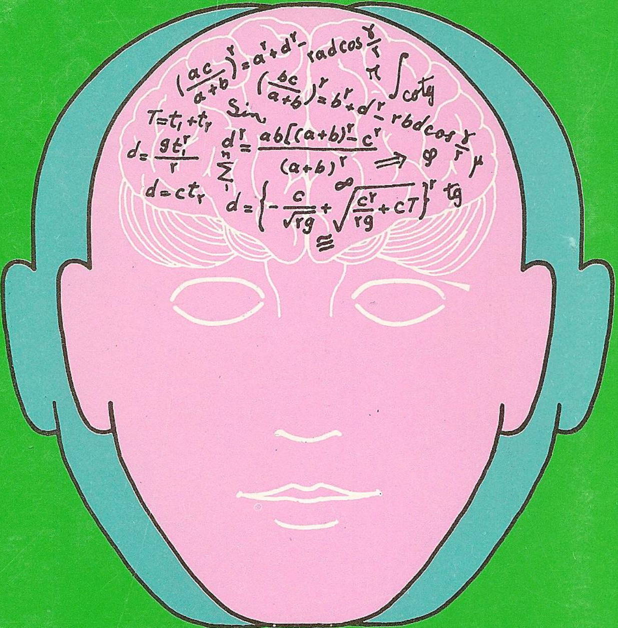
خلاقیت ریاضی

تألیف جورج پولیا / ترجمهٔ پرویز شهریاری



ت فاطمی

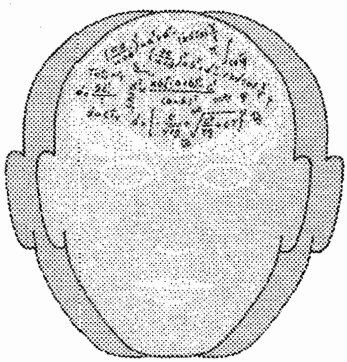
جورج پولیا، نویسندهٔ این کتاب، که در سال ۱۹۸۵ و در سن نود و هشت سالگی درگذشت، یکی از بزرگترین متخصصان ریاضیات کاربردی و، در عین حال، یک مربی پرکار و شیفتهٔ ریاضیات بود.

کارهای بدیع و ابتکاری او در هنر کشف کردن و درست و منطقی داوری کردن، سال‌هاست که در سراسر جهان به صورت کتاب مرجع هر معلم و هر مربی آموزشی در آمده است. پولیا، در این زمینه فیلم‌هایی هم تهیه کرده است که معروف‌ترین آنها «چگونه حدس بزنیم» است.

کتاب **خلاقیت ریاضی**، در همین زمینهٔ «هنر کشف کردن» نوشته شده است و می‌آموزد که چگونه می‌توان همهٔ معلمان، به خصوص، معلمان ریاضی، دانش آموزان و دانشجویان را به سمت آفرینندگی و کشف و نوآوری هدایت کرد و دانشمندان آینده را پرورش داد.

خلاقیت ریاضی

تألیف جورج پولیا
ترجمهٔ پرویز شهریاری



انتشارات فاطمی

АТЕМАТИЧЕСКОЕ ОТКРЫТИЕ
:orge Polya

خلاقیت ریاضی

مؤلف: جورج پولیا
مترجم: پرویز شهریاری
ناشر: مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
چاپ هفتم، ۱۳۸۲
شابِک X_۰۷۶_۳۱۸_۹۶۴
ISBN 964-318-076-X
تیراژ: ۳۰۰۰ نسخه

آماده‌سازی پیش از چاپ: واحد تولید مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی
طرح جلد: آتلیهٔ مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی

چاپ و صحافی: چاپخانهٔ خاشع

مؤسسهٔ فرهنگی فاطمی تهران، کدپستی ۱۴۱۴۶ ـ خیابان دکتر فاطمی، شمارهٔ ۱۵۹
تلفن: ۸۹۶۱۴۲۲ ـ ۸۹۶۴۷۷۰ نمابر: ۸۹۵۶۲۵۸
info@fatemi.ir

Polya, George
پولیا، جورج، ۱۸۸۷ـ۱۹۸۵.
خلاقیت ریاضی / تألیف جورج پولیا؛ ترجمهٔ پرویز شهریاری. ــ تهران: فاطمی، ۱۳۶۶.
ط، [۶۸۸] ص.: مصور.
ISBN 964-318-076-X
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا.
Matematicheskoe otkrytie: reshenie zadach.
عنوان روسی لاتینی شده:
چاپ هفتم: ۱۳۸۲.
۱. ریاضیات ــ مسائل، تمرینها و غیره. ۲. حل المسائل. الف. شهریاری، پرویز، ۱۳۰۵ ـ ، مترجم. ب. عنوان.
۵۱۰/۷۶
QA۴۳/پ۹خ۸
۱۳۶۶
کتابخانهٔ ملی ایران
م۶۶ـ۱۴۲۸

فهرست مطالب

مقدمه‌ها

به نام خدا

مقدمه مترجم

دانش، به‌مفهوم خاص خود ، به‌مجموعه‌ای از آگاهی‌ها گفته می‌شود که نوعی از قانون‌مندی را پذیرفته باشند و ، بنابراین ، بتوان آن‌هـارا ، به‌یاری استدلال یا مشاهده و تجربه، به‌دیگران انتقال داد. به‌این‌ترتیب ، **دانش را می‌توان یادگرفت ویاد داد.**

ولی هردانشی ، و ازآن‌جمله ریاضیات، در هرزمانی توانسته است تا مرز معینی پیش‌رود و، ازآن به‌بعد، ابهام‌ها وتاریك روشنی‌هاآغاز می‌شود. از یك طرف باید راه‌هایی برای ادامهٔ تکامل‌آن پیداکرد و، از طرف دیگر ، باید مسأله‌هایی را حل‌کرد که، اگرچه مدت‌هاست دربرابر بشر طرح‌شده‌اند، هنوز راهی برای حل آن‌هـا پیدا نکرده‌اند . کار دانش ، در این مرحله ، بیشتر به‌هنر شباهت پیدا می‌کند. راه‌کشف قانون‌های نشناخته را نمی‌توان یاد گرفت ویابه کسی‌یادداد. فرق«دانشمند»با«عالم‌به‌علوم» هم‌درهمین‌جاست: دانشمند می‌تواند راه‌های تازه را جست وجوکند، مرزهای دانش راگسترش دهد وقانون‌مندی‌های تازه‌ای‌راکشف‌کند، درحالی‌که «عالم به‌علوم‌موجود» (کسی از یـادگیری دانش‌هـای موجود ، فراتر نرفته است) ، در محدودهٔ شناخته‌ها باقی می‌ماند، جرأت شکستن مانع‌های موجودرا درخود نمی‌بیند، به‌گذشته‌هـا و سنت‌هـا می‌چسبد و از هرآهنگ تـازه‌ای‌که در هم‌خوانی پیشروان دانش انسانی نواخته می‌شود، می‌هراسد.

آن‌چه دانشمند را ، نسبت به‌دیگران ، ممتـاز می‌کند «هنرکشف» و

«هنر نوآوری» اوست: او می‌تواند عنصرهای تازه‌ای را ببیند، ردیف و نوع ترکیب عنصرهای قبلی را تغییر دهد و از ترکیب تازهٔ عنصرهای قبلی با عنصرها و یا دیدگاه‌های تازه، مرز دانش را گسترش دهد و دایرهٔ شناخت آدمی را از قانون‌های طبیعت و جامعه، وسعت بخشد.

ولی آیا «هنرکشف» یک هنر خالص است و هیچ‌راهی برای یادگرفتن آن پیدا نمی‌شود؟ ژرژپولیا، با موفقیت تمام، در این کتاب می‌کوشد: اولاً ثابت کند این حکم، کاملاً درست نیست و، ثانیاً راه‌های ممکن «کشف کردن» را، باقدرتی فوق‌العاده، نشان دهد. پولیا معتقداست که، «روش» کشف کردن را می‌توان و باید از همان سال‌های دبیرستانی ـ وحتی دبستانی ـ به‌جوانان آموخت و، با حوصله و دقت‌تمام، راه‌آن‌را نشان می‌دهد.

پولیا معتقد است که، حل مسأله (به‌مفهوم عام‌آن)، چیزی جز کشف نیست(وهمچنین برعکس، کشف‌چیزی جزحل مسأله‌نیست)، ولی‌به‌شرطی که، هم در انتخاب نوع مسأله‌ها و هم در شیوهٔ کار باآن‌ها، راه و رسمی درست در پیش گرفته شود، وپولیا، این‌راه و رسم درست را، در این‌کتاب، نشان می‌دهد.

□

هیچ‌توضیحی نمی‌تواند، بهتر از مطالعهٔ خودکتاب پولیا، روشن‌کننده باشد: مطالعهٔ این‌کتاب، برای هرکسی که علاقه‌مند به‌پیشرفت در دانش است (هردانشی که مورد علاقهٔ اوست)، می‌تواند راه‌گشای زندگی علمی آینده باشد.

من در این‌جا، تنها به‌دونکته اشاره می‌کنم که، تکیهٔ کمتری در این کتاب، به‌آن‌ها شده است، اگر چه مطالعهٔ دقیق و تحلیلی کتاب، می‌تواند در این موردها هم، ما را به‌نظر تأییدی پولیا قانع کند.

۱°. درکار حل مسأله (و به‌طورکلی، در هرموردی که به‌یادگیری مربوط می‌شود)، نباید از نقش کار دسته‌جمعی دانش‌آموزان غفلت کرد. بحث‌ها و گفت‌وشنودهایی که‌در گروه‌های کوچک(دو یاسه نفری)دانش‌آموزان، در زمینهٔ حل یک‌مسأله و یا روشن‌کردن متن یک‌درس پیش می‌آید، موجب

بیدارشدن ذهن همهٔ‌آن‌ها می‌شود وچنان محصولی داردکه (جز درموردهای استثنایی) هیچ گونه کار فردی نمی‌تواند باآن‌برابری کند. من تنها به‌یك‌مورد از تجربهٔ معلمی خود، در این زمینه، اشاره می‌کنم وازآن می گذرم.

سال‌ها قبل، در یکی ازکلاس‌های دبیرستانی، درس هندسه را به‌عهدهٔ من گذاشته بودند . بعد از چند جلسه‌که ، به‌طور تقریبی ، بـا نیروی کار دانش‌آموزان‌آشناشدم،آن‌هارا به گروه‌های سه‌نفری‌تقسیم کردم ودرهر گروه، سه دانش‌آموز بـا نیروهای مختلف (قوی ، متوسط و ضعیف) قراردادم. به‌دانش‌آموزان گفتم که نمرهٔ امتحـانی هرفرد ، نمرهٔ متوسط گروه سه‌نفری اوست. مثلاً اگرسه‌عضو یك‌گروه (که هرکدام به‌طورمستقل،ورقهٔ‌امتحانی خود را نوشته‌اند) ، به‌ترتیب ، نمره‌هـای ۱۹، ۱۱ و ۶ را بیاورند، برای هرکدام ازآن‌ها ، نمرهٔ ۱۲ منظور خواهد شد . این وضع ، موجب شد تا ، هرعضوگروه، علاوه برشخص خود، درفکر چاره، برای وضع درسی‌دوعضو دیگر هم باشد و. . . . وقتی درآخر سال ، ورقه‌های امتحانی این‌کلاس را تصحیح کردم ، با این نتیجهٔ درخشان و شگفتی‌آور روبه‌رو شدم‌که، دراین کلاس پنجاه وچندنفری ، هیچ‌کس (به‌جز یك‌نفر) ، نمرهٔ پایین ۱۵ نداشت. و این، محصول حیرت‌آورکار دسته‌جمعی بود.

۲°. توجه به تاریخ ریاضیات (و یا هردانش دیگری) ، اگر درست و به‌موقع باشد ، می‌تواند، در برانگیختن دانش‌آموزان به‌کار، نقشی اساسی داشته‌باشد. تاریخ هردانش ، هم شکست‌ها و نـاکامی‌ها را نشان می‌دهد و هم‌راه برون‌رفت ازآن‌ها را. اگر معلم بتواند درس خودرا بابخشی‌ازتاریخ دانش ، که به‌درس او مربوط می‌شود، پیوند دهد، می‌تواند خیلی ازنکته‌ها و جنبه‌هـای آموزنده را ، به‌دانش‌آموزان تلقین‌کند. مثلاً ، وقتی‌که دانش‌آموزی ، استدلالی سطحی وضعیف دارد، می‌توان به‌مشابه‌آن درتاریخ مراجعه و، برای‌دانش‌آموزان، روشن کردکه چنین‌استدلالی، چه گمراهی‌هایی به‌وجودآورده است و چگونه مانع پیشرفت دانش شده است و. . . چگونه فلان دانشمند توانست ، ضعف این استدلال را روشن کند و طریق درست رفع آن‌را در دانش بنیان نهد (به‌عنوان نمونه ، در استدلال استقرایی و

استقرای ریاضی).

در همین‌جا باید یادآوری کرد که، هرگز نباید «استدلال» دانش‌آموز را، بلافاصله و به‌طور قاطع، مردود شمرد، بلکه باید آن‌را حلاجی کرد، عنصرهای درست آن‌را بیرون کشید و با شیوهٔ سقراطی، خود دانش‌آموز را به‌سمت استدلال درست و منطقی راهنمایی کرد. [وقتی که کتاب‌های ریاضی دورهٔ راهنمایی را تنظیم می‌کردم، در جابه‌جای آن‌ها، به‌نمونه‌هایی از این شیوه، متوسل شده بودم. مثلاً، در ابتدای کتاب ریاضیات سال دوم راهنمایی، عنوانی را گذاشته بودم، به‌نام «درست بیندیشیم» که در آن، مثلاً، آمده بود که اگر دانش‌آموزی نصف ۲۲ را ۲ بداند، نباید گمان کرد که او به‌کلی اشتباه کرده است. او در واقع، نماد نوشتنی عدد ۲۲ را، از «وسط»، نصف کرده است، و این، غلط نیست. باید به‌او توضیح داد که منظور ما از نصف‌کردن، چه‌چیزی است. باعث تأسف است که درچاپ‌های بعدی این کتاب‌ها، این گونه بحث‌های آموزنده و درست را، ازآن‌ها حذف کردند.]

□

آرزو می‌کنم، این کتاب بتواند، به‌سهم خود، انگیزه‌ای باشد برای همهٔ معلمان و دانش‌آموزان، تا راه درست تحصیل دانش را بیاموزند و موجب شود تا، درآینده، سرزمین ماهم، نام‌آورانی درشاخه‌های مختلف دانش، به‌جهان انسانی تقدیم کند.

پرویز شهریاری

مهرماه ۱۳۶۴

از پیش گفتار ترجمهٔ روسی

نام ژرژپولیا[1]، ریاضی‌دان ومربی برجسته، به‌خاطر کارهای علمی زیاد و بی‌اندازه متنوعی که ازخود به‌یادگار گذاشته است و، همچنین، به‌خاطر دو اثرخود به‌نام «نامساوی‌ها» و«نامساوی‌های هم پیرامون درفیزیك ریاضی» (به‌همراهی هاردی، لیتل‌وود وسه گیو)، درمیان متخصصان ریاضی، شهرت بسزایی دارد. به‌خصوص،کتاب «مسأله‌ها و قضیه‌هایی از آنالیز» (همراه با سه گیو) و، همچنین، دوکتاب «چگونه می‌توان مسأله‌ها را حل کرد؟» و «ریاضیات واستدلال‌های شبه‌حقیقی»ـ که کمی دیرترچاپ شده‌اندـ به‌طور گسترده‌ای بین دوستداران ریاضیات مورد استفاده قرارگرفته است. همهٔ این کارها، به‌کتاب «کشف ریاضی»ـ که می‌خواهیم دربارهٔ آن مفصل‌تر صحبت کنیمـ مربوط می‌شوند.

می‌ترسم، درزمان ماـ که این‌همه‌کتاب درزمینهٔ ریاضیات و با توجه به‌سلیقه‌های گوناگون خوانندگان عرضه شده استـ «مسأله‌ها وقضیه‌هایی ازآنالیز»ـ که ۴۵ سال ازتنظیم آن می‌گذردـ درنظربرخی از ریاضی‌دانان

---

۱. ژرژپولیا (George Polya)، درسال ۱۸۸۸ درمجارستان به‌دنیا آمد. قبل از جنگ، در سویس، انگلستان و آلمان کارمی‌کرد. و، سپس، وقتی‌که سایهٔ نکبت‌بار جهالت فاشیستی براروپا افتاد، به‌امریکا رفت. نام او با تلفظ مجارستانی «دیردیویا» است، ولی اززمانی‌که وارد امریکا شد، بیشتر باشکل تلفظ امریکایی نام خود «ژرژپولیا» مشهورشده است.

تازه‌کار، درخشندگی سابق خود را ازدست داده باشد: چه‌بساکه موضوع‌های مورد بحث، کهنه به‌نظر آید(همان‌طور که ممکن است آنالیز کلاسیك هم، کهنه شده به‌نظر آید!) وشکل وقالب موضوع‌ها درهیچ‌موردی شگفت‌انگیزنباشد (زیرا، تأثیرفوق‌العادهٔ این کتاب برادبیات ریاضی بعدازخود، موجب پیدایش انواع دیگری ازمجموعه مسأله‌ها شد، که اگرچه براساس طرح اصلی همین کتاب تنظیم شده‌اند، هیچ‌کدام ازآن‌ها را ـ چه‌ازنظر گسترد گی موضوع‌ها و چه‌ازنظردقت درکار ـ نمی‌شود با نمونهٔ مورد تقلیدشان مقایسه کرد). ولی ۳۰ سال قبل، هیچ رقیبی برای این‌کتاب وجود نداشت وچه‌کسی می‌داندکه این کتاب مسأله، چند دانشمند را تربیت کرده است؛ گروه‌های جداگانهٔ مسأله‌ها، ردیف منطقی وپیوند محکم درونی آن‌ها ـ به‌نحوی که گویی یك پژوهش علمی را دنبال می‌کنند ـ چنان است که کار روی آن‌ها، می‌تواند به‌معنای پایگاهی برای عبور به‌کارخلاق مستقل به‌حساب آید.

کتاب «مسأله‌ها وقضیه‌هایی ازآنالیز» علاقهٔ جدی نویسندهٔ آن را، به‌روندکارهای پژوهشی‌ـعلمی نشان می‌دهد وکتاب بعدی او، «چگونه می‌توان مسأله‌ها را حل کرد؟» و «ریاضیات و استدلال‌های شبه حقیقی»، پایداری این علاقهٔ ژرژپولیا را ثابت می‌کند. درجهان، کتاب‌های زیادی در زمینهٔ روش تدریس ریاضیات وکتاب‌هایی که به‌روندآموزش ومعلمی‌ریاضیات مربوط می‌شود، نوشته شده است. ولی به‌ندرت می‌توان به‌کتاب‌هایی‌دست یافت که درزمینهٔ روش‌شناسی ریاضیات نوشته شده باشد، یعنی کتاب‌هایی که روند خلاقیت ریاضی را مورد تجزیه وتحلیل قراردهند: نوشتن چنین کتابی، تنها ازعهدهٔ یك‌دانشمند بزرگ برمی‌آید، ولی، به‌طورمعمول، یك‌دانشمند به‌خود قضیه‌های تازه بیشترعلاقه‌مند است تا به‌این‌که چگونه به‌آن‌هارسیده است[1]! ودربین تمام کتاب‌هایی‌که دربارهٔ دانش وریاضیات دردنیا نوشته‌شده

---

۱. تنها کتاب‌هایی‌که نویسندهٔ این سطرها، دربارهٔ روندخلاقیت ریاضی‌می‌شناسد، عبارتند از: «دانش‌وروش» ازهانری‌پوانکاره، «علم وفرضیه» ازهمین دانشمند «روان‌شناسی خلاقیت ریاضی» از ژاك آدامار (J. Hadamard). ولی این کتاب‌ها (که نویسندگان آن‌ها، از دانشمندان بزرگ‌اند)، ویژگی به‌کلی متفاوتی با کتاب‌های پولیا دارند (مثلا، ازاین بابت‌که اصلا اندیشه‌های درسی را دنبال نمی‌کنند).

است، به ندرت می‌توان کتاب‌هایی پیدا کرد که با «چگونه می‌توان مسأله‌ها را حل کرد؟» و «ریاضیات و استدلال‌های شبه‌حقیقی» قابل مقایسه باشند. بخصوص، می‌خواهم نظر خواننده را به «ریاضیات و استدلال‌های شبه‌حقیقی» جلب کنم که به‌سختی می‌توان ـ از نظر لطافت تجزیه و تحلیل‌ها و پرکشش بودن توضیح‌ها ـ مانندی برای آن پیدا کرد.

کتاب حاضر هم، همین خصلت را دارد. ژرژ پولیا با واژه‌های «کشف ریاضی»، درواقع، ویژگی یافتن هر نتیجه‌گیری ریاضی را (هرقدرهم که کوچك و ساده باشد!) بیان می‌کند. مثلا، حل عادی یك مسأله هم، قبل از هرچیز، به‌روش‌شناسی ریاضیات مربوط می‌شود، یعنی به‌این پرسش که: اندیشه‌های تازهٔ ریاضی چگونه پدیدار می‌شوند؟ از این دیدگاه، ظاهراً باید فصل هفتم را، که به‌تجزیه و تحلیل روند حل مسأله (روند «کشف ریاضی») اختصاص دارد، هستهٔ مرکزی و محوراصلی کتاب دانست. با وجود این، برخلاف کتاب‌هایی که قبلا یاد کردیم، دراین اثر، سهم بزرگ وقابل ملاحظه‌ای به‌معلم ریاضیات و «معلم‌معلمان» (یعنی مربیان واستادان مدرسه‌های تربیت معلم) داده شده است؛ در این مورد، مستقیماً، توصیه‌های زیادی درمورد روش تدریس آمده است (بخصوص درسه فصل آخر کتاب). دلیل این مطلب درآن است که مؤلف، روندحل مسأله رادرارتباط ناگسستنی با روندآموزش حل مسأله می‌بیند، به‌نحوی که دو پرسش را دقیقاً به‌هم مربوط می‌داند: «چگونه حل می‌شود؟» و «چگونه این حل کردن را یاد می‌دهند؟». ازنقطه نظراخیر، می‌توان کتاب را یك کتاب آموزشی بالینی برای معلمان دبیرستان ومربیان مدرسه‌های تربیت معلم دانست. پولیا، با توجه به علاقه و نیاز معلمان دبیرستان (برخلاف «ریاضیات واستدلال‌های شبه‌حقیقی» و، از آن بیشتر، «مسأله‌ها وقضیه‌هایی ازآنالیز»)، توجه خود را در این کتاب، روی مسأله‌های دبیرستانی متمرکز کرده است و اگر به‌ندرت گریزی به «ریاضیات عالی» زده است، آن‌ها را با نشانه‌های خاصی مشخص کرده است، به‌نحوی که حذف آن‌ها، هیچ لطمه‌ای به‌درك بقیهٔ مطالب کتاب نمی‌زند. کتاب «کشف ریاضی»، درعین‌حال، تلاش بی‌اندازه‌ای درراهنمایی کسانی دارد که دردوره‌های

کوتاه‌تر ریاضیات درس می‌خوانند، ولی به‌ریاضیات دوره‌های بالاتر علاقه‌مندند؛ کتاب، به‌طور کلی، می‌تواند همهٔ دوستداران ریاضیات، این دانش قدیمی و خردگرا، را به‌خود جلب کند.

به‌ویژه، باید به‌تمرین‌ها و توضیح‌های اضافی که به‌هر فصل اضافه شده است، توجه کرد. این طرز تنظیم، به‌هیچ‌وجه، به‌معنای اهمیت کمتر این قسمت‌ها نیست. بخصوص، باید به‌این توصیهٔ مؤلف عمل کرد که: اگر می‌خواهید شنا یاد بگیرید، باشجاعت وارد آب شوید، و اگر می‌خواهید روش حل مسأله‌ها را یاد بگیرید، آن‌ها را حل کنید: هیچ اندیشه یا نظریه‌ای نمی‌تواند به‌اندازهٔ تجربهٔ شخصی خودتان، به‌شما یاری برساند، یك مسأله‌ای را که خودتان حل کنید، خیلی بیشتر از بیست مسأله‌ای که راه‌حل آن‌ها را از دوستانتان آموخته‌اید و یا در کتاب خوانده‌اید، می‌تواند سودمند باشد. درواقع، تنها وقتی می‌توان براندیشه‌های این کتاب مسلط شد که قسمت عمدهٔ مسأله‌هایی که درآن جمع‌آوری شده است حل شود (مسأله‌هایی که یك مربی کارآزموده مثل پولیا جمع‌آوری کرده است، به‌آن‌ها خصلت کلی بخشیده است و گاهی هم، برای این‌که خواننده روی کتاب چرت نزند، لطیفه‌هایی[1] آورده است)؛ فقط بعد ازآن است که می‌توان به کتاب دیگر ریاضی، ومنجمله کتاب‌های «مسأله‌ها و قضیه‌هایی از آنالیز» و «ریاضیات و استدلال‌های شبه حقیقی» مراجعه کرد.

اندکی هم دربارهٔ کتابی که روبه‌روی شماست، صحبت کنیم. اصل انگلیسی آن در دو جلد جداگانه و در سال‌های ۱۹۶۲ و ۱۹۶۵ چاپ‌شده است؛ درسال ۱۹۶۸، جلد دوم کتاب، با اصلاح‌های ناچیزی درمتن و اضافه شدن ۳۵ مسأله، به‌عنوان ضمیمه، چاپ شد. درترجمه، این مسأله‌های

---

۱. یادداشت‌هایی از کارل‌وایرشتراس (۱۸۱۹ ـ ۱۸۹۷)، ریاضی‌دان مشهور ومربی بزرگ آلمانی باقی مانده است که بعد ازمرگ اوموردبررسی قرار گرفته است. درجا به‌جای این یادداشت‌ها، که برای کلاس‌های درس با دقت و حوصلهٔ یك‌دانشمند آلمانی تهیه‌شده است، فاصله‌ای وجوددارد که درآن نوشته شده است: «Hier ein Spitz» («این‌جا‌ـ‌لطیفه»).

اضافی، بنابه‌خواست مؤلف، درجای‌خودشان در۱۵ فصل کتاب جاگرفته‌اند. دراین‌چاپ، بعضی اشتباه‌هایی که درچاپ انگلیسی وجود داشت، اصلاح‌شده است: اصلاح بعضی ازایـن اشتباه‌ها را خود مـؤلف یادآوری کرده است و بعضی دیگر، ضمن پیشنهاد به‌مؤلف وموافقت او، انجام گرفته است؛ ومن، به‌خاطرتوجه جدی مـؤلف به‌چاپ روسی کتاب خود، سپاس‌گزارم. عـلاوه برایـن، مقدمهٔ کتاب مشهور مـؤلف و سه‌گیو، «مسأله‌ها و قضیه‌هایی از آنالیز»، را در این‌جا آورده‌ایم و گاه به‌گاه هم، پاورقی‌های توضیحی اضافه کرده‌ایم.

ای. م. یاگلوم

از پیش گفتار مؤلف

روش حل خوب است، به‌شرطی‌که ازهمان آغاز، بتوان پیش‌بینی‌کرد که بـا دنبال‌کردن ایـن روش، می‌توان به‌هدف رسید.

لایب نیتس

۱°. روند حـل مسأله عبارت است از جست وجوی راه خـروج از دشواری‌ها یا مسیرعبور از مانع‌ها،ـ این است روند دست‌یابی به‌هدف، که درآغازکار، چندان قابل دسترس به‌نظرنمی‌رسد.حل مسأله، خاصیت‌ویژه‌ای از ذهن است، و ذهنـ استعدادی است خاص انسان. بنابراین، حـل مسأله رامی‌توان به‌عنوان یکی ازخودویژه‌ترین پدیده‌های فعالیت انسانی دانست. هدف‌کتاب حاضراین است‌که ویژگی این فعالیت را روشن کند، امکان‌هایی برای تکامل دادن این استعداد خواننده پیدا کند و، سرانجام، راه بهترحل کردن مسأله‌ها را به‌او بیاموزد.

۲°. این‌کتاب شامل‌دو بخش است‌که، به‌کوتاهی، نقش هریك ازآن‌ها را روشن می‌کنیم.

حل مسأله، هنری عملی است. همچون شنا کردن، ورزش اسکی یـا نواختن پیانو واین هنررا می‌توان یادگرفت، تنها به‌شرطی کـه از سرمشق خـوبی تقلید و دائماً تمرین‌کنیم. درایـن کتاب، به‌کاید سحـرآمیزی دست

نمی‌یابید که همهٔ درها را به‌روی شما بگشاید- به‌یاری این کتاب راه‌حل همهٔ مسأله‌ها را پیدا نمی‌کنید، ولی سرمشق‌های خوبی برای تقلید در برابر شما قرار می‌دهد و امکان تمرین کردن را برای شما فراهم می‌آورد. ولـی به‌یاد داشته باشید: اگرمی‌خواهید شنا یاد بگیرید، با شجاعت وارد آب شوید،و اگرمی‌خواهید روش حل مسأله‌ها را یاد بگیرید، آن‌ها را حل کنید.

ضمن این‌که سعی می‌کنید حداکثرسود را از نیروهای خودتان ببرید، تلاش کنید درمسأله‌ای که حل می‌کنید نکته‌هایی را پیدا کنید که برای‌آینده، و درحل مسأله‌های دیگر، می‌تواند سودمند باشد. راه‌حلی که در اثر صرف نیروی ذهنی خودتان پیدا کرده‌اید، یا راه‌حلی که از کتاب آموخته‌ایدیاآن‌چه که از دیگران شنیده‌اید (که حتماً باید همراه با علاقهٔ جدی و کشش درونی شما در وارد شدن به‌کنه مطلب باشد)، می‌تواند به‌یك روش ویك سرمشق تبدیل شود که با موفقیت، برای حـل مسأله‌های دیگر، به‌کار رود. هـدف بخش اول این‌کتاب این است که خواننده را با برخی از روش‌های سودمند آشنا کند.

البته، تقلید ازیك راه‌حل معلوم، به‌شرطی آسان است‌که مسألهٔ تازه شباهت کاملـی به‌آن داشته باشد؛ ولی اگراین شباهت کامـل نباشد، ممکن است‌کار تقلید دشوار ویا حتی غیرعملی به‌نظر آید. در ژرفای روح آدمی، کشش به‌سوی «بیشتر» نهفته است؛ اومی‌خواهد به‌روشی عمومی دست‌یابد که به‌یاری‌آن بتواند هرمسأله‌ای راحل کند. این‌تمایل دراکثریت ماصورتی پنهانی دارد، ولی‌گاهی درافسانه‌ها وهم در نوشته‌های بعضی از فیلسوفان، خود را نشان می‌دهد. (احتمالاً، کلام سحرآمیزی را به‌یاد شما بیاوردکه‌با بیان آن، هردربسته‌ای‌گشوده می‌شد.) دکارت، دربارهٔ روش عامی که‌بتواند برای‌حل همهٔ مسأله‌ها مفید باشد، می‌اندیشید؛ وروشن‌ترازآن، لایب‌نیتس، اندیشهٔ پیدا کردن یك روش‌کلی را تنظیم‌کرد. ولی جست‌وجوی روشی‌کلی وعام، نتوانست بیشتر از جست وجوی سنگ فلسفی- برای تبدیل فلزهای کم‌ارزش به‌طلا- ثمربخش باشد: آرزوهای بزرگی وجود دارند که همچنان به‌صورت آرزو باقی می‌مانند. ولی، این آرمان‌های دست‌نیافتنی، خیلی هم

بی‌فایده نبودند. تاکنون کسی به‌ستارهٔ قطبی دست نیافته است، ولی بسیاری ازمردم، با نگاه کردن به‌آن، توانسته‌اند مسیردرست حرکت خود را پیدا کنند. این کتاب قادر نیست روشی عمومی برای حل مسأله‌ها دراختیار شما بگذارد (وهیچ کتاب دیگری هم، هرگزنخواهد توانست چنین اندیشه‌ای را تحقق بخشد)، ولی، همان گام‌های کوچکی که به‌سمت آرزوی دست‌نیافتنی خود برمی‌دارید، می‌تواند استعداد وتوانایی شما رادرحل مسأله‌ها،افزایش وتکامل دهد. بخش دوم این کتاب، برخی از این گام‌ها را، درخط کلی خود، شرح می‌دهد.

۳°. مایلم، پژوهشی راکه دراین کتاب آغاز شده است، دانش کشف[1] بنامم، زیرا این پژوهش به‌امکان‌ها و روش‌های حل مسأله مربوط می‌شود. اصطلاح «اوریستیکا»[1]، که مورد استفادهٔ برخی از فیلسوفان گذشته بوده است، درزمان ما، نیمی فراموش ونیمی دیگر بی‌اعتبار شده است، ولی‌من، ازبه‌کاربردن آن، بیمی ندارم.

درواقع، قسمت عمده‌ای ازکتاب حاضر، عبارت است اززمینهٔ عملی‌و عینی مربوط به«دانش کشف»: با همهٔ امکان‌هایی که دراختیار دارم، تلاش می‌کنم تا خوانندهٔ خود را به‌سمت‌حل مسأله بکشانم و اورا وادارم تاروی روش‌ها وامکان‌هایی که به‌کار می‌برد، بیندیشد.

دربیشترفصل‌ها، قسمت اصلی متن، به‌کشف همه‌جانبهٔ روند حل چند مسأله، اختصاص داده شده است. وقتی‌که با پرسش‌های منظم، نتوان کسی را به‌ریاضیات علاقه‌مندکرد، می‌توان مطلب را با توضیح بیشتر روشن کرد. و درواقع‌هم، درفصل‌های این کتاب، تنهابه‌شرح سادهٔروند حل‌نپرداخته‌ایم، بلکه‌حل‌مسأله را به‌طورمنظم وهمراه با اسلوبی صحیح، مورد تجزیه‌وتحلیل قرار داده‌ایم. چنین تجزیه وتحلیلی، که به‌یك مسألهٔمشخص مربوطمی‌شود،

---

۱. heuristie- ریشهٔ این واژهٔ یونانی‌است («اوریکا» $\varepsilon\upsilon\rho\eta\chi\alpha$ - یافتم، پیدا کردم). بنابر افسانه‌ای، وقتی‌که ارشمیدس، مسألهٔ موردنظر فرمانروای سیراکوز را حل کرد، درحمام بود. ازحمام بیرون دوید وفریاد زد: «یافتم، یافتم!» (اوریستیکا- دانشی‌که می‌آموزد «چگونه باید کشف کرد؟»).

به‌خواننده نشان می‌دهد که‌چگونه باید مهم‌ترین گام‌ها را بردارد تا، درنتیجهٔ آن، بتواند سرانجام، به‌راه‌حل دست‌یابد و، ضمناً، روش‌ها و موقعیت‌هایی را، که می‌توانستند این گام‌ها را پیش‌بینی کنند، کشف نماید. به جز این، شرح تفصیلی راه‌حل یك مسألهٔ‌خاص جداگانه، این هدف را هم دنبال می‌کندکه، به‌روشی یا توصیه‌ای کلی دست یابد تا خواننده بتواند، درحالت‌های‌مشابه، ازآن استفاده کند. معمولاً ، فرمول‌بندی نهایی چنین توصیه یا روشی را، به‌بند جداگانه‌ای موکول کرده‌ایم، با وجود این، غالباً، با فرمول‌بندی‌های مقدماتی وآزمایشی روبه‌رو می‌شویدکه معرف نکته‌های خاصی ازکار منظم راه‌حل می‌باشند.

هرفصل، باتمرین‌ها ویادآوری‌های‌اضافی، به‌پایان‌می‌رسد. خواننده‌ای که این تمرین‌ها را انجام دهد، نه‌تنها یادآوری‌های اسلوبی فصل را به‌کار می‌برد و بهترمی‌فهمد، بلکه آن‌ها راگسترش هم می‌دهد. یادآوری‌های اضافی، که بین‌تمرین‌ها پراکنده‌اند، یامتضمن توضیح بیشتری دربارهٔ‌موضوع موردنظرهستند، ویا تفسیرهایی اضافی به‌خواننده می‌دهند.

روشن است که آرزوی من این است که خوانندهٔ خود را به‌فعالیت وادارم وکارآمدی اورا تقویت‌کنم، ولی نمی‌دانم تاچه‌حد موفق شده‌ام. تلاش‌کرده‌ام تا مؤثرترین شگردهای کلاس‌های درس خود را برصفحه‌های کتاب منتقل کنم. کوشیده‌ام تا باتجزیه وتحلیل منطقی و اسلوب‌دار، خواننده را درحال وهوای یك پژوهش علمی قرار دهم. سعی‌کرده‌ام، با انتخاب، فرموله‌کردن وتنظیم مسأله‌ها (این فرموله کردن و ردیف‌کردن مسأله‌ها، خیلی بیش ازآن‌چه یك خوانندهٔ ناوارد ممکن است تصورکند، مهم است و برای من دشواری بسیار ایجادکرده است)، به‌خواننده وربروم، علاقهٔ او را برانگیزانم، ابتکار اورا بیدارکنم ودربرابر او صحنهٔ گسترده‌ای رابگشایم تا بتواند با همهٔ موقعیت‌های گوناگونی که در کارهای علمی و پژوهشی برخورد می‌کند، آشنا شود.

۴°. قسمت عمدهٔ این کتاب، به‌موضوع‌های ریاضی اختصاص دارد. مسأله‌های غیرریاضی، به‌ندرت به‌چشم می‌خورد، ولی‌آن‌ها، همه‌جا، به‌طور

پنهانی ودرطرح پشت پرده وجود دارند. دایماً، به‌این مطلب توجه‌داشته‌ام و، تاآن‌جاکه ممکن بوده است، تلاش کـرده‌ام مسأله‌های ریاضی را باچنان روش‌هایی مورد بحث قراردهم که بتواند پرتوی هم به‌مسأله‌های غیرریاضی بیندازد.

قسمت عمـده‌ای از مسأله‌های مورد بحث درایـن کتاب، از ریاضیات مقدماتی انتخاب شده است. با وجود این، موادی که در کتاب وارد شده،در بیشتر موردها، از مسأله‌های دشوارتر انتخاب شده‌اند، اگرچه به‌ندرت‌مورد استناد قرارگرفته‌اند. در واقع، وضع بدین قرار است: سرچشمهٔ‌اصلی کار من، بررسی‌ها وپژوهش‌هـای شخصی بـوده استـ ساختن وپرداختن بسیاری از مسأله‌های مقدماتی، منعکس کنندهٔ تجربه‌ای است کـه، ضمن حل مسأله‌های دشوارتر، به‌دست آورده‌ام (مسأله‌هایی که دراین کتاب، نیامده‌اند).

۵°. این کتاب،دوهدف را باهم دنبال کرده‌است: هدف نظریـآموزشی «دانش کشف» و هدف مشخص عملی و، ضمناً، بهبود فوری آمادگی معلمان دبیرستان.

مـن امکان بسیارخوبی بـرای مطالعه داشته‌ام و توانسته‌ام، اعتقاد کامـلاً مستدلی دربارهٔ سطح آمادگی معلمان ریاضیات دبیرستان پیدا کنم، زیـرا تمامی درسی کـه درپنج سال اخیـر داده‌ام، به‌ویـژه، به‌همین معلمان اختصاص داشته است. به‌نظرم، ازجمله کسانی باشم که مطالعه‌ای درست و بدون پیش‌داوری دارند و، ازاین موضع، باید عقیدهٔ روشن ومشخص خود را بگویم: آمادگی معلمان ریاضیات دبیرستانی، رضایت‌بخش نیست. به‌نظر من، دراین‌باره، همهٔ‌مؤسسه‌ها وسازمان‌هایی که مسئولیت آماده کردن‌معلمان را به‌عهده دارند، مقصرند؛ دراین‌جـا باید، درنوبت اول، از دانشسراهای عالی، دانشگاه‌های تربیت معلم و رشته‌های ریاضی کالج‌ها نام برد، که اگر می‌خواهند موقعیت خـود را، به‌واقع، بهبود بخشند، باید بـا هوشیاری و دقت فوق‌العاده، همهٔ آن‌چه راکـه برای تربیت معلم لازم دارند، پیش‌بینی کنند.

درکالج‌های معلمان آینده، چه‌درس‌هایی را باید بخوانند؟ برای‌این که

بتوانیم به‌این پرسش، پاسخ دهیم، قبل از همه، باید از خود بپرسیم: چه خواست‌هایی را باید در برابر دانش‌آموز دبیرستان‌گذاشت؟

ممکن است به‌نظر آید که این پرسش، کمتر از آن‌چه به‌کار کمك کند، جروبحث برانگیزاند. در واقع، نمی‌توان پاسخی برای این پرسش پیداکرد که مورد قبول همگان باشد. با وجود این، نکته‌ای دراین پرسش وجود دارد که، دست‌کم، متخصصان در این زمینه، کاملاً ممکن است دربارهٔ آن به‌موافقت برسند.

جریان‌آموزش هرموضوع درسی، همچنان که‌این هدف رادنبال می‌کند که‌آگاهی‌هایی دربارهٔ این‌موضوع به‌دانش‌آموزان بدهد ومجموعهٔ‌دانش‌هایی را برای آن‌ها فراهم آورد، این هدف را هم دارد که مهارت‌های معینی در او به‌وجود آورد. اگر اندوخته‌ای از تجربهٔ اصیل راستین[1] کار ریاضی در شما جمع شده است (در هرسطحی، چه مقدماتی وچه عالی)، دراین مطلب تردید نکنیدکه تسلط بریك موضوع در ریاضیات، بسیار مهم‌تر ازآشنا شدن با یك آگاهی خالص است، چراکه این آگاهی را همیشه می‌توان، به کمك یك راهنمای مناسب، به‌دست‌آورد. بنابراین، چه در دبیرستان وچه درسایر مؤسسه‌های‌آموزشی، نه‌تنها باید دانش‌های معینی را به‌اطلاع‌دانش‌آموزان برسانیم، بلکه ضمناً، و این بسیار مهم‌تر است، باید به‌آن‌ها یاد بدهیم که چگونه وتاچه‌اندازه لازم است برموضوع درس مسلط شوند.

تسلط برریاضیات یعنی چه؟ تسلط برریاضیات، یعنی توانایی‌ومهارت درحل مسأله‌ها، ضمناً، نه‌تنها درمسأله‌های عادی‌وقالبی؛ تسلط‌برریاضیات، بیشتر به‌معنای داشتن استقلال اندیشه، عقل سلیم و نیروی نوآفرینی‌است. به‌این ترتیب، نخستین و مهم‌ترین وظیفهٔ دورهٔ ریاضیات دبیرستانی،عبارت است ازتأکید برجنبه‌های‌منطقی ومتکی برروش روند حل مسأله‌ها. این‌اعتقاد من است؛ ممکن است، شما با تمامی آن موافق نباشید، ولی من، فرض را براین می‌گذارم که شما هم، دست‌کم، با این مطلب موافق باشیدکه جریان حل مسأله را نباید با بی‌تفاوتی گذراند و وظیفهٔ معلم آن است که بربعضی

۱. مؤلف، ازواژهٔلاتینی «bonafide» (صادقانه،راستین) استفاده‌کرده است. م

از نکته‌های آن، تأکیدبیشتری داشته باشد؛وهمین اندازه توافق شما،فعلاً ، برای من کافی است.

معلم‌بایدبداند چه‌چیزی‌را می‌خواهددرس‌بدهد. او بایدبه‌دانش‌آموزان، راه حل مسأله‌ها را نشان دهد، ولی، اگر خودش تسلط کافی بر موضوع نداشته باشد، چگونه می‌تواند از عهدهٔ این وظیفه برآید؟ تلاش معلم، باید دراین‌جهت باشدکه دانش‌آموزان هرچه بیشتر برموضوع مسلط شوندوهرچه بهتر روش استدلال‌کردن را یاد بگیرند، مسألهٔ او باید مشوق وانگیزه‌ای برای رشد خلاقیت و اندیشهٔ نوآفرینی دانش‌آموزان باشد؛ با وجود این، دربرنامه‌ای‌که برای تربیت‌معلم تنظیم‌شده است، به‌مسألهٔ تسلط برمحتوای اصلی مطلب، توجه‌کافی نشده است، ولی درمورد آماده‌کردن معلم آینده، به‌نحوی‌که توانایی استدلال داشته باشد، از عهدهٔ حل مسأله‌ها برآید و صاحب اندیشه‌ای‌خلاق و نوآفرین باشد،هیچ توجهی نشده است. به‌نظرمن، دراین‌زمینه، کمبودهای جدی بسیاری، در سازمان‌های امروزی تربیت‌معلم ریاضی، برای دبیرستان، وجود دارد.

برای این‌که، این‌کمبودها برطرف شود، باید برنامهٔ آماده‌سازی‌معلم را چنان تنظیم‌کردکه فضای بازی به‌روی معلم آینده بگشاید وبه‌او پروبال بدهد تا بتواند، در سطح وظیفهٔ خود، خلاقیت داشته باشد و با نوآفرینی‌خو بگیرد. من‌کوشیدم، بحث دربارهٔ امکان چنین طرحی را، به سمینارهای حل مسأله، واگذارکنم. کتاب‌حاضر، شامل موضوع‌هایی است‌که من توانسته‌ام، برای این سمینارها، تهیه‌کنم، همراه با اشاره‌هایی درمورد استفاده ازآن‌ها («توصیه‌هایی به‌معلمان ومعلمان معلمان» را درچند صفحهٔ بعد ببینید) و امیدوارم توانسته باشم، از این راه، کمکی درجهت بهبودکار تربیت معلم ریاضی، کرده باشم، چیزی‌که هدف مشخص این‌کتاب را تشکیل می‌دهد.

معتقدم، توجه مستمری‌که به‌دو هدف یاد شده (هدف نظری و هدف عملی) داشته‌ام، موجب بهترشدن شیوهٔ بیان این‌کتاب شده است. همچنین، امیدوارم، علاقه‌ها و دیدگاه‌های خوانندگان گوناگون این‌کتاب، متناقض‌با یکدیگر نباشد (برای بعضی، ممکن است‌کتاب، به‌طورکلی، به‌منزلهٔ

موضوع‌هایی در بارهٔ حل مسأله باشد، بعضی دیگر، به تکامل استعداد خود در حـل مسأله نظر داشته باشند و گروه سوم، بـه‌تکامل ایـن استعداد در دانش‌آموزانی که با آن‌ها کار می‌کنند). آن‌چه، برای خواننده‌ای مهم‌ترین است، به‌احتمال زیاد، برای دیگران هم، اهمیت دارد.

۶°. کتاب حاضر، همان خطی را ادامـه می‌دهد که در دو کتاب قبلی خودم دنبال کرده‌ام: «چگونه می‌توان مسأله‌ها را حل کرد؟» و «ریاضیات و استدلال‌های شبه‌حقیقی» [کتاب اخیر، به‌دو بخش تقسیم‌شده است: «استقراء وقیاس در ریاضیات» (جلد اول) و «استخوان‌بندی استنتاج‌های شبه حقیقی» (جلد دوم)]. این کتاب‌ها، بدون این کـه درهم فرورفته باشند، یکدیگـر را تکمیل می‌کنند.ممکن است، موضوع واحدی، درهردو کتاب مورد بحث‌قرار گرفته باشد، ولی خصلت این بحث‌ها، تاحدی، با هم متفاوت است(مثال‌ها، اجزاء وطرح‌ها با هم فرق دارند). همهٔ ایـن کتاب‌ها مستقل‌اند و می‌توان هر کدام را قبل از دیگران مطالعه کرد.

۷°. چهارفصل اول کتاب حاضر، نسبت به‌بقیهٔ فصل‌هـا، مسأله‌های بیشتری دارد. درواقـع، بخش اول، ازبسیاری جهت‌هـا، بـه «مسأله‌ها و قضیه‌هایی‌ازآنالیز»شباهت‌دارد که «سه گیو» و«من»مشترکاً تألیف کرده‌ایم.با وجود این، دراین‌جا هم، تفاوت‌های روشنی وجود دارد: مسأله‌هایی که در ایـن کتاب گذاشته‌ام، اغلب از ریاضیات مقدماتی است، اشاره‌های مـربوط به‌روش کاررا، نه‌دربین سایرمطلب‌ها وگذرا، بلکه به‌تفصیل، شرح‌و،سپس، مورد بحث قرار داده‌ام.

فصل ششم را، تحت تأثیرتألیف ورنرهارتکوف (W.Hartkopf)، که چندی پیش منتشر شد، نوشته‌ام. من تنها به‌آن جنبه‌های نوشتهٔ هارتکوف توجه کرده‌ام، که نظر مرا جلب کرده است وآن‌ها را هم، به‌صورتی که‌مورد نظرخودم بوده است، درآورده‌ام، به‌جزآن، تمرین‌ها و ضمیمه‌هایی به‌آن‌ها افزوده‌ام.

ژرژپوئیا

زوریخ، سویس،

دسامبر ۱۹۶۱- اکتبر ۱۹۶۴

چند توصیه و اشاره

هرجا، درمورد تمرین‌ها، توضیح‌های اضافی، مثال‌ها، بندها وغیر آن، علامت* آمده است، به‌معنای آن است که برای پرداختن به آن، به آگاهی‌هایی، بیشتر از ریاضیات مقدماتی، نیاز است. با وجود این، اگر این نیاز، کمتر جدی بوده است، از گذاشتن این علامت، صرف نظر شده است.

برای مطالعهٔ بخش اول کتاب، تنها آشنایی به ریاضیات مقدماتی لازم است، یعنی آشنایی با آن قسمت‌هایی از جبر، هندسه، رسم منحنی (با استفاده‌از دستگاه محورهای مختصات) و مثلثات که در برنامهٔ ریاضیات دبیرستانی وجود دارد.

مسأله‌هایی که در این کتاب، مورد بررسی قرار گرفته است، به‌ندرت، از چارچوب برنامهٔ دبیرستانی خارج می‌شوند، ولی حتی در این‌گونه موارد هم، فاصلهٔ چندانی با سطح دانش دبیرستانی ندارند. بعضی ازمسأله‌ها، به‌طورکامل، حل شده‌اند (ولو به‌صورتی فشرده)، درمورد بعضی دیگر، به‌شرح چند گام اولیه اکتفا شده است و، بالاخره، گاهی هم، تنها نتیجهٔ نهائی آمده است.

برای قسمتی از مسأله‌ها، راهنمایی‌هایی شده است که می‌توانند موجب ساده‌تر شدن حل بشوند. این راهنمایی‌ها، احتمالا، به کار حل مسأله‌هایی هم می‌خورد که در همسایگی مسأله مورد مطالعه قرار دارند. به‌مقدمه‌هایی که برای یك تمرین جداگانه در داخل فصل ویا برای گروهی ازتمرین‌ها آمده است، باید توجه خاصی مبذول داشت.

خواننده‌ای که، به‌طور جدی، برای حل مسأله‌هایی کارکرده است، حتی درصورتی هم که به‌حل آن‌ها موفق نشده باشد، می‌تواند از نتیجهٔ آن‌ها، برای

مسأله‌های بعدی استفاده کند. خواننده می‌تواند، فی‌المثل، ازشرحی که‌درابتدای حل مسأله (در انتهای کتاب) آمده است، استفاده کند و این شرح را با آن‌چه خود اندیشیده است مقایسه کند؛ بعد کتاب را، همـراه با توصیه‌های آن، کنار بگذارد و بکوشد تا دنبالهٔ مسأله را، مستقلاً، حل کند.

ظاهراً، بهترین موقع، برای اندیشه در بارهٔ روش حل مسأله، وقتی است که خواننده، به‌تازگی، از حل مسأله فارغ شده، یا راه‌حـل آن را از روی کتاب خوانده و یا با شیوه‌های حلی، که در کتاب آمده است، آشنا شده است. همان‌وقتی که مطالعهٔ دستورها و توصیه‌ها را تمام کرده‌اید و تأثیری که درذهن شما گذاشته‌اند، تازه است، با کنار گذاشتن دیدگاه‌های کهنهٔ خود، می‌توانید اقـدام به برداشتن دشواری‌ها ازسرراه‌خود بکنید. چه بسا که، درچنین موقعیتی، پرسش‌های سودمندی هم به‌ذهن شما راه یابد: «کدام جنبه، درجریان حل مسأله، مهم‌تر است؟ دشواری اصلی در کجاست؟ چه‌کار بهتری می‌توانستم انجام بدهم؟ ایـن قسمت را سطحی دیده‌ام— چه شیوه‌ای به‌کار ببرم تا آن را بهتر ببینم؟ آیا روشی وجود ندارد تا دقت مرا بیشتر کند و بتواند درموردهای مشابه، به‌من کمک کند؟» همهٔ این پرسش‌ها سودمندند؛ پرسش‌های سودمند دیگری هم‌وجوددارد— ولی بهترین آن‌ها، پرسشی است که به‌طورطبیعی به‌ذهن‌شما می‌رسد وخود به‌خود و بدون‌هیچ تلقین قبلی ظاهر می‌شود.

توصیه‌هایی به‌معلمان و به‌معلمان معلمان

معلمانی که می‌خواهند ازاین کتاب درهدف‌های حرفه‌ای خود استفاده کنند، نباید توصیه‌های کلی را که به همهٔ خوانندگان شده است، ازیاد ببرند، ولی به‌جز آن‌ها، باید به نکته‌های دیگری هم، که‌در زیرشرح داده‌ام، توجه کنند:

۱°. هدف‌اصلی‌این کتاب‌این است که معلمان‌آیندهٔ دبیرستان‌ها (وهمچنین معلمان فعلی)، امکانی مناسب برای‌کار خلاق خود— در سطحی کـه با آن روبه‌رو هستند— دراختیار داشته باشند. احتمال نمی‌رود که معلمان عـادی ریاضیات در دبیرستان‌ها، این امکان را داشته باشند که، درزمینهٔ ریاضیات امروزی، به‌طـور جدی به کار پژوهشی—علمی بپردازند. با وجود این، حل مسأله‌های نامتعارف ریاضیات را هم، بی‌تردید، باید نوعی فعالیت خلاق دانست. مسأله‌هایی کـه در این کتاب آمده است [و با نشانهٔ * مشخص نشده‌اند وگاهی— به‌همین منظور— قبل از متن گذاشته شده‌اند] به‌هیچ‌گونه دانشی خارج از برنامهٔ دبیرستانی نیاز ندارند، ولی به‌حد معینی (وگاهی حد بالایی) از توانایی دراستدلال کردن نیاز دارند. به‌نظرمن، حل مسأله‌هایی ازایـن قبیل، نوعی ازخلاقیت ریاضی است و

باید دربرنامهٔ آمــوزش معلمان ریاضیات دبیرستانی گذاشته شود. معلــم آیندهٔ ریاضیات، با حل چنین مسأله‌هایی امکان به دست آوردن فرهنگ واقعی ریاضی را پیدا می‌کند و برای انتقال این فرهنگ به‌دانش‌آموزان خود آماده می‌شود؛ ضمناً، وقتی چنین نتیجه‌ای به‌دست می‌آیدکه یادگیری، نه‌از طریق‌خودبه‌خودی ومکانیکی، بلکه با استفاده از دانش و آگاهی خود درحــل مسأله‌های موردنظر، انجام‌گیرد. درعین حال، معلم آینده، از این راه درزمینــهٔ ریاضیات مقدماتی، مهارتی نسبی به‌دست می‌آورد وماهیت روند حــل مسأله‌ها را درك می‌کند. همهٔ این‌ها، به‌معلم‌کمك می‌کند تــا بتواند دانش‌آموزان را جدی‌تر راهنمایی وکار آن‌ها را بهترارزیابی کند.

۲°. مسأله‌ها، تمرین‌ها واشاره‌هایی‌که دربخش اول‌کتاب آمده است، برای دورهٔ دبیرستانی،کاملاً مفیدند. به‌معلمان توصیه می‌کنم، دربارهٔ راه استفاده از مسأله‌هایی‌که در این‌کتاب آمده است، درکلاس‌های خود، بیندیشند. حتی وقتی که مسأله به‌طورکامل حل شد، بازهم باید به‌این اندیشه ادامه‌داد. دوباره، نظری به‌مسأله بیندازید و از خود بپرسید: «آیا باز هم، درجای دیگری، نمی‌توان‌از این مسأله استفاده‌کــرد؟»، «ایــن‌کار، برای دانش‌آموزان چه‌اهمیتی دارد؟»، «مقدمتاً، چه مسأله‌های دیگــری را باید مــورد بررسی قرار داد؟» «به‌خصوص، برای‌کلاس من (که درفلان سطح قرار دارد)، چه انتظارهایی ازطرح این مسأله دارم؟»، «برای فلان دانش‌آموز مشخص، چه‌فایده‌ای داشت؟» وغیره.

۳°. مواد اصلی این کتاب، در جریان برگذاری سمینارهای حل مسأله برای معلمان، مورد تأیید من قرارگرفته است. من بارها، این‌گونه سمینارها‌را، در شهرهای مختلف، تشکیل داده‌ام، بعضی ازهم‌کاران هم، با مطلب‌هایی‌کــه در اختیار آن‌ها گذاشته‌ام، به‌تشکیل این سمینارها، دست زده‌اند.

بعد ازآزمایش‌های بسیار، برای سمینارخود، ترتیب خاصی دادم،که‌شرح آن را، بی‌فایده نمی‌دانم[1].

مسأله‌های نمونه‌ای، که امکانی برای رسیدن به‌یك روش‌کلی مفیدبه‌دست می‌دهند، در تالارکنفرانس وبا راهنمایی مربی، مورد بحث قرار می‌گیرندوحل

---

۱. چیزهایی ازآن‌چه راکه دراین‌جا آورده‌ام ویا بعداًخواهم آورد، ازمقاله‌ای برداشته‌ام‌که قبلا، چاپ‌کرده بودم. عنوان ونشانی مقاله، چنین است:

Ten commandements for teachers, Journal of education of the faculty and college of education, Vancouver and Victoria, No 3 (1959).

می‌شوند؛ متن چهار فصل اول این کتاب، تقلیدی است ازهمین بحث‌ها و تا آن حد دقیق که بتوان بحث شفاهی را به‌صورت نوشتهٔ کتبی در آورد. این مسأله سرآخر، به‌تنظیم چند حکم کلی منجرمی‌شود که چگونگی آن را می‌توانید در فصل‌های مربوط ببینید.

تکلیف‌های منزل شرکت‌کنندگان سمینار شامل مسأله‌هایی است (شبیه آن‌چه در انتهای هرفصل کتاب گذاشته شده است) که به‌آن‌ها امکان می‌دهد تا برآن‌چه در تالار کنفرانس یادگرفته‌اند، مسلط‌تر شوند و راه کاربرد و تعمیم روش‌های راه‌حل را بهتر و بیشتر فراگیرند (در همان‌جا، به‌بعضی اشاره‌های آموزشی هم، اشاره شده است).

۴°. من از سمینار خود، در این جهت هم استفاده می‌کردم (و در واقع، این یکی ازهدف‌های اصلی سمینار بود) که به‌شرکت‌کنندگان در آن امکان بدهم تا در روشن‌کردن مفهوم مسأله‌ها و دستور حل آن‌ها، در عمل ممارست کنند، یعنی به‌چنان تمرین‌های آموزشی بپردازند که، معمولاً، خیلی کم به‌آن‌ها بها داده می‌شود.

بعد ازآن‌که‌کار منزل تحویل داده شد، دربارهٔ پرسش‌ها ومسأله‌هایی که جنبه‌ای کلی‌تر و اساسی‌تر دارند و به‌وسیلهٔ شرکت‌کنندگانی خیلی خوب (و یا برعکس، بد) حل شده است، برای همگان(روی تخته سیاه) مطرح می‌شود.وقتی که شرکت‌کنندگان، به‌خوبی با شیوهٔ‌کار تالارکنفرانس آشنا شدند، گاه به‌گاه، یکی از خود شرکت‌کنندگان، برای‌ادارهٔ بحث‌ها، جای مربی را می‌گیرد.ولی، بهترین روش آموزشی،‌کارگروهی است. کارهای‌گروهی را، درسه مرحله می‌توان انجام داد.

قبل ازهمه، درابتدای جلسه‌ای‌که ازهمهٔ شرکت‌کنندگان سمینار برای‌کار عملی تشکیل شده است، به‌هرشرکت‌کننده، یك مسأله (وتنها یکی) داده می‌شود که باید آن را در این جلسه حل‌کند؛ فرض براین است‌که هیچ‌کس با دوستان خود مشورت نمی‌کند. ولی می‌تواند، تا حدی، ازمربی جلسه‌کمك بگیرد.

سپس، درفاصلهٔ زمانی بین این جلسه وجلسهٔ بعدی، باید راه‌حل خود را مورد تحقیق قراردهد، آن‌را تکمیل کند، دوباره‌در بارهٔ آن‌فکر کندو، اگرمی‌تواند، آن را ساده‌ترکند، سعی‌کند راه حل دیگری پیدا کند که به‌همین نتیجه برسد و مسأله را، با استفاده ازهمهٔ امکان‌ها وتوانائی‌های خود و تا آن‌جا که ممکن‌است به‌طورکامل مورد بررسی قرار دهد. علاوه براین، باید طرح خود را، برای حل این مسأله درکلاس، آماده‌کند. و روشن است‌که درهریك ازاین موردها،می‌تواند

از راهنمائی‌های مربیان، برخوردار باشد.

درجلسهٔ بعد، شرکت کننده‌گان، به‌گروه‌های بحث ومناظره، تقسیم‌می‌شوند. هر گروه، به‌طور متوسط، شامل چهار نفراست. ترکیب افراد هر گروه، با توافق ورضایت خود شرکت‌کننده‌گان و بدون دخالت مربی سمینار، معین می‌شود. یکی از افرادگروه، نقش مربی و دیگران نقش شاگـرد را به‌عهده می‌گیرند. «معلم» دربارهٔ مسألهٔ خودش، برای «شاگردان» صحبت می‌کند، می‌کوشد ابتکار آن‌ها را بیدار کند و با همان شیوهٔ مربی سمینار (در تالار کنفرانس)، آن‌هـا را به‌سمت راه‌حل بکشاند. وقتی که‌جواب مسأله پیداشد، همهٔ عضوهای گروه، به‌بحث‌دربارهٔ آن، وآن‌چه‌گذشته است، می‌پرازند. بعد، نقش معلم، به‌عضو دیگری ازگروه‌داده می‌شود؛ این جریان ادامه پیدا می‌کند تا همه عضوهای‌گروه بتوانند مسألهٔ خود را، درنقش‌معلم، مطرح کنند. سپس، ترکیب گروه، مختصری عوض می‌شود (مثلا، هریك از دوگروه همسایه، می‌توانند یکی از عضوهای خود را، به عنوان معلم، به‌گروه دیگری بفرستند)، به‌نحوی که هرشرکت کننده امکان‌پیدا کند تا، باطرح دوباره یـا چند بارهٔ مسألهٔ خود، استادی و مهارت خود را جلا بدهد. بعضی از مسأله‌ها ویاراه‌حل‌های‌جالب، باید درتالار کنفرانس و برای‌همهٔ شرکت کننده‌گان مطرح شود. بایدگروه‌هارا تشویق کرد که، به‌ابتکارخود، به‌بحث دربارهٔ مسأله‌هایی بپردازند که برای همهٔ گروه‌های دیگر ناآشنا است.

حل مسأله‌ها دربحث‌های‌گروهی، به‌سرعت جنبهٔ عام پیدا می‌کند و مـن اطمینان دارم که همهٔ سمینارهایی کـه تشکیل داده‌ام، همراه بـا موفقیت بوده است. بسیاری از شرکت کننده‌گان در سمینارهـا، معلمان بـا تجربه‌ای بودند و سمینار، اندیشه‌های مفیدی به‌آن‌ها داد که‌برای‌کار در کلاس‌های اختصاصی آن‌ها، بسیار مفید بود.

۵°. این کتاب می‌تواند به‌همهٔ مراکز تربیت‌معلم کمك کند تا سمینارهای حل مسأله را تشکیل دهند (و به‌خصوص، اگردراین راه تجربه‌ای نداشته‌باشند و برای نخستین سمینارخـود تهیه می‌بینند، این‌کتاب، کمك بزرگی به‌آن‌هـا خواهد بود). به‌جزاین، به‌خصوص فصل‌هـای اول، می‌توانند به‌عنوان محتوی‌کار سمینارها انتخاب شود و در روندی‌که در ۳° و ۴° شرح دادم، ازآن‌ها استفاده شود. مسأله‌هایی کـه درانتهای هرفصل گذاشته شده است، برای‌کارمنـزل، بسیار سودمند است؛ یادآوری می‌کنم که، برای حل‌کامل وتا پایان راهنمایی‌هایی کـه در انتهای‌کتاب برای این تمرین‌ها آمده است، به‌کاری‌جدی وطولانی نیازدارد. مربی نباید ازاین مسأله‌ها، به‌تصادف ویا از روی‌حدس، انتخاب کند؛ قبل‌ازآن

که مسأله‌ای را برگزینند، باید به‌اندازهٔ کافی دربارهٔ خـود مسأله، راه‌حل آن و مسأله‌های نزدیك به‌آن بیندیشد. برای بحث در گروه‌ها (۴° را ببینید)، باید مسأله‌های دشوارتر را انتخاب کرد. ضرورتی ندارد که، برای این‌گونه مسأله‌ها، خود را به چهارفصل اول مقید کنیم؛ از فصل‌های دیگرهم، می‌تـوان مسأله‌هایی انتخاب کرد.

البته، اگرمربی به‌اندازهٔ کافی آزموده باشد، می‌تواند ضمن درنظرگرفتن هدف‌های این کتاب، بدون این‌که درجزء جزء مطالب آن وارد شود، ازابتکارهای خود هم استفاده کند.

بخش اول

روش‌های خاص

هرراه حلی که برای مسأله‌ای پیدا می‌کنم، به‌عنوان سرمشق، به‌من کمك می‌کند تا مسأله‌های دیگری را هم به‌نتیجه برسانم.

دکارت، گفتار دربارهٔ روش

اگر به‌حقیقت‌های تازه‌ای ازدانش پی‌ببرم، می‌توانم تأکید کنم که همهٔ آن‌ها، نتیجهٔ مستقیم پنج یا شش مسألهٔ اصلی هستندکه من موفق به‌حل آن‌ها شده‌ام ویا به‌آن‌ها بستگی دارند؛ من به‌آن‌ها به‌صورت نبردهایی می‌نگرم که شانس پیروزی درطرف من‌قرار گرفته باشد.

دکارت، همان‌جا

فصل اول

روش دومکان هندسی

۱§ . ساختمان‌های هندسی

رسم یا ساختن شکل‌های هندسی، به کمك پرگار و خط کش، به طور سنتی، جای نمایانی را درآموزش هندسهٔ مسطحه گرفته است. ساده‌ترین این ساختمان‌ها، مورد استفادهٔ طراحان و نقشه‌برداران قرار می گیرد، ولی در سایر موردها، ارزش عملی ساختمان‌های هندسی، قابل توجه نیست و اهمیت نظری چندان زیادی هم ندارند. با همهٔ این‌ها، کاملاً به‌حق، این ارزش را برای این گونه ساختمان‌ها، درآموزش قایل شده‌اند، چرا کـه این‌ها، مناسب‌ترین وسیله، برای آشنائی دانش‌آموزان تازه کار، بـا شکل‌های هندسی است و، بهتر از هروسیلهٔ دیگری، زمینه را برای فراگرفتن راه‌حل مسأله‌ها، فراهم‌می‌کنند. به‌خصوص، به خاطـر همین ملاحظـهٔ اخیر است کـه می‌خواهیم موضـوع ساختمان‌های هندسی را، مورد بحث قرار دهیم.

مثل بسیاری ازسنت‌های دیگری که، درآموزش‌ریاضیات، وجوددارد، سرچشمهٔ ساختمان‌های هندسی را هم، باید از اقلیدس دانست، که دردستگاه خود، نقش زیادی را به عهدهٔ آن‌هـا گـذاشته است. در نخستین مسأله از

«مقدمات» اقلیدس- در مسألهٔ اول ازکتاب اول- پیشنهاد شده است: «روی خط راست‌محدود» [پاره خط]، مثلث متساوی‌الاضلاعی بناکنید». دردستگاه مورد قبول اقلیدس، دراین جهت تلاش شده است که مسأله را به‌محیط تنگ‌تری بکشانند و، به‌همین مناسبت، خود را به بررسی مثلث متساوی‌ـ الاضلاع محدود می‌کند. در واقع هم، همین مسأله است‌که راه را، برای‌حل مسألهٔ کلی بعدی، می‌گشاید: مثلث را، با مفروض بودن سه ضلع آن، رسم کنید.

اندکی به‌تجزیه وتحلیل این مسأله می‌پردازیم.

در هرمسأله‌ای باید مجهولی وجود داشته باشد- اگر همه‌چیز معلوم باشد، چیزی برای جست‌وجو و کاری برای انجام دادن باقی نمی‌ماند. مجهول مسألهٔ ما(یعنی، چیزی‌که بایدپیداکنیم: quaesitum[1]) عبارت‌است ازیك شکل هندسی: مثلث.

سپس، در هر مسأله، باید چیزی معلوم باشد: مفروض یا داده شده (آن‌چه راکه معلوم باشد، مفروض یا داده شده می‌نامیم). اگرمفروضی در اختیار نداشته باشیم، هیچ‌امکانی برای‌شناخت موضوع مورد بحث،نخواهیم داشت؛ حتی اگر دربرابر چشمان ما باشد، نمی‌توانیم آن را مشخص‌کنیم. در مسألهٔ ما، داده‌ها عبارتند از سه «خط راست محدود»- سه‌پاره‌خط‌راست.

سرانجام، در هرمسأله، باید شرطی وجود داشته باشد که مجهول را با داده‌ها، به‌طورمشخص، به‌هم مربوط‌کند. در مسألهٔ ما شرط شده است‌که، سه پاره‌خط مفروض، باید ضلع‌های مثلث مجهول باشند.

شرط، عنصراصلی مسأله است. مسألهٔ خود را، مثلاً، با این مسأله مقایسه‌کنید: «مثلثی رسم‌کنیدکه سه ارتفاع آن داده شده باشد». در هردو مسأله، داده‌ها یکی است (سه پاره‌خطراست)؛ مجهول هم، یك شکل‌هندسی است (مثلث). ولی، رابطهٔ بین مجهول و داده‌ها، در دومسأله، متفاوت است: شرط یکسان نیست. به‌همین مناسبت، این دومسأله، درواقع، به‌کلی با هم فرق دارند (مسألهٔ ما ساده‌تر است).

---

۱. واژه لاتینی، به‌معنی پرسش.

البته، خواننده راه‌حل مسألهٔ مـا را می‌داند. فرض کنید a، b و c، طول‌های سه‌پاره‌خط مفروض باشند. پاره‌خط a را رسم می‌کنیم ودوانتهای آن را B و C می‌نامیم (شکل را خودتان بکشید). دو دایره رسم‌می‌کنیم، یکی به‌شعاع b و مرکز C و دیگری به‌شعاع c و مرکز B؛ A را، یکی از دونقطهٔ برخورد این دایره‌ها می‌گیریم. ABC مثلث مجهول است.

۲§. از نمونه به‌روش

به‌حل قبلی برمی‌گردیم وتلاش‌می‌کنیم، چنان‌ویژگی‌ها وخصیصه‌هایی از آن‌راکشف‌کنیم که‌امیدواریم بتوانیم، ازآن‌ها، درحل‌مسأله‌های دیگری ـ که با مسألهٔ ما خویشاوندند ـ استفاده‌کنیم.

با رسم پاره‌خط a، در واقـع، دو رأس B و C از مثلث مجهـول را تثبیت می‌کنیم. آن‌چه باقی می‌ماند، این است که در جست‌وجوی تنها رأس دیگرباشیم. با رسم این پاره‌خط، درواقع، مسأله خود را به‌مسألهٔ دیگری، که هم‌ارزآن است ولی با آن فرق دارد، تبدیل‌کرده‌ایم. دراین مسألهٔ تازه

مجهول عبارت است ازیك نقطه (رأس سوم مثلث مجهول)؛

داده‌ها عبارتند از دونقطهٔ (B و C) ودوطول b و c؛

شرط این‌است‌که می‌خواهیم نقطهٔ مجهول، به‌فاصلهٔ b ازنقطهٔ‌مفروض C و به‌فاصلهٔ c ازنقطهٔ مفروض B باشد.

این شرط از دوجزء تشکیل شده است‌که یکی از آن‌هـا به b و C و دیگری به c و B مربوط است. یکی از دو جــزء شرط را نگه‌دارید ودیگری راکنار بگذارید؛ با این عمــل، مجهول تا چه اندازه معین است، چگــونه می‌تواند تغییر کند؟ نقطه‌ای از صفحه، به‌فاصلهٔ مفروض b از نقطهٔ مفروض C، قرارگرفته است: این نقطه، نه کاملاً معین‌است‌و نه کاملاً دلخواه. جای این‌نقطه، بایك«مکان‌هندسی» محدود شده است‌ـاین نقطه، برمحیط دایره‌ای به‌شعاع b ومرکز C قراردارد، ولی ضمناً، می‌تواند روی محیط این دایره، جابه‌جاشود. نقطهٔ مجهول، به‌ناچار، به‌دومکان هندسی ازاین‌نوع تعلق دارد و، بنابراین، به عنوان نقطهٔ برخورد آن‌ها، معین می‌شود.

دراین‌جا، به‌یك روش می‌رسیم («روش دومکان هندسی») و نوعی امید پیدا می‌کنیم که بتوانیم، ازآن، در حل مسأله‌های مـربوط به‌ساختمان‌های هندسی، استفاده‌کنیم:

ابتدا، مسأله را منجر به‌پیدا کردن یـك نقطه می‌کنیم، سپس شرط را به‌دو جزء تقسیم می‌کنیم، به‌نحوی‌که هرکـدام از آن‌ها، به‌یك مکان هندسی برای نقطهٔ مجهول، منجر شود. هر یك از این دو مکان هندسی، باید یا خط راست باشد یا دایره.

مثال، بهتر از دستورالعمل است ـ آشنائی با یـك روش نمی‌تـواند، به‌خودی خـود، سود زیادی برای شما داشته باشد. با هرمثال تازه‌ای کـه بتوانید با موفقیت حل‌کنید، درواقع، رنگ تازه‌ای به «روش» داده‌اید وآن را، جالب‌تر وبا ارزش‌تر نمایانده‌اید.

§۳. مثال‌ها

تقریباً همهٔ ساختمان‌هایی‌که، به‌طورسنتی، در برنامهٔ دبیرستانی‌وجود دارد، براساس استفاده مستقیم از روش دومکان هندسی است.

۱°. دایره‌ای برمثلث مفروض، محیط‌کنید. مسأله را، منجربه‌پیدا کردن مرکز دایرهٔ مـورد نظر می‌کنیم. در نتیجه، به مسأله‌ای بـا این ویژگی‌ها می‌رسیم:

مجهول، عبارت است ازیك نقطه، که آن را X می‌نامیم؛

داده‌ها عبارتند از سه‌نقطهٔ A، B و C؛

شرط حاکی ازآن است‌که باید سه فاصلهٔ زیر با هم برابرباشند:

$$XA=XB=XC$$

شرط را به‌دوبخش تقسیم می‌کنیم:

اول: $XA=XB$

دوم: $XA=XC$

هربخش ازشرط، متناظربا یك مکان هندسی است. مـکان هندسی اول عبارت است ازخط راست عمود منصف AB ومکان هندسی دوم ـ عمود منصف‌پاره‌

خط AC. بنابراین، نقطهٔ مجهول، در محل برخورد این دوخط راست قرار دارد.

می‌توانستیم، شرط را به گونهٔ دیگری تقسیم کنیم: بخش اول $XA=XB$، بخش‌دوم: $XB=XC$. این تقسیم، مارا به‌ساختمان دیگری می‌رساند، ولی آیا نتیجهٔ آن با نتیجهٔ ساختمان نخست متفاوت است؟ چرا؟

۲°. دایره‌ای درمثلث مفروض محاط‌کنید. این مسأله هم، منجربه‌پیدا کردن مرکز دایرهٔ موردنظر می‌شود. درمسأله‌ای که، به‌این ترتیب، به‌دست می‌آید:

مجهول، نقطه‌ای است که‌آن را X می‌نامیم؛

داده‌ها، عبارتند از سه‌خط راست (نامتناهی) a، b و c؛

شرط حاکی ازآن است که، نقطهٔ X، باید ازاین سه‌خط راست، به‌یك فاصله باشد (می‌دانیم که فاصلهٔ نقطه ازخط، به‌معنای طول پاره‌خط عمودی است که ازآن نقطه برخط راست رسم شده است).

شرط را به‌دوبخش تقسیم می‌کنیم:

اول: X از دوخط راست a و b به‌یك فاصله است.

دوم: X از دوخط راست b و c به‌یك فاصله است.

مکان هندسی نقطه‌هایی ازصفحه، که با بخش اول شرط سازگار باشد، از دو خط راست‌تشکیل‌شده‌است که‌برهم عمودند وعبارتند ازنیمسازهای‌زاویه‌هایی که دوخط راست a و b با هم می‌سازند. مکان هندسی دوم هم، شبیه اولی است. این دومکان هندسی، یکدیگررا درچهارنقطه قطع می‌کنند وما، علاوه برمرکز دایرهٔ محاطی داخلی، مرکزهای سه دایرهٔ محاطی خارجی دایره را هم، به‌دست می‌آوریم.

توجه‌کنید: درمثال اخیر، نوع تنظیم دومکان هندسی، تا حدی،دچار تغییر شده است (این تنظیم را، در پایان §۲ داده‌ایم). بگویید چه تغییری پیدا شده است؟

۳°. دو خط راست موازی ونقطه‌ای بین آن‌ها، داده شده است. دایره‌ای رسم‌کنیدکه براین دوخط راست مماس باشد وازنقطهٔ مفروض‌بگذرد.

اگرشکل مطلوب را، پیش خود، مجسم کنیم (بهتر است آن را روی کاغذ رسم کنید)، می‌توان متوجه شدکه بخشی ازمسأله، به‌سادگی حل می‌شود: روشن است که، فاصلهٔ بین دوخط راست موازی، برابر با قطر دایره است و نصف این فاصله، برابر شعاع دایره می‌شود.

برای حل مسأله، کافی است، مرکز X از دایرهٔ مجهول را پیدا کنیم. با در دست داشتن شعاع، که ما آن را r می‌نامیم، شرط مسأله را، به‌این صورت، به‌دوبخش تقسیم می‌کنیم:

بخش اول: X به‌فاصلهٔ r از نقطهٔ مفروض قرار دارد؛

بخش دوم: نقطهٔ X از هریك ازدوخط راست موازی، به‌فاصلهٔ r قرار دارد.

بخش اول شرط، منجر به‌رسم یك دایره می‌شود و، بخش دوم، منجر به‌رسم خط راستی می‌شودکه با دوخطراست مفروض موازی است وازوسط آن‌ها می‌گذرد.

اگر هم، به‌معلوم بودن شعاع توجه نمی‌کردیم، می‌توانستیم شرط مسأله را، این‌طور تقسیم کنیم:

بخش اول: X از نقطهٔ مفروض ویکی از دوخط راست موازی به‌یك فاصله است؛

بخش دوم: X ازنقطهٔ مفروض وخطراست دوم‌به‌یك فاصله‌است.

البته، اگرشرط را، به‌این ترتیب، تقسیم کنیم، ازنظرمنطقی، به‌هیچ‌وجه قابل اعتراض نیست. ولی، دست‌کم ازنظرعملی، بی‌فایده است: هرکدام از مکان‌های هندسی مربوط، یك سهمی را تشکیل می‌دهند که نمی‌توانیم، آن‌ها را، به‌کمك پرگار وخط‌کش رسم کنیم. در مسأله‌هایی‌که حل می‌کنیم، نکتهٔ اساسی دراین‌جا است‌که: مکان‌های هندسی حاصل، باید دایره یا خط راست باشند.

مثال اخیر، می‌تواند به‌درك بهتر روش دومکان هندسی، کمك کند. این روش، همان‌طورکه درمثال‌ها دیده شد، می‌تواند دربسیاری موردها راه‌گشا باشد؛ ولی البته، نه در همه موردها و بدون استثنا.

§۴. فرض کنیم مسأله حل شده است

آرزو یعنی: در تصور و گمان خود، چیزهایی را در نظر بگیریم که می‌خواهیم دراختیار داشته باشیم ولی، درواقع، دراختیارخود نداریم. مرد گرسنه‌ای که، جزتکه‌ای نان‌بیات، چیزی ندارد، با خودمی گوید: «اگرکمی ژامبون‌داشتم، می‌توانستم‌نیمروی ژامبون تهیه‌کنم؛ البته، با این شرط که چند تخم‌مرغ‌هم داشته باشم».

مردم به‌شما می‌گویند: آرزو چیزی بی‌معنی است؛ ولی، حرف آن‌ها را باورنکنید. این، یکی از دروغ‌ها و اشتباه‌هایی است‌که، به‌صورتی کاملاً گسترده، پخش شده است. آرزو می‌تواند بد باشد، همان طورکه مقدار زیاد نمك درسوپ و یا وجود سیر درشیرینی شکلاتی بد است. می‌خواهم‌بگویم، آرزو وقتی بداست‌که ازحد بگذرد و یا بی‌جا باشد. ولی، به‌طورکلی، آرزو خوب و مفید است و، غالباً، می‌تواند در زندگی، و به خصوص در حل مسأله‌ها، به ما کمك‌کند. مرد فقیر ما می‌توانست، به جای آرزوی کوچك نیمروی ژامبون، به‌همان نان بیات خود هم راضی باشد وآن را به خوبی هضم کند، ولی در حل مسأله‌ها، چنین رضایت‌هایی نمی‌تواند شرط موفقیت باشد. اکنون، به‌بررسی مسألهٔ زیر می‌پردازیم (شکل ۱ـa را ببینید).

سه نقطهٔ A، B و C داده شده است. خط راستی رسم‌کنیدکه AC رادر X و BC را در Y قطع کند، به نحوی که داشته باشیم:

$$AX = XY = YB$$

فرض می‌کنیم، جای یکی از دو نقطهٔ X یا Y را بدانیم (آرزویی شیرین!). دراین صورت، می‌توانیم جای نقطهٔ دوم را هم، به‌سادگی، پیدا کنیم (مثلاً، اگر جای X معلوم بود، با رسم عمود منصف پاره خط BX، نقطهٔ دوم را پیدا می‌کردیم). ولی، با کمال تاسف، جای هیچ کدام از این دو نقطه، برای ما معلوم نیست. به‌نظر می‌رسدکه مسأله، به این سادگی‌ها نیست.

آرزوی مطبوع بزرگتری می‌کنیم و فرض می‌کنیم، مسأله حل شده است. به‌زبان دیگر، فرض می‌کنیم، شکل ۱ـa، با همان شرط مسأله، رسم

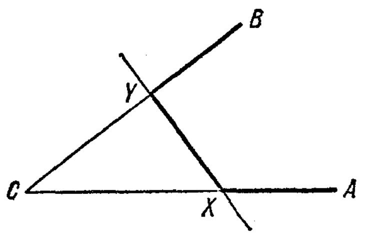
شده باشد، یعنی سه‌ضلع خط شکستهٔ $AXYB$ با هم برابر باشند. در واقع، فرض می‌کنیم، نتیجهٔ مسأله ـ که دور ازدسترس به نظر می‌رسد ـ به‌دست‌آمده باشد. به‌این ترتیب، فرض می‌کنیم، پاره‌خط XY، همان پاره‌خط مطلوب باشد. درحقیقت، فرض می‌کنیم، جواب مسأله را پیدا کرده‌ایم.

حالا دیگر شکل ۱ـa را جلوروی خود داریم. روی شکل، همهٔ عنصرهای هندسی، که با آن‌ها سروکار داریم، وجود دارند: چه فرض‌ها و چه مجهول. آن‌ها با هم وهمراه با شرط، یك‌جا جمع شده‌اند. حالا که شکل را روبه‌روی‌خود داریم، می‌توانیم دراین باره بیندیشیم که، براساس‌داده‌های مسأله، چه‌عنصرهایی‌را می‌توانیم‌بسازیم و ازچه عنصرهایی می‌توانیم، برای ساختن مجهول استفاده کنیم؟ می‌توانیم از داده‌ها استفاده کنیم و، به جلو، به‌سمت جواب حرکت کنیم‌ویا، ازمجهول آغاز کنیم و به‌عقب برگردیم ـ گشت و گذار درهردوجهت، بسیارمفید وثمربخش است.

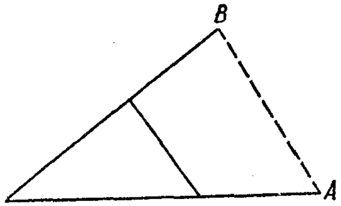
چه خوب بود، اگر می‌توانستید، دست‌کم، بعضی از عنصرهای این معمای دوجانبه را به‌هم پیوند دهید؟ چه خوب بود، اگر می‌توانستید بخشی از مسأله را حل کنید؟ روی شکل ۱ـa، مثلث XCY وجود دارد. آیا می‌توان این مثلث را رسم کرد؟ برای این منظور، به‌سه عنصر این مثلث نیاز داریم. ولی، باکمال تأسف، تنها یك‌عنصرآن دراختیار ما است (زاویهٔ رأس C).

شما می‌توانید، آن‌چه را دراختیاردارید، به‌کار ببرید، ولی نمی‌شود، از چیزی‌که در اختیار شما نیست، استفاده کرد. آیا می‌توانید چیزی مفید، از داده‌ها، بیرون بکشید؟ مثلاً، به سادگی، می‌توانید نقطه‌های A و B را به‌هم وصل‌کنید و امید داشته باشید‌که، به‌نحوی، برای حل مسأله، مفید واقع شود. آن را رسم می‌کنیم (شکل ۱ـb). ولی از پاره‌خط AB چگونه استفاده‌کنیم؟ به‌این پرسش، به‌سادگی نمی‌توان پاسخ داد. آیا بهتر نیست‌از آن دل بکنیم؟

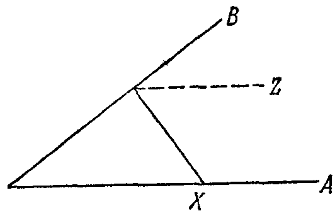
مضمون شکل ۱ـa خیلی‌کم است. تقریباً تردیدی‌نمی‌توان داشت‌که، برای رسم خط راست مجهول، به خط‌های تکمیلی دیگری نیاز داریم. ولی



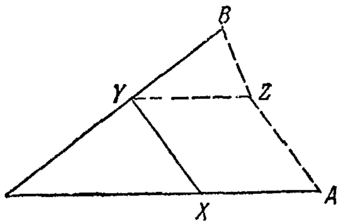
a. مجهول‌ها، داده‌ها وشرط



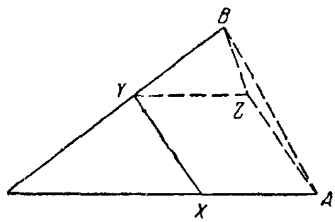
b. حرکت ازآغاز به‌پایان
(از داده‌ها به‌مجهول)



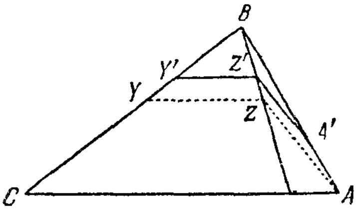
c. حرکت از پایان به‌آغاز
(از مجهول به‌داده‌ها)



d. ارتباط باآن‌چه از قبل
می‌دانیم



e. پیوند دو شکل به‌یکدیگر



f. کلید راه‌حل

شکل ۱

به کدام خطها؟

پاره خطهای AX، XY و YB با هم برابرند (این، فرض ماست ــ دربارهٔ آن بیندیشیم). ولی، وضع استقرار آن‌ها نسبت به‌هم، چقدر ناجور است؟ پاره‌خطهای برابر را می‌توان طوری قرارداد که با هم، شکل‌های جورتری بسازند. شاید بهترباشد، چندپاره‌خط برابر و، برای آغاز کار،یکی

از این گونه پاره‌خطها را، به‌شکل اضافه کنیم!

موفقیت یاالهام، می‌تواند محرك ما دررسم خطی باشد و، اگر به‌هدفی که موردنظر ماست فکرکنیم، چه‌بسا به‌اندازهٔ کافی هم، خوب انتخاب شده باشد. پاره‌خط YZ را موازی و مساوی پاره‌خط XA رسم می‌کنیم (شکل ۱-c) (از مجهول آغاز می‌کنیم- دربارهٔ آن می‌اندیشیم- و می‌کوشیم، در جهت عکس، به‌طرف معلوم حرکت‌کنیم).

پاره‌خط YZ را، به‌طورآزمایشی، رسم‌کردیم، ولی به‌نظر می‌رسدکه خیلی بد نیست و ما را به‌شکل هندسی آشنایی می‌رساند. Z را بـه A و B وصل می‌کنیم (شکل۱-d). لوزی $XAZY$ ومثلث متساوی‌الساقین BYZ به‌دست می‌آید. آیا حالا می‌توانید بخشی ازمسأله راحل کنید؟ آیامی‌توانید مثلث BYZ را بسازید؟ برای رسم مثلث متساوی‌الساقین، به‌دو جزءمثلث نیاز داریم؛ ولـی، باکمال تأسف، تنها یـك جزء آن را می‌شناسیم (زاویهٔ رأس Y، که برابر است با زاویهٔ مفروض C). با وجود این، اندکی‌موفقیت به‌دست‌آورده‌ایم. بااین‌که نمی‌توانیم مثلث BYZرا، به‌طورکامل، بسازیم، از شکل‌آن اطلاع داریم: ازاندازه‌های آن چیزی نمی‌دانیم، ولی‌می‌توانیم مثلثی متشابه BYZ بسازیم.

ظاهراً، به راه‌حل نزدیك می‌شویم، ولی هنوز به‌آن نرسیده‌ایم. مثل این‌که باید به‌آزمایش خود ادامه دهیم. دیـر یا زود، ممکن است، یکی از تلاش‌های خود را، که به‌شکل ۱-b مربوط می‌شود، به‌خاطرآوریم. اگرآن را به‌آزمایش بعدی خود مربوط‌کنیم، چه‌چیزی به‌دست می‌آید؟اگرشکل‌های ۱-b و ۱-d را، با هم درنظر بگیریم، به‌شکل ۱-e می‌رسیم که، روی‌آن، مثلث BZA نمایان می‌شود. آیا این مثلث را می‌توان ساخت؟ اگـر مثلث BZY را می‌شناختیم، رسم مثلث BZA ممکن بود، زیـرا در آن صورت، سه‌جزء مثلث را در دست داشتیم: دو ضلع ZB و $ZA=ZY$ و زاویهٔ B. ولی در اوضاع واحوال‌کنونی، مثلث BZA را نمی‌توان ساخت. ما تنهااز شکل آن اطلاع داریم. خوب، حالا می‌توانیم...

می‌توانیم چهارضلعی $BY'Z'A'$ (شکل ۱-f) را رسم‌کنیم‌که باچهار

ضلعی $BYZA$ (شکـل ۱ـe) متشابه است. و همین، درواقع، قسمت اصلی رسم است. این رسم، کلید حل مسأله است.

§۵. روش تشابه

ساختمانی که، اندیشهٔ آن را، روی زنجیرهٔ شکل‌های ۱ـa تا ۱ـf دنبال کردیم، کامل کنیم.

روی پـاره‌خط مفـروض BC (شکل ۱ـf را ببینید)، نقطهٔ دلخـواه Y' را انتخاب می‌کنیم (ولـی، نه خیلی دور از B)، $Y'Z'$ را موازی CA طوری رسم می‌کنیم که داشته باشیم:

$$Y'Z' = Y'B$$

سپس، روی پاره‌خط AB، نقطهٔ A' راطوری پیدا می‌کنیم که داشته باشیم:

$$A'Z' = Y'Z'$$

حال، ازنقطهٔ A، خطی موازی $A'Z'$ رسم می‌کنیم تا ادامهٔ پاره‌خط BZ' را قطع کند. این نقطهٔ برخورد، همان نقطهٔ Z است. ادامهٔ کار دشوار نیست.

دو چهار ضلعی $AZYB$ و $A'Z'Y'B$ نه‌تنها متشابه‌اند، بلکه ضمناً، به‌صورت مشابهی قرارگرفته‌اند (یعنی متجانس‌اند). نقطهٔ B، مرکزتشابه (یا مرکز تجانس) آن است. و ایـن، به‌معنای آن است‌که، اگـر، هردو نقطهٔ متناظر از این دوشکل متشابه را به‌هم وصل کنیم، خـط واصل بایـد از B بگذرد.

واین، همان جنبه‌ای است که می‌توان، ازآن، چیزی را برای حـل مسأله‌ها بیرون کشید: از دوشکل متشابه فوق، شکل $AZYB$، که درابتدا به‌ذهن ما آمد، درواقع، آخرین شکلی بودکه رسم شد.[۱]

مثالی که آوردیم، ما را به‌فکریك روش کلی می‌اندازد: اگرنمی‌توانید شکل موردنظر خود را رسم کنید، به‌دنبال رسم شکلی متشابه باآن بروید.

---

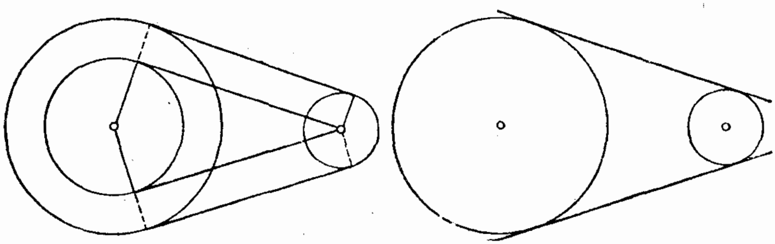
۱. «درواقع» کامل حل این مسأله، در این‌جا به‌پایان می‌رسد، ولی گـام اصلی و تعیین‌کننده، در حل آن، همان بودکه: «فرض‌کردیم، مسأله حل شده است».

درپایان این فصل، تمرین‌هایی آمده است که، اگر با دقت روی آن‌ها کار کنید، می‌توانید به‌سودمندی روش تشابه پی‌ببرید.

§۶. مثال‌ها

مثال‌های زیر، از بسیاری جهت‌ها، به‌هم شباهت ندارند؛ ولی همین تفاوت‌های آن‌ها می‌تواند، به‌روشنی، آن خصلت کلی را ـ که درپی کشف آن هستیم ـ به‌ما نشان دهد.

۱°. می‌خواهیم مماس مشترک دو دایرهٔ مفروض را رسم کنیم. دو دایره، که به‌صورت مشخصی نسبت به‌یکدیگر قرار گرفته‌اند، داده شده است (روی کاغذ، رسم شده‌اند). می‌خواهیم خط‌های راستی را رسم کنیم که بردو دایره مماس باشند. اگر دو دایرهٔ مفروض، متقاطع نباشند، تعداد مماس‌های مشترک آن‌ها، برابر است با چهار: دو مماس مشترک خارجی و دو مماس مشترک داخلی. توجه خود را روی مماس مشترک‌های خارجی متمرکز می‌کنیم (شکل ۲-a) که همیشه وجود دارند (به‌شرطی که، یکی از دایره‌ها، به‌طور کامل، در درون دیگری قرار نگرفته باشد).



a. مجهول، داده‌ها، شرط

b. کلید راه‌حل

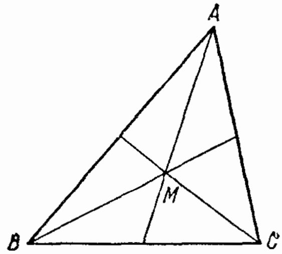
شکل ۲

اگر نمی‌توانید این مسأله را حل کنید، ببینید آیا مسألهٔ دیگری ـ که خویشاوند نزدیک آن باشد ـ نمی‌شناسید؟ این مسألهٔ خویشاوند وجود دارد (و فرض ما این است که، خواننده راه‌حل آن را می‌داند): از نقطهٔ مفروض،

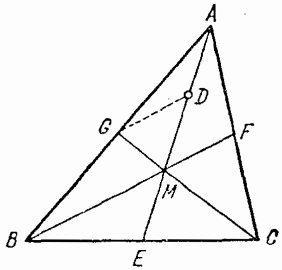
مماس‌هایی بردایرهٔ مفروض رسم‌کنید. این مسأله، در واقع، حالت خاصی از مسألهٔ ما است (می‌توان گفت که حالت مرزی یا حدی آن است). در این مسأله، یکی از دو دایره، چنان‌کوچك است که به‌نقطه‌ای تبدیل شده است. با تغییر دادن فرض‌های مسأله، می‌توانیم به‌این حالت حدی برسیم. برای این منظور، ازراه‌های مختلفی می‌توان وارد شد: یکی ازشعاع‌ها راکوچك کنیم و دیگری را بی‌تغییر بگذاریم؛ یا یکی از شعاع‌ها راکوچك ودیگری رابزرگ‌کنیم؛ یابالاخره، هردوشعاع‌راکوچك‌کنیم. به‌این ترتیب،می‌توانیم به‌این اندیشه برسیم‌که هردو شعاع را، با یك سرعت،کوچك‌کنیم، یعنی در یك فاصلهٔ زمانی مشخص، دوشعاع را به‌یك اندازه‌کوچك‌کنیم. این تغییررا پیش خود مجسم‌کنید، می‌توانید متوجه شویدکه، ضمن این تغییر، هریك از مماس‌های مشترك، ضمن جابه‌جا شدن، با خودش مـوازی باقی می‌ماند، و این تغییر ادامه دارد تا به شکل ۲-b برسیم. و راه‌حـل، از همین‌جا، پیدا می‌شود: دایره‌ای بکشیدکه بادایرهٔ بزرگ هم‌مرکزوشعاع آن برابرباتفاضل شعاع‌های دو دایره باشد. سپس، از مرکز دایـرهٔ کوچکتر، دو مماس برآن رسم‌کنید. استفاده از ایـن شکل، به‌معنای یافتن‌کلید راه‌حـل مسأله است. رسیدن از این شکل به‌مجهول مسأله،کار دشواری نیست (تنهاکافـی است که دومستطیل رسم شود).

۲°. می‌خواهیم مثلثی را، بامعلوم بودن سه‌میانهٔ آن، رسم‌کنیم. فرض کنید مسأله‌حل شده است. مثلث (مجهول) را رسم‌کنید و سه‌میانهٔ (معلوم) آن را بکشید (شکل ۳-a). به‌یاد بیاوریدکه میانه‌ها، درنقطهٔ یك‌سوم، در نقطهٔ M (گرانیگاه مثلث)، یکدیگررا قطع‌می‌کنند، جایی‌که هریك ازمیانه‌ها، به‌نسبت ۲:۱ تقسیم می‌شوند. برای این‌که این مطلب را بهترمجسم‌کنید، نقطهٔ D وسط پاره‌خط AM را علامت بگذارید: نقطه‌های D و M، میانهٔ AE را به‌سه قسمت برابر، تقسیم می‌کنند (شکل ۳-b).

به‌این ترتیب، مثلث مفروض، به‌شش مثلث‌کوچکتر، تقسیم‌می‌شود. آیا می‌توانید بخشی از مسأله را حـل کنید؟ برای رسم یکـی از مثلث‌های کوچك، به‌سه‌جزء نیاز داریم. ولی، تنها دوضلع آن را می‌شناسیم: یکی از



a. مجهول، داده‌ها، شرط



b. نقطه‌ای که، به‌احتمال زیاد، می‌تواند به‌ما کمك کند.

شکل ۳

آن‌ها، یك‌سوم یکی از میانه‌ها و دیگری دوسوم میانهٔ دیگر است. هنوز اطلاعی از جزء سوم نداریم. آیا می‌توان مثلث دیگری را جست وجو کرد که هرسه‌جزء آن معلوم باشد؟ روی شکل ۳ـb، نقطهٔ D را علامت گذاشته‌ایم که، به‌احتمال زیاد، می‌تواند مفید واقع شود. اگراین نقطه را، به‌نقطهٔ مجاور خود وصل کنیم، مثلث MDC به‌دست می‌آید که، هریك از ضلع‌های آن، برابر با یك‌سوم یکی از میانه‌ها است. این مثلث را، بامعلوم بودن سه‌ضلع آن، می‌توانیم بسازیم. واین،کلید حل مسأله است! دنبالهٔ کار ساده است.

۳°. هرمسألهٔ مربوط به‌مثلث مسطحهٔ معمولی را، می‌توان نظیر مسأله‌ای از مثلث‌کروی یا کنج سه‌وجهی دانست (کنج سه‌وجهی، محدود به‌سه صفحه است. اگرکره‌ای را درنظر بگیریم‌که مرکزآن، بررأس کنج سه‌وجهی منطبق باشد، در برخورد با یکدیگر، یك مثلث‌کروی به‌وجود می‌آورند). مسأله‌های هندسهٔ فضائی‌را، می‌توان به‌مسأله‌های مسطحهٔ‌نظیر آن‌ها، منجرکرد. این انتقال مسأله‌های فضائی به حوزهٔ شکل‌های مسطحه، درواقع، موضوع هندسهٔ ترسیمی را تشکیل می‌دهد: هندسهٔ ترسیمی، شاخهٔ بسیار جالبی از هندسه است که مهندسان و معماران، برای تکمیل دقیق طرح‌های خود، از ماشین‌ها، کشتی‌ها، ساختمان‌ها وغیرآن، به‌آن‌نیازمندند.

برای این‌که خواننده بتواند مسألهٔ زیررا حل کند، نیازی به‌هندسهٔ

ترسیمی ندارد، تنها کافی است آگاهی‌هایی از هندسهٔ فضائی داشته باشد و، ضمناً، بتواند تا حدی، شکل‌های فضائی را در ذهن خودمجسم کند. با در دست داشتن سه‌زاویهٔ مسطح از یك‌کنج سه‌وجهی، زاویه‌های دووجهی آن‌را بسازید[1].

زاویه‌های مسطح کنج سه وجهی را a، b و c (ضلع‌های مثلث کروی نظیر)، و α را زاویهٔ دووجهی مقابل به‌وجه با زاویهٔ مسطح a می‌گیریم (α، زاویه‌ای از مثلث کروی است). فرض می‌کنیم a، b و c معلوم‌باشند و بخواهیم α را بسازیم. (روشن است‌که رسم همهٔ زاویه‌های دو وجهی، یکسان است. ما تنها یکی ازاین زاویه‌ها، یعنی α را می‌سازیم.)

برای این‌که بتوانیم داده‌های مسأله را مجسم‌کنیم، زاویه‌های b، c و a را، روی صفحه می‌گسترانیم (شکل ۴ـa) وبرای تجسم مجهول،بهتر است شکل فضائی آن را، در ذهن خود، تصورکنیم (می‌توانیم شکل ۴ـa را، روی یك مقوا رسم و، سپس، آن را روی خطی که دوزاویهٔ a و b را ازهم جدا می‌کند، وهم روی خطی‌که دوزاویهٔ a و c را از هم جدامی‌کند، تاکنیم و کنج‌سه‌وجهی را بسازیم). روی شکل۴ـb، پرسپکتیوکنج‌سه‌وجهی داده شده است. نقطهٔ A را، به‌دلخواه، روی یال مقابل وجه a انتخاب و از این نقطه، دوعمود براین یال اخراج می‌کنیم (یکی در صفحهٔ وجه ما ودیگری درصفحهٔ وجه c). این دوعمود، همان زاویهٔ α را تشکیل می‌دهند که می‌خواهیم، آن را، بسازیم.

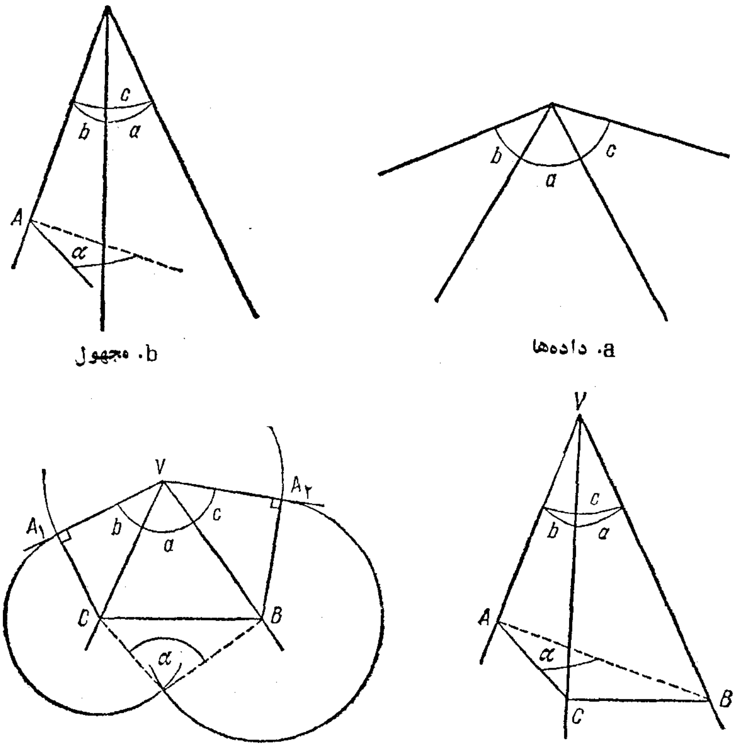
مجهول‌چیست؟ مجهول یك‌زاویه است، همان زاویهٔ α که روی‌شکل ۴ـb نشان داده‌ایم.

برای ساختن مجهولی از این نوع، چه‌اقدامی بایدکرد؟ ما معمولا زاویه را به‌کمك یك مثلث معین می‌کنیم، به‌نحوی‌که زاویهٔ مجهول ما، یکی از زاویه‌های این مثلث باشد.

آیا در شکل ما، مثلثی وجود دارد؟ هنوز نه! ولی آن را می‌توان

---

۱. منظور، ساختن زاویه‌های خطی‌متناظر با زاویه‌های دووجهی است‌که،معمولا، آن‌ها را، با همان حرف‌های زاویه‌های دووجهی نشان می‌دهند.



a. داده‌ها

b. مجهول

c. کلید احتمالی راه‌حل

d. حل

شکل ۴

ساخت.

درواقع، راه روشنی، برای پیداکردن مثلث مورد نیازما وجوددارد. صفحه‌ای‌که شامل زاویهٔ α است،کنج سه‌وجهی مـا را، دریك مثلث قطـع می‌کند (شکل ۴-c). این مثلث، ممکـن است همان شکل کمکی سودمندی باشد،که بتواندکلید حل مسأله را به‌ما بدهد.

ودرواقع‌هم، به‌راه‌حل،خیلی نزدیك شده‌ایم. به‌شکل‌مسطحه‌ای که‌در ۴-a داشتیم، برمی‌گردیم؛ جایی که داده‌های مسأله، یعنی زاویه‌هـای a، b و c، با اندازه‌های طبیعی خود، در دسترس قرارگرفته‌اند. (صفحهٔمقوایی

را، که به‌خاطر رسیدن از ۴-a به ۴-b تاکرده بودیم، دوباره بگسترانید). نقطهٔ A، روی شکل ۴-a، در دوجا پیدا می‌شود: A_1 و A_2 (ضمن گسترش کنج روی صفحه، وجه‌های b و cـ که درفضا به‌هم متصل بودند ـ ازهم‌جدا می‌شوند). این دونقطهٔ A_1 و A_2، از رأس V کنج، به‌یك فاصله‌اند. عمودی که از A_1 بر A_1V رسم کنیم، ضلع دیگر زاویهٔ b رادر C قطع می‌کند، به‌همین ترتیب، نقطهٔ B هم به‌دست می‌آید (شکل ۴-d). حالا دیگر، هرسه‌ضلع A_1B، BC و CA_1 از مثلث‌کمکی راـ که در شکل ۴-c داشتیم ـ دراختیار داریم و می‌توانیم‌آن را، بدون هیچ دشواری، رسم کنیم (روی شکل ۴-d، این مثلث، بـه‌صورت نقطه‌چین رسم شده است)؛ این مثلث، شامل زاویـهٔ مجهول α است.

این مسأله، با مسألهٔ بسیار ساده‌ای کـه در ۱§ داشتیم، خـویشاوند است وازهمان ساختمانی استفاده می‌کندکه در مثلث‌های معمولی مسطحـه به‌کار می‌رود. درواقع، باید گفت که، دراین‌جا، ازقانون‌مندی قیاس‌وشباهت استفاده شده است.

۷§. روش شکل‌های کمکی

نظردیگری به‌مسأله‌های ۶§ بیندازیم. این مسأله‌ها، از نظـرتنظیم، کاملاً با هم فرق داشتند؛ راه‌حل‌ها هم، هیچ شباهتی به‌هم نداشت، بـه‌جز این‌که، درهمهٔ آن‌ها، کلید راه‌حل، عبارت بود از یك شکل‌کمکی: درمسألهٔ اول، دایره و دومماسی‌که ازنقطهٔ بیرونی برآن رسم کـردیم و، در مسألهٔ دوم، مثلث‌کوچکی‌که ازمثلث اصلی جداکردیم و، بالاخره، بازهم یك‌مثلث در مسألهٔ سوم. درهرسه مـورد، با استفاده از فـرض‌های مسأله، توانستیم به‌سادگی، شکل‌کمکی را رسم‌کنیم و، سپس به‌کمك آن، شکل موردنظر را به‌دست آوریم. به‌این ترتیب، در دو مرحله، به‌هدف خـود رسیدیم: شکل کمکی، نقش‌کلید راه‌حل را به‌عهده داشت. پیداکردن ایـن شکل‌کمکی را، باید نقطهٔ اوج جریان حل دانست. در این‌جا، یك روش نهفته است: روش **شکل‌های‌کمکی**، که اغلب سودمند است وما آن را، به‌این ترتیب، شرح

می‌دهیم:

کوشش کنید، بخشی از شکل مجهول، یا شکل خویشاوند نزدیك به‌آن را پیداکنید، به‌شرطی‌که بتوانید آن را بسازید و، ضمناً، برای دست‌یابی به‌شکل مجهول، مفید باشد.

این روش، کاربرد زیادی دارد. درواقع، روش تشابه، که در§۵ ازآن صحبت کردیم، حالت خاصی ازاین روش کلی است. شکل متشابه با شکل مجهول را، باید به‌عنوان یکی از شکل‌های خویشاوند به‌حساب آورد، که می‌تواند، همچون یك شکل کمکی، مورد استفاده قرار گیرد.

کلیت بیش ازاندازهٔ روش شکل‌های کمکی، طبعاً موجب آن است که کمتر مشخص و کمترقابل لمس باشد: نمی‌توان، برای پیداکردن شکل کمکی، توصیهٔ مشخصی کرد. تجربه می‌تواندنکته‌هایی (و نه‌قانون‌هایی دقیق‌و کامل) را به‌ما بدهد. باید شکل‌هایی را جست و جو کنیم که، به‌سادگی، از شکل مجهول «جدا می‌شوند»: شکل‌های «ساده» (مثل مثلث)، «حالت‌های حدی» (با مسألهٔ ۱ § ۶، مقایسه کنید) و غیره. علاوه برآن، می‌توانیم، از تغییر داده‌ها ویا شباهت استفاده کنیم که آن‌ها را هم می‌توان، سرآخر، به‌عنوان شکل کمکی تفسیر کرد.

به‌این ترتیب، با سه روش مختلف، برای حل مسأله‌های ساختمانی هندسه، آشنا شدیم. روش شکل‌های کمکی، امکان انتخاب بیشتری را در اختیار مامی گذارد، ولی‌درآن، محل هدف گیری، کمتر ازروش تشابه‌مشخص است. روش دومکان هندسی، بین این سه‌روش، ازهمه ساده‌تر است و،قبل ازهمه، باید مورد آزمایش قرار گیرد، چراکه، دربسیاری موردها، بهتراست از ساده‌ترین‌ها آغاز کنیم. ولی خودتان را محدود نکنید، به‌اعتقاد نخستین خود نچسبید؛ فرض کنید، مسأله حل شده است. شکلی را رسم کنید که هم مجهول وهم داده‌ها، روی آن، وجود داشته باشد، هرعنصرشکل درست در جای‌خودش‌باشد،همهٔ عنصرهاچنان به‌هم‌مربوط باشندکه‌شرط مسأله‌خواسته است. این‌شکل را مطالعه کنید. ببینید می‌توانید، درآن، ترکیب آشنایی را پیداکنید. سعی کنید هرگونه اطلاعی که به‌کار شما می‌خورد و درآن وجود

دارد، بیرون بکشید (مسأله‌های خویشاوند، قضیه‌های مناسب)، به هر سوراخی سربزنید (ممکن است، مثلاً، قابل دسترس‌ترین و ساده‌ترین جاها، چیزی به‌شما بدهد). پایه واساس موفقیت در اختیار شماست. با مشاهدهٔ دقیق شکل، ممکن است اندیشه‌ای به‌ذهن شما راه یابد که، مثلاً رسم یك خط را به‌شما تلقین کند، خطی‌که برای حل مسأله مفید باشد و یا شما را گامی به‌جلو ببرد.

تمرین‌ها و یادداشت‌های تکمیلی

۱. مکان هندسی نقطه‌هایی را پیداکنیدکه از نقطهٔ مفروض، به‌فاصلهٔ مفروض باشند.

۲. مکان هندسی نقطه‌هایی را پیداکنیدکه از خط مفروض، به‌فاصلهٔ مفروض باشند.

۳. نقطهٔ متحرکی، همواره از دو نقطهٔ مفروض به‌یك فاصله است، مکان هندسی این نقطه چیست؟

۴. نقطهٔ متحرکی، همواره ازدوخط موازی مفروض، به‌یك فاصله است. مکان هندسی این نقطه را پیداکنید.

۵. نقطهٔ متحرکی، همواره از دوخط مفروض متقاطع، به‌یك فاصله است. مکان هندسی این نقطه را پیداکنید.

۶. از مثلثی، دو رأس A و B وزاویهٔ γ، روبه‌روی ضلع AB، داده شده است. با این شرطها، بی‌نهایت مثلث به‌دست می‌آید، به‌نحوی که رأس سوم مثلث (رأس زاویهٔ برابر γ) می‌تواند حرکت‌کند. مکان هندسی رأس سوم مثلث را پیداکنید.

۷. علامت‌ها. هرجا با مثلث سروکار داشته باشیم، بهتراست ازاین علامت‌ها استفاده‌کنیم:

A، B، C — رأس‌ها؛

a، b، c — ضلع‌ها؛

α، β، γ — زاویه‌ها؛

h_a، h_b، h_c — ارتفاع‌ها؛
m_a، m_b، m_c — میانه‌ها؛
d_α، d_β، d_γ — نیمسازها؛
R — شعاع دایرهٔ محیطی؛
r — شعاع دایرهٔ محاطی.

با این علامت‌ها، روشن است که، ضلع a روبه‌روی زاویهٔ α است و رأس A، انتهای مشترك سه‌پاره خط h_a، m_a و d_α است. حرف a، آن‌طور که معمول است، هم به‌معنای خود ضلع است (پاره‌خط راست و، گاهی، خط راست بی‌انتها) و هم به‌معنای طول آن؛ خواننده باید، درهرحالت مشخص، متوجه شود که با کدام‌یك از این دو معنا، سروکار دارد. درمورد b، c، h_a، ...، d_γ، R و r هم، همین معنای دوگانه وجود دارد. ما در این‌جا، این سنت عام را، با وجودی که خیلی هم خوب نیست، قبول می‌کنیم.

وقتی که می‌گوییم «مثلثی با a، b و c رسم کنید»، البته به‌این معنا است که «مثلثی رسم کنید که طول سه‌ضلع آن (پاره‌خطها) برابر a، b و c باشند». توجه کنید، اگر داده‌ها مناسب انتخاب نشده باشند، ممکن است جواب نداشته باشیم (یعنی، شکلی وجود نداشته باشد که باشرط مسأله سازگار باشد). مثلاً، مثلثی با ضلع‌های a، b و c، که در آن داشته باشیم $a > b + c$، وجود ندارد. همیشه، آزمایش خود را، از داده‌هایی آغاز کنید که، به ازای آن‌ها، شکل مطلوب، ظاهراً وجود دارد.

۸ . مثلثی با a، b و m_a رسم کنید.

۹ . با مفروض بودن a، h_a و m_a، مثلث را رسم کنید.

۱۰. مثلث را، با معلوم بودن a، h_a و α رسم کنید.

۱۱. با در دست داشتن a، m_a و α، مثلث را رسم کنید.

۱۲. سه‌خط راست (نامتناهی) داده شده است. دایره‌ای رسم کنید که بردوخط اول مماس باشد و مرکزش روی خط سوم قرار گیرد.

۱۳. دو خط راست (نامتناهی) متقاطع و پاره‌خط به‌طول r داده شده است. دایره‌ای به‌شعاع r رسم‌کنیدکه بر این دوخط مماس باشد.

۱۴. دایره‌ای به‌شعاع معلوم رسم‌کنید، به‌شرطی‌که یك نقطه‌ازمحیط آن و یك خط راست مماس برآن، داده شده باشد.

۱۵. ازکشتی، سه‌چراغ دریایی دیده می‌شود. جای این سه‌چراغ روی‌نقشه داده شده است. جای‌کشتی را روی نقشه پیداکنید، به‌شرطی‌که، زاویه‌های بین شعاع‌های نوری‌که از چراغ‌ها به‌طرف‌کشتی می‌آیند، معلوم باشد (این زاویه‌ها را، می‌توان اندازه‌گرفت).

۱۶. سه دایرهٔ مساوی، دردایره‌ای محاط‌کنید، به‌نحوی‌که هرکدام ازآن‌ها، بردو دایرهٔ دیگر و دایرهٔ مفروض، مماس باشند (این شکل را، اغلب، در معماری‌های سبك‌گوتیك، می‌توان دید که بردیوارها، به‌صورت رنگی، نقش بسته‌است. درآن‌جاها، گاهی هم به‌شکل‌هایی برمی‌خوریم که چهار یا شش دایره را، در دایرهٔ مفروض محاط‌کرده‌اند).

۱۷. در داخل مثلث، نقطه‌ای پیداکنیدکه، ازآن‌جا، هرسه ضلع مثلث به‌یك زاویه دیده شود.

۱۸. مثلث مفروض را، به‌سه بخش هم‌ارز تقسیم کنید. برای این منظور، باید نقطهٔ X را درداخل مثلث ABC طوری پیداکردکه مثلث‌های XAB، XBC و XCA هم‌ارز باشند [یکی از شرط‌ها را نگه دارید و بقیه را رها کنید. تنها فرض‌کنید، دومثلث XCA و XCB هم‌ارزند. دراین صورت، مکان‌هندسی نقطهٔ X چیست؟ پاسخ به‌این پرسش، راه‌حل مسأله را به شما می‌دهد. البته، ممکن است راه‌حل‌های دیگری هم پیداکنید].

۱۹. مثلث را، با در دست داشتن a، α و r، رسم‌کنید [قسمتی از فرض‌ها را نگه دارید و بقیه را کنار بگذارید. تنها a و α را نگه دارید. مکان هندسی مرکز دایرهٔ محاطی چیست؟]

۲۰. مثلثی را، با در دست داشتن α، r و R رسم‌کنید [آیا نمی‌توانید فرض‌های دیگری را نشان دهیدکه، برای پیداکردن مجهول، مناسب‌تر

باشند؟ آیا نمی‌توانید یکی از فرض‌ها را، با فرض مناسب دیگری، عوض کنید؟]

۲۱. مثلث را، با معلوم بودن a، h_a و r بسازید [آیا نمی‌توانید چیزمفیدی از فرض‌ها، بیرون بکشید؟]

۲۲. با در دست داشتن a، r و $a+b+c$، مثلث را رسم کنید.

۲۳. مثلث را، با مفروض بودن a، h_b و c رسم کنید.

۲۴. مثلثی رسم کنیدکه ازآن a، h_b و d_γ معلوم باشد.

۲۵. با در اختیار داشتن a، h_b و h_c، مثلث را رسم کنید.

۲۶. مثلثی بسازیدکه ازآن، h_a، h_b و β در دست باشد.

۲۷. اگر h_a، β و γ معلوم باشد، مثلث را بسازید.

۲۸. مثلث را، با دردست داشتن h_a، d_α و α بنا کنید.

۲۹. متوازی‌الاضلاعی رسم کنیدکه یك ضلع و دوقطرآن معلوم باشد.

۳۰. ذوزنقه‌ای رسم کنید که چهارضلع آن a، b، c و d در دست باشد. ضلع‌های a و c با هم موازی‌اند[1].

۳۱. مطلوب است رسم یك چهارضلعی، به‌شرطی که ضلع‌های a، b، c و d آن‌وزاویهٔ εـ که دوضلع مقابل a و cآن با هم می‌سازنـد معلوم‌باشد.

۳۲. مثلثی را با معلوم بودن a، $b+c$ و α رسم کنید.

۳۳. با دردست داشتن a، $b+c$ و $\beta-\gamma$، مثلث را بسازید.

۳۴. اگر $a+b+c$، h_b و α معلوم باشند، مثلث را رسم کنید [مسأله، نسبت به b و c (که مفروض نیستند) متقارن است، یعنی می‌توان‌جای آن‌ها را با هم عوض کرد].

۳۵. دو دایره داده شده است؛ به‌نحوی‌که یکی در بیرون دیگری‌قراردارد؛ مماس‌های داخلی‌آن‌ها را رسم کنید [دودایره، نسبت به‌هرمماس‌مشترك خارجی خود دریك نیم‌صفحه و نسبت به‌هرمماس مشترك داخلی خود،

---

۱. درصورت مسأله، ازحرف‌های a و c، دوبار نام برده شده است. درحالت‌اول، منظور طول ضلع‌های a و c و، درحالت دوم، خط‌های راستی است‌که امتداد ضلع‌های چهارضلعی را مشخص می‌کنند.

در دو نیم‌صفحهٔ مختلف قرار می‌گیرند].

۳۶. سه دایرهٔ مساوی داده شده است. دایره‌ای رسم کنید که براین سه‌دایره مماس باشد و، ضمناً، هرسه دایـرهٔ مفروض، درداخل دایـرهٔ مجهول قرار گیرند.

۳۷. مثلث را، با مفروض بودن α، β و d_γ رسم کنید.

۳۸. مربعی دریك مثلث قائم‌الزاویه محاط کنید. یکی از رأس‌های مربع باید بررأس‌زاویهٔ قائمهٔ‌مثلث،ورأس مقابل‌مربع، روی‌وترقرار گیرد؛ دوضلع ازمربع، به‌ترتیب، بردوضلع مجاوربه‌زاویهٔ قائمهٔ مثلث واقع‌می‌شوند.

۳۹. مربعی را درمثلث مفروض ABC محاط کنید، به‌نحوی که دو رأس‌مربع روی ضلع AB و دو رأس دیگر، به‌ترتیب، روی ضلع‌های AC و BC قرار گیرند.

۴۰. مربعی را دریك قطاع‌دایره محاط کنید. دو رأس مربع، روی‌کمان‌دایره و دو رأس دیگر، به‌ترتیب، روی دوشعاع مرزی قطاع قراردارند.

۴۱. دایره‌ای رسم کنید کـه دونقطه از محیط آن ویکی از خـط‌های راست مماس برآن، داده شده باشد.

۴۲. دایره‌ای رسم کنید که یکی از نقطه‌های محیط آن و دوخط راست‌مماس برآن، معلوم‌باشد.

۴۳. یك پنج‌ضلعی رسم کنید که بتوان دایره‌ای درآن محاط کردو زاویه‌های آن برابر α، β، γ، δ و ε باشند (کـه البته، در شرط

$$\alpha+\beta+\gamma+\delta+\varepsilon=۵۴۰^\circ$$

صدق می‌کنند) ومحیطی برابر l داشته باشد.

۴۴. مثلثی با مفروض بودن h_a، h_b و h_c بسازید.

۴۵. کمبود. ممکن است یك مسألهٔ ساختمانی هندسه، جواب نداشته باشد: شکلی که با شرطهـا و داده‌های مسأله بسازد، وجـود ندارد. مثلاً، مثلث با ضلع‌های مفروض a، b و c، اگر $c>a+b$، وجـود ندارد. روش‌درست‌حل‌مسأله‌این‌است‌که،درحالت‌وجودجواب،شکلی‌را‌که‌باشرط مسأله می‌سازد نشان دهیم و، درحالت‌نبودن‌جواب، ثابت‌کنیم‌که‌چنین

شکلی وجود ندارد.

ولی ممکن است این موقعیت پیش‌آید: خود مسأله دارای جواب است، ولی مسألهٔ کمکی جواب ندارد؛ شکل کمکی راکه بنابرطرح ما، باید برای به‌دست‌آوردن شکل‌مجهول مورد استفاده قرار گیرد، نمی‌توان ساخت. البته، این‌موقعیت، به‌معنای کمبودی درطرح حل‌مسأله است.

آیا روشی که برای حل مسألهٔ ۴۴ درنظر گرفته‌اید، به‌چنین‌اشکالی برخورد نمی‌کند؟ (مثلث با ضلع‌های ۶۵، ۱۵۶ و ۱۶۹، مثلث‌قائم‌الزاویه‌ای است که ضلع‌های آن، باعددهای ۵، ۱۲ و۱۳ متناسب‌است. ارتفاع‌های این مثلث، عبارتند از ۱۵۶، ۶۵ و ۶۰). اگرپاسخ شما مثبت است، روش خود را اصلاح کنید.

۴۶. مثلثی رسم کنیدکه ازآن، a، α و R معلوم باشد.

۴۷. به‌عقب برگردید و نگاهی به‌حل مسألهٔ ۴۶ بیندازید. ممکن است پرسش‌های آموزنده‌ای طرح کرده باشید؛ چند مسألهٔ خویشاوند را در نظرگرفته باشید:

a) چه مسأله‌ای به‌این مسأله شبیه است؟

b) چطور می‌توان این مسأله را تعمیم داد؟

c) مثلثی، با معلوم بودن a، β و R، بسازید.

d) مثلثی، با معلوم بودن a، r و R رسم کنید.

۴۸. سه نقطهٔ دیده‌بانی. سه نقطهٔ دیده‌بانی، با دقت، زمانی راکه صدای شلیك گلولهٔ توپ به‌آن‌ها رسیده است، یادداشت کرده‌اند. براساس این داده‌ها، جای X توپ جنگی را، روی نقشه پیدا کنید.

سرعت صوت را معلوم می‌گیریم. شباهت‌ها و تفاوت‌های این مسأله را، با مسألهٔ سه چراغ دریایی (تمرین ۱۵) روشن کنید.

۴۹. یادداشتی به‌بهانهٔ روش دومکان هندسی. آیا مکان‌های هندسی، که در تمرین‌های ۲، ۵ و ۶ از آن‌ها صحبت شده است، از دیدگاه روش دو مکان هندسی مفیدند؟ انتهای ۲§ را ببینید.

۵۰. روش سه مکان هندسی. بعضی ازمفهوم‌های هندسهٔ مسطحه، می‌توانند

شباهت‌هایی با هندسهٔ فضائی داشته باشند. مثلاً، در §۶ـ۳°، مثلث کروی و کنج سه‌وجهی را، باتوجه به‌شباهتی که بامثلث مسطحهٔ معمولی داشت، مورد بررسی قراردادیم. مثلث‌عادی‌را، شبیه هرم مثلث‌القاعده (چهاروجهی) هم می‌توان دانست. ازاین دیدگاه، مسألهٔ زیر، بامسألهٔ §۳ـ۱°، شباهت دارد:

کره‌ای را بر یك چهاروجهی محیط کنید.

این شباهت راروشن می‌کنیم. این مسأله، منجر به‌پیداکردن‌مرکز کرهٔ مفروض می‌شود. درمسأله‌ای‌که، به‌این ترتیب، به دست می‌آید:

مجهول عبارت است از نقطه‌ای‌که آن را X می‌نامیم؛

داده‌ها عبارتند از چهارنقطه (رأس‌های چهاروجهی مفروض)، که آن‌ها را A، B، C و D می‌نامیم؛

شرط عبارت است از برابری چهارفاصله

$$XA = XB = XC = XD$$

این شرط را، می‌توان به‌سه بخش تقسیم کرد:

اول: $XA = XB$

دوم: $XA = XC$

سوم: $XA = XD$

هر کدام ازاین بخش‌ها، متناظربا یك مکان هندسی هستند. اگرنقطهٔ X بخواهد دربخش‌اول شرط‌صدق‌کند، مکان هندسی نقطهٔ X، یك‌صفحه خواهد بود (که نقطهٔ X می‌تواند آزادانه روی آن حرکت کند)؛ این صفحه، برپاره‌خط AB عمود است و از نقطهٔ وسط‌آن می‌گذرد (صفحهٔ عمود منصف پاره‌خط AB). هریك ازدوبخش دیگر شرط هم، متناظر با چنین صفحه‌ای هستند. سرانجام، مرکز مجهول کره، به‌عنوان نقطهٔ برخورد سه‌صفحه به‌دست می‌آید.

فرض‌کنیم، وسیله‌هایی دراختیار ما باشدکه به‌کمك آن‌هابتوانیم، نقطهٔ برخورد سه سطح را ــ وقتی‌که این سطح‌ها، صفحه یاکره باشند ــ پیداکنیم (درواقع، این فرض را، به‌صورت مبهمی وازقبل، داشته‌ایم.

ضمناً، چنین نقطهٔ برخوردی را، می‌توان به‌کمك ابزارهای‌عادی خود، یعنی پرگار وخط‌کش، به‌دست‌آورد. تنها باید، به‌اندازهٔ‌کافی، باهندسهٔ ترسیمی آشنا باشیم). در این صورت، می‌توانیم **مسأله‌هـای مـربوط به‌ساختمان‌های فضائی** را تنظیم و حـل‌کنیم. مسأله‌ای‌کـه دراین‌جا آوردیم، نمونه‌ای از این‌گونه مسأله‌ها بود. حل این مسأله، می‌تواند از ایـن بابت سرمشق باشدکه، به‌کمـك شباهت، می‌توان روش کلـی مسأله‌های ساختمانی فضایی را نتیجه‌گرفت: **روش سه‌مکان هندسی.**

۵۱. درتمرین ۵۰ــ ۵ـ وشبیه آن، مثال §۳، ۱°ـ می‌توانستیم شرط را، به‌نحو دیگری تقسیم‌کنیم وراه دیگری برای ساختمان به دست آوریم (ولـو این‌که، راه بدتری باشد). ولی‌آیا ممکن‌است نتیجهٔ نهایی طوردیگری پیدا شود؟ چرا ممکن نیست؟

۵۲. دربارهٔ ساختمان‌های هندسی. مسأله‌های ساختمانی بسیاری درهندسه هستند که «وجود جواب» درمورد آن‌ها روشن است، ولـی نمی‌توان آن‌هارا، به‌کمك پرگار وخط‌کش، ساخت (این ساختمان‌هارا، می‌توان، به کمك ابزارهای دیگری ساخت). یکی از مشهورترین این مسأله‌ها، مسألهٔ **تثلیث زاویه** است: یك زاویهٔ دلخواه را نمی‌توان، به‌کمك‌پرگار و خط‌کش، به‌سه‌قسمت مساوی تقسیم‌کرد.

روش‌خوب‌حل مسأله‌های‌ساختمانی هندسه باید، **یامنجربه‌ساختمان شکل مجهـول** به‌کمك پرگار وخـط‌کش شود ویا، **ثابت شود که چنین ساختمانی ممکن نیست**. روش‌های ما (دومکان هندسی، تشابه شکل‌ها، شکل‌های‌کمکی)، به‌هیچ‌وجه بیهوده نیستند (ومن امیدوارم، خواننده به‌اندازهٔ‌کافی ازآن‌ها استفاده‌کند). ولی آن‌ها را نمی‌توان روش‌هـای کامل وعام دانست: اغلب ما را به‌ساختمان لازم می‌رسانند، ولی اگر این‌طور نباشد، در تاریکی‌هـا سرگردان می‌شویم ونمی‌توانیم تصمیم بگیریم‌که: آیا چنین ساختمانی، درواقع، وجود ندارد، یا این‌که‌مسأله قابل‌حل است، ولی نیروی ماکافی نیست؟

روش شناخته‌شده‌ای، برای ساختمان‌های هندسی وجود داردکـه،

به‌مراتب، کامل‌تر وعام‌تراست. («روش جبری»، ولی ما در این جا، به‌بحث تفصیلی دربارهٔ‌آن نمی‌پردازیم.) باوجود این، باید گفت، برای حل مسأله‌ای که باآن روبه‌رو هستیم، می‌توان، بدون این‌که ازقبل و یا بلافاصله، از بهترین روش اطلاع داشته باشیم، آزمایش خود را آغاز کنیم. به‌این‌ترتیب، روش‌هایی که مورد بحث قراردادیم، باوجود همهٔ کمبودهایی که دارند، اغلب می‌توانند به‌حل مسأله یاری‌برسانند.

۵۳. **مسأله‌های اضافی.** چند مسأله فکر کنیدکه با مسأله‌های این فصل‌شبیه، ولی‌باآن‌ها متفاوت باشندو، به‌خصوص، به‌آن‌هایی فکر کنیدکه‌برایتان قابل‌حل باشند.

۵۴. **مجموعه‌ها.** نمی‌توانیم‌مفهوم مجموعه را، به کمك مفهوم‌های دیگری که ساده‌تر ازخود مفهوم مجموعه باشند، تعریف کنیم، زیرا چنین مفهوم‌های ساده‌تری وجود ندارند. ولی درواقع، هرکسی با این‌مفهوم آشنا است، ولو این‌که برای این منظور، از واژهٔ «مجموعه» استفاده نکند. عبارت «مجموعهٔ عضوها»، درماهیت امر، چیزی جز«دسته‌ای‌از چیزها»، «گروهی از وسیله‌ها» و «مجموعی از آن‌چه مورد نیاز است» نیست، «دانش‌آموزانی که‌امتحان‌خود راعالی گذرانده‌اند»، یك‌مجموعه است، ولواین‌که، درلحظهٔ مفروض، نتوانیدنام‌آن‌هارا ببرید؛«نقطه‌هایی ازفضا، که از دونقطهٔ مفروض، به‌یك فاصله‌اند»، مجموعهٔ کاملا معینی از نقطه‌ها، یعنی یك صفحه را، تشکیل می‌دهند؛ «خط های راست واقع برصفحه‌ای که، ازنقطهٔ‌مفروضی واقع برهمان‌صفحه، به‌یك فاصله‌باشند»، مجموعهٔ جالبی را تشکیل می‌دهند: خطهای راست مماس بریك دایره. اگر a، b و c، سه‌چیز متفاوت باشند، مجموعه‌ای که عضوهای آن، همین سه‌چیز است، بازهم مجموعه‌ای کاملاً معین است.

دومجموعه یکسان یا برابرند، وقتی‌که یك چیز متعلق به‌یکی، متعلق به‌دیگری هم باشد. اگر هرعضومجموعهٔ A، ضمناً عضومجموعهٔ B هم باشد، گویند A جزئی از مجموعهٔ B است. همین حقیقت را، طور دیگری هم‌می‌توان بیان‌کرد: Bشامل A است، یا B، Aرا دربرمی‌گیرد،

یا A زیرمجموعه‌ای از مجموعهٔ B است وغیره.

گاهی لازم می‌آیدکه یـك مجموعهٔ تهی را درنظـر بگیریم، یعنی مجموعه‌ای که عضوی نداشته باشد. مثـلاً ، «مجموعهٔ دانش‌آموزانی که امتحان خود را عالی گذرانده‌اند»، ممکـن است مجموعه‌ای تهـی باشد واین، درحالتی پیش می‌آیدکه، مثلاً ، هیـچ دانش‌آموزی نمـرهٔ عالی نگرفته باشد، یا این‌که، معلم بیمار شده باشد و اصـلاً امتحانی انجام نگـرفته باشد. به‌همان اندازه کـه صفر، عـدد سودمندی است، مجموعهٔ تهی‌هم، مجموعه‌ای سودمند است. همان‌طورکه صفرازهرعدد مثبتی کوچکتراست، مجموعهٔ تهی‌هم، زیرمجموعهٔ هرمجموعهٔدلخواهی است.

پرعضوترین زیرمجموعه‌ای که، بخش مشترك چند مجموعه باشد، اشتراك آن‌ها نامیده می‌شود. به زبان دیگر، اشتراك مجموعه‌های A، B، C، . . . ، L، از عضوهایی، و تنها عضوهایی، تشکیل شده است که، درعین‌حال، متعلق به‌هریك از مجموعه‌های A، B، C، . . . ، L باشند.

مثلاً ،A و B را دوصفحه‌ای می گیریم که،هرکدام‌ازآن‌ها،به‌عنوان مجموعه‌ای ازنقطه‌ها، درنظرگرفته شده باشد؛ اگراین دوصفحه،برهم منطبق یا با هم موازی نباشند، حتماً یکدیگررا دریك خط راست قطع می کنند؛ اگر برهم منطبق نباشند، ولی با هـم موازی باشند، اشتراك آن‌ها یك مجموعهٔ تهی‌است؛ بالاخره، اگردوصفحه برهم منطبق‌باشند، اشتراك آن‌ها، با هریك از صفحه‌ها، متحد است. اگر A، B و C سه‌ـ صفحه‌ای باشندکه، به‌طور هم‌زمان، با یك خط راست موازی نباشند، اشتراك آن‌هـا مجموعه‌ای است کـه تنها از یـك نقطـه تشکیل شده است.

اصطلاح «مکان هندسی»، درواقع، همان چیزی را دنبال می کندکه اصطلاح «مجموعه». می‌توان گفت: مجموعه (به‌جای «مکان هندسی») نقطه‌هایی ازصفحه، که به‌فاصلهٔ معینی از نقطهٔ مفروضی باشند، عبارت

است ازیك دایره[1].

دراین مثال، مجموعه (یامکان هندسی) را، به‌کمك یك‌شرط‌تعریف کرده‌ایم‌که باید عضوهای مجموعه باآن سازگار باشند ویـا، می‌توان گفت، خاصیتی را معین‌کرده‌ایم‌که‌عضوهای مجموعه باید آن راداشته باشند: نقطه‌های واقع برمحیط دایره، با این شرط سازگارند ویا دارای این خاصیت‌اندکه، همـهٔ آن‌ها، دریك صفحه قـرارگرفته‌اند و از نقطهٔ مفروضی (نقطهٔ O) به‌یـك فاصله‌اند (که آن را، معمولاً، با حـرف r نشان می‌دهند).

مفهوم‌های «شرط» و«خاصیت»، پیوندی‌جدی با مفهوم«مجموعه» دارند. در بسیاری از مسأله‌های ریاضی می‌تـوان، به‌سادگی، شرط یا خاصیتی راکه مشخص‌کنندهٔ عضوهای مجموعه است، پیدا کـرد. حتی اگرتوضیح بیشتری نداشته‌باشیم، می‌توانیم‌بگوییم: عضوهای‌مجموعهٔ S دارای این‌خاصیت‌اندکه متعلق به Sاند، یا با این شرط سازگارندکه جزء S هستند.

بررسی روش سه‌مکان هندسی (بعد از روش دومکان هندسی؛ تمرین ۵۰ را ببینید)، می‌تواند ما را به‌فکر امـکان تعمیم بعدی آن بیندازد. مطالعهٔ مجموعه‌ها ومفهوم اشتراك‌آن‌ها، به‌این وسوسه نیرومی‌بخشد. دریکی از فصل‌های بعدی، به‌ایـن مطلب برخواهیم گشت و، فعـلا، از خواننده می‌خواهیم، این فکررا درذهن خود پخته‌ترکند.

کم‌عضوترین مجموعه‌ای که، هریك از مجموعه‌های مفروض مـا، زیر مجموعه‌ای از آن باشند، اجتماع مجموعه‌های مفـروض، نامیده

۱. اصطلاح «مکان هندسی» را، ارسطو و در ارتباط با یك اشتباه (که ناشی از دیدگاه‌های متافیزیکی او بود)، وارد هندسه‌کرد: ارسطو فرض کردکـه هر «تعداد» نقطه، طولی برابر «صفر» دارند و نمی‌توانند خط راست را (کـه طولی برابر بی‌نهایت دارد) تشکیل دهند و، بنابراین، خـط راست را تنها می‌توان به‌عنوان «مکانی» در نظر گرفت کـه نقطه‌ها روی آن قرار دارند و نه به‌عنوان مجموعهٔ آن‌ها. اقلیدس،این اصطلاح را از ارسطو اقتباس کـرد و، ازآن به‌بعد، در نوشته‌های ریاضی باقی ماند.

می‌شود. به‌زبان دیگر، اجتماع مجموعه‌های A، B، C، ...، L، شامل همهٔ عضوهای مجموعهٔ A، همهٔ عضوهای مجموعهٔ B، ... و همهٔ عضوهای مجموعهٔ L است، ضمناً، هرعضو مجموعهٔ اجتماع باید، دست‌کم، عضویکی از مجموعه‌های A، B، C، ...، L باشد (البته می‌تواند، درعین‌حال، عضو چندتا از این مجموعه‌ها باشد).

مفهوم‌های اجتماع و اشتراك مجموعه‌ها، به‌طور جدی به‌هم مربوطاند و نمی‌توان، بدون به‌یادآوردن یکی، دربارهٔ دیگری بحث کرد (این دو مفهوم، در ذهن ما، درواقع مکمل یکدیگرند). درعمل، بیشتر با اشتراك مجموعه‌ها برخورد می‌کنیم تا اجتماع آن‌ها. خواننده به‌راحتی می‌تواند ازکتاب‌های دیگری که، کم‌وبیش، با برنامهٔ دبیرستانی تطبیق دارند، با نظریهٔ مجموعه‌ها آشنا شود.[1]

---

۱. به‌عنوان نمونه می‌توانید به‌کتاب‌های «ورودی به نظریهٔ مجموعه‌ها» تألیف ژ. بروئر [انتشارات پویش]، «داستان مجموعه‌ها» تألیف ن. یا. ونیلکین [انتشارات توکا] و «نظریهٔ مجموعه‌ها» تألیف سرپینسکی [انتشارات خوارزمی] (هرسه کتاب با ترجمهٔ پرویز شهریاری) مراجعه کنید.

فصل دوم

روش دکارت

۱§. دکارت و اندیشهٔ او دربارهٔ روش عمومی

رنه دکارت (۱۶۵۰-۱۵۹۶)، یکی از بزرگترین عقل‌های انسانی بود. خیلی‌ها، اورا پدر فلسفهٔ معاصر می‌دانند. کارهای دکارت، چهرهٔ ریاضیات را دگرگون کرد؛ به‌جزاین، نام او جای پرافتخاری در تاریخ فیزیك دارد. ما دراین‌جا، بیش‌ازهمه، به‌یکی ازنوشته‌های او، یعنی«قانون‌های راه بردن عقل» توجه داریم[1].

دکارت، در«قانون‌های» خود، به‌این سمت‌گرایش داردکه روشی‌کلی وعمومی، برای حل مسأله‌ها، پیداکند. طرح مقدماتی دکارت،که انتظار داشت بتواند برای هرگونه مسأله‌ای به‌کارآید، به‌تقریب، چنین است:

اول: هرمسأله‌ای، از هرگونه‌ای‌که باشد، به‌یك مسألهٔ ریاضی منجر می‌شود؛

دوم: هرمسألهٔ ریاضی، از هرگونه‌ای که باشد، منجر به‌یك مسألهٔ جبری می‌شود؛

---

۱. محمدعلی فروغی، درکتاب «سیرحکمت در اروپا»، این‌کتاب را «اندرروش به‌کاربردن عقل» نامیده است.

سوم: هرمسألهٔ جبری، منجر به‌یك معادله می‌شود.

هرقدر دانش و آگاهی شما بیشتر باشد، کمبود بیشتری دراین برنامه خواهید دید. با گذشت زمان، خود دکارت هم باید پذیرفته باشد که، موردهایی وجود دارد که، برای آن‌ها، طرح او سودمند نیست. به‌هرحال، او «قانون‌های» خود را ناتمام گذاشت و، بعدها، دراثرمعروف خود به‌نام «گفتار دربارهٔ روش»، تنها تکه‌هایی از نوشتهٔ قبلی خود را واردکرد.

درآرزویی که مبنای طرح دکارت راتشکیل می‌دهد، می‌توان عنصری خام، ولی درست، را پیداکرد. با وجود این، رسیدن به‌این آرزو، بی‌اندازه دشوار است: دراین راه، مانع‌ها ودشواری‌های بی‌اندازه‌زیادی وجوددارد، خیلی بیش ازآن‌که، درشور وشوق نخستین دکارت، به‌نظر می‌آمد. طرح دکارت، به‌شکست انجامید، ولی این، طرحی عظیم بود و، با این‌که عملی نبود، خیلی بیشتر از هزاران طرح کوچك دیگر، ومنجمله طرح‌هایی که‌قابل اجرا هم بودند، بردانش اثر گذاشت.

اگرچه طرح دکارت نتوانست، برای همهٔ موردها، بدون استثنابه‌کار آید، ولی برای مجموعهٔ بزرگی ازآن‌ها مفید واقع شد، مجموعه‌ای که حالت‌های گوناگون مهمی را دربرمی‌گرفت. وقتی‌که دانش‌آموز دبیرستانی به‌حل مسأله‌ای به‌کمك دستگاه معادله‌ها مشغول است، به‌طرح دکارت نیاز دارد و، به‌طورجدی، ازاندیشه‌هایی که‌دراین‌طرح‌وجود دارد، استفاده‌می‌کند. به‌همین مناسبت، مراجعهٔ به‌درس‌های دبیرستانی، می‌تواند بسیار سودمند باشد.

۲§. یك مسألهٔ کوچك

این معمایی است که بین بچه‌های با هوش زمان ما رواج دارد و، احتمالا، درطول چند سدهٔ گذشته هم، وسیله‌ای برای هوش‌آزمایی بچه‌ها بوده است:

دهقانی چندمرغ وچند خرگوش خانگی دارد. این مرغ‌ها وخرگوش‌ها، روی هم، ۵۰ سر و ۱۴۰ پا دارند. این دهقان چند مرغ وچند خرگوش دارد؟

اندکی دربارهٔ حل این مسأله، صحبت می‌کنیم.

۱°. انتخاب راه‌حل. روی هم ۵۰ حیوان داریم. همهٔ آن‌ها، نمی‌توانند مرغ باشند، زیرادراین صورت، تعداد پاهای آن‌ها برابر ۱۰۰ می‌شد. به‌همین ترتیب، همهٔ آن‌ها خرگوش هم نمی‌توانند باشند، زیرا تعداد پاها برابر ۲۰۰ نیست. اگر نصف آن‌ها مرغ و بقیه خرگوش باشند، آن وقت... همهٔ این حالت‌ها را امتحان می‌کنیم:

تعداد مرغ‌ها	تعداد خرگوش‌ها	تعداد پاها
۵۰	۰	۱۰۰
۰	۵۰	۲۰۰
۲۵	۲۵	۱۵۰

اگر تعداد مرغ‌ها راکم کنیم، تعداد خرگوش‌ها و، در نتیجه، تعداد پاها زیادترمی‌شود. برعکس، اگرتعداد مرغ‌ها را بیشتربگیریم، آن‌وقت... بله باید تعداد مرغ‌ها را بیشتر گرفت. ۳۰ مرغ را امتحان می‌کنیم:

تعداد مرغ‌ها	تعداد خرگوش‌ها	تعداد پاها
۳۰	۲۰	۱۴۰

به‌عدد موردنظر رسیدیم. مسأله حل شد.

بله، جواب را پیداکردیم، ولی عددهای ۵۰ و ۱۴۰، هم کوچك بودند وهم‌خوب انتخاب شده‌بودند. ولی اگرهمین مسأله، با عددهای بزرگ داده شده بود ویا تعداد هرجانور، با عددهای خوبی انتخاب نشده بود، به‌آزمایش‌های خیلی بیشتری، برای رسیدن به‌جواب، نیاز داشتیم.

۲°. اندیشه‌ای درخشان. البته، مسأله را می‌توان با «آزمایش» کمتر و «استدلال قیاسی» بیشتر حل کرد. منظورم این است که کمترحدس بزنیم، کمترامتحان کنیم وبیشتر، از استدلال استفاده کنیم.

واین، یك راه‌حل دیگر.

دهقان، جانوران خود را مجبور می‌کند، در وضع غریبی قراربگیرند: هرمرغ روی یك پا ایستاده است وهرخرگوش روی دوپای عقبی خود. با این تصور غریب، درست نصف همهٔ پاها، یعنی ۷۰ عدد، شرکت خواهند

داشت. عدد ۷۰ را می‌توان به‌عنوان تعداد سرها درنظر گرفت، به‌شرطی که هرمرغ را یك‌بار وهرخرگوش را دوبار به‌حساب بیاوریم. بنابراین، اگر از عدد۷۰، تعدادکل مرغ‌هاوخرگوش‌ها، یعنی ۵۰راکم‌کنیم، تعدادخرگوش‌ها به‌دست می‌آید، یعنی تعداد مجهول خرگوش‌ها، برابر است با

$$۷۰ - ۵۰ = ۲۰$$

والبته، ۳۰ مرغ.

اگرعددهای انتخابی این مسأله (۵۰ و ۱۴۰) را عوض‌کنیم، بازهم می‌توان به‌سادگی وبا همین روش، مسأله را حل کرد. خود راه‌حل (که می‌توان آن را، جدی‌ترهم شرح داد) خیلی جالب است: برای پیداکردن این راه‌حل، علاوه برفروغی از اندیشهٔ روشن، باید به موقعیت مسأله هم احاطه داشت. من به‌دختر یا پسرچهارده ساله‌ای‌که خودش این راه‌حل را پیداکند، درود می‌فرستم. ولی، اندیشه‌های درخشان، به‌فراوانی پدیدار نمی‌شوند؛ برای این‌که‌چنین اندیشه‌ای به‌وجودآید، شانس‌زیادی لازم‌است.

۳°. به کمك جبر. این مسأله را می‌توان، بدون توسل به‌تصادف و بدون به‌حساب آوردن شانس، به‌طریق منظم‌تری حل‌کرد، به‌شرطی‌که مختصری با جبرآشنا باشیم.

جبر،عبارت است اززبانی‌که، بدون استفاده ازواژه‌ها، تنها ازنشانه‌ها ونمادهای ریاضی استفاده می‌کند. اگربا این نشانه‌ها آشنایی داشته باشیم، می‌توانیم‌جمله‌ها وگفتارهای زبان روزانهٔ‌خود را، به‌آن ترجمه‌کنیم. مثلا، سعی می‌کنیم، مسألهٔ خود را به زبان نشانه‌های ریاضی ترجمه کنیم. برای این منظور، باید از طرح دکارت استفاده کنیم: «تبدیل هر مسأله‌ای، به‌یك مسألهٔ جبری»، درحالت مورد بحث ما، این ترجمه دشوار نیست.

تنظیم مسأله

به‌زبان عادی	به‌زبان جبری
دهقانی، چند مرغ	x
و چند خر گوش خانگی دارد.	y
این مرغ‌ها وخرگوش‌ها، روی هم، ۵۰ سر	$x + y = ۵۰$
و۱۴۰ پا دارند	$۲x + ۴y = ۱۴۰$

به‌این‌ترتیب، فرض‌های ما، منجربه‌دستگاهی ازدومعادله بادومجهول x و y می‌شود. برای حل این دستگاه، کافی است با مقدمه‌های جبر آشنا باشیم. دستگاه را به‌این صورت می‌نویسیم:

$$\begin{cases} x+۲y=۷۰ \\ x+\ \ y=۵۰ \end{cases}$$

معادلهٔ دوم را از معادلهٔ اول کم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$y=۲۰$$

که با استفاده ازمقدار y، ازمعادلهٔ اول به‌دست می‌آید:

$$x=۳۰$$

این روش‌حل را، چه برای عددهای بزرگ‌وچه برای عددهای کوچک می‌توان درمورد مجموعهٔ عظیمی‌ازمسأله‌هابه‌کاربردو، برای این راه‌حل، به‌هیچ‌گونه اندیشهٔ نادرو درخشانی نیاز نیست و تنها باید با مقدمه‌های زبان جبری آشنابود.

۴°. تعمیم. چندبار دربارهٔ عددهایی که درصورت مسأله وارد شده بود، صحبت کردیم (به‌خصوص، دربارهٔ جانشین کردن عددهای بزرگ) و این بحث، به‌جای خود مفید بود. ولی، آموزنده‌تراین خواهد بود که، به‌جای عددها، از حرف‌ها استفاده کنیم.

درمسألهٔ خود، به‌جای ۵۰، از حرف h و به‌جای ۱۴۰، از حرف f استفاده می‌کنیم[1]. به‌زبان دیگر، فرض می‌کنیم، دهقان دارای h سر و f پا جانور باشد. با این تغییر، مسأله شکل جدیدی پیدا می‌کندوماآن را، به‌زبان جبری، ترجمه می‌کنیم

دهقانی چند مرغ	x
و چند خرگوش خانگی دارد.	y
همهٔ این جانوران دارای h سر	$x+y=h$
و f پا می‌باشند.	$۲x+۴y=f$

دستگاه دومعادلهٔ دومجهولی را، که به‌دست‌آورده‌ایم، می‌توان چنین نوشت:

---

۱. h، حرف اول واژهٔ انگلیسی head (سر) و f، حرف اول واژهٔ انگلیسی foot (پا) است.

$$\begin{cases} x+۲y=\frac{f}{۲} \\ x+\ \ y=h \end{cases}$$

اگر معادلهٔ دوم را، ازمعادلهٔ اول کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$y=\frac{f}{۲}-h$$

این رابطه را، به‌زبان معمولی، ترجمه می‌کنیم: تعداد خرگوش‌ها، برابر است با نصف‌تعداد پاها، منهای‌تعداد سرها؛ و این، همان نتیجه‌ای است که، با احساس درونی خود، در ۲° به‌دست آوردیم.

ولی دراین‌جا، برای رسیدن به‌جواب، نه به‌ورزیدگی تصور نیاز داشتیم و نه‌به‌شانس؛ ازهمان گام سادهٔ نخست، که حرف را به‌جای عددقرار دادیم، به‌طورمستقیم وبدون این‌که تغییری‌درجریان راه‌حل بدهیم، به‌نتیجه رسیدیم. همین گام ساده، حرکتی جدی، به‌سمت تعمیم است.

۵°. مقایسه. مقایسهٔ راه‌حل‌های مختلف یك مسأله، همیشه آموزنده است. اگربه‌عقب برگردیم وهرچهارراه‌حل را بررسی کنیم، متوجه‌می‌شویم که‌هرکدام ازآن‌ها،وحتی‌نخستین راه‌حل،ارزشی دارد وچیزی‌به‌مامی‌آموزد.

نخستین روشی که استفاده‌کردیم و، ضمن آن، عددها را «انتخاب می‌کردیم» و یا «کنار می‌زدیم»، معمولا، به‌روش آزمایش و خطا مشهور است. درواقع، این روش شامل یك رشته آزمایش است که، درهرکدام از آن‌ها، کوشش می‌شود تا خطای آزمایش قبلی تصحیح شود. به‌این ترتیب، خطا معمولاکمتر می‌شود و با ادامهٔ آزمایش، مرتباً به‌نتیجهٔ موردنظر، نزدیك ونزدیك‌تر می‌شویم. اگربه‌جنبهٔ اخیراین روش توجه‌کنیم،می‌توانیم آن را با عنوانی بهتراز «روش آزمایش و خطا» نام ببریم؛ مثلا، می‌توان دربارهٔ «آزمایش‌های‌متوالی»،«تصحیح‌های‌متوالی» ویا«تقریب‌های‌متوالی» صحبت‌کرد. اصطلاح آخری، ازبسیاری جهت‌ها، مناسب‌تر است. اصطلاح روش تقریب‌های متوالی، درموردهای گوناگونی ازرشته‌های‌به‌کلی‌متفاوت دانش ودرهمهٔ سطح‌ها،کاربرد دارد. شما، ازهمین روش تقریب‌های‌متوالی، برای پیداکردن واژهٔ موردنظرخود درکتاب لغت‌استفاده می‌کنید: صفحه‌های

کتاب لغت را، برحسب آن‌که واژهٔ جلوچشم‌شما درکتاب لغت، ازنظرردیف حرف‌های الفبا، قبل و یا بعد از واژهٔ موردنظرشما باشد، به‌جلو یا به‌عقب ورق می‌زنید. درریاضیات هم، هروقت به‌مسأله‌ای برخوردکنندکه، حل آن، ازنظرعملی مهم باشد وراه‌حل دیگری هم برای آن پیدا نشود، به‌این‌روش متوسل می‌شوند. ازاین روش، دردانش، به‌مفهوم‌کلی آن استفاده می‌شود: نظریه‌های‌علمی را، که یکی‌جانشین دیگری می‌شود و هرکدام ازآن‌هامی‌تواند پدیده‌ای را بهتراز نظریهٔ پیشین‌خود توضیح دهد، می‌توان به‌عنوان‌تقریب‌های متوالی، به‌سمت واقعیت، درنظرگرفت.

بنابراین، معلم نباید دانش‌آموزان خود را، ازبه‌کارگرفتن روش «آزمایش وخطا» بازدارد، بلکه برعکس، باید آن‌ها را، به‌استفادهٔ عقلانی‌از این روش مهم تشویق‌کند. ولی درضمن، باید دانش‌آموزان خود را، به‌این مطلب‌قانع‌کنندکه درمسأله‌های ساده‌ای- همچون‌مسألهٔ مرغ‌هاوخرگوش‌ها- وهم بسیاری از مسأله‌های (مهم) دیگر، استفادهٔ مستقیم ازجبر، به‌مراتب ثمربخش‌تر از روش تقریب‌های متوالی است.

۳§. تشکیل معادله

دیدیم (۲§، ۳°)که چگونه می‌توان مسأله‌ای را،که به‌زبان عادی داده شده است، با نشانه‌های ریاضی وبه‌زبان جبری ترجمه کرد. درمثال قبلی، این ترجمه روشن بود، ولی موردهایی وجود داردکه، برای تبدیل شرط‌های مسأله به‌دستگاه معادله‌ها، به‌تجربه‌ای بیشتر؛ یا نیروی خلاقه‌ای بیشتر ویا صرف وقت بیشتری نیاز دارد.

منظور ازاین صرف وقت و یا تحمل زحمت چیست؟ دکارت تلاش می‌کند دربخش دوم «قانون‌های»خود، به‌این پرسش پاسخ‌دهدکه، متأسفانه، ناتمام مانده است. می‌خواهم نکته‌هایی ازنوشتهٔ دکارت راکه به‌مرحلهٔ‌فعلی بحث ما مربوط می‌شود (با ترجمه به زبان امروزی) بیرون بکشم. ضمناً، ناچارم دربارهٔ بعضی‌ازچیزهایی‌که دکارت مورد بحث قرارداده است،سکوت کنم و، درعوض، روی خیلی ازچیزهایی‌که دکارت به‌روشنی ازآن‌ها یاد

نکرده است، تکیه کنم؛ بـا همهٔ این‌ها، امیدوارم کـه از اندیشهٔ او منحرف نشوم.

ترجیح می‌دهیم از شیوهٔ دکارتی طـرح مطلب پیروی کنم. هربحـث خود را، با «توصیه‌ای» (که درواقع، خلاصهٔ مطلب است) آغاز می کنم‌و، سپس، به‌کمك تفسیرهای تکمیلی، آن را روشن‌تر می‌سازم.

۱°. مسأله را به‌خوبی وارسی ودرك کنید؛ قبل ازهمه، آن را به‌پیدا کردن چندکمیت مجهول منجر کنید (قانون‌های XVI-XIII).

عاقلانه نیست وقت خود را روی مسأله‌ای تلف‌کنیدکه هنوز مفهوم آن را درست نفهمیده‌اید. بنابراین، نخستین و روشن‌ترین وظیفهٔ شما ایـن است که؛ مسأله را بفهمید و به‌مفهوم ومعنای آن پی‌ببرید.

مسأله را، درکل خود، وارسی‌کنید و توجه خود را، روی بخش‌های اصلی آن، متمرکزکنید. باید به‌صورت کاملا روشنی تشخیص دهید:

چه‌چیزی را باید پیداکنید (چه مجهولی یا چه مجهول‌هایی)؛

چه‌چیزی داده شده یا معلوم است (فرض‌هاکدام‌اند)؛

چه‌رابطه‌ای بین آن‌ها وجود دارد (شرط مسأله چیست)؟

(درمسألهٔ ۲§، ۴°، مجهول‌های x و y وفرض‌های h و f، به‌ترتیب، تعداد مرغ‌ها وتعداد خرگوش‌ها، تعداد سرها وتعداد پاها است. شرط، ابتدا شفاهی و، سپس، با معادله بیان می‌شود). ما دراین‌جا، باپیروی ازدکارت، خود را به‌گروهی ازمسأله‌هامحدود می‌کنیم‌که، درآن‌ها، مجهول‌هابه‌وسیلهٔ کمیت‌ها بیان می‌شوند (یعنی به‌وسیلهٔ عددهایی‌که، البته، اجباری درصحیح بودن آن‌ها نیست). مسأله‌های از نوع دیگرو، مثلا، مسأله‌های هندسی یا فیزیکی رامی‌توان، غالباً، به‌همین مسأله‌های‌کمیتی تبدیل‌کرد. مابعداً به‌این مطلب خواهیم پرداخت (مثال‌های ۵§ و ۶§ را ببینید).

۲°. طبیعی‌ترین راه را، برای بررسی مسأله، انتخاب‌کنید. فرض‌کنید مسأله حل شده است و سعی کنید همهٔ رابطه‌هایی را که، بنابر شرط، بـاید بین مجهول و داده‌ها وجود داشته باشد، به‌طور روشن پیش خـود تصور کنید (قانون XVII).

فرض می‌کنیم، کمیت‌های مجهول، مقدارهایی دارندکه درشرط مسأله به‌طور کامل صدق می‌کنند؛ درواقع، براین‌فرض تکیه می‌کنیم که «مسأله‌حل شده است» (§۴، فصل اول). دراین رابطه، کمیت‌های مجهول ومعلوم را، به‌مفهـومی، «متساوی‌الحقـوق» به‌حساب می‌آوریـم و، به‌طـور روشن، رابطه‌هایی راکه طبـق شرط مسأله، بین این کمیت‌ها وجـود دارد، درنظـر می‌گیریم. این رابطه‌ها راباید درهمان‌حال وهوایی مورد مطالعه قراردهیم، که مسأله‌های ساختمانی‌هندسه راحل کردیم (فصل‌اول، پایان §۷ راببینید). هدف این است که اشاره‌هایی، برای مرحلهٔ بعدی، پیداکنیم.

۳°. بخشی از شرط را جداکنید، به‌نحوی کـه بتوانید، به‌کمك آن، يك‌كميت را به‌دو طريق مختلف بيان‌كنيد و، از اين راه، معادله‌ای به‌دست آوریدکه مجهول‌ها را به‌هم مربوط‌کرده باشد. سرآخر، شرط را باید، به‌تعداد مجهول‌های خود، تقسیم‌کنید تا، از این راه، تعداد معادله‌هایی‌کـه به‌دست می‌آورید، با تعداد مجهول‌ها برابر باشد (قانون XIX).

آن‌چه دراین‌جا آوردیم، ترجمهٔ آزاد وهمراه با تفسیر، ازبیان‌دکارت است کـه در قانـون XIX خـودآورده اسـت. در رسالـهٔ خطـی دکارت، جاافتادگی‌های زیادی، بعد ازاین قانون وجود دارد واز توضیح‌هایی که‌باید به‌دنبال این‌بیان بیاید، خبری نیست (وچه‌بساکه، هرگز نوشته نشده‌باشد). به‌همین مناسبت، ناچاریم، آن را، با تفسیرهای خود دنبال‌کنیم.

هدف کاملا روشن است: باید دستگاهی از nمعادله با nمجهول به‌دست آوریم. معلوم است‌که، بامحاسبه این مجهول‌ها، باید جواب مسألهٔ‌مفروض را پیداکنیم. بنابراین، دستگاه معادله‌ها، باید هم‌ارز شرط مسأله باشد. اگر همهٔ دستگاه، درمجموع، معرف تمامی شرط است، بنابراین، هرمعادله باید معرف بخشی ازشرط باشد. به‌این ترتیب، برای این که nمعادله را به‌دست آوریم، باید شرط را به nبخش تقسیم‌کنیم. ولی چگونه؟

در بحث‌هـای قبلی ۱° و ۲° (که شامل طـرح مقدماتی قانون‌هـای XVII-XIII دکارت بودند)، تنها اشاره‌هایی، برای پاسخ به‌ایـن پرسش داشتیم، ولی هیچ‌کدام از آن‌ها دقیق نبود. بی‌شك بایـد مسأله را به‌خوبی

مطالعه کرد ومجهول‌ها، داده‌ها وشرط را، با دقت بیشتر وبیشتری بررسی کرد. ازمطالعهٔ جنبه‌های مختلف شرط به‌طور جداگانه، وتصور بستگی بین مجهول‌ها و داده‌ها هم، می‌توان سود برد. همهٔ این‌ها به‌ما امید می‌دهد که بتوانیم دستگاه موردنظر معادله‌ها را به‌دست آوریم؛ ولی این، تنها یک امید است نه اطمینان کامل.

درتوصیه‌ای که دربالا (ضمن تفسیر قانون XIX) داشتیم، می‌توان تکیه‌گاهی برای یک ملاحظهٔ تکمیلی داشت: برای این که معادله‌ای به‌دست آوریم، باید یک کمیت را به‌دوطریق مختلف بیان‌کنیم. (در مسألهٔ §۲، ۳°، تعداد پاها را به‌دو طریق بیان کردیم). این ملاحظه، اغلب، برای تشکیل معادله‌ای که مجهول‌ها را به‌هم مربوط می‌کند، به‌صورت مناسبی به‌ما کمک می‌کند و، اگرمعادله تشکیل شده باشد، همیشه می‌تواند مفهوم معادله را برای ما روشن کند.

به‌طور خلاصه می‌توان گفت: توصیه‌های خوبی وجود دارد، ولی هیچ قاعده‌ای پیدا نمی‌شود که، ضمن تشکیل معادله‌ها، ما را ازاشتباه‌مصون نگاه دارد. هرجا که قاعده‌ای برای یاری رساندن به‌ما وجود نداشته باشد، تجربهٔ عملی می‌تواند ما را نجات دهد.

۴°. دستگاه معادله‌ها را به‌یک معادلهٔ تنها منجرکنید (قانون XXI).

آن‌چه درقانون XXI دکارت آمده است وما آن را، با کمی تغییر، دراین‌جا آوردیم، با هیچ‌گونه توضیحی همراه نیست (رسالهٔ دکارت، با همین جمله به‌پایان می‌رسد). ما دراین‌جا به‌بررسی این موضوع نمی‌پردازیم که‌چگونه می‌توان دستگاه معادله‌ها را، به‌یک معادله‌منجر کرد؛ به‌این پرسش پاسخ نمی‌دهیم که، درعمل، چگونه می‌توان به‌این هدف‌رسید. این پرسش‌ها، به‌جنبه‌های خاص ریاضیات مربوط می‌شود وپیچیده‌تر از آن است که بتوان، بحث مربوط به‌آن را، با یک توصیهٔ کوتاه دکارت آغاز کرد؛ نظریهٔ ریاضی مربوط به‌این موضوع، در زمان ما، به‌اندازهٔ کافی شکافته شده است، ولی ما درآن وارد نمی‌شویم. برای حالت‌های ساده‌ای که ما دراین‌جا، با آن‌ها، سروکار داریم، آشنایی با الفبای جبر، کفایت می‌کند.

ولی حقیقت این است که، در این‌جا، پرسش‌های دیگری هم وجود دارد که، در آینده، با آن‌ها برخورد می‌کنیم و پاسخی به آن‌ها نداده‌ایم. بهتر است ابتدا به چند مثال بپردازیم و، سپس، این پرسش‌ها را مطرح کنیم.

۴§. مسأله‌های دبیرستانی

«مسأله‌های کلامی»[۱]، که در برنامهٔ دبیرستانی وجود دارد، از نظر یک ریاضی‌دان بی‌محتوا است، ولی از نظر دانش‌آموز و حتی معلم، بی‌محتوا نیست. ولی گمان من این است که، اگر معلم تلاش خود را درجهت روشن کردن همین توصیه‌های دکارت ـ که قبلا آوردیم ـ بگذارد و آن‌ها را با اوضاع واحوال دبیرستانی تطبیق دهد، می‌تواند از دشواری‌ها و دام‌هایی که، ضمن حل این گونه مسأله‌ها پدیدار می‌شود، نجات پیدا کند.

در درجهٔ اول، دانش‌آموزان باید از حل مسأله‌هایی که، به‌خوبی و آن‌طور که شاید و باید، از آن‌ها سر در نمی‌آورند، صرف نظر کنند. در مرحله‌ای، می‌توان آزمایش کرد که، آیا دانش‌آموزان مسأله را می‌فهمند؟ آن‌ها باید بتوانند دربارهٔ مسأله حدس بزنند، مجهول‌ها و معلوم‌ها را تشخیص دهند و «با بیان خود» شرط را روشن کنند. اگر آن‌ها بتوانند، دانسته وفهمیده، این کار را انجام دهند، آن‌وقت می‌توانند به‌اصل کار بپردازند.

هر معادله، معرف بخشی از شرط است. دانش‌آموز باید بتواند تشخیص دهد که، کدام بخش از شرط، معرف معادله‌ای است که تشکیل داده است و چه بخشی بدون استفاده مانده است؟

هر معادله نشان می‌دهد که، یك کمیت را به‌دو طریق مختلف نوشته‌ایم. دانش‌آموز باید بتواند به‌این پرسش پاسخ دهد که، معادلهٔ تشکیل شده، مربوط به کدام کمیت است!

البته، دانش‌آموز باید دانش لازم را داشته باشد، دانشی که بدون آن،

---

۱. منظور مسأله‌هایی است که با «کلام» بیان شده باشند، نه با رابطه و فرمول.

درك وحل مسأله نا‌ممکن می‌شود. بسیاری ازمسأله‌های نمونه‌ای دبیرستانی، به«مسأله‌های مربوط به‌سرعت» مربوط می‌شوند (سه‌مثالی راکه در زیر می‌آوریم، ببینید). پیش ازآن که دانش‌آموز به‌حل این مسأله‌ها بپردازد، باید به‌اندازهٔ کافی، با مفهوم‌های «سرعت»، تغییر یکنواخت و بستگی‌های متناسب، آشنا باشد.

۱°. یك لولهٔ آب، حوض را در ۱۵ دقیقه، لولهٔ دوم در ۲۰ دقیقه و لولهٔ سوم در ۳۰ دقیقه پرمی‌کنند. اگر هرسه لولهٔ آب باز باشند، در چه مدت حوض پرمی‌شود؟

گنجایش حوض را a لیترمی گیریم. دراین صورت سرعت جریان‌آب، ازلولهٔ اول، برابر است با

$$\frac{a}{۱۵}$$

لیتر در دقیقه. چون

$$\text{زمان} \times \text{سرعت} = \text{گنجایش}$$

بنابراین، مقدارآبی‌که در t دقیقه، ازلولهٔ اول جاری می‌شود، برابراست با

$$\frac{a}{۱۵}t$$

لیتر. اگر با بازبودن هرسه لوله، حوض در t دقیقه پرشود، مقدارآب‌وارد به‌حوض را، به‌دوطریق، می‌توان بیان کرد:

$$\frac{a}{۱۵}t+\frac{a}{۲۰}t+\frac{a}{۳۰}t=a$$

سمت چپ برابری، مقدار آبی راکه از هرلوله وارد حوض می‌شود، بیان می‌کند؛ وسمت راست، مجموع آبی‌که به‌وسیلهٔ سه‌لوله وارد حوض شده است. اگر دوطرف برابری را بر a تقسیم‌کنیم، به‌این معادله می‌رسیم:

$$\frac{t}{۱۵}+\frac{t}{۲۰}+\frac{t}{۳۰}=۱$$

که از روی آن، می‌توان، مقدار مجهول t را به‌دست آورد.

