حساب دیفرانسیل و انتگرال چیست؟

و. و. سویر
ترجمهٔ محمدحسن مهدوی‌اردبیلی

(ریاضیات پیش‌دانشگاهی ـ ۲)

فهرست

عنوان | **صفحه**

بسم الله الرحمن الرحیم

سخنی با خواننده

ارتباط بین استادان برجستهٔ دانشگاهها و دانش‌آموزان دوره‌های پیش‌دانشگاهی، از مؤثرترین وسیله‌هایی‌است که به‌کشف و پرورش استعدادها کمك می کند و زمینه را برای‌تربیت دانشمندان آینده فراهم‌می‌سازد. در بین‌شخصیتهای علمی تراز اول، که پژوهندگان یك علم را در بالاترین سطح ممکن آمـوزش می‌دهند و راهنمایی می‌کنند، عدهٔ‌کمی این‌توانایی را دارندکه درآن زمینهٔ‌علمی، وبا رعایت همهٔ دقتها ونکته‌ها، کتابهایی تألیف‌کنند که برای قشر وسیعی از دانش‌آموزان دبیرستانی، وگاه برای افراد عادی، آموزنده وقابل درك باشد. این شخصیتها، که درهر کشور انگشت شمارند، از این راه، ارتباطی‌بین خود وجوانان برقرارمی‌سازند. دسترسی دانش‌آموزان به‌چنین‌کتابهایی، پشتوانه‌ای برای تأمین آیندهٔ علمی جامعه است.

جـامعهٔ ریاضـی آمریـکا مجموعه‌ای از ایـن‌گونه کتابها را زیـر عنوان New Mathematical Library فراهم‌آورده و تاکنون بیش از سی جلد ازآنها را منتشرکرده است‌که بعضی از آنها مستقیماً به زبان انگلیسی تألیف شده و بعضی دیگر از زبانهای مختلف به‌انگلیسی ترجمه شده‌اند. این‌کتابها تاکنون به بسیاری از زبانهای دیگر ترجمه‌شده وهرکدام، چه درآمریکا وچه درکشورهای‌دیگر، بارها تجدیدچاپ شده است.

گروه ریاضی، آمار، و کامپیوتر مرکز نشر دانشگاهی، به حکم وظیفه‌ای که برای‌گسترش دانش‌ریاضی به‌عهده دارد، به‌ترجمهٔ این‌کتابها از انگلیسی به‌فارسی، و ویرایش‌آنها‌پرداخته‌است. مترجمان و ویراستاران ازافرادخبره برگزیده شده‌اند وکوشش لازم به‌عمل‌آمده است تا، ضمن رعایت امانت‌کامل‌درترجمه، متن فارسی روان و خالی از ابهام باشد. کتابها به‌ترتیبی‌که ترجمهٔ آنها آماده شود زیر عنوان **ریاضیات پیش‌دانشگاهی** منتشر می‌شوند.

این مجموعه کتابها را می‌توان دو دسته کرد. یك دسته شامل کتابهایی است که مباحثی از ریاضیات را به زبان ساده تشریح می‌کنند و می‌توانند برای درسهای ریاضیات عمومی دانشگاه نیز جنبهٔ کمك درسی داشته باشند. ویراستاران متن اصلی این کتابها در پیشگفتار خود از جمله نوشته‌اند:

مطالب کتابهای این مجموعه در برنامهٔ ریاضیات دبیرستانی یا گنجانیده نشده یا به‌اجمال بیان شده است. میزان دشواری آنها متفاوت است و حتی دریك کتاب هم، مطالعهٔ بعضی از بخشها به‌تمرکز حواس بیشتری نیاز دارد. خواننده برای فهم مطالب اغلب این کتابها، هرچند به‌اطلاعات ریاضی چندانی نیاز ندارد، ولی باید تلاش فکری فراوانی به‌عمل آورد. کتاب ریاضی را نمی‌توان به‌سرعت خواند، و نباید توقع داشت که با یك بار مطالعه، تمام بخشهای آن فهمیده شود. می‌توان بدون معطل‌ماندن روی بخشهای پیچیده از آنها گذشت و بعد، برای مطالعهٔ عمیق به‌آنها بازگشت، زیرا بسیار پیش‌می‌آید که مطلبی در مبحث بعدی روشن می‌شود. از سوی دیگر، می‌توان بخشهایی را که مطالب آنها کاملا آشناست خیلی سریع مطالعه کرد. بهترین راه فراگرفتن ریاضیات، حل مسأله‌های آن است. هر کتاب شامل مسأله‌هایی است که حل برخی از آنها ممکن است مستلزم تأمل قابل‌ملاحظه‌ای باشد. پاسخها یا راهنماییهای مربوط به حل این مسأله‌ها، غالباً در پایان کتاب آمده‌اند. به خواننده توصیه می‌شود که کوشش کند هرمسأله را خودحل کند و فقط برای اطمینان از درستی راه‌حل خود به بخش پاسخها مراجعه نماید. بدین‌طریق، مطلب رفته‌رفته برایش پرمعناتر خواهد شد.

دستهٔ دیگر کتابها، شامل مجموعه‌هایی غنی از مسأله‌ها یا پرسشهای جالب چندگزینه‌ای است که در مسابقه‌های معروف ریاضی مطرح شده‌اند. دراین کتابها، راه‌حل دقیق مسأله‌ها آمده است. درمورد پرسشها به‌ذکر پاسخ درست اکتفا نشده، بلکه حل کامل آنها نیز عرضه شده‌است.

نظرات و پیشنهادهای خوانندگان ما را به‌ادامهٔ کار و گسترش این‌گونه‌فعالیتها تشویق خواهد کرد.

گروه ریاضی، آمار، وکامپیوتر
مرکز نشر دانشگاهی

فصل اول

برای یادگرفتن حساب دیفرانسیل و انتگرال چه باید بدانید؟

در ریاضیات بارها مطلبی شگفتی‌آور پیش می‌آید. یکی پرسشی به اندازه‌ای ساده مطرح می‌کند که به‌نظر نمی‌رسد از پاسخ آن نتیجه‌ای مفید به‌دست آید و آن‌گاه معلوم می‌شود که پاسخ در را به‌روی انواع مباحث جالب می‌گشاید و به‌کسی که آن را می‌فهمد قدرت بسیار می‌بخشد.

حساب دیفرانسیل و انتگرال مثالی ازاین قبیل است. حساب دیفرانسیل با پرسشی به‌ظاهر ساده و بی‌ضرر آغاز می‌شود: «سرعت چیست و چگونه باید آن را حساب کنیم؟» این سؤال به طرزی بسیار طبیعی، در حوالی سال ۱۶۰۰ میلادی، موقعی مطرح شد که هرنوع جسم متحرك ـ از سیاره‌ها تا آونگها ـ درمعرض مطالعه قرارمی‌گرفت. درست درهمان هنگام مردم مطالعهٔ دنیای مادی‌را آغازکرده بودند. از این مطالعه دنیای جدید، با دانشی که ما امروز از ستارگان، اتمها،ماشینها و ژنها ـ انگیزه‌های خوشبختی وبدبختی خودمان ـ داریم، گسترش یافته است. شاید انتظار می‌رفت موارد کاربرد مطالعهٔ سرعت بسیار کم باشد و به‌ماشینها و اجسام سقوط‌کننده وحرکت اجرام آسمانی محدود شود. اما چنین نشد. درعمل از ۱۶۰۰ تا ۱۹۵۵م. هرپیشرفتی درعلوم و ریاضیات به‌حساب دیفرانسیل و انتگرال بستگی داشت. از این ریشهٔ یگانه، دانشها به نحوی غیرمنتظر در همه جهت رشد کردند. می‌بینیدکه حساب دیفرانسیل و انتگرال در نظریهٔ جاذبه، حرارت، نور، صدا، الکتریسیته و مغناطیس ونیز درمطالعهٔ جریان هوا وطرح‌هواپیما مورد استفاده قرار می‌گیرد‌حساب‌دیفرانسیل‌وانتگرال به‌ماکسول[1] امکان‌می‌دهدامواج‌رادیو رابیست‌سال

1. Maxwell

پیش از آنکه فیزیکدان دیگری آن‌را به‌تجربه ثابت کند پیشگویی نماید؛ بازحساب دیفرانسیل وانتگرال نقشی اساسی در نظریهٔ اینشتین درسال ۱۹۱۶م. ودرنظریه‌های جدید اتمی قرن نوزدهم و بیستم برعهده می‌گیرد. بجز این موردها و کاربردهای متعدد دیگر در علوم، حساب دیفرانسیل و انتگرال موجب به‌وجود آمدن شاخه‌های جدید در ریاضیات محض می‌شود. در قرن حاضر شاخه‌های معدودی از ریاضیات به‌وجود آمده‌اند که حساب دیفرانسیل وانتگرال‌را به‌کار نمی‌برند. تازه این‌شاخه‌ها نیز با موضوعهای مربوط به‌حساب دیفرانسیل وانتگرال آمیخته‌اند. کسی که حساب دیفرانسیل و انتگرال را به‌عنوان پایه یاد نگرفته باشد و بخواهد ایـن شاخه‌ها را مطالعه کند با وضعی نامساعد روبـرو می‌شود. اشاره‌هایی بـه حساب دیفرانسیل و انتگرال خواهد دیـد و نتیجه‌هایی مشاهده خواهد کـرد که از قضیه‌هـای حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌دست آمده است. هرکسی که تصمیم بگیرد به‌طرزی جدی ریاضیات را مطالعه کند نمی‌تواند حساب دیفرانسیل و انتگرال را ندیده بگیرد.

پس برای ریاضیات محض و عملی[1]، حساب دیفرانسیل وانتگرال مبحثی لازم است. وحساب دیفرانسیل ازیك اندیشهٔ ساده یعنی اندیشهٔ سرعت نشأت می‌گیرد.

درگذشته مردم اغلب حساب دیفرانسیل وانتگرال‌را موضوعی بسیار دشوار می‌پنداشتند. سپس، به‌ویژه درانگلستان، معلمان به‌تدریج دریافتند که بسیاری‌ازچیزها با حساب دیفرانسیل و انتگرال با راهی بسیار ساده‌تر و جالبتر از هرچیز در جبر به‌دست می‌آید. در دبیرستانهای انگلیس دانش‌آموزی ممکن است دو یـا حتی سه سال حساب دیفرانسیل و انتگرال بخواند. امـا بعضی از ریاضیدانان می‌گویند که این کار خوبی نیست و حساب دیفرانسیل و انتگرال درواقع پیچیده‌تر از آن است که به‌نظر می‌رسد ونیز حساب دیفرانسیل و انتگرال را باید فقط ریاضیدانان بسیار صلاحیتدار تدریس کنند. درمیان این نظرهای متناقض حقیقت درکجا قرار گرفته است؟

شاید مقایسه‌ای به‌درك مطلب كمك كند. بانویی سالخورده در روستایی آرام زندگی می‌کند و هریکشنبه بـا اتومبیل خودش به‌کلیسا می‌رود. اگر از این خانم

---

۱. دانشمند ریاضی محض‌کسی است کـه ریاضیات را به‌خاطر خود ریاضیات می‌خواند. دانشمند ریاضی عملی‌کسی است کـه ریاضیات را می‌خواند تا در بعضی جنبه‌های واقعی جهان ــ علوم، مهندسی، پـزشکی، اقتصاد، تاریخ و غیره ــ بتواند کار کند. بسیاری از ریاضیدانان بزرگ گذشته، هم به‌ریاضیات محض علاقه‌مند بودند و هم به‌ریاضیات عملی. همین علاقه میان بعضی‌از بهترین ریاضیدانان امروزی نیز وجود دارد.

بپرسید آیا رانندگی اتومبیل آسان است؟ خواهد گفت «اوه، آری، من با اینکه هیچ استعداد مکانیکی ندارم رانندگی را بسیار ساده می‌بینم». اگر این بانو مجبور بود اتومبیل را در وسط نیویورك براند و یا یك کامیون سنگین‌را در کوههای راکی[1] راه ببرد، آن‌گاه امکان داشت رانندگی را به‌این سادگی تصور نکند. اما حقیقت را نمی‌توان انکار کرد: این بانو رانندگی بلد است. و اگر مجبور شود در ترافیك، اتومبیل براند بلدبودن رانندگی تا حدودی به‌دردش خواهد خورد. این بانو مانند کسی که هیچ رانندگی نکرده است درمانده نخواهد بود.

وضع درحساب‌دیفرانسیل وانتگرال تااندازه‌ای چنین‌است. حساب‌دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی، مانند رانندگی مقدماتی‌است. یادگرفتن آن اشکالی ندارد وشما را قادر می‌سازد که کارهای زیادی انجام دهید که اگر آن معلومات مقدماتی را نداشتید نمی‌توانستید موفق شوید. اما اگر بخواهید حساب دیفرانسیل و انتگرال را تا آنجا که پیش رفته است یاد بگیرید شما با چیزهای پیچیده‌تری سر و کار خواهید داشت.

پس حساب دیفرانسیل و انتگرال را چطور باید تعلیم داد؟ آیا باید مبتدی‌را با تذکارهایی که در حساب دیفرانسیل و انتگرال فقط در قسمتهای پیشرفته‌تر اهمیت دارد ناراحت کنیم؟ اگر به این طریق عمل شود مبتدی گیج خواهد شد زیرا نیازی به‌این تذکارها نخواهد دید. اگر این‌کار را نکنیم ازطرف ریاضیدانان متهم‌خواهیم شدکه جوان را فریب می‌دهیم.

به‌عقیدهٔ من راه درست این است که درهرزمان یك‌کار انجام‌دهیم. شماجوانی راکه مایل است رانندگی یاد بگیرد نخستین‌بار درمسیرکم ترافیك می برید. او باید بسیار تمرین‌کند تا بداند ترمز کدام است و پدال گاز کدام، چطور باید فرمان را در دست بگیرد و چطور پارك‌کند. شما با وی دربارهٔ ترافیك سنگین‌که هنوز با آن مواجه نیست و نیز اگر زمستان و جاده یخ بسته باشد او چه کار باید بکند بحثی نمی‌کنید. اما می‌توانید به او تذکربدهید که چنین شرایطی وجود دارد تا جوان به‌آنچه می‌داند مغرور نشود.

اگر همهٔ حقایق را به‌او بگویید به‌احتمال نخواهد توانست همه‌را یکجاهضم کند. حتی ایراد مهمتر این است: ما همهٔ حقیقت را نمی‌دانیم. دانشجوی ما جوان است. شاید عمرش وفا خواهدکرد تا بتواند درنخستین سفر به‌مریخ اتومبیل براند. که می‌داندکه درمریخ چه تفاوتهایی درفن رانندگی پیش خواهد آمد؟

---

۱. پنجاه سال پیش درتمام‌کتابهای فارسی این‌کوهها را روشوز می‌نوشتند. ـــ م.

ریاضیات نیز یک اکتشاف است. هراندازه جلوتر می‌رویم چیزهای نو و وضعیتهای غیرمنتظره می‌بینیم ومجبور می‌شویم در اندیشه‌های خودمان تجدید نظر کنیم. معلوم‌می‌شود که قاعده‌هایی‌راکه به‌کار برده‌ایم وقضیه‌هایی راکه ثابت‌کرده‌ایم ضعفهای پیش‌بینی نشده دارند. اگر از من بخواهند مطالبی راکه درهمه‌جا و در هر زمان درست است روی صفحهٔ کاغذی بنویسم باید ورقهٔ سفید بدهم.

این کتاب را من با اندیشه‌های سادهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال ـ مانند رانندگی در روستا ـ آغاز می‌کنم. با استثناهای ناهنجارکاری ندارم. در بیشتر موارد به‌چیزها مانند ریاضیدانان‌قرن هفدهم، وقتی‌که حساب دیفرانسیل و انتگرال گسترش می‌یافت، نگاه می‌کنم. من دریافته‌ام که آن دانش‌آموزان کلاسهای نهم و دهم‌که ریاضیات را دوست دارند می‌توانند این نوع حساب دیفرانسیل وانتگرال را بی‌اشکال تعقیب کنند. در اواخرکتاب در فصل شهود و منطق برای اینکه به‌شما نشان دهم‌که چون به ترافیك سنگین شهرهای بزرگ نزدیك می‌شوید کارها به‌چه صورتی درمی‌آید،چند مثال می‌آورم.منظور من این‌است‌که شما را از پیچیدگیهایی که ممکن است رخ دهد آگاه کنم. اما شما نباید این پیچیدگیهارا دشواریها تصور کنید. آنها به‌هیچ وجه دشوار نیستند. بعضی از پیچیدگیها بسیار شگفتی‌آور و غیرمنتظره وجالب هستند.

حالا چه باید بدانید تا بتوانید این‌کتاب را بخوانید؛ شما به‌دانستن سه چیز نیاز دارید.

۱. مبانی حساب. شما باید قادر باشید عملیات جمع، تفریق، ضرب وتقسیم همهٔ عددها، کسرها وکسرهای اعشاری را انجام دهید. هیچ معلوماتی از حساب بازرگانی، درصدها، تنزیل و غیره لازم ندارید. شما باید توانها را دیده باشید و بدانیدکه به‌مثل $۴^۵$ کوتاه‌نویسی $۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴ \times ۴$ است.

۲. جبر پایه. بایدبدانید چطور نمادها، مانند x، به‌کار می‌روند وباید بتوانید جمع، تفریق، ضرب و تقسیم سادهٔ عبارتهای جبری را انجام دهید. باید بتوانید در فرمول‌عدد بگذارید. به‌مثل درعبارت $x^۲ - ۱$ به‌جای x، ۳ بگذارید و جواب ۸ را به‌دست بیاورید. اعداد منفی مانند ۵− را باید تاکنون دیده باشید.

۳. نمودارها. باید بدانید چطور نمودار رسم می‌شود. باید چندین نمودار رسم‌کرده باشید و چیزی از شباهت منظر آنها به‌خاطر داشته باشید. به‌مثل بدانید نمودارهای $y = x$ و $y = ۲x + ۱$ خطهای‌مستقیم هستند درصورتی که نمودارهای $y = x^۲$ و $y = \frac{۱}{x}$ خطهای مستقیم نیستند.

به‌ویژه مهم است که جبر را به‌صورت مجموعه‌ای از قواعد یاد نگرفته باشید، بلکه معنی جبر را تاحدودی فهمیده باشید و بدانید چگونه جبر ازحساب ریشه‌می‌گیرد و چطور برای بیان مطالبی دربارهٔ حساب، جبر به‌کار گرفته می‌شود. با چند مثال معنی این سخنان روشن خواهد شد.

به‌مثل مطالب زیر به‌حساب مربوط‌اند:

$۳^۲$ یك واحد بیشتر از ۲×۴ است

$۴^۲$ یك واحد بیشتر از ۳×۵ است

$۵^۲$ یك واحد بیشتر از ۴×۶ است.

اما از این مطالب به‌خاطر می‌رسد «مربع هرعدد صحیح یك‌واحد بزرگتر است از حاصلضرب عدد جلوتر در عدد بعدی». به‌مثل ما باید حدس بزنیم که $۸۷^۲$ باید یك واحد بزرگتر از ۸۸×۸۶ باشد. نتیجهٔ عمومی به‌زبان جبر بسیار راحت‌تر بیان می‌شود. اگر n علامت اختصاری «عددی» باشد آن‌گاه «عدد جلوتر» به صورت $n-۱$ نوشته خواهدشد وعدد بعدی به‌شکل $n+۱$. به‌جای جملهٔ بالا، حالاخواهیم گفت: «$n^۲$ یك واحد بزرگتر از

$$(n-۱)(n+۱)$$

است». یا تنها نماد به‌کار می‌بریم و می‌گوییم

$$n^۲=۱+(n-۱)(n+۱)$$

این معادله برای هر عدد n صادق است و همان چیزی را بیان می‌کند که ما با دیدن نتیجه‌های ویژهٔ حساب حدس زده بودیم. بعلاوه این معادله به‌ما امکان می‌دهد که ثابت کنیم حدسمان درست است. با روشهای معمولی جبر عمل ضرب را انجام می‌دهیم و مشاهده می‌کنیم که دوطرف همیشه برابرند.

پس نمادها هم برای بیان آنچه ما حدس زده‌ایم وهم برای اثبات صحت آن مفید هستند.

در خود جبر ما اغلب از نتیجه‌های خصوصی به نتیجه‌های عمومی می‌رسیم. به‌مثل اگر چند ضرب جبری مانند

$$(x+۳)(x+۴)=x^۲+۷x+۱۲$$

و

$$(x+۵)(x+۶)=x^۲+۱۱x+۳۰$$

را انجام دهید شاید به‌بعضی چیزها متوجه شوید. در مثال نخست هم ۷ را می‌بینید که مجموع ۳ و ۴ است و هم ۱۲ را که حاصلضرب ۳ و ۴ است. در مثال دوم همان نتیجه‌ها را می‌یابید: ۱۱ مجموع ۵ و ۶ است و ۳۰ حاصلضرب آنهاست. حدس می‌زنیم که عددهای سمت چپ هرچه باشند این نتیجه برقرار است. با نمادهای جبری بیان کنیم: حدس می‌زنیم که در حاصلضرب $(x+b)$ $(x+a)$ همواره $a+b$ ضریب x و ab جملهٔ ثابت است. اگر حدسمان را با معادله بنویسیم می‌شود

$$(x+a)(x+b)=x^۲+(a+b)x+ab$$

حالا می‌توانیم به‌آسانی ثابت کنیم که حدس ما درست است. این طرز اندیشه اغلب در این کتاب به‌کار خواهد رفت. چندمثال می‌آوریم، آنها را مطالعه می‌کنیم و می‌کوشیم یك قاعدهٔ عمومی حدس بزنیم.

برای انجام این کار لازم است قاعده‌ها را ببینیم و آنها را باعلامتهای جبری بنویسیم. به‌مثل اگر به‌ما جدول زیر را داده باشند

x	۰	۱	۲	۳	۴
y	۰	۲	۴	۶	۸

به‌آسانی حدس می‌زنیم که قانونی باید وجود داشته باشد. هرعددی در سطر پایین دو برابر عدد بالایی خود است قانون نهفته درجدول، $y=۲x$ است. به‌همان‌طریق قانون نهفته درجدول زیر:

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y	۰	۱	۴	۹	۱۶	۲۵

$y=x^۲$ است. هرعددی درسطر پایین مجذور عدد بالایی خود است.

درضمن به‌عنوان یك قاعده: چندان مفید نیست‌که قانون باکلمات بیان‌شود. فهمیدن معنی فرمول $y=۳x^۲-۲x+۷$ به‌مراتب آسانتر از درك همین‌معنی است وقتی باکلمات بیان می‌شود. جبر بهترین زبان برای تفکر درقانونها است. جبر قانون را درفضای کوچکی جا می‌دهد. فرمول درمقایسه باعبارت نظیر آن به‌زبان‌معمولی، کوتاهتر نوشته، آسانتر خوانده و سریعتر گفته می‌شود. اگر می‌خواستم مطمئن شوم

که شما فرمول را فهمیده‌اید ازشما نمی‌خواستم که آن‌را به‌زبان‌معمولی بیان‌کنید. بلکه می‌گفتم جدول آن را حساب کنید. اگـر این کار را درست انجام می‌دادید می‌دانستم که دستورهای فرمول را فهمیده‌اید.

همواره نمی‌توانیم بی‌درنگ قانونی راکه درجدول نهفته است حدس بزنیم. به‌مثل اگر ازشما بخواهم قانونی راکه درجدول زیر است حدس بزنید

x	۰	۱	۲	۳	۴	۵
y	۰	۳	۱۲	۲۷	۴۸	۷۵

ممکن است نتوانید یکباره آن را به دست بیاورید. ممکن است قبـل از رسیدن به حدس درست، یکی دو حدس غلط بزنید. در حدس‌زدن تا اندازه‌ای شانس دخالت دارد. اما اگر ادامه دهید ممکن است زمانی به‌راهی برخورید که شما را به‌سرمنزل برساند. به‌مثل در جدول بالا می‌توانید توجه کنید کـه هر عدد سطر آخر بـر ۳ قابل‌قسمت است. درواقع

۳ × ۰

۳ × ۱

۳ × ۴

۳ × ۹

۳ × ۱۶

۳ × ۲۵

مقدارهای y هستند. توجه می‌کنیم کـه ۰، ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵ مربعهای‌کامل هستند. درواقع قانون عبارت است از $y = ۳x^۲$.[1]

قانون $y = ۳x^۲$ یکی‌از قانونهایی است که بعدها در این‌کتاب خواهیم دید وبا حدس قانون آن را از جدولی به‌دست خواهیم آورد.

---

۱. به تمایز بین $۳x^۲$ و $(۳x)^۲$ توجه داشته باشید. در $۳x^۲$ فقط x را باید مجذور کرد یعنی عددی به x می‌دهیم و آن‌گاه آن را مجذورکرده سپس در ۳ ضرب می‌کنیم. بعضی وقتهادانش‌آموز عددی را به‌جای x می‌گذارد، آن‌را در۳ ضرب می‌کند و آن‌گاه حاصل را به‌قوهٔ دو می‌رساند. اما این عمل $(۳x)^۲$ را نمایش می‌دهد.

روشهایی برای کشف قانون از جدول عددی وجود دارد[1] اما دراینجا به‌این مطلب نمی‌پردازیم. ما دراینجا فقط با قانونهای ساده که با یك حدس آسان به‌دست می‌آیند سروکار خواهیم داشت.

هدف و محدودیتهای این کتاب

کتاب مقدماتی باید دوچیز نباشد: کتاب آشپزی نباشد و تنها مجموعه‌ای ازقضیه‌ها و اثبات آنها نباشد. هردونوع کتاب، ریاضیات را از دانش‌آموز پنهان می‌دارد.

یك کتاب آشپزی فقط فهرستی از دستورها برای حل بعضی مسائل است. از دانش‌آموز انتظار می‌رود این‌دستورها را یاد بگیرد. اما به‌چه‌علت با این دستورها به‌نتیجه می‌رسیم؟ چگونه آنها را کشف کرده‌اند؟ با مسأله‌ای که مطابق هیچ‌یك از دستورها نیست چه بایدکرد؟

کتابی‌که ازنوع قضیه ـ اثبات ـ قضیه ـ اثبات است ریاضیات‌را تاحدی برای دانش‌آموز تشریح می‌کند. قضیهٔ ۱ حداقل اثبات قضیهٔ ۱ را در پی دارد که ممکن است علت درستی قضیهٔ ۱ را روشن‌کند. اما بسیاری ازمطالب هنوز در پرده است. به‌چه علت مؤلف قضیهٔ ۱ را در وهلهٔ اول آورده است؟ دربارهٔ اینکه کدام قضیه‌ها باید درکتاب درج شود وکدام بایدکنارگذاشته شود، چطور تصمیم گرفته است؟ کتاب سعی می‌کند چه‌کند؟ چه سلسله اندیشه‌هایی در بطن‌کتاب مستور است؟ چطور این‌همه‌قضیه‌کشف شده است؟ دانش‌آموز اگر بخواهدخود قضیه‌های بیشتری‌کشف کند چه‌باید بکند؟ این سؤال اخیر شاید ازهمه مهمتر باشد. شگفتی‌آور است اینکه بسیاری از ریاضیدانان بزرگ فکر می‌کنند تنها کاری‌که در زندگی ارزش دارد کشف قضیه‌های جدید است. اغلب کتابهایی می‌نویسندکه در آنها هیچ اشاره‌ای به اینکه دانش‌آموز برای کشفهای تازه چه باید بکند وجود ندارد.

کمینه چهار مرحلهٔ زیر برای دست‌یافتن برنتیجه‌های ریاضی وجود دارد:

۱. شما باید به‌روشنی ببینید وبفهمید نتیجه چه می‌گوید. حفظ‌کردن بعضی کلمات بسنده نیست. باید بدانیدکه معنی نتیجه چیست؟

۲. شما باید شاهدهایی بیابیدکه نشان دهدکه ازنظر عقلی نتیجه باید چنین باشد: باید احساس‌کنیدکه این نتیجه با تجربیات ریاضی شما سازگار است.

۳. باید بدانید که نتیجه به‌چه‌درد می‌خورد. این نتیجه ممکن است کاربردی

---

۱. رجوع‌کنید به‌مجلهٔ Mathematics Student Journal نوامبر ۱۹۵۸ وژانویهٔ ۱۹۵۹ زیرعنوان یك‌روش کشف درجبر A Method of Discovery in Algebra.

در علوم داشته باشد یا فقط به‌قضیه‌های جالب در ریاضیات محض منجر گردد. شما باید بدانید که آن قضیه‌ها چیست.

۴. شما باید برهان صوری نتیجه را بدانید و بفهمید.

با وجود این من می‌خواهم کاملا روشن کنم که در این کتاب سعی شده است برهان صوری هیچ نتیجه‌ای آورده نشود. من به‌هیچ‌وجه به‌مرحلهٔ ۴ وارد نشده‌ام. من به‌طورکلی با مرحله‌های ۱ و ۲ و ۳ سر و کار دارم. می‌خواهم شما ببینید که مفاهیم حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌طور بسیار طبیعی پیش می‌آیند و درواقع مایلم که آنهارا شماخودتان کشف کنید. اگر ما باهم دراطاقی بودیم من به‌پرسیدن سؤالهایی ازشما اکتفا می‌کردم وشما می‌دیدیدکه با روشن‌شدن مفهومهای‌مبهم و غبارآلود به حساب دیفرانسیل و انتگرال رسیده‌اید. درمحدودهٔ یك کتاب من نمی‌توانم این‌طور عمل کنم. اما تا آنجاکه بتوانم به‌این‌شیوه نزدیك خواهم شد. سعی من براین‌نیست که به‌شما نتیجهٔ ویژه‌ای را بگویم. سعی می‌کنم توجه شمارا به‌برخی مطالب جلب کنم که خودتان بتوانید آزمایش کنید. با روشن‌شدن مفاهیم بعضی نتیجه‌ها به‌شما تلقین خواهد شد. من بیش از این چیزی نمی‌خواهم. اما یقین دارم وقتی خواندن حساب دیفرانسیل و انتگرال را جدی آغاز می‌کنید این تجربه کار شما را بسیار آسانتر خواهدکرد. شماکم وبیش می‌دانید چه راهی پیش گرفته‌اید.

هفت‌فصل اول از جهاتی با سه فصل آخر متفاوت است. درفصول ۱ تا ۷ بعضی مطالب کم و بیش به‌تفصیل مطرح می‌شود. معقول است انتظار داشته باشید بتوانید این فصلها را بخوانید و برآنها تسلط یابید. تفصیل در سه فصل آخر بسیار کمتر است. این فصلها را آورده‌ام تا به‌شما نشان دهم که پس از تسلط یافتن به مطالب فصلهای از ۱ تا ۷ هنوز چیزهایی از برای یادگرفتن دارید. فصل ۸ و ۹ اشاره‌ای مختصر به بعضی سؤالهایی است که در درس سال اول حساب دیفرانسیل و انتگرال پیش می‌آید. فصل ۱۰ بعضی سؤالهای ژرفتر را پیش‌می‌کشد؛ توجه شمارا به‌بعضی مطالب جلب می‌کندکه شاید فکر می‌کردید امکان ندارد رخ بدهد ولی درعمل پیش می‌آید. اما برای بعضی‌از دانش‌آموزان این فصل جالبترین فصل کتاب است.

پس مطالب فصلهای ۸ و ۹ و ۱۰ نوعی پیش‌درآمد و نمونه‌ای از مطالبی است که در آینده خواهد آمد. هدف این سه‌فصل آشناساختن شما با نوع سؤالی است که درپیش دارید نه دادن اطلاعات دربارهٔ آن. پس تعجب نکنید اگر دراین سه فصل بعضی‌از سؤالهاکه به‌خاطر شما می‌رسد بی‌جواب بماند.

پس از فصل ۱۰ شما «راهنمای ادامهٔ مطالعات» را خواهید دید. این راهنما با کتابهای مقدماتی حساب دیفرانسیل آغاز می‌شود و به مطالب به نسبت پیشرفته

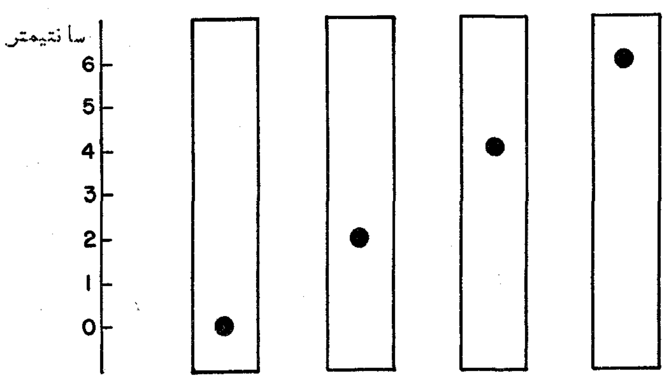
می‌رسد. قسمت آخر این «راهنما» به‌ویژه برای دانش‌آموز استثنایی جالب خواهد بود، دانش‌آموزی که درسال نهم تحصیلی این کتاب کوچك را می‌خواند و به‌مطالعهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال در بقیهٔ سالهای دبیرستانی‌اش ادامه می‌دهد. فقط عدهٔ کمی از دانش‌آموزان قادرند این کار را بکنند، اما آنان که می‌توانند باید مورد هرنوع تشویق قرار گیرند تا به‌کار ادامه دهند.

کتاب با فهرست اصطلاحهای فنی خاتمه می‌یابد. این فهرست پس از آنکه کتاب نوشته شد تهیه گردید. تا آنجا که به‌فهم کتاب مربوط می‌شود این فهرست را می‌توان ندیده گرفت. مع‌هذا، احساس شد که خوانندگان ممکن است مایل باشند نامهای رسمی مفهومها را که درمتن دیده‌اند بدانند ونیز دانستن این نامها به‌خواندن کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال که بیشتر صوری هستند یاری خواهد کرد.

فصل دوم

مطالعهٔ تندی

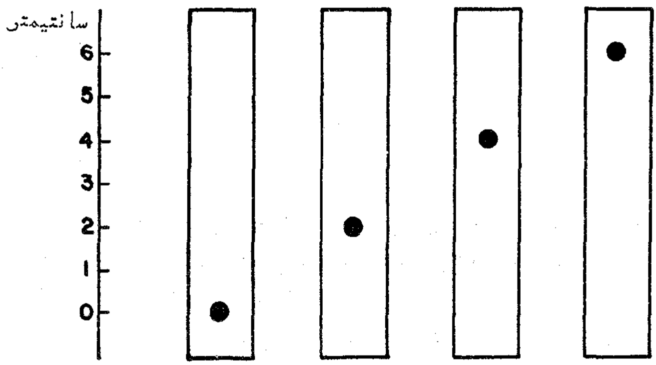
ما اکنون تندی، تندی جسمی متحرك را بررسی می‌کنیم. چطور می‌توانیم به‌روشنی ببینیم که جسم متحرك چه می‌کند؟ می‌توانیم از جسمی که درخط مستقیم حرکت می‌کند فیلمی برداریم. فرض کنیم یك دستگاه فیلمبرداری داریم که درهر دهم ثانیه یك عکس می‌گیرد. فرض کنیم عکسهای متوالی درشکل ۱ نشان داده شده است. جسم کوچك چه‌کار می‌کند؟ هریك دهم ثانیه یك سانتیمتر بالا می‌رود. به‌نظر می‌رسد که متحرك با تندی ثابت ۱۰ سانتیمتر درثانیه حرکت می‌کند.



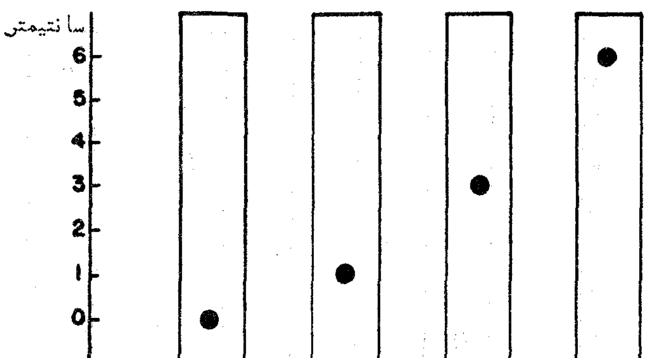
شکل ۱

درموقع دیگر ممکن است عکسهای شکل ۲ را به‌دست بیاوریم. در اینجا متحرك بین هرعکس و عکس بعدی ۲ سانتیمتر بالا می‌رود. متحرك یك تندی ثابت ۲۰ سانتیمتر در ثانیه دارد.

حالا به‌متحرکی نگاه می‌کنیم که تندی متغیر دارد. فرض کنیم متحرکی شتاب دارد. بین‌عکس اول‌و دوم یك‌سانتیمتر جلومی‌رود؛ بین‌عکس دوم وسوم ۲ سانتیمتر؛ و بین عکس سوم و چهارم ۳ سانتیمتر. نمودار حرکت آن در شکل ۳ نشان داده شده است.



شکل ۲

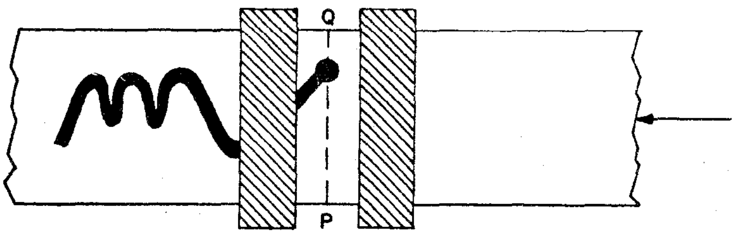


شکل ۳

با دیدن این عکسها متوجه می‌شویم که ۱) با تندیهای ثابت لکه‌ها روی خط مستقیم قرار می‌گیرند. ۲) باحرکت شتابدار لکه‌ها روی منحنی می‌افتند.

سؤال ۱. شکلهای ۱ و ۲ هردو متحرکهایی را نشان می‌دهندکه تندی ثابت دارند. کسی که این عکسها را نگاه می‌کند چطور می‌تواند متحرك تندتر را معلوم کند؟ در جواب لازم نیست عدد وارد کنیم. با یك نگاه می‌توانیم بگوییم کدام جسم تندتر حرکت می‌کند. چطور؟[1]

ما می‌توانیم کاری کنیم که متحرك‌حرکت خود را ثبت کند. درشکل۴ متحرك به‌بالا و به‌پایین خط PQ حرکت می‌کند. کاغذی زیر متحرك کـه باتندی ثابت از راست به‌چپ حرکت مـی‌کند، قرار می‌دهیم. متحرك مرکب دارد و روی کاغذ اثر می‌گذارد. اگر متحرك تندی ثابت داشته باشد اثرآن خط مستقیم خواهد بود.



شکل ۴

سؤال ۲. اثرهایی را که‌درشکل۵ نشان داده‌شده است باتوصیفهای زیر تطابق‌دهید:

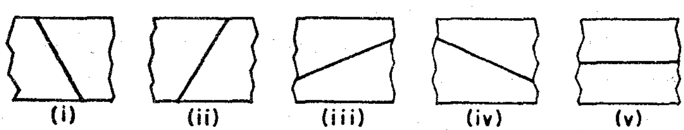
الف) حرکت بالارو تند

ب) حرکت بالارو آرام

ج) توقف

د) حرکت پایین‌رو آرام

هـ) حرکت پایین‌رو تند

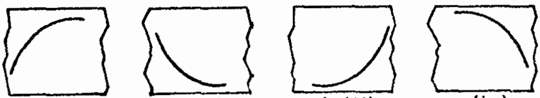


شکل ۵

---

۱. جوابهای مسائل را آخر کتاب می‌توان دید.

سؤال ۳. اثرهای شکل ۶ را با توصیفهای زیر تطابق دهید:
و) ازسکون شروع می‌کند و به‌تدریج به‌طرف بالا تندی می‌گیرد.
ز) نخست به‌تندی بالا می‌رود و به‌تدریج از تندی آن کم می‌شود و متحرك به‌سکون می‌رسد.
ح) ازسکون شروع می‌کند و به‌تدریج به‌طرف پایین تندی آن زیادتر می‌شود.
ط) نخست به‌تندی سقوط می‌کند و به‌تدریج به‌حالت سکون درمی‌آید.



(vi) (vii) (viii) (ix)

شکل ۶

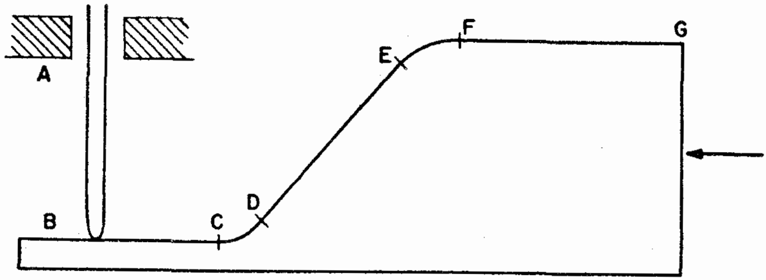
اگرمی‌خواهید ارتباط میان‌خمها وحرکت‌را نشان‌دهید هیچ‌وسیلهٔ مخصوص لازم نیست. ساده‌ترین عمل این است‌که اول خم را بکشید و سپس آن‌را از پشت شکافی باریك بگذرانید؛ ترتیب کار شبیه‌آن چیزی است‌که درشکل ۴ دیده‌می‌شود. شما می‌توانید فقط بخش‌کوچکی از خم را از شکاف ببینید و با این عمل احساس خواهید کرد نقطه‌ای بالا وپایین می‌رود.

این عمل کاربرد مهندسی دارد. اگر بخواهیم متحرك درراهی بخصوص برود می‌توانیم این‌کار را به‌وسیلهٔ ماسوره‌ای‌که شکل مناسب دارد انجام دهیم.

به‌مثل درشکل ۷ ماسوره باتندی ثابتی به‌سمت چپ حرکت می‌کند. میلهٔ AB در حال سکون می‌ماند تا اینکه نقطهٔ C به B برسد. آن‌گاه میله رو به بالا سرعت می‌گیرد تا D به B برسد. وقتی‌میله باقسمت‌مستقیم DE تماس دارد باتندی ثابت به‌طرف بالا می‌رود. وقتی میله باخم EF تماس پیدا می‌کند تندی آن کاهش می‌یابد. سرانجام در تماس باقسمت FG دوباره میله به‌حالت سکون درمی‌آید.

خمهای نظیر آنچه درشکلهای ۵ و ۶ و ۷ دیده می‌شود به‌ما کمك می‌کند تا دربارهٔ حرکت فکر کنیم. ما می‌توانیم خمها را ببینیم. با خمها دقایقی دیده می‌شود که ممکن است در حرکت واقعی دیده نشود. خمها چیزهـای ثابتی هستندکه می‌توانیم به‌آنها بنگریم و دربارهٔ آنها فکر کنیم.

کاری کـه ما کردیم چیزی نیز دربارهٔ موضوع حساب دیفرانسیل و انتگرال



شکل ۷

به ما تلقین می‌کند. حساب دیفرانسیل و انتگرال با مطالعهٔ تندی آغاز می‌شود. اما با اندیشهٔ دربارهٔ تندی به‌طرف خمهایی‌که در بالا رسم‌کردیم کشیده شدیم. این خمها را می‌توانیم برحسب تندی توصیف کنیم. به مثل خم (viii) ممکن است به‌عنوان خمی توصیف شود که حرکت متحرکی را که رفته رفته تندتر به‌طرف بالا می‌رود ضبط می‌کند. پس‌حساب دیفرانسیل و انتگرال را می‌توان نه‌تنها در توصیف حرکت بلکه در توصیف شیب خمها نیز به‌کار برد. در واقع حساب دیفرانسیل وانتگرال در سالهای نخست همین‌طور به‌کار می‌رفت. در سالهای ۱۶۰۹–۱۶۱۹ میلادی کپلر[1] مدارهای زمین و سیاره‌ها را دور آفتاب کشف‌کرد و راه تغییر تندیهای آنها را در گردش بـه‌دور خورشید به‌دست آورد. در سالهای ۱۶۶۵–۱۶۶۷ ایزاك نیوتن[2] می‌توانست نشان بدهد که اگر آفتاب سیاره‌ها را باقانون عکس‌مربع فاصله به‌خود بکشدسیاره‌ها باید طبق کشف کپلر حرکت کنند.به‌این ترتیب بایاری حساب‌دیفرانسیل وانتگرال‌نیوتن هم تندیها وهم مدارهای سیاره‌ها را حساب‌کرد. مردم‌بسیار متعجب شدند از اینکه رفتار پیچیدهٔ منظومهٔ شمسی را بتوان از سه یاچهار فرض بسیارساده ـ قانونهای‌نیوتن دربارهٔ حرکت وقانون جاذبهٔ وی‌ـ به‌دست آورد. قانونهای‌نیوتن و استفادهٔ او از حساب دیفرانسیل و انتگرال درعلم نجوم در روزگار ما ،که نه‌تنها می‌توانیم به‌سیارهٔ مریخ نگاه‌کنیم بلکـه بعضی از انسانها شاید درعمل قادر باشند به آنجا سفرکنند، دوباره جلب‌توجه مـی‌کند. حساب دیفرانسیل و انتگرال برای محاسبهٔ خط سیرهای ممکن از زمین تا مریخ و برای انتخاب مسیری کـه کمترین سوخت را لازم داشته باشد به‌کار خواهد رفت.

---

1. Kepler 2. Isaac Newton

محاسبهٔ سرعت

حالا برسر بعضی محاسبه‌های ساده می‌رویم. به‌چه طریقی می‌توانیم سرعت متحرکی را با محاسبه به‌دست بیاوریم؟ به‌مثل فرض کنید اتومبیلی درجادهٔ مستقیم راه می‌رود، در ساعت ۲، کیلومتر شمار عدد ۷۰ کیلومتر را و در ساعت ۵ عدد ۲۲۰ کیلومتر را نشان می‌دهد. فرض کنیم اتومبیل در تمام این مدت باتندی ثابت در حرکت است (درعمل چنین چیزی نامحتمل است!). به‌چه تندی اتومبیل راه پیموده است. این سؤالی دشوار نیست. با تفریق ۷۰ از ۲۲۰ می‌بینیم که اتومبیل ۱۵۰ کیلومتر راه پیموده است. چون ۲ را از ۵ تفریق کنیم می‌بینیم که ۳ ساعت طول کشیده تا ۱۵۰ کیلومتر طی‌شود. ۱۵۰ را به ۳ تقسیم می‌کنیم ۵۰ به‌دست می‌آید. پس تندی ۵۰ کیلومتر درساعت است.

دلیل ما برای انجام این عمل سادهٔ حساب بیشتر مطالعهٔ روش است تا خود جواب. می‌خواهیم از این کار فرمولی برای سرعت به‌دست بیاوریم. چندعلامت را دخالت می‌دهیم. s به‌جای کیلومترهایی است که کیلومترشمار در زمان t برحسب ساعت نشان می‌دهد به‌این ترتیب $t = ۲$ معلوم می‌کند که زمان، ساعت ۲ بوده و $s = ۷۰$ معین می‌کند که اتومبیل درجمع ۷۰ کیلومتر راه پیموده است. اطلاعی را که درسؤال بالا آمده است می‌توان درجدولی نظیر جدول زیر درج کرد:

t	۲	۵
s	۷۰	۲۲۰

اما ما مایلیم عددهای ویژهٔ ۲، ۵، ۷۰ و ۲۲۰ را دخالت ندهیم. فرمولی‌می‌خواهیم که‌سرعت را بین دوزمان و دومحل دلخواه معلوم کند. پس علامتهای بیشتری به‌کار می‌بریم.

مسألهٔ تعمیم‌یافته. «در ساعت a، کیلومترشمار p کیلومتر نشان می‌دهد. در ساعت b، کیلومترشمار q کیلومتر نشان می‌دهد. اتومبیل با تندی ثابت راه می‌رود. سرعت اتومبیل، v کیلومتر در ساعت را پیدا کنید.»

همان گامها را برمی‌داریم که درمسألهٔ ویژهٔ حساب دربالا برداشتیم اما به‌جای عددهای بخصوص علامتها را به‌کار می‌بریم. a حالا در همان جا نوشته می‌شود که عدد ۲ در مسألهٔ حسابی بالا نوشته شده بود b در جای ۵، p در جای ۷۰ و q در جای ۲۲۰. جدول چنین است:

$$t \quad a \quad b$$
$$s \quad p \quad q.$$

در حساب، ما با تفریق ۷۰ از ۲۲۰ آغاز کردیم. در جبر p را از q کم می‌کنیم. پس اتومبیل $(q-p)$ کیلومتر راه رفته است. برای پیمودن این‌مسافت چه‌قدر وقت لازم بوده؟ به‌جای کم کردن ۲ از ۵، a را از b کم‌می‌کنیم. اتومبیل $(b-a)$ ساعت وقت صرف کرده است. برای به‌دست‌آوردن سرعت، عدهٔ کیلومترهـای طی شده را برعدهٔ ساعتهای صرف‌شده تقسیم می‌کنیم حاصل می‌شود:

فرمول (۱) $$v=\frac{q-p}{b-a}$$

مهمتر از همه به‌خاطر داشتن این است که فرمول تنها موقعی صادق است که اتومبیل تندی ثابت داشته باشد ــ اگر اتومبیل باسرعت‌ثابت حرکت کند.

به‌مثل فرض کنیم رانندهٔ اتومبیلی درمدت یك‌ساعت ۳۰ کیلومتر راه می‌پیماید. آن گاه مدت ۳ساعت برای ناهار توقف‌می‌کند. یك‌مرتبه متوجه می‌شود که دیر کرده است. به‌مدت یك‌ساعت با سرعت ۹۵ کیلومتر در ساعت می‌راند و آن‌گاه تصادف می‌کند. درست نیست اگر راننده بگوید «من ۵ ساعت درراه بوده‌ام و ۱۲۵ کیلومتر راه رفته‌ام، پس‌تندی اتومبیل من درساعت ۲۵ کیلومتر بوده است، دراین تصادف من مقصر نبوده‌ام». هنگام تصادف سرعت‌سنج اتومبیل راننده در حدود ۹۵ کیلومتر در ساعت بوده است. معنی‌سرعت درنظر ما،همان است‌که سرعت‌سنج درلحظهٔ مخصوصی نشان می‌دهد. سرعت با تاریخ گذشته کاری ندارد. شاید راننده یك سال اتومبیلش را نرانده‌باشد پس آن گاه می‌تواند بگوید که درمدت یك‌سال من ۱۲۵ کیلومتر راه پیموده‌ام و سرعت من ۰۱۴‌ر۰ کیلومتر درساعت بوده است. هرکسی این حرف را بشنود دفاع‌راننده را مسخره خواهد کرد. من دراین‌مورد تأکید می کنم زیرا رفتار بسیاری از دانش‌آموزان حساب‌دیفرانسیل و انتگرال نظیر رفتار این راننده است. این دانش‌آموزان فرمول (۱) را به‌خاطر دارند. این‌فرمول به‌اندازه‌ای ساده است که دانش‌آموزان آن را حتی درمواردی که نتیجه‌های تمسخرانگیز می‌دهد به‌کار می‌برند.

فرمول (۱) تنها هنگامی‌ارزش داردکه متحرك سرعت ثابت داشته باشد. اگر سرعت انـدکی تغییر یابد دیگر فرمول (۱) سرعت صحیح را معلوم نمی‌کند. بلکه یك برآوردی معقول از آن را به‌دست می‌دهد. به‌مثل سرعت یك اتومبیل در عرض

یك ثانیه تغییر چندانی نمی‌کند. اگر فاصله‌ای را که اتومبیل در یك ثانیه طی کرده است داشته‌باشیم فرمول (۱) برآوردی قابل‌قبول از تندی اتومبیل را به‌دست خواهد داد. اگرکسی موقع تصادف از اتومبیل فیلم گرفته‌بود مدرك فاصلهٔ طی‌شده در یك ثانیه ممکن بود به‌دست آید، و به‌راستی معقول بود که چنین فیلمی در دادگاه ارائه شود. در حساب دیفرانسیل و انتگرال، چیزی نظیر این‌نحوهٔ عمل را به‌کار می‌بریم، بیشتر به‌حالتهایی‌که سرعت همیشه در تغییر است علاقه‌مندیم. پس‌نمی‌توانیم همیشه فرمول (۱) را به‌کارببریم این‌عمل‌کاری غلط خواهد بود. کاری‌که می‌کنیم استعمال فرمول (۱) برای برآورد سرعت‌است؛ با به‌کاربردن زمانهای رفته‌رفته کوتاهترسعی می‌کنیم به‌نتیجه‌ای برسیم.

سرعت منفی

از فرمول (۱)، حتی‌درحالت سرعت ثابت، نتیجهٔ تعجب‌آوری به‌دست می‌آید. فرض کنیم اتومبیل به‌عقب‌می‌رود. برای اتومبیلها این‌وضع به‌ندرت پیش می‌آید یاهرگز پیش نمی‌آید، پس‌مثال ما تاحدی از واقعیت دور است. اما درعلوم این وضع اغلب دیده می‌شود. به‌مثل سنگی راست به‌سمت بالا در هـوا انداخته می‌شود مدتی بالا می‌رود و سپس می‌افتد. هنگام افتادن، سنگ به‌جای نخستین خود برمی‌گردد درست مانند اتومبیلی که به‌عقب می‌رود. اکنون‌فرض‌کنیم اتومبیلی به‌سمت‌عقب مدت ۲ یا ۳ ساعت باتندی ثابت رانده می‌شود. جدول آن به‌چه‌شکل خواهد بود؟ چیزی‌نظیر جدول زیر:

t	۳	۵
s	۸۰	۶۰

درساعت ۳ اتومبیل ۸۰ کیلومتر و درساعت ۵ فقط ۶۰ کیلومتر از منزل دور است و درمدت ۲ ساعت اتومبیل ۲۰ کیلومتر برگشته است. واضح است کـه اتومبیل با سرعت ۱۰ کیلومتر درساعت مراجعت کرده است.

از فرمول (۱) چه به‌دست می‌آید؟ ما باید قرار دهیم

$$a=۳ \qquad b=۵ \qquad p=۸۰ \qquad q=۶۰$$

نتیجه می‌شود

$$v=\frac{q-p}{b-a}=\frac{60-80}{5-3}=\frac{-20}{2}=-10.$$

می‌دانیم کــه اتومبیل با سرعت ۱۰ کیلومتر در ساعت برگشته است. فرمول نتیجه می‌دهد $v=-10$.

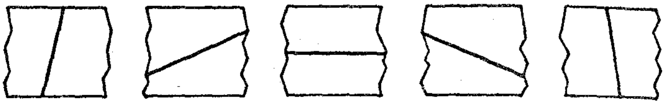
در این وضعیت دوراه اقدام وجود دارد:

۱. می‌توانیم بگوییم «داشتن سرعت منفی معنی ندارد. سرعت ممکن نیست کوچکتر از صفر باشد. اگر اتومبیلی به‌عقب می‌رود شما باید فرمول دیگری به‌کار ببرید. فرمول (۱) دربارهٔ این سرعتها قابل‌استفاده نیست».

۲. می‌توانیم بگوییم «وقتی که متحرکی با تندی ثابت حرکت‌می‌کند همواره فرمول (۱) را به‌کارخواهیم برد. اگر فرمول (۱) جواب منفی به‌دست بدهد خواهیم فهمید که متحرك به‌عقب می‌رود».

راه (۲) را بسیار مناسبتر تشخیص داده‌انــد. اگر راه (۱) را انتخاب کنیم کارمان دوبرابر می‌شود. باید یك‌عده قاعده برای متحرکهای بالا رونده داشته‌باشیم وقاعده‌های دیگری‌برای چیزهای سقوط کننده. از راه (۲) می‌توانیم تنها یك‌فرمول داشته باشیم. اگر سرانجام جواب منفی بــه‌دست آمد معنی آن را می‌دانیم. طبق معمول دراتومبیل سرعت‌سنج فقط سرعتهای به‌سمت جلو را نشان می‌دهد. کاری که حالا می‌کنیم بیشتر شبیه چیزی است که درکشتی پیش می‌آید: سرعت تمام به جلو وسرعت تمام به‌عقب دارد. می‌توان اتومبیلی را تصورکردکه سرعت‌سنج گسترده‌تر دارد و وقتی بــه مثل با سرعت ۵ کیلومتر عقب می‌رود ۵— کیلومتر در ساعت را نشان مــی‌دهد و اگر سرعت‌سنج ۱۰ — کیلومتر در ساعت را نشان بــدهد سرعت به‌عقب ۱۰ کیلومتر خواهد بود وبه‌این ترتیب تا آخر.

در فیزیك کلمهٔ سرعت به‌طور معمول وقتی به‌کار می‌رودکه جهت حرکت را به‌حساب‌می‌آورند. تندی آن‌گاه به‌کارمی‌رودکه فقط می‌خواهیم بدانیم‌حرکت‌متحرك چگونه‌است و به‌جهت‌حرکت توجهی‌نداریم. به‌این‌ترتیب اتومبیلی‌که با ۱۰ کیلومتر جلو می‌رود سرعت ۱۰+ کیلومتر درساعت دارد و آن‌گاه کــه با ۱۰ کیلومتر در ساعت به‌عقب می‌رود، سرعت ۱۰ — کیلومتر درساعت خواهد بود. درهر دوحالت تندی ۱۰ کیلومتر درساعت‌است. این تمایز هیچ نقشی دراین‌کتاب ندارد. ما دراین کتاب همواره باسرعت سروکار خواهیم داشت. به‌مثل می‌توانیم حرکتهای متفاوت را مانند شکل ۸ ضبط کنیم.



شکل ۸

میزانهای تغییر

اگر در اتومبیلی سفر کنیم سرعت آن میزان افزایش کیلومترها است. سرعت، میزان تغییرمسافت طی‌شده است. حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌چگونگی تغییر چیزها توجه دارد. چیز متغیر ممکن است مسافت نباشد. ما می‌توانیم بپرسیم «به‌چه سرعت این‌مرد ثروتمند شد». «به‌چه سرعت باك این‌اتومبیل از بنزین پر شد؟». اینها میزانهای تغییر هستند ــ میزان تغییر حساب بانکی؛ میزان تغییر مقدار بنزین در باك اتومبیل.

مناسب است که علامتی «برای میزان تغییر» داشته باشیم. یك علامت بسیار ساده به‌کار خواهیم برد:

$$(\,'\,)$$

اگر f کمیتی باشد، f' میزانی را که این‌کمیت تغییر می‌کند نشان می‌دهد (f' را می‌خوانیم f پریم).

به‌مثل، اگر قد پسربچه‌ای در سن n سالگی h سانتیمتر باشد h' عبارت است از میزانی که قد وی در یك‌سال بلند می‌شود.

اگر اتومبیلی s کیلومتر را در t ساعت بپیماید s' میزان افزایش کیلومترها در کیلومترشمار است. در واقع s' کیلومتر مسافت در ساعت، سرعت اتومبیل است.

اگر بعد از t ثانیه بنزین‌ریزی، g لیتر بنزین درباك باشد g' میزانی است که بنزین درباك اتومبیل ریخته می‌شود. g' را بالیتر درثانیه اندازه می‌گیرند.

اگرمردی در سن n سالگی m دلار داشته‌باشد، m' دلار درسال‌میزان‌افزایش ثروت او است.

در اینجا به‌تمایزی که در پیش اشاره کردیم توجه‌کنید: m' با m/n مساوی نیست. اگر مردی ۳۰۰۰ دلار در ۳۰ سالگی داشته باشد به‌هیچ وجه نمی‌توانید نتیجه بگیرید که ثروتش به‌میزان ۱۰۰ دلار درسال افزایش یافته است. شما فقط موقعی‌می‌توانید چنین نتیجه‌ای بگیرید که بدانید که از موقع تولدش پول را بانرخ

ثابت پس‌انداز کرده‌است. ممکن‌است که تاسن ۲۷ سالگی این‌مرد هیچ پس‌اندازی نداشته و در ۳ سال آخر با نرخ ثابت ۱۰۰۰ دلار در سال پس‌انداز کرده باشد. درحالت اخیر m' مساوی ۱۰۰۰ دلار درسال خواهد بود. از طرف دیگر اگر این مرد حالا در عسرت باشد و درواقع ۵۰۰ دلار در سال از سرمایه‌اش کسر شود در این‌صورت $m' = -500$ و با تاریخ گذشته ارتباطی ندارد. m' چیزی را اندازه می‌گیرد که حالا رخ می‌دهد.

اگر s کیلومتر مسافتی باشد که اتومبیلی در t ساعت می‌پیماید، s' سرعت اتومبیل را برحسب کیلومتر در ساعت معلوم می‌کند. بازشما نمی‌توانید بپذیرید که $s' = s/t$. اگر به‌شما بگویم که من سه‌ساعت رانندگی کرده‌ام و ۹۰ کیلومتر راه پیموده‌ام شما نمی‌توانیداز این گفته بفهمید که دراین لحظه من چه‌سرعتی دارم. شما فقط با نگاه‌کردن به‌سرعت‌سنج می‌توانید s' را ببینید. ممکن‌است من در این لحظه با ۶۰ کیلومتر درساعت سفر بکنم. در این‌صورت $s = 90$، $t = 3$ و $s' = 60$. یا اتومبیل من ممکن است متوقف باشد؛ در این حالت $s = 90$، $t = 3$ و $s' = 0$. من حتی ممکن است با ۱۰ کیلومتر درساعت عقب بروم. آن‌گاه $s = 90$، $t = 3$ و $s' = -10$.

همهٔ این‌مطالب به‌این می‌ماند که اگر به‌شما بگویم چه‌ساعتی است و من کجا هستم شما نمی‌توانید بگویید من به‌چه تندی حرکت می‌کنم. بااین همه لازم است براین نکته‌تأکید شود. به‌نظر می‌رسد دانش‌آموزان به‌هم‌دیگر یاد داده‌اند «سرعت، مسافت‌بخش برمدت است». این درست است فقط در حالت سرعت ثابت. اما تمام کار حساب دیفرانسیل مطالعهٔ سرعت متغیر است، مانند موقعی که یك توپ به‌زمین می‌افتد یا یك موشك از زمین پرتاب می‌شود.

پس s' عددی است که سرعت‌سنج درهرلحظهٔ بخصوص نشان می‌دهد.

چند مثال . به‌زبان حساب دیفرانسیل ترجمه کنید:

۱ـ ۵ساعت بود که سفرکرده بودم و ۱۲۰ کیلومتر راه پیموده بودم و با سرعت ۴۰ کیلومتر درساعت اتومبیل می‌راندم.

جواب . برای $t = 5$، $s = 120$ و $S' = 40$

۲ـ بعداز ۲ ساعت رانندگی سرعت‌سنج اتومبیل من ۵۰ کیلومتر درساعت و بعداز ۳ ساعت، سرعت‌سنج ۴۵ کیلومتر درساعت نشان می‌داد.

جواب . برای $t = 2$ داریم $s' = 50$ برای $t = 3$ داریم $s' = 45$.

۳ـ در دوساعت اول من باسرعت ثابت ۴۰ کیلومتر درساعت می‌راندم.
جواب. به‌ازای تمام مقادیر t از ۰ تا ۲، $s'=40$.

پیداکردن سرعت درحالتهای ساده

چند حالتی هست که درآنها سرعت باحساب معمولی به‌دست می آید. البته این‌حالتها نه‌جالب است و نه ذوق‌آور؛ درمسأله‌ها نتیجه‌هـای جالب موقعی پیش می آیدکـه به‌روشهای تازه احتیاج افتد. با وجود این حالتهای ساده ما را به‌استفاده کردن از علامت s' عادت می‌دهد.

فرض‌کنیم اتومبیل‌من کیلومتر صفر است ومن باسرعت ثابت ۱۰ کیلومتر در ساعت مدتی آن را می‌رانم. جدول زیر مسافتی را که پیموده‌ام در هرساعت نشان می‌دهد.

t	۰	۱	۲	۳	۴
s	۰	۱۰	۲۰	۳۰	۴۰.

دراینجا قانون $s=10t$ است. s' چیست؟ ما در ابتدا گفتیم‌که سرعت من ثابت و ۱۰ کیلومتر در ساعت است و s' اندازهٔ سرعت من است پس $s'=10$. این را به‌شکل فرمول درمی‌آوریم.

نتیجهٔ الف. اگر

$$s=10t,$$

$$s'=10.$$

چون سرعت مـن همواره ۱۰ کیلومتر درساعت است $s'=10$ تنهـا نشان نمی‌دهدکه s' درلحظهٔ بخصوصی برابر ۱۰ است اما معلوم‌می‌کندکه‌درمدت حرکت در هرلحظه مقدار s' برابر با ۱۰ است. $s=10t$ قانون حرکت است به‌این معنی که به شما می‌گوید درهر زمان اتومبیل درکجا است. اگر بپرسید «اتومبیل پس‌از $1\frac{1}{2}$ ساعت درکجاست؟». من درفرمول $s=10t$ قرار می‌دهم $t=1\frac{1}{2}$ و $s=15$ به‌دست می آید. $s'=10$ نیز یك قانون است به‌این معنی که سرعت را در هرلحظه به‌ما می‌گوید: این قانون می‌گویدکه سرعت همواره ۱۰ است.

در اینجا مثالی داریم از یکی از نخستین مسائل حساب دیفرانسیل: قانونی داده شده است که به‌شما می‌گوید در هر لحظه متحرك درچه نقطه‌ای است، قانونی برای سرعت آن درهرزمان پیدا کنید.

تمرینها

۱- درآغاز، کیلومترشمار اتومبیل صفر است. اتومبیل را باسرعت ثابت ۲۰ کیلومتر درساعت می‌رانم. چه قانونی درهرلحظه جای مرا مشخص می‌کند؟ سرعت‌من‌درهر لحظه چیست؟ جوابهای هر دوسؤال را بامعادله بنویسید.

۲- جای اتومبیلی در هرلحظه با معادلهٔ $s = ۳۰t$ داده شده است. اتومبیل درچند کیلومتری‌است، وقتی $t = ۰$؟ وقتی $t = ۱$؟ وقتی $t = ۲$؟ وقتی $t = ۳$؟ سرعت‌اتومبیل چقدر است؟ معادلهٔ سرعت چیست؟

۳- جای‌اتومبیلی‌درهرلحظه‌بامعادلهٔ $s = ۴۰t$ داده‌شده‌است. معادلهٔ سرعت اتومبیل را پیدا کنید.

۴- عبارت: «اگر $s = ۵۰t$، $s' = \ldots$» را تکمیل کنید.

۵- اگر k یك‌عدد ثابت باشد (مانند عددهای ۲۰، ۳۰، ۴۰، ۵۰ درمثالهای بالا) و اگر $s = kt$، s' چقدر است؟

درمثالهای‌بالا هر بار با کیلومتر صفرشروع کردیم. اما این‌کارلزومی ندارد. قانون $s = ۱۰t + ۳$ را درنظر بگیرید. جدول این‌قانون عبارت است از

t	۰	۱	۲	۳	۴
s	۳	۱۳	۲۳	۳۳	۴۳.

در اینجا درابتدای‌حرکت عدد کیلومترشمار ۳ است. جدول‌نشان می‌دهد که اتومبیل در هرساعتی که می‌گذرد ۱۰ کیلومتر راه می‌پیماید. سرعت، ۱۰ کیلومتر درساعت است و به‌این‌ترتیب $s' = ۱۰$. پس می‌نویسیم

نتیجهٔ ب. اگر

$$s = ۱۰t + ۳,$$

$$s' = ۱۰.$$

تمرین

از همین راه سرعت s' مربوط به‌قانونهای زیر را پیدا کنید:
۱) $s=10t+5$، ۲) $s=10t+7$، ۳) $s=10t+9$.
اگر $s=10t+c$ که درآن c عددی ثابت است، سرعت s' چیست؟
مقدار s' برای ۴) $s=20t+3$، ۵) $s=20t+5$، ۶) $s=20t+7$، ۷) $s=20t+9$، چیست؟
آیا ازمثالهای بالا می‌توانید نتیجه‌ای به‌دست بیاورید؟ آیا می‌توانید بی‌درنگ سرعت s' مربوط به‌مثالهای بالا را بنویسید؟ آیا سرعت s' مربوط به‌قانونهای زیر را می‌توانید بی‌درنگ بنویسید؟ ۸) $s=30t+7$، ۹) $s=50t+9$، ۱۰) $s=40t+23$، ۱۱) $s=30t+20$، ۱۲) $s=50t+150$؟
اگر نگاره‌های حرکتهای مندرج در این مثالها را بکشید، چنان‌که ما در شکلهای از ۱ تا ۸ ترسیم کرده‌ایم، این نگاره‌ها به‌چه چیز شباهت خواهد داشت؟

فصل سوم

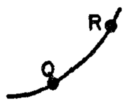
ساده‌ترین حالت تندی متغیر

سرعت لحظه‌ای

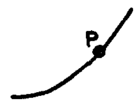
سرعت ثابت بسیار ساده است و زیاد ذوق‌آور نیست. اکنون سرمسألهٔ واقعی یعنی موضوع سرعت متغیر می‌روم.

باید تأکید شود که مقدار v یا s'، که ما در جستجوی آن هستیم، برای اندازه گیری سرعت در یك لحظه درنظر گرفته می‌شود. در زندگی روزمره سرعت دریك لحظه از برای ما امری بسیار ساده است؛ به‌سرعت‌سنج اتومبیل نگاه می‌کنیم، عقربه روی ۶۰ کیلومتر در ساعت قرار گرفته است و نتیجه می‌گیریم که سرعت در آن لحظه ۶۰ کیلومتر درساعت است. اما وقتی‌درپی‌معنی آن می‌گردیم به‌پارادوکسی برمی‌خوریم. به‌نظر می‌رسد که درمفهوم سرعت دو زمان وجود دارد: آغاز وانجام یك فاصلهٔ زمانی. ما سرعت را برحسب کیلومتر در ساعت اندازه می‌گیریم و این کلمات مستلزم این است که ببینیم متحرکی در مدت معلومی چه فاصله‌ای را طی می‌کند. اگر مدت صفر باشد فاصله‌ای که متحرك می‌پیماید صفر است. متحرك هر اندازه تند حرکت کند باز اگر دریك لحظه از آن دو تا عکس گرفته شود آن دو عکس آن را درهمان نقطه نشان خواهند داد.

برای پیداکردن سرعت لحظه‌ای اگر بخواهیم در فرمول (۱)، b را با a برابر بگیریم، آن‌گاه p و q برهم منطبق می‌شوند و طبق فرمول، سرعت به صورت



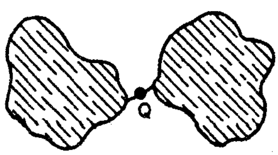
شکل ۱۰



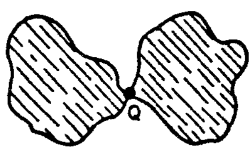
شکل ۹

۰÷۰ درمی‌آید ــ این امر به‌هیچ‌وجه به‌ما کمك نمی‌کند.

ما برای ثبت حرکت اجسام، خم به‌کار برده‌ایم. خط باسرازیری یاسربالایی[۱] بسیار به‌جسمی مربوط می‌شود که به‌تندی حرکت می‌کند. یك سراشیبی ملایم به‌جسمی متعلق است که حرکت آرام دارد (شکلهای ۵ و ۶). پس سؤال ما ممکن است برحسب خمها مطرح شود. به‌جای اینکه بگوییم «سرعت دراین لحظه چقدر است؟» می‌توانیم بپرسیم «سراشیبی خم در نقطهٔ P چطور است؟» (شکل ۹ را ببینید). به نظر می‌رسد که این سؤال مفهوم دارد. به مثل ما موافقت داریم که در خم شکل ۱۰ سراشیبی در نقطهٔ P بیشتر از نقطهٔ Q است. وقتی که این حرف را می‌زنیم می‌دانیم که چه می گوییم. اما فرض کنید خم به‌طرزی پوشیده شده است که تنها خود نقطهٔ Q را می‌بینیم (شکل ۱۱). دراین‌صورت ما نمی‌توانیم تصوری ازچگونگی سراشیبی خم در نقطهٔ Q داشته باشیم. فرض کنیم پرده‌ها اندکی کنار رفته‌اند، به‌طرزی که ما فقط قسمت کوچکی از اطراف Q را می‌بینیم (شکل ۱۲). حال می‌توانیم ببینیم که سراشیبی در Q چقدر است، آنچه مهم است دیدن قطعه‌ای ازخم در دو طرف Q است، تا چه‌اندازه این قطعهٔ مرئی می‌تواند کوچك باشد مطرح نیست.



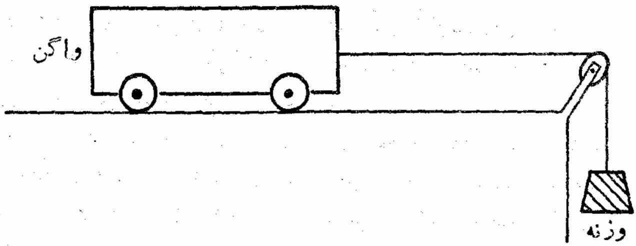
شکل ۱۲



شکل ۱۱

---

۱. توجه کنید که به‌جای عبارت «سرازیری یا سربالایی» لغت سراشیبی را به‌کار خواهیم برد. ــ م.



شکل ۱۳

حرکت شتابدار

حال یك حالت ویژه از حرکت با سرعت متغیر را درنظر می‌گیریم و می‌بینیم در هر لحظه سرعت به‌چه نحوی حساب می‌شود. این مثال که به‌بحث در آن خواهیم پرداخت در فیزیك اهمیت دارد. این نوعی از حرکت است که به‌طور معمول در آغاز درس مکانیك از آن بحث می‌شود. این حرکت‌را می‌توان با دستگاهی که در شکل ۱۳ نشان داده شده است تولید کرد. اگر وزن واگن ۱۵ اونس[1] باشد وزنه باید کمی بیشتر از یك اونس گرفته شود. «کمی بیشتر» زیرا اصطکاکی هم از طرف چرخهای واگن در کار خواهد بود. با میزان‌کردن وزنه، حرکت مطلوب به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

t	۰	۱	۲	۳	۴
s	۰	۱	۴	۹	۱۶.

از این جدول می‌فهمیم که s فوت[2] فاصله‌ای است که واگن در مدت t ثانیه پیموده است. واضح است که جدول درقانون زیر صدق می‌کند

$$s = t^{۲}.$$

توجه داشته باشید که جدول بالا با گفتهٔ من، که حرکت شتابدار است، مطابق است. درطول ثانیهٔ نخست بین $t = ۰$ و $t = ۱$ واگن فقط یك فوت پیش می‌رود. اما بین $t = ۱$ و $t = ۲$ واگن ۳ فوت پیش می‌رود. بین $t = ۲$ و $t = ۳$، ۵ فوت

۱. اونس ounce واحد وزن انگلیسی است و به‌تقریب مساوی ۲۸٫۳۰ گرم است. ــ م.

۲. فوت foot واحد طول انگلیسی است و به‌تقریب مساوی ۳۰٫۵ سانتیمتر است. ــ م.

(زیرا ۵ = ۴ — ۹). بین ۳ = t و ۴ = t واگن ۷ فوت (زیرا ۷ = ۹ — ۱۶) جلو می‌رود. این عددها با این نظر که واگن شتاب دارد، یعنی به‌مرور که وزنه آن را جلو می‌برد سریعتر حرکت می‌کند، سازگار است.

فرض کنید می‌خواهیم سرعت را در لحظهٔ ۳ = t حساب کنیم. در ثانیهٔ قبل از این لحظه از ۲ = t تا ۳ = t واگن ۵ فوت می‌پیماید. در ثانیهٔ بعداز این لحظه، از ۳ = t تا ۴ = t واگن ۷ فوت راه طی می‌کند. به نظر معقول می‌آید حدس بزنیم که سرعت درلحظهٔ ۳ = t بین ۵ و ۷ فوت درثانیه است.

دانش‌آموزان اغلب می‌پرسند، «آیا نمی‌توانیم میانگین ۵ و ۷ را بگیریم و بگوییم که سرعت ۶ فوت در ثانیه بوده است؟» بدبختانه جواب این سؤال در این مثال بخصوص مثبت‌است. گفتم «بدبختانه» زیرا میانگین گرفتن قاعده‌ای برای‌تعیین سرعت نیست. درواقع میانگین گیری به‌ندرت سرعت درست را معلوم می‌کند. تنها وقتی می‌توان میانگین گرفت که معادلهٔ حرکت ازنوع زیر باشد:

$$s = at^{۲} + bt + c$$

درپایین خواهیم دید که میانگین گیری درقانون $s = t^{۳}$ نتیجهٔ غلط به‌دست می‌دهد.

اگر فعلا گفتهٔ مرا دراین باره می‌پذیرید این حدس را که سرعت درست در نیمه‌راه بین برآوردهای‌ما یعنی ۵ و ۷ واقع است، کنار می‌گذاریم وفقط این‌نتیجه را به‌کار می‌بریم که سرعت درجایی بین ۵ و ۷ واقع است.

این فاصله را به‌چه‌نحوی می‌توانیم تنگتر کنیم؟ درپیش پذیرفتیم که هراندازه فاصلهٔ زمانی تنگتر باشد برآورد سرعت بهتر می‌شود. گرفتن فاصلهٔ تنگتر فکری خوب است. به‌جای یك‌ثانیه جلوتر و بعداز ۳ = t ما نیم‌ثانیه قبل‌از ۳ = t و بعد از آن‌را می‌گیریم. این مقدارها را یادداشت می‌کنیم جدول زیر حاصل می‌شود

t	$۲\frac{۱}{۲}$	۳	$۳\frac{۱}{۲}$
s	$۶\frac{۱}{۴}$	۹	$۱۲\frac{۱}{۴}$

واگن در این دو نیم‌ثانیه چه کرده است؟ در نیم‌ثانیهٔ میان $t = ۲\frac{۱}{۲}$ و ۳ = t، s از $۶\frac{۱}{۴}$ تا ۹ افزایش یافته است. یعنی واگن $۲\frac{۳}{۴}$ فوت راه پیموده است. دو فوت

و سه‌چهارم فوت در نیم‌ثانیه، سرعتی معادل $2\frac{3}{4} : \frac{1}{2}$ به‌دست می‌دهد که مساوی است با $5\frac{1}{2}$ فوت در ثانیه.

در نیم‌ثانیهٔ بعد از $t = 3$ واگن $12\frac{1}{4} - 9$ یعنی $3\frac{1}{4}$ فوت طی کرده است. سه و یک‌چهارم فوت در $\frac{1}{2}$ ثانیه سرعتی معادل $3\frac{1}{4} : \frac{1}{2}$ به‌دست می‌دهد که برابر است با $6\frac{1}{2}$ فوت در ثانیه.

بنابراین حالا می‌بینیم که سرعت میان $5\frac{1}{2}$ و $6\frac{1}{2}$ فوت درثانیه‌واقع است.

اما چرا در نیم‌ثانیه متوقف شویم؟ چرا به‌تدریج فاصله راکوتاهتر نکنیم تا برآورد ما رفته رفته بهتر شود؟

اگر یک‌دهم ثانیه را پیش‌از $t = 3$ و بعداز آن بگیریم از $s = t^2$ به‌جدول زیر می‌رسیم:

t	۲٫۹	۳	۳٫۱
s	۸٫۴۱	۹	۹٫۶۱

دریک‌دهم‌ثانیهٔ پیش‌از $t = 3$ واگن ۰٫۵۹ فوت جلو می‌رود؛ ازاین نتیجه سرعت برابر می‌شود با $0.59 : 0.1 = 5.9$ فوت درثانیه. دریک‌دهم ثانیهٔ بعداز $t = 3$ واگـن ۰٫۶۱ فوت جلو می‌رود از آنجا سرعت $0.61 : 0.1 = 6.1$ فوت در ثانیه حاصل می‌شود. حالا ما فکر می‌کنیم که سرعت باید میان ۵٫۹ و ۶٫۱ فوت در ثانیه باشد.

درست به‌همین‌طریق اگر یک‌صدم ثانیه پیش‌از $t = 3$ و یک‌صدم‌ثانیه پس‌از آن را بگیریم خواهیم‌دید که سرعت میان ۵٫۹۹ و ۶٫۰۱ فوت درثانیه قرار گرفته است. اگر یک‌هزارم ثانیه بگیریم خواهیم دید که سرعت بین ۵٫۹۹۹ و ۶٫۰۰۱ فوت درثانیه واقع شده است.

این نتیجه‌ها را به صورت جدول در زیر می‌آوریم

فاصله‌های زمانی که در نظر گرفته‌شده	v سرعت به‌فوت در ثانیه بین:
۱ ثانیه	۵ و ۷
۱ر۰ ثانیه	۹ر۵ و ۱ر۶
۰۱ر۰ ثانیه	۹۹ر۵ و ۰۱ر۶
۰۰۱ر۰ ثانیه	۹۹۹ر۵ و ۰۰۱ر۶

آخرین برآورد در بالا v را، با فاصله زمانی ۰۰۱ر۰ ثانیه، در یک فاصلهٔ بسیار کوچك نگه می‌دارد. زیرا ۹۹۹ر۵ و ۰۰۱ر۶ با هم فقط ۰۰۲ر۰ فوت تفاوت‌دارند. اما البته نیازی نیست که ما خود را به‌فاصلهٔ ۰۰۱ر۰ ثانیه مقید کنیم. می‌توانستیم فاصلهٔ یك میلیونیم یا یك میلیاردیم ثانیه را به‌کار بریم و یك برآورد دقیقتر برای v به‌دست بیاوریم. به‌نظر می‌رسد که درواقع هیچ محدودیتی برای یافتن برآورد دقیقتر v درمیان نیست. زیرا روش ادامهٔ جدول بخوبی روشن است. تصور می‌کنم که شما حدس می‌زنید چطور جدول ادامه می‌یابد.

تمرینها

بی‌آنکه محاسبه کنید برآوردهای v متناظر به‌فاصله‌های ۰۰۰۱ر۰ ثانیه و ۰۰۰۰۱ر۰ ثانیه را حدس بزنید. حدس خودتان را با محاسبهٔ واقعی امتحان کنید.

تصور می‌کنم که بی‌اشکال می‌بینید که چطور جدول را می‌توان ادامه داد. وقتی از سطری به‌سطر بعد می‌رویم یك ۹ اضافی در ۹...۹۹ر۵ ویك صفر بیشتر در ۱...۰۰ر۶ پیدا می‌کنیم. برآوردها به‌هم نزدیکتر می‌شوند. هر برآوردی ویژه، شکی ــ اگرچه‌این شك ممکن است بسیار کوچك باشد ــ دربارهٔ مقدار v به‌جا می‌گذارد. اما اگر همهٔ برآوردها را درنظر بگیریم این شك ازبین می‌رود. فقط یك عدد وجود دارد که از ۹...۹۹ر۵، با هرعدهٔ ۹، بزرگتر و از ۱...۰۰ر۶، با هرعدهٔ صفر، کوچکتر است. این عدد ۶ است.

بنابراین، با آنکه گفتیم برآورد سرعت و هر برآوردی تا درجه‌ای خطا یا تردید دربردارد اما هیچ تردیدی در واپسین برآورد ما در بین نیست؛ شش تنها عددی است که در همهٔ برآوردها که ازسمت راست و چپ به هم نزدیك می‌شوند، صادق است.

همهٔ این محاسبه‌ها مارا به‌این‌نتیجه می‌رسانند که اگر جسمی با قانون $s=t^2$

حرکت‌کند در زمان $t = ۳$ سرعت آن با $v = ۶$ داده می‌شود.

هدف این توضیح این است که شما بتوانید خودتان مقدارهای v مربوط به $t = ۱$، $t = ۲$، $t = ۴$ و $t = ۵$ را پیدا کنید. چون شما به‌نتیجه‌ها نگاه‌کنید باید بتوانید قانونی را ببینید.

من باید مطمئن شوم کـه شما راه پیداکردن v متناظر به هرمقداری از t را فهمیده‌اید. در کلاسها بعضی‌دانش‌آموزان بی‌درنگ نکتهٔ اساسی روش‌را می‌بینند. اما همواره دانش‌آموزانی نیز هستند کـه به شرح بیشتری نیاز دارند. پس بـرای خواننده‌ای که نیاز به‌توضیح دارد من معلوم می‌کنم که چگونه روش را به‌روشنی بفهمد. فهمیدن این روش اهمیت دارد زیرا مرحلهٔ بعدی کار از شما می‌خواهدکه نخستین نتیجهٔ حساب دیفـرانسیل و انتگـرال را کشف کنید. خیلی بیشتر احساس خوشحالی خواهید کـرد و اعتماد به‌نفستان بیشتر خواهد شد، اگر آن را خودتان کشف‌کنید تا اینکه من آن‌را به‌شما بگویم.

پیش از همه‌چیز شما باید اندیشهٔ مستتر در روش را به‌روشنی ببینید. فرمول (۱) که اغلب به‌شکل «سرعت، همان‌مسافت بخش‌بر زمان است» بیان می‌شود فقط درمورد سرعتهای ثابت صادق‌است. هنگامی که سرعت تغییر می‌کند، مسافت‌بخش‌بر زمان تنها سرعت متوسط را به‌دست می‌دهـد؛ سرعت واقعی درهرلحظه ممکن است ازسرعت متوسط بزرگتر یاکوچکتر باشد. باوجوداین ما رفته‌رفته فاصله‌های‌زمانی راکوتاهتر می‌کنیم؛ امیدواریم‌که این‌کار رفته‌رفته امکان تغییر سرعت راکم‌کند. به‌این ترتیب سرعت متوسط در فاصلهٔ زمانی بسیار کوتاه باید برآورد خـوبی از سرعت واقعی به‌دست دهد.

درمرحلهٔ دوم شما باید بتوانید محاسبات واقعی را انجام دهید. اگر مشکلی در سازمان‌دادن به‌کار احساس می‌کنید شاید از به‌کاربردن استدلال صفحه‌های ۲۸، ۲۹و ۳۰ بهره بگیرید؛ نظیر همان‌گامها را بردارید اما سرعت‌را برای $t = ۲$ به‌جای $t = ۳$ پیداکنید. سپس‌باز با برداشتن همان گامها v را برای $t = ۴$ به‌دست بیاورید. البته تنها به انجام عملیات محاسبه اکتفا نکنید. همواره در این اندیشه باشید که چه کار می‌کنید و چرا این‌کار را می‌کنید.

وقتی‌که v مربوط به $t = ۱$، $t = ۲$، $t = ۴$ و $t = ۵$ را پیداکـردید جدول زیر را تکمیل‌کنید:

t	۱	۲	۳	۴	۵
v	.....		۶	......	

پس از تکمیل جدول باید حتماً به‌قانونی پی ببرید که v و t را به‌هم مربوط می‌کند. این قانون عبارت است از ..... $= v$

مادام که این کار را با موفقیت انجام نداده‌اید بهتر است در خواندن کتاب عجله نکنید.

* * *

قانون سرعت

اگر محاسبه را درست عمل کنید به‌نتیجهٔ زیر می‌رسید:

t	۱	۲	۳	۴	۵
v	۲	۴	۶	۸	۱۰.

هرعددی در سطر دوم درست دو برابر عدد بالایی خود است. پس قانون، $v = ۲t$ است. اگر علامت (′) را، که در صفحهٔ ۲۰ دیدیم، به‌کار ببریم سرعت به‌جای v به صورت s' نوشته می‌شود. پس نتیجهٔ جدیدی داریم که باید به نتیجهٔ الف صفحهٔ ۲۲ و نتیجهٔ ب صفحهٔ ۲۳ اضافه کنیم.

نتیجهٔ ج. اگر

$$s = t^۲,$$

$$s' = ۲t.$$

این نتیجهٔ بسیار ساده از محاسبه‌های طولانی حاصل شد. در پایین خواهیم دید که چطور می‌توان آن را با محاسبهٔ کوتاهتر پیدا کرد. مع‌هذا، این محاسبه‌های طولانی به‌هیچ‌وجه کاری عبث نبود. با این کار باید احساس کرده باشید چه‌واقعه‌ای دارد رخ می‌دهد. بسیاری‌از دانش‌آموزان دلیلهای کوتاه این نتیجه را در کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال می‌بینند؛ این دانش‌آموزان به‌سرعت جبر آن را می‌خوانند و هرگز معنی واقعی آن‌را درك نمی‌کنند.

حالا ببینیم چطور جبر را باید به‌کار گرفت تا کار ما کم شود و استدلال نیز قاطعتر گردد.

وقتی خواستیم بدانیم چه مسافتی را متحرك طبق قانون $s = t^۲$ بین زمان $t = ۲٫۹۹$ و ۳ ثانیه طی کرده است ۲٫۹۹ را مربع کردیم و در حساب عملی خسته‌کننده بود. این کار را با جبر می‌توان ساده‌تر کرد. یك نتیجهٔ معروف در جبر وجود دارد:

$$(a+b)^۲=a^۲+۲ab+b^۲ .\qquad \text{فرمول } (۲)$$

اگر a را ۳ و b را ۰٫۰۱– بگیریم خواهیم داشت $a+b=۲٫۹۹$. پس از فرمول (۲) حاصل می‌شود:

$$(۲٫۹۹)^۲=۳^۲+۲\times۳\times(-۰٫۰۱)+(۰٫۰۱)^۲$$
$$=۹ - ۰٫۰۶ + ۰٫۰۰۰۱$$
$$=۸٫۹۴۰۱ .$$

این روش، کار کمتر می‌برد و کمتر از روش معمولی حساب ابتدایی منجر به اشتباه می‌شود.

مع‌هذا، جبر، کاربرد مهمتری دارد فقط برای کوتاه‌کردن محاسبه‌ها به کار نمی‌رود. در **صفحهٔ ۳۰** ستونی را که شامل ۵؛ ۵٫۹؛ ۵٫۹۹؛ ۵٫۹۹۹ بود ملاحظه کردیم،حدس زدیم که ستون چگونه ادامه خواهد یافت. با به کارگیری نمادهای جبری می‌توانیم از این حدس پرهیز کنیم. به‌جای اینکه یك‌به‌یك فاصله‌های

بین ۳ و ۰٫۱+۳؛

بین ۳ و ۰٫۱–۳؛

بین ۳ و ۰٫۰۱+۳؛

بین ۳ و ۰٫۰۱–۳ تا آخر.

را درنظر بگیریم، می‌توانیم توجه کنیم که همهٔ این فاصله‌ها حالتهای ویژهٔ فاصلهٔ

بین ۳ و $h+۳$ هستند.

حالتهای ویژه را می‌توان به ترتیب با گذاشتن ۰٫۱؛ ۰٫۱–؛ ۰٫۰۱؛ ۰٫۰۱– به جای h به‌دست آورد. چون می‌توانیم به‌همین ترتیب به جای h عددهای ۰٫۰۰۰۰۰۱ و ۰٫۰۰۰۰۰۰۰۰۰۱ را بگذاریم پس قادریم عدد یك میلیونیم یا یك‌میلیاردیم یا هرعدد دیگری ازاین‌نوع را به‌جای h بگذاریم ویکباره همه‌را با یك محاسبهٔ جبری عمل کنیم.

حالا این فکر را بهاجرا درمی‌آوریم. می‌خواهیم سرعت را به‌ازای $t=۳$ پیدا کنیم. فاصلهٔ کوچکی را از $t=۳$ تا $t=۳+h$ در نظر می‌گیریم. باید جای

جسم را در این لحظه‌ها پیدا کنیم. جای متحرك با فرمول $s=t^{۲}$ معلوم می‌شود. وقتی $t=۳$، $s=۹$. وقتی $t=۳+h$، $s=(۳+h)^{۲}=۹+۶h+h^{۲}$، جدول زیر به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{ccc} t & ۳ & ۳+h \\ s & ۹ & ۹+۶h+h^{۲}. \end{array}$$

حال دستور «مسافت بخش برمدت» را به کار می‌بریم تا سرعت را برآورد کنیم. در این فاصلهٔ زمانی متحرك چه اندازه راه پیموده است؟ تفاضل اعدادی را که در سطر s آمده‌اند می‌گیریم. در این مدت متحرك $۶h+h^{۲}$ فوت راه رفته‌است. فاصلهٔ زمانی چقدر است؟ اختلاف بین ارقام t را پیدا می‌کنیم؛ فاصلهٔ زمانی h ثانیه‌است. عمل تقسیم، برآورد v راکه

$$\frac{۶h+h^{۲}}{h}$$

است به‌دست می‌دهد.

این عبارت را می‌توان ساده کرد. زیرا

$$۶h+h^{۲}=h\,.\,(۶+h),$$

از تقسیم دوطرف بر h داریم

$$\frac{۶h+h^{۲}}{h}=۶+h.$$

تمرین

در عبارت بالا به‌نوبت مقادیر ۱؛ ۱ر۰؛ ۰۱ر۰؛ ۱ —؛ ۱ر۰ —؛ ۰۱ر۰ — را به‌جای h بگذارید و ببینید که آیا نتیجه‌ها با اعداد جدول **صفحهٔ ۳۰** مطابقت دارد. مقادیر مثبت h یك ستون را به‌دست می‌دهد و مقادیر منفی h ستون دیگر را.

وقتی h مثبت است فاصلهٔ کوچکی درست بعد از $t=۳$ در نظر می‌گیریم. آن‌گاه برآورد ما از v مساوی است با $۶+h$ که درست کمی از ۶ بزرگتر است.
وقتی h منفی است فاصلهٔ کوچکی درست قبل از $t=۳$ در نظر می‌گیریم.

برآورد v درست کمی از ۶ کوچکتر است. (به مثل اگر $h = -0{,}01$، $6+h$ مساوی $(-0{,}01)+6$ یعنی ۵٫۹۹ است، که اندکی از ۶ کوچکتر است.)
هرقدر فاصله را کوتاهتر بگیریم برآورد به شش نزدیکتر می‌شود. به این ترتیب به‌نتیجهٔ $v = 6$ می‌رسیم.

اکنون از راه جبر سرعت مربوط به $t = 3$ را پیدا کرده‌ایم. حالا توجه می‌کنیم که آنچه را با ۳ عمل کردیم، می‌توانیم به‌آسانی با هرعددی دیگر عمل کنیم. دراین حال باز وضع به‌گونه‌ای است که جبر می‌تواند کمك کند. می‌توانیم نمادی برای «هرعددی» به‌کار ببریم و vی‌مربوط به‌هرمقدار t را به‌دست بیاوریم.

پس فرض کنیم که می‌خواهیم سرعت‌را به‌ازای $t = a$ (a می‌تواند هرعددی باشد) پیدا کنیم. عملیات درست با همان طرحی که برای $t = 3$ عمل کردیم اجرا خواهد شد. می‌توانیم کار را گام به‌گام انجام دهیم منتها هرجا ۳ آمده است به‌جای آن a بگذاریم.

تمرین

پیش‌ازآنکه تمرین را در زیر بخوانید اگر می‌توانید این عملیات را انجام دهید.

* * *

جدول زیر را داریم

$$\begin{array}{lll} t & a & a+h \\ s & a^2 & a^2+2ah+h^2. \end{array}$$

مسافت طی‌شده از تفریق دو عدد سطر s از همدیگر به‌دست می‌آید. پس مسافت $2ah+h^2$ فوت است. مدت لازم برای پیمودن این مسافت برابر تفاضل دو عدد سطر t است. پس مدت لازم h ثانیه است. خارج قسمت

$$\frac{2ah+h^2}{h}$$

برآورد v را به‌دست می‌دهد و به‌صورت زیر ساده می‌شود.

$$2a+h.$$

حالا h يك عدد بسیار كوچك و طول زمانی است (برحسب ثانیه) که ما

حرکت را زیر نظر داشتیم؛ هراندازه این مدت کوتاهتر باشد برآورد v بهتر است. چون h رفته‌رفته کوچکتر شود $۲a+h$ به $۲a$ نزدیکتر می گردد. نتیجه می گیریم که

$$v = ۲a.$$

به‌ازای $t = a$؛ $v = ۲a$. بـا بیان می‌توان گفت «t هر عددی باشد v دو برابر این عدد است». این نتیجه حدسی را که درصفحهٔ ۳۱ و ۳۲ زدیم، تأیید می کند. اما در آنجا شاهد ما به‌اعداد ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ محدود می‌شد. با به‌کاربردن جبر می بینیم که $v = ۲t$ به‌ازای همهٔ مقادیر t صادق است. البته نیازی نیست که a عددصحیح باشد؛ قانونهای جبر برای اعدادکسری و گنگ نیز معتبرند.

ممکن است مایل باشید علت دخالت دادن عدد a را در بحث بدانید. به چه علت وقتی که $t = a$، به‌جای نوشتن $v = ۲t$، نوشتیم $v = ۲a$؟ علت این‌است که در آغازکار لازم بود یك فاصلهٔ زمانی h از $t = a$ ثانیه تا $t = a + h$ ثانیه را درنظر بگیریم. اگر تصمیم گرفته بودیم کـه a را دخالت ندهیم مجبور می‌شدیم فاصلهٔ زمانی‌را از $t = t$ تا $t = t + h$ بگیریم اما این‌عمل کمی عجیب به‌نظر می‌رسید.

نمادگذاری مفید

وقتی درحرکت بحث می کردیم ما همواره جمله‌هایی مانند «در فلان لحظه متحرك کجاست؟» یا جملهٔجبری نظیرآن مانند «مقدار s مربوط به‌مقدار ویژهٔ t» را به‌کار می بردیم. چون این‌نوع جمله اغلب به‌کار می‌رود مناسب است که علامتی‌اختصاری برای آن داشته باشیم. به‌جای جملهٔ «مقدار s مربوط به $t = a$»، علامت $s(a)$ را به‌کار خواهیم برد. به‌مثل در جدول زیر

t	۰	۱	۲	۳
s	۰	۱	۴	۹.

۹ مقدار s مربـوط به $t = ۳$ است. بـا بیان ایـن عبارت بـا علامت اختصاری $s(۳) = ۹$ کلی جا صرفه‌جویی می کنیم. در همین جـدول $s(۰) = ۰$، $s(۱) = ۱$ و $s(۲) = ۴$.

وقتی از سرعتها بحث می کنیم، فاصلهٔ زمانی را از $t = a$ تا $t = a + h$ درنظر می گیریم. سپس بررسی می کنیم که درآغاز وانجام این فاصله، متحرك درکجاست. وضع متحرك با مقدار s تعیین می‌شود. حال مقدار s در زمان $t = a$ را با $s(a)$ و

مقدار s در زمان $t=a+h$ را با $s(a+h)$ نشان می‌دهیم.

به‌این ترتیب در این فاصلهٔ زمانی متحرك مسافت $s(a+h)-s(a)$ فوت می‌پیماید این مسافت‌را متحرك درمدت $(a+h)-a=h$ پیموده است. پس‌سرعت متوسط درطول این فاصلهٔ زمانی برحسب فوت برثانیه عبارت است از

$$\frac{s(a+h)-s(a)}{h} \qquad \text{فرمول (۳)}$$

خط‌مشی تعیین سرعت

حالا می‌توانیم گامهایی راکه برای تعیین سرعت درعملیات بالا برداشتیم توصیف کنیم. بدیهی است مقصود ازتوصیف خط‌مشی این است که بتوانیم این عملیات را دربارهٔ قانونهای دیگری غیراز $s=t^2$ به‌کار بریم.

۱. با قانونی که s را برحسب t به‌دست می‌دهد آغاز کردیم.

۲. سپس سرعت متوسط‌را درفاصلهٔ زمانی $t=a$ و $t=a+h$ درنظر گرفتیم به‌عبارتی که با فرمول (۳) دربالا داده شده است یعنی به

$$\frac{s(a+h)-s(a)}{h}$$

رسیدیم.

۳. گذاشتیم h رفته‌رفته کوچکترشود. h به‌سمت‌صفرمیل کرد. آن‌گاه‌دیدیم که

$$\frac{s(a+h)-s(a)}{h}$$

به‌مقداری میل می‌کند.

۴. این مقدار را سرعت درلحظهٔ $t=a$ گرفتیم.

در نمادی‌که در بالا به‌کار بردیم ایـن سرعت در لحظهٔ a، $v(a)$ یا $s'(a)$ نوشته می‌شود زیرا مقدار v یا s' را در زمان $t=a$ به‌دست می‌دهد.

فصل چهارم

توانهای بالاتر

درچندین صفحه‌قانون $s = t^{۲}$ را به‌تفصیل مطالعه‌کردیم. به‌این‌دلیل این‌کار راکردیم که برای‌پیداکردن سرعت قانونهای $s = t^{۳}$ و $s = t^{۴}$ یا هرتوان بالاتر به‌هیچ اصل جدیدی نیاز نیست. امیدوارم که خواننده خود بتواندقانونهای s' را، همان‌گونه‌که در تمرینهای زیر پیشنهاد شده است، پیدا کند.

تمرینها

۱. جاهای خالی جدول‌زیر را از روی قانون $s = t^{۳}$ پرکنید.

t	۱	۱٫۰۰۱	۲	۲٫۰۰۱	۳	۳٫۰۰۱	۴	۴٫۰۰۱	۵	۵٫۰۰۱
s										

اگر تا ۳ رقم اعشار حساب‌کنید کارآسان خواهد شد. از روی این جدول سرعت را در لحظه‌های

$$t = ۱, ۲, ۳, ۴, ۵$$

برآوردکنید (راهنمایی: هریك از این سرعتها یك‌عدد صحیح است) کدام قانون را این سرعتها به‌دست مـی‌دهند؟ (اگر قانون را نمی‌توانید حدس بزنید به صفحهٔ ۷ مراجعه کنید.) نتیجه: اگر $s = t^{۳}$، داریم $v = s' = \ldots$.

۲. سرعت مربوط به $s = t^{۳}$ را به‌طور جبری باملاحظهٔ حرکت متحرك بین $t = a$ و

$t=a+h$ به‌دست بیاورید (استدلال صفحهٔ ۳۵ را به‌کار ببرید).

۳. باروشی که به‌نظرتان آسانتر است قانون سرعت‌را درحرکت $s=t^۴$ پیدا کنید.

۴. قانون سرعت حرکت $s=t^۲$ را در متن کتاب آوردیم. اگر شما سؤالهای ۱ و ۲ و ۳ راحل کرده‌باشید قانون‌سرعت‌حرکتهای $s=t^۳$ و $s=t^۴$ را به‌دست آورده‌اید. این نتیجه‌ها را آزمایش کنید. آیا از آنها می‌توانید برای $s=t^۵$، برای $s=t^۶$ و برای $s=t^n$، که در آن n یك عدد صحیح است، قانون را حدس بزنید؟ آیا حدس شما به‌ازای $n=۱$ جواب درست به‌دست می‌دهد؟

قانون $s=t^n$

امیدوارم از تمرین ۱ به‌این نتیجه رسیده باشید که اگر $s=t^۳$، آن‌گاه $s'=۳t^۲$. تمرین ۲ با استدلال جبری باید شما را به‌همین نتیجه رسانده باشد. زیرا ازجدول کوچك زیر

t	a	$a+h$
s	$a^۳$	$a^۳+۳a^۲h+۳ah^۲+h^۳$.

دیده می‌شود که برآورد v برابر است با:

$$\frac{۳a^۲h+۳ah^۲+h^۳}{h}=۳a^۲+۳ah+h^۲.$$

چون h به‌صفر میل کند دوجملهٔ $۳ah$ و $h^۲$ نیز به‌صفر میل می‌کنند. پس عبارت بالا به $۳a^۲$ میل می‌کند. بنابراین به‌ازای $t=a$، چنان‌که انتظار می‌رفت $v=۳a^۲$.

استدلال‌جبری در تمرین ۳ بسیارکمتر از استدلال حسابی کار می‌برد. استدلال جبری برای $s=t^۴$ به‌جدول‌زیر منجر می‌شود،

t	a	$a+h$
s	$a^۴$	$a^۴+۴a^۳h+۶a^۲h^۲+۴ah^۳+h^۴$,

و ازآنجا به‌برآورد v می‌رسد:

$$\frac{۴a^۳h+۶a^۲h^۲+۴ah^۳+h^۴}{h}=۴a^۳+۶a^۲h+۴ah^۲+h^۳.$$

وقتی که h به‌صفر میل می‌کند همهٔ‌جمله‌های طرف دوم بجز $۴a^۳$ به‌صفر میل می‌کنند. پس نتیجه‌می گیریم که در لحظهٔ $t=a$ داریم $v=۴a^۳$. بنا براین برای قانون $s=t^۴$، $s'=۴t^۳$ قانون سرعت است.

فرض کنیم نتیجه‌هایی راکه پیداکرده‌ایم گردمی آوریم.

قانون s: $t^۲$ $t^۳$ $t^۴$.

قانون s': $۲t$ $۳t^۲$ $۴t^۳$.

بسیاری از دانش‌آموزان توجه می‌کنند که در s' توان t یك واحد کمتراز توان آن درقانون s است. به‌مثل وقتی $s=t^{۱۷}$، انتظار داریم که s' شامل $t^{۱۶}$ باشد. پس در حالت کلی برای $s=t^n$ انتظار داریم کـه s' شامل $t^{n-۱}$ باشد. یافتن عدد دیگر که در فرمول هست از این‌هم ساده‌تر است: می بینیم که $s=t^۲$ به $s'=۲t$ و $s=t^۳$ به $s'=۳t^۲$ منجر می‌شود. عددی که در فرمول s'، اول نوشته شده است درست همان عدد توان t درفرمول s است. پس برای $s=t^{۱۷}$ انتظار $s'=۱۷t^{۱۶}$ را داریم. به‌طور کلی حدس می‌زنیم که قانون $s=t^n$ باید قانون $s'=nt^{n-۱}$ را بدهد.

پس نتیجهٔ جواب تمرین ۴ همین s' است. این یك نتیجهٔ مهم است. بنا براین آن‌را به‌صورت فرمول می‌نویسیم.

فرمول (۴) اگر $s=t^n$ آن‌گاه $s'=nt^{n-۱}$

تمرین ۴ پیشنهاد می‌کند حدس خـود را به‌ازای $n=۱$ امتحان کنیم. وقتی $n=۱$، t^n فقط t است و می‌دانیم که $s=t$ قانون حرکت متحرك باسرعت ۱ است پس s' باید ۱ باشد. آیا از فرمول همین نتیجه به‌دست‌می‌آید؟ اگر همین نتیجه حاصل نشود حدس مـا غلط بوده است. $n=۱$ را در فرمول ۴ بگذارید حاصل مـی‌شود $s'=۱\times t^۰$. در اینجا $t^۰$ داریم. بعضی از خوانندگان معنی $t^۰$ را می‌دانند برخی دیگر نمی‌دانند. پس بهتر است دربارهٔ آن کمی حرف بزنیم. عبارتهای زیر را در نظر می گیریم:

$$t^۵,\ t^۴,\ t^۳,\ t^۲,\ t,\ ۱,\frac{۱}{t},\ \frac{۱}{t^۲}.$$

هر عبارتی، از تقسیم عبارت واقع در سمت‌چپ آن بر t حاصل می‌شود. امـا اگر

به‌توانها نگاه کنیم این توانها با ۵، ۴، ۳، ۲ شروع می‌شود. درهربار توان یك واحد کاهش می‌یابد. از اینجا استنباط می‌شود که‌این عبارتها را به‌صورت زیر نیز می‌توان نوشت:

$$t^{5},\ t^{4},\ t^{3},\ t^{2},\ t^{1},\ t^{0},\ t^{-1},\ t^{-2}.$$

پس به‌نظر می‌رسد که معنی t^{0} باید ۱ باشد. بنابراین $s' = 1 \times t^{0}$ به‌صورت $s' = 1 \times 1 = 1$ درمی‌آید و این نتیجه‌ای است که انتظار داشتیم.

استدلالی که‌هم‌اکنون آوردیم به t^{0}، t^{-1} و t^{-2} معنی می‌دهد. آیافرمول(۴) برای این توانها نیز صادق است؟ آیا می‌توانیم بگوییم که درفرمول (۴) بگذارید $n = 0$ و $n = -1$ نتیجه‌های‌درست به‌دست خواهیدآورد؟ این به‌راستی یك‌حدس است. حالا آن را امتحان می‌کنیم.

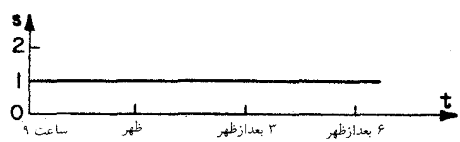
چون درفرمول (۴)، n را ۰ بگیریم این‌گزاره حاصل می‌شود «اگر $s = t^{0}$، آن‌گاه $s' = 0 \times t^{-1}$». آیا این نتیجه درست‌است؟ چنان‌که در بالا دیدیم t^{0} یعنی ۱ وهمچنین t^{-1} یعنی $1/t$. اما این زیاد مهم نیست زیرا آن را بایددرصفر ضرب کرد (فرض مـی‌کنم t صفر نیست؛ صفر بودن t دشواریهایی پیش می‌آورد). پس نتیجه چنین می‌شود: «برای قانون $s = 1$ داریم $s' = 0$».

معنای این‌نتیجه چیست؟ $s' = 0$ می‌گوید سرعت صفر، یعنی جسم بی‌حرکت است. قانون $s = 1$ چـه‌معنی می‌دهد؟ معنی‌آن این است: در تمام مدت فاصلهٔ جسم از یك نقطهٔ ثابت ۱ است. اگر من اتومبیل خود را در ۱ متری در گـاراژ نگـاه دارم به‌طور حتم اتومبیل بی‌حرکت است. نمودار پیشرفت اتومبیل من درشکل ۱۴ نشان داده‌شده‌است. نمودار نه‌بالا می‌رود نه‌پایین‌می‌آید. شیب آن‌صفر است: $s' = 0$.

حال $n = -1$ چه می‌شود؟ با مقایسهٔ دو دنبالهٔ زیر:

$$t^{5},\ t^{4},\ t^{3},\ t^{2},\ t,\ 1,\ \frac{1}{t},\ \frac{1}{t^{2}},$$

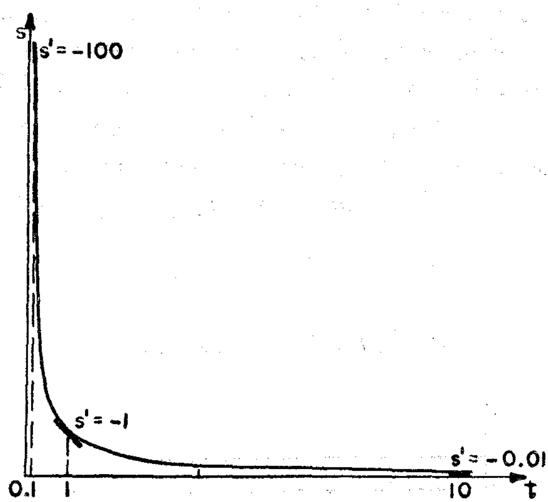
$$t^{5},\ t^{4},\ t^{3},\ t^{2},\ t^{1},\ t^{0},\ t^{-1},\ t^{-2},$$



شکل ۱۴

دانستیم که t^{-1} باید به‌معنی $1/t$ و t^{-2} باید به‌معنی $1/t^2$ باشد. اگردر فرمول (۴)، n را ۱ — بگیریم این حکم را می‌یابیم که سرعت حرکت $s = t^{-1}$ باید $s' = (-1)(t^{-2})$ باشد. می‌توانیم از معنای t^{-1} و t^{-2} استفاده کرده عبارت s' را تعبیر کنیم و به‌این حکم برسیم: به‌قانون حرکت $s = 1/t$ سرعت $s' = -1/t^2$ مربوط می‌شود. این‌حکم درست‌است؟ نمودار $s = 1/t$ درشکل ۱۵ داده شده‌است. نمودار، اول باسراشیبی زیاد پایین می‌آید وسپس سراشیبی آن‌ملایم می‌شود؛ به‌پایین آمدن ادامه می‌دهد و به‌مرحله‌ای می‌رسد‌که سقوط آن نامحسوس می‌شود. به‌طوری که شما تصور می‌کنید‌که خط افقی است. آیا فرمول s' که پیدا کردیم بااین‌نوع پایین آمدن تطابق دارد؟ نمودار همواره پایین می‌آید. معنی این پایین آمدن این است که s' باید از اول تا آخر منفی باشد، و چنین هم هست. هر مقداری برای t انتخاب کنید، $s' = -1/t^2$ و s' همواره منفی است.

در اول نمودار، خم با سراشیبی زیاد سقوط می‌کند. فرض کنید $t = 0{,}1$. در این صورت $t^2 = 0{,}01$ و $1/t^2 = 100$. پس به ازای $t = 0{,}1$ داریم $s' = -1/t^2 = -100$. با این مقدار s' باید منتظر بود‌که نمودار با سراشیبی بسیار تند سقوط کند. پس از آن به مقدار $t = 1$ می‌رسیم. در این موقع $s' = -1/t^2 = -1$. این مقدار یك سقوط معتدل را، چنان‌که انتظار می‌رفت،



شکل ۱۵

نشان می‌دهد. حتی بعد به $t=10$ می‌رسیم. دراین صورت

$$s' = -1/t^2 = -1/100 = -0.01$$

این هم طبق انتظار ما است. این سقوط به‌تقریب نامحسوس است.

به‌نظر می‌رسد حدسهای ما خوب از آب درآمده‌اند. اول حدس زدیم که می‌توانیم معنایی رضایت‌بخش برای t^n حتی وقتی که n مساوی ۱ـ یا ۲ـ است، پیدا کنیم و درمرحلهٔ دوم حدس زدیم که فرمول (۴) را می‌توانیم برای این مقدارهای n به‌کار ببریم. بر اساس این حدسها سراشیبی را در نقاط مختلف نمودار $s=1/t$ پیش‌بینی کردیم ونتایجی بسیار موافق با شکل واقعی این نمودار به‌دست آوردیم.

در ریاضیات اغلب این کار را می‌کنیم ــ بیش از آن چیزی که دقیقاً حق داریم می‌گیریم. ممکن است بدانیم روشی را می‌توان دربعضی موارد به‌کار برد؛ آن‌وقت آزمایش می‌کنیم تا ببینیم، شاید، این روش درموارد دیگرهم مفید باشد. سعی می‌کنیم میدان کاربرد قانونها را آن قدر توسعه‌دهیم که تمام امکانات کاربردرا در بر گیرند.

حال این فکر را اندکی بیشتر به‌جلو می‌بریم.

جلوتر دنبالهٔ

$$t^5,\ t^4,\ t^3\ \ldots$$

را درنظر گرفتیم که درهرمرحله جمله بر t تقسیم می‌شود. چه‌پیش می‌آید اگرتوانی از t را بگیریم وآن را به‌توالی بر $\sqrt{t}$ تقسیم کنیم؟ دنباله‌ای نظیر دنبالهٔ زیر حاصل خواهد شد.

$$t^2,\ t\sqrt{t},\ t,\ \sqrt{t},\ 1,\ \frac{1}{\sqrt{t}},\ \frac{1}{t},\ \ldots$$

بعضی از این جمله‌ها را می‌دانیم به‌چه طریق به‌شکل t^n بنویسیم. این جمله‌ها را می‌نویسیم وجاهای جمله‌هایی راکه هنوز نمی‌دانیم چطور بنویسیم خالی می‌گذاریم:

$$t^2 \quad t\sqrt{t} \quad t \quad \sqrt{t} \quad 1 \quad \frac{1}{\sqrt{t}} \quad \frac{1}{t}$$

$$t^2 \quad \ldots \quad t^1 \quad \ldots \quad t^0 \quad \ldots \quad t^{-1}.$$

درسطر پایین ارقام ۲، ۱، ۰، ۱ــ را می‌یابیم که بین آنها جاهای خالی وجود دارد. چه‌ارقامی باید دراین جاهای خالی نوشته‌شود؟ جمله‌ها درسطر بالا ازتکرار یك‌عمل به‌دست آمده‌اند: تقسیم‌مکرر بر $\sqrt{t}$. این طرزکار ما را به‌این‌فکرمی‌اندازد

که‌شاید سطر پایین را نیز بتوان با تکرار یك‌عمل به‌دست آورد. ارقام ۲، ۱، ۰، ۱ — در هر مرحله یك واحد کم می‌شود. بـه‌این ترتیب پیش‌بینی می‌شود کـه عمل یك تفریق است کـه تکرار می‌شود. در هر گامـی چه اندازه باید کم کنیم، تـا ارقام ۲، ۱، ۰ و ۱ — را درجاهای اول، سوم، پنجم و هفتم داشته باشیم؟ بدیهی است عددی که باید به‌تکرار کم شود ۱/۲ ودنبالهٔ کامل عبارت است از

$$۲,\quad \frac{۳}{۲},\quad ۱,\quad \frac{۱}{۲},\quad ۰,\quad -\frac{۱}{۲},\quad -۱$$

به‌نظر می‌رسد این حدس ساده‌ترین و طبیعی‌ترین راه برای پرکردن جاهای خالی باشد و به‌این‌ترتیب به‌جدول زیر می‌رسیم.

$$\begin{array}{ccccccc} t^{۲} & t\sqrt{t} & t & \sqrt{t} & ۱ & \frac{۱}{\sqrt{t}} & \frac{۱}{t} \\ t^{۲} & t^{۳/۲} & t & t^{۱/۲} & t^{۰} & t^{-۱/۲} & t^{-۱}. \end{array}$$

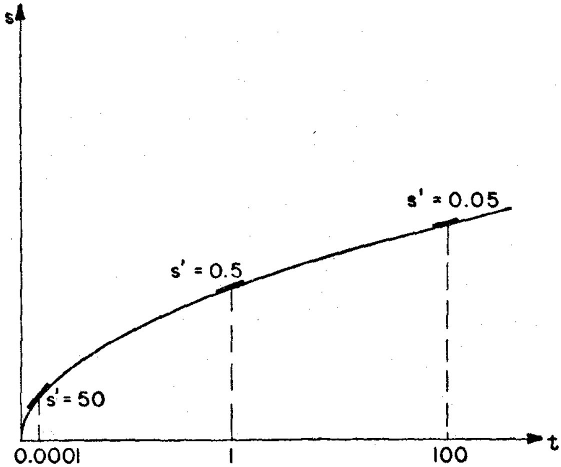
حالا می‌توانیم به‌ازای هریك‌از مقدارهای $\ldots, ۲/۱-, ۲/۱$ و $n = ۳/۲$ معنایی برای t^n قایل شویم.

اگر در فرمول (۴)، n را ۱/۲ بگیریم چه پیش می‌آید؟ آیا نتیجهٔ معقول بـه‌دست می‌دهد؟ بـا این فرمول باید قبول‌کنیم که اگر $s = t^{۱/۲}$، آن‌گاه سرعت، $s' = (۱/۲)t^{-۱/۲}$. یعنی وقتی که $s = \sqrt{t}$، $s' = (۱/۲)(۱/\sqrt{t}) = ۱/۲\sqrt{t}$.

آیا این‌معقول است؟ نمودار $s = \sqrt{t}$ بـه‌ازای مقدارهای مثبت t در شکل ۱۶ نشان داده شده است.

با نگاه‌کردن به‌نمودار چه نتیجه‌ای دربارهٔ s' می‌گیریم؟ منحنی همواره بالا می‌رود، پس انتظار داریم که s' به‌ازای همهٔ مقدارهـای مثبت t مثبت باشد. چنین است اگر $s' = ۱/۲\sqrt{t}$. نمودار نخست بـا سراشیبی زیاد صعود مـی‌کند سپس سراشیبی آن معتدل می‌شود وسرانجام سراشیبی آن بسیار ملایم می‌گردد. پس انتظار داریم درآغاز s' بزرگ‌باشد سپس مقدارش متوسط و سرانجام بسیارکوچك شود. فرمول $s' = ۱/۲\sqrt{t}$ با این انتظارها مطابقت دارد. بـه‌مثل اگر $t = ۰٫۰۰۰۱$، آن‌گاه $\sqrt{t} = ۰٫۰۱$ و $s' = ۵۰$. بـه‌ازای $t = ۱$، $s' = ۱/۲$. به‌ازای $t = ۱۰۰$، $\sqrt{t} = ۱۰$ و $s' = ۱/۲۰ = ۰٫۰۵$.

به‌نظر می‌رسد که بااستعمال‌فرمول (۴)،حتی وقتی‌که مقدار n کسری یا منفی



شکل ۱۶

است، نتیجه‌های درست به‌دست می‌آوریم. در واقع این حدس درست است و اثبات می‌شود ولی برهان آن را در اینجا نمی‌آوریم. زیرا یك دلیل دقیق و منطقی ایجاب می‌کند که مطالب با ترتیبی به‌کلی متفاوت مطرح شود. ما نباید کورکورانه با حدس از x^2 و x^3 به x^{-1} و $x^{1/2}$ به‌راه‌همان ادامه دهیم. ما باید در آغاز تعریفی برای x^n بیاوریم که به‌ازای n مساوی ۲ و یا ۱ — یا ۱/۲ — یا $\sqrt{2}$ یا π صادق باشد. سپس از این تعریف فرمول (۴) را به‌دست بیاوریم. بدین‌ترتیب همهٔ حالتهای ممکن یکباره حل خواهد شد. اما در این استدلال بعضی مفهومهای حساب دیفرانسیل به‌کار می‌رود. به‌یقین برهان را درك نخواهید کرد مگر آنکه از پیش تااندازه‌ای با حساب دیفرانسیل و انتگرال آشنا شده‌باشید. چون نمی‌خواهیم یك استدلال حقیقی بیاوریم، به‌نظر می‌رسد بهتر باشد یك بحث غلط مطرح نکنیم که به‌ظاهر استدلال نماید اما استدلال نباشد. بهتر است به‌صراحت بگوییم حدسهایی زده‌ایم؛ شاهدهایی آورده‌ایم تا نشان دهیم که حدسهای ما به‌نتایج قابل‌قبول می‌رسند. درواقع حدسهایی که زده‌ایم درست هستند.[1]

---

۱. به‌نفع دانش‌آموزی که می‌خواهد موضوع را بیشتر تعقیب کند، لازم است به‌برهانی که در ذهن دارم اشاره کنم. می‌توان $\log x$ را به‌وسیلهٔ حساب انتگرال تعریف کرد و خواص لگاریتم و آنتی لگاریتم را به‌دست آورد. آن‌گاه x^n را می‌توان آنتی‌لگاریتم $(n \log x)$ تعریف کرد.

در جبر دبیرستانی به‌طور معمول دانش‌آموزان $t^{1/2}$ و t^{-1} را پیش‌از آنکه از حساب دیفرانسیل چیزی خوانده باشند می‌بینند. توانهـای منفی و کسری ممکن است به‌نظر بی‌مصرف و بی‌هدف برسند. کاری‌که ما الان کردیم ارزش این‌توانها را نشان می‌دهد. سه‌عبارت t^2 و $1/t$ و $\sqrt{t}$ صورتهای متفاوت دارند. اگرشما باید سرعت مربوط به هریك از آنهـا را پیدا کنید به‌نظرتان سه مسألهٔ متفاوت خواهد رسید. اما اگر آن‌قدر دربارهٔ توانها بدانیدکه بتوانید این سه‌عبارت را t^2، t^{-1} و $t^{1/2}$ ببینید، سه‌مسألهٔ به‌ظاهر متفاوت یکی‌می‌شود. آنها هرسه، حالتهای ویژهٔ‌محاسبهٔ s'، سرعت قانون $s=t^n$ است. فرمول (۴) شامل همهٔ آنها است. ما هرسه مسأله را یکباره حل‌می‌کنیم. به‌این‌ترتیب کار ما دربارهٔ توانهای‌کسری ومنفی ثمرهٔ مفیدی بـه بار می‌آورد، مارا از رنج یادگرفتن سه قاعدهٔ متفاوت برای این حالتها نجات می‌دهد. درحساب دیفرانسیل و انتگرال دربسیاری از جاها توانهای منفی و کسری، نظیر این صرفه‌جویی درکار را موجب می‌شوند.

فصل پنجم

گسترش نتیجه‌های به‌دست آمده

لحظه‌ای به‌عقب بنگریم و معلومات خود را بررسی کنیم. در صفحه‌های گذشته چه چیزها یادگرفتیم؟ چیزی زیاد نیاموختیم! بخشی عمده از بحث، بیشتر به مفهومهای عمومی ـ مانند اینکه حساب دیفرانسیل و انتگرال، تندی و سرعت ومیزان رشد را بررسی می‌کند؛ تفکر دربارهٔ سرعت متغیر دشواریهایی دارد، نمودارها به تجسم مسائل کمك می‌کنند ـ اختصاص داشت. وقتی می‌پرسید به‌طور دقیق چه‌یادگرفته‌ایم حساب کنیم، بسیار خلاصه می‌توان جواب داد: فرمول (۴) را به‌دست آوردیم. محاسبهٔ سرعت قانون $s=t^n$ را یادگرفتیم. همین است و بس.

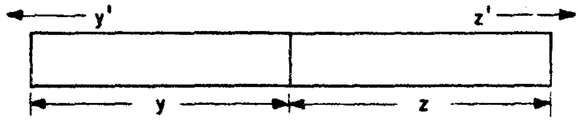
البته در حال حاضر نادر است که با فرمولی ساده مانند $s=t^n$ سروکار داشته‌باشیم. فرمولهای ریاضی وعلمی‌نیز اغلب پیچیده‌تر از $s=t^n$ هستند. باوجود این $s=t^n$ به‌نوعی مصالح ساختمانی می‌ماندکه ازآن فرمولهای پیچیده‌ترمی‌توان بناکرد. به‌مثل $s=16t^2$ [1] قانون سقوط سنگ بی‌سرعت اولیه و تحت‌تأثیر جاذبه

---

۱. دانش‌آموز دبیرستان ایرانی چون با سیستم متریك آشناتر است این فرمول را در سالهای آخر دبیرستان به‌صورت زیر یاد می‌گیرد.

$$s=\frac{1}{2}gt^2$$

که در آن g شتاب حاصل از نیروی جاذبهٔ زمین است و مقدار عددی آن $9{,}81 \frac{\text{متر}}{\text{ثانیه} \times \text{ثانیه}}$ است. فرمول درمتن‌کتاب با واحدهای انگلیسی فوت وثانیه داده



شکل ۱۷

است. اگر سنگی را با سرعت اولیهٔ ۴۰ فوت در ثانیه به‌بالا پرتاب کنیم، ارتفاع آن پس‌از t ثانیه با فرمول زیر داده می‌شود.[1]

$$s = ۴۰t - ۱۶t^{۲}$$

دراین فرمولها علاوه‌بر توانهای t، چیزهای دیگر هم وجود دارد. s' تنها با به‌کارگیری فرمول (۴) به‌دست نمی‌آید. باید بدانیم که درفرمول $s = ۴۰t - ۱۶t^{۲}$ باعلامت‌منها و عددهای ۴۰ و ۱۶ و درفرمول $s = ۱۶t^{۲}$ باعدد ۱۶ چه‌کار بکنیم.

پس طبیعی‌است سعی کنیم اصولی پیدا کنیم که ما را به‌جواب‌دادن به‌سؤالهایی مانند «قانون $s = ۵t^{۳} - ۱۱t^{۲} + ۸t + ۹$ را داده‌اند s' چیست؟» آماده کند. این یك عبارت ساده‌ای است که نظیر آن‌را درجبر دبیرستان بارها دیده‌ایم. پیدا کردن s' هرعبارتی نظیر این بسیار آسان است.

در بحث این مطلب مناسبت دارد مفهومی را کـه در صفحهٔ ۲۰ زیر عنوان میزانهای تغییر s آوردیم به‌کار گیرید. اکنون میله‌ای را در نظر بگیرید که از دو قسمت به‌درازاهای y و z سانتیمتر تشکیل شده است (شکل ۱۷) این‌دوقسمت ممکن است‌از دوفلز متفاوت‌ساخته شده‌باشد. فلزها را گرم می‌کنیم و به‌این‌ترتیب هرقسمت منبسط می‌شود. چه نمادهایی جهت نشان‌دادن میزان انبساط دو فلز مناسب خواهند بود؟ قسمت نخست درازای y سانتیمتر دارد. طبیعی است که میزان انبساط y را با نماد y' نشان دهیم. به‌همین‌طریق z' میزان انبساط z را نشان می‌دهد. فرض کنیم این اعداد y' و z' را می‌دانیم. به‌چه راهی می‌توانید انبساط درازای تمام میله را پیدا کنید؟ اغلب بی‌درنگ جواب می‌دهید: «میزانهای انبساط دو قسمت را جمع

---

[1]. فرمولهای $s = ۱۶t^{۲}$ و $s = ۴۰t - ۱۶t^{۲}$ را می‌توان با مشاهدهٔ سقوط یك سنگ به تجربه به دست آورد. در عمل بهتر است آزمـایشهای دیگری کنیم و بعضی قانونهای عمومی مکانیك را از آنها حدس بزنیم و ایـن حالتهای خصوصی را از آن قانونهای عمومی ریاضی به‌دست بیاوریم.

می‌کنیم» یعنی $y'+z'$ میزان انبساط درازای تمام میله است. میزان انبساط تمام میله از باهم جمع‌کردن میزانهای انبساط قسمتها به‌دست می‌آید.

می‌توان مثالهای بسیاری تصور کرد. به‌مثل اگر m عدهٔ مردان جهان و f عدهٔ زنان جهان باشد البته میزان افزایش مردان جهان‌را با m' و میزان افزایش زنان جهان را با f' نمایش خواهیم داد. اگر w جمعیت کل جهان باشد خواهیم داشت $w=m+f$ و w با میزان $w'=m'+f'$ افزایش پیدا می‌کند. شما می‌توانید مثالهایی دیگر برای خودتان طرح کنید.

به‌منظور مرجع درآینده این اصل ساده را به‌صورت فرمول می‌نویسیم:

فرمول (۵)

$$\text{برای} \quad s=y+z$$
$$\text{داریم} \quad s'=y'+z'$$

اما مبادا این فرمول را بنا به‌عادت حفظ کنید. به‌نفع خودتان است که بارها به‌راهی که مارا به‌این نتیجه رسانده است بیندیشید. آن‌وقت بی‌هیچ زحمتی آن را به‌خاطر خواهید داشت.

می‌توانیم این اصل را برای محاسبه‌ها به‌کار بریم. به‌مثل اگر $s=t^{2}+t^{3}$، s' چیست؟ در اینجا s حاصلجمع دو عضو t^{2} و t^{3} است. در گذشته میزان نمو این دو عضو را پیدا کردیم. می‌دانیم که t^{2} با میزان نمو $2t$ و t^{3} با میزان نمو $3t^{2}$ افزایش می‌یابد. میزان نمو مجموع آنها با جمع کردن میزانهای نمو به‌دست می‌آید. پس:

$$\text{برای} \quad s=t^{2}+t^{3}$$
$$\text{داریم} \quad s'=2t+3t^{2}$$

چند مثال. s' را درموارد زیر پیدا کنید.

(۱) $s=t^{2}+t^{4}$، (۲) $s=t^{3}+t^{6}$، (۳) $s=t^{2}+t^{5}+t^{7}$.

(مثال اخیر بی‌درنگ ازفرمول (۵) حاصل نمی‌شود، بلکه لازم است همان‌طرز تفکر را یك‌باردیگر به‌کار ببرید).

یك اصل مشابه دربارهٔ عبارتهایی که علامتهای منفی دارد به‌کار می‌رود. فرض کنید شخصی درحساب بانکی خود y تومان دارد اما بالغ بر z تومان قرض دارد. ثروت او در اینجا با $y-z$ تومان نمایش داده می‌شود. اگر موجودی این شخص در بانك با نرخ y' تومان در روز وقرضش نیز با نرخ z' تومان در روز افزایش یابد

دارایی او با چه نرخی افزایش می‌یابد؟ اغلب مردم بی‌اشکال به جواب $y'-z'$ می‌رسند و حاضرند درستی فرمول زیر را بپذیرند.

فرمول (۵ الف)

$$s=y-z \qquad \text{برای}$$

$$s'=y'-z' \qquad \text{داریم}$$

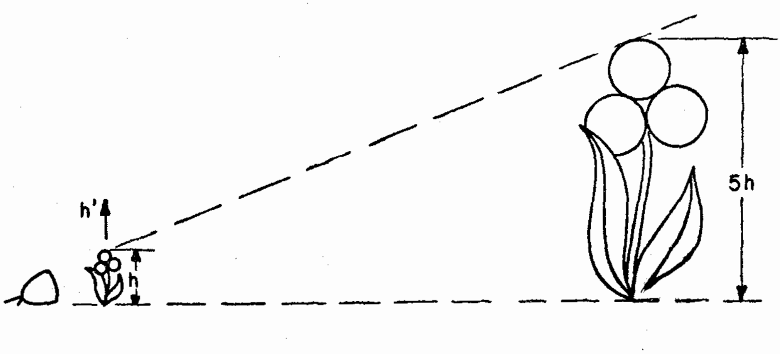
با گسترش‌دادن چنین مفهومهایی می‌توانیم میزان نمو فرمولهایی را که بعلاوه‌ها و منهاهای متعدد دارند حساب کنیم. به‌مثل:

$$s=t^۲-t^۳+t^۴+t^۵-t^۶ \qquad \text{برای}$$

$$s'=۲t-۳t^۲+۴t^۳+۵t^۴-۶t^۵ \qquad \text{داریم}$$

حالا می‌دانیم با عبارت $t^۲+t^۳-t^۷$ چگونه عمل کنیم اما هنوز نمی‌توانیم s'، سرعت قانون $s=۵t^۲$ یا هر عبارت نظیر این‌را پیداکنیم. برای این‌کار به‌یك اصل دیگر نیاز داریم.

فرض کنید گیاهی درحال‌رشداست چراغی سایهٔ‌گیاه را روی‌دیوار می‌اندازد. ممکن است چراغ را طوری قرار بدهیم که ارتفاع سایهٔ گیاه همواره پنج برابر قد خودگیاه‌باشد (شکل ۱۸). اگر h قدگیاه به‌سانتیمتر باشد ارتفاع سایه $۵h$ سانتیمتر خواهد بود. گیاه رشدمی‌کند. h' میزان رشد h است، سایه به‌چه‌سرعت نمو می‌کند؟ ارتفاع سایه همیشه ۵ برابر بلندی گیاه است. اگر گیاه یك سانتیمتر نمو کند سایه باید ۵ سانتیمتر بزرگتر شود. به نظر معقول می‌رسد که نمو سایه ۵ برابر نمو گیاه باشد بنا براین میزان نمو سایه باید $۵h'$ باشد. پس به‌نتیجهٔ زیر می‌رسیم:



شکل ۱۸

وقتی که h با میزان h' نمو می‌کند،

$5h$ با میزان $5\ h'$ نمو می‌کند.

حالا توجه می‌کنیم که ۵ ویژگی خاصی ندارد. اگر چراغ طوری قرار گرفته بود که ارتفاع سایه ۳ برابر ارتفاع گیاه بود به‌نتیجهٔ زیر می‌رسیدیم:

$3h$ با میزان $3h'$ نمو می‌کند.

و اگر جای چراغ را عوض کنیم به‌جمله‌هایی نظیر جمله‌های زیر می‌رسیم.

$2h$ با میزان $2h'$ نمو می‌کند،

$4h$ با میزان $4h'$ نمو می‌کند،

$7h$ با میزان $7h'$ نمو می‌کند.

کاملا روشن است که به‌جای تمام این‌جمله‌های حسابی می‌توانیم تنها یك‌جملهٔ‌جبری بگذاریم. اگر به‌جای انتخاب کم‌وبیش تصادفی عددهای ویژهٔ ۵، ۳، ۲، ۴، ۷ و... ما یك نماد جبری c به‌کار بریم، می‌توانیم همهٔ جمله‌های مذکور در بالا را به‌شکل زیر بنویسیم:

فرمول (۶)

وقتی که h با میزان h' نمو می‌کند،

آن‌گاه $c \cdot h$ با میزان $c \cdot h'$ نمو می‌کند.

باید توجه کرد که در اینجا c نمایندهٔ هر عدد ثابتی است مانند ۵، ۳، ۲، ۴، و ۷ وغیره.

حالا می‌توانیم جواب این سؤال «s': سرعت قانون $s = 5t^2$ چیست؟» را بدهیم. زیرا $5t^2$ همواره ۵ برابر t^2 است. ما می‌دانیم کــه میزان افزایش t^2، $2t$ است؛ پس $5t^2$ با میزان $5 \times 2t$ یعنی $10t$ نمو می‌کند. بنا بــراین اگر $s = 5t^2$، آن‌گاه $s' = 10t$.

مثال دیگر: s'، سرعت قانــون $s = 7t^4$ چیست؟ t^4 بــا میزان $4t^3$ افزایش می‌یابد. $7t^4$ بــا میزان $7 \times 4t^3$ یعنی $28t^3$ نمو می‌کند. پس اگــر $s = 7t^4$، $s' = 28t^3$.

تمرینها

s' را درحالتهای زیر پیدا کنید

$$s = 10t^2 \ (1)، \quad s = 20t^3 \ (2)، \quad s = 4t^4 \ (3)،$$
$$s = 8t^{100} \ (4)، \quad s = 2t^3 \ (5)، \quad s = 3t^2 \ (6).$$

پیداکردن s' در مثالهایی نظیر آنچه **دربالا آوردیم** کاری مکانیکی به‌نسبت ساده‌ای است که به‌تقریب همهٔ دانش‌آموزان به‌آسانی یاد می گیرند. نیازی نیست فرمول (۶) را به‌کار برند. درواقع دانش‌آموزان بسیاری هستندکه مثالهای‌مذکور در بالا را به‌درستی عمل می کنند اما اگر فرمول (۶) را به‌آنها نشان دهند آن را نمی‌شناسند.

من می‌توانستم نشان دهم که s'، سرعت $s = 5t^2$، را بدون اشاره به فرمول (۶) چطور به‌دست می‌آورند. درواقع من همین‌کار راکرده‌ام؛ اگر به‌پاراگرافی‌که با این سؤال شروع می‌شود: «حالا می‌توانیم جواب این سؤال راکه «s': سرعت قانون $s = 5t^2$ چیست؟»مراجعه‌کنید خواهید دیدکه هیچ‌اشاره‌ای به‌فرمول (۶) در آنجا نشده است. پس چرا بـه‌خود زحمت دادم و فـرمول (۶) را آوردم؟ بیشتر به‌منظور اینکه مرجع آسانتر باشد این کار را کردم. اگـر وقتی در آینده بگویم «بنا برفرمول (۶)» منظورم این نیست‌که فرمول (۶) را بنویسید و بی‌تفکر مقدارها را درآن بگذارید. بیشتر این گفته خلاصهٔ جمله‌ای مانند این خواهد بود: «آیاشکل گیاه و سایهٔ آن‌را به‌خاطر دارید و یادتان هست‌که چگونه برای پیداکردن میزان نمو $5t^2$ این شکل را به کار بردیم؟ حالا در مطالب این سطرها بیندیشید». به‌همین طریق منظور از «بنابرفرمول (۵) و فرمول (۵ الف)» این است که اندیشهٔمیله‌های فلزی را (کـه انتهای آنها بـه‌هم جوش خورده بود) بـه‌خاطر بیاورید و بدانید کـه همان اندیشه شما را قادر خواهدکرد تا هرگونه مسأله و راه‌عمل مورد بحث را بفهمید. درواقع در تمام ریاضیات فرمولها باید برای شما همین معنی را داشته باشد. فرمول دستورالعملی نیست‌که کورکورانه آن‌را به‌کار برند بلکه برای ایـن است‌که به‌خاطر شما بیاورد‌که این‌مثال دیگری است ازچیزی که آن‌را مطالعه‌کرده و فهمیده‌اید.

درعمل به‌طورمعمول ترکیبی ازفرمولهای (یا مفهومهای) (۵) و (۶) داریم. به‌مثل ممکن است بخواهیم s' قانون

$$s = 5t^2 + 7t^4$$

را پیداکنیم. دراینجا s از دوجزء تشکیل یافته است: $5t^2$ و $7t^4$. فرمول (۶) نشان می‌دهدکه به‌چه‌تندی هریك ازاین دوجزء نمو می کند. درواقع این میزانهای نمو را

درصفحهٔ ۵۱ حساب کردیم. فرمول (۵) می‌گوید که می‌توانیم میزان نمو s را با جمع کردن میزانهای نمو دو جزء به‌دست آوریم.

استدلال را می‌توانیم به‌طریق زیر بنویسیم:

از فرمول (۶)، میزان نمو $5t^2$ مساوی است با $10t$.

از فرمول (۶)، میزان نمو $7t^4$ مساوی است با $28t^3$.

با استفاده ازفرمول (۵) می‌توانیم این‌نتیجه‌ها را باهم ترکیب کنیم. پس $5t^2+7t^4$ دارای میزان نمو $10t+28t^3$ است.

درعمل، یافتن این‌نوع میزانهای نمو، کاری مکانیکی و بسیار ساده است و هرگز نمی‌بینید که استدلال آن با شرح کامل نوشته شده باشد.

تمرینها

s' را در حالتهای زیر پیدا کنید:

(۱) $s=10t^2+20t^3$، (۲) $s=2t^3+3t^2$،

(۳) $s=5t^7+2t^4$، (۴) $s=5t^7-2t^4$،

(۵) $s=10t^2+20t^3-5t^4$.

میزان نمو هرگونه عبارت چندجمله‌ای

عبارتی مانند $10t^4+7t^3-3t^2+5t+11$ را چند جمله‌ای می‌نامند. همهٔ عبارتهایی که درمثالهای اخیر به‌کار برده‌شد چندجمله‌ای‌هستند. درواقع اطلاعاتی که از فرمولهای (۴)، (۵)، (۵ الف) و (۶) به دست می‌آید برای یافتن میزان نمو هرچند جمله‌ای کافی است.

شگفت‌آور است که ساده‌ترین قسمت کار، بیشترین اشتباهها را شامل می‌شود. بسیاری از دانش‌آموزان می‌توانند توانهای بالاتر را عمل کنند. این دانش‌آموزان بی‌دردسر شروع می‌کنند.

$10t^4$ با میزان $40t^3$ نمو می‌کند،

$7t^3$ با میزان $21t^2$ نمو می‌کند،

$3t^2$ با میزان $6t$ نمو می‌کند.

سپس دردسرها شروع می‌شود و بسیاری ازاین دانش‌آموزان برای‌دانستن‌چگونگی نمو $5t$ در زحمت می‌افتند و جملهٔ ثابت بیش‌ازهمه آنها را دردسر می‌دهد.

اگر می‌خواهید به‌فصل ۲ بخش «پیداکردن‌سرعت درحالتهای ساده» رجوع کنید، خواهید دیدکه میزان نمو عبارتهای سادهٔ مختلف‌را پیدا کردیم. به‌مثل نتیجهٔ الف نشان می‌دهد که میزان نمو $10t$ برابر ۱۰ است. در صفحهٔ ۲۳ امیدوارم خودتان پیدا کرده باشید که میزان نمو $20t$ مساوی ۲۰ است‌که میزان نمو $30t$ مساوی ۳۰ است... امیدوارم که‌شما نتیجه‌های سؤالهای پیشین را در تمرین ۵ صفحهٔ ۲۳ جمع‌آوری کرده‌اید و به‌این تعمیم جبری رسیده‌اید که میزان نمو kt مساوی k است. پس در سؤال ما $5t$ با میزان ۵ نمو می‌کند.

جملهٔ ثابت ۱۱ ازهمه ساده‌تراست. ۱۱ عدد ثابت‌است. هرگز نمو نمی‌کند. اگر $s = 11$، آن‌گاه $s' = 0$. اگر باز به‌عقب برگردید و به‌صفحه‌های ۲۲ تا ۲۴ رجوع کنید خواهید دیدکه جملهٔ ثابت هیچ اثری برجواب نهایی ندارد.

به‌مثل دو نتیجهٔ زیر را با هم مقایسه کنید.

نتیجهٔ الف: اگر

$$s = 10t \text{، آن‌گاه } s' = 10$$

نتیجهٔ ب: اگر

$$s = 10t + 3 \text{، آن‌گاه } s' = 10.$$

$+3$ در $s = 10t + 3$ هیچ اثری درمحاسبهٔ s' ندارد. اگر اتومبیلی طبق قانون $s = 10t$ و اتومبیل دیگر طبق قانون $s = 10t + 3$ حرکت کنند، اتومبیل دوم همواره ۳ کیلومتر جلوتراز اتومبیل اول خواهدبود. فاصلهٔ بین‌آنها تغییر نمی‌یابد. یعنی هردو اتومبیل با یك سرعت حرکت می‌کنند. به‌این علت، با آنکه قانونهای مربوط به s متفاوت هستند قانون مربوط به s' درنتیجه‌های الف و ب یکی است.

بنابراین‌کل بحث، مسألهٔ پیداکردن s' برای قانون

$$s = 10t^4 + 7t^3 - 3t^2 + 5t + 11$$

به‌قرار زیر است:

میزان نمو $۱۰t^۴$ برابر است با $۴۰t^۳$،

میزان نمو $۷t^۳$ برابر است با $۲۱t^۲$،

میزان نمو $۳t^۲$ برابر است با $۶t$،

میزان نمو $۵t$ برابر است با ۵،

میزان نمو ۱۱ برابر است با ۰.

اینها میزانهایی هستند که طبق آنها قسمتهای متفاوت نمو می‌کنند؛ چون طبق اصول فرمولهای (۵) و (۵ الف) این میزانها را ترکیب کنیم می‌بینیم که $۱۰t^۴+۷t^۳-۳t^۲+۵t+۱۱$ با میزان $۴۰t^۳+۲۱t^۲-۶t+۵+۰$ نمو می‌کند. بنابراین $s'=۴۰t^۳+۲۱t^۲-۶t+۵$.

در عمل مناسبتر است که میزانهای نمو قسمتهای مختلف را زیر فرمول s به‌طریق زیر بنویسید:

$$s=۱۰t^۴+۷t^۳-۳t^۲+۵t+۱۱$$
$$\quad\;\; ۴۰t^۳ \quad ۲۱t^۲ \quad ۶t \quad ۵ \quad ۰.$$

سپس می‌توانیم عبارت s' را به‌سادگی با نوشتن بعلاوه و منها از روی فرمول s تشکیل دهیم. به‌این‌ترتیب داریم

$$s=۱۰t^۴+۷t^۳-۳t^۲+۵t+۱۱$$
$$s'=۴۰t^۳+۲۱t^۲-۶t+۵+۰.$$

بدیهی است $+۰$ در آخر تفاوتی در جواب به‌وجود نمی‌آورد. با وجود این دانش‌آموزان مبتدی بهتر است، تا هنگامی که در این گونه عملیات ورزیده‌نشده‌اند، آن را بنویسند. اشتباه معمولی که دانش‌آموزان مرتکب می‌شوند این است که ۱۱ را درسطر پایین می‌نویسند. به‌این‌ترتیب جواب نادرست زیر را به‌دست می‌آورند.

$$s'=۴۰t^۳+۲۱t^۲-۶t+۵+۱۱.$$

این جواب البته غلط است. ۱۱ با نرخ ۱۱ نمو نمی‌کند. عدد ۱۱ همواره ۱۱ می‌ماند و تغییر نمی‌یابد، نموی ندارد. بنابراین نمو آن صفر است.

اگر به‌آنچه عمل می‌کنید بیندیشید کمتر احتمال دارد که چنین خطایی مرتکب شوید. زیرا در زیر هرجملهٔ عبارت s میزان نمو آن جمله‌را می‌نویسید؛ سپس میزانها

را ترکیب می‌کنید تا میزانی را که تمام عبارت با آن نمو می‌کند به‌دست بیاورید. یك عدد ثابت مانند جملهٔ ۱۱ درمثال بالا قسمتی است که مقدار ثابت دارد و میزان نمو آن صفر است:

زمان، t	۰	۱	۲	۳	۴
مقدار قسمت ثابت	۱۱	۱۱	۱۱	۱۱	۱۱

از طرف دیگر جملهٔ $5t$ قسمتی را نشان می‌دهد که نمو می‌کند:

زمان، t	۰	۱	۲	۳	۴
مقدار $5t$	۰	۵	۱۰	۱۵	۲۰

قسمتی که با جملهٔ $5t$ نشان داده شده است پیوسته با میزان ۵ نمو می‌کند.

بهتر است در ابتدا بدون شتاب کار کنید. از صرف وقت برای تفکر دربارهٔ تفاوت بین یك جملهٔ متغیر مانند $5t$ و یك جملهٔ ثابت مانند ۱۱ واهمه نداشته باشید. جدولهایی مانند جدولهای بالا تشکیل دهید یا شکلهایی بکشید که میله‌ای با طول ثابت ۱۱ سانتیمتر را نشان دهد که به میله‌ای با طول متغیر $5t$ سانتیمتر وصل شده است. هراندازه آهسته‌تر کار کنید اطمینان بیشتری خواهید داشت که کاری با معنی می‌کنید. چون کار را بدین طریق ادامه دهید عادتهای خوب کسب خواهید کرد و بی آنکه توجه کنید سرعت کارتان افزایش خواهد یافت. دانش‌آموزان بسیاری هستند که به‌فوریت جواب غلط را می‌نویسند! کار آنان به‌هیچ‌وجه ارزشی ندارد.

تمرینها

۰۱ اگر $s=12$، s' چیست؟ اگر $s=2t$، s' چیست؟ اگر $s=2t+12$، s' چیست؟

۰۲ اگر $s=7$، s' چیست؟ اگر $s=t^3$، s' چیست؟ اگر $s=t^3+7$، s' چیست؟

۰۳ اگر $s=8$، s' چیست؟ اگر $s=3t$، s' چیست؟ اگر $s=t^2$، s' چیست؟ اگر $s=t^2+3t+8$، s' چیست؟ s' را درحالتهای زیر پیدا کنید:

۰۴ $s=5t^2+4t+3$.

۰۵ $s=5t^2-4t+3$.

۶. $s = 2t^3 - 3t^2 - 10t + 100$.

۷. $s = 4t^{20} + 2t^{15} - 3t^{10} + 5t + 17$.

۸. $s = 10t^6 + 12t^5 - 15t^4 + 20t^3 - 30t^2 + 60t + 60$.

شاید برای به‌دست‌آوردن سرعت و بحث در عملیات به‌حل مثالهای بیشتری نظیر تمرینهای بالا نیازمند باشید. اما دربارهٔ مفهومهای مربوط به‌کار، مطلبی ناگفته نداریم. اگر بدانید که تمرینهای بالا راچگونه باید عمل کرد به‌این‌مبحث تسلط یافته‌اید. s به‌صورت هرچند جمله‌ای باشد s' یعنی میزان نمو آن را پیدا خواهید کرد.

یك کاربرد s'

در صفحهٔ ۴۸ گفتیم کــه اگر سنگی را با سرعت ۴۰ فوت در ثــانیه بــه‌بالا پرتاب کنیم، ارتفاع آن (مادام‌که در هواست) باقانون $s = 40t - 16t^2$ معلوم می‌شود. به‌تجربه می‌دانیم کــه در ابتدا سنگ بالا خواهد رفت، پس‌از مدتی به‌حالت سکون خواهد رسید و سپس سقوط خواهد کرد. می‌توانیم سؤالهایی نظیر سؤالهای زیــر طرح کنیم. (۱) چه‌مدتی سنگ به‌بالارفتن ادامه می‌دهد؟ (۲) درچه زمانی سنگ در مسیر خود درست پیش‌از سقوط به‌حال سکون درمی‌آید؟ (۳) سرعت آن یك ثانیه پس‌از پرتاب چه‌اندازه است؟ (۴) سرعت آن ۲ ثانیه پس از پرتاب چیست؟

ممکن است به‌بعضی‌ازاین سؤالها، به‌طریق ابتدایی بدون به‌کارگیری حساب دیفرانسیل و انتگرال جواب داد. شاید بتوان با تشکیل جدولی و ترسیم نموداری ـ پس‌از چند حدس ـ مدتی راکه سنگ به بالارفتن ادامه می‌دهد و زمانی راکه به نقطهٔ اوج‌می‌رسد پیداکرد. درمورد سؤالهای (۳) و (۴) که به‌سرعت‌مربوط‌می‌شود باید راه پردردسر عملیات حساب را، کــه ما درپیش برای برآورد سرعتها به‌کار بردیم، پیش بگیریم.

هرچهار سؤال چیزی وابسته به‌سرعت‌دارد، پس طبیعی است که روش‌حساب دیفرانسیل و انتگــرال را به‌کار بندیم[1] راه حساب دیفرانسیل ساده است و محاسبهٔ بسیار اندك لازم دارد.

پیش از هرچیز فرمول سرعت s' را پیدا می‌کنیم. چون $s = 40t - 16t^2$،

---

۱. بعضی از دانش‌آموزان بــا استعمال فرمولهای مکانیك، حساب دیفرانسیل را کنار می‌گذارند. اما چــون روش حساب دیفرانسیل ساده‌ترین راه اثبات فرمولهای مکانیك است، درواقع این‌کار دانش‌آموزان تفاوتی زیاد پیش نمی‌آورد.

$s' = ۴۰ - ۳۲t$. نخست به سؤال (۲) پاسخ می‌دهیم. زمانی سنگ درحال سکون است که سرعتش صفر باشد، یعنی $s' = ۰$، پس باید پیدا کنیم درچه‌زمانی $۴۰ - ۳۲t$ صفر می‌شود. یعنی‌معادلهٔ $۴۰ - ۳۲t = ۰$ را باید حل کنیم. این معادله به‌آسانی حل می‌شود و جواب $t = ۱\frac{۱}{۴}$ را به‌دست می‌دهد. بنابراین پس از $۱\frac{۱}{۴}$ ثانیه سنگ به‌اوج صعود می‌رسد.

سؤال (۳): سرعت پس از یك ثانیه چیست؟ به‌زبان جبر یعنی مقدار s' به ازای $t = ۱$ چیست؟ برای جواب کافی است در معادلهٔ $s' = ۴۰ - ۳۲t$ بگذاریم $t = ۱$. نتیجه می‌شود به‌ازای $t = ۱$، $s' = ۸$. ازاین مقدار t سرعت سنگ پس از یك‌ثانیه به‌دست می‌آید. پس دراین‌لحظه سرعت سنگ ۸ فوت در ثانیه است.

سؤال (۴): سرعت پس‌از ۲ ثانیه چقدر است؟ در $s' = ۴۰ - ۳۲t$، t را ۲ می‌گیریم حاصل می‌شود $s' = - ۲۴$. علامت جواب،منفی است؛ معنی آن چیست؟ در صفحه‌های۱۸ و ۱۹ سرعت منفی را تعبیر کردیم. سرعت مثبت دلیل صعود سنگ است‌و سرعت منفی دلیل سقوط آن. دراینجا هردوحالت را به‌دست‌آوردیم: به‌ازای $t = ۱$ دیدیم $s' = ۸$ یعنی سنگ با سرعت ۸ فوت در ثانیه بالا می‌رود؛ به‌ازای $t = ۲$ داریم $s' = - ۲۴$ یعنی حالاسنگ با تندی ۲۴ فوت درثانیه پایین می‌آید.

این نتیجه‌ها معقول است. اگر سنگ در لحظهٔ $t = ۱\frac{۱}{۴}$ به‌اوج‌مسیر می‌رسد باید انتظار داشته باشیم که سنگ پیش‌از $t = ۱\frac{۱}{۴}$ ثانیه بالا برود و پس از $t = ۱\frac{۱}{۴}$ ثانیه همواره پایین بیاید. همین طور هم هست، $t = ۱$ پیش از $t = ۱\frac{۱}{۴}$ و $t = ۲$ پس از آن است. توافق همهٔ نتایجی که به‌دست آوردیم یك‌تصویر معقول و سازگار به‌وجود می‌آورد.

ضمن بحث سؤالهای دیگر، به‌سؤال (۱) جواب دادیم. سنگ بین $t = ۰$ و $t = ۱\frac{۱}{۴}$ بالا می‌رود. این نتیجه اطلاعات جبری ما را تأیید می‌کند. معادلهٔ $s' = ۴۰ - ۳۲t$ ممکن است به صورت $s' = ۳۲\left(۱\frac{۱}{۴} - t\right)$ نوشته شود. مادام که t کمتر از $۱\frac{۱}{۴}$ است مقدار s' مثبت است و بنابراین سنگ بالا می‌رود.

در اینجا ما یك فرمول ساده به‌کار بردیم تا به یك سؤال ساده پاسخ دهیم. درکاربرد حساب دیفرانسیل و انتگرال درمکانیك و نجوم فرمولهای بسیار پیچیده‌تر و مسأله‌های بسیار سخت‌تر پیش می‌آید. اما این مثال شاید یك آگاهی ضعیف از راهی که درحساب دیفرانسیل و انتگرال در کاربردهای علمی به‌کار گرفته می‌شود، به‌دست بدهد.

فصل ششم

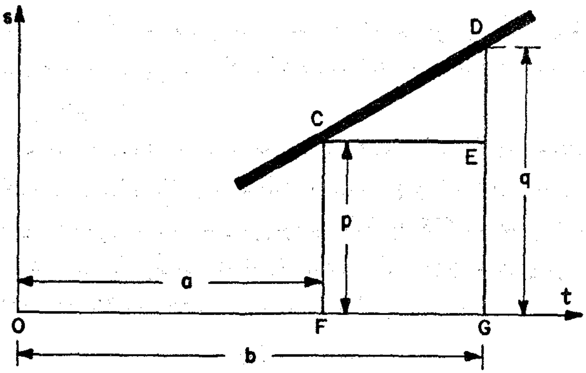
حساب دیفرانسیل و نمودارها

جلوتر در این کتاب دیدیم که یك رابطهٔ نزدیك میان حرکت و خمها وجود دارد. ممکن‌است جسم متحرکی درست کنیم که اثری ازمرکب روی‌کاغذ بگذارد. آن گاه این‌خم شرحی ازچگونگی حرکت متحرك به‌ما می‌دهد. چون خم‌را ازپشت شکافی باریك بگذرانیم، دوباره می‌توانیم حرکت نقطه راکه بالا و پایین می‌رود ببینیم. یا می‌توانیم ماسوره‌ای مطابق شکل خم درست‌کنیم (به‌صفحه‌های ۱۳ و ۱۴ رجوع کنید).

خم یك شرح کامل از حرکت است، هر مطلبی دربارهٔ حرکت را می‌توان از مطالعهٔ خم به‌دست آورد.

تاکنون ما بیشتراز حرکت گفتگو کرده‌ایم. s' را به‌معنی سرعت جسم متحرك گرفته‌ایم. اما سرعت‌جسم درهرلحظه به‌طریقی ازشکل خم مربوط دیده‌می‌شود. پس باید امکان داشته باشد تعبیرکنیم‌که s' یك‌ویژگی هندسی خم را توصیف می‌کند.

ما تا اینجا، دوبار این مسأله را بحث کرده‌ایم (صفحه‌های ۱۳ و ۲۶). به این نتیجه رسیده‌ایم که سرعت متحرك با سراشیبی خم ارتباط دارد. پس s' باید اندازهٔ سراشیبی خمی را معلوم‌کند. مفهوم عمومی دراینجا به‌حدکافی روشن است. اگر s' بزرگ، به فرض $s' = 100$، باشد باید سراشیبی خم زیاد باشد. اگر s' کوچك، به‌فرض $s' = 1/4$، باشد سراشیبی خم باید کم باشد. اگر $s' = 0$، خم باید افقی باشد. اما «سراشیبی‌زیاد» یا «سراشیبی کم» عبارتهای به‌نسبت مبهم‌هستند. از طرف دیگر مقادیر s' کاملا دقیق هستند. وقتی که می‌گوییم $s' = 100$ یا $s' = 1/4$ هیچ ابهامی درکار نیست. آیا راهی وجود داردکه بتوانیم سراشیبی‌خم



شکل ۱۹

را با همان دقت تعیین کنیم؟ برای جواب‌دادن به‌این‌سؤال مطالبی راکه گذشت از نظر می‌گذرانیم و می‌کوشیم هرگام را برحسب خمها تعبیر کنیم نه برحسب اجسام متحرك.

بررسی سرعتها را با مطالعهٔ سرعت‌ثابت شروع کردیم. وقتی جسمی باسرعت ثابت حرکت می‌کند خم مربوط به‌آن خط مستقیم است. حالا راه استدلالی را پیش می‌گیریم که برای به‌دست‌آوردن فرمول (۱) در صفحهٔ ۱۷ انتخاب کرده بودیم.

در آنجا با جدول کوچك زیر شروع کردیم

t	a	b
s	p	q

اطلاعاتی‌که دراین جدول درج است درنمودار شکل ۱۹ نمایان است.
خط CD ضبط حرکت جسم است. نقطهٔ C روی نمودار دارای مختصات (a, p) است و نشان می‌دهد وقتی $t=a$، $s=p$. به‌همان طریق، نقطهٔ D روی نمودار نشان می‌دهد که وقتی $t=b$، $s=q$. در فرمول (۱)، v را اندازهٔ سرعت گرفتیم. اکنون چون به‌نماد s' عادت کرده‌ایم فرمول (۱) را به‌صورت زیر می‌نویسیم

$$s'=\frac{q-p}{b-a}\,.$$

این نتیجه در آغاز از اینکه سرعت را مساوی بـا «خارج قسمت مسافت برزمان»

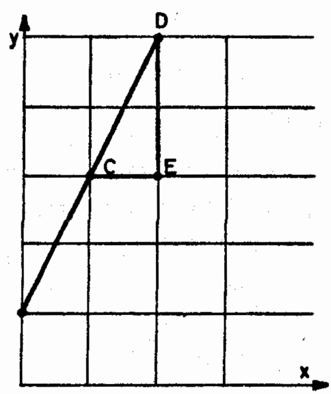
گرفتیم به‌دست آمد. آیا ما می‌توانیم تعبیری هندسی برای معادلهٔ بالا پیدا کنیم؟ آیا می‌توانیم قطعه خطهایی پیدا کنیم که طول آنها $q-p$ و $b-a$ باشد و نسبت آنها را درنظر بگیریم؟

این یك مسألهٔ دشوار نیست. چون $OF=a$ و $OG=b$، آشکار است که $FG=b-a$. چون $FGEC$ یك مستطیل است طولهای CE و FG با هم برابرند. پس برای تعبیر هندسی عدد $b-a$ می‌توانیم FG یا CE هرکدام‌را مناسبتر دیدیم به‌کار ببریم. همچنین طول هریك از خطهای CF و EG مساوی p است. چون $DG=q$، $q-p=DG-EG=DE$. بنابراین

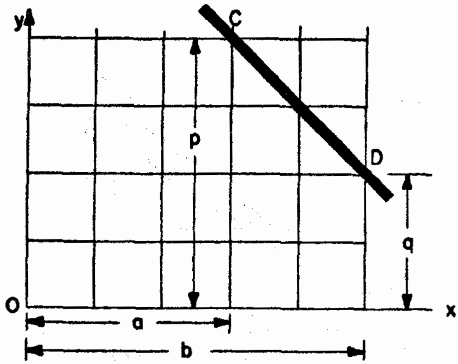
$$\frac{q-p}{b-a}=\frac{DE}{CE}$$

نسبت DE به CE درواقع راهی برای اندازه‌گیری سراشیبی CD به‌دست می‌دهد. هرقدر این نسبت بزرگتر باشد سراشیبی خط بیشتر خواهد بود. بنابراین ما این نسبت‌را اندازهٔ سراشیبی انتخاب‌خواهیم کرد و آن‌را شیب خط خواهیم نامید.

مثال. شیب خط $y=۲x+۱$ چیست؟ نمودار $y=۲x+۱$ درشکل ۲۰ نشان داده شده است. C و D را دو نقطهٔ دلخواه روی خط انتخاب کنید من نقاط (۱ , ۳) و (۲ , ۵) را برگزیدم. پس $CE=۱$ و $DE=۲$. بنابراین $DE/CE=۲/۱=۲$. هرجفت‌دیگر ازنقاط‌را انتخاب کنیم به‌همین‌نتیجه خواهیم رسید. شیب خط ۲ است.



شکل ۲۰



شکل ۲۱

تمرینها

شیبهای خطهای (۱) $y=x$؛ (۲) $y=x+۱$؛ (۳) $y=۲x$ و (۴) $y=۳x$ را پیدا کنید.

درهمهٔ مثالهای بالا شیب یك‌عدد مثبت است. اما ممکن است نمودار به‌شکل ۲۱ باشد. دراین‌صورت $a=۳$، $b=۵$، $p=۴$ و $q=۲$، و

$$\frac{q-p}{b-a}=\frac{۲-۴}{۵-۳}=\frac{-۲}{۲}=-۱$$

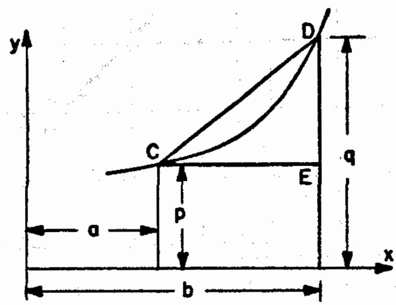
پس شیب این خط ۱ — است. می گوییم خط CD درشکل ۱۹ «بالارو یاصعودی» است وخط CD درشکل ۲۱ «پایین‌رو یا نزولی» است. وقتی خطی پایین‌رو دارید باید منتظر باشید که شیب‌منفی باشد درست همان‌طور که برای‌سرعت‌جسم سقوط کننده سرعت منفی به‌دست آوردیم.

تمرینها

شیبهای این خمها را پیدا کنید: (۵) $y=۵-x$؛ (۶) $y=۱۰-۲x$

شیبهای خمها

وقتی که سرعت را مطالعه می کردیم با راه ساده‌ای کــه در درسهای حساب به‌کار می‌رود. آغازکردیم؛ ببینید متحرك چند کیلومتر راه رفته است؛ ببینید درچند ساعت



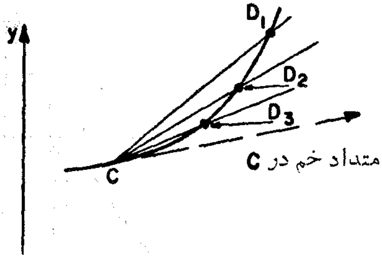
شکل ۲۲

این مسافت را پیموده است. عدد نخستین را به عدد دوم تقسیم کنید. این طرز عمل به‌اختصار با این جمله بیان می‌شود: «سرعت،مسافت تقسیم برزمان است». با این‌عمل به‌فرمول (۱) رسیدیم:

$$s' = \frac{q-p}{b-a}$$

سپس دیدیم این فرمول برای مطالعهٔ متحرکی‌که حرکت نامنظم دارد، گاهی می‌ایستد گاهی به‌حرکت درمی‌آید گاهی به‌تندی حرکت می‌کند و گاهی به‌آرامی، مفید نیست. برای چنین متحرکی، جمع کل کیلومترهای طی‌شده تقسیم برعدد کل ساعتهای مدت حرکت فقط سرعت متوسط را به‌دست می‌دهد که ممکن‌است باسرعت واقعی در تمام لحظه‌های مسافرت فرقی بسیار داشته باشد. با درنظر گرفتن سرعت متوسط در فاصله‌های زمانی رفته رفته کوتاهتر ما از این مشکل رهایی یافتیم. چون فاصلهٔ زمانی رفته رفته کوتاهتر می‌شد سرعت متوسط به یك مقدار ثابت نزدیك می‌گشت. این مقدار را سرعت واقعی دریك لحظه نامیدیم.

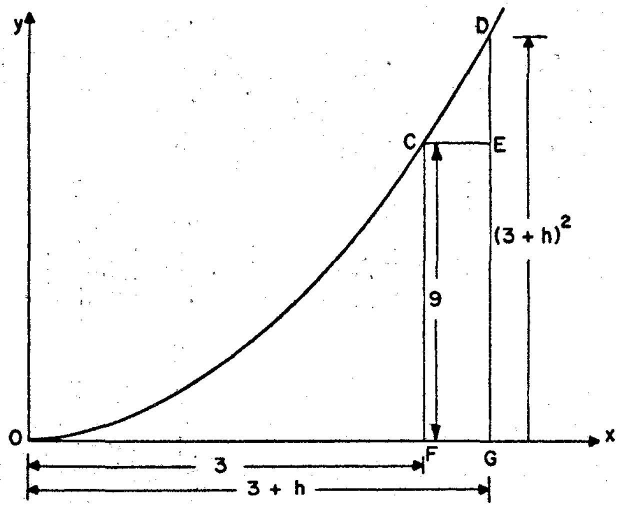
برای یافتن شیب خم دریك نقطهٔ آن می‌توانیم همان‌طرزعمل را به‌کار بریم. حالا طبیعی است به‌جای s و t بیشتر x و y به‌کار بریم که به‌طور معمول درترسیم خمها استعمال می‌شوند. فرض می‌کنیم خمی داریم که نقطهٔ $x=a$، $y=p$ را به نقطهٔ $x=b$، $y=q$ وصل می‌کند (شکل ۲۲). عبارت $(q-p)/(b-a)$ اندازهٔ شیب خط CD است. ما می‌توانیم این عبارت‌را با بیان ادا کنیم. چون ارتفاع D



شکل ۲۳

مساوی q است و ارتفاع C برابر p است، کمیت $q-p$ اندازهٔ ارتفاعی را معین می‌کند که برای رفتن از نقطهٔ C به نقطهٔ D لازم است. کمیت $b-a$ اندازهٔ طول CE را به‌دست می‌دهد. اگر از C به D برویم طول CE مسافتی را که درطول کاغذ طی کرده‌ایم معلوم می کند. اگر C و D دو محل واقعی بودند $b-a$ فاصلهٔ بین آن دو محل می‌شد، چنان‌که درنقشهٔ جغرافیا نشان داده می‌شود. زیرا یك نقشه را مثل اینکه کسی ازبالا به‌منطقه نگاه می کند درست می کنند. ارتفاع محل درجایی که روی نقشه ظاهر می‌شود تأثیری ندارد. به‌این ترتیب می‌توانیم بگوییم که $(q-p)/(b-a)$ «ارتفاع صعود تقسیم برفاصله روی نقشه» را نشان می‌دهد. به‌مثل اگر کسی ۲۰۰۰ کیلومتر به‌طرف شرق سفر کند و به‌ارتفاعش [از سطح دریا] سه کیلومتر افزوده‌شود کسر $(q-p)/(b-a)$ عبارت خواهد بود از ۳/۲۰۰۰. دراین کسر کل ارتفاعی که مسافر در سفرش صعود کرده است وکل مسافتی که طی کرده است به‌کار رفته‌اند. این کسر دربارهٔ چگونگی سراشیبی که در هر لحظه هواپیمای مسافر بالا رفته است چیزی بیان نمی کند. همچنین درشکل ۲۲ کسر $(q-p)/(b-a)$ شیب خط CD را به‌دست می‌دهدکه با سراشیبی خم CD درنقطهٔ C یا درنقطهٔ D مطابقت ندارد.

باوجوداین به‌نظر معقول می‌رسد که اگر در خم شکل ۲۲ نقطهٔ D رفته رفته به C نزدیکتر شود آن‌گاه شیب خط CD رفته‌رفته به شیب خم در نقطهٔ C نزدیکتر می‌شود. شکل ۲۳ را ببینید. دراین شکل D_1 اولین محلی است که برای D انتخاب کردیم؛ D_2 دومین محل و D_3 سومین محل‌است. از روی‌شکل‌می‌بینیم که هراندازه D را به C نزدیکتر بگیریم خط DC به‌امتداد خم در نقطهٔ C نزدیکتر می‌شود. اما در این شکل ممکن نیست D را طوری انتخاب کنیم که خط CD به‌واقع با خط نقطه‌چین منطبق شود. می‌توانیم CD را به‌خط نقطه‌چین هراندازه بخواهیم نزدیکتر کنیم اما درواقع هرگز به‌آن نمی‌رسیم.



شکل ۲۴

به‌مثل فرض کنید می‌خواهیم شیب سهمی $y=x^{۲}$ را در نقطهٔ $x=۳$ که در شکل ۲۴ دیده می‌شود پیدا کنیم. C نقطهٔ $(۳,۹)$ است یعنی $OF=۳$ و $FC=۹$. نقطهٔ D باید درجایی نزدیك C انتخاب شود. پس برای نقطهٔ D می‌گیریم $x=۳+h$. درحال‌حاضر کاری نداریم که h چه خواهد شد. البته باید برای h مقدارهای کوچك انتخاب کنیم. زیرا ما می‌خواهیم D نزدیك به C باشد. به‌این‌ترتیب $OG=۳+h$. حالا ببینیم که دربارهٔ GD چه می‌توان گفت؟ چگونه باید نمودار $y=x^{۲}$ را ترسیم کنیم؟ مقداری به x می‌دهیم و آن‌مقدار را مربع می‌کنیم، مقدار y به‌دست می‌آید که باید روی‌خط قائم به‌طرف بالا اندازه‌گیری شود. پیش‌ازاین ما دربارهٔ C همین عمل را انجام‌دادیم. فاصلهٔ FC را مساوی ۹ می‌گیریم زیرا OF مساوی ۳ است و ۹ مجذور ۳ است. به‌همین طریق OG برابر است با $h+۳$، پس طول قائم GD باید برابر مجذور $h+۳$ باشد. به‌این ترتیب $GD=(۳+h)^{۲}$.

حالا پیدا کردن DE/CE. ساده است.

$$CE=FG=OG-OF=(۳+h)-۳=h,$$

$$DE=GD-GE=GD-FC=(۳+h)^{۲}-۹=۶h+h^{۲}.$$

پس

$$\frac{DE}{CE}=\frac{6h+h^2}{h}=6+h.$$

بنابراین شیب خط CD برابر است با $6+h$. اگر h را به اندازهٔ کافی کوچك بگیریم می‌توانیم $6+h$ را هر اندازه بخواهیم به ۶ نزدیك کنیم. **به‌مثل اگر بخواهیم** شیب ۶٫۰۰۱ باشد می‌توانیم h را ۰٫۰۰۱ بگیریم. **هر اندازه h کوچکتر باشد شیب** CD به ۶ نزدیکتر می‌شود. پس عدد ۶ به‌روشنی نتیجهٔ کار ماست، نشان دادیم که ۶ شیب خط نقطه‌چین است. اما هرگز نمی‌توانیم CD را با خط نقطه‌چین به‌واقع منطبق کنیم. زیرا برای اینکه شیب CD را مساوی ۶ کنیم باید h را ۰ بگیریم. آن‌گاه $6+h$ برابر ۶ خواهد شد. اما $h=0$ این معنی را می‌دهد که D باید با C منطبق شود و در این حال دیگر معنی ندارد که دربارهٔ خط CD گفتگو کنیم. خطی که نقطهٔ C را به‌خود C وصل می‌کند معنی ندارد.

شاید توجه داشته‌باشید که جبری که هم‌اکنون برای پیدا کردن شیب $y=x^2$ به‌ازای $x=3$ به‌کار بردیم درست همان جبری است که در صفحه‌های ۳۳ و ۳۴ برای پیدا کردن سرعت $s=t^2$ در لحظهٔ $t=3$ به‌کار بردیم. این توجه کمك می‌کند تا تأکید شود که حرکت یك جسم و شکل خم دو راه مختلف برای تجسم یك مفهوم ریاضی است. وقتی که دربارهٔ یك مسألهٔ حساب دیفرانسیل فکر می‌کنید می‌توانید هریك از دو راه را که مناسبتر می‌دانید انتخاب کنید.

نیازی نیست بگوییم که همهٔ فرمولهایی که ما برای حرکت برحسب s و t پیدا کردیم در نمودارها برحسب x و y برقرار است. به‌این ترتیب نتیجهٔ اساسی یعنی فرمول (۴)،

اگر $s=t^n$ آن‌گاه $s'=nt^{n-1}$,

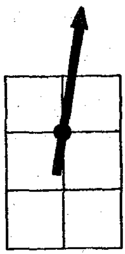
را می‌توانیم به‌صورت زیر بنویسیم

اگر $y=x^n$ آن‌گاه $y'=nx^{n-1}$.

تمام مثالهایی که از برای محاسبهٔ s' آوردیم بی‌درنگ y' مثالهای نظیر را به‌دست می‌دهد.

آگاهیهای اضافی که از حساب دیفرانسیل به‌دست آمده‌اند

اگر نمودار $y=x^2$ را با روش مقدماتی معمول ترسیم کنیم تنها نقطه‌هایی می‌یابیم



شکل ۲۶

شکل ۲۵

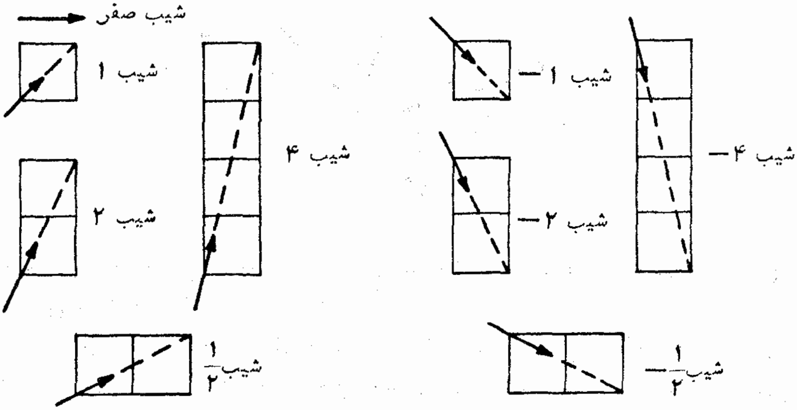
که خم از آنها می‌گذرد. اگر x را ۳ بگیریم $y=9$ به‌دست می‌آید پس نمودار از نقطهٔ (۳,۹) می‌گذرد. اما نمی‌دانیم درچه‌امتدادی نمودار از این‌نقطه می‌گذرد. شما تنها باید آن را با نگاه‌کردن به نقطه‌های دیگر حدس بزنید و ببینید حرکت خم چگونه به‌نظر می‌رسد.

حساب دیفرانسیل ما را از امتداد نمودار مطلع می‌کند. اگر $y=x^2$ باشد می‌دانیم که $y'=2x$ است. به‌ازای $x=3$ داریم $y=9$ و $y'=6$. پس خم از نقطهٔ (۹ , ۳) با شیب ۶ می‌گذرد.

خطی با شیب ۶ خطی است‌که به‌ازای هرواحد طول ۶ واحد درعرض بالا می‌رود. این‌خط درشکل ۲۵ دیده می‌شود. برای منظور ما نیازی به‌یك قطعه خط به این درازی نیست. البته قطعه خطی کوچك برای نشان‌دادن امتداد بسنده است. بنابراین به‌جای اینکه فقط نقطهٔ (۹ , ۳) را روی‌کاغذ نمودار تعیین‌کنیم می‌توانیم یك نقطه و یك سهم کوچکی مانند شکل ۲۶ ترسیم کنیم. خم از نقطهٔ (۹ , ۳) در امتدادی می‌گذرد که سهم نشان می‌دهد.

برای ترسیم نمودارها به‌سهمهایی که شیبهای‌دیگر را نمایش‌می‌دهد نیازمندیم. مجموعه‌ای از این شیبها درشکل ۲۷ نشان داده شده است.

اکنون فرض کنید می‌خواهیم نمودار $y=x^2$ را از $x=-2$ تا $x=+2$ رسم کنیم. نخست جدول صفحهٔ بعد را حساب می‌کنیم:

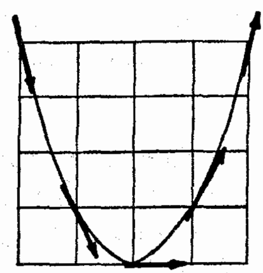


شکل ۲۷

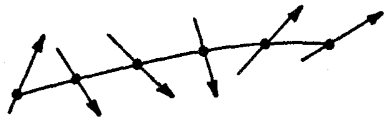
$y=x^۲$						$y'=۲x$					
x	۲−	۱−	۰	۱	۲	x	۲−	۱−	۰	۱	۲
y	۴+	۱+	۰	۱	۴	y'	۴−	۲−	۰	۲	۴

سپس نقطه‌های نمودار را با به‌کار گرفتن جدول y روی کاغذ رسم می‌کنیم و از روی جدول y' یك سهم درهر نقطه می‌کشیم. به‌این ترتیب خم شکل ۲۸ به‌دست می‌آید. سپس نقطه‌ها را به‌وسیلهٔ خم به‌هم وصل می‌کنیم. امتداد این‌خم موقع عبور از نقطه‌ها باید با امتداد سهمها تطابق داشته باشد.

اگر شما درتمرینی از این قبیل، نقطه‌هایی به‌دست بیاورید که روی خم قرار گرفته‌اند، اما سهمها از وسط خم، مانند شکل ۲۹، می‌گذرند احتمال دارد که نوعی اشتباه کرده باشید. باید محاسبه‌ها، طرز تعیین نقطه‌ها و نحوهٔ ترسیم سهمها را دوباره



شکل ۲۸



شکل ۲۹

بررسی کنید. در مسائل ساده دربارهٔ نمودارها انتظار دارید کـه نقطه‌ها و سهمها به‌راحتی با یك خم ساده تطابق داشته باشند.

ترسیم نقطه به‌نقطهٔ خمهای متعدد خسته‌کننده است. یکی از زیبائیهای حساب دیفرانسیل این است کـه ظاهر عمومی خم را بدون انجام این همه محاسبه و تعیین نقاط متعدد به‌ما آشکار می‌سازد. باوجوداین بهتر است یك یا دوخم را نقطه به‌نقطه درست به‌همان نحوی کـه گفتیم ترسیم کنید تا خودتان با y' به‌معنای اندازهٔ شیب به‌خوبی آشنا شوید.

تمرینها

۰۱ اگر $y = ۱۰x - x^۲$، آن‌گـاه $y' = ۱۰ - ۲x$. نمودار $y = ۱۰x - x^۲$ را از $x = ۰$ تا $x = ۱۰$، بـا روش ابتدایی یعنی فقط به‌کارگیری مقدارهای x و y، ترسیم کنید. سپس از مقدارهای y' جهت درج سهمها سود ببرید. امتحان کنید که این سهمها به‌خم مماس هستند.

۰۲ در نمودار $y = x^۲$ کـه در شکل ۲۸ داده شده است نقطه‌ها و سهمهای مربوط به $x = -۱/۲$ و $x = +۱/۲$ را بکشید و امتحان کنید که نقطه‌ها روی خم و سهمها برخم مماس هستند.

۰۳ نمودار $y = ۴x - x^۲$ را از $x = ۰$ تا $x = ۴$ با روشی کـه در متن آورده‌ایم رسم کنید؛ یعنی نخست نقاط و سهمها را رسم کنید و سپس با یك خم هموار نقطه‌ها را به‌هم وصل کنید.

باید دراینجا ازیك تعبیر غلط‌ممکن احتراز شود. گاهی دانش‌آموزان نمودار $y = x^۲$ را با روش زیر ترسیم می‌کنند: $y' = ۲x$ را به‌دست می‌آورند، آن‌گـاه آخرین عبارت یعنی $۲x$ را می‌بینند وباخود می‌گویند «نمودار $۲x$ یك خط مستقیم است». پس یك خط مستقیم رسم می‌کنند و آن را جواب مسأله می‌انگارند.

بنابراین باید تأکید کنیم که هدف کاری که زیر عنوان «آگاهیهای اضافی که از حساب دیفرانسیل به‌دست آمده‌اند» انجام دادیم عبارت بود از ترسیم نمودار $y = x^۲$. شما می‌دانید که نمودار $y = x^۲$ یك سهمی است. بنابراین آنچه در آخر کار به‌دست می‌آوریم باید همان سهمی باشد. نمودار $y = x^۲$ چیزی ثابت است و به‌دانش‌آموزی که آن‌را ترسیم می‌کند، یا به‌معلومات آن دانش‌آموز، بستگی ندارد. تازه به‌نظر می‌رسد برخی از دانش‌آموزان آماده‌اند باور کنند که چون این نمودار را در کلاس جبر رسم کنند جواب صحیح یك سهمی است و چون آن‌را در کلاس حساب دیفرانسیل و انتگرال رسم کنند جواب صحیح یك خط است. شاید دانش‌آموزان احساس می‌کنند که معلمی وقتی خم رسم می‌کنند خوشحال می‌شود و معلم دیگر خوشحال می‌شود اگر خط مستقیم بکشند. به‌این ترتیب دانش‌آموزان سعی می‌کنند همه را از خود راضی نگه دارند. اما هدف ریاضیات خشنودکردن مردم نیست. منظور ریاضیات این است که حقیقت را دریابند و آن‌را چنان که درواقع هست بشناسند. یك مرتبه که یقین کردید که نمودار $y = x^۲$ یك خم است دیگر در هیچ موردی شما نباید آن‌را یك خط رسم کنید.

معادلهٔ $y' = ۲x$ همان کاری را می‌کند که عنوان بخش وعده می‌دهد: این معادله بعضی آگاهیهای اضافی دربارهٔ سهمی $y = x^۲$ به‌ما می‌دهد. معادلهٔ $y' = ۲x$ به‌هیچ‌وجه با معادلهٔ $y = x^۲$ در تناقض نیست. با خود معادله می‌توانید نقاط را رسم کنید. آن‌گاه با معادلهٔ $y' = ۲x$ می‌توانید سهمهای کوچك را در این نقطه‌ها بکشید و امتداد سهمی را در آن نقطه‌ها معلوم سازید. اطلاعی که دو معادله می‌دهند از یك نوع نیست. کمیت y به‌شما می‌گوید چه‌اندازه نقطه بالای محور OX است. کمیت y' امتداد خم را می‌نمایاند.

همین تمایز را می‌توان برحسب اجسام متحرك تشخیص داد. در آنجا دومعادلهٔ $s = t^۲$ و $s' = ۲t$ داریم. کمیت s محل جسم‌را به‌شما نشان‌می‌دهد و کمیت s' تندی حرکت آن‌را معلوم می‌کند.

به‌نظر می‌رسد که در اندیشهٔ دانش‌آموزان دو موضوع مسافت پیموده شده و تندی درهم تداخل می‌کنند. مسافت پیموده‌شده با $t^۲$ نشان داده می‌شود؛ تندی نیز با $۲t$. بعدها ما یك کمیت سومی را هم خواهیم دید: شتاب، بنابراین اهمیت دارد دانش‌آموز توجه کند که دربارهٔ چه چیز صحبت می‌کند.

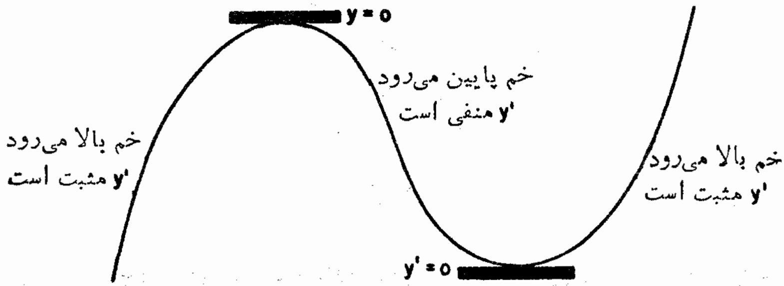
راستی من فکر می‌کنم دانش‌آموزانی که خط‌مستقیم ترسیم می‌کنند یك‌سؤال دیگر را جواب می‌دهند. اگر از شما نمودار $s = t^۲$ را بخواهم درواقع خواست من از‌شما این است که نموداری را رسم کنید که از روی آن جای‌متحرك درهرزمان

خوانده شود. ایـن نمودار سهمی است. امـا می‌توانم به‌جای آن از شما بخواهم نموداری بکشید که بتوانم از روی آن تندی متحرك را در هرلحظه بدانم. این یك خواست متمایز است. سرعت با $2t$ داده شده است و نمودار سرعت برحسب زمان یك خط مستقیم است. پس نمودار خط‌مستقیم جواب صحیح این‌خواست دوم‌است. اما به‌عنوان جواب خواست اول غلط است.

به‌نظر می‌رسد که هم در ریاضیات وهم درغیر آن‌مردم مرتکب اشتباه‌می‌شوند زیرا فکر آنان ازیك سؤال به‌سؤال دیگر متوجه می‌شود. درآغاز به‌سؤال (الف) جواب می‌دهند و درنیمه راه فکرشان به سؤال (ب) معطوف می‌شود. لازم به گفتن نیست که جواب بی‌معنی است. برای همهٔ ماکم‌وبیش این اشتباه رخ می‌دهد. قسمت مهمی ازتمرینهای فکری برای‌اجتناب از این اشتباه است. اغلب‌مردم درجواب‌دادن به‌سؤال یا در حل مسأله شتاب می‌کنند. اما به‌راستی ارزش داردکه پیش از اقدام به‌جوابگویی به‌دقت ببینید سؤال چیست و آن‌را درمغز خود تثبیت کنید؛ مغز کلام را با یك یا دوجمله روی کاغذ یادداشت کنید. یا طرحی کوچك بریزید تا معنی‌سؤال را روشن کند؛ اگرمی‌توانید ببینید که قسمتی‌ازجواب چه خواهدبود آن‌رانیز یادداشت کنید. این روش از بسیاری‌از اشتباهها جلوگیری خواهدکرد. به‌مثل این بخش بااین بحث شروع شدکه چگونه درترسیم نمودار $y = x^2$ حساب دیفرانسیل به ماکمك می‌کند. از پیش چیزی دربارهٔ نمودار $y = x^2$ می‌دانید. می‌دانید کـه این نمودار یك‌سهمی‌است یا حداقل می‌دانیدکه خط‌مستقیم نیست بلکه چیزی به‌شکل حرف U است. بسیار خوب‌جوابی که درآخر خواهید داد باید چیزی مانند U باشد، آن‌گاه اگر درنیمهٔ‌راه‌کار شما عبارت‌خطی $2x$ ظاهر شودو به‌خاطر شما بگذردکه‌نمودار $2x$ یك‌خط مستقیم است، مرتکب اشتباه نخواهید شد. شما می‌دانیدکه درپی‌چیزی هستید که شکل U دارد نه درپی خطی مستقیم. این‌توجه‌داشتن‌که‌کلا درپی چه هستید در ریاضیات اهمیت بسیار دارد؛ ما همه در محاسبه و تفکر اشتباههایی می‌کنیم و تنها به‌علت‌اینکه این آگاهی مبهم را از آنچه باید انتظار داشته باشیم در خاطر داریم می‌توانیم اشتباهها راکشف کنیم. بعد از یك اشتباه به‌طور معمول موقعی می‌رسدکه نتیجه‌ها به‌قدری مسخره‌آمیز می‌شوندکـه متوجه می‌شویم در جایی لغزشی صورت گرفته است.

نمودارها بدون ترسیم نقاط

ترسیم نقطه‌ها کاری کسالت‌آور است و حتی روش ترسیم نقطه‌ها با سهمها، همین که



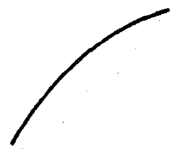
شکل ۳۰

تازگی آن از بین برود، بهتر از آن نیست. چنان که در پیش گفته شد حساب دیفرانسیل ما را قادر می‌سازد که یك مفهوم کلی از نمودار یك معادله را بدون ترسیم نقطه و استعمال کاغذ شطرنجی به‌دست آوریم و تصور کنیم.

روش، بستگی به‌مطلبی دارد که در پیش گفته شد: در جایی که خم بالا می‌رود y' مثبت است و موقعی که خم در لحظه‌ای افقی است y' صفر است و زمانی که خم پایین می‌رود y' منفی است (شکل ۳۰).

این مطلب را می‌توانیم از روی نمودار $y = x^۲$ که در شکل ۲۸ آمده است روشن کنیم. $y' = ۲x$، پس y' منفی است وقتی x منفی است؛ y' صفر است وقتی $x = ۰$؛ مثبت است وقتی x مثبت است. این مطلب موافق با شکل خم است. تا زمانی که x منفی است خم پایین می‌رود؛ وقتی $x = ۰$، خم لحظه‌ای افقی است؛ وقتی x مثبت است خم بالا می‌رود. فقط با امعان نظر در معادلهٔ $y' = ۲x$ ممکن است ظاهر کلی نمودار را توصیف کرد. علامت y' را در نظر می‌گیریم. چه‌موقع y' مثبت است؟ فقط وقتی که x مثبت است. پس شیب فقط موقعی که x مثبت است رو به‌بالا است. چه‌موقع y' منفی است؟ فقط موقعی که x منفی است. پس فقط موقعی که x منفی است شیب رو به‌پایین است. چه‌موقع y' صفر است. فقط وقتی که $x = ۰$ است. پس خم فقط در نقطهٔ $x = ۰$ افقی است.

این روش نیرومندتر از روش ترسیم نقاط است. نمودار را بین $x = -۲$ و $x = +۲$ رسم کردیم. آنچه می‌دانیم این است که خارج از این فاصله هر پیشامدی امکان دارد. بین $x = ۱۰۰$ و $x = ۲۰۰$ خم ممکن است تغییر جهت بدهد. به پیچیده‌ترین صورت درآید. رسم خم بین $x = -۲$ و $x = ۲$ دربارهٔ آنچه با مقادیر بزرگ x پیش می‌آید اطلاعی نمی‌دهد. اما روش حساب دیفرانسیل این اطلاع



شکل ۳۱

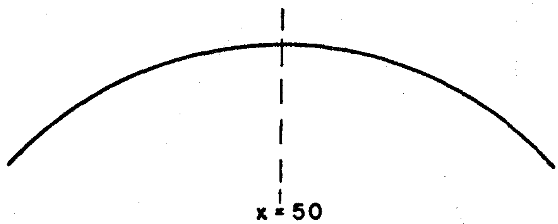
راتأمین می‌کند. $y' = ۲x$ به‌ازای‌هرمقدار مثبت x مثبت است. پس می‌توانیم مطمئن باشیم که هراندازه به‌طرف راست برویم خم به‌بالاروی ادامه خواهدداد. خم‌همواره بالا می‌رود زیرا y' در تمامی این منطقه مثبت است. به‌همین طریق می‌توان مطمئن شد که خم در تمام نقاط سمت‌چپ مبدأ نزول می‌کند، زیرا $y' = ۲x$، و $۲x$ به‌ازای همهٔ مقادیر منفی x، منفی است.

در آنچه گذشت وقتی از «بالارفتن» و «پایین آمدن» سخن گفتیم قراردادی را که‌اکنون شرح می‌دهیم رعایت کردیم. ما همواره فرض می‌کنیم که در جهت xهای فزاینده یعنی ازچپ به‌راست حرکت می‌کنیم. درنمودار جلوتر که اجسام متحرك را نشان می‌داد این قرارداد حرکت از چپ به‌راست در همه‌جا به کار رفت. زمانهای آغازی درچپ و زمانهای بعدی درسمت راست نشان داده‌شد. به‌این‌ترتیب‌نموداری مانند شکل ۳۱، نقطهٔ متحرکی‌را نشان می‌داد که درصفحه بالا می‌رود.

حالافرض کنید می‌خواهیم تصوری ازنمودار $y = ۱۰۰x - x^۲$ داشته‌باشیم. اگر روش ابتدایی را به‌کارمی‌بردیم وتنها خم را از $x = -۲$ تا $x = +۲$ ترسیم می‌کردیم جدول زیر به‌دست می‌آمد:

x	-۲	-۱	۰	۱	۲
y	-۲۰۴	-۱۰۱	۰	۹۹	۱۹۶.

ارقام مربوط به y همواره افزایش می‌یابد و اگر خم را فقط براساس ایـن ارقام ترسیم می‌کردیم ممکن بود حدس بزنیم که خم همواره به‌بالا می‌رود. اما درواقع دور ازفاصله‌های‌مطالعه‌شده در بالا چیزهای‌قابل توجه پیش‌می‌آید. حساب‌دیفرانسیل معلوم می‌کند این چیزها درکجا رخ می‌دهد و درآنجا چه اتفاق می‌افتد. از رابطهٔ $y = ۱۰۰x - x^۲$ ما $y' = ۱۰۰ - ۲x$ را پیدا می‌کنیم. می‌توانیم اول سؤال کنیم «آیا خم درجایی افقی‌است؟». خم افقی است وقتی که y' صفر است. پس باید ببینیم می‌توانیم x را طوری انتخاب کنیم که به ازای آن y' صفر شود. چنان که می بینیم



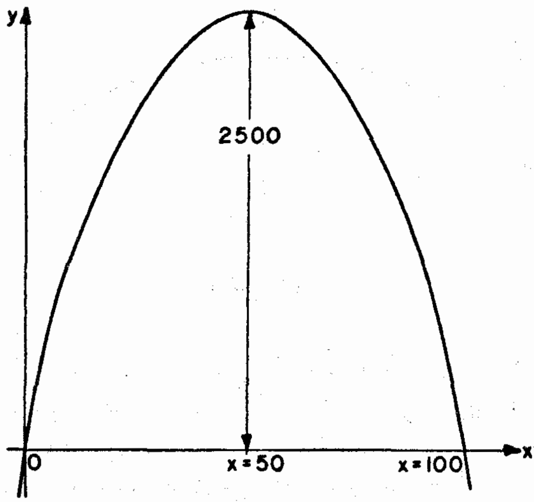
شکل ۳۲

$x = ۵۰$ مقدار مطلوب است. این وضع افقی ما را بر آن می‌دارد که ببینیم قبل و بعداز وضع افقی، خم به‌چه‌صورت درمی‌آید. اگر x بیش‌از ۵۰ باشد $۲x$ از ۱۰۰ بزرگتر و $۲x - ۱۰۰$ منفی خواهد شد. بنابراین در سمت راست $x = ۵۰$ خم همواره‌پایین می‌رود. به همین طریق می‌توانیم ببینیم که هرگاه x کوچکتر از ۵۰ باشد، y' مثبت است. پس خم همواره بالا می‌رود تا x به ۵۰ برسد. بنابراین کلیاتی از رفتار خم داریم که درجدول زیر نشان داده‌ایم:

مقدار x	کوچکتراز ۵۰	مساوی ۵۰	بزرگتر از ۵۰
مقدار y'	مثبت	۰	منفی
معنی	خم بالا می‌رود	خم افقی است	خم پایین می‌رود

از جدول به‌نظر می‌رسد که خم شکلی شبیه شکل ۳۲ دارد.

جدول ریخت عمومی خم‌را نشان می‌دهد. اما خم هنوز پادرهواست. ما نشان نداده‌ایم OX و OY کجا هستند. اگر بخواهیم نشان دهیم چطور خم نسبت به محورها قرارگرفته است باید برگردیم به‌روش ابتداییتر و به‌اختصار آن را به‌کار گیریم. یعنی به‌معادلهٔ اصلی y، بدون توجه به y'، که از حساب دیفرانسیل به‌دست آمده‌است، نگاه می‌کنیم. یك یا دونقطهٔ مهم برای‌متصل کردن خم به‌دستگاه مختصات رسم می‌کنیم. برای تعیین اینکه کدام نقطه‌ها بدون‌محاسبهٔ طولانی دربارهٔ وضع خم اطلاعات مفید به دست می‌دهند نیاز به نوعی قضاوت دارد. چون معادلهٔ $y = ۱۰۰x - x^۲$ را به‌صورت $y = x(۱۰۰ - x)$ نیز می‌توان نوشت طبیعی است آن‌دومقدار x را درنظربگیریم که y را صفر می‌کنند یعنی $x = ۰$ و $x = ۱۰۰$. باز طبیعی‌است که مقدار $x = ۵۰$ را درنظربگیریم که مربوط به‌اوج خم است. با گرفتن این سه‌مقدار به‌جدول کوچك زیر می‌رسیم:



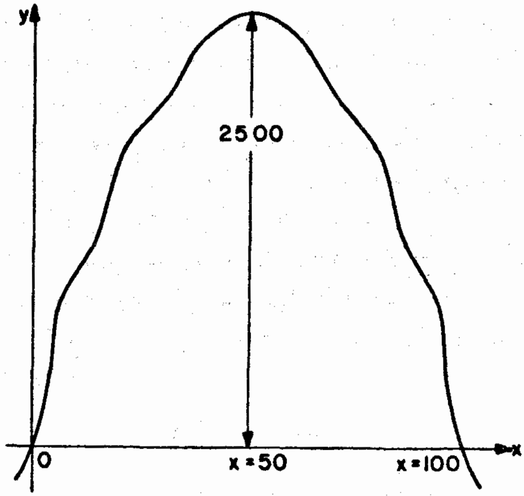
شکل ۳۳

x	۰	۵۰	۱۰۰
y	۰	۲۵۰۰	۰ .

این جدول سه‌نقطهٔ مفید خم را به‌دست می‌دهد و درشکل ۳۳ یك نمودار تقریبی با کمك این اطلاعات رسم می‌کنیم.

شاید در ترسیم خم یك عنصر خفیف حدس وجود دارد. همهٔ شواهدی که جمع آوری کردیم با ریخت‌خم شکل۳۴ سازگار است. این‌خم‌نیز به‌ازای مقادیر x کوچکتر از ۵۰ بالا می‌رود. خم به‌ازای $x=$ ۵۰ افقی است و وقتی‌که x بزرگتر از ۵۰ است پایین می‌رود و از سه نقطه نیز می‌گذرد. پس بنا بر آنچه که تاکنون ثابت‌کرده‌ایم نمودار ممکن است شکل ۳۴ باشد نه شکل ۳۳. درآینده روشی‌ارائه خواهیم دادکه به‌کمك آن می‌توانیم نشان دهیم که امکان ندارد شکل ۳۴ نمودار مطلوب باشد. بی‌آنکه منتظر این روش باشید شما می‌توانید خودتان‌را متقاعدکنید که نمودار مطلوب ما به‌شکل ۳۳ شبیه است و شباهتی با شکل ۳۴ ندارد. چمهای[1] شکل ۳۴ نشان می‌دهدکه شیب نمودار مداوم درحال نوسان است و مدام افزایش

۱. پیچ و خمها



شکل ۳۴

وکاهش می‌یابد. اما در بالا فرمول شیب نمودار یعنی $y' = 100 - 2x$ را به‌دست آوردیم. در این فرمول چیزی وجود ندارد که دلیل نوسان شیب باشد. چون x افزایش می‌یابد $2x$ مرتب بزرگتر می‌شود و در نتیجه $100 - 2x$ مرتب کاهش می‌پذیرد. بین $x = 0$ و $x = 50$ مقدار y' مرتب کم می‌شود و از ۱۰۰ به صفر می‌رسد. y' اندازهٔ شیب خم را به‌دست می‌دهد پس شیب در این قسمت خم مرتب می‌کاهد. دقت کنید تا از اشتباه بین y و y' که در پیش گفتیم پرهیز شود. بین $x = 0$ و $x = 50$ مقدار y افزایش و مقدار y' کاهش می‌یابد. اگر این نمودار کوهی را نشان بدهد کسی که از نقطهٔ $(0, 0)$ به نقطهٔ $(50، 2500)$ می‌رود در تمام مدت صعود می‌کند. این امر مربوط به این است که y افزایش می‌یابد. اما بالارفتن رفته‌رفته آسانتر خواهد شد. درابتدا کوه به‌تقریب قائم است، شیب y' برابر ۱۰۰ است. اما در قله، کوه هموار است شیب یعنی y' صفر است. ملایمترشدن شیب در بالارفتن، مربوط است به کاهش y'. درشکل ۳۴ وقتی که از $x = 0$ تا $x = 50$ کوه را می‌پیمایید، در تکه‌هایی به‌آسانی و در تکه‌هایی به‌دشواری بالا می‌روید. درشکل ۳۴ شیب در این قسمتهای منحنی رفته رفته ملایمتر نمی‌شود. پس این نمودار به معادلهٔ $y = 100x - x^2$ ارتباطی ندارد. به‌همین طریق اگر بررسی کنید که چطور در پایین آمدن بین $x = 50$ و $x = 100$ شیب تغییر می‌یابد خواهید دید که شکل ۳۳

وضع را بهتر از شکل ۳۴ نشان می‌دهد. بدیهی است همین طریق استدلال را که در شکل ۳۳ آوردیم می‌توان در بقیهٔ نمودار، که درشکل نشان نداده‌ایم، یعنی به‌ازای مقادیر منفی x درسمت چپ و مقادیر x بزرگتر از ۱۰۰ درسمت راست، به‌کاربرد.

به‌عنوان قاعده بهترین راه ترسیم نمودارهای ساده این است که نخست y' را حساب کنید تا ببینید به‌ازای چه‌مقادیری از x، y' صفر می‌شود. آن‌گاه می‌توان آنچه را میان این‌مقادیر x پیش می‌آید مطالعه کرد.

به‌مثل شاید مایل باشیم نمودار $y = x^{3} - 12x$ را بکشیم. در اینجا $y' = 3x^{2} - 12$. چه موقعی y' صفر می‌شود؟ معادلهٔ $3x^{2} - 12 = 0$ را تشکیل می‌دهیم و حل می‌کنیم و مقادیر $x = -2$ و $x = 2$ را به‌دست می‌آوریم. پس اطلاعات زیر را داریم:

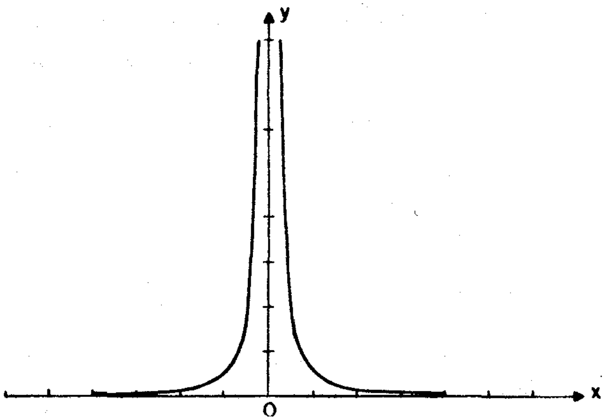
$$x \;\ldots\ldots\; -2 \;\ldots\ldots\; 2 \;\ldots\ldots$$

$$y' \;\ldots\ldots\quad 0 \;\ldots\ldots\; 0 \;\ldots\ldots$$

سه‌فاصله را باید درنظر بگیریم. y' را به‌ازای مقادیر x کمتراز -2 بررسی کنیم، y' را به‌ازای مقادیر x بین -2 و 2 بررسی کنیم و y' به‌ازای مقادیر x بزرگتر از ۲ بررسی کنیم.

طبیعی است که این فاصله‌هارا درنظر بگیریم زیرا اگر علامت y' از مثبت به منفی بدل شود، انتظار دارید که y' از صفر بگذرد. اما y' در این مواقع همیشه صفر نمی‌شود. اگر منحنی $y = 1/x^{2}$ را رسم کنید، خواهید دید که منحنی به‌ازای مقادیر منفی x بالا می‌رود (y' مثبت) و به‌ازای مقادیر مثبت x پایین می‌رود (y' منفی) (شکل ۳۵). پس چون x از صفر بگذرد علامت y' از مثبت به منفی تبدیل می‌شود. اما y' هرگز صفر نمی‌شود؛ منحنی هرگز به حالت افقی درنمی‌آید. چون از $x = 0$ بگذریم منحنی ناگهان از صعود با شیب زیاد به حالت نزول با شیب زیاد می‌جهد.

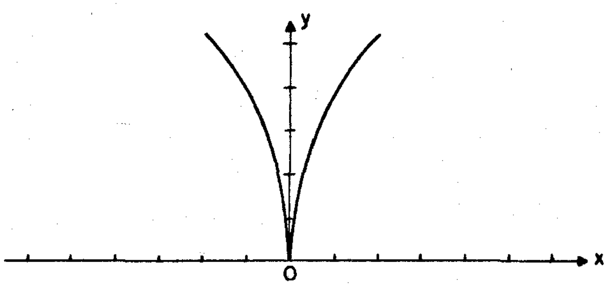
پس چنین جهشی حتی باچنین عبارت‌ساده مانند $1/x^{2}$ ممکن است پیش‌آید. $y = \sqrt[3]{x^{2}}$ عبارتی دیگر است که نمودار آن ناگهان از نزول شیب‌دار به صعود شیب‌دار تغییر می‌یابد بی‌آنکه بین‌صعود ونزول قسمت افقی داشته باشد (شکل ۳۶). اما عبارتهای جبری بسیار ساده‌تر مانند $y = x^{2}$ و $y = x^{3} - 12x$ این رفتار را ندارند. این عبارتها جهش نمی‌کنند اما از یك وضعی به‌وضع دیگر می‌خزند. پس اگر y' یك فرمول ازاین‌نوع باشد (با بیان فنی اگر باچندجمله‌ایها سروکار داشته



شکل ۳۵. نمودار $y=1/x^{2}$

باشیم) تغییر مقادیر تدریجی‌است. اگر y' ازمثبت به‌منفی تبدیل شود باید ازمقدار صفر بگذرد. همین‌طور اگر y' از منفی به‌مثبت تغییر یابد.

مسألهٔ ما با $y'=3x^{2}-12$، چنین رفتاری را نشان می‌دهد. می‌توانیم آن را به‌صورت $y'=3(x^{2}-4)$ بنویسیم. اگر x درطرف راست ۲ یا در سمت چپ ۲ــ باشد x^{2} از ۴ بزرگتر و y' مثبت خواهدبود. پس y' هم در آغاز و هم در انجام‌مثبت‌است. اما میان $x=-2$ و $x=2$ مربع x از ۴ کوچکتر است (مطمئن



شکل ۳۶. نمودار $y=\sqrt[3]{x^{2}}$

باشید که این درست است). پس در قسمت میانه y' منفی است. بنابراین می‌توانیم جدول را به‌طریق زیر تکمیل کنیم:

x	....	-2	....	2	....
y'	مثبت	۰	منفی	۰	مثبت
تعبیر نتیجه	خم صعودی	خم افقی	خم نزولی	خم افقی	خم صعودی

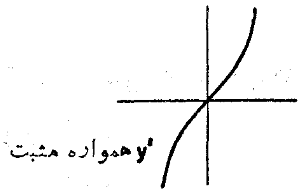
این جدول از شکل کلی خم تصوری خوب به‌دست می‌دهد. باز مانند مثال جلوتر هنوز هیچ تصوری از چگونگی وضع خم نسبت به محورها نداریم. برای پیوستن خم به‌محورها باز محاسبه می‌کنیم و بعضی از نقاط عمده را رسم می‌کنیم. بی‌شك دانستن اینکه خم درچه‌جاهایی افقی است ــ درقلهٔ مسیر یا درپایین این‌خم ــ بسیار مفید خواهد بود. بنابراین مقدار y را به‌ازای $x=-2$ و $x=2$ حساب می‌کنیم. به‌آسانی ازمعادلهٔ $y=x^3-12x$ دیده‌می‌شود که‌نمودار ازمبدأ می‌گذرد. زیرا به‌ازای $x=0$، $y=0$. آیا نقاط دیگری هم هست که در آنها y صفر باشد؟ این نقطه‌ها کدام‌اند؟

مثال. بررسیهایی که در بالا آغاز شد تکمیل کنید و طرحی بکشید که خم $y=x^3-12x$ را نشان بدهد.

درچنین طرحی اگر اطلاعات متناقض به‌دست بیاورید و اگر نقاط وامتدادها تنها با ترسیم خمی بسیار پیچیده بتوانند باهم درتطابق باشند بهتر است‌کار خود را امتحان کنید، ببینید آیا عمل شما خطاهایی دارد. همهٔ اطلاعات به‌دست‌آمده ازمنابع مختلف باید به‌خوبی باهم تطابق داشته باشند تا یك خم ساده به‌دست آید.

گاهی اتفاق می‌افتد هنگامی که می‌گردیم ببینیم در کجا $y'=0$، چیزی پیدا نمی‌کنیم. به‌مثل نمودار $y=x^3+x$ را درنظر بگیرید. در اینجا $y'=3x^2+1$ است. اگر دنبال نقطه‌ای‌بگردیم که درآن $y'=0$ و بکوشیم معادلهٔ $3x^2+1=0$ را حل کنیم هیچ جوابی به‌دست نمی‌آوریم.[1] گاهی دانش‌آموزان حیران می‌شوند

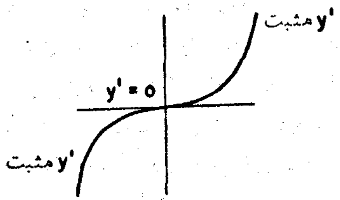
۱. برای دانش‌آموزانی که با اعداد مختلط آشنا هستند این امر معنی می‌دهد که هیچ جواب حقیقی نداریم. روی ورقهٔ نمودار نمی‌توانیم مختصات نقاط مختلط را نشان دهیم. پس برای هدفهای نموداری تنها اعداد حقیقی به‌عنوان جواب معادله مورد قبول هستند.



شکل ۳۷

نمی‌دانند چه‌کنند، اما معنی آن بسیار ساده‌است. جای افقی در این خم وجود ندارد، y' هرگز صفر نمی‌شود و علامت عوض نمی‌کند. هرمقداری که برای x انتخاب کنید به‌ازای آن y' مثبت‌است. معنی این‌امر این‌است که خم همواره صعودی‌است و شکل آن بـه خم شکل ۳۷ شباهت دارد. در اینکـه ما نمی‌تـوانیم جوابی پیدا کنیم تا y' را صفر کند هیچ سری وجـود ندارد. در واقع وقتی شکل نمودار را درنظر می‌گیرید اگر می‌توانستیم مقادیری برای x پیدا کنیم که درمعادلهٔ $y' = 0$ صدق کند بسیار شگفت‌آور می‌شد. زیرا چنین مقادیری به قسمت افقی خم مربوط می‌شود و قسمت افقی روی خم نداریم.

درهمهٔ مسأله‌ها که تاکنون دیده‌ایم مواضع افقی، مواضعی که $y' = 0$ است، فقط در اوج و یا در حضیض خم دیده شده است. باوجوداین یك امکان دیگر وجود دارد. درنمودار شکل ۳۸ خم نخست صعودمی کند، درنگ‌می کند وسپس دوباره صعود می‌نماید. در آغاز y' مثبت است سپس یك لحظه صفر می‌شود آن‌گاه دوباره مثبت می‌گردد. برحسب حرکت، یك‌چنین خمی ممکن‌است کسی یا اتومبیلی را نشان‌دهدکه جلو می‌رود ومـانعی در جلو می‌بیند و به‌حالت سکون درمی‌آید و سپس دوبـاره به‌جلورفتن ادامه می‌دهد.



شکل ۳۸

تمرینها

۱. نشان دهید که نمودار $y=x^3$ خمی به‌دست می‌دهد که شبیه شکل ۳۸ است.

۲. نمودار $y=6x-x^2$ را بکشید.

۳. نمودار $y=x^2-6x$ را بکشید.

۴. نمودار $y=x^2-2x-8$ را بکشید.

۵. نمودار $y=x^3-6x^2$ را بکشید.

۶. آیا عددی (حقیقی) وجود دارد که در معادلهٔ $3x^2-6x+9=0$ صدق کند؟ آیا می‌توانید مقداری پیدا کنید که به‌ازای آن $3x^2-6x+9$ منفی باشد؟ y' مربوط به $y=x^3-3x^2+9x$ را پیدا کنید. آیا روی خم نقطه‌ای وجود دارد که y' را صفر کند؟ آیا جایی هست که y' منفی باشد؟ نمودار $y=x^3-3x^2+9x$ درشکل کلی خود مشابه یکی از شکلهای ۳۰، ۳۷ و ۳۸ است. فکر می‌کنید به‌کدام از این سه‌شکل شبیه است؟ برای امتحان نتیجهٔ خودتان جدولی ازمقادیر y به‌ازای x از ۳ــ تا ۳+ تشکیل دهید ونمودار را با روشهایی که قبل از دیدن حساب دیفرانسیل با آنها آشنا بودید رسم کنید.

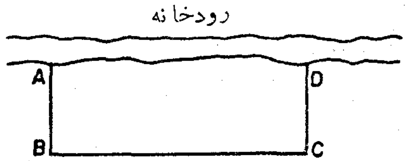
۷. نشان دهید که خم $y=x^4-2x^2+1$ درنقطهٔ $(0\,,1)$ نقطهٔ اوجی ودر دونقطهٔ $(-1\,,0)$ و $(1\,,0)$ نقطهٔ حضیضی دارد.

۸. یك پارادوکس[1] ــ می‌توان نشان داد که $-1/x^2$، مشتق $y=1/x$ است. x^2 مثبت است خواه x مثبت یا منفی باشد. پس y' همواره منفی است. یعنی خم همواره نزول می‌کند و هرگز صعود نمی‌نماید. خم $y=1/x$ از نقاط $(-1\,,-1)$ و $(2\,,1/2)$ می‌گذرد، امتحان آن آسان است. اگر این نقاط را روی کاغذ نمودار تعیین کنید خواهیدديد که نقطهٔ دوم بیشتر درسمت راست است ونیز بالاتر ازنقطهٔ اول است. اما اگر خم همواره نزولی است، چون به‌سمت راست حرکت کنیم بایدهمواره پایینتر برویم. چطور باوجود پایین روی دائم، درانتها به‌نقطه‌ای رسیدیم که ازنقطهٔ آغازی بالاتر است؟ اگر خم را با دقت بین $x=-1$ و $x=+2$ رسم کنید، خواهید دید که چطور این نتیجهٔ شگفت‌آور تعبیر می‌شود.

(y' را در این مسأله با نوشتن $y=1/x$ به‌صورت $y=x^{-1}$ و به‌کارگیری

---

1. Paradox



شکل ۳۹

فرمول (۴) به‌دست می‌آوریم. این مطلب را با مطالب صفحه‌های ۴۱ و ۴۲ که در بارهٔ فرمول (۴) بحث کردیم مقایسه کنید).

بهترین راه برای انجام عملیات

بیشتر کتابهای حساب دیفرانسیل مقدماتی مثالهایی از این نوع دارند: «کشاورزی ۱۰۰ متر جنس برای نرده‌کشی دارد. رودی از مزرعهٔ وی می‌گذرد. کشاورز می‌خواهد بدون‌خرید جنس اضافی بیشترین محوطه را محصور کند و یکی از حدود محوطه‌را رودخانه قرار می‌دهد. چطور می‌تواند ترتیب حصار را بدهد؟ مسیر رودخانه خط مستقیم است و محوطهٔ محصور باید مستطیل باشد» (شکل ۳۹).

نمی‌دانم هرگز کشاورزان با چنین مسأله‌ای خود را به‌دردسر گرفتار می‌کنند یا نه، اما چنین مسأله‌ای در طرحهای صنعتی پیش می‌آید. می‌خواهیم مناسبترین راه را برگزینیم. مسأله‌های واقعی ممکن است بیشتر پیچیده و به معلومات فنی و علمی نیازمند باشند. مسألهٔ حصارکشی کشاورز را همه‌کس می‌تواند بفهمد و باید آن را یك مثال به‌ویژه ساده ازیك مسألهٔ وسیع و مهم درنظر گرفت. این مثال نشان می‌دهد چه‌نوع چیزی را می‌توان با حساب دیفرانسیل و انتگرال حل کرد.

درواقع کشاورز باید فقط دربارهٔ یك‌چیز تصمیم بگیرد ــ AB به‌چه‌طول باید باشد؟ اگر به مثل تصمیم بگیرد AB ده‌متر درازا داشته باشد، آن‌گاه طول CD را نیز باید ده متر بگیرد. دراین‌صورت ۸۰ متر برای BC باقی می‌ماند. حصار ۸۰۰ متر مربع از زمین‌را در برخواهد گرفت.

دوحالت نهایی نیز هست که کشاورزمی تواند عمل کند. می‌تواند AB را به‌طول صفر متر بگیرد، CD نیز صفرمتر طول خواهدداشت وتمامی ۱۰۰ متر مصالح برای ضلع BC مصرف‌خواهدشد. این‌عمل بزرگترین‌حریم نرده را به‌رودخانه‌خواهد داشت اما سطح محصور صفر خواهد بود. اگر کشاورز به‌حالت نهایی دیگر تصمیم بگیرد و هریك از AB و DC را ۵۰ متر انتخاب‌کند برای ضلع BC مصالحی نخواهد داشت. باز مساحت محصور صفر خواهد بود. بدیهی است برای‌داشتن بهترین نتیجه

کشاورز باید جایی‌را بین این دوحالت نهایی انتخاب کند، نه حصار را تاحدممکن دراز بگیرد ونه به‌آن تا می‌تواند عمق بدهد، اما موضعی اختیار کند که به‌طریقی تناسبی بین عرض وطول برقرار کند.

به‌یقین امکان داردکه مسأله را بدون به‌کاربردن حساب دیفرانسیل حل کنیم. نموداری می‌کشیم یا حتی فقط جدولی تشکیل می‌دهیم. مقدارهای متفاوت برای AB انتخاب می‌کنیم و مساحت زمین محصور را به‌دست می‌آوریم و به‌این ترتیب با روش آزمون وخطا می‌بینیم کدام‌ترتیب بهتراز دیگر ترتیبها است. اگر نموداری رسم کنیم می‌توانیم مشاهده‌کنیم در کجا بلندترین نقطهٔ نمودار ظاهر می‌شود. این عمل بیشترین مساحتی راکه می‌توانیم محصور کنیم به‌دست می‌دهد.

اما چنان‌که دیدیم، حساب دیفرانسیل و انتگرال طریقهٔ سریع ترسیم نمودار را، بدون دردسر تشکیل جدولی، به‌دست می‌دهد. پس حساب دیفرانسیل وانتگرال راه بسیار زیبایی برای حل مسأله تعبیه می‌کند.

چنان‌که گفتیم کشاورز بایدتنها طول AB را معلوم کند. فرض کنیم طول AB، x متر است، CD نیز x متر طول دارد. برای این دو ضلع $۲x$ متر از مصالح مصرف می‌شود و $۱۰۰-۲x$ متر برای ضلع BC باقی می‌ماند. پس حصار به طول $۱۰۰-۲x$ متر و به عرض x متر است. بنابراین مساحت داخل حصار $x(۱۰۰-۲x)$ یا $۱۰۰x-۲x^۲$ متر مربع است. اگر این مساحت را y بگیریم خواهیم داشت

$$y=۱۰۰x-۲x^۲.$$

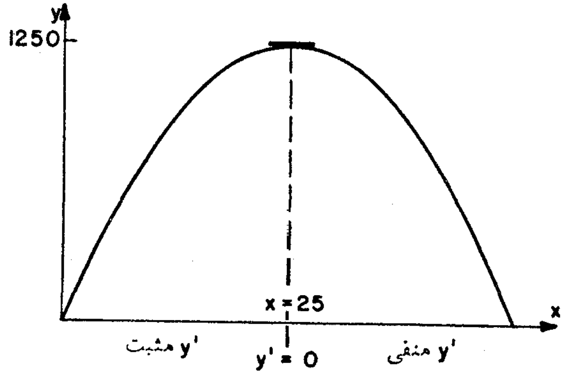
می‌خواهیم y تاحدامکان وسیع باشد. به‌عبارت‌دیگر می‌خواهیم نقطهٔ‌اوج این‌نمودار را پیدا کنیم. با روشی که درپیش به‌کار بردیم می‌بینیم که

$$y'=۱۰۰-۴x.$$

پس y' به‌ازای $x=۲۵$، صفر است، وقتی x کوچکتر از ۲۵ است y' مثبت و به‌ازای x بزرگتر از ۲۵، y' منفی است. (شکل ۴۰).

به‌این ترتیب نمودار تا $x=۲۵$ بالا می‌رود، به‌ازای $x=۲۵$ نمودار افقی است و بعد از آن نمودار نزول می‌کند. واضح است‌که یك نقطهٔ اوج یا یك ماکسیمم در $x=۲۵$ داریم. پس طول AB و CD هر یك ۲۵ متر و BC پنجاه متر است ومساحت محصور ۱۲۵۰ متر مربع است. این بهترین انتخاب است.

چنان‌که در پیش گفتیم مسأله‌های بسیاری ازاین‌قبیل وجود دارد. درکتابهای



شکل ۴۰

ابتدایی حساب دیفرانسیل و انتگرال مسألهٔ معروف طرح قوطی کنسرو برای نیم لیتر سوپ کنسرو که کمترین فلز را به‌کار ببرد، مطرح و حل می‌کنند. قوطیهای کنسرو سوپ به‌ندرت، به‌شکلی ساخته می‌شود که فلز صرفه‌جویی شود. حتی در زمان جنگ، وقتی که به‌صرفه‌جویی در فلز نیاز بسیار فوری وجود داشت، قوطیهایی به‌کار می‌رفت که در ساختن آنها کمترین صرفه‌جویی صورت نمی‌گرفت. بعضیها می‌گویند اگر طرح قوطیها فقط براساس صرفه‌جویی فلز انجام گیرد بسته‌بندی و حمل و نقل آنها سخت می‌شود. من هرگز نتوانستم بفهمم که آیا این حرف به‌راستی درست است یا سازندگان قوطیهای کنسرو، حساب دیفرانسیل و انتگرال را جدی نمی‌گیرند؟

فصل هفتم

شتاب و خمیدگی

اگر عبارتی مانند $۵x^۲+۴x^۳$ داشته‌باشیم، می‌دانیم چگونه میزان نمو آن‌راحساب کنیم. میزان نمو $۱۰x+۱۲x^۲$ است. این عبارت جدید از نوع عبارت اول‌است. کسی ممکن است سؤال کند: «با چه میزانی $۱۰x+۱۲x^۲$ نمو می کند؟» بی‌تردید جواب می‌دهیم با میزان $۱۰+۲۴x$. محاسبهٔ آن بسیار آسان است. اما معنی این محاسبه چیست؟ این جواب به‌ما چه می گوید؟

می‌توانیم این سؤال را برحسب حرکت یا شکلها بحث‌کنیم. نخست‌چندمثال حرکت در نظر خواهیم‌گرفت. با قانون $s=t^۲$ آغاز می‌کنیم که در سابق به‌تفصیل آن‌را بحث‌کردیم. برای‌این قانون $s'=۲t$، که در آن s' میزان افزایش s یعنی همان v، سرعت‌متحرك، است. فرقی‌نمی‌کند‌که‌بنویسیم $s'=۲t$ یا $v=۲t$. حالامی‌پرسیم: «به‌چه تندی $۲t$ نمو می‌کند؟» ایـن سؤال ممکن است به‌صورت «به‌چه تندی v نمو می‌کند؟» بیان شود. بنابراین، نماد طبیعی جواب v' است،کـه میزان نمو v است. چون $۲t$ بامیزان ۲ نمومی‌کند، داریم $v'=۲$. همهٔ این‌مطالب‌را چون باهم‌بنویسیم خواهیم داشت

$$s=t^۲,$$

$$v=s'=۲t,$$

$$v'=۲.$$

این معادلهٔ آخرین، $v'=۲$، نمو سرعت‌را بیان می‌کند. میزان‌نمو سرعت را

به‌طور معمول شتاب می‌نامند. شتاب‌را معمولا با a نشان می‌دهند. در بعضی کتابها f می‌نویسند؛ ما a را به‌کار خواهیم برد.

اکنون سه‌چیز را باید به‌حافظه بسپاریم، مسافت، سرعت وشتاب؛ در هرحکمی که می‌خوانیم باید دقت کنیم ببینیم این‌حکم به s مربوط است یا به v ویا به a.

در اتومبیلی اگر بخواهید مقدار s را بدانید به چه چیز نگاه می‌کنید؟ به کیلومترنگار یا به‌سنگ کنار جاده که کیلومترها روی آن نوشته شده است، نگاه خواهید کرد. s مسافتی راکه پیموده‌اید معلوم می‌کند. چگونه می‌توانید مقدار v را معلوم کنید؟ ساده‌ترین‌راه نگاه‌کردن به‌سرعت‌سنج است. اگر سرعت‌سنج ازکارافتاده باشد می‌توانید به‌کیلومترنگار نگاه‌کنید و ببینید به چه تندی ارقام می‌گذرند یا می‌توانید از پنجره به‌بیرون نظر اندازید و ببینید به‌چه‌تندی کیلومترشمارهای جاده از جلوچشمتان می‌گذرند. سرعت‌سنج مستقیماً مقدار v را معین‌می‌کند (مگر آنکه ازکار افتاده باشد). روشهای دیگر بستگی دارد به‌طرزی که s' را حساب می‌کنید، به‌مثل میزان افزایش فاصلهٔ شما ازمنزل. شتاب a را چطور پیدا می‌کنید؟ به‌کجا باید نگاه کنید تا آن‌را ببینید؟ تا آنجاکه من می‌دانم هیچ‌اتومبیلی صفحه‌ای ندارد که راننده مقدار a را از روی آن بخواند. امـا چون $a = v'$ میزان افـزایش سرعت است، می‌توانیم با نگاه‌کردن به‌عقربهٔ سرعت‌سنج، a را برآورد کنیم وبدانیم به‌چه تندی عقربه حرکت می‌کند. تنها با خواندن سرعت‌سنج، a به‌دست نمی‌آید. اتومبیلی کـه با سرعت ثابت ۱۰۰ کیلومتر در ساعت حرکت می‌کند سرعت زیاد دارد. با وجود این شتاب آن صفر است. عقربه روی علامت ۱۰۰ بی‌حرکت است. ازطرف دیگر اتومبیل ممکن است بسیار آرام حرکت‌کند وشتاب بسیار داشته‌باشد. اگر اتومبیل از حـال سکون شروع به‌حـرکت کند در ابتدا عقربهٔ سرعت‌سنج روی نقطهٔ صفر کیلومتر است بعدازآن به‌زودی روی ۵ کیلومتر و سپس ۱۰ کیلومتر می‌رود و به‌این طریق ادامه‌می‌دهد. سرعت کوچك است اما افزایش می‌یابد. اگر شما ازآن کسانی هستیدکه ازحال سکون به‌شدت شتاب می‌گیرند سرعت اتومبیل ممکن‌است در یك زمان‌کوتاه از ۵ کیلومتر به ۱۰ کیلومتر بالا برود. دراین صورت بـا آنکه سرعت هنوزکوچك است شتاب ممکن است بسیار بزرگ باشد.

برای برآورد شتاب راهی دیگر نیزوجود دارد. وقتی اتومبیلی به‌شدت شتاب می‌گیرد مسافران آن درصندلی خودشان به‌طرف‌عقب پرت می‌شوند. به‌همان‌طریق اگر راننده ناگهانی به ترمـز فشار بیاورد مسافران به طرف جلو پـرت می‌شوند. ترمزگرفتن، شتاب منفی می‌دهد. پس شتاب پدیده‌ای‌است که شما می‌توانید احساس کنید. وقتی اتومبیلی شتاب‌مثبت می‌گیرد، ممکن‌است احساس کنیدکه روی‌صندلیتان

به طرف عقب کشیده می‌شوید. اگـر اتومبیل شتاب منفی بگیرد ممکن است احساس کنید که بـه طرف شیشهٔ جلوی اتومبیل دارید پرواز می‌کنید. این شتاب است که صدمه می‌زند. شما از مسافرت کردن بـا سرعت ۳۰۰ کیلومتر در ساعت ناراحت نیستید. بسیاری‌ازمردم درهواپیما با سرعتهای بیش‌ازاین مسافرت می‌کنند. تازمانی که می‌دانیدکاملا برای ادامهٔ حرکت جا دارید در هواپیما احساس راحتی می‌کنید. آنچه موجب ناراحتی‌می‌شود وقتی است که باسرعت ۳۰۰ کیلومتر درساعت‌مسافرت می‌کنید و با دیوار برخورد می‌کنید. آن‌گاه ناگهان به‌حالت سکون برمی‌گردید و یك شتاب زیاد منفی دارید.این همان‌اندازه بد است که با کسی که روی‌دیوار نشسته است تصادف می‌کنید. او درحال سکون است و ناگهان اورا وادار می‌کنید مانند خودتان باسرعت ۳۰۰ کیلومتر درساعت‌سفر کند. آن‌شخص یك‌شتاب مثبت‌تند تحمل می‌کند. این امر برای او همان‌اندازه رنج‌آور است. درست مثل این‌است که به‌شما ناگهان اردنگی موذیانه بزنند. شما یا آن قسمت از بدنتان کـه اردنگ می‌خورد ناگهان یك‌شتاب بزرگ تحمل‌می‌کند.ممکن‌است پای اردنگ‌زننده نیز درد بگیرد، زیرا پای‌او ناگهان به‌حالت‌سکون درمی‌آید.شتابهای‌بزرگ یعنی نیروهای‌بزرگ. تعجبی ندارد که در مکانیك نیرویی که برجسمی وارد می‌شود نه با موقعیت s جسم اندازه‌گیری می‌شود نه باسرعت vی آن، بلکه نیرو را باشتاب a اندازه‌می‌گیرند. زمین روی مدار خود دور آفتاب به تقریب ۱۶۰۰ کیلومتر در دقیقه می‌پیماید اما ما آن را احساس نمی‌کنیم. درواقع اگر زمین به جسمی که نسبت به‌آفتاب ساکن است برخوردمی‌کرد وناگهان سرعت ما از ۱۶۰۰ کیلومتر در دقیقه به‌سرعتی بسیار کوچکتر تبدیل می‌شد آن‌را احساس می‌کردیم.

خـوب است بـه انـواع حالتها بیندیشیم و ببینیم چطور برحسب s، v و a توصیف می‌شوند. به‌مثل:

۱. توقف. اتومبیل درکنار جاده ایستاده است. کیلومترشمار کار نمی‌کند یعنی s ثابت است. سرعت ونیز شتاب آن صفر است. به‌صورت معادله می‌توان نوشت

$$s = c, \quad (c \text{ عدد ثابت})$$

$$v = 0,$$

$$a = 0.$$

۲. دورزدن با سرعت ثابت. اتومبیل با سرعت ۶۰ کیلومتر در ساعت روی جادهٔ مستقیم می‌رود. قانون ممکن است $s = 60t$ (و همچنین ممکن است قانون به

صورت دیگری، به‌مثل $60t+100$ یا $60t-30$ برحسب آنکه زمان را از چه لحظه حساب کنیم) باشد. سرعت ۶۰ است. چون سرعت ثابت است شتاب وجود ندارد.

$$s=60t,$$

$$v=60,$$

$$a=0.$$

توجه کنید که هرعبارت میزان افزایش عبارت بالای خود را به‌دست می‌دهد و باز خاطرنشان می‌کنیم که میزان نمو یك‌عدد ثابت صفر است.

۳. حرکت شتابدار. اتومبیلی با سرعت فزاینده پیش می‌رود. من به موضوع عمل موتورها واردنمی‌شوم، بنابراین همان مثالی‌راکه جلوتر آورده بودم، $s=t^2$ را درنظر می‌گیرم. بنابراین داریم

$$s=t^2,$$

$$v=2t,$$

$$a=2.$$

شتاب در اینجا ثابت است و این بدان معنا است که اتومبیل با نیروی ثابت جلو می‌رود. بسیار شك دارم که یك موتور با احتراق داخلی به‌این طریق کار کند. شاید بهتر باشد که فرض کنیم اتومبیل خلاص است و درست درجاده‌ای که کمی شیب‌دارد حرکت می‌کند. در این مثال فکر می‌کنم اگر واحدهای متر و ثانیه را به‌کار بریم بهتر باشد. مناسبت ندارد که شتاب‌را با«کیلومتر درساعت» حساب کنیم.

۴. حرکت ترمزشده. اتومبیلی به آهستگی می‌خواهد بایستد. قوانین بسیاری وجود دارد که با این‌وضع مناسب است. یکی از ساده‌ترین آنهاراکه نوع حرکت مطلوب‌را به‌دست‌می‌دهد انتخاب می‌کنیم. منظورم قانون $s=10t-t^2$ بین $t=0$ و $t=5$ است. (عملیات زیر نشان می‌دهد که درواقع این‌یك قانون حرکت درحال ترمز است.) بادرنظر گرفتن میزانهای تغییر نتایج را به‌دست می‌آوریم:

$$s=10t-t^2,$$

$$v=10-2t,$$

$$a=-2.$$

فکر می‌کنم معادلهٔ وسطی روشنترین تصویری است از آنچه پیش می‌آید. در ابتدا $t = ۰$، $v = ۱۰$. به‌این‌ترتیب درآغاز اتومبیل با ۱۰ متر در ثانیه حرکت می‌کند. ۵ ثانیه بعد $t = ۵$ و $v = ۰$ اتومبیل می‌ایستد واگر سرعت v را درثانیه‌های بین ۰ و ۵ حساب‌کنید جدول زیر را به‌دست خواهید آورد:

t	۰	۱	۲	۳	۴	۵
v	۱۰	۸	۶	۴	۲	۰

می‌بینیم‌که سرعت اتومبیل با نظم کامل‌کم می‌شود، v درهر ثانیه‌ای ۲ واحد کاهش می‌یابد واین درست همان چیزی است‌که سومین معادله، $a = -۲$، نشان می‌دهد. از آغاز ترمز تا توقف،اتومبیل چه مسافتی می‌پیماید؟ برای پیدا کردن این مسافت باید به‌معادلهٔاول برگردیم. وقتی $t = ۰$، $s = ۰$، وقتی $t = ۵$، $s = ۲۵$ پس‌اتومبیل پس‌از ۲۵ متر راه‌رفتن متوقف می‌شود. ترمز بسیار ملایم بوده است.

اگر در معادلهٔ بالا t را ۶ بگیریم $v = -۲$ به‌دست می‌آید. این بدین معنی است که اتومبیل شروع به‌عقب‌رفتن می‌کند. البته این یك جواب نادرست است. ترمزها سرعت اتومبیل‌را مادام‌که پیش می‌رود‌کم می‌کنند. اما آن‌را پس‌از توقف بـه‌عقب نمی‌برند. قـانون $s = ۱۰t - t^۲$ فقط در مدت ترمز گرفتن از $t = ۰$ تـا $t = ۵$ صادق‌است. حق‌نداریم فرض کنیم‌که این‌قانون قبل‌از $t = ۰$ یا بعداز $t = ۵$ نیز صادق باشد.

باوجوداین می‌توان حالتهایی را تصورکردکه در آنها این قانون را بعد از $t = ۵$ هم بتوان به‌کاربرد. فرض‌کنید وقتی راننده می‌خواهد ترمز بگیرد می‌بیندکه به‌سربالایی جاده رسیده‌است برای‌صرفه‌جویی درترمزکردن تصمیم می‌گیرد بگذارد سربالایی اتومبیل را متوقف سازد. دنده را روی خلاص می‌آورد و منتظر می‌شود که اتومبیل در اثر قوهٔ جاذبه سرعتش‌کم شود. اگر فراموش کندکه بی‌درنگ پس از توقف اتومبیل ترمزدستی را بکشد اتومبیل آغاز به‌عقب‌رفتن می‌کند. اگرراننده بگذارد اتومبیل به‌عقب برود ممکن است به‌محلی برسد کـه سربالایی جاده شروع می‌شود. در چنین حالتی قانون $s = ۱۰t - t^۲$ بین $t = ۰$ و $t = ۱۰$ صادق خواهد بود. جدول زیر وضعیت،سرعت‌وشتاب اتومبیل‌را درتمام‌مدت‌حرکت نشان می‌دهد.

از هرسطر جدول،یك‌نوع اطلاع به‌دست می‌آید. s درهرلحظه محل اتومبیل رانشان‌می‌دهد.می‌بینیدکه اتومبیل درآخر به‌همان‌محل شروع‌حرکت می‌رسد.مقادیر v تندی حرکت اتومبیل را نشان می‌دهد. از اول بـا ۱۰ متر در ثانیه پیش می‌رود

زمان، t	۰	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰
وضع، s	۰	۹	۱۶	۲۱	۲۴	۲۵	۲۴	۲۱	۱۶	۹	۰
سرعت، v	۱۰	۸	۶	۴	۲	۰	۲−	۴−	۶−	۸−	۱۰−
شتاب، a	۲−	۲−	۲−	۲−	۲−	۲−	۲−	۲−	۲−	۲−	۲−

پس‌از ۵ ثانیه به‌حالت‌توقف می‌رسد و درآخر درست باهمان سرعت‌که آمده بود به‌عقب برمی‌گردد. سطر آخر شامل عدد ۲ — درکلیهٔ زمانهاست؛ یعنی نیروی‌جاذبه همواره اتومبیل‌را با نیروی ثابت عقب می‌کشد.

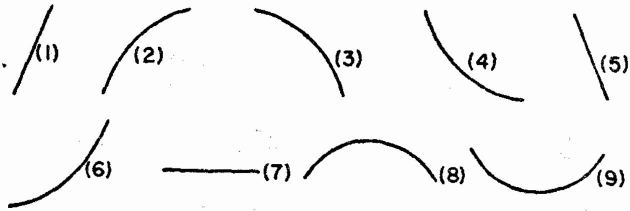
دربالا حرف s، v و a را به‌کار بردیم وباید درنظر داشته باشیم‌که این‌حرفها به‌ترتیب مسافت، سرعت وشتاب را به‌دست می‌دهند. نمادگذاری حساب دیفرانسیل روشن می‌کندکه از v، چگونگی‌سرعت‌تغییر s واز a چگونگی سرعت‌تغییر v دیده می‌شود. چنان کــه دیدیم، می‌توانیم بنویسیم $v=s'$ و $a=v'$. در معادلهٔ $a=v'$ می‌توانیم ازاین‌که v مساوی s' است استفاده‌کنیم. اگر s' را به‌جای v قرار دهیم حاصل می‌شود $a=s''$. پس a میزان تغییر میزان تغییر s را نشان می‌دهد. درآینده معمولا مسافت، سرعت وشتاب را به‌جای اینکه با s، v، a نشان‌دهیم نمادهای s، s' و s'' را به‌کار خواهیم‌برد. به‌همین‌ترتیب‌نمادهای y، y' و y'' را به‌کارخواهیم‌برد. y' چگونگی سرعت تغییر y را و y'' چگونگی سرعت تغییر y' را به‌ما می‌گوید. وقتی‌که بافرمولهای ویژه سروکار داریم نحوهٔ عمل برای پیداکردن y' و y'' بسیار ساده است. به‌مثل، فرض‌کنیم $y=x^5$، y' چیست؟ از روی‌کارهای پیشین می‌دانیم که میزان نمو x^5 برابر است با $5x^4$. پس $y'=5x^4$. حالا y'' چیست؟ y'' میزان تغییر y' است. $y'=5x^4$؛ می‌دانیم کــه میــزان تغییر $5x^4$ مساوی $20x^3$ است. بنابراین $y''=20x^3$. حساب‌کردن y'' از روی y' سخت‌تر ازمحاسبهٔ y' از روی y نیست. ما باز باید این محاسبات را تعبیر کنیم تا معنی y'' در رابطه با نمودار روشن شود.کار آیندهٔ ما همین خواهد بود. ما اول چهارمثال حرکت راکه در بالا درنظر گرفتیم باهم در یك‌جا می‌نویسیم.هریك از چهار حرکت را باکمك s s' s'' شرح می‌دهیم و آن را با بیان هم توصیف می‌کنیم، نمودار مربوط را می‌کشیم و اطلاعات مربوط به s، s' و s'' را با نمادهــای مناسب نمودار یعنی y، y' و y'' تکرار می‌کنیم. تمام چیزها درجدول زیر دیده می‌شود.

می‌دانیم‌کــه y' دربارهٔ شیب خم به‌ما اطلاع می‌دهد. می‌خواهیم معنی y'' را بدانیم و اول از همه چه‌چیز را y'' نشان نمی‌دهد. دانش‌آموزان بعضی مواقع

نوع حرکت	مسافت s سرعت s' شتاب s''	نمودار	نمودار برحسب y، y' و y''
جسم در توقف	$s=c$ $s'=0$ $s''=0$	 شکل ۴۱	$y=c$ $y'=0$ $y''=0$
حرکت با تندی ثابت	$s=60t$ $s'=60$ $s''=0$	 شکل ۴۲	$y=60x$ $y'=60$ $y''=0$
حرکت با شتاب	$s=t^2$ $s'=2t$ $s''=2$	 شکل ۴۳	$y=x^2$ $y'=2x$ $y''=2$
حرکت ترمزشده	$s=10t-t^2$ $s'=10-2t$ $s''=-2$	 شکل ۴۴	$y=10x-x^2$ $y'=10-2x$ $y''=-2$

دستپاچه می‌شوندومی‌گویند: «وقتی y'' صفر است منحنی افقی است» البته این‌درست نیست. در دونمودار اول، شکل ۴۱ وشکل ۴۲، مقدار y'' درهمه‌جا صفر است. البته شکل ۴۱ نموداری را نشان می‌دهد که همه‌جا افقی است. اما در شکل ۴۲ نیز y'' صفر است و این شکل نموداری را نشان می‌دهد که بالا می‌رود و افقی نیست. هم در شکل ۴۱ و هم درشکل ۴۲، $y''=0$. پس y'' باید یك خاصیت مشترك را در شکلهای ۴۱ و ۴۲ نشان دهد.

بررسی. یك عــده نمودار رسم کنید مانند نمودارهای: $y=x$؛ $y=2x$؛



شکل ۴۵

$y=2x+3$ ؛ $y=6-2x$ ؛ $y=-x$ ؛ $y=x+2x^2$ ؛ $y=x+x^2$ ؛ $y=x-x^2$ ؛ $y=x-2x^2$ ؛ $y=x$. برای همهٔ این تابعها y'' را پیدا کنید. نمودارها را در سه نوع زیر جمع آوری کنید:

نوع الف ـ نمودارهایی که دز آنها درهمه‌جا $y''=0$.

نوع ب ـ نمودارهایی که y'' درهمه‌جا مقدار مثبت دارد.

نوع ج ـ نمودارهایی که y'' درهمه‌جا مقدار منفی دارد.

همهٔ نمودارهای از نوع الف بعضی ویژگیها دارند که آنهارا از دونوع ب و ج متمایز می‌سازد. این ویژگی چیست؟ به‌همین طریق همهٔ نمودارهای نوع ب یك ویژگی مشخص کنندهٔ مشترك دارند. این ویژگی چیست؟ و نیز آن ویژگی چیست که به‌همهٔ نمودارهای نوع ج یك‌شباهت خانوادگی می‌دهد؟ اگر بتوانید به‌این سؤالها پاسخ دهید می‌توانید فقط با نگاه کردن به‌نمودار بگویید ازکدام یك ازاین سه‌نوع است. اگر به‌نظر شما این مثالها کافی نیستند و مایلید مسأله‌های بیشتری داشته باشید تا به‌مرحلهٔ اخذ تصمیم برسید، نمودارهای بیشتری از عبارتهای خطی و درجه دوم بکشید. یعنی معادله‌هایی به‌شکل $y=mx+k$ یـا $y=ax^2+bx+c$ انتخاب کنید. با معادله‌هایی از درجهٔ بالاتر ممکن‌است نمودارهایی به‌دست بیاورید که در هیچ‌یك از سه‌نوع الف، ب، ج قرار نگیرد.

نمودارهای‌مندرج درشکل ۴۵ را برحسب‌نوع الف، ب وج دسته بندی کنید.

قبل از اینکه به‌خواندن ادامه دهید اگر می‌توانید این بررسی‌را تکمیل کنید.

* * *

با نگاه کردن به‌نمودارهای نوع الف، ب و ج معنای y'' را، دست‌کم به‌ظن قوی، باید به‌دست آورده باشید. ما حالا همین مطلب‌را از راهی دیگرمطرح می کنیم.

علامت پـریم میزان نمو را معلوم می‌کند. اگـر z کمیتی را (صرف‌نظر از جنس آن) نشان دهد z' میزان نمو z را نشان خواهد داد. اگر z' مثبت‌باشد به‌این معنی است کـه z افزایش می‌یابد؛ یعنی در تغییر z چیزی برآن اضافه می‌شود. پس

شکل ۴۹   شکل ۴۸   شکل ۴۷   شکل ۴۶

افزایش به‌معنی معمولی کلمه می‌باشد. اگر z' منفی باشد معنی آن این است که z در جهت منفی افزایش می‌یابد یعنی از z چیزی کم می‌شود یا z به‌معنی معمولی کاهش می‌پذیرد یـا کوچکتر می‌گردد. حالا y'' میزان نمو y' را نمایش می‌دهد. اگر y' افزایش یابد y'' مثبت و اگر y' کاهش پذیرد y'' منفی خواهد بود.

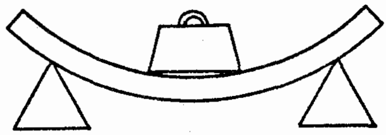
خم شکل ۴۶ در آغاز افقی ودرانتها امتدادی متوجه شمال‌شرق‌دارد. به‌زبان عددی‌خم با $y'=0$ شروع‌می‌کند به $y'=1$ خاتمه‌می‌یابد. پس چون y' افزایش می‌یابد y'' مثبت است.

پدیدهٔ معکوس درخم ۴۷ دیده می‌شود. این‌خم درآغاز در امتداد شمال‌شرق شروع می‌کند و درانتها افقی می‌گردد. در اول y' مساوی یك و درانتها صفراست، y' کاهش یافته است. میزان نمو آن منفی است پس y'' منفی است.

ما باید دربارهٔ دومثال واپسین که خواهیم‌دید دقیقتر باشیم. خم شکل ۴۸ در امتداد جنوب شرقی آغـاز می‌کند و افقی خاتمه می‌یابد. y' از ۱ — به‌صفر تغییر می‌یابد. آیا این یك افزایش است یا کاهش؟ ما در اینجا برای به‌دست‌آوردن صفر باید ۱ را به۱ — اضافه‌کنیم. از ۱ — تاصفر افزایشی وجود دارد (به‌مثل به‌حرارت بیندیشید). بنابراین y' افزایش می‌پذیرد پس y'' مثبت است. ایـن نتیجه را بـا نمودارهای نوع ب بسنجید و تحقیق کنید که نتیجه به‌آن نمودارها شباهت دارد.

سرانجام خم شکل ۴۹ را درنظربگیرید. این‌خم‌افقی آغاز می‌کند و به‌امتداد جنوب غربی خـاتمه می‌یابد. پس y' از صفر به ۱ — می‌رود. بنابراین y' کاهش می‌یابد و y'' منفی است. این خم‌را با نمودارهای نوع ج مقایسه‌کنید.

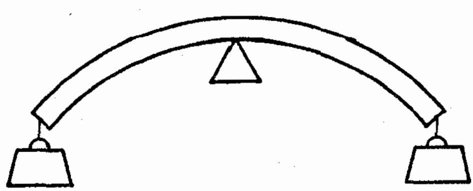
حال اگر نمودارهای نوع الف، ب و ج را بررسی‌کنید به‌نظرم وقتی که‌من می‌گویم از روی y'' چگونگی خمیدگی خـم مشاهده می‌شود منظور مرا می‌فهمید. وقتی y'' درهمه‌جا صفر است یك خط مستقیم داریم و هیچ خمیدگی درکار نیست. وقتی y'' مثبت‌است خمی داریم که شبیه الواری است که در وسط آن وزنه‌ای قرار گرفته است (شکل ۵۰). وقتی y'' منفی است خمی داریم که شبیه الواری است که



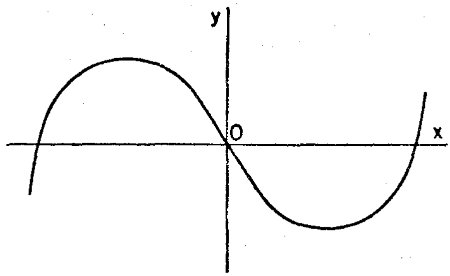
شکل ۵۰

۲ وزنه در دو انتهای آن آویزان است (شکل ۵۱). درواقع درطرح بتون مسلح و در دیگر شاخه‌های مهندسی y'' همین نقش را دارد و اندازهٔ خمیدگی را معلوم می‌کند.

همهٔ معادله‌هایی‌که درترسیم نمودارهای نوع الف، ب و ج به‌کار گرفتیم یا خطی یا درجهٔ دوم بود. درنتیجه y'' عددثابت بود. به‌مثل $y=x+x^2$ نتیجه‌می‌دهد $y''=2$. خمیدگی چنین خمی همیشه دریك جهت است. $y=x+x^2$ همیشه‌مانند الواری است‌که در وسط آن وزنه‌ای‌گذاشته‌اند خم می‌شود.اما اگر خمهای درجه سوم را در نظر بگیریم خمیدگی همواره یکسان نیست. این نوع خم را ما قبلا دیده‌ایم. در صفحه‌های ۷۸ تا ۸۵ ما نمودار $y=x^3-12x$ را درنظر گرفتیم. ترسیم شکل نهایی این خم را به‌عنوان تمرین به‌خواننده محول کردیم. با توجه به $y'=3x^2-12$ دیدیم که‌نمودار تانقطهٔ $x=-2$ بالا می‌رود وبین $x=-2$ و $x=2$ پایین‌می‌رود، آن‌گاه دوباره صعود می‌کند. درواقع این‌خم به‌شکل ۵۲ است. دربارهٔ‌خمیدگی این‌خم‌چه فکر می‌کنید؟ اگر به‌آن‌قسمت ازخم که درسمت‌چپ مبدأ قرار گرفته‌است نگاه‌کنید ممکن‌است به‌آسانی ببینید که‌این درست‌یك‌سهمی از نوع ج است؛ اگر به‌خم درسمت راست مبدأ توجه‌کنید شاید به‌سهولت فکر کنید که این یك سهمی از نوع ب است. اشتباه نکنید این خم درحقیقت از دو قطعه سهمی تشکیل نیافته است، فقط شکل کلی خم به‌دو سهمی که به‌هم متصل شده باشند کمی



شکل ۵۱



شکل ۵۲

شباهت دارد. در سمت چپ مبدأ نوع خمیدگی را می‌بینیم که مربوط به y'' منفی است («الواری که وزنه‌ها به‌دو انتهای آن آویزان است.») در طرف راست مبدأ نوع خمیدگی مربوط به y'' مثبت است («الواری که وزنه در وسط آن قرار گرفته است»).
حال بررسی می‌کنیم که آیا این امر با اطلاعاتی که از معادلهٔ خم به‌دست می‌آید توافق دارد. از معادلهٔ $y = x^3 - 12x$ حاصل می‌شود $y' = 3x^2 - 12$ و $y'' = 6x$. حالا می‌بینیم که $6x$ منفی است وقتی که x منفی است، و مثبت است وقتی که x مثبت است. پس y'' درسمت چپ مبدأ منفی است و درسمت راست مبدأ مثبت است. این درست با نوع خمیدگی که مشاهده کرده‌ایم تطابق دارد.

درشکل ۳۳ نمودار $y = 100x - x^2$ را بامطالعهٔ چگونگی y' رسم کردیم. دیدیم که نمودار تا $x = 50$ بالا می‌رود و بعد پایین می‌آید. سپس این سؤال پیش آمد: چطور معلوم می‌شود که خم، چمهای کوچك مانند شکل ۳۴ ندارد؟ حالا می‌توانیم به‌این‌سؤال پاسخ دهیم. چون $y = 100x - x^2$، پس $y' = 100 - 2x$ و $y'' = -2$. پس y'' به‌ازای همهٔ مقادیر x منفی است. یعنی خمیدگی خم همواره مانند خمیدگی شکل ۵۱ است.

این نتیجه امکان وجود چمها را از بین می‌برد. زیرا اگر خم چم داشته باشد اول به‌یك طرف خم می‌شود وسپس به‌طرف دیگر.

دراین بحث تنها علامت y'' را درنظر گرفتیم. دیدیم درکجا مثبت و درکجا منفی و در کجا صفر است. ممکن است با درنظر گرفتن مقدارهای واقعی y' و y'' علاوه‌بر تعیین جهت خم‌شدن، سرعت خم‌شدن را نیز پیدا کنیم. می‌توانیم اعلام کنیم که در نقطهٔ بخصوصی خمی به‌همان نحو خم می‌شود که دایره‌ای، به‌مثل، به‌شعاع ۳

خم می‌شود. در نقطهٔ دیگر که خمیدگی زیادی مانند سنجاق موی‌سر دارد، ممکن‌است مانند دایره‌ای به‌شعاع ۰٫۱ خم شود.

شاخه‌ای از ریاضیات وجود دارد که آن‌را هندسهٔ دیفرانسیل می‌گویند. دراین هندسه، حساب‌دیفرانسیل و انتگرال برای‌مطالعهٔ اشیاء هندسی مانند خمها و رویه‌ها به‌کار می‌رود. سؤالی‌که در بالا به‌آن اشاره‌کردیم، خم به‌چه‌سرعت خمیده می‌شود، متعلق به‌حوزهٔ هندسهٔ دیفرانسیل ویك مثال بسیار ساده ازیك مسألهٔ این‌موضوع‌است. هندسهٔ دیفرانسیل باخمیدگی‌رویه‌ها نیز سروکار دارد. مطالعهٔ رویه‌های‌خمیده به‌طور طبیعی به‌موضوعی منجر می‌شود که آن را حساب تانسوری می‌گویند و در نظریه نسبیت مورداستفاده‌است. شاید چیزهایی راجع به «فضا ـ زمان خمیده» که تاحدودی اسرارآمیز است شنیده باشید. این مثال خوبی است تا بدانید حساب دیفرانسیل و انتگرال چگونه در را برای هرگونه تحقیق می‌گشاید. با طرحی ساده برای ترسیم سریع نمودارها آغاز می‌کنید، مطلبی به‌مطلب‌دیگر منجر می‌شود. خمهارا درصفحه مطالعه می‌کنید، آن‌گاه خمها درفضای سه‌بعدی، سپس رویه‌ها؛ روشهای تازهٔ محاسبه، نمادهای جدید ومفاهیم نو رفته‌رفته پیش می‌آیند. شما از راهی‌که هرگز درابتدا نمی‌توانستید پیش‌بینی کنید به‌نظریه‌ای می‌رسید که اندیشه‌های مارا دربارهٔ فضا و زمان و جاذبه و انرژی دگرگون ساخته است.

فصل هشتم

مسألهٔ معکوس

در حساب مقدماتی بعضی راههای ساده و مستقیم برای جمع وضرب و جذر وجود دارد. این‌عملیات همواره درچارچوب اعداد طبیعی یا اعداد ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، . . . امکانپذیر است. ۳ به اضافهٔ ۴ چه نتیجه‌ای می‌دهد؟ جواب: ۷. عدد۳ ضرب در ۴ چه می‌شود؟ جواب: ۱۲. مجذور ۳ چیست؟ جواب: ۹.

سپس یادگرفتیم این عملیات‌را معکوس کنیم. تفریق را با معکوس کردن عمل جمع آموختیم.۳ با کدام عدد، ۷ می‌شود؟ جواب: ۴. تقسیم‌را با معکوس کردن عمل ضرب یادگـرفتیم. ۳ درچه عددی ۱۲ می‌شود؟ جواب: ۴. عکس مجذور کردن را برای یافتن جذر به‌کار بردیم. مجذور چه‌عددی ۹ می‌شود؟ جواب: ۳.

این عملیات معکوس به‌گسترش اندیشه‌های مـا منجر شد. وقتی می‌خواهیم به این‌سؤال جواب دهیم: «۸ و کدام عدد ۷ می‌شود؟» ممکن‌است اول بگوییم که چنین سؤالی جواب ندارد. سپس کشف می‌کنیم کـه می‌توان مفهوم جدیدی به‌اسم اعداد منفی وارد کـرد. آن‌گاه پاسخ ۱ — می‌شود. به‌همین طریق تقسیم ما را به‌مفهومی می‌کشاندکه در زمانی‌مفهومی جدیدبود: مفهوم اعداد کسری. به‌جای‌اینکه درجواب این سؤال: «۲ درچه عددی برابر یك می‌شود؟» بگوییم جواب‌ندارد به‌پاسخ ۲/۱ می‌رسیم. ریشهٔ دوم مارا به‌مفهومهای تازه راهبر می‌شود: هیچ‌کسری (به‌معنی‌حساب مقدماتی) پیدا نمی‌کنیم که مجذور آن ۲ باشد. به‌این ترتیب به‌مفهوم اعداد گنگ، مانند $\sqrt{2}$ می‌رسیم. اگر در پی عددی بگردیم کـه مربع آن ۱ — است به مفهوم شگفت‌انگیزتر اعداد مختلط مانند $\sqrt{-1}$ می‌رسیم.

در حساب دیفرانسیل و انتگرال درست همین نوع گسترش پیش می‌آید. ما

با سؤال مستقیم آغاز می‌کنیم. «به شما قانونی می‌دهیم که می‌گوید متحرك در فلان لحظه کجا است. شما باید قانون سرعت آن را پیدا کنید.» به‌سهولت می‌توانیم این سؤال را معکوس کنیم: به‌شما قانون سرعت را می‌دهیم، باید قانونی پیدا کنید که وضع متحرك‌را معلوم کند. برحسب نمادها می‌توان چنین گفت: به‌شما قانون s' را می‌دهیم واز شما می‌خواهم قانون s را به‌دست بیاورید. بعضی‌مواقع جواب سؤال آسان است. به‌مثل اگر قانون $s'=2t$ را به شما بدهم می‌توانید جواب دهید $s=t^2$ یا $s=t^2+5$ یا $s=t^2-3$ یا درواقع هرفرمولی به‌صورت $s=t^2+C$ که در آن C یك‌عدد ثابت است. اما چنین سؤالهایی ممکن است به فرمولی از نوع جدید منجر شود. به‌مثل ممکن است من قانون $s'=1/t$ را بدهم واز شما قانون s را بخواهم. برای پاسخ به‌این سؤال شما باید نظریهٔ لگاریتمها را پیش بکشید. اگر قانون $s'=1/\sqrt{1-t^2}$ را بدهم برای پیداکردن‌جواب باید نظریهٔ‌توابع‌مثلثاتی، سینوس وکسینوس را پیش بکشید. دربرنامهٔ دبیرستانی طبق معمول مثلثات‌را چیزی درنظرمی‌گیرند که در نقشه‌برداری به‌کارمی‌رود وآن‌را ازطریق هندسهٔ‌مثلثها به‌دست می‌آورند. طرزعمل در حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌کلی با آن متفاوت است. دریافتن s از روی $s'=1/\sqrt{1-t^2}$ نه ازهندسه اسم می‌برند ونه از نقشه‌برداری. حساب دیفرانسیل و انتگرال مارا با روش جبری وارد مثلثات می‌کند. منظور من این‌است‌که ما ازمعادله‌ها استفاده‌می‌کنیم نه ازترسیم شکلها. روش‌حساب دیفرانسیل و انتگرال به‌ما کمك می‌کندکه شاخه‌های ریاضیات را باهم درنظر بگیریم. در این روش مثلثات به‌صورت موضوعی مجزا ظاهر نمی‌شود. بلکه به‌طور طبیعی درمطالعهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال در ریاضیات ظاهر می‌شود و نیز حساب دیفرانسیل و انتگرال اطلاعی دربارهٔ مثلثات به‌ما می‌دهدکه بدون حساب دیفرانسیل و انتگرال دست‌یافتن به‌آن بسیار دشوار است. دانش‌آموز گاهی می‌پرسد «جدولهای مثلثاتی به‌چه نحوی حساب شده است؟» جواب این است که در حساب دیفرانسیل وانتگرال خواهید دید.

مثلثات تنها یکی‌از موضوعاتی است که به‌این‌نحو پیش می‌آید، اگر به‌مطالعهٔ مسألهٔ‌یافتن s وقتی‌که s' را داده‌اند ادامه‌دهیم به‌مطالعهٔ انواع تابعهای‌جدیدکشانده می‌شویم که در ریاضیات دبیرستانی هرگز پیش نمی‌آیند.

به‌طریق دیگری نیز به‌تابعهای جدید رهبری می‌شویم. درجبر می‌توانیم‌معادله تشکیل دهیم. ما فقط به‌عملهای‌ساده مانند پیداکردن ریشهٔ دوم محدود نیستیم. به‌مثل می‌توانیم این سؤال را پیش بکشیم: کدام عدد است کــه مجذور آن ۲۰ واحد از خود عدد بیشتر است. با نمادهای جبری باید معادلهٔ زیر را حل‌کنیم

$$x^{2}=x+20$$

البته حل این معادله بسیار آسان است،هرمعادله‌ای به‌این‌آسانی حل نمی‌شود. به‌مثل ریاضیدانان پس‌از قرنها مطالعه برمعادلاتی از نوع

$$x^{5}=x+20.$$

مسلط شدند.

درحساب دیفرانسیل وانتگرال نیز می‌توانیم معادله‌هایی تشکیل دهیم. ممکن است سؤال شودکه آیا قانون s وجود دارد به‌طوری که

$$s'=\frac{2s}{t}\cdot$$

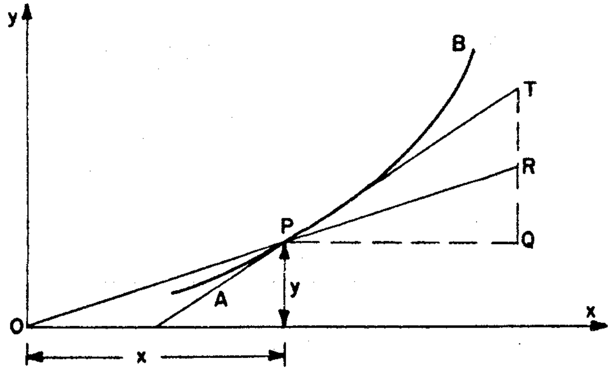
جواب این سؤال آسان‌است. قانون $s=t^{2}$ یکی‌از جوابهاست. زیرا اگر $s=t^{2}$، داریم $s'=2t$. بنابراین $2s/t=2t^{2}/t=2t=s'$. پس قانون $s=t^{2}$ خاصیت مطلوب را داراست، ایـن معادلـه جوابهای بسیاری دارد. $s=5t^{2}$، $s=7t^{2}$ نیز در معادله صدق می‌کند. درواقع هرقانونی به‌صورت $s=kt^{2}$ کـه در آن k عدد ثابت است جواب معادله است.

معادلهٔ بالارا می‌توان با گفتار نیز ادا کرد. s' سرعت درهرلحظه است، s/t کل مسافت پیموده‌شده تقسیم برکل زمان حرکت است و سرعت متوسط را اندازه می‌گیرد. پس معادله سؤال می‌کند: «می‌توانید نوعی حرکت پیدا کنید که در آن سرعت درهرلحظه درست دوبرابر سرعت متوسط‌حرکت تا آن‌لحظه باشد؟» جواب این است: حرکت $s=kt^{2}$ که حرکتی است با شتاب ثابت و بـا آن آشنا هستیم، ویژگی مطلوب‌را داراست.

ممکن است سؤال کنیدکه چرا این مسألهٔ بخصوص‌را برگزیدم. جواب ساده است. نمی‌خواستم در محاسبات طولانی و دشوار وارد شوم، پس در پی مسأله‌ای رفتم‌که جواب آن آسان باشد. درواقع از $s=t^{2}$ آغازکـردم وکار را در جهت عکس انجام دادم. درپی معادله‌ای رفتم‌که $s=t^{2}$ جواب آن باشد.

مسألهٔ بـالا را می‌توان به‌صورت هندسی مطرح‌کرد. برحسب x و y معادلهٔ مربوط به‌شکل زیر است

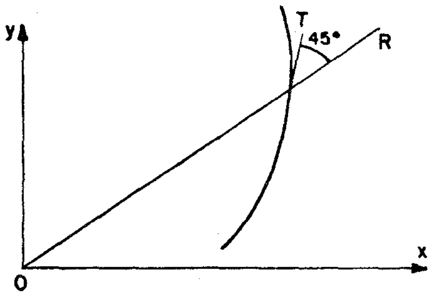
$$y'=\frac{2y}{x}\cdot$$



شکل ۵۳

شکل ۵۳ را درنظر بگیرید. فرض کنید P نقطهٔ $(x,\ y)$ روی خم AB است. PT در P برخم مماس است. OPR خط مستقیمی است که مبدأ O را به نقطهٔ P وصل می‌کند. PQ خط افقی و QRT خط قائم است. حالا می‌توانیم معادله را به‌طورهندسی تعبیر کنیم. البته y' شیب‌مماس PT و y/x شیب‌خط OP را به‌دست می‌دهد. معادله می‌خواهد که y' دوبرابر y/x باشد، یعنی ضریب زاویهٔ مماس درست دوبرابر ضریب زاویه قطعهٔ‌خط OP باشد. پس طول QT باید دوبرابرطول QR باشد. این ویژگی باید درتمام نقاط خم AB وجود داشته باشد. پس‌مسأله این است که یك‌خم AB پیداکنیم که درهرنقطهٔ P ازاین خم ضریب زاویهٔ مماس PT درست دوبرابر ضریب زاویهٔ خط OP باشد. جواب مسأله این است: هرسهمی که به‌شکل $y=kx^2$ باشد این خاصیت‌را دارد. بدون‌حساب دیفرانسیل وانتگرال حل این مسأله بسیار دشوار خواهدبود. بدیهی‌است این‌مسأله چندان مهم نیست. انتخاب آن به‌دلیل آسانی حل‌آن بوده اما مسأله‌هایی نظیر این دربررسیهای واقعی‌مهندسی، علوم و ریاضیات محض پیش می‌آید.

مسألهٔ بالا جوابی برحسب قانونهای ساده و شناخته شده داشت. هیچ اندیشهٔ جدیدی ازمعادلهٔ $s=kt^2$ یا $y=kx^2$ به‌وجود نمی‌آید. در رابطهٔ با نمودار، خم را سهمی تشخیص‌می‌دهیم. توجه‌کنیدکه خمهای بسیارکمی وجود دارندکه آنهارا به‌اسم می‌شناسیم: خط مستقیم، دایره، بیضی،سهمی یا هذلولی‌ـ‌بسیاری‌از مردم فقط با این نامها آشنا هستند. حتی اگر کسی توجه مخصوص به خمها داشته باشد به‌نظر نمی‌رسدکه اسم بیش‌از بیست خم‌را بداند: هزاران خم هست‌که نه اسم دارند و نه



شکل ۵۴

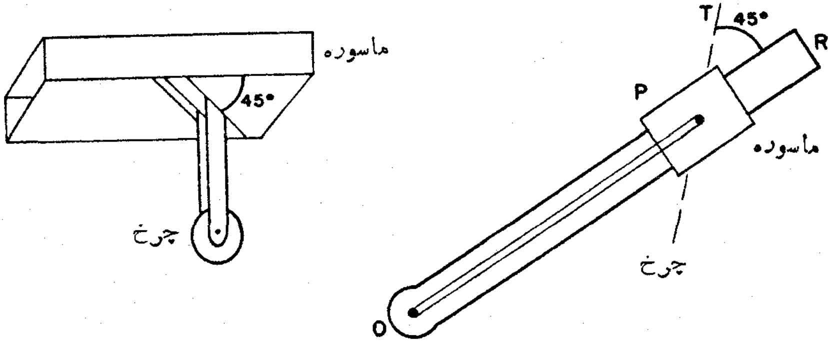
آنهارا می‌شناسید. بنابراین احتمال کمی وجود دارد که مسأله‌ای به‌خمی منجر شود که آن‌را بشناسیم. احتمال بسیار هست که‌خمی به‌دست آید‌که تاکنون آن‌راندیده‌ایم.

این نگران‌کننده است. به‌نظر می‌رسد در برابر ایـن مسائل بیچاره خواهیم شد. اما وضع این‌قدرکه به‌نظر می‌رسد بد نیست. صحیح است‌که بسیاری‌از مسائل به‌خمهای جدید منجر می‌شوند. مع‌هذا، ازخود مسأله دیده می‌شودکه خم جدید چه خواهد بود. درواقع مسأله جواب خودرا تعریف می‌کند.این‌امر را با درنظرگرفتن مثالی می‌توان دید.

فرض‌کنیم می‌خواهیم خمی پیداکنیم که دارای ویژگی زیر است: در هرنقطهٔ P مماس PT زاویهٔ $45°$ باخط OPR، مانند شکل ۵۴، تشکیل می‌دهد. شما را با شرح محاسبات خسته نمی‌کنم. نتیجه این است که این ویژگی با معادلهٔ زیر بیان می‌شود.

$$y'=\frac{x+y}{x-y}.$$

ما این‌معادله را به‌کار نخواهیم برد بلکه دربارهٔ ویژگی خم‌که در مسأله مطرح شده است فکر خواهیم‌کرد. نوع خم با این ویژگی به‌سادگی دیده می‌شود. تصورکنید جسمی نورانی درمبدأ O قرارگرفته است وشما درنقطهٔ P ایستاده‌اید. سایهٔ شما در طول خط PR خواهدافتاد. فرض‌کنید شما درجهت PT ایستاده‌اید، حالا راه‌بروید به‌طوری‌که همواره جهت‌حرکت‌شما باسایه‌تان زاویهٔ $45°$ تشکیل دهد. به‌این‌طریق به‌مرورکه راه می‌روید خمی ترسیم خواهیدکردکه ویژگی مطلوب را دارد. گمان می‌کنم می‌توانید ببینیدکه نوعی مارپیچ رسم‌کرده‌اید. شما گرد منبع نـور خواهید



شکل ۵۵

گشت. اما همواره بیشتر از منبع دور خواهید شد. و نیز ممکن است این‌خم‌را با یك وسیلهٔ مکانیکی ترسیم کرد (شکل ۵۵). در این وسیله OR نوعی میله یا ترکه خواهد بود. میخی نقطهٔ O را روی‌کاغذ ثابت نگاه می‌دارد، میلهٔ OR می‌تواند دور O بچرخد. در P ماسورهٔ کوچکی است که می‌تواند روی میله آزادانه بلغزد. زیر این ماسوره چرخ‌کوچکی با لبهٔ تیز طوری نصب شده است که همواره با میلهٔ OR زاویهٔ $۴۵°$ تشکیل می‌دهد. لبهٔ چرخ در کاغذ فرو می‌رود و به‌این ترتیب P را وامی‌دارد تا فقط در امتداد PT حرکت کند. حال اگر میلهٔ OR بچرخد خود به‌خود در راه مطلوب حرکت خواهد کرد و خم‌را به‌همان‌طریق ترسیم خواهد کرد که شما با راه‌رفتن، طبق مشخصاتی که در بالا گفتیم، رسم کردید.

چنان‌که می‌بینید در اینجا مسأله خود به‌ما نشان داد چگونه خم را رسم کنیم. درواقع مسأله این است که باید راه دیگری برای توصیف خم بیابیم. شاید بتوانیم معادلهٔ نمودار آن‌را پیدا کنیم و به‌این‌نحو یك‌طریقهٔ مناسبی برای تعریف‌خم به‌دست آوریم. این‌مسألهٔ بخصوص‌را بررسی کرده‌اند و معلوم گشته است که خم‌را نمی‌توان باعملیات مقدماتی‌جبری‌توصیف کرد. معادلهٔ‌خم نمی‌تواند به‌مثل $y=x^۳+۵x-۲$ باشد وحتی نمی‌تواند یك عبارت پیچیده‌ای مانند

$$y^۵x^۳-۱۷xy^۲+۱۱x^۴-۳=۰$$

باشد. برای نوشتن معادلهٔ این خم باید مفهومهای لگاریتم و مثلثات را به‌کار برید. شاید متوجه شده‌اید که با این‌مسأله ما به‌همان مبحثهایی که درصفحهٔ ۹۹ به‌آنها

اشاره شد ــ یعنی لگاریتم و توابع مثلثاتی ــ رسیدیم. درواقع یك بخش مهم حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی دو هدف دارد: توضیح دادن اینکه لگاریتمها و توابع مثلثاتی چیست وسپس نشان دادن اینکه چه مسائلی را می‌توان به کمك آنها حل کرد.

امیدوارم هدف این فصل، زیرعنوان «مسألهٔ معکوس»، برای شما روشن شده باشد. هدف آن آموختن هیچ نتیجهٔ ویژه نیست. بلکه مقصود این است که تاحدودی مطلع شوید که ریاضیات موضوعی درحال رشد است. با مطالعهٔ تندی یك جسم متحرك آغاز کردیم. به چند فرمول و نمادهای s' و s'' برخوردیم که به ما اجازه می‌داد مسأله‌های جدیدی مطرح کنیم. بعضی از مسأله‌ها ما را به شاخه‌های ریاضیات رهبری می‌کند که اسامی آنها را می‌دانید، مانند مثلثات و توابع لگاریتمی. مسائل دیگری هست که به شاخه‌هایی از ریاضیات منتهی می‌شود کــه شما حتی اسم آنها را هــم نشنیده‌اید. مفهومهای حساب دیفرانسیل و انتگرال مقدمــاتی، چنان که در پیش متذکــر شدم، درحقیقت کلیدی است کــه در را به حوزه‌ای از ریاضیات و اغلب علومی که بین سالهای ۱۶۰۰ تا ۱۹۰۰ میلادی گسترش یافتند، باز می‌کند. به‌چه‌صورتی حساب دیفرانسیل و انتگرال این کار را انجام می‌دهد؟ فقط موقعی برای شما قابل‌فهم است که واقعاً ریاضیات این قرنها را مطالعه کرده باشید. من کوشیده‌ام به‌صورتی بسیار مبهم و به‌طورکلی آن‌را نشان دهم و معلوم سازم که چطور یك مفهوم ما را به‌مفهوم دیگری رهنمایی می‌کند.

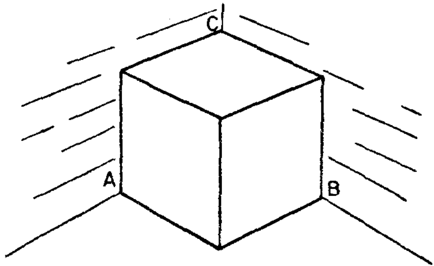
فصل نهم

دایره‌ها و کره‌ها، مربعها و مکعبها

تا اینجا ما حرفهای s، t و x، y را درعملیات خودمان به‌کار گرفتیم. بدیهی‌است در جبرهرحرفی بـه‌کار رود بجاست. ما می‌توانیم همان‌طور که از $s=t^۲$ به $s'=۲t$ رسیدیم، از $y=x^۲$ بـه $y'=۲x$ برسیم. به همین نحو می‌تـوانیم از $p=q^۲$ به $p'=۲q$ ویا از $J=w^۲$ به $J'=۲w$ برسیم.

وقتی که جوانتربودید فرمولهای مساحت سطح دایره $A=\pi r^۲$ وطول‌محیط دایره $C=۲\pi r$ را و نیز اندازهٔ حجم کره $V=(۴/۳)\pi r^۳$ و مساحت سطح کـره $S=۴\pi r^۲$ را دیدید. حالا که حساب دیفرانسیل و انتگرال‌را آموختید ممکن است چیزی دربارهٔ این فرمولها شمارا به‌شگفتی وادارد. فرض‌کنید فرمول $A=\pi r^۲$ را دارید و می‌پرسید A' چیست؟ $r^۲$ با میزان $۲r$ نمو می‌کند. با ضریب π چـه کنیم؟ البته با آنکه π به‌شکلی عجیب با حرف یونانی نوشته شده است، باز عددی ثابت است. اگـر داشتیم $A=۳r^۲$ می‌توانستیم به آسانی به $A'=۶r$ بـرسیم (ر. ك. فرمول (۶) و شکل گیاه درحال رشد در شکل ۱۸). π درست‌اندکی‌از ۳ بزرگتر است وبا آن همان طریق عمل می‌کنیم. از $A=\pi r^۲$ پیدا می‌کنیم $A'=۲\pi r$. اما می‌دانیم که $۲\pi r$ محیط دایره است. پس $A'=C$.

نتیجه‌ای بسیار مشابه برای کـره به دست می‌آوریم. از فرمـول حجم کره $V=(۴/۳)\pi r^۳$ به‌دست می‌آوریم $V'=۴\pi r^۲$ پس $V'=S$. بعید است که این‌یك تصادف باشد. درواقع فهمیدن علت این‌نتیجه بسیار آسان است. فرض‌کنید شما یك کره دراختیار دارید و می‌خواهید آن‌را اندکی بزرگتر کنید. می‌توانید یك پوشش پلاستیکی یك‌نواخت درهمه‌جای سطح کره گردپاشی کنید و به‌این ترتیب به‌کره یك



شکل ۵۶

پوستهٔ جدید بدهید. به‌هیچ‌وجه جای تعجب نیست که اندازهٔ افزایش حجم کره حاصل از این کار بستگی بسیار نزدیکی به مساحت سطحی داشته باشد که روی آن پوسته گذاشته‌اند.

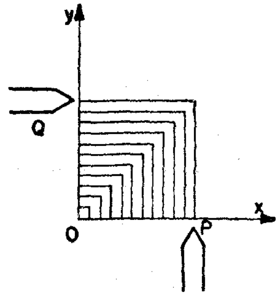
در این استدلال به‌یك نکتهٔ مهم باید توجه شود. مطلقاً لازم است که پوسته یکنواخت باشد؛ پوسته باید درهمهٔ نقاط یك‌ضخامت داشته باشد.[1] اگر این‌استدلال را روی جسم بیضی‌شکل به‌کار گیرید به‌نتیجه‌های تعجب آور می‌رسید. زیرا اگر بدون تغییرشکل تخم مرغ را بزرگتر کنید قشری را که روی تخم مرغ می‌گذارید یکنواخت نیست.

رویه‌ها و حجمها

این فکر نمو اشیاء را با یك پوستهٔ‌اضافی بدون به‌کار بردن دایره‌ها وکره‌ها می‌توان توضیح داد. دوتا ازنتیجه‌های حساب دیفرانسیل وانتگرال‌را به‌وسیلهٔ مربعها ومکعبها می‌توانیم توضیح دهیم.

مکعبی را تصور کنیدکه در گوشهٔ اطاق گذاشته شده است (شکل ۵۶). این مکعب بزرگ می‌شود زیرا به‌طورمداوم برسطح بیرونی مکعب گردپاشی می‌کنند. این‌گردپاشی به‌نحوی صورت می‌گیردکه نقاط A و B و C درهر ثانیه یك‌سانتیمتر

۱. در واقع ما افزایش حجم‌را با ضرب مساحت‌سطح درضخامت پوسته به‌دست می‌آوریم. این تخمین «معقول» خواهد بود اگر پوسته نازك باشد. باید بادقت فکر کنید و به‌اثبات برسانیدکه استدلال درواقع منطقی است و نتیجهٔ صحیح به‌دست می‌دهد.

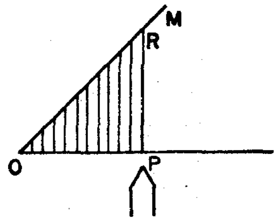


شکل ۵۷

به‌طرف خارج حرکت می‌کنند. اگـر در شروع گردپاشی، یعنی در $t = 0$، مکعبی وجود نداشته باشد، مکعب با گردپاشی از هیچ آغاز به‌رشد می‌کند. بعد از t ثانیه یال مکعب مساوی t سانتیمتر وحجم آن $V = t^3$ خواهد شد. می‌دانیم که V بامیزان $V' = 3t^2$ نمو می کند. ازشکل مشاهده می‌شود که $3t^2$ از کجا می‌آید: آن‌قسمت‌از سطح مکعب که در معرض گردپاشی است از سه‌مربع ترکیب یافته است که مساحت هریك t^2 است. هرسطح بامیزان واحد به‌طرف خارج نمو می کند پس مساحت $3t^2$ میزان نمو پوستهٔ جدید مکعب در هرلحظه است.

مکعب شکلی سه بعدی است. چنین‌چیزی درهندسهٔ دوبعدی نیز روی می‌دهد. فرض کنید که شما موظفیدکار زیر را انجام دهید. شکل ۵۷ دو نوك را نشان می‌دهد که درطول OX و OY باسرعت واحد حرکت می‌کنند. شما مدادی دارید وموظفید روی کاغذ سایه بزنید به‌طوری که همیشه یك مربع سایه‌دار به‌وجود آیـد. شما باید با سرعت نوکهای متحرك عمل کنید. مربع شما باید همواره درنقطه‌های P و Q به نوکها برسند. در آغاز، کـار آسان است، امـا چون ابعاد مربع بزرگتر می‌شوند خطوطی که رسم‌می‌کنید رفته‌رفته درازتر می گردند. درزمان t ضلع‌مربع t سانتیمتر است. مساحت مربع $A = t^2$ است و $A' = 2t$ است. مدادی که باآن سایه می‌زنید درطول دوضلع مربع حرکت می‌کند. پس مرز مربع $2t$ است. در اینجا نیز طول خط مرزی با مقدار A' توافق دارد.

فرض کنید آخرین‌شکل را در امتداد OM نیمساز زاویهٔ XOY به‌دو قسمت ببریم. نیمهٔ پـایینی در شکل ۵۸ نشان داده شده است. مساحت سطح سایه‌دار $\frac{1}{2}t^2$ است این‌سطح با میزان t، به‌مرور که نوك P به‌طرف خارج‌حرکت می‌کند، افزایش

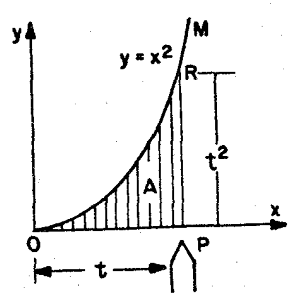


شکل ۵۸

می‌یابد. اگر به‌سایه‌زدن مثلث ادامه دهید در هرلحظه خطی مانند PR به‌طول t ترسیم می‌کنید. اگر A مساحت مثلث سایه‌دار باشد داریم $A=\frac{1}{2}t^{2}$ و از آنجا $A'=t$ که با طول خط مرزی PR مساوی است.

ممکن است برای ما این سؤال مطرح شود: لازم است OM خط‌مستقیم باشد؟ آیا نمی‌توانستیم شکلی مانند شکل ۵۹ در نظر بگیریم؟ در اینجا OM یك سهمی $y=x^{2}$ است. یك‌بار دیگر نوك P باسرعت واحد حرکت می‌کند و با حرکت خط PR سطح سایه‌دار افزایش می‌یابد. در زمان t مسافت OP برابر t است، طول x نقطهٔ R مساوی t است. چون R روی نمودار $y=x^{2}$ واقع‌است، y نقطهٔ R برابر با t^{2} است: به‌این‌ترتیب طول خط PR برابر t^{2} است.

با توجه به‌نتیجه‌های پیشین می‌توانیم حدس بزنیم‌که سطح A با میزان برابر طول PR افزایش خواهد یافت. یعنی انتظار داریم‌که A' برابر با t^{2} باشد. این



شکل ۵۹

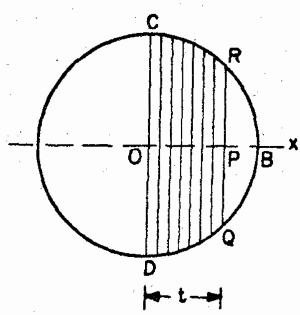
حدس درواقع درست است. مساحت سایه‌دار با قانون $A = \frac{1}{3}t^3$ داده‌می‌شود و این نتیجه می‌دهد $A' = t^2$.

من درنظر ندارم دراینجا دربارهٔ نظریهٔ مساحت بحث کنم. می‌کوشم نشان‌دهم که نظریهٔ سرعت چگونه بانظریهٔ مساحت ارتباط پیدا می‌کند. دربسیاری از حالتها وقتی می‌خواهیم یك مساحت مجهول A را پیدا کنیم می‌بینیم که می‌توانیم سرعت افزایش مساحت را حساب‌کنیم. یعنی می‌توانیم A' را به‌دست بیاوریم. حالا یك مسألهٔ معکوس داریم یعنی قانونی برای A' داده‌اند قانون A چه می‌تواند باشد؟

توجه باید کرد که مسألهٔ پیداکردن مساحت سطح زیر سهمی $y = x^2$ با مسأله‌های مقدماتی دربارهٔ مساحت مثلث، مستطیل و مربع فرق کلی دارد. محاسبهٔ سطح زیرسهمی به‌نظرمی‌رسد بسیار مشکلتر باشد. حساب دیفرانسیل وانتگرال‌راهی برای ورود در این مطلب به ما ارائه می‌دهد. محاسبهٔ آن بسیار ساده است. تفصیل آن‌را درهرکتاب حساب دیفرانسیل وانتگرال مقدماتی خواهید یافت.

پیداکردن حجم بسیارشبیه به‌یافتن مساحت سطح است. بی‌تردید فرمول‌حجم کره یعنی $V = (4/3)\pi r^3$ را می‌دانید. این فرمول‌را ما دربخش پیشین این‌کتاب یادآوری‌کردیم. اما با آنکه این‌فرمول‌را می‌دانید فکر نمی‌کنیم‌که بدانید چگونه این فرمول به دست آمده است. پیداکردن حجم کره درواقع یك مسألهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال است. ممکن است مایل باشید به‌اختصار کلیاتی از ایده‌ای که برای محاسبهٔ آن به‌کار رفته است، بدانید.

ما حجم‌کره با شعاع یك سانتیمتر را درنظر خواهیم گرفت. در شکل ۶۰



شکل ۶۰

دایره‌ای فرض می‌کنیم که مرکز آن O و شعاع آن یك سانتیمتر است. کره را نمی‌توانیم به‌درستی روی کاغذ نشان دهیم. باید تصور کنید که شکل دایره دور محور OX دوران می‌کند. دراین‌صورت دایره در فضا یك کره می‌برد. ما دربارهٔ این کره می‌اندیشیم. می‌توانید این کره را یك‌فلز مدور میان‌تهی تصور کنید. ما آن‌را اکنون پر می‌کنیم. خط DOC چون دور OX دوران کند یك قرص مدور می‌سازد. این قرص‌را یك‌قطعه‌کاغذ درنظر بگیرید که داخل کره‌را به‌دو بخش تقسیم می‌کند. ما حالا پرکردن کره را آغاز می‌کنیم. می‌توانیم بایك‌سری قرصهای کاغذی گرد که به‌یکدیگر می‌چسبانیم کره را پر کنیم. بدیهی‌است قرصهای کاغذی دارای شعاع مساوی نخواهند بود. فرض کنید به‌مرحله‌ای رسیده‌ایم که قسمت سایه‌دار شکل ۶۰ با این قرصها پر شده است و باید قرص بعدی را بچسبانیم. شعاع این قرص PR است. این قرص قسمتی از فضا را که از دوران خط QPR در حول OX به‌دست می‌آید، اشغال می‌کند. یا به‌جای قرصهای کاغذی می‌توانیم تصور کنیم که با قشرهای پلاستیکی که به‌وسیلهٔ گردپاشی ایجاد می‌شوند کره را پر می‌کنیم. هرراهی‌را پیش بگیریم، تصور خواهیم کرد که منطقهٔ سایه‌دار از سمت راست رشد می‌کند به‌طوری‌که فاصلهٔ OP، به‌میزان واحد رشد می‌کند. پس بعداز t ثانیه فاصلهٔ OP، t سانتیمتر خواهد بود. درهرمرحله‌ای ازعمل منطقهٔ پرشده آن‌قسمت ازکره خواهد بود که بین دو صفحهٔ موازی قرار می‌گیرد.

هر پوستهٔ تازه‌که روی آن اضافه می‌شود صاف وهموار است و درهمهٔ نقاط یك ضخامت دارد. بعلاوه سطح با میزان واحد به‌سمت بیرون توسعه می‌یابد. به این ترتیب، مانند مثالهای پیشین، مساحت سطح مذکور میزان افزایش حجم را معلوم می‌کند. مساحت سطح چه‌اندازه است؟ سطح دایره‌ای است به‌شعاع PR. ما باید PR را حساب کنیم. این‌کاری دشوار نیست. OPR یك مثلث قائم‌الزاویه است. $OR=1$، زیرا دایره به‌شعاع یك‌سانتیمتر است. چنان‌که درپاراگراف گذشته گفتیم $OP=t$. ازقضیهٔ فیثاغورس حاصل‌می‌شود $PR^2=1-t^2$. خوشبختانه ما به‌مجذور PR نیاز داریم نه به خود PR. مساحت دایره‌ای به شعاع PR مساوی است با $\pi\cdot PR^2$ یعنی $\pi(1-t^2)$. اگر V حجمی باشد که در زمان t پرشده است داریم:

$$V'=\pi(1-t^2).$$

دراینجاهم به‌مسألهٔ معکوس برمی‌خوریم. می‌دانیم V به‌چه‌سرعت افزایش می‌یابد و می‌دانیم که V در زمان $t=0$ از صفر شروع می‌کند. این اطلاعات کافی است تا جواب را به‌دست دهد.

$$V=\pi\left(t-\frac{۱}{۳}t^{۳}\right).$$

ممکن است متوجه شده باشید که ما جواب یك مسأله دشوارتری را به‌دست آورده‌ایم. این فرمول حجم کره نیست بلکه حجم آن قسمت از کره است که میان دو صفحهٔ موازی واقع شده است. با وجود این وقتی زمان به ۱ $= t$ می‌رسد نقطهٔ P به نقطهٔ B خواهد رسید و در این زمان نصف کره را پر کرده‌ایم. چون در فرمول بالا ۱ $= t$ گرفته شود، می بینیم که نصف کره دارای حجم $\pi\left(۱-\frac{۱}{۳}\right)$ یعنی $\frac{۲}{۳}\pi$ است. برای یافتن حجم تمام کره این مقدار را دو برابر می کنیم وجوابی را که انتظار داریم برای کره‌ای با شعاع واحد یعنی $\pi(۴/۳)$ را به‌دست می‌آوریم.

حجم کره‌ای با شعاع r به‌همین طریق به‌دست می‌آید.

فصل دهم

شهود* و منطق

شما حالا چند مثال از مسأله‌های حساب‌دیفرانسیل و انتگرال مقدماتی را دیدید و به‌بعضی از اشاره‌ها به‌مطالبی که سبب می‌شود حساب دیفرانسیل و انتگرال ماورای آن مطالب گسترش یابد توجه کردید. با زمینه‌ای که دراینجا داده شد می‌توانید بسیاری از کتابهای حساب‌دیفرانسیل و انتگرال را خودتان بی‌دشواری بخوانید و بفهمید. کتابهای دیگری نیز وجود دارد که به‌نظر نمی‌رسد از آنها مطلبی درک کنید. عده‌ای ازکتابها بین‌این دوحدقرار گرفته‌اند. شما بارضایت‌خاطر کتاب راخواهید خواند وآن‌گاه به‌صفحه‌ای خواهید رسید که به‌نظرتان به‌کلی بی‌فایده است. شاید ازمطالبی که نوشته‌شده است هیچ‌چیزی نخواهید فهمید؛همچنین ممکن است دریابید که برای نتیجه‌ای که‌به‌نظر می‌رسد کاملا واضح باشد، استدلالهای دراز به‌کار رفته است.

دراینجا دانستن چیزهایی از تاریخ ریاضیات به‌فهم مطلب کمک می‌کند. در طول سالهای ۱۶۰۰ تا ۱۸۰۰ میلادی حساب‌دیفرانسیل و انتگرال با این‌گونه مسأله‌ها زیاد سروکار داشته است و طرز فکری را که در این‌کتاب دیدید بسیار

* ما کلمهٔ intuition فرنگی را شهود ترجمه‌کردیم. معنی‌آن شناسایی روشن ومستقیم و بی‌درنگ‌حقیقت است و دریافتن آن نیازی به‌تجربه و استدلال ندارد. ریشهٔ این حس درونی به‌ویژه در احساسات قراردارد. intuition را در کتابهای روانشناسی به «شعور باطنی» نیز ترجمه کرده‌اند. بعضی از فیلسوفان ایرانی آن را اندر یافت نیز گفته‌اند. ــ م.

به‌کار گرفته است. سپس به‌تدریج بحرانی بروز کرد. چون ریاضیدانان به‌تدریج در موضوع عمیق و عمیقتر شدند و به‌موضوعهای پیچیده و پیچیده‌تر دقت کردند، جوابهایی به‌دست آوردند که به‌وضوح نادرست بود. طرز فکر آنان که برای مطالعهٔ وضعیتهای ساده کاملا رضایت بخش بود حالا نامطمئن جلوه می‌کرد ولازم دیدند چیزهایی را که در گذشته مسلم فرض می‌کردند با امعان نظر بسیار مورد بررسی قرار دهند.

چنین بحرانی به‌هیچ‌وجه غیرعادی نیست و نباید موجب شرمساری شود. درواقع بحران اغلب علامت سلامت است. بچه‌ای درحال رشد روزی می‌بیند که نمی‌تواند لباسهای قدیم خود را بپوشد، لباسها برایش کوچك شده‌اند؛ به‌لباسهای جدید نیاز دارد. همچنین، موضوعی که گسترش می‌یابد گاه‌گاهی نیاز به‌راههای اندیشهٔ نو دارد، اندیشهٔ نو از اندیشه‌های گذشته ریشه می‌گیرد.

بدیهی است که این‌امر برای‌معلمان مسأله‌ای پیش‌می‌آورد. آیا ما باید مبتدی درحساب دیفرانسیل و انتگرال را بامفهومهایی بپوشانیم که مناسب‌حال ریاضیدانان ۱۷۵۰ م، بوده است؟ اگر این کار را بکنیم، این خطر هست که مبتدی به‌این لباس عادت کند و از تعویض آن بالباسهای تازه دوخته‌شده شانه خالی کند. ازطرف دیگر اگر دانشجو را بامدل سال ۱۹۶۱ م بپوشانیم ممکن است چنین دریابد که آستینها و شلوار برای او دراز است و حرکتهای او را به‌کلی فلج می‌کند.

ریاضیدانان میان خودشان درپاسخ درست به‌این سؤالها اختلاف‌نظر دارند، وطبیعی است دانشجویان نیز اختلاف‌عقیده داشته باشند. دانشجویی ممکن است از نوعی تعلیم لذت ببرد که برای دانشجوی دیگر مایهٔ نفرت است. عقیدهٔ خودمن این است که در آغاز پوشاندن آخرین وپرآوازه‌ترین مدلها به‌دانشجویان نامعقول‌است. بهتر است بالباسهای معمولی و مناسبتر شروع کرد امـا باید بدانید که این لباسها را برای تمام عمر شما ندوخته‌اند.

پس این راههای مختلف‌اندیشه کدام‌اند؟ اگر در این کتاب به‌عقب برگردید خواهید دید که عدهٔ بسیاری از مفهومها از زندگی روزانه گرفته شده‌است ــ اجسام متحرك، سرعت، شتاب، شیب، مساحت و حجم. ما سعی نکردیم یك تعریف دقیق از این مفاهیم عرضه کنیم. فـرض کردیم کـه کمابیش معنی این کلمات را می‌فهمیم و براین اساس بحث کردیم.

ریاضیدانان این‌روش را طریقهٔ شهود می‌نامند. در زندگی‌روزمره اندیشهٔ ما تقریباً همواره‌شهودی است. در بین‌ما کمتر کسی هست که بتواند لغت سگ‌را بادقت تعریف کند. اما ما سگها را تـا ببینیم می‌شناسیم. ممکن است گاهی شك‌و تردیدی پیش‌آید.ــ چه‌موقعی دیگر حیوان سگ نیست و گرگ به‌حساب می‌آید؟ــ اما به‌این

چیزها زیاد توجه نمی‌کنیم. درعمل، با این طرز تفکر درکار خود موفق هستیم، پس باید چیزی منطقی در این‌کار باشد.

چنان‌که درپیش گفتیم در قرنهای ۱۷ و ۱۸ م. ریاضیدانان بیشتر درگیر مسأله‌های علمی بودند. می‌خواستند بدانند روی چه خمی زمین دور آفتاب می‌گردد و چطورسرعت آن موقع گردش تغییرمی‌یابد. ایشان دلیلی نمی‌دیدند دربارهٔ سرعت به بحثهای فلسفی بپردازند. مطمئن بودندکه زمین سرعتی‌دارد و می‌خواستند فرمولی برای آن بیابند.

چنان‌که می‌بینید اندیشهٔ شهودی، ریاضیات و فیزیك را درهم می‌آمیزد. در این‌کتاب بارها این آمیزش‌را به‌کار بردیم؛راه استدلال ما چیزی‌شبیه مطلب زیر بود:

الف ــ واگن شکل ۱۳ در صفحهٔ ۲۷ طبق قانون $s = t^2$ حرکت می‌کند.

ب ــ در هرلحظه‌ای واگن سرعتی دارد.

ج ــ ما می‌خواهیم بدانیم‌که این سرعت چیست.

با یافتن فرمول $s' = 2t$ برای سرعت در واقع موفق شدیم.

به‌حکم ب دربالا دقت‌کنید. به‌نظر می‌رسد این‌حکم ایجاب می‌کندکه وقتی جسمی حرکت می‌کند باید سرعتی داشته باشد. جسم باید با یك سرعتی حرکت‌کند.

این فرض بسیار طبیعی است و آن‌را می‌پذیریم. اغلب مردم اگر بشنوندکه چیزی حرکت می‌کرده‌است می‌پرسند حرکت آن تند بوده یا کند. اگر به‌آنها گفته شود: حرکت می‌کرده اما سرعتی نداشته‌است بسیار متعجب می‌شوند.

ریاضیدانان پیشین چنین امکانی را حتی درنظر هم نگرفتند. مع‌هذا در قرن ۱۹ م. ریاضیدانان بافرمولهایی مواجه شدندکه درآنها این‌امر پیش‌امد ــ نقطه‌ای حرکت می‌کرد اما حرکت هیچ‌تندی نداشت!

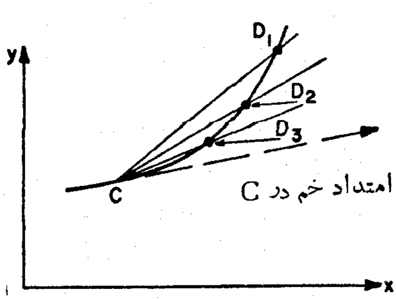
این تناقض ظاهری را می‌توانیم به‌طرزی دیگر بیان‌کنیم. از ابتدای کتاب برای نشان‌دادن حرکت یك‌جسم از شکلها استفاده کردیم. دراین‌شکلها سرعت جسم باشیب خم متناظر است. پس امتداد خم باسرعت جسم متناظراست. اگرجسم‌سرعتی ندارد بدین‌معنی است‌که خم نظیرآن امتدادی ندارد!

برای شما ممکن است تصور وجود چنین چیزی‌بسیار دشوار باشد. اگرچنین است ناراحت نشوید. بیش‌از دوقرن وقت بهترین ریاضیدانان صرف شد تا به‌امکان وجود چنین چیزی پی‌ببرند. بعلاوه وقتی من‌مثالی بیاورم شما ممکن است تصور کنید که این مثال مناسب نیست. این تصور شما نیز غیرمنتظره نخواهد بود. واضح است خمی‌که از یك نقطه می‌گذرد اما هیچ امتدادی درآن نقطه ندارد همچنان

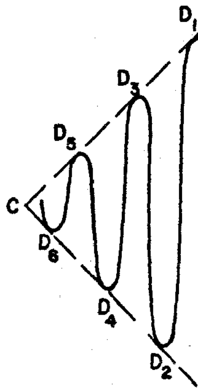
شگفتی‌آور است. به‌نظر نمی‌رسد انتظار داشته باشیم که این خم درست نظیر نمودارهایی باشد که درجبر مقدماتی ترسیم کردیم.

چطور می‌توانیم خمی بسازیم که دریك نقطهٔ بخصوص امتدادی نداشته باشد؟ اگرچنین خمی داشته باشیم و بخواهیم شیب خم را در آن نقطه پیدا کنیم نباید به نتیجه‌ای برسیم. منظور من درست این نیست که توانایی محاسبهٔ شیب را نداریم، منظور من این است که شیبی وجود ندارد که محاسبه کنیم. چطور امکان دارد چنین وضعی پیش آید؟ برای جواب به‌این سؤال ناچارم چگونگی عملی را که برای یافتن y' انجام دادیم یادآوری کنم. y' اندازهٔ شیب خم است. این کار را در صفحه‌های ۶۳ تا ۶۷ انجام دادیم. در آنجا نمودارشکل ۶۱ را داشتیم. نقطه‌های D_1، D_2، D_3، ... را روی خم گرفتیم وشیبهای خطهای CD_1، CD_2، CD_3، ... را پیدا کردیم. در مثالهایی که درنظر گرفتیم دیدیم که این شیبها به‌یك‌عدد ثابت نزدیك‌می‌شوند و این عدد ثابت را شیب خم در نقطهٔ C نامیدیم. اما ثابت نکردیم که شیبها باید به‌یك عدد ثابت‌میل کنند. فقط گفتیم که درحالتهای ویژه این‌شیبها به‌عددی‌ثابت‌میل‌می‌کنند. به‌هرحال فرض کنید که شیبها استقرار نمی‌یابند بلکه‌دائم سرگردان هستند. آیاچنین چیزی می‌تواند پیش‌آید؟ اگر پیش‌آید خم چه‌شکلی پیدا می‌کند؟

خمی شبیه‌خم شکل ۶۲ را درنظر بگیرید. دوخط نقطه‌چین باخط افقی زاویهٔ $45°$ تشکیل می‌دهند. نقطه‌های D_1، D_2، D_3، D_4، D_5، D_6، ... طوری انتخاب شده‌اند، که رفته رفته به‌نقطهٔ C نزدیکتر می‌شوند. اما شیبهای خطهای CD_1، CD_3 و CD_5 مساوی $+1$ است در صورتی که شیبهای خطهای CD_2، CD_4 و CD_6 برابر -1 است. به‌این ترتیب چون D به C نزدیك می‌شود شیب‌بین -1 و $+1$ نوسان می‌کند. ما فرض می‌کنیم این نوسان بینهایت بار ادامه می‌یابد. بدیهی است این فرض معنی‌می‌دهد که خم در نزدیکی C بایدبسیار پیچیده باشد. درنزدیکی



شکل ۶۱

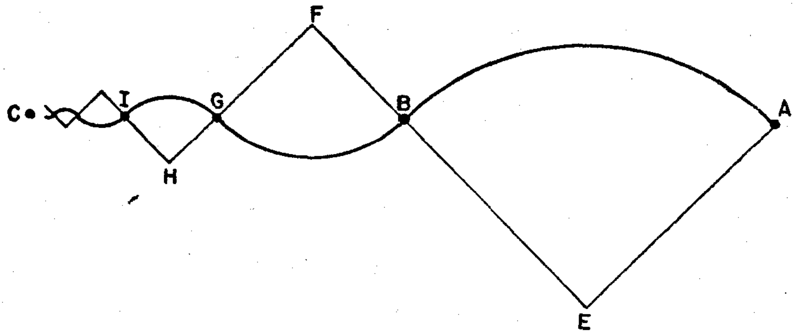


شکل ۶۲

باید بینهایت نقطهٔ اوج و نقطهٔ حضیض وجود داشته باشد. آن‌گاه چون D به C نزدیك می‌شود خط CD مدام میان دوخط نقطه‌چین نوسان می‌کند وشیب آن هرگز به‌هیچ مقدار مخصوصی میل نمی‌کند. خم به‌نقطهٔ C نزدیك می‌شود، اما نمی‌توانیم بگوییم با کدام امتداد نزدیك می‌شود. بـرای اصطلاح «شیب خم در نقطهٔ C» هیچ معنایی نمی‌توانیم قائل شویم.

کسانی کـه به‌مثلثات آشنایی دارند می‌توانند تحقیق کنند که نمودار معادلهٔ $y = x\sin(1/x)$ درجوار $x = 0$ وضعی مانندخمی دارد که ما در بالا در نظر گرفتیم. پس اگر بخواهیم خمی درنزدیکی C بینهایت نوسان داشته‌باشد توقعی بیجا نیست. بدون خارج‌شدن از برنامهٔ دبیرستانی می‌توانیم مثالی از این خم بیاوریم.

می‌توانیم چنین‌خمی را بدون استعمال مثلثات نیز ترسیم کنیم. ترسیم از روی شکل ۶۳ و توصیفی که از آن داده می‌شود روشن‌می‌شود. CA را می‌توان به‌هر طول مناسب انتخاب کرد. B در نیمه‌راه بین C و A است در مثلث AEB زاویهٔ E قائمه و دوزاویهٔ A و B هر یك $45°$ است. پس‌می‌توان یك‌ربع‌دایره از A تا B بامرکز E ترسیم کرد. نقطهٔ G در نیمه‌راه C و B است. مثلث GFB مانندمثلث AEB است یا نصف اشل آن درجهت مخالف آن. یك‌ربع دایره به‌مرکز F، B و G را به‌هم‌وصل می‌کند. مثلث IHG با ترسیم GFB با نصف اشل به‌دست‌می‌آید ویك‌ربع‌دایره به‌مرکز H رسم شده‌است. این ترسیم ادامه دارد و بی‌انتهاست. به‌این‌ترتیب ربع دایره‌هایی به‌نوبت دربالا و پائین CA داریم. اشل هرربع دایره نیمهٔ اشل‌دایرهٔ پیشین است.



شکل ۶۳

اگر دنبالهٔ نقطه‌های A و B و G و I و ... را درنظر بگیریم، هریك از این نقطه‌ها درنیمه‌راه فاصلهٔ نقطهٔ پیشین به‌نقطهٔ C، قرار گرفته‌است. به‌این‌ترتیب می‌توانیم ترسیم را بینهایت بار تکرار کنیم و همواره بعد از هربار به‌نقطهٔ C نزدیکتر شویم اما هرگز از آن نگذریم.

اگر یك نقطهٔ D درطول این خم به‌سوی C حرکت کند خط CD مانند شکل ۶۲ نوسان بسیار می‌کند. چون D به C نزدیك شود مقدار شیب آن به‌تناوب منفی‌ومثبت‌می‌گردد. می‌توان‌ثابت کرد که این‌مقدارها به‌تکرار از ۱/۷ + تا ۱/۷ — و برعکس، تغییر می‌یابند. به‌این‌نحو وقتی که D به C نزدیك می‌شود شیب هرگز برمقدار ویژه‌ای تثبیت نمی‌شود.

فکر می‌کنم ایرادهایی به این مثال خواهید گرفت. (۱) می‌توانید بگویید که در واقع این‌خم به‌هیچ‌وجه ترسیم نشده است. زیرا بینهایت دایره باید‌کشیده شود و این خود وقت بی‌پایان لازم دارد تا به C، نقطه‌ای که منظور است، برسد. (۲) درهرحال می‌توانید بگویید این یك خم نیست بلکه قطعاتی از خمهای مختلف پهلوی‌هم چیده شده‌اند.

در وارد‌کردن این اعتراضها شما تنها نیستید همراهان زیادی دارید. یکی‌از ریاضیدانان بزرگ یك یا دوقرن پیش‌همین اعتراض دوم را داشت. اعتراض‌نخست از آن گونه است که‌هنوز احساسات‌شدید ودلایل‌تند بین ریاضیدانان‌را پیش‌می‌کشد.

اعتراض دوم شما پس‌از این درنظر گرفته خواهد شد. نگاهی به‌اعتراض اول می‌اندازیم. طبیعی است در ترسیمی که انجام‌آن وقت ابدی لازم دارد دشواریهای

منطقی مشاهده کنید. اما آیا فکر کرده‌اید که اگر فقط مجاز بودیم از چیزهایی گفتگو کنیم که ترسیم آنها در گامهای محدود انجام می‌گیرد چه گرفتاریها پیش می‌آمد؟ تصور می‌کنم شما گاه‌گاهی از عدد π صحبت می‌دارید. آیا مایلید به‌من بگویید عدد π به‌درستی چقدر است؟ یکی ممکن است بگوید $۳\frac{۱}{۷}$. راستی π مساوی $۳\frac{۱}{۷}$ است؟ نه؛ π بیشتر شبیه ۳٫۱۴۱۶ است که از $۳\frac{۱}{۷}$ کوچکتر است. پس آیا π درست ۳٫۱۴۱۶ است؟ نه؛ π را تا هزاران رقم اعشاری حساب کرده‌اند؛ حتی این هم مقدار درست π را به‌دست نمی‌دهد. خیلی خوب پس مقدار π چقدر است؟[1]

درخواهید یافت که به‌هر طریقی بگوییم مقدار درست π چیست نیاز به‌عملیات بی‌انتها داریم. معمولاً π را محیط دایره‌ای با قطر واحد می‌گیریم. اما محیط چنین دایره‌ای چقدر است؟ ارشمیدس آن‌را با محاط کردن و محیط کردن یك کثیرالاضلاع ۹۶ ضلعی منتظم در دایره برآورد کرد. ارشمیدس درك کرد که طول محیط دایرهٔ مذکور بزرگتر از محیط کثیرالاضلاع محاطی و کوچکتر از محیط کثیرالاضلاع محیطی است. با این‌طریق وی توانست محیط دایره را بین

$$۳\frac{۱۰}{۷۱} \quad \text{و} \quad ۳\frac{۱}{۷}$$

برآورد کند. اما به‌چه علت به‌کثیرالاضلاعهای ۹۶ ضلعی قناعت کنیم؟ اگر عدهٔ ضلعهای کثیرالاضلاعها را بیشتر بگیرید برآورد شما دقیقتر خواهد بود. اما نحوهٔ عمل بی‌انتها است. در هیچ مرحله‌ای عمل برآورد کامل نیست. در هر موقع فقط می‌توانیم بگوییم که π در بین دو عدد واقع شده‌است. عدد درست π فقط موقعی تعریف می‌شود که همهٔ این برآوردها را بگیریم. هر برآورد فاصله‌ای به‌دست می‌دهد که π در آن فاصله باید باشد. π تنها عددی است که بین همهٔ این فاصله‌ها واقع است. π تنها عددی است که بزرگتر از محیط هر کثیرالاضلاع منتظم محاطی و کوچکتر از محیط هر کثیرالاضلاع منتظم محیطی است.

برای محاسبهٔ π راهی دیگر نیز وجود دارد. این یك روش حسابی محض است.

---

۱. می‌توانید مقدار π را تا ۴۰۰۰ رقم اعشاری درکتاب دانستنیهای اعداد بزرگ (*The Lore of Large Numbers*) تألیف پ. جی. دیویس (P. J. Davis) که در این‌سری چاپ‌شده است ببینید.

از جهات زیادی این‌راه آسانتراز راه هندسی است که در بالا گفتیم. عیب این راه این است که من نمی‌توانم دلیل آن را برای شما شرح دهم ولی در سال اولی که حساب‌دیفرانسیل و انتگرال می‌خوانید می‌توانید بفهمید که این روش چگونه‌طرح شده است. این‌روش به‌قرار زیر است. سری زیر را درنظر می‌گیریم

$$۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵}-\frac{۱}{۷}+\frac{۱}{۹}-\cdots.$$

حاصلجمع n جملهٔ اول سری را S_n می‌نامیم. پس

$$S_۱=۱,\ S_۲=۱-\frac{۱}{۳},\ S_۳=۱-\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۵},$$

و می‌توان ثابت کرد که اگر n عددی فرد باشد S_n بزرگتر از $\pi/۴$ و اگر n زوج گرفته شود S_n کوچکتراز $\pi/۴$ خواهد بود. بعلاوه حکم‌زیر مقدار $\pi/۴$ را تثبیت‌می‌کند: عددیگری‌وجودندارد که ازهریك ازاعداد $S_۱$، $S_۳$، $S_۵$، . . . کوچکتر و از هریك از اعداد $S_۲$، $S_۴$، $S_۶$، . . . بزرگتر باشد. اما محاسبهٔ تمام این عددها عمرجاودان می‌خواهد. پس با این‌روش نیز بدون این‌فرض که عملی نامتناهی‌انجام‌شده است، نمی‌توانیم $\pi/۴$ را به‌درستی تعریف کنیم. این‌روش به‌ما امکان‌می‌دهد که $\pi/۴$ را با هردقتی که بخواهیم تعیین‌کنیم. بامحاسبهٔ مجموع یك‌میلیون نخستین جمله‌های سری می‌توانیم مقدار $\pi/۴$ را به‌تقریب تا ۵ رقم اعشاری صحیح حساب کنیم و با ضرب کردن آن‌در ۴ مقدار π را به‌دست آوریم. اما هیچ‌روش‌متناهی نظیر این‌عملیات مقدار درست π را به‌دست‌نمی‌دهد.

در واقع این‌سری بسیار خوبی‌برای برآورد مقدار π نیست. اما برای منظور کنونی ما که می‌خواهیم نشان دهیم تاکنون کسی روشی برای یافتن مقدار π بدون توسل به‌عملیات‌نامتناهی پیدا نکرده‌است، مناسب‌نبودن سری اهمیت زیادی ندارد.

بنابراین اگر اعتراض‌شما به‌ترسیم‌خم صفحهٔ ۱۱۷ این‌باشدکه شامل گامهای نامتناهی است باید به‌چیزهای بسیار دیگر نیز اعتراض کنید! هروقت کسی به‌عدد π یا به‌طول محیط دایره یا به‌مساحت‌آن اشاره می‌کند باید اعتراض‌کنید. همهٔ اینها فقط با عملیات نامتناهی تعریف می‌شوند. در واقع حساب دیفرانسیل و انتگرال دراصل با عملیات‌نامتناهی‌سروکار دارد. سرعت‌واقعی، s'، چیزی‌بودکه مدام به‌آن نزدیك می‌شدیم اما هرگز به‌وسیلهٔ سرعت متوسط، درفاصلهٔ کوچك بدطول h، به‌آن نمی‌رسیدیم. شیب خم، y'، چیزی بود که پیوسته به‌آن نزدیك می‌شدیم اما هرگز باشیب‌خط CD به‌آن نمی‌رسیدیم. اگر مجازیم که دریافتن شیبها وسرعتها عملیات

نامتناهی به‌کار بریم چرا عملیات نامتناهی را در ترسیم خمها و تدوین قانونها استعمال نکنیم؟

حتی در حساب هم عملیات نامحدود پیش می‌آید. اگر بخواهید ۱/۹ را با کسر اعشاری بیان کنید نتیجهٔ ... ۰٫۱۱۱۱۱۱۱ را به‌دست‌خواهید آورد که شامل یك دنبالهٔ نامتناهی از واحدها است. درحساب، به‌طور معمول بدون تشویش خاطر می‌نویسیم ... ۰٫۱۱۱۱۱۱ = ۱/۹، اما در واقع وقتی که می گوییم یك عبارت نامتناهی مساوی ۱/۹ است باید توضیحی نیز بدهیم. با این حکم منظور ما چیست؟ چطور مـی‌توانیم درستی آن را بررسی کنیم؟ می‌توانیم نیت خود را به‌طریق زیر توضیح دهیم. می‌نویسیم

$$S_۱ = ۰٫۱\ ,$$
$$S_۲ = ۰٫۱۱\ ,$$
$$S_۳ = ۰٫۱۱۱,$$

وادامه می‌دهیم. S_n کسر اعشاری است کـه بعداز ممیز n تا ۱ نوشته شده است. در دنبالهٔ $S_۱$،$S_۲$،$S_۳$،... هرعدد به ۱/۹ نزدیکتر از عدد پیشین است و اگر به‌اندازهٔ کافی ادامه‌دهیدمی‌توانید اختلاف عددهمجوار را ازهرعددی که مایل باشید کوچکتر کنید. زیرا در واقع داریم

$$۹S_۱ = ۰٫۹ \quad = ۱ - ۰٫۱,$$
$$۹S_۲ = ۰٫۹۹ \ = ۱ - ۰٫۰۱,$$
$$۹S_۳ = ۰٫۹۹۹ = ۱ - ۰٫۰۰۱.$$

چون به n مقداری به‌اندازهٔ کافی بزرگ بدهیم می‌توانیم $۹S_n$ را به‌اندازه‌ای کـه مایلیم به ۱ نزدیك‌سازیم. به‌این‌ترتیب وقتی n بزرگ می‌شود $۹S_n$ به ۱ نزدیك و نزدیکترمی گردد ومعنی آن این‌است که S_n به ۱/۹ نزدیك‌ونزدیکترمی‌شود. بنا براین وقتی اعداد $S_۱$، $S_۲$، $S_۳$،... را می‌نویسیم‌مقدار ۱/۹ دربین‌همهٔ مقادیرممکن‌دیگر مشخص می‌شود. دنباله درمقدار ۱/۹ مستقر می‌شود نه‌درهیچ مقدار دیگر.

توجه‌خواهید کرد که‌برای توضیح معنی‌عبارت بی‌انتهای ... ۰٫۱۱۱۱۱ همان ایده‌ای را به‌کار بردم که کمی جلوتر برای توضیح عبارت بی‌انتهای

$$۱ - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \cdots$$

را به‌کار گرفته بودم. در آینده هر وقت یك عبارت بی‌انتها را به‌کار بریم توافق خواهیم داشت که چگونه باید تعبیر شود. ما عبارت را در نقطه‌ای می‌شکنیم و مقدار آن را حساب می‌کنیم؛ آن‌گاه نگاه می‌کنیم ببینیم آیا وقتی رفته‌رفته جمله‌های بیشتر در محاسبه وارد می‌کنیم این مقدار به‌عدد ثابتی میل می‌کند؟

کسر اعشاری بی‌انتهای ...۰٫۱۱۱۱۱ را می‌توان به‌صورت زیر نوشت

$$\left(\frac{۱}{۱۰}\right)+\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{۲}+\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{۳}+\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{۴}+\cdots.$$

کسر ۱/۱۰ بهتر از کسرهای دیگر نیست. شاید با درنظر گرفتن عبارت بی‌انتهای

$$\left(\frac{۲}{۳}\right)+\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۲}+\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۳}+\left(\frac{۲}{۳}\right)^{۴}+\cdots$$

نتیجه‌های جالبی به‌دست بیاوریم. می‌توانیم عبارتهای بسیاری از این نوع تشکیل دهیم و بررسی کنیم. برای پرهیز از بررسی جداگانهٔ هر عبارت می‌توانیم جبر را به‌کار گیریم و همهٔ عبارتها را یك‌باره با عبارت بی‌انتهای

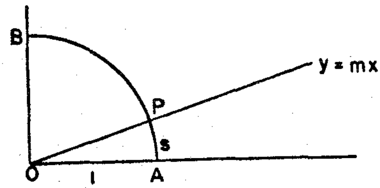
$$x+x^{۲}+x^{۳}+x^{۴}+\cdots$$

بررسی کنیم. این عبارت یك مبحث مهم در جبر دبیرستانی است. در دبیرستان ثابت می‌کنند که اگر به x یك مقدار کسری کوچکتر از واحد بدهیم عبارت بالا درمقدار $x/(۱-x)$ مستقر می‌شود. توجه دارید که اگر x را ۱/۱۰ بگیریم با این فرمول نتیجهٔ ۱/۹ مطابق با عملیات پیشین ما به‌دست خواهد آمد.

پس به‌جای عبارت بی‌انتهای $\cdots+x+x^{۲}+x^{۳}$، که در آن x یك کسر کوچکتر از واحد است، می‌توانیم عبارت جبری معمولی $x/(۱-x)$ را قرار دهیم و به‌این ترتیب چیزی جدید به‌دست نیاورده‌ایم. اما در موارد بسیار یك عبارت بی‌انتها به‌چیزی که باهیچ راه دیگر به‌دست نمی‌آید منتهی می‌شود. به‌مثل به‌جای

$$m-\frac{m^{۳}}{۳}+\frac{m^{۵}}{۵}-\frac{m^{۷}}{۷}+\frac{m^{۹}}{۹}-\cdots,$$

که در آن m یك کسر خالص [کوچکتر از واحد] است نمی‌توانیم هیچ عبارت جبری معمولی بگذاریم. این عبارت طول s را در شکل ۶۴ به‌دست می‌دهد. در این شکل APB قسمتی از دایره به‌شعاع واحد و به‌مرکز O است. خط $y=mx$ با شیب m دایره را در نقطهٔ P قطع می‌کند. s طول کمان AP است.



شکل ۶۴

در واقع قوانین بسیار جالب متعدد وجود دارد که فقط به کمک سریهای نامتناهی بیان می‌شود. این قوانین را با توفیق زیاد به‌یاری حساب دیفرانسیل و انتگرال بررسی کرده‌اند. نتیجه‌های به‌دست آمده هم در ریاضیات وهم در علوم بی‌اندازه مطمئن و رضایت بخش بوده‌اند. اگر روش عملهای بی‌انتها کنار گذاشته می‌شد ریاضیات بسیار فقیر و علوم عقیم می‌گشت. به‌این دلایل ریاضیدانان به‌استفاده کردن از ساختارهای بی‌انتها درکارشان ادامه می‌دهند. ما نیز همین کار را می‌کنیم با آنکه می‌دانیم دینامیت در دست داریم. نامتناهی را می‌توان به‌کار برد اما باید بااحتیاط عمل کرد.

این بحث موقعی مطرح شد که کوشش کردیم اگر در بارهٔ اعتبار ترسیم بی‌انتها، که درصفحه‌های ۱۱۶ و ۱۱۸ به‌کار بردیم، شکی دارید برطرف کنیم. این را اعتراض (۱) نامیدیم. اما بحث بالا بر اعتراض (۲)، دایر بر اینکه شکل ۶۳ یك خم نیست بلکه از پیوستن قطعه‌هایی از دایره‌های مختلف حاصل شده است، نیز روشنایی می‌افکند.

معادلهٔ زیر را درنظر بگیرید

$$y=\frac{1}{1+x+x^2+x^3+x^4+\cdots}$$

که در آن x مثبت فرض شده است. فکر می‌کنم قبول دارید که این یك معادله است و بنا بر این y تابعی از x است که بایك فرمول داده شده است. نمودار این معادله [یعنی این تابع] چیست؟

نخست آن قسمت ازنمودار را درنظر بگیرید که به‌مقادیر x واقع بین صفر و ۱ مربوط می‌شود چون x یك کسر خالص است از نتیجهٔ مندرج درصفحهٔ ۱۲۱ داریم:

$$x+x^2+x^3+\cdots=\frac{x}{1-x}$$

به‌دو طرف عدد ۱ را اضافه می‌کنیم به‌دست می‌آید

$$۱+x+x^{۲}+x^{۳}+\dots=۱+\frac{x}{۱-x}$$

$$=\frac{۱-x}{۱-x}+\frac{x}{۱-x}$$

$$=\frac{۱}{۱-x}\cdot$$

چون این مقدار را در مخرج معادلهٔ موردنظر قرار دهیم نتیجه می‌شود $y=۱-x$ به‌شرط اینکه x کسر خالص باشد.

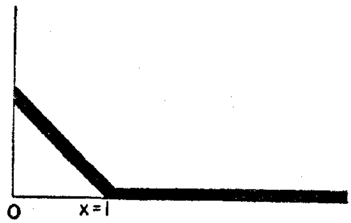
حالا باید دید اگر x بزرگتر از ۱ باشد چه پیش‌می‌آید. اگر به‌مثل بگیریم، $x=۲$ حاصل می‌شود:

$$y=\frac{۱}{۱+۲+۴+۸+۱۶+\dots}$$

برای به‌دست‌آوردن مقدار y، n جمله از سری مخرج را می‌گیریم و پیدا می‌کنیم که وقتی n بزرگ می‌شود کسر به‌کدام عدد میل می‌کند. به‌مثل اگر ۵جملهٔ اول مخرج را بگیریم کسر مساوی ۱/۳۱ می‌شود. اگر ۱۰ جمله سپس ۲۰ جمله بگیریم مقدار کسر به‌ترتیب ۱/۱۰۲۳ و ۱/۱۰۴۸۵۷۵ می‌شود. هرقدر n را بزرگتر بگیریم کسر کوچکتر می‌گردد. در واقع کسر به‌صفر میل می‌کند و صفر مقدار y به‌ازای $x=۲$ است. هرعدد دیگر بزرگتر از ۱ را بگیرید به‌همین نتیجه خواهید رسید. به‌ازای همهٔ xهای بزرگتر از ۱ مقدار y صفر است.

به‌این‌ترتیب یك‌فرمول به‌تنهایی قطعات دونمودار جبری را به‌دست می‌دهد. به‌ازای مقادیر x بین صفر و یك، نمودار باخط $y=۱-x$ منطبق می‌شود. به‌ازای مقادیر x بزرگتراز یك، نمودار باخط $y=۰$ منطبق می‌شود. پس شکل ۶۵ نمودار معادله است.

با معادله‌های ساده‌ای‌که در جبرمقدماتی تدریس می‌شود، به‌دست آوردن این‌گونه نتیجه ناممکن‌است. اما وقتی‌که به‌کار بردن سریهای نامتناهی مجاز است نمودارهایی‌که به‌نظرمی‌آید از عده‌ای از شکلهای هندسی جداگانه ترکیب یافته است کاملا معمولی می‌شود.

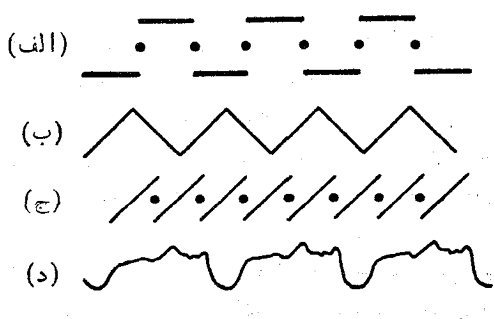


شکل ۶۵

در الکترونیك و رشته‌های دیگرعلوم نوعی ویژه ازعبارت بی‌انتها به‌کار رفته است. آن را سری‌فوریه[1] می‌نامند. با یك‌سری فوریه می‌توانید به‌آسانی نمودارهای شکل ۶۶ را به‌دست بیاورید.

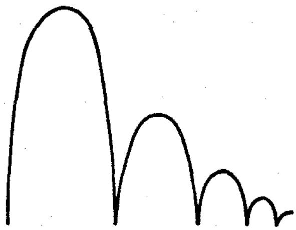
نمودار (ج) درشکل برای پایه‌های‌زمان در تلویزیون و رادار اهمیت دارد. این نمودار نوعی حرکت را نشان می‌دهد که در آن یك‌نقطهٔ نورانی روی صفحه با گامهای ثابت حرکت‌می‌کند سپس ناگهان به‌عقب برمی‌گردد و به‌نقطهٔ آغاز می‌رسد و دوباره حرکت را از سر می‌گیرد.

خم (د) شوخی کوچکی‌است‌که درکتابی درنظریهٔ موسیقی پیدا کردم. یکی عکسی ازیك‌دوست گرفت‌ونیمرخ را در داخل‌ماشینی‌موسوم به «هارمونیك‌آنالایزر» وارد کرد. ماشین‌فرمولی را حساب کردنمودار این‌فرمول‌پیرامون مرئی این‌صورت است که به‌دفعات تکرار شده‌است.



شکل ۶۶

1. Fourier



شکل ۶۷

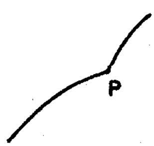
نمودار (الف) گاهی نمودار تابع جان‌پناه[1] و نمودار (ب) تابع دندانه‌اره[2] نامیده می‌شود.

ما برای به‌خاطر آوردن مثالهایی از نمودارهایی که خمهای مختلف متعدد تشکیل یافته است نیاز نداریم که در الکترونیك وارد شویم. شکل ۶۷ رفتار توپی را نشان می‌دهد که زمین خورده و بالا می‌جهد.

درهرحال، لااقل در تئوری، جالب است که درمدت متناهی توپی بینهایت بار جهش می‌کند. به‌مثل فرض کنید در هرجهش ارتفاع توپ مثلا یك‌چهارم ارتفاع جهش پیشین و مدت هرجهش نصف مدت جهش پیشین باشد.

خمی که در هیچ‌جا امتداد ندارد

درشکل ۶۲ خمی رسم کردیم که ازنقطهٔ C می‌گذرد امـا در این‌نقطه هیچ امتدادی ندارد. البته نقطهٔ بدون‌امتداد رامی‌توانستیم روی خمی بسیار ساده‌تر مانند شکل ۶۸ نشان دهیم. این‌خـم یك خمیدگی ناگهانی درنقطهٔ P دارد و نمی‌توان دراین نقطه



شکل ۶۸

1. Parapet Function
2. Sawtooth Function

برآن مماس رسم کرد. خم با امتدادی به‌نقطهٔ P می‌رسد و با امتدادی دیگر آن را ترك می‌کند.

درهر دومثال تنها یك‌نقطه هست که درآنجا خم بدرفتار است. در شکل ۶۲ خم درنقطهٔ C می‌چمد و درشکل ۶۸ در نقطهٔ P زاویه دارد. اما در نقطه‌های دیگر خم کاملا عادی است. قرنهای متمادی فکر می‌کردند که چمها و زاویه‌ها باید چیزهای استثنائی باشند وفقط درنقطه‌های مجزا صورت‌می‌گیرند. اما درسال ۱۸۷۵ مقاله‌ای انتشار یافت که نشان داد ممکن است خمی داشته باشیم کـه فقط از چمها ترکیب یافته‌است. می‌توانید هرنقطه‌ای که مایلید روی این خم بگیرید؛ خم درعبور از این نقطه هیچ امتدادی ندارد. این امر ریاضیدانان را بسیار شگفتزده کرد. واضح شد که درحساب دیفرانسیل وانتگرال قبل‌از سؤال «شیب‌خـم در نقطهٔ P چیست؟» باید پرسید: «آیا این‌خم شیبی درنقطهٔ P دارد؟».

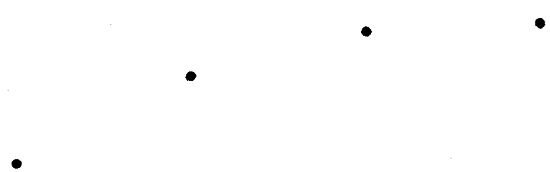
ممکن است احساس کنیدکه‌تفکر دربارهٔ چنین خمی‌دشوار است. این را کنار می‌گذاریم و مـی‌گوییم دیگر دربـارهٔ آن فکر نخواهیم کرد. در سال اول حساب دیفرانسیل و انتگرال درعمل تااندازه‌ای همین‌کار را می‌کنیم. بایك فرمـول ساده مانند $y = 2x^3 - 3x^2$ ازدانش‌آموزمی‌خواهیم y' را پیداکند. قراربراین‌است‌که دربارهٔ این‌سؤال: آیا y' وجوددارد یانه به‌هیچ‌وجه‌تأکید نکنیم. دراین‌مرحلهٔ‌حساب دیفرانسیل فرمولهای ساده‌ای به‌کارمی‌بریم که y' وجود دارد. بدیهی‌است‌ممکن است نقاطی نظیرمبدأ درخم $y = \sqrt{x}$ وجود داشته باشدکه درآنجا مماس برخم خط قائم است وبنابراین y' مقدار نامتناهی‌دارد.حتی دراین‌جا هم‌خم یك‌امتداد مشخص‌دارد. نمودارهایی که در دبیرستان می‌بینیم همهٔ خمها ساده وخوش‌رفتار هستند.

پس می‌توانستیم خمهای بی‌امتداد را از رده خارج کنیم و وضعیت را مورد بحث قراردهیم. می‌توانستیم بگوییم که تعریف‌چنین‌خمی درست نیست و این‌تعریف را قبول نکنیم. به‌دلیلهای متعدد این‌کار را نمی‌کنیم. دلیل اول این است‌که این‌کار حاکی از ترس است. مابه سرزمینی آمده‌ایم که درآنجا چیزها رفتاری متفاوت از آنچه ما عادت‌کرده‌ایم دارند. آیا باید آنجارا ترك‌کنیم و به‌کشورخود برگردیم؟ ریاضیدان غریزهٔ کاشف را دارد و بـه هـرقیمتی باشد پیش می‌رود. اگر چیزهـا متفاوت هستند چه‌بهتر؛ این تفاوت‌آنها را جالبتر می‌کند.

دلیلهای واضحتر دیگری هم وجود دارند. این منطقهٔ جدید وعجیب مرزهای حوزهٔ معلومات ما را احاطه کرده‌است. اغلب اوقات درحال شکار یك‌طعمهٔ ریاضی هستیم. واین‌شکار ازخط مرز می‌گذرد. مانمی‌خواهیم دراین‌نقطه، ازشکارصرف‌نظر

کنیم. زیرا در واقع این‌خمهای عجیب بافرمولهایی تعریف شده‌اند کــه کاملا شبیه فرمولهایی هستند که نه‌تنها در ریاضیات بلکه درمهندسی و علوم نیز به‌کار می‌روند. آنها را می‌توان با سریهای فوریه که درعلوم اهمیت بسزا دارند تعریف‌کرد ودر حقیقت ریشهٔ آنها درفیزیك ریاضی‌است. درزندگی هیچ امکان نداردکه بین آنچه شما می‌خواهید بخوانید و آنچه به‌خواندن آن مایل نیستند یك خط مرزی بکشید: همه‌چیز به‌هم می‌آمیزند تا شما را از این‌مانع مصنوعی بگذرانند.

پس فرض کنید تصمیم گرفته‌ایم دربارهٔ خمهای بی‌امتداد بیندیشیم. مــا فقط نمی‌گوییم که چنین‌خمهایی وجود دارند؛ می‌توانیم یك‌فرمول‌واقعی بیابیم و بدانیم که این‌فرمول یك خم بی‌امتداد به‌دست می‌دهد.[1] اگرسعی می‌کردیم نمودار یك خم بی‌امتداد را بکشیم چه‌پیش می‌آمد؟ چیزی نظیرآنچه شرح می‌دهیم: فرض کنید در



شکل ۶۹

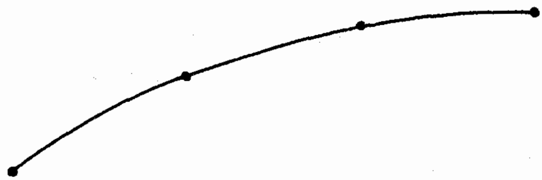
وهلهٔ اول تصمیم می‌گیریم مقادیر y را به‌ازای مقدارهــای صحیح x، یعنی ۰؛ ۱؛ ۲؛ ۳؛ . . . حساب کنیم. ممکن‌است نقاطی‌شبیه شکل ۶۹ به‌دست بیاوریم وفکرکنیم که خم ممکن است به‌شکل زیر باشد

۱. کوپر در مقالهٔ «هیولای ریاضی»* مثال زیر را می‌زند

$$f(x)=\sin x+\frac{1}{4}\sin 2x+\frac{1}{9}\sin 6x+\frac{1}{16}\sin 24x+\dots$$

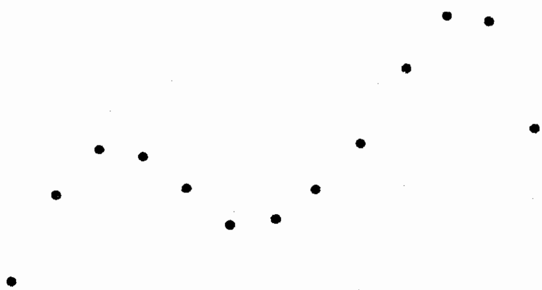
جملهٔ عمومی این‌سری $(1/n^2)\sin n!\,x$ است.

* J. L. B. Cooper «Mathematical Monsters» *Mathematical Gazette* (December, 1954)



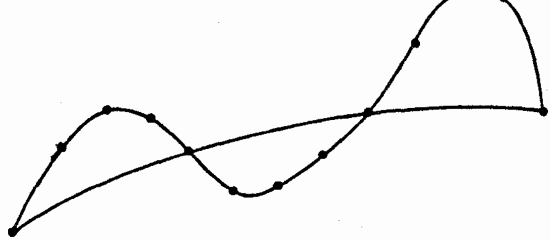
شکل ۷۰

برای اطمینان خاطر تصمیم می‌گیریم نقاط بیشتر رسم کنیم. به‌این ترتیب y را به‌ازای مقادیر x در فاصله‌های ۱/۴ یعنی به‌ازای مقادیر ۱/۴؛ ۱/۲؛ ۳/۴؛ ۱؛ $1\frac{1}{4}$ ... پیدا می‌کنیم و می‌بینیم این‌نقاط مانند شکل ۷۱ قرار گرفته‌اند.



شکل ۷۱

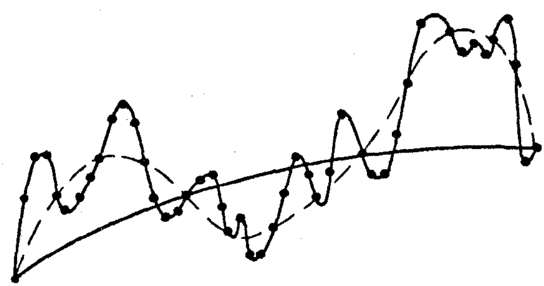
پس درتصور خود دربارهٔ شکل خم تجدیدنظر می‌کنیم. حال به‌نظر می‌رسد که خم باید چیزی نظیرخم زیر باشد:



شکل ۷۲

باز نقاط بیشتری ترسیم می کنیم و می بینیم که امواج بیشتری داریم. نقاط اضافی، به‌فاصله‌های ۱/۱۶، شکل ۷۳ را به‌دست می‌دهندو خم شکل ۷۴ را تلقین می کنند.

شکل ۷۳



شکل ۷۴

به‌همین‌ترتیب ادامه می‌دهیم. درهرمرحله موجهای کوتاهتر از پیش پیدا مـی کنیم. خم بینهایت چین‌وچروك دارد. اما هنوز این‌خم کاملا خوب ومشخص است. می‌توانیم به‌هر تعداد که بخواهیم نقاطی از خم پیدا کنیم، درست مانند حالتی که یك نمودار مقدماتی رسم می کنیم. هرچه بیشتر نقطه‌ترسیم‌کنیم بهترمی‌توانیم وضع‌خم را ببینیم. اما نمی‌توانیم خم را مانند نمودارهای ساده با گردش نوك مداد ترسیم کنیم.

راهنمایی برای ادامهٔ مطالعه

چنان‌که در آغاز این کتاب تأکید شد در حساب دیفرانسیل و انتگرال مفهومها قدرت بسیار برای رشد و گسترش دارند. از این ریشهٔ کوچك شاخه‌های متعدد ریاضیات محض و علم فیزیك به‌وجود می‌آیند. به‌نظر کسی که این رویش درخت را از ریشه به‌بالا تعقیب کند، نشو و نمای آن طبیعی و منظم خواهد بود. اما کسی که با درخت بارآور شناسایی ندارد و ناگهان آخرین میوه‌های آن را می‌بیند، ممکن است این میوه‌ها به‌نظرش بسیار شگفتی‌زا و غیرطبیعی بیاید. بنابراین خواندن کتابهایی دربارهٔ حساب دیفرانسیل وانتگرال با نظم صحیح بی‌اندازه اهمیت دارد. اگر از دانش‌آموزی که نبوغ واقعی در ریاضیات دارد بخواهند بی‌هیچ گونه آمادگی قبلی کتابی جدید در آنالیز ریاضی بخواند، شاید کارش به‌ناامیدی بکشد. در نظر او چنین کتابی به زبان خارجی است. از کلمات هیچ مفهومی عاید وی نخواهد شد. معنی این سخن این نیست که اگر مفهومها به‌تدریج و با نظم درست بنا شوند، باز هم درك آنها به‌خصوص دشوار است.

در گسترش حساب دیفرانسیل و انتگرال سه مرحله شناخته شده است که به‌وضوح بیشتر با گذشت قرنها مطابقت دارند:

۱ــ از ۱۶۰۰ــ۱۸۰۰ م. مرحلهٔ بی‌تشویشی. دراین مرحله تأکید عمده روی فرمولها و نتیجه‌ها صورت می‌گیرد.

۲ــ از ۱۸۰۰ــ۱۹۰۰ م. مرحلهٔ آنالیز یا اپسیلن ـ دلتا.

۳ــ از ۱۹۰۰ م. به‌بعد. مرحلهٔ تجرید و تعمیم فوق‌العاده.

برای رفتن از مرحله‌ای به مرحلهٔ بعدی باید مفهومهای نو و راه تفکر تازه آموخت. دانش‌آموز ممکن است به‌نوعی بحران گرفتار آید. در وهلهٔ اول احساس کند که نمی‌تواند مفهومهای نو را درك کند. اگر موضوعی را در کتابهای مختلف

مطالعه کند و خـود روی آنها کار و مسائلی دربارهٔ آنها حل کند شاید به مرحله‌ای برسد که ببیند که هرچیز درجای خود قرار گرفته است. آن‌وقت با ناراحتی ازخود می‌پرسد تا ببیند به‌چه علت این مفاهیم به‌نظرش چنان دشوار می‌آمدند. می‌بیند کـه مفهومهای جدید همان مفهومهای قدیم هستند کـه بـه‌طریقی دیگر، شایدهم اندکی روشنتر بیان شده‌اند.

قبل‌از ۱۹۰۰ م. عقیدهٔ عمومی این‌بودکه حساب دیفرانسیل و انتگرال بسیار دشوارتر از آن است که بتوان آن را به‌دانش‌آموزان جوان تعلیم داد. بسیاری از نتایج که بـا عملیات جبری رنج‌آور به‌دست می‌آمد به وسیلهٔ حساب دیفرانسیل و انتگرال ثـابت می‌شد و ایـن نحوهٔ عمل را «حیلهٔ محاسبه» می‌نامیدند. در حوالی ۱۹۰۰ م. در انگلستان جان‌پری[1] و دیگران به‌دفاع از این نظر پرداختند که مفاهیم اساسی و روشهای حساب‌دیفرانسیل و انتگرال ساده هستند و می‌توان آنها را در دبیرستانها تدریس کرد. مور[2] استاد ریـاضی در شیکاگو و پدر ریاضیات جدید درآمریکا به‌این‌نظر تبریك گفت.[3] یکی از دانشجویان مور به‌اسم گریفین[4] در تعلیم حساب دیفرانسیل و انتگرال بـه دانشجویـان سال اول کالج پیشقدم شد. این کار گریفین بسیار جسورانه به نظر می‌رسید. کتاب معروف گریفین به اسم آشنایی با آنالیز ریاضی[5] نشان می‌دهد که مشارالیه دراین‌کار چگونه اقدام کرده‌است. اصطلاح «حساب دیفرانسیل وانتگرال» درعنوان‌کتاب نیامده‌که دانشجویان متوحش نشوند. این کتاب کـه هم مثلثات دارد و هم حساب دیفرانسیل وانتگرال دربارهٔ ارتباط حساب دیفرانسیل و انتگرال با فیزیك و مهندسی تأکید می‌کند و برای آشنایی با حساب دیفرانسیل و انتگرال اکیداً توصیه می‌شود.

در انگلستان از پنجاه سال پیش در دبیرستانها حساب دیفرانسیل و انتگرال تدریس می‌شود. چـون در بهترین دبیرستانهای انگلیس دانش‌آمـوزان را تشویق می‌کنند که با پای خودشان راه آموزش‌را طی کنند نمی‌توان تعیین‌کرد که چندسال حساب دیفرانسیل و انتگرال در دورهٔ دبیرستان تدریس می‌شود. دانش‌آمـوز طبق استعداد خود حساب دیفرانسیل و انتگرال را در ۱۸ یـا ۱۶ یـا ۱۴ سالگی آغاز

---

1. John Perry 2. E. H. Moore

۳. رجوع کنید به، The First Yearbook of the National Council of Teachers of Mathematics (U. S. A).

4. F. L. Griffin

5. Introduction to Mathematical Analysis.

می‌کند. چون در آمریکا کتابی وجود ندارد که از روی آن حساب دیفرانسیل و انتگرال را به‌دانش‌آموزان تعلیم دهند ممکن است اشاره به‌چند متن نوشته‌شده در انگلیس مفید باشد. زیرا این کتابها کوچکتر و موجزتر و ساده‌تر ازمتنهای آمریکایی هستند و قیمت آنها نیز ارزانتر است.

مفاهیم حساب دیفرانسیل مقدماتی به طور معمول در اواخر متن جبر آمده است. به‌عنوان مثال کتاب زیر را ببینید:

Durell, Palmer and Wright, *Elementary Algebra* (Bell, Portugal Street, London, W. C. 2).

کتاب زیر یك مقدمهٔ بسیار ساده به‌حساب دیفرانسیل و انتگرال است:

Fawdry and Durell, *Calculus for Schools* (Arnold, London).

کتاب: Durell and Robson, *Elementary Calculus*. Volumes I and II (Bell)

حساب دیفرانسیل و انتگرال را به‌طریقی ساده معرفی می‌کند؛ مؤلفان کوشش بسیار کرده‌اند تا مطلبی درج نکنند که چون دانش‌آموز به مرحلهٔ پیشرفته رسید آن را نادرست بیابد. این کتاب، بیش‌از کتاب *Calculus for Schools* دانش‌آموز را به‌حساب دیفرانسیل و انتگرال وارد می‌کند. جلد دوم کتاب، مشتقات جزئی[1] و مطالبی دیگر راکه برای ریاضیات پیشرفته‌تر، و به‌ویژه برای فیزیك ریاضی اهمیت دارد، توضیح می‌دهد. باوجوداین اگر بخواهید آنچه راکه دراین کتاب می‌خوانید به‌یاد داشته باشید مجبورید بیش از آنچه درکتاب آمده است مسأله حل کنید. می‌توانید تمرینهارا از یکی ازکتابهای حساب دیفرانسیل وانتگرال پیداکنید[2] و در آنها به‌حدی کار کنید که همواره مفاهیم را به‌خاطر داشته باشید.

خواندن کتاب Piaggio, *Differential Equations* (Bell) بسیار آسان است و می‌توان آن را پس‌ازکتاب *Elementary Calculus*, *Part* II خواند. بخصوص فصلهای اول، در زمینهٔ تئوری وارد نمی‌شود اما به شاگردان ایده

---

1. Partial Differentiation

۲. کتابی بد ممکن است تمرینهای خوب داشته باشد. به‌عنوان مثال کتاب

J. Edwards, The Differential Calculus (St. Martin's Press)

درفراوانی مطالب غیرمنطقی و نادرست مشهور است. اما این‌کتاب مجموعهٔ‌فوق‌العاده‌ای از مثالها را شامل است که مورد استفادهٔ همه‌کسانی می‌تواند قرارگیرد که مایلند در به‌کاربردن فرمولهای حساب دیفرانسیل مهارت بهم برسانند.

می‌دهد کـه چگونه حساب دیفرانسیل و انتگرال* را به‌کار می‌برند. در فصل چهارم به‌سرعت و به‌سادگی سری فوریه را معرفی می‌کند.

ما اکنون می‌خواهیم از مـرحلهٔ بی‌تشویشی به‌مرحلهٔ اپسیلن - دلتا برسیم. در اغلب کتابها این‌کار بسیار ناگهانی انجام‌می‌گیرد. به‌نظر من کتابی که دانش‌آموز را به‌تدریج و بادقت بسیار از نظرهای دیرین به‌نظرهای نوین راهنمایی می‌کند، کتاب زیر است:

Hardy, *Pure Mathematics* (Cambridge University Precs)

شاید مایل باشید بدانید چرا به این مرحله، مرحلهٔ «اپسیلن - دلتا» می‌گویند. درقرن نوزدهم بسیاری ازمفهومهایی که پیش‌از آن به‌اندازهٔکافی روشن‌تلقی می‌شدند — به‌مثل «پیوستگی»، «میل‌کردن به‌طرف حدی» — با دقت تحلیل وتعریف شدند. تعریف‌جدید معمولا این جمله‌را در برداشت «به‌ازای هرعددمثبت ε، که ممکن است بسیار کوچك باشد، می‌توان یك عدد δ پیدا کرد به‌طوری‌که ...». مردم به‌این نتیجه رسیدندکه این جمله یك جملهٔ ویژهٔ آنالیز ریاضی جدید است.[1]

اگر کتابهایی بخوانید، مانند کتابهایی که در زیر می‌آیند، کـه به‌طورکلی توضیح‌می‌دهند چگونه ریاضیات دراین‌جهت گسترش یافته‌است، برای‌درك‌مفهومهای جدید مفید خواهد بود:

Tobias Dantzig, *Number, the Language of Science* (Doubleday Anchor, 95 cents). Especially, Chapters 7, 8, 9.

Felix Klein, *Elementary Mathematics from an Advanced Viewpoint: Arithmetic, Algebra, Analysis* (Dover).

W.W.Sawyer, *Mathematician's Delight* (Penguin, 85 cents).

چون شما به‌مرحله‌ای برسیدکه قادر باشید کتابی را که به‌زبان اپسیلن - دلتا نوشته شده است بخوانیدکتابی که بلافاصله باید مطالعه‌کنیدکتاب زیر است:

Courant, *Differential and Integral Calculus* (Interscience, N. Y.)

وضوح و روشنی این‌کتاب قابل تحسین است. چنان‌کـه Nathan G. Park در کتاب *Guide of the Literature of Mathematics and Physics* می‌گوید: «کوران به‌دانش‌آموز بهترین تعادل‌ممکن بین قوت و دقت اعطا می‌کند».

---

۱. نماد δ را دلتا و نماد ε را اپسیلن می‌خوانند. δ و ε دوحرف الفبای یونـانی است که با حروف d و e الفبای انگلیسی مطابقت دارد.

از اینجا به‌بعد دانش‌آموز آنچه باید بخواند به‌ذوق وهدف وی بسیار بستگی دارد. گسترش ریاضیات به‌حدی‌زیاد است که متأسفانه امکان ندارد که یک‌نفر بتواند همهٔ آنهارا بخواند.

درهرشاخه‌ای از ریاضیات معدودی مفهوم‌اساسی وجود دارد. به‌دست آوردن این‌مفهومها نیاز به‌انواع بررسیهای جزئی دارد. بسیار زیادندکتابهایی که جزئیات را بدون بیان مفهومهای اساسی که همهٔ موضوع را روشن می‌کنند، برای شما شرح می‌دهند. بنابراین موقع یادگرفتن شاخه‌ای‌جدید از ریاضیات اگر کتابهای مربوط به آن به‌نظرتان به‌کلی غیرقابل درک بیاید نباید آشفته شوید. به‌جستجوی خودتان در کتابخانه‌ها و کتابفروشیها ادامه دهید تاکتابی به‌دست آورید که شمارا به‌مفهومهای اساسی آشنا سازد. بعضی وقتها نمی‌توانیدکتابی بیابید که همهٔ نیازهای‌شما رابرطرف کند شاید مجبورشوید مطلبی از یک‌کتاب واطلاعی ازکتاب دیگر جمع آوری کنید.

به‌ویژه اگر در بعضی از ریاضیات قرن بیستم، بی‌مقدمه غرق مطالعه شوید در حیرت‌می‌مانید. این ریاضیات به‌کلی با آنچه درمدرسه یادگرفته‌اید متفاوت‌جلوه‌گر می‌شود. بااین‌حال این ریاضیات جدید ازهمان ریاضیات قدیم به‌وجود آمده است. این تحول از راهی نظیر آنچه در زیر می‌آید پیش آمده است. ریاضیات قدیم بیشتر با چیزهای مشخص سروکار داشت. بایستی معادلهٔ بخصوصی‌را حل می‌کردید یا قضیه‌ای دربارهٔ شکل بخصوصی درهندسه ثابت می‌نمودید یا ارتعاشهای دستگاه مکانیکی خاصی‌را مورد مطالعه قرار می‌دادید. باگذشت‌زمان نتیجه‌های‌ویژه دربارهٔ اشیاء بخصوص انباشته می‌شد و ریاضیدانان کم‌کم مشتاق شدند راهی برای تنظیم موضوع بیابند. جزئیات به‌اندازه‌ای زیاد بودکه هیچکس نمی‌توانست همهٔ آنها را به‌خاطر بسپارد. آن‌گاه کم‌کم متوجه شدندکه اغلب وقتها جزئیات تنها موضوع را تیره وتار می‌کند. ازهمهٔ اطلاعاتی که دربارهٔ شیئی در دسترس داریم فقط شاید بخش کوچکی برای حل مسألهٔ موردمطالعه لازم‌باشد وبقیه فقط حواس‌را پرت‌کند. ریاضیدانان به‌مطالعهٔ این جنبه‌های بخصوص آغازیدند، درست مانند شیمیدانی که می‌خواهد یک ویتامین را از یک مادهٔ مرکب استخراج کند. کسی‌که چیزی دربارهٔ حبهای‌ویتامین نداند نمی‌تواند تصورکندکه چنین چیزی دراصل غذایی بوده‌است. به‌همان‌طریق کسی‌که در ریاضیات مجردجدید به‌تازگی وارد شده‌باشد ممکن‌است نتواند بفهمدکه این موضوع تازه هرگز ریاضیات بوده است.

این استخراج مفهومهای اساسی نیز برای ریاضیدانانی‌که به‌مسائل پیچیده و پیچیده‌تر می‌اندیشیدند ضروری گشته بود. بعضی از ارتعاشها در مکانیک می‌تواند توسط حرکت یک نقطه در دو یا سه‌بعد نمایش داده شود. پس ما می‌توانیم مسائل

مکانیکی را به‌وسیلهٔ هندسه تجسم کنیم. برای تجسم بعضی مسائل پیچیده و پیچیده‌تر نیازمند هندسهٔ چهار یا پنج یا شش‌بعدی هستیم. سپس به تحقیق در هندسهٔ n بعدی می‌پردازیم و این امر ما را یاری می‌کند تا با تشابه به‌هندسهٔ سه‌بعدی عادی، مسأله‌را با ابهامی بیشتر تجسم کنیم. بعضی مسائل نیازمند هندسهٔ بینهایت بعدی است. حال فضای بینهایت بعدی از جهاتی شبیه هندسهٔ سه بعدی است و از جهاتی دیگر با آن متفاوت است. پس از هم‌جدا کردن دو نوع مفهوم ضروری است: یکی مفهومهای هندسهٔ معمولی که درهندسهٔ بینهایت بعدی نیز برقرارند وبرای فضای بینهایت‌بعدی مفید هستند و دیگری مفهومهایی که در فضای بینهایت بعدی نادرست هستند و وقتی به‌عنوان تشابه به‌کار می‌روند ما را گمراه می‌سازند. از چنین راهی ریاضیدانان به مفهوم فضای هیلبرت[1] دست یافتند.

ارتباط میان علم فیزیك وهندسهٔ فضایی در کتاب

Courant and Hilbert, *Methods of Mathematical Physics* (Interscience, N. Y.), Volume I.

به‌طرزی بسیار شیوا آمده است.

کتابی که خواننده‌را از ریاضیات قرن‌نوزدهم، بدون‌احساس انقطاع ناگهانی به‌ریاضیات قرن بیستم می‌برد کتاب زیر است.

Riesz and Nagy, *Functional Analysis* (Ungar, N. Y., 1955)

درمقابل کتاب فوق‌الذکر می‌توان کتاب:

Munroe, *Introduction to Measure and Integration*

تألیف مونرو را نام برد. این کتاب از آغاز چاشنی قرن بیستم را دارد. برای خواننده‌ای که مقدمات لازم‌را به‌دست آورده است کتابی بی‌اندازه روشن است.

کتاب (Princeton) E. J. McShane, *Integration* برای دانشجویانی نوشته شده است که تازه وارد دورهٔ کارشناسی ارشد ریاضی شده‌اند و بدیهی است هردانش‌آموزی که ذوق ریاضی قوی دارد می‌تواند چند سال پیش از آن این کتاب را بخواند.

هردانشجویی که برای انتقال از حساب دیفرانسیل و انتگرال سنتی به‌روش نظریهٔ مجموعه‌ها به‌اشکال برمی‌خورد می‌تواند در کتاب حجیم

Hobson, *Functions of a Real Variable* (Cambridge University Press, reprint by Dover).

1. Hilbert

مطالبی جالب به‌دست بیاورد. ایـن کتاب را آمیخته‌ای عجیب از مطالب دقیق و خطاهای حیرت‌انگیز تعریف کرده‌اند. این کتاب در سالهایی نوشته شده است کـه نظریه‌هـای جدید وارد می‌شدند. پس در آنجا می‌بینید کـه هوبسون (کـه تحت تعلیمات بـا اصول قدیم بزرگ شده بود) می‌کوشد هم به‌خودش و هم به‌دیگران توضیح دهد که مفهومهای جدید چه‌هستند. اینکه کتاب خطاهای[1] زیاد دارد ارزشمند است. مقصودم این است کـه هیچ حکمی را به‌اعتبار نویسندهٔ آن نمی‌توانید قطعی بگیرید. همواره باید ازخودتان بپرسید «آیا این را باور کنم؟».

---

۱. رجوع کنید به: Littlewood, *A Mathematician's Miscellany* (Methuen, London) page 68.

فهرست اصطلاحات فنی

در این کتاب من مطالب را تا حد امکان به‌زبان عادی توضیح داده‌ام. وقتی که به کتابهای حساب دیفرانسیل و انتگرال دیگری مراجعه می‌کنید باید نمادها ونامهای ویژه‌ای که ریاضیدانان به‌کار می‌برند بدانید.

مشتق[1]ـ s' را مشتق s می‌نامند. برای نشان‌دادن مشتق علامتهای دیگر هم می‌بینید مانند ds/dt، Ds، $D_t s$. این علامتها درست همان معنی s' را دارند.

مشتقگیری[2]ـ مسألهٔ پیداکردن مشتق را مشتقگیری می‌نامند. پس درفصل سوم یادگرفتید چطور از $t^۲$ و در فصل چهارم از t^n و درفصل پنجم از یك چندجمله‌ای مشتق بگیرید.

انتگرالگیری[3]ـ پیداکردن مساحت سطح یا حجم مسأله‌ای از انتگرالگیری است. انتگرالگیری‌را می‌توان عمل وارون مشتقگیری به‌حساب آورد. علامت $\int$ در رابطه با انتگرالگیری به کار می‌رود. در آخر فصل نهم حجم نیم‌کره‌ای را پیدا کردیم. یك ریاضیدان نتیجه‌ای راکه ما به‌دست آوردیم به‌صورت زیر می‌نویسد.

$$\frac{۲}{۳}\pi = \int_{\circ}^{۱} \pi(۱-t^{۲})dt \cdot$$

حد[4]ـ چندین‌بار در این کتاب توجه‌کردیم که چیزی به‌عددی میل می‌کند یا به‌نظر می‌رسد در مقداری مستقر می‌گردد. در فصل دوم اعداد ۵ و ۹ر۵ و ۹۹ر۵ و ۹۹۹ر۵ و ... به‌نظر می‌رسید به‌مقدار ۶ میل می‌کند. در شکل ۲۳ در صفحهٔ ۶۵

---
1. Derivative 2. Differentiation
3. Integration 4. Limit

شیب خط CD در نقطهٔ C رفته‌رفته به‌شیب خم نزدیکتر می‌شد. اگر به قدر کافی ۱ در کسر ۱۱۱ ... ۱۱۱۱۱۱/ره بگذارید مقدار آن هر اندازه بخواهید به‌کسر ۱/۹ نزدیك می‌شود. درهریك ازاین موارد یك‌چیزی به حدی میل می‌کند. با اینکه روی کلمهٔ حد تاکید نشده است مفهوم آن در هرچیزی‌که دراین‌کتاب مورد بحث قرار گرفته است وارد می‌شود.

تابعـ معنای کلمهٔ تابع درمدت سه قرن اخیر گسترش‌یافته و تغییراتی در آن حاصل شده است. درآغاز معنی جملهٔ «y تابعی‌از x است» چیزی بسیار شبیه معنی این‌جمله بود: «مقدار y بافرمولی به‌مقدار x بستگی دارد.» این تعریف به‌مثل شامل $y=2x+1$ یا $y=x^2$ یا $y=\sqrt{x^3+1}$ می‌شد. درهر یك از این حالتها یك ریاضیدان قرن هیجدهم فرمولی می‌دید که مقدار y را برحسب مقدار x تعیین می‌کند. فرض‌کنید این ریاضیدان روشی داردکه درهریك از این فرمولها وبسیاری ازفرمولهای‌دیگر نیز می‌توان به‌کاربرد. او توصیه به‌فرمول‌ویژه‌ای ندارد، می‌خواهد همهٔ فرمولهارا یکجا درنظر بگیرد. دراین حالت می‌گوید: «y را تابعی‌از x فرض می‌کنیم» و این‌جمله را به‌اختصار چنین می‌نویسد: $y=f(x)$.

چون زمان گذشت این نظر بسنده به‌مقصود نبود. درشکل ۶۵ نموداری‌داشتیم که از دو قطعه خط تشکیل شده بود. بین $x=0$ و $x=1$ مقدار y مساوی $1-x$ بود. به‌ازای مقادیر x بزرگتر از ۱ مقدار y صفر بود. به‌این‌ترتیب دوفرمول وجود داشت یکی $y=1-x$ و دیگری $y=0$. دراین‌باره چه باید بگوییم؟ آیادراینجا دو تابع داریم یا قسمتی از یك تابع برقسمتی از تابع دیگر پیوند خورده است یا چیز دیگری است؟ این مطلب مباحثاتی شدید بین دانشمندان ریاضی به‌وجود آورد. چون زمان می‌گذشت بیش‌ازپیش نمودارهای شگفتی‌آور توجه ریاضیدانان‌راجلب می‌کرد. سرانجام تصمیم گرفته شدکه بهترین‌کار این است‌که فرمول سادهٔ جبر را فراموش‌کنند واگرمقدار y بادادن‌مقدار x به‌طریقی تعیین‌شود بنویسید $y=f(x)$. به‌این‌ترتیب نمودار شکل ۶۵ یك تابع تعریف می‌کند؛ اگر به‌شما بگوییم x چه‌عدد مثبتی است می‌توانید مقدار y متناظر را از روی نمودار بخوانید. اگر بگوییم $x=2$ جواب می‌دهید $y=0$. اگر بگوییم $x=3/4$ جواب‌می‌دهید $y=1/4$. شما برای دادن جواب هرگز معطل نمی‌مانید. به‌مجرد گفتن مقدار x مقدار y تثبیت می‌شود. بسیار خوب ما دیگر دراین موضوع کنجکاوی بیشتری نمی‌کنیم. هرنحوهٔ عملی‌که در ازای هرمقدار x به y تنها یك مقدار تخصیص می‌دهد یك تابع تعریف می‌کند.

نمودار شکل ۶۵ فقط به‌ازای مقادیر مثبت x ترسیم شده بود. پس تابع به ازای همهٔ مقادیر x تعریف نشده است فقط برای مقادیر مثبت x تعریف شده است. تصمیم ریاضیدانان براین بود که ازاین موضوع نباید نگران شد. درسال اول جبر، $y=\sqrt{x}$ فقط به‌ازای مقادیر مثبت x معین است. ما چیزی در بارهٔ جذر یك‌عددمنفی نمی‌دانیم. این وضع‌را پذیرفته‌ایم. (درجبرمقدماتی) گفتیم $\sqrt{x}$ فقط درحوزهٔ مقادیر مثبت x تعریف شده است، اگر $y=f(x)$ تنها به‌ازای بعضی از مقادیر x تعریف شده باشد این مقادیر را حوزهٔ تابع می‌نامند.

به‌عنوان‌مثال اگر x یك‌عدد صحیح باشد می‌توانیم y را بزرگترین مقسوم‌علیه اول x تعریف کنیم اما این تعریف برای مقادیر کسری x بی‌معنی است. ما تابعی تعریف کرده‌ایم که حوزهٔ آن اعداد صحیح است.

درجبر سنتی x و y اعداد را نشان می‌دهند. اما توابعی می‌توان تعریف کرد که به‌اعداد مربوط نباشند. به‌مثل فرض‌کنیم کلیهٔ لحظه‌های زمانی را ازسال ۱۷۸۹ درنظر می‌گیریم. این لحظه‌ها حوزهٔ تابع‌را تشکیل می‌دهند. درهرلحظه ازاین‌سالها چشمان رئیس‌جمهور ایالات‌متحده رنگ مشخصی داشته است. بایك تحقیق تاریخی می‌توان پیداکردکه از ۱۷۸۹ م به‌این‌طرف در هرزمان این رنگ چه بوده است. به‌این‌ترتیب‌روشی داریم که باآن می‌توانیم به‌هرلحظه، ازسال ۱۷۸۹ به‌این‌طرف یك‌رنگ معینی مربوط‌کنیم. بااین‌روش یك تابع تعریف می‌شود. ما ازتعریف تابع با فرمولهای جبری راهی دراز پیموده‌ایم. امروز کلمهٔ «تابع» عموماً به‌این معنای وسیع به‌کار می‌رود.

نکته‌ای‌را بایدگوشزدکرد. برگردیم به‌جبر معمولی، می‌توانیم دو روش‌زیر را درنظر بگیریم.

روش اول: برای به‌دست‌آوردن y، یك عدد دلخواه x بگیرید.
۱ را به‌آن اضافه‌کنید.
نتیجه را مجذورکنید.

روش دوم: برای به‌دست‌آوردن y یك عدد دلخواه x بگیرید.
آن را مربع‌کنید.
۲ برابر عدد را به‌آن اضافه‌کنید. عدد ۱ راهم به‌آن بیافزایید.

هر یك از این دو روش تابعی تعریف می‌کند. روشها متفاوت است. آیا می‌توانیم بگوییم که تابعها هم متفاوت هستند؟

به‌عنوان مثال اگر x را مساوی ۵ بگیریم. روش اول نتیجه می‌دهد $y=(۵+۱)^۲=۳۶$ و روش دوم نتیجه می‌دهد $۳۶=۱+۵\times۲+۵^۲=y$. پس با هردو روش به‌مقدار $x=۵$ مقدار $y=۳۶$ مربوط می‌شود. البته هر عدد دیگری هم به x بدهیم نتیجهٔ هردو روش مساوی خواهد بود. روش اول مربوط است به فرمول $y=(x+۱)^۲$ و روش دوم به فرمول $y=x^۲+۲x+۱$.

ریاضیدانان موافقت کرده‌اند که هردو روش یك تابع‌را تعریف می‌کنند. فقط نتیجهٔ نهایی برای ما جالب است نه تفصیل محاسبه. هرروشی که طبق آن چون $x=۵$ گرفته شود $y=۳۶$ به‌دست‌می‌آید و به‌ازای $x=۱$، $y=۴$، و به‌طورکلی به ازای $x=n$، $y=(n+۱)^۲$ گردد، آن‌گاه این روش همان تابع روش اول را که در بالا آوردیم تعریف می‌کند.

شاید تعریفی برای تابع ببینید که با این جمله شروع می‌شود: «یك تابع مجموعه‌ای است از زوجهای مرتب...» این تعریف حالت بسیار فشرده و مختصر آن چیزی است که من در بالا گفتم. من خودم نه از تعریفی که با «تابع عبارت است از...» آغازمی‌شود خوشم‌می‌آید نه ازتعریفهایی که با «الکتریسیته عبارت‌است...» یا «مغناطیس عبارت است...» یا «طلا عبارت است...» آغاز می‌شود. من می‌توانم درهریك از این موردها یك‌رشته آزمون بدهم که بتوانید بگویید: «این شایدجسمی است که بار الکتریکی دارد» یا «این جسم به‌احتمال آهنرباست» یا «این‌شاید سکهٔ طلا است». به‌همین طریق در بالا آزمونهایی به‌شما ارائه داده‌ام که شما می‌توانید بگویید: ۱ــ آیا با یك روش ویژه تابع تعریف می‌شود.و ۲ــ آیا یك‌تابع‌را می‌توان با دو روش به‌ظاهر متفاوت تعریف‌کرد؟

اهمیت دارد که تابع را از مقدار تابع تشخیص دهیم. اگر f تابعی باشد که با روش اول تعریف شده است می‌توانیم بنویسیم: $f(۵)=۳۶$. این نوشته معنی می‌دهد ۳۶، مقداری است که با روش اول به‌ازای $x=۵$ برای y حاصل می‌شود. ۳۶ را مقدار تابع به ازای $x=۵$ می‌گویند. غلط است اگر بگوییم ۳۶ تابع f است. به‌حقیقت نزدیکتر است اگر بگوییم که حرف f خود معرف «اضافه‌کردن ۱ و سپس مجذورکردن است». اگر این عملیات دربارهٔ عدد ویژهٔ ۵ به‌کار رفته باشد نتیجه را با $f(۵)$ نشان می‌دهیم.

جواب سؤالها و تمرینها

صفحهٔ ۱۳ـ۱. هر اندازه شیب خط بیشتر باشد متحرك تندتر حرکت می کند.

ـ۲. (الف) شکل (II) است (د) شکل (IV) است
(ب) شکل (III) است (ه) شکل (I) است
(ج) شکل (V) است

صفحهٔ ۱۴ـ۳. (و) شکل (VIII) است (ح) شکل (IX) است
(ز) شکل (VI) است (ط) شکل (VII) است

صفحهٔ ۲۳ـ۱. $s = ۲۰t$ $s' = ۲۰$

۲.

t	۰	۱	۲	۳
s	۰	۳۰	۶۰	۹۰

سرعت ۳۰ کیلومتر در ساعت است $s' = ۳۰$

۳. $s' = ۴۰$

۴. $s' = ۵۰$

۵. $s' = k$

صفحهٔ ۲۴ مثال (۱) ۱۰ مثال (۲) ۱۰ مثال (۳) ۱۰
اگر $s = ۱۰t + c$، که در آن c عدد ثابت است، داریم $s' = ۱۰$.
مثال (۴) ۲۰ مثال (۵) ۲۰ مثال (۶) ۲۰ مثال (۷) ۲۰
نتیجه: به‌طور کلی اگر $s = ۲۰t + c$ که در آن c عدد ثابت است داریم $s' = ۲۰$

صفحهٔ ۲۴ مثال (۸) ۳۰ مثال (۹) ۵۰ مثال (۱۰) ۴۰
مثال (۱۱) ۳۰ مثال (۱۲) ۵۰
نمودارها خط‌مستقیم‌هستند. اگر اشل ثابت باشدهر اندازه s' بزرگتر باشد شیب خط بیشتر است. اگر قانونهای مختلف دارای یك‌سرعت باشندمانندمثالهای (۱)و(۲)و(۳) نمودارها باهم‌موازی‌خواهندبود.

صفحهٔ ۳۸ تمرین (۱)

t	۱	۱٫۰۰۱	۲	۲٫۰۰۱	۳	۳٫۰۰۱	۴	۴٫۰۰۱	۵	۵٫۰۰۱
s	۱	۱٫۰۰۳	۸	۸٫۰۱۲	۲۷	۲۷٫۰۲۷	۶۴	۶۴٫۰۴۸	۱۲۵	۱۲۵٫۰۷۵

t ۱ ۲ ۳ ۴ ۵

s' ۳ ۱۲ ۲۷ ۴۸ ۷۵

قانون عبارت است از $v = s' = ۳t^۲$

تمرین (۲): رجوع کنید به‌صفحه‌های ۳۹ و ۴۰.

صفحهٔ ۳۹ تمرین (۳): رجوع کنید به‌صفحه‌های ۳۹ و ۴۰.

تمرین (۴): $۵t^۴$؛ $۶t^۵$؛ $nt^{n-۱}$ (رجوع کنید به‌صفحه‌های ۳۹ و ۴۰)

صفحهٔ ۵۱ تمرین (۱) $۲۰t$ تمرین (۴) $۸۰۰t^{۹۹}$
تمرین (۲) $۶۰t^۲$ تمرین (۵) $۶t^۲$
تمرین (۳) $۱۶t^۳$ تمرین (۶) $۶t$

صفحهٔ ۵۳ تمرین (۱) $۲۰t + ۶۰t^۲$ تمرین (۴) $۳۵t^۶ - ۸t^۳$
تمرین (۲) $۶t^۲ + ۶t$ تمرین (۵) $۲۰t + ۶۰t^۲ - ۲۰t^۳$
تمرین (۳) $۳۵t^۶ + ۸t^۳$

صفحهٔ ۵۶ تمرین (۱) ۰؛ ۲؛ ۲
تمرین (۲) ۰؛ $۳t^۲$؛ $۳t^۲$
تمرین (۳) ۰؛ ۳؛ $۲t$؛ $۲t + ۳$
تمرین (۴) $۱۰t + ۴$
تمرین (۵) $۱۰t - ۴$

صفحهٔ ۵۷ تمرین (۶) $۶t^۲ - ۶t - ۱۰$
تمرین (۷) $۸۰t^{۱۹} + ۳۰t^{۱۴} - ۳۰t^۹ + ۵$
تمرین (۸) $۶۰t^۵ + ۶۰t^۴ - ۶۰t^۳ + ۶۰t^۲ - ۶۰t + ۶۰$

صفحهٔ ۶۳ تمرین (۱) ۱
تمرین (۲) ۱
تمرین (۳) ۲
تمرین (۴) ۳
تمرین (۵) -۱
تمرین (۶) -۲

صفحهٔ ۸۲ تمرین (۶): $۳x^۲ - ۶x + ۹ = ۳(x - ۱)^۲ + ۶$، هرگز صفر نمی‌شود وهرگز مقدارمنفی نمی‌گیرد. اگر $y = x^۳ - ۳x^۲ + ۹x$، داریم $y' = ۳x^۲ - ۶x + ۹$. بنا براین y' همواره مثبت است. خم روبه‌بالا (صعودی) است و به‌شکل ۳۷ شباهت دارد.