۱ به جای $v = -\cos x + k$ نوشتیم $v = -\cos x$). در واقع، این منجر به جملاتی اضافی می‌شود که در تشکیل طرفهای راست (۳) و (۳') حذف می‌شوند. شرح جزئیات را به عنوان تمرین می‌گذاریم (v را با $v + k$ عوض کرده و ببینید چه رخ می‌دهد).

مثال ۲. $\int \ln x dx$ را حساب کنید.

حل. در اینجا انتخاب فوری عبارت است از $u = \ln x$ ، $dv = dx$ ، و این بی‌درنگ کار می‌کند. در واقع، $du = dx/x$ ، $v = x$ ، و (۳) نتیجه می‌دهد که

$$\int \ln x dx = x \ln x - \int dx = x \ln x - x + C$$

(و این در مسئله ۳۱، صفحه ۴۹۵، پیش‌بینی شد).

مثال ۳. $\int x \ln x dx$ را حساب کنید.

حل. در اینجا حالات مختلفی وجود دارند. می‌توان $u = x$ ، $dv = \ln x dx$ یا $u = \ln x$ ، $dv = x dx$ یا حتی $u = \ln x$ ، $dv = x dx$ را اختیار کرد. تنها انتخاب مناسب $u = x \ln x$ ، $dv = dx$ است، زیرا فقط این انتخاب است که $\int v du$ را، با راحت شدن از لگاریتم، از $\int u dv$ ساده‌تر می‌کند. در این صورت، داریم $du = dx/x$ ، $v = \frac{1}{2}x^2$ و

در نتیجه، بنا بر (۳)،

$$(۴) \quad \int x \ln x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C.$$

به بیان معادل، با اختیار دیفرانسیل توابع می‌توان از معرفی صریح متغیرهای کمکی u و v احتراز کرد. لذا،

$$\begin{aligned} \int x \ln x \, dx &= \int \ln x \, d\left(\frac{1}{2} x^2\right) = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x^2 \, d(\ln x) \\ &= \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{2} \int x \, dx = \frac{1}{2} x^2 \ln x - \frac{1}{4} x^2 + C, \end{aligned}$$

که در آن توجه کنید که $d\left(\frac{1}{2} x^2\right) = x \, dx$, $d(\ln x) = dx/x$.

مثال ۴. $\int_1^e x \ln x \, dx$ را حساب کنید.

حل. با استفاده از (۳) با همان u و dv مثال ۳، داریم

$$\begin{aligned} \int_1^e x \ln x \, dx &= \frac{1}{2} x^2 \ln x \Big|_1^e - \frac{1}{2} \int_1^e x \, dx = \frac{1}{2} e^2 \ln e - \frac{1}{2} \ln 1 - \frac{1}{4} x^2 \Big|_1^e \\ &= \frac{1}{2} e^2 - \frac{1}{4} e^2 + \frac{1}{4} = \frac{1}{4} (e^2 + 1). \end{aligned}$$

مثال ۵. $\int_0^1 \arctan x \, dx$ را حساب کنید.

حل. در اینجا تنها امید ما این است که انتخاب $dv = dx$, $u = \arctan x$ موثر باشد، که هست. در واقع، داریم $v = x$, $du = dx/(x^2 + 1)$ ، و (۳) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\begin{aligned} \int_0^1 \arctan x \, dx &= x \arctan x \Big|_0^1 - \int_0^1 \frac{x}{x^2 + 1} \, dx \\ &= \arctan 1 - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 1) \Big|_0^1 = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \ln 2. \end{aligned}$$

برای محاسبه یک انتگرال، اغلب لازم است بیش از یکبار جزء به جزء انتگرالگیری

کرد.

مثال ۶. $\int x^2 e^x dx$ را حساب کنید.

حل. فرض کنیم $u = x^2$, $dv = e^x dx$. پس $du = 2x dx$, $v = e^x$ و انتگرالگیری جزء به جزء نتیجه می‌دهد که

$$(5) \quad \int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2 \int x e^x dx.$$

برای محاسبه انتگرال سمت راست، مجدداً، با انتخاب $u = x$, $dv = e^x dx$, $du = dx$, $v = e^x$ جزء به جزء انتگرال می‌گیریم:

$$(6) \quad \int x e^x dx = x e^x - \int e^x dx = x e^x - e^x + k$$

(k دلخواه). با گذاردن (۶) در (۵)، خواهیم داشت

$$\int x^2 e^x dx = x^2 e^x - 2x e^x + 2e^x + C$$

($C = -2k$ دلخواه).

گاهی روش انتگرالگیری جزء به جزء به معادله‌ای ختم می‌شود که می‌توان آن را نسبت به انتگرال داده شده حل کرد.

مثال ۷. $\int \sec^3 x dx$ را حساب کنید.

حل. فرض کنیم $u = \sec x$, $dv = \sec^2 x dx$. پس $du = \sec x \tan x dx$, $v = \tan x$ و انتگرالگیری جزء به جزء نتیجه می‌دهد که

$$\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x - \int \tan^2 x \sec x dx.$$

چون $\tan^2 x = \sec^2 x - 1$ ، این را می‌توان به صورت زیر نوشت:

$$\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x - \int (\sec^2 x - 1) \sec x dx,$$

یعنی،

$$\int \sec^3 x dx = \sec x \tan x - \int \sec^3 x dx + \int \sec x dx,$$

که در آن انتگرال $\int \sec^3 x dx$ که می‌خواهیم آن را حساب کنیم سمت راست با علامت مخالف

ظاهر شده و می‌توان معادله را نسبت به آن حل کرد با این کار فوراً معلوم می‌شود که

$$\int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \int \sec x \, dx.$$

با استفاده از فرمول مربوط به $\int \sec x \, dx$ که قبلاً در مثال ۴، صفحه ۵۹۵، به دست آمد، بالاخره خواهیم داشت

$$(۷) \quad \int \sec^3 x \, dx = \frac{1}{2} \sec x \tan x + \frac{1}{2} \ln |\sec x + \tan x| + C.$$

مثال ۸. $\int e^{ax} \cos bx \, dx$ ($ab \neq 0$) را حساب کنید.

حل. ابتدا انتخاب می‌کنیم

$$u = e^{ax}, \quad dv = \cos bx \, dx, \quad du = ae^{ax} \, dx, \quad v = \frac{\sin bx}{b},$$

و انتگرالگیری جزء به جزء نتیجه می‌دهد که

$$(۸) \quad \int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} - \frac{a}{b} \int e^{ax} \sin bx \, dx.$$

با آنکه انتگرال سمت راست به مشکلی انتگرالی است که می‌خواهیم حساب کنیم، آن را جزء به جزء، این بار با اختیار

$$u = e^{ax}, \quad dv = \sin bx \, dx, \quad du = ae^{ax} \, dx, \quad v = -\frac{\cos bx}{b}$$

انتگره می‌کنیم. در نتیجه، خواهیم داشت

$$(۸') \quad \int e^{ax} \sin bx \, dx = -\frac{e^{ax} \cos bx}{b} + \frac{a}{b} \int e^{ax} \cos bx \, dx,$$

و با گذاردن (۸') در (۸)، نتیجه می‌گیریم که

$$\int e^{ax} \cos bx \, dx = \frac{e^{ax} \sin bx}{b} + \frac{ae^{ax} \cos bx}{b^2} - \frac{a^2}{b^2} \int e^{ax} \cos bx \, dx.$$

حال می‌توان معادله را نسبت به انتگرال $\int e^{ax} \cos bx \, dx$ ، که سمت راست تکرار شده است، حل کرد و به دست آورد

$$\left(1 + \frac{a^2}{b^2}\right) \int e^{ax} \cos bx \, dx = e^{ax} \frac{a \cos bx + b \sin bx}{b^2},$$

یا معادلا"

$$(۹) \quad \int e^{ax} \cos bx \, dx = e^{ax} \frac{a \cos bx + b \sin bx}{a^2 + b^2} + C,$$

که در آن C ثابت دلخواهی است^۱. به همین نحو، با گذاردن (۸) در (۸') و حل معادله حاصل نسبت به $\int e^{ax} \sin bx \, dx$ ، فرمول همتای

$$(۹') \quad \int e^{ax} \sin bx \, dx = e^{ax} \frac{a \sin bx - b \cos bx}{a^2 + b^2} + C$$

را به دست می‌آوریم.

مسائل

انتگرالهای زیر را با استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء حساب کنید.

$$\int x \cos x \, dx \quad \cdot ۱ \checkmark \quad \int (x-1) \ln x \, dx \quad \cdot ۲ \checkmark$$

$$\int x^2 \ln x \, dx \quad \cdot ۳ \checkmark \quad \int x e^{-2x} \, dx \quad \cdot ۴ \checkmark$$

$$\int \arcsin x \, dx \quad \cdot ۵ \checkmark \quad \int e^{2x} \cos 3x \, dx \quad \cdot ۶ \checkmark$$

$$\int e^{-x} \sin 2x \, dx \quad \cdot ۷ \checkmark \quad \int \sinh^{-1} x \, dx \quad \cdot ۸ \checkmark$$

$$\int (\ln x)^2 \, dx \quad \cdot ۹ \checkmark \quad \int x 3^x \, dx \quad \cdot ۱۰ \checkmark$$

$$\int \sqrt{x} \ln x \, dx \quad \cdot ۱۱ \checkmark \quad \int x^2 \sin 2x \, dx \quad \cdot ۱۲ \checkmark$$

$$\int \sin x \cos 2x \, dx \quad \cdot ۱۳ \checkmark \quad \int x^5 \ln x \, dx \quad \cdot ۱۴ \checkmark$$

$$\int x^3 \cos x \, dx \quad \cdot ۱۵ \checkmark \quad \int x \csc^2 x \, dx \quad \cdot ۱۶ \checkmark$$

۱. هر انتگرال نامعین فقط با تقریب ثابت انتگرالگیری دلخواهی تعریف شده است، و اغلب

شایسته است که این ثابت را در آخر محاسبات "آورد" (یعنی، اضافه کرد).

$$\int x^2 \sinh x dx \cdot 18 \checkmark$$

$$\int x \operatorname{sech}^2 x dx \cdot 17 \checkmark$$

$$\int e^{\sqrt{x}} dx \cdot 20 \checkmark$$

$$\int x \sqrt{2x+3} dx \cdot 19 \checkmark$$

$$\int x^3 e^{-x^2} dx \cdot 22 \checkmark$$

$$\int \csc^3 x dx \cdot 21 \checkmark$$

$$\int x(x+1)^9 dx \cdot 24 \checkmark$$

$$\int \sin(\ln x) dx \cdot 23 \checkmark$$

$$\int_0^{e-1} \ln(x+1) dx \cdot 26 \checkmark$$

$$\int_0^1 x e^{-x} dx \cdot 25 \checkmark$$

$$\int_0^{\pi/2} e^{2x} \sin x dx \cdot 28 \checkmark$$

$$\int_0^{\pi} x^2 \cos x dx \cdot 27 \checkmark$$

$$\int_1^2 x \log_2 x dx \cdot 30 \checkmark$$

$$\int_0^{\pi} x^3 \sin x dx \cdot 29 \checkmark$$

$$\int_0^{\pi/4} y \sec^2 y dy \cdot 32 \checkmark$$

$$\int_1^e (\ln x)^3 dx \cdot 31 \checkmark$$

$$\int_{-1}^1 \arccos z dz \cdot 33 \checkmark$$

۳۴. فرض کنید f دارای مشتق دوم پیوسته f'' بر $[a, b]$ باشد. نشان دهید که

$$\int_a^b x f''(x) dx = [b f'(b) - f(b)] - [a f'(a) - f(a)].$$

مساحت A ناحیه R بین منحنیهای زیر را بیابید.

$$y = (\ln x)^2 \text{ و } y = \ln x \cdot 35$$

$$y = (4 \ln x)/x \text{ و } y = x \ln x \cdot 36$$

در هر حالت، ناحیه R را رسم نمایید.

۳۷. فرض کنید توابع $u = u(x)$ و $v = v(x)$ دارای مشتقات پیوسته $u', v', u'', v'', \dots, u^{(n)}, v^{(n)}$ باشند. نشان دهید که

$$u^{(n+1)} v^{(n+1)}, u^{(n+1)}, v^{(n+1)}$$

$$\int u v^{(n+1)} dx = u v^{(n)} - u' v^{(n-1)} + u'' v^{(n-2)} - \dots + (-1)^n u^{(n)} v$$

(یک)

$$+ (-1)^{n+1} \int u^{(n+1)} v dx.$$

۳۸. فرض کنید $u = u(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه n بوده، و تابع $v = v(x)$ دارای مشتقات پیوسته $v', v'', \dots, v^{(n)}, v^{(n+1)}$ از تمام مراتب تا $n+1$ باشد. نشان دهید که

$$\int uv^{(n+1)} dx = uv^{(n)} - u'v^{(n-1)} + u''v^{(n-2)} - \dots + (-1)^n u^{(n)}v + C.$$

(یک)

با استفاده از این فرمول، $\int x^3 \sin x dx$ و $\int x^4 e^x dx$ را حساب کنید.

۳۹. نشان دهید

$$\int_0^1 x^m(1-x)^n dx = \int_0^1 x^n(1-x)^m dx,$$

که در آن m و n اعداد صحیح مثبت دلخواهی می‌باشند. سپس این انتگرال را محاسبه نمایید.

۳۰۷ فرمولهای تحویل

با استفاده از انتگرالگیری جزء به جزء می‌توان فرمولهای تحویل را ثابت کرد؛ یعنی، فرمولهایی که در آنها انتگرالهای مستلزم توانهایی از یک عبارت بر حسب انتگرالهای مستلزم توانهای پایین آن عبارت بیان شده‌اند.

مثال ۱. نشان دهید که

$$(1) \int \sin^n x dx = -\frac{1}{n} \sin^{n-1} x \cos x + \frac{n-1}{n} \int \sin^{n-2} x dx \quad (n = 2, 3, \dots).$$

حل. با اختیار $u = \sin^{n-1} x$, $dv = \sin x dx$ ، جزء به جزء انتگرال می‌گیریم. در این صورت، $du = (n-1) \sin^{n-2} x \cos x dx$ ، $v = -\cos x$ ، و

$$\int \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x \cos^2 x dx.$$

اما $\cos^2 x = 1 - \sin^2 x$ ؛ در نتیجه،

$$\int \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx - (n-1) \int \sin^n x dx,$$

که در آن جمله آخر سمت راست شامل انتگرالی است که می‌خواهیم حساب کنیم. با بردن

این جمله به طرف چپ معادله و تلفیق دو جمله شامل $\int \sin^n x dx$ ، فرمول زیر به دست می‌آید :

$$n \int \sin^n x dx = -\sin^{n-1} x \cos x + (n-1) \int \sin^{n-2} x dx,$$

که با (۱) معادل است .

مثال ۲ . نشان دهید که

$$(۲) \int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx \quad (n = 2, 3, \dots).$$

حل . فرض کنیم $u = \cos^{n-1} x, dv = \cos x dx$ ، و جزء به جزء انتگرال می‌گیریم . جزئیات همانند مثال ۱ است ، و به عنوان تمرین گذارده می‌شود .

با کاربرد مکرر فرمولهای تحویل (۱) و (۲) ، می‌توان محاسبه انتگرالهای $\int \sin^n x dx$ و $\int \cos^n x dx$ را به محاسبه یکی از انتگرالهای آسان $\int dx$ ، $\int \sin x dx$ ، و $\int \cos x dx$ تحویل کرد .

مثال ۳ . $\int \sin^4 x dx$ را حساب کنید .

حل . در فرمول (۱) ابتدا $n = 4$ و سپس $n = 2$ را اختیار می‌کنیم ، به دست می‌آید

$$\int \sin^4 x dx = -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x + \frac{3}{4} \int \sin^2 x dx$$

و

$$\int \sin^2 x dx = -\frac{1}{2} \sin x \cos x + \frac{1}{2} \int dx.$$

بنابراین ، پس از گذاردن به جای $\int \sin^2 x dx$ ،

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x dx &= -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x - \frac{3}{8} \sin x \cos x + \frac{3}{8} \int dx \\ &= -\frac{1}{4} \sin^3 x \cos x - \frac{3}{8} \sin x \cos x + \frac{3}{8} x + C. \end{aligned}$$

مثال ۴. $\int \cos^5 x dx$ را حساب کنید.

حل. در فرمول (۲) ابتدا $n = 5$ و سپس $n = 3$ را اختیار می‌کنیم، به دست می‌آوریم

$$\int \cos^5 x dx = \frac{1}{5} \cos^4 x \sin x + \frac{4}{5} \int \cos^3 x dx$$

و

$$\int \cos^3 x dx = \frac{1}{3} \cos^2 x \sin x + \frac{2}{3} \int \cos x dx.$$

بنابراین، پس از گذاردن به جای $\int \cos^3 x dx$ ،

$$\begin{aligned} \int \cos^5 x dx &= \frac{1}{5} \cos^4 x \sin x + \frac{4}{15} \cos^2 x \sin x + \frac{8}{15} \int \cos x dx \\ &= \frac{1}{5} \cos^4 x \sin x + \frac{4}{15} \cos^2 x \sin x + \frac{8}{15} \sin x + C. \end{aligned}$$

مثال ۵. نشان دهید که

$$(۲) \quad \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n},$$

که در آن $n = 1, 2, \dots$ و می‌توان فرض کرد $a > 0$.

حل. با انتخاب

$$u = \frac{1}{(x^2 + a^2)^n}, \quad dv = dx, \quad du = -\frac{2nx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx, \quad v = x$$

انتگرال سمت راست را جزء به جزء انتگره می‌کنیم. این کار نتیجه می‌دهد که

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx.$$

اما $x^2 = (x^2 + a^2) - a^2$ ؛ و در نتیجه،

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx &= \int \frac{(x^2 + a^2) - a^2}{(x^2 + a^2)^{n+1}} dx \\ &= \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} - a^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}. \end{aligned}$$

از تلفیق دو معادله اخیر خواهیم داشت

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} = \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + 2n \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n} - 2na^2 \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}}$$

که با (۳) معادل می باشد.

با کاربرد مکرر فرمول تحویل (۳)، می توان محاسبه انتگرال سمت چپ را به محاسبه انتگرال معلوم

$$(۴) \quad \int \frac{dx}{x^2 + a^2} = \frac{1}{a} \arctan \frac{x}{a} + C$$

تحویل کرد (ر. ک. ص ۴۷۰). لذا، با انتخاب $n = 1, 2, \dots$ در فرمول (۳)، خواهیم داشت

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2} = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^2} \int \frac{dx}{x^2 + a^2}$$

$$(۵) \quad = \frac{1}{2a^2} \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{1}{2a^3} \arctan \frac{x}{a} + C,$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^3} = \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{4a^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^2}$$

$$(۶) \quad = \frac{1}{4a^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^2} + \frac{3}{8a^4} \frac{x}{x^2 + a^2} + \frac{3}{8a^5} \arctan \frac{x}{a} + C,$$

و غیره. در واقع، ثابت C در (۵) $1/2a^2$ برابر ثابت C در (۴) است، ثابت C در (۶) $3/4a^2$ برابر ثابت C در (۵) است ولی لازم نیست آن را تصریح کنیم، زیرا هرکدام یک ثابت انتگرالگیری دلخواه است.

مسائل

فرمول تحویل داده شده را، که در آن n عدد صحیح مثبت دلخواهی است، تحقیق کنید.

$$۱. \quad \int x^n e^x dx = x^n e^x - n \int x^{n-1} e^x dx$$

$$۲. \quad \int (\ln x)^n dx = x (\ln x)^n - n \int (\ln x)^{n-1} dx$$

$$۳. \quad \int x^n \sin x dx = -x^n \cos x + n \int x^{n-1} \cos x dx$$

$$۴. \quad \int x^n \cos x dx = x^n \sin x - n \int x^{n-1} \sin x dx$$

انتگرالهای زیر را با استفاده از یک فرمول تحویل حساب کنید .

$$\int \sin^5 x dx \quad . ۶ \checkmark \qquad \int \cos^4 x dx \quad . ۵ \checkmark$$

$$\int (\ln x)^3 dx \quad . ۸ \checkmark \qquad \int x^5 e^x dx \quad . ۷ \checkmark$$

$$\int x^6 \cos x dx \quad . ۱۰ \checkmark \qquad \int x^4 \sin x dx \quad . ۹ \checkmark$$

$$\int \frac{e^x}{(e^{2x} + 1)^3} dx \quad . ۱۲ \qquad \int \frac{dx}{(x^2 + 1)^4} \quad . ۱۱ \checkmark$$

۱۳ . نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح زوج $n > 0$ ،

$$(یک) \quad \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{1}{2} \frac{3}{4} \cdots \frac{n-1}{n} \frac{\pi}{2} \quad (n = 2, 4; \dots)$$

لذا ، مثلاً ،

$$\int_0^{\pi/2} \sin^6 x dx = \frac{1}{2} \frac{3}{4} \frac{5}{6} \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{32}$$

همچنین ، نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح فرد $n > 1$ ، بدون عاملی از $\pi/2$

$$(یک) \quad \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx = \frac{2}{3} \frac{4}{5} \cdots \frac{n-1}{n} \quad (n = 3, 5, \dots)$$

لذا ، مثلاً ،

$$\int_0^{\pi/2} \sin^7 x dx = \frac{2}{3} \frac{4}{5} \frac{6}{7} = \frac{16}{35}$$

۱۴ . با استفاده از مسئله ۵۶ ، صفحه ۶۰۲ ، نشان دهید که به ازای هر عدد صحیح

نامنفی n ،

$$\int_0^{\pi/2} \cos^n x dx = \int_0^{\pi/2} \sin^n x dx$$

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{12} x dx \quad . ۱۶ \checkmark \qquad \int_0^{\pi/2} \sin^{10} x dx \quad . ۱۵ \checkmark$$

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin^{14} t dt \quad . ۱۸ \checkmark \qquad \int_0^{\pi/4} \sin^5 x \cos^5 x dx \quad . ۱۷ \checkmark$$

$$\int_{\pi/2}^{3\pi/2} \cos^9 v \, dv \cdot 20 \quad /$$

$$\int_0^{\pi} \sin^{15} u \, du \cdot 19 \quad /$$

۲۱ / فرمول تحویل زیر را تحقیق کنید :

$$\int x^a (\ln x)^n dx = \frac{1}{a+1} x^{a+1} (\ln x)^n$$

$$(دو) \quad - \frac{n}{a+1} \int x^a (\ln x)^{n-1} dx,$$

که در آن $a \neq -1$ و n عدد صحیح مثبت دلخواهی است .

تذکار . حالت $a = -1$ به آسانی اثبات می شود ، زیرا

$$\int x^{-1} (\ln x)^n dx = \int (\ln x)^n d(\ln x) = \frac{1}{n+1} (\ln x)^{n+1} + C.$$

انتگرالهای زیر را با استفاده از فرمول (دو) حساب کنید .

$$\int \sqrt{x} (\ln x)^3 dx \cdot 23 \quad /$$

$$\int x^3 (\ln x)^2 dx \cdot 22 \quad /$$

$$\int_e^3 x^2 (\ln x)^2 dx \cdot 25 \quad /$$

$$\int_1^e x (\ln x)^3 dx \cdot 24 \quad /$$

۲۶ / فرمولهای تحویل زیر را تحقیق کنید :

$$\int \tan^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \tan^{n-1} x - \int \tan^{n-2} x \, dx,$$

$$\int \sec^n x \, dx = \frac{1}{n-1} \sec^{n-1} x \tan x + \frac{n-2}{n-1} \int \sec^{n-2} x \, dx,$$

که در آنها n عدد صحیح دلخواهی بزرگتر از ۱ است .

۴.۷ انتگرالهای مثلثاتی

انتگرالدههای به شکل $\sin^p x \cos^q x$. انتگرالهایی که انتگرالده آنها ترکیبی از توابع مثلثاتی اند انتگرالهای مثلثاتی نام دارند ، و چندتایی از آنها قبلاً در بخشهای قبل حساب شده اند . اکنون به حالتی می پردازیم که در آن انتگرالده حاصل ضربی از توانهای توابع مثلثاتی است . با انتگرال

$$\int \sin^p x \cos^q x \, dx,$$

مستلزم دو مؤلفه p و q آغاز می کنیم . اگر یکی از نماهای p , q عدد صحیح فرد مثبتی باشد ، یا هر دو نما اعداد صحیح زوج مثبتی باشند ، محاسبه انتگرال فوق آسان است . در

حالت اول، از یکی از اتحادهای

$$(۱) \quad \sin^2 x = 1 - \cos^2 x, \quad \cos^2 x = 1 - \sin^2 x$$

استفاده کرده، انتگرالده را به شکل $f(\sin x) \cos x$ یا $f(\cos x) \sin x$ درمی آوریم و سپس انتگرال را می توان با جانشانی $u = \sin x$ یا $u = \cos x$ حساب کرد. در حالت دوم از اتحادهای

$$(۲) \quad \sin^2 x = \frac{1 - \cos 2x}{2}, \quad \cos^2 x = \frac{1 + \cos 2x}{2}$$

چند بار استفاده کرده، تمام توانهای بزرگتر از یک $\sin x$ و $\cos x$ را حذف می نماییم. مثالهای زیر این تکنیکها را توضیح می دهند:

مثال ۱. $\int \sin^4 x \cos^7 x dx$ را حساب کنید.

حل. در اینجا $q = 7$, $p = 4$ ، و q یک عدد صحیح فرد مثبت است. عامل $\cos x$ را از $\cos^7 x$ جدا، و سپس از دومین فرمول (۱) استفاده کرده، عامل باقیمانده $\cos^6 x$ را کاملاً "برحسب $\sin x$ بیان می کنیم. این نتیجه می دهد که

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^7 x dx &= \int \sin^4 x \cos^6 x \cos x dx \\ &= \int \sin^4 x (1 - \sin^2 x)^3 \cos x dx. \end{aligned}$$

حال انتگرالده به شکل $f(\sin x) \cos x$ است؛ و در نتیجه، جانشانی $u = \sin x$, $du = \cos x dx$ موثر می باشد. به طور مشروح،

$$\begin{aligned} \int \sin^4 x \cos^7 x dx &= \int u^4 (1 - u^2)^3 du = \int u^4 (1 - 3u^2 + 3u^4 - u^6) du \\ &= \int (u^4 - 3u^6 + 3u^8 - u^{10}) du \\ &= \frac{1}{5} u^5 - \frac{3}{7} u^7 + \frac{1}{3} u^9 - \frac{1}{11} u^{11} + C \\ &= \frac{1}{5} \sin^5 x - \frac{3}{7} \sin^7 x + \frac{1}{3} \sin^9 x - \frac{1}{11} \sin^{11} x + C. \end{aligned}$$

مثال ۲. $\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}} dx$ را حساب کنید.

حل. در اینجا $p = 5, q = -\frac{1}{2}$ ، و هر دو نما اعداد صحیح زوج مثبتی هستند. بنابراین، $\sin^5 x$ جدا کرده و سپس، با استفاده از فرمولهای (۱)، عامل باقیمانده $\sin^4 x$ را کاملاً "بر حسب $\cos x$ بیان می‌کنیم. در نتیجه، خواهیم داشت

$$\int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}} dx = \int \frac{\sin^4 x}{\sqrt{\cos x}} \sin x dx = \int \frac{(1 - \cos^2 x)^2}{\sqrt{\cos x}} \sin x dx.$$

حال انتگرالده به شکل $f(\cos x) \sin x$ است. و در نتیجه، جانشانی $u = \cos x, du = -\sin x dx$ مؤثر است. به طور مشروح،

$$\begin{aligned} \int \frac{\sin^5 x}{\sqrt{\cos x}} dx &= - \int \frac{(1 - u^2)^2}{\sqrt{u}} du = - \int \frac{u^4 - 2u^2 + 1}{\sqrt{u}} du \\ &= - \int (u^{7/2} - 2u^{3/2} + u^{-1/2}) du \\ &= -\frac{2}{9} u^{9/2} + \frac{4}{5} u^{5/2} - 2u^{1/2} + C \\ &= -\frac{2}{9} (\cos x)^{9/2} + \frac{4}{5} (\cos x)^{5/2} - 2(\cos x)^{1/2} + C. \end{aligned}$$

مثال ۳. $\int \sin^2 x \cos^4 x dx$ را حساب کنید.

حل. در اینجا $p = 2, q = 4$ ، و هر دو نما اعداد صحیح زوج مثبتی هستند. بنابراین، نماهای $\sin^2 x$ و $\cos^4 x$ را با استفاده از فرمولهای (۲) پایین می‌آوریم، به صورت زیر:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x dx &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos 2x)(1 + \cos 2x)^2 dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 - \cos^2 2x)(1 + \cos 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int (1 + \cos 2x - \cos^2 2x - \cos^3 2x) dx \\ &= \frac{1}{8} \int dx + \frac{1}{8} \int \cos 2x dx - \frac{1}{8} \int \cos^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \cos^3 2x dx \\ (۳) \quad &= \frac{1}{8} x + \frac{1}{16} \sin 2x - \frac{1}{8} \int \cos^2 2x dx - \frac{1}{8} \int \cos^3 2x dx. \end{aligned}$$

دو انتگرال اخیر کمی کار دارند. برای محاسبه $\int \cos^2 2x dx$ ، مجدداً از دومین فرمول (۲) استفاده می‌کنیم. از این نتیجه می‌شود که

$$(۴) \int \cos^2 2x dx = \frac{1}{2} \int (1 + \cos 4x) dx = \frac{1}{2} \int dx + \frac{1}{2} \int \cos 4x dx = \frac{1}{2} x + \frac{1}{8} \sin 4x$$

(در آخر محاسبات ثابت انتگرالگیری اضافه خواهد شد). چون انتگرال $\int \cos^3 2x dx$ شامل توان فرد مثبتی از $\cos x$ است، می‌توان آن را به روش مثال ۱ حساب کرد. لذا،

$$\int \cos^3 2x dx = \int \cos^2 2x \cos 2x dx = \int (1 - \sin^2 2x) \cos 2x dx,$$

و با جانشانی $u = \sin 2x$, $du = 2 \cos 2x dx$ به دست می‌آوریم

$$(۵) \int \cos^3 2x dx = \frac{1}{2} \int (1 - u^2) du = \frac{1}{2} u - \frac{1}{6} u^3 = \frac{1}{2} \sin 2x - \frac{1}{6} \sin^3 2x.$$

با گذاردن (۴) و (۵) در (۳) و درج ثابت انتگرالگیری C ، پس از کمی عمل جبری داریم

$$\int \sin^2 x \cos^4 x dx = \frac{1}{16} x - \frac{1}{64} \sin 4x + \frac{1}{48} \sin^3 2x + C.$$

به عنوان تمرین، نشان دهید که این انتگرال را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\begin{aligned} \int \sin^2 x \cos^4 x dx \\ = \frac{1}{16} x - \frac{1}{16} \sin x \cos^3 x + \frac{1}{16} \sin^3 x \cos x + \frac{1}{6} \sin^3 x \cos^3 x + C, \end{aligned}$$

که در آن سینوس و کسینوسهای سمت راست همه دارای شناسه x می‌باشند.

انتگرالدهها به شکل $\tan^p x \sec^q x$. حال به انتگرال

$$\int \tan^p x \sec^q x dx,$$

مستلزم دو نمای p و q می‌پردازیم. محاسبه این انتگرال وقتی p عدد صحیح فرد مثبت یا q عدد صحیح زوج مثبتی باشد آسان است. در حالت اول از اتحاد

$$(۶) \tan^2 x = \sec^2 x - 1$$

استفاده کرده انتگرالده را به شکل $f(\sec x) \sec x \tan x$ درآورده، و سپس با جانشانی $u = \sec x$ آن را حساب می‌کنیم. در حالت دوم، از اتحاد

$$(۷) \sec^2 x = \tan^2 x + 1$$

استفاده کرده انتگرالده را به شکل $f(\tan x) \sec^2 x$ درمی‌آوریم، و سپس آن را با جانشانی

$u = \tan x$ حساب می‌کنیم.

مثال ۴. $\int \sqrt{\tan x} \sec^4 x \, dx$ را حساب کنید.

حل. در اینجا $q = 4$ ، $p = \frac{1}{2}$ ، و q عدد صحیح زوج مثبتی است. عامل $\sec^2 x$ را از $\sec^4 x$ جدا کرده و، با استفاده از فرمول (۷)، عامل باقیمانده $\sec^2 x$ را برحسب $\tan x$ بیان نمایید. این کار نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\tan x} \sec^4 x \, dx &= \int (\sqrt{\tan x} \sec^2 x) \sec^2 x \, dx \\ &= \int \sqrt{\tan x} (\tan^2 x + 1) \sec^2 x \, dx. \end{aligned}$$

با جانشانی $u = \tan x$ ، $du = \sec^2 x \, dx$ مآلاً "خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int \sqrt{\tan x} \sec^4 x \, dx &= \int \sqrt{u} (u^2 + 1) \, du = \int (u^{5/2} + u^{1/2}) \, du \\ &= \frac{2}{7} u^{7/2} + \frac{2}{3} u^{3/2} + C = \frac{2}{7} (\tan x)^{7/2} + \frac{2}{3} (\tan x)^{3/2} + C. \end{aligned}$$

مثال ۵. $\int \tan^3 x \sec^5 x \, dx$ را حساب کنید.

حل. در اینجا $q = 5$ ، $p = 3$ ، و p عدد صحیح فرد مثبتی است، ولی q عدد صحیح زوج مثبتی نیست. لذا، شایسته است عامل $\sec x \tan x$ را از انتگرالده جدا کرده و، با استفاده از فرمول (۶)، عامل باقیمانده را کلاً "برحسب $\sec x$ بیان کنیم. به‌طور مشروح،

$$\begin{aligned} \int \tan^3 x \sec^5 x \, dx &= \int \tan^2 x \sec^4 x (\sec x \tan x) \, dx \\ &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^4 x (\sec x \tan x) \, dx \\ &= \int (\sec^6 x - \sec^4 x) \sec x \tan x \, dx. \end{aligned}$$

در این صورت، جانشانی $u = \sec x$ ، $du = \sec x \tan x \, dx$ نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned}\int \tan^3 x \sec^5 x dx &= \int (u^6 - u^4) du = \frac{1}{7} u^7 - \frac{1}{5} u^5 + C \\ &= \frac{1}{7} \sec^7 x - \frac{1}{5} \sec^5 x + C.\end{aligned}$$

مثال ۶. $\int \tan^2 x \sec^3 x dx$ را حساب کنید.

حل. نکات فوق در اینجا به کار نمی‌آیند، زیرا $p = 2$ زوج و $q = 3$ فرد است، ولی ابزار محاسبه انتگرال در دست ماست. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که، به کمک فرمول (۶)،

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x \sec^3 x dx &= \int (\sec^2 x - 1) \sec^3 x dx \\ (۸) \qquad \qquad \qquad &= \int \sec^5 x dx - \int \sec^3 x dx.\end{aligned}$$

برای محاسبه انتگرال $\int \sec^5 x dx$ ، با انتخاب $u = \sec^3 x$ ، $dv = \sec^2 x dx$ جزء به جزء انتگرالگیری می‌کنیم. در این صورت،

$$du = 3 \sec^3 x \tan x dx, \quad v = \tan x,$$

۹

$$(۹) \qquad \int \sec^5 x dx = \sec^3 x \tan x - 3 \int \tan^2 x \sec^3 x dx,$$

که در آن انتگرال مورد محاسبه مجدداً "سمت راست ظاهر می‌شود" با گذاردن (۹) در (۸) و حل نسبت به این انتگرال، داریم

$$\begin{aligned}\int \tan^2 x \sec^3 x dx &= \frac{1}{4} \sec^3 x \tan x - \frac{1}{4} \int \sec^3 x dx \\ &= \frac{1}{4} \sec^3 x \tan x - \frac{1}{8} \sec x \tan x \\ &\quad - \frac{1}{8} \ln |\sec x + \tan x| + C,\end{aligned}$$

که در آخرین مرحله از مثال ۷، صفحه ۶۰۶، استفاده کرده‌ایم. به عنوان تمرین، همین جواب را با اعمال فرمول تحویل $\int \sec^n x dx$ داده شده در مسئله ۲۶، صفحه ۶۱۵، به دست آورید.

به خاطر توازی موجود بین خواص توابع $\tan x$, $\sec x$ و نیز بین $\cot x$, $\csc x$ ، اساساً همین تکنیکها را می‌توان برای محاسبهٔ انتگرال

$$\int \cot^p x \csc^q x dx,$$

به کمک فرمولهای

$$(۶) \quad \cot^2 x = \csc^2 x - 1,$$

$$(۷) \quad \csc^2 x = \cot^2 x + 1$$

به کار برد.

مثال ۷. $\int \cot^3 x \csc^3 x dx$ را حساب کنید.

حل. داریم

$$\begin{aligned} \int \cot^3 x \csc^3 x dx &= \int \cot^2 x \csc^2 x (\csc x \cot x) dx \\ &= - \int (\csc^2 - 1) \csc^2 x d(\csc x) \\ &= - \int (\csc^4 x - \csc^2 x) d(\csc x) \\ &= -\frac{1}{5} \csc^5 x + \frac{1}{3} \csc^3 x + C, \end{aligned}$$

که در آن تمام عبارت $\csc x$ را متغیر انتگرالگیری گرفته، بدین وسیله از جانشانی صریح $u = \csc x$ احتراز نموده‌ایم.

انتگرالگیری از حاصل ضرب سینوسها و کسینوسها با شناسه‌های مختلف انتگرالهای مثلثاتی

$$\int \sin ax \cos bx dx, \quad \int \cos ax \cos bx dx, \quad \int \sin ax \sin bx dx$$

در مسائل کار بستهٔ مربوط به پدیده‌های نوسانی، مانند ارتعاشات مکانیکی و امواج رادیویی، مکرر ظاهر می‌شوند. برای محاسبهٔ انتگرالهای از این نوع، اتحادهای مثلثاتی زیر را به

کار می‌گیریم:

$$\sin ax \cos bx = \frac{1}{2} [\sin (a + b)x + \sin (a - b)x],$$

$$\cos ax \cos bx = \frac{1}{2} [\cos (a + b)x + \cos (a - b)x],$$

$$\sin ax \sin bx = \frac{1}{2} [\cos (a - b)x - \cos (a + b)x],$$

که فوراً " از قوانین جمع برای توابع سینوس و کسینوس نتیجه می‌شوند (ر. ک. ص. ۹۵).

مثال ۸. $\int \sin 2x \cos 5x dx$ را حساب کنید.

حل. به کمک اولین اتحاد فوق داریم

$$\begin{aligned} \int \sin 2x \cos 5x dx &= \frac{1}{2} \int [\sin (2 + 5)x + \sin (2 - 5)x] dx \\ &= \frac{1}{2} \int \sin 7x dx - \frac{1}{2} \int \sin 3x dx \\ &= -\frac{1}{14} \cos 7x + \frac{1}{6} \cos 3x + C. \end{aligned}$$

مسائل

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\int \sin^2 x \cos^3 x dx \quad \cdot ۲ \checkmark$$

$$\int \sin^2 x \cos^2 x dx \quad \cdot ۱ \checkmark$$

$$\int \sin^5 x \cos^4 x dx \quad \cdot ۴$$

$$\int \sin^3 4x \cos^2 4x dx \quad \cdot ۳ \checkmark$$

$$\int (\sin x)^{2/3} \cos^3 x dx \quad \cdot ۸ \checkmark$$

$$\int \sin^7 x \sqrt{\cos x} dx \quad \cdot ۵ \checkmark$$

$$\int \sin^4 x \cos^2 x dx \quad \cdot ۸ \checkmark$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{\sin^4 x} dx \quad \cdot ۷ \checkmark$$

$$\int_0^{\pi/6} \sin^3 s \cos^3 s ds \quad \cdot ۱۰ \checkmark$$

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos^2 x} dx \quad \cdot ۹ \checkmark$$

$$\int_{\pi/3}^{2\pi/3} \frac{\cos^5 u}{\sin^4 u} du \cdot 12 \checkmark$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4 t \cos^4 t dt \cdot 11 \checkmark$$

$$\int \tan^3 x \sec^3 x dx \cdot 14 \checkmark$$

$$\int \tan^3 2x \sec 2x dx \cdot 13 \checkmark$$

$$\int \tan^3 x dx \cdot 16 \checkmark$$

$$\int \tan^2 x \sec^4 x dx \cdot 15 \checkmark$$

$$\int \sec^4 x dx \cdot 18 \checkmark$$

$$\int \cot^2 x \csc^4 x dx \cdot 17 \checkmark$$

$$\int \cot^3 x \csc x dx \cdot 20 \checkmark$$

$$\int \tan^4 3x dx \cdot 19 \checkmark$$

$$\int_0^{\pi/4} (\tan s)^{3/2} \sec^4 s ds \cdot 22 \checkmark$$

$$\int \cot^3 x dx \cdot 21 \checkmark$$

$$\int_{1/6}^{5/6} \cot^2 \pi u \csc^2 \pi u du \cdot 24 \checkmark$$

$$\int_0^{\pi/3} \tan^3 t \sec t dt \cdot 23 \checkmark$$

$$\int \cos 4x \cos 5x dx \cdot 26 \checkmark$$

$$\int \sin 5x \cos 3x dx \cdot 25 \checkmark$$

$$\int \sin \pi x \cos 2\pi x dx \cdot 28 \checkmark$$

$$\int \sin 3x \sin 6x dx \cdot 27 \checkmark$$

$$\int \sin \frac{5x}{2} \sin \frac{x}{2} dx \cdot 30 \checkmark$$

$$\int \cos \frac{2x}{3} \cos \frac{x}{3} dx \cdot 29 \checkmark$$

$$\int_{-\pi/2}^{3\pi/2} \sin 6y \sin 9y dy \cdot 32 \checkmark$$

$$\int_0^{\pi} \sin 3x \cos 4x dx \cdot 31 \checkmark$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos 2z \cos 4z dz \cdot 33 \checkmark$$

۳۴. فرض کنید m و n اعداد صحیح ناصفر دلخواهی باشند. فرمولهای زیر را که در ریاضیات کار بسته اهمیت زیادی دارند تحقیق کنید:

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0,$$

$$\int_0^{2\pi} \sin mx \sin nx dx = \int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx$$

$$= \begin{cases} 0, & m \neq n \text{ اگر} \\ \pi, & m = n \text{ اگر} \end{cases}$$

نشان دهید که این فرمولها در اثر تعویض حدود انتگرالگیری $0, 2\pi$ با $\pi, \pi -$ نیز برقرارند.

۵.۷ جانشانیهای مثلثاتی و هذلولوی

مثالهای زیر ما را با نوع جانشانیهای این بخش آشنا می‌سازند.

مثال ۱. انتگرال نامعین

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx \quad (a > 0)$$

را حساب کنید.

حل. فرض کنیم $x = a \sin u$ ، که در آن $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$ ، پس $dx = a \cos u du$ ، و

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u} = a\sqrt{1 - \sin^2 u} = a\sqrt{\cos^2 u} = a \cos u,$$

زیرا $\cos u$ به ازای مقادیر داده شده از u نامنفی است. بنابراین،

$$\int \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \int \cos^2 u du.$$

اما

$$\begin{aligned} \int \cos^2 u du &= \frac{1}{2} \int (\cos 2u + 1) du = \frac{1}{4} \sin 2u + \frac{1}{2} u + k \\ &= \frac{1}{2} \sin u \cos u + \frac{1}{2} u + k, \end{aligned}$$

که در آن k ثابت انتگرالگیری دلخواهی است؛ در نتیجه،

$$(1) \quad \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} a^2 \sin u \cos u + \frac{1}{2} a^2 u + C,$$

که در آن ثابت $C = a^2 k$ نیز دلخواه است. به علاوه،

$$\sin u = \frac{x}{a}, \quad u = \arcsin \frac{x}{a},$$

$$\cos u = \sqrt{1 - \sin^2 u} = \sqrt{1 - \frac{x^2}{a^2}} = \frac{1}{a} \sqrt{a^2 - x^2},$$

و با گذاردن این عبارات $\sin u$ ، $\cos u$ ، و u در (۱)، مآلاً خواهیم داشت

$$(۲) \quad \int \sqrt{a^2 - x^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} + C.$$

جالب است که از طرف راست (۲) مشتق گرفته و دید که چگونه سه جمله حاصل تلفیق و $\sqrt{a^2 - x^2}$ تشکیل می‌شود.

مثال ۲. انتگرال معین

$$(۳) \quad \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx$$

حساب کنید.

حل. از رابطه (۲) معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx &= \left[\frac{1}{2} x \sqrt{a^2 - x^2} + \frac{1}{2} a^2 \arcsin \frac{x}{a} \right]_0^a \\ &= \frac{1}{2} a^2 \arcsin 1 = \frac{1}{2} a^2 \left(\frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{4} \pi a^2 \end{aligned}$$

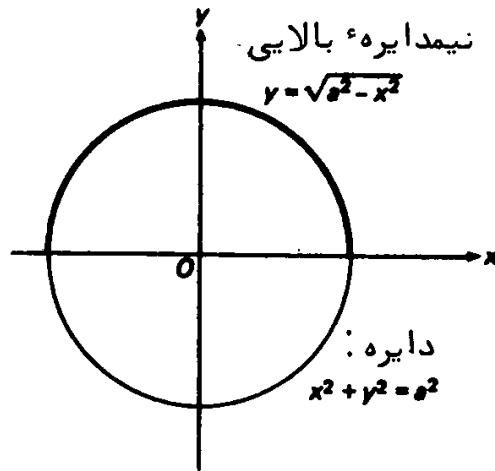
(در مرحله دوم معلوم می‌شود که سه جمله صفرند). همچنین، می‌توان (۳) را مستقیماً بدون محاسبه انتگرال نامعین (۲) حساب کرد. در واقع، با همان جانشانی $x = a \sin u$ ($-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$) مثال ۱ و توجه به اینکه $x = 0$ ایجاب می‌کند که $u = 0$ در حالی که $x = a$ ایجاب می‌کند که $u = \pi/2$ (جانشانی یک به یک است)، به دست می‌آوریم

$$\int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = a^2 \left[\frac{1}{4} \sin 2u + \frac{1}{2} u \right]_0^{\pi/2} = \frac{1}{4} \pi a^2.$$

راه حتی ساده‌تر برای محاسبه انتگرال (۳) تشخیص این است که (۳) مساحت تحت منحنی $y = \sqrt{a^2 - x^2}$ در ربع اول و مساوی یک‌چهارم مساحت A ی محصور به دایره $x^2 + y^2 = a^2$ به شعاع a و مرکز مبدأ است (ر.ک. شکل ۱). اما $A = \pi a^2$ ؛ و لذا، انتگرال مساوی $\frac{1}{4} \pi a^2$ می‌باشد.

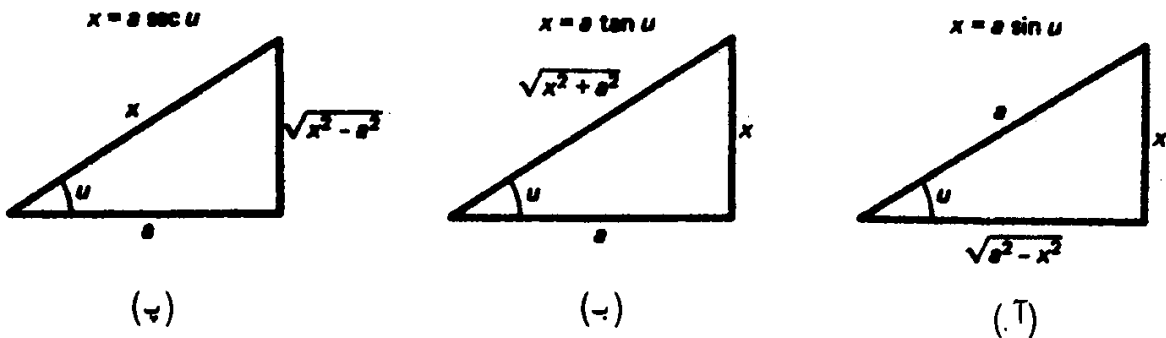
جانشانیهای $x = a \sin u$ ، $x = \tan u$ ، و $x = a \sec u$ ، به‌طور کلی، هر انتگرال شامل یکی از عبارات گنگ

$$(۴) \quad \sqrt{a^2 - x^2}, \quad \sqrt{x^2 + a^2}, \quad \sqrt{x^2 - a^2} \quad (a > 0)$$



شکل ۱

را غالباً می‌توان با یک جانشانی مثلثاتی، یعنی جانشانی $x = x(u)$ شامل یک تابع مثلثاتی، حساب کرد. شکل ۲ جانشانیهای مناسب این سه حالت را نشان می‌دهد. توجه کنید که در هر قسمت شکل، x و a طول اضلاع یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند، و طول ضلع دیگر یکی از عبارات فوق است، و متغیر جدید u یکی از زوایای مثلث (به رادیان) است. در هر مثلث $0 < u < \pi/2$ ، ولی جانشانیهای مذکور به ازای مقادیر دیگری از u نیز کار سازند (ر.ک. زیر). پس از آنکه انتگرال داده شده برحسب متغیر جدید u حساب شد، همان مثلث جانشانیهای لازم برای بازگشت به متغیر اصلی x را پیشنهاد می‌کند. در اینجا فرض می‌کنیم جانشانی $x = x(u)$ یک به یک است، و این با تجدید مناسب مقادیر u تضمین خواهد شد.



شکل ۲

مثلثهای شکل ۲ راه مناسبی برای به‌خاطر آوردن اطلاعات مفصلتر زیرند. (یک) در یک انتگرال شامل $\sqrt{a^2 - x^2}$ جانشانی $x = a \sin u$ را انجام دهید که در آن صورت، $dx = a \cos u du$ ، و $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$

$$\sqrt{a^2 - x^2} = \sqrt{a^2 - a^2 \sin^2 u} = a\sqrt{1 - \sin^2 u} = a\sqrt{\cos^2 u} = a \cos u,$$

زیرا به ازای این مقادیر u ، $\cos u \geq 0$ ، اگر عبارت $\sqrt{a^2 - x^2}$ در مخرج انتگرالده ظاهر شود، باید u را به بازه $-\pi/2 < u < \pi/2$ محدود کنیم، زیرا به ازای $u = \pm \pi/2$ ، $\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos u$ مساوی صفر است.

(دو) در یک انتگرال شامل $\sqrt{x^2 + a^2}$ جانشانی $x = a \tan u$ را انجام دهید، که در آن $-\pi/2 < u < \pi/2$ (توجه کنید که $\tan u$ به ازای $u = \pm \pi/2$ تعریف نشده است). در این صورت، $dx = a \sec^2 u du$ ، و

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \tan^2 u + a^2} = a\sqrt{\tan^2 u + 1} = a\sqrt{\sec^2 u} = a \sec u,$$

زیرا به ازای این مقادیر u ، $\sec u \geq 0$.

(سه) در یک انتگرال شامل $\sqrt{x^2 - a^2}$ جانشانی $x = a \sec u$ را انجام دهید که در آن $0 \leq u < \pi/2$ (توجه کنید که $\sec u$ به ازای $u = \pi/2$ تعریف نشده است). در این صورت، $dx = a \sec u \tan u du$ ، و

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \sec^2 u - a^2} = a\sqrt{\sec^2 u - 1} = a\sqrt{\tan^2 u} = a \tan u,$$

زیرا به ازای این مقادیر u ، $\tan u \geq 0$. همچنین، u می‌تواند مقادیر $\pi/2 < u \leq \pi$ را بگیرد، ولی در این صورت، $\sqrt{x^2 - a^2} = a\sqrt{\tan^2 u} = -a \tan u$ ، زیرا به ازای این مقادیر u ، $\tan u \leq 0$ ، اگر عبارت $\sqrt{x^2 - a^2}$ در مخرج انتگرالده ظاهر شود، باید مقادیر $u = 0$ و $u = \pi$ را مستثنی کنیم، زیرا $\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan u$ به ازای این مقادیر u مساوی صفر است.

باید توجه داشت که در هر حالت مقادیر u چنان محدود شده‌اند که تابع $x = x(u)$ یک به یک است. لذا، در (یک) تابع $x = a \sin u$ در صورتی یک به یک با معکوس $u = \arcsin(x/a)$ است که $-\pi/2 \leq u \leq \pi/2$ ، در (دو) تابع $x = a \tan u$ در صورتی یک به یک با معکوس $u = \arctan(x/a)$ است که $-\pi/2 < u < \pi/2$ ، و در (سه) تابع $x = a \sec u$ در صورتی یک به یک با معکوس $u = \operatorname{arcsec}(x/a)$ است که $0 \leq u < \pi/2$ یا $\pi/2 < u \leq \pi$.

جانشانیهای $x = a \sinh u$ و $x = a \cosh u$. اولین عبارت (۴) را می‌توان با جانشانی $x = a \cos u$ ، دومین عبارت را با $x = a \cot u$ ، و سومین عبارت را با $x = a \csc u$ نیز ساده کرد (این حکم را ثابت کنید). اما این جانشانیها زایدند، زیرا هرکاری که اینها بتوانند انجام دهند را می‌توان ساده‌تر با جانشانیهای $x = a \sin u$ ، $x = a \tan u$ ، و

و $x = a \sec u$ صورت داد. آنچه جالبتر است جانشانیهای هذلولوی $x = a \sinh u$ و $x = a \cosh u$ هستند، که در ساده کردن عبارات $\sqrt{x^2 + a^2}$ و $\sqrt{x^2 - a^2}$ ($a > 0$) به خوبی جانشانیهای مثلثاتی $x = a \tan u$ و $x = a \sec u$ می‌باشند. در واقع، هرگاه $x = a \sinh u$ که در آن $-\infty < u < \infty$ ، آنگاه $dx = a \cosh u du$ ، و

$$\sqrt{x^2 + a^2} = \sqrt{a^2 \sinh^2 u + a^2} = a\sqrt{\sinh^2 u + 1} = a\sqrt{\cosh^2 u} = a \cosh u,$$

زیرا $\cosh u > 0$ ، حال آنکه اگر $x = a \cosh u$ که در آن $0 \leq u < \infty$ ، داریم $dx = a \sinh u du$ و

$$\sqrt{x^2 - a^2} = \sqrt{a^2 \cosh^2 u - a^2} = a\sqrt{\cosh^2 u - 1} = a\sqrt{\sinh^2 u} = a \sinh u,$$

چرا که اگر u نامنفی باشد، $\sinh u \geq 0$.

مثال ۳. انتگرال زیر را با استفاده از جانشانی هذلولوی حساب کنید:

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx \quad (a > 0)$$

حل. فرض کنیم $x = a \sinh u$. در نتیجه، $dx = a \cosh u$ ، $\sqrt{x^2 + a^2} = a \cosh u$ و

$$\int \sqrt{x^2 + a^2} dx = a^2 \int \cosh^2 u du.$$

اما

$$\int \cosh^2 u du = \frac{1}{2} \int (\cosh 2u + 1) du = \frac{1}{4} \sinh 2u + \frac{1}{2} u + C,$$

ولذا،

$$(5) \quad \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} a^2 \sinh u \cosh u + \frac{1}{2} a^2 u + C,$$

زیرا $\sinh 2u = 2 \sinh u \cosh u$. به علاوه،

$$\sinh u = \frac{x}{a}, \quad u = \sinh^{-1} \frac{x}{a},$$

$$\cosh u = \sqrt{\sinh^2 u + 1} = \sqrt{\left(\frac{x}{a}\right)^2 + 1} = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}.$$

با گذاردن این عبارات به جای $\sinh u$ ، $\cosh u$ ، و u در (۵) ، مآلاً " خواهیم داشت

$$(۶) \quad \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \sinh^{-1} \frac{x}{a} + C.$$

تشابه بین فرمولهای (۲) و (۶) قابل توجه است. با استفاده از فرمول (۳) ، صفحه ۵۷۴ ، می‌توان (۶) را ، پس از جذب $-\frac{1}{2} a^2 \ln a$ در ثابت انتگرالگیری دلخواه C ، به شکل معادل زیر نوشت :

$$(۶') \quad \int \sqrt{x^2 + a^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C.$$

مثال ۴ . مثال ۳ را با جانشانی مثلثاتی حل کنید .

حل . فرض کنیم $x = a \tan u$ ، $dx = a \sec^2 u du$ ؛ در نتیجه ، $\sqrt{x^2 + a^2} = a \sec u$ ، و به کمک مثال ۷ ، صفحه ۶۰۶ ،

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= a^2 \int \sec^3 u du \\ &= \frac{1}{2} a^2 \sec u \tan u + \frac{1}{2} a^2 \ln |\sec u + \tan u| + C. \end{aligned}$$

باتوجه به شکل ۲ (ب) ، که در آن $\tan u = x/a$ ، معلوم می‌شود که

$$\sec u = \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a}.$$

بنابراین ،

$$\begin{aligned} \int \sqrt{x^2 + a^2} dx &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln \left| \frac{\sqrt{x^2 + a^2}}{a} + \frac{x}{a} \right| + C \\ &= \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 + a^2} + \frac{1}{2} a^2 \ln (x + \sqrt{x^2 + a^2}) + C, \end{aligned}$$

و مجدداً " ، پس از جذب $-\frac{1}{2} a^2 \ln a$ در C ، رابطه (۶') را خواهیم داشت . (چرا حذف علامت قدرمطلق مجاز است ؟)

مثال ۵ . $\int \frac{dx}{(9x^2 + 4)^{3/2}}$ را حساب کنید .

حل. این بار فرض می‌کنیم $x = \frac{2}{3} \tan u$. در نتیجه، $dx = \frac{2}{3} \sec^2 u du$ ، و

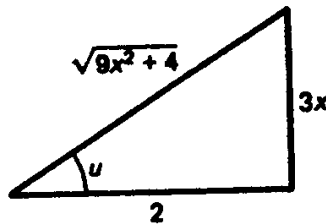
$$(9x^2 + 4)^{3/2} = (4 \tan^2 u + 4)^{3/2} = 8 \sec^3 u.$$

در این صورت،

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(9x^2 + 4)^{3/2}} &= \int \frac{\frac{2}{3} \sec^2 u}{8 \sec^3 u} du = \frac{1}{12} \int \frac{du}{\sec u} \\ &= \frac{1}{12} \int \cos u du = \frac{1}{12} \sin u + C. \end{aligned}$$

معاینه شکل ۳، که در آن $\tan u = 3x/2$ ، نشان می‌دهد که

$$\sin u = \frac{3x}{\sqrt{9x^2 + 4}}.$$



شکل ۳

بنابراین،

$$\int \frac{dx}{(9x^2 + 4)^{3/2}} = \frac{x}{4\sqrt{9x^2 + 4}} + C.$$

به عنوان تمرین، نشان دهید که جانشانی هذلولوی $x = \frac{2}{3} \sinh u$ به همین جواب ختم می‌شود.

مثال ۶. انتگرال

$$(۷) \quad \int \frac{dx}{(16x^2 - 25)^{3/2}}$$

را حساب کنید.

حل. فرض کنیم $x = \frac{5}{4} \sec u$ ($0 < u < \pi/2$). در نتیجه، $dx = \frac{5}{4} \sec u \tan u du$ ، و

$$(16x^2 - 25)^{3/2} = (25 \sec^2 u - 25)^{3/2} = 125 \tan^3 u.$$

در این صورت ،

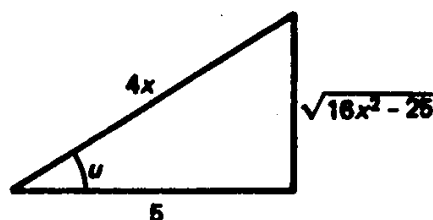
$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(16x^2 - 25)^{3/2}} &= \int \frac{\frac{1}{4} \sec u \tan u}{125 \tan^3 u} du = \frac{1}{100} \int \frac{du}{\cos u \frac{\sin^2 u}{\cos^2 u}} \\ &= \frac{1}{100} \int \frac{1}{\sin u} \frac{\cos u}{\sin u} du = \frac{1}{100} \int \csc u \cot u du \\ &= -\frac{1}{100} \csc u + C. \end{aligned}$$

با توسل به شکل ۴ ، که در آن $\sec u = 4x/5$ ، معلوم می شود که

$$\csc u = \frac{4x}{\sqrt{16x^2 - 25}}$$

ولذا ،

$$\int \frac{dx}{(16x^2 - 25)^{3/2}} = -\frac{1}{25} \frac{x}{\sqrt{16x^2 - 25}} + C,$$



شکل ۴

مشروط بر اینکه $x > \frac{5}{4}$. به عنوان تمرین ، نشان دهید که همین فرمول به ازای $x < -\frac{5}{4}$ برقرار است .

مثال ۷ . مثال ۶ را با جانشانی هذلولوی حل کنید .

حل . فرض کنیم $x = \frac{5}{4} \cosh u$ ($0 \leq u < \infty$) . در نتیجه ، $dx = \frac{5}{4} \sinh u du$ ، و

$$(16x^2 - 25)^{3/2} = (25 \cosh^2 u - 25)^{3/2} = 125 \sinh^3 u.$$

در این صورت ،

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{(16x^2 - 25)^{3/2}} &= \int \frac{\frac{4}{5} \sinh u}{125 \sinh^3 u} du = \frac{1}{100} \int \frac{du}{\sinh^2 u} \\ &= \frac{1}{100} \int \operatorname{csch}^2 u \, du = -\frac{1}{100} \operatorname{coth} u + C \\ &= -\frac{1}{100} \frac{\cosh u}{\sinh u} + C. \end{aligned}$$

اما

$$\cosh u = \frac{4x}{5}, \quad \sinh u = \frac{\sqrt{16x^2 - 25}}{5},$$

و در نتیجه، مثل قبل،

$$\int \frac{dx}{(16x^2 - 25)^{3/2}} = -\frac{1}{100} \frac{4x}{5} \frac{5}{\sqrt{16x^2 - 25}} + C = -\frac{1}{25} \frac{x}{\sqrt{16x^2 - 25}} + C,$$

این حالت $x > \frac{5}{4}$ را سامان می‌دهد، و حالت $x < -\frac{5}{4}$ را می‌توان با جانشانی $x = -\frac{5}{4} \cosh u$ سامان داد (بیشتر توضیح دهید).

مثال ۸. $\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}}$ را حساب کنید.

حل. در اینجا زیر رادیکال توان اول x وجود دارد، ولی می‌توان آن را با کامل کردن مربع از بین برد. در واقع،

$$x^2 + x + 1 = \left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4} = y^2 + \frac{3}{4},$$

که در آن $y = x + \frac{1}{2}$ ؛ و در نتیجه،

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + \frac{3}{4}}}$$

برای محاسبه انتگرال طرف راست، قرار می‌دهیم $y = (\sqrt{3}/2) \tan u$. در

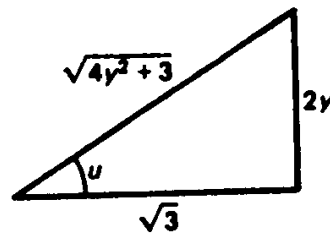
این صورت، $\sqrt{y^2 + \frac{3}{4}} = (\sqrt{3}/2) \sec u$ ، $dy = (\sqrt{3}/2) \sec^2 u \, du$ ، به کمک مثال ۴، صفحه

۵۹۵.

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + \frac{3}{4}}} = \int \frac{\sec^2 u}{\sec u} du = \int \sec u \, du = \ln |\sec u + \tan u| + C.$$

معاینه شکل ۵، که در آن $\tan u = 2y/\sqrt{3}$ ، نشان می‌دهد که

$$\sec u = \frac{\sqrt{4y^2 + 3}}{\sqrt{3}},$$



شکل ۵

و در نتیجه، پس از جذب $-\ln \sqrt{3}$ در ثابت دلخواه انتگرالگیری C ،

$$\int \frac{dy}{\sqrt{y^2 + \frac{3}{4}}} = \ln \left| \frac{\sqrt{4y^2 + 3}}{\sqrt{3}} + \frac{2y}{\sqrt{3}} \right| + C = \ln (\sqrt{4y^2 + 3} + 2y) + C$$

(حذف علامت قدرمطلق را توجیه کنید). با مراجعه به متغیر اصلی x ، داریم

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} &= \ln \left[\sqrt{4\left(x + \frac{1}{2}\right)^2 + 3} + 2\left(x + \frac{1}{2}\right) \right] + C \\ &= \ln \left[\sqrt{4x^2 + 4x + 4} + 2\left(x + \frac{1}{2}\right) \right] + C \\ &= \ln \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2} \right) + \ln 2 + C. \end{aligned}$$

بالاخره، با جذب $\ln 2$ در C ، به دست می‌آوریم

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x + 1}} = \ln \left(\sqrt{x^2 + x + 1} + x + \frac{1}{2} \right) + C.$$

مثال ۹. $\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{4x - x^2}} dx$ را حساب کنید.

حل. عبارت $4x - x^2$ را مربع کامل می‌کنیم، به دست می‌آید

$$4x - x^2 = 4 - (x - 2)^2 = 4 - y^2,$$

که در آن $y = x - 2$. در این صورت، $x = 2 + y$ ، $dx = dy$ ، و

$$\begin{aligned}\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}} dx &= \int_{-1}^1 \frac{2+y}{\sqrt{4-y^2}} dy \\ &= 2 \int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} + \int_{-1}^1 \frac{y}{\sqrt{4-y^2}} dy.\end{aligned}$$

دومین انتگرال مجموع سمت راست مساوی صفر است، زیرا انتگرالده فرد بوده و بازه انتگرالگیری نسبت به مبدأ متقارن است. برای محاسبه انتگرال اول، از فرمول (۲)، صفحه ۴۶۸، استفاده کرده به دست می‌آوریم

$$\int_{-1}^1 \frac{dy}{\sqrt{4-y^2}} = \left[\arcsin \frac{y}{2} \right]_{-1}^1 = 2 \left(\arcsin \frac{1}{2} \right) = 2 \left(\frac{\pi}{3} \right) = \frac{2\pi}{3}.$$

لذا، بالاخره،

$$\int_1^3 \frac{x}{\sqrt{4x-x^2}} dx = \frac{2\pi}{3}.$$

در بعضی حالات، انتگرالی که قابل محاسبه با جانشانی مثلثاتی یا هذلولوی است را می‌توان با جانشانی جبری ساده‌تری حساب کرد، و لازم است همیشه آماده این امکان باشیم. مثلاً، با جانشانی مثلثاتی $x = 2 \sin u$ معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{4-x^2} dx &= 8 \int \cos^2 u \sin u du \\ &= -\frac{8}{3} \cos^3 u + C = -\frac{1}{3} (4-x^2)^{3/2} + C,\end{aligned}$$

ولی جانشانی جبری $u = 4 - x^2$ سرراست‌تر، و در نتیجه ارجح، می‌باشد:

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{4-x^2} dx &= -\frac{1}{2} \int u^{1/2} du \\ &= -\frac{1}{3} u^{3/2} + C = -\frac{1}{3} (4-x^2)^{3/2} + C.\end{aligned}$$

لازم است متذکر شویم که یک جانشانی مثلثاتی یا هذلولوی اغلب به کشف فرمولی منتهی می‌شود که از قبل معلوم است. مثلاً، با جانشانی مثلثاتی $x = \sin u$ معلوم می‌شود که

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{\cos u}{\cos u} du = \int du = u + C = \arcsin x + C,$$

که همان فرمول (۲)، صفحه ۴۶۸، است، حال آنکه جانشانی مثلثاتی $x = \tan u$ نتیجه

می دهد که

$$\int \frac{dx}{x^2 + 1} = \int \frac{\sec^2 u}{\sec^2 u} du = \int du = u + C = \arctan x + C,$$

که همان فرمول (۶) ، صفحه ۴۷۰ ، می باشد . به همین نحو ، جانشانی هذلولوی $x = 3 \sinh u$ نتیجه می دهد که

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 9}} = \int \frac{3 \cosh u}{3 \cosh u} du = \int du = u + C = \sinh^{-1} \frac{x}{3} + C,$$

که حالت خاصی از فرمول (۲) ، صفحه ۵۷۴ ، می باشد . لذا ، اغلب طرق مختلفی برای محاسبه یک انتگرال وجود دارد ، و باید راهی را اختیار کنید که از همه مؤثرتر باشد . همواره می توان با مشتقگیری تحقیق کرد که انتگرال درست حساب شده است یا نه .

مسائل

انتگرالهای زیر را حساب کنید .

$$\int \sqrt{4x^2 + 25} dx \quad \cdot ۲ \checkmark$$

$$\int \sqrt{1 - 9x^2} dx \quad \cdot ۱ \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{9 - 4x^2}} \quad \cdot ۴ \checkmark$$

$$\int \sqrt{16x^2 - 1} dx \quad \cdot ۳ \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{36x^2 - 49}} \quad \cdot ۶ \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 64}} \quad \cdot ۵ \checkmark$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 - 25}} dx \quad \cdot ۸ \checkmark$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{1 - 3x^2}} dx \quad \cdot ۷ \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{1 - 100x^2}} \quad \cdot ۱۰ \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x^2 + 4}} \quad \cdot ۹ \checkmark$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{x^2 + 1}} dx \quad \cdot ۱۲$$

$$\int \frac{dx}{x^2 \sqrt{x^2 - 2}} \quad \cdot ۱۱ \checkmark$$

$$\int (1 - x^2)^{3/2} dx \quad \cdot ۱۴$$

$$\int \frac{x^3}{\sqrt{16 - x^2}} dx \quad \cdot ۱۳$$

$$\int \frac{\sqrt{4 - x^2}}{x} dx \quad \cdot ۱۶$$

$$\int (x^2 - 1)^{3/2} dx \quad \cdot ۱۵$$

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 1)^{5/2}} \quad \cdot ۱۸$$

$$\int \frac{\sqrt{x^2 - 9}}{x^2} dx \quad \cdot ۱۷$$

$$\int \sqrt{x^2 + 2x + 2} dx \cdot ۲۰$$

$$\int \frac{dx}{x^3 \sqrt{x^2 - 4}} \cdot ۱۹$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 4x + 6}} \cdot ۲۲$$

$$\int \sqrt{2x - x^2} dx \cdot ۲۱$$

$$\int \frac{dx}{(4x^2 + 8x - 1)^{3/2}} \cdot ۲۴$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2 + 3x - 4}} \cdot ۲۳$$

$$\int_{-1}^1 \frac{ds}{\sqrt{4 - 2s - s^2}} \cdot ۲۶$$

$$\int_{1/2}^2 \sqrt{x^2 - x + 1} dx \cdot ۲۵$$

$$\int_0^2 \frac{x^2}{\sqrt{12 + 4x - x^2}} dx \cdot ۲۸$$

$$\int_1^3 \frac{t}{\sqrt{t^2 + 2t + 5}} dt \cdot ۲۷$$

$$\int_{1/\sqrt{3}}^1 \frac{dt}{t(t^2 + 1)} \cdot ۳۰$$

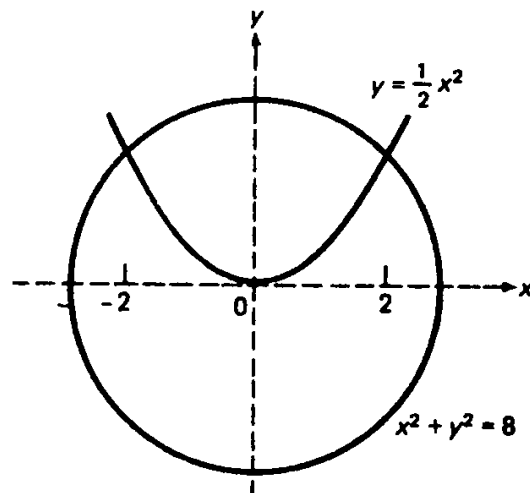
$$\int_1^2 \frac{ds}{s^2 \sqrt{9 - s^2}} \cdot ۲۹$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin v}{\sqrt{\cos^2 v + 1}} dv \cdot ۳۲$$

$$\int_{\ln 2}^{\ln 3} \frac{e^u}{\sqrt{e^{2u} - 1}} du \cdot ۳۱$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{\sec^2 w}{\sqrt{4 - \tan^2 w}} dw \cdot ۳۳$$

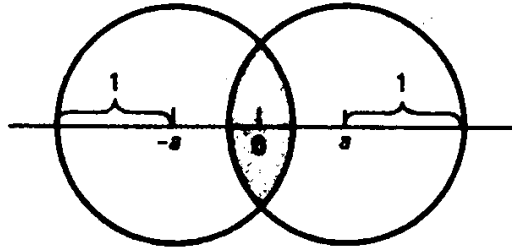
۳۴. مساحت دو ناحیه‌ای را بیابید که سهمی $y = \frac{1}{2}x^2$ درون دایره $x^2 + y^2 = 8$ را تقسیم می‌کند (ر.ک. شکل ۶).



شکل ۶

۳۵. مراکز دو قرص مستدیر به شعاع واحد در فاصله $2a$ از هم قرار دارند ($0 \leq a \leq 1$).

مساحت A ی ناحیه‌ای را بیابید که دو قرص روی هم قرار گرفته‌اند (ناحیه لنزی شکل ۷).



شکل ۷

۳۶. نشان دهید که به ازای $|x| \geq a > 0$ ،

$$\int \sqrt{x^2 - a^2} dx = \frac{1}{2} x \sqrt{x^2 - a^2} - \frac{1}{2} a^2 \ln |x + \sqrt{x^2 - a^2}| + C$$

۳۷. مساحت A ی قطاع هذلولوی POQ نموده شده در شکل ۱۹ (ب) ، صفحه ۵۶۶ ، را بیابید .

راهنمایی . توجه کنید که $A = \frac{1}{2} \cosh \theta \sinh \theta - \int_1^{\cosh \theta} \sqrt{x^2 - 1} dx$

۳۸. با استفاده از جانشانی مثلثاتی ، فرمول تحویل

$$\int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^{n+1}} = \frac{1}{2na^2} \frac{x}{(x^2 + a^2)^n} + \frac{2n-1}{2na^2} \int \frac{dx}{(x^2 + a^2)^n}$$

(ر.ک. مثال ۵ ، صفحه ۶۱۲) را از فرمول تحویل

$$\int \cos^n x dx = \frac{1}{n} \cos^{n-1} x \sin x + \frac{n-1}{n} \int \cos^{n-2} x dx$$

(ر.ک. مثال ۲ ، صفحه ۶۱۱) نتیجه بگیرید .

۶.۷ انتگرالگیری از توابع گویا ؛ کسرهای جزئی

توابع گویای حقیقی و مجازی . در این بخش طرز انتگرالگیری توابع گویا را نشان می‌دهیم . به یاد آورید که یک تابع گویا به صورت خارج قسمت دو چند جمله‌ای تعریف شده است ؛ یعنی ، تابعی به شکل زیر :

$$(1) \quad R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n}{b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_Nx^N} \quad (a_n \neq 0, b_N \neq 0).$$

صورت $P(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه n است، زیرا $a_n \neq 0$ ، در حالی که مخرج $Q(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه N است، زیرا $b_N \neq 0$. (همواره فرض است که صورت و مخرج عامل مشترک ندارند، زیرا در غیر این صورت می‌توان عوامل مشترک را از اول حذف کرد.) اگر $n < N$ ، یعنی اگر درجه صورت از درجه مخرج کمتر باشد، گوییم تابع گویای $R(x)$ حقیقی است. اگر $R(x)$ مجازی باشد، یعنی $n \geq N$ ، می‌توان $Q(x)$ را بر $P(x)$ تقسیم کرده و $R(x)$ را به صورت مجموعی از یک چند جمله‌ای و تابع گویای دیگر $R_1(x)$ با همان مخرج $Q(x)$ بیان کرد، که در آن $R_1(x)$ اینک حقیقی می‌باشد. اما چند جمله‌ایها به آسانی انتگره می‌شوند (ر. ک. مثال ۶، صفحه ۴۵۳). و در نتیجه، اصل مسئله انتگرالگیری از $R_1(x)$ می‌باشد.

مثال ۱. $\int \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} dx$ را حساب کنید.

حل. انتگرالده تابعی گویاست ولی مجازی است، زیرا درجه صورت از درجه مخرج متجاوز است. بنابراین، صورت را بر مخرج تقسیم کرده، به دست می‌آوریم

$$\begin{array}{r} x + 2 \\ x - 1 \overline{) x^2 + x + 1} \\ \underline{x^2 - x} \\ 2x + 1 \\ \underline{2x - 2} \\ 3 \end{array}$$

که در آن $x + 2$ خارج قسمت و ۳ باقیمانده است. لذا،

$$\frac{x^2 + x + 1}{x - 1} = x + 2 + \frac{3}{x - 1},$$

و انتگرالده را به صورت مجموع چند جمله‌ای $x + 2$ و تابع گویای حقیقی $3/(x - 1)$ بیان کرده‌ایم. پس نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + x + 1}{x - 1} dx &= \int (x + 2) dx + 3 \int \frac{dx}{x - 1} \\ &= \frac{1}{2} x^2 + 2x + 3 \ln |x - 1| + C, \end{aligned}$$

که در آن C ثابت انتگرالگیری است.

مثال ۲. $\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx$ را حساب کنید.

حل. انتگرال مجدداً "یک تابع گویای مجازی است، زیرا صورت و مخرج همدرجه می‌باشند. این بار با تقسیم متوالی با توجه به اینکه صورت $x^2 - 1$ را می‌توان به شکل $(x^2 + 1) - 2$ نوشت، داریم

$$\frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} = 1 - \frac{2}{x^2 + 1}$$

بنابراین،

$$\int \frac{x^2 - 1}{x^2 + 1} dx = \int dx - 2 \int \frac{dx}{x^2 + 1} = x - 2 \arctan x + C.$$

چند جمله‌ای درجه دوم تحویل‌ناپذیر. در مثال ۱ صورت $x - 1$ یک چند جمله‌ای خطی است، حال آنکه در مثال ۲ مخرج $x^2 + 1$ یک چند جمله‌ای درجه دوم تحویل‌ناپذیر می‌باشد؛ یعنی، یک چند جمله‌ای درجه دوم که قابل تجزیه به حاصل ضربی از چند جمله‌ایهای خطی نیست. برای آنکه تحویل‌ناپذیری $x^2 + 1$ را ببینیم، ملاحظه می‌کنیم که هرگاه $x^2 + 1$ تجزیه‌ای به صورت زیر می‌داشت:

$$x^2 + 1 = (x - a)(x - b),$$

آنگاه $x^2 + 1$ به ازای $x = a$ یا $x = b$ صفر می‌شد؛ یعنی، معادله درجه دوم $x^2 + 1 = 0$ جواب می‌داشت. اما این ناممکن است، زیرا به ازای هر x حقیقی، $x^2 + 1 \geq 1 > 0$. به طور کلی، چند جمله‌ای درجه دوم $x^2 + px + q$ تحویل‌ناپذیر است اگر و فقط اگر معادله درجه دوم $x^2 + px + q = 0$ جواب (حقیقی) نداشته باشد. بنابر فرمول ریشه‌های یک معادله درجه دوم، این برقرار است اگر و فقط اگر $p^2 - 4q < 0$ یا معادلاً $p^2 < 4q$. در واقع، اگر $p^2 \geq 4q$ ، معادله $x^2 + px + q = 0$ دارای ریشه‌های $a = \frac{1}{2}(-p + \sqrt{p^2 - 4q})$ و $b = \frac{1}{2}(-p - \sqrt{p^2 - 4q})$ است، که در صورت $p^2 = 4q$ یکی می‌باشند، و در این صورت به آسانی معلوم می‌شود که

$$x^2 + px + q = (x - a)(x - b),$$

ولی هرگاه $p^2 < 4q$ ، آنگاه به ازای هر x حقیقی،

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) \geq q - \frac{p^2}{4} > 0$$

تجزیه $Q(x)$. برای بررسی تابع گویای کلی به شکل (۱)، قدم اول تجزیه مخرج

$$(۲) \quad Q(x) = b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_Nx^N \quad (b_N \neq 0)$$

است. در اینجا متکی به قضیه‌ای از جبر هستیم که می‌گوید هر چند جمله‌ای با ضرایب حقیقی مانند $Q(x)$ را می‌توان به صورت حاصل ضربی از عوامل درجه ۲ دوم خطی و تحویل ناپذیر نوشت. به طور مشروح، هرگاه N درجه $Q(x)$ باشد، آنگاه

$$(۳) \quad Q(x) = a(x - c_1)^{r_1} \dots (x - c_k)^{r_k} (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \dots (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m},$$

که در آن $k, m, r_1, \dots, r_k, s_1, \dots, s_m$ اعداد صحیح مثبتی هستند به طوری که

$$(۴) \quad r_1 + \dots + r_k + 2s_1 + \dots + 2s_m = N,$$

و $a, c_1, \dots, c_k, p_1, q_1, \dots, p_m, q_m$ ثابت‌هایی حقیقی‌اند به طوری که هر جفت p_i, q_i در شرط تحویل ناپذیری $p_i^2 < 4q_i$ صدق می‌کند (چرا (۴) برقرار است؟) همچنین، تجزیه (۳) صرف نظر از ترتیب عوامل منحصر به فرد است. البته، فرض است که هیچ دو عامل خطی یا عامل درجه ۲ دوم در (۳) یکی نیستند.

قضیه زیر ابزار جستجو برای عوامل خطی یک چند جمله‌ای را فراهم می‌سازد.

قضیه ۲ (قضیه عاملی). چند جمله‌ای $Q(x)$ بر عامل خطی $x - c$ بخش پذیر است اگر و فقط اگر $Q(c) = 0$.

برهان (اختیاری). هرگاه $Q(x)$ بر $x - c$ بخش پذیر باشد، آنگاه $Q(x) = (x - c)S(x)$ ، که در آن $S(x)$ چند جمله‌ای دیگری است؛ و در نتیجه،

$$Q(c) = (c - c)S(c) = 0.$$

به عکس، هرگاه $Q(x)$ با (۲) داده شده باشد و $Q(c) = 0$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} Q(x) &= Q(x) - Q(c) \\ &= (b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_Nx^N) - (b_0 + b_1c + b_2c^2 + \dots + b_Nc^N) \\ (۵) \quad &= b_1(x - c) + b_2(x^2 - c^2) + \dots + b_N(x^N - c^N). \end{aligned}$$

اما

$$x^n - c^n = (x - c)(x^{n-1} + x^{n-2}c + \dots + xc^{n-2} + c^{n-1}) \quad (n = 1, 2, \dots, N).$$

بنابراین، $x - c$ عامل هر جمله سمت راست (۵) است؛ و در نتیجه، عاملی از چند جمله‌ای $Q(x)$ نیز هست.

مثال ۳. $Q(x) = x^4 + x^3 - 2x^2 - 6x - 4$ را تجزیه کنید.

حل. پس از کمی آزمایش معلوم می شود که $Q(2) = 0$. بنابراین، $Q(x)$ بر $x - 2$ بخش پذیر است. با تقسیم متوالی معلوم می شود که $Q(x) = (x - 2)S(x)$ ، که در آن

$$S(x) = x^3 + 3x^2 + 4x + 2.$$

با آزمایش بیشتر معلوم می شود که $S(-1) = 0$ ؛ در نتیجه، $S(x)$ بر $x + 1$ بخش پذیر است. این بار با تقسیم خواهیم داشت

$$S(x) = (x + 1)(x^2 + 2x + 2),$$

که در آن عامل درجه دوم تحویل ناپذیر است (چرا؟). لذا، بالاخره،

$$Q(x) = (x - 2)S(x) = (x - 2)(x + 1)(x^2 + 2x + 2),$$

که به شکل (۳) است با $k = 2, m = 1, r_1 = r_2 = s_1 = 1 (N = 4), a = 1, c_1 = 2, c_2 = -1, p_1 = q_1 = 2 (p_1^2 < 4q_1)$

بسط به صورت کسر جزئی. وقتی مخرج $Q(x)$ تابع گویای داده شده $R(x)$ تجزیه شد، می توان با استفاده از قضیه زیر (که برهانش حذف شده زیرا نسبتاً "فنی بوده و بیشتر جبری است تا متعلق به حساب دیفرانسیل و انتگرال) آماده انتگرالگیری شد. اما صورت و معنی قضیه به قدر کافی ساده اند. ایده نمایش $R(x)$ به صورت مجموعی از توابع گویای ساده، به نام کسرهای جزئی، است. این توابع به شکل زیر می باشند:

$$\frac{A}{(x - c)^n} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

یا

$$\frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n} \quad (p^2 < 4q, n = 1, 2, \dots),$$

و همانطور که ذیلا "می بینیم، انتگرال آنها را می توان فوراً حساب کرد. مجموع کسرهای جزئی نمایش $R(x)$ را بسط به صورت کسری جزئی $R(x)$ می نامند.

قضیه ۳ (بسط به صورت کسری جزئی یک تابع گویا). فرض کنیم $R(x)$ یک تابع گویای حقیقی با مخرج

$$Q(x) = a(x - c_1)^{r_1} \cdots (x - c_k)^{r_k} (x^2 + p_1x + q_1)^{s_1} \cdots (x^2 + p_mx + q_m)^{s_m}$$

باشد، که در آن هیچ دو عامل خطی یا درجه دوم یکسان نبوده و عوامل درجه دوم همه

تحویل ناپذیرند. در این صورت، $R(x)$ مجموع k قالب از جملات به شکل زیر است^۱:

$$(۶) \quad \frac{A_1}{x - c_1} + \frac{A_2}{(x - c_1)^2} + \dots + \frac{A_{r_1}}{(x - c_1)^{r_1}},$$

برای هر عامل خطی متمایز $x - c_i$ یکی، و m قالب به شکل

$$(۷) \quad \frac{B_1x + C_1}{x^2 + p_1x + q_1} + \frac{B_2x + C_2}{(x^2 + p_2x + q_2)^2} + \dots + \frac{B_{s_1}x + C_{s_1}}{(x^2 + p_1x + q_1)^{s_1}},$$

برای هر عامل درجه دوم متمایز $x^2 + p_ix + q_i$ یکی. ضرایب $A_1, \dots, A_{r_1}, B_1, \dots, B_{s_1}, C_1, \dots, C_{s_1}$ ثابت‌هایی حقیقی بوده و منحصرًا "به وسیله" تابع $R(x)$ معین می‌شوند.

قالب (۶) فقط از یک جمله، اولی اگر $r_1 = 1$ ، تشکیل شده است و همین امر در مورد قالب (۷) اگر $s_1 = 1$ درست است. چند جمله‌ای $Q(x)$ معمولاً "معدودی عامل دارد"، و برای ضرایب می‌توان نماد ساده‌تری را پذیرفت. ما از حروف بزرگ A, B, C, D, E, F, \dots بدون زیرنویس استفاده خواهیم کرد. یکسانی چند جمله‌ایها. پیش از چند مثال از کاربرد قضیه ۳ باید آخرین ابزار جبری را به دست آوریم.

قضیه ۴ (چند جمله‌ایهای یکسان ضرایب یکسان دارند). هرگاه دو چند جمله‌ای از x متحدًا مساوی باشند، آنگاه چند جمله‌ایها درجه یکسان داشته و توانهای یکسان از x ضرایب یکسان خواهند داشت. به عبارت دیگر، هرگاه

$$(۸) \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \equiv b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_Nx^N,$$

که در آن $a_n \neq 0, b_N \neq 0$ ، آنگاه

$$n = N, a_0 = b_0, a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$$

برهان (اختیاری). فرض کنیم $n \neq N$. در این صورت، اگر $n > N$ ، از اتحاد (۸) $n!$ بار مشتق می‌گیریم تا به دست آید $n!a_n = 0$ (ر. ک. مثال ۳، صفحه ۲۲۵)، حال آنکه اگر $n < N$ ، از (۸) $N!$ بار مشتق گرفته به دست می‌آوریم $N!b_N = 0$. لذا، اگر $n \neq N$ ، $a_n = 0$ یا $b_N = 0$ که با فرض متناقض است. پس نتیجه می‌شود که $n = N$. در نتیجه، (۸) شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$(۸') \quad a_0 + a_1x + a_2x^2 + \dots + a_nx^n \equiv b_0 + b_1x + b_2x^2 + \dots + b_nx^n.$$

۱. برای زیاد نشدن نمادها، تمایزی بین ضرایب قالبها به شکل (۶) یا (۷) نخواهیم گذاشت.

با فرض $x = 0$ در (۸') فوراً نتیجه می‌شود $a_0 = b_0$. به علاوه، با n بار مشتق‌گیری از (۸') و گذاردن $x = 0$ در معادلات حاصل (جز آخری) به دست می‌آوریم $a_1 = b_1, a_2 = b_2, \dots, a_n = b_n$.

مثال ۴. تابع گویای

$$\frac{x^2 + 2}{(x - 2)(x + 1)^2}$$

را به صورت کسره‌های جزئی بسط داده، و سپس انتگرال آن را بیابید.

حل. با اعمال قضیه ۳، می‌بینیم که این تابع گویا مجموعی از تنها جمله‌ء

$$\frac{A}{x - 2}$$

نظیر به عامل $x - 2$ در مخرج، و قالب دوجمله‌ای

$$\frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$$

نظیر به عامل دیگر $(x + 1)^2$ می‌باشد. بنابراین،

$$(9) \quad \frac{x^2 + 2}{(x - 2)(x + 1)^2} = \frac{A}{x - 2} + \frac{B}{x + 1} + \frac{C}{(x + 1)^2}$$

که در آن، به خاطر سادگی، ضرایب را با حروف متوالی A, B, C نشان می‌دهیم. برای تعیین ضرایب، طرفین معادله (۹) را در $(x - 2)(x + 1)^2$ ضرب می‌کنیم. از این نتیجه می‌شود که

$$(10) \quad x^2 + 2 = A(x + 1)^2 + B(x - 2)(x + 1) + C(x - 2),$$

یا معادلاً

$$(10') \quad x^2 + 2 = (A + B)x^2 + (2A - B + C)x + (A - 2B - 2C).$$

هرگاه (۱۰) یا (۱۰') به ازای هر x برقرار باشد، آنگاه مسلماً (۹) به ازای هر x جز مقادیر $x = 2$ و $x = -1$ ، که مخرجها را صفر می‌کنند، برقرار است. با اعمال قضیه ۴ بر اتحاد چندجمله‌ای (۱۰')، معلوم می‌شود که ضرایب x^2 در طرفین چپ و راست (۱۰') باید مساوی باشند، و همین امر باید در مورد ضرایب x و جملات ثابت درست باشد (جملات اخیر را می‌توان ضرایب x^0 در نظر گرفت). این ما را فوراً به دستگاه سه معادله خطی زیر از سه

مجهول A ، B ، و C می‌رساند^۱:

$$(11) \quad \begin{aligned} A + B &= 1, \\ 2A - B + C &= 0, \\ A - 2B - 2C &= 2. \end{aligned}$$

با حل این دستگاه معلوم می‌شود که

$$A = \frac{2}{3}, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = -1.$$

در واقع ، با افزودن دو برابر معادله دوم به معادله سوم خواهیم داشت $5A - 4B = 2$ ، که همراه با $A + B = 1$ یا $B = 1 - A$ ایجاب می‌کند که

$$5A - 4(1 - A) = 2, \quad 9A = 6, \quad A = \frac{2}{3}, \quad B = \frac{1}{3}, \quad C = B - 2A = \frac{1}{3} - \frac{4}{3} = -1.$$

با گذاردن این مقادیر از ضرایب A, B, C در (۹) ، معلوم می‌شود که تابع گویای داده شده دارای بسط به صورت کسر جزئی زیر است:

$$\frac{x^2 + 2}{(x - 2)(x + 1)^2} = \frac{2}{3} \left(\frac{1}{x - 2} \right) + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x + 1} \right) - \frac{1}{(x + 1)^2}.$$

حال می‌توان تابع گویا را به آسانی انتگره کرد:

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2 + 2}{(x - 2)(x + 1)^2} dx &= \frac{2}{3} \int \frac{dx}{x - 2} + \frac{1}{3} \int \frac{dx}{x + 1} - \int \frac{dx}{(x + 1)^2} \\ &= \frac{2}{3} \ln |x - 2| + \frac{1}{3} \ln |x + 1| + \frac{1}{x + 1} + C. \end{aligned}$$

راه مؤثرتر دیگری برای تعیین ضرایب A, B, C در مثال ۴ وجود دارد ، که در آن لزومی به حل دستگاه (۱۱) نیست . این روش مبتنی بر این امر است که اگر دو چندجمله‌ای از x متحداً مساوی باشند ، مقادیرشان باید به ازای هر x یکسان باشند . اما با نگاهی به (۱۰) معلوم می‌شود که عبارت سمت راست به ازای $x = 2$ یا $x = -1$ شکل ساده‌ای می‌یابد ، زیرا در هر حالت دوجمله از سه جمله صفر می‌باشند . مثلاً ، با قرار دادن $x = 2$

۱. منظور از یک معادله خطی از n متغیر (یا "مجهول") x_1, x_2, \dots, x_n یعنی معادله‌ای درجه اول نسبت به متغیرها. یعنی ، معادله‌ای به شکل $a_1x_1 + a_2x_2 + \dots + a_nx_n = b$ که در آن a_1, a_2, \dots, a_n, b ثابت‌اند . بعضی از این ثابتها ممکن است صفر باشند ، و معادله خطی را همگن گوئیم اگر $b = 0$.

در (۱۰) فوراً داریم $6 = 9A$ یا $A = \frac{2}{3}$ ، و با قرار دادن $x = -1$ به دست می‌آوریم $3 = -3C$ یا $C = -1$. پس از معادله اول (۱۱) معلوم می‌شود که $B = \frac{1}{3}$. به صورت دیگر، می‌توان با قرار دادن $x = 0$ ، $A = \frac{2}{3}$ ، $C = -1$ در (۱۰) به دست آورد $2 = \frac{2}{3} - 2B + 2$ ، که $B = \frac{1}{3}$ را به ما خواهد داد.

مثال ۵. تابع گویای

$$\frac{3x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2}$$

را به صورت کسرهای جزئی بسط داده، و سپس انتگرال آن را بیابید.

حل. چون $x^2 + 2$ تحویل ناپذیر است، از قضیه ۳ معلوم می‌شود که تابع گویای داده شده مجموع تنها جمله‌ها

$$\frac{A}{x},$$

نظیر به عامل x در مخرج، و قالب دوجمله‌ای

$$\frac{Bx + C}{x^2 + 2} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 2)^2},$$

نظیر به عامل دیگر $(x^2 + 2)^2$ است. بنابراین،

$$(12) \quad \frac{3x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2} = \frac{A}{x} + \frac{Bx + C}{x^2 + 2} + \frac{Dx + E}{(x^2 + 2)^2},$$

که در آن این بار ضرایب با حروف A ، B ، C ، D ، و E نموده شده‌اند. با ضرب (۱۲) در $x(x^2 + 2)^2$ به دست می‌آوریم

$$3x^2 + x + 4 = A(x^2 + 2)^2 + (Bx + C)(x^2 + 2)x + (Dx + E)x,$$

یا معادلاً

$$(13) \quad 3x^2 + x + 4 = (A + B)x^4 + Cx^3 + (4A + 2B + D)x^2 + (2C + E)x + 4A.$$

با اعمال قضیه ۴ بر این اتحاد، دستگاهی از پنج معادله خطی از پنج مجهول A ، B ، C ، D ، و E به دست می‌آید:

$$A + B = 0,$$

$$C = 0,$$

$$4A + 2B + D = 3,$$

$$2C + E = 1,$$

$$4A = 4.$$

این دستگاه معادلات، به خلاف ظاهر پیچیده‌اش، با کمی زحمت حل می‌شود. در واقع، معادلات پنجم و دوم فوراً "به ما می‌گویند که $A = 1, C = 0$ ، و سپس از معادلات دیگر بی‌درنگ نتیجه می‌شود که $E = 1, D = 3 - 4A - 2B = 1, B = -A = -1$ ، لذا،

$$A = 1, \quad B = -1, \quad C = 0, \quad D = 1, \quad E = 1,$$

و با گذاردن این مقادیر از ضرایب در (۱۲) معلوم می‌شود که تابع گویای ما دارای بسط به صورت کسر جزئی زیر است:

$$\begin{aligned} \frac{3x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2} &= \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 2} + \frac{x + 1}{(x^2 + 2)^2} \\ &= \frac{1}{x} - \frac{x}{x^2 + 2} + \frac{x}{(x^2 + 2)^2} + \frac{1}{(x^2 + 2)^2}. \end{aligned}$$

انتگرالگیری از تابع گویا آسان است. در واقع،

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2} dx &= \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2 + 2} dx + \int \frac{x}{(x^2 + 2)^2} dx + \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} \\ &= \ln |x| - \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{x^2 + 2} + \frac{1}{2} \int \frac{d(x^2)}{(x^2 + 2)^2} + \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} \\ &= \ln |x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 + 2} \right) + \int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2}. \end{aligned}$$

برای محاسبه آخرین انتگرال، در فرمول (۵)، صفحه ۶۱۳، قرار می‌دهیم $a = \sqrt{2}$ تا به دست آید

$$\int \frac{dx}{(x^2 + 2)^2} = \frac{1}{4} \left(\frac{x}{x^2 + 2} \right) + \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C.$$

بنابراین، ما "داریم"

$$\begin{aligned} \int \frac{3x^2 + x + 4}{x(x^2 + 2)^2} dx &= \ln |x| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + 2) - \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^2 + 2} \right) + \frac{1}{4} \left(\frac{x}{x^2 + 2} \right) \\ &\quad + \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C \\ &= \frac{1}{2} \ln \frac{x^2}{x^2 + 2} + \frac{x - 2}{4(x^2 + 2)} + \frac{1}{4\sqrt{2}} \arctan \frac{x}{\sqrt{2}} + C. \end{aligned}$$

مثال ۶. $\int \frac{3x}{x^3-1} dx$ را حساب کنید.

حل. مخرج انتگرالده را تجزیه می‌کنیم:

$$x^3 - 1 = (x - 1)(x^2 + x + 1),$$

که در آن چند جمله‌ای درجه دوم $x^2 + x + 1$ تحویل‌ناپذیر است (چرا؟). از اینرو، بنا بر قضیه ۳،

$$\frac{3x}{x^3 - 1} = \frac{A}{x - 1} + \frac{Bx + C}{x^2 + x + 1}.$$

با ضرب طرفین این معادله در $x^3 - 1$ ، خواهیم داشت

$$(14) \quad 3x = A(x^2 + x + 1) + (Bx + C)(x - 1).$$

با اختیار $x = 1$ معلوم می‌شود که $3 = 3A$ یا $A = 1$. با این مقدار A ، (۱۴) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$3x - (x^2 + x + 1) = -x^2 + 2x - 1 = (Bx + C)(x - 1),$$

که ایجاب می‌کند که

$$Bx + C = \frac{-x^2 + 2x - 1}{x - 1} = \frac{(x - 1)(-x + 1)}{x - 1} = -x + 1.$$

لذا، بسط انتگرالده به صورت کسر جزئی عبارت است از

$$\frac{3x}{x^3 - 1} = \frac{1}{x - 1} + \frac{-x + 1}{x^2 + x + 1}.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} \int \frac{3x}{x^3 - 1} dx &= \int \frac{dx}{x - 1} + \int \frac{-x + 1}{x^2 + x + 1} dx = \ln |x - 1| + \int \frac{-x + 1}{(x + \frac{1}{2})^2 + \frac{3}{4}} dx \\ &= \ln |x - 1| + \int \frac{-y + \frac{3}{2}}{y^2 + \frac{3}{4}} dy \\ &= \ln |x - 1| - \frac{1}{2} \int \frac{d(y^2)}{y^2 + \frac{3}{4}} + \frac{3}{2} \int \frac{dy}{y^2 + \frac{3}{4}}, \end{aligned}$$

که در آن $y = x + \frac{1}{2}$ ؛ و در نتیجه، به کمک فرمول (۶')، صفحه ۴۷۰،

$$\int \frac{3x}{x^3 - 1} dx = \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln\left(y^2 + \frac{3}{4}\right) + \frac{3}{2} \left(\frac{2}{\sqrt{3}} \arctan \frac{2y}{\sqrt{3}} \right) + C$$

$$= \ln|x - 1| - \frac{1}{2} \ln(x^2 + x + 1) + \sqrt{3} \arctan \frac{2x + 1}{\sqrt{3}} + C,$$

این بخش را با نشان دادن اینکه روش کسرهای جزئی به ما توان محاسبه انتگرال یک تابع گویای دلخواه، دست کم به طور نظری، می‌بخشد به پایان می‌بریم.

اختیاری، بنا بر قضیه ۳، انتگرال یک کسر جزئی نظیر به یک عامل خطی در مخرج یک تابع گویای حقیقی به شکل زیر است:

$$(15) \quad \int \frac{A}{(x - c)^n} dx \quad (n = 1, 2, \dots)$$

حال آنکه انتگرال هر کسر جزئی نظیر به یک عامل درجه دوم تحویل‌ناپذیر به شکل زیر می‌باشد:

$$(16) \quad \int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n} dx \quad (p^2 < 4q, n = 1, 2, \dots)$$

می‌توان (۱۵) را فوراً "حساب کرد" با جانشانی $u = x - c$ داریم |

$$\int \frac{A}{x - c} dx = A \int \frac{du}{u} = A \ln|u| = A \ln|x - c|$$

اگر $n = 1$ ، و

$$\int \frac{A}{(x - c)^n} dx = A \int \frac{du}{u^n} = A \int u^{-n} du = A \left(\frac{u^{-n+1}}{-n+1} \right) = \frac{A}{(n-1)(x-c)^{n-1}}$$

اگر $n > 1$ ، به خاطر سادگی، در نوشتن انتگرال کسرهای جزئی ثابتهای انتگرالگیری را حذف می‌کنیم، با این فرض که یک ثابت انتگرالگیری در پایان تمام محاسبات خواهد آمد. برای محاسبه (۱۶)، ابتدا در مخرج مربع را کامل می‌کنیم. از این نتیجه می‌شود

که

$$x^2 + px + q = \left(x + \frac{p}{2}\right)^2 + \left(q - \frac{p^2}{4}\right) = u^2 + a^2,$$

که در آن

$$u = x + \frac{p}{2}, \quad a = \sqrt{q - \frac{p^2}{4}}.$$

لذا، اگر $n = 1$ ، داریم

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx + C}{x^2 + px + q} dx &= \int \frac{Bu + [C - (Bp/2)]}{u^2 + a^2} du = \frac{B}{2} \int \frac{2u}{u^2 + a^2} du \\ &+ \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{du}{u^2 + a^2} \\ &= \frac{B}{2} \ln(u^2 + a^2) + \frac{1}{a} \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \arctan \frac{u}{a} \\ (17) \quad &= \frac{B}{2} \ln(x^2 + px + q) + \frac{2C - Bp}{\sqrt{4q - p^2}} \arctan \frac{2x + p}{\sqrt{4q - p^2}}. \end{aligned}$$

اگر $n > 1$ ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} \int \frac{Bx + C}{(x^2 + px + q)^n} dx &= \int \frac{Bu + [C - (Bp/2)]}{(u^2 + a^2)^n} du \\ &= \frac{B}{2} \int \frac{2u}{(u^2 + a^2)^n} du + \left(C - \frac{Bp}{2}\right) \int \frac{du}{(u^2 + a^2)^n}. \end{aligned}$$

برای محاسبه انتگرال دوم، فرمول تحویل ثابت شده در مثال ۵، صفحه ۶۱۲، را به کار می‌بریم، حال آنکه در محاسبه انتگرال اول از جانشانی $v = u^2 + a^2$ استفاده می‌کنیم:

$$\int \frac{2u}{(u^2 + a^2)^n} du = \int \frac{dv}{v^n} = \int v^{-n} dv = \frac{v^{-n+1}}{-n+1} = \frac{1}{(n-1)(u^2 + a^2)^{n-1}}.$$

بقیه محاسبات صرفاً "جبر بوده و چیزی بیش از بیان u و a بر حسب x ، p ، و q ، مثل حالت $n = 1$ ، نخواهد بود.

مسائل

چند جمله‌ای داده شده را به صورت حاصل ضربی از عوامل خطی و درجه دوم تحویل ناپذیر بیان نمایید.

۱. $x^4 - x^3 + x^2 - x$ ✓
۲. $2x^3 - 8x^2 + 2x + 12$ ✓
۳. $x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1$ ✓
۴. $x^4 - 6x^2 + 8x - 3$ ✓
۵. $x^4 - x^3 - 91x^2 + x + 90$ ✓
۶. $x^5 + x^4 + 4x^3 + 4x^2 + 4x + 4$ ✓

۷. در صفحه ۴۹۹ نشان داده شد که

$$\int \frac{dx}{(x+a)(x+b)} = \frac{1}{b-a} \ln \left| \frac{x+a}{x+b} \right| + C \quad (a \neq b).$$

این فرمول را با استفاده از کسرهای جزئی به دست آورید.

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\int \frac{8x-3}{4x+1} dx \quad \cdot 9 \checkmark$$

$$\int \frac{x}{x-2} dx \quad \cdot 8 \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{(x+2)(3x+4)} \quad \cdot 11 \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{x^2+4x-77} \quad \cdot 10 \checkmark$$

$$\int \frac{x}{x^2-x-6} dx \quad \cdot 13 \checkmark$$

$$\int \frac{x^2+2}{x^2-1} dx \quad \cdot 12 \checkmark$$

$$\int \left(\frac{x-1}{x+2} \right)^2 dx \quad \cdot 15 \checkmark$$

$$\int \frac{x}{(2x+1)(2x+3)} dx \quad \cdot 14 \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{x^3+1} \quad \cdot 17 \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{(x-1)(x-2)(x-3)} \quad \cdot 16 \checkmark$$

$$\int \frac{x^2-3x+2}{x(x^2+2x+1)} dx \quad \cdot 19 \checkmark$$

$$\int \frac{x^2-x+1}{x^2+x+1} dx \quad \cdot 18 \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{x^2(x^2+1)^2} \quad \cdot 21 \checkmark$$

$$\int \frac{x^3-1}{4x^3-x} dx \quad \cdot 20 \checkmark$$

$$\int \frac{1-2x-x^2}{(x^2+1)^2} dx \quad \cdot 23 \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{x^4-1} \quad \cdot 22 \checkmark$$

$$\int \frac{32x}{(2x-1)(2x-3)(2x-5)} dx \quad \cdot 25 \checkmark$$

$$\int \frac{x^3}{(x^2+9)^3} dx \quad \cdot 24 \checkmark$$

$$\int \frac{x+2}{(x^2+1)(x^2+3)} dx \quad \cdot 27 \checkmark$$

$$\int \frac{x^2+1}{x^3+8} dx \quad \cdot 26 \checkmark$$

$$\int \frac{x^3}{(x-1)^{100}} dx \quad \cdot 29 \checkmark$$

$$\int \frac{2x^7+3x^4+x-6}{x^3-1} dx \quad \cdot 28 \checkmark$$

$$\int \frac{x^2}{x^4-16} dx \quad \cdot 31 \checkmark$$

$$\int \frac{6-9x-3x^2}{x^4-5x^2+4} dx \quad \cdot 30 \checkmark$$

$$\int \frac{x^9}{(x^4-1)^2} dx \quad \cdot 33 \checkmark$$

$$\int \frac{x^4+1}{x^6-1} dx \quad \cdot 32 \checkmark$$

حل. فرض کنیم $u = e^x$. پس $du = e^x dx$, $dx = du/u$. در نتیجه،

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} - e^x + 2} dx = \int \frac{u + 1}{u(u^2 - u + 2)} du,$$

و مسئله به انتگرالگیری از یک تابع گویا از u با بسط به صورت کسرهاى جزئى

$$\frac{u + 1}{u(u^2 - u + 2)} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{u} - \frac{u - 3}{u^2 - u + 2} \right)$$

تحويل شده است. بنابراین، به کمک فرمول (۱۷)، صفحه ۶۴۹،

$$\begin{aligned} \int \frac{u + 1}{u(u^2 - u + 2)} du &= \frac{1}{2} \int \frac{du}{u} - \frac{1}{2} \int \frac{u - 3}{u^2 - u + 2} du \\ &= \frac{1}{2} \ln |u| - \frac{1}{4} \ln(u^2 - u + 2) + \frac{5}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{2u - 1}{\sqrt{7}} + C, \end{aligned}$$

با مراجعه به متغیر x ، معلوم می‌شود که

$$\int \frac{e^x + 1}{e^{2x} - e^x + 2} dx = \frac{1}{2} x - \frac{1}{4} \ln(e^{2x} - e^x + 2) + \frac{5}{2\sqrt{7}} \arctan \frac{2e^x - 1}{\sqrt{7}} + C.$$

انتگرالگیری از توابع گویا برحسب $\sin x$ و $\cos x$. منظور از چند جمله‌ای از دو متغیر x و y یعنی مجموع تعدادی متناهی جمله به شکل $ax^m y^n$ که در آن m و n اعداد صحیح نامنفی بوده و a ثابت دلخواهی می‌باشد. به عنوان مثال،

$$\sqrt{5} + 7xy^2 + 9x^2y^3 - \frac{1}{2}y^4$$

یک چند جمله‌ای از x و y است. خارج قسمت

$$R(x, y) = \frac{P(x, y)}{Q(x, y)}$$

دو چند جمله‌ای $P(x, y)$ و $Q(x, y)$ از x و y را یک تابع گویا از x و y می‌نامند^۱. یک مثال از این نوع توابع عبارت است از

$$(۲) \quad \frac{x - y}{1 - 2x^2 + 3xy}$$

هرگاه $R(x, y)$ تابع گویایی از x و y باشد، آنگاه $R(\sin x, \cos x)$ یک تابع گویا از $\sin x$

۱. در نوشتن $P(x, y)$ ، $Q(x, y)$ و $R(x, y)$ ، نماد توابع دو متغیره پیش‌بینی شده است (ر.

و $\cos x$ نام دارد. لذا، از تعویض x با $\sin x$ و y با $\cos x$ در (۲)، تابع گویای زیر از $\sin x$ و $\cos x$ به دست می‌آید:

$$(۲') \quad \frac{\sin x - \cos x}{1 - 2 \sin^2 x + 3 \sin x \cos x}$$

همانطور که اینک نشان می‌دهیم، انتگرال هر تابع گویا از $\sin x$ و $\cos x$ راهمیشه می‌توان به کمک یک جانشانی گویا ساز مناسب محاسبه نمود.

قضیه ۵ (انتگرالگیری از یک تابع گویا از $\sin x$ و $\cos x$). فرض کنیم $R(\sin x, \cos x)$ یک تابع گویا از $\sin x$ و $\cos x$ بوده، و

$$(۲) \quad u = \tan \frac{x}{2} \quad (-\pi < x < \pi).$$

در این صورت،

$$\int R(\sin x, \cos x) dx = \int R_1(u) du,$$

که در آن $R_1(u)$ تابع گویایی از تنها متغیر u است. بخصوص، چون انتگرال سمت راست را همیشه می‌توان به روش کسرهای جزئی حساب کرد، همین امر در مورد انتگرال سمت چپ نیز صادق خواهد بود.

برهان. ابتدا $\sin x$ و $\cos x$ را بر حسب متغیر جدید u بیان می‌کنیم. بنا بر فرمولهای زاویه مضاعف برای سینوس و کسینوس، همراه با اتحاد $1 = \cos^2(x/2) + \sin^2(x/2)$ ، داریم

$$\sin x = \sin 2\left(\frac{x}{2}\right) = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \frac{2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{2 \tan \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}},$$

$$\cos x = \cos 2\left(\frac{x}{2}\right) = \cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2} = \frac{\cos^2 \frac{x}{2} - \sin^2 \frac{x}{2}}{\cos^2 \frac{x}{2} + \sin^2 \frac{x}{2}} = \frac{1 - \tan^2 \frac{x}{2}}{1 + \tan^2 \frac{x}{2}},$$

که در آخرین مرحله محاسبه صورت و مخرج را بر $\cos^2(x/2)$ تقسیم کرده‌ایم. این فرمولها

پس از جانشانی (۳)، که به جانشانی نصف زاویه معروف است، به صورت زیر درمی‌آیند:

$$(۴) \quad \sin x = \frac{2u}{1+u^2}, \quad \cos x = \frac{1-u^2}{1+u^2},$$

مبین آنکه $\sin x$ و $\cos x$ هر دو توابع گویایی از u اند. مشتق dx/du نیز تابع گویایی از u است. در واقع، (۳) معادل است با

$$(۳') \quad x = 2 \arctan u,$$

و مشتگیری از (۳') فوراً نتیجه می‌دهد که

$$(۵) \quad \frac{dx}{du} = \frac{2}{1+u^2}.$$

حال، به کمک (۴) و (۵)، انتگرال $R(\sin x, \cos x)$ را به شکل زیر می‌نویسیم:

$$\begin{aligned} \int R(\sin x, \cos x) dx &= \int R(\sin x, \cos x) \frac{dx}{du} du \\ &= \int R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \frac{2}{1+u^2} du = \int R_1(u) du, \end{aligned}$$

که در آن

$$R_1(u) = R\left(\frac{2u}{1+u^2}, \frac{1-u^2}{1+u^2}\right) \frac{2}{1+u^2}$$

یک تابع گویا از تنها متغیر u است. این امر از این نتیجه می‌شود که خارج قسمت دو چند جمله‌ای در $2u/(1+u^2)$ و $(1-u^2)/(1+u^2)$ پس از ضرب صورت و مخرج در توان مناسبی از $1+u^2$ به صورت تابع گویایی از u در می‌آید (بیشتر توضیح دهید). چون $R_1(u)$ تابعی گویاست، می‌توان آن را به روش توابع جزئی انتگره کرده به انتگرالی مانند $I_1(u)$ رسید که عموماً "مجموعی است از توابع گویا، لگاریتمها، و تانژانت‌های معکوس". در این صورت، انتگرال $R(\sin x, \cos x)$ ، پس از بازگشت به متغیر اصلی x ، مساوی است با

$$I_1\left(\tan \frac{x}{2}\right).$$

مثال ۴. $\int \frac{dx}{3 \sin x + 2 \cos x + 2}$ را حساب کنید.

حل. با استفاده از جانشانی نصف زاویه^۶ (۳) و فرمولهای (۴) و (۵)، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} \int \frac{dx}{3 \sin x + 2 \cos x + 2} &= \int \frac{1}{\frac{6u}{1+u^2} + 2 \frac{1-u^2}{1+u^2} + 2} \frac{2}{1+u^2} du \\ &= \int \frac{2}{6u + 2(1-u^2) + 2(1+u^2)} du = \int \frac{du}{3u + 2} \\ &= \frac{1}{3} \ln |3u + 2| + C = \frac{1}{3} \ln \left| 3 \tan \frac{x}{2} + 2 \right| + C. \end{aligned}$$

مثال ۵. $\int \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x} dx$ را حساب کنید.

حل. این بار داریم

$$\begin{aligned} \int \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x} dx &= \int \frac{1 - \frac{2u}{1+u^2}}{1 + \frac{1-u^2}{1+u^2}} \frac{2}{1+u^2} du = \int \frac{1+u^2 - 2u}{1+u^2} du \\ &= \int \left(1 - \frac{2u}{1+u^2} \right) du = u - \ln(1+u^2) + C \\ &= \tan \frac{x}{2} - \ln \left(1 + \tan^2 \frac{x}{2} \right) + C = \tan \frac{x}{2} - \ln \left(\sec^2 \frac{x}{2} \right) + C, \end{aligned}$$

یا معادلا"

$$\int \frac{1 - \sin x}{1 + \cos x} dx = \tan \frac{x}{2} + \ln \left(\cos^2 \frac{x}{2} \right) + C.$$

بنابر قضیه ۵، جانشانی نصفزاویه^۳ (۳) عمومی استبدین معنی که اصولاً می‌توان از آن برای انتگرالگیری از یک تابع گویای دلخواه از $\sin x$ و $\cos x$ استفاده کرد. با اینحال، در عمل، اغلب جانشانیهای دیگر مناسبترند، و این امر را مثالهای زیر نشان خواهند داد.

مثال ۶. $\int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 2} dx$ را حساب کنید.

حل. باتوجه به اینکه

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 2} dx = \int \frac{\sin^2 x}{\cos x + 2} \sin x dx = \int \frac{1 - \cos^2 x}{\cos x + 2} \sin x dx,$$

جانمایی $u = \cos x$ را انجام می‌دهیم. پس $du = -\sin x dx$ ، و

$$\int \frac{\sin^3 x}{\cos x + 2} dx = \int \frac{u^2 - 1}{u + 2} du = \int \left(u - 2 + \frac{3}{u + 2} \right) du$$

$$= \frac{1}{2} u^2 - 2u + 3 \ln |u + 2| + C$$

$$= \frac{1}{2} \cos^2 x - 2 \cos x + 3 \ln (\cos x + 2) + C$$

(چرا می‌توان علامت قدرمطلق را انداخت؟) فرض کنید به جای جانمایی $u = \cos x$ از جانمایی نصف زاویه^۳ (۳) استفاده کرده باشیم. در این صورت، به جای انتگرالده‌نسبتاً ساده^۴ $(u^2 - 1)/(u + 2)$ ، انتگرالده پیچیده^۴ زیر را می‌داشتیم:

$$\frac{16u^3}{(u^2 + 3)(u^2 + 1)^3},$$

که انتگرالگیری از آن بسیار مشکل‌تر است (ر.ک. مسئله^{۲۵}).

مثال ۷. انتگرال

$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x}$$

را، که در آن a و b ثابتهای مثبت دلخواهی هستند، حساب کنید.

حل. از تقسیم صورت و مخرج بر $a^2 \cos^2 x$ داریم

$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \int \frac{\frac{1}{a^2 \cos^2 x}}{\frac{\sin^2 x}{\cos^2 x} + \frac{b^2}{a^2}} dx = \frac{1}{a^2} \int \frac{\sec^2 x}{\tan^2 x + \frac{b^2}{a^2}} dx,$$

که از آن در این حالت آشکار است که جانمایی گویاساز مناسب، به جای جانمایی نصف زاویه^۴ $u = \tan(x/2)$ ، جانمایی $u = \tan x$ می‌باشد. در واقع، هرگاه $u = \tan x$ ،

آنگاه $du = \sec^2 x dx$ ، و

$$\int \frac{dx}{a^2 \sin^2 x + b^2 \cos^2 x} = \frac{1}{a^2} \int \frac{du}{u^2 + \frac{b^2}{a^2}} = \frac{1}{a^2} \left(\frac{a}{b} \arctan \frac{au}{b} \right) + C$$

$$= \frac{1}{ab} \arctan \left(\frac{a}{b} \tan x \right) + C.$$

مسائل

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\int \frac{dx}{4\sqrt{x} + \sqrt[3]{x}} \quad \cdot ۲ \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}} \quad \cdot ۱ \checkmark$$

$$\int \frac{\sqrt{x+1}}{\sqrt{x-1}} dx \quad \cdot ۴ \checkmark$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{x}}{\sqrt{x+1}} dx \quad \cdot ۳ \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt[3]{x} - \sqrt{x}} \quad \cdot ۶ \checkmark$$

$$\int \frac{\sqrt{x-1}}{\sqrt[3]{x+1}} dx \quad \cdot ۵ \checkmark$$

$$\int \frac{1}{x^2} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}} dx \quad \cdot ۸ \checkmark$$

$$\int \sqrt{\frac{x+1}{x-1}} dx \quad \cdot ۷ \checkmark$$

$$\int \frac{\sqrt[3]{1+\sqrt{x}}}{\sqrt{x}} dx \quad \cdot ۱۰ \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+\sqrt{x}}} \quad \cdot ۹ \checkmark$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{e^x+1}} \quad \cdot ۱۲$$

$$\int \frac{e^x}{1-e^{2x}} dx \quad \cdot ۱۱$$

$$\int \frac{dx}{3-\sin x} \quad \cdot ۱۴$$

$$\int \frac{dx}{2+\cos x} \quad \cdot ۱۳$$

$$\int \frac{dx}{1-\sin x + \cos x} \quad \cdot ۱۶$$

$$\int \frac{dx}{\sin x + \cos x} \quad \cdot ۱۵$$

$$\int \frac{dx}{2 \sin x - \cos x + 5} \quad \cdot ۱۸$$

$$\int \frac{\cos^3 x}{2 \sin x - 1} dx \quad \cdot ۱۷$$

$$\int \frac{\sin^2 x}{1 + \sin^2 x} dx \quad \cdot ۲۰$$

$$\int \frac{\cos x}{1 + \sin x - \cos x} dx \quad \cdot ۱۹$$

$$\int \frac{\sin^2 x \cos x}{\sin x + \cos x} dx \quad \cdot ۲۲$$

$$\int \frac{dx}{\cos x \sin x - 2 \sin x} \quad \cdot ۲۱$$

$$\int \frac{dx}{\sin^4 x \cos^2 x} \cdot 24 \qquad (ab \neq 0) \int \frac{dx}{a + b \tan x} \cdot 23$$

۲۵. مثال ۶ را با راه مشکل جانشانی $u = \tan(x/2)$ حل کنید.

۲۶. با استفاده از جانشانی

$$x = a \cos^2 u + b \sin^2 u \quad (0 < u < \pi/2)$$

نشان دهید که

$$\int \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} = 2 \arctan \sqrt{\frac{x-a}{b-x}} + C \quad (a < x < b)$$

انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\int_0^{\pi/6} \frac{dx}{9 \sin^2 x + \cos^2 x} \cdot 28$$

$$\int_0^{\ln 2} \sqrt{e^x - 1} dx \cdot 27$$

$$\int_0^{\pi/4} \frac{ds}{2 + \tan s} \cdot 30$$

$$\int_0^{\pi} \frac{x \sin x}{1 + \cos^2 x} dx \cdot 29$$

$$\int_2^3 \frac{du}{\sqrt{(u-1)(6-u)}} \cdot 32$$

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dt}{2 - \sin t + \cos t} \cdot 31$$

۸.۷ انتگرالگیری تقریبی و قاعدهٔ سیمپسون^۱

مسئلهٔ محاسبهٔ انتگرال معین

$$(1) \int_a^b f(x) dx$$

از تابع پیوستهٔ f را در نظر می‌گیریم. ساده‌ترین راه محاسبهٔ I استفاده از قضیهٔ اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال است، که می‌گوید

$$I = \int_a^b f(x) dx = F(b) - F(a),$$

که در آن F یک پاد مشتق (یا معادلاً "انتگرال نامعین") انتگرالدهٔ f می‌باشد. اما اینک می‌دانیم که ممکن است یافتن فرمول صریحی برای F ، ولو اینکه وجود F را قضیهٔ ۵، صفحهٔ ۴۰۵، تضمین می‌کند، مشکل یا حتی غیرممکن باشد.

قاعده نقطه میانی. معینا، در این حالات هنوز می توان انتگرال I را با هر دقت مطلوب حساب کرد. ایده تقریب I به وسیله مجموع مناسبی است. (این امر تعجبی ندارد، زیرا انتگرال I ابتدا به صورت مقدار حدی مجموع ریمان f وقتی ماکزیم طول زیربازه های بازه انتگرالی $[a, b]$ کوچک شود تعریف شد.) در واقع، عدد زوج مثبت $N = 2n$ را اختیار کرده و بازه $[a, b]$ را با معرفی نقاط تقسیم مساوی الفاصله

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i \quad (i = 0, 1, \dots, N)$$

به فاصله

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{b-a}{2n}$$

از هم افراز می کنیم (توجه کنید که $x_0 = a, x_N = b$). در این صورت، از سه روش انتگرالی تقریبی یا عددی توصیف شده در این بخش، اولی به نام قاعده نقطه میانی چیزی جز تقریب I به وسیله مجموع ریمانی به شکل

$$(2) \quad \sum_{i=1}^N f\left(\frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2}\right) (x_{2i} - x_{2i-2})$$

مستلزم n زیربازه $[x_0, x_2], [x_2, x_4], \dots, [x_{2n-2}, x_{2n}]$ ، هر یک به طول $x_{2i} - x_{2i-2}$ مساوی

$$2h = \frac{b-a}{n}$$

نیست.

نقطه

$$\frac{x_{2i-2} + x_{2i}}{2} \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

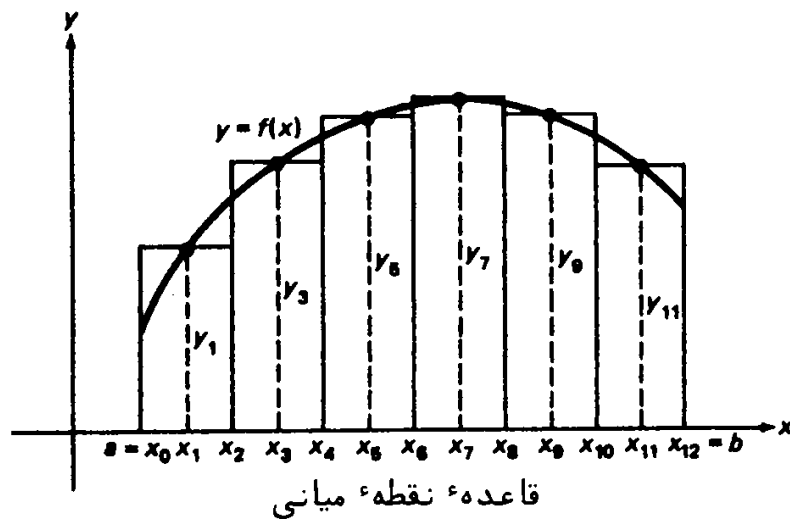
نقطه میانی x_{2i-1} بازه $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ بوده و می توان (2) را به شکل زیر نوشت:

$$(2') \quad 2h \sum_{i=1}^n f(x_{2i-1}) = \frac{b-a}{n} \sum_{i=1}^n y_{2i-1}$$

که در آن $y_{2i-1} = f(x_{2i-1})$ مقدار تابع f در x_{2i-1} است. لذا، قاعده نقطه میانی عبارت است از تقریب

$$(3) \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{n} (y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})$$

به طور هندسی، این یعنی تعویض مساحت تحت منحنی $y = f(x)$ با مجموع مساحت n مستطیل، که هر مستطیل به عرض $2h = (b - a)/n$ بوده و مستطیل i م به ارتفاع y_{2i-1} و مساحت $2hy_{2i-1}$ می باشد، و این در شکل ۸ برای حالت 6 مستطیل ($n = 6, N = 12$) توضیح داده شده است.



قاعده نقطه میانی
شکل ۸

خطای E_M قاعده نقطه میانی عددی است مانند E_M که باید به طرف راست (۳) افزود تا معادله دقیق به دست آید؛ یعنی،

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{n} (y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1}) + E_M.$$

واضح است که E_M تابعی از n ، یعنی تعداد زیربازه‌ها، است و برای این امر می توان با نوشتن $E_M = E_M(n)$ تأکید نمود. فرض کنیم f دارای مشتق دوم f'' پیوسته بر بازه $[a, b]$ باشد. می توان (با استدلالی که خیلی تکنیکی است) نشان داد که به ازای نقطه‌ای چون c در $[a, b]$

$$(۴) \quad E_M = \frac{(b-a)^3}{24n^2} f''(c)$$

بخصوص، (۴) ایجاب می کند

$$(۴) \quad |E_M| \leq \frac{(b-a)^3}{24n^2} \max |f''|,$$

که در آن $\max |f''|$ مقدار ماکزیمم $|f''(x)|$ بر بازه $[a, b]$ است. ویژگی کلیدی فرمول (۴) این است که E_M به طور معکوس با مربع n متناسب است. لذا، می توان خطای E_M را با انتخاب n بزرگ، یعنی، یک تقسیم به قدر کافی ظریف از بازه انتگرالگیری $[a, b]$ ، به قدر

مطلوب کوچک کرد.

مثال ۱. با استفاده از قاعده نقطه میانی به ازای $n = 10$ ، انتگرال

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x}$$

را تقریب نماییم؛ دقت تقریب چقدر است؟

حل. چون از قبل می دانیم که $I = \ln 2 = 0.693147 \dots$ ، هدف این مثال نشان دادن قدرت قاعده نقطه میانی است. در اینجا $a = 1, b = 2, f(x) = 1/x, N = 2n = 20$ و زیر بازه‌ها عبارتند از $[1.0, 1.1], [1.1, 1.2], \dots, [1.9, 2.0]$ با نقاط میانی $x_1 = 1.05, x_3 = 1.15, \dots, x_{19} = 1.95$. عرضهای نظیر y_1, y_3, \dots, y_{19} را تا چهار رقم اعشار حساب می‌کنیم، خواهیم داشت

$x_1 = 1.05$	$y_1 = 0.9524$
$x_3 = 1.15$	$y_3 = 0.8696$
$x_5 = 1.25$	$y_5 = 0.8000$
$x_7 = 1.35$	$y_7 = 0.7407$
$x_9 = 1.45$	$y_9 = 0.6897$
$x_{11} = 1.55$	$y_{11} = 0.6452$
$x_{13} = 1.65$	$y_{13} = 0.6061$
$x_{15} = 1.75$	$y_{15} = 0.5714$
$x_{17} = 1.85$	$y_{17} = 0.5405$
$x_{19} = 1.95$	$y_{19} = 0.5128$
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	
مجموع = 6.9284	

بنابراین، طبق رابطه (۳)،

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{10} (y_1 + y_3 + \dots + y_{19}) = \frac{6.9284}{10} = 0.69284.$$

برای تعیین دقت این تقریب، ابتدا ملاحظه می‌کنیم که

$$f''(x) = \frac{d^2}{dx^2} \frac{1}{x} = \frac{2}{x^3}.$$

لذا، فرمول (۴) به صورت زیر درمی‌آید:

$$|E_M| \leq \frac{1}{24n^2} \max \left| \frac{2}{x^3} \right|,$$

$$(۵) \quad |E_M| \leq \frac{1}{12n^2},$$

زیرا ماکزیمم $|2/x^3|$ بر $[1, 2]$ مساوی ۲ است که در نقطه $x = 1$ گرفته می‌شود. در واقع، با استفاده از فرمول (۴) و این امر که f'' بر $[1, 2]$ مثبت است، می‌بینیم که E_M نیز مثبت است. بنابراین، (۵) را می‌توان با

$$(۵') \quad 0 < E_M \leq \frac{1}{12n^2}$$

عوض کرد. لذا، در این حالت، قاعدهٔ نقطهٔ میانی مقدار انتگرال I را تخمین نقصانی می‌زند. با گذاردن $n = 10$ در (۵')، معلوم می‌شود که

$$0 < E_M \leq \frac{1}{1200} < 0.00084.$$

هر یک از عرضهای y_i تا چهار رقم اعشار حساب شده بود؛ و لذا، دارای خطای گردشدهٔ کمتر از ۰.۰۰۰۰۰۵ است. اما کمیت $6.9284/10$ متوسط ۱۰ عرض y_1, y_3, \dots, y_{19} است؛ و در نتیجه، خطای گرد شدهٔ آن از ۰.۰۰۰۰۰۵ نیز کمتر می‌باشد (چرا؟). این امر، همراه با تخمین خطای E_M ، نشان می‌دهد که I بین $0.69284 - 0.00005 = 0.69279$ و $0.69284 + 0.00005 = 0.693373$ قرار دارد. لذا، می‌توان نتیجه گرفت که با تقریب 0.001 ، $I = 0.693$ (یا حتی با تقریب 0.0005 ، $I = 0.69325$).

قاعدهٔ دوزنقه. حال به روش انتگرالگیری تقریبی دیگری می‌پردازیم که به قاعدهٔ دوزنقه معروف است. در این روش ایدهٔ تقریب انتگرال داده شدهٔ I به وسیلهٔ مجموعی به شکل

$$(۶) \quad \sum_{i=1}^n \frac{f(x_{i-1}) + f(x_i)}{2} (x_i - x_{i-1})$$

است که مستلزم نقاط تقسیم متساوی‌الفاصلهٔ

$$x_i = a + \frac{b-a}{n} i \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

و n زیر بازهٔ $[x_0, x_1], [x_1, x_2], \dots, [x_{n-1}, x_n]$ هر یک به طول $x_i - x_{i-1}$ مساوی

$$h = \frac{b-a}{n}$$

می‌باشد. (نمادگذاری (۶) از قاعدهٔ نقطهٔ میانی (۲) ساده‌تر است، زیرا نیازی به نقاط تقسیم اضافی برای نقاط میانی زیر بازه‌ها وجود ندارد.) توجه کنید که هر جمله در

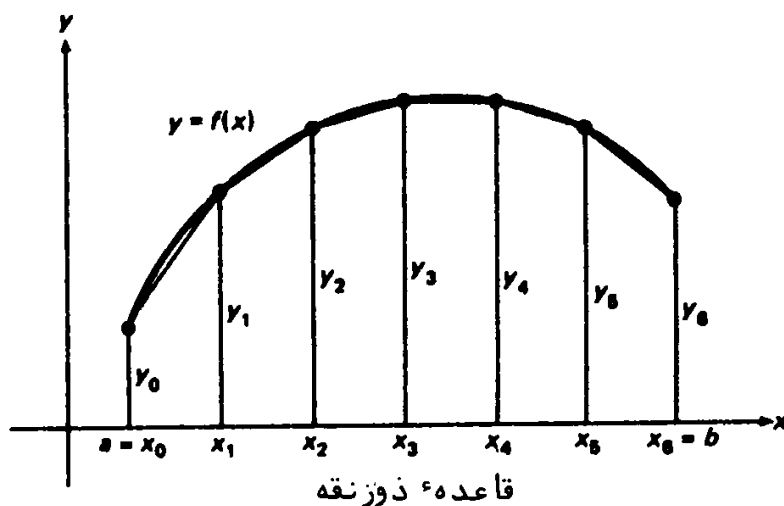
مجموع (۶) شامل متوسط دو مقدار از تابع f است، یعنی مقادیر در نقاط انتهایی یک زیر بازه، حال آنکه هر جمله در مجموع (۲) مستلزم فقط یک مقدار از f ، یعنی مقدارش در نقطه میانی یک زیر بازه، می باشد. همچنین، (۶) را می توان به شکل زیر نوشت:

$$(۶') \quad \frac{h}{2} \sum_{i=1}^n [f(x_{i-1}) + f(x_i)] = \frac{b-a}{2n} \sum_{i=1}^n (y_{i-1} + y_i)$$

که در آن $y_i = f(x_i)$. لذا، قاعده دوزنقه عبارت است از تقریب

$$(۷) \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{2n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n)$$

(هر عرض y_i جز y_0 و y_n به صورت جفت در جملات متوالی $y_{i-1} + y_i$ ظاهر می شود؛ و لذا، در مجموع سمت راست ضربی برابر ۲ دارد). به طور هندسی، (۷) عبارت است از تعویض مساحت تحت منحنی $y = f(x)$ با مجموع مساحت n دوزنقه، که در آن هر دوزنقه به عرض $h = (b-a)/n$ بوده و دوزنقه i م اضلاع موازی y_{i-1} ، y_i داشته و، بنا بر فرمول آشنایی از هندسه مقدماتی، مساحت $h(y_{i-1} + y_i)/2$ را دارد. در شکل ۹ این تقریب برای حالت شش دوزنقه ($n = 6$) توضیح داده شده است.



شکل ۹

خطای $E_T = E_T(n)$ قاعده دوزنقه مساوی عدد E_T تعریف می شود که باید به طرف راست (۷) افزوده شود تا معادله دقیق به دست آید؛ یعنی،

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{2n} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_{n-1} + y_n) + E_T.$$

فرض کنیم f بر بازه $[a, b]$ مشتق دوم f'' پیوسته داشته باشد. در این صورت، می توان

نشان داد که به ازای نقطه‌ای مانند c در $[a, b]$ ،

$$(۸) \quad E_T = -\frac{(b-a)^3}{12n^2} f''(c)$$

بخصوص، (۸) ایجاب می‌کند که

$$(۸') \quad |E_T| \leq \frac{(b-a)^3}{12n^2} \max |f''|,$$

که در آن $\max |f''|$ ماکزیمم $|f''(x)|$ بر بازه $[a, b]$ است. واضح است که هر قدر n بزرگتر باشد، خطای E_T کوچکتر است؛ و در واقع، با عکس n^2 متناسب می‌باشد.

مثال ۲. انتگرال

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} \quad (= \ln 2)$$

را با استفاده از قاعده دوزنقه به ازای $n = 10$ تقریب کنید. خطای تقریب چقدر است؟

حل. در اینجا، مثل مثال ۱، $a = 1, b = 2, f(x) = 1/x, n = 10$ ، و زیر بازه‌ها مجدداً $x_0 = 1.0, x_1 = 1.1, x_2 = 1.2, \dots, [1.9, 2.0]$ با نقاط انتهایی می‌باشند. با محاسبه عرضهای نظیر $y_0, y_1, y_2, \dots, y_9, y_{10}$ تا چهار رقم اعشار، به دست می‌آوریم

$x_0 = 1.0$	$y_0 = 1.0000$	$x_1 = 1.1$	$y_1 = 0.9091$
$x_{10} = 2.0$	$y_{10} = 0.5000$	$x_2 = 1.2$	$y_2 = 0.8333$
	<u>مجموع = 1.5000</u>	$x_3 = 1.3$	$y_3 = 0.7692$
		$x_4 = 1.4$	$y_4 = 0.7143$
		$x_5 = 1.5$	$y_5 = 0.6667$
		$x_6 = 1.6$	$y_6 = 0.6250$
		$x_7 = 1.7$	$y_7 = 0.5882$
		$x_8 = 1.8$	$y_8 = 0.5556$
		$x_9 = 1.9$	$y_9 = 0.5263$
			<u>مجموع = 6.1877</u>

بنابراین، طبق (۷) ،

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{2(10)} (y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_9 + y_{10})$$

$$= \frac{1}{20} [(y_0 + y_{10}) + 2(y_1 + y_2 + \dots + y_9)]$$

$$= \frac{1}{20} [1.5000 + 2(6.1877)] = \frac{13.8754}{20} = 0.69377.$$

برای تعیین دقت این تقریب، ملاحظه می‌کنیم که بار دیگر $f''(x) = 2/x^3$, $\max |f''|$ و $n = 10$, $E_T = 0$. لذا، از (۸) و (۸') نتیجه می‌شود که $E_T < 0$ و

$$|E_T| \leq \frac{1}{6n^2} = \frac{1}{600} < 0.00167.$$

توجه کنید که در این حالت قاعدهٔ ذوزنقه مقدار I را تخمین اضافی می‌زند. خطای گرد شدهٔ هر عرض از حیث قدرمطلق از 0.00005 کمتر است؛ و در نتیجه، همین امر در مورد کمیت $13.8754/20$ درست است (توجه کنید که مجموع $\frac{1}{20}(y_0 + 2y_1 + 2y_2 + \dots + 2y_9 + y_{10})$ در واقع متوسط 20 عدد $y_0, y_1, y_1, y_2, y_2, \dots, y_9, y_9, y_{10}$ است که هر یک از اعداد y_1, y_2, \dots, y_9 دوبار ظاهر شده است). این امر، همراه با تخمین ما از خطای E_T ، نشان می‌دهد که I بین $0.69377 - 0.00005 - 0.00167 = 0.69205$ و $0.69377 + 0.00005 = 0.69382$ قرار دارد. لذا، می‌توان نتیجه گرفت که، درست مثل مثال ۱، با تقریب 0.001 ، $I = 0.693$.

قاعدهٔ سیمپسون. قاعدهٔ سیمپسون مبتنی بر تقریب انتگرال

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} f(x) dx \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

روی هر یک از n زیر بازهٔ $[x_{i-1}, x_i]$ سازندهٔ بازهٔ انتگرالگیری $[a, b]$ به وسیلهٔ مساحت تحت نمودار یک تابع خطی $y = Ax + B$ ، یعنی پاره خط واصل بین دو نقطهٔ (x_{i-1}, y_{i-1}) و (x_i, y_i) که $y_i = f(x_i)$ می‌باشد. حال به روش بسیار تواناتری از انتگرالگیری عددی به نام قاعدهٔ سیمپسون رومی آوریم. در اینجا شایسته است از همان نمادهای قاعدهٔ نقطهٔ میانی استفاده کنیم، زیرا لازم است نقاط میانی زیربازه‌ها و نقاط انتهایی آنها را شماره گذاری کنیم. لذا، با انتخاب عدد زوج مثبت $N = 2n$ ، نقاط تقسیم متساوی الفاصلهٔ

$$x_i = a + \frac{b-a}{N} i \quad (i = 0, 1, \dots, N),$$

به فاصلهٔ

$$h = \frac{b-a}{N} = \frac{b-a}{2n}$$

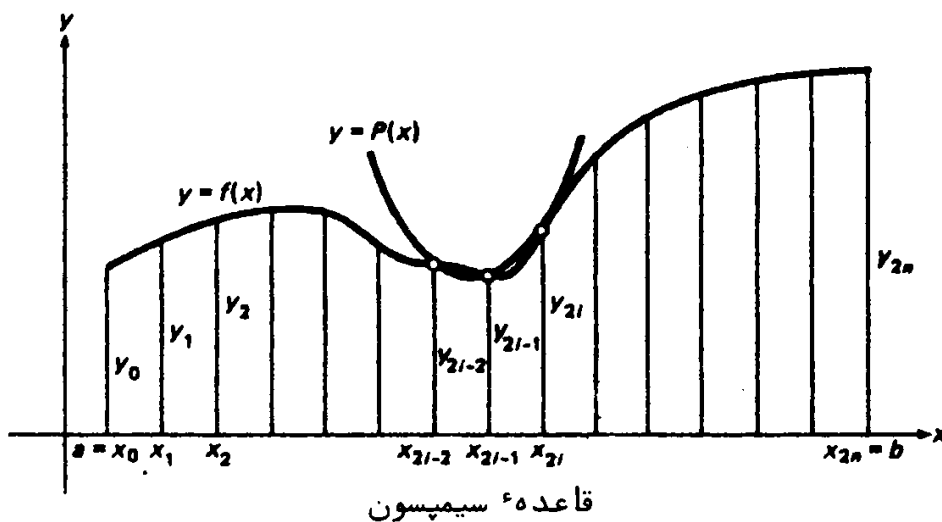
از یکدیگر، مثل صفحه ۶۶۰، را معرفی می‌کنیم. نقاط $a = x_0, x_2, x_4, \dots, x_{2n-2}, x_{2n} = b$ بازه $[a, b]$ را به n زیربازه هر یک به طول $2h$ تقسیم می‌کند، که x_{2i-1} نقطه میانی $[x_{2i-2}, x_{2i}]$ می‌باشد. سپس انتگرال داده شده را به صورت

$$(9) \quad \int_a^b f(x) dx = \sum_{i=1}^n \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} f(x) dx$$

می‌نویسیم، و هر انتگرال مجموع سمت راست را با مساحت تحت نمودار تابع درجه دوم

$$y = P(x) = A + Bx + Cx^2$$

تقریب می‌کنیم، که در آن ضرایب A, B, C و چنانند که منحنی $y = P(x)$ از سه نقطه $(x_{2i-2}, y_{2i-2}), (x_{2i-1}, y_{2i-1}), (x_{2i}, y_{2i})$ می‌گذرد. هرگاه این نقاط غیر همخط باشند، آنگاه $C \neq 0$ ، و منحنی $y = P(x)$ سهمبی است که محور تقارنش مثل شکل ۱۰ قائم می‌باشد.



شکل ۱۰

حال، با فرض $r = x_{2i-2}$ و $s = x_{2i}$ جهت اختصار، درمی‌یابیم که

$$\begin{aligned} \int_r^s P(x) dx &= \int_r^s (A + Bx + Cx^2) dx = \left[Ax + \frac{1}{2} Bx^2 + \frac{1}{3} Cx^3 \right]_r^s \\ &= A(s - r) + \frac{1}{2} B(s^2 - r^2) + \frac{1}{3} C(s^3 - r^3) \\ &= \frac{s - r}{6} [6A + 3B(r + s) + 2C(r^2 + rs + s^2)]. \end{aligned}$$

بنابراین، پس از کمی عمل جبری،

$$\int_r^s P(x) dx = \frac{s-r}{6} \left[A + Br + Cr^2 + 4A + 4B \left(\frac{r+s}{2} \right) + 4C \left(\frac{r+s}{2} \right)^2 + A + Bs + Cs^2 \right]$$

و در نتیجه،

$$(10) \quad \int_r^s P(x) dx = \frac{s-r}{6} \left[P(r) + 4P\left(\frac{r+s}{2}\right) + P(s) \right]$$

چون $s-r = x_{2i} - x_{2i-2} = 2h$ و $\frac{1}{2}(r+s) = \frac{1}{2}(x_{2i-2} + x_{2i}) = x_{2i-1}$ ، فرمول (۱۰) برحسب x_{2i-2} ، x_{2i-1} و x_{2i} به صورت زیر درمی‌آید:

$$\int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} P(x) dx = \frac{h}{3} [P(x_{2i-2}) + 4P(x_{2i-1}) + P(x_{2i})].$$

اما $f(x)$ و $P(x)$ به ازای $x = x_{2i-2}$ ، $x = x_{2i-1}$ و $x = x_{2i}$ یکی هستند، زیرا منحنی $y = P(x) = A + Bx + Cx^2$ طوری اختیار شده است که از نقاط (x_{2i-2}, y_{2i-2}) ، (x_{2i-1}, y_{2i-1}) و (x_{2i}, y_{2i}) می‌گذرد. لذا،

$$\begin{aligned} \int_{x_{2i-2}}^{x_{2i}} P(x) dx &= \frac{h}{3} [f(x_{2i-2}) + 4f(x_{2i-1}) + f(x_{2i})] \\ &= \frac{b-a}{6n} (y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}) \end{aligned}$$

(توجه کنید که لازم نیست ضرایب A ، B و C صریحا تعیین شوند). با تقریب هر یک از n انتگرال سمت راست (۹) با عبارتی از این نوع (مساحت تحت یک سهمی)، بالاخره قاعدهٔ سیمپسون به دست می‌آید:

$$(11) \quad \int_a^b f(x) dx \approx \frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^n (y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i})$$

یا معادلا

$$\begin{aligned} \int_a^b f(x) dx &\approx \frac{b-a}{6n} [(y_0 + y_n) + 2(y_2 + y_4 + \dots + y_{2n-2}) + 4(y_1 + y_3 + \dots + y_{2n-1})]. \end{aligned}$$

(۱۱')

خطای $E_S = E_S(n)$ قاعدهٔ سیمپسون مساوی عدد E_S تعریف می‌شود که باید به طرف راست (۱۱) افزود تا معادلهٔ دقیق به دست آورد؛ یعنی،

$$\int_a^b f(x) dx = \frac{b-a}{6n} \sum_{i=1}^n (y_{2i-2} + 4y_{2i-1} + y_{2i}) + E_S.$$

فرض کنیم f دارای مشتق چهارم $f^{(4)}$ بر بازهٔ $[a, b]$ باشد. در این صورت، می‌توان با استدلالی پیشرفته نشان داد که به ازای نقطه‌ای چون c در $[a, b]$ ،

$$(12) \quad E_S = -\frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} f^{(4)}(c)$$

به‌خصوص، (۱۲) ایجاب می‌کند که

$$(12') \quad |E_S| \leq \frac{(b-a)^5}{180(2n)^4} \max |f^{(4)}|,$$

که در آن $|f^{(4)}|$ ماکزیم $|f^{(4)}(x)|$ بر بازهٔ $[a, b]$ است. ویژگی اصلی فرمول (۱۲) این است که E_S با توان چهارم n نسبت عکس دارد؛ در نتیجه، E_S با افزایش n به‌طور بسیار سریع به صفر نزدیک می‌شود.

مثال ۳. انتگرال

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} \quad (= \ln 2)$$

را با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون به ازای $n = 5$ تقریب کنید. خطای تقریب چقدر است؟

حل. همانند مثالهای ۱ و ۲، $a = 1$ ، $b = 2$ ، $f(x) = 1/x$ ، ولی در اینجا زیربازه‌ها عبارتند از $[1.0, 1.2]$ ، $[1.2, 1.4]$ ، \dots ، $[1.8, 2.0]$ با نقاط انتهایی $x_0 = 1.0$ ، $x_2 = 1.2$ ، $x_4 = 1.4$ ، \dots ، $x_8 = 1.8$ ، $x_{10} = 2.0$ و نقاط میانی $x_1 = 1.1$ ، $x_3 = 1.3$ ، \dots ، $x_9 = 1.9$. اگر عرضهای نظیر را تا پنج رقم اعشار حساب کنیم، به دست می‌آوریم

$x_0 = 1.0$	$y_0 = 1.00000$	$x_1 = 1.1$	$y_1 = 0.90909$
$x_{10} = 2.0$	$y_{10} = 0.50000$	$x_3 = 1.3$	$y_3 = 0.76923$
	$\text{مجموع} = 1.50000$	$x_5 = 1.5$	$y_5 = 0.66667$
		$x_7 = 1.7$	$y_7 = 0.58824$
		$x_9 = 1.9$	$y_9 = 0.52632$
			$\text{مجموع} = 3.45955$

$x_2 = 1.2$	$y_2 = 0.83333$
$x_4 = 1.4$	$y_4 = 0.71429$
$x_6 = 1.6$	$y_6 = 0.62500$
$x_8 = 1.8$	$y_8 = 0.55556$
<hr style="width: 50%; margin: 0 auto;"/>	
$\text{مجموع} = 2.72818$	

بنابراین، طبق (۱۱') به ازای $n = 5$ ،

$$I = \int_1^2 \frac{dx}{x} \approx \frac{1}{6(5)} [(y_0 + y_{10}) + 2(y_2 + y_4 + y_6 + y_8) + 4(y_1 + y_3 + y_5 + y_7 + y_9)]$$

$$= \frac{1}{30} [1.500000 + 2(2.72818) + 4(3.45955)] = \frac{20.79456}{30} = 0.693152.$$

برای تعیین دقت این تقریب، ملاحظه می‌کنیم که مشتق چهارم انتگرالده $f(x) = 1/x$ مساوی است با

$$f^{(4)}(x) = \frac{d^4}{dx^4} \frac{1}{x} = \frac{24}{x^5}.$$

بنابراین، طبق رابطه (۱۲)، $E_S < 0$ ؛ در نتیجه، قاعدهٔ سیمپسون در این حالت مقدار I را تخمین اضافی می‌زند. به علاوه، طبق (۱۲)،

$$|E_S| \leq \frac{24}{180(10)^4} = \frac{1}{75000} < 0.000014,$$

زیرا ماکزیم $|24/x^5|$ بر بازه $[1, 2]$ مساوی ۲۴ است که در نقطه $x = 1$ گرفته می‌شود. هر عرض تا پنج رقم اعشار حساب شده است؛ ولذا، خطای گرد شده از ۰.۰۰۰۰۰۵ کمتر است. از اینرو، خطای گرد شدهٔ کمیت $20.79456/30$ نیز از ۰.۰۰۰۰۰۵ کمتر می‌باشد ($20.79456/30$ را به عنوان متوسط ۳۰ عدد تعبیر کنید). این امر، همراه با تخمین ما از خطای E_S ، نشان می‌دهد که I بین $0.693133 = 0.693152 - 0.000014 - 0.000005$ و $0.693157 = 0.693152 + 0.000005$ قرار دارد. لذا، می‌توان نتیجه گرفت که با تقریب $I = 0.693145$ ، در واقع، همانطور که قبلاً گفته شد، $I = \ln 2 = 0.693147 \dots$

مقایسهٔ مثالهای ۱ تا ۳ قدرت عظیم قاعدهٔ سیمپسون را آشکار می‌سازد. در واقع، در محاسبهٔ انتگرال $\int_1^2 dx/x$ ، قاعدهٔ سیمپسون فقط با پنج زیربازه خیلی از قواعد نقطهٔ میانی یا دوزنقه با دوبرابر این تعداد زیربازه دقیقتر است؟

مثال ۴. انتگرال

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

را با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون تقریب کنید .

حل. همانطور که در صفحه ۵۹۱ گفته شد، انتگرال نامعین $\int e^{-x^2} dx$ یک تابع مقدماتی نیست . لذا، باید I را به وسیلهٔ انتگرالگیری تقریبی حساب کنیم . برای این کار قاعدهٔ سیمپسون را به ازای $n = 5$ به کار می‌بریم . ماکزیم قدر مطلق مشتق چهارم انتگرالده e^{-x^2} بر بازهٔ $[0, 1]$ مساوی ۱۲ است (ر. ک. مسئلهٔ ۲۳)؛ و در نتیجه، بنابر تخمین (۱۲)،

$$|E_S| \leq \frac{12}{180(10)^4} = \frac{1}{150000} < 0.000007.$$

با استفاده از ماشین حساب، عرضها را تا پنج رقم اعشار حساب می‌کنیم، خواهیم داشت

$x_0 = 0.0$	$y_0 = 1.00000$	$x_1 = 0.1$	$y_1 = 0.99005$
$x_{10} = 1.0$	$y_{10} = 0.36788$	$x_3 = 0.3$	$y_3 = 0.91393$
	مجموع = 1.36788	$x_5 = 0.5$	$y_5 = 0.77880$
		$x_7 = 0.7$	$y_7 = 0.61263$
		$x_9 = 0.9$	$y_9 = 0.44486$
			مجموع = 3.74027
$x_2 = 0.2$	$y_2 = 0.96079$		
$x_4 = 0.4$	$y_4 = 0.85214$		
$x_6 = 0.6$	$y_6 = 0.69768$		
$x_8 = 0.8$	$y_8 = 0.52729$		
	مجموع = 3.03790		

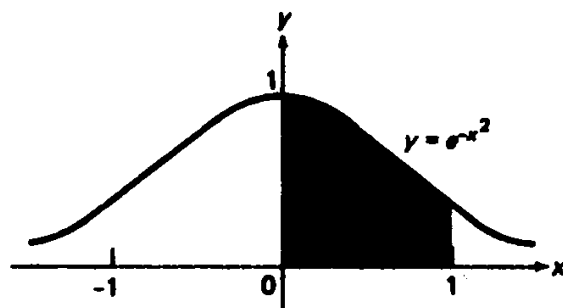
بنابراین، طبق همان صورتی از قاعدهٔ سیمپسون که در مثال ۳ به کار رفت،

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx \approx \frac{1}{30} [1.36788 + 2(3.03790) + 4(3.74027)]$$

$$= \frac{22.40476}{30} = 0.746825.$$

پس از احتساب خطای گرد شده و تخمین ما از $|E_S|$ ، معلوم می‌شود که در اینجا I فقط با تقریب $0.000012 = 0.000005 + 0.000007$ معلوم است. لذا، فقط می‌توان از چهار رقم

اول اعشار مطمئن بود، ولی محاسبات دقیقتر نشان می دهند که تقریب $I \approx 0.746825$ در واقع با تقریب 0.000001 درست است. در شکل ۱۱ منحنی $y = e^{-x^2}$ را کشیده ایم که



شکل ۱۱

"زنگدیس" است. انتگرال I مساحت ناحیه سایه دار تحت منحنی از $x = 0$ تا $x = 1$ است. (برای راه دیگر تقریب I ، ر.ک. مثال ۹، صفحه ۸۵۷).

تبصره. تابع غیرمقدماتی

$$(۱۳) \quad \int_0^x e^{-t^2} dt$$

اهمیت زیادی در ریاضیات، بخصوص در نظریه احتمال و کاربردهای آن، دارد. تابع

$$(۱۳') \quad \operatorname{erf} x = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt,$$

که با (۱۳) در عامل $2/\sqrt{\pi}$ اختلاف دارد، تابع خطا نام دارد. انتگرال (۱۳) وقتی $x \rightarrow \infty$ ، به $\sqrt{\pi}/2$ نزدیک می شود (ر.ک. مثال ۳، صفحه ۱۳۹۹). و در نتیجه، عامل $2/\sqrt{\pi} = 1.128379 \dots$ در (۱۳') سبب می شود که وقتی $x \rightarrow \infty$ ، $\operatorname{erf} x$ به 1 نزدیک شود.

مسائل

انتگرال داده شده را ابتدا با قاعده نقطه میانی و سپس قاعده دوزنقه به ازای n مشخص شده، یعنی تعداد زیربازه ها، تقریب کنید. مقادیر عرضها را تا چهار رقم اعشار حساب کرده، و جواب را تا سه رقم (بدون تلاش در تخمین خطا) بیان نمایید.

$$۲. \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x^3+1}}, n=4$$

$$۱. \quad \int_0^2 \sqrt{x^4+1} dx, n=4$$

$$۴. \quad \int_0^{\pi} \frac{\sin x}{x} dx, n=5$$

$$۳. \quad \int_0^{\pi/3} \sqrt{\cos x} dx, n=5$$

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx, n = 10 \quad ۰۶ \qquad \int_1^2 \frac{e^x}{x} dx, n = 5 \quad ۰۵$$

- در مسئله ۴، مقدار انتگرالده در $x = 0$ مساوی 1 گرفته شده است.
- ۰۷ فرض کنید M_n تقریب انتگرال $I = \int_a^b f(x) dx$ مبتنی بر قاعده نقطه میانی با n زیربازه بوده، و T_n تقریب I مبتنی بر قاعده دوزنقه با n زیربازه باشد. T_{2n} را برحسب M_n و T_n بیان کنید.
- ۰۸ نشان دهید که مجموع (۶) مذکور در قاعده دوزنقه در واقع مجموع ریمانی برای تابع f بر بازه $[a, b]$ است.
- ۰۹ با استفاده از فرمول (۴)، تعداد n زیربازه‌هایی را بیابید که خطای E_M حاصل از تقریب انتگرال $\int_0^1 e^{-x^2} dx$ به وسیله قاعده نقطه میانی از حیث قدر مطلق از 0.0001 کوچکتر باشد. با استفاده از فرمول (۸)، همین کار را برای قاعده دوزنقه انجام دهید.
- ۱۰ نشان دهید که هر دو قاعده نقطه میانی و قاعده دوزنقه در صورتی مقدار دقیق انتگرال $I = \int_a^b f(x) dx$ را به دست می‌دهند که انتگرالده یک تابع خطی مانند $f(x) = Ax + B$ باشد ولی اگر یک تابع درجه دوم باشد $f(x) = A + Bx + Cx^2$ ($C \neq 0$) این طور نخواهد بود.
- ۱۱ برای خطاهای $E_M = E_M(n)$ و $E_T = E_T(n)$ حاصل در قواعد نقطه میانی و دوزنقه برای تقریب انتگرال $I = \int_{-1}^1 |x| dx$ عبارات دقیق پیدا کنید.
- ۱۲ فرض کنید $I = \int_a^b f(x) dx$ ، که در آن f دارای مشتق دوم " f پیوسته بر $[a, b]$ است که در هر نقطه از $[a, b]$ ناصفر می‌باشد. نشان دهید هرگاه f بر $[a, b]$ به بالا مقعر باشد، آنگاه قاعده نقطه میانی I را تخمین نقصانی زده و قاعده دوزنقه I را تخمین اضافی می‌زند، حال آنکه اگر f بر $[a, b]$ به پایین مقعر باشد، قاعده نقطه میانی I را تخمین اضافی و قاعده دوزنقه I را تخمین نقصانی می‌زند.
- ۱۳ نشان دهید که فرمول منشور

$$\int_r^s P(x) dx = \frac{s-r}{6} \left[P(r) + 4P\left(\frac{r+s}{2}\right) + P(s) \right] \quad (\text{یک})$$

به ازای هر چند جمله‌ای $P(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ از درجه نایبیشتر از 3 معتبر است. (به ازای $D = 0$ ، فرمول (یک) قبلاً در حین اثبات قاعده سیمپسون ثابت شده است.) با مثال، شکست فرمول منشور را برای یک چند جمله‌ای درجه 4 نشان دهید.

۱۴. نشان دهید که اگر انتگرالده تابعی مکعبی چون $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ باشد،
 قاعدهٔ سیمپسون مقدار دقیق انتگرال $I = \int_a^b f(x) dx$ را به ما می‌دهد. ولی در صورتی
 که $f(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + Ex^4$ ($E \neq 0$) این‌طور نخواهد بود.
 راهنمایی. از فرمول (۱۲) استفاده کنید.

انتگرالهای زیر را با استفاده از فرمول منشور (یک) حساب کنید.

$$\int_0^2 (x^3 + x^2 + x + 1) dx \quad \cdot 15$$

$$\int_{1/2}^{3/2} (8x^3 - 4x^2 + 2x - 1) dx \quad \cdot 16$$

۱۷. جدول مقادیر

x	1.05	1.10	1.15	1.20	1.25	1.30	1.35
$f(x)$	2.36	2.50	2.74	3.04	3.46	3.98	4.60

تمام چیزی است که از تابع f می‌دانیم. انتگرال $\int_{1.05}^{1.35} f(x) dx$ را با استفاده از قاعدهٔ
 سیمپسون تخمین بزنید.

۱۸. مقدار دقیق انتگرال

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{x^2 + 1}$$

را یافته، و تحقیق کنید که تقریب I با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون با فقط دو زیر
 بازه به اندازهٔ 0.00001 دقیق است.

انتگرال داده شده را با استفاده از قاعدهٔ سیمپسون با مقدار ذکر شده n که تعداد زیر
 بازه‌هاست تقریب نمایید. مقادیر عرضها را تا پنج رقم اعشار حساب کرده، و جواب را
 (بدون سعی در تخمین خطا) تا چهار رقم اعشار بیان نمایید.

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - \frac{1}{2} \sin^2 x} dx, n = 3 \quad \cdot 19$$

$$\int_2^3 \frac{dx}{\ln x}, n = 4 \quad \cdot 20$$

$$\int_1^2 \sqrt{\ln x} dx, n = 4 \quad \cdot 21$$

$$\int_0^2 \sin \frac{\pi x^2}{2} dx, n = 8 \quad \cdot 22$$

۲۳. اگر $f(x) = e^{-x^2}$ ، نشان دهید که قدر مطلق مشتق چهارم $f^{(4)}(x)$ بر بازه $[0, 1]$ از 12 تجاوز نمی‌کند. آیا $f^{(4)}$ بر $[0, 1]$ علامت ثابت دارد؟

۹.۷ انتگرالهای مجازی

در معرفی مفهوم انتگرال معین $\int_a^b f(x) dx$ از آغاز فرض شد که بازه انتگرالگیری $[a, b]$ بسته و گراندار است. به علاوه، انتگرالده f باید بر $[a, b]$ گراندار باشد، زیرا در غیر این صورت حد معرف انتگرال موجود نیست (ر. ک. مسئله ۳۳، صفحه ۳۸۱). لذا، در حال حاضر، انتگرال

$$(1) \quad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

بی معنی است، زیرا بازه انتگرالگیری بی کران است. انتگرال

$$(2) \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

نیز بی معنی است، زیرا انتگرالده $1/\sqrt{x}$ وقتی $x \rightarrow 0^+$ به بی نهایت نزدیک می‌شود، ولذا، بر بازه $[0, 1]$ بی کران می‌باشد.

تبصره. تابع $1/\sqrt{x}$ در نقطه $x = 0$ تعریف نشده است، ولی در کنار دلیل عدم وجود (۲) که بی کرانی $1/\sqrt{x}$ بر بازه انتگرالگیری است، تصادفی می‌باشد. مثلاً،

$$f(x) = \begin{cases} 1/\sqrt{x}, & x > 0 \text{ اگر} \\ 0 & , x = 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

نیز بر $[0, 1]$ بی کران و در نتیجه انتگرال ناپذیر است، اگرچه در هر نقطه از $[0, 1]$ تعریف شده است.

هر انتگرال با بازه انتگرالگیری بی کران یا انتگرالده بی کران (یا هر دو) را، به خلاف انتگرالهای معمولی یا حقیقی که تا بحال دیده‌ایم، مجازی می‌نامند. همانطور که اینک نشان می‌دهیم، راهی برای انتساب مقدار عددی به انتگرالهای مجازی، بخصوص انتگرالهای (۱) و (۲)، وجود دارد.

بازه‌های انتگرالگیری بی کران. ابتدا انتگرالهایی مجازی مانند انتگرال (۱)، با بازه انتگرالگیری بی کران، را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم f بر بازه نامتناهی $[a, \infty)$ پیوسته بوده، و حد

$$(3) \quad \lim_{u \rightarrow \infty} \int_a^u f(x) dx \quad (u > a)$$

موجود و متناهی باشد. (چون تابع f بر $[a, \infty)$ پیوسته است، بر هر زیر بازه $[a, u]$ پیوسته و در نتیجه انتگرالپذیر است.) در این صورت، گوییم انتگرال مجازی

$$(۴) \quad \int_a^{\infty} f(x) dx$$

همگرا است، و مقدار (۳) را به آن نسبت می‌دهیم. اما، اگر حد (۳) نامتناهی بوده یا وجود نداشته باشد، گوییم انتگرال (۴) واگرا است. به همین نحو، فرض کنیم f بر بازه $[-\infty, b]$ پیوسته بوده، و حد

$$(۳') \quad \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^b f(x) dx \quad (u < b)$$

موجود و متناهی باشد. در این صورت، گوییم انتگرال مجازی

$$(۴') \quad \int_{-\infty}^b f(x) dx$$

همگراست و به آن مقدار (۳') را نسبت می‌دهیم، ولی انتگرال (۴') را واگرا گوییم اگر حد (۳') نامتناهی بوده یا موجود نباشد. همچنین، انتگرالهای مجازی از نوع

$$(۵) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx$$

وجود دارند، که در آن هر دو حد انتگرالگیری نامتناهی بوده و f بر تمام خط حقیقی $(-\infty, \infty)$ پیوسته است. فرض کنیم هر دو انتگرال (مجازی)

$$I_2 = \int_a^{\infty} f(x) dx \quad \text{و} \quad I_1 = \int_{-\infty}^a f(x) dx$$

همگرا باشند، که در آنها a عدد حقیقی دلخواهی است. در این صورت، گوییم انتگرال (۵) همگرا است و به آن مقدار $I_1 + I_2$ نسبت می‌دهیم؛ یعنی،

$$(۶) \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx = \int_{-\infty}^a f(x) dx + \int_a^{\infty} f(x) dx,$$

ولی در غیر این صورت گوییم (۵) واگرا می‌باشد. به عنوان تمرین، نشان دهید که انتخاب خاص عدد a بر همگرایی یا واگرایی I_1 و I_2 ، یا مقدار $I_1 + I_2$ در حالت همگرایی، تأثیر ندارد؛ در نتیجه، می‌توان مثلاً $a = 0$ را اختیار کرد.

مثال ۱. انتگرال مجازی

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2}$$

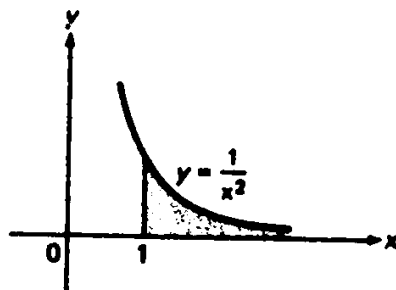
که در آغاز بخش مطرح شد، همگراست. در واقع،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{dx}{x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{x} \right]_1^n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n} \right) = 1,$$

ولذا،

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n \frac{dx}{x^2} = 1.$$

با تعمیم طبیعی تعریف مساحت تحت یک منحنی در حالت بازه انتگرالگیری کراندار، می‌توان مقدار این انتگرال مجازی، یعنی عدد ۱، را مساحت تحت منحنی $y = 1/x^2$ از $x = 1$ تا $x = \infty$ گرفت. لذا، ممکن است برای یک ناحیه بی‌کران، در اینجا ناحیه سایه‌دار شکل ۱۲ " که تا بی‌نهایت گسترش یافته"، مساحت متناهی داشته باشیم.



شکل ۱۲

از نظر تکنیکی، یک ناحیه را کراندار یا متناهی گوئیم اگر کاملاً "داخل دایره" (به قدر کافی بزرگی) به مرکز مبدأ قرار داشته باشد. در غیر این صورت گوئیم ناحیه بی‌کران یا نامتناهی است. به عبارت دیگر، یک ناحیه بی‌کران شامل نقاطی است که بدخواه از مبدأ دور می‌باشند.

مثال ۲. انتگرال مجازی

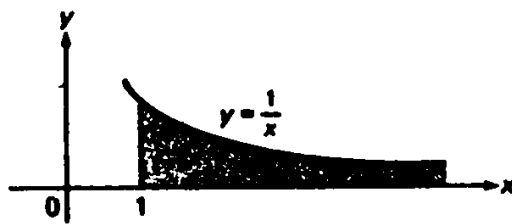
$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x}$$

۱. در نگارش $x = \infty$ قید قبلی (برای گذاردن علامت ∞ یا $-\infty$ بعد از علامت تساوی) را برمی‌داریم تا نمادها یکنواخت باشند.

واگراست، زیرا

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{dx}{x} = \lim_{u \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^u = \lim_{u \rightarrow \infty} \ln u = \infty.$$

لذا، مساحت تحت منحنی $y = 1/x$ از $x = 1$ تا $x = \infty$ ، یعنی مساحت ناحیه سایه دار بی کران در شکل ۱۳، را باید نامتناهی در نظر گرفت.



شکل ۱۳

مثال ۰۳. چون تابع

$$\int_0^u \sin x \, dx = -\cos x \Big|_0^u = 1 - \cos u$$

وقتی $u \rightarrow \infty$ ، بین مقادیر 0 و 2 جلو و عقب می‌رود، فوراً می‌بینیم که حد

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \sin x \, dx$$

وجود ندارد. لذا، انتگرال مجازی

$$\int_0^{\infty} \sin x \, dx$$

واگرا می‌باشد.

مثال ۰۴. انتگرال مجازی

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} \, dx$$

همگراست. در واقع،

$$\begin{aligned} \int_0^{\infty} e^{-|x|} \, dx &= \int_0^{\infty} e^{-x} \, dx = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u e^{-x} \, dx \\ &= \lim_{u \rightarrow \infty} (-e^{-x}) \Big|_0^u = \lim_{u \rightarrow \infty} (1 - e^{-u}) = 1, \end{aligned}$$

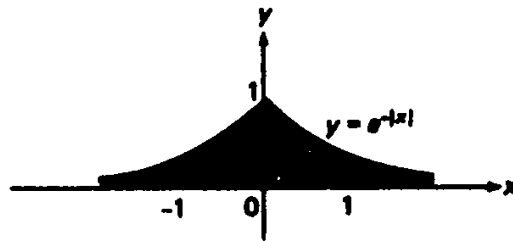
زیرا به ازای $|x| = x$ ، $x \geq 0$ و وقتی $u \rightarrow \infty$ ، $e^{-u} \rightarrow 0$ ، حال آنکه

$$\int_{-\infty}^0 e^{-|x|} dx = \int_{-\infty}^0 e^x dx = \lim_{u \rightarrow -\infty} \int_u^0 e^x dx = \lim_{u \rightarrow -\infty} e^x \Big|_u^0 = \lim_{u \rightarrow -\infty} (1 - e^u) = 1,$$

زیرا به ازای $|x| = -x$ ، $x \leq 0$ و وقتی $u \rightarrow -\infty$ ، $e^u \rightarrow 0$ ، بنابراین، طبق رابطه (۶) به ازای $u = 0$

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-|x|} dx = \int_{-\infty}^0 e^{-|x|} dx + \int_0^{\infty} e^{-|x|} dx = 1 + 1 = 2.$$

لذا، می‌توان عدد 2 را مساحت ناحیه سایه‌دار نامتناهی شکل ۱۴ تحت منحنی $y = e^{-|x|}$ از $x = -\infty$ تا $x = \infty$ در نظر گرفت.



شکل ۱۴

انتگرالدههای بی‌کران. حال انتگرالهای مجازی، مانند انتگرال (۲)، با انتگرالده‌بی‌کران را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم $f(x)$ تابع پیوسته‌ای بر بازه نیمباز $[a, b)$ باشد که وقتی $x \rightarrow b^-$ به بی‌نهایت (∞ یا $-\infty$) نزدیک می‌شود، و نیز حد

$$(۷) \quad \lim_{u \rightarrow b^-} \int_a^u f(x) dx \quad (a < u < b)$$

موجود و متناهی باشد. (چرا f بر هر زیر بازه $[a, u]$ انتگرالپذیر است؟) در این صورت گوییم انتگرال مجازی

$$(۸) \quad \int_a^b f(x) dx$$

همگرا است، و به آن مقدار (۷) را نسبت می‌دهیم. اما، اگر حد (۷) نامتناهی بوده یا وجود نداشته باشد، گوییم انتگرال (۸) واگرا می‌باشد. به همین نحو، فرض کنیم $f(x)$ تابع پیوسته‌ای بر $[a, b]$ باشد که وقتی $x \rightarrow a^+$ به بی‌نهایت نزدیک می‌شود، و نیز حد

$$(۷') \quad \lim_{u \rightarrow a^+} \int_u^b f(x) dx \quad (a < u < b)$$

موجود و متناهی باشد. در این صورت، گوییم انتگرال مجازی (۸) همگراست و مقدار (۷') را به آن نسبت می‌دهیم، ولی انتگرال (۸) واگراست اگر حد (۷') نامتناهی بوده یا وجود نداشته باشد.

همچنین، حالتی وجود دارد که در آن $f(x)$ با نزدیک شدن x به نقطه درونی c از $[a, b]$ بی‌نهایت می‌شود. به‌طور دقیقتر، فرض‌کنیم $f(x)$ در دو طرف c ، یعنی بر بازه‌های $[a, c]$ و $(c, b]$ ، پیوسته بوده، و وقتی x از یک یا دو طرف به c نزدیک شود، $f(x)$ به بی‌نهایت نزدیک می‌شود. در این صورت، اگر هر دو انتگرال

$$I_1 = \int_a^c f(x) dx, \quad I_2 = \int_c^b f(x) dx$$

همگرا باشند (یا یکی همگرا و دیگری حقیقی باشد)، گوییم انتگرال (۸) همگراست و مقدار $I_1 + I_2$ را به آن نسبت می‌دهیم؛ یعنی،

$$\int_a^b f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^b f(x) dx,$$

ولی در غیر این صورت گوییم (۸) واگراست.

مثال ۵. انتگرال مجازی

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}}$$

مطرح شده در آغاز بخش، همگراست. در واقع،

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} 2\sqrt{x} \Big|_{\epsilon}^1 = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} (2 - 2\sqrt{\epsilon}) = 2,$$

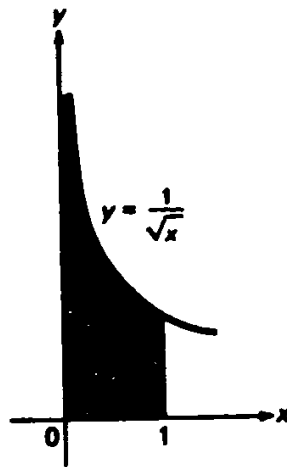
و در نتیجه،

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0^+} \int_{\epsilon}^1 \frac{dx}{\sqrt{x}} = 2.$$

لذا، می‌توان عدد ۲ را مساحت تحت منحنی $y = 1/\sqrt{x}$ از $x = 0$ تا $x = 1$ گرفت (مساحت ناحیه سایه‌دار بی‌کران در شکل ۱۵). این مثال دیگری است از یک ناحیه نامتناهی با مساحت متناهی.

مثال ۶. انتگرال مجازی

$$(۹) \quad \int_0^1 \frac{dx}{x^2}$$

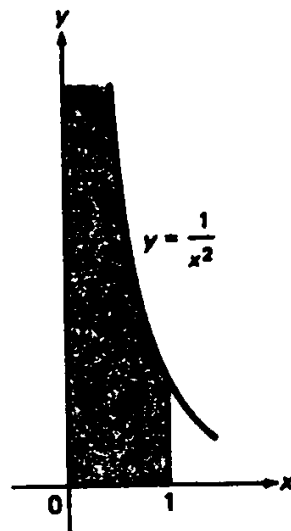


شکل ۱۵

واگراست، زیرا

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \int_u^1 \frac{dx}{x^2} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left[-\frac{1}{x} \right]_u^1 = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\frac{1}{u} - 1 \right) = \infty.$$

لذا، مساحت تحت منحنی $y = 1/x^2$ از $x = 0$ تا $x = 1$ (مساحت ناحیه سایه‌دار بی‌کران شکل ۱۶) را باید نامتناهی گرفت.



شکل ۱۶

مثال ۰۷. چون انتگرال (۹) واگراست، انتگرال

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2}$$

نیز چنین است (ر.ک. بحث پیش از مثال ۵). فرض کنیم در محاسبهٔ صوری این انتگرال

اشتباه کرده، این امر را که انتگرالده در مبدأ $x = 0$ به بی‌نهایت نزدیک می‌شود نادیده بگیریم. در این صورت، نتیجهٔ پوچ

$$\int_{-1}^1 \frac{dx}{x^2} = \left[-\frac{1}{x} \right]_{-1}^1 = -2$$

را به دست می‌آوریم که تابع مثبتی با انتگرال منفی را نشان می‌دهد

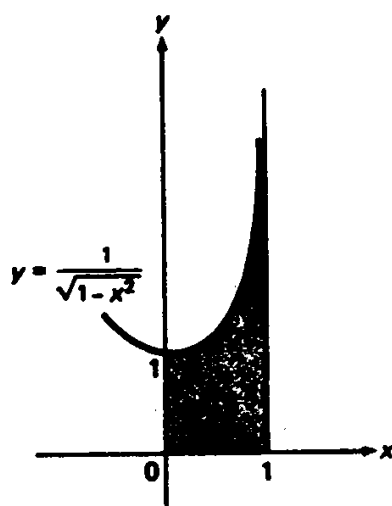
مثال ۸. انتگرال مجازی

$$I = \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

همگرا و مساوی $\pi/2$ است. در واقع، بنابر پیوستگی سینوس معکوس،

$$\begin{aligned} I &= \lim_{n \rightarrow 1^-} \int_0^n \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \lim_{n \rightarrow 1^-} \arcsin x \Big|_0^n \\ &= \lim_{n \rightarrow 1^-} \arcsin u = \arcsin 1 = \frac{\pi}{2}. \end{aligned}$$

از نظر هندسی، I مساحت ناحیهٔ سایه‌دار بی‌کران شکل ۱۷ است.



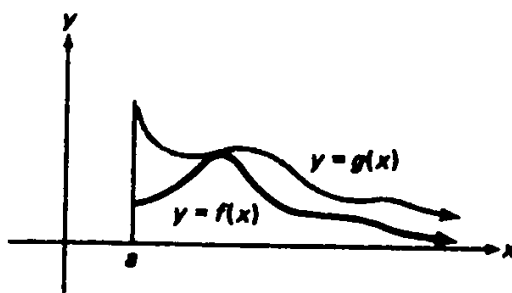
شکل ۱۷

قضیهٔ زیر یک ابزار قوی برای بررسی انتگرالهای مجازی به ما می‌دهد.

قضیهٔ ۶ (آزمون مقایسه برای انتگرالهای مجازی). فرض کنیم f و g توابع پیوسته‌ای باشند به طوری که به ازای هر $x \geq a$ ، $0 \leq f(x) \leq g(x)$. در این صورت،

(یک) اگر $\int_0^{\infty} g(x) dx$ همگرا باشد، $\int_0^{\infty} f(x) dx$ نیز چنین است؛
 (دو) اگر $\int_0^{\infty} f(x) dx$ واگرا باشد، $\int_0^{\infty} g(x) dx$ نیز چنین است.

با آنکه برهان قضیه ۶ مستلزم تکنیکهایی است، و لذا حذف شده است، مضمون شهودی قضیه از شکل ۱۸ واضح است: هرگاه مساحت تحت منحنی بالایی $y = g(x)$ متناهی



مقایسه دو تابع بر یک بازه بی‌کران

شکل ۱۸

باشد، آنگاه مساحت تحت منحنی پایینی $y = f(x)$ نیز چنین است، زیرا دومی نمی‌تواند از اولی متجاوز باشد. از آن سو، اگر مساحت تحت منحنی پایینی نامتناهی باشد، مساحت تحت منحنی بالایی نیز چنین است، زیرا دومی نمی‌تواند از اولی تجاوز کند. توجه کنید که چون توابع f و g نامنفی‌اند، نوسانات شبیه مثال ۳ نمی‌توانند در اینجا رخ دهند، و واگرایی انتگرالهای $\int_0^{\infty} f(x) dx$ و $\int_0^{\infty} g(x) dx$ فقط می‌تواند به معنی

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n f(x) dx = \infty \quad , \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^n g(x) dx = \infty$$

باشد.

مشابه‌های آزمون مقایسه برای انواع دیگر انتگرالهای مجازی وجود دارند. مثلاً،

فرض کنیم f و g توابع پیوسته‌ای باشند به طوری که

$$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow a^+} g(x) = \infty,$$

و فرض می‌کنیم به ازای هر $a < x \leq b$ ، $0 \leq f(x) \leq g(x)$ در این صورت،

(یک) اگر $\int_a^b g(x) dx$ همگرا باشد، $\int_a^b f(x) dx$ نیز چنین است؛

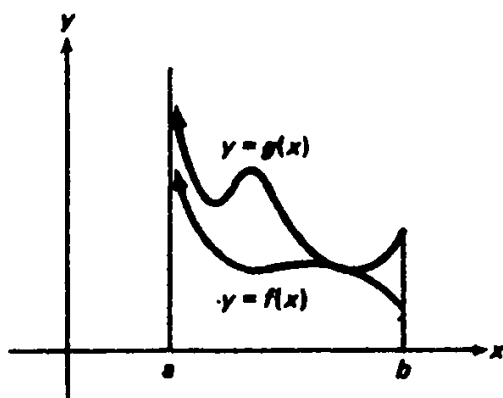
(دو) اگر $\int_a^b f(x) dx$ واگرا باشد، $\int_a^b g(x) dx$ نیز چنین است.

باتوجه به شکل ۱۹، قسمت‌های (یک) و (دو) را تعبیر هندسی کنید.

مثال ۹. نشان دهید که انتگرال مجازی

$$I = \int_0^{\infty} e^{-x^2} dx$$

همگراست .



مقایسهٔ دو تابع بی کران

شکل ۱۹

حل . چون I مجموع انتگرال حقیقی

$$\int_0^1 e^{-x^2} dx$$

و انتگرال مجازی

$$(۱۰) \quad \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx$$

است ، کافی است نشان دهیم که انتگرال (۱۰) همگراست . با توجه به $0 \leq e^{-x^2} \leq e^{-x}$ به ازای هر $x \geq 1$ (ولی نه به ازای $0 < x < 1$) ، و اعمال قضیهٔ ۶ ، می توان همگرایی انتگرال " مشکل " (۱۰) را از انتگرال خیلی " آسانتر "

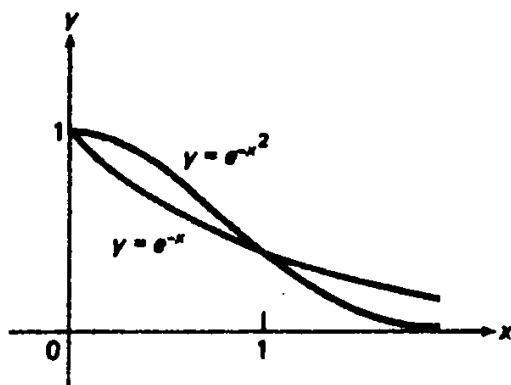
$$\begin{aligned} \int_1^{\infty} e^{-x^2} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n e^{-x^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} (-e^{-x}) \Big|_1^n \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (e^{-1} - e^{-n}) = e^{-1} \end{aligned}$$

نتیجه گرفت . شکل ۲۰ معنی هندسی آزمون مقایسه ، به کار رفته در این مثال ، را نشان می دهد . همانطور که در تبصرهٔ صفحهٔ ۶۷۲ گفتیم ، معلوم می شود که $I = \sqrt{\pi}/2$.

مثال ۱۰ . نشان دهید که انتگرال مجازی

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x \sin x}$$

واگراست .



شکل ۲۰

حل . لازم نیست انتگرال را حساب کنیم . ابتدا ملاحظه می‌کنیم که به‌ازای هر $0 < x \leq \pi/2$ ،

$$\frac{1}{x \sin x} \geq \frac{1}{x} > 0$$

(چرا ؟) ، و سپس اینکه انتگرال

$$\int_0^{\pi/2} \frac{dx}{x}$$

واگراست ، زیرا

$$\lim_{u \rightarrow 0^+} \int_u^{\pi/2} \frac{dx}{x} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \ln x \Big|_u^{\pi/2} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \left(\ln \frac{\pi}{2} - \ln u \right) = \infty.$$

حال واگرایی I نتیجه‌ای است از آزمون مقایسه به شکل (دو) .

همچنین ، انتگرالهای مجازی " از نوع مخلوط " ، که در آنها بازهٔ انتگرالگیری و انتگرالده هر دو بی‌کرانند ، نیز وجود دارند . مثلاً ، فرض کنیم $f(x)$ بر بازهٔ (a, ∞) پیوسته بوده و وقتی $x \rightarrow a^+$ به بی‌نهایت نزدیک شود ، و نیز هر دو انتگرال مجازی

$$I_1 = \int_a^c f(x) dx, \quad I_2 = \int_c^\infty f(x) dx \quad (a < c < \infty)$$

همگرا باشند . در این صورت ، گوئیم انتگرال مجازی

$$(11) \quad \int_a^\infty f(x) dx$$

همگراست و به آن مقدار $I_1 + I_2$ را نسبت می‌دهیم؛ یعنی،

$$(12) \quad \int_a^\infty f(x) dx = \int_a^c f(x) dx + \int_c^\infty f(x) dx,$$

ولی در غیر این صورت گوییم (۱۱) واگرا می‌باشد. در اینجا به این مطلب ساده تکیه داریم که همگرایی یا واگرایی انتگرالهای I_1 و I_2 ، و مقدار مجموع آنها در صورتی که هر دو همگرا باشند، به انتخاب نقطهء میانی c بستگی ندارد (این مطلب را نشان دهید).

مثال ۱۱. انتگرال مجازی

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2}$$

واگراست. در واقع، با انتخاب $c = 1$ در (۱۲)، داریم

$$\int_0^\infty \frac{dx}{x^2} = \int_0^1 \frac{dx}{x^2} + \int_1^\infty \frac{dx}{x^2}.$$

از دو انتگرال سمت راست، دومی طبق مثال ۱ همگراست ولی اولی طبق مثال ۶ واگراست. از اینرو، انتگرال سمت چپ نیز واگرا می‌باشد.

مثال ۱۲. انتگرال مجازی

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx$$

همگراست. برای نشان دادن این، ابتدا می‌نویسیم

$$\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \int_0^1 \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx + \int_1^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx.$$

سپس می‌بینیم که اولین انتگرال سمت راست، از مقایسه با انتگرال همگرای $\int_0^1 dx/\sqrt{x}$ ، همگراست (ر. ک. مثال ۵)، حال آنکه دومین انتگرال، از مقایسه با انتگرال همگرای $\int_1^\infty e^{-x} dx = e^{-1}$ ، همگرا می‌باشد (جزئیات را به عنوان تمرین می‌گذاریم). لذا، انتگرال سمت چپ نیز همگراست و مقدارش در مسئله ۴۹ داده شده است.

مسائل

اگر انتگرال مجازی داده شده همگرا باشد، مقدارش را بیابید. در غیر این صورت، بگویید که واگراست.

- | | |
|--|--|
| $\int_0^1 \frac{dx}{x^4} \cdot 2 \checkmark$ | $\int_1^\infty \frac{dx}{x^3} \cdot 1 \checkmark$ |
| $\int_0^\infty \frac{dx}{x^2 + 2x + 2} \cdot 4 \checkmark$ | $\int_{-\infty}^\infty \frac{dx}{x^2 + 1} \cdot 3 \checkmark$ |
| $\int_0^2 \frac{dx}{x^2 - 4x + 3} \cdot 6 \checkmark$ | $\int_{-1}^0 \frac{dx}{x^2 - 1} \cdot 5 \checkmark$ |
| $\int_0^{16} \frac{ds}{\sqrt[4]{s}} \cdot 8 \checkmark$ | $\int_{-1}^{27} \frac{dx}{\sqrt[3]{x}} \cdot 7 \checkmark$ |
| $\int_1^2 \frac{x}{\sqrt{x-1}} dx \cdot 10 \checkmark$ | $\int_{-32}^1 \frac{dt}{\sqrt[3]{t}} \cdot 9 \checkmark$ |
| $\int_{-4}^0 \frac{dx}{\sqrt{16-x^2}} \cdot 12 \checkmark$ | $\int_3^5 \frac{dx}{\sqrt{x^2-9}} \cdot 11 \checkmark$ |
| $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x-x^2}} \cdot 14 \checkmark$ | $\int_2^\infty \frac{dx}{x\sqrt{x^2-1}} \cdot 13 \checkmark$ |
| $\int_{-\infty}^0 \cos x dx \cdot 16 \checkmark$ | $\int_0^1 \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx \cdot 15 \checkmark$ |
| $\int_0^\infty e^{-3z} dz \cdot 18 \checkmark$ | $\int_0^{\pi/2} \tan y dy \cdot 17 \checkmark$ |
| $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x} dx \cdot 20 \checkmark$ | $\int_0^1 \ln x dx \cdot 19 \checkmark$ |
| $\int_0^\infty e^{-3x} \cos 2x dx \cdot 22 \checkmark$ | $\int_0^\infty e^{-\sqrt{x}} dx \cdot 21 \checkmark$ |
| $\int_1^\infty \frac{\ln x}{x^2} dx \cdot 24 \checkmark$ | $\int_0^\infty e^{-2x} \sin x dx \cdot 23 \checkmark$ |
| $\int_2^\infty \frac{dx}{x \ln x} \cdot 26 \checkmark$ | $\int_1^2 \frac{dx}{x \ln x} \cdot 25 \checkmark$ |
| $\int_e^\infty \frac{dx}{x(\ln x)^2} \cdot 28 \checkmark$ | $\int_0^\infty xe^{-x^2} dx \cdot 27 \checkmark$ |
| $\int_1^\infty \frac{\arctan x}{x^2} dx \cdot 30 \checkmark$ | $\int_0^1 \frac{\arcsin x}{\sqrt{1-x^2}} dx \cdot 29 \checkmark$ |

به ازای $a > 0$ ، نشان دهید که

۳۱. $\int_0^a x^p dx$ همگراست اگر و فقط اگر $p > -1$.

۳۲. $\int_a^\infty x^p dx$ همگراست اگر و فقط اگر $p < -1$.

۳۳. $\int_a^\infty x^p dx$ به ازای هر p واگراست .

انتگرالهای زیر را به ازای $a > 0$ داده شده حساب کنید .

۳۵. $\int_0^\infty e^{-ax} \cos bx dx$ ✓

۳۴. $\int_0^\infty e^{-ax} dx$ ✓

۳۶. $\int_0^\infty e^{-ax} \sin bx dx$ ✓

مساحت A ناحیه R^e بین منحنیهای زیر را بیابید .

۳۷. $y = x^{-1/2}$ و $y = \frac{1}{2}x^{-1/3}$ از $x = 0$ تا $x = 1$. ✓

۳۸. $y = e^{-x}$ و $y = 1/(x^2 + 1)$ از $x = 0$ تا $x = \infty$. ✓

۳۹. $y = \sinh x$ و $y = \cosh x$ در ربع اول . ✓

در هر حالت ، ناحیه R^e را رسم نمایید .

همگرایی یا واگرایی انتگرال مجازی داده شده را با آزمون مقایسه تعیین کنید

۴۲. $\int_0^1 \frac{dx}{x \cos x}$ ✓

۴۱. $\int_1^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^2 + x}}$ ✓

۴۰. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3 + 1}}$ ✓

۴۵. $\int_0^{\pi/2} \frac{\sin x}{x^{3/2}} dx$ ✓

۴۴. $\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}$ ✓

۴۳. $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2 + \ln x}$ ✓

۴۸. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^3 + x}}$ ✓

۴۷. $\int_0^\infty \frac{dx}{\sqrt{x^4 + x^2}}$ ✓

۴۶. $\int_0^{\pi/2} \frac{\cos x}{x} dx$ ✓

با معلوم گرفتن فرمول $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ ، نشان دهید که

۵۰. $\int_0^\infty x^2 e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{4}$ ✓

۴۹. $\int_0^\infty \frac{e^{-x}}{\sqrt{x}} dx = \sqrt{\pi}$ ✓

عدد x را طوری بیابید که

۵۲. $\int_0^x \frac{dt}{\sqrt{t}} = \int_x^1 \frac{dt}{\sqrt{t}}$ ✓

۵۱. $\int_0^x e^{-t} dt = \int_x^\infty e^{-t} dt$ ✓

$$\int_0^x \frac{dt}{t^2+1} = \int_x^\infty \frac{dt}{t^2+1} \quad .53 \checkmark$$

۵۴. فرض کنید f بر $(-\infty, \infty)$ پیوسته بوده، و انتگرال $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ همگرا باشد. نشان دهید که اگر f زوج باشد،

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = 2 \int_0^\infty f(x) dx$$

حال آنکه اگر f فرد باشد،

$$\int_{-\infty}^\infty f(x) dx = 0$$

۵۵. تابع f را طوری مثال بزنید که $\int_{-\infty}^\infty f(x) dx$ واگرا بوده ولی

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \int_{-u}^u f(x) dx = 0.$$

۵۶. یک مالک، که از مستأجرین خود در سال D دلار اجاره مرکب (به اقساط ماهانه) دریافت می‌کند، ساختمان را به معرض فروش گذاشته است. اگر وی معمولاً "به محض دریافت اجاره آن را بانرخ سود سالانه $100r$ درصد و به طور پیوسته مرکب سپرده می‌گذارد، چرا D/r دلار را بهای عادلانه می‌داند؟
راهنمایی. با استفاده از یک انتگرال مجازی، ارزش فعلی "جریان درآمد" مرکب از تمام دریافت‌های اجاره آینده را تقریب کنید.

اصطلاحات و مباحث کلیدی

انتگرالگیری با جانشانی: $\int f(u(x))u'(x) dx = \int f(u) du|_{u=u(x)}$

انتگرالگیری جزء به جزء: $\int u dv = uv - \int v du$

فرمولهای تحویل

انتگرالگیری از حاصل ضرب توانهایی از $\sin x$ و $\cos x$

انتگرالگیری از حاصل ضرب توانهایی از $\tan x$ و $\sec x$

انتگرالگیری از حاصل ضرب سینوسها و کسینوسها با شناسه‌های مختلف جانشانیهای

$$x = a \sec u \text{ و } x = a \tan u \text{ ، } x = a \sin u$$

$$x = a \cosh u \text{ و } x = a \sinh u$$

توابع گویای حقیقی و مجازی

تجزیه چند جمله‌ایها با ضرایب حقیقی

بسط تابع گویا به صورت کسرهای جزئی

انتگرالگیری از توابع گویا به کمک کسرهای جزئی.
 جانشانیهای گویاساز، جانشانی نصف زاویه
 انتگرالگیری از توابع گویا برحسب $\sin x$ و $\cos x$
 قاعده نقطه میانی و خطای آن
 قاعده دوزنقه و خطای آن
 قاعده سیمپسون و خطای آن
 انتگرالهای مجازی با بازه انتگرالگیری بی کران
 انتگرالهای مجازی با انتگرالده بی کران
 آزمون مقایسه برای انتگرالهای مجازی
 برای مرور فرمولهای اصلی انتگرالگیری، ر. ک. آخر کتاب، شماره‌های ۱ تا ۲۸.

مسائل تکمیلی

انتگرال داده شده را به هر روشی که خواستید حساب کنید.

$$\int x^3 e^{x^2} dx \quad . 1 \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{5-4x}} \quad . 2$$

$$\int \frac{x^2}{(x-1)^9} dx \quad . 3 \qquad \int \sin 7x \cos 8x dx \quad . 4$$

$$\int \frac{x^3}{x^3+1} dx \quad . 5 \qquad \int \frac{ds}{\tan^5 s} \quad . 6$$

$$\int (x^2+1)^{3/2} dx \quad . 7 \qquad \int \sin^6 t \cos^5 t dt \quad . 8$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^4+1}} \quad . 9 \qquad \int \sin^2 x \cot^3 x dx \quad . 10$$

$$\int \frac{dx}{\sin x \cos 2x} \quad . 11 \qquad \int x^2 \sinh x dx \quad . 12$$

$$\int \sqrt{x^4+x} dx \quad . 13 \qquad \int \frac{x^2}{(4-x^2)^{3/2}} dx \quad . 14$$

$$\int \frac{y}{\sqrt{y+1}+1} dy \quad . 15 \qquad \int \frac{x}{\cos^2 x} dx \quad . 16$$

$$\int \tanh^{-1} x dx \quad . 17 \qquad \int \frac{dx}{\sqrt{1-x^2} (\arccos x)^2} \quad . 18$$

- $$\int \frac{\tan^2 z + 1}{\tan^2 z - 1} dz \cdot 20$$
- $$\int (1 - x^2)^{3/2} dx \cdot 19$$
- $$\int \operatorname{csch} x dx \cdot 22$$
- $$\int \operatorname{sech} x dx \cdot 21$$
- $$\int (\arcsin x)^2 dx \cdot 24$$
- $$\int \sqrt{1 - x^2} \arcsin x dx \cdot 23$$
- $$\int \sec^2 u \csc^2 u du \cdot 26$$
- $$\int x \coth^2 x dx \cdot 25$$
- $$\int v^2 \ln \frac{v-1}{v} dv \cdot 28$$
- $$\int x e^x \sin x dx \cdot 27$$
- $$\int e^{2x} \sqrt{e^x + 2} dx \cdot 30$$
- $$\int \frac{3x^2 - 1}{x^4 + x^3 + 2x^2 + x + 1} dx \cdot 29$$
- $$\int \cot^4 w \csc^4 w dw \cdot 32$$
- $$\int \frac{\sin 2x}{\sin^4 x + \cos^4 x} dx \cdot 31$$
- $$\int \frac{dx}{\sqrt{x}(1 + \sqrt[4]{x})^3} \cdot 34$$
- $$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + 2}} dx \cdot 33$$
- $$\int \frac{dx}{(x^2 - 4x + 4)(x^2 - 4x + 5)} \cdot 36$$
- $$\int \frac{dx}{\sin^6 x} \cdot 35$$
- $$\int \frac{1}{x} \left(\frac{x+2}{x-1} \right)^2 dx \cdot 38$$
- $$\int (\tan y - \sec y)^2 dy \cdot 37$$
- $$\int \sin^3 x \tan x dx \cdot 40$$
- $$\int x \cos \sqrt{x} dx \cdot 39$$
- $$\int \frac{\ln z}{\sqrt{z}} dz \cdot 42$$
- $$\int \frac{dx}{(x-1)^2(x+1)^3} \cdot 41$$
- $$\int \sinh 2x \cosh x dx \cdot 44$$
- $$\int \sin x \sinh x dx \cdot 43$$
- $$\int \cos \pi v \cos v dv \cdot 46$$
- $$\int \frac{\arcsin x}{\sqrt{1+x}} dx \cdot 45$$
- $$\int \frac{x^2 + x + 1}{x^4 - x^3 - 91x^2 + x + 90} dx \cdot 47$$

$$\int \frac{x + \sin x \cos x}{(x \sin x + \cos x)^2} dx \cdot ۴۹$$

$$\int \cos^2 x \csc^3 x dx \cdot ۴۸$$

$$\int \frac{\sqrt{x+1} - 1}{\sqrt{x+1} + 1} dx \cdot ۵۱$$

$$\int \arctan \sqrt{2x-1} dx \cdot ۵۰$$

$$\int \frac{\tan^2 x}{1 + \cos^2 x} dx \cdot ۵۳$$

$$\int \left(\frac{u}{u \cos u - \sin u} \right)^2 du \cdot ۵۲$$

$$\int \cos x \tan^4 x dx \cdot ۵۵$$

$$\int \sqrt{1 - \sin x} dx \cdot ۵۴$$

$$\int \frac{dx}{x^4 + 1} \cdot ۵۷$$

$$\int \frac{x^2}{\sqrt{x^2 + x + 1}} dx \cdot ۵۶$$

$$\int \frac{x^4 - 1}{x^6 - 1} dx \cdot ۵۹$$

$$\int \frac{x^4 + 1}{x^6 + 1} dx \cdot ۵۸$$

$$\int \frac{ds}{e^{3s} - e^s} \cdot ۶۱$$

$$\int \tan^3 x \sec^4 x dx \cdot ۶۰$$

$$\int \frac{t^5 + 1}{t^6 + t^4} dt \cdot ۶۳$$

$$\int \frac{dx}{1 + \sin^2 x} \cdot ۶۲$$

$$\int \frac{\sqrt{\tan z}}{\sin 2z} dz \cdot ۶۵$$

$$\int \cot^6 x dx \cdot ۶۴$$

$$\int \frac{dx}{\sin(x+1) \sin(x-1)} \cdot ۶۷$$

$$\int \cos x \cos 2x \cos 3x dx \cdot ۶۶$$

$$\int y^4 \ln y dy \cdot ۶۹$$

$$\int \frac{du}{\sin^3 u \cos^5 u} \cdot ۶۸$$

$$\int \frac{\sin v}{\sin 3v} dv \cdot ۷۱$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{\tan x}} \cdot ۷۰$$

$$\int \operatorname{sech}^3 x dx \cdot ۷۳$$

$$\int \tanh^4 x dx \cdot ۷۲$$

$$\int \frac{dt}{2 \sin t + \sin 2t} \cdot ۷۵$$

$$\int \frac{ds}{s \sqrt{s^3 - 1}} \cdot ۷۴$$

$$\int \frac{\sin x}{2 + \sin x + \cos x} dx \cdot ۷۷$$

$$\int \left(\frac{x^2 + 1}{x + 1} \right)^2 dx \cdot ۷۶$$

$$\int \frac{dx}{1 - \tanh x} \quad \cdot 78$$

۷۹. فرض کنید $Q(x) = (x - c_1)(x - c_2) \cdots (x - c_n)$ ، که در آن c_1, c_2, \dots, c_n ثابتهای متمایزی هستند (یعنی، $c_i \neq c_j$ اگر $i \neq j$)، و $P(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه کمتر از n باشد. نشان دهید که

$$\int \frac{P(x)}{Q(x)} dx = \sum_{i=1}^n \frac{P(c_i)}{Q'(c_i)} \ln |x - c_i| + C. \quad (\text{یک})$$

انتگرالهای زیر را با استفاده از فرمول (یک) حساب کنید.

$$\int \frac{x}{(x-1)(x-2)(x-3)} dx \quad \cdot 80$$

$$\int \frac{x^2 + 5}{(x-1)(x+2)(x+3)} dx \quad \cdot 81$$

$$\int \frac{x^3}{(x^2-1)(x^2-4)} dx \quad \cdot 82$$

$$\int_0^1 \frac{\ln(x+1)}{x^2+1} dx = \frac{1}{8} \pi \ln 2 \quad \text{نشان دهید که} \quad \cdot 83$$

انتگرال داده شده را با استفاده از قواعد ذکر شده تقریب کنید، که در آن n تعداد زیربازه‌ها، می‌باشد. مقادیر عرضها را تا چهار رقم اعشار حساب کرده، و جواب را (بدون تلاش در تخمین خطا) تا سه رقم اعشار بدهید.

$$\int_1^2 \frac{\cos x}{x} dx \quad \cdot 84 \quad \text{، قواعد نقطه میانی و دوزنقه، } n = 5.$$

$$\int_0^{\pi/2} \sqrt{\sin x} dx \quad \cdot 85 \quad \text{، قواعد نقطه میانی و دوزنقه، } n = 6.$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \quad \cdot 86 \quad \text{، قواعد دوزنقه و سیمپسون، } n = 4.$$

۸۷. چه مقدار از n ، یعنی تعداد زیربازه‌ها، تضمین می‌کند که قدرمطلق خطای E_S ناشی از استفاده قاعده سیمپسون در تقریب انتگرال مسئله ۸۶ کوچکتر از ۰.۰۰۰۰۱ باشد.

۸۸. به کمک نامساوی $x^2 \geq 2ax - a^2$ نشان دهید که $\int_3^{\infty} e^{-x^2} dx < 0.00003$. سپس، با استفاده از قاعده سیمپسون به ازای $n = 12$ ، انتگرال مجازی $I = \int_0^x e^{-x^2} dx$ را تقریب نمایید. مقادیر عرضها را تا پنج رقم اعشار حساب کرده و، با تحلیل خطا،

مقدار I را که به اندازه 0.0001 دقیق است پیدا نمایید. جواب را به وسیله مقایسه با مقدار دقیق I امتحان کنید.

اگر انتگرال مجازی داده شده همگرا باشد، مقدار آن را بیابید. در غیر این صورت، بگویید که واگراست.

$$\int_2^{\infty} \frac{dy}{\ln y} \quad . 90 \qquad \int_0^{\infty} \frac{dx}{x+1} \quad . 89$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{x^4+1} \quad . 91$$

$$\int_a^b \frac{dx}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \quad (a < b) \quad . 92$$

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{x^2-1} dx \quad . 94 \qquad \int_1^{\infty} \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}} \quad . 93$$

$$\int_{1/2}^1 \frac{dx}{x\sqrt{1-x^2}} \quad . 96 \qquad \int_0^1 \frac{dz}{z\sqrt{1+z^2}} \quad . 95$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \sin x \cos x dx \quad . 98 \qquad \int_0^{\pi} \frac{dt}{1+\cos t} \quad . 97$$

$$\int_0^{\infty} e^{-x} \cosh x dx \quad . 100 \qquad \int_0^{\infty} e^{-2x} \sinh x dx \quad . 99$$

۱۰۱. نشان دهید که انتگرال مجازی

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^p}$$

همگراست اگر و فقط اگر $p > 1$.

۱۰۲. با استفاده مکرر از انتگرالگیری جزء به جزء، نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} x^n e^{-x} dx = n!,$$

که در آن n عدد صحیح مثبتی می باشد.

۱۰۳. با جانشانی $x = \tan t$ نشان دهید که

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^n} = \begin{cases} \frac{\pi}{2} & , \quad n=1 \text{ اگر} \\ \frac{1}{2} \frac{3}{4} \dots \frac{2n-3}{2n-2} \frac{\pi}{2} & , \quad n=2, 3, \dots \text{ اگر} \end{cases}$$

۱۰۴. به کمک مسئله ۱۰۲ و جانشانی $x = -(m+1) \ln t$ ، نشان دهید

$$\int_0^1 x^m (\ln x)^n dx = \frac{(-1)^n n!}{(m+1)^{n+1}}$$

که در آن m عدد صحیح نامنفی بوده و n عدد صحیح مثبتی می باشد. انتگرالهای زیر را حساب کنید.

$$\int_0^\infty \frac{dx}{(x^2+1)^4} \quad \cdot 106$$

$$\int_0^\infty x^6 e^{-x} dx \quad \cdot 105$$

$$\int_0^1 x^2 (\ln x)^3 dx \quad \cdot 107$$

۱۰۸. نشان دهید که انتگرال مجازی $\int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ همگراست اگر و فقط اگر $x > 0$.

۱۰۹. به ازای x مثبت، انتگرال مسئله قبل تابعی از x را تعریف می کند که به تابع گاما معروف بوده و با $\Gamma(x)$ نموده می شود. لذا،

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \quad (x > 0),$$

که در آن علامت Γ گامای بزرگ یونانی (معادل G انگلیسی) است. نشان دهید که

$$\Gamma(x+1) = x\Gamma(x) \quad (x > 0),$$

و بخصوص

$$\Gamma(n+1) = n! \quad (n = 1, 2, \dots).$$

۱۱۰. نشان دهید که

$$\int_0^\infty \frac{\ln x}{x^2+1} dx = 0.$$

کاربردهای دیگر انتگرالگیری^۱

در این فصل کاربردهای انتگرالگیری را که در فصل ۴ آغاز شد دنبال می‌کنیم. ابتدا نشان می‌دهیم که چگونه می‌توان حجم یک جسم، بخصوص جسم دوار، را با انتگرالگیری حساب کرد. سپس مفهوم منحنی را طوری تعمیم می‌دهیم که از قید نسبتاً "غیرواقعی" که منحنی نمودار یک تابع است رها گردد. این ما را به مفهوم "منحنی پارامتری" رسانیده، و ما را در وضعی قرار می‌دهد که بتوانیم طول یک منحنی کلی و مساحت یک سطح دوار کلی را محاسبه کنیم. بالاخره، از مسائل هندسه به مسائل فیزیک و مهندسی رفته، و چند مطلب در مکانیک سیالات را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱۰۸ حجم به روش مقاطع عرضی

در این بخش و بخش بعد، حجم اجسام را با استفاده از انتگرالگیری حساب می‌کنیم. مثل شکل ۱ (آ)، فرض کنیم S یک جسم، یعنی یک ناحیه سه‌بعدی، باشد و L خطی باشد که ما آن را محور x می‌گیریم. بعضی از صفحات عمود بر L ، S را در نواحی دو بعدی به نام مقاطع عرضی S قطع می‌کنند. فرض کنیم $A(x)$ مساحت مقطع عرضی S در x باشد، که منظور مقطع عرضی است که از S توسط صفحه عمود بر L در نقطه L به مختص x جدا می‌کند (ر. ک. شکل). همچنین، فرض کنیم

(یک) یک صفحه عمود بر L ، S را قطع می‌کند اگر و فقط اگر صفحه L را در نقطه‌ای از بازه بسته $[a, b]$ قطع نماید؛

(دو) تابع $A(x)$ بر $[a, b]$ پیوسته باشد.

در این صورت، همانطور که اینک نشان می‌دهیم، تعریف مناسبی از حجم V جسم S را

می‌توان با فرمول

$$(1) \quad V = \int_a^b A(x) dx$$

داد. دلیل آن تقریباً "به موازات ساخت صفحات ۳۶۷ تا ۳۶۹ است که به انتگرال $\int_a^b f(x) dx$ به عنوان تعریف مناسب مساحت تحت نمودار تابع پیوسته $y = f(x)$ از $x = a$ تا $x = b$ منجر شد.

فرض کنیم

$$(2) \quad a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$$

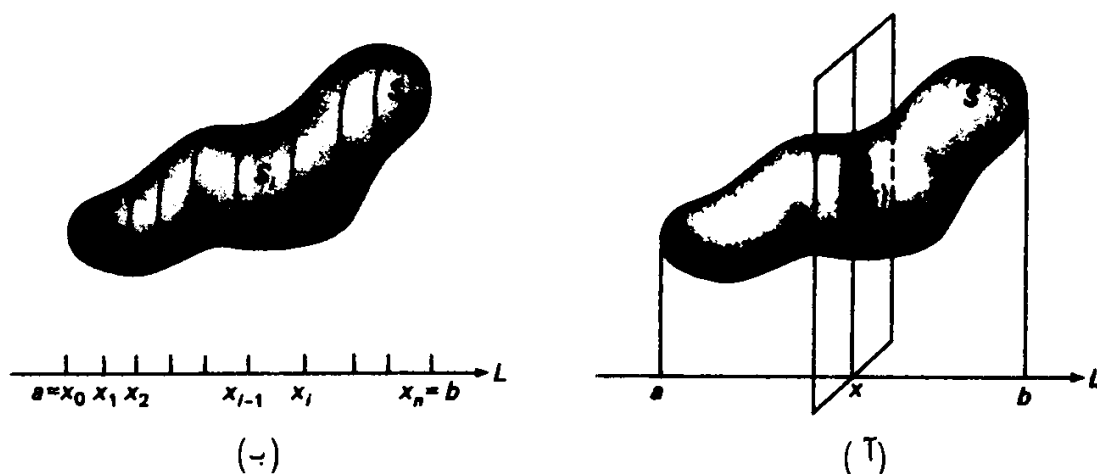
نقاط تقسیم بازه $[a, b]$ صادق در نامساویهای $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ باشند. این نقاط $[a, b]$ را به n زیر بازه

$$[x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

تقسیم می‌کنند، که در آن $[x_{i-1}, x_i]$ طول $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ است. طبق معمول فرض کنیم

$$\mu = \max \{ \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n \}$$

اندازه μ مش تقسیم (۲) یعنی طول ماکزیمم تمام زیر بازه‌ها، باشد. صفحات عمود بر خط L در نقاط x_i ($i = 0, 1, \dots, n$) جسم S را به n برش نازک S_1, S_2, \dots, S_n مطابق شکل ۱ (ب)

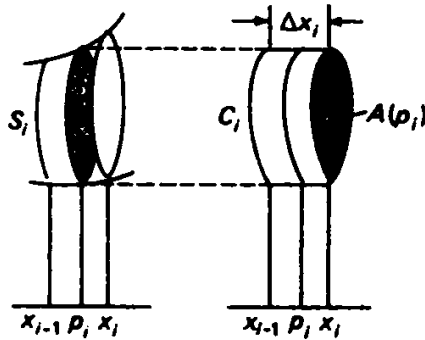


شکل ۱

تقسیم می‌کنند. برش i م به ضخامت Δx_i را در نظر بگیرید. تابع $A(x)$ پیوسته است؛ و در نتیجه، اگر مقدار Δx_i به قدر کافی کوچک باشد، مقدارش بر بازه $[x_{i-1}, x_i]$ تغییر مختصری می‌کند. لذا، در محاسبه حجم S ، اگر (یک) $A(x)$ بر $[x_{i-1}, x_i]$ مقدار ثابت $A(p_i)$ را داشته باشد که در آن p_i نقطه دلخواهی

از $[x_{i-1}, x_i]$ است^۱ :

(دو) از این صرف نظر شود که اضلاع S_i در حالت کلی مثل شکل ۲ مایلند و S_i را با استوانه^۲ قائم C_i تولید شده به وسیله^۳ حرکت مقطع عرضی S در p_i به فاصله Δx_i در امتداد خطی



شکل ۲

عمود بر مقطع عرضی، یعنی موازی L ، عوض کنیم،
 آنگاه تقریب مناسبی برای این حجم خواهیم یافت.

در هندسه حجم یک استوانه^۴ قائم با مساحت مقطع عرضی A و ارتفاع h مساوی حاصل ضرب A و h تعریف می شود. بنابراین، اگر V_i حجم استوانه^۴ C_i باشد، داریم

$$(۳) \quad V_i = A(p_i) \Delta x_i.$$

چون حجم تمام S مساوی مجموع احجام n برش S_1, S_2, \dots, S_n بوده و حجم هر برش S_i تقریباً "مساوی حجم (۳) استوانه^۴ نظیر C_i است، پس

$$(۴) \quad V \approx \sum_{i=1}^n A(p_i) \Delta x_i.$$

می بینید که طرف راست (۴) مجموع ریمانی از تابع $A(x)$ بر بازه^۵ $[a, b]$ است.

حجم به عنوان انتگرال. قدم آخر به شیوه ای برداشته می شود که اینک برای ما آشناست. فرض کنیم تمام برشهای S_i ، و در نتیجه تمام استوانه های تقریب ساز C_i ، باریکتر و باریکتر شوند. یعنی، اندازه^۶ μ به صفر نزدیک شود. در این صورت، انتظار اینکه تقریب (۴) بهتر و بهتر شود معقول است. حال، با توجه به این نکات، می توان حجم V جسم S

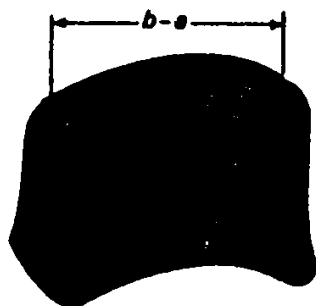
را با حد

$$V = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A(p_i) \Delta x_i$$

۱. بستگی تقریب به انتخاب خاصی از نقاط p_i در حد وقتی $\mu \rightarrow 0$ از بین خواهد رفت.

تعریفه‌گرد. این فرمول (۱) را ثابت می‌کند، زیرا حد مورد نظر چیزی جز انتگرال $\int_a^b A(x) dx$ نیست، که وجود آن را فرض پیوستگی $A(x)$ تضمین می‌کند.

مثال ۱. فرض کنیم مقاطع عرضی جسم S ، مثل شکل ۳، مساحت مساوی داشته باشند. یعنی



شکل ۳

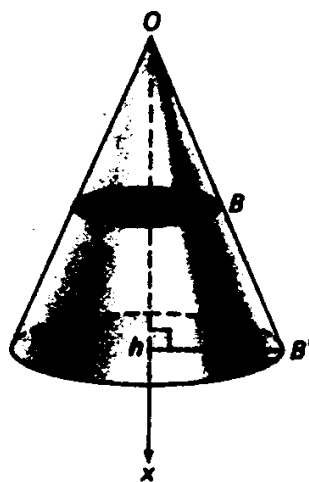
$A(x)$ دارای مقدار ثابت A_0 باشد. در این صورت، فرمول (۱) ایجاب می‌کند که

$$V = \int_a^b A(x) dx = \int_a^b A_0 dx = A_0(b-a).$$

این همان حجم استوانه‌ای قائم با مساحت قاعده A_0 و ارتفاع $b-a$ است، ولی البته S می‌تواند بدون استوانه بودن دارای مساحت مقطع عرضی ثابت باشد.

مثال ۲. حجم V یک مخروط مستدیر قائم به ارتفاع h و شعاع قاعده r را بیابید.

حل. مثل شکل ۴، محور تقارن مخروط را محور x (به سمت پایین) و رأس مبدأ O می‌گیریم.



شکل ۴

در این صورت ، $A(x) = \pi y^2$ ، که در آن $y = y(x)$ شعاع مقطع عرضی در x است (یک قرص مستدیر) . مثلشهای قائم OBx و $OB'h$ متشابه‌اند . و در نتیجه ،

$$\frac{y}{r} = \frac{x}{h}$$

بنابراین ،

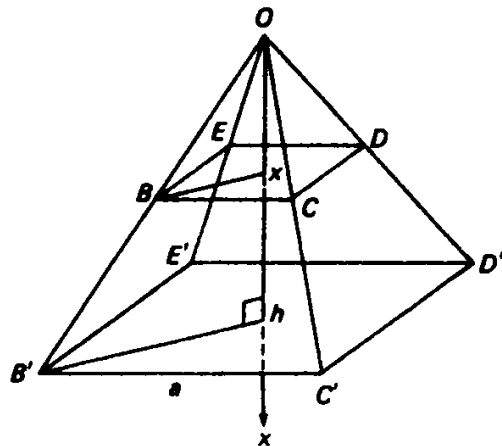
$$y = \frac{r}{h} x, \quad A(x) = \frac{\pi r^2}{h^2} x^2,$$

و فرمول (۱) نتیجه می‌دهد که

$$(۵) \quad V = \int_0^h A(x) dx = \frac{\pi r^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{1}{3} \pi r^2 h.$$

مثال ۳ . حجم V هرم قائم به ارتفاع h را که قاعده‌اش مربعی به طول ضلع a است بیابید .

حل . مثل شکل ۵ ، محور x را خطی می‌گیریم که از رأس هرم به پایین بوده و بر قاعدهٔ هرم



شکل ۵

عمود است . فرض کنیم مبدأ O در رأس بوده ، و h مختص نقطهٔ برخورد محور x با قاعده باشد . مساحت $A(x)$ مقطع عرضی هرم در x مساحت مربع $BCDE$ در شکل است . بنا بر تشابه مثلشهای OBC و $OB'C'$ ، داریم

$$\frac{|BC|}{|B'C'|} = \frac{|OB|}{|OB'|}$$

به‌علاوه ، بنا بر تشابه مثلشهای OBx و $OB'h$ ،

$$\frac{|OB|}{|OB'|} = \frac{|Ox|}{|Oh|} = \frac{x}{h}$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\frac{|BC|}{|B'C|} = \frac{x}{h}$$

یعنی،

$$|BC| = \frac{|B'C|}{h} x = \frac{a}{h} x.$$

بنابراین،

$$A(x) = |BC|^2 = \frac{a^2}{h^2} x^2,$$

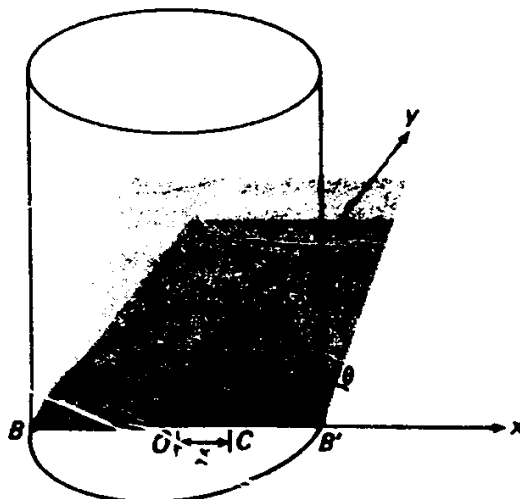
و این بار فرمول (۱) نتیجه می‌دهد که

$$(۶) \quad V = \int_0^h A(x) dx = \frac{a^2}{h^2} \int_0^h x^2 dx = \frac{1}{3} a^2 h.$$

مساحت قاعده^۶ مخروط مثال ۲ مساوی πr^2 است، حال آنکه در مورد هرم مثال ۳ مساوی a^2 است. لذا، هر دو فرمول (۵) و (۶) بر حسب مساحت قاعده^۶ A_0 و ارتفاع h جسم داده شده به شکل $\frac{1}{3} A_0 h$ درمی‌آیند. البته، این یک امر تصادفی نیست (ر. ک. مسئله^۶ ۱۹).

مثال ۴. حجم V گوه^۶ بریده شده از یک استوانه^۶ مستدیر قائم به شعاع r توسط صفحه^۶ مار بر قطری از قاعده^۶ استوانه را که با قاعده زاویه^۶ θ می‌سازد پیدا کنید.

حل. مثل شکل ۶، در قاعده یک دستگاه مختصات قائم با محور x در امتداد قطر BB' ، مبدأ^۶ O در نقطه^۶ میانی BB' (بر محور استوانه)، و محور y عمود بر BB' در O در نظر



شکل ۶

می‌گیریم. قاعده گوه به پاره خط BB' و نیمدایره $x^2 + y^2 = r^2$ ، $y \geq 0$ ، محدود بوده و مقطع عرضی در x مثلث قائم CDE به مساحت

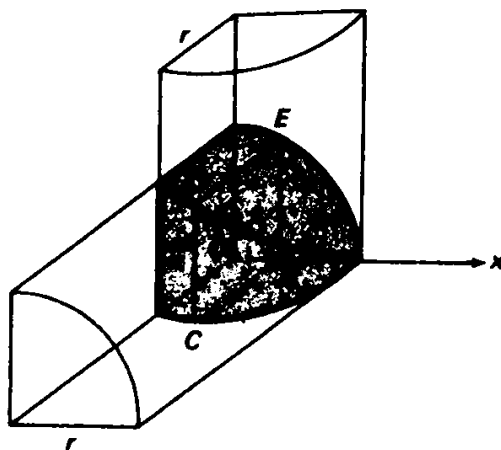
$$A(x) = \frac{1}{2} |CD| |DE| = \frac{1}{2} |CD|^2 \tan \theta = \frac{1}{2} y^2 \tan \theta = \frac{1}{2} (r^2 - x^2) \tan \theta$$

می‌باشد. لذا، با اعمال فرمول (۱) معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} V &= \int_{-r}^r A(x) dx = \frac{1}{2} \tan \theta \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx \\ &= \frac{1}{2} \tan \theta \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r = \frac{2}{3} r^3 \tan \theta. \end{aligned}$$

هرگاه h ارتفاع گوه باشد، آنگاه $h = |FG| = r \tan \theta$ (ر. ک. شکل ۶). در نتیجه، حجم گوه را می‌توان به شکل $V = \frac{2}{3} r^2 h$ نوشت.

مثال ۵. دو استوانه مستدیر قائم به شعاع r یکدیگر را، مثل شکل ۷، در زاویه قائمه قطع



شکل ۷

می‌کنند. حجم V جسم S مشترک میان دو استوانه را بیابید.

حل. ناحیه سایه‌دار شکل یکهشتم جسم S است. با انتخاب محور x به صورت نموده شده و مبدأ O در نقطه اشتراک محورهای استوانه، معلوم می‌شود که مقطع جسم S در x مربع $BCDE$ به طول ضلع $|BC| = \sqrt{r^2 - x^2}$ است. بنابراین، $A(x) = r^2 - x^2$ ؛ در نتیجه

$$V = 8 \int_0^r (r^2 - x^2) dx = \frac{16}{3} r^3.$$

مسائل

حجم جسم S که قاعده‌اش ناحیهٔ محدود به سهمی $y = x^2 + 1$ ، محورهای مختصات، و خط $x = 1$ است را در صورتی بیابید که هر مقطع عرضی S به وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر محور x

۱. یک مربع

۲. یک نیم‌دایره با قطر در صفحهٔ xy

باشد.

قاعدهٔ جسم S ناحیهٔ بین محور x و منحنی $y = \sin x$ از $x = 0$ تا $x = \pi$ است. حجم S را در صورتی بیابید که هر مقطع عرضی S به وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر محور x

۳. یک مستطیل به ارتفاع ۱

۴. یک مربع

باشد.

حجم جسم S که قاعده‌اش قرص مستدیر $x^2 + y^2 \leq 9$ است را در صورتی بیابید که هر مقطع عرضی S به وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر محور x

۵. یک مربع

۶. یک نیم‌دایره با قطر واقع در صفحهٔ xy

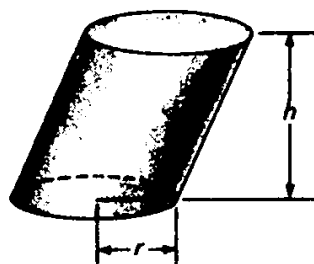
۷. یک مثلث متساوی‌الاضلاع

۸. یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین با وتر واقع در صفحهٔ xy

باشد.

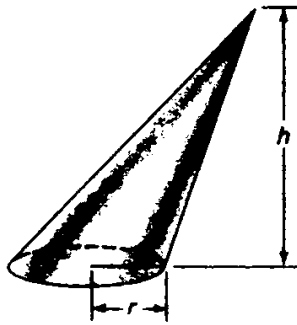
حجم اجسام زیر را بیابید.

۹. یک استوانهٔ مستدیر مایل به ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ r (ر.ک. شکل ۸).



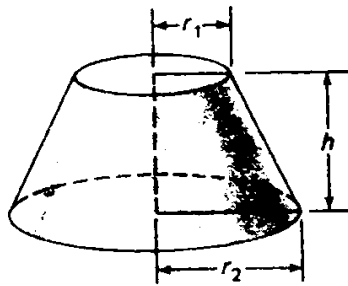
شکل ۸

۱۰. یک مخروط مستدیر مایل به ارتفاع h و شعاع قاعدهٔ r (ر.ک. شکل ۹).



شکل ۹

۱۱. جسم نموده شده در شکل ۱۰ یک مخروط ناقص از یک مخروط مستدیر قائم نام دارد. حجم مخروط ناقص را بر حسب شعاع قاعده بالایی r_1 ، شعاع قاعده پایینی r_2 ، و



شکل ۱۰

ارتفاع h آن بیان کنید.

۱۲. آب در یک لگن نیمه‌کروی به شعاع r فوت ریخته شده است. حجم آب لگن را وقتی بیابید که آب دارای عمق h فوت باشد. لگن تا چه درصدی باید پر شود تا عمق آب

$\frac{1}{2}r$ فوت گردد؟ عمق آب وقتی ۷۵٪ لگن پر باشد چقدر است؟

قاعده جسم S ناحیه بین دو سهمی $y = x^2 - 1$ و $y = 1 - x^2$ است. حجم S را در

صورتی بیابید که هر مقطع عرضی S به وسیله صفحه عمود بر محور x مساوی

۱۳. یک مثلث قائم‌الزاویه با وتر واقع در صفحه xy و یک زاویه 30°

۱۴. یک شش ضلعی منتظم با یک ضلع واقع در صفحه xy

باشد.

مثل مسائل ۳ و ۴، قاعده جسم S ناحیه بین محور x و منحنی $y = \sin x$ از $x = 0$ تا $x = \pi$

است. حجم S را در صورتی بیابید که هر مقطع عرضی S به وسیله صفحه عمود بر محور

y مساوی

۱۵. یک مستطیل به ارتفاع ۱

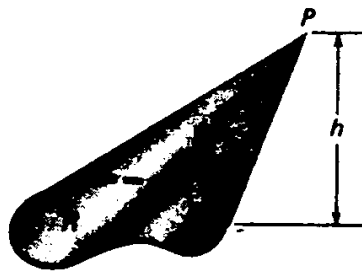
۱۶. یک مربع

باشد.

۱۷. قاعده^۶ جسم S مثلث متساوی الاضلاع T به ارتفاع h است. فرض کنید هر مقطع عرضی S به وسیله^۶ صفحه^۶ عمود بر ارتفاع ثابت T یک قرص مستدیر به قطر واقع بر T باشد. حجم S را به دو راه بیابید.

۱۸. مقطع عرضی مناره^۶ یک کلیسا در فاصله^۶ x فوت از نوک آن با صفحه‌ای عمود بر محور تقارن آن مربعی است که طول قطرش $\frac{1}{3}x^2$ فوت است. حجم مناره در صورتی که ارتفاع آن ۱۰ فوت باشد، چیست؟

۱۹. فرض کنید R یک ناحیه^۶ مسطح به مساحت A_0 بوده، و P نقطه‌ای به فاصله^۶ h از صفحه^۶ R باشد. در این صورت، پاره‌خط مرسوم از P تا نقطه^۶ R جسم C ، به نام مخروط گلی، را جارو می‌کند (ر.ک. شکل ۱۱).



شکل ۱۱

نشان دهید که حجم C مساوی $\frac{1}{3}A_0h$ است.

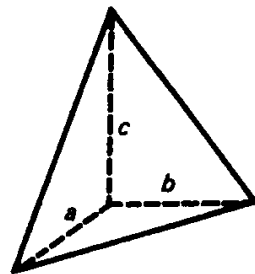
۲۰. فرض کنید S یک منشورگون باشد، یعنی جسم محدود به دو وجه مسطح و یک سطح جانبی. وجوه مسطح که لازم نیست چند ضلعی باشند^۱، قواعد S نامیده می‌شوند. فرض کنید قاعده‌ها به فاصله^۶ h بوده، و مساحت مقطع عرضی S به وسیله^۶ صفحه‌ای موازی قاعده‌ها یک تابع چند جمله‌ای مانند $A(x) = a + bx + cx^2 + dx^3$ از درجه^۶ نایبتر از ۳ باشد، و محور x بر قاعده‌ها عمود بوده، و هر نقطه از محور x را بتوان مبدأ^۶ گرفت. به کمک فرمول منشور (یک)، صفحه^۶ ۶۷۳، نشان دهید که حجم جسم S از فرمول زیر به دست می‌آید:

۱. مثلاً "، هر مخروط ناقص یک منشورگون است؛ همچنین، یک قطعه^۶ گروی (ر.ک. مسئله^۶ ۲۷). منشورگون را منشور نامند اگر قاعده‌ها چند ضلعیهای هم‌نهشت بوده و سطح جانبی از متوازی الاضلاعهایی تشکیل شده باشد که رئوس و قواعد نظیر را به هم وصل می‌کنند.

$$V = \frac{1}{6} h(B_1 + 4B + B_2),$$

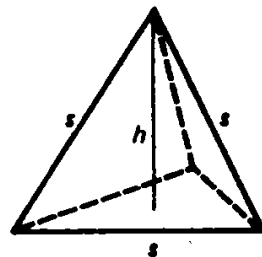
که در آن B_1, B_2 مساحت قاعده‌ها بوده، و B مساحت مقطع عرضی S به وسیله صفحه در وسط قواعد می‌باشد. این فرمول مربوط به V نیز به فرمول منشورگون معروف است (و پیدایش اصطلاح "منشورگون" را توضیح می‌دهد). با استفاده از آن، محاسبات مسئله ۱۱ را ساده کنید.

۲۱. حجم چهاروجهی (هرم مثلث القاعده) با سه وجه دایره و متعامد و سه ضلع دایره و متعامد به طولهای a, b, c را بیابید (ر.ک. شکل ۱۲).



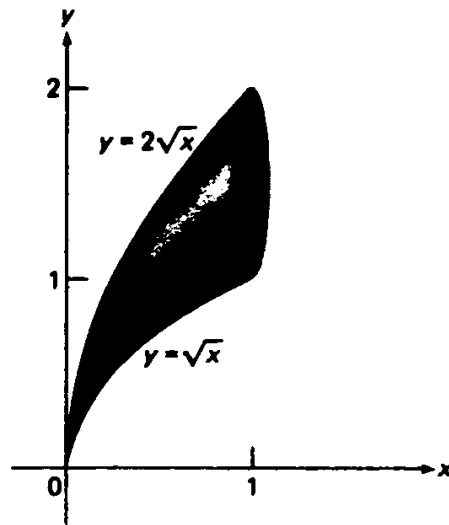
شکل ۱۲

۲۲. یک چهاروجهی را منتظم گویند اگر وجوه آن مثلثهای متساوی الاضلاعی باشند. ارتفاع h و حجم V یک چهاروجهی منتظم به طول ضلع s را بیابید (ر.ک. شکل ۱۳).



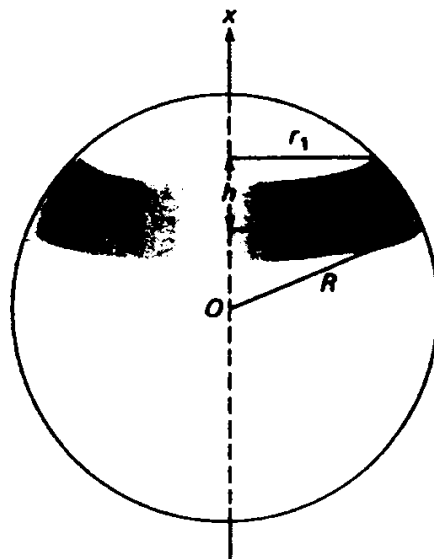
شکل ۱۳

۲۳. حجم جسم شاخی شکل ۱۴ را بیابید که مقاطع عرضی آن به وسیله صفحات عمود بر محور x قرصهای مستدیری می‌باشند. نقاط انتهایی یک قطر هر قرص بر منحنیهای $y = \sqrt{x}$ و $y = 2\sqrt{x}$ قرار داشته، و نوک جسم در مبدأ صفحه xy بوده و تا مقطع عرضی در $x = 1$ امتداد دارد.



شکل ۱۴

۲۴. دو جسم بین یک جفت صفحه موازی که به فاصله h از یکدیگرند قرار داشته، و مقاطع عرضی اجسام به وسیله یک صفحه موازی صفحات داده شده مساحات مساوی دارند. اصل کاوالیری را ثابت کنید، که می‌گوید دو جسم دارای حجم یکسان می‌باشند. (اصل کاوالیری برای مساحت در مسئله ۲۰، صفحه ۳۹۵، داده شده است.)
۲۵. فرض کنید یک سوراخ مخروطی به شعاع قاعده r و عمق r در امتداد محور تقارن یک استوانه مستدیر به شعاع r و ارتفاع r تعبیه شده باشد. نشان دهید که جسم حاصل حجمی برابر یک نیمکره توپر به شعاع r دارد.
۲۶. حجم گوه مثال ۴ را با استفاده از مقاطع عرضی صفحات عمود بر محور y (به جای محور x) حساب کنید.
۲۷. جسم S محدود به یک کره و دو صفحه موازی که کره و درون آن را در قرصهای مستدیر



شکل ۱۵

قطع می‌کنند یک قطعه گروی با دو قاعده نام دارد، و قرصها قاعده‌های آن می‌باشند (ر.ک. شکل ۱۵، که در آن کره به شعاع R و به مرکز مبدا بوده و محور x قائم می‌باشد). حجم S را در صورتی بیابید که یکی از قاعده‌ها به شعاع r_1 ، قاعده دیگر به شعاع r_2 ، و فاصله بین قواعد h باشد.

۲۸. حجم جسم نامتناهی را بیابید که قاعده‌اش ناحیه محدود به محورهای مختصات مثبت و منحنی $y = e^{-x}$ بوده، و مقاطع عرضی آن به وسیله صفحات عمود بر محور x نیمدایره‌هایی به اقطار واقع در صفحه xy می‌باشند.

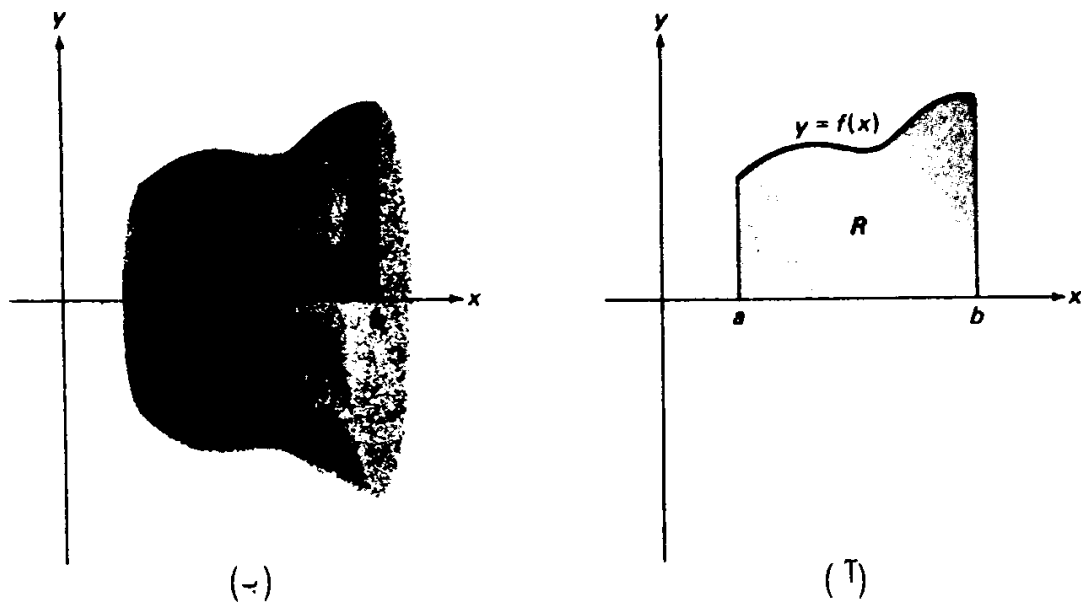
۲۹. حجم جسم نامتناهی را بیابید که قاعده‌اش ناحیه محدود به محورهای مختصات مثبت، خط $x = 1$ ، و منحنی $y = x^{-1/3}$ بوده، و مقاطع عرضی‌اش به وسیله صفحات عمود بر محور x مربع باشند. اگر $y = x^{-1/2}$ ، حجم چقدر خواهد بود؟

۲۰۸ حجم یک جسم دوار

روش قرصها. اگر ناحیه R سطح R حول خط L در صفحه R دوران کند، ناحیه جسم S را جارو یا "تولید" می‌کند که آن را یک جسم دوار با محور دوران L می‌نامند. فرض کنیم R ناحیه‌ای از صفحه xy باشد که به نمودار تابع نامنفی پیوسته

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b),$$

محور x ، و خطوط قائم $x = a$ و $x = b$ محدود شده است مثل شکل ۱۶ (ت)، و نیز محور x را محور دوران اختیار می‌کنیم. در این صورت، جسم دواری مانند شکل ۱۶ (ب) تولید می‌کند که مقطع عرضی آن به وسیله صفحه عمود بر محور x در نقطه به مختص x



شکل ۱۶

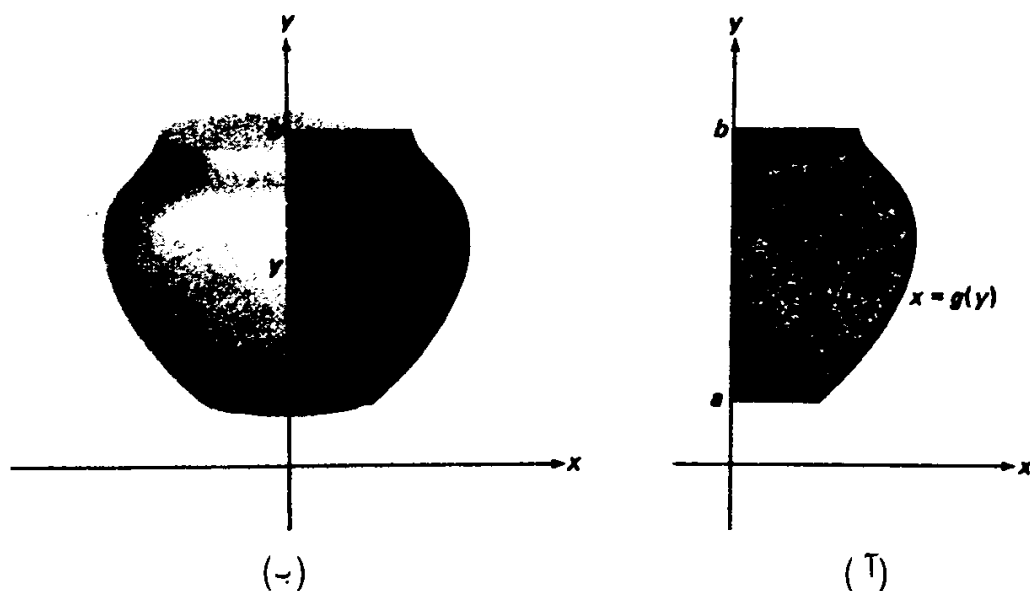
قرص مستدیری به شعاع $y = f(x)$ و مساحت $A(x) = \pi y^2 = \pi [f(x)]^2$ می‌باشد. فرض کنیم حجم جسم S باشد. در این صورت، بنا بر روش مقاطع عرضی، $V = \int_a^b A(x) dx$ و در نتیجه،

$$(1) \quad V = \pi \int_a^b y^2 dx = \pi \int_a^b [f(x)]^2 dx.$$

گاهی اوقات محور دوران را به جای محور x محور y می‌گیرند. مثلاً، فرض کنید ناحیه R محدود به نمودار تابع نامنفی پیوسته

$$x = g(y) \quad (a \leq y \leq b),$$

به محور y و خطوط افقی $y = a$ و $y = b$ ، مثل شکل ۱۷ (آ)، حول محور y دوران کرده و جسم دوار S به شکل ۱۷ (ب) را تولید نماید.



شکل ۱۷

مقطع عرضی S به وسیله صفحه عمود بر محور y در نقطه به مختص y قرص مستدیری است به شعاع $x = g(y)$ و مساحت $\pi x^2 = \pi [g(y)]^2$. لذا، طبق روش مقاطع عرضی، حجم V جسم از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$(1') \quad V = \pi \int_a^b x^2 dy = \pi \int_a^b [g(y)]^2 dy,$$

که مشابه فرمول (۱) است. استفاده از فرمول (۱) یا (۱') برای محاسبه حجم یک جسم دوار را روش قرصها می‌نامند. این روش در مثال ۲، صفحه ۶۹۹، پیش‌بینی شد و در آنجا بود که برای محاسبه حجم یک مخروط مستدیر قائم به کار رفت.

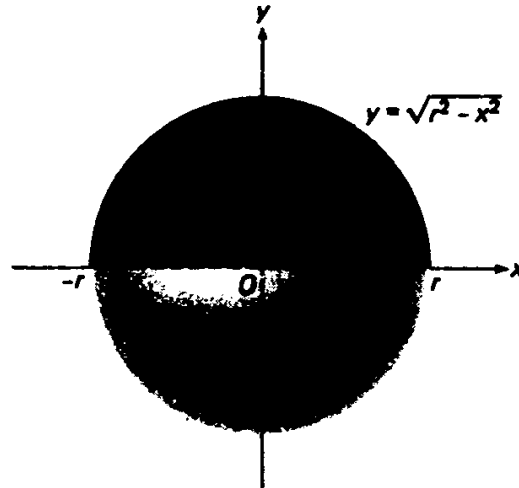
مثال ۱. حجم V کره توپیر S به شعاع r را بیابید.

حل. S را می‌توان با دوران ناحیهء محدود به محور x و نمودار تابع

$$y = \sqrt{r^2 - x^2} \quad (-r \leq x \leq r)$$

حول محور x تولید کرد (ر.ک. شکل ۱۸). توجه کنید که در این حالت پاره‌خطهای قائم

شکل ۱۶ (T) به نقاط



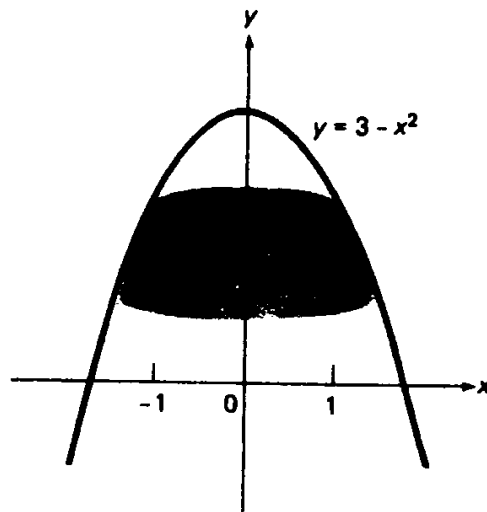
شکل ۱۸

تحویل می‌شوند، زیرا به ازای $x = \pm r$ ، $y = 0$. با اعمال فرمول (۱) فوراً خواهیم داشت

$$V = \pi \int_{-r}^r y^2 dx = \pi \int_{-r}^r (r^2 - x^2) dx = \pi \left[r^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-r}^r = \frac{4}{3} \pi r^3,$$

که بدین وسیله فرمولی ثابت می‌شود که تا کنون آزادانه به کار رفته است.

مثال ۲. حجم V جسم S نموده شده در شکل ۱۹ از دوران ناحیهء محدود به منحنی $y = 3 - x^2$



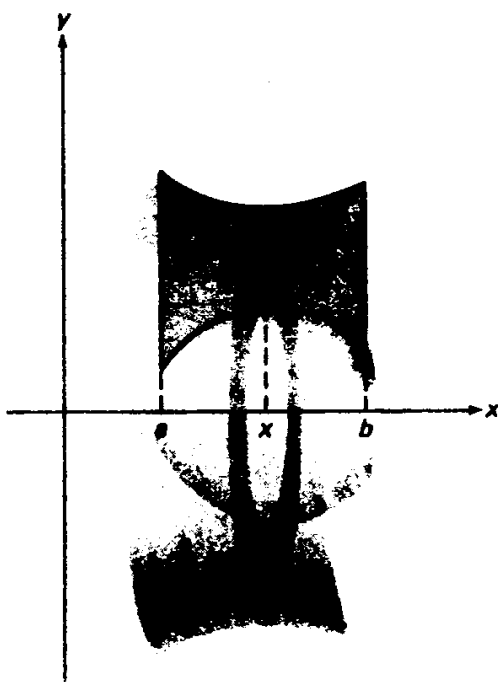
شکل ۱۹.

محور y ، و خطوط $y = 1$ و $y = 2$ حول محور y را بیابید .

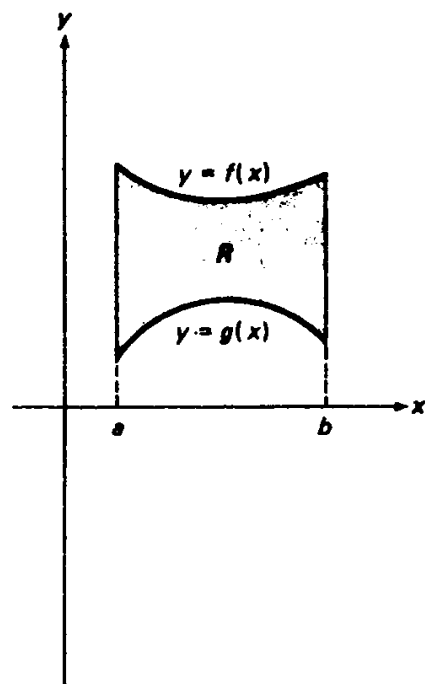
حل . جسم S یک مخروط ناقص جامد است که مرزش سهمی‌گون دوار حاصل از دوران سهمی $y = 3 - x^2$ حول محور y است . (یک مخروط ناقص قسمتی از جسم است که بین دو صفحه موازی قاطع جسم قرار دارد .) چون $y = 3 - x^2$ ، داریم $x^2 = 3 - y$ ، و فرمول (۱۴) نتیجه می‌دهد که

$$V = \pi \int_1^2 x^2 dy = \pi \int_1^2 (3 - y) dy = \pi \left[3y - \frac{1}{2} y^2 \right]_1^2 = \frac{3}{2} \pi.$$

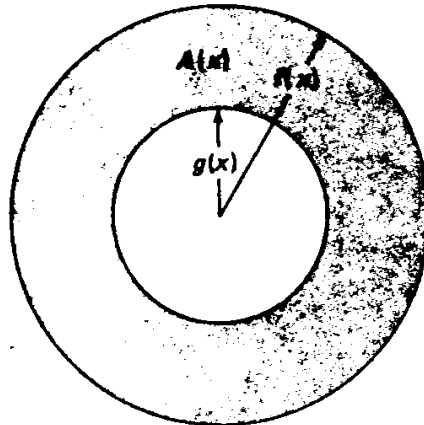
روش واشرها . حال فرض کنیم R ناحیه‌ای در صفحه xy باشد که به وسیله دو منحنی $y = f(x)$ و $y = g(x)$ ، که $f(x) \geq g(x) \geq 0$ ، و دو خط قائم $x = a$ و $x = b$ ($a < b$) مطابق شکل ۲۰ (آ) محدود شده است . در این صورت ، از دوران R حول محور x جسم دوار S به شکل ۲۰ (ب) تولید می‌شود که مقطع عرضی آن به وسیله صفحه عمود بر محور x در نقطه به مختص x یک طوق یا ناحیه واشری شکل به شعاع خارجی $f(x)$ و شعاع داخلی $g(x)$ مثل شکل ۲۰ (پ) می‌باشد .



(ب)



(آ)



(۷)

شکل ۲۰

مساحت $A(x)$ این واشر تفاضل مساحت یک قرص مستدیر به شعاع $f(x)$ و مساحت یک قرص متحدالمرکز به شعاع $g(x)$ می باشد:

$$A(x) = \pi[f(x)]^2 - \pi[g(x)]^2.$$

فرض کنیم V حجم جسم S باشد. در این صورت، بنا به روش مقاطع عرضی،

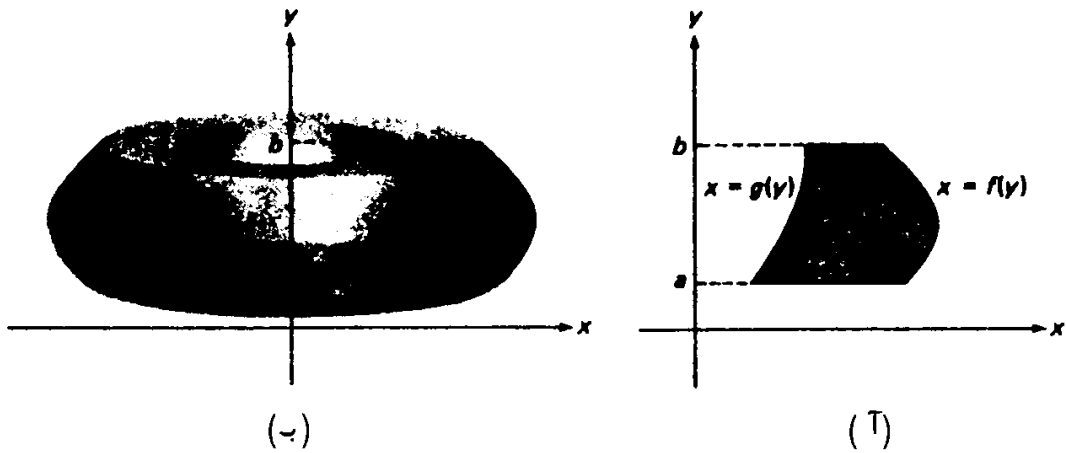
$$(۲) \quad V = \int_a^b A(x) dx = \pi \int_a^b \{[f(x)]^2 - [g(x)]^2\} dx.$$

البته، این فرمول را می توان، بدون توسل صریح به واشرها، و با توجه به اینکه حجم جسم دوار S در شکل ۲۰ (ب) تفاضل بین حجمهای دو جسم دوار از نوعی که پیشتر مطرح شد، یعنی یک جسم "خارجی" به حجم $\pi \int_a^b [f(x)]^2 dx$ که از دوران ناحیهء محدود به منحنی $y = f(x)$ ، محور x ، و خطوط $x = a$ و $x = b$ حول محور x تولید می شود، و یک جسم "داخلی" به حجم $\pi \int_a^b [g(x)]^2 dx$ که از همین دوران ناحیهء محدود به منحنی $y = g(x)$ ، محور x ، و خطوط $x = a$ و $x = b$ تولید می شود به دست آورد.

مثل قبل، گاهی محور دوران به جای محور x محور y اختیار می شود. لذا، فرض

کنیم R ناحیهء محدود به دو منحنی $x = f(y)$ و $x = g(y)$ ، که $f(y) \geq g(y) \geq 0$ ، و دو خط افقی $y = a$ و $y = b$ ($a < b$) مثل شکل ۲۱ (آ) باشند. در این صورت، از دوران R حول محور y جسم دوار S به شکل ۲۱ (ب) تولید می شود. به آسانی معلوم می شود که حجم S از فرمول زیر به دست می آید:

$$(۲') \quad V = \pi \int_a^b \{[f(y)]^2 - [g(y)]^2\} dy,$$

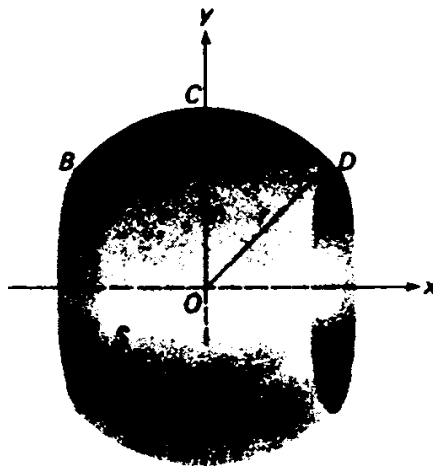


شکل ۲۱

که با (۲) مشابه است. استفاده از فرمول (۲) یا (۲') برای محاسبه حجم یک جسم دوار روش واشرها نام دارد.

مثال ۳. در یک کره جامد به شعاع r سوراخی به طول $2a$ در امتداد قطر تعبیه شده است. حجم V جسم باقیمانده S چقدر است؟ فرض کنید $a < r$.

حل. جسم S نموده شده در شکل ۲۲ مانند یک دستمال سفره حلقه‌ای است که از دوران



شکل ۲۲

ناحیه محدود به قوس مستدیر BCD و پاره‌خط BD حول محور x تولید می‌شود. قوس BCD نمودار تابع $f(x) = \sqrt{r^2 - x^2}$ و پاره‌خط BD نمودار تابع ثابت $g(x) = h = \sqrt{r^2 - a^2}$ است. لذا، طبق فرمول (۲)،

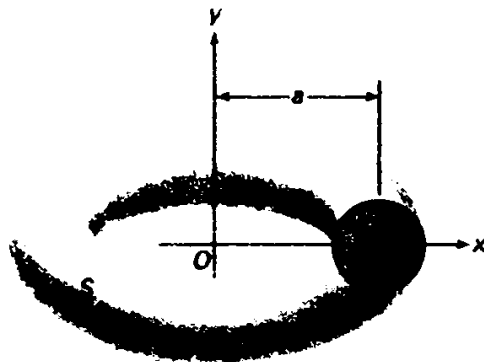
$$V = \pi \int_{-a}^a [(r^2 - x^2) - (r^2 - a^2)] dx = \pi \int_{-a}^a (a^2 - x^2) dx$$

$$= \pi \left[a^2 x - \frac{1}{3} x^3 \right]_{-a}^a = \frac{4}{3} \pi a^3.$$

پس حجم جسم S همان حجم کره‌ای به شعاع a است، و از اندازه کره‌ای که در آن سوراخ تعبیه شده مستقل است فقط مشروط بر اینکه قطر کره از طول سوراخ متجاوز باشد. این نتیجه وقتی کمتر تعجب‌آور است که در تعبیه یک سوراخ کوتاه در یک کره بزرگ متوجه شویم به درلی نیاز داریم که شعاعش فقط کمی از شعاع کره کوچکتر باشد.

مثال ۴. حجم V جسم S حاصل از دوران یک قرص مستدیر حول خطی در صفحه آن که قرص را قطع نمی‌کند پیدا کنید.

حل. فرض کنیم قرص مستدیر ناحیه $(x - a)^2 + y^2 \leq r^2$ در صفحه xy بوده، و محور دوران محور y باشد؛ شعاع قرص بوده، و a فاصله بین مرکز قرص و محور y باشد ($r < a$) زیرا محور y قرص را قطع نمی‌کند). پس S مانند نان روغنی شکل ۲۳ است، به نام حلقه



چنبره

شکل ۲۳

انگشتر یا چنبره. با اعمال فرمول (۲) به ازای

$$f(y) = a + \sqrt{r^2 - y^2}, \quad g(y) = a - \sqrt{r^2 - y^2},$$

درمی‌یابیم که

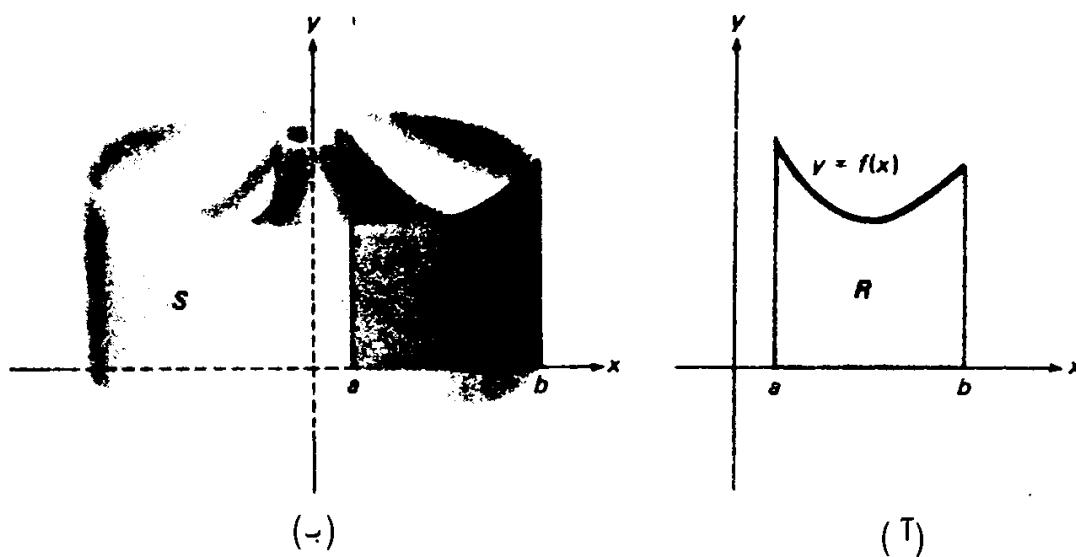
$$V = \pi \int_{-r}^r \{ [a + \sqrt{r^2 - y^2}]^2 - [a - \sqrt{r^2 - y^2}]^2 \} dy$$

$$= 4\pi a \int_{-r}^r \sqrt{r^2 - y^2} dy = 8\pi a \int_0^r \sqrt{r^2 - y^2} dy,$$

که در آن از زوج بودن انتگرالده در آخرین مرحله استفاده شده است. آخرین انتگرال یک چهارم مساحت یک قرص مستدیر به شعاع r ، یعنی $\frac{1}{4} \pi r^2$ ، است. پس نتیجه می‌شود که

$$V = 8\pi a \left(\frac{1}{4} \pi r^2 \right) = 2\pi^2 ar^2.$$

روش غشاءها. حال روش دیگری برای محاسبه حجم یک جسم دوار، به نام روش غشاءها، عرضه می‌کنیم. همانطور که از نام برمی‌آید، در این روش جسم به جای قرصهای مستدیر یا واشرها به غشاءهای استوانه‌ای افزاز می‌شود. ناحیه R در شکل ۲۴ (آ) را در نظر می‌گیریم که به محور x ، خطوط قائم $x = a$ و $x = b$ ، و نمودار تابع نامنفی پیوسته $y = f(x)$ محدود شده است. اگر ناحیه R حول محور y دوران کند، جسم دوار S شکل ۲۴ (ب) را تولید می‌کند. فرض کنیم



شکل ۲۴

$$(۳) \quad a = x_0, x_1, x_2, \dots, x_{n-1}, x_n = b$$

نقاط تقسیم بازه $[a, b]$ باشند که در نامساویهای $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ صدق می‌کنند. این نقاط $[a, b]$ را به n زیر بازه

$$[x_{i-1}, x_i] \quad (i = 1, 2, \dots, n)$$

تقسیم می‌کنند، که در آن $[x_{i-1}, x_i]$ طول $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ است. طبق معمول، فرض کنیم

$$\mu = \max \{ \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n \}$$

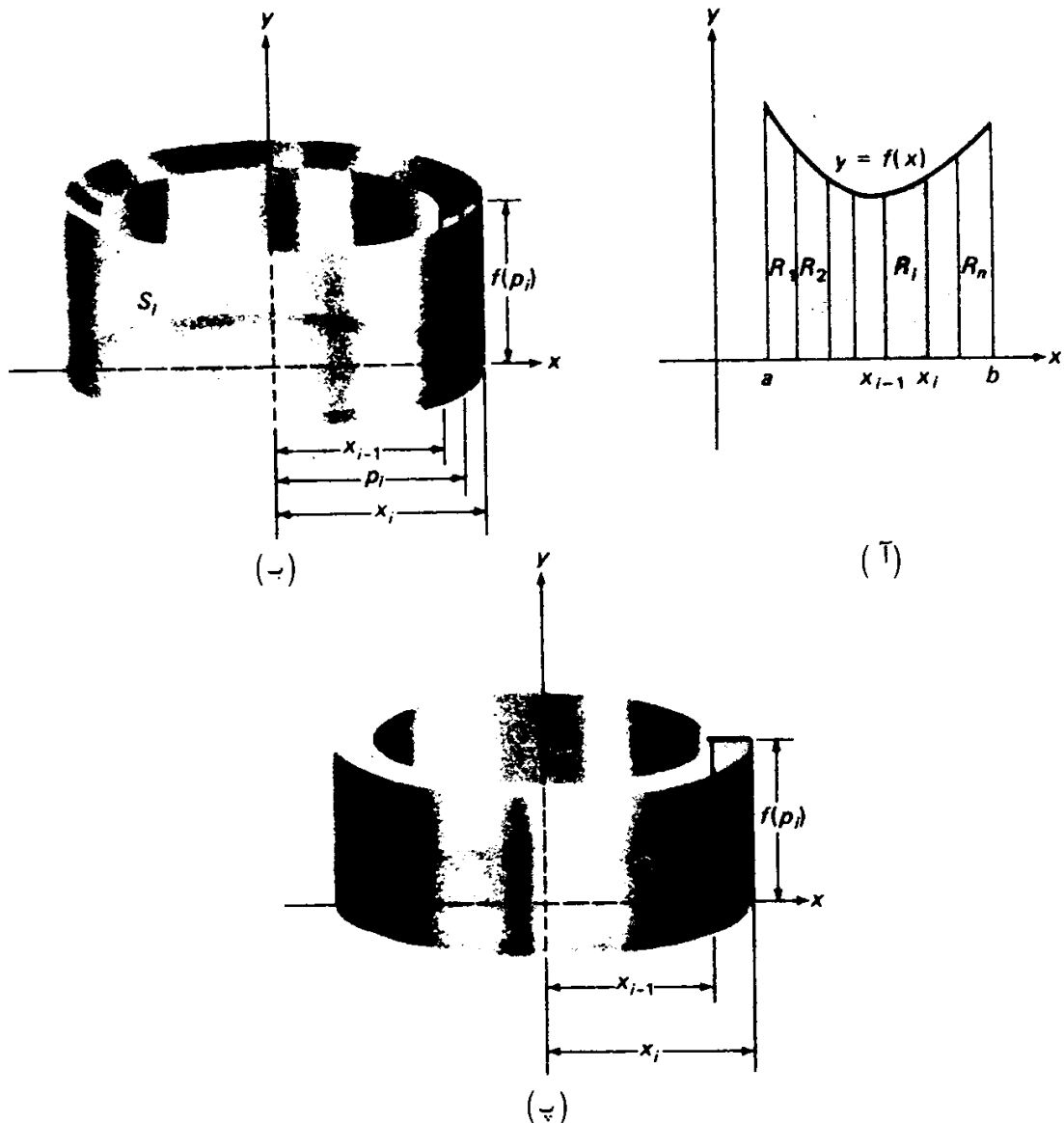
اندازه مش افزاز (۳)، یعنی ماکزیمم طول تمام زیربازه‌ها، باشد. خطوط قائم $x = x_0, x = x_1, x = x_2, \dots, x = x_{n-1}, x = x_n$

ناحیه R را به n نوار باریک R_1, R_2, \dots, R_n

مثل شکل ۲۵ (آ) تقسیم می‌کند. فرض کنیم S_i غشاء استوانه‌ای با بالای خمیده باشد که از دوران نوار R_i حول محور y مثل شکل ۲۵ (ب) تولید می‌شود. تابع $f(x)$ پیوسته است؛ و در نتیجه، مقدارش بر زیربازه $[x_{i-1}, x_i]$ ، دست کم وقتی Δx_i به قدر کافی کوچک باشد، تغییر مختصری می‌کند. لذا، اگر $f(x)$ را با مقدار ثابت $f(p_i)$ بر $[x_{i-1}, x_i]$ در نظر بگیریم، که نقطه دلخواهی از $[x_{i-1}, x_i]$ باشد، تقریب مناسبی خواهیم داشت. به دلیلی که لحظه‌ای دیگر معلوم می‌شود، p_i را نقطه میانی $[x_{i-1}, x_i]$ اختیار می‌کنیم؛ در نتیجه،

$$(۴) \quad p_i = \frac{x_{i-1} + x_i}{2}.$$

حاصل تعویض $f(x)$ با $f(p_i)$ بر بازه $[x_{i-1}, x_i]$ و سپس دوران ناحیه مستطیلی حاصل حول محور y عبارت است از تعویض غشاء استوانه‌ای S_i شکل ۲۵ (ب) با غشاء استوانه‌ای



شکل ۲۵

C_i شکل ۲۵ (پ) با همان شعاع داخلی x_{i-1} و شعاع خارجی x_i منتها با سر تخت به ارتفاع $f(p_i)$ به جای سر خمیده. چون حجم V تمام جسم دوار S مساوی مجموع احجام n غشاء S_1, S_2, \dots, S_n با سرهای خمیده است، و چون حجم هر غشاء S_i تقریباً "مساوی حجم V_i غشاء نظیر C_i با سر تخت است، نتیجه می‌شود که

$$(5) \quad V \approx \sum_{i=1}^n V_i.$$

اما V_i تفاضل بین حجم استوانه^۶ مستدیر قائم خارجی به مساحت قاعده^۶ πx_i^2 و ارتفاع $f(p_i)$ و استوانه^۶ داخلی متحدالمرکز به مساحت قاعده^۶ πx_{i-1}^2 و همان ارتفاع می‌باشد. بنابراین،

$$V_i = \pi f(p_i)(x_i^2 - x_{i-1}^2) = \pi f(p_i)(x_i + x_{i-1})(x_i - x_{i-1}),$$

که می‌توان آن را به شکل زیر نوشت:

$$V_i = 2\pi f(p_i) \frac{x_{i-1} + x_i}{2} \Delta x_i = 2\pi p_i f(p_i) \Delta x_i,$$

که در اینجا دلیل انتخاب (۴) واضح است. با گذاردن این عبارت مربوط به V_i در (۵)، به دست می‌آوریم

$$(6) \quad V \approx \sum_{i=1}^n 2\pi p_i f(p_i) \Delta x_i.$$

طرف راست (۶) یک مجموع ریمان^۱ برای تابع $2\pi x f(x)$ بر بازه^۶ $[a, b]$ است. بالاخره، به روشی آشنا، می‌توان اندازه^۶ μ را به صفر نزدیک ساخت. در این صورت، تمام غشاءهای S_i با سرهای خمیده باریکتر و باریکتر می‌شوند؛ و نیز غشاءهای تقریب ساز C_i با سرهای تخت چنین می‌کنند. لذا، وقتی $\mu \rightarrow 0$ ، انتظار اینکه تقریب (۶) بهتر و بهتر شود معقول خواهد بود. این نکات پیشنهاد می‌کنند که حجم V جسم S با حد

$$V = \lim_{\mu \rightarrow 0} 2\pi \sum_{i=1}^n p_i f(p_i) \Delta x_i$$

تعریف شود؛ یعنی،

$$(7) \quad V = 2\pi \int_a^b x f(x) dx = 2\pi \int_a^b xy dx,$$

که در آن وجود انتگرال را پیوستگی $f(x)$ ، و در نتیجه $x f(x)$ ، تضمین خواهد کرد. حال

فرمول (۷) را تعریف حجم گرفته و آن را به روش غشاء محاسبه می‌کنیم .
توجه کنید که حاصل ضرب $2\pi x f(x)$ مساحت یک سطح استوانه‌ای به شعاع x و ارتفاع $f(x)$ است . بنابراین ، (۷) را می‌توان به شکل زیر نیز نوشت :

$$(۷') \quad V = \int_a^b A(x) dx,$$

که در آن $A(x)$ مساحت مقطع جسم S به وسیله سطح استوانه‌ای به شعاع x با محور دوران (در اینجا محور y) به عنوان محور تقارنش می‌باشد . این همان فرمولی است که در روش مقاطع عرضی به کار رفت ، ولی در آن روش $A(x)$ مساحت مقطع S به وسیله صفحه عمود بر محور دوران در نقطه به مختص x است .

به‌طور کلی ، اگر ناحیه‌ای از نوع شکل ۲۰ (آ) باشد که به دو منحنی $y = f(x)$ و $y = g(x)$ ، که $f(x) \geq g(x) \geq 0$ ، و دو خط قائم $x = a$ و $x = b$ ($a < b$) محدود شده است ، حجم جسم S حاصل از دوران R حول محور y عبارت است از

$$(۸) \quad V = 2\pi \int_a^b x[f(x) - g(x)] dx$$

(چرا؟) . به عنوان تمرین ، درحالتی که S از دوران ناحیه‌ای از نوع شکل ۱۷ (آ) یا ۲۱ (آ) حول محور x بدست آمده است ، فرمولهایی برای V بنویسید .

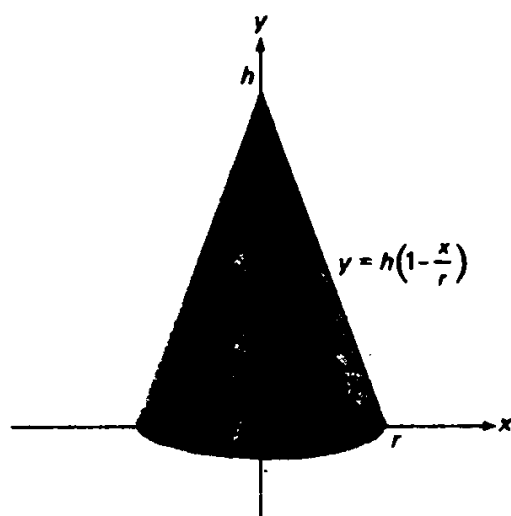
مثال ۵ . با استفاده از روش غشاء ، حجم V یک مخروط مستدیر قائم به ارتفاع h و شعاع قاعده r را پیدا کنید .

حل . ما قبلاً V را در مثال ۲ ، صفحه ۶۹۹ ، به روش قرصها یافتیم . برای محاسبه V به روش غشاء ، ملاحظه می‌کنیم که مخروط را می‌توان از دوران ناحیه مثلثی محدود به محورهای مختصات مثبت و خط $y = h[1 - (x/r)]$ حول محور y تولید کرد (ر.ک. شکل ۲۶) . لذا ، طبق فرمول (۷) ، همانطور که از قبل می‌دانیم ،

$$\begin{aligned} V &= 2\pi h \int_0^r x \left(1 - \frac{x}{r}\right) dx = 2\pi h \int_0^r \left(x - \frac{x^2}{r}\right) dx \\ &= 2\pi h \left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3r} \right]_0^r = \frac{1}{3} \pi r^2 h. \end{aligned}$$

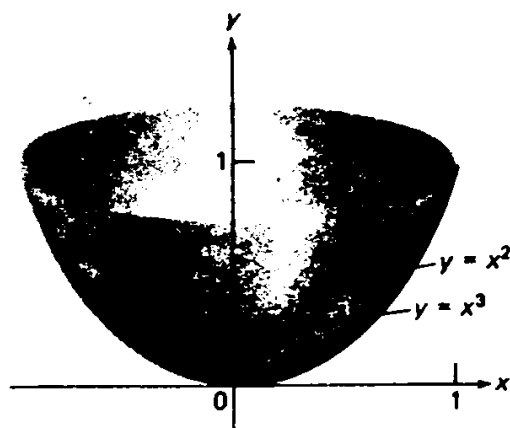
مثال ۶ . حجم V جسم S حاصل از دوران ناحیه بین منحنیهای $y = x^2$ و $y = x^3$ حول

محور y را بیابید .



شکل ۲۶

حل . شکل ۲۷ جسم S را که به شکل کاسه است نشان می دهد . دو منحنی وقتی متقاطعند



شکل ۲۷

که $x^2 = x^3$ ؛ یعنی ، وقتی $x = 0$ یا $x = 1$. تنها ناحیه متناهی بین منحنیها روی بازه $[0, 1]$ قرار دارد ، و براین بازه $y = x^2$ منحنی بالایی و $y = x^3$ منحنی پایینی است . لذا ، با انتخاب $a = 0, b = 1$ ، $f(x) = x^2$ ، و $g(x) = x^3$ در فرمول (۸) ، به دست می آید

$$V = 2\pi \int_0^1 x(x^2 - x^3) dx = 2\pi \int_0^1 (x^3 - x^4) dx$$

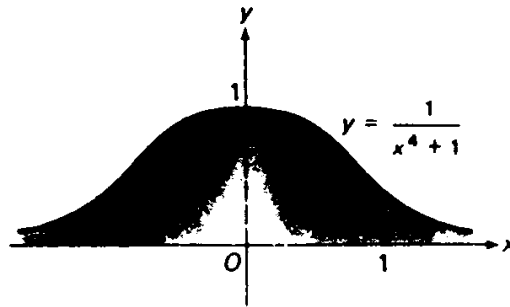
$$= 2\pi \left[\frac{x^4}{4} - \frac{x^5}{5} \right]_0^1 = \frac{\pi}{10}.$$

مثال ۷ . ناحیه بی کران واقع در ربع اول بین محور x و منحنی

$$(9) \quad y = f(x) = \frac{1}{x^4 + 1}$$

حول محور y دوران می‌کند. حجم V جسم دوار بی‌کران حاصل S را بیابید.

حل. شکل ۲۸ نشان می‌دهد که جسم S به شکل خاکریز است. بنابر تعمیم طبیعی فرمول



شکل ۲۸

(۷) در حالت بازه^۶ انتگرالگیری بی‌کران، V را به صورت انتگرال مجازی بیان می‌کنیم:

$$V = 2\pi \int_0^{\infty} xf(x) dx = 2\pi \int_0^{\infty} \frac{x}{x^4 + 1} dx.$$

پس به کمک جانشانی $t = x^2$ خواهیم داشت

$$\begin{aligned} V &= 2\pi \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u \frac{x}{x^4 + 1} dx = \pi \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^{u^2} \frac{dt}{t^2 + 1} \\ &= \pi \lim_{u \rightarrow \infty} \left[\arctan t \right]_0^{u^2} = \pi \lim_{u \rightarrow \infty} \arctan u^2 = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

به عنوان تمرین، نشان دهید که اگر مخرج (۹) به جای $x^4 + 1$ مساوی $x^2 + 1$ باشد، V نامتناهی می‌باشد.

مثال ۸. ناحیه^۶ بی‌کران تحت منحنی $y = f(x) = x^{-3/2}$ از $x = 0$ تا $x = 1$ حول محور y دوران کرده است. حجم V جسم دوار بی‌کران حاصل را بیابید.

حل. این بار داریم

$$V = 2\pi \int_0^1 xf(x) dx = 2\pi \int_0^1 x(x^{-3/2}) dx = 2\pi \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}},$$

که در آن، همانطور که مثال ۵، صفحه^۶ ۶۸۰، نشان داده، انتگرال مجازی سمت راست

مساوی 2 می باشد . پس نتیجه می شود که

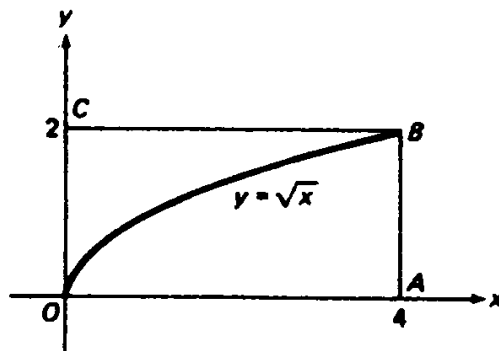
$$V = 2\pi(2) = 4\pi.$$

مسائل

حجم جسم حاصل از دوران ناحیه تحت منحنی داده شده روی بازه ذکر شده حول محور نموده شده را به هر روشی که می خواهید (قرصها ، واشرها ، یا غشاهای بیابید .

۱. $y = x^2$ ، $-2 \leq x \leq 1$ ، محور x
۲. $y = 4 - x^2$ ، $0 \leq x \leq 2$ ، محور y
۳. $y = x^3$ ، $-1 \leq x \leq 1$ ، محور y
۴. $y = |x|$ ، $-1 \leq x \leq 3$ ، محور x
۵. $y = \sqrt{25 - x^2}$ ، $3 \leq x \leq 4$ ، محور y
۶. $y = \cos x$ ، $0 \leq x \leq \pi/2$ ، محور y
۷. $y = \sec x$ ، $0 \leq x \leq \pi/3$ ، محور x
۸. $y = \ln x$ ، $1 \leq x \leq e$ ، محور x
۹. $y = \sinh x$ ، $-1 \leq x \leq 1$ ، محور x
۱۰. $y = \cosh x$ ، $0 \leq x \leq 1$ ، محور y
۱۱. $y = e^{-x}$ ، $0 \leq x \leq 1$ ، محور y
۱۲. $y = \arcsin x$ ، $0 \leq x \leq 1$ ، محور x
۱۳. $y = x^{-4/3}$ ، $0 < x \leq 1$ ، محور y
۱۴. $y = xe^{-x}$ ، $0 \leq x < \infty$ ، محور x
۱۵. $y = e^{-x^2}$ ، $0 \leq x < \infty$ ، محور y
۱۶. $y = (x^2 + 1)^{-3/2}$ ، $0 \leq x < \infty$ ، محور x
۱۷. حجم V یک کره توپر به شعاع r را به روش غشاهای بیابید .
۱۸. مثال ۴ را به روش غشاهای حل کنید .
۱۹. مثال ۶ را به روش واشرها حل کنید .
۲۰. مثال ۷ را به روش قرصها حل کنید .

حجم جسم حاصل از دوران ناحیه داده شده OAB یا OBC شکل ۲۹ حول محور مشخص شده را حساب کنید . منحنی OB نمودار تابع $y = \sqrt{x}$ روی بازه $0 \leq x \leq 4$ است . در هر حالت ، از هر دو روش قرصها یا واشرها و روش غشاهای استفاده کنید .



شکل ۲۹

۲۱. OAB حول محور x

۲۲. OBC حول محور x

۲۳. OBC حول محور y

۲۴. OAB حول محور y

۲۵. OAB حول خط $x = 4$

۲۶. OBC حول خط $x = 4$

۲۷. OBC حول خط $y = 2$

۲۸. OAB حول خط $y = 2$

سهمی $y = x^2$ مثلث به رئوس $(0, 0)$ ، $(2, 0)$ ، و $(0, 2)$ را به دو ناحیه تقسیم می‌کند، یکی بالای سهمی و دیگری پایین سهمی است. حجم جسم تولید شده به وسیله هر یک از نواحی را حول

۳۰. محور y

۲۹. محور x

پیدا کنید.

حجم جسم حاصل از دوران مثلث به رئوس $(1, 0)$ ، $(3, 1)$ ، $(2, 2)$ را حول

۳۲. محور y

۳۱. محور x

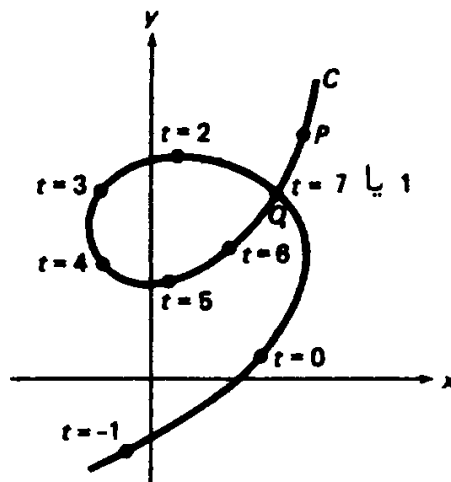
پیدا کنید.

۳۳. حجم جسم حاصل از دوران ناحیه بین منحنیهای $y = \sqrt{x}$ و $y = x^2$ را حول خط $y = x$ پیدا کنید.

۳۰.۸ منحنیها به شکل پارامتری

تاکنون واژه "منحنی" یعنی نمودار تابع پیوسته $y = f(x)$ ، که در آن x متغیر مستقل و y متغیر وابسته است، و گاهی به معنی نمودار تابع پیوسته $x = g(y)$ بوده است، که در

آن y متغیر مستقل و x متغیر وابسته می‌باشد. هیچ خط قائمی نمی‌تواند نمودار منحنی به شکل $y = f(x)$ را در بیش از یک نقطه قطع کند؛ و به همین ترتیب هیچ خط افقی نمی‌تواند نمودار منحنی به شکل $x = g(y)$ را در بیش از یک نقطه قطع کند؛ این نتیجه فوری تابع بودن f و g می‌باشد. حال می‌خواهیم خود را از این قید رها کنیم؛ در نتیجه، مثلاً "C" در شکل ۳۰ (که هر دو خاصیت قائم و افقی را نقض می‌کند) طبق خواسته شهودی مایک



شکل ۳۰

منحنی می‌باشد.

معادلات پارامتری یک منحنی. این معادلات به آسانی با گرفتن مختص x و مختص y بیک نقطه متغیر C دقیقاً "به یک صورت و هر دورا تابع متغیر جدید t ، به نام پارامتر، گرفتن به دست می‌آیند. لذا، از این به بعد منحنی (به شکل پارامتری) را نمودار یک جفت معادله (پارامتری) مانند

$$(1) \quad x = x(t), \quad y = y(t)$$

تعریف می‌کنیم؛ یعنی، مجموعه تمام نقاط (x, y) که مختصات x و y آنها در (۱) صدق می‌کنند؛ در اینجا $x(t)$ و $y(t)$ دو تابع پیوسته با قلمرو تعریف یکسان اند، که همیشه بازه I گرفته می‌شود. در معادلات پارامتری از علایم x و y برای نمایش هم متغیرهای وابسته و هم توابع استفاده می‌شود. همچنین، فرض کنیم $x(t)$ و $y(t)$ هر دو توابع ثابت نیستند، زیرا در غیر این صورت منحنی (۱) به یک نقطه تحویل می‌شود. وقتی پارامتر t ، که می‌توان آن را زمان گرفت، روی بازه I تغییر کند، نقطه $P = (x, y)$ مواضع مختلفی در صفحه xy داشته، و منحنی (پارامتری) (۱) را می‌پیماید. این از شکل ۳۰ برمی‌آید، که در آن مواضع P به ازای مقادیر مختلف t نموده شده‌اند. حال، مثل نقطه Q در شکل، ممکن

است منحنی خودش را قطع کند، زیرا فقط لازم است دو مقدار مختلف t_1 و t_2 از پارامتر وجود داشته باشند که $x(t_1) = x(t_2)$ و $y(t_1) = y(t_2)$. (این مقادیر در شکل عبارتند از $t_1 = 1$ و $t_2 = 7$). منظور از یک قوس از منحنی (۱) یعنی منحنی با همان معادلات پارامتری ولی قلمرو $x(t)$ و $y(t)$ به زیر بازه‌ای از I محدود شده باشد.

مثال ۱. نمودار تابع پیوسته^۶

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

را می‌توان با گرفتن x به عنوان پارامتر t و نوشتن

$$x = t, \quad y = f(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

به شکل پارامتری نمایش داد (در اینجا قلمرو f را بازه^۶ بسته گرفته‌ایم، ولی هر نوع دیگر بازه، متناهی یا نامتناهی، به همین خوبی خواهد بود.) برای نمایش نمودار تابع پیوسته

$$x = g(y) \quad (a \leq y \leq b)$$

به شکل پارامتری، می‌نویسیم

$$x = g(t), \quad y = t \quad (a \leq t \leq b).$$

لذا، تعریف جدید ما از منحنی دارای این خاصیت مطلوب است که تعریف قبلی را به عنوان حالتی خاص دربردارد.

مثال ۲. منحنی

$$(۲) \quad x = 1 + 2t, \quad y = -1 + t \quad (-\infty < t < \infty)$$

خط مستقیمی است مار بر نقطه^۶ $(1, -1)$ به شیب $\frac{1}{2}$. در واقع، با حل اولین معادله^۶ (۲) نسبت به پارامتر t و گذاردن حاصل در معادله^۶ دوم، معادله^۶

$$(۲') \quad y = -1 + t = -1 + \frac{1}{2}(x - 1)$$

به دست می‌آید که نمودارش خطی است به شیب $\frac{1}{2}$ و مار بر نقطه^۶ $(1, -1)$. با بررسی (۲) فوراً معلوم می‌شود که نقطه^۶ $(1, -1)$ نظیر به مقدار پارامتر $t = 0$ است. همین خط با معادلات پارامتری

$$x = 1 + 2t^3, \quad y = -1 + t^3 \quad (-\infty < t < \infty)$$

نیز نموده می‌شود، زیرا وقتی t از $-\infty$ تا ∞ افزایش یابد، t^3 نیز چنین می‌کند، یا با

$$x = 1 + 2 \tan t, \quad y = -1 + \tan t \quad (-\pi/2 < t < \pi/2)$$

نمایش داده می‌شود، زیرا وقتی t از $-\pi/2$ تا $\pi/2$ افزایش یابد، $\tan t$ از $-\infty$ تا ∞

افزایش خواهد یافت .

تبصره . بی‌نهایت تابع پیوسته $f(t)$ هست که ، وقتی t بر بازه‌ای چون I افزایش می‌یابد ، از $-\infty$ تا ∞ افزایش خواهند یافت . لذا ، خط مستقیم (۲) بی‌نهایت نمایش پارامتری به شکل زیر دارد :

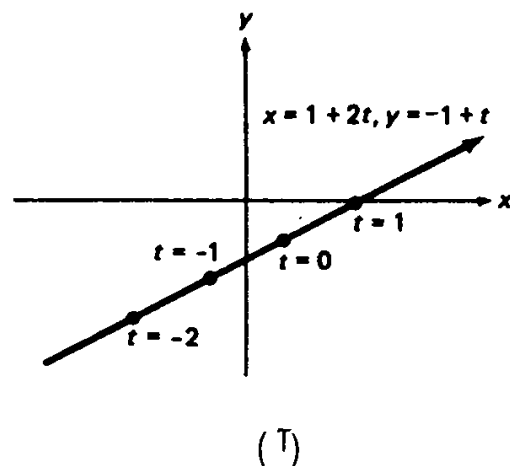
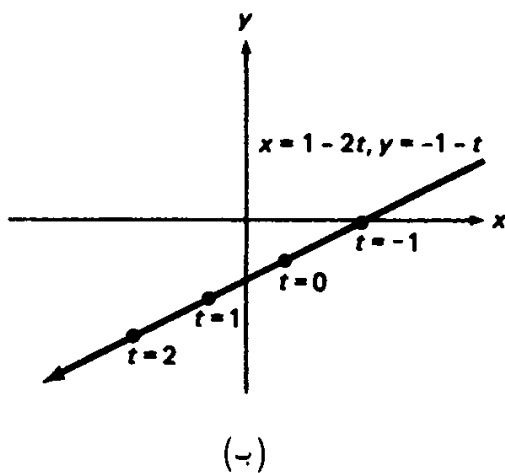
$$x = 1 + 2f(t), \quad y = -1 + f(t) \quad (I \text{ در } t)$$

استدلالی مشابه نشان می‌دهد که هر منحنی بی‌نهایت نمایش پارامتری دارد .

جهت یک منحنی . منحنیها به شکل پارامتری یک جهت طبیعی مربوط به جهت افزایش t دارند . مثلاً ، وقتی t از $-\infty$ تا ∞ افزایش یابد ، نقطه متغیر $P = (x, y)$ واقع بر خط (۲) آن را از چپ به راست رو به بالا می‌پیماید [ر.ک. شکل ۳۱ (آ)] . اما ، وقتی t از $-\infty$ تا ∞ افزایش یابد ، خط

$$x = 1 - 2t, \quad y = -1 - t \quad (-\infty < t < \infty),$$

که از همان نقاط خط (۲) تشکیل شده است ، جهت مخالف را می‌پیماید ؛ یعنی ، از راست به چپ رو به پایین می‌رود [ر.ک. شکل ۳۱ (ب)] .



شکل ۳۱

به عنوان تمرین ، نشان دهید که معادلات

$$x = 1 + 2 \ln t, \quad y = -1 + \ln t \quad (0 < t < \infty)$$

نمایش همان خط L (۲) ، با همان جهت است ، ولی معادلات

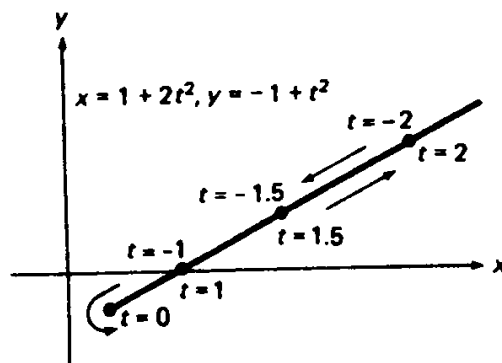
$$x = 1 + 2 \cot t, \quad y = -1 + 2 \cot t \quad (0 < t < \pi)$$

نمایش خط L با جهت مخالف می‌باشد .

مثال ۳. چون t^2 ذاتاً نامنفی است، منحنی

$$(۳) \quad x = 1 + 2t^2, \quad y = -1 + t^2 \quad (-\infty < t < \infty)$$

همان خط (۲) نبوده، بلکه یک شعاع یا نیمخط است که، همانطور که شکل ۳۲ نشان داده، فقط از بخشی از خط (۲) تشکیل شده است. فرض کنیم t از $-\infty$ تا ∞ افزایش یابد. در



شکل ۳۲

این صورت، نقطه $P = (x, y)$ شعاع (۳) را دوبار می‌پیماید، یکبار در جهت روبه پایین و یکبار در جهت روبه بالا، و در نقطه $(1, -1)$ که نظیر به مقدار پارامتر $t = 0$ است می‌چرخد.

به عنوان تمرین، نشان دهید که معادلات

$$x = 1 + 2e^t, \quad y = -1 + e^t \quad (-\infty < t < \infty)$$

نمایش همان شعاع بدون نقطه $(1, -1)$ است که یکبار در جهت روبه بالا پیموده می‌شود.

مثال ۴. به‌طورکلی، منحنی

$$(۴) \quad x = x_1 + at, \quad y = y_1 + bt \quad (-\infty < t < \infty, a \neq 0)$$

خط مستقیمی است مار بر نقطه (x_1, y_1) به شیب b/a . در واقع، با حل معادله اول نسبت به t و گذاردن حاصل در معادله دوم، به دست می‌آوریم

$$(۴') \quad y = y_1 + \frac{b}{a}(x - x_1) = \frac{b}{a}x + \left(y_1 - \frac{b}{a}x_1\right),$$

که معادله خط مستقیم L به شیب b/a است. به‌علاوه، نقطه (x_1, y_1) بر L قرار دارد، و این را می‌توان با قرار دادن $t = 0$ در (۴) یا $x = x_1$ در (۴') دید. توجه کنید که منحنی (۴) در صورتی یک خط قائم است که $a = 0$ و $b \neq 0$.

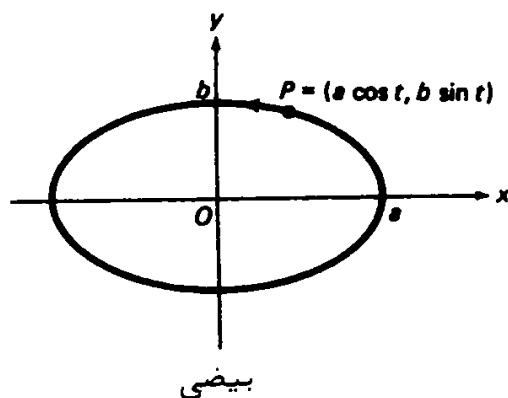
مثال ۵. منحنی

$$(۵) \quad x = a \cos t, \quad y = b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن $a > 0, b > 0$. چون $x/a = \cos t$ ، $y/b = \sin t$ و $\cos^2 t + \sin^2 t \equiv 1$ به آسانی می‌توان پارامتر t را از دو معادله پارامتری (۵) حذف کرد. با این کار معادله

$$(۵') \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

به دست می‌آید که معادله دگارتی منحنی نام دارد، زیرا تنها متغیرهای ظاهر شده در آن مختصات دگارتی یا قائم x و y می‌باشند. (مختصات قائم به افتخار فیلسوف و ریاضیدان فرانسوی، رنه دکارت (۱۶۵۰-۱۵۹۶)، پایه‌گذار هندسه تحلیلی، مختصات دگارتی نیز نام یافته‌اند). نمودار (۵') یک منحنی است به نام بیضی که در شکل ۳۳ به ازای $a > b$ نموده شده است. هر نقطه که مختصاتش در معادلات پارامتری (۵) صدق کنند در معادله



شکل ۳۳

دگارتی (۵') نیز صدق می‌کنند؛ و لذا، بر بیضی قرار دارد. به عکس، به ازای هر نقطه (x, y) از بیضی (۵')، مقداری مانند t وجود دارد که x و y در (۵) صدق می‌کنند. برای مشاهده این امر، تحقیق می‌کنیم که، وقتی t از ۰ تا 2π افزایش یابد، نقطه متغیر $P = (x, y) = (a \cos t, b \sin t)$ عملاً تمام بیضی را یکبار در جهت خلاف عقربه‌های ساعت، با شروع و اختتام در نقطه $(a, 0)$ ، می‌پیماید. لذا، معادلات پارامتری (۵) و معادله دگارتی (۵') هم‌گشش هستند بدین معنی که نمودارهای (۵) و (۵') یکی می‌باشند. (این انطباق نمودارها خود بخود نیست، و این امر در مثال بعد روشن خواهد شد.) معادلات پارامتری (۵)، حتی اگر a و b مجاز به منفی بودن باشند، همان بیضی را نمایش

می‌دهند جز آنکه اگر $ab < 0$ ، بیضی را در جهت عقربه‌های ساعت می‌پیماید (چرا؟).
 اگر $a = b$ ، (۵) به معادلهٔ

$$x^2 + y^2 = a^2$$

که دایره به شعاع a و مرکز مبدا است تحویل می‌شود، و معادلات پارامتری نظیر عبارتند از

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

البته، در اینجا پارامتر t زاویهٔ مرکزی نقطهٔ $P = (x, y)$ است؛ یعنی، زاویهٔ بین محور x مثبت و خط‌واصل بین مبدا و P که در جهت خلاف عقربه‌های ساعت سنجیده می‌شود، ولی این تعبیر t در حالت بیضی با $a \neq b$ فرو می‌ریزد (دلیلش را توضیح دهید). اگر $a = 0, b \neq 0$ ، منحنی (۵) به پاره خط قائم‌واصل بین نقاط $(0, b)$ و $(0, -b)$ تحویل می‌شود، ولی اگر $a \neq 0, b = 0$ ، به پاره خط افقی واصل بین نقاط $(a, 0)$ و $(-a, 0)$ تحویل می‌شود، که وقتی t از 0 تا 2π افزایش یابد، هر دو پاره خط دوبار پیموده می‌شوند (این را تحقیق کنید). حالت $a = b = 0$ مستثنی شده است، زیرا در این صورت منحنی (۵) به تنها نقطهٔ $(0, 0)$ "تباہ خواهد شد".

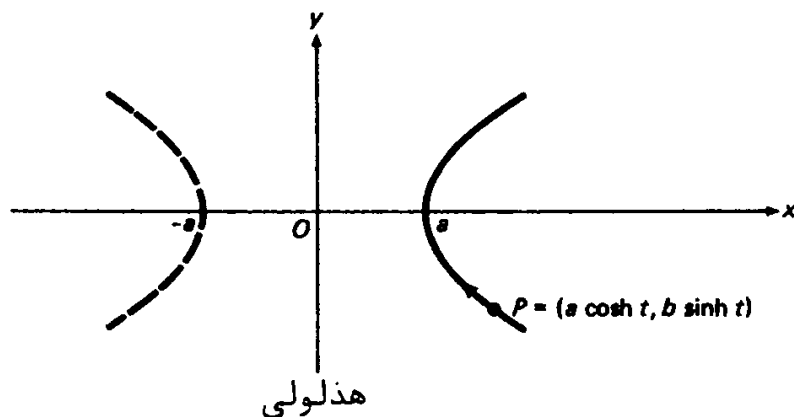
مثال ۶. حال منحنی

$$(۶) \quad x = a \cosh t, \quad y = b \sinh t \quad (-\infty < t < \infty)$$

را در نظر می‌گیریم، که در آن $a > 0, b > 0$. چون $x/a = \cosh t$ ، $y/b = \sinh t$ ، و $\cosh^2 t - \sinh^2 t \equiv 1$ ، می‌توان پارامتر t را از معادلات (۶) حذف کرده معادلهٔ دکارتی

$$(۶') \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

را به دست آورد. در شکل ۳۴ نمودار (۶')، معروف به هذلولی، نموده شده است، و



متشکل است از دو منحنی از هم جدا (یعنی ، دو منحنی بدون نقطه مشترک) ، شاخه چپ در نیمصفحه چپ $x < 0$ و شاخه راست در نیمصفحه راست $x > 0$ قرار دارد. چون هر نقطه از شاخه چپ دارای مختص x منفی است و $a \cosh t$ همواره به ازای $a > 0$ مثبت است ، معلوم می شود که (۶) نمی تواند شاخه چپ هذلولی را نمایش دهد ، بلکه فقط شاخه راست را نمایش می دهد . به طور مشخص ، از (۶) و خواص آشنای توابع $\cosh t$ و $\sinh t$ معلوم می شود که وقتی t از $-\infty$ تا 0 افزایش یابد ، x از ∞ تا a کاهش و y از $-\infty$ تا 0 افزایش می یابد ، ولی وقتی t از 0 تا ∞ افزایش یابد ، x از a تا ∞ افزایش و y از 0 تا ∞ افزایش خواهد یافت . بنابراین ، وقتی t از $-\infty$ تا ∞ افزایش یابد ، نقطه متغیر $P = (x, y) = (a \cosh t, b \sinh t)$ در امتداد شاخه راست هذلولی به بالا حرکت کرده ، و شاخه چپ اصلاً ظاهر نخواهد شد . لذا ، در اینجا ، برخلاف مثال ۵ ، معادلات پارامتری و معادله دکارتی حاصل از حذف پارامتر t هم کشش نیستند .

اگر a مثبت ولی b منفی باشد ، منحنی (۶) مجدداً " شاخه راست هذلولی است ، ولی این بار در جهت رو به پایین پیموده می شود . برای به دست آوردن شاخه چپ هذلولی از (۶) ، باید اجازه دهیم ثابت a منفی شود . در واقع ، اگر $a < 0$ ، منحنی (۶) شاخه چپ هذلولی است (منحنی منقطع در شکل) ، که به ازای $b > 0$ در جهت بالا و به ازای $b < 0$ در جهت پایین پیموده می شود .

بحث بیضی و هذلولی در مثالهای ۵ و ۶ فقط یک مرور مقدماتی است . در فصل ۱۰ ، این منحنیهای مهم را با تفصیل بیشتری مورد بحث قرار می دهیم .

مثال ۷ . فرض کنید دایره ای به شعاع a در امتداد یک خط مستقیم افقی بدون لغزش می غلطد . منحنی پیموده شده توسط نقطه ثابت P از محیط دایره را بیابید . (می توان P را سنگریزه ای تصور کرد که به شیار لاستیک اتومبیل چسبیده است .)

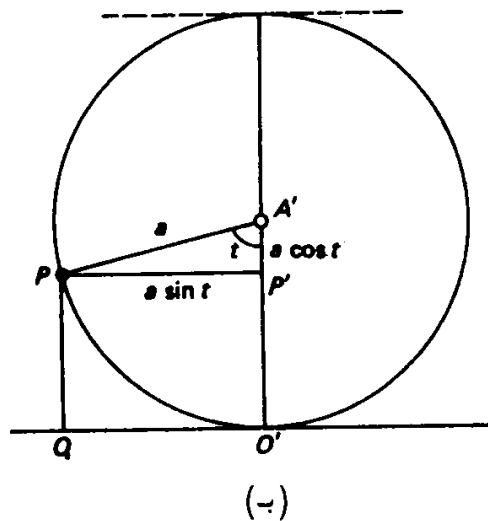
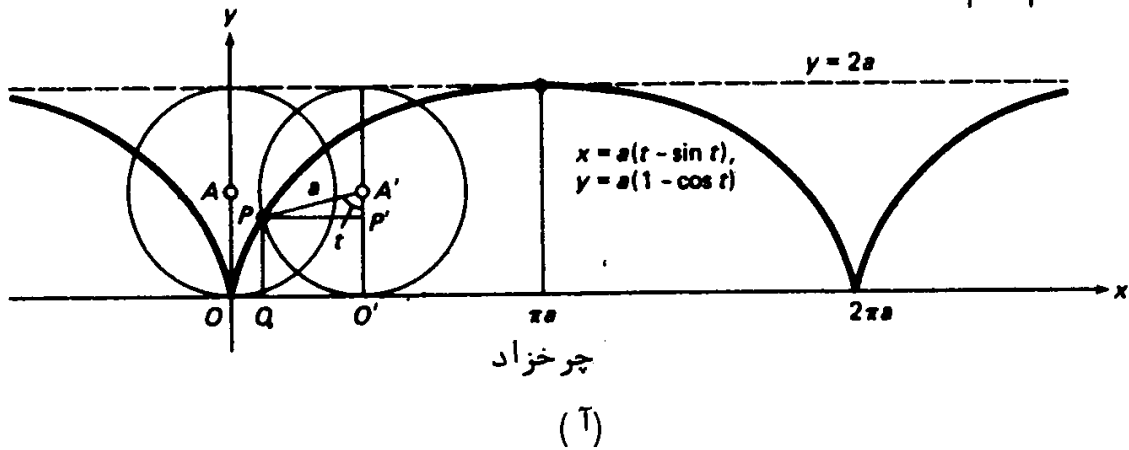
حل . فرض کنیم خط مستقیم محور x بوده ، و t زاویه ای به رادیان باشد که دایره از موضعی که P بر مبداء O منطبق است چرخیده است . در این صورت ، منحنی پیموده شده توسط P به نام چرخزاد ، دارای معادلات پارامتری

$$(7) \quad x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (-\infty < t < \infty)$$

می باشد . در واقع ، با توجه به شکل ۳۵ (آ) معلوم می شود که P دارای طول

$$x = |OQ| = |OO'| - |QO'| = |OO'| - |PP'|$$

می باشد. اما $|OO'|$ مساوی طول قوس $\widehat{O'P}$ است، زیرا دایره بدون لغزش می غلظد. در نتیجه
 $|OO'| = at$ حال آنکه از شکل ۳۵ (ب)، که بزرگ شده^۶ قسمتی از شکل ۳۵ (آ) است، می توان دید که
 $|PP'| = a \sin t$



شکل ۳۵

پس نتیجه می شود که

$$x = at - a \sin t = a(t - \sin t).$$

به همین نحو، داریم

$$y = |O'A'| - |P'A'| = a - a \cos t = a(1 - \cos t).$$

توجه کنید که این منحنی نمودار تابع $y = f(x)$ است، که در آن f متناوب بادیوره^۶ متناوب اساسی $2\pi a$ بوده و در هر نقطه^۶

$$x = 2n\pi a \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots)$$

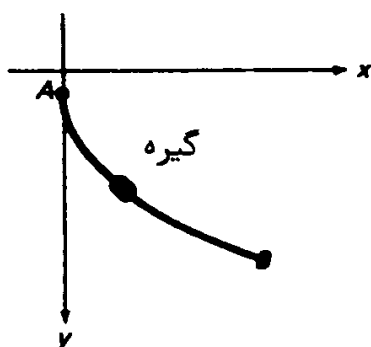
دارای مماس قائم (در واقع، نقطه^۶ بازگشت) است. به علاوه، هر قوس چرخزاد روی یک بازه به شکل

$$(n - 1)\pi \leq t \leq n\pi \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$

نمودار تابعی مانند $x = g(y)$ است. دلیلش را توضیح داده، و بخصوص نشان دهید که روی بازه $0 \leq t \leq \pi$ ،

$$x = a \arccos\left(\frac{a-y}{a}\right) - \sqrt{2ay - y^2}$$

خواهیم دید که چرخزاد خواص مکانیکی جالبی دارد. سیمی را در صفحه قائم در نظر می‌گیریم که نقطه A را به نقطه B پایین تر از A متصل می‌کند. همانند شکل ۳۶،



شکل ۳۶

فرض کنیم A مبدأ یک دستگاه مختصات قائم باشد که محور y آن قائم و رو به پایین است. فرض کنیم سیم از یک گیره توخالی بگذرد که در امتداد سیم تحت نیروی ثقل می‌لغزد، و نیز اصطکاک بین سیم و گیره قابل چشم‌پوشی باشد. می‌توان با روشهای پیشرفته نشان داد که قوسی از چرخزاد که بین A و B قرار دارد کوتاه‌تر است؛ یعنی، منحنی است که زمان لازم برای آنکه گیره از A تا B پایین بیاید مینیمم است. جالب است که می‌توان نشان داد همین قوس از چرخزاد هم‌زمان نیز هست؛ یعنی، زمان لازم برای لغزیدن گیره به پایین از نقطه P قوس به پایین‌ترین نقطه B ، چه P بالاترین نقطه A یا هر نقطه بین A و B باشد، یکسان است!

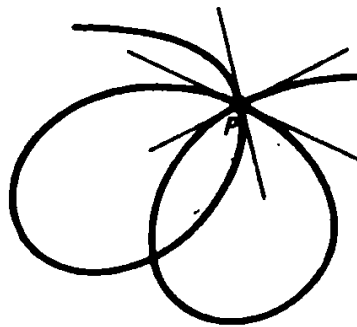
خط مماس بر یک منحنی پارامتری. یک منحنی پارامتری، یعنی یک منحنی با معادلات پارامتری

$$(۸) \quad x = x(t), \quad y = y(t) \quad (I \text{ در } t)$$

داده شده است، که در آن I یک بازه بوده، a یک نقطه درونی I است، و مشتقات $x'(a)$ و $y'(a)$ هر دو موجود و متناهی‌اند و $x'(a) \neq 0$. در این صورت، منحنی در نقطه $P = (x(a), y(a))$ (خط) مماس داشته، و شیب مماس مساوی است با

$$(۹) \quad m = \left. \frac{y'(t)}{x'(t)} \right|_{t=a} = \frac{y'(a)}{x'(a)}$$

طبق معمول، m نیز شیب منحنی در P نام دارد. توجه کنید که اگر منحنی به ازای مقادیر پارامتری دیگری مجدداً از P بگذرد، شیب منحنی در P ممکن است مقدار متفاوتی با m را بگیرد، و منحنی در چنین نقطه می‌تواند دو یا چند مماس داشته باشد (شکل ۳۷ این



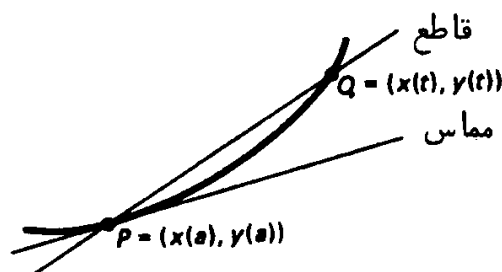
سه مماس در نقطه P

شکل ۳۷

امکان را نشان می‌دهد). برای اثبات (۹) از تعریف m که در صفحه ۱۸۷ داده شد شروع کرده، ملاحظه می‌کنیم که

$$(۱۰) \quad m = \lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t) - y(a)}{x(t) - x(a)}$$

زیرا خارج قسمت سمت راست شیب خط قاطع ماربر نقطه $P = (x(a), y(a))$ و نقطه متغیر $Q = (x(t), y(t))$ مثل شکل ۳۸ است. در اینجا تکیه بر این امر است که اگر t به قدر کافی



شکل ۳۸

نزدیک a باشد، $x(t) - x(a) \neq 0$ ، که از فرض $x'(a) \neq 0$ نتیجه می‌شود (بیشتر توضیح دهید). با تقسیم صورت و مخرج خارج قسمت تفاضلی آمده در (۱۰) بر $|t - a|$ ، معلوم می‌شود که

$$(11) \quad m = \lim_{t \rightarrow a} \frac{\frac{y(t) - y(a)}{t - a}}{\frac{x(t) - x(a)}{t - a}} = \frac{\lim_{t \rightarrow a} \frac{y(t) - y(a)}{t - a}}{\lim_{t \rightarrow a} \frac{x(t) - x(a)}{t - a}} = \frac{y'(a)}{x'(a)}$$

که (۹) را ثابت می‌کند.

معادله خط مماس بر منحنی (۸) در نقطه $P = (x(a), y(a))$ را می‌توان به شکل دکارتی

$$\frac{y - y(a)}{x - x(a)} = m = \frac{y'(a)}{x'(a)}$$

یعنی،

$$(12) \quad y'(a)[x - x(a)] - x'(a)[y - y(a)] = 0,$$

یا، با توجه به مثال ۲، به شکل پارامتری

$$(12') \quad x = x(a) + x'(a)t, \quad y = y(a) + y'(a)t \quad (-\infty < t < \infty)$$

نوشت.

مثال ۸. مماس بر منحنی

$$x = t^3, \quad y = t^2 + 1 \quad (-\infty < t < \infty)$$

را در نقطه $P = (-1, 2)$ و در نقطه $Q = (0, 1)$ بیابید.

حل. چون t^3 یک تابع صعودی است، منحنی خود قطعی نداشته؛ و در نتیجه، مماسهای

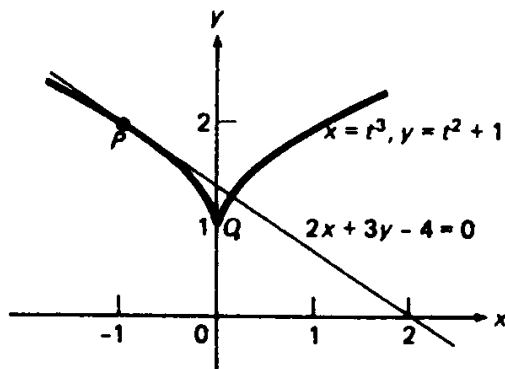
چندگانه نخواهد داشت. نقاط P و Q به ترتیب نظیر مقادیر $t = -1$ و $t = 0$ اند. داریم

و در نتیجه، $x'(t) = 3t^2$ ، $y'(t) = 2t$ ؛ و در نتیجه، $x'(-1) = 3$ ، $y'(-1) = -2$. بنابراین، طبق

(۹) و (۱۲)، مماس در P به شیب $m = -2/3$ بوده و به معادله

$$2x + 3y - 4 = 0,$$

مثل شکل ۳۹ است. از فرمول (۱۱) در Q نمی‌توان استفاده کرد، زیرا $x'(0) = y'(0) = 0$ ؛



شکل ۳۹

و در نتیجه، با اعمال مستقیم فرمول (۱۰) خواهیم داشت

$$m = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{y(t) - y(0)}{x(t) - x(0)} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{(t^2 + 1) - 1}{t^3} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t}.$$

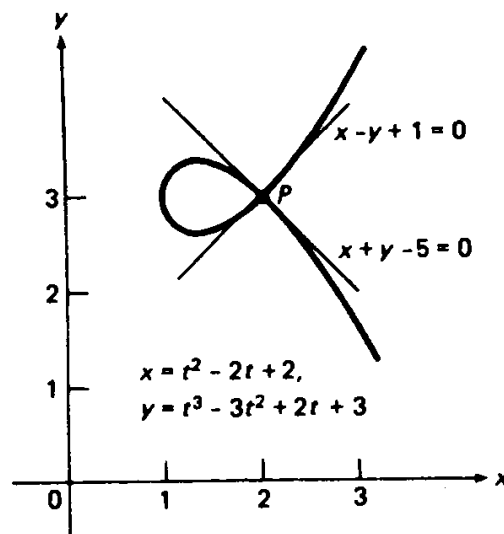
لذا، مقدار حدی خارج قسمت تفاضلی، بسته به اینکه t از راست یا چپ به ۰ نزدیک شود، ∞ یا $-\infty$ است. بنابراین، طبق همان استدلال صفحه ۳۰۸، منحنی در Q مماس قائم (یعنی، محور y) دارد. در واقع، همانطور که از شکل معلوم است، منحنی در Q نقطه بازگشت دارد.

مثال ۹. مماسهای بر منحنی

$$x = t^2 - 2t + 2, \quad y = t^3 - 3t^2 + 2t + 3 \quad (-\infty < t < \infty)$$

را در نقطه $P = (2, 3)$ بیابید.

حل. نقطه P نظیر است به دو مقدار از پارامتر؛ یعنی، $t = 0$ و $t = 2$ (تحقیق کنید). لذا، منحنی دوبار از P می‌گذرد، و دو مماس در P وجود دارند. چون $x'(t) = 2t - 2$ ، $x'(0) = -2$ ، $x'(2) = 2$ ، $y'(t) = 3t^2 - 6t + 2$ ، $y'(0) = 2$ ، $y'(2) = 2$ داریم. بنابراین، طبق (۹)، یکی از مماسها به شیب -1 و دیگری به شیب 1 می‌باشد. بنا بر (۱۲) مماسها به معادلات $x - y + 1 = 0$ و $x + y - 5 = 0$ مثل شکل ۴۰ می‌باشند. به‌عنوان



شکل ۴۰

تمرین، معادلات پارامتری مماسها را با استفاده از (۱۲) بنویسید.

مسائل

تابع یا معادلهٔ دکارتی را بیابید که منحنی پارامتری داده شده نمودار آن باشد. منحنی را رسم کرده و جهت آن را نشان دهید.

۱. $x = 1 + 2t, y = 4t + 3 \quad (-1 \leq t \leq 0)$

۲. $x = -1 + 3t, y = 2 - 2t \quad (0 \leq t \leq 1)$

۳. $x = t^4, y = t^2 \quad (0 \leq t < \infty)$

۴. $x = t^3, y = 6 \ln t \quad (0 < t < \infty)$

۵. $x = e^{-t}, y = e^{2t} \quad (-\infty < t < \infty)$

۶. $x = t, y = \sqrt{t^2 - 9} \quad (3 \leq t < \infty)$

۷. $x = \sqrt{4 - t^2}, y = t \quad (-2 \leq t \leq 2)$

۸. $x = \cos t, y = \cos 2t \quad (0 \leq t \leq \pi)$

۹. $x = \sec t, y = \cos t \quad (\pi/2 < t \leq \pi)$

۱۰. $x = \tan t, y = \sec t \quad (-\pi/4 \leq t \leq \pi/4)$

۱۱. $x = 2 \cos t, y = 2 \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

۱۲. $x = 2 - 3 \sin t, y = -1 + 3 \cos t \quad (2\pi \leq t \leq 4\pi)$

۱۳. $x = 5 \cos t, y = 4 \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

۱۴. $x = 2 \sin t, y = 3 \cos t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

۱۵. $x = 3 \cosh t, y = 4 \sinh t \quad (-\infty < t < \infty)$

۱۶. $x = -2 \sinh t, y = 3 \cosh t \quad (-\infty < t < \infty)$

معادلات پارامتری خطوط زیر را بنویسید.

۱۷. به شیب ۱- و قطع y ، ۴

۱۸. به شیب ۲ و قطع x ، -۳

۱۹. با قطع x ، ۲ و قطع y ، ۶

۲۰. ماربر نقطهٔ $(-4, 3)$ به شیب ۵

۲۱. ماربر نقاط $(-3, 2)$ و $(4, 7)$

۲۲. ماربر نقاط $(1, 8)$ و $(9, -2)$

معادلات پارامتری زیر را بنویسید.

۲۳. دایره‌ای به شعاع ۵ به مرکز $(-2, 3)$ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت.

۲۴. دایره‌ای به قطر ۶ به مرکز نقطهٔ $(4, -8)$ در جهت عقربه‌های ساعت.

۲۵. بیضی $9x^2 + 4y^2 = 36$ در جهت عقربه‌های ساعت.

۲۶. بیضی $2x^2 + 5y^2 = 4$ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت .
 ۲۷. شاخهٔ چپ هذلولی $16x^2 - 9y^2 = 144$ در جهت رو به بالا .
 ۲۸. شاخهٔ راست هذلولی $3x^2 - 2y^2 = 6$ در جهت رو به پایین .
 ۲۹. منحنی $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$ از نقطه $(1, 0)$ تا نقطه $(0, 1)$.
 ۳۰. منحنی با معادلات پارامتری زیر را توصیف کنید :

$$x(t) = \begin{cases} t & \text{اگر } 0 \leq t \leq 1 \\ 1 & \text{اگر } 1 \leq t \leq 2 \\ 3-t & \text{اگر } 2 \leq t \leq 3 \\ 0 & \text{اگر } 3 \leq t \leq 4 \end{cases} \quad y(t) = \begin{cases} 0 & \text{اگر } 0 \leq t \leq 1 \\ t-1 & \text{اگر } 1 \leq t \leq 2 \\ 1 & \text{اگر } 2 \leq t \leq 3 \\ 4-t & \text{اگر } 3 \leq t \leq 4 \end{cases}$$

شیب m منحنی داده شده در نقطهٔ نظیر به مقدار مشخص شده از پارامتر t را بیابید .

۳۱. $x = t^2, y = 2t, t = 4$

۳۲. $x = \sqrt{t}, y = t^2 + 1, t = 9$

۳۳. $x = t^3, y = \ln(\ln t), t = e$

۳۴. $x = \cos t, y = t + \sin t, t = \pi/3$

۳۵. $x = 2 \cos^2 t, y = 3 \sin t, t = \pi/6$

۳۶. $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t, t = \pi$

۳۷. نمایش پارامتری هذلولی (۶) را طوری بیابید که مستلزم توابع هذلولی نباشد .
 مماس (های) وارد بر منحنیهای زیر را بیابید .

۳۸. $x = 4 \cos t, y = 2\sqrt{3} \sin t$ در $(2, 3)$

۳۹. $x = t - t^4, y = t^2 - t^3$ در $(0, 0)$

۴۰. $x = t^3 + 1, y = t^2 + t + 1$ در $(0, 1)$

۴۱. $x = \cosh t, y = 2 \sinh t$ در $(\frac{3}{4}, \frac{3}{2})$

۴۲. فرض کنید

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (t \text{ در } I)$$

یک منحنی پارامتری بوده، و a یک نقطهٔ درونی بازهٔ I باشد. همچنین، $x(t), y(t)$ دارای مشتقات متناهی $x'(t), y'(t)$ در همسایگی a باشند، که $x'(a) \neq 0$ ، و دارای مشتقات دوم متناهی $x''(a), y''(a)$ در خود نقطهٔ a باشند. با استفاده از قاعدهٔ زنجیره‌ای و قضیهٔ ۴، صفحهٔ ۴۶۰، نشان دهید که

$$(یک) \quad \left. \frac{d^2 y}{dx^2} \right|_{x=x(a)} = \frac{x'(a)y''(a) - y'(a)x''(a)}{[x'(a)]^3}$$

را d^2y/dx^2 در $x = x(a)$ در صورتی بیابید که

۴۳. $x = 2t^2, y = 3t^3, a = 1$

۴۴. $x = 5 \cos t, y = 4 \sin t, a = \pi/6$

۴۵. $x = t \cos t, y = t \sin t, a = 0$

۴۶. $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, a = \pi/4$

منحنی داده شده کجا مماسهای قائم دارد؟

۴۷. $x = -1 + 2 \cos t, y = 1 - 2 \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

۴۸. $x = -3 \cos t, y = 4 \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

۴۹. $x = 2 \cosh t, y = 3 \sinh t \quad (-\infty < t < \infty)$

۵۰. $x = t^4 - 2t^2, y = t^3 + 1 \quad (-\infty < t < \infty)$

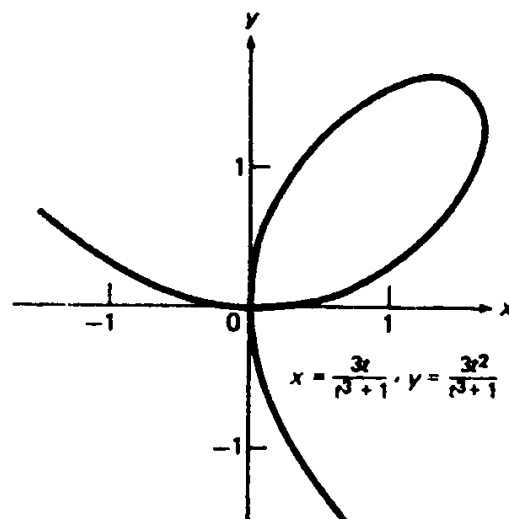
۵۱. نشان دهید که اگر $x'(a) = y'(a) = 0$ ، منحنی $x = x(t), y = y(t)$ ممکن است در نقطه

$P = (x(a), y(a))$ مماس قائم داشته باشد یا نداشته باشد.

۵۲. منحنی

$$x = \frac{3at}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{3at^2}{t^3 + 1} \quad (-\infty < t < \infty, a > 0),$$

نموده شده در شکل ۴۱ برای حالت $a = 1$ ، چینه دکارت نام دارد. معادله دکارتی



چینه دکارت

شکل ۴۱

چینه را بیابید. چه مقادیری از پارامتر t آن قسمت از منحنی که در ربع اول است را می‌دهند؟ در ربع دوم را می‌دهند؟ در ربع چهارم را می‌دهند؟ نشان دهید که چینه در مبدأ مماس افقی و قائم دارد.

۵۳. نشان دهید که نقطه $P = (x, y)$ متغیر از منحنی

$$x = \frac{1}{t^2}(1 + \ln t), \quad y = \frac{1}{t}(3 + 2 \ln t) \quad (0 < t < \infty)$$

در معادله دیفرانسیل

$$y \frac{dy}{dx} = 1 + 2x \left(\frac{dy}{dx} \right)^2$$

صدق می‌کند.

۵۴. نشان دهید که مماس و قائم به چرخزاد (۷) در نقطه P از نقاط اوج و حوض دایره

مولد چرخزاد می‌گذرند (P بر محیط آن واقع است).

۵۵. سه مماس بر منحنی

$$x = t^3 - 3t^2 + 2t + 1, \quad y = t^6 - 5t^4 + 4t^2 + 2 \quad (-\infty < t < \infty)$$

در نقطه $(1, 2)$ را بیابید.

۴۰.۸ طول یک منحنی مسطح

حال به مسئله یافتن طول منحنی مسطح C به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

می‌پردازیم، که در آن C فقط تعدادی متناهی خود قطعی دارد، که بالاخص ایجاب می‌کند که هیچ قوسی از C بیش از یکبار پیموده نمی‌شود. نقطه $A = (x(a), y(a))$ نقطه شروع و نقطه $B = (x(b), y(b))$ نقطه پایان نام دارد، زیرا وقتی t از a تا b افزایش یابد، نقطه متحرک $P = (x(t), y(t))$ منحنی C را با شروع در A و پایان در B می‌پیماید. نقاط A و B را نقاط انتهایی C می‌نامند. اگر A و B یکی باشند، گوئیم C بسته است. یک منحنی بدون خودقطعی، جز احتمالاً با نقاط انتهایی یکسان، را ساده می‌گویند. شکل ۴۲ (آ) یک منحنی ساده با نقاط انتهایی متمایز، و شکل ۴۲ (ب) یک منحنی ساده با نقاط انتهایی یکسان، یعنی یک منحنی بسته ساده، را نشان می‌دهد. منحنی نموده شده ۴۲ (پ) که سه



(پ)

یک منحنی نه ساده

نه بسته

(ب)

یک منحنی بسته ساده

(آ)

یک منحنی ساده

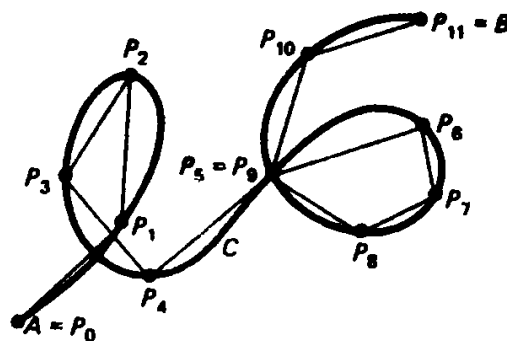
نقطه خودقطعی دارد نه ساده است نه بسته .

تبصره . بنا بر قضیه مشهور منحنی ژردان^۱، هر منحنی بسته ساده^۲ C صفحه را به دو ناحیه متمایز تقسیم می‌کند که C مرز مشترک آنهاست و یکی از نواحی به نام درون C کراندار، و ناحیه دیگر به نام برون C بی‌کران است. با آنکه این نتیجه از نظر هندسی واضح است، ولی اثبات آن واقعا "مشکل است" به یاد آورید که ما فقط فرض کرده‌ایم توابع $x(t)$ و $y(t)$ پیوسته‌اند، که آزادی رفتار بسیاری به آنها خواهد داد .

در هندسه مقدماتی، طول فقط برای پاره‌خطها و قوسهای مستدیر (و منحنیهای متشکل از این پاره‌خطها و قوسها) تعریف شده است. لذا، اولین کار تعریف طول C است، درست همانطور که مجبور به تعریف مساحت ناحیه بین دو منحنی یا حجم یک جسم بودیم. طبیعی است سعی کنیم C را با یک منحنی تقریب کنیم که طولش را از قبل می‌دانیم. با این هدف، بازه $[a, b]$ را به وسیله مقادیر $a = t_0, t_1, t_2, \dots, t_{n-1}, t_n = b$ از پارامتر که در نامساویهای $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$ صدق می‌کنند به n زیر بازه تقسیم می‌کنیم. این مقادیر از پارامتر t ، $n + 1$ نقطه

$$P_i = (x(t_i), y(t_i)) \quad (i = 0, 1, \dots, n)$$

بر منحنی C معین می‌کنند که C را به n قوس تقسیم می‌نمایند که P_0 نقطه شروع A و P_n نقطه پایان B می‌باشد (برای حالت $n = 11$ ، ر. ک. شکل ۴۳). چون فقط تعدادی



یک مسیر چندضلعی محاط شده در یک منحنی

شکل ۴۳

متناهی خودقطعی مجاز است، بعضی از نقاط P_0, P_1, \dots, P_n ممکن است با آنکه نظیر به

مقادیر مختلفی از t اند با هم یکی باشند. مثلاً، در منحنی شکل فوق نقاط P_0 و P_9 یکی هستند.

مسیرهای چندضلعی و طول متناهی داشتن. حال فرض کنیم هر یک از نقاط $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ را با پاره خطی به نقطه بعدی، مثل شکل فوق، وصل کرده باشیم. در این صورت، C با مسیر چندضلعی $P_0P_1P_2 \dots P_{n-1}P_n$ تقریب می شود که در C محاط شده است و از n پاره خط $P_0P_1, P_1P_2, \dots, P_{n-1}P_n$ متصل به هم تشکیل شده است (نقاط $P_0, P_1, P_2, \dots, P_n$ را رئوس $P_0P_1P_2 \dots P_n$ می نامند). البته، طول این مسیر چندضلعی چیزی جز مجموع طولهای پاره خطهای آن نیست؛ یعنی، مسیر به طول

$$(1) \quad \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|$$

می باشد. فرض کنیم

$$\mu = \max \{ \Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n \},$$

که در آن $\Delta t_i = t_i - t_{i-1}$ طول زیر بازه i م $[t_{i-1}, t_i]$ می باشد. پس ظاهراً "معقول است که (۱) را تقریب مناسبی برای طول C بگیریم، که این تقریب با کوچک شدن μ بهتر خواهد شد. این کار پیشنهاد می کند که طول منحنی C را به صورت حد

$$L = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i|$$

تعریف کنیم مشروط بر اینکه این حد موجود و متناهی باشد، که در این حالت گوئیم C با طول متناهی است.

طول منحنی به عنوان انتگرال. معلوم می شود که پیوستگی توابع $x(t)$ و $y(t)$ با طول متناهی بودن منحنی C را تضمین نمی کند. به عبارت دیگر، منحنیهایی مانند $(a \leq t \leq b)$ $x = x(t), y = y(t)$ با $x(t)$ و $y(t)$ پیوسته وجود دارند که در آنها می توان مسیرهای چندضلعی با طول بدلیخواه بزرگ محاط کرد. (یک مثال از چنین منحنی با طول نامتناهی در مسئله ۲۳ آورده شده است.) اما فرض کنیم توابع $x(t)$ و $y(t)$ بر $[a, b]$ به طور پیوسته مشتق پذیر باشند، بدین معنی که $x'(t)$ و $y'(t)$ بر $[a, b]$ موجود و پیوسته باشند.^۱ در این

۱. مشتقات $x(t)$ و $y(t)$ در نقاط انتهایی a و b را باید مشتقات راست $x_+(a), y_+(a)$ و مشتقات چپ $x_-(b), y_-(b)$ تعبیر نمود. در این صورت، لازم نیست $x(t)$ و $y(t)$ خارج بازه $[a, b]$ تعریف شده باشند.

صورت، C با طول متناهی و دارای طول L است که از رابطه^۶

$$(۲) \quad L = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

به دست می‌آید. برای مشاهده^۶ این امر، ابتدا با استفاده از فرمول فاصله^۶ بین دو نقطه طول مسیر چندضلعی محاطی را به شکل زیر بیان می‌کنیم:

$$\sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^n \sqrt{[x(t_i) - x(t_{i-1})]^2 + [y(t_i) - y(t_{i-1})]^2}.$$

سپس قضیه^۶ مقدار میانگین برای مشتقات (قضیه^۶ ۲، صفحه^۶ ۲۵۸) را برهترفاضل مختصات $x(t_i) - x(t_{i-1})$ ، $y(t_i) - y(t_{i-1})$ اعمال کرده، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} x(t_i) - x(t_{i-1}) &= x'(u_i) \Delta t_i & (t_{i-1} < u_i < t_i), \\ y(t_i) - y(t_{i-1}) &= y'(v_i) \Delta t_i & (t_{i-1} < v_i < t_i). \end{aligned}$$

با این می‌توان نوشت

$$(۳) \quad \sum_{i=1}^n |P_{i-1}P_i| = \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(v_i)]^2} \Delta t_i.$$

اگر u_i و v_i به ازای هر i مساوی می‌بودند، عبارت سمت راست یک مجموع ریمان برای تابع پیوسته^۶ $\sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ بر بازه^۶ $[a, b]$ بود، و در این صورت می‌داشتیم

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(u_i)]^2} \Delta t_i = \int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt,$$

و بدین وسیله فرمول (۲) ثابت می‌شد. در حالت کلی $u_i \neq v_i$ ، ولی شهودا^۶ واضح به نظر می‌رسد که وقتی $\mu \rightarrow 0$ ، طرف راست (۳) هنوز باید به همان حد

$$\int_a^b \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

نزدیک شود (بالاخره، $\mu \rightarrow 0$ ایجاب می‌کند که به ازای هر i ، $u_i - v_i \rightarrow 0$). این در واقع درست است، و آن را می‌توان دقیقاً^۶ با استدلالی ثابت‌کرد مستلزم مفهومی (پیوستگی یکنواخت) که از حوصله^۶ یک درس مقدماتی در حساب دیفرانسیل و انتگرال خارج است. لذا، از این به بعد فرمول (۲) را ثابت شده در نظر خواهیم گرفت.

مثال ۱. طول (به نام محیط) دایره^۶

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

به شعاع a را بیابید.

حل. در اینجا

$$\frac{dx}{dt} = -a \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = a \cos t,$$

و از فرمول (۲) داریم

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-a \sin t)^2 + (a \cos t)^2} dt = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt \\ &= a \int_0^{2\pi} dt = 2\pi a, \end{aligned}$$

که قبلاً "از هندسه" مقدماتی آن را می‌دانستیم.

مثال ۲. طول L یک قوس کامل چرخزاد نموده شده در شکل ۳۵ (آ)، صفحه ۷۳۰، را بیابید.

حل. این قوس کامل به معادلات پارامتری زیر است:

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0),$$

در نتیجه،

$$\frac{dx}{dt} = a(1 - \cos t), \quad \frac{dy}{dt} = a \sin t,$$

و

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= a^2(1 - \cos t)^2 + a^2 \sin^2 t = a^2(2 - 2 \cos t) \\ &= 2a^2 \left(1 - \cos^2 \frac{t}{2} + \sin^2 \frac{t}{2}\right) = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}. \end{aligned}$$

چون $a > 0$ و به ازای $0 \leq t \leq 2\pi$ ، $\sin(t/2) \geq 0$ ، از (۲) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 2a \int_0^{2\pi} \sin \frac{t}{2} dt \\ &= 2a \left[-2 \cos \frac{t}{2}\right]_0^{2\pi} = 4a(-\cos \pi + \cos 0) = 8a. \end{aligned}$$

این $1.27 \approx 8/2\pi$ بار از محیط $2\pi a$ دایره به شعاع a که در ساختن چرخزاد به کار رفت بزرگتر است. لذا، به ازای هر میل طی شده توسط یک اتومبیل، سنگریزه^۶ چسبیده به شیار

لاستیک چرخ مسافتی حدود $1443 \text{ ft} \approx (5280) [(4/\pi) - 1]$ را ، بی توجه به اندازه لاستیک ، بیشتر طی خواهد کرد .

فرض کنیم C نمودار تابع به طور پیوسته مشتقپذیر

$$(۴) \quad y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

باشد . در این صورت ، C دارای نمایش پارامتری

$$(۴) \quad x = t, \quad y = f(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

بوده و رابطه (۲) شکل

$$L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(t)]^2} dt = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt,$$

یا معادلا " ، پس از تغییر متغیر انتگرالگیری از t به x ، شکل

$$(۵) \quad L = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx$$

را به خود خواهد گرفت .

مثال ۳ . هرگاه C نیمدایره

$$y = \sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \leq x \leq a)$$

باشد ، آنگاه

$$\frac{dy}{dx} = \frac{-x}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

و از (۵) نتیجه می شود که

$$L = \int_{-a}^a \sqrt{1 + \frac{x^2}{a^2 - x^2}} dx = a \int_{-a}^a \frac{dx}{\sqrt{a^2 - x^2}},$$

که در آن اینک با یک انتگرال مجازی سروکار داریم! با آنکه محاسبه این انتگرال آسان بوده و مساوی π است (این را نشان دهید) ، ولی خیلی ساده تر است که C را با معادلات پارامتری

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

نمایش دهیم ، زیرا در این صورت فوراً به دست می آوریم

$$L = a \int_0^\pi \sqrt{\sin^2 t + \cos^2 t} dt = a \int_0^\pi dt = \pi a$$

(با مثال ۱ مقایسه کنید) .

در واقع، اگر C یک منحنی به شکل (۴) باشد که در آن $f(x)$ بر $[a, b]$ به طور پیوسته مشتقپذیر است، می توان فرمول (۵) را بدون استفاده از فرمول (۲) و نمایش پارامتری (۴) به طور مستقیم ثابت کرد. در واقع، فرض کنیم

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b,$$

$$\mu = \max \{ \Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n \} \quad (\Delta x_i = x_i - x_{i-1}),$$

و قرار می دهیم $P_i = (x_i, f(x_i))$. در نتیجه، مسیر چندضلعی $P_0 P_1 P_2 \dots P_{n-1} P_n$ در C محاط شده است. در این صورت،

$$\sum_{i=1}^n |P_{i-1} P_i| = \sum_{i=1}^n \sqrt{\Delta x_i^2 + [f(x_i) - f(x_{i-1}))]^2},$$

که در آن، بنا بر قضیه مقدار میانگین،

$$f(x_i) - f(x_{i-1}) = f'(u_i) \Delta x_i \quad (x_{i-1} < u_i < x_i).$$

بنابراین،

$$\sum_{i=1}^n |P_{i-1} P_i| = \sum_{i=1}^n \sqrt{1 + [f'(u_i)]^2} \Delta x_i$$

یک مجموع ریمان واقعی برای تابع پیوسته $\sqrt{1 + [f'(x)]^2}$ بر بازه $[a, b]$ است. ولذا، طول منحنی C مساوی است با

$$L = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n |P_{i-1} P_i| = \int_a^b \sqrt{1 + [f'(x)]^2} dx = \int_a^b \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} dx.$$

لذا، فرمول (۵) را مستقیماً و دقیقاً، با احتراز از "تکنیک u_i, v_i " که در برهان فرمول (۲) آمد، ثابت کرده ایم. به عنوان تمرین، مستقیماً و نیز از فرمول (۲) نشان دهید که هرگاه منحنی C نمودار تابع به طور پیوسته مشتقپذیر

$$x = g(y) \quad (a \leq y \leq b)$$

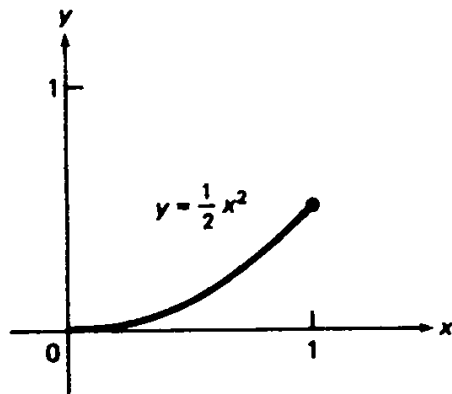
باشد، آنگاه طول C از فرمول زیر به دست می آید:

$$(۵') \quad L = \int_a^b \sqrt{[g'(y)]^2 + 1} dy = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} dy,$$

که مشابه (۵) است.

مثال ۴. طول L قوسی از سهمی $y = \frac{1}{2}x^2$ را بیابید که مبدأ را به نقطه $(1, \frac{1}{2})$ وصل می کند.

حل. قوس مورد نظر در شکل ۴۴ نموده است. در اینجا $dy/dx = x$ ، و از رابطه (۵) به



شکل ۴۴

کمک مثال ۳، صفحه ۶۲۸، نتیجه می‌شود که

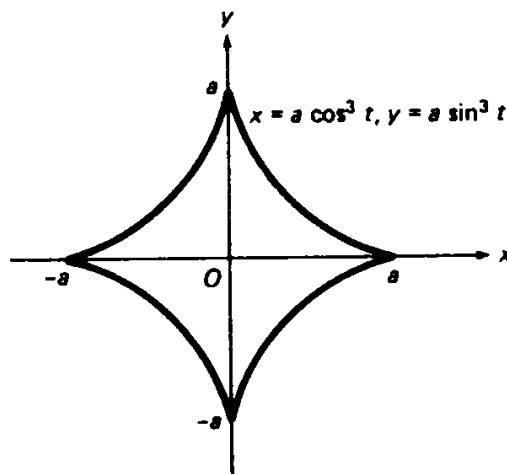
$$L = \int_0^1 \sqrt{1+x^2} dx = \left[\frac{1}{2} x \sqrt{1+x^2} + \frac{1}{2} \ln(x + \sqrt{1+x^2}) \right]_0^1$$

$$= \frac{1}{2} [\sqrt{2} + \ln(1 + \sqrt{2})] \approx 1.15.$$

مثال ۵. منحنی

$$x = a \cos^3 t, \quad y = a \sin^3 t \quad (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0),$$

که در شکل ۴۵ نموده شده است، ستاره‌گون نام دارد. طول L آن را بیابید.



ستاره‌گون

شکل ۴۵

حل. از تقارن ستاره‌گون معلوم می‌شود که

$$L = 4 \int_0^{\pi/2} \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt.$$

چون

$$\frac{dx}{dt} = -3a \cos^2 t \sin t, \quad \frac{dy}{dt} = 3a \sin^2 t \cos t,$$

داریم

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 &= 9a^2(\cos^4 t \sin^2 t + \sin^4 t \cos^2 t) \\ &= 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t (\cos^2 t + \sin^2 t) \\ &= 9a^2 \cos^2 t \sin^2 t. \end{aligned}$$

بنابراین، طبق (۲)، چون به ازای $0 \leq t \leq \pi/2$ ، $\cos t \geq 0$ ، $\sin t \geq 0$ ، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} L &= 12a \int_0^{\pi/2} \cos t \sin t dt \\ &= 6a \int_0^{\pi/2} \sin 2t dt = -3a \cos 2t \Big|_0^{\pi/2} = 6a. \end{aligned}$$

مسائل

طول منحنی پارامتری داده شده را بیابید.

۱. $x = 2t^3, y = 3t^2 \quad (-1 \leq t \leq 1)$

۲. $x = t^2, y = t^3 \quad (0 \leq t \leq 2)$

۳. $x = \ln t, y = 1/t \quad (1 \leq t \leq 2)$

۴. $x = \cos^2 t, y = \sin^2 t \quad (-\pi/2 \leq t \leq 0)$

۵. $x = e^t, y = e^{2t} \quad (-\infty < t \leq 0)$

۶. $x = 3 \sin^2 t, y = 2 \cos^3 t \quad (0 \leq t \leq \pi/2)$

۷. $x = \cos t, y = t + \sin t \quad (-\pi \leq t \leq \pi)$

۸. $x = t \cos t, y = t \sin t \quad (0 \leq t \leq 1)$

۹. $x = e^{-t} \cos t, y = e^{-t} \sin t \quad (a \leq t \leq b)$

۱۰. $x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t \quad (0 \leq t \leq 10)$

۱۱. تحقیق کنید که فرمول (۲) طول L پاره خط واصل بین دو نقطه $P_1 = (x_1, y_1)$ دلخواه

و $P_2 = (x_2, y_2)$ را دقیقاً " به ما می دهد .

۱۲. نشان دهید که منحنی $y = \cosh x$ دارای این خاصیت است که طول منحنی روی بازه

$[a, b]$ مساوی مساحت تحت منحنی از $x = a$ تا $x = b$ می باشد .

طول منحنی داده شده (نمودار تابع x یا y) را بیابید .

$$x = \frac{1}{6}y^3 + \frac{1}{2y} \quad (1 \leq y \leq 3) \quad \cdot 13$$

$$y = \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{4x^2} \quad (1 \leq x \leq 2) \quad \cdot 14$$

$$y = 2x^{3/2} + 3 \quad (0 \leq x \leq 7) \quad \cdot 15$$

$$x = \frac{1}{3}y^{3/2} - \sqrt{y} \quad (0 \leq y \leq 1) \quad \cdot 16$$

$$y = \ln x \quad (\sqrt{3} \leq x \leq \sqrt{8}) \quad \cdot 17$$

$$x = \ln \cos y \quad (0 \leq y \leq \pi/4) \quad \cdot 18$$

$$y = \ln \sin x \quad (\pi/3 \leq x \leq 2\pi/3) \quad \cdot 19$$

$$y = \frac{1}{2}x^2 - \ln x \quad (1 \leq x \leq e) \quad \cdot 20$$

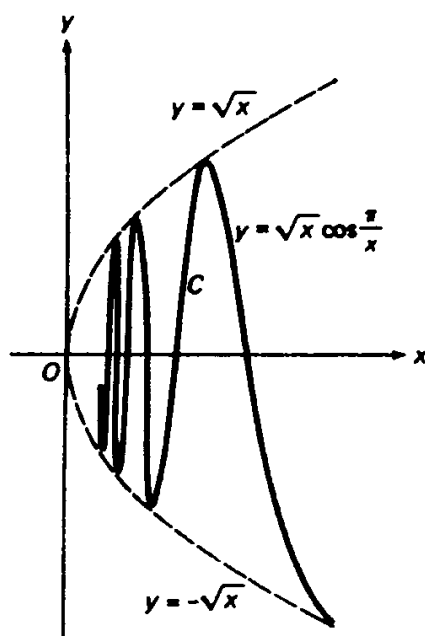
$$x = \int_0^y \sqrt{\cosh t} dt \quad (0 \leq y \leq 2) \quad \cdot 21$$

$$y = \int_{-\pi/2}^x \sqrt{\cos t} dt \quad (-\pi/2 \leq x \leq \pi/2) \quad \cdot 22$$

۲۳. تحقیق کنید که نمودار تابع پیوسته^۶

$$y = f(x) = \begin{cases} \sqrt{x} \cos \frac{\pi}{x} & , 0 < x \leq 1 \\ 0 & , x = 0 \end{cases} \quad \text{اگر}$$

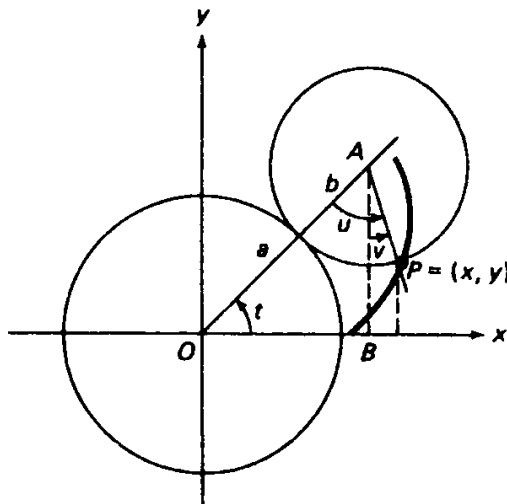
نموده شده در شکل ۴۶ یک منحنی با طول نامتناهی مانند C است.



یک منحنی با طول نامتناهی

۲۴. نشان دهید که ستاره‌گون به معادلات پارامتری $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ دارای معادله دکارتی $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ است. طول ستاره‌گون را با استفاده از فرمول (۵)، به جای فرمول (۲) مثل مثال ۵، پیدا کنید. تحقیق کنید که، همانطور که از شکل ۴۵ مشهود است، ستاره‌گون در چهار نقطه $(\pm a, 0), (0, \pm a)$ بازگشت دارد.

۲۵. فرض کنید دایره‌ای به شعاع b بدون لغزش در قسمت خارجی یک دایره ثابت به شعاع $a > b$ بغلظد. در این صورت، نقطه $P = (x, y)$ روی محیط دایره غلطان یک منحنی به نام بروچرخزاد را می‌پیماید. فرض کنید P ابتدا در نقطه $(a, 0)$ بوده، و t زاویه بین محور x مثبت و خط‌واصل بین مراکز دو دایره مثل شکل ۴۷ باشد.



شکل ۴۷

نشان دهید که بروچرخزاد دارای معادلات پارامتری

$$x = (a + b) \cos t - b \cos \frac{a + b}{b} t,$$

(یک)

$$y = (a + b) \sin t - b \sin \frac{a + b}{b} t$$

است.

۲۶. در مسئله قبل، فرض کنید دایره به شعاع b در داخل دایره‌ای به شعاع $a > b$ بدون لغزش بغلظد. در این صورت، P یک منحنی به نام بتوچرخزاد را خواهد پیمود. نشان دهید که بتوچرخزاد دارای معادلات پارامتری

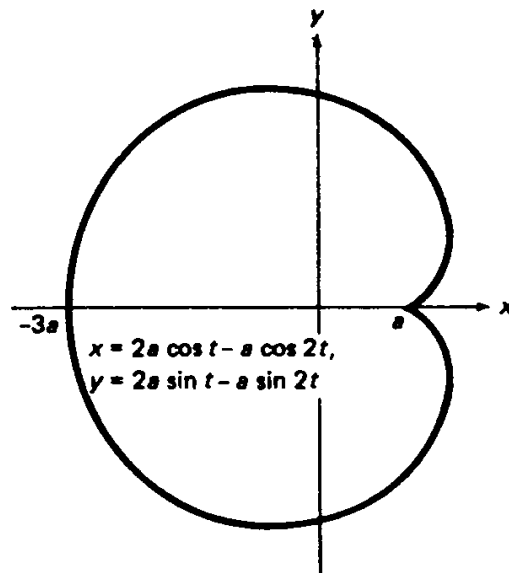
$$x = (a - b) \cos t + b \cos \frac{a - b}{b} t,$$

(دو)

$$y = (a - b) \sin t - b \sin \frac{a - b}{b} t$$

می باشد . توجه کنید که با تغییر علامت b معادلات (یک) به معادلات (دو) تبدیل می شوند .

۲۷ . اگر $b = a$ ، بروچرخزاد به منحنی شکل ۴۸ بدل می شود که به دلگون معروف است ،



دلگون

شکل ۴۸

زیرا شبیه قلب می باشد . طول دلگون را پیدا نمایید .

۲۸ . نشان دهید که اگر $b = \frac{1}{2}a$ ، بتوجرخزاد به صورت ستارهگون درمی آید که در مثال

۵ و مسئله ۲۴ بررسی شد . (به این دلیل ، ستارهگون را بتوجرخزاد چهاربازگشتی

نیز می نامند .) اگر $b = \frac{1}{2}a$ ، بتوجرخزاد چه خواهد شد ؟

۲۹ . اگر a/b عدد صحیحی باشد ، طول بروچرخزاد (یک) ، بتوجرخزاد (دو) چقدر

است ؟ جوابها را با اعمال آنها بر دلگون و ستارهگون امتحان نمایید .

۳۰ . انتگرال

$$E(k) = \int_0^{\pi/2} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 t} dt \quad (0 < k < 1)$$

یک تابع غیرمقدماتی از k به نام انتگرال بیضوی تام از نوع دوم تعریف می کند . نشان

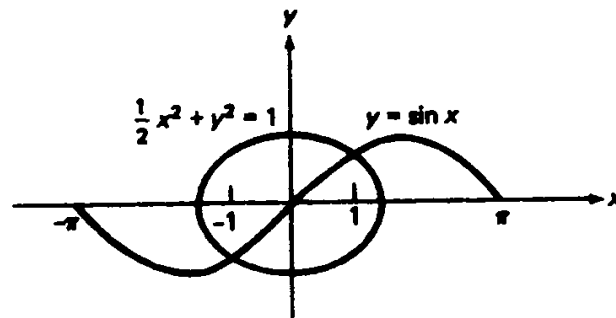
دهید که بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

به طول $L = 4aE(\sqrt{a^2 - b^2}/a)$ می باشد .

۳۱ . تحقیق کنید که یک نوسان کامل منحنی سینوس $y = \sin x$ همان طول L بیضی $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = 1$

را داراست (ر. ک. شکل ۴۹). L را به کمک مسئله ۱۹، صفحه ۶۷۴، تقریب‌نمایید.



دو منحنی با طول یکسان

شکل ۴۹

۵.۸ مساحت یک سطح دوار

فرض کنیم

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

معادلات پارامتری منحنی ساده C در صفحه xy باشند، که در آن توابع $x(t)$ و $y(t)$ به طور پیوسته مشتق‌پذیر بوده و $y(t)$ نامنفی می‌باشد. فرض کنیم C مثل شکل ۵۰ (آ) حول محور x چرخیده باشد. با این کار سطح S ، به نام سطح دوار، با محور x به عنوان محور دوران تولید می‌شود. در این صورت، همانطور که اینک نشان می‌دهیم، تعریف شایسته مساحت A سطح S از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$(1) \quad A = 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = 2\pi \int_a^b y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

برای این کار، ابتدا مسیر چندضلعی $P_0 P_1 P_2 \dots P_{n-1} P_n$ را، درست مثل صفحه ۷۳۹ که به تعریف طول C منجر شد، محاط می‌کنیم. مثل قبل، رئوس مسیر چندضلعی عبارتند از نقاط

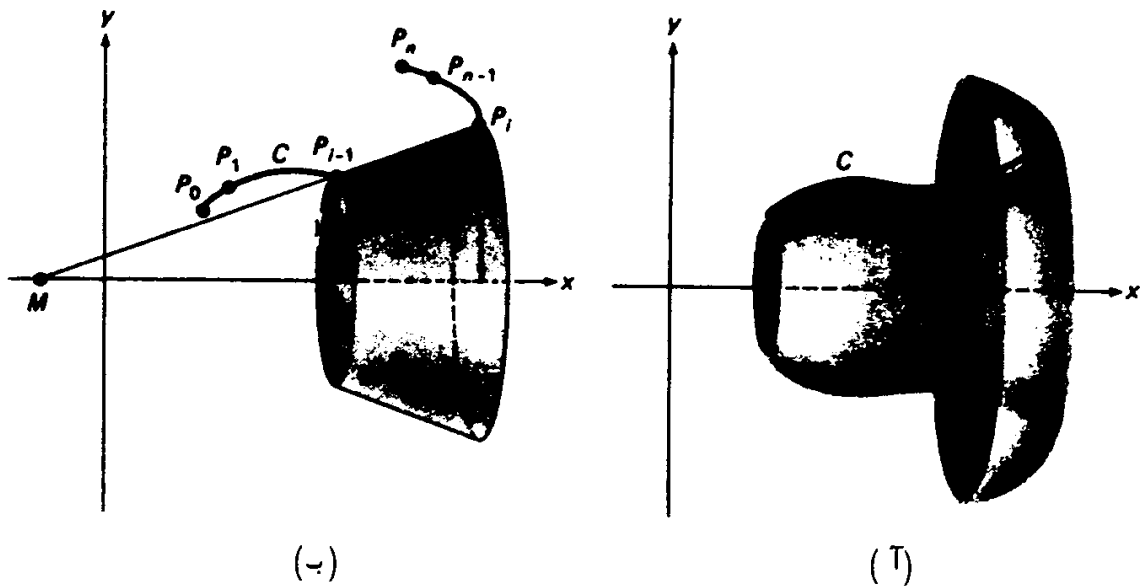
$$P_i = (x(t_i), y(t_i)) \quad (i = 0, 1, \dots, n),$$

که در آنها $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_{n-1} < t_n = b$. وقتی C حول محور x دوران یابد، هر پاره‌خط $P_{i-1} P_i$ یک نوار مخروطی B_i (سطح جانبی یک مخروط ناقص)، مثل شکل ۵۰ (ب)، را جارو می‌کند. مساحت B_i مساوی است با

$$(2) \quad A_i = \pi(y_{i-1} + y_i) |P_{i-1} P_i|,$$

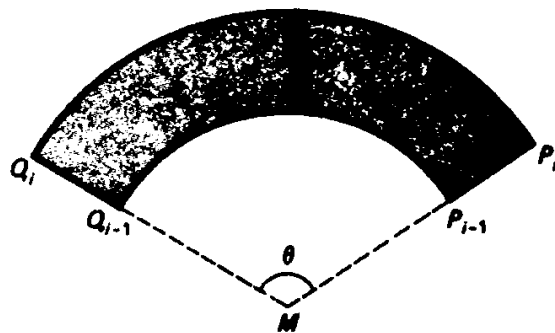
که در آن $|P_{i-1} P_i|$ طول $P_{i-1} P_i$ بوده و

$$y_i = y(t_i) \quad (i = 0, 1, \dots, n).$$



شکل ۵۰

برای اثبات (۲)، نوار B_i را در امتداد پاره خط $P_{i-1}P_i$ بریده و آن را صاف می‌کنیم تا ناحیه سایه‌دار شکل ۵۱ به دست آید (نوار را می‌توان با چسباندن اضلاع $P_{i-1}P_i$ و



شکل ۵۱

$Q_{i-1}Q_i$ مجدداً "ساخت"). در این صورت، A_i تفاضل بین مساحت دو قطاع مستدیر با زاویه مرکزی یکسان θ ، قطاع MP_iQ_i به شعاع $R = |MP_i|$ و قطاع $MP_{i-1}Q_{i-1}$ به شعاع $r = |MP_{i-1}|$ است.^۱ بنابراین،

$$A_i = \frac{1}{2} R^2 \theta - \frac{1}{2} r^2 \theta$$

۱. در اینجا فرض است که مثل شکل ۵۰ (ب) $y_{i-1} < y_i$. هرگاه $y_{i-1} > y_i$ ، آنگاه $R = |MP_{i-1}|$ و $r = |MP_i|$ ولی هرگاه $y_{i-1} = y_i$ ، آنگاه B_i یک نوار استوانه‌ای به مساحت $2\pi y_i |P_{i-1}P_i|$ می‌باشد.

(ر.ک. صفحه ۵۴). اما، طبق ساخت،

$$R\theta = 2\pi y_i, \quad r\theta = 2\pi y_{i-1}, \quad R - r = |P_{i-1}P_i|,$$

و در نتیجه،

$$A_i = \frac{1}{2}(R + r)(R - r)\theta = \frac{1}{2}(R\theta + r\theta)|P_{i-1}P_i| = \pi(y_{i-1} + y_i)|P_{i-1}P_i|,$$

که (۲) را ثابت می‌کند.

مساحت سطح به عنوان یک انتگرال. ظاهراً "معقول است که مجموع مساحت تمام n نوار مخروطی B_i را تقریب مناسبی به مساحت سطح دوار S در نظر بگیریم، که این تقریب وقتی اندازه مش

$$\mu = \max \{ \Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n \} \quad (\Delta t_i = t_i - t_{i-1})$$

کوچک شود بهتر خواهد شد. لذا، مساحت S را مساوی حد زیر تعریف می‌کنیم:

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n A_i = \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \pi(y_{i-1} + y_i)|P_{i-1}P_i| \\ &= 2\pi \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} + y_i}{2} |P_{i-1}P_i|, \end{aligned}$$

مشروط بر اینکه حد موجود و متناهی باشد. محاسبه طول $|P_{i-1}P_i|$ همانند صفحه ۷۴۰ صورت می‌گیرد، و می‌توان این حد را به صورت زیر نوشت:

$$A = 2\pi \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \frac{y_{i-1} + y_i}{2} \sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(v_i)]^2} \Delta t_i,$$

که در آن $t_{i-1} < u_i < t_i$, $t_{i-1} < v_i < t_i$. به علاوه، عدد $\frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)$ بین (یا احتمالاً) منطبق بر اعداد y_{i-1} , y_i قرار دارد؛ و در نتیجه، بنابر قضیه مقدار میانی، به ازای w_i ای در بازه $[t_{i-1}, t_i]$ ، $y(w_i) = \frac{1}{2}(y_{i-1} + y_i)$ پس نتیجه می‌شود که

$$(۳) \quad A = 2\pi \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n y(w_i) \sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(v_i)]^2} \Delta t_i.$$

اگر u_i , v_i , و w_i به ازای هر i مساوی باشند، عبارت سمت راست یک مجموع ریمان برای تابع پیوسته $y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2}$ بر بازه $[a, b]$ است، و در این صورت خواهیم داشت

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n y(u_i) \sqrt{[x'(u_i)]^2 + [y'(u_i)]^2} \Delta t_i \\ &= 2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt, \end{aligned}$$

و بدین وسیله فرمول (۱) ثابت می‌شود. در حالت کلی u_i ، v_i و w_i یکی نیستند، ولی شهوداً واضح است که وقتی $\mu \rightarrow 0$ ، طرف راست (۳) باید به همان حد

$$2\pi \int_a^b y(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = 2\pi \int_a^b y \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt$$

نزدیک شود (بالاخره، $\mu \rightarrow 0$ ایجاب می‌کند که به‌ازای هر i ، $u_i - v_i \rightarrow 0$ ، $u_i - w_i \rightarrow 0$). این در واقع درست است و می‌توان آن را با استدلالی تکنیکی که در اینجا داده نمی‌شود بدقت ثابت کرد. لذا، از این به بعد فرمول (۱) را ثابت شده می‌گیریم.

به عنوان تمرین، نشان دهید هرگاه $x(t)$ نامنفی بوده و منحنی C حول محور y به جای محور x دوران کند، آنگاه مساحت A ی سطح دوار S حاصل از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$(۱') \quad A = 2\pi \int_a^b x(t) \sqrt{[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2} dt = 2\pi \int_a^b x \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} dt.$$

مثال ۱. مساحت A ی سطح یک کره به شعاع r را بیابید.

حل. یک کره به شعاع r را می‌توان از دوران نیمدایره^۶

$$x = r \cos t, \quad y = r \sin t \quad (0 \leq t \leq \pi)$$

حول محور x تولید کرد (ر.ک. شکل ۱۸، صفحه ۷۱۵، که در آن نیمدایره بانمودار تابع $y = \sqrt{r^2 - x^2}$ مشخص شده است). با اعمال فرمول (۱) فوراً^۷ به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} A &= 2\pi \int_0^\pi r \sin t \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt \\ &= 2\pi r^2 \int_0^\pi \sin t dt = -2\pi r^2 \cos t \Big|_0^\pi = 4\pi r^2, \end{aligned}$$

که فرمولی را ثابت می‌کند که از آن قبلاً^۸ چند بار استفاده کرده‌ایم.

مثال ۲. مساحت A ی سطح چنبره^۹ شکل ۲۳، صفحه ۷۱۴، را بیابید؛ یعنی، مساحت سطح حاصل از دوران دایره^{۱۰} $(x - a)^2 + y^2 = r^2$ حول محور y را پیدا نمایید.

حل. دایره را می‌توان با معادلات پارامتری زیر نمایش داد:

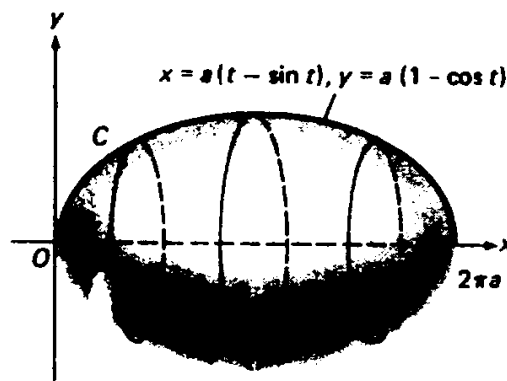
$$x = a + r \cos t, \quad y = r \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi).$$

این بار فرمول (۱') را به کار برده، به دست می‌آوریم

$$A = 2\pi \int_0^{2\pi} (a + r \cos t) \sqrt{(-r \sin t)^2 + (r \cos t)^2} dt$$

$$= 2\pi r \int_0^{2\pi} (a + r \cos t) dt = 2\pi r \left[at + r \sin t \right]_0^{2\pi} = 4\pi^2 ra.$$

مثال ۳. فرض کنیم C قوس کاملی از یک چرخزاد باشد. مساحت A ی سطح S حاصل از دوران C حول محور x (سطح به شکل توپ راگی در شکل ۵۲) را بیابید.



شکل ۵۲

حل. مثل مثال ۲، صفحه ۷۴۲، C دارای معادلات پارامتری

$$x = a(t - \sin t), \quad y = a(1 - \cos t) \quad (0 \leq t \leq 2\pi, a > 0)$$

است و

$$\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 = 4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}.$$

چون $a > 0$ و، به ازای $0 \leq t \leq 2\pi$ ، $\sin(t/2) \geq 0$ ، به کمک (۱) پس از جانشانی $u = t/2$ معلوم می‌شود که

$$A = 2\pi \int_0^{2\pi} a(1 - \cos t) \sqrt{4a^2 \sin^2 \frac{t}{2}} dt = 4\pi a^2 \int_0^{2\pi} (1 - \cos t) \sin \frac{t}{2} dt$$

$$= 8\pi a^2 \int_0^{2\pi} \sin^3 \frac{t}{2} dt = 16\pi a^2 \int_0^{\pi} \sin^3 u du.$$

$$\begin{aligned} \int_0^{\pi} \sin^3 u \, du &= \int_0^{\pi} (1 - \cos^2 u) \sin u \, du \\ &= \left[-\cos u + \frac{\cos^3 u}{3} \right]_0^{\pi} = 1 - \frac{1}{3} + 1 - \frac{1}{3} = \frac{4}{3}, \end{aligned}$$

و در نتیجه،

$$A = \frac{64}{3} \pi a^2.$$

فرض کنیم C نمودار تابع به طور پیوسته مشتقپذیر

$$y = f(x) \quad (a \leq x \leq b)$$

باشد. در این صورت، C دارای معادلات پارامتری

$$x = t, \quad y = f(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

است، و فرمول (۱) مساحت سطح حاصل از دوران C حول محور x ، پس از بازگرداندن متغیر انتگرالگیری از t به x ، به صورت زیر درمی آید:

$$(۴) \quad A = 2\pi \int_a^b f(x) \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx = 2\pi \int_a^b y \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx.$$

به همین نحو، در این حالت فرمول (۱') برای مساحت سطح حاصل از دوران حول محور y به صورت زیر درمی آید:

$$(۵) \quad A = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + [f'(x)]^2} \, dx = 2\pi \int_a^b x \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2} \, dx.$$

به عنوان تمرین، نشان دهید که هرگاه منحنی C نمودار تابع به طور پیوسته مشتقپذیر

$$x = g(y) \quad (a \leq y \leq b)$$

باشد، آنگاه مساحت سطح حاصل از دوران C حول محور x مساوی است با

$$(۴') \quad A = 2\pi \int_a^b y \sqrt{[g'(y)]^2 + 1} \, dy = 2\pi \int_a^b y \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} \, dy,$$

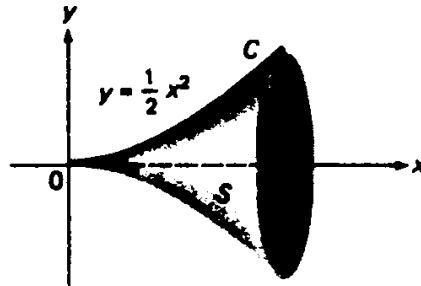
حال آنکه مساحت سطح حاصل از دوران C حول محور y مساوی است با

$$(۵') \quad A = 2\pi \int_a^b g(y) \sqrt{[g'(y)]^2 + 1} \, dy = 2\pi \int_a^b x \sqrt{\left(\frac{dx}{dy}\right)^2 + 1} \, dy.$$

مثال ۰۴. فرض کنیم C همان قوس سهموی شکل ۴۴، صفحه ۷۴۵، باشد؛ یعنی،

$$(۶) \quad y = \frac{1}{2} x^2 \quad (0 \leq x \leq 1),$$

و فرض کنیم S سطح حاصل از دوران C حول محور x باشد (شکل بوقی شکل ۵۳). پس $dy/dx = x$ ، و از (۴) نتیجه می‌شود که



شکل ۵۳

$$A = \pi \int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^2} dx.$$

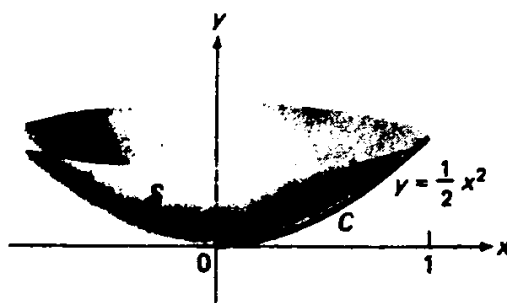
برای محاسبه انتگرال، قرار می‌دهیم $x = \tan u$ و به کمک مثال ۶، صفحه ۶۲۰، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} \int_0^1 x^2 \sqrt{1+x^2} dx &= \int_0^{\pi/4} \tan^2 u \sqrt{1+\tan^2 u} \sec^2 u du = \int_0^{\pi/4} \tan^2 u \sec^3 u du \\ &= \left[\frac{1}{4} \sec^3 u \tan u - \frac{1}{8} \sec u \tan u - \frac{1}{8} \ln |\sec u + \tan u| \right]_0^{\pi/4} \\ &= \frac{1}{2} \sqrt{2} - \frac{1}{8} \sqrt{2} - \frac{1}{8} \ln(\sqrt{2} + 1), \end{aligned}$$

پس نتیجه می‌شود که

$$A = \left[\frac{3}{8} \sqrt{2} - \frac{1}{8} \ln(\sqrt{2} + 1) \right] \pi \approx 0.42\pi.$$

مثال ۵. از دوران قوس سهموی (۶) حول محور y سطح کاسه شکل S شکل ۵۴ (بخشی از یک سهمی گون دوار) به دست می‌آید. در این صورت، بنابر (۵)،



شکل ۵۴

$$A = 2\pi \int_0^1 x\sqrt{1+x^2} dx = \frac{2\pi}{3} (1+x^2)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{2\pi}{3} (2^{3/2} - 1) \approx 1.22\pi.$$

مسائل

مساحت سطح حاصل از دوران منحنی پارامتری داده شده حول محور ذکر شده را بیابید .

۱. محور x ، $x = t^3, y = \frac{2}{3}t^2$ ($0 \leq t \leq 1$)
۲. محور y ، $x = 1/t, y = \ln t$ ($\frac{1}{2} \leq t \leq 1$)
۳. محور y ، $x = \sin^2 t, y = \cos^2 t$ ($0 \leq t \leq \pi/2$)
۴. محور x ، $x = t + \sin t, y = \cos t$ ($0 \leq t \leq \pi/3$)
۵. محور x ، $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t$ ($0 \leq t \leq \pi/2$)
۶. محور y ، $x = 2e^{-t}, y = e^{-2t}$ ($0 \leq t < \infty$)
۷. محور y ، $x = a \cos^3 t, y = a \sin^3 t$ ($0 \leq t \leq \pi, a > 0$)
۸. محور x ، $x = 2 \cos t + \cos 2t, y = 2 \sin t - \sin 2t$ ($0 \leq t \leq 2\pi/3$)
۹. فرض کنید ناحیهء تحت منحنی

$$y = a \cosh \frac{x}{a} \quad (0 \leq x \leq b, a > 0)$$

حول محور x دوران کرده باشد . نسبت حجم V جسم دوار حاصل به مساحت سطح جانبی A آن چقدر است ؟

۱۰. تحقیق کنید که فرمول (۱) مساحت A ی سطح نوار مخروطی حاصل از دوران پاره خط واصل بین دو نقطهء دلخواه $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ حول محور x را دقیقاً " می دهد (فرض کنیم $y_1 \geq 0, y_2 \geq 0$) . به عنوان حالتی خاص ، فرمول $A = \pi rL$ را برای مساحت جانبی یک مخروط مستدیر قائم به شعاع قاعدهء r و ارتفاع مایل L نتیجه بگیرید .

مساحت سطح حاصل از دوران منحنی داده شده (نمودار تابع x یا y) حول محور ذکر شده را بیابید .

۱۱. محور y ، $x = y^{1/3}$ ($0 \leq y \leq 1$)
۱۲. $x = -1$ خط ، $y = \sin x$ ($0 \leq x \leq \pi/2$)
۱۳. $x = 1$ خط ، $x = \sin y$ ($-\pi \leq y \leq 0$)
۱۴. محور y ، $y = |1-x| + 1-x$ ($0 \leq x < \infty$)
۱۵. محور x ، $y = \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{2}x^{-1}$ ($1 \leq x \leq \sqrt{2}$)

۱۶. $y = e^{-x}$ ($0 \leq x < \infty$) ، محور x

۱۷. $y = \frac{1}{4}x^2 - \frac{1}{2} \ln x$ ($1 \leq x \leq e$) ، محور x

۱۸. $x = \frac{1}{8}y^2 - \ln y$ ($1 \leq y \leq 4$) ، محور x

۱۹. فرض کنید S یک منطقه^۶ گروی به ارتفاع h باشد؛ یعنی، سطح جدا شده از یک کره به شعاع R به وسیله^۶ دو صفحه^۶ موازی به فاصله^۶ h از یکدیگر ($0 < h \leq 2R$) که هردو کره را قطع می‌کنند. مساحت S را یافته، و نشان دهید که از جای صفحات مستقل است (ر.ک. شکل ۱۵، صفحه ۷۰۷).

۲۰. فرض کنید منحنی $y = 1/x$ ($x \geq 1$) حول محور x دوران کرده جسم دوار بی‌کران S را تولید کند. نشان دهید S دارای حجم متناهی V است، ولی مساحت A ی سطح نامتناهی می‌باشد. V را بیابید. آیا سطح S (که گاهی "بوق گابریل"^۱ نام دارد) را می‌توان با مقداری متناهی رنگ نقاشی کرد؟

۲۱. فرض کنید S سطح حاصل از دوران قوسی از دایره^۶ $x^2 + y^2 = 1$ در ربع اول حول خط $x + y = 1$ باشد. مساحت S چقدر است؟

۶.۸ مطالب بیشتر در باب کار

فرض کنیم s مختص موضع ذره‌ای باشد که در امتداد یک خط مستقیم حرکت می‌کند، و بر آن نیروی متغیر $F = F(s)$ اثر نماید. در این صورت، مثل صفحه^۶ ۴۲۸، کار انجام شده توسط این نیرو بر ذره عبارت است از

$$(1) \quad W = \int_a^b F(s) ds,$$

که در آن a موضع شروع و b موضع پایان ذره است. بخصوص، اگر $F(s)$ دارای مقدار ثابت F باشد، فرمول (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

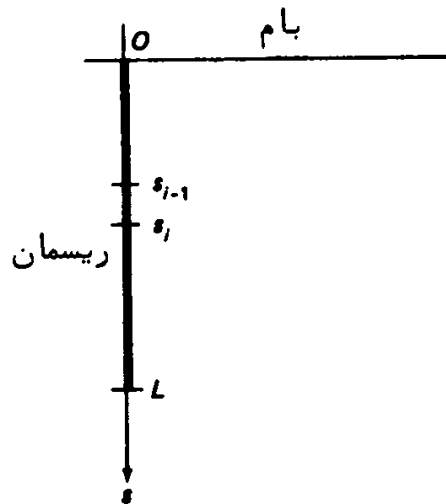
$$W = F \int_a^b ds = F \cdot (b - a),$$

یعنی، کار مساوی حاصل ضرب نیرو در تغییر مکان $b - a$ (فاصله^۶ پیموده شده توسط ذره) است. حال مسائلی را در نظر می‌گیریم که در آنها کار بر یک "محیط پیوسته" مانند یک طناب یا یک مایع انجام می‌شود که می‌توان آن را متشکل از تعداد بسیار زیادی ذره گرفت.

مثال ۱. یک طناب سنگین به طول L فوت و به وزن c پوند بر فوت از لبه^۶ یک بام آویزان

است. چقدر کار لازم است تا طناب را به بالای بام بکشانیم؟ از کار انجام شده بر طناب پس از گذشتن از لبه بام صرف نظر کنید.

حل. همانند در شکل ۵۵، فرض کنیم محور s قائم و روبه پایین بوده و مبدأ لبه بام باشد. در این



شکل ۵۵

صورت، طناب ابتدا بازه $[0, L]$ را اشغال می‌کند. با معرفی نقاط تقسیم s_i که در نامساویهای $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{n-1} < s_n = L$ را به تعداد زیادی زیر بازه $[s_{i-1}, s_i]$ افراز کرده، بدین وسیله طناب را به تعداد زیادی "عنصر" کوچک تقسیم می‌کنیم که هر یک را می‌توان یک ذره در نظر گرفت. وزن عنصری که ابتدا زیر بازه $[s_{i-1}, s_i]$ را اشغال می‌کند $c \Delta s_i$ پوند است، که $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ ، و این نیروی ثقلی وارد بر عنصری است که در بالا بردن آن باید انجام داد. به علاوه، عنصر i م طناب با رفتن به بالای بام تغییر مکانی تقریباً مساوی s_i (یا هر عدد دیگری در بازه $[s_{i-1}, s_i]$) خواهد داشت؛ و در نتیجه، مقدار کار لازم برای بالا بردن این عنصر تقریباً "مساوی" است با $(c \Delta s_i) s_i$ فوت - پوند. هر تعریف معقول از مقدار کل کار W لازم برای بردن تمام طناب به بالای بام باید در این شرط صدق کند که W مجموع کارهای لازم برای بالا بردن تک تک عناصر طناب باشد. بنابراین،

$$(۲) \quad W \approx \sum_{i=1}^n c s_i \Delta s_i$$

که در آن تقریب با کوچک شدن عناصر طناب، یعنی وقتی اندازه $\mu = \max \{ \Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n \}$ به صفر نزدیک می‌شود، بهتر خواهد شد. حال، با توجه به اینکه طرف راست (۲) مجموع ریسمانی برای تابع cs بر بازه $[0, L]$ است، طبق تعریف قرار می‌دهیم

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n cs_i \Delta s_i = \int_0^L cs \, ds.$$

البته، مقدار این انتگرال مساوی است با

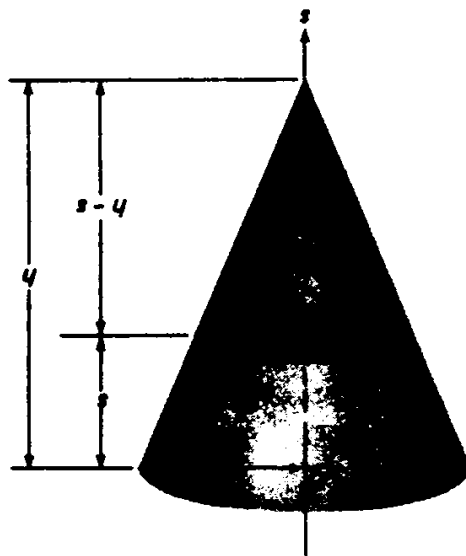
$$W = \frac{1}{2} cs^2 \Big|_0^L = \frac{1}{2} cL^2.$$

مثلاً، اگر طناب 30 ft طول و 1.5 lb/ft وزن داشته باشد، مقدار کار لازم برای بردن آن به بالای بام مساوی است با $\frac{1}{2}(1.5)(30)^2 = 675 \text{ ft-lb}$.

کار انجام شده در پمپاژ یک مایع. در مثال زیر از همین نوع استدلال برای حل یک مسئله هیدرولیک استفاده می‌کنیم.

مثال ۲. بشکه‌ای به شکل یک مخروط مستدیر قائم معکوس به شعاع قاعده r و ارتفاع h کاملاً از مایعی که چگالی اش (جرم بر واحد حجم) ρ است پر شده است. چقدر کار لازم است تا تمام مایع از سر بشکه با لوله‌ای که درست زیر سطح آن قرار گرفته خارج گردد؟

حل. همانند شکل ۵۶، محور تقارن مخروط را محور s می‌گیریم که جهتش به طور قائم روبه



شکل ۵۶

پایین بوده و مبدأ آن مرکز قاعده مخروط باشد. فرض کنیم بازه $[0, h]$ به وسیله نقاط تقسیم s_i صادق در نامساویهای $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \dots < s_{n-1} < s_n = h$ به تعداد

زیادی زیربازه $[s_{i-1}, s_i]$ تقسیم شده باشد. در این صورت، صفحات عمود بر محور s در نقاط به مختصات s_i ($i = 0, 1, \dots, n$) مخروط پراز مایع را به n لایه تقسیم می‌کنند. فرض کنیم $A(s)$ مساحت مقطع عرضی مخروط در s باشد؛ یعنی، قرص مستدیر جدا شده از مخروط به وسیلهٔ صفحهٔ عمود بر محور مخروط در نقطه به مختص s . لایهٔ i بین صفحات عمود بر محور s در نقاط به مختصات s_{i-1} و s_i در واقع یک مخروط ناقص است، ولی حجمش تقریباً " مساوی حجم یک استوانهٔ مستدیر قائم به مساحت قاعدهٔ $A(s_i)$ و ارتفاع $\Delta s_i = s_i - s_{i-1}$ ، یعنی $A(s_i)\Delta s_i$ (همین نوع تقریب در سراسر بخش ۱۰.۸ در محاسبهٔ حجم به روش مقاطع عرضی به کار رفت)، می‌باشد. لذا، وزن مایع در لایهٔ i م تقریباً $\rho g A(s_i)\Delta s_i$ است، که در آن ρ چگالی مایع و g شتاب ثقل می‌باشد. به علاوه، لایهٔ i م مایع برای رفتن تا سر بشکه به اندازهٔ تقریباً s_i جابجا می‌شود؛ و در نتیجه، مقدار کار لازم برای بالا بردن لایه تقریباً $\rho g A(s_i)s_i\Delta s_i$ می‌باشد. فرض کنیم W کار کل لازم برای پمپاژ تمام مایع تا سر بشکه باشد. در این صورت، بنا بر همان استدلال مثال پیش،

$$(۳) \quad W \approx \sum_{i=1}^n \rho g A(s_i)s_i \Delta s_i,$$

که در آن وقتی لایه‌های مایع همه باریک شوند، یعنی اندازهٔ $\mu = \max \{ \Delta s_1, \Delta s_2, \dots, \Delta s_n \}$ به صفر نزدیک شود، تقریب بهتر خواهد شد. بنابراین، چون طرف راست (۳) یک مجموع ریمان برای تابع $\rho g A(s)s$ بر بازه $[0, h]$ است، طبق تعریف قرار می‌دهیم

$$W = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \rho g A(s_i)s_i \Delta s_i = \int_0^h \rho g A(s)s \, ds.$$

برای محاسبهٔ انتگرال، فرض کنیم x شعاع مقطع عرضی مخروط در s مانند شکل باشد. در این صورت، بنا بر تشابه مثلثها،

$$\frac{x}{h-s} = \frac{r}{h},$$

و در نتیجه،

$$x = \frac{r}{h}(h-s), \quad A(s) = \pi x^2 = \pi \left(\frac{r}{h}\right)^2 (h-s)^2.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned} W &= \int_0^h \rho g A(s)s \, ds = \pi \rho g \left(\frac{r}{h}\right)^2 \int_0^h (h^2 - 2hs + s^2)s \, ds \\ &= \pi \rho g \left(\frac{r}{h}\right)^2 \left[\frac{1}{2} h^2 s^2 - \frac{2}{3} h s^3 + \frac{1}{4} s^4 \right]_0^h = \frac{1}{12} \pi \rho g r^2 h^2. \end{aligned}$$

مثلاً، فرض کنیم بشکه به شعاع قاعده ۲ m و ارتفاع ۶ m بوده و پراز گلیسرین به چگالی 1260 kg/m^3 باشد. در این صورت، با انتخاب $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$ ، معلوم می‌شود که کار لازم برای تخلیه بشکه در دستگاه متری عبارت است از

$$W = \frac{1}{12} \pi (1260)(9.8)(2^2)(6^2) = 148,176\pi \approx \text{ژول } 465,510$$

یا، در دستگاه مهندسی، حدوداً " $343,360 \text{ ft-lb}$ " می‌باشد. ^۱ برای آب، که چگالی 1000 kg/m^3 (در 4°C) است، مقدار کار لازم برای تخلیه بشکه تقریباً " $(1000/1260)$ " $369,450$ ژول $\approx (465,510)$ می‌باشد.

توان. میزان تغییر کار نسبت به زمان، یعنی dW/dt ، را توان می‌نامند (ر.ک. مسئله ۲۹، صفحه ۴۳۸). واحد mks توان وات است و آن برابر است با ۱ ژول بر ثانیه. واحد مهم دیگر توان اسب بخار است و آن مساوی ۷۴۶ وات یا 550 ft-lb/sec می‌باشد.

مثال ۳. یک پمپ بشکه پراز گلیسرین مثال قبل را در ۳۰ دقیقه تخلیه می‌کند. توان پمپ چقدر است؟

حل. کار پمپ در ۳۰ دقیقه تقریباً " $465,510$ ژول است. بنابراین، توان آن مساوی است با

$$258.6 \text{ وات} \approx \frac{465,510 \text{ ژول}}{30(60) \text{ ثانیه}}$$

یا، معادلاً،

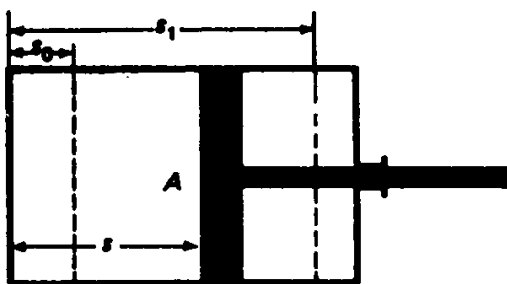
$$0.35 \text{ اسب بخار} \approx \frac{258.6}{746}$$

در اینجا فرض می‌کنیم پمپ با سرعت ثابت کار کند و مایع را با سرعت قابل چشم‌پوشی خارج

۱. در دستگاه واحدهای سانتیمتر-گرم-ثانیه (cgs)، واحد نیرو دین است و آن نیرویی است که به جرم ۱ گرم شتاب 1 cm/sec^2 وارد می‌کند، حال آنکه در دستگاه متر-کیلوگرم-ثانیه (mks)، واحد نیرو نیوتن است و آن نیرویی است که به جرم ۱ kg شتاب 1 m/sec^2 می‌دهد. واحدهای نظیر برای کار عبارتند از دین-سانتیمتر یا ارگ و نیوتن-متر یا ژول ($10^7 \text{ ارگ} = 1 \text{ ژول}$).

می‌کند؛ در نتیجه، تمام قدرتش صرف بالابردن مایع شده و به مایع انرژی جنبشی نمی‌دهد. برای ساده بودن وضع، نیز فرض می‌کنیم (که نسبتاً "غیرواقعی" است) پمپ آنقدر کارا است که تفاضل بین توان ورودی و توان خروجی آن قابل چشم‌پوشی می‌باشد.

مثال ۴. در یک استوانهٔ مستدیر با مساحت مقطع عرضی A که به یک پیستون قابل حرکت مجهز شده است گاز وارد کرده‌ایم (ر.ک. شکل ۵۷). کار انجام شده توسط گاز بر پیستون



استوانهٔ دارای یک پیستون

شکل ۵۷

در انبساط از حجم اولیه V_0 به حجم نهایی V_1 را بیابید.

حل. فرض کنیم p فشار (یعنی، نیرو بر واحد مساحت) گاز بر سطح پیستون بوده، و s فاصلهٔ بین پیستون و سر استوانه باشد. همچنین، انبساط گاز پیستون را از موضع اولیه s_0 تا موضع نهایی s_1 حرکت می‌دهد. وقتی گاز منبسط می‌شود، فشارش تغییر می‌کند (در واقع کاهش می‌یابد)؛ و در نتیجه، همین امر در مورد نیروی pA وارد بر پیستون صادق است. لذا، کار W وارد بر پیستون به وسیلهٔ انبساط گاز مساوی است با

$$W = \int_{s_0}^{s_1} pA \, ds.$$

در اینجا فشار تابعی از مختص s است، ولی می‌توان آن را به صورت تابع $p = p(V)$ از حجم $V = As$ گاز محبوس در نظر گرفت. بنابراین، اگر متغیر انتگرالگیری را از s به V تغییر دهیم، می‌توانیم W را به شکل معادل زیر بنویسیم:

$$(۴) \quad W = \int_{V_0}^{V_1} p \, dV,$$

که در آن V_0 حجم اولیه و V_1 حجم نهایی می‌باشد.

انبساط همدم. مثال ۴ را ادامه داده، فرض می‌کنیم گاز به‌طور همدم، یعنی دردمای ثابت

منبسط شود. در این صورت، فشار و حجم به وسیله قانون بویل^۱

$$(۵) \quad pV = C = \text{ثابت}$$

با تقریبی مناسب، دست کم اگر نه فشار و نه دما خیلی پایین نباشند، به هم مربوط می شوند. توجه کنید که $C = p_0 V_0 = p_1 V_1$ ، که در آن p_0 فشار اولیه و p_1 فشار نهایی گاز می باشد. پس از (۴) و (۵) نتیجه می شود که

$$(۶) \quad W = \int_{V_0}^{V_1} p dV = C \int_{V_0}^{V_1} \frac{dV}{V} = C \ln V \Big|_{V_0}^{V_1} = C \ln \frac{V_1}{V_0} = p_0 V_0 \ln \frac{V_1}{V_0}.$$

مثلاً، در انبساط همدمما از حجم اولیه 2 ft^3 به حجم نهایی 10 ft^3 ، گاز که ابتدا در فشار 50 lb/in^2 است کاری مساوی

$$144(50)(2) \ln \frac{10}{2} = 14,400 \ln 5 \approx 23,176 \text{ ft-lb}$$

انجام می دهد (۱۴۴ عامل تبدیل از lb/in^2 به lb/ft^2 می باشد).

انبساط بی دررو (اختیاری). از آن سو، فرض کنیم گاز به طور بی دررو، یعنی بدون معاوضه گرما با محیط اطرافش، منبسط شود. در این صورت، فشار و حجم گاز با فرمول

$$(۵') \quad pV^k = C = \text{ثابت}$$

به هم مربوط می شوند، که در آن k ثابت دیگری است که به ماهیت گاز بستگی دارد؛ k برای گازهای تک اتمی ۱.۶۷ و برای گازهای دو اتمی ۱.۴۰ می باشد. از روابط (۴) و (۵') معلوم می شود که

$$W = \int_{V_0}^{V_1} p dV = C \int_{V_0}^{V_1} V^{-k} dV = C \frac{V^{1-k}}{1-k} \Big|_{V_0}^{V_1} = \frac{C}{1-k} (V_1^{1-k} - V_0^{1-k}).$$

اما $C = p_0 V_0^k = p_1 V_1^k$ ، که در آن p_0 فشار اولیه و p_1 فشار نهایی گاز است؛ و لذا،

$$(۷) \quad W = \frac{p_0 V_0 - p_1 V_1}{k - 1}.$$

در انبساط $V_1 > V_0$ ولی در تراکم $V_1 < V_0$. در تراکم بی دررو، کار W' انجام شده توسط پیستون بر گاز قرینه (۷) است؛ یعنی،

$$(۷') \quad W' = -W = \frac{p_1 V_1 - p_0 V_0}{k - 1}.$$

این را می‌توان پس از جانشانی مقدار p_1 حاصل از حل معادله $p_1 V_1^k = p_0 V_0^k$ به شکل زیر نوشت:

$$(۸) \quad W' = \frac{p_0 V_0}{k-1} \left[\left(\frac{V_0}{V_1} \right)^{k-1} - 1 \right]$$

مثلاً، فرض کنیم هوا با فشار اولیه 25 lb/in^2 به طرز بی‌دررو از حجم اولیه 900 in^3 به حجم نهایی 60 in^3 متراکم شود. در این صورت، چون برای هوا $k = 1.4$ ،

$$W' = \frac{1}{12} \frac{25(900)}{0.4} \left[\left(\frac{900}{60} \right)^{0.4} - 1 \right] = 4687.5 [(15)^{0.4} - 1] \approx 9160 \text{ ft-lb}$$

($\frac{1}{12}$ عامل تبدیل از in-lb به ft-lb است). به عنوان تمرین، نشان دهید که فقط 55% کار برای تراکم همین هوا به‌طور هم‌دما لازم می‌باشد.

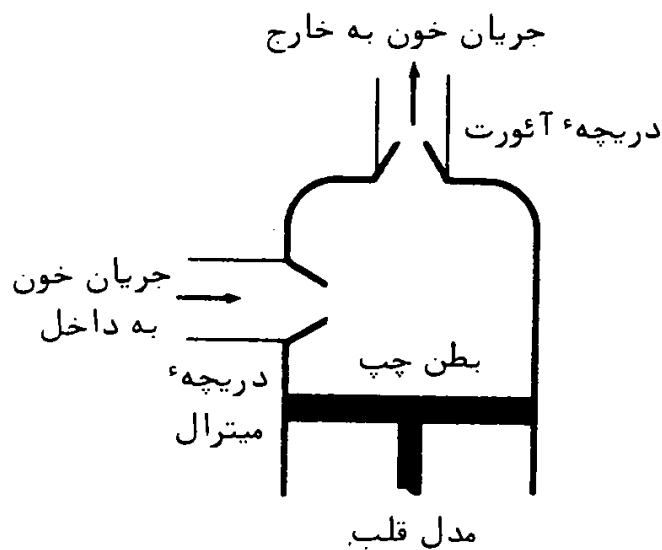
مسائل

۱. یک کابل سنگین به طول 20 m و چگالی خطی 5 kg/m ابتدا روی زمین قرار دارد. سپس آن را به‌طور قائم بالا می‌بریم تا انتهای آزاد آن در 4 mی زمین آویزان شود. چقدر کار روی کابل انجام شده است.
۲. اطاقک یک آسانسور به وزن 1 تن از کابلی به طول 100 ft و وزن 10 lb/ft آویزان بوده و با پیچیدن کابل روی یک قرقره در بالای تیر آسانسور بالا می‌رود.
۳. وقتی اطاقک 50 ft از پایین‌ترین موضع خود بالا رود، چقدر کار بر آن؟ بر کابل صورت گرفته است؟
۴. وقتی اطاقک از ارتفاع 50 ft به ارتفاع 75 ft برسد، چقدر کار بر آن و بر کابل صورت گرفته است؟
۵. سطلی پر از آب به‌طور قائم با سرعت 2.5 ft/sec به بالا برده شده است. وزن سطل 5 lb بوده و ابتدا شامل 45 lb آب است، ولی همین‌طور که بالا می‌رود، آب به‌میزان 1.25 lb/sec از آن نشت می‌کند. چقدر کار لازم است تا سطل سوراخ به ارتفاع 50 ft؟ به ارتفاع 100 ft برسد؟
۶. چقدر طول می‌کشد تا یک پمپ به توان 2-hp مقدار $150,000 \text{ ft}^3$ آب را از سطح یک دریاچه به ارتفاع 12 ft بالای سطح دریاچه برساند؟ (چگالی وزن آب با تقریبی مناسب مساوی 62.5 lb/ft^3 است.)
۷. دو آبشار روی یک رودخانه قرار دارند. یکی در ارتفاع 45 ft و دیگری در ارتفاع 30 ft واقع است. اگر سرعت آب رودخانه $2250 \text{ ft}^3/\text{sec}$ باشد، توان کل دو آبشار چقدر

است؟

۷. بشکهای به ارتفاع h از مایعی به چگالی ρ تا عمق d پر شده است. فرض کنید صفحه افقی به فاصله s پایین‌تر از سر بشکه آن را در ناحیه‌ای به مساحت $A(s)$ قطع کند. کار W لازم برای پمپاژ تمام مایع از سر بشکه را بیابید.
۸. چاهی به قطر 4 ft و عمق 30 ft تا نصف آب دارد. کار لازم برای پمپاژ تمام آب تا سر چاه را بیابید. چقدر کار لازم است تا 250 گالن آب پمپاژ گردد؟ (یک گالن 231 اینچ مکعب است.)
۹. یک کاسه از مایعی به چگالی ρ پر شده و به شکل نیمکره‌ای به شعاع r است. چقدر کار لازم است تا تمام مایع تا ارتفاع h بالای کاسه برده شود؟
۱۰. فرض کنید کار لازم برای پر کردن یک بشکه به ارتفاع h از یک مایع به وسیله سوراخی در ته آن W_1 باشد. اگر W_2 کار لازم برای تخلیه بشکه به وسیله پمپاژ تا سر آن باشد، W_1 چه رابطه‌ای با W_2 دارد؟
۱۱. بشکهای به شکل یک مخروط مستدیر قائم وارون به شعاع قاعده 3 ft و ارتفاع 5 ft تا عمق 4 ft از آب پر شده است. با استفاده از فرمول منشور (یک)، صفحه 673 ، کار لازم برای پمپاژ تمام آب به سر بشکه؛ تا ارتفاع 2 ft بالای بشکه را بیابید.
۱۲. بشکهای به شکل هرم قائم به ارتفاع h که قاعده‌اش مربعی به طول ضلع a است (این هرم در شکل ۵، صفحه ۷۰۰، نموده شده است). کار لازم برای پر کردن بشکه با مایعی به چگالی ρ از طریق سوراخی در ته آن (قاعده مربع) را بیابید. همچنین، کار لازم برای تخلیه بشکه از طریق سوراخی در سر آن (نوک هرم) را پیدا کنید.
۱۳. هرم بزرگ چه اویس در گیزه نزدیک قاهره در اصل به ارتفاع 147 m با قاعده مربع به طول ضلع 230 m بوده است. این هرم از بلوکهای سنگ آهک با چگالی تقریبی 2500 kg/m^3 ساخته شده است. مقدار کار و تعداد افراد و سالهای لازم برای ساختن هرم را تخمین بزنید. فرض کنید متوسط کار کارگر 50 ساعت در هفته، یک سال کاریک سال استراحت، بوده و در هر دقیقه کار تقریباً 50 kg به مسافت 1 m بالابرده می‌شود.
۱۴. پیستون یک موتور بخار 90 ضربه در دقیقه، هر یک به طول 15 in می‌زند. فرض کنید مساحت مقطع عرضی استوانه 48 in^2 بوده، و فشار متوسط بر پیستون در طول یک ضربه 60 lb/in^2 باشد. اگر موتور به طور کامل کار کند، متوسط خروجی موتور چقدر است؟
۱۵. چقدر کار لازم است تا 720 in^3 هلیوم در فشار اولیه 20 lb/in^2 به حجم نهایی 40 in^3 به‌طور همدما؟ به‌طور بی‌دررو متراکم شود؟ (هلیوم یک گاز تک اتمی است.)

۱۶. یک گاز در انبساط همدمای از حجم اولیه 40 in^3 و فشار 16 اتمسفر $1568 \text{ ft}\cdot\text{lb}$ کار انجام می‌دهد. حجم و فشار نهایی گاز را بیابید. (یک اتمسفر مساوی $14.7 \text{ lb}/\text{in}^2$ است.)
۱۷. فرض کنید $p = p(h)$ و $\rho = \rho(h)$ فشار و چگالی هوا در ارتفاع h از سطح دریا باشند. هرگاه دما ثابت باشد، آنگاه $p = k\rho$ ، که در آن k ثابت تناسب است (این صورت دیگری است از قانون بویل). از تغییرات دمای هوا نسبت به ارتفاع صرف‌نظر کرده، معادله فشاری $p = p_0 e^{-kh}$ را به دست آورید، که در آن p_0 فشار هوا در سطح دریا و g شتاب ثقل می‌باشد.
۱۸. قلب انسان از دیدگاه مکانیکی یک پمپ است (ر.ک. شکل ۵۸) که در آن خون از دریچه میترال وارد بطن چپ شده و سپس وقتی ماهیچه قلب منقبض می‌شود از دریچه آئورت خارج می‌گردد، و بدین ترتیب حجم قلب کاهش می‌یابد. در یک قلب جوان و سالم، در هر انقباض فشار دیواره قلب بر خون به‌طور تقریباً "خطی از فشار



شکل ۵۸

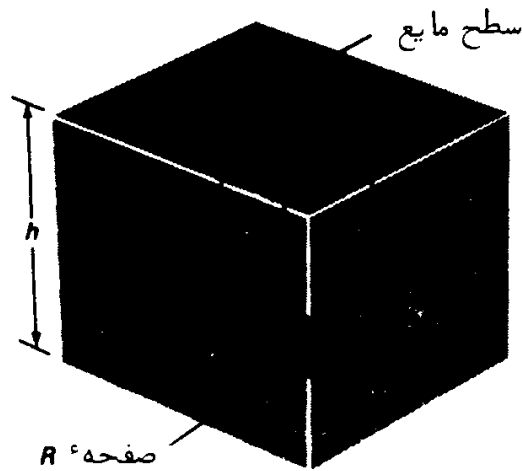
انبساطی 80 mm Hg (میلیمتر جیوه) به فشار انقباضی 120 mm Hg افزایش می‌یابد. کار W انجام شده توسط قلب در یک ضربه آن را در صورتی تخمین بزنید که تغییر حجم خون در یک انقباض تقریباً 75 cm^3 باشد. ($\text{cm}^2 / \text{دین}$)

• $(100 \text{ mm Hg} \approx 1.33 \times 10^5)$

۷.۸ فشار مایع (دلخواه)

یک صفحه تخت نازک به شکل ناحیه مسطح R به مساحت A است که در مایعی فرو رفته است. فرض کنیم مایع به چگالی جرم ρ ، یا معادلاً "بسته چگالی وزن $\delta = \rho g$ ، باشد

که در آن g شتاب ثقل است. فرض کنیم R افقی بوده و در عمق h قرار داشته باشد؛ در نتیجه، R و سطح آزاد مایع مثل شکل ۵۹ در فاصله h از هم قرار دارند. پس نیروی F وارد از طرف مایع بر R چیزی جز وزن مایع موجود در یک استوانه قائم به ارتفاع h و قاعده R



شکل ۵۹

نیست (در اینجا یک فرض تلویحی می‌کنیم که در تیصره بعد از مثال ۱ مورد بررسی قرار می‌گیرد). چون حجم استوانه Ah است، نتیجه می‌شود که

$$(۱) \quad F = \delta Ah$$

لذا، نیروی F با عمق h متناسب می‌باشد. از تقسیم F بر مساحت A معلوم می‌شود که فشار یعنی نیرو بر واحد مساحت، بر صفحه شناور نیز با h متناسب می‌باشد:

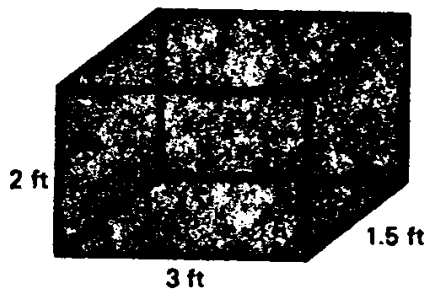
$$(۲) \quad p = \delta h.$$

نیروی (۱) و فشار (۲) را، حتی وقتی مایع آب نباشد، " هیدرواستاتیک " می‌نامند.

اصل پاسکال^۱. این نتایج کلیتر از آنند که ابتدا به نظر می‌رسند زیرا، بنا بر اصل پاسکال، فشار در هر نقطه از یک مایع در تمام جهات یکی است. لذا، یک " سطح آزمایش " کوچک به مساحت a که در عمق h از مایعی به چگالی وزن δ قرار دارد، بی‌توجه به جهت سطح، نیروی یکسان $F = \delta ah$ را تحمل می‌کند. در این حکم فرض کرده‌ایم سطح آنقدر کوچک باشد که تغییر فشار روی آن حتی وقتی به صورت قائم است (بدترین حالت) قابل چشم‌پوشی باشد. در غیر این صورت، برای به دست آوردن نیروی وارد بر سطح، باید به طریقی که

ذیلاً " توصیف می‌شود از فشار روی سطح انتگرال گرفت .

مثال ۱ . یک آکواریوم به شکل مکعب مستطیل به طول 3 ft ، عرض 1.5 ft ، و ارتفاع 2 ft است (ر.ک. شکل ۶۰) . نیروی وارد از طرف آب بر ته آکواریوم را بیابید . فشار وارد بر ته آن چقدر است؟ در عمق 6 in چقدر است؟

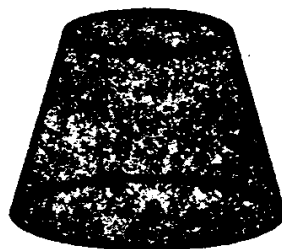


شکل ۶۰

حل . فرض کنیم آکواریوم کاملاً " پر از آب بوده ، و از وجود ماهی یا گیاه احتمالی صرف نظر می‌کنیم . چگالی وزن δ ی آب را مساوی 62.5 lb/ft^3 اختیار می‌کنیم (δ عملاً "بازمانده تغییر می‌کند) . از (۱) نتیجه می‌شود که نیروی وارد بر ته آکواریوم ، که مستطیلی به مساحت 4.5 ft^2 است ، مساوی است با $562.5 \text{ lb} = (62.5)(4.5)(2)$. به علاوه ، طبق (۲) ، فشار بر قاعده عبارت است از $125 \text{ lb/ft}^2 = (62.5)(2)$ ، و فشار در عمق 6 in برابر است با $31.25 \text{ lb/ft}^2 = (62.5)(0.5)$

در مثال ۲ ، نیروهای وارد از طرف آب بر دیواره‌های قائم آکواریوم به دست خواهند آمد .

تبصره . اگر ساختن یک استوانه " پر از مایع روی ناحیه R ممکن نباشد ، نمی‌دانیم چه رخ می‌دهد . مثلاً " ، اگر R قاعده " ظرف شکل ۶۱ باشد ، اطراف مایل ظرف از ساختن یک چنین

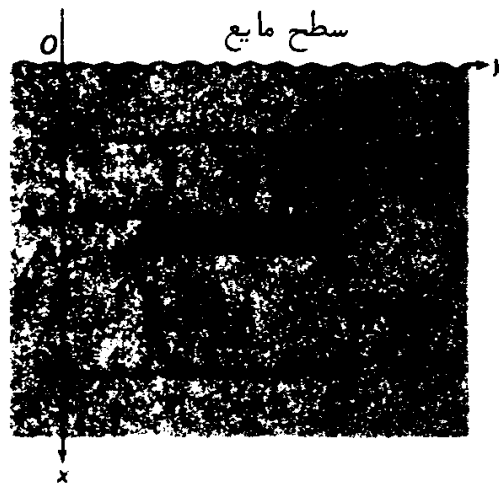


شکل ۶۱

استوانه جلوگیری می‌کند . با کمال تعجب خواهیم دید که فرمولهای (۱) و (۲) حتی

در این شرایط برقرارند. در بدو امر، این "تناقض هیدرواستاتیک" به نظر غیر قابل توضیح است تا اینکه درک کنیم نیروهای وارد از طرف مایع بر دیواره‌های ظرف دارای یک مولفه رو به پایین است که مایع را به ته ظرف انتقال می‌دهد. لذا، نیروی کل وارد بر ته ظرف در واقع مجموع این مولفه رو به پایین و وزن مایع داخل ظرف است. در واقع، یک تحلیل مشروح نشان می‌دهد که، بی‌توجه به شکل ظرف، F دقیقا "همانی است که اگر ظرف یک استوانه قائم با همان قاعده R و پر از مایع تا همان عمق می‌بودا

نیروی وارد بر یک صفحه شناور. حال مسئله یافتن نیروی وارد بر صفحه شناور R را که افقی نیست مطرح می‌کنیم؛ در نتیجه، فشار از یک نقطه به نقطه دیگر تغییر می‌کند. ما خود را به حالت مهمی که در آن R قائم است محدود می‌کنیم (با اینحال، ر.ک. مسائل ۱۳ و ۱۴). همانند در شکل ۶۲، مختصات قائم x و y را در نظر می‌گیریم که محور x قائم و روبه



شکل ۶۲

پایین بوده و محور y در امتداد سطح آزاد مایع باشد. فرض کنیم R ناحیه‌ای در صفحه xy باشد که به خطوط افقی $x = a, x = b$ ($a < b$) و نمودار توابع $y = f(x), y = g(x)$ محدود شده است، که f و g بر $[a, b]$ پیوسته بوده و $f(x) \geq g(x)$. بازه $[a, b]$ را با معرفی نقاط تقسیم x_i صادق در نامساویهای $a = x_0 < x_1 < x_2 < \dots < x_{n-1} < x_n = b$ تعداد زیادی زیربازه $[x_{i-1}, x_i]$ افراز می‌کنیم. در نتیجه، خطوط $x = x_i$ ، R را به تعداد زیادی نوار افقی R_i تقسیم می‌کند، که R_i ناحیه محدود به خطوط $x = x_{i-1}$ ، $x = x_i$ و منحنیهای $y = f(x), y = g(x)$ است. هر نوار R_i تقریبا "مستطیلی به مساحت تقریبی $[f(x_i) - g(x_i)] \Delta x_i$ است، که در آن $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ و می‌توان x_i را هر نقطه دیگری از

بازه $[x_{i-1}, x_i]$ نیز گرفت. به علاوه، با آنکه نقاطی از R_i در عمقهایی متغیر از x_{i-1} تا x_i وجود دارند، اگر Δx_i کوچک باشد این تغییر عمق جزئی بوده و می‌توان تمام نقاط R_i را تقریباً "در یک عمق، مثلاً" x_i ، گرفت. بنابراین، از فرمول (۱) و اصل پاسکال معلوم می‌شود که نیروی وارد از طرف مایع بر نوار R_i تقریباً "مساوی است با $\delta [f(x_i) - g(x_i)]x_i \Delta x_i$ ".
بقیه استدلال به نحو آشنایی ادامه می‌یابد. فرض کنیم F نیروی کل وارد از طرف مایع بر تمام صفحه R باشد. در این صورت، F مجموع نیروهای وارد بر تک‌تک نوارهای R_i می‌باشد. بنابراین،

$$(۳) \quad F \approx \delta \sum_{i=1}^n [f(x_i) - g(x_i)]x_i \Delta x_i,$$

که در آن تقریب در صورت باریک شدن تمام نوارهای R_i ، یعنی وقتی اندازه $\mu = \max \{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$ به صفر نزدیک شود، بهتر خواهد شد. حال، با توجه به اینکه طرف راست (۳) یک مجموع ریمان تابع $[f(x) - g(x)]x$ بر بازه $[a, b]$ است، طبق تعریف قرار می‌دهیم

$$F = \delta \lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n [f(x_i) - g(x_i)]x_i \Delta x_i = \delta \int_a^b [f(x) - g(x)]x \, dx.$$

این را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(۴) \quad F = \delta \int_a^b w(x)x \, dx,$$

که در آن $w(x) = f(x) - g(x)$ عرض ناحیه R در عمق x زیر سطح مایع می‌باشد.

مثال ۲. نیروی وارد از طرف آب بر دیواره‌های قائم آکواریوم مثال ۱ را بیابید.

حل. دو دیواره قائم مستطیلی به عرض ۳ ft و ارتفاع ۲ ft بوده، و دو تنای دیگر مستطیلی به عرض ۱.۵ ft و ارتفاع ۲ ft می‌باشند. لذا، در حالت اول $w(x) \equiv 3$ ، ولی در حالت دوم $w(x) \equiv 1.5$. همچنین، $a = 0$ (آکواریوم تا سر از آب پر شده است) و $b = 2$. پس نتیجه می‌شود که نیروی F_1 وارد بر دیواره‌های بزرگتر مساوی است با

$$F_1 = 62.5 \int_0^2 3x \, dx = 187.5 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^2 = 375 \text{ lb.}$$

حال آنکه نیروی وارد بر دیواره‌های کوچکتر برابر است با

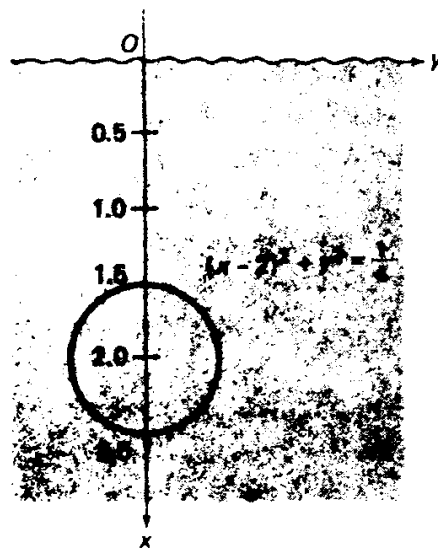
$$F_2 = 62.5 \int_0^2 1.5x \, dx = 93.75 \left. \frac{x^2}{2} \right|_0^2 = 187.5 \text{ lb.}$$

فرض کنیم آکواریوم فقط تا نصف آب داشته باشد. در این صورت، هنوز داریم $a = 0$ (به یاد آورید که مبدأ در سطح آزاد آب قرار دارد)، ولی در اینجا $b = 1$. به عنوان تمرین، نشان دهید که این هر دو نیروی F_1 و F_2 را چهار برابر کوچکتر می سازد.

مثال ۳. یک بشکه تقطیر که از الکل اتیل به چگالی وزن $\delta = 7950$ نیوتن/ m^3 پر شده است در یکی از جداره های قائم خود یک دریچه شیشه ای مستدیر دارد. دریچه به شعاع 0.5 m بوده، و بالاترین نقطه دریچه 1.5 m زیر سطح الکل است. چه نیرویی از سوی الکل بر دریچه وارد می شود؟

حل. مختصات را مثل شکل ۶۳ اختیار می کنیم. می بینیم که قاب دریچه دایره ای است به معادله

$$(x - 2)^2 + y^2 = \frac{1}{4}$$



شکل ۶۳

بنابراین، دریچه ناحیه ای است بین منحنیهای $y = f(x) = \sqrt{\frac{1}{4} - (x - 2)^2}$ و $y = g(x) = -\sqrt{\frac{1}{4} - (x - 2)^2}$ روی بازه $[1.5, 2.5]$. در نتیجه،

$$w(x) = 2 \sqrt{\frac{1}{4} - (x - 2)^2} \quad (1.5 \leq x \leq 2.5).$$

پس از فرمول (۴) نتیجه می شود که نیروی F وارد از سوی الکل بر دریچه مساوی است با

$$F = 15,900 \int_{1.5}^{2.5} \sqrt{\frac{1}{4} - (x - 2)^2} x dx.$$

برای محاسبه انتگرال، جانشانی $u = x - 2$ را انجام داده به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} F &= 15,900 \int_{-0.5}^{0.5} \sqrt{\frac{1}{4} - u^2} (2 + u) du \\ &= 31,800 \int_{-0.5}^{0.5} \sqrt{\frac{1}{4} - u^2} du + 15,900 \int_{-0.5}^{0.5} u \sqrt{\frac{1}{4} - u^2} du \\ &= 31,800 \int_{-0.5}^{0.5} \sqrt{\frac{1}{4} - u^2} du, \end{aligned}$$

که در آن از فرد بودن تابع $u\sqrt{\frac{1}{4} - u^2}$ استفاده کرده‌ایم (بیشتر توضیح دهید). آخرین انتگرال چیزی جز مساحت یک قرص نیمه‌مستدیر به شعاع $\frac{1}{2}$ نیست؛ و لذا، مساوی $\frac{1}{8}\pi$ می‌باشد. بنابراین،

$$F = \frac{31,800\pi}{8} = 3975\pi \approx 12,488 \text{ نیوتن}$$

به‌عنوان تمرین، تحقیق کنید که نیروی F حاصل ضرب مساحت دریاچه در فشار در مرکز آن است.

شناوری واصل ارشمیدس^۱. مثال ۴. یک‌تکه چوب به طول a ، عرض b ، و ارتفاع c که بخشی از آن در دریاچه‌ای فرو رفته در آب شناور است. فرورفتگی h چوب از سطح آب را پیدا کنید [ر.ک. شکل ۶۴ (آ)]. فرض کنید چوب تمایلی به واژگون شدن نداشته باشد.

حل. فرض کنیم δ چگالی وزن آب باشد. بنابر فرمول (۱)، آب نیروی "شناوری" رو به بالای $F = \delta abh$ را بر ته چوب وارد می‌کند. اما حجم آب جابجا شده توسط چوب است؛ و در نتیجه، نیروی شناوری مساوی وزن آب جابجا شده است. این حالت خاصی است از اصل ارشمیدس که می‌گوید نیروی خالص وارد بر یک جسم شناور یا غوطه‌ور به شکل دلخواه از سوی مایع اطرافش یک نیروی شناوری رو به بالاست که مساوی وزن مایع جابجا شده می‌باشد. توجه کنید که در این مسئله، نیروهای وارد از سوی آب بر چهار جداره قائم چوب دو بدو یکدیگر را حذف می‌کنند؛ و لذا، اثری بر چوب نخواهند داشت.

برای یافتن فرورفتگی h چوب در آب، ملاحظه می‌کنیم که در حالت تعادل نیروی شناوری F بر چوب مساوی قرینه‌وزن w چوب است. اما $w = \delta' abc$ ، که در آن δ' چگالی

وزن چوب می باشد . لذا ، شرط تعادل به صورت زیر درمی آید :

$$(۵) \quad F = \delta abh = \delta' abc = w.$$

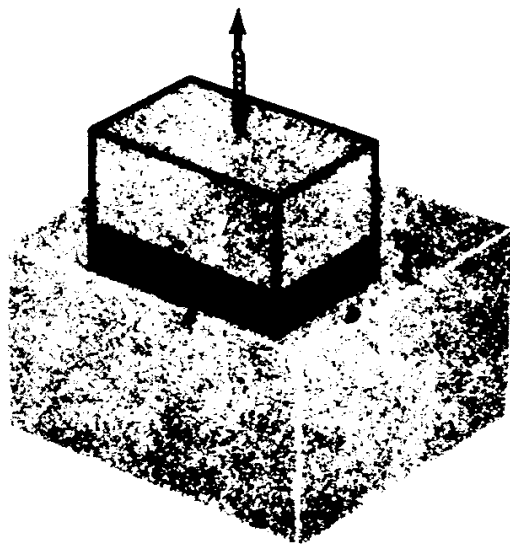
با حل نسبت به h به دست می آوریم $h = (\delta'/\delta)c$ ، یا معادلا

$$h = \alpha c,$$

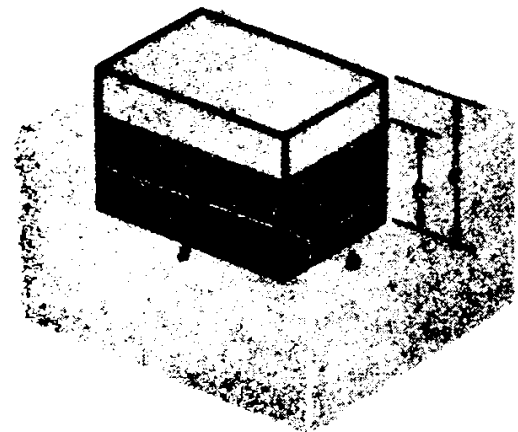
که در آن $\alpha = \delta'/\delta$ ثقل مخصوص چوب است ؛ یعنی ، نسبت چگالی آن به چگالی آب می باشد.

مثال ۵ . فرض کنید قطعه چوب مثال ۴ با طنابی که به نقطهء میانی وجه بالایی آن بسته شده به طور قائم به بالا کشیده شود . کار لازم برای بالا بردن چوب تا وقتی ته آن از سطح آب بیرون بیاید چقدر است . (از وزن طناب و هر اثر ناشی از کشش سطحی صرف نظر می شود.)

حل . وقتی ته چوب در فاصله x زیر سطح آب قرار دارد ، چوب نیروی شناوری روبه بالای δabx را تحمل می کند که مساوی وزن آب جایجا شده توسط قسمت غوطه ور چوب می باشد [ر.ک . شکل ۶۴ (ب)] . بر چوب نیروی روبه پایینی مساوی وزن آن w نیز وارد می شود ؛



(ب)



(آ)

شکل ۶۴

و در نتیجه ، نیروی خالص روبه پایین بر چوب $F(x) = w - \delta abx$ است . اما ، بنا بر فرمول

$$(۵) \quad w = \delta abh \quad ؛ \quad \text{لذا ،}$$

$$F(x) = \delta ab(h - x).$$

بنابراین، برای بیرون کشیدن چوب از آب، باید با انجام کار

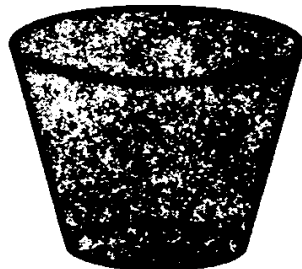
$$W = - \int_h^0 F(x) dx = \int_0^h F(x) dx = \delta ab \int_0^h (h-x) dx$$

$$= \delta ab \left[hx - \frac{1}{2} x^2 \right]_0^h = \frac{1}{2} \delta ab h^2 = \frac{1}{2} wh$$

براین نیرو فایق آمد.

مسائل

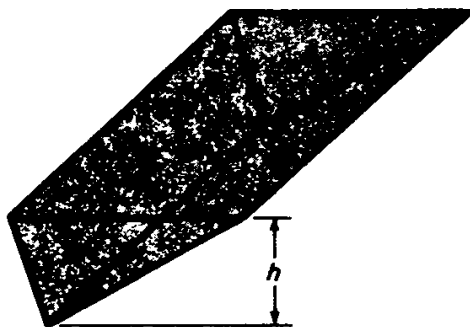
۱. نیروی هیدرواستاتیک وارد بر یک سد مستطیلی قائم به عرض 40 ft و ارتفاع 30 ft را وقتی بیابید که سطح آب 4 ft پایین‌تر از لبهٔ سد باشد.
۲. نیروهای هیدرواستاتیک وارد بر شش وجه یک مکعب غوطه‌ور به طول ضلع 2 ft را در صورتی بیابید که وجه بالایی 5 ft زیر سطح یک دریاچه و موازی با آن باشد.
۳. فنجانی به شکل یک مخروط ناقص وارون به ارتفاع h و مساحت قاعده A می‌باشد (ر. ک. شکل ۶۵). فشار وارد بر قاعدهٔ فنجان را در صورتی بیابید که از مایعی به چگالی



شکل ۶۵

- وزن δ پر شده باشد. آیا نیروی وارد بر قاعده مساوی وزن مایع در فنجان است؟ چه نیرویی آن قسمت از مایع که مستقیماً روی قاعدهٔ فنجان نیست را تحمل می‌کند؟
۴. یک صفحهٔ مستطیلی در یک مایع به چگالی وزن δ به‌طور قائم وارد شده است به‌طوری که یکی از اضلاعش موازی (یا در امتداد) سطح مایع قرار می‌گیرد. نشان دهید که نیروی وارد بر یک طرف صفحه مساوی حاصل ضرب مساحت آن در فشار در مرکز آن (نقطهٔ تقاطع قطرهای) است.
۵. نیروی هیدرواستاتیک وارد بر یک صفحهٔ مربع شکل به طول ضلع a را در صورتی بیابید که صفحه در مایعی به چگالی وزن δ به‌طور قائم طوری وارد شده است که یکی از رئوس مربع در سطح مایع و یکی از اقطار موازی سطح مایع قرار دارد.

۶ یک تغار با دو انتهای مثلثی شکل به مساحت A کاملاً " در مایعی به چگالی وزن δ تا عمق h فرورفته است (ر. ک. شکل ۶۶). نیروی F وارد از سوی مایع بر هر انتها را بیابید. آیا F به شکل مثلث بستگی دارد؟



شکل ۶۶

نیروی هیدرواستاتیک وارد بر یک طرف صفحه قائمی را بیابید که در مایعی به چگالی وزن فرورفته است مشروط بر اینکه صفحه به شکل زیر باشد:

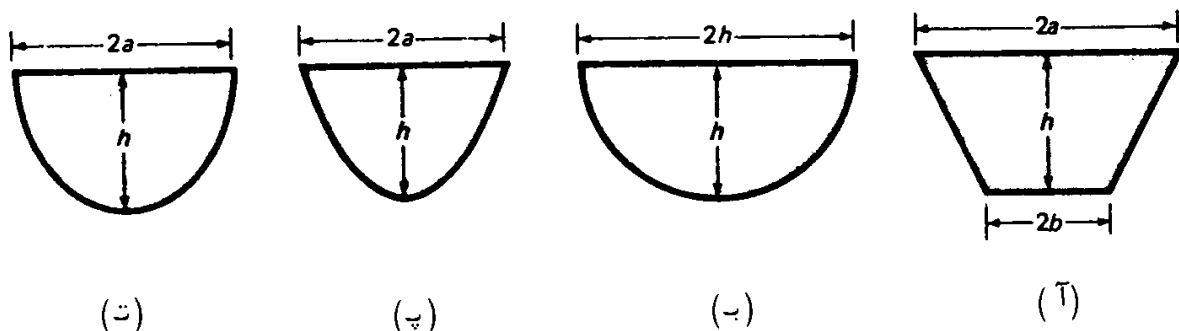
۷. دوزنقه متساوی الساقین شکل ۶۷ (آ)

۸. قرص نیمه مستدیر شکل ۶۷ (ب)

۹. قطعه سهمی شکل ۶۷ (پ)

۱۰. ناحیه نیمه بیضوی شکل ۶۷ (ت)

در هر حالت، لبه بالایی صفحه در امتداد سطح مایع قرار دارد.



شکل ۶۷

صفحه نازکی به شکل ناحیه محدود به محور x و نمودار تابع

$$y = b \cos \frac{\pi x}{2a} \quad (-a \leq x \leq a, b > 0)$$

می باشد. نیروی هیدرواستاتیک وارد بر صفحه را در صورتی بیابید که در مایعی به چگالی

وزن δ به شکل زیر فرورفته است مشروط بر اینکه

۱۱. لبه^۶ مستقیم صفحه در امتداد سطح مایع است .
 ۱۲. لبه^۶ مستقیم صفحه بر سطح مایع عمود بوده و یک انتهای آن در سطح مایع می باشد .
 ۱۳. یک قرص مستدیر به شعاع 1 ft در مایعی به چگالی وزن δ طوری فرورفته است که صفحه^۶ آن با قائم زاویه^۶ θ ساخته و بالاترین نقطه اش 2 ft زیر سطح مایع قرار دارد . نیروی وارد از سوی مایع بر یک طرف قرص چقدر است ؟
 ۱۴. یک استخر شنا دارای عرض 10 ft ، طول 24 ft ، عمق 4 ft در انتهای کم عمق ، و عمق 8 ft در انتهای گود می باشد . نیروی هیدرواستاتیک وارد بر ته استخر را در صورتی بیابید که استخر پر باشد . در انتهای گود به اندازه^۶ 6 ft آب داشته باشد .
 ۱۵. چقدر کار لازم است تا چوب مثال ۴ را پایین برد که کاملاً " غوطه ور شود ؟
 ۱۶. فرض کنید ثقل مخصوص یخ 0.92 و از آن آب دریا 1.03 باشد . چه کسری از یک کوه یخ زیر سطح دریا قرار می گیرد ؟
- یک جسم شناور به شکل مخروط مستدیر قائم وارون به ارتفاع H و شعاع قاعده^۶ R در یک دریاچه شناور است . وزن جسم w و ثقل مخصوص آن α است .
۱۷. عمق تعادل h قاعده^۶ جسم (رأس مخروط) را بیابید .
 ۱۸. کار لازم برای بالابردن جسم تا وقتی از سطح آب خارج شود را بیابید .
 ۱۹. کار لازم برای پایین بردن آن تا وقتی کاملاً " در آب فرورود را بیابید .
۲۰. به یک جسم فلزی که می گویند از طلای جامد ساخته شده ظن برده ایم که در آن حفره ای وجود دارد . وزن آن در هوا 25 oz و در آب 23 oz است . نشان دهید که ظن غالب است ، و حجم حفره را بیابید . (ثقل مخصوص طلا 19.3 می باشد .)

اصطلاحات و مباحث کلیدی

محاسبه^۶ حجم به روش مقاطع عرضی

محاسبه^۶ حجم به روش قرصها و واشرها

محاسبه^۶ حجم به روش غشاءها

منحنیها به شکل پارامتری (منحنیهای پارامتری)

خط مماس بر یک منحنی پارامتری

طول یک منحنی مسطح

مساحت یک سطح دوار

کار انجام شده بر یک محیط پیوسته (طناب ، مایع ، گاز)

فشار مایع و نیروی وارد بر یک جسم غوطه‌ور

مسائل تکمیلی

۱. مخروط مستدیر قائم C به ارتفاع H توسط صفحه‌ای موازی قاعده به دو قطعه با حجم مساوی تقسیم شده است. فاصله بین این صفحه و رأس C چقدر است؟ آیا جواب به زاویه رأس C وابسته است؟
۲. مسئله قبل را در صورتی حل کنید که مخروط C به وسیله صفحات موازی با قاعده به سه قسمت متساوی‌الحجم تقسیم شده باشد. آیا جواب برای مخروط کلی همین است؟ حجم جسم S که قاعده‌اش بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

($a > 0, b > 0$) است را در صورتی بیابید که هر مقطع عرضی S به وسیله صفحه‌ای عمود بر محور x یکی از اشکال زیر باشد:

۳. یک مربع
 ۴. یک مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین که وترش در صفحه xy است
 ۵. یک نیم‌دایره که قطرش در صفحه xy است.
 ۶. حجم یک جسم نامتناهی را بیابید که قاعده‌اش ناحیه بین منحنیهای $y = \cosh x$ و $y = \sinh x$ در ربع اول بوده، و مقاطع عرضی ناشی از صفحات عمود بر محور x آن مربع باشند.
 ۷. حجم یک جسم نامتناهی را بیابید که قاعده‌اش ناحیه محدود به محور x مثبت، محور y منفی، و منحنی $y = \ln x$ بوده، و مقاطع عرضی ناشی از صفحات عمود بر محور x آن نیم‌دایره‌هایی به اقطار واقع در صفحه xy باشند.
- با استفاده از یک روش (قرصها، واشرها، یا غشاءها)، حجم جسم حاصل از دوران ناحیه تحت منحنی داده شده روی بازه ذکر شده را حول محور مشخص شده پیدا نمایید.

۸. محور x ، $y = \sqrt{\ln x}$ ، $1 \leq x \leq e^2$

۹. محور y ، $y = xe^x$ ، $1 \leq x \leq 2$

۱۰. محور y ، $y = \arctan x$ ، $0 \leq x \leq 1$

۱۱. محور x ، $y = \tanh x$ ، $-1 \leq x \leq 1$

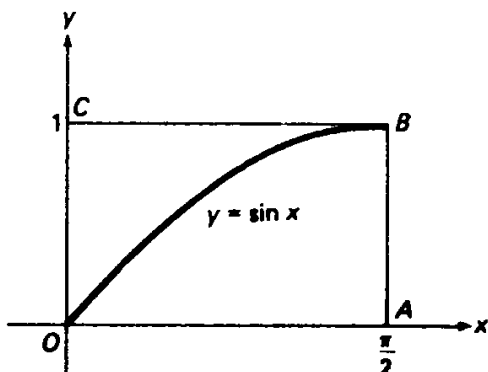
۱۲. محور y ، $y = \sin x^2$ ، $0 \leq x \leq \sqrt{\pi/3}$

۱۳. محور x ، $y = \csc x$ ، $\pi/4 \leq x \leq \pi/2$

۱۴. $y = e^{-|x|}, -\infty < x < \infty$ ، محور x

۱۵. $y = e^{-\sqrt{x}}, 0 \leq x < \infty$ ، محور y

حجم جسم حاصل از دوران ناحیه OAB یا OBC شکل ۶۸ حول محور مشخص شده را حساب کنید. منحنی OB نمودار تابع $y = \sin x$ روی بازه $0 \leq x \leq \pi/2$ است. در هر حالت، از هر دوروش قرصها یا واشرها و روش غشاءها استفاده نمایید.



شکل ۶۸

۱۶. OAB حول محور x ۱۷. OBC حول محور x

۱۸. OBC حول محور y ۱۹. OAB حول محور y

۲۰. OAB حول خط $x = \pi/2$ ۲۱. OBC حول خط $x = \pi/2$

۲۲. OBC حول خط $y = 1$ ۲۳. OAB حول خط $y = 1$

مقادیر پارامتر t را طوری بیابید که نقطه P بر منحنی پارامتری داده شده (که به ازای هر t تعریف شده است) قرار گیرد.

۲۴. $P = (0, 0)$ بر $x = t^3 + 2t^2 - t - 2, y = t^4 - 5t^2 + 4$

۲۵. $P = (-3, 0)$ بر $x = 2 \cos t - \cos 2t, y = 2 \sin t - \sin 2t$

۲۶. $P = (1, 2)$ بر $x = \tan t, y = 2 \sin^2 t + \sin 2t$

منحنی پارامتری داده شده را، که در آن t روی بازه‌ای به طول ناکمتر از 2π تغییر می‌کند، رسم نمایید. هر منحنی به یک شکل لساژو معروف است، و اگر ولتاژهای $x = x(t)$ و $y = y(t)$ بر صفحات افقی و قائم اسیلوسکوپ اعمال شوند، این منحنیها روی صفحه یک اسیلوسکوپ با اشعه کاتودی ظاهر می‌شوند.

۲۸. $x = \sin t, y = \sin 3t$

۲۷. $x = \sin t, y = \sin 2t$

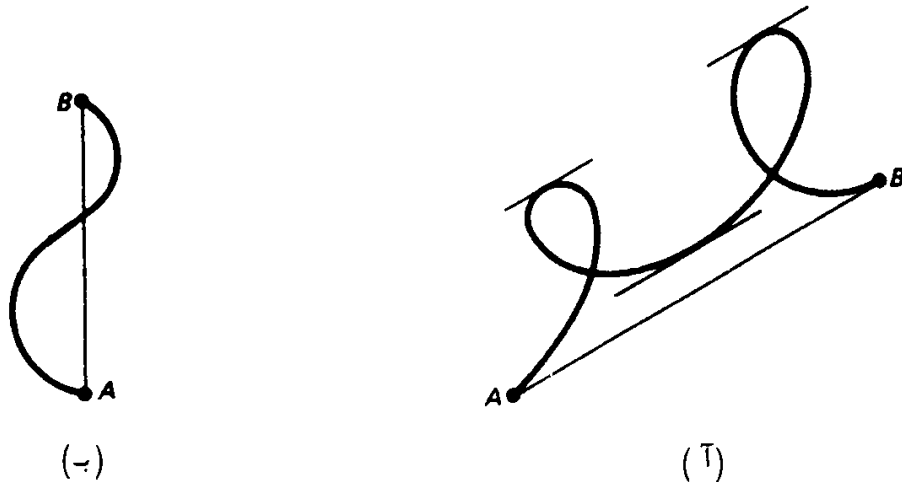
۳۰. $x = \sin 3t, y = \sin 4t$

۲۹. $x = \sin 2t, y = \sin 3t$

۳۱. فرض کنید در منحنی پارامتری

$x = x(t), y = y(t) \quad (a \leq t \leq b)$

مشتقات $x'(t), y'(t)$ بر بازه (a, b) موجود و متناهی بوده و در هر نقطه از (a, b) $[x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$ ، و نیز نقاط انتهایی $A = (x(a), y(a)), B = (x(b), y(b))$ منحني برهم منطبق نباشند . نشان دهید که دست کم یک نقطه از منحنی (نه یک نقطه انتهایی) وجود دارد که مماس بر منحنی در آن موازی وتر و اصل بین A و B است . [وتر و مماس ممکن است مثل شکل ۶۹ (آ) مایل ، یا مثل شکل ۶۹ (ب) قائم باشند .]

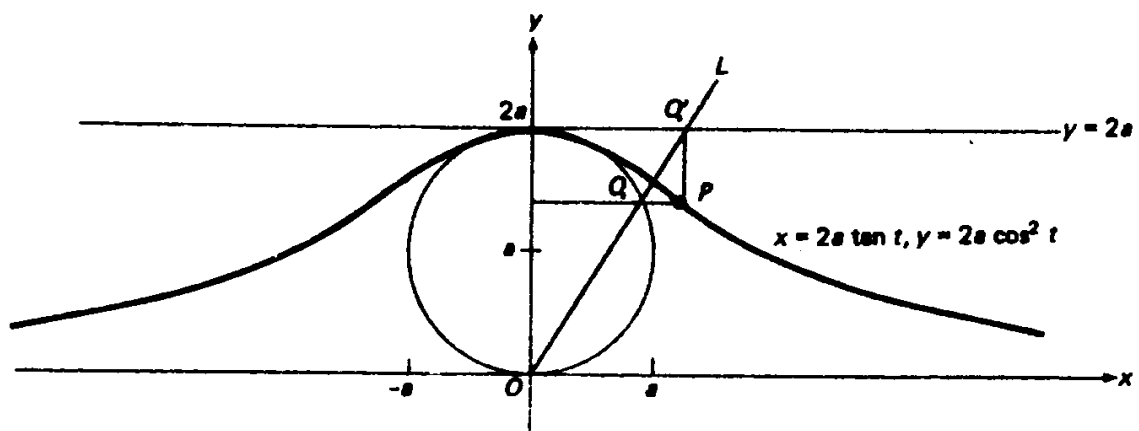


شکل ۶۹

۳۲. منحنی زنگدیس

$$x = 2a \tan t, \quad y = 2a \cos^2 t \quad (-\pi/2 < t < \pi/2, a > 0)$$

نموده شده در شکل ۷۰ به جادوگر اگنسی معروف است . معادله دکارتی آن را بنویسید .



جادوگر اگنسی

شکل ۷۰

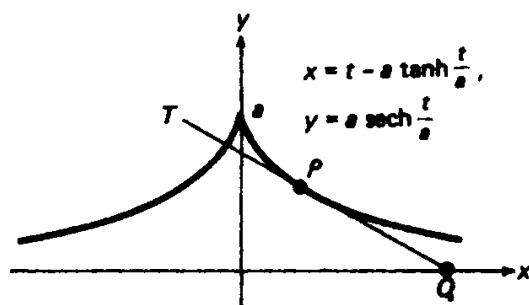
نشان دهید که این منحنی نسبت به محور y متقارن بوده و محور x را به عنوان مجانب

دارد. نقاط عطف آن را پیدا نمایید. نشان دهید که هرگاه خطوط افقی و قائمی از نقطه P منحنی رسم کنیم و خط افقی ابتدا دایره $x^2 + (y - a)^2 = a^2$ را در نقطه Q قطع کند ولی خط قائم خط $y = 2a$ را در نقطه Q' قطع نماید، آنگاه، همانطور که شکل نشان می‌دهد، نقاط Q و Q' بر خط L مار بر مبدأ O قرار دارند. تعبیر هندسی پارامتر t چیست؟

۳۳. منحنی

$$x = t - a \tanh \frac{t}{a}, \quad y = a \operatorname{sech} \frac{t}{a} \quad (-\infty < t < \infty, a > 0),$$

که در شکل ۷۱ نموده شده، به گشاننده معروف است. تحقیق کنید که گشاننده نسبت به محور y متقارن است و محور x را به عنوان مجانب دارد، و نیز نمودار تابعی است مانند $y = f(x)$ و در نقطه $(0, a)$ نقطه بازگشت دارد. نشان دهید که گشاننده هم مماسی است به این معنی که هرگاه P خط مماس بر منحنی در نقطه دلخواه T بوده و Q قطع x باشد (ر. ک. شکل)، آنگاه $|PQ|$ دارای مقدار ثابت a می‌باشد. تعبیر هندسی پارامتر t چیست؟



گشاننده

شکل ۷۱

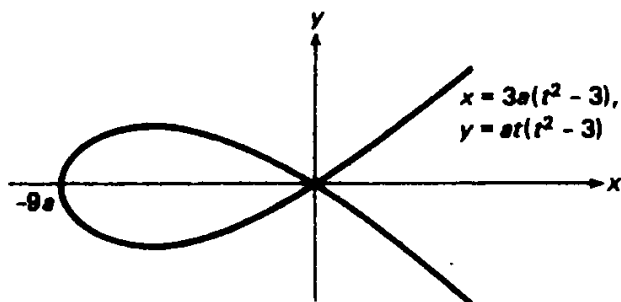
۳۴. سگی که ابتدا در نقطه $(0, a)$ از محور y مثبت است روباهی را که ابتدا در مبدأ است تعقیب می‌کند. روباه در امتداد محور x مثبت ضمن آنکه سگ در تعقیبش است می‌دود. فرض کنید سگ همواره در جهت روباه و در فاصله a تا روباه بدود. منحنی تعقیب سگ چیست؟

۳۵. منحنی

$$x = 3a(t^2 - 3), \quad y = at(t^2 - 3) \quad (-\infty < t < \infty, a > 0),$$

که در شکل ۷۲ نموده شده است، به مکعبی تشیرن‌ها وزن معروف است. معادله دکارتی

مکعبی را نوشته، و نشان دهید که نسبت به محور x متقارن است. مماسهای وارد بر مکعبی در مبداء را بیابید.



مکعبی تشیرن هاوزن

شکل ۷۲

۳۶. اگر $b = \frac{1}{3}a$ ، بتوجرخزاد مسئله ۲۶، صفحه ۷۴۸، به یک منحنی به نام دلتاگون یا بتوجرخزاد سه بازگشتی تبدیل می شود. معادلات پارامتری دلتاگون را بنویسید. دلتاگون را رسم کرده، و طول آن را حساب کنید. طول منحنی داده شده را بیابید.

$$x = \frac{1-t^2}{1+t^2}, y = \frac{2t}{1+t^2} \quad (-\infty < t < \infty) \quad \cdot ۳۷$$

$$x = -\frac{1}{t^2} \cos t + \frac{1}{t} \sin t, y = \frac{1}{t^2} \sin t + \frac{1}{t} \cos t \quad (1 \leq t \leq 2) \quad \cdot ۳۸$$

$$x = 3 \cos t - \cos 3t, y = 3 \sin t - \sin 3t \quad (-\pi \leq t \leq \pi) \quad \cdot ۳۹$$

$$y = \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{6x^3} \quad (1 \leq x \leq 2) \quad \cdot ۴۰$$

$$x = \ln \csc y \quad (\pi/4 \leq y \leq 3\pi/4) \quad \cdot ۴۱$$

مساحت سطح حاصل از دوران منحنی داده شده حول محور مشخص شده را بیابید.

$$\text{محور } y, \quad x = 2 \cos t + \cos 2t, y = 2 \sin t - \sin 2t \quad (\frac{3}{4}\pi \leq t \leq \frac{5}{4}\pi) \quad \cdot ۴۲$$

$$\text{محور } x, \quad x = 3 \cos t - \cos 3t, y = 3 \sin t - \sin 3t \quad (0 \leq t \leq \pi) \quad \cdot ۴۳$$

$$y = 2, \quad \text{خط } y = |x-1| + |x| \quad (-1 \leq x \leq 2) \quad \cdot ۴۴$$

$$\text{محور } x, \quad x = 2y^{1/4} - \frac{2}{3}y^{7/4} \quad (0 \leq y \leq 1) \quad \cdot ۴۵$$

۴۶. فرض کنید S سطح حاصل از دوران بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

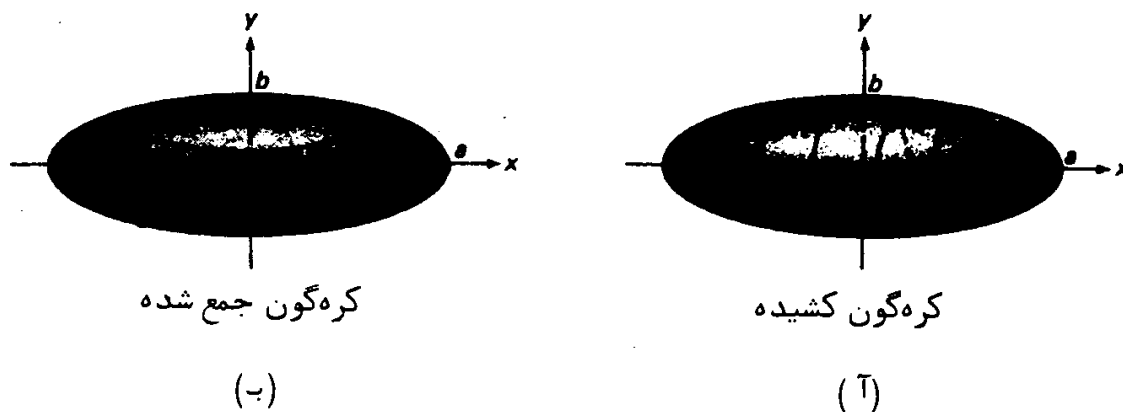
حول محور x باشد. در این صورت، S یک بیضی گون دوار یا کره گون نام دارد. چون $a > b$ ، کره گون S کشیده است؛ یعنی، مانند یک توپ راگبی یا یک سیگار برگ کشیده است [ر.ک. شکل ۷۳ (آ)]. نشان دهید که S دارای مساحت سطح

$$A = 2\pi b^2 + \frac{2\pi ab}{e} \arcsin e$$

است که در آن عدد

$$e = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a}$$

(با پایه لگاریتمهای طبیعی اشتباه نشود) خروج از مرکز بیضی نام دارد. فرض کنید بیضی به جای محور x حول محور y دوران کند. در این صورت، چون $b < a$ ، کره گون حاصل S' جمع شده است؛ یعنی، مانند یک توپ که بچهای رویش نشسته یا یک فرفره خیلی تخت منقبض یا پهن شده است [ر.ک. شکل ۷۳ (ب)].



شکل ۷۳

نشان دهید که S' دارای مساحت

$$A' = 2\pi a^2 + \frac{\pi b^2}{e} \ln \frac{1+e}{1-e}$$

است، که در آن e مجدداً "خروج از مرکز" است. نشان دهید که وقتی $e \rightarrow 0^+$ ، A' و A به حد یکسان $4\pi a^2$ میل می‌کنند که در آن a ثابت است. چرا این انتظار می‌رود؟ ۴۷. فرض کنید S و S' مانند مسئله قبل باشند. حجم V کره گون کشیده توپر محدود به S ، و حجم V' کره گون جمع شده توپر محدود به S' را بیابید.

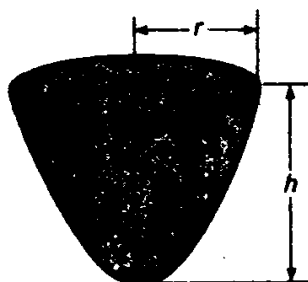
۴۸. سیاره مشتری یک کره گون جمع شده با شعاع استوایی تقریبی $71,600 \text{ km}$ و شعاع قطبی تقریبی $67,300 \text{ km}$ است. حجم و مساحت مشتری را تخمین بزنید. (زمین و خورشید نیز جمع شده اند ولی خیلی کم.)
۴۹. یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع a حول یکی از اضلاعش دوران می کند. مساحت سطح دوار حاصل را بیابید. حجم جسم توپر محدود به این سطح چقدر است؟
۵۰. یک استخر کودکان 8 ft عرض، 16 ft طول، 2 ft عمق در انتهای کم عمق، و 4 ft عمق در انتهای گود دارد. چقدر کار لازم است که آب این استخر پیر از سرش پمپاژ گردد؟ اگر عمق آب در قسمت کم عمق 6 in باشد چقدر؟ اگر عمق آب در انتهای گود 1 ft باشد چقدر؟ اگر استخر تا 75% پر باشد، چقدر طول می کشد تا یک پمپ به توان 0.125-hp آن را تخلیه کند؟
۵۱. یک تغار به شکل نیمی از یک استوانه مستدیر قائم به شعاع r و طول L (ر. ک. شکل ۷۴) از مایعی به چگالی ρ پر شده است. چقدر کار لازم است تا تمام مایع به ارتفاع



شکل ۷۴

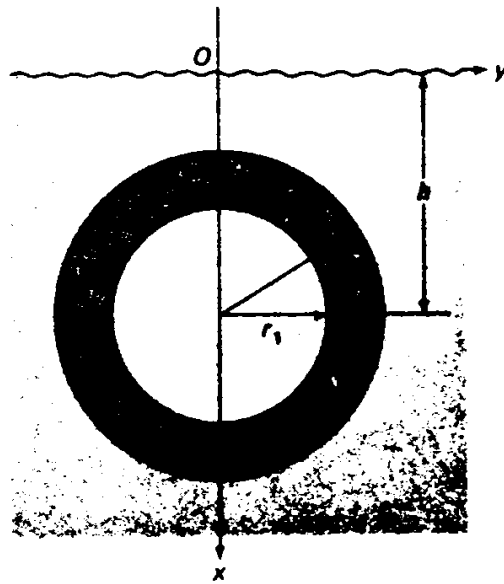
h بالای تغار برسد؟

۵۲. شکل ۷۵ بشکه ای را نشان می دهد شبیه قسمتی از یک سهمی گون دوار به ارتفاع h و شعاع r در بالای آن. کار لازم برای پر کردن بشکه از مایعی به چگالی ρ از طریق سوراخی در ته آن (رأس سهمی گون) را بیابید.



شکل ۷۵

۵۳. نیروی هیدرواستاتیک وارد بر یک طرف صفحه قائمی که در یک مایع به چگالی وزن γ فرو رفته است را در صورتی بیابید که صفحه به شکل واشر مستدیری به شعاع داخلی r_1 و شعاع خارجی r_2 بوده و مرکزش در فاصله $h \geq r_2$ زیر سطح مایع قرار داشته باشد (ر.ک. شکل ۷۶).



شکل ۷۶

۵۴. یک بشکه پر از مایعی به چگالی وزن γ دارای جدارهای مستطیلی و قائم بوده و لبه آن در سطح مایع قرار دارد. فرض کنید جداره به وسیله قطر مستطیل به دو قسمت تقسیم شده باشد. نشان دهید که نیروی وارد از سوی مایع بر یک قسمت جداره دوبرابر نیروی وارد بر قسمت دیگر است.

یک گوی چوبی به شعاع $1/2$ تا نیمه در مایعی به چگالی وزن γ فرو رفته است. کار لازم در هر مورد زیر را پیدا کنید:

۵۵. برای خارج کردن گوی از مایع

۵۶. برای فرو بردن گوی در مایع

دنباله‌ها و سریها^۱

تکنیکهای این فصل برای محاسبات عددی لازمند. به کمک آنها می‌توان اعدادی چون e و π یا مقادیر توابعی مثل $\ln x$ و $\sin x$ را با هر دقت مطلوب تقریب نمود. این کار با نمایش عدد یا مقدار تابع به صورت سری نامتناهی، یعنی مجموعی با بی‌نهایت جمله، صورت می‌گیرد.

برای ریختن پایه‌های سریهای نامتناهی، ابتدا مبحث مربوط به آن، یعنی دنباله‌های نامتناهی (ر.ک. بخش ۱۰.۹)، را در نظر می‌گیریم؛ اینها را می‌توان توابعی در نظر گرفت که فقط بر مجموعه اعداد صحیح مثبت تعریف شده‌اند. بخشهای ۲۰.۹ تا ۵۰.۹ به بررسی اصولی سریهای نامتناهی که جملاتشان عدد هستند اختصاص دارد. مطالعه سریهای توانی بعد از آن صورت می‌گیرد (ر.ک. بخشهای ۶۰.۹ تا ۷۰.۹)؛ این سریها، که جملاتشان تابع اند، را می‌توان چند جمله‌ایهایی با بی‌نهایت جمله و با درجه بدلخواه بزرگ در نظر گرفت. گاهی اوقات ممکن است تابعی مجموع یک سری توانی معلوم شناخته شود. اما اهمیت بیشتر آن توانایی شروع از تابع معلوم f و نمایش آن به صورت مجموعی از یک سری توانی است. در بخش ۸۰.۹ نشان می‌دهیم که اگر f خوشرفتار باشد، f را می‌توان مجموعی از یک چند جمله‌ای و یک "جمله باقیمانده" نوشت، و در بخش ۹۰.۹ یک قدم جلوتر رفته و نشان می‌دهیم که f را می‌توان به صورت یک سری توانی، به نام سری تیلور^۱ f ، نوشت، و این درحالات متداولی صورت می‌گیرد که در آنها وقتی درجه چند جمله‌ای تقریب ساز بدلخواه بزرگ شود، جمله باقیمانده به صفر نزدیک می‌شود.

در بین تکنیکهای محاسبه‌ای قویی که در این فصل عرضه می‌شوند، روش نیوتن برای حل معادله $f(x) = 0$ (ر.ک. بخش ۱۰۰.۹) شایسته ذکر است نه فقط به خاطر خودش

1. Taylor

بلکه به عنوان مثال مهمی از روشهای تکراری که در سراسر ریاضیات کاربردها دارد می‌رود.

۱۰۹ دنباله‌های نامتناهی

فرض کنیم به هر عدد صحیح مثبت n عدد حقیقی a_n مربوط شده باشد. در این صورت لیست

$$(1) \quad a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$$

با زیرنویس که از چپ به راست به ترتیب صعودی نوشته شده یک دنباله نامتناهی، یا فقط دنباله، نام دارد. اعداد آمده در لیست جملات دنباله نام دارند. لذا، a_1 جمله اول دنباله، a_2 جمله دوم، و همین‌طور a_n جمله n م دنباله است، که پس از آن همان‌طور که سه نقطه دوم نشان می‌دهند، دنباله تا بی‌نهایت می‌رود. جمله n م a_n جمله عمومی دنباله نیز نامیده می‌شود.

البته، فرض است که جملات یک دنباله به‌طور منحصر به فرد معین هستند، به این معنی که یک و فقط یک جمله با زیرنویس داده شده وجود دارد. بنابراین، از دیدگاه صوری، یک دنباله چیزی جز حالت خاصی از تابع نیست؛ یعنی، تابعی که قلمروش مجموعه تمام اعداد صحیح مثبت است. به زبانی کمتر صوری، یک دنباله به محض دانستن "قانون تشکیل" آن، یعنی تابع $a_n = f(n)$ که ما را از زیرنویس n (که نقش متغیر مستقل را دارد) به جمله عمومی a_n می‌رساند، کاملاً معین می‌شود.

مثال ۱. جملات دوم، پنجم، و هفتم دنباله با جمله عمومی

$$a_n = 2^n$$

را بیابید.

حل. با انتخاب $n = 2, 5, 7$ داریم

$$a_2 = 2^2 = 4, \quad a_5 = 2^5 = 32, \quad a_7 = 2^7 = 128.$$

این دنباله را می‌توان به صورت

$$2, 4, \dots, 2^n, \dots,$$

یا، با تفصیل بیشتر، به صورت

$$2, 4, 8, 16, 32, 64, \dots, 2^n, \dots$$

نوشت.

راه دیگر نمایش دنباله^۱ (۱) نوشتن جمله^۲ عمومی a_n آن بین دو ابروست^۱:

$$(۱') \quad \{a_n\}.$$

مثلاً^۳، در این نماد، دنباله^۴ $2, 4, \dots, 2^n, \dots$ شکل اختصاری $\{2^n\}$ را په خود می‌گیرد.

مثال ۲. چهار جمله^۵ اول دنباله^۶ $\{(-1)^n\}$ را بنویسید.

حل. چون $(-1)^1 = -1, (-1)^2 = 1, (-1)^3 = -1, (-1)^4 = 1$ ، چهار جمله^۷ اول عبارتند از $1, -1, 1, -1$ با علایم^۸ "متناوب". دنباله^۹ $\{(-1)^n\}$ ، مثل هر دنباله^{۱۰} نامتناهی، بی‌نهایت جمله دارد، ولی فقط دو مقدار، یعنی ۱ یا -1 ، را می‌گیرد. این با دنباله^{۱۱} $\{2^n\}$ ، که هیچ دو جمله‌اش مقدار یکسان ندارند، فرق دارد.

مثال ۳. هفت جمله^{۱۲} اول دنباله^{۱۳} $\{n!\}$ ، که جمله^{۱۴} عمومی‌اش n فاکتوریل است (ر. ک. صفحه^{۱۵} ۲۲۵)، را بنویسید.

حل. به آسانی معلوم می‌شود که هفت جمله^{۱۶} اول عبارتند از

$$1, 2, 6, 24, 120, 720, 5040,$$

که از آنها معلوم می‌شود که جملات این دنباله^{۱۷} سریعاً^{۱۸} "بسیار بزرگ می‌شوند". با محاسبه^{۱۹} حاصل ضرب ۱۱ عدد صحیح مثبت اولیه معلوم می‌شود که جمله^{۲۰} یازدهم عبارت است از $11! = 39,916,800$.

مثال ۴. متوسط پنجم جمله^{۲۱} اول دنباله^{۲۲} $\{b_n\}$ را در صورتی بیابید که

$$b_n = \begin{cases} n & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \\ \frac{1}{n} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \end{cases}$$

حل. توجه کنید که در اینجا دنباله^{۲۳} را به جای $\{a_n\}$ با $\{b_n\}$ نشان می‌دهیم. (نماد دنباله‌ها به اندازه^{۲۴} توابع آزادی انتخاب دارد.) متوسط پنجم جمله^{۲۵} اول عبارت است از

۱. قراین از خلط دنباله^{۲۶} $\{a_n\}$ و مجموعه‌ای که تنها عنصرش a_n است جلوگیری خواهد کرد.

$$\frac{1}{5}(b_1 + b_2 + b_3 + b_4 + b_5) = \frac{1}{5}\left(1 + \frac{1}{2} + 3 + \frac{1}{4} + 5\right) = \frac{39}{20}.$$

فرمولهای بازگشتی. مثل مثالهای قبل، قانون تشکیل یک دنباله اغلب با فرمول صریحی برای جمله^۴ عمومی آن داده می‌شود. یک دنباله را می‌توان به‌طور بازگشتی نیز تعریف کرد؛ یعنی، با فرمولی به‌نام فرمول بازگشتی که نشان می‌دهد چگونه هر جمله را می‌توان از جملات با زیرنویسهای پایین‌تر به دست آورد.

مثال ۵. فرض کنیم $\{a_n\}$ دنباله‌ای باشد که با فرمول بازگشتی زیر تعریف شده است:

$$(۲) \quad a_n = a_{n-1} + n, \quad n \geq 2, \quad a_1 = 1$$

در این صورت،

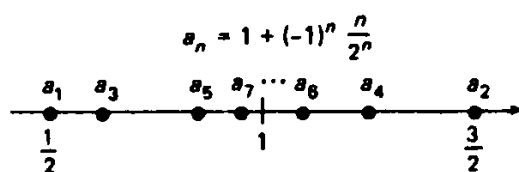
$$a_1 = 1, \quad a_2 = a_1 + 2 = 3, \quad a_3 = a_2 + 3 = 6, \quad a_4 = a_3 + 4 = 10, \dots,$$

و دنباله^۴ $\{a_n\}$ با جملات $1, 3, 6, 10, \dots$ شروع می‌شود. به عنوان تمرین، تحقیق کنید که $\{a_n\}$ را می‌توان به‌طور صریح (غیربازگشتی) به صورت دنباله‌ای با جمله^۴ عمومی $a_n = \frac{1}{2}n(n+1)$ تعریف کرد.

مثال ۶. چون $n! = n(n-1)!$ ، دنباله^۴ $\{a_n\} = \{n!\}$ همان دنباله^۴ تعریف شده با فرمول بازگشتی زیر است:

$$a_n = na_{n-1}, \quad n \geq 2, \quad a_1 = 1$$

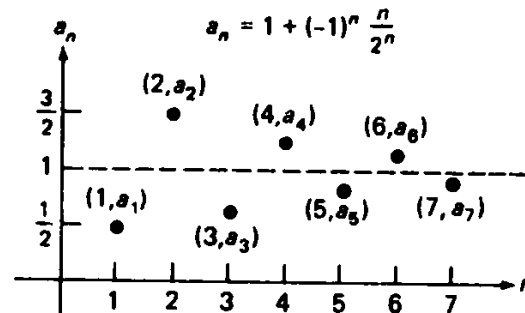
دنباله‌ها را می‌توان به دو طریق رسم کرد، یکی با رسم جملات $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ به عنوان نقاط بر خط اعداد، یا با رسم جفتهای مرتب $(1, a_1), (2, a_2), \dots, (n, a_n), \dots$ ، به ازای هر جمله یکی، به صورت نقاطی در صفحه^۴ مختصات. در شکلهای ۱ و ۲، این دو



شکل ۱

طریق نمایش دنباله^۴ $\{a_n\} = \{1 + (-1)^n(n/2^n)\}$ نموده شده است. طریقه^۴ اول ساده‌تر

است، ولی طریقهٔ دوم بر این تأکید دارد که دنباله‌ها تابع می‌باشند.



شکل ۲

حد یک دنباله. همانطور که تابع $f(x)$ می‌تواند با $x \rightarrow \infty$ به حدی نزدیک شود، دنباله $\{a_n\}$ می‌تواند با $n \rightarrow \infty$ به حدی نزدیک گردد. فرض کنیم در دنباله $\{a_n\}$ جملهٔ عمومی a_n را بتوان با انتخاب n به قدر کافی بزرگ هر قدر بخواهیم به عدد L نزدیک کرد. در این صورت، گوییم دنباله $\{a_n\}$ (وقتی n به بی‌نهایت نزدیک شود) به حد L نزدیک می‌شود یا دارای حد L است، و می‌نویسیم

$$(۳) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L$$

یا

$$(۳') \quad a_n \rightarrow L \quad (n \rightarrow \infty \text{ وقتی})$$

معنی دقیق

$$\lim_{x \rightarrow \infty} f(x) = L$$

این است که به ازای هر $\varepsilon > 0$ می‌توان عدد $A > 0$ را طوری یافت که به ازای هر $x > A$ ، $|f(x) - L| < \varepsilon$ ، و به همین نحو معنی دقیق (۳) این است که به ازای هر $\varepsilon > 0$ می‌توان عدد صحیح $N > 0$ را طوری یافت که به ازای هر $n > N$ ، یعنی به ازای $n = N + 1, N + 2, \dots$ ، به بیان معادل، $a_n \rightarrow L$ یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0$ ، بازه $(L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ شامل تمام جملات دنباله $\{a_n\}$ است که زیرنویسهای آن از عدد صحیح N ، که البته N تابع ε است، بزرگتر می‌باشد. بخصوص، با انتخاب $\varepsilon = 1$ ، می‌بینیم که هرگاه $a_n \rightarrow L$ آنگاه تمام جملات دنباله $\{a_n\}$ با زیرنویسهای متجاوز از عدد صحیحی مانند N در بازه $(L - 1, L + 1)$ قرار دارند؛ از این امر در برهان قضیه ۱ زیر استفاده خواهد شد.

دنباله‌های همگرا و واگرا. اگر دنباله‌ای حد متناهی داشته باشد، گوییم دنباله همگرا (به

این حد) است؛ در غیر این صورت، گوییم دنباله واگرا می‌باشد. دو نوع دنباله واگرا موجودند که توجه خاص می‌خواهند. گوییم دنباله $\{a_n\}$ واگرا به ∞ است، و می‌نویسیم $a_n \rightarrow \infty$ ، اگر به ازای هر $C > 0$ عدد صحیحی مانند $N > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $n > N$ ، $a_n > C$ ؛ به همین نحو، گوییم دنباله $\{a_n\}$ واگرا به $-\infty$ است، و می‌نویسیم $a_n \rightarrow -\infty$ ، اگر به ازای هر $C > 0$ عدد صحیحی مانند $N > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر $n > N$ ، $a_n < -C$ ، البته، یک دنباله می‌تواند به طرق دیگری نیز واگرا باشد (ر.ک. مثال ۹).

مثال ۷. دنباله $\{a_n\} = \{1/n\}$ همگرا با حد ۰ است. در واقع، فرض کنیم به ازای $\varepsilon > 0$ داده شده، N عدد صحیحی بزرگتر از $1/\varepsilon$ باشد. در این صورت، به ازای هر $n > N$ ،

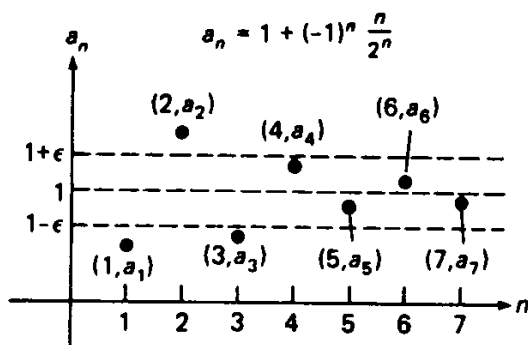
$$|a_n - 0| = \left| \frac{1}{n} \right| = \frac{1}{n} < \varepsilon$$

زیرا به ازای هر چنین n ،

$$\frac{1}{n} < \frac{1}{N} < \varepsilon$$

به عنوان تمرین، از استدلال مشابهی استفاده کرده نشان دهید که دنباله $\{a_n\} = \{(n-1)/n\}$ همگرا با حد ۱ می‌باشد.

مثال ۸. از شکل ۳ (تعدیلی از شکل ۲) معلوم می‌شود که بازه $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ شامل



شکل ۳

تمام جملات دنباله $\{a_n\} = \{1 + (-1)^n(n/2^n)\}$ جز تعدادی متناهی از آنهاست. به عبارت دیگر، به ازای بازه $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ ، عدد صحیحی مانند N وجود دارد به طوری که a_n به ازای هر $n > N$ در بازه $(1-\varepsilon, 1+\varepsilon)$ قرار دارد. لذا، بدون آنکه نگران یافتن مقدار

N نظیر به ε داده شده باشیم، می‌توانیم (به طور صوری) نتیجه بگیریم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + (-1)^n \frac{n}{2^n} \right] = 1$$

در واقع، این نتیجه را باید با برهانی صوری تأیید کرد (ر.ک. مسئله ۵۳).

مثال ۹. همانطور که استدلال زیر نشان می‌دهد، دنباله $\{a_n\} = \{(-1)^n\}$ واگراست. حد پیشنهادی L را اختیار کرده، و ε را آنقدر کوچک می‌گیریم که بازه $I = (L - \varepsilon, L + \varepsilon)$ شامل لااقل یکی از نقاط 1 و -1 نباشد. واضح است که این همواره میسر است حتی اگر $L = 1$ یا $L = -1$. چون به ازای n زوج $(-1)^n = 1$ ، تمام جملات a_n با n زوج خارج بازه I که شامل 1 نیست قرار دارند، و چون به ازای n فرد $(-1)^n = -1$ ، تمام جملات a_n با n فرد خارج بازه غیرشامل -1 واقع می‌باشند. لذا، در هر حال، دنباله نمی‌تواند همگرا باشد.

مثال ۱۰. دنباله $\{2^n\}$ واگرا به ∞ است، زیرا 2^n به ازای n به قدر کافی بزرگ بدلخواه بزرگ است. در واقع، به ازای هر $C > 0$ می‌توان با انتخاب $n > \log_2 C$ نامساوی $2^n > C$ را داشت.

مثال ۱۱. در مثال ۸، صفحه ۵۲۹، نشان داده شد که

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x = e,$$

که در آن $e = 2.7182818 \dots$ پایه لگاریتمهای طبیعی است. این یعنی به ازای هر $\varepsilon > 0$ عددی مانند $A > 0$ هست به طوری که به ازای هر عدد حقیقی x متجاوز از A ،

$$\left| \left(1 + \frac{1}{x} \right)^x - e \right| < \varepsilon$$

اما در این صورت واضح است که به ازای هر عدد صحیح n متجاوز از A ،

$$\left| \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n - e \right| < \varepsilon$$

و در نتیجه، همانطور که در صفحه ۵۲۹ پیش‌بینی شد،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n} \right)^n = e,$$

به طور کلی، اگر تابع f بر $[1, \infty)$ چنان تعریف شده باشد که وقتی $x \rightarrow \infty$ ، $f(x) \rightarrow L$ ، اساساً همین استدلال نشان می‌دهد که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $f(n) \rightarrow L$ ، بخصوص، از فرمول (۱۵)، صفحه ۵۲۹، معلوم می‌شود که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{a}{n}\right)^n = e^a,$$

که در آن a عدد دلخواهی می‌باشد.

تبصره. فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله باشند که فقط در تعدادی متناهی جمله فرق دارند. در این صورت، به آسانی معلوم می‌شود که یا $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو همگرا با حد یکسانند یا $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو واگرا می‌باشند.

دنباله‌های کراندار و بی‌کران. گوییم دنباله $\{a_n\}$ کراندار است اگر عددی مانند $C > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر n ، $-C \leq a_n \leq C$ ، یا معادلاً، $|a_n| \leq C$ ، ولی اگر چنین عددی موجود نباشد، گوییم $\{a_n\}$ بی‌کران می‌باشد. (اینها مشابه تعاریف نظیر برای توابع صفحه ۱۰۳ هستند.) مثلاً، دنباله‌های $\{1/n\}$ و $\{(-1)^n\}$ هر دو کراندارند، زیرا به ازای هر n ، $|1/n| \leq 1$ و $|(-1)^n| \leq 1$. از آن سو، دنباله‌های $\{n\}$ و $\{n!\}$ هر دو بی‌کرانند، زیرا اگر n به قدر کافی بزرگ باشد، n و $n!$ از عدد مثبت داده شده C بزرگترند (توجه کنید که اگر $n > 2$ ، $n! > n$). همانطور که قضیه زیر نشان می‌دهد، در مطالعه دنباله‌های همگرا مفهوم دنباله کراندار به نحو بسیار طبیعی ظاهر خواهد شد.

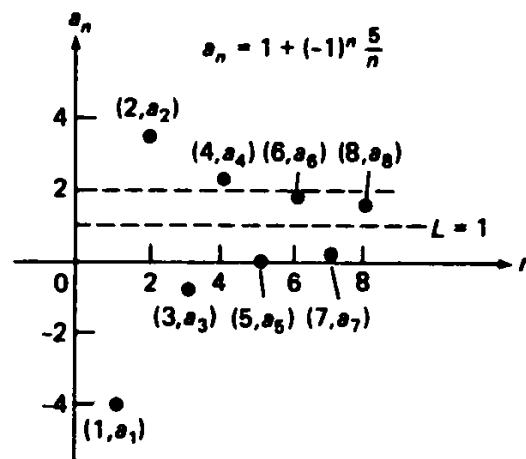
قضیه ۱ (کرانداري دنباله همگرا). هر دنباله همگرا کراندار است.

برهان. فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله همگرا با حد L باشد. در این صورت، عدد صحیحی مانند N هست به طوری که تمام جملات a_{N+1}, a_{N+2}, \dots ، یعنی تمام جملات دنباله با زیرنویس بیشتر از N ، در بازه $(L-1, L+1)$ قرار دارند. با انتخاب $C > 0$ به قدر کافی بزرگ، می‌توان بازه $[-C, C]$ با نقطه میانی مبدأ را طوری گرفت که نه فقط بازه $(L-1, L+1)$ با تمام جملات a_{N+1}, a_{N+2}, \dots بلکه تمام جملات باقیمانده a_1, a_2, \dots, a_N را نیز دربرداشته باشد. اما، در این صورت، به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ ، $|a_n| \leq C$ ؛ در نتیجه، دنباله $\{a_n\}$ کراندار است.

مثال ۱۲. در شکل ۴ ساخت انجام شده در برهان قضیه ۱ برای دنباله‌ای توضیح داده شده که جمله عمومی‌اش عبارت است از

$$a_n = 1 + (-1)^n \frac{5}{n}$$

در اینجا $L = 1$ ، $N = 5$ ، و هر $C \geq 4$ کارساز است.



شکل ۴

چون یک دنباله همگرا باید کراندار باشد، یک دنباله بی‌کران باید واگرا باشد. مثلاً، دنباله‌های بی‌کران $\{n\}$ و $\{n!\}$ واگرا هستند. از آن سو، یک دنباله کراندار لازم نیست همگرا باشد. در واقع، قبلاً دیدیم که دنباله $\{(-1)^n\}$ هم کراندار و هم واگراست.

قواعد حدی برای دنباله‌ها. اعمال جبری بر دنباله‌ها همانند این اعمال بر توابع است؛ یعنی، مجموع، تفاضل، حاصل ضرب، و خارج قسمت دو دنباله $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی با جملات عمومی $a_n + b_n$ ، $a_n - b_n$ ، $a_n b_n$ ، و a_n/b_n می‌باشند. فرض کنیم $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دنباله‌هایی همگرا بوده، و

$$(۴) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = L, \quad \lim_{n \rightarrow \infty} b_n = M.$$

در این صورت،

$$(۵) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n + b_n) = L + M,$$

$$(۶) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n - b_n) = L - M,$$

$$(۷) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n b_n = LM,$$

$$(۸) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \frac{L}{M}.$$

مشروط بر اینکه در آخرین فرمول $M \neq 0$. (ممکن است تعدادی متناهی جمله از دنباله $\{a_n/b_n\}$ دارای مخرج صفر بوده و در نتیجه وجود نداشته باشند ، ولی به ازای n به قدر کافی بزرگ ، $b_n \neq 0$ ، چون وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $b_n \rightarrow M \neq 0$) به عبارت دیگر ، مجموع $\{a_n + b_n\}$ تفاضل $\{a_n - b_n\}$ ، حاصل ضرب $\{a_n b_n\}$ ، یا خارج قسمت $\{a_n/b_n\}$ دودنباله همگرای $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ خود یک دنباله همگراست که حدش مساوی مجموع ، تفاضل ، حاصل ضرب ، یا خارج قسمت حدود $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ می باشد . قواعد (۵) تا (۸) شبیه قواعد نظیر برای حدود توابع اند ، و اساساً " به همان روش ثابت می شوند .

اختیاری . به عنوان مثالی از طرز کار ، با استفاده از تعدیل جزئی استدلال به کاررفته در اثبات قضیه ۴ ، صفحه ۱۳۵ ، نشان می دهیم که رابطه (۴) رابطه (۵) را ایجاب می کند . فرض کنیم (۴) برقرار باشد . در این صورت ، به ازای هر $\varepsilon > 0$ می توان اعداد صحیح و مثبت N_a و N_b را طوری یافت که به ازای هر $N > N_a$ ، $|a_n - L| < \varepsilon/2$ و به ازای هر $n > N_b$ ، $|b_n - M| < \varepsilon/2$. بنابراین ، طبق نامساوی مثلثی ، به ازای هر $n > N = \max \{N_a, N_b\}$ ،

$$\begin{aligned} |(a_n + b_n) - (L + M)| &= |(a_n - L) + (b_n - M)| \\ &\leq |a_n - L| + |b_n - M| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon \end{aligned}$$

اما این به " زبان ε, N " یعنی رابطه (۵) برقرار است .

به ازای هر عدد c ، دنباله ثابت $\{c\}$ که تمام جملاتش مساوی c است ، بوضوح همگرا با حد c است . در نتیجه ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} c = c.$$

از رابطه (۷) معلوم می شود که هرگاه $\{a_n\}$ همگرا به L باشد ، آنگاه $\{ca_n\}$ همگرا به cL است .

مثال ۱۳ . $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n+1}$ را حساب کنید .

حل. به کمک مثال ۷ و چند قاعده^۱ فوق، داریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{3n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{3 + \frac{1}{n}} = \frac{\lim_{n \rightarrow \infty} 2}{\lim_{n \rightarrow \infty} \left(3 + \frac{1}{n}\right)} = \frac{2}{\lim_{n \rightarrow \infty} 3 + \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n}} = \frac{2}{3+0} = \frac{2}{3}.$$

یک راه غیرصوریتر محاسبه^۲ این حد، که از بسیاری مراحل دوری می‌کند، ملاحظه^۳ این امر است که به ازای n بزرگ، $3n+1 \approx 3n$ ؛ در نتیجه،

$$\frac{2n}{3n+1} \approx \frac{2n}{3n} = \frac{2}{3},$$

که در آن تقریب با رفتن $n \rightarrow \infty$ بهتر خواهد شد.

دنباله‌های یکنوا. گوییم دنباله^۴ $\{a_n\}$ صعودی است اگر به ازای هر n ، $a_n \leq a_{n+1}$ ، و نزولی است اگر به ازای هر n ، $a_n \geq a_{n+1}$. منظور از یک دنباله^۵ یکنوا یعنی دنباله‌ای که صعودی یا نزولی باشد. در اینجا به جای \leq و \geq علائم $<$ و $>$ را قرار داده‌و، مثل تعاریف نظیر برای توابع (ر.ک. صفحه ۸۵)، دنباله^۶ $\{a_n\}$ را "اکیدا" صعودی نامیم اگر به ازای هر n ، $a_n < a_{n+1}$ ، و "اکیدا" نزولی نامیم اگر به ازای هر n ، $a_n > a_{n+1}$ (البته دنباله‌های اکیدا "صعودی و اکیدا" نزولی یکنوایند). این تعاریف ما را برای نتیجه^۷ اساسی زیر آماده می‌سازد.

قضیه^۸ ۲ (همگرایی دنباله^۹ یکنوای کراندار). هر دنباله^{۱۰} یکنوای کراندار همگراست.

برهان (اختیاری). فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله^{۱۱} صعودی کراندار باشد. در این صورت، بنابر کرانداری $\{a_n\}$ ، عددی مانند C وجود دارد به طوری که به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ ، $a_n \leq C$. یک چنین عدد C یک کران بالایی دنباله^{۱۲} $\{a_n\}$ نام دارد. البته، بی‌نهایت کران بالایی از $\{a_n\}$ وجود دارند؛ و در واقع، هر عدد بزرگتر از C نیز یک کران بالایی است، ولی یکی از این کرانهای بالایی، که ما آن را با L نشان می‌دهیم، کوچکترین می‌باشد.^{۱۳} اما، به ازای هر $\varepsilon > 0$ باید جمله‌ای از دنباله^{۱۴} $\{a_n\}$ ، مثلاً a_N ، وجود

۱. در فرض وجود L به خاصیت اساسی دستگاه اعداد حقیقی، به نام تمامیت، تکیه می‌کنیم که می‌گوید هر مجموعه از اعداد حقیقی دارای کران بالایی کوچکترین کران بالایی دارد. برای مطالب بیشتر در باب تمامیت، ر.ک. کتابی در باب حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته.

داشته باشد به طوری که

$$L - \varepsilon < a_N \leq L,$$

زیرا در غیر این صورت عدد $L - \varepsilon$ ، که از L کوچکتر است، یک کران بالایی $\{a_n\}$ می‌شود که با تعریف L متناقض می‌باشد. اما، در این صورت، چون $\{a_n\}$ صعودی است (و L یک کران بالایی است)، به ازای هر $n > N$ خواهیم داشت

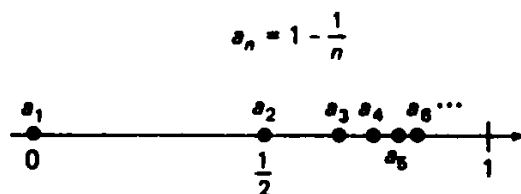
$$L - \varepsilon < a_N \leq a_n \leq L$$

بنابراین، به ازای هر $n > N$ ، $|a_n - L| < \varepsilon$ ، یعنی، $\{a_n\}$ همگرا با حد L می‌باشد. از آن سو، فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله نزولی کراندار باشد. در این صورت، $\{-a_n\}$ یک دنباله صعودی کراندار می‌باشد. لذا، همانطور که اینک ثابت شد، $\{-a_n\}$ همگراست با حدی که به $-L$ نشان می‌دهیم. اما، در این صورت،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = -\lim_{n \rightarrow \infty} (-a_n) = -(-L) = L,$$

در نتیجه، $\{a_n\}$ نیز همگرا با حد L می‌باشد.

معنی شهودی قضیه ۲ واضح است. هرگاه جملات یک دنباله به بازه‌ای متناهی محدود شده باشند و نتوانند با افزایش n کوچک شوند، آنگاه باید همه در نقطه‌ای مانند L "اجتماع کنند" یا "انباشته شوند"، که این حد دنباله می‌باشد. شکل ۵ این پدیده را برای دنباله صعودی کراندار $\{a_n\} = \{1 - (1/n)\}$ توضیح می‌دهد، که عدد $L = 1$ را به عنوان کوچکترین کران بالایی و نیز حدش دارد.



شکل ۵

مثال ۱۴. همگرایی دنباله $\{r^n\}$ را بررسی کنید، که در آن r عدد حقیقی دلخواهی است.

حل. ابتدا فرض کنیم $0 < r < 1$. در این صورت، دنباله $\{r^n\}$ کراندار است، زیرا به ازای هر n ، $0 < r^n < 1$ ، و نیز (اکیدا) نزولی است، زیرا به ازای هر n ، $r^{n+1} = r \cdot r^n < r^n < r$. از اینرو، بنابر قضیه ۲، $\{r^n\}$ همگرا به همان حد L است. برای تعیین

L ، ملاحظه می‌کنیم که

$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} r^{n+1} = \lim_{n \rightarrow \infty} r(r^n) = r \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = rL.$$

چون $r \neq 1$ ، این فقط وقتی ممکن است که $L = 0$ ؛ و لذا،

$$(۹) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \quad (0 < r < 1).$$

حال فرض کنیم $-1 < r < 0$. پس $0 < |r| < 1$ ؛ در نتیجه، بنا بر (۹) با $|r|$ به جای r ، $\{|r|^n\}$ همگرا به ۰ می‌باشد. اما، در این صورت، $\{r^n\}$ نیز همگرا به ۰ است، زیرا $|r^n - 0| = |r^n| = |r|^n$ را می‌توان به ازای n به قدر کافی بزرگ هر قدر بخواهیم کوچک کرد. پس نتیجه می‌شود که

$$(۹') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \quad (-1 < r < 0).$$

از تلفیق این با (۹) و این امر واضح که دنباله $\{0^n\} = \{0\}$ همگرا به ۰ است، درمی‌یابیم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r^n = 0 \quad (-1 < r < 1).$$

لذا، اگر $-1 < r < 1$ یا معادلاً $|r| < 1$ ، $\{r^n\}$ همگرا به ۰ می‌باشد.

اگر $r = 1$ ، $\{r^n\}$ دنباله ثابت $\{1\}$ است، که بوضوح همگرا به ۱ می‌باشد، حال آنکه اگر $r = -1$ ، $\{r^n\}$ دنباله واگرای $\{(-1)^n\}$ می‌باشد. هرگاه $r > 1$ ، آنگاه، به کمک قضیه دوجمله‌ای (ر.ک. صفحه ۲۲۷)،

$$r^n = [1 + (r - 1)]^n \geq 1 + n(r - 1) > n(r - 1),$$

در نتیجه، $\{r^n\}$ واگرا به ∞ است. در واقع، اگر $C > 0$ ، به ازای هر $n > C/(r - 1)$ ، $r^n > C$ ؛ به صورت دیگر، هرگاه $r > 1$ ، آنگاه وقتی $x \rightarrow \infty$ ، $r^x \rightarrow \infty$ (ر.ک. صفحه ۵۰۸)، که ایجاب می‌کند که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $r^n \rightarrow \infty$. هرگاه $r < -1$ ، آنگاه $|r| > 1$ و $\{|r|^n\}$ واگرا به ∞ است. اما، در این صورت،

$$r^n = (-|r|)^n = (-1)^n |r|^n$$

در صورت زوج بودن n مقدار مثبت بدخواه بزرگ، و در صورت فرد بودن n مقدار منفی به دلخواه بزرگ خواهد گرفت. بنابراین، اگر $r < -1$ ، $\{r^n\}$ حد ندارد. لذا، بالاخره، دنباله $\{r^n\}$ همگرا به ۰ است اگر $|r| < 1$ و همگرا به ۱ است اگر $r = 1$ ، حال آنکه واگرا به ∞ است اگر $r > 1$ و حد ندارد اگر $r \leq -1$.

اغلب برای زیرنویس متغیر جمله^۶ عمومی یک دنباله حرفی غیر از n انتخاب می‌شود که معمولاً "از حروف وسط الفبا می‌باشد. مثلاً"، $\{2^k\}$, $\{2^l\}$, $\{2^i\}$ سه طریق دیگر برای نمایش دنباله^۶ $\{2^n\}$ مثل مثال ۱ است.

فرض کنیم $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ یک دنباله باشد. همچنین،

$$a_{n_1}, a_{n_2}, \dots, a_{n_i}, \dots \quad (n_1 < n_2 < \dots < n_i < \dots)$$

یک "زیر دنباله" باشد که از $\{a_n\}$ با حذف تعدادی متناهی یا نامتناهی جمله به دست آمده است. در این صورت، اگر $\{a_n\}$ همگرا با حد L باشد، $\{a_{n_i}\}$ نیز باید همگرا به L باشد (چرا؟). بخصوص، زیر دنباله^۶ $\{a_{n+N}\}$ حاصل از $\{a_n\}$ به وسیله^۶ حذف N جمله^۶ اول باید همگرا به L باشد، زیر دنباله^۶ $\{a_{2k}\}$ مرکب از جملات با اندیس زوج باید به L همگرا باشد، و غیره. در همین وضع، اگر $\{a_n\}$ دوزیر دنباله^۶ همگرا به حدود مختلف داشته باشد باید واگرا باشد.

مثال ۱۵. ما قبلاً "از مثال ۹ می‌دانیم که دنباله^۶ $\{(-1)^n\}$ واگراست. این را می‌توان با توجه به اینکه جملات با اندیس زوج همگرا به ۱ هستند ولی جملات با اندیس فرد همگرا به -۱ می‌باشند نیز به دست آورد. در واقع،

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{2k} = \lim_{k \rightarrow \infty} 1 = 1,$$

حال آنکه

$$\lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (-1)^{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} (-1) = -1.$$

مسائل

شش جمله^۶ اول دنباله^۶ $\{a_n\}$ با جمله^۶ عمومی داده شده را نوشته و حد L را (در صورت وجود) پیدا کنید. (حالت $L = \infty$ یا $L = -\infty$ مجاز است.)

$$a_n = \frac{1}{n^2 + 1} \quad \cdot \checkmark$$

$$a_n = \frac{2n - 1}{n + 1} \quad \cdot \checkmark$$

$$a_n = (-1)^{n-1} n^2 \quad \cdot \checkmark$$

$$a_n = \frac{n^2 + n + 1}{(n + 1)^2} \quad \cdot \checkmark$$

$$a_n = \frac{2^n - 1}{2^n + 1} \quad \cdot \checkmark$$

$$a_n = n^{(-1)^n} \quad \cdot \checkmark$$

$$a_n = (-1)^n + \frac{1}{n} \quad \cdot ۱۷$$

$$a_n = \frac{2^n + 1}{3^n} \quad \cdot ۱۶$$

$$a_n = \underbrace{0.333 \dots 3}_n \quad \cdot ۱۸$$

$$a_n = \frac{1 + (-1)^n}{2n} \quad \cdot ۱۹$$

$$a_n = \sqrt{2} \quad \cdot ۱۱$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} - \frac{1}{n} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ \frac{1}{2} + \frac{1}{n} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases} \quad \cdot ۱۲$$

$$a_n = \begin{cases} \frac{1}{2} + \frac{1}{n} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ 1 - \frac{1}{n} & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases} \quad \cdot ۱۳$$

$$a_n = \begin{cases} \sqrt{n} & \text{اگر } n \text{ فرد باشد} \\ n^2 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد} \end{cases} \quad \cdot ۱۴$$

$$a_n = \frac{1}{n} \sin \frac{n\pi}{2} \quad \cdot ۱۶$$

$$a_n = \cos \frac{n\pi}{3} \quad \cdot ۱۵$$

$$a_n = \frac{n^2}{2^n} \quad \cdot ۱۸$$

$$a_n = \left(\frac{n}{n+1} \right)^n \quad \cdot ۱۷$$

$$a_n = \frac{1}{n} \ln \frac{1}{n} \quad \cdot ۲۰$$

$$a_n = \ln \frac{1}{n} \quad \cdot ۱۹$$

جمله عمومی a_n دنباله داده شده را نوشته و حد L دنباله را (در صورت وجود) در صورتی بیابید که قانون تشکیل ناشی از چند جمله اول دنباله برای تمام جملات برقرار باشد .

$$1, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \dots \quad \cdot ۲۴$$

$$0, 3, 8, 15, \dots \quad \cdot ۲۱$$

$$0, \frac{2}{3}, \frac{8}{9}, \frac{16}{27}, \dots \quad \cdot ۲۲$$

$$-\frac{1}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{4}{9}, \frac{7}{9}, \dots \quad \cdot ۲۳$$

$$\frac{1}{2}, -\frac{1}{4}, \frac{1}{8}, -\frac{1}{16}, \dots \quad \cdot ۲۶$$

$$1, \frac{1}{6}, \frac{1}{15}, \frac{1}{24}, \dots \quad \cdot ۲۵$$

$$-5, 10, -15, 20, \dots \quad \cdot ۲۸$$

$$5, 0, -5, -10, \dots \quad \cdot ۲۷$$

۲۹ . جملات دنباله $\{(-\frac{1}{2})^n\}$ به ازای چه مقادیری از n در فاصله کمتر از 10^{-6} از حدش قرار دارند ؟

۳۵. جملات دنباله $\{(2n-1)/(2-3n)\}$ به ازای چه مقادیری از n در فاصله کمتر از 10^{-3} از حدش قرار دارند؟

شش جمله اول دنباله $\{a_n\}$ تعریف شده با فرمول بازگشتی را بنویسید.

$$31 \checkmark \quad a_1 = 0 \text{ اگر } n \geq 2, a_n = 3a_{n-1} + 2$$

$$32 \checkmark \quad a_1 = -1 \text{ اگر } n \geq 2, a_n = 1 - 4a_{n-1}$$

$$33 \checkmark \quad a_1 = \frac{1}{2} \text{ اگر } n \geq 2, a_n = \frac{1}{a_{n-1}} + 1$$

$$34 \checkmark \quad a_1 = 3 \text{ اگر } n \geq 2, a_n = \frac{2}{a_{n-1} + 1}$$

۳۵ \checkmark دنباله $\{a_n\}$ تعریف شده با فرمول بازگشتی

$$a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \text{ اگر } a_1 = 1, a_2 = 1, n \geq 3$$

به دنباله فیبوناچی^۱ معروف است. ده جمله اول $\{a_n\}$ را بنویسید.

۳۶. کودکی یک نسل خرگوش به وجود می‌آورد به این ترتیب که یک جفت خرگوش نوزاد،

یکی نر و دیگری ماده، را در یک آغل بزرگ رها می‌کند. فرض کنید ۱ ماه طول بکشد

تا یک جفت خرگوش نوزاد بالغ شوند و ۱ ماه دیگر طول بکشد تا یک جفت دیگر

خرگوش تولید کنند. با این فرض که هیچ خرگوشی نمیرد و هر زایمان از یک نر و یک

ماده تشکیل شده باشد و در روز اول ماه جدید صورت گیرد، نشان دهید که تعداد

جفت خرگوشها پس از n ماه در آغل جمله n م دنباله فیبوناچی می‌باشد.

۳۷ \checkmark با شروع از دنباله $\{a_n\}$ ، فرض کنید $\{s_n\}$ دنباله دیگری باشد که با فرمول

بازگشتی زیر تعریف شده است.

$$s_n = s_{n-1} + a_n, \text{ اگر } s_1 = a_1, n \geq 2$$

عبارتی برای s_n بنویسید که فقط مستلزم جملات $\{a_n\}$ باشد.

درحالتی که $a_n = 2n - 1$ ، فرمول ساده‌ای برای s_n بنویسید.

۳۸ \checkmark آیا کوچکترین کران بالایی دنباله $\{1 + (-1)^n/n\}$ همان حد آن است؟ جواب خود

را توضیح دهید.

دنباله کران‌داری بیابید که

۳۹. دارای بزرگترین جمله بوده ولی دارای کوچکترین جمله نباشد.

۴۰. دارای بزرگترین جمله و کوچکترین جمله باشد.
۴۱. نه بزرگترین جمله داشته باشد نه کوچکترین جمله
۴۲. دارای کوچکترین جمله بوده و دارای بزرگترین جمله نباشد.
۴۳. فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنباله کراندار باشد (بخصوص، یک دنباله همگرا) و $\{b_n\}$ دنباله‌ای همگرا به صفر باشد. نشان دهید که دنباله $\{a_n b_n\}$ نیز همگرا به صفر است.
۴۴. نشان دهید که دو دنباله با جملات عمومی a_n و

$$b_n = a_n + (n-1)(n-2)\cdots(n-N)$$

دارای N جمله اول یکسان بوده ولی در جملات بعد باهم تفاوت دارند. (لذا، دانستن تعدادی متناهی جمله اولیه هرگز نمی‌تواند یک دنباله را به‌طور منحصر به فرد معین سازد.)

۴۵. کدام جملات دو دنباله $\{n^3 - 6n^2\}$ و $\{6 - 11n\}$ باهم یکی هستند؟
۴۶. از دنباله‌های مسائل ۱ تا ۲۸ کدامها صعودی‌اند؟ کدامها نزولی می‌باشند؟ راهنمایی. اگر $a_n = f(n)$ ، دنباله $\{a_n\}$ در صورتی (اکیدا) صعودی است که به ازای هر $x \geq 1$ ، $df(x)/dx > 0$ و در صورتی (اکیدا) نزولی است که به ازای هر $x \geq 1$ ، $df(x)/dx < 0$. دلیلش را توضیح دهید.
- فرض کنید r عددی حقیقی باشد. حدود زیر را حساب کنید.

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1 + r^{2n}} \quad . 48$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{1 + r^n} \quad (r \neq -1) \quad . 47$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r^n}{n!} \quad . 49$$

- دو دنباله واگرای $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ چنان بیابید که
۵۰. $\{a_n + b_n\}$ همگرا باشد. ۵۱. $\{a_n b_n\}$ همگرا باشد.
۵۲. $\{a_n/b_n\}$ همگرا باشد.
۵۳. فرض کنید c عدد دلخواهی بزرگتر از ۱ باشد. نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{c^n} = 0.$$

- بخصوص، با استفاده از این حد مثال ۸ را تحقیق نمایید.
۵۴. فرض کنید $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ دو دنباله همگرا با حد یکسان L بوده، و دنباله $\{c_n\}$ چنان باشد که به‌ازای هر n (یا به‌ازای تمام n های به قدر کافی بزرگ) $a_n \leq c_n \leq b_n$.

نشان دهید که $\{c_n\}$ نیز همگرا به L می‌باشد.

راهنمایی. این شبیه برای دنباله‌های قضیه ۱۰، صفحه ۱۳۷ است (قضیه ساندویچ).

۵۵. نشان دهید هرگاه وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $a_n \rightarrow L$ و f تابع پیوسته‌ای در L باشد، آنگاه

$$\text{وقتی } n \rightarrow \infty, f(a_n) \rightarrow f(L)$$

۵۶. به کمک مسئله قبل، نشان دهید

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = 1,$$

که در آن c عدد مثبت دلخواهی است. همچنین، نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1.$$

با استفاده از مشتگیری، بزرگترین جمله دنباله با جمله عمومی زیر را پیدا نمایید.

$$a_n = \frac{\sqrt{n}}{n + 2500} \quad \cdot 58$$

$$a_n = \sqrt[n]{n} \quad \cdot 57$$

$$a_n = \frac{n^{10}}{2^n} \quad \cdot 59$$

۶۰. پس از اثبات صعودی اکید بودن $\{[1 + (1/n)]^n\}$ و نزولی اکید بودن $\{[1 + (1/n)]^{n+1}\}$ ،

نشان دهید که

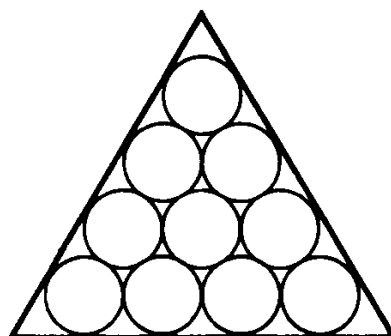
$$(یک) \quad \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n < e < \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

نقص استفاده از این نامساوی مضاعف در تخمین عدد e چیست؟

۶۱. فرض کنید k_n قرص مستدیر همنهشت n سطر را اشغال کرده و در یک مثلث متساوی

الاضلاع به شکل ۶ محاط شده باشد؛ در نتیجه،

$$k_1 = 1, \quad k_2 = 1 + 2 = 3, \quad k_3 = 1 + 2 + 3 = 6, \dots$$



شکل ۶

فرض کنید A مساحت مثلث بوده و A_n مساحت کل k_n قرص باشد. نشان دهید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{A_n}{A} = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}.$$

۰۶۲. فرض کنید

$$I_n = \int_0^{\pi/2} \sin^n x \, dx.$$

در این صورت، بنابر فرمولهای ثابت شده در مسئله ۱۳، صفحه ۶۱۴،

$$\frac{I_{2n+1}}{I_{2n}} = \frac{\frac{2}{3} \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n+1}}{\frac{1}{2} \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n}} = \frac{2}{\pi} \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1}.$$

نشان دهید که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $I_{2n+1}/I_{2n} \rightarrow 1$ ، و در نتیجه،

$$(دو) \quad \pi = 2 \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{1} \frac{2}{3} \frac{4}{3} \frac{4}{5} \cdots \frac{2n}{2n-1} \frac{2n}{2n+1}.$$

این فرمول جالب برای π در ۱۶۵۰ توسط جان والیس^۱، ریاضیدان انگلیسی، کشف شد. راهنمایی. از مسئله ۵۴ استفاده نمایید.

۲۰۹. سریهای نامتناهی

فرض کنیم $\{a_n\}$ یک دنباله نامتناهی باشد. در این صورت، عبارت

$$(۱) \quad a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots,$$

یا به طور فشرده تر،

$$(۱') \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n,$$

یک سری نامتناهی، یا فقط یک سری، نامیده می شود. در نوشتن (۱')، از تعدیل نماد سیگما که در صفحه ۳۶۱ معرفی شد، که در آن حد جمع بندی بالایی به جای عددی صحیح ∞ است، استفاده می کنیم. اعداد $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ جملات سری نامیده می شوند (همچنین، جملات دنباله $\{a_n\}$ نام دارند)، و a_n جمله n م یا جمله عمومی نامیده می شود.

سریهای همگرا و واگرا. در این مرحله سریهای (۱) یا (۱') عدد نبوده بلکه صرفاً "یک عبارت صوری می‌باشند، زیرا هنوز در معنی مجموع بی‌نهایت جمله، مفهومی که هیچ نقشی در ریاضیات مقدماتی ندارد، تصمیمی نگرفته‌ایم. برای انتساب معنی به یک چنین "مجموع نامتناهی" به صورت زیر عمل می‌کنیم. مجموع n جمله اول سری (۱) یا (۱') عدد کامل^۶ تعریف شده^۶

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$$

است به نام مجموع جزئی n م سری. (بالاخره، ابهامی در معنی مجموع تعداد متناهی جمله وجود ندارد.) مجموعه‌های جزئی متوالی دنباله^۶ زیر را تشکیل می‌دهند:

$$s_1 = a_1, s_2 = a_1 + a_2, \dots, s_n = \sum_{i=1}^n a_i, \dots$$

فرض کنیم این دنباله همگرا با حد

$$(۲) \quad S = \lim_{n \rightarrow \infty} s_n$$

باشد که در بخش ۱۰۹ تعریف شد. در این صورت، گوئیم سری (۱) یا (۱') همگرا (یا واگرا) است، و به آن مجموع S را نسبت می‌دهیم. اما، اگر دنباله^۶ مجموعه‌های جزئی $\{s_n\}$ واگرا باشد، یعنی $\{s_n\}$ به حدی متناهی نزدیک نشود، گوئیم سری واگرا، بدون مجموع، می‌باشد. اگر سری همگرا با مجموع S باشد، می‌نویسیم

$$a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots = S,$$

یا، با نماد سیگما،

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = S$$

اندیس جمع‌بندی، درست مثل یک مجموع متناهی، یک "اندیس ظاهری" است در این معنی که هر علامت دیگر به همین خوبی خواهد بود. مثلاً،

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i, \sum_{k=1}^{\infty} a_k, \sum_{n=1}^{\infty} a_n, \sum_{p=1}^{\infty} a_p$$

همه یک سری را نشان می‌دهند. این ملاحظات به ما اجازه^۶ نوشتن (۲) را به شکل زیر می‌دهند:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i,$$

که کاملاً " شبیه تعریف

$$\int_c^\infty f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_c^n f(x) dx$$

یک انتگرال مجازی همگرا با بازه^۱ انتگرالگیری بی‌کران است .

فرایند یافتن مجموع یک سری همگرا جمع‌بندی سری نام دارد ، و لوآنکه عملاً " عبارت است از محاسبه^۲ حد دنباله^۳ مجموعهای جزئی سری . اگر m عدد صحیح مثبتی (نه لزوماً " 1) باشد ، سری

$$\sum_{n=m}^{\infty} a_n$$

یعنی

$$a_m + a_{m+1} + \dots + a_n + \dots,$$

یعنی ، سری حاصل از (۱) با حذف $m - 1$ جمله^۴ اولیه . گاهی اوقات $m = 0$ ؛ یعنی ، سری نامتناهی با " جمله^۵ صفرم " شروع می‌شود ، مثل سری مهمی که در مثال زیر مطرح می‌شود .

سری هندسی

مثال ۱ . در همگرایی سری هندسی

$$(۳) \quad \sum_{n=0}^{\infty} ar^n = a + ar + ar^2 + \dots + ar^n + \dots,$$

که در آن r و $a \neq 0$ ثابتهای دلخواهی می‌باشند ، بحث کنید .

حل . توجه کنید که سری هندسی با جمله^۶ a شروع شده ، و هر جمله از ضرب جمله^۷ قبل در عدد r ، به نام قدرنسبت سری ، به دست می‌آید . مجموع n جمله^۸ اول سری هندسی ، یعنی مجموع جزئی n ، عبارت است از

$$s_n = a + ar + \dots + ar^{n-1}.$$

برای به دست آوردن فرمول ساده‌ای جهت s_n ، ملاحظه می‌کنیم که

$$s_n - rs_n = (a + ar + \dots + ar^{n-1}) - (ar + ar^2 + \dots + ar^n).$$

که در آن همه^۹ جملات جز دو تا حذف شده باقی می‌ماند

$$s_n - rs_n = a - ar^n.$$

پس نتیجه می‌شود که $s_n(1-r) = a(1-r^n)$ ، یا معادلا

$$s_n = \frac{a}{1-r} (1-r^n) \quad (r \neq 1).$$

هرگاه $|r| < 1$ ، آنگاه ، بنابر مثال ۱۴ ، صفحه ۷۹۷ ، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $r^n \rightarrow 0$ ، ولذا ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \frac{a}{1-r},$$

که ایجاب می‌کند که

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n = \frac{a}{1-r} \quad (|r| < 1).$$

بنابر همان مثال ، $\{r^n\}$ به ازای $|r| > 1$ واگراست ؛ و در نتیجه ، همین امر برای دنباله $\{s_n\}$ درست است ، و سری (۳) واگرا می‌باشد . اگر $r = 1$ ، سری به صورت زیر درمی‌آید :

$$a + a + a + a + \dots,$$

حال آنکه اگر $r = -1$ ، سری شکل زیر را خواهد داشت :

$$a - a + a - a + \dots.$$

در حالت اول $s_n = na$ ، ولی در حالت دوم

$$s_n = \begin{cases} a & \text{اگر } n \text{ فرد باشد،} \\ 0 & \text{اگر } n \text{ زوج باشد،} \end{cases}$$

ولی در هر دو حالت $\{s_n\}$ واگراست ؛ و در نتیجه ، سری (۳) نیز چنین است . لذا ، به‌طور خلاصه ، سری هندسی (۳) همگرا با مجموع $a/(1-r)$ است اگر $-1 < r < 1$ و در غیر این صورت واگرا خواهد بود .

مثال ۲ . با اختیار $a = 1, r = \frac{1}{2}$ در سری هندسی ، به دست می‌آوریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{1}{1-\frac{1}{2}} = \frac{1}{\frac{1}{2}} = 2,$$

حال آنکه با انتخاب $a = 1, r = -\frac{1}{2}$ به دست می‌آوریم

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \dots + \frac{(-1)^n}{2^n} + \dots = \frac{1}{1-(-\frac{1}{2})} = \frac{1}{\frac{3}{2}} = \frac{2}{3}.$$

مثال ۳ . سری هندسی به ازای $a = 3, r = \frac{1}{10}$ به صورت زیر درمی‌آید :

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3 \left(\frac{1}{10}\right)^n = 3 + \frac{3}{10} + \frac{3}{100} + \dots + \frac{3}{10^n} + \dots = \frac{3}{1-\frac{1}{10}} = \frac{3}{\frac{9}{10}} = \frac{10}{3},$$

نتیجه‌ای که اصلاً "تعجب‌آور نیست"، زیرا این مجموع چیزی جز عدد اعشاری مکررنمی باشد:

$$3.333\dots = 3.\bar{3} = \frac{10}{3}.$$

(رابطهٔ بین اعشاریها و سریهای نامتناهی، و بخصوص بین اعشاریهای مکررو سری هندسی، در بخش بعد دنبال خواهد شد.) از آن سو، به ازای $r = 3$ ، $a = \frac{1}{10}$ ، سری هندسی واگرای زیر به دست می‌آید:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{3^n}{10} = \frac{1}{10} + \frac{3}{10} + \frac{9}{10} + \dots + \frac{3^n}{10} + \dots$$

مثال ۴. نشان دهید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{1 \cdot 2} + \frac{1}{2 \cdot 3} + \dots + \frac{1}{n(n+1)} + \dots$$

همگراست، و مجموع آن را بیابید.

حل. با بسط جملهٔ عمومی برحسب کسره‌های جزئی، معلوم می‌شود که

$$\frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1},$$

و در نتیجه،

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)} = \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} \right).$$

لذا، مجموع جزئی n م سری عبارت است از

$$\begin{aligned} s_n &= \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n-1} - \frac{1}{n}\right) + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) \\ &= 1 + \left(-\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) + \left(-\frac{1}{3} + \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(-\frac{1}{n} + \frac{1}{n}\right) - \frac{1}{n+1}. \end{aligned}$$

چون تمام جملات مجموع سمت راست جز جملهٔ اول و آخر 0 هستند، مجموع "توی هم رفته"، به

$$s_n = 1 - \frac{1}{n+1}$$

تحویل می‌شود. بنابراین،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 - \frac{1}{n+1} \right) = 1,$$

که از آن نتیجه می‌شود که سری داده شده همگرا با مجموع 1 می‌باشد.

مثال ۵. نشان دهید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right)$$

واگراست.

حل. چون

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{n+1}{n} = \sum_{n=1}^{\infty} [\ln(n+1) - \ln n],$$

مجموع جزئی n م

$$s_n = (\ln 2 - \ln 1) + (\ln 3 - \ln 2) + \cdots + [\ln(n+1) - \ln n]$$

سری توی هم رفته و به

$$s_n = \ln(n+1) - \ln 1 = \ln(n+1)$$

تحویل می‌شود. اما

$$\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \ln(n+1) = \infty,$$

و در نتیجه، سری داده شده واگرا می‌باشد.

سری توافقی

مثال ۶. نشان دهید که سری

$$(۴) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{n} + \cdots,$$

که به سری توافقی معروف است، واگرا می‌باشد.

حل. فرض کنیم s_n مجموع جزئی n م سری توافقی باشد. در این صورت،

$$\begin{aligned}
 s_{2^k} &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) \\
 &\quad + \cdots + \left(\frac{1}{2^{k-1}+1} + \frac{1}{2^{k-1}+2} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right) \\
 &> 1 + \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8} + \frac{1}{8}\right) + \cdots + \underbrace{\left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^k} + \cdots + \frac{1}{2^k}\right)}_{\text{جمله } 2^{k-1}} \\
 &= 1 + \frac{1}{2} + \frac{2}{4} + \frac{4}{8} + \cdots + \frac{2^{k-1}}{2^k} = 1 + \underbrace{\frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{2}}_k = 1 + \frac{k}{2}
 \end{aligned}$$

(با استفاده از این امر که به ازای $z = 1, 2, \dots, 2^{k-2}$ ، $2^{k-1} + z < 2^k$ ، مثلاً،

$$s_4 = s_{2^2} > 1 + \frac{2}{2} = 2, \quad s_8 = s_{2^3} > 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}, \quad s_{16} = s_{2^4} > 1 + \frac{4}{2} = 3,$$

و غیره. لذا، دنبالهٔ مجموعهای جزئی $\{s_n\}$ شامل جملات بدخواه بزرگ است. و در واقع به ازای $C > 0$ و هر $k > 2C - 2$ داریم $s_{2^k} > C$. بنابراین، $\{s_n\}$ واگراست؛ و در نتیجه، سری توافقی (۴) نیز چنین می‌باشد.

تبصره. می‌توان نشان داد که مجموع جزئی n م سری توافقی با تقریب عالی از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$s_n \approx C + \ln n,$$

که در آن $C = 0.5772156649 \dots$ عددی است که به ثابت اویلر معروف است و خطای تقریب وقتی $n \rightarrow \infty$ ، سریعاً به 0 نزدیک می‌گردد. با استفاده از این فرمول، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned}
 s_{1000} &\approx 7.48, & s_{10,000} &\approx 9.79, \\
 s_{100,000} &\approx 12.09, & s_{1,000,000} &\approx 14.39.
 \end{aligned}$$

لذا، میزان واگرایی سری توافقی به نحو خارق‌العاده‌ای کند است.

شرط لازم برای همگرایی. حال شرط ساده‌ای به دست می‌آوریم که یک سری برای همگرایی باید در آن صدق نماید.

قضیه ۳ (شرط لازم برای همگرایی یک سری) . هرگاه سری

$$(۵) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

همگرا باشد ، آنگاه

$$(۶) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0.$$

به بیان معادل ، سری در صورتی واگراست که

$$(۶') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$$

(در این شکل ، قضیه اغلب " آزمون جمله n م برای واگرایی " نام دارد) .

پرهان . واضح است که

$$a_n = s_{n+1} - s_n,$$

که در آن $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ مجموع جزئی n م سری می باشد . فرض کنیم سری همگرا با مجموع S باشد . در این صورت ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} (s_{n+1} - s_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} s_{n+1} - \lim_{n \rightarrow \infty} s_n = S - S = 0.$$

مثال ۷ . سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{3} + \frac{2}{5} + \frac{3}{7} + \dots + \frac{n}{2n+1} + \dots$$

واگراست ، زیرا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2} \neq 0.$$

با امتحان اینکه هر سری هندسی همگرا در شرط (۶) صدق می کند ، می بینیم که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} ar^n = 0 \quad , \quad -1 < r < 1$$

به همین نحو ، سری همگرای مثال ۴ در شرط زیر صدق می کند :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n(n+1)} = 0,$$

شرطی که قضیه ۳ آن را لازم دارد . لیکن ، عکس قضیه ۳ برقرار نیست ؛ یعنی ، برقراری (۶) همگرایی سری (۵) را ایجاب نمی کند . مثلاً ، سری توافقی واگراست و لو اینکه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} = 0,$$

و سری مثال ۵ واگراست و لواینکه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n} \right) = \ln 1 = 0.$$

به زبان منطق، (۶) یک شرط لازم ولی نه کافی برای همگرایی سری (۵) است. بخش اعظم این فصل به بررسی "آزمونهای همگرایی" اختصاص دارد. اینها شرایطی کافی برای همگرایی اند؛ یعنی، شرایطی که همگرایی یک سری را تضمین می‌کنند.

اعمال جبری بر سریها. طبق تعریف، حاصل ضرب سری $\sum a_n$ در عدد c سری $\sum ca_n$ است، و مجموع یا تفاضل دوسری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ سری $\sum (a_n + b_n)$ یا $\sum (a_n - b_n)$ می‌باشد (علامت "ساده شده" \sum اختصاری است برای $\sum_{n=m}^{\infty}$ ، که در آن عدد صحیح نامنفی m اندیس جمع‌بندی پایینی است که در اینجا مساوی 1 می‌باشد). این تعاریف چه سریهای $\sum a_n$ و $\sum b_n$ همگرا باشند یا نه به کار می‌روند ولی هرگاه همگرا و به ترتیب با مجموعهای S و S' باشند، آنگاه

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} ca_n &= \lim_{n \rightarrow \infty} (ca_1 + \cdots + ca_n) = c \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + \cdots + a_n) = cS, \\ \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + b_n) &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(a_1 + b_1) + \cdots + (a_n + b_n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} [(a_1 + \cdots + a_n) + (b_1 + \cdots + b_n)] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + \cdots + a_n) + \lim_{n \rightarrow \infty} (b_1 + \cdots + b_n) = S + S', \end{aligned}$$

و به همین نحو، $\sum (a_n - b_n) = S - S'$. توجه کنید که در اینجا واژه "مجموع" به دو معنی به کار رفته است، یکی مجموع یک سری همگرا که عدد است و دیگری مجموع صوری $\sum (a_n + b_n)$ دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ که ممکن است همگرا نباشد، ولی معنی مورد نظر همواره از قراین معلوم خواهد بود.

مثال ۸. دو سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{1}{2}\right)^n \quad \text{و} \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2}\right)^n$$

همگرا و به ترتیب با مجموعهای 2 و $\frac{2}{3}$ می‌باشند (ر.ک. مثال ۲). بنابراین،

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] = 2 + \frac{2}{3} = \frac{8}{3}.$$

و این را می‌توان مستقیماً "باتوجه به

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n + \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] &= 2 + 0 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0 + 2\left(\frac{1}{2}\right)^4 + \dots \\ &= 2 + 2\left(\frac{1}{4}\right) + 2\left(\frac{1}{4}\right)^2 + \dots = \frac{2}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{2}{\frac{3}{4}} = \frac{8}{3} \end{aligned}$$

امتحان نمود. به همین نحو،

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[\left(\frac{1}{2}\right)^n - \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] = 2 - \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

و به‌طورکلی،

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left[A \left(\frac{1}{2}\right)^n + B \left(-\frac{1}{2}\right)^n \right] = 2A + \frac{2}{3}B.$$

فرض کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دوسری به ترتیب با مجموعهای جزئی n م s_n و t_n بوده، و سریها فقط در تعدادی متناهی جمله باهم فرق داشته باشند؛ درنتیجه، به ازای هر n متجاوز از عدد صحیح N ، $a_n = b_n$ در این صورت،

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + \dots + a_N + a_{N+1} + \dots + a_n + \dots,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + \dots + b_N + a_{N+1} + \dots + a_n + \dots,$$

و درنتیجه، اگر $n > N$ ،

$$s_n - t_n = (a_1 + \dots + a_n) - (b_1 + \dots + b_n) = s_N - t_N,$$

یا معادلاً

$$s_n = t_n + c,$$

که در آن $c = s_N - t_N$ عدد ثابتی می‌باشد. پس نتیجه می‌شود که دو دنباله $\{s_n\}$ و $\{t_n\}$ هر دو همگرا یا هر دو واگرایند؛ و درنتیجه، همین امر برای دو سری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ درست است. به عبارت دیگر، دو سری که فقط در تعدادی متناهی جمله باهم فرق دارند یا هر دو همگرایند یا هر دو واگرا. به عنوان تمرین، نشان دهید که هرگاه در یک سری تعدادی متناهی جمله حذف شود یا تعدادی متناهی جمله اضافی (در مواضع دلخواه) درج

گردد، آنگاه سری به دست آمده همگراست اگر سری اصلی همگرا باشد و واگراست اگر سری اصلی واگرا باشد. البته، در حالت همگرایی، مجموع سری به دست آمده عموماً "بامجموع سری اصلی متفاوت می‌باشد".

باقیمانده^۹ یک سری. بخصوص، فرض کنید n جمله^{۱۰} اول سری

$$(Y) \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_k = a_1 + a_2 + \cdots + a_k + \cdots$$

را حذف کرده، سری جدید

$$(Y') \quad \sum_{k=1}^{\infty} a_{n+k} = a_{n+1} + a_{n+2} + \cdots + a_{n+k} + \cdots$$

را به دست آورده باشیم. در این صورت، اگر (Y) همگرا باشد، سری (Y') نیز چنین است. مجموع (Y') را با R_n نشان داده، و آن را باقیمانده پس از n جمله^{۱۱} سری اصلی (Y) می‌نامیم. فرض کنیم S مجموع (Y) باشد. در این صورت،

$$S = (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) + R_n,$$

و در نتیجه،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = S - \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n) = S - S = 0.$$

لذا، باقیمانده پس از n جمله^{۱۲} یک سری همگرا با رفتن $n \rightarrow \infty$ همگرا به ۰ می‌باشد.

مثال ۹. باقیمانده پس از n جمله^{۱۳} سری هندسی همگرای

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots = 2$$

عبارت است از

$$\begin{aligned} R_n &= \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^{n+k}} = \frac{1}{2^n} + \frac{1}{2^{n+1}} + \frac{1}{2^{n+2}} + \cdots + \frac{1}{2^{n+k}} + \cdots \\ &= \frac{1}{2^n} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^k} + \cdots \right) = \frac{2}{2^n} = \frac{1}{2^{n-1}}, \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2^{n-1}} = 0.$$

تغییر اندیس جمع‌بندی. در مثال اخیر می‌توانستیم باقیمانده را به شکل زیر بنویسیم:

$$R_n = \sum_{k=n}^{\infty} \frac{1}{2^k},$$

که در آن n حد پایینی جمع‌بندی است. به‌طور کلی، همواره می‌توان اندیس جمله عمومی یک سری نامتناهی را با تغییر نظیر در حد پایینی جمع‌بندی تغییر داد. مثلاً،

$$\sum_{n=0}^{\infty} ar^n, \quad \sum_{n=3}^{\infty} ar^{n-3}, \quad \sum_{n=-2}^{\infty} ar^{n+2}$$

سه طریقه مختلف نوشتن سری هندسی

$$a + ar + ar^2 + \dots$$

است، ولی طرق دوم و سوم در مقایسه با طریقه اول، که طریقه طبیعی نوشتن سری است، مطلوب نمی‌باشند. البته، هرطور که سری را بنویسیم، مجموع جزئی n م آن یکی است، و در این حالت، همانطور که مثال ۱ نشان داده، عبارت است از

$$s_n = \frac{a}{1-r} (1-r^n) \quad (r \neq 1).$$

مسائل

پنج مجموع جزئی اول سریهای زیر را حساب کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \quad \cdot ۲ \checkmark$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 3 \quad \cdot ۱ \checkmark$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n(n+1) \quad \cdot ۴ \checkmark$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \quad \cdot ۳ \checkmark$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n-1)} \quad \cdot ۶ \checkmark$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln n \quad \cdot ۵ \checkmark$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \sin \frac{n\pi}{2} \quad \cdot ۸ \checkmark$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{2^{n+1}} \right) \quad \cdot ۷ \checkmark$$

۹۷. فرض کنید a_n جمله n م سری $\sum a_n$ و s_n مجموع جزئی n م آن باشد. دنباله $\{a_n\}$ را برحسب دنباله $\{s_n\}$ بیان نمایید.

سری را بنویسید که مجموع جزئی n م آن به صورت زیر باشد.

$$s_n = \frac{(-1)^n}{n+1} \quad \cdot ۱۲ \checkmark$$

$$s_n = \frac{2^n - 1}{2^n} \quad \cdot ۱۷ \checkmark$$

$$s_n = \frac{n+2}{n+1} \quad \cdot ۱۱ \checkmark$$

اگر سری داده شده همگرا باشد، مجموعش را پیدا کنید. در غیر این صورت، واگرایی آن را نام ببرید. در حالتی که چند جمله اولیه سری داده شده است، فرض کنید قانون تشکیل ناشی از این جملات برای تمام جملات سری برقرار باشد.

$$1 - \frac{1}{3} - \frac{1}{9} - \frac{1}{27} - \dots \quad \cdot 13 \checkmark$$

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \dots \quad \cdot 14 \checkmark$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \quad \cdot 15 \checkmark$$

$$1 + \frac{1}{2} - 1 - \frac{1}{4} + 1 + \frac{1}{8} - 1 - \frac{1}{16} + \dots \quad \cdot 16 \checkmark$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n/2} \quad \cdot 18 \checkmark$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 4 \left(-\frac{5}{6} \right)^n \quad \cdot 17 \checkmark$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{\ln n} \quad \cdot 20$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \quad \cdot 19 \checkmark$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 + (-1)^n}{2^n} \quad \cdot 22$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \cos \frac{n\pi}{3} \quad \cdot 21$$

$$\frac{1}{1 \cdot 3} + \frac{1}{3 \cdot 5} + \frac{1}{5 \cdot 7} + \dots \quad \cdot 24$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{2^n} - \frac{2}{3^n} \right) \quad \cdot 23$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{n\pi^{1-n}} \quad \cdot 26$$

$$\frac{3}{1 \cdot 2} - \frac{5}{2 \cdot 3} + \frac{7}{3 \cdot 4} - \frac{9}{4 \cdot 5} + \dots \quad \cdot 25$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} [\arctan(n+1) - \arctan n] \quad \cdot 28$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+1)(n+2)} \quad \cdot 27$$

باقیمانده R_n پس از n جمله سری داده شده را یافته، و تحقیق کنید وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $R_n \rightarrow 0$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3}{n(n+3)} \quad \cdot 31$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n+2)} \quad \cdot 30$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{e-1}{e^{n+1}} \quad \cdot 29$$

۳۲. نشان دهید هرگاه $\sum a_n$ همگرا و $\sum b_n$ واگرا باشد، آنگاه مجموع $\sum (a_n + b_n)$ دوسری واگراست.

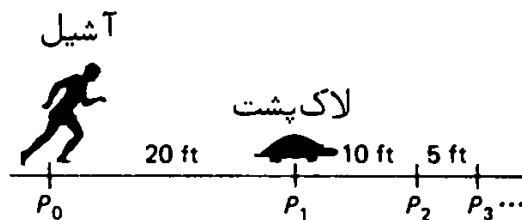
۳۳. آیا عددی مانند r هست که به ازای آن سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(r^n + \frac{1}{r^n} \right)$$

همگرا باشد؟

۳۴. فرض کنید s_n مجموع جزئی n یک سری همگرا باشد. نشان دهید که برای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مانند $N > 0$ وجود دارد به طوری که به ازای هر $m > N$ و $n > N$ ، $|s_m - s_n| < \varepsilon$. با استفاده از این امر، برهان دیگری برای واگرایی سری توافقی (۴) به دست آورید.

۳۵. آشیل در تعقیب یک لاک‌پشت در امتداد جاده‌ای می‌دود. در لحظه شروع لاک‌پشت طبق شکل ۷، در فاصله ۲۰ ft از وی قرار دارد؛ آشیل ابتدا در P_0 و لاک‌پشت ابتدا



شکل ۷

لاک‌پشت در P_1 است. فرض کنید آشیل با سرعت ۲۰ ft/sec و لاک‌پشت با سرعت ۱۰ ft/sec بدود. در این صورت، ۱ sec طول می‌کشد تا آشیل از P_0 به P_1 برسد، ولی در این اثنا لاک‌پشت ۱۰ ft بیشتر تا موضع P_2 رفته است. برای رفتن آشیل از P_1 به P_2 به اندازه ۱/۲ sec دیگر طول می‌کشد، و در این مدت لاک‌پشت ۵ ft دیگر تا موضع P_3 پیموده است، و همین طور تا بی‌نهایت. چون آشیل همواره در جهت اشغال آخرین موضع لاک‌پشت است، به نظر می‌رسد که، با آنکه سرعت آشیل دو برابر لاک‌پشت است، هرگز نمی‌تواند به لاک‌پشت رسیده از او بگذرد. این پارادکس منسوب به زنون ایلایی، فیلسوف یونانی است که پنج قرن قبل از میلاد می‌زیسته است. با استدلالی مقدماتی، نشان دهید که آشیل پس از ۲ sec عملاً "از لاک‌پشت جلو می‌زند، و سپس پارادکس زنون را با جمع‌بندی سری هندسی متناسبی باطل نمایید.

۳۶. فرض کنید در مسئله قبل لاک‌پشت بتواند با هر سرعتی کمتر از ۲۰ ft/sec بدود، و تصمیم بگیرد وقتی آشیل از P_0 به P_1 می‌رود با سرعت $20(\frac{1}{2}) = 10$ ft/sec، وقتی آشیل

۱. این سرعت برای لاک‌پشت زیاد است، ولی محاسبات را ساده خواهد کرد.

از P_1 به P_2 می‌رود با سرعت $20(\frac{1}{3}) = 13\frac{1}{3}$ ft/sec ، وقتی آشیل از P_2 به P_3 می‌رود با سرعت $20(\frac{2}{3}) = 15$ ft/sec ، و در حالت کلی وقتی آشیل از P_{n-1} به P_n می‌رود ، با سرعت $20n/(n+1)$ ft/sec حرکت کند . نشان دهید که در این حالت ، با آنکه لاک پشت هرگز به سرعت آشیل نمی‌دود ، آشیل هیچگاه از لاک پشت سبقت نخواهد گرفت !

۳۷ . یک توپ لاستیکی پس از افتادن از ارتفاع 45 ft روی یک پیاده‌رو سفت بالا و پایین می‌رود . الاستیسیته^۶ توپ چنان است که در هر برگشت به دوسوم ارتفاع قبلی خود می‌رسد . مسافت پیموده شده توسط توپ وقتی به اوج ششمین برگشت خود رسیده چقدر است ؟ مسافت پیموده شده توسط توپ تا وقتی به حال سکون درمی‌آید چقدر است ؟

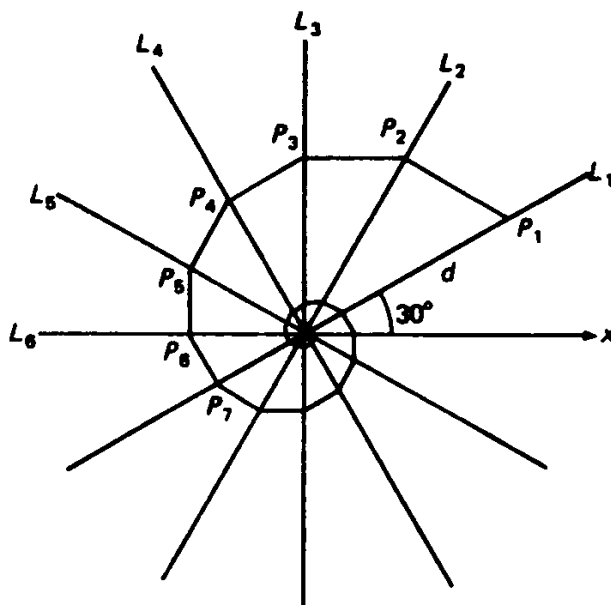
۳۸ . وقتی پول صرف خرید کالا و دریافت سرویس می‌شود ، آنهایی که پول دریافت می‌کنند بخشی از آن را خرج می‌کنند ، آنهایی که دوبار دریافت می‌کنند قسمتی از آن را باز می‌گردانند و کار همین‌طور تا بی‌نهایت ادامه دارد . فرض کنید خرج اولیه D دلار بوده ، و هر دریافت‌کننده $100c$ درصد آن را خرج و $100s$ درصد را پس‌انداز می‌کند . کمیات c و s ، که به تمایل حاشیه‌ای به مصرف و تمایل حاشیه‌ای به پس‌انداز معروفند ، هر دو اعدادی بین 0 و 1 می‌باشند ؛ واضح است که $c + s = 1$ ، زیرا پول یا مصرف می‌شود (خرج می‌شود) یا پس‌انداز می‌گردد . پس درآمد اجتماع کالا " (در مورد تمام کشور ، درآمد ملی) مالا" به اندازه kD دلار افزایش می‌یابد ، که در آن k ضریب نام دارد . تمام این مفاهیم کلیدی اقتصاد در مقیاس بزرگ از اقتصاددان انگلیسی ، جان مینارد کینز^۱ (۱۹۴۰ - ۱۸۸۳) است . نشان دهید که $k = 1/s > 1$ ، که به " اثر چندگانه " منجر می‌شود که در اقتصاد کینزی اهمیت اساسی دارد . (مثلاً " هرگاه $s = 0.2$ ، آنگاه $k = 5$ ؛ در نتیجه ، \$1 خرج یا سرمایه‌گذاری منجر به افزایش \$5 درآمد ملی می‌شود .)

۳۹ . حسن و حسین که ابتدا 250 ft از هم فاصله دارند به سوی یکدیگر ، هر یک با سرعت 10 ft/sec ، می‌دوند . در همین مدت سگی بین حسن و حسین با سرعت 15 ft/sec این طرف و آن طرف می‌دود . وقتی حسن و حسین به هم برسند ، سگ چه مسافتی را دویده است ؟ این مسئله را به روش مقدماتی و جمع‌بندی یک سری مناسب حل نمایید .

۴۰ . مسئله^۶ قبل را مجدداً " به دو راه و با این فرض حل کنید که حسین به جای دویدن به سوی حسن با سرعت 10 ft/sec با سرعت 5 ft/sec از وی دور شود .

۴۱. عقربه‌های ساعت شمار و دقیقه‌شمار یک ساعت وقت ظهر برهم منطبق‌اند. زمان (تا نزدیکترین ثانیه) را بیابید که عقربه‌ها مجدداً "برهم منطبق شوند. این را به دو طریق انجام دهید.

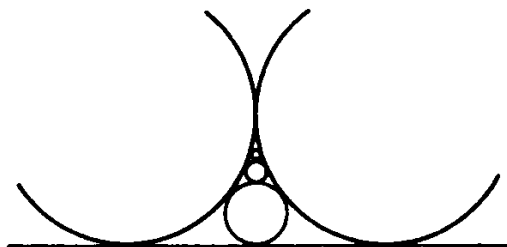
۴۲. همانند شکل ۸، فرض کنید L_1, L_2, \dots, L_6 شش خط باشند به طوری که L_1 با محور مثبت x زاویه 30° ساخته و زاویه 6° بین هر جفت خط مجاور نیز 30° باشد (توجه کنید



شکل ۸

که L_3 بر محور y و L_6 بر محور x منطبق است). از نقطه P_1 بر L_1 به فاصله d تا مبدأ عمودی بر L_2 فرود می‌آوریم تا آن را در نقطه P_2 قطع کند، از P_2 عمودی بر L_3 فرود می‌آوریم تا آن را در P_3 قطع کند، و همین‌طور تا آخر (خط بعد از L_6 مجدداً L_1 است). پاره‌خطهای متوالی $P_1P_2, P_2P_3, \dots, P_nP_{n+1}, \dots$ مسیر چند ضلعی مارپیچی $P_1P_2 \dots P_n \dots$ را تشکیل می‌دهند که حول مبدأ پیچیده و در عین حال به سمت آن منقبض می‌شود. نشان دهید که این مسیر به طول $(2 + \sqrt{3})d$ می‌باشد.

۴۳. شکل ۹ ناحیه محدود به دو دایره مماس به شعاع ۱ و یک خط مماس بر هر دو آنها



شکل ۹

را نشان می‌دهد. دنباله‌ای از دوابر کوچکتر را به شیوه‌ی نموده شده محاط می‌کنیم. از هندسه می‌دانیم که اقطار این دوابر جملات یک سری‌اند که مجموعشان 1 می‌باشد. این سری چیست؟

۴۴. نشان دهید که سری $\cos \theta + \cos 2\theta + \dots + \cos n\theta + \dots$ به ازای هر θ واگراست، ولی سری $\sin \theta + \sin 2\theta + \dots + \sin n\theta + \dots$ واگراست مگر آنکه $\theta = k\pi$ ، که در آن k عددی صحیح است. راهنمایی. از اتحادهای

$$\begin{aligned}\cos(n-1)\theta &= \cos n\theta \cos \theta + \sin n\theta \sin \theta, \\ \sin(n-1)\theta &= \sin n\theta \cos \theta - \cos n\theta \sin \theta, \\ \cos^2 n\theta + \sin^2 n\theta &= 1\end{aligned}$$

استفاده کنید.

۴۵. تقی فشارخون دارد، و دکترش یک سری معالجات با دارو را تجویز کرده است. تقی اولین نوبت را در لحظه $t=0$ می‌خورد، و نوبتهای بعدی در لحظات $t = T, 2T, \dots, nT, \dots$ می‌باشند. در هر نوبت غلظت دارو در خون وی به سرعت به میزان C_0 بالا می‌رود، ولی در همان حال بدنش برای حذف دارو وارد عمل می‌شود. فرض کنید $C = C(t)$ غلظت دارو در خون تقی در لحظه t باشد. در این صورت، مثل مسئله ۲۵، صفحه ۵۴۵، C در معادله دیفرانسیل

$$\frac{dC}{dt} = -kC$$

صدق می‌کند، که در آن $k > 0$ ثابت حذف می‌باشد. نشان دهید که C مآلاً بین سطح

$$R = \frac{C_0}{e^{kT} - 1},$$

به نام غلظت مانده‌ای، و سطح $R + C_0$ نوسان می‌کند. فرض کنید دکتر بخواهد مطمئن شود که غلظت هیچگاه زیر سطح C_e که در آن دارو مؤثر است و نیز هیچگاه بالای سطح C_s که در آن دارو بی‌مصرف می‌ماند قرار نمی‌گیرد. نشان دهید که این با انتخاب

$$C_0 = C_s - C_e, \quad T = \frac{1}{k} \ln \frac{C_s}{C_e}$$

صورت خواهد گرفت.

۳۰۹ سریهای نامنفی؛ آزمونهای مقایسه و آزمون انتگرال

سری نامتناهی

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

را نامنفی گوئیم اگر تمام جملات آن نامنفی باشند؛ یعنی، اگر به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ ، $a_n \geq 0$. هر مجموع جزئی $s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n$ از سری نامنفی $\sum a_n$ مجموع تعدادی متناهی عدد نامنفی است؛ و در نتیجه، خود عددی نامنفی می‌باشد. به علاوه، $\{s_n\}$ یک دنباله صعودی است، زیرا

$$s_n = a_1 + \dots + a_n \leq a_1 + \dots + a_n + a_{n+1} = s_{n+1} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

این نکات ما را فوراً "به حکم زیر می‌رساند که در بررسی سریهای نامنفی از اساس می‌باشد.

قضیه ۴ (محک همگرایی برای سریهای نامنفی). سری نامنفی $\sum a_n$ همگراست اگر دنباله $\{s_n\}$ مجموعهای جزئی آن کران بالایی داشته باشد؛ یعنی، عددی مانند $C > 0$ موجود باشد به طوری که به ازای هر n ،

$$s_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n \leq C$$

اگر این عدد موجود نباشد، سری واگرا خواهد بود.

برهان. هرگاه $\{s_n\}$ کران بالایی داشته باشد، آنگاه $\{s_n\}$ یک دنباله صعودی کراندار است. اما در این صورت، طبق قضیه ۲، صفحه ۷۹۶، $\{s_n\}$ همگراست؛ و در نتیجه، $\sum a_n$ نیز چنین است. از آن سو، هرگاه $\{s_n\}$ کران بالایی نداشته باشد، آنگاه s_n به ازای هر n به قدر کافی بزرگ از $C > 0$ داده شده متجاوز است؛ در نتیجه، وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $s_n \rightarrow \infty$. در این حالت $\{s_n\}$ واگراست؛ و لذا، $\sum a_n$ نیز چنین است.

اعشاریها و سریهای نامتناهی

مثال ۱. اعشاری نامختوم $0.c_1c_2\dots c_n\dots$ که در آن به ازای هر n ، $0 \leq c_n \leq 9$ ، اختصاری است برای سری نامتناهی

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{c_n}{10^n} = \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \dots + \frac{c_n}{10^n} + \dots$$

نشان دهید که هرچنین سری همگراست، و این تاکنون به طور تلویحی فرض شده بود.

حل. سری (۱) نامنفی است؛ و لذا، طبق قضیه ۴، همگرایی آن در صورتی ثابت می‌شود که بتوان نشان داد که دنباله $\{s_n\}$ مجموعهای جزئی آن کران بالایی دارد. اما این درست است، زیرا به ازای هر n ،

$$\begin{aligned} s_n &= \frac{c_1}{10} + \frac{c_2}{10^2} + \cdots + \frac{c_n}{10^n} \leq \frac{9}{10} + \frac{9}{10^2} + \cdots + \frac{9}{10^n} \\ &= \frac{9}{10} \left[1 + \frac{1}{10} + \cdots + \left(\frac{1}{10}\right)^{n-1} \right] = \frac{9}{10} \frac{1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n}{1 - \frac{1}{10}} \\ &= 1 - \left(\frac{1}{10}\right)^n < 1 \end{aligned}$$

مثال ۲. فرض کنید $0.a_1 \dots a_m \overline{b_1 \dots b_n}$ ($\neq 0$) یک اعشاری مکرر باشد، که در آن قالب ارقام $b_1 \dots b_n$ به طول n که روی آن خط کشیده شده به‌طور نامحدود تکرار خواهد یافت. (مثلاً، در اعشاری $0.517\overline{29} = 0.517292929 \dots$ داریم $a_1 = 5, a_2 = 1, a_3 = 7, b_1 = 2, b_2 = 9$) نشان دهید، همانطور که در صفحه ۷ پیش‌بینی شد، هر چنین اعشاری نمایش یک عدد گویاست که با خارج‌قسمت

$$\frac{P}{q} \quad (q \neq 0)$$

دو عدد صحیح P و q تعریف می‌شود.

حل. فرض کنیم $A = a_1 \dots a_m$ و $B = b_1 \dots b_n$ ، که اینهارشته‌هایی از ارقام هستند نه حاصل ضرب ا در این صورت، A و B اعداد صحیح مثبتی می‌باشند و، پس از جمع‌بندی سری هندسی همگرا،

$$\begin{aligned} 0.a_1 \dots a_m \overline{b_1 \dots b_n} &= \frac{A}{10^m} + \frac{1}{10^m} \sum_{k=1}^{\infty} B \left(\frac{1}{10^n}\right)^k = \frac{A}{10^m} + \frac{B}{10^{m+n}} \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{1}{10^n}\right)^k \\ &= \frac{A}{10^m} + \frac{B}{10^{m+n}} \frac{1}{1 - \frac{1}{10^n}} = \frac{A}{10^m} + \frac{B}{10^m} \frac{1}{10^n - 1}. \end{aligned}$$

بنابراین،

$$(۲) \quad 0.a_1 \dots a_m \overline{b_1 \dots b_n} = \frac{A(10^n - 1) + B}{10^m(10^n - 1)},$$

واعشاری مکرر داده شده به صورت خارج‌قسمت دو عدد صحیح مثبت، یعنی

"تحویل ناپذیر نیست .
 $p = A(10^{n-1} - 1) + B$ و $q = 10^m(10^n - 1)$ ، بیان شده است . این خارج قسمت لزوماً"

مثال ۳. عدد گویای نموده شده با اعشاری مکرر $4.\overline{321}$ را به صورت تحویل ناپذیر پیدا کنید .

حل . با نوشتن $4.\overline{321}$ به صورت $4 + 0.\overline{321}$ روش مثال قبل را بر اعشاری مکرر $0.\overline{321}$ اعمال نمایید . در اینجا $n = 2, m = 1, B = 21, A = 3$ و فرمول (۲) نتیجه می‌دهد که

$$0.\overline{321} = \frac{3(10^2 - 1) + 21}{10(10^2 - 1)} = \frac{3(99) + 21}{10(99)} = \frac{318}{990}$$

که در آن آخرین کسر تحویل ناپذیر نیست ، زیرا صورت و مخرج هر دو (دقیقاً) بر ۲ و نیز بر ۳ بخشپذیرند . بنابراین ،

$$0.\overline{321} = \frac{106}{330} = \frac{53}{165}$$

که اکنون تحویل ناپذیر است ، زیرا ۵۳ بر ۳ ، ۵ ، یا ۱۱ بخشپذیر نیست ، عوامل اول عبارتند از $165 = 3(5)(11)$. لذا ، بالاخره ،

$$4.\overline{321} = 4 + \frac{53}{165} = \frac{713}{165}$$

که هنوز تحویل ناپذیر می‌باشد (چرا ؟)

با وجود موفقیتی که در بخش ۲.۹ در جمع‌بندی سریهای خاص داشتیم ، معمولاً " یافتن مجموع دقیق یک سری همگرا مشکل یا غیرممکن است . خوشبختانه اگر همگرایی یک سری به قدر کافی " سریع " باشد ، مجموع آن را می‌توان با جمع‌بندی تعداد نسبتاً کمی از جملات اولیه سری به خوبی تقریب کرد . با اینحال ، پیش از سعی در یافتن مجموع دقیق یا تقریبی یک سری باید ابتدا از همگرایی آن مطمئن بود . سری توافقی واگرا در اینجا اخطار است ، زیرا واگرایی آن چندان روشن نیست .

آزمون مقایسه . لذا ، هدف بعدی ما ارائه آزمونهایی است که همگرایی یک سری را مشخص نماید . از قضیه ۴ استفاده کرده ، آزمونی به دست می‌آوریم که در آن رفتار همگرایی یک سری رفتار همگرایی سری دیگر را معین می‌کند . این " آزمون مقایسه " مشابه دقیق قضیه

۶، صفحه ۶۸۲، برای انتگرالهای مجازی است.

قضیه ۵ (آزمون مقایسه). فرض کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو سری نامنفی باشند به طوری که به ازای n های به قدر کافی بزرگ، $a_n \leq b_n$. در این صورت،
(یک) اگر $\sum b_n$ همگرا باشد، $\sum a_n$ نیز چنین است.
(دو) اگر $\sum a_n$ واگرا باشد، $\sum b_n$ نیز چنین است.

برهان. می توان فرض کرد که به ازای هر n ، $a_n \leq b_n$ ، زیرا همانطور که در صفحه ۸۱۳ نشان دادیم، دو سری که فقط در تعدادی متناهی جمله باهم فرق دارند یا هر دو همگرا هستند یا هر دو واگرا. فرض کنیم مجموعهای جزئی n م $\sum a_n$ و $\sum b_n$ به ترتیب s_n و t_n باشند. در این صورت، به ازای هر n ،

$$s_n = a_1 + \dots + a_n \leq b_1 + \dots + b_n = t_n$$

هرگاه $\sum b_n$ همگرا با مجموع T باشد، آنگاه به ازای هر n ، $t_n \leq T$ (چرا؟)؛ و لذا، چون $s_n \leq t_n$ به ازای هر n خواهیم داشت $s_n \leq T$. در نتیجه، دنباله $\{s_n\}$ دارای کران بالایی می باشد. پس از قضیه ۴ نتیجه می شود که $\sum a_n$ نیز همگراست. در همین وضع هرگاه $\sum a_n$ واگرا باشد، آنگاه $\sum b_n$ نیز چنین است زیرا، همانطور که لحظه ای پیش نشان داده شد، همگرایی $\sum b_n$ همگرایی $\sum a_n$ را ایجاب خواهد کرد.

گوییم سری $\sum b_n$ بر سری $\sum a_n$ مسلط است اگر به ازای n های به قدر کافی بزرگ، $b_n \geq a_n$. لذا، طبق قضیه ۵، هر سری تحت تسلط یک سری همگرا خود همگراست ولی هر سری مسلط بر یک سری واگرا خود واگراست. در اینجا، مثل جاهای دیگر در این بخش، سری مورد نظر نامنفی گرفته می شود.

مثال ۴. سری

$$(۳) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \dots + \frac{1}{n!} + \dots$$

(بنابر تعریف، $0! = 1$) تحت تسلط سری

$$(۴) \quad 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots$$

است. برای تحقیق این امر ملاحظه می کنیم که اگرچه نامساوی $n! > 2^n$ به ازای $n = 0, 1, 2, 3$ برقرار نیست، به ازای هر $n \geq 4$ برقرار است؛ در نتیجه، هر جمله سری (۳) با شروع از

جمله پنجم از جمله نظیر در سری (۴) کوچکتر است. اما سری (۴) همگراست، زیرا از جمله دوم به بعد یک سری هندسی با قدرنسبت $\frac{1}{2}$ است؛ و در واقع، مجموع آن ۳ می‌باشد. بنا بر این، طبق آزمون مقایسه، سری (۳) نیز همگراست و، همانطور که در مثال ۵، صفحه ۸۷۰ نشان داده شده است، مجموعش مساوی e می‌باشد.

مثال ۵. فرض کنیم p عددی کوچکتر از ۱ باشد. چون $1^p = 1$ و n^x یک تابع صعودی از x به ازای $n \geq 2$ است، داریم

$$n^p \leq n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

یا معادلاً

$$\frac{1}{n} \leq \frac{1}{n^p} \quad (n = 1, 2, \dots).$$

بنابراین، اگر $p < 1$ ، سری

$$1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \dots + \frac{1}{n^p} + \dots,$$

به نام سری p ، بر سری توافقی واگرای

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

مسلط است؛ و در نتیجه، بنا بر قضیه ۵، خود واگرا می‌باشد. در واقع، سری p واگراست اگر $p \leq 1$ ، زیرا به ازای $p = 1$ به سری توافقی تحویل می‌یابد. در مثال ۱۰ نشان داده شد که سری p همگراست اگر $p > 1$. از قضیه ۵ می‌توان آزمون مقایسه مفیدتری را نتیجه گرفت. آزمون مقایسه حد.

قضیه ۶ (آزمون مقایسه حد). فرض کنیم $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو سری با جملات مثبت باشند به طوری که

$$(۵) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L,$$

که در آن حالت $L = \infty$ مجاز است. در این صورت، همگرایی $\sum b_n$ همگرایی $\sum a_n$ را ایجاب می‌کند اگر $0 \leq L < \infty$ ، حال آنکه واگرایی $\sum b_n$ واگرایی $\sum a_n$ را ایجاب می‌کند اگر $L > 0$ یا $L = \infty$. بخصوص، اگر L عدد مثبتی باشد، دوسری $\sum a_n$ و $\sum b_n$ یا هر دو همگرایند یا هر دو واگرا.

برهان. چون a_n و b_n مثبت‌اند، نسبت a_n/b_n و متقابل آن b_n/a_n به ازای هر n تعریف شده‌اند. فرض کنیم (۵) برقرار بوده و $0 \leq L < \infty$ (حاجت به گفتن نیست که L نمی‌تواند منفی باشد). در این صورت، به ازای هر $\varepsilon > 0$ عدد صحیحی مانند N هست به طوری که

$$\frac{a_n}{b_n} < L + \varepsilon,$$

یا معادلاً، به ازای هر $n > N$ ،

$$a_n < (L + \varepsilon)b_n.$$

اگر $\sum b_n$ همگرا باشد، سری نامنفی $\sum (L + \varepsilon)b_n$ ، حاصل از ضرب جملات $\sum b_n$ در عامل مثبت $L + \varepsilon$ ، همگراست (ر.ک. صفحه ۸۱۲)، و سپس همگرایی $\sum a_n$ از آزمون مقایسه معمولی نتیجه می‌شود (قضیه ۵). از آن سو، هرگاه $\sum b_n$ واگرا بوده و $L > 0$ یا $L = \infty$ آنگاه، چون نسبت متقابل b_n/a_n با رفتن $n \rightarrow \infty$ به حدی نامنفی نزدیک می‌شود (۰ اگر $L = \infty$)، سری $\sum a_n$ نیز واگراست، زیرا در غیر این صورت، همانطور که لحظه‌ای قبل نشان داده شد، $\sum b_n$ همگراست که با فرض متناقض می‌باشد.

مثال ۶. فرض کنیم

$$a_n = \frac{1}{n^2}, \quad b_n = \frac{1}{n(n+1)},$$

در نتیجه، سری $\sum a_n$ به ازای $p = 2$ است، و $\sum b_n$ سری مطرغ شده در مثال ۴، صفحه ۸۵۸ است. در این صورت، $\sum b_n$ همگرا (با مجموع ۱) است، و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n(n+1)}{n^2} = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right) = 1.$$

بنابراین، طبق قضیه ۶، سری $\sum a_n = \sum (1/n^2)$ نیز همگراست. خواهیم دید که مجموع این سری $\pi^2/6$ می‌باشد.

مثال ۷. با استفاده از قضیه ۶ می‌توان برهان دیگری از همگرایی سری توافقی $\sum (1/n)$ به دست آورد. فرض کنیم

$$a_n = \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right), \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

در این صورت، همانطور که در مثال ۵، صفحه ۸۵۹، به آسانی نشان داده شد، $\sum a_n$ واگراست و، به کمک جانشانی $u = 1/x$ و قاعده هوییتال،

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{n}\right)}{\frac{1}{n}} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln\left(1 + \frac{1}{x}\right)}{\frac{1}{x}} \\ &= \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{\ln(1+u)}{u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{D_u \ln(1+u)}{D_u u} = \lim_{u \rightarrow 0^+} \frac{1}{1+u} = 1. \end{aligned}$$

بنابراین، طبق قضیه ۶، سری $\sum b_n$ ، یعنی سری توافقی، نیز واگرا می‌باشد.

مثال ۸. آیا سری

$$(۶) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+2}{\sqrt{n^3+n}}$$

همگراست یا واگرا؟

حل. تقریب

$$\frac{n+2}{\sqrt{n^3+n}} \approx \frac{n}{\sqrt{n^3}} = \frac{1}{\sqrt{n}}$$

به ازای n های بزرگ تقریب خوبی است، و چون $1/\sqrt{n} \geq 1/n$ ، از این تقریب معلوم می‌شود که سری (۶) بر سری توافقی واگرا مسلط است؛ و در نتیجه، خود واگرا می‌باشد. لذا، سری (۶) را با سری توافقی مقایسه می‌کنیم:

$$a_n = \frac{n+2}{\sqrt{n^3+n}}, \quad b_n = \frac{1}{n}.$$

در این صورت،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{\sqrt{n^3+n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2 + 2n}{\sqrt{n^3} \left(1 + \frac{1}{n^2}\right)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{n} + \frac{2}{\sqrt{n}}}{\sqrt{1 + \frac{1}{n^2}}} = \infty,$$

و چون $\sum b_n$ سری توافقی واگراست، از قضیه ۶ معلوم می‌شود که سری $\sum a_n$ ، یعنی سری (۶)، نیز واگرا می‌باشد.

مثال ۹. آیا سری

$$(۷) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{\sqrt{n^6+n^2}}$$

همگراست یا واگرا؟

حل. تقریب

$$\frac{2n+1}{\sqrt{n^6+n^2}} \approx \frac{2n}{\sqrt{n^6}} = \frac{2}{n^2}$$

به ازای n های بزرگ تقریب خوبی است، و پیشنهاد می‌کند که سری (۷) با سری $\sum (1/n^2)$ که همگرایی آن در مثال ۶ ثابت شد، مقایسه شود. لذا، اختیار می‌کنیم

$$a_n = \frac{2n+1}{\sqrt{n^6+n^2}}, \quad b_n = \frac{1}{n^2}.$$

در این صورت،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^2(2n+1)}{\sqrt{n^6+n^2}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^3\left(2+\frac{1}{n}\right)}{\sqrt{n^6\left(1+\frac{1}{n^4}\right)}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2+\frac{1}{n}}{\sqrt{1+\frac{1}{n^4}}} = 2,$$

و چون $\sum b_n = \sum (1/n^2)$ همگراست، از قضیه ۶ معلوم می‌شود که سری $\sum a_n$ ، یعنی سری (۷)، نیز همگرا می‌باشد.

آزمون انتگرال. ما قبلاً "به تشابه بین سریهای نامتناهی و انتگرالهای مجازی اشاره کرده‌ایم (ر.ک. صفحه ۸۰۶). با آزمون همگرایی بعدی اغلب می‌توان همگرایی یا واگرایی یک سری نامتناهی را از انتگرال مجازی مربوط به آن نتیجه گرفت.

قضیه ۷ (آزمون انتگرال). فرض کنیم $f(x)$ یک تابع مثبت پیوسته باشد که بر بازه $1 \leq x < \infty$ نزولی است، و به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ ، $a_n = f(n)$. در این صورت، سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

و انتگرال مجازی

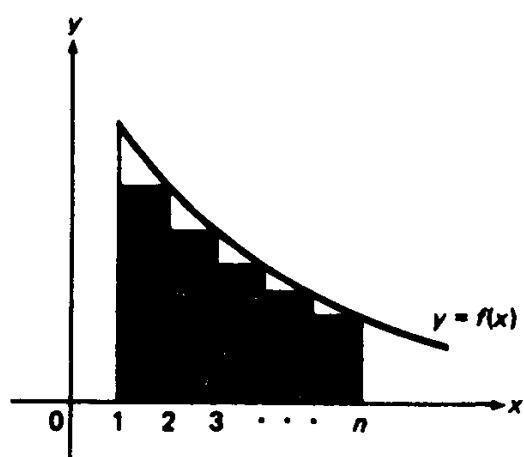
$$(۸) \quad \int_1^{\infty} f(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_1^n f(x) dx$$

یا هر دو همگرایند یا هر دو واگرا.

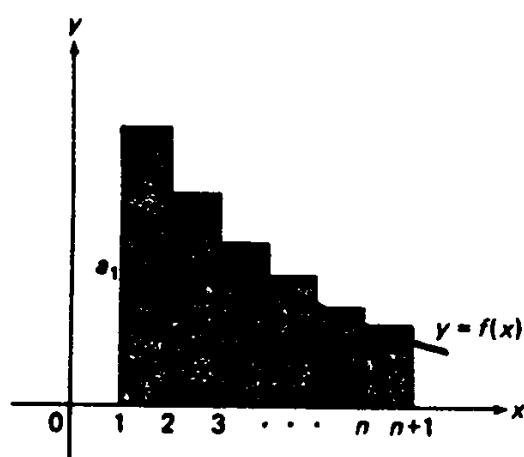
برهان. در شکل ۱۰ (آ) مساحت تحت منحنی $y = f(x)$ از $x = 1$ تا $x = n + 1$ کمتر از مساحت کل مستطیلهای محیطی سایه‌دار است؛ و لذا،

$$(۹) \quad \int_1^{n+1} f(x) dx < a_1 + a_2 + \dots + a_n = s_n,$$

که در آن s_n مجموع جزئی n م سری $\sum a_n$ است. در شکل ۱۰ (ب) کمی متفاوت، مساحت



(ب)



(آ)

شکل ۱۰

تحت منحنی $y = f(x)$ از $x = 1$ تا $x = n$ از مساحت کل مستطیلهای محیطی سایه‌دار بزرگتر است؛ در نتیجه، این بار

$$(۹') \quad a_2 + a_3 + \dots + a_n < \int_1^n f(x) dx.$$

فرض کنیم انتگرال مجازی (۸) واگرا باشد. در این صورت، چون $f(x)$ مثبت است، این فقط می‌تواند به این معنی باشد که حد مذکور در (۸) مساوی ∞ است. لذا، طرف چپ (۹) با رفتن $n \rightarrow \infty$ به ∞ نزدیک می‌شود؛ و در نتیجه، طرف راست s_n نیز چنین می‌کند؛ یعنی، $\sum a_n$ واگرا می‌باشد. از آن سو، فرض کنیم انتگرال (۸) همگرا با حد L

باشد. در این صورت، به خاطر (۹')، به ازای هر n ،

$$s_n = a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n < a_1 + \int_1^n f(x) dx < a_1 + L$$

در نتیجه، مجموعهای جزئی سری نامنفی $\sum a_n$ کران بالایی دارند. اما در این صورت، بنا بر قضیه ۴، $\sum a_n$ همگرا می‌باشد.

اگر $\sum a_n$ یک سری با جمله عمومی a_n باشد که با فرمول صریحی داده شده است، ساده‌ترین راه برای یافتن تابع $f(x)$ که $f(n) = a_n$ تعویض n با x در فرمول مربوط به a_n است. اگر تابع حاصل بر $[1, \infty)$ پیوسته، مثبت، و نزولی باشد، آزمون انتگرال قابل به کار بردن خواهد بود.

مثال ۱۰. نشان دهید که سری p

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p} = 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots$$

به ازای $p > 1$ همگرا و به ازای $p \leq 1$ واگراست.

حل. از تعویض x با n در جمله عمومی سری، تابع مثبت پیوسته $1/x^p$ به دست می‌آید که اگر $p > 0$ بر $[1, \infty)$ نزولی است. در نتیجه، آزمون انتگرال قابل اعمال است. به ازای $p = 1$ ، $1/x^p$ به صورت $1/x$ درمی‌آید و

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x} = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{dx}{x} = \lim_{u \rightarrow \infty} \ln x \Big|_1^u = \lim_{u \rightarrow \infty} \ln u = \infty,$$

حال آنکه به ازای $0 < p < 1$ یا $p > 1$ ،

$$\int_1^{\infty} \frac{dx}{x^p} = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_1^u \frac{dx}{x^p} = \lim_{u \rightarrow \infty} \frac{x^{1-p}}{1-p} \Big|_1^u = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{u^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right).$$

اما، همانطور که به آسانی معلوم می‌شود،

$$\lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{u^{1-p}}{1-p} - \frac{1}{1-p} \right) = \begin{cases} \frac{1}{p-1} & , \text{ اگر } p > 1 \\ \infty & , \text{ اگر } 0 < p < 1 \end{cases}$$

بنابراین، طبق آزمون انتگرال، سری p همگراست اگر $p > 1$ و واگراست اگر $0 < p \leq 1$. (توجه کنید که برهان دیگری از واگرایی سری توافقی به دست آمده است.) اگر $p \leq 0$ ،

جمله n م $1/n^p$ با رفتن $n \rightarrow \infty$ به 0 نزدیک می‌شود، و سری p طبق قضیه ۳، صفحه ۸۱۱، واگراست. از تلفیق این حالات، بالاخره معلوم می‌شود که سری p همگراست اگر $p > 1$ و واگراست اگر $p \leq 1$.

مثال ۱۱. سری

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n \ln n}$$

طبق آزمون انتگرال واگراست، زیرا انتگرال مجازی مربوطه واگرا می‌باشد:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_2^u \frac{dx}{x \ln x} = \lim_{u \rightarrow \infty} \ln(\ln x) \Big|_2^u = \lim_{u \rightarrow \infty} [\ln(\ln u) - \ln(\ln 2)] = \infty.$$

در اینجا چون $1/(n \ln n)$ به ازای $n = 1$ تعریف نشده است، برای حد جمع‌بندی پایینی و حد انتگرالگیری پایینی به جای 1 عدد 2 را اختیار می‌کنیم.

مثال ۱۲. سری

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^2}$$

بنابر آزمون انتگرال همگراست، زیرا انتگرال مجازی مربوطه همگراست:

$$\int_2^{\infty} \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{u \rightarrow \infty} \int_2^u \frac{dx}{x(\ln x)^2} = \lim_{u \rightarrow \infty} \left[-\frac{1}{\ln x} \right]_2^u = \lim_{u \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln u} \right) = \frac{1}{\ln 2}.$$

مسائل

عدد گویا به شکل تحویل‌ناپذیر را بیابید که اعشاری مکرر داده شده نمایش آن باشد.

0.213	۰.۳	3.79	۰.۲	0.49	۰.۱
0.0544	۰.۶	4.00072	۰.۵	6.363	۰.۴
5.10285714	۰.۹	0.0384615	۰.۸	0.047619	۰.۷

۱۰. تحقیق کنید که هر عدد اعشاری مختوم به بی‌نهایت نه نمایش همان عدد گویایی

است که عدد اعشاری مختوم " بلافاصله پس از آن " نشان می‌دهد، مثلاً، $0.9 = 1$

و از این قبیل، $1.3259 = 1.326$.

با استفاده از آزمونهای مقایسه (قضیه ۵ یا ۶) همگرایی یا واگرایی سری داده شده را تعیین کنید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n(n+1)}} \cdot 12$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n-3} \cdot 11$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1+\sin n}{n^2} \cdot 14$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n^2+2)}} \cdot 13$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\ln n} \cdot 16$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)(n+3)}{n(n+2)(n+4)} \cdot 15$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{3n^4 - n^2 + 1}{5n^6 - n^3 - 2} \cdot 18$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{n^{3/2}} \cdot 17$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n + 1}{3^n - 1} \cdot 20$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^n} \cdot 19$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n(n+2)(n+4)}} \cdot 22$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt[3]{n(n+1)(n+2)}} \cdot 21$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{100n - 99} \cdot 24$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{nc^n} \quad (c > 1) \cdot 23$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} \cdot 26$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \cdot 25$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} 2^n \sin \frac{1}{3^n} \cdot 28$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{1}{n} \cdot 27$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2 - 5} \cdot 30$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \cdot 29$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos^2 n}{(\sqrt{n+1})^3} \cdot 32$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{sech} n \cdot 31$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1+c^n} \quad (c > 0) \cdot 34$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 - \cos \frac{1}{n}\right) \cdot 33$$

با استفاده از آزمون انتگرال (قضیه ۷)، معین کنید که سری داده شده همگراست یا واگرا.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{3n-2}} \cdot 36$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2n-1} \cdot 35$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{n^2+1} \cdot 38$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2+1} \cdot 37$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{n^2-3} \cdot 40$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n^2+n-6} \cdot 39$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(n^2-1)} \cdot 42$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{n+1}} \cdot 41$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} ne^{-n^2} \cdot 44$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-n/2} \cdot 43$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^3} \cdot 46$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^2 e^{-n} \cdot 45$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{\ln n}} \cdot 48$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n \cdot \ln(\ln n)} \cdot 47$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2n} \sinh n \cdot 50$$

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{n \ln n [\ln(\ln n)]^2} \cdot 49$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \operatorname{csch}^2 n \cdot 52$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{2} - \arctan n \right) \cdot 51$$

۵۳. فرض کنید $\sum a_n$ یک سری نامنفی همگرا باشد. نشان دهید که سری $\sum a_n^2$ نیز همگرا است.

۵۴. فرض کنید $\sum a_n$ و $\sum b_n$ دو سری نامنفی همگرا باشند. نشان دهید که سری $\sum a_n b_n$ نیز همگراست.

۵۵. فرض کنید $\sum a_n$ یک سری نامنفی همگرا باشد. در صورت وجود حد

$$\lim_{n \rightarrow \infty} na_n = 0 \quad (\text{یک})$$

سری نامنفی همگرای $\sum a_n$ را طوری بیابید که در (یک) صدق نکند.

۵۶. نشان دهید که هر سری نامنفی همگرا که در آن دنباله‌ای نزولی باشد در (یک) صدق می‌کند.

۵۷. اگر دنباله $\{a_n\}$ نزولی بوده و در شرط (یک) صدق کند، آیا سری نامنفی $\sum a_n$ همگراست؟

۵۸. فرض کنید $\{a_n\}$ یک دنباله نزولی از اعداد مثبت باشد. نشان دهید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + a_3 + a_4 + \dots$$

همگراست اگر و فقط اگر سری مربوطه

$$\sum_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k} = a_1 + 2a_2 + 4a_4 + 8a_8 + \dots$$

همگرا باشد. این نتیجه به آزمون تراکم‌کشی معروف است.
 راهنمایی. فرض کنیم s_n مجموع جزئی n م $\sum a_n$ باشد. تحقیق کنید که اگر $n < 2^k$ ،
 $s_n \leq a_1 + 2a_2 + \dots + 2^{k-1}a_{2^{k-1}} + 2^k a_{2^k}$ ، حال آنکه اگر $n > 2^k$ ،
 $s_n \geq \frac{1}{2}(a_1 + 2a_2 + \dots + 2^k a_{2^k})$.

۵۹. با استفاده از آزمون تراکم‌کشی، نشان دهید که سری p همگراست اگر $p > 1$ و واگرا است اگر $p \leq 1$.
 ۶۰. با استفاده از آزمون تراکم‌کشی، نشان دهید که سری

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n(\ln n)^p}$$

همگراست اگر $p > 1$ و واگراست اگر $p \leq 1$ (این امر مثالهای ۱۱ و ۱۲ را تعمیم می‌دهد).

۶۱. نشان دهید که سری

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^p}$$

به ازای هر مقدار p واگراست.

۶۲. نشان دهید که سری

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{[\ln(\ln n)]^{\ln n}} \quad \text{و} \quad \sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln n}}$$

هر دو همگرايند، اما سری

$$\sum_{n=3}^{\infty} \frac{1}{(\ln n)^{\ln(\ln n)}}$$

واگرا می‌باشد.

۴.۹ همگرایی مطلق و مشروط

سری به‌طور مطلق همگرا، بخش پیش به بررسی سريهای نامنفی، یعنی سريهایی که تمام جملاتشان اعدادی نامنفی‌اند، اختصاص داشت. حال به مطالعه سريهای دلخواه (مثل بخش ۲.۹) پرداخته، اجازه می‌دهیم سری مورد نظر جملات مثبت و منفی داشته‌باشد. گوییم سری

$$(1) \quad \sum_{n=1}^{\infty} a_n = a_1 + a_2 + \dots + a_n + \dots$$

به طور مطلق همگراست اگر سری مربوطه

$$(۱') \quad \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| = |a_1| + |a_2| + \dots + |a_n| + \dots,$$

که جملاتش قدرمطلقهای جملات (۱) اند، همگرا باشد. توجه کنید که این مفهوم جدید نقشی در نظریهٔ سریهای نامنفی ندارد، زیرا اگر به ازای هر n ، $a_n \geq 0$ ، سریهای (۱) و (۱') یکی خواهند بود. اهمیت واقعی همگرایی مطلق فقط در رابطه با سریهایی است که هم جمله مثبت و هم جمله منفی (و در واقع، بی نهایت جمله از هر علامت) دارند، زیرا یک سری همگرا از این نوع ممکن است به طور مطلق همگرا باشد یا نباشد. به طور دقیقتر، همانطور که لحظه‌ای بعد خواهیم دید، با آنکه یک سری به طور مطلق همگرا باید همگرا باشد، یک سری می‌تواند بدون همگرایی مطلق بودن همگرا باشد.

مثال ۱. سری هندسی

$$(۲) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left(-\frac{2}{3}\right)^n = 1 - \frac{2}{3} + \frac{4}{9} - \frac{8}{27} + \dots$$

همگرا با مجموع

$$\frac{1}{1 - \left(-\frac{2}{3}\right)} = \frac{3}{5}$$

است (در مثال ۱، صفحه ۸۵۶، قرار می‌دهیم $a = 1, r = -\frac{2}{3}$). همچنین، این سری به طور مطلق همگراست، زیرا

$$(۲') \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left| \left(-\frac{2}{3}\right)^n \right| = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^n = 1 + \frac{2}{3} + \frac{4}{9} + \frac{8}{27} + \dots$$

سری هندسی همگرایی دیگری است، این بار نامنفی با مجموع

$$\frac{1}{1 - \frac{2}{3}} = 3.$$

میزان بزرگتر بودن مجموع دوم از مجموع اول را چگونه توضیح می‌دهید؟

مثال ۲. سری

$$(۳) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots,$$

به نام سری توافق متناوب، به طور مطلق همگرا نیست، زیرا

$$(۳) \quad \sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{(-1)^{n-1}}{n} \right| = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

سری توافقی معمولی است، که البته واگراست. علی‌رغم اینکه سری (۳) به‌طور مطلق همگرا نیست ولی همگراست. این امر در مثال ۴ به کمک یک آزمون همگرایی خاص نشان داده شده است.

سریهای به‌طور مشروط همگرا. همانطور که در ابتدای بخش گفتیم و با آخرین مثال نشان دادیم، سریهایی وجود دارند که بدون همگرایی مطلق همگرا می‌باشند. یک چنین سری را به‌طور مشروط همگرا می‌نامند. وجود سری به‌طور مشروط همگرا نشان می‌دهد که همگرایی همگرایی مطلق را ایجاب نمی‌کند. از آن سو، همانطور که قضیه بعد نشان می‌دهد، یک سری به‌طور مطلق همگرا باید همگرا باشد.

قضیه ۸ (همگرایی مطلق همگرایی را ایجاب می‌کند). فرض کنیم $\sum a_n$ یک سری باشد به طوری که $\sum |a_n|$ همگرا باشد. در این صورت، $\sum a_n$ نیز همگرا می‌باشد.

برهان. فرض کنیم $\sum |a_n|$ همگرا باشد. سری

$$(۴) \quad \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|)$$

نامنفی است، زیرا

$$a_n + |a_n| = \begin{cases} 2a_n = 2|a_n| & , \quad a_n \geq 0 \\ 0 & , \quad a_n < 0 \end{cases}$$

و به‌علاوه (۴) تحت تسلط سری نامنفی همگرایی $\sum 2|a_n|$ می‌باشد. از آزمون مقایسه (قضیه ۵، صفحه ۸۲۴) نتیجه می‌شود که سری (۴) نیز همگراست. اما در این صورت سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n = \sum_{n=1}^{\infty} (a_n + |a_n|) - \sum_{n=1}^{\infty} |a_n|$$

نیز چنین است، زیرا تفاضل بین دوسری همگرا همگراست (ر.ک. صفحه ۸۱۲).

مثال ۳. سری

$$(۵) \quad 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} - \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} - \frac{1}{64} - \frac{1}{128} + \dots$$

را در نظر می‌گیریم که از سری هندسی

$$(۵) \quad 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \frac{1}{32} + \frac{1}{64} + \frac{1}{128} + \dots$$

به وسیله تغییر یک در میان علائم از جملات سوم و چهارم به بعد به دست آمده است. چون سری (۵) همگرا (با مجموع ۲) است، سری (۵) به طور مطلق همگراست؛ و در نتیجه، بنابر قضیه ۸، همگرا نیز هست. به عنوان تمرین، نشان دهید که مجموع این سری هندسی تعدیل شده $\frac{5}{6}$ است.

سریهای متناوب. گوییم یک سری نامتناهی متناوب است اگر جملاتش به تناوب مثبت و منفی باشند یعنی، اگر جملات متوالی همواره مختلف‌العلامه باشند. لذا، سری (۲) و (۳) مثالهای ۱ و ۲ متناوبند ولی سری (۵) در مثال قبل متناوب نیست، زیرا شامل (بی‌نهایت) جفت جملات متوالی هم‌علامت می‌باشد. واضح است که هر سری متناوب را می‌توان به یکی از دو شکل زیر نوشت:

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} a_n = a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots$$

یا

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n a_n = -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots,$$

که در آن اعداد $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ همه مثبت می‌باشند. توجه کنید که در شکل اول می‌توان به جای $(-1)^{n-1} a_n$ نوشت $(-1)^{n+1} a_n$.

آزمون سری متناوب. برای سریهای متناوب یک آزمون همگرایی خاص مهم وجود دارد که به لایب‌نیتز منسوب است:

قضیه ۹ (آزمون سریهای متناوب با تخمین خطا). هرگاه $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ اکیدا نزولی از اعداد مثبت باشد به طوری که

$$(۶) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0,$$

آنگاه سری متناوب

$$(۷) \quad a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + (-1)^{n-1} a_n + \dots$$

همگراست. فرض کنیم $R_n = S - s_n$ خطای حاصل از تقریب مجموع S سری (۷) به وسیله مجموع جزئی n م آن باشد. یعنی، فرض کنیم

$$(۸) \quad R_n = (-1)^n a_{n+1} + (-1)^{n+1} a_{n+2} + (-1)^{n+2} a_{n+3} + \dots$$

باقیمانده پس از n جمله سری (۷) باشد. در این صورت، قدرمطلق R_n از اولین جمله استفاده نشده در تقریب $s_n \approx S$ کوچکتر بوده و علامت این جمله را خواهد داشت. یعنی، $|R_n| < a_{n+1}$ و R_n با $(-1)^n a_{n+1}$ همعلامت است (این همان علامت $(-1)^n$ را دارد زیرا a_{n+1} مثبت است).

برهان. شرط (۶) باید اعمال شود، زیرا در غیر این صورت سری (۷) واگرا خواهد بود (چرا؟). فرض کنیم s_n مجموع جزئی n م سری باشد. در این صورت، مجموعهای جزئی s_{2k} با اندیس زوج را می توان به شکل زیر نوشت:

$$s_{2k} = (a_1 - a_2) + (a_3 - a_4) + \dots + (a_{2k-1} - a_{2k}),$$

که طرف راست مجموعی از اعداد مثبت است، زیرا $a_n > a_{n+1}$ ؛ و در نتیجه، به ازای هر n $a_n - a_{n+1} > 0$. لذا، مجموعهای جزئی با اندیس زوج همه مثبت اند، و دنباله اکیدا صعودی $s_2, s_4, \dots, s_{2k}, \dots$ را تشکیل می دهند. این دنباله کراندار نیز هست، زیرا

$$s_{2k} = a_1 - (a_2 - a_3) - \dots - (a_{2k-2} - a_{2k-1}) - a_{2k} < a_1$$

(اعداد تفاضلی $a_2 - a_3, \dots, a_{2k-2} - a_{2k-1}, a_{2k}$ همه مثبت اند). بنابراین، طبق قضیه ۲، صفحه ۷۹۶، دنباله $s_2, s_4, \dots, s_{2k}, \dots$ دارای حد متناهی S است؛ یعنی،

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} = S,$$

که در آن S بوضوح مثبت می باشد. برای مجموعهای جزئی با اندیس فرد داریم

$$s_{2k+1} = s_{2k} + a_{2k+1},$$

و در نتیجه، به خاطر (۶)،

$$\lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k+1} = \lim_{k \rightarrow \infty} s_{2k} + \lim_{k \rightarrow \infty} a_{2k} = S + 0 = S.$$

چون مجموعهای جزئی با اندیس زوج و اندیس فرد به همان حد S نزدیک می شوند، سری (۷) همگرا با مجموع S است، و سری (۸) به همان دلیل صفحه ۸۱۳ همگرا می باشد. برای اثبات تخمین خطا ملاحظه می کنیم که خطا یا باقیمانده R_n را می توان به شکل

زیر نوشت:

$$R_n = (-1)^n(a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - \dots)$$

که در آن سری داخل پرانتز به یک مجموع مثبت همگراست، زیرا یک سری متناوب از نوع سری اصلی (۷) می‌باشد. بنابراین، R_n با $(-1)^n$ همعلامت است، و

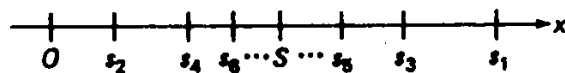
$$\begin{aligned} |R_n| &= a_{n+1} - a_{n+2} + a_{n+3} - a_{n+4} + a_{n+5} - \dots \\ &= a_{n+1} - (a_{n+2} - a_{n+3}) - (a_{n+4} - a_{n+5}) - \dots < a_{n+1}, \end{aligned}$$

که در آن نامساوی از مثبت بودن اعداد تفاضلی $a_{n+2} - a_{n+3}, a_{n+4} - a_{n+5}, \dots$ به دست می‌آید.

به آسانی معلوم می‌شود که هرگاه $\{a_n\}$ یک دنبالهٔ اکیدا نزولی از اعداد مثبت در شرط (۶) صدق کند، آنگاه سری متناوب

$$(۷') \quad -a_1 + a_2 - a_3 + a_4 - \dots + (-1)^n a_n + \dots,$$

که به جای a_1 با $-a_1$ شروع می‌شود، نیز همگراست با مجموع S که مساوی قرینهٔ مجموع S سری (۷) می‌باشد. این نتیجهٔ فوری این امر است که سری (۷') حاصل ضرب سری (۷) در -1 می‌باشد. به عنوان تمرین، نشان دهید هرگاه R'_n باقیمانده پس از n جملهٔ سری (۷') باشد، آنگاه $|R'_n| < a_{n+1}$ و R'_n با $(-1)^{n+1} a_{n+1}$ ، یعنی $(-1)^{n+1}$ ، همعلامت می‌باشد. برهان قضیهٔ ۹ ظاهراً پیچیده است، ولی معنی شهودی آن کاملاً ساده می‌باشد. فرض کنید مجموعه‌های جزئی $s_1, s_2, s_3, s_4, \dots$ سری متناوب (۷) را بر خط اعداد مثل شکل ۱۱ رسم کرده باشیم. در این صورت، s_1 سمت راست 0 قرار دارد زیرا $s_1 = a_1 > 0$ ،



شکل ۱۱

s_2 سمت چپ s_1 است زیرا $s_2 - s_1 = -a_2 < 0$ ، s_3 سمت راست s_2 است زیرا $s_3 - s_2 = a_3 > 0$ ، s_4 سمت چپ s_3 است، زیرا $s_4 - s_3 = -a_4 < 0$ ، و تا آخر. (چرا هر مجموع جزئی s_n سمت راست مبداء قرار دارد؟) همچنین، همانطور که شکل نشان می‌دهد، مجموعه‌های جزئی s_2, s_4, \dots با اندیس زوج یک دنبالهٔ صعودی تشکیل می‌دهند، حال آنکه مجموعه‌های جزئی s_1, s_3, \dots با اندیس فرد یک دنبالهٔ نزولی تشکیل می‌دهند. هر دو دنباله کراندار و یکنواختند؛ و در نتیجه، همگرا می‌باشند؛ به علاوه، باید حد یکسان

S را داشته باشند، زیرا جملات دو دنباله با رفتن $n \rightarrow \infty$ به هم نزدیک می‌شوند (توجه کنید که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $|s_{n+1} - s_n| = a_{n+1} \rightarrow 0$) واضح است که s_n سمت چپ S است اگر n زوج باشد و سمت راست S است اگر n فرد باشد؛ و در نتیجه، باقیمانده $R_n = S - s_n$ با زوج بودن n مثبت و با فرد بودن n منفی می‌باشد. اما، در این صورت، R_n با $(-1)^n a_{n+1}$ همعلامت است، زیرا $(-1)^n a_{n+1}$ با زوج بودن n مثبت و فرد بودن n منفی می‌باشد. بالاخره، چون S بین هر جفت مجموع جزئی متوالی s_n و s_{n+1} قرار دارد، نتیجه می‌شود که

$$|R_n| = |S - s_n| < |s_{n+1} - s_n| = a_{n+1}.$$

مثال ۴. اگر $p > 0$ ، دنباله $\{1/n^p\}$ اکیدا "نزولی و همگرا به 0 است. بنابراین، طبق قضیه ۹، سری متناوب

$$(۹) \quad 1 - \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} - \frac{1}{4^p} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n^p} + \cdots$$

همگرا می‌باشد. اگر $p > 1$ ، سری به‌طور مطلق همگراست، زیرا سری

$$(۹') \quad 1 + \frac{1}{2^p} + \frac{1}{3^p} + \frac{1}{4^p} + \cdots + \frac{1}{n^p} + \cdots,$$

که جملاتش قدرمطلق جملات سری متناوب (۹) اند، یک سری p همگرا می‌باشد. اما اگر $0 < p \leq 1$ ، سری (۹') یک سری p واگراست، و در این حالت سری (۹) به‌طور مطلق همگرا نبوده بلکه فقط به‌طور مشروط همگرا می‌باشد. به ازای $p = 1$ سری توافقی متناوب

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{n} + \cdots$$

به دست می‌آید که قبلاً در مثال ۲ مورد بحث قرار گرفت. خواهیم دید که مجموع این سری به‌طور مشروط همگرا $\ln 2$ است (ر.ک. مثال ۷، صفحه ۸۷۳).

مثال ۵. سری متناوب

$$(۱۰) \quad 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \cdots + (-1)^{n-1} \frac{1}{2n-1} + \cdots$$

در شرایط قضیه ۹ صدق می‌کند؛ و لذا، همگراست. اما سری

$$(۱۰') \quad 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \cdots + \frac{1}{2n-1} + \cdots,$$

که جملاتش قدرمطلق جملات سری (۱۰) اند، واگرا می‌باشد. در واقع،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1/(2n-1)}{1/n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{2n-1} = \frac{1}{2}$$

در نتیجه، واگرایی (۱۰) از واگرایی $\sum (1/n)$ [به کمک آزمون مقایسه حد (قضیه ۶، صفحه ۸۲۵)] نتیجه می‌شود. لذا، سری (۱۰) به‌طور مشروط همگرا می‌باشد. در مثال ۸، صفحه ۸۷۴، نشان خواهیم داد که مجموع این سری $\pi/4$ است.

مثال ۶. سری متناوب

$$(11) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots$$

بنابر قضیه ۹ همگراست، ولی همگرایی آن از همگرایی مطلقش نیز نتیجه می‌شود زیرا، همانطور که در مثال ۴، صفحه ۸۲۴، نشان دادیم، سری

$$(11') \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots$$

همگرا می‌باشد. به‌کمک قسمت دوم قضیه ۹ می‌توان خطای ناشی از تقریب مجموع سری (۱۱) با مجموع n جمله اول آن را تخمین زد. مثلاً، "فرض کنیم S مجموع (۱۱) بوده، و ۸ جمله اول را نگه می‌داریم:

$$S = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} + R_8.$$

در این صورت، $1/8!$ اولین جمله به کار نرفته است؛ در نتیجه، R_8 مثبت بوده و از $1/8! = 0.0000248 \dots$ کوچکتر است، حال آنکه

$$1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} - \frac{1}{7!} = \frac{1854}{5040} = \frac{103}{280} = 0.367857 \dots$$

لذا، می‌توان نتیجه گرفت که خطای تقریب $S \approx 103/280$ مثبت و کوچکتر از 0.000025 می‌باشد. در واقع، همانطور که در مثال ۵، صفحه ۸۷۱، نشان داده شد، $S = e^{-1} = 0.367879 \dots$

آزمون سری متناوب (قضیه ۹) در صورت نزولی بودن $\{a_n\}$ (ولی نه اکیدا "نزولی") برقرار است اگر تخمین خطا از $|R_n| < a_{n+1}$ به $|R_n| \leq a_{n+1}$ تغییر نماید. برهان تعدیل جزئی برهان برای $\{a_n\}$ اکیدا "نزولی" است و به عنوان تمرین گذارده می‌شود.

مثال ۷. دنباله

$$1, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}, \dots, \frac{1}{n}, \frac{1}{n}, \dots$$

نزولی است ولی اکیدا " نزولی نیست. سری متناوب مربوطه

$$1 - 1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + \dots$$

به طور مشروط به مجموع 0 همگراست، و باقیمانده R_n به ازای n زوج مساوی 0 و به ازای n فرد برابر اولین جمله به کار نرفته می باشد.

مثال ۸. مجموع $2n$ جمله اول سری متناوب

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} + \dots \\ = \frac{1}{\sqrt{2}-1} - \frac{1}{\sqrt{2}+1} + \frac{1}{\sqrt{3}-1} - \frac{1}{\sqrt{3}+1} \\ + \dots + \frac{1}{\sqrt{n}-1} - \frac{1}{\sqrt{n}+1} + \dots \end{aligned}$$

(۱۲)

دو برابر مجموع جزئی n سری توافقی واگراست، زیرا

$$\begin{aligned} a_1 - a_2 + a_3 - a_4 + \dots + a_{2n-1} - a_{2n} &= \sum_{k=2}^{n+1} \left(\frac{1}{\sqrt{k}-1} - \frac{1}{\sqrt{k}+1} \right) \\ &= \sum_{k=2}^{n+1} \frac{2}{k-1} = 2 \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}. \end{aligned}$$

لذا، سری (۱۲) نیز (با آنکه وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $a_n \rightarrow 0$) واگرا می باشد. این آزمون سری متناوب را نقض نمی کند، زیرا دنباله $\{a_n\}$ نزولی نیست. در واقع، همانطور که به آسانی تحقیق می شود، به ازای $k = 1, 2, \dots$ ، a_{2k+1} از a_{2k} متجاوز می باشد.

تبصره. نباید این تصور پیش آید که یک سری متناوب که در شرایط قضیه ۹ صدق نمی کند لزوماً " واگراست. مثلاً، سری

$$2 - \frac{1}{2^2} + \frac{2}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \frac{2}{5^2} - \frac{1}{6^2} + \dots,$$

حاصل از سری $\sum (-1)^{n-1} (1/n^2)$ به وسیله ضرب تمام جملات با اندیس فرد در 2 (از

طریق مقایسه با سری $(\sum (2/n^2))$ به‌طور مطلق همگراست، ولی قدر مطلق هر جمله با اندیس فرد از جمله پنجم به بعد از جمله قبلی بزرگتر می‌باشد.

آرایش مجدد سریها. اگر یک سری به‌طور مطلق همگرا باشد، می‌توان جملاتش را بدون تغییر مجموع سری بدلتخواه آرایش کرد، ولی اگر سری به‌طور مشروط همگرا باشد، جملاتش را می‌توان طوری آرایش کرد که سری جدید هر مجموعی را داشته باشد؛ اثبات این حکم از حوصله یک درس مقدماتی در حساب دیفرانسیل و انتگرال خارج است، ولی می‌توان آن را در یک کتاب حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته یافت. لذا، به بیان کیفی، همگرایی مطلق یک سری ناشی از کوچکی ذاتی جملاتش است؛ در نتیجه، سری حتی اگر تمام جملاتش با قدر مطلق آنها عوض شوند، همگرا می‌ماند، ولی همگرایی مشروط یک سری فقط به خاطر "مزیت" حذف دوبه‌دو جملات مثبت و منفی است؛ و لذا، به ترتیب آمدن این جملات بستگی دارد. در واقع، می‌توان تجدید آرایشهای واگرایی از یک سری به‌طور مشروط همگرا پیدا نمود.

مثال ۹. فرض کنیم S مجموع سری توافقی متناوب به‌طور مشروط همگرای

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$$

باشد (همانطور که در مثال ۴ گفتیم، $S = \ln 2 \approx 0.693$)، تجدید آرایشی از این سری بیابید که مجموعش $\frac{1}{2}S$ باشد.

حل. چون

$$S = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots,$$

نتیجه می‌شود که

$$\frac{1}{2}S = \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots.$$

اما درج هر تعداد صفر بین جملات سری اثری بر همگرایی یا مقدار مجموع آن ندارد؛ و لذا،

$$(۱۳) \quad S = 1 + 0 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + 0 - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} + 0 - \frac{1}{6} + \dots,$$

$$(۱۳') \quad \frac{1}{2}S = 0 + \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + 0 + \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + 0 + \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots.$$

از تفریق جمله به جمله دوسری، یعنی تفریق هر جمله (۱۳۹) از جمله (۱۳) که در بالای آن قرار دارد، تجدید آرایش مطلوب به دست می‌آید:

$$\frac{1}{2}S = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \frac{1}{5} - \frac{1}{10} - \frac{1}{12} + \dots$$

مسائل

معین کنید که سری داده شده (با جملات مثبت و منفی) به طور مطلق همگرا، به طور مشروط همگرا، همگرا، یا واگراست. درحالتی که سری با دادن چند جمله اولیه مشخص شده است، فرض کنید قانون تشکیل برآمده از این جملات به ازای جمیع جملات سری برقرار باشد.

$$1 - \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{7}} + \dots \quad .1$$

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \dots \quad .2$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{3n-1} \quad .4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)^3} \quad .3$$

$$\frac{1}{8} - \frac{2}{12} + \frac{3}{16} - \frac{4}{20} + \dots \quad .5$$

$$\frac{1}{2 \ln 2} - \frac{1}{3 \ln 3} + \frac{1}{4 \ln 4} - \frac{1}{5 \ln 5} + \dots \quad .6$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{\ln(n+1)} \quad .8$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt[n]{n}} \quad .7$$

$$1 - \frac{1}{101} + \frac{1}{201} - \frac{1}{301} + \dots \quad .9$$

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{16} - \frac{1}{32} + \frac{1}{64} - \frac{1}{128} - \frac{1}{256} + \dots \quad .10$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n(\ln n)^2} \quad .12$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{n}{e^{2n}} \quad .11$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} \ln \frac{n+1}{n} \quad .14$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\ln n}{\sqrt{n}} \quad .13$$

$$\frac{1}{1 \cdot 2} - \frac{1}{3 \cdot 4} + \frac{1}{5 \cdot 6} - \frac{1}{7 \cdot 8} + \dots \quad .15$$

$$\frac{1}{\sqrt{1 \cdot 2}} - \frac{1}{\sqrt{2 \cdot 3}} + \frac{1}{\sqrt{3 \cdot 4}} - \frac{1}{\sqrt{4 \cdot 5}} + \dots \quad . ۱۶$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} - 1 \right)^n \quad . ۱۷$$

$$1 + \frac{1}{4} - \frac{1}{9} - \frac{1}{16} + \frac{1}{25} + \frac{1}{36} - \frac{1}{49} - \frac{1}{64} + \dots \quad . ۱۸$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\pi/2)}{n} \quad . ۲۰$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{n^2} \quad . ۱۹$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin(2n\pi/3)}{\sqrt{3} n} \quad . ۲۱$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \sin \frac{a}{n} \quad (a > 0) \quad . ۲۲$$

$$a - \frac{1}{2}a^2 + \frac{1}{3}a^3 - \frac{1}{4}a^4 + \dots \quad (a > 0) \quad . ۲۳$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n(n+1)/2}}{n(n+1)} \quad . ۲۴$$

هر یک از سریهای زیر طبق آزمون سری متناوب (قضیه ۹) همگراست . فرض کنید R_n باقیمانده سری پس از n جمله ، یعنی خطای ناشی از تقریب مجموع سری به وسیله مجموع جزئی n م ، باشد . در مسائل ۲۵ تا ۲۹ علامت R_n را یافته و ، به ازای n داده شده ، یک کران بالایی برای $|R_n|$ پیدا نمایید . در مسائل ۳۰ تا ۳۴ کوچکترین مقداری از n را بیابید که به ازای آن R_n در نامساوی ذکر شده صدق نماید . (طبق معمول ، فرض کنید قانون تشکیل ناشی از چند جمله اول برای جمیع جملات سری برقرار باشد .)

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots, n = 99 \quad . ۲۵$$

$$-1 + \frac{1}{2^2} - \frac{1}{3^3} + \frac{1}{4^4} - \dots, n = 5 \quad . ۲۶$$

$$1 - \frac{1}{2!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{6!} + \dots, n = 6 \quad . ۲۷$$

$$\frac{1}{\ln 2} - \frac{1}{\ln 3} + \frac{1}{\ln 4} - \frac{1}{\ln 5} + \dots, n = 998 \quad . ۲۸$$

$$-1 + \frac{1}{3} - \frac{1 \cdot 4}{3 \cdot 6} + \frac{1 \cdot 4 \cdot 7}{3 \cdot 6 \cdot 9} - \dots, n = 8 \quad \cdot 29$$

$$1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \dots, |R_n| < 0.001 \quad \cdot 30$$

$$1 - \frac{1}{3!} + \frac{1}{5!} - \frac{1}{7!} + \dots, |R_n| < 0.0002 \quad \cdot 31$$

$$\frac{1}{1!2!} - \frac{1}{2!3!} + \frac{1}{3!4!} - \frac{1}{4!5!} + \dots, |R_n| < 10^{-8} \quad \cdot 32$$

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots, |R_n| < 0.0005 \quad \cdot 33$$

$$-\frac{1}{3 \cdot 2^2} + \frac{1}{4 \cdot 2^3} - \frac{1}{5 \cdot 2^4} + \frac{1}{6 \cdot 2^5} - \dots, |R_n| < 0.0001 \quad \cdot 34$$

۳۵. تجدید آرایش واگرایی از سری متناوب به طور مشروط همگرای

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{\sqrt{n}} = 1 - \frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{1}{\sqrt{5}} - \frac{1}{\sqrt{6}} + \dots$$

به دست آورید.

مجموع سری توافقی متناوب $\ln 2$ است. تجدید آرایشی از سری بیابید که مجموع زیر را داشته باشد.

$$0 \quad \cdot 38 \qquad 2 \ln 2 \quad \cdot 37 \qquad \frac{3}{2} \ln 2 \quad \cdot 36$$

۳۹. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای نزولی از اعداد مثبت و همگرا به 0 بوده، و

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n + \dots$$

یک سری (در حالت کلی واگرا) باشد که مجموعهای جزئی $B_n = b_1 + b_2 + \dots + b_n$ دنباله کرانداری چون $\{B_n\}$ بسازند. به کمک مسئله ۳۸، صفحه ۳۶۶، نشان دهید که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n b_n = a_1 b_1 + a_2 b_2 + \dots + a_n b_n + \dots$$

همگراست. این آزمون همگرایی به آزمون دیریکله معروف است. نشان دهید که این آزمون سری متناوب را به عنوان جالتی خاص دربردارد. همگرایی سریهای زیر را با استفاده از آزمون دیریکله تحقیق نمایید.

$$1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{2}{9} + \frac{1}{11} + \frac{1}{13} - \frac{2}{15} + \frac{1}{17} - \dots \quad \cdot 40$$

$$1 + \frac{2}{\sqrt{2}} - \frac{3}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{4}} + \frac{2}{\sqrt{5}} - \frac{3}{\sqrt{6}} + \frac{1}{\sqrt{7}} + \frac{2}{\sqrt{8}} - \frac{3}{\sqrt{9}} + \dots \quad .41$$

$$1 - \frac{3}{2} - \frac{5}{3} + \frac{7}{4} + \frac{1}{5} - \frac{3}{6} - \frac{5}{7} + \frac{7}{8} + \frac{1}{9} - \frac{3}{10} - \frac{5}{11} + \frac{7}{12} + \dots \quad .42$$

توجه کنید که هیچیک از این سریها متناوب نیست.

۵.۹ آزمونهای نسبت و ریشه

حال دو آزمون همگرایی دیگر را عرضه می‌کنیم. این آزمونها، که در جای خود مهمند، در بررسی سریهای توانی که از بخش بعد شروع می‌شود، ابزارهای لازمی می‌باشند.

آزمون نسبت

قضیه ۱۰ (آزمون نسبت). فرض کنیم $\sum a_n$ یک سری با جملات ناصفر باشد به طوری که

$$(1) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L,$$

که در آن حالت $L = \infty$ مجاز است. در این صورت، سری به طور مطلق همگراست اگر $0 \leq L < 1$ و واگراست اگر $L > 1$ یا $L = \infty$. آزمون به ازای $L = 1$ بی حاصل می‌باشد.

برهان. فرض کنیم (۱) به ازای $0 \leq L < 1$ برقرار باشد (حاجت به گفتن نیست که L نمی‌تواند منفی باشد)، و r عددی در بازه $(L, 1)$ باشد. در این صورت، به خاطر (۱) به ازای هر n از عدد صحیحی مانند N به بعد،

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < r < 1$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} |a_{N+1}| &< |a_N| r, \\ |a_{N+2}| &< |a_{N+1}| r < |a_N| r^2, \\ |a_{N+3}| &< |a_{N+2}| r < |a_N| r^3, \end{aligned}$$

و به طور کلی،

$$(۴) \quad |a_{N+n}| < |a_N| r^n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + |a_{N+3}| + \dots &< |a_N|r + |a_N|r^2 + |a_N|r^3 + \dots \\ &= |a_N|r(1 + r + r^2 + \dots). \end{aligned}$$

سری سمت راست همگراست، زیرا یک سری هندسی همگرا می باشد؛ و در نتیجه، بنا بر آزمون مقایسه (ر.ک. قضیه ۵، صفحه ۸۲۴)، سری سمت چپ نیز همگرا می باشد. اما، در این صورت، $\sum |a_n|$ همگراست، زیرا حذف تعدادی متناهی جمله از یک سری بر همگرایی آن اثری ندارد. به عبارت دیگر، $\sum a_n$ به طور مطلق همگرا می باشد.

حال فرض کنیم $L > 1$ یا $L = \infty$ ، و r را عددی در بازه $(1, L)$ می گیریم اگر $L > 1$ یا در بازه $(1, \infty)$ می گیریم اگر $L = \infty$. به خاطر (۱)، عدد صحیحی مانند N وجود دارد به طوری که به ازای هر n از عدد صحیحی مانند N به بعد،

$$\left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| > r > 1$$

و با همان استدلال قبل که در آن نامساویها عکس شده اند، به جای (۲) به دست می آوریم

$$(۲) \quad |a_{N+n}| > |a_N|r^n \quad (n = 1, 2, \dots),$$

اما، در این صورت،

$$|a_{N+n}| > |a_N| > 0 \quad (n = 1, 2, \dots),$$

که با شرط لازم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$$

برای همگرایی $\sum a_n$ ناسازگار است؛ در نتیجه، $\sum a_n$ واگرا می باشد.

بالاخره، برای نشان دادن اینکه آزمون به ازای $L = 1$ بی حاصل است، آن را در مورد

سه سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$$

به کار می بریم. در هر حالت $L = 1$ ، و به آسانی می توان تحقیق کرد که با آنکه سری اول به طور مطلق همگراست، دومی به طور مشروط همگرا و سومی واگرا می باشد.

البته، اگر سری $\sum a_n$ نامنفی باشد، واژه "به طور مطلق" در صورت قضیه زاید بوده

و می توان آن را حذف کرد، و در این حالت (۱) به

$$(۱) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = L$$

ساده می‌شود. آزمون نسبت خصوصا " وقتی مؤثر است که جمله n م a_n شامل فاکتوریل باشد، چون در این صورت بسیاری از عوامل مشترک صورت و مخرج را می‌توان در محاسبه نسبت $|a_{n+1}/a_n|$ حذف کرد.

مثال ۱. در مثال ۴، صفحه ۸۲۴، نشان داده شد که سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}$$

همگراست. این همگرایی از آزمون نسبت نیز نتیجه می‌شود، زیرا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n+1)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n+1} = 0$$

(در اینجا، و در زیر، a_n نمایش جمله n م سری مورد نظر می‌باشد).

مثال ۲. سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n!}{n^n}$$

به‌طور مطلق همگراست، زیرا

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{(n+1)^{n+1}} \frac{n^n}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n^n}{(n+1)^n} \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^n} = \frac{1}{e} \approx 0.37 < 1. \end{aligned}$$

مثال ۳. سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2}$$

واگراست، زیرا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)!}{[(n+1)!]^2} \frac{(n!)^2}{(2n)!} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = 4 > 1.$$

مثال ۴. حالت $L = \infty$ به‌وسیله سری $\sum n!$ توضیح داده شده است، که از قبل می‌دانیم

واگراست (جمله n م آن با رفتن $n \rightarrow \infty$ به 0 نزدیک نمی شود)؛ و در واقع، آزمون نسبت در این سری نتیجه می دهد که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1) = \infty.$$

آزمون ریشه. برهان آزمون همگرایی زیر شبیه برهان آزمون نسبت است، ولی عملاً از آن ساده تر می باشد.

قضیه ۱۱ (آزمون ریشه). فرض کنیم سری $\sum a_n$ چنان باشد که

$$(۳) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L,$$

که در آن حالت $L = \infty$ مجاز می باشد. در این صورت، سری به طور مطلق همگراست اگر $0 \leq L < 1$ و واگراست اگر $L > 1$ یا $L = \infty$. سری در حالت $L = 1$ بی حاصل خواهد بود.

برهان. اگر $0 \leq L < 1$ ، r را عددی در بازه $(L, 1)$ می گیریم. در این صورت، به خاطر (۳)، به ازای هر n از عدد صحیحی مانند N به بعد،

$$\sqrt[n]{|a_n|} < r < 1$$

یا معادلاً

$$(۴) \quad |a_n| < r^n \quad (n = N, N+1, \dots).$$

بنابراین،

$$|a_N| + |a_{N+1}| + |a_{N+2}| + \dots < r^N + r^{N+1} + r^{N+2} + \dots \\ = r^N(1 + r + r^2 + \dots),$$

که در آن سری سمت راست یک سری هندسی همگراست. لذا، طبق آزمون مقایسه، $\sum |a_n|$ نیز همگراست؛ یعنی، $\sum a_n$ به طور مطلق همگراست. اگر $L > 1$ یا $L = \infty$ ، r را عددی در بازه $(1, L)$ می گیریم. در این صورت، به جای (۴)، داریم

$$(۴') \quad |a_n| > r^n > 1 \quad (n = N, N+1, \dots),$$

در نتیجه، دنباله $\{a_n\}$ به 0 نزدیک نشده و سری $\sum a_n$ واگرا می باشد. اگر $L = 1$ ، آزمون

ریشه بی حاصل است، و این را می‌توان با اعمال آن بسر سه سری مذکور در آخر برهان آزمون نسبت تحقیق نمود.

در اعمال آزمون ریشه، توجه به

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(\frac{1}{n}) \ln c} = e^0 = 1,$$

که در آن $c > 0$ ، و به همین نحو، همانطور که در مسئله ۵۶، صفحه ۸۰۳، پیش بینی شده،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{(1/n) \ln n} = e^0 = 1,$$

یاری‌دهنده است.

مثال ۵. سری

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n}$$

به‌طور مطلق همگراست، زیرا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{(-1)^{n-1}}{(\ln n)^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\ln n} = 0.$$

مثال ۶. سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{3^n}$$

همگراست، زیرا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{n}{3^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt[n]{n}}{3} = \frac{1}{3} < 1.$$

مثال ۷. سری

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^4}$$

واگراست، زیرا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{2^n}{n^4}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2}{(\sqrt[n]{n})^4} = 2 > 1.$$

مثال ۸. حالت $L = \infty$ با سری $\sum n^n$ توضیح داده شده، که از قبل واگرایی آن را می دانیم (چرا؟)؛ و در واقع، آزمون ریشه در این سری نتیجه می دهد که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^n} = \lim_{n \rightarrow \infty} n = \infty.$$

مسائل

همگرایی سریهای داده شده را با آزمون نسبت یا آزمون ریشه تحقیق کنید. اگر هر دو آزمون بی حاصل بود، از آزمون همگرایی دیگر استفاده نمایید. در سریهای با جملات مثبت و منفی بین همگرایی مطلق و شرطی را از هم تمیز دهید.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)!} \quad .1$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2}{(2n-1)!} \quad .2$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n}{(\ln n)^n} \quad .4$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{2^n}{n^2} \quad .3$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1-n}{1+n} \right)^n \quad .6$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^n}{(2n)!} \quad .5$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{4n^2 - 1}{(1.01)^n} \quad .8$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln n}{5^n} \quad .7$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{4/9}}{3^n} \quad .10$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n\sqrt{n}} \quad .9$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^n}{n^{n+1}} \quad .12$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} \left(\frac{19}{7} \right)^n \quad .11$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(-3)^n}{(2n+1)!} \quad .14$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(n+1)(n+2)}{4^n} \quad .13$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{(2n)^n}{(n+1)^{n+1}} \quad .16$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{10^{n/2}}{n\pi^n} \quad .15$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)}{3 \cdot 6 \cdot 9 \cdots 3n} \quad .18$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^2}{e^{n^2}} \quad .17$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{c(c+1) \cdots (c+n-1)}{n^n} \quad .20$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n-2)}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n} \quad .19$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!(2n)!}{(3n)!} \quad .22$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(\ln n)^2} \quad .21$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n-3)} \quad . 24$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{n^n}{n!} \quad . 23$$

۲۵. فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله‌ای با جملات ناصفر باشد به طوری که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| < 1.$$

نشان دهید که $\{a_n\}$ همگرا به ۰ است.

تحقیق کنید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{c^n}{n!} = 0 \quad (c: \text{دلخواه}) \quad . 26$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n!}{n^n} \right)^n \quad \text{همگراست.} \quad . 28$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{n^n} = 0 \quad . 27$$

۲۹. می‌توان نشان داد هرگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L, \quad (\text{یک})$$

که در آن حالت $L = \infty$ مجاز است، آنگاه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L \quad (\text{یک})$$

سری مثال بنزید که همگرایی آن را بتوان با آزمون ریشه ثابت کرد، ولی آزمون نسبت به خاطر عدم وجود (یک) از کار بیفتد. (لذا، با آنکه محاسبه حد (یک) اغلب از حد (یک) در حالتی که هر دو وجود دارند آسانتر است، آزمون ریشه عملاً از آزمون نسبت قویتر می‌باشد.)

تحقیق کنید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e \quad . 30$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sqrt{(n+1)(n+2) \cdots 2n}}{n} = \frac{4}{e} \quad . 31$$

۳۲. همگرایی سری

$$a + ab + a^2b + a^2b^2 + \cdots + a^n b^{n-1} + a^n b^n + \cdots$$

را، که در آن a و b اعداد مثبت متمایزی هستند، تحقیق نمایید.

۶.۹ سریهای توانی

فرض کنیم x متغیر مستقلی بوده، و $\{a_n\}$ دنباله‌ای از اعداد حقیقی باشد. در این صورت، هر سری نامتناهی به شکل

$$(1) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots$$

یک سری توانی (نسبت به x) نام دارد، و اعداد $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ضرایب یا جملات سری نامیده می‌شوند. در اینجا حد پایینی جمع‌بندی به جای 1 مساوی 0 است، زیرا سری توانی معمولاً با "جمله صفرم" شروع می‌شود. توجه کنید که جملات سری توانی $\sum a_n x^n$ ، به جای عدد مثل سریهایی که قبلاً در نظر گرفته‌ایم (که گاهی برای تمایز آنها با سریهایی که جملاتشان تابع اند سریهای عددی نامیده می‌شوند) تابع می‌باشند. اگر $a_N \neq 0$ و به ازای هر $n > N$ ، $a_n = 0$ ، سری توانی (1) به صورت زیر تحویل می‌شود:

$$\sum_{n=0}^N a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_N x^N \quad (a_N \neq 0)$$

که یک چند جمله‌ای از درجه N است. لذا، به بیان نادقیق، سریهای توانی چند جمله‌ایهایی هستند که بی‌نهایت جمله دارند. اگر $x = 0$ ، طرف راست (1) به تنها جمله ثابت a_0 تحویل می‌شود. برای آنکه طرف چپ (1) نیز به ازای $x = 0$ به a_0 تحویل شود، قرارداد $0^0 = 1$ را می‌پذیریم؛ در نتیجه، حتی اگر $x = 0$ ، $a_0 x^0 = a_0$. اگر c ثابت باشد، می‌توان سری توانی کلیتر

$$(1') \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-c)^n = a_0 + a_1 (x-c) + a_2 (x-c)^2 + \dots + a_n (x-c)^n + \dots$$

را نیز در نظر گرفت که به جای توانهای x مستلزم توانهای $x-c$ است. طبیعی است که (1') به ازای $c=0$ به (1) تحویل می‌شود. در واقع، نیازی به بررسی جداگانه سری به شکل (1') نیست، زیرا هر چیز خواهیم در باب سری (1') بدانیم می‌توانیم از تحلیل سری (1) با همان ضرایب آموخته و سپس تغییر متغیر به $x-c$ بدهیم (ر.ک. بحث صفحه ۱۶۰).

فرض کنیم x مقدار ثابت c را بگیرد که عددی حقیقی است. در این صورت، سری توانی $\sum a_n x^n$ ، که جملاتش تابعند، به صورت سری $\sum a_n x^n$ درمی‌آید که جملاتش عدد می‌باشند، و سری عددی $\sum a_n x^n$ را می‌توان با استفاده از روشهای بخشهای ۲.۹ تا ۵.۹ بررسی کرد. هر سری توانی $\sum a_n x^n$ به ازای $x=0$ (بداهتا) همگراست، زیرا به تنها جمله ثابت a_0 تحویل می‌شود. سری ممکن است فقط به ازای $x=0$ همگرا باشد، یا ممکن

است به ازای هر مقدار از x همگرا باشد، ولی به‌طور کلی به ازای مقادیر ناصفری از x همگرا و به ازای سایر مقادیر واگرا می‌باشد.

مثال ۱. فرض کنیم $a_n = n!$ که در آن $0! = 1$. در این صورت، سری توانی $\sum a_n x^n$ فقط به ازای $x = 0$ همگراست. این از آزمون نسبت نتیجه می‌شود، زیرا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1} x^{n+1}}{a_n x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{n! x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} (n+1)|x| = \infty,$$

مگر آنکه $x = 0$.

مثال ۲. اگر $a_n = 1/n^n$ ، سری توانی $\sum a_n x^n$ (با حد جمع‌بندی پایینی ۱) به ازای هر x به‌طور مطلق همگراست. این از آزمون ریشه نتیجه می‌شود، زیرا به ازای هر مقدار x ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n x^n|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{|x|^n}{n^n}} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{|x|}{n} = 0$$

مثال ۳. یکی از ساده‌ترین سریهای توانی سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \dots + x^n + \dots$$

است که، همانطور که قبلاً "از مثال ۱، صفحه ۸۵۶، می‌بینیم، به ازای هر x در بازه $(-1, 1)$ همگراست و به ازای سایر مقادیر x واگرا می‌باشد.

همگرایی سریهای توانی، بررسی همگرایی ما از سریهای توانی مبتنی بر نتیجه کلیدی زیر است.

قضیه ۱۲ (خاصیت همگرایی اساسی سریهای توانی). هرگاه سری توانی $\sum a_n x^n$ به ازای $x = r$ که $r \neq 0$ همگرا باشد، آنگاه به ازای هر x که $|x| < |r|$ به‌طور مطلق همگراست. هرگاه سری به ازای $x = s$ واگرا باشد، آنگاه به ازای هر x که $|x| > |s|$ نیز واگرا می‌باشد.

برهان. هرگاه سری $\sum a_n x^n$ همگرا باشد، آنگاه، بنابر قضیه ۳، صفحه ۸۱۱، دنباله $\{a_n r^n\}$ همگرا به ۰ است. بخصوص، بنابر قضیه ۱، صفحه ۷۹۳، $\{a_n r^n\}$ کراندار است به این معنی که ثابتی چون $C > 0$ وجود دارد به‌طوری که به ازای هر n ، $|a_n r^n| \leq C$. اما در

این صورت،

$$|a_n x^n| = |a_n r^n| \left| \frac{x}{r} \right|^n \leq C \left| \frac{x}{r} \right|^n,$$

در نتیجه، سری $\sum |a_n x^n|$ تحت تسلط سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} C \left| \frac{x}{r} \right|^n = C \left(1 + \left| \frac{x}{r} \right| + \left| \frac{x}{r} \right|^2 + \dots \right)$$

می باشد. اگر $|x/r| < 1$ ، یا معادلاً " $|x| < |r|$ "، این سری هندسی همگراست، و در این صورت، بنا بر آزمون مقایسه $\sum |a_n x^n|$ نیز همگرا می باشد. به عبارت دیگر، $\sum a_n x^n$ به ازای هر x که $|x| < |r|$ به طور مطلق همگرا می باشد.

برای اثبات حکم دوم، ملاحظه می کنیم که اگر سری $\sum a_n x^n$ به ازای $x = s$ واگرا باشد، نمی تواند در نقطه x که $|x| > |s|$ همگرا باشد. زیرا در این صورت، بنابر قسمت اول برهان، $\sum a_n s^n$ نیز همگراست، که با فرض متناقض می باشد.

بازه همگرایی. فرض کنیم I مجموعه نقاطی باشد که به ازای آنها سری $\sum a_n x^n$ همگراست. در این صورت، همانطور که از نماد برمی آید، I همواره یک بازه است، به نام بازه همگرایی (که احتمالاً می تواند تمام خط حقیقی $(-\infty, \infty)$ یا "بازه تباه شده" $I = [0, 0]$ شامل فقط نقطه 0 باشد).

قضیه ۱۳ (بازه همگرایی یک سری توانی). فرض کنیم I مجموعه تمام نقاط x باشد که به ازای آنها سری توانی $\sum a_n x^n$ همگراست. در این صورت، I بازه ای است که 0 نقطه میانی آن می باشد.

برهان (اختیاری). نقطه 0 همواره متعلق به I است، زیرا هر سری توانی به ازای $x = 0$ همگراست. هرگاه $x = 0$ تنها نقطه در I باشد، آنگاه I به بازه $[0, 0]$ تحویل می شود، ولی در غیر این صورت I شامل دست کم دو نقطه متمایز u و v می باشد. فرض کنیم نقطه ای بین u و v باشد. در این صورت، $|r| < |u|$ یا $|r| < |v|$ ، زیرا r باید از دست کم یکی یا هر دو نقطه u و v به مبداء نزدیکتر باشد. لذا، طبق قضیه ۱۲، سری $\sum a_n x^n$ به ازای $x = r$ (به طور مطلق) همگراست؛ یعنی، r نیز متعلق به I است. لذا، هر وقت مجموعه I شامل دو نقطه متمایز u و v باشد، شامل هر نقطه r بین u و v نیز می باشد. بنابراین، I یک بازه می باشد (ر. ک. تبصره صفحه ۳۵). به علاوه، هرگاه r یک نقطه

درونی I باشد. آنگاه $-r$ نیز متعلق به I می‌باشد. در واقع، در این حالت همیشه می‌توان نقاط u و v در I را طوری یافت که r بین u و v واقع باشد. اما، در این صورت، بنا بر استدلالی که هم اکنون شد، $\sum |a_n r^n|$ همگراست. و در نتیجه، $\sum |a_n (-r)^n|$ چنین است. به عبارت دیگر، $\sum a_n x^n$ به ازای $x = -r$ (به طور مطلق) همگراست؛ یعنی، $-r$ متعلق به I می‌باشد. پس نتیجه می‌شود که I دارای نقطهٔ میانی 0 می‌باشد.

به طور خلاصه، از قضیهٔ ۱۳ فوراً نتیجه می‌شود که سری توانی $\sum a_n x^n$ درست به یکی از صور زیر رفتار می‌کند:

(یک) سری فقط به ازای $x = 0$ همگراست، مثل مثال ۱، و در این صورت، بازهٔ همگرایی I به بازهٔ $[0, 0]$ تحویل می‌شود که فقط شامل نقطهٔ 0 است.

(دو) سری به ازای هر x (به طور مطلق) همگراست، مثل مثال ۲، و در این صورت، I تمام خط حقیقی $(-\infty, \infty)$ می‌باشد.

(سه) سری به ازای مقادیر ناصفیری از x همگرا و به ازای سایر مقادیر واگراست. در این صورت، I یک بازهٔ متناهی به شکل $(-R, R)$ ، $[-R, R]$ ، $(-R, R]$ ، یا $[-R, R)$ ، که $R > 0$ است و این بسته به رفتار سری در نقاط $x = R$ و $x = -R$ است که باید جداگانه بررسی شود. در اینجا مهم است توجه شود که برهان قضیهٔ ۱۳ ما را مجاز به این نتیجه‌گیری که نقاط انتهایی I متعلق به I هستند نمی‌کند؛ و در واقع، همانطور که مثالهای زیر نشان می‌دهند، بازهٔ همگرایی I ممکن است شامل یک یا هر دو نقطهٔ انتهایی نباشد. به عبارت دیگر، سری ممکن است به ازای $x = R$ یا $x = -R$ همگرا باشد یا نباشد.

شعاع همگرایی. عدد R در حالت (سه) شعاع همگرایی سری توانی $\sum a_n x^n$ نام دارد. حالت (یک) را می‌توان حالت جزء (سه) نظیر به $R = 0$ ، و حالت (دو) را حالت جزء (سه) نظیر به $R = \infty$ تلقی کرد.

مثال ۴. در سری هندسی $\sum x^n$ مثال ۳، شعاع همگرایی ۱ است. بازهٔ همگرایی بازهٔ باز $(-1, 1)$ است، زیرا $\sum x^n$ به ازای $|x| \geq 1$ ، بخصوص به ازای $x = \pm 1$ ، واگراست. به طور کلی، سری هندسی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{R}\right)^n = 1 + \frac{x}{R} + \left(\frac{x}{R}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{x}{R}\right)^n + \cdots$$

دارای شعاع همگرایی R و بازهٔ همگرایی $(-R, R)$ می‌باشد.

مثال ۵. با اعمال آزمون نسبت بر سری توانی

$$(۲) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n+1} = 1 + \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} + \frac{x^3}{4} + \dots$$

معلوم می شود که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{n+2} \frac{n+1}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} |x| = |x|.$$

لذا، سری به ازای $|x| < 1$ به طور مطلق همگرا و به ازای $|x| > 1$ واگرا می باشد. در نتیجه، شعاع همگرایی 1 می باشد. بازه همگرایی بازه نیم باز $[-1, 1)$ است. در واقع، به ازای $x = 1$ ، سری (۲) به سری توافقی واگرای

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \dots$$

تبدیل می شود، ولی به ازای $x = -1$ به سری متناوب به طور مشروط همگرای

$$1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$$

بدل خواهد شد. اگر در (۲) x را به $-x$ تغییر دهیم، سری

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n+1} = 1 - \frac{x}{2} + \frac{x^2}{3} - \frac{x^3}{4} + \dots$$

را به دست می آوریم که مجدداً "شعاع همگرایی 1 را دارد، ولی به ازای $x = 1$ به طور مشروط همگراست و به ازای $x = -1$ واگرا می باشد. بنابراین، این بازه همگرایی $[-1, 1]$ است؛ یعنی، بازه نیم باز دیگر باله همان نقاط انتهایی ± 1 .

مثال ۶. سری متناوب

$$(۳) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{n+1} = 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{3} - \frac{x^6}{4} + \dots$$

یک سری توانی است که فقط شامل توانهای زوج x است. با اعمال آزمون نسبت نتیجه می شود که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{2n+2}}{n+2} \frac{n+1}{x^{2n}} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} |x|^2 = |x|^2.$$

لذا، سری به طور مطلق همگراست اگر $|x|^2 < 1$ یا معادلاً $|x| < 1$ ، و واگراست اگر $|x|^2 > 1$ یا معادلاً $|x| > 1$ ؛ در نتیجه، شعاع همگرایی 1 می باشد. بازه همگرایی بسته به بسته

$[-1, 1]$ می‌باشد. در واقع، با گذاردن $x = 1$ و $x = -1$ در سری (۳)، یک سری به‌طور مشروط همگرا، یعنی سری توافقی متناوب، به دست می‌آوریم.

مثال ۷. با اعمال آزمون نسبت بر سری توانی

$$(۴) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{5^n(n+1)^2} = 1 + \frac{x}{5 \cdot 2^2} + \frac{x^2}{5^2 \cdot 3^2} + \frac{x^3}{5^3 \cdot 4^2} + \dots$$

معلوم می‌شود که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{5^{n+1}(n+2)^2} \frac{5^n(n+1)^2}{x^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n+1)^2 |x|}{(n+2)^2 5} = \frac{|x|}{5}.$$

لذا، سری به‌طور مطلق همگراست اگر $|x| < 5$ و واگراست اگر $|x| > 5$. در نتیجه، شعاع همگرایی ۵ می‌باشد. بازه همگرایی بازه بسته $[-5, 5]$ می‌باشد. در واقع، سری (۴) به ازای $x = 5$ به سری همگرای

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \dots$$

تبدیل می‌شود (سری p به ازای $p = 2$)، حال آنکه به ازای $x = -5$ به سری به‌طور مطلق همگرای

$$1 - \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} - \frac{1}{4^2} + \dots$$

بدل خواهد شد.

از مثالهای قبل واضح است که یک سری توانی ممکن است در هر دو نقطه انتهای بازه همگرایی I خود به‌طور مطلق همگرا، به‌طور مشروط همگرا، یا واگرا باشد، یا در یک نقطه انتهای I به‌طور مشروط همگرا و در نقطه انتهای دیگر واگرا باشد. به‌عنوان تمرین نشان دهید یک سری توانی نمی‌تواند در یک نقطه انتهای I به‌طور مطلق همگرا و در نقطه انتهای دیگر واگرا یا به‌طور مشروط همگرا باشد.

البته، یک سری توانی لازم نیست جمله ثابت داشته باشد؛ و در واقع، ممکن است با توانی از x شروع شده و ممکن است فاقد توانی (متناهی یا نامتناهی) از x باشد.

مثال ۸. با اعمال آزمون ریشه بر سری توانی

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{n^2 x^{2n}}{(\ln n)^n} = \frac{2^2 x^4}{(\ln 2)^2} + \frac{3^2 x^6}{(\ln 3)^3} + \frac{4^2 x^8}{(\ln 4)^4} + \dots,$$

که شامل فقط توانهای زوجی از x با شروع از x^4 است، معلوم می‌شود که به ازای هر مقدار x ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left| \frac{n^2 x^{2n}}{(\ln n)^n} \right|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(\sqrt[n]{n})^2}{\ln n} |x|^2 = 0$$

(به یاد آورید که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$). لذا، این سری به ازای هر x به طور مطلق همگراست؛ یعنی، شعاع همگرایی ∞ و بازه همگرایی $(-\infty, \infty)$ دارد.

در سری توانی به شکل کلیتر $\sum a_n (x - c)^n$ ، که در آن c ثابت دلخواهی است، مجموعه نقاطی که به ازای آنها سری همگراست مجدداً "یک بازه" مانند I ، به نام بازه همگرایی، است؛ و در واقع، سه حالت ذکر شده در صفحه ۸۵۷ به صورت زیر درمی‌آید:

(یک) سری فقط به ازای $x = c$ همگراست، و در این صورت بازه همگرایی I به بازه $[c, c]$ شامل تنها نقطه c تحویل می‌شود.

(دو) سری به ازای هر x (به طور مطلق) همگراست، و در این صورت I تمام خط حقیقی $(-\infty, \infty)$ می‌باشد.

(سه) سری به ازای بعضی مقادیر x که مساوی c نیستند همگرا بوده و به ازای سایر مقادیر و اگر می‌باشد. در این صورت، I یک بازه متناهی به شکل $(c - R, c + R)$ ، $[c - R, c + R]$ یا $[c - R, c + R)$ یا $(c - R, c + R]$ است و این بسته به رفتار سری در نقاط $x = c + R$ و $x = c - R$ است که باید جداگانه بررسی شوند.

برای به دست آوردن این حالات از حالات قبلی (یک)، (دو)، و (سه) در مورد سری توانی به شکل $\sum a_n x^n$ ، کافی است توجه کنیم که هرگاه متغیر یک سری توانی از x به $x - c$ تغییر کند، آنگاه بازه انتگرالگیری آن c واحد به راست در امتداد خط حقیقی انتقال می‌یابد اگر $c > 0$ ، و $|c|$ به چپ انتقال می‌یابد اگر $c < 0$. مثل قبل، عدد R در حالت (سه) شعاع همگرایی سری توانی $\sum a_n (x - c)^n$ نام دارد، و حالات (یک) و (دو) نظیر $R = 0$ و $R = \infty$ می‌باشند. توجه کنید که R همواره نصف طول بازه همگرایی است، و طول بازه‌های $[c, c]$ و $(-\infty, \infty)$ مساوی 0 و ∞ تلقی می‌شود.

مثال ۹. سری

$$(۲) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x-6)^n}{n+1} = 1 + \frac{x-6}{2} + \frac{(x-6)^2}{3} + \frac{(x-6)^3}{4} + \dots$$

یک سری توانی نسبت به $x - 6$ است که از تعویض x با $x - 6$ در سری (۲) به دست می‌آید. چون (۲) دارای شعاع همگرایی ۱ و بازه همگرایی $[-1, 1]$ است، سری (۲) همان شعاع همگرایی ۱ را دارد ولی با بازه همگرایی مختلف؛ یعنی، بازه $[5, 7] = [6 - 1, 6 + 1]$ شش واحد به راست.

به صورت دیگر، با اعمال مستقیم آزمون نسبت بر سری (۲)، به دست می‌آوریم

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(x-6)^{n+1}}{n+2} \frac{n+1}{(x-6)^n} \right| = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{n+2} |x-6| = |x-6|.$$

پس نتیجه می‌شود که سری (۲) به طور همگراست اگر $|x-6| < 1$ ، یعنی اگر $-1 < x-6 < 1$ یا معادلاً $5 < x < 7$ ، و واگراست اگر $|x-6| > 1$ ، یعنی اگر $x-6 > 1$ یا $x-6 < -1$ که با $x > 7$ یا $x < 5$ معادل می‌باشد. به علاوه، به ازای $x = 7$ سری به سری توافقی واگرا تبدیل می‌شود، حال آنکه به ازای $x = 5$ به سری توافقی متناوب (به طور مشروط) همگرا بدل می‌شود. لذا، مثل قبل، سری به شعاع همگرایی ۱ و بازه همگرایی $[5, 7]$ می‌باشد.

مثال اخیر ما روش صریحی برای ساختن تمام رده‌های سریهای توانی با شعاع همگرایی یکسان به دست می‌دهد، و در بخش بعد به کار خواهد رفت.

مثال ۱۰. فرض کنیم $\sum a_n x^n$ یک سری توانی بوده، و $\{c_n\}$ دنباله‌ای از اعداد مثبت باشد به طوری که

$$(۵) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c_n} = 1.$$

نشان دهید که سری $\sum c_n a_n x^n$ همان شعاع همگرایی $\sum a_n x^n$ را دارد.

حل (اختیاری). فرض کنیم R شعاع همگرایی $\sum a_n x^n$ و R' شعاع همگرایی $\sum c_n a_n x^n$ باشد. همچنین، $R \neq 0$ ، $R \neq \infty$. به ازای هر نقطه $x \neq 0$ در $(-R, R)$ ، ابتدا نقطه r را طوری می‌گیریم که $|x| < |r| < R$ ؛ در نتیجه، $\sum |a_n r^n|$ همگراست، و بعد از عدد صحیح N داریم

$$\sqrt[n]{c_n} < \frac{|r|}{|x|},$$

یا معادلاً، به ازای هر $n > N$ ،

$$c_n |x|^n < |r|^n$$

(این به خاطر (۵) و نامساوی $|r|/|x| > 1$ میسر است) . پس اگر $n > N$ ،

$$|c_n a_n x^n| = c_n |a_n| |x|^n < |a_n| |r|^n = |a_n r^n|$$

در نتیجه ، سری $\sum |c_n a_n x^n|$ تحت تسلط سری همگرای $\sum |a_n r^n|$ می باشد . بنابراین ، طبق آزمون مقایسه ، $\sum c_n a_n x^n$ (به طور مطلق) همگراست . لذا ، نشان داده ایم که x متعلق به بازه همگرایی $\sum c_n a_n x^n$ است هر وقت x متعلق به بازه همگرایی $\sum a_n x^n$ باشد . پس نتیجه می شود که $R' \geq R$ (همگرایی هر دو سری به ازای $x = 0$ بدیهی است) .
حال فرض کنیم

$$a'_n = c_n a_n, \quad c'_n = \frac{1}{c_n}.$$

در این صورت ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{c'_n} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{c_n}} = 1,$$

و دقیقاً همین استدلال در مورد سری $\sum a'_n x^n = \sum c_n a_n x^n$ با شعاع همگرایی R' و سری $\sum c'_n a'_n x^n = \sum a_n x^n$ با شعاع همگرایی R نشان می دهد که $R \geq R'$. اما نامساویهای $R' \geq R$ و $R \geq R'$ همراه باهم ایجاب می کنند که $R' = R$.

بالاخره ، اگر $R = 0$ ، نامساوی $R \geq R'$ ایجاب می کند که $R' = 0$ ، حال آنکه اگر $R = \infty$ ، $\sum c_n a_n x^n$ به ازای هر x همگراست (چرا ؟) . در نتیجه ، $R' = \infty$. لذا ، در هر حالت ، $R' = R$ ؛ یعنی ، دو سری $\sum a_n x^n$ و $\sum c_n a_n x^n$ دارای شعاع همگرایی یکسان می باشند .

به عنوان کاربردی از مثال ۱۰ ، ملاحظه می کنیم که دو سری $\sum a_n x^n$ و $\sum n^p a_n x^n$ به ازای هر عدد حقیقی p شعاع همگرایی یکسانی دارند ، زیرا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n^p} = \lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt[n]{n})^p = 1.$$

مسائل

شعاع همگرایی و بازه همگرایی سری توانی داده شده را بیابید .

$$\sum_{n=1}^{\infty} n^n (x - \pi)^n \quad ۰.۱ \qquad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n+1} \quad ۰.۲$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (2n+1)x^{2n} \cdot ۴$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n+1}} \cdot ۳$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{(n+1)^{3/2}} \cdot ۶$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(x+7)^n}{n!} \cdot ۵$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n+1}{(n+2)(n+3)} (x+5)^n \cdot ۸$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^{n!} \cdot ۷$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} n^{!n} x^n \cdot ۱۰$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} x^n \cdot ۹$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+2)!}{n!(n+4)!} x^n \cdot ۱۲$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} c^{n^2} x^n \quad (0 < c < 1) \cdot ۱۱$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1 \cdot 4 \cdot 7 \cdots (3n+1)}{1 \cdot 5 \cdot 9 \cdots (4n+1)} x^{2n} \cdot ۱۳$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{2^n}{n!} (x-3)^n \cdot ۱۴$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{n^2}}{2^n} \cdot ۱۶$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{n^2} (x+e)^n \cdot ۱۵$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{a^n + b^n} \quad (a > 0, b > 0) \cdot ۱۷$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{3^n}{n} + \frac{2^n}{n^2}\right) x^n \cdot ۱۹$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n} x^n \cdot ۱۸$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (1+2+\cdots+2^n) x^n \cdot ۲۱$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{1}{n} + \frac{2^n}{n^2}\right) x^n \cdot ۲۰$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(x-4)^{n^2}}{n!} \cdot ۲۳$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n}\right) x^n \cdot ۲۲$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} x^{3n} \cdot ۲۵$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(4x)^n}{\ln n} \cdot ۲۴$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (n+c^n) x^n \quad (0 \leq c < \infty) \cdot ۲۷$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 10^n \left(\frac{x-1}{5}\right)^n \cdot ۲۶$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdots 2n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdots (2n-1)} x^{4n} \cdot ۲۸$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n! x^n}{3^{n^2}} \quad \cdot ۳۰$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{(x+1)^n}{n \ln n} \quad \cdot ۲۹$$

۳۱. به ازای سری توانی $\sum a_n x^n$ ، فرض کنید

$$(یک) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = L,$$

یا

$$(یک') \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = L,$$

که در آن حالت $L = \infty$ مجاز است. نشان دهید که شعاع همگرایی R سری داده شده با فرمول

$$(دو) \quad R = \begin{cases} 1/L, & 0 < L < \infty \text{ اگر} \\ 0, & L = \infty \text{ اگر} \\ \infty, & L = 0 \text{ اگر} \end{cases}$$

داده می شود (در این مسئله نتایج آزمونهای نسبت و ریشه در مورد شعاع همگرایی یک سری توانی که در آن یکی از حدود (یک) و (یک') وجود دارد خلاصه شده است. در واقع، وجود (یک) وجود (یک') را ایجاب می کند ولی عکس آن درست نیست؛ (ر. ک مسئله ۲۹ صفحه ۸۵۳). لذا، سربهایی توانی وجود دارند که در آنها حد (یک') وجود دارد ولی حد (یک) موجود نیست. همچنین، سربهای مانند سری مسئله ۳۷ وجود دارند که به ازای آنها نه حد (یک) وجود دارد نه حد (یک').

سری توانی $\sum a_n x^n$ با شعاع همگرایی R داده شده است که $0 < R < \infty$. شعاع همگرایی سربهای زیر را بیابید.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n)!} a_n x^n \quad \cdot ۳۳$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} x^n \quad \cdot ۳۲$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} n^n a_n x^n \quad \cdot ۳۴$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n^p x^n \quad \cdot ۳۵ \quad (p \text{ دلخواه})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{pn} \quad (p = 2, 3, \dots) \quad \cdot ۳۶$$

فرض کنید حد (یک) یا (یک')، بنا بر نیاز، وجود داشته باشد.

۳۷. نشان دهید که هیچیک از حدود (یک) و (یک) در مورد سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} [3 + (-1)^n] x^n$$

وجود ندارد. شعاع همگرایی و بازه همگرایی این سری را بیابید.

۷.۹ مشتگیری و انتگرالگیری از سریهای توانی

مجموع یک سری توانی. فرض کنیم $\sum a_n x^n$ یک سری توانی با بازه همگرایی I بوده، و f تابعی باشد که بر I تعریف شده و مقدارش در هر نقطه x در I مجموع سری $\sum a_n x^n$ است. در این صورت، f مجموع سری توانی $\sum a_n x^n$ نام دارد، و می‌نویسیم

$$(1) \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n.$$

همواره به یاد داشته باشید که مجموع سری توانی $\sum a_n x^n$ تابعی از متغیر x استم برخلاف مجموع سری $\sum a_n x^n$ که عدد می‌باشد. انتظار این می‌رفت، زیرا $\sum a_n x^n$ سری است که جملاتش تابعی از x اند، ولی $\sum a_n x^n$ یک سری عددی است؛ یعنی، سری که جملاتش عدد می‌باشند (x یک مقدار خاص از x است). فرمول (۱) بسط سری توانی f (در $x = 0$) نام دارد.

مثال ۱. سری توانی $\sum x^n$ یک سری هندسی با بازه همگرایی $I = (-1, 1)$ است. به‌علاوه همانطور که از مثال ۱، صفحه ۸۵۶، می‌دانیم،

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots = \frac{1}{1-x}.$$

لذا، تابع

$$f(x) = \frac{1}{1-x}$$

مجموع سری $\sum x^n$ است ولی فقط بر بازه I ، زیرا سری خارج I واگرا می‌باشد. در نتیجه،

$$(2) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + \cdots + x^n + \cdots$$

بسط سری توانی این تابع می‌باشد.

به‌طور کلی، فرض کنیم $\sum a_n (x-c)^n$ یک سری توانی نسبت به $x-c$ با بازه همگرایی

I بوده، و f تابعی باشد که بر I تعریف شده و مقدارش در هر نقطه r در I مجموع سری عددی $\sum a_n(r-c)^n$ می باشد. در این صورت، f مجموع سری توانی $\sum a_n(x-c)^n$ نام دارد، و می نویسیم

$$(۱') \quad f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n(x-c)^n.$$

فرمول (۱') بسط سری توانی f در $x=c$ نام دارد^۱، و این در صورت $c=0$ به فرمول (۱) تحویل می شود. در مثال ۴ نشان دادیم که ضرایب a_n ($n=0, 1, \dots$) در عبارت (۱') به طور منحصر به فرد توسط تابع f و ثابت c معین می شود.

مثال ۲. سری هندسی

$$(۲) \quad \sum_{n=0}^{\infty} (x-1)^n = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \dots$$

همگراست اگر و فقط اگر $|x-1| < 1$ ، ولی سری

$$(۲') \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{2^{n+1}} = \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{x}{2}\right)^n = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \dots,$$

که نیز هندسی است، همگراست اگر و فقط اگر $|x/2| < 1$ یا معادلاً $|x| < 2$. از تعویض x در فرمول (۲) ابتدا با $x-1$ و سپس با $x/2$ ، معلوم می شود که هر دو سری (۲) و (۲') دارای مجموع یکسان

$$\frac{1}{1-(x-1)} = \frac{1}{2} \frac{1}{1-\frac{x}{2}} = \frac{1}{2-x}$$

می باشند. لذا، تابع

$$f(x) = \frac{1}{2-x}$$

دارای بسط سری توانی

$$\frac{1}{2-x} = \frac{1}{2} + \frac{x}{4} + \frac{x^2}{8} + \dots \quad (|x| < 2)$$

۱. بسط "در $x=c$ " به این معنی است که نقطه میانی بازه همگرایی سری توانی $x=c$ می باشد. گاهی به جای این از عبارت "نسبت به $x=c$ " استفاده می کنیم که به همان معنی می باشد.

در $x = 0$ و بسط

$$\frac{1}{2-x} = 1 + (x-1) + (x-1)^2 + \dots \quad (|x-1| < 1)$$

در $x = 1$ است. توجه کنید که بازه همگرایی سری (۳) مساوی $(-2, 2)$ است، حال آنکه بازه همگرایی (۳) بازه کوچکتر $(0, 2)$ می‌باشد. این با معنی است، زیرا بازه همگرایی سری توانی f نمی‌تواند شامل نقطه $x = 2$ باشد که در آن f به بی‌نهایت نزدیک می‌شود. به ازای سری توانی

$$(۴) \quad \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots + a_n x^n + \dots,$$

می‌توان با مشتقگیری و انتگرالگیری جمله به جمله از (۴) دو سری توانی جدید تشکیل می‌داد. یعنی، می‌توان سری

$$(۵) \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1} = a_1 + 2a_2 x + \dots + n a_n x^{n-1} + \dots$$

را تشکیل داد که جمله عمومی‌اش مشتق $a_n x^n$ است، و سری

$$(۶) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} = a_0 x + \frac{a_1}{2} x^2 + \dots + \frac{a_n}{n+1} x^{n+1} + \dots,$$

که جمله عمومی‌اش انتگرال $a_n x^n$ (از 0 تا x) می‌باشد. هر سه سری (۴)، (۵) و (۶) دارای شعاع همگرایی یکسان‌اند. در واقع، ضرب یک سری توانی در x یا تقسیم یک سری توانی بدون جمله ثابت بر x اثری بر شعاع همگرایی ندارد (چرا نه؟). در نتیجه، سری (۵) همان شعاع همگرایی

$$(۵') \quad \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n,$$

را دارد، ولی سری (۶) شعاع همگرایی

$$(۶') \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^n$$

را خواهد داشت. اما (۵') و (۶') هر دو به شکل $\sum c_n a_n x^n$ می‌باشند، که در آن وقتی $n \rightarrow \infty$ $\sqrt[n]{c_n} \rightarrow 1$ ، زیرا وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $\sqrt[n]{n} \rightarrow 1$ (ر. ک. صفحه ۸۵۱) و

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\frac{1}{n+1}} = \lim_{n \rightarrow \infty} e^{-(1/n) \ln(n+1)} = e^0 = 1.$$

بنابراین، طبق مثال ۱۰، صفحه ۸۶۱، معلوم می‌شود که دوسری (۵') و (۶') همان شعاع

همگرایی سری اصلی (۴) را دارند؛ و در نتیجه، سریهای مشتقگیری شده و انتگرالگیری شده^{۱۴} (۵) و (۶) نیز چنین می‌باشند. کاربرد مکرر این استدلال نشان می‌دهد که حاصل هرچند بار مشتقگیری یا انتگرالگیری جمله به جمله از سری توانی $\sum a_n x^n$ سری توانی دیگری با همان شعاع همگرایی می‌باشد.

مشتقگیری از سری توانی. قضیه^{۱۴} زیر رابطه^{۱۴} بین تابع مجموع یک سری توانی و تابع مجموع سری مشتقگیری شده را به ما می‌دهد. علی‌رغم سادگی صورت قضیه، برهانی تکنیکی دارد و لذا حذف می‌شود. خواننده^{۱۴} علاقه‌مند می‌تواند به کتابی در حساب دیفرانسیل و انتگرال پیشرفته مراجعه نماید.

قضیه^{۱۴} (مشتقگیری جمله به جمله از یک سری توانی). فرض کنیم $\sum a_n x^n$ یک سری توانی با شعاع همگرایی R باشد. در این صورت، تابع

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n,$$

یعنی مجموع سری توانی که بر بازه^{۱۴} $(-R, R)$ مشتقپذیر و دارای مشتق زیر است:

$$(7) \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}.$$

که مساوی مجموع سری حاصل از مشتقگیری جمله به جمله از سری داده شده می‌باشد.

با کاربرد مکرر قضیه^{۱۴}، معلوم می‌شود که f در هر نقطه^{۱۴} $(-R, R)$ از هر مرتبه مشتق دارد؛ این امر را می‌توان خلاصه کرد و گفت که f بر $(-R, R)$ بی‌نهایت بار مشتقپذیر است. به علاوه، مشتقپذیری f بر $(-R, R)$ پیوستگی f بر $(-R, R)$ را ایجاب می‌کند. لذا، مجموع هر سری توانی یک تابع پیوسته می‌باشد.

انتگرالگیری از سریهای توانی. به کمک قضیه^{۱۴} می‌توان به آسانی رابطه^{۱۴} بین f و تابعی که مجموع سری انتگرالگیری شده است را به دست آورد.

قضیه^{۱۵} (انتگرالگیری جمله به جمله از یک سری توانی). فرض کنیم $\sum a_n x^n$ یک سری توانی با شعاع همگرایی R باشد. در این صورت، تابع

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

بر هر زیربازه بسته $[0, x]$ از $(-R, R)$ انتگرالپذیر است که انتگرالش

$$\int_0^x f(t) dt = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

مساوی مجموع سری حاصل از انتگرالگیری جمله به جمله از سری داده شده است.

برهان. انتگرالپذیری f بر $[0, x]$ نتیجه فوری پیوستگی f بر $(-R, R)$ است. قبلاً نشان داده‌ایم که سری

$$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n+1} x^{n+1}$$

دارای شعاع همگرایی R است، و بوضوح $F(0) = 0$. مشتگیری جمله به جمله از این سری فوراً "سری اصلی" $f(x) = \sum a_n x^n$ را نتیجه می‌دهد؛ و لذا، بنا بر قضیه ۱۴، $F'(x) = f(x)$. پس نتیجه می‌شود که

$$F(x) = \int_0^x f(t) dt$$

(توجه کنید که این چگونه شرط $F(0) = 0$ را وارد می‌کند). حال فرمول مطلوب (۸) را می‌توان با متحدگرفتن دو عبارت مربوط به $F(x)$ به دست آورد. حال چند مثال از مشتگیری جمله به جمله از سریهای توانی عرضه می‌کنیم.

مثال ۳. کاربرد آزمون نسبت یا ریشه فوراً نشان می‌دهد که سری توانی

$$(9) \quad f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$$

دارای شعاع همگرایی ۱ است. از رابطه (۹) با استفاده از قضیه ۱۴ دوبار مشتق می‌گیریم به دست می‌آید

$$(9') \quad f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{n}$$

و

$$(9'') \quad f''(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n-1}{n} x^{n-2}$$

سه سری (۹)، (۹')، و (۹'') همه دارای شعاع همگرایی ۱ هستند، ولی به آسانی تحقیق می‌شود (به عنوان تمرین انجام دهید) که بازه همگرایی (۹) بازه بسته $[-1, 1]$

است، بازه همگرایی (۹) بازه نیمباز $[-1, 1)$ است، و بازه همگرایی (۹") بازه $(-1, 1)$ می‌باشد. لذا، با آنکه مشتگیری از یک سری توانی همگرایی را در هر نقطه درونی بازه همگرایی I حفظ می‌کند، ممکن است همگرایی در نقاط انتهایی I را نابود سازد.

مثال ۴. هرگاه دوسری توانی $\sum a_n x^n$ و $\sum b_n x^n$ در همسایگی نقطه $x=0$ مجموع یکسان داشته باشند، آنگاه دوسری یکی هستند؛ یعنی، توانهای یکسان x دارای ضرایب یکسان می‌باشند. در واقع، با گذاردن $x=0$ در اتحاد

$$(10) \quad a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \equiv b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \dots,$$

فورا" به دست می‌آوریم $a_0 = b_0$. به علاوه، به خاطر قضیه ۱۴، اتحاد (۱۰) در صورت مشتگیری از طرفین به تعداد دفعات مساوی برقرار می‌ماند. با n بار مشتگیری از (۱۰) معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} n! a_n + (n+1)! a_{n+1} x + \frac{(n+2)!}{2!} a_{n+2} x^2 + \dots \\ = n! b_n + (n+1)! b_{n+1} x + \frac{(n+2)!}{2!} b_{n+2} x^2 + \dots, \end{aligned}$$

که پس از قراردادن $x=0$ به دست می‌آید $a_n = b_n$. بنابراین، به ازای هر $n=0, 1, 2, \dots$ ، این استدلالی است مشابه استدلال به کار رفته در قضیه ۴، صفحه ۶۴۲، راجع به ضرایب چند جمله‌ایهای یکسان که در مورد سریهای توانی بیان شده است. به طور کلی، هرگاه $\sum a_n (x-c)^n$ و $\sum b_n (x-c)^n$ دو سری توانی نسبت به $x-c$ باشند که در همسایگی نقطه $x=c$ دارای مجموع یکسانند، آنگاه دو سری یکی می‌باشند (در اتحاد $\sum a_n (x-c)^n \equiv \sum b_n (x-c)^n$ و اتحادهای ناشی از مشتگیری مکرر قرار دهید $x=c$) لذا، ضرایب یک بسط به صورت سری توانی $f(x) = \sum a_n (x-c)^n$ منحصر" به وسیله تابع f معین می‌شوند؛ و نیز، البته با انتخاب ثابت c .

مثال ۵. از آزمون نسبت فورا" نتیجه می‌شود که سری توانی

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots$$

به ازای هر x همگراست. بنا بر قضیه ۱۴،

$$f'(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{nx^{n-1}}{n!} = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{n-1}}{(n-1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

در نتیجه، سری مشتگیری شده دقیقاً همان سری اصلی است؛ لذا، تابع مجموع $y = f(x)$ در معادله دیفرانسیل

$$y' = y,$$

تحت شرط اولیه

$$y|_{x=0} = 1,$$

که با گذاردن $x = 0$ در سری مربوط به $f(x)$ به دست می‌آید، صدق می‌نماید. همانطور که از بخش ۶.۶ می‌دانیم، $y = e^x$ جواب منحصر به فرد این مسئله مقدار اولیه است. بنا بر این،

$$(11) \quad e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

و ما بسط به صورت سری توانی e^x در $x = 0$ را یافته‌ایم.

اگر در فرمول (۱۱) اول $x = 1$ و سپس $x = -1$ اختیار کنیم، می‌توانیم دو سری عددی که قبلاً با آنها مواجه شدیم جمع‌بندی کنیم؛ یعنی،

$$(12) \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \dots = e$$

و

$$(12') \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} = 1 - 1 + \frac{1}{2!} - \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} - \frac{1}{5!} + \dots = e^{-1}.$$

در واقع، حال می‌توان با استفاده از (۱۲) عدد e را با هر دقت مطلوب حساب کرد. مثلاً، فرض کنید هشت جمله اول سری (۱۲) را نگهداشته و از جملات دیگر صرف‌نظر کرده باشیم. در این صورت، خطای مرتکب شده مساوی است با

$$\frac{1}{8!} + \frac{1}{9!} + \frac{1}{10!} + \dots = \frac{1}{8!} + \frac{1}{8! \cdot 9} + \frac{1}{8! \cdot 9 \cdot 10} + \dots,$$

که مسلماً از مجموع سری هندسی

$$\frac{1}{8!} \left[1 + \frac{1}{9} + \left(\frac{1}{9}\right)^2 + \dots \right] = \frac{1}{8!} \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{1}{8!} \frac{9}{8} \approx 2.8 \times 10^{-5}$$

کوچکتر است. بنابراین، می‌توان مطمئن بود که تقریب

$$e \approx 1 + 1 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \frac{1}{5!} + \frac{1}{6!} + \frac{1}{7!}$$

$$= 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \frac{1}{120} + \frac{1}{720} + \frac{1}{5040} = \frac{685}{252} \approx 2.7183$$

تا چهار رقم اعشار دقیق است. (در واقع، $e = 2.7182818\dots$) در اینجا از این امر استفاده می‌کنیم که یک تقریب تا n رقم اعشار دقیق است اگر قدر مطلق خطای تقریب از $0.5 \times 10^{-n} = 5 \times 10^{-n-1}$ کوچکتر باشد.

تبصره. در مثال قبل تمایز مختصری بین تقریب $e \approx \frac{685}{252}$ و تقریب $e \approx 2.7183$ وجود دارد. تقریب اول فقط تحت خطای برشی ناشی از حذف تمام جز هشت جمله اول سری (۱۲) است، حال آنکه تقریب دوم تحت خطای گرد کردن اضافی که در نمایش کسر $\frac{685}{252}$ به صورت یک اعشاری با چهار رقم صورت می‌گیرد نیز قرار دارد. اگر قدر مطلق خطای گرد کردن نزدیک کران بالایی خود 5×10^{-5} بوده و خطای برشی همان علامت خطای گرد کردن را داشته باشد، مجموع خطاهای برشی و گرد کردن ممکن است از 5×10^{-5} تجاوز کند؛ لذا، چهارمین رقم تقریب $e \approx 2.7183$ را می‌توان غیر مسلم (ولی فقط به اندازه ± 1) دانست. تحلیل بیشتر نشان می‌دهد که این رخ نمی‌دهد؛ در نتیجه، تقریب $e \approx 2.7183$ تا چهار رقم اعشار درست است. برای آنکه مطالب ساده باشند، از حالا به بعد در تقریبات مبتنی بر سریهای نامتناهی از خطاهای گرد کردن صرف نظر خواهیم کرد.

مثال ۶، ما قبلاً "از مثال ۱ می‌دانیم که

$$(12) \quad \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + x^3 + \dots + x^n + \dots \quad (|x| < 1).$$

با استفاده از قضیه ۱۴، از این سری جمله به جمله مشتق می‌گیریم، به دست می‌آید

$$(13) \quad \frac{1}{(1-x)^2} = 1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1} + \dots \quad (|x| < 1),$$

که بسط به صورت سری توانی تابع $1/(1-x)^2$ در $x=0$ است. توجه کنید که (۱۳) را می‌توان از (۱۲) نیز با ضرب سری "چند جمله‌ای نامتناهی" $1 + x + x^2 + x^3 + \dots$ در خودش به دست آورد:

$$\begin{array}{r}
 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\
 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\
 \hline
 1 + x + x^2 + x^3 + \dots \\
 x + x^2 + x^3 + \dots \\
 x^2 + x^3 + \dots \\
 x^3 + \dots \\
 \hline
 1 + 2x + 3x^2 + 4x^3 + \dots
 \end{array}$$

مشروعیت این روند نتیجه‌ای است از قضیه^{۱۵} زیر منسوب به کشی، که آن را بدون برهان ذکر می‌کنیم: فرض کنیم $f(x) = \sum a_n x^n$ و $g(x) = \sum b_n x^n$ دو سری توانی با شعاعهای همگرایی R_a و R_b باشند. در این صورت، اگر $|x| < \min\{R_a, R_b\}$ ،

$$\begin{aligned}
 f(x)g(x) &= a_0 b_0 + (a_0 b_1 + a_1 b_0)x + (a_0 b_2 + a_1 b_1 + a_2 b_0)x^2 \\
 &+ \dots + (a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \dots + a_n b_0)x^n + \dots
 \end{aligned}$$

حال، به کمک قضیه^{۱۵}، به چند مورد انتگرالگیری جمله به جمله از سریهای توانی می‌پردازیم.

مثال ۷. با انتگرالگیری جمله به جمله از سری هندسی همگرای

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n &= 1 - x + x^2 - x^3 + \dots \\
 (14) \qquad &= \frac{1}{1 - (-x)} = \frac{1}{1 + x} \quad (|x| < 1)
 \end{aligned}$$

به دست می‌آوریم

$$x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots = \int_0^x \frac{dt}{1+t}$$

اما

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t} = \ln(1+x),$$

زیرا $|x| < 1$ ؛ و لذا،

$$(15) \quad \ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots \quad (|x| < 1),$$

که بسط سری توانی تابع $\ln(1+x)$ در $x=0$ است. قضیه^{۱۵} اعتبار این بسط را فقط

به ازای $-1 < x < 1$ تضمین می‌کند، ولی شک داریم که به ازای $x = 1$ نیز برقرار باشد، زیرا طرف راست (۱۵) به ازای $x = 1$ به یک سری توافقی متناوب به طور مشروط همگرا تبدیل می‌شود. در واقع، بسط (۱۵) به ازای $x = 1$ برقرار است؛ و لذا، نتیجه می‌گیریم که

$$(۱۵') \quad 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots = \ln 2.$$

این نتیجه‌ای است از قضیهٔ زیر که به ریاضیدان اعجوبهٔ نروژی نیلز آبل^۱ (۱۸۲۹-۱۸۵۲) منسوب می‌باشد: هرگاه سری توانی $\sum a_n x^n$ با شعاع همگرایی R به ازای $x = R$ همگرا باشد، آنگاه مجموعش از چپ در $x = R$ پیوسته است؛ یعنی،

$$\lim_{x \rightarrow R^-} \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n R^n.$$

قضیهٔ آبل در اعمال بر سری (۱۵)، که در $x = 1$ همگراست، می‌گوید که

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \ln(1+x) = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots,$$

و این فرمول (۱۵') را ثابت می‌کند، زیرا حد موجود در آن چیزی جز $\ln 2$ نیست.

مثال ۸. از تغییر x به x^2 در بسط (۱۴) معلوم می‌شود که

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-x^2)^n = 1 - x^2 + x^4 - x^6 + \cdots = \frac{1}{1+x^2} \quad (|x| < 1).$$

انتگرالگیری جمله به جمله از این سری توانی نتیجه می‌دهد که

$$x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots = \int_0^x \frac{dt}{1+t^2}.$$

اما

$$\int_0^x \frac{dt}{1+t^2} = \arctan x,$$

در نتیجه، بسط سری توانی $\arctan x$ در $x = 0$ مساوی است با

$$(۱۶) \quad \arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} = x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \cdots \quad (|x| < 1).$$

این نتیجه به افتخار ریاضیدان اسکاتلندی، جیمز گرگوری^۱، که آن را در ۱۶۷۱ کشف کرد، سری گرگوری نام دارد. به ازای $x = 1$ ، طرف راست (۱۶) به صورت سری $1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$ درمی‌آید که بنا بر آزمون متناوب به طور مشروط همگراست. بنابراین، قضیه آبل می‌گوید که

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \arctan x = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots$$

چون این حد $\arctan 1 = \pi/4$ است، پس نتیجه می‌شود که

$$1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \dots = \frac{\pi}{4}.$$

این سری آنقدر کند همگراست که برای محاسبه π مفید نیست، ولی راه دیگری برای استفاده از سری گرگوری برای محاسبه π وجود دارد که دقتش زیاد می‌باشد (ر.ک. مسئله ۸۴، صفحه ۹۱۸).

مثال ۰۹. در مثال ۴، صفحه ۶۷۱، از قاعده سیمپسون برای تقریب انتگرال

$$I = \int_0^1 e^{-x^2} dx$$

تا چهار رقم اعشار استفاده کردیم. حال راه بسیار ساده‌تری برای تقریب I نشان می‌دهیم که مبتنی بر استفاده از سریهای توانی است، که در آن مقادیر عددی انتگرالده لازم نمی‌شوند. از تغییر x به x^2 در فرمول (۱۱)، بسط سری توانی

$$e^{-x^2} = 1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots$$

به دست می‌آید، که به ازای هر x معتبر است. در این صورت، با انتگرالگیری جمله به جمله از این سری از ۰ تا ۱، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 e^{-x^2} dx = \int_0^1 \left(1 - x^2 + \frac{x^4}{2!} - \frac{x^6}{3!} + \dots + (-1)^n \frac{x^{2n}}{n!} + \dots \right) dx \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \dots + (-1)^n \frac{1}{(2n+1)n!} + \dots \end{aligned}$$

فرض کنیم R_n خطای حاصل از تقریب I به وسیله مجموع n جمله اول سری عددی سمت راست باشد. در این صورت، بنا بر قضیه ۹، صفحه ۸۳۷، قدر مطلق R_n از اولین جمله

1. James Gregory

استفاده نشده کوچکتر است؛ یعنی،

$$|R_n| < \frac{1}{(2n+1)n!},$$

و اگر $|R_n| < 5 \times 10^{-5}$ ، می‌توان مطمئن بود که تقریب تا چهار رقم اعشار دقیق است. چون

$$\frac{1}{13 \cdot 6!} \approx 1.1 \times 10^{-4}, \quad \frac{1}{15 \cdot 7!} \approx 1.3 \times 10^{-5},$$

کوچکترین عدد صحیح n که $|R_n| < 5 \times 10^{-5}$ مساوی 7 است. پس نتیجه می‌شود که تقریب

$$\begin{aligned} I &\approx 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5 \cdot 2!} - \frac{1}{7 \cdot 3!} + \frac{1}{9 \cdot 4!} - \frac{1}{11 \cdot 5!} + \frac{1}{13 \cdot 6!} \\ &= 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{10} - \frac{1}{42} + \frac{1}{216} - \frac{1}{1320} + \frac{1}{9360} \approx 0.7468 \end{aligned}$$

تا چهار رقم اعشار دقیق است.

سری دوجمله‌ای. بنابر قضیهٔ دوجمله‌ای، هرگاه r عدد صحیح نامنفی باشد، آنگاه

$$\begin{aligned} (1+x)^r &= 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2} x^2 \\ &+ \cdots + \frac{r(r-1) \cdots (r-n+1)}{n!} x^n + \cdots + x^r \end{aligned} \quad (17)$$

(در فرمول (۵)، صفحه ۳۶۴، قرار می‌دهیم $a=1, b=x, n=r$). مثال اخیر این فرمول را به حالتی که در آن r عدد حقیقی دلخواهی است تعمیم می‌دهد.

مثال ۱۰. سری توانی

$$\begin{aligned} f(x) &= 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1) \cdots (r-n+1)}{n!} x^n \\ (18) \quad &= 1 + rx + \frac{r(r-1)}{2} x^2 + \cdots + \frac{r(r-1) \cdots (r-n+1)}{n!} x^n + \cdots, \end{aligned}$$

که در آن r عدد حقیقی دلخواهی است، سری دوجمله‌ای نام دارد. اگر r عدد صحیح نامنفی باشد، سری دوجمله‌ای مختوم بوده و به چندجمله‌ای (۱۷) از درجه r تحویل می‌شود، ولی در غیر این صورت بی‌نهایت جمله وجود دارند و سری دارای شغای همگرایی

۱ می‌باشد (این را به کمک آزمون نسبت نشان دهید). لذا، تابع $f(x)$ بر بازه $-1 < x < 1$ تعریف شده است. با مشتقگیری جمله به جمله از (۱۸) به دست می‌آوریم

$$(۱۸) \quad f'(x) = r + r(r-1)x + \dots + \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{(n-1)!} x^{n-1} + \dots,$$

که پس از ضرب در x به صورت زیر درمی‌آید:

$$xf'(x) = rx + r(r-1)x^2 + \dots + \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{(n-1)!} x^n + \dots$$

حال پس از توجه به این امر که ضریب x^n در (۱۸) آخرین جمله نوشته شده نبوده بلکه جمله بعدی (نوشته نشده) یعنی

$$\frac{r(r-1)\dots(r-n+1)(r-n)}{n!} x^n$$

است، دوسری اخیر را به هم می‌افزاییم. در نتیجه، خواهیم داشت

$$\begin{aligned} f'(x) + xf'(x) &= r + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{r(r-1)\dots(r-n+1)(r-n)}{n!} + \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{(n-1)!} \right] x^n \\ &= r + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{(n-1)!} \left(\frac{r-n}{n} + 1 \right) x^n \\ &= r + r \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!} x^n \\ &= r \left[1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\dots(r-n+1)}{n!} x^n \right] = rf(x). \end{aligned}$$

لذا، تابع مجموع $y = f(x)$ در معادله دیفرانسیل

$$(۱۹) \quad (1+x)y' = ry,$$

تحت شرط اولیه

$$(۱۹') \quad y|_{x=0} = 1,$$

حاصل از قرارداد $x=0$ در (۱۸) صدق می‌کند.

معادله (۱۹) را می‌توان با جداسازی متغیرها حل کرد، ولی ساده‌تر است که جواب $y = (1+x)^r$ را حدس بزنیم، ناشی از این امر که چون مشتقگیری درجه $(1+x)^r$ را یکی کم می‌کند، عامل اضافی $1+x$ طرف چپ (۱۹) آن را جبران خواهد کرد. فوراً می‌بینیم که این جواب در شرط اولیه (۱۹') صدق می‌کند. لذا، بالاخره تابع $f(x)$ در

(۱۸) را مساوی $(1+x)^r$ یافته‌ایم؛ در نتیجه، (۱۸) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(20) \quad (1+x)^r = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n \quad (-1 < x < 1).$$

این بسط سری دوجمله‌ای $(1+x)^r$ قضیه دوجمله‌ای (۱۷) را به حالت نمای حقیقی دلخواه ۲ تعمیم می‌دهد.

مسائل

تابع گویای داده شده را به صورت سری توانی در $x=0$ بسط داده، و شعاع همگرایی R را مشخص نمایید.

$$0.1 \quad \frac{1}{3-x} \quad 0.2 \quad \frac{x}{1+x} \quad 0.3 \quad \frac{1}{(1+x)^2}$$

$$0.4 \quad \frac{x^{11}}{1-x} \quad 0.5 \quad \frac{x}{2x+1} \quad 0.6 \quad \frac{1}{1-x^2}$$

$$0.7 \quad \frac{x}{(1-x^2)^2} \quad 0.8 \quad \frac{x^2}{(1-x)^3} \quad 0.9 \quad \frac{1}{x^2-3x+2}$$

۱۰. فرض کنید $f(x) = \sum a_n x^n$. به کمک مثال ۴، نشان دهید اگر f زوج باشد، $a_1 = a_3 = \dots = 0$.

حال آنکه اگر f فرد باشد، $a_0 = a_2 = a_4 = \dots = 0$.

فرض کنید، مثل مثال ۲، $f(x) = 1/(2-x)$. بسط سری توانی f را در نقاط زیر بیابید.

۱۱. در $x=3$

۱۲. در $x=-1$

تابع داده شده را در $x=0$ به صورت سری توانی بسط داده، و شعاع همگرایی R را مشخص نمایید.

$$0.13 \quad x^2 e^{-x} \quad 0.14 \quad x e^{x^2} \quad 0.15 \quad \sinh x$$

$$0.16 \quad \cosh x \quad 0.17 \quad a^x \quad (a > 0) \quad 0.18 \quad \ln \frac{1}{1-x^2}$$

$$0.19 \quad \ln \frac{1+x}{1-x} \quad 0.20 \quad (1+x) \ln(1+x) \quad 0.21 \quad \ln(1-x+x^2)$$

به کمک فرمول (۲۰)، پنج جمله اول بسط سری دوجمله‌ای تابع داده شده را بیابید.

$$0.22 \quad (1+x)^{1/2} \quad 0.23 \quad (1+x)^{1/3} \quad 0.24 \quad (1+x)^{-1/2}$$

$$0.25 \quad (4-x)^{3/2} \quad 0.26 \quad (8+x)^{2/3} \quad 0.27 \quad (1-x^2)^{-10}$$

بسط سری توانی زیر را بیابید.

$$0.28 \quad \ln x \quad \text{در } x=1 \quad 0.29 \quad \ln(2+2x+x^2) \quad \text{در } x=-1$$

۳۰. سری

(یک)
$$\sum_{n=0}^{\infty} e^{-nx} = 1 + e^{-x} + e^{-2x} + \dots + e^{-nx} + \dots$$

یک سری توانی نیست، زیرا جملات نمایی اند نه توانهایی از x . نشان دهید که سری (یک) همگراست اگر و فقط اگر x در بازه $(0, \infty)$ قرار داشته باشد. مجموع این سری روی $(0, \infty)$ چیست؟ آیا $(0, \infty)$ یک بازه همگرایی ممکن برای یک سری توانی است؟ با استفاده از سه جمله اول سری دو جمله‌ای (۲۰)، ریشه داده شده را تقریب کنید. در هر حالت تحقیق کنید که تقریب تا پنج رقم اعشار دقیق است.

$$\begin{array}{ccc} \sqrt{79} \cdot 33 & \sqrt{0.975} \cdot 32 & \sqrt{1.04} \cdot 31 \\ \sqrt{126} \cdot 36 & \sqrt[3]{65} \cdot 35 & \sqrt[3]{33} \cdot 34 \end{array}$$

۳۷. با استفاده از سری دوجمله‌ای، نشان دهید که

$$\begin{aligned} \arcsin x &= x + \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots, \\ \sinh^{-1} x &= x - \frac{1 \cdot x^3}{2 \cdot 3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot x^5}{2 \cdot 4 \cdot 5} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot x^7}{2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 7} + \dots, \end{aligned}$$

مشروط بر اینکه $|x| < 1$.

۳۸. با مشتگیری مستقیم از بسط سری توانی $\cosh x$ و $\sinh x$ (ر. ک. مسائل ۱۵ و ۱۶)،

تحقیق کنید که $D_x \cosh x = \sinh x$, $D_x \sinh x = \cosh x$.

۳۹. با استفاده از سری گرگوری (۱۶)، نشان دهید که

$$1 - \frac{1}{3 \cdot 3} + \frac{1}{5 \cdot 3^2} - \frac{1}{7 \cdot 3^3} + \dots = \frac{\pi}{2\sqrt{3}}$$

۴۰. نشان دهید که مجموع $y = f(x)$ سری توانی

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{(n!)^2}$$

در معادله دیفرانسیل $xy'' + y' - y = 0$ صدق می‌کند.

۴۱. سری توافقی متناوب $\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots$ آنقدر کند همگراست که در محاسبه

$\ln 2$ ارزش عملی ندارد. نشان دهید که $\ln 2$ مجموع سری همگرایی بسیار سریع‌تر زیر

نیز هست:

(دو)
$$\ln 2 = \frac{2}{3} \left(1 + \frac{1}{3 \cdot 9} + \frac{1}{5 \cdot 9^2} + \frac{1}{7 \cdot 9^3} + \dots \right).$$

۴۲. با استفاده از فرمول (دو)، $\ln 2$ را تا پنج رقم اعشار تقریب نمایید.
مجموع سریهای توانی زیر را بیابید.

$$1 - 4x + 7x^2 - 10x^3 + \dots \quad (|x| < 1) \quad . ۴۳$$

$$1 - 3x^2 + 5x^4 - 7x^6 + \dots \quad (|x| < 1) \quad . ۴۴$$

بسط سری توانی تابع x تعریف شده با انتگرال داده شده را بیابید.

$$\int_0^x \frac{1 - e^{-t}}{t} dt \quad . ۴۶$$

$$\int_0^x \frac{e^{t^2} - 1}{t^2} dt \quad . ۴۵$$

$$\int_0^x \cosh t^2 dt \quad . ۴۸$$

$$\int_0^x \frac{\ln(1+t)}{t} dt \quad . ۴۷$$

در مسائل ۴۵ تا ۴۷، انتگرالده $f(x)$ را در $x=0$ با پیوستگی تعریف کنید؛ یعنی، قرار دهید $f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$.

با استفاده از سری توانی، انتگرال داده شده را تا چهار رقم اعشار تقریب نمایید.

$$\int_0^{1/5} \frac{\sinh x}{x} dx \quad . ۵۰$$

$$\int_0^{1/2} \sqrt{1+x^4} dx \quad . ۴۹$$

$$\int_0^{2/3} \frac{dx}{1+x^5} \quad . ۵۲$$

$$\int_0^1 e^{x^2} dx \quad . ۵۱$$

۵۳. فرض کنید

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n, \quad g(x) = \frac{f(x)}{1-x}.$$

بسط سری توانی g در $x=0$ را بیابید.

۸.۹ قضیه تیلور و موارد استعمال آن

در بخش بعد به مسئله یافتن بسط سری توانی یک تابع می پردازیم. در حل این مسئله از یک قضیه اساسی در تقریب توابع به وسیله چند جمله ایها استفاده می کنیم که به بروک تیلور^۱ ریاضیدان انگلیسی (۱۷۳۱-۱۶۸۵) منسوب است. برای آشنایی با قضیه تیلور، ابتدا حالت خاصی را در نظر می گیریم که به قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته معروف است.

قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته. فرض کنیم تابع f بر بازه I مشتق پذیر باشد؛ یعنی f

1. Brook Taylor

در هر نقطه از I مشتق متناهی داشته باشد. در این صورت، با نوشتن x و t به جای b و c در قضیه مقدار میانگین (۷)، صفحه ۲۵۸، داریم

$$(1) \quad f(x) = f(a) + f'(t)(x - a),$$

که در آن t نقطه‌ای بین a و x است. اگر t را با a عوض کنیم، تقریب خط مماس

$$(2) \quad f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) \quad (x \neq a)$$

را خواهیم داشت.

وقتی این تقریب در بخش ۳.۲ معرفی شد، دیدیم که خطای تقریب به ازای $|x - a|$ کوچک کوچک است، ولی ما به تخمین خطا به ازای مقدار داده شده‌ای از $x - a$ (جز مسائل ۲۹ و ۳۰، صفحه ۲۰۴) نمی‌پردازیم. حال تعمیمی از قضیه مقدار میانگین (۱) را ثابت می‌کنیم که با آن می‌توان خطا را در حالتی که f ، علاوه بر مشتق اول داشتن، مشتق دوم دارد تخمین زد.

قضیه ۱۶ (قضیه مقدار میانی تعمیم یافته). فرض کنیم f در هر نقطه از بازه I مشتق دوم متناهی داشته باشد^۱، و a و x نقاط دلخواهی از I باشند. در این صورت، نقطه‌ای مانند t بین a و x هست به طوری که

$$(3) \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x - a) + \frac{f''(t)}{2}(x - a)^2.$$

برهان (اختیاری). فرض کنیم

$$h(x) = f(x) - f(a) - f'(a)(x - a), \quad g(x) = (x - a)^2,$$

در نتیجه، در حالت خاص،

$$h(a) = g(a) = 0, \quad h'(x) = f'(x) - f'(a).$$

در این صورت، با اعمال قضیه مقدار میانگین کشی (ر.ک. قضیه ۴، صفحه ۲۶۱) بر توابع h و g بر بازه $[a, x]$ اگر $x > a$ یا بر $[x, a]$ اگر $x < a$ ، داریم

۱. وجود مشتق دوم f'' بر I وجود و پیوستگی تابع f و مشتق اولش f' بر I را ایجاب می‌کند (چرا؟). به‌طور کلی، وجود مشتق مرتبه $n+1$ ، $f^{(n+1)}$ بر I وجود و پیوستگی $f, f', \dots, f^{(n)}$ بر I را ایجاب می‌کند.

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h(x) - h(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{h'(t_1)}{g'(t_1)} = \frac{f'(t_1) - f'(a)}{2(t_1 - a)},$$

که در آن t_1 بین a و x قرار دارد (تحقیق کنید که مفروضات قضیه کشی برقرارند). اما، بنابر قضیه مقدار میانگین معمولی اعمال شده بر تابع f' در بازه $[a, t_1]$ یا $[t_1, a]$ ،

$$f'(t_1) - f'(a) = f''(t)(t_1 - a),$$

که در آن t بین a و t_1 ، و در نتیجه بین a و x ، قرار دارد. لذا، نقطه‌ای مانند t بین a و x هست که

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{f''(t)(t_1 - a)}{2(t_1 - a)} = \frac{f''(t)}{2}.$$

پس نتیجه می‌شود که

$$h(x) = \frac{f''(t)}{2} g(x) = \frac{f''(t)}{2} (x - a)^2,$$

که با فرمول (۳) معادل می‌باشد. به‌طورکلی، نقطه t به هر دوی a و x بستگی دارد. خطای تقریب خط مماس، جمله آخر سمت راست (۳) خطای

$$E_{\pi} = \frac{f''(t)}{2} (x - a)^2$$

تقریب خط مماس (۲) است. بخصوص، اگر f'' بر I پیوسته باشد، نتیجه می‌شود که

$$(4) \quad |E_{\pi}| \leq \frac{1}{2} (x - a)^2 \max |f''|,$$

که در آن $\max |f''|$ ماکزیمم $|f''(t)|$ بر بازه بسته با نقاط انتهایی a و x می‌باشد.

مثال ۱. $\cos 47^\circ$ را با استفاده از تقریب خط مماس (۲) به ازای $a = 45^\circ = \pi/4$ تخمین بزنید. سپس، با استفاده از نامساوی (۴)، نشان دهید این تقریب تا سه رقم اعشار دقیق است.

حل. هرگاه $f(x) = \cos x$ ، آنگاه $f'(x) = -\sin x$ ، $f''(x) = -\cos x$ ، و فرمول (۲) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\cos x = f(x) \approx f(a) + f'(a)(x - a) = \cos a - (x - a) \sin a.$$

با اختیار

$$x = 47^\circ = \frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{90},$$

داریم

$$\cos 47^\circ = \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{90} \right) \approx \cos \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{90} \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \left(1 - \frac{\pi}{90} \right) \approx 0.682.$$

ماکریم $|f'''(t)| = |\cos t|$ بر بازه $[45^\circ, 47^\circ]$ عبارت است از $\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$. بنابراین طبق نامساوی (۴)،

$$|E_{TL}| \leq \frac{1}{2\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{90} \right)^2 \approx 4.3 \times 10^{-4} < 5 \times 10^{-4},$$

و می‌توان مطمئن بود که تقریب ما از $\cos 47^\circ$ تا سه رقم اعشار دقیق است.

قضیه تیلور. قضیه ۱۶ اولین نظریه قضیه مقدار میانگین مستلزم مشتقات متوالی f و توانهای متوالی $x - a$ است. اینها همه حالات خاصی از قضیه زیرند که اثباتش تا حدودی تکنیکی است؛ و لذا، به آخر بخش موكول شده است.

قضیه ۱۷ (قضیه تیلور). فرض کنیم f در هر نقطه از بازه I مشتق مرتبه $n + 1$ متناهی داشته، و a و x نقاط دلخواهی از I باشند. در این صورت، نقطه‌ای مانند t بین a و x هست به طوری که

$$\begin{aligned} f(x) &= \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \\ (5) \quad &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!} (x-a)^2 \\ &\quad + \cdots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n + \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}. \end{aligned}$$

فرمول تیلور و چند جمله‌ایهای تیلور. فرمول (۵) به فرمول تیلور (با باقیمانده) معروف است. این فرمول تابع $f(x)$ را در مجاورت $x = a$ به صورت مجموع

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

چند جمله‌ای

$$(6) \quad P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k$$

از درجه n نسبت به متغیر $x - a$ و جمله

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

به نام باقیمانده، نمایش می‌دهد. (چون $P_n(x)$ در حالت کلی مجموع $n + 1$ جمله است، باقیمانده $R_n(x)$ علی‌رغم زیرنویس n عملاً "باقیمانده پس از $n + 1$ جمله می‌باشد.) چند جمله‌ای $P_n(x)$ چند جمله‌ای تیلور n م f در $x = a$ نام دارد، و دارای این خاصیت کلیدی است که مقدار آن و مقادیر n مشتق اولش در نقطه $x = a$ با مقدار تابع f و مقادیر n مشتق اول f در $x = a$ یکی است. در واقع، ز مشتگیری متوالی از فرمول (۶) نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} P_n^{(j)}(x) &= \sum_{k=j}^n \frac{f^{(k)}(a)}{(k-j)!} (x-a)^{k-j} \\ &= f^{(j)}(a) + f^{(j+1)}(a)(x-a) + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{(n-j)!} (x-a)^{n-j} \\ &\quad (j = 0, 1, \dots, n), \end{aligned}$$

و سپس با گذاردن $x = a$ در آن فوراً خواهیم داشت

$$P_n^{(j)}(a) = f^{(j)}(a) \quad (j = 0, 1, \dots, n).$$

در پرتو این تناسب مشتقات، انتظار داریم $P_n(x)$ تقریب مناسبی به $f(x)$ در مجاورت $x = a$ باشد، که با بزرگتر شدن n بهتر می‌شود، و این، همانطور که مثال زیر نشان می‌دهد، معمولاً درست است.^۱

مثال ۲. تابع $f(x) = e^x$ را به وسیله چهار چندجمله‌ای تیلور اول خود در مجاورت $x = 0$ تقریب نمایید.

حل. چون به ازای هر n ، $f^{(n)}(x) = D_x^n e^x = e^x$ ، چهار چندجمله‌ای تیلور اولیه (به ازای $a = 0$) عبارتند از

$$P_0(x) = f(0) = 1,$$

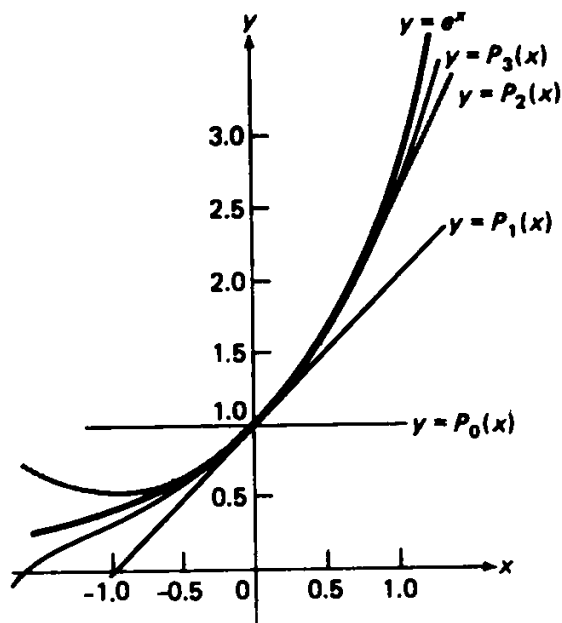
$$P_1(x) = f(0) + f'(0)x = 1 + x,$$

$$P_2(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 = 1 + x + \frac{1}{2} x^2,$$

$$P_3(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!} x^2 + \frac{f'''(0)}{3!} x^3 = 1 + x + \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{6} x^3.$$

۱. این به خاطر وجود تابعی که در آن تقریب $P_n(x) \approx f(x)$ به ازای هر n ضعیف است (ر. ک. مثال ۲ در آخر بخش) استثناء نیز دارد.

شکل ۱۲ نمودارهای e^x و این چندجمله‌ایها را در یک دستگاه مختصات قائم نشان می‌دهد. البته، تقریب $P_0(x) \approx e^x$ خیلی خام است، زیرا $P_0(x)$ دارای مقدار ثابت ۱ است، ولی



تقریب e^x به وسیله چندجمله‌ایهای تیلور

شکل ۱۲

$P_1(x) \approx e^x$ تقریب خط مماس است، که به ازای مقادیر کوچک $|x|$ کاملاً مناسب است. تقریب بهتر با $P_2(x) \approx e^x$ داده می‌شود، که در آن نمودار e^x در مجاورت $x = 0$ با سهمی

$$y = P_2(x) = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 = \frac{1}{2}(x + 1)^2 + \frac{1}{2}$$

تقریب می‌شود تا با خط مستقیم $y = P_1(x) = 1 + x$ اما تقریب e^x به وسیله چندجمله‌ای مکعبی $P_3(x)$ از این هم بهتر است. در واقع، بنابر قضیه تیلور،

$$e^x = P_3(x) + R_3(x),$$

که در آن

$$R_3(x) = \frac{f^{(4)}(t)}{4!} x^4 = \frac{e^t}{24} x^4 \quad (t \text{ بین } 0 \text{ و } x)$$

در نتیجه، خطای تقریب $P_3(x) \approx e^x$ روی تمام بازه $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}]$ مثبت و کوچکتر از

$$\frac{e^{1/2}}{24} \left(\frac{1}{2}\right)^4 \approx 0.0043$$

است. در اینجا از این استفاده کرده‌ایم که ماکزیمم e^t بر این بازه $e^{1/2}$ است، زیرا e^t یک تابع صعودی است.

مثال ۳. فرمول تیلور را برای تابع $f(x) = 1/x$ در نقطه $a = 1$ به ازای $n = 3$ بنویسید.

حل. تابع و چهار مشتق اول آن عبارتند از

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad f'(x) = -\frac{1}{x^2}, \quad f''(x) = \frac{2}{x^3}, \quad f'''(x) = -\frac{6}{x^4}, \quad f^{(4)}(x) = \frac{24}{x^5}.$$

با گذاردن $a = 1$ و $n = 3$ در فرمول (۵) و فرض $x > 0$ (چرا؟)، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} \frac{1}{x} = f(x) &= f(1) + f'(1)(x-1) + \frac{f''(1)}{2!}(x-1)^2 \\ &\quad + \frac{f'''(1)}{3!}(x-1)^3 + \frac{f^{(4)}(t)}{4!}(x-1)^4 \\ &= 1 - (x-1) + (x-1)^2 - (x-1)^3 + \frac{(x-1)^4}{t^5}, \end{aligned}$$

که در آن t بین 1 و x است.

مثالهای زیر طرق استفاده از فرمول تیلور به عنوان یک ابزار محاسبه‌ای را نشان می‌دهند.

مثال ۴. با استفاده از فرمول تیلور به ازای $n = 3$ ، تقریب خط مماس $\cos 47^\circ$ داده شده در

مثال ۱ را بهتر کنید.

حل. فرض کنیم $f(x) = \cos x$. در این صورت، $f'(x) = -\sin x$ ، $f''(x) = -\cos x$

و با انتخاب $n = 3$ در فرمول (۵) داریم

$$\begin{aligned} \cos x = f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 \\ &\quad + \frac{f'''(a)}{3!}(x-a)^3 + \frac{f^{(4)}(t)}{4!}(x-a)^4 \\ &= \cos a - (x-a) \sin a - \frac{(x-a)^2}{2} \cos a + \frac{(x-a)^3}{6} \sin a + \frac{(x-a)^4}{24} \cos t, \end{aligned}$$

که در آن t بین a و x است. این به ازای $a = 45^\circ = \pi/4$ ، $x = 47^\circ$ نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} \cos 47^\circ &= \cos \left(\frac{\pi}{4} + \frac{\pi}{90} \right) = \cos \frac{\pi}{4} - \frac{\pi}{90} \sin \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{90} \right)^2 \cos \frac{\pi}{4} \\ &\quad + \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{90} \right)^3 \sin \frac{\pi}{4} + \frac{1}{24} \left(\frac{\pi}{90} \right)^4 \cos t \quad (45^\circ < t < 47^\circ), \end{aligned}$$

و در نتیجه،

$$(۷) \quad \cos 47^\circ \approx \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 - \frac{\pi}{90} - \frac{1}{2} \left(\frac{\pi}{90} \right)^2 + \frac{1}{6} \left(\frac{\pi}{90} \right)^3 \right] \approx 0.6819983,$$

که در آن خطای این تقریب، که به خاطر وجود " دو جملهء بیشتر " شامل توانهای دوم و سوم $\pi/90$ با تقریب خط مماس در مثال ۱ فرق دارد، با باقیماندهء زیر داده می‌شود:

$$R_3 = \frac{1}{24} \left(\frac{\pi}{90} \right)^4 \cos t \quad (45'' < t < 47'').$$

ولی ماکزیمم $\cos t$ بر بازهء $[45'', 47'']$ عبارت است از $\cos 45^\circ = 1/\sqrt{2}$. بنابراین،

$$R_3 \leq \frac{1}{24\sqrt{2}} \left(\frac{\pi}{90} \right)^4 \approx 4.4 \times 10^{-8} < 5 \times 10^{-8},$$

و می‌توان مطمئن بود که تقریب (۷) تا هفت رقم اعشار دقیق است.

مثال ۵. چند جمله‌ای $Q(x) = 4 - 2x - x^2 + x^3$ را به یک چند جمله‌ای با متغیر جدید $x + 1$ تبدیل نمایید.

حل. با اختیار $f(x) = Q(x)$, $a = -1$, $n = 3$ در فرمول تیلور، داریم

$$Q(x) = Q(-1) + Q'(-1)(x+1) + \frac{Q''(-1)}{2!}(x+1)^2 + \frac{Q'''(-1)}{3!}(x+1)^3 + R_3(x),$$

که در آن باقیماندهء $R_3(x)$ به دلیل $Q^{(4)}(x) \equiv 0$ صفر است (بیشتر توضیح دهید). ولی

$$Q'(x) = -2 - 2x + 3x^2, \quad Q''(x) = -2 + 6x, \quad Q'''(x) = 6,$$

ولذا،

$$Q(-1) = 4, \quad Q'(-1) = 3, \quad Q''(-1) = -8, \quad Q'''(-1) = 6,$$

در نتیجه،

$$Q(x) = 4 + 3(x+1) - 4(x+1)^2 + (x+1)^3.$$

این را می‌توان به‌طور جبری با تحقیق اینکه عبارت سمت راست متحداً مساوی $4 - 2x - x^2 + x^3$ است به آسانی امتحان کرد.

مثال ۶. با استفاده از فرمول تیلور، نشان دهید که

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \frac{1}{6}.$$

حل. با اختیار $n = 4$, $a = 0$, $f(x) = \sin x$ در فرمول تیلور و توجه به اینکه
 $f'(x) = \cos x$, $f''(x) = -\sin x$, $f'''(x) = -\cos x$, $f^{(4)}(x) = \sin x$

داریم

$$\begin{aligned}\sin x &= \sin 0 + x \cos 0 - \frac{1}{2} x^2 \sin 0 - \frac{1}{6} x^3 \cos 0 + \frac{1}{24} x^4 \sin t \\ &= x - \frac{1}{6} x^3 + \frac{1}{24} x^4 \sin t,\end{aligned}$$

که در آن t بین 0 و x قرار دارد. بنابراین،

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \sin x}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\frac{1}{6} x^3 - \frac{1}{24} x^4 \sin t}{x^3} = \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{24} x \sin t \right) = \frac{1}{6}$$

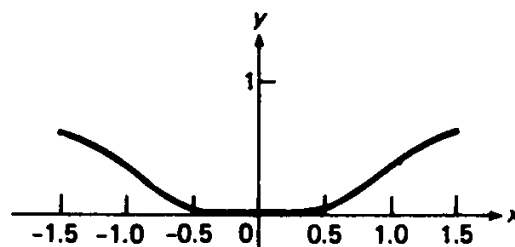
(وقتی $x \rightarrow 0$, $t \rightarrow 0$). این حد قبلاً در مثال ۳، صفحه ۳۱۶، به کمک قاعده هویتال حساب شده است.

با وجود آنکه یک تابع معمولاً "به وسیله چند جمله‌ایهای تیلور با درجه به قدر کافی بالای آن به خوبی تقریب می‌شود، مثال بعدی نشان می‌دهد که حالاتی استثنایی نیز می‌توانند رخ دهند.

مثال ۷. فرض کنید $P_n(x)$ چند جمله‌ای تیلور n م تابع

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{اگر } x \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

رسم شده در شکل ۱۳ باشد. نشان دهید که به ازای هر $n = 0, 1, 2, \dots$, $P_n(x) \equiv 0$.



$$y = f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{اگر } x \neq 0 \\ 0 & \text{اگر } x = 0 \end{cases} \text{ نمودار}$$

حل (اختیاری) . چون

$$\lim_{x \rightarrow 0} e^{-1/x^2} = \lim_{t \rightarrow \infty} e^{-t} = 0$$

، تابع f در $x = 0$ پیوسته است . به علاوه ، اگر $x \neq 0$ ،

$$f'(x) = \frac{2}{x^3} e^{-1/x^2}, \quad f''(x) = \left(\frac{4}{x^6} - \frac{6}{x^4} \right) e^{-1/x^2}, \dots, \quad f^{(n)}(x) = Q_{3n} \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x^2},$$

که در آن $Q_{3n}(x)$ یک چندجمله‌ای از درجه $3n$ است . اما ، به کمک جانشانی $t = 1/x^2$ و قاعده هوییتال ، به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ داریم

$$\begin{aligned} \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^n} &= \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t^{n/2}}{e^t} = \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{t}{e^{2t/n}} \right)^{n/2} = \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{t}{e^{2t/n}} \right)^{n/2} \\ &= \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{D_t t}{D_t e^{2t/n}} \right)^{n/2} = \left(\lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{(2/n)e^{2t/n}} \right)^{n/2} = 0 \end{aligned}$$

در نتیجه ، به ازای هر چندجمله‌ای $Q(x)$ ،

$$\lim_{x \rightarrow 0} Q \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x^2} = 0$$

فرض کنیم $f^{(k)}(0) = 0$. در این صورت ،

$$\begin{aligned} f^{(k+1)}(0) &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x) - f^{(k)}(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f^{(k)}(x)}{x} \\ &= \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1}{x} Q_{3k} \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} Q_{3k+1}^* \left(\frac{1}{x} \right) e^{-1/x^2} = 0, \end{aligned}$$

که در آن از چندجمله‌ای بودن $Q_{3k+1}^*(x) = x Q_{3k}(x)$ از درجه $3k+1$ استفاده می‌کنیم . بنابراین ، اگر $f^{(k)}(0)$ مساوی صفر باشد ، $f^{(k+1)}(0)$ نیز چنین است . اما $f'(0)$ مساوی صفر است ، زیرا

$$f'(0) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(x) - f(0)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x} = 0,$$

و در نتیجه ، بنا بر استقرا ی ریاضی ، به ازای هر $n = 1, 2, \dots$ ، $f^{(n)}(0) = 0$ (ر. ک. ضمیمه ، صفحه ۱۵۷۸) .

لذا ، تابع f و تمام مشتقاتش (از هر مرتبه دلخواه) در $x = 0$ صفرند . این به خاطر " تخت بودن " پایین منحنی $y = f(x)$ در مجاورت $x = 0$ است (ر. ک. شکل ۱۳) .

پس نتیجه می‌شود که هر چند جمله‌ای تیلور $P_n(x)$ از f در $x = 0$ متحد صفر است. در نتیجه اگر $x \neq 0$ ، درصد خطای تقریب $f(x) \approx P_n(x)$ همواره، بی‌توجه به مقدار n ، مساوی ۱۰۰٪ می‌باشد (ر.ک. مسئله ۳۱، صفحه ۲۰۴).

برهان قضیه ۱۷ (اختیاری). فرض کنیم

$$h(x) = f(x) - \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k, \quad g(x) = (x-a)^{n+1}$$

(به یاد آورید که $f^{(0)} \equiv f$). در این صورت، پس از n مشتق‌گیری متوالی از h ،

$$h'(x) = f'(x) - f'(a) - f''(a)(x-a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-1)!} (x-a)^{n-1},$$

$$h''(x) = f''(x) - f''(a) - \cdots - \frac{f^{(n)}(a)}{(n-2)!} (x-a)^{n-2},$$

⋮

$$h^{(n-1)}(x) = f^{(n-1)}(x) - f^{(n-1)}(a) - f^{(n)}(a)(x-a),$$

$$h^{(n)}(x) = f^{(n)}(x) - f^{(n)}(a),$$

حال آنکه

$$g'(x) = (n+1)(x-a)^n,$$

$$g''(x) = (n+1)n(x-a)^{n-1},$$

⋮

$$g^{(n-1)}(x) = (n+1)n(n-1) \cdots 3(x-a)^2,$$

$$g^{(n)}(x) = (n+1)!(x-a),$$

در نتیجه، در حالت خاص،

$$h(a) = g(a) = 0, \quad h'(a) = g'(a) = 0, \dots, \quad h^{(n)}(a) = g^{(n)}(a) = 0.$$

با اعمال قضیه مقدار میانگین کشی بر توابع h و g بر بازه $[a, x]$ اگر $x > a$ یا بر $[x, a]$ اگر $x < a$ ، به دست می‌آوریم

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h(x) - h(a)}{g(x) - g(a)} = \frac{h'(t_1)}{g'(t_1)},$$

که در آن t_1 بین a و x قرار دارد. با اعمال مجدد همین قضیه بر توابع h' و g' بر بازه

$[a, t_1]$ یا $[t_1, a]$ ، درمی‌یابیم که

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h'(t_1)}{g'(t_1)} = \frac{h'(t_1) - h'(a)}{g'(t_1) - g'(a)} = \frac{h''(t_2)}{g''(t_2)}$$

که در آن t_2 بین a و t_1 ، و در نتیجه بین a و x ، است. بالاخره، پس از n بار کاربرد قضیه مقدار میانگین، به دست می‌آوریم

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{h^{(n)}(t_n)}{g^{(n)}(t_n)} = \frac{f^{(n)}(t_n) - f^{(n)}(a)}{(n+1)!(t_n - a)}$$

که در آن t_n بین a و t_{n-1} ، و در نتیجه بین a و x ، است. اما، با اعمال قضیه مقدار میانگین بر تابع $f^{(n)}$ در بازه $[a, t_n]$ یا $[t_n, a]$ ، داریم

$$f^{(n)}(t_n) - f^{(n)}(a) = f^{(n+1)}(t)(t_n - a)$$

که در آن t بین a و t_n ، و در نتیجه بین a و x ، است. لذا، نقطه‌ای مانند t بین a و x وجود دارد به طوری که

$$\frac{h(x)}{g(x)} = \frac{f^{(n+1)}(t)(t_n - a)}{(n+1)!(t_n - a)} = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!}$$

پس نتیجه می‌شود که

$$h(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} g(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x - a)^{n+1},$$

که با فرمول (۵)، صفحه ۸۸۳، معادل می‌باشد. به‌طور کلی، نقطه t به a ، x ، و n وابسته خواهد بود.

مسائل

اعداد زیر را با استفاده از تقریب خط مماس (۲) تخمین بزنید.

$$\sqrt{171} \quad . ۱ \qquad \sqrt{215} \quad . ۲$$

$$\ln(0.98) \quad . ۴ \qquad 1/2.01 \quad . ۳$$

$$\arctan(1.04) \quad . ۶ \qquad \tan 43^\circ \quad . ۵$$

در هر حالت، پس از تخمین خطا به وسیله (۴)، تعداد ارقام اعشاری دقیق را پیدا نمایید.

چند جمله‌ای تیلور $P_n(x)$ و باقیمانده $R_n(x)$ را به ازای مقادیر مشخص a و n برای تابع داده

شده بیابید .

$$1/x^2, a = -2, n = 3 \quad \cdot ۸ \quad \sqrt{x}, a = 4, n = 2 \quad \cdot ۷$$

$$xe^x, a = 0, n = 4 \quad \cdot ۱۰ \quad e^{-x}, a = 1, n = 3 \quad \cdot ۹$$

$$x \ln x, a = e, n = 3 \quad \cdot ۱۲ \quad \ln x, a = 2, n = 4 \quad \cdot ۱۱$$

$$\sin x, a = \pi/4, n = 3 \quad \cdot ۱۴ \quad \cos x, a = 0, n = 6 \quad \cdot ۱۳$$

$$x \cos x, a = \pi/2, n = 5 \quad \cdot ۱۶ \quad \tan x, a = 0, n = 3 \quad \cdot ۱۵$$

$$1/(1-x), a = 2, n = 4 \quad \cdot ۱۸ \quad \sin^2 x, a = 0, n = 6 \quad \cdot ۱۷$$

$$\ln(\cos x), a = 0, n = 4 \quad \cdot ۲۰ \quad \sinh x, a = 1, n = 3 \quad \cdot ۱۹$$

۲۱ . محاسبات مسئله ۱ را با استفاده از فرمول تیلور به ازای $n = 2$ به جای تقریب خط مماس تکرار کرده و، پس از تخمین باقیمانده، تعداد ارقام دقیق اعشاری را مشخص نمایید .

۲۲ . همین کار را در مسئله ۲ انجام دهید .

۲۳ . همین کار را در مسئله ۳ انجام دهید .

۲۴ . محاسبات مسئله ۴ را با استفاده از فرمول تیلور به ازای $n = 3$ تکرار کرده و، پس از تخمین باقیمانده، تعداد ارقام دقیق اعشاری را مشخص نمایید .

۲۵ . همین کار را در مسئله ۵ انجام دهید .

۲۶ . همین کار را در مسئله ۶ انجام دهید .

۲۷ . تحقیق کنید که اگر $94 \leq x \leq 106$ ، تقریب $\sqrt{x} \approx 10 + \frac{1}{20}(x - 100)$ تا دو رقم اعشار دقیق است .

۲۸ . فرض کنید x نقطه‌ای در بازه $[-1, 1]$ باشد . نشان دهید که قدر مطلق خطای تقریب

$$\cos x \approx 1 - \frac{1}{2}x^2$$

از $\frac{1}{120}$ متجاوز نیست، حال آنکه قدر مطلق خطای تقریب $\sin x \approx x - \frac{1}{6}x^3$ از $\frac{1}{120}$ تجاوز نمی‌کند .

۲۹ . فرض کنید $P_n(x)$ چند جمله‌ای تیلور n م تابعی نهایت مشتق‌پذیر f بر بازه $[-a, a]$

در $x = 0$ باشد . نشان دهید اگر f بر $[-a, a]$ زوج باشد، $P_n(x)$ فقط شامل توانهای

زوج $|x|$ است و اگر f بر $[-a, a]$ فرد باشد، فقط شامل توانهای فرد x می‌باشد .

چند جمله‌ای داده شده $Q(x)$ را به یک چند جمله‌ای از متغیر جدید ذکر شده تبدیل نمایید .

$$Q(x) = 1 + 3x + 5x^2 - 2x^3, x + 1 \quad \cdot ۳۰$$

$$Q(x) = 4 - 3x^2 + 2x^4 - x^6, x - 1 \quad \cdot ۳۱$$

$$Q(x) = 1 - x + x^2 - x^3 + x^4, x + 2 \quad \cdot ۳۲$$

$$Q(x) = 1 + 2x^2 - 4x^3 + x^4, x - 5 \quad \cdot ۳۳$$

$$Q(x) = x^3, x - \frac{1}{2} \quad \cdot ۳۴$$

$$Q(x) = x^4 + 1, x - 10 \quad \cdot ۳۵$$

حد داده شده را با استفاده از فرمول تیلور حساب کنید .

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^x + e^{-x} - 2}{x^2} \quad \cdot ۳۶$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \ln(1+x)}{x^2} \quad \cdot ۳۷$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x \cos x}{x^3} \quad \cdot ۳۸$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x + \frac{1}{6}x^3}{x^5} \quad \cdot ۳۹$$

۴۰. تعمیم زیر از آزمون مشتق دوم برای اکسترم موضعی را ثابت کنید (قضیه ۹، صفحه ۲۷۲) : هرگاه

$$f'(a) = f''(a) = \dots = f^{(n-1)}(a) = 0 \quad (n \geq 2),$$

و مشتق n م $f^{(n)}(a)$ متناهی و مخالف صفر باشد، آنگاه f در a مینیم موضعی اکید دارد اگر n زوج بوده و $f^{(n)}(a) > 0$ ، و f در a ماکزیم موضعی اکید دارد اگر n زوج بوده و $f^{(n)}(a) < 0$ ، ولی اگر n فرد باشد اکسترم نخواهد داشت.

۹.۹ سریهای تیلور و ماکلورن

بنابر فرمول تیلور (ر.ک. صفحه ۸۸۳)، هرگاه تابع f در هر نقطه از بازه I شامل نقطه a دارای مشتق مرتبه $n+1$ م متناهی باشد، آنگاه به ازای هر x در I ،

$$(۱) \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + R_n(x)$$

که در آن باقیمانده $R_n(x)$ عبارت است از

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1} \quad (x \text{ و } a \text{ بین } t).$$

فرض کنیم f بر I بی نهایت بار مشتقپذیر باشد؛ در نتیجه، f از هر مرتبه بر I مشتق دارد. در این صورت، (۱) به ازای n بدخواه بزرگ برقرار است. این پیشنهاد می‌کند که سری

نامتناهی زیر را بررسی کنیم :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n$$

$$(2) \quad = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

سری (۲) ، که یک سری توانی نسبت به متغیر $x - a$ است ، بی توجه به همگرا بودن یا نبودن سری به f ، سری (بسط) تیلور f در $x = a$ نامیده می شود . این انتساب لازم است ، زیرا حالاتی وجود دارند که سری تیلور f همگرا به f نمی باشد (ر.ک. مثال ۶ زیر) . با اینحال تنها حالتی که اهمیت عملی دارد وقتی است که سری تیلور f همگرا به f است ، و در این صورت گوییم " f مجموع سری تیلور خود می باشد " .

همگرایی سری تیلور . ممکن است بودن f به عنوان مجموع سری تیلور خود را تابع رفتار باقیمانده $R_n(x)$ در فرمول تیلور (۱) بدانید . قضیه زیر صحت این امر را نشان می دهد .

قضیه ۱۸ (محک همگرایی برای یک سری تیلور) . سری تیلور (۲) بر بازه I همگرا به f است اگر و فقط اگر به ازای هر x در I ،

$$(3) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

برهان . فرمول (۱) بر حسب چند جمله ایهای تیلور

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(a)}{k!} (x-a)^k \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

به صورت زیر درمی آید :

$$f(x) = P_n(x) + R_n(x)$$

و این چند جمله ایها مجموعهای جزئی سری تیلور (۲) می باشند . بنابراین ، (۲) بر I همگرا به f است اگر و فقط اگر

$$f(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) \quad (x \text{ در } I)$$

یا معادلا

$$\lim_{n \rightarrow \infty} [f(x) - P_n(x)] = 0 = \lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) \quad (x \text{ در } I)$$

لذا، اگر شرط (۳) برقرار باشد، می‌توان نوشت

$$(۴) \quad f(x) = f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n + \dots$$

با اطمینان کامل از اینکه سری توانی سمت راست به تابع سمت چپ همگراست. به‌ازای $a=0$ ، سری تیلور (۴) به صورت زیر تحویل می‌شود:

$$(۵) \quad f(x) = f(0) + f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n + \dots$$

یک سری تیلور به شکل خاص (۵) را غالباً، به افتخار ریاضیدان اسکاتلندی، کولین ماکلورن^۱ (۱۶۹۸-۱۷۴۶)، یک سری ماکلورن می‌نامند.

مثال ۱. فرض کنیم $\sum c_n(x-a)^n$ یک سری توانی با بازه همگرایی I و مجموع f باشد. نشان دهید که $\sum c_n(x-a)^n$ سری تیلور f در $x=a$ است. (لذا، سری تیلور تابع مجموع یک سری توانی خود سری توانی می‌باشد.)

حل. بنابر قضیه ۱۴، صفحه ۸۶۸، می‌توان از سری توانی

$$f(x) = c_0 + c_1(x-a) + c_2(x-a)^2 + \dots + c_n(x-a)^n + \dots \quad (I \text{ در } x)$$

n بار مشتق گرفت. از این نتیجه می‌شود که

$$f^{(n)}(x) = n!c_n + (n+1)!c_{n+1}(x-a) + \frac{(n+2)!}{2!}c_{n+2}(x-a)^2 + \dots \quad (I \text{ در } x)$$

که پس از گذاردن $x=a$ در آن ایجاب می‌کند که

$$c_n = \frac{f^{(n)}(a)}{n!} \quad (n = 0, 1, 2, \dots)$$

(توجه کنید که $f^{(0)} \equiv f, 0! = 1$). اما، در این صورت،

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n(x-a)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x-a)^n,$$

یعنی، $\sum c_n(x-a)^n$ سری تیلور f در $x=a$ است. طبعاً، این سری تیلور در هر نقطه از I همگرا به f می‌باشد.

مثال ۲. سری ماکلورن e^x را بیابید.

حل. هرگاه $f(x) = e^x$ ، آنگاه به ازای هر $n = 0, 1, 2, \dots$ ، $f^{(n)}(x) = e^x$ ، $f^{(n)}(0) = 1$ ، و سری ماکلورن (۵) به صورت زیر درمی آید:

$$(۶) \quad e^x = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \dots + \frac{x^n}{n!} + \dots,$$

مشروط بر اینکه سری سمت راست همگرا به e^x باشد. برای تحقیق این امر، باقیمانده

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(t)}{(n+1)!} x^{n+1} = \frac{e^t}{(n+1)!} x^{n+1}$$

را بررسی می‌کنیم، که در آن t بین 0 و x قرار دارد (توجه کنید t علاوه بر x به n نیز وابسته است). واضح است که اگر x معلوم باشد، به ازای هر n

$$(۷) \quad 0 \leq |R_n(x)| \leq M \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|$$

که در آن M ماکزیمم e^t بر بازه $[0, x]$ است اگر $x > 0$ یا بر بازه $[x, 0]$ است اگر $x < 0$ ؛ یعنی،

$$M = \begin{cases} e^x & \text{اگر } x > 0 \\ 1 & \text{اگر } x < 0 \end{cases}$$

به علاوه، به ازای هر x ثابت،

$$(۸) \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right| = 0$$

زیرا، بنا بر آزمون نسبت، سری توانی با جمله عمومی $x^n/n!$ به طور مطلق همگراست (تحقیق کنید). بنابراین، با گرفتن حد در (۷) وقتی $n \rightarrow \infty$ ، معلوم می‌شود که وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $|R_n(x)| \rightarrow 0$ ، یا معادلا "به ازای هر x ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

(توجه کنید که به ازای هر n ، $R_n(0) = 0$). لذا، سری (۶) بر تمام بازه $(-\infty, \infty)$ همگرا به e^x می‌باشد.

به یاد می‌آورید که برقراری (۶) قبلا" در مثال ۵، صفحه ۸۷۰، به روش کاملاً

متفاوتی ثابت شده است.

سریهای ماکلورن $\sin x$ و $\cos x$

مثال ۳. سری ماکلورن $\sin x$ را بیابید.

حل. هرگاه $f(x) = \sin x$ ، آنگاه

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f(0) &= 0, \\ f'(x) &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & f'(0) &= 1, \\ f''(x) &= -\sin x = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right), & f''(0) &= 0, \\ f'''(x) &= -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right), & f'''(0) &= -1, \\ & & & \vdots \\ f^{(n)}(x) &= \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), & f^{(n)}(0) &= \sin \frac{n\pi}{2}, \\ f^{(n+1)}(x) &= \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right), \end{aligned}$$

و (۵) به صورت زیر درمی‌آید:

$$(۹) \quad \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \dots$$

اما باقیمانده مساوی است با

$$R_n(x) = \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \sin\left(t + \frac{(n+1)\pi}{2}\right),$$

که در آن t بین 0 و x است (x در اینجا دلخواه ولی ثابت است). چون به ازای t و n دلخواه

$$\left| \sin\left(t + \frac{(n+1)\pi}{2}\right) \right| \leq 1$$

داریم

$$0 \leq |R_n(x)| \leq \left| \frac{x^{n+1}}{(n+1)!} \right|,$$

و در نتیجه، به خاطر (۸)،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0.$$

بنابراین، (۹) سری ماکلورن $\sin x$ بر تمام بازه $(-\infty, \infty)$ می‌باشد. سری (۹) را می‌توان به‌طور فشرده نیز نوشت:

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

مثال ۴. سری ماکلورن $\cos x$ را بیابید.

حل. می‌توان استدلالی شبیه استدلال مثال قبل آورد، ولی ساده‌تر آن است که از سری ماکلورن $\sin x$ ، به کمک قضیه ۱۴، صفحه ۸۶۸، جمله به جمله مشتق بگیریم. از این فوراً نتیجه می‌شود که

$$\cos x = \frac{d}{dx} \sin x = \frac{d}{dx} \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!},$$

یعنی،

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \dots$$

مثال ۵. سری تیلور $\sin x$ را در $x = \pi/4$ بیابید.

حل. این بار داریم

$$\begin{aligned} f(x) &= \sin x, & f\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sin \frac{\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ f'(x) &= \cos x = \sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right), & f'\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{1}{\sqrt{2}} \\ f''(x) &= -\sin x = \sin\left(x + \frac{2\pi}{2}\right), & f''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sin \frac{5\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ f'''(x) &= -\cos x = \sin\left(x + \frac{3\pi}{2}\right), & f'''\left(\frac{\pi}{4}\right) &= \sin \frac{7\pi}{4} = -\frac{1}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

$$f^{(n)}(x) = \sin\left(x + \frac{n\pi}{2}\right), \quad f^{(n)}\left(\frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{n\pi}{2} + \frac{\pi}{4}\right),$$

$$f^{(n+1)}(x) = \sin\left(x + \frac{(n+1)\pi}{2}\right),$$

و (۴) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \left[1 + \left(x - \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^2 - \frac{1}{3!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^3 + \dots \right],$$

یا، به طور فشرده‌تر،

$$(۱۰) \quad \sin x = \frac{1}{\sqrt{2}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{\lfloor n/2 \rfloor}}{n!} \left(x - \frac{\pi}{4}\right)^n,$$

که در آن $\lfloor n/2 \rfloor$ قسمت صحیح $n/2$ است. اساساً همان تحلیل مثال ۳ از باقیمانده نشان می‌دهد که به ازای هر x ،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} R_n(x) = 0$$

لذا، سری تیلور (۱۰) بر تمام بازه $(-\infty, \infty)$ همگرا به $\sin x$ می‌باشد.

مثال ۶. نشان دهید که تابع

$$f(x) = \begin{cases} e^{-1/x^2}, & \text{اگر } x \neq 0 \\ 0, & \text{اگر } x = 0 \end{cases}$$

مجموع سری تیلور خود در $x = 0$ نیست.

حل. فرض کنیم $P_n(x)$ چند جمله‌ای تیلور n م f در $x = 0$ باشد. همانطور که در مثال ۷، صفحه ۸۸۸، نشان دادیم، به ازای هر $n = 0, 1, 2, \dots$ ، $P_n(x) \equiv 0$. در نتیجه،

$$\lim_{n \rightarrow \infty} P_n(x) \equiv 0.$$

پس نتیجه می‌شود که مجموع سری تیلور f در $x = 0$ مساوی f نیست، بلکه مساوی تابعی است که متحد صفر می‌باشد.

لازم است تأکید کنیم که استفادهٔ مستقیم فرمول (۴) یا (۵) برای یافتن سری تیلور یا ماکلورن یک تابع اغلب به محاسباتی منجر می‌شود که بسیار زیاد یا دست‌نیافتنی هستند.

لذا، همواره باید در پی راههایی برای بیان یک سری تیلور جدید برحسب سری تیلوری که از قبل بر ما معلوم است باشیم. مثلاً، برای یافتن سری ماکلورن e^x ، به جای محاسبه مشتقات e^x ، محاسبه آنها در $x = 0$ ، و گذاردن مقادیر حاصل در فرمول (۵)، کافی است سری ماکلورن معلوم e^x را در x^4 ضرب می‌کنیم، که فوراً نتیجه می‌دهد

$$\begin{aligned} x^4 e^x &= x^4 \left(1 + x + \frac{x^2}{2!} + \cdots + \frac{x^n}{n!} + \cdots \right) \\ &= x^4 + x^5 + \frac{x^6}{2!} + \cdots + \frac{x^{n+4}}{n!} + \cdots \end{aligned}$$

به همین نحو، برای یافتن سری تیلور e^x در $x = 1$ ، کافی است توجه کنیم که

$$e^x = e^1 e^{x-1} = e \left[1 + (x-1) + \frac{(x-1)^2}{2!} + \cdots + \frac{(x-1)^n}{n!} + \cdots \right],$$

زیرا در سری ماکلورن e^x می‌توان x را با $x-1$ عوض کرد (چرا؟). هرگاه سری تیلور تابع f در $x = a$ همگرا به f باشد، آنگاه دقیقاً مساوی چیزی است که قبلاً "بسط سری توانی f در $x = a$ نامیده شد. این نتیجه فوری خاصیت یکتایی سری توانی است که در مثال ۴، صفحه ۸۷۰، بحث شد. لذا، در یافتن سری تیلور، تمام تکنیکهای بخش ۷.۹ هنوز در اختیار ما بوده و می‌توان آنها را آزادانه به کار برد. به کمک آنهاست که اغلب می‌توان سری تیلور تابع معلوم f را غیرمستقیم، بدون محاسبه مشتقات f یا بررسی باقیمانده $R_n(x)$ ، پیدا کرد. مثلاً، "ما قبلاً" در مثال ۸، صفحه ۸۷۴، سری ماکلورن $\arctan x$ را به دست آورده‌ایم.

مسائل

۱. نشان دهید که به ازای هر x ،

$$(یک) \quad \sinh x = x + \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \frac{x^7}{7!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

از فرمول (۵) شروع کرده و رفتار باقیمانده $R_n(x)$ را وقتی $n \rightarrow \infty$ بررسی نمایید.

۲. از سری (یک) مستقیماً نتیجه بگیرید که سری

$$(یک) \quad \cosh x = 1 + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

به ازای هر x معتبر است.

۳ ✓ نشان دهید که

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} \quad (0 \leq x < 1).$$

(دو)

از فرمول (۵) شروع کرده، و رفتار باقیمانده $R_n(x)$ را وقتی $n \rightarrow \infty$ بررسی نمایید. (اعتبار این بسط سری توانی $\ln(1+x)$ بر بازه بزرگتر از $-1 < x < 1$ قبلاً در مثال ۷، صفحه ۸۷۳، به روشی دیگر ثابت شده است.)

۴. با بررسی باقیمانده $R_n(1)$ ، نشان دهید که فرمول (دو) به ازای $x=1$ نیز معتبر است؛ در نتیجه، همانطور که قبلاً در صفحه ۸۷۴ به کمک قضیه آبل نشان دادیم،

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n}.$$

(دو)

پنج جمله اول ناصفر سری ماکلورن عبارات زیر را بیابید.

۵ ✓ $\sqrt{2} \cos\left(x - \frac{\pi}{4}\right)$ ۶ ✓ $\sin\left(x + \frac{\pi}{3}\right)$

۷ ✓ $e^x \cos x$ ۸ ✓ $e^x \sin x$

سه جمله اول ناصفر سری ماکلورن عبارات زیر را بیابید.

۹ ✓ $\ln(1+e^x)$ ۱۰ ✓ $e^{\sin x}$

۱۱ ✓ $e^{\cos x}$ ۱۲ ✓ $\ln(x + \sqrt{x^2+1})$

۱۳ ✓ چهار جمله اول سری ماکلورن $e^{1/(1-x)}$ را بیابید.

۱۴ ✓ با استفاده از فرمول $\cos^2 x = \frac{1}{2}(1 + \cos 2x)$ ، سری ماکلورن تابع $\cos^2 x$ را بیابید. سری تیلور $\sin x$ را در نقاط زیر بیابید.

۱۵ ✓ $\pi/6$ ۱۶ ✓ $-\pi/3$ ۱۷ ✓ $\pi/2$ ۱۸ ✓ π

سری تیلور $\cos x$ را در نقاط زیر بیابید.

۱۹ ✓ $\pi/4$ ۲۰ ✓ $\pi/2$ ۲۱ ✓ $-\pi$ ۲۲ ✓ 2π

سری تیلور عبارات زیر را بیابید.

۲۳ ✓ \sqrt{x} در $x=4$ ۲۴ ✓ \sqrt{x} در $x=-1$

۲۵ ✓ $1/x^2$ در $x=1$ ۲۶ ✓ e^x در $x=-2$

۲۷ ✓ $e^{x/3}$ در $x=2$ ۲۸ ✓ $\sin^2 x$ در $x=0$

۲۹. با استفاده از سری ماکلورن، نشان دهید به ازای هر x ، $\cosh x \leq e^{x^2}$ اگر فقط اگر

$$a \geq \frac{1}{2}$$

۳۰. سری ماکلورن توابع

$$S(x) = \int_0^x \sin t^2 dt, \quad C(x) = \int_0^x \cos t^2 dt,$$

به نام انتگرالهای فرنل^۱ را بیابید که در بررسی بعضی از پدیده‌های نوری ظاهر می‌شوند.

۳۱. سری ماکلورن تابع

$$f(x) = \frac{1 - x + x^2}{1 + x + x^2}$$

را به "روش ضرایب نامعین" بیابید. یعنی، با فرض $f(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots$ ضرایب $a_0, a_1, \dots, a_n, \dots$ را طوری اختیار کنید که

$$1 - x + x^2 \equiv (1 + x + x^2)(a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n + \dots).$$

(این فرایند با "تقسیم متوالی" صورت بر مخرج معادل است.) مقدار $f^{(5)}(0)$ چقدر است؟

با استفاده از روش ضرایب نامعین، چهار جمله^۲ اول سری ماکلورن توابع زیر را بیابید.

۳۲. $\tan x$

۳۳. $\sec x$

۱۰۰۹ روش نیوتن

فرض کنیم تابع f بر بازه^۳ $I = [a, b]$ مشتق‌پذیر (و در نتیجه، پیوسته) بوده، و f' هرگز بر I صفر نشود. همچنین، $f(a)f(b) < 0$. در نتیجه، $f(a)$ و $f(b)$ مختلف‌العلامه‌اند. بنا بر قضیه^۴ مقدار میانی، معادله^۵ $f(x) = 0$ دارای جواب یا ریشه^۶ r در (a, b) است، و r منحصر به فرد است، زیرا f بر I یکنواست (چرا؟). در صفحه^۷ ۱۵۴ یک روش تقریب r با دقت مطلوب، به نام روش تنصیف، ارائه شد، ولی روش ارزش عملی زیادی ندارد، زیرا برای به دست آوردن دقتی کم به اعمال زیادی نیاز داریم. حال، به کمک قضیه^۸ مقدار میانگین تعمیم یافته (قضیه^۹ تیلور به ازای $n = 1$)، روش بسیار تواناتری برای تقریب r ، به نام روش نیوتن، به دست می‌آوریم. در این روش، که به روش نیوتن - رفسون^{۱۰} نیز معروف است، دنباله‌ای مانند $\{x_n\}$ از "تقریبات متوالی" به r تولید می‌شود، که در بسیاری

1. Fresnel

2. Raphson

از حالات خیلی سریع به r همگرا می‌باشد.

قضیه ۱۹ (روش نیوتن). فرض کنیم تابع f بر بازه $I = [a, b]$ مشتق دوم پیوسته داشته باشد به طوری که f' و f'' بر I ناصفر بوده و $f(a)f(b) < 0$. همچنین، دنباله تعریف شده با فرمول بازگشتی زیر باشد:

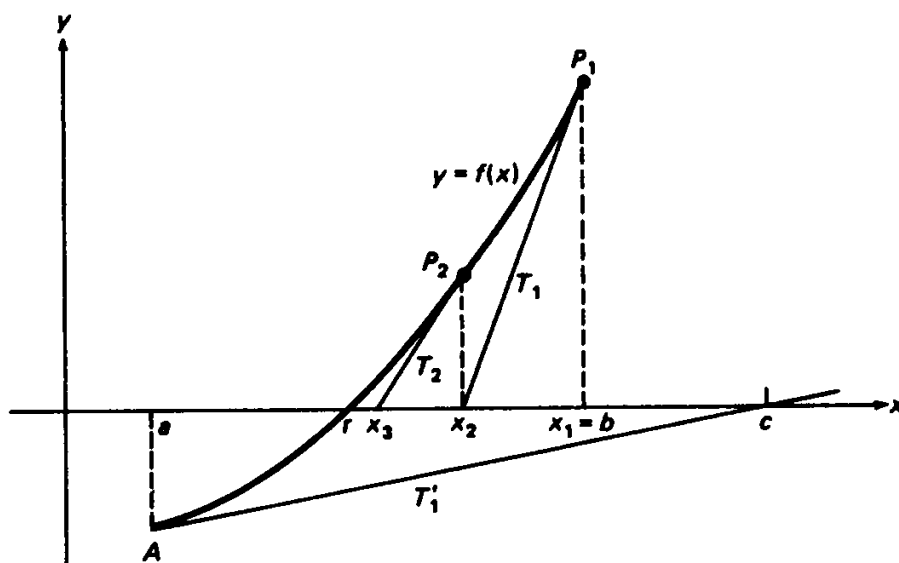
$$(1) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

که در آن $x_1 = b$ اگر f' و f'' همعلامت باشند، ولی $x_1 = a$ اگر f' و f'' مختلف‌العلامه باشند. در این صورت، $\{x_n\}$ همگرا به r ، یعنی ریشه منحصربه‌فرد معادله $f(x) = 0$ در I ، بوده و نیز

$$(2) \quad |x_{n+1} - r| \leq \frac{M}{2m} |x_n - r|^2,$$

که در آن m مینیمم $|f'(x)|$ بر I و M ماکزیمم $|f''(x)|$ بر I است.

تعبیر هندسی روش نیوتن. برهان قضیه ۱۹ نسبتاً ظریف است، و از اینرو به آخر بخش برده شده است. با اینحال، تعبیر هندسی ساده‌ای برای روش نیوتن وجود دارد که در شکل ۱۴ برای حالتی که f' و f'' هر دو بر $I = [a, b]$ مثبت‌اند شرح داده شده است. در نتیجه، f بر I صعودی و به بالا مقعر بوده و $f(a) < 0$ و $f(b) > 0$. چون f' و f'' همعلامت‌اند،



تعبیر هندسی روش نیوتن

جمله اول دنباله x_n مساوی $x_1 = b$ ، یعنی نقطه انتهایی راست I ، اختیار شده است . فرض کنیم T_1 مماس (چپ) بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه $P_1 = (x_1, f(x_1))$ باشد . در این صورت ، T_1 خط

$$y = f'(x_1)(x - x_1) + f(x_1),$$

با قطع x

$$x_2 = x_1 - \frac{f(x_1)}{f'(x_1)},$$

می باشد ، که همان فرمول (۱) به ازای $n = 1$ است . به همین نحو ، هرگاه T_2 مماس بر منحنی $y = f(x)$ در نقطه $P_2 = (x_2, f(x_2))$ باشد ، آنگاه T_2 خط

$$y = f'(x_2)(x - x_2) + f(x_2),$$

با قطع x

$$x_3 = x_2 - \frac{f(x_2)}{f'(x_2)},$$

است ، که همان فرمول (۱) به ازای $n = 2$ می باشد . و همین طور هرچند مرحله که مطلوب باشد . از شکل واضح است که تحت شرایط مطلوب ، دنباله تقریبات متوالی $\{x_n\}$ با سرعت زیاد به قطع x خود منحنی $y = f(x)$ ، یعنی ریشه معادله $f(x) = 0$ ، همگراست . این ، به طور جبری ، نتیجه ای است از فرمول (۲) ، که نشان می دهد که قدرمطلق خطا در هر مرحله از تقریب از حاصل ضرب یک ثابت در مربع خطای مرحله قبل تجاوز نمی کند . مثلاً " فرض کنیم $M/2m = 1$ و $|x_n - r| < 5 \times 10^{-5}$ ، در نتیجه ، تقریب $x_n \approx r$ تا چهار رقم اعشار دقیق است . پس

$$|x_{n+1} - r| < |x_n - r|^2 < 25 \times 10^{-10} = 2.5 \times 10^{-9},$$

در نتیجه ، تقریب بعدی $x_{n+1} \approx r$ قبلاً " تا هشت رقم اعشار دقیق خواهد بود . شکل ۱۴ همچنین نشان می دهد که اگر دقیق نباشیم ، چگونه روش نیوتن فرومی ریزد . فرض کنید برای تابع f این شکل جمله اول دنباله $\{x_n\}$ را (به خاطر نیاز در قضیه ۱۹) به جای $x_1 = a$ ، $x_1 = b$ اختیار کرده باشیم . در این صورت ، چون مماس بر $y = f(x)$ در $A = (a, f(a))$ خط T_1 است که قطع x ش c خارج بازه I که f بر آن تعریف شده قرار دارد ، فرایند تقریب پس از درست یک مرحله به حال توقف درمی آید . اگر مفروضات دیگر قضیه نقض شوند ، ممکن است دنباله $\{x_n\}$ تولید شده به وسیله فرمول (۱) واگرا گردد (ر.ک . مسائل ۲۰ و ۲۱) . حتی در حالتی که دنباله $\{x_n\}$ همگرا باشد ، البته مطلوب انتخاب تقریب اولیه x_1 به قدر کافی نزدیک ریشه r است و این کار با رسم نمودار f و

حدس مقدار n ، یا استفاده از روش تقریب دیگری برای تخمین مقدماتی r ، صورت می‌گیرد. از فرمول (۱) معلوم می‌شود که هرگاه $x_{n+1} = x_n$ ، آنگاه $f(x_n) = 0$ ؛ در نتیجه، $r = x_n$. در همین وضع، اگر رقم اعشاری اولیه x_n و x_{n+1} یکی باشند، مرسوم است که فرض می‌کنند تقریب $x_n \approx r$ تا دست کم N رقم اعشار دقیق است، ولی برای آنکه مطمئن باشیم، می‌توانیم خطا را با استفاده از فرمول (۲) تحلیل کنیم.

تبصره. گوئیم دنباله

$$x_1, x_2 = g(x_1), x_3 = g(x_2), \dots, x_{n+1} = g(x_n), \dots$$

از جمله اولیه x_1 خود با تکرار تابع g تولید می‌شود. اگر x_1 و g در شرایط مناسبی صدق کنند، می‌توان نشان داد که دنباله $\{x_n\}$ همگرا به نقطه ثابتی از g است؛ یعنی، به نقطه‌ای چون r به طوری که $g(r) = r$. لذا، روش نیوتن متناظر تکرار با تابع

$$(۳) \quad g(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)}$$

است، و قضیه ۱۹ شرایطی به ما می‌دهد که همگرایی این فرایند تکرار را تضمین می‌کند. توجه کنید که r یک نقطه ثابت تابع تکرار (۳) است اگر و فقط اگر r ریشه معادله $f(x) = 0$ باشد.

مثال ۱. با استفاده از روش نیوتن، $\sqrt{3}$ را تا هشت رقم اعشار تقریب کنید.

حل. چون $(1.7)^2 = 2.89$ و $(1.8)^2 = 3.24$ ، پس $\sqrt{3}$ بین ۱.۷ و ۱.۸ قرار دارد. هرگاه $f(x) = x^2 - 3$ ، آنگاه $f(r) = 0$ اگر و فقط اگر $r = \sqrt{3}$ باشد. به علاوه، $f'(x) = 2x$ ؛ و لذا، طبق فرمول (۱)،

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = x_n - \frac{x_n^2 - 3}{2x_n} = \frac{x_n^2 + 3}{2x_n} = \frac{1}{2} \left(x_n + \frac{3}{x_n} \right).$$

لذا، تقریب $(n+1)$ م x_{n+1} متوسط تقریب قبلی x_n و $3/x_n$ تقسیم بر x_n می‌باشد. بازه I در اینجا $[1.7, 1.8]$ است، و قضیه ۱۹ تقریب اولیه $x_1 = 1.8$ را می‌خواهد، زیرا $f'(x) = 2x$ و $f''(x) = 2$ هر دو بر I مثبت می‌باشند. با استفاده از ماشین حساب یا کامپیوتر، چند تقریب بعدی را تا هشت رقم اعشار محاسبه می‌کنیم، خواهیم داشت

$$x_1 = 1.8$$

$$x_2 = 1.73333333$$

$$x_3 = 1.73205128$$

$$x_4 = 1.73205081$$

$$x_5 = 1.73205081$$

چون x_4 و x_5 تا هشت رقم اعشار یکی هستند، نتیجه می‌گیریم که تقریب $\sqrt{3} \approx 1.73205081$ تا هشت رقم اعشار دقیق است، و این در مثال بعد تأیید خواهد شد.

مثال ۲. در مثال قبل، تقریبهای $x_3 \approx \sqrt{3}$ و $x_4 \approx \sqrt{3}$ چقدر دقیق‌اند؟

حل. با اختیار $r = \sqrt{3}$ در فرمول (۲)، داریم

$$|x_{n+1} - \sqrt{3}| \leq \frac{M}{2m} |x_n - \sqrt{3}|^2,$$

که در آن m مینیم $|f'(x)| = 2|x|$ بر $I = [1.7, 1.8]$ و M ماکزیم $|f''(x)| = 2$ بر I است. اما $m = 2(1.7) = 3.4$ و در نتیجه،

$$|x_{n+1} - \sqrt{3}| \leq \frac{1}{3.4} |x_n - \sqrt{3}|^2 < \frac{3}{10} |x_n - \sqrt{3}|^2$$

($1/3.4 \approx 0.294$). بنابراین،

$$|x_2 - \sqrt{3}| < \frac{3}{10} |x_1 - \sqrt{3}|^2 = \frac{3}{10} |1.8 - \sqrt{3}|^2 < \frac{3}{10} \left(\frac{1}{10}\right)^2,$$

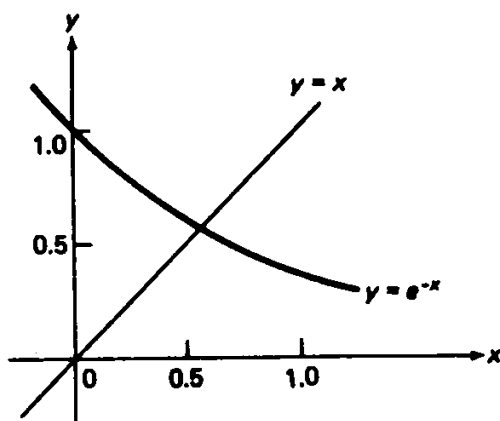
$$|x_3 - \sqrt{3}| < \frac{3}{10} |x_2 - \sqrt{3}|^2 < \left(\frac{3}{10}\right)^3 \left(\frac{1}{10}\right)^4 = 3^3 \times 10^{-7} = 2.7 \times 10^{-6},$$

$$|x_4 - \sqrt{3}| < \frac{3}{10} |x_3 - \sqrt{3}|^2 < \left(\frac{3}{10}\right)^7 \left(\frac{1}{10}\right)^8 = 3^7 \times 10^{-15} \approx 2.2 \times 10^{-12}.$$

لذا، تقریب $x_3 \approx \sqrt{3}$ تا 5 رقم اعشار دقیق است، حال آنکه تقریب $x_4 \approx \sqrt{3}$ تا 11 رقم اعشار دقیق می‌باشد. توجه کنید که این تخمین خطا محاسبه تقریب بعدی $x_5 \approx \sqrt{3}$ را، که تا 23 رقم اعشار دقیق است، ناضرور می‌سازد.

مثال ۳. معادله $e^x - x = 0$ را به روش نیوتن حل کنید.

حل. از شکل ۱۵ معلوم می‌شود که این معادله فقط یک ریشه r دارد که طول نقطه اشتراک خط $y = x$ با منحنی $y = e^{-x}$ است، و گویی $0.5 \approx r$ تقریب اولیه مناسبی می‌باشد. با



شکل ۱۵

اختیار $f(x) = x - e^{-x}$, $f'(x) = 1 + e^{-x}$ در فرمول (۱)، به دست می‌آوریم

$$x_{n+1} = x_n - \frac{x_n - e^{-x_n}}{1 + e^{-x_n}} = \frac{x_n e^{-x_n} + e^{-x_n}}{1 + e^{-x_n}} = \frac{x_n + 1}{e^{x_n} + 1}$$

چند تقریب اولیه را تا شش رقم اعشار حساب می‌کنیم، خواهیم داشت

$$x_1 = 0.5$$

$$x_2 = 0.566311$$

$$x_3 = 0.567143$$

$$x_4 = 0.567143$$

لذا، نتیجه می‌گیریم که تا شش رقم اعشار $r \approx 0.567143$. اگر $x_1 = 0.6$ را تقریب اولیه بگیریم، در عوض به دست می‌آوریم

$$x_1 = 0.6$$

$$x_2 = 0.566950$$

$$x_3 = 0.567143$$

$$x_4 = 0.567143$$

که همان جواب با همان تعداد مراحل به ما می‌دهد. این با قضیه ۱۹ تعارضی ندارد، که انتخاب x_1 را نقطه‌انتخابی چپ‌بازه $I = [0.5, 0.6]$ پیشنهاد می‌کند، زیرا $f'(x) = 1 + e^{-x}$ و $f''(x) = -e^{-x}$ مختلف‌العلامه می‌باشند. بالاخره، اگرچه قضیه همگرایی دنباله $\{x_n\}$ را در صورت انتخاب نقطه‌انتخابی دیگر تضمین نمی‌کند، ولی مسلماً "نمی‌گوید که $\{x_n\}$ همگرا نمی‌شود، و اگر همگرایی رخ دهد، تعارضی برای پیروزی وجود ندارد" توجه کنید که دنباله $\{x_n\}$ به ازای $x_1 = 0.5$ یکنواست، ولی نه به ازای $x_1 = 0.6$. این را چطور تحلیل می‌کنید؟

برهان قضیه ۱۹ (اختیاری) . با اختیار $x = r$ و $a = x_n$ در قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته (۳) ، صفحه ۸۸۱ ، داریم

$$0 = f(r) = f(x_n) + f'(x_n)(r - x_n) + \frac{f''(t_n)}{2}(r - x_n)^2,$$

که در آن t_n بین x_n و r قرار دارد . بنابراین ،

$$x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} = r + \frac{f''(t_n)}{2f'(x_n)}(r - x_n)^2,$$

یا معادلا

$$(۴) \quad x_{n+1} - r = \frac{f''(t_n)}{2f'(x_n)}(x_n - r)^2,$$

زیرا

$$(۵) \quad x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)}.$$

به آسانی معلوم می شود که علامت $f(x_1)$ همواره با علامت f'' یکی است .
 لذا ، از (۴) و (۵) معلوم می شود که $r < x_2 < x_1 = b$ اگر f' و f'' همعلامت باشند ولی $a = x_1 < x_2 < r$ اگر f' و f'' مختلف‌العلامه باشند . چون x_1 و x_2 در یک طرف r واقعند ، $f(x_2)$ با $f(x_1)$ همعلامت است . لذا ، کاربرد دیگری از فرمولهای (۴) و (۵) نشان می دهد که $r < x_3 < x_2 < x_1$ اگر f' و f'' همعلامت باشند ، حال آنکه $x_1 < x_2 < x_3 < r$ اگر f' و f'' مختلف‌العلامه باشند . در واقع ، کاربرد مکرر این استدلال نشان می دهد که به ازای هر n ، $x_1 < \dots < x_n < x_{n+1} < r$ اگر f' و f'' همعلامت باشند ، حال آنکه به ازای هر n $r < x_{n+1} < x_n < \dots < x_1$ اگر f' و f'' مختلف‌العلامه باشند ؛ لذا ، در هر حالت ، $\{x_n\}$ یک دنباله یکنوای کراندار (نزولی در حالت اول و صعودی در حالت دوم) می باشد . بنا بر قضیه ۲ ، صفحه ۷۹۶ ، $\{x_n\}$ به حد L همگراست . این حد مساوی r می باشد . در واقع ، با حدگیری از طرفین (۵) وقتی $n \rightarrow \infty$ ، به دست می آوریم

$$L = L - \frac{f(L)}{f'(L)},$$

۱ . به طور مشروح ، $f(a) < 0, f(b) > 0$ اگر $f' > 0$ ، ولی $f(a) > 0, f(b) < 0$ اگر $f' < 0$. هرگاه f'' و f' همعلامت باشند ، آنگاه $f' > 0, f'' > 0$ یا $f' < 0, f'' < 0$ ، و در هر دو حالت $f(x_1) = f(b)$ با f' همعلامت است . از آن سو ، هرگاه f' و f'' مختلف‌العلامه باشند ، آنگاه $f' > 0, f'' < 0$ یا $f' < 0, f'' > 0$ ، و مجدداً " در هر دو حالت $f(x_1) = f(a)$ با f'' همعلامت می باشد .

که $f(L) = 0$ و در نتیجه $L = r$ را ایجاب می‌کند. برای اتمام برهان، ملاحظه می‌کنیم که نامساوی (۲) در صورت قضیه نتیجه فوری فرمول (۴) و معنی اعداد m و M می‌باشد.

مسائل

کمیات زیر را با استفاده از روش نیوتن تا چهار رقم اعشار تقریب نمایید.

۰.۱ $\sqrt{2}$ ۰.۲ $\sqrt[3]{11}$ ۰.۳ $\sqrt[3]{75}$

۰.۴ $\sqrt[3]{1000}$ ۰.۵ $\sqrt[3]{800}$

۰.۶ فرض کنید c عددی مثبت و k عددی صحیح بزرگتر از ۱ باشد. نشان دهید که دنباله تقریبات متوالی $\{x_n\}$ داده شده با فرمول بازگشتی

$$x_{n+1} = \left(1 - \frac{1}{k}\right)x_n + \frac{1}{k}cx_n^{1-k} \quad (n = 1, 2, \dots)$$

به ازای هر تقریب اولیه $x_1 > 0$ به $\sqrt[k]{c}$ همگراست.

۰.۷ معادله درجه دوم $x^2 - x - 1 = 0$ دارای دو ریشه $\frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$ است. به ازای چه مقادیری از تقریب اولیه x_1 دنباله $\{x_n\}$ تولید شده به وسیله روش نیوتن به ریشه مثبت همگراست؟ به ریشه منفی همگراست؟ به ازای چه مقداری از x_1 روش فرو می‌ریزد؟

۰.۸ فرض کنید روش نیوتن برای تقریب $\sqrt[3]{7}$ ، با شروع از تقریب اولیه $x_1 = 2$ ، به کار رفته باشد. نشان دهید که تقریب $x_4 \approx \sqrt[3]{7}$ تا نه رقم اعشار دقیق است.

۰.۹ در مثال ۱، صفحه ۱۵۴، روش تنصیف برای یافتن تقریب خامی به ریشه r معادله $2x^3 + 2x^2 + x - 3 = 0$ در بازه $(0, 1)$ به کار گرفته شد. با استفاده از روش نیوتن، r را تا شش رقم اعشار تقریب نمایید.

۱۰. با شکل نشان دهید که معادله $e^{-x} - \sin x = 0$ بی‌نهایت ریشه مثبت دارد. سپس با استفاده از روش نیوتن، دو کوچکترین ریشه را تا چهار رقم اعشار تقریب نمایید.

۱۱. نشان دهید که معادله $x^3 - 6x + 1 = 0$ سه ریشه حقیقی متمایز دارد، و هر ریشه را به کمک روش نیوتن تا چهار رقم اعشار تقریب نمایید.

با استفاده از روش نیوتن، معادله داده شده را تا سه رقم اعشار حل کنید.

۱۲. $x^4 - 4x - 4 = 0 \quad (-1 < x < 0)$

۱۳. $(x + 1)^2 x = 1$ ۱۴. $e^x - x^2 + 1 = 0$

۱۵. $x + \ln x - 3 = 0$ ۱۶. $x^2 + \ln x - 2 = 0$

۱۷. $4 \sin x - x = 0 \quad (x > 0)$

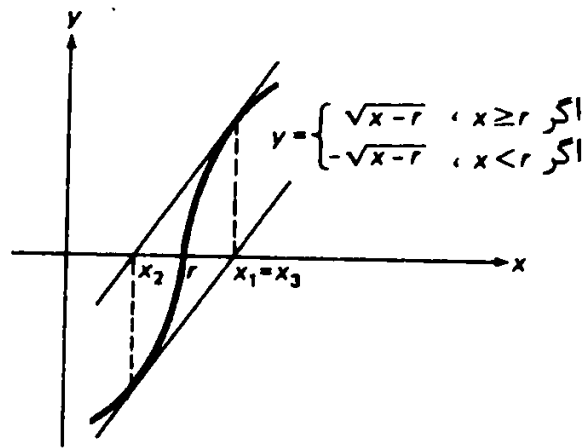
۱۸. $x^2 - \cos x = 0 \quad (x < 0)$

۱۹. $\tan x = x \quad (\pi/2 < x < 3\pi/2)$

۲۰. تابع

$$f(x) = \begin{cases} \sqrt{x-r} & , x \geq r \text{ اگر} \\ -\sqrt{x-r} & , x < r \text{ اگر} \end{cases}$$

رسم شده در شکل ۱۶، فقط در r ریشه دارد. نشان دهید که اگر $x_1 \neq r$ ، دنباله $\{x_n\}$ تولید شده در روش نیوتن واگراست، و بین مقادیر x_1 و $x_2 = 2r - x_1$ نوسان می‌کند. این مطلب را تعبیر هندسی کنید.



شکل ۱۶

۲۱. تابع $f(x) = (x-r)^{1/3}$ فقط در r ریشه دارد. نشان دهید اگر $x_1 \neq r$ ، دنباله $\{x_n\}$ تولید شده در روش نیوتن واگراست و مقادیر با قدر مطلق بدخواه بزرگ اختیار می‌کند. این مطلب را تعبیر هندسی نمایید.

اصطلاحات و مباحث کلیدی

دنباله‌های نامتناهی

فرمولهای بازگشتی

حد یک دنباله، دنباله‌های همگرا و واگرا

دنباله‌های کراندار و بی‌کران، دنباله‌های یکنوا

همگرایی یک دنباله، یکنوای کراندار

سریهای نامتناهی، مجموعه‌های جزئی یک سری

سریهای همگرا و واگرا، مجموع یک سری

سری هندسی ، سری توافقی ، سری p

شرط لازم برای همگرایی

باقیمانده^۱ یک سری

محک همگرایی برای سریهای نامنفی

آزمونهای مقایسه ، آزمون انتگرال

همگرایی مطلق در مقابل همگرایی مشروط

سری متناوب ، آزمون سری متناوب

تجدید آرایش سریها

آزمونهای نسبت و ریشه

سری توانی ، سریهای عددی در مقابل سریهای توابع

بازه^۲ همگرایی و شعاع همگرایی یک سری توانی

مجموع (تابع) یک سری توانی

مشتقگیری و انتگرالگیری جمله به جمله از یک سری توانی

سری دوجمله‌ای

قضیه^۳ مقدار میانگین تعمیم یافته

قضیه^۴ تیلور ، فرمول تیلور با باقیمانده

چندجمله‌ایهای تیلور

سریهای تیلور و ماکلورن

روش نیوتن

سریهای عددی مهم

سری هندسی $\sum_{n=0}^{\infty} ar^n$ (همگرا به $a/(1-r)$ اگر $|r| < 1$ ، واگرا اگر $|r| \geq 1$)

سری توافقی $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ (واگرا)

سری p $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^p}$ (همگرا اگر $p > 1$ ، واگرا اگر $p \leq 1$)

$$\frac{1}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} x^n$$

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$$\cos x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

$$\arctan x = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{2n+1} \quad (\text{سری گرگوری})$$

$$(1+x)^r = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r(r-1)\cdots(r-n+1)}{n!} x^n \quad (\text{سری دوجملهای})$$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(a)}{n!} (x-a)^n \quad (\text{سری تیلور})$$

خلاصه‌ای از آزمونهای همگرایی برای سربهای عددی^۱

آنگاه:

هرگاه:

$\sum a_n$ واگراست (قضیه ۳، صفحه ۸۱۱)	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n \neq 0$
$\sum a_n$ همگراست (قضیه ۴، صفحه ۸۲۱)	$a_n \geq 0, a_1 + a_2 + \cdots + a_n \leq C$
همگرایی $\sum b_n$ همگرایی $\sum a_n$ را ایجاب می‌کند و اگرایی $\sum a_n$ واگرای $\sum b_n$ را ایجاب می‌کند (قضیه ۵، صفحه ۸۲۴)	$a_n \geq 0, b_n \geq 0, a_n \leq b_n$
همگرایی $\sum b_n$ همگرایی $\sum a_n$ را ایجاب می‌کند اگر $0 \leq L < \infty$	$a_n > 0, b_n > 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = L$
و اگرایی $\sum b_n$ واگرای $\sum a_n$ را ایجاب می‌کند اگر $0 < L \leq \infty$ (قضیه ۶، صفحه ۸۲۵)	
$\sum a_n$ همگراست اگر و فقط اگر $\int_1^{\infty} f(x) dx$ همگرا باشد (قضیه ۷، صفحه ۸۲۸)	$a_n = f(n)$ بر $[1, \infty)$ پیوسته، مثبت، و نزولی باشد
$\sum a_n$ همگراست (قضیه ۸، صفحه ۸۳۶)	$\sum a_n $ همگرا باشد
$\sum (-1)^{n-1} a_n$ همگراست (قضیه ۹، صفحه ۸۳۷)	$a_n > a_{n+1}, \lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$
$\sum a_n$ به‌طور مطلق همگراست اگر $0 \leq L < 1$ و واگراست اگر $1 < L \leq \infty$ (قضیه ۱۰، صفحه ۸۴۷)	$a_n \neq 0, \lim_{n \rightarrow \infty} \left \frac{a_{n+1}}{a_n} \right = L$
$\sum a_n$ به‌طور مطلق همگراست اگر $0 \leq L < 1$ و واگراست اگر $1 < L \leq \infty$ (قضیه ۱۱، صفحه ۸۵۰)	$\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{ a_n } = L$

مسائل تکمیلی

حد دنباله $\{a_n\}$ را (در صورت وجود) بیابید، که در آن a_n ، n مین رقم در بسط اعشاری اعداد زیر است.

۰.۱ $\frac{1}{8}$ ۰.۲ $\frac{1}{6}$ ۰.۳ $\frac{1}{4}$ ۰.۴ π

دنباله‌های $\{a_n\}$ و $\{b_n\}$ هر دو همگرا به ۰ را طوری بیابید که

۰.۵ $\{a_n/b_n\}$ همگرا به ۰ باشد.

۰.۶ $\{a_n/b_n\}$ همگرا به ۱ باشد.

۰.۷ $\{a_n/b_n\}$ واگرا و کراندار باشد.

۰.۸ $\{a_n/b_n\}$ واگرا و بی‌کران باشد.

۰.۹ نشان دهید هرگاه تابع $f(x)$ بر $(0, 1]$ طوری تعریف شده باشد که وقتی $x \rightarrow 0^+$ ،

$f(x) \rightarrow L$ ، آنگاه وقتی $n \rightarrow \infty$ ، $f(1/n) \rightarrow L$.

حد داده شده را محاسبه کنید.

۰.۱۱ $\lim_{n \rightarrow \infty} \cos\left(\frac{\ln n}{n}\right)$

۰.۱۰ $\lim_{n \rightarrow \infty} n \tan \frac{1}{n}$

۰.۱۲ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt[n]{n!}}$

۰.۱۳ $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{n^2 + n} - \sqrt{n^2 - 3n})$

۰.۱۴ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + 2 + \dots + n}{n^2}$

۰.۱۵ $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1 + a + a^2 + \dots + a^n}{1 + b + b^2 + \dots + b^n}$ ($|a| < 1, |b| < 1$)

۰.۱۷ $\lim_{n \rightarrow \infty} \arcsin \frac{2n-1}{4n}$

۰.۱۶ $\lim_{n \rightarrow \infty} nc^n$ ($|c| < 1$)

۰.۱۹ $\lim_{n \rightarrow \infty} (\sqrt{2} \sqrt[2]{2} \dots \sqrt[2^n]{2})$

۰.۱۸ $\lim_{n \rightarrow \infty} \arctan \sqrt[n]{n}$

۰.۲۰ تحقیق کنید که

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2+1}} + \frac{1}{\sqrt{n^2+2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2+n}} \right) = 1,$$

حال آنکه

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{\sqrt{n^2 + 1^2}} + \frac{1}{\sqrt{n^2 + 2^2}} + \dots + \frac{1}{\sqrt{n^2 + n^2}} \right) = \ln(1 + \sqrt{2}) \approx 0.88.$$

راهنمایی . در حالت اول از قضیهٔ ساندویچ برای دنباله‌های داده شده در مسئلهٔ ۵۴ ، صفحهٔ ۸۵۲ ، استفاده کنید . در حالت دوم ، طرف چپ را به صورت حد یک مجموع‌ریمان برای تابع $1/\sqrt{1+x^2}$ را بر $[0, 1]$ تعبیر نمایید .

۲۱ . فرض کنید c چنان عددی باشد که $0 < c < 1$. نشان دهید که دنبالهٔ $\{a_n\}$ تعریف شده با فرمول بازگشتی

$$n \geq 2 \text{ اگر } a_{n+1} = (2 - a_n)a_n, \quad a_1 = c$$

همگرا به ۱ است .

۲۲ . تحقیق کنید که جملهٔ عمومی دنبالهٔ فیبوناچی $\{a_n\}$ تعریف شده با فرمول بازگشتی

$$n \geq 3 \text{ اگر } a_n = a_{n-1} + a_{n-2}, \quad a_2 = 1, \quad a_1 = 1$$

(مثل مسئلهٔ ۳۵ ، صفحهٔ ۸۵۱) از فرمول صریح زیر به دست می‌آید :

$$a_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right].$$

۲۳ . فرض کنید c عددی مثبت باشد . نشان دهید که دنبالهٔ

$$a_1 = \sqrt{c}, \quad a_2 = \sqrt{c + \sqrt{c}}, \quad a_3 = \sqrt{c + \sqrt{c + \sqrt{c}}}, \dots,$$

تعریف شده با فرمول بازگشتی

$$n \geq 2 \text{ اگر } a_n = \sqrt{c + a_{n-1}}, \quad a_1 = \sqrt{c}$$

همگرا به حد

$$L = \frac{1 + \sqrt{1 + 4c}}{2}$$

می‌باشد . (توجه کنید اگر $c = 2$ ، $L = 2$) .

۲۴ . نشان دهید دنبالهٔ $\{c_n\}$ تعریف شده با فرمول بازگشتی

$$n \geq 3 \text{ اگر } c_n = \frac{1}{2}(c_{n-1} + c_{n-2}), \quad c_2 = b, \quad c_1 = a$$

همگرا به حد $\frac{2}{3}(a + 2b)$ است .

راه‌نمایی . توجه کنید که $c_n - c_{n-1} = -\frac{1}{2}(c_{n-1} - c_{n-2})$.
 ۲۵ . فرض کنید $\{a_n\}$ دنباله همگرایی با حد L باشد . نشان دهید که

(یک)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} = L$$

آیا (یک) همگرایی $\{a_n\}$ به L را ایجاب می‌کند؟

۲۶ . می‌توان نشان داد که

(دو)
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n!}{(n/e)^n \sqrt{2\pi n}} = 1$$

این نتیجه ، که به فرمول استرلینگ^۱ معروف است ، به تقریب

(دو)
$$n! \approx \sqrt{2\pi n} n^n e^{-n}$$

برای n فاکتوریل منجر می‌شود . خطای درصد این تقریب به ازای $n = 5$ ؟ به ازای $n = 10$ چقدر است ؟

حدود زیر را با استفاده از فرمول (دو) حساب کنید .

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} \quad \cdot ۲۷$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3^n n!}{n^n} \quad \cdot ۲۹$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{7^{n/2} n!}{n^n} \quad \cdot ۳۰$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n!)^2 2^{2n}}{(2n)! \sqrt{n}} \quad \cdot ۳۱$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{2} \cdot \frac{3}{4} \cdots \frac{2n-1}{2n} \right) \quad \cdot ۳۲$$

عبارات زیر را با استفاده از فرمول (دو) تقریب نمایید .

$$1 \cdot 3 \cdot 4 \cdots 49 \quad \cdot ۳۴$$

$$\ln 40! \quad \cdot ۳۳$$

$$\int_0^{\pi/2} x^{50} e^{-x} dx \quad \cdot ۳۶$$

$$\int_0^{\pi/2} \sin^{31} x dx \quad \cdot ۳۵$$

$$\int_0^1 x^{15} (1-x)^{16} dx \quad \cdot ۳۸$$

$$\int_0^{\infty} \frac{dx}{(x^2+1)^{11}} \quad \cdot ۳۷$$

اگر سری داده شده همگرا باشد ، مجموع آن را بیابید . در غیر این صورت ، واگرایی آن را مشخص نمایید . درحالتی که سری با چند جمله اولیه داده شده است ، فرض کنید قانون

تشکیل ناشی از این جملات برای تمام جملات سری برقرار باشد .

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^n \cdot ۴۰ \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^n \cdot ۳۹$$

$$\frac{1}{1 \cdot 4} + \frac{1}{4 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 10} + \dots \cdot ۴۱$$

$$\frac{3}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{5}{(2 \cdot 3)^2} + \frac{7}{(3 \cdot 4)^2} + \dots \cdot ۴۲$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(c+n)(c+n+1)} \cdot ۴۳$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(c+n)(c+n+1)(c+n+2)} \cdot ۴۴$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (\sqrt{n+2} - 2\sqrt{n+1} + \sqrt{n}) \cdot ۴۵$$

$$\frac{1+2}{1-2} + \frac{1+2+4}{1-2+4} + \frac{1+2+4+8}{1-2+4-8} + \dots \cdot ۴۶$$

۴۷ . سری $(\frac{3}{2}-1) + (\frac{5}{2}-1) + (\frac{7}{2}-1) + \dots$ راه دیگر نوشتن سری هندسی همگرای $\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots$ را نشان می دهد . ثابت کنید سری حاصل از پرانتزها واگراست .

۴۸ . میانگین توافقی دو عدد مثبت x و y عددی است چون h به طوری که

$$\frac{1}{h} = \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x} + \frac{1}{y} \right),$$

یعنی ، متقابل h متوسط (یا میانگین حسابی) متقابلهای x و y است . نشان دهید هر جمله^۶ سری توافقی

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

جز اولی میانگین توافقی دوجمله^۶ مجاور خود می باشد .

۴۹ . به ازای دو عدد مثبت x و y ، فرض کنید $g = \sqrt{xy}$ میانگین هندسی آنها بوده و h

میانگین توافقی آنها ، به صورت تعریف شده در مسئله^۶ قبل ، باشد . تحقیق کنید

که $h < g$ مگر آنکه $x = y$ ، که در این صورت $h = g$. (این را با مسئله^۶ ۱۹ ، صفحه^۶

۱۹ ، مقایسه کنید .)

۵۰ . فرض کنید n عدد صحیح مثبتی باشد . نشان دهید $1/n$ دارای نمایش اعشاری مختوم

است اگر و فقط اگر اعداد صحیح نامنفی چون p و q وجود داشته باشند به طوری که

$$n = 2^{p5^q}$$

اعداد گویای تحویل ناپذیر با نمایشهای اعشاری زیر را بیابید .

$$0.12345 \cdot 51 \quad 0.12345 \cdot 52 \quad 0.12345 \cdot 53$$

۵۴. نشان دهید که اعشاری $0.12345678910111213\dots$ حاصل از نوشتن مرتب تمام

اعداد صحیح مثبت پس از ممیز یک عدد گنگ است .

همگرایی سری داده شده را با هر آزمونی که می‌خواهید بررسی کنید . درحالتی که سری با

چند جمله اولیه داده شده است ، فرض کنید قانون تشکیل ناشی از این جملات برای تمام

جملات سری برقرار باشد . اگر سری جملات مثبت و منفی داشته باشد ، همگرایی مطلق و

مشروط را تمیز دهید .

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)^2} \cdot 56 \quad \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{2^n n!}{n^n} \cdot 55$$

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots \cdot 57$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\ln n}} \cdot 58$$

$$1 + \frac{1}{2} - \frac{2}{3} + \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{2}{6} + \dots \cdot 59$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{(n+1)^n} \cdot 61 \quad \sum_{n=3}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\ln(\ln n)} \cdot 60$$

$$\frac{5}{2} + \frac{5 \cdot 8}{2 \cdot 6} + \frac{5 \cdot 8 \cdot 11}{2 \cdot 6 \cdot 10} + \dots \cdot 62$$

$$100 - \frac{100 \cdot 101}{1 \cdot 3} + \frac{100 \cdot 101 \cdot 102}{1 \cdot 3 \cdot 5} - \dots \cdot 63$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\arctan n}{\tanh n} \cdot 65$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{n+(1/n)}}{[n+(1/n)]^n} \cdot 64$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\pi^n n!}{n^n} \cdot 67$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \sin n \cdot 66$$

$$\frac{1}{2} - \frac{3}{2^2} + \frac{1}{2^3} - \frac{3}{2^4} + \frac{1}{2^5} - \frac{3}{2^6} + \dots \cdot 68$$

$$\sum_{n=2}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{\ln(n!)} \quad \cdot ۶۹$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n}\right)^n \quad \cdot ۷۰$$

۷۱. فرض کنید d_n تعداد اعداد صحیح مثبتی باشد که مقسوم علیه (کامل) n اند. مثلاً

$d_4 = 3$ زیرا 4 دارای مقسوم علیه‌های 1، 2، و 4 است، $d_5 = 2$ زیرا 5 دارای

مقسوم علیه‌های 1 و 5 است، $d_6 = 4$ زیرا 6 دارای مقسوم علیه‌های 1، 2، 3، و

6 است، و از این قبیل. شعاع و بازه همگرایی سری توانی

$$\sum d_n x^n = d_1 x + d_2 x^2 + \dots + d_n x^n + \dots$$

تابع داده شده را در $x = 0$ به سری توانی بسط دهید.

$$\frac{1}{1+x+x^2} \quad \cdot ۷۳$$

$$\frac{1-x}{1+x^2} \quad \cdot ۷۲$$

$$\frac{x^2}{(1-x^3)^2} \quad \cdot ۷۵$$

$$\frac{1}{(1-x)(1-x^2)} \quad \cdot ۷۴$$

$$\frac{1}{1+x-2x^2} \quad \cdot ۷۷$$

$$(1-x^2)^{-3/2} \quad \cdot ۷۶$$

$$[\ln(1-x)]^2 \quad \cdot ۷۹$$

$$\ln \frac{1+x}{1-x} + 2 \arctan x \quad \cdot ۷۸$$

$$(\arctan x)^2 \quad \cdot ۸۰$$

۸۱. نشان دهید که

$$\begin{aligned} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{na+1} &= 1 - \frac{1}{a+1} + \frac{1}{2a+1} - \frac{1}{3a+1} + \dots \\ &= \int_0^1 \frac{dx}{x^a+1} \quad (a > 0). \end{aligned}$$

(سه)

با استفاده از فرمول (سه)، مجموع سریهای زیر را بیابید.

$$1 - \frac{1}{5} + \frac{1}{9} - \frac{1}{13} + \dots \quad \cdot ۸۳$$

$$1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{7} - \frac{1}{10} + \dots \quad \cdot ۸۲$$

۸۴. با شروع از فرمول ماشن

$$\pi = 16 \arctan \frac{1}{5} - 4 \arctan \frac{1}{239}$$

(ر.ک. مسئله ۶۲، صفحه ۴۷۹) و استفاده از سری گرگوری برای $\arctan x$ ، π را تا هشت رقم اعشار تقریب نمایید.
 ۸۵. نشان دهید

$$\frac{1}{1-x-x^2} = \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^{n-1},$$

(چهار)

که در آن $\{a_n\}$ دنباله فیبوناچی است.
 ۸۶. به کمک مسئله ۲۲، نشان دهید که شعاع همگرایی سری (چهار) مساوی است با
 $0.618 \approx \frac{1}{2}(\sqrt{5}-1)$
 ۸۷. فرض کنید a عددی مثبت باشد. تحقیق کنید که

$$\ln a = 2 \left(b + \frac{b^3}{3} + \frac{b^5}{5} + \frac{b^7}{7} + \dots \right),$$

که در آن

$$b = \frac{a-1}{a+1},$$

و با استفاده از این فرمول، $\ln 3$ را تا چهار رقم اعشار تقریب کنید.
 ۸۸. بنابر نظریه خصوصی نسبیت اینشتن (ر.ک. مسئله ۵۴، صفحه ۴۴۳)، انرژی کل یک ذره به جرم m که با سرعت v حرکت می‌کند عبارت است از

$$E = \frac{mc^2}{\sqrt{1-(v/c)^2}},$$

که در آن c سرعت نور است ($\approx 300,000 \text{ km/sec}$). نشان دهید هرگاه v در مقایسه با c کوچک باشد، با تقریبی مناسب،

$$E = mc^2 + K,$$

که در آن $K = \frac{1}{2}mv^2$ انرژی جنبشی نیوتنی ذره است (ر.ک. صفحه ۴۲۹). توجه کنید که هر دو فرمول مربوط به E انرژی mc^2 را به یک ذره به جرم m در حال سکون ($v=0$) می‌دهند، بدین ترتیب "تبادل جرم و انرژی" را بیان می‌نمایند.

۸۹. فرض کنید $P(x)$ یک چند جمله‌ای از درجه ۴ باشد به طوری که

$$P(2) = -1, \quad P'(2) = 0, \quad P''(2) = 2,$$

$$P'''(2) = -12, \quad P^{(4)} = 24.$$

$P(-1)$ ، $P'(0)$ و $P''(1)$ را پیدا کنید.

۹۰. $\sin 55^\circ$ را با استفاده از فرمول تیلور به ازای $n=3$ و $a=60^\circ = \pi/3$ تخمین زده، و

نشان دهید جواب تا پنج رقم اعشار دقیق است.

۹۱. فرض کنید $P_n(x)$ چند جمله‌ای تیلور n مرتبه تابع $f(x)$ در نقطه $x = a$ بوده، و $R_n(x)$ باقیمانده نظیر باشد. در نتیجه، $R_n(x) = f(x) - P_n(x)$. نشان دهید $R_n(x)$ را می‌توان به شکل انتگرالی زیر نوشت:

$$R_n(x) = \frac{1}{n!} \int_a^x f^{(n+1)}(u)(x-u)^n du \quad (\text{پنج})$$

اگر $f^{(n+1)}(u)$ بر بازه با نقاط انتهایی a و x پیوسته باشد. نشان دهید (پنج) ایجاب می‌کند که

$$R_n(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} (x-a)^{n+1}$$

(ξ بین a و x)

و این شکل باقیمانده است که در صفحه ۸۸۳ داده‌ایم. راهنمایی. از قضیه مقدار میانگین تعمیم یافته برای انتگرالها استفاده کنید (ر. ک. مسئله ۲۷، صفحه ۴۴۱).

۹۲. مشتق پنجم $\sqrt{1+x}$ در $x=0$ را با استفاده از سری تیلور حساب کنید.

۹۳. مشتق دهم e^{x^6} در $x=0$ را با استفاده از سری تیلور حساب کنید.

۹۴. سری ماکلورن چند جمله‌ای $P(x)$ چیست؟

۹۵. شش جمله اول سری ماکلورن e^{2x-x^2} را بیابید.

راهنمایی. توجه کنید که

$$e^{2x-x^2} = (e^{2x})(e^{-x^2}).$$

انتگرال داده شده را با استفاده از سری توانی تا چهار رقم اعشار تقریب نمایید.

$$\int_0^1 \frac{1 - \cos x}{x} dx \quad .97$$

$$\int_0^1 \frac{\sin x}{x} dx \quad .96$$

در هر حالت، انتگرالده $f(x)$ را با پیوستگی در $x=0$ تعریف کنید؛ یعنی، قرار دهید

$$f(0) = \lim_{x \rightarrow 0} f(x)$$

معادله داده شده را به روش نیوتن تا سه رقم اعشار حل کنید.

$$xe^{x^2} = 1 \quad .99$$

$$x \ln x = 1 \quad .98$$

$$x + \arctan x - 1 = 0 \quad .100$$

هندسه^۱ تحلیلی در صفحه و مختصات قطبی^{۱۰}

هندسه^۱ تحلیلی، که توسط رنه دکارت^۱ ابداع شده است، مبحثی است که در آن، پس از معرفی دستگاه مختصات مناسبی، روشهای جبری برای حل مسائل هندسی به کار گرفته می‌شوند. حال تکنیکهای هندسه^۱ تحلیلی و حساب دیفرانسیل و انتگرال را درهم آمیخته بررسی منحنیها در صفحه را ادامه می‌دهیم. در بخش ۱۰.۱۰ بحث را با نشان دادن اینکه چگونه معادله^۱ یک منحنی در مختصات قائم‌الزاویه یا دوران دستگاه مختصات تغییر می‌کند آغاز می‌کنیم. سپس در بخشهای ۲۰.۱۰ تا ۴۰.۱۰ سهمیها، بیضیها، و هذلولیها را به تفصیل بررسی می‌نماییم. این منحنیها در ریاضیات کار بسته اهمیت زیادی داشته، و همانطور که در بخش ۵۰.۱۰ توضیح دادیم، هر کدام یک "مقطع مخروطی" است؛ یعنی، اشتراک یک مخروط مستدیر قائم‌الزاویه با یک صفحه^۱ قاطع مناسب می‌باشد. مقاطع مخروطی مبحث دلخواه هندسه دانان یونان باستان بوده است. در واقع، آپولونیوس^۲ اهل پرگا (۱۷۰ - ۲۵۵ ق. م.) مقاله‌ای در این باب نوشت که شامل 400 قضیه بود، و اصطلاحات سهمی، بیضی، و هذلولی از آن اوست. مقاطع مخروطی همه دارای معادلات درجه^۱ دوم به شکل $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ هستند، و به عکس، نمودار هر چنین معادله یک مقطع مخروطی است جز چند حالت استثنایی که در بخش ۶۰.۱۰ توصیف شده‌اند.

در یک دستگاه مختصات دکارتی موضع نقطه^۱ P با مختصات قائم آن مشخص می‌شود. این یعنی دو خط، یکی افقی و دیگری قائم، رسم می‌کنیم که در P متقاطع باشند. دستگاههای مختصات غیرقائم نیز وجود دارند، و یکی از مفیدترین آنها دستگاه مختصات قطبی است که در بخشهای ۷۰.۱۰ تا ۱۰۰.۱۰ بررسی شده است. در این دستگاه موضع نقطه^۱ P با مختصات قطبی آن مشخص می‌شود، به این ترتیب که دایره‌ای و شعاع آن را نشان

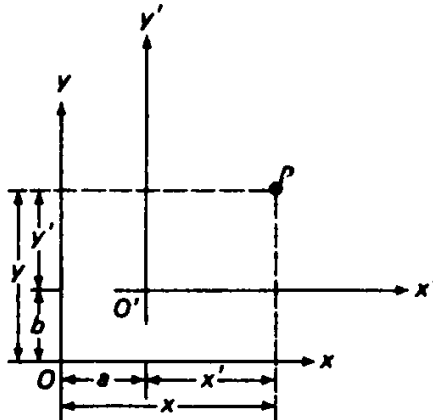
1. René Descartes

2. Apollonius

می‌دهیم که در P یکدیگر را قطع می‌کنند. خواهید دید که مختصات قطبی بخصوص برای نوشتن مقاطع مخروطی مفیدند.

۱۰.۱۰ انتقال و دوران محورها

شکل ۱ دستگاه مختصات دکارتی Oxy را نشان می‌دهد که انتقال یافته است؛ یعنی، کلاً بدون دوران طوری جابجا شده است که مبدأ آن $O' = (a, b)$ را اشغال کرده و بدین ترتیب دستگاه مختصات قائم دیگر $O'x'y'$ در همان صفحه Oxy تولید شده است.



شکل ۱

حال نقطه P در صفحه دو جفت مختصات دارد، جفت (x, y) در دستگاه xy قدیم و جفت (x', y') در دستگاه $x'y'$ جدید. از شکل معلوم می‌شود که رابطه بین این مختصات به صورت زیر است:

$$(۱) \quad x = x' + a, \quad y = y' + b,$$

یا معادلاً

$$(۱') \quad x' = x - a, \quad y' = y - b.$$

معادلات (۱) و (۱') معادلات انتقال نام دارند.

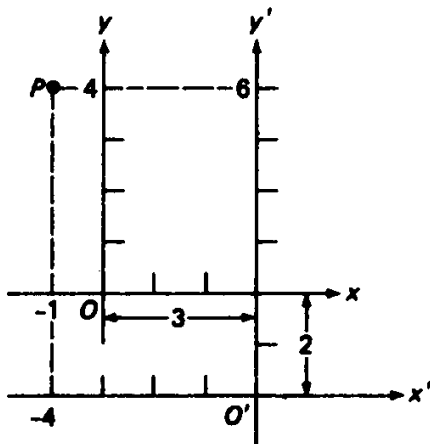
مثال ۱. فرض کنید مبدأ دستگاه جدید $x'y'$ نقطه $(a, b) = (3, -2)$ در دستگاه xy قدیم باشد. مختصات جدید نقطه P به مختصات قدیم $x = -1, y = 4$ چیست؟

حل. از رابطه (۱') به ازای $a = 3, b = -2$ معلوم می‌شود که

$$x' = x - 3, \quad y' = y + 2.$$

لذا، همانطور که شکل ۲ نشان داده، مختصات جدید نقطه P عبارتند از

$$x' = -1 - 3 = -4, \quad y' = 4 + 2 = 6.$$



شکل ۲

مثال ۲. با انتقال محورها، دستگاه مختصات x', y' را طوری بیابید که در آن معادلهٔ دایرهٔ

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$$

به

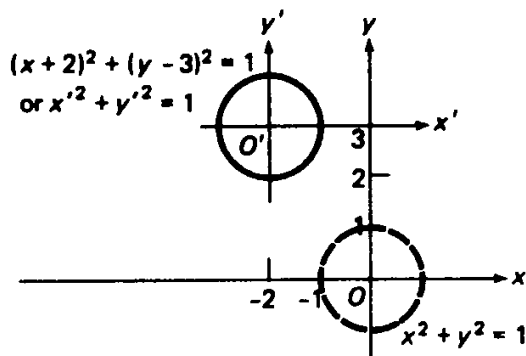
$$x'^2 + y'^2 = 1$$

ساده شود.

حل. واضح است که معادلات انتقال مربوطه عبارتند از

$$x' = x + 2, \quad y' = y - 3.$$

دستگاه $x'y'$ جدید حاصل انتقال دستگاه xy قدیم ۲ واحد به چپ و ۳ واحد به بالاست. انتظار این امر می‌رفت، چراکه $O'x'y'$ دستگاهی است که در آن دایرهٔ $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ به شعاع ۱ و به مرکز نقطه $(-2, 3)$ به دایرهٔ به شعاع ۱ و مرکز مبدأ تبدیل می‌شود (ر. ک. شکل ۳). همچنین، توجه کنید که همین انتقال دایرهٔ $x^2 + y^2 = 1$ (منحنی منقطع)



شکل ۳

را در صورتی به دایره $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ می برد که دستگاه xy ثابت نگهداشته شود.

دوران محورها . حال دورانهای یک دستگاه مختصات نسبت به دیگری را در نظر می گیریم . شکل ۴ (T) دستگاه مختصات قائم Oxy را نشان می دهد که حول مبدأ O خود به اندازه θ زاویه θ در جهت خلاف عقربه های ساعت دوران کرده ، دستگاه مختصات قائم دیگر $Ox'y'$ را در همان صفحه Oxy و همان مبدأ O تولید می کند . حال نقطه ثابت P در صفحه دو جفت مختصات دارد ، جفت (x, y) در دستگاه xy قدیم و جفت (x', y') در دستگاه $x'y'$ جدید . برای یافتن رابطه بین این مختصات ، فرض کنیم r طول پاره خط OP بوده ، و α زاویه بین OP و محور x' باشد که در جهت خلاف عقربه های ساعت سنجیده می شود . پس زاویه بین OP و محور x مساوی $\theta + \alpha$ است ؛ در نتیجه ،

$$x = r \cos (\theta + \alpha) = r \cos \theta \cos \alpha - r \sin \theta \sin \alpha,$$

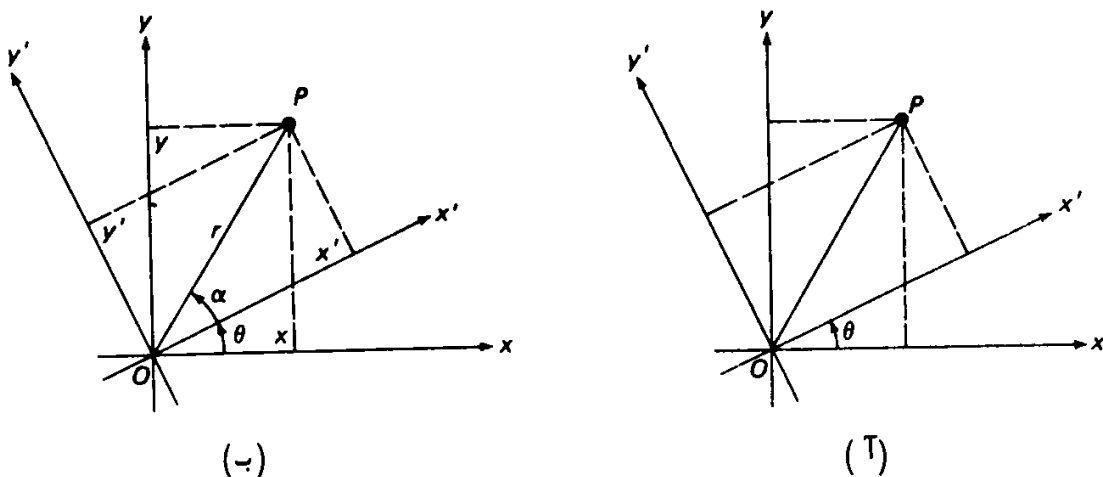
$$y = r \sin (\theta + \alpha) = r \sin \theta \cos \alpha + r \cos \theta \sin \alpha.$$

اما

$$x' = r \cos \alpha, \quad y' = r \sin \alpha$$

[ر. ک. شکل ۴ (ب)] ؛ و در نتیجه ، معادلات مربوط به x و y به صورت زیر ساده می شوند :

$$(۲) \quad \begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta. \end{aligned}$$



شکل ۴

معادلات (۲) مختصات قدیم x و y را بر حسب مختصات جدید x' و y' بیان می کنند .

معادلات نظیر که x' و y' را بر حسب x و y بیان می کنند عبارتند از

$$(۲') \quad \begin{aligned} x' &= x \cos \theta + y \sin \theta, \\ y' &= -x \sin \theta + y \cos \theta. \end{aligned}$$

روابط (۲') را می‌توان با حل جفت معادلات همزمان (۲) نسبت به x' و y' به دست آورد، ولی چنانچه درک شود که اگر دستگاه $Ox'y'$ با دستگاه Oxy زاویه θ بسازد، $Ox'y'$ با Oxy زاویه $\theta - \theta$ می‌سازد بسیار ساده‌تر است؛ در نتیجه، می‌توان جفتهای (x, y) و (x', y') در (۲) را باهم عوض کرد مشروط بر اینکه θ نیز به $\theta - \theta$ تغییر یابد. به عنوان تمرین، تحقیق کنید که این در واقع (۲) را به (۲') و بالعکس تبدیل می‌کند. معادلات (۲) و (۲') معادلات دوران نام دارند.

مثال ۳. فرض کنید P نقطه $(1, 2)$ بوده، و دستگاه xy به اندازه زاویه 30° در جهت خلاف عقربه‌های ساعت چرخیده دستگاه جدید $x'y'$ را تولید نماید. مختصات جدید P چه خواهند بود؟

حل. از روابط (۲') به ازای $\theta = 30^\circ$ معلوم می‌شود که

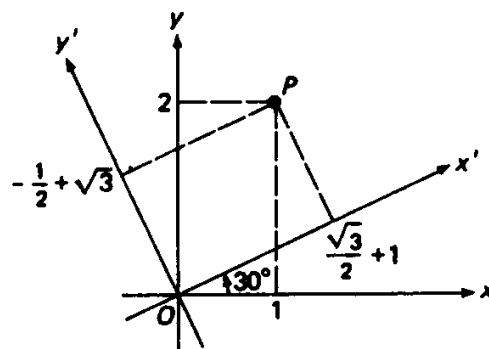
$$x' = x \cos 30^\circ + y \sin 30^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}x + \frac{1}{2}y,$$

$$y' = -x \sin 30^\circ + y \cos 30^\circ = -\frac{1}{2}x + \frac{\sqrt{3}}{2}y.$$

با گذاردن $x = 1, y = 2$ در این معادلات، معلوم می‌شود که مختصات جدید نقطه P عبارتند از

$$x' = \frac{\sqrt{3}}{2} + 1, \quad y' = -\frac{1}{2} + \sqrt{3}$$

(ر. ک. شکل ۵).



شکل ۵

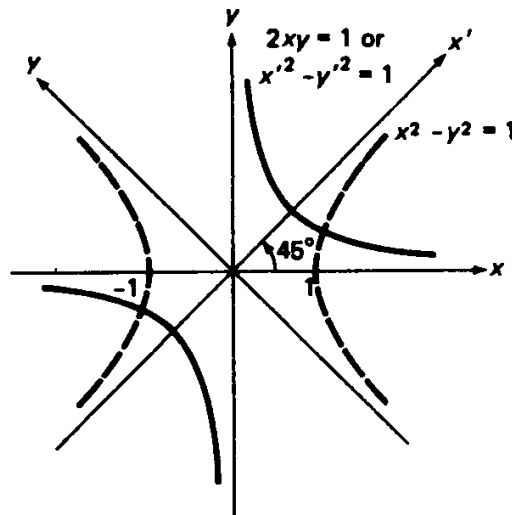
مثال ۴. نشان دهید که معادله

$$2xy = 1$$

در صورتی به معادله

$$x'^2 - y'^2 = 1$$

هذلولی یکه (ر. ک. صفحه ۵۶۶) تبدیل می شود که دستگاه $x'y'$ از دوران دستگاه xy به اندازه 45° در جهت خلاف عقربه های ساعت، مثل شکل ۶، به دست آمده باشد.



شکل ۶

حل با اختیار $\theta = 45^\circ$ در معادلات دوران (۲)، به دست می آوریم

$$x = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'),$$

$$y = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y').$$

بنابراین،

$$2xy = (x' - y')(x' + y') = x'^2 - y'^2,$$

در نتیجه، $2xy = 1$ به $x'^2 - y'^2 = 1$ در دستگاه $x'y'$ تبدیل می شود. همچنین، توجه کنید که همین دوران 45° هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ (نمودار منقطع در شکل) را در صورتی به هذلولی $2xy = 1$ می برد که دستگاه xy ثابت گرفته شود.

نمودار $F(x, y) = 0$. فرض کنیم $F(x, y)$ عبارتی شامل دو متغیر x و y باشد. (در اینجا، مثل صفحه ۶۵۳، نماد توابع دو متغیره را پیش بینی می کنیم.) منظور از نمودار معادله

$$(۳) \quad F(x, y) = 0,$$

یعنی مجموعه تمام نقاط (x, y) در صفحه xy که مختصاتش در (۳) صدق کنند. مثلاً، اگر

نمودار (۳) $F(x, y) = x^2 + y^2 - 1$ ، نمودار (۳) دایره به شعاع یک و مرکز مبدأ^۶ است ، حال آنکه اگر $F(x, y) = y - f(x)$ ، نمودار (۳) نمودار تابع $y = f(x)$ می باشد . فرض کنیم G نمودار معادله^۶ (۳) و G' نمودار معادله^۶

$$(۳') \quad F(x - a, y - b) = 0$$

باشد . در این صورت ، نقطه^۶ (x, y) در (۳) صدق می کند اگر و فقط اگر نقطه^۶ $(x + a, y + b)$ در (۳') صدق نماید . اما $(x + a, y + b)$ حاصل انتقال افقی (x, y) به اندازه^۶ $|a|$ به راست اگر $a > 0$ و به چپ اگر $a < 0$ ، و انتقال قائم به اندازه^۶ $|b|$ به بالا اگر $b > 0$ و به پایین اگر $b < 0$ است . بنابراین ، G' از G با همان انتقالها به دست می آید . مثلاً ، اگر دایره^۶ $x^2 + y^2 = 1$ به اندازه^۶ ۲ واحد به چپ و ۳ واحد به راست انتقال یابد ، همانطور که قبلاً^۶ گفتیم ، دایره^۶ $(x + 2)^2 + (y - 3)^2 = 1$ به دست می آید (ر. ک. شکل ۳) .

آزمونهای تقارن . حال تقارنهای نمودار G معادله^۶ $F(x, y) = 0$ را در نظر می گیریم . فرض کنیم G نسبت به محور x متقارن باشد . این یعنی نقطه^۶ (a, b) متعلق به G است اگر و فقط اگر $(a, -b)$ نیز متعلق به G باشد ، یا معادلاً^۶ $F(a, b) = 0$ اگر و فقط اگر $F(a, -b) = 0$. عبارت دیگر ، G نسبت به محور x متقارن است اگر و فقط اگر دو معادله^۶ $F(x, y) = 0$ و $F(x, -y) = 0$ مجموعه جواب یکسان داشته باشند . به همین نحو ، G نسبت به محور y متقارن است اگر و فقط اگر $F(x, y) = 0$ و $F(-x, y) = 0$ مجموعه جواب یکسان داشته باشند . حال آنکه G نسبت به مبدأ^۶ متقارن است اگر و فقط اگر $F(x, y) = 0$ و $F(-x, -y) = 0$ مجموعه جواب یکسان داشته باشند . به همین ترتیب ، G نسبت به خط $y = x$ متقارن است اگر و فقط اگر معادلات $F(x, y) = 0$ و $F(y, x) = 0$ مجموعه جواب یکسان داشته باشند .

مثال ۵ . نمودار معادله^۶

$$(۴) \quad (x - 1)^2 + (y - 1)^2 = 1$$

نسبت به هیچیک از محورهای مختصات یا مبدأ^۶ متقارن نیست . در واقع ، از تعویض x با $-x$ در (۴) معادله^۶

$$(x + 1)^2 + (y - 1)^2 = 1,$$

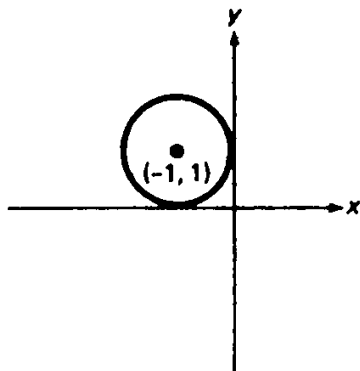
از تعویض y با $-y$ معادله^۶

$$(x - 1)^2 + (y + 1)^2 = 1,$$

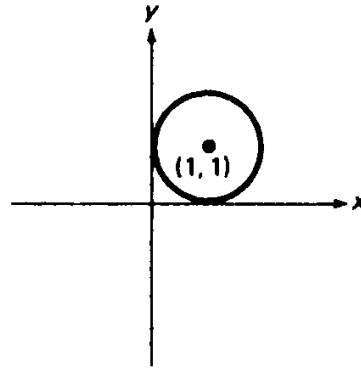
و از تعویض x با $-x$ و y با $-y$ معادله^۶

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 = 1$$

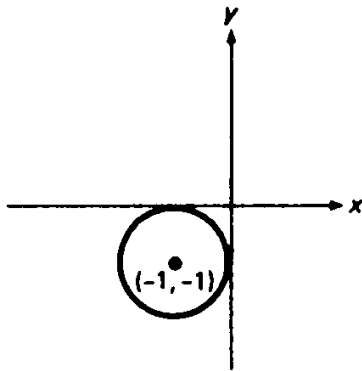
نتیجه می‌شود، که هیچیک از سه معادله مجموعه جواب (۴) را ندارد. مثلاً " $x = 2, y = 1$ ، جواب معادله (۴) است، ولی جواب سایر معادلات نیست. این امر که تمام چهار معادله مجموعه‌های جواب مختلف دارند فوراً از نمودارهای آنها در شکل‌های ۷ (آ) تا ۷ (ت) معلوم می‌شود. نمودارها همه دایره به شعاع ۱ هستند، ولی مراکزشان در ربع‌های مختلف



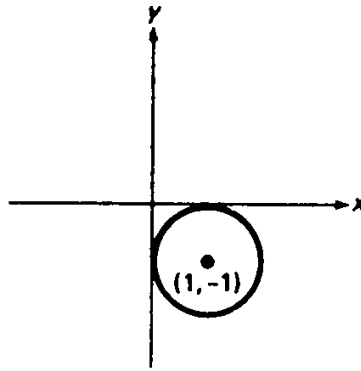
نمودار $(x+1)^2 + (y-1)^2 = 1$
(ب)



نمودار $(x-1)^2 + (y-1)^2 = 1$
(آ)



نمودار $(x+1)^2 + (y+1)^2 = 1$
(ت)



نمودار $(x-1)^2 + (y+1)^2 = 1$
(پ)

شکل ۷

است. اما نمودار (۴) نسبت به خط $y = x$ متقارن است، زیرا از تعویض x و y در (۴) معادله زیر نتیجه می‌شود:

$$(y-1)^2 + (x-1)^2 = 1,$$

که با (۴) معادل است؛ و لذا، همان مجموعه جواب را دارد. انتظار این تقارن می‌رفت، زیرا (۴) معادله دایره‌ای است که مرکزش بر خط $y = x$ قرار دارد.

معادلات متمایز می‌توانند مجموعه جواب یکسان داشته باشند. مثلاً: معادلات $x + y = 0$ و $x^2 + 2xy + y^2 = (x + y)^2 = 0$ دقیقاً "مجموعه جواب یکسان دارند و آن عبارت است از تمام نقاط خط $y = -x$. باید توجه داشت که گاهی معادلات با مجموعه جوابهای

مختلف جوابهای مشترک دارند. مثلاً، دو معادله اول مثال ۵ در جواب $x = 0, y = 1$ سهیم اند ولی سایرین نیستند. این را چگونه به طور هندسی توضیح می دهید؟
 دو تقارن ممکن است سومی را ایجاد کند. مثلاً، یک نمودار متقارن نسبت به هر دو محور مختصات نسبت به مبدأ متقارن است، و اگر نسبت به یک محور مختصات و مبدأ متقارن باشد، نسبت به محور دیگر نیز چنین است (این احکام را تحقیق کنید).

مسائل

فرض کنید دستگاه xy با بردن مبدأ آن به نقطه داده شده انتقال یافته باشد. معادلات انتقال نظیر را بنویسید.

۱ ✓ $(0, 10)$ ۲ ✓ $(-5, 0)$ ۳ ✓ $(1, -2)$ ۴ ✓ $(-6, 4)$

مختصات قدیم مبدأ جدید را پس از انتقال محورها ذکر شده بیابید.

۵ ✓ $x' = x - 3, y' = y - 5$ ۶ ✓ $x' = x + 2, y' = y - 1$

۷ ✓ $x' = x, y' = y + 1$ ۸ ✓ $x' = x + 5, y' = y$

۹ ✓ فرض کنید دستگاه xy ، ۳ واحد به راست و ۴ واحد به پایین انتقال یافته، و بدین

وسیله دستگاه جدید $x'y'$ تولید شده باشد. فرض کنید $A = (1, 3)$ ، $B = (-3, 0)$ ، و

$C = (-1, 4)$ سه نقطه در دستگاه جدید باشند. مختصات قدیم A ، B ، و C چه

هستند؟

مختصات جدید نقاط $A = (2, 1)$ ، $B = (-1, 3)$ ، و $C = (-2, 5)$ را پس از انتقال مبدأ

دستگاه xy به

۱۰ ✓ نقطه A ۱۱ ✓ نقطه B ۱۲ ✓ نقطه C

پیدا نمایید.

فرض کنید G نمودار معادله داده شده باشد. انتقالی از محورها را بیابید که معادله را

ساده کند، و سپس G را توصیف نمایید.

۱۳ ✓ $x^2 - 4x - 4y - 8 = 0$

۱۴ ✓ $x^2 + y^2 + 10x - 12y + 12 = 0$

۱۵ ✓ $xy - x + 2y - 3 = 0$

۱۶ ✓ $3x^2 + 2y^2 - 6x + 8y + 5 = 0$

فرض کنید دستگاه xy حول مبدأ خود به اندازه زاویه داده شده (در جهت خلاف

عقربه‌های ساعت) بچرخد. معادلات دوران نظیر را بنویسید.

۱۷ ✓ 90° ۱۸ ✓ -30° ۱۹ ✓ 60° ۲۰ ✓ 135°

مختصات جدید نقاط $A = (3, 1)$ ، $B = (-1, 5)$ ، و $C = (2, -3)$ را پس از دوران صفحه xy حول مبدأ خود به اندازه زاویه داده شده پیدا نمایید .

۲۱ ✓ 3π . ۲۲ ✓ -90° . ۲۳ ✓ $\arctan \frac{5}{2}$. ۲۴ ✓ 210°

۲۵ ✓ فرض کنید دستگاه xy حول مبدأ خود به اندازه 60° چرخیده ، و دستگاه $x'y'$ جدید تولید شده باشد . همچنین ، $A = (2\sqrt{3}, -4)$ ، $B = (\sqrt{3}, 0)$ ، و $C = (0, -2\sqrt{3})$ سه نقطه در دستگاه جدید باشند . مختصات قدیم A ، B ، و C چه هستند ؟

فرض کنید G نمودار معادله داده شده باشد . معادله را با دوران دستگاه xy به اندازه 45° (در جهت خلاف عقربه های ساعت) ساده کرده ، و سپس G را توصیف نمایید .

۲۶ $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 8 = 0$

۲۷ $x^2 + 6xy + y^2 - 2 = 0$

۲۸ $x^2 + 2xy + y^2 + x - y = 0$

۲۹ ✓ فرض کنید بیضی $\frac{1}{2}x^2 + y^2 = 1$ به اندازه 3° واحد به چپ و 4° واحد به بالا انتقال یافته باشد . معادله بیضی جدید چیست ؟

۳۰ ✓ فرض کنید هذلولی $x^2 - y^2 = 1$ به اندازه 2° واحد به راست و 5° واحد به پایین انتقال یافته باشد . معادله هذلولی جدید چیست ؟

فرض کنید G نمودار معادله داده شده باشد . G از چهار تقارن مطرح شده در صفحه ۹۲۸ کدامها را دارد ؟

۳۲ ✓ $xy = 1$

۳۱ ✓ $x + y = 1$

۳۴ ✓ $(2-x)x^2 - y^2 = 0$

۳۳ ✓ $|x| + |y| = 1$

۳۶ ✓ $x^2 + 2y^2 = 1$

۳۵ ✓ $x^2y + y - 2x = 0$

هر تابع $y = f(x)$ را که نمودارش نسبت به

۳۸ محور y

۳۷ محور x

۴۰ خط $y = x$

۳۹ مبدأ

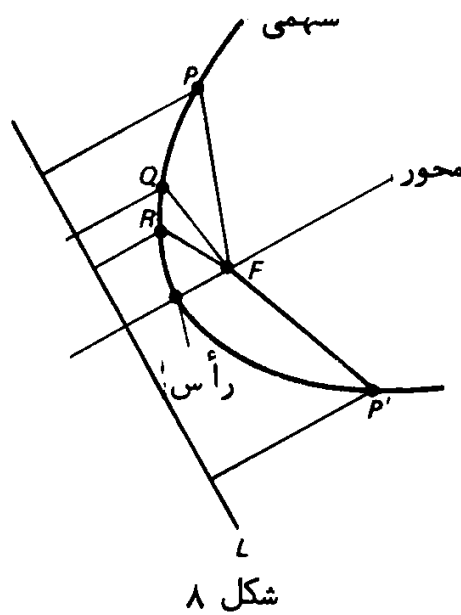
متقارن است توصیف نمایید .

۴۱ ✓ مختصات جدید نقاط $A = (5, 5)$ ، $B = (2, -1)$ ، و $C = (12, -6)$ را پس از انتقال مبدأ دستگاه xy به نقطه B و دوران محورها به اندازه زاویه $\arctan \frac{3}{4}$ حول B پیدا نمایید .

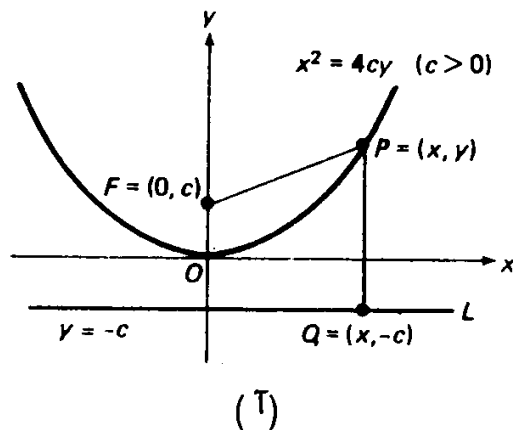
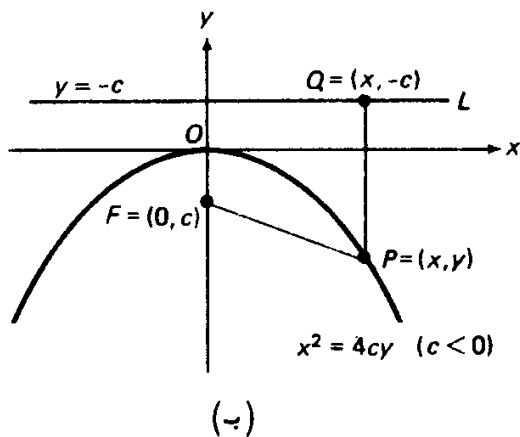
۲۰۱۰ سهمیها

تعریف سهمی . بنابر تعریف ، یک سهمی مجموعه تمام نقاطی در صفحه است که از نقطه ثابت F و خط ثابت L غیرشامل F متساوی الفاصله اند . لذا ، مثلاً ، نقطه P در شکل ۸ از

F و L به یک فاصله است، و این امر در مورد نقاط Q و R نیز درست است. نقطه F کانون و خط L هادی سهمی نام دارد. واضح است که سهمی نسبت به خط مار بر F و عمود بر L متقارن می باشد (مواضع نقاط P و P' را در شکل مقایسه کنید). این خط محور تقارن، یا فقط محور، سهمی نام داشته، و نقطه F منحصر به فرد برخورد آن با سهمی رأس سهمی نامیده می شود. عوجه کنید که رأس در نیمه راه بین کانون F و هادی L قرار دارد.



برای یافتن معادله سهمی، مختصات قائم x, y را در صفحه سهمی در نظر گرفته و آن را در "موضع متعارف"، با رأس در مبدأ O و محور تقارن در امتداد محور y ، قرار می دهیم. در این صورت، کانون F نقطه $(0, c)$ از محور y ، و هادی L خط $y = -c$ است (در نتیجه، O در نیمه راه بین F و L قرار دارد). اگر $c > 0$ ، سهمی مثل شکل ۹ (آ) به بالا باز می شود، حال آنکه اگر $c < 0$ ، مثل شکل ۹ (ب) به پایین باز می گردد. فرض کنیم $P = (x, y)$ نقطه ای از سهمی بوده، و $Q = (x, -c)$ پای عمود وارد از P بر هادی L



باشد. در این صورت، طبق خاصیت معرف سهمی،

$$|PF| = |PQ|,$$

که بر حسب مختصات P و F به شکل زیر درمی‌آید:

$$\sqrt{x^2 + (y - c)^2} = \sqrt{(y + c)^2}$$

با مجذور کردن طرفین این معادله، به دست می‌آوریم

$$x^2 + y^2 - 2cy + c^2 = y^2 + 2cy + c^2,$$

که به معادله

$$(1) \quad x^2 = 4cy,$$

یا اگر y را تابعی از x بگیریم، به

$$y = \frac{x^2}{4c}$$

ساده می‌شود. به عکس، هرگاه نقطه $P = (x, y)$ چنان باشد که در (۱) صدق کند، آنگاه با عکس کردن مراحل محاسبه، درمی‌یابیم که $|PF| = |PQ|$. بنابراین، (۱) معادله سهمی در موضع داده شده می‌باشد.

موضع متعارف دیگر سهمی آن است که رأسش را مثل قبل در مبدأ گذارده، ولی محور تقارنش را به جای محور y در امتداد محور x قرار دهیم. در این وضع کانون F نقطه $(c, 0)$ از محور x ، و هادی L خط $x = -c$ می‌باشد. همان استدلال قبل نشان می‌دهد که معادله سهمی در این وضع عبارت است از

$$(2) \quad y^2 = 4cx,$$

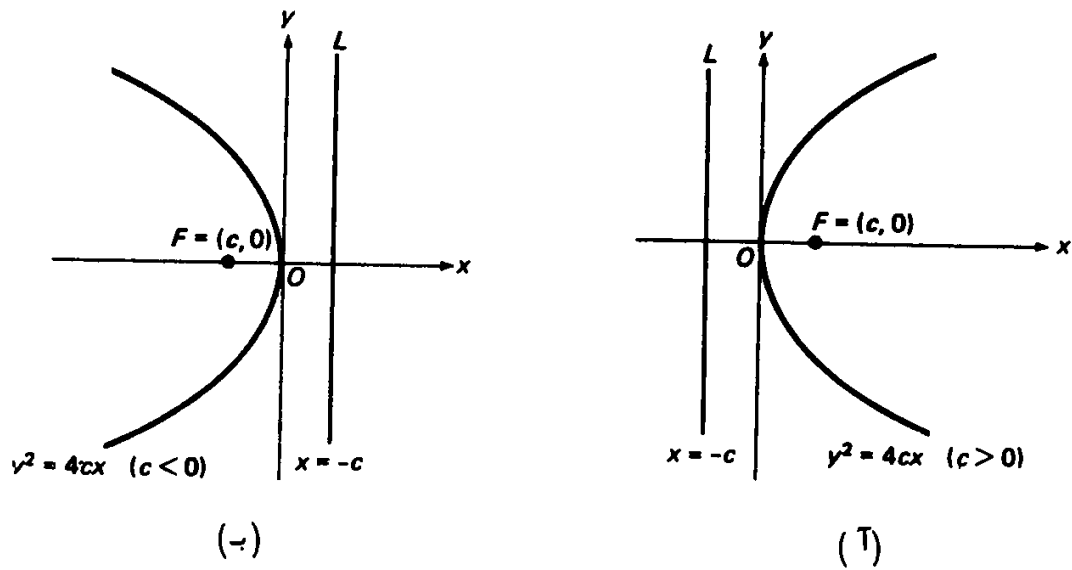
یا، اگر x را تابع y بگیریم،

$$x = \frac{y^2}{4c}$$

اگر $c > 0$ ، سهمی مثل شکل ۱۰ (آ) به راست باز می‌شود، حال آنکه اگر $c < 0$ ، مثل شکل ۱۰ (ب) به چپ باز خواهد شد. توجه کنید که هر یک از معادلات (۱) و (۲) را می‌توان از دیگری به وسیله تعویض متغیرهای x و y باهم به دست آورد.

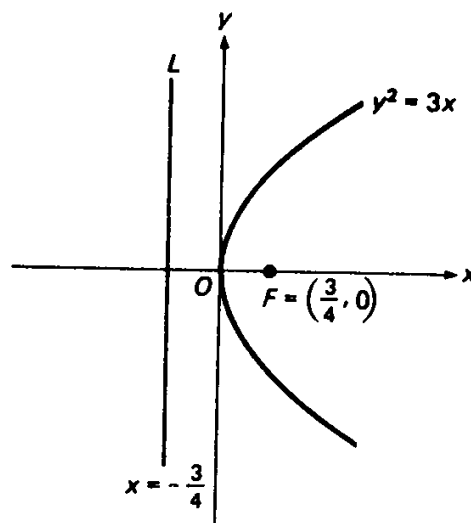
مثال ۱. نمودار معادله $y^2 = 3x$ را بیابید.

حل. معادله به شکل (۲) به ازای $c = \frac{3}{4}$ است؛ و در نتیجه، نظیر سهمی است که رأسش



شکل ۱۰

در مبداء و محور x محور تقارن آن می باشد (ر. ک. شکل ۱۱). سهمی به راست باز می شود (زیرا $c > 0$)، کانون F آن در نقطه $(\frac{3}{4}, 0)$ است، و هادی اش خط $x = -\frac{3}{4}$ می باشد.



شکل ۱۱

معادلات به شکل متعارف، هر یک از معادلات (۱) و (۲) نمایش سهمی است که رأسش در مبداء بوده و یکی از محورهای مختصات محور تقارن آن می باشد. فرض کنیم هر یک از سهمیها را با انتقال رأسش به نقطه (a, b) انتقال داده باشیم. در این صورت، معادلات (۱) و (۲) به

(۳) $(x - a)^2 = 4c(y - b)$

(۴) $(y - b)^2 = 4c(x - a)$

تبدیل می‌شوند (معادله (۳') ، صفحه ۹۲۷ ، را به یاد آورید) . به بیان مشروح ، (۳) معادله سهمی به رأس (a, b) ، فاصله کانون تا رأس $|c|$ ، و خط $x = a$ به عنوان محور است که اگر $c > 0$ به بالا و اگر $c < 0$ به پایین باز می‌شود ، حال آنکه (۴) معادله سهمی به رأس (a, b) ، فاصله کانون تا رأس $|c|$ ، و خط $y = b$ به عنوان محور است که اگر $c > 0$ به راست و اگر $c < 0$ به چپ باز می‌شود . این معادلات را معادلات سهمی به شکل متعارف می‌نامند . معادلات (۳) و (۴) در حالت خاص $a = b = 0$ به (۱) و (۲) تحویل می‌شوند .

مثال ۲ . نمودار معادله

$$(5) \quad x^2 - 2x + 8y + 9 = 0$$

را پیدا کنید .

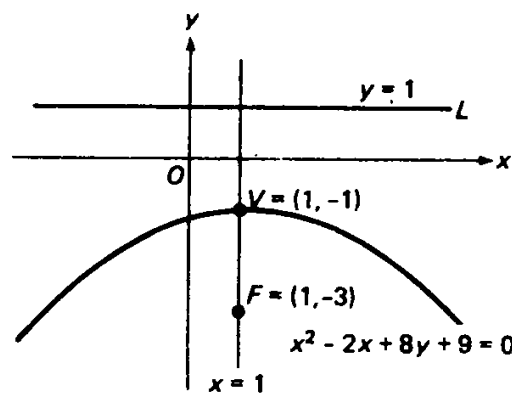
حل . با کامل کردن مربعها ، معلوم می‌شود که (۵) را می‌توان به شکل زیر نوشت :

$$(x - 1)^2 + 8(y + 1) = 0$$

یا

$$(x - 1)^2 = -8(y + 1),$$

که به شکل متعارف (۳) به ازای $a = 1, b = -1, c = -2$ است . این معادله سهمی به رأس $V = (1, -1)$ و محور $x = 1$ است (ر. ک. شکل ۱۲) . سهمی به پایین باز می‌شود (چون



شکل ۱۲

$(c < 0)$ ، کانونش $F = (1, -3)$ است ، و هادی‌اش L خط $y = 1$ می‌باشد . برای تعیین F و L از این استفاده کرده‌ایم که فاصله کانون تا هادی $|c| = 2$ است . در نتیجه ، F ، ۲ واحد زیر رأس V است ، حال آنکه L ، ۲ واحد بالای V می‌باشد .

هر یک از معادلات (۳) و (۴) دارای این خاصیت است که نسبت به یکی از دو

متغیر x و y درجه^۶ دوم و نسبت به دیگری خطی است و جمله‌ای شامل حاصل ضرب xy ندارد. به عکس، هر معادله با این خاصیت را می‌توان با تقسیم بر ضریب جمله^۶ درجه^۶ دوم به یکی از صور زیر نوشت:

$$(۶) \quad x^2 + Ax + By + C = 0 \quad (B \neq 0)$$

یا

$$(۷) \quad y^2 + Ax + By + C = 0 \quad (A \neq 0)$$

اما، مثل مثال ۲، هر یک از معادلات (۶) و (۷) را می‌توان با کامل کردن مربع به یکی از اشکال متعارف (۳) و (۴) درآورد؛ و لذا، نمودار هر معادله یک سهمی است که محورش موازی یکی از محورهای مختصات است. در واقع، با کامل کردن مربعها در (۶) و (۷)، معادلات معادل زیر به دست می‌آیند:

$$(۶') \quad \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 = -B\left(y + \frac{C}{B} - \frac{A^2}{4B}\right),$$

و

$$(۷') \quad \left(y + \frac{B}{2}\right)^2 = -A\left(x + \frac{C}{A} - \frac{B^2}{4A}\right),$$

که (۶') به شکل (۳) و (۷') به شکل (۴) است. لذا، یک سهمی معادله‌ای به شکل (۶) یا (۷) دارد اگر و فقط اگر محورش با یکی از محورهای مختصات موازی باشد. در مثال بعد سهمی با محور مایل در نظر می‌گیریم.

مثال ۳. معادله^۶ سهمی را بیابید که نقطه^۶ $(1, 1)$ کانون F و خط

$$(۸) \quad x + y + 2 = 0$$

محور L آن باشد.

حل. نقطه^۶ $P = (x, y)$ متعلق به سهمی است اگر و فقط اگر

$$\sqrt{(x-1)^2 + (y-1)^2} = \frac{|x+y+2|}{\sqrt{2}},$$

که در آن طرف چپ فاصله^۶ بین P و F است، و طرف راست فاصله^۶ بین P و خط (۸) است که به کمک قضیه^۶ ۱۰، صفحه^۶ ۳۴، حساب می‌شود. با مربع کردن طرفین این معادله خواهیم داشت

$$(x-1)^2 + (y-1)^2 = \frac{1}{2}(x+y+2)^2.$$

پس نتیجه می شود که

$$2(x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1) = x^2 + 2xy + y^2 + 4(x + y) + 4$$

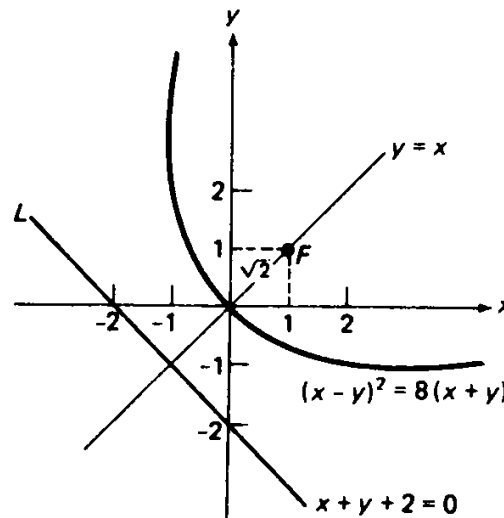
یا

$$(9) \quad x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y = 0,$$

که می توان آن را به صورت زیر نیز نوشت :

$$(10) \quad (x - y)^2 = 8(x + y).$$

توجه کنید که معادله (۹) به شکل (۶) یا (۷) نیست ، و در واقع جمله ای شامل حاصل ضرب xy دارد . شکل ۱۳ سهمی مورد بحث را نشان می دهد ، که همداء رأس آن بوده و خط



شکل ۱۳

مایل $y = x$ محور آن می باشد . به زبان جبر ، تقارن سهمی حول خط $y = x$ متناظر این امر است که معادله (۹) یا (۱۰) از تعویض متغیرهای x و y باهم تغییر نمی کند .

مثال ۴ . از شکل ۱۳ برمی آید که سهمی (۱۰) حاصل دوران سهمی

$$(11) \quad y^2 = 4\sqrt{2}x$$

حول رأس و به اندازه زاویه 45° در جهت خلاف عقربه های ساعت است . این مطلب را به طور جبری تحقیق کنید .

حل . با انتخاب $\theta = 45^\circ$ در معادلات دوران (۲) ، صفحه ۹۲۴ ، مثل مثال ۴ ، صفحه ۹۲۵ ، به دست می آوریم

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y'), \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y'),$$

با گذاردن این عبارات در (۱۰) نتیجه می‌شود که

$$\left[\frac{1}{\sqrt{2}}(-2y') \right]^2 = \frac{8}{\sqrt{2}}(2x'),$$

یا معادلا"

$$(11) \quad y'^2 = 4\sqrt{2}x',$$

که همان معادله (۱۱) است جز آنکه x و y پریمدار شده‌اند. لذا، معادله (۱۰) به معادله (۱۱) در یک دستگاه $x'y'$ حاصل از دوران دستگاه xy به اندازه زاویه 45° در جهت خلاف عقربه‌های ساعت ساده شده است. بنابراین، دوران سهمی (۱۱) به اندازه 45° خلاف عقربه‌های ساعت حول مبدأ (رأس آن) آن را به سهمی (۱۰) خواهد برد.

خاصیت انعکاسی سهمی. یک خاصیت جالب سهمی، که کاربردهای عملی بسیار دارد، خاصیت انعکاسی است. فرض کنیم T خط مماس در هر نقطه $P = (x_0, y_0)$ از سهمی

$$(12) \quad y^2 = 4cx \quad (c > 0),$$

با کانون $F = (c, 0)$ بوده، و Q نقطه تقاطع T با محور x باشد [ر. ک. شکل ۱۴ (T)]. با مشتگیری از (۱۲) نسبت به x ، به دست می‌آوریم

$$2y \frac{dy}{dx} = 4c$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = \frac{2c}{y}.$$

لذا، اگر $y_0 \neq 0$ ، مماس T خطی به معادله

$$y - y_0 = \frac{2c}{y_0}(x - x_0),$$

یا معادلا"

$$yy_0 = 2c(x - x_0) + y_0^2 = 2c(x - x_0) + 4cx_0,$$

است، که به صورت زیر ساده می‌شود:

$$yy_0 = 2c(x + x_0).$$

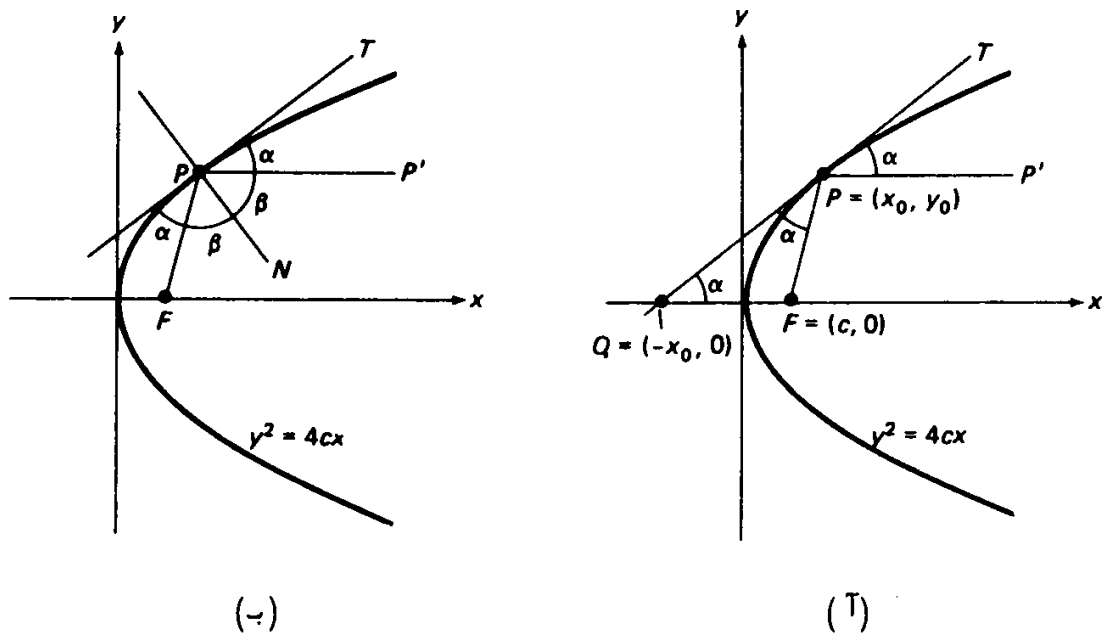
بنابراین، T دارای قطع x برابر $-x_0$ است؛ یعنی، $Q = (-x_0, 0)$ و

$$|FQ| = x_0 + c$$

(ر.ک. شکل) ۱۰. اما

$$|FP| = \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2} = \sqrt{(x_0 - c)^2 + 4cx_0} = \sqrt{(x_0 + c)^2} = x_0 + c,$$

در نتیجه، $|FP| = |FQ|$. لذا، مثلث FPQ متساوی الساقین با دو زاویه مساوی در P و Q است. پس نتیجه می شود که زاویه بین T و PF مساوی زاویه بین T و محور x است، که خود مساوی زاویه بین T و PP' می باشد که PP' خط مار بر P موازی محور x خواهد بود (ر. ک. شکل ۱۴ (آ)). که در آن این زاویه با α نموده می شود. به بیان معادل، اگر خط قائم به سهمی در نقطه P باشد، زاویه بین N و PF مساوی زاویه بین N و PP' است. (ر. ک. شکل ۱۴ (ب))، که در آن این زاویه با β نموده می شود.

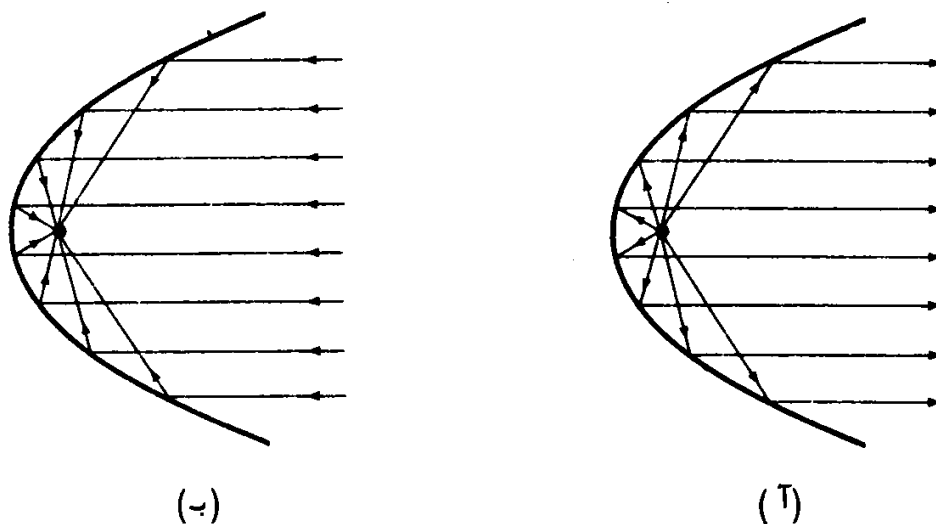


شکل ۱۴

حال فرض کنیم S یک آینه سهموی باشد؛ یعنی، آینه‌ای به شکل سطح حاصل از دوران یک سهمی حول محور تقارن خود (یک سهمی گون دوار). از نکات فوق و قانون انعکاس اثبات شده در مثال ۶، صفحه ۳۳۱، که علاوه بر صفحه برای یک سطح خمیده هموار نیز برقرار است، معلوم می شود که اشعه صادر شده از یک منبع نقطه‌ای نور واقع در

۱. در اینجا تلویحا "فرض می کنیم نقطه تماس P بر محور x (محور سهمی) واقع نیست. اگر چنین باشد، پاره خط FP نیز بر محور x واقع بوده و با مماس T که اینک قائم است زاویه 90° می سازد (چرا؟). ضمن گذشتن از این مطلب ذکر می کنیم که هر سهمی محورهايش را در زوایای قائمه قطع می کند.

کانون S (کانون سهمی مولد) پس از بازگشت از S به صورت موازی درمی آیند ، و این امر در شکل ۱۵ (A) نموده شده است . به این دلیل است که از آینه های سهموی در چراغ های جلو اتومبیل ، نورافکنها ، و آنتنهای رادار ، و غیره استفاده می شود . با همین استدلال " در جهت عکس " ، می بینیم که یک دسته شعاع نور موازی پس از برخورد با یک آینه^۶ سهموی در یک نقطه از محور تقارن آن ، مثل شکل ۱۵ (ب) ، جمع می شوند . به این دلیل ، سعی می کنند با رنج بسیار آینه های سهموی را بدقت ساخته و در تلسکوپهای انعکاسی به کار برند .



شکل ۱۵

سهمیها نقش مهمی در حل مسائل مکانیک در صفحه و فضا دارند . بخصوص ، یک پرتابه که فقط تحت اثر ثقل باشد مسیر سهموی می پیماید (ر.ک . مثال ۱ ، صفحه^۶ ۱۱۰۴) ، و کابل یک پل معلق در صورتی که وزن جاده توزیع یکنواخت داشته باشد شکل یک سهمی خواهد داشت (ر.ک . مثال ۶ ، صفحه^۶ ۱۱۱۱) .

مسائل

معادله^۶ سهمی را در صورتی به شکل متعارف بنویسید که

- ۱/ به بالا باز شود ، رأسش $(0, 0)$ و فاصله^۶ کانون تا هادی اش $\frac{1}{4}$ باشد
- ۲/ به پایین باز شود ، رأسش $(0, 0)$ و فاصله^۶ کانون تا رأسش ۸ باشد
- ۳/ به چپ باز شود ، رأسش $(0, 0)$ و فاصله^۶ کانون تا رأسش ۵ باشد
- ۴/ به راست باز شود ، رأسش $(0, 0)$ و فاصله^۶ کانون تا هادی اش $\frac{7}{2}$ باشد
- ۵/ به پایین باز شود ، رأسش $(1, -2)$ و فاصله^۶ کانون تا رأسش ۹ باشد

- ۶ ✓ به بالا باز شود ، رأسش $(-3, 4)$ و فاصله کانون تا هادی اش $\frac{3}{2}$ باشد
 - ۷ ✓ به راست باز شود ، رأسش $(7, 6)$ و فاصله کانون تا هادی اش $\frac{1}{2}$ باشد
 - ۸ ✓ به چپ باز شود ، رأسش $(-5, -10)$ و فاصله کانون تا رأسش 3 باشد
- معادله سهمی با کانون و هادی داده شده را بیابید .

$(4, 3), y + 1 = 0$. ۱۰ ✓ $(7, 2), x - 5 = 0$. ۹ ✓

$(5, -3), x - 4 = 0$. ۱۲ ✓ $(-8, 1), y - 2 = 0$. ۱۱ ✓

$(0, 0), x + 2y - 3 = 0$. ۱۴ ✓ $(2, -1), x - y - 1 = 0$. ۱۳ ✓

سهمی به معادله داده شده را رسم کرده ، رأس V ، کانون F ، و هادی L آن را بیابید .

$x^2 = 6y$. ۱۶ ✓ $y^2 = 8x$. ۱۵ ✓

$y^2 = -5x$. ۱۸ ✓ $x^2 = -4y$. ۱۷ ✓

$(x - \frac{1}{2})^2 = -8(y + 3)$. ۲۰ ✓ $(y + 1)^2 = -6(x + 2)$. ۱۹ ✓

$(y - 2)^2 = 10x$. ۲۲ ✓ $(x + 4)^2 = 2(y - 3)$. ۲۱ ✓

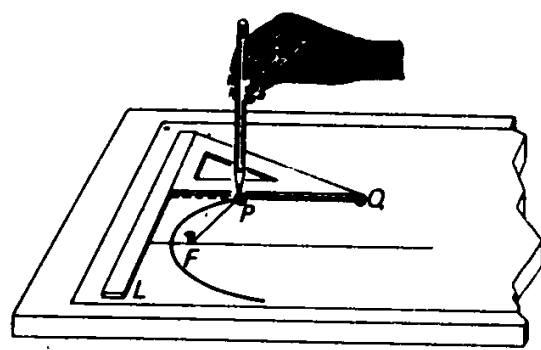
$y^2 - 8x + 8y = 0$. ۲۴ ✓ $x^2 - 4x - 4y - 8 = 0$. ۲۳ ✓

$x^2 - 2x + 12y + 25 = 0$. ۲۶ ✓ $y^2 + 8x - 6y + 17 = 0$. ۲۵ ✓

$x^2 + 2xy + y^2 + 4x - 4y = 0$. ۲۷ ✓

۲۸ . یک سهمی به کانون F و هادی L را می توان به صورت زیر ساخت :

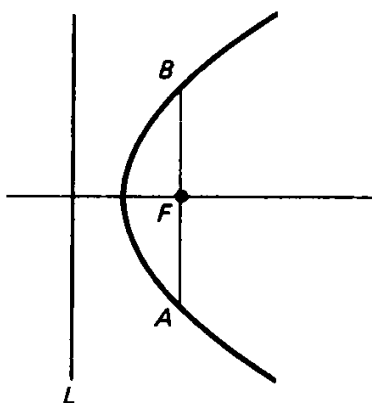
به یک تخته رسم خطکشی وصل کنید که یک طرفش در امتداد L باشد ، و ضلع کوتاه یک گونیا را به خطکش بچسبانید . در رأس مقابل Q مثلث یک سر قطعه ای از نخ به طول ضلع بلند مثلث را بسته و سر دیگر آن را در F محکم نمایید . مثلث را در امتداد خطکش بلغزانید ضمن آنکه ، مثل شکل ۱۶ ، نخ را به وسیله یک مداد کشیده نگهداشته‌اید . در این صورت ، نقطه P مداد بخشی از یک سهمی را رسم خواهد کرد .



ساختن سهمی

توضیح دهید چرا این ساختن کار می‌کند .

- ۲۹ . پاره‌خطی که دو انتهایش بر یک سهمی است وتر آن سهمی نام دارد ، و وتر ماربر کانون F عمود بر محور و موازی هادی L راست وتر کانونی نامیده می‌شود (این در شکل ۱۷ وتر AB است) .



شکل ۱۷

نشان دهید که طول راست وتر کانونی دو برابر فاصله F تا L است .

- ۳۰ . نشان دهید که دایره به قطر راست وتر کانونی یک سهمی بر هادی سهمی مماس است .

۳۱ . نشان دهید که منحنی به معادلات پارامتری

$$(یک) \quad x = ct^2, \quad y = 2ct \quad (-\infty < t < \infty)$$

سهمی است . در جهت منحنی بحث کنید .

- ۳۲ . نشان دهید که مماس بر سهمی (یک) در یک نقطه به پارامتر t خط $x - ty + ct^2 = 0$ است .

- ۳۳ . مکان هندسی نقاط میانی تمام وترهای سهمی $y^2 = 4cx$ را بیابید که رأس یک‌انتهای آنها باشد .

- ۳۴ . سهمی $y^2 = 4cx$ ($c > 0$) را به رأس $V = (0, 0)$ و کانون $F = (c, 0)$ در نظر بگیرید .

نشان دهید نقطه $A = (a, 0)$ واقع بر محور سهمی در صورتی از هر نقطهٔ دیگر سهمی به V نزدیکتر است که $0 < a \leq 2c$ ، ولی در صورتی به نقطه‌ای از سهمی غیر از V نزدیکتر است که $a > 2c$. (بخصوص ، کانون F از هر نقطهٔ دیگر سهمی به V نزدیکتر است .)

نقاط اشتراک خط و سهمی داده شده را (در صورت وجود) بیابید .

$$3x - 2y + 6 = 0, y^2 = 6x \quad ۳۵ \checkmark$$

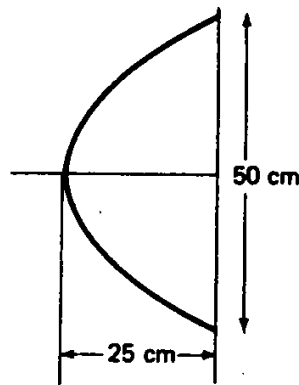
$$x + y - 3 = 0, x^2 = 4y \quad ۳۶ \checkmark$$

۳۷ ✓ $x + 6y + 6 = 0, x^2 = -18y$

۳۸ ✓ $3x + 4y - 12 = 0, y^2 = -9x$

۳۹. با دوران محورها، نشان دهید که نمودار معادله $\sqrt{x} + \sqrt{y} = 1$ بخشی از یک سهمی است. رأس V ، کانون F ، و هادی L این سهمی را پیدا کنید.

۴۰. مقطع عرضی یک آینه سهموی در شکل ۱۸ نموده شده است. منبع نور در چه فاصله‌ای از رأس آن قرار گیرد تا اشعه منعکس شده موازی باشند؟



شکل ۱۸

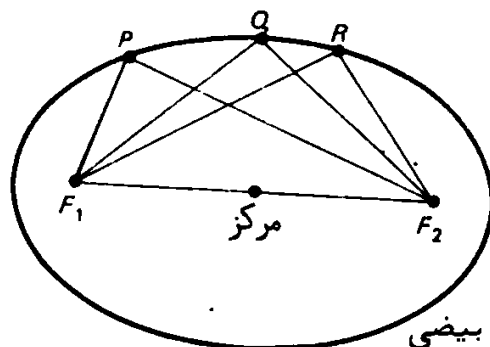
۴۱. دو خط مار بر نقطه $(2, 9)$ و مماس بر سهمی $y^2 = 36x$ را بیابید.

۴۲. مماس بر سهمی $x^2 = 16y$ و عمود بر خط $2x + 4y + 7 = 0$ را بیابید.

۴۳. مماس بر سهمی $y^2 = 12x$ و موازی خط $3x - 2y + 30 = 0$ را بیابید. فاصله بین مماس و خط چقدر است؟

۳۰۱۰ بیضیها

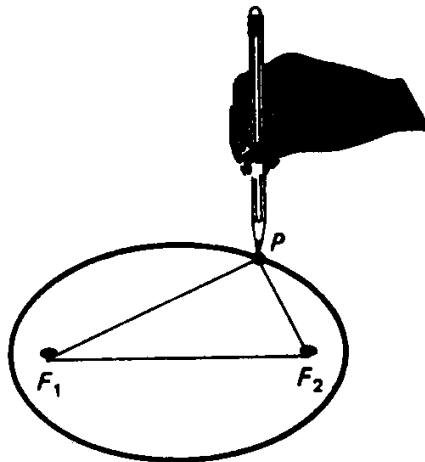
تعریف بیضی. بنا بر تعریف، بیضی مجموعه تمام نقاطی از صفحه است که مجموع فواصلشان تا دو نقطه ثابت F_1 و F_2 ثابت باشد. لذا، مثلاً، در شکل ۱۹ مجموع فواصل نقطه P تا دو نقطه F_1 و F_2 همان مجموع نظیر به نقطه Q یا نقطه R می‌باشد. نقاط F_1 و F_2



شکل ۱۹

کانونهای بیضی نام داشته، و نقطه میانی پاره خط F_1F_2 واصل بین کانونها مرکز بیضی خوانده می شود.

این تعریف ما را به ساختن ساده یک بیضی هدایت می کند. فرض کنید دو پونز در F_1 و F_2 یک صفحه کاغذ فرو کرده، و مثل شکل ۲۰ یک حلقه نخ در آنها قرار داده باشیم. (طبیعی است که طول نخ نمی تواند از دو برابر فاصله بین پونزها کمتر باشد.) حال اگر



ساختن یک بیضی

شکل ۲۰

مدادی را داخل حلقه کرده و با کشیده نگه داشتن نخ آن را حرکت دهیم، نقطه P مداد یک بیضی به کانونهای F_1 و F_2 رسم خواهد کرد. به این دلیل است که مجموع $|PF_1| + |PF_2|$ به ازای هر موضع P ، مساوی طول نخ منهای فاصله بین کانونها می باشد. اگر کانونها بر هم منطبق باشند، بیضی به دایره تبدیل خواهد شد.

برای یافتن معادله بیضی، در صفحه آن مختصات قائم x و y را اختیار کرده و آن را در "موضع متعارف" قرار می دهیم به این ترتیب که، مثل شکل ۲۱ (آ)، مرکز مبداء O و کانونهایش در امتداد محور x باشند. در این صورت، کانونها عبارتند از نقاط $F_1 = (-c, 0)$ و $F_2 = (c, 0)$ که به فاصله $2c$ ($c > 0$) از هم قرار دارند. فرض کنیم $P = (x, y)$ نقطه ای از بیضی بوده، و $2a$ مجموع ثابت فواصل P از کانونها باشد. در این صورت، $a > c$ جز در حالت حدی $a = c$ که در آن بیضی به پاره خط واصل بین کانونها "تباه می شود". بنابراین خاصیت معرف بیضی،

$$|PF_1| + |PF_2| = 2a,$$

که به شکل زیر درمی آید:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} + \sqrt{(x-c)^2 + y^2} = 2a$$

یا ، بر حسب مختصات P ، F_1 ، و F_2 ،

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

با مجذور کردن طرفین این معادله ، به دست می آوریم

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

که به شکل زیر ساده می شود :

$$a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = a^2 - cx.$$

با مجذور کردن مجدد طرفین ، معلوم می شود که

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = a^4 - 2a^2cx + c^2x^2,$$

و در نتیجه ،

$$(1) \quad x^2(a^2 - c^2) + a^2y^2 = a^2(a^2 - c^2).$$

با گرفتن ثابت مثبت b به صورت زیر

$$b^2 = a^2 - c^2,$$

یا ، معادلا " ،

$$(2) \quad a^2 = b^2 + c^2,$$

رابطه (۱) را می توان به شکل زیر نوشت :

$$x^2b^2 + a^2y^2 = a^2b^2,$$

که به نوبه خود ، پس از تقسیم بر a^2b^2 ، خواهد شد

$$(3) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1.$$

به عکس ، هرگاه نقطه $P = (x, y)$ چنان باشد که (۳) برقرار شود ، آنگاه در صورتی که مراحل این محاسبات را بدقت عکس کنیم خواهیم داشت $|PF_1| + |PF_2| = 2a$ (شرح مطلب را به عنوان تمرین می گذاریم) . بنابراین ، (۳) معادله بیضی در موضع متعارف است .

محورهای طول و اقصر . چون معادله (۳) در صورت تعویض x با $-x$ و y با $-y$ تغییر نمی کند ، هر دو محور مختصات محورهای تقارن بیضی (۳) می باشند . به طور کلی ، هر بیضی دو محور تقارن دارد ، یکی خط مار بر کانونهای F_1 و F_2 و دیگری عمود منصف پاره خط F_1F_2 . یک بیضی دو وتر از محورهای تقارن خود جدا می کند . وتر بزرگتر را محور طول و وتر کوچکتر محور اقصر بیضی نام دارد . بیضی (۳) دارای قطعهای x ، $(\pm a, 0)$

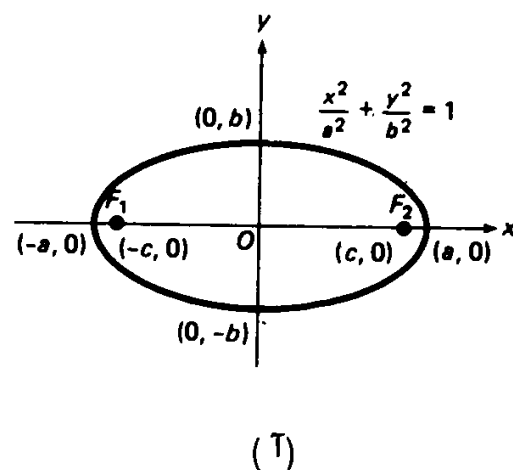
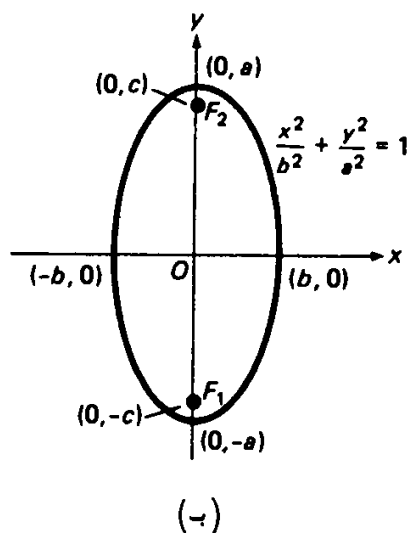
و قطعهای y ، $(0, \pm b)$ بوده، و چون $a > b$ ، به خاطر فرمول (۲)، وتر واصل بین نقاط $(\pm a, 0)$ از وتر واصل بین نقاط $(0, \pm b)$ بزرگتر است. لذا، محور اطول این بیضی در امتداد محور x و محور اقصی آن در امتداد محور y می باشد [ر. ک. شکل ۲۱ (آ)]. نقاط انتهایی محور اطول، که در این حالت قطعهای x ، $(\pm a, 0)$ اند، رئوس بیضی نام دارند. کانونهای بیضی در نقاط $(\pm c, 0)$ می باشند، که

$$c = \sqrt{a^2 - b^2},$$

و این را می توان با حل معادله (۲) نسبت به c به دست آورد. اگر در معادله (۳) x و y را با هم عوض کنیم، بیضی دیگر

$$(۴) \quad \frac{x^2}{b^2} + \frac{y^2}{a^2} = 1$$

را به دست می آوریم که آن را نیز در موضع متعارف می گویند. بیضی (۴) دارای قطعهای x ، $(\pm b, 0)$ و قطعهای y ، $(0, \pm a)$ است که $a > b$. لذا، در اینجا محور اطول در امتداد محور y بوده، و نقاط انتهایی اش (رئوس) عبارتند از $(0, \pm a)$ ، ولی محور اقصی با نقاط انتهایی $(\pm b, 0)$ در امتداد محور x می باشد [ر. ک. شکل ۲۱ (ب)]. بنابراین، کانونهای بیضی (۴) نقاط $(0, \pm c)$ می باشند، که مجدداً c مساوی $\sqrt{a^2 - b^2}$ می باشد.



شکل ۲۱

فرمول (۲) تعبیر هندسی ساده‌ای دارد. نقاط $(0, 0)$ ، $(0, b)$ ، و $(c, 0)$ در شکل ۲۱ (آ)، یا نقاط $(0, 0)$ ، $(b, 0)$ ، و $(0, c)$ در شکل ۲۱ (ب)، رئوس یک مثلث قائم‌الزاویه‌اند. این مثلث به طول ضلعهای b و c بوده، و وترش به طول a است زیرا هر نقطه انتهایی محور اقصی بیضی در فاصله a تا کانونها قرار دارد (چرا؟). بنابراین، طبق قضیه

فیثاغورس $a^2 = b^2 + c^2$. چون a نصف طول محور اطول بوده و b نصف طول محور اقصر است ، دو طول a و b را معمولاً " نیم محور اطول و نیم محور اقصر می نامند .

مثال ۱ . نمودار معادله $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{4} = 1$ را بیابید .

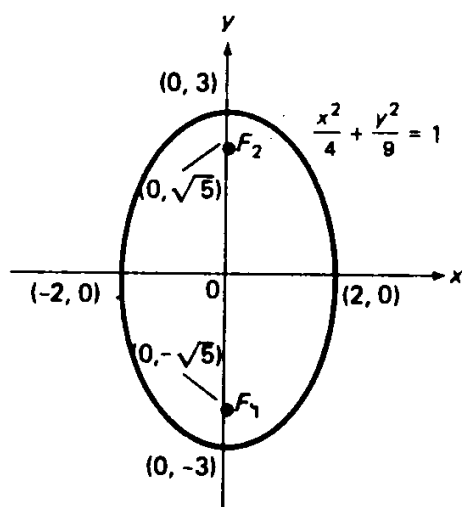
حل . معادله به شکل (۳) است که در آن $a = 3$ ، $b = 2$ ، و

$$c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{3^2 - 2^2} = \sqrt{9 - 4} = \sqrt{5}.$$

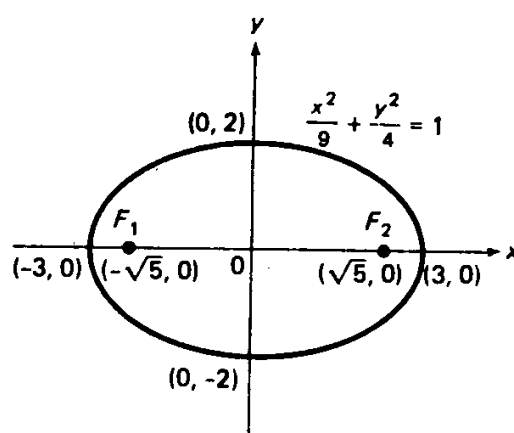
بنابراین ، نمودارش یک بیضی به مرکز مبدا است که محور اطولش افقی با نقاط انتهایی $(\pm 3, 0)$ ، محور اقصرش قائم با نقاط انتهایی $(0, \pm 2)$ ، کانونهایش عبارتند از $F_1 = (-\sqrt{5}, 0)$ ، $F_2 = (\sqrt{5}, 0)$ بر محور x [ر.ک. شکل ۲۲ (آ)].

مثال ۲ . نمودار معادله $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{9} = 1$ را بیابید .

حل . معادله به شکل (۴) است با همان مقادیر a ، b ، و c مثال ۱ . لذا ، نمودارش بیضی است به مرکز مبدا که دارای محور اطول قائم با نقاط انتهایی $(0, \pm 3)$ ، محور اقصر افقی با نقاط انتهایی $(\pm 2, 0)$ ، و کانونهای $F_1 = (0, -\sqrt{5})$ ، $F_2 = (0, \sqrt{5})$ بر محور y [ر.ک. شکل ۲۲ (ب)].



(ب)



(آ)

شکل ۲۲

معادلات به شکل متعارف . معادلات (۳) و (۴) نمایش بیضیهایی هستند به مرکز مبدا

که محورهای مختصات محورهای تقارن آن می‌باشند. معادلات کلبتر

$$(۵) \quad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} + \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

و

$$(۶) \quad \frac{(x - x_0)^2}{b^2} + \frac{(y - y_0)^2}{a^2} = 1$$

نمایش بیضیهایی هستند که از حیث اندازه و شکل مانند بیضیهایی (۳) و (۴) بوده ولی مرکزشان نقطه^۴ (x_0, y_0) است و محورهایشان موازی محورهای مختصات می‌باشند. به طور مشروح، رابطه^۴ (۵) معادله^۴ بیضی است به مرکز (x_0, y_0) ، محور اطول در امتداد خط افقی $y = y_0$ ، و محور اقصر در امتداد خط قائم $x = x_0$ ، حال آنکه رابطه^۴ (۶) معادله^۴ بیضی است به مرکز (x_0, y_0) ، محور اطول در امتداد خط قائم $x = x_0$ ، و محور اقصر در امتداد خط افقی $y = y_0$. در هر دو حالت، محور اطول به طول $2a$ و محور اقصر به طول $2b$ می‌باشد. این معادلات را معادلات بیضی به شکل متعارف می‌نامند. طبیعی است که روابط (۵) و (۶) در حالت خاص $x_0 = y_0 = 0$ به روابط (۳) و (۴) تحویل می‌شوند.

مثال ۳. نمودار معادله^۴

$$(۷) \quad x^2 + 4y^2 + 4x - 8y + 7 = 0$$

را بیابید.

حل. با کامل کردن مربعات، (۷) را به صورت زیر می‌نویسیم:

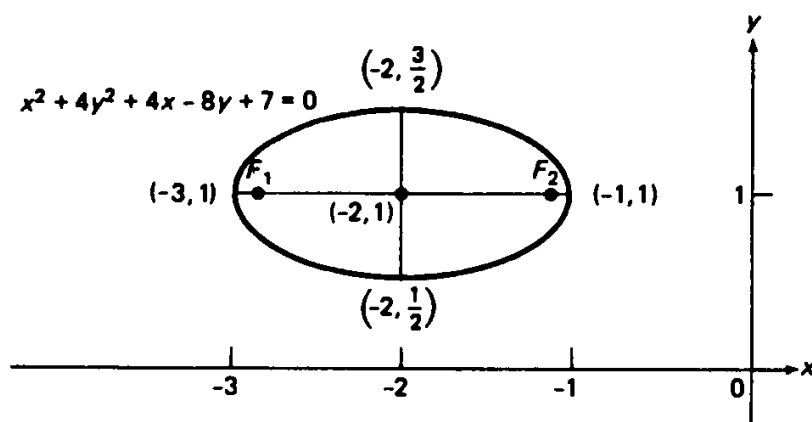
$$(x + 2)^2 + 4(y - 1)^2 = 1$$

یا، معادلا^۴،

$$(x + 2)^2 + \frac{(y - 1)^2}{\left(\frac{1}{2}\right)^2} = 1,$$

که به شکل متعارف (۵) به ازای $\frac{1}{2}$ ، $a = 1$ ، $b = \frac{1}{2}$ ، $x_0 = -2$ ، $y_0 = 1$ است. نمودار این معادله یک بیضی به مرکز $(-2, 1)$ است که محور اطولش افقی و محور اقصرش قائم می‌باشد (ر. ک. شکل ۲۳) نقاط انتهایی محورهای اطول و اقصر عبارتند از $(-2 \pm 1, 1)$ و $(-2, 1 \pm \frac{1}{2})$. یعنی، $(-1, 1)$ ، $(-3, 1)$ و $(-2, \frac{3}{2})$ ، $(-2, \frac{1}{2})$. به علاوه، چون فاصله^۴ هر کانون تا مرکز مساوی است با $c = \sqrt{a^2 - b^2} = \sqrt{1 - \frac{1}{4}} = \frac{1}{2}\sqrt{3}$ ، کانونها عبارتند از $F_1 = (-2 - \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1)$ و

$$. F_2 = (-2 + \frac{1}{2}\sqrt{3}, 1)$$



شکل ۲۳

هر یک از معادلات (۵) و (۶) دارای خواص زیر است: نسبت به هر دو متغیر x و y از درجه دو بوده و جمله شامل حاصل ضرب xy را ندارد، و به علاوه ضرایب x^2 و y^2 متحدالعلامه می‌باشند. به عکس، هر معادله با این خاصیت را می‌توان، پس از تقسیم بر ضریب x^2 ، به شکل زیر نوشت:

$$(۸) \quad x^2 + ky^2 + Ax + By + C = 0 \quad (k > 0)$$

اما، درست مثل مثال ۳، می‌توان معادله (۸) را با کامل کردن مربعها به یکی از اشکال متعارف (۵) و (۶) درآورد؛ و لذا، صرف نظر از بعضی حالات استثنایی، نمودار (۸) یکبیضی است که محورهایش موازی محورهای مختصات اند. در واقع، پس از کامل کردن مربعها، می‌توان (۸) را به صورت زیر نوشت:

$$(۸') \quad \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 + k\left(y + \frac{B}{2k}\right)^2 = D,$$

که در آن

$$D = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4k} - C.$$

اگر $D = 0$ ، نمودار (۸')، و در نتیجه (۸)، تنها نقطه $(-A/2, -B/2k)$ است، و لسی اگر $D < 0$ ، نقاطی مانند (x, y) وجود ندارند که در (۸) صادق باشند؛ یعنی، نمودار (۸) "تهی" می‌باشد. اینها حالاتی استثنایی اند که در بالا ذکر شد. اما، اگر $D > 0$ ، می‌توان (۸') را به شکل معادل زیر نوشت:

$$\frac{[x + (A/2)]^2}{(\sqrt{D})^2} + \frac{[y + (B/2k)]^2}{(\sqrt{D/k})^2} = 1,$$

که معادلهٔ یک بیضی به مرکز $(-A/2, -B/2k)$ می‌باشد. اگر $k > 1$ ، بیضی دارای محور اطول افقی به طول $2\sqrt{D}$ و محور اقصی قائم به طول $2\sqrt{D/k}$ است، ولی اگر $k < 1$ ، دارای محور اطول قائم به طول $2\sqrt{D/k}$ و محور اقصی افقی به طول $2\sqrt{D}$ می‌باشد. اگر $k = 1$ ، بیضی به دایره‌ای به شعاع \sqrt{D} تحویل می‌شود، و در این صورت این بحث به تحلیل معادلهٔ $x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0$ تبدیل می‌شود. که قبلاً در صفحات ۳۹ تا ۴۰ صورت گرفت. لذا، خلاصه کرده می‌گوییم یک بیضی دارای معادلهٔ (۸) است اگر و فقط اگر محورهای موازی محورهای مختصات باشد.

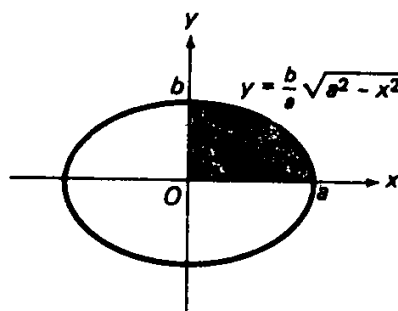
مثال ۴. مساحت A محصور به یک بیضی با نیم محور اطول a و نیم محور اقصی b را پیدا کنید.

حل. با فرض اینکه بیضی نمودار معادلهٔ $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ است خطی به کلیت وارد نمی‌شود. با فرض $y \geq 0$ و حل این معادله نسبت به y معلوم می‌شود که

$$y = \frac{b}{a} \sqrt{a^2 - x^2} \quad (-a \leq x \leq a).$$

بنابر تقارن، A چهار برابر مساحت بین این منحنی و محور x در ربع اول است (مساحت سایه‌دار شکل ۲۴). بنابراین، به کمک مثال ۲، صفحه ۶۲۵،

$$A = 4 \frac{b}{a} \int_0^a \sqrt{a^2 - x^2} dx = 4 \frac{b}{a} \left(\frac{1}{4} \pi a^2 \right) = \pi ab.$$



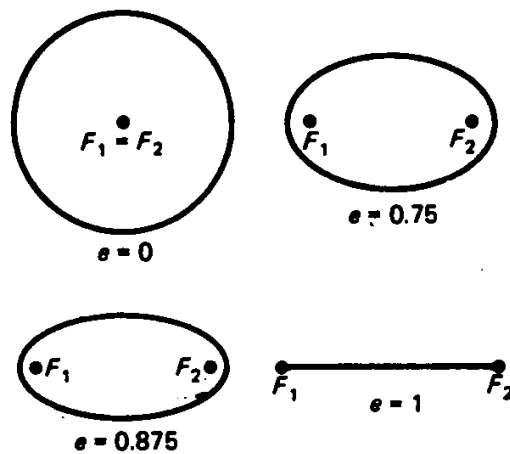
شکل ۲۴

توجه کنید که اگر $a = b$ ، A به مساحت πa^2 داخل یک دایره به شعاع a تحویل می‌شود.

خروج از مرکز بیضی. شکل یک بیضی را می‌توان به راحتی با عددی بین ۰ و ۱، یعنی

$$e = \frac{c}{a}$$

توصیف کرد (این عدد را با پایه لگاریتم طبیعی خلط نکنید). این عدد، به نام خروج از مرکز، نسبت فاصله بین دو کانون به طول محور اطول است، و درجه " بیضوی بیضی " را می‌سنجد. اگر e نزدیک 0 باشد، بیضی تقریباً " مستدیر است، ولی اگر e نزدیک 1 باشد، بیضی خیلی باریک شده و " به شکل سیگار برگ " درمی‌آید. با گرفتن دایره به شعاع a و پاره خط به طول $2a$ به عنوان حالات حدی بیضی، مقادیر $e = 0$ و $e = 1$ را نیز مجاز می‌گیریم (اگر $e = 0$ ، کانونها یکی می‌شوند، و اگر $e = 1$ ، به فاصله $2a$ از هم قرار می‌گیرند) در شکل ۲۵ نحوه بستگی شکل یک بیضی با خروج از مرکز e خود را نشان می‌دهد



بیضیها با خروج از مرکزهای مختلف

شکل ۲۵

که در آن محور اطول در تمام حالات به یک طول بوده و کانونها F_1 و F_2 می‌باشند.

مثال ۵. خروج از مرکز بیضی شکل ۲۲ (T) چقدر است؟

حل. در اینجا $a = 3$ و $c = \sqrt{5}$ ؛ در نتیجه، خروج از مرکز عبارت است از

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{5}}{3} \approx 0.745.$$

بیضی شکل ۲۲ (ب) همین خروج از مرکز را دارد.

مثال ۶. معادله بیضی را بیابید که نیم محور اطولش 4 و خروج از مرکزش $\frac{1}{2}$ بوده و مرکزش مبدأ و محور اطولش افقی باشد.

حل . داریم $a = 4$ و

$$e = \frac{c}{a} = \frac{\sqrt{a^2 - b^2}}{a} = \frac{\sqrt{16 - b^2}}{4} = \frac{1}{2}$$

لذا ، $b^2 = 12$ و بیضی معادله‌ای به شکل زیر دارد :

$$\frac{x^2}{16} + \frac{y^2}{12} = 1.$$

خاصیت انعکاسی بیضی . بیضی ، مانند سهمی ، خاصیت انعکاسی جالبی دارد . فرض کنیم خط مماس در نقطه $P = (x_0, y_0)$ از بیضی

$$(۹) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

به کانونهای $F_1 = (-c, 0)$ و $F_2 = (c, 0)$ بوده ، و Q_1 و Q_2 نقاط اشتراک T با عمودهای مرسوم از F_1 و F_2 باشند [ر. ک. شکل ۲۶ (آ)] . با مشتقگیری از (۹) نسبت به x ، به دست می‌آوریم

$$\frac{2x}{a^2} + \frac{2y}{b^2} \frac{dy}{dx} = 0$$

یا

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{b^2 x}{a^2 y}$$

لذا ، اگر $y_0 \neq 0$ ، مماس T خطی است به معادله

$$y - y_0 = -\frac{b^2 x_0}{a^2 y_0} (x - x_0)$$

یا

$$b^2 x_0 x + a^2 y_0 y - b^2 x_0^2 - a^2 y_0^2 = 0.$$

اما

$$(۱۰) \quad b^2 x_0^2 + a^2 y_0^2 = a^2 b^2,$$

زیرا P بر بیضی واقع است ؛ در نتیجه ، معادله T به شکل زیر تحویل می‌شود :

$$(۱۱) \quad b^2 x_0 x + a^2 y_0 y - a^2 b^2 = 0,$$

یا ، معادلاً ،

$$(۱۱') \quad \frac{x_0 x}{a^2} + \frac{y_0 y}{b^2} = 1.$$

حال فرمول زیر را ثابت می‌کنیم:

$$(۱۲) \quad \frac{|F_1Q_1|}{|F_1P|} = \frac{|F_2Q_2|}{|F_2P|},$$

که نشان می‌دهد که مثلثهای قائم‌الزاویه F_1PQ_1 و F_2PQ_2 متشابه‌اند^۱. در واقع، به کمک (۱۱) و قضیه^۲ ۱۰، صفحه^۳ ۵۵، می‌توان (۱۲) را به شکل زیر نوشت:

$$\frac{|-b^2x_0c - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2} \sqrt{(x_0 + c)^2 + y_0^2}} = \frac{|b^2x_0c - a^2b^2|}{\sqrt{b^4x_0^2 + a^4y_0^2} \sqrt{(x_0 - c)^2 + y_0^2}},$$

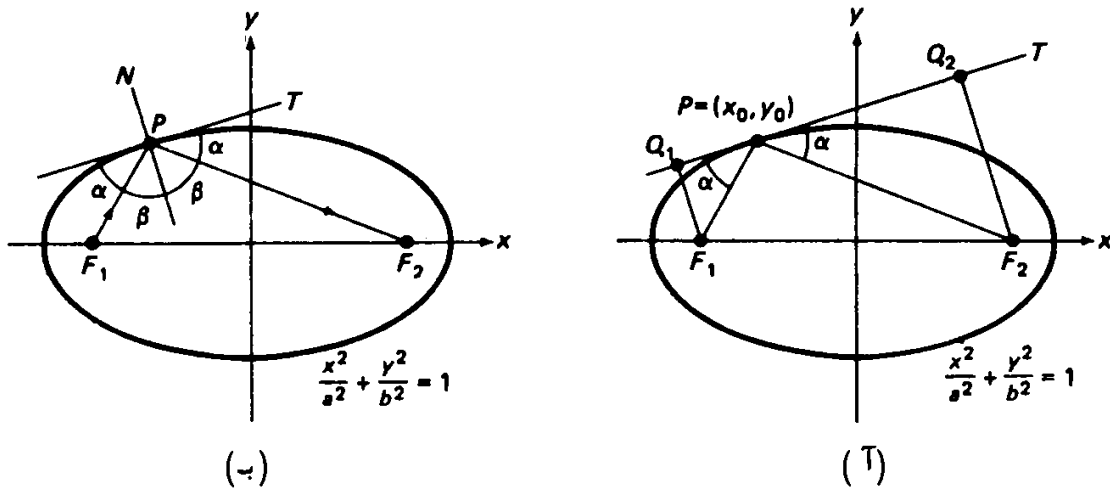
یا، معادلاً،

$$\frac{(x_0^2c^2 + a^4) + 2a^2cx_0}{(x_0^2 + c^2 + y_0^2) + 2cx_0} = \frac{(x_0^2c^2 + a^4) - 2a^2cx_0}{(x_0^2 + c^2 + y_0^2) - 2cx_0},$$

که به رابطه^۴ $a^2(x_0^2 + c^2 + y_0^2) = x_0^2c^2 + a^4$ یا

$$(۱۲') \quad (a^2 - c^2)x_0^2 + a^2y_0^2 = a^2(a^2 - c^2)$$

ساده می‌شود. چون $a^2 - c^2 = b^2$ ، با (۱۰) معادل است، و این امر برقراری (۱۲) و در نتیجه، (۱۲) را به ثبوت می‌رساند. چون مثلثهای F_1PQ_1 و F_2PQ_2 متشابه‌اند، زاویه^۵ بین T و PF_1 مساوی زاویه^۶ بین T و PF_2 است (ر. ک. شکل ۲۶ (آ))، که در آن این



شکل ۲۶

۱. در اینجا تلویحاً "فرض می‌کنیم نقطه^۷ تماس P بر محور اطول واقع نباشد". هرگاه چنین باشد، آنگاه پاره‌خطهای PF_1 و PF_2 نیز بر محور اطول واقع بوده، و با مماس T ، که اینک قائم است (چرا؟)، زاویه^۸ 90° می‌سازند. توجه کنید که یک بیضی هر دو محورش را در زوایای قائمه قطع می‌کند، زیرا اگر T بر محور اقصی واقع باشد افقی و در صورتی که بر محور اطول واقع باشد قائم می‌باشد.

زاویه با α نموده شده است) . به بیان معادل ، اگر N خط قائم به بیضی در نقطه P باشد ، زاویه^۶ بین N و PF_1 مساوی زاویه^۶ بین N و PF_2 است (ر. ک. شکل ۲۶ (ب) ، که در آن این زاویه با β نموده شده است) .

از این نکات و قانون انعکاس ثابت شده در مثال ۶ ، صفحه^۶ (۳۳۱) ، معلوم می شود که هرگاه S آینه ای به شکل سطح حاصل از دوران یک بیضی حول محور طولش باشد ، آنگاه اشعه^۶ خارج شده از یک منبع نقطه ای نور یا صوت واقع در یکی از کانونهای S پس از انعکاس از S همه در کانون دیگر جمع می شوند (مثلاً ، اشعه ای که در شکل ۲۶ (ب) F_1 را ترک می کنند به F_2 وارد می شوند) . اطاقهایی ساخته شده اند که شکل نیمه^۶ بالایی این گونه سطوح را دارند . در یک چنین اطاق ، که " تالار نجوا " نام دارد ، صحبت آهسته در یک کانون را می توان در کانون دیگر ، ولی نه در نقاط دیگر ، بوضوح شنید .

بیضیها نقشی کلیدی در مسائل حرکت مداری دارند . مثلاً ، " زمین در مداری بیضوی با خروج از مرکز کوچک که خورشید در یکی از کانونهای آن است حول خورشید می گردد . ما حرکت مداری را در بخش ۵.۱۲ به تفصیل بررسی خواهیم کرد .

مسائل

معادله^۶ بیضی را در صورتی به شکل متعارف بنویسید که

- ۱ ✓ . رئوس $(\pm 4, 0)$ و کانونها $(\pm 3, 0)$ باشند
- ۲ ✓ . رئوس $(0, \pm 10)$ و کانونها $(0, \pm 5)$ باشند
- ۳ ✓ . نقاط انتهایی محورها $(2, 4)$ ، $(10, 4)$ ، $(6, 1)$ ، $(6, 7)$ باشند
- ۴ ✓ . مرکز $(-1, 1)$ ، یکی از کانونها $(-1, 3)$ ، و نیم محور اطول ۵ باشد .
- ۵ ✓ . مرکز $(2, -2)$ ، یکی از کانونها $(2, 1)$ ، و نیم محور اقصر ۶ باشد .
- ۶ ✓ . مرکز $(-3, 2)$ ، یک رأس $(0, 2)$ ، و یک کانون $(-5, 2)$ باشد .
- ۷ ✓ . مبدأ مرکز بوده و دو نقطه^۶ $(1/\sqrt{2}, \sqrt{2})$ ، $(1, -1)$ بر بیضی واقع باشند .
- ۸ ✓ . کانونها $(1, \pm 3)$ و خروج از مرکز $\frac{3}{4}$ باشد .
- ۹ ✓ . تمام نقاطی از بیضی

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{4} = 1$$

را بیابید که قدر مطلق طولهایشان ۳ باشد .

۱۰ . نشان دهید که بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ مشمول ناحیه^۶ مستطیلی $-a \leq x \leq a$

$-b \leq y \leq b$ است .

بیضی به معادله داده شده را رسم کرده، و مرکز، کانونها، و نقاط انتهایی محورهای اطول و اقصر آن را مشخص نمایید.

$$\frac{x^2}{49} + \frac{y^2}{16} = 1 \quad \cdot 12 \checkmark$$

$$\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{25} = 1 \quad \cdot 11 \checkmark$$

$$\frac{(x+3)^2}{4} + \frac{(y-1)^2}{64} = 1 \quad \cdot 14 \checkmark$$

$$\frac{(x-2)^2}{36} + \frac{(y+4)^2}{9} = 1 \quad \cdot 13 \checkmark$$

$$9x^2 + 25y^2 = 25 \quad \cdot 16 \checkmark$$

$$3x^2 + y^2 = 2 \quad \cdot 15 \checkmark$$

$$16x^2 + 25y^2 - 64x - 100y - 236 = 0 \quad \cdot 17 \checkmark$$

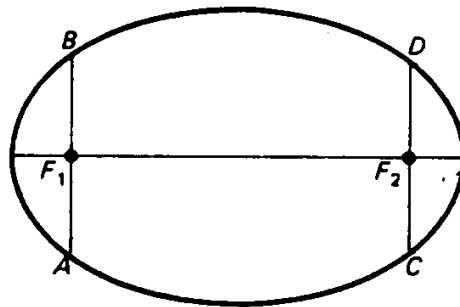
$$4x^2 + y^2 + 8x - 6y - 3 = 0 \quad \cdot 18 \checkmark$$

$$2x^2 + 2xy + 2y^2 - 1 = 0 \quad \cdot 19 \checkmark$$

$$9x^2 + 4y^2 + 36x = 0 \quad \cdot 20 \checkmark$$

۲۱. معادله بیضی را بیابید که نیم محور اطول آن ۱ و کانونهایش $F_1 = (-\frac{1}{2}, -\frac{1}{2})$, $F_2 = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$ باشند.

۲۲. پاره خطی که دو نقطه انتهایی اش روی یک بیضی باشد یک وتر بیضی نامیده می شود و وتر مار بر کانون F_1 یا F_2 و عمود بر محور اطول راست و تر کانونی نام دارد (در شکل ۲۷، این وتر AB یا CD است). نشان دهید که راست و تر کانونی به طول $2b^2/a$ است، که در آن a نیم محور اطول و b نیم محور اقصر بیضی می باشد.



شکل ۲۷

۲۳. نقاطی از بیضی $x^2 + 5y^2 = 20$ را بیابید که خط واصل بین آنها و کانونها بر هم عمود باشند.

۲۴. به ازای چه مقادیری از ثابت c ، نمودار معادله $x^2 + 2y^2 - 6x + 4y = c$ یک بیضی است؟ یک نقطه است؟ تهی است؟

۲۵. نشان دهید که منحنی به معادلات پارامتری

$$x = x_0 + a \cos t, \quad y = y_0 + b \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

(یک)

بیضی است (فرض کنید $a > 0, b > 0$).

نقاط اشتراک خط و بیضی داده شده را (در صورت وجود) بیابید .

$$x + 2y - 7 = 0, x^2 + 4y^2 = 25 \quad \cdot 26$$

$$3x + 10y - 25 = 0, 4x^2 + 25y^2 = 100 \quad \cdot 27$$

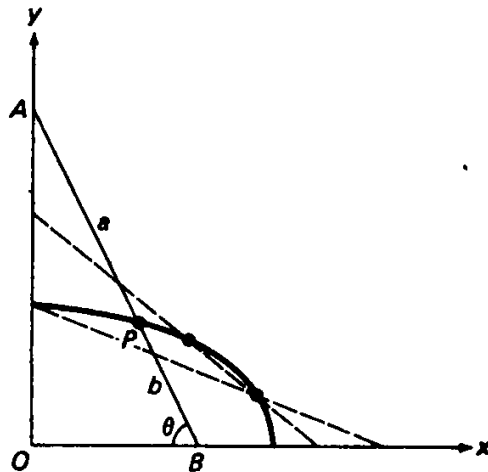
$$3x - 4y - 24 = 0, 9x^2 + 16y^2 = 144 \quad \cdot 28$$

$$x + y - 2 = 0, 2x^2 + y^2 = 3 \quad \cdot 29$$

۳۰. نشان دهید که وقتی یک نردبان از روی دیوار به پایین سر می خورد، هر نقطه ثابت

P از آن غیر از نقاط انتهایی اش یک چهارم یک بیضی را طی می کند . (ر. ک. شکل ۲۸،

که در آن AB نردبان، a فاصله بین A و P ، و b فاصله بین P و B می باشد .)

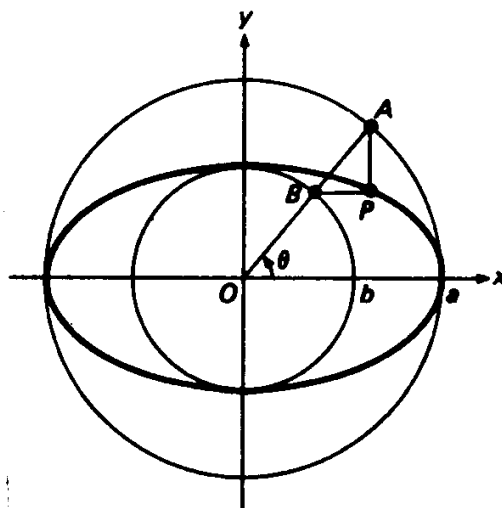


شکل ۲۸

۳۱. فرض کنید A نقطه متغیری از دایره $x^2 + y^2 = a^2$ به شعاع a بوده، و B نقطه برخورد

شعاع OA از این دایره با دایره متحدالمركز $x^2 + y^2 = b^2$ به شعاع b باشد، و P

نقطه برخورد خط افقی ماربر B با خط قائم ماربر A طبق شکل ۲۹ باشد، که در



شکل ۲۹

FOCUS = کانون

θ زاویه بین OA و محور x است. نشان دهید که وقتی A دایره $x^2 + y^2 = a^2$ را

بیماید، نقطه P بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ را می‌بیماید.

خروج از مرکز بیضی با نیم محوره‌های داده شده را بیابید.

$$17, 15 \cdot ۳۳$$

$$13, 5 \cdot ۳۲$$

$$53, 28 \cdot ۳۵$$

$$25, 7 \cdot ۳۴$$

۳۶. مساحت محصور به بیضی

$$\frac{(x-2)^2}{25} + \frac{(y+3)^2}{36} = 1$$

را بیابید.

۳۷. مستطیلی بیابید با بیشترین مساحت که در بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ محاط شده

و دو ضلعش موازی محور اطول باشند.

در بین مماسهای بر بیضی $x^2 + \frac{1}{3}y^2 = 1$ آنهایی را بیابید که

۳۸. بر خط $2x - 2y - 3 = 0$ عمود باشند.

۳۹. از نقطه $(\frac{10}{3}, \frac{2}{3})$ خارج بیضی بگذرند.

۴۰. نشان دهید که حاصل ضرب فواصل بین کانونهای F_1, F_2 از بیضی و هر مماس بر

بیضی مساوی مجذور نیم محور اقصر است.

۴۱. نزدیکترین نقطه به خورشید در مدار حول آن را حضيض خورشیدی، و دورترین

نقطه به خورشید را اوج خورشیدی می‌نامند. زمین در یک مدار بیضوی که خورشید

در یکی از کانونهای آن است حرکت می‌کند به طوری که فاصله بین آن تا خورشید

در حضيض 147.1 میلیون کیلومتر و در اوج 152.1 میلیون کیلومتر است. خروج از مرکز

تقریبی مدار زمین چقدر است؟

۴۰.۱۰ هذلولیها

تعریف هذلولی. بنا بر تعریف، یک هذلولی مجموعه تمام نقاطی در صفحه است که تفاضل

فواصلشان تا نقاط ثابت F_1 و F_2 ثابت باشد. (فرض است که همواره فاصله کوچکتر از

فاصله بزرگتر کم می‌شود؛ در نتیجه، ثابت مربوطه مثبت است.) لذا، مثلاً، در شکل ۳۰

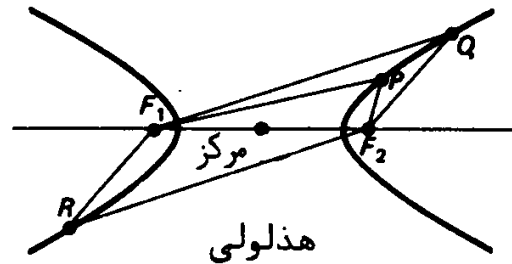
تفاضل بین فواصل P تا نقاط F_1 و F_2 ، به نام کانونهای هذلولی، همان تفاضل نظیر در

مورد نقطه O یا نقطه R می‌باشد. توجه کنید که هذلولی از دو قسمت مجزا، به نام شاخه

تشکیل شده است. یکی از شاخه‌ها (شاخه راست در شکل) هر نقطه از هذلولی بد F_2

نزدیکتر است تا F_1 ، حال آنکه بر شاخه دیگر (شاخه چپ در شکل) هر نقطه بنه F_1

نزدیکتر است تا F_2 . نقطه^۲ میانی پاره خط F_1F_2 واصل بین کانونها مرکز هذلولی نام دارد. هذلولی مانند سهمی (ولی به خلاف بیضی)، یک منحنی بی‌گران است؛ یعنی، نقاطی بر منحنی وجود دارند که بدلخواه دور می‌باشند.



شکل ۳۰

برای یافتن معادله^۳ هذلولی، در صفحه^۴ آن مختصات قائم x و y معرفی کرده و آن را در "موضع متعارف" که مرکزش در مبدأ^۵ O و کانونهایش در امتداد محور x واقع باشند قرار می‌دهیم. در این صورت، کانونها نقاط $F_1 = (-c, 0)$ و $F_2 = (c, 0)$ ، به فاصله^۶ $2c$ جدا از هم ($c > 0$)، خواهند بود. فرض کنیم $P = (x, y)$ نقطه‌ای از هذلولی بوده، و $2a$ مقدار ثابت تفاضل بین فواصل P تا کانونها باشد. بنابر خاصیت معرف هذلولی،

$$|PF_1| - |PF_2| = 2a$$

اگر P به F_2 تا F_1 نزدیکتر باشد، یا

$$|PF_2| - |PF_1| = 2a$$

اگر P به F_1 تا F_2 نزدیکتر باشد. پس نتیجه می‌شود که

$$|PF_1| = \pm 2a + |PF_2|,$$

که برحسب مختصات P ، F_1 ، و F_2 شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$\sqrt{(x+c)^2 + y^2} = \pm 2a + \sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

با مجذور کردن طرفین این معادله، به دست می‌آوریم

$$x^2 + 2cx + c^2 + y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2cx + c^2 + y^2,$$

که به

$$\pm a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = cx - a^2$$

ساده می‌شود. اگر طرفین را مجدداً به توان دو برسانیم، درخواهیم یافت که

$$a^2(x^2 - 2cx + c^2 + y^2) = c^2x^2 - 2a^2cx + a^4,$$

ولذا،

$$(1) \quad x^2(c^2 - a^2) - a^2y^2 = a^2(c^2 - a^2).$$

برای ساده کردن بیشتر (۱) ، ملاحظه می‌کنیم که

$$\begin{aligned} |PF_1| < |F_1F_2| + |PF_2| = 2c + |PF_2|, \\ |PF_2| < |F_1F_2| + |PF_1| = 2c + |PF_1|, \end{aligned}$$

زیرا طول یک ضلع مثلث F_1PF_2 از مجموع طولهای دو ضلع دیگر کوچکتر است. بنابراین،

$$2c > |PF_1| - |PF_2|, \quad 2c > |PF_2| - |PF_1|,$$

که نامساوی

$$c > a$$

را ایجاب می‌کند ، زیرا یکی از تفاضلهای سمت راست مساوی $2a$ است. با معرفی ثابت مثبت b که

$$(۲) \quad b^2 = c^2 - a^2,$$

می‌توان (۱) را به شکل زیر نوشت :

$$x^2b^2 - a^2y^2 = a^2b^2,$$

که خود ، پس از تقسیم طرفین بر a^2b^2 ، به صورت زیر درمی‌آید :

$$(۳) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

به عکس ، هرگاه نقطه $P = (x, y)$ چنان باشد که (۳) برقرار شود ، آنگاه ، با عکس کردن مراحل این محاسبات بدقت ، معلوم می‌شود که $|PF_1| - |PF_2| = \pm 2a$ (ذکر جزئیات را به عنوان تمرین می‌گذاریم) . بنابراین ، (۳) معادلهٔ هذلولی در موضع متعارف است .

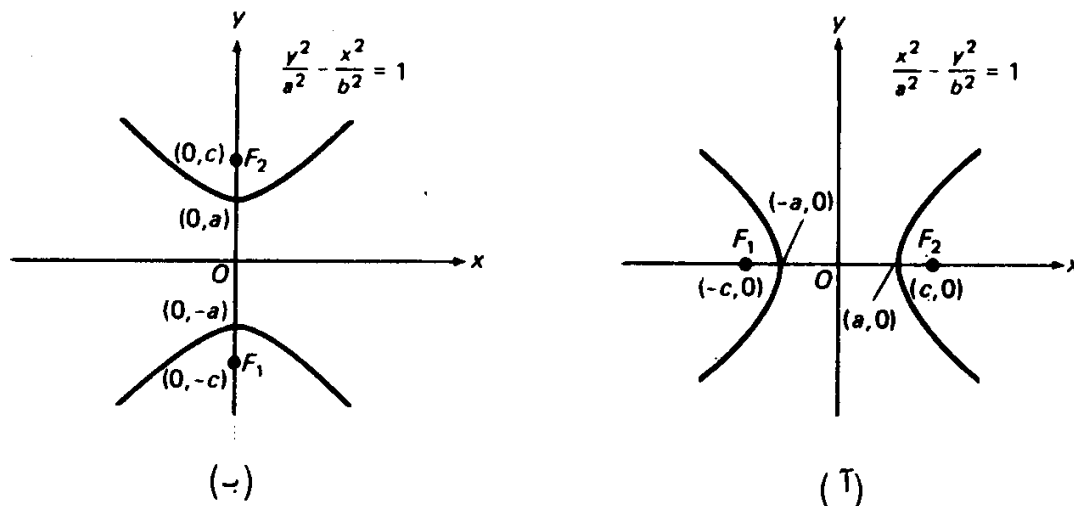
محورهای متقاطع و مزدوج ، چون معادلهٔ (۳) در اثر تعویض x با $-x$ یا y با $-y$ تغییر نمی‌کند ، هر دو محور مختصات محور تقارن هذلولی (۳) هستند . به‌طور کلی ، هر هذلولی دو محور تقارن دارد ، خط ماربر کانونهای F_1 و F_2 و عمود منصف پاره خط F_1F_2 . هذلولی خط ماربر کانونهایش را در دو نقطه به نام رأس ، قطع کرده ، و پاره خط واصل بین رئوس محور متقاطع نام دارد . برای هذلولی (۳) رئوس عبارتند از نقاط $(\pm a, 0)$ و محور متقاطع افقی است [ر. ک. شکل ۳۱ (آ)] . کانونهای هذلولی در نقاط $(\pm c, 0)$ قرار دارند ، که در آن

$$c = \sqrt{a^2 + b^2},$$

و این را می‌توان با حل (۲) نسبت به c به دست آورد . از تعویض x و y در معادلهٔ (۳) هذلولی دیگر

$$(۴) \quad \frac{y^2}{a^2} - \frac{x^2}{b^2} = 1$$

به دست می‌آید، که آن را نیز دروضع متعارف می‌نامیم. این هذلولی دارای رئوس $(0, \pm a)$ و کانونهای $(0, \pm c)$ بر محور y اند، و محور متقاطع آن قائم است [ر.ک. شکل ۳۱ (ب)].



شکل ۳۱

مثال ۱. نمودار معادله $\frac{x^2}{16} - \frac{y^2}{9} = 1$ را بیابید.

حل. نمودار به شکل (۳) با $a = 4$ ، $b = 3$ ، و

$$c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{4^2 + 3^2} = \sqrt{16 + 9} = \sqrt{25} = 5$$

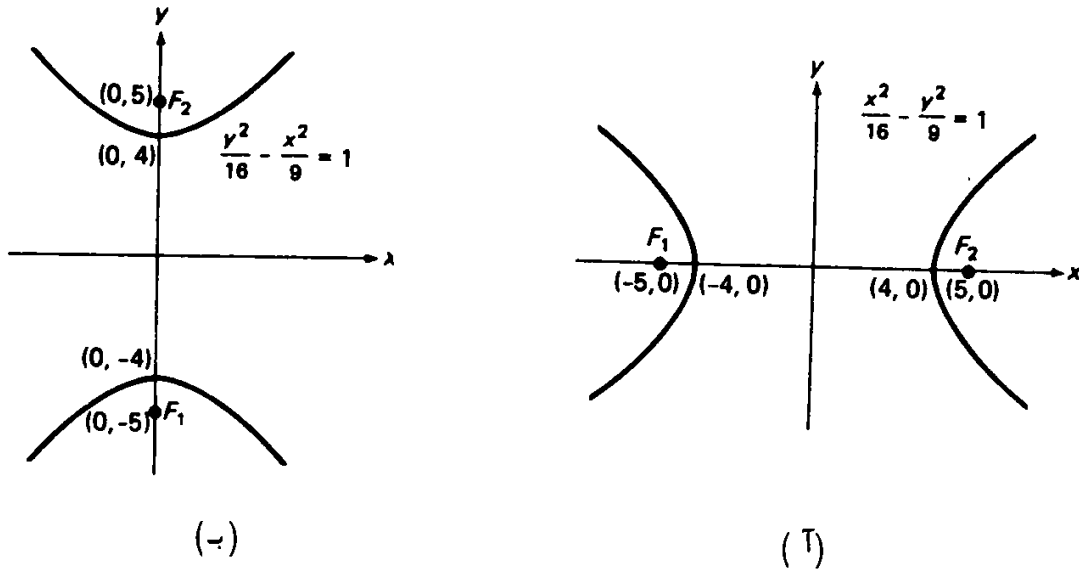
است. بنابراین، نمودار آن یک هذلولی به مرکز مبدا، رأسهای $(\pm 4, 0)$ ، و کانونهای $(\pm 5, 0)$ بر محور x بوده، و محور متقاطع افقی می‌باشد [ر.ک. شکل ۳۲ (ا)].

مثال ۲. نمودار معادله $\frac{y^2}{16} - \frac{x^2}{9} = 1$ را پیدا نمایید.

حل. معادله به شکل (۴) است که در آن a ، b ، و c همان مقادیر مثال ۱ را دارند. بنابراین، نمودار هذلولی است که مرکزش مبدا، رأسهای $(0, \pm 4)$ ، کانونهای $(0, \pm 5)$ بر محور y بوده، و محور متقاطع قائم می‌باشد [ر.ک. شکل ۳۲ (ب)].

منظور از محور مزدوج یک هذلولی یعنی پاره‌خطی به طول $2b$ که بر محور متقاطع عمود بوده و همان نقطه میانی، یعنی مرکز هذلولی، را داشته باشد. لذا، در مثال ۱، محور مزدوج پاره‌خط قائم بین نقاط $(0, 3)$ و $(0, -3)$ است، حال آنکه در مثال ۲ پاره‌خط افقی بین نقاط $(3, 0)$ و $(-3, 0)$ می‌باشد. این محورها شبیه محورهای اطول و اقصر بیضی‌اند. اما محور اطول یک بیضی همیشه از محور اقصر آن بزرگتر است ($a > b$)، ولی

اندازه‌های نسبی محورهای متقاطع و مزدوج یک هذلولی تحت قیدی نیستند؛ یعنی می‌توانیم داشته باشیم $a < b$ ، $a = b$ ، یا $a > b$. این به خاطر آن است که شرط $a^2 = b^2 + c^2$



شکل ۳۲

برای بیضی با شرط $c^2 = a^2 + b^2$ برای هذلولی تعویض می‌شود؛ در نتیجه، با تعیین a (در خاصیت معرف هذلولی) باز هم b را برای گرفتن هر مقدار آزاد می‌گذارد.

مجانبهای یک هذلولی. حال نشان می‌دهیم یک هذلولی دو مجانب دارد. برای این کار، معادله $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ را نسبت به y حل کرده، توابع زیر را به دست می‌آوریم:

$$(5) \quad y = \frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

و

$$(5') \quad y = -\frac{b}{a} \sqrt{x^2 - a^2}$$

هر یک از این توابع فقط به‌ازای $x \geq a$ یا $x \leq -a$ تعریف می‌شود؛ و در واقع، (۵) نمایش بخشی از هذلولی است که در نیم‌صفحه بالایی $y \geq 0$ قرار دارد، ولی (۵') نمایش بخش واقع از آن در نیم‌صفحه پایینی $y \leq 0$ می‌باشد. خط $y = (b/a)x$ یک مجانب مایل هذلولی (۳) است. برای مشاهده این امر، فرض کنیم $P = (x, y)$ یک نقطه متغیر از بخشی از هذلولی است که در ربع اول قرار دارد. پس x و y هر دو مثبت بوده و فاصله $d(x)$ بین P و نقطه‌ای از خط $y = (b/a)x$ با همان مختص x مساوی است با

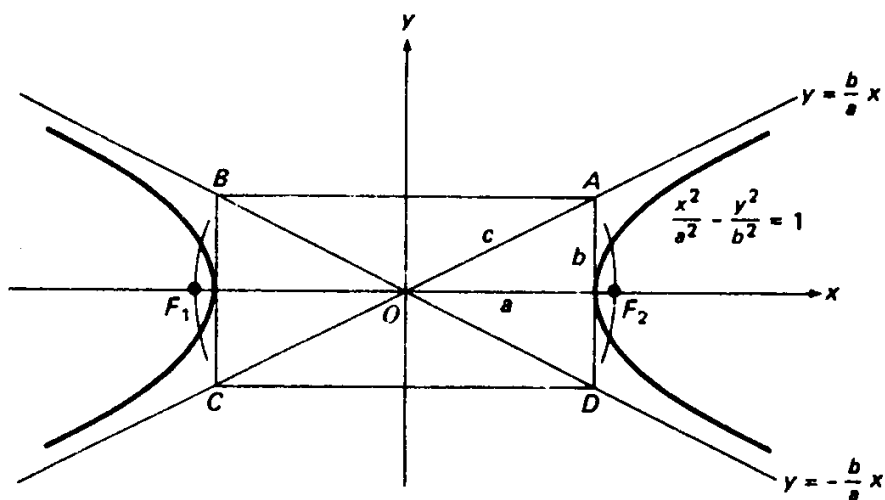
$$d(x) = \frac{b}{a}(x - \sqrt{x^2 - a^2}) = \frac{b(x - \sqrt{x^2 - a^2})(x + \sqrt{x^2 - a^2})}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

$$= \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}}$$

اما

$$\lim_{x \rightarrow \infty} d(x) = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ab}{x + \sqrt{x^2 - a^2}} = 0,$$

و در نتیجه، نمودار (۵)، وقتی $x \rightarrow \infty$ ، به خط $y = (b/a)x$ نزدیک می‌شود. یعنی، خط مجانب بخشی از هذلولی است که در ربع اول قرار دارد. با استدلالی مشابه می‌توان نشان داد که $y = (b/a)x$ مجانب بخشی از هذلولی است که در ربع سوم واقع است. پس، چون انعکاس نسبت به محور x هذلولی (۳) را به خودش و خط $y = (b/a)x$ را به خط $y = -(b/a)x$ می‌برد، خط $y = -(b/a)x$ مجانب بخشهایی از هذلولی است که در ربعهای دوم و چهارم قرار دارند. همه این نکات از شکل ۳۳ واضح است.



ساختن مجانبها و کانونهای یک هذلولی

شکل ۳۳

خلاصه کنیم، هذلولی $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ خطوط

$$y = \pm \frac{b}{a}x$$

را به عنوان مجانب دارد. به عنوان تمرین، نشان دهید که مجانبهای هذلولی $(y^2/a^2) - (x^2/b^2) = 1$ ، با محور متقاطع قائم، عبارتند از خطوط $y = \pm (a/b)x$. برای ساختن مجانبهای هذلولی $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ راه ساده‌ای وجود دارد.

یک مستطیل مرکزی، یعنی مستطیل $ABCD$ نموده شده در شکل ۳۳، با دو ضلع واقع بر خطوط $x = \pm a$ و دو ضلع واقع بر خطوط $y = \pm b$ رسم می‌کنیم. در این صورت، مجانبها خطوط حاصل از ادامه اقطار مستطیل می‌باشند. توجه کنید که نیم قطر OA ی مستطیل به طول $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ است، زیرا در نتیجه، دو نقطه برخورد دایره به شعاع $|OA|$ با محور x عبارتند از کانونهای $F_1 = (-c, 0)$ و $F_2 = (c, 0)$ ، و این در شکل با دو قوس از این دایره نموده شده است. همچنین، توجه کنید که مجانبها عبارتند از نمودار معادله

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0,$$

که فرقی با معادله

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$$

هذلولی در این است که در طرف راست به جای ۱، ۰ داریم.

مثال ۳. هرگاه محورهای متقاطع و مزدوج متساوی‌الطول باشند، آنگاه در معادله (۳) یا

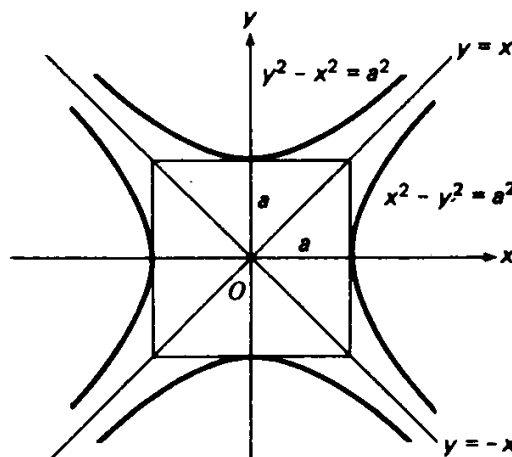
(۴) $a = b$ ، و یک هذلولی متساوی‌الاضلاع

$$x^2 - y^2 = a^2$$

یا

$$y^2 - x^2 = a^2$$

با مجانبهای $y = \pm x$ به دست می‌آوریم (ر. ک. شکل ۳۴). در این حالت، مجانبها برهم عمود بوده، و مستطیل مرکزی مربع می‌باشد. ما قبلاً "به یک هذلولی متساوی -



هذلولیهای متساوی‌الاضلاع

الاضلاع، یعنی هذلولی یکه

$$x^2 - y^2 = 1,$$

که در صفحه ۵۶۶ در رابطه با توابع هذلولوی مطرح شد، برخورداریم.

معادلات به شکل متعارف. معادلات (۳) و (۴) نمایش هذلولیهای هستند که مرکزشان مبدأ بوده و محورهای مختصات آنها محورهای تقارن هستند. معادلات کلیتر

$$(۶) \quad \frac{(x - x_0)^2}{a^2} - \frac{(y - y_0)^2}{b^2} = 1$$

و

$$(۷) \quad \frac{(y - y_0)^2}{a^2} - \frac{(x - x_0)^2}{b^2} = 1$$

هذلولیهایی را نمایش می دهند که همان اندازه و شکل هذلولیهای (۳) و (۴) را دارند، ولی به مرکز (x_0, y_0) بوده و محورهایشان در امتداد خطوطی موازی محورهای مختصات می باشند. به طور مشروح، (۶) معادله یک هذلولی به مرکز (x_0, y_0) است که محور متقاطعش در امتداد خط افقی $y = y_0$ و محور مزدوجش در امتداد خط قائم $x = x_0$ است، ولی (۷) معادله هذلولی به مرکز (x_0, y_0) است که محور متقاطعش در امتداد خط قائم $x = x_0$ و محور مزدوجش در امتداد خط افقی $y = y_0$ می باشد. در هر دو حال، محور متقاطع آن به طول $2a$ و محور مزدوجش به طول $2b$ می باشد. این معادلات معادلات یک هذلولی به شکل متعارف می باشند. طبیعی است که (۶) و (۷) در حالت خالص $x_0 = y_0 = 0$ به (۳) و (۴) تحویل می شوند.

مثال ۴. نمودار معادله

$$(۸) \quad x^2 - 4y^2 - 2x + 16y - 14 = 0$$

را بیابید.

حل. با کامل کردن مربعها، معلوم می شود که (۸) را می توان به شکل زیر نوشت:

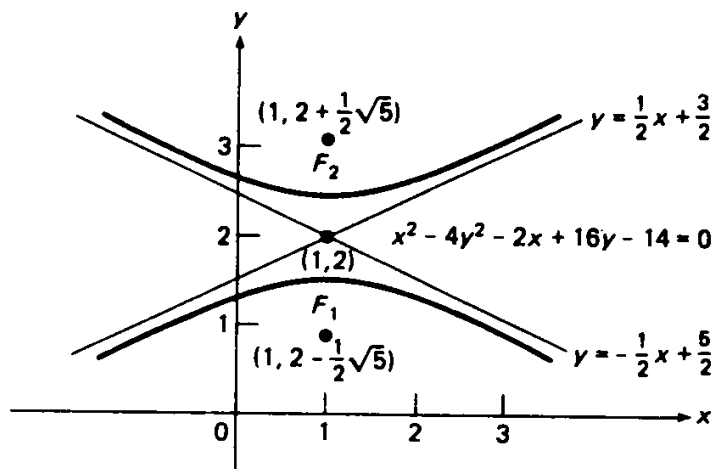
$$(x - 1)^2 - 4(y - 2)^2 + 1 = 0,$$

یا، معادلاً،

$$\frac{(y - 2)^2}{(\frac{1}{2})^2} - (x - 1)^2 = 1,$$

که به شکل متعارف (۷) به ازای $x_0 = 1, y_0 = 2, a = \frac{1}{2}, b = 1$ است. نمودار این

معادله یک هذلولی به مرکز $(1, 2)$ با محور متقاطع قائم است (ر.ک. شکل ۳۵). نقاط انتهایی محور متقاطع عبارتند از $(1, 2 - \frac{1}{2})$ و $(1, 2 + \frac{1}{2})$ ، یعنی $(1, \frac{3}{2})$ و $(1, \frac{5}{2})$. همچنین چون فاصله هر کانون تا مرکز مساوی $c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + 1} = \frac{1}{2}\sqrt{5}$ است، کانونها عبارتند از $F_1 = (1, 2 - \frac{1}{2}\sqrt{5})$ و $F_2 = (1, 2 + \frac{1}{2}\sqrt{5})$. به آسانی می‌توان تحقیق کرد که مجانبها خطوط $y = \frac{1}{2}x + \frac{3}{2}$ و $y = -\frac{1}{2}x + \frac{5}{2}$ به شیب $\pm \frac{1}{2}$ اند که، طبق شکل، در نقطه $(1, 2)$ هم را قطع می‌کنند.



شکل ۳۵

هر یک از معادلات (۶) و (۷) از خاصیت زیر برخوردار است: نسبت به هر دو متغیر x و y از درجه دو است، هیچ جمله‌اش شامل حاصل ضرب xy نیست، و به علاوه ضرایب x^2 و y^2 (به خلاف بیضی صفحات ۹۴۷ تا ۹۴۸، که همعلامت بودند) مختلف-العلامه می‌باشند. به عکس، هر معادله با این خاصیت را می‌توان، پس از تقسیم بر ضریب x^2 ، به شکل زیر نوشت:

$$(9) \quad x^2 - ky^2 + Ax + By + C = 0 \quad (k > 0)$$

اما، مثل مثال ۴، می‌توان (۹) را با کامل کردن مربعها به یکی از اشکال متعارف (۶) و (۷) درآورد؛ و در نتیجه، جدا از حالت استثنایی، نمودار (۹) هذلولی است که محورهایش با محورهای مختصات موازی می‌باشند. در واقع، پس از کامل کردن مربعها، می‌توان (۹) را به صورت زیر نوشت:

$$(9') \quad \left(x + \frac{A}{2}\right)^2 - k\left(y - \frac{B}{2k}\right)^2 = D,$$

که در آن

$$D = \frac{A^2}{4} - \frac{B^2}{4k} - C.$$

اگر $D = 0$ ، نمودار (۹') ، و در نتیجه (۹) ، یک جفت خط‌زیر است :

$$y - \frac{B}{2k} = \pm \frac{1}{\sqrt{k}} \left(x + \frac{A}{2} \right),$$

که در نقطه^۶ $(-A/2, B/2k)$ متقاطعند ، و این همان حالت استثنایی فوق می‌باشد . اما اگر $D \neq 0$ ، (۹') را می‌توان ، بسته به علامت D ، به یکی از اشکال زیر نوشت :

$$\frac{[x + (A/2)]^2}{(\sqrt{D})^2} - \frac{[y - (B/2k)]^2}{(\sqrt{D/k})^2} = 1 \quad (D > 0)$$

یا

$$\frac{[y - (B/2k)]^2}{(\sqrt{|D|/k})^2} - \frac{[x + (A/2)]^2}{(\sqrt{|D|})^2} = 1 \quad (D < 0),$$

که معادله^۶ یک هذلولی به مرکز $(-A/2, B/2k)$ می‌باشد . اگر $D > 0$ ، هذلولی دارای محور متقاطع افقی به طول $2\sqrt{D}$ و محور مزدوج قائم به طول $2\sqrt{D/k}$ است ، ولی اگر $D < 0$ ، هذلولی دارای محور متقاطع قائم به طول $2\sqrt{|D|}$ و محور مزدوج افقی به طول $2\sqrt{|D|/k}$ می‌باشد . لذا ، به طور خلاصه ، یک هذلولی دارای معادله^۶ (۹) است اگر و فقط اگر محورهایش موازی محورهای مختصات باشند .

البته ، هذلولیهایی وجود دارند که معادلاتشان جملاتی شامل xy دارند . مثلاً ، نمودار معادله^۶ $2xy = 1$ هذلولی است که از دوران هذلولی متساوی‌الاضلاع $x^2 - y^2 = 1$ به اندازه^۶ 45° در جهت خلاف عقربه‌های ساعت به دست می‌آید (ر.ک. مثال ۴ ، صفحه^۶ ۹۲۵) .

خروج از مرکز هذلولی ، درست مثل حالت بیضی ، شکل یک هذلولی را می‌توان با عدد

$$e = \frac{c}{a},$$

به نام خروج از مرکز ، به راحتی توصیف کرد ، ولی e در اینجا می‌تواند مقادیر بزرگتر از ۱ اختیار کند ، زیرا $c > a$.

مثال ۵ . خروج از مرکز هذلولی شکل ۳۲ چقدر است ؟

حل . در اینجا $a = 4$ و $c = 5$ ؛ در نتیجه ، خروج از مرکز مساوی است با

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{4} = 1.25.$$

هذلولی، مانند بیضی، نقش مهمی در بررسی حرکت مداری ایفا می‌کند. حدس می‌زنند که تعدادی از ستاره‌های دنباله‌دار مدارهای هذلولوی دارند، بدین معنی که یکبار ظاهر شده و سپس منظومه شمسی را برای همیشه ترک می‌کنند^۱. در سال ۱۹۱۱، ارنست روترفوردر، توانست وجود هسته^۲ اتم را با تحلیل رفتار ذرات آلفا که به مدارهای هذلولوی منحرف می‌شوند با ورقه‌های نازک فلزی ثابت کند. ما قبلاً^۳ در صفحه ۵۶۶ نقش هذلولوی $x^2 - y^2 = 1$ را در تعریف توابع هذلولوی توضیح داریم. در مسائل ۴۳ و ۴۴، استفاده از هذلولیها برای یافتن برد مورد بحث قرار گرفته است.

مسائل

معادله هذلولی را به شکل متعارف بنویسید به طوری که

۱. ✓ رئوس $(\pm 3, 0)$ و کانونها $(\pm 4, 0)$ باشند.
 ۲. ✓ رئوس $(0, \pm 2)$ و کانونها $(0, \pm 5)$ باشند.
 ۳. ✓ نقاط انتهایی محور متقاطع $(5, 2)$ ، $(-7, 2)$ و نقاط انتهایی محور مزدوج $(-1, -3)$ ، $(-1, 7)$ باشند.
 ۴. ✓ مرکز $(3, 1)$ ، یکی از کانونها $(9, 1)$ ، و محور متقاطع به طول ۸ باشد.
 ۵. ✓ مرکز $(-2, 0)$ ، یکی از کانونها $(-2, 4)$ ، و محور مزدوج به طول ۴ باشد.
 ۶. ✓ مرکز $(2, -1)$ ، یکی از کانونها $(-4, -1)$ ، و یکی از رئوس $(7, -1)$ باشد.
 ۷. ✓ مبدأ مرکز بوده و دو نقطه $(8, \sqrt{8})$ ، $(6, -1)$ بر هذلولی واقع باشند.
 ۸. ✓ کانونها $(\pm 10, 0)$ و مجانبها خطوط $y = \pm \frac{4}{3}x$ باشند.
 ۹. ✓ رئوس $(0, \pm 24)$ و مجانبها خطوط $y = \pm \frac{1}{2}x$ باشند.
 ۱۰. ✓ کانونها $(\pm 7, 0)$ و خروج از مرکز $\frac{7}{3}$ باشد.
 ۱۱. ✓ مبدأ مرکز و خروج از مرکز $\sqrt{2}$ بوده، و نقطه $(-5, 3)$ بر هذلولی واقع باشد.
 ۱۲. ✓ مبدأ مرکز و مجانبها $y = \pm \frac{4}{3}x$ بوده، و نقطه $(\frac{2}{3}, -1)$ بر هذلولی واقع باشد.
- هذلولی به معادله داده شده را رسم کرده، و مرکز، کانونها، نقاط انتهایی محور متقاطع، و مجانبها را مشخص نمایید.

۱. این با رفتار ستاره‌های دنباله‌دار در مدارهای بیضوی که متناوباً^۴ به حضیض باز می‌گردند تفاوت دارد (ظهور ستاره دنباله‌دار هالی ۲۷ بار ثبت شده است). تعیین اینکه مدار یک ستاره هذلولوی یا یک بیضی بسیار گشیده است اغلب مشکل است. مدارهای سهموی دست کم در تئوری، حالت دیگری است.

$$\frac{y^2}{36} - \frac{x^2}{25} = 1 \quad \cdot 14 \checkmark$$

$$\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{4} = 1 \quad \cdot 13 \checkmark$$

$$\frac{x^2}{64} - \frac{(y-3)^2}{16} = 1 \quad \cdot 16 \checkmark$$

$$\frac{(y-1)^2}{16} - \frac{(x+2)^2}{4} = 1 \quad \cdot 15 \checkmark$$

$$2y^2 - 5x^2 = 10 \quad \cdot 18 \checkmark$$

$$3x^2 - y^2 = 4 \quad \cdot 17 \checkmark$$

$$2x^2 - y^2 + 4x - 2y + 17 = 0 \quad \cdot 19 \checkmark$$

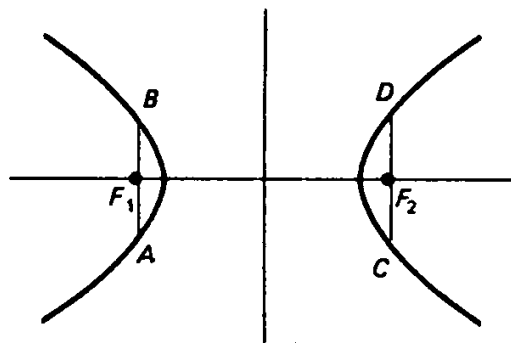
$$9x^2 - 16y^2 - 90x + 32y + 65 = 0 \quad \cdot 20 \checkmark$$

$$81x^2 - 25y^2 - 324x - 50y - 1726 = 0 \quad \cdot 21$$

$$9x^2 - 4y^2 + 16y = 0 \quad \cdot 22$$

۲۳. کانونهای هذلولی $2xy = 1$ را یافته (ر. ک. شکل ۶، صفحه ۹۲۶)، و معادله اش را از خاصیت معرف هذلولی نتیجه بگیرید.

۲۴. هر پاره خط که نقاط انتهایی اش بر یک هذلولی واقع باشند یک وتر هذلولی نام دارد، و وتر مار بر F_1 یا F_2 و عمود بر محور متقاطع راست و ترگانونی نامیده می شود (در شکل ۳۶، این وتر AB یا CD است).



شکل ۳۶

نشان دهید که طول راست و ترگانونی $2b^2/a$ است، که در آن $2a$ طول محور متقاطع و $2b$ طول محور مزدوج است.

۲۵. نقاطی از هذلولی $3y^2 - x^2 = 12$ را بیابید که خطوط واصل بین آنها و کانونها برهم عمود باشند.

۲۶. به ازای چه مقادیری از ثابت c ، نمودار معادله $x^2 - y^2 + 6x - 2y = c$ یک هذلولی با محور متقاطع افقی است؟ یک هذلولی با محور متقاطع قائم است؟ یک جفت خط متقاطع است؟

۲۷. نشان دهید که منحنی به معادلات پارامتری

(یک) $x = x_0 + a \cosh t, \quad y = y_0 + b \sinh t \quad (-\infty < t < \infty)$

شاخه راست یک هذلولی با محور متقاطع افقی است اگر $a > 0$ و شاخه چپ آن است اگر $a < 0$. معادلات پارامتری شاخه‌های یک هذلولی با محور متقاطع قائم را بنویسید.

نقاط اشتراک خط و هذلولی داده شده را (در صورت وجود) بیابید.

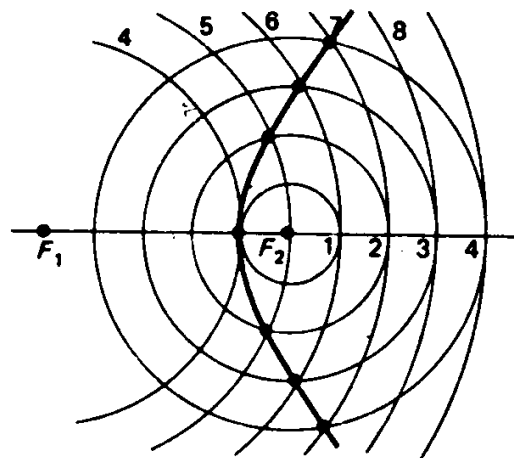
۲۸. $2x - y - 10 = 0, x^2 - 4y^2 = 20$

۲۹. $4x - 3y - 16 = 0, 16x^2 - 25y^2 = 400$

۳۰. $2x + y + 1 = 0, 4x^2 - 9y^2 = 36$

۳۱. $3x - y - 2 = 0, 2x^2 - y^2 = 1$

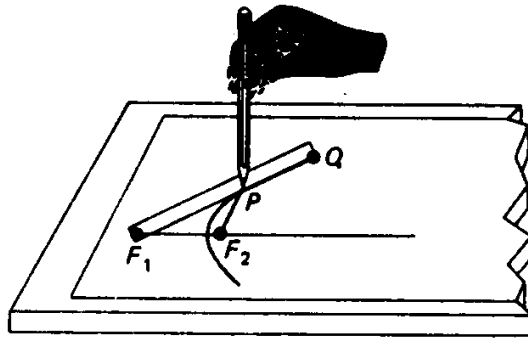
۳۲. شکل ۳۷ خانواده‌ای از قوسهای مستدیر متحدالمرکز به مرکز F_1 و یک خانواده از دواير متحدالمرکز به مرکز F_2 را نشان می‌دهد. قوسها و دواير با شعاعهایشان برچسب خورده‌اند. توضیح دهید چرا نقاط توپر شکل بر یک هذلولی به کانونهای F_1 و F_2 قرار دارند.



شکل ۳۷

۳۳. هذلولی به کانونهای F_1 و F_2 را می‌توان به صورت زیر رسم کرد:

یک طرف خط‌کشی را به یک تخته رسم در F_1 طوری می‌چسبانیم که بتواند حول F_1 دوران کند. در انتهای دیگر خط‌کش یک نخ به طول s که از طول r خط‌کش کوچکتر است می‌بندیم، و سر دیگر نخ را در F_2 محکم می‌کنیم. درحالی که نخ را با یک مداد کشیده نگه‌داشته‌ایم، خط‌کش را مثل شکل ۳۸ حول F_1 می‌چرخانیم. در این صورت، نقطه P مداد بخشی از یک هذلولی را خواهد پیمود. توضیح دهید چرا این رسم موجه است.



رسم یک هذلولی

شکل ۳۸

۳۴. گویم هذلولیهایی

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$$

باهم مزدوج اند. نشان دهید که هذلولیهای مزدوج مجانبهای یکسان دارند.

۳۵. خروج از مرکز هذلولی را بیابید که محور متقاطع آن در هر یک از کانونهای هذلولی مزدوجش زاویه^۶ 60° را دربردارد.

۳۶. نشان دهید که فاصله^۶ هر یک از کانونهای هذلولی $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ تا هریک از مجانبها مساوی b است.

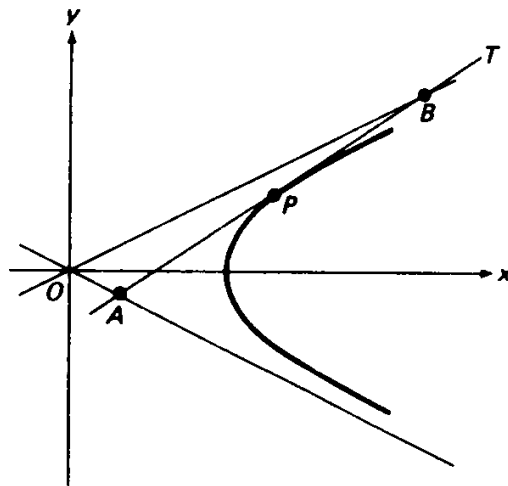
۳۷. هذلولی با خروج از مرکز 2 بیابید که کانونهایش با کانونهای بیضی $9x^2 + 25y^2 = 225$ یکی باشند.

۳۸. فرض کنید T خط مماس در نقطه^۶ $P = (x_0, y_0)$ از هذلولی $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ باشد. نشان دهید که T خطی است به معادله^۶

$$\frac{x_0 x}{a^2} - \frac{y_0 y}{b^2} = 1. \quad (\text{دو})$$

۳۹. دو خط مار بر نقطه^۶ $(-1, 7)$ و مماس بر هذلولی $x^2 - y^2 = 16$ را بیابید.

۴۰. فرض کنید T مماس بر یک هذلولی در نقطه^۶ P بوده، و A و B نقاط برخورد T با مجانبهای هذلولی باشند (ر. ک. شکل ۳۹، که در آن مجانبها در O متقاطع اند). نشان دهید که نقطه^۶ تماس P میان پاره خط AB است، و نیز مثلث OAB به ازای هر موضع از P مساحت ab را دارد.

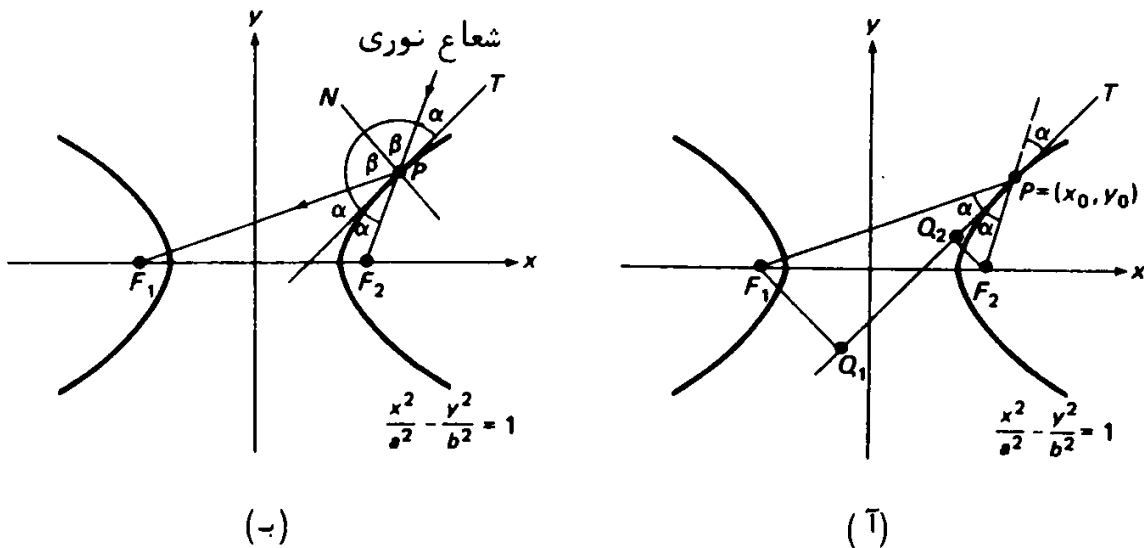


شکل ۳۹

۴۱. فرض کنید T خط مماس در نقطه $P = (x_0, y_0)$ از هذلولوی $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ باشد.

نشان دهید T زاویه بین پاره‌خطهای PF_1 و PF_2 که P را، مثل شکل ۴۰ (A)، به کانونهای F_1 و F_2 وصل می‌کنند نصف می‌کند.

۴۲. نشان دهید که یک شعاع نوری که به سمت کانون یک آینه هذلولوی می‌رود پس از انعکاس از کانون دیگر عبور خواهد کرد؛ شکل ۴۰ (B).



(A)

(B)

شکل ۴۰

۴۳. سه نگهبان در امتداد یک جاده مستقیم که به یک دیو ختم می‌شود به فاصله 1 km از هم کشیک می‌دهند. در لحظه‌ای که آنها مکالمه تلفنی سه راه دارند انفجاری رخ می‌دهد، و نزدیکترین نگهبان به دیو صدای آن را 1 sec قبل از نگهبان وسطی و 3 sec قبل از دورترین نگهبان می‌شنود. با این فرض که سرعت صوت $\frac{1}{3} \text{ km/sec}$ است، دو

محل ممکن انفجار را پیدا نمایید .

۴۴. دو ایستگاه رادیویی که در نقاط A و B در امتداد یک خط مستقیم ساحلی از شمال به جنوب قرار دارند علایمی را همزمان می فرستند. ایستگاه A در 540 km شمال ایستگاه B قرار دارد. فرض کنید علامتی که از A فرستاده می شود توسط یک کشتی در 600 میکروثانیه (یعنی ، $600 \times 10^{-6} \text{ sec}$) قبل از علامت B دریافت شود. اگر کشتی به غرب برود ، چه فاصله ای تا ساحل دارد ؟ اگر به غرب نقطه ساحلی که 90 km جنوب A است برود چقدر؟ (سرعت علایم رادیویی مساوی سرعت نور و حدود $300,000 \text{ km/sec}$ یا معادل 300 متر بر میکروثانیه است .)

۵.۱۰ مقاطع مخروطی

سهی ، بیضی ، و هذلولی ، به دلیلی که عنقریب توضیح می دهیم ، مقاطع مخروطی نام دارند . به یاد آورید که سهی برحسب "خاصیت کانون- هادی" خود تعریف شد. یعنی ، به صورت مجموعه تمام نقاطی که فاصله شان تا نقطه ثابتی به نام کانون و خط ثابتی به نام هادی ثابت است . همانطور که اینک نشان می دهیم ، بیضی و هذلولی نیز خاصیت کانون- هادی دارند که مستلزم خروج از مرکز e است . این امر به ما توان یک کاسه کردن سه مقطع مخروطی را می دهد، که در آن خروج از مرکز سهی 1 گرفته خواهد شد.

بیضی

$$(1) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

به کانونهای $F_1 = (-c, 0)$ ، $F_2 = (c, 0)$ و خروج از مرکز

$$e = \frac{c}{a} \quad (0 < e < 1),$$

را در نظر می گیریم ، که در آن

$$c^2 = a^2 - b^2.$$

فواصل نقطه متغیر $P = (x, y)$ بیضی تا کانونها عبارتند از

$$|PF_1| = \sqrt{(x+c)^2 + y^2}$$

و

$$|PF_2| = \sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

بنابراین،

$$\begin{aligned} |PF_1| &= \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 \left(1 - \frac{x^2}{a^2}\right)} = \sqrt{x^2 \left(\frac{a^2 - b^2}{a^2}\right) + 2cx + c^2 + b^2} \\ &= \sqrt{x^2 \frac{c^2}{a^2} + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \sqrt{(a + ex)^2}, \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$|PF_1| = |a + ex|,$$

و به همین نحو،

$$|PF_2| = |a - ex|.$$

اما $0 < e < 1$ ، $-a \leq x \leq a$ ؛ و در نتیجه،

$$(۲) \quad |PF_1| = a + ex, \quad |PF_2| = a - ex.$$

توجه کنید که

$$|PF_1| + |PF_2| = (a + ex) + (a - ex) = 2a,$$

که همان خاصیت معرف بیضی است که در صفحه ۹۴۳ داده شده است.
محاسبات مشابه برای هذلولی

$$(۳) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1,$$

با کانونهای $F_1 = (-c, 0)$ ، $F_2 = (c, 0)$ و خروج از مرکز

$$e = \frac{c}{a} \quad (e > 1),$$

که در آن

$$c^2 = a^2 + b^2,$$

نتیجه می‌دهد که

$$\begin{aligned} |PF_1| &= \sqrt{x^2 + 2cx + c^2 + b^2 \left(\frac{x^2}{a^2} - 1\right)} = \sqrt{x^2 \left(\frac{a^2 + b^2}{a^2}\right) + 2cx + c^2 - b^2} \\ &= \sqrt{x^2 \frac{c^2}{a^2} + 2cx + a^2} = \sqrt{\left(a + \frac{c}{a}x\right)^2} = \sqrt{(a + ex)^2} \end{aligned}$$

بنابراین، مثل حالت بیضی،

$$|PF_1| = |a + ex|,$$

و به همین نحو،

$$|PF_2| = |a - ex|.$$

هرگاه P بر شاخه راست هذلولی واقع باشد، آنگاه $x \geq a$ و (به یاد آورید که $e > 1$)،

$$(۴) \quad |PF_1| = a + ex, \quad |PF_2| = -a + ex$$

ولی هرگاه P بر شاخه چپ قرار داشته باشد، آنگاه $x \leq -a$ و

$$(۴') \quad |PF_1| = -a - ex, \quad |PF_2| = a - ex.$$

توجه کنید که، در حالت اول،

$$|PF_1| - |PF_2| = 2a$$

و، در حالت دوم،

$$|PF_2| - |PF_1| = 2a$$

و این درست مثل صفحه ۹۵۷ است.

هادیه‌های بیضی و هذلولی. حال به تعریف هادیهای بیضی (۱) یا هذلولی (۳) به صورت

خطوط قائم L_1 و L_2 به ترتیب به معادلات $x = a/e = a^2/c$ و $x = -a/e = -a^2/c$

می پردازیم (توجه کنید که L_1 و L_2 به فاصله $h = 2a/e = 2a^2/c$ از هم قرار دارند). شکل

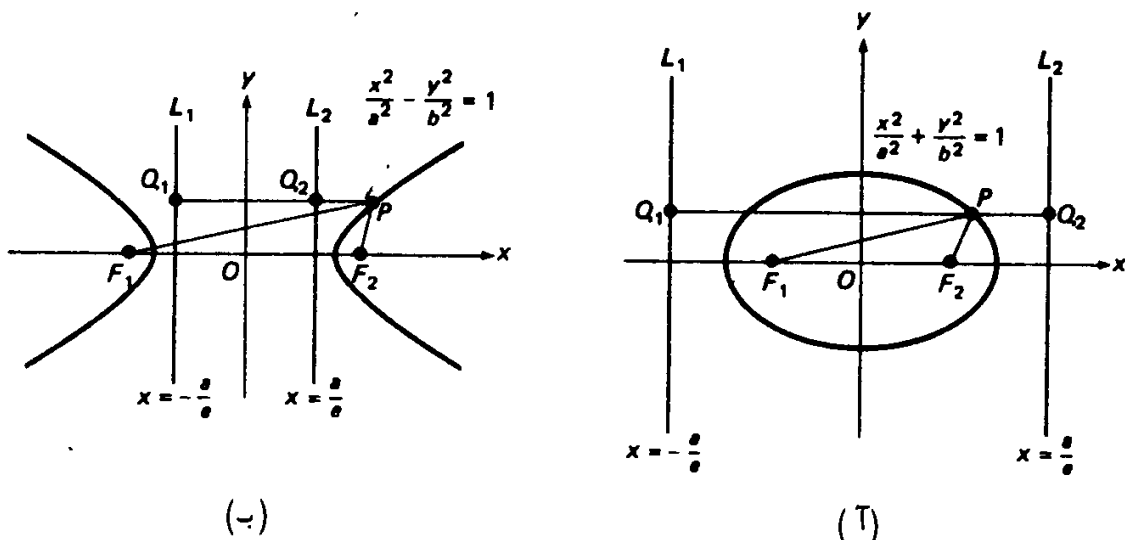
۴۱ (آ) مواضع L_1 و L_2 را نسبت به بیضی (۱) نشان می دهند؛ چون برای بیضی $0 < e < 1$

داریم $a/e > a$ ؛ در نتیجه، L_2 سمت راست رأس $(a, 0)$ است ولی L_1 سمت چپ رأس

$(-a, 0)$ می باشد. به همین نحو، شکل ۴۱ (ب) مواضع L_1 و L_2 را نسبت به هذلولی (۳)

نشان می دهد؛ چون برای هذلولی $e > 1$ ، این بار داریم $a/e < a$ ؛ در نتیجه، L_2 سمت

چپ رأس $(a, 0)$ و سمت راست مبدأ است، حال آنکه L_1 سمت راست رأس $(-a, 0)$ و سمت



شکل ۴۱

چپ مبدا می باشد. فرض کنیم Q_1 و Q_2 نقاط برخورد خط افقی مار بر L_1 و L_2 باشند. در این صورت، همانطور که از شکلها دیده می شود، برای بیضی

$$(۵) \quad |PQ_1| = \frac{a}{e} + x, \quad |PQ_2| = \frac{a}{e} - x$$

ولی برای شاخه راست هذلولی

$$(۶) \quad |PQ_1| = \frac{a}{e} + x, \quad |PQ_2| = -\frac{a}{e} + x$$

و برای شاخه چپ آن

$$(۶') \quad |PQ_1| = -\frac{a}{e} - x, \quad |PQ_2| = \frac{a}{e} - x$$

از مقایسه (۲) با (۵)، (۴) با (۶)، و (۴') با (۶')، در هر حالت خواهیم داشت

$$(۷) \quad |PF_1| = e|PQ_1|, \quad |PF_2| = e|PQ_2|$$

(جزئیات را شرح دهید).

از رابطه (۷) معلوم می شود که هرگاه P نقطه متغیری از بیضی (۱) یا هذلولی (۳) باشد، آنگاه فاصله P تا هریک از گانونها حاصل ضرب خروج از مرکز e و فاصله P تا هادی نظیر است. در اینجا هادی نظیر به یک گانون همیشه نزدیکترین هادی به آن گرفته می شود. فاصله بین هر هادی و گانون نظیر عبارت است از

$$(۸) \quad d = \frac{a^2}{c} - c = \left(\frac{1}{e} - e\right)a$$

برای بیضی و

$$(۸') \quad d = c - \frac{a^2}{c} = \left(e - \frac{1}{e}\right)a$$

برای هذلولی است. (هر یک از عبارات (۸) و (۸') مساوی b^2/c است، که در آن b نصف طول محور اقصر در حالت اول و نصف طول محور مزدوج در حالت دوم است.) به همین نحو، فاصله بین هر هادی و رأس نظیر برای بیضی مساوی

$$\frac{a^2}{c} - a = \left(\frac{1}{e} - 1\right)a$$

و برای هذلولی برابر

$$a - \frac{a^2}{c} = \left(1 - \frac{1}{e}\right)a$$

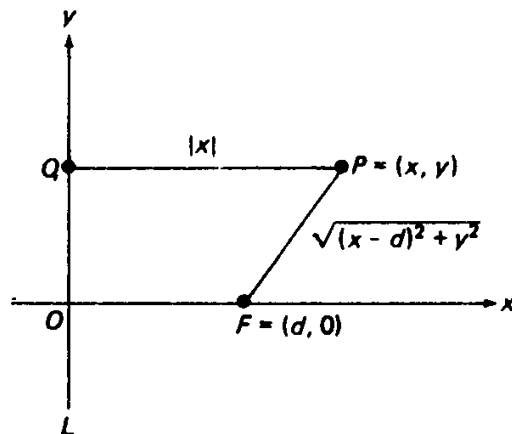
می‌باشد. همانطور که در بالا گفته شد، خود هادیها در فاصله^۶ $h = 2a/e = 2a^2/c$ از یکدیگر قرار دارند. از این فرمولها می‌توان برای یافتن هادیهای بیضی یا هذلولی که حتی معادله‌ای به شکل (۱) یا (۳) ندارند استفاده کرد.

خاصیت کانون - هادی. لذا، هم اکنون نشان داده‌ایم که هر نقطه^۶ P از بیضی یا هذلولی با خروج از مرکز e در خاصیت کانون - هادی

$$(۹) \quad |PF| = e|PQ|$$

صدق می‌کند، که در آن F یکی از کانونها بوده و Q پای عمود مرسوم از P به نزدیکترین هادی L به F است. حال عکس مطلب را ثابت می‌کنیم؛ یعنی، نشان می‌دهیم که هر نقطه^۶ $P = (x, y)$ صادق در (۹) بر یک بیضی یا خروج از مرکز e قرار دارد اگر $0 < e < 1$ یا بر یک هذلولی با خروج از مرکز e واقع است اگر $e > 1$. برای این کار، فرض کنیم، مثل شکل ۴۲، کانون نقطه^۶ $(d, 0)$ بوده و هادی L محور y باشد. در این صورت،

$$|PF| = \sqrt{(x-d)^2 + y^2}, \quad |PQ| = |x|,$$



شکل ۴۲

و (۹) به صورت زیر درمی‌آید:

$$\sqrt{(x-d)^2 + y^2} = e|x|.$$

بنابراین،

$$(x-d)^2 + y^2 = e^2x^2$$

یا

$$(1-e^2)x^2 - 2dx + y^2 + d^2 = 0,$$

که در آن $1 - e^2 \neq 0$. با فاکتورگرفتن از $1 - e^2$ و کامل کردن مربع، این معادله را می‌توان

به صورت زیر نوشت:

$$(1 - e^2) \left(x - \frac{d}{1 - e^2} \right)^2 + y^2 = \frac{d^2}{1 - e^2} - d^2 = \frac{e^2 d^2}{1 - e^2},$$

که با

$$\left(x - \frac{d}{1 - e^2} \right)^2 + \frac{y^2}{1 - e^2} = \left(\frac{ed}{1 - e^2} \right)^2$$

معادل می‌باشد. معادلهٔ اخیر را می‌توان به ازای $0 < e < 1$ به شکل

$$(10) \quad \frac{\left(x - \frac{d}{1 - e^2} \right)^2}{\left(\frac{ed}{1 - e^2} \right)^2} + \frac{y^2}{\left(\frac{ed}{\sqrt{1 - e^2}} \right)^2} = 1$$

و به ازای $e > 1$ به شکل

$$(10') \quad \frac{\left(x + \frac{d}{e^2 - 1} \right)^2}{\left(\frac{ed}{e^2 - 1} \right)^2} - \frac{y^2}{\left(\frac{ed}{\sqrt{e^2 - 1}} \right)^2} = 1$$

نوشت. اما (۱۰) معادلهٔ یک بیضی است، ولی (۱۰') معادلهٔ هذلولی می‌باشد. به‌عنوان تمرین، بیضی (۱۰) و هذلولی (۱۰') را توصیف کرده، و تحقیق کنید هر یک دارای خروج از مرکز e است.

در قضیهٔ زیر تمام این نکات، همراه با این امر که فرمول (۹) به ازای $e = 1$ به‌خاصیت معرف سهمی بدل می‌شود خلاصه شده است (ر. ک. صفحه ۶۳۱).

قضیهٔ ۱ (خاصیت کانون - هادی مقاطع مخروطی). عدد مثبت e داده شده است. فاصلهٔ نقطهٔ متغیر P تا نقطهٔ ثابت F مساوی e برابر فاصلهٔ P تا خط ثابت L غیرشامل F است اگر و فقط اگر P بر یک مقطع مخروطی به کانون F ، هادی L ، و خروج از مرکز e واقع باشد. این مقطع مخروطی

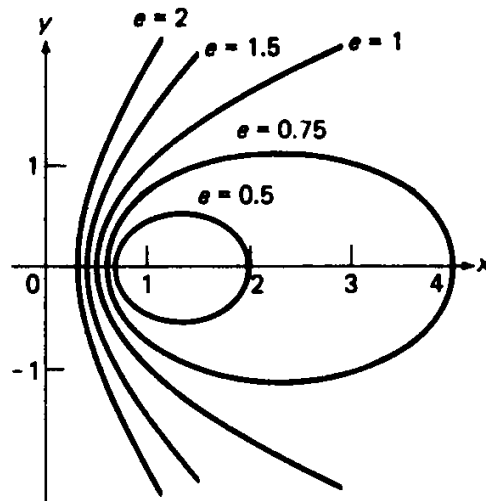
(یک) بیضی است اگر $0 < e < 1$ ؛

(دو) سهمی است اگر $e = 1$ ؛

(سه) هذلولی است اگر $e > 1$.

این قضیه در شکل ۴۳ تعبیر هندسی شده است، که در آن کانون نقطهٔ $(1, 0)$ ،

هادی محور y ، و خروج از مرکز e مقادیر 0.5 ، 0.75 ، 1 ، 1.5 ، و 2 را می‌گیرد. سهمی نمودار $y^2 = 2x - 1$ ، و سایر منحنیها نمودار (10) و $(10')$ به ازای $d = 1$ و مقادیر ذکر شده از e می‌باشند.



مقاطع مخروطی با خروج از مرکزهای مختلف

شکل ۴۳

مثال ۱. معادله بیضی را بیابید که رئوسش $(\pm 6, 0)$ بوده و هادیهایش به فاصله $h = \frac{72}{5}$ از هم باشند. خروج از مرکز آن چقدر است؟

حل. معادله متعارف بیضی عبارت است از $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ ، که در آن $2a$ طول محور اطول و $2b$ طول محور اقصا است. هرگاه $2c$ فاصله بین کانونها باشد، آنگاه $2a^2/c$ فاصله بین هادیها می‌باشد. فرض است که

$$a = 6, \quad h = \frac{2a^2}{c} = \frac{72}{5},$$

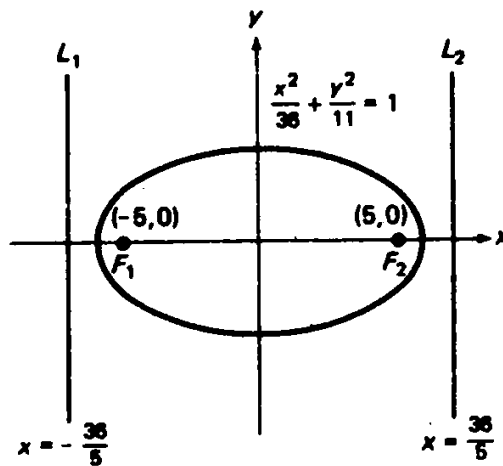
و در نتیجه، $c = 5$ ، بنابراین، $b^2 = a^2 - c^2 = 36 - 25 = 11$ ، معادله بیضی مساوی است با

$$\frac{x^2}{36} + \frac{y^2}{11} = 1,$$

و خروج از مرکز آن برابر است با

$$e = \frac{c}{a} = \frac{5}{6}.$$

شکل ۴۴ بیضی را همراه با کانونهایش $(\pm 5, 0)$ و هادیهایش $x = \pm \frac{36}{5}$ نشان می‌دهد.



شکل ۴۴

مثال ۲. معادله هذلولی بهرأسهای $(0, \pm 2)$ و خروج از مرکز $e = \frac{3}{2}$ را بیابید. هادیهایش کجا واقعند؟

حل. معادله متعارف هذلولی مورد بحث عبارت است از $1 = (y^2/a^2) - (x^2/b^2)$ ، که در آن $2a$ طول محور متقاطع و $2b$ طول محور مزدوج است. هرگاه $2c$ فاصله بین کانونها باشد، آنگاه c/a خروج از مرکز است. فرض است که

$$a = 2, \quad e = \frac{c}{a} = \frac{3}{2},$$

در نتیجه، $c = 3, b^2 = c^2 - a^2 = 9 - 4 = 5$. لذا، معادله هذلولی عبارت است از

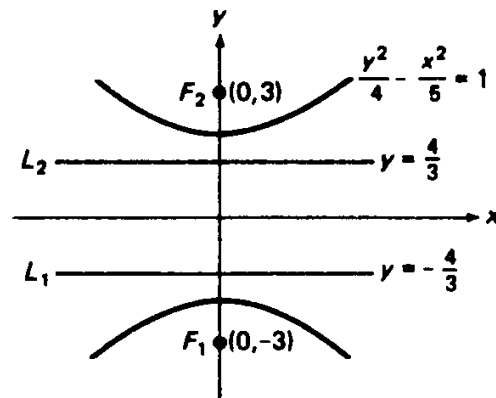
$$\frac{y^2}{4} - \frac{x^2}{5} = 1,$$

و فاصله بین هادیهایش مساوی است با

$$h = \frac{2a^2}{c} = \frac{2a}{e} = \frac{8}{3}.$$

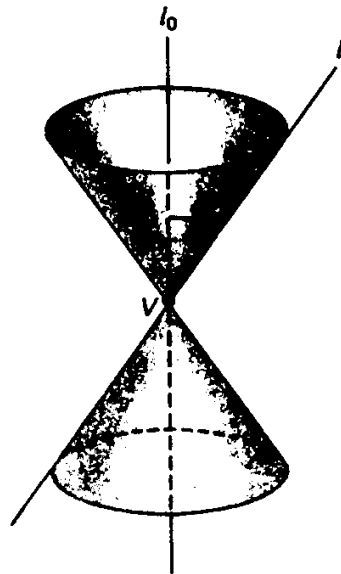
شکل ۴۵ هذلولی را همراه با کانونهایش $(0, \pm 3)$ و هادیهایش $y = \pm 4$ نشان می‌دهد.

اکنون، همانطور که قول داده‌ایم، توضیح می‌دهیم که چرا سهمی، بیضی، وهذلولی را مقاطع مخروطی یا فقط مخروطی می‌گویند. از نام برمی‌آید که رابطه‌ای با مخروط وجود دارد؛ و در واقع، هر یک فصل مشترک یک مخروط مستدیر قائم مضاعف با صفحه قاطع



شکل ۴۵

مناسبی می باشد. شکل ۴۶ یک چنین مخروط را نشان می دهد. این مخروط سطحی است که از دو قسمت به نام پارچه تشکیل شده است که یکدیگر را در نقطه V قطع می کنند. این نقطه رأس مخروط نام دارد، و هر خط l واقع بر مخروط و مار بر V یک مولد مخروط نامیده

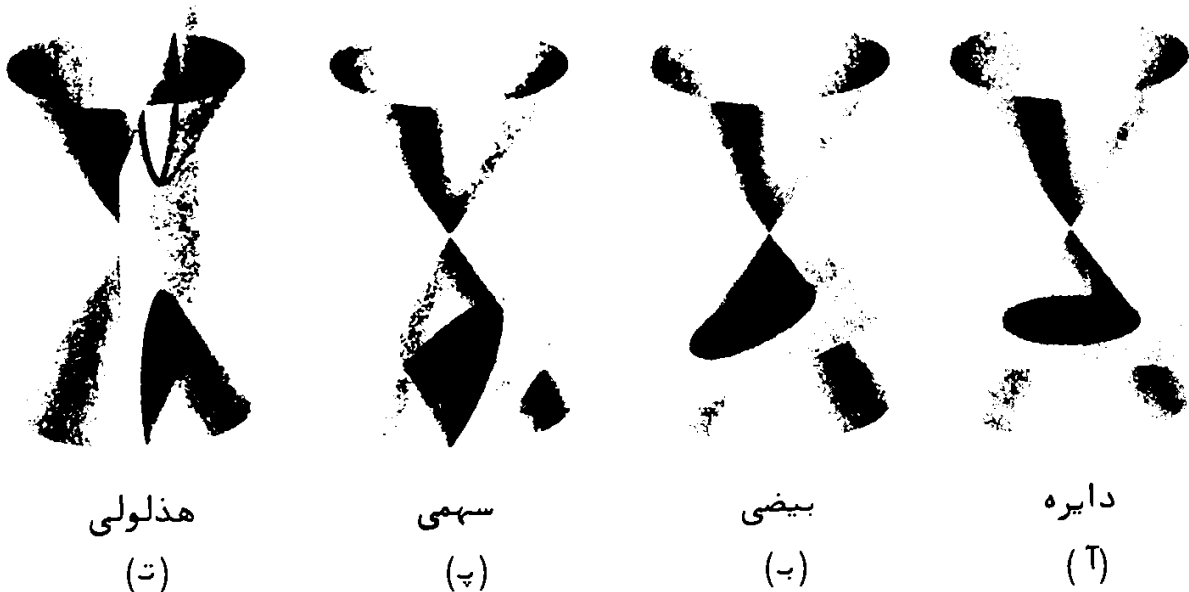


مخروط مستدیر قائم دوپارچه

شکل ۴۶

می شود که با محور l_0 مخروط زاویه حاده α را می سازد (ر.ک. شکل). در واقع، هر مولد l با دوران حول l_0 ضمن ثابت نگهداشتن α هر دو پارچه مخروط را جارو می کند. فرض کنیم Π (حرف پی بزرگ یونانی) صفحه ای باشد که با محور مخروط زاویه β ساخته و از رأس مخروط نگذرد. در این صورت، منحنی، به نام مقطع مخروطی، که فصل مشترک Π با مخروط است

- (یک) دایره است اگر $\beta = 90^\circ$ ، مثل شکل ۴۷ (ت) ؛
 (دو) بیضی است اگر $\alpha < \beta < 90^\circ$ ، مثل شکل ۴۷ (ب) ؛
 (سه) سهمی است اگر $\alpha = \beta$ ، مثل شکل ۴۷ (پ) ؛
 (چهار) هذلولی است اگر $0 \leq \beta < \alpha$ ، مثل شکل ۴۷ (د) .



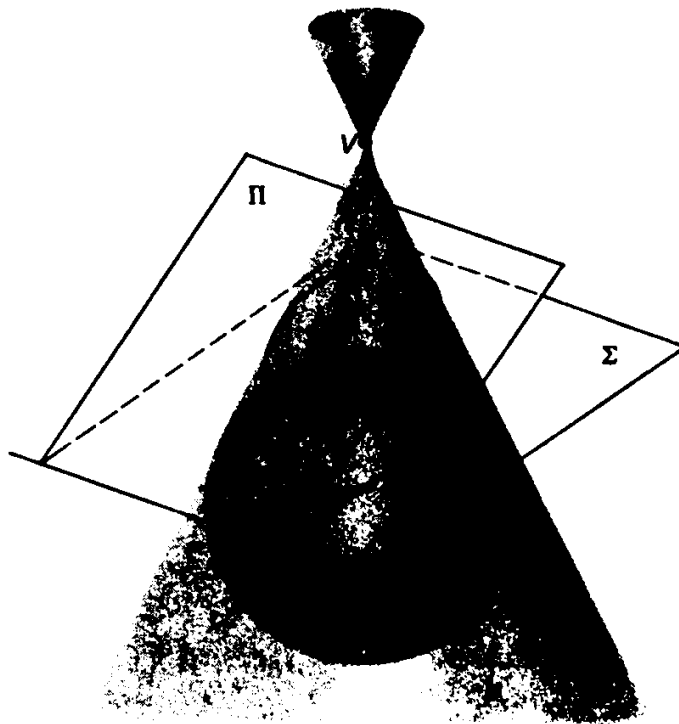
شکل ۴۷

توجه کنید که فقط در حالت (چهار) است که صفحه هر دو پارچه مخروط را قطع می کند . اثبات (یک) بلافاصله (با استفاده از مثلثهای همنهشت) صورت می گیرد . اثباتهای (دو) تا (چهار) نیاز به فراست بیشتری است ، و تفصیل فقط برای بیضی داده خواهد شد . با اینحال ، همین استدلال با تعدیلهایی جزئی برای سهمی و هذلولی به کار خواهند رفت .

اختیاری . اکنون با توجه به شکل ۴۸ حالت (دو) را با دقت بیشتری بررسی می کنیم . فرض کنیم E فصل مشترک صفحه Π با یکی از پارچه های مخروط به رأس V بوده ، و در مخروط کره S را طوری محاط می کنیم که به Π در نقطه F و به مخروط در امتداد دایره C مماس باشد . فرض کنیم P نقطه ای از منحنی E بوده ، و A نقطه برخورد C با مولدی از مخروط باشد که از P می گذرد . همچنین ، Σ صفحه دایره C ، L فصل مشترک صفحات Σ و Π ، و Q نقطه اشتراک L و عمود مرسوم از P به L باشد .

پاره خطهای PA و PF متساوی الطولند ؛ یعنی ،

$$(11) \quad |PA| = |PF|,$$



شکل ۴۸

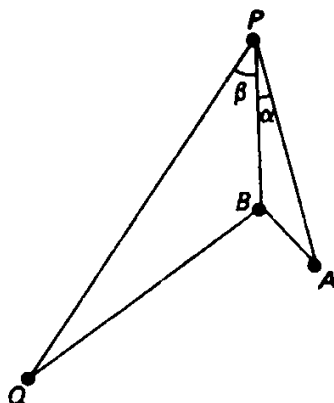
زیرا مماسهایی هستند که از نقطه P بر کره S رسم شده‌اند. فرض کنیم B پای عمود وارد از P بر صفحه Σ باشد؛ در نتیجه، PB موازی محور مخروط است. در این صورت،

$$(۱۲) \quad \frac{|PB|}{|PA|} = \cos \alpha,$$

که در آن α زاویه بین یک مولد و محور مخروط است، ولی

$$(۱۲') \quad \frac{|PB|}{|PQ|} = \cos \beta,$$

که در آن β زاویه بین صفحه Π و محور می‌باشد (ر. ک. شکل ۴۹، که بزرگ شده قسمت‌ای از



شکل ۴۹

شکل ۴۸ است). با تقسیم (۱۲') بر (۱۲)، به دست می‌آوریم

$$\frac{|PA|}{|PQ|} = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha}$$

یا معادلا"، به خاطر (۱۱)،

$$(۱۳) \quad |PF| = \frac{\cos \beta}{\cos \alpha} |PQ|.$$

اما $\alpha < \beta < 90^\circ$ ؛ و در نتیجه، نسبت $\cos \beta / \cos \alpha$ عددی بین ۰ و ۱ است. اگر این عدد را با e نشان دهیم، می‌توانیم (۱۳) را به شکل

$$|PF| = e|PQ|$$

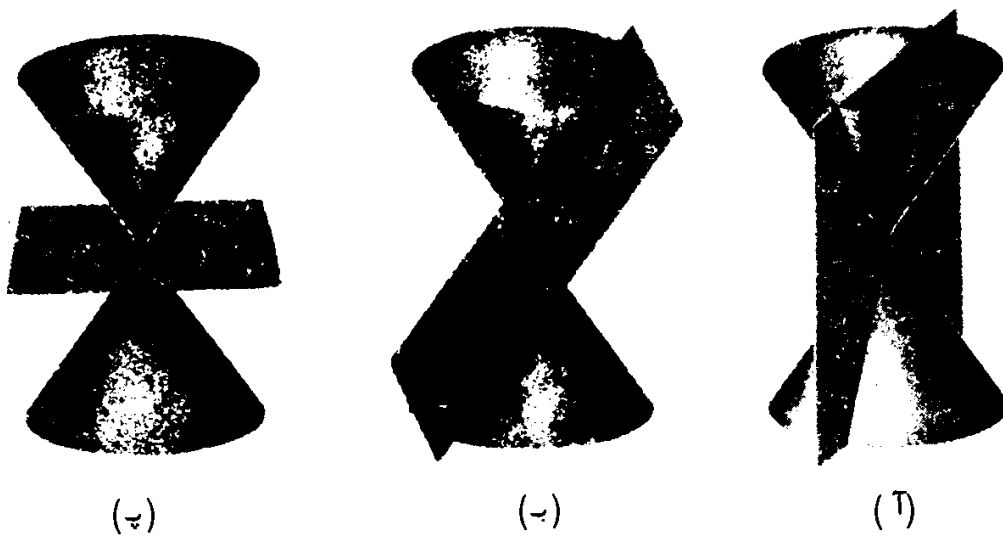
بنویسیم، که همان تعریف بیضی بر حسب خاصیت کانون - هادی آن می‌باشد. لذا، منحنی E بیضی به کانون F ، هادی L ، و خروج از مرکز e است، و برهان (دو) تمام خواهد بود.

همچنین، سه مخروطی "تباہ شده" وجود دارند که زمانی به دست می‌آیند که صفحهء قاطع از رأس مخروط می‌گذرد. این سه مخروطی عبارتند از

(یک) یک جفت خط متقاطع اگر صفحه شامل دو مولد باشد، مثل شکل ۵۰ (آ)؛

(دو) یک خط اگر صفحه شامل فقط یک مولد باشد، مثل شکل ۵۰ (ب)؛

(سه) یک نقطه اگر صفحه شامل مولدی نباشد، مثل شکل ۵۰ (پ).



شکل ۵۰

در بخش بعد در خواهیم یافت که مخروطیها، هم تباہ نشده و هم تباہ شده، در بررسی نمودار معادلهء درجهء دوم کلی دو متغیره به‌طور طبیعی ظاهر می‌شوند.

مسائل

فرض کنیم h فاصله بین هادیهای یک بیضی به مرکز مبدا باشد. معادله بیضی را در صورتی بیابید که

۱. $h = 18$ ، محور اطول قائم و طولش 12 باشد

۲. $h = 5$ ، محور اطول افقی و فاصله بین کانونها 4 باشد

۳. $h = 13$ ، محور اطول افقی و محور اقصر به طول 6 باشد

۴. $h = 16$ ، محور اطول قائم و خروج از مرکز $\frac{1}{2}$ باشد.

فرض کنید h فاصله بین هادیهای یک هذلولی به مرکز مبدا باشد. معادله هذلولی را در صورتی بیابید که

۵. $h = \frac{2}{3}$ ، محور متقاطع افقی و محور مزدوج به طول 6 باشد

۶. $h = 4$ ، محور متقاطع قائم و طولش 8 باشد

۷. $h = \frac{8}{3}$ ، محور متقاطع قائم و خروج از مرکزش $\frac{2}{3}$ باشد

۸. $h = \frac{1}{2}$ ، محور متقاطع افقی و مجانبهایش $y = \pm \frac{3}{2}x$ باشند.

خروج از مرکز و هادیهای مقطع مخروطی زیر را بیابید.

۹. بیضی $25x^2 + 9y^2 = 225$

۱۰. بیضی $x^2 + 4y^2 + 4x - 8y + 7 = 0$ (ر. ک. شکل ۲۳، صفحه ۹۴۸)

۱۱. بیضی $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 = 0$ (ر. ک. مسئله ۲۱، صفحه ۹۵۴)

۱۲. هذلولی $11x^2 - 25y^2 = 275$

۱۳. هذلولی $2xy = 1$ (ر. ک. شکل ۶، صفحه ۹۲۶)

۱۴. هذلولی $x^2 - 4y^2 - 2x + 16y - 14 = 0$ (ر. ک. شکل ۳۵، صفحه ۹۶۴)

۱۵. مسیر نقطه متحرک $P = (x, y)$ را چنان بیابید که فاصله اش تا خط $x = -4$ همیشه دو برابر فاصله اش تا نقطه $(-1, 0)$ باشد.

۱۶. مسیر نقطه متحرک $P = (x, y)$ را چنان بیابید که فاصله اش تا نقطه $(-8, 0)$ همیشه دو برابر فاصله اش تا خط $x = -2$ باشد.

۱۷. نقطه $(7, 0)$ بر یک هذلولی به کانون $F = (-4, -2)$ و نزدیکترین هادی $x = -3$ به F واقع است. معادله هذلولی را به شکل متعارف بنویسید.

۱۸. نقطه $(-1, 5)$ بر بیضی به کانون $F = (3, 2)$ و نزدیکترین هادی $x = \frac{1}{2}$ به F قرار دارد. معادله بیضی را به شکل متعارف بنویسید.

۱۹. معادله بیضی با خروج از مرکز $\frac{1}{2}$ و کانون $F = (2, 0)$ و نزدیکترین هادی $x + y - 1 = 0$ به F را بیابید.

۲۰. معادله هذلولی با خروج از مرکز 2 و کانون $F = (-1, 1)$ و نزدیکترین هادی $3x - 4y + 2 = 0$ به F را بیابید.

۲۱. در شکل ۴۸، کره S زیر صفحه قاطع Π قرار داشته و بر Π در نقطه F و با مخروط در امتداد دایره C مماس است. همچنین، می‌توان کره دیگر S' را در مخروط طوری محاط کرد که بالای Π واقع بوده و بر Π در نقطه F' و بر مخروط در امتداد دایره C مماس باشد. در این صورت، همان استدلالی که نشان داد F یکی از کانونهای بیضی E است که در آن مخروط را قطع می‌کند نشان می‌دهد که F' کانون دیگر است. با استفاده از این ترسیم، خاصیت دو کانونی E را مستقیماً ثابت کنید؛ یعنی، ثابت کنید که $|PF| + |PF'| = 2a$. تعبیر هندسی ثابت $2a$ بر حسب مخروط و کرات چیست؟

۶.۱۰ منحنیهای درجه دو (اختیاری)

منظور از معادله درجه دو از دو متغیر x و y یعنی معادله‌ای به شکل

$$(1) \quad Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0,$$

که در آن ضرایب A ، B ، و C همه صفر نیستند (در غیر این صورت، (۱) به معادله درجه اول یا خطی تحویل می‌شود). نمودار این معادله یک منحنی درجه دو نام دارد، و آن را می‌توان به صورت زیر پیدا کرد.

اگر "جمله حاصل ضرب Bxy وجود نمی‌داشت، معادله (۱) از نوعی می‌بود که قبلاً با آن آشنا شده‌ایم (ر.ک. زیر). لذا، اگر $B \neq 0$ ، گام اول در تحلیل (۱) رفتن به دستگاه مختصات جدیدی است که در آن جمله حاصل ضرب وجود نداشته باشد. برای این کار، دستگاه xy را حول مبدأ O به اندازه زاویه θ در جهت خلاف عقربه‌های ساعت دوران داده، بدین وسیله دستگاه $x'y'$ جدید را با همان مبدأ به دست می‌آوریم. مختصات قدیم و جدید با معادلات دوران

$$(2) \quad \begin{aligned} x &= x' \cos \theta - y' \sin \theta, \\ y &= x' \sin \theta + y' \cos \theta, \end{aligned}$$

که در صفحه ۹۲۴ به دست آمدند به هم مربوطند. با گذاردن (۲) در (۱)، به دست می‌آوریم

$$\begin{aligned} &A(x' \cos \theta - y' \sin \theta)^2 + B(x' \cos \theta - y' \sin \theta)(x' \sin \theta + y' \cos \theta) \\ &+ C(x' \sin \theta + y' \cos \theta)^2 + D(x' \cos \theta - y' \sin \theta) \\ &+ E(x' \sin \theta + y' \cos \theta) + F = 0. \end{aligned}$$

این فرمول بزرگ پس از دسته‌بندی جملات به شکل زیر تحویل می‌شود:

$$(۱) \quad A'x'^2 + B'x'y' + Cy'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0,$$

که برحسب ضرایب جدید داریم

$$(۲) \quad \begin{aligned} A' &= A \cos^2 \theta + B \cos \theta \sin \theta + C \sin^2 \theta, \\ B' &= B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2(C - A) \sin \theta \cos \theta, \\ C' &= A \sin^2 \theta - B \sin \theta \cos \theta + C \cos^2 \theta, \\ D' &= D \cos \theta + E \sin \theta, \\ E' &= -D \sin \theta + E \cos \theta, \\ F' &= F. \end{aligned}$$

حذف جملهٔ حاصل ضرب. حال مقدار θ را طوری می‌گیریم که $B' = 0$: یعنی، طوری که

$$B' = B(\cos^2 \theta - \sin^2 \theta) + 2(C - A) \sin \theta \cos \theta = 0.$$

به کمک فرمولهای زاویهٔ مضاعف (ر.ک. صفحهٔ ۹۶)، این معادله را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$B \cos 2\theta + (C - A) \sin 2\theta = 0,$$

یا معادلاً، پس از تقسیم طرفین بر $B \sin 2\theta$ ،

$$(۴) \quad \cot 2\theta = \frac{A - C}{B}$$

با معاینهٔ نمودار تابع کتانژانت (ر.ک. شکل ۲۴، صفحهٔ ۱۰۴) معلوم می‌شود که همواره زاویهٔ θ در بازهٔ $(0, \pi/2)$ را طوری یافت که، صرف‌نظر از مقدار $(A - C)/B$ ، در (۴) صدق نماید.

به ازای این θ ، B' مساوی صفر بوده و معادلهٔ (۱) شکل زیر را به خود می‌گیرد:

$$(۵) \quad A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 0,$$

که در آن جملهٔ حاصل ضرب وجود ندارد. پس به وضعیت آشنایی بازگشته‌ایم. هرگاه $A'C = 0$ ، آنگاه $A' \neq 0, C' = 0$ یا $A' = 0, C' \neq 0$ (چرا حالت $A' = C' = 0$ غیرممکن است؟). بنابراین، (۵) را می‌توان به شکل

$$(۶) \quad x'^2 + ax' + by' + c = 0$$

یا

$$(۶') \quad y'^2 + ax' + by' + c = 0$$

نوشت، که در آن

$$(۷) \quad a = \frac{D'}{A'}, \quad b = \frac{E'}{A'}, \quad c = \frac{F'}{A'}$$

در حالت اول و

$$a = \frac{D}{C'}, \quad b = \frac{E'}{C'}, \quad c = \frac{F'}{C'}$$

در حالت دوم است. اگر $A'C' > 0$ ، می‌توان (۵) را به شکل زیر نوشت:

$$(۸) \quad x'^2 + ky'^2 + ax' + by' + c = 0,$$

که در آن $k = C'/A' > 0$ و a, b, c با (۷) داده شده‌اند، ولی اگر $A'C' < 0$ ، (۵) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(۸') \quad x'^2 - ky'^2 + ax' + by' + c = 0,$$

که در آن این بار $k = -C'/A' > 0$ و a, b, c مجدداً با (۷) داده می‌شوند. اما (۶)، (۶')، (۸) و (۸') درست همان معادلاتی هستند که به تفصیل در صفحات ۹۳۵، ۹۴۸، و ۹۶۴ داده شده‌اند منتها با تفاوت‌هایی جزئی در نمادها. بدین ترتیب، هر معادلهٔ درجهٔ دو را می‌توان به معادله‌ای تبدیل کرد که حل آن را قبلاً می‌دانیم.

اگر $b \neq 0$ ، نمودار معادلهٔ (۶) یک سهمی است که محور y' محور تقارن آن است، ولی اگر $a \neq 0$ ، نمودار (۶') یک سهمی است که محور x' محور تقارن آن می‌باشد. اگر این شرایط برقرار نباشند، یعنی اگر (۶) به

$$(۹) \quad x'^2 + ax' + c = 0$$

و (۶') به

$$(۹') \quad y'^2 + by' + c = 0$$

تحویل شود، نمودار به یک جفت خط موازی، یک نقطه، یا مجموعهٔ تهی (مجموعه‌ای که اصلاً شامل نقطه‌ای نیست) تباه می‌گردد. در حالت (۹)، دلیلش این است که معادله دوجواب

$$x' = \frac{-a \pm \sqrt{a^2 - 4c}}{2}$$

را دارد اگر $a^2 > 4c$ ، تنها جواب $x' = -a/2$ را دارد اگر $a^2 = 4c$ ، و جواب (حقیقی) ندارد اگر $a^2 < 4c$ ، و حکم مشابهی را می‌توان در باب جوابهای (۹') بیان کرد. نمودار معادلهٔ (۸) یک بیضی (احتمالاً دایره، اگر $k = 1$)، یک نقطه، یا مجموعهٔ تهی است (ر. ک. صفحه ۹۴۸)، ولی نمودار (۸') یک هذلولی یا یک جفت خط متقاطع می‌باشد (ر. ک. صفحه ۹۶۴). اگر نمودار بیضی یا هذلولی باشد، محورهای موازی محورهای مختصات صفحهٔ $x'y'$ می‌باشند.

منحنیهای درجهٔ دو به عنوان مخروطی.

با احتساب همهٔ این امکانات، می‌بینیم که هر منحنی درجهٔ دو باید یک بیضی، دایره، سهمی، یا هذلولی باشد؛ یعنی، یکی از مخروطیها، یک جفت خط متقاطع، یک جفت خط

موازی، یک خط، یک نقطه، یا مجموعهٔ تهی می‌باشد. در صفحهٔ ۹۸۲ یک جفت خط متقاطع، یک خط، و یک نقطه را مخروطیهای تباہ شده گرفتیم، و نشان دادیم که هر یک از این "اشکال" فصل مشترک یک صفحه با یک مخروط مستدیر قائم دو پارچه است. حال یک جفت خط موازی و مجموعهٔ تهی را نیز مخروطی تباہ شده می‌گیریم. با این قرارداد می‌توان گفت که هر منحنی درجهٔ دو یک مخروطی، تباہ نشده یا تباہ شده، می‌باشد.

تبصره. نامیدن یک جفت خط موازی یا مجموعهٔ تهی به عنوان مخروطی تباہ شده شایسته نیست، زیرا به طور هندسی واضح است که اشتراک یک صفحه و یک مخروط مضاعف نامتناهی نمی‌تواند نه یک جفت خط موازی و نه تهی باشد. لذا، معمولاً "تعریف مخروطی را طوری تعمیم می‌دهند که اشتراک یک صفحه با یک استوانهٔ مستدیر قائم را نیز، مانند مخروط مستدیر قائم، دربرگیرد. در این صورت، می‌توان یک جفت خط موازی مثل شکل ۵۱ (آ)، یا مجموعهٔ تهی (بدون فصل مشترک) مثل شکل ۵۱ (ب)، یا یک بیضی مثل مسئلهٔ ۱۷ به دست آورد.



شکل ۵۱

به کمک اتحاد

$$\cot 2\theta = \frac{\cos^2 \theta - \sin^2 \theta}{2 \sin \theta \cos \theta} = \frac{\cot^2 \theta - 1}{2 \cot \theta},$$

می‌توان (۴) را به شکل زیر نوشت:

$$(۱۰) \quad \frac{\cot^2 \theta - 1}{2 \cot \theta} = \frac{A - C}{B}.$$

این معادله با معادله درجه دوم

$$B \cot^2 \theta - 2(A - C) \cot \theta - B = 0$$

معادل است، که دو جواب حقیقی اش عبارتند از

$$\cot \theta = \frac{(A - C) \pm \sqrt{(A - C)^2 + B^2}}{B}$$

یکی از این جوابها مثبت و دیگری منفی است (چرا؟). با اختیار جواب مثبت، می توان مقادیری از $\cos \theta$ و $\sin \theta$ را یافت که در محاسبه ضرایب (۳) به کمک فرمولهای

$$(11) \quad \cos \theta = \frac{\cot \theta}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}, \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \cot^2 \theta}}$$

لازمند (این فرمولها را تحقیق کنید).

مثال ۱. نمودار معادله

$$(12) \quad 5x^2 + 4xy + 2y^2 - 24x - 12y + 18 = 0$$

را بیابید.

حل. در اینجا $A = 5, B = 4, C = 2, D = -24, E = -12, F = 18$ ، و (۱۰) به صورت

$$\frac{\cot^2 \theta - 1}{2 \cot \theta} = \frac{3}{4}$$

یا معادلا

$$2 \cot^2 \theta - 3 \cot \theta - 2 = 0,$$

با جوابهای

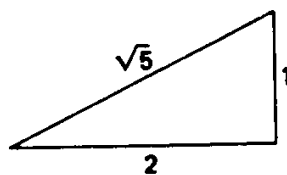
$$\cot \theta = \frac{3 \pm \sqrt{9 + 16}}{4} = \frac{3 \pm 5}{4}$$

در می آید. با انتخاب علامت به علاوه برای مثبت ساختن $\cot \theta$ ، به دست می آوریم

$$\cot \theta = \frac{8}{4} = 2.$$

لذا، طبق (۱۱) یا صرفاً با معاینه مثلث قائم الزاویه شکل ۵۲، داریم

$$\cos \theta = \frac{2}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{2}{\sqrt{5}}, \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + 4}} = \frac{1}{\sqrt{5}},$$



شکل ۵۲

و ضرایب (۳) به ازای این مقادیر از $\cos \theta$ و $\sin \theta$ برابرند با

$$A' = \frac{4}{5}A + \frac{2}{5}B + \frac{1}{5}C = 4 + \frac{8}{5} + \frac{2}{5} = 6,$$

$$B' = 0,$$

$$C' = \frac{1}{5}A - \frac{2}{5}B + \frac{4}{5}C = 1 - \frac{8}{5} + \frac{8}{5} = 1,$$

$$D' = \frac{2}{\sqrt{5}}D + \frac{1}{\sqrt{5}}E = -\frac{48}{\sqrt{5}} - \frac{12}{\sqrt{5}} = -\frac{60}{\sqrt{5}} = -12\sqrt{5},$$

$$E' = -\frac{1}{\sqrt{5}}D + \frac{2}{\sqrt{5}}E = \frac{24}{\sqrt{5}} - \frac{24}{\sqrt{5}} = 0,$$

$$F' = F = 18.$$

لذا، معادله (۱۲) با دوران محورها به اندازه زاویه $\arccot 2 \approx 26.5^\circ$ خلاف جهت عقربه‌های ساعت به شکل زیر درمی‌آید:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 6x'^2 + y'^2 - 12\sqrt{5}x' + 18 = 0.$$

معادلهٔ اخیر را می‌توان پس از کامل کردن مربع به صورت زیر نوشت:

$$6(x' - \sqrt{5})^2 + y'^2 = 12$$

که، پس از تقسیم بر ۱۲، با

$$\frac{(x' - \sqrt{5})^2}{2} + \frac{y'^2}{12} = 1$$

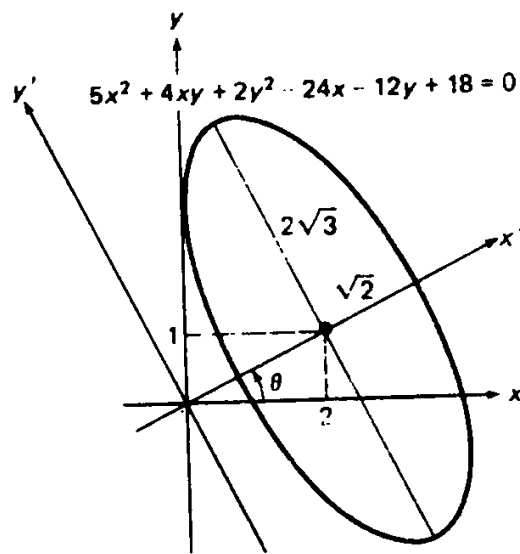
معادل است. این معادلهٔ یک بیضی به شکل متعارف است که مرکز آن در دستگاه $x'y'$ مساوی $(\sqrt{5}, 0)$ ، محور طولش در امتداد خط $x' = \sqrt{5}$ ، و محور اقصرش در امتداد محور x' می‌باشد. نیم محور طول a مساوی است با $\sqrt{12} = 2\sqrt{3}$ ، و نیم محور اقصرش b برابر $\sqrt{2}$ می‌باشد. با گذاردن $x' = \sqrt{5}$ ، $y' = 0$ در معادلات دوران (۲)، معلوم می‌شود که مختصات مرکز

بیضی در دستگاه xy عبارتند از

$$x = \sqrt{5} \cos \theta - 0 \sin \theta = \sqrt{5} \frac{2}{\sqrt{5}} = 2,$$

$$y = \sqrt{5} \sin \theta + 0 \cos \theta = \sqrt{5} \frac{1}{\sqrt{5}} = 1.$$

لذا، نمودار (۱۲) بیضی شکل ۵۳ می‌باشد. در مسئله ۱۵، ویژگی جالبی از این نمودار مطرح شده است.



شکل ۵۳

مثال ۲. نمودار معادله

$$(۱۳) \quad 9x^2 - 12xy + 4y^2 - 52x - 78y - 338 = 0$$

را بیابید.

حل. این بار $A = 9, B = -12, C = 4, D = -52, E = -78, F = -338$ و (۱۰) به صورت

$$\frac{\cot^2 \theta - 1}{2 \cot \theta} = -\frac{5}{12}$$

یا معادلا

$$6 \cot^2 \theta + 5 \cot \theta - 6 = 0,$$

با دو جواب

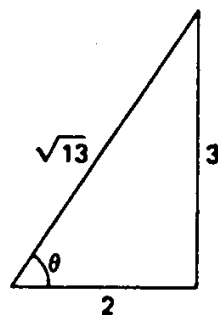
$$\cot \theta = \frac{-5 \pm \sqrt{25 + 144}}{12} = \frac{-5 \pm 13}{12}$$

درمی‌آید. با اختیار علامت به علاوه برای مثبت ساختن $\cot \theta$ ، به دست می‌آوریم

$$\cot \theta = \frac{8}{12} = \frac{2}{3}$$

بنابراین، طبق (۱۱) یا معاینه مثلث قائم‌الزاویه شکل ۵۴،

$$\cos \theta = \frac{\frac{2}{3}}{\sqrt{1 + \frac{4}{9}}} = \frac{2}{\sqrt{13}}, \quad \sin \theta = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{4}{9}}} = \frac{3}{\sqrt{13}}$$



شکل ۵۴

ضرایب (۳) به ازای این مقادیر $\cos \theta$ و $\sin \theta$ برابرند با

$$A' = \frac{4}{13}A + \frac{6}{13}B + \frac{9}{13}C = \frac{36}{13} - \frac{72}{13} + \frac{36}{13} = 0,$$

$$B' = 0,$$

$$C' = \frac{9}{13}A - \frac{6}{13}B + \frac{4}{13}C = \frac{81}{13} + \frac{72}{13} + \frac{16}{13} = \frac{169}{13} = 13,$$

$$D' = \frac{2}{\sqrt{13}}D + \frac{3}{\sqrt{13}}E = \frac{2(-52)}{\sqrt{13}} + \frac{3(-78)}{\sqrt{13}} = -\frac{338}{\sqrt{13}} = -26\sqrt{13},$$

$$E' = -\frac{3}{\sqrt{13}}D + \frac{2}{\sqrt{13}}E = -\frac{3(-52)}{\sqrt{13}} + \frac{2(-78)}{\sqrt{13}} = 0,$$

$$F' = F = -338.$$

لذا، معادله (۱۳) با دوران محورها به اندازه $56.3^\circ \approx \operatorname{arccot} \frac{2}{3}$ خلاف جهت عقربه‌های ساعت به شکل زیر درمی‌آید:

$$A'x'^2 + C'y'^2 + D'x' + E'y' + F' = 13y'^2 - 26\sqrt{13}x' - 338 = 0.$$

معادله اخیر با

$$y'^2 = 2\sqrt{13}(x' + \sqrt{13})$$

معادل است، که معادلهٔ یک سهمی به رأس $(-\sqrt{13}, 0)$ در دستگاه $x'y'$ است که محور تقارنش محور x' می‌باشد. با گذاردن $x' = -\sqrt{13}, y' = 0$ در معادلات دوران (۲)، معلوم می‌شود که مختصات رأس سهمی در دستگاه xy عبارتند از

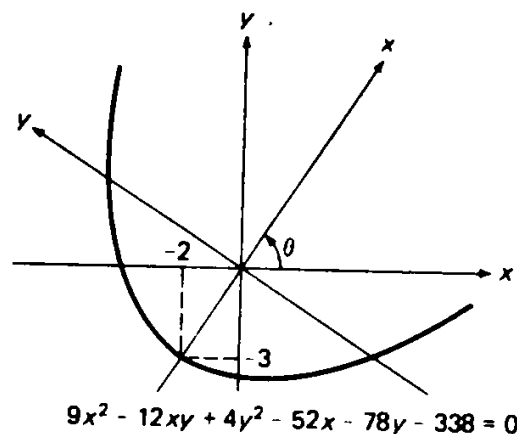
$$x = -\sqrt{13} \cos \theta - 0 \sin \theta = -\sqrt{13} \frac{2}{\sqrt{13}} = -2,$$

$$y = -\sqrt{13} \sin \theta + 0 \cos \theta = -\sqrt{13} \frac{3}{\sqrt{13}} = -3,$$

حال آنکه محور تقارن خط مار بر مبداء با میل θ است؛ یعنی، خط

$$y = x \tan \theta = \frac{x}{\cot \theta} = \frac{3}{2} x.$$

لذا، نمودار (۱۳) سهمی شکل ۵۵ می‌باشد.



شکل ۵۵

فرض کنیم ضرایب x^2 و y^2 در معادلهٔ درجهٔ دو اصلی یکی باشند. پس $A = C$ و معادلهٔ (۱۰) به صورت $\cot 2\theta = 0$ با جواب $\theta = 45^\circ$ درمی‌آید. لذا، در این حالت، با دوران 45° محورهای جملهٔ حاصل ضرب حذف می‌شود. مثلاً، دوران 45° محورها در جهت خلاف عقربه‌های ساعت، معادلات

$$2xy - 1 = 0, \quad x^2 - 2xy + y^2 - 8x - 8y = 0$$

را به ترتیب به معادلات

$$x'^2 - y'^2 - 1 = 0, \quad y'^2 - 4\sqrt{2}x' = 0,$$

تبدیل می‌کند، و این را می‌توان با جانشانی

$$x = x' \cos 45^\circ - y' \sin 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' - y')$$

$$y = x' \sin 45^\circ + y' \cos 45^\circ = \frac{1}{\sqrt{2}}(x' + y')$$

امتحان نمود. اگر این معادلات آشنا به نظر می‌رسند، دلیلش این است که در دو مثال قبل مربوط به دورانهای 45° ، یعنی مثال ۴، صفحه ۹۲۵، و مثالهای ۳ تا ۴، صفحات ۹۳۵ تا ۹۳۶ آمده بودند. لازم است به این مثالها از دیدگاه نظریه این بخش نگاه دیگری بیفکنید.

بالاخره، توجه می‌کنیم که در مسئله ۱۹ آزمون ساده‌ای برای تعیین ماهیت یک منحنی درجه ۲ دو بدون محاسباتی صریح مانند محاسبات امثله ۱ و ۲ وجود دارد.

مسائل

پس از دوران مناسبی از محورها، مخروطی که نمودار معادله داده شده است را نام ببرید. اگر تباها نشده است، آن را رسم نمایید.

$$3x^2 + 10xy + 3y^2 - 2x - 14y - 13 = 0 \quad \cdot 1$$

$$x^2 - 6xy + 9y^2 + 4x - 12y + 4 = 0 \quad \cdot 2$$

$$5x^2 - 2xy + 5y^2 - 4x + 20y + 20 = 0 \quad \cdot 3$$

$$19x^2 + 6xy + 11y^2 + 38x + 6y + 29 = 0 \quad \cdot 4$$

$$160x^2 - 56xy + 265y^2 - 2448x - 612y + 7956 = 0 \quad \cdot 5$$

$$16x^2 - 8xy + y^2 + 12x - 3y - 10 = 0 \quad \cdot 6$$

$$4x^2 + 24xy + 11y^2 + 16x + 38y + 15 = 0 \quad \cdot 7$$

$$5x^2 - 6xy + 5y^2 - 32 = 0 \quad \cdot 8$$

$$50x^2 - 8xy + 35y^2 + 100x - 8y + 67 = 0 \quad \cdot 9$$

$$5x^2 + 24xy - 5y^2 = 0 \quad \cdot 10$$

$$x^2 + 6xy + 9y^2 - 50x - 50y + 100 = 0 \quad \cdot 11$$

$$13x^2 + 10xy + 13y^2 + 16x - 16y - 272 = 0 \quad \cdot 12$$

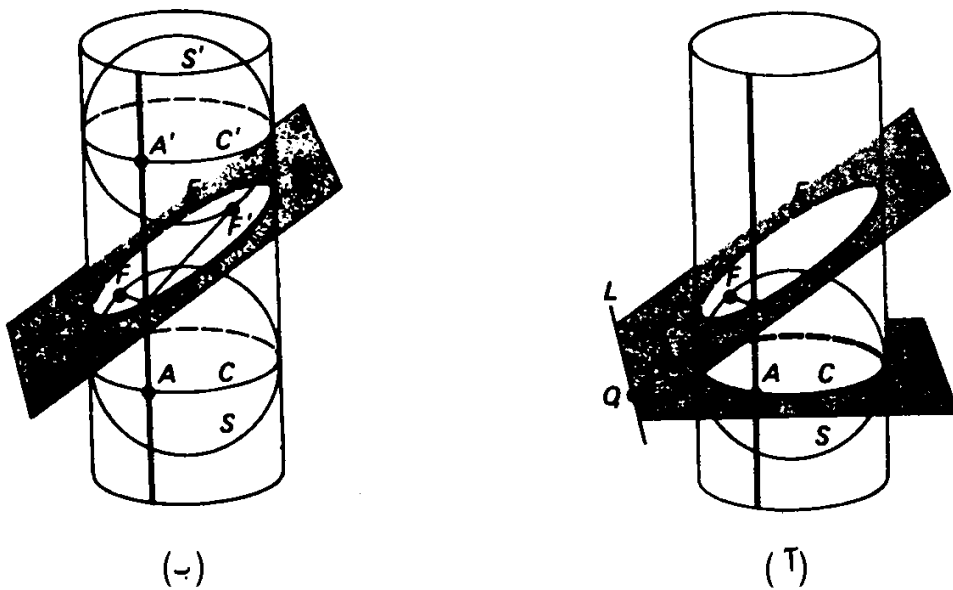
$$25x^2 - 20xy + 4y^2 - 15x + 6y - 4 = 0 \quad \cdot 13$$

$$41x^2 + 24xy + 34y^2 + 34x - 112y + 129 = 0 \quad \cdot 14$$

۱۵. ثابت کنید بیضی مثال ۱، همانند شکل ۵۳، بر محور y مماس است. نقطه تماس را بیابید.

۱۶. نشان دهید که معادله (۴) به ازای دو مقدار متمایز θ در بازه $(-\pi/2, \pi/2)$ که تفاضلشان $\pi/2$ است برقرار می‌باشد. هر انتخاب به معادله‌ای به شکل (۵) منجر می‌شود. دو معادله چه تفاوتی باهم دارند؟

۱۷. با استفاده از شکل ۵۶ (آ)، نشان دهید که منحنی E که فصل مشترک Π با استوانه مستدیر قائم است بیضی است اگر Π با محور استوانه زاویه حاده بسازد. همچنین با استفاده از شکل ۵۶ (ب) نشان دهید که E بیضی است (در اینجا S و S' کراتی محاط شده در استوانه‌اند که یکدیگر را در دایره C و C' قطع می‌کنند).



شکل ۵۶

۱۸. با نمادهای (۳)، تحقیق کنید به ازای هر انتخاب زاویه دوران θ ،

$$A' + C' = A + C, \quad B'^2 - 4A'C' = B^2 - 4AC$$

۱۹. کمیت $\Delta = B^2 - 4AC$ مبین معادله $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey + F = 0$ نام دارد.

لذا، فرمول دوم مسئله قبل را می‌توان به شکل فشرده $\Delta' = \Delta$ نوشت، و گفت مبین تحت دوران پایا است؛ یعنی، پس از دوران محورهای تغییر نمی‌کند. با استفاده از این امر، نشان دهید که نمودار یک معادله درجه دو عبارت از

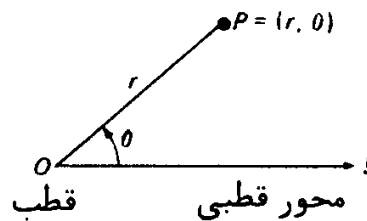
(یک) یک بیضی است (احتمالا "یک دایره، نقطه، یا مجموعه تهی) اگر $\Delta < 0$ ؛
 (دو) یک سهمی است (احتمالا "یک جفت خط موازی، یک خط، یا مجموعه تهی)
 اگر $\Delta = 0$ ؛

(سه) یک هذلولی (احتمالا "دو خط متقاطع) اگر $\Delta > 0$.

۲۰. اعتبار مسئله ۱۹ را با استفاده از مسائل ۱ تا ۱۴ بیازمایید.

۷.۱۰ مختصات قطبی

تاکنون موضع یک نقطه در صفحه با مختصات قائم یا دکارتی (که در صفحه ۳۲ تعریف شدند) مشخص شده است. لیکن، اغلب شایسته است موضع نقطه P در صفحه را به صورتی دیگر، یعنی با " مختصات قطبی " معین کنیم. این مختصات به صورت زیر تعریف می شوند. فرض کنیم l یک شعاع یا نیمخط ثابت، به نام محور قطبی، باشد که از نقطه ثابت O ، به نام مبدا، یا قطب خارج شده است (l را معمولاً "، مثل شکل ۵۷، افقی و به راست می کشند).



شکل ۵۷

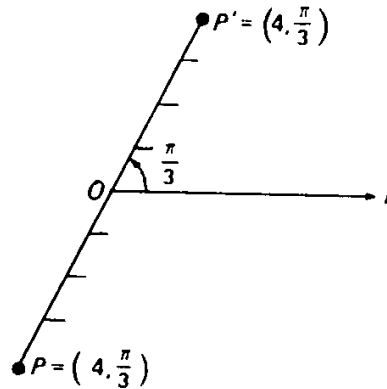
فرض کنید $r = |OP|$ فاصله بین O و P بوده، و θ زاویه بین l و پاره خط OP باشد که از l در جهت خلاف عقربه های ساعت سنجیده می شود. در این صورت، گوییم نقطه P به مختصات قطبی r و θ است، و P را با جفت مرتب (r, θ) نشان داده، می نویسیم $P = (r, \theta)$. برای رسم نمودارها، می توان θ را با درجه یا رادیان سنجید، ولی رادیان معمولاً در مسائل حساب دیفرانسیل و انتگرال به کار می رود. اگر $P = (r, \theta)$ ، r را مختص شعاعی و θ را مختص زاویه ای P می نامند.

همچنین، r مجاز است مقادیر منفی اختیار کند. این را با تعریف $P = (r, \theta)$ ($r < 0$) مساوی منعکس نقطه $P' = (|r|, \theta)$ نسبت به مبدا O انجام می دهیم. به عبارت دیگر، برای یافتن نقطه P به مختصات قطبی $r < 0$ و θ ، در عوض در امتداد شعاعی که با محور قطبی l زاویه θ می سازد، $|r|$ واحد در جهت خلاف شعاع می رویم. این امر در شکل ۵۸ (آ) نموده شده است، که در آن نقطه $P = (-4, \pi/3)$ و نیز نقطه $P' = (4, \pi/3)$ که منعکس P نسبت به O است رسم شده اند. از شکل های ۵۸ (ب) و ۵۸ (پ) واضح است که $P = (-4, \pi/3)$ با جفتهای مرتب $(4, -2\pi/3)$ و $(4, 4\pi/3)$ نیز نموده می شود.

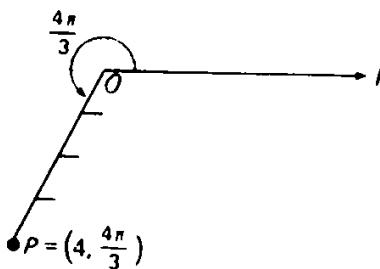
به ازای جفت مرتب (r, θ) ، نقطه به مختصات قطبی r و θ به طور منحصر به فرد معین می شود. از آن سو، همانطور که از شکل ۵۸ قبلاً معلوم است، مختصات قطبی نقطه داده شده P (به خلاف مختصات قائم آن) به طور منحصر به فرد معین نیستند. در واقع، اگر $P = (r, \theta)$ نقطه ای غیر از قطب O باشد، نیز داریم

$$P = (r, \theta + 2n\pi) \quad (n = \pm 1, \pm 2, \dots)$$

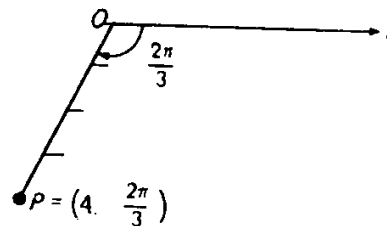
$$P = (-r, \theta + (2n + 1)\pi) \quad (n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots).$$



(ا)



(ب)



(ج)

شکل ۵۸.

(این وضع را می توان این طور توصیف کرد که بگوییم تناظر بین جفت های مرتب از مختصات قطبی و نقاط صفحه، به جای یک به یک بودن مثل مختصات قائم، چند به یک است.) بنا بر قرارداد، قطب O با هر جفت مرتب به شکل $(0, \theta)$ ، صرف نظر از مقدار θ ، نمایش داده می شود. این صرفاً بدان خاطر است که مختص شعاعی قطب صفر است؛ و لذا، مختص زاویه های θ نامعین می باشد.

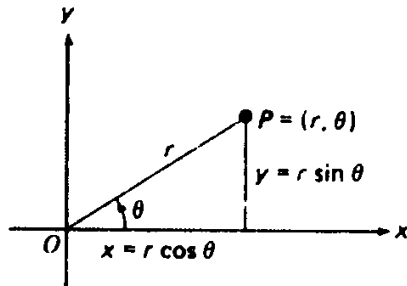
رابطه بین مختصات قطبی و قائم. اغلب مختصات قطبی و قائم با هم به کار می روند، به این ترتیب که قطب و محور قطبی را مبدأ و محور x مثبت یک دستگاه مختصات قائم می گیرند. در این صورت، از شکل ۵۹ واضح است که نقطه به مختصات قطبی r و θ دارای مختصات قائم زیر است:

$$(۱) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta.$$

لازم است تحقیق شود که این فرمولها به ازای r منفی نیز برقرارند. اگر $r > 0$ ، از (۱)

معلوم می شود که

$$(۲) \quad r = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$



شکل ۵۹

مثال ۲. اگر $P = (2, 3\pi/4)$ در مختصات قطبی باشد، مختصات قائم P را پیدا کنید.

حل. از (۱) به ازای $r = 2$ و $\theta = 3\pi/4$ نتیجه می شود که

$$x = 2 \cos \frac{3\pi}{4} = -\frac{2}{\sqrt{2}} = -\sqrt{2}, \quad y = 2 \sin \frac{3\pi}{4} = \frac{2}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}.$$

مثال ۲. اگر $P = (-3, -4)$ در مختصات قائم باشد، مختصات قطبی P را بیابید.

حل. از (۲) به ازای $x = -3$ و $y = -4$ نتیجه می شود که

$$r = \sqrt{(-3)^2 + (-4)^2} = \sqrt{25} = 5$$

و نیز

$$\tan \theta = \frac{-4}{-3} = \frac{4}{3}.$$

برای به دست آوردن مقادیر منفی x و y ، باید مقداری برای θ اختیار کنیم که به ازای آن $\cos \theta$ و $\sin \theta$ هر دو منفی باشند. زاویه $53.1^\circ \approx \arctan \frac{4}{3}$ واجد این شرط نیست، ولی زاویه $233.1^\circ \approx 180^\circ + \arctan \frac{4}{3}$ این خاصیت را دارد. به صورت دیگر، می توان $\theta = \arctan \frac{4}{3} + \pi$ را در صورتی اختیار کرد که مختص شعاعی P به جای 5 مساوی -5 باشد. لذا، $P = (5, \arctan \frac{4}{3} + \pi)$ و $P = (-5, \arctan \frac{4}{3})$ دو نمایش P در مختصات قطبی می باشند.

نمودار معادلات قطبی. منظور از نمودار تابع

$$(۳) \quad r = f(\theta)$$

یا به طور کلیتر معادله

$$(۴) \quad F(r, \theta) = 0,$$

شامل مختصات قطبی r و θ یعنی مجموعه تمام نقاط با دست کم یک جفت مختصات قطبی که در (۳) یا (۴) صدق نمایند. مثلاً، نقطه به مختصات قطبی $r = 1$ و $\theta = 1$ (زاویه به رادیان) متعلق به نمودار معادله

$$(۵) \quad r = \theta$$

است، اگرچه همین نقطه دارای مختصات قطبی $r = 1$ و $\theta = 2\pi + 1$ است که در (۵) صدق نمی‌کنند. هر معادله به شکل (۳) یا (۴) یک معادله قطبی نام دارد، و نمودار یک چنین معادله یک منحنی قطبی نامیده می‌شود.

مثال ۳. نمودار معادله $r = a$ ($a > 0$) دایره‌ای به شعاع a و مرکز قطب O است. نمودار معادله $\theta = \alpha$ (α دلخواه) شعاعی است که از O خارج شده و با محور قطبی l زاویه α می‌سازد اگر $r \geq 0$ ، یا خط مار بر O است که با l زاویه α می‌سازد اگر شرطی برای r نشده باشد (به یاد آورید که r می‌تواند منفی باشد).

مثال ۴. نمودار تابع

$$(۶) \quad r = 4 \sin \theta$$

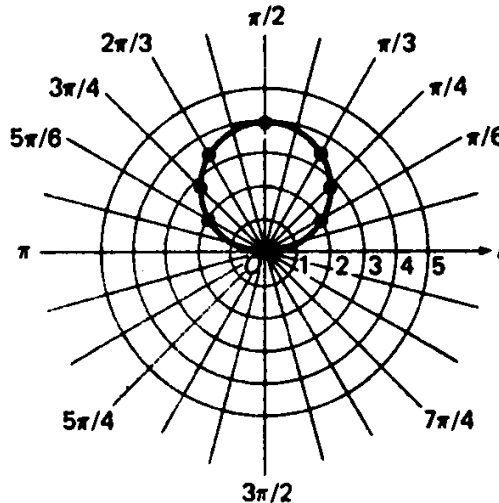
را رسم کنید.

حل. با دادن مقادیر مختلفی به زاویه θ که سینوسشان آشناست، جدول زیر را می‌سازیم:

θ (رادیان)	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π
$\sin \theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{\sqrt{2}}$	$\frac{1}{2}$	0
$r = 4 \sin \theta$	0	2	$2\sqrt{2}$	$2\sqrt{3}$	4	$2\sqrt{3}$	$2\sqrt{2}$	2	0

با رسم این نقاط در مختصات قطبی روی کاغذ رسم (که شعاعهای مار بر قطب O را به ازای زوایای مختلف و دوائر متحدالمرکز به مرکز O نشان می‌دهد) و وصل آنها با یک منحنی هموار، دایره شکل \odot به دست می‌آید. نقطه متغیر (r, θ) ، وقتی θ از 0 تا $\pi/2$ تغییر می‌کند، نیمه راست دایره را می‌پیماید و سپس، وقتی θ از $\pi/2$ تا π تغییر کند، نیمه چپ

دایره را خواهد پیمود. به علاوه، می‌توان به آسانی تحقیق کرد که (r, θ) ، وقتی θ از π تا $3\pi/2$ تغییر کند، مجدداً "نیم‌دایره" راست را می‌پیماید و وقتی θ از $3\pi/2$ تا 2π تغییر کند، نیم‌دایرهٔ چپ را خواهد پیمود (توجه کنید که وقتی θ بین π و 2π است، r منفی می‌باشد). در واقع، وقتی θ در هر بازه به طول π تغییر کند، دایره دقیقاً "یکبار پیموده می‌شود (چرا؟)".



نمودار قطبی $r = 4 \sin \theta$

شکل ۶۰

برای تحقیق در اینکه منحنی شکل ۶۰ یک دایره است، یک دستگاه مختصات قائم با محور x در امتداد محور قطبی در نظر می‌گیریم. با ضرب معادله (۶) در r ، به دست می‌آوریم

$$r^2 = 4r \sin \theta,$$

که با استفاده از فرمولهای (۱) و (۲) به معادلهٔ دکارتی

$$(۶') \quad x^2 + y^2 = 4y$$

تبدیل می‌شود. ولی (۶') با معادلهٔ زیر معادل است:

$$x^2 + (y - 2)^2 = 4,$$

که نمودارش دایره‌ای به شعاع ۲ بوده و مرکزش در نقطه‌ای است که، مانند شکل، به مختصات زاویه‌ای $x = 0$ و $y = 2$ می‌باشد.

مثال ۵. تابع

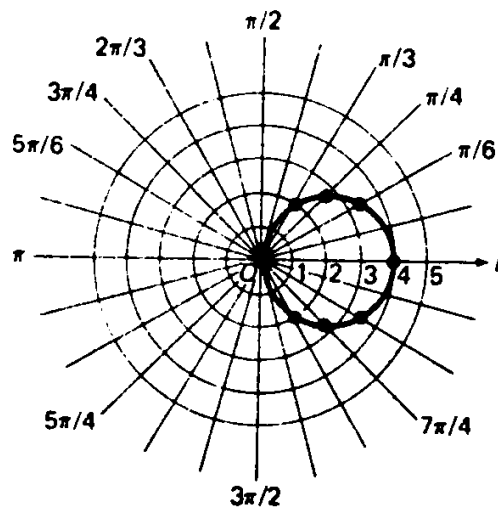
$$(۷) \quad r = 4 \cos \theta$$

را رسم کنید.

حل. نقطه (r, θ) متعلق به نمودار معادله قطبی $F(r, \theta) = 0$ است اگر و فقط اگر نقطه $(r, \theta - 90^\circ)$ متعلق به نمودار معادله قطبی $F(r, \theta + 90^\circ) = 0$ باشد. لذا، نمودار $F(r, \theta + 90^\circ) = 0$ از دوران نمودار $F(r, \theta) = 0$ به اندازه 90° در جهت عقربه‌های ساعت به دست می‌آید. از تعویض θ با $\theta + 90^\circ$ در معادله $r = 4 \sin \theta$ ، معادله (γ) به دست می‌آید:

$$r = 4 \sin(\theta + 90^\circ) = 4 \cos \theta.$$

لذا، دوران 90° دایره $r = 4 \sin \theta$ ، مثل شکل ۶۰، در جهت عقربه‌های ساعت آن را به نمودار تابع (γ) بدل می‌سازد. پس نتیجه می‌شود که نمودار (γ) دایره‌ای به شعاع ۲ بوده و مرکزش نقطه‌ای به مختصات قائم $x = 2$ و $y = 0$ می‌باشد (شکل ۶۱). معادله دکارتی این دایره چیست؟

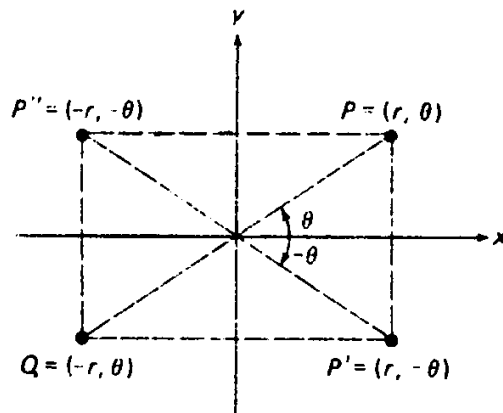


نمودار قطبی $r = 4 \cos \theta$

شکل ۶۱

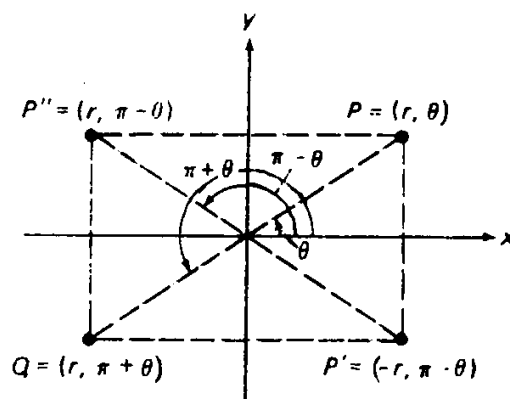
آزمونهای تقارن. در رسم معادله قطبی $F(r, \theta) = 0$ همیشه باید تقارنهای نمودار را پیدا کنیم. چند آزمون برای اینگونه تقارنها وجود دارند. مختصات قطبی و قائم را همزمان به کار برده، قطب را مبدأ مشترک O و محور قطبی را در امتداد محور x می‌گیریم. همچنین، نقطه‌ای غیر از خود قطب، P' ، Q ، و P'' نقشه‌های P تحت انعکاس نسبت به محور x ، مبدأ و محور y ، و G نمودار معادله $F(r, \theta) = 0$ باشد. در این صورت، از نمایشهای

قطبی نقاط P' ، Q ، و P'' داده شده در شکل‌های ۶۲ و ۶۳ معلوم می‌شود که



شکل ۶۲

(یک) نسبت به محور x (محور قطبی) متقارن است اگر مجموعهٔ جوابهای $F(r, \theta) = 0$ همان مجموعهٔ جوابهای $F(r, -\theta) = 0$ یا $F(-r, \pi - \theta) = 0$ باشد؛
 (دو) نسبت به مبدأ O (قطب) متقارن است اگر مجموعهٔ جوابهای $F(r, \theta) = 0$ همان مجموعهٔ جوابهای $F(-r, \theta) = 0$ یا $F(r, \pi + \theta) = 0$ باشد؛
 (سه) نسبت به محور y (خط مار بر O عمود بر محور قطبی) متقارن است اگر مجموعهٔ جوابهای $F(r, \theta) = 0$ همان مجموعهٔ جوابهای $F(-r, -\theta) = 0$ یا $F(r, \pi - \theta) = 0$ باشد.



شکل ۶۳

مثال ۶. معادلهٔ

$$F(r, \theta) = r - 4 \sin \theta = 0.$$

که با (۶) معادل است، همان مجموعهٔ جوابهای معادلهٔ

$$F(-r, -\theta) = -r - 4 \sin(-\theta) = -r + 4 \sin \theta = 0$$

یا

$$F(r, \pi - \theta) = r - 4 \sin(\pi - \theta) = r - 4 \sin \theta = 0$$

را دارد. این، بنابر (سه)، بدین معنی است که نمودار $F(r, \theta) = 0$ نسبت به محور y متقارن است، و در واقع دایره شکل ۶۰ دارای این خاصیت است. ولی دایره نسبت به محور x یا مبدأ متقارن نیست. بنابراین، به خاطر (یک) و (دو)، هیچیک از معادلات

$$F(r, -\theta) = 0, \quad F(-r, \pi - \theta) = 0, \quad F(-r, \theta) = 0, \quad F(r, \pi + \theta) = 0$$

همان مجموعه جوابهای معادله $F(r, \theta) = 0$ را ندارد، و این مطلب را می توان مستقیماً تحقیق کرد.

مثال ۷. تابع

$$(۸) \quad r = \sin 2\theta$$

را رسم کنید.

حل. ابتدا تقارنهای را جستجو می کنیم. با نوشتن (۸) به شکل معادل

$$(۸') \quad F(r, \theta) = r - \sin 2\theta = 0,$$

به آسانی معلوم می شود که

$$F(-r, \pi - \theta) \equiv -F(r, \theta), \quad F(r, \pi + \theta) \equiv F(r, \theta), \quad F(-r, -\theta) \equiv -F(r, \theta)$$

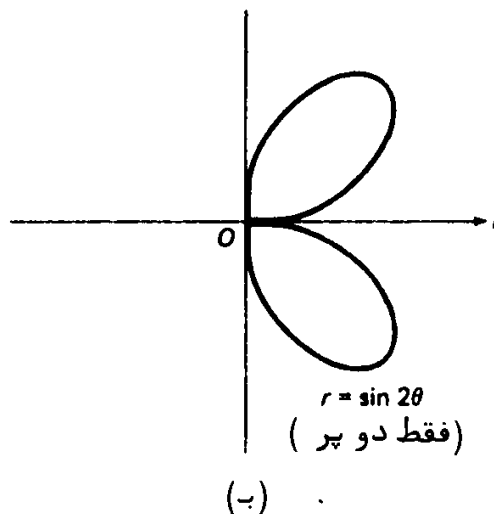
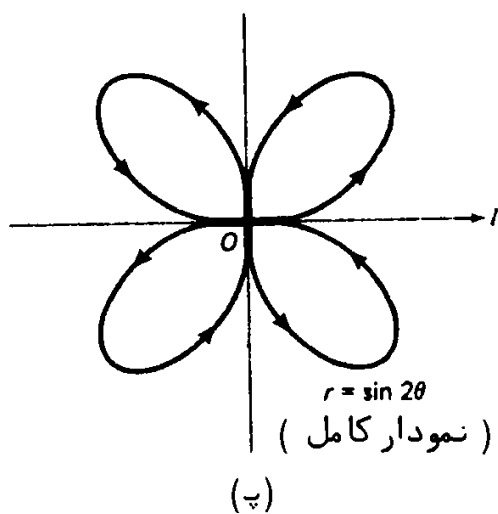
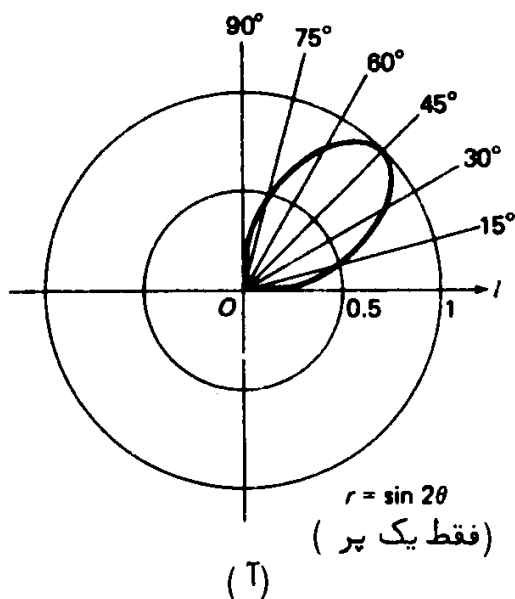
(جزئیات را شرح دهید). از آزمونها (یک) تا (سه) معلوم می شود که نمودار (۸')

نسبت به هر دو محور مختصات و مبدأ متقارن است. با استفاده از جدول

θ (درجه)	0°	15°	30°	45°	60°	75°	90°
$r = \sin 2\theta$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0

چند نقطه از نمودار را رسم کرده و آنها را با منحنی همواری به هم وصل می کنیم. با این کار حلقه بسته شکل ۶۴ (آ) به دست می آید، که فقط بخشی از نمودار است. اما بقیه نمودار را می توان با استفاده از تقارن نمودار فوراً "به دست آورد. در واقع، از انعکاس منحنی شکل ۶۴ (آ) نسبت به محور x ، منحنی شکل ۶۴ (ب) به دست می آید، و از انعکاس این منحنی نسبت به محور y ، منحنی گل مانند شکل ۶۴ (پ)، به نام رز چهار پر، به دست می آید که نمودار کامل تابع (۸) است. (چه جفتهای دیگر از انعکاسهای متوالی می تواند گل را از پر قسمت (آ) شکل تولید کند؟) به عنوان تمرین، نشان دهید که سه پر بعد که با افزایش θ از 90° تا 360° رسم می شوند پرهایی در ربعهای چهارم، سوم، و دوم می باشند،

و این در شکل ۶۴ (پ) با سر سهم نموده شده است .



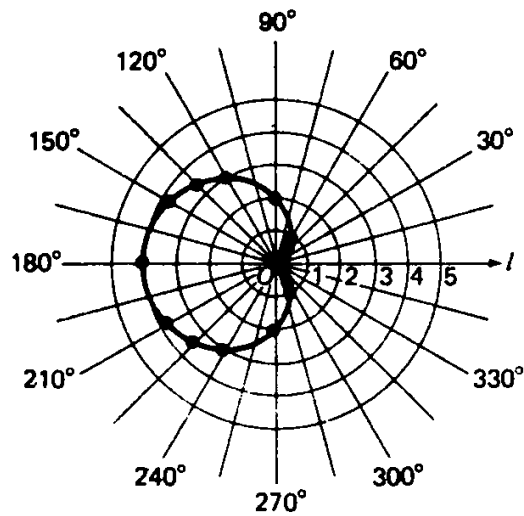
شکل ۶۴

مثال ۸. تابع

(۹) $r = 2(1 - \cos \theta)$

را رسم کنید .

حل . معادله (۹) در صورت تعویض θ با $-\theta$ تغییر نمی کند . لذا ، طبق آزمون (یک) ، نمودار (۹) نسبت به محور قطبی r متقارن است . با استفاده از این تقارن و جدول زیر (توجه کنید که به ازای هر θ ، $r \geq 0$) ، معلوم می شود که نمودار (۹) منحنی قلب شکل شکل ۶۵ است ، که به دلگون معروف بوده و قبلاً "در مسئله" ۲۷ ، صفحه ۷۴۹ ، آمده است .



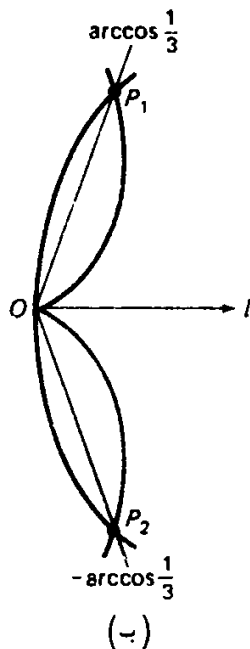
نمودار قطبی $r = 2(1 - \cos \theta)$

شکل ۶۵

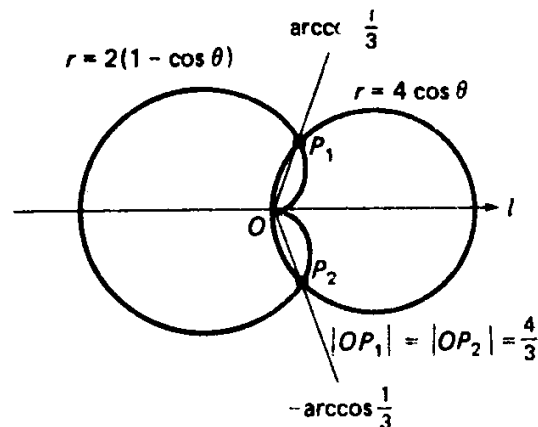
θ (درجه)	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°
$r = 2(1 - \cos \theta)$	0	$2 - \sqrt{3}$ ≈ 0.27	$2 - \sqrt{2}$ ≈ 0.59	1	2	3	$2 + \sqrt{2}$ ≈ 3.41	$2 + \sqrt{3}$ ≈ 3.73	4

مثال ۹. نقاط اشتراک دایره $r = 4 \cos \theta$ ، که در مثال ۵ مطرح شد، و دلگون $r = 2(1 - \cos \theta)$ که در مثال ۸ در نظر گرفته شد، را بیابید.

حل. در شکل ۶۶ (ا) دو منحنی را در یک دستگاه مختصات قطبی رسم کرده ایم. از این شکل، همراه با شکل ۶۶ (ب) که سه بار بزرگ شده دایره و دلگون را در مجاورت مبدا نشان می‌دهد،



(ا)



(ب)

شکل ۶۶

معلوم می‌شود که دو منحنی دقیقاً "سه نقطه اشتراک دارند، مبدأ یا نقطه O و دو نقطه P_1 و P_2 که نسبت به محور قطبی l متقارنند (در نتیجه، هر یک از نقاط تنش دیگری نسبت به l انعکاس نسبت به l است). برای یافتن مختصات قطبی برای P_1 و P_2 ، ملاحظه می‌کنیم هرگاه $r = 4 \cos \theta$ و $r = 2(1 - \cos \theta)$ با هم برقرار باشند، آنگاه

$$(10) \quad 4 \cos \theta = 2(1 - \cos \theta),$$

یا معادلاً

$$(10') \quad \cos \theta = \frac{1}{3},$$

که ایجاب می‌کند که $r = \frac{4}{3}$ و مقدار θ ی صادق در $(10')$ عبارتند از $\theta = \pm \arccos \frac{1}{3} \approx \pm 70.5^\circ$ ، و این مقادیر نظیر نقاط واقع بر دو طرف مختلف محور قطبی‌اند. به علاوه، سایر جوابهای $(10')$ با $\theta = \pm \arccos \frac{1}{3}$ به اندازه مضارب صحیح 2π فرق دارند. لذا، می‌توان نتیجه گرفت که

$$P_1 = \left(\frac{4}{3}, \arccos \frac{1}{3}\right), \quad P_2 = \left(\frac{4}{3}, -\arccos \frac{1}{3}\right).$$

در مثال قبل، یکی از نقاط اشتراک دو منحنی قطبی $r = 4 \cos \theta$ و $r = 2(1 - \cos \theta)$ یعنی مبدأ، در حل معادله (10) از کف رفت. برای مشاهده دلیل، دو نقطه متغیر $P = (4 \cos \theta, \theta)$ و $P' = (2(1 - \cos \theta), \theta)$ را در نظر گرفته، ابتدا دایره $r = 4 \cos \theta$ و بعد دایره $r = 2(1 - \cos \theta)$ را وقتی متغیر θ ، که می‌توان آن را زمان گرفت، از 0 تا 2π افزایش یابد، رسم می‌کنیم. در این صورت، وقتی $\theta = \pi/2$ یا $\theta = 3\pi/2$ ، P به مبدأ می‌رسد، حال آنکه P' از مبدأ شروع شده و تا $\theta = 2\pi$ باز نمی‌گردد. لذا، دو نقطه P و P' هرگز همزمان در مبدأ نخواهند بود، اگرچه هر یک مسیری مار بر مبدأ را طی می‌کنند؛ لذا، از حل (10) معلوم نمی‌شود که مبدأ نقطه اشتراک دو منحنی است.

اشتراک منحنیهای قطبی، لذا، به خلاف حالت دکارتی، ممکن است جواب همزمان معادلات دو منحنی قطبی $r = f(\theta)$ و $r = g(\theta)$ تمام نقاط اشتراک منحنیها را افشانند. این بدان خاطر است که هر نقطه بی‌نهایت نمایش قطبی دارد، هر یک مرکب از جفت مختلفی از مختصات قطبی، و ممکن است نقاطی (مانند مبدأ در مثال ۹) وجود داشته باشند که یک نمایش آنها در معادله یک منحنی و دیگری در معادله منحنی دیگر صدق کند، ولی هیچیک در هر دو منحنی صدق ننماید. برای یافتن نقاط اشتراکی که از حل معادله $f(\theta) = g(\theta)$ به دست نمی‌آیند، دو منحنی $r = f(\theta)$ و $r = g(\theta)$ را در یک دستگاه مختصات قطبی، درست مثل مثال ۹، در نظر می‌گیریم. در این باب، توجه داشته باشید که خطوط مرکبی، به خلاف

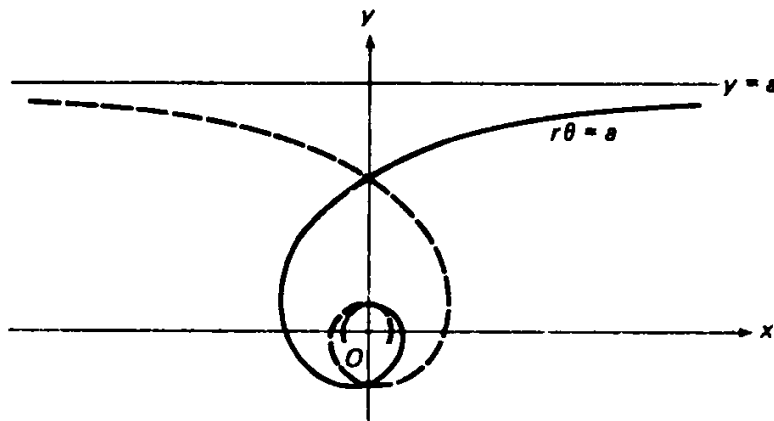
خطوط ریاضی، پهنای ناصفردارند؛ در نتیجه، اگر مقیاس ترسیم خیلی کوچک باشد، نقاط اشتراک تقریباً "منطبق قابل تشخیص نیستند. مثلاً"، در شکل ۶۶ (آ)، اگر شکل خیلی کوچکتر می‌بود، تشخیص تمایز سه نقطه O ، P_1 ، و P_2 از هم مشکل بود. برای یافتن تمام نقاط اشتراک دو منحنی قطبی روشی کاملاً "تحلیلی وجود دارد"، ولی هر وقت شک بردید که نقاط اشتراکی خیلی نزدیک به هم وجود دارند، می‌توانید با رسم شکل‌های بزرگتر [مانند شکل ۶۶ (ب)] از به کار بردن این روش حذر نمایید.

مثال ۱۰. نمودار معادله قطبی

$$(11) \quad r\theta = a \quad (a > 0)$$

را رسم کنید.

حل. به ازای r نامنفی، نمودار (۱۱) منحنی توپر شکل ۶۷ است، به نام مارپیچ هذلولوی، و این نام به خاطر شباهت (۱۱) با معادله $xy = a$ است که نمایش هذلولی در مختصات



شکل ۶۷

قائم است. به آسانی می‌توان ویژگی‌های اصلی نمودار را از (۱۱) با توجه به

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} r = \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{a}{\theta} = \infty,$$

۱. یادآور شویم که منحنی‌های $r = f(\theta)$ و $r = g(\theta)$ در نقطه $(f(\alpha), \alpha)$ غیر از مبدأ متقاطعند اگر و فقط اگر به ازای عدد صحیحی چون n ، $f(x) = g(\alpha + 2n\pi)$ و $f(x) = -g(\alpha + (2n + 1)\pi)$ ، و منحنیها در مبدأ متقاطعند اگر و فقط اگر به ازای α و β ای، $f(\alpha) = g(\beta) = 0$.

$$\lim_{\theta \rightarrow \infty} r = \lim_{\theta \rightarrow \infty} \frac{a}{\theta} = 0$$

به دست آورد. پس نتیجه می‌شود که وقتی θ از مقدار مثبت کوچکی تا ∞ افزایش می‌یابد، نقطهٔ متغیر $P = (r, \theta)$ روی نمودار (۱۱) "از بی‌نهایت آمده" و حول مبدأ یا قطب O در جهت خلاف عقربه‌های ساعت می‌پیچد و ضمن آن r تدریجاً "به صفر میل می‌کند". در محاسبهٔ r از (۱۱)، θ باید به رادیان باشد (چرا؟). مختص y نقطهٔ P عبارت است از

$$y = r \sin \theta = a \frac{\sin \theta}{\theta},$$

در نتیجه،

$$\lim_{\theta \rightarrow 0^+} y = a \lim_{\theta \rightarrow 0^+} \frac{\sin \theta}{\theta} = a.$$

این، همراه با این امر که وقتی $\theta \rightarrow 0^+$ ، $r \rightarrow \infty$ ، نشان می‌دهد که خط $y = a$ یک‌جانب افقی مارپیچ است (ر.ک. شکل).

برای یافتن بقیهٔ مارپیچ، نظیر به مقادیر منفی r و θ ، منعکس‌منحنی توپر را نسبت

به محور y به دست می‌آوریم که منحنی منقطع در شکل است. این تقارن حول محور y از

$$r\theta \equiv (-r)(-\theta) \text{ به دست می‌آید. چرا خود مبدأ } O \text{ تعلق به مارپیچ ندارد؟}$$

مسائل

در تمام مسائل زیر در رابطه با هر دو مختصات قطبی و قائم، قطب و محور قطبی دستگاه مختصات قطبی با مبدأ و محور x نامنفی دستگاه مختصات قائم یکی است. تمام نقاط در مختصات قطبی داده شده اند جز در مسائل ۷ تا ۱۲.

مختصات قائم نقطه به مختصات قطبی داده شده را بیابید.

$(0, \pi^2)$. ✓
 $(-8, 2\pi/3)$. ✓

$(12, -\pi/6)$. ✓
 $(2, 5\pi/6)$. ✓

$(-10, -3\pi/2)$. ✓
 (π, π) . ✓

تمام نمایشهای نقطه به مختصات قائم داده شده را در مختصات قطبی (به انضمام آنهايي که r منفی دارند) پیدا نمایید.

$(-\sqrt{2}, -\sqrt{2})$. ✓
 $(1, -\sqrt{3})$. ✓

$(2\sqrt{3}, 2)$. ✓
 $(0, 4)$. ✓

۱۱ ✓ $(-3, 0)$ ۱۲ ✓ $(-\pi, \pi)$

۱۳ . نقاط $A = (3, -4\pi/9)$ و $B = (5, 3\pi/14)$ دو رأس متوازی الاضلاع $ABCD$ اند که قطارش در قطب متقاطعند. دو رأس دیگر متوازی الاضلاع را بیابید.

۱۴ . نقطه میانی پاره خط واصل بین نقاط $(8, -2\pi/3)$ و $(6, \pi/3)$ را بیابید.

۱۵ . نشان دهید که فاصله بین دو نقطه $P_1 = (r_1, \theta_1)$ و $P_2 = (r_2, \theta_2)$ مساوی است با

(یک) $|P_1P_2| = \sqrt{r_1^2 + r_2^2 - 2r_1r_2 \cos(\theta_2 - \theta_1)}$.

با استفاده از فرمول (یک)، فاصله بین نقاط زیر را بیابید.

۱۶ ✓ $(5, -\pi/12), (8, \pi/4)$ ۱۷ ✓ $(12, 3\pi/4), (-16, 5\pi/4)$

۱۸ . مساحت هر یک از مربعهایی را بیابید که نقاط $(12, -\pi/10)$ و $(3, \pi/15)$ دو رأس مساحت مجاورشان باشند.

۱۹ . مساحت مربعی را بیابید که نقاط $(6, -105^\circ)$ و $(4, 30^\circ)$ دو رأس مقابل آن باشند.

۲۰ . فرض کنید O قطب بوده، و $P_1 = (r_1, \theta_1)$ ، $P_2 = (r_2, \theta_2)$ ، که در آنها r_1, r_2 مثبت بوده

و $0 \leq \theta_1 < \theta_2 \leq \pi$. نشان دهید که مساحت مثلث OP_1P_2 مساوی است با

$\frac{1}{2}r_1r_2 \sin(\theta_2 - \theta_1)$. مساحت مثلث به رعوس O ، $P_1 = (5, \pi/3)$ ، و $P_2 = (10, 7\pi/12)$

را بیابید.

۲۱ ✓ . نشان دهید که معادله قطبی دایره به شعاع a و مرکز (r_1, θ_1) عبارت است از

(دو) $r^2 - 2r_1r \cos(\theta - \theta_1) + r_1^2 = a^2$.

۲۲ ✓ . با استفاده از فرمول (دو)، تحقیق کنید که دواير شکلهای ۶۰ و ۶۱ به معادلات

قطبی $r = 4 \sin \theta$ و $r = 4 \cos \theta$ می باشند. این معادلات را با استفاده از این امر که

هر مثلث محاطی در یک دایره که یکی از اضلاعش قطر باشد قائم الزاویه است

نیز تحقیق نمایید.

معادله قطبی دایره با شعاع و مرکز داده شده را بیابید.

۲۳ ✓ $3, (6, \pi/4)$ ۲۴ ✓ $4, (-4, \pi/3)$ ۲۵ ✓ $\sqrt{5}, (2, \pi/2)$

۲۶ . فرض کنید L خط مستقیمی باشد که از قطب O نمی گذرد. نشان دهید که

معادله قطبی L عبارت است از

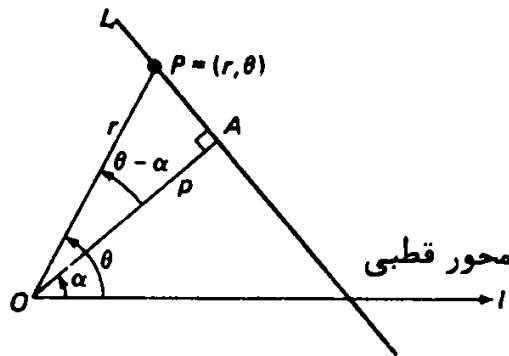
(سه) $r \cos(\theta - \alpha) = p$,

که در آن p طول و α میل عمود مرسوم از O به L است (ر. ک. شکل ۶۸). معادله

دکارتی معادل (سه) چیست؟

معادله دکارتی داده شده را در مختصات قطبی بنویسید.

۲۷ ✓ $y = x$ ۲۸ ✓ $3x + 4y = 5$



شکل ۶۸

$$x^2 - y^2 = 4 \quad \cdot 30 \quad \checkmark$$

$$x^2 + y^2 + ay = 0 \quad \cdot 32 \quad \checkmark$$

$$2xy = 1 \quad \cdot 34 \quad \checkmark$$

$$x^4 = 9(x^2 + y^2) \quad \cdot 36 \quad \checkmark$$

$$x^2 + y^2 = 9 \quad \cdot 29 \quad \checkmark$$

$$x^2 + y^2 - ax = 0 \quad \cdot 31 \quad \checkmark$$

$$y^2 = 4x \quad \cdot 33 \quad \checkmark$$

$$x^2 - y^2 = (x^2 + y^2)^2 \quad \cdot 35 \quad \checkmark$$

معادله^۶ قطبی داده شده را در مختصات قائم نوشته، و نمودار آن را شناسایی کنید.

$$r \sin \theta = 3 \quad \cdot 38$$

$$\sin \theta = \frac{1}{2} \quad \cdot 40$$

$$r \sin \left(\theta + \frac{\pi}{4} \right) = \sqrt{2} \quad \cdot 42$$

$$r = 8 \cos \theta \quad \cdot 44$$

$$r = 2(\cos \theta - \sin \theta) \quad \cdot 46$$

$$\theta = \pi \quad \cdot 37$$

$$r \cos \theta = -2 \quad \cdot 39$$

$$r \cos \left(\theta - \frac{\pi}{3} \right) = 6 \quad \cdot 41$$

$$r = -\sin \theta \quad \cdot 43$$

$$r^2 \sin 2\theta = 4 \quad \cdot 45$$

منحنی به معادله^۶ قطبی

$$r = a \sin(n\theta + \phi) \quad (n = 2, 3, \dots, \text{ دلخواه } \phi, a > 0)$$

یک رز نام دارد (برای تحلیل رز $r = \sin 2\theta$ نظیر به انتخاب $a = 1, \phi = 0, n = 2$ ، ر. ک. مثال ۷). رز با معادلات زیر را رسم نمایید.

$$r = 2 \cos 4\theta \quad \cdot 48$$

$$r = \sin(5\theta + \pi) \quad \cdot 50$$

$$r = 4 \sin 3\theta \quad \cdot 47$$

$$r = \cos 6\theta \quad \cdot 49$$

توجه کنید که رز n پر دارد اگر n فرد باشد و $2n$ پر دارد اگر n زوج باشد. منحنی به معادله^۶ قطبی

$$r = a + b \cos(\theta + \phi) \quad (a > 0, b > 0, \phi \text{ دلخواه})$$

یک لیماسون خوانده می شود. اگر $a = b$ ، لیماسون به دگون تبدیل می شود (برای تحلیل دگون $r = 2(1 - \cos \theta)$ نظیر به انتخاب $a = b = 2, \phi = \pi$ ، ر. ک. مثال ۸) لیماسون به

معادله زیر را رسم نمایید .

$$r = 3 - \sin \theta \quad \cdot 52$$

$$r = 3 + 2 \cos \theta \quad \cdot 51$$

$$r = 2 + 3\sqrt{2} \cos \left(\theta - \frac{\pi}{4} \right) \quad \cdot 54$$

$$r = 1 + 2 \cos \theta \quad \cdot 53$$

معادله قطبی داده شده را با استفاده از تقارن‌ها رسم کنید .

$$r^2 = 4 \cos 2\theta \quad (\text{لمنیسکات}) \quad \cdot 55$$

$$r^2 = -\sin 2\theta \quad (\text{لمنیسکات}) \quad \cdot 56$$

$$r = \sin \theta \tan \theta \quad (\text{سیزوئید}) \quad \cdot 57$$

$$r = \cot \theta \quad (\text{منحنی کاپا}) \quad \cdot 58$$

$$r = 1 + 2 \sin(\theta/2) \quad (\text{کلیه گون}) \quad \cdot 59$$

$$r = \sec \theta - 4 \cos \theta \quad (\text{سه بخشی}) \quad \cdot 60$$

$$r = 2\theta \quad (\text{مارپیچ ارشمیدسی: شکل کلی } r = a\theta) \quad \cdot 61$$

$$r = e^{\theta/10} \quad \text{یا معادلا } \ln r = \theta/10 \quad (\text{مارپیچ لگاریتمی: شکل کلی } r = e^{a\theta}) \quad \cdot 62$$

$$r^2 = \theta \quad (\text{مارپیچ سهموی: شکل کلی } r^2 = a^2\theta) \quad \cdot 63$$

$$r^2\theta = 1 \quad (\text{لیتوس، واژه لاتینی "شیپور": شکل کلی } r^2\theta = a^2) \quad \cdot 64$$

در مسائل ۶۱ تا ۶۴، قسمتی از مارپیچ که در آن $r > 0, \theta > 0$ با منحنی توپر، و بقیه مارپیچ را با منحنی منقطع رسم کنید .

تمام نقاط اشتراک جفت داده شده از منحنیهای قطبی زیر را بیابید .

$$\theta = \pi/4, r = \theta \quad \cdot 65$$

$$r = 1 + \cos \theta, r = 1 - \cos \theta \quad \cdot 66$$

$$r = 1 + \sin \theta, r = 1 - \cos \theta \quad \cdot 67$$

$$r = 2 \cos 3\theta, r = 1 \quad \cdot 68$$

$$r = \sin 2\theta, r = \cos \theta \quad \cdot 69$$

$$r = \sin \theta, r = |\cos \theta| \quad \cdot 70$$

$$r^2 = \sin 2\theta, r^2 = \cos 2\theta \quad \cdot 71$$

$$r\theta = 2, r = 1 \quad \cdot 72$$

۸.۱۰ مخروطیها در مختصات قطبی

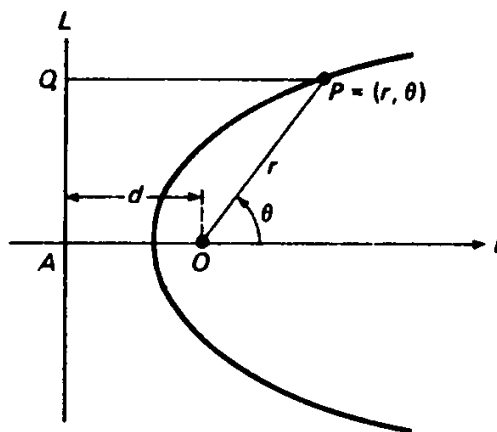
همانطور که قضیه زیر نشان می‌دهد، مختصات قطبی برای نوشتن معادلات مخروطیهای تپاه نشده بسیار مناسب‌اند .

قضیه ۲ (معادله قطبی یک مخروطی) . مخروطی با خروج از مرکز e و فاصله کانون تا هادی d دارای معادله

$$(1) \quad r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta}$$

در مختصات قطبی است اگر قطب O در کانون و محور قطبی بر هادی L عمود و جهتی به خارج از L داشته باشد.

برهان . در حالت بیضی یا هذلولی ، دو هادی وجود داشته و L هادی نزدیکتر به کانون است . هندسه مربوطه در شکل ۶۹ نموده شده است ، که در آن هادی سمت چپ کانون



شکل ۶۹

قرار دارد . بنابر قضیه ۱ ، صفحه ۹۷۶ ، داریم

$$(2) \quad \frac{|OP|}{|PQ|} = \frac{r}{|PQ|} = e.$$

اما

$$|PQ| = |AO| + r \cos \theta = d + r \cos \theta,$$

در نتیجه ، (۲) به صورت زیر درمی آید :

$$r = e(d + r \cos \theta).$$

با حل این معادله نسبت به r ، فرمول (۱) به دست می آید .

مثال ۱ . مخروطی به معادله قطبی

$$(3) \quad r = \frac{9}{5 - 4 \cos \theta}$$

را شناسایی کنید .

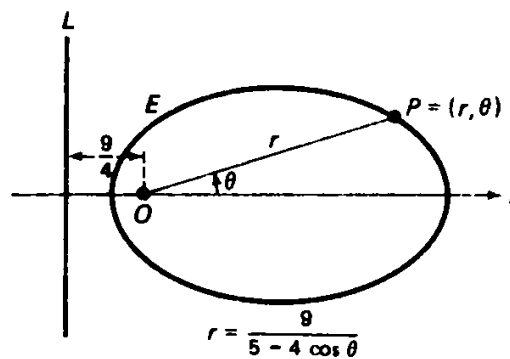
حل . با نوشتن (۳) به شکل

$$(۳) \quad r = \frac{\frac{9}{4}}{1 - \frac{4}{5} \cos \theta},$$

و سپس مقایسه (۳) با (۱) ، معلوم می شود که

$$e = \frac{4}{5}, \quad ed = \frac{4}{5}d = \frac{9}{5}, \quad d = \frac{9}{4}.$$

چون $e < 1$ ، مخروطی بیضی است ؛ و در واقع ، با رسم معادله (۳) ، بیضی E شکل ۷۰ به دست می آید که کانونی در قطب O و هادی L را داشته و فاصله کانون تا هادی آن $\frac{9}{4}$ است . توجه کنید که معادله قطبی L مساوی است با $r \cos \theta = -\frac{9}{4}$ یا معادلا " $r = -\frac{9}{4} \sec \theta$.



شکل ۷۰

برای به دست آوردن معادله دکارتی بیضی E ، فرض کنیم محور اطول به طول $2a$ و فاصله بین کانونها $2c$ باشد . در این صورت ، بنا بر فرمول (۸) ، صفحه ۹۷۴ ، $e = c/a$.

$$d = \frac{a^2}{c} - c,$$

لذا ،

$$\frac{c}{a} = \frac{4}{5}, \quad \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{9}{4},$$

که از آن نتیجه می شود که

$$a = 5, \quad c = 4, \quad b = \sqrt{a^2 - c^2} = \sqrt{9} = 3,$$

که در آن $2b$ طول محور اقصر است . لذا ، E در دستگاه مختصات قائم به مبدا در مرکز E و

محور x در امتداد محور اطول به معادله زیر می باشد:

$$\frac{x^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

این معادله در دستگاه مختصات قائم که مبدا آن در کانون چپ است به صورت زیر می باشد:

$$\frac{(x-4)^2}{25} + \frac{y^2}{9} = 1$$

(چرا؟) . به عنوان تمرین ، این معادله را با جانشانیهای $r \cos \theta = x$ و $r^2 = x^2 + y^2$ مستقیماً از معادله (۳) به دست آورید .

مثال ۲. برای هذلولی به معادله دکارتی

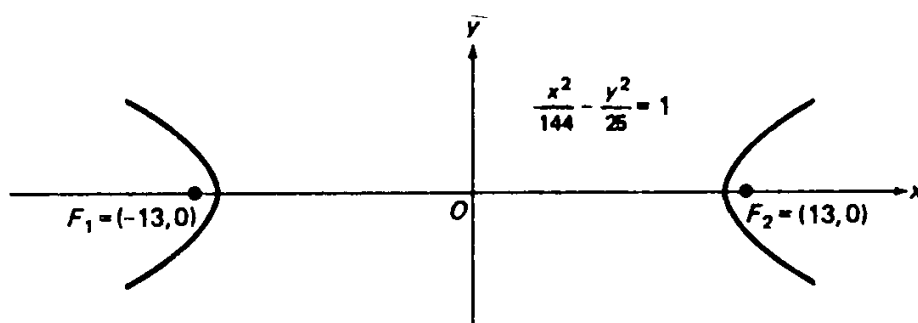
$$(۴) \quad \frac{x^2}{144} - \frac{y^2}{25} = 1$$

معادله قطبی بنویسید .

حل . فرض کنیم $2a$ طول محور متقاطع و $2b$ طول محور مزدوج باشد . در این صورت ،

$$a = 12, \quad b = 5, \quad c = \sqrt{a^2 + b^2} = \sqrt{169} = 13,$$

که در آن $2c$ فاصله بین کانونهای F_1 و F_2 است ، که بر محور x قرار دارند (ر.ک. شکل ۷۱) .



شکل ۷۱

مثل قبل ، خروج از مرکز مساوی است با $e = c/a$ ، ولی در اینجا ، طبق فرمول (۸) ، صفحه ۹۷۴ ، فاصله بین کانون و هادی مساوی است با

$$d = c - \frac{a^2}{c},$$

بنابراین ،

$$e = \frac{13}{12}, \quad d = 13 - \frac{144}{13} = \frac{25}{13},$$

در نتیجه، هذلولی به معادله قطبی

$$r = \frac{ed}{1 - e \cos \theta} = \frac{\frac{25}{12}}{1 - \frac{13}{12} \cos \theta},$$

یا معادلا"

$$(۵) \quad r = \frac{25}{12 - 13 \cos \theta}$$

است. به طور دقیقتر، نمودار (۵) شاخه راست هذلولی (۴) است اگر $|\theta| \leq \pi$ و $\theta_0 < \theta$ ، که در آن $\theta_0 = \arccos \frac{13}{25} \approx 22.6^\circ$. هرگاه $0 \leq |\theta| < \theta_0$ ، آنگاه $r < 0$ و نمودار (۵) شاخه چپ می باشد (شرح جزئیات را به عنوان تمرین می گذاریم). در هر دو حالت، قطب در کانون راست F_2 است، و محور قطبی در امتداد محور x مثبت می باشد.

صورت‌های مختلف معادله قطبی یک مخروطی. در معادله (۱) θ را با $\alpha - \theta$ عوض کرده به دست می آوریم

$$(۶) \quad r = \frac{ed}{1 - e \cos (\theta - \alpha)}$$

در این صورت، نمودار (۶) یک مخروطی است که محور اطول، محور متقاطع، یا محور تقارنش (بسته به اینکه مخروطی بیضی، هذلولی، یا سهمی است) به جای محور قطبی $\theta = 0$ ، در امتداد خط $\theta = \alpha$ قرار دارد. بخصوص، نمودارهای معادلات

$$(۶') \quad r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta}, \quad r = \frac{ed}{1 - e \sin \theta}, \quad r = \frac{ed}{1 + e \sin \theta}$$

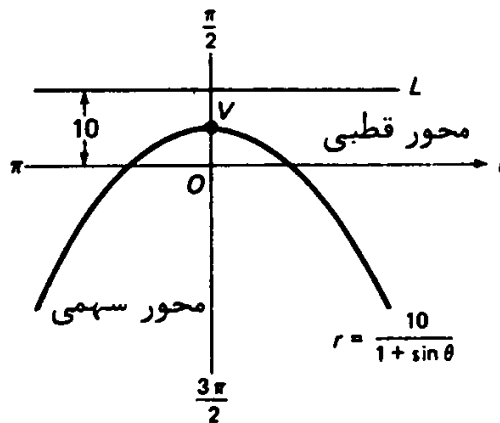
همه مخروطی اند، زیرا اینها معادلاتی هستند که از (۶) با قرار دادن $\alpha = \pi, \pi/2, -\pi/2$ به دست می آیند. به طور مشخص، اولین معادله یک مخروطی را توصیف می کند که هادیش بر محور قطبی عمود بوده و d واحد به راست کانون قرار دارد، حال آنکه معادلات دوم و سوم مخروطیهایی را توصیف می کنند که هادیهایشان موازی محور قطبی و به ترتیب d واحد زیر کانون و d واحد بالای آن قرار دارند.

مثال ۳. معادله قطبی سهمی را بنویسید که فاصله کانون تا هادی آن ۱۰ بوده، محور تقارن قائم داشته، و به پایین باز شود.

حل. با گذاردن $e = 1, d = 10$ در آخرین معادله (۶')، به دست می آوریم

$$r = \frac{10}{1 + \sin \theta}.$$

نمودار این معادله سهمی شکل ۷۲ است. رأس V سهمی نقطه $(5, \pi/2)$ است، ولی هادی L به معادله قطبی $r \sin \theta = 10$ یا معادلا $r = 10 \csc \theta$ می باشد.



شکل ۷۲

مسائل

مخروطی با معادله قطبی داده شده را شناسایی و رسم کنید. خروج از مرکز e را بیابید، جای رئوس را مشخص کنید، و معادله قطبی هادی L نظیر به کانون در قطب O را بنویسید.

۰۲ $r = \frac{4}{3 - 2 \cos \theta}$

۰۱ $r = \frac{5}{1 + \cos \theta}$

۰۴ $r = \frac{12}{3 - 4 \cos \theta}$

۰۳ $r = \frac{6}{2 - 3 \sin \theta}$

۰۶ $r = 4 \csc^2 \frac{\theta}{2}$

۰۵ $r = \frac{9}{4 + 3 \sin \theta}$

۰۸ $r = \frac{8}{2 - \cos \theta + \sin \theta}$

۰۷ $r = \frac{10}{1 + 2 \cos \theta}$

۰۹ $r = \frac{20}{2 - \sqrt{3} \cos \theta - \sin \theta}$

معادله قطبی مخروطی با معادله دکارتی داده شده را نوشته، قطب را در یک کانون و محور قطبی را در امتداد محور x مثبت قرار دهید.

۰۱۱ $\frac{y^2}{64} - \frac{x^2}{36} = 1$

۰۱۰ $\frac{x^2}{256} + \frac{y^2}{16} = 1$

۰۱۳ $y^2 = 6x$

۰۱۲ $4x^2 - y^2 = 1$

۱۴. $2xy = 1$ ۱۵. $3x^2 - 2xy + 3y^2 - 2 = 0$

با این فرض که قطب در یک کانون است، معادله قطبی مخروطی صادق در شرایط داده شده را بنویسید (e خروج از مرکز است).

۱۶. رئوس در $(6, 0)$ و $(2, \pi)$

۱۷. رئوس در $(1, \pi/2)$ و $(5, \pi/2)$

۱۸. $e = 1$ ، رأس در $(2, \pi/4)$

۱۹. $e = \frac{2}{3}$ ، رأس در $(3, -\pi/2)$

۲۰. $e = \frac{3}{4}$ ، هادی $r = 2 \csc \theta$

۲۱. $e = \frac{4}{3}$ ، هادی $r = 6 \sec \theta$

۲۲. فرض کنید $r = ed/(1 - e \cos \theta)$ معادله قطبی یک هذلولی باشد. در این صورت، مخرج به ازای $\theta = \theta_0 = \arccos(1/e)$ صفر است. چه رابطه‌ای θ_0 با مجانبهای هذلولی دارد؟

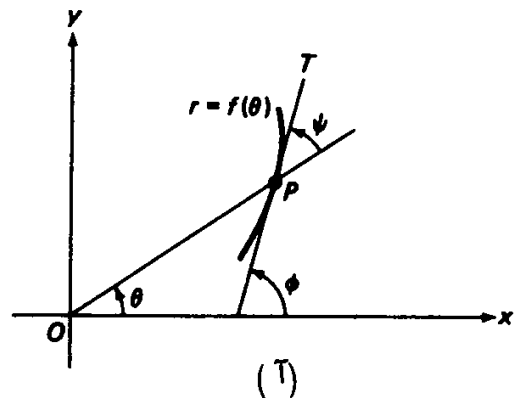
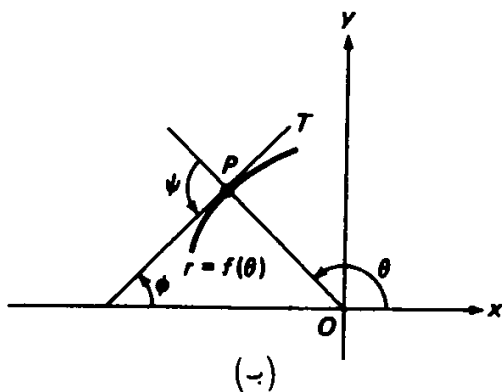
۲۳. یک ستاره دنباله‌دار در مداری بیضوی با خروج از مرکز بالا ($e \approx 1$) که خورشید در یکی از کانونهایش قرار دارد حرکت می‌کند. وقتی ستاره از یک نقطه به فاصله ۵۰ میلیون میل به حضیض (نزدیکترین نقطه به خورشید) حرکت می‌کند، خط واصل بین خورشید و ستاره 45° می‌چرخد. فاصله ستاره تا خورشید را در حضیض بیابید.

۹.۱۰ خط مماس بر یک منحنی قطبی

حال مسئله یافتن خط مماس بر یک منحنی قطبی را مطرح می‌کنیم. علاوه بر دستگاه مختصات قطبی زمینه، مختصات قائمی معرفی می‌کنیم که قطب O مبدأ و محور قطبی محور x مثبت باشد. فرض کنیم منحنی نمودار تابع مشتق‌پذیر

$$r = f(\theta)$$

بوده، و مماس بر منحنی در نقطه P خط میل ϕ ($0 \leq \phi < \pi$)، مثل شکل ۷۳، باشد. در



شکل ۷۳

این صورت، شیب T مساوی است با

$$m = \tan \phi = \frac{dy}{dx}.$$

ما، علاوه بر زاویه ϕ میل، به زاویه شعاعی-مماسی ψ (پسی کوچک یونانی) علاقه مندیم. این زاویه بین ادامه خط شعاعی OP و مماس T است که از OP تا T در جهت خلاف عقربه‌های ساعت سنجیده شده و در بازه $0 \leq \psi < \pi$ گرفته می‌شود.

ارتباط بین ϕ, ψ و مختص زاویه θ با فرمول زیر داده می‌شود:

$$(1) \quad \phi = \psi + \theta,$$

که می‌توان آن را از شکل ۷۳ (آ) به دست آورد. در اینجا فرض است که ϕ زاویه بیرونی مثلثی است با زوایای حاده که به محور x ، مماس T ، و خط شعاعی OP محدود است، و θ یک زاویه درونی آن می‌باشد (لذا، بخصوص، $0 < \theta < \phi$)، ولی البته حالات دیگری نیز وجود دارند. اما به آسانی معلوم می‌شود که (۱) و فرمول معادلش

$$(1') \quad \psi = \phi - \theta$$

همواره با تقریب مضرب صحیحی از π برقرارند [مثلاً، در شکل ۷۳ (ب)، $\phi = \psi + \theta - \pi$ ، بنابراین، چون تابع تنازانت متناوب با دوره تناوب π است، همواره خواهیم داشت

$$(2) \quad \tan \psi = \tan(\phi - \theta) = \frac{\tan \phi - \tan \theta}{1 + \tan \phi \tan \theta},$$

در نتیجه، در تمام حالات فرمول یکسانی برای $\tan \psi$ بر حسب $\tan \phi$ و $\tan \theta$ به دست می‌آید.

حال ملاحظه می‌کنیم که نقطه $P = (r, \theta)$ دارای مختصات قائم

$$(3) \quad x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta$$

است و نیز داریم

$$(4) \quad \tan \theta = \frac{y}{x} \quad (x \neq 0).$$

با گذاردن $r = f(\theta)$ در (۳)، به دست می‌آوریم

$$(5) \quad x = x(\theta) = f(\theta) \cos \theta, \quad y = y(\theta) = f(\theta) \sin \theta.$$

این یک نمایش پارامتری منحنی مورد بحث است، که در آن مختص زاویه‌ای θ پارامتر می‌باشد. لذا، طبق نکاتی که در صفحات ۷۳۱ تا ۷۳۴ گفته شد،

$$(6) \quad m = \tan \phi = \frac{dy}{dx} = \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta}.$$

با گذاردن (۴) و (۶) در (۲)، خواهیم داشت

$$\tan \psi = \frac{\frac{dy}{dx} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{dy}{dx} \frac{y}{x}} = \frac{\frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} - \frac{y}{x}}{1 + \frac{dy/d\theta}{dx/d\theta} \frac{y}{x}} = \frac{x \frac{dy}{d\theta} - y \frac{dx}{d\theta}}{x \frac{dx}{d\theta} + y \frac{dy}{d\theta}}$$

اما مشتق توابع (۵) عبارتند از

$$(۷) \quad \frac{dx}{d\theta} = f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta, \quad \frac{dy}{d\theta} = f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta,$$

و در نتیجه،

$$\begin{aligned} x \frac{dy}{d\theta} - y \frac{dx}{d\theta} &= r \cos \theta [f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta] \\ &\quad - r \sin \theta [f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta] \\ &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) r f(\theta) = r f(\theta), \end{aligned}$$

حال آنکه

$$\begin{aligned} x \frac{dx}{d\theta} + y \frac{dy}{d\theta} &= r \cos \theta [f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta] \\ &\quad + r \sin \theta [f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta] \\ &= (\cos^2 \theta + \sin^2 \theta) r f'(\theta) = r f'(\theta). \end{aligned}$$

پس نتیجه می‌شود که

$$\tan \psi = \frac{r f(\theta)}{r f'(\theta)} = \frac{f(\theta)}{f'(\theta)},$$

یعنی،

$$(۸) \quad \tan \psi = \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{r}{r'},$$

مشروط بر اینکه $dr/d\theta \neq 0$. سادگی این فرمول برای $\tan \psi$ در مقایسه با فرمول شیب T ،

یعنی

$$\tan \phi = \frac{f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta}{f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta},$$

یا معادلاً

$$(۹) \quad \tan \phi = \frac{(dr/d\theta) \sin \theta + r \cos \theta}{(dr/d\theta) \cos \theta - r \sin \theta},$$

حاصل از جانشانی (۷) در (۶) اعجاب آور است.

مثال ۱. زوایای ψ و ϕ را در نقاط $P = (1, 0)$ و $Q = (3/2, \pi/6)$ از دلگون $r = 1 + \sin \theta$ بیابید.

حل. در اینجا $dr/d\theta = \cos \theta$ ، و فرمول (۸) به صورت زیر درمی آید:

$$\tan \psi = \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{1 + \sin \theta}{\cos \theta}.$$

بنابراین،

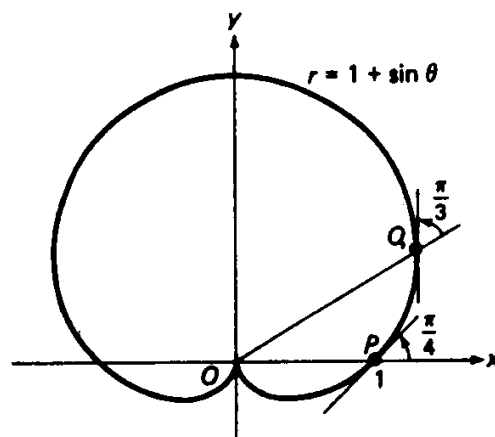
$$\tan \psi|_{\theta=0} = 1, \quad \tan \psi|_{\theta=\pi/6} = \frac{1 + \frac{1}{2}}{\frac{1}{2}\sqrt{3}} = \frac{2(\frac{3}{2})}{\sqrt{3}} = \sqrt{3},$$

که ایجاب می کند که

$$\psi|_{\theta=0} = \frac{\pi}{4}, \quad \psi|_{\theta=\pi/6} = \frac{\pi}{3}$$

(ر.ک. شکل ۷۴). در P و Q داریم $0 \leq \theta < \phi$ ؛ و در نتیجه، $\phi = \psi + \theta$. پس نتیجه می شود که

$$\phi|_{\theta=0} = \frac{\pi}{4} + 0 = \frac{\pi}{4}, \quad \phi|_{\theta=\pi/6} = \frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{6} = \frac{\pi}{2}.$$



شکل ۷۴

لذا، مماس در P به شیب ۱ است ولی مماس در Q قائم می باشد. به آسانی معلوم می شود که مماس در P خط $y = x - 1$ است، ولی مماس در Q خط $x = \frac{3}{4}\sqrt{3}$ می باشد.

مثال ۲. نشان دهید که مارپیچ لگاریتمی

$$r = e^{a\theta} \quad (\theta \geq 0, a > 0)$$

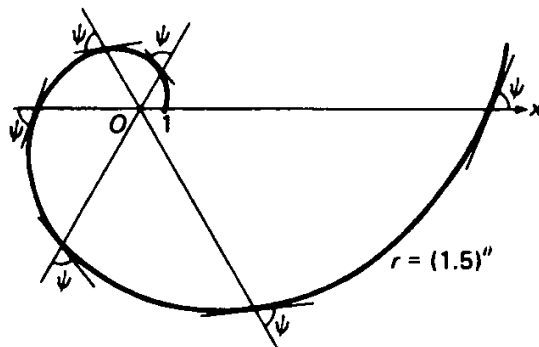
متساوی‌الزاویه است، بدین معنی که زاویه ψ بین خط شعاعی و مماس در تمام نقاط مارپیچ یکسان است.

حل. چون $dr/d\theta = ae^{a\theta}$ ، داریم

$$\tan \psi = \frac{r}{dr/d\theta} = \frac{e^{a\theta}}{ae^{a\theta}} = \frac{1}{a}$$

در نتیجه، $\psi \equiv \operatorname{arccot} a$ ، شکل ۷۵ متساوی‌الزاویه بودن را در حالت $a = \ln \frac{3}{2}$

نشان می‌دهد. $\psi \equiv \operatorname{arccot} (\ln \frac{3}{2}) \approx 67.9^\circ$ ، $r = (\frac{3}{2})^\theta$



مارپیچ لگاریتمی

شکل ۷۵

مثال ۳. میل ϕ مماس بر مارپیچ ارشمیدسی

$$r = a\theta \quad (\theta \geq 0, a > 0)$$

را در نقطه $P = (a\pi/2, \pi/2)$ بیابید.

حل. این بار $dr/d\theta = a$ و، با استفاده از فرمول (۹)، "مستقیماً" داریم

$$\tan \phi = \frac{a \sin \frac{\pi}{2} + \frac{a\pi}{2} \cos \frac{\pi}{2}}{a \cos \frac{\pi}{2} - \frac{a\pi}{2} \sin \frac{\pi}{2}} = -\frac{2}{\pi}$$

در نتیجه،

$$\phi = \arctan \left(-\frac{2}{\pi} \right) + \pi \approx 147.5^\circ$$

(چرا π اضافه می‌کنیم؟) توجه کنید که ϕ از ثابت a مستقل است. به روش دیگر، بنابر

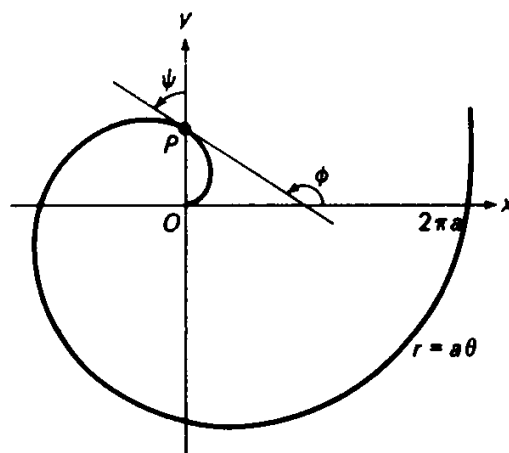
(۸)

$$\tan \psi = \frac{a\pi/2}{a} = \frac{\pi}{2},$$

و در نتیجه،

$$\psi = \arctan \frac{\pi}{2} \approx 57.5^\circ, \quad \phi = \psi + \theta = \arctan \frac{\pi}{2} + \frac{\pi}{2} \approx 147.5^\circ$$

(ر.ک. شکل ۷۶). معادل بودن دو عبارت برای ϕ از فرمول (۱۶)، صفحه ۴۷۶، به دست می‌آید. به عنوان تمرین، نشان دهید که خط مماس در P دارای معادله $4x + 2\pi y - a\pi^2 = 0$ است.



مارپیچ ارشمیدسی

شکل ۷۶

مسائل

برای منحنی قطبی داده شده در نقطه مشخص شده P ، ابتدا $\tan \psi$ و سپس زوایای ψ و ϕ را بیابید.

$r = 6 \cos \theta, P = (3, \pi/3)$. ✓

$r = 8 \sin \theta, P = (4, \pi/6)$. ✓

$r = \sin 2\theta, P = (1/\sqrt{2}, \pi/8)$. ✓

$r = \sqrt{2} |\cos \theta|, P = (1, 3\pi/4)$. ✓

$r = 3 \sec^2 \theta, P = (4, \pi/6)$. ✓

$r = 1 + 2 \sin(\theta/2), P = (1, 4\pi)$. ✓

$r = 2 - \cos \theta, P = (2, 3\pi/2)$. ✓

۸. $r = 3 \cot \theta, P = (\sqrt{3}, \pi/3)$

۹. $r = \frac{5}{1 - \cos \theta}, P = (5, \pi/2)$

۱۰. $r = \frac{3}{\sqrt{2} + \cos \theta}, P = (\sqrt{2}, \pi/4)$

۱۱. $r = \theta^2/4, P = (\pi^2, 2\pi)$

۱۲. $r = \pi/\theta, P = (\frac{1}{2}, 3\pi)$

۱۳. منحنی قطبی $r = f(\theta)$ داده شده است، و $f(\theta_0) = 0$. نشان دهید که خط $\theta = \theta_0$ بر این منحنی در قطب مماس است.

۱۴. نشان دهید که دلگون $r = 2(1 - \cos \theta)$ بر محور قطبی در قطب مماس است (ر. ک. شکل ۶۵، صفحه ۱۰۰۴).

۱۵. رز سه پر $r = \cos 3\theta$ سه مماس متمایز در قطب دارد. آنها را بیابید.

۱۶. در چه نقاطی از دلگون $r = 1 + \cos \theta$ مماس قائم است؟

۱۷. در چه نقاطی از لمنیسکات $r^2 = \sin 2\theta$ مماس افقی است؟

۱۸. با استفاده از فرمول (۸')، نشان دهید که مماس بر یک دایره بر شعاع مرسوم به نقطه تماس عمود است.

مثل شکل ۱۷، صفحه ۱۹۷، زاویه α ($0 \leq \alpha < \pi$) بین دو منحنی متقاطع T_1 و T_2 مساوی زاویه بین مماسهای C_1 و C_2 در نقطه اشتراک تعریف می شود، که از T_1 به T_2 در جهت خلاف عقربه های ساعت سنجیده می شود^۱.

۱۹. $r = 4 \cos \theta$ و $r = 2(1 - \cos \theta)$ در $(\frac{4}{3}, \arccos \frac{1}{3})$

(ر. ک. مثال ۹، صفحه ۱۰۰۴).

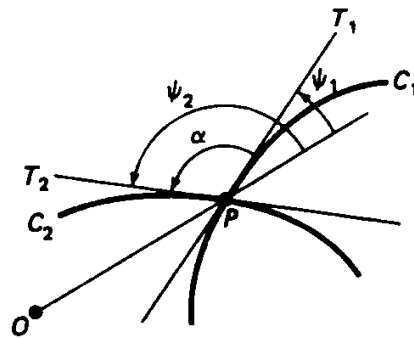
۲۰. $r = \sin 2\theta$ و $r = \cos \theta$ در $(\sqrt{3}/2, \pi/6)$

۲۱. $r = 1/(1 - \sin \theta)$ و $r = 3/(1 + \sin \theta)$ در $(2, \pi/6)$ و $(2, 5\pi/6)$

۲۲. $r^2 = \sin 2\theta$ و $r^2 = \cos 2\theta$ در $(1/\sqrt{2}, \pi/8)$ و $(1/\sqrt{2}, 9\pi/8)$

راهنمایی. با زوایای شعاعی - مماسی ψ_1 و ψ_2 نظیر به T_1 و T_2 کار کرده، توجه کنید که $\alpha = \psi_2 - \psi_1$ (ر. ک. شکل ۷۷).

۱. به صورت دیگر، زاویه بین C_1 و C_2 را اغلب زاویه کوچکتر بین T_1 و T_2 ، بی توجه به جهت سنجش، تعریف می کنند. هرگاه β این زاویه باشد، آنگاه $\beta = \alpha$ اگر $0 \leq \alpha \leq \pi/2$ و لی $\beta = \pi - \alpha$ اگر $\pi/2 < \alpha < \pi$.



زاویه بین منحنیهای C_1 و C_2 در P مساوی است با $\alpha = \psi_2 - \psi_1$

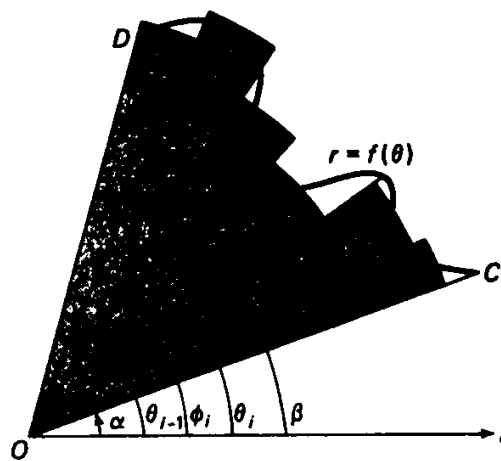
شکل ۷۷

۱۰.۱۰ مساحت در مختصات قطبی؛ طول یک منحنی قطبی

حال به یافتن مساحت A از ناحیه OCD شکل ۷۸ می پردازیم که به شعاع $\theta = \alpha$ شعاع $\theta = \beta$ و منحنی به معادله قطبی

$$r = f(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

محدود شده است، که در آن f پیوسته و نامنفی است. OCD را می توان تعمیمی از قطاع مستدیر گرفت که در آن ضلع خمیده دیگر یک قوس مستدیر نیست. چون هندسه مقدماتی



شکل ۷۸

راجع به این نواحی چیزی نمی گوید، باید پیش از محاسبه مساحت A تعریف مناسبی برایش پیدا کنیم. استراتژی، جز در مواردی جزئی، همانی است که در تعریف مساحت تحت یک منحنی به معادله $y = f(x)$ در مختصات قائم به کار رفت (ر.ک. صفحات ۳۶۷ تا ۳۶۹).

لذا، با تقسیم بازه $[\alpha, \beta]$ به تعداد n بزرگی از زیربازه کوچک به وسیله نقاط تقسیم

$$\alpha = \theta_0, \theta_1, \theta_2, \dots, \theta_{n-1}, \theta_n = \beta$$

صادق در نامساویهای

$$\alpha = \theta_0 < \theta_1 < \theta_2 < \dots < \theta_{n-1} < \theta_n = \beta$$

شروع می‌کنیم. فرض کنیم

$$(1) \quad \Delta\theta_i = \theta_i - \theta_{i-1} \quad (i = 1, 2, \dots, n),$$

و

$$\mu = \max \{ \Delta\theta_1, \Delta\theta_2, \dots, \Delta\theta_n \}$$

را ماکزیمم تمام زوایای (۱) می‌گیریم. در این صورت، شعاعهای $\theta = \theta_0, \theta_1, \dots, \theta_n$ ناحیه OCD را به n برش نازک کیک مانند تقسیم می‌کنند. تابع f پیوسته بوده، و در نتیجه اگر $\Delta\theta_i$ به قدر کافی کوچک باشد، مقدارش در زیربازه $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ تغییر مختصری خواهد کرد. لذا، اگر f را با مقدار ثابت $f(\phi_i)$ بر $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ بگیریم که نقطه دلخواهی از $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ است، تقریب مناسبی برای آن به دست می‌آید. تعویض $f(\theta)$ با $f(\phi_i)$ بر هر زیربازه $[\theta_{i-1}, \theta_i]$ معادل تعویض برشها به وسیله قطاعهای مستدیر سایه‌دار در شکل است. مجموع مساحات این قطاعها مساوی است با

$$(2) \quad \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [f(\phi_i)]^2 \Delta\theta_i$$

(فرمول (۸)، صفحه ۹۰، را به یاد آورید). معقول آن است که (۲) را تقریب مناسبی به مساحت A ناحیه OCD بگیریم، که در آن تقریب با کوچک شدن μ بهتر می‌شود. حال باتوجه به این استدلال، A را حد

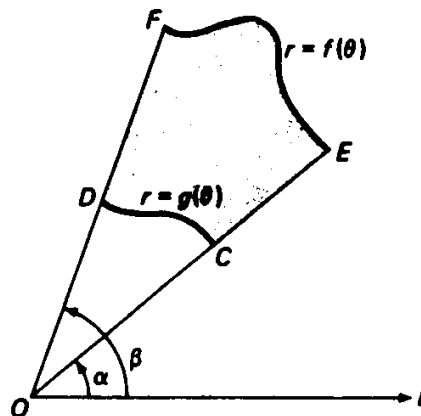
$$A = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n [f(\phi_i)]^2 \Delta\theta_i$$

تعریف می‌کنیم، که چیزی جز انتگرال

$$(3) \quad A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} r^2 d\theta$$

نیست. در اینجا از این استفاده می‌کنیم که مجموع (۲) یک مجموع ریمان برای f^2 بر $[\alpha, \beta]$ است، و وجود انتگرال از پیوستگی f^2 نتیجه می‌شود، که به نوبه خود پیوستگی f را ایجاب می‌کند.

به‌طورکلی، وقتی ناحیه مانند ناحیه سایه‌دار $CEFD$ شکل ۷۹ باشد که به دو شعاع $\theta = \alpha, \theta = \beta$ و نمودارهای دو تابع پیوسته $r = f(\theta), r = g(\theta)$ که $f(\theta) \geq g(\theta) \geq 0$ محدود



شکل ۷۹

شده است، می‌توان نوشت

$$A = \text{مساحت } CEFD = (\text{مساحت } OEF) - (\text{مساحت } OCD)$$

زیرا نواحی OEF و OCD غیر از مرز مشترکشان CD نقطه دیگری ندارند. اما، اگر فرمول (۳) را دوبار به کار گیریم،

$$\text{مساحت } OEF = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta, \quad \text{مساحت } OCD = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [g(\theta)]^2 d\theta,$$

و در نتیجه،

$$A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [f(\theta)]^2 d\theta - \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} [g(\theta)]^2 d\theta,$$

یا معادلاً

$$(۳') \quad A = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \{ [f(\theta)]^2 - [g(\theta)]^2 \} d\theta.$$

مثال ۱. مساحت داخل دلگون $r = 1 + \cos \theta$ ، و نیز مساحت خارج این دلگون و داخل دایره $r = 3 \cos \theta$ را بیابید.

حل. در ناحیه R_1 داخل دلگون [ر.ک. شکل ۸۰ (آ)]، حدود انتگرالگیری عبارتند از $\alpha = -\pi$ ، $\beta = \pi$ ، و شعاعهای $\theta = \alpha$ ، $\theta = \beta$ که ناحیه را دربرمی‌گیرند به یک نقطه، یعنی قطب O ، جمع می‌شوند، زیرا $r|_{\theta=-\pi} = r|_{\theta=\pi} = 0$. پس از فرمول (۳) نتیجه می‌شود که مساحت R_1 مساوی است با

$$A_1 = \frac{1}{2} \int_{-\pi}^{\pi} (1 + \cos \theta)^2 d\theta = \int_0^{\pi} (1 + 2 \cos \theta + \cos^2 \theta) d\theta$$

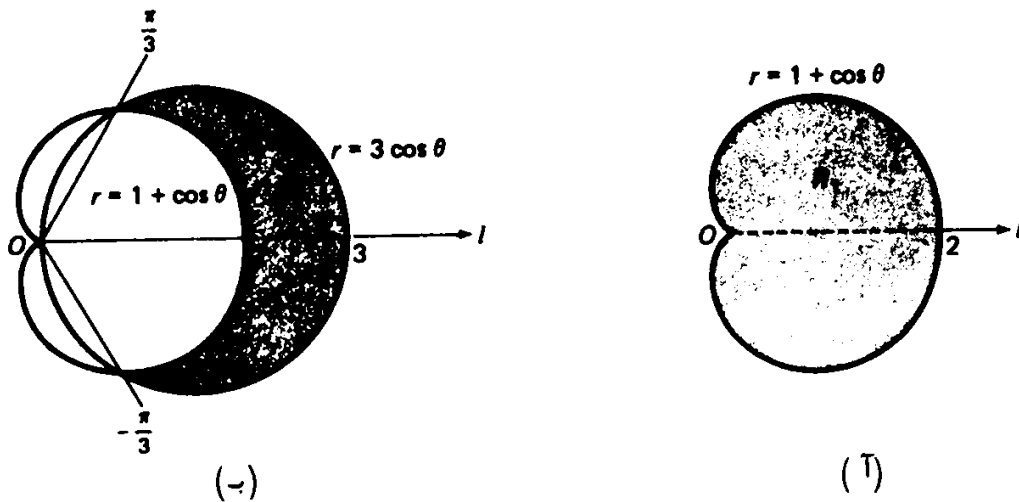
$$= \int_0^{\pi} \left(1 + 2 \cos \theta + \frac{1 + \cos 2\theta}{2} \right) d\theta$$

(در مرحله دوم از تقارن R_1 نسبت به محور قطبی استفاده می‌کنیم) . بنابراین ،

$$A_1 = \left[\theta + 2 \sin \theta + \frac{\theta}{2} + \frac{\sin 2\theta}{4} \right]_0^{\pi} = \frac{3}{2} \pi.$$

در مورد ناحیه R_2 خارج دلگون و داخل دایره $r = 3 \cos \theta$ (به شعاع $\frac{3}{2}$) ، حدود انتگرالی عبارتند از $\alpha = -\pi/3, \beta = \pi/3$ ، زیرا اینها مختصات زاویه‌ای نقاط اشتراک دلگون و دایره‌اند [ر.ک. شکل ۸۰ (ب)] ، و به علاوه ، اگر $-\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3$ ،

. $3 \cos \theta \geq 1 + \cos \theta$



شکل ۸۰

لذا ، طبق فرمول (۳) به ازای $\alpha = -\pi/3, \beta = \pi/3$ ، $f(\theta) = 3 \cos \theta, g(\theta) = 1 + \cos \theta$ ، مساحت R_2 مساوی است با

$$A_2 = \frac{1}{2} \int_{-\pi/3}^{\pi/3} [(3 \cos \theta)^2 - (1 + \cos \theta)^2] d\theta = \int_0^{\pi/3} (8 \cos^2 \theta - 2 \cos \theta - 1) d\theta$$

$$= \int_0^{\pi/3} \left(8 \cdot \frac{1 + \cos 2\theta}{2} - 2 \cos \theta - 1 \right) d\theta = \int_0^{\pi/3} (4 \cos 2\theta - 2 \cos \theta + 3) d\theta$$

(مجدداً از تقارن R_2 نسبت به محور قطبی استفاده می‌کنیم) . بنابراین ،

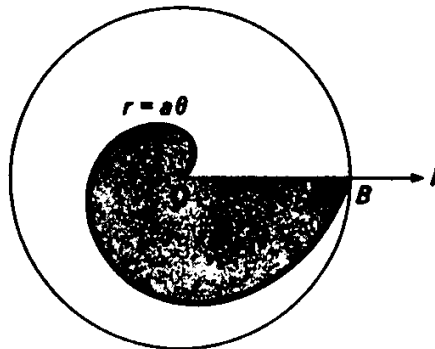
$$A_2 = \left[2 \sin 2\theta - 2 \sin \theta + 3\theta \right]_0^{\pi/3} = 2 \sin \frac{2\pi}{3} - 2 \sin \frac{\pi}{3} + \pi = \pi,$$

که $\frac{4}{3}\pi$ مساحت $\left(\frac{3}{2}\right)^2\pi = \frac{9}{4}\pi$ محدود به فقط دایره است.

مثال ۲. مساحت ۴ ناحیهٔ سایه‌دار شکل ۸۱ محدود به محور قطبی l و "دور" اول مارپیچ ارشمیدسی

$$r = a\theta \quad (\theta \geq 0, a > 0).$$

یعنی بخشی از مارپیچ که نظیر به بازه $0 \leq \theta \leq 2\pi$ است، را بیابید.



شکل ۸۱

حل. در اینجا $\alpha = 0$ ، $\beta = 2\pi$ و

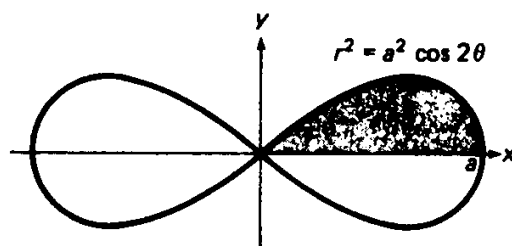
$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (a\theta)^2 d\theta = \frac{1}{6} a^2 \theta^3 \Big|_0^{2\pi} = \frac{4}{3} \pi^3 a^2.$$

توجه کنید که A یکسوم مساحت محدود به دایره ذکر شده به شعاع $|OB| = 2\pi a$ است.

مثال ۳. مساحت A محصور به لمنیسکات

$$(4) \quad (x^2 + y^2)^2 = a^2(x^2 - y^2) \quad (a > 0)$$

نموده شده در شکل ۸۲ را بیابید.



لمنیسکات

شکل ۸۲

حل. ابتدا با قرار دادن $x = r \cos \theta$ و $y = r \sin \theta$ در (۴)، آن را به مختصات قطبی

تبدیل می‌کنیم. این کار نتیجه می‌دهد که

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \quad \text{یا} \quad r^4 = a^2 r^2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)$$

(تقسیم بر r^2 را توجیه کنید). لمنیسکات نسبت به هر دو محور x و y متقارن است؛ و لذا، مساحت کل A محصور به لمنیسکات چهار برابر مساحت ناحیه سایه‌دار شکل است که در ربع اول بین شعاعهای $\theta = 0$ و $\theta = \pi/4$ قرار دارد. بنابراین،

$$A = 4 \cdot \frac{1}{2} \int_0^{\pi/4} r^2 d\theta = 2a^2 \int_0^{\pi/4} \cos 2\theta d\theta = a^2 \sin 2\theta \Big|_0^{\pi/4} = a^2.$$

طول یک منحنی قطبی. حال به یافتن طول یک منحنی قطبی می‌پردازیم. فرض کنیم C یک منحنی به معادله قطبی

$$r = f(\theta) \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta)$$

باشد. در این صورت، C دارای نمایش پارامتری زیر است:

$$x = r \cos \theta = f(\theta) \cos \theta, \quad y = r \sin \theta = f(\theta) \sin \theta \quad (\alpha \leq \theta \leq \beta),$$

که در آن مختص زاویه‌ای θ پارامتر بوده، و می‌توان نظریه طولها را که قبلاً در بخش ۴.۸ ارائه شده به کار برد. در واقع، هرگاه f به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشد، آنگاه C با طول متناهی و دارای طول

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta$$

خواهد بود (ر.ک. فرمول (۲)، ص ۷۴۱). اما

$$\begin{aligned} \left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2 &= [f'(\theta) \cos \theta - f(\theta) \sin \theta]^2 + [f'(\theta) \sin \theta + f(\theta) \cos \theta]^2 \\ &= [f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2, \end{aligned}$$

در نتیجه،

$$L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{[f(\theta)]^2 + [f'(\theta)]^2} d\theta,$$

یا، به‌طور فشرده‌تر،

$$(5) \quad L = \int_{\alpha}^{\beta} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

مثال ۴. محیط L دلگون $r = 1 + \cos \theta$ را، که در شکل ۸۰ (آ) رسم شده، بیابید.

حل. با استفاده از فرمول (۵) و تقارن دلگون نسبت به محور قطبی، داریم

$$\begin{aligned} L &= 2 \int_0^\pi \sqrt{(1 + \cos \theta)^2 + (-\sin \theta)^2} d\theta = 2 \int_0^\pi \sqrt{2 + 2 \cos \theta} d\theta \\ &= 2\sqrt{2} \int_0^\pi \sqrt{1 + \cos^2 \frac{\theta}{2} - \sin^2 \frac{\theta}{2}} d\theta = 4 \int_0^\pi \sqrt{\cos^2 \frac{\theta}{2}} d\theta. \end{aligned}$$

اما اگر $\cos(\theta/2) \geq 0$ ، $0 \leq \theta \leq \pi$ و لذا،

$$L = 4 \int_0^\pi \cos \frac{\theta}{2} d\theta = 8 \sin \frac{\theta}{2} \Big|_0^\pi = 8.$$

مثال ۵. طول L اولین دور مارپیچ ارشمیدسی $r = e^{u}$ مثال ۲ را بیابید.

حل. با اعمال فرمول (۵)، به کمک فرمول (۶)، صفحه ۶۲۹، به دست می‌آوریم

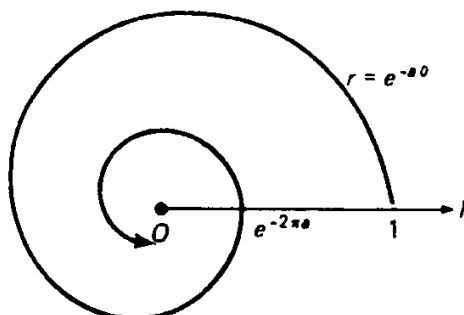
$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{a^2 \theta^2 + a^2} d\theta = a \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^2 + 1} d\theta \\ &= \frac{a}{2} \left[\theta \sqrt{\theta^2 + 1} + \ln(\theta + \sqrt{\theta^2 + 1}) \right]_0^{2\pi} \\ &= \frac{a}{2} [2\pi \sqrt{4\pi^2 + 1} + \ln(2\pi + \sqrt{4\pi^2 + 1})] \approx 21.3a. \end{aligned}$$

مثال ۶. طول کل مارپیچ لگاریتمی

$$r = e^{-a\theta} \quad (0 \leq \theta < \infty, a > 0)$$

را بیابید.

حل. وقتی θ افزایش می‌یابد، مارپیچ طبق شکل ۸۳ حول قطب O در جهت خلاف عقربه‌های



شکل ۸۳

ساعت می چرخد. طول کل L مارپیچ با انتگرال مجازی زیر تعریف می شود:

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{\infty} \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta = \int_0^{\infty} \sqrt{(e^{-a\theta})^2 + (-ae^{-a\theta})^2} d\theta \\ &= \sqrt{1+a^2} \int_0^{\infty} e^{-a\theta} d\theta = \sqrt{1+a^2} \lim_{u \rightarrow \infty} \int_0^u e^{-a\theta} d\theta \\ &= \frac{\sqrt{1+a^2}}{a} \lim_{u \rightarrow \infty} (1 - e^{-au}) = \frac{\sqrt{1+a^2}}{a}. \end{aligned}$$

مثال ۷. مساحت A سطح حاصل از دوران لمنیسکات $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ حول محور x را بیابید (ر.ک. شکل ۸۲).

حل. بنا بر تقارن، A دو برابر مساحت سطح حاصل از دوران قوس

$$r^2 = a^2 \cos 2\theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi/4, r \geq 0)$$

حول محور x است. لذا، طبق فرمول (۱)، صفحه ۷۵۰، پس از تعویض t با θ ،

$$A = 4\pi \int_0^{\pi/4} y \sqrt{\left(\frac{dx}{d\theta}\right)^2 + \left(\frac{dy}{d\theta}\right)^2} d\theta = 4\pi \int_0^{\pi/4} r \sin \theta \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} d\theta.$$

با مشتقگیری از $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ نسبت به θ ، به دست می آوریم

$$2r \frac{dr}{d\theta} = -2a^2 \sin 2\theta,$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} r \sqrt{r^2 + \left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2} &= \sqrt{r^4 + \left(r \frac{dr}{d\theta}\right)^2} = \sqrt{(a^2 \cos 2\theta)^2 + (-a^2 \sin 2\theta)^2} \\ &= \sqrt{a^4 (\cos^2 2\theta + \sin^2 2\theta)} = a^2. \end{aligned}$$

بنابراین،

$$A = 4\pi a^2 \int_0^{\pi/4} \sin \theta d\theta = -4\pi a^2 \cos \theta \Big|_0^{\pi/4} = 4\pi a^2 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

که حدوداً "۲۹٪ مساحت $4\pi a^2$ کره ای به شعاع a است.

مسائل

مساحت ناحیه محدود به منحنی قطبی داده شده و جفت شعاع مشخص شده را بیابید.

$$r = 3 \sec \theta, \theta = 0, \theta = \pi/4 \quad \cdot 1$$

$$r = -4 \csc \theta, \theta = 5\pi/4, \theta = 7\pi/4 \quad \cdot 2$$

$$r = 2 \tan \theta, \theta = \pi/6, \theta = \pi/3 \quad \cdot 3$$

$$r = 1/(1 + \theta), \theta = -\pi/4, \theta = \pi/4 \quad \cdot 4$$

$$r = \sqrt{2}/(1 + \cos \theta), \theta = \pi/3, \theta = \pi/2 \quad \cdot 5$$

$$r = 1/\theta, \theta = 2\pi/3, \theta = \pi \quad \cdot 6$$

$$r = 2^\theta, \theta = 0, \theta = \pi/2 \quad \cdot 7$$

$$r = 5\theta^2, \theta = -\pi/2, \theta = 0 \quad \cdot 8$$

مساحت داخل منحنی قطبی داده شده را بیابید .

$$r = -\sqrt{3} \cos \theta \quad \cdot 10$$

$$r = 8 \sin \theta \quad \cdot 9$$

$$r = \cos \theta + \sin \theta \quad \cdot 12$$

$$r = 10 |\cos \theta| \quad \cdot 11$$

$$r = 3 - 3 \sin \theta \quad \cdot 13 \quad (\text{دلگون})$$

$$r = 2 - \cos \theta \quad \cdot 14 \quad (\text{لیماسون})$$

$$r = 3 + 2 \cos \theta \quad \cdot 15 \quad (\text{لیماسون})$$

$$r^2 = 4 \sin 2\theta \quad \cdot 16 \quad (\text{لمنیسکات})$$

$$r = \sqrt{5} \sec^3(\theta/3) \quad \cdot 17 \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi)$$

$$r = \sec \theta - 4 \cos \theta \quad \cdot 18 \quad (-\pi/3 \leq \theta \leq \pi/3)$$

مساحت کل محصور به رز داده شده را بیابید .

$$r = \cos 4\theta \quad \cdot 20$$

$$r = \sin 2\theta \quad \cdot 19$$

$$r = \sin 5\theta \quad \cdot 22$$

$$r = \cos 3\theta \quad \cdot 21$$

راهنمایی . ابتدا مساحت یک پر را حساب کنید .

در هر مورد ، مساحت داخل منحنی قطبی اول و خارج منحنی قطبی دوم را بیابید .

$$r = 4 \sin \theta, r = 2 \quad \cdot 24$$

$$r = \cos \theta, r = \sin \theta \quad \cdot 23$$

$$r = 2 - \cos \theta, r = 3 \cos \theta \quad \cdot 26$$

$$r = 1, r = 1 + \cos \theta \quad \cdot 25$$

$$r^2 = \sin 2\theta, r^2 = \cos 2\theta \quad \cdot 28$$

$$r = \sin 2\theta, r = \frac{1}{2} \quad \cdot 27$$

در هر مورد ، مساحت داخل هر دو منحنی قطبی را بیابید .

$$r = \cos \theta, r = \cos(\theta - (\pi/4)) \quad \cdot 29$$

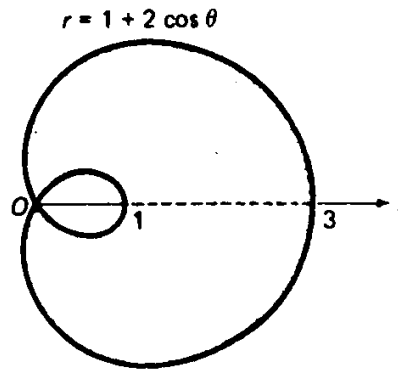
$$r = 1 + \cos \theta, r = 1 - \cos \theta \quad \cdot 30$$

$$r = 2 \cos 3\theta, r = 1 \quad \cdot 32$$

$$r = \sin 2\theta, r = \cos \theta \quad \cdot 31$$

۳۳ . مساحت محصور به حلقهٔ داخلی لیماسون $r = 1 + 2 \cos \theta$ را بیابید . همچنین ،

مساحت بین حلقه داخلی و حلقه خارجی، یعنی مساحت ناحیه سایه دار شکل ۸۴، را بیابید.



شکل ۸۴

۳۴. با کمترین تلاش، نشان دهید که مساحت محدود به منحنی

$$r = \frac{p}{1 - e \cos \theta} \quad (0 < e < 1)$$

مساوی است با $\pi p^2(1 - e^2)^{-3/2}$.

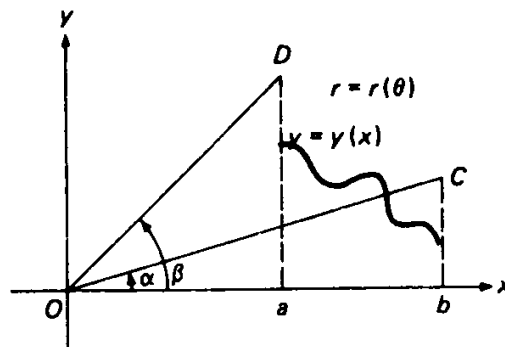
راهنمایی: ر.ک. مثال ۴، صفحه ۹۴۹.

۳۵. واضح است که محاسبات زیر نادرستند. مساحت محصور به لمنیسکات $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ مساوی است با

$$A = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} r^2 d\theta = \frac{a^2}{2} \int_0^{2\pi} \cos 2\theta d\theta = \frac{a^2}{4} \sin 2\theta \Big|_0^{2\pi} = 0$$

(برای جواب درست، ر.ک. مثال ۳). اشکال در کجاست؟

۳۶. شکل ۸۵ منحنی را نشان می‌دهد که دارای معادله قطبی $r = r(\theta)$ بر بازه $\alpha \leq \theta \leq \beta$



شکل ۸۵

و معادله دکارتی $y = y(x)$ بر بازه $a \leq x \leq b$ است. حال دو عبارت برای مساحت A

از ناحیه OCD وجود دارند؛ یعنی،

$$A = \frac{1}{2} \int_a^b r^2 d\theta$$

و

$$A = \int_a^b y dx + (\text{مساحت مثلث } OaD) - (\text{مساحت مثلث } ObC)$$

تحقیق کنید که مقدار A به دست آمده در دو حالت یکی است، و این چیری است که یک نظریه سازگار از مساحت در صفحه طالب آن می باشد. طول منحنی قطبی داده شده را بیابید (ثابت a مثبت است).

$$r = a \sec \theta \quad (-\pi/4 \leq \theta \leq \pi/4) \quad . ۳۷$$

$$r = a \csc \theta \quad (\pi/3 \leq \theta \leq 2\pi/3) \quad . ۳۸$$

$$r = 2a \sin \theta \quad (\pi \leq \theta \leq 2\pi) \quad . ۳۹$$

$$r = \cos \theta + \sin \theta \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad . ۴۰$$

$$r = e^\theta \quad (0 \leq \theta \leq 1) \quad . ۴۱$$

$$r = \theta^2 \quad (-\pi \leq \theta \leq \pi) \quad . ۴۲$$

$$r = 1/\theta \quad (\frac{1}{2} \leq \theta \leq 2) \quad . ۴۳$$

$$r = 2^\theta \quad (-\infty < \theta \leq 0) \quad . ۴۴$$

$$r = 1/(1 + \cos \theta) \quad (-\pi/2 \leq \theta \leq \pi/2) \quad . ۴۵$$

$$r = a \cos^2(\theta/2) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad . ۴۶$$

$$r = a \sin^3(\theta/3) \quad (0 \leq \theta \leq 3\pi) \quad . ۴۷$$

$$r = a \tanh(\theta/2) \quad (0 \leq \theta \leq 2\pi) \quad . ۴۸$$

۴۹. مساحت سطح حاصل از دوران دایره $r = a(1 + \cos \theta)$ حول محور x را بیابید.

۵۰. مساحت سطح حاصل از دوران لیمیسکات $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ نسبت به محور y (به جای

محور x ، مثل مثال ۷) را بیابید.

اصطلاحات و مباحث کلیدی

انتقال و دوران محورها، انتقال و دوران معادلات

آزمونهای تقارن برای رسم $F(x, y) = 0$

تعریف سهمی

کانون، هادی، محور، و رأس سهمی

معادلات سهمی به شکل متعارف
 خاصیت انعکاسی سهمی
 تعریف بیضی
 کانونها، محور اطول، محور اقصر، و رئوس بیضی
 معادلات بیضی به شکل متعارف
 خروج از مرکز بیضی
 خاصیت انعکاسی بیضی
 تعریف هذلولی، شاخه‌های هذلولی
 کانونها، محور متقاطع، محور مزدوج، رئوس و مجانبهای هذلولی
 معادلات هذلولی به شکل متعارف
 خروج از مرکز هذلولی
 هادیهای بیضی و هذلولی
 خاصیت کانون - هادی مقاطع مخروطی
 منحنیهای درجه دو به عنوان مقاطع مخروطی
 تعریف مختصات قطبی
 رابطه بین مختصات قطبی و قائم
 نمودار معادلات قطبی، آزمونهای تقارن برای نمودار $F(r, \theta) = 0$
 مخروطیها در مختصات قطبی
 خط مماس بر یک منحنی قطبی، زاویه شعاعی - مماسی
 مساحت در مختصات قطبی، طول یک منحنی قطبی

مسائل تکمیلی

- انتقالی از محورهای نقطه $(3, -4)$ در دستگاه xy را به نقطه‌ای از محور x' و نقطه $(2, 3)$ را به نقطه‌ای از محور y' می‌برد. معادلات انتقال مربوطه چیست؟
- از نظر هندسی واضح است که (\bar{T}) حاصل دو انتقال متوالی محورهای خود انتقالی از محورهای است. و (ب) فاصله بین دو نقطه $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ در صفحه تحت انتقال پایا است. یعنی، پس از انتقال محورهای تغییر نمی‌کند. (\bar{T}) و (ب) را به طور جبری تحقیق نمایید.
- از نظر هندسی واضح است که (\bar{T}) حاصل دو دوران متوالی حول نقطه O خود دورانی حول O است. و (ب) فاصله بین دو نقطه $P_1 = (x_1, y_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2)$ تحت دوران

پایا است؛ یعنی، پس از دوران محورها تغییر نمی‌کند. (T) و (b) را به طور جبری تحقیق کنید.

۴. پیشامد E که در موضع x (در امتداد یک خط) رخ می‌دهد و زمان t را می‌توان با جفت مرتب (x, t) مشخص کرد. فرض کنید پیشامد E در دو "کنج"، یعنی دستگاه $x_1 t_1$ و دستگاه $x' t'$ ، که نسبت به دستگاه $x t$ با سرعت ثابت v حرکت می‌کند، مشاهده شده باشد، و

$$\theta = \tanh^{-1} \frac{v}{c},$$

که در آن c سرعت نور است (θ را پارامتر سرعت می‌نامند). در این صورت، بنا بر نسبت خصوصی اینشتن (ر.ک. مسئله ۵۴، صفحه ۴۴۳)، مختصات x' و t' به وسیله فرمولهای زیر به مختصات x و t مربوط می‌شوند:

$$\begin{aligned} x' &= x \cosh \theta - ct \sinh \theta, \\ ct' &= -x \sinh \theta + ct \cosh \theta, \end{aligned}$$

(یک)

که تبدیل لورنتس^۱ نام دارند. نشان دهید که حاصل دو تبدیل لورنتس متوالی خود یک تبدیل لورنتس است.

راهنمایی. از فرمولهای (۶) و (۷)، صفحه ۵۶۴ استفاده کنید.

۵. در نظریه نسبیت، بازه^۲ فضا زمان بین پیشامدهای $E_1 = (x_1, t_1)$ و $E_2 = (x_2, t_2)$ به صورت زیر تعریف می‌شود:

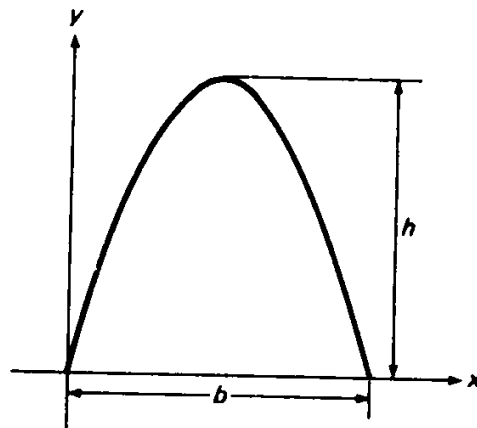
$$s = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 - c^2(t_1 - t_2)^2},$$

که در آن c سرعت نور است. نشان دهید که کمیت s پایای لورنتس است؛ یعنی در اثر تبدیل لورنتس (یک) تغییر نمی‌کند.

۶. فرض کنید G نمودار معادله $\sin(x + y) = 0$ باشد. G از چهار تقارن مطرح شده در صفحه ۹۲۸ کدامها را دارد؟ G را توصیف کنید.

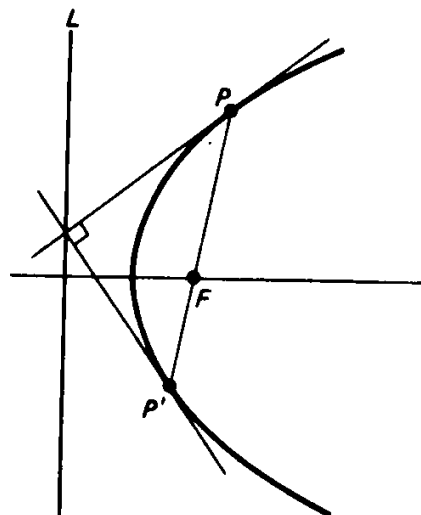
۷. معادله قوس سهموی به قاعده^۳ b و ارتفاع h شکل ۸۶ را بیابید. مساحت تحت قوس چقدر است؟

۸. وتر^۴ از یک سهمی را وتر گائونوی نامند که از کانون F سهمی گذشته باشد. نشان دهید که مماسهای بریک سهمی در نقاط انتهایی یک وتر گائونوی برهم عمود بوده و روی هادی



شکل ۸۶

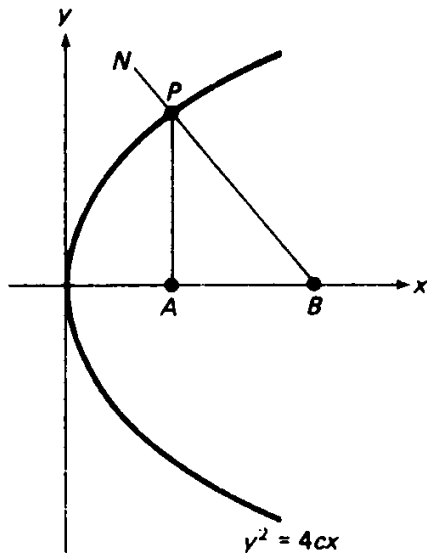
L همدیگر را قطع می‌کنند (ر.ک. شکل ۸۷، که در آن PP' یک وتر کانونی می‌باشد).



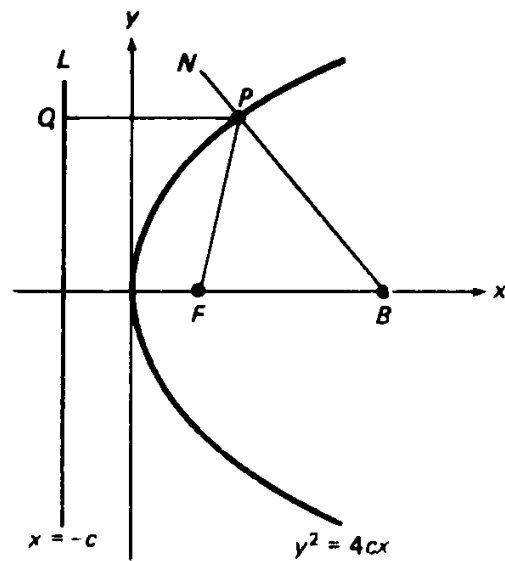
شکل ۸۷

راهنمایی. از مسائل ۳۱ و ۳۲، صفحه ۹۴۱، استفاده کنید.

۹. قائم N در نقطه دلخواه P از سهمی $y^2 = 4cx$ ($c > 0$)، به کانون $F = (c, 0)$ ، محور x را در نقطه B قطع می‌کند. نشان دهید دو موضع برای P وجود دارد که به ازای آنها مثلث FPB متساوی‌الاضلاع به طول ضلع $4c$ است. (ر.ک. شکل ۸۸، که در آن L هادی سهمی بوده و Q پای عمود مرسوم از P به L می‌باشد.)
۱۰. فرض کنید N ، P ، و B همانهای بوده در مسئله قبل بوده، و A پای عمود مرسوم از P به محور x باشد (ر.ک. شکل ۸۹). نشان دهید که پاره خط AB ، به نام تحت قائم سهمی، به ازای هر موضع نقطه P ، به طول ثابت $2c$ است.

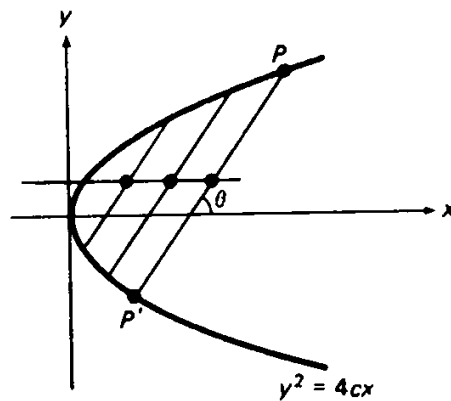


شکل ۸۹



شکل ۸۸

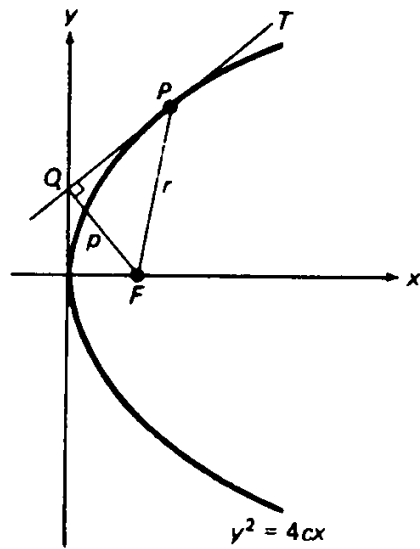
۱۱. نشان دهید مکان هندسی نقاط میانی تمام وترهای سهمی $y^2 = 4cx$ با میل ناصفر ثابت θ خط مستقیمی موازی محور x است (ر. ک. شکل ۹۰).



شکل ۹۰

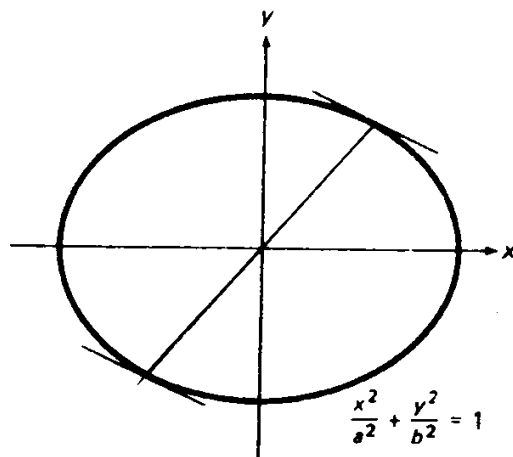
۱۲. نشان دهید که عمود مرسوم از کانون F بر سهمی $y^2 = 4cx$ ($c > 0$) بر مماس T در نقطه P سهمی همیشه T را در نقطه Q از محور y قطع می‌کند (ر. ک. شکل ۹۱). همچنین، نشان دهید که هرگاه $r = |FP|$ و $p = |FQ|$ ، آنگاه به ازای هر موضع P ، $p^2 = cr$.

۱۳. فرض کنید E بیضی به معادله $7x^2 + 3y^2 = 55$ باشد. از شش نقطه $P_1 = (2, -3)$ ، $P_2 = (-2, 2)$ ، $P_3 = (0, -5)$ ، $P_4 = (3, -2)$ ، $P_5 = (1, 4)$ ، $P_6 = (-3, 1)$ کدامها روی E اند؟ کدامها داخل E اند؟ کدامها خارج E می‌باشند؟



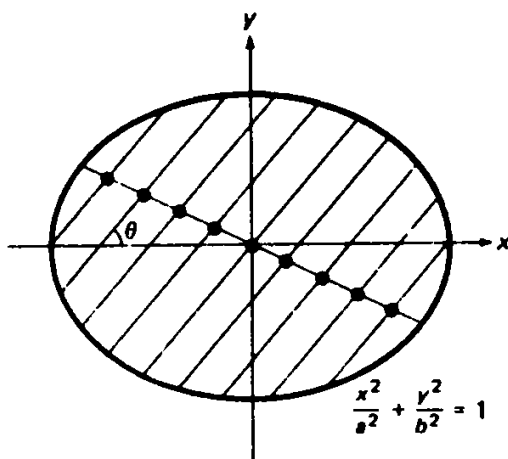
شکل ۹۱

۱۴. مساحت چهار ضلعی را بیابید که دو رأسش در کانونهای بیضی $\frac{1}{20}x^2 + \frac{1}{4}y^2 = 1$ و دو رأس دیگرش در نقاط انتهایی محور اقصر قرار داشته باشند.
۱۵. یک بیضی که نسبت به هر دو محور مختصات متقارن است از نقاط $(6, 0)$ و $(4, \sqrt{5})$ می‌گذرد. معادله بیضی را بنویسید. خروج از مرکز چقدر است؟
۱۶. نقاط تقاطع بیضی $x^2 + 4y^2 = 4$ و دایره مار بر کانونها و قطع r بالایی بیضی را پیدا کنید.
۱۷. مماسهایی از بیضی $\frac{1}{30}x^2 + \frac{1}{24}y^2 = 1$ را بیابید که با خط $6x - 3y + 11 = 0$ موازی باشند. فاصله بین مماسها چقدر است؟
۱۸. وتری از یک بیضی که از مرکز آن بگذرد قطر نام دارد. نشان دهید که مماسهای بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ در نقاط انتهایی یک قطر موازیند (ر. ک. شکل ۹۲).



شکل ۹۲

۱۹. نشان دهید مکان هندسی نقاط میانی تمام وترهای بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ با میل ثابت θ قطری از بیضی است (ر.ک. شکل ۹۳).



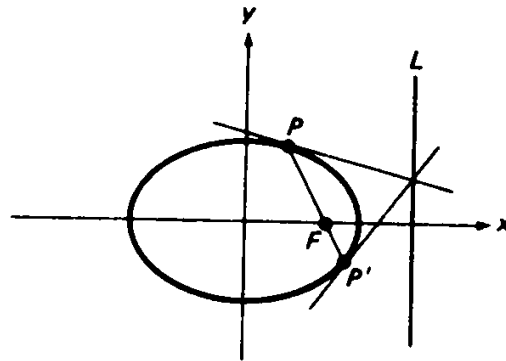
شکل ۹۳

۲۰. بر بیضی $\frac{1}{8}x^2 + \frac{1}{8}y^2 = 1$ نزدیکترین نقطه P به خط $2x - 3y + 25 = 0$ را بیابید. فاصله P و خط چقدر است؟
۲۱. نشان دهید که حاصل ضرب فواصل نقطه P از هذلولی $(x^2/a^2) - (y^2/b^2) = 1$ به کانونهای $(\pm c, 0)$ تا مجانبهایش به ازای جمیع مواضع P مقدار یکسانی دارد. این مقدار چقدر است؟
۲۲. نشان دهید که منحنی به معادلات پارامتری
 (دو) $x = x_0 + a \sec t, \quad y = y_0 + b \tan t \quad (-\pi/2 < t < \pi/2)$
 شاخه راست یک هذلولی با محور متقاطع افقی است اگر $a > 0$ و شاخه چپ آن است اگر $a < 0$. معادلات پارامتری شاخه‌های یک هذلولی به محور متقاطع قائم‌را بنویسید.
۲۳. مماسهای بر هذلولی $\frac{1}{20}x^2 - \frac{1}{3}y^2 = 1$ عمود بر خط $4x + 3y - 7 = 0$ را بیابید.
۲۴. مماسهای بر هذلولی $\frac{1}{8}y^2 - \frac{1}{8}x^2 = 1$ موازی خط $2x + 4y - 5 = 0$ را بیابید. فاصله بین مماسها چقدر است؟
۲۵. نقطه اشتراک مماس بر هذلولی $xy = 1$ ماربر نقطه $(2, \frac{1}{2})$ با مماس ماربر نقطه $(\frac{1}{2}, 2)$ را بیابید.
۲۶. خروج از مرکز بیضی را بیابید که در آن فاصله بین هادیها سه برابر فاصله بین کانونهاست.
۲۷. خروج از مرکز هذلولی را بیابید که در آن فاصله بین کانونها پنج برابر فاصله بین هادیهاست.

۲۸. فاصله بین هادیهای یک بیضی به مرکز $(-3, 4)$ و محور اطول افقی 36 بوده، و نقطه‌ای بر بیضی وجود دارد که فاصله‌اش تا کانونها 9 و 15 است. معادله بیضی به شکل متعارف چقدر است؟

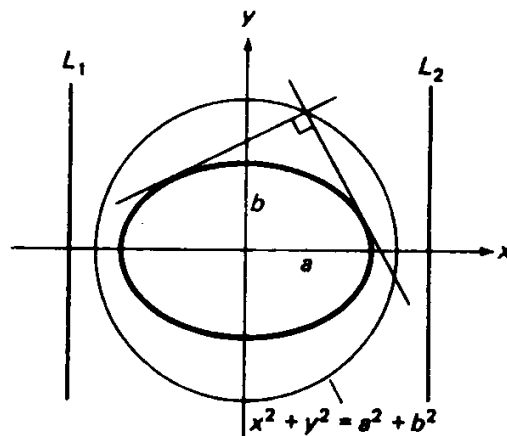
۲۹. هذلولی بیابید که کانونهایش در رئوس بیضی $x^2 + \frac{1}{64}y^2 = 1$ بوده، و هادیهایش از کانونهای بیضی بگذرند.

۳۰. وتری از بیضی را یک وتر کانونی نامند اگر از یکی از کانونهای بیضی بگذرد. نشان دهید که مماسهای بر بیضی در نقاط انتهایی یک وتر کانونی روی هادی L که به کانون مربوطه نزدیکتر است متقاطع می‌باشند (ر. ک. شکل ۹۴، که در آن PP' یک وتر کانونی است).



شکل ۹۴

۳۱. نشان دهید مکان هندسی تمام نقاطی که بتوان از آنها دو خط مماس متعامد بر بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ کشید دایره $x^2 + y^2 = a^2 + b^2$ است که دایره هادی بیضی نام دارد (ر. ک. شکل ۹۵، که هادیهای L_1 و L_2 بیضی را نیز نشان می‌دهد).



شکل ۹۵

۳۲. شعاع دایره هادی یک بیضی با خروج از مرکز $\frac{4}{3}$ و نیم محور اطول 15 را بیابید.

۳۳. بنابر مسئله ۳۰، مماسهای مرسوم از نقاط انتهایی یک وتر کانونی بیضی روی یک هادی متقاطعند. نشان دهید که، برخلاف سهمی (ر.ک. مسئله ۸)، این مماسها هرگز بر هم عمود نیستند.

پس از دوران مناسبی از محورها، بگویید نمودار معادله داده شده چه مخروطی است. مخروطی را در صورت تباه نشده بودن رسم نمایید.

$$4xy + 3y^2 + 16x + 12y + 36 = 0 \quad . ۳۴$$

$$9x^2 + 30xy + 25y^2 - 42x - 70y + 49 = 0 \quad . ۳۵$$

$$7x^2 + 6xy - y^2 + 28x + 12y + 28 = 0 \quad . ۳۶$$

$$x^2 - 2xy + y^2 - 3x + y = 0 \quad . ۳۷$$

۳۸. نشان دهید هرگاه $A + C$ و $4AC - B^2$ هر دو مثبت باشند، آنگاه نمودار معادله

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 = 1 \quad \text{بیضی است که مساحت محصور به آن } 2\pi/\sqrt{4AC - B^2} \text{ می باشد.}$$

۳۹. منحنی درجه دو به معادله

$$(x - x_1)(x - x_2) + (y - y_1)(y - y_2) = 0.$$

را به طور ساده تعبیر هندسی کنید.

۴۰. نشان دهید که نمودار معادله

$$xy + Ax + By + C = 0$$

یا یک هذلولی متساوی الاضلاع است یا یک جفت خط عمود بر هم.

فرض کنید C_k منحنی به معادله

$$\frac{x^2}{a^2 + k} + \frac{y^2}{b^2 + k} = 1 \quad \text{(سه)}$$

باشد، که در آن $a^2 > b^2, k > -a^2, k \neq -b^2$.

۴۱. نشان دهید C_k بیضی است اگر $k > -b^2$ و هذلولی است اگر $-a^2 < k < -b^2$.

۴۲. نشان دهید همه C_k ها کانونهای یکسان دارند (به این دلیل است که C_k را هم کانون می نامند).

۴۳. معادله (سه) را به ازای $a^2 = 4, b^2 = 1$ و $k = -3, -2, 0, 1$ ، که کانونهای F_1 و F_2 را مشخص می کنند، رسم نمایید.

۴۴. نشان دهید که هر بیضی C_k ($k > -b^2$) به هر هذلولی C_k ($-a^2 < k < -b^2$) متعامد است؛ یعنی، نشان دهید که منحنیهای C_k و C_k در تمام نقاط اشتراکشان برهم عمودند.

۴۵. یک دایره به معادله قطبی زیر است:

$$r^2 - 3\sqrt{3} r \cos \theta - 3r \sin \theta - 7 = 0.$$

شعاع و مرکز آن را (در مختصات قطبی) بیابید .

۴۶ . مختصات قطبی جدید نقاط $A = (4, \pi/3)$ ، $B = (1, 2\pi/3)$ ، و $C = (5, \pi/4)$ را پس از دوران محور قطبی تا آنکه از A بگذرد پیدا نمایید .

۴۷ . نقطهء میانی پاره خط واصل بین نقاط به مختصات قطبی $(12, 4\pi/9)$ و $(12, -2\pi/9)$ را بیابید .

۴۸ . منحنی به معادلهء قطبی

$$r = a + b \sec \theta \quad (a > 0, b > 0)$$

یک حلزونگون نام دارد . یکی از سه حلزونگون $r = 2 + 2 \sec \theta$ ، $r = 2 + \sec \theta$

$r = 2 + 3 \sec \theta$ دارای " حلقه " است . آن کدام است ؟

معادلهء قطبی $F(r, \theta) = 0$ را طوری مثال بزنید که نمودارش نسبت به محور y متقارن بوده ولو اینکه مجموعهء جوابش با مجموعهء جواب هر یک از معادلات زیر یکی نباشد .

$$F(r, \pi - \theta) = 0 \quad . ۵۰ \quad F(-r, -\theta) = 0 \quad . ۴۹$$

$$. ۵۱ \quad F(r, \pi - \theta) = 0 \quad \text{یا} \quad F(-r, -\theta) = 0$$

۵۲ . نقطهء P طوری حرکت می کند که حاصل ضرب فواصلش تا دو نقطهء ثابت F_1 و F_2 مقدار ثابت b^2 است (لذا ، $|PF_1| |PF_2| = b^2$) . معادلهء دکارتی و معادلهء قطبی مسیر P ، که بیضی کاسینی نام دارد ، را با اختیار $F_1 = (-a, 0)$ ، $F_2 = (a, 0)$ در مختصات قائم یا معادلا " $F_1 = (a, \pi)$ ، $F_2 = (a, 0)$ در مختصات قطبی پیدا کنید . بیضیهای کاسینی را به ازای $10, 8, 6, a^2 = 8, b^2 = 8$ رسم کرده ، و تفاوتهای کیفی این سه حالت را توصیف نمایید .

۵۳ . یک خط مار بر کانون F یک مخروطی تپاه نشده با خروج از مرکز e و فاصلهء کانون تا هادی d مخروطی را در نقاط A و B قطع می کند . نشان دهید که مجموع

$$\frac{1}{|AF|} + \frac{1}{|BF|}$$

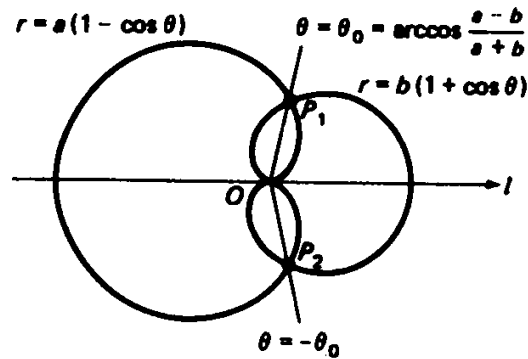
به ازای جميع مواضع خط مقدار یکسانی دارد ؟

۵۴ . با استفاده از مختصات قطبی ، برهان دیگری برای خاصیت انعکاسی سهمی که در صفحهء ۹۳۹ ثابت شد بیاورید .

۵۵ . نشان دهید که دواير $r = a \sin \theta$ و $r = b \cos \theta$ در نقاط اشتراک ، صرف نظر از ثابتهای مثبت a و b ، متعامدند (یعنی ، همدیگر را در زوایای قائمه قطع می کنند) .

۵۶ . دلگونهای $r = a(1 - \cos \theta)$ و $r = b(1 + \cos \theta)$ در قطب و دو نقطهء P_1 و P_2 که نسبت به محور قطبی متقارن اند همدیگر را قطع می کنند (رک . شکل ۹۶) . نشان دهید که

دلگونها در P_1 و P_2 ، بی توجه به ثابتهای مثبت a و b ، متعامدند. زاویه بین دلگونها در قطب چقدر است؟



شکل ۹۶

فرض کنید A_n مساحت یک پرر $r = a \sin n\theta$ بوده، و A مساحت کل محصور به تمام رز باشد. نشان دهید که

$$A_n = \frac{\pi a^2}{4n} \quad .57$$

$$.58 \quad A = \frac{\pi a^2}{2} \text{ اگر } n \text{ زوج باشد، ولی } A = \frac{\pi a^2}{4} \text{ اگر } n \text{ فرد باشد.}$$

.59 مساحت داخل هر دو دلگون $r = 1 + \sin \theta$ و $r = 1 - \cos \theta$ را بیابید.

.60 فرض کنید A_n مساحت محدود به محور قطبی و n دور اول مارپیچ ارشمیدسی

$r = a\theta$ ($\theta \geq 0, a > 0$) باشد. نشان دهید که $A_{n+1} - A_n = 8\pi^3 a^2 n$ ($n \geq 1$)، A_2, A_1 ، و A_3 را بیابید.

.61 دو منحنی قطبی بسته ساده با مساحت محصور مختلف مثال بزنید که هر یک از هر خط مار بر قطب پاره خطی به طول ثابت $2a$ جدا سازد.

.62 با استفاده از مختصات قطبی، نشان دهید که مساحت محصور به حلقه چینه دکارت

$$x = \frac{3at}{t^3 + 1}, \quad y = \frac{3at^2}{t^3 + 1} \quad (-\infty < t < \infty)$$

(ر.ک. شکل ۴۱، صفحه ۷۳۷) مساوی است با $\frac{3}{2}a^2$.

راهنمایی. چینه دارای معادله دکارتی $x^3 + y^3 = 3axy$ است.

.63 اگر $0 < a < b$ ، لیماسون $r = a + b \cos \theta$ دو حلقه دارد، یکی حلقه داخلی و دیگری حلقه خارجی. مساحت بین دو حلقه را به دست آورید.

۶۴. نشان دهید که مارپیچ هذلولوی $r\theta = 1$ ($1 \leq \theta < \infty$) طول متناهی ندارد.

۶۵. طول منحنی قطبی

$$\theta = \frac{1}{2} \left(r + \frac{1}{r} \right) \quad (1 \leq r \leq 3)$$

را بیابید.

۶۶. طول منحنی به "معادلات پارامتری قطبی"

$$r = t, \quad \theta = \ln t \quad (0 < t \leq 1)$$

را پیدا کنید. محاسبات را ابتدا با بیان r به صورت تابعی از θ امتحان نمایید.

بردارها در صفحه ۱۱

در این فصل نشان می‌دهیم چگونه می‌توان مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال را از توابع معمولی، که اعداد را به اعداد می‌برند، به توابع برداری، که اعداد را به بردارها می‌برند، تعمیم داد. یک بردار کمیتی است که فقط با یک عدد، به نام اندازه، معین نشده و بلکه جهت نیز لازم دارد. پیدایش روشهای برداری تا حدود زیاد از کارهای شیمی‌دان ریاضی فیزیکدان بزرگ آمریکایی، جوشیا ویلاردگیبس^۱ (۱۹۰۳ - ۱۸۳۹) ناشی شده است، که نشان داد که استفاده از آنها موجب تسهیل در حل مسائل علوم کاربرده می‌شود.

بحث ما از حساب برداری در سطح مقدماتی صورت می‌گیرد. در این فصل خود را به بردارها در صفحه محدود می‌کنیم، که در آن اغلب ویژگیهای مبحث ظاهر می‌شوند. در فصل بعد، از بعد دو به سه رفته، و بردارها در فضا را در نظر می‌گیریم. گام نهایی مجاز دانستن توابع برداری با شناسه‌های برداری علاوه بر مقادیر برداری بعداً، پس از آنکه تکنیکهای لازم حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع چندمتغیره به دست آمد، برداشته خواهد شد.

۱.۱۱ مفهوم بردار؛ اعمال بر بردارها

اسکالرها و بردارها، در علوم و صنعت تمایز بین دو نوع کمیت، یعنی اسکالر و بردار، اهمیت دارد. منظور از اسکالر کمیتی است که کاملاً با یک عدد (و بسا واحد سنجش مناسبی) مشخص می‌شود. مثلاً، فشار یک گاز محبوس، ارتفاع یک هواپیما، و دمای یک کوره همه اسکالرنند. از آن سو، منظور از بردار یعنی کمیتی که برای مشخص شدن فقط به یک عدد، به نام اندازه، بردار، محتاج نبوده، بلکه جهت نیز لازم دارد. مثلاً، سرعت

1. Josiah Willard Gibbs

باد در یک ایستگاه هواشناسی، موضع یک هدف نسبت به یک توپخانه دریایی، و نیروی وارد بر یک الکترون متحرک در یک میدان مغناطیسی همه بردار می‌باشند.

بردارها را با حروف سیاه مانند

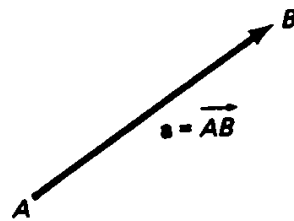
$$\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{u}, \mathbf{v}, \dots$$

(در چاپ)، یا با گذاردن سهم روی حروف نازک نظیر مانند

$$\vec{a}, \vec{b}, \vec{u}, \vec{v}, \dots$$

(در دستنویس) نشان می‌دهند. همانند اسکالر ها، آنها را با حروف نازک معمولی بدون سهم نیز نشان می‌دهند.

برای نمایش هندسی یک بردار، یک پاره‌خط جهتدار یا سهم به کار می‌بریم که اشاره به جهت بردار داشته و طولش مساوی اندازه بردار می‌باشد (توجه کنید که اندازه یک بردار ذاتاً " نامنفی است). هر بردار یک نقطه شروع و یک نقطه پایان دارد، نقطه دوم با سر سهم نموده می‌شود. مثلاً، از دو نقطه انتهایی بردار \mathbf{a} در شکل ۱، نقطه A نقطه شروع و B نقطه پایان است. پاره‌خط جهتدار از A به B به همین ترتیب با \vec{AB} نموده می‌شود.



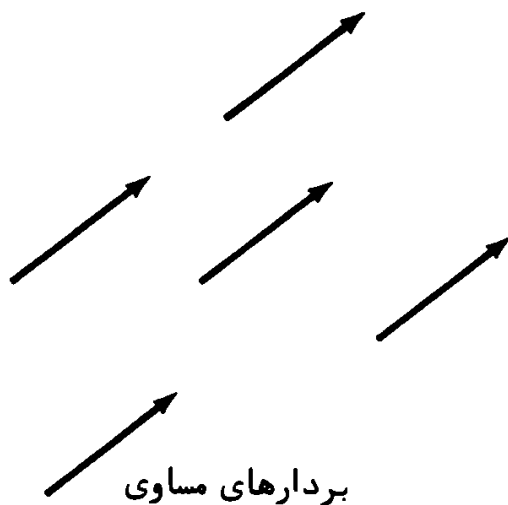
شکل ۱

و در نتیجه، $\mathbf{a} = \vec{AB}$. اندازه یک بردار با حرف نازک نظیر (هرچه باشد، اندازه اسکالر است)، یا با گذاردن بردار داخل علامت قدر مطلق نموده می‌شود. مثلاً، در بردار شکل ۱ داریم

$$a = |\mathbf{a}| = |\vec{AB}|.$$

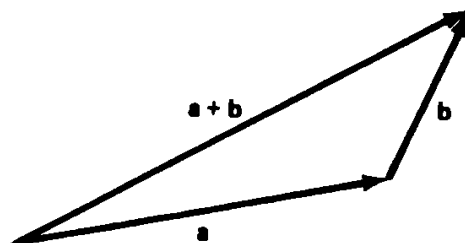
دو بردار را مساوی گوئیم اگر موازی (یا همخط) بوده، به یک جهت اشاره کنند، و اندازه یکسانی داشته باشند. توجه کنید که تساوی دو بردار همانی آنها را معنی نمی‌دهد، و این برخلاف تساوی کسرهایی چون $\frac{1}{2}$ و $\frac{2}{4}$ است که به معنی همانی می‌باشند.

مثال ۱. پنج بردار شکل ۲، که دوتای بالا همخط اند، همه مساوی می‌باشند.



شکل ۲

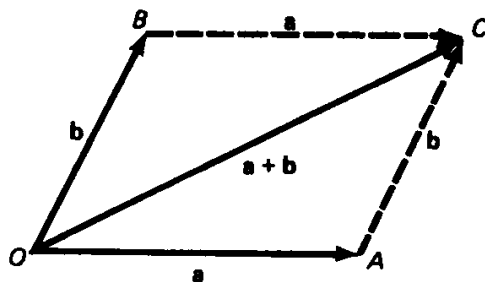
جمع بردارها. منظور از مجموع دو بردار a و b ، که با $a + b$ نموده می‌شود، یعنی بردار حاصل از قرار دادن نقطه شروع b در نقطه پایان a و سپس رسم برداری با نقطه شروع a و نقطه پایان b (ر.ک. شکل ۳). ممکن است قبلاً با این ترسیم به صورت "قانون



جمع بردارها

شکل ۳

متوازی‌الاضلاع "فیزیک مقدماتی" (که برای یافتن "برآیند" دو تغییر مکان، دو سرعت، دو نیرو، و غیره به کار رفته) برخورد کرده باشید. در واقع، هرگاه a و b را از نقطه شروع مشترک O ، مثل شکل ۴، رسم کرده و متوازی‌الاضلاع $OACB$ "پیموده شده به وسیله a و



تعویض پذیری جمع برداری

شکل ۴

\mathbf{b} را بسازیم، آنگاه $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ قطر OC متوازی الاضلاع می‌باشد (چرا؟). از این شکل معلوم می‌شود که

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = \vec{OA} + \vec{AC} = \vec{OC}$$

و

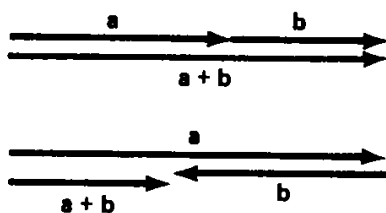
$$\mathbf{b} + \mathbf{a} = \vec{OB} + \vec{BC} = \vec{OC},$$

که باهم ایجاب می‌کنند که

$$(1) \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = \mathbf{b} + \mathbf{a},$$

نشانگر آنکه جمع برداری تعویضپذیر است.

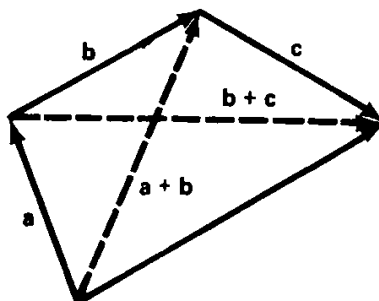
تبصره. اگر \mathbf{a} و \mathbf{b} موازی باشند، مثلث شکل ۳ "فرو می‌ریزد". در این صورت، یکی از دو حالت شکل ۵ را خواهیم داشت.



شکل ۵

شکل ۶ نشان می‌دهد که جمع برداری شرکتپذیر نیز هست، بدین معنی که

$$(2) \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) + \mathbf{c} = \mathbf{a} + (\mathbf{b} + \mathbf{c}).$$



شرکتپذیری جمع برداری

شکل ۶

با چند بار استفاده از فرمولهای (۱) و (۲) معلوم می‌شود که مجموع هر تعداد بردار از ترتیب دسته‌بندی جملات مستقل است. بخصوص، با این مجازیم، در نوشتن مجموع

بردارها، پرانتزها و گروه‌ها را حذف نماییم. مثلاً،

$$a + b + c + d = [(d + b) + c] + a = [c + (a + d)] + b,$$

و از این قبیل.

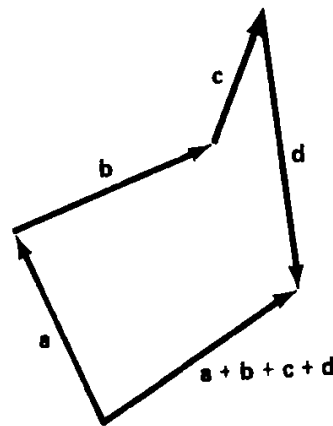
این امر که طول یک ضلع هر مثلث نمی‌تواند از مجموع طول سایر اضلاع تجاوز کند،

نامساوی مثلثی

$$(۳) \quad |a + b| \leq |a| + |b|$$

را به ازای بردارهای دلخواه a و b ایجاب می‌نماید (ر. ک. شکل ۳). توجه کنید که نامساوی مثلثی برای اسکالرها (قضیه ۵، صفحه ۲۲) حالت خاصی از (۳) است که، مثل شکل ۵، وقتی به دست می‌آید که a و b همخط می‌باشند.

مثال ۲. در شکل ۷ مجموع $a + b + c + d$ برداری است که مسیر چندضلعی حاصل از



شکل ۷

قرار دادن نقطه شروع b در نقطه پایان a ، نقطه شروع c در نقطه پایان b ، و نقطه شروع d در نقطه پایان c را می‌بندد.

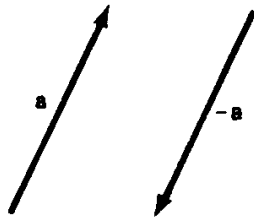
منظور از بردار صفر، که با 0 (صفر سیاه) نموده می‌شود یعنی "بردار"ی که نقاط شروع و پایانش یکی هستند. لذا، بردار صفر دارای اندازه 0 است، ولی جهت تعریف شده‌ای ندارد. واضح است که بردار 0 همان نقش جمع برداری را دارد که عدد 0 در جمع (اسکالر) معمولی ایفا می‌کند؛ یعنی، به ازای a ی دلخواه،

$$a + 0 = a$$

به ازای بردار a ، بردار با همان اندازه a ولی در جهت مخالف قرینه a نام دارد

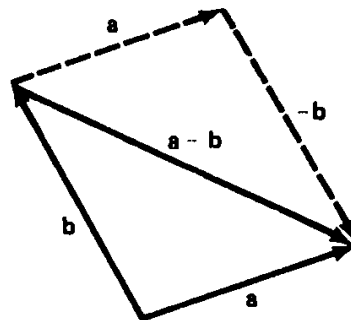
و با $-a$ نموده می شود (ر.ک. شکل ۸). از تعریف جمع برداری نتیجه می شود که

$$a + (-a) = 0,$$



شکل ۸

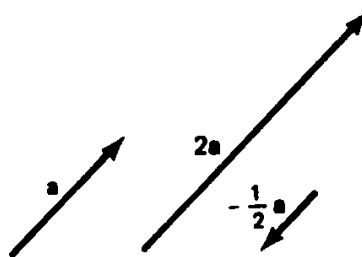
و چون $0 + 0 = 0$ ، قرار می دهیم $-0 = 0$. تفاضل $a - b$ مساوی مجموع $a + (-b)$ تعریف می شود. برای ساختن $a - b$ می توان a و b را طوری قرار داد که نقاط شروعشان یکی باشد، و سپس بردار از نقطه پایان b به نقطه پایان a را رسم کرد. شکل ۹ دلیل کارکردن این ترسیم را نشان می دهد.



تفریق پاره خطها

شکل ۹

مضارب اسکالر یک بردار. با حاصل ضرب $pa (=ap)$ اسکالر ناصفر p و بردار ناصفر a برداری تعریف می شود که اندازه آن $|p|$ برابر اندازه a است (در نتیجه $|pa| = |p||a|$ همجهت با a اگر $p > 0$ و مختلف جهت اگر $p < 0$ (ر.ک. شکل ۱۰). بخصوص، $(-1)a = -a$.



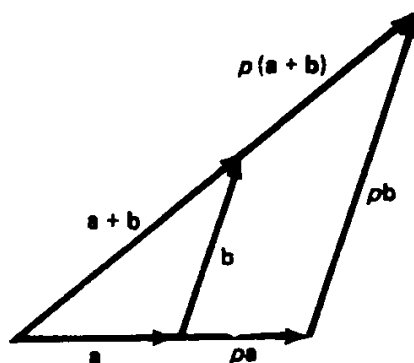
شکل ۱۰

اگر $p = 0$ یا $a = 0$ ، طبق تعریف قرار می‌دهیم $pa = 0$. به ازای دو اسکالر p و q ، فوراً می‌بینیم $p(qa) = pqa$ ، که در آن حاصل ضرب اسکالر pq در بردار a است. همچنین، به ازای بردارهای دلخواه a, b و اسکالرهایی p, q ، قوانین پخشپذیری زیر را داریم:

$$(۴) \quad (p + q)a = pa + qa,$$

$$(۵) \quad p(a + b) = pa + pb.$$

شکل ۱۱ برقراری (۵) را توضیح می‌دهد، و اثبات (۴) به عنوان تمرین گذارده شده است.



شکل ۱۱

تقسیم یک بردار بر یک اسکالر به طور طبیعی تعریف می‌شود؛ یعنی، با قرار دادن

$$\frac{a}{p} = \frac{1}{p} a \quad (p \neq 0).$$

هر بردار به طول ۱ یک بردار یکه نام دارد. اگر a یک بردار ناصفر باشد، بردار

$$\frac{a}{|a|}$$

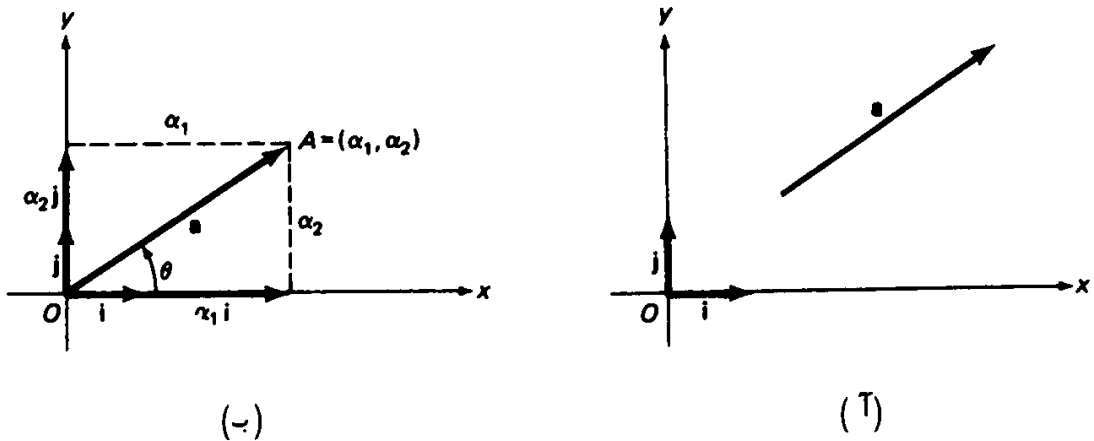
یک بردار یکه است، زیرا

$$\left| \frac{a}{|a|} \right| = \frac{1}{|a|} |a| = 1.$$

مؤلفه‌های یک بردار. تا بحال بحث ما از بردارها صرفاً "هندسی و" فارغ از مختصات بوده است. حال دستگاهی از مختصات قائم x و y در صفحه به مبداء O اختیار می‌کنیم. فرض کنیم i بردار یکه در امتداد محور x مثبت و j بردار یکه در امتداد محور y مثبت، مثل شکل ۱۲ (آ) باشد. در این صورت، هر بردار a در صفحه نمایش منحصر به فردی به شکل زیر دارد:

$$(۶) \quad a = \alpha_1 i + \alpha_2 j.$$

اسکالرهای α_1 و α_2 ، به نام مؤلفه‌های \mathbf{a} ، به صورت زیر تعیین می‌شوند . بردار \mathbf{a} را انتقال می‌دهیم ، یعنی آن را به موازات خود بدون دوران حرکت می‌دهیم ، تا آنکه نقطه شروع با مبدأ O یکی شود . در این صورت ، نقطه پایان \mathbf{a} نقطه $A = (\alpha_1, \alpha_2)$ از صفحه xy بوده ، و البته $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ ، زیرا تمام انتقالهای یک بردار باهم مساویند . اما ، همانطور که از شکل ۱۲ (ب) معلوم است ، مختصات α_1 و α_2 نقطه A دقیقاً " اسکالرهای هستند که در نمایش یا " بسط " (۶) به کار می‌روند . به علاوه ، اندازه \mathbf{a} چیزی جز فاصله O تا A نیست؛



شکل ۱۲

یعنی ،

$$(۷) \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2}.$$

شکل همچنین نشان می‌دهد که هرگاه θ زاویه بین محور x مثبت و بردار \mathbf{a} باشد ، آنگاه

$$\alpha_1 = |\mathbf{a}| \cos \theta, \quad \alpha_2 = |\mathbf{a}| \sin \theta.$$

منظور از پایه در صفحه یعنی دو بردار ثابت \mathbf{e}_1 و \mathbf{e}_2 ، به نام بردارهای پایه ، به طوری

که هر بردار دلخواه \mathbf{a} در صفحه نمایش منحصر به فردی به شکل

$$(۶') \quad \mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2,$$

به نام بسط \mathbf{a} نسبت به \mathbf{e}_1 و \mathbf{e}_2 ، داشته باشد . در این صورت ، اسکالرهای α_1 و α_2 مؤلفه‌های

\mathbf{a} (نسبت به \mathbf{e}_1 و \mathbf{e}_2) نام دارند . می‌توان نشان داد که دو بردار ناصفر \mathbf{e}_1 و \mathbf{e}_2 یک پایه

در صفحه تشکیل می‌دهند اگر و فقط اگر غیر همخط باشند ؛ یعنی ، اگر و فقط اگر خطی شامل

(یا موازی) هر دو بردار موجود نباشد . اگر بردارهای \mathbf{e}_1 و \mathbf{e}_2 یک پایه برهم عمود باشند ،

پایه متعامد نام دارد ، و اگر علاوه بر عمود بودن بردارهای یکه نیز باشند ، پایه متعامد یکه

نامیده می‌شود . مثلاً ، بردارهای یکه \mathbf{i} و \mathbf{j} در امتداد محورهای مختصات یک پایه متعامد

یکه تشکیل می‌دهند . توجه کنید که فرمول (۷) فقط برای پایه متعامد یکه برقرار است

(چرا ؟) .

بردارها به عنوان جفتهای مرتب . بنا بر نکات فوق ، از اینجا به بعد از جفتهای مرتب برای نمایش نقاط و بردارها در صفحه استفاده می‌کنیم . لذا ، (α_1, α_2) ممکن است به معنی نقطه به مختصات قائم α_1 و α_2 یا بردار $\alpha_1 i + \alpha_2 j$ به مؤلفه‌های α_1 و α_2 (نسبت به پایه متعامد یکه i و j زمینه) باشد . چون $i = 1i + 0j$ و $j = 0i + 1j$ ، جفتهای مرتب نمایش خود بردارهای پایه مساویند با

$$i = (1, 0), \quad j = (0, 1).$$

حال اعمال جبری بر بردارها را از دیدگاه جفتهای مرتب تعبیر می‌کنیم . فرض کنیم

$$a = (\alpha_1, \alpha_2) \text{ و } b = (\beta_1, \beta_2) \text{ بردارهای دلخواهی باشند . در این صورت ،}$$

$$a + b = (\alpha_1 i + \alpha_2 j) + (\beta_1 i + \beta_2 j) = (\alpha_1 i + \beta_1 i) + (\alpha_2 j + \beta_2 j),$$

و لذا ، به کمک (۴) ،

$$(۸) \quad a + b = (\alpha_1 + \beta_1) i + (\alpha_2 + \beta_2) j,$$

یا

$$(۸') \quad (\alpha_1, \alpha_2) + (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2).$$

هرگاه p اسکالر باشد ، آنگاه $pa = p(\alpha_1 i + \alpha_2 j)$ ؛ و لذا ، به کمک (۵) ،

$$(۹) \quad pa = p\alpha_1 i + p\alpha_2 j,$$

یا

$$(۹') \quad p(\alpha_1, \alpha_2) = (p\alpha_1, p\alpha_2).$$

پس از (۸') نتیجه می‌شود که به ازای هر بردار $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ ،

$$(\alpha_1, \alpha_2) + (0, 0) = (\alpha_1 + 0, \alpha_2 + 0) = (\alpha_1, \alpha_2)$$

در نتیجه ، $(0, 0)$ جفت مرتبی است که بردار صفر 0 را نمایش می‌دهد . برای به دست آوردن

جفت مرتب نمایش $-a$ ، در فرمول (۹) قرار می‌دهیم $p = -1$ ، به دست می‌آید

$$-a = -\alpha_1 i - \alpha_2 j \text{ ، یا معادلا}$$

$$-a = (-\alpha_1, -\alpha_2).$$

به علاوه ، $a - b = a + (-b)$ ؛ در نتیجه ،

$$(۱۰) \quad a - b = (\alpha_1, \alpha_2) + (-\beta_1, -\beta_2) = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2)$$

یا

$$(۱۰') \quad (\alpha_1, \alpha_2) - (\beta_1, \beta_2) = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2).$$

دو بردار $a = (\alpha_1, \alpha_2)$ و $b = (\beta_1, \beta_2)$ مساویند اگر و فقط اگر $\alpha_1 = \beta_1$ و $\alpha_2 = \beta_2$ ؛ یعنی

اگر و فقط اگر هر دو با یک جفت مرتب نموده شوند . این امر از شکل ۱۲ (ب) واضح است ،

زیرا بردارهای مساوی یا منطبق‌اند یا اشکال انتقال یافته‌هم می‌باشند. لذا، اگر $\mathbf{b} = \mathbf{a}$ ، بردار \mathbf{b} ، پس از انتقال نقطه شروع \mathbf{b} به مبدا، بر \overline{OA} منطبق می‌شود. در نتیجه، \mathbf{b} مانند \mathbf{a} با جفت مرتب $A = (\alpha_1, \alpha_2)$ نموده می‌شود.

مثال ۳. فرض کنید $\mathbf{a} = (5, -1)$ ، $\mathbf{b} = (1, 6)$ ، و $\mathbf{c} = (0, -2)$. بردار $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 4\mathbf{c}$ را حساب کرده، و سپس اندازه‌اش را بیابید.

حل. از قواعد (۸) تا (۱۰) آزادانه استفاده می‌کنیم، داریم

$$\begin{aligned}\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 4\mathbf{c} &= (5, -1) - 2(1, 6) + 4(0, -2) \\ &= (5 - 2 + 0, -1 - 12 - 8) = (3, -21),\end{aligned}$$

یا معادلاً

$$\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + 4\mathbf{c} = 3\mathbf{i} - 21\mathbf{j}.$$

بنابر فرمول (۷)، اندازه این بردار مساوی است با

$$|3\mathbf{i} - 21\mathbf{j}| = \sqrt{3^2 + (-21)^2} = \sqrt{450} = 15\sqrt{2}.$$

مثال ۴. بردار یکه \mathbf{u} را همجهت بردار $12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ بیابید.

حل. اندازه $12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}$ مساوی است با

$$|12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}| = \sqrt{12^2 + 5^2} = \sqrt{169} = 13,$$

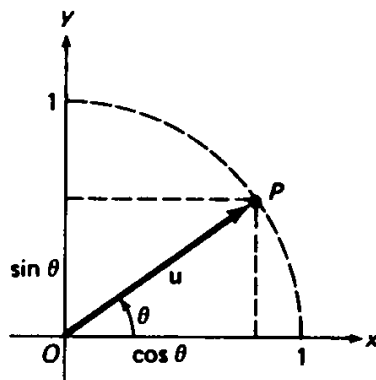
و در نتیجه،

$$\mathbf{u} = \frac{12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}}{|12\mathbf{i} + 5\mathbf{j}|} = \frac{12}{13}\mathbf{i} + \frac{5}{13}\mathbf{j}.$$

مثال ۵. بردار یکه \mathbf{u} را طوری بیابید که با محور x مثبت زاویه θ بسازد.

حل. اگر نقطه شروع \mathbf{u} را مبدا O بگیریم، نقطه پایانش P به مختصات قطبی $|\mathbf{u}| = 1$ ، θ بوده و مختصات قائم‌آن، مثل شکل ۱۳، مساوی $|\mathbf{u}| \sin \theta = \sin \theta$ ، $|\mathbf{u}| \cos \theta = \cos \theta$ می‌باشند بنابراین،

$$\mathbf{u} = (\cos \theta, \sin \theta) = (\cos \theta)\mathbf{i} + (\sin \theta)\mathbf{j}.$$



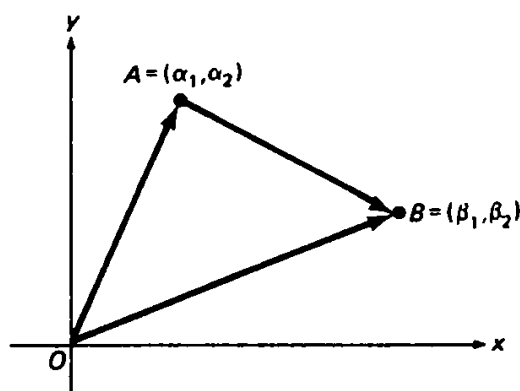
شکل ۱۳

برای بردار یکه \mathbf{u} در مثال ۴ داریم $\theta = \arctan \frac{1}{2} \approx 22.6^\circ$.

مثال ۶. مؤلفه‌های بردار \vec{AB} با نقطه شروع $A = (\alpha_1, \alpha_2)$ و نقطه پایان $B = (\beta_1, \beta_2)$ را بیابید.

حل. با رسم بردارهای موضع نقاط A و B ، یعنی بردارهای واصل از مبدا O به A و B ، معلوم می‌شود که، مثل شکل ۱۴، $\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA}$ ، بنابراین،

$$\vec{AB} = \vec{OB} - \vec{OA} = (\beta_1, \beta_2) - (\alpha_1, \alpha_2) = (\beta_1 - \alpha_1, \beta_2 - \alpha_2)$$



شکل ۱۴

یا $\vec{AB} = (\beta_1 - \alpha_1)\mathbf{i} + (\beta_2 - \alpha_2)\mathbf{j}$ ، مثلاً "، هرگاه $A = (-2, 3)$ ، $B = (4, -1)$ ، آنگاه
 $\vec{AB} = (4 - (-2), -1 - 3) = (6, -4) = 6\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$

همانطور که مثال زیر نشان می‌دهد، بردارها ابزار توانایی در اثبات قضایای هندسی

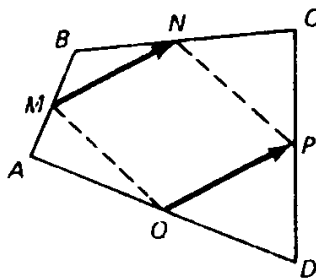
می باشند.

مثال ۷. نشان دهید که شکل حاصل از وصل نقاط میانی اضلاع مجاور هر چهارضلعی $ABCD$ متوازی الاضلاع است.

حل. فرض کنیم M, N, P, Q نقاط میانی اضلاع AB, BC, CD, DA باشند (ر. ک. شکل ۱۵). در این صورت،

$$\begin{aligned} \overrightarrow{MN} - \overrightarrow{QP} &= \overrightarrow{MN} + \overrightarrow{PQ} = (\overrightarrow{MB} + \overrightarrow{BN}) + (\overrightarrow{PD} + \overrightarrow{DQ}) \\ &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB} + \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} + \frac{1}{2}\overrightarrow{CD} + \frac{1}{2}\overrightarrow{DA} \\ &= \frac{1}{2}(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DA}) = \frac{1}{2}\overrightarrow{AA} = \mathbf{0}. \end{aligned}$$

بنابراین، $\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{QP}$ ؛ یعنی، دو ضلع مقابل چهارضلعی $MNPQ$ مساوی و موازیند؛ در نتیجه، $MNPQ$ یک متوازی الاضلاع می باشد. همین برهان در بعد سه کار می کند؛ پس لازم نیست چهارضلعی $ABCD$ یک شکل مسطح باشد!



شکل ۱۵

چند مفهوم از جبر خطی. در خاتمه، چند ایده را لمس می کنیم که در جبر خطی، که مبحث جا افتاده ای در برنامه ریاضیات لیسانس است، نقش کلیدی دارند. منظور از ترکیب خطی n بردار $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ یعنی عبارتی به شکل

$$(11) \quad c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + \dots + c_n\mathbf{a}_n,$$

که در آن ضرایب c_1, c_2, \dots, c_n اسکالرند. (۱۱) خود بوضوح بردار است؛ و در واقع، قبلاً دیدیم که هر بردار دلخواه در صفحه ترکیبی خطی از بردارهای یکه \mathbf{i} و \mathbf{j} می باشد. ترکیب خطی (۱۱) را بدیهی گوئیم اگر تمام ضرایب c_1, c_2, \dots, c_n صفر باشند (در این

صورت، مساوی بردار صفر است)، و نابدیهی خوانیم اگر دست کم یکی از ضرایب ناصفر باشد. بردارهای a_1, a_2, \dots, a_n را وابسته خطی گوئیم اگر ترکیب خطی نابدیهی از a_1, a_2, \dots, a_n مساوی صفر باشد؛ یعنی، اگر بسطی به شکل (۱۱) با دست کم یک ضریب ناصفر داشته باشیم که مساوی بردار صفر باشد؛ در غیر این صورت، گوییم a_1, a_2, \dots, a_n مستقل خطی می باشند. مثلاً، بردارهای یکه i و j مستقل خطی اند، زیرا

$$c_1 i + c_2 j = c_1(1, 0) + c_2(0, 1) = (c_1, c_2) = 0$$

اگر و فقط اگر $c_1 = c_2 = 0$ ، ولی بردارهای $a_1 = (1, 2)$ ، $a_2 = (3, 4)$ ، $a_3 = (2, 3)$ وابسته خطی اند، زیرا

$$\begin{aligned} a_1 + a_2 - 2a_3 &= (1, 2) + (3, 4) - 2(2, 3) \\ &= (1 + 3 - 4, 2 + 4 - 6) = (0, 0) = 0. \end{aligned}$$

به طور کلی، می توان نشان داد که هر سه بردار در صفحه وابسته خطی بوده، و دو بردار در صفحه مستقل خطی اند اگر و فقط اگر غیرهمخط باشند.

مسائل

بردارهای داده شده را در یک دستگاه مختصات قائم (با اختیار مبدأ به عنوان نقطه شروع مشترک) رسم نمایید.

۱. $-2i, i + j, -i + 2j, 2i - j, -3j$

۲. $\frac{3}{2}j, i - j, -2i + j, 2i + 3j, -i - 2j$

در هر یک از مسائل زیر، بردارهای $a + b$ ، $a - b$ ، $2a + 3b$ ، و $3a - 4b$ را پیدا نمایید.

۳. $a = (1, -5), b = (3, 6)$

۴. $a = (2, 0), b = (0, -2)$

۵. $a = i + j, b = i - j$

۶. $a = i, b = -i - j$

۷. $a = i + 3j, b = -3i + 2j$

۸. $a = 7i - 9j, b = 2i + 5j$

۹. $a = (1, 1), b = (1, -1)$

۱۰. $a = (6, -5), b = (-4, 3)$

بردار \overline{AB} با نقاط انتهایی داده شده را بیابید.

۱۱. $A = (-3, 0), B = (0, 6)$

۱۲. $A = (3, 5), B = (4, 7)$

۱۳. $A = (1, -4), B = (-1, -9)$

۱۴. $A = (-5, 10), B = (0, 0)$

۱۵. $A = (\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}), B = (\frac{1}{2}, \frac{7}{2})$

۱۶. $A = (-\sin \frac{1}{2}\pi, \cos \frac{1}{2}\pi), B = (\cos \frac{1}{2}\pi, \sin \frac{1}{2}\pi)$

۱۷. نقطه پایان بردار $-7i + 2j$ عبارت است از $(3, -11)$. نقطه شروع چیست؟

۱۸. نقطه شروع بردار $5i - 6j$ عبارت است از $(-4, 8)$. نقطه پایانش چیست؟

اندازه بردار داده شده را بیابید.

۱۹. $\frac{4}{3}i - \frac{2}{3}j$. ۲۰. αi

۲۱. $-\beta j$. ۲۲. $-7i + 24j$

۲۳. $35i + 12j$. ۲۴. $-\sqrt{5}i + \sqrt{11}j$

۲۵. اندازه کدامیک از بردارهای $3i + 3j$ و $4i - j$ بزرگتر است؟

۲۶. برداری با نصف اندازه $16i - 12j$ و جهت مخالف آن را بیابید.

برداری یکجهت همجهت بردار داده شده را بیابید. زاویه از محور x مثبت به این جهت چقدر است؟

۲۷. $i + j$. ۲۸. $i - j$. ۲۹. $-3i + 2j$

۳۰. $-i + 4j$. ۳۱. $-6i - 8j$. ۳۲. $40i + 9j$

برداری یکجهت را بیابید که با محور x مثبت زاویه داده شده را بسازد.

۳۳. $5\pi/3$. ۳۴. $7\pi/6$. ۳۵. $3\pi/4$

برداری به اندازه ۴ بیابید که با محور x مثبت زاویه داده شده را بسازد.

۳۶. $3\pi/2$ ✓ . ۳۷. $\arctan \frac{2}{3}$ ✓ . ۳۸. $-\pi/4$ ✓

۳۹. فرض کنید $a = (7, -1), b = (13, 2), c = (4, 5)$. بردار x را طوری بیابید که $a + b + c = x$.

۴۰. با شروع از فرمول (۸)، تعویضپذیری و شرکتپذیری جمع برداری را به طور جبری ثابت کنید.

۴۱. فرض کنید a و b بردارهای موضع دو نقطه A و B نسبت به مبدا O باشند. نشان

دهید که نقطه پایان P بردار $(1-t)a + tb$ ($0 \leq t \leq 1$) پاره خط AB را به نسبت $t:(1-t)$

تقسیم می‌کند؛ و بخصوص، نقطه میانی AB دارای بردار موضع $\frac{1}{2}(a+b)$ می‌باشد.

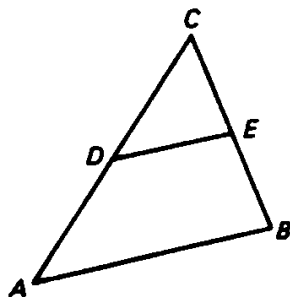
۴۲. چه وقت نامساوی مثلثی (۳) به صورت تساوی درمی‌آید؟ (فرض کنید $a \neq 0, b \neq 0$).

۴۳. نامساوی $\|a-b\| \geq \|a\| - \|b\|$ را به ازای بردارهای دلخواه a و b ثابت کنید.

به کمک بردارها ثابت کنید که

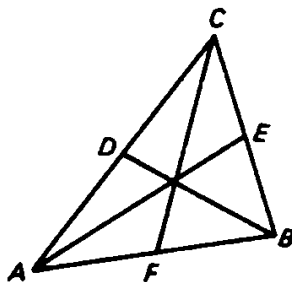
۴۴. اقطار یک متوازی‌الاضلاع یکدیگر را نصف می‌کنند.

۴۵. پاره‌خط‌واصل بین نقاط میانی دو ضلع یک مثلث نصف ضلع سوم و موازی آن است (ر.ک. شکل ۱۶)



شکل ۱۶

۴۶. میانه‌های یک مثلث در نقطه‌ای متقاطعند که روی هر یک در دوسوم از رأس واقع است (ر.ک. شکل ۱۷)



شکل ۱۷

راهنمایی. از مسئله ۴۱ استفاده کنید.

۴۷. نشان دهید که بردارهای $e_1 = (1, 1)$ و $e_2 = (1, 2)$ یک پایه غیرمتعامد تشکیل می‌دهند.

بردار $a = (-3, 5)$ را نسبت به e_1 و e_2 بسط دهید.

۴۸. هر یک از بردارهای $a = (3, -2)$, $b = (-2, 1)$, $c = (7, -4)$ را به صورت ترکیبی خطی

از دو تای دیگر بیان نمایید.

۴۹. تمام بردارهایی را بیابید که با بردار $2i + j$ پایه متعامد تشکیل دهند.

۵۰. فرض کنید $a = (3, -1)$, $b = (1, -2)$, $c = (-1, 7)$. بردار $a + b + c$ را به صورت ترکیبی

خطی از a و b بیان نمایید.

۵۱. ناخدای یک قایق ماهیگیری، که با سرعت ۱۰ گره به شرق می‌رود، درمی‌یابد که ظاهراً

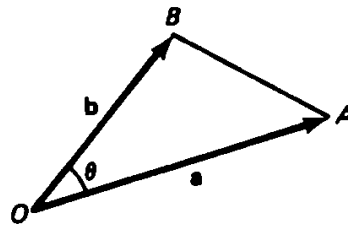
باد مستقیماً از شمال به جنوب می‌وزد. وقتی سرعت قایق دوبرابر شود، ظاهراً

از شمال شرقی می‌وزد. سرعت واقعی باد چقدر است؟

۵۲. هواپیمایی با سرعت 240 km/hr در بادی با سرعت 60 km/hr که مستقیماً از شرق به غرب می‌وزد به سوی شمال در حال پرواز است. سرعت هواپیما نسبت به هوا و جهت این سرعت را پیدا نمایید.

۲.۱۱ حاصل ضرب نقطه‌ای

مفهوم "حاصل ضرب نقطه‌ای" دوبردار در مسئله هندسی یافتن مؤلفه یک بردار در امتداد برداری دیگر و نیز در مسئله فیزیکی یافتن کار انجام شده به وسیله نیرویی که در جهت حرکت یک جسم بر آن اثر نمی‌کند ظاهر می‌شود (هر دو مسئله در آخر این بخش حل خواهند شد). برای تعریف حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار، لازم است زاویه بین آنها را بدانیم. فرض کنیم دوبردار ناصفر \mathbf{a} و \mathbf{b} طوری قرار داشته باشند که نقاط شروعشان O بوده و، مثل شکل ۱۸، $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ $\mathbf{b} = \overrightarrow{OB}$.



زاویه بین \mathbf{a} و \mathbf{b} مساوی θ است.

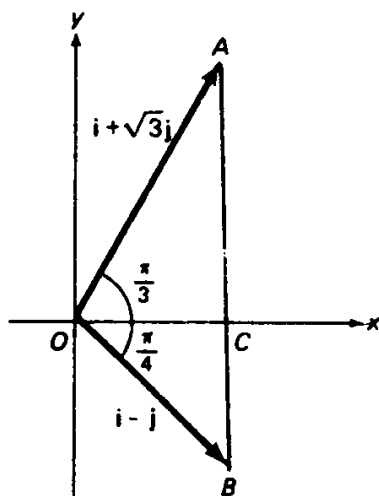
شکل ۱۸

در این صورت، منظور از زاویه بین \mathbf{a} و \mathbf{b} (با هر ترتیب) یعنی زاویه θ در رأس O مثلث AOB . اگر \mathbf{a} و \mathbf{b} موازی باشند، یعنی $\mathbf{a} = p\mathbf{b}$ که در آن p اسکالر است، مثلث "فرو می‌ریزد"، و در این حالت تعریف می‌کنیم $\theta = 0$ اگر $p > 0$ و $\theta = \pi$ اگر $p < 0$. توجه کنید که θ همواره در بازه $0 \leq \theta \leq \pi$ قرار دارد.

مثال ۱. زاویه بین بردارهای $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \sqrt{3}\mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ را بیابید.

حل. با توجه به شکل ۱۹، معلوم می‌شود که زاویه AOC مساوی است با $\arctan \sqrt{3} = \pi/3$ ، ولی زاویه BOC برابر است با $\arctan 1 = \pi/4$. لذا، زاویه AOB بین \mathbf{a} و \mathbf{b} مجموع زیر می‌باشد:

$$\frac{\pi}{3} + \frac{\pi}{4} = \frac{7\pi}{12} = 105^\circ.$$



شکل ۱۹

تعریف حاصل ضرب نقطه‌ای. اکنون حاصل ضرب نقطه‌ای $a \cdot b$ دو بردار a و b را با فرمول

$$(1) \quad a \cdot b = |a| |b| \cos \theta$$

تعریف می‌کنیم، که در آن θ زاویه بین a و b است. هرگاه $a = 0$ یا $b = 0$ ، آنگاه θ تعریف نشده است، و طبق تعریف قرار می‌دهیم $a \cdot b = 0$. حاصل ضرب نقطه‌ای، که به خاطر آمدن نقطه در عبارت $a \cdot b$ این نام را یافته است، حاصل ضرب اسکالر نیز خوانده می‌شود، زیرا $a \cdot b$ یک عدد یعنی یک اسکالر می‌باشد^۱. از تعریف (۱) فوراً معلوم می‌شود که حاصل ضرب نقطه‌ای تعویض‌پذیر است:

$$a \cdot b = b \cdot a.$$

زاویه بین یک بردار با خودش صفر است. لذا،

$$a \cdot a = |a| |a| \cos 0 = |a|^2.$$

بخصوص، $a \cdot a = 0$ اگر و فقط اگر $|a| = 0$ ؛ یعنی، اگر و فقط اگر $a = 0$. حاصل ضرب نقطه‌ای $a \cdot b$ مساوی صفر است اگر و فقط اگر a بر b عمود باشد، که نوشته می‌شود $a \perp b$ ، و بردار صفر بر هر بردار عمود فرض می‌شود. در واقع، فرمول

$$a \cdot b = |a| |b| \cos \theta = 0 \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

برقرار است اگر و فقط اگر $\cos \theta = 0$ ؛ و در نتیجه، $\theta = \pi/2$ ، یا دست‌کم یکی از بردارهای a و b صفر باشد؛ لذا، در هر حالت، $a \perp b$.

۱. در بخش ۳.۱۲ نوع دیگری از حاصل ضرب دو بردار a و b معرفی می‌شود، که به جای اسکالر بودن بردار است و به جای $a \cdot b$ به صورت $a \times b$ نوشته می‌شود.

شکل مولفم‌های حاصل ضرب نقطه‌ای. حال برای حاصل ضرب نقطه‌ای $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ عبارتی برحسب مؤلفه‌های \mathbf{a} و \mathbf{b} نسبت به بردارهای پایه $\mathbf{i} = (1, 0)$ و $\mathbf{j} = (0, 1)$ پیدا می‌کنیم.

قضیه ۱ (شکل مولفم‌های حاصل ضرب نقطه‌ای). هرگاه $\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j}$ یا معادلاً $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2)$ و $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2)$ ، آنگاه

$$(2) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2.$$

برهان. فرض کنیم

$$\mathbf{c} = \mathbf{a} - \mathbf{b} = (\alpha_1 - \beta_1) \mathbf{i} + (\alpha_2 - \beta_2) \mathbf{j}.$$

با اعمال قانون کسینوسها (قضیه ۲، صفحه ۹۲) بر مثلث شکل ۲۰ به اضلاع \mathbf{a} ، \mathbf{b} ، و \mathbf{c} ، به دست می‌آوریم

$$|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2|\mathbf{a}||\mathbf{b}| \cos \theta,$$



شکل ۲۰

که در آن θ زاویه بین \mathbf{a} و \mathbf{b} است. بنابراین،

$$|\mathbf{c}|^2 = |\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b},$$

در نتیجه،

$$(3) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \frac{1}{2} (|\mathbf{a}|^2 + |\mathbf{b}|^2 - |\mathbf{c}|^2).$$

ولی

$$|\mathbf{a}|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2, \quad |\mathbf{b}|^2 = \beta_1^2 + \beta_2^2,$$

$$|\mathbf{c}|^2 = (\alpha_1 - \beta_1)^2 + (\alpha_2 - \beta_2)^2 = \alpha_1^2 - 2\alpha_1\beta_1 + \beta_1^2 + \alpha_2^2 - 2\alpha_2\beta_2 + \beta_2^2,$$

و با گذاردن این عبارات در (۳) به جای $|\mathbf{a}|^2$ ، $|\mathbf{b}|^2$ ، و $|\mathbf{c}|^2$ ، فوراً (۲) به دست خواهد آمد.

نتیجه. هرگاه p و q اسکالر باشند، آنگاه به ازای بردارهای دلخواه \mathbf{a} و \mathbf{b} ،

$$(4) \quad (p\mathbf{a}) \cdot (q\mathbf{b}) = pq(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

حاصل ضرب نقطه‌ای در قوانین پخشپذیری

$$(۵) \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c},$$

$$(۵') \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

به ازای بردارهای دلخواه \mathbf{a} ، \mathbf{b} ، و \mathbf{c} نیز صدق می‌کنند.

برهان . فرض کنیم

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j}, \quad \mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j}, \quad \mathbf{c} = \gamma_1 \mathbf{i} + \gamma_2 \mathbf{j}$$

(γ گامای کوچک یونانی است) . در این صورت ،

$$p\mathbf{a} = p\alpha_1 \mathbf{i} + p\alpha_2 \mathbf{j}, \quad q\mathbf{b} = q\beta_1 \mathbf{i} + q\beta_2 \mathbf{j},$$

و

$$\mathbf{b} + \mathbf{c} = (\beta_1 + \gamma_1)\mathbf{i} + (\beta_2 + \gamma_2)\mathbf{j}.$$

لذا ،

$$(p\mathbf{a}) \cdot (q\mathbf{b}) = (p\alpha_1)(q\beta_1) + (p\alpha_2)(q\beta_2) = pq(\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) = pq(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}),$$

که (۴) را ثابت می‌کند . همچنین ،

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \alpha_1(\beta_1 + \gamma_1) + \alpha_2(\beta_2 + \gamma_2) = \alpha_1\beta_1 + \alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_2\gamma_2,$$

ولی

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} = (\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2) + (\alpha_1\gamma_1 + \alpha_2\gamma_2),$$

که (۵) را ثابت خواهد کرد ، زیرا طرفهای راست این دو فرمول مساوی می‌باشند . بالاخره

برای اثبات (۵') ، از (۵) و تعویضپذیری حاصل ضرب نقطه‌ای استفاده می‌کنیم :

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{c} \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{c} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{c} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}.$$

مثال ۲ . بنابر فرمول (۲) ، حاصل ضرب نقطه‌ای بردارهای $\mathbf{a} = (2, 5)$ و $\mathbf{b} = (4, -1)$ عبارت

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2(4) + 5(-1) = 8 - 5 = 3$$

مثال ۳ . با استفاده از قوانین پخشپذیری (۵) و (۵') ، معلوم می‌شود که به ازای بردارهای

دلخواه \mathbf{a} ، \mathbf{b} ، \mathbf{c} ، و \mathbf{d} ،

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d}) + \mathbf{b} \cdot (\mathbf{c} + \mathbf{d}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{d} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{d}$$

بخصوص ،

$$\begin{aligned} |\mathbf{a} + \mathbf{b}|^2 &= (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot (\mathbf{a} + \mathbf{b}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{a} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{b} \\ &= |\mathbf{a}|^2 + 2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + |\mathbf{b}|^2. \end{aligned}$$

در اینجا $2\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ یعنی $2(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$ و، به طور کلی، $p\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ یعنی $p(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$.

به ازای بردارهای یکه $\mathbf{i} = (1, 0)$ و $\mathbf{j} = (0, 1)$ داریم

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1(1) + 0(0) = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 1(0) + 0(1) = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 0(0) + 1(1) = 1,$$

یا، به طور فشرده تر،

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1.$$

این فرمولهای اساسی را باید حفظ کرد. با استفاده از آنها معلوم می شود که هرگاه

آنگاه $\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j}$ ،

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = (\alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j}) \cdot \mathbf{i} = \alpha_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = \alpha_1,$$

و به همین نحو،

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = (\alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j}) \cdot \mathbf{j} = \alpha_1 \mathbf{i} \cdot \mathbf{j} + \alpha_2 \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = \alpha_2.$$

مثال ۴. بردارهای $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + \mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = -2\mathbf{i} + t\mathbf{j}$ به ازای چه مقدار از پارامتر t موازیند؟
برهم عمودند؟

حل. بردارهای \mathbf{a} و \mathbf{b} موازی (یا همخط) اند اگر و فقط اگر به ازای اسکالر ناصفری چون

$\mathbf{a} = p\mathbf{b}$ ، یعنی $3\mathbf{i} + \mathbf{j} = p(-2\mathbf{i} + t\mathbf{j})$ ، با گرفتن مؤلفه و حل دستگاه معادلات

حاصل $pt = 1$ ، $-2p = 3$ ، معلوم می شود که $p = -\frac{2}{3}$ ، $t = 1/p = -\frac{3}{2}$ ، بردارها برهم

عمودند اگر و فقط اگر $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ ، یعنی $(3\mathbf{i} + \mathbf{j}) \cdot (-2\mathbf{i} + t\mathbf{j}) = -6 + t = 0$ ، یا $t = 6$.

فرض کنیم θ زاویه بین بردارهای ناصفر $\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j}$ باشد. پس

از تعریف (۱) حاصل ضرب نقطه‌ای نتیجه می شود که

$$(۶) \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}$$

اما $|\cos \theta| \leq 1$ و در نتیجه،

$$\left| \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} \right| \leq 1,$$

یا معادلاً

$$(۷) \quad |\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|.$$

فرمولهای (۶) و (۷) برحسب مؤلفه‌های \mathbf{a} و \mathbf{b} خواهند شد

$$(۶') \quad \cos \theta = \frac{\alpha_1 \beta_1 + \alpha_2 \beta_2}{\sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}}$$

$$(۷') \quad |\alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2| \leq \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2} \sqrt{\beta_1^2 + \beta_2^2}.$$

نامساوی (۷') حالت خاصی از نامساوی کوشی - شوارتز^۱ است (ر.ک. مسئله ۴۷). توجه کنید که در (۷) تساوی برقرار است اگر و فقط اگر $\cos \theta = \pm 1$ ، یعنی، اگر و فقط اگر $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$. در این حالت \mathbf{a} و \mathbf{b} موازی و همجهت‌اند اگر $\theta = 0$ و مختلف‌الجهت‌اند اگر $\theta = \pi$. همچنین، توجه کنید که زاویه θ حاده است ($0 < \theta < \pi/2$) اگر $0 < \cos \theta < 1$ و منفرد است ($\pi/2 < \theta < \pi$) اگر $-1 < \cos \theta < 0$.

مثال ۵. زاویه θ بین بردارهای $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ و $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}$ را بیابید.

حل. در اینجا داریم

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1(2) - 1(1) = 1, \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + (-1)^2} = \sqrt{2},$$

$$|\mathbf{b}| = \sqrt{2^2 + 1^2} = \sqrt{5}.$$

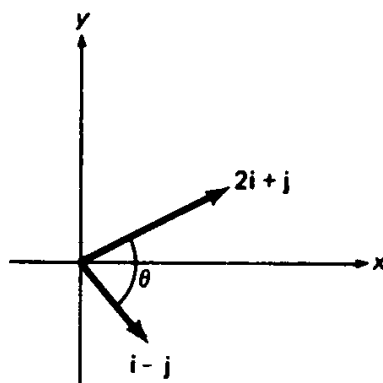
بنابراین، طبق (۶)،

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}||\mathbf{b}|} = \frac{1}{\sqrt{2}\sqrt{5}} = \frac{1}{\sqrt{10}},$$

که ایجاب می‌کند که

$$\theta = \arccos \frac{1}{\sqrt{10}} \approx 71.6^\circ$$

(ر.ک. شکل ۲۱).



شکل ۲۱

تصویر یک بردار روی دیگری. فرض کنیم \mathbf{a} و \mathbf{b} دو بردار ناصفر باشند. در این صورت، منظور از مؤلفه \mathbf{a} در امتداد \mathbf{b} ، که به صورت $\text{comp}_b \mathbf{a}$ نوشته می‌شود، یعنی اسکالری که مساوی حاصل ضرب نقطه‌ای $\mathbf{a} \cdot \mathbf{u}_b$ است، که در آن بردار یکه‌ای در جهت \mathbf{b} می‌باشد. چون

$$\mathbf{u}_b = \frac{\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|},$$

داریم

$$\text{comp}_b \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|},$$

یا معادلاً

$$\text{comp}_b \mathbf{a} = |\mathbf{a}| \cos \theta,$$

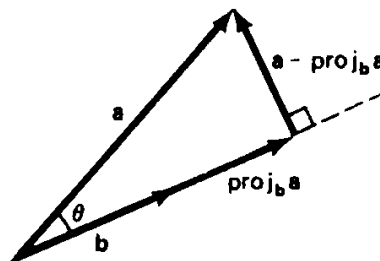
که در آن θ زاویه بین \mathbf{a} و \mathbf{b} می‌باشد. منظور از تصویر \mathbf{a} روی \mathbf{b} ، که با $\text{proj}_b \mathbf{a}$ نموده می‌شود، یعنی برداری با اندازه $\text{comp}_b \mathbf{a}$ و موازی \mathbf{b} ، یعنی،

$$\text{proj}_b \mathbf{a} = (\text{comp}_b \mathbf{a}) \mathbf{u}_b.$$

می‌توان برحسب حاصل ضرب نقطه‌ای نوشت

$$\text{proj}_b \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} \mathbf{u}_b = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}.$$

در شکل ۲۲، $\text{proj}_b \mathbf{a}$ تعبیر هندسی شده است. توجه کنید که اگر نقاط شروع \mathbf{a} و \mathbf{b} یکی باشند، نقطه پایان $\text{proj}_b \mathbf{a}$ پای عمود وارد از نقطه پایان \mathbf{a} به خط شامل \mathbf{b} است. پس نتیجه می‌شود که بردار $\mathbf{a} - \text{proj}_b \mathbf{a}$ ، طبق شکل، بر \mathbf{b} عمود می‌باشد.



تجزیه \mathbf{a} به مؤلفه‌ها در امتداد \mathbf{b} و عمود بر \mathbf{b}

شکل ۲۲

لذا، \mathbf{a} را می‌توان به صورت مجموع بردار $\text{proj}_b \mathbf{a}$ موازی \mathbf{b} و بردار $\mathbf{a} - \text{proj}_b \mathbf{a}$ عمود

بر \mathbf{b} نمایش داد. این بردارها به مؤلفه برداری \mathbf{a} در امتداد \mathbf{b} (یا موازی \mathbf{b}) و مؤلفه برداری \mathbf{a} متعامد به \mathbf{b} ("متعامد" مترادف "عمود برهم" است) نیز شهرت دارند.

مثال ۶. $\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ و $\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ را در صورتی بیابید که $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ و $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 5\mathbf{i} - \mathbf{j}$ را به صورت مجموعی از یک بردار موازی \mathbf{b} و یک بردار متعامد به \mathbf{b} نمایش دهید.

حل. چون

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 3(5) + 2(-1) = 13, \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{5^2 + (-1)^2} = \sqrt{26},$$

داریم

$$\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|} = \frac{13}{\sqrt{26}},$$

$$\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = (\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}) \mathbf{u}_{\mathbf{b}} = \frac{13}{\sqrt{26}} \frac{5\mathbf{i} - \mathbf{j}}{\sqrt{26}} = \frac{5}{2} \mathbf{i} - \frac{1}{2} \mathbf{j}.$$

بردار

$$\mathbf{a} - \text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = (3\mathbf{i} + 2\mathbf{j}) - \left(\frac{5}{2} \mathbf{i} - \frac{1}{2} \mathbf{j}\right) = \frac{1}{2} \mathbf{i} + \frac{5}{2} \mathbf{j}$$

متعامد به \mathbf{a} است. لذا، نمایش \mathbf{a} به صورت مجموع برداری موازی \mathbf{b} و برداری متعامد به \mathbf{b} عبارت است از

$$\mathbf{a} = \left(\frac{5}{2} \mathbf{i} - \frac{1}{2} \mathbf{j}\right) + \left(\frac{1}{2} \mathbf{i} + \frac{5}{2} \mathbf{j}\right).$$

کار به عنوان حاصل ضرب نقطه‌ای. فرض کنیم جسمی تحت اثر نیروی ثابت \mathbf{F} که در امتداد خط حرکت اثر می‌کند مسافت d را طی کرده باشد. همانطور که از مثال ۵، صفحه ۴۳۰، می‌دانیم، کار این نیرو از فرمول زیر به دست می‌آید:

$$(۸) \quad W = \mathbf{F}d.$$

برای تعمیم این فرمول به حالتی که \mathbf{F} بردار ثابتی است که کلاً "در امتداد حرکت اثر نمی‌کند"، به صورت زیر استدلال می‌کنیم. فرض کنیم تغییر مکان جسم بردار \mathbf{d} بوده، و θ زاویه بین \mathbf{F} و \mathbf{d} باشد. همچنین،

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp},$$

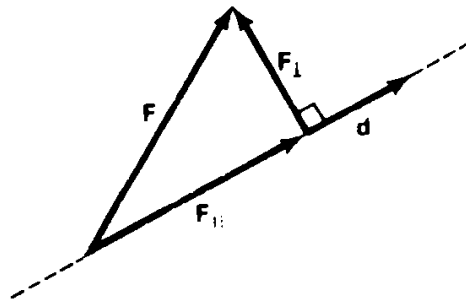
که در آن

$$\mathbf{F}_{\parallel} = \text{proj}_{\mathbf{d}} \mathbf{F} = \frac{(\mathbf{F} \cdot \mathbf{d})\mathbf{d}}{|\mathbf{d}|^2}$$

مؤلفه برداری \mathbf{F} موازی \mathbf{d} بوده و

$$\mathbf{F}_{\perp} = \mathbf{F} - \text{proj}_{\mathbf{d}} \mathbf{F}$$

مؤلفه برداری \mathbf{F} متعامد به \mathbf{d} است (ر. ک. شکل ۲۳). مؤلفه \mathbf{F}_{\perp} حرکتی در امتداد \mathbf{d} تولید نمی‌کند؛ و در نتیجه، از دیدگاه حرکت در امتداد \mathbf{d} ، نیروی \mathbf{F} را می‌توان با \mathbf{F}_{\parallel} عوض کرد.



شکل ۲۳

لذا، تمام کار به وسیله \mathbf{F}_{\parallel} انجام شده است؛ در نتیجه، بنا بر فرمول (۸)،

$$W = \begin{cases} |\mathbf{F}_{\parallel}| |\mathbf{d}|, & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \text{ اگر} \\ -|\mathbf{F}_{\parallel}| |\mathbf{d}|, & \pi/2 < \theta \leq \pi \text{ اگر} \end{cases}$$

اما

$$\begin{aligned} |\mathbf{F}_{\parallel}| |\mathbf{d}| &= \frac{|\mathbf{F} \cdot \mathbf{d}| |\mathbf{d}|}{|\mathbf{d}|^2} |\mathbf{d}| = |\mathbf{F} \cdot \mathbf{d}| \\ &= \begin{cases} \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}, & 0 \leq \theta \leq \pi/2 \text{ اگر} \\ -\mathbf{F} \cdot \mathbf{d}, & \pi/2 < \theta \leq \pi \text{ اگر} \end{cases} \end{aligned}$$

و در نتیجه،

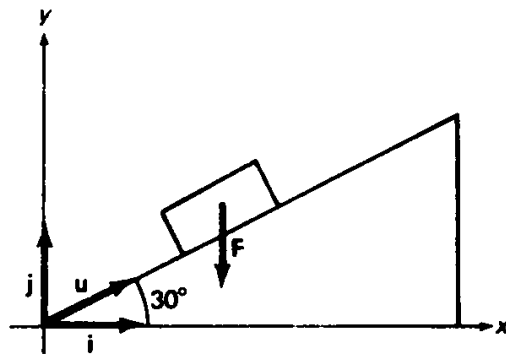
$$(۸') \quad W = \mathbf{F} \cdot \mathbf{d}.$$

لذا، کار حاصل ضرب نقطه‌ای نیروی \mathbf{F} و تغییر مکان \mathbf{d} است. در اینجا فرض است که \mathbf{F} ثابت بوده و تغییر مکان مستقیم الخط است. در غیر این صورت، تعریف کار نیاز به مفهوم جدید "انتگرال خط" دارد، که در بخش ۱۰.۱۵ معرفی خواهد شد.

مثال ۷. یک قطعه الوار به وزن 4 lb از یک سطح شیب‌دار بدون اصطکاک که با افق زاویه 30°

می سازد به بالا برده می شود. چقدر کار در مقابل ثقل انجام دهیم تا الوار 5 ft بالا رود؟

حل. همانند شکل ۲۴، بردارهای بیکه i و j را در جهات افقی و قائم معرفی می کنیم. در



شکل ۲۴

این صورت، بردار بیکه در جهت تغییر مکان $u = \cos 30^\circ i + \sin 30^\circ j$ می باشد. نیروی ثقل قائم و روبه پایین اثر کرده و با اندازه 4 lb است. در نتیجه، $F = -4j$ ، و بردار تغییر مکان نظیر به بالا بردن الوار به اندازه 5 ft عبارت است از $d = 5u$. لذا، در این تغییر مکان، کار انجام شده توسط ثقل مساوی است با

$$F \cdot d = (-4j) \cdot 5u = -20j \cdot (\cos 30^\circ i + \sin 30^\circ j) \\ = -20 \sin 30^\circ = -10 \text{ ft-lb},$$

و کار انجام شده در مقابل ثقل برابر است با $-F \cdot d = 10 \text{ ft-lb}$.

مسائل

حاصل ضرب نقطه‌ای $a \cdot b$ بردارهای داده شده و نیز زاویه بین بردارها را بیابید.

۱. $a = (-2, 1), b = (3, 6)$ ✓

۲. $a = (1, 1), b = (-2, -2)$ ✓

۳. $a = (1, 1), b = (1, 0)$ ✓

۴. $a = (3, 4), b = (6, -8)$ ✓

۵. $a = -i - j, b = 2i$ ✓

۷. $a = 12i + 5j, b = 4i + 3j$ ✓

۸. $a = 7i - 24j, b = -3i + j$ ✓

کمیات زیر را با فرض اینکه زاویه بین بردارهای a و b مساوی $2\pi/3$ بوده و $|a| = 3, |b| = 4$

پیدا نمایید.

۱۰. $|a - b|^2$ ✓

۹. $a \cdot b$ ✓

۱۲. $(3a - 2b) \cdot (a + 2b)$ ✓

۱۱. $|3a + 2b|^2$ ✓

۱۳. آیا $a \cdot b = a \cdot c$ که در آن $a \neq 0$ تساوی $b = c$ را ایجاب می‌کند؟ جواب خود را توضیح دهید.
۱۴. نشان دهید که $(a \cdot b)c - a(b \cdot c)$ متعامد به b است.
۱۵. فرض کنید a, b, c بردارهای یک‌ای باشند که $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = 0$ و $a + b + c = 0$ را بیابید.
۱۶. چه وقت فرمول $(a \cdot b)c = a(b \cdot c)$ به ازای بردارهای ناصفر a, b, c برقرارند؟
۱۷. ✓ زوایای مثلث به رئوس $A = (1, 0)$ ، $B = (1, 3)$ ، و $C = (2, 1)$ را بیابید.
۱۸. مثال ۱ را با فرمول (۶) امتحان کنید.
۱۹. نشان دهید که بردار $v = |b|a + |a|b$ زاویه $\pi/2$ بین a و b را نصف می‌کند.
۲۰. نشان دهید که بردارهای $v = |b|a + |a|b$ و $w = |a|b - |b|a$ متعامدند. دو بردار یک‌ای بیابید که به بردار داده شده متعامد باشند.
۲۲. ✓ $4i + 2j$
۲۳. ✓ $6i - 8j$
۲۴. $-i + 3j$
۲۵. $-5i - 12j$
۲۶. دو بردار یک‌ای بیابید که با بردار $-4i + j$ زاویه $\pi/4$ بسازند.
۲۷. اگر $|a| = 3$ ، $|b| = 5$ ، بردارهای $a + tb$ و $a - tb$ به ازای چه مقادیری از t برهم عمودند؟
۲۸. بردارهای $a = 2i + 3j$ و $b = 4ti - 5j$ به ازای چه مقداری از t موازیند؟ برهم عمودند؟
۲۹. بردارهای $a = -i + 2j$ و $b = 3i + 6j$ به ازای چه مقداری از t موازیند؟ برهم عمودند؟
۳۰. زاویه بین بردارهای $a = i + tj$ و $b = -i + j$ به ازای چه مقادیری از t مساوی $\pi/3$ است؟
- فرض کنید a و b بردارهای ناصفری باشند. نشان دهید که
۳۱. $|a + b| = |a - b|$ اگر a و b برهم عمودند
۳۲. $|a + b| > |a - b|$ اگر زاویه بین بردارهای a و b از $\pi/2$ کوچکتر است
۳۳. $|a + b|^2 + |a - b|^2 = 2|a|^2 + 2|b|^2$ ، a و b دلخواه
۳۴. $|a + b|$ را در صورتی بیابید که $|a| = 11$ ، $|b| = 23$ ، $|a - b| = 30$
۳۵. نشان دهید که اقطار یک لوزی (متوازی‌الاضلاع مساوی) برهم عمودند.
۳۶. نامساوی مثلثی $|a + b| \leq |a| + |b|$ را به‌طور جبری ثابت کنید.
- $\text{proj}_b a$ ، یعنی مؤلفه برداری a در امتداد b ، را به ازای بردارهای داده شده a و b ،

و نیز مؤلفه برداری \mathbf{a} متعامد به \mathbf{b} ، را بیابید .

۲۷ . $\mathbf{a} = (3, 2), \mathbf{b} = (-1, -1)$ ۲۸ . $\mathbf{a} = (5, 1), \mathbf{b} = (-2, 10)$

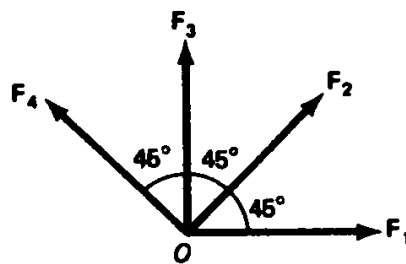
۲۹ . $\mathbf{a} = (-4, 7), \mathbf{b} = (3, 6)$ ۴۰ . $\mathbf{a} = (8, 0), \mathbf{b} = (4, 2)$

۴۱ . $\mathbf{a} = -\mathbf{i} + 2\mathbf{j}, \mathbf{b} = -3\mathbf{j}$ ۴۲ . $\mathbf{a} = 7\mathbf{i} - \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$

۴۳ . $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + 5\mathbf{j}, \mathbf{b} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j}$ ۴۴ . $\mathbf{a} = 6\mathbf{i}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 4\mathbf{j}$

۴۵ . هر یک از نیروهای شکل ۲۵ به اندازه 10 lb بوده و بر نقطه O وارد می شوند . اندازه

نیروی برآیند $\mathbf{F} = \mathbf{F}_1 + \mathbf{F}_2 + \mathbf{F}_3 + \mathbf{F}_4$ را بیابید .



شکل ۲۵

۴۶ . نامساوی (γ') را مستقیماً ، بدون استفاده از بردارها ، ثابت کنید .

۴۷ . نامساوی کشی - شوارتز کلی

$$\left| \sum_{i=1}^n \alpha_i \beta_i \right| \leq \sqrt{\sum_{i=1}^n \alpha_i^2} \sqrt{\sum_{i=1}^n \beta_i^2}$$

را ثابت کنید ، که به ازای اعداد حقیقی دلخواه α_i, β_i ($i = 1, 2, \dots, n$) برقرار است .

۴۸ . یک بچه واگنی را با نیروی 50 lb در امتدادی که با افق زاویه 60° می سازد به اندازه

12 ft می کشد . نیرو چقدر کار انجام داده است ؟

۴۹ . کار انجام شده توسط نیروی $\mathbf{F} = 2\mathbf{i} - 8\mathbf{j}$ را در صورتی بیابید که جسمی را در امتداد

محور x از نقطه $(-2, 0)$ تا نقطه $(13, 0)$ حرکت داده باشد . در امتداد محور y از

مبداء تا نقطه $(0, -6)$ برده باشد . (نیرو به پوند و فاصله به فوت است .)

۵۰ . اگر جرم 10-kg را از سطح شیب دار بدون اصطکاک که با افق زاویه 45° ساخته است به

اندازه 3 m بالا ببریم ، چقدر کار در مقابل ثقل انجام داده ایم ؟ (g ، یعنی شتاب

ثقل ، را 9.8 m/sec^2 بگیرید .)

۵۱ . جسمی در امتداد یک خط مستقیم از نقطه $(-3, -2)$ تا $(1, 11)$ تحت اثر دو نیروی

$\mathbf{F}_1 = 5\mathbf{i} - 4\mathbf{j}$ و $\mathbf{F}_2 = -7\mathbf{i} + 6\mathbf{j}$ حرکت می کند . کار انجام شده توسط این دو نیرو به

طور همزمان را بیابید . (نیرو به دین و فاصله به سانتیمتر است .)

۵۲. با استفاده از بردارها، ثابت کنید ارتفاعات یک مثلث در یک نقطه متقاطع اند.
۵۳. نشان دهید که بردار (A, B) بر خط $Ax + By + C = 0$ عمود است.
۵۴. با استفاده از بردارها، قضیه ۱۰ در صفحه ۵۵ در مورد فاصله بین نقطه $P_1 = (x_1, y_1)$ و خط $Ax + By + C = 0$ را به طریقی دیگر ثابت کنید.

۳۰.۱۱ توابع برداری؛ سرعت و بردار یکه مماس

در زبانی که تا بحال به کار برده ایم، تابع قاعده‌ای است که ما را از یک اسکالر، یعنی شناسه، به اسکالر دیگر، یعنی مقدار آن (که منحصرًا با شناسه‌اش معین می‌شود) می‌برد. مثلاً، اگر $f(t) = \cos t$ ، تابع f ، وقتی شناسه‌اش t مساوی $\pi/3$ است، مقدار $\frac{1}{2}$ را به خود می‌گیرد. حال که کمیاتی کلیتر از اسکالرها، یعنی بردارها، معرفی شده‌اند، طبیعی است ببینیم وقتی مقدار یا شناسه یک تابع بردار باشد چه رخ می‌دهد. بحث را با توابع بردار مقدار، یا به طور خلاصه توابع برداری، یعنی توابعی با شناسه اسکالر که مقادیرشان بردارند، آغاز می‌کنیم. مثلاً، تابع برداری

$$\mathbf{f}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$$

وقتی شناسه t آن اسکالر $\pi/3$ است، مقدار $\frac{1}{2}\mathbf{i} + \frac{1}{2}\sqrt{3}\mathbf{j}$ را دارد. حالت پیچیده " میدان برداری " است؛ یعنی یک تابع برداری از یک شناسه برداری، که بعدها مطرح خواهد شد (ر.ک. فصل ۱۵).

حد یک تابع برداری. حال به حساب دیفرانسیل و انتگرال توابع برداری می‌پردازیم. بحث را با مفهوم حد یک تابع برداری آغاز می‌کنیم. فرض کنیم بردار \mathbf{L} چنان باشد که

$$(1) \quad \lim_{t \rightarrow a} |\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}| = 0,$$

در آن ملاحظه می‌کنید که $|\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}|$ یک اسکالر است، که اندازه یک بردار می‌باشد. در این صورت، گوییم وقتی $t \rightarrow a$ ، $\mathbf{f}(t)$ به حد \mathbf{L} نزدیک می‌شود، و می‌نویسیم وقتی $t \rightarrow a$ ، $\mathbf{f}(t) \rightarrow \mathbf{L}$ یا

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{f}(t) = \mathbf{L}.$$

ممکن است حدس زده باشید که تابع برداری \mathbf{f} به حد \mathbf{L} نزدیک می‌شود اگر و فقط اگر تک تک مؤلفه‌هایش به مؤلفه‌های \mathbf{L} نزدیک گردند. قضیه زیر دلیل این امر را به شما نشان می‌دهد.

قضیه ۲ (حد یک تابع برداری بر حسب مؤلفه‌های آن) . تابع برداری

$$\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j},$$

که نسبت به بردارهای پایه \mathbf{i} و \mathbf{j} دارای مؤلفه‌های $f_1(t)$ و $f_2(t)$ است، به حد $\mathbf{L} = A\mathbf{i} + B\mathbf{j}$ نزدیک می‌شود اگر و فقط اگر مؤلفه‌هایش به مؤلفه‌های \mathbf{L} نزدیک گردند. یعنی،

$$(۲) \quad \lim_{t \rightarrow a} f_1(t) = A, \quad \lim_{t \rightarrow a} f_2(t) = B.$$

برهان (اختیاری) . ابتدا فرض می‌کنیم وقتی $t \rightarrow a$ ، $\mathbf{f}(t) \rightarrow \mathbf{L}$ یا معادلاً " وقتی $t \rightarrow a$ ، $|\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}| \rightarrow 0$ واضح است که

$$\begin{aligned} |f_1(t) - A| &= \sqrt{[f_1(t) - A]^2} \leq \sqrt{[f_1(t) - A]^2 + [f_2(t) - B]^2} = |\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}|, \\ |f_2(t) - B| &= \sqrt{[f_2(t) - B]^2} \leq \sqrt{[f_1(t) - A]^2 + [f_2(t) - B]^2} = |\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}|, \end{aligned}$$

که در آنها از این استفاده شده است که $f_1(t) - A$ و $f_2(t) - B$ مؤلفه‌های $\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}$ می‌باشند. اما طرفهای راست این نامساویها با رفتن $t \rightarrow a$ به 0 نزدیک می‌شوند؛ و در نتیجه، طرفهای چپ نیز چنین می‌کنند، که موجب اثبات (۲) می‌گردد. به عکس، فرض کنیم فرمولهای (۲)، یا معادلاً "

$$(۲') \quad \lim_{t \rightarrow a} |f_1(t) - A| = 0, \quad \lim_{t \rightarrow a} |f_2(t) - B| = 0,$$

برقرار باشند. بنا بر نامساوی مثلثی برای بردارها (فرمول (۳)، صفحه ۱۰۴۹)، داریم

$$\begin{aligned} |\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}| &= |[f_1(t) - A]\mathbf{i} + [f_2(t) - B]\mathbf{j}| \leq |[f_1(t) - A]\mathbf{i}| + |[f_2(t) - B]\mathbf{j}| \\ &= |f_1(t) - A||\mathbf{i}| + |f_2(t) - B||\mathbf{j}| = |f_1(t) - A| + |f_2(t) - B|. \end{aligned}$$

ولی طرف راست این نامساوی، وقتی $t \rightarrow a$ ، به خاطر (۲') به 0 نزدیک می‌شود؛ و در نتیجه، طرف چپ نیز چنین می‌کند. بنابراین، وقتی $t \rightarrow a$ ، $|\mathbf{f}(t) - \mathbf{L}| \rightarrow 0$ ، یعنی، وقتی $t \rightarrow a$ ، $\mathbf{f}(t) \rightarrow \mathbf{L}$.

قضیه ۲ محاسبات مثال زیر را (که در آن حد یک تابع برداری " مؤلفه به مؤلفه " گرفته می‌شود) توجیه خواهد کرد.

مثال ۱. هرگاه

$$\mathbf{f}(t) = (t^2 + 2)\mathbf{i} + (\arctan t)\mathbf{j},$$

$$\begin{aligned} \lim_{t \rightarrow 1} \mathbf{f}(t) &= \left[\lim_{t \rightarrow 1} (t^2 + 2) \right] \mathbf{i} + \left[\lim_{t \rightarrow 1} \arctan t \right] \mathbf{j} \\ &= (1^2 + 2)\mathbf{i} + (\arctan 1)\mathbf{j} = 3\mathbf{i} + \frac{\pi}{4}\mathbf{j}. \end{aligned}$$

مشتقگیری از یک تابع برداری. پیوستگی و مشتقپذیری از توابع برداری همانند توابع اسکالر تعریف می‌شوند. لذا، گوییم تابع برداری $\mathbf{f}(t)$ در a پیوسته است اگر

$$\lim_{t \rightarrow a} \mathbf{f}(t) = \mathbf{f}(a)$$

و در a مشتقپذیر است اگر حد

$$(۳) \quad \lim_{t \rightarrow a} \frac{\mathbf{f}(t) - \mathbf{f}(a)}{t - a},$$

یا معادلاً

$$(۳') \quad \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\mathbf{f}(a + \Delta t) - \mathbf{f}(a)}{\Delta t}$$

موجود و متناهی باشد. حد (۳) یا (۳') مشتق $\mathbf{f}(t)$ در a نام دارد و با $\mathbf{f}'(a)$ نموده می‌شود.

از قضیه ۲ معلوم می‌شود که تابع برداری $\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j}$ در نقطه a پیوسته است اگر و فقط اگر هر دو مؤلفه $f_1(t)$ و $f_2(t)$ در a پیوسته باشند. به همین نحو، با اعمال قضیه ۲ بر مؤلفه‌های

$$\frac{f_1(t) - f_1(a)}{t - a}, \quad \frac{f_2(t) - f_2(a)}{t - a}$$

خارج قسمت تفاضلی (۳)، معلوم می‌شود که

$$\mathbf{f}'(a) = f'_1(a)\mathbf{i} + f'_2(a)\mathbf{j},$$

که در آن پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد. لذا، برای یافتن مشتق یک تابع برداری مشتقپذیر $\mathbf{f}(t)$ ، تابعی برداری تشکیل می‌دهیم که مؤلفه‌هایش مشتقات مؤلفه‌های $\mathbf{f}(t)$ می‌باشند. مثل همیشه، پیوستگی یا مشتقپذیری بر بازه I یعنی پیوستگی یا مشتقپذیری در هر نقطه از I . نمادهای دیگر برای مشتق $\mathbf{f}'(t)$ عبارتند از $\mathbf{D}_t \mathbf{f}(t)$ و $d\mathbf{f}(t)/dt$.

مثال ۲. چون e^t و $\ln t$ هر دو بر $I = (0, \infty)$ پیوسته و مشتقپذیرند، تابع برداری

$$\mathbf{f}(t) = (e^t)\mathbf{i} + (\ln t)\mathbf{j}$$

نیز بر I پیوسته و مشتقپذیر، با مشتق

$$\frac{d}{dt} \mathbf{f}(t) = \left(\frac{d}{dt} e^t \right) \mathbf{i} + \left(\frac{d}{dt} \ln t \right) \mathbf{j} = (e^t)\mathbf{i} + \left(\frac{1}{t} \right) \mathbf{j}$$

می باشد.

مثال ۳. فرض کنیم $c(t)$ یک تابع اسکالر و $\mathbf{f}(t)$ یک تابع برداری بوده و هر دو بر بازه I مشتقپذیر باشند. در این صورت،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} [c(t)\mathbf{f}(t)] &= \frac{d}{dt} [c(t)f_1(t)\mathbf{i} + c(t)f_2(t)\mathbf{j}] \\ &= \frac{dc(t)}{dt} f_1(t)\mathbf{i} + c(t) \frac{df_1(t)}{dt} \mathbf{i} + \frac{dc(t)}{dt} f_2(t)\mathbf{j} + c(t) \frac{df_2(t)}{dt} \mathbf{j} \end{aligned}$$

و در نتیجه،

$$\frac{d}{dt} [c(t)\mathbf{f}(t)] = \frac{dc(t)}{dt} \mathbf{f}(t) + c(t) \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt}.$$

این فرمول در حالت خاص که ثابت $c(t) \equiv c =$ به صورت زیر ساده می شود:

$$\frac{d}{dt} [c\mathbf{f}(t)] = c \frac{d\mathbf{f}(t)}{dt}.$$

مثال ۴. فرض کنیم $\mathbf{f}(t)$ و $\mathbf{g}(t)$ دو تابع برداری باشند که هر دو بر بازه I مشتقپذیر بوده و مؤلفه‌هایشان به ترتیب $f_1(t), f_2(t)$ و $g_1(t), g_2(t)$ باشند. در این صورت، با حذف شناسه‌ها برای سادگی، معلوم می شود که مشتق حاصل ضرب نقطه‌ای $\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t)$ مساوی است با

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) &= \frac{d}{dt} (f_1 g_1 + f_2 g_2) = \frac{df_1}{dt} g_1 + f_1 \frac{dg_1}{dt} + \frac{df_2}{dt} g_2 + f_2 \frac{dg_2}{dt} \\ &= \left(\frac{df_1}{dt} \mathbf{i} + \frac{df_2}{dt} \mathbf{j} \right) \cdot (g_1 \mathbf{i} + g_2 \mathbf{j}) + (f_1 \mathbf{i} + f_2 \mathbf{j}) \cdot \left(\frac{dg_1}{dt} \mathbf{i} + \frac{dg_2}{dt} \mathbf{j} \right), \end{aligned}$$

یعنی،

$$(۴) \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{g}) = \frac{d\mathbf{f}}{dt} \cdot \mathbf{g} + \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{g}}{dt}.$$

به تشابه بین این فرمول و قاعده مشابه آن برای مشتقگیری از حاصل ضرب دو تابع اسکالر

توجه نمایید. با اینحال، حاصل ضربهای طرف راست (۴) حاصل ضرب معمولی نبوده بلکه حاصل ضربهایی نقطه‌ای می‌باشند.

مثال ۵. فرض کنیم $\mathbf{f}(t)$ یک تابع برداری با اندازه ثابت ولی جهت متغیر باشد. در این صورت،

$$|\mathbf{f}(t)|^2 = \mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{f}(t) = c,$$

که در آن c اسکالر ثابتی است؛ و در نتیجه،

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{f}(t)|^2 = \frac{d}{dt} c = 0.$$

این را می‌توان به کمک (۴) به صورت زیر نوشت:

$$\frac{d}{dt} |\mathbf{f}|^2 = \frac{d}{dt} (\mathbf{f} \cdot \mathbf{f}) = \frac{d\mathbf{f}}{dt} \cdot \mathbf{f} + \mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{f}}{dt} = 2\mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{f}}{dt} = 0$$

(مجدداً شناسه‌ها را حذف می‌کنیم). بنابراین،

$$\mathbf{f} \cdot \frac{d\mathbf{f}}{dt} = 0,$$

در نتیجه، \mathbf{f} به $d\mathbf{f}/dt$ متعامد می‌باشد. به عبارت دیگر، یک تابع برداری با اندازه ثابت همیشه به مشتق خود متعامد است.

انتگرالگیری از یک تابع برداری. انتگرال معین تابع برداری $\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j}$ با فرمول

$$(5) \quad \int_a^b \mathbf{f}(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_a^b f_2(t) dt \right) \mathbf{j},$$

یعنی با "مؤلفه به مؤلفه" انتگرالگیری، تعریف می‌شود. اگر تابع $\mathbf{f}(t)$ پیوسته باشد، مؤلفه‌هایش نیز چنین‌اند؛ و در نتیجه، هر دو انتگرال سمت راست (۵) وجود دارند، که وجود انتگرال سمت چپ نتیجه می‌شود. اگر انتگرال $\mathbf{f}(t)$ را حد مجموع ریمان برداری مناسبی تعریف کنیم، همان فرمول (۵) به دست می‌آید (ر.ک. مسئله ۳۴).

مثال ۶. هرگاه مثل مثل ۲

$$\mathbf{f}(t) = (e^t)\mathbf{i} + (\ln t)\mathbf{j} \quad (0 < t < \infty),$$

$$\begin{aligned} \int_1^2 \mathbf{f}(t) dt &= \left(\int_1^2 e^t dt \right) \mathbf{i} + \left(\int_1^2 \ln t dt \right) \mathbf{j} \\ &= e^t \Big|_1^2 \mathbf{i} + (t \ln t - t) \Big|_1^2 \mathbf{j} = (e^2 - e) \mathbf{i} + (2 \ln 2 - 1) \mathbf{j}. \end{aligned}$$

منظور از یک پاد مشتق تابع برداری $\mathbf{f}(t)$ ، که بر بازه I تعریف شده است، یعنی تابعی چون $\mathbf{F}(t)$ که بر I تعریف شده و

$$\frac{d\mathbf{F}(t)}{dt} = \mathbf{f}(t).$$

هرگاه $\mathbf{f}(t) = f_1(t)\mathbf{i} + f_2(t)\mathbf{j}$ و $F_1(t), F_2(t)$ به ترتیب پاد مشتق‌هایی از $f_1(t), f_2(t)$ باشند، آنگاه $\mathbf{F}(t) = F_1(t)\mathbf{i} + F_2(t)\mathbf{j}$ بوضوح یک پاد مشتق $\mathbf{f}(t)$ می‌باشد. از نظیر قضیه راجع به توابع اسکالر (قضیه ۴، صفحه ۳۹۸) فوراً معلوم می‌شود که دو پاد مشتق $\mathbf{f}(t)$ بر بازه I فقط می‌توانند به اندازه بردار ثابتی چون C فرق داشته باشند. پاد مشتق کلی $\mathbf{f}(t)$ ، یعنی $\mathbf{F}(t) + C$ ، انتگرال نامعین $\mathbf{f}(t)$ نام دارد و با $\int \mathbf{f}(t) dt$ ، بدون حدود انتگرالگیری، نموده می‌شود. انتگرالگیری نامعین مؤلفه به مؤلفه از $\mathbf{f}(t)$ فوراً نتیجه می‌دهد که

$$\int \mathbf{f}(t) dt = \left(\int f_1(t) dt \right) \mathbf{i} + \left(\int f_2(t) dt \right) \mathbf{j}.$$

البته، مشابه قضیه اساسی حساب دیفرانسیل و انتگرال برای توابع برداری عبارت است از

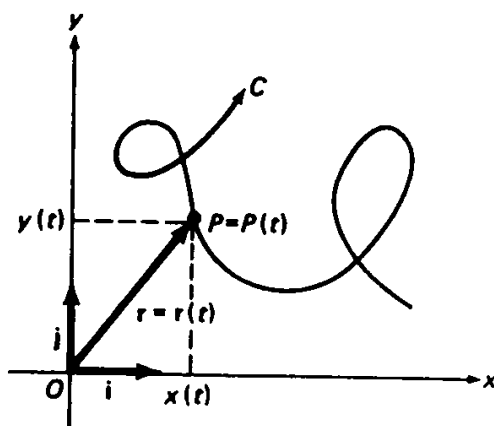
$$\int_a^b \mathbf{f}(t) dt = \mathbf{F}(b) - \mathbf{F}(a) = \mathbf{F}(t) \Big|_a^b$$

مثال ۷. تابع برداری $\mathbf{F}(t) = (\sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j} + (3t - 4)\mathbf{j}$ یک پاد مشتق تابع برداری $\mathbf{f}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}$ بر هر بازه است.

حال از توابع برداری در مطالعه حرکت در صفحه استفاده می‌کنیم. فرض کنیم

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad (t \text{ در } I)$$

یک تابع برداری پیوسته باشد که بر بازه I تعریف شده است، و نقطه شروع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را در مبدأ O صفحه xy ، مثل شکل ۲۶، قراردادیم. در این صورت، نقطه پایان $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ نقطه متغیر $P = P(t) = (x(t), y(t))$ از صفحه است، و $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ بردار موضع (یا بردار شعاعی) $P = P(t)$ نام دارد. (در اینجا از علامت \mathbf{r} به جای \mathbf{f} استفاده می‌کنیم، و این



شکل ۲۶

به خاطر موارد استعمال متعدد آن در فیزیک و ریاضیات کار بسته است. (وقتی t افزایش می یابد، $P = P(t)$ یک منحنی مسطح به نام نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ، یعنی منحنی C به معادلات پارامتری

$$(۶) \quad x = x(t), \quad y = y(t) \quad (I \text{ در } t).$$

می پیماید. بالاخص گرفتن پارامتر t به عنوان زمان الهام بخش است، و ما این کار را با علم به اینکه این تنها امکان نیست انجام می دهیم.

سرعت و تندى. اگر $\mathbf{r}(t)$ مشتق پذیر باشد، مشتق

$$\frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j}$$

میزان تغییر زمانی بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ است که موضع نقطه متغیر $P = P(t)$ را مشخص می کند. این کمیت، به خاطر معنی فیزیکی اش، به بردار سرعت، یا فقط سرعت، معروف است و با $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ نموده می شود. چون $\mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ ، داریم

$$\mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}(t)}{dt} = \frac{dx(t)}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy(t)}{dt} \mathbf{j},$$

که از آن معلوم می شود که $\mathbf{v}(t)$ تعمیم سرعت یک بعدی تعریف شده در بخش ۱.۲ به دو بعد می باشد.

منظور از تندى نقطه متغیر $P = P(t)$ یعنی اندازه بردار سرعت $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ ؛ یعنی،

اسکالر

$$(۷) \quad v = |\mathbf{v}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2}$$

از حالا به بعد فرض می‌کنیم

$$(۸) \quad \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 \neq 0 \quad (I \text{ در } t)$$

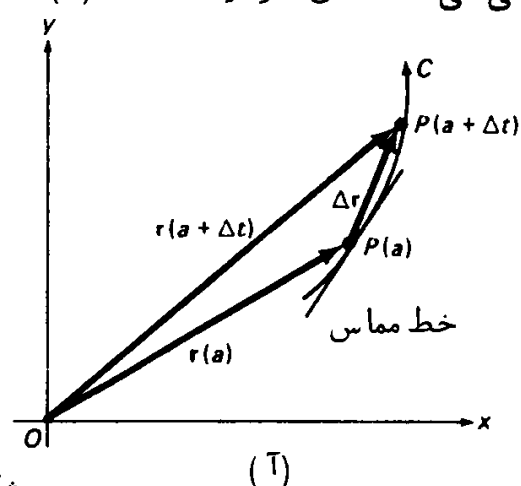
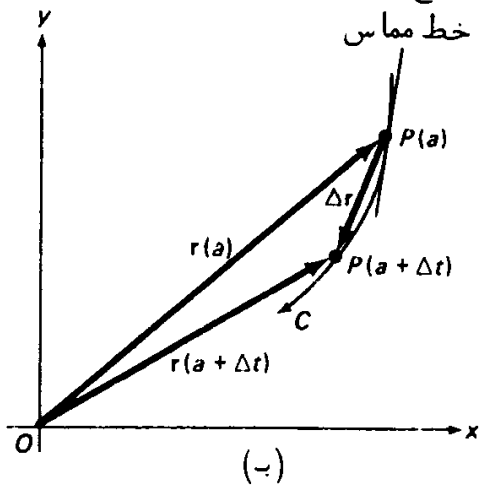
پس نتیجه می‌شود که تندی، و در نتیجه سرعت، نقطه P که منحنی C را می‌پیماید هرگز صفر نیست. در نتیجه، نقطه هیچگاه از حرکت باز نمی‌ماند.

برای تعبیر هندسی سرعت $v = v(t)$ ، فرض کنیم $\phi = \phi(t)$ زاویه از محور x مثبت به v باشد. این یعنی اگر نقطه شروع بردار v در مبدأ می‌بود، نقطه پایانش به مختصات قطبی $|v|$ و ϕ می‌شد. ϕ را با زاویه بین v و بردار یکه i ، که برخلاف ϕ به بازه $[0, \pi]$ محدود است، خلط نکنید. فرض کنید a نقطه‌ای از I بوده، و $x'(a) \neq 0$. در این صورت،

$$\tan \phi = \frac{y'(a)}{x'(a)}$$

زیرا $v(a) = x'(a)i + y'(a)j$. اما، همانند صفحه ۷۳۲، این خارج قسمت درست شیب مماس بر منحنی C به معادلات پارامتری (۶) در نقطه $P(a) = (x(a), y(a))$ است. به علاوه، هرگاه $x'(a) = 0$ ، آنگاه، به خاطر شرط (۸)، $y'(a) \neq 0$ ، و در این صورت $v(a) = y'(a)j$. در نتیجه، $v(a)$ قائم است، ولی مماس بر منحنی C در $P(a)$ نیز قائم می‌باشد (این را با مراجعه به تعریف مماس به عنوان موضع حدی خط قاطع مار بر نقاط $(x(a), y(a))$ و $(x(t), y(t))$ وقتی $a \rightarrow t$ ، نشان دهید). لذا، در هر حال، سرعت $v(a)$ همواره موازی مماس بر منحنی C در $P(a)$ است. بنابراین، اگر نقطه شروع را در $P(a)$ قرار دهیم، بردار $v(a)$ همیشه در جهت مماس بر C در $P(a)$ خواهد بود.

در واقع، حتی می‌توان در مورد جهت $v(a)$ از این صریح‌تر بود. درحقیقت، از دو جهت مخالف بر خط مماس، $v(a)$ در جهتی اشاره دارد که در آن $P = P(t)$ با افزایش t را طی می‌کند. این امر از شکل ۲۷ (آ) یا ۲۷ (ب) واضح است، که در آن جهت افزایش t



شکل ۲۷

در هر حالت با سر سهم روی خود منحنی C نموده شده است، و بردار خارج قسمت تفاضلی

$$(9) \quad \frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(a + \Delta t) - \mathbf{r}(a)}{\Delta t}$$

وقتی $\Delta t \rightarrow 0$ ، حول $P(a)$ چرخیده مآلاً به $\mathbf{v}(a)$ نزدیک می‌شود. در هر دو شکل Δt مثبت فرض شده است؛ در نتیجه، $P(a)$ در امتداد منحنی C ، که در جهت افزایش t پیموده می‌شود، پیش از $P(a + \Delta t)$ می‌آید و اما، اگر Δt منفی باشد، جهت حدی بردار (۹) وقتی $\Delta t \rightarrow 0$ همان جهت به ازای Δt مثبت است، و لولاینکه در اینجا $P(a)$ بعد از $P(a + \Delta t)$ بیاید، چرا که اگر Δt منفی باشد، می‌توان (۹) را به شکل معادل زیر نوشت:

$$\frac{\Delta \mathbf{r}}{\Delta t} = \frac{\mathbf{r}(a + \Delta t) - \mathbf{r}(a)}{-|\Delta t|}$$

در نتیجه، $\Delta \mathbf{r}/\Delta t$ باز هم در امتداد C در جهت افزایش t اشاره دارد (چرا؟)

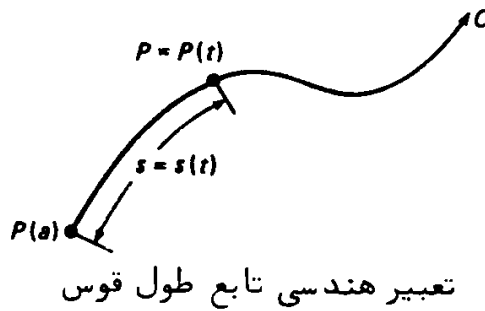
تبصره. اگر a یک نقطه انتهایی I باشد، $x'(a)$ و $y'(a)$ را مشتقات یکطرفه مناسبی می‌گیریم. همچنین، شرط (۸) را ضعیف کرده و می‌خواهیم فقط در نقاط درونی I برقرار باشد. با این کار می‌توان حالاتی را در نظر گرفت که در آنها سرعت اولیه یا نهایی یک حرکت صفر است.

تابع طول قوس. تا اینجا همه چیز خوب پیش رفته است. درک شهودی این را می‌طلبید که تندی نقطه متحرک P در امتداد منحنی C مساوی میزان تغییر زمانی مسافت پیموده شده توسط P در امتداد C باشد که از نقطه ثابتی روی C سنجیده شده است (هرچه باشد، این معنی تندی در حالت خاصی است که C خط مستقیم است). لذا، اینک نشان می‌دهیم که تندی v ، که مساوی اندازه $|\mathbf{v}|$ بردار سرعت \mathbf{v} تعریف می‌شود، مساوی مشتق ds/dt است، که در آن s طول قوس در امتداد C است. برای این کار، فرض کنیم C نمودار تابع برداری $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j}$ باشد وقتی t روی بازه I تغییر می‌کند، و نیز توابع $x(t)$ و $y(t)$ بر I به‌طور پیوسته مشتق‌پذیر باشند. با انتخاب نقطه ثابت a در I ، تابع طول قوس

$$s = s(t) \quad (t \geq a)$$

را طول قوس C با نقطه شروع ثابت $P(a) = (x(a), y(a))$ و نقطه پایان متغیر $P(t) = (x(t), y(t))$ تعریف می‌کنیم. در شکل ۲۸، $s(t)$ تعبیر هندسی شده است. بنا بر فرمول (۲)، صفحه ۷۴۱،

$$(10) \quad s = s(t) = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2} du,$$



تعبیر هندسی تابع طول قوس

شکل ۲۸

که در آن u را متغیر انتگرالگیری گرفته‌ایم تا با حد بالایی انتگرالگیری t خلط نشود. با مشتقگیری از (۱۰) نسبت به t ، به دست می‌آوریم

$$(۱۰) \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2}$$

(قضیه ۵ در صفحه ۴۰۵ را به کار ببرید)، و از مقایسه این فرمول با (۷) نتیجه مطلوب به دست می‌آید:

$$(۱۱) \quad v = |\mathbf{v}| = \frac{ds}{dt}$$

با استفاده از توابع برداری، می‌توان (۱۰) را به شکل فشرده

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{r}'(u)| du,$$

یا معادلا

$$s(t) = \int_a^t |\mathbf{v}(u)| du,$$

نوشت، که از آن برقراری فرمول (۱۱) فوراً مشهود خواهد بود.

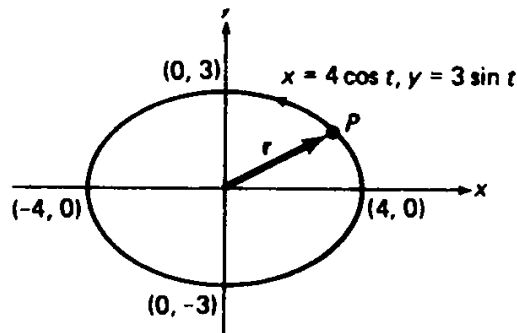
مثال ۸. سرعت و تندی نقطه P به بردار موضع

$$(۱۲) \quad \mathbf{r} = (4 \cos t)\mathbf{i} + (3 \sin t)\mathbf{j} \quad (t \geq 0)$$

را بیابید. چه وقت و کجا تندی ماکزیمم و مینیمم می‌شود؟

حل. وقتی t افزایش می‌یابد، P بیضی به معادله $\frac{1}{16}x^2 + \frac{1}{9}y^2 = 1$ را با شروع از نقطه $(4, 0)$ در لحظه $t = 0$ و حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت مرتباً می‌پیماید

(ر.ک. شکل ۲۹).



شکل ۲۹

با مشتقگیری از (۱۲)، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-4 \sin t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j}.$$

تندی اندازه \mathbf{v} و مساوی است با

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{(-4 \sin t)^2 + (3 \cos t)^2} = \sqrt{16 \sin^2 t + 9 \cos^2 t}.$$

چون

$$v^2 = 16 \sin^2 t + 9 \cos^2 t = 7 \sin^2 t + 9(\sin^2 t + \cos^2 t) = 7 \sin^2 t + 9,$$

ماکزیمم v^2 مساوی ۱۶ است، و وقتی حاصل می‌شود که $\sin t = \pm 1, \cos t = 0$ و مینیمم ۹ برابر است، و وقتی به دست می‌آید که $\sin t = 0, \cos t = \pm 1$. لذا، تندی ماکزیمم ۴ و در نقاط انتهایی $(0, \pm 3)$ محور اقصر بیضی رخ می‌دهد، و تندی مینیمم ۳ و در نقاط انتهایی $(\pm 4, 0)$ محور اطول روی خواهد داد.

تعریف بردار یکه مماس. مثل قبل، فرض کنیم بردار سرعت $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ ناصفر بوده، و نقطه شروع $P = P(t)$ و نقطه پایانش بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ باشد. همچنین، C نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ باشد. در این صورت، $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ مماس بر C در نقطه P بوده و در جهت افزایش t اشاره دارد. با تقسیم بردار \mathbf{v} بر اندازه‌اش، بردار یکه

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} \quad (۱۳)$$

به دست می‌آید، که مانند خود \mathbf{v} بر C در نقطه P مماس بوده و در جهت افزایش t اشاره دارد. بنابراین، \mathbf{T} بردار یکه مماس بر منحنی C در نقطه P می‌باشد. پس از (۱۳) نتیجه

می شود که

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{|d\mathbf{r}/dt|},$$

ولی می توان فرمول ساده تری برای \mathbf{T} به دست آورد. یعنی،

$$(14) \quad \mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds},$$

و این با توصیف C به وسیله پارامتر طول قوس s انجام می گیرد. به این ترتیب که گوئیم تابع $s = s(t)$ پیوسته و مشتق پذیر است، و صعودی نیز هست، چرا که انتگرالده (۱۰) همواره مثبت است (چرا؟). بنابراین، $s(t)$ دارای تابع معکوس پیوسته و مشتق پذیر $t = t(s)$ با مشتق

$$\frac{dt}{ds} = \frac{1}{ds/dt}$$

است (ر.ک. قضیه ۴، صفحه ۴۶۰). در این صورت، به کمک (۱۱)، داریم

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{|\mathbf{v}|} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{ds/dt} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} \frac{dt}{ds} = \frac{d\mathbf{r}}{ds},$$

که در آن قاعده زنجیره ای برای توابع برداری (ر.ک. مسئله ۲۱) در آخرین مرحله به کار رفته است، و برهان فرمول (۱۴) کامل خواهد بود.

لذا، بردار یکه مماس \mathbf{T} مشتق بردار موضع \mathbf{r} نسبت به طول قوس s است. فرمول (۱۴) برحسب مؤلفه های x و y بردار موضع \mathbf{r} به شکل زیر خواهد بود:

$$(14') \quad \mathbf{T} = \frac{dx}{ds} \mathbf{i} + \frac{dy}{ds} \mathbf{j}.$$

بخصوص، این ایجاب می کند که

$$\left(\frac{dx}{ds}\right)^2 + \left(\frac{dy}{ds}\right)^2 = 1,$$

زیرا \mathbf{T} بردار یکه می باشد.

تابع مشتق گیری شده در فرمول (۱۴) برحسب تابع اصلی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ به صورت تابع مرکب $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t(s))$ است، که در آن $t = t(s)$ معکوس تابع طول قوس $s = s(t)$ می باشد. محاسبه صریح تابع $s = s(t)$ اغلب مشکل یا غیر ممکن است، ولی این از ارزش توجه به C با پارامتر طول قوس s نخواهد کاست.

مثال ۹. بردار یکه مماس \mathbf{T} را برای نمودار

$$\mathbf{r}(t) = (\cos t + t \sin t)\mathbf{j} + (\sin t - t \cos t)\mathbf{j} \quad (t \geq 0),$$

هم به عنوان تابع $\mathbf{T}(t)$ از پارامتر t و هم تابع $\mathbf{T}(s)$ از طول قوس s که از نقطه $\mathbf{r}(0) = \mathbf{i} = (1, 0)$ سنجیده شده پیدا نمایید.

حل. مشتق $\mathbf{r}(t)$ مساوی است با

$$\begin{aligned} \mathbf{r}'(t) &= (-\sin t + \sin t + t \cos t)\mathbf{i} + (\cos t - \cos t + t \sin t)\mathbf{j} \\ &= (t \cos t)\mathbf{i} + (t \sin t)\mathbf{j}, \end{aligned}$$

با اندازه

$$|\mathbf{r}'(t)| = \sqrt{(t \cos t)^2 + (t \sin t)^2} = t,$$

و در نتیجه،

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}.$$

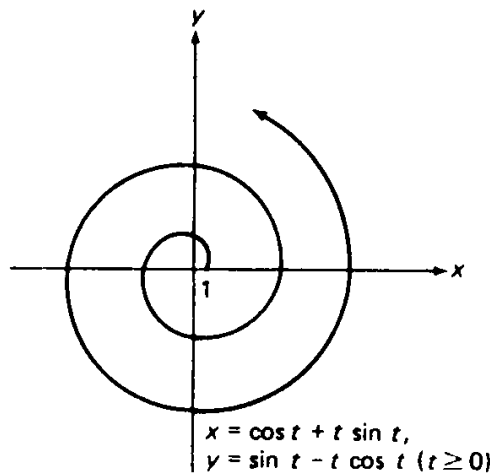
به علاوه،

$$s = s(t) = \int_0^t |\mathbf{r}'(u)| du = \int_0^t u du = \frac{1}{2} t^2,$$

و از اینرو، $t = \sqrt{2s}$ ؛ در نتیجه،

$$\mathbf{T}(s) = (\cos \sqrt{2s})\mathbf{i} + (\sin \sqrt{2s})\mathbf{j}.$$

نمودار تابع $\mathbf{r}(t)$ منحنی مارپیچی است که در شکل ۳۰ نموده شده است.



شکل ۳۰

مسائل

حد داده شده را محاسبه کنید.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sin t}{t} \mathbf{i} - 2e^t \mathbf{j} \right) \quad \cdot 2 \checkmark$$

$$\lim_{t \rightarrow 2} (t^2 \mathbf{i} + t^3 \mathbf{j}) \quad \cdot 1 \checkmark$$

$$\lim_{t \rightarrow 0^+} \left(\frac{\arccos t}{5} \mathbf{i} + \sqrt{t} \mathbf{j} \right) \cdot 4 \checkmark \quad \lim_{t \rightarrow 1} \left(\frac{1}{t^2 + 1} \mathbf{i} + \cos \frac{\pi t}{3} \mathbf{j} \right) \cdot 3 \checkmark$$

$$\lim_{t \rightarrow -1} \left(\frac{t^2 - 1}{t - 1} \mathbf{i} + \frac{t^3 + 1}{t + 1} \mathbf{j} \right) \cdot 6 \checkmark \quad \lim_{t \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{\ln t} \mathbf{i} + \frac{1 - t}{1 + t} \mathbf{j} \right) \cdot 5 \checkmark$$

۷. آیا تابع برداری $\mathbf{f}(t) = (\ln t)\mathbf{i} + (\ln(\ln t))\mathbf{j}$ در $t = e$ پیوسته است؟

نشان دهید هرگاه وقتی $t \rightarrow a$ ، $\mathbf{f}(t) \rightarrow \mathbf{L}$ و $\mathbf{g}(t) \rightarrow \mathbf{M}$ ، آنگاه

$$\lim_{t \rightarrow a} c \mathbf{f}(t) = c \mathbf{L} \quad (c \text{ اسکالر است}) \quad 8$$

$$\lim_{t \rightarrow a} [\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)] = \mathbf{L} + \mathbf{M} \quad 9$$

$$\lim_{t \rightarrow a} [\mathbf{f}(t) \cdot \mathbf{g}(t)] = \mathbf{L} \cdot \mathbf{M} \quad 10$$

$$\lim_{t \rightarrow a} |\mathbf{f}(t)| = |\mathbf{L}| \quad 11$$

از تابع برداری داده شده مشتق بگیرید.

$$(t \ln t)\mathbf{i} + (t^2 e^t)\mathbf{j} \cdot 12 \checkmark \quad (2t^3 - 5)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j} \cdot 12 \checkmark$$

$$(\sec t)\mathbf{i} - (\sinh t)\mathbf{j} \cdot 15 \checkmark \quad (\tan t)\mathbf{i} + (\ln(\ln t))\mathbf{j} \cdot 14 \checkmark$$

$$(e^t \sin t)\mathbf{i} + (e^{-t} \cos t)\mathbf{j} \cdot 17 \checkmark \quad (\arctan t)\mathbf{i} + (\cos(\sin t))\mathbf{j} \cdot 16 \checkmark$$

نشان دهید که

۱۸. مشتق یک تابع برداری ثابت بردار صفر است.

۱۹. هرگاه $\mathbf{f}(t)$ در a مشتقپذیر باشد، آنگاه $\mathbf{f}(t)$ در a پیوسته است.

۲۰. هرگاه $\mathbf{f}(t)$ و $\mathbf{g}(t)$ در a مشتقپذیر با مشتقات $\mathbf{f}'(a)$ و $\mathbf{g}'(a)$ باشند، آنگاه $\mathbf{f}(t) + \mathbf{g}(t)$ در a

مشتقپذیر با مشتق $\mathbf{f}'(a) + \mathbf{g}'(a)$ می باشد.

۲۱. هرگاه $\mathbf{f}(t)$ تابع مشتقپذیری از t بوده و t تابع مشتقپذیری از u باشد، آنگاه

$$\frac{d\mathbf{f}}{du} = \frac{d\mathbf{f}}{dt} \frac{dt}{du} \quad (\text{قاعده زنجیره‌ای برای توابع برداری})$$

مشروط بر اینکه u چنان باشد که $t(u)$ در قلمرو $\mathbf{f}(t)$ واقع باشد.

پاد مشتق $\mathbf{F}(t)$ تابع برداری داده شده $\mathbf{f}(t)$ را طوری بیابید که در شرط تصریح شده صدق کند.

$$\mathbf{f}(t) = 2t^2\mathbf{i} - t^3\mathbf{j}, \mathbf{F}(1) = 4\mathbf{j} \quad 22 \checkmark$$

$$\mathbf{f}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (e^t)\mathbf{j}, \mathbf{F}(0) = 2\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad 23 \checkmark$$

$$\mathbf{f}(t) = (2/t)\mathbf{i} + (\ln t)\mathbf{j}, \mathbf{F}(e) = -\mathbf{i} + 3\mathbf{j} \quad 24 \checkmark$$

۲۵ ✓ $f(t) = \sec t[(\tan t)\mathbf{i} + (\sec t)\mathbf{j}], F(\pi/3) = \mathbf{0}$

انتگرال داده شده از یک تابع برداری را محاسبه کنید.

۲۶ ✓ $\int_1^2 (3t\mathbf{i} - 4t^2\mathbf{j}) dt$ ۲۷ ✓ $\int_4^9 \left(\frac{1}{\sqrt{t}}\mathbf{i} + \sqrt{t}\mathbf{j}\right) dt$

۲۸ ✓ $\int [(t \ln t)\mathbf{i} + (\csc^2 t)\mathbf{j}] dt$ ۲۹ ✓ $\int_0^{10} |(\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}| dt$

۳۰ ✓ $\int_0^1 (2^t\mathbf{i} + 3^{-t}\mathbf{j}) dt$ ۳۱ ✓ $\int [(\sin^2 t)\mathbf{i} + (\cos^2 t)\mathbf{j}] dt$

۳۲. فرض کنید $f(t)$ و $g(t)$ توابعی برداری بوده و هر دو بر $[a, b]$ پیوسته باشند. نشان دهید که

$$\int_a^b c f(t) dt = c \int_a^b f(t) dt \quad (c \text{ یک اسکالر است})$$

و

$$\int_a^b [f(t) + g(t)] dt = \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt.$$

۳۳. فرض کنید $f(t)$ بر $[a, b]$ پیوسته بوده، و c بردار ثابتی باشد. نشان دهید که

$$\int_a^b c \cdot f(t) dt = c \cdot \int_a^b f(t) dt.$$

۳۴. فرض کنید $a = t_0 < t_1 < \dots < t_{i-1} < t_i < \dots < t_{n-1} < t_n = b, \Delta t_i = t_i - t_{i-1},$

و $\mu = \max\{\Delta t_1, \Delta t_2, \dots, \Delta t_n\}$ نقطه دلخواهی در زیربازه $[t_{i-1}, t_i]$ باشد. نشان

دهید هرگاه $f(t) = (f_1(t), f_2(t))$ تابع برداری پیوسته بر $[a, b]$ بوده و $\int_a^b f(t) dt$ به صورت

$$\lim_{\mu \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n f(p_i) \Delta t_i$$

تعریف شده باشد، آنگاه

$$\int_a^b f(t) dt = \left(\int_a^b f_1(t) dt, \int_a^b f_2(t) dt \right).$$

سرعت v و تندى $v = |\mathbf{v}|$ نقطه $P = P(t)$ با بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را بیابید. مسیر

پیموده شده به وسیله P را طوری رسم کنید که جهت افزایش t را نشان دهد.

۳۵ ✓ $\mathbf{r}(t) = 3t\mathbf{i} + 2\mathbf{j}$ ۳۶ ✓ $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} - 4t\mathbf{j}$

۳۷ ✓ $\mathbf{r}(t) = t^2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$ ۳۸ ✓ $\mathbf{r}(t) = e^t\mathbf{i} + e^{2t}\mathbf{j}$

۳۹ ✓ $\mathbf{r}(t) = (2 \sin t)\mathbf{i} - (\cos t)\mathbf{j}$ ۴۰ ✓ $\mathbf{r}(t) = (3 \cosh t)\mathbf{i} + (4 \sinh t)\mathbf{j}$

بردار واحد مماس \mathbf{T} بر نمودار تابع برداری داده شده $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را، هم به صورت تابع $\mathbf{T}(t)$

از پارامتر t و هم به صورت تابع $\mathbf{T}(s)$ از طول قوس s که از نقطه با بردار موضع $\mathbf{r}(0)$ سنجیده می‌شود، پیدا نمایید.

$$\mathbf{r}(t) = 6t\mathbf{i} - 8t\mathbf{j} \quad \cdot 42 \checkmark$$

$$\mathbf{r}(t) = 5t\mathbf{i} + \mathbf{j} \quad \cdot 41 \checkmark$$

$$\mathbf{r}(t) = (4 \sin t)\mathbf{i} + (4 \cos t)\mathbf{j} \quad \cdot 44 \checkmark$$

$$\mathbf{r}(t) = (\cos 3t)\mathbf{i} + (\sin 3t)\mathbf{j} \quad \cdot 43 \checkmark$$

$$\mathbf{r}(t) = (e^t \cos t)\mathbf{i} + (e^t \sin t)\mathbf{j} \quad \cdot 46 \checkmark$$

$$\mathbf{r}(t) = \frac{3}{2}t^2\mathbf{i} + t^3\mathbf{j} \quad (t > 0) \quad \cdot 45 \checkmark$$

۴۷. مسیر پیموده شده توسط نقطه به بردار موضع

$$\mathbf{r}(t) = (4 \cos^3 t)\mathbf{i} + (4 \sin^3 t)\mathbf{j} \quad (t \geq 0)$$

را توصیف کنید. چه وقت و کجا تندی نقطه P ماکزیمم و مینیمم خود را می‌گیرد؟ آیا P هیچگاه از حرکت می‌ایستد؟

۴۰.۱۱ بردار یکه‌قائم، انحنا و شتاب

برای مطالعه بیشتر حرکت در صفحه، فرض کنیم بردار موضع

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} \quad (I \text{ در } t),$$

بردار سرعت

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \mathbf{r}'(t) = x'(t)\mathbf{i} + y'(t)\mathbf{j},$$

تابع طول قوس

$$(1) \quad s(t) = \int_a^t |\mathbf{v}(u)| du,$$

و بردار یکه‌ماس

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

همانند بخش پیش باشند. پریم نمایش مشتقگیری نسبت به پارامتر t است، که ما آن را زمان می‌گیریم، و a نقطه ثابتی از بازه I است که تابع برداری $\mathbf{r}(t)$ بر آن تعریف شده است. مثل قبل، فرض می‌کنیم $\mathbf{r}(t)$ بر I مشتقپذیر بوده و در شرط

$$|\mathbf{r}'(t)|^2 = [x'(t)]^2 + [y'(t)]^2 \neq 0$$

در هر نقطه درونی I صدق می‌کند (ر.ک. تبصره صفحه ۱۰۸۰)، ولی علاوه بر این فرض می‌کنیم مشتقات دوم $x''(t)$ و $y''(t)$ بر I موجود و پیوسته باشند. همچنین، به یاد می‌آوریم که فرمول (۱) ایجاب می‌کند که

$$(1') \quad \frac{ds}{dt} = |\mathbf{v}(t)| = |\mathbf{r}'(t)|.$$

مثل قبل، فرض کنیم $P = P(t) = (x(t), y(t))$ نقطه پایان بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ است که نقطه شروع در مبدأ O صفحه xy می باشد. در این صورت، با افزایش t ، $P(t)$ نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ، یعنی منحنی سطح C به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \quad y = y(t) \quad (I \text{ در } t)$$

را می بینیم. نقطه شروع بردار یکه مماس $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t)$ نقطه $P(t)$ بوده، و وقتی t افزایش یابد، جهت \mathbf{T} معمولاً از یک نقطه به نقطه دیگر در امتداد C تغییر می کند. لذا، علی رغم اینکه اندازه \mathbf{T} مقدار ثابت ۱ را دارد، مشتق \mathbf{T} نسبت به t عموماً "ناصفر" است. چون داریم، $|\mathbf{T}|^2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$

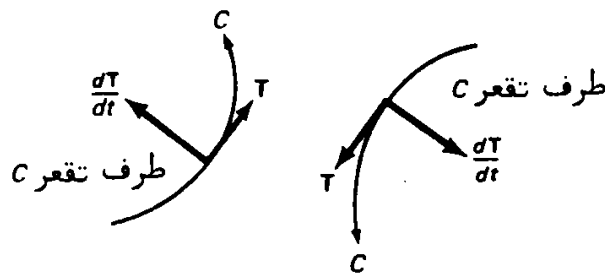
$$\frac{d}{dt} (\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} = 2\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} = 0,$$

و در نتیجه،

$$(2) \quad \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} = 0$$

(قس. مثال ۵، صفحه ۱۰۷۵). لذا، بردار یکه مماس \mathbf{T} همیشه به مشتقش $d\mathbf{T}/dt$ ، که عموماً "بردار یکه نیست، متعامد است، و وقتی جهت \mathbf{T} تغییر می کند، جهت $d\mathbf{T}/dt$ تغییر خواهد کرد.

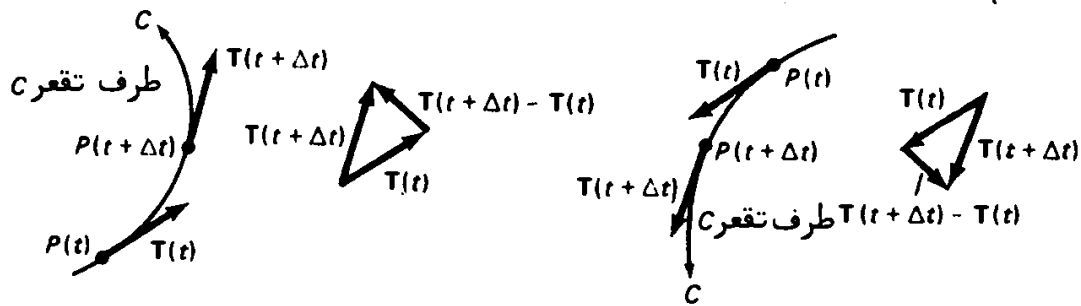
در شکل ۳۱، فرمول (۲) تعبیر هندسی شده است، و در آن سر سهم روی C جهت پیموده شدن C ضمن افزایش t را نشان می دهد. بردار $d\mathbf{T}/dt$ همیشه اشاره به طرف تقعر



شکل ۳۱

C دارد؛ یعنی، طرفی که وقتی منحنی C توسط نقطه متحرک $P(t)$ پیموده می شود به آن می گردد. برای مشاهده دلیل آن، شکل ۳۲ را در نظر می گیریم، که در آن $\mathbf{T}(t)$ بردار یکه مماس در لحظه t بوده و $\mathbf{T}(t + \Delta t)$ بردار یکه مماس در زمان بعدی $t + \Delta t$ است. از شکل واضح است که جهت خم شدن منحنی وقتی $P(t)$ آن را می بینیم همان جهت بردار تفاضلی $\mathbf{T}(t + \Delta t) - \mathbf{T}(t)$ است، که این خود همان جهت مشتق $d\mathbf{T}/dt$ را دارد (حکم اخیر را

نوجیه کنید .



شکل ۳۲

مثال ۱. بردارهای T و dT/dt را برای تابع برداری

$$(۳) \quad r = r(t) = (\cos 2t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j}$$

بیابید .

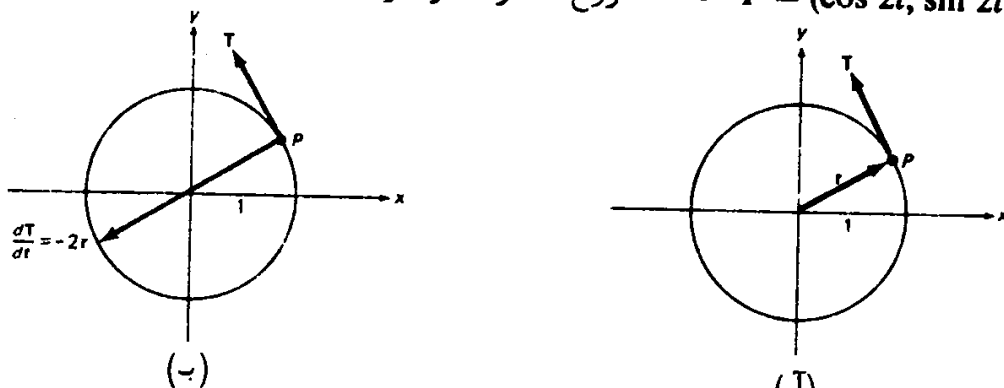
حل . نمودار (۳) دایره به شعاع ۱ و مرکز مبدأ است که با افزایش t در جهت خلاف عقربه‌های ساعت پیموده می‌شود. بردار بیکه مماس عبارت است از

$$\begin{aligned} T &= \frac{r'(t)}{|r'(t)|} = \frac{(-2 \sin 2t)\mathbf{i} + (2 \cos 2t)\mathbf{j}}{\sqrt{(-2 \sin 2t)^2 + (2 \cos 2t)^2}} \\ &= \frac{1}{2} [(-2 \sin 2t)\mathbf{i} + (2 \cos 2t)\mathbf{j}] = (-\sin 2t)\mathbf{i} + (\cos 2t)\mathbf{j} \end{aligned}$$

[ر.ک. شکل ۳۳ (ا)] ، و مشتق مساوی است با

$$\frac{dT}{dt} = -2[(\cos 2t)\mathbf{i} + (\sin 2t)\mathbf{j}] = -2r(t).$$

چون $-r(t)$ ، یعنی قرینه بردار موضع ، به مبدأ اشاره دارد ، dT/dt به سمت مرکز دایره C ، و در نتیجه به طرف تقعر C ، می‌باشد . این امر در شکل ۳۳ (ب) نموده شده است ، که در آن $P = (\cos 2t, \sin 2t)$ نقطه شروع مشترک بردارهای T و dT/dt می‌باشد .

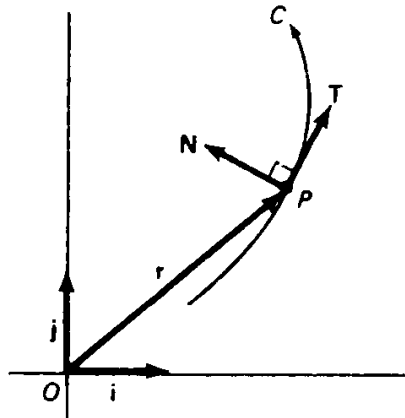


شکل ۳۳

تعریف بردار یکه‌ قائم . حال ، علاوه بر بردار یکه‌ مماس $T = T(t)$ ، بردار یکه‌ دیگری معرفی می‌کنیم ، که با $N = N(t)$ نموده و بردار یکه‌ قائم به منحنی C در نقطه‌ $P = P(t)$ نامیده می‌شود . این بردار یکه‌

$$N = \frac{dT/dt}{|dT/dt|} \quad \left(\frac{dT}{dt} \neq 0 \right)$$

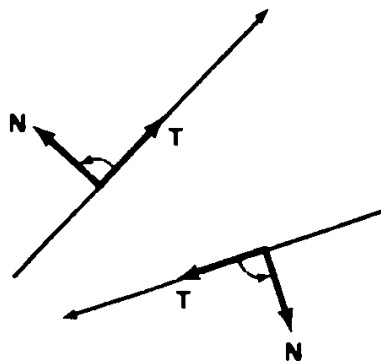
در جهت $dT/dt = T'(t)$ با نقطه‌ شروع P می‌باشد . چون dT/dt متعامد به T بوده و به طرف تقعر C اشاره دارد ، همین امر در مورد بردار N درست است (ر.ک. شکل ۳۴) . اگر C خط مستقیم باشد ، جهت T تغییر نمی‌کند ، و در این صورت ، $dT/dt \equiv 0$. در این حالت



بردارهای یکه‌ مماس و قائم T و N

شکل ۳۴

N را بردار حاصل از دوران T به اندازه 90° در جهت خلاف عقربه‌های ساعت ، مثل شکل ۳۵ ، می‌گیریم .



شکل ۳۵

مثال ۲ . بردار یکه‌ قائم به منحنی

(۴)

$$x = 2t, \quad y = t^2$$

را در مبدأ O و نیز در نقاط $(4, 4)$ و $(-2, 1)$ بیابید.

حل. با حذف پارامتر t از معادلات (۴)، معلوم می‌شود که منحنی سهمی به معادله دکارتی $y = \frac{1}{4}x^2$ است. بردار موضع نظیر به (۴) عبارت است از $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t^2\mathbf{j}$ با مشتق $\mathbf{r}'(t) = 2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}$. لذا، بردار یکه مماس مساوی است با

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{2\mathbf{i} + 2t\mathbf{j}}{\sqrt{4 + 4t^2}} = \frac{\mathbf{i} + t\mathbf{j}}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

با مشتگیری از $\mathbf{T}(t)$ ، بردار

$$\mathbf{T}'(t) = \frac{-t\mathbf{i} + \mathbf{j}}{(1 + t^2)^{3/2}}$$

با اندازه

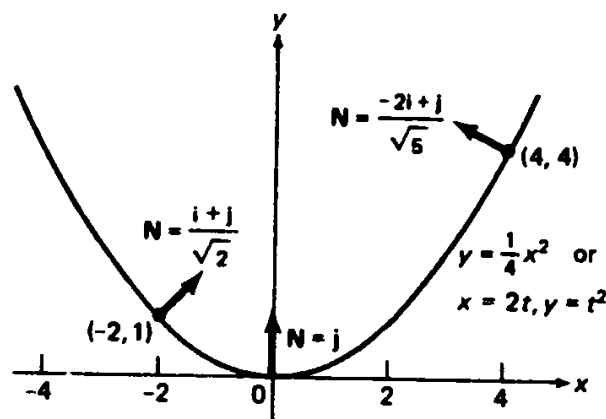
$$|\mathbf{T}'(t)| = \frac{\sqrt{(-t)^2 + 1^2}}{(1 + t^2)^{3/2}} = \frac{\sqrt{1 + t^2}}{(1 + t^2)^{3/2}} = \frac{1}{1 + t^2}$$

به دست می‌آید. لذا، بردار یکه قائم به سهمی در نقطه $P(t) = (2t, t^2)$ عبارت است از

$$\mathbf{N}(t) = \frac{\mathbf{T}'(t)}{|\mathbf{T}'(t)|} = \frac{-t\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{1 + t^2}}.$$

مبدأ O نظیر به مقدار پارامتر $t = 0$ است؛ و در نتیجه، بردار یکه قائم در O مساوی $\mathbf{N}(0) = \mathbf{j}$ می‌باشد. نقاط $(4, 4)$ و $(-2, 1)$ نظیر به مقادیر پارامتر $t = 2$ و $t = -1$ می‌باشند. بنابراین،

$$\mathbf{N}(-1) = \frac{\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{2}}$$



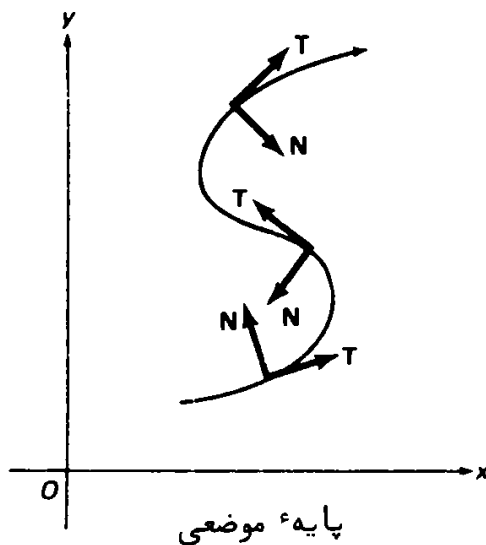
شکل ۳۶

بردار یکه قائم در $(-2, 1)$ است، ولی

$$N(2) = \frac{-2\mathbf{i} + \mathbf{j}}{\sqrt{5}}$$

بردار یکه قائم در $(4, 4)$ می باشد؛ ر.ک. شکل ۳۶.

بردارهای یکه T و N یک پایه متعامد یکه تشکیل می دهند (صفحه ۱۰۵۲)، که بر خلاف پایه متعامد یکه ثابت $\mathbf{i} = (1, 0)$ و $\mathbf{j} = (0, 1)$ ، از یک نقطه به نقطه دیگر در امتداد منحنی C ، طبق شکل ۳۷، تغییر می کند.



پایه موضعی

شکل ۳۷

به این دلیل، پایه مرکب از T و N را پایه موضعی می نامند. مثلاً، پایه موضعی حرکت مستدیر مثال ۱ عبارت است از

$$T = (-\sin 2t)\mathbf{i} + (\cos 2t)\mathbf{j}, \quad N = (-\cos 2t)\mathbf{i} + (-\sin 2t)\mathbf{j}$$

(این مطلب را تحقیق کنید.)

انحنا. هرگاه طول قوس s را پارامتر بگیریم، آنگاه بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ، نقطه پایانش $P = P(s)$ ، بردار یکه مماس $T = T(s) = d\mathbf{r}/ds$ ، و بردار یکه قائم

$$(5) \quad N = N(s) = \frac{dT/ds}{|dT/ds|} \quad \left(\frac{dT}{ds} \neq 0 \right)$$

همه توابعی از s اند، و این امراز نمادهای آنها مشهود است. پس از (۵) معلوم می شود که

$$\frac{dT}{ds} = \left| \frac{dT}{ds} \right| N.$$

فرض کنیم C نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ باشد. در این صورت، اسکالر مثبت $|d\mathbf{T}/ds|$ انحنای C در P نام دارد، که با κ (کاپای کوچک یونانی) نموده می‌شود، و معادله‌ی اخیر را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$(۶) \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}.$$

انحنای κ میزان خمیدگی C را، وقتی توسط نقطه‌ی متحرک $P = P(s)$ پیموده می‌شود، می‌سنجد. در واقع، فرض کنیم $\phi = \phi(s)$ زاویه از محور x مثبت به $\mathbf{T} = \mathbf{T}(s)$ باشد، بدین معنی که اگر نقطه‌ی شروع \mathbf{T} در مبدا باشد، نقطه‌ی پایان \mathbf{T} دارای مختصات قطبی $|\mathbf{T}| = 1$ و ϕ می‌باشد. در این صورت،

$$\mathbf{T} = (\cos \phi)\mathbf{i} + (\sin \phi)\mathbf{j},$$

و، به کمک قاعده‌ی زنجیره‌ای،

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \left(-\sin \phi \frac{d\phi}{ds}\right)\mathbf{i} + \left(\cos \phi \frac{d\phi}{ds}\right)\mathbf{j}.$$

بنابراین،

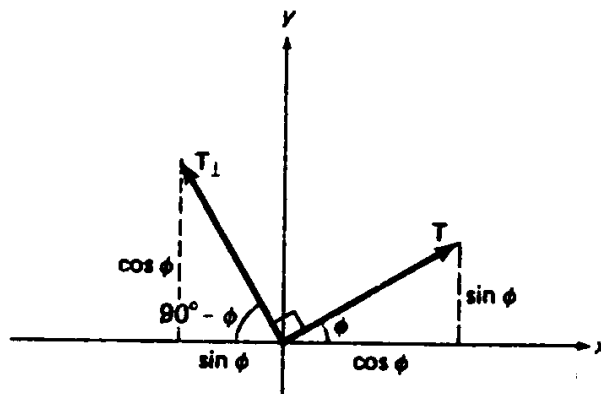
$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \frac{d\phi}{ds} \mathbf{T}_\perp,$$

که در آن

$$\mathbf{T}_\perp = (-\sin \phi)\mathbf{i} + (\cos \phi)\mathbf{j}$$

بردار یکه‌ی حاصل از دوران \mathbf{T} به اندازه 90° خلاف جهت عقربه‌های ساعت است، و این را می‌توان با توجه به شکل ۳۸ دریافت. اما $|\mathbf{T}_\perp| = 1$ ؛ و در نتیجه،

$$\left|\frac{d\mathbf{T}}{ds}\right| = \left|\frac{d\phi}{ds}\right| |\mathbf{T}_\perp| = \left|\frac{d\phi}{ds}\right|,$$

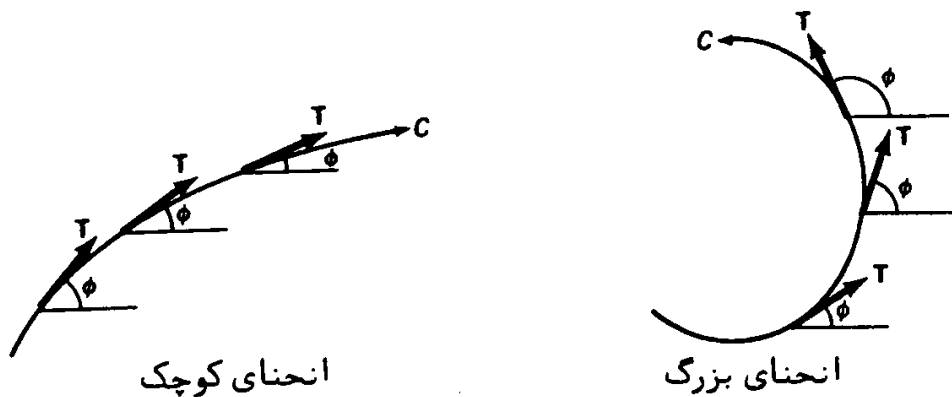


شکل ۳۸

در نتیجه،

$$\kappa = \left| \frac{dT}{ds} \right| = \left| \frac{d\phi}{ds} \right|.$$

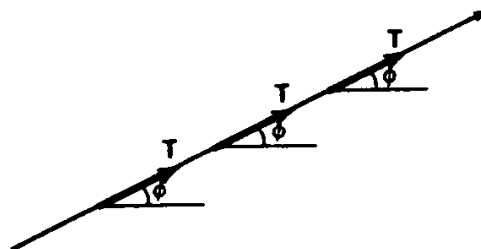
لذا، انحنای κ قدر مطلق میزان تغییر زاویه ϕ نسبت به طول قوس s است. هر قدر $\kappa = \kappa(s)$ بزرگتر باشد، بردار یکه مماس $T = T(s)$ ضمن حرکت در امتداد C سریعتر می چرخد. یعنی، C تیزتر خم می شود. این امر را در شکل ۳۹ توضیح داده ایم، که در آن یک منحنی انحنای بزرگ داشته و سریع خم می شود، ولی دیگری انحنای کوچک داشته و بتدریج خم می گردد.



شکل ۳۹

مثال ۳. نشان دهید که هر خط مستقیم دارای انحنای ثابت صفر $\kappa = 0$ است.

حل. همانطور که شکل ۴۰ نشان داده است، در یک خط مستقیم زاویه ϕ ثابت است.



انحنای ثابت صفر

شکل ۴۰

بنابراین، $d\phi/ds = 0$ و

$$\kappa = \left| \frac{d\phi}{ds} \right| = 0.$$

منحنی C معمولاً "نمودار یک تابع بردار موضعی $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ گرفته می‌شود، که در آن t پارامتری غیر از طول قوس s است. در این صورت، به آسانی می‌توان انحنای κ را تابعی از t گرفت. در واقع،

$$\kappa = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| = \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \frac{dt}{ds} \right| = \frac{|d\mathbf{T}/dt|}{ds/dt} = \frac{1}{v} \left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right|,$$

که در آن در اولین گام از قاعده زنجیره‌ای و در دومین گام از فرمول مشتق یک تابع معکوس استفاده می‌کنیم (توجه کنید که $ds/dt > 0$). به بیان معادل، چون $v = |\mathbf{r}'(t)|$ ،

$$(7) \quad \kappa = \kappa(t) = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|}.$$

مثال ۴. انحنای دایره

$$x = a \cos t, \quad y = a \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

به شعاع a را بیابید.

حل. در اینجا

$$\mathbf{r}(t) = (a \cos t)\mathbf{i} + (a \sin t)\mathbf{j}, \quad \mathbf{r}'(t) = a[(-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}],$$

در نتیجه،

$$|\mathbf{r}'(t)| = a\sqrt{(-\sin t)^2 + \cos^2 t} = a$$

و

$$\mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = (-\sin t)\mathbf{i} + (\cos t)\mathbf{j}, \quad \mathbf{T}'(t) = (-\cos t)\mathbf{i} + (-\sin t)\mathbf{j}.$$

بنابراین، $|\mathbf{T}'(t)| = 1$ و

$$\kappa = \frac{|\mathbf{T}'(t)|}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{1}{a},$$

یعنی، یک دایره به شعاع a دارای انحنای ثابت $\kappa = 1/a$ می‌باشد. لذا، هر قدر شعاع a کوچکتر باشد، میزان تغییر جهت بردار یکه مماس \mathbf{T} نسبت به مسافت پیموده شده در امتداد دایره بیشتر است. به این دلیل است که هر قدر شعاع دوزدن یک اتومبیل کوچکتر باشد، جهت حرکت خود بر واحد مسافت پیموده شده سریعتر تغییر خواهد کرد.

با کمی سعی می‌توان برای انحنای κ فرمولی برحسب مشتقات اول و دوم مؤلفه‌های

$x(t)$ و $y(t)$ بردار مثبت $r(t)$ به دست آورد. ابتدا ملاحظه می‌کنیم

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{r}'(t)}{|\mathbf{r}'(t)|} = \frac{x'i + y'j}{(x'^2 + y'^2)^{1/2}}$$

که در آن شناسه t مشتقات x' ، y' ، x'' ، و y'' به خاطر اختصار حذف شده است. با استفاده از قاعده خارج قسمت برای مشتگیری از \mathbf{T} ، پس از اعمالی جبری و حذف جملات،

$$\begin{aligned} \frac{d\mathbf{T}}{dt} &= \frac{\frac{d(x'i + y'j)}{dt} (x'^2 + y'^2)^{1/2} - (x'i + y'j) \frac{d}{dt} (x'^2 + y'^2)^{1/2}}{x'^2 + y'^2} \\ &= \frac{(x''i + y''j)(x'^2 + y'^2) - (x'i + y'j)(x'x'' + y'y'')}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{(x''y'^2 - x'y'y'')i + (x'^2y'' - x'x''y')j}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} \\ &= \frac{(x'y'' - y'x'')(-y'i + x'j)}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}. \end{aligned}$$

بنابراین،

$$\left| \frac{d\mathbf{T}}{dt} \right| = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}} |-y'i + x'j| = \frac{|x'y'' - y'x''|}{x'^2 + y'^2},$$

زیرا $|-y'i + x'j| = \sqrt{x'^2 + y'^2}$. لذا، بالاخره،

$$\kappa = \frac{1}{|\mathbf{r}'(t)|} |\mathbf{T}'(t)| = \frac{1}{(x'^2 + y'^2)^{1/2}} \frac{|x'y'' - y'x''|}{x'^2 + y'^2}$$

یعنی،

$$(۸) \quad \kappa = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}.$$

مثال ۵. انحنای $\kappa = \kappa(t)$ سهمی $x = 2t$ ، $y = t^2$ مثال ۲ و نموده شده در شکل ۳۶ را بیابید.

حل. در اینجا $x' = 2$ ، $x'' = 0$ ، $y' = 2t$ ، $y'' = 2$ ، و با گذاردن این مقادیر در فرمول (۸)، به دست می‌آوریم

$$(۹) \quad \kappa = \frac{4}{(4 + 4t^2)^{3/2}} = \frac{1}{2(1 + t^2)^{3/2}}.$$

از (۹) معلوم می‌شود که سهمی انحنای ماکزیمم $\kappa(0) = \frac{1}{2}$ خود را در مبداء دارد. بخشی از سهمی که نظیر به مقادیر بزرگ $|t|$ است خیلی مستقیم است؛ و لذا، (۹) نشان می‌دهد که در آنجا انحنای بسیار کوچک می‌باشد. مثلاً، اگر $|t| = 100$ ، انحنای حدوداً $\frac{1}{2000}$ می‌باشد.

هرگاه C نمودار تابع $y = f(x)$ باشد، آنگاه C دارای نمایش پارامتری $x = t, y = f(t)$ است. بنابراین، $x' = 1, x'' = 0$ ؛ در نتیجه، فرمول (۸) به فرمول زیر تحویل می‌شود:

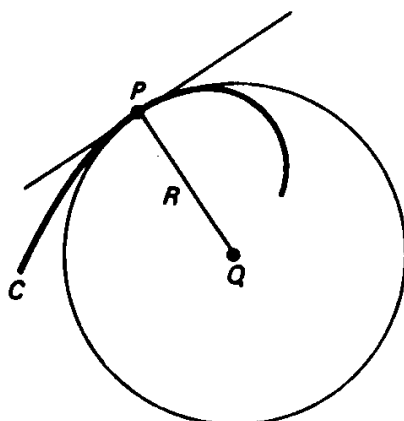
$$(۸') \quad \kappa = \frac{|y''|}{(1 + y'^2)^{3/2}},$$

که در آن $y' = dy/dx$ و $y'' = d^2y/dx^2$. مثلاً، هرگاه C خط مستقیم $y = mx + b$ باشد، آنگاه، همانطور که قبلاً در مثال ۳ دیدیم، $y'' = 0$ و (۸') ایجاب می‌کند که $\kappa = 0$.

شعاع انحنای κ فرض کنیم انحنای منحنی C در نقطه P باشد. منظور از شعاع انحنای C در P یعنی عدد

$$R = \frac{1}{\kappa},$$

یعنی، متقابل انحنای C از مثال ۴ معلوم می‌شود که شعاع انحنای یک دایره همان شعاع معمولی آن است. اگر κ کوچک باشد، R بزرگ است. لذا، یک منحنی بسیار مستقیم شعاع انحنای بسیار بزرگ دارد، و یک خط مستقیم ($\kappa = 0$) را می‌توان با شعاع انحنای نامتناهی گرفت. در این وضع، در نقاطی که κ به بی‌نهایت میل می‌کند (در صورت وجود) قرار می‌دهیم $R = 0$. اگر $\kappa \neq 0$ ، منحنی C در نقطه P شعاع انحنای متناهی دارد. در این صورت، منظور از دایره انحنای C در P یعنی دایره‌ای به شعاع R که از P گذشته و مرکزش Q در طرف تقعر C در امتداد قائم به C در P ، مثل شکل ۴۱، قرار دارد. این دایره همان مماس



دایره انحنای

و شعاع انحنای منحنی C در P را دارد؛ و لذا، با C در P برآزش بسیار زیادی خواهد داشت. به این دلیل، دایرهٔ انحنای دایرهٔ بوسان نیز می‌نامند.

مثال ۶. شعاع انحنای $R = R(t)$ بیضی

$$x = 2 \cos t, \quad y = \sin t \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$$

را در نقاط $(2, 0)$ و $(0, 1)$ بیابید.

حل. توجه کنید که بیضی به معادلهٔ دکارتی $\frac{1}{4}x^2 + y^2 = 1$ است. با محاسبهٔ مشتقات اول و دوم x و y ، داریم

$$\begin{aligned} x' &= -2 \sin t, & y' &= \cos t, \\ x'' &= -2 \cos t, & y'' &= -\sin t, \end{aligned}$$

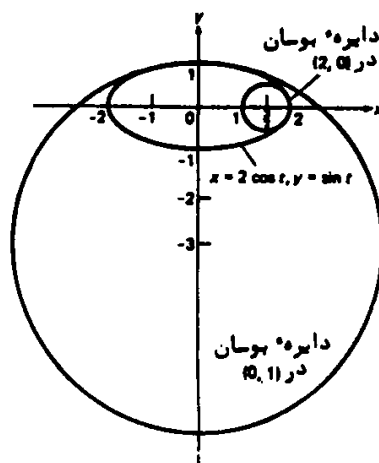
در نتیجه،

$$\begin{aligned} x'y'' - y'x'' &= 2 \sin^2 t + 2 \cos^2 t = 2, \\ x'^2 + y'^2 &= 4 \sin^2 t + \cos^2 t = 3 \sin^2 t + 1. \end{aligned}$$

بنابراین، به کمک فرمول (۸)،

$$R(t) = \frac{1}{\kappa(t)} = \frac{(x'^2 + y'^2)^{3/2}}{|x'y'' - y'x''|} = \frac{1}{2} (3 \sin^2 t + 1)^{3/2}.$$

نقاط $(2, 0)$ و $(0, 1)$ نظیر به مقادیر پارامتر $t = 0$ و $t = \pi/2$ اند. لذا، شعاع انحنای بیضی در $(2, 0)$ مساوی $R(0) = \frac{1}{2}$ و در $(0, 1) = \frac{1}{2}$ برابر $R(\pi/2) = \frac{1}{2}(4)^{3/2} = 4$ می‌باشد. دایرهٔ بوسان در $(2, 0)$ دایره‌ای است به شعاع $\frac{1}{2}$ و مرکز $(\frac{3}{2}, 0) = (2 - \frac{1}{2}, 0)$ ، و دایرهٔ بوسان در $(0, 1)$ دایره‌ای است به شعاع ۴ و مرکز $(0, -3) = (0, 1 - 4)$. شکل ۴۲ بیضی را همراه با این دو دایرهٔ بوسان نشان می‌دهد.



شکل ۴۲

شتاب و مؤلفه‌هایش. بار دیگر فرض کنیم $P = P(t)$ نقطه پایان بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ بوده، و پارامتر t را زمان می‌گیریم. در این صورت، مثل حالت یک بعدی، شتاب \mathbf{a} نقطه متحرک P مشتق زمانی سرعت $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ تعریف می‌شود. لذا، تابع برداری

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt}$$

می‌باشد.

حال \mathbf{a} را نسبت به پایه موضعی مرکب از بردارهای یکه مماس و قائم \mathbf{T} و \mathbf{N} بسط می‌دهیم. چون

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{|d\mathbf{r}/dt|} = \frac{\mathbf{v}}{v},$$

داریم

$$\mathbf{v} = v\mathbf{T}.$$

لذا، طبق قواعد حاصل ضرب و زنجیره‌ای،

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(v\mathbf{T}) = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + v\frac{d\mathbf{T}}{ds}\frac{ds}{dt}.$$

اما $ds/dt = v$ و $d\mathbf{T}/ds = \kappa\mathbf{N}$ ، که در آن κ انحنا می‌باشد. پس نتیجه می‌شود که

$$(10) \quad \mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \kappa v^2\mathbf{N},$$

یا معادلاً

$$(10') \quad \mathbf{a} = \frac{dv}{dt}\mathbf{T} + \frac{v^2}{R}\mathbf{N},$$

که در آن $R = 1/\kappa$ شعاع انحنا می‌باشد. مؤلفه‌های (اسکالر) \mathbf{a} نسبت به پایه موضعی \mathbf{T} و \mathbf{N} مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب نام دارند، و با a_T و a_N نموده می‌شوند. لذا،

$$\mathbf{a} = a_T\mathbf{T} + a_N\mathbf{N},$$

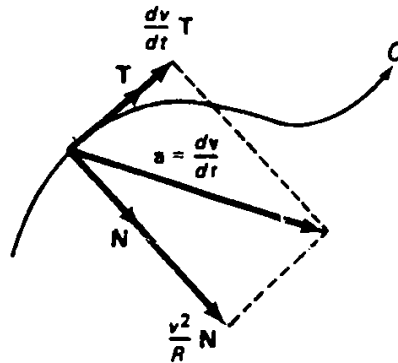
که در آن

$$(11) \quad a_T = \frac{dv}{dt}, \quad a_N = \kappa v^2 = \frac{v^2}{R}.$$

توجه کنید که (۱۱) را می‌توان به صورت زیر نیز نوشت:

$$(11') \quad a_T = \frac{d^2s}{dt^2}, \quad a_N = \kappa \left(\frac{ds}{dt}\right)^2 = \frac{1}{R} \left(\frac{ds}{dt}\right)^2.$$

در شکل ۴۳، بسط $\mathbf{a} = a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N}$ تعبیر هندسی شده است.



شکل ۴۳

مثال ۷. شتاب ذره‌ای را بیابید که یک دایره به شعاع R را با تندی ثابت v می‌پیماید.

حل. چون v ثابت است، داریم $dv/dt \equiv 0$. به علاوه، شعاع انحنا دایره همان شعاع معمولی R آن است. بنابراین، طبق (۱۱)،

$$\mathbf{a} = \frac{v^2}{R} \mathbf{N}.$$

لذا، مؤلفه مماسی شتاب صفر است، یا به طور غیرصوریتر، شتاب "مؤلفه مماسی ندارد" در واقع، شتاب \mathbf{a} مرکزگرا است، به این معنی که جهتش به سوی مرکز دایره است، و اندازه‌اش مقدار ثابت v^2/R را دارد.

مثال ۸. مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب ذره‌ای را بیابید که در امتداد سهمی $x = 2t, y = t^2$ در حرکت است.

حل. در اینجا، مثل مثال ۵،

$$v = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2} = \sqrt{4 + 4t^2} = 2\sqrt{1 + t^2}$$

و

$$\kappa = \frac{1}{2(1 + t^2)^{3/2}}.$$

لذا، طبق (۱۱)، مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب a عبارتند از

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{2t}{\sqrt{1+t^2}}, \quad a_N = \kappa v^2 = \frac{2}{\sqrt{1+t^2}}$$

مثلاً، ذره در لحظه $t = 1$ با $a_T = \sqrt{2}$ و $a_N = \sqrt{2}$ در نقطه $(2, 1)$ بوده، ولی در لحظه $t = 2$ با $a_T = 4/\sqrt{5}$ و $a_N = 2/\sqrt{5}$ در نقطه $(4, 4)$ می‌باشد. در واقع، چون

$$\mathbf{a} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d^2}{dt^2}(2ti + t^2j) = 2j,$$

شتاب به اندازه ثابت ۲ بوده و جهتش قائم روبه بالا می‌باشد. همچنین، توجه کنید که مؤلفه قائم شتاب را می‌توان بدون محاسبه انحنای κ پیدا کرد. در واقع، چون

$$|\mathbf{a}|^2 = a_T^2 + a_N^2 \quad (\text{چرا؟}) \quad \text{داریم}$$

$$a_N^2 = |\mathbf{a}|^2 - a_T^2 = 4 - \frac{4t^2}{1+t^2} = \frac{4}{1+t^2},$$

و در نتیجه، $a_N = 2/\sqrt{1+t^2}$.

مسائل

بردارهای یکه مماس و قائم T و N بر نمودار تابع برداری داده شده $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را بیابید.

۱. $\mathbf{r}(t) = 2ti - 5j$

۲. $\mathbf{r}(t) = 3ti + t^3j$ ($t > 0$)

۳. $\mathbf{r}(t) = 2t^3i + 3t^2j$ ($t > 0$)

۴. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)i + (2 \sin t)j$

۵. $\mathbf{r}(t) = (\sinh t)i + (\cosh t)j$

۶. $\mathbf{r}(t) = e^{-t}i + e^tj$

انحنای κ ی منحنی داده شده را در نقطه نظیر به مقدار ذکر شده از پارامتر t بیابید.

۷. $x = 3t^2, y = 3t - t^3, t = 1$

۸. $x = \frac{1}{3}t^3, y = t, t = -1$

۹. $x = t \cos t, y = t \sin t, t = \sqrt{3}$

۱۰. $x = \cos^3 t, y = \sin^3 t, t = \pi/4$

۱۱. $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, t = 0$

۱۲. $x = \cos t + t \sin t, y = \sin t - t \cos t, t = -2$

انحنای κ ی نمودار تابع داده شده را در نقطه ذکر شده بیابید .

۱۳ . $y = 4x - x^2$ در $(2, 4)$ ۱۴ . $y = x^3 + 1$ در $(-1, 0)$

۱۵ . $y = 2/x$ در $(1, 2)$ ۱۶ . $y = \ln x$ در $(1, 0)$

۱۷ . $y = xe^{-x}$ در $(1, 1/e)$ ۱۸ . $y = e^{-x^2}$ در $(0, 1)$

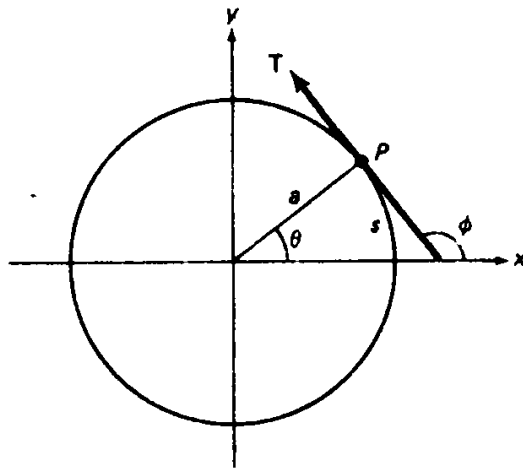
۱۹ . انحنای ماکزیم منحنی $y = e^x$ چیست و کجا صورت می‌گیرد؟

۲۰ . نشان دهید که شعاع انحنای منحنی $y = \cosh x$ در نقطه $P = (x, y)$ مساوی y^2 ، یعنی مجذور مختص y ، است .

۲۱ . فرض کنید دایره‌ای به شعاع a در امتداد یک خط مستقیم افقی بدون لغزش بغلظد .

در این صورت ، همانطور که در مثال ۷ ، صفحه ۷۲۹ ، نشان دادیم ، نقطه ثابت P از محیط دایره چرخزاد $x = a(t - \sin t), y = a(1 - \cos t)$ را می‌پیماید . شعاع انحنای R را در یک نقطه دلخواه چرخزاد بیابید . کجا R مساوی صفر است ؟ مساوی a است ؟ ماکزیم R چیست و کجا صورت می‌گیرد ؟

۲۲ . در مثال ۴ نشان دادیم که انحنای یک دایره به شعاع a مساوی $1/a$ است . با استفاده از شکل ۴۴ ، این امر را با محاسبه مستقیم $|d\phi/ds|$ نشان دهید .



شکل ۴۴

معادله دایره بوسان منحنی داده شده را در نقطه $(0, 1)$ بنویسید . در هر حالت ، منحنی و دایره را رسم نمایید .

۲۴ . $y = \cos(x/\sqrt{2})$

۲۳ . $y = 1/(x^2 + 1)$

۲۶ . $y = \sec x$

۲۵ . $y = e^x$

۲۷ . در چه نقاطی از سهمی $x^2 = 8y$ شعاع انحنای مساوی $1/16$ است ؟

۲۸ . شعاع انحنای بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ را در نقاط انتهایی محورهای اطول واقصر

آن تعیین کنید .

۲۹. فرض کنید C نمودار معادله $x^2 + xy + y^2 = 3$ باشد . شعاع انحنای C در نقطه $(1, 1)$ چقدر است؟

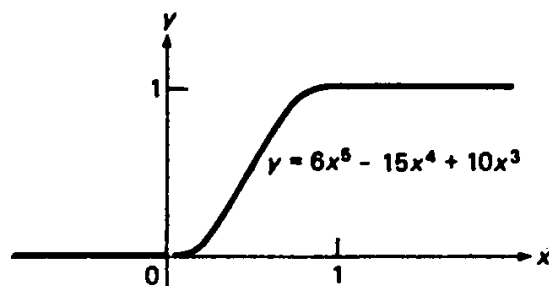
۳۰. نشان دهید که نمودار تابع

$$y = 6x^5 - 15x^4 + 10x^3 \quad (0 < x < 1)$$

دو قطعه جدا از هم تابع ناپیوسته

$$y = \begin{cases} 0 & , \quad x \leq 0 \\ 1 & , \quad x \geq 1 \end{cases}$$

را طوری به هم وصل می‌کند که منحنی حاصل ، که در شکل ۴۵ نموده شده ، شیب و انحنای پیوسته دارد . آیا می‌توانید مثالی از زندگی واقعی بزنید که در آن این مسئله ریاضی ظاهر شود؟



شکل ۴۵

۳۱ تا ۳۶. مؤلفه‌های مماسی و قائم a_T و a_N شتاب نقطه $P = P(t)$ با بردار موضع $r = r(t)$ در مسائل ۱ تا ۶ را بیابید .

۳۷. تحقیق کنید که انحنای $\kappa = \kappa(\theta)$ منحنی قطبی $r = r(\theta)$ مساوی است با

$$\kappa = \frac{|r^2 + 2r'^2 - rr''|}{(r^2 + r'^2)^{3/2}}, \quad (\text{یک})$$

که در آن $r' = dr/d\theta$ و $r'' = d^2r/d\theta^2$.

با استفاده از فرمول (یک) ، انحنای منحنی قطبی داده شده را در نقطه‌ای که θ ی آن ذکر شده پیدا نمایید .

۳۸ . $r = 4 \cos \theta, \theta = 10$

۳۹ . $r = 1 - \cos \theta, \theta = \pi$

۴۰ . $r = e^\theta, \theta = \ln 3$

۴۱. فرض کنید T و N بردارهای یکه مماس و قائم در یک نقطه از نمودار تابع با بردار موضع $r = xi + yj$ ، ϕ زاویه از محور x مثبت به T ، و T_1 بردار یکه حاصل از دوران T به اندازه 90° خلاف جهت عقربه‌های ساعت باشد. نشان دهید که

$$N = \begin{cases} T_1, & \text{اگر } d\phi/ds > 0 \\ -T_1, & \text{اگر } d\phi/ds < 0 \end{cases}$$

بخصوص، نشان دهید که اگر $x'y'' - y'x'' > 0$ از T با تغییر i به j و j به $-i$ به دست می‌آید، ولی اگر $x'y'' - y'x'' < 0$ از T با تغییر i به $-j$ و j به i حاصل خواهد شد.

۴۲ تا ۴۶. با استفاده از مسئله قبل، محاسباتی که در مسائل ۲ تا ۶ ما را از T به N می‌برند را ساده نمایید.

۵.۱۱ کاربردهایی در مکانیک

در این بخش چند مسئله دویبعدی از مکانیک نیوتنی را به کمک بردارها حل می‌کنیم. ذره‌ای به جرم m در نظر می‌گیریم که بر آن نیروی F اثر می‌کند. در این صورت، طبق قانون دوم حرکت نیوتن،

$$(1) \quad F = ma,$$

که در آن a شتاب ذره است. این تعمیم طبیعی صورت یک بعدی قانون نیوتن است که در بخش ۷.۴ مطالعه شد، ولی اینجا نیروی F و شتاب a هر دو برداراند. فرض کنیم F و a دارای مؤلفه‌های F_1, F_2 و a_1, a_2 نسبت به پایه متعامد یکه e_1, e_2 باشند. در این صورت، معادله برداری (۱) با جفت معادلات اسکالر زیر معادل است:

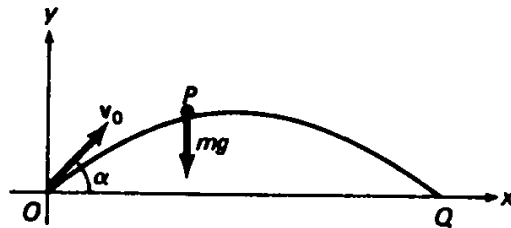
$$(1') \quad F_1 = ma_1, \quad F_2 = ma_2,$$

که با گرفتن مؤلفه از طرفین (۱) به دست می‌آید.

مثال ۱. حرکت یک گلوله. گلوله‌ای از یک توپ که زاویه ارتفاعش α است شلیک شده است. مسیر گلوله را در صورتی بیابید که تنیدی اولیه‌اش v_0 باشد. از انحنا و دوران زمین، و نیز مقاومت هوا، صرف نظر نمایید.

حل. در صفحه مسیر، یعنی در صفحه قائم شامل بردار سرعت اولیه v_0 ، یک دستگاه مختصات قائم اختیار می‌کنیم که محور y قائم و رو به بالا بوده و مبدأ O در موضع توپ

باشد^۱. در این صورت، بردار v_0 ، به اندازه v_0 ، با محور x مثبت زاویه α می‌سازد (ر. ک. شکل ۴۶، که در آن گلوله در یک لحظه در P بوده و مآلا " در Q فرود می‌آید). در نتیجه بر حسب پایه متعامد یکه $i = (1, 0)$ و $j = (0, 1)$ ، $v_0 = (v_0 \cos \alpha)i + (v_0 \sin \alpha)j$. تنها نیروی



شکل ۴۶

وارد بر گلوله وزن آن است؛ یعنی، نیروی رو به پایین

$$F = -mgj,$$

که در آن g شتاب ثقل می‌باشد. فرض کنیم $r(t) = x(t)i + y(t)j$ بردار موضع گلوله نسبت به توپ در لحظه t باشد. در این صورت، قانون نیوتن (۱) یک جفت معادله دیفرانسیل مرتبه دوم به دست می‌دهد:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad m \frac{d^2y}{dt^2} = -mg,$$

یا معادلا^۲، پس از تقسیم بر جرم m که دیگر نقشی در مسئله ندارد،

$$(۲) \quad \frac{d^2x}{dt^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{dt^2} = -g,$$

با انتگرالگیری از معادلات دیفرانسیل (۲)، به دست می‌آوریم

$$(۳) \quad \frac{dx}{dt} = A_1, \quad \frac{dy}{dt} = -gt + B_1,$$

و پس از انتگرالگیری نتیجه می‌دهد که

$$(۴) \quad x = A_1t + A_2, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + B_1t + B_2.$$

برای تعیین ثابتهای انتگرالگیری A_1 ، A_2 ، B_1 ، و B_2 ، شرایط اولیه^۳

$$(۵) \quad x(0) = y(0) = 0, \quad x'(0) = v_0 \cos \alpha, \quad y'(0) = v_0 \sin \alpha$$

۱. این امر که مسیر گلوله در صفحه قائم ثابتی شامل بردار v_0 قرار دارد در واقع نتیجه‌ای است از قانون نیوتن در بعد سه (ر. ک. مسئله ۳۱، صفحه ۱۱۹۵).

را اعمال می‌کنیم ($x' = dx/dt, y' = dy/dt$). این معادلات بیانگر آنند که گلوله، که ابتدا در حال سکون در لولهٔ توپ بوده، سرعت $v_0 = (v_0 \cos \alpha, v_0 \sin \alpha)$ را در لحظهٔ آتش $t = 0$ به دست می‌آورد. پس از روابط (۳) تا (۵) معلوم می‌شود که

$$A_1 = v_0 \cos \alpha, \quad A_2 = 0, \quad B_1 = v_0 \sin \alpha, \quad B_2 = 0,$$

و با گذاردن این مقادیر در (۴) یک جفت معادلهٔ

$$(۶) \quad x = (v_0 \cos \alpha)t, \quad y = -\frac{1}{2}gt^2 + (v_0 \sin \alpha)t$$

برای مسیر گلوله به دست می‌آید که در آن پارامتر t زمان است. با حذف t از معادلات پارامتری (۶)، معادلهٔ دکارتی

$$(۶') \quad y = x \tan \alpha - \frac{gx^2}{2v_0^2 \cos^2 \alpha}$$

به دست می‌آید که، همانطور که از شکل برمی‌آید، نمودارش یک سهمی است (ر. ک. صفحه ۹۳۵).

در مسائل ۱ تا ۱۲، حرکت گلوله‌ها بیشتر مورد بحث قرار می‌گیرد. حال به مسائل مربوط به حرکت مستدیر می‌پردازیم.

مثال ۲. یک قمر مصنوعی در ارتفاع ثابت ۱۰۰۰ میل مدار مستدیری را حول زمین طی می‌کند. تندی مداری v ی آن را بیابید.

حل. در اینجا پایهٔ متعامد یکه را پایهٔ موضعی مرکب از بردارهای یکهٔ مماس و قائم T و N بر مدار قمر، که دایره‌ای به مرکز O زمین است، می‌گیریم؛ لذا، N به سمت مرکز زمین می‌باشد. تنها نیروی وارد بر قمر نیروی جاذبهٔ ثقلی زمین است. این نیرو، مثل مثال ۸، صفحهٔ ۴۳۲، مساوی است با

$$F = \frac{GMm}{R^2} N,$$

که در آن G ثابت عمومی ثقل، M جرم زمین، و m جرم قمر می‌باشد. بنابر فرمول (۱۰')

۱. این امر که اگر قمر مصنوعی را با تندی مناسبی در مدار قرار دهیم، مدار مستدیر خواهیم داشت، در مثال ۱۰، صفحهٔ ۱۱۸۵، نشان داده شده است.

صفحه ۱۰۹۹، شتاب قمر مساوی است با

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + \frac{v^2}{R} \mathbf{N},$$

که در آن R شعاع (انحنای) مدار مستدیر است. در نتیجه، قانون دوم نیوتن $\mathbf{F} = m\mathbf{a}$ یا $\mathbf{a} = \mathbf{F}/m$ در پایه موضعی به صورت زیر درمی آید:

$$\frac{dv}{dt} \mathbf{T} + \frac{v^2}{R} \mathbf{N} = \frac{GM}{R^2} \mathbf{N}$$

با گرفتن مؤلفه‌های مماسی و قائم از طرفین این معادله برداری، دو معادله اسکالر

$$\frac{dv}{dt} = 0$$

و

$$(7) \quad v^2 = \frac{GM}{R}$$

به دست می آید، که اولی می گوید که تندی قمر ثابت است. همچنین، طبق فرمول (۱۸)، صفحه ۴۳۴،

$$G = \frac{gR_0^2}{M},$$

که در آن R_0 شعاع زمین و g شتاب ثقل است. پس از (۷) و معادله اخیر نتیجه می شود که

$$(8) \quad v = \sqrt{\frac{g}{R}} R_0$$

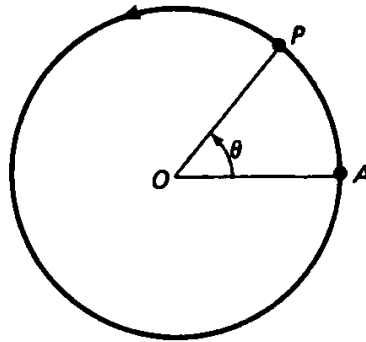
با قرار دادن $g = 32 \text{ ft/sec}^2$ ، $R_0 = 3960 \text{ mi}$ ، و $R = R_0 + 1000 = 4960 \text{ mi}$ در فرمول (۸) و توجه به این امر که $1 \text{ mi} = 5280 \text{ ft}$ ، ما "خواهیم داشت

$$v = \sqrt{\frac{32}{5280(4960)}} 3960 \approx 4.4 \text{ mi/sec.}$$

حرکت مستدیر یکنواخت. گوییم ذره P که یک مدار مستدیر را با تندی ثابتی، مثل مثال ۲، می پیماید حرکت مستدیر یکنواخت دارد. فرض کنیم P دارای تندی v بوده و شعاع دایره R باشد. در این صورت، P یک دور کامل دایره را در زمان

$$(9) \quad T = \frac{2\pi R}{v}$$

می‌پیماید، که آن را دوره تناوب حرکت می‌نامیم. فرض کنیم O مرکز دایره بوده، و θ زاویه از شعاع ثابت OA تا شعاع OP دایره باشد (ر.ک. شکل ۴۷). در این صورت، θ یک



شکل ۴۷

تابع خطی از زمان t است، و θ در یک دوره تناوب به اندازه 2π افزایش می‌یابد (فرض کنیم حرکت در جهت خلاف عقربه‌های ساعت باشد). بنابراین،

$$\theta = \frac{2\pi}{T} t + \theta_0,$$

که در آن ثابت θ_0 مقدار θ در $t = 0$ است، یا معادلاً

$$\theta = \omega t + \theta_0,$$

که در آن کمیت

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

تندی زاویه‌ای نام دارد (ω امگای کوچک یونانی است). لذا،

$$T = \frac{2\pi}{\omega},$$

و از مقایسه این فرمول با (۹) معلوم می‌شود که

$$v = R\omega.$$

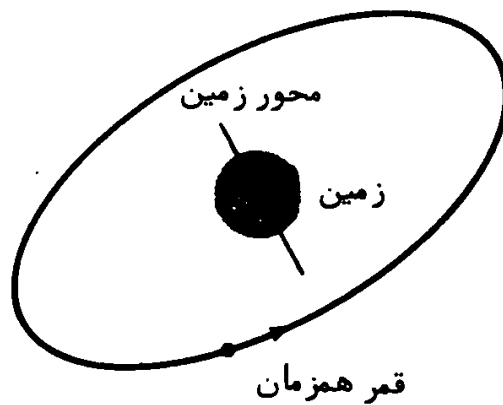
همچنین، باید توجه داشت که مؤلفه قائم شتاب یک ذره در حرکت مستدیر یکنواخت مساوی است با

$$(۱۰) \quad a_N = \frac{v^2}{R} = R\omega^2.$$

مثال ۳. یک قمر ارتباطات مدار مستدیری به شعاع R را در صفحه استوا و با تندی ثابت

v mi/sec طی می‌کند. انتخاب R چنان است که قمر مدام روی نقطه ثابتی از سطح زمین ظاهر می‌شود. ارتفاع قمر چقدر است؟

حل. چون قمر مدام در آسمان ظاهر می‌شود، حرکتش با دوران زمین هماهنگ است؛ یعنی، قمر با همان سرعتی دور زمین می‌گردد که زمین حول محور خود دوران دارد (ر.ک. شکل ۴۸). به عبارت دیگر، دوره تناوب حرکت مداری $T = 1$ روز = $24(60)^2$ sec.



شکل ۴۸

بنابراین، طبق فرمول (۹)،

$$24(60)^2 = \frac{2\pi R}{v},$$

که پس از جانشانی v از فرمول (۸)،

$$R = \frac{12(3600)v}{\pi} = \frac{12(3600)R_0}{\pi} \sqrt{\frac{g}{R}},$$

لذا،

$$R^{3/2} = \frac{12(3600)R_0 \sqrt{g}}{\pi},$$

و در نتیجه،

$$R = \left[\frac{12(3600)(3960)}{\pi} \sqrt{\frac{32}{5280}} \right]^{2/3} \approx 26,190 \text{ mi.}$$

لذا، ارتفاع قمر از سطح زمین حدوداً $26,190 - 3960 = 22,230$ mi می‌باشد. به عنوان تمرین، نشان دهید که سرعت حدوداً 1.9 mi/sec است.

از فرمولهای (۷) و (۹) معلوم می‌شود که دوره تناوب T قمر که حرکت مستدیر یکنواخت حول مرکز جاذبهٔ ثقلی جرم M دارد مساوی است با

$$(11) \quad T = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R^{3/2},$$

یا معادلا" (۱۱')

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} R^3.$$

لذا، مربع دوره تناوب قمر با مکعب شعاع مدارش متناسب است. این قانون سوم کپلر^۱ برای حالت خاصی است که مدار قمر مستدیر است (در حالت کلی، مدار بیضی است). قوانین کپلر حرکت سیاره‌ای به تفصیل در بخش ۵.۱۲ مطرح خواهند شد.

مثال ۴. مدار ماه تقریباً "مستدیر است"، و دوره گردش آن حول زمین تقریباً "27.3 روز است". شعاع مدار ماه چقدر است؟

حل. بنا بر (۱۱)،

$$T_m = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R_m^{3/2},$$

که در آن T_m و R_m دوره گردش ماه و شعاع مدارش می‌باشند (G ثابت عمومی ثقل و M جرم زمین است). به همین نحو،

$$1 \text{ (روز)} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} R_s^{3/2},$$

که در آن R_s شعاع مدار یک قمر در حرکت همزمان حول زمین است. از تقسیم معادله اول بر معادله دوم، معلوم می‌شود که

$$T_m = \left(\frac{R_m}{R_s} \right)^{3/2},$$

در نتیجه،

$$R_m = T_m^{2/3} R_s.$$

اما، همانطور که در مثال ۳ دیدیم، $R_s \approx 26,190 \text{ mi}$ ، و در نتیجه،

$$R_m \approx (27.3)^{2/3}(26,190) \approx 237,500 \text{ mi.}$$

مثال ۵. در آزمون خلبنانی برای تحمل شتابهای زیاد، شخصی در یک دایره افقی به شعاع ۱۰ ft با دستگاه سانتریفوژ بزرگ گردانده می شود. در چه تندی زاویه‌ای ω شتاب $3g$ بر وی وارد می شود؟

حل. با مساوی $3g$ قرار دادن شتاب قائم (۱۰)، به دست می آوریم $R\omega^2 = 3g$ یا

$$\omega = \sqrt{\frac{3g}{R}}$$

که، پس از قرار دادن $R = 10 \text{ ft}$ و $g = 32 \text{ ft/sec}^2$ ، به دست می آوریم

$$\omega = \sqrt{9.6} \approx 3.1 \text{ rad/sec}$$

با واحد سنجشی آشناتر، (دور بر دقیقه) $\omega = 60\sqrt{9.6}/2\pi \approx 29.6 \text{ rpm}$

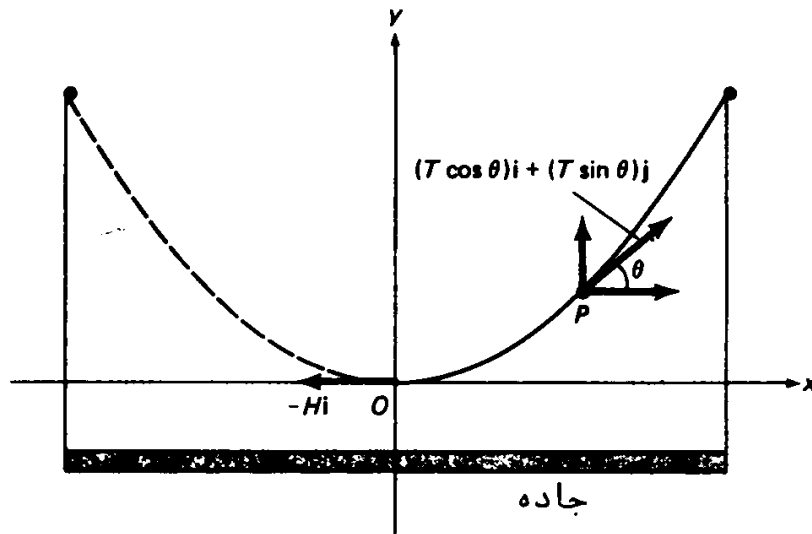
پل معلق. در خاتمه به چند مسئله از استاتیک می پردازیم، که در آنها یک "دستگاه" از ذره‌ها در حال تعادل است؛ در نتیجه، هیچ حرکتی وجود ندارد.

مثال ۶. شکل پل معلق را بیابید که جاده‌ای به وزن w بر واحد طول را تحمل می کند. از وزن خود کابل در مقایسه با وزن جاده صرف نظر نمایید.

حل. در صفحه کابل یک دستگاه مختصات قائم اختیار می کنیم که محور y قائم و روبه بالا بوده و مبدأ O در پایین ترین نقطه کابل، مثل شکل ۴۹، باشد. (اگر دو کابل موازی وجود داشته باشند، همین مسئله را با هر کابل که نصف وزن جاده را تحمل می کند حل می کنیم). فرض کنیم $P = (x, y)$ نقطه‌ای از کابل سمت راست O باشد. در این صورت، قطعه OP از کابل تحت سه نیرو قرار دارد، کشش افقی H که OP را به چپ در O می کشاند، کشش مماسی به اندازه T که OP را به راست و بالا در P می کشاند، و وزن wx ، x فوت جاده که OP را به طور قائم به پایین می کشاند. لذا، نیروی کل وارد بر OP مساوی است با

$$\mathbf{F} = (T \cos \theta - H)\mathbf{i} + (T \sin \theta - wx)\mathbf{j}$$

که در آن بردارهای یکه \mathbf{i} و \mathbf{j} معانی عادی خود را داشته و θ میل مماس بر کابل در P



شکل ۴۹

می باشد (ر.ک. شکل). برای تعادل OP لازم است $\mathbf{F} = \mathbf{0}$ ، زیرا در غیر این صورت قانون دوم حرکت نیوتن شتاب OP را به دست می دهد^۱. بنابراین،

$$(۱۲) \quad T \cos \theta = H, \quad T \sin \theta = wx,$$

و از تقسیم معادله دوم بر معادله اول، به دست می آوریم

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{H} x,$$

که در آن $y = y(x)$ معادله کابل در حال تعادل است. (چرا همین نتیجه در صورتی که P سمت چپ O باشد به دست می آید؟) با انتگرالگیری از این معادله دیفرانسیل، معلوم می شود که

$$y = \int \frac{w}{H} x dx + C = \frac{w}{2H} x^2 + C.$$

اما $y(0) = 0$ ، زیرا مبدأ روی منحنی $y = y(x)$ اختیار شده است. لذا، ثابت انتگرالگیری C صفر بوده و

$$y = \frac{w}{2H} x^2.$$

لذا، کابل به شکل سهمی می باشد.

۱. در اینجا ما عملاً "قانون نیوتن را بر دستگاه ذرات سازای OP اعمال می کنیم". این را می توان با استدلالی که در آغاز بخش ۳.۱۴ شد توجیه کرد.

زنجیر آویزان . اگر جاده وجود نداشته باشد ، باید وزن خود کابل نیز به حساب آید . در این صورت ، همانطور که مثال زیر نشان می دهد ، منحنی $y = y(x)$ دیگر سهمی نیست .

مثال ۷ . زنجیری به وزن w بر واحد طول از دو تکیه گاه به ارتفاع مساوی آویزان شده است (شکل ۴۹ را بدون جاده تصور کنید) . شکل زنجیر آویزان را بیابید .

حل . مثل مثال ۶ ، فرض کنیم $P = (x, y)$ نقطه ای از زنجیر باشد ، و نیروهای وارد بر قطعه OP از زنجیر را تحلیل می کنیم ، که در آن مبدأ O در پایین ترین نقطه زنجیر است . مجدداً OP تحت کشش افقی H است که OP را در O می کشد و نیرویی مماسی به اندازه T است که OP را در P می کشد ، ولی اینجا نیروی رو به پایین ws است (نه wx) ، که در آن s طول قطعه OP می باشد . لذا ، به جای معادلات تعادل (۱۲) ، داریم

$$(12) \quad T \cos \theta = H, \quad T \sin \theta = ws,$$

که با (۱۲) فقط در وجود s به جای x در معادله دوم تفاوت دارد . پس از (۱۲) معلوم می شود که

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{w}{H} s.$$

با مشتگیری از این معادله نسبت به x ، به دست می آوریم

$$(13) \quad \frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{H} \frac{ds}{dx}.$$

اما

$$\frac{ds}{dx} = \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2}$$

(در فرمول (۱۰) ، صفحه ۱۰۸۵ ، قرار می دهیم $t = x$) . بنابراین ، (۱۳) به صورت زیر درمی آید :

$$\frac{d^2y}{dx^2} = \frac{w}{H} \sqrt{1 + \left(\frac{dy}{dx}\right)^2},$$

یا ، بر حسب متغیر کمکی $p = dy/dx$ ،

$$(14) \quad \frac{dp}{dx} = \frac{w}{H} \sqrt{1 + p^2}$$

با جداسازی متغیرها در معادله دیفرانسیل (۱۴) و انتگرالگیری ، به دست می آوریم

$$\int \frac{dp}{\sqrt{1+p^2}} = \int \frac{w}{H} dx + C_1,$$

که در آن C_1 ثابت انتگرالگیری است. بنابراین، به کمک فرمول (۲)، صفحه ۵۷۳،

$$\sinh^{-1} p = \frac{wx}{H} + C_1,$$

یا معادل آن

$$p = \frac{dy}{dx} = \sinh \left(\frac{wx}{H} + C_1 \right)$$

شیب $p = dy/dx$ منحنی $y = y(x)$ در پایین‌ترین نقطه خود صفر است (چرا؟)؛ در نتیجه،

$p|_{x=0} = 0$ ، که ایجاب می‌کند که $C_1 = 0$. لذا،

$$p = \frac{dy}{dx} = \sinh \frac{wx}{H},$$

و، با انتگرالگیری مجدد، خواهیم داشت

$$(15) \quad y = \int \sinh \frac{wx}{H} dx + C_2 = \frac{H}{w} \cosh \frac{wx}{H} + C_2,$$

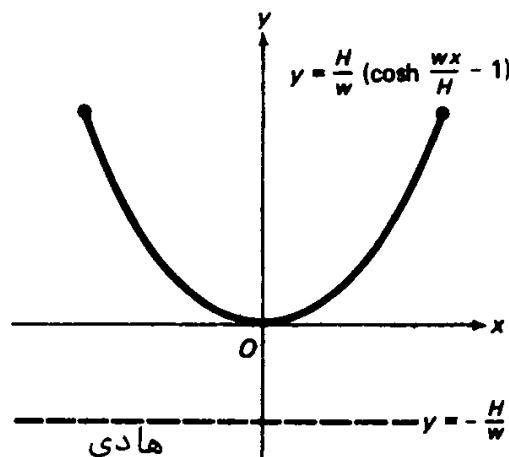
که در آن C_2 ثابت انتگرالگیری دیگری است. برای تعیین C_2 ، شرط $y(0) = 0$ را اعمال می‌کنیم

(مبداء روی منحنی است)، که ایجاب می‌کند که

$$0 = \frac{H}{w} + C_2$$

یا $C_2 = -H/w$. بنابراین، (۱۵) به صورت زیر درمی‌آید:

$$(16) \quad y = \frac{H}{w} \left(\cosh \frac{wx}{H} - 1 \right).$$



شکل ۵۰

نمودار این معادله، که در شکل ۵۰ نموده شده، یک منحنی زنجیری نام دارد. خط افقی $y = -H/w$ هادی منحنی زنجیری است. از (۱۶) نتیجه می‌شود که هرگاه Y فاصله هادی تا نقطه $P = (x, y)$ از منحنی زنجیری باشد، آنگاه

$$(16) \quad Y = \frac{H}{w} \cosh \frac{wx}{H}.$$

مسائل

همانند مثال ۱، گلوله‌ای از یک توپ به زاویه ارتفاع α با تندی اولیه (سرعت گریز) v_0 شلیک شده است.

۱. زمان کل پرواز گلوله از توپ تا هدف چقدر است؟
۲. ارتفاع ماکزیمم گلوله از سطح زمین و زمان صورت گرفتن آن چقدر است؟
۳. برد (افقی) توپ، یعنی مسافت $|OQ|$ در شکل ۴۶، را بیابید.
۴. نشان دهید که برد ماکزیمم توپ، وقتی زاویه ارتفاع 45° باشد، مساوی v_0^2/g است.
۵. سرعت گریز لازم برای آنکه برد ماکزیمم توپ 20 mi باشد چقدر است؟
۶. نشان دهید که هر هدف که فاصله‌اش تا توپ از v_0^2/g (برد ماکزیمم) کمتر باشد را می‌توان با دو زاویه ارتفاع مختلف مورد اصابت قرار داد.
۷. رأس و هادی مسیر سهموی گلوله را بیابید.
۸. نشان دهید که ارتفاع هادی همان ارتفاعی است که گلوله شلیک شده با سرعت گریز v_0 به بالا به آن می‌رسد (ولذا، به زاویه ارتفاع توپ بستگی ندارد).
۹. برد ماکزیمم یک توپ 10 mi است. برد آن در صورت شلیک با زاویه ارتفاع 30° چقدر است؟
۱۰. دو زاویه ارتفاع بیابید که یک خمپاره انداز با سرعت گریز 2000 ft/sec بتواند هدفی را در فاصله 15 mi بزند.
۱۱. هواپیمایی که در ارتفاع 200 ft با تندی ثابت 300 mph به طور افقی پرواز می‌کند بمبی را روی انبار مهمات دشمن می‌اندازد. بمب وقتی رها می‌شود که خط مستقیم دید از هواپیما به انبار زاویه مشخصی با افق می‌سازد. این زاویه چقدر باید باشد تا بمب مستقیماً به هدف برخورد؟
۱۲. یک توپ کشیده به ارتفاع 75 ft پرتاب، و در فاصله 400 ft از محل پرتاب گرفته شده است. توپ چه مدت در هوا بوده است؟ زاویه α بین مسیر توپ و افق را در لحظه پرتاب بیابید. تندی اولیه v_0 توپ چقدر است؟ (از مقاومت هوا صرف نظر کنید).

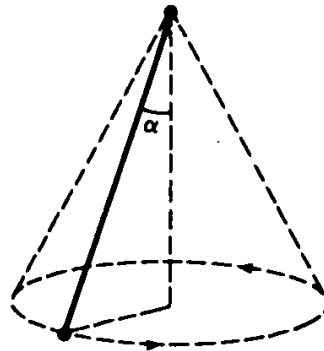
برای یک قمر مصنوعی در مداری مستدیر حول زمین و در ارتفاع داده شده (از سطح زمین)،
تندی v را به میل بر ثانیه و دوره تناوب T را به دقیقه پیدا نمایید.

۱۳. 500 mi ۱۴. 2500 mi ۱۵. 5000 mi ۱۶. 10,000 mi

۱۷. برای یک قمر مصنوعی در مداری مستدیر که با سطح زمین تماس دارد، تندی v را به
میل بر ثانیه و دوره تناوب T را به دقیقه پیدا کنید. (از مقاومت هوا صرف نظر
کنید.)

۱۸. در مثال ۵ تندی زاویه‌ای لازم برای داشتن شتاب $5g$ ؛ $10g$ چقدر است؟

۱۹. در دستگاهی به نام پاندول مخروطی، جسمی ("گلوله" پاندول) به نخ به
طول L بسته شده و در دایره‌ای افقی با تندی ثابت v چنان می‌گردد که نخ یک مخروط
مستدیر قائم با محور قائم جارو می‌کند (ر.ک. شکل ۵۱). v را در صورتی بیابید که
نخ به طول 120 cm بوده و زاویه α بین نخ و قائم 30° باشد. اگر جرم جسم 50 گرم
باشد، کشش T در نخ چقدر است (از $g = 980 \text{ cm/sec}^2$ استفاده کنید.)



شکل ۵۱

۲۰. جسمی به یک طناب بسته شده و در یک دایره قائم به شعاع R می‌گردد. این حرکت

مستدیر (که یکنواخت نیست) را فقط وقتی می‌توان داشت که تندی جسم در بالای

دایره دست کم به اندازه تندی بحرانی v_{cr} باشد. نشان دهید که $v_{cr} = \sqrt{gR}$.

۲۱. یک سطل پر آب در انتهای طنابی بسته شده و دور یک دایره قائم به شعاع 80 cm

می‌چرخد. تندی زاویه‌ای لازم برای جلوگیری از ریزش آب چقدر است؟

۲۲. مدار زمین به یک دایره به شعاع $1.5 \times 10^8 \text{ km}$ خیلی نزدیک است. با این فرض که

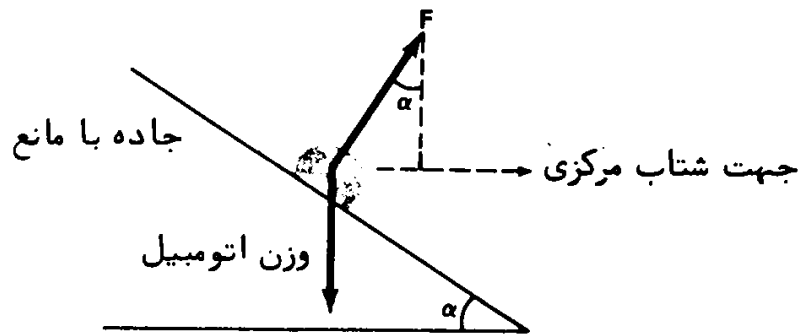
ثابت عمومی ثقل G تقریباً $6.67 \times 10^{-20} \text{ km}^3/\text{kg}$ است، جرم خورشید را تخمین بزنید.

۲۳. مشتری 14 ماه دارد که چهار تای آنها، یعنی "قمرهای گالیله" که عبارتند از یو،

اوپروپا، گانیمد و کالیستو، توسط گاليله در ۱۶۱۰ کشف شدند. فرض کنیم T دوره تناوب و n شعاع مدار یک ماه مشتری باشد که با شعاع مشتری سنجیده می شود. در این صورت، بنابر اطلاعاتی که جان فیلم استید^۱، ستاره شناس سلطنتی معاصر نیوتن، به دست آورده است، نسبت n^3/T^2 حدوداً $7.5 \times 10^{-9} \text{ sec}^{-2}$ بوده و برای هر چهار قمر گاليله یکی است، که قانون سوم کپلر را تأیید می کند. با استفاده از این و مقدار G داده شده در مسئله قبل، نشان دهید که چگالی ρ مشتری در حدود چگالی آب است.

۲۴. وقتی یک اتومبیل در پیچ جاده حرکت می کند، اصطکاک وازد بر لاستیکها از طرف جاده شتاب مرکزی تولید می کند. این نیرو با وزن اتومبیل متناسب بوده و ثابت تناسب μ را ضریب اصطکاک می نامند. اگر اصطکاک نباشد، اتومبیل "روی مماس از مسیر منحرف می شود". یعنی، واژگون می گردد. اگر $\mu = 0.5$ ، سرعت یک اتومبیل در یک جاده به شعاع انحنای 625 ft چقدر باید باشد تا واژگون نشود؟

۲۵. با ایجاد "مانع" در یک جاده خمیده، مثل شکل ۵۲، می توان از واژگون شدن اتومبیل جلوگیری کرد. در این صورت



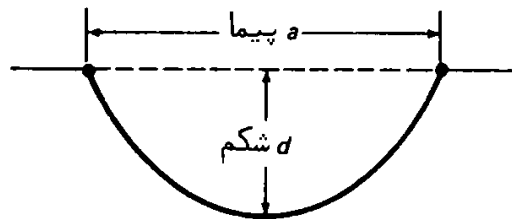
شکل ۵۲

حتی وقتی بین جاده و لاستیکها اصطکاک محسوسی وجود نداشته باشد، مؤلفه افقی نیروی قائم واکنش F وارد از جاده بر اتومبیل را می توان با شتاب مرکزی لازم تأمین کرد مشروط بر اینکه تندی اتومبیل چندان زیاد نباشد. تندی متزاید v_c منحنی با مانع تندی ماکزیمی تعریف می شود که در آن اتومبیل می تواند بدون کمک گرفتن از اصطکاک واژگون نشود (تصور کنید اتومبیل روی یک قطعه یخ خیس حرکت می کند).

۲۶. نشان دهید $v_c = \sqrt{gR \tan \alpha}$ ، که در آن R شعاع انحنای جاده و α زاویه مانع باشد. یک مرد تنومند بر دوچرخه ای در دایره افقی داخل یک بشکه استوانه ای بزرگ به شعاع R سوار است. این فقط وقتی میسر است که بین بشکه و لاستیکهای دوچرخه

اصطکاک موجود بوده و تندی دوچرخه دست کم به اندازه تندی بحرانی v_{cr} باشد .
 نشان دهید $v_{cr} = \sqrt{gR/\mu}$ ، که در آن μ ضریب اصطکاک می باشد . (در واقع، دوچرخه
 نیز باید کمی به بالا کج شده باشد ، ولی از این صرف نظر کرده و دوچرخه و راننده
 را یک ذره تلقی می کنیم .)

۲۷ . فاصله a بین نقاط تکیه گاه یک کابل (یا زنجیر) پیمای آن نام دارد ، و فاصله قائم
 d بین نقاط تکیه گاه و پایین ترین نقطه کابل شکم نامیده می شود (ر . ک . شکل ۵۳) .



شکل ۵۳

در کابل سهموی مثال ۶ ، رابطه بین پایما و شکم چیست ؟ نشان دهید که کشش ماکزیمم
 کابل در هر نقطه از تکیه گاه مساوی $\sqrt{H^2 + \frac{1}{4}w^2a^2}$ است . کشش مینیمم چقدر و کجا
 می باشد ؟

۲۸ . پیمای یک پل معلق دو کابلی 200 ft ، شکم هر کابل 50 ft ، و وزن جاده 400 تن است .
 با فرض یکنواخت بودن جاده ، کشش هر کابل در وسط آن ؟ در هر نقطه از تکیه گاه
 چقدر است ؟

۲۹ . فرض کنید s طول منحنی زنجیری (۱۶) بین پایین ترین نقطه و نقطه (x, y) باشد .
 نشان دهید که

$$s = \frac{H}{w} \sinh \frac{wx}{H}.$$

۳۰ . پایما و شکم زنجیر مثال ۷ چه رابطه ای با هم دارند ؟ نشان دهید که کشش ماکزیمم
 زنجیر در هر نقطه از تکیه گاه $H + wd$ است . کشش مینیمم چقدر و کجا صورت می گیرد ؟

۳۱ . نشان دهید که یک منحنی زنجیری کشیده (H/w بزرگ) نزدیک به سهموی است .

۳۲ . یک طناب سنگین به طول 40 m دارای شکم 10 m است . پیمای آن چیست ؟

اصطلاحات و مباحث کلیدی

اسکالرها و بردارها

اعمال جبری بر بردارها

بردارهای اساسی ، مؤلفه‌های یک بردار
 پایه‌های متعامد و متعامد یکه
 نمایش بردارها به وسیلهٔ جفت‌های مرتب
 حاصل ضرب نقطه‌ای
 تصویر یک بردار روی دیگری
 کار به عنوان حاصل ضرب نقطه‌ای
 توابع برداری
 حد یک تابع برداری
 مشتقگیری و انتگرالگیری از توابع برداری
 سرعت و تندی
 تابع طول قوس ، طول قوس به عنوان پارامتر
 بردار یکه مماس
 بردار یکه قائم
 انحنا ، شعاع انحنا ، دایرهٔ انحنا
 شتاب ، مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب
 حرکت گلوله
 حرکت مستدیر یکنواخت
 پل معلق و کابل آویزان

مسائل تکمیلی

فرض کنید $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}$ ، $\mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j}$ ، و $\mathbf{c} = 5\mathbf{i} + 3\mathbf{j}$. حاصل عبارات زیر را بیابید .

۱. $-\mathbf{a} + 3\mathbf{b} - 2\mathbf{c}$ ۲. $\mathbf{a} - 2\mathbf{b} + \mathbf{c}$ ۳. $4\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$

۴. $\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{|\mathbf{a} + \mathbf{b}|}$ ۵. $\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b}}{|\mathbf{b} + \mathbf{c}|}$ ۶. $\frac{\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c}}{|\mathbf{a} - \mathbf{b} - \mathbf{c}|}$

۷. چه شرطی بر $|\mathbf{a}|$ و $|\mathbf{b}|$ تضمین می‌کند که $\mathbf{a} + \mathbf{b}$ زاویهٔ بین \mathbf{a} و \mathbf{b} را نصف می‌کند؟

۸. فرض کنید $OABCDE$ یک شش ضلعی منتظم به طول ضلع ۱ باشد. \overrightarrow{OB} ، \overrightarrow{BC} ، \overrightarrow{EO} ، \overrightarrow{OD} ،

و \overrightarrow{DA} را به صورت ترکیباتی خطی از بردارهای یکه $\mathbf{u} = \overrightarrow{OA}$ و $\mathbf{v} = \overrightarrow{AB}$ بیان نمایید .

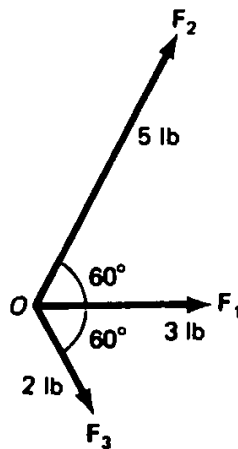
۹. رئوس یک چندضلعی منتظم P_1, P_2, \dots, P_n و مرکز آن O است . نشان دهید که

$$\overrightarrow{OP}_1 + \overrightarrow{OP}_2 + \dots + \overrightarrow{OP}_n = \mathbf{0}$$

۱۰. شخصی می‌تواند قایقی را با تندی 5 mph پارو بزند . او می‌خواهد از یک رودخانهٔ

مستقیم به پهنای ۱ میل که در آن آب با سرعت 3-mph جریان دارد بگذرد. در چه جهتی باید پارو بزند تا هرچه زودتر از رودخانه عبور کند؟ در چه جهتی باید پارو بزند که مستقیماً "به نقطه" مقابل در آن طرف برسد، و این کار چقدر طول خواهد کشید؟

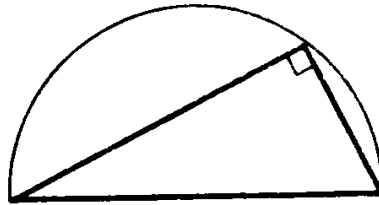
۱۱. $|a - b|$ را در صورتی بیابید که $|a| = 13, |b| = 19, |a + b| = 24$.
۱۲. نشان دهید که $a \cdot b = \frac{1}{4}|a + b|^2 - \frac{1}{4}|a - b|^2$.
۱۳. $|a + b|$ و $|a - b|$ را در صورتی بیابید که $|a| = 5, |b| = 8$ ، و زاویه بین a و b مساوی $2\pi/3$ باشد.
۱۴. نشان دهید که هر چهار ضلعی که اقطارش منصف هم باشند باید متوازی الاضلاع باشد.
۱۵. بردارهای $a = 2ti + j$ و $b = i + 2tj$ به ازای چه مقادیری از t موازیند؟ برهم عمودند؟
۱۶. فرض کنید u_1 و u_2 دو بردار یک‌باشند که باهم زاویه $\pi/3$ می‌سازند. طول اقطار متوازی الاضلاع پیموده شده به وسیله بردارهای $a = 2u_1 + u_2$ و $b = u_1 - 2u_2$ را بیابید.
۱۷. زاویه حاده بین اقطار یک مستطیل به طول 5 و عرض 3 چقدر است؟
۱۸. زاویه بین پاره‌خطهای مرسوم از یک رأس مستطیل به طول 6 و عرض 4 تا نقاط میانی اضلاع مقابل چقدر است؟
۱۹. یک اتومبیل به وزن 2100-lb با تنیدی ثابت 25 mph از یک شیب 30° بالا می‌رود. توان مینیمم موتور اتومبیل چقدر است؟ از اصطکاک صرف نظر کنید.
۲۰. اندازه و جهت برآیند سه نیروی شکل ۵۴ را که همه بر O اثر می‌کنند پیدا نمایید.



شکل ۵۴

۲۱. $\text{proj}_{\vec{CD}} \vec{AB}$ و $\text{proj}_{\vec{AB}} \vec{CD}$ را به ازای نقاط $A = (1, 2), B = (2, 3), C = (3, 4)$ ، و $D = (4, 1)$ حساب کنید.

۲۲. با استفاده از بردارها، نشان دهید که هر زاویه محاط شده در یک نیمدایره قائمه است (ر.ک. شکل ۵۵).



شکل ۵۵

۲۳. فرض کنید \mathbf{r} بردار موضع یک نقطه متغیر در صفحه بوده، و \mathbf{a} بردار موضع نقطه ثابتی باشد. با استفاده از حاصل ضرب نقطه‌ای، معادله برداری دایره مار بر مبداء و مرکز نقطه پایان \mathbf{a} را بنویسید.

۲۴. با استفاده از بردارها، نشان دهید که خط‌واصل بین مراکز دو دایره متقاطع برخط‌واصل بین نقاط اشتراک عمود است. حدود زیر را حساب کنید.

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos t}{t} \mathbf{i} + \frac{t - \sin t}{t^3} \mathbf{j} \right) \quad \cdot 25$$

$$\lim_{t \rightarrow -\infty} \left(\frac{2}{\tanh t} \mathbf{i} + \frac{|t|}{t} \mathbf{j} \right) \quad \cdot 26$$

$$\frac{d}{dt} [(\arcsin t)\mathbf{i} - (\arccos t)\mathbf{j}] \quad \cdot 27$$

$$\frac{d}{dt} \left(\sqrt{t+1} \mathbf{i} + \frac{2}{t+1} \mathbf{j} \right) \quad \cdot 28$$

$$\frac{d}{dt} [(t^2 e^t)\mathbf{i} + (\tanh^{-1} t)\mathbf{j}] \quad \cdot 29$$

$$\int_0^1 \left(\frac{1}{1+t^2} \mathbf{i} - \frac{1}{4-t^2} \mathbf{j} \right) dt \quad \cdot 30$$

$$\int_0^{\pi/3} [(\tan t)\mathbf{i} + (\sec t)\mathbf{j}] dt \quad \cdot 31$$

$$\int [(t \sin t)\mathbf{i} + (te^{-t})\mathbf{j}] dt \quad \cdot 32$$

۳۳. $\vec{r} \cdot (d\vec{r}/dt) \equiv 0$ آیا \vec{r} ایجاب می‌کند که اندازه \vec{r} تابع برداری $\vec{r} = \vec{r}(t)$ ثابت باشد؟ جواب خود را توضیح دهید.

۳۴. جوابی از معادله دیفرانسیل برداری $d\vec{r}/dt = c\vec{r}$ بیابید که در شرط اولیه $\vec{r}(0) = \vec{r}_0$ صدق کند. در اینجا c یک اسکالر ثابت بوده، و \vec{r}_0 بردار ثابتی می‌باشد.

بردارهای یکه مماس و قائم T و N بر منحنی داده شده در نقطه \vec{r} نظیر به مقدار ذکر شده از پارامتر t را بیابید.

۳۵. $x = t^4 - 2t^2, y = t^3 + 1, t = -1$ ۳۶. $x = t + \cos t, y = \sin t, t = \pi/6$

۳۷. $x = \ln(t + 1), y = e^t, t = 0$ ۳۸. $x = \sec t, y = \tan t, t = \pi/4$

۳۹. انحنای $k = \kappa(x)$ منحنی $y = \ln(\sec x)$ را بیابید.

۴۰. نشان دهید که شعاع انحنای $R = R(\theta)$ لمنیسکات $r^2 = \cos 2\theta$ در هر نقطه غیر از مبدا با مختص شعاعی r تناسب معکوس دارد.

برای دایره بوسان منحنی داده شده در نقطه $(1, 1)$ معادله بنویسید. در هر حالت، منحنی و دایره را رسم کنید.

۴۱. سهمی $y = x^2$ ۴۲. هذلولی $xy = 1$

۴۳. توپی را از یک پنجره به ارتفاع 64 ft به طور افقی به خارج پرتاب می‌کنیم. توپ در

در فاصله 100 ft از دیوار ساختمان به زمین می‌خورد. تندی اولیه توپ چقدر است؟

۴۴. گلوله‌ای از یک خمپاره‌انداز با سرعت گریز 600 m/sec با زاویه ارتفاع 60° شلیک شده

است. گلوله چقدر بالا می‌رود؟ فاصله محل فرود گلوله تا خمپاره‌انداز چقدر است،

و چقدر در هوا می‌ماند؟ (از $g = 9.8 \text{ m/sec}^2$ استفاده کنید.)

۴۵. شخصی که در یک اتومبیل روباز در یک جاده مستقیم حرکت می‌کند تفنگ خود را به

طور قائم به بالا شلیک می‌کند. اگر تندی اتومبیل تغییر نکند، کجا گلوله به زمین

می‌رسد؟ (از مقاومت هوا صرف نظر می‌شود.)

۴۶. یک شکارچی با تیر و کمان مستقیماً "جانوری را که از یک شاخه درخت آویزان است

نشانه می‌رود. تیر درست به شاخه نرسیده، بلکه در عوض به تنه درخت جایی زیر

شاخه می‌خورد. نشان دهید اگر جانور اشتباه کرده و در لحظه پرتاب تیر خود را از

شاخه رها کند مورد اصابت قرار خواهد گرفت.

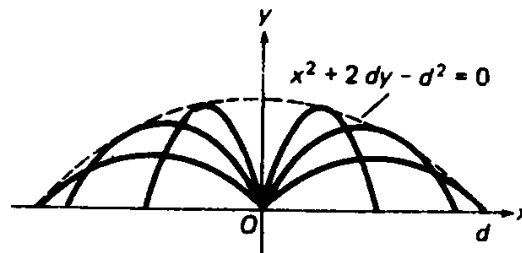
۴۷. یک توپ با برد ماکزیمم d واقع در مبدا در چه دوزاویه ارتفاعی می‌تواند هدف

واقع در $(\frac{1}{2}d, \frac{1}{4}d)$ را بزند؟

۴۸. نشان دهید که توپ مسئله قبل می‌تواند هر هدف داخل یاروی سهمی $x^2 + 2dy - d^2 = 0$

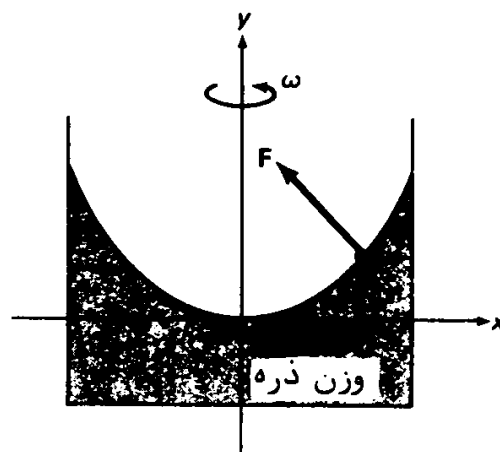
را بزند ولی، همانطور که شکل ۵۶ نشان می‌دهد، هیچ هدف داخل این سهمی را

نخواهد زد.



شکل ۵۶

۴۹. یک خلبان برای یک لحظه می‌تواند شتاب $8g$ ولی نه بیشتر را تحمل کند. اگر تندی هواپیما 420 mph باشد. شعاع انحنای ماکزیممی که خلبان می‌تواند هواپیما را در آخر شیرجه به بالا برگرداند چقدر است؟
۵۰. تندی متزاید (ر.ک. مسئله ۲۵، صفحه ۱۱۱۲) یک جاده مستدیر به شعاع 2250 ft که در زاویه 30° سد شده است چقدر است؟
۵۱. مقطع مستدیر یک راه آهن، به شعاع 1 mi ، برای اطمینان تا تندی 120 mph سد شده است. فاصله بین ریلها $4 \text{ ft } 8\frac{1}{2}$ است (فاصله متعارف). "ابر ارتفاع" h ، یعنی ارتفاع ریل خارجی بالای ریل داخلی، را پیدا کنید.
۵۲. یک سطل استوانه‌ای که قدری آب دارد با تندی زاویه‌ای ثابت ω حول محورش می‌گردد. آب، که ابتدا در حالت سکون است، مالا "سرعت دورانی سطح را می‌یابد. نشان دهید که شکل تعادل سطح آب یک سهمی گون دوار است. ω را در صورتی بیابید که قطر سطل 1 ft و سطح آب در مرکز سطل 4 in زیر سطح آب در محیط باشد.
- راهنمایی. مختصات قائم x و y را مثل شکل ۵۷ اختیار کرده، و فرض می‌کنیم $y = y(x)$ فصل مشترک صفحه xy با سطح آب باشد. بر ذره $P = (x, y)$ روی سطح نیروی



شکل ۵۷

قائم واکنش F وارد می شود که از ناحیه بقیه مایع است ، و F باید وزن ذره را خنثی کرده و شتاب مرکزی وی را تأمین نماید . نشان دهید که این به یک معادله دیفرانسیل برای $y = y(x)$ منجر می شود که حل ساده ای دارد .

یک طناب سنگین به طول 105 ft بین دو تکیه گاه به فاصله 100 ft آویزان است .

۵۳ . شکم طناب چقدر است ؟

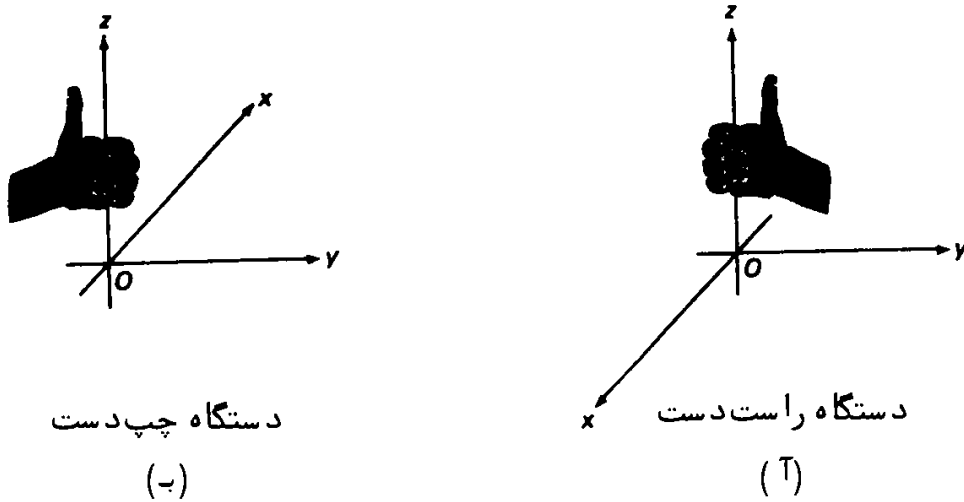
۵۴ . اگر وزن طناب 2 lb/ft باشد ، کشش مینیمم در طناب چقدر است ؟ کشش ماکزیمم چقدر است ؟

بردارها در فضا و هندسه^{۱۲} تحلیلی فضایی

حال وقت آن است که از صفحه^۶ دوبعدی به فضای سه بعدی برویم ، و ما این کار را در این فصل و فصول آتی انجام می دهیم . بحث را با معرفی مختصات قائم در فضا و مطالعه^۶ چند سطح ساده آغاز می کنیم . سپس جبر بردارها را از بعد دو به بعد سه تعمیم می دهیم . ابتدا نکات مطرح شده در فصل پیش فقط با تعدیل مختصری عرضه می شوند ، ولی پس از آن در بخش ۳۰.۱۲ مفهومی جدید ، یعنی حاصل ضرب خارجی دوبردار فضایی ، وارد صحنه می شود . خطوط و صفحات در فضا در بخش ۴۰.۱۲ عنوان می شوند ، و در بخش ۵۰.۱۲ توابع برداری سه بعدی را مطرح کرده ، و صورت جدیدی از استنتاج نیوتن از قوانین حرکت سیاره ای کپلر عرضه می شود . ما مطالعه^۶ سه بعدی یا هندسه^۶ تحلیلی " فضایی " خود را با بررسی حالاتی که در رسم معادله^۶ درجه^۶ دو از سه متغیر پیش می آیند خاتمه خواهیم داد .

۱۰.۱۲ مختصات قائم در فضا

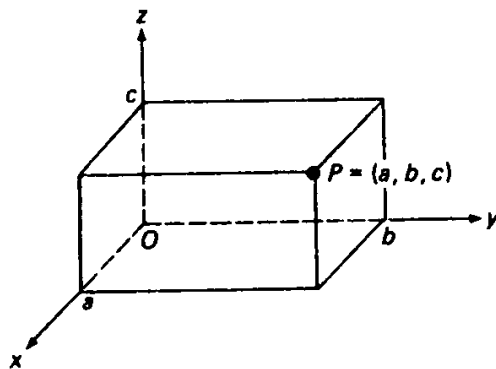
مختصات قائم در فضا توسیع طبیعی مختصات قائم در صفحه اند . فرض کنید سه خط دو به دو متعامد Ox ، Oy ، و Oz ، به نام محوره های مختصات ، هر یک مجهز به جهت مثبت (که در شکل ۱ با سر سهم نموده شده است) ساخته باشیم که در نقطه^۶ O به نام مبدأ^۶ متقاطع باشند . محوره های مختصات Ox ، Oy ، و Oz را به ترتیب محور x ، محور y ، و محور z می نامند . این محورها سه صفحه^۶ مختصات دو به دو متعامد مشخص می کنند ، به نام صفحه^۶ xy شامل محوره های x و y ، صفحه^۶ xz شامل محوره های x و z ، و صفحه^۶ yz شامل محوره های y و z . صفحه^۶ yz در هر دو قسمت شکل ۱ صفحه^۶ کاغذ است ، لیکن در قسمت (آ) محور x اشاره به خواننده دارد ، ولی در قسمت (ب) از خواننده دور می شود . دستگاه مختصات قسمت (آ) راست دست است بدین معنی که اگر انگشتان دست راست را طوری خم کنیم که از محور x مثبت به محور y مثبت بروند ، انگشت شست در امتداد محور z مثبت است ، ولی دستگاه مختصات قسمت (ب) چپ دست است ، بدین معنی که همان خاصیت را



شکل ۱

در رابطه با دست چپ دارد. توجه کنید که دو دستگاه مختصات منعکس هم نسبت به صفحه yz اند. از حالا به بعد ما فقط با دستگاههای مختصات راست دست کار خواهیم کرد. در این گونه دستگاه یک پیچ گوشتی، که تیغه اش 90° از محور x مثبت تا محور y مثبت می چرخد، به صورت عادی در امتداد محور z مثبت خواهد پیچید.

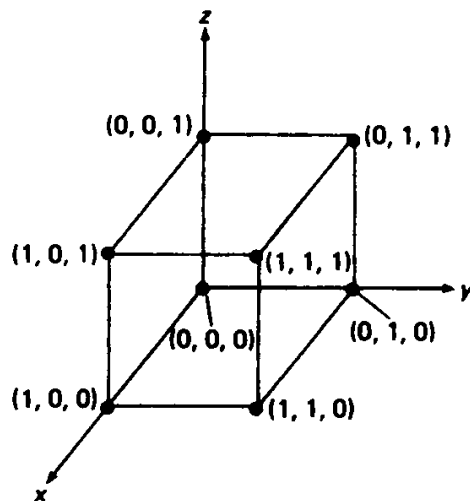
سه تاییهای مرتب و مختصات قائم. حال فرض کنیم (a, b, c) سه تایی مرتبی از اعداد حقیقی باشد، که در آن نماد نشان می دهد که a اول، b دوم، و c سوم خواهد آمد. در هر سه محور از یک واحد طول استفاده شده، a را به صورت نقطه ای از Ox (به عنوان خط اعداد) b را نقطه ای از Oy ، و c را نقطه ای از Oz رسم می کنیم. سپس صفحه عمود بر Ox در a ، صفحه عمود بر Oy در b ، و صفحه عمود بر Oz در c را رسم می نماییم. همانند شکل ۲، این سه صفحه در نقطه P متقاطع اند که نمایش سه تایی مرتب (a, b, c) گرفته می شود. نقطه P دارای مختصات قائم (یا دکارتی) (a, b, c) ، و c یا دقیقتر، مختص x ، a ، مختص y ، b ، و مختص z ، c می باشد. با عکس کردن این ترسیم، یعنی با رسم صفحات ماربر



شکل ۲

P عمود بر محورهای مختصات (یا به صورت دیگر، رسم صفحات مار بر P موازی صفحات مختصات) می توان مختصات، و در نتیجه سه تایی مرتب نظیر به نقطه داده شده P را یافت. لذا، یک نقطه منحصر به فرد در فضا وجود دارد که نظیر یک سه تایی مرتب است، و به عکس یک سه تایی مرتب منحصر به فرد وجود دارد که نظیر یک نقطه در فضا می باشد. به خاطر این تناظر یک به یک، معمولاً "بین سه تاییهای مرتب و نقاط نمایش آنها فرق کمی می گذاریم یا اصلاً" تمایزی قایل نمی شوند. بخصوص، $P = (a, b, c)$ یعنی P نقطه ای است به مختص x ، a ، مختص y ، b ، و مختص z ، c . (بعضی از مؤلفان این نقطه را با $P(a, b, c)$ نشان می دهند.) توجه کنید که مبدأ O نقطه $(0, 0, 0)$ است. البته تساوی دو سه تایی مرتب (a, b, c) و (d, e, f) یعنی دو سه تایی که عنصر اول، عنصر دوم، و عنصر سوم یکسان داشته باشند؛ در نتیجه، $a = d$ ، $b = e$ ، و $c = f$. مثلاً، $(\sqrt{9}, 4, 0) = (3, 2^2, 0)$ ولی $(1, -1, 2) \neq (-1, 1, 2)$.

مثال ۱. چهار رأس $(0, 0, 0)$ ، $(1, 0, 0)$ ، $(0, 1, 0)$ ، و $(0, 0, 1)$ یک مکعب داده شده اند. چهار رأس دیگر آن را بیابید.



شکل ۳

حل. جواب از شکل ۳ واضح است. توجه کنید که هشت رأس مکعب نظیر هشت سه تایی مرتب متمایز است که هر عنصرشان 0 یا 1 می باشد. تمام دوازده ضلع مکعب به طول واحد بوده و هر شش وجه آن دارای مساحت واحد می باشد. حجم مکعب مساوی یک خواهد بود.

نقطه (x, y, z) در صفحه yz واقع است اگر و فقط اگر $x = 0$ ، و بر محور z واقع است اگر و فقط اگر $x = y = 0$. به بیان دیگر، صفحه yz از تمام نقاط به شکل $(0, y, z)$ تشکیل

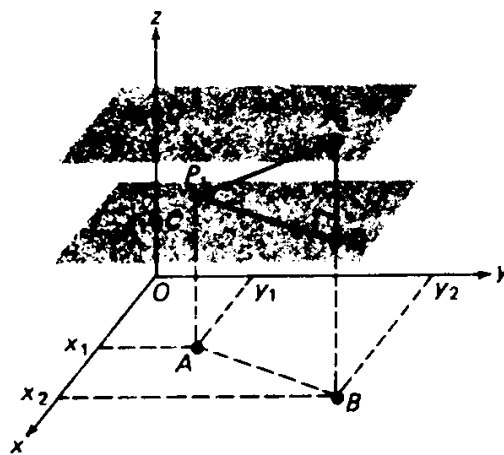
شده است، ولی محور z از تمام نقاط به شکل $(0, 0, z)$ تشکیل شده است. به عنوان تمرین، سایر صفحات و محورهای مختصات را توصیف نمایید. صفحات مختصات فضا را به هشت ناحیه بی کران به نام یکهشت تقسیم می کنند. یکهشت اول از تمام نقاط (x, y, z) تشکیل شده است که در آن $x > 0, y > 0, z > 0$ ، ولی سایر یکهشتها معمولاً "اسم خاصی ندارند".

فرمول فاصله. فاصله بین دو نقطه P_1 و P_2 در فضا، مثل حالت نقاط در صفحه، با $|P_1P_2|$ نموده می شود، و قضیه زیر تعمیم سه بعدی قضیه ۶، صفحه ۳۵، می باشد.

قضیه ۱ (فاصله بین دو نقطه در فضا). فاصله بین دو نقطه $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ در فضا از فرمول زیر به دست می آید:

$$(1) \quad |P_1P_2| = \sqrt{(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2 + (z_1 - z_2)^2}.$$

برهان. از دو نقطه P_1 و P_2 خطوطی بر صفحه xy و صفحاتی بر محور z عمود می کنیم. در این صورت، P_1P_2 وتر مثلث قائم الزاویه P_1QP_2 شکل ۴ است، که در آن $Q = (x_2, y_2, z_1)$ واضح است که $|P_1Q| = |AB|$ و $|QP_2| = |CD|$ ، که در آنها A و B نقاط (x_1, y_1) و (x_2, y_2) اند که در صفحه xy در نظر گرفته می شوند، ولی C و D نقاط z_1 و z_2 اند که بر محور z گرفته



شکل ۴

می شوند. لذا، طبق قضیه فیثاغورس و فرمول فاصله در صفحه و روی خط، داریم

$$\begin{aligned} |P_1P_2|^2 &= |P_1Q|^2 + |QP_2|^2 = |AB|^2 + |CD|^2 \\ &= [(x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2] + (z_1 - z_2)^2, \end{aligned}$$

که با (۱) معادل می باشد.

شکل ۴ تحت فرض $x_1 < x_2$ ، $y_1 < y_2$ و $z_1 < z_2$ رسم شده است، ولی به آسانی معلوم می‌شود که فرمول فاصله (۱) در صورت عکس‌کردن یکی (یا چند تا) از این نامساویها نیز به دست می‌آید.

مثال ۲. فاصله بین نقاط $P_1 = (3, 1, 9)$ و $P_2 = (-1, 4, -3)$ را پیدا نمایید.

حل. بنابر فرمول (۱)،

$$\begin{aligned} |P_1P_2| &= \sqrt{(3+1)^2 + (1-4)^2 + (9+3)^2} \\ &= \sqrt{4^2 + 3^2 + 12^2} = \sqrt{169} = 13. \end{aligned}$$

نمودار معادلات و نامعادلات. منظور از نمودار یک یا چند معادله یا نامعادله از سه متغیر x ، y ، و z یعنی مجموعهٔ نقاطی چون (x, y, z) در فضا که در معادلات یا نامعادلات داده شده صدق می‌کنند. لازم نیست همهٔ متغیرها حاضر باشند، و در این صورت مقادیر متغیرهای غایب نامحدودند. مثلاً، نمودار $x = a$ صفحهٔ موازی صفحهٔ yz است که از $(a, 0, 0)$ می‌گذرد، حال آنکه نمودار معادلات $x = a$ ، $y = b$ خط موازی محور z است که از $(a, b, 0)$ می‌گذرد.

مثال ۳. معادله

$$(۲) \quad x^2 + y^2 + z^2 = 1$$

را رسم نمایید.

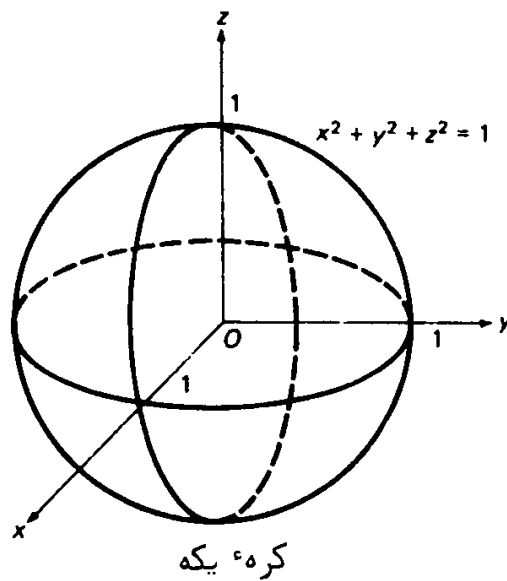
حل. چون $x^2 + y^2 + z^2$ مربع فاصله بین نقطهٔ (x, y, z) و مبدأ $O = (0, 0, 0)$ است، نقطهٔ (x, y, z) تعلق به نمودار (۲) دارد اگر و فقط اگر فاصله بین (x, y, z) و O مساوی ۱ باشد. لذا، نمودار (۲) کرهٔ یکه است؛ یعنی، کره به شعاع ۱ و مرکز O (ر. ک. شکل ۵).

مثال ۴. نامعادله

$$(۳) \quad x^2 + y^2 + z^2 < 1$$

را رسم کنید.

حل. بنابر (۳)، مربع فاصله بین نقطهٔ (x, y, z) و نقطهٔ O از ۱ کمتر است؛ و در نتیجه،



شکل ۵

همین امر در مورد خود فاصله درست است. لذا، نمودار (۳) ناحیهٔ داخل کرهٔ یکه (۲) است؛ این ناحیه گوی یکهٔ باز نام دارد. نمودار نامعادلهٔ

$$(۳) \quad x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$$

گوی یکهٔ بسته است؛ یعنی، مجموعهٔ مرکب از گوی یکهٔ باز همراه با مرزش (کرهٔ یکه) می‌باشد.

کرات . با تعمیم مثال ۳ معلوم می‌شود که مختصات نقطهٔ (x, y, z) در معادلهٔ

$$(۴) \quad (x - a)^2 + (y - b)^2 + (z - c)^2 = r^2 \quad (r > 0)$$

صدق می‌کنند اگر و فقط اگر مجذور فاصلهٔ بین (x, y, z) و نقطهٔ ثابت (a, b, c) مساوی r^2 باشد یا، معادلاً، اگر و فقط اگر فاصلهٔ بین (x, y, z) و (a, b, c) مساوی r باشد. لذا، مختصات (x, y, z) در (۴) صدق می‌کنند اگر و فقط اگر (x, y, z) بر کره‌ای به شعاع r و مرکز (a, b, c) قرار داشته باشد. توجه کنید که اگر $a = b = c = 0$ و $r = 1$ اختیار شود، (۴) به معادلهٔ (۲) کرهٔ یکه تحویل می‌گردد.

مثال ۵. معادلهٔ

$$(۵) \quad x^2 + y^2 + z^2 + 4x - 6y + 2z - 11 = 0$$

را رسم نمایید.

حل. با کامل کردن مربعها، داریم

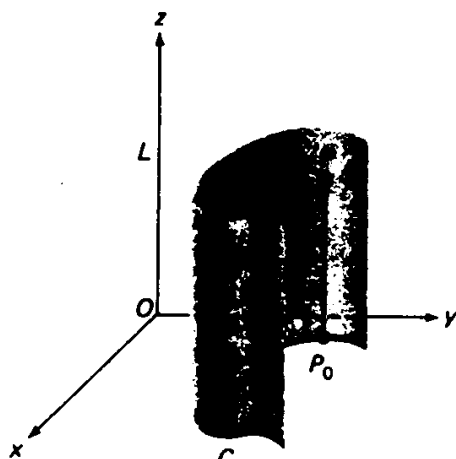
$$x^2 + 4x = (x + 2)^2 - 4, \quad y^2 - 6y = (y - 3)^2 - 9, \quad z^2 + 2z = (z + 1)^2 - 1,$$

و با گذاردن این عبارات در (۵)، به دست می‌آوریم

$$(x + 2)^2 + (y - 3)^2 + (z + 1)^2 = 25,$$

که معادلهٔ کره‌ای به شعاع 5 و مرکز $(-2, 3, -1)$ می‌باشد. لذا، معادلهٔ اصلی (۵) نیز این کره را به عنوان نمودار دارد.

استوانه‌ها. فرض کنیم C یک منحنی مسطح بوده، و L خطی باشد که با صفحهٔ C موازی نباشد (یا در این صفحه قرار نداشته باشد). در این صورت، سطح S ساخته شده از تمام خطوط مار بر C موازی L استوانه نام دارد. منحنی C را هادی استوانهٔ S نامیده، و بی‌نهایت خطی که موازی L بوده و S را تشکیل می‌دهند خطوط جاری (یا مولدهای) S نام دارند. مثلاً، شکل ۶ بخشی از استوانهٔ S را با منحنی C در صفحهٔ xy به عنوان هادی و



استوانه

شکل ۶

محور z به عنوان خط L نشان می‌دهد. در نتیجه، خطوط جاری همه موازی محور z می‌باشند. فرض کنیم $F(x, y)$ عبارتی شامل دو متغیر x و y بوده، و منحنی C در شکل نمودار معادلات همزمان

$$(۶) \quad F(x, y) = 0, \quad z = 0$$

است، که معادلهٔ دوم $z = 0$ صرفاً "به ما می‌گوید که C یک منحنی در صفحهٔ xy است. در این صورت، استوانهٔ S ، با هادی C و خطوط جاری موازی محور z ، نمودار تنها معادلهٔ

$$(۷) \quad F(x, y) = 0$$

است که از (۶) با حذف معادله دوم، یعنی با مجاز کردن z که مقادیر نامحدود (و نه فقط 0) را بگیرد، به دست می آید. در واقع، به ازای هر نقطه $P = (x, y, z)$ ، $P_0 = (x, y, 0)$ را نقطه اشتراک خط مار بر P موازی محور z و صفحه xy می گیریم (ر. ک. شکل ۶). در این صورت، P بر S واقع است اگر و فقط اگر P_0 بر C باشد؛ یعنی، اگر و فقط اگر مختصات x و y نقطه P_0 ، و در نتیجه P ، در اولین معادله (۶) صدق نمایند. اما این بدان معنی است که، همانطور که حکم شده، S نمودار معادله (۷) می باشد. عدم ظهور مختص z در معادله (۷) نشان می دهد که خطوط جاری S موازی محور z می باشند. به همین نحو،

$$F(x, z) = 0$$

معادله یک استوانه با خطوط جاری موازی محور y ، و

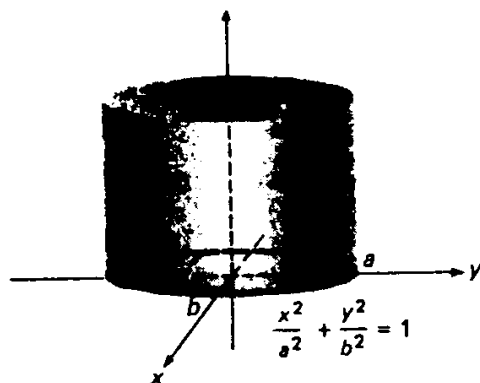
$$F(y, z) = 0$$

معادله یک استوانه با خطوط جاری موازی محور x می باشد. در هر حالت، خطوط جاری موازی محوری هستند که با مختص غایب نموده شده است.

مثال ۶. نمودار معادله

$$(۸) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

استوانه‌ای است که خطوط جاری‌اش موازی محور z می باشند. اثر این استوانه در صفحه xy ؛ یعنی، اشتراک با صفحه (x, y) ، یک بیضی است (ر. ک. شکل ۷)؛ یعنی، بیضی با همان معادله (۸) به عنوان معادله‌ای با مختصات نقطه متغیر از صفحه xy (فضای 2 بعدی) تا معادله‌ای با مختصات نقطه متغیر (x, y, z) از فضای سه بعدی. به این دلیل، استوانه یک استوانه بیضوی نام دارد.



استوانه بیضوی

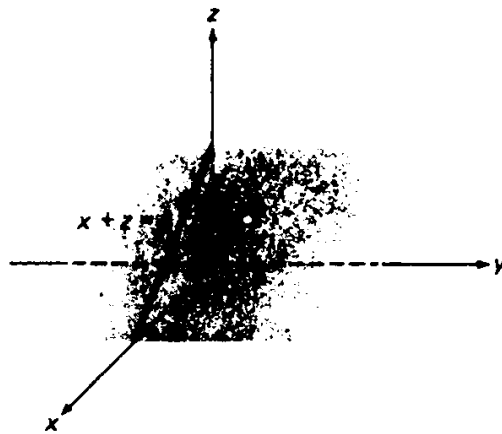
شکل ۷

هر مقطع عرضی استوانه به وسیلهٔ صفحهٔ موازی صفحهٔ xy یک بیضی است که با اثرش در صفحهٔ xy همنهشت است. اگر $a = b = r$ ، استوانهٔ بیضوی به استوانهٔ مستدیر قائم به شعاع r بدل می‌شود که محور z محور تقارن آن می‌باشد.

مثال ۷. در صفحهٔ xz نمودار

$$(9) \quad x + z = 1$$

یک خط است، ولی در فضای 3 بعدی نمودار معادلهٔ خطی (۹) صفحهٔ شکل ۸ می‌باشد. این صفحه را استوانه‌ای تعبیر کنید که خطوط جاری‌اش موازی محور y اند.



شکل ۸

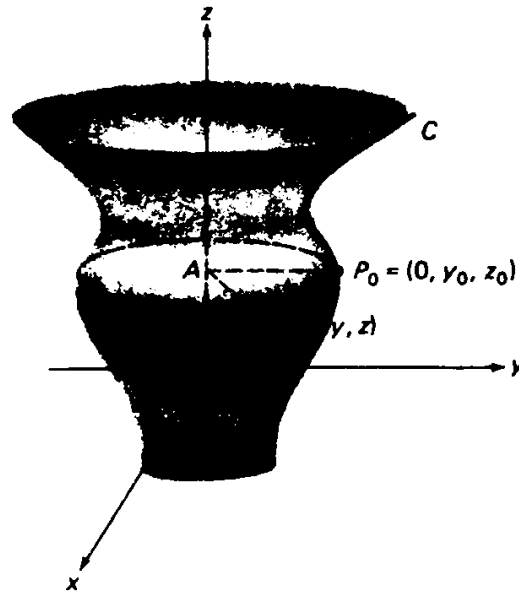
سطوح دوار. سطح حاصل از دوران یک منحنی مسطح حول خطی در صفحهٔ آن یک سطح دوار نام دارد. (ما قبلاً در بخش ۵.۸ با سطوح دوار، بدون تلاش در یافتن معادلاتشان در فضای سه‌بعدی، برخورد داشته‌ایم.) مثلاً، فرض کنیم منحنی C در صفحهٔ yz نمودار معادلهٔ

$$(10) \quad F(y, z) = 0 \quad (x = 0)$$

بوده، و C را حول محور z دوران داده سطح دوار S شکل ۹ را تولید می‌کنیم. در این صورت، S نمودار معادلهٔ

$$(11) \quad F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$$

است که از $F(y, z) = 0$ به وسیلهٔ تعویض y با $\sqrt{x^2 + y^2}$ به دست می‌آید (در اینجا موقتاً فرض می‌کنیم هر نقطهٔ C دارای مختص y نامنفی است). در واقع، به ازای هر نقطهٔ $P = (x, y, z)$ ، نقطهٔ $P_0 = (0, y_0, z_0)$ را اشتراک صفحهٔ yz با دایرهٔ مار بر P موازی صفحهٔ xy و مرکز A واقع بر محور z می‌گیریم. در این صورت، P بر S واقع است اگر و فقط اگر



سطح دوار

شکل ۹

P_0 بر C واقع باشد؛ یعنی، اگر و فقط اگر $F(y_0, z_0) = 0$. از شکل واضح است که $z_0 = z$ و

$$y_0 = |AP_0| = |AP| = \sqrt{x^2 + y^2}.$$

بنابراین، $F(y_0, z_0) = 0$ معادل (۱۱) است، و P بر S واقع است اگر و فقط اگر (۱۱) برقرار باشد؛ یعنی، همانطور که حکم شده، S نمودار معادله (۱۱) می باشد.

در هر نقطه از منحنی C با مختص y منفی، به جای $y_0 = \sqrt{x^2 + y^2}$ داریم $y_0 = -\sqrt{x^2 + y^2}$. لذا، به طور کلی، سطح S معادله‌ای به شکل زیر دارد:

$$(۱۱') \quad F(\pm \sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0,$$

که در آن اگر $y_0 \geq 0$ علامت مثبت و اگر $y_0 < 0$ علامت منفی را اختیار می‌کنیم. اگر منحنی (۱۰) در صفحه yz را به جای محور y حول محور z دوران دهیم، استدلالی مشابه نشان می‌دهد که سطح دوار حاصل از این کار معادله‌ای به شکل زیر دارد:

$$F(y, \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$$

(ممکن است در بعضی حالات جلو رادیکال علامت منها لازم باشد). در جدول زیر فرمولهای فوق، همراه با نتایج مشابه برای منحنیها در صفحات xy و xz ، داده شده‌اند. نکاتی در جدول را که قبلاً "بحث نشده‌اند" تحقیق نمایید.

منحنی	محور دوران	سطح دوار
$F(y, z) = 0 \quad (x = 0)$	محور y محور z	$F(y, \sqrt{x^2 + z^2}) = 0$ $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$
$F(x, z) = 0 \quad (y = 0)$	محور x محور z	$F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ $F(\sqrt{x^2 + y^2}, z) = 0$
$F(x, y) = 0 \quad (z = 0)$	محور x محور y	$F(x, \sqrt{y^2 + z^2}) = 0$ $F(\sqrt{x^2 + z^2}, y) = 0$

مثال ۸. سهمی

$$z = y^2 \quad (x = 0, y \geq 0)$$

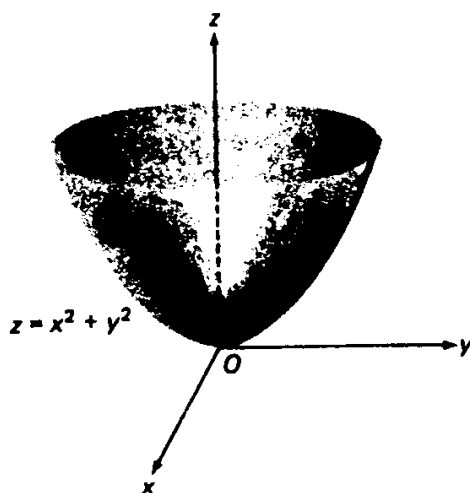
در ربع اول از صفحه yz را حول محور z (محور تقارن آن) دوران داده، سهمی گون دوار شکل ۱۰ به معادله

$$z = (\sqrt{x^2 + y^2})^2,$$

یا معادلا"

(۱۲)

$$z = x^2 + y^2$$

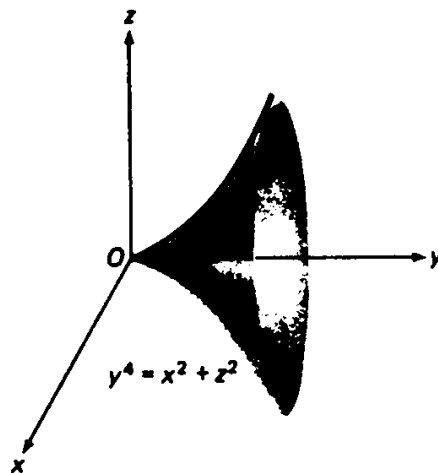


سهمی گون دوار

شکل ۱۰

به دست می‌آید. اثر این سطح در صفحه $z = c > 0$ دایره‌ای به شعاع \sqrt{c} و مرکز $(0, 0, c)$ است، ولی اثرش در صفحه xz سهمی $z = x^2$ است که می‌توان آن را با قرار دادن $y = 0$ در معادله (۱۲) به دست آورد. از دوران همین سهمی حول محور y ، سطح قیفی کاملاً متفاوت شکل ۱۱ به معادله

$$\sqrt{x^2 + z^2} = y^2,$$



شکل ۱۱

یا معادلاً

$$y^4 = x^2 + z^2,$$

که در آن $y \geq 0$ ، به دست می‌آید.

مثال ۹. از دوران خط

$$y = z \quad (x = 0)$$

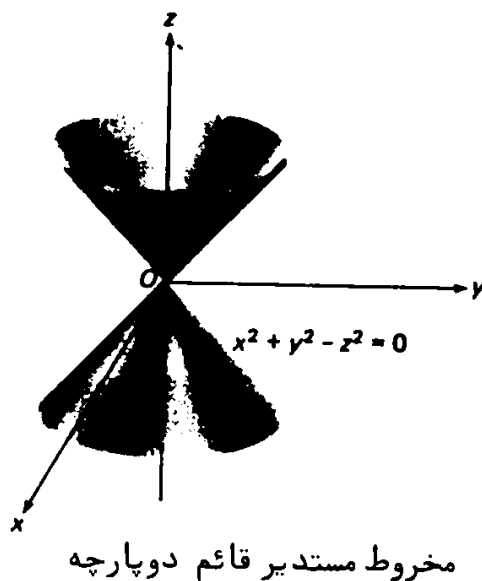
در صفحه yz حول محور z ، سطح دوار S شکل ۱۲ به معادله

$$\pm \sqrt{x^2 + y^2} = z$$

(وقتی $y < 0$ ، علامت منفی لازم است)، یا معادلاً

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

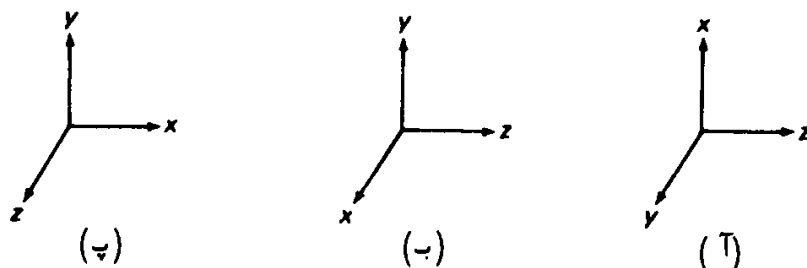
به دست می‌آید. S یک مخروط مستدیر قائم دوپارچه به رأس مبدأ است که هر مولد آن با محور مخروط، یعنی محور z ، زاویه 45° می‌سازد. اثر S در صفحه $z = c > 0$ دایره‌ای به شعاع c (نه \sqrt{c} مثل مثال ۸) و مرکز $(0, 0, c)$ می‌باشد. برای همسازی با مطالب بخش ۵.۱، نشان دهید که اثر S در هر صفحه $x = c$ یا $y = c$ هذلولی است اگر $c \neq 0$ و یک جفت خطوط متقاطع است اگر $c = 0$. اثر S در صفحه xy چیست؟



شکل ۱۲

مسائل

۱. از سه دستگاه مختصات قائم شکل ۱۳ فقط دو تا راست دست‌اند.



شکل ۱۳

کدامها چنین‌اند؟

۲. یکی از دستگاههای مختصات شکل ۱۳ چپ‌دست است. چگونه می‌توان آن را راست دست ساخت؟
۳. یک مکعب مستطیل (جعبه) وجوهش موازی صفحات مختصاتند و مبدأ O و نقطه $(2, -3, 4)$ دورآس آن هستند. مکعب مستطیل را رسم کرده و شش رأس دیگر آن را بیابید.
۴. یک مکعب مستطیل به اضلاع موازی محورهای مختصات نقاط $(2, 1, -1)$ و $(-1, 3, 1)$ را به عنوان دو رأس دارد. مکعب مستطیل را رسم کرده و شش رأس دیگر آن را بیابید.
۵. در چه نقاط خط مار بر $(6, -7, 9)$ موازی محور y صفحه مار بر $(8, -4, 5)$ موازی صفحه xz را قطع می‌کند؟

فاصله بین نقطه (a, b, c) و محورهای زیر را بیابید.

۶. محور x ۷. محور y ۸. محور z

فاصله^۶ بین جفت نقاط داده شده را بیابید .

۰۹ ✓ $(0, 0, 0), (12, -15, 16)$ ۰۱۰ ✓ $(0, 1, 0), (-4, 3, 4)$

۰۱۱ ✓ $(4, -5, 3), (6, -2, -3)$ ۰۱۲ ✓ $(1, 1, 5), (10, 3, -1)$

۰۱۳ ✓ $(8, 11, 9), (4, 12, 2)$ ۰۱۴ ✓ $(3, \pi, -14), (-9, \pi, -9)$

۰۱۵ ✓ $(5, 0, -3), (0, 4, 0)$ ۰۱۶ ✓ $(1, -1, 1), (-1, 1, -1)$

۰۱۷ ✓ نقطه‌ای روی محور y بیابید که از نقاط $(1, -3, 7)$ و $(5, 7, -5)$ به یک فاصله باشد .

۰۱۸ ✓ نشان دهید که نقاط $A = (3, -1, 6)$ ، $B = (-1, 7, -2)$ ، و $C = (1, -3, 2)$ رئوس یک

مثلث قائم‌الزاویه‌اند . چه ضلعی وتر است ؟

۰۱۹ ✓ کدام یک از نقاط $(-3, 0, 2)$ ، $(2, 1, 3)$ ، $(-1, 3, 1)$ ، و $(2, 2, -2)$ به مبدا^۶ نزدیکتر

است ؟

۰۲۰ ✓ فرض کنید M نقطه^۶ میانی پاره‌خط P_1P_2 و اصل بین نقاط $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ و

$P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ باشد . نشان دهید که

$$M = \left(\frac{x_1 + x_2}{2}, \frac{y_1 + y_2}{2}, \frac{z_1 + z_2}{2} \right).$$

راهنمایی . ر . ک . مثال ۴ ، صفحه ۳۷ .

نقطه^۶ میانی پاره‌خط واصل بین جفت نقاط داده شده را بیابید .

۰۲۱ ✓ $(1, -7, 0), (-9, 11, 12)$

۰۲۲ ✓ $(-4, 9, 2), (6, 3, 8)$

۰۲۳ ✓ $(-1, 3, -5), (2, -4, 6)$

۰۲۴ ✓ $(-5, 10, -20), (5, -10, 20)$

گوییم دو نقطه^۶ متمایز P و Q نسبت به نقطه^۶ M متقارن اند اگر M نقطه^۶ میانی پاره‌خط PQ

باشد ، و نسبت به خط L یا صفحه^۶ Π متقارن اند اگر L یا Π از نقطه^۶ میانی M پاره‌خط PQ

گذشته و بر PQ عمود باشد . فرض کنید P نقطه^۶ $(5, -3, 2)$ باشد . نقطه^۶ متقارن P را نسبت به

۰۲۵ ✓ مبدا^۶ ۰۲۶ ✓ نقطه^۶ $(3, 1, -2)$

۰۲۷ ✓ محور x ۰۲۸ ✓ محور y

۰۲۹ ✓ محور z ۰۳۰ ✓ صفحه^۶ xy

۰۳۱ ✓ صفحه^۶ xz ۰۳۲ ✓ صفحه^۶ yz

بیابید .

معادله^۶ کره به شعاع و مرکز داده شده را پیدا کنید .

۰۳۳ ✓ $8, (-1, 1, -1)$ ۰۳۴ ✓ $5, (0, 0, 0)$

۳۶ ✓ $15, (10, -5, 10)$

۳۵ ✓ $\sqrt{11}, (3, -2, 4)$

نمودار معادله داده شده را رسم کنید .

۳۷ ✓ $x^2 + y^2 + z^2 + 6x - 4y + 10z - 83 = 0$

۳۸ ✓ $x^2 + y^2 + z^2 - 2x + 2y + 2z - 6 = 0$

۳۹ ✓ $x^2 + y^2 + z^2 + 10x + 12y - 8z + 77 = 0$

۴۰ ✓ $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 - 3y - 4z = 0$

۴۱ ✓ $x^2 + y^2 + z^2 - 10y - 16z + 90 = 0$

۴۲ ✓ $x^2 + y^2 + z^2 - 20x + 14y - 22z + 270 = 0$

۴۳ . معادله کره‌ای را بیابید که از نقطه $(4, -1, -1)$ گذشته و بر هر سه صفحه مختصات

مماس است .

۴۴ . معادله درجه دو

(یک) $x^2 + y^2 + z^2 + Ax + By + Cz + D = 0$

را در نظر بگیرید ، که در آن ضرایب x^2 ، y^2 ، و z^2 همه مساوی 1 اند ، و فرض کنید

$$E = \frac{A^2}{4} + \frac{B^2}{4} + \frac{C^2}{4} - D.$$

نشان دهید که نمودار (یک) کره‌ای است به شعاع \sqrt{E} و مرکز $(-A/2, -B/2, -C/2)$

اگر $E > 0$ ، نقطه $(-A/2, -B/2, -C/2)$ اگر $E = 0$ ، و مجموعه تهی اگر $E < 0$.

نمودار معادله یا نامعادله داده شده را در فضای 3 بعدی توصیف کنید .

۴۶ $xyz = 0$

۴۵ $xy = 0$

۴۸ $1 < y^2 + z^2 < 4$

۴۷ $x^2 + y^2 + z^2 > 1$

نمودار معادله داده شده را در فضای 3 بعدی توصیف و رسم کنید .

۵۰ $x^2 + z^2 = 2z$

۴۹ $z^2 - y^2 = 0$

۵۲ $y^2 + 4z^2 = 4$

۵۱ $xy = -1$

۵۴ $x^2 - y^2 + z^2 = 0$

۵۳ $y^2 - 8x = 0$

۵۶ $y^2 + z^2 - x = 0$

۵۵ $2x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$

معادله سطح حاصل از دوران منحنی داده شده حول محور مشخص شده را بیابید .

۵۸ . همان منحنی ، محور x

۵۷ $x = 4z^2 (y = 0)$ ، محور z

۶۰ . همان منحنی ، محور y

۵۹ $x^{2/3} + y^{2/3} = 1 (z = 0)$ ، محور x

۶۲ . همان منحنی ، محور z

۶۱ $y = \sqrt{z} (x = 0)$ ، محور y

۲.۱۲ از بردارها در صفحه تا بردارها در فضا

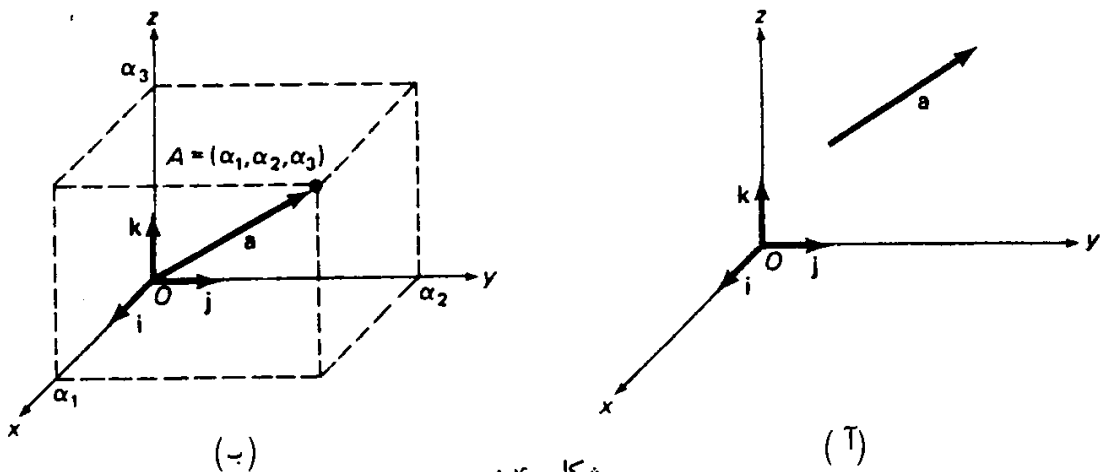
در صفحات ۵۰ تا ۱۰۴۵ بردارهای در صفحه و اعمال مختلفی مانند جمع، تفریق، و ضرب در اسکالر را بر آنها تعریف نمودیم. این تعاریف، و قواعد حاکم بر این اعمال، بدون هیچ تغییری برای بردارها در فضا صادقند، به این دلیل ساده که اینها صرفاً "هندسی و" فارغ از مختصات "می باشند. از حالا به بعد، منظور از واژه " بردار " بدون شرح بیشتر، همواره یعنی بردار در فضای سه بعدی معمولی نه در یک صفحه.

مؤلفه‌های یک بردار، با اینحال، وقتی مختصات وارد می شوند، البته می توان انتظار تفاوتی بین حالات دوبعدی و سه بعدی را داشت. به طور مشخص، فرض کنید دستگاهی از مختصات قائم x ، y ، و z در فضا به مبدأ O داشته باشیم. همچنین، i بردار یکه در امتداد محور x مثبت، j بردار یکه در امتداد محور y مثبت، و k بردار یکه در امتداد محور z مثبت، مثل شکل ۱۴ (آ)، باشد. در این صورت، هر بردار مانند \mathbf{a} (در فضا) نمایش منحصر به فردی به شکل زیر دارد:

$$(۱) \quad \mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k}.$$

اسکالرهای α_1 ، α_2 ، و α_3 مؤلفه‌های \mathbf{a} نام دارند، و به صورت زیر تعیین می شوند. بردار \mathbf{a} را انتقال می دهیم، یعنی به موازات خود بدون دوران حرکت می دهیم، تا نقطه \mathbf{a} شروع بر مبدأ O منطبق شود. در این صورت، نقطه پایان \mathbf{a} نقطه $A = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ از فضاست، و البته $\mathbf{a} = \overrightarrow{OA}$ ، زیرا تمام انتقال یافته‌های یک بردار با هم مساویند. اما، همانطور که از شکل ۱۴ (ب) برمی آید، مختصات α_1 ، α_2 ، و α_3 نقطه A درست اسکالرهایی هستند که در نمایش یا " بسط " (۱) می آیند. به علاوه، اندازه \mathbf{a} چیزی جز فاصله O تا A نیست؛ یعنی،

$$(۲) \quad |\mathbf{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2}.$$



شکل ۱۴

منظور از یک پایه در فضا یعنی مجموعه‌ای از سه بردار ثابت مانند e_1 ، e_2 ، و e_3 ، به نام بردارهای پایه، به طوری که هر بردار دلخواه \mathbf{a} نمایش منحصر به فردی به شکل زیر داشته باشد:

$$(۱') \quad \mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{e}_1 + \alpha_2 \mathbf{e}_2 + \alpha_3 \mathbf{e}_3,$$

که بسط \mathbf{a} نسبت به e_1 ، e_2 ، و e_3 نامیده می‌شود. در این صورت، اسکالرهای α_1 ، α_2 ، و α_3 مؤلفه‌های \mathbf{a} (نسبت به e_1 ، e_2 ، و e_3) نام دارند. می‌توان نشان داد که سه بردار e_1 ، e_2 ، و e_3 یک پایه در فضا تشکیل می‌دهند اگر و فقط اگر غیر هم‌صفحه باشند؛ یعنی، اگر و فقط اگر صفحه‌ای شامل (یا موازی) هر سه بردار موجود نباشد. اگر بردارهای e_1 ، e_2 ، و e_3 از یک پایه دو به دو متعامد باشند، گوییم پایه متعامد است، و اگر علاوه بر عمود بودن یکه نیز باشند، گوییم پایه متعامد یکه است. مثلاً، بردارهای یکه \mathbf{i} ، \mathbf{j} ، و \mathbf{k} در امتداد محورهای مختصات یک پایه متعامد یکه تشکیل می‌دهند. توجه کنید که فرمول (۲) فقط برای یک پایه متعامد یکه معتبر است (چرا؟).

بردارها به عنوان سه‌تاییهای مرتب. از اینجا به بعد، با توجه به نکات فوق، سه‌تاییهای مرتب را برای نمایش هم نقاط و هم بردارها در فضا به کار می‌بریم. لذا، $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ می‌تواند به معنی نقطه به مختصات قائم α_1 ، α_2 ، و α_3 یا بردار $\alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k}$ با مؤلفه‌های α_1 ، α_2 ، و α_3 (نسبت به پایه متعامد یکه زمینه \mathbf{i} ، \mathbf{j} ، و \mathbf{k}) باشد. همچنین، از آنجا که $\mathbf{i} = 1\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ ، $\mathbf{j} = 0\mathbf{i} + 1\mathbf{j} + 0\mathbf{k}$ ، و $\mathbf{k} = 0\mathbf{i} + 0\mathbf{j} + 1\mathbf{k}$ ، سه تاییهای مرتب نمایش بردارهای پایه خود عبارتند از

$$\mathbf{i} = (1, 0, 0), \quad \mathbf{j} = (0, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, 1).$$

حال می‌توان اعمال جبری را از دیدگاه سه‌تاییهای مرتب تعبیر کرد. فرض کنیم $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ و $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ بردارهای دلخواهی در فضا باشند. در این صورت،

$$\mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k}) + (\beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k}),$$

و در نتیجه،

$$(۲) \quad \mathbf{a} + \mathbf{b} = (\alpha_1 + \beta_1) \mathbf{i} + (\alpha_2 + \beta_2) \mathbf{j} + (\alpha_3 + \beta_3) \mathbf{k}$$

یا

$$(۳) \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3).$$

هرگاه p یک اسکالر باشد، آنگاه $p\mathbf{a} = p(\alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k})$ و در نتیجه،

$$(۴) \quad p\mathbf{a} = p\alpha_1 \mathbf{i} + p\alpha_2 \mathbf{j} + p\alpha_3 \mathbf{k}$$

یا

$$(۴) \quad p(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) = (p\alpha_1, p\alpha_2, p\alpha_3).$$

پس از (۳) معلوم می‌شود که به ازای هر بردار $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ،

$$(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (0, 0, 0) = (\alpha_1 + 0, \alpha_2 + 0, \alpha_3 + 0) = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$$

در نتیجه ، $(0, 0, 0)$ سه‌تایی مرتب نمایش بردار صفر $\mathbf{0}$ است . برای به دست آوردن سه‌تایی

مرتب نمایش $-\mathbf{a}$ ، در فرمول (۴) قرار می‌دهیم $p = -1$ ، خواهیم داشت

$$-\mathbf{a} = -\alpha_1\mathbf{i} - \alpha_2\mathbf{j} - \alpha_3\mathbf{k} \quad \text{یا معادلا"}$$

$$-\mathbf{a} = (-\alpha_1, -\alpha_2, -\alpha_3).$$

بعلاوه ، $\mathbf{a} - \mathbf{b} = \mathbf{a} + (-\mathbf{b})$. در نتیجه ،

$$(۵) \quad \mathbf{a} - \mathbf{b} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) + (-\beta_1, -\beta_2, -\beta_3) = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \alpha_3 - \beta_3)$$

یا

$$(۵') \quad (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3) - (\beta_1, \beta_2, \beta_3) = (\alpha_1 - \beta_1, \alpha_2 - \beta_2, \alpha_3 - \beta_3).$$

همچنین ، دو بردار $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ و $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ در فضا مساویند اگر و فقط اگر

$\alpha_1 = \beta_1$ ، $\alpha_2 = \beta_2$ ، و $\alpha_3 = \beta_3$ ، و این درست به دلیل مشابهی است که در صفحات ۱۰۵۳ تا ۱۰۵۴ برای بردارها در صفحه ذکر شد .

مثال ۱ . فرض کنید $\mathbf{a} = (2, -1, 3)$ ، $\mathbf{b} = (-1, 4, -2)$ ، و $\mathbf{c} = (1, 8, 7)$ بردار $2\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c}$ را حساب کرده ، و سپس اندازه‌اش را بیابید .

حل . با استفاده از قواعد (۳) تا (۵) ، داریم

$$\begin{aligned} 2\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} &= 2(2, -1, 3) + (-1, 4, -2) - (1, 8, 7) \\ &= (4 - 1 - 1, -2 + 4 - 8, 6 - 2 - 7) = (2, -6, -3), \end{aligned}$$

یا معادلا"

$$2\mathbf{a} + \mathbf{b} - \mathbf{c} = 2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}.$$

بنابر فرمول (۲) ، اندازه این بردار مساوی است با

$$|2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} - 3\mathbf{k}| = \sqrt{2^2 + (-6)^2 + (-3)^2} = \sqrt{49} = 7.$$

مثال ۲ . بردار یکه \mathbf{u} را همجهت بردار $15\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$ پیدا کنید .

حل . اندازه $15\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}$ عبارت است از

$$|15\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}| = \sqrt{15^2 + (-12)^2 + 16^2} = \sqrt{625} = 25,$$

و در نتیجه،

$$\mathbf{u} = \frac{15\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}}{|15\mathbf{i} - 12\mathbf{j} + 16\mathbf{k}|} = \frac{3}{5}\mathbf{i} - \frac{12}{25}\mathbf{j} + \frac{16}{25}\mathbf{k}.$$

حاصل ضرب نقطه‌ای. همانند بردارها در صفحه، حاصل ضرب نقطه‌ای دو بردار \mathbf{a} و \mathbf{b} در فضا با فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$(۶) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \cos \theta,$$

که در آن θ زاویه بین \mathbf{a} و \mathbf{b} است ($0 \leq \theta \leq \pi$). پس از (۶) نتیجه می‌شود که $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \mathbf{b} \cdot \mathbf{a}$ و $\mathbf{a} \cdot \mathbf{a} = |\mathbf{a}|^2$ ، و نیز $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 0$ اگر و فقط اگر \mathbf{a} و \mathbf{b} برهم عمود باشند (بردار صفر بر هر بردار عمود فرض می‌شود). هرگاه $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ و $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ، آنگاه

$$(۷) \quad \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = \alpha_1\beta_1 + \alpha_2\beta_2 + \alpha_3\beta_3.$$

برهان اساساً همان برهان قضیه ۱، صفحه ۱۰۶۳، است، و به عنوان تمرین گذارده می‌شود. با استفاده از فرمول (۷)، می‌توان به آسانی تحقیق کرد که هرگاه p و q اسکالر باشند، آنگاه، به ازای بردارهای دلخواه \mathbf{a} و \mathbf{b} ،

$$(p\mathbf{a}) \cdot (q\mathbf{b}) = pq(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

حال آنکه، به ازای بردارهای دلخواه \mathbf{a} ، \mathbf{b} ، و \mathbf{c} ،

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} + \mathbf{a} \cdot \mathbf{c},$$

$$(\mathbf{a} + \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} = \mathbf{a} \cdot \mathbf{c} + \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$$

درست مثل نتیجه صفحه ۱۰۶۳.

مثال ۳. بنابر فرمول (۷)، حاصل ضرب نقطه‌ای بردارهای $\mathbf{a} = (4, -3, 6)$ و $\mathbf{b} = (2, 5, -1)$

$$\cdot \mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 4(2) - 3(5) + 6(-1) = 8 - 15 - 6 = -13$$

بردارهای یکه $\mathbf{i} = (1, 0, 0)$ ، $\mathbf{j} = (0, 1, 0)$ ، و $\mathbf{k} = (0, 0, 1)$ در فرمولهای مهم

$$(۸) \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{j} = 1, \quad \mathbf{k} \cdot \mathbf{k} = 1,$$

$$\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = \mathbf{j} \cdot \mathbf{i} = 0, \quad \mathbf{j} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{j} = 0, \quad \mathbf{i} \cdot \mathbf{k} = \mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = 0$$

صدق می‌کنند. مثلاً، $\mathbf{i} \cdot \mathbf{j} = 1(0) + 0(1) + 0(0) = 0$ ، $\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} = 1(1) + 0(0) + 0(0) = 1$ ، غیره. فرمولهای (۸) نیز نتیجه فوری تعریف (۶) و این امر که \mathbf{i} ، \mathbf{j} ، و \mathbf{k} پایه متعامد یکه تشکیل می‌دهند می‌باشند. توجه کنید که هرگاه $\mathbf{a} = \alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}$ ، آنگاه به کمک (۸)،

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{i} = (\alpha_1\mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} + \alpha_3\mathbf{k}) \cdot \mathbf{i} = \alpha_1\mathbf{i} \cdot \mathbf{i} + \alpha_2\mathbf{j} \cdot \mathbf{i} + \alpha_3\mathbf{k} \cdot \mathbf{i} = \alpha_1,$$

و به همین نحو، $\mathbf{a} \cdot \mathbf{j} = \alpha_2$ و $\mathbf{a} \cdot \mathbf{k} = \alpha_3$.

فرض کنیم θ زاویه بین دو بردار ناصفر \mathbf{a} و \mathbf{b} باشد. از (۶) نتیجه می‌شود که

$$(۹) \quad \cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|}.$$

مثال ۴. زاویه بین بردارهای $\mathbf{a} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = -4\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$ را بیابید.

حل. در اینجا داریم

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 1(-4) - 2(1) + 4(-2) = -14,$$

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 4^2} = \sqrt{21}, \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{(-4)^2 + 1^2 + (-2)^2} = \sqrt{21}.$$

بنابراین،

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{a}| |\mathbf{b}|} = \frac{-14}{\sqrt{21}\sqrt{21}} = -\frac{2}{3},$$

که ایجاب می‌کند

$$\theta = \arccos\left(-\frac{2}{3}\right) \approx 131.8^\circ.$$

فرض کنیم \mathbf{a} و \mathbf{b} دو بردار ناصفر در فضا باشند. در این صورت، مولفه \mathbf{a} در امتداد

\mathbf{b} با $\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ ، و تصویر \mathbf{a} روی \mathbf{b} با $\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ نموده و، مثل حالت بردارها در صفحه، با فرمولهای زیر تعریف می‌شوند:

$$\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}}{|\mathbf{b}|}, \quad \text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a} = \frac{(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{b}}{|\mathbf{b}|^2}$$

(ر. ک. صفحه ۱۰۶۶). توجه کنید که $\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ اسکالر است، ولی $\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ بردار می‌باشد.

مثال ۵. $\text{comp}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ و $\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ را در صورتی بیابید که $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$.
 \mathbf{a} را به صورت مجموع یک بردار موازی \mathbf{b} و یک بردار متعامد به \mathbf{b} ("متعامد" مترادف "عمود برهم" است) نمایش دهید.

حل. چون

$$\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} = 2(1) - 3(2) + 1(-2) = -6, \quad |\mathbf{b}| = \sqrt{1^2 + 2^2 + (-2)^2} = \sqrt{9} = 3,$$

داریم

$$\text{comp}_b a = \frac{a \cdot b}{|b|} = -\frac{6}{3} = -2,$$

$$\text{proj}_b a = \frac{(a \cdot b)b}{|b|^2} = \frac{-6(i + 2j - 2k)}{9} = -\frac{2}{3}i - \frac{4}{3}j + \frac{4}{3}k.$$

بردار $\text{proj}_b a$ موازی b است، و بردار

$$a - \text{proj}_b a = (2i - 3j + k) - \left(-\frac{2}{3}i - \frac{4}{3}j + \frac{4}{3}k\right) = \frac{8}{3}i - \frac{5}{3}j - \frac{1}{3}k$$

متعامد به b می‌باشد (ر.ک. شکل ۲۲، صفحه ۱۰۶۶). لذا، نمایش a به صورت مجموع برداری موازی b و برداری متعامد به b عبارت است از

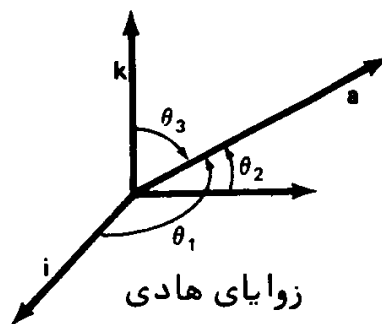
$$a = \left(-\frac{2}{3}i - \frac{4}{3}j + \frac{4}{3}k\right) + \left(\frac{8}{3}i - \frac{5}{3}j - \frac{1}{3}k\right).$$

زوایای هادی و کسینوسهای هادی. فرض کنیم $a = \alpha_1 i + \alpha_2 j + \alpha_3 k$ بردار ناصفری باشد. همچنین، θ_1 ، θ_2 ، و θ_3 زوایای بین a و بردارهای یکه i ، j ، و k باشند (ر.ک. شکل ۱۵). در این صورت، از (۹) معلوم می‌شود که

$$(۱۰) \quad \cos \theta_1 = \frac{a \cdot i}{|a||i|} = \frac{\alpha_1}{|a|}, \quad \cos \theta_2 = \frac{a \cdot j}{|a||j|} = \frac{\alpha_2}{|a|}, \quad \cos \theta_3 = \frac{a \cdot k}{|a||k|} = \frac{\alpha_3}{|a|},$$

یا معادلاً

$$(۱۰') \quad \alpha_1 = |a| \cos \theta_1, \quad \alpha_2 = |a| \cos \theta_2, \quad \alpha_3 = |a| \cos \theta_3.$$



شکل ۱۵

زوایای θ_1 ، θ_2 ، و θ_3 زوایای هادی بردار a (یا هر خط جهتدار L همجهت a) نام دارند، و اعداد $\cos \theta_1$ ، $\cos \theta_2$ ، و $\cos \theta_3$ را کسینوسهای هادی a (یا L) می‌نامند. کسینوسهای

هادی جهت \mathbf{a} را کاملاً" مشخص می‌کنند، ولی راجع به اندازه \mathbf{a} چیزی نمی‌گویند. با گذاردن (۱۰) در فرمول $|\mathbf{a}|^2 = \alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2$ برای مجذور اندازه \mathbf{a} ، معلوم می‌شود که

$$|\mathbf{a}|^2 = |\mathbf{a}|^2(\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3).$$

لذا، کسینوسهای هادی $\cos \theta_1$ ، $\cos \theta_2$ ، و $\cos \theta_3$ باید در شرط زیر صدق کنند:

$$(11) \quad \cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 = 1.$$

مثال ۶. کسینوسهای هادی و زوایای هادی بردار $\mathbf{a} = (4, -8, 1)$ را بیابید.

حل. با استفاده از (۱۰) به ازای $\alpha_1 = 4$ ، $\alpha_2 = -8$ ، $\alpha_3 = 1$ ، و

$$|\mathbf{a}| = \sqrt{\alpha_1^2 + \alpha_2^2 + \alpha_3^2} = \sqrt{4^2 + (-8)^2 + 1^2} = \sqrt{81} = 9,$$

معلوم می‌شود که بردار \mathbf{a} دارای کسینوسهای هادی

$$\cos \theta_1 = \frac{4}{9}, \quad \cos \theta_2 = -\frac{8}{9}, \quad \cos \theta_3 = \frac{1}{9},$$

و زوایای هادی

$$\theta_1 = \arccos \frac{4}{9} \approx 63.6^\circ,$$

$$\theta_2 = \arccos \left(-\frac{8}{9} \right) \approx 152.7^\circ$$

$$\theta_3 = \arccos \frac{1}{9} \approx 83.6^\circ$$

می‌باشد.

مثال ۷. آیا یک بردار یا خط جهت‌دار می‌تواند زوایای هادی $\theta_1 = 45^\circ$ ، $\theta_2 = 135^\circ$ ، و $\theta_3 = 60^\circ$ داشته باشد؟

حل. خیر، زیرا شرط (۱۱) برقرار نیست. در واقع،

$$\cos \theta_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \theta_2 = -\frac{1}{\sqrt{2}}, \quad \cos \theta_3 = \frac{1}{2},$$

و در نتیجه،

$$\cos^2 \theta_1 + \cos^2 \theta_2 + \cos^2 \theta_3 = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} \neq 1.$$

بالاخره، می‌گوییم که وابستگی خطی و استقلال خطی برای بردارها در فضا درست مثل بردارها در صفحه تعریف می‌شوند (ر.ک. صفحه ۱۰۵۷). می‌توان نشان داد که هر چهار بردار در فضا وابسته خطی‌اند و سه بردار در فضا مستقل خطی‌اند اگر و فقط اگر غیر هم‌صفحه باشند. مثلاً، بردارهای $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 1)$ ، $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 1)$ ، $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 0)$ غیر هم‌صفحه می‌باشند (چرا؟). و در نتیجه، مستقل خطی می‌باشند. این را می‌توان با نشان دادن اینکه $c_1\mathbf{a}_1 + c_2\mathbf{a}_2 + c_3\mathbf{a}_3 = \mathbf{0}$ تساویهای $c_1 = c_2 = c_3 = 0$ را ایجاب می‌کنند امتحان نمود.

مسائل

بردارهای $\mathbf{a} + 2\mathbf{b}$ و $2\mathbf{a} - 3\mathbf{b}$ را در هر حالت بیابید.

۱✓ $\mathbf{a} = (1, -2, 4), \mathbf{b} = (3, 2, -1)$

۲✓ $\mathbf{a} = (4, 0, 7), \mathbf{b} = (2, 5, 0)$

۳✓ $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

۴✓ $\mathbf{a} = -\mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - \mathbf{k}$

بردار \overrightarrow{AB} را با نقاط انتهایی داده شده بیابید.

۵✓ $A = (-3, 2, 5), B = (4, 1, -1)$

۶✓ $A = (7, 0, 3), B = (6, 2, 9)$

۷✓ $A = (\frac{1}{2}, \frac{3}{4}, -\frac{1}{8}), B = (-\frac{3}{4}, \frac{1}{2}, \frac{1}{8})$

۸✓ $A = (13, -11, 5), B = (15, 17, -9)$

۹✓ نقطه پایان بردار $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - \mathbf{j} + 4\mathbf{k}$ را در صورتی بیابید که نقطه شروعش $(1, 2, -3)$ باشد؟

۱۰✓ نقطه شروع بردار $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ را در صورتی بیابید که نقطه پایانش $(-4, 0, 5)$ باشد.

اندازه بردار داده شده را بیابید.

۱۱✓ $2\mathbf{i} + \mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

۱۱✓ $\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$

۱۴✓ $-4\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

۱۳✓ $6\mathbf{i} - 9\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

حاصل ضرب نقطه‌ای $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ بردارهای داده شده را یافته، و زاویه بین آنها را نیز پیدا کنید.

۱۵✓ $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 2\mathbf{k}, \mathbf{b} = 3\mathbf{i} - 2\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

۱۶✓ $\mathbf{a} = 12\mathbf{i} - 5\mathbf{k}, \mathbf{b} = 3\mathbf{j} + 4\mathbf{k}$

۱۷✓ $\mathbf{a} = (1, 1, -1), \mathbf{b} = (-1, 1, 1)$

۱۸. $\mathbf{a} = (12, -15, 16), \mathbf{b} = (2, 2, 1)$

۱۹. مقدار ϵ را طوری بیابید که بردارهای $\mathbf{a} = \epsilon\mathbf{i} - 5\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = \mathbf{i} + 4\mathbf{j} - \epsilon\mathbf{k}$ متعامد باشند.

۲۰. مقادیر s و ϵ را طوری بیابید که بردارهای $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + s\mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = \epsilon\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$ موازی باشند.

$\text{proj}_{\mathbf{b}} \mathbf{a}$ را به ازای بردارهای داده شده \mathbf{a} و \mathbf{b} حساب کنید.

۲۱. $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{b} = 2\mathbf{i} + 3\mathbf{k}$

۲۲. $\mathbf{a} = -2\mathbf{i} + \mathbf{j} + 3\mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j} + \mathbf{k}$

۲۳. $\mathbf{a} = 4\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - 2\mathbf{k}$

۲۴. $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

آیا یک بردار می‌تواند زوایای داده شده را به عنوان زوایای هادی داشته باشد؟

۲۵. $45^\circ, 45^\circ, 60^\circ$ ۲۶. $90^\circ, 150^\circ, 60^\circ$ ۲۷. $45^\circ, 60^\circ, 120^\circ$

آیا یک بردار می‌تواند با دو تا از سه محور مختصات مثبت زوایای داده شده را بسازد؟

۲۸. $30^\circ, 45^\circ$ ۲۹. $150^\circ, 30^\circ$ ۳۰. $60^\circ, 60^\circ$

کسینوسهای هادی و زوایای هادی بردار داده شده را بیابید.

۳۱. $2\mathbf{i} - 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}$

۳۲. $12\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

۳۳. $6\mathbf{i} + 2\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$

۳۴. $-15\mathbf{i} + 16\mathbf{j} + 12\mathbf{k}$

۳۵. برداری با هر سه محور مثبت مختصات زاویه حاده θ می‌سازد. θ را بیابید.

۳۶. مکعبی بردارهای $2\mathbf{i}$ ، $2\mathbf{j}$ ، و $2\mathbf{k}$ را به عنوان سه یال خود دارد. زاویه بردار واصل

از مبدأ O تا مرکز وجه جلو مکعب با بردار واصل از O تا مرکز وجه بالایی را بیابید.

۳۷. در یک کارت مربع شکل یکی از اقطارش رسم شده است، و نیز دو خط دیگر در آن

ترسیم شده که کارت را به سه نوار مستطیلی همنهشت تقسیم کرده‌اند. سپس کارت

در امتداد اضلاع نوارهای مستطیلی تاخورده و به یک منشور مثلث القاعده منتظم

تبدیل شده است. تازدن سبب شده تا قطر یک مسیر چندضلعی مرکب از سه پاره‌خط

گردد، بر هر وجه جانبی منشور یکی. زاویه بین دو پاره‌خط متوالی این مسیر را

بیابید.

۳۸. بردار $\mathbf{b} = (4, 2, 3)$ را به صورت ترکیبی خطی از بردارهای $\mathbf{a}_1 = (0, 1, 1)$ ، $\mathbf{a}_2 = (1, 0, 1)$

و $\mathbf{a}_3 = (1, 1, 0)$ بیان کنید.

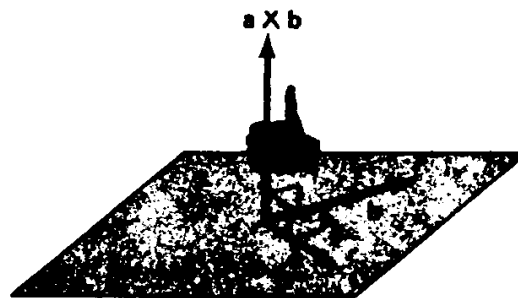
۳۹. یک پایه غیرمتعامد در فضا مثال بزنید.

۳.۱۲ حاصل ضرب خارجی

مفهوم " حاصل ضرب خارجی " دوبردار هم در مسائل هندسی یافتن برداری عمود بر دو بردار داده شده و هم در مسائل مختلف فیزیکی، از جمله رفتار نوک دوک و حرکت یک ذرهٔ باردار در میدان مغناطیسی ظاهر می‌شود. منظور از حاصل ضرب خارجی $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ دو بردار \mathbf{a} و \mathbf{b} (به همین ترتیب) یعنی بردار با اندازهٔ

$$(۱) \quad |\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}||\mathbf{b}| \sin \theta,$$

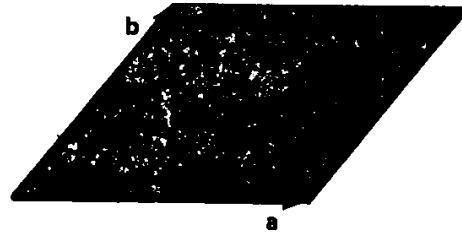
که در آن θ زاویهٔ بین \mathbf{a} و \mathbf{b} است (که در صفحهٔ ۱۰۶۰ تعریف شد)، به طوری که $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ بر صفحهٔ دو بردار \mathbf{a} و \mathbf{b} عمود می‌باشد. همچنین، از دوراستادرا امتداد عمود جهت $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ را جهت انتخابی می‌کنیم که با آن بردارهای \mathbf{a} ، \mathbf{b} و $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ یک " دستگاه راست دست " تشکیل دهند. این بدان معنی است که هرگاه انگشتان دست راست را طوری خم کنیم که از \mathbf{a} به \mathbf{b} به اندازهٔ θ بروند، آنگاه شست اشاره به جهت $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ خواهد داشت. ر. ک. شکل ۱۶. به بیان دیگر، $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ اشاره به جهت حرکت یک پیچ معمولی (با شیارهای راست دست) دارد که توسط یک پیچ گوشتی که تیغه‌اش از \mathbf{a} به \mathbf{b} به اندازهٔ θ می‌چرخد پیچیده می‌شود. هرگاه $\mathbf{a} = \mathbf{0}$ یا $\mathbf{b} = \mathbf{0}$ ، آنگاه θ تعریف نشده است، و طبق تعریف قرار می‌دهیم $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$.



تعبیر هندسی حاصل ضرب خارجی

شکل ۱۶

حاصل ضرب خارجی را حاصل ضرب برداری نیز می‌نامند، زیرا $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ بردار راست. این با حاصل ضرب نقطه‌ای $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}$ از آن جهت فرق دارد که حاصل ضرب نقطه‌ای اسکالر می‌باشد. (توجه کنید که حاصل ضرب خارجی را می‌توان فقط برای بردارهای در فضا تعریف کرد.) از فرمول (۱) و شکل ۱۷ معلوم می‌شود که $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ مساحت متوازی الاضلاع پیموده شده به وسیلهٔ بردارهای \mathbf{a} و \mathbf{b} است. در واقع، $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|$ حاصل ضرب قاعدهٔ $|\mathbf{a}|$ در ارتفاع $|\mathbf{b}| \sin \theta$ این متوازی الاضلاع است.



شکل ۱۷

خواص حاصل ضرب خارجی، زاویه^۶ بین یک بردار و خودش صفر است. بنابراین،

$$|\mathbf{a} \times \mathbf{a}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{a}| \sin 0 = 0,$$

در نتیجه،

$$(۲) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{a} = \mathbf{0}.$$

حاصل ضرب خارجی $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ مساوی $\mathbf{0}$ است اگر و فقط اگر \mathbf{a} موازی \mathbf{b} باشد، که به صورت $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$ نوشته شده و به معنی $\mathbf{a} = p\mathbf{b}$ است که در آن p اسکالر است. (با اختیار $p = 0$ می بینیم که بردار صفر موازی هر بردار است.) در واقع، $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{0}$ معادل است با

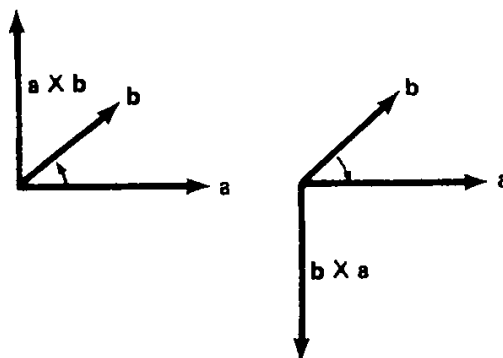
$$|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| = |\mathbf{a}| |\mathbf{b}| \sin \theta = 0 \quad (0 \leq \theta \leq \pi),$$

و این فرمول برقرار است اگر و فقط اگر $\sin \theta = 0$ ؛ و در نتیجه، $\theta = 0$ یا $\theta = \pi$ ، یا دست کم یکی از بردارهای \mathbf{a} و \mathbf{b} مساوی $\mathbf{0}$ می باشد؛ لذا، در هر حالت، $\mathbf{a} \parallel \mathbf{b}$.

اگر وقتی انگشتان دست راست شما از \mathbf{a} به \mathbf{b} خم شده اند شستتان در جهتی باشد، با خم شدن انگشتان از \mathbf{b} به \mathbf{a} شست جهت مقابل را نشان می دهد. (امتحان کنید: "شست بالا، شست پایین"، آزمایش کنید و ببینید!) لذا، $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ و $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ جهت های مختلف دارند. ولی اندازه^۷ $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ و $\mathbf{b} \times \mathbf{a}$ یکسان است، و این را می توان از مقایسه^۸ فرمول (۱) با فرمول

$$|\mathbf{b} \times \mathbf{a}| = |\mathbf{b}| |\mathbf{a}| \sin \theta$$

دریافت. بنابراین، مثل شکل ۱۸،



حاصل ضرب خارجی پاد تعویض پذیر است

شکل ۱۸

$$(۳) \quad \mathbf{b} \times \mathbf{a} = -(\mathbf{a} \times \mathbf{b})$$

زیرا بردارهای هم اندازه و مختلف‌الجهت قرینه‌ء یکدیگرند. فرمول (۳) نشان می‌دهد که حاصل ضرب خارجی تعویضپذیر نیست؛ در واقع، پاد تعویضپذیر است، بدین معنی که تغییر ترتیب عوامل \mathbf{a} و \mathbf{b} علامت حاصل ضرب $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ را تغییر می‌دهد.

مثال ۱. نشان دهید که

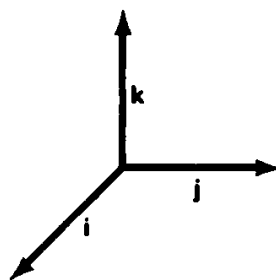
$$(۴) \quad \begin{aligned} \mathbf{i} \times \mathbf{i} &= \mathbf{0}, & \mathbf{j} \times \mathbf{j} &= \mathbf{0}, & \mathbf{k} \times \mathbf{k} &= \mathbf{0}, \\ \mathbf{i} \times \mathbf{j} &= \mathbf{k}, & \mathbf{j} \times \mathbf{k} &= \mathbf{i}, & \mathbf{k} \times \mathbf{i} &= \mathbf{j}, \\ \mathbf{j} \times \mathbf{i} &= -\mathbf{k}, & \mathbf{k} \times \mathbf{j} &= -\mathbf{i}, & \mathbf{i} \times \mathbf{k} &= -\mathbf{j}, \end{aligned}$$

که در آن \mathbf{i} ، \mathbf{j} ، و \mathbf{k} بردارهای پایه‌ء یک‌ه‌ء دستگاه راست دست مختصات قائم می‌باشند.

حل. سه فرمول اول نتایج فوری فرمول (۲) هستند. برای اثبات سه فرمول وسط، ملاحظه می‌کنیم که \mathbf{i} ، \mathbf{j} ، \mathbf{k} یک دستگاه راست دست تشکیل می‌دهند؛ و در نتیجه، \mathbf{i} ، \mathbf{k} ، \mathbf{j} و \mathbf{j} ، \mathbf{i} ، \mathbf{k} نیز چنین می‌کنند (ر.ک. شکل ۱۹)، ولی

$$|\mathbf{i} \times \mathbf{j}| = |\mathbf{i}||\mathbf{j}| \sin 90^\circ = 1,$$

و به همین نحو، $|\mathbf{j} \times \mathbf{k}| = |\mathbf{k} \times \mathbf{i}| = 1$. چون حاصل ضرب خارجی پاد تعویضپذیر است، سه فرمول اخیر فوراً "از سه فرمول وسط به دست می‌آیند".



شکل ۱۹

توجه کنید که هر فرمول حاصل ضرب خارجی مستلزم هر سه بردار \mathbf{i} ، \mathbf{j} ، و \mathbf{k} ، در صورت تعویض \mathbf{i} با \mathbf{j} ، \mathbf{j} با \mathbf{k} ، و \mathbf{k} با \mathbf{i} ، برقرار است. لذا، برای تولید تمام فرمولهای مهم (۴)، کافی است تنها فرمول $\mathbf{i} \times \mathbf{j} = \mathbf{k}$ را همراه با قواعد (۲) و (۳) به یاد آوریم. قضیهٔ زیر شبیه نتیجهٔ صفحهٔ ۱۰۶۲ برای حاصل ضربهای خارجی است.

قضیهٔ ۲ (خواص دیگر حاصل ضرب خارجی). هرگاه p و q اسکالر باشند، آنگاه، به ازای

هر دو بردار دلخواه a و b ،

$$(5) \quad (pa) \times (qb) = pq(a \times b)$$

ضرب خارجی در قوانین پخشپذیری

$$(6) \quad a \times (b + c) = (a \times b) + (a \times c),$$

$$(6) \quad (a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

نیز به ازای بردارهای دلخواه a ، b ، و c صدق می‌کنند .

برهان این قضیه کمی خسته‌کننده است ؛ و لذا ، تا آخر بخش به تعویق می‌افتد .

مثال ۲ . با استفاده از قضیه ۲ و پاد تعویضپذیری حاصل ضرب خارجی ، معلوم می‌شود که

$$\begin{aligned} (a + 2b) \times (2a - 3b) &= 2(a \times a) + 4(b \times a) - 3(a \times b) - 6(b \times b) \\ &= 0 - 4(a \times b) - 3(a \times b) - 0 = -7a \times b, \end{aligned}$$

که در آن $pa \times b$ اختصاری برای $p(a \times b)$ است .

مثال ۳ . حاصل ضربهای خارجی شرکت ناپذیر اند ؛ یعنی $(a \times b) \times c$ لزوماً مساوی $a \times (b \times c)$ نیست ؛ ، لذا ، نمی‌توان پرانتزها را حذف کرد و فقط نوشت $a \times b \times c$.
مثلاً ، طبق (۴) و (۶) ،

$$(i \times j) \times (i + j) = k \times (i + j) = (k \times i) + (k \times j) = j - i,$$

حال آنکه

$$i \times (j \times (i + j)) = i \times [(j \times i) + (j \times j)] = i \times (-k) = j,$$

در نتیجه ،

$$(i \times j) \times (i + j) \neq i \times (j \times (i + j)).$$

دترمینانها ، پیش از ادامه بحث ، کمی منحرف شده یک مفهوم جبری معرفی می‌کنیم که بررسی حاصل ضربهای خارجی را بسیار ساده می‌کند . علایمی به شکل

$$(7) \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix},$$

که در آنها یک آرایه مربع شکل از اعداد حقیقی بین دو خط قائم می‌آید ، دترمینان نام دارد (به‌طور کلی ، n سطر هر یک شامل n عدد وجود دارند) . تعداد سطرها یا ستونهای یک دترمینان مرتبه n آن نام دارد ، و دترمینان مرتبه n دترمینان $n \times n$ (یا n در n)

نیز نامیده می‌شود. لذا، علامت اول در (۷) یک دترمینان 2×2 است، و علامت دوم یک دترمینان 3×3 می‌باشد. هر یک از این علایم صورت بسیار فشردهٔ نوشتن عدد خاصی است. به طور مشخص، اولین علامت (۷) نشانگر عدد

$$(۸) \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = a_1 b_2 - a_2 b_1$$

است، و دومین علامت معرف عدد

$$(۹) \quad \begin{vmatrix} a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix} = a_1 \begin{vmatrix} b_2 & b_3 \\ c_2 & c_3 \end{vmatrix} - a_2 \begin{vmatrix} b_1 & b_3 \\ c_1 & c_3 \end{vmatrix} + a_3 \begin{vmatrix} b_1 & b_2 \\ c_1 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$= a_1(b_2 c_3 - b_3 c_2) - a_2(b_1 c_3 - b_3 c_1) + a_3(b_1 c_2 - b_2 c_1)$$

می‌باشد. توجه کنید که در فرمول (۹) دترمینان 2×2 که از راست در a_i ($i = 1, 2, 3$) ضرب شده از دترمینان 3×3 سمت چپ با حذف هر دو سطر و ستون شامل a_i به دست می‌آید، و این امر در نمودارهای زیر مجسم شده است:

$$\begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{a_2} & \cancel{a_3} \\ b_1 & b_2 & b_3 \\ c_1 & c_2 & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{a_2} & \cancel{a_3} \\ b_1 & \cancel{b_2} & b_3 \\ c_1 & \cancel{c_2} & c_3 \end{vmatrix}, \quad \begin{vmatrix} \cancel{a_1} & \cancel{a_2} & \cancel{a_3} \\ b_1 & b_2 & \cancel{b_3} \\ c_1 & c_2 & \cancel{c_3} \end{vmatrix}$$

اینکه a_2 در طرف راست (۹) با علامت منها ظاهر شده غلط چاپی نبوده، بلکه قسمت ذاتی تعریف یک دترمینان 3×3 می‌باشد.

مثال ۴. بنابر فرمول (۸)،

$$\begin{vmatrix} 5 & 3 \\ -1 & 4 \end{vmatrix} = 5(4) - 3(-1) = 20 + 3 = 23.$$

مثال ۵. بنابر فرمول (۹)،

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & 8 \\ 4 & 7 & -2 \\ 1 & 5 & 9 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} 7 & -2 \\ 5 & 9 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 4 & -2 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} + 8 \begin{vmatrix} 4 & 7 \\ 1 & 5 \end{vmatrix}$$

$$= 2[7(9) + 2(5)] - 3[4(9) + 2(1)] + 8[4(5) - 7(1)]$$

$$= 2(73) - 3(38) + 8(13) = 136.$$

شکل مؤلفهای حاصل ضرب خارجی. حال برای حاصل ضرب خارجی $a \times b$ فرمولی برحسب

مؤلفه‌های \mathbf{a} و \mathbf{b} نسبت به بردارهای پایه یکه \mathbf{i} ، \mathbf{j} ، و \mathbf{k} به دست آورده، و سپس نشان می‌دهیم که $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ را می‌توان به صورت دترمینان نوشت.

قضیه ۳ (شکل مؤلفمائی حاصل ضرب خارجی) . هرگاه

$$\mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k} \quad \text{و} \quad \mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k}.$$

آنگاه

$$(10) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = (\alpha_2 \beta_3 - \alpha_3 \beta_2) \mathbf{i} + (\alpha_3 \beta_1 - \alpha_1 \beta_3) \mathbf{j} + (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_2 \beta_1) \mathbf{k}.$$

برهان . به کمک قضیه ۲ و فرمولهای (۴) برای حاصل ضربهای خارجی بردارهای \mathbf{i} ، \mathbf{j} و \mathbf{k} ، داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= (\alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k}) \times (\beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k}) \\ &= \alpha_1 \beta_1 (\mathbf{i} \times \mathbf{i}) + \alpha_1 \beta_2 (\mathbf{i} \times \mathbf{j}) + \alpha_1 \beta_3 (\mathbf{i} \times \mathbf{k}) \\ &\quad + \alpha_2 \beta_1 (\mathbf{j} \times \mathbf{i}) + \alpha_2 \beta_2 (\mathbf{j} \times \mathbf{j}) + \alpha_2 \beta_3 (\mathbf{j} \times \mathbf{k}) \\ &\quad + \alpha_3 \beta_1 (\mathbf{k} \times \mathbf{i}) + \alpha_3 \beta_2 (\mathbf{k} \times \mathbf{j}) + \alpha_3 \beta_3 (\mathbf{k} \times \mathbf{k}) \\ &= \alpha_1 \beta_1 \mathbf{0} + \alpha_1 \beta_2 \mathbf{k} + \alpha_1 \beta_3 (-\mathbf{j}) + \alpha_2 \beta_1 (-\mathbf{k}) + \alpha_2 \beta_2 \mathbf{0} \\ &\quad + \alpha_2 \beta_3 \mathbf{i} + \alpha_3 \beta_1 \mathbf{j} + \alpha_3 \beta_2 (-\mathbf{i}) + \alpha_3 \beta_3 \mathbf{0} \\ &= \alpha_1 \beta_2 \mathbf{k} - \alpha_1 \beta_3 \mathbf{j} - \alpha_2 \beta_1 \mathbf{k} + \alpha_2 \beta_3 \mathbf{i} + \alpha_3 \beta_1 \mathbf{j} - \alpha_3 \beta_2 \mathbf{i}, \end{aligned}$$

که با (۱۰) معادل است .

باتوجه به فرمول (۱۰) معلوم می‌شود که می‌توان آن را برحسب دترمینانهای 2×2 به صورت زیر نوشت :

$$(10') \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \mathbf{k}$$

از مقایسهٔ مجموع سمت راست با مجموع مشابه در فرمول (۹)، معلوم می‌شود که

$$(11) \quad \mathbf{a} \times \mathbf{b} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.$$

این دترمینان 3×3 " علامتی " است بدین معنی که سطر اولش به جای عدد از بردار تشکیل شده است، ولی آن را با این علم نوشته‌ایم که روش بسیار فشرده‌ای برای نمایش مجموع آمده در (۱۰') می‌باشد.

مثال ۶. حاصل ضرب خارجی $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ بردارهای $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} - \mathbf{k}$ و $\mathbf{b} = 2\mathbf{i} - \mathbf{j} + \mathbf{k}$ را بیابید.

حل. بنا بر فرمول (۱۱)،

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \times \mathbf{b} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & -1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (3 - 1)\mathbf{i} - (1 + 2)\mathbf{j} + (-1 - 6)\mathbf{k} \\ &= 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j} - 7\mathbf{k}. \end{aligned}$$

مثال ۷. مساحت مثلث PQR به رأسهای $P = (1, 2, 0)$ ، $Q = (3, 0, -3)$ و $R = (5, 2, 6)$ را بیابید.

حل. مساحت متوازی الاضلاع پیموده شده به وسیله بردارهای \overrightarrow{PQ} و \overrightarrow{PR} مساوی است با $|\overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}|$ ، و این دو برابر مساحت A است. چون

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} &= OQ - OP = (3, 0, -3) - (1, 2, 0) = (2, -2, -3) \\ \overrightarrow{PR} &= OR - OP = (5, 2, 6) - (1, 2, 0) = (4, 0, 6) \end{aligned}$$

(که در آن O مبدا است)، داریم

$$\begin{aligned} \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -2 & -3 \\ 4 & 0 & 6 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 0 & 6 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= (-12 + 0)\mathbf{i} - (12 + 12)\mathbf{j} + (0 + 8)\mathbf{k} = -12\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 8\mathbf{k}. \end{aligned}$$

بنابراین،

$$2A = |-12\mathbf{i} - 24\mathbf{j} + 8\mathbf{k}| = |(-2)(6\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 4\mathbf{k})|,$$

در نتیجه،

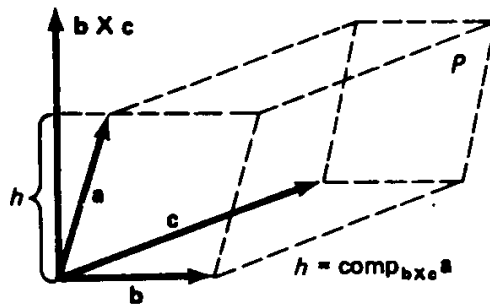
$$A = |6\mathbf{i} + 12\mathbf{j} - 4\mathbf{k}| = \sqrt{36 + 144 + 16} = \sqrt{196} = 14$$

حاصل ضرب سه‌گانه اسکالر. در بین حاصل ضربهای مختلف شامل سه یا چند بردار، مهمترین آنها حاصل ضرب سه‌گانه اسکالر $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ است که حاصل ضرب اسکالر یا نقطه‌ای بردارهای \mathbf{a} و $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ می‌باشد. برای تعبیر هندسی عدد $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ آن را با فرض $\mathbf{b} \times \mathbf{c} \neq \mathbf{0}$

به شکل زیر می‌نویسیم:

$$(۱۲) \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| \frac{\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})}{|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|} = |\mathbf{b} \times \mathbf{c}| \operatorname{comp}_{\mathbf{b} \times \mathbf{c}} \mathbf{a}.$$

در اینجا $\operatorname{comp}_{\mathbf{b} \times \mathbf{c}} \mathbf{a}$ مولفه \mathbf{a} در امتداد $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ است. قدر مطلق این مولفه ارتفاع h متوازی السطوح P پیموده شده به وسیله بردارهای \mathbf{a} ، \mathbf{b} ، و \mathbf{c} مثل شکل ۲۰ است که در آن



شکل ۲۰

$\operatorname{comp}_{\mathbf{b} \times \mathbf{c}} \mathbf{a} > 0$ فرض کنیم V حجم P باشد. چون $|\mathbf{b} \times \mathbf{c}|$ مساحت پایه P است، از (۱۲) نتیجه می‌شود که

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{cases} V & \text{اگر } \operatorname{comp}_{\mathbf{b} \times \mathbf{c}} \mathbf{a} > 0 \\ -V & \text{اگر } \operatorname{comp}_{\mathbf{b} \times \mathbf{c}} \mathbf{a} < 0 \end{cases}$$

در نتیجه، در هر حال،

$$(۱۳) \quad V = |\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})|.$$

مولفه \mathbf{a} در امتداد $\mathbf{b} \times \mathbf{c}$ صفر است اگر و فقط اگر \mathbf{a} در صفحه \mathbf{b} و \mathbf{c} قرار داشته باشد. بنابراین، طبق (۱۲)، سه بردار \mathbf{a} ، \mathbf{b} ، و \mathbf{c} هم‌صفحه‌اند اگر و فقط اگر $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = 0$ (چرا این حتی اگر $\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{0}$ مجاز باشد نیز درست است؟)

برای بیان حاصل ضرب سه‌گانه اسکالر $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ بر حسب مولفه‌های \mathbf{a} ، \mathbf{b} ، و \mathbf{c} ،

قرار می‌دهیم

$$\mathbf{a} = \alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k} \quad \mathbf{b} = \beta_1 \mathbf{i} + \beta_2 \mathbf{j} + \beta_3 \mathbf{k}, \quad \mathbf{c} = \gamma_1 \mathbf{i} + \gamma_2 \mathbf{j} + \gamma_3 \mathbf{k}.$$

در این صورت، طبق فرمول (۱۱)،

$$\mathbf{b} \times \mathbf{c} = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix},$$

در نتیجه،

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= (\alpha_1 \mathbf{i} + \alpha_2 \mathbf{j} + \alpha_3 \mathbf{k}) \cdot \left(\begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \\ &= \alpha_1 \begin{vmatrix} \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix} - \alpha_2 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_3 \end{vmatrix} + \alpha_3 \begin{vmatrix} \beta_1 & \beta_2 \\ \gamma_1 & \gamma_2 \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

یا معادلاً

$$(14) \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \\ \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \end{vmatrix}.$$

مثال ۸. آیا بردارهای $\mathbf{a} = (2, 3, -1)$ ، $\mathbf{b} = (1, -1, 3)$ ، و $\mathbf{c} = (1, 9, -11)$ هم‌صفحه‌اند؟

حل. بلی، زیرا طبق (۱۴) داریم

$$\begin{aligned} \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) &= \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & -1 & 3 \\ 1 & 9 & -11 \end{vmatrix} = 2 \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ 9 & -11 \end{vmatrix} - 3 \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & -11 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 1 & 9 \end{vmatrix} \\ &= 2(11 - 27) - 3(-11 - 3) - (9 + 1) = -32 + 42 - 10 = 0. \end{aligned}$$

مثال ۹. حجم V متوازی‌السطوح پیموده شده به وسیله بردارهای $\mathbf{i} + \mathbf{j}$ ، $\mathbf{j} + \mathbf{k}$ ، و $\mathbf{k} + \mathbf{i}$ را بیابید.

حل. در اینجا

$$\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 - (-1) = 2,$$

و در نتیجه، طبق (۱۳)، $V = 2$.

مثال ۱۰. نشان دهید که به ازای بردارهای دلخواه $\mathbf{a} = (\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ ، $\mathbf{b} = (\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ ، و $\mathbf{c} = (\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$

$$(15) \quad \mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$$

حل. از (۱۰) نتیجه می‌شود که

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c} &= \left(\begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \right) \cdot (\gamma_1 \mathbf{i} + \gamma_2 \mathbf{j} + \gamma_3 \mathbf{k}) \\
 &= \gamma_1 \begin{vmatrix} \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix} - \gamma_2 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_3 \end{vmatrix} + \gamma_3 \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \gamma_1 & \gamma_2 & \gamma_3 \\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 \\ \beta_1 & \beta_2 & \beta_3 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

اگر این دترمینان و دترمینان (۱۴) را حساب کنید، درمی یابید که هر دو یک مقدار دارند، و بدین ترتیب فرمول (۱۵) ثابت می شود. جزئیات جبری را به عنوان تمرین می گذاریم.

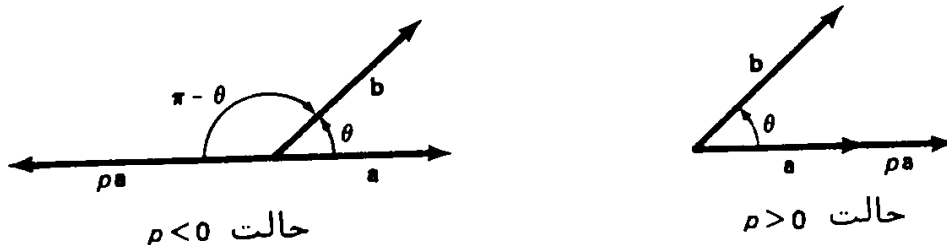
در واقع، ابهامی در نوشتن $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \cdot \mathbf{c}$ و $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ به صورت $\mathbf{a} \times \mathbf{b} \cdot \mathbf{c}$ وجود ندارد، زیرا عبارات $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \cdot \mathbf{c})$ و $(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ هر دو بی معنی اند (چرا؟). لذا، فرمول (۱۵) به ما می گوید که در عبارت $\mathbf{a} \cdot \mathbf{b} \times \mathbf{c}$ می توان علائم نقطه و ضرب را بدون تغییر در مقدار باهم ضرب کرد.

برهان قضیه ۲ (اختیاری). از تعبیر هندسی حاصل ضرب خارجی فوراً معلوم می شود که به ازای $p \neq 0$,

$$(16) \quad (pa) \times b = p(a \times b)$$

همانطور که شکل ۲۱ نشان داده، حالات $p > 0$ و $p < 0$ باید از هم متمایز شوند، ولی این مشکل نیست زیرا $\sin(\pi - \theta) = \sin \theta$. از تلفیق (۱۶) با فرمول همتای

$$(16') \quad a \times (qb) = q(a \times b)$$



شکل ۲۱

به ازای $q \neq 0$ فوراً معلوم می شود که

$$(pa) \times (qb) = p[a \times (qb)] = p[q(a \times b)],$$

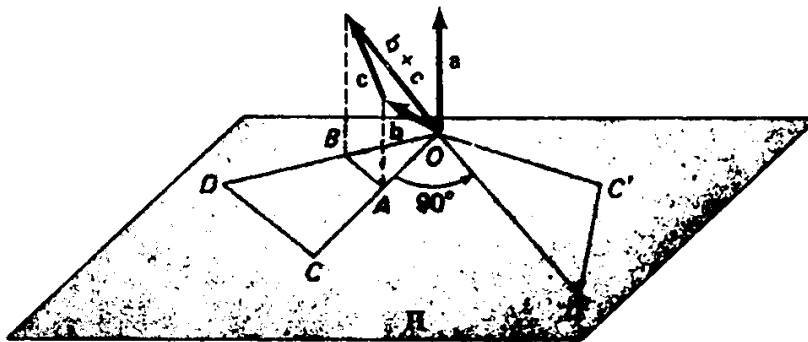
در نتیجه،

$$(pa) \times (qb) = pq(a \times b),$$

و این فرمول در صورت صفر بودن هر دو اسکالر p و q نیز برقرار می ماند.
برای اثبات قوانین پخشپذیری

$$(۱۷) \quad \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{b}) + (\mathbf{a} \times \mathbf{c}), \quad (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}),$$

فرض کنیم بردارهای \mathbf{a} ، \mathbf{b} ، و $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ دارای نقطه شروع مشترک O بوده، و Π صفحه ماربر O عمود بر \mathbf{a} مثل شکل ۲۲ باشد. عمودهای مرسوم از نقاط پایان \mathbf{b} و $\mathbf{b} + \mathbf{c}$ بر Π این صفحه را در نقاط A و B قطع می کنند. با بزرگ کردن مثلث OAB به وسیله عامل $|\mathbf{a}|$ ، مثلث OCD به دست می آید ("بزرگ سازی در صورت $|\mathbf{a}| < 1$ عملاً" کوچک سازی است، و اگر $|\mathbf{a}| = 1$ ، OCD بر OAB منطبق می شود). سپس OCD را به اندازه 90° حول O در صفحه Π می چرخانیم،



شکل ۲۲

این دوران OCD را به مثلث همیشه $OC'D'$ می برد، و از دو جهت دوران ممکن جهتی را اختیار می کنیم که بردارهای \vec{OC} ، \vec{OC}' ، و \mathbf{a} یک دستگاه راست دست تشکیل می دهند. از شکل واضح است که

$$(۱۸) \quad \vec{OD}' = \vec{OC}' + \vec{C'D}'.$$

اما

$$\vec{OC}' = \mathbf{a} \times \mathbf{b}, \quad \vec{OD}' = \mathbf{a} \times (\mathbf{b} + \mathbf{c}), \quad \vec{C'D}' = \mathbf{a} \times \mathbf{c},$$

و با گذاردن این عبارات در (۱۸) فرمول اول (۱۷) به دست می آید. برای به دست آوردن فرمول دوم، از فرمول اول و یاد مشتق پذیری حاصل ضرب خارجی استفاده می کنیم:

$$\begin{aligned} (\mathbf{a} + \mathbf{b}) \times \mathbf{c} &= -[\mathbf{c} \times (\mathbf{a} + \mathbf{b})] = -[(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) + (\mathbf{c} \times \mathbf{b})] \\ &= -(\mathbf{c} \times \mathbf{a}) - (\mathbf{c} \times \mathbf{b}) = (\mathbf{a} \times \mathbf{c}) + (\mathbf{b} \times \mathbf{c}). \end{aligned}$$

مسائل

حاصل ضرب خارجی $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ بردارهای داده شده را بیابید.

$$\mathbf{a} = 3\mathbf{k}, \mathbf{b} = -2\mathbf{j} \quad \checkmark$$

۲ ✓ $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{j} - \mathbf{k}$

۳ ✓ $\mathbf{a} = (0, 2, 1), \mathbf{b} = (1, 0, 2)$

۴ ✓ $\mathbf{a} = (10, 0, 5), \mathbf{b} = (0, -2, 6)$

۵ ✓ $\mathbf{a} = \mathbf{i} - \mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{b} = 3\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 2\mathbf{k}$

۶ ✓ $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 3\mathbf{j} + 2\mathbf{k}, \mathbf{b} = -\mathbf{i} + 4\mathbf{j} - 3\mathbf{k}$

۷ ✓ $\mathbf{a} = (1, 3, 4), \mathbf{b} = (2, 6, -3)$

۸ ✓ $\mathbf{a} = (9, -7, 1), \mathbf{b} = (8, 5, -2)$

مساحت متوازی‌الاضلاع پیموده شده به وسیله بردارهای داده شده را بیابید.

۹ ✓ $\mathbf{a} = \mathbf{i} + 2\mathbf{j} - \mathbf{k}, \mathbf{b} = -2\mathbf{i} + 3\mathbf{j} + \mathbf{k}$

۱۰ ✓ $\mathbf{a} = 3\mathbf{i} - 4\mathbf{j} + 5\mathbf{k}, \mathbf{b} = -6\mathbf{k}$

مساحت مثلث با رئوس داده شده را بیابید.

۱۱ ✓ $P = (3, 4, 7), Q = (0, 6, 1), R = (5, -2, 4)$

۱۲ ✓ $P = (-1, 4, 5), Q = (1, 3, 7), R = (2, 5, 6)$

۱۳. با استفاده از حاصل ضرب خارجی، نشان دهید که مساحت متوازی‌الاضلاع پیموده

شده به وسیله اقطار متوازی‌الاضلاع P دو برابر مساحت خود P است.

۱۴. نشان دهید که به ازای بردارهای \mathbf{a} و \mathbf{b} دلخواه، $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}|^2 + (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})^2 = |\mathbf{a}|^2 |\mathbf{b}|^2$.

بردار یک‌ای بیابید که بر هر دو بردار داده شده عمود باشد.

۱۵ ✓ $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}$

۱۶ ✓ $\mathbf{a} = 2\mathbf{i} - \mathbf{k}, \mathbf{b} = \mathbf{i} - 2\mathbf{j}$

۱۷ ✓ $\mathbf{a} = (2, 0, -1), \mathbf{b} = (-2, 1, 0)$

۱۸ ✓ $\mathbf{a} = (3, 1, 2), \mathbf{b} = (-1, 3, -1)$

۱۹. آیا $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{a} \times \mathbf{c}$ ، که در آن $\mathbf{a} \neq \mathbf{0}$ ، تساوی $\mathbf{b} = \mathbf{c}$ را ایجاب می‌کند؟ پاسخ خود را

توضیح دهید.

۲۰. نشان دهید که $|\mathbf{a} \times \mathbf{b}| \leq |\mathbf{a}| |\mathbf{b}|$. چه وقت تساوی برقرار است؟

دترمینان داده شده را حساب کنید.

۲۳ ✓ $\begin{vmatrix} x & 1 \\ x^2 & x \end{vmatrix}$

۲۲ ✓ $\begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 7 & 3 \end{vmatrix}$

۲۱ ✓ $\begin{vmatrix} -1 & 4 \\ -5 & 2 \end{vmatrix}$

۲۶ ✓ $\begin{vmatrix} \sin \alpha & \cos \alpha \\ \sin \beta & \cos \beta \end{vmatrix}$

۲۵ ✓ $\begin{vmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{vmatrix}$

۲۴ ✓ $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix}$

$$\begin{vmatrix} 2 & 0 & 3 \\ 7 & 1 & 6 \\ 6 & 0 & 5 \end{vmatrix} \cdot 29 \checkmark \quad \begin{vmatrix} 3 & 4 & -5 \\ 8 & 7 & -2 \\ 2 & -1 & 8 \end{vmatrix} \cdot 28 \checkmark \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 5 & 3 & 2 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} \cdot 27 \checkmark$$

$$\begin{vmatrix} a & x & x \\ x & b & x \\ x & x & c \end{vmatrix} \cdot 32 \checkmark \quad \begin{vmatrix} 0 & a & 0 \\ b & c & d \\ 0 & e & 0 \end{vmatrix} \cdot 31 \checkmark \quad \begin{vmatrix} 4 & 5 & 11 \\ -2 & -3 & 1 \\ 3 & 8 & -2 \end{vmatrix} \cdot 30 \checkmark$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} \cdot 33 \checkmark$$

۳۴. نشان دهید که $|a \cdot (b \times c)| \leq |a||b||c|$. چه وقت تساوی برقرار است؟
 حاصل ضرب سه گانه اسکالر $a \cdot (b \times c)$ بردارهای داده شده را بیابید.

۳۵. $a = (1, -1, 3), b = (-2, 2, 1), c = (3, -2, 5)$ ✓

۳۶. $a = (1, 2, 5), b = (1, -1, 3), c = (3, -6, -1)$ ✓

۳۷. $a = (-4, 2, 1), b = (-5, 1, 2), c = (-1, -1, 1)$ ✓

۳۸. $a = (2, -1, 6), b = (3, -5, 1), c = (4, -7, 1)$ ✓

۳۹. نشان دهید که $a \cdot (a \times b) = a \cdot (b \times a) = b \cdot (a \times a) = 0$. با استفاده از این نشان دهید
 یک دترمینان 3×3 در صورتی صفر است که دو سطرش یکسان باشند.

۴۰. با استفاده از این امر که تعویض دو سطر یک دترمینان علامتش را تغییر می دهد،

ثابت کنید که $a \cdot (b \times c) = b \cdot (c \times a) = c \cdot (a \times b)$.

آیا بردارهای داده شده هم صفحه اند؟ جوابتان را توضیح دهید.

۴۱. $a = (-1, 2, 2), b = (2, -3, 1), c = (-4, 7, 3)$ ✓

۴۲. $a = (3, -2, 1), b = (2, 1, 2), c = (3, -1, -4)$ ✓

۴۳. نشان دهید که چهار نقطه $A = (1, 2, -1), B = (0, 1, 5), C = (-1, 2, 1)$ و $D = (2, 1, 3)$ هم صفحه اند.

حجم متوازی السطوح پیموده شده به وسیله بردارهای داده شده را بیابید.

۴۴. $a = i \times j, b = j \times k, c = k \times i$

۴۵. $a = (1, 3, -1), b = (-2, 1, 2), c = (3, 5, -2)$ ✓

۴۶. $a = (-4, 5, 0), b = (6, 2, 5), c = (2, 1, 7)$ ✓

۴۷. حجم چهار وجهی به رئوس $A = (-1, 2, 1), B = (5, 5, 4), C = (2, 3, -1)$ و

$D = (1, 4, 3)$ را بیابید.

۴۸. حاصل ضرب سه‌گانه به شکل $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ حاصل ضرب سه‌گانه برداری نام دارد. توجه کنید که $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ برخلاف $\mathbf{a} \cdot (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ که اسکالر است برداری باشد. با محاسبه مستقیم تحقیق کنید که $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = (\mathbf{a} \cdot \mathbf{c})\mathbf{b} - (\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})\mathbf{c}$. وقتی به شکل

$$\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c}) = \mathbf{b}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{c}) - \mathbf{c}(\mathbf{a} \cdot \mathbf{b})$$

نوشته شود، "قاعده یک - کب" نام دارد و فرمول مفیدی است که ارزش حفظ کردن دارد.

حاصل ضربهای سه‌گانه برداری $\mathbf{a} \times (\mathbf{b} \times \mathbf{c})$ و $(\mathbf{a} \times \mathbf{b}) \times \mathbf{c}$ را به ازای بردارهای داده شده حساب کنید.

۴۹ ✓ $\mathbf{a} = (2, 1, 3), \mathbf{b} = (1, -2, 2), \mathbf{c} = (1, 1, 1)$

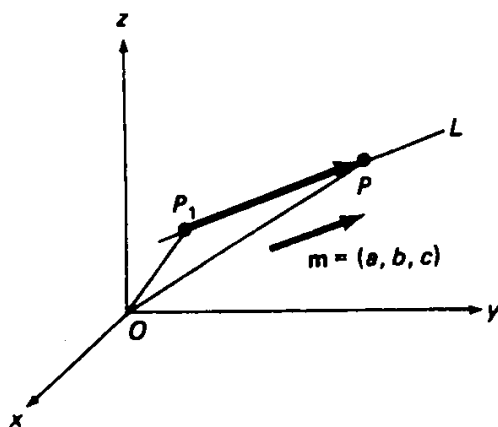
۵۰ ✓ $\mathbf{a} = (4, 0, 5), \mathbf{b} = (0, -1, 6), \mathbf{c} = (1, 2, 0)$

۵۱ $\mathbf{a} = \mathbf{i} + \mathbf{j}, \mathbf{b} = \mathbf{j} + \mathbf{k}, \mathbf{c} = \mathbf{i} + \mathbf{k}$

۵۲. ذره‌ای با بار q با سرعت \mathbf{v} در میدان مغناطیسی \mathbf{B} تحت اثر نیروی $\mathbf{F} = q\mathbf{v} \times \mathbf{B}$ قرار دارد. فرض کنید، همانند در سیکلوترون، میدان مغناطیسی ثابت و بر صفحه حرکت ذره عمود باشد. نشان دهید ذره یک مسیر مستدیر به شعاع mv/qB طی می‌کند، که در آن $v = |\mathbf{v}|$ ، $B = |\mathbf{B}|$ ، و m جرم ذره است. نشان دهید این مسیر با تندی زاویه‌ای qB/m ، به نام فرکانس سیکلوترون، توصیف می‌شود.

۴.۱۲ خطوط و صفحات در فضا

معادلات پارامتری خطوط. خط L در فضا به وسیله نقطه ثابت $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ بر L و بردار ناصفر $\mathbf{m} = (a, b, c)$ موازی L منحصر "معین می‌شود. در این صورت، همانطور که شکل ۲۳ نشان داده، نقطه P بر L واقع است اگر و فقط اگر بردارهای $\overrightarrow{P_1P}$ و $\mathbf{m} = (a, b, c)$



موازی باشند، یا معادلا"

$$\overrightarrow{P_1P} = tm = t(a, b, c),$$

که در آن t اسکالر دلخواهی است. اما

$$\overrightarrow{P_1P} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OP_1} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1),$$

که در آن O مبداست؛ و لذا، P بر L واقع است اگر و فقط اگر

$$(1) \quad x - x_1 = at, \quad y - y_1 = bt, \quad z - z_1 = ct,$$

یا

$$(2) \quad x = x_1 + at, \quad y = y_1 + bt, \quad z = z_1 + ct.$$

وقتی t از $-\infty$ تا ∞ افزایش یابد، نقطه به مختصات (2) L را می‌پیماید. لذا، معادلات

(2) معادلات پارامتری L با پارامتر t می‌باشند.

معادلات تقارنی خطوط. اعداد a ، b ، c و پارامترهای هادی خط L نام دارند. اگر همه مخالف صفر باشند، می‌توان t را از معادلات (1) حذف کرد. با این کار معادلات تقارنی

$$(3) \quad \frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b} = \frac{z - z_1}{c}$$

برای یک خط در فضا به دست می‌آید. می‌توان از این معادلات حتی وقتی یکی (یا چندتا) از پارامترهای هادی صفرند استفاده کرد، و در این حالت این فرض می‌شود که صورت نظیر نیز صفر است. مثلاً، اگر $c = 0$ ، سومین معادله (2) به ما می‌گوید که $z = z_1$ و معادلات تقارنی به صورت زیر درمی‌آیند:

$$\frac{x - x_1}{a} = \frac{y - y_1}{b}, \quad z = z_1.$$

توجه کنید هرگاه a ، b ، c و پارامترهای هادی L باشند، آنگاه pa ، pb ، pc نیز چنین اند، که p ثابت ناصفری است، زیرا بردار pm موازی L نیز می‌باشد. بخصوص، کسینوسهای هادی بردار $m = (a, b, c)$ پارامترهای هادی خط L می‌باشند.

مثال ۱. معادلات پارامتری و تقارنی خط مار بر نقطه $P_1 = (3, -1, 2)$ موازی بردار $m = (-2, 4, 5)$ را بنویسید.

حل. در اینجا $x_1 = 3, y_1 = -1, z_1 = 2$ و $a = -2, b = 4, c = 5$ ؛ و در نتیجه، معادلات پارامتری (2) خواهند شد

$$x = 3 - 2t, \quad y = -1 + 4t, \quad z = 2 + 5t \quad (-\infty < t < \infty),$$

و معادلات تقارنی (۳) به صورت زیر درمی آیند:

$$\frac{x-3}{-2} = \frac{y+1}{4} = \frac{z-2}{5}.$$

برای یافتن خط L مار بر دو نقطه $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ و $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ، بردار موازی L را بردار $\mathbf{m} = (a, b, c)$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$$

واقع بر L می گیریم . در این صورت ، طبق (۲) و (۳) ، L به معادلات پارامتری

$$(۴) \quad x = x_1 + (x_2 - x_1)t, \quad y = y_1 + (y_2 - y_1)t, \quad z = z_1 + (z_2 - z_1)t,$$

که در آنها $-\infty < t < \infty$ ، و معادلات تقارنی

$$(۴') \quad \frac{x - x_1}{x_2 - x_1} = \frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{z - z_1}{z_2 - z_1}$$

می باشد .

مثال ۲ . معادلات پارامتری و تقارنی خط L مار بر نقاط $P_1 = (3, 2, -1)$ و $P_2 = (4, -1, 1)$ را بنویسید . نقطه اشتراک L با صفحه yz را بیابید .

حل . چون $\overrightarrow{P_1P_2} = (1, -3, 2)$ ، از (۴) و (۴') نتیجه می شود که L به معادلات پارامتری

$$(۵) \quad x = 3 + t, \quad y = 2 - 3t, \quad z = -1 + 2t \quad (-\infty < t < \infty)$$

و معادلات تقارنی

$$(۵') \quad \frac{x-3}{1} = \frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{2}$$

است . نقطه اشتراک L با صفحه yz نقطه ای است به شکل $(0, y, z)$ که مختصاتش در (۵')

صدق می کنند . با گذاردن $x = 0$ در (۵') ، به دست می آوریم

$$\frac{y-2}{-3} = \frac{z+1}{2} = -3,$$

در نتیجه ، $y = 11, z = -7$. لذا ، خط L صفحه yz را در نقطه $(0, 11, -7)$ قطع می کند .

قضیه زیر توان روشهای برداری را در هندسه تحلیلی نشان می دهد .

قضیه ۴ (فاصله بین یک نقطه و یک خط در فضا) . خط L در فضا و نقطه P غیر واقع بر

L داده شده است. فرض کنیم m برداری موازی L بوده و Q نقطه‌ای از آن باشد. در این صورت، فاصله d بین L و P از رابطه زیر به دست می‌آید:

$$(۶) \quad d = \frac{|\mathbf{m} \times \overrightarrow{QP}|}{|\mathbf{m}|}.$$

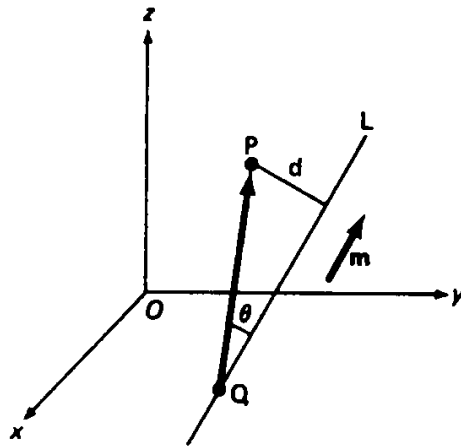
برهان. فرض کنیم θ زاویه بین m و \overrightarrow{QP} باشد (ر. ک. شکل ۲۴). در این صورت، $0 \leq \theta \leq \pi$ و (۶) از مقایسه با فرمولهای

$$d = |\overrightarrow{QP}| \sin \theta$$

و

$$|\mathbf{m} \times \overrightarrow{QP}| = |\mathbf{m}| |\overrightarrow{QP}| \sin \theta.$$

فورا" به دست می‌آید.



شکل ۲۴

مثال ۳. فاصله بین نقطه $P = (4, 2, -2)$ و خط L به معادلات پارامتری $x = 3 - 2t, y = 6t, z = -1 + 9t \quad (-\infty < t < \infty)$

را بیابید.

حل. با گذاردن $t = 0$ در این معادلات، معلوم می‌شود که $Q = (3, 0, -1)$ نقطه‌ای بر L است. چون $\mathbf{m} = (-2, 6, 9)$ و $\overrightarrow{QP} = (1, 2, -1)$ داریم

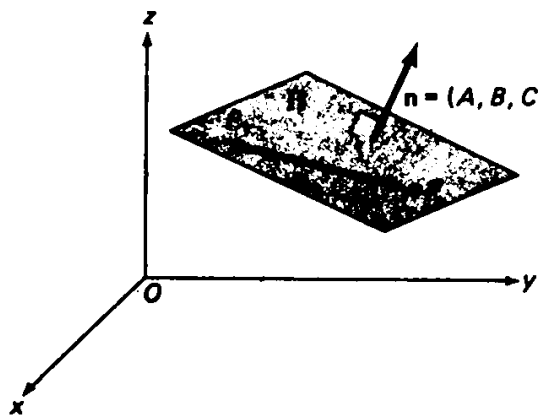
$$\begin{aligned} \mathbf{m} \times \overrightarrow{QP} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -2 & 6 & 9 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 9 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} -2 & 9 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} -2 & 6 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= -24\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 10\mathbf{k}. \end{aligned}$$

لذا، طبق (۶)،

$$d = \frac{|\mathbf{m} \times \overrightarrow{QP}|}{|\mathbf{m}|} = \frac{|-24\mathbf{i} + 7\mathbf{j} - 10\mathbf{k}|}{|-2\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 9\mathbf{k}|} = \frac{\sqrt{(-24)^2 + 7^2 + (-10)^2}}{\sqrt{(-2)^2 + 6^2 + 9^2}}$$

$$= \frac{\sqrt{725}}{\sqrt{121}} = \frac{5}{11} \sqrt{29} \approx 2.45.$$

صفحات و معادلات آنها، حال صفحات در فضا را در نظر می‌گیریم. درست مثل خط L که با نقطه P_1 بر آن و بردار \mathbf{m} موازی آن معین شد، صفحه Π با نقطه P_1 در Π و بردار $\mathbf{n} = (A, B, C)$ عمود بر Π مشخص می‌شود. بردار \mathbf{n} را قائم به صفحه Π می‌نامیم. فرض کنیم $P = (x, y, z)$ نقطه متغیری در فضا باشد. از شکل ۲۵ معلوم می‌شود که P در Π است



شکل ۲۵

اگر و فقط اگر بردارهای $\mathbf{n} = (A, B, C)$ و $\overrightarrow{P_1P}$ برهم عمود باشند، یا معادلاً

$$\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{P_1P} = 0.$$

اما $\overrightarrow{P_1P} = (x - x_1, y - y_1, z - z_1)$ ؛ و لذا، P در Π است اگر و فقط اگر

$$(۷) \quad A(x - x_1) + B(y - y_1) + C(z - z_1) = 0.$$

پس از (۷) نتیجه می‌شود که

$$(۸) \quad Ax + By + Cz + D = 0,$$

که در آن

$$(۸') \quad D = -Ax_1 - By_1 - Cz_1.$$

به عکس، نمودار هر معادله به شکل (۸)، که در آن A, B, C و همه صفر نیستند، صفحه‌ای با قائم $\mathbf{n} = (A, B, C)$ است. در واقع، فرض کنیم x_1, y_1, z_1 سه عدد صادق در شرط

(۸) باشند. (چرا یافتن این سه عدد همیشه مقدور است؟) با جانشانی (۸') در (۸) معادله‌ای معادل (۷) به دست می‌آید، که معادله صفحه مار بر نقطه $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ عمود بر بردار $\mathbf{n} = (A, B, C)$ است. توجه کنید که نمودار (۸) صفحه‌ای مار بر مبدأ است اگر $D = 0$ ، صفحه‌ای موازی محور z است اگر $C = 0$ ، و صفحه‌ای عمود بر محور z است اگر $A = B = 0$. بر خواننده است حالات دیگری که در آنها بعضی از اعداد A, B, C, D صفرند امتحان شوند.

مثال ۴. معادله صفحه مار بر نقطه $P_1 = (-2, 1, 3)$ عمود بر بردار $\mathbf{n} = (4, 5, -1)$ را بیابید.

حل. در اینجا $x_1 = -2, y_1 = 1, z_1 = 3$ و $A = 4, B = 5, C = -1$ ؛ در نتیجه، معادله (۷) به صورت

$$4(x + 2) + 5(y - 1) - (z - 3) = 0,$$

یا معادلا

$$4x + 5y - z + 6 = 0$$

درمی‌آید.

مثال ۵. فصل مشترک L دو صفحه

$$(9) \quad x + 2y - z + 3 = 0 \quad \text{و} \quad 2x - 3y + 4z - 1 = 0$$

را بیابید.

حل. صفحه اول دارای قائم $\mathbf{n}_1 = (2, -3, 4)$ و صفحه دوم دارای قائم $\mathbf{n}_2 = (1, 2, -1)$ است. چون خط L در هر دو صفحه است، باید بر هر دوی \mathbf{n}_1 و \mathbf{n}_2 عمود باشد. لذا، L موازی بردار

$$\begin{aligned} \mathbf{n}_1 \times \mathbf{n}_2 &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 2 & -3 & 4 \\ 1 & 2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -3 & 4 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 1 & -1 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= -5\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 7\mathbf{k} \end{aligned}$$

می‌باشد. برای یافتن نقطه‌ای بر L ، در هر دو معادله (۹) قرار می‌دهیم $z = 0$ و دستگاه حاصل از معادلات $2x - 3y - 1 = 0, x + 2y + 3 = 0$ را نسبت به x و y حل می‌کنیم تا

به دست آید $x = -1, y = -1$.

لذا، نقطه $(-1, -1, 0)$ بر L قرار دارد، و L به معادلات تقارنی زیر است:

$$\frac{x+1}{-5} = \frac{y+1}{6} = \frac{z}{7}.$$

برای تعیین یک خط فقط دو نقطه لازم است، ولی برای تعیین صفحه سه نقطه می‌خواهیم.

مثال ۶. برای صفحه Π مار بر نقاط $P_1 = (2, -1, 3)$ ، $P_2 = (1, 2, 2)$ ، و $P_3 = (-2, 1, 1)$ معادله بنویسید.

حل. چون نقاط P_1, P_2, P_3 در Π واقعند، بردارهای $\overrightarrow{P_1P_2} = (-1, 3, -1)$ و $\overrightarrow{P_1P_3} = (-4, 2, -2)$ نیز چنین‌اند. لذا، بردار

$$\begin{aligned} \overrightarrow{P_1P_2} \times \overrightarrow{P_1P_3} &= \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ -1 & 3 & -1 \\ -4 & 2 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 3 & -1 \\ 2 & -2 \end{vmatrix} \mathbf{i} - \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{j} + \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -4 & 2 \end{vmatrix} \mathbf{k} \\ &= -4\mathbf{i} + 6\mathbf{j} + 10\mathbf{k}, \end{aligned}$$

که بر هر دو $\overrightarrow{P_1P_2}$ و $\overrightarrow{P_1P_3}$ عمود است، قائم به Π می‌باشد. چون Π صفحه مار بر $P_1 = (2, -1, 3)$ با قائم $\mathbf{n} = (-4, 6, 10)$ است، به کمک (۷) معلوم می‌شود که Π معادله‌ای به شکل

$$-4(x-2) + 6(y+1) + 10(z-3) = 0,$$

یا معادلاً

$$2x - 3y - 5z + 8 = 0$$

دارد.

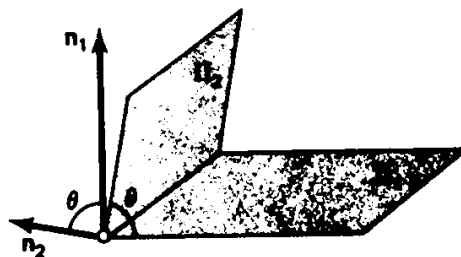
مثال ۷. زاویه بین صفحات $6x + 6y - 3z + 5 = 0$ و $x - 2y + 2z - 4 = 0$ را بیابید.

حل. زاویه بین دو صفحه Π_1 و Π_2 مساوی زاویه θ بین قائمهای \mathbf{n}_1 و \mathbf{n}_2 تعریف می‌شود اگر $0 \leq \theta \leq \pi/2$ (ر. ک. شکل ۲۶)، یا مساوی $\pi - \theta$ تعریف می‌شود اگر $\pi/2 < \theta \leq \pi$ (بدین ترتیب، زاویه بین دو صفحه همیشه کوچکترین مقدار از دو انتخاب ممکن است). در اینجا $\mathbf{n}_1 = (6, 6, -3)$ و $\mathbf{n}_2 = (1, -2, 2)$ ؛ در نتیجه،

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{\mathbf{n}_1 \cdot \mathbf{n}_2}{|\mathbf{n}_1| |\mathbf{n}_2|} = \frac{6(1) + 6(-2) - 3(2)}{\sqrt{6^2 + 6^2 + (-3)^2} \sqrt{1^2 + (-2)^2 + 2^2}} \\ &= \frac{-12}{\sqrt{81}\sqrt{9}} = \frac{-12}{9(3)} = -\frac{4}{9} \end{aligned}$$

چون $\cos \theta$ منفی است، θ منفرجه بوده و زاویه بین صفحات داده شده مساوی است با

$$\pi - \theta = \pi - \arccos\left(-\frac{4}{9}\right) = \arccos \frac{4}{9} \approx 63.6^\circ.$$



زاویه بین صفحات Π_2 و Π_1 مساوی θ است.

شکل ۲۶

قضیه بعدی شبیه قضیه ۱۰، صفحه ۵۵، برای صفحات است.

قضیه ۵ (فاصله بین یک نقطه و یک صفحه). فاصله d بین نقطه $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ و صفحه Π به معادله

$$Ax + By + Cz + D = 0$$

مساوی است با

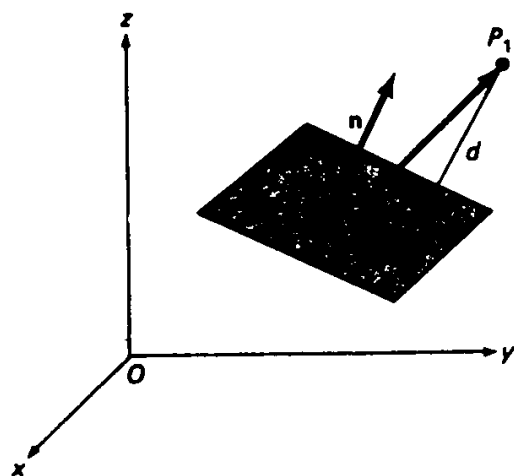
$$(10) \quad d = \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

برهان. بردار $\mathbf{n} = (A, B, C)$ قائم به صفحه Π است. فرض کنیم $Q = (a, b, c)$ ، مثل شکل ۲۷، نقطه‌ای در Π باشد. در این صورت،

$$d = |\text{comp}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{QP_1}|,$$

که در آن

$$\text{comp}_{\mathbf{n}} \overrightarrow{QP_1} = \frac{\mathbf{n} \cdot \overrightarrow{QP_1}}{|\mathbf{n}|}$$



شکل ۲۷

مؤلفه $\vec{QP}_1 = (x_1 - a, y_1 - b, z_1 - c)$ در امتداد n است. بنابراین،

$$(11) \quad d = \frac{|A(x_1 - a) + B(y_1 - b) + C(z_1 - c)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

$$= \frac{|Ax_1 + By_1 + Cz_1 - (Aa + Bb + Cc)|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$$

اما $Aa + Bb + Cc + D = 0$ ، زیرا $Q = (a, b, c)$ در Π واقع است؛ در نتیجه،

$$D = -(Aa + Bb + Cc)$$

با گذاردن این عبارت برای D در (۱۱)، فوراً (۱۰) به دست می‌آید.

مثال ۸. فاصله بین نقطه $(2, 6, -1)$ و صفحه $3x - 4y + 12z - 22 = 0$ را بیابید.

حل. به کمک فرمول (۱۰)، معلوم می‌شود که

$$d = \frac{|3(2) - 4(6) + 12(-1) - 22|}{\sqrt{3^2 + (-4)^2 + 12^2}} = \frac{|-52|}{\sqrt{169}} = \frac{52}{13} = 4.$$

از دیدگاه هندسه واضح است که دو صفحه موازیند اگر و فقط اگر قائمهایشان بردارهایی موازی باشند. زاویه بین صفحات موازی صفر است (چرا؟).

مثال ۹. تحقیق کنید که صفحات $3x + 6y - 12z + 7 = 0$ و $x + 2y - 4z - 1 = 0$ موازیند، و فاصله d بین آنها را بیابید.

حل. دو صفحه، که با Π_1 و Π_2 نموده می‌شوند، دارای قائمهای $\mathbf{n}_1 = (3, 6, -12)$ و $\mathbf{n}_2 = (1, 2, -4)$ اند. چون $\mathbf{n}_2 = \frac{1}{3}\mathbf{n}_1$ ، بردارهای \mathbf{n}_1 و \mathbf{n}_2 موازیند؛ و در نتیجه، صفحات Π_1 و Π_2 نیز چنین می‌باشند. واضح است که d مساوی فاصله بین Π_1 و هر نقطه از Π_2 ، یا بین Π_2 و هر نقطه از Π_1 ، می‌باشد. نقطه $(1, 0, 0)$ در Π_2 قرار دارد؛ و لذا،

$$d = \frac{|3(1) + 6(0) - 12(0) + 7|}{\sqrt{3^2 + 6^2 + (-12)^2}} = \frac{|3 + 7|}{3\sqrt{1^2 + 2^2 + (-4)^2}} = \frac{10}{3\sqrt{21}} \approx 0.73.$$

مسائل

معادلات پارامتری خط مار بر نقطه $(1, -2, 4)$ موازی

۱. $\mathbf{m} = (2, 3, -1)$ بردار ✓

۲. $\mathbf{m} = (5, 1, 0)$ بردار ✓

۳. $\frac{x-1}{-2} = \frac{x-2}{5} = \frac{z+1}{-3}$ خط ✓

۴. $x = -1 + 3t, y = 3 - 2t, z = 2 + 5t$ خط ✓

را بنویسید.

معادلات تقارنی خط مار بر نقطه $(-3, 2, 0)$ موازی

۵. $\mathbf{m} = (9, -4, 3)$ بردار ✓

۶. $\mathbf{m} = (-1, 1, -1)$ بردار ✓

۷. $x = 6t, y = 4, z = 10 - 5t$ خط ✓

۸. $\frac{x-6}{-2} = \frac{y+4}{5} = \frac{z+7}{8}$ خط ✓

را بنویسید.

معادلات پارامتری و تقارنی خط مار بر جفت نقاط داده شده را بنویسید.

۹. $(1, -2, 2), (3, 1, -1)$. ۱۰. $(0, 0, 1), (0, 2, -2)$

۱۱. $(4, 1, 4), (-1, 5, 3)$. ۱۲. $(3, -6, 5), (10, 4, 8)$

فاصله بین نقطه P و خط داده شده را بیابید.

۱۳. $P = (1, 3, 2), x = 3 - 2t, y = 1 + 2t, z = -2 + t$

۱۴. $P = (4, -1, 2), x = 2 + 3t, y = -3 - 4t, z = 1 + 12t$

۱۵. $P = (0, 1, 0), \frac{x+1}{-4} = \frac{y-1}{2} = \frac{z}{4}$

۱۶. $P = (-6, 5, -7), \frac{x+7}{3} = \frac{y-4}{-2} = \frac{z+8}{6}$

معادله صفحه مار بر

۱۷. مبداء با قائم $n = (4, 5, -3)$

۱۸. نقطه $(2, 1, -1)$ با قائم $n = (1, -2, 3)$

۱۹. نقطه $(3, -1, 5)$ عمود بر خط مار بر این نقطه و نقطه $(6, -7, 9)$

۲۰. نقطه $(3, 4, -5)$ موازی هر دو بردار $a = (3, 1, -1)$ و $b = (1, -2, 1)$

۲۱. نقاط $(2, -1, 3)$ و $(3, 1, 2)$ موازی بردار $a = (3, -1, -4)$

۲۲. نقاط $(3, -1, 2)$ ، $(4, -1, -1)$ ، و $(2, 0, 2)$

۲۳. نقاط $(1, -1, -2)$ و $(3, 1, 1)$ عمود بر صفحه $x - 2y - 3z - 5 = 0$

۲۴. نقطه $(2, -1, 1)$ عمود بر هر دو صفحه $y = 0$ و $2x - z + 1 = 0$

را بیابید .

۲۵. نقطه برخورد خط

$$\frac{x-1}{2} = \frac{y+1}{-1} = \frac{z}{3}$$

با صفحه $2x + 3y + z - 11 = 0$ را بیابید .

۲۶. فرض کنید L خط مار بر نقاط $(6, -6, 5)$ و $(-12, 6, -1)$ باشد .

نقاط برخورد L با صفحات مختصات را بیابید .

فصل مشترک جفت صفحات داده شده را بیابید .

۲۷. $x - 2y + 3z - 6 = 0, 3x + 2y - 5z - 10 = 0$

۲۸. $4x + y + z = 0, 2x + 3y - 2z + 5 = 0$

۲۹. $x - 2y + 3z + 2 = 0, 2x + y - 4z - 16 = 0$

۳۰. نشان دهید که خط

$$\frac{x+5}{3} = \frac{y-1}{-2} = \frac{z+4}{1}$$

و فصل مشترک صفحات $x + y - z + 3 = 0$ و $x - y - 5z = 0$ موازیند .

زاویه بین جفت صفحات داده شده را بیابید .

۳۱. $6x + 3y - 2z = 0, x + 2y + 2z = 0$

۳۲. $x - \sqrt{2}y + z + 4 = 0, x + \sqrt{2}y - z - 6 = 0$

۳۳. $3y - z + 1 = 0, 2x + z - 2 = 0$

۳۴. $9x - 2y + 6z + 5 = 0, 4x + 2y - 4z + 1 = 0$

فاصله بین نقطه p و صفحه داده شده را بیابید .

$$P = (4, -1, 1), 16x - 12y + 15z + 9 = 0 \quad . ۳۵$$

$$P = (1, 6, -3), 6x - 2y - 9z + 12 = 0 \quad . ۳۶$$

$$P = (8, 3, -2), 12y - 5z - 27 = 0 \quad . ۳۷$$

فاصله بین جفت صفحات موازی داده شده را بیابید .

$$x - 2y + 2z + 12 = 0, x - 2y + 2z - 6 = 0 \quad . ۳۸$$

$$6x + 18y - 9z - 21 = 0, 4x + 12y - 6z + 7 = 0 \quad . ۳۹$$

$$15x - 16y + 12z + 5 = 0, 30x - 32y + 24z - 5 = 0 \quad . ۴۰$$

۴۱. به ازای چه مقداری از c صفحه $x + y + z = c$ بر کره $x^2 + y^2 + z^2 = 12$ در یک‌هشتم

اول تماس است؟ نقطه تماس را بیابید .

۴۲. گوییم دو خط در فضا متناظر اند اگر نه موازی و نه متقاطع باشند. نشان دهید که

خطوط L_1 و L_2 به معادلات تقارنی

$$(یک) \quad \frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}, \quad \frac{x-x_2}{a_2} = \frac{y-y_2}{b_2} = \frac{z-z_2}{c_2}$$

متناظرند اگر و فقط اگر دترمینان

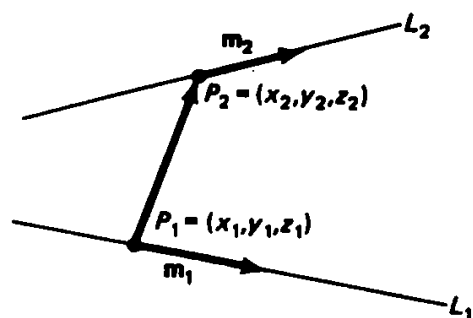
$$\begin{vmatrix} x_2 - x_1 & y_2 - y_1 & z_2 - z_1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

ناصفر باشد .

راهنمایی . با فرض $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ ، $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$ ، $\mathbf{m}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ و

$\mathbf{m}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ ، ملاحظه کنید که L_1 و L_2 موازی یا متقاطع اند اگر و فقط اگر بردارهای

\mathbf{m}_1 ، $\overrightarrow{P_1P_2}$ و \mathbf{m}_2 هم‌صفحه باشند (که در شکل ۲۸ چنین اند) .



شکل ۲۸

۴۳. نشان دهید هرگاه خطوط (یک) متناظر باشند، آنگاه (کوتاهترین) فاصله بین آنها

مساوی است با

$$(دو) \quad d = \frac{|\vec{P_1 P_2} \cdot (\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2)|}{|\mathbf{m}_1 \times \mathbf{m}_2|},$$

که در آن P_1 ، P_2 ، \mathbf{m}_1 ، و \mathbf{m}_2 همان معانی داشته در مسئله قبل را دارند.
۴۴. نشان دهید که خطوط

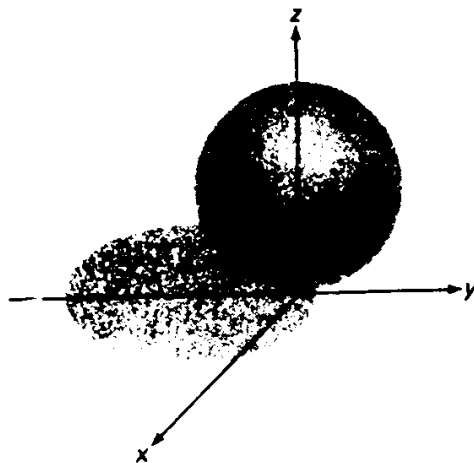
$$\frac{x+4}{2} = \frac{y-4}{-1} = \frac{z+1}{2}, \quad \frac{x-1}{4} = \frac{y+2}{-3} = \frac{z-4}{5}$$

متناظرند. با استفاده از فرمول (دو)، فاصله بین آنها را بیابید.
۴۵. نشان دهید که خطوط

$$\frac{x+1}{2} = \frac{y-1}{3} = \frac{z-2}{-4}, \quad \frac{x-4}{1} = \frac{y-3}{-4} = \frac{z+5}{1}$$

مقاطعند. نقطه اشتراک را بیابید.

۴۶. کره $x^2 + y^2 + z^2 = 4z$ به وسیله یک دسته شعاع نورانی موازی خط $x=0, y=z$ روشن شده است. سایه کره را روی صفحه xy بیابید (ر.ک. شکل ۲۹).



شکل ۲۹

۵.۱۲ منحنیهای فضایی و حرکت مداری

منظور از یک منحنی در فضا یا یک منحنی فضایی یعنی نمودار سه معادله (پارامتری)

$$(۱) \quad x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t),$$

یعنی، مجموعه تمام نقاط (x, y, z) که مختصاتشان در (۱) صدق می‌کنند؛ در اینجا $x(t)$ ، $y(t)$ ، و $z(t)$ سه تابع پیوسته با قلمرو تعریف مشترک‌اند، که همواره بازه‌ای چون I اختیار می‌شود. همچنین، فرض کنیم $x(t)$ ، $y(t)$ ، و $z(t)$ همه توابعی ثابت نباشند، زیرا در غیر این

صورت منحنی (۱) به یک نقطه تحویل می‌شود. وقتی پارامتر t ، که می‌توان آن را زمان گرفت، روی بازه I تغییر کند، نقطه $P = (x, y, z)$ مواضع مختلفی در فضا گرفته، و منحنی (پارامتری) (۱) را رسم می‌کند. منظور از یک قوس از منحنی (۱) یعنی هر منحنی با همین معادلات پارامتری، ولی قلمرو $x(t)$ ، $y(t)$ ، و $z(t)$ زیربازه‌ای از I است. همهٔ اینها چیزی جز تعمیم طبیعی تعریف منحنی مسطح داده شده در صفحهٔ ۷۲۳ به ابعاد سه‌نیم است.

مثال ۱. منحنی به معادلات پارامتری

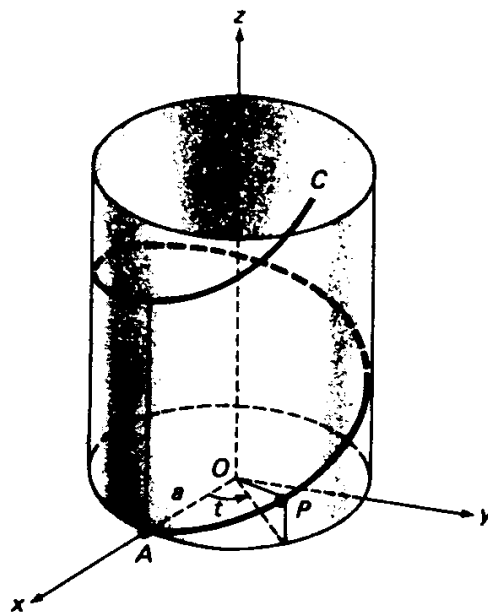
$$x = x_1 + at, \quad y = y_1 + bt, \quad z = z_1 + ct \quad (-\infty < t < \infty)$$

خط مستقیمی است مار بر نقطه (x_1, y_1, z_1) با پارامترهای هادی a ، b ، و c .

مثال ۲. فرض کنید a و b اعداد مثبتی باشند. در این صورت، منحنی C به معادلات پارامتری

$$(۲) \quad x = a \cos t, \quad y = a \sin t, \quad z = bt \quad (0 \leq t < \infty)$$

منحنی پیچ سر بطری به شکل ۳۰ است، که یک مارپیچ مستدیر نام دارد. چون $x^2 + y^2 = a^2(\cos^2 t + \sin^2 t) = a^2$ ، مارپیچ C بر سطح یک استوانهٔ مستدیر قائم به شعاع a قرار دارد، که محور تقارنش محور z است. وقتی t افزایش می‌یابد، مارپیچ حول استوانه می‌پیچد؛ از نقطهٔ شروع $A = (a, 0, 0)$ آغاز کرده و با افزایش t به اندازهٔ 2π یکبار استوانه را دور می‌کند. فاصلهٔ قائم h بین "پیچهای" متوالی C ، که مساوی $2\pi b$



مارپیچ مستدیر

است، پای مارپیچ نام دارد.

تبصره. مارپیچ آمده در شکل راست دست است، بدین معنی که شبیه به شیارهای یک پیچ راست دست می باشد. اگر شرط مثبت بودن b را حذف کنیم، به ازای $b = 0$ دایره به ازای $b < 0$ مارپیچ چپ دست خواهیم داشت (تحقیق کنید).

طول یک منحنی فضایی. طول منحنی فضایی C همانند طول یک منحنی مسطح تعریف می شود؛ یعنی، حد طول یک مسیر چندضلعی محاط شده در C مشروط بر آنکه این حد موجود و متناهی باشد، که در این صورت گوئیم C با طول متناهی است. استدلالی شبیه به آن که در صفحه ۷۴۱ آمد نشان می دهد که هرگاه $x(t)$ ، $y(t)$ ، و $z(t)$ بر بازه $[a, b]$ به طور پیوسته مشتق پذیر باشند، آنگاه منحنی

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

با طول متناهی بوده و طولش L از رابطه زیر به دست می آید:

$$(۳) \quad L = \int_a^b \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2} dt$$

(فرض است که C تنها می تواند تعدادی متناهی خود قطعی داشته باشد).

مثال ۳. طول L یک دور از مارپیچ $x = 3 \cos t$ ، $y = 3 \sin t$ ، $z = 4t$ را بیابید.

حل. وقتی t به اندازه 2π افزایش یابد، نقطه $P = (3 \cos t, 3 \sin t, 4t)$ یک دور مارپیچ را میزند. لذا، با اختیار 0 و 2π به عنوان حدود انتگرالگیری در (۳)، معلوم می شود که

$$\begin{aligned} L &= \int_0^{2\pi} \sqrt{(-3 \sin t)^2 + (3 \cos t)^2 + 4^2} dt \\ &= \int_0^{2\pi} \sqrt{9 + 16} dt = 5 \int_0^{2\pi} dt = 10\pi. \end{aligned}$$

فرض کنیم C منحنی به معادلات پارامتری (۱) باشد. در این صورت، همانند صفحات

۱۰۸۰ تا ۱۰۸۱، می توان تابع طول قوس

$$(۴) \quad s = s(t) = \int_a^t \sqrt{\left(\frac{dx}{du}\right)^2 + \left(\frac{dy}{du}\right)^2 + \left(\frac{dz}{du}\right)^2} du$$

نقطه $P(t)$ را معرفی کرد، که مساوی طول قوس C با نقطه شروع ثابت $P(a) = (x(a), y(a), z(a))$ و نقطه پایان متغیر $P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ است. در اینجا u را متغیر انتگرالگیری می‌گیریم تا با حد بالایی t انتگرالگیری اشتباه نشود. با مشتقگیری از (۴) نسبت به t ، داریم

$$(۴') \quad \frac{ds}{dt} = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dy}{dt}\right)^2 + \left(\frac{dz}{dt}\right)^2}.$$

توابع برداری در فضا. توابع بردار مقدار (یا فقط توابع برداری) در فضا درست مثل توابع در صفحه تعریف می‌شوند جز آنکه در اینجا بردارها علاوه بر مؤلفه‌های x و y مؤلفه z نیز دارند. صرف نظر از این تفاوت جزئی، حدود، مشتقات، و انتگرالهای توابع برداری سه بعدی درست مثل حالت دوبعدی، "مؤلفه به مؤلفه" حساب می‌شوند. مثلاً، حد تابع برداری

$$\mathbf{r}(t) = (2 \tan t)\mathbf{i} + (4t)\mathbf{j} + (\sec t)\mathbf{k},$$

وقتی $t \rightarrow \pi/4$ ، برابر است با

$$\lim_{t \rightarrow \pi/4} \mathbf{r}(t) = \left(\lim_{t \rightarrow \pi/4} 2 \tan t\right)\mathbf{i} + \left(\lim_{t \rightarrow \pi/4} 4t\right)\mathbf{j} + \left(\lim_{t \rightarrow \pi/4} \sec t\right)\mathbf{k} = 2\mathbf{i} + \pi\mathbf{j} + \sqrt{2}\mathbf{k},$$

و مشتقش مساوی است با

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \mathbf{r}(t) &= \left(\frac{d}{dt} 2 \tan t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{d}{dt} 4t\right)\mathbf{j} + \left(\frac{d}{dt} \sec t\right)\mathbf{k} \\ &= (2 \sec^2 t)\mathbf{i} + 4\mathbf{j} + (\sec t \tan t)\mathbf{k}. \end{aligned}$$

مثال ۴. مشتق حاصل ضرب خارجی توابع برداری مشتقپذیر $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$ و $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$ را بیابید.

حل. به جای مشتقگیری از مؤلفه‌ها، از تعریف مشتق شروع می‌کنیم. لذا،

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) &= \lim_{u \rightarrow t} \frac{\mathbf{r}_1(u) \times \mathbf{r}_2(u) - \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)}{u - t} \\ &= \lim_{u \rightarrow t} \frac{\mathbf{r}_1(u) \times \mathbf{r}_2(u) - \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(u) + \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(u) - \mathbf{r}_1(t) \times \mathbf{r}_2(t)}{u - t} \\ &= \lim_{u \rightarrow t} \left(\frac{\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_1(t)}{u - t} \times \mathbf{r}_2(u) + \mathbf{r}_1(t) \times \frac{\mathbf{r}_2(u) - \mathbf{r}_2(t)}{u - t} \right) \\ &= \left(\lim_{u \rightarrow t} \frac{\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_1(t)}{u - t} \right) \times \left(\lim_{u \rightarrow t} \mathbf{r}_2(u) \right) + \mathbf{r}_1(t) \times \left(\lim_{u \rightarrow t} \frac{\mathbf{r}_2(u) - \mathbf{r}_2(t)}{u - t} \right). \end{aligned}$$

اما

$$\lim_{u \rightarrow t} \frac{\mathbf{r}_1(u) - \mathbf{r}_1(t)}{u - t} = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt}, \quad \lim_{u \rightarrow t} \mathbf{r}_2(u) = \mathbf{r}_2(t), \quad \lim_{u \rightarrow t} \frac{\mathbf{r}_2(u) - \mathbf{r}_2(t)}{u - t} = \frac{d\mathbf{r}_2}{dt},$$

و در نتیجه،

$$(5) \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1 \times \mathbf{r}_2) = \left(\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \times \mathbf{r}_2 \right) + \left(\mathbf{r}_1 \times \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right).$$

در اینجا مراحل زیادی وجود دارند، و برخواننده است که برقراری آنها را تحقیق نماید.

به تشابه بین فرمول (5) و قاعدهٔ مشابه برای مشتقگیری از حاصل ضرب توابع اسکالر توجه کنید. ولی حاصل ضربهای سمت راست (5) معمولی نبوده بلکه حاصل ضرب خارجی اند. فرمول همنای

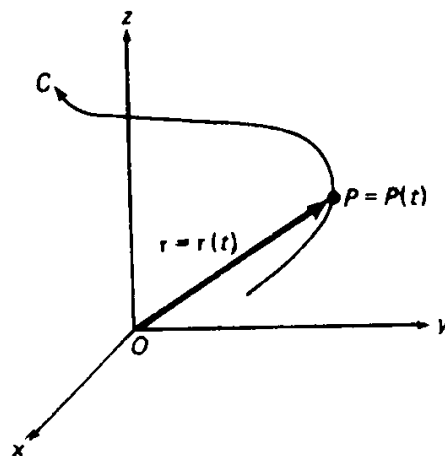
$$(5') \quad \frac{d}{dt} (\mathbf{r}_1 \cdot \mathbf{r}_2) = \left(\frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \cdot \mathbf{r}_2 \right) + \left(\mathbf{r}_1 \cdot \frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \right)$$

برای حاصل ضربهای نقطه‌ای را می‌توان اساساً "به همین روش ثابت کرد."

سرعت و تندی. حال از توابع برداری در بررسی حرکت در فضا استفاده می‌کنیم. فرض کنیم

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(t) = x(t)\mathbf{i} + y(t)\mathbf{j} + z(t)\mathbf{k} \quad (I \text{ در } t)$$

یک تابع برداری مشتقپذیر باشد که بر بازهٔ I تعریف شده است، و نقطهٔ شروع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ مثل شکل ۳۱، در مبدأ O گذارده شده باشد. در این صورت، نقطهٔ پایان $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ نقطهٔ متغیر $P = P(t) = (x(t), y(t), z(t))$ در فضا است، و بردار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ بردار موضع $P = P(t)$ نام دارد.



شکل ۳۱

وقتی t افزایش یابد، $P = P(t)$ یک منحنی فضایی، به نام نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را می‌پیماید؛ یعنی، منحنی C به معادلات پارامتری

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad z = z(t) \quad (t \text{ در } I),$$

و از حالا به بعد پارامتر t را زمان می‌انگاریم. مشتق

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}(t) = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = \frac{dx}{dt} \mathbf{i} + \frac{dy}{dt} \mathbf{j} + \frac{dz}{dt} \mathbf{k}$$

سرعت نقطهٔ متحرک $P = P(t)$ نام دارد، و اندازه‌اش

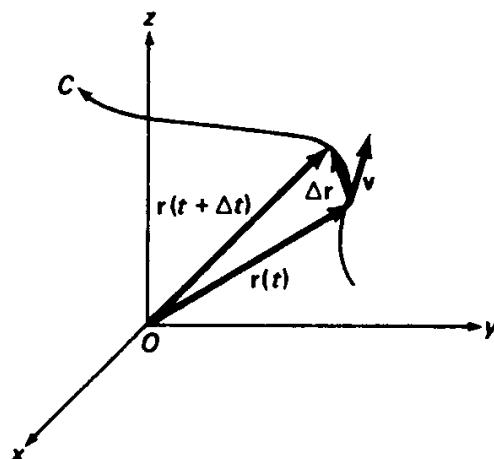
$$v = |\mathbf{v}| = \left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right| = \sqrt{\left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dy}{dt} \right)^2 + \left(\frac{dz}{dt} \right)^2}$$

تندی نامیده می‌شود. از مقایسهٔ این فرمول با (۴) نتیجه می‌شود که

$$v = \frac{ds}{dt},$$

در نتیجه، تندی P چیزی جز میزان تغییر مسافت پیموده شده توسط P در امتداد C نیست. همهٔ این ایده‌ها قبلاً در فصل اخیر آمده‌اند، و ما در اینجا فقط آنها را مرور می‌کنیم، و در عین حال $\mathbf{r}(t)$ و $\mathbf{v}(t)$ را مجاز به داشتن سه مؤلفه به جای دو تا می‌نماییم.

بردار یکهٔ مماس. از حالا به بعد فرض می‌کنیم بردار سرعت $\mathbf{v} = d\mathbf{r}/dt$ ناصفر، و نقطهٔ شروع $P = P(t)$ یعنی نقطهٔ پایان بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ باشد. فرض کنیم C نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ باشد. در این صورت، مثل صفحهٔ ۱۰۸، $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ بر C در نقطهٔ P مماس است، بدین معنی که \mathbf{v} با رفتن $\Delta t \rightarrow 0$ دارای "جهت حدی" بردار $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$ است، که در آن $\Delta \mathbf{r} = \mathbf{r}(t + \Delta t) - \mathbf{r}(t)$ بردار $\Delta \mathbf{r}$ در شکل ۳۲ با فرض $\Delta t > 0$ نموده شده است. بی‌توجه به علامت Δt ، بردار $\Delta \mathbf{r} / \Delta t$



شکل ۳۲

و در نتیجه سرعت v ، همواره روی C در جهت افزایش t است (چرا؟). این جهت در شکل با سر سهم روی C نموده شده است. مثل حالت دوبعدی، بردار یکه مماس T بر منحنی C در نقطه P به صورت زیر تعریف می شود:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}(t) = \frac{\mathbf{v}(t)}{|\mathbf{v}(t)|} = \frac{d\mathbf{r}/dt}{|d\mathbf{r}/dt|},$$

و مثل خود v بر C در نقطه P مماس است و به جهت افزایش t اشاره دارد. استدلال صفحه ۵۸۲ نشان می دهد که اگر C را با پارامتر طول قوس s توصیف شود،

$$\mathbf{T} = \frac{d\mathbf{r}}{ds}$$

مثال ۵. سرعت v ، تندی v ، و بردار یکه مماس T را برای مارپیچ $x = 3 \cos t$, $y = 3 \sin t$, $z = 4t$ بیابید. نشان دهید T با محور z زاویه ثابتی می سازد.

حل. در اینجا بردار موضع عبارت است از

$$\mathbf{r}(t) = (3 \cos t)\mathbf{i} + (3 \sin t)\mathbf{j} + (4t)\mathbf{k}. \quad (۶)$$

بنابراین،

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = (-3 \sin t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k},$$

و

$$v = |\mathbf{v}| = \sqrt{(-3 \sin t)^2 + (3 \cos t)^2 + 16} = \sqrt{9 + 16} = 5,$$

در نتیجه، تندی مقدار ثابت ۵ را دارد. بردار یکه مماس عبارت است از

$$\mathbf{T} = \frac{\mathbf{v}}{v} = \left(-\frac{3}{5} \sin t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{3}{5} \cos t\right)\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}.$$

هرگاه θ زاویه بین T و محور z باشد، آنگاه

$$\cos \theta = \frac{\mathbf{T} \cdot \mathbf{k}}{|\mathbf{T}| |\mathbf{k}|} = \frac{4}{5},$$

در نتیجه، θ دارای مقدار ثابت $\arccos \frac{4}{5} \approx 36.9^\circ$ است. هرگاه طول قوس در امتداد مارپیچ

و از نقطه $\mathbf{r}(0) = 3\mathbf{i} = (3, 0, 0)$ سنجیده شود، آنگاه

$$s = \int_0^t v dt = 5t,$$

در نتیجه، $t = s/5$ و

$$\mathbf{T} = \left(-\frac{3}{5} \sin \frac{s}{5}\right) \mathbf{i} + \left(\frac{3}{5} \cos \frac{s}{5}\right) \mathbf{j} + \frac{4}{5} \mathbf{k}.$$

توجه کنید که اگر $t = s/5$ را در فرمول (۶) قرار داده و سپس مشتق $\mathbf{T} = d\mathbf{r}/ds$ را حساب کنیم، همین عبارت برای \mathbf{T} به دست می‌آید.

بردار یکه‌ای قائم. حال فرض کنیم تابع بردار موضع $\mathbf{r}(t)$ بر بازه I مشتق دوم پیوسته داشته باشد، و مجدداً $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t)$ را بردار یکه‌ای مماس بر منحنی C در نقطه $P = P(t)$ می‌گیریم. در این صورت، چون $|\mathbf{T}|^2 = \mathbf{T} \cdot \mathbf{T} = 1$ داریم،

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{T} \cdot \mathbf{T}) = \frac{d\mathbf{T}}{dt} \cdot \mathbf{T} + \mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} = 2\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} = 0,$$

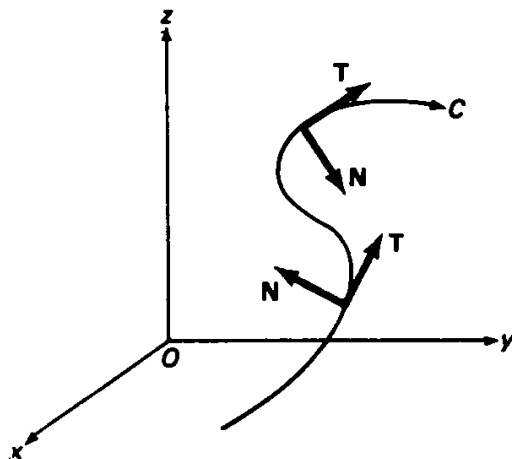
ولذا،

$$\mathbf{T} \cdot \frac{d\mathbf{T}}{dt} = 0,$$

در نتیجه، $d\mathbf{T}/dt$ متعامد به \mathbf{T} است. حال، علاوه بر بردار یکه‌ای مماس $\mathbf{T} = \mathbf{T}(t)$ بردار دیگر $\mathbf{N} = \mathbf{N}(t)$ را معرفی و آن را بردار یکه‌ای قائم بر منحنی C در نقطه $P = P(t)$ می‌نامیم. این بردار یکه‌ای

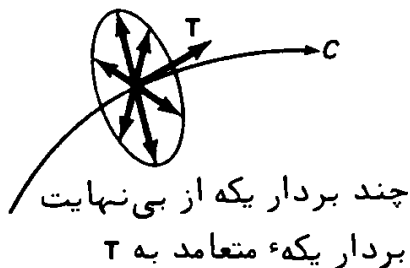
$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} \quad \left(\frac{d\mathbf{T}}{dt} \neq \mathbf{0}\right)$$

در جهت $d\mathbf{T}/dt$ با نقطه شروع P است. چون $d\mathbf{T}/dt$ متعامد به \mathbf{T} بوده و در جهت خمیدگی C اشاره دارد، همین امر در مورد بردار \mathbf{N} صادق می‌باشد (ر.ک. شکل ۳۳).



شکل ۳۳

تبصره. بردار \mathbf{N} را اغلب برداریکه قائم اصلی نامند تا بر این امر تأکید شود که \mathbf{N} در فضا، به خلاف صفحه، تنها یک برداریکه از بی نهایت برداریکه عمود بر \mathbf{T} می باشد (ر. ک. شکل ۳۴).



شکل ۳۴

انحنا. اگر پارامتر را طول قوس s بگیریم، بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ ، نقطه پایانش $P = P(s)$ بردار مماس یکه $\mathbf{T} = \mathbf{T}(s) = d\mathbf{r}/ds$ ، و بردار قائم یکه

$$(۷) \quad \mathbf{N} = \mathbf{N}(s) = \frac{d\mathbf{T}/ds}{|d\mathbf{T}/ds|} \quad \left(\frac{d\mathbf{T}}{ds} \neq \mathbf{0} \right)$$

همه توابعی از s اند، و این امراز نمادها مشهود است. پس از (۷) نتیجه می شود که

$$\frac{d\mathbf{T}}{ds} = \left| \frac{d\mathbf{T}}{ds} \right| \mathbf{N}.$$

فرض کنیم C نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(s)$ باشد. در این صورت، اسکالر مثبت $|d\mathbf{T}/ds|$ انحنا P در C نام دارد و با κ نموده می شود، و معادله اخیر را می توان به شکل زیر نوشت:

$$(۸) \quad \frac{d\mathbf{T}}{ds} = \kappa \mathbf{N}.$$

توجه کنید که تعاریف \mathbf{T} ، \mathbf{N} ، و κ همان تعریفها در مورد منحنیهای در صفحه اند (ر. ک. بخش ۴.۱۱).

منحنی C را معمولا "نمودار تابع بردار موضع $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ می گیریم، که در آن t پارامتری غیر از طول قوس s است، و حال، با استفاده از حاصل ضرب خارجی، عبارت فشرده ای برای انحنا κ بر حسب مشتقات اول و دوم $\mathbf{r}(t)$ پیدا می کنیم. ابتدا می بینیم که

$$\mathbf{v} = \frac{d\mathbf{r}}{dt} = v\mathbf{T},$$

زیرا طبق تعریف $\mathbf{T} = \mathbf{v}/v$ ؛ در نتیجه، بنا بر قاعده زنجیره ای،

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + v \frac{d\mathbf{T}}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + v \frac{ds}{dt} \frac{d\mathbf{T}}{ds},$$

یا معادلاً"، پس از جانشانی از (۸) و استفاده از $v = ds/dt$ ،

$$(۹) \quad \frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + \kappa v^2 \mathbf{N}.$$

از تشکیل حاصل ضرب خارجی $\mathbf{v} = v\mathbf{T}$ در $d\mathbf{v}/dt$ ، به دست می‌آوریم

$$\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} = v \frac{dv}{dt} \mathbf{T} \times \mathbf{T} + \kappa v^3 \mathbf{T} \times \mathbf{N} = \kappa v^3 \mathbf{T} \times \mathbf{N},$$

زیرا $\mathbf{T} \times \mathbf{T} = \mathbf{0}$. اما v همیشه مثبت است، و این به خاطر فرض $v \neq 0$ است، و $|\mathbf{T} \times \mathbf{N}| = 1$ زیرا \mathbf{T} و \mathbf{N} بردارهای یکهٔ متعامدی می‌باشند. لذا، با گرفتن اندازهٔ $\mathbf{v} \times d\mathbf{v}/dt$ و حل نسبت به انحنای κ ، به دست می‌آوریم

$$\kappa = \frac{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \times \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} \right|}{\left| \frac{d\mathbf{r}}{dt} \right|^3} \quad \text{یا} \quad \kappa = \frac{\left| \mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{v}}{dt} \right|}{v^3}$$

که آن را می‌توان به طور فشرده‌تر زیر نوشت:

$$(۱۰) \quad \kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3},$$

که در آن پریم مشتگیری نسبت به t را نشان می‌دهد.

شتاب و مؤلفه‌هایش. طبق معمول، مشتق زمانی $d\mathbf{v}/dt$ از سرعت \mathbf{v} شتاب نام دارد و با \mathbf{a} نموده می‌شود. لذا، (۹) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$\mathbf{a} = \frac{dv}{dt} \mathbf{T} + \kappa v^2 \mathbf{N},$$

یا معادلاً"

$$\mathbf{a} = a_T \mathbf{T} + a_N \mathbf{N},$$

که در آن اسکالرهای

$$(۱۱) \quad a_T = \frac{dv}{dt}, \quad a_N = \kappa v^2 = \frac{v^2}{R}$$

مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب بوده، و $R = 1/\kappa$ شعاع انحنای می‌باشد. این فرموله‌ها دقیقاً همان همتهای خود برای منحنیهای مسطح می‌باشند (ر.ک. صفحات ۱۰۹۹ تا ۱۱۰۰).

مثال ۶. انحنای κ ی منحنی مسطح C را بیابید.

حل. فرض قرار داشتن C در صفحه xy خللی به کلیت وارد نمی‌سازد. در این صورت،
 $\mathbf{r} = x\mathbf{i} + y\mathbf{j}$ ، $\mathbf{r}' = x'\mathbf{i} + y'\mathbf{j}$ ، و $\mathbf{r}'' = x''\mathbf{i} + y''\mathbf{j}$ ؛ در نتیجه،

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ x' & y' & 0 \\ x'' & y'' & 0 \end{vmatrix} = (x'y'' - y'x'')\mathbf{k}.$$

لذا، در این حالت، از (۱۰) نتیجه می‌شود که

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{|x'y'' - y'x''|}{(x'^2 + y'^2)^{3/2}},$$

و این در صفحه ۱۰۹۶ با استدلال متفاوتی به دست آمده است.

مثال ۷. بردار یکه‌قائم \mathbf{N} ، شتاب \mathbf{a} ، و انحنای κ را برای مارپیچ $x = 3 \cos t$ ، $y = 3 \sin t$ ، $z = 4t$ بیابید.

حل. همانطور که قبلاً در مثال ۵ نشان دادیم، سرعت \mathbf{v} ، تندی v ، و بردار یکه‌مماس \mathbf{T} عبارتند از

$$\mathbf{v} = (-3 \sin t)\mathbf{i} + (3 \cos t)\mathbf{j} + 4\mathbf{k}, \quad v = |\mathbf{v}| \equiv 5,$$

$$\mathbf{T} = \left(-\frac{3}{5} \sin t\right)\mathbf{i} + \left(\frac{3}{5} \cos t\right)\mathbf{j} + \frac{4}{5}\mathbf{k}.$$

مشتق \mathbf{T} مساوی است با

$$\frac{d\mathbf{T}}{dt} = -\frac{3}{5}[(\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}],$$

که اندازه‌اش ثابت و برابر است با

$$\left|\frac{d\mathbf{T}}{dt}\right| = \frac{3}{5}\sqrt{(\cos t)^2 + (\sin t)^2} = \frac{3}{5}.$$

لذا، بردار یکه‌قائم مساوی است با

$$\mathbf{N} = \frac{d\mathbf{T}/dt}{|d\mathbf{T}/dt|} = -[(\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}],$$

که همیشه در صفحه‌ای موازی صفحه xy بوده و اشاره به محور z دارد (چرا؟).

با مشتگیری از سرعت، معلوم می‌شود که شتاب مساوی است با

$$\mathbf{a} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -3[(\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j}] = 3\mathbf{N},$$

با مؤلفه مماسی 0 و مؤلفه قائم 3. چون مؤلفه قائم شتاب κv^2 است، انحنای مقدار ثابت

$$\kappa = \frac{3}{v^2} = \frac{3}{25}$$

را دارد.

مثال ۸. انحنای مگسبی پیچ خوره $x = t, y = \frac{1}{2}t^2, z = \frac{1}{3}t^3$ را بیابید. همچنین، مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب را پیدا کنید.

حل. در اینجا $x' = 1, y' = t, z' = t^2, x'' = 0, y'' = 1, z'' = 2t$ در نتیجه،

$$v = |\mathbf{r}'| = \sqrt{x'^2 + y'^2 + z'^2} = \sqrt{1 + t^2 + t^4},$$

$$\mathbf{r}' \times \mathbf{r}'' = \begin{vmatrix} \mathbf{i} & \mathbf{j} & \mathbf{k} \\ 1 & t & t^2 \\ 0 & 1 & 2t \end{vmatrix} = t^2\mathbf{i} - 2t\mathbf{j} + \mathbf{k},$$

و

$$|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''| = \sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}.$$

لذا، طبق فرمول (۱۰)،

$$\kappa = \frac{|\mathbf{r}' \times \mathbf{r}''|}{|\mathbf{r}'|^3} = \frac{\sqrt{t^4 + 4t^2 + 1}}{(t^4 + t^2 + 1)^{3/2}}.$$

مثلاً، انحنای در مبداء، نظیر به مقدار پارامتر $t = 0$ مساوی است با $\kappa = 1$ ، ولی انحنای در نقطه $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ نظیر به مقدار پارامتر $t = 1$ برابر است با

$$\kappa = \frac{\sqrt{6}}{3\sqrt{3}} = \frac{\sqrt{2}}{3} \approx 0.47.$$

توجه کنید که وقتی $t \rightarrow \pm\infty, \kappa \rightarrow 0$ ، نشانگر آنکه منحنی به‌ازای مقادیر بزرگ $|t|$ خیلی شبیه خط مستقیم است. بنابر (۱۱)، مؤلفه‌های مماسی و قائم شتاب عبارتند از

$$a_T = \frac{dv}{dt} = \frac{d}{dt} \sqrt{t^4 + t^2 + 1} = \frac{2t^3 + t}{\sqrt{t^4 + t^2 + 1}}$$

$$a_N = \kappa v^2 = \sqrt{\frac{t^4 + 4t^2 + 1}{t^4 + t^2 + 1}}$$

مثلاً، در مبدأ $a_T = 0$ و $a_N = 1$ ولی، در نقطه $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ ، $a_T = \sqrt{3}$ و $a_N = \sqrt{2}$.

قوانین کپلر (اختیاری). بالاخره، از بردارها استفاده کرده یک مسئله اساسی مکانیک را حل می‌کنیم، و آن مسئله تعیین حرکت مداری جسم P به جرم m است که تحت اثر جاذبه ثقلی جسم دیگری با جرم بسیار بزرگتر M قرار دارد. مثلاً، P ممکن است سیاره‌ای باشد که حول خورشید می‌گردد، یا قمری (حقیقی یا مصنوعی) باشد که حول زمین یا سیاره‌ای دیگر در حال گردش است. این مسئله، بدون استفاده از بردارها، توسط نیوتن (۱۶۸۷) در رساله معروفش، اصول ریاضی^۱، پاسخ داده شده است. مبدأ O را جسم به جرم M گرفته، فرض می‌کنیم $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ بردار موضع P در لحظه t باشد. همچنین $\mathbf{u} = \mathbf{u}(t)$ بردار یکه‌ای در جهت $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ ، مثل شکل ۳۵، باشد؛ در نتیجه، $\mathbf{u} = \mathbf{r}/r$ یا $\mathbf{r} = r\mathbf{u}$ ، که در آن $r = |\mathbf{r}|$. در این صورت، طبق قانون ثقلی عکس مجذور فاصله (که قبلاً در صفحات ۴۳۲ و ۱۱۰۶ به آن برخوردیم)، نیروی وارد بر P مساوی است با

$$\mathbf{F} = -\frac{GMm}{r^2} \mathbf{u},$$

که در آن G ثابت عمومی ثقل بوده و علامت منها نیرو را جاذبه می‌سازد^۲. با گذاردن این نیرو در قانون دوم حرکت نیوتن

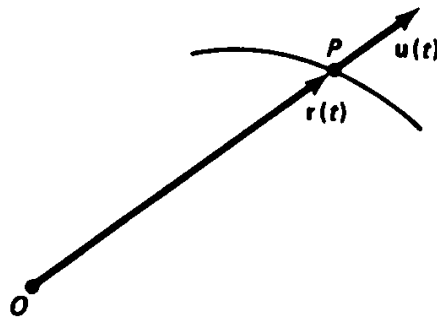
$$\mathbf{F} = m\mathbf{a} = m \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2},$$

که در آن اینک تمام نیروها بردارهایی فضایی‌اند، به دست می‌آوریم

$$(۱۲) \quad \frac{d^2\mathbf{r}}{dt^2} = \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -C \frac{\mathbf{u}}{r^2} = -C \frac{\mathbf{r}}{r^3},$$

1. Principia Mathematica

۲. گرفتن اجسام سماوی به عنوان نقطه متکی بر این امر است (و توسط خود نیوتن اثبات شده است) که جاذبه ثقلی یک کره توپر همانند آن است که تمام جرم در مرکز کره متمرکز شده باشد (ر.ک. مسئله ۳۵، صفحه ۱۴۵۹). تحلیل مشروحتر مسئله نشان می‌دهد که اگر M خیلی از m بزرگتر باشد، می‌توان موضع جسم به جرم M را ثابت گرفت.



شکل ۳۵

که در آن $C = GM$ و $v = dr/dt$ سرعت P است. توجه کنید که معادله (۱۲) شامل جرم کوچکتر m نیست. حال می‌توان از روش برداری به نحو احسن استفاده کرد. با ضرب خارجی (۱۲) در r ، به دست می‌آوریم

$$r \times r'' = -\frac{C}{r^3} r \times r = 0,$$

که در آن پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد. ولی

$$\frac{d}{dt}(r \times r') = (r' \times r') + (r \times r'') = r \times r''$$

(ر.ک. مثال ۴). لذا، دو معادله اخیر باهم ایجاب می‌کنند که

$$\frac{d}{dt}(r \times r') = \frac{d}{dt}(r \times v) = 0.$$

با انتگرالگیری از این معادله دیفرانسیل برداری، به دست می‌آوریم

$$(13) \quad r \times v = h,$$

که در آن h یک بردار ثابت است. از (۱۳) نتیجه می‌شود که جسم P همیشه در صفحه مار بر O عمود بر h قرار دارد. در واقع، اگر (۱۳) را در r ضرب نقطه‌ای کنیم، خواهیم داشت $r \cdot (r \times v) = r \cdot h = 0$ (چرا؟). در نتیجه، تصویر بردار موضع $r = r(t)$ در امتداد h همیشه صفر است. توجه کنید که این نتیجه برای هر نیروی مرکزی درست است، یعنی هر نیرویی که در امتداد خط واصل بین P و نقطه ثابت O عمل می‌کند، و این فقط در مورد قانون عکس مجذور نیروی جاذبه ثقلی نخواهد بود.

بردار h را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$h = r \times v = r \times r' = r u \times \frac{d}{dt}(r u) = r u \times (r' u + r u') = r^2 u \times u'$$

(مثال ۳، صفحه ۱۰۷۵، را به یاد آورید که برای بردارها در فضا نیز به کار می‌رود). لذا، طبق (۱۲)،

$$(14) \quad \frac{dv}{dt} \times \mathbf{h} = -\frac{C}{r^2} \mathbf{u} \times \mathbf{h} = -C\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{u}').$$

اما، به کمک فرمول مسئله ۴۸، صفحه ۱۱۶۲، و اینکه $\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}' = 0$ (برای اثبات این، از $|\mathbf{u}|^2 = \mathbf{u} \cdot \mathbf{u} = 1$ مشتق بگیرید)،

$$\mathbf{u} \times (\mathbf{u} \times \mathbf{u}') = \mathbf{u}(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}') - \mathbf{u}'(\mathbf{u} \cdot \mathbf{u}) = -\mathbf{u}',$$

به علاوه،

$$\frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = \left(\frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{h}\right) + \left(\mathbf{v} \times \frac{d\mathbf{h}}{dt}\right) = \frac{d\mathbf{v}}{dt} \times \mathbf{h},$$

زیرا $d\mathbf{h}/dt = \mathbf{0}$ ؛ در نتیجه، (۱۴) معادل است با

$$(15) \quad \frac{d}{dt}(\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = C\mathbf{u}'.$$

با انتگرالگیری از این معادله، به دست می‌آوریم

$$(16) \quad \mathbf{v} \times \mathbf{h} = C\mathbf{u} + \mathbf{q},$$

که در آن \mathbf{q} (مانند \mathbf{h}) بردار ثابتی می‌باشد.

با ضرب نقطه‌ای (۱۶) در \mathbf{r} ، خواهیم داشت

$$(17) \quad (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) \cdot \mathbf{r} = (C\mathbf{u} + \mathbf{q}) \cdot r\mathbf{u} = Cr + qr \cos \theta,$$

که در آن ثابت $q = |\mathbf{q}|$ و θ زاویه بین بردارهای \mathbf{q} و \mathbf{r} است. طرف چپ (۱۷) مساوی است با

$$\mathbf{r} \cdot (\mathbf{v} \times \mathbf{h}) = (\mathbf{r} \times \mathbf{v}) \cdot \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \mathbf{h} = h^2$$

(از مثال ۱۰، صفحه ۱۱۵۷، استفاده کنید)، که در آن ثابت $h = |\mathbf{h}|$. لذا، (۱۷) را می‌توان به شکل زیر نوشت:

$$h^2 = Cr + qr \cos \theta,$$

که رابطه زیر را ایجاب می‌کند:

$$(18) \quad r = \frac{h^2/C}{1 + (q/C) \cos \theta},$$

یا معادلاً

$$(19) \quad r = \frac{ed}{1 + e \cos \theta},$$

که در آن

$$(۲۰) \quad e = \frac{q}{C} = \frac{q}{GM}, \quad d = \frac{h^2}{q}.$$

اگر اولین فرمول (۶)، صفحه^۶ ۱۰۱۴، را به یاد آوریم، درمی یابیم که (۱۹) معادله^۶ یک مقطع مخروطی به کانون مبداء، فاصله^۶ کانون تا هادی d ، و خروج از مرکز e در مختصات قطبی است. لذا، مدار جسم P یک مخروطی است. به طور مشخص، مدار دایسره است اگر $e = 0$ ، بیضی است اگر $0 < e < 1$ ، سهمی است اگر $e = 1$ ، و هذلولی است اگر $e > 1$ ، که در آن مقدار e را می توان به صورت توصیف شده در مثال ۱۰ زیر تعیین کرد.

حالت بویژه جالب در ستاره شناسی است که در آن مدار بیضی می باشد. در این صورت جسم P به مرکز جاذبه " مقید " بوده و، مثال حالت مدار سهموی و هذلولوی، به " بی - نهایت نمی رود ". لذا، قانون اول کپلر در مورد منظومه^۶ شمسی را، که کپلر در ۱۶۰۹ بیان داشت، تحقیق کرده ایم: سیاره ها در مدارهای بیضوی حول خورشید طوری حرکت می کنند که خورشید در یکی از گانونها قرار دارد. لازم به تذکر است که ستاره شناس آلمانی، یوهانس کپلر (۱۶۳۰ - ۱۵۷۱)، این قانون و دو قانون دیگر که نام وی بر آنهاست، را به طور کامل^۶ " تجربی و به وسیله^۶ تحلیل داده های مشاهداتی جمع آوری شده توسط استاد دانمارکی اش تیکو براهه^۱ (۱۶۰۱ - ۱۵۴۶)، کشف کرد. کار نیوتن در توضیح نظری این قوانین، و ابداع حساب دیفرانسیل و انتگرال برای انجام آن، بشر را مبهوت می سازد.

قانون دوم کپلر (۱۶۰۹) می گوید که خط واصل بین خورشید و هر سیاره مساحات مساوی را در زمانهای مساوی جارو می کند. این قانون را می توان به صورت زیر ثابت کرد. فرض کنیم i ، j ، و k یک پایه^۶ متعامد یکه بوده و k در جهت بردار ثابت h باشد، و مختصات قطبی r و θ را در صفحه^۶ مدار با محور قطبی در امتداد i معرفی می کنیم. در این صورت $r = (r \cos \theta)i + (r \sin \theta)j$ ؛ و در نتیجه،

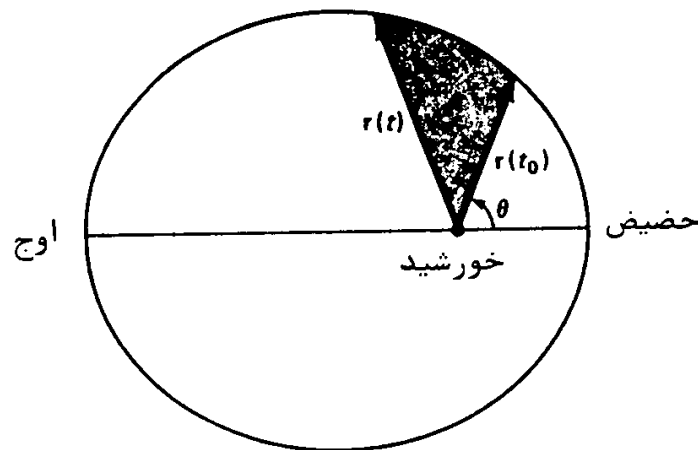
$$h = r \times r' = \begin{vmatrix} i & j & k \\ r \cos \theta & r \sin \theta & 0 \\ r' \cos \theta - r\theta' \sin \theta & r' \sin \theta + r\theta' \cos \theta & 0 \end{vmatrix} = r^2 \theta' k.$$

چون $h = hk$ ، نتیجه می شود که

$$r^2 \frac{d\theta}{dt} = h = \text{ثابت}.$$

فرض کنیم t_0 زمان ثابتی بوده و t زمان متغیری بعد از t_0 باشد. در این صورت، طبق فرمول مساحت در مختصات قطبی (ر.ک. صفحه ۱۰۲۴)، مساحت A جارو شده به وسیله بردار شعاعی $r = r(t)$ در بازه $[t_0, t]$ ، که مساوی مساحت ناحیه سایه دار شکل ۳۶ است، برابر است با

$$A = \frac{1}{2} \int_{t_0}^t r^2 \frac{d\theta}{d\tau} d\tau$$



A مساحت جارو شده به وسیله بردار موضع $r(t)$ در بازه $[t_0, t]$ است.

شکل ۳۶

(توی کوچک یونانی τ از اینجهت به کار رفته است که با حد بالایی انتگرالگیری t اشتباه نشود). بنابراین،

$$(۲۱) \quad \frac{dA}{dt} = \frac{1}{2} r^2 \frac{d\theta}{dt} = \frac{1}{2} h = \text{ثابت}$$

که همان قانون دوم کپلر است. فرمول ثابت dA/dt برای هر نیروی مرکزی درست است (چرا؟).

قانون سوم کپلر، که در ۱۶۱۹ پس از ۱۰ سال تحلیل بیشتر داده‌ها، اعلان شد، می‌گوید که مجذور دوره گردش یک سیاره با مکعب نیم محور اطول مدار بیضوی‌اش متناسب است. برای اثبات این امر، فرض کنیم مدار سیاره یک بیضی با نیم محور اطول a و نیم محور اقصر b باشد. در این صورت، مساحت محصور به بیضی مساوی πab است (ر.ک. مثال ۴، صفحه ۹۴۹)، و دوره تناوب سیاره زمان جارو شدن این مساحت می‌باشد؛ یعنی،

$$(۲۲) \quad T = \frac{\pi ab}{dA/dt} = \frac{2\pi ab}{h}$$

که در آن فرمول (۲۱) در مرحله دوم به کار رفته است. با ضرب عبارات (۲۰) در خروج از مرکز e و فاصله کانون تا هادی d ، به دست می‌آید

$$ed = \frac{h^2}{GM}$$

و نیز، طبق فرمول (۸)، صفحه ۹۷۴، داریم

$$d = \left(\frac{1}{e} - e\right) a,$$

در نتیجه،

$$ed = (1 - e^2)a = \left(1 - \frac{a^2 - b^2}{a^2}\right)a = \frac{b^2}{a}.$$

با متحد گرفتن این دو عبارت برای حاصل ضرب ed ، به دست می‌آوریم

$$h^2 = GM \frac{b^2}{a}.$$

لذا، $h = b\sqrt{GM/a}$ ؛ در نتیجه، (۲۲) به صورت زیر درمی‌آید:

$$(22) \quad T = \frac{2\pi ab}{b} \sqrt{\frac{a}{GM}} = \frac{2\pi}{\sqrt{GM}} a^{3/2}$$

(که در آن G ثابت عمومی ثقل و M جرم خورشید است)، یا معادلاً

$$(23) \quad T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3,$$

و این همان قانون سوم کپلر می‌باشد. در این وضع، T^2 برای تمام اقمار یک سیاره با a^3 متناسب است، با ثابت تناسب $4\pi^2/GM$ ، که در آن M جرم سیاره می‌باشد. در فرمول (۱۱) صفحه ۱۱۱۵، قانون سوم کپلر برای مدارهای مستدیر پیش‌بینی شده بود.

در مدارهای بیضوی حول خورشید، نزدیکترین نقطه به خورشید را حضيض خورشیدی، و دورترین نقطه به آن را اوج خورشیدی می‌نامند. ر.ک. شکل ۳۶. نقاط مشابه در مدارهای حول زمین حضيض و اوج نام دارند. (اصطلاحات عام برای یک مرکز جاذبه دلخواه عبارتند از فرامرکز و ورامرکز.)

مثال ۹. فرض کنیم r_0 و v_0 بردار موضع و سرعت سیاره P در حضيض خورشیدی باشند. نشان دهید که ثابتهای h و q عبارتند از

$$(24) \quad h = r_0 v_0, \quad q = r_0 v_0^2 - GM,$$

که بر حسب فاصله^۶ حضيضی $r_0 = |r_0|$ و تندی حضيضی $v_0 = |v_0|$ داده شده اند .

حل . بردارهای r_0 و v_0 برهم عمودند ، زیرا مماسهای بر بیضی در نقاط انتهایی محور اطول بر محور اطول عمودند . بنابراین ،

$$h = |h| = |r_0 \times v_0| = |r_0| |v_0| \sin \frac{\pi}{2} = r_0 v_0.$$

در حضيض خورشیدی ، مختص زاویه ای θ ی P مساوی 0 است ، زیرا این مقدار از θ کوچکترین مقدار مختص شعاعی r در فرمول (۱۸) یا (۱۹) را به دست می دهد . با فرض $\theta = 0$ در (۱۸) ، معلوم می شود که

$$r_0 = r|_{\theta=0} = \frac{h^2/C}{1 + (q/C)} = \frac{r_0^2 v_0^2}{C + q},$$

ایجابگر آنکه

$$q = r_0 v_0^2 - C = r_0 v_0^2 - GM.$$

در مدارهای سهموی و هذلولوی ، حضيض وجود دارد ولی اوج موجود نیست ، زیرا جسم P فقط یکبار به مرکز جاذبه نزدیک شده و سپس به بی نهایت می رود . اما ، فرمولهای (۲۴) هنوز به کارند ، چرا که r_0 و v_0 کمیات حضيضی می باشند .

مثال ۱۰ . فرض کنیم r_0 و v_0 فاصله و تندی حضيض خورشیدی (حضيضی) جسمی باشند که تحت اثر جاذبه^۶ خورشید (زمین) است . نشان دهید که مدار جسم دایره است اگر $r_0 v_0^2 = GM$ ، بیضی است اگر $GM < r_0 v_0^2 < 2GM$ ، سهمی است اگر $r_0 v_0^2 = 2GM$ ، و هذلولی است اگر $r_0 v_0^2 > 2GM$.

حل . به کمک فرمولهای (۲۰) و (۲۴) ، معلوم می شود که خروج از مرکز مدار مساوی است با

$$e = \frac{q}{GM} = \frac{r_0 v_0^2}{GM} - 1.$$

حال می توان حکم فوق (با حروف شکسته) را از این امر که برای دایره $e = 0$ ، برای بیضی $0 < e < 1$ ، برای سهمی $e = 1$ ، و برای هذلولی $e > 1$ به دست آورد . توجه کنید که M جرم خورشید برای مدارهای شمسی است ، ولی جرم زمین برای مدارهای زمینی می باشد .

مسائل

طول منحنی فضایی داده شده را بیابید .

۱. $x = 12 \sin t, y = 12 \cos t, z = 5t \quad (0 \leq t \leq 4\pi)$

۲. $x = 1 - \cos t, y = t - \sin t, z = 4 \sin(t/2) \quad (0 \leq t \leq 2\pi)$

۳. $x = t, y = t^2, z = \frac{2}{3}t^3 \quad (0 \leq t \leq 6)$

۴. $x = 2t, y = t^2, z = \ln t \quad (1 \leq t \leq 8)$

۵. $x = \sqrt{2}t, y = e^t, z = e^{-t} \quad (0 \leq t \leq \ln 2)$

۶. نشان دهید که طول n دور مارپیچ $x = a \cos t, y = a \sin t, z = bt$ مساوی است با $2n\pi\sqrt{a^2 + b^2}$

۷. هر مارپیچ از مارپیچ مضاعفی که مولکول DNA می سازد به قطر 20 \AA و پای 34 \AA است (A)

واحد آنگستروم و مساوی 10^{-8} cm است). در هر مارپیچ DNA ی انسان حدوداً 290,000,000 دور وجود دارد. اگر این مارپیچ را باز کنیم، طولش چقدر خواهد شد؟

۸. تابع طول قوس $s = s(t)$ را برای منحنی فضایی $x = e^t \sin t, y = e^t \cos t, z = e^t$ بیابید. نقطه $(0, 1, 1)$ نظیر به مقدار پارامتر $t = 0$ را نقطه شروع بگیرید.

کمیات زیر را محاسبه کنید.

۹. $\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{1 - \cos t}{t^2} \mathbf{i} + \frac{\sin t}{t} \mathbf{j} + e^t \mathbf{k} \right)$

۱۰. $\lim_{t \rightarrow \pi} \left(\frac{\tan t}{t} \mathbf{i} + \frac{1 + \cos t}{t} \mathbf{j} + \frac{10t}{\pi} \mathbf{k} \right)$

۱۱. $\frac{d}{dt} [(\arcsin t)\mathbf{i} - e^{t^2}\mathbf{j} + (\cosh t)\mathbf{k}]$

۱۲. $\frac{d}{dt} [(-\cot t)\mathbf{i} + (\csc t)\mathbf{j} + (\sinh \sqrt{t})\mathbf{k}]$

۱۳. $\int_0^1 \frac{t \mathbf{i} + 2t \mathbf{j} + t^2 \mathbf{k}}{t^2 + 1} dt$

۱۴. $\int \left(te^t \mathbf{i} + \frac{t-1}{t+1} \mathbf{j} + \frac{\ln t}{t} \mathbf{k} \right) dt$

۱۵. نشان دهید که

$$\frac{d}{dt} [\mathbf{r}_1 \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3)] = \frac{d\mathbf{r}_1}{dt} \cdot (\mathbf{r}_2 \times \mathbf{r}_3) + \mathbf{r}_1 \cdot \left(\frac{d\mathbf{r}_2}{dt} \times \mathbf{r}_3 \right) + \mathbf{r}_1 \cdot \left(\mathbf{r}_2 \times \frac{d\mathbf{r}_3}{dt} \right),$$

که در آن $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}_1(t)$ ، $\mathbf{r}_2 = \mathbf{r}_2(t)$ ، و $\mathbf{r}_3 = \mathbf{r}_3(t)$ توابع برداری مشتقپذیری می‌باشند.
 ۱۶. با استفاده از مسئله قبل، قاعده زیر را برای مشتقگیری از یک دترمینان 3×3 که سطرهایش از توابع اسکالر مشتقپذیری تشکیل شده است ثابت کنید:

$$\frac{d}{dt} \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} x'_1 & y'_1 & z'_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x'_2 & y'_2 & z'_2 \\ x_3 & y_3 & z_3 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} x_1 & y_1 & z_1 \\ x_2 & y_2 & z_2 \\ x'_3 & y'_3 & z'_3 \end{vmatrix}$$

(پریم مشتقگیری نسبت به t را نشان می‌دهد.)

سرعت \mathbf{v} و تندی $v = |\mathbf{v}|$ نقطه $P = P(t)$ با بردار موضع داده شده $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را یافته، و نیز بردارهای یکه مماس و قائم \mathbf{T} و \mathbf{N} بر نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را پیدا کنید.

۱۷. $\mathbf{r}(t) = 2t\mathbf{i} + t\mathbf{j} - 2t\mathbf{k}$

۱۸. $\mathbf{r}(t) = t\mathbf{i} + (1 - \cos t)\mathbf{j} + (\sin t)\mathbf{k}$

۱۹. $\mathbf{r}(t) = 15t\mathbf{i} + (8 \cos t)\mathbf{j} + (8 \sin t)\mathbf{k}$

۲۰. $\mathbf{r}(t) = (\sin t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (\sqrt{2} \cos t)\mathbf{k}$

مؤلفه‌های مماسی و قائم \mathbf{a}_T و \mathbf{a}_N شتاب نقطه $P = P(t)$ به بردار موضع داده شده $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را یافته، و نیز انحنای κ نمودار $\mathbf{r} = \mathbf{r}(t)$ را پیدا کنید.

۲۱. $\mathbf{r}(t) = (t + \frac{1}{3}t^3)\mathbf{i} + (t - \frac{1}{3}t^3)\mathbf{j} + t^2\mathbf{k}$

۲۲. $\mathbf{r}(t) = (\cos t)\mathbf{i} + (\sin t)\mathbf{j} + (\cosh t)\mathbf{k}$

۲۳. $\mathbf{r}(t) = (a \cos \omega t)\mathbf{i} + (a \sin \omega t)\mathbf{j} + b t \mathbf{k} \quad (a > 0)$

۲۴. $\mathbf{r}(t) = (\arctan t)\mathbf{i} + (t - \arctan t)\mathbf{j} + (1/\sqrt{2}) \ln(t^2 + 1)\mathbf{k}$

صفحه شامل بردارهای یکه مماس و قائم \mathbf{T} و \mathbf{N} بر منحنی فضایی C در نقطه P صفحه بوسان C در P نام دارد (زیرا در P خیلی زیاد به C برآزش دارد). صفحه بوسان

۲۵. منحنی مسئله ۲۱ را در نقطه‌ای که $t = -1$ بیابید.

۲۶. منحنی مسئله ۲۴ را در نقطه‌ای که $t = 1$ بیابید.

فرض کنید C یک منحنی فضایی بوده، و \mathbf{T} بردار یکه مماس بر C در نقطه P باشد. در این صورت، خط مار بر P شامل \mathbf{T} (خط) مماس بر C در P نام دارد، و صفحه مار بر P عمود بر \mathbf{T} صفحه قائم بد C در P نامیده می‌شود. خط مماس و صفحه قائم به

۲۷. فصل مشترک صفحه $x + y = 0$ و استوانه سهموی $z = x^2$ در نقطه $(2, -2, 4)$

۲۸. فصل مشترک استوانه‌های $x^2 + y^2 = 10$ و $x^2 + z^2 = 10$ در نقطه $(3, 1, 1)$

را بیابید.

راهنمایی. ابتدا منحنیها را به صورت پارامتری نمایش دهید.

۲۹. در چه نقاطی مماس بر منحنی $x = t, y = t^2, z = t^3$ موازی صفحه $x + 2y + z - 1 = 0$ است؟

۳۰. فرض کنید منحنی C نمودار تابع برداری پیوسته

$$r = r(t) \quad (a \leq t \leq b)$$

در بعد دو یا سه با مشتق ناصفر $r'(t)$ در هر نقطه درونی $[a, b]$ بوده، و $r(a) = r(b)$. در نتیجه، نقاط انتهایی C برهم منطبق اند (یک چنین منحنی را، مثل صفحه ۷۳۸ بسته می‌نامیم). نشان دهید که نقطه‌ای از C هست که مماس در آن بر بردار نا صفر معلوم m عمود است. راهنمایی. از قضیه رل استفاده کنید.

۳۱. در مثال ۱، صفحه ۱۱۰۴، در حرکت گلوله، محور z را بر صفحه xy عمود گرفتیم (صفحه ۶ قائم شامل بردار سرعت اولیه v_0 است). در این صورت، از قانون دوم نیوتن نتیجه می‌شود که $d^2r/dt^2 = -gz$ ، کسه در آن g شتاب ثقل است. از این معادله دیفرانسیل برداری تحت شرایط اولیه $r(0) = 0, v(0) = v_0$ ، که $v = dr/dt$ ، انتگرال گرفته، و نشان دهید گلوله همیشه در صفحه xy می‌ماند. با فرض $g = 0$ قانون اول حرکت نیوتن را ثابت کنید، که می‌گوید جسمی که تحت اثر نیروی خارجی نباشد، اگر ساکن باشد ($v_0 = 0$) در حال سکون می‌ماند، و اگر متحرک باشد ($v_0 \neq 0$) به حرکت مستقیم‌الخط خود با سرعت ثابت v_0 ادامه خواهد داد.

۳۲. منظور از اندازه حرکت یک ذره یعنی حاصل ضرب $p = mv$ جرمش m در سرعتش $v = dr/dt$. قانون دوم نیوتن برحسب اندازه حرکت به شکل $dp/dt = F$ درمی‌آید، که در آن F نیروی وارد بر ذره است. حاصل ضرب خارجی $L = r \times p$ اندازه حرکت زاویه‌ای ذره حول مبدأ نام دارد؛ یعنی، حول نقطه شروع بردار موضعش $r = r(t)$. نشان دهید که اندازه حرکت زاویه‌ای یک ذره که بر آن نیروی مرکزی وارد است ثابت (یا، طبق گفته فیزیکدانان، حفظ شده) است. بردار h تعریف شده با فرمول (۱۳) را بر حسب اندازه حرکت زاویه‌ای L بیان کنید. حرکت را در صورتی که $h = 0$ توصیف نمایید.

۳۳. نشان دهید که تندی یک سیاره در نقطه P از مدارش با فاصله عمودی خورشید تا مماس بر مدار در P متناسب است. کجا تندی ماکزیمم است؟ و کجا مینیمم خواهد بود؟

۳۴. در مثال ۸، صفحه ۴۳۲، نشان دادیم که اگر موشکی از سطح زمین با تندی $v_0 = \sqrt{2gR}$ که در آن g شتاب ثقل بوده و R شعاع زمین (≈ 3960 mi) است، به طور قائم به بالا پرتاب شود، از جاذبه زمین خارج شده و هرگز به آن باز نمی‌گردد. نشان دهید

این امر برای موشکی که به موازات سطح زمین پرتاب شود نیز درست است (از مقاومت هوا صرف نظر کنید) $v_{0.0}$ در مقایسه با تندی لازم جهت کشاندن موشک به مداری مستدیر که با سطح زمین تماس دارد به چه اندازه بزرگ است؟

۳۵. ارتفاع و تندی یک قمر مصنوعی در حوضی مساوی 400 mi و 5 mi/sec می باشد. خروج از مرکز مدار چقدر است؟ ارتفاع و تندی قمر را در اوج بیابید. دوره گردش آن چقدر است؟ (به جای تقریب خامتر $g \approx 32 \text{ ft/sec}^2$ که تا بحال به کار رفته، از تقریب $g \approx 32.15 \text{ ft/sec}^2$ برای شتاب ثقل استفاده نمایید.)

۳۶. ارتفاعهای ماکزیمم و مینیمم یک قمر مصنوعی عبارتند از 840 mi و 360 mi. تندیهای ماکزیمم و مینیمم آن چقدر هستند؟ دوره گردش آن را بیابید.

۳۷. یک سفینه فضایی، که در مداری مستدیر حول زمین و در ارتفاع 120 mi حرکت می کند موشکهای فشار آن عمل کرده شتابی برابر 450 mph/sec تولید می نمایند. چه مدت باید موشکها عمل کنند تا سفینه تندی لازم برای خروج کامل از جاذبه زمین را بیابد؟

۳۸. نشان دهید وقتی یک سیاره در یکی از نقاط انتهایی محور اطول مدارش باشد، تندی آن مساوی تندی در یک مدار مستدیر به شعاعی مساوی نیم محور اطول مدار خواهد بود.

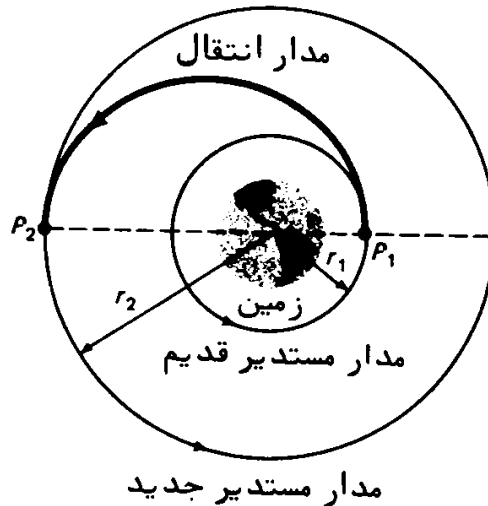
۳۹. یک ماهواره ژئوفیزیکی در مداری مستدیر و در ارتفاعی مساوی یکسوم شعاع زمین قرار داده شده است. مدار از دو قطب می گذرد. وقتی ماهواره از بالای قطب شمال می گذرد، موشکهای بازگشت وارد عمل شده، تندی آن را آنقدر تقلیل می دهند که مجبور به فرود آمدن در استوا می شود. میزان تقلیل لازم تندی چقدر است؟ چه تقلیل تندی موجب فرود آمدن در قطب جنوب می شود؟

۴۰. کنترل زمینی می خواهد یک قمر مصنوعی متحرک در مدار مستدیری به شعاع r_1 را به مداری مستدیر به شعاع بزرگتر r_2 انتقال دهد. این کار به صورت زیر انجام می شود. موشکهای فشار را کمی فعال کرده، به قمر تندی اضافی Δv_1 در نقطه P_1 از مدار کوچکتر می دهیم، و قمر را مجبور به ورود در یک مدار انتقال بیضوی با اوج P_2 در فاصله r_2 از مرکز زمین می کنیم (ر.ک. شکل ۳۷). سپس، مجدداً در P_2 موشکهای فشار را فعال کرده و به قمر تندی دوم Δv_2 می دهیم تا به مدار مستدیری به شعاع r_2 وارد شود. نشان دهید که

$$\Delta v_1 = \left(\sqrt{\frac{2r_2}{r_1 + r_2}} - 1 \right) \sqrt{\frac{g}{r_1}} R,$$

$$\Delta v_2 = \left(1 - \sqrt{\frac{2r_1}{r_1 + r_2}}\right) \sqrt{\frac{g}{r_2}} R.$$

Δv_1 و Δv_2 را به ازای $r_1 = 4500$ mi و $r_2 = 9000$ mi محاسبه کنید.



شکل ۳۷

۶.۱۲ سطوح درجه دو

منظور از یک معادله درجه دو از سه متغیر x ، y ، و z یعنی معادله‌ای به شکل

$$(1) \quad Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J = 0,$$

که در آن ضرایب A ، B ، C ، D ، E ، F همه صفر نیستند (در غیر این صورت، (۱) به معادله درجه یک تحویل می‌شود). نمودار یک چنین معادله یک سطح درجه دو، یا فقط درجه دو، نام دارد، و تعمیم طبیعی یک مخروطی در فضای 2 بعدی است. همانند مخروطیها، تعدادی درجه دو "تباہ شده" وجود دارند که در جدول زیر لیست شده‌اند.

معادله نمونه	درجه دو تباہ شده
$x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 0$	مجموعه تهی
$x^2 + y^2 + z^2 = 0$	نقطه
$x^2 + y^2 = 0$	خط
$(x - 1)^2 = 0$	صفحه
$x^2 - 1 = 0$	یک جفت صفحه موازی
$x^2 - y^2 = 0$	یک جفت صفحه متقاطع

اگر یکی از متغیرهای x ، y ، و z در معادله (۱) نباشد، این معادله به معادله درجه دو کلی از دو متغیر دیگر تحویل می‌شود. مثلاً، اگر z غایب باشد، معادله (۱) به شکل زیر درمی‌آید:

$$Ax^2 + By^2 + Dxy + Gx + Hy + J = 0.$$

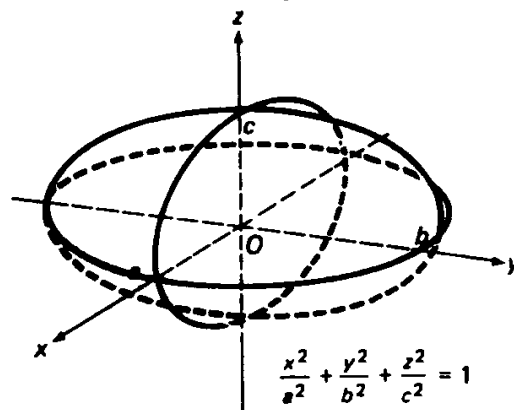
اما از بخش ۶.۱۰ می‌دانیم که نمودار این معادله در صفحه xy مخروطی است؛ ولذا، جدا از بعضی از حالات تباه شده، نمودارش یک استوانه درجه دو، یعنی استوانه سهموی، بیضوی، یا هذلولوی، است. این استوانه‌ها قبلاً در بخش ۱۰.۱۲، علاوه بر سطوح دوار درجه دو، مانند کره و سهمی‌گون دوار، مطرح شده‌اند.

در مثالهای زیر درجه دوهایی را مطالعه می‌کنیم که نه استوانه‌اند و نه سطوح دوار، و اینها عبارتند از بیضی‌گون، دو نوع هذلولوی‌گون (یک پارچه و دو پارچه)، مخروط بیضوی، و دو نوع سهمی‌گون (بیضوی و هذلولوی). اینها اساساً تمام انواع ممکن‌اند به دلیل زیر: تحلیل مشروح معادله (۱)، که در اینجا نخواهد شد، نشان می‌دهد که همواره می‌توان به دستگاه جدیدی از مختصات قائم x' ، y' ، و z' رفت که در آن (۱) به معادله‌ای بدون جملات شامل $x'y'$ ، $x'z'$ ، یا $y'z'$ تبدیل می‌شود که نمودارش یک درجه دو تباه شده، یک استوانه درجه دو، یک سطح دوار درجه دو، یا یکی از شش درجه دو کلیتر ذکر شده در فوق می‌باشد. مثل حالت دوبعدی، تبدیل از دستگاه xyz قدیم به دستگاه $x'y'z'$ جدید مستلزم یک دوران و یک انتقال است، ولی در اینجا دوران و انتقال هر دو فضایی می‌باشند.

مثال ۱. نمودار

$$(۲) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$$

سطح درجه دو شکل ۳۸ است به نام بیضی‌گون. فرض مثبت بودن اعداد a ، b ، و c



بیضی‌گون
شکل ۳۸

خللی به کلیت وارد نمی‌کند (این فرض در مثالهای ۲ تا ۶ نیز می‌شود). اگر دو تا از این اعداد مساوی باشند ، بیضی‌گون به یک بیضی‌گون دوار یا کره‌گون تحویل می‌شود ، ولی اگر $a = b = c$ ، بیضی‌گون به کره به شعاع a و مرکز مبدأ بدل خواهد شد .

بیضی‌گون (۲) نسبت به مبدأ ، به نام مرکز بیضی‌گون ، و نیز نسبت به هر سه صفحهٔ مختصات متقارن است . با فرض $y = z = 0$ در (۲) ، معلوم می‌شود که بیضی‌گون محور x را در نقاط $(\pm a, 0, 0)$ قطع می‌کند . همچنین ، محور y را در نقاط $(0, \pm b, 0)$ و محور z را در نقاط $(0, 0, \pm c)$ قطع می‌نماید . با قراردادن $z = 0$ در (۲) ، معلوم می‌شود که اثر بیضی‌گون در صفحهٔ xy (یعنی ، اشتراکش با صفحهٔ xy) بیضی زیر است :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (z = 0).$$

به همین نحو ، اثر بیضی‌گون در صفحهٔ xz بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (y = 0),$$

و اثر آن در صفحهٔ yz بیضی

$$\frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (x = 0)$$

می‌باشد . با فرض $z = k$ در (۲) ، داریم

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 - \frac{k^2}{c^2} \quad (z = k).$$

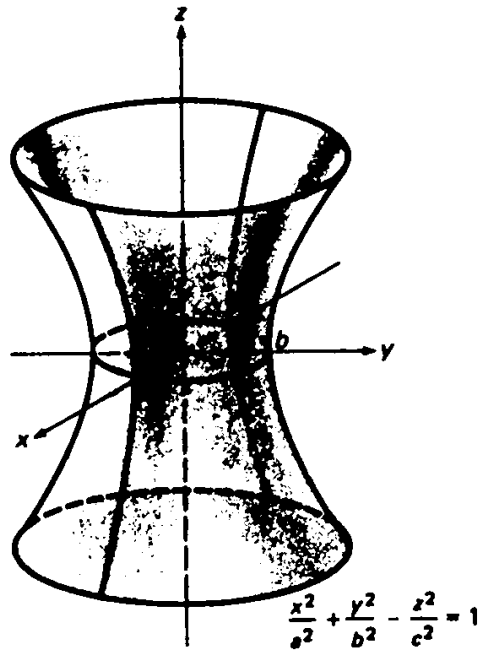
لذا ، اثر بیضی‌گون در صفحهٔ $z = k$ بیضی است اگر $|k| < c$ ، یک نقطه است اگر $|k| = c$ ، و مجموعهٔ تهی است اگر $|k| > c$. اثر بیضی‌گون در صفحات موازی صفحات xz و yz به همین صورت خواهد بود .

مثال ۲ . نمودار

$$(۳) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

درجهٔ دو شکل ۳۹ به نام هذلولی‌گون یک‌پارچه است . هذلولی‌گون (۳) ، همانند بیضی‌گون نسبت به مبدأ ، به نام مرکز هذلولی‌گون ، و هر سه صفحهٔ مختصات متقارن است . این سطح محور x را در نقاط $(\pm a, 0, 0)$ و محور y را در نقاط $(0, \pm b, 0)$ قطع می‌کند ، ولی محور z را قطع نمی‌کند ، زیرا معادلهٔ $-z^2/c^2 = 1$ حاصل از قرار دادن $x = y = 0$ در (۳)

جواب ندارد. در واقع، هذلولی گون، به خلاف بیضی گون، سطحی بی کران است: این سطح در امتداد محور z ، که محور هذلولی است، از هر دو جهت "تسا بی نهایت باز می شود".



هذلولی گون یک پارچه

شکل ۳۹

اثر هذلولی گون (۳) در صفحه xy بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (z = 0)$$

است، که دور "گلوگاه" هذلولی گون حلقه زده است. به طور کلی، اثر هذلولی گون در صفحه $z = k$ نمودار

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2} \quad (z = k)$$

است، که به ازای هر k یک بیضی می باشد. از آن سو، اثر هذلولی گون در صفحه xz هذلولی

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (y = 0),$$

و اثر آن در صفحه yz هذلولی

$$\frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad (x = 0)$$

می‌باشد. اگر $a = b$ ، نمودار (۳) به هذلولی‌گون دوار حاصل از دوران هر یک از این هذلولیها حول محور z تحویل می‌شود. توجه کنید که معادله (۳) را می‌توان از معادله (۲) بیضی‌گون با تغییر علامت جمله شامل z^2 به دست آورد. اگر علامت جمله شامل x^2 یا y^2 تغییر می‌کرد، نمودار معادله حاصل نیز یک هذلولی‌گون یک پارچه می‌شد، ولی در این صورت محورش محور x یا محور y می‌بود.

هذلولی‌گون (۳) از یک قطعهٔ همبند یا "پارچه" تشکیل شده است، و به این جهت آن را هذلولی‌گون یک پارچه می‌نامند. مثال زیر نوع دیگری از هذلولی‌گون را شرح می‌دهد که از دو پارچهٔ ناهمبند تشکیل شده است.

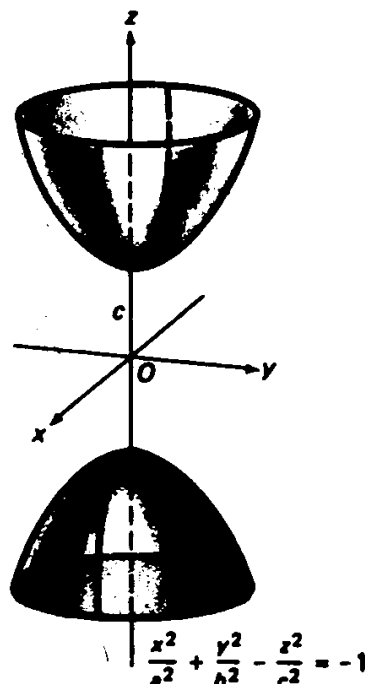
مثال ۳. نمودار

$$(۴) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1,$$

یا معادلهٔ معادل

$$(۴') \quad -\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

درجهٔ دو شکل ۴۰ است که هذلولی‌گون دو پارچه نام دارد. این هذلولی‌گون محور z را در نقاط $(0, 0, \pm c)$ قطع می‌کند، ولی تقاطعی با محورهای x و y ندارد (چرا؟). هذلولی‌گون



هذلولی‌گون دوپارچه

(۴) ، مانند هذلولی گون یک پارچه ، سطح بی کرانی است که در امتداد محور z ، که مجدداً " محور هذلولی نام دارد ، تا بی نهایت باز می شود . با قرار دادن $z = k$ در (۴) ، به دست می آوریم

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} - 1 \quad (z = k).$$

لذا ، اثر هذلولی گون در صفحه $z = k$ بیضی است اگر $|k| > c$ ، یک نقطه است اگر $|k| = c$ و مجموعه تهی است اگر $|k| < c$. از آن سو ، اثر هذلولی گون در صفحه xz هذلولی

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1 \quad (y = 0),$$

و اثر آن در صفحه yz هذلولی

$$\frac{z^2}{c^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (x = 0)$$

می باشد . اگر $a = b$ ، نمودار (۴) به هذلولی گون دوار حاصل از دوران هر یک از این هذلولیها حول محور z تحویل می شود . از این نکات معلوم می شود که هذلولی گون (۴) از دو قطعه یا پارچه ناهمبند تشکیل شده است .

مثال ۴ . از تعویض طرف راست معادلات (۳) و (۴) با صفر ، معادله

$$(۵) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

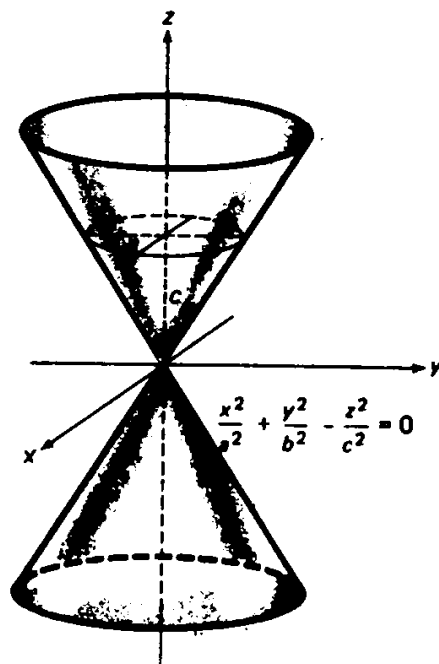
به دست می آید . نمودار (۵) ، به نام مخروط بیضوی ، در شکل ۴۱ نموده شده است . با فرض $z = k$ در (۵) ، داریم

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{k^2}{c^2} \quad (z = k).$$

لذا ، اثر مخروط در صفحه $z = k$ مبداء است اگر $k = 0$ و بیضی است اگر $k \neq 0$ ، بخصوص بیضی $(x^2/a^2) + (y^2/b^2) = 1$ است اگر $k = \pm c$. به عنوان تمرین ، نشان دهید که اثر مخروط در صفحه $x = k$ یا $y = k$ یک جفت خط متقاطع است اگر $k = 0$ و یک هذلولی است اگر $k \neq 0$. اگر $a = b$ ، مخروط بیضوی به مخروط مستدیر قائم

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

(دو پارچه) تحویل می شود ، که یک سطح دوار است . اگر علاوه بر این $a = c$ ، مخروط



شکل ۴۱

مستدیر قائم بسیار ساده

$$x^2 + y^2 - z^2 = 0$$

به دست می‌آید که در مثال ۹، صفحه ۱۱۳۶، مطرح شد.

مثال ۵. نمودار

$$(۶) \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = z$$

سطح درجهٔ دو شکل ۴۲ به نام سهمی‌گون بیضوی است. با قرار دادن $z = k$ در (۶)، به دست می‌آوریم

$$\frac{x^2}{ka^2} + \frac{y^2}{kb^2} = 1$$

اگر $k > 0$ ،

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 0$$

اگر $k = 0$ ، و

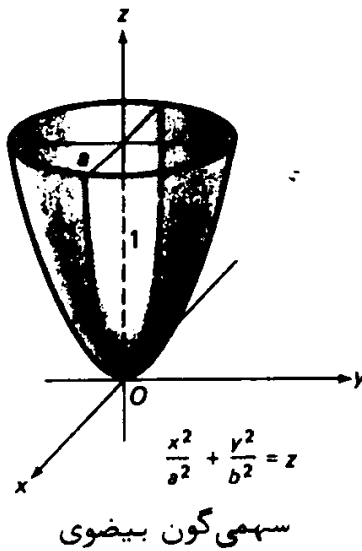
$$\frac{x^2}{|k|a^2} + \frac{y^2}{|k|b^2} = -1$$

اگر $k < 0$. لذا، اثر سهمی گون در صفحه $z = k$ بیضی است اگر $k > 0$ ، مبداء است اگر $k = 0$ ، و مجموعه تهی است اگر $k < 0$. همچنین ، اثر سهمی گون در صفحه xz سهمی

$$\frac{x^2}{a^2} = z \quad (y = 0),$$

و اثرش در صفحه yz سهمی

$$\frac{y^2}{b^2} = z \quad (x = 0)$$



شکل ۴۲

می باشد . اگر $a = b$ ، سهمی گون به سهمی گون دوار حاصل از دوران هر یک از این سهمیها حول محور z تحویل می شود (حالت $a = b = 1$ قبلاً در مثال ۸ ، صفحه ۱۱۳۵ ، مطرح شده است .)

مثال ۶ . نمودار

$$(۷) \quad \frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = z$$

سطح درجه دو شکل ۴۳ است به نام سهمی گون هذلولوی ، که از سایر سطوح درجه دو ساختار پیچیده تری دارد . اثرش در صفحه xz سهمی

$$z = \frac{x^2}{a^2} \quad (y = 0)$$

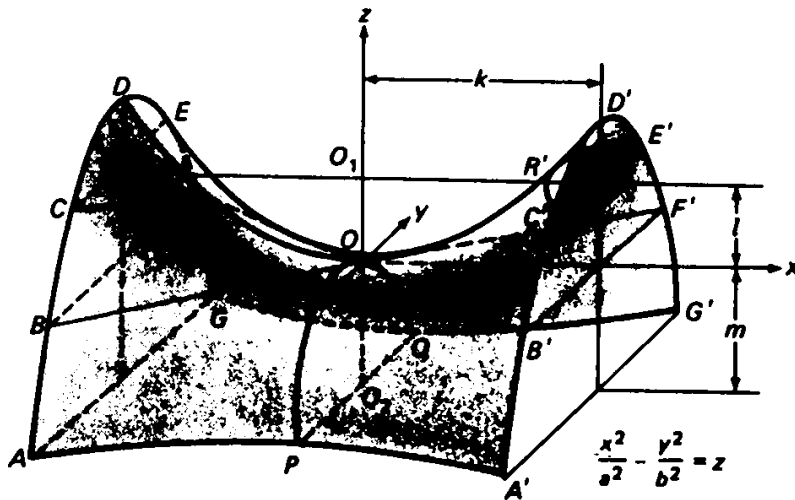
است که به بالا باز می شود (DOD' در شکل) ، و اثرش در صفحه yz سهمی

$$z = -\frac{y^2}{b^2} \quad (x=0)$$

است که به پایین باز می شود (POQ در شکل) . سهمی گون (Y) صفحات $x = \pm k$ را در سهمیهای

$$z = -\frac{y^2}{b^2} + \frac{k^2}{a^2} \quad (x = \pm k)$$

قطع می کند (ADG و $A'D'G'$ در شکل) ، که مانند POQ به پایین باز می شود ، ولی رتوشش



سهمی گون هذلولوی

شکل ۴۳

به اندازه k^2/a^2 از رأس O در POQ بالاتر است . به علاوه ، اثر سهمی گون در صفحه xy جفت خطوط متقاطع

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \quad (z = 0),$$

یا معادلا"

$$y = \pm \frac{b}{a}x \quad (z = 0)$$

است (BOF' و FOB' در شکل) . همچنین ، صفحه $z = l$ ($l > 0$) را در هذلولوی

$$\frac{x^2}{la^2} - \frac{y^2}{lb^2} = 1 \quad (z = l)$$

با شاخه های $CRE, C'R'E'$ و محور متقاطع RO_1R' ، و صفحه $z = -m$ ($m > 0$) را در هذلولوی

$$\frac{x^2}{ma^2} - \frac{y^2}{mb^2} = -1 \quad (z = -m)$$

با شاخه‌های APA' , GQG' و محور متقاطع PO_2Q قطع می‌کند. توجه کنید که سهمی گون‌هذلولوی در مجاورت مبدأ O به شکل زین یا گذرگاه کوهستانی است. نقطه O یک نقطه زینی یا مینیماکس سطح است. تناسب واژه " مینیماکس " از این ناشی می‌شود که اگرچه ارتفاع سطح در O نه مینیمم دارد نه ماکزیمم، ولی پایین‌ترین نقطه سهمی DOD' و بالاترین نقطه سهمی POQ هر دو در O رخ می‌دهند.

برای شناسایی نمودار یک معادله درجه دو می‌توان از تبدیلات جبری مقدماتی یاری جست. مثلاً، پس از کامل کردن مربع، معادله

$$x^2 + y^2 - z^2 + 2xy = 0,$$

که دارای جمله حاصل ضرب $2xy$ است، به صورت

$$(x + y)^2 - z^2 = 0$$

یا معادلاً

$$(x + y + z)(x + y - z) = 0,$$

درمی‌آید؛ و در نتیجه، نمودارش سطح درجه دو تپاه شده‌ای است که از جفت صفحه متقاطع $x + y + z = 0$ و $x + y - z = 0$ تشکیل شده است. به همین نحو، معادله

$$36x^2 + 9y^2 + 4z^2 - 72x + 8z + 4 = 0$$

پس از کامل شدن دو مربع، به صورت

$$36(x - 1)^2 + 9y^2 + 4(z + 1)^2 = 36$$

و پس از تقسیم بر 36، به شکل

$$(x - 1)^2 + \frac{y^2}{4} + \frac{(z + 1)^2}{9} = 1$$

درمی‌آید؛ در نتیجه، نمودارش بیضی گونی است که مرکز آن به جای مبدأ $(0, 0, 0)$ نقطه $(1, 0, -1)$ می‌باشد.

مسائل

درجه دو را که نمودار معادله داده شده است شناسایی کنید، و در صورت تپاه نشده بودن آن را رسم نمایید.

$$2x^2 - \frac{1}{2}y^2 + z^2 = 1 \quad ۱.$$

$$\frac{1}{25}x^2 + \frac{1}{16}y^2 + \frac{1}{36}z^2 = 1 \quad . ۲$$

$$x^2 - y^2 - 2z^2 = 0 \quad . ۳$$

$$6x^2 + 2y^2 - 3z^2 + 6 = 0 \quad . ۴$$

$$x^2 + \frac{1}{4}y^2 + z = 1 \quad . ۵$$

$$x^2 - y^2 + z^2 + 2xz + 2y - 1 = 0 \quad . ۶$$

$$4x^2 + 2y^2 + z^2 - 8x + 4y + 7 = 0 \quad . ۷$$

$$z^2 - 4x^2 = y \quad . ۸$$

$$2x^2 + y^2 + 3z^2 - 12z + 11 = 0 \quad . ۹$$

$$x^2 + 2y^2 - z^2 - 6x - 12y + 26 = 0 \quad . ۱۰$$

$$x^2 + z^2 - 2xz + 2x - 2z + 1 = 0 \quad . ۱۱$$

$$x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 2x - 8y + 6z + 12 = 0 \quad . ۱۲$$

$$z = xy \quad . ۱۳$$

$$z^2 = xy \quad . ۱۴$$

$$x^2 = z - y \quad . ۱۵$$

$$x^2 + y^2 + z^2 - xy - xz - yz = 0 \quad . ۱۶$$

$$x^2 - 2y^2 - z^2 = 1 \quad . ۱۷$$

$$x^2 + 6xy + 9y^2 - 4 = 0 \quad . ۱۸$$

راهنمایی. در مسائل ۱۳ تا ۱۵، ابتدا حول محور z دوران دهید.

فرض کنید S جسم داخل بیضی گون $\frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{25}y^2 + \frac{1}{36}z^2 = 1$ باشد. مساحت ناحیه مشترک S با

$$y = 3 \quad \text{صفحه} \quad . ۱۹$$

$$x = 1 \quad \text{صفحه} \quad . ۲۰$$

را بیابید.

۲۱. نقاط اشتراک خط

$$\frac{x-4}{-6} = \frac{y-3}{3} = \frac{z+2}{4}$$

با بیضی گون $\frac{1}{36}x^2 + \frac{1}{81}y^2 + \frac{1}{4}z^2 = 1$ را بیابید.

۲۲. سهمی گون بیضوی $2z = \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{4}y^2$ صفحه $2x - y - 2z - 10 = 0$ را فقط در یک نقطه قطع

می کند. چه نقطه ای؟

۲۳. مکان هندسی تمام نقاطی را بیابید که از نقطه $(0, 0, c)$ و صفحه $z = -c$ به یک فاصله

باشند.

۲۴. با استفاده از روش مقاطع مخروطی (ر.ک. بخش ۱۰.۸)، نشان دهید که حجم جسم

محدود به سهمی گون بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = h - z \quad (h > 0)$$

و صفحه xy مساوی نصف حاصل ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن است .
۲۵ . با استفاده از روش مقاطع عرضی ، حجم جسم محصور به بیضی گون

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1.$$

را پیدا کنید .

۲۶ . نشان دهید که مخروط بیضوی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$$

مجانب هذلولی گون یک پارچهء

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1$$

و هذلولی گون دو پارچهء

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$$

است بدین معنی که هر دو هذلولی گون ، وقتی $z \rightarrow \pm \infty$ ، بدلخواه به مخروط نزدیک می شوند .

اصطلاحات و مباحث کلیدی

مختصات قائم در فضا

فاصلهء بین دو نقطه در فضا

معادلات استوانه‌ها و سطوح دوار

بردارها در فضا و نمایش آنها به صورت سه تاییهای مرتب

حاصل ضرب خارجی و خواص آن

دترمینانها

حاصل ضرب سه گانهء اسکالر

معادلات پارامتری و تقارنی خطوط در فضا

فاصلهء بین یک نقطه و یک خط در فضا

صفحات و معادلات آنها
 زاویهٔ بین دو صفحه
 فاصلهٔ بین یک نقطه و یک صفحه
 منحنیهای فضایی، توابع برداری در فضا
 حرکت مداری و قوانین کپلر
 سطوح درجهٔ دو

مسائل تکمیلی

۱. دو نقطه از محور x بیابید که در فاصلهٔ ۱۲ از نقطهٔ $(-3, 4, 8)$ قرار داشته باشند.
 ۲. نشان دهید که نقاط $A = (0, 1, 2)$ ، $B = (2, 0, 1)$ ، و $C = (1, 2, 0)$ رئوس یک مثلث متساوی الاضلاع اند. طول ضلع این مثلث چقدر است؟
 ۳. نشان دهید که کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 - 4x - 6y - 2z + 13 = 0$ بر صفحهٔ xy مماس است.
 ۴. سطح حاصل از دوران خط $x = 0, y = c$ حول محور y ؛ حول محور z را بیابید.
- معادلهٔ استوانه‌ای را بیابید که بر کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 2cx$ محیط شده و خطوط جاری‌اش

موازی

۵. محور x . ۶. محور y . ۷. محور z باشند.
۸. فرض کنید $(-3, -6, 2)$ و $(3, 4, -1)$ دور رأس مجاور یک متوازی‌الاضلاع باشند. همچنین، اقطار در نقطهٔ $(-1, 7, 4)$ متقاطع باشند. دور رأس دیگر را پیدا نمایید.
۹. فرض کنید $(3, -1, 2)$ ، $(1, 2, -4)$ ، و $(-1, 1, 2)$ سه رأس یک متوازی‌الاضلاع باشند. رأس دیگر آن را بیابید. (سه حالت وجود دارد.)
۱۰. برداری با محورهای x و z مثبت زوایای 120° و 45° می‌سازد. این بردار چه زاویه‌ای با محور y مثبت می‌سازد؟
۱۱. بردارهایی به اندازهٔ ۲ بیابید که با محورهای x و y مثبت زوایای 60° و 120° بسازند.
۱۲. زوایای مثلثی را بیابید که رئوسش $A = (3, 2, -1)$ ، $B = (1, 1, 1)$ ، و $C = (5, 0, 0)$ باشند.
۱۳. نشان دهید هرگاه $\mathbf{a} + \mathbf{b} + \mathbf{c} = \mathbf{0}$ ، آنگاه $\mathbf{a} \times \mathbf{b} = \mathbf{b} \times \mathbf{c} = \mathbf{c} \times \mathbf{a}$. با استفاده از این، قانون سینوسها را (که در مسئلهٔ ۵۳، صفحهٔ ۱۰۰ داده شده) اثبات نمایید.
۱۴. فرض کنید \mathbf{u} و \mathbf{v} بردارهای یکه‌ای باشند که باهم زاویهٔ 30° می‌سازند. مساحت مثلث پیموده شده توسط بردارهای $\mathbf{u} + \mathbf{v}$ و $2\mathbf{u} + 3\mathbf{v}$ را بیابید.
۱۵. فرض کنید \mathbf{u} و \mathbf{v} بردارهای یکه‌ای باشند که باهم زاویهٔ 45° می‌سازند. مساحت

متوازی الاضلاعی را بیابید که بردارهای $v - 2u + 2v + 4u$ اقطار آن باشند.

۱۶. نشان دهید که مساحت مثلث به رئوس $A = (x_1, y_1)$ ، $B = (x_2, y_2)$ ، و $C = (x_3, y_3)$ در صفحه xy مساوی نصف قدر مطلق دترمینان

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \end{vmatrix}$$

است. نشان دهید که نقاط A ، B ، و C همخط اند اگر و فقط اگر این دترمینان صفر باشد.

فرض کنید $a = (3, -2, 5)$ ، $b = (-2, 2, 1)$ ، و $c = (1, 4, -1)$. عبارات زیر را بیابید.

$$a \cdot (b \times c) \quad . 17 \qquad a \times (b \times c) \quad . 18$$

$$(a \times b) \cdot (b \times c) \quad . 20 \qquad (a \times b) \times c \quad . 19$$

۲۱. حجم متوازی السطوح پیموده شده به وسیله بردارهای $a = (3, -7, 1)$ ، $b = (-2, 0, 4)$ و $c = (10, 6, 0)$ را بیابید.

۲۲. نشان دهید که به ازای هر سه بردار a ، b ، و c ،

$$a \times (b \times c) + b \times (c \times a) + c \times (a \times b) = 0$$

راهنمایی. از مسئله ۴۸، صفحه ۱۱۶۲، استفاده کنید.

۲۳. نشان دهید هرگاه بردارهای a ، b ، c ، و d همصفحه باشند، آنگاه $(a \times b) \times (c \times d) = 0$. فرض کنید a ، b ، c ، و d بردارهای دلخواهی باشند. نشان دهید که

$$(a \times b) \cdot (c \times d) = (a \cdot c)(b \cdot d) - (a \cdot d)(b \cdot c) \quad . 24$$

$$(a \times b) \times (c \times d) = [a \cdot (b \times d)]c - [a \cdot (b \times c)]d \quad . 25$$

$$[b \cdot (c \times d)]a - [a \cdot (c \times d)]b + [a \cdot (b \times d)]c - [a \cdot (b \times c)]d = 0 \quad . 26$$

۲۷. فرض کنید e_1 ، e_2 ، و e_3 سه بردار غیر همصفحه باشند. در نتیجه، e_1 ، e_2 ، و e_3 یک پایه تشکیل می دهند (ر. ک. صفحه ۱۱۴۷). نشان دهید که بسط بردار دلخواه a نسبت به این پایه عبارت است از $a = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \alpha_3 e_3$ ، که در آن

$$\alpha_1 = \frac{a \cdot (e_2 \times e_3)}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)}, \quad \alpha_2 = \frac{a \cdot (e_3 \times e_1)}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)}, \quad \alpha_3 = \frac{a \cdot (e_1 \times e_2)}{e_1 \cdot (e_2 \times e_3)} \quad (\text{یک})$$

بردارهای $e_1 = (0, 1, 1)$ ، $e_2 = (1, 0, 1)$ ، و $e_3 = (1, 1, 0)$ غیر همصفحه بوده، و در نتیجه یک پایه تشکیل می دهند. با استفاده از فرمولهای (یک)، بردار داده شده a را نسبت به این پایه بسط دهید.

$$a = (2, 1, 5) \quad . 29$$

$$a = (3, -6, 4) \quad . 28$$

۳۰. $\mathbf{a} = (-1, 2, -3)$

۳۱. خط ماربر نقطه $(5, -7, 6)$ موازی خط

$$\frac{x+1}{-2} = \frac{y}{3} = \frac{z+4}{-1}$$

را بیابید.

۳۲. معادلات پارامتری و تقارنی خط مار بر نقاط $(0, -1, 2)$ و $(-2, 0, 4)$ را بیابید.

۳۳. فاصله بین نقطه $(3, 5, 4)$ و خط $x = y = z$ را بیابید.

۳۴. نشان دهید که خط $x = -4 + 3t, y = 2 - 4t, z = 6 + 4t$ موازی صفحه $4x - 3y - 6z - 2 = 0$ است.

۳۵. خط مار بر نقطه $(-4, 2, 5)$ و عمود بر صفحه $6x - 3y + 8z + 10 = 0$ را بیابید.

۳۶. اگر صفحه Π محور x را در نقطه $(a, 0, 0)$ ، محور y را در نقطه $(0, b, 0)$ ، و محور z را در نقطه $(0, 0, c)$ قطع کند،

a ، b ، c را قطع کند، a ، b ، c را قطع کند، Π می‌نامیم.

نشان دهید که معادله صفحه با قطع x ، a ، b ، c ، y ، a ، b ، c ، z ، a ، b ، c مساوی است با

مساوی است با

$$\frac{x}{a} + \frac{y}{b} + \frac{z}{c} = 1$$

مشروط بر اینکه a ، b ، c و همه ناصفر باشند.

معادله صفحه با قطعهای داده شده را بیابید.

۳۷. $a = -1, b = 5, c = 2$

۳۸. $a = 10, b = -20, c = 15$

۳۹. بدون قطع x ، $b = 4$ ، $c = 8$

۴۰. بدون قطع z ؛ $a = 2, b = -3$

قطع x ، a ، b ، c ، y ، a ، b ، c ، z ، a ، b ، c صفحه داده شده را بیابید.

۴۱. $2x - 3y + 4z - 12 = 0$

۴۲. $3x + 5y - 10z + 30 = 0$

۴۳. $5x + 7y - 35 = 0$

۴۴. $6y - 7z + 21 = 0$

۴۵. صفحات $3x - 5y + az - 9 = 0$ و $x + 3y + 4z + 6 = 0$ به ازای مقداری از a بر

هم عمودند. این مقدار را بیابید.

۴۶. مقادیر a و b را طوری بیابید که صفحات $2x + ay + 3z - 1 = 0$ و $bx - 10y - 6z + 5 = 0$

موازی باشند .

۴۷ . صفحه مار بر نقطه $(1, -9, 3)$ را طوری بیابید که بر فصل مشترک صفحات $x - 2y + z - 5 = 0$ و $x + y - z + 4 = 0$ عمود باشد .

۴۸ . زاویه بین صفحه $x + 2y - 2z - 1 = 0$ و هر یک از صفحات مختصات را بیابید .

۴۹ . فاصله بین نقطه $(3, -4, 12)$ و صفحه $x + y + z = 180$ را بیابید .

۵۰ . نشان دهید که خطوط $x = y = z$ و

$$\frac{x+4}{3} = \frac{y-6}{-2} = \frac{z+10}{6}$$

مقاطع اند . نقطه تقاطع را بیابید .

۵۱ . فاصله بین خط $x = y = z$ و خط مار بر نقاط $(3, -1, 2)$ و $(6, 1, 4)$ را بیابید .

۵۲ . طول منحنی فضایی

$$x = \cos t, \quad y = \sin t, \quad z = \ln(\cos t) \quad (0 \leq t \leq \pi/4)$$

را پیدا کنید .

عبارت زیر را حساب کنید .

$$\lim_{t \rightarrow -1} \left(\frac{\ln t}{t-1} \mathbf{i} - \frac{e^t - e}{t-1} \mathbf{j} + \frac{t+1}{t^2} \mathbf{k} \right) \quad . ۵۳$$

$$\lim_{t \rightarrow 0} \left(\frac{\sqrt{1+t} - 1}{t} \mathbf{i} + \frac{t-1}{t+1} \mathbf{j} - \frac{\sinh t}{t} \mathbf{k} \right) \quad . ۵۴$$

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{e^t}{t} \mathbf{i} + \frac{\ln t}{t} \mathbf{j} + \frac{\cos t}{t} \mathbf{k} \right) \quad . ۵۵$$

$$\frac{d}{dt} [(\cosh t) \mathbf{i} + (\tanh t) \mathbf{j} + 10^t \mathbf{k}] \quad . ۵۶$$

$$\int_{\pi/6}^{\pi/3} [(\cot t) \mathbf{i} - (\tan t) \mathbf{j} + 24 \mathbf{k}] dt \quad . ۵۷$$

$$\int \left(\frac{1}{t^2+4} \mathbf{i} + \frac{1}{t^2-1} \mathbf{j} + \frac{t^2-1}{t^2+1} \mathbf{k} \right) dt \quad . ۵۸$$

بردارهای یکه مماس و قائم \mathbf{T} و \mathbf{N} بر منحنی داده شده در نقطه P نظیر به مقدار ذکر شده از پارامتر t را بیابید . همچنین ، انحنای κ در P را پیدا نمایید .

$$x = 1 - 6t, \quad y = 3 + 2t, \quad z = 4 - 3t, \quad t = -1 \quad . ۵۹$$

$$x = 2t, \quad y = t^2, \quad z = \ln t, \quad t = 1 \quad . ۶۰$$

۶۱. $x = \cosh t, y = \sinh t, z = t, t = 0$

۶۲. $x = e^t \cos t, y = e^t \sin t, z = e^t, t = \pi/4$

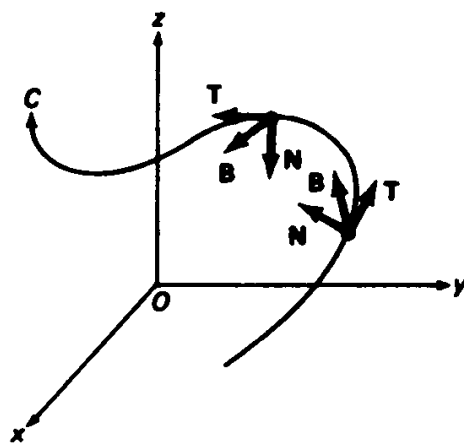
۶۳. طول قوس s را پارامتر گرفته، فرض کنید C منحنی پیموده شده به وسیله نقطه $P = P(s)$ با بردار موضع $r = r(s)$ بوده، و C دارای بردارهای یکه مماس و قائم T و N در P باشند. در این صورت، بردار یکه $B = T \times N$ قائم دوم به C در P نام دارد. واضح است که $N \times B = T$ و $B \times T = N$. بردارهای T, N, B باهمین ترتیب، یک پایه متعامد یکه راست دست تشکیل می‌دهند، که با موضع P تغییر می‌نماید. این پایه موضعی سه وجهی حرکت C نام دارد (ر.ک. شکل ۴۴). با این فرض که $r = r(s)$ مشتق سوم پیوسته دارد، نشان دهید که dB/ds موازی N است. لذا،

$$\frac{dB}{ds} = -\tau N,$$

که در آن اسکالر τ تاب C در P نام دارد؛ انتخاب علامت منها قراردادی است، و به مقدار مثبتی برای تاب یک مارپیچ راست دست منجر می‌شود (ر.ک. مسئله ۶۵). همچنین، نشان دهید

$$\frac{dN}{ds} = \tau B - \kappa T,$$

که در آن κ انحنای C در P است (از قبل می‌دانیم که $dT/ds = \kappa N$).



شکل ۴۴

۶۴. منحنی C معمولاً "نمودار تابع بردار موضع $r = r(t)$ گرفته می‌شود، که در آن t پارامتری غیر از طول قوس است. نشان دهید که تاب C با فرمول زیر داده می‌شود:

(دو)

$$\tau = \frac{r' \cdot (r'' \times r''')}{|r' \times r''|^2}$$

که در آن طبق معمول پریم مشتگیری نسبت به t را نشان می‌دهد. نشان دهید C یک منحنی مسطح است اگر و فقط اگر تاب آن متحد صفر باشد.

۶۵. تاب τ مارپیچ مستدیر کلی

$$x = a \cos \omega t, \quad y = a \sin \omega t, \quad z = bt \quad (a > 0)$$

را بیابید.

۶۶. نشان دهید که منحنی $x = t^2, y = 1 - 3t, z = 4t - 2$ در یک صفحه قرار دارد. این صفحه چیست؟

فرض کنید C مکعبی پیچ خورده $x = t, y = \frac{1}{2}t^2, z = \frac{1}{3}t^3$ باشد.

۶۷. انحنای ماکزیم C را بیابید.

۶۸. تاب τ و بزدارهای T, N, B سهوجهی حرکت C را در مبداء بیابید.

۶۹. تاب τ و بردارهای T, N, B را در نقطه $(1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3})$ بیابید.

۷۰. تاب ماکزیم C را پیدا کنید.

۷۱. تاب منحنی $x = \cosh t, y = \sinh t, z = t$ در نقطه نظیر به $t = \ln 2$ چقدر است؟

۷۲. نشان دهید که انحنای κ و تاب τ منحنی $x = 3t - t^3, y = 3t^2, z = 3t + t^3$ در هر نقطه مساویند.

۷۳. گلوله‌ای از یک توپ شلیک شده است که نقطه شروع بردار موضع آن خود توپ است. نشان دهید که اندازه حرکت زاویه‌ای آن حفظ شده نیست. اما نقطه‌ای وجود دارد که اندازه حرکت زاویه‌ای حفظ شده است. این نقطه کجاست؟

۷۴. ارتفاع یک قمر مصنوعی در اوج 660 mi بوده، و نسبت تندی ماکزیم آن به تندی مینیم اش 1.1 است. ارتفاع قمر در حوض چقدر است؟ دوره گردش آن چقدر است؟ (شعاع زمین را $R = 3960$ mi و شتاب ثقل در سطح زمین را $g = 32.15$ ft/sec² بگیرید.)

۷۵. یک سفینه هوایی در یک مدار مستدیر به ارتفاع 150 mi بالای زمین سر می‌خورد. راننده با فعال کردن موشکهای فشار تندی آن را 900 mph بیشتر می‌کند. ارتفاع ماکزیم سفینه در مدار جدیدش چقدر است؟

۷۶. فاصله حوض خورشیدی یک سیاره r_0 بوده، و خروج از مرکز مدارش e می‌باشد. نشان دهید که شعاع انحنای مدار در نقاط انتهایی محور اطول $r_0(1 + e)$ است.

۷۷. نقطه $(3, -4, 7)$ بر یک مخروط مستدیر قائم دویارچه قرار دارد که محورش در امتداد محور z و رأسش در مبداء است. معادله مخروط را پیدا کنید.

۷۸. معادله کره‌گون کشیده حاصل از دوران بیضی

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$$

- حول محور x را بیابید. همچنین، معادلهٔ کره‌گون جمع شدهٔ حاصل از دوران همین بیضی حول محور z را بیابید. (ر.ک. مسئلهٔ ۴۶، صفحهٔ ۷۸۲.)
۷۹. معادلهٔ مخروط به رأس $(0, 0, 5)$ و مولدهای مماس بر کرهٔ $x^2 + y^2 + z^2 = 9$ را پیدا کنید.
۸۰. فرض کنید S مجموعهٔ تمام نقاطی در فضا باشد که مجموع فواصلشان تا دو نقطهٔ معین ثابت است. نشان دهید S یک کره‌گون کشیده می‌باشد.