البته، این معادله را، به‌طریق دیگری‌هم‌می‌توان تشکیل داد. مسأله را هم می‌توان به‌صورت‌های مختلفی تعمیم و با تغییر شکل داد.

۲°. تام‌کاری را در ۳ ساعت، دیك همان کار را در ۴ ساعت و هاری در ۶ ساعت تمام می‌کنند. اگرهرسه نفر با هم مشغول شوند، کار را درچه‌مدتی تمام می‌کنند؟ (با این فرض‌که، ضمن کار، مزاحم یکدیگر نباشند.)

تام در هر ساعت $\frac{۱}{۳}$ تمامی کار را انجام می‌دهد؛ می‌توان گفت که تام، با سرعت $\frac{۱}{۳}$ تمامی کار در ساعت، کار می‌کند. بنابراین، در t ساعت، تام $\frac{t}{۳}$ کار را انجام می‌دهد. اگر سه‌نفر با هم، به‌انجام این کار مشغول شوند (و ضمناً، کارهیچ‌کدام ازآن‌ها، مانع کار دیگری نباشد) و کار را در t ساعت‌تمام کنند، آن وقت تمامی حجم کار را، می‌توان به‌دو طریق بیان‌کرد:

$$\frac{t}{۳}+\frac{t}{۴}+\frac{t}{۶}=۱$$

که در آن عدد ۱، که در سمت راست قرارگرفته است، نماینده‌ٔ تمامی کار است‌که «به‌عنوان یك واحد کامل» درنظرگرفته شده است.

این مسأله، همانند مسألهٔ قبل است، حتی از نظرعددی، زیرا

$$۱۵:۲۰:۳۰=۳:۴:۶$$

تنظیم مسأله به‌صورت‌کلی (یعنی با نشانه‌های حرفی)، که هردوی این مسأله‌ها رادربرمی‌گیرد، می‌تواند آموزنده باشد. علاوه براین، مقایسهٔ جواب‌ها وبررسی حسن وعیب واردکردن a در حل مثال ۱° هم، می‌تواند مفید باشد.

۳°. هواپیمای گشتی، در هوای آرام بدون باد، ساعتی ۲۲۰ میل سرعت دارد. ذخیرهٔ سوخت، برای ۴ ساعت پرواز است. این هواپیما تا چه فاصله‌ای می‌تواند دور شود، به‌شرطی که بخواهد به‌محل نخستین پرواز خود برگردد و، ضمناً، بدانیم‌که باد درجهت‌عکس پرواز نخستین هواپیما وباسرعت ۲۰ میل در ساعت، حرکت می‌کند.

فرض براین است که درتمام مدت پرواز، نیروی باد تغییر نمی‌کند،

هواپیما روی‌خط مستقیم حرکت می‌کند، زمان دور زدن (در دورترین‌فاصله از نقطهٔ نخستین پرواز) مقدار کوچك قابل گذشتی است وغیره. همهٔ«مسأله های کلامی» شامل این گونه فرض‌های ساده و بیان نشده‌ای هستندکه قبل از حل مسأله، بایدبه‌آن‌ها اندیشید وحالت انتزاعی موردنظر را درك کرد. این مطلب، جنبهٔ اصلی هرمسألهٔ کلامی‌را تشکیل‌می‌دهد. این کارمقدماتی،همیشه بی‌محتوا نیست‌و، دست‌کم‌دربعضی موردها،بایدبه‌صورتی‌روشن انجام گیرد.

این مسأله، وقتی آموزنده‌ترمی‌شودکه به‌جای عددهای

$$۲۲۰,\ ۲۰,\ ۴$$

کمیت‌های حرفی را قرار دهیم:

$$v,\ w,\ T$$

که به‌ترتیب، عبارتند از: سرعت هواپیما در هوای بدون باد، سرعت‌باد و زمان‌کل پرواز. ایــن سه مقــدار، فرض‌های مسأله هستند. فــرض‌کنید، x فاصله‌ای باشدکه هواپیمامی‌تواند به‌اندازهٔ آن دور شود. $t_۱$ را زمان‌پرواز در جهت حرکت نخستین (تا لحظهٔ برگشت) و $t_۲$ را، زمان پرواز درجهت مخالف می‌گیریم؛ این سه مقدار، مجهول‌های مسألــه را تشکیل می‌دهند. بهتراست، بعضی ازاین مقدارها را، به‌صورت خاصی، مرتب‌کنیم. آن‌ها را، در جدول زیر، منظم می‌کنیم.

	تا آن‌جا	در برگشت
فاصله:	x	x
زمان:	$t_۱$	$t_۲$
سرعت:	$v-w$	$v+w$

(برای این‌که سطربعدی را پر کنیم، به‌مختصری دانش سینماتیك‌ـکـه البته درمسأله ازآن صحبت نشده استـ نیاز داریم).

سپس، همان‌طورکه باید بدانیم:

$$\text{فاصله} = \text{سرعت} \times \text{زمان}$$

هریك از سه‌مقدار زیر را، به‌دو طریق، بیان می‌کنیم:

$$x=(v-w)t_1$$
$$x=(v+w)t_2$$
$$t_1+t_2=T$$

سه معادله با سه مجهول x، t_1 و t_2 به دست می‌آید. در مسأله، تنها یکی ازآن‌ها، یعنی x، خواسته شده است؛ t_1 و t_2 مجهول‌های کمکی هستند و ما به‌این‌جهت‌آن‌ها را واردکرده‌ایم‌که بتوانیم شرط مسأله را، به‌طورکامل، بیان‌کنیم. با حذف t_1 و t_2 به‌دست می‌آید:

$$\frac{x}{v-w}+\frac{x}{v+w}=T$$

و ازآن‌جا

$$x=\frac{(v^2-w^2)T}{2v}$$

قرار دادن مقدارهای عددی به‌جای v، w و T، کار دشواری نیست. جالب‌تراین است‌که نتیجه را تجزیه وتحلیل و درستی آن را، با تغییرفرض‌های اولیه، آزمایش‌کنیم.

اگر $v=w$، آن وقت $x=0$. این نتیجه روشن است: هواپیما نمی‌تواند در خلاف جهت بادی که سرعت v دارد، حرکت‌کند.

اگر سرعت w از $w=0$ تا $w=v$ ترقی‌کند، همان‌طورکه رابطه‌نشان می‌دهد، فاصلهٔ x به‌تدریج روبه‌کاهش می‌رود. به‌کمك رابطه، به‌نتیجه‌ای می‌رسیم‌که می‌شد آن را، بدون جبر وبا تجزیه وتحلیل موقعیت، ازدیدگاه «عقل سلیم»، پیش‌بینی‌کرد.

اگرمسأله را، به‌جای‌حرف‌ها، با همان فرض‌های‌عددی حل‌می‌کردیم، دیگرامکانی برای بررسی آموزندهٔ رابطه وارزیابی نتیجه‌گیری، دراختیار نداشتیم. یادآوری‌می‌کنیم‌که، هنوز، طریقه‌های دیگری هم برای تحقیق وجود دارد.

۴°. تاجری دو نوع‌گردو دارد. نوع اول‌کیلوئی ۹۰ سنت و نوع دوم کیلوئی ۶۰ سنت. او می‌خواهد ۵۰ کیلوگرم مخلوط، کیلوگرمی ۷۲ سنت به‌دست آورد. برای این منظور، از هرنوع گردو، چندکیلوگرم لازم دارد؟

این، نمونهٔ ساده‌ای از «مسألهٔ مربوط‌به‌اختلاط» است. فرض‌می کنیم، x کیلوگرم گردو از نوع اول و y کیلوگرم گردو از نوع دوم انتخاب کرده باشیم؛ x و y مجهول‌ها هستند. بهتراست، به‌کمك جدول زیر، این مجهول‌ها را، همراه با فرض‌ها درنظر بگیریم:

	نوع اول	نوع دوم	مخلوط
ارزش هرکیلوگرم:	۹۰ سنت	۶۰ سنت	۷۲ سنت
وزن:	x کیلوگرم	y کیلوگرم	۵۰ کیلوگرم

وزن مخلوط را به‌دو طریق بیان می کنیم:

$$x+y=۵۰$$

سپس، قیمت مخلوط را به‌دوطریق می‌نویسیم:

$$۹۰x+۶۰y=۷۲\times ۵۰$$

به‌این ترتیب، دستگاهی از دو معادلهٔ دومجهولی به‌دست می‌آید. حل این دستگاه ساده و نتیجهٔ آن چنین است:

$$x=۲۰,\ y=۳۰$$

اگر دراین مسأله، به‌جای عدد، از حرف استفاده کنیم، مسأله‌ای به‌دست می‌آید که، همان‌طورکه خواهیم دید، می‌تواند به‌نحو دیگری هم (که ضمناً، جالب‌تر هم باشد) تفسیرشود.

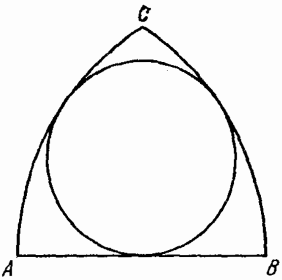
۵§. مثال‌های هندسی

دومثال ازاین‌گونه را بررسی می‌کنیم.

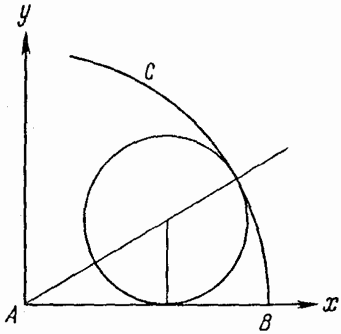
۱°. مسألهٔ ساختمانی هندسی. هرمسألهٔ‌ساختمانی هندسه را، می‌توان به‌یك مسألهٔ جبری تبدیل کرد. دراین‌جا، امکان بحث دربارهٔ نظریهٔ کلی این موضوع نداریم و، بنابراین، تنها به‌یك مثال می‌پردازیم.

پاره‌خط راست AB وکمان‌های دایره‌ای AC و BC، مثلث منحنی‌الخط ABC را تشکیل داده‌اند. مرکز این دوکمان، یکی در A و دیگری در B قرار دارد و هریك ازاین دو دایره از مرکز دیگری می‌گذرد. در این مثلث منحنی‌الخط، دایره‌ای محاط‌کنیدکه برهرسه ضلع آن مماس باشد.

شبیه این ترکیب را (شکل ۵-a) می‌توان در نقش‌های معماری‌سبك گوتیك پیداکرد.



a. بخشی از یك پنجره به‌سبك گوتیك



b. بخشی از شرط راکنار می‌گذاریم

شکل ۵

روشن است‌که مسأله را می‌توان به‌پیداکردن تنها یك نقطه- مرکز دایرهٔ مجهول- منجرکرد. روشن است، یکی از مکان‌های هندسی، که این نقطه روی آن قرار دارد، عبارت است از خط راست عمود منصف پاره‌خط AB؛ این عمود منصف، ضمناً، نقش محور تقارن مثلث منحنی‌الخط را هم به‌عهده دارد. بنابراین، تنها این می‌ماندکه مکان هندسی دوم را پیداکنیم.

بخشی از شرط را نگه می‌داریم و بقیه را کنار می‌گذاریم. دایره‌ای با شعاع متغیر را درنظر می‌گیریم‌که، نه‌برهرسه ضلع، بلکه تنها بردو ضلع مثلث مفروض، یعنی پاره‌خط AB و کمان BC، مماس باشد (شکل ۵-b). برای پیداکردن مکان هندسی مرکزهای این دایرهٔ متغیر، از هندسهٔ تحلیلی استفاده می‌کنیم. مبداء مختصات را درنقطهٔ A ومحور x را درجهت‌پاره‌خط ABمی‌گیریم (شکل ۵-b)، مختصات مرکزدایره را با x و y نشان‌می‌دهیم. این نقطه را، به‌دونقطهٔ تماسی‌که برای ما اهمیت دارد، وصل می‌کنیم؛یکی از دونقطهٔ تماس روی پاره‌خط AB و دیگری روی‌کمان BC واقع است. این دوپاره‌خط، به‌عنوان شعاع‌های یك دایره، طول‌هایی برابر دارند؛ آن‌را

به‌دو طریق می‌توان بیان‌کرد ($AB=a$ می‌گیریم):

$$y=a-\sqrt{x^{2}+y^{2}}$$

با از بین بردن رادیکال، این معادله چنین می‌شود:

$$x^{2}=a^{2}-2ay$$

به‌این ترتیب، مکان هندسی مرکزهای دایره، عبارت است از یك سهمی، یعنی منحنی‌که، در ساختمان‌های هندسی، مستقیماً کاربرد ندارد.

به‌مکان هندسی روشنی‌که در ابتدا داشتیم، یعنی عمود منصف‌پاره‌خط AB، برمی‌گردیم. معادلهٔ این عمود منصف، صورت ساده‌ای دارد:

$$x=\frac{a}{2}$$

اگراین مقداررا، در معادلهٔ سهمی بگذاریم، به‌سادگی، عرض مرکز دایره به‌دست می‌آید:

$$y=\frac{3a}{8}$$

که با دراختیار داشتن پاره‌خط $AB=a$، می‌توان خیلی ساده آن راساخت.

۲°. شبیه فضائی قضیهٔ فیثاغورث. شبیه قضیهٔ فیثاغورث، در فضا، منحصر به‌فرد نیست؛ نمونه‌های زیادی در هندسهٔ فضایی وجود داردکه می‌توان، آن‌ها را، شبیه قضیهٔ فیثاغورث دانست. مثلا: می‌توان مکعب‌را شبیه مربع به‌حساب آورد و چهاروجهی که، از راه قطع یکی از کنج‌های مکعب با یك صفحهٔ مایل به‌دست می‌آید، به‌عنوان شبیه مثلث قائم‌الزاویه درنظر گرفت (درواقع، سه‌یالی‌که از رأس این‌کنج می‌گذرند، دوبه‌دو برهم عمودند، یعنی سه زاویهٔ قائمه تشکیل می‌دهند).

قضیهٔ فیثاغورث را، می‌توان همچون حل این مسأله درنظر گرفت: در مثلثی با زاویهٔ قائمهٔ به رأس O، طول‌های a و b ضلع‌های مجاور O داده شده است؛ می‌خواهیم طول c، ضلع مقابل به‌رأس O را پیداکنیم.

مسألهٔ مشابه را، درفضا، می‌توان این‌طور تنظیم‌کرد: در یك چهار- وجهی، کنج به‌رأس O،کنجی سه قائمه است و مساحت‌های A، B و C،

وجه‌های مجاور این رأس داده‌شده است. مطلوب است محاسبهٔ مساحت S، وجه مقابل به‌رأس O.

باید S را برحسب A، B و C بیان کنیم. طبیعی است انتظار داشته باشیم، رابطه‌ای شبیه رابطهٔ فیثاغورث

$$c^2 = a^2 + b^2$$

برای بیان مساحت وجه موردنظر درچهاروجهی مفروض، به‌دست آید. این شباهت باید، قاعدتاً، چنین باشد:

$$S^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

واین، حدسی‌عقلانی است: تفاوت این رابطه، با رابطهٔ فیثاغورث، به‌معنای عبور از دوبعد به‌سه بعد است.

۳°. مجهول کدام است؟ـ مساحت مثلث S.

چگونه می‌توان این مجهول را پیدا کرد؟ چگونه می‌توان موضوعی مشابه جست وجوکرد؟ـ اگر سه‌ضلع مثلث معلوم باشد، می‌توان مساحت‌آن را، به‌کمک رابطهٔ هرون، پیداکرد. مساحت مثلث ما برابر است با S. اگر a، b و c، طول‌های سه‌ضلع آن و $p = \frac{a+b+c}{2}$ نصف محیط آن باشد، داریم:

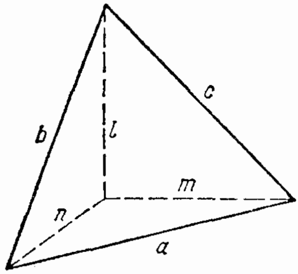
$$S^2 = p(p-a)(p-b)(p-c)$$

(این، یکی از شکل‌های رابطهٔ هرون است). روی شکل، ضلع‌های مثلث S را با a، b و c نشان می‌دهیم (شکل ۶-a).

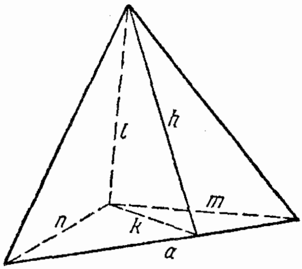
ظاهراً کار تمام است. ولی، آیا ضلع‌های a، b و c معلوم است؟ـ نه، معلوم نیست، ولی این‌ها، ضلع‌های مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای هستند، و اگر در این مثلث‌ها، ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمه (که روی شکل ۶-a، با l، m و n نشان داده‌ایم) معلوم باشد، می‌توانیم a، b و c را برحسب آن‌ها بیان کنیم:

$$a^2 = m^2 + n^2, \qquad b^2 = n^2 + l^2, \qquad c^2 = l^2 + m^2$$

این، خوب است ولی مگر مقدارهای l، m و n را می‌دانیم؟ـ نه،



a. قضیه فیثاغورث در فضا



b. تلاشی تازه

شکل ۶

ولی این‌ها، با مساحت‌های A، B و C بستگی دارند.

$$\frac{۱}{۲}mn = A, \quad \frac{۱}{۲}nl = B, \quad \frac{۱}{۲}lm = C$$

آیا این برابری‌ها، ما را به‌نتیجهٔ مثبتی می‌رسانند؟ـ به‌نظر من بله، اگرچه فعلا هفت مجهول داریم:

$$S;$$

$$a, \quad b, \quad c$$

$$l, \quad m, \quad n$$

ولی، ضمناً، هفت معادله، برای پیداکردن آن‌ها، دراختیار داریم.

۴°. دربحث قبلی ما در ۳°، اشتباهی وجود ندارد. به‌هدفی‌رسیدیم که در فرمول‌بندی دکارت وجود داشت (استناد ما، به ترجمهٔ آزادی است که در §۳، ۳° ارائه دادیم)، یعنی دستگاهی به‌دست آوردیم‌که، به‌تعداد مجهول‌های ما، دارای معادله است. البته دراین‌جا اشکالی وجود دارد: عدد ۷، عدد بزرگی است وجریان‌حل هفت معادلهٔ هفت مجهولی، بی‌اندازه خسته‌کننده است، به‌خصوص‌که رابطهٔ هرون هم، چندان رابطهٔ جالبی‌برای این منظور نیست.

اگربا همهٔ این‌ها موافق باشید، احتمالا رضایت بدهیدکه همه‌چیز را، دوباره و از اول، آغازکنیم.

مجهول چیست؟ـ مساحت مثلثی که آن را S نامیده‌ایم.

این مجهول را چگونه می‌توان پیدا کرد؟ اصولا این‌گونه مجهول را چگونه به‌دست می‌آورند؟ ساده‌ترین راه، برای محاسبهٔ مساحت مثلث، چنین است:

$$S = \frac{ah}{۲}$$

که درآن، a قاعدهٔ مثلث و h ارتفاع آن است (شکل ۶-b).

خوب، با a قبلا برخورد داشته‌ایم؛ ولی با h چه کنیم؟ ارتفاع h از مثلث S را، می‌توان بااستفاده‌ازیك مثلث کمکی پیدا کرد. برای این‌منظور، چهاروجهی را با صفحه‌ای که از ارتفاع h و رأس کنج سه‌قائمه می‌گذرد، قطع می‌کنیم. درمقطع، مثلث قائم‌الزاویه‌ای به‌دست می‌آیدکه وترآن h و یکی از ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ آن l است (این l را، از قبل، به‌یاد داریم)؛ ضلع‌دوم مجاور به‌زاویهٔ قائمه، که آن را k می‌نامیم، همان ارتفاع مثلث به‌مساحت A است که برضلع به‌طول a عمود شده است.

به‌این ترتیب

$$h^۲ = k^۲ + l^۲$$

بسیارخوب، ولی با k چه کنیم؟ باید به‌هرترتیبی شده، این مقدار را پیدا کنیم! مساحت مثلثی را، که ارتفاع آن برابر است با k، به‌دو طریق نشان می‌دهیم:

$$\frac{۱}{۲} a.k = A$$

آیااکنون، به‌تعداد مجهول‌ها، معادله داریم؟ البته، هنوزمعادله‌های قدیمی وجود دارند، ولی فعلا آن‌ها را به‌حساب نمی‌آوریم. سعی کنیم، آن‌چه راکه به‌دست آورده‌ایم، جمع‌بندی کنیم:

$$\begin{aligned} ۴S^۲ &= a^۲h^۲ = \\ &= a^۲(k^۲+l^۲) = \\ &= ۴A^۲ + a^۲l^۲ = \end{aligned}$$

$$= 4A^2 + (n^2 + m^2)l^2 =$$
$$= 4A^2 + (nl)^2 + (lm)^2 =$$
$$= 4A^2 + 4B^2 + 4C^2$$

نخستین و آخرین عبارت را، برابر قرار می‌دهیم و از ضریب اضافی ۴ صرف‌نظر می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$S^2 = A^2 + B^2 + C^2$$

نتیجه، کاملا شبیه قضیهٔ فیثاغورث است. حدس ما در این‌باره، که با گروه سه‌تایی توان‌های دوم سروکار داریم، تأیید شد. ولی این نتیجه، نباید ما را به‌هیجان آورد. شگفت‌آور این است که، حدس ما، تا به‌این اندازه، به‌حقیقت نزدیك بود.

دوراهی راکه برای حل این مسأله مورد استفاده قراردادیم، مقایسه کنید؛ این راه‌ها، ازخیلی‌جهت‌ها با هم فرق‌دارند و، مقایسهٔ آن‌ها، می‌تواند بسیارآموزنده باشد.

آیا می‌توانید شبیه دیگری برای قضیهٔ فیثاغورث پیداکنید؟

§۶. مثالی از فیزیك

از این پرسش آغاز می‌کنیم:

گلولهٔ آهنی، روی سطح جیوه—که در ظرفی ریخته شده است— شناور است. از بالا آب می‌ریزیم تا، به تدریج، گلوله را بپوشاند. آیا گلوله فرو می‌رود، به‌سطح آب بالا می‌آید، یا درهمان عمق نخستین باقی می‌ماند؟

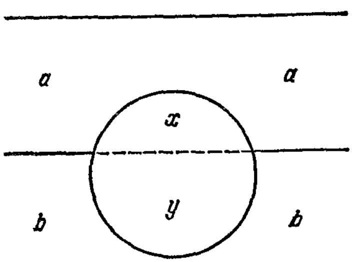
دوحالت را مقایسه می‌کنیم. درحالت اول، بخشی از گلوله درهوا(یا فضای خالی) قرارگرفته و، درحالت دوم، به‌وسیلهٔ آب احاطه شده است (قسمت پایینی گلوله، درهردوحالت، در داخل جیوه است، یعنی پایین‌تر از سطح جیوه قراردارد). درکدام یك‌ازاین دوحالت، قسمتی ازگلوله، که‌بالای سطح جیوه قرار دارد، بزرگتر است؟

این پرسش، خصلتی کاملا کیفی دارد، ولی می‌توان رنگ کمیتی هم به‌آن دادکه، ضمناً، موجب دقیق‌تر شدن آن می‌شود (و همچنین، می‌تواند

به عنوان دستگیره‌ای، برای بررسی آن با روش‌های جبری، مـورد استفاده قرار گیرد). در هرکدام از این حالت‌ها، حجم قسمتی ازگلوله را کـه بالای سطح جیوه قرار دارد، محاسبه می‌کنیم.

۱°. پاسخ کیفی نزدیك به‌حقیقت را، می‌توان با بحثی که به‌طور کامل ناشی از معرفت شهودی است، بـه‌این پرسش داد. برای ایـن منظور، تنها باید پیش‌خود تصور کنیم که، عبور ازیك وضع به‌وضع دیگر، به‌صورتی پیوسته انجام می گیرد. فرض کنیم، مایعی کـه روی جیوه ریخته می‌شود و، سپس، قسمت بالای گلولهٔ آهنی را احاطه می کند، به‌طور پیوسته، چگالی خود را تغییر دهد. در ابتدا، چگالی این مایع تصوری، صفراست (یعنی، فضای خالی یا خلاء داریم). بعد، چگالی مایع رو به‌افزایش می گذارد، به‌زودی به‌چگالی هوا می‌رسد و، بعد از مدتی، به‌چگالی آب. اگرهنوز متوجه نمی‌شوید که، این تغییر غلظت، چه اثری بر گلولهٔ شناور باقـی می گذارد، فرض کنید کـه افزایش چگالی بازهم ادامه یابد. درلحظه‌ای که وزن مخصوص مایع تصوری ما به‌وزن مخصوص آهن برسد، باید گلوله به‌طور کامل از جیوه خارج شود. درواقع، اگروزن مخصوص مایع بازهم، ولـو به‌مقدار کمی، افزایش یابد، باید گلوله به‌طرف بالا بجهد و سرخود را از مایع فرضی بیرون بیاورد.

طبیعی است فـرض کنیم کـه، همراه با افزایش وزن مخصوص مایع فرضی، گلولهٔ شناور در یـك جهـت مشخص، جابه‌جا شود. به‌این‌ترتیب، ناچار به‌این نتیجه می‌رسیم که باتبدیل خلاء یا هوا به‌آب، گلولهٔ شناور بالا می‌آید.



شکل ۷. گلوله و دو مایع

۲°. بـرای ایـن‌کـه بتـوانیم به‌پرسش خود، به‌صورت کمیتی پاسخ بدهیم، باید وزن مخصوص ماده‌هایی که در مسأله ازآن‌ها سخن رفته است بدانیم؛ این وزن مخصوص‌ها، چنین‌اند:

	آب	جیوه	آهن
وزن مخصوص:	۱/۰۰	۱۳/۶۰	۷/۸۴

ولی، بسیارآموزنده‌تر می‌شود اگر، به‌جای عددها، ازحرف استفاده‌کنیم.

$$a \qquad b \qquad c$$

را، به‌ترتیب، وزن مخصوص

جسم شناور   مایع پایینی   مایع بالایی

می‌گیریم. حجم (مفروض) جسم شناور را v، قسمتی از حجم v راکه‌بالای سطح بین دومایع قراردارد x، وقسمتی ازحجم راکه زیراین سطح قراردارد y می‌نامیم (شکل ۷). کمیت‌های a، b، c و v، داده‌های مسأله و x و y، مجهول‌های آن هستند. به‌خودی خود، روشن است‌که

$$a<c<b$$

حجم جسم شناور را، به‌دوطریق، می‌توان بیان‌کرد:

$$x+y=v$$

ولی، اگر با قانون‌های فیزیکی مربوط آشنا نباشیم، نمی‌توانیم از این جلوتر برویم. منظور ما، قانون ارشمیدس است‌که، معمولاً، این طور تنظیم می‌شود: جسم شناور در مایع، با نیرویی برابر با وزن مایعی که کنار زده است، به‌بیرون رانده می‌شود. گلولهٔ مورد نظر ما، مایع را در دو لایهٔ مختلف، کنار زده است. وزن مقداری از مایع که‌کنار زده شده، برابر است‌با

$$ax \qquad \text{و} \qquad by$$

به‌ترتیب برای: مایع لایهٔ پائین   و   مایع لایهٔ بالا

این دونیروئی‌که، به‌طور قائم و به‌طرف بالا، عمل می‌کنند، باید روی هم، با وزن گلولهٔ شناور تراز شود و، بنابراین، مجموع آن‌ها را به دو طریق، می‌توان بیان‌کرد

$$ax+by=cv$$

اکنون، برای دومجهول x و y، دستگاهی شامل دو معادله داریم؛ با حل این دستگاه، به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{b-c}{b-a}v, \qquad y=\frac{c-a}{b-a}v$$

۳°. به طرح نخستین مسألهٔ خود برمی‌گردیم. درحالت اول، وقتی که روی‌جیوه فضای خالی باشد، داریم:

$$a=۰, \qquad b=۱۳/۶۰, \qquad c=۷/۸۴$$

وبرای قسمتی ازحجم گلوله، که روی سطح جیوه قراردارد، به‌دست‌می‌آید:

$$x=۰/۴۲۳v$$

و درحالت دوم، وقتی‌که روی جیوه آب ریخته باشیم:

$$a=۱/۰۰, \qquad b=۱۳/۶۰, \qquad c=۷/۸۴$$

و به‌دست می‌آید:

$$x=۰/۴۵۷v$$

عدد دوم بزرگتر است‌که با بحث شهودی ماتطبیق می‌کند.

خود رابطهٔ‌کلی (با حرف‌ها)، برای ما خیلی جالب‌تر از نتیجهٔ‌عددی است که، به‌کمك آن، به‌دست آوردیم. b و c و v را ثابت و a (وزن مخصوص لایهٔ بالایی) را

$$a=c \quad \text{تا} \quad a=۰ \quad \text{از}$$

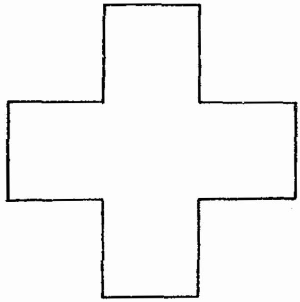
روبه‌افزایش می‌گیریم. دراین صورت، مخرج $b-a$ وعبارت y مرتباً‌نزول می‌کند و، بنابراین، x - بخشی از حجم جسم v که دربالای سطح جیوه قرارگرفته است- به‌طور پیوسته

$$x=v \quad \text{تا} \quad x=\frac{b-c}{b}v \quad \text{از}$$

بزرگ می‌شود.

۷§. مثالی از معماها

چگونه می‌توان از پنج مربع، دو مربع به‌دست آورد؟ درشکل ۸، صفحهٔ‌کاغذی نشان داده شده است‌که، به‌صورت صلیب، بریده شده وشامل پنج مربع برابر است. می‌خواهیم این صلیب را، درطول یك خط راست ببریم و، سپس، یکی ازاین بخش‌ها را، دوباره ودرطول خط راست‌دیگری، به‌دوقسمت‌تقسیم‌کنیم، به‌نحوی‌که بتوان باکنار هم گذاشتن سه‌قطعه‌ای که



شکل ۸. دوتا از پنج تا

به‌دست می‌آید، دو مربع یکسان چسبیده به‌هم، پیدا شود. صلیبی که در شکل ۸ نشان داده شده است، کاملاً متقارن است (این شکل، یك مرکز تقارن و چهار محور تقارن دارد). این را هم یادآور شویم که دو مربع مجاور هم، مستطیلی را تشکیل می‌دهند که طول آن دو برابر عرض آن است. علاوه براین، از شرط مسأله برمی‌آید که با قسمت‌های بریده‌شدهٔ صلیب، می‌توان مستطیلی را، به‌طور کامل، بدون رخنه و بی‌آن‌که در جایی یکدیگر را پوشانده باشند، پر کرد.

آیا نمی‌توانید مسأله را، در جزئی از آن حل کنید؟ روشن است که مساحت مستطیل مجهول، برابراست بامساحت صلیب مفروض و، بنابراین، برابر است با $5a^2$، که درآن، a عبارت است ازضلع هریك از مربع‌هایی که صلیب را به‌وجودآورده‌اند. با در اختیار داشتن مساحت مستطیل، درحالت مورد نظرما، می‌توان طول ضلع‌های آن را به‌دست آورد. اگر طول ضلع بزرگتر مستطیل را x بگیریم، طول ضلع کوچکتر (عرض) آن، برابر $\frac{x}{2}$ می‌شود و، اگرمساحت مستطیل را به‌دو طریق بیان‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$x \cdot \frac{x}{2} = 5a^2$$

یا

$$x^2 = 10a^2$$

که ازآن‌جا، هردوضلع مستطیل پیدا می‌شود.

اکنون دیگرآگاهی‌های کافی دربارهٔ مستطیل وشکل و اندازه‌های آن داریم، ولی هنوز مسأله حل نشده است: باید جای برش‌ها را، روی‌صلیب نشان دهیم. اگر عبارتی راکه برای x^2 به‌دست آوردیم، به‌صورت

$$x^{2}=9a^{2}+a^{2}$$

بنویسیم، می‌توانیم متوجه شویم که برش را چگونه باید انجام داد.

از بحثی که در این معما داشتیم، می‌توان نتیجه‌های مفیدی به‌دست آورد:

اولاً، این بحث نشان می‌دهد که جبر، حتی برای حالتی که امکان راه حل کامل مسأله را ندارد، می‌تواند مفید باشد؛ به‌کمك جبر می‌توان بخشی از مسأله را حل کرد و، از نتیجهٔ حاصل، برای ساده‌ترکردن دنبالهٔ کار سود برد.

ثانیاً، این جریان می‌تواند برتازه‌کردن خود روش اثر بگذارد و موجب گسترش راه‌حل شود. ابتدا، قسمتی از راه‌حل را پیدا کردیم: شکل مستطیل مجهول. سپس، از این قسمت کوچك، برای به‌دست‌آوردن قسمت بیشتری، یعنی برای پیدا کردن اندازه‌های مستطیل استفاده کردیم و، درنتیجه، همهٔ آگاهی‌های لازم را، درمورد آن، به‌دست آوردیم. حالا، از این قسمت بیشتر، برای دسترسی به‌قسمت بازهم گسترده‌تری استفاده می‌کنیم که، همان‌طور که امیدواریم، ما را به‌راه‌حل کامل مسأله می‌رساند.

§۸. مثال‌های شگفتی‌آور

مسأله‌هایی را که تا این‌جا، دراین فصل، مورد مطالعه قراردادیم، «مشخص ودقیق» بودند. به‌مسأله‌ای «مشخص ودقیق» می‌گوییم که به‌درستی طرح شده باشد و جواب آن، به‌صورت یك ارزشی، معین شود؛ و اگر به‌مسأله‌ای، به‌طور جدی، علاقه‌مند باشیم، بهتر است از اول روشن کنیم (ویا حدس بزنیم) که آیا این مسأله «مشخص ودقیق» است یا نه! بنابراین، از همان ابتدای کار، می‌توان این پرسش‌ها را در برابرخود قرار داد: آیا امکان برقراری شرط وجود دارد؟ آیا شرط مسأله، برای پیدا کردن مجهول کافی است؟ آیا شرط چیزی کم دارد و یا، برعکس، آن‌قدر زیاد است که موضوع امکان برقراری آن مطرح می‌شود؟

این پرسش‌ها، مهم واساسی‌اند و می‌خواهم، دراین‌جا، به‌بحث تفصیلی

دربارهٔ نقش این پرسش‌ها درحل مسأله‌ها، بپردازم؛ بهتر است، منظور خود را، ضمن چندمثال، روشن کنم.

۱°. شخصی ۵ ساعت پیاده‌روی کرد؛ ابتدا روی یک جادهٔ افقی حرکت کرد، سپس، از تپه‌ای بالا رفت و، بالاخره، از همان خط‌سیر برگشت و به‌نقطهٔ اولیه رسید. سرعت این شخص، درجادهٔ افقی ۴ کیلومتر درساعت، ضمن بالارفتن از تپه ۳ کیلومتر در ساعت و در پایین آمدن ازآن، ٦ کیلومتر در ساعت است. این شخص، چندکیلومتر راه رفته است[۱]؟

آیا این مسأله، مشخص و دقیق است؟ آیا داده‌ها برای پیدا کردن مجهول کافی‌اند؟ یا چیزی کم دارند؟

به‌نظر می‌رسد، داده‌ها کافی نیستند. ظاهراً، آگاهی دربارهٔ درازای قسمت شیب‌دار راه کافی نیست. اگر می‌دانستیم، برای بالارفتن یا پایین آمدن، چه وقتی را صرف کرده است، هیچ اشکالی نداشتیم. ولی، بدون این آگاهی، مسأله نامعین به‌نظر می‌رسد.

با وجود این، حل مسأله را آغاز می‌کنیم. فرض کنید

x، فاصلهٔ رفت وبرگشت و

y، طول قسمت شیب‌دار باشد.

فاصلهٔ رفت وبرگشت را، به‌چهار مرحله تقسیم می‌کنیم:

قسمت افقی　　به‌طرف بالا　　به‌طرف پایین　　قسمت‌افقی

اکنون می‌توان، به‌سادگی، زمان رفت وبرگشت را محاسبه‌کرد:

---

۱. مقایسه‌کنید با

Lewis carrol, A Tangled Tale (Knot I), NewYork, 1958

[لویس‌کارول، نام مستعار چارلز لوتویج دوجسون (۱۸۳۲ـ۱۸۹۸) ریاضی‌دان ومربی انگلیسی است، او مؤلف کتاب‌های «آلیس در سرزمین عجایب» و «آلیس درمیان آینه‌ها» است که بسیارمعروف‌اند. او همچنین مجموعه‌هایی از معماها دارد و اشارهٔ پولیا، به‌یکی از همین مجموعه‌ها است.]

$$\frac{\frac{x}{۲}-y}{۴}+\frac{y}{۳}+\frac{y}{۶}+\frac{\frac{x}{۲}-y}{۴}=۵$$

یك معادله داریم برای دو مجهول واین، کافی نیست. با وجود این، جمله‌ها راگروه‌بندی می کنیم؛ ضریب y برابر صفر می‌شود و برای ما باقی می‌ماند

$$\frac{x}{۴}=۵$$

یعنی

$$x=۲۰$$

به‌این ترتیب، داده‌های مسأله، برای تعیین x کافی است و، سرآخر، معلوم شدکه مسأله نامعین نیست. ما اشتباه‌کرده بودیم.

۲°. بله، ما اشتباه‌کردیم؛ این را نمی‌شود نفی‌کرد، ولی بدگمانی ما بی‌دلیل نبود. مؤلف با انتخاب عددهای خاص ۳، ۶ و ۴، ما راگمراه کرد. برای این‌که به‌حیلهٔ او پی‌ببریم، به‌جای عددهای

۳ ۶ ۴

حرف‌های

u v w

را قرار می‌دهیم‌که، به‌ترتیب، معرف سرعت حرکت در

قسمت افقی سربالایی سرازیری

هستند. اکنون دوباره، زمانی راکه برای رفت وبرگشت صرف می‌شود، با نشانه‌های حرفی، محاسبه می‌کنیم:

$$\frac{\frac{x}{۲}-y}{w}+\frac{y}{u}+\frac{y}{v}+\frac{\frac{x}{۲}-y}{w}=۵$$

یا

$$\frac{x}{w}+\left(\frac{۱}{u}+\frac{۱}{v}-\frac{۲}{w}\right)y=۵$$

از این معادله، تنها وقتی می‌توان x را محاسبه‌کردکه، ضریب y برابر صفر شود. بنابراین، اگررابطهٔ

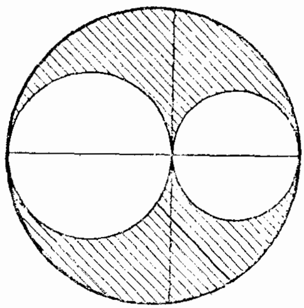
$$\frac{1}{w}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{u}+\frac{1}{v}\right)$$

برقرار نباشد، مسأله واقعاً نامعین می‌شود. ما، درواقع، با دام حیله‌گرانه‌ای، فریب خوردیم.

[این رابطهٔ حساس را، می‌توان چنین نوشت:

$$w=\frac{2uv}{u+v}$$

یعنی، باید سرعت روی جادهٔ افقی، واسطهٔ توافقی سرعت‌ها، درسربالایی و سرپایینی، باشد.[1]]



شکل ۹. دومقدار مفروض است

۰۳. دو دایره، که یکی در بیرون دیگری واقع است، در داخل دایرهٔ بزرگتری قرار گرفته‌اند. هردایره، بردو دایرهٔ دیگرمماس است ومرکزهای آن‌ها روی یک‌خط راست قرار دارند. شعاع دایرهٔ بزرگتر برابر r و وتری از آن، که در نقطهٔ مشترك دو دایرهٔ کوچکتر برآن‌ها مماس است، برابر t می‌باشد. مطلوب است محاسبهٔ مساحت قسمتی از دایرهٔ بزرگترکه بیرون دایره‌های کوچکتر قرار گرفته است (شکل ۹).

آیا این مسأله، مشخص و دقیق است؟ آیا داده‌ها برای تعیین مجهول

---

۱. x را واسطهٔ توافقی دوعدد مثبت a و b گویند، وقتی‌که عکس عدد x، برابر باشد با واسطهٔ حسابی عکس دو عدد a و b، یعنی وقتی‌که داشته باشیم؛

$$\frac{1}{x}=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}\right)$$

یا

$$x=\frac{2ab}{a+b}$$

کافی است یا چیزی کم دارند؟

ظاهراً، این مسأله، کاملاً مشخص و دقیق است. برای این که، این شکل را، که از سه دایره تشکیل شده است، رسم کنیم، لازم و کافی است که، مثلاً، شعاع دو دایرهٔ کوچکتر را و یا، به‌طورکلی، دو مفروضی راکه‌به‌هم بستگی نداشته باشند، در اختیار داشته باشیم. روشن است که مفروض‌های ما، r و t، به‌هم بستگی ندارند و می‌توان یکی ازآن‌ها را تغییر داد، بدون این که دیگری تغییر کند (دراین مورد، تنها این محدودیت وجود دارد که باید داشته‌باشیم: $t \leqslant ۲r$). بله، داده‌های r و t ظاهراً کافی هستند. نه‌چیزی کم دارند و نه‌چیزی زیاد.

بنابراین، به حل می‌پردازیم. S را مساحت مجهول و x و y را شعاع‌های دو دایرهٔ کوچکتر می‌گیریم. داریم:

$$S = \pi r^{۲} - \pi x^{۲} - \pi y^{۲}$$
$$۲r = ۲x + ۲y$$

به‌دو معادله، با سه مجهول S، x و y می‌رسیم. برای پیدا کردن معادلهٔ سوم، مثلث قائم‌الزاویه‌ای را درنظرمی‌گیریم که محاطدردایرهٔ بزرگ‌باشد، به‌نحوی‌که وترآن شامل سه مرکز و رأس زاویهٔ قائمهٔ آن، بریکی از دو انتهای پاره‌خط به‌طول t، منطبق باشد. ارتفاع وارد بر وتر در این مثلث، برابر است با $\frac{t}{۲}$. این ارتفاع، واسطهٔ هندسی است بین دوقطعه‌ای که روی وتر جدا می‌کند (یعنی قطرهای دایره‌های کوچکتر):

$$\left(\frac{t}{۲}\right)^{۲} = ۲x \cdot ۲y$$

اکنون، سه معادلهٔ لازم را در اختیار داریم. دو معادلهٔ آخررا به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$(x+y)^{۲} = r^{۲}$$
$$۲xy = \frac{t^{۲}}{۸}$$

از تفاضل این دومعادله، $x^{۲}+y^{۲}$ به‌دست می‌آیدکه، با قرار دادن آن در

معادلهٔ اول، به‌دست می‌آید:

$$S=\frac{\pi t^{2}}{8}$$

به‌این ترتیب، معلوم می‌شود که، داده‌ها بیش از اندازه بوده‌اند؛ در واقع، از دو فرض r و t، تنها دومی لازم است و، برای پیداکردن مجهول، به r نیازی نداریم. ما دوباره اشتباه‌کردیم.

زمینهٔ اصلی این مسألهٔ جالب را، از ارشمیدس برداشته‌ایم.

تمرین‌ها و ملاحظه‌های تکمیلی

بخش ۱

۱ . بوب $۳\frac{۱}{۲}$ دلار پنج‌سنتی و ده‌سنتی دارد [هردلار برابر ۱۰۰ سنت‌است].
اگر بوب روی هم ۵۰ سکه داشته باشد، چه تعدادی ازآن‌ها پنج‌سنتی وچه تعدادی ده‌سنتی است؟ (آیا با مسأله‌ای مشابه این مسأله، با تفاوت‌هایی درصورت آن، برخورد داشته‌اید؟)

۲ . مسألهٔ §۴، °۱ را، با جانشین‌کردن حرف به‌جای عدد و انتخاب چند لوله‌ای که آب وارد حوض می‌کنند وچند لوله‌ای که آب آن را خالی می‌کنند (زیرآب)، تعمیم دهید.

۳ . تفسیر دیگری برای معادلهٔ مسألهٔ °۲ از §۴، پیداکنید.

۴ . روش‌هایی تکمیلی، برای آزمایش جواب مسألهٔ °۳ از §۴، دربارهٔ هواپیمای گشتی، پیداکنید.

۵ . در مسألهٔ «اختلاط» °۴ از §۴، عددهای

۹۰   ۶۰   ۷۲   ۵۰

را با حرف‌های

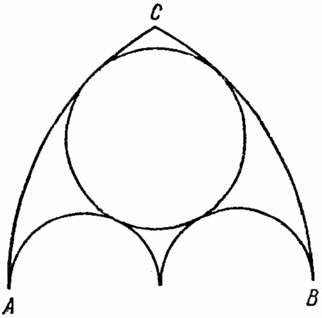
a b c v

عوض‌کنید. شرط را دوباره مرورکنید و معادله‌ها را تشکیل دهید. آیا با آن‌ها آشنا هستید؟

۶ . در شکل ۱۰، ترکیبی را می‌بینید که در اغلب سبک‌های معماری

گوتیك، با آن، برخورد می‌کنیم (این شکل، اگرچه باشکل ۵-a متفاوت است، ولی با آن ارتباط دارد).

مرکز دایره‌ای را پیدا کنید که برچهار دایرهٔ دیگر (کـه یك «چهارضلعی منحنی الخط» راتشکیل می‌دهند) مماس است. دو کمان محیطی، شعاعی برابر ABدارند ومرکز یکی در A ومرکز دیگری در B است. شعاع هریك از دونیم‌دایره برابر $\frac{AB}{۴}$ ومرکزآن‌هاروی پاره‌خط AB است و، ضمناً، بریکدیگر مماس‌اند.



شکل ۱۰. بخشی از یك پنجرهٔ گوتیك

۷ . طرحی‌راکه در۳° از ۵§ ناتمام گذاشتیم، به‌انجام برسانید. باید به‌همان رابطه‌ای برای $S^۲$ برحسب A، B و C برسیدکه، از راه دوم در۵§، ۴°، به‌دست آوردیم.

۸ . روش‌های حل را در ۳° و ۴° از۵§ با هـم مقایسه‌کنید (روش‌کلی را پیداکنید).

۹ . حجم V چهاروجهی را پیداکنیدکه در رأس O، یك‌کنج سه‌قائمه‌تشکیل داده است ومساحت‌های A، B و C، وجه‌هـای منتهی به O، معلـوم باشند.

۱۰. شبیه رابطهٔ هرون. حجم V چهاروجهی را پیداکنیدکه در رأس O، یك کنج سه‌قائمه تشکیل داده است وطول یال‌های a، b و c از وجه‌مقابل به‌رأس O ازآن، معلوم باشد.

(اگر در عبارتی‌که برای حجم V به‌دست می‌آید،

$P^۲ = \frac{a^۲+b^۲+c^۲}{۲}$ بگیرید، رابطه‌ای کامـلاً شبیه رابطـهٔ هرون پیدا می‌شود).

۱۱. شبیه دیگری برای قضیهٔ فیثاغورث. مطلوب است طول قطر جعبه‌ای (مکعب مستطیل شکل) که طول آن l، عرض آن m وارتفاع آن n باشد.

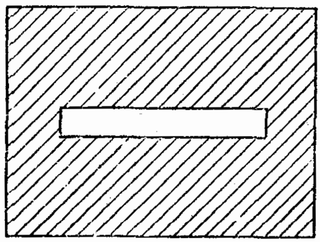
۱۲. بازهم شبیهی برای قضیهٔ فیثاغورث. مطلوب است طول قطر جعبه‌ای (مکعب مستطیل شکل)، به‌شرطی که طول قطرهای سه‌وجهی ازآن، که از یك رأس گذشته‌اند، برابر a، b و c باشد.

۱۳. شبیه دیگری برای رابطهٔ هرون.حجم چهاروجهی را V و سه یال‌متعلق به‌یکی از وجه‌های آن را a، b و c می‌گیریم، و فرض می‌کنیم،هریك از یال‌های دیگر چهار وجهی، برابر با یال مقابل آن باشد. V را برحسب a، b و c پیدا کنید.

۱۴. نتیجهٔ تمرین‌های ۱۰ و ۱۳ را، درحالتی که حجم V به‌سمت صفر میل می‌کند، مورد بررسی قرار دهید.

۱۵. معمای§۷ را حل کنید (ضلع‌های x و $\frac{x}{۲}$ معلوم‌اند. صلیب را چگونه باید ببریم تا ضلع x پیدا شود؟)

۱۶. در شکل ۱۱، مستطیلی داده شده است که، ازآن، قطعهٔ مستطیل‌شکل دیگری، بریده و جدا شده است. ضلع‌های مستطیل اصلی ۹ و ۱۲، و ضلع‌های مستطیل داخلی ۱ و ۸ واحد است. مرکزهای دو مستطیل منطبق برهم وضلع‌های دومستطیل با هم موازی‌اند. می‌خواهیم، این مستطیل را با دو خط به دو قسمت چنان تقسیم کنیم که بتوان، ازآن‌ها، یك مربع (کامل) ساخت.



شکل ۱۱. به‌کمك دوبخش این شکل، یك مربع بسازید.

a) آیا نمی‌توان مسأله‌را، در جزئی از آن، حل‌کرد؟ طول ضلع مربع مجهول، چه‌اندازه‌ای دارد؟

b) فرض کنیم، مسأله حل شده است. فرض کنیم، شکل مفروض، به‌دو قسمت «راست» و «چپ» تقسیم شده باشد. قسمت چپ رادرجای خود نگه دارید وقسمت راست را جابه‌جا کنید و درجای لازم قراردهید (تا باقسمت‌چپ، یك‌مربع تشکیل دهد). اگرفرض‌کنیم، پاسخ‌پرسش(a) برای شمامعلوم باشد، دراین‌جا، چه‌نوع حرکتی را باید انتظارداشت؟

c) آیا قسمتی ازحل را نمی‌شود حدس زد؟ شکل مفروض، نسبت به‌مرکزخود ونسبت به‌دو محورعمود برهم، متقارن است. فکرمی‌کنید یکی ازاین موردهای‌تقارن، باید بعدازبرش هم‌حفظ شود؟ کدام تقارن؟

بخش ۲

مسأله‌هایی‌که از این به‌بعد می‌آید، از نظر زمینهٔ خود، گروه‌بندی شده‌اند؛ این زمینه‌ها، درآغاز نخستین مسأله از هرگروه ذکرشده‌است (مثلا: مسطحه، فضایی، مختلف وغیره). درانتهای برخی از مسأله‌ها، در داخل پرانتز، نام‌های نیوتون و اولرآمده است؛ این‌گونه مسأله‌ها، ازکتاب‌های زیر، اقتباس شده است:

ایساك نیوتون، حساب عمومی (مسأله‌هایی که نام نیوتون را در پایان خود دارند، ازاین‌کتاب اقتباس شده‌اند، ولی ممکن است در شکل‌بندی صورت آن و یا در مقدارهای عددی آن‌ها، تغییرهایی داده شده باشد).

لئونارد اولر، پایه‌های جبر

[ایساك نیوتون (۱۶۴۳–۱۸۲۷)، به‌اعتقاد بسیاری، از جملهٔ دانشمندان کبیری است که، گاه به‌گاه، در جهان ظاهر می‌شوند. نوشته‌های او مربوط است به‌اصل‌های اساسی مکانیك، نظریهٔ جاذبهٔ عمومی، محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی، اپتیك نظری وعملی و، به‌جز این‌ها، یك رشته موضوع‌هایی که، هرکدام ازآن‌ها، می‌توانست جای افتخارآمیزی را، برای نویسندهٔ آن‌ها، در تاریخ دانش تأمین‌کند.

لئونارد اولر (۱۷۰۷–۱۷۸۳) هم، ازجملهٔ دانشمندان‌کبیر است. او تقریباً در همهٔ زمینه‌های ریاضیات و یك رشته از شاخه‌های فیزیك

کارکرده است. ارثیهٔ او درمورد تکامل محاسبهٔ دیفرانسیلی وانتگرالی (که به‌وسیلهٔ نیوتون و لایب‌نیتس کشف شد)، از هرریاضی‌دان دیگری بیشتر است. یادآور می‌شویم که ایـن هردو دانشمند، برای استفاده از معادله درحل مسأله‌ها، ارزش زیادی قایل بودند و برای روشن‌کردن آن، از بحث تفصیلی، خودداری نکرده‌اند].

۱۷. مختلف. قاطروالاغ، باری را به‌وزن چندصد وچندواحد حمل‌می‌کنند. الاغ از صاحب خود گله‌کرد و به‌قاطرگفت: «فقط صد واحد از بار تو را لازم دارم تا سنگینی بارمن، دوبرابر سنگینی بارتوشود». قاطر به‌او پاسخ داد: «بله. این درست است، ولی اگرتو صد واحد از بارخود را به‌من بدهی، سنگینی بار من سه‌برابر سنگینی بار تو خواهد شد». وزن بار الاغ ووزن بار قاطررا پیداکنید (اولر).

۱۸. وقتی‌که آقا وخانم سمیت در هواپیما نشستند، ۹۴کیلوگرم بارداشتند. به‌خاطر اضافه‌بار، آقای سمیت ۱ دلار و۵۰ سنت و خانم سمیت ۲دلار پرداختند. اگرآقای سمیت به‌تنهائی وبا همهٔ بار دونفرمسافرت‌می‌کرد، می‌بایست ۱۳ دلار و ۵۰ سنت، بابت اضافه‌بار، بپـردازد. هـرمسافر، چندکیلوگرم بار، بدون پرداخت اضافی، می‌تواند داشته باشد؟

۱۹. پدری، برای سه‌پسرخود، ۱۶۰۰ کـرون باقی‌گذاشت. در وصیت‌نامه تأکید شده بود که پسر بزرگتر، ۲۰۰ کرون بیشتر از پسر دوم و پسر دوم، ۱۰۰ کرون بیشتر از پسرکوچکتر بردارد. سهم هریك ازپسرهارا پیداکنید (اولر).

۲۰. پدری برای چهارپسرخود، ارثیه‌ای نقدی باقی‌گذاشت وسهم آن‌هارا، به‌این ترتیب، تعیین‌کرد:

اولی، به‌اندازهٔ نصف همهٔ پول، منهای ۳۰۰۰ لیور؛
دومی، یك سوم همهٔ پول، منهای ۱۰۰۰ لیور؛
سومی، یك چهارم تمام پول؛
چهارمی، ۶۰۰ لیور به‌اضافهٔ یك پنجم تمامی پول.
مبلغ ارثیه و سهم هریك از پسرها را پیداکنید (اولر).

۲۱. پدری بعد از مرگ، چند فرزند از خود باقی گذاشت و، در وصیت‌نامهٔ خود، سهم آن‌ها را، این‌طور تعیین کرد:

اولی: ۱۰۰ کرون به‌اضافهٔ یك‌دهم بقیهٔ پول؛

دومی: ۲۰۰ کرون به‌اضافهٔ یك‌دهم بقیهٔ بعدی پول؛

سومی: ۳۰۰ کرون به‌اضافهٔ یك‌دهم بقیهٔ بعدی پول؛

چهارمی: ۴۰۰ کرون به‌اضافهٔ یك‌دهم بقیهٔ بعدی پول وغیره.

بعد از اجرای وصیت‌نامه، معلوم شد، به همهٔ فرزندان، به‌مقدار مساوی پول رسیده است. می‌خواهیم مبلغ ارثیه وسهم هرفرزند راپیدا کنیم (اولر).

۲۲. سه‌نفر با هم بازی می‌کنند. در بازی نخست، اولی به‌هرکدام از دو نفر دیگر، به‌اندازهٔ پولی که دراختیار داشتند، باخت. در بازی دوم،دومی به‌اندازهٔ دوبرابر پولی که هرکدام از دو نفردیگر در آن موقع داشتند، باخت. وبالاخره دربازی سوم، اولی ودومی به‌اندازهٔ پولی که‌داشتند، از سومی بردند. بعد از پایان سه‌بازی، معلوم شدکه هرکدام ازآن‌ها، ۲۳ لیـور دارند. می‌خواهیم پول هریك را، قبـل از بازی، پیدا کنیم (اولر).

۲۳. سه کارگـر می‌توانندکاری را انجام دهند و هرکـدام در زمانی معین: کارگر A، این کار را در ۳ هفته، کارگر B سه‌برابرکار را در ۸ هفته و کارگر C پنج برابرکار را در ۱۲ هفته. می‌خواهیم معلوم‌کنیم‌که، اگر این سه‌کارگربا هم‌کارکنند، درچه مدتی‌کاررا انجام می‌دهند (نیوتون).

۲۴. مقدار چند نیروی کار داده شده است. می‌خواهیم زمان انجام‌کارمعینی را، وقتی‌که این نیروها مشترکاً کار می‌کنند، پیداکنیم (نیوتون).

۲۵. کسی ۴۰ کیل گندم، ۲۴ کیل جوو ۲۰ کیل ارزن خرید، روی هم به‌۱۵ فونت و ۱۲ شلینگ[1].

بار دوم، از همان جنس غله خریدکرد: ۲۶ کیل گندم، ۳۰ کیل‌جو و ۵۰ کیل ارزن به ۱۶ فونت.

---

۱. هرفونت انگلیسی، برابر با ۲۰ شلینگ است.

بارسوم، بازهم ازهمان نوع غله‌ها خرید: ۲۴ کیل گندم، ۱۲۰ کیل جو و ۱۰۰ کیل ارزن به ۳۴ فونت.

مطلوب است قیمت هر کیل از هرنوع غله (نیوتون).

۲۶. (ادامه). مسألهٔ قبل را تعمیم دهید.

۲۷. ۱۲ گاو، علف‌های $3\frac{1}{4}$ آکر از چراگاهی را در ۴ هفته می‌خورند؛ ۲۱ گاو، علف‌های ۱۰ آکر از همان چراگاه را در ۹ هفته می‌خورند. می‌خواهیم بدانیم چندگاو می‌توانند علف‌های ۲۴ آکر از این چراگاه را در ۱۲ هفته بخورند (نیوتون).

۲۸. عمر دیوفانت چقدر بوده است؟ مسأله، به‌صورت نوشته‌ای روی سنگ قبر دیوفانت [یا، به اعتبار نویسندگان قدیمی‌تر ایرانی: دیوفانتوس] حک شده است. اصل این نوشته، به‌صورت شعر است:

این‌جا دیوفانت آرمیده است. اگر هنر [محاسبهٔ] او را داشته باشید، این سنگ دربارهٔ طول زندگی او برای شما حکایت می‌کند. پروردگار به‌او امکان داد تا یك ششم زندگیش را کودك باشد، به‌دنبال آن یك دوازدهم عمرش را درجوانی بگذراند؛ تا لحظهٔ ازدواج، یك هفتم زندگیش را طی‌کرد، پنج سال بعد از زناشویی دارای فرزند شد. دریغاکه پسر مورد علاقه‌اش، که درست به‌اندازهٔ نیمی از سن خودش زندگی‌کرده بود، مرد. دیوفانت با تحمل این بار سنگین، آرامش چهار سال آخر عمرش را، در ریاضیات جست وجوکرد و، سرانجام، زندگی زمینی خود را تمام‌کرد.

۲۹. مسألهٔ مصری. حالا مسأله‌ای را، از پاپیروس ریند[1]، می‌آوریم . که می‌تواند ما را با ریاضیات مصر قدیم آشنا کند. در متن اصلی، صحبت از ۱۰۰ نان است که باید بین پنج نفر تقسیم شود، ولی شرط اصلی

---

۱. پاپیروس ریند، که به‌نام مصرشناس انگلیسی کشف‌کنندهٔ آن نامیده می‌شود، پاپیروس مشهوری شامل موضوع‌های ریاضی است که درموزهٔ بریتانیا (لندن) نگهداری می‌شود. این پاپیروس را «پاپیروس آهمس» هم می‌نامند. آهمس نام نویسندهٔ مصری آن است.

آن داده نشده است (ویا، به‌طور روشن بیان نشده است).[1]

ما ایـن مسألهٔ مصری را، به صورت انتزاعی و با اصطلاح‌هـای امروزی می‌آوریم.

یك تصاعد حسابی از پنج جمله تشکیل شده است. مجموع همـهٔ جمله‌های این تصاعد برابر است بـا ۱۰۰ و مجموع سه‌جملهٔ بزرگتر، هفت برابر مجموع دوجملهٔ کوچکتر است. تصاعد را پیدا کنید.

۳۰. یك تصاعد هندسی، سه جمله دارد. مجمـوع ایـن جمله‌ها برابر ۱۹ و مجموع مجذورهای آن‌هـا برابر ۱۳۳ می‌باشد. جمله‌های تصاعـد را پیدا کنید (نیوتون).

۳۱. یك تصاعد هندسی چهار جمله‌ای داریم. مجموع جمله‌های دو طـرف برابر ۱۳ و مجموع دو جملهٔ وسط‌برابر ۴ است. جمله‌های این‌تصاعد را پیدا کنید (نیوتون).

۳۲. چند تاجر، روی هم کالایی به‌اضافهٔ ۸۲۳۰کرون داشتند. سهم هرکدام ازآن‌ها، برابر است با تعداد تاجرها ضرب در ۴۰. درمجموع پولی‌که داشتند، آن‌قدر درصد سود بردندکه شریك وجود داشت. بعد ازتقسیم سود، معلوم شد به‌هر نفـر به‌اندازهٔ ۱۰ برابر تعداد شریك‌ها، کـرون رسید؛ ضمناً، ۲۲۴ کرون هـم باقی ماند. می‌خواهیم تعداد تاجـرهای شریك را پیداکنیم (اولر).

۳۳. **هندسهٔ مسطحه.** در داخل مربع به‌ضلع a، پنـج دایرهٔ غیر متقاطع، با شعاع یکسان r واقع شده است. مرکز یکی از دایره‌ها در مرکزمـربع قراردارد وخود آن برچهار دایرهٔ دیگر مماس است. هریك ازاین چهار

---

۱. مقایسه‌کنید با

J. R. Newman, The world of Mathématics

(جلد اول، صفحه‌های ۱۷۳ــ۱۷۴) [تألیف مربی معروف امریکائی، ج. ر. نیومن به‌نام «دنیای ریاضیات» (در چهارجلد ــ نیویورك ۱۹۵۵) یکی از کتاب‌های نادری است‌که دربارهٔ معلمی ریاضیات بحث‌کـرده است (بیش از ۲۵۰۰ صفحه با متن ریز)].

دایره هم، بردو ضلع مربع مماس است. r را برحسب a محاسبه کنید.

۳۴. **نیوتون و تشکیل معادله برای حل مسأله‌های هندسی.** اگر مسأله‌ای دربارهٔ مثلث متساوی‌الساقین محاطی‌داشته باشیم و بخواهیم رابطه‌ای بین ضلع‌های آن با قطر دایره پیدا کنیم، می‌توان به‌این ترتیب عمل کردکه یا قطر را برحسب ساق و قاعدهٔ معلوم، یا قاعـده را برحسب ضلع‌ها وقطر معلوم ویا، بالاخره، ساق را برحسب قاعده و قطر معلوم بیان کرد. ولی‌چه راهی رابابد انتخاب‌کرد تا برای هرسه حالت‌مسأله، به‌یك معادله برسیم (نیوتون).

فرض‌کنید d،aوb، به‌ترتیب، قطردایره، ساق وقاعدهٔ مثلث باشند (یعنی، ضلع‌های مثلث برابرند با a، a و b)؛ معادله‌ای پیدا کنید که d، a و b را به هم مربوط‌کند و، به‌کمك آن، بتوان هر سه مسأله را حل‌کرد: یك‌بار d، بار دوم a وبار سوم b مجهول است (همیشه، دوتا از این سه حرف، معلوم‌اند).

۳۵. (ادامه). معادله‌ای راکه برای‌حل تمرین ۳۴به‌دست آورده‌اید، بررسی کنید: a) آیا دشواری هرسه معادله، به یك اندازه است؟ b) در هرسه حالت، معادلهٔ مفروض، تنها باشرطهای معینی، به‌جواب مثبت (برای d، a یا b) می‌رسد؛ آیا این شرطهـا، ماهیت هندسی مسأله‌ها را، بـا دقت بیان می‌کنند؟

۳۶. چهار نقطهٔ G، H، V و U (به همیـن ردیف)، رأس‌هـای یـك چهار ضلعی‌اند. نقشه‌بردار می‌خواهد طول $UV=x$ را پیداکند. اگر طول $GH=l$ و اندازه‌های چهارزاویهٔ

$$\angle GUH=\alpha,\ \angle HUV=\beta,\ \angle UVG=\gamma,\ \angle GVH=\delta$$

معلوم باشند، x را برحسب α، β، γ، δ و l بیان‌کنید.

(تمـرین ۳۴ را به‌یـاد آورید و تـوصیهٔ نیوتون را دنبال کنید: مفروض‌هـا و مجهول‌هایی را انتخاب‌کنیدکـه، به‌کمك آن‌هـا، بتوان به‌سادگی، معادلهٔ لازم را تشکیل داد).

۳۷. ازیك رأس مثلث، نیمساز، میانه و ارتفاع آن را رسم‌کرده‌ایم. مطلوب است زاویهٔ α این رأس، به‌شرطی‌که بدانیم، این سه خط، زاویهٔ رأس

را به‌چهار قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند.

(ممکن است بخواهید شکل مثلث را، دراین حالت، بدانید. به‌هر یك از شرطها، به‌طور جداگانه، توجه‌کنید).

۳۸. مساحت و محیط یـك مثلث قائم‌الزاویه داده شده است. وتر مثلث را پیدا کنید(نیوتون).

۳۹. با فرض معلوم بودن قاعده، ارتفـاع ومجموع ضلع‌های مثلث، خـود مثلث را پیداکنید (نیوتون).

۴۰. ضلع‌ها ویك قطر متوازی‌الاضلاعی داده شده است. قطردیگرآن را پیدا کنید (نیوتون).

۴۱. مثلث متساوی‌الساقینی باضلع‌های a، a و b داده شده است. می‌خواهیم دومثلث متقارن نسبت به‌ارتفاع ومتصل به‌قاعده، چنان ازآن جداکنیم که پنج ضلعی متقارن باقی مانده، متساوی‌الاضلاع باشد. ضلـع x این پنج‌ضلعی را، برحسب a و b، بیان‌کنید.

(لئوناردوی‌پیزایی، مشهور به‌فیبوناچی[1]، این مسأله رابه‌صورت عددی $a = ۱۰$ و $b = ۱۲$، مورد مطالعه قرارداده است).

۴۲. یك شش ضلعی متساوی‌الاضلاع، با ضلع به‌طول a، مفروض است. سه زاویهٔ آن قائمه است؛ این زاویه‌ها، یـك در میان، در کنار سه زاویهٔ منفرجه قرار دارند. (اگر شش ضلعی را $ABCDEF$ بگیریم، مثـلاً، زاویه‌های A، C و E قائمه و زاویه‌هـای B، D و F منفـرجه‌اند.) مساحت این شش‌ضلعی را پیداکنید.

۴۳. مثلث قائم‌الزاویه‌ای داریم به‌وتر c و مساحت S. روی هرضلع مثلث مربعی، در خارج آن، رسم می‌کنیم وکوچکترین شکل محدبی کـه این مربع‌ها را دربربگیرد، درنظر می‌گیریم. این شکل، یك شش‌ضلعی‌است

---

۱. لئوناردوی پیزایی بالقب فیبوناچی [«پسر بوناچو»؛ «بوناچو» یعنی «خوش قلب»، لقب پدر او بـود]، ریاضی‌دان مشهور ایتالیایـی در سده‌هـای میانه [سال‌های‌زندگی او، حدود ۱۱۷۰ تاحدود ۱۲۴۰]، درخشان‌ترین‌ریاضی‌دان در اروپای سده‌های میانه.

(ضمناً، این شش‌ضلعی نامنظم است: سه‌ضلع آن، به‌ترتیب، باضلع‌های سه‌مربع مشترك است و روشن است‌که یکی از سه‌ضلع دیگـرآن برابر است با c). مساحت این شش‌ضلعی را پیدا کنید.

۴۴. c وتر، a و b ضلع‌های مجاوربه‌زاویهٔ قائمه و d قطردایرهٔ محاطی یك مثلث قائم‌الزاویه است. ثابت‌کنید:

$$a+b=c+d$$

(این مسأله را، طور دیگری هـم می‌توان تنظیم کرد: بـا معلوم بودن a، b و c، مقدار d را پیدا کنید).

۴۵. مثلث متساوی‌الاضلاعی، درمثلث متساوی‌الاضلاع دیگری، چنان‌محاط شده است‌که ضلع‌های متناظردومثلث برهم عمود باشند. ضمناً،مساحت مثلث بزرگتر، به‌چهار تکـه تقسیم شده است. مساحت هریك از ایـن تکه‌ها، چه‌بخشی از مساحت مثلث بزرگتر را تشکیل می‌دهند؟

۴۶. مثلث مفروض را، به‌وسیلهٔ سه‌خط راست، به‌هفت قسمت، چنان‌تقسیم کنید که چهار قسمت آن مثلث (و بقیه، پنج‌ضلعی) باشد. ضمناً، یکی از مثلث‌ها، محدود به‌سه خط راست قاطع و هـریك ازسه مثلث دیگر، محدود به‌یك ضلع مثلث اصلی و دوخط راست قاطع باشند. این سه‌خط راست را چگونه رسم‌کنیم‌که هرچهار مثلث برابرباشند؟ دراین تقسیم، مساحت هریك از این چهار مثلث، چه بخشی از مساحت مثلث اصلـی را تشکیل می‌دهند؟

(ابتدا، حالت خاصی از مثلث را در نظربگیریدکه، برای آن،حل مسأله ساده‌تر باشد.)

۴۷. نقطهٔ P در درون مستطیلی قرار دارد. فاصلهٔ P از یك رأس مستطیل برابر ۵ متر، ازرأس روبه‌روی رأس قبلی برابر ۱۴ متر و از رأس‌سوم برابر ۱۰ متر است. فاصلهٔ P را از رأس چهارم مستطیل پیدا کنید.

۴۸. فاصله‌های a، b و c نقطه‌ای از صفحه تا سه‌رأس مربعی واقع درهمین صفحه، داده شده است: a و c را فاصلـهٔ نقطه تا دو رأس مقابـل هم می گیریم.

۱°. ضلع u مربع را پیدا کنید؛
۲°. نتیجه‌ای را که به‌دست آورده‌اید، در هریك از حالت‌های زیر، مورد تحقیق قرار دهید:

الف) $a=b=c$، ب) $b^2=2a^2=2c^2$،
پ) $a=0$، ت) $b=0$.

۴۹. سکه‌های یک سنتی (دایره‌های مساوی) روی میز بزرگی قرار دارند (دقیق‌تر: روی میز خیلی بزرگ ــ روی صفحهٔ بی‌انتها). به‌دو طریق آن‌ها را درکنار هم می‌چینیم:

در طریق اول، هرسکه برچهار سکهٔ دیگر مماس است وخطهای راستی که مرکزهای سکه‌های مماس برهم را به‌هم وصل می‌کنند، صفحه را به‌مربع‌های یکسان تقسیم می‌کنند.

در طریق دوم، هرسکه برشش سکهٔ دیگر مماس است وخطهای راستی که مرکزهای سکه‌های مماس را به‌هم وصل می‌کنند، صفحه را به‌مثلث‌های متساوی‌الاضلاع یکسانی تقسیم می‌کنند.

بخشی از مساحت راکه، در هریك از دوحالت، به‌وسیلهٔ سکه‌ها پوشیده می‌شود، محاسبه کنید.

(شکل ۱۸ـa (ازصفحهٔ ۱۵۶) می‌تواندنوع دوم آرایش سکه‌هاونخستین شکل ۱۸ـb (صفحهٔ ۱۵۷) نوع اول آن را، برای شما روشن کند.)

۵۰. هندسهٔ فضایی. درداخل مکعبی به‌ضلع a، ۹ کرهٔ غیرمتقاطع باشعاع‌های برابر r قرار دارد (۹ توپ تنیس در جعبه‌ای مکعبی شکل بسته‌بندی شده است). مرکز یکی از کره‌ها در مرکز مربع واقع و بر هشت کرهٔ دیگر مماس است (توپ‌ها، چسبیده به‌هم قرارگرفته‌اند). هریك‌ازهشت کرهٔ جانبی، برسه‌وجه مکعب (که یك‌کنج تشکیل‌داده‌اند) مماس‌است. r را برحسب a محاسبه کنید.

[یا a برحسب r ــ که درمورد توپ‌های ما، باید جعبهٔ آن را بسازیم. این مسأله، در هندسهٔ مسطحه شبیهی دارد (مثلاً، ۳۳ را ببینید)؛ آیا می‌توان از نتیجهٔ آن و یا روش حل آن استفاده کرد؟]

۵۱. مسألهٔ فضایی شبیه تمرین ۴۷ را تنظیم کنید.

۵۲. هرمی را منتظم گویند که قاعدهٔ آن، یك چندضلعی منتظم باشد و، ضمناً، ارتفاع هرم، از مرکز قاعده بگذرد.

هرم منتظمی با قاعدهٔ چهارضلعی داریم که ارتفاع آن برابر h و پنج وجه آن هم‌ارز یکدیگرند (یعنی مساحت‌های برابر دارند). سطح کل هرم را پیدا کنید.

۵۳. (ادامه). بین هرم منتظم ومثلث متساوی‌الساقین، نوعی شباهت‌وجود دارد. در هرحالت، اگر تعداد وجه‌های هرم معلوم باشد، هردو شکل، چه فضایی وچه مسطحه، با دو فرض معین می‌شوند.

بازهم چند مسأله، دربارهٔ هرم منتظم، درست کنید.

۵۴. مسأله‌ای فضایی، مشابه تمرین ۴۰ بسازید (تمرین ۱۲ می‌تواند، به‌عنوان کلید، مورد استفاده قرار گیرد).

۵۵. این هم یك مسألهٔ فضایی، شبیه تمرین ۴۹.

از تقسیم فضای سه‌بعدی، به‌مکعب‌های مساوی، آغاز کنید.

نخستین روش پرکردن فضا: برای هرمکعب، کره‌ای هم مرکزآن درنظر بگیرید که برشش‌وجه مکعب مماس باشد.

دومین روش پرکردن فضا: به «هردومین» مکعب، کره‌ای هم‌مرکز با مکعب همراه کنید که برهردوازده یال مکعب مماس باشد (در نظر داشته باشید که ازدومکعبی که‌یك‌وجه مشترك داشته باشند، یکی‌شامل مرکزکرهٔ مربوط به‌آن است ودیگری شامل آن نیست).

درمورد هردو روش، معلوم کنید، چه قسمتی ازفضا به‌وسیلهٔ کره‌ها پرمی‌شود؟

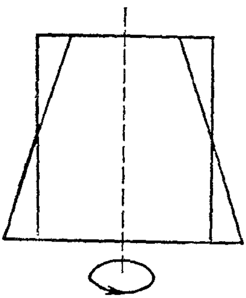
۵۶. مطلوب است سطح چهاروجهی تمرین ۱۳، به‌شرطی که a، b و c مفروض باشند (آیا دراین‌جا، شباهتی با رابطهٔ مسطحه نمی‌بینید)؟.

۵۷. از دوازده مثلث متساوی‌الاضلاع برابر، هشت مثلث، وجه‌های یك هشت‌وجهی منتظم و چهار مثلث، وجه‌های یك چهاروجهی منتظم را تشکیل داده‌اند. نسبت‌حجم‌هشت‌وجهی به‌حجم چهاروجهی را پیدا کنید.

۵۸. «تورت» به‌شکل یك منشور قائم باقاعدهٔ مربعی است(مکعب مستطیل)، که قاعدهٔ بالا ووجه‌های جانبی آن را لعابی پوشانده است.

ارتفاع منشور $\frac{۵}{۶}$ ضلع قاعـدهٔ آن است. «تورت» را بـه ۹ قسمت طوری تقسیم کنید که همهٔ قطعه‌ها مساوی باشند و، علاوه برآن، همهٔ قطعه‌ها، یك مقدار لعاب داشته باشند. یکی از قطعه‌ها، بایـد به‌شکل منشوری با قاعدهٔ مـربع باشد که لعاب تنها قاعـدهٔ بالای آن را گرفته باشد. نسبت ارتفاع به ضلع قاعدهٔ این منشور را محاسبه کنید و هر ۹ قطعه را به‌تفصیل شرح دهید.

۵۹. مثلثی را، ابتدا دور ضلع a، سپس دور ضلع b و، بالاخره، دور ضلع c دوران می‌دهیم و سه‌جسم دوار به دست می‌آوریم. نسبت حجم‌هـای این سه جسم و، همچنین، نسبت سطح آن‌ها را پیدا کنید.


شکل ۱۲. بچرخانید.

۶۰. نامساوی. یـك مستطیـل و یـك ذوزنقـهٔ متساوی‌الساقیـن، شبیه شکـل ۱۲، قـرار گرفته‌اند. این دو شکل، دارای یك محور تقارن (قائم) ویك‌ارتفاع hهستندومساحتی برابر دارند. اگر دو قاعدهٔ بالایی وپایینی ذوزنقه را با $۲a$ و $۲b$ نشان دهیم، قاعدهٔ مستطیل برابر $a+b$ می‌شود. ضمن‌دوران دور محور تقارن، از مستطیل یك استوانه و از ذوزقفه یـك مخـروط ناقـص به‌دست می‌آید. کدام یك از این دوجسم، حجمی بزرگتر دارند؟ (ممکـن است پاسخ را با تصور هندسی بدهید، ولـی باید آن را به کمـك جبر ثابت کنید.)

۶۱. گوی‌سنج. چهـار نقطـهٔ A، B، C و D روی سطح کـره‌ای داده شده است. نقطه‌های A، B و C یك مثلث متساوی‌الاضلاع تشکیل‌می‌دهند که ضلع آن برابر است با a. از نقطهٔ D عمودی برصفحهٔ ABC فرود آورده‌ایم که طول آن برابر h و پای ایـن عمود در مرکز مثلث واقع

است.

مطلوب است محاسبهٔ R، شعاع کره، برحسب a و h.

(این ترکیب هندسی، اساس گوی‌سنج (سفرومتر) ووسیله‌ای است برای تعیین انحنای عدسی. در این گوی‌سنج، نقطه‌های A، B و C، انتهای سه پایهٔ موازی و نقطهٔ D، «پایهٔ» چهارم متحرك را تشکیل می‌دهند. ضمناً، ارتفاع h، با تعداد دوران‌های پیچ، اندازه گرفته می‌شود.)

۶۲. پنج یال یك چهاروجهی، طولی یکسان و برابر a و ششمی طولی برابر b دارد.

۱°. شعاع R، کرهٔ محیطی چهاروجهی را، برحسب a و b محاسبه کنید.

۲°. چگونه می‌توانید از نتیجهٔ ۱°، برای محاسبهٔ یك‌سطح کروی (و مثلاً، عدسی)، استفاده کنید؟

۶۳. اتم کربن چهار ظرفیتی. برای تجسم آن در فضا، اتصال‌های ظرفیتی را، به‌صورت متقارن قرار می‌دهند.

مرکزیك چهاروجهی منتظم را، با پاره‌خطهایی، به‌چهار رأس آن وصل کنید و زاویهٔ α، بین هردو پاره‌خط دلخواه را به‌دست آورید.

۶۴. نورسنج. لامپ L با I شمع و لامپ L' با I' شمع، به‌فاصلهٔ d از یکدیگر قرارگرفته‌اند. مطلوب است جای پرده‌ای که بین لامپ‌ها و عمود برمحور متصل‌کنندهٔ آن‌ها قرارگرفته است، به‌شرطی که شدت روشنایی در هردو طرف آن، یکی باشد.

(اگر شدت نور منبع نقطه‌ای L، برابر I باشد، شدت نوری که برسطحی به‌فاصلهٔ x از L و عمود برشعاع نور می‌تابد، برابراست با $\frac{I}{x^2}$. برای این‌که به‌پرسش مسأله پاسخ بدهید، دو کرهٔ هم‌مرکز را، به‌شعاع‌های ۱ و x، و مرکز مشترك L، درنظر بگیرید.)

۶۵. نمودار حرکت. درمسأله‌هایی که، درآن‌ها، حرکت چند شیء (چندنقطهٔ

مادی) در یک مسیر، مورد بررسی قرار می‌گیرد، اغلب از دستگاه قائم محورهای مختصات استفاده می‌کنندکه، در آن، زمان t را روی محور طول و مسافت طی شدهٔ s را روی محور عرض (با محاسبهٔ از نقطهٔ تثبیت شده‌ای) درنظرمی‌گیرند. برای این‌که فایدهٔ این روش را نشان دهیم، دوباره به‌مسأله‌ای برمی‌گردیم‌که در ۴۹، ۳°، به‌تفصیل دربارهٔ آن بحث کردیم.

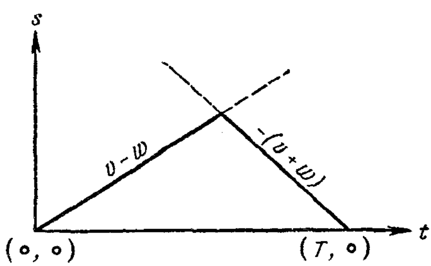
زمان t ومسافت پیموده شدهٔ s را، به ترتیب، از لحظهٔ پرواز و از نقطهٔ پروازهواپیما می‌گیریم. به‌این ترتیب، بعد از t ساعت‌به‌طرف نقطهٔ برگشت، فاصلهٔ‌هواپیما از نقطهٔ پرواز، برابر است با:

$$s=(v-w)t$$

این معادله، که در آن، v و w مقدارهایی ثابت و s و t متغیرند، در دستگاه مختصات ما، به‌صورت خطراستی با ضریب زاویهٔ $(v-w)$ (سرعت هواپیما) درمی‌آید. این‌خط راست، از مبداء مختصات‌می‌گذرد [نقطهٔ $(0, 0)$، به‌معنای نقطهٔ‌آغاز پرواز هواپیما است]. دربرگشت، زمان t و فاصلهٔ s، با این رابطه به‌هم مربوط می‌شوند:

$$s=-(v+w)(t-T)$$

که خط راستی است باضریب زاویهٔ $-(v+w)$، که از نقطهٔ $(T, 0)$ می‌گذرد (و نشان می‌دهدکه هواپیما، در زمان مقرر t، به‌نقطهٔ اولیهٔ پرواز برمی‌گردد).



شکل ۱۳. نمودار حرکت

نقطهٔ برخورد این دوخط راست، هم متعلق به پرواز در جهت نخستین وهم متعلق به پرواز در جهت عکس است و، بنابراین، معرف نقطهٔ برگشت (در فضا و در زمان) می‌باشد. در این نقطه، باید هردو رابطهٔ مربوط به s برقرار باشد، یعنی داشته باشیم:

$$(v-w)t=-(v+w)(t-T)$$

که ازآن‌جا، نتیجه می‌شود

$$t=\frac{(v+w)T}{2v}$$

وبنابراین (با استفاده از یکی از دو معادله)، برای فاصلهٔ تا نقطهٔ برگشت، به‌این عبارت می‌رسیم:

$$s=\frac{(v^2-w^2)T}{2v}$$

در §۴، ۳° هم، به‌همین نتیجه رسیده بودیم (درآن‌جا، به‌جای s، نوشته بودیم: x).

در شکل ۱۳ (به‌قسمت‌های نقطه‌چین توجه نکنید)، پروازهواپیما، با یك خط شکسته نشان داده شده، که از دو پاره‌خط راست تشکیل‌شده است؛ این پاره‌خطها، در نقطه‌ای به‌هم می‌رسند که عرض آن، معرف حداکثر فاصله‌ای است که هواپیما دور می‌شود. تمامی خط شکسته، در مجموع، کل پرواز را روایت می‌کند: این خط شکسته نشان می‌دهد که، درلحظهٔ مورد علاقهٔ ما، هواپیما درکجا قراردارد و درچه‌لحظه‌ای به‌نقطهٔ مورد نظر ما می‌رسد! چنین خطی را، **نمودار پرواز** (نمودار حرکت) می‌نامند.

۶۶. دو نامه‌رسان A و B، که به‌فاصلهٔ ۵۹ میل از یکدیگر قرار دارند، هنگام صبح به‌طرف یکدیگر حرکت‌کردند. A در هر۲ ساعت ۷ میل و B در هرسه ساعت ۸ میل طی می‌کند؛ ضمناً، B یك ساعت دیرتر از A حرکت‌کرده است. A چند میل برود تا به B برسد؟ (نیوتون).

۶۷. (ادامه). مسألهٔ قبل را تعمیم دهید.

۶۸. «آرت» و «بیل» در دو انتهای یك خیابان زندگی می‌کنند. آرت باید

پاکتی را به‌خانهٔ بیل، و بیل پاکتی را به‌خانهٔ آرت برساند. آن‌ها، در یك زمان، از خانه خارج شدند و هر کدام، با سرعتی ثابت حرکت کردند و، بلافاصله بعد از رساندن پاکت به‌نشانی موردنظر، برگشتند. در راه، بار اول در aمتری خانهٔ آرت و بار دوم در bمتری خانهٔبیل، یکدیگر را ملاقات کردند.

۱°. طول خیابان چقدر است؟

۲°. اگر $a=۱۰۰$ و $b=۴۰۰$ (متر) باشد، کدامیك سریع‌تر حرکت کرده‌اند؟

۶۹. بوب، پیتر و پل با هم مسافرت می‌کنند. پیتر و پل به‌خوبی‌می‌توانند پیاده‌روی کنند وهرکدام ازآن‌ها، ساعتی p کیلومتر می‌روند. ولی‌بوب، که پاهایش درد می‌کند، براتومبیل‌کوچکی سوار است‌که تنها دو نفر می‌توانند درآن بنشینند؛ این‌اتومبیل، سرعتی برابر c کیلومتر درساعت دارد. این سه نفر، برای مسافرت خود، این طرح را ریختند: آن‌ها با هم و در یك زمان حرکت کنند، ضمناً پل با ماشین بوب برود و پیتر پیاده. بعد اززمان معینی، پل از ماشین پیاده شود و راه را پیاده‌ادامه دهد، بوب تنها برگردد، پیتر را سوارکند و با هم به‌دنبال پل بروندتا به‌او برسند. دراین‌جا، پل و پیتر نقش خود را عوض کنند، یعنی پل سوار اتومبیل بشود و پیتر پیاده راه بیافتد. از این‌جا، دوباره، همان وضع اول تکرار شود و آن‌قدر ادامه یابد تا به‌مقصد برسند.

۱°. این گروه، در هر ساعت، چه فاصله‌ای (چند کیلومتر) جلو می‌رود؟

۲°. چه سهمی ازکل زمان حرکت را، بوب در اتومبیل، به‌تنهایی می‌گذراند؟

۷۰. (ادامه). مسألهٔ قبل را تعمیم دهید: بوب (که پاهایش درد می‌کند و صاحب یك اتومبیل دو نفری است) به همان ترتیب، با nدوست A، B، C، ... خود (به‌جای دونفر)عمل می‌کند؛ سرعت پیاده‌را p کیلومتر درساعت می‌گیریم.

(نمـودار حرکت را، بـرای حالت $n=۳$، رسم کنید. حالت‌های حدی را، که متناظر با مقدارهای $p=۰$، $p=c$، $n=۱$ و $n=\infty$ است، مطالعه کنید.)

۷۱. سنگی را به‌چاه می‌اندازیم. عمق چاه را از روی صدای برخوردسنگ با کف چاه پیدا کنید (نیوتون).

باید زمان T بین دولحظه را پیداکنید: اول لحظهٔ رهاکردن‌سنگ و، دوم، لحظهٔ شنیدن صـدای برخورد آن باکف چاه. عـلاوه براین، سرعت c حرکت صوت و شتاب g جاذبه را بدانید.

به‌فرض معلوم بودن T، c و g، عمق d چاه را پیدا کنید.

۷۲. ستارهٔ دنباله‌داری، روی خط راست وبه‌طور یکنواخت حرکت‌می‌کند. با سه مشاهده، مسیر ستاره را در فضا، معین‌کنید.

O را چشم ناظر و A، B و C را جای ستارهٔ دنباله‌دار، متناظربا سه مشاهده، فرض‌کنید. از این مشاهده‌ها، زاویه‌های

$$\angle AOB=\omega \quad \text{و} \quad \angle AOC=\omega'$$

و زمان‌های t و t'ـ به ترتیب، فـاصلهٔ زمانـی بین اولین و دومیـن مشاهده، و اولین وسومین مشاهده‌ـ به‌دست می‌آید. با فرض یك‌نواخت بودن حرکت، داریم:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{t}{t'}$$

اگر ω، ω'، t و t' معلوم باشند، مطلوب است زاویهٔ $\beta=\angle ABO$ (یکی از رابطه‌های مثلثاتی زاویهٔ β، و مثلاً $cotg\beta$، رابرحسب ω، ω'، t و t' بنویسید.)

۷۳. تعداد معادله‌ها، برابراست با تعداد مجهول‌ها. x، y و z را،ازدستگاه سه معادلهٔ زیر پیدا کنید:

$$۳x-y-۲z=a$$
$$-۲x+۳y-z=b$$
$$-x-۲y+۳z=c$$

a، b و c را معلوم بگیرید.

(آیا شرط صادق است؟ آیا شرط، برای پیدا کردن مجهول‌ها کافی است؟)

۷۴. تعداد معادله‌ها، بیشتر از تعداد مجهول‌ها است. سه عدد p، q و r را طوری پیداکنیدکه این تساوی، نسبت به x، یك اتحاد باشد:

$$x^{۴}+۴x^{۳}-۲x^{۲}-۱۲x+۹=(px^{۲}+qx+r)^{۲}$$

(در این مسأله، باید چند جمله‌ای درجهٔ چهارم مفروض، مجذور کامل باشدکه تنها درحالت‌های خاصی ممکن است، نههمیشه.چرا؟)

۷۵. ثابت کنید، عددهای a، b، c، A، B و C (حقیقی یا موهومی) را نمی‌توان طوری انتخاب‌کرد که معادلهٔ

$$x^{۲}+y^{۲}+z^{۲}=(ax+by+cz)(Ax+By+Cz)$$

به‌طور اتحادی و به‌ازای هرمقدار دلخواه x، y و z برقرار باشد.

۷۶. تعداد معادله‌ها، کمتر از تعداد مجهول‌ها است. یك‌نفر ۱۰۰ عددخوك، بز ومیش را به ۱۰۰ کرون خرید؛ برای او، هرخوك $۳\frac{۱}{۲}$ کرون، هربز $۱\frac{۱}{۳}$ کرون و هرمیش $\frac{۱}{۲}$ کرون تمام شد. این شخص، چند خوك، چند بز و چند میش خریده است (اولر).

اولر این مسأله را به ترتیب زیر، که آن را «قانون کور» (Regula caeci) می‌نامد، حل کرده‌است. x، y و z را، به‌ترتیب، تعداد خوك‌ها، بزها ومیش‌ها می گیریم؛ روشن است که x، y و z، باید عددهایی درست ومثبت باشند. با توجه به‌فرض‌های‌مسأله، به‌این دو معادله می‌رسیم:

$$x+y+z=۱۰۰$$

$$۲۱x+۸y+۳z=۶۰۰$$

اگر z را بین این دو معادله حذف و معادلهٔ حاصل را نسبت به yحل کنیم، به دست می‌آید: $y=۶۰-\frac{۱۸x}{۵}$. از این‌جا، معلوم‌می‌شود که

$t=\frac{x}{5}$ باید عددی درست و مثبت باشد.

حل را تمام کنید.

۷۷. کسی که سکه‌های تقلبی می‌سازد (و امیدواریم که، سکه‌های او، کاملاً شبیه سکه‌های اصلی نباشد)، سه نمونهٔ مختلف نقره دارد: اولی ۷ اونس نقرهٔ خالص در هرمارك (مارك برابر است با ۸ اونس)، دومی $\frac{1}{2}$۵ اونس در مارك و سومی $\frac{1}{2}$۴ اونس در هرمارك. می‌خواهد آلیاژی به‌وزن ۳۰ مارك شامل ۶ اونس نقرهٔ خالص در هرمارك درست کند. از هرنمونهٔ نقره، چند مارك باید انتخاب کند؟ (اولر).

فرض می‌شودکه جواب باید به‌صورت عددهای درست ومثبت‌بیان شوند. معادله‌ای که تنها به جواب‌های درست آن توجه داشته باشیم، معادله دیوفانتی نامیده می‌شود[1].

۷۸. عددی (درست و مثبت) طوری پیداکنیدکه اگر ۱۰۰ واحد یا ۱۶۸ واحد به‌آن اضافه کنیم، در هرحال، مجذورکامل شود.

۷۹. کلکسیون تمبرهای بوب، از سه آلبوم تشکیل شده است. در آلبوم اول دو دهم تمام تمبرها، در آلبوم دوم، چند هفتم همهٔ تمبرها و در آلبوم سوم ۳۰۳ تمبر وجود دارد. بوب چند تمبر دارد؟ (آیا شرطها، برای پیداکردن مجهول کافی است؟)

۸۰. مغازه‌ای که در مقابل دبیرستان بود، نمونه تازهٔ خودنویس را ۵۰سنت قیمت گذاشته بود. ولی، چون خریداری پیدا نشد، تخفیفی در قیمت قایل شد وهمهٔ خودنویس‌های خود را به‌قیمت ۳۱ دلار و ۹۳ سنت فروخت. قیمت خودنویس را، بعد از تخفیف، پیدا کنید (آیا شرطها، برای تعیین مجهول کافی است؟)

---

۱. بحث نسبتاً مفصلی ازهلفوند، دربارهٔ معادله‌های دیوفانتی را، می‌توانید در شمارهٔ سوم سال هشتم نشریه «آشتی با ریاضیات» (مرداد ۱۳۶۴) ببینید [دیوفانتوس اسکندرانی (حدود سال ۲۵۰ میلادی)، این‌گونه معادله‌ها را طرح وبررسی کرده‌است].معادله‌های دیوفانتی را،معادله‌های سیال‌هم‌می‌گویند.

۸۱. قانون‌های دکارت. کتاب رنه دکارت، ریاضی‌دان و فیلسوف مشهور فرانسوی، که دربارهٔ آن در ۱§ صحبت کردیم، اهمیت زیادی برای بررسی ما دارد.

«قانون‌ها» را، به‌صورتی ناتمام، در میان کاغذهای دکارت و بعداز مرگ او، پیدا کردند. او پیش‌بینی کرده بود که کتاب خود را در ۳۶بند بنویسد، ولی تنها ۱۸ بند از آن را، کم و بیش تمام کرد وخلاصه‌ای از۳ بند دیگر را هم نوشت و، به‌احتمال قوی، بقیهٔ بندها را هرگز ننوشته است. در ۱۲ بند نخست، دربارهٔ روند کار ذهنی ضمن حل یك مسأله، بحث کرده است. در ۱۲ بند بعد، به‌مسأله‌هایی رسیدگی می‌شود که درست طرح شده‌اند و فرض می‌شود که ۱۲ بند آخر، به مسأله‌هایی اختصاص داشته باشد که درست طرح نشده‌اند[1].

هربند، «قانونی» را روشن می‌کند و، به‌دنبال آن، توصیهٔ کوتاهی برای خواننده دارد. بقیهٔ بند، به‌استدلال‌ها، توضیح‌ها، کار روی مثال‌ها و یا شرح بیشتر ازاندیشه‌ای که در قانون خلاصه شده است، اختصاص دارد. از آوردن جمله‌های متن، اغلب خودداری‌می‌کنیم و تنهاشمارهٔ قانون را می‌آوریم.

گفته‌های دکارت، می‌تواند راهنمای با ارزشی برای ما باشد، ولی اگرهمهٔ آن‌ها را، بدون هیچ بحثی، و تنها به‌این دلیل که دکارت گفته است، قبول کنیم، درواقع، به‌خالق اندیشهٔ شك بی‌احترامی کرده‌ایم[2]. شما، نسبت به‌نوشته‌های کتاب من و هرکتاب دیگری هم، باید با نظر انتقادی بنگرید وهرگز نباید، دروضعی باشید که هرنوشته‌ای را، به‌طور

---

۱. اساسی‌ترین خطی‌که، مسأله‌های با طرح درست را از مسأله‌هایی‌که طرح درست ندارند، جدا می‌کند، این است که اولی‌ها منجر به‌یك مسألهٔ خالص ریاضی می‌شوند، درحالی‌که درمورد دومی‌ها چنین نیست.

۲. منظور پولیا، یکی از اساسی‌ترین موضع‌گیری‌های فلسفی دکارت است که، به‌اعتقاد او، درترکیب آگاهی‌ها ودانش‌هایی‌که از راه حس یا تفکر به‌دست می‌آیند، هیچ نقطه‌ای وجود نداردکه نتوان درآن شك کرد.

سطحی، بپذیرید. شما باید در گفته‌های مؤلف، به‌اندازهٔ کافی، دقت کنید و تنها با آن‌هایی موافقت کنید که، به نظرخودتان، روشن است و یا در تجربهٔ شخصی، به‌همان نتیجه‌ها رسیده‌اید. تنها، چنین برخوردی است که با روح «قانون‌های» دکارت سازگار است.

۸۲. **مسأله را عریان و، آن را، تجزیه کنید.** با دکارت هم‌رأی می‌شویم: **مسأله را از همهٔ تصورهـای اضافـی، آزاد و آن را به‌صورتی شامـل ساده‌ترین عنصرهای خود درآورید** [قانون XIII]. این اندرز رامی‌توان دربارهٔ هرمسأله‌ای، با هر گونه مضمونی و در هـرسطحی، به‌کار برد. ولی بهتر است مشخص‌تر صحبت کنیم. یـك مسألهٔ معمولی دبیرستانی دربارهٔ حرکت را درنظر می‌گیریم (مثلاً، مسأله‌ای راکه در §۴، ۳° مورد بررسی قراردادیم). در چنین مسأله‌هایی، شیء متحرك می‌تواند آدم، اتوبوس، قطار یا هواپیما باشد. ولـی باید کمی دقیق‌تر شویم. ضمن حل مسأله‌های ساده‌ای از ایـن قبیل، در واقع، شیء را همچون یك نقطهٔ مادی درنظر می‌گیریم که روی خطی راست حرکت می‌کند. این ساده‌کردن، در بعضی موردها کاملاً مناسب و در برخی‌موردهای دیگر، مخاطره‌آمیز است. با وجود این، تردیدی نیست که، برای‌تبدیل مسألهٔ مـربوط به‌موضوع‌هـای دنیای واقـع، به‌یـك مسألهٔ ریاضـی، نمی‌توانیم بدون نوعی ساده‌کردن وانتزاع عمل کنیم واین، البته به‌این دلیل است که‌مسألهٔ ریاضی، باکمیت‌های انتزاعی‌سروکار دارد و بستگی آن با موضوع‌های دنیای واقع، تنها به‌طورغیرمستقیم است. (چراکه، قبلاً، خود را از فرض‌های مشخص، به‌کمیت‌های انتزاعی‌رسانده‌ایم).

مهندسان وفیزیك‌دانانی که می‌خواهند مسأله‌های‌خود راحل کنند، باید با دقت تمام توجه کنند که، تا چه‌حدی لازم است به‌سمت انتزاع و ساده‌کـردن بروند، به‌چـه قسمت‌هایی می‌توان بی‌اعتنا بود وبه‌کـدام حقیقت‌های کم اهمیت می‌توان توجهی نکرد! آن‌ها باید، ضمناً، از دو خطر متضاد پرهیزکنند. ازیك طرف، نباید اجازه دادکه مسأله، ازدیدگاه ریاضی، بی‌اندازه بزرگ شود و، از طرف دیگر، نباید بیش از اندازه،

جنبهٔ فیزیکی کاررا ساده‌کرد. ماتاکنون موردهایی از این گونه‌داشته‌ایم و، ضمن حل «مسأله‌های کلامی»، با این دو جنبه روبه‌رو بوده‌ایم. تجربه نشان داده است که، پیداکردن مرز ساده‌کردن مجاز، کاری‌دشوار است، ولی هرکسی باید یاد بگیردکه این مرزرا چگونه باید پیداکرد؛ زیرا اگراین دشواری به‌موقع برطرف نشود، می‌تواند بعداً، به‌صورتی جدی‌تر، خودنمائی کند.

در این‌جا، دشواری دیگری هم وجود دارد. در مسأله‌هایی که به‌عنوان راهنما داده می‌شود، امکان ساده‌کردن‌هایی وجود دارد، ولی دربارهٔ این امکان‌ها سکوت شده است. مثلا، سرعت‌های واقعی را می‌توان با حالت‌های ساده‌تری عوض‌کرد، به‌نحوی‌که دراستدلال‌های مقدماتی، همیشه آن‌ها را ثابت به حساب می‌آورند. دانش‌آموز باید به‌این امکان‌ها، که دربارهٔ آن‌ها حرفی زده نمی‌شود، عادت‌کند، او باید یاد بگیردکه چگونه می‌توان با بعضی تفسیرها، رابطه‌ها را ساده‌تر کرد و، به‌همین مناسبت، باید دست‌کم گاه به گاه، دربارهٔ این دشواری به‌بحث پرداخت.

(به‌موقعیت دیگری هم، به‌خاطر اهمیتی‌که دارد، باید اشاره‌کنیم و، از آن‌جا که از خط اصلی ما دور است، تنها به همین اشاره اکتفا می‌کنیم. وقتی که تنظیم مسأله را ساده می‌کنیم و یا بعضی موردهای کم‌اهمیت را، درآن، نادیده می‌گیریم، باید با آن‌هایی که برای پیدا کردن مجهول لازم‌اند، با دقت برخوردکنیم. در بعضی موردها لازم است ازبعضی امکان‌ها و یا صرف‌نظرکردن‌هایی‌که ازطرح مسأله‌استنباط می‌شود، تجاوزکنیم و، مثلا، عددی را با رقم‌های اعشاری بیشتر یا کمتری (بیشتر یاکمترازآن‌چه فرض‌های مسألهٔ ماتلقین می‌کند)محاسبه کنیم. البته، در مسأله‌های مقدماتی، خیلی به‌چنین موقعیت‌هایی برنمی‌خوریم، ولی به‌هرحال، نباید ازآن غافل بود.)

۸۳. آگاهی‌های تکمیلی برای حل مسأله. بسیج و تنظیم. روشن است‌که، اگر از حقیقت‌های فیزیکی موردنظرآگاه نباشیم، (و یا فرض رابرعدم

آگاهی ازآن‌ها بگذاریم)، نمی‌توانیم یک مسألهٔ فیزیکی را به زبان معادله درآوریم. مثلا، اگر ازقانون ارشمیدس اطلاع نداشتیم، نمی‌توانستیم مسألهٔ §۶ را حل کنیم.

وقتی که می‌خواهیم یک مسألهٔ هندسی را، به کمک معادله، بیان کنیم، از قضیه‌ها و حکم‌های هندسی مربوط به آن استفاده می‌کنیم؛ مثلاً قضیهٔ فیثاغورت، متناسب بودن ضلع‌های دو مثلث متشابه، رابطه‌های مربوط به‌محاسبهٔ سطح، حجم وغیره را، ضمن حل یک‌مسألهٔ هندسی، دانسته فرض می‌کنیم.

بدون استفاده از آگاهی‌هایی که مربوط به‌مسأله است، نمی‌توان آن را به‌زبان معادله درآورد. ولی، اگرحتی آگاهی‌های لازم راتنظیم کنیم، ممکن است نتوانیم آن‌ها را، درهمان لحظهٔ ضروری، به‌یاد بیاوریم؛ یا اگر فرض کنیم که آگاهی‌های لازم را در خاطرخود داریم، ممکن است متوجه فایدهٔ آن‌ها، در مسألهٔ موردنظر، نشویم. مطلب کاملا روشن است: این کافی نیست، برآگاهی‌هایی که بالقوه برای ما لازم است، تسلط داشته باشیم، باید بتوانیم آن‌ها را، در جایی که‌لازم است، به‌خاطر بیاوریم؛ باید بتوانیم آن‌ها را زنده کنیم، بسیج کنیم و به‌صورتی مناسب، برای هدف خود، درآوریم؛ باید بتوانیم‌آن‌ها را منظم کنیم.

همان‌طور که‌حل مسأله را جلومی‌بریم، دیدگاه ما نسبت به‌مسأله تغییر می‌کند: روی شکل، خطهای کمکی تازه و تازه‌تری پدیدار می‌شوند؛ در معادله‌های ما، مجهول‌های کمکی جدیدی وارد می‌شوند؛ عنصرهای تازه‌ای بسیج می‌شوند ـ خطهای تازه‌ای که شکل را اشباع می‌کنند، معادله‌های تازه‌ای که تعداد آن‌ها را به‌تعداد مجهول‌هانزدیك می‌کند. همهٔ این عنصرها را، چه‌آن‌هاکه از ابتدا وجود داشته‌اند وچه آن‌هاکه بسیج شده‌اند، دریك مجموعهٔ کامل، منظم کنید (برای روشنی بیشتر، می‌توانید به §۵، °۳ مراجعه کنید).

۸۴. استقلال و سازگاری. دکارت‌توصیه می‌کند، به‌تعداد مجهول‌ها،معادله

بسازید [قانون XIX]. مجهول‌ها را، که تعداد آن‌ها برابر n است، x_1، x_2، ... ، x_n می‌نامیم؛ دراین صورت، دستگاه مورد علاقهٔ خود را می‌توان این‌طور نوشت:

$$r_1(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$
$$r_2(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$r_n(x_1, x_2, \cdots, x_n) = 0$$

که در آن، $r_1(x_1, x_2, \cdots, x_n)$- و همین طور، سمت چپ بقیهٔ معادله‌ها- عبارت است از یك چندجمله‌ای نسبت به x_1، x_2، ... ، x_n. دکارت توصیه می‌کندکه این دستگاه را، منجر به یك معادلهٔ منتجه کنید [قانون XXI]. معمولا («در حالت‌های عادی») می‌توان این راه را طی کرد و باز معمولا، یا دستگاه دارای یك جواب است (که عبارت است از مجموعه‌ای از عددهای حقیقی یا موهومی برای متغیرهای x_1، x_3، ... ، x_n، که به‌طور هم‌زمان، در هر n معادله صدق می‌کنند) و یا مجموعه‌ای متناهی از جواب‌ها را به‌دست می‌دهد (که تعداد آن‌ها، بستگی به درجهٔ معادلهٔ منتجه دارد).

ولی، حالت‌های «استثنایی» («خاص») هم پیدا می‌شود؛ ما در این‌جا نمی‌توانیم، به این مطلب، به‌طور کامل بپردازیم و تنها به یك مثال ساده قناعت می‌کنیم.

دستگاه سه معادلهٔ خطی سه‌مجهولی زیر را درنظر می‌گیریم:

$$a_1x + b_1y + c_1z + d_1 = 0$$
$$a_2x + b_2y + c_2z + d_2 = 0$$
$$a_3x + b_3y + c_3z + d_3 = 0$$

که در آن x، y و z مجهول‌ها و دوازده حرف a_1، b_1، ... ، d_3، عددهای حقیقی معلوم هستند. فرض می‌کنیم a_1، b_1، c_1 و، همین‌طور a_2، b_2، c_2 یا a_3، b_3، c_3، به‌طور هم‌زمان، برابر صفر نباشند. اگر x، y و z را، مختصات نقطه‌ای از فضا بگیریم، هریك ازاین معادله‌ها،

معرف یك صفحه خواهند بود؛ بنابراین، دستگاه سه معادلهٔ ما، متناظر است با دستگاهی از سه صفحه که، به‌وضع معینی، درفضا قراردارند.

برای حل چنین دستگاهی از سه معادلهٔ خطی، سه حالت را ازهم جدا می‌کنیم.

۱°. جواب وجود ندارد، یعنی نمی‌توان سه عدد حقیقی x، y و z را طوری پیداکردکه، به‌طور همزمان، در هرسه معادله صدق کنند. دراین حالت گویند، معادله‌ها متوافق یا سازگار نیستند و دستگاه را ناسازگار گویند.

۲°. مجموعهٔ جواب، یك مجموعهٔ نامتناهی است، دراین‌صورت، دستگاه را نامعین گویند. این‌حالت، شامل موردی هم می‌شودکه‌هرسه - عددی از x، y و z که در دومعادلهٔ دستگاه صدق کنند، به‌خودی‌خود، درمعادلهٔ سوم هم صدق می‌کنند. دراین حالت، می‌گویند که معادلهٔ سوم، مستقل از دو معادلهٔ دیگر نیست.

۳°. جواب وجود دارد و منحصر به‌فرد است. دراین حالت، معادله‌ها مستقل از یکدیگرند و دستگاه سازگار و معین است.

این سه حالت را، با توجه‌به‌سه صفحه، از نظر هندسی مجسم کنید (یعنی، وضع صفحه‌ها را نسبت به‌هم، شرح دهید).

۸۵. منحصر به‌فرد بودن جواب. نگاهی به‌جلو. اگریك مسألهٔ شطرنج یایك معما، چند جواب داشته باشد، آن را غیردقیق می‌نامیم. به‌طورکلی، ظاهراً برای مسأله‌هایی‌که جواب منحصر به‌فرد داشته باشند، امتیازی قایلیم؛ این‌ها، مسأله‌هایی «واقعی» و «دقیق» هستند. خود دکارت‌هم، ظاهراً، همین دیدگاه را داشته است؛ او می‌گوید: «برای کامل‌بودن مسأله، مطلوب‌آن است‌که دقیقاً تعریف شده باشد، به‌نحوی که‌به‌کمك آن، چیزی بیشتر از آن‌چه می‌توان از مفهوم‌های مفروض بیرون آورد، به‌دست نیاید» [قانون XIII].

آیا جواب مسألهٔ ما منحصر به‌فرد است؟ آیا شرط‌ها، برای به دست آوردن مجهول کافی است؟ اغلب باید این پرسش‌ها را، از

همان ابتدای حل مسأله، دربرابرخود قراردهیم. با طرح این پرسش‌ها، درواقع، نباید منتظر پاسخ نهایی باشیم و یا امیدوار باشیم که آن را بلافاصله پیدا کنیم (پاسخ کامل، وقتی داده خواهد شد که مسأله، به‌طور کامل، حل شده است). ما تنها به‌یك پاسخ مقدماتی نیاز داریم، به‌یك حدس و پیش‌بینی (که بتواند نفوذ ما را درمسأله، عمیق‌تر کند). گاهی، پیش‌بینی ما درست ازآب درمی‌آید، اما این امکان هم وجود داردکه گرفتار یك دام بشویم (همان‌طورکه در مثال‌های §۸، چنین بود).

ضمناً، حتی درموردی که معادلهٔ درجهٔ n ($n>1$)، دارای n ریشه است، ممکن است جوابی منحصربه‌فرد داشته باشیم. این وضع، موقعی پیش می‌آید که، بنابرشرط مسأله، باید جوابی حقیقی، مثبت یا درست داشته باشیم ودربین ریشه‌های معادله، تنها یکی سازگار با این‌شرط، پیدا می‌شود.

۸۶. چرا «مسأله‌های کلامی» لازم‌اند؟ امیدوارم توانسته باشم، این‌حقیقت را، برای برخی ریاضی‌دانان، روشن‌کرده باشم که مهم‌ترین بخش از مسأله‌هایی‌که درآموزش دبیرستانی وجود دارد، عبارت است‌ازتشکیل معادله برای حل مسأله‌های کلامی. برای تأیید این مطلب، بی‌شك، دلیل‌های زیادی وجود دارد.

دانش‌آموز، برای حل چنین مسأله‌هایی، باید موقعیت‌های واقعی دنیای خارج را، به زبان ریاضی برگرداند و، ضمناً، با تجربهٔ شخصی خود قانع شود که، مفهوم ریاضی با واقعیت‌های دنیای خارج بستگی دارند، اگرچه، برای درك این بستگی، مطالعه‌ای دقیق لازم باشد. در همین‌جاست‌که برنامه می‌تواند امکان تجربه‌ای پرارزش رافراهم‌آورد. برای دانش‌آموزانی‌که نمی‌خواهند ریاضیات را برای حرفهٔ آیندهٔ خود بیاموزند، این موقعیت، تنها وآخرین تجربهٔ آن‌هاست. ولی مهندسان و دانشمندانی‌که حرفهٔ آن‌ها نیاز به‌استفاده از ریاضیات دارد، ازاین تجربه، همیشه، برای‌ترجمهٔ مسأله‌های دنیای‌واقع، به‌زبان مفهوم‌های ریاضی، استفاده خواهند کرد. اگرمهندسی، درآمدی بالا داشته باشد،

می‌تواند ریاضی‌دانی را به‌خدمت خود درآورد وحل ریاضی‌مسأله‌های مهندسی را از او بخواهد[1]؛ بنابراین، یك مهندس آینده، به‌طور کلی، نیازدیگری به‌ریاضیات به‌قصدحل مسأله ندارد. باوجود این، موقعیتی وجود داردکه مهندس نمی‌تواند تنها متکی به‌ریاضی‌دان باشد: مهندس باید تا آن‌جا ریاضیات بداندکه بتواند مسأله موردنظر خود را، به‌صورت ریاضی درآورد. بنابراین، وقتی‌که مهندس‌آینده، راه تشکیل معادله را (برای‌حل مسأله‌های کلامی) در دبیرستان می‌آموزد، برای نخستین بار، باکاربرد ریاضیات‌درحرفهٔ آیندهٔ خودآشنا می‌شود و، برای نخستین بار، در موقعیتی قرارمی‌گیردکه بتواند دراین راه بسیار مهم، استعدادخود را بیازماید.

۸۷. مسأله‌های تکمیلی. سعی‌کنید خودتان مسأله‌هایی شبیه آن‌چـه دراین فصل دیده‌اید ـ ولی متفاوت با آن‌ها ـ درست‌کنید و، البته، مسأله‌هایی که خودتان بتوانید آن‌ها را حل کنید.

---

۱. روشن است که این حکم نویسنده، مربوط به‌اوضاع و احوال امریکا است، اگرچه می‌توان تردیدکردکه امروز، حتی درمحیط امریکاهم، بتوان آن را عام دانست.

فصل سوم

بازگشت

۱§ . تاریخچهٔ یک کشف کوچک

روایتی دربارهٔ گوس کوچک ــ که بعدها کارل فردریک گوس بزرگ و سلطان ریاضی دانان[1] شد، وجود دارد. من این داستان را در کودکی شنیده‌ام و درستی و نادرستی آن، خیلی کم مرا ناراحت کرده است.

«این روایت دربارهٔ گوس کوچک، وقتی که هنوز به دبستان می‌رفت شنیده‌شده‌است. معلم، مسأله‌ای نه‌چندان‌ساده داده بود: عددهای ۱، ۲، ۳و غیره‌تا ۲۰ را باهم جمع کنید. آموزگار، امیدوار بودتا زمانی که دانش‌آموزان به‌انجام این عمل جمع نسبتاً طولانی مشغول‌اند، آزادباشد؛ ولی با ناراحتی وشگفتی متوجه شدکه گوس کوچک، بلافاصله گام به‌جلو گذاشت، تختهٔ کوچک شامل نوشتهٔ خود را روی میز معلم گذاشت و گفت: «آماده است»: و این درحالی بودکه هنوزبقیهٔ شاگردان تازه‌آغاز به‌کارکرده بودند. معلم که کاملاً

---

۱. «Princeps Mathematicorum» (لاتینی ــ «سلطان ریاضی دانان»)ــ لقبی نیمه رسمی، که درزمان زندگی گوس، به‌اوداده شده بود (این واژه، روی مدال یادبودی که در سال مرگ گوس (۱۸۵۵)، تهیه شد، حک شده است).

مطمئن بود، پاسخ پسرك نادرست است، اصلاً به نوشتهٔ او نگاه نکرد و گوس را به‌خاطر گزافه‌گویی، به‌سختی تنبیه‌کرد. بعد صبر کرد تا بقیهٔ شاگردان کار خود را تمام کردند و یکی یکی، تختهٔ خـود را، روی میز معلم و، طبعاً، روی تختهٔ گوس گذاشتند؛ آن وقت همه را برگرداند و به‌تختهٔ سنگ لوح گوس نظر انداخت. و چقدر شگفت‌زده شد، وقتی که روی سنگ لوح گوس تنها یك عدد را دیدکه، ضمناً، پاسخ درست مساله بود. این عدد چه بود و گوس کوچك چگونه، آن را، پیداکرده بود؟»

ما البته، به‌درستی نمی‌دانیم، گوس چگونه این عدد را به‌دست‌آورده بود و هرگز هم از حقیقت امـر اطلاع پیدا نخواهیم کـرد. ولی با تصور، می‌توان، چیزی نزدیك بـه حقیقت را حدس زد. گوس، درآن موقع کم سال بود و به درجهٔ کمال سنی و عقلانی نرسیده بـود. ممکن است‌کـه او، با تمرکزدقت‌خودروی‌مطلبی اساسی‌تر، توانسته باشدنتیجهٔ مسأله را، بلافاصله و قبل از هم‌سالان خود، پیدا کند. بسیار احتمال داردکه او، روشن‌تروبهتر از هم‌سالان خود توانسته است پیش خود تصور کندکه، مسأله چه چیزی را خواسته است، یعنی چگونه باید مجموع عددهای زیر را پیدا کرد؟

۱
۲
۳
.
.
.
۲۰

او باید مسأله را، نه به‌طور عادی و شبیه دیگران، بلکه به صورتی عمیق‌تردیده باشد؛ چه بسا که‌آن را به‌صورت دنبالهٔ‌نمودارهای A، B، C، D و E دیده باشدکه در شکل ۱۴ نشان داده شده است.

درتنظیم اولیه‌مسأله، رشته‌عددها را ازآغازنوشته‌ایم (A). ولی‌می‌توانستیم انتهای رشته (B) یا بهتر ازآن، ابتدا و انتها را بـه‌طور هم زمان بنویسیم (C). ممکن است، در این مرحله، توجه ما به دو عدد انتهایی (اولین عدد وآخرین عدد) جلب شود و ممکن است متوجه رابطه‌ای بشویم که بین‌آن‌ها

A	B	C	D	E
۱	۱	۱	۱	۱
۲	.	۲	۲	۲
۳	.	۳	۳	۳
.	.	.	.	⋮
		.	.	۱۰
.	.	.		۱۱
				⋮
.	۱۸	۱۸	۱۸	۱۸
	۱۹	۱۹	۱۹	۱۹
۲۰	۲۰	۲۰	۲۰	۲۰

شکل ۱۴. پنج مرحلهٔ یک کشف

وجود دارد (D). وهمین جاست که احتمال پدیدآمدن اندیشه‌ای وجوددارد (E). بله. مجموع هر دو عددی که به‌یک فاصله از دو انتها باشند، مجموع معینی می‌دهد:

$$۱+۲۰=۲+۱۹=۳+۱۸=\cdots=۱۰+۱۱=۲۱$$

و بنابراین، مجموع رشته برابر است با

$$۱۰\times۲۱=۲۱۰$$

آیا گوس هم، به‌همین راه رفته است؟ من دراین باره چیزی نمی‌دانم. من فقط می‌گویم که، طبیعی است، مسأله در چنین حال و هوایی حل شده باشد. چه چیزی به‌ما کمک کرد تا بتوانیم مسأله را حل کنیم؟ راه حل را از آن جهت پیدا کردیم که نمودار (E) در ذهن ما به وجود آمد؛ آن طور که دکارت‌می‌گفت: «حقیقت را آشکارا وروشن دیده‌ایم»، ما توانستیم‌ساده‌ترین و مناسب‌ترین روش را برای محاسبهٔ مجموع مورد نظر، پیدا کنیم. ابتدا بین دو روش متضاد حل مسأله در تردید بودیم (A و B)، و بالاخره به روش تلفیق آن‌ها، به‌صورت تقارنی (C) رسیدیم. مقابلهٔ عددهای نخستین

با عددهای پایانی، ما را به‌اندیشه‌ای رسانید (D) کـه کاملاً مناسب و در دسترس بود. آیا اندیشهٔ قطعی گوس هم، به‌همین گونه به‌دست آمده است؟ آیا او هم، برای رسیدن بـه‌هدف، از همین پلکان بالا رفته است؟ یاآیا از روی برخی ازآن‌ها پریده است؟ یا از همهٔ آن‌ها عبور کرده است؟ آیا مستقیماً، به طرف نتیجه، گام برداشته‌است؟ ما، به‌این پرسش‌ها، نمی‌توانیم پاسخ بدهیم. معمولاً، یك اندیشهٔ روشن، بعد از تزلزل‌ها و تردیدهایی پدید مـی‌آیدکه، البته، ممکن است خیلی کوتاه باشد. در مـورد مسألهٔ ما هم، بی‌شك، چنین بوده است و، گوس کوچك هم، مسلماً، حالت مشابهی را گذرانده است.

به‌تعمیم مطلب بپردازیم. همین مساله‌ای را که حل کردیم، مبنا قرار می‌دهیم و تنها، به‌جای عدد تصادفی ۲۰، عدد درست و مثبت دلخواه n را در نظر می‌گیریم، به‌این مساله می‌رسیم: مطلوب است مقدار S، مجموع n عدد درست ومثبت اولیه.

به‌این ترتیب، باید این مجموع را پیدا کنیم:

$$S=۱+۲+۳+\cdots+n$$

اندیشه‌ای را که هم اکنون مـورد استفاده قـرار دادیـم (و چه بسا، همین اندیشه، در مغز گوس کوچك هم جرقه زده بود)، حاکی ازآن بـودکـه باید زوج‌عددهایی‌را تشکیل‌دهیم که درهر کدام‌ازآن‌ها، جمله‌ای‌وجود داشته‌باشد که به‌فاصلهٔ معینی از ابتدا و جمله‌ای که به همان فاصله از انتها قرارگرفته باشد. کافی است، اندکی با تبدیل‌های جبری آشنا باشیم، تا بدون زحمت به طرح زیر برسیم.

مجموع S را دو بار می‌نویسیم، با این شرط که در سطر دوم، ردیف جمله‌ها برعکس باشند:

$$S=۱+\quad ۲\quad +\quad ۳\quad +\cdots+(n-۲)+(n-۱)+n$$
$$S=n+(n-۱)+(n-۲)+\cdots+\quad ۳\quad +\quad ۲\quad +۱$$

زوج عددهایی که‌در روش قبل، مبنای‌راه حل بودند، دراین‌جا خیلی مناسب قرارگرفته‌اند: برای هر زوج، یکی از عددها زیر دیگری قرار دارد. این‌دو برابری را، با هم جمع می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$۲S=(n+۱)+(n+۱)+(n+۱)+\cdots+(n+۱)+(n+۱)+(n+۱)$$

$$۲S=n(n+۱)$$

$$S=\frac{n(n+۱)}{۲}$$

و این، یك دستور کلی است، این دستور، به‌ازای $n=۲۰$ به‌همان نتیجه‌ای می‌رسد که گوس کوچك به‌دست‌آورده بود.

§۲. هدیهٔ آسمان

این هم مسأله‌ای، شبیه مسأله‌ای که در بند قبل حل کردیم: مطلوب است مجموع مجذورهای n عدد طبیعی نخستین.

مجموع مجهول را S می‌گیریم (بدون ارتباط با نام‌گذاری مجموع مسألهٔ قبل)، یعنی فرض می‌کنیم:

$$S=۱+۴+۹+۱۶+\cdots+n^۲$$

روش محاسبهٔ این مجموع، چندان واضح نیست. خصلت‌آدمی این است که، به‌دنبال همان جریانی برودکه قبلاً به‌او یاری رسانده است. با به یادآوردن بند قبل، به‌این فکر می‌افتیم که این‌مجموع را هم دو باربنویسیم و، ضمناً، در سطر دوم، ردیف جمله‌ها را به ترتیب عکس در نظر بگیریم:

$$S=۱+۴+۹+\cdots+(n-۲)^۲+(n-۱)^۲+n^۲$$

$$S=n^۲+(n-۱)^۲+(n-۲)^۲+\cdots+۹+۴+۱$$

ولی جمع‌کردن این دو برابری، که در مورد مجموع قبلی بی‌اندازه ثمربخش بود، در این جا چیزی به‌دست نمی‌دهد: تلاش ما با ناکامی مواجه می‌شود، ظاهراً پیش ازآن‌که به‌ماهیت مطلب پی‌ببریم، با خوش‌بینی‌زیادی به‌کار پرداخته‌ایم، تقلید ساده‌لوحانهٔ ما از روشی‌که در جای دیگری مفید بوده است، چندان عاقلانه ازآب درنیامد(نیروی عادت درذهن‌ما، بی‌اندازه نیرومند است، ذهن ما به‌سختی به‌چیزی‌که یك بارتایید شده است می‌چسبد، ولو این‌که‌آن چیز در موقعیت تازه‌ای قرارگرفته و دچار تغییر شده باشد). با وجود این، حتی این تلاش غیر منطقی را نباید بـه کلی بی‌فایده دانست:

کمترین فایدهٔ آن این است که بـه ما امکان می‌دهد دشواری مسألهٔ خود را، نسبت به‌مسألهٔ بند قبل، به‌صورت روشن‌تری ارزیابی کنیم.

حالا نشان می‌دهیم، این مساله را چگونه بایدحل کرد. دستور مربوط به‌مکعب دوجمله‌ای را، در حالت خاص زیر، در نظر می گیریم:

$$(n+۱)^۳=n^۳+۳n^۲+۳n+۱$$

که می‌توان،آن را، به‌این صورت هم نوشت:

$$(n+۱)^۳-n^۳=۳n^۲+۳n+۱$$

این رابطه، برای هر مقدار دلخواه n درست است؛آن را، به ترتیب، برای $n=۱, ۲, ۳, \cdots, n$ می‌نویسیم:

$$۲^۳-۱^۳=۳\times۱^۲+۳\times۱+۱$$
$$۳^۳-۲^۳=۳\times۲^۲+۳\times۲+۱$$
$$۴^۳-۳^۳=۳\times۳^۲+۳\times۳+۱$$
$$\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot$$
$$(n+۱)^۳-n^۳=۳n^۲\quad+\quad۳n+۱$$

ساده‌ترین عملی که می‌توان روی ایـن n برابری انجام داد، چیست؟ البته، جمع کردن آن‌ها! ازآن جا کـه، ضمن جمع کردن، جمله‌های واقع در سمت چپ برابری‌ها، دوبه‌دوبا هم حذف می‌شوند، برای سمت چپ‌مجموع، مقدار بسیار ساده‌ای بـه‌دست می‌آید. در سمت راست برابری‌ها، ضمن جمع کردن، باسه‌ستون سروکارداریم. ستون اول شامل مجموع S، یعنی‌مجموع مجذورهای n عدد طبیعی اولیه است؛ ستون‌آخر، شامل n عدد واحد است، این‌ستون هیچ دشواری برای ما به‌وجود نمی‌آورد. ستون وسط، به‌مجموع n عدد طبیعی اولیه منجر می‌شودکه‌آن را، در بند قبل، بـه‌دست‌آورده‌ایم. سرآخر، به‌این برابری می‌رسیم:

$$(n+۱)^۳-۱=۳S+۳\times\frac{n(n+۱)}{۲}+n$$

که‌درآن، همه چیزمعلوم است (یعنی همهٔ جمله‌ها برحسب n بیان شده‌اند)، به‌جز مجهول S؛ بنابراین، از ایـن برابری، می‌توان مجهول S را به‌دست

آورد. با تبدیل‌های سادهٔ جبری، به‌دست می‌آید:

$$2(n^3+3n^2+3n)=6S+3(n^2+n)+2n$$

$$S=\frac{2n^3+3n^2+n}{6}$$

و یا سرانجام

$$S=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

آیا از این راه حل خوشتان‌آمد؟

اگرخواننده‌ای بتواند دلیل‌های محکمی برای عدمِ رضایت خودارائه دهد، من بلافاصله با ناخشنودی او هم رای خواهم شد. با وجود این، ببینیم، این راه حل چه عیبی دارد؟

درستی ودقت راه حل، روشن است؛ علاوه‌برآن، ثمربخش، روشن و کوتاه است. به‌یاد بیاورید‌که در ابتدای کار، چقدر دشوار به‌نظر می‌آمد ـ انتظار پیدا کردن راه حلی روشن‌تر وکوتاه‌تر، خوش بینی بیش از اندازه‌ای می‌خواهد. با همهٔ این‌ها، تا جایی که من می‌توانم داوری‌کنم، مبنایی برای یك اعتراض جدی وجود دارد: جواب، ناگهان و از جایی سردرآوردکه به هیچ‌وجه قابل انتظار نبود، همچون یك هدیه‌آسمانی. جواب، همچون خرگوشی‌بودکه یکباره ازکلاه شعبده‌بازبیرون می‌جهد. راه‌حل را با راه‌حل مسألهٔ بند قبل مقایسه‌کنید. درآن جا، تا اندازه‌ای توانستیم، به طور عینی پیش خود مجسم‌کنیم‌که چطور پیدا شده است، توانستیم مسیری را که حل کننده پیموده است، حدس بزنیم و حتی امیدوار شدیم‌که بتوانیم راه حل مسأله‌های شبیه آن را خودمان پیدا کنیم. ولی در این جا، راه‌حل، بدون هیچ اشاره‌ای به سرچشمهٔ آن، مطرح شد؛ در میان حیرت ما، یك برابری، که معلوم‌نیست ازکجا پدیدارشد، نوشته شد و، سپس، همه چیزبه‌کمك‌آن‌به دست‌آمد؛ ضمناً، هیچ‌توضیحی‌داده نشدکه چگونه وبه‌چه ترتیبی، این برابری را حدس زده‌اند.

وهمهٔ این‌ها دلسردکننده است؛ ما می‌خواهیم یاد بگیریم که چگونه

مسأله‌ها را حل کنیم، و با مطالعهٔ چنین راه حل‌هایی، چطور می‌شود به این هدف رسید؟

۳§. با وجود این سزاوار دقت است!

بله، درست به‌همین دلیل، می‌توان برای آموزش حل مساله‌ها، نتیجهٔ مهمی از این راه حل بیرون آورد. درست است کـه طرح چنین راه حلی، به خودی خود، نمی‌تـواند آموزنده باشد، زیرا سرچشمهٔ آن برای ما پوشیده است و، بنابراین، ما را بـه‌یاد نـوعـی شعبده‌بازی و حیله‌گری می‌اندازد. مـی‌خواهید راز این معما را بدانید؟ سعی کنید خودتان آن را انجام دهید. چه بسا که به‌ریشهٔ کارپی ببرید. حیله، چنان موفقت‌آمیز است که نمی‌توانیم از آن صرف‌نظر کنیم.

تعمیم را آغاز می‌کنیم. مسأله‌هایی را که در ۱§ و ۲§ مورد مطالعه قرارداديم، ازیک‌دیدگاه بررسی می‌کنیم تا بتوانیم از توان kام n عدد طبیعی اولیه صحبت کنیم:

$$S_k = 1^k + 2^k + 3^k + \cdots + n^k$$

در بند قبلی، ثابت کردیم:

$$S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

و قبل از آن دیدیم

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2}$$

این حالت حدی را هم، می‌توان به‌آن‌ها اضافه کرد[۱]:

$$S_0 = n$$

اکنون، با آغـاز از حالت‌های خاص $(k = 0, 1, 2)$، می‌تـوانیم مسألهٔ

---

۱. زیرا داریم:

$$S_0 = 1^0 + 2^0 + 3^0 + \cdots + n^0 = \underbrace{1 + 1 + 1 + \cdots + 1}_{n \text{ مرتبه}}$$

مربوط به‌پیدا کردن عبارت مشابهی برای S_k را مطرح کنیم. با توجه دقیق به‌این حالت‌های خاص، می‌توانیم حدس بزنیم که S_k، باید چند جمله‌ای از درجهٔ $(k+1)$، نسبت به n باشد.

طبیعی است، برای حالت کلی هم، همان‌حیله‌ای را موردآزمایش قرار دهیم، که در حالت $k=2$، ما را به سادگی و با موفقیت به‌نتیجه رسانید. ولی، قبل از آن، به حالت خاص $k=3$ بپردازیم. در این مورد هم، باید همان‌عمل‌های §۲ را، درسطحی بالاتر، انجام دهیم که، البته، چندان دشوار نیست. در واقع، باید دستور دو جمله‌ای را، برای توان چهارم، بنویسیم:

$$(n+1)^4=n^4+4n^3+6n^2+4n+1$$

و ازآنجا

$$(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1$$

این برابری، برای هرمقدار دلخواه n، برقراراست؛آن را، به‌ترتیب، برای $n=1, 2, \ldots, n$ می‌نویسیم:

$$2^4-1^4=4\times1^3+6\times1^2+4\times1+1$$
$$3^4-2^4=4\times2^3+6\times2^2+4\times2+1$$
$$4^4-3^4=4\times3^3+6\times3^2+4\times3+1$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(n+1)^4-n^4=4n^3+6n^2+4n+1$$

این n برابری را، مثل قبل، با هم جمع می‌کنیم. روشن است که، ضمن جمع کردن، جمله‌های سمت چپ، دو به‌دو حذف می‌شوند؛ در سمت راست هم باید سه‌ستون را باهم جمع کنیم که، هرکدام‌ازآن‌ها، شامل مجموع توان‌های مساوی ازعددهای طبیعی اولیه هستند(یعنی، یکی ازحالت‌های خاص S_k):

$$(n+1)^4-1=4S_3+6S_2+4S_1+S_0$$

ولی، مقدار هر یک از حالت‌های خاص S_2، S_1 و S_0 را، برحسب n، می‌دانیم؛ که اگرآن‌ها را در برابری بالا، قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$(n+1)^4-1=4S_3+6\times\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+$$
$$+4\times\frac{n(n+1)}{2}+n$$

که درآن، همهٔ جمله‌ها، به‌جز S_3، برحسب n بیان شده‌اند. بنابراین، انجام عمل‌های سادهٔ جبری، مقدار S_3 را به‌ما می‌دهد:

$$4S_3=(n+1)^4-(n+1)-2n(n+1)-n(n+1)(2n+1)=$$
$$=(n+1)[n^3+3n^2+3n-2n-n(2n+1)]=$$
$$=(n+1)n[n^2+3n+1-(2n+1)]$$
$$S_3=\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]^2$$

به‌نتیجهٔ لازم رسیدیم، ضمناً، مسیر بحث، حتی‌آموزنده‌تر هم بود، زیرا با استفادهٔ دوباره ازحیلهٔ خود، می‌توانیم، درپشت‌آن، یك طرح کلی راببینیم. کلام حکیمانهٔ مربی مشهور را به‌یادآورید که:

«روش، یعنی راه و شیوه‌ای که بتوانید دوباره از آن استفاده کنید».

۴§. بازگشت

چه جنبه‌ای ازکار ما در بند قبل، ویژگی بیشتری دارد؟ برای این‌که S_3 را به‌دست آوریم، به‌عقب برگشتیم و به‌مقدارهای S_2، S_1 و S_0- که قبلاً پیدا کرده‌بودیم ـ مراجعه‌کردیم. این مطلب، پرتوی بر «حیلهٔ» ما در ۲§ می‌اندازد، «حیله‌ای» که کمك کرد تا S_2 را ازطریق مراجعه به S_1 و S_0 پیدا کنیم.

در واقع، می‌توانستیم از همین طرح، برای S_1 هم استفاده‌کنیم وراه دیگری، غیرازآن‌چه در ۱§ دیدیم، برای محاسبهٔ‌آن، به‌دست‌آوریم. دستور جبری زیر، برای ما کاملاً آشنا است:

$$(n+1)^2=n^2+2n+1$$

و ازآن جا

$$(n+1)^2-n^2=2n+1$$

حالت‌های خاص را می‌نویسیم:

$$2^2-1^2=2\times 1+1$$
$$3^2-2^2=2\times 2+1$$
$$4^2-3^2=2\times 3+1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(n+1)^2-n^2=2\times n+1$$

که اگر آن‌ها را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(n+1)^2-1=2S_1+S_0$$

و چون داریم: $S_0=n$، بنابراین

$$S_1=\frac{(n+1)^2-1-n}{2}=\frac{n(n+1)}{2}$$

که در ۱§ هم، از راه به‌کلی دیگری، آن را پیدا کرده بودیم.

بعد ازآزمایش طرح‌خود، برای حالت‌های خاص $k=1, 2, 3$، حالا دیگرمی‌توانیم، بدون‌هیچ تزلزلی، ازآن، برای بیان حالت کلی S_k استفاده کنیم.

در این جا، به‌دستور دوجمله‌ای، برای نمای $(k+1)$ام، نیاز داریم:

$$(n+1)^{k+1}=n^{k+1}+C_{k+1}^1 n^k+C_{k+1}^2 n^{k-1}+\cdots+1,$$
$$(n+1)^{k+1}-n^{k+1}=(k+1)n^k+\frac{(k+1)k}{2}n^{k-1}+\cdots+1$$

حالت‌های خاص را در نظر می‌گیریم:

$$2^{k+1}-1^{k+1}=(k+1)1^k+\frac{(k+1)k}{2}1^{k-1}+\cdots+1$$
$$3^{k+1}-2^{k+1}=(k+1)2^k+\frac{(k+1)k}{2}2^{k-1}+\cdots+1$$
$$4^{k+1}-3^{k+1}=(k+1)3^k+\frac{(k+1)k}{2}3^{k-1}+\cdots+1$$
$$\cdots\cdots\cdots$$
$$(n+1)^{k+1}-n^{k+1}=(k+1)n^k+\frac{(k+1)k}{2}n^{k-1}+\cdots+1$$

که، از جمع آن‌ها، به‌دست می‌آید:

$$(n+1)^{k+1}-1=(k+1)S_k+\frac{(k+1)k}{2}S_{k-1}+\cdots+S_0$$

از این رابطه، می‌توان S_k را، برحسب n، بـه دست آورد، به شرطی که مقدارهای قبلی این مجموع، یعنـی S_{k-1}، S_{k-2}، ...، S_1 و S_0 معلوم باشند. مثلاً، با در اختیار داشتن مقدارهای S_0، S_1، S_2 و S_3، می‌توان به‌کمك تبدیل‌های سادهٔ جبری، مقدار S_4 را، برحسب n، پیداکرد. بامعلوم شدن S_4، مجموع S_5 و غیره به‌دست می‌آید.[1]

به‌این ترتیب، بابه‌کاربردن «حیلهٔ» §۲ـ که درآغاز«هدیه‌ای آسمانی» به‌نظر می‌رسیدـ به‌روشی می‌رسیم که، با توجه به‌امکان کاربرد آن درآینده، نقش یك دستور را به‌عهده می‌گیرد.

وقتی، به‌دنبالهٔ کاملاً منظمی (مثل دنبالهٔ S_0، S_1، S_2، S_3، ...، S_k، ...) برخوردکنیم،همیشه‌این‌امیدوجوددارد‌که بتوانیم،همهٔ‌جمله‌های آن را، پشت سرهم و یکی بعد از دیگری به‌دست‌آوریم. برای این منظور، دو شرط لازم است: اولاً، باید بتوانیم جملهٔ اول را، به نحوی، پیدا کنیم (در حالت مورد نظر ما، مقدار مجموع S_0، خود بـه خود، روشن است)؛ ثانیاً، بایدرابطه‌ای وجود داشته باشدکه جملهٔ عمومی را به‌جمله‌های ماقبل خود مربوط‌کند (در حالت مـورد نظر ما، S_k بـه S_0، S_1، ...، S_{k-1} مربوط است،که‌آن را به‌کمك «حیلهٔ» §۲، به‌دست‌آوردیم).

اگر این دو عامل وجود داشته باشد، جمله‌های دنباله را می‌توان، یکی پس از دیگری، پشت سرهم و به‌طور بازگشتی و با بازگشت به‌عقب، یعنی با مراجعه به‌همهٔ جمله‌های پیدا شدهٔ قبلی، بـه‌دست آورد. این روش مهم را، روش بازگشتی گویند[2].

---

۱. این روش، متعلق به بلزپاسکال است.

۲. اصطلاح‌های «روش بازگشتی» و «رابطهٔ بازگشتی» را در زبان‌های فرنگی، از واژه لاتینی «recurrens» به‌معنی «برگشت به‌عقب» گرفته‌اند.

§5. طلسم

واژهٔ طلسم (abracadabra) را می‌توان چیزی شبیه «سخن نامفهوم و پیچیده» دانست. امروز، این واژه، به‌صورت تحقیرآمیزتری به کار می‌رود، ولی زمانی بود که آن را همراه با اعجاز می‌دانستند، به‌صورتی رمزگونه (همچون شکل ۱۵–a) می‌نوشتند و مردم هم باور می‌کردند که اگر آن را با خود داشته باشند، از بیماری‌ها و بدبختی‌ها مصون خواهند بود.

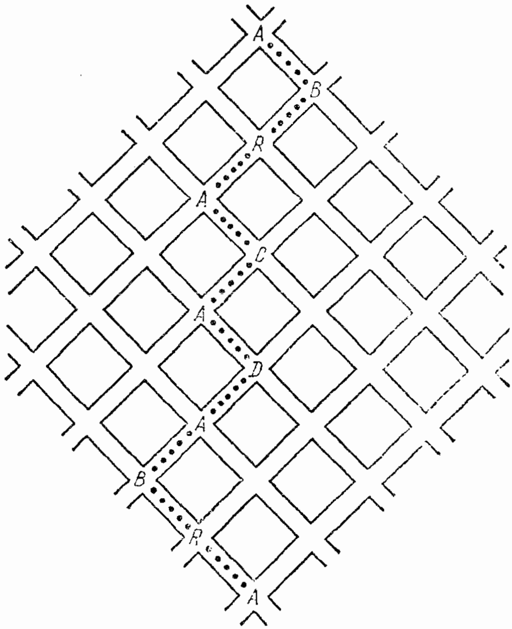
```
          A
        B   B
      R   R   R
    A   A   A   A
  C   C   C   C   C
A   A   A   A   A   A
  D   D   D   D   D
    A   A   A   A
      B   B   B
        R   R
          A
```

شکل ۱۵–a. واژه‌ای سحرآمیز

به چند طریق، می‌توان واژهٔ «*ABRACADABRA*» را روی شکل ۱۵–a خواند؟ ضمناً، به‌خودی خود روشن است که از بالاترین *A* (در راس بالا، «در انتهای شمالی») آغاز می‌کنیم و از بالا به‌پایین و، هر بار، با حرکت به‌سمت حرف همسایه (به طرف خاور یا باختر) جلو می‌رویم، تا به پایین‌ترین *A* (در زاویهٔ جنوبی) برسیم.

پرسش جالبی است. اگر توجه کنید که، در پناه این پرسش، چیز آشنایی پنهان‌شده است، علاقهٔ شما بیشتر هم می‌شود. درواقع، این مسأله، می‌تواند گردش یا مسافرت در شهر را به‌یاد شما بیاورد. فرض کنید، نقشه شهری را، به صورت کوی‌های مربعی شکل، کشیده باشند. گذرگاه‌ها یا خیابان‌های این شهر، از شمال باختری به‌جنوب خاوری و از شمال خاوری به‌جنوب باختری

امتداد دارنـد. خوانـدن هر واژهٔ رمزی در شکـل ۱۵-a، متناظر است با حرکتی پر پیچ و خم در این شبکهٔ خیابان‌ها. وقتی در مسیر علامت‌گذاری شدهٔ شکل ۱۵-b گردش می‌کنید، ازکنار ده محله‌ای‌کـه بین نخستین A و آخرین A قراردارند، عبور می‌کنید. مسیرهای بسیار دیگری هم وجوددارد که، هر کدام آن‌ها از کنار ۱۰ کوی می‌گذرند و این دو نقطهٔ اول و آخر شبکهٔ خیابان‌ها را به‌هم وصل می‌کنند. تعداد کوتاهترین مسیرهای حـرکت بین این دو نقطهٔ انتهایی را پیداکنید. این است آن مسألهٔ کلی جالبی کـه

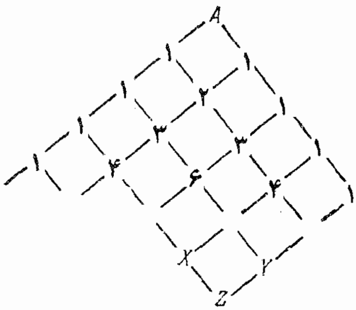


شکل ۱۵-b. یکی ازکوتاه‌ترین مسیرهای پر پیچ و خم

خود را زیر نقاب مسالهٔ مضحك واژهٔ سحرآمیـز شکل ۱۵-a، پنهان کرده است.

تنظیم کلی، می‌تواندامتیازهای زیادی داشته باشد. گاهی به‌پیداکردن روش حل کمك می‌کند ـ بـه خصوص، در حالت مورد نظر ما، چنین است.

اگـر نمی‌توانید مسألهٔ مطرح را حل کنید ـ منظور ما مسأله‌ای است که به شکل ۱۵ـa مربوط می‌شود (ممکن است که شما، به‌واقع، نتوانیدآن راحل کنید) ـ سعی کنید، ابتدا، مسألـهٔ ساده‌تری را، که خویشاوند مسألهٔ اصلی است، حل کنید. در این جا ممکن است تنظیم کلی، ما را به‌این فکر برساند که حالت‌های ساده‌تر را مورد مطالعه قرار دهیم؛ حالت‌هایی که، در واقع، حالت‌های خاصی ازتنظیم کلی باشند. درواقع، اگر در شبکهٔ خیابان‌های ما، دو چهارراه به اندازهٔ کافی بـه هم نزدیك باشند (نزدیکتر از بالاترین A به پایین‌ترین A درشکل ۱۵ـb)، محاسبهٔ همهٔمسیرهای پیچ وخم‌داری که‌آن‌ها را به‌هم وصل می‌کند، دشوار نیست. می‌توانید این مسیرها را یکی پس از دیگری رسم کنید و مجموعهٔ همهٔ آن‌ها را، از نظر بگذرانید. به این توصیه با دقت توجه کنید و، به‌صورتی منظم،آن را مورداستفاده قراردهید. ازنقطهٔ بالایی A آغاز و به‌طرف پایین حرکت کنید. ابتدا نقطه‌هایی را درنظربگیرید که، بعد از عبور از یك کوی، می‌توانید به‌آن‌ها برسید، سپس، نقطه‌هایی که‌در فاصلهٔ دو کوی قراردارندو بعد،آن‌هایی که به‌فاصله سه یا چهارکوی ویابیشتر واقع شده‌اند. کوتاه‌تـریـن مسیرهای پیچ و خم‌دار را،که از A به‌هر یك از نقطه‌هـا می‌رسند، بـررسی و محاسبه کنید. در شکل ۱۶ـa، بعضی از این عددهای حاصل را، یادداشت کرده‌ایم. (شما مـی‌تـوانید خودتـان، هم ایـن عددها و هم عـددهای بعد ازآن‌ها را پیدا کنید و به‌کمك شکل، درستی‌آن‌ها را مورد تحقیق قرار دهید). بادقت، به‌این عددها بنگرید؛ آیا چیزآشنایی درآن‌ها نمی‌بینید؟



شکل ۱۶ـa. تعدادکوتاه‌ترین مسیرهای پیچ و خم‌دار را، محاسبه کنید

اگر با آن آشنا هستید، متوجه خیلی چیزها می‌شوید، ولی اگر قبلاً با چنین جدولی ازعددها برخورد نداشته‌اید، بازهم می‌توانید یك رابطهٔمهم را کشف کنید: هر عدد این جدول، بـه جز واحدها، برابر است با مجموع

دوعددی که در شمال باختری و شمال خاوری آن قرار گرفته‌اند، مثلاً

$$۴=۱+۳,\quad ۶=۳+۳$$

شما، این قانون را، از راه مشاهده، کشف می‌کنید، همان طور که طبیعت‌شناس، از طریق مشاهده، به‌قانون‌های طبیعت پی می‌برد. ولی، بعد از آن‌که قانون را پیدا کردید، باید از خود بپرسید: چرا چنین است؟ چگونه می‌توان آن را ثابت کرد؟

علت، خیلی ساده است. در شبکهٔ خیابان‌ها، سه چهارراه را در نظر بگیرید که، وضع آن‌ها نسبت به‌هم، مثل سه نقطهٔ X، Y و Z در روی شکل ۱۶-a باشند. X، همسایهٔ شمال باختری نقطهٔ Z و Y، همسایهٔ شمال‌خاوری آن است. اگر از نقطهٔ A حرکت کنیم و بخواهیم از کوتاه‌ترین مسیر، خود را به Z برسانیم، باید یا از طریق نقطهٔ X و یا از طریق نقطهٔ Y حرکت کنیم. ولی، وقتی که به‌نقطهٔ X رسیده باشیم، تنها یك راه برای ورود به Z

۱
۱ ۱
۱ ۲ ۱
۱ ۳ ۳ ۱
۱ ۴ ۶ ۴ ۱
۱ ۵ ۱۰ ۱۰ ۵ ۱
۶ ۱۵ ۲۰ ۱۵ ۶
۲۱ ۳۵ ۳۵ ۲۱
۵۶ ۷۰ ۵۶
۱۲۶ ۱۲۶
۲۵۲

شکل ۱۶-b. مربعی که از مثلث بریده شده است.

دراختیار داریم و، درست به‌همین ترتیب، در مورد Y. بنابراین، تعداد کل کوتاه‌ترین مسیرهایی که ، از طریق آن‌هـا، بتوان از A به Z رسید، برابر است با مجموع دو عدد: یکی از این دو عدد ، تعداد کوتاه‌ترین مسیرهـای از A به X و دیگری تعداد کـوتاه‌ترین مسیرهای از A بـه Y است. به این ترتیب، پایهٔ منطقی مشاهدهٔ ما روشن ودرستی قانون‌کلی، ثابت می‌شود.

با روشن شدن این نکته، به‌سادگی، می‌توانیم جدول شکل ۱۶-a را گسترش دهیم (که برای آن، تنها باید از جمع عادی استفاده‌کرد) تا جدول بزرگترشکل ۱۶-b به‌دست‌آید. «انتهای جنوبی» این جدول، عددموردنظر ما را به‌دست می‌دهـد: واژهٔ رمزآمیز «abracadabra» را، روی شکل ۱۵-a، به ۲۵۲ طریق مختلف، می‌توان خواند.

۶§. مثلث پاسکال

به‌احتمالی،خواننده،عددهای‌موردبررسی ما رادربندقبل وویژگی‌های استقرارآن‌ها را، شناخته باشد. عددهایی کـه در شکل‌های ۱۶-a و ۱۶-b دیده می‌شوند، عبارتنداز ضریب‌های دوجمله‌ای و مثلثی‌که شامل آن‌هاست (شکل۱۶-a راببینید)،معمولاً ، مثلث پاسکال نامیده می‌شود(خودپاسکال، آن را «مثلث حسابی» نامیده است). به‌این مثلث، می‌توان سطرهای تازه و تازه‌تری اضافه‌کرد وتا هرجاکه لازم باشد ادامه داد. جدولی راکه در شکل ۱۶-b دیده می‌شود، می‌توان قطعه‌ای مربعی دانست‌که ازیك مثلث بزرگ جدا شده است.

یادآوری ضریب‌های دوجمله‌ای و تنظیم آن‌ها، به‌صورت یك جدول مثلثی را، درنوشته‌های مؤلفان دیگری هم،که قبل از پاسکال می‌زیسته‌اند، می‌توان پیدا کرد، ولی نوشتهٔ پاسکال در ایـن زمینه[1]، چنان کامل است‌که نام‌گذاری مثلث حسابی را به‌نام او،کاملاً توجیه می‌کند.

۱°. ما اکنون‌مناسب‌ترین نام‌گذاری را، برای عددهای‌مثلث پاسکال در اختیار داریم. این،گامی اساسی است، زیرا هر یك از این عددها،که در

1. B. Pascal, Traité du triangle arithmétique

جای معینی از مثلث قرار گرفته است، معنای هندسی کاملاً مشخصی دارد: این عدد عبارت است از تعداد کوتاه‌ترین مسیرهای مختلفی که از رأس مثلث به این نقطه می‌گذرند. تعداد کوی‌هایی که در هر یك از این مسیرها قرار دارد، برای همهٔ آن‌ها یکی است؛ این تعداد را n می‌نامیم. به‌جز این، اگر کوی‌هایی را که در جنوب باختری و جنوب خاوری مسیر قرار گرفته‌اند، به طور جداگانه در نظر بگیریم، و تعدادآن‌ها را، به ترتیب، l و r بنامیم (l — تعداد کوی‌هایی که به‌طرف چپ و پایین و r — تعداد کوی‌هایی که به طرف راست و پایین قرار دارند)، روشن است که

$$n=l+r$$

با معلوم بودن دوعدد ازسه عدد n، l و r، می‌توان سومی را و، درنتیجه، نقطهٔ مربوط به‌آن‌ها را، پیدا کرد. (در واقع، l و r را می‌توان به‌عنوان مختصات قائم نقطه در دستگاهی در نظر گرفت که مبداء آن منطبق بر رأس مثلث پاسکال، یکی از محورها در امتداد جنوب باختری و محور دیگر در امتداد جنوب خاوری باشد.) مثلاً، برای نقطهٔ پایینی A از مسیر، روی شکل ۱۵-b، داریم:

$$l=5,\quad r=5,\quad n=10$$

و برای دومین نقطهٔ B همین مسیر

$$l=5,\quad r=3,\quad n=8$$

تعداد کوتاه‌ترین مسیرهای از رأس مثلث تا نقطه‌ای که به وسیلهٔ حرف‌های n (تعداد کل کوی‌ها) و r (تعداد کوی‌هایی که به‌طرف راست‌پایین هستند) با C_n^r نشان می‌دهیم. مثلاً (شکل ۱۶-b را ببینید):

$$C_8^3=56,$$
$$C_{10}^5=252$$

عددهای شکل ۱۶-a، با نمادهای شکل ۱۶-c، متناظرند. نمادهایی که اندیس پایین برابردارند (یعنی، عدد n برای آن‌ها، یکی است)، روی‌یك خط راست افقی قرار گرفته‌اند (n امین قاعده یا وتر مثلث قائم‌الزاویه). نمادهایی که اندیس بالای آن‌ها یکی است (rآن‌ها باهم برابراست)، به‌صورت

$$
\begin{array}{ccccccccc}
 & & & & C_0^0 & & & & \\
 & & & C_1^0 & & C_1^1 & & & \\
 & & C_2^0 & & C_2^1 & & C_2^2 & & \\
 & C_3^0 & & C_3^1 & & C_3^2 & & C_3^3 & \\
C_4^0 & & C_4^1 & & C_4^2 & & C_4^3 & & C_4^4 \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
 & & & C_n^{r-1} & & C_n^r & & & \\
 & & & & C_{n+1}^r & & & &
\end{array}
$$

شکل ۱۶-c. مثلث نمادی پاسکال

مورب قرار گرفته‌اند (درطول rامین «خیابان»). یکی از ضلع‌های مربعی‌که در شکل ۱۶-b نشان داده شده است، معرف خیابان پنجم و ضلع مقابل آن معرف خیابان صفر (و اگر مایلید، می‌توانیدآن خیابان مرزی یا ریورسایددرایو بنامید) است[1]. شکل۱۶-a،روی قاعدهٔچهارم قطع شده‌است.

۲°. مثلث پاسکال، علاوه برجنبهٔ هندسی، جنبهٔ محاسبه‌ای هم دارد. همهٔ عددهای در طول مرزها، برابرند با واحد (روشن است‌که برای عبور از نقطهٔ مبداء بالا به چهار راهی که در مرزها قرارگرفته است، تنها یك کوتاه‌ترین مسیر وجود دارد). به‌این ترتیب.

$$C_n^0 = C_n^n = 1$$

بد نیست‌که این رابطه را، شرط مرزی‌مثلث پاسکال بنامیم.

هر یك از عددهای داخلی مثلث پاسکال، به یك ردیف افقی یا به یك قاعده (ازمثلث) تعلق دارد. عددی را که روی قاعدهٔ $(n+1)$ام قراردارد، می‌توان با برگشت به عقب، یعنی بابه کاربردن روش بازگشت، و با استفاده از دو عدد مجاور در قاعدهٔ nام، پیدا کرد (شکل ۱۶-c را ببینید):

$$C_{n+1}^r = C_n^r + C_n^{r-1}$$

به‌جاست‌که این رابطه را، رابطهٔ بازگشتی‌ناشی از مثلث پاسکال بنامیم.

---

۱. مؤلف دراین جا، به‌شهر نیویورك و طرح سادهٔ آن نظر دارد، که خیابان‌های وسیع آن،خیابان‌های باریکتررا، با زاویهٔقائمه‌قطع می‌کنند.خیابان پنجم‌یکی از بزرگ راه‌ها و، ریورساید درایو یکی ازخیابان‌های ساحلی این‌شهراست.

۷§. استقرای ریاضی

وقتی، عددی را که درمثلث پاسکال واردشده است، محاسبه‌می‌کنیم، ضمن استفاده از رابطهٔ بازگشتی، باید بر دو عددی کـه، قبلاً و در قاعدهٔ پیشین مثلث، پیدا کرده‌ایم، تکیه‌کنیم. می‌خواهیم طرحی بریزیم‌که، به‌کمك آن، بتوانیم محاسبه را، بدون این‌آگاهی‌های قبلی، انجام دهیم. رابطهٔ‌زیر، روش این محاسبهٔ مستقل را، به‌ما نشان می‌دهد:

$$C_n^r = \frac{n(n-۱)(n-۲)\cdots(n-r+۱)}{۱\times۲\times۳\times\cdots\times r}$$

که ماآن‌را، دستور آشکار، برای‌محاسبهٔ ضریب‌های‌دوجمله‌ای C_n^rمی‌نامیم. این دستور در رسالهٔ پاسکال وجود دارد (ولی او، آن را با بیان شرح داده است نه باعلامت‌های امروزی). پاسکال نگفته است‌که چگونه به‌این نتیجه رسیده است و ما هم به این بحث نمی‌پردازیم که چگونه توانسته است این دستور را به‌دست‌آورد (ممکن است، درابتدا، تنها یك حدس بوده است) ما هم اغلب، چنین قانون‌مندی‌هایی را از راه مشاهده‌کشف می‌کنیم و، سپس، می‌کوشیم نتیجه‌ای‌راکه ازاین‌راه به‌دست‌آورده‌ایم، تعمیم‌دهیم (به‌یادداشت مربوط به‌حل تمرین ۴۰ مراجعه‌کنید). با وجود این، پاسکال، بـرای دستور آشکار خود، اثبات جالبی داده است و ما می‌خواهیم، با توجه بیشتری،این استدلال را مطرح‌کنیم[1].

به‌یك یادداشت مقدماتی نیاز داریـم. این دستور، بـه صورتی‌که ما نوشته‌ایم، نمی‌تواند برای $r=۰$ به کار رود. با وجود این، شرط می‌کنیم که، به‌ازای $r=۰$،طبق تعریف داشته باشیم:

$$C_n^۰ = ۱$$

در حالت $n=r$ هم، دستور مفهوم خود را از دست نمی‌دهد و داریم:

$$C_n^n = \frac{n(n-۱)\cdots۲.۱}{۱.۲\cdots(n-۱)n} = ۱$$

---

۱. ما در این جا، این استدلال را، با نشانـه‌ها و نمادهای امروزی و با جزئی تغییرهایی در برخی جنبه‌های درجه دوم، مطرح‌کرده‌ایم.

که نتیجهٔ درستی است. به‌این ترتیب، دستور را باید تنها برای $0<r<n$ ثابت کنیم، یعنی درداخل مثلث پاسکال، جایی که می‌توان از رابطهٔ بازگشتی استفاده کرد. اکنون به‌نقل گفتهٔ خود پاسکال می‌پردازیم. در این نقل قول، تغییرهای کم اهمیتی داده‌ایم وآن‌ها را با «کروشه» مشخص کرده‌ایم.

با وجودی که حکم مورد نظر (دستورضریب‌های‌دوجمله‌ای)، شامل تعداد بی‌شماری حالت‌های جزئی است، من اثبات کوتاهی، بر اساس دو پیش قضیه، برای‌آن می‌دهم.

پیش قضیهٔ اول می‌گوید که حکم، برای نخستین قاعده، درست است ــ و این، روشن است [دستور، به‌ازای $n=1$ درست است، زیرا در این حالت، مقدارهای ممکن r، یعنی $r=0$ و $r=1$، زیرپوشش‌یادداشت فوق قرار می‌گیرند].

پیش قضیهٔ دوم، چنین است: اگر حکم ما، برای یکی از قاعده‌ها درست باشد [یعنی، برای مقدار دلخواهی از n]، آن وقت، برای قاعدهٔ بعدی هم درست خواهد بود [یعنی، برای $n+1$].

از این دو پیش قضیه، به‌ناچار، درستی حکم برای همهٔ مقدارهای n، نتیجه می‌شود. درواقع، بنابر پیش‌قضیهٔ ۱، حکم برای $n=1$ درست است؛ بنابراین، بنا بـر پیش قضیهٔ ۲، برای $n=2$ هم درست است و، دوباره، بنا بـر پیش قضیهٔ ۲، برای $n=3$ درست است و همین طور تا بی‌نهایت.

به‌این ترتیب، تنها باید پیش قضیهٔ دوم را ثابت کنیم.

با توجه به‌متن‌این پیش‌قضیه، فرض می‌کنیم، دستور ما، برای nامین قاعده درست باشد، یعنی برای مقداردلخواهی از n و برای همهٔ مقدارهای ممکن r (برای $r=0, 1, 2, \cdots, n$). داشته باشیم:

$$C_n^r=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)(n-r+1)}{1\times 2\times\cdots\times(r-1)\times r}$$

همین طور، می‌توانیم بنویسیم (به‌ازای $r\geqslant 1$):

$$C_n^{r-1}=\frac{n(n-1)\cdots(n-r+2)}{1\times 2\times\cdots\times(r-1)}$$

اگر این دو رابطه را با هم جمع‌کنیم، با توجه به‌رابطهٔ بازگشتی، خواهیم داشت:

$$C_{n+۱}^r = C_n^r + C_n^{r-۱} = \frac{n(n-۱)\cdots(n-r+۲)}{۱\times۲\times\cdots\times(r-۱)}\left[\frac{n-r+۱}{r}+۱\right]=$$

$$=\frac{n(n-۱)\cdots(n-r+۲)}{۱\times۲\times\cdots\times(r-۱)}\frac{n+۱}{r}=$$

$$=\frac{(n+۱)n(n-۱)\cdots(n-r+۲)}{۱\times۲\times۳\times\cdots\times r}$$

به‌زبان دیگر، از درستی دستور برای مقداری از n، می‌توان درستی آن را برای $n+۱$ نتیجه‌گرفت. واین، همان‌حکم پیش قضیهٔ دوم است. نقل‌سخن پاسکال، از نظر تاریخی، اهمیت زیادی دارد، زیرا اثبات او، برای نخستین بار، روش استدلالی بسیار جالبی را مطرح کرد که، معمولاً، آن را روش استقرای ریاضی می گویند.

این روش، نیاز به بررسی و توضیح بیشتری دارد[۱]. استدلال بدون مقدمه و بی‌پروا براساس استقرای ریاضی، ممکن است دانش‌آموزان‌رادچار اشکال کند: حتی ممکن است که به آن، به عنوان یك فریب شیطانی و حیله گرانه بنگرند.

البته شما می‌دانیدکه شیطان خطرناك است: انگشت‌کوچك خود را به‌اوبدهید، تمامی دست‌شما را می‌دزدد. ومگر پیش قضیهٔ دوم پاسکال،همین کار را نمی‌کند: با فرض درستی پیش قضیهٔ اول، شما تنها یك انگشت خود را می‌دهید (حالت $n=۱$)، ولی پیش‌قضیهٔ دوم، بلافاصله، انگشت دوم‌شما را هم می گیرد (حالت $n=۲$)، بعد سومی ($n=۳$)، سپس چهارمی وغیره و، سرانجام، حتی اگر بی‌نهایت انگشت هم داشته باشید، همهٔ آن‌ها را

۱. برای آگاهی بیشتر از روش استقرای ریاضی، می‌توانید به کتاب «استقراء ریاضی» نوشته «سومینسکی»،«گولووینا» و«یاگلوم»، ترجمهٔ‌پرویزشهریاری مراجعه‌کنید [انتشارات خوارزمی، چاپ‌اول، ۱۳۴۷]؛ همچنین، «روش‌های جبر» تألیف پرویز شهریاری، فصل استقرای ریاضی را ببینید [انتشارات امیرکبیر].

صاحب می‌شود.

§۸. در جست وجوی شیوه‌های تازه

با توجه به‌سه بند قبلی، به ترتیب، با سه شیوهٔ بررسی، برای تنظیم مثلث پاسکال ـ یعنی ضریب‌های دوجمله‌ای ـ آشنا شدیم.

۱°. شیوهٔ هندسی. ضریب‌های دوجمله‌ای را، می‌توان به عنوان تعدادکوتاه‌ترین مسیرهای پیچ و خم دار بین دو چهارراه معین در شبکه‌ای از خیابان‌ها دانست.

۲°. شیوهٔ محاسبه‌ای. ضریب‌های دوجمله‌ای را، می‌توان به‌کمك رابطهٔ بازگشتی و شرط مرزی، به‌دست‌آورد.

۳°. دستور آشکار. آن را، با روش پاسکال، در §۷ ثابت کردیم.

خود نام مثلث پاسکال، شیوهٔ دیگری را به‌یاد ما می‌آورد.

۴°. دو جمله‌ای نیوتون. برای عدد دلخواه (یا متغیر) x و هر عدد درست و غیر منفی n، این اتحاد برقرار است:

$$(1+x)^n=C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n$$

(برای اثبات، به‌تمرین ۱ مراجعه کنید).

تعبیرهای دیگری‌هم برای عددهای مثلث پاسکال وجود دارد، که‌برای بسیاری‌ازمسأله‌های جالب نقش مهمی به‌عهده‌دارندو ویژگی‌های جالب‌توجهی راآشکارمی‌کنند. ژاکوب برنولی می‌نویسد: «این جدول عددها، ویژگی‌های مهم وجالب زیادی‌دارد. دراین جا، تنهانشان می‌دهیم که، دراین‌جدول، ماهیت وحقیقت نظریهٔ ترکیب، نهفته است [تمرین‌های ۲۳ تا ۲۸ را ببینید]، ولی آن‌هایی‌که با هندسه‌آشنایی دارند، می‌دانندکه، خیلی از رازهای عمیق‌دیگر شاخه‌های ریاضیات هم، درآن، پنهان شده است». سالها گذشت و بسیاری از رازهای‌دیگر این‌جدول، که درزمان‌برنولی‌شناخته‌نبود، فاش‌شد. باهمهٔ‌این‌ها، خواننده‌ای‌که بخواهدبا تمرین‌های جالب‌وآموزنده‌ای‌آشنا شود، دراین‌جا، میدان گسترده‌ای در برابر او قرار دارد: با مطالعهٔ عددهای مثلث پاسکال و تجزیه و تحلیل نتیجه‌های به دست آمده از دیدگاهی معین، و یا حتی چند

دیدگاه با هم، امکانی استثنائی برای کشف حقیقت‌های تازه دارد.

درضمن یادآوری می‌کنیم که درچهار بند اول این فصل، بحث‌تازه‌ای را (دربارهٔ مجموع توان‌های n عددطبیعی اولیه) آغازکردیم. علاوه برآن، با دو روش‌کلی و مهم آشنا شدیم (بازگشت و روش استقرای ریاضی)، که البته، اگر بخواهیم بــه اندازهٔ کافی آن‌ها را حلاجی‌کنیم، باید به‌یك رشته مثال‌ها، بپردازیم. به‌این‌ترتیب، دورنمای گسترده‌ای دربرابرما قرار دارد.

۹§. مشاهده کنید، تعمیم دهید، ثابت کنید و دوباره تا آخر اثبات‌کنید.

به‌نقطهٔ آغاز برمی‌گردیم و، دوباره،آن را از دیدگاه دیگری بررسی می‌کنیم.

۱°. ما ازیك واژهٔ رمزی (شکل ۱۵-a و b را ببینید) ویا دقیق‌تر، از مسأله‌ای‌که به این واژه مربوط می‌شد،آغازکردیم. مجهول، چه بود؟ـ تعدادکوتاه‌ترین مسیرهای پیچ و خم‌داری که، در شبکهٔ خیابان‌های ما، از نخستین A تا آخرین A، یعنی از زاویــهٔ شمالی مربع تا زاویهٔ جنوبی‌آن، وجود دارد. هر یك ازاین مسیرها، باید قطر افقی مربع را، در نقطه‌ای‌قطع کند. تعدادهمهٔ این نقطه‌های تقاطع ممکن (چهار راه‌ها، نقطه‌های A)،روی قطر افقی، برابراست با شش. بنابراین، می‌توان گفت‌که، در مسألهٔ ما،شش نوع متفاوت از مسیرهای پیچ و خم دار وجـود دارد؛ ولی هر یك از این نوع‌ها، به‌طورجداگانه، چند مسیردارند؟ دراین‌جا، مسألهٔ تازه‌ای در برابر ما قرار می‌گیرد.

روی قطرافقی، چهارراه معینی درنظرمی‌گیریم، مثلاً سومین‌چهارراه از سمت چپ (بنابر نشانه‌گذاری‌های ۶§: $l=۳$، $r=۲$، $n=۵$). مسیری که از این نقطه عبور می‌کند، شامـل دو قسمت است: قسمت بالایی‌کـه از گوشهٔ شمالی مربع‌آغاز و بــه‌نقطهٔ مفروض ختم می‌شود، و قسمت پایینی، که ازنقطهٔ مفروض‌آغاز وبه‌گوشهٔ جنوبی مربع ختم می‌شود (شکل ۱۵-b را ببینید). همان طورکه قبلاً هم دیده‌ایـم (شکل ۱۶-b را ببینید)، تعداد

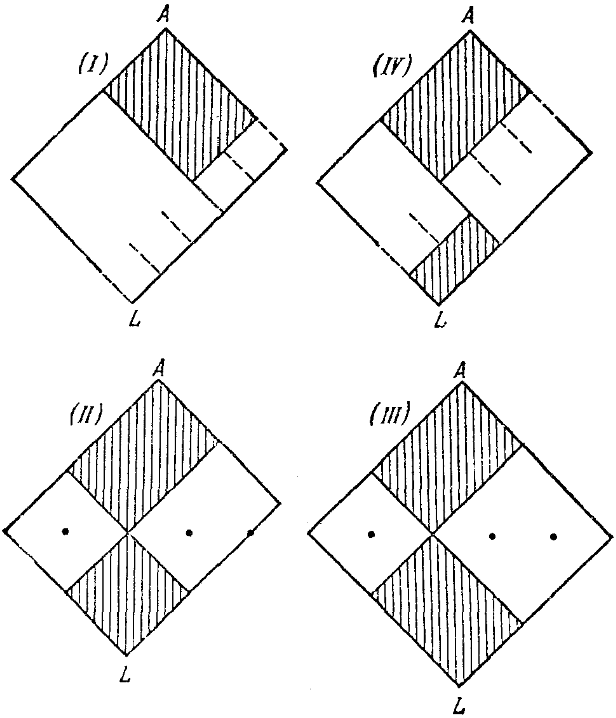
ممکن قسمت‌های بالایی برابر است با

$$C_5^2 = 10$$

تعداد ممکن قسمت‌های پایینی هم، درست همین مقدار است. برای این‌که همهٔ مسیرها را تشکیل دهیم، می‌توان هریك از قسمت‌های بالایی را، به‌هر یك ازقسمت‌های پایینی‌وصل کرد(شکل ۱۷ـIII را ببینید). بنابراین، تعداد این خط سیرها برابر است با

$$(C_5^2)^2 = 100$$

روشن است‌که تعداد مسیرهای پیچ‌و خم داری هم‌که قطر افقی را در نقطهٔ دیگری‌قطع می‌کنند، به‌همین‌ترتیب، معین‌می‌شوند.بنابراین، راه‌حل‌تازه‌ای،



شکل ۱۷. طرح‌ها ــ اشاره‌ها

برای مسألهٔ نخستین پیـدا می‌شود. واژهٔ رمزی شکل ۱۵-a را، می‌توان به تعداد

$$۱+۲۵+۱۰۰+۱۰۰+۲۵+۱$$

طریق مختلف خواند. این نتیجه ، باید با آن چه‌کـه در پایان §۵ به دست آوردیم، تطبیق‌کند؛ درواقع هم، مجموع ما، برابر است با ۲۵۲.

۲°. تعمیم. ضلع مربع شکل ۱۵-b، ازپنج مربع تشکیل شده‌است. باتعمیم آن (یعنی، تبدیل ۵ به n)، به‌دست می‌آید:

$$(C_n^0)^2+(C_n^1)^2+(C_n^2)^2+\cdots+(C_n^n)^2=C_{2n}^n$$

«مجموع عددهای واقع برقاعدهٔ nام مثلث پاسکال، برابراست باعددی‌که در وسط قاعدهٔ $(2n)$ام این‌مثلث قرار گرفته است». درواقع، بحث ۱°، این‌حکم کلی‌را ثابت می‌کند. درست‌است‌که درآن‌جا، حالت خاص $n=5$ را بررسی کردیم (حتی چهارراه‌های قاعدهٔ پنجم را، به صورتی معین درنظر گرفتیم) ، ولی این‌انتخاب عدد مشخص n ، هیچ‌گونه فایدهٔ خاصی نداشت. بنابراین، همان بحث، برای حالت‌کلی هم، درست است. خواننده می‌تواند، به‌عنوان تمرین، تمامی‌آن بحث‌را تکرارکند؛ تنها باید، به‌جای ۵، همه‌جا بگوید n[1].

۳°. یك شیوهٔ دیگر. بـا همهٔ این‌ها، نتیجه‌ای کـه به دست آوردیم، تاحدی نامنتظر بود. اگر بتوانیم ازجانب دیگری به‌این نتیجه‌گیری‌نزدیك شویم، می‌توانیم تجزیه وتحلیل بهتری ازآن داشته باشیم.

اگر یك‌یك شیوه‌های‌مختلفی‌راکه در§۸ برشمردیم، ازنظربگذرانیم، می‌توانیم نتیجه‌گیری خودرا بادستور دوجمله‌ای ، مربوط‌کنیم. و در واقع هم، این رابطه وجود دارد:

$$\begin{aligned}(1+x)^{2n}&=\cdots+C_{2n}^n x^n+\cdots=\\&=(1+x)^n\cdot(1+x)^n=\\&=[C_n^0+C_n^1x+C_n^2x^2+\cdots+C_n^nx^n]\times\\&\times[C_n^n+\cdots+C_n^2x^{n-2}+C_n^1x^{n-1}+C_n^0x^n]\end{aligned}$$

---

۱. دراین جا، با حالت خاصی سروکار داریم‌که نمایندهٔ حالت‌کلی است.

توجه خودرا به‌ضریب x^n متوجه می‌کنیم. این‌ضریب، درسمت راست‌سطر اول، همان مقدار سمت‌راست دستور کلی ما در °۲ است، که درجست‌وجوی اثبات دیگری برای آن هستیم. حالا به‌ضرب دوعبارتی که دردو سطر آخر قراردارند، توجه‌می‌کنیم؛ ضمن نوشتن‌جمله‌های حاصل‌ضرب، توجه‌می‌کنیم که، بنابرویژگی تقارن درضریب‌های دوجمله‌ای داریم:

$$C_n^r = C_n^{n-r}$$

و به‌سادگی معلوم می‌شود که ضریب x^n، دراین‌جا، برابراست باسمت‌چپ دستور °۲. اثبات براین اساس است که، دریك اتحاد نسبت به x، ضریب‌های x^n، دردو طرف برابری، باید باهم برابر باشند. به‌این ترتیب، دستورکلی که در °۲ داشتیم، به‌شیوهٔ دیگری ثابت شد.

تمرین‌ها و یادداشت‌های تکمیلی

بخش ۱

تمرین‌ها و یادداشت‌های اضافی که در این جا آمده است، مربوط به مضمون چهار بند اول است.

۱. دستور دوجمله‌ای را که در §۸، °۴ داشتیم، ثابت‌کنید (ازآن در § ۴، استفاده کردیم).

(از روش استقرای ریاضی استفاده‌کنید. کدام یك ازسه شیوه‌ای که در § ۸، °۴ یادکردیم، برای این منظور مناسب است؟)

۲. حالت خاص، باحالت‌کلی هم‌ارز است. اتحادی که در § ۸، °۴ آوردیم و درتمرین ۱ ثابت‌کردیم، حالت خاصی ازاتحادکلی‌تر زیراست:

$$(a+b)^n = C_n^0 a^n + C_n^1 a^{n-1} b + C_n^2 a^{n-2} b^2 + \cdots + C_n^n b^n$$

ثابت‌کنیدکه‌می‌توان، برعکس، اتحادکلی‌تر ازحالت‌خاص‌آن‌نتیجه گرفت[1].

۳. در سه بند اول این فصل، مجموع S_k را برای $k = 1, 2, 3$ محاسبه

---

۱. هم ارزی کامل حالت‌های خاص و کلی، ممکن است فیلسوف یا ریاضی‌دان ناآزموده را ناراحت کند، ولی در واقع، این‌پدیده برای ریاضیات، امری عادی است.

کردیم؛ $k=0$ حالتی پیش‌پا افتاده است. بامقایسهٔ عبارت‌هایی که به‌دست آورده‌ایم، می‌توان به این‌قضیهٔ کلی رسید: مجموع s_k چندجمله‌ای است ازدرجهٔ $(k+1)$ام نسبت به n، که ضریب بزرگترین درجهٔ آن برابراست با $\frac{1}{k+1}$.

طبق این قضیه داریم:

$$S_k=\frac{n^{k+1}}{k+1}+\cdots$$

نقطه‌ها، نمایندهٔ جمله‌هایی هستندکه درجهٔ آن‌ها، کمتر از $k+1$ است. این قضیه، نقش مهمی درمحاسبهٔ انتگرالی به‌عهده داشته است.

با استفاده ازروش استقرای ریاضی، این قضیه را ثابت کنید.[1]

۴. می‌توان، با پیداکردن نسبت عددی $\frac{S_4}{S_2}$ برای بعضی مقدارهای کوچك n، عبارت مجموع S_4 را حدس زد. درواقع داریم:

$$n=1,\quad 2,\quad 3,\quad 4,\quad 5$$

$$\frac{S_4}{S_2}=1,\quad \frac{17}{5},\quad 7,\quad \frac{59}{5} \text{ و } \frac{89}{5}$$

مخرج‌ها را ، برابر می‌کنیم:

$$\frac{5}{5},\ \frac{17}{5},\ \frac{35}{5},\ \frac{59}{5},\ \frac{89}{5}$$

صورت‌های این کسرها، نزدیك‌ترین عدددرست به‌مضرب‌های شش هستند؛ در واقع، صورت‌ها را ، می‌توان چنین نوشت:

$$6\times1-1,\ 6\times3-1,\ 6\times6-1,\ 6\times10-1,\ 6\times15-1$$

دنبالهٔ عددهای

$$1,\ 3,\ 6,\ 10,\ 15$$

---

۱. شبیه تمرین ۳، می‌توان ثابت کرد که ضریب دومین جمله S_k (یعنی ضریب n^k) به k بستگی ندارد؛ این مطلب را ثابت کنید. این ضریب، چقدراست؟

را قاعدتاً باید بشناسیم.

حالا دیگر می‌توانید، عبارت S_4 را بنویسید؛ بدون استفاده از §۴، آن را با روش استقرای ریاضی ثابت کنید.

۵. مقدار S_4 را، بدون استفاده از تمرین ۴، باروش § ۴، پیدا کنید.

۶. ثابت کنید

$$n = S_0,$$
$$n^2 = 2S_1 - S_0,$$
$$n^3 = 3S_2 - 3S_1 + S_0,$$
$$n^4 = 4S_3 - 6S_2 + 4S_1 - S_0$$

و به‌طور کلی

$$n^k = C_k^1 S_{k-1} - C_k^2 S_{k-2} + C_k^3 S_{k-3} - \cdots + (-1)^{k-1} C_k^k S_0$$

(با این‌که، این دستور، بادستور اصلی §۴ خویشاوند است، باآن فرق دارد.)

۷. ثابت کنید

$$S_1 = S_1,$$
$$2(S_1)^2 = 2S_3,$$
$$4(S_1)^3 = 3S_5 + S_3,$$
$$8(S_1)^4 = 4S_7 + 4S_5$$

و به‌طور کلی $(k = 1, 2, 3, \ldots)$:

$$2^{k-1}(S_1)^k = C_k^1 S_{2k-1} + C_k^3 S_{2k-3} + C_k^5 S_{2k-5} + \cdots$$

ضمناً، آخرین جملهٔ عبارت سمت راست، بسته به‌فرد یا زوج بودن k، برابر است با S_k یا $k\,S_{k+1}$.

(این دستور، شبیه دستور تمرین ۶ است، زیرا می‌توانیم، درآن جا، n^k را به‌صورت $(S_0)^k$ بنویسیم.)

۸. ثابت کنید

$$۳S_۲ = ۳S_۲,$$
$$۶S_۲S_۱ = ۵S_۴ + S_۲,$$
$$۱۲S_۲(S_۱)^۲ = ۷S_۶ + ۵S_۴$$
$$۲۴S_۲(S_۱)^۳ = ۹S_۸ + ۱۴S_۶ + S_۴$$

و به‌طور کلی

$$۳ \times ۲^{k-۱} S_۲(S_۱)^{k-۱} = (C_k^۰ + ۲C_k^۱)S_{۲k} + (C_k^۲ + {} + ۲C_k^۳)S_{۲k-۲} + \cdots$$

ضمناً، بر حسب فرد یا زوج بودن k، آخرین جملهٔ عبارت سمت راست برابری، برابر است با یا $(k+۲)S_{k+۱}$ یا S_k.

۹. ثابت کنید

$$S_۳ = (S_۱)^۲,$$
$$S_۵ = (S_۱)^۲ . \frac{۴S_۱ - ۱}{۳},$$
$$S_۷ = (S_۱)^۲ . \frac{۶(S_۱)^۲ - ۴S_۱ + ۱}{۳}$$

و به طور کلی، $S_{۲k-۱}(۲k-۱ \geqslant ۳)$، یك چند جمله‌ای درجهٔ k از $S_۱ = \frac{n(n+۱)}{۲}$ می‌باشد، که ضمناً، بر $(S_۱)^۲$ بخش‌پذیر است (و این، نتیجه‌گیری §۳ را، تعمیم می‌دهد).

۱۰. ثابت کنید

$$S_۴ = S_۲ . \frac{۶S_۱ - ۱}{۵},$$
$$S_۶ = S_۲ . \frac{۱۲(S_۱)^۲ - ۶S_۱ + ۱}{۷}$$
$$S_۸ = S_۲ . \frac{۴۰(S_۱)^۳ - ۴۰(S_۱)^۲ + ۱۸S_۱ - ۳}{۱۵}$$

و به‌طور کلی، $\frac{S_{۲k}}{S_۲}$، عبارت‌ازیك‌چندجمله نسبت‌به $S_۱$ از درجهٔ $(k-۱)$ام

(و این، تعمیم دستوری است که ضمن حل مثال تمرین ۴، به‌دست آوردیم).

۱۱. نجات کشتی غرق شده. کشتی غرق شده است، ولی ممکن است چیز با ارزشی در آن باشد که ارزش بالاآوردن کشتی را داشته باشد. نقشهٔ شما با ناکامی مواجه می‌شود، ولی چه بسا اندیشه‌ای در آن باشد که، در تلاش برای نجات کشتی، به‌ما کمك کند.

نقشهٔ نخستین ما برای محاسبهٔ S_2 در ۲§، به صورت مفتضحانه‌ای دچار شکست شد: فرایندی که برای محاسبهٔ S_1 مناسب بود، برای محاسبهٔ S_2، به کلی بی‌فایده از آب درآمد. این طرح، چه کمبودی داشت؟ آیا می‌شود، با انعطاف بیشتری، از آن استفاده کرد؟ آیا باید آن را، به‌نحوی، تغییر شکل داد؟ یا این که، از همان طرح، ولی در حالت دیگری استفاده کرد؟

این گونه بحث‌ها، می‌تواند موجب تلاش‌های مختلفی باشد و بنابراین، کاملاً طبیعی است که، این فرایندرا دربارهٔ مجموع «کلی» S_k مورد آزمایش قرار دهیم. اساسی‌ترین مطلب، دراین فرایند، کدام است؟ پیونددادن دو جمله‌ای که از دو انتها به‌یك فاصله‌اند. مثلاً، جمله‌های j^k و $(n-j)^k$ در S_k چنین‌اند: فاصلهٔ یکی از این دو جمله از یك انتهای مجموع، برابر است با فاصلهٔ جملهٔ دیگر از انتهای دیگر آن. اگر از مجموع آن‌ها، چیزی عاید نمی‌شود، تفاضل آن‌ها را امتحان کنیم؛ شاید بعد از چند آزمایش بتوانیم بین ترکیب زیر و k رابطه‌ای پیدا کنیم:

$$(n-j)^k-(-j)^k=n^k-C_k^1n^{k-1}j+C_k^2n^{k-2}j^2-\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{k-1}C_k^{k-1}nj^{k-1}$$

این رابطه را با درنظر گرفتن عددهای ۰، ۱، ۲، ۰۰۰، $n-1$ و n برای j، به‌ترتیب می‌نویسیم:

$$n^k-(-1)^k\,.\,0^k=n^k$$
$$(n-1)^k-(-1)^k.1^k=n^k-C_k^1n^{k-1}.1+C_k^2n^{k-2}.1^2-\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{k-1}C_k^{k-1}n\,.\,1^{k-1},$$
$$(n-2)^k-(-1)^k2^k=n^k-C_k^1n^{k-1}.2+C_k^2n^{k-2}.2^2-\cdots$$
$$\cdots+(-1)^{k-1}C_k^{k-1}n.2^{k-1},$$

$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$

$$\begin{aligned} 1^k-(-1)^k(n-1)^k = n^k - C_k^1 n^{k-1}(n-1) + \\ + C_k^2 n^{k-2}(n-1)^2 - \cdots \\ \cdots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} n(n-1)^{k-1}, \\ 0^k - (-1)n^k = n^k - C_k^1 n^{k-1} . n + C_k^2 n^{k-2} . n^2 - \cdots \\ \cdots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} n . n^{k-1} \end{aligned}$$

که با جمع کردن آن‌ها و با توجه به‌علامت گذاری‌های §۳ (و با نوشتن S'_0 به‌جای (S_0+1))، به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} S_k[1-(-1)^k] = n^k S'_0 - C_k^1 n^{k-1} S_1 + C_k^2 n^{k-2} S_2 - \cdots \\ \cdots + (-1)^{k-1} C_k^{k-1} n S_{k-1} \end{aligned}$$

نتیجه گیری اخیر را، برای $k=1, 2, 3$ مورد بررسی قرار دهید، سپس، برای حالت کلی، آن را ارزیابی کنید.

۱۲. این علامت گذاری را در نظر می‌گیریم:

$$1^k+2^k+3^k+\cdots+n^k = S_k(n)$$

که خصلت مجموع را، نسبت بـه علامت گذاری §۳، کامل‌تر و بهتر نشان می‌دهد؛ در ایـن جا، k، عددی است درست و غیـر منفی و n، عددی درست و مثبت.

اکنون، حوزهٔ مقدارهای n را گسترش می‌دهیم (بدون تغییر حوزهٔ مقدارهای k) و فرض می‌کنیم که $S_k(x)$ یك چندجمله‌ای نسبت به x از درجـهٔ $(k+1)$ باشد و بـه ازای مقدارهای درست و مثبت x، بر $S_k(n)$ منطبق شود، مثلاً

$$S_3(x) = \frac{x^2(x+1)^2}{4}$$

ثابت کنید، به‌ازای $k \geqslant 1$ (و نه به‌ازای $k=0$) داریم:

$$S_k(-x-1) = (-1)^{k-1} . S_k(x)$$

۱۳. مجموع n عدد فرد اولیه

$$1+3+5+\cdots+(2n-1)$$

را پیدا کنید (از همهٔ شیوه‌های آشنا استفاده کنید).

۱۴. مجموع $1+9+25+\cdots+(2n-1)^2$ را پیدا کنید.

۱۵. مجموع $1+27+125+\cdots+(2n-1)^3$ را پیدا کنید.

۱۶. (ادامه) مسألهٔ قبل را تعمیم دهید.

۱۷. مطلوب است محاسبهٔ مجموع

$$2^2+5^2+8^2+\cdots+(3n-1)^2.$$

۱۸. (ادامه) مسألهٔ قبل را تعمیم دهید.

۱۹. عبارت ساده‌ای برای مجموع زیر پیدا کنید:

$$1\times 2+(1+2)\times 3+(1+2+3)\times 4+\cdots+$$
$$+[1+2+\cdots+(n-1)]n$$

(البته، در این ضمن، ناچاریم از آگاهی‌هایی که قبلاً به‌دست‌آورده‌ایم، استفاده کنیم. به‌چه طرحی می‌توان امید داشت: استفاده از نتیجه‌هایی که، به طور جداگانه، به دست‌آورده‌ایم، یا استفاده از روش‌هایی که می‌دانیم؟)

۲۰. تعداد $\frac{n(n-1)}{2}$ تفاضل زیر را در نظر می‌گیریم:

$$\begin{array}{l}
2-1,\\
3-1,\ 3-2,\\
4-1,\ 4-2,\ 4-3,\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
n-1,\ n-2,\ n-3,\ \cdots,\ n-(n-1)
\end{array}$$

مطلوب است: a) مجموع آن‌ها؛ b) حاصل‌ضرب آن‌ها؛ c) مجموع مربع‌های آن‌ها

۲۱. E_1، E_2، E_3، ... از اتحاد زیر به‌دست می‌آیند:

$$x^n-E_1x^{n-1}+E_2x^{n-2}-\cdots+(-1)^nE_n=$$
$$=(x-1)(x-2)(x-3)\cdots(x-n)$$

ثابت کنید:

$$E_1=\frac{n(n+1)}{2},$$

$$E_۲=\frac{(n-۱)n(n+۱)(۳n+۲)}{۲۴},$$

$$E_۳=\frac{(n-۲)(n-۱)n^۲(n+۱)^۲}{۴۸},$$

$$E_۴=\frac{(n-۳)(n-۲)(n-۱)n(n+۱)(۱۵n^۳+۱۵n^۲-۱۰n-۸)}{۵۷۶۰}$$

و به طور کلی، E_k (که بهتر است آن را $E_k(n)$ بنامیم، زیرا به n هم بستگی دارد)، یك چند جمله‌ای است از درجهٔ $۲k$ نسبت به n.

[در این جا، یك قضیه از جبر عالی، می‌تواند بسیار مفید باشد: E_k عبارت است از kامین چندجمله‌ای متقارن اصلی نسبت بـه n عدد درست اولیه، کـه مجموع kامین توان‌آن‌ها را به $S_k=S_k(n)$ نشان می‌دهیم، ثابت کنیدکه $E_k(k)=k!$.]

۲۲. دو نوع استقرای ریاضی. گزارهٔ‌ریاضی A، که می‌تواند با روش‌استقرای ریاضی ثابت شود، از مجمـوعـهٔ نامتناهی حالت‌های خاص $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، ...، A_n، ... تشکیـل شده است؛ در واقع، درستی A، بـه معنای درستی همهٔ گزاره‌های $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، ... است. مثلاً، اگر A، قضیهٔ مربوط به دو جمله‌ای نیوتون باشد، A_n به معنای درستی اتحاد زیر است:

$$(۱+x)^n=C_n^۰+C_n^۱x+C_n^۲x^۲+\cdots+C_n^nx^n$$

(تمرین ۱ را ببینید)؛ در واقع، قضیهٔ دو جمله‌ای حاکی ازآن است که این اتحاد برای هر مقدار طبیعی n درست است.

سه گزارهٔ زیر را، به‌عنوان فرض، در نظر می‌گیریم:

I) $A_۱$ درست است؛

II_a) $A_{n+۱}$، نتیجه‌ای است از A_n؛

II_b) $A_{n+۱}$، نتیجه‌ای است از مجموعهٔ همهٔ گزاره‌های $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، ...، $A_{n-۱}$ و A_n. از این جا به‌بعد، می‌توان دو راه در نظر گرفت.

a) نتیجه‌گیری مربوط به‌درستی A در حالت کلی را، یعنی درستی آن برای هر عدد طبیعی n را، می‌توان از فرض‌های I) و II_a) به دست‌آورد؛ دراین حالت، از پاسکال ـ که در§۷ مطرح کردیم، پیروی کرده‌ایم.

b) همین نتیجه را می‌توان از فرض‌های I) و II_b) به دست آورد ؛ مثلاً ، برای حل تمرین ۳، از این راه رفته‌ایم.

ممکن است این احساس در شما به‌وجود آمده باشدکه حالت‌های a) و b)، تنها از نظرشکل و ظاهر باهم فرق دارند ، نه از نظر محتوی. آیا نمی‌توانید احساس خود را به‌صورتی مشخص بیان کنید و، آن‌را به‌روشنی، مدلل سازید؟

بخش ۲

۲۳. ده جوان‌ـ‌بوب، ریکی، آلف، کارل، آرت، دیك، آلکس، بیل، روی وآلن ـ به راه‌پیمائی رفتند. هنگام عصر، به‌دو گروه پنج‌نفری تقسیم شدند؛یکی از گروه‌ها به‌نصب چادر و گروه دیگربه‌تهیهٔ‌شام پرداخت. به چند طریق می‌توان آن‌ها را به دو گروه تقسیم کرد؟ (آیا واژهٔ اسرارآمیز، می‌تواند دراین جا، به‌شما کمك کند؟)

۲۴. ثابت کنید، از مجموعهٔ شامل n شیء، می‌توان C_n^r زیرمجموعه جدا کرد که هرکدام شامل r عضو باشند. [در اصطلاح سنتی: تعداد ترکیب‌های n عضو r به r برابر است با C_n^r).

۲۵. n نقطه «به‌صورت‌کلی» روی یك صفحه قرار گرفته‌اند، یعنی به‌نحوی که‌هیچ سه‌نقطه‌ای روی یك‌خط راست‌نیستند. چندخط راست‌می‌توان رسم کردکه این نقطه‌ها را دو به دو به هم وصل کنند؟ چند مثلث می‌توان ساخت که رأس‌های آن‌ها در نقطه‌های مفروض باشند؟

۲۶. (ادامه). مسألهٔ فضایی مشابه تمرین ۲۵ را تنظیم وحل کنید.

۲۷. تعداد قطرهای یك n ضلعی محدب‌را پیدا کنید.

۲۸. مطلوب‌است تعدادنقطه‌های برخوردقطرهای یكn ضلعی‌محدب. ضمناً

تنها نقطه‌های برخورد داخلی را در نظر بگیرید و فرض کنید که هیچ سه قطری از یك نقطه نمی‌گذرند (n ضلعی «به‌صورت کلی»).

۲۹. یك شش‌وجهی داده‌شده‌است. (می‌توانیم آن‌را نامنظم بگیریم، مثلاً به‌این صورت که هیچ دو وجهی از آن باهم برابر نباشند.) می‌خواهیم وجه‌های آن‌را رنگ کنیم: یك وجه‌را بـه رنگ قرمز، دو وجه‌را به رنگ‌آبی و سه وجه را به‌رنگ قهوه‌ای. به‌چند طریق، می‌توان این کار را انجام داد؟

۳۰. یك n وجهی مفروض است. (می‌توان آن را نامنظم گرفت. مثلاً، هیچ دو وجهی از آن، یکسان نباشند.) می‌خواهیم وجه‌ها را رنگ کنیم: r وجـه به‌رنگ قرمز، s وجه به‌رنگ آبی و t وجه به رنگ سبز؛ ضمناً فرض می‌کنیم $r+s+t=n$. این عمل‌را، به‌چند طریق می‌توان انجام داد؟

۳۱. (ادامه). مسألهٔ قبل‌را تعمیم دهید.

بخش ۳

خواننده، برای حل مسأله‌های زیر، می‌تواند ازشیوه‌های مختلف ویا یکی ازآن‌ها استفاده کند (§ ۸ را ببینید؛ بستگی ضریب‌های دوجمله‌ای با نظریهٔ ترکیب‌ها ـ که در تمرین ۲۴ داشتیم ـ شیوهٔ تازه‌ای به‌دست می‌دهد). لایب نیتس، بر اهمیت داشتن اسلوب در یك مسأله، از جهت‌های مختلف، تأکید می‌کند. این، ترجمهٔ آزادی از یك یـادداشت اوست: «ضمن مقایسهٔ دو بیان متفاوت ازیك کمیت، می‌توانید مجهول را پیدا کنید؛ ضمن مقایسهٔ دو استنباط مختلف از یـك نتیجه گیری ، می‌توانید روش تازه‌ای را کشف کنید».

۳۲. تا آن جاکه می‌توانید، باروش‌های مختلف، ثابت کنید

$$C_n^r = C_n^{n-r}$$

۳۳. مجموع عددهایی راکه درقاعده‌های مثلث پاسکال قرار دارند، درنظر می‌گیریم:

$$\begin{aligned} 1 &= 1, \\ 1+1 &= 2, \\ 1+2+1 &= 4, \\ 1+3+3+1 &= 8, \end{aligned}$$

این نتیجه‌ها، ما را به‌یاد یك قضیهٔ کلی می‌اندازد. آیا می‌توانید آن را حدس بزنید؟ آیا می‌توانید قضیه‌ای را که حدس زده‌اید ثابت کنید؟ وقتی که آن را ثابت کردید، آیا می‌توانید راه دیگری برای اثبات آن پیدا کنید؟

۳۴. توجه کنید که

$$\begin{aligned} 1-1 &= 0, \\ 1-2+1 &= 0, \\ 1-3+3-1 &= 0, \\ 1-4+6-4+1 &= 0 \end{aligned}$$

این نتیجه‌گیری را تعمیم دهید؛ آن‌را ثابت‌کنید؛ دوباره و با روش دیگری آن‌را ثابت کنید.

۳۵. مجموع شش‌عدد نخست واقع درطول خیابان سوم مثلث پاسکال‌را در نظر می‌گیریم:

$$1+4+10+20+35+56=126$$

ببینیداین‌مجموع (عدد ۱۲۶) در کجای مثلث پاسکال قراردارد؟ تلاش کنید، حقیقت‌های مشابهی‌را پیدا کنید؛ آن‌را تعمیم دهید، ثابت‌کنید؛ از راه‌دیگری ثابت‌کنید.

۳۶. ۳۶ عددی راکه درشکل ۱۶-b وجود دارد، جمع‌کنید؛ بکوشید این مجموع را درمثلث پاسکال پیداکنید؛ یك‌قضیهٔ‌کلی تنظیم و آن‌را ثابت کنید. (جمع‌کردن این تعداد عدد، کار خسته‌کننده‌ای است، ولی اگر روشی پیداکنید، به‌سادگی، به اندیشهٔ با ارزشی می‌رسید.)

۳۷. عددهایی از مثلث پاسکال را پیداکنیدکه دررابطهٔ زیر شرکت‌دارند.

$$1\times1+5\times4+10\times6+10\times4+5\times1=126$$

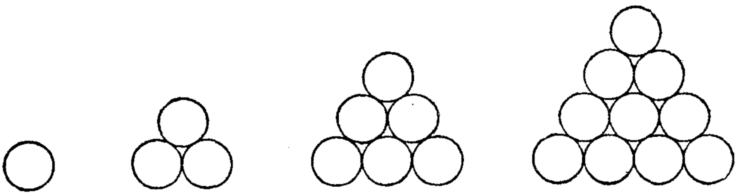
رابطه‌های مشابهی را جست وجو کنید (یا آن‌ها را به خاطر آورید)؛ تعمیم دهید؛ ثابت کنید ؛ دوباره و به‌طریق دیگری ثابت کنید.

۳۸. عددهایی راکه در رابطهٔ زیردخالت دارند، درمثلث پاسکال پیداکنید:

$$۶\times۱+۵\times۳+۴\times۶+۳\times۱۰+۲\times۱۵+$$
$$۱\times۲۱=۱۲۶$$

رابطه‌های مشابه‌دیگری پیدا کنید (یا آن‌هارا به‌خاطر آورید)؛ تعمیم دهید؛ ثابت کنید؛ به‌طریق دیگری، و دوباره، ثابت کنید.

۳۹. در شکل ۱۸-a، چهارشکل از یك دنبالهٔ نامتناهی شکل‌های همانند داده شده است؛ این شکل‌ها از دایره‌های مساوی درست شده‌اند و



شکل ۱۸-a . چهارعدد مثلثی نخستین

مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی را تشکیل می‌دهند. هر دایره‌ای که در مرزهای شکل نباشد، برشش‌دایره مماس است. شکلی‌راکه هرضلع آن شامل n دایره‌باشد، باشمارهٔ n مشخص می‌کنیم؛ تعدادکل همهٔ دایره‌هایی که شکل‌شمارهٔ n را می‌سازند، nامین عدد مثلثی می‌نامیم. nامین‌عدد مثلثی‌را برحسب n بیان‌کنید وجای آن را درمثلث پاسکال نشان دهید.

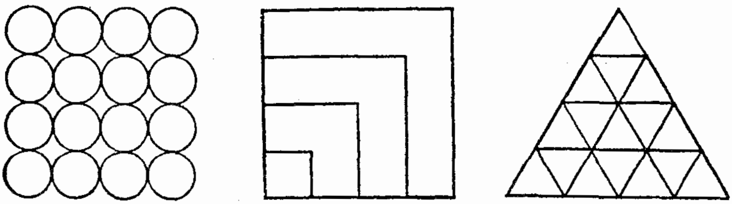
۴۰. به جای هر یك از دایره‌ها (سکه‌ها) در شکل ۱۸-a، کره‌ای (توپ تنیسی) قرار دهیدکه «استوای» آن، این دایره را محصورکند. روی صفحهٔ افقی، ۱۰ کره، شبیه شکل ۱۸-a قرار دهید و روی آن‌ها، شش کرهٔ دیگر بگذارید (این شش کره، درست در فرورفتگی‌ها جا می‌گیرند) ـ این «لایهٔ دوم خواهد بود؛ روی آن باز هم سه کره

بگذارید(لایهٔ سوم) و، سرانجام، آخرین کره را دربالا قراردهید. این ترکیب فضایی که شامل

$$۱+۳+۶+۱۰=۲۰$$

کره است، یك چهار وجهی منتظم (هرم منتظم مثلث‌القاعده) را تشکیل می‌دهد؛ عدد ۲۰ را چهارمین عدد هرمی می‌نامند. nامین عددهرمی را، برحسب n بیان وجای آن‌را درمثلث پاسکال پیداکنید.

۴۱. با توپ‌های تنیس، به ترتیب دیگری هم می‌توان، هرم درست کرد. ازلایه‌ای شامل $n^۲$ توپ آغاز می‌کنیم؛ این $n^۲$ توپ، به صورت یك



شکل ۱۸-b. چهارمین عدد مربعی

مربع شبیه شکل ۱۸-b، قرارگرفته‌اند. روی آن، لایهٔ دوم را، شامل $(n-۱)^۲$ توپ قرار می‌دهیم، سپس، لایهٔ سوم را شامل $(n-۲)^۲$توپ‌وغیره؛وبالاخره،دربالاترین جا،آخرین توپ‌رامی‌گذاریم. دراین هرم، چند توپ وجود دارد؟

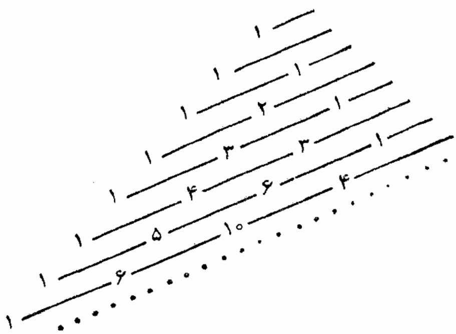
۴۲. عدد درست و مثبت n را، به‌چند طریق، می‌توان به صورت‌مجموع عددهای درست مثبت‌نوشت؟ اگر تعداد t عدد مثبت خاص انتخاب کنیم، به چند طریق می‌توان عدد n را به صورت مجموع این t عدد نوشت (همهٔ عددها را مثبت می‌گیریم)؟ ضمناً، دومجموعی راکه‌تنها در ردیف‌جمله‌های خود باهم تفاوت دارند، مختلف فرض می‌کنیم.

طبیعی است که بررسی چنین مسأله‌ای را ازحالت‌های خاص آغاز می‌کنیم وسعی‌می‌کنیم، آن‌چه راکه ازطریق آزمایش به‌دست می‌آید، ذخیره کنیم. حالت‌های $n=۴$ و $n=۵$ را درنظر می‌گیریم.

۴: ۱+۳ ۲+۱+۱ ۱+۱+۱+۱
۲+۲ ۱+۲+۱
۳+۱ ۱+۱+۲

۵: ۱+۴ ۳+۱+۱ ۲+۱+۱+۱ ۱+۱+۱+۱+۱
۲+۳ ۱+۳+۱ ۱+۲+۱+۱
۳+۲ ۱+۱+۳ ۱+۱+۲+۱
۴+۱ ۱+۲+۲ ۱+۱+۱+۲
۲+۱+۲
۲+۲+۱

آیا متوجه قانون کلی شدید؟ حدس خودرا ثابت کنید. آیا ممکن است یك شکل هندسی به‌شما کمك کند؟



شکل ۱۹-a. تفسیر عددهای فیبوناچی، به‌کمك خطهای مایل

۴۳. عددهای فیبوناچی. اگر عددهایی راکه به وسیله خطهای مایل در شکل ۱۹-a به هم وصل شده‌اند، با هم جمع کنیم، دنبالهٔ عددهای فیبوناچی به‌دست می‌آید:

۱، ۱، ۲، ۳، ۵، ۸، ۱۳، ۲۱، ...

nامین جملهٔ این‌دنباله، یعنی nامین عدد فیبوناچی را F_n می‌نامیم؛ مثلاً: $F_1=1$ ، $F_2=1$ ، ... ، $F_8=21$.

۱°. F_n را برحسب ضریب‌های دوجمله‌ای بیان کنید.

۲°. ثابت کنید که برای $n \geqslant ۳$ داریم:

$$F_n = F_{n-۱} + F_{n-۲}$$

۴۴. (ادامه). دنبالهٔ عددهای

$$۱,\ ۱,\ ۱,\ ۲,\ ۳,\ ۴,\ ۶,\ ۹,\ ۱۳,\ \cdots$$

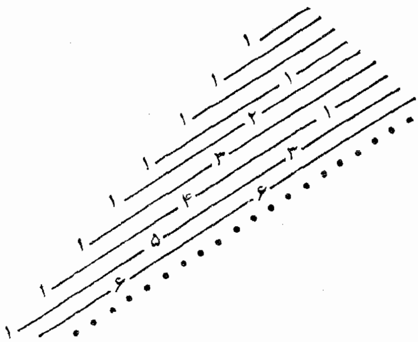
شبیه عددهای فیبوناچی درست شده است (شکل‌های ۱۹-a و ۱۹-b را با هم مقایسه کنید). nامین جملهٔ این دنباله را G_n می‌نامیم.

۱°. G_n را برحسب ضریب‌های دوجمله‌ای بیان کنید.

۲°. ثابت کنید به‌ازای $n \geqslant ۴$ داریم:

$$G_n = G_{n-۱} + G_{n-۳}$$

۳°. نتیجهٔ حاصل را تعمیم دهید.



شکل ۱۹-b. به‌طور مایل جمع کنید

۴۵. ثابت کنید که حاصل‌ضرب

$$C_{n_۱}^{r_۱} \cdot C_{n_۲}^{r_۲} \cdot C_{n_۳}^{r_۳} \cdots C_{n_h}^{r_h}$$

را می‌توان به عنوان تعداد مسیرهای پیچ و خم دار، از مجموعهٔ مسیرهای یك شبکه خیابان‌ها، تفسیر کرد.

۴۶. همهٔ کوتاه‌ترین مسیرهای پیچ وخم‌داری که ازرأس مثلث‌پاسکال آغاز

و به نقطه‌ای ختم می‌شوند و با عددهای n (تعدادکل محله‌ها) و r (تعداد محله‌هایی که از راست و به‌طرف پایین قرار دارند) مشخص می‌شوند،دارای نقطهٔ مشترکی بامحورتقارن مثلث پاسکال (که نقطهٔ بالایی A را به‌پایینی وصل‌می‌کند؛ شکل ۱۵–a راببینید)، یعنی نقطهٔ مشترك اولیه ـ رأس مثلث پاسکال ـ هستند. در مجموعهٔ این مسیرها، زیر مجموعهٔ مسیرهایی را پیدا کنیدکه هیچ نقطهٔ مشترك دیگری ـ جز نقطهٔ مذکور دربالا، بامحور تقارن ندارند وتعداد N، عضوهای این‌زیرمجموعه را پیداکنید. برای این‌که بتوانید مسأله‌را بهتربررسی کنید، ازحالت خاص ساده‌تر آغازکنید، مثلاً از

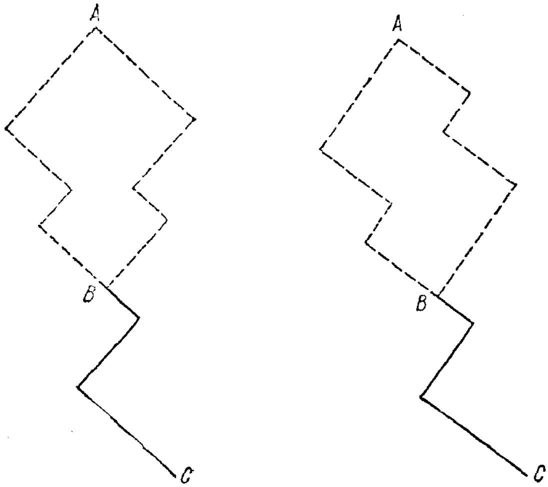
$$r=\circ,\ n,\ \frac{n}{۲}\ (\text{زوج است } n)$$

$$N=۱,\ ۱,\ \circ$$

حل. کافی است، حالت $r>\frac{n}{۲}$ را در نظر بگیریم؛ در این حالت ، نقطهٔ انتهایی همهٔ مسیرهای پیچ و خم دار، در نیم صفحهٔ راست، نسبت به محور تقارن، قرار دارند. تعداد همهٔ این مسیرها، برابر است با C_n^r؛ مجموعهٔ این مسیرها را به سه زیرمجموعهٔ جدا از هم، تقسیم می‌کنیم:

۱) زیرمجموعهٔ مجهولی که تعداد عضوهای آن N است ، و ما می‌خواهیم آن‌را پیداکنیم؛ هرمسیری که به این زیرمجموعه تعلق نداشته باشد، محور تقارن را، علاوه برنقطهٔ A، درنقطهٔ دیگری هم قطع می‌کند؛

۲) مسیرهایی که آغاز حرکت آن‌ها ازکنار محله‌ای می‌گذردکه درسمت چپ آن قرار دارد (و به طرف پایین است) ؛ این مسیرها، حتماً باید محور تقارن را قطع کرده باشند، زیرا درنیم صفحهٔ دیگری به‌انتهای خود می‌رسند؛ روشن است که تعداد عضوهای این زیرـ مجموعه، برابر است با $C_{n-۱}^r$؛



b. دگرگونی اندیشهٔ قطعی   a. اندیشهٔ قطعی

شکل ۲۰

۳) مسیرهایی که به هیچ یك از نوع‌های ۱) و ۲) تعلق‌ندارند؛ آغاز حرکت این مسیرها ازمحله‌ای‌که درسمت راست و به‌طرف‌پایین قرار دارد،و درجایی به‌محور تقارن می‌رسد.

ثابت‌کنیدکه تعداد مسیرهای زیرمجموعهٔ ۲)،برابر است با تعداد مسیرهـای زیر مجموعهٔ ۳) (در شکل‌های ۲۰-a و ۲۰-b، اندیشهٔ برقراری رابطهٔ متقابل بین این زیر مجموعه‌ها، روشن شده است)،و براین اساس، نتیجه بگیریدکه

$$N = \frac{|۲r - n|}{n} C_n^r$$

۴۷. (ادامه).تعداد همهٔ‌کوتاه‌ترین‌مسیرهای پیچ وخم‌دار از رأس‌تا قاعدهٔ nام، که یك نقطهٔ مشترك با محور تقارن این رأس دارند، در حالت زوج بودن $n = ۲m$ برابر $C_{۲m}^m$ و در حالت فردبودن $n = ۲m + ۱$ برابر $۲\, C_{۲m}^m$ است.

۴۸. ضریب‌های سه جمله‌ای. در شکل ۲۱، قسمتی از یك جدول عددی مثلثی نامتناهی داده شده است که دارای دوشرط است:

۱°. شرط مـرزی. هـر خط افقی یا «قاعـده» (در § ۶ هم، این اصطلاح را، به‌مفهوم مشابهی به‌کار بردیم) باعددهای ۰ و ۱ آغاز و به‌عددهای ۱ و ۰ ختم می‌شود (درقاعدهٔ nام $2n+3$ عددوجود دارد و، بنابراین، $2n-1$ عددآن نامعلوم می‌ماند؛ $n=1, 2, 3, \ldots$).

					۰	۱	۰					
				۰	۱	۱	۱	۰				
			۰	۱	۲	۳	۲	۱	۰			
		۰	۱	۳	۶	۷	۶	۳	۱	۰		
	۰	۱	۴	۱۰	۱۶	۱۹	۱۶	۱۰	۴	۱	۰	
۰	۱	۵	۱۵	۳۰	۴۵	۵۱	۴۵	۳۰	۱۵	۵	۱	۰

شکل ۲۱. ضریب‌های سه‌جمله‌ای

۲°. رابطهٔ بازگشتی. هرعدد قاعدهٔ $(n+1)$ را ـ به‌جز عددهای مرزی یاد شده در ۱°ـ می‌توان ازمجموع سه‌عدد قاعدهٔ nام به‌دست آورد؛ ایـن سه عدد عبارتند از عدد شمال باختری، شمالی و شمال خاوری عدد مورد جست و جو (مثلاً: $۴۵ = ۱۰ + ۱۶ + ۱۹$).

عددهای قاعدهٔ هفتم را پیدا کنید (همهٔ ایـن عددها، به‌جز سه تا، بر ۷ بخش پذیرند.)

۴۹. (ادامه). ثابت کنیدکه عددهای قاعدهٔ nام، که ازواحد آغاز و به‌واحد ختم شوند، عبارتنداز ضریب‌های بسط سه‌جمله‌ای $(1+x+x^2)^n$، نسبت بـه توان x. (همین مطلب، دلیل نام گـذاری «ضریـب‌های سه‌جمله‌ای» را روشن می‌کند.)

۵۰. (ادامه). تقارن شکل ۲۱ را، نسبت به‌قائم میانی، روشن کنید.

۵۱. (ادامه). توجه کنیدکه

$$\begin{aligned} 1+1+1 &= 3, \\ 1+2+3+2+1 &= 9, \end{aligned}$$

$$۱+۳+۶+۷+۶+۳+۱=۲۷$$

آن‌را تعمیم دهید و ثابت کنید.

۵۲. (ادامه). توجه کنید که

$$۱-۱+۱=۱$$

$$۱-۲+۳-۲+۱=۱$$

$$۱-۳+۶-۷+۶-۳+۱=۱$$

آن‌را تعمیم دهید و ثابت کنید.

۵۳. (ادامه). توجه کنید که مقدار مجموع

$$۱^۲+۲^۲+۳^۲+۲^۲+۱^۲=۱۹$$

عبارت است از ضریب سه جمله‌ای؛ این حقیقت را تعمیم دهید و، سپس، آن را ثابت کنید.

۵. (ادامه). روی شکل ۲۱، خط‌هایی را پیدا کنید که با خط‌های مثلث پاسکال متناظر باشند.

۵. مثلث همساز (هارمونیك) لایب‌نیتس. روی شکل ۲۲، بخشی از این ترکیب عددی، که کمتر شناخته شده، ولی شایان توجه است، دیده می‌شود. بعضی از ویژگی‌های آن، «به مفهوم عکس»، شبیه ویژگی‌های مثلث پاسکال است. درآن جا، باعددهای درست سروکار داشتیم و، دراین‌جا (همان‌طور که مستقیماً دیده می‌شود)، مقدارهای معکوس آن‌ها وجود دارد. درمثلث پاسکال، هرعدد برابر است با دو عدد شمال خاوری و شمال باختری مجاور آن، در حالی که در مثلث لایب‌نیتس، هرعدد برابر است با مجموع دو عدد جنوب خاوری و جنوب باختری مجاورآن؛ مثلاً

$$\frac{۱}{۲}=\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۶},\quad \frac{۱}{۳}=\frac{۱}{۴}+\frac{۱}{۱۲},\quad \frac{۱}{۶}=\frac{۱}{۱۲}+\frac{۱}{۱۲}$$

و این همان رابطهٔ بازگشتی مثلث لایب‌نیتس است.

برای این مثلث هم می‌توان شرط مرزی را مشخص کرد. عددهایی که درطول خط مرزی شمال‌باختری («خیابان صفر») قرار گرفته‌اند،

عبارتند ازعکس عددهای طبیعی متوالی. [شرط مرزی مثلث پاسکال،

$$\begin{array}{cccccccc}
\frac{1}{1} \\
\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \\
\frac{1}{3} & \frac{1}{6} & \frac{1}{3} \\
\frac{1}{4} & \frac{1}{12} & \frac{1}{12} & \frac{1}{4} \\
\frac{1}{5} & \frac{1}{20} & \frac{1}{30} & \frac{1}{20} \\
\frac{1}{6} & \frac{1}{30} & \frac{1}{60} & \frac{1}{60} \\
\frac{1}{7} & \frac{1}{42} & \frac{1}{105} & \frac{1}{140} \\
\frac{1}{8}
\end{array}$$

شکل ۲۲. بخشی از مثلث همساز لایب‌نیتس

خصلت دیگـری داشت: در آن جا، همهٔ عددها ، چه در طول شمال باختری [«خیابان صفر»] وچه درطول شمال مرزخاوری، برابرواحد بود.] درحالت مثلث پاسکال، می‌توانستیم باحرکت ازعددهایی‌که از مرزآغازمی‌شوند، همهٔ بقیهٔ عددهای‌آن را، با استفاده ازعمل جمع، محاسبه‌کنیم؛ درحالت مثلث لایب‌نیتس هم بایدازتفریق استفاده‌کنیم. روی شکل ۲۲، جاهای آزادی باقی‌گـذاشته شده است‌کـه می‌توان به‌سادگی آن‌ها را پرکرد (با استفاده از رابطهٔ بازگشتی)؛ مثلاً

$$\frac{1}{4}-\frac{1}{20}=\frac{1}{5}$$

و

$$\frac{1}{7}-\frac{1}{8}=\frac{1}{56}$$

با استفاده از شرط مرزی و رابطهٔ بازگشتی ، جدول شکل ۲۲ را تا خود قاعدهٔ هشتم ادامه دهید.

۵۶. پاسکال و لایب نیتس. سعی‌کنید بستگی بین عددهای متناظردومثلث پاسکال و لایب‌نیتس راکشف‌کنید و، سپس، آن‌را ثابت‌کنید.

۵۷. ثابت کنید[1]

$$\frac{1}{1}=\frac{1}{2}+\frac{1}{6}+\frac{1}{12}+\frac{1}{20}+\frac{1}{30}+\cdots$$

$$\frac{1}{2}=\frac{1}{3}+\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\frac{1}{105}+\cdots$$

$$\frac{1}{3}=\frac{1}{4}+\frac{1}{20}+\frac{1}{60}+\frac{1}{140}+\frac{1}{280}+\cdots$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

(جای این عددها را، درمثلث همساز پیدا کنید.)

۵۸. مجموع این رشته را پیدا کنید:

$$\frac{1}{12}+\frac{1}{30}+\frac{1}{60}+\frac{1}{105}+\cdots$$

و نتیجهٔ حاصل را تعمیم دهید. (آیا مسألهٔ مشابهی را می‌شناسید؟)

۵. مجموع این رشته‌ها را پیدا کنید:

$$\frac{1}{1\times 2}+\frac{1}{2\times 3}+\frac{1}{3\times 4}+\frac{1}{4\times 5}+\cdots$$

$$\frac{1}{1\times 2\times 3}+\frac{1}{2\times 3\times 4}+\frac{1}{3\times 4\times 5}+\frac{1}{4\times 5\times 6}+\cdots$$

$$\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot$$

$$\frac{1}{1\times 2\times\cdots\times(r-1)r}+\frac{1}{2\times 3\times\cdots\times r(r+1)}+$$

$$+\frac{1}{3\times 4\times\cdots\times(r+1)(r+2)}+\cdots$$

---

۱. برای این‌که، خواننده‌ای را که با نظریهٔ رشته‌های نامتناهی (حد، تقارب،..)، به طور کامل، آشنا نیست، به زحمت نیندازیم، دقت کامل در حل این مسأله و مسأله‌های شبیه آن ــ که درصفحه‌های نزدیك آورده‌ایم ــ به‌کار نبرده‌ایم. ولی، خواننده‌ای که آمادگی بیشتری دارد، نباید ازطرح این‌جزییات (که در اغلب موردها، دشوار هم نیست) صرف‌نظر کند.

بخش ۴

بعضی از تمرین‌های این بخش ، به‌تمرین ۶۶ و بعضی دیگر به تمرین ۷۶ مربوط می‌شوند.

۶۰. رشته‌های توانی. کسر اعشاری ۳/۱۴۱۵۹۰۰۰ ، که معرف عدد π است، درواقع، به صورت یك «رشتهٔ نامتناهی» بیان می‌شود:

$$۳+۱\left(\frac{۱}{۱۰}\right)+۴\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{۲}+۱\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{۳}+۵\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{۴}+۹\left(\frac{۱}{۱۰}\right)^{۵}+\cdots$$

اگر به جای $\frac{۱}{۱۰}$ ، متغیر x و به جای دنبالهٔ رقم‌های

$$۳,\ ۱,\ ۴,\ ۱,\ ۵,\ ۹,\cdots$$

ضریب‌های ثابت دلخواه

$$a_{۰},\ a_{۱},\ a_{۲},\ a_{۳},\ a_{۴},\ a_{۵},\ \cdots$$

را قرار دهیم، به‌یك رشتهٔ توانی می‌رسیم:

$$a_{۰}+a_{۱}x+a_{۲}x^{۲}+a_{۳}x^{۳}+\cdots \qquad (۱)$$

دراین جا، نمی‌توانیم به‌مسألهٔ‌مربوط به‌تقارب (هم گرائی) رشتهٔ توانی و موضوع‌های مهم دیگر مربوط به‌آن، بپردازیم ؛ به‌همین مناسبت، تنها به عمل‌های صوری روی این رشته‌ها، اکتفا می‌کنیم (زیرنویس‌تمرین ۵۷ را ببینید). ازضرب این‌رشتهٔ‌توانی درمقدارثابت c این رشته به‌دست می‌آید:

$$ca_{۰}+ca_{۱}x+ca_{۲}x^{۲}+ca_{۳}x^{۳}+\cdots$$

اگر رشتهٔ (۱) را بارشتهٔ دیگر

$$b_{۰}+b_{۱}x+b_{۲}x^{۲}+b_{۳}x^{۳}+\cdots \qquad (۲)$$

جمع کنیم، به‌این رشته می‌رسیم:

$$(a_{۰}+b_{۰})+(a_{۱}+b_{۱})x+(a_{۲}+b_{۲})x^{۲}+(a_{۳}+b_{۳})x^{۳}+\cdots$$

و از ضرب رشته‌های (۱) و (۲)، رشتهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$(a_{۰}b_{۰})+(a_{۰}b_{۱}+a_{۱}b_{۰})x+(a_{۲}b_{۰}+a_{۱}b_{۱}+a_{۰}b_{۲})x^{۲}+\cdots$$

دو رشتهٔ (۱) و (۲) ، وقتی وتنها وقتی برابرندکه داشته باشیم:

$$a_0=b_0,\ a_1=b_1,\ a_2=b_2,\ \cdots,\ a_n=b_n,\cdots$$

یك چندجمله‌ای را هم، به‌عنوان رشته‌ای توانی درنظرمی گیریم که مجموعه‌ای نامتناهی از ضریب‌های آن (و در واقع، همهٔ ضریب‌های آن، به‌جز تعدادی متناهی) به سمت صفرمیل کرده باشند. مثلاً، چندجمله‌ای $3x-x^3$ را می‌توان حالت خاصی ازرشتهٔ توانی (۱) گرفت، که درآن داریم.

$$a_0=0,\ a_1=3,\ a_2=0,\ a_3=-1 \text{ و } a_n=0 (n\geqslant 4)$$

خودتان تحقیق کنیدکه قانون‌های عمل راکه دربارهٔ رشته‌ها آوردیم، درمورد چندجمله‌ای‌ها هم درست است.

*۶۱. این حاصل‌ضرب را محاسبه کنید:

$$(1-x)(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)$$

*۶۲. ضریب x^n را در حاصل‌ضرب زیر پیدا کنید:

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots)\times$$
$$\times(1+x+x^2+\cdots+x^n+\cdots)$$

*۶۳. رشتهٔ تمرین ۶۱ ، ممکن است مارا به مطالعهٔ این رشته‌ها وادارد:

$$1+x+x^2+x^3+\cdots$$
$$1+2x+3x^2+4x^3+\cdots$$
$$1+3x+6x^2+10x^3+\cdots$$
$$1+4x+10x^2+20x^3+\cdots$$

آیامجموع یکی ازاین رشته‌ها، برای شما معلوم‌است؟ آیا نمی‌توانید مجموع‌بقیه را به‌دست آورید؟

*۶۴. برای نتیجهٔ تمرین ۳۸، اثبات دیگری پیدا کنید.

*۶۵. این جدول را مطالعه کنید:

$$1\times 1 = 1$$
$$1\times 3-2\times 2+3\times 1 = 2$$
$$1\times 5-2\times 4+3\times 3-4\times 2+5\times 1 = 3$$
$$1\times 7-2\times 6+3\times 5-4\times 4+5\times 3-$$

$$-۶\times۲+۷\times۱=۴$$

براساس این مثال‌ها ، قانون کلی راحدس بزنید،آن را با نمادهای ریاضی مناسبی بیان کنید. و، سپس، آن‌را ثابت کنید.

*۶۶. دستور دو جمله‌ای، برای نماهای کسری و منفی. نیوتون ، در ۲۴ اکتبر سال ۱۶۷۶ ، درنامه‌ای به‌دبیرخانهٔ جامعهٔ سلطنتی[۱] نوشت که او توانسته است دستور دوجمله‌ای را (برای حالت کلی) کشف کند؛ نیوتون، این نامه‌را، درپاسخ پرسش لایب‌نیتس، دربارهٔروش استدلال او (نیوتون)نوشته بود. نیوتون، مساحت یك چهارضلعی منحنی‌الخط معین را درنظرمی گیرد،اوتحت‌تأثیرجدی اندیشهٔوالیس، دربارهٔ درج واسطه‌ها، سرانجام، به‌این نتیجه می‌رسدکه بسط

$$(۱+x)^a=۱+\frac{a}{۱}x+\frac{a(a-۱)}{۱\times۲}x^۲+$$
$$+\frac{a(a-۱)(a-۲)}{۱\times۲\times۳}x^۳+\cdots$$

نه تنها برای مقدارهای درست ومثبت‌نمای a، بلکه برای مقدارهای کسری و منفی، یعنی در واقع، برای همهٔ مقدارهای عددی نمای a، درست است[۲]. نیوتون اثبات صوری دقیق فرض خود را نمی‌دهد و، خیلی زود، به مثال‌ها می‌پردازد و از شباهت و قیاس استفاده می‌کند. می‌توانیم بگوییم که او، این مسأله را، همچون مسأله‌های فیزیکی، «با آزمایش» و «استقرا» بررسی می‌کند. برای این‌که، به‌دیدگاه او، بهترپی ببریم، بعضی ازگام‌هایی که او را به درستی فرض خود قانع کرد، می‌آوریم.

---

۱. فرهنگستان علوم انگلستان.

۲. در مرحلهٔ امروزی تکامل ریاضیات، می‌دانیم‌که، باید بعضی محدودیت‌ها برای x قایل شد؛ ولی ما، در این‌جا ، از آن‌ها می‌گذریم. این ساده‌گرفتن کار، درست شبیه موضع نیوتون است‌که، در زمان او، تعریف دقیق تقارب (هم‌گرائی) رشته‌ها داده نشده بود. این موضع‌گیری ما، با آن چه‌که در زیرنویس تمرین ۵۷ آوردیم، تطبیق می‌کند.

اگر a، عددی درست و غیر منفی باشد، ضریب x^{a+1}، درسمت راست رشتهٔ مورد نظر ما، به‌سمت صفر میل می‌کند و، همراه با آن، همهٔ‌ضریب‌های بعدی (به‌علت وجود عامل صفردرصورت) برابر صفر می‌شوند، یعنی، رشته قطع می‌شود. ولی اگر a عددی است‌که به دنبالهٔ ۰، ۱، ۲، ۳، ... تعلق ندارد، دیگر رشته قطع نمی‌شود و، به‌طور نامحدود، ادامه می‌یابد. مثلاً، به‌ازای $a=\frac{۱}{۲}$، رشتهٔ مورد نظر، به‌این صورت درمی‌آید:

$$(۱+x)^{\frac{۱}{۲}}=۱+\frac{\frac{۱}{۲}}{۱}x+\frac{\frac{۱}{۲}\left(-\frac{۱}{۲}\right)}{۱\times ۲}x^{۲}+\frac{\frac{۱}{۲}\left(-\frac{۱}{۲}\right)\left(-\frac{۳}{۲}\right)}{۱\times ۲\times ۳}\times$$
$$\times x^{۳}+\cdots=۱+\frac{x}{۲}-\frac{x^{۲}}{۸}+\frac{x^{۳}}{۱۶}-\frac{۵x^{۴}}{۱۲۸}+\cdots$$

ظاهراً نیوتون از این مطلب ناراحت نمی‌شود که، در این جا، تعداد جمله‌هایی‌که به‌سمت صفر میل نمی‌کنند، بی‌نهایت است. او به خوبی ازوجودشباهت، بین‌رشته‌های توانی وکسرهای دهدهی (تمرین ۶۰ رابببینید) اطلاع‌داشت (ودرجای دیگری، این مطلب رایادآوری می‌کند). درآن جا، بعضی از کسرهای دهدهی در جایی قطع می‌شود (مثل‌کسر $\frac{۱}{۲}$ یا $\frac{۳}{۵}$) و بعضی دیگر تا بی‌نهایت ادامه پیدا می‌کنند (مثل‌کسر $\frac{۱}{۳}$ یا $\frac{۷}{۱۱}$).

ولی، آیا رشته‌ای‌که متناظربا عبارت $(۱+x)^{\frac{۱}{۲}}$ است، واقعاً درست است؟ برای این‌که، نیوتون، به این پرسش پاسخ بدهد، رشته را در خودش ضرب می‌کند؛ اگر این رشته برابر $(۱+x)^{\frac{۱}{۲}}$ باشد، در نتیجه حاصل‌ضرب، باید به‌دست‌آید:

$$(۱+x)^{\frac{۱}{۲}}\cdot(۱+x)^{\frac{۱}{۲}}=۱+x$$

برای آزمایش درستی این نتیجه‌گیری، ضریب جمله‌های شامل

x، $x^{۲}$، $x^{۳}$ و $x^{۴}$ را، درحاصل‌ضرب رشته‌ها پیدا کنید (تمرین ۶۰).

۶۷*. ضریب‌های x، $x^{۲}$، $x^{۳}$، و $x^{۴}$ را در عبارت مجذور رشتهٔ زیر پیدا کنید:

$$۱+\frac{x}{۳}-\frac{x^{۲}}{۹}+\frac{۵x^{۳}}{۸۱}-\frac{۱۰x^{۴}}{۲۴۳}+\cdots$$

که بنا برفرض نیوتون، بسط دوجمله‌ای $(۱+x)^{\frac{۱}{۳}}$ است. نتیجه، باید با بسط دوجمله‌ای $(۱+x)^{\frac{۲}{۳}}$ - بنابرفرض نیوتون - تطبیق کند. این مطلب را تحقیق کنید.

۶۸*. (ادامه). ضریب‌های x، $x^{۲}$، $x^{۳}$ و $x^{۴}$ را در عبارت مکعب رشتهٔ مفروض پیدا کنید. نتیجه را حدس بزنید وآن را مورد تحقیق قرار دهید.

۶۹*. باتوجه به‌فرض نیوتون، بسط رشتهٔ $(۱+x)^{-۱}$ را پیدا کنید. نتیجهٔ حاصل را تفسیر کنید.

۷۰. گسترش حوزهٔ تعریف نماد C_n^r. در § ۶، نماد C_n^r را، برای عددهای درست وغیرمنفی n و r با شرط $r\leqslant n$، تعریف کردیم. اکنون‌حوزهٔ تعریف n (و نه r؛ با تعریف ۱۲ مقایسه‌کنید) را گسترش می‌دهیم و فرض می‌کنیم:

$$C_x^{۰}=۱,\ C_x^r=\frac{x(x-۱)(x-۲)\cdots(x-r+۱)}{۱\times۲\times۳\times\cdots\times r}$$

که درآن، $r=۱, ۲, ۳, \ldots$ و x عددی دلخواه است. از این تعریف نتیجه می‌شود که:

(I) C_x^r عبارت است از یك چندجمله‌ای نسبت به x از درجهٔ r و $r=۱, ۲, ۳, \ldots$.

(II) $C_x^r=(-۱)^r C_{r-۱-x}^r$.

(III) اگر n و r، عددهای درست غیر منفی و $r>n$ باشد، در آن صورت $C_n^r=۰$.

(IV) فرض نیوتون را، می‌توان این طور نوشت:

$$(1+x)^a = C_a^0 + C_a^1 x + C_a^2 x^2 + \cdots + C_a^n x^n + \cdots$$

ویژگی‌های (I)، (III) و (IV) واضح‌اند، (II) را ثابت کنید.

۷۱. اگر x و n، عددهایی درست و مثبت باشند، ثابت کنید که عبارت

$$\frac{x^2(x^2-1)(x^2-4)\cdots[x^2-(n-1)^2]}{(2n-1)!n}$$

هم، عددی درست است.

*۷۲. تمرین ۶۹ را تعمیم دهید؛ تحقیق کنید که همهٔ نتیجه‌گیری‌های تمرین ۶۳ با فرض نیوتون سازگار است.

*۷۳. دوباره از شیوه‌ای استفاده کنید که تا کنون سه‌بار از آن استفاده کرده‌ایم (در §۹، در تمرین ۳۷ و در تمرین ۶۴): با قبول درست بودن فرض نیوتون، با دو روش مختلف، ضریب x^r را در بسط زیر، محاسبه کنید:

$$(1+x)^a \cdot (1+x)^b = (1+x)^{a+b}$$

*۷۴. نتیجهٔ حاصل از تمرین ۷۳ را ارزیابی کنید: آیا می‌توان آن را ثابت شده دانست؟ آیا بخشی از آن ثابت‌شده است؟ آیا امکان دیگری، برای اثبات آن، وجود دارد؟ اگر این نتیجه‌گیری را مفروض بگیریم، آیا نمی‌توانید، براساس آن، فرض نیوتون را ثابت کنید؟ یا دست‌کم قسمتی از آن را؟

*۷۵. آیا ضریب‌های بسط زیر، آشنا به‌نظر نمی‌رسند؟

$$(1-4x)^{-\frac{1}{2}} = 1+2x+6x^2+20x^3+\cdots$$

با استفاده از نمادهایی که می‌شناسید، جملهٔ عمومی این بسط را بنویسید (باید به این نکته توجه داشت که همهٔ ضریب‌ها، عددهایی درست‌اند).

*۷۶. روش ضریب‌های نامعین. نسبت دو رشتهٔ توانی را، به‌صورت یک رشتهٔ توانی، بسط دهید. باید رشتهٔ توانی نسبت

$$\frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots+b_nx^n+\cdots}{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots+a_nx^n+\cdots}$$

را پیدا کنیم، که در آن، ضریب‌های a_0، a_1، a_2، $\cdots$ و b_0، b_1، b_2، $\cdots$،

عددهایی مفروض‌اند؛ ضمناً شرط می‌کنیم $a_0 \neq 0$. (این شرط، که در تنظیم کوتاه اولیه نیامده است، وجود دارد.)

نسبت رشته‌های مفروض را، به‌صورت یك رشته می‌نویسیم:

$$\frac{b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots}{a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots}=u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots$$

فعلاً ضریب‌های u_0، u_1، u_2، ... را به‌طورصوری نوشته‌ایم ـ آن‌ها، هنوز برای شما نامعین‌اند (نام‌گذاری روشی را هم ـ که می‌خواهیم شرح دهیم ـ از همین جا است) و تنها امیدوارید که بتوانید، آن‌ها را پیدا کنید؛ مسألهٔ ما هم‌همین است که می‌خواهیم ضریب‌های u_0، u_1، u_2، ... ـ که مجهول‌اند ـ پیدا کنیم (ومی‌بینیم که مسألهٔ ما، دارای بی‌نهایت مجهول است).

رابطه‌ای که سه رشتهٔ توانی را به هم مربوط می‌کند (و از آن‌ها، دو رشته معلوم است و رشتهٔ سوم را باید پیدا کنیم)، می‌توان به این صورت نوشت:

$$(a_0+a_1x+a_2x^2+\cdots)(u_0+u_1x+u_2x^2+\cdots)=$$
$$=b_0+b_1x+b_2x^2+\cdots$$

اکنون با موقعیتی روبه‌رو هستیم که برای ما آشنا است (تمرین ۶۰ را ببینید). اگر ضریب توان‌های مساوی را، در دو طرف، برابر قرار دهیم، به این دستگاه معادله‌ها می‌رسیم:

$$\begin{aligned}
a_0u_0 &= b_0,\\
a_1u_0+a_0u_1 &= b_1,\\
a_2u_0+a_1u_1+a_0u_2 &= b_2,\\
a_3u_0+a_2u_1+a_1u_2+a_0u_3 &= b_3,\\
\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

این دستگاه را، که خصلتی بازگشتی دارد، می‌توان باروشی آشنا، یعنی روش بازگشت، حل کرد. مجهول اول، ازمعادلهٔ اول به‌دست می‌آید؛ و

به طور کلی، با در دست داشتن مجهول‌های u_0، u_1، ...، u_{n-2} و u_{n-1}، می‌توانیم مجهول بعدی u_n را، بدون استفاده از معادله‌های قبلی، پیدا کنیم.

u_0، u_1، u_2 و u_3 را، برحسب a_0، a_1، a_2، a_3، b_0، b_1، b_2 و b_3 بیان کنید.

(این راه حل، می‌تواند، برای روشن کردن یك روش تازه، به ما کمك کند. به گام‌هایی که باید برداریم، توجه کنید:

واردکردن مجهول‌هایی که ضریب‌های یك رشتهٔ توانی هستند؛

تشکیل دستگاه معادله‌ها، از راه مقایسهٔ ضریب‌های توان‌های برابر، دردو طرف رابطه‌ای که‌رشته‌های توانی رابه‌هم‌مربوط می‌کند؛

محاسبهٔ مجهول‌ها، به‌یاری روش بازگشتی.

این گام‌ها، مشخص‌کنندهٔ روشی هستندکه «روش ضریب‌های نامعین» نام داردوبرای بسیاری ازدستگاه‌های جالب توجه‌معادله‌ها، که با روش بازگشتی حل می‌شوند، به‌کار می‌رود.)

*۷۷. حاصل‌ضرب توان‌های زیر را در نظر می‌گیریم:

$$a_i^{\alpha_i} a_j^{\alpha_j} a_k^{\alpha_k} b_l^{\beta_l} b_m^{\beta_m}$$

و نام‌گذاری می‌کنیم

$\alpha_i+\alpha_j+\alpha_k+\beta_l+\beta_m$: توان این حاصل‌ضرب؛

$\alpha_i+\alpha_j+\alpha_k$: توان‌آن نسبت به‌مجموعهٔ aها؛

$\beta_l+\beta_m$: توان‌آن نسبت به‌مجموعهٔ bها؛

$i\alpha_i+j\alpha_j+k\alpha_k+l\beta_l+m\beta_m$. وزن آن

روشن است که این تعریف‌ها، برای هرتعداد حرف‌های a و b، به قوت خود باقی‌اند (و نه‌فقط برای سه حرف یکسان و دو حرف نوع دیگر).

از عبارت‌هایی که برای u_0، u_1، u_2 و u_3 در تمرین ۷۶ به‌دست آورده‌اید، استفاده‌کنید و قانون‌مندی را روشن کنید.

*۷۸. نسبت زیر را، به‌رشتهٔ توانی بسط دهید:

$$\frac{b_\circ+b_\text{۱}x+b_\text{۲}x^\text{۲}+\cdots+b_nx^n+\cdots}{\text{۱}+x+x^\text{۲}+\cdots+x^n+\cdots}$$

(نتیجه بی‌اندازه ساده است، ـ آیا نمی‌توانید از آن استفاده کنید؟)

۷۹*. نسبت زیر را، به‌رشتهٔ توانی بسط دهید:

$$\frac{b_\circ+b_\text{۱}x+b_\text{۲}x^\text{۲}+\cdots+b_nx^n}{\text{۱}-x}$$

(نتیجه ساده به نظر می‌رسد. آیا نمی‌توانید آن را مورد استفاده قرار دهید؟)

۸۰. نسبت زیر را، به‌رشتهٔ توانی بسط دهید:

$$\frac{\text{۱}+\frac{x}{\text{۳}}+\frac{x^\text{۲}}{\text{۱۵}}+\frac{x^\text{۳}}{\text{۱۰۵}}+\cdots+\frac{x^n}{\text{۳}\times\text{۵}\times\text{۷}\times\cdots\times(\text{۲}n+\text{۱})}+\cdots}{\text{۱}+\frac{x}{\text{۲}}+\frac{x^\text{۲}}{\text{۸}}+\frac{x^\text{۳}}{\text{۴۸}}+\cdots+\frac{x^n}{\text{۲}\times\text{۴}\times\text{۶}\times\cdots\times\text{۲}n}}$$

(چند جمله را محاسبه کنید و، سپس سعی کنید، جملهٔ عمومی را حدس بزنید.)

۸. تعمیم رشتهٔ توانی. اگر بسط تابعی، به‌رشتهٔ توانی معلوم باشد، بسط تابع معکوس را، به‌رشتهٔ توانی پیدا کنید.

به زبان دیگر: بسط x برحسب توان‌های y داده شده است؛ می‌خواهیم بسط y را برحسب توان‌های x پیدا کنیم. دقیق‌تر، اگر داشته باشیم:

$$x=a_\text{۱}y+a_\text{۲}y^\text{۲}+\cdots+a_ny^n+\cdots$$

با فرض $a_\text{۱}\neq\circ$، مطلوب است بسط

$$y=u_\text{۱}x+u_\text{۲}x^\text{۲}+\cdots+u_nx^n+\cdots$$

از شیوه‌ای استفاده می‌کنیم که در تمرین ۷۶ به کار بردیم. در بسط مفروض x نسبت به‌توان‌های y، به‌جای y، بیان (مجهول) آن را به‌صورت رشتهٔ توانی می‌نویسیم:

$$x=a_\text{۱}(u_\text{۱}x+\quad u_\text{۲}x^\text{۲}+\quad u_\text{۳}x^\text{۳}+\cdots)+$$

$$+a_2(u_1^2x^2+2u_1u_2x^3+\cdots)+$$
$$+a_3(u_1^3x^3+\cdots)+$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

با برابر قرار دادن ضریب‌های توان‌های یکسان x در دو طرف این رابطه، دستگاه معادله‌هایی برای مجهول‌های u_1، u_2، u_3، $\cdots$ به دست می‌آوریم:

$$1=a_1u_1$$
$$0=a_1u_2+a_2u_1^2$$
$$0=a_1u_3+2a_2u_1u_2+a_3u_1^3$$

از این راه، دستگاه بازگشتی پیدا می‌شود (که، با کمال تأسف، خطی هم نیست).

u_1، u_2، u_3، u_4 و u_5 را برحسب a_1، a_2، a_3، a_4 و a_5 پیدا کنید.

*۸۲. توان و **وزن** عبارت جواب‌های تمرین ۸۱ را بررسی کنید.

*۸۳. می‌دانیم

$$x=y+y^2+y^3+\cdots+y^n+\cdots$$

y را برحسب توان‌های x بسط دهید.

(نتیجه ساده به‌نظر می‌رسد ــ آیا نمی‌توانید از آن استفاده کنید؟)

*۸۴. می‌دانیم

$$4x=2y-3y^2+4y^3-5y^4+\cdots$$

بسط y را نسبت به x پیدا کنید. (اول حدس بزنید که جملهٔ عمومی چگونه باید باشد و، سپس، آن را تفسیر کنید.)

*۸۵. می‌دانیم

$$x=y+ay^2$$

y را برحسب توان‌های x بسط دهید. (نتیجهٔ حاصل، می‌تواند برای روشن کردن بعضی جنبه‌های موقعیت کلی مورد بررسی در تمرین ۸۱، مفید باشد.)

*۸۶. می‌دانیم

$$x=y+\frac{y^۲}{۲}+\frac{y^۳}{۶}+\frac{y^۴}{۲۴}+\cdots+\frac{y^n}{n!}+\cdots$$

y را برحسب توان‌های x بسط دهید.

*۸۷. معادلهٔ دیفرانسیلی. مطلوب است بسط تابع y بـه توان‌های x، به شرطی‌که y در معادلهٔ دیفرانسیلی زیر صدق کند:

$$\frac{dy}{dx}=x^۲+y^۲$$

با شرط اولیهٔ $y=۱$ به‌ازای $x=۰$.

با حفظ روشی‌که در تمرین ۷۶ استفاده‌کردیم، فرض می‌کنیم:

$$y=u_۰+u_۱x+u_۲x^۲+u_۳x^۳+\cdots$$

که بایدضریب‌های $u_۰$، $u_۱$، $u_۲$، $u_۳$، ... آن را پیدا کنیم. اگراین مقدار y را در معادلهٔ دیفرانسیلی قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$u_۱+۲u_۲x+۳u_۳x^۲+۴u_۴x^۳+\cdots=u_۰^۲+۲u_۰u_۱x+$$
$$+(۲u_۰u_۲+u_۱^۲+۱)x^۲+\cdots$$

از مقایسهٔ ضریب‌های توان‌های یکسان x، در دو طرف برابری، به دستگاه معادله‌های زیر می‌رسیم:

$$\begin{aligned}u_۱&=u_۰^۲,\\ ۲u_۲&=۲u_۰u_۱,\\ ۳u_۳&=۲u_۰u_۲+u_۱^۲+۱,\\ ۴u_۴&=۲u_۰u_۳+۲u_۱u_۲,\\ &\cdots\cdots\end{aligned}$$

و چون، بنا بر شرط اولیه، داریم:

$$u_۰=۱$$

از این دستگاه می‌توان، به‌صورت برگشتی، $u_۱$، $u_۲$، $u_۳$، ... را پیدا کرد. عددهای $u_۱$، $u_۲$، $u_۳$ و $u_۴$ را پیدا کنید.

(حل معادلـه‌های دیفرانسیلی با روش ضریب‌های نامعین ـ که‌با

توجه به‌این تمرین، آن را روشن کردیم ـ چه برای نظریه و چه در عمل، اهمیت زیادی دارد.)

*۸۸. (ادامه). ثابت کنید که، به‌ازای $n \geqslant ۳$، داریم $u_n > ۱$.

*۸۹. اگر y در معادلهٔ دیفرانسیلی

$$\frac{d^۲y}{dx^۲} = -y$$

صدق کند، بسط y را نسبت به x، با شرط اولیهٔ $y = ۱$ و $\frac{dy}{dx} = ۰$ به‌ازای $x = ۰$ پیدا کنید.

*۹۰. در بسط تابع زیر، نسبت به‌توان‌های x، ضریب $x^{۱۰۰}$ را پیدا کنید:

$$(۱-x)^{-۱} \cdot (۱-x^۵)^{-۱} \cdot (۱-x^{۱۰})^{-۱} \times$$
$$\times (۱-x^{۲۵})^{-۱} \cdot (۱-x^{۵۰})^{-۱}$$

گمان نمی‌رود در این تردید باشد که، برای حل مسألهٔ طرح شده، باید آن را به‌عنوان حالت خاصی از یك مسألهٔ کلی‌تر در نظر گرفت و، سپس، راهی برای محاسبهٔ ضریب عمومی (یعنی، ضریب x^n) از بسط مورد نظر استفاده کرد. شاید، مناسب‌تر باشد که، ابتدا، مسألهٔ مشابه ولی ساده‌تری را ـ که ناشی از مسألهٔ مفروض ما است ـ در نظر بگیریم. اندیشه‌هایی در این جهت‌ها، ممکن است به طرح زیر منجر شود: باید چند رشتهٔ توانی با ضریب‌های نامعین، وارد در کار کرد. می‌نویسیم:

$$(۱-x)^{-۱} = A_۰ + A_۱x + A_۲x^۲ + A_۳x^۳ + A_۴x^۴ + \cdots,$$
$$(۱-x)^{-۱}(۱-x^۵)^{-۱} = B_۰ + B_۱x + B_۲x^۲ + B_۳x^۳ + \cdots,$$
$$(۱-x)^{-۱}(۱-x^۵)^{-۱}(۱-x^{۱۰})^{-۱} = C_۰ + C_۱x + C_۲x^۲ + \cdots,$$
$$(۱-x)^{-۱}(۱-x^۵)^{-۱}(۱-x^{۱۰})^{-۱}(۱-x^{۲۵})^{-۱} = D_۰ + D_۱x + \cdots$$

و بالاخره

$$(۱-x)^{-۱}(۱-x^۵)^{-۱}(۱-x^{۱۰})^{-۱}(۱-x^{۲۵})^{-۱}(۱-x^{۵۰})^{-۱} =$$
$$= E_۰ + E_۱x + E_۲x^۲ + \cdots + E_nx^n + \cdots$$

و با این علامت گذاری‌ها، مسأله منجر به‌پیدا کردن E_{100} می‌شود.

به جای تنها مجهول E_{100}، بی‌نهایت مجهول تازه درنظر می‌گیریم؛ اکنون باید A_n ، B_n ، C_n ، D_n و E_n را، به ازای $n=0, 1, 2, 3, \cdots$ پیدا کنیم. ولی مقداربعضی ازاین مجهول‌ها، برای ما، معلوم یا روشن است:

$$A_0=A_1=A_2=\cdots=A_n=\cdots=1,$$
$$B_0=C_0=D_0=E_0=1$$

به‌جز این، مجهول‌های ما، با این رابطه، به‌هم مربوطاند:

$$A_0+A_1x+A_2x^2+\cdots=(B_0+B_1x+B_2x^2+\cdots)(1-x^5)$$

که ازآن، با برابر قرار دادن ضریب‌های x^n، به‌دست می‌آید:

$$A_n=B_n-B_{n-5}$$

رابطه‌های مشابه و بستگی‌های بینابینی را، که‌مقدارمجهول E_{100} را با مقدارهای قبلی مربوط می‌کند، پیدا کنید وسرآخر، مقدارعددی E_{100} را به‌دست‌آورید.

۹۱. مشتق nام $y^{(n)}$ از تابع $y=x^{-1}\ln x$ را پیدا کنید.

اگر به‌طور متوالی مشتق بگیریم، به‌دست می‌آید:

$$y'=-x^{-2}\ln x+x^{-2},$$
$$y''=2x^{-3}\ln x-3x^{-3},$$
$$y'''=-6x^{-4}\ln x+11x^{-4}$$

بر مبنای این مشتق‌ها، و یا چند مشتق مرتبهٔ بالاتر، می‌توان فرض کردکه مشتق مرتبهٔ nام، به‌این صورت است:

$$y^{(n)}=(-1)^n n!x^{-n-1}\ln x+(-1)^{n-1}c_n x^{-n-1}$$

که درآن، c_n، عددی است درست و **وابسته** به n (و **نه وابسته به** x). این را ثابت کنید و، ضمناً، c_n را برحسب n محاسبه کنید.

۹۲. برای مجموع رشته زیر، عبارت ساده‌ای پیدا کنید:

$$1+2x+3x^2+\cdots+nx^{n-1}$$

(آیا مسألهٔ خویشاوندی را می‌شناسید؟ آیا می‌توانید از نتیجهٔ آن و یا از روش حل آن، استفاده کنید؟)

۹۳. برای مجموع زیر، عبارت کوتاهی پیدا کنید:

$$۱+۴x+۹x^{۲}+\cdots+n^{۲}x^{n-۱}$$

(آیا مسألهٔ خویشاوندی را می‌شناسید؟ آیا از نتیجه یا روش حل آن، نمی‌توانید استفاده کنید؟)

۹۴. (ادامه). نتیجهٔ مسألهٔ قبل را تعمیم دهید.

*۹۵. راه حل دیگری برای تمرین ۹۲، و تا حدی ساده‌تر، وجود دارد که به کمك محاسبهٔ دیفرانسیلی به‌دست می‌آید. آن را پیدا کنید.

۹۶. توجه کنید که

$$\begin{aligned}
&۱\times۱+۲\times۱ &&=۳,\\
&۱\times۱+۲\times۲+۳\times۱ &&=۸,\\
&۱\times۱+۲\times۳+۳\times۳+۴\times۱ &&=۲۰,\\
&۱\times۱+۲\times۴+۳\times۶+۴\times۴+۵\times۱ &&=۴۸,\\
&۱\times۱+۲\times۵+۳\times۱۰+۴\times۱۰+۵\times۵+\\
&\qquad+۶\times۱=۱۱۲
\end{aligned}$$

بر اساس این مثال‌ها، قانون کلی را پیدا کنید، آن را با نشانه‌های مناسب ریاضی بیان کنید، آن را ثابت کنید.

۹۷. این رابطه داده شده است:

$$a_{n+۱}=a_n\frac{n+\alpha}{n+۱+\beta}$$

که در آن، $n=۱,۱,۳,\cdots$ و $\alpha\neq\beta$. ثابت کنید

$$a_۱+a_۲+a_۳+\cdots+a_n=\frac{a_n(n+\alpha)-a_۱(۱+\beta)}{\alpha-\beta}$$

۹۸. برای مجموع زیر، بیان کوتاهی پیدا کنید:

$$\frac{p}{q}+\frac{p}{q}\cdot\frac{p+۱}{q+۱}+\frac{p}{q}\cdot\frac{p+۱}{q+۱}\cdot\frac{p+۲}{q+۲}+\cdots+\frac{p}{q}\cdot\frac{p+۱}{q+۱}\times$$

$$\times\frac{p+۲}{q+۲}\cdots\frac{p+n-۱}{q+n-۱}$$

۹۹ . دربارهٔ عدد π. دایره‌ای به‌شعاع واحد $(r=۱)$ انتخاب می‌کنیم؛ n ضلعی‌منتظم محیطی ومحاطی آن رارسم می‌کنیم؛ محیط آن‌ها را P_n (برای nضلعی‌محیطی) و p_n (برای nضلعی محاطی) می‌گیریم.

برای سادگی کار، این علامت گذاری‌ها را، قبول می‌کنیم:

$$\frac{a+b}{۲}=A(a, b), \sqrt{ab}=G(a, b), \frac{۲ab}{a+b}=H(a, b)$$

(برای واسطه‌های حسابی، هندسی و توافقی[1]).

۱°. $P_۴$، $p_۴$ و $P_۶$، $p_۶$ را پیدا کنید.

۲°. ثابت کنید

$$P_{۲n}=H(P_n, p_n), \qquad p_{۲n}=G(p_n, P_{۲n})$$

(بنابراین، با آغاز از $P_۶$ و $p_۶$، می‌توان به‌صورت بازگشتی، این دنبالهٔ عددها را محاسبه کرد:

$$P_۶\,;\,p_۶\,;\,P_{۱۲}\,;\,p_{۱۲}\,;\,P_{۲۴}\,;\,p_{۲۴}\,;\,P_{۴۸}\,;\,p_{۴۸};\cdots$$

این دنباله را تا هر جا می‌توان ادامه داد و عدد π را، به عنوان مقداری‌بین دوعددمعلوم، با هردقت دلخواه پیداکرد.) ارشمیدس، ده‌جملهٔ اول‌این‌دنباله را محاسبه‌کرد، یعنی تا چندضلعی‌های منتظم ۹۶ ضلعی پیش رفت و پیدا کرد:

$$۳\frac{۱۰}{۷۱}<\pi<۳\frac{۱}{۷}$$

۱۰۰ . مسأله‌های دیگر. مسأله‌هایی شبیه‌آن چه دراین فصل دیدید، ولی متفاوت باآن‌ها، بیندیشید؛ و در درجهٔ اول به مسأله‌هایی بپردازید که خودتان می‌توانیدآن‌ها را حل‌کنید.

---

۱. زیرنویس صفحهٔ ۸۸ را ببینید.

فصل چهارم

انطباق

§۱. درون یابی

قبل ازآنکه مسألهٔ خود را، کاملاً تنظیم کنیم، از چند نکتهٔ مقدماتی یاد می کنیم.

۱°. n مقدار مختلف برای طول نقطه‌ها

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$$

و n مقدار نظیر برای عرض آن‌ها

$$y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n$$

درنظرمی گیریم. به‌زبان‌دیگر، nنقطهٔ مختلف ازصفحه‌را مفروض می گیریم:

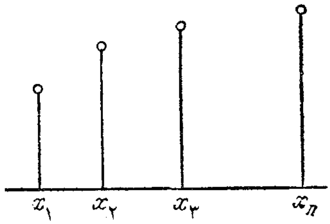
$$(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3), \cdots, (x_n, y_n)$$

می‌خواهیم تابع $f(x)$ را طوری پیدا کنیم که مقدارهای آن، به ازای مقدارهای مفروض طول x، دقیقاً برابر با مقدارهای متناظر y، عرض آن‌ها باشند:

$$f(x_1)=y_1, f(x_2)=y_2, f(x_3)=y_3, \cdots, f(x_n)=y_n$$

به زبان دیگر، می‌خواهیم یك منحنی به‌معادلهٔ $y=f(x)$ پیدا کنیم

که از n نقطهٔ مفروض بگذرد (شکل ۲۳–a) واین، همان مسألهٔ درون‌یابی[1] است. دربارهٔ ماهیت این مسأله بیشتردقیق می‌شویم؛ این بررسی علاقهٔ ما را نسبت‌به آن و امکان حل‌آن را زیادتر می‌کند.



شکل ۲۳–a. درون‌یابی

۲°. هر وقت که بخواهیم مقدار y را ـ که بستگی بـه مقدار دیگر x دارد ـ بررسی‌کنیم، با مسألهٔ درون‌یابـی سروکار داریـم. مثلاً x را درجـهٔ حرارت و y را طول میلـهٔ متجانسی فـرض کنید (فشار را ثابت می‌گیریم). به‌هر مقدار x درجهٔ حرارت، مقدار معینی از y — طول میله ـ متناظر است؛ در ایـن مورد می‌گوییم: y بستگی بـه x دارد، یا y تابعی از x است و می‌نـویسند: $y=f(x)$. فیزیک‌دان، بـه‌طور تجربی، بستگی y به x را بررسی می‌کند؛ میله را در درجهٔ حرارت‌های مختلف

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$$

قرار می‌دهد و مقدارهای متناظرآن‌ها را، یادداشت می‌کند:

$$y_1, y_2, y_3, \cdots, y_n$$

که عبارتند از مقدارهای طول میله، در هر یك از درجـهٔ حرارت‌های مورد آزمایش. البته، فیزیك‌دان ممکن‌است به‌مقداری ازy، به‌ازای درجهٔ حرارت معین x، نیاز داشته باشدکه درآزمایش‌های او نباشد، یعنی می‌خواهـد، بر اساس مشاهده‌های خود، تابع $y=f(x)$ را پیدا کند که، نه در حالت‌های خـاص، بلکه در تمام مـوردها و برای تمـامی حـوزهٔ تغییر متغیر مستقل x برقرار باشد؛ در این جاست‌که او، با مسألهٔ درون‌یابی سروکار دارد.

۳°. «در داخل پـرانتز» یـادآوری می‌کنیم، که فیزیك‌دان، بامسألهٔ دشوارتری روبـه‌روست. مقدارهای x_1، y_1؛ x_2، y_2؛ $\cdots$؛ x_n، y_n، که

---

[1] درون‌یابی (interpolation) ــ از واژهٔ لاتینی interpolare به معنی نو کردن ــ عبارت است ازتجدید بنای مقدارهای بینابینی تابع، از روی تعدادی مقدارهای معلوم آن.

مورد استفادهٔ او قرارمی گیرند، مقدارهایی «دقیق» و «واقعی» نیستند، زیرا این‌مقدارها از راه اندازه گیری به‌دست‌آمده‌اند و، بنابراین، همیشه‌تحت‌تأثیر اشتباه‌های چاره‌ناپذیر اندازه گیری‌ها قرار دارند. به این ترتیب، حتی نباید مسأله را به‌این صورت طرح کردکه منحنی مجهول، از این نقطه‌ها بگذرد، بلکه باید به‌دنبال چنان منحنی بـودکـه این نقطه‌ها، به اندازهٔ کافی، به‌آن نزدیك باشند.

ضمناً، در این جا باید دو حالت را از هم جدا کرد: ۱) وقتی‌که طول x موردنظر(که فیزیك‌دان می‌خواهد عرض متناظرآن را پیدا کند) در درون دو مقدار مرزی آزمایش شده (x_1 و x_n؛ شکل ۲۳-a را ببینید) قرار دارد و ۲) وقتی‌که این نقطه در بیرون فاصلهٔ ما واقع است. معمولاً، حالت اول را درون یابی و حالت دوم را بیرون یابی گویند. (در مجموع، درون یابی اطمینان‌بخش‌تر است تا بیرون یابی.)

ولی اجازه بدهیدکه این‌بحث وبقیهٔ جزئیات راکناربگذاریم، «پرانتز را ببندیم» و دوباره به‌دنبالهٔ بحث اصلی خود در ۱° و ۲°، برگردیم.

۴°. مسأله‌ای که در۱° طرح کردیم، بی‌اندازه مبهم و نامشخص‌است، زیرا مجموعه‌ای نامتناهی از منحنی‌ها وجود دارد که همهٔ آن‌ها از n نقطهٔ مفروض می گذرند. n مقداری‌که برای y در اختیار داریم، به‌خودی خود، هیچ مبنایی به‌دست نمی‌دهندکه بتوانیم یکی ازاین منحنی‌ها را، بردیگران، ترجیح دهیم. اگر فیزیك‌دان بخواهـد بر یکی از منحنی‌ها تکیه کند، بایـد علاوه بر نتیجه‌های حاصل از n مشاهدهٔ خود، پایه‌های تکمیلی دیگری هم در اختیار داشته باشد. این پایه‌ها و یا موجب‌ها، چیستند؟

به‌این ترتیب، مسألهٔ مربوط بـه درون یابی، پرسش‌کلی‌تری را (که ضمناً جالب‌تر هم می‌باشد) پـدیـد می‌آورد: بر چـه اساسی و با چه حقی، می‌توان از مشاهده‌های مفروض، بـه‌طرح ریاضی آن رسید؟ این، مهم‌ترین پرسش فلسفی، دربارهٔ مسألهٔ درون یابی است؛ با وجود ایـن، ازآن جا که کمتر می‌توان به پرسش‌های فلسفی، پاسخ‌های قانع‌کننده داد، این پرسش را کنار می گذاریم و به‌جنبه‌های دیگر مسألهٔ درون یابی می‌پردازیم.

۵°. این امر طبیعی است که در طرح مسألهٔ ۱°، کمی تغییر بدهیم و برای منحنی، علاوه برعبور از n نقطهٔ مفروض، شرط ساده‌ترین را هم برای آن در نظر بگیریم. ولی، این تغییر هم، ابهام مسأله را از بین نمی‌برد، زیرا «سادگی» را به‌سختی می‌توان، به‌صورتی عینی و کمیتی، ارزیابی کرد؛ داوری ما دربارهٔ «سادگی»، هم به‌سلیقهٔ ما بستگی دارد وهم به‌جهت‌فکری ما (که ناشی از نوع برخورد ما با نقطه‌های مفروض است).

با وجود این، اصطلاح «سادگی» در مسألهٔ ما، ممکن است ما را به **اندیشه‌ای** برساندکه کاملاً قابل قبول باشد و منجر بـه‌شکل‌گیری **روشن و** مفیدی برای‌آن بشود. قبل از همه، شرط می‌کنیم که جمع، تفریق و ضرب، ساده‌ترین عمل‌های محاسبه‌ای باشند. سپس، تابعی راساده‌ترین می‌نامیم که، مقدارهای‌آن، به‌کمك ساده‌ترین عمل‌ها، قابل‌محاسبه باشند. با درنظر گرفتن این دو شرط، باید چندجمله‌ای، یا عبارت به‌صورت

$$a_0+a_1x+a_2x^2+\dots+a_nx^n$$

را، ساده‌ترین تابع به حساب بیاوریم (اگر $a_n\neq 0$ باشد، این چندجمله‌ای، از درجهٔ n است.) با در دست داشتن مقدار ضریب‌های a_0، a_1، $\dots$، a_n از چندجمله‌ای، می‌توانیم مقدار خود چندجمله‌ای را، بـه ازای هر مقدار دلخواه متغیر x، به‌کمك ساده‌ترین عمل‌های سه‌گانه، محاسبه کنیم.

سرانجام، اگر با دو چندجمله‌ای با درجه‌های مختلف سروکار داشته باشیم،آن را که درجه کمتری دارد، ساده‌ترمی گیریم. اگر این شرط را هم، به‌شرطهای قبلی، اضافه‌کنیم،آن وقت، مسألهٔ مربوط به«ساده‌ترین‌منحنی» که از n نقطهٔ مفروض‌می گذرد، مسأله‌ای کاملاً مشخص وقابل حل‌می‌شود (این مسأله را،درون‌یابی به‌کمك چندجمله‌ای‌ها می‌نامند)؛اکنون‌می‌توان‌مسأله را، به‌این ترتیب، تنظیم‌کرد:

n نقطهٔ (مختلف) x_1، x_2، $\dots$، x_n و n عدد متناظر آن y_1، y_2، $\dots$، y_n داده شده است؛ می‌خواهیم چند جمله‌ای $f(x)$ را، با کمترین درجهٔ ممکن، پیدا کنیم، به‌نحوی که با n شرط زیر سازگار باشد:

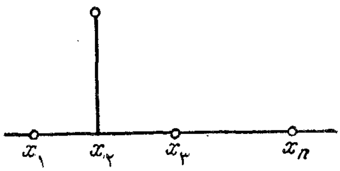
$$f(x_1)=y_1,\qquad f(x_2)=y_2,\ \dots,\quad f(x_n)=y_n$$

§۲. حالت خاص

اگر نمی‌توانید راه دیگری برای مسأله‌ای که مطرح کرده‌ایم، پیدا کنید، سعی کنید فرض‌ها را تغییردهید. مثلاً می‌توانید یکی از عرض‌ها راثابت نگه دارید وبقیه را به‌سمت صفرمیل دهید؛ به‌این ترتیب، می‌توان به‌حالت خاصی از مسأله رسیدکه بیشتر از حالت کلی، قابل دسترس به نظر می‌رسد. از تغییر مقدار طول‌های مفروض نفعی نمی‌بریم و مناسب‌تر است که همان n عدد دلخواه را، برای طول‌ها، در نظر بگیریم:

$$x_1, x_2, x_3, \cdots, x_n$$

ولی دستگاه مقدارهای عرض را، به صورتی خاص انتخاب می‌کنیم، به نحوی که تا حد امکان ساده باشند، مثلاً به‌این ترتیب:



شکل ۲۳-b. حالت خاص

$$0, 1, 0, \cdots, 0$$

(همهٔ عرض برابر صفرند، بـه جز عرض متناظر با طول x_2؛ شکل ۲۳-b را ببینید.)

از ویژگی‌های معلوم چندجمله‌ای‌ها نتیجه می‌شودکه چندجمله‌ای در $n-1$ نقطهٔ مختلف برابر صفر می‌شود، یعنی دارای $n-1$ ریشهٔ مختلف x_1، x_3، x_4، $\cdots$ ، x_n می‌باشد و، بنابراین، باید بر هر یك از تفاضل‌های زیر بخش‌پذیر باشد:

$$x-x_1, x-x_3, x-x_4, \cdots, x-x_n$$

در نتیجه، چندجمله‌ای ما باید بر حاصل‌ضرب این $n-1$ تفاضل بخش پذیر باشد و، به‌این ترتیب، نمی‌تواند درجه‌ای کمتر از $n-1$ داشته باشد. اگر درجهٔ چندجمله‌ای، برابر $n-1$، یعنی کمترین درجهٔ ممکن، باشد، باید به این صورت باشد:

$$f(x)=C(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)$$

که درآن، C مقداری است ثابت.

آیا از همهٔ فرض‌ها استفاده کرده‌ایم؟ نه، هنوز باید مقدارعرض ۱ را،

که متناظر با طول $x_۲$ است، به‌حساب بیاوریم:

$$f(x_۲)=C(x_۲-x_۱)(x_۲-x_۳)(x_۲-x_۴)\cdots(x_۲-x_n)=۱$$

از این جا، مقدار C را بـه‌دست می‌آوریـم و آن را در عبارت $f(x)$ قرار می‌دهیم، در نتیجه، برای $f(x)$، به‌این رابطه می‌رسیم:

$$f(x)=\frac{(x-x_۱)(x-x_۳)(x-x_۴)\cdots(x-x_n)}{(x_۲-x_۱)(x_۲-x_۳)(x_۲-x_۴)\cdots(x_۲-x_n)}$$

روشن است کـه چندجملـه‌ای $f(x)$، بـه ازای مقدارهای مفروض $x_۱$، $x_۲$، $\cdots$، x_n، همان مقدارهای مورد نظر را اختیار می‌کند. بـه این ترتیب، توانستیم، مسألهٔ درون یابی را، در حالت خاص، وقتی‌که عرض‌ها مقدارهای خاصی باشند، حل‌کنیم.

§ ۳. حل مسألهٔ کلی با ترکیب حالت‌های خاص

شانس آوردیم و توانستیم حالت خاص مناسبی را پیدا کنیم. برای‌این‌که موفقیت خود رااستوارکنیم، باید تلاش کنیم تا حداکثر استفاده رااز نتیجهٔ حاصل ببریم.

با جزئی تغییری، می‌توانیم این حالت خاص را، تا حدی کلی‌تر کنیم. مقدارهای مفروض طول‌ها، یعنی

$$x_۱,\ x_۲,\ x_۳,\ \cdots,\ x_n$$

را متناظر با مقدارهای

$$۰,\ y_۲,\ ۰,\ \cdots,\ ۰$$

از عرض‌ها قرار می‌دهیم. اگر عبارتی را کـه در § ۲ بـه‌دست آوردیم، در ضریب $y_۲$ ضرب‌کنیم، چندجمله‌ای‌ما، به‌این صورت درمی‌آید:

$$y_۲\frac{(x-x_۱)(x-x_۳)(x-x_۴)\cdots(x-x_n)}{(x_۲-x_۱)(x_۲-x_۳)(x_۲-x_۴)\cdots(x_۲-x_n)}$$

در این عبارت، نقش طول $x_۲$، با نقش یکنواخت سایر طول‌ها، فرق دارد. با وجود ایـن، خود مقدار $x_۲$، هیچ برتری خاصی ندارد؛ می‌توانیم این نقش خاص را، به‌هر یك از طول‌های دیگر هم بدهیم. بـه‌این ترتیب، اگر طول‌های

$$x_۱,\ x_۲,\ x_۳,\ \cdots,\ x_n$$

را متناظر با مقدارهای y در هر یك از سطرهای زیر بگیریم:

$$\begin{array}{l} y_1, 0, 0, \cdots, 0, \\ 0, y_2, 0, \cdots, 0, \\ 0, 0, y_3, \cdots, 0, \\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ 0, 0, 0, \cdots, y_n, \end{array}$$

می‌توانیم چندجمله‌ای درجهٔ $n-1$ نظیر را ـ که برای مقدار طول‌ها، مقدار نظیر عرض‌ها را در سطر مربوط به دست دهد ـ با همان روش بالا به دست آوریم.

جواب مسألهٔ مفروض را، برای حالت‌های خاص مختلف آن، پیدا کردیم. آیا می‌توان این جواب‌ها را، طوری با هم یکی کرد که از ترکیب حالت‌های خاص، جواب مسأله در حالت کلی به‌دست‌آید؟ البته که می‌توان؛ برای این منظور، کافی است عبارت‌های مربوط به حالت‌های خاص را، به طور ساده، با هم جمع کرد:

$$\begin{aligned} f(x) = {} & y_1 \frac{(x-x_2)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_1-x_2)(x_1-x_3)(x_1-x_4)\cdots(x_1-x_n)} + \\ & + y_2 \frac{(x-x_1)(x-x_3)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_2-x_1)(x_2-x_3)(x_2-x_4)\cdots(x_2-x_n)} + \\ & + y_3 \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_4)\cdots(x-x_n)}{(x_3-x_1)(x_3-x_2)(x_3-x_4)\cdots(x_3-x_n)} + \\ & \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot \\ & + y_n \frac{(x-x_1)(x-x_2)(x-x_3)\cdots(x-x_{n-1})}{(x_n-x_1)(x_n-x_2)(x_n-x_3)+\cdots+(x_n-x_{n-1})} \end{aligned}$$

به‌این ترتیب، به‌یك چندجمله‌ای می‌رسیم که درجهٔ آن از $n-1$ تجاوز نمی‌کند و، ضمناً، در شرطهای

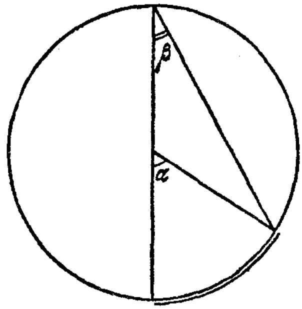
$$f(x_i) = y_i \qquad (i = 1, 2, \cdots, n)$$

صدق می‌کند. خود ساختمان چندجمله‌ای، به‌روشنی، سازگاری با شرطها را نشان می‌دهد.

(آیا هنوز پرسشی برای شما باقی مانده است؟)

§۴. روش انطباق

حل مسأله‌های مربوط به‌درون یابی، که در این‌جا با آن آشنا شدیم، متعلق به لاگرانژ است؛ این روش حل، دورنمایی از یك روش‌کلی را به‌ما می‌دهد. آیا قبلاً با آن برخورد نداشته‌اید؟



شکل ۲۴-a. حالت خاص

°۱. به احتمال زیاد، خواننده اثبات عادی این قضیهٔ معروف مسطحه را می‌داند (و تنها بایدآن را به‌یاد بیاورد) که «زاویهٔ مرکزی دوبرابر زاویهٔ‌محاطی‌متناظر آن، یعنی‌زاویهٔ محاطی روبه‌روبه‌همان‌کمان مقابل زاویهٔ مرکزی، می‌باشد». (درشکل‌های ۲۴-a و ۲۴-b، این کمان را با دو منحنی رسم کرده‌ایم.) اثبات این‌قضیه، بر دو ملاحظه تکیه می‌کند و در دو قسمت به‌انجام می‌رسد.

°۲. از مناسب‌ترین حالت خاص‌آغاز می‌کنیم. اگر یکی ازضلع‌های زاویهٔ محاطی، منطبق بر قطر باشد (شکل ۲۴-a را ببینید)، زاویهٔ مرکزی α، برابرمی‌شودبا مجموع دوزاویهٔ غیرمجاورخود درمثلث‌متساوی‌الساقینی که یکی از زاویه‌های آن برابر β است و، به‌سادگی، رابطهٔ مورد نظر، به دست می‌آید:

$$\alpha = ۲\beta$$

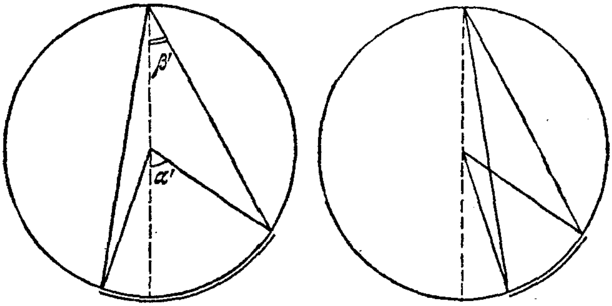
اثبات این حالت خاص، روی شکل ۲۴-a نشان داده شده است.

°۳. اکنون فرض می‌کنیم، با این حالت خاص مناسب سروکار نداشته باشیم. در این صورت، از رأس زاویهٔ محاطی، قطر دایره را رسم می‌کنیم (این قطر، در شکل ۲۴-b، به‌صورت نقطه‌چین رسم شده است)، و ترکیبی از دو شکل شبیه ۲۴-a را به دست می‌آوریم. فرض می‌کنیم این ترکیب

(شکل ۲۴-b را ببینید)، متناظر با دو رابطهٔ زیر باشد:

$$\alpha' = ۲\beta' \quad , \quad \alpha'' = ۲\beta''$$

که درستی آن‌ها نتیجهٔ استدلالی است که در §۲ داشتیم. زاویهٔ مرکزی α و زاویهٔ محاطی β را ــ کــه در قضیهٔ ما، صحبت از رابطـهٔ بین آن‌ها است ــ



شکل ۲۴-b. حالت کلی

می‌توان به‌صورت مجموع یا تفاضل دو زاویهٔ دیگر نشان داد (بسته به‌این که با چه حالتی از شکل ۲۴-b سروکار داشته باشیم):

$$\alpha = \alpha' + \alpha'', \quad \beta = \beta' + \beta'', \quad \text{یا} \quad \alpha = \alpha' - \alpha'', \quad \beta = \beta' - \beta''$$

بنابراین، از جمع یا تفریق دو برابری قبلی، به‌دست می‌آید:

$$\alpha' + \alpha'' = ۲(\beta' + \beta'') \quad \text{یا} \quad \alpha' - \alpha'' = ۲(\beta' - \beta'')$$

که قضیهٔ ما را ثابت می‌کند: $\alpha = ۲\beta$ در حالت کلی درست است.

°۴. اکنون، دومسأله‌ای راکه دراین فصل حل کردیم، باهم مقایسه می‌کنیم: مسألهٔ جبری مربوط به‌درون یابی را که در §§۱، ۲ و ۳ بررسی کردیم ومسألهٔ مسطحه‌ای راکه در°۱، °۲ و °۳ از همین بند، ثابت کردیم. با وجودی که این دو مسأله، از بسیاری جهت‌ها، با هم فـرق داشتند، هر دوی آن‌ها را، با یك روش مورد بررسی قرار دادیم. در هردو مورد، برای رسیدن به نتیجه، دو مرحله را طی کردیم.

ابتدا توانستیم حالت‌خاص مناسبی را انتخاب‌کنیم که ساده‌ترازحالت

کلی بود و، اگر چه، جواب حالت کلی را نمی‌داد، برای دست یافتن به آن مناسب بود (§۲ و ۲° و شکل‌های b-۲۳ و a-۲۴ را ببینید).

سپس، با یکی کردن حالت‌های خاص، جواب کامل را برای حالت کلی به‌دست می‌آوریم (§۳ و ۳° را ببینید).

دو اصطلاح می‌آوریم که، به‌خوبی، بر خصلت‌های روش ما، تأکید می‌گذارند.

در مرحلهٔ اول ، حالت خاصی را جدا می‌کنیم که نه تنها بی‌اندازه مناسب است بلکه، ضمناً، بی‌اندازه مفید است؛ آن را حالت خاص راهنما می‌نامیم، چراکه مارا به‌سمت راه‌حل کلی، راهنمایی می‌کند.

در مرحلهٔ دوم ، حالت‌های خاص، بـه‌کمك عمل‌های جبری خاصی، یکی می‌شوند. در § ۳ ، n جواب خاص، بعداز ضرب هریك درعددی ثابت، با هم جمع شدند و، درنتیجه، جواب کلی به‌دست آمد. در ۳° هم، از جمع یا تفریق حالت‌های خاص، اثبات کلی قضیه به‌دست آمد. عمل‌های جبری را، که در § ۳ به‌کاربردیم (درآن جا، خصلتی کلی‌تراز ۳° داشتند)، ترکیب خطی یا انطباق[۱] جواب‌های خاص می‌نامیم، (برای آگاهی‌های تکمیلی در این مورد، به‌تمرین ۱۱ مراجعه کنید).

برای نشان دادن ماهیت روش خـود ، از همین اصطلاح‌ها استفاده می‌کنیم: با آغاز از حالت خاص راهنما ، جواب کلی را به کمك انطباق حالت‌های خاص پیدا می‌کنیم.

یادداشت‌های تکمیلی وتمرین ها، می‌توانند شرح کوتاهی راکه دربارهٔ روش انطباق دادیم، برای خواننده، روشن‌تر کنند. خواننده حتی می‌تواند از چارچوب طرح ما خارج شود و حوزهٔ گسترده‌تری برای به‌کار بردن این روش پیدا کند.

---

۱. superposition از واژهٔ لاتینی superpositio به‌معنی روی هم‌گذاشتن.

تمرین‌ها و ملاحظه‌های تکمیلی

بخش ۱

۱ . برای به‌دست‌آوردن حجم‌هرم $V=\frac{Sh}{۳}$ (S — مساحت قاعده و h — ارتفاع)، می‌توان ازحالت چهار وجهی منتظم، به‌عنوان حالت‌خاص راهنما، استفاده کرد. چگونه؟

۲ . اگر $f(x)$ یك چندجمله‌ای از درجهٔ k باشد، چندجمله‌ای $F(x)$ از درجهٔ $(k+۱)$ وجوددارد، به‌نحوی که، به‌ازای $n=۱,۲,۳,\cdots$ داشته باشیم:

$$f(۱)+f(۲)+f(۳)+\cdots+f(n)=F(n)$$

برای اثبات این قضیه، می‌توانیم نتیجه‌ای را که درتمرین ۳ فصل‌سوم به دست آوردیم، بـه عنوان حالت خاص راهنما، در نظر بگیریم و، سپس، از انطباق استفاده‌کنیم. چگونه؟

۳ . (ادامه). راه دیگـری هم وجود دارد: می‌توانیم نتیجـهٔ تمرین ۳۵ فصل سوم را ، بـه عنوان حالت خاص راهنما، انتخاب و، سپس، از انطباق استفاده‌کنیم و راه دیگری برای اثبات پیدا کنیم. چگونه؟

۴ . اگـر ضریب‌هـای $a_۰$ ، $a_۱$ ، $a_۲$ ، $\cdots$ ، a_k را مفروض بگیریم، عددهای $b_۰$ ، $b_۱$ ، $b_۲$ ، $\cdots$ ، b_k را طوری پیدا کنید که برابری

$$a_۰x^k+a_۱x^{k-۱}+\cdots+a_k=b_۰C_x^k+b_۱C_x^{k-۱}+\cdots+b_kC_x^۰$$

یك اتحاد باشد، یعنی، به‌ازای همهٔ مقدارهای x برقرار باشد (تمرین ۷۰ فصل سوم را ببینید).

ثابت کنیدکه این مسأله، دارای جواب منحصر به‌فرد است.

۵ . با استفاده از روشی‌که درتمرین ۳ به‌کار بردید ، نتیجهٔ تازه‌ای برای بیان $S_۳$ از § ۳ فصل سوم، بدهید.

۶ . با استفاده ازنتیجهٔ تمرین ۳ (برای تنظیم قضیه، تمرین ۲ را ببینید)، بیان تازه‌ای برای $S_۳$، که در § ۳ فصل سوم داشتیم، پیدا کنید.

۷ . تمرین ۳، چه فایده‌ای می‌تواند برای حل تمرین ۳ فصل سوم داشته

باشد؟

۸ . پرسشی دربارهٔ § ۱: دربارهٔ حالت خاص $n=۲$ چه می‌توان گفت؟ وقتی که تنها ۲ نقطه داده شده باشد، به طور طبیعی، باید ساده‌ترین منحنی را که از آن‌ها می‌گذرد، خط راست به‌حساب آورد (که ضمناً یك ارزشی است، یعنی تنها یك جواب دارد). آیا این مطلب، با دیدگاهی که، سرآخر، در § ۱ — ۵° به‌دست آوردید، سازگار است؟

۹ . پرسشی دربارهٔ § ۲: دربارهٔ حالت خاص زیر فکر کنید:

$$y_i = ۰ \qquad i = ۱, ۲, \cdots, n$$

یعنی حالتی که همهٔ مقدارهای مفروض عرض‌ها برابر صفر باشد.

۱۰. پرسشی دربارهٔ § ۳: آیا چندجمله‌ای حاصل $f(x)$ با همهٔ شرطها سازگار است؟ آیا درجهٔ آن، کمترین درجهٔ ممکن است؟

۱۱. ترکیب خطی یا انطباق. فرض کنید، n مقدار ریاضی با خصلتی کاملاً مشخص (یعنی، انتخاب شده از یك مجموعهٔ کاملاً معین)

$$V_۱, V_۲, V_۳, \cdots, V_n$$

طوری باشند که ترکیب خطی آن‌ها

$$C_۱V_۱ + C_۲V_۲ + C_۳V_۳ + \cdots + C_nV_n$$

که به کمك n عدد

$$C_۱, C_۲, C_۳, \cdots, C_n$$

تشکیل شده است دارای همان خصلت باشد (یعنی، به‌همان مجموعه، تعلق داشته باشد).

دو مثال می‌آوریم:

a) اگر $V_۱$، $V_۲$، $V_۳$، $\cdots$، V_n، چندجمله‌ای‌هایی باشند که درجهٔ آن‌ها، از عدد مثبت و مفروض m تجاوز نکنند، ترکیب خطی آن‌ها هم، یك چندجمله‌ای است که درجهٔ آن از m تجاوز نمی‌کند.

b) اگر $V_۱$، $V_۲$، $V_۳$، $\cdots$، V_n، بردارهایی موازی با یك صفحه باشند، ترکیب خطی آن‌ها هم، برداری موازی همان صفحه خواهد بود.

مثال a) با استدلال و بحث §۴ تطبیق می‌کند. آن چه که به §۴-۳° مربوط می‌شود، یادآوری می‌کنیم که جمع و تفریق را می‌توان، همچون حالت‌های خاصی از روند کلی تشکیل ترکیب خطی در نظر گرفت ($n=2$، $C_1=C_2=1$ و $C_1=-C_2=1$).

مثال b) هم آموزنده است؛ همهٔ چیزهایی از این قبیل، که از آن‌ها بتوان ترکیب‌های خطی با قانون‌های «معمولی» جبر تشکیل داد، بردار نامیده می‌شوند و مجموعهٔ آن‌ها را، در جبر انتزاعی، فضای برداری می‌گویند.

مفهوم ترکیب خطی (فضای برداری)، در بسیاری از شاخه‌های ریاضیات، نقش مهمی به‌عهده دارد. در این‌جا، تنها می‌توانیم، بعضی مثال‌های ساده‌تر را موردبررسی قرار دهیم (تمرین‌های ۱۲، ۱۳، ۱۴، ۱۵ و ۱۶).

ما در این کتاب، اصطلاح‌های «ترکیب خطی» و «انطباق» را به یك معنا به کار می‌بریم و، ضمناً، از دومی، خیلی بیشتر از اولی استفاده می‌کنیم. در فیزیك هم، غالباً با اصطلاح «انطباق» برخورد می‌کنیم (به‌خصوص، در نظریهٔ نوسان‌ها). در این جا، تنها یك مثال از فیزیك آورده‌ایم (تمرین ۱۷)، که به‌اندازهٔ کافی ساده و، در عین حال، برای منظور ما، آموزنده است.

۱۲*. معادله‌های دیفرانسیلی خطی متجانس، با ضریب‌های ثابت. این معادله، به‌صورت زیر است.

$$y^{(n)}+a_1 y^{(n-1)}+\cdots+a_{n-1}y'+a_n y=0$$

که درآن، a_1، a_2، ...، a_n عددهای مفروضی هستند که به آن‌ها ضریب‌های معادله گویند؛ n — مرتبهٔ معادله، y — تابعی از متغیر مستقل x و y'، y''، ...، $y^{(n)}$ — مشتق‌های متوالی تابع y هستند. تابع y، که در این معادله صدق کند، جواب یا «انتگرال» آن نامیده می‌شود.

a) ثابت کنید، ترکیب خطی جواب‌ها، خودجوابی از معادله است.

b) ثابت کنید که جواب خاصی به‌صورت

$$y = e^{rx}$$

وجود دارد، که درآن، r به‌ترتیب مناسبی انتخاب شده است.

c) با یکی کردن جواب‌های خاصی که از این گونه‌اند، تلاش کنید جوابی پیدا کنید که کلی‌ترین شکل ممکن را داشته باشد.

*۱۳. تابع y را طوری پیدا کنید که در معادلهٔ دیفرانسیلی

$$y'' = -y$$

با شرط اولیهٔ زیر صدق کند:

$$y = ۱ \text{ و } y' = ۰ \text{ به‌ازای } x = ۰$$

۱۴. معادله‌های تفاضلی خطی متجانس با ضریب‌های ثابت. چنین معادله‌ای، به‌این صورت است:

$$y_{k+n} + a_۱ y_{k+n-۱} + \cdots + a_{n-۱} y_{k+۱} + a_n y_k = ۰$$

که‌درآن، $a_۱$، $a_۲$، ...، a_n، عددهای مفروضی هستند که ضریب‌های معادله نامیده می‌شوند؛ n — درجهٔ معادله است؛ دنبالهٔ نامتناهی عددهای

$$y_۰, y_۱, y_۲, \cdots, y_k, \cdots$$

که به‌ازای $k = ۰, ۱, ۲, \cdots$، در معادله صدق کنند، جواب آن نامیده می‌شود.

(می‌توانیم y_x را، تابعی از متغیر مستقل x در نظر بگیریم، که برای مقدارهای درست‌ونامنفی x، معین است. ازطرف دیگر، معادلهٔ مفروض‌را می‌توان یك دستور بازگشتی به‌حساب آورد که، به‌کمك‌آن، هرجمله y_{k+n} از دنباله را می‌توان از روی n جملهٔ قبلی $y_{k+n-۱}$، $y_{k+n-۲}$، ...، y_k و یا y_k را از روی $y_{k-۱}$، $y_{k-۲}$، ...، y_{k-n} محاسبه کرد.)

a) ثابت کنید که ترکیب خطی جواب‌ها، خود جوابی از معادله است.

b) ثابت کنید، جواب خاصی به‌صورت

$$y_k = r^k$$

وجود دارد، که درآن، r به‌صورتی مناسب انتخاب شده است.

c) جواب‌های خاص ازاین گونه‌را طوری باهم‌یکی کنید تاجوابی به‌کلی‌ترین صورت ممکن، به‌دست‌آید.

۱۵. دنبالهٔ عددهای فیبوناچی (باتمرین‌های ۴۳ و ۴۴ فصل سوم مقایسه کنید).

$$۰, ۱, ۱, ۲, ۳, ۵, ۸, ۱۳, \dots$$

به‌کمك معادلهٔ تفاضلی (یا دستور بازگشتی)

$$y_k = y_{k-۱} + y_{k-۲}, \; k = ۲, ۳, ۴, \dots$$

و شرط اولیهٔ $y_۰ = ۰$ و $y_۱ = ۱$ معین می‌شود. y_k را برحسب k بیان کنید.

۱۶. y_k را، به‌ازای $k = ۲, ۳, ۴, \dots$، به‌کمك دستور بازگشتی زیر معین کنید:

$$y_k = \frac{y_{k-۱} + y_{k-۲}}{۲}$$

با فرض $y_۰ = a$ و $y_۱ = b$، y_k را برحسب a، b و k بیان کنید.

۱۷. انطباق حرکت‌ها. گالیله، قانون سقوط جسم و قانون ماند (اینرسی) را کشف‌کرد و از اتحاد این دوقانون، برای پیدا کردن مسیر (منحنی پرواز) گلوله استفاده‌کرد. خواننده‌ای‌که با مطالعهٔ این مسأله به کمك نمادهای امروزی مکانیك آشنا باشد، می‌تواند به‌سادگی و به روشنی، تمامی کشف بزرگ گالیله را، پیش خود، مجسم کند.

x و y را مختصات قائم دکارتی در صفحهٔ قائم می‌گیریم: محور x در جهت افقی و محور y در جهت قائم و به طرف بالا. گلوله (نقطه‌ای مادی‌که نیروهای اصطکاك و مقاومت هوا، درآن تأثیری ندارد) در این صفحه حرکت می‌کندکه از مبداء مختصات در لحظهٔ $t = ۰$ پرتاب شده است (t ــ معرف زمان‌است). سرعت اولیهٔ گلوله را، برابر v می‌گیریم وفرض می‌کنیم‌که درمسیراولیهٔ خود، زاویه‌ای برابر α با جهت مثبت محور x ساخته باشد.

می‌توانیم، سه‌حرکت ممکن را به‌حرکت واقعی گلوله مربوط کنیم، که از همان نقطه و در همان لحظهٔ زمانی آغاز شده باشند:

a) نقطـهٔ مادی وزن‌دار، از حالت سکـون، سقوط آزاد داشته باشد، که در لحظهٔ زمانی t، مختصات‌آن به‌این صورت است

$$x_۱ = ۰, \quad y_۱ = -\frac{۱}{۲} g t^۲$$

b) نقطهٔ مادی، آزاد از تأثیر نیروی ثقل، تحت تأثیر مؤلفهٔقائم سرعت‌اولیه، $v \sin\alpha$ حرکت می‌کند؛ ضمناً، بنابرقانون ماند، مختصات آن در لحظهٔ t به‌این صورت است:

$$x_۲ = ۰, \quad y_۲ = t v \sin\alpha$$

c) نقطهٔ مادی، آزاد ازتأثیر نیروی ثقل، تحت تأثیر مؤلفهٔافقی سرعت اولیه، حرکت می‌کند؛ ضمناً، بنابر قانون ماند، مختصات آن در لحظهٔ t چنین است:

$$x_۳ = t v \cos\alpha, \quad y_۳ = ۰$$

حرکت واقعی چه مسیری دارد، به‌شرطی با فرض‌های «ساده شدهٔ» ما، این حرکت، شامل این سه حرکت ممکن باشد؟

بخش ۲

خواننده‌ای که مایل باشد به‌تحقیق بپردازد، مهم‌ترین مرحله‌های آن را در تمرین ۱۸ و تمرین ۲۵ خواهد دید.

۱۸. شیوه‌های گوناگون، برای حل یك مسأله. دو یال مقابـل یك چهار وجهی، طولی برابر a دارند و برهم عمودند و، به‌جزآن، هر یك از این یال‌ها، برپاره خط به‌طول b، که وسط دو یال را به‌هم وصل کرده است، عمودند. حجم چهار وجهی را پیدا کنید.

برای حل این مسأله، شیوه‌های مختلفی وجود دارد. اگرخواننده بخواهدبه‌اشاره‌های‌تکمیلی دست‌یابد، باید باتمرین‌های ۱۹ تا۲۴ آشنا باشد (چه به‌صورت انتخابی و چه به‌ردیف هم). و اگر بخواهدطرح

فضایی آن را، به‌صورت عینی‌تری، تجسم کند، اورا راهنمایی می‌کنیم تا در جست وجوی یك تصویر قائم ساده باشد و یا مقطع ساده‌ای از چهار وجهی بسازد.

۱۹. مجهول چیست؟ در تمرین ۱۸، مجهول عبارت است از حجم چهار وجهی.

مجهولی ازاین نوع را،چگونه می‌توان پیداکرد؟ حجم‌چهاروجهی را وقتی می‌توان پیدا کرد که قاعده و ارتفاع آن معلوم باشد، ولی‌در تمرین ۱۸، هیچ کدام از این‌ها، دادهٔ نشده است.

به‌این ترتیب، مجهول چیست؟

۲۰. (ادامه). باید مساحت مثلث را بدانیم؛ چگونه می‌توان مجهولی از این نوع را پیدا کرد؟ مساحت مثلث، با معلوم بودن قاعده و ارتفاع آن به‌دست می‌آید ـ ولی در مورد مثلث قاعدهٔ هرم از تمرین ۱۸، تنها یکی از این دو مقدار معلوم است.

باید طول یك پاره خط را پیدا کنیم؛ مجهولی از این نوع را، چطور می‌توان پیدا کرد؟ معمولاً، طول یك پاره خط را به‌کمك یك مثلث محاسبه می‌کنند ـ ولی در شکل مورد نظر ما، مثلثی وجود ندارد که ارتفاع چهار وجهی تمرین ۱۸، یکی از عنصرهای آن‌باشد.

بله، چنین مثلثی را در اختیار نداریم، ولی آیا نمی‌توانیدآن را بسازید؟ در هر مورد، به‌طور مناسبی نام‌گذاری کنید،و متوجه باشید که چیزی از نظر شما دور نماند.

۲۱. یك مسألهٔ حل شده که خویشاوند مسألهٔ شما است: «حجم یك چهار وجهی را محاسبه کنیدکه قاعده و ارتفاع آن معلوم باشد». در تمرین ۱۸، نمی‌توان مستقیماً از این مسأله استفاده کرد، زیرا، ارتفاع و قاعدهٔ هرم معلوم نیست. ولی،آیا ممکن نیست، درهمین نزدیکی‌ها، چهاروجهی‌های دیگری، مناسب‌تر از چهار وجهی ما، وجود داشته باشند؟

۲۲. (ادامه). آیا ممکن است، چهاروجهی‌های مناسب‌تری، در درون

چهار وجهی ما، وجود داشته باشند؟

۲۳. ممکن است، آگاهی‌های تکمیلی به شما کمك کند، البته، به‌شرطی که به‌مسألهٔ ما مربوط باشند. تمرین ۱۸، به‌شرطی ساده‌تر می‌شود که دستور حجم شبه منشور را بدانیم.

شبه منشور، چند وجهی خاصی است. دو وجه آن، که قاعدهٔ پایین و قاعدهٔ بالا نامیده می‌شوند، موازی یکدیگرند؛ بقیهٔ وجه‌ها را، وجه‌های جانبی گویند. در شبه منشور، سه نوع یال وجود دارد: یال‌هایی که ضلع‌های قاعدهٔ پایین را تشکیل می‌دهند، یال‌هایی که ضلع‌های قاعدهٔ بالا را تشکیل می‌دهند و یال‌های جانبی. هر یك از یال‌های جانبی شبه منشور (و این‌ها، مهم‌ترین عنصرهای این نوع چندوجهی هستند)، رأسی از قاعدهٔ بالا را به‌رأسی از قاعدهٔ پایین وصل می‌کنند. منشور، حالت خاصی از شبه منشور است.

فاصلهٔ بین دو قاعدهٔ شبه‌منشور را، ارتفاع آن گویند. اگر صفحه‌ای موازی با دو قاعدهٔ شبه منشور، و به‌یك فاصله از آن‌ها، شبه منشور را قطع کند، در برخورد با آن، یك چندضلعی پدید می‌آید که آن را مقطع متوسط نامند.

اگر V حجم شبه منشور، h ارتفاع آن، L، M و N، به‌ترتیب، مساحت قاعدهٔ پایین، مساحت مقطع متوسط و مساحت قاعدهٔ بالا باشد، در آن صورت

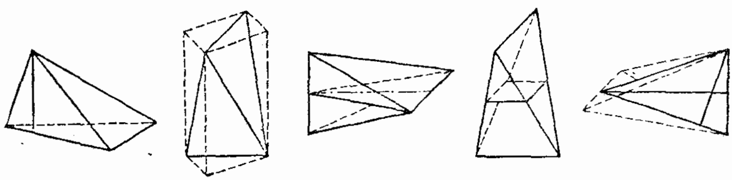
$$V=\frac{(L+۴M+N)h}{۶}$$

(و این، دستور محاسبهٔ حجم شبه‌منشور است؛ به‌این مناسبت، تمرین ۲۵ و بعد از آن را ببینید). از این دستور، برای حل مسألهٔ ۱۸ استفاده کنید.

۲۴. ممکن است شما مایل نباشید از طرحی که برای حل تمرین ۱۸ ریختیم (که از تمرین ۱۹ آغاز شد و از تمرین ۲۰ گذشت) استفاده کنید و

بخواهید به‌راه دیگری بروید. دراین صورت، با توجه به‌نتیجه‌ای که به‌دست آورده‌اید، به‌تمرین ۲۰ برگردید و سعی کنید راه خودتان را تا آخر ادامه دهید.

۲۵. دستور حجم شبه منشور. این موضوع را، به‌تفصیل، مورد مطالعه‌قرار دهید، آن را ازدیدگاه‌های مختلف بررسی کنید، دربارهٔ همهٔ‌جانب‌های آن فکرکنید، و به‌شکل ۲۵ توجه داشته باشید. بعد ازآن‌که چهار طریق برای به‌دست‌آوردن یك نتیجهٔ واحد پیدا کردید، می‌توانید، نتیجه‌ها را منتزع کنید و جدا از یکدیگر در نظر بگیرید.[1]



a) b) c) d) e)

شکل ۲۵. چهاروجهی را دوباره و دوباره بچرخانید، آن را، از دیدگاه‌های مختلف بررسی‌کنید و از هر سمتی مورد مطالعه قرار دهید.

سه تا از این چهار نتیجه گیری، بدون استفاده از دستور حجم شبه منشور به‌دست می‌آید؛ تنها در یکی از چهار حالت، حجم شبه‌منشور به‌کار گرفته می‌شود (تمرین ۲۳ را ببینید). از این جا نتیجه می‌شود که، برای حالت خاصی از دستور حجم شبه منشور، که در مسألهٔ خود با آن روبه رو هستیم، در واقع، دست‌کم به صورتی ناروشن، سه اثبات مختلف داریم. آیا نمی‌شود با تقلید یکی از این اثبات‌ها، آن را طوری گسترش داد که رابطهٔ مجهول را، نه تنها برای حالت خاص، بلکه برای حالت کلی، به‌دست دهد؟

---

۱. در این جاست که باید، سخن لایب‌نیتس را به‌خاطر بیاوریم؛ نقل قول مربوطه را، قبل از تمرین ۳۲ فصل سوم ببینید.

کدام یك ازسه استنتاجی که در بالا بررسی کردیم (تمرین ۲۱، تمرین ۲۲ و تمرین‌های ۱۹، ۲۰ و ۲۴ را ببینید)، از این دیدگاه، شانس بیشتری دارند؟

۲۶. دستور حجم شبه منشور را، برای منشور آزمایش کنید (منشور، حالت خاصی از شبه منشور است).

۲۷. دستور حجم شبه منشور را، در مورد هرم تحقیق کنید (هرم را، به مفهومی، می‌توان شبه منشور خراب شده‌ای دانست، یا اگر ترجیح می‌دهید، به‌عنوان حالت حدی شبه منشور، وقتی که قاعدهٔ بالای آن، به‌صورت یك نقطه درآمده است، به‌حساب‌آورد).

۲۸. با تعمیم روشی که مبنای حل تمرین ۲۱ بود، شبه منشور P را، به n شبه منشور غیر متقاطع P_1، P_2، ...، P_n تقسیم می‌کنیم، به نحوی که روی هم، شبه منشور P را پر کنند؛ ضمناً، قاعده‌های پایین شبه منشورهای جزئی، قاعدهٔ پایین شبه منشور اصلی و قاعده‌های بالای شبه منشورهای جزئی، قاعدهٔ بالای شبه منشور اصلی را پر کنند. [در حالتی که ضمن تمرین ۲۱ بررسی کردیم (شکل ۲۵-b)، P، منشوری است که قاعدهٔ آن را یك‌مربع تشکیل می‌دهد، $n=5$، P_1، P_2، P_3 و P_4، چهاروجهی‌هایی برابر یکدیگرند و P_5 هم یك چهار وجهی است.] ثابت کنید، اگردستور حجم شبه منشور، برای n شبه‌منشور از $n+1$ شبه‌منشورهای جزئی درست باشد، حتماً برای شبه‌منشور $(n+1)$ام هم درست است.

۲۹. با تعمیم راه حل تمرین ۲۳ (شکل ۲۵-b را ببینید)، یال‌های مقابل چهاروجهی را l و n می‌نامیم (l، یال پایینی و n، یال بالایی). از l صفحه‌ای موازی n و از n صفحه‌ای موازی l عبور می‌دهیم؛ فاصلهٔ بین این دو صفحهٔ موازی را h می‌نامیم. چهاروجهی را می‌توان به عنوان شبه‌منشوری (شاید ترجیح بدهید بگویید، شبه منشور خراب شده‌ای) درنظر گرفت که قاعده‌های بالا وپایین آن، به‌ترتیب، یال‌های l و n وارتفاع آن h است. (مقطع متوسط آن، متوازی‌الاضلاع است.)

دستور حجم شبه منشور را، برای این حالت خاص، مورد تحقیق قرار دهید.

۳۰. دستور حجم شبه منشور را، برای حالت کلی، ثابت کنید (برای این منظور، از انطباق حالت‌های خاص قبلی استفاده کنید).

۳۱. هیچ زنجیری، محکم‌تر ازضعیف‌ترین حلقهٔ خودش نیست. یکباردیگر، حل تمرین ۲۹ را بررسی کنید.

۳۲. راه حل تمرین ۳۰ را، یکبار دیگر مطالعه کنید.

۳۳*. دستور سیمپسون. تابع پیوسته‌ای راکه در فاصلهٔ $a \leqslant x \leqslant a+h$ معین است، $f(x)$ می‌نامیم و فرض می‌کنیم:

$$\int_{a}^{a+h} f(x)dx = I,\quad f(a) = L,\quad f\left(a+\frac{h}{۲}\right) = M,$$

$$f(a+h) = N$$

در این صورت، به ازای شرطهای معینی، که بعداً مورد مطالعه قرارخواهیم داد.

$$I = \frac{L+۴M+N}{۶}h$$

این عبارت I را، دستور سیمپسون نامند.

n را عددی درست وغیرمنفی بگیرید؛ فرض کنید $f(x)=x^n$، $a=-۱$، $h=۲$ و مقدارهایی از n را پیدا کنیدکه، برای آن‌ها، دستور سیمپسون برای محاسبهٔ انتگرال I، درست باشد.

(حتی در موردهایی که با این دستور، مقدار دقیق I به‌دست نیاید، به‌مقدارتقریبی آن دست می‌یابیم، یعنی اختلاف بین‌سمت‌راست رابطهٔ سیمپسون و مقدار انتگرال I، مقداری نسبتاً کوچك است. این وضع غالباً پیش می‌آید و، به‌همین مناسبت، رابطهٔ سیمپسون، نقشی اساسی درمحاسبه‌های تقریبی انتگرال‌های معین، به‌عهده‌دارد.)

۳۴*. ثابت کنید، به‌ازای $a=-۱$ و $h=۲$، رابطهٔ سیمپسون، برای هر چندجمله‌ای که از درجهٔ سوم تجاوز نکند، درست است.

*۳۵. ثابت‌کنید، رابطهٔ سیمپسون، برای هر چندجمله‌ای که درجه‌ای بالاتر از ۳ نداشته باشد، و به‌ازای هرمقداردلخواه a و h، درست است.

*۳۶. دستور حجم شبه منشور را، با استفـاده از هندسهٔ تحلیلی در فضا و محاسبهٔ انتگرالی، ازنتیجهٔ تمرین ۳۵، استخراج کنید. (استادان سنتی ریاضیات می‌گویند: «برای این‌که بـه ارزش راه حل سادهٔ مسأله پی ببرید، ابتدا آن را از طریق دشواری حل کنید».)

*۳۷. گسترش دامنهٔ بررسی. با حل بعضی از مسأله‌های قبل، در واقع، از آن طرح مقدماتی روش انطباق، که در §۴، ۴° تنظیم کرده بودیم، به‌دور افتادیم. در واقع، راه‌حل کلی را، بر اساس انطباق حالت‌های خاص مناسب، پیدا کردیم؛ ولی این حالت‌های خاص، همیشه ازیك نوع نیستند، همیشه به‌یك کلاس مشخص تعلق ندارند. [درحل تمرین ۳۰، برخی از جسم‌هایی که درانطباق شرکت داشتند، هرم بودند (و در تمرین ۲۷، مـورد بررسی قـرار گرفتند) و دیگـران، صورت‌های خاصی از چهاروجهی (کـه در تمرین ۲۹، بررسی شدند). در تمرین ۳۴ هم، با انطباق حالت‌های خاص با خصلت‌های متفـاوتی سروکار داشتیم.] می‌توان گفت که ازآن چه در §۴، ۴° تنظیم کـرده بودیم، به‌جای دیگری منحرف شدیم: ما، به‌جای یك حالت خاص راهنما، از چند حالت آغاز کردیم. به این ترتیب می‌توانیم تنظیم روش خود را کمی عوض کنیم و، درنتیجه، آن را گسترش دهیم: با عزیمت از حالت خاص راهنما یا ازچند حالت خاص راهنما، به‌راه حل کلی براساس انطباق حالت‌های خاص، دست می‌یابیم.

روش انطباق، مسیر ازحالت خاص راهنما (یا حالت‌های خاص راهنما) به‌حالت کلی را نشان می‌دهد. راه بـه‌کلی دیگری هم وجود دارد که خوانندهٔ خوب ما باید باآن آشنا باشد: غالباً می‌توان، حالت کلی را بـه‌حالت خاص راهنما، و به‌کمك تبدیل مربوطه، منجر کرد. [با تغییر انتگرال‌گیری می‌توان حالت کلی تمریـن ۳۵ را بـه حالت خاص تمرین ۳۴ منجر کرد.]

بخش دوم

در مسیر روش کلی

. . . همهٔ دانش‌ها، چیزی جز محصولی از خرد انسانی نیستند، که همیشه به‌یک‌صورت‌اند، هرچند که‌موضوع‌های‌مورد کاربرد آن، متنوع و گوناگون باشند و . . . ایـن گوناگونی برای‌آن، معنای بیشتری جز گوناگونی جسم‌هایی کـه در معرض نور خورشید قرار می‌گیرند، ندارد . . .

دکارت ـ قانون‌های راه بردن عقل

قانون *I*.

فصل پنجم

دربارهٔ مسأله‌ها

حل مسأله‌ها، عبارت است ازخود ویژه‌ترین و
خاص‌ترین نوع تفکرآزاد.

ویلیام جیمس[1]

§ ۱. مسأله چیست؟

واژهٔ «مسأله»، به‌مفهوم کاملاً گسترده، به‌کار می‌رود؛ بنابراین، قبل ازهمه، باید به‌طور دقیق‌تر، روشن کنیم که منظورما از این واژه چیست.

درنظام امروزی زندگی، به‌دست آوردن غذا، معمولاً، مسأله‌ای نیست. اگر درخانه احساس گرسنگی بکنم، چیزی از یخچال برمی‌دارم و، اگر در شهر باشم، به‌کافه‌ای یا رستورانی می‌روم. ولی، اگر یخچال خالی

---

۱. ویلیام جیمس (۱۸۴۲ــ۱۹۱۰)، روان شناس مشهور امریکایی و بانی نظریهٔ «سیرباطنی» وفلسفه پراگماتیسم (اصالت عمل) که تأثیرزیادی بربسیاری از نویسندگان اروپای غربی و امریکا کرد.

باشد و یا درشهر، بدون پول، مانده باشم، وضع کاملاً به گونهٔ دیگری درمی‌آید؛ درچنین موردهایی، میل به غذا، مسأله‌ای ایجاد می‌کند، و گاهی مسأله‌ای دشوار. به‌طور کلی، تمایل و نیاز، گاهی منجر به‌یك مسأله می‌شود و گاهی هم مسأله‌ای ایجاد نمی‌کند. اگرهمراه باتمایلی که درمغزمن به‌وجود می‌آید، و یا بلافاصله، به‌دلیلی وسیله‌ای به‌ذهنم برسدکه به‌کمك آن بتوانم به طور قطع، تمایل خود را برآورم، مسأله به‌وجود نمی‌آید. ولی، اگر چنین وسیله‌ای پیدا نشود، با یك مسأله سر و کار دارم. بنابراین ، مسأله عبارت است ازضرورت جست وجوی آگاهانهٔ وسیلهٔ مناسبی، برای رسیدن به‌هدفی روشن، ولی در بدو امر غیر قابل دسترس. حل مسأله، به‌معنای پیدا کردن این وسیله است.

مسأله،می‌تواند پیچیده یاساده باشد؛ درحالت اول، پیداکردن راه حل آن دشوار است و درحالت دوم، آسان. ضمناً ، دشواری راه حل، تا حد زیادی، به‌خودمفهوم‌مسأله‌مربوط می‌شود: آن‌جاکه‌دشواری نباشد، مسأله‌ای وجود ندارد.

یکی ازمسأله‌های نمونه ومشهور، مسألهٔ مربوط به‌پیداکردن مسیر به‌طرف جای مشخصی است که تا اندازه‌ای دور و برآن شناخته شده باشد. می‌توانید مجسم کنیدکه این مسأله، تا چه حد، برای پدران اولیهٔ ما، که در جنگل‌های دست نخورده زندگی می‌کرده‌اند، جدی ومهم بوده‌است. به‌همین مناسبت، می‌توان حل مسأله را، به‌عنوان جست وجوی راهی برای‌برطرف کردن دشواری‌ها و یا دور زدن مانع‌ها، درنظر گرفت؛ با وجود این، من نمی‌خواهم روی این دیدگاه[1] پافشاری کنم.

بخش اصلی تفکر آگاهانهٔ ما، به حل مسأله مربوط می‌شود، به جز موردهایی که تفریح می‌کنیم و یا درآرزوهای خود فرو رفته‌ایم ، اندیشهٔ ما هدف معینی را تعقیب می‌کند و ما درپی پیداکردن راه و وسیله‌ای برای رسیدن به‌این هدف هستیم. مسیر یا مسیرهایی را جست و جو می‌کنیم که

---

۱. این دیدگاه را باروشی مقایسه‌کنیدکه خیلی معمول است و، طبق آن، حل مسأله را به«گام‌های جداگانه‌ای» تقسیم می‌کنند.

بتوانند ما را به‌هدف محدود خود برسانند.

حل مسأله، موفقیتی است که تنها عقل می‌تواند به‌آن دست یابد و عقل هم هدیه‌ای است که درانسان وجود دارد. برطرف کردن مانع‌ها ویافتن گذرگاه‌ها درجایی که راه مستقیمی وجود ندارد، خصلتی است که موجب امتیازجانوران باهوش ازجانوران کند ذهن، موجب برتری انسان برجانوران باهوش وآدم بااستعداد ازسایرآدم‌ها می‌شود.

هیچ چیز جالب‌تر ازمطالعهٔ جنبه‌های مختلف فعالیت انسانی نیست. اصیل‌ترین خصلت این فعالیت؛ عبارت است از حل مسأله. اندیشهٔ یافتن راهی برای رسیدن به هدفی معین و جست و جوی وسیله‌هایی که برای این منظور مناسب است. می‌خواهیم به‌این جنبه از فعالیت انسان بپردازیم که، به‌نظرمن، جالب‌ترین آن‌هاست.

درفصل‌های گذشته، مسأله‌هایی از ریاضیات مقدماتی را مورد مطالعه قرار دادیم و آن‌ها را، به گروه‌هایی تقسیم کردیم که بتوان، درهرمورد، با یك روش معین به‌حل مسأله پرداخت. به‌این ترتیب، توانسته‌ایم مبنای تجربی معینی برای کار خود فراهم آوریم؛ و حالا، با استفاده از همین مبنا، کوشش می‌کنیم مطلب را تعمیم بیشتری بدهیم و، تاجایی که ممکن است، به‌مسأله‌هایی هم که خصلتی ریاضی ندارند وارد شویم. کوشش برای یافتن روشی کلی، که درحل همهٔ انواع مسأله‌ها به‌کار رود، باوجودی که بیهوده به‌نظر می‌رسد، امری کاملاً طبیعی است، زیرا بااین که مجموعهٔ مسأله‌هایی که باآن‌ها دست به‌گریبان هستیم، مجموعه‌ای نامتناهی است، هرکدام ازما تنها یك‌مغزبرای حل آن‌ها داریم و، طبیعی است اگربخواهیم به‌یك روش‌کلی وعمومی‌برای حل همهٔ این مسأله‌ها دست یابیم.

§۲. گروه‌بندی مسأله‌ها

دانش آموز مشغول امتحان کتبی ریاضیات است؛ فرض می‌کنیم که او دانش‌آموز متوسطی باشدکه، البته، تنبل نیست ومقداری از وقت ونیروی خود را صرف آماده شدن برای امتحان کرده است. بعد از آن‌که با مسألهٔ

مطرح آشنا می‌شود، از خود می‌پرسد: «این، از کدام گونهٔ مسأله‌ها است؟» و در واقع هم، طرح چنین پرسشی می‌تواند مفید باشد، زیرا اگر او بتواند مسألهٔ مورد بررسی خود را به گروهی مربوط کند، نوع آن را بشناسد، ارتباط آن را با این‌جا و آن‌جای کتاب درسی پیدا کند، درآن صورت توانسته است به‌موفقیتی نسبی دست یابد: او کم و بیش به‌روش حل مسأله ـ که نوع آن را قبلاً حل کرده است ـ پی می‌برد.

این، مرحلهٔ مشخصی از حل مسأله (از هر نوع که باشد) می‌باشد. پرسش «این مسأله، به‌چه نوعی ازمسأله‌ها مربوط است؟»، ما را به‌پرسش زیر می‌کشاند: «برای حل مسأله‌هایی از این نوع، چه اقدام‌هایی می‌توان انجام‌داد؟» ـ چنین پرسش‌هایی را می‌توان، باموفقیت، درمورد پژوهش‌های کاملاً جدی هم مطرح کرد.

به‌همین مناسبت، گروه‌بندی مسأله‌ها، برای حل آن‌ها، مفید است، تا از این راه بتوانیم بین مسأله‌های مختلف، فرق بگذاریم و انتساب هریك از آن‌ها را، بر گروه مربوطه، روشن کنیم. بهترین تقسیم‌بندی، آن‌است که، برای مسأله‌های متعلق به‌گروه، روشی برای حل، از قبل مشخص شده باشد.

در این جا، به‌بحث تفصیلی گروه بندی مسأله نمی‌پردازیم و دربارهٔ تکمیل این گروه‌بندی‌هاهم، بحثی نمی‌کنیم. به‌این اکتفا می‌کنیم که باتفسیری آزاد از اقلیدس و مفسران آن، تنها دو نوع کاملاً کلی از مسأله‌ها را، مشخص کنیم.

«مقدمات» اقلیدس، از اصل‌ها، تعریف‌ها و «حکم‌ها» تشکیل‌شده‌است. مفسران و بعضی از مترجمان، دو نوع حکم را از هم جدا کرده‌اند: هدف نزدیك حکم‌های نوع اول (که آن‌ها را به‌زبان لاتینی پروبلم ـ مسأله می‌نامند) عبارت است از ساختن شکل‌ها؛ و هدف نزدیك حکم‌های نوع دوم (که به‌لاتینی تئورم ـ قضیه گفته می‌شوند)، عبارت‌است از اثبات قضیه‌ها. می‌توانیم، این تفاوت را، به‌مفهوم وسیع خود، در دو نوع مسأله تشخیص دهیم: مسأله‌های مربوط به پیدا کردن و مسأله‌های مربوط به اثبات. هدف مشخص مسأله‌های مربوط به پیداکردن عبارت است از پیدا کردن (ساختن،

به دست آوردن، منجرکردن، متحدکردن،...) یك موضوع؛ یعنی مجهول مسألهٔ مفروض؛ هدف مشخص مسأله‌های مربوط به‌اثبات، عبارت است از اثبات درستی یا نادرستی یك حکم، تأیید یا تکذیب آن.

مثلاً وقتی می‌پرسیم: «او چی گفت؟»، با یك مسألهٔ مربوط به‌پیدا کردن سر و کار داریم. ولی‌وقتی بپرسیم: «آیا او بود که این‌مطلب را گفت؟»، با یك مسألهٔ اثباتی رو به‌رو هستیم.

در دو بند بعدی، باتفصیل بیشتری دربارهٔ این دو نوع مسأله، صحبت خواهیم کرد.

۳§. مسأله‌های مربوط به‌پیداکردن

هدف این‌گونه مسأله‌ها، یافتن موضوعی معین، یعنی مجهول مسأله است، به‌نحوی‌که با شرط مسأله، که مجهول و داده‌های مسأله را به‌هم مربوط می‌کند، سازگار باشد. دو مثال را درنظرمی‌گیریم:

«دوپاره خط a و b و زاویهٔ γ داده شده است؛ می‌خواهیم متوازی‌ـ الاضلاعی بسازیم، که پاره خط‌های مفروض، دوضلع مجاور آن و زاویهٔ γ، زاویهٔ بین این دوضلع باشد».

«دوپاره خط a و b و زاویهٔ γ داده شده است؛ می‌خواهیم متوازی‌ـ الاضلاعی رسم‌کنیم‌که پاره خط‌های مفروض، قطرهای‌آن و زاویهٔγ، زاویهٔ بین این دو قطر باشد».

درهردومسأله، فرض‌ها، یکی است: دوپاره خط راست aوb و زاویهٔ γ. درهردومسأله، مجهول هم یکی است: متوازی‌الاضلاع؛ وبنابراین، اگر تنها خصلت مجهول را در نظر بگیریم، این مسأله‌ها، باهم تفاوتی ندارند. ولی شرط دومسأله، یعنی بستگی بین‌داده‌ها بامجهول، بایکدیگرمتفاوت‌اند؛ و روشن است‌که شکل متوازی‌الاضلاع، به ضلع‌های آن به‌گونه‌ای بستگی دارد و به قطرهای آن، به‌گونه‌ای دیگر.

مجهول، می‌تواند به‌مقوله‌های بسیارگوناگونی تعلق داشته باشد. در مسأله‌های ساختمانی هندسه، مجهول عبارت است ازیك شکل، و مثلاً،

مثلث. ضمن حل معادله‌های جبری، مجهول، یك عدد است: ریشهٔ معادلهٔ مفروض. وقتی که می‌پرسیم: «او چی گفت؟»، مجهول ممکن است یك واژه یا چند واژه، یك جمله یا چند جمله‌ای باشد، که گفته شده است. اگرمسأله، خوب تنظیم شده باشد، باید مقوله‌ای (مجموعه‌ای) راکه مجهول به‌آن تعلق دارد، به روشنی مشخص کند؛ از همان آغاز باید بدانیم که چه نوع مجهولی را باید پیداکنیم: مثلث، یا عدد، یا واژه، یا ...

مسأله‌ای که خوب تنظیم شده باشد، باید با دقت، شرطی راکه‌مجهول بایـد حتماً باآن سازگـار باشد، معلوم کند. در مجموعهٔ چیزهایی که مجهول مسأله بایدبه‌آن‌تعلق داشته باشد، زیرمجموعه‌ای وجود دارد، که عضوهای آن با شرط مسأله می‌سازند و، آن وقت، هرعضوی از این زیرمجموعه را، جواب مسأله گـویند. این زیرمجموعه، ممکن است، تنها شامل یـك عضو باشد، که دراین صورت، جواب منحصر به فرد است. این زیرمجموعه، ممکن است تهی باشد، کـه درآن صورت، جوابی وجـود ندارد. (بحث مربوط به «حـل» و «جـواب» را در تمرین ۱۳ ببینید.) یادآوری می‌کنیم که مسألهٔ مربوط به‌پیداکردن را، به‌طریق دیگری هم، می‌توان فهمید. به‌مفهوم دقیق خود، این، مسأله‌ای‌است که درآن باید همهٔ جواب‌هارا (همهٔ زیرمجموعه‌ای راکه دربالا یادکردیم) پیداکنیم (بسازیم، محاسبه‌کنیم، مشخص‌کنیم، ...). به‌مفهومی کمتر دقیق، مسأله می‌تواند یك جواب (دست‌کم، یك جواب) یا چند جواب را بخواهد. گاهی، کافی است، به‌وجود جواب قـانع شویم، یعنی روشن‌کنیم که مجموعهٔ جواب، تهی است یاغیرتهی. وقتی‌که بامسألهٔ‌ریاضی سر و کار داریم، نظرمان به‌مفهوم دقیق حل‌آن است (مگر این‌که به‌روشنی، خلاف آن خواسته شده باشد؛ ولی دربسیاری از مسأله‌های عملی، «مفهوم دقیق» کمتر می‌تواند مورد استفاده باشد.

درمسأله‌های‌ریاضی، ازاصطلاح «داده‌ها» (فرض‌ها، معلوم‌ها) استفاده می‌کنیم کـه شامل مجموعهٔ همهٔ چیزهایی است کـه به‌کمك شرط، با مجهول بستگی دارند. اگر مسأله این باشدکه باید با در دست داشتن سه‌ضلع a، b و c از مثلثی، آن را رسم کنیم، داده‌ها عبارتند از پاره‌خطهای a، b و c.

اگر مسأله، عبارت باشد ازحل معادلهٔ:

$$x^2+ax+b=0$$

داده‌ها دو عدد a و b هستند. مسأله ممکن است تنها یك معلوم داشته باشد و یا اصلاً معلومی (داده‌ای) نداشته باشد. مثال: «مطلوب است نسبت مساحت یك دایره، به‌مساحت مربع محیطی آن». نسبت مجهول، به‌اندازهٔ شکل‌ها بستگی ندارد و، بنابراین، لزومی ندارد که شعاع دایره یا داده‌های دیگری، ازاین قبیل، دراختیار باشد.

مجهول، شرط و داده‌ها را، بخش‌های اصلی این گونه مسأله‌ها (یعنی مسأله‌های مربوط به پیداکردن) می‌نامیم. در واقع، نمی‌توانیم امید حل مسأله‌ای را داشته باشیم که آن را نمی‌فهمیم. وبرای این که مسأله‌ای را بفهمیم، باید بدانیم ـ و ضمناً، خیلی خوب بدانیم ـ که مجهول آن چیست، چه چیزی به ما داده‌اند و شرط مسأله کدام است! به‌همین مناسبت است که، ضمن حل یك مسأله، باید به‌خصوص توجه زیادی به‌این بخش‌های اصلی مسأله داشته باشیم.

۴§. مسأله‌های مربوط به‌اثبات

شایع می‌شود که وزیر امورخارجه، خطاب به‌یکی ازعضوهای کنگره، بیانی تند و خشن داشته است (که ما در این جا، نمی‌توانیم به‌راحتی آن را نقل کنیم). البته، این فقط یك شایعه است که، طبعاً تردید زیادی را درشنونده به‌وجود می‌آورد. باوجود این، پرسش «آیا او این مطلب را گفته است؟» خیلی‌ها را به هیجان آورد، کار به‌روزنامه‌ها کشید و کار به‌آن‌جا کشید که در نشست کمیتهٔ کنگره هم ازآن یاد شد. کسی که این شایعه را جدی تلقی کند، در برابر خود «مسأله‌ای برای اثبات» دارد: او باید پردهٔ تردید را از روی شایعه بردارد، او باید ثابت (یا رد) کند که، این جملهٔ متهم‌کننده به کار برده شده است؛ و این اثبات او باید مستدل و، به‌اندازهٔ کافی، قانع‌کننده باشد.

وقتی که با یك مسألهٔ ریاضی اثباتی رو به رو هستیم، باید پرده از تردید درمورد درستی حکم‌ریاضی A، که به‌روشنی تنظیم شده‌است، برداریم

ـ باید درستی یا نادرستی حکم A را، ثابت کنیم. یکی از جالب‌ترین مسأله‌ها از این نوع، اثبات یا رد فرضیهٔ گولدباخ است[1]: اگر عدد درست $n>4$ زوج باشد، آن‌گاه n به‌صورت مجموع دو عدد اول (فرد) درمی‌آید.

حکم گولد باخ (هنوز این حکم، یك فرضیه است و ما از درستی یا نادرستی آن، اطلاعی نداریم)، به‌صورتی تنظیم شده است که برای حکم‌های ریاضی، طبیعی است، زیرا شامل شرط و نتیجه گیری است، بخش اول آن، که با واژهٔ «اگر» آغاز می‌شود، شرط و بخش دوم، که با واژهٔ «آن‌گاه» آغاز می‌شود، نتیجه گیری است[2].

وقتی که یك حکم ریاضی به‌طبیعی‌ترین صورت خود تنظیم شده باشد، شرط و نتیجه گیری آن را، بخش‌های اصلی مسأله می‌نامیم. و درواقع، به این بخش‌های اصلی، باید توجه فراوان داشت. برای اثبات یك حکم، باید حلقه‌ای منطقی را جست و جو کرد که بخش‌های اصلی مسأله ـ یعنی شرط و نتیجه گیری ـ را به‌هم مربوط کند؛ برای رد کردن حکم، باید نشان داد (و اگر ممکن است، روی مثالی که حکم را نقض می‌کند) که یکی از بخش‌های اصلی ـ شرط ـ منجر به دیگری ـ نتیجه ـ نمی‌شود. خیلی از ریاضی دانان ـ چه ریاضی دانان مشهور و چه ریاضی دانان عادی ـ تلاش کرده‌اند تا پردهٔ شك را ازفرضیهٔ گولدباخ بردارند، ولی همهٔ آن‌ها ناموفق بوده‌اند؛ باوجودی که برای درك کامل شرط و نتیجه گیری این مسأله، دانش زیادی لازم نیست، نه کسی توانسته است درستی آن را ثابت کند، و نه کسی توانسته است مثال

---

۱. کریستیان گولد باخ (۱۶۹۰ـ۱۷۶۴)، ریاضی دان سدهٔ هیجدهم آلمان؛ در یکی از نامه‌های خود به لئونارد اولر، فرضیهٔ خودرا مطرح کرده است (۱۷۴۲).

۲. حکم‌هایی در ریاضیات وجود دارند که نمی‌توانند، به‌طور طبیعی، به شرط و نتیجه‌گیری تقسیم شوند. نمونه‌ای از آن‌ها را می‌آوریم: «در بیان دهدهی عدد π، نه رقم متوالی ۹ وجود دارد». اثبات یا رد این حکم، یك مسألهٔ ریاضی را تشکیل می‌دهد، که تاامروز، امیدی به‌حل آن نمی‌رود: «یك احمق می‌تواند پرسش‌های زیادی طرح کند، که برای پاسخ دادن به آن‌ها، یك دوجین آدم عاقل هم کفایت نکنند». [دیوانه‌ای سنگی به چاه می‌اندازد که صد عاقل نمی‌توانند آن را بیرون بیاورند.]

متناقضی برای آن پیدا کند[1].

§۵. اجزای مجهول، جنبه‌های شرط

اگر درمسأله‌ای ازما خواسته باشند تا دایره‌ای را رسم کنیم، باید دو چیز را پیدا کنیم: مرکز دایره و شعاع آن. ممکن است بهتر باشدکه مسأله را تقسیم کنیم: به‌جای این که هردوچیز مورد نظر (مرکز وشعاع دایره) را، یکباره پیدا کنیم، می‌توانیم ابتدا به جست و جوی یکی و، سپس، دیگری بپردازیم.

اگر مسأله، موضع یك نقطه را درفضا، از ما خواسته باشد و، برای این منظور، از هندسهٔ تحلیلی استفاده می‌کنیم، در واقع باید سه عدد را به دست آوریم ـ سه مختص x ، y و z این نقطه.

دراین‌جا هم، می‌توان فرض کرد که، درابتدا، دومجهول ـویاحتی یك

---

۱. درزمان ما، این قضیه «تقریباً ثابت شده است» که، هرعدد فرد را می‌توان به صورت مجموعی از سه عدد اول (فرد) درآورد، ولی درمورد مسألهٔ گولد باخ، تاکنون روزنه‌ای برای اثبات پیدا نشده است.

[باید یادآوری کردکه «شکل طبیعی» یك مسألهٔ اثباتی، یعنی ارتباط سادهٔ بین شرط و نتیجه‌گیری، به هیچ وجه، قابل حل بودن مسأله را تضمین نمی‌کند، یعنی ممکن است امکان اثبات یا ردکردن آن، به‌یك‌اندازه وجود داشته باشد. به عنوان نمونهٔ مشخص، می‌توان از «فرضیهٔ متصلهٔ کانتور» نام برد (ژرژکانتور (۱۸۴۵ـ۱۹۱۸)، ریاضی‌دان مشهور آلمانی و بانی «نظریهٔ مجموعه‌ها»)، که‌می‌توان آن‌را به‌این ترتیب، تنظیم کرد: «اگرتوان مجموعه‌ای از توان مجموعهٔ عددهای طبیعی کمتر و از توان مجموعهٔ عددهای حقیقی بیشتر نباشد، در آن صورت، بریکی ازاین دومجموعه، منطبق خواهد بود». اثبات یا رد این قضیه‌هم، در طول سال‌های زیادی، بامسألهٔ گولد باخ مسابقه می‌داد، ولی درسال ۱۹۶۶، پل کوئن، ریاضی‌دان امریکائی غیرقابل حل بودن آن را ثابت کرد؛ او ثابت کردکه قبول یا نفی فرضیهٔ کانتور، هیچ‌کدام با اصل‌های مورد قبول ریاضیات (و به خصوص، در نظریهٔ مجموعه‌ها) متناقض نیست.]

مجهول ـ وجود دارد و، درمرحلهٔ دوم، سه مجهول را باهم ـ یا بازهم یك مجهول را ـ درنظر گرفت. دیدگاه دیگری هم وجود دارد، که گاهی می‌تواند مفید باشد: می‌توان گفت که درهردو مثال ما، تنها بایك مجهول سر و کار داریم، منتهی، خود از «اجزایی» تشکیل شده است. مثلاً، درنمونهٔ اول، مجهول‌عبارت‌است ازدایره، ولی‌این یك مجهول «دوعضوی» یا «دوبخشی» است؛ اجزای آن عبارتند ازمرکز وشعاع. به‌همین ترتیب، درنمونهٔ دوم، نقطهٔیك مجهول «سه‌عضوی» یا «سه بخشی» است؛ اجزای‌آن عبارتند ازسه مختص x، y و z. به‌طورکلی، می‌توان ازمجهول «nعضوی» یا «nبخشی» صحبت کردکه اجزای آن را x_1 ، x_2 ، ... ، x_n تشکیل دهند.

یکی ازبرتری‌های این اصطلاح‌ها و نام گذاری‌ها دراین است که به سادگی می‌توانیم بین‌مسأله‌هایی که یك مجهول دارند، بامسأله‌هایی که‌شامل چند مجهول هستند، فرق بگذاریم: در واقع، هروقت که بخواهیم می‌توانیم ازحالت‌دوم به‌حالت اول برویم و مجهول‌ها را به‌عنوان اجزای یك‌مجهول «چندبخشی»درنظربگیریم. مثلاً ،آن‌چه‌راکه در §۳ گفته‌ایم، می‌توان برای مسأله‌هایی هم که شامل چند مجهول هستند، درست دانست، ولو این که، در آن جا، به‌صراحت ازاین مطلب یاد نشده باشد. درآینده خواهیم دیدکه این اصطلاح‌ها، درموقعیت‌های کاملاً متفاوتی، به‌درد ما می‌خورند.

اگر بایك مسألهٔ مربوط به‌پیداکردن سر و کار داشته باشیم، ممکن‌است تقسیم شرط به چند بخش یا چند جنبه، مفید باشد؛ تاکنون موردهای زیادی داشته‌ایم که، در آن‌ها، به این نکته توجه کرده‌ایم. وقتی که با یك مسألهٔ ساختمانی هندسه رو به رو باشیم، می‌توانیم شرط را به‌دوبخش تقسیم کنیم، به‌نحوی که هریك از آن‌ها، یك مکان هندسی ازنقطهٔ مجهول ما باشد (فصل اول). درحل «مسأله‌های کلامی» جبری شرط را، به تعداد مجهول‌های خود تقسیم می کنیم، به‌نحوی که باهرکدام از آن‌ها، بتوان معادله‌ای درست کرد (فصل دوم).

اگر بامسألهٔ اثباتی رو به رو باشیم، بازهم تقسیم شرط یا نتیجه گیری یا هردوی آن‌ها، به‌بخش‌ها یا جنبه‌های جداگانه، ممکن است مفید باشد.

§۶. جست و جوی روند لازم

برای ساختن یك‌شکل هندسی، به‌سبك «مقدمات» اقلیدس، نمی‌توانیم از وسیله‌ها و یا ابزارهای رسم، به صورتی آزاد، استفاده‌کنیم، زیرا فرض براین‌است که این گونه ساختمان‌ها، باید به‌کمك پرگار و خط‌کش انجام‌شوند. به این ترتیب، حل مسأله، عبارت است از به‌کار گرفتن متوالی عمل‌های هندسی درست، که از داده‌ها آغاز و به‌شکل مجهول ختم می‌شوند؛ درحالت موردنظرما، این عمل‌ها عبارتنداز رسم خطهای راست ودایره‌ها و پیداکردن نقطهٔ برخورد آن‌ها.

بااین مثال، خیلی چیزها برای ما روشن می‌شود و، اگر درماهیت کار بیشتردقت کنیم، به‌روشنی می‌بینیم که حل بسیاری ازمسأله‌ها، به‌طورجدی، به روندکار، به مسیر عمل‌ها و به‌طرحی که عمل‌ها را به هم مربوط می‌کند، بستگی دارد.

حالا، مسألهٔ مربوط به حل یك معادلهٔ درجهٔ دوم (یا درجهٔ سوم یا درجهٔ چهارم) را انتخاب‌کنید. حل این مسأله، تشکیل شده است از دنبالهٔ یك رشته عمل‌های جبری مربوط به هم، که از داده‌ها ــ ضریب‌های معلوم معادله ــ آغاز و به ریشه‌های مجهول ختم می‌شود؛ در این جا، عمل‌ها عبارتند ازجمع، تفریق، ضرب و تقسیم روی عددهای مفروض (یا عددهایی که ضمن عمل به‌دست می‌آیند) و، همچنین، ریشه گرفتن.

اکنون «مسألهٔ اثباتی» را مورد توجه قرار می‌دهیم. روند حل این مسأله ــ که نتیجه‌ای از نیروی ذهنی ماست ــ عبارت است از اثبات، یعنی دنباله‌ای ازعمل‌ها یاگام‌های منطقی، که ازشرط آغاز و به‌نتیجه‌گیری مورد نظرما در قضیه ختم می‌شود؛ هرگام، منجر به‌موقعیت تازه‌ای می‌شودکه از بخش‌هایی ازشرط، یا ازحقیقت‌های معلوم و یا ازموقعیت‌هایی‌که قبلاً ثابت شده‌اند، به‌دست می‌آید.

به‌مسأله‌های غیرریاضی‌هم، می‌توان باهمین دیدگاه، نگاه‌کرد. سازندهٔ یك‌پل، عمل‌های بسیاری را درپیش رو داردکه بایدآن‌ها را تنظیم‌ومشخص کند و با نقشهٔ مورد نظر خود سازگار سازد: او باید راه حل‌های عملی را

پیدا کند، دربارهٔ بتون‌ریزی بیندیشد، مصالح فلزی را به‌هم‌وصل کند و... علاوه براین‌ها، او ناچار است مسأله‌هایی باماهیت به کلی متفاوت، مثل مسأله‌های مالی، قضایی و حتی سیاسی را هم به‌حساب آورد. همهٔ ایـن عمل‌ها، به‌هم مربوطاند و، ضمناً، دربسیاری موردها، فرض براین است کـه بعضی از این عمل‌ها، ازقبل انجام شده‌اند.

یا یك نوشتهٔ پلیسی را درنظر بگیرید. مجهول عبارت است از قاتل؛ مؤلف، ضمن این کـه می‌کوشد خـواننده را باکارهای قهرمان داستان خـود ـ کارآگاه ـ گیج کند، طرحی ازهمهٔ کارها و اقدام‌ها تهیه کرده است که از برگهٔ اول آغاز و به‌شناسایی قاتل ختم می‌شود.

موضوع مورد بحث ما، می‌تواند مجهولی ازهرنوع ویاکشف حقیقی به‌هرصورت خود، باشد؛ مسألهٔما می‌تواند نظری یا عملی، جدی یابی‌معنی باشد. برای حل‌آن باید طرحی برای عمل، ازپیش اندیشیده شده باشد (این طرح، می‌تواند منطقی، ریاضی و یا براساس مصالح مـورد نیاز باشد) و از شرط آغاز شود و به‌نتیجه پایان یابد، ازفرض‌هاآغاز و به‌مجهول ختم‌شود، از موضوع‌ها و امکان‌هایی که در دسترس است آغاز شود و به موضوع‌ها و امکان‌هایی برسدکه می‌خواهیم به آن‌ها دسترسی داشته باشیم.

تمرین‌ها و یادداشت‌های تکمیلی

۱. می‌خواهیم حجم V از منشور منتظم مربع‌القاعده‌ای را پیداکنیم‌که ضلع قاعدهٔ آن برابر a و ارتفاع آن برابر h باشد.

مجهول چیست؟ معلوم‌کدام است؟ شرط از چه چیزی تشکیل شده است؟

۲. مطلوب است دو عدد حقیقی x و y ، به‌نحوی‌که داشته باشیم:

$$x^۲+y^۲=۱$$

مجهول کدام است؟ معلوم چیست؟ شرط از چه چیزی تشکیل شده است؟ مجموعهٔ جواب را مشخص کنید.

۳. دو عدد حقیقی x و y را طوری پیداکنیدکه درمعادلهٔ

$$x^۲+y^۲=-۱$$

صدق کنند. مجموعهٔ جواب مسأله را مشخص کنید.

۴. دو عدد درست x و y را طوری پیدا کنید که درمعادلهٔ

$$x^{2}+y^{2}=۱۳$$

صدق کنند. مجموعهٔ جواب را مشخص کنید.

۵. سه عدد حقیقی x ، y و z را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$|x|+|y|+|z|<۱$$

۱°. مجموعهٔ جواب را مشخص کنید.

۲°. مسأله را کمی تغییر دهید و علامت $<$ را به $\leqslant$ تبدیل کنید و، سپس، مجموعهٔ جواب را درمسأله‌ای که به‌دست می‌آید، مشخص کنید.

۶. قضیهٔ فیثاغورث را تنظیم کنید.

شرط کدام است؟ نتیجه گیری چیست؟

۷. n را عددی‌مثبت و درست و $d(n)$ را تعداد مقسوم‌علیه‌های آن‌می گیریم (منظور، مقسوم علیه‌های درست ومثبت‌است، منجمله ۱ وخود n). مثلاً مقسوم علیه‌های ۶ عبارتند از ۱، ۲، ۳ و ۶؛ $d(۶)=۴$،

مقسوم علیه‌های ۹ عبارتند از ۱، ۳ و ۹؛ $d(۹)=۳$.

این حکم را درنظر می گیریم:

اگـر n مجذورکامل باشد، $d(n)$ عـددی فرد و اگر n غیرمجـذورکامل باشد، $d(n)$ عددی زوج است.

شرط چیست؟ نتیجه گیری کدام است؟

۸. مسألهٔ پیدا کردنی یا مسألهٔ اثباتی؟ آیا دوعدد $\sqrt{۱۱}+\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۸}+\sqrt{۵}$ برابرند؟ اگر جواب منفی است، کدام یك بزرگترند؟

اگراین‌مسأله‌را، به‌صورت کلی‌خودتنظیم کنیم، چنین‌می‌شود: دو عدد a و b، به‌کمك عمل‌های حسابی وتوان ریشه، معین شده‌اند، می‌خواهیم بدانیم کدام یك از حالت‌های زیر برقرار است:

$$a=b \text{ ، } a>b \text{ ، } a<b$$

به‌سادگی معلوم می‌شود که، برای این مسأله، می‌توان شیوه‌های‌مختلفی به کار برد:

۱°. می‌توان از اثبات یا نفی $a=b$ آغاز کرد. اگرمعلوم شدکه $a\neq b$، می‌توان به‌اثبات یانفی $a>b$ پرداخت. به‌این دومسأله‌می‌توان درجهت عکس، و یا حتی باهم، پرداخت، ولی به‌هرحال، دراین‌جا، با دو مسألهٔ اثباتی سر و کار داریم.

۲°. دربسیاری از شاخه‌های ریاضیات، علامت $\operatorname{sgn} x$ به‌کار می‌رود (بخوانید «سیگنوم x» یا «علامت x»)، که به‌معنای زیر گرفته می‌شود:

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1 & (x>0) \\ 0 & (x=0) \\ -1 & (x<0) \end{cases}$$

بااستفاده ازاین علامت‌گذاری، می‌توان گفت‌که در مسألهٔ مفروض، باید $\operatorname{sgn}(a-b)$ را پیدا کرد، ولی دراین‌صورت، با یك مسألهٔ پیداکردنی رو به رو هستیم.

دراین‌جا، هیچ تناقضی وجودندارد (اگردربارهٔ اصطلاح‌ها، عمیقاً بیندیشیم تناقضی پیدا نمی‌شود): در ۱°، با مسألهٔ A روبه‌رو هستیم که ازدو مسألهٔ اثباتی ــ که به‌هم کاملاً مربوطاند ــ تشکیل شده است؛ در ۲°، با مسألهٔ B سر و کار داریم، که مسأله‌ای است مربوط به‌پیداکردن. این دو نوع تنظیم را ــ که با اصطلاح‌های متفاوتی انجام گرفته است، نباید یکی دانست، ولی‌می‌توان گفت‌که هم ارز یکدیگرند. (درفصل نهم، دربارهٔ این گونه «هم‌ارزی» بازهم صحبت خواهیم کرد.)

سپس، یادآوری‌می‌کنیم‌که اگر، به‌این ترتیب، مسأله را ازدوسمت بررسی کنیم، دچار هیچ‌گونه زیانی نمی‌شویم. برعکس، همیشه بهتراست مسأله را ازجانب‌های‌مختلف‌مطالعه کنیم، زیراممکن است‌ازجهتی ساده‌تر وقابل دسترس‌تر ازجهت دیگر باشد؛ و طبیعی است که همیشه، حمله از جانب ضعیف‌تر مسأله، امکان موفقیت را بیشتر می‌کند.

۹. مسأله‌های دیگر. مسأله‌ای را انتخاب‌کنید (درفصل‌های گذشته، به‌اندازهٔ کافی مسأله وجود دارد)، و معلوم‌کنید، آیا مسألهٔ «پیداکردنی» است یا مسألهٔ «اثباتی». ضمناً ازخودتان بپرسید:

مجهول چیست؟ معلوم کدام است؟ شرط از چه تشکیل شده است؟ نتیجه گیری کدام است؟ فرض چیست؟

برای آشنا شدن با بخش‌های اصلی مسأله، این پرسش‌ها لازم است. ولی چه بسا که درعمل، اگر پرسش‌ها جدی طرح و به‌صورتی قابل فهم پاسخ داده شده باشند، برای حل مسأله هم بی‌نتیجه نباشند؛ این پرسش‌ها، به‌شما کمك می‌کنند تا بخش‌های اصلی مسأله را بهتر و عمیق‌تر درك کنید و بتوانید سمت درستی را برای حل مسأله انتخاب کنید.

۱۰ . روند حل مسأله، ممکن است از دنبالهٔ بی‌نهایت عمل، تشکیل شده باشد. فرض کنید، می‌خواهید این معادله را حل کنید:

$$x^{۲} = ۲$$

این مسأله را، به‌طریق‌های مختلفی، می‌توان فهمید. مثلاً، ممکن است آن را، به‌این ترتیب، تفسیر کرد: «مقدار مثبت جذر عدد ۲ را تا چهار رقم اعشار پیدا کنید»؛ دراین حالت، با نوشتن کسر دهدهی ۱/۴۱۴۲، کار حل مسأله را، به‌طور کامل، تمام کرده‌ایم. ولی مسأله را، به نحو دیگری هم می‌توان فهمید: «جذر ۲ را محاسبه کنید»؛ اگر دراین حالت، شرط مسأله را ساده ومیزان دقت آن را مشخص نکنیم، نمی‌توانید بگویید که بعد از پیدا کردن چهار رقم و یا تعداد بیشتری از رقم‌های بعد ازممیز، مسأله را به‌طور کامل حل کرده‌اید. در این‌جا باید طرحی برای عمل داشته باشیم، که به‌کمك آن بتوانیم هر تعداد لازم رقم‌های دهدهی راکه ازقبل معین شده است، به‌دست آوریم.

بازهم یك‌مثال: «مطلوب‌است نسبت مساحت دایره، به‌مساحت مربعی محیط برآن». اگرمقدار π را، دراین مسأله، مفروض‌بگیریم، نسبت مجهول برابر $\frac{\pi}{۴}$ می‌شود. ولی، لایب نیتس، پاسخ را، به صورت یك رشته می‌دهد:

$$\frac{۱}{۱} - \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{۵} - \frac{۱}{۷} + \frac{۱}{۹} - \frac{۱}{۱۱} + \cdots$$

این رشته، در واقع، انجام دنباله‌ای از بی‌نهایت عمل حسابی را پیش‌بینی می‌کند، تا درنتیجه، هرتعداد دلخواه رقم‌های درست عدد π (در دستگاه دهدهی) به دست آید (دست‌کم از دیدگاه نظری چنین است؛ ولی درعمل‌هم، این‌روند، بسیارکند پیش می‌رود). لایب‌نیتس می‌گوید[1]: «اگرچه این رشته، به‌صورت موجود خود، برای محاسبهٔ سریع تقریبی نامناسب است، ولی گمان نمی‌کنم که بتوان چیزی مناسب‌تر وساده‌تر ازآن، برای تجسم نسبت‌مساحت دایره برمساحت مربع محیط برآن، پیداکرد».

۱۱ . تربیع دایره. وقتی‌که یك مسألهٔ پیداکردنی را حل می‌کنیم،درجست‌وجوی چیزی هستیم ـ «چیز مجهول» ـ واین، اغلب منجربه‌جست‌وجوی یك روند (دنباله‌ای ازعمل‌ها) می‌شودکه می‌تواند پیداکردن موضوع مورد نظر را تأمین‌کند؛ برای این‌که براهمیت این گونه روندها، تکیه‌کرده باشیم، آن را «روند مجهول» می‌نامیم‌که، البته، با مجهول «معمولی» فرق دارد. برای این‌که به‌اهمیت این اختلاف پی ببریم، می‌توان ازیك مثال تاریخی یادکرد.

دایره‌ای‌داریم‌که‌شعاع‌آن‌معلوم است؛ می‌خواهیم‌به‌کمك‌پرگار وخط‌کش،مربعی‌بسازیم‌که مساحت‌آن، دقیقاً برابربا مساحت‌این‌دایره باشد.

این‌است، تنظیم دقیق مسألهٔ مشهور وقدیمی «تربیع دایره»که به‌هندسه‌دانان یونان باستان تعلق دارد. تأکید می‌کنیم‌که خود تنظیم مسأله، خصلت روند حل آن («روند مجهول») را مشخص می‌کند: ضلع مربع‌مجهول را، بایدبه‌کمك پرگار ولبهٔ خط‌کش ساخت،که یکی دایره و دیگری خط راست را رسم می‌کند، ضمناً، ازنقطه‌های‌برخورد این دو نوع خط ـ خط راست و دایره ـ هم می‌توان استفاده‌کرد. در مسأله، پیش‌بینی می‌شودکه باآغاز از دونقطهٔ انتهایی شعاع مفروض و انجام تعداد محدودی عمل، باید به دو نقطهٔ انتهایی ضلع مربع

1— Leib nitz, Philocophische Schriften

مجهول برسیم.

بعد از سده‌ها تلاش و شرکت تعداد بی‌شماری افراد درحل این مسأله، سرانجام، جواب پیداشد: ثابت‌شد (به‌وسیلهٔ ف. لیندمان‌درسال ۱۸۸۲) که‌راه‌حلی‌وجودندارد. باوجودی که، بدون‌تردید، مربعی‌وجود دارد که مساحت‌آن بامساحت دایرهٔ مفروض‌برابرباشد (ضلع این‌مربع را می‌توان، به‌کمك عمل‌های نامحدود متوالی ـ‌که امروزه برای ریاضی دانان شناخته شده است ـ باهردقت دلخواهی به‌دست آورد؛ یکی از این روندها، می‌تواند براساس رشتهٔ مشهور لایب نیتس باشد که در تمرین ۱۰، به‌آن اشاره‌کردیم)، نمی‌تواند روند مطلوب را (که شامل‌دنبالهٔ‌محدودی‌عمل‌باپرگاروخط‌کش‌باشد) پیداکرد. دربارهٔ این‌مطلب‌خیلی‌فکرکرده‌ام که، آیاروشن کردن اختلاف‌بین‌شکل‌مجهول با روند مجهول، می‌تواند از تعداد عدم موفقیت‌های مربوط به حل مسألهٔ تربیع دایره بکاهد؟

۱۲ . تالی و نتیجه. نصب ساختمان فلزی آماده، برای برپاکردن پل در محل موردنظر، عملی‌مهم‌است. وقتی‌که صحبت‌ازانجام دوعمل ازاین گونه باشد، ممکن‌است تقدم وتأخرآن‌ها، امری اساسی باشد (مثلاً، نصب قسمتی از پل منوط به‌آن است‌که قبلاً، قسمت دیگری نصب شده باشد)، گاهی هم ممکن است این جلو و عقب بودن عمل‌ها، اهمیتی نداشته‌باشد (مثلاً، وقتی‌که نصب دو قسمت، ربطی به‌هم نداشته‌باشند وبتوان به‌دلخواه ازهرکدام‌آن‌ها شروع‌کرد). بنابراین، رعایت ردیفی، برای انجام دو عمل، ممکن است ضروری باشد و یا لازم نباشد. همچنین، می‌توان گفت‌که دریك‌سخن رانی یا دریك‌نوشتهٔ چاپی، ردیف‌معینی برای استدلال در نظرگرفته شده است. بین تالی و نتیجه، باید فرق گذاشت؛ تقدم و تأخر زمانی در مورد دو عمل، با ارتباط متقابل منطقی بین دوعمل، فرق دارد (درفصل هفتم، دوباره، به‌این مطلب مهم برخواهیم گشت).

۱۳ . اصطلاح‌های ناموفق، دومعنی داشتن. واژهٔ «Solution»چندمعنی

دارد[1] که بعضی ازآن‌ها مهم است و باید بااصطلاح‌های دیگری که تنها یك معنی دارند، عوض شوند. دراین‌جا، پیشنهادهایی برای بعضی از این اصطلاح‌ها آورده‌ایم (در داخل پرانتزها ، معادل آلمانی [و انگلیسی] آن‌ها داده شده است).

Solution به معنی جواب ـ (Losungsgegenstand Solving object) ـ موضوع یا جوابی‌که درشرط مسأله صدق می‌کند. اگرهدف مسأله، حل یك‌معادلهٔ جبری باشد، Solution (جواب)، همان ریشهٔ معادله است، یعنی مقداری‌که درمعادله صدق می‌کند. جواب، تنها درمسأله‌های پیداکردنی، می‌تواند وجود داشته باشد. در مسأله‌ای‌که خوب تنظیم شده باشد، باید از قبل مقوله‌ای (یا مجموعه‌ای) را، که جواب به‌آن تعلق دارد، معین کرد؛ بایدازقبل

۱. این بحث، برای فارسی‌زبانان موردی ندارد، زیرا ما واژه‌های «حل» و «جواب» را باهم مخلوط نکرده‌ایم، در حالی‌که در زبان انگلیسی ـ وبسیاری اززبان‌های دیگراروپایی ـ برای‌هردو واژهٔ «حل» و«جواب»از«Solution» استفاده‌می‌شود. با وجود این، برای‌این‌که چیزی ازکتاب کنار نگذاشته‌باشیم، این بحث را هم آورده‌ایم.

درعوض، در زبان فارسی، درموردهای دیگری، به چنین وضعی برخورد می‌کنیم؛ مثلاً ، دراغلب‌زبان‌های‌اروپایی، برای«محیط‌دایره»ـ به‌مفهوم مجموعهٔ نقطه‌هایی از صفحه‌که ازنقطهٔ معینی واقع درهمان صفحه به‌یك فاصله‌اند ـ و «سطح دایره» به مفهوم مجموعهٔ نقطه‌هایی‌که روی محیط و درون دایره قرار گرفته‌اند ـ دواصطلاح مختلف وجود دارد، درحالی‌که درزبان‌فارسی، هردو مورد را «دایره» می‌گوییم.

یا، درنوع دیگری، اصطلاح «تصاعد نزولی» ـ اگر درمعنای واژه‌ای‌آن توجه‌کنیم، اصطلاحی بی‌معنی به‌نظر می‌رسد؛ ولی درمورد اصطلاح‌های‌علمی، ضمن‌این‌که باید دقت شود، مشکل زیادی به‌وجود نمی‌آید، زیرا روال‌مطلب و، ضمناً، تعریف‌دقیق اصطلاح، تا حد زیادی دشواری‌ها رابرطرف می‌کند. در مورد اصطلاح‌های عادی هم، وضع به همین‌گونه است: مثلاً «فرودگاه» تنها محل فرود آمدن هواپیما نیست، بلکه هم محل فرود آمدن و هم محل برخاستن هواپیما است، ولی هیچ‌کس در به‌کار بردن این اصطلاح دچار اشکال نمی‌شود.

بدانیم که در جست و جوی چه چیزی هستیم: مثلث، عدد و یا چیزی دیگر. ایـن مطلب (یعنی، جداکردن مجموعه‌ای کـه مجهول مسأله متعلق به‌آن است) بخش مهمی ازمسأله است. «پیداکردن مجهول»، به معنای پیداکـردن (متحدکـردن، ساختن، منجـرکـردن، به دست آوردن،...) Solution (جواب) [یامجموعهٔ همهٔ جواب‌ها] است.

Solution ، به‌معنی راه حل (Solving procedure، Losungsgang) ـ عبـارت است از روند (نقشهٔ عمل) پیداکردن مجهول درمسأله‌های پیداکردنی یا برداشتن پردهٔ تردید از درستی (یا نادرستی) حکم در مسأله‌های اثباتی. بنابرایـن، Solution (راه حل)، اصطلاحی است که درهردونوع مسأله به‌کار می‌رود. درابتدای کار، هنوز از راه‌حل وازطرح عمل‌ها، اطلاعی‌نداریم، ولی‌بابی‌قراری در جست و جوی آن هستیم و امید داریم که، سرآخر، آن را به‌طور کامل پیداکنیم؛ ایـن روند، بخشی از جست و جـوی مـا را تشکیل می‌دهد و، در آغـاز نوعی مجهول است؛ و به همین مناسبت، آن را «روند مجهول» می‌نامیم. (تمرین‌های ۱۰ و ۱۱ را ببینید).

ولی درمتن، من غالباً ازهمان اصطلاح سنتی استفاده‌کرده‌ام و، جزدرموردهای استثنائی، درك معنای این‌اصطلاح را به‌عهدهٔ خواننده گذاشته‌ام.

۱۴ . داده‌ها و مجهول ، شرط و نتیجه. «مقدمـات» اقلیدس بـا سبك منطقی مخصوص به‌خود نوشته شده است، که بعضی آن را رمزآمیز، بعضی خرده‌گیرانه و ... نامیده‌اند. همهٔ آن چه دراین‌کتاب آمده است، به صورتی واحـد طـرح و تنظیم شده است، ضمناً داده‌ها و مجهول، در مسأله‌های‌پیداکردنی، به‌عنوان‌عنصرهایی شبیه و در ردیف هم، مورد بررسی قرارگرفته‌اند؛ به‌همین ترتیب، در مسأله‌های اثباتی هم، شرط و نتیجه ، به موازی یکدیگر آمده‌اند. همان طورکه خواهیم دید، در واقع هم، نوعی شباهت و هم ردیفی، بین این دو عنصر اصلی، درهر دو نوع مسأله، وجود دارد ـ این مطلب، از دیدگاه کسی که مسأله

را حل می‌کند، دارای اهمیت است و، به‌همین مناسبت، می‌تواند جایی برای بحث داشته باشد. ولی باید دقیقاً توجه داشت که نمی‌توان اصطلاح‌های «داده‌ها» و «شرط» یا اصطلاح‌های «مجهول» و «نتیجه» را با هم مخلوط کرد؛ هریك از این اصطلاح‌ها را باید درجای خود و درهمان نوع مسأله‌ای که به‌آن مربوط است، به‌کاربرد. ناراحت‌کننده است که، حتی درموردهای چاپی هم، گاهی این اصطلاح‌های مهم، باهم مخلوط می‌شوند وهر کدام درجای دیگری به‌کار می‌روند.

۱۵ . تعداد داده‌های لازم. مثلث، به‌وسیلهٔ سه ضلع خود، یا دو ضلع و یك زاویه (که بین دو ضلع قرار گرفته است)، یایك ضلع و دو زاویهٔ آن، معین می‌شود؛ ولی‌مثلث را نمی‌توان با در دست داشتن سه زاویهٔ آن معین کرد، زیرا، برای معین کردن‌مثلث، باید داده‌ها مستقل ازیکدیگر باشند (تمرین‌های ۴۶ و ۴۷ فصل اول را هم ببینید). برای مفروض بودن یك چند جمله‌ای درجهٔ n با یك متغیر (این متغیر، معمولاً x نامیده‌می‌شود)، $n+۱$ دادهٔ مستقل ازیکدیگرلازم است، یعنی $n+۱$ ضریب، دربسط چندجمله‌ای برحسب توان‌های x، یا $n+۱$ مقداری که این چند جمله‌ای در نقطه‌های $x=۰،۱،۲،...،n$ (یا هر $n+۱$ نقطهٔ دیگر) اختیار می‌کند وغیره. موضوع‌های ریاضی مهم وبسیاری وجوددارند که‌برای مشخص‌کردن‌آن‌ها، تعداد کاملاً معینی‌از داده‌های مستقل لازم است. بنابراین، وقتی که به‌حل یك مسألهٔ پیدا کردنی مشغول هستیم، بهتراست تعداد داده‌ها را مشخص‌کنیم و قبل ازآغاز حل، آن را بازبینی کنیم.

۱۶ . برای‌این‌که یك n ضلعی را معین‌کنیم، باید به‌تعداد

$$(n-۱)+(n-۲)=(n-۳)+n=۳+۲(n-۳)=۲n-۳$$

دادهٔ مستقل ازیکدیگر، دراختیارداشته باشیم. این چهاربیان‌مختلف، برای یك عدد، ازنظرهندسی چه مفهومی دارند؟

۱۷ . برای تعیین یك هرم با قاعدهٔ n ضلعی، به‌چند داده نیاز داریم؟

۱۸ . برای تعیین یك منشور با قاعدهٔ n ضلعی (که مایل‌هم می‌تواند باشد)،

به‌چند داده نیاز داریم؟

۱۹ . برای تعیین یك چندجمله‌ای درجهٔ n از v متغیر (کـه جمله‌های آن بـه صورت $cx_1^{m_1}x_2^{m_2} \ldots x_v^{m_v}$ هستند ــ c عـددی ثـابت و $m_1+m_2+\ldots+m_v \leqslant n$)، به‌چند داده نیاز داریم؟

۲۰ . بامطالعهٔ حل تمرین ۱۹ ، می‌توان یادآوری کرد که تعداد حاصل را، می‌توان به‌صورت ساده‌ای تفسیر کرد: این تعداد برابر است با تعداد روش‌هایی که می‌توان، به‌کمك آن‌ها، v جعبه را ازمیان $n+v$ جعبه انتخاب کرد.

$n+v$ جعبه در نظر بگیرید ؛ آن‌هـا را روی خـط راستی در نظر بگیرید، که هر کدام‌فاصله‌ای به‌طول‌واحدرا درفاصلهٔ $0 \leqslant x \leqslant n+v$ اختیار کرده باشند.

به این ترتیب، چگونه می‌توانید از عهدهٔ حـل این مسأله برآیید و تعداد روش‌هایی را پیدا کنید که، به‌کمك آن‌ها، بتوان v جعبه را از بین $n+v$ جعبه جدا کرد؟

فصل ششم

گسترش حوزهٔ کاربرد روش

هرمسأله‌ای را، که مورد مطالعهٔ شماست، تاآن جاکه ممکن است و تا آن‌جاکه لازم دارید، به بخش‌هایی تقسیم کنید تا بتوانید این بخش‌ها را، ساده‌تر حل کنید.

دکارت، دربارهٔ روش

این قانون دکارت، کمتر ثمربخش است، زیرا هنر تقسیم ... امکان تفسیر را از بین می‌برد ... با تقسیم مسأله، به بخش‌های لازم، ممکن است دشواری افراد بی‌تجربه را افزایش دهد.

لایب نیتس Philosophische Schriften

§۱. گسترش حوزهٔ کاربرد روش دکارت

درروش دکارت، اندیشه‌های مهمی وجود دارد، که الزاماً، به تشکیل معادله‌ها، مربوط نمی‌شود. در این فصل، تلاش می‌کنیم برخی از این اندیشه‌ها را دریابیم و، بااحتیاط کامل، خود را از معادله، به‌مفهوم کلی‌تری برسانیم. از مثالی آغاز می‌کنیم که، به‌اندازهٔ کافی کلی و، درعین حال، به مفهومی، کاملاً مشخص وملموس است؛ این مثال، جهت کار بعدی را به ما نشان می‌دهد.

۱°. فرض می‌کنیم، مسأله‌ای، ضمن ترجمهٔ به زبان معادله، به دستگاهی شامل چهار معادلهٔ چهار مجهولی منجر شده باشد، به‌نحوی که همهٔ این معادله‌ها شامل همهٔ مجهول‌ها نباشند (یعنی برخی از آن‌ها، بعضی از مجهول‌ها را دربرنداشته باشند). به خصوص، روی این ویژگی دستگاه تأکید می‌کنیم و، به‌همین مناسبت، نوعی علامت‌گذاری را وارد می‌کنیم که به‌روشنی نشان‌دهد، چه‌مجهول‌هایی و درکدام معادله وجود دارند؛ جزئیات دیگر، مورد توجه ما نیست. فرض می‌کنیم، معادله‌ها، به‌صورت زیر نوشته شده باشند:

$$r_۱(x_۱)=۰$$

$$r_۲(x_۱,x_۲,x_۳)=۰$$

$$r_۳(x_۱,x_۲,x_۳)=۰$$

$$r_۴(x_۱,x_۲,x_۳,x_۴)=۰$$

این نوشته نشان می‌دهدکه معادلهٔ اول تنها شامل مجهول $x_۱$ است، در دو معادلهٔ بعدی سه مجهول اول $x_۱$ ، $x_۲$ و $x_۳$ وجود دارند و فقط معادلهٔ چهارم، شامل هرچهار مجهول است.

این ویژگی دستگاه معادله‌های مفروض، طرح روشنی ازحل آن را به‌ما تلقین می‌کند. ازمجهول $x_۱$ آغاز می‌کنیم که می‌توان، آن را ازمعادلهٔ اول به‌دست‌آورد. با در دست داشتن مقدار $x_۱$، دومعادلهٔ بعدی، دستگاهی را تشکیل می‌دهندکه، دومجهول بعدی $x_۲$ و $x_۳$ ، ازآن به‌دست می‌آید. با

معلوم شدن x_1 ، x_2 و x_3 ، بااستفاده از معادلهٔ چهارم، مجهول چهارم x_4 هم پیدا می‌شود.

۲°. اکنون فرض می‌کنیم ، این دستگاه معادله‌ها، معرف شرط یك مسأله باشند و بعد، فرض می‌کنیم، این شرط به چهاربخش تقسیم شده باشد وهریك از معادله‌های این دستگاه، معرف بخشی (یا جنبه‌ای) از این شرط باشد؛ منظوراین‌است که، هرمعادله معرف‌رابطه‌ای از داده‌ها ومجهول‌هاست که بخش متناظر شرط ، بیان می‌کند. به‌این ترتیب ، شرط مسألهٔ ما، چهرهٔ خاصی دارد: درهمهٔ جنبه‌های آن، همهٔ مجهول‌ها دخالت ندارند. انتخاب علامت‌گذاری‌ها، به روشنی نشان می‌دهدکه چه مجهول‌هایی در فلان جنبهٔ شرط، شرکت می‌کنند.

معلوم‌است‌که‌می‌توان شرط‌را، به‌جنبه‌های مختلفی چنان‌تقسیم‌کردکه باخصلت مورد نظر ما سازگار باشند (یعنی ، هرجنبه، شامل ترکیبی از مجهول‌های خاصی باشد). می‌گوییم، چنین امکانی وجود دارد، ولو این‌که نتوانیم این جنبه‌ها را، به‌زبان جبری درآوریم و یا حتی، این‌کار در امکان ما نباشد. می‌توان پذیرفت، طرحی که در ۱°، برای دستگاه معادله‌هادادیم، به‌مفهوم معینی، می‌تواند اهمیت خود را درمورد دستگاهی ازچهار جنبهٔ شرط هم‌حفظ‌کند، ولو این‌که این جنبه‌ها، هنوز به‌صورت جبری بیان نشده باشند و یا این‌که، اصولاً ، امکان بیان‌آن‌ها ، به‌صورت جبری، وجود نداشته باشد.

این برداشت، دورنماهای تازه و امکان‌های تازه‌ای را دربرابر ما قرار می‌دهد.

۳°. برای این‌که بهتر بتوانیم از این امکان‌ها استفاده‌کنیم، علامت‌گذاری‌هایی راکه قبلا آوردیم، تا حدی به‌نحو دیگری تفسیر می‌کنیم.

تااین‌جا، نماد $r(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را، به‌مفهوم کلی‌آن، یعنی‌به‌عنوان یك عبارت جبری (یا به عنوان یك چند جمله‌ای ، یا به عنوان یك تابع)، شامل مجهول‌های x_1، x_2، ...، x_n ، درنظر گرفته‌ایم. به‌همین مناسبت، بیان

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

را، همچون یک‌معادلهٔ (جبری) درنظر گرفتیم که مجهول‌های $x_1، x_2، \ldots، x_n$ را به‌هم مربوط می‌کند. وقتی بامسألـه‌ای سر و کار داشته باشیم کـه در آن $x_1، x_2، \ldots، x_n$ نقش مجهول‌ها را به عهده دارند، چنین معادله‌ای ، قسمتی از شرط (یا یکی ازجنبه‌های شرط) را بیان می‌کند، یعنی آن بخشی از شرط که مجهول‌های $x_1، x_2، \ldots، x_n$ را با داده‌ها مربوط می‌کند.

بدون این که بخواهیم ازاین تفسیر سر باز زنیم، محدودهٔ آن را بازتر می‌کنیم، یعنی، حتی درموردی که نتوان جنبه‌ای از شرط را به‌زبان معادله درآورد و حتی درموردی که x_1 ، $x_2، \ldots،$ x_n ، به جای عدد، مجهول‌هایی از هر نوع دلخواه باشند، بازهم برابری نمادی

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = 0$$

را به‌عنوان جنبه‌ای از شرط مسألـه می‌گیریم کـه بستگی بین مجهول‌های x_1 ، x_2 ، ... ، x_n رامعین می‌کند.

اکنون باید به‌چندمثال بپردازیم، تابه‌خوبی خصوصیت حوزهٔ گسترش یـافتهٔ تفسیر نمـاد $r(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ را روشن کنند؛ همچنین، مثال‌هـایـی می‌آوریم تا ما را نسبت به‌سودمندی این تفسیر قانع کند.

۴°. جدول واژه‌های متقاطع، وسیله خوبی، برای روشن کـردن این مطلب است. مثال کوچکی می‌آوریم (شکل ۲۶).

از راست به چپ (افقی)

۱. ریاضی‌دان فرانسوی

۲. دور نیست

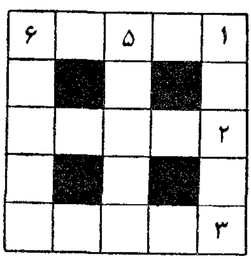
۳. بدون انتها، بی‌پدر می‌شود

از بالا به‌پائین (عمودی)

۱. قهرمان استقلال هند

۵. کنار «تایمز» زندگی می‌کند

۶. تکذیب



شکل ۲۶. جدول واژه‌های متقاطع

مجهول‌های جدول، عبارتند از واژه‌ها. x_1 ، x_2 ، x_3 ، x_4 ، x_5 و x_6

را، شش واژهٔ مجهولی بگیرید که باید درخانه‌های سفید جدول شکل ۲۶ قرار داد. واژه‌های x_1 و x_4 از یك خانه آغاز می‌شوند (این خانه را، با شمارهٔ ۱ مشخص کرده‌ایم)، ضمناً x_1 را باید در ردیف (افقی) بالا از راست به چپ و x_4 را درستون (قائم) سمت راست، از بالا به پائین نوشت. x_n $(n=2,3,5,6)$ واژه‌ای است که حرف‌های آن، از خانهٔ شمارهٔ n آغاز می‌شود. اگر همهٔ شرطهای مربوط به این طرح مربعی را (که شامل خانه‌های سیاه و سفید، خانه‌های شماره گذاری شده و بی‌شماره است) تنظیم کنیم، دستگاهی از ۲۱ شرط به‌دست می‌آید.

شش شرط، ازاین ۲۱ شرط، ممتازتر از دیگرانند وشرطهای «کلیدی» به‌حساب می‌آیند. آن‌ها را، به‌این صورت می‌نویسیم:

$$r_1(x_1)=0\ ,\ r_2(x_2)=0\ ,\ \ldots\ ,\ r_6(x_6)=0$$

دراین جا، مثلاً، برابری نمادی $r_1(x_1)=0$، به‌معنای این شرط است: «واژهٔ x_1، نام‌خانوادگی یك‌ریاضی‌دان فرانسوی است»؛ $r_4(x_4)=0$ هم، معنای مشابهی دارد: «واژهٔ x_4، نام خانوادگی یکی از قهرمانان استقلال هندوستان است» ؛ برابری $r_3(x_3)=0$، معرف معنای این جمله است (که هنوز، برای ما مبهم است): «بدون انتها، بی‌پدر می‌شود» وغیره.

همچنین، شش شرط داریم که طول شش واژهٔ مجهول را می‌دهند:

$$r_7(x_1)=0\ ,\qquad r_8(x_2)=0\ ,\ \ldots\ ,\qquad r_{12}(x_6)=0$$

مثلاً شرط $r_7(x_1)=0$، طول واژهٔ x_1 را معرفی می‌کند. درحالت مورد بحث ما، این شش شرط، به معنای آن هستند که هرکدام از واژه‌های x_1، x_2، ...، x_6 باید ازپنج حرف تشکیل شده باشند.

سپس، خود طرح نشان می‌دهد که کدام واژه‌ها، حرف‌های مشترکی دارند و این حرف‌های مشترك درکجا قرار گرفته‌اند؛ روی‌هم نه‌شرط از این نوع داریم:

$$r_{13}(x_1,x_4)=0,\qquad r_{14}(x_1,x_5)=0,\qquad r_{15}(x_1,x_6)=0,$$
$$r_{16}(x_2,x_4)=0,\qquad r_{17}(x_2,x_5)=0,\qquad r_{18}(x_2,x_6)=0,$$
$$r_{19}(x_3,x_4)=0,\qquad r_{20}(x_3,x_5)=0,\qquad r_{21}(x_3,x_6)=0$$

مثلاً[۴]، «برابری» $r_{14}(x_1,x_5)=0$ دراین‌جا به معنای آن است که حرف سوم واژهٔ x_1 برحرف اول واژهٔ x_5 منطبق است.

اکنون تعداد همهٔ شرطها را محاسبه می‌کنیم؛ این تعداد برابر است با

$$6+6+9=21$$

۵°. به‌طورکلی، اگر مسأله شامل n مجهول x_1، x_2، ...، x_n باشد و شرط را به l بخش (شرطهای جزئی، جنبه‌ها) تقسیم کرده باشیم، دستگاهی از l رابطه ـ که n مجهول را به‌هم مربوط می‌کنند ـ به‌دست می‌آید. این رابطه‌ها را می‌توان به صورت دستگاهی از l «معادلهٔ» نمادی ـ که n مجهول ما را به‌هم ربط می‌دهند ـ نوشت[۱]:

$$\begin{aligned} r_1(x_1,x_2,\ldots,x_n)&=0\\ r_2(x_1,x_2,\ldots,x_n)&=0\\ \cdots\cdots&\cdots\\ r_l(x_1,x_2,\ldots,x_n)&=0 \end{aligned}$$

درفصل دوم، باحالت خاصی از این‌گونه دستگاه‌ها، سر و کار داشتیم؛ درآن‌جا، مجهول‌های x_1، x_2، ...، x_n، عدد بودند و بامعادله‌های جبر واقعی (و نه نمادی) رو به‌رو بودیم و l و n بایکدیگر برابربودند. درفصل حاضر، اغلب به‌حالت‌های خاصی برمی‌خوریم که، شبیه آن چه در ۱° و ۲° دیدیم، بعضی از معادله‌ها، نه شامل همهٔ مجهول‌ها، بلکه شامل بخشی از آن‌ها می‌شوند.

۶°. پیش می‌آیدکه تنها یك دستگاه از معادله‌های نمادی، می‌تواند به دو مسأله پاسخ بدهد. این دو مسأله، ممکن است از حوزه‌های به‌کلی متفاوتی‌باشند، ولی اگربه‌مفهوم معینی ـ که بیشترانتزاعی‌است تامشخص ـ باهم شباهت داشته باشند، می‌توان چیز مشترکی درآن‌ها پیدا کرد؛ واگراین

---

۱. قبلاً هم دیدیم (§۵ از فصل پنجم را ببینید) که عددهای n و l، بیش از خود مسأله، به‌روشی که انتخاب می‌کنیم، مربوط‌است؛ مثلاً، به‌جای دوشرطی که معرف مخالف صفر بودن x و y هستند، می‌توان ازیك «معادلهٔ» $xy\neq 0$ استفاده کرد وغیره.

چیز «مشترك» را بادقت تنظیم کنیم (کاری که چندان ساده نیست)، می‌توانیم هردو مسأله را دریك طبقه قراردهیم. ازاین راه (با درنظر گرفتن مسأله‌های مربوط به پیداکردن)، به‌طبقه‌بندی ظریف‌تری ازمسأله‌ها می‌رسیم. آیااین گونه طبقه‌بندی، برای ما فایده‌ای دارد؟ آیا روندی برای حل وجود داردکه بتواند، به یك نحو، برای دو مسألهٔ با خصلت‌های مختلف ـ به شرطی که متناظر بایك دستگاه ازمعادله‌های نمادی باشند ـ به‌کار رود؟

به‌نظرمن، این پرسش، جالب است. ولی، اگرچه بررسی آن درحالت کلی، احتمالاً بتواند به‌نتیجه‌های بسیار جالبی برسد، تنها خود طرح این پرسش، می‌تواند بر برخی از موقعیت‌های خاصی هم‌که به بحث ما مربوط می‌شود، روشنی بیندازد.

۲§. گسترش حوزهٔ کاربرد روش دو مکان هندسی

دربند قبل، طرحی کاملاً کلی ریختیم. چگونه می‌توان تجربه‌های قبلی خود را به‌آن اضافه‌کرد؟ نخستین روشی که دراین کتاب، مورد بررسی قرار دادیم، چه جایی دراین طرح دارد؟

۱°. اگر اصطلاح‌هایی راکه قبل از این آورده‌ایم، درنظرداشته‌باشیم، باموفقیت بیشتری می‌توانیم به‌این پرسش پاسخ دهیم.

ضمن حل مسأله‌های ساختمانی هندسه ، «مکان‌های هندسی» را مورد بررسی قرار دادیم. در واقع، هرمکان هندسی، عبارت است از مجموعه‌ای از نقطه‌ها. از این به‌بعد، مجموعه‌ای را مکان هندسی می‌نامیم‌که ضمن حل مسأله‌ای، باخصلت خاص خود، ظاهرشده‌باشد (درمثال‌های بعد، این‌مطلب را، روشن خواهیم کرد). ازآن‌جا که اصطلاح «مجموعه» ـ که دربارهٔ آن در تمرین ۵۴ فصل اول صحبت کردیم ـ واژه‌های هم‌معنی فراوانی دارد (طبقه، گروه ، اجتماع ، مقوله)، لزومی ندارد چیزی به‌آن اضافه‌کنیم[1]. در مورد اصطلاح «مکان هندسی» می‌توانیم ازتجربه‌ای که، ضمن حل مسأله‌های مقدماتی هندسه، به‌دست آورده‌ایم، چیزی درك کنیم؛ باوجود این، می‌توان

---

۱. با پاورقی صفحهٔ ۵۷ مقایسه‌کنید.

از ایـن اصطلاح، بـرای گام‌هایی هم‌کـه برای برخی مسأله‌هـای دشوارتر (دشوارتر از آن چه درابتدای امـر، از این اصطلاح درمی‌یابیم) بـرداشته می‌شود، استفاده‌کرد.

۲°. دو مکان هندسی، برای نقطه‌های واقع برصفحه. به‌نخستین‌مثالی که، دراین زمینه، بررسی‌کردیم، برمی‌گردیم: مثلثی را، با معلوم بودن سه ضلع آن، بسازید.

نگاهی دوباره به‌حل مسأله، در ۲§ فصل اول، می‌انـدازیم. یکی از ضلع‌های آن، ومثلاً a ، را رسم و، به‌این‌ترتیب، دونقطهٔ B و C را تثبیت می‌کنیم. تنها یك‌نقطه می‌ماندکه باید آن را پیداکنیم؛ این رأس سوم را، که در ایـن مرحله ازکار، هنوز مجهول است، x می‌نامیم. بنابر شرط، نقطهٔ x باید با دو تقاضا سازگار باشد:

r_1) نقطهٔ x باید به‌فاصلهٔ مفروض b از نقطهٔ مفروض C باشد؛

r_2) نقطهٔ x باید به‌فاصلهٔ مفروض c از نقطهٔ مفروض B باشد.

بااستفاده‌از علامت‌گذاری‌های ۱§ ، تقاضاهای (r_1) و (r_2) را به‌صورت برابری‌های نمادی زیر می‌نویسیم:

$$r_1(x) = 0$$

$$r_2(x) = 0$$

نقطه‌هـای x کـه بـا تقاضای اول r_1 (نخستین «معادلـهٔ» نمـادی) سازگارند، محیط دایـرهٔ S_1 (به‌مرکز C و شعاع b) را پر می‌کنند ـ منحنی S_1 عبارت است از مجموعه یا مکان هندسی نقطه‌هـایی‌کـه بـا تقاضای r_1) سازگارند، مکان هندسی نقطه‌هایی‌که با تقاضای r_2) («معادلهٔ» نمادی دوم) سازگـارند، عبارت است ازمحیط دایرهٔ دوم S_2. نقطهٔ مجهول x ـ جـواب مسأله مربوط به‌مثلث ـ باید باهردو تقاضا بسازد، یعنی به‌هردومکان هندسی متعلق‌باشد. بنابراین، مجموعهٔ جواب، درمسألهٔ مورد بررسی‌ما، ازبرخورد دومکان هندسی S_1 و S_2 به‌دست می‌آید. این مجموعه، درحالت‌کلی، از دو نقطه تشکیل شده است و، بنابراین، دو جواب وجـود دارد ـ دو مثلث‌که، نسبت به‌ضلع BC ، قرینهٔ یکدیگرند.

۳°. سه‌مکان هندسی، برای نقطهٔ واقع درفضا. این‌مسألهٔ سادهٔ هندسهٔ فضایی را، که شبیه مسأله‌ای ازهندسهٔ مسطحه است که هم اکنون دربارهٔ آن صحبت می‌کردیم، درنظر می‌گیریم: با در دست داشتن شش یال یك چهار وجهی، آن را بسازید.

بااستفاده از روندی‌که در ۲° داشتیم، ابتدا قاعدهٔ چهار وجهی را می‌سازیم، یعنی مثلثی را که سه ضلع آن، سه یال از شش یال معلوم چهار وجهی‌است. باساختن قاعده، درواقع، سه‌رأس چهاروجهی، ومثلاً A، BوC، را تثبیت کرده‌ایم. تنها یك رأس می‌ماندکه باید پیداکنیم؛ این رأس چهارم، در مرحلهٔ مفروض کار، هنوز مجهول است: این رأس چهارم D را x و فاصله‌های آن را از سه رأس معلوم دیگر، به ترتیب، a، b و c می‌نامیم (این مقدارها، جزو داده‌های مسأله‌اند). بنابر شرط مسأله، سه تقاضای زیر، دربارهٔ نقطهٔ x وجود دارد:

r_1) نقطهٔ x باید به‌فاصلهٔ a ازنقطهٔ A باشد؛

r_2) نقطهٔ x باید به‌فاصلهٔ b ازنقطهٔ B باشد؛

r_3) نقطهٔ x باید به‌فاصلهٔ c ازنقطهٔ C باشد.

با استفاده از علامت‌گذاری‌های §۱، این سه تقاضا را، به صورت معادله‌های نمادی زیر می‌نویسیم:

$$r_1(x_1) = 0$$
$$r_2(x_2) = 0$$
$$r_3(x_3) = 0$$

نقطه‌های x که باتقاضای‌اول r_1) (نخستین معادلهٔ نمادی) سازگارند، سطح کرهٔ $\sum_1$ را (به‌مرکز A و شعاع a) پرمی‌کنند، کرهٔ $\sum_1$، مجموعه‌یامکان هندسی نقطه‌هایی است‌که باتقاضای اول r_1) سازگارند. هریك از دوتقاضای دیگر هم، متناظرند با سطحی از یك‌کره‌که آن‌ها را، به ترتیب، $\sum_2$ و $\sum_3$ می‌نامیم. این کره‌ها، مکان هندسی نقطه‌هایی از x هستندکه باتقاضاهای دوم و سوم سازگارند. نقطهٔ x ــ جواب مسألهٔ مربوط به چهار وجهی ــ باید به‌طور هم زمان با هرسه تقاضا سازگار باشد، یعنی به هرسه مکان هندسی

تعلق دارد. بنابراین، مجموعهٔ جواب، درمحل برخورد سه مکان هندسی مذکور (سه کرهٔ $\sum_1$، $\sum_2$ و $\sum_3$) قرار دارد. این مجموعه، در حالت کلی، شامل دو نقطه است و، بنابراین، دو جواب وجود دارد ـ دوچهار وجهی که، نسبت به صفحهٔ مثلث ABC، قرینهٔ یکدیگرند.

۴°. مکان هندسی، برای موضوع‌هایی که خصلت کلی‌تری دارند. مثال‌هایی که در ۲° و ۳° بررسی کردیم، ممکن است مسأله‌هایی را که در فصل اول، با همین روش، حل کرده‌ایم، به یاد ما بیاورد. باتوجه به‌این مثال‌ها، می‌توان موضوع کلی‌تری را کشف کرد.

مجهول مسأله را x می‌گیریم. شرط مسأله را به l جنبه تقسیم می‌کنیم و آن‌ها را به‌کمك دستگاهی از l «معادلهٔ» نمادی نشان می‌دهیم؛

$$r_1(x)=0,\ \ r_2(x)=0,\ \ \cdots,\ \ r_l(x)=0$$

موضوع‌های x، که با جنبهٔ اول، که در معادلهٔ نمادی اول منعکس شده است، سازگارند، مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهند که ما آن را نخستین مکان هندسی می‌نامیم؛ موضوع‌هایی که درجنبهٔ دوم صدق می‌کنند، دومین مکان هندسی را تشکیل می‌دهند؛ ... ؛ موضوع‌هایی که باآخرین جنبه سازگارند، lامین مکان هندسی را می‌سازند. موضوع x ـ که جواب مسألهٔ مورد نظر است ـ باید در هر l جنبه، یعنی تمامی شرط، صدق کند و، بنابراین، بایدبه‌هر l مکان هندسی تعلق‌داشته‌باشد. ازطرف‌دیگر، اگرموضوع x، به‌طور هم زمان، متعلق به هر l مکان هندسی باشد، در تمامی جنبه‌های شرط صدق می‌کند و، بنابراین، جوابی از مسألهٔ مفروض است. به زبان دیگر، مجموعهٔ جواب مسألهٔ مورد نظر، یعنی مجموعهٔ موضوع‌هایی که در شرط مسأله صدق‌می‌کنند، عبارت است از محل برخورد این مکان‌های‌هندسی.

از این جا، امکان تعمیم روش دومکان هندسی به‌دست می‌آید، امکان ساختن طرحی‌که برای مجموعهٔ بی‌پایانی ازحالت‌ها وپیداکردن جواب‌تقریباً هرمسأله‌ای، مفید باشد. برای این منظور، باید ابتدا، شرط را به جنبه‌های متناظر تقسیم‌کرد، سپس مکان‌های هندسی متناظر با این جنبه‌ها را ساخت و، سرانجام، جواب را، از اشتراك این مکان‌های هندسی به‌دست آورد. قبل از

آن‌که به‌بحث دربارهٔ این طرح کاملاً کلی بپردازیم، چند حالت مشخص را بررسی می‌کنیم.

°۵. دو مکان هندسی، برای خط راست. مثلثی را رسم کنیدکه، ازآن، r، h_a و α معلوم باشد.

خواننده باید علامت‌گذاری‌های فصل اول را به یاد بیاورد: r — شعاع دایرهٔ محاطی، h_a — ارتفاع وارد برضلع a و α — زاویهٔ مقابل به ضلع a است.

این مسأله، خیلی ساده نیست، ولی بعضی ازگام‌های نخستین روشن است. آیا بخشی از مسأله را نمی‌توان حل‌کرد؟ به سادگی می‌توانیم بخشی ازشکل مجهول را رسم کنیم، یعنی دایرهٔ به‌شعاع r و دو مماس برآن، که با هم زاویه‌ای برابر α بسازند. (توجه‌کنید، دو شعاعی که به‌نقطه‌های تماس وصل شوند، زاویه‌ای برابر $۱۸۰^\circ - \alpha$ باهم می‌سازند.) رأس این زاویه، رأس A ازمثلث مجهول است. اکنون، مسأله به‌این جا رسیده است که باید خط راستی (نامتناهی) رسم کنیم که قسمتی‌ازآن، پارهٔ مقابل به‌رأس A است. به‌این‌ترتیب، اگر بخشی ازشکل راکه رسم شده است، مفروض بگیریم، آن وقت، این خط راست ـ که آن را x می‌نامیم ـ مجهول جدید ما خواهد بود.

شرطی‌که باید برای خط راست x صادق باشد، شامل دو جنبه است:

r_1) x باید بردایرهٔ مفروض به‌شعاع r مماس باشد؛

r_2) x به‌فاصلهٔ مفروض h_a، ازنقطهٔ مفروض A قرار دارد.

مکان هندسی اول، برای x، عبارت است از مجموعهٔ مماس‌های بردایرهٔ مفروض به‌شعاع r.

مکان هندسی دوم، برای x، دوباره عبارت‌است ازمجموعهٔ مماس‌های بردایرهٔ به‌شعاع h_a و مرکز A.

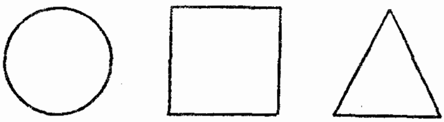
اشتراك این دو مکان هندسی، شامل مماس‌های مشترك این دو دایره است؛ این مماس‌های مشترك را می‌توانیم رسم کنیم (°۱، §۶ ازفصل اول و تمرین ۳۵ فصل اول را ببینید).

(در واقع، تنها مماس‌های مشترك خارجی، این مسأله را به‌طورکامل

حل می‌کنند؛ مماس‌های مشترك داخلی ـ که ممکن است وجود نداشته باشند ـ منجر به مثلثی می‌شوند که دایرهٔ به شعاع r ، دایره محاطی خارجی آن است.)

درنظر گرفتن مماس‌های مشترك دو دایره، بـه عنوان اشتراك دومکان هندسی ـ که شامل خط‌های راست است ـ مـا را بـه اندیشه سودمنـدی می‌رساند؛ این اندیشه بازهم مفیدتر می‌شود، اگر آن را دربعضی حالت‌های دیگـر و، به‌خصوص، درحـالت حدی که یکی از دایره‌ها به نقطه‌ای تبدیل شده باشد، مورد مطالعه قرار دهیم.

۶°. سه مکان هندسی برای جسم. یـك چوب پنبهٔ «همه‌کاره» درست کنیدکه بتواند، با دقت، سه دهانه مختلف گرد، مربعی و مثلثی را بپوشاند.



شکل ۲۷ــa. سه‌شکاف، برای یك «چوب پنبهٔ همه‌کاره»

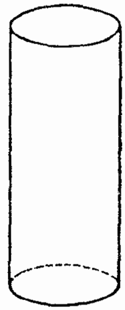
به شکل ۲۷ ـ a نگاه‌کنید؛ روی‌آن، دایره، مربع و مثلثی متساوی‌ـ الساقین نشان داده شده است، به‌نحوی کـه قطر دایره، ضلع مربع، قاعده و ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین، همه باهم برابر باشند.

بااستفاده از اصطلاح‌های هندسی، می‌توان گفت کـه ، سه تصویر قائم جسم مجهول، باید براین سه‌شکل منطبق باشد. فرض می‌کنیم (و در واقع، این فرض ، طرح پـرسش را محدودتر می‌کند) که تصویرها ، روی سه صفحهٔ دو به دو عمود برهم، قرار گرفته باشند. مجهول مسألهٔ ما، یك جسم است که آن‌را x می‌نامیم؛ شرط آن، از سه جنبه تشکیل شده است:

r_1) تصویر جسم x برکف اطاق ـ یك دایره است؛

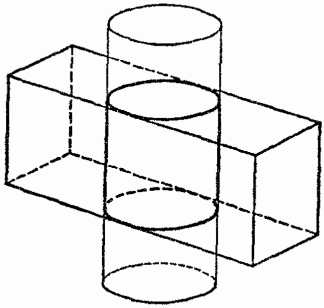
r_2) تصویر جسم x بردیوارکناری، یك مربع است؛

r_3) تصویر جسم x بردیوار عقبی، یك مثلث متساوی‌الساقین است. فرض شده است که جسم در اطاقی معمولی به شکل مکعب مستطیل قرار دارد، به‌نحوی که تصویرهای قائم و اندازه‌های سه شکلی که درتصویر ۲۷-a نشان داده شده است، به‌همان نحوی است که دربالا گفتیم.



شکل۲۷-b. مکان‌هندسی اول

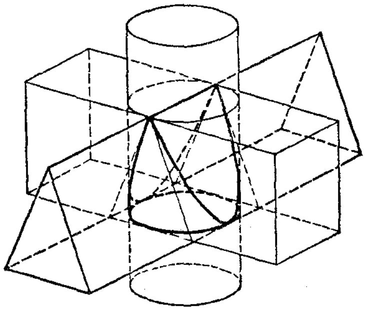
ابتدا، مکان هندسی اول، یعنی مجموعهٔ جسم‌هایی راکه در تقاضای r_1) صادق‌اند، مطالعه می‌کنیم. دایرهٔ مفروض ما، روی کف اطاق قرار گرفته است. خط راست نامتناهی قائمی را در نظر می‌گیریم که این دایره را قطع کرده باشد (چه در محیط و چه در داخل آن)؛ این خط راست قائم را « رشته » می‌نامیم. این گونه رشته‌ها، استوانه‌ای دوار و نامتناهی را پر می‌کنند (شکل ۲۷-b)، که مقطع آن، همان دایرهٔ ما است. جسم x، وقتی با تقاضای r_1) سازگار است



شکل ۲۷-c. دو مکان هندسی

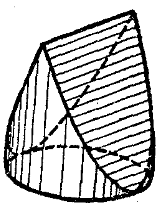
که قسمتی از این استوانه باشد و شامل، دست‌کم یك نقطه از هر رشته، یعنی « مولدهای » استوانه، باشد. مجموعهٔ همهٔ این گونه جسم‌ها، نخستین مکان هندسی ما را تشکیل می‌دهد.

همان طورکه مکان هندسی اول، بستگی به‌استوانهٔ قائم نامتناهی‌دارد، دو مکان هندسی دیگر، به دومنشور نامتناهی (افقی) مربوط می‌شوند. مقطع منشوری که متناظر با تقاضای r_2) است، یك مربع است؛ فرض می‌کنیم که‌این



شکل ۲۷ — d. سه مکان هندسی

منشور ازشرق تاغرب ادامه داشته‌باشد (شکل ۲۷-c). آن‌وقت، منشوری راکه متناظر با تقاضای r_3) و مقطع آن یك مثلث متساوی‌الساقین است، ممتد ازشمال تا جنوب درنظر می‌گیریم (شکل ۲۷-d).



شکل ۲۷—e. بهترین «چوب پنبهٔ همه‌کاره».

هرجسم x که متعلق به‌هرسه مکان هندسی باشد، جوابی از مسأله است، یعنی یك «چوب پنبهٔ همه‌کاره»؛ پرحجم‌ترین جسم از این نوع، عبارت است ازاشتراك سه‌جسم نامتناهی یادشده، یعنی استوانه، و دو منشور؛ طرح آن، در شکل ۲۷—e داده شده است.

(چرا از لحاظ حجم، بزرگترین است؟ قسمت‌های مختلف سطح آن را شرح دهید. جسم‌های دیگری را توضیح دهیدکه جواب مسألهٔ ما باشند.)

۷°. دو مکان هندسی، برای واژه. در جدول واژه‌ها، که براساس

تحریف[1] و کشف واژه‌ها ساخته شده است، این «کلید» داده شده است.

«حرف مامك ثابت نشده است» (۷ حرف).

واژهٔ مجهول را x می‌گیریم. شرط از دو بخش تشکیل شده است:

r_1) x عبارت است ازتحریف «حرف مامك» (یعنی ازهمان حرف‌هایی تشکیل شده است که در «حرف مامك» وجود دارد)؛

r_2) «x ثابت نشده است»، جمله‌ای معنی دار است (که اغلب به آن برخورد می‌کنیم).

شرط، به دو جنبه تقسیم شده است: r_1) مربوط به‌ترکیب حرفی‌واژه می‌شود و r_2) معنا و مفهوم آن را مشخص می‌کند. هریك از این جنبه‌ها، متناظرند بایك «مکان هندسی»، اگرچه این «مکان هندسی‌ها»، مثل حالت‌های قبل، روشن و «در دسترس» نیستند.

مکان هندسی اول، به خودی خود، کاملاً روشن است. می‌توانیم هفت حرف

ا ، ح ، ر ، ف ، ك ، م ، م

را به ۲۵۲۰ طریق مختلف در ردیف هم بنویسیم (لزومی ندارد، خواننده در این جا به سرچشمهٔ پیدا شدن این عدد، که برابر است با $\frac{۷!}{۲!}$، بپردازد).

بنابراین، باید ۲۵۲۰ وضع مختلف این هفت حرف را (بدون تکرار و جاافتادگی) بنویسیم و همهٔ امکان‌های مربوط به جنبهٔ r_1) را روشن کنیم، یعنی، مکان هندسی مورد نظر خود را، به‌طور کامل شرح دهیم. ولی این کار، خسته کننده و بی‌فایده است (بخش عمدهٔ این ترکیب‌ها، ما را به واژه‌هایی می‌رسانند، که هرگز در زبان‌فارسی به‌آن‌ها برنخورده‌ایم). علاوه براین، روش جست و جوی مکانیکی همهٔ حالت‌ها، درمسأله، باهدف جدول واژه‌ها ــ که برای سرگرمی ساخته شده‌است ــ نمی‌سازد. مکان هندسی متناظر

---

۱. «تحریف» anagram، یعنی‌درهم‌ریختن حرف‌های یك واژه یا جمله ودرست کردن واژهٔ یا جملهٔ جدید، مثلاً با تحریف واژهٔ «مینا» می‌توان واژه‌های «امین» یا «نیما» را ساخت.

با جنبهٔ r_1) ، درعمل، در دسترس قرار نمی‌گیرد.

مکان هندسی متناظر با r_2) هم، نه‌تنها غیرقابل دسترس، بلکه حتی تا حدی مبهم است. واژهٔ فارسی x داده شده است؛ آیا این واژه، مفهوم جملهٔ زیر را می‌رساند «x ثابت نشده است»؟ آیا این، یك جملهٔ عـادی است؟ در بسیاری موردها، پاسخ به‌این پرسش‌ها، بحث‌انگیز است.

به‌این ترتیب، به‌دلیل‌های زیادی، هیچ‌کدام از دو مکان هندسی برای کار برد عملی مناسب نیستند، هیچ‌کدام از آن‌ها را نمی‌توان نوشت، دید یا ساخت. و درنتیجه، هیچ روندی وجود ندارد که، به‌کمك آن، بتوان اشتراك این دو مکان هندسی را پیدا کرد. با همهٔ این‌ها، همین تصور مفید است کـه، شرط از دو جنبه تشکیل شده است و واژهٔ مجهول باید با هـر دوی آن‌هـا سازگار باشد. ابتدا فکر خـود را روی یکی از ایـن جنبه‌ها و، سپس، روی جنبهٔ دیگر متمرکز می‌کنیم؛ دربارهٔ واژه‌هایی می‌اندیشیم که به‌تقریب با جنبهٔ اول سازگارند و بعد جنبهٔ دوم را آزمایش می‌کنیم تا، سرآخـر، به واژه یا جمله‌ای که مورد نظر ماست برسیم.

(ما برموقعیتی تأکیدکردیم که هیچ کدام از دوجنبهٔ r_1) و r_2) نتوانند درعمل مـورد استفاده قـرار گیـرنـد، ـ این دیـدگاه، می‌تـوانست بـرای ارزیابی طـرح پیشنهادی ما، مفید باشد. ولی، در واقع، غالباً وضع طوری است که یکی ازاین دو جنبه ساده‌تر از دیگری است ـ و این وضع می‌تواند، برای حل بسیاری از معماها، به‌شما کمك کند.)

۳§. ازکدام جنبهٔ شرط باید آغازکرد

دربندقبل، مسأله‌های گوناگونی را مورد بحث قرار دادیم وهمهٔ‌آن‌ها را با روش واحـدی ـ که می‌توان آن را «روش / مکان هندسی» نامید ـ حل کردیم. تنها ، مسألهٔ ۷° از ۲§ ، حل نشده باقی ماند. دشواری این مسأله درکجا بود؟ ما به‌خوبی توانستیم شرط را به‌جنبه‌های خود تقسیم کنیم،ولی از عهدهٔ مکان‌های هندسی برنیامدیم، نتوانستیم به‌صورتی مناسب، آن‌ها را شرح دهیم و، درنتیجه، نتوانستیم اشتراك آن‌ها را پیدا کنیم.

موردهایی وجود داردکه دشواری ناشی‌ازآن‌ها، تا به‌این‌اندازه مبهم و نامشخص نیست؛ درچنین حالت‌هایی، می‌توان‌ازعهدهٔ رفع دشواری برآمد.

۱°. دو مکان هندسی برای واژه. درجدول واژه‌ها، که براساس تحریف و درك معنای واژه‌ها ساخته شده است، این «کلید» داده شده است:

«سنگی است سخت از هردو طرف» (۵ حرف).

بعد از مقداری تلاش، می‌توان این تفسیر را پیدا کرد: x را، واژهٔ مجهول می‌گیریم؛ شرط، دو جنبه دارد:

r_1) x به‌معنای نوعی سنگ سخت است؛

r_2) x ، واژه‌ای است شامل پنج حرف، که اگر آن را از جهت عکس حرف‌ها هم بخوانیم، همان معنای «سنگی سخت» را دارد.

ازکدام جنبهٔ شرط باید آغازکنیم؟ این آغاز، بی‌تفاوت نیست. ممکن است از جنبهٔ دوم آغاز کنیم و فهرست همهٔ واژه‌های پنج حرفی راکه از دو طرف، یکسان خوانده می‌شوند (مثل داماد، آهوها، شاباش، همهمه، نالان، هلیله، کلالك، ...) بنویسیم و از میان آن‌ها، آن‌هایی را انتخاب کنیم که با جنبهٔ اول سازگارند. ولی چه کسی می‌تواند این فهرست را تنظیم کند؟ ولی هرکسی می‌تواند واژه‌هایی را به خاطر بیاوردکه، کم و بیش، مفهوم «سنگی سخت» را درخود داشته باشند؛ آن وقت این می‌ماندکه ببینیم کدامیك از آن‌ها با r_2) سازگارند. اینك، بعضی از این واژه‌ها:

خارا، آتش زنه، گدازه، سنگ پا، کوارتز، گرانیت، ... و سیلیس.

۲°. سعی می‌کنیم ، خصلت روندی راکه دنبال کردیم، مشخص کنیم.

درجنبهٔ r_1) ، از مجموعهٔ همهٔ واژه‌ها، مجموعه‌ای نه چندان بزرگ جدا می‌شودکه یکی از عضوهای آن جواب مسأله است. در جنبهٔ r_2) هم، همین کار را باید کرد، ولی با این تفاوت‌که در این جا، جداکردن مجموعهٔ مورد نظر، دشوارتر است: تکیه برجنبهٔ r_1)، موفقیت‌آمیزتر است تا تکیهٔ برجنبهٔ r_2). ابتدا جنبهٔ ساده‌تر و راحت‌تر را، برای انتخاب واژه‌ها در نظر می‌گیریم و، بعد، به جنبهٔ دوم توجه‌می‌کنیم. مهم‌این‌است‌که امکان انتخاب ساده‌تر و ثمربخش‌تر را در ابتدا داشته باشیم، زیرا برای مرحلهٔ اول، باید

واژه‌ها را از گنجینهٔ همهٔ واژه‌ها انتخاب کرد، درحالی که درمرحلهٔ دوم، انتخاب از بین مکان هندسی محدودتری ـ که نتیجه‌ای از مرحلهٔ اول است ـ انجام می‌گیرد.

اصل سادگی : هرجنبه، متناظر با یك مکان هندسی است. از جنبه‌ای آغاز کنید که مکان هندسی مربوط به‌آن را، مشخص‌تر و ثمربخش‌تر می‌توان ساخت. اگر به این ترتیب، به کار بپردازید، نیازی پیدا نمی‌کنید تا همهٔ مکان‌های هندسی را ـ که پاسخ گوی جنبه‌های دیگر هستند ـ به طور کامل بسازید، زیرا از این جنبه‌ها، تنها به عنوان راهنمائی برای انتخاب از مکان هندسی اول می‌توان استفاده کرد.

°۳. دو مکان هندسی، برای مجهول سه مولفه‌ای. ناخدای کشتی چند سال دارد، چند بچه دارد و طول کشتی او چقدر است، به‌شرطی که حاصل‌ضرب این سه عدد (درست) مجهول، برابر ۳۲۱۱۸ باشد. فرض می‌کنیم که طول کشتی برابر چند متر باشد (یعنی، بیشتر از یك متر)؛ همچنین فرض می‌کنیم که تعداد پسرهای ناخدا (که بیشتر ازیکنفر است) باتعداد دخترهای او برابر باشد و، ضمناً، سن او از تعداد بچه‌هایش کمتر نیست، ولی از صد سال کمتر است.

دراین معما، باید سه عدد

x $\qquad$ y $\qquad$ z

را پیدا کرد که، به‌ترتیب، این طور معنا می‌دهند:

تعدادبچه‌ها $\qquad$ سن ناخدا $\qquad$ طول کشتی

بهتر است مسأله را طوری درنظر بگیریم که تنها یك مجهول دارد؛ البته، این مجهول، یك عدد ساده نیست، بلکه یك مجهول «سه مؤلفه‌ای» است ـ عددهای سه گانهٔ (x, y, z).

مهم این است که بتوانیم شرط مسأله را، به‌جنبه‌های جداگانه‌ای تقسیم کنیم. برای این منظور، باید اجزاءِ مسأله را با دقت مطالعه کرد و بخش‌های مختلف شرط را گروه بندی کرد. بعد از مقداری تلاش (که ما از شرح آن، به خاطر کوتاه کردن مطلب، می‌گذریم)، می‌توانیم به این دو

جنبه برسیم:

r_1) x ، y و z، عددهای درست ومثبتی هستند، مخالف ۱، که‌حاصل‌ضرب آن‌ها، چنین است:

$$x \cdot y \cdot z = ۳۲۱۱۸$$

r_2) $۴ \leqslant x < y < ۱۰۰$

ازکدامیك از این دو جنبه، باید آغازکرد؟ روشن است‌که از جنبهٔ r_1)، که امکان انتخاب مجموعه‌ای متناهی ازعددها را دراختیارما می‌گذارد، درحالی‌که‌در r_2)، مقدار z محدودنشده‌است و، بنابراین، مارا به‌مجموعه‌ای نامتناهی می‌رساند.

به‌این ترتیب، به‌مطالعهٔ r_1) می‌پردازیم. ازآن جاکه عدد ۳۲۱۱۸ بر ۶ بخش پذیر است، به سادگی می‌توان آن را به ضرب عامل‌های اول تجزیه‌کرد:

$$۳۲۱۱۸ = ۲ \times ۳ \times ۵۳ \times ۱۰۱$$

برای این‌که عدد ۳۲۱۱۸، تنها به صورت ضرب سه عامل درآید، باید دو تا ازچهار عامل آن را، یکی‌کرد. به‌این ترتیب، تنها ۶ حالت برای تبدیل عدد ۳۲۱۱۸ به‌صورت ضرب سه عامل (مخالف ۱)، به‌دست می‌آید:

$$\begin{array}{l} ۶ \times ۵۳ \times ۱۰۱, \\ ۳ \times ۱۰۱ \times ۱۰۶, \\ ۳ \times ۵۳ \times ۲۰۲, \\ ۲ \times ۱۰۱ \times ۱۵۹, \\ ۲ \times ۵۳ \times ۳۰۳, \\ ۲ \times ۳ \times ۵۳۵۳ \end{array}$$

از این ۶ حالت، باتوجه به‌بیان جنبهٔ r_2)، همهٔ حالت‌ها، به‌جزحالت اول، حذف می‌شوند و درنتیجه به‌دست می‌آید:

$$x = ۶, \qquad y = ۵۳, \qquad z = ۱۰۱$$

ناخدا ۶ بچه دارد، ۵۳ ساله‌است وطول‌کشتی او برابر۱۰۱مترا‌ست.

اندیشه‌ای‌که برای حل این مسألهٔ ساده به‌کار بردیم، اغلب می‌تواند

درحالت‌های بغرنج‌تر هم مورد استفاده قرار گیرد. این اندیشه، براین اساس استوار است که ازشرط، آن جنبه «گرهی» رادر نظربگیریم، که‌امکان انتخابی محدود برای ما فراهم می‌آورد و، سپس، از این مجموعهٔ محدود، با استفاده ازجنبه‌های «درجه دوم» دیگر شرط، خود را به جواب برسانیم (با تمرین‌های ۱۲ تا ۱۸ همین فصل مقایسه کنید).

*۴°. دو مکان هندسی، برای تابع‌ها. مسأله‌های ریاضی مهمی وجود دارد که، درفیزیك وصنعت، دائماً به‌آن‌هابرخورد می‌کنیم و، ضمناً، می‌توان شرط آن را، به‌طور طبیعی، به دو جنبه تقسیم کرد: می‌خواهیم تابعی‌را پیدا کنیم که به‌کمك یك معادلهٔ دیفرانسیلی و چند شرط یا محدودیت اولیه داده شده است. مثال ساده‌ای می‌آوریم که، درآن، مجهول x ، تابعی است از متغیر مستقل t ؛ می‌خواهیم این تابع را طوری پیداکنیم که باشرطهای زیر سازگار باشد:

r_1) معادلهٔ‌دیفرانسیلی $\frac{d^2x}{dt^2}=f(x,t)$ ـ که در آن ، $f(x,t)$ ، تابعی مفروض است؛

r_2) شرط اولیه : $x=1$ ، $\frac{dx}{dt}=0$ ، به‌ازای $t=0$.

ازکجا باید آغازکرد؟ از معادلهٔ دیفرانسیلی، یا از شرطهای اولیه؟

ـ این مطلب، بستگی به‌تابع مفروض $f(x,t)$ دارد.

حالت اول. فرض می‌کنیم $f(x,t)=-x$ ، یعنی فرض می‌کنیم ، معادلهٔ دیفرانسیلی ما به‌این صورت باشد :

$$\frac{d^2x}{dt^2}=-x$$

این معادلهٔ دیفرانسیلی، یکی ازآن نوع‌های محدودی است که در مورد آن قادریم «انتگرال عمومی» رابه‌صورتی روشن بیان کنیم. صورت کلی تابع‌هایی که دراین معادلهٔ دیفرانسیلی صدق می‌کنند، چنین است:

$$x=A\cos t+B\sin t$$

که در آن، A و B ، مقدارهای ثابتی هستند (ثابت‌های انتگرال‌گیری). به این ترتیب ، مکان هندسی متناظر با r_1) را به‌دست آوردیم.

حالا به جنبهٔ r_2) رو می‌آوریم و از آن ، برای جداکردن جواب، از این مکان هندسی، استفاده می‌کنیم. $t = 0$ را درعبارت x و $\frac{dx}{dt}$ قرار می‌دهیم، باتوجه به‌شرطهای اولیه، به‌دست می‌آید:

$$A = 1, \qquad B = 0, \qquad x = \cos t$$

حالت دوم. فرض می‌کنیم که، ضمن کاربامعادلهٔ دیفرانسیلی، نتوانسته باشیم انتگرال عمومی (یا یکی از انتگرال‌های خاص) آن را پیداکنیم و به این نتیجه رسیده باشیم که تلاش بعدی ما هم، دراین زمینه، بی‌نتیجه است. چه بایدکرد؟ دراین حالت، از r_1) باید آغازکرد یا از r_2)؟

دراین موقعیت، می‌توان ابتدا r_2 را مورد استفاده قرار داد؛ x را به صورت رشتهٔ‌توانی درنظرمی‌گیریم (بسط x برحسب توان‌های متغیرمستقل t) ؛ در این بسط می‌توان ضریب‌های u_0 و u_1 آن را، به‌کمك شرطهای اولیه، پیداکرد و بقیهٔ ضریب‌ها ــ u_2 ، u_3 ، u_4 ، ... ــ دراین مرحلهٔ کار نامعین باقی می‌مانند (درواقع، این‌ها مجهول‌های تازهٔ ما هستند؛ با تمرین ۸۶ فصل سوم مقایسه‌کنید):

$$x = 1 + u_2 t^2 + u_3 t^3 + u_4 t^4 + \cdots$$

به‌این‌ترتیب، مکان‌هندسی پاسخ‌گوی جنبهٔ r_2) ، به‌مفهومی، به‌دست آمده‌است. اکنون می‌توانیم به‌جنبهٔ‌اول، یعنی به r_1) توجه‌کنیم و بااستفاده از معادلهٔ دیفرانسیلی مفروض ، بقیهٔ ضریب‌های u_2 ، u_3 ، u_4، ... را پیدا می‌کنیم (و اگر ممکن باشد بااستفاده از روش بازگشت ؛ تمرین ۸۷ فصل سوم را ببینید).

یادآوری می‌کنیم که معادلهٔ دیفرانسیلی، همیشه، «مشخص‌کننده»تر ازشرطهای اولیه است (یعنی، خیلی بیشتر ازشرطهای اولیه، قابلیت‌انتخاب تابع را دارد). در واقع، به‌کمك جنبهٔ r_2) تنها دو ضریب از رشتهٔ توانی معین می‌شود ، و بقیهٔ ضریب‌های رشتهٔ نامتناهی را، باید به‌کمك معادلهٔ

دیفرانسیلی به‌دست‌آورد [یعنی به‌کمك r_1)]. همین موضوع، روشن می‌کند که، البته نه‌همیشه، بهتراست، از جنبهٔ مشخص‌کننده‌تر آغاز کنیم.

۴§. گسترش حوزهٔ کاربرد روش بازگشتی

دربند قبل، دربارهٔ اهمیت‌تشخیص تفاوت‌هایی که بین جنبه‌های‌مختلف شرط وجود دارد، صحبت کردیم؛ زیرا ممکن است دلیل‌هایی (وضمناً، جدی) وجود داشته باشدکه مارا وادارند تا ازجنبهٔ معینی آغاز کنیم، ونه‌ازهرجنبهٔ دلخواه. البته تااین‌جا، تنها با یك مجهول سروکار داشته‌ایم که می‌توان‌آن را، نوعی محدودیت به حساب آورد (که درواقع، محدودیتی جدی نیست؛ به‌این مناسبت، به‌یادداشت ۵§ فصل پنجم مراجعه‌کنید). اکنون، به‌بررسی مسأله‌هایی می‌پردازیم‌که شامل چند مجهول‌اند.

۱°. رشته‌مثال‌هایی‌که درفصل‌سوم بررسی کردیم، امکان طرح‌موقعیتی کلی‌تر و، درعین‌حال مهم، را برای ما فراهم می‌کند. دستگاهی از nمجهول x_1، x_2، ...، x_n را درنظرمی گیریم‌که در n معادلهٔ زیر صدق کنند:

$$\begin{aligned} r_1(x_1) &= 0, \\ r_2(x_1, x_2) &= 0, \\ r_3(x_1, x_2, x_3) &= 0, \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ r_n(x_1, x_2, x_3, \ldots, x_n) &= 0 \end{aligned}$$

این دستگاه ویژه، که شامل n رابطه است، نه‌تنها نقطهٔ آغاز کار را نشان می‌دهد، بلکه ضمناً مشخص می‌کند که درچه جهتی باید پیش رفت. در واقع امر، این دستگاه، به‌طور کامل، تمامی طرح عملیات را، به‌ما تلقین می‌کند.

از x_1 آغاز کنیدکه می‌توانید آن را از رابطهٔ اول به‌دست آورید؛ با معلوم شدن x_1، x_2 را از رابطهٔ دوم معین کنید؛ با در اختیار داشتن x_1 و x_2، x_3 راازرابطهٔ سوم پیدا کنید وغیره ـ به‌این ترتیب، می‌توانیدمجهول‌ها را به نوبت، و از روی مجهول‌هایی که مقدار آن‌ها را قبلاً پیدا کرده‌اید، معین کنید. بنابراین، سرانجام خواهید توانست مقدار همهٔ مجهول‌ها را،

به‌همان ردیفی که شماره گذاری شده‌اند، به‌دست آورید.

این طرح، برای حالتی هم‌که، kامین رابطه

$$r_k(x_1, x_2, \ldots, x_{k-1}, x_k) = 0$$

برای همهٔ مقدارهای $k = 1, 2, 3, \ldots, n$ به‌صورت معادله‌ای باشد که بتوان، درآن، x_k را برحسب x_1، x_2، ...، x_{k-1} بیان کرد، عملی است. به‌خصوص، حالت‌خطی بودن معادله نسبت به x_k (که البته، ضریب آن‌باید مخالف صفرباشد)، یکی ازحالت‌های مطبوع است.

واین، همان روش بازگشتی است: x_k رابا روش‌بازگشتی پیدامی کنیم، یعنی با مراجعهٔ به‌مقدارهای x_1، x_2، ...، x_{k-1}، که قبلاً پیدا کرده‌ایم.

با توجه به‌این روش، به‌طورطبیعی، هرگام را بعد ازگام قبلی، به‌جلو برمی‌داریم: از x_1 آغازمی کنیم، بعدازتعیین تکلیف x_1، به‌سراغ x_2 می‌رویم، بعد از x_2، گام بعدی را به‌طرف x_3 برمی‌داریم، یعنی به‌ترتیبی عمل‌می کنیم که روشن‌ترین ومناسب‌ترین راه به‌نظرمی‌رسد. درهرمرحله، ازهمهٔ آگاهی‌هایی که ذخیره کرده‌ایم، استفاده می کنیم واین، مشخص‌ترین جنبهٔ این روش است. با بررسی چند مثال، بازهم بیشتر، مطلب را روشن می کنیم.

۲°. درفصل دوم، §۵، ۳°، دستگاهی ازهفت‌معادله با هفت‌مجهول، به‌دست آوردیم. آن‌ها را، به‌صورت تازهٔ زیرنشان می‌دهیم:

$$S = x_7,$$
$$a = x_4, \qquad b = x_5, \qquad c = x_6,$$
$$l = x_1, \qquad m = x_2, \qquad n = x_3$$

اکنون، این‌هفت معادله رادوباره می‌نویسیم وتنها به‌این‌نکته توجه‌می کنیم که چه‌مجهولی به‌کدام معادله مربوط است، بدون این که به‌جنبه‌های دیگر آن‌ها توجهی داشته باشیم. علاوه براین، معادله‌ها را طوری شماره گذاری می کنیم که معلوم شود، به‌چه ردیفی، باید آن‌ها را مورد مطالعه قرارداد.

به‌این ترتیب، دستگاه رابطه‌های زیررا به‌دست می‌آوریم:

$$r_1(x_2, x_3) = 0,$$
$$r_2(x_3, x_1) = 0,$$

$$r_3(x_1, x_2) = 0,$$
$$r_4(x_2, x_3, x_4) = 0,$$
$$r_5(x_3, x_1, x_5) = 0,$$
$$r_6(x_1, x_2, x_6) = 0,$$
$$r_7(x_4, x_5, x_6, x_7) = 0$$

وقتی‌که دستگاه را، به‌این صورت، بنویسیم، طرح‌روشن زیرنتیجه می‌شود: سه‌رابطهٔ اول را، از دیگران جدا کنید. این سه‌رابطه، تنها شامل سه‌مجهول اول x_1، x_2 و x_3 هستند؛ وآن‌ها را می‌توان، همچون سه‌معادلهٔ سه‌مجهولی درنظر گرفت. درواقع، ازدستگاه سه معادلهٔ ۳°، §۵ فصل دوم، که متناظربا سه رابطهٔ اول دستگاه ماست، به سادگی به‌دست می‌آید: $x_1 = l$، $x_2 = m$ و $x_3 = n$. بعد از آن‌که سه‌مجهول اول x_1، x_2 و x_3 پیدا شد، دستگاه، جنبهٔ «بازگشتی» به‌خودمی گیرد. ابتدا، مجهول‌های x_4، x_5 و x_6، به‌ترتیب، ازروی رابطه‌ای‌که شمارهٔ متناظر آن‌ها را دارد، معین می‌شوند. (دراین‌جا، درواقع، فرقی نمی‌کندکه این سه‌مجهول را به‌چه ردیفی پیدا کنیم.) بعد از آن‌که x_4، x_5 و x_6 پیدا شدند، آخرین رابطه، مقدار x_7 را به‌دست‌می‌دهد (که درواقع، مجهول‌اصلی مسألهٔ ۳°، §۵ ازفصل دوم است؛ بقیهٔ‌مجهول‌ها را، به‌عنوان مجهول کمکی وارد کرده‌ایم).

به‌خواننده توصیه می‌کنیم، این دستگاه را با دستگاهی که در §۱، ۱° داشتیم، مقایسه کند.

۳°. این معادله را حل‌کنید:

$$(\overline{he})^2 = \overline{she}$$

که در آن $\overline{he}$ و $\overline{she}$[1]، عبارتند از عددهای معمولی (درست و مثبت)، در دستگاه عددنویسی دهدهی (و نه به‌معنای حاصل‌ضرب رقم‌ها)، که یکی از آن‌ها دورقمی ودیگری سه‌رقمی است؛ h، e و s، هرکدام معرف یک‌رقم‌اند. ایـن مسأله را به‌صورت دیگری هم می‌توان تنظیم کرد، کـه احتمالاً شکل روشن‌تری‌دارد: عددهای h، e و s راطوری‌پیدا کنیدکه‌دررابطهٔ‌زیرصدق کنند:

۱ـ he و she، واژه‌هایی انگلیسی، به‌معنای «آن مرد» و «آن زن» هستند.

$$(10h+e)^2=100s+10h+e$$

که در آن، h، e و s، عددهایی درست‌اند و، ضمناً داریم: $1\leqslant h\leqslant 9$، $0\leqslant e\leqslant 9$، $1\leqslant s\leqslant 9$.

معمای کوچك ما، دشوار نیست، و اگرخواننده، کتاب را ببندد وخود مستقلاً به‌حل آن بپردازد، بهتر می‌تواند، طرح پیشنهادی ما را، ارزیابی کند. درمرحلهٔ اول حل، تنها با یك مجهول سروکار داریم. درمرحلهٔ بعد، مجهول دیگری را هم‌وارد می‌کنیم ودو مجهول را، باهم، درنظرمی‌گیریم. وتنها درمرحلهٔ آخرحل، سه‌مجهول را با هم مورد بررسی قرار می‌دهیم.

مرحلهٔ (e). از e آغاز می‌کنیم، زیرا عدد e از تقاضای جداگانه‌ای پیروی می‌کند: رقم آخر عدد e^2 باید همان رقم e باشد. مجذور هرده رقم را می‌نویسیم:

$$0,\ 1,\ 4,\ 9,\ 16,\ 25,\ 36,\ 49,\ 64,\ 81,$$

می‌بینیم‌که تنها چهاررقم از ده رقم، با تقاضای ما سازگارند، بنابراین

$$e=0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 5 \text{ یا } 6$$

مرحلهٔ $(e,\ h)$. می‌توان شرطی را تنظیم‌کرد‌که تنها به‌دو رقم e و h مربوط باشد:

$$100\leqslant(\overline{he})^2<1000$$

ازاین‌جا، به‌سادگی، به‌دست می‌آید:

$$10\leqslant\overline{he}\leqslant 31$$

اگراین نتیجه را، بانتیجه‌ای‌که درمرحله (e) به‌دست آوردیم، مقایسه‌کنیم، معلوم می‌شودکه عدد $\overline{he}$ باید یکی از ده عدد زیرباشد:

$$10,\ 11,\ 15,\ 16,$$
$$20,\ 21,\ 25,\ 26$$
$$30,\ 31$$

مرحلهٔ $(e,\ h,\ s)$. مجذور ده‌عددی راکه، هم‌اکنون، به‌دست‌آوردیم، می‌نویسیم:

$$100,\ 121,\ 225,\ 256,$$

$$۴۰۰, ۴۴۱, ۶۲۵, ۶۷۶,$$
$$۹۰۰, ۹۶۱,$$

می‌بینیم که تنها یکی از آن‌ها، با شرط ما به‌طور کامل سازگار است؛ به‌این ترتیب

$$e = ۵,\ h = ۲,\ s = ۶;$$
$$(۲۵)^{۲} = ۶۲۵$$

۴°. در ۳°، شرط مسأله را، به‌سه بخش تقسیم کردیم که (با استفاده از علامت‌گذاری‌های § ۱ فصل ششم) می‌توان به‌کمك دستگاهی از سه معادلهٔ نمادی نشان داد:

$$r_{۱}(e) = ۰,$$
$$r_{۲}(e, h) = ۰,$$
$$r_{۳}(e, h, s) = ۰$$

این دستگاه شامل سه‌جنبه را، با دستگاه سه معادلهٔ خطی زیر، مقایسه کنیم:

$$a_{۱}x_{۱} = b_{۱},$$
$$a_{۲}x_{۱} + a_{۳}x_{۲} = b_{۲},$$
$$a_{۴}x_{۱} + a_{۵}x_{۲} + a_{۶}x_{۳} = b_{۳},$$

که در آن، $x_{۱}$، $x_{۲}$ و $x_{۳}$ مجهول‌ها و $a_{۱}$، $a_{۲}$، ...، $a_{۶}$، $b_{۱}$، $b_{۲}$، $b_{۳}$ عددهای مفروضی هستند که، از آن‌ها، $a_{۱}$، $a_{۳}$ و $a_{۶}$ مخالف صفرند.

دو دستگاه را، که شباهت بین آن‌ها بیش از تفاوت‌هایشان به‌چشم می‌خورد، به‌دقت مقایسه کنید.

ابتدا نگاهی به‌دستگاه معادله‌های خطی، با مجهول‌های $x_{۱}$، $x_{۲}$ و $x_{۳}$ بیندازیم؛ معادلهٔ اول، به صورتی یك ارزشی، مجهول $x_{۱}$ را معین می‌کند، بقیه در مقدار $x_{۱}$ تأثیری ندارند و نمی‌توانند آن را تغییر دهند. معادلهٔ دوم، بازهم به‌صورتی یك ارزشی، مقدار $x_{۲}$ را به‌دست می‌دهد که، البته برای این منظور، باید از مقدار به‌دست آمده برای $x_{۱}$، استفاده کرد.

اکنون به‌دستگاه شامل سه‌جنبه توجه می‌کنیم که شرط را، درمورد

سه مجهول e، h و s به‌آن‌ها تقسیم کرده بودیم. از نظر ظاهری، این دستگاه به‌دستگاه سه معادلهٔ خطی، برای x_1، x_2، x_3، شباهت دارد، ولی درواقع، به‌طوری جدی باآن متفاوت است. جنبهٔ اول، مجهول اول را، به صورتی چند ارزشی، معین‌می کند؛ این‌جنبه، تنهادربارهٔ مقدارهای ممکن این‌مجهول، داوری می کند؛ دراین‌جا مکان هندسی رقم e معین می‌شود (و این، مناسب‌ترین بیانی است که می‌توان برای آن پیداکرد). جنبهٔ دوم هم، مجهول‌دوم h را، به‌صورتی چندارزشی، تعیین می کند؛ یعنی در این‌جا هم، مکان هندسی دو مجهول (e, h) مشخص می‌شود. تنها جنبهٔ آخراست که یك ارزشی‌بودن جواب مسأله را تأمین می کند، زیرا از بین مکان هندسی قبلی، نقطهٔ منحصر (e, h, s) را جدا می کندکه، به‌طور کامل، با شرط مسأله سازگاراست.

§۵. احاطهٔ تدریجی برمجهول‌ها

وقتی که n مجهول x_1، x_2، ...، x_n رابررسی می کنیم، می‌توانیم آن‌ها رامؤلفه‌های‌متوالی مجهول‌چندمؤلفه‌ای x به‌حساب آوریم. (§۵فصل‌پنجم را ببینید). به nمجهولی که، به‌طورمتوالی وازیك دستگاه بازگشتی‌معادله‌ها به‌دست می‌آیند (مثل آن‌چه که در §۴، ۱° برخورد داشتیم)، از این دیدگاه بنگریم. روند بازگشتی راه‌حل، پشت‌سرهم و گام به گام، پرده‌ها را از روی مجهول مرکب ماکنار می‌زند. درابتدا، آگاهی زیادی دربارهٔ آن نداریم- تنها یکی از مؤلفه‌های آن، یعنی x_1، را می‌شناسیم. ولی، با موفقیت، از آگاهی‌های نخستین‌خود استفاده می کنیم وبه‌حجم آن‌ها می‌افزاییم: شناسایی نسبت به‌مؤلفهٔ دوم x_2 را، به‌شناسایی قبلی نسبت به‌مؤلفهٔ اول x_1، اضافه می کنیم. درهرمرحله، به‌آن‌چه که می‌دانیم، آگاهی نسبت به‌یك مؤلفهٔ‌دیگر را می‌افزاییم و با استفاده از آگاهی‌های موجود، آن‌ها راکامل‌تر می کنیم. امپراطوری را، ناحیه به‌ناحیه، تسخیرمی کنیم و، درهرمرحله، ازناحیه‌هایی که دراختیار داریم، به‌عنوان مبنای عملیات جنگی برای مطیع کردن ناحیهٔ بعدی استفاده می کنیم.

به‌حالت‌هایی برمی‌خوریم که، این‌روند، تاحدی تغییرشکل پیدامی کند.

گاهی، ناحیه‌ها، دقیقاً جدا از هم و هریك با برخوردی جداگانه تسخیر نمی‌شوند: پیش می‌آید که مهاجم موفق می‌شود دو یا سه ناحیه را، با هم و یکباره، به‌قلمرو امپراطوری خود ملحق کند (با ۲° از§۴ و ۱° از §۱ مقایسه کنید). چه بسا هم که ناحیه‌ها، دریك حمله، به‌طور کامل به‌دست نیایند؛ این وضع هم پیش می‌آید که ابتدا، بخشی از یك ناحیه و، سپس، بخشی از دیگری فتح می‌شود و تنها درحملهٔ موفقیت‌آمیز آخری است، که تسخیر آن‌ها کامل می‌شود (با ۳° از §۴ مقایسه کنید).

ممکن است به‌نوع‌های دیگری هم از این روند برخورد کرده باشیم؛ مثلاً با روش خاصی از راه‌حلی تعمیم یافته آشنا شدیم (§۷ فصل دوم را ببینید) که تازگی آن، برای ما، جالب بود. وقتی که مجهول شامل چندمؤلفه باشد (مثل نمونهٔ مربوط به‌جدول واژه‌ها)، می‌توان در جهت‌های مختلف حرکت کرد: لزومی ندارد که همهٔ مهره‌ها را به‌یك نخ بکشیم؛ می‌توان، برای این منظور، ازچند نخ استفاده کرد. آن‌چه درهمهٔ این موردها مهم است، این است که از همهٔ آگاهی‌هایی که قبلاً ذخیره کرده‌ایم، به‌عنوان پایگاهی برای رسیدن به‌آگاهی‌های بعدی استفاده کنیم. به‌این مفهوم، می‌توان همهٔ روندهای عملی مطالعه و حل مسأله را، بازگشتی دانست.

تمرین‌ها و یادداشت‌های تکمیلی

۱ . وقتی که شرط، جنبه‌های زیادی داشته باشد. درتشکیل مربع وفقی، که دارای n سطر و n ستون است، n^2 عدد شرکت می‌کند؛ ضمناً، مجموع عددهای هرسطر و مجموع عددهای هرستون و، همچنین، مجموع عددهای روی هریك ازدوقطرمربع، باید یکی باشد؛ این عدد را، «مقدار ثابت» مربع وفقی گویند. ساده‌ترین و مشهورترین مربع وفقی، دارای ۳ سطر و ۳ ستون است و به‌وسیلهٔ ۹ عدد طبیعی نخستین ۱، ۲، ...، ۹ پرشده است. مسألهٔ مربوط به‌این ساده‌ترین نوع مربع وفقی را، مفصل‌تر، شرح می‌دهیم.

مجهول چیست؟ نه عدد خانه‌های مربع وفقی، مجهول‌اند؛ آن‌ها را

به x_{ik} نشان می‌دهیم که معرف عددی‌است که درتلاقی سطر iام وستون kام قرار گرفته است؛ $i, k = ۱, ۲, ۳$.
شرط کدام است؟ شرط ازچهارنوع تقاضای مختلف، تشکیل شده‌است:
۱°. x_{ik} — عددی طبیعی است؛
۲°. $۱ \leqslant x_{ik} \leqslant ۹$؛
۳°. $x_{ik} \neq x_{jl}$، اگر $i \neq j$ یا $k \neq l$ (یا هردوی آن‌ها)؛
۴°. $x_{i۱} + x_{i۲} + x_{i۳} = x_{۱۱} + x_{۲۲} + x_{۳۳}$، که‌درآن $i = ۱, ۲, ۳$،
$x_{۱k} + x_{۲k} + x_{۳k} = x_{۱۱} + x_{۲۲} + x_{۳۳}$، که‌درآن $k = ۱, ۲, ۳$،
$$x_{۱۳} + x_{۲۲} + x_{۳۱} = x_{۱۱} + x_{۱۲} + x_{۳۳}$$
تعداد تقاضاهای هرنوع و تعدادکل آن‌ها را پیدا کنید. این تقاضاها، برمبنای ۳° از ۱§، به‌چه صورتی درمی‌آیند؟

۲ . با استفاده از مجهول چند مؤلفه‌ای، دستگاه کلی راکه در ۵° از ۱§ مورد بررسی قرار دادیم، به‌دستگاه (ظاهراً محدودتر) مورد بررسی در ۴° از ۲§، منجر کنید

۳ . با استفاده ازمجهول چندمؤلفه‌ای، دستگاه۱° از ۱§ را به‌دستگاه‌حالت خاصی که در ۱° از ۴§ داشتیم، منجر کنید.

۴ . روند مربوط به‌تمرین ۳ را درمورد دستگاه مورد بررسی در ۲° از۴§، به‌کار ببرید.

۵ . طرح حل دستگاه زیررا بریزید:
$$r_۱(x_۱, x_۲, x_۳) = ۰,$$
$$r_۲(x_۱, x_۲, x_۳) = ۰,$$
$$r_۳(x_۱, x_۲, x_۳) = ۰,$$
$$r_۴(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴) = ۰,$$
$$r_۵(x_۱, x_۲, x_۳, x_۵) = ۰,$$
$$r_۶(x_۱, x_۲, x_۳, x_۶) = ۰,$$
$$r_۷(x_۱, x_۲, x_۳, x_۴, x_۵, x_۶, x_۷) = ۰$$

۶ . دستگاه رابطه‌های

$$r_1(x_1) = 0,$$
$$r_2(x_1, x_2) = 0,$$
$$r_3(x_2, x_3) = 0,$$
$$x_4(x_3, x_4) = 0,$$
$$\cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot$$
$$r_n(x_{n-1}, x_n) = 0$$

حالت خاص جالب یکی از دستگاه‌هایی است که درمتن مورد بحث‌قرار داده‌ایم؛ می‌توانید بگویید، منظور ما، کدام دستگاه است؟

آیا قبلاً با آن برخورد نداشته‌اید؟ درکجا به‌حالتی برخورده‌اید که مقایسهٔ دو دستگاه، با چنین رابطهٔ متقابلی، انجام گرفته است؟

۷ . از نقطهٔ مفروضی واقع درداخل دایره، وتری به‌طول معلوم رسم کنیم.
این تمرین، به‌چه طبقه‌ای ازمسأله‌ها متعلق است؟

۸ . دوخط راست a و b ونقطهٔ C مفروض‌اند؛ به‌جزآن، مقدار l هم معلوم است. از نقطهٔ C، خط x را طوری رسم کنید که محیط مثلثی که با خط‌های راست a، b و x درست می‌شود، برابرمقدار معلوم l باشد.
این تمرین، به‌چه طبقه‌ای از مسأله‌ها تعلق دارد؟

۹ . تنها بخشی از شرط را نگه دارید. از دوجنبهٔ شرط مسأله که در ۲§، ۷° مورد بررسی قرار گرفت، جنبهٔ r_1) تاحدی راحت‌تر است، زیرا ضمن تلاش برای برآوردن تقاضای این جنبه، ساده‌تر می‌توان طرح مقدماتی حل مسأله رانهیه کرد: برای این که تحریف مجموعهٔحرف‌های «حرف‌ماملك» را پیدا کنیم، باید واژه‌ای جست‌وجو کنیم وتنها ازحرف‌هایی استفاده کنیم که دراین مجموعه وجود دارد و، ضمناً، به‌نحوی که همهٔ این حرف‌ها درآن وارد شده باشند. دراین‌جا می‌توان به‌این روند متوسل شد: شرط‌آخر، یعنی «همهٔ این حرف‌ها درآن وارد شده باشند» راکنار می‌گذاریم وسعی می‌کنیم واژه‌ها یا نکته‌های دستوری مثل پیشوند، علامت‌جمع، حرف ربط را، که می‌توان از این مجموعه‌بیرون کشید، پیدا کنیم. واژه‌های کوتاه به‌سادگی به‌دست می‌آیند؛ به‌تدریج

به‌واژه‌های طولانی‌ترمی‌رویم تا،سرآخر، به‌واژهٔ موردنظرخود برسیم. درمثال موردنظر ما، مثلاً به‌این واژه‌ها می‌توان برخوردکرد:

ما را فر کر کف کم فك رف فرا مام
حکم فرم فام کام محك کفر مار حمام حکام فرما
محکم محرم
وغیره.

برای پیداکردن جواب مسأله، باید این «تکه» واژه‌ها را مطالعه‌کرد و، در این مرحله، بیشتر به‌جنبهٔ r_2) توجه داشت: مثل «حمام‌کفر» یا «فرم حکام»که البته هیچ‌کدام قابل قبول نیستند.

۱۰. نخ آریادنا.آریادنا، دخترپادشاه مینوس،که به‌تزه عشق می‌ورزید،یك گلولهٔ نخ به‌او داد تا ضمن ورود به‌دالان‌های پرپیچ و خم آن را باز کند وموقع برگشتن، راه راگم نکند.

آیا یك نابغهٔ مبتکر پیش از تاریخ، این افسانه را ساخته است؟ چقدر حیرت‌آوراست‌که این افسانه، مضمون مسأله‌هایی را به‌خاطرمی‌آورد!

ضمن حل مسأله، اغلب به‌دشواری برمی‌خوریم ونمی‌بینیم که‌چگونه باید دنبالهٔ نقطه‌هایی راکه به‌دست آورده‌ایم، ادامه داد. دالان‌های پرپیچ وخم (لابیرنت)، مسأله‌ای ازگونهٔ دیگراست؛ در این مسأله، وقتی‌که به‌نقطه‌ای می‌رسیم، مسیرهای فراوانی در برابرما قراردارد و دشواری هم مربوط به‌این است که معلوم نیست،کدام مسیر را باید بردیگران ترجیح داد. برای این که ازعهدهٔ چنین مسأله‌ای برآییم (یا برای این‌که بتوانیم، بعدازآن‌که ازعهدهٔ مسأله برآمده‌ایم، جواب‌آن را بنویسیم)، باید برای عنصرهای مورد بررسی، ردیفی قایل شویم‌که با حداکثر صرفه‌جویی، پاسخ‌گوی بیشترین جنبه‌های این مسأله باشد؛ واگر دربرابرما، راه‌های متفاوتی قراردارد، عنصربعدی را طوری باید انتخاب کردکه حداکثر بهره را از کارهای انجام شدهٔ قبلی، نصیب خود کند. مفهوم جملهٔ «انتخاب جهت درست در چهار راه» کاملاً به‌وسیلهٔ بیان «نخ آریادنا» مشخص می‌شود، که ضمناً، یکی از بیان‌های مورد

علاقهٔ لایب نیتس بود.

مسأله‌های بغرنجی که مجهول‌های زیادی دارند ودرآن‌ها، بین مسأله وشرطها، چندین‌رابطهٔ متقابل وجود دارد، اغلب خصلتی شبیه‌لابیرنت دارند؛ به‌عنوان بهترین نمونه ازاین نوع مسأله‌ها، می‌توان از جدول واژه‌ها وساختن شکل‌های هندسی پیچیده نام‌برد. وقتی که با چنین‌مسألهٔ بغرنجی سروکار داشته باشیم، در هرمرحله‌ای ازحل آن، بـا مشکل «انتخاب» مواجه می‌شویم؛ برای حرکت بعدی، به‌کدام قسمت مسأله (به‌کدام واژه، به‌کدام بخش شکل)، باید توجه‌کرد؟ در ابتدای کار، باید درجست وجوی ضعیف‌ترین نقطه‌ای بود که، برای حمله، مناسب است، باید از مناسب‌ترین وراحت‌ترین‌نقطه آغاز کرد، مثلاً ،ساده‌ترین واژه‌ای که در دسترس است ویا جزئی ازشکل کـه به‌راحتی قابل رسم است. بعد ازآن‌که نخستین واژه پیدا یاعنصراولیهٔ شکل رسم شد،باید موضع دوم را با دقت انتخاب کنیم، یعنی واژه‌ای (یا جزئی از شکل) را،که غیر ازاولی است، ولی جست‌وجوی آن، بیش ازهرجای‌دیگری، متکی به‌قسمت پیداشدهٔ اولی‌است. با ادامهٔ این‌روش، بایددرهرمرحله، یك مسألهٔ موضعی با مجهول مشخصی را انتخاب‌کنیم،که بتوان آن‌را ازآن‌چه قبلاً یافته‌ایم، بیرون‌کشید. (دراین‌جا دوباره، ولی‌مفصل‌تر، به‌همان بحث §۵ پرداختیم.)

در این‌جا، چنـد مسأله می‌آوریم، تـا خواننده بتواند، در عمل، از توصیه‌هایی‌که دربالاکردیم، استفاده‌کند.

۱۱. مربع وفقی راکه شامل سه سطروسه‌ستون است، وطرح آن را درتمرین ۱ ریختیم، پیداکنید. (ممکن است، شما جوابی ازآن را بدانید، ولـی دراین‌جا، می‌خواهیم همهٔ جواب‌های آن را پیداکنیم. ردیفی که برای مجهول‌های خود انتخاب می‌کنید، اهمیت جدی دارد. ابتدا، سعی‌کنید مجهول‌ها را، به‌طوریك‌ارزشی، درمربع وفقی جادهید- این خیلی مهم است!)

۱۲. یك عدد چهاررقمی را در ۹ ضرب‌کرده‌ایم، عـددی چهاررقمی با همان

رقم‌ها، منتهی درجهت عکس به‌دست آمده است. این عدد را پیدا کنید.
(قبل ازهمه، ازکدام بخش مسأله، استفاده می کنید؟)

۱۳. مطلوب است رقم‌های a، b، c و d، به‌شرطی که

$$\overline{ab}\ .\ \overline{ba}=\overline{cdc}$$

فرض‌براین‌است که رقم‌های a و b در $\overline{ab}$ (یعنی درعدد $10a+b$)، با هم برابر نیستند.

۱۴. ثابت کنید، هیچ کدام از عددهای دنبالهٔ

$$11,\ 111,\ 1111,\ 11111,\ \ldots$$

نمی‌توانند برابرمجذور یك عدد درست باشند.

۱۵. سه‌ضلع و سه زاویهٔ مثلث را، عنصرهای اصلی آن گویند. آیا می‌توان دومثلث نامساوی ساخت، به‌نحوی که پنج عنصراصلی یکی ازمثلث‌ها، متحد پنج‌عنصراصلی مثلث دیگرباشد؟ (لزومی ندارد، ضلع‌های‌مساوی این دومثلث، متناظر یکدیگر باشند.)

۱۶. آرت، بیل وسام تصمیم گرفتند پیك‌نیك بزرگی را ترتیب بدهند. هریك ازآن‌ها، مقداری ساندویچ، بستنی وآب میوه، روی‌هم به‌مبلغ ۹ دلار خرید. قیمت همهٔ ساندویچ‌ها ۹ دلارشد؛ به‌همین ترتیب، ارزش همـهٔ بستنی‌ها وهمهٔ آب‌میوه‌ها هم، هرکدام ۹ دلارازآب درآمد؛ اگرچه‌سهم پرداخت هرکدام از جوان‌ها، نه درمورد ساندویچ، نه درمورد بستنی و نه درمورد آب‌میوه، مساوی نبود، همچنین، هیچ کدام ازآن‌ها،برای ساندویچ و بستنی، یا برای ساندویچ و آب میوه یا برای بستنی وآب میوه، پول مساوی نپرداختند. آرت بیشتر پـول خود را بابت بستنی پرداخت وبیل دوبرابر پـول بستنی بابت ساندویچ داد. سام بابت آب میوه، چه‌مبلغی پرداخته است؟ (ارزش هرخرید، بـا تعداد درستی دلار بیان می‌شود.)

۱۷. سه زوج زن وشوهر- براون‌ها، جونس‌ها وسمیت‌ها- که برای جشن اول نوامبرآماده می‌شدند، هدیه‌های کوچکی برای بچه‌های همسایه‌خریدند. هرزن وهرشوهر، به‌تعداد سنت‌هایی که برای هـرهدیه پرداخت، هدیهٔ

یکجور تهیه‌کرد. هرزن ۷۵ سنت بیشتر از شوهرخود خرج‌کرد. «آنا» یك هدیه بیشتر از «بیل براون» خرید و «بتی» یك هدیه کمتر از «جو-جونس». نام خانوادگی «مری» چیست؟

۱۸. روزخیلی گرمی بود؛ چهارزوج زن وشوهر رویهم ۴۴ بطری‌کوکاکولا نوشیدند. «آنا» ۲ بطری، «بتی» ۳ بطری، «سه‌سیل» ۴ بطری و «دوروتی» ۵ بطری آشامیدند. آقای «آلامس» به اندازهٔ زنش و بقیهٔ مردها، بیشتر از زن‌هایشان نوشابه خوردند؛ ضمناً، آقای «براون» دو برابر، آقای «ویلسون» سه برابر وآقای «گرین» چهاربرابر زن‌های خودشان نوشابه خوردند. نام خانوادگی هریك ازخانم‌ها را پیداکنید.

۱۹. مهمانی ازیك معلم ریاضی پرسید: «چند بچه دارید و هرکدام چند سال دارند»؟

آقای سمیت جواب داد: «من سه پسردارم‌که حاصل‌ضرب سال‌های‌سن آن‌هابرابراست با۷۲ ومجموع این‌سال‌ها، برابراست باشمارهٔ منزل‌ما».

مهمان به‌خیابان رفت، به‌شمارهٔ منزل نگاه‌کرد، برگشت وگفت: «مسأله، مبهم است».

آقای سمیت‌گفت: «حق با شماست، ولی من امیدوارم‌که پسربزرگم درمسابقهٔ استانفورد موفق شود[1]».

با استدلال قانع‌کننده‌ای بگویید، هرپسرمعلم ریاضی، چند سال دارد؟

۲۰. مسأله‌های دیگر. سعی‌کنید مثال‌های دیگری پیداکنیدکه به‌موضوع این بخش مربوط باشند. توجه خود را به‌تقسیم شرط ـ به‌جنبه‌های مختلف آن، متمرکزکنید وببینیدکه اگرازاین یاآن جنبه، کاررا آغازکنید، چه فایده‌هایی‌ویا چه‌ضررهایی‌دارد! به‌مسأله‌هایی‌که درگذشته حل‌کرده‌اید، یکبار دیگر و، این‌بار، از دیدگاه مضمون این فصل، مراجعه کنید و،

---

۱. مسابقهٔ سنتی (سالیانه) برای حل مسأله‌های مقدماتی ریاضی، سال‌هاست که نقشی اساسی در تربیت استعدادهای ریاضـی دانش‌آموزان امریکایی دارد. ضمناً یادآوری می‌کنیم‌که‌پولیا، سال‌های‌زیادی، استاد بخش ریاضی‌دانشگاه استانفورد (کالیفرنیا) بوده است.

ضمناً، مسأله‌های جدیدی جست وجو کنید که، این دیدگاه، برای حل آن‌ها مفید باشد.

۲۱. هدف بینابینی. فرض کنیم که به‌حل مسأله‌ای مشغولیم، ولی هنوز از مرحلهٔ اول آن خارج نشده‌ایم. تا این‌جا، مسأله را در مجموع خود فهمیده‌ایم؛ این، یك مسألهٔ پیداکردنی‌است. به‌این پرسش توجه کرده‌ایم که: «مجهول چیست؟»؛ می‌دانیم که «چیزی» را باید پیدا کرد. علاوه براین، فهرست داده‌ها را منظم کرده‌ایم و به‌شرط هم پی‌برده‌ایم؛ حالا می‌خواهیم شرط را به‌بخش‌های مناسبی، تقسیم کنیم.

توجه کنبد که، این مسألهٔ بینابینی، بدون محتوی نیست، زیرا روش تقسیم، ممکن است بیش ازیك نوع باشد وشما بخواهید مفیدترین نوع تقسیم را پیداکنید. مثلاً، برای حل یك مسألهٔ هندسی به‌طریق جبری، هریك ازجنبه‌ها را به‌کمك معادله بیان می‌کنیم؛ روش‌های مختلف تقسیم به‌جنبه‌ها، منجر به‌دستگاه‌های مختلفی از معادله‌ها می‌شود و، البته، ما به‌دنبال دستگاهی هستیم که راحت‌تر از عهدهٔ آن برآییم (با ۳° و ۴° از §۵ فصل دوم مقایسه کنید).

ممکن است، شرط مسأله، واحدی یکپارچه به‌نظرآید، با وجود این، احتمال این که بتوان آن را به‌جنبه‌هایی تقسیم کرد، وجود دارد. به‌این ترتیب، درهرحالت، بامسأله‌ای بینابینی روبه‌رو می‌شویم: در مرحلهٔ اول، تقسیم شرط به‌جنبه‌های مناسب و، در مرحلهٔ دوم، تقسیم شرط به‌تعداد هرچه‌بیشتر جنبه‌های مناسب. تقسیم شرط به‌جنبه‌های مختلف، می‌تواند ما را به‌راه‌حل نزدیك کند؛ این هدف بینابینی ما است که، در بعضی موردها، اهمیتی جدی دارد.

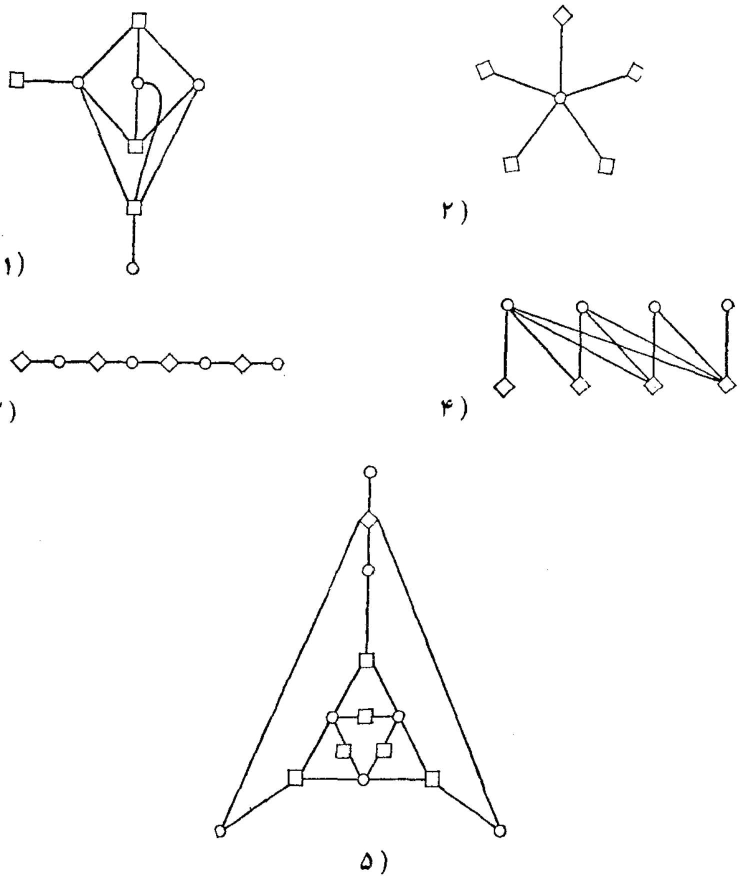
۲۲. تصور نموداری. فرض می‌کنیم، رابطه‌ای را، که مورد تقاضای شرط مسأله (وشامل مجهول‌هایی) است، به‌کمك برابری‌های نمادی (که‌در §۱، ۳° آوردیم)، نشان داده باشیم. چنین رابطه‌هایی را می‌توان به‌صورت ترسیمی یا نموداری هم بیان‌کرد و، روشن است، که نمودار می‌تواند به‌بهترفهمیدن دستگاه رابطه‌های مفروض، کمك خوبی‌باشد.

روی نمودار خود، مجهول‌ها را با دایره، رابطه‌های بین‌مجهول‌هارا با مربع، واین حقیقت را کـه در رابطهٔ مفروض، چه مجهولی شرکت دارد، با خطی که دایره را به‌مربع وصل می‌کند، نشان می‌دهیم. مثلاً، نمودار ۱) درشکل ۲۸ـa، عبارت است از دستگاهی شامل چهاررابطه که چهارمجهول را به‌هم مربوط می‌کنند؛ درآن دیده می‌شود کـه تنها یکی از مجهول‌ها در هرچهار رابطه شرکت کـرده است و تنها یکی از رابطه‌ها، شامل هرچهار مجهول است؛ درواقع، نمـودار ۱) و دستگاه چهارمعادلهٔ ۱° از ۱§، دقیقاً معرف یك موقعیت هستند: درحالت اول به‌زبان هندسی و درحالت دوم به‌زبان فرمول. برخورد خطها درجایی جزدایره‌هاومربع‌ها(آن‌طور که‌مثلاً درنمودار۱)، یکبارپیش‌آمده است)، چیزی‌به‌حساب نمی‌آید؛ باید این‌طورتجسم کرد که تنها دایره‌هاومربع‌ها روی‌صفحهٔ شکل‌وخط‌هایی که آن‌ها رابه‌هم وصل می‌کنند، درفضا قرار دارند، اگرچه‌تصویراین خطهاروی‌صفحه‌ممکن‌است‌یکدیگر راقطع کنند.

نمودارهای ۲)، ۳)، ۴) و ۵) هم، معرف دستگاه رابطه‌هایی هستند که قبلاً بررسی‌کرده‌ایم؛ بند یا تمرینی را پیداکنیدکه به‌این نمودارها، مربوط می‌شوند.

[طرح نموداری ازنوع‌دیگری، درشکل ۲۸ـb نشان داده شده‌است؛ دراین‌طرح، هم‌رابطه‌ها وهم مجهول‌ها به‌وسیلهٔ خط نشان داده‌شده‌اند، ضمناًرابطه‌هابه‌وسیلهٔ خطهای افقی و مجهول‌ها به‌وسیلهٔ خطهای قائم؛ اگررابطه‌ای شامل مجهول باشد، دراین صورت،خطهای متناظرآن‌ها، درنقطه‌ای مشترك می‌شوند. نمودارهای ۳) و۴)، چه در شکل ۲۸ـa و چه در شکل ۲۸ـb، یك دستگاه مجهول‌ها و دستگـاه رابطه‌هایی که آن‌ها را به‌هم مربوط می‌کنند، معرفی می‌کنند.

*شکل ۲۸ـb، می‌تواند تصور جبـری مسأله‌ها را به ذهـن بیاورد: می‌توان آن را طرح ماتریسی درنظر گرفت که درآن، هرسطرپاسخ گوی یك رابطه‌وهرستون پاسخ گوی یك مجهول‌است؛ عضوهای‌این‌ماتریس، یا واحداست ویاصفر، بسته به‌این‌که رابطهٔ مورد نظرما، شامل‌مجهول

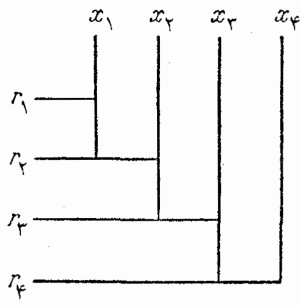


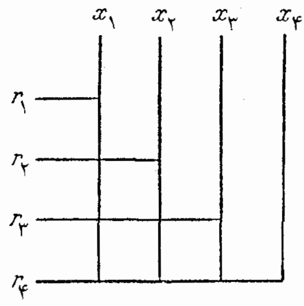
شکل ۲۸-a. دایره‌ها ومربع‌ها؛ مجهول‌ها و رابطه‌ها

باشد یا نباشد.]

۲۳. گونه‌هایی از مسأله‌های با خصلت غیر ریاضی. در نوبت اول، برای سازگاری کدام جنبهٔ شرط باید تلاش کنیم؟ این پرسش، دربارهٔ بسیاری از مسأله‌ها، مورد لزوم است. بعد از انتخاب جنبه‌ای که، به‌نظرمان،

دارای اهمیت اصلـی است، و تشکیل فهـرستی (کامـل یـا ناقص) از موضوع‌های سازگار با ایـن شرط «اصلی»، به‌سراغ جنبه‌های «درجـه دوم» می‌رویم و به‌کمك آن‌ها، بسیاری از موضوع‌های فهرست‌تنظیمی خود راکنار می‌گذاریم تا، سرآخر، هیچ موضوعی در فهرست مـا باقی نماندکه، درعین‌حال، هم با جنبهٔ «اصلی» شرط وهم با جنبه‌های«درجهٔ دوم» آن، یعنی با تمامی شرط به‌طورکامل، سازگار نباشد. چنین‌طرحی برای عمل،که قبلاً هم باآن‌آشنا شده‌ایم (§۴، ۳° وهمچنین‌تمرین‌های ۱۶ و ۱۷ را ببینید)، برای گونه‌های زیـادی از مسأله‌های غیرریاضی هم، به‌طور طبیعی پیش می‌آید وراه را برای حل آن‌ها باز می‌کند.





شکل ۲۸-b. قائم‌ها وافقی‌ها: مجهول‌ها و رابطه‌ها

مسألهٔ مترجم. بـرای ترجمهٔ اززبـان فرانسوی به‌زبان فارسی، بایـد معادل یـك واژه فـرانسوی، ومثلاً «confiance»، را پیدا کـرد. واژه‌نامهٔ فرانسه به‌فارسی، سیاهه‌ای از واژه‌های فارسی را ردیف کرده است (اعتماد، اطمینان، وثوق، اتـکال، ایمنی، امید، قوت قلب)،کـه به‌طورکلی و با جنبهٔ «اصلی» شرط مسألهٔ ما سازگارند. ولی هنوز باید با دقت، قرینه‌های دیگری را دنبال کنیم، جنبه‌های ظریف دیگـری را مورد توجه قرار دهیم و، به‌کمك‌آن‌ها، واژه‌هایی راکه برای متن‌مورد

نظرما در ترجمه، کمتر مناسب‌اند کنار بزنیم و مناسب‌ترین واژه را برگزینیم.

مات در دو حرکت. درمرحله‌ای از بازی شطرنج، مهره‌های سفید و سیاه، به‌نحوی رودرروی هم قرارگرفته‌اند. مجهول عبارت است از حرکت سفید. شرط، حرکتی را طلب می‌کندکه، بدون ارتباط با حرکت سیاه، سفید بتواند درحرکت بعدی، شاه سیاه را مات‌کند.

حرکت مجهول، باید هرحرکت ممکن سیاه را «دفع کند» (از حملهٔ نامنتظر پیش‌گیری‌کند وپاسخ آمادهٔ خود را، برای مات‌کردن، پیش‌بینی کند). به‌این ترتیب، در این حالت، می‌توان تعداد جنبه‌های شرط را برابرتعداد حرکت‌هایی دانست‌که برای سیاه پیش‌بینی می‌شود.

طرح عمل واستراتژی‌کار چنین است: باید از حرکت «بحرانی» سیاه، که ظاهراً خطر بیشتری دارد، آغاز کرد و فهرستی از حرکت‌های سفید تنظیم‌کرد که می‌توانند با این خطر عمده، مقابله‌کنند. بعد، حرکت‌های «درجهٔ دوم» سیاه را درنظرمی‌گیریم و از فهرست خود، حرکت‌هایی را که قادر به مقابلهٔ با این حرکت‌های درجهٔ دوم نیستند، حذف می‌کنیم؛ سرانجام باید تنها جواب درست، باقی بماند.

ساختمان مهندسی. مهندس باید وسیلهٔ تازه‌ای را بسازد. برای این‌که این وسیله، به‌تولید برسد، باید این وسیلهٔ جدید با مجموعه‌ای از تقاضاها سازگار باشد؛ بعضی از این خواست‌ها، خصلت «فنی» دارند، مثل اطمینان درکار، بی‌خطری، دوام وغیره و بعضی دیگر، خصلت «اقتصادی» دارند، مثل بالا نبودن قیمت تمام شده، وجود بازارفروش وغیره. مهندس، ابتدا به‌جنبه‌های فنی‌کار (به‌طورکامل یا درجزءخود) توجه می‌کندکه ماآن‌ها را، بخش «اصلی» شرط به‌حساب می‌آوریم و، بنابراین، قبل‌ازهرچیز، به‌حل جنبهٔ مکانیکی (فیزیکی) مسأله‌می‌پردازد. معمولاً، درچنین مسأله‌هایی، چندجواب به‌دست می‌آید ومهندس،همهٔ آن‌ها را به‌حساب می‌آورد ومطالعه می‌کند. بعد ازاین مرحله است،که جنبه‌های اقتصادی‌کار،که تااین‌جا «درجهٔ دوم» بودند، مطرح‌می‌شود؛

سرانجام این بررسی، به‌آن‌جا می‌رسد که مفیدترین و با صرفه‌ترین وسیله وارد تولید می‌شود و بقیهٔ طرح‌ها، به‌کنار می‌روند.

۲۴. دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی زیر را «به‌طور نظری»، یعنی بدون استفاده از قلم و کاغذ، حل کنید:

$$\begin{aligned} ۳x+\ \ y+۲z&=۳۰, \\ ۲x+۳y+\ \ z&=۳۰, \\ x+۲y+۳z&=۳۰ \end{aligned}$$

ثابت کنید که جواب شما درست است.

۲۵. مثلثی با سه ضلع a، b و c داده شده است. به مرکز رأس‌ها، دایره‌هایی رسم کرده‌ایم، به‌نحوی که بریکدیگر مماس خارج باشند. شعاع‌های x، y و z این سه دایره را پیدا کنید.

۲۶. مقدار هریك از مجهول‌ها را طوری پیدا کنید که در دستگاه چهارمعادلهٔ زیر صدق کنند.

$$\begin{aligned} y+u+v&=\ \ ۵, \\ x\quad\ \ +u+v&=\ \ ۰, \\ x+y\quad\ \ +v&=-۸, \\ x+y+u\quad\ \ &=\ \ ۴, \end{aligned}$$

راه بکر و سریعی برای حل مسأله پیدا کنید.

۲۷. طبقه‌بندی ظریف‌تر. در تمرین‌های ۲۴، ۲۵ و ۲۶، یك موقعیت مهم روشن شده است: تقارن شرط درمسأله‌ای که شامل چند مجهول است، نسبت به‌این مجهول‌ها (اگرموفق شوید آن را کشف کنید!) می‌تواند تا حد زیادی برمسیر راه‌حل اثر بگذارد و آن را، به‌طور جدی، ساده کند (گاهی، شبیه تمرین ۲۵، نباید به‌طور ساده تبدیل دوری مجهول‌ها را درنظر گرفت، بلکه به‌تبدیلی باید توجه کرد که هم مجهول‌ها و هم معلوم‌های مسأله، درآن شرکت داشته باشند). حالت‌هایی هم وجود دارد که تبدیل را، نه‌نسبت به‌همهٔ مجهول‌ها، بلکه نسبت به‌بعضی از مجهول‌ها (و معلوم‌ها) باید درنظر گرفت. اگرمنظم‌تر دراین باره بحث

کنیم، به‌طبقه‌بندی تازه‌ای ازمسأله‌های پیداکردنی می‌رسیم که خیلی وسیع‌تر از چیزی است‌که در §۱، ۶° داشتیم؛ می‌توان پیش‌بینی کرد که این طبقه‌بندی، برای بررسی ما، فایدهٔ زیادی دربردارد[۱].

---

۱. اشاره‌ای که دراین‌جا، دربارهٔ جست‌وجوی «گروه‌های تقارن» مسأله‌ها (یا گروه‌های «تبدیل» مجهول‌ها وداده‌های مسأله، بدون این که شرط آن‌ها تغییر کند) آمد. درشاخه‌های مختلف هندسه، جبروآنالیز ریاضی نقش عمده‌ای به‌عهده دارد. برای آشنائی بیشتر با این مفهوم، به‌خصوص درجبرمقدماتی، می‌توانید به‌ترجمهٔ کتاب‌های «تقارن درجبر»، «تقارن درهندسه وجبر» و کتاب «روش‌های جبر» (جلد اول) مراجعه کنید.

فصل هفتم

تصور هندسی روند راه‌حل

چنین تصورهایی در بارهٔ این چیزها، بی‌اندازه مفید است، زیرا هیچ چیز عینی‌تر ازشکل، برای ما نیست- شکل را می‌توان احساس کرد و دید.

دکارت. قانون‌های راه بردن عقل

§۱. استعاره‌ها

این حادثه، قریب پانزده‌سال قبل، وقتی که من دانشجو بودم، پیش آمد: می‌خواستم یك مسألهٔ مقدماتی هندسهٔ فضایی را، برای جوانی، که او را برای امتحان آماده می‌کردم، شرح دهم؛ ولی رشتهٔ استدلال را گم کردم و درکارخود ماندم. ازاین‌که نتوانسته بودم، مسألهٔ به‌این سادگی را حل کنم، بی‌اندازه ناراحت شدم وعصرروز بعد، بـا چنان تلاشی به‌پیدا کردن راه‌حل آن پرداختم، که دیگرهرگزآن را فراموش نکردم. ضمـن کوشش ذهنی برای

جست‌وجوی مسیرطبیعی راه‌حل‌ورابطه‌ای که بین قسمت‌های اصلی‌آن وجود دارد، سرآخر، به‌تصور هندسی راه‌حل مسأله رسیدم. این، نخستین کشف‌من بود وآغازی بود برای علاقه‌ای که درتمام طول زندگی بعدی، مرا به‌سوی حل مسأله‌ها کشانید.

درواقع، بعضی عبارت‌های استعاری متداول بودکه مرا به‌سمت تصویرهای هندسی راهنمایی کرد. کافی است کمی توجه کنیم که، زبان مورد استفادهٔ ما، پراز استعاره است (استعاره‌های ضعیف، متوسط و روشن). ولی نمی‌دانم، آیا به‌این نکته توجه شده است که بسیاری ازاین استعاره‌ها به‌هم مربوط‌اند: گاهی به‌هم‌بستگی‌دارند، گاهی متحدمی‌شوند، گروه‌هایی راتشکیل می‌دهندکه می‌توانند ربطی به‌هم نداشته باشند ویا برعکس، کم وبیش به‌هم متصل باشند. ولی به‌هرحال، خانوادهٔ گسترده‌ای ازاستعاره‌ها وجود داردکه دارای این دوخصلت هستند: همهٔ آن‌ها به‌اصول اساسی حل مسأله مربوط می‌شوند وهمهٔ آن‌ها به‌یك ترکیب هندسی منجرمی‌شوند.

پیدا کردن راه‌حل مسأله- یعنی برقرارکردن ارتباط بین موضوع‌ها یا اندیشه‌هایی که، از قبل ولی به‌صورتی متفرق، وجود دارند (یعنی ایجاد رابطه بین موضوع‌هایی که دراختیار داریم با موضوع‌هایی که می‌خواهیم پیداکنیم، بین داده‌ها ومجهول، بین شرط ونتیجه). هرقدرکه موضوع‌ها، در ابتدا دورتر ازهم به‌نظربرسند، برای پژوهشگری که رابطهٔ بین آن‌ها راپیدا کند، احترام بیشتری به‌وجود می‌آورد. گاهی این ایجاد ارتباط به‌یك پل می‌ماند: یك‌کشف مهم، ما را به‌حیرت می‌اندازد ودرست مثل پلی که روی گذرگاه خطرناکی بناشده باشد، دواندیشهٔ به‌کلی دور ازهم را، به‌یکدیگر مربوط می‌کند. گاهی هم این ارتباط، به‌کمك یك زنجیر تحقق می‌یابد: اثبات به‌منزلهٔ بستگی متقابل استدلال‌هاست، شبیه زنجیری است- کوتاه یا دراز- که حلقه‌های آن به‌هم مربوط شده‌اند. هیچ زنجیری، محکم‌تر از ضعیف‌ترین حلقهٔ خود نیست. - حتی‌اگریکی ازحلقه‌ها نارسا باشد، اثبات بی‌پایه می‌شود و مسیراستدلال، پیوستگی خود را ازدست می‌دهد. بازهم ممکن است‌که‌این ارتباط، شبیه یك نخ یا رشته به نظرآید- همهٔ ما به‌معلمانی برخورده‌ایم، که

سرنخ استدلال را گم کرده‌اند، یا در رشتهٔ استدلال‌های آن‌ها گرهی پدید می‌آید؛ همچنین بارها دیده‌ایم که معلمی برای پیدا کردن رشته‌ای که از دست داده است، زیرچشمی و یواشکی به یادداشت‌های خود مراجعه می‌کند (و برای ما چقدر خسته کننده است، وقتی که برای یك هدف کوچك، به دنبال رشتهٔ کارمی گردد). نخ نازك، به طور طبیعی، همچون خط هندسی و موضوع‌هایی که به وسیلهٔ این نخ به هم مربوط شده‌اند، به عنوان نقطه‌هایی، به خاطر ما می‌آیند؛ و از همین جاست که نمودارها پدید می‌آیند: تصوری هندسی برای بستگی‌هایی که بین موضوع‌های ریاضی وجود دارد.

اکنون دیگر می‌توانیم، به جای «شکل‌های شفاهی»، به شکل‌های هندسی بپردازیم.

§۲. مسأله چیست؟

به یك مثال نیاز داریم: مسألهٔ ساده‌ای از هندسهٔ فضایی را، برای این منظور انتخاب کرده‌ام[1].

مطلوب است حجم V هرم ناقص منتظمی با قاعده‌های چهارضلعی، به شرطی که ارتفاع h، ضلع a از قاعدهٔ بالا و ضلع b از قاعدهٔ پایین آن، داده شده باشد.

[هرم با قاعدهٔ مربع را وقتی منتظم گویند که پای ارتفاع آن، برمرکز مربع منطبق باشد. هرم ناقص، به قسمتی از هرم گویند که بین قاعدهٔ آن و صفحه‌ای موازی قاعده قرار گرفته باشد. این صفحهٔ موازی، یکی از وجه‌های هرم ناقص را تشکیل می‌دهد که، آن را، قاعدهٔ بالا گویند؛ قاعدهٔ پایین هرم ناقص، همان قاعدهٔ هرم کامل است؛ ارتفاع هرم ناقص (که کوچکتر از ارتفاع هرم کامل است)، به فاصلهٔ دو قاعدهٔ آن گفته می‌شود.]

ابتدا، به این مطلب توجه کنیم که، هدف مسأله کدام است؛ این نخستین گام در مسیر حل مسأله است. چه چیزی خواسته شده است؟ با طرح این

---

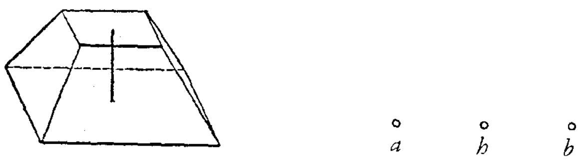
۱. و این شبیه مسأله‌ای است که زمانی به بررسی آن پرداخته‌ام، ولی به مراتب از آن ساده‌تر است.

پرسش، می‌کوشیم تاحد ممکن، شکل جسمی راکه بایدحجم آن راپیداکنیم، پیش خود مجسم‌کنیم (به‌نیمهٔ چپ شکل ۲۹ـa نگاه‌کنید). تصور ذهنی‌خود را، ازنظرنموداری، به‌عنوان یـك نقطه تفسیرمی‌کنیم ـآن را بـا V نشان می‌دهیم وتمامی توجه خود را روی آن متمرکز می‌کنیم (نیمهٔ راست شکل ۲۹ـa را ببینید).

چه‌چیزی ازما خواسته‌اند؟

شکل ۲۹ـa. تمامی توجه خود را روی یك موضوع متمرکزکنید ـ روی هدف.

ولی، اگر چیزی دربارهٔ مجهول ندانیم، نمی‌توانیم آن را پیداکنیم. چه‌چیزهایی داده شده است؟ـ یـا چه‌چیزهایی را دراختیار داریم؟ـ بعـد از طرح این‌پرسش، به‌خطهایی‌ازشکل توجه می‌کنیم‌که طول آن‌ها رامی‌دانیم، یعنی به‌پاره‌خطهای به‌طول‌های a، b و h (نیمهٔ چپ شکل ۲۹ـb راببینیدـ مربع به‌ضلع a دربالای شکل ومربع به‌ضلع b درپایین آن قراردارد). طرح ذهنی ما دچار تغییر می‌شود، و این تغییر، با پدیدار شدن سه نقطه در سمت راست شکل ۲۹ـb، منعکس می‌شود (آن‌ها را a، b و h نامیده‌ایـم)؛ این



چه‌چیزهایی داده شده است؟

شکل ۲۹ـb. پرسشی آزاد: شکاف چگونه از بین می‌رود؟

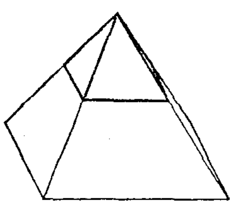
نقطه‌ها، معرف داده‌های مسألـه هستندو بین‌آن‌ها با مجهول، فضایی‌خالی، شکافی، وجود دارد. این جای خالی، موجب پرسشی می‌شود: هدف ما این است که بین‌مجهول V وداده‌های a، h و b رابطه‌ای‌برقرار کنیم- می‌خواهیم شکاف بین آن‌ها را ازبین ببریم.

§۳. اندیشه‌ای وجود دارد

حل مسأله را، با تلاش برای تصور عینی هدف آغاز کردیم و، ازاین راه، به‌سمت مجهول وداده‌ها کشیده شدیم. مرحلهٔ اول کار، معادل است بـا آن‌چه که درشکل‌های ۲۹-a و b، مجسم شده‌است. ولی‌چگونه ادامه‌دهیم، کدام سمت را انتخاب‌کنیم؟

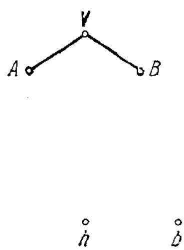
اگر قادر نیستید این مسأله را حل کنید، سعی کنید مسألهٔ ساده‌تری‌که به‌آن نزدیك باشد، پیدا کنید.

درحالت مورد نظرمـا، لازم نیست خیلی دور برویم. دوباره ببینیم، مجهول کدام است؟- حجم هرم ناقص. این، چه نوع شکلی از هندسه‌است؟ چگونه به‌دست می‌آید؟- به‌عنوان بخشی از یك هـرم کامل. کدام بخش؟- بخشی‌که بین... لزومی ندارد ادامه دهیم، تا همین‌جا کافی است: تعریف را به‌صورت دیگری تنظیم می‌کنیم. هرم‌ناقص، به‌بخشی ازهرم کامل گفته‌می‌شود که بعدازحذف هرم‌کوچکی‌که با رسم صفحه‌ای موازی قاعده به‌دست‌می‌آید، باقی بماند. درحالت‌ما (شکل ۲۹-c)، قاعدهٔ هرم‌بزرگ (هرم‌کامل)، عبارت است از مربعی به‌مساحت b^2. اگرحجم این دو هرم را- که به‌ترتیب آن‌ها



مسألهٔ خویشاوند مناسب

$$V = B - A$$



شکل ۲۹-c. اگر نمی‌توانید مسأله را حل‌کنید، دربارهٔ ...

را به B و A نشان می‌دهیم- می‌دانستیم، آن‌وقت می‌توانستیم حجم Vهرم ناقص را پیدا کنیم:

$$V=B-A$$

می‌کوشیم تا حجم‌های B و A را پیدا کنیم- و این همان اندیشهٔ ماست!

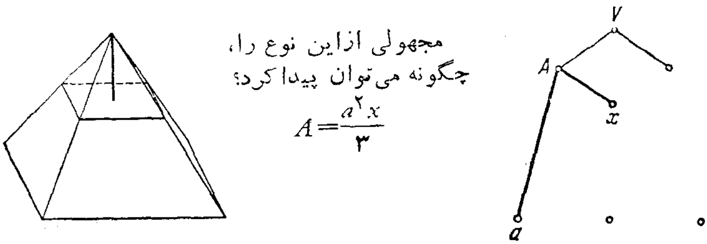
به‌این ترتیب، مسألهٔ نخستین خود دربارهٔ پیدا کردن حجم V را، به‌دو مسألهٔ خویشاوند کمکی آن، یعنی به‌پیدا کردن A و B، منجر کردیم. برای این‌که این روند را روی نمودار نشان دهیم، درجای آزاد بین‌داده‌های a، h، b ومجهول V، دونقطهٔ جدید را قرار می‌دهیم ونام آن‌ها را A و B می‌گذاریم. A و B را با خط‌های مایلی به V وصل می‌کنیم تا وجود رابطهٔ بین سه‌مقدار مجهول را نشان دهند؛ با حرکت از A و B، می‌توان به‌حجم V رسید؛ مسألهٔ مربوط به‌پیدا کردن حجم V منجر به‌حل دومسألهٔ مربوط به‌پیدا کردن A و B می‌شود.

هنوز کار ما تمام نشده است؛ باید دومجهول A و B را پیدا کنیم؛ روی شکل ۲۹-c، دونقطهٔ بالاترA و B، با فاصله‌ای (جایی خالی)، ازنقطه‌های a، h، b جداشده‌اند؛ ولی ظاهراً، درموقعیتی‌ناامیدکننده نیستیم؛ هرم کامل را، به‌عنوان یک شکل هندسی، خیلی بهتر از هرم ناقص می‌شناسیم و، با وجودی‌که به‌جای یک‌مجهول V، دومجهول A و B ظاهرشده است،هردوی آن‌ها از یک طبیعت‌اند و، به‌ترتیب، نسبت به داده‌های a و b، ارتباطی یکسان دارند. در نتیجه، تصور نموداری طرح ذهنی ما، درشکل ۲۹-c، شکلی متقارن به خود می‌گیرد. خط VA به‌سمت یکی از مقدارهای معلوم، یعنی a، وخط VB به‌سمت مقدار دیگر b تمایل دارد. دست به‌کار می‌شویم تا شکاف بین مجهول وداده‌ها را ازمیان برداریم؛ هنوز بخشی از این شکاف باقی مانده است.

§۴. تکامل اندیشه

اکنون در چه مرحله‌ای از راه‌حل قرارگرفته‌ایم؟ به‌دنبال چه‌چیزی

هستیم؟ـ می‌خواهیم مجهول‌های A و B را پیداکنیم. مجهول A چیست؟ـ حجم هرم. این موضوع را چگونه می‌توان پیدا کرد؟ مجهولی از این نوع را، چگونه می‌توان پیداکرد؟ چه داده‌هایی لازم است تا این مجهول را



شکل ۲۹-d. نخستین رابطه با داده‌ها برقرار شد، ولی انتهاهای آزاد، در هوا معلق‌اند

به‌دست آوریم؟ـ حجم هرم را وقتی می‌توان به‌دست آورد که دومقدارمعلوم باشد: مساحت قاعده و ارتفاع هرم؛ حجم هرم، برابر است باحاصل‌ضرب این دومقدار، بخش بر۳. ارتفاع هرم‌معلوم نیست، ولی می‌توان در جست‌وجوی آن بود. آن را x می‌نامیم. دراین صورت

$$A=\frac{a^2x}{3}$$

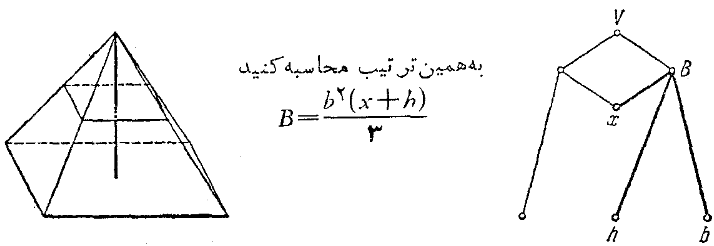
روی نیمهٔ چپ ۲۹-d، هرم‌کوچك، که روی هرم ناقص قرار دارد، به‌طور کامل مشخص وارتفاع x ویال a ازآن نشان داده شده است. مرحلهٔ‌کنونی کار ما، در نیمهٔ راست شکل ۲۹-d دیده می‌شود؛ نقطهٔ جدید x، در بالای مقدارهای مفروض ظاهر شده وخطهای مایلی، A را به x و به a وصل کرده‌اند. خطهای اخیرنشان می‌دهندکه از x و a می‌توان به A رسید، یعنی A می‌تواند برحسب x و a بیان شود. با وجودی که هنوز، دو مجهول به‌جای خود باقی مانده‌اند (در سمت راست شکل ۲۹-d، هنوز انتهاهای آزاد، معلق‌اند)، نوعی پیشرفت داشته‌ایم. دست‌کم توانسته‌ایم مجهول V را با یکی از داده‌ها، یعنی a، مربوط‌کنیم.

گام بعدی، روشن است. مجهول‌های A و B، طبیعتی یکسان دارند (روی شکل ۲۹-c، دریك ارتفاع قرارگرفته‌اند)؛ برای حجم A عبارتی

برحسب قاعده وارتفاع پیداکردیم، به‌همین ترتیب، حجم B را هم، می‌توان نشان داد:

$$B=\frac{b^{2}(x+h)}{۳}$$

در نیمهٔ چپ شکل ۲۹-e، هرم کامل را، که هرم ناقص مـا قسمتی ازآن را تشکیل می‌دهد، روشن‌تـر نشان داده‌ایم و ارتفاع $x+h$ و یال b ازآن را مشخص کرده‌ایم. درنیمهٔ راست شکل ۲۹-e، سه‌خط مایل دیگر ظاهرشده‌اند



شکل ۲۹-e. اکنون، تنها یك انتها درهوا معلق است.

که B را به b، h و x وصل می‌کنند. این مایل‌ها نشان می‌دهندکه باحرکت از b، h و x، می‌توان به B رسید، یعنی B را می‌توان برحسب b، h و x بیان‌کرد. به‌این ترتیب، تنها یك نقطهٔ معلق باقی مانده‌کـه هنوز با داده‌ها مربوط نشده است ــ نقطهٔ x. دیگر، فضای خالی تنگ‌تر شده است: تنهابین x و داده‌ها، فضای خالی وجود دارد.

چه مجهولی باقی مانده است؟ ــ طـول پاره‌خـط x. این مجهول را چگونه می‌توان پیدا کرد؟ موضوعی از این نوع، چگونه به‌دست می‌آید؟

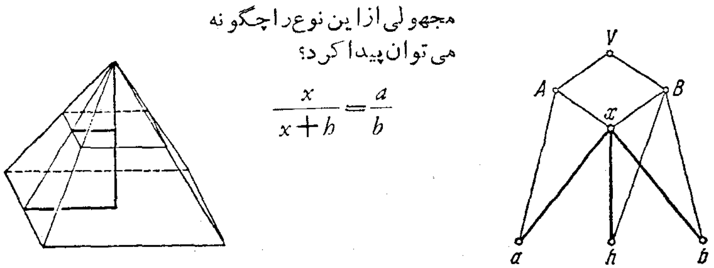
ساده‌تر از همه، می‌توان طول پاره‌خط را ازمثلث (واگرممکن باشد، قائم‌الزاویه)، یـا براساس تشابه دو مثلث، به‌دست آورد. روی شکل مـا، مثلث مناسبی وجود ندارد؛ به‌خصوص‌که ما می‌خواهیم پاره‌خط x، یکی از ضلع‌هـای آن باشد. چنین مثلثی می‌تواند روی صفحه‌ای باشدکه از ارتفاع

هرم کوچکتر به‌حجم A بگذرد؛ در این صورت، ایـن صفحه از ارتفاع هـرم بزرگتر به‌حجم B هم، که با هرم کوچکتر متشابه است، می‌گذرد. بله، مـا به‌چنان مثلث‌های متشابهی نیاز داریم که برصفحه‌ای کـه از ارتفاع،موازی یکی از ضلع‌های معلوم قاعدهٔ یکی از دوهرم می‌گذرد، واقـع باشند. ولی، آیا واقعاً، این همان چیزی است که به‌دنبالش بودیم؟

درشکل ۲۹-f، دومثلث متشابه دیده می‌شود، که از آن‌ها، مقدار x به‌دست می‌آید:

$$\frac{x}{x+h}=\frac{\frac{a}{۲}}{\frac{b}{۲}}=\frac{a}{b}$$

با وجود این، لازم نیست، دراین‌جا، جلوتر برویم. تنها این مطلب برای ما مهم است که x را می‌تـوان، برحسب مقدارهـای معلوم a، h و b محاسبه کرد. درنیمهٔ راست شکل ۲۹-f، سه‌خط مایـل دیگرظاهرشده‌اند، کـه x را به a، h و b وصـل کرده‌اند وموقعیت اخیـررا، به‌صورت نموداری، نشان می‌دهند.



شکل ۲۹-f. موفق شدیم شکاف را از میان برداریم.

کار به پایان رسید. توانستیم شکاف موجـود را، به‌کمك مقدارهـای بینابینی A، B و x (مجهول‌های کمکی)، برداریم وبین مجهول Vوداده‌های

a، h و b، رابطهٔ پیوسته‌ای برقرار کنیم.

§۵، تنظیم راه‌حل

آیا مسأله، به‌طور کامل، حل شد؟ هنوز نه! می‌خواستیم حجم V هرم ناقص را برحسب داده‌های a، h و b بیان کنیم و، هنوز، به‌این منظور نرسیده‌ایم. با وجود این، بخش بزرگتر کاررا پشت‌سر گذاشته‌ایم، تنها بخش ساده و کاملاً عادی آن، باقی مانده است.

درآغاز کار، تاحدی، وضع ما مبهم بود. در هرمرحلهٔ تازه، امیدوار بودیم که گام بعدی ما را به‌هدف برساند و شکاف بین مجهول وداده‌ها را پر کند. امید ما، این بود، ولی اطمینان کامل نداشتیم؛ در هرمرحله، ناچار بودیم، گام بعدی را (بدون این که اطمینان به‌موفقیت داشته باشیم) کشف کنیم. ولی حالا دیگر، نگرانی نداریم، ناباوری وتردید ازمیان رفته است؛ ما به‌روشنی می‌بینیم که می‌توانیم، با حرکت از داده‌های a، h و b ودنبال کردن رشتهٔ ارتباطهای پیوسته‌ای که روی‌شکل ۲۹-f نشان داده شده‌است، به‌مقدار مجهول V برسیم.

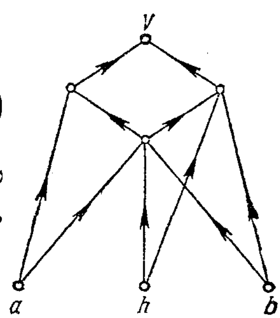
قسمت دوم کارخود را، ازهمان‌جا که قطع کرده‌ایم، آغاز می‌کنیم. قبل ازهمه، به‌مقدار مجهول x بپردازیم؛ ازآخرین برابری §۴، به‌دست می‌آید:

$$x=\frac{ah}{b-a}$$

(یعنی $x+h=\dfrac{bh}{b-a}$). سپس، این مقدار x را، دربرابری‌های قبلی §۴ قرارمی‌دهیم وبه‌دست می‌آوریم:

$$A=\frac{a^{۳}h}{۳(b-a)}\ ,\quad B=\frac{b^{۳}h}{۳(b-a)}$$

(وچقدر شباهت این دونتیجه، جالب است!) بالاخره، با استفاده از برابری آغاز §۳، داریم:



شکل ۲۹-g. از داده‌ها به‌سمت مجهول، حرکت می‌کنیم.

$$V=B-A=\frac{b^{3}-a^{3}}{b-a}\cdot\frac{h}{3}=\frac{a^{2}+ab+b^{2}}{3}\cdot h$$

و این همان، بیان مجهول است.

همهٔ کارهایی که دراین بند انجام دادیم، به‌صورت نمادی، درشکل ۲۹ـg نشان داده شده است. هرخط ارتباط در این شکل، با پیکانی همراه است که جهت استفادهٔ از ارتباط را نشان می‌دهد. از داده‌های a، h وb آغاز کردیم، از مجهول‌های کمکی x، A و B عبورکردیم و به‌مجهول اولیهٔ‌اصلی V رسیدیم و، درنتیجه، مقدارآن را برحسب داده‌ها پیداکردیم.

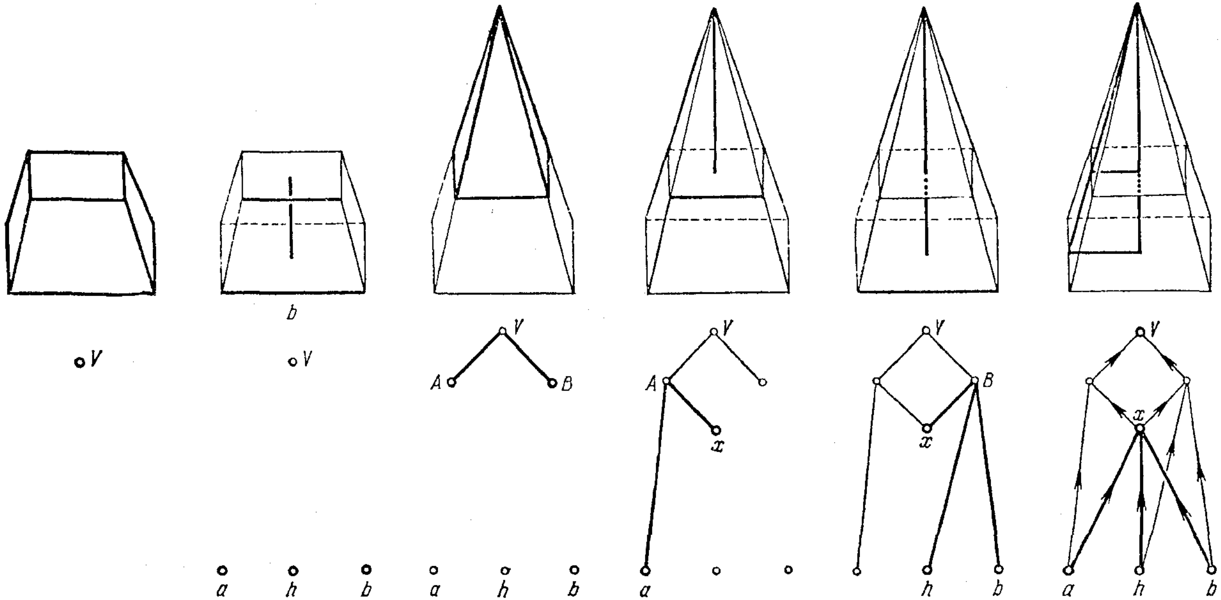
§۶. فیلم آهسته

روی شکل‌های ۲۹ـa تا ۲۹ـg، مرحله‌های متوالی حل مسأله‌داده شده است؛ ازاین هفت شکل جداگانه، یك تصویرکلی درست می‌کنیم(شکل ۳۰) [شکل ۲۹ـf با شکل ۲۹ـg یکی شده است. شکل ۳۰، با رنگ‌های قرمزوسیاه، درابتدا وانتهای کتاب داده شده است؛ عنصرهایی از شکل که باید روی آن‌ها توجه‌کرد، با رنگ قرمز رسم شده‌اند. آخر، هرچیزی که با رنگ قرمزچاپ شده باشد، جلب توجه می‌کند].

به‌شکل ۳۰، ازچپ به‌راست توجه کنید. اگربه‌سرعت روی شکل ۳۰ حرکت‌کنیم، مثل این است‌که فیلم مسیر راه‌حل مسأله را می‌بینیم. و اگر حرکتی آهسته داشته باشیم، مثل این است‌که فیلم را آهسته کرده‌ایم تا بتوانیم جنبه‌های مهم‌آن را با دقت بررسی‌کنیم.

روی شکل ۳۰، هرمرحلهٔ حل (هرتصور ذهنی حل‌کنندهٔ مسأله)، به‌چهار صورت داده شده است. قسمت‌هایی از شکل، که به‌یك تصور ذهنی مربوط می‌شوند، به‌طور قائم طوری پشت سرهم قرارگرفته‌اندکه می‌توان درچهار سطح مختلف، هرکدام را روی یك مسیرافقی دنبال‌کرد.

درمهم‌ترین آن‌ها، روی سطح تصویرهای هندسی، تکامل تدریجی شکل هندسی را درذهن حل‌کننده می‌بینیم. در هرمرحلهٔ حل، نقشی ازشکل هندسی مورد بررسی در ذهن او پدید می‌آید واین نقش، ضمن عبوربه‌مرحلهٔ



$$\frac{x}{x+h}=\frac{a}{b}$$

طرح واقعی حرکت ازداده‌ها به‌مجهول

$$B=\frac{b^{2}(x+h)}{3}$$

به همین ترتیب محاسبه کنید

$$A=\frac{a^{2}x}{3}$$

مقداری از این نوع را، چگونه می‌توان محاسبه کرد؟

$$V=B-A$$

مسألهٔ مناسب خویشاوند

چه داده شده است؟

چه خواسته‌شده‌است؟

شکل ۳۰. حرکت همزمان روی چهارسطح

بعدی، تغییرمی‌کند؛ ضمناً، بعضی ازاجزاء به‌عقب می‌روند وتوجه به‌اجزاء دیگری جلب می‌شود وبعضی اجزاء تازه هم، پدیدار می‌شوند.

اگر یک پله پایین بیاییم، به‌سطح بستگی‌ها می‌رسیم. ضمن تصور نموداری حل، عنصرهای مسأله (مجهول، داده‌ها، مجهول‌های کمکی)، به‌طور نمادی، به‌وسیلهٔ نقطه‌ها ورابطه‌هایی‌که این عنصرها را به‌هم مربوط می‌کنند، به وسیلهٔ خطهای پیوند دهندهٔ این نقطه‌ها، نشان داده شده است.

بلافاصله زیرسطح رابطه‌ها، سطح محاسبه‌ها قراردارد، که به‌صورت فرمول‌هایی‌که مشخص شده‌اند؛ به‌مفهومی، این سطح را، می‌توان درمقابل سطح رابطه‌ها قرارداد: درسطح رابطه‌ها، مجموعهٔ همهٔ بستگی‌هایی را که تا لحظهٔ مورد بررسی پیداکرده‌ایم، تثبیت می‌کنیم؛ آخرین رابطه، ازاین رابطه‌ها، را مشخص‌کرده‌ایم (با رنگ یا با خط کلفت‌تر؛ والبته، در مرکز توجه ما قرار دارد)، ولی نسبت به‌رابطه‌های قبلی، تفصیل بیشتری ندارد. درسطح محاسبه‌ها، درهرمرحله ازحل، تنهافرمول آخر، به‌طورکامل،نوشته شده است و از فرمول‌های قبلی خبری نیست.

اگریك پلهٔ دیگر پایین بیاییم، به سطح اکتشافی می‌رسیم که، برای ما، ازهمه مهم‌تراست. درهرمرحله ازاین سطح، پرسشی ساده وطبیعی طرح (که در هر مسألهٔ دیگری هم می‌تواند طرح شود) ویا، متناسب با پیشرفت این مرحله، توصیه‌ای شده است. مطالعهٔ طبیعت این پرسش‌ها یا توصیه‌ها، هدف اصلی ما را تشکیل می‌دهد.

§۷. مختصری دربارهٔ آینده

می‌خواهیم دوباره به‌عقب برگردیم وشکل ۳۰ را، ازنظر سازگاری با آن‌چه قبلاً تجربه‌کرده‌ایم، مورد مطالعه قراردهیم. این شکل، می‌تواند پیامی برای ماداشته باشد. می‌خواهیم جنبه‌هایی ازاین پیام‌را،که درمضمون آن وجود دارد و ازنظرجست وجوی روش‌های کلی مفید است، جداکنیم تا بتوانیم از آن‌ها، برای بررسی‌های آیندهٔ خود استفاده کنیم. در روایت نموداری که تنها به‌حل یک مسأله اختصاص داشت، به‌اشاره‌های مفیدی

دربارهٔ موضوع‌های کلی برمی‌خوریم که، درفصل‌های آینده، به‌آن‌ها خواهیم پرداخت. دراین‌جا، می‌خواهیم، این فصل را، به‌سرعت وپشت سرهم، از نظر بگذرانیم.

[هریك ازبندهای بعدی این فصل، طرحی‌مقدماتی ازیکی ازفصل‌های آینده است؛ عنوان هریك از این بندها، وحتی‌شمارهٔ آن‌ها، با فصل مربوطه تطبیق می‌کند.]

اکنون، سعی می‌کنیم به‌درون مثال خاصی که داشتیم نفوذکنیم و اندیشه‌های کلی موجود درآن را، بیرون بکشیم.

§۸. طرح و برنامه

اگرمرحله‌های متوالی شکل ۳۰ را از نظربگذرانیم، متوجه‌می‌شویم که، چگونه دقت حل‌کنندهٔ مسأله به‌مطالعهٔ شکل جلب می‌شود، چگونه بیشتر و بیشتر براجزای آن تسلط پیدا می‌کند وچگونه گام به گام دستگاه رابطه‌هایی را می‌سازدکه، درواقع، طرح راه‌حل اورا تشکیل می‌دهد. اگربا دقت، به‌این راه‌حل بازشده وتفصیلی بنگریم، می‌توانیم چند سمت درآن تشخیص دهیم.

قبلاً هم به‌تباین بین دوبخش راه‌حل اشاره‌کرده‌ایم (§۵ را ببینید): دربخش اول (که روی شکل‌های ۲۹-a تا ۲۹-f منعکس‌شده است) به‌سمت پایین، ازمجهول به‌داده‌ها، حرکت‌کردیم؛ ودربخش دوم (که درشکل۲۹-g منعکس شده است)، به‌سمت بالا و از داده‌ها به‌طرف مجهول، رفتیم.

ولی درهمان بخش اول هم، می‌توانیم دومرحله تشخیص دهیم. در مرحلهٔ اول (شکل‌های ۲۹-a و ۲۹-b را ببینید)، نیروی عمدهٔ حل‌کننده، دراین جهت متمرکز بود که مسأله را درك‌کند. درمرحلهٔ دوم یا مرحلهٔ نتیجه‌گیری (شکل‌های ۲۹-c تا ۲۹-f راببینید)، دستگاه بستگی‌های‌منطقی راگسترش می‌دهد و طرح راه‌حل را می‌ریزد.

مرحلهٔ اخیر، یعنی مرحلهٔ ریختن طرح، مهم‌ترین بخش کار است، که ماآن را مفصل‌تر در فصل هشتم، بررسی خواهیم‌کرد.

۹§. مسأله‌هایی، درون مسأله

اگر به ۸§ برگردیم، متوجه می‌شویم که برای حل مسألهٔ نخستین (مسألهٔ اصلی)، به‌یك رشته مسأله‌های کمکی (یا «فرعی») برخوردکردیم. مثلاً، برای محاسبهٔ حجم هرم ناقص، لازم شد حجم هرم کامل، سپس، حجم هرم کامل دیگری و بالاخره، طول یك پاره‌خط را پیداکنیم. برای این‌که به‌مجهول اصلی V برسیم، ناچار بودیم از مجهول‌های کمکی A، B و x عبورکنیم. تجربهٔ مختصری درحل مسأله‌های ریاضی، هرکسی را قانع می‌کندکه این وضع، کم وبیش، در همه‌جا عمومی است (مثلاً، فصل دوم، ۵§، °۳ را ببینید).

ما به‌تفصیل، نقش مسأله‌های کمکی را مطالعه و نوع‌های مختلف آن‌ها را، طبقه‌بندی خواهیم کرد.

۱۰§. پیدایش اندیشه

کدام یك ازگام‌های حل، که روی شکل ۳۰ نشان داده شده است، مهم‌تراست؟ البته، پیدایش هرم‌های کامل. با تجربه‌ای که‌دراین کارها دارم،و با توجه به‌موردهای مشابه، این‌طور فکرمی‌کنم و گمان می‌کنم که بیشتر افراد هم با من هم‌عقیده باشند. واردکردن هرم‌های کامل وتصور هرم ناقص به‌عنوان تفاضل دو هرم کامل، عمده‌ترین [1] اندیشهٔ حل این مسأله است؛ بقیهٔ کارها درحل مسأله، برای بسیاری، ساده‌تر، روشن‌تر و عادی‌تر است، و برای ریاضی‌دانان با تجربه، اصولاً کار به‌حساب نمی‌آید.

پیدایش اندیشهٔ اصلی، درمسألهٔ مورد بحث ما، تأثیرچندان عمیقی ندارد؛ ولی‌ضمناً، نباید این مطلب رافراموش‌کردکه، دراین مورد، بامسألهٔ ساده‌ای سروکار داشتیم. درحالت کلی، پیدایش اندیشه‌ای تازه، به‌منزلهٔ پرتوی ناگهانی است که بعد از دورانی طولانی از هیجان‌ها و تردیدها، بر مسأله می‌افتد و، درنتیجه، می‌تواند تأثیری زیاد داشته باشد؛ این، تأثر واضطرابی پرشکوه است‌که خواننده نباید ازآن غافل باشد.

§۱۱. کار ذهنی

مشخص‌ترین نشانهٔ پیشرفت درحل مسأله، پیدایش عنصرهای تازه و تازه‌تر، درنمایش نموداری راه‌حل‌است (شکل ۳۰ را ببینید). هرچه‌حل‌کنندهٔ مسأله، با موفقیت بیشتری به‌جلو برود، خط‌های تازه وتازه‌تری درشکل هندسی و در نمایش نموداری رابطه‌ها، پدیدار می‌شود. هرچه بغرنجی‌شکل بیشترشود، تکامل ساختمان‌های ذهنی حل‌کننده را بیشتر احساس می‌کنیم. او، با هر گام تازه ومهمی که برمی‌دارد،آگاهی‌های تازه‌ای را به‌کارمی گیرد؛ با مطالعهٔ شکل درمی‌یابدکه ازچه ترکیب آشنایی، یا چه قضیهٔ معلومی می‌تواند استفاده‌کند. بنابراین،کارذهنی حل‌کننده را می‌توان به‌مثابهٔ‌نیرویی دانست‌که به‌تجربه‌های قبلی‌جان تازه‌ای می‌بخشد، بین‌این تجربه‌ها ومسألهٔ مورد بررسی، ایجاد ارتباط می‌کند و نقشی بسیج‌کننده و تنظیم‌کننده برای کار دارد.

دراین مورد، قبلاً هم اشاره‌هایی داشته‌ایم (به‌خصوص درتمرین ۸۳ فصل دوم)؛ درآینده هم،مفصل‌تربه‌این موضوع می‌پردازیم وروی‌جنبه‌های دیگری ازکار ذهنی ـ که برای حل مسأله‌ها مفیدند ـ توجه بیشتری می‌کنیم.

§۱۲. نظام ذهن

شکل ۳۰، که پیشرفت حل مسأله را در چهار سطح روشن می‌کند، تصوری دربارهٔ کار حل‌کننده، به‌ما می‌دهد. البته، ما علاقه‌مندیم بدانیم، او چگونه کارکرده است، ولی بیشتر ازآن به‌این مطلب علاقه‌مندیم که چگونه بایدکارکند. آیا می‌توان، دراین باره،آگاهی‌هایی از شکل ۳۰ به‌دست‌آورد؟

پایین‌ترین سطح درشکل ۳۰، شامل یك رشته پرسش‌ها وتوصیه‌هاست که معرف گام‌های متوالی حل مسأله می‌باشند. این پرسش‌ها و توصیه‌ها، ساده و طبیعی هستند و خصلتی عمومی دارند؛ این‌ها، تلاش حل‌کننده را، برای حل مسألهٔ ساده‌ای‌که به‌عنوان مثال انتخاب کردیم، جهت می‌دادند ولی، درعین‌حال، می‌توانند برای مجموعهٔ بزرگی از مسأله‌های دیگرهم، مورد استفاده قرارگیرند. اگربتوان دربارهٔ نظام ذهن صحبت کرد (که هستهٔ

مرکزی نظام‌ها یا قانون‌هایی است که درمسیر رسیدن به‌روشی عام و جهانی قراردارند، روشی که دکارت و لایب‌نیتس برای دست یافتن به‌آن تلاش می‌کردند)، امید زیادی وجود داردکه پرسش‌ها وتوصیه‌هایی که درپایین‌ترین سطرشکل ۳۰ آمده است (سطری که، برای شکل ۳۰، جدی‌ترین اهمیت را دارد)، نوعی بستگی با این نظام داشته باشند؛ و ما درآینده، به تفصیل در این باره بحث خواهیم کرد.

تمرین‌ها و یادداشت‌های تکمیلی

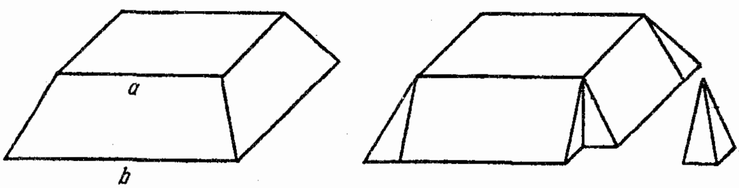
۱. شیوهٔ دیگری برای مسألهٔ ۲§. فرض می‌کنیم، قاعدهٔ هرم ناقص، برصفحهٔ افقی (روی میز) قرارگرفته باشد. آن را، به‌وسیلهٔ چهار صفحهٔ قائمی که از چهارضلع قاعدهٔ بالا می‌گذرند، به ۹ چندوجهی تقسیم می‌کنیم (شکل ۳۱-a):

منشوری با قاعدهٔ مربعی، به‌حجم Q؛

چهار منشور مثلث‌القاعده، با حجم هریك برابر T؛

چهارهرم مربع‌القاعده، با حجم هریك برابر P.

حجم V را، بااستفاده ازشیوهٔ جدید وبا تکیه برشکل ۳۱-b، محاسبه کنید.



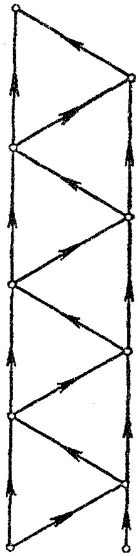
شکل ۳۱-a. به‌کمك چهارصفحهٔ قائم...

۲. دو راه‌حل مسألهٔ ۳° و ۴° از ۵§ فصل دوم را، به‌صورت نموداری، نشان دهید (یادآوری می‌کنیم که‌بایدمقدارهای موجود درشرط‌را به‌وسیلهٔ نقطه وبستگی بین آن‌ها را، با خط نشان داد).

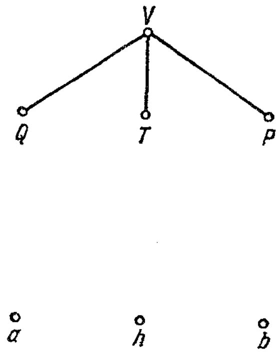
۳. نموداری که درشکل ۳۲ آمده است، می‌تواند درارتباط با یك مسألهٔ

تاریخی مورد تفسیر قرارگیرد. آیا می‌توانید کشف کنیدکه صحبت برسر چیست؟

۴. در جست وجوی اثبات. حکم ۴ ازکتاب XI «مقدمات» اقلیدس را، می‌توان این‌طور بیان کرد:



شکل ۳۲. شما باید آن را بشناسید.

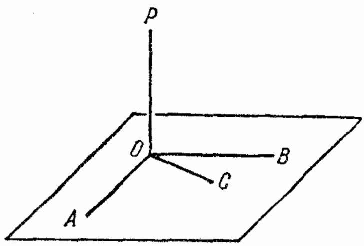


شکل ۳۱-b. شیوه‌ای دیگر

اگر خط راستی، ازنقطهٔ برخورد دوخط راست مفروض بگذردوبرهردوی آن‌ها عمود باشد، آن وقت، برهر خط راست دیگری هم که برصفحهٔ خطهای راست مفروض قرارگیرد و از نقطهٔ برخورد آن‌ها بگذرد، عمود خواهد بود.

می‌خواهیم اثبات این‌حکم را تجزیه وتحلیل کنیم، ساختارآن رابه‌طور عینی نشان دهیم و به «اهرم‌های محرك» آن پی‌ببریم؛ ضمناً می‌خواهیم از نمایش هندسی روند راه‌حل- به‌نحوی که دراین فصل مطرح کرده‌ایم- استفاده‌کنیم. با توجه به‌شباهتی که، دراین‌جا، با طرح شکل‌های ۲۹-a تا ۲۹-g وشکل ۳۰ داریم، بحث را، به‌صورتی فشرده، انجام می‌دهیم.

بیش از همه، به‌روند ذهنی شکل‌گیری اثبات، علاقه‌مندیم. ولی، از خود مضمون حکم مورد نظرهم نباید غافل باشیم، چراکه این حکم، یکی از مهم‌ترین حقیقت‌های موجود در هندسهٔ فضایی است. حتی شکل



شکل ۳۳. دو شاگرد بد، تمامی کلاس را خراب می‌کنند.

منطقی که برای تنظیم حکم مورد استفاده قرارگرفته است، می‌تواند تاحد زیادی، برای ما جالب باشد. احتمالاً ، داوری معلمی که می‌گوید: «با دوشاگرد بد، تمامی کلاس خراب می‌شود»، درست نباشد، ولی شیوه‌ای که برای داوری خود انتخاب کرده است، به‌این حکم اقلیدس (که‌می‌خواهیم آن را ثابت‌کنیم)، بسیار نزدیك‌است.

۱°. حرکت از پایان به‌آغاز. شکل ۳۳را رسم می‌کنیم، علامت‌های لازم رامی‌گذاریم، وبا برشمردن شرط ونتیجه‌گیری آن، صورتی‌مشخص به‌حکم مورد نظرمی‌دهیم.

شرط. سه پاره‌خط راست OA، OB وOC درنقطهٔ O به‌هم رسیده‌اند، روی یك صفحه قراردارند و برهم منطبق نیستند؛ علاوه برآن

$$PO\perp OA, \qquad PO\perp OB$$

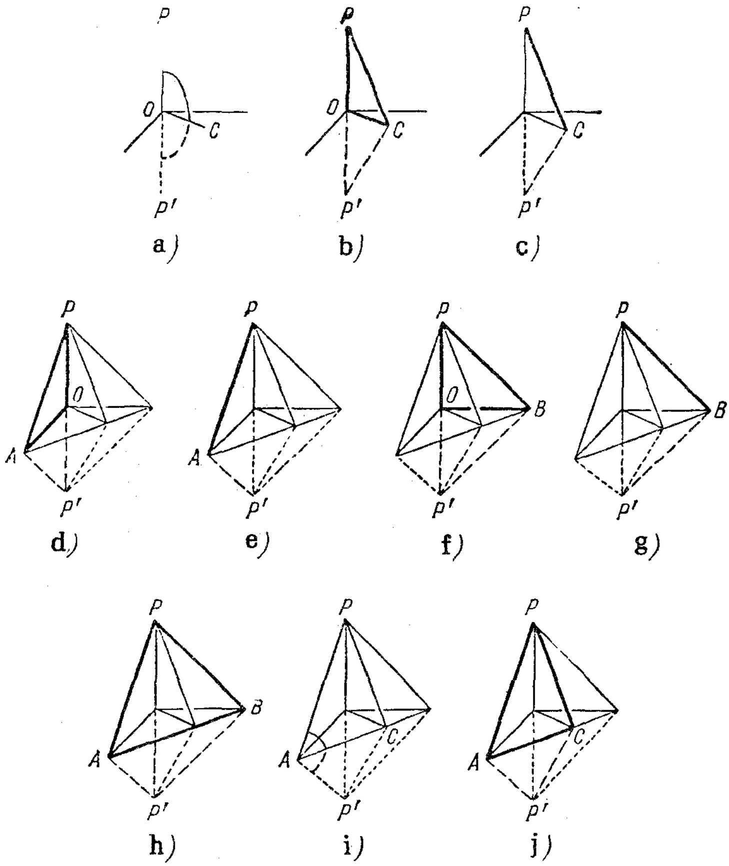
نتیجه:

$$PO\perp OC$$

«نتیجه ازچه تشکیل شده است»؟

نتیجه این است‌که PO بر OC عمود، یعنی زاویهٔ POC قائمه‌است.

«چه‌زاویه‌ای‌قائمه‌نامیده‌می‌شود؟ زاویهٔ قائمه‌چگونه تأمین‌می‌شود»؟ـ به‌زاویه‌ای قائمه گویندکه با زاویهٔ مجانب خود برابر باشد. ممکن‌است، تغییری‌که به‌این ترتیب، در تنظیم نتیجه دادیم، برای ما مفید باشد. پاره‌خط PO را، ازطرف O، تا نقطهٔ P' ادامه می‌دهیم (یعنی، به‌نحوی که نقطه‌های P، O وP' بریك‌خطراست قرارگیرند ونقطهٔ O وصفحه‌ای که‌O روی آن است، بین P و P' واقع باشند). دراین صورت (شکل a-۳۴)، نتیجه را می‌توان چنین نوشت:



شکل ۳۴. تغییر چهرهٔ شکل هندسی

$$\angle POC = \angle P'OC$$

«چرا به‌نظر می‌رسد که این شکل نتیجه، بهتر از شکل قبلی آن‌است»؟ اغلب می‌توانیم، برابری زاویه‌ها را، براساس برابری مثلث‌ها، ثابت کنیم. دراین‌جاهم، می‌توانستیم به‌نتیجهٔ مطلوب‌برسیم، اگرمی‌دانستیم که

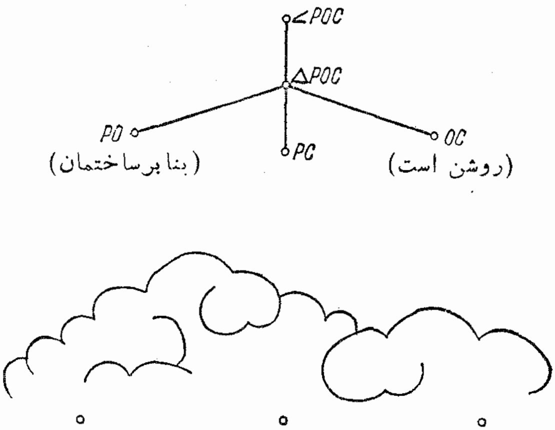
$$\triangle POC = \triangle P'OC$$

(شکل ۳۴-b). برای این‌که، این حکم را ثابت کنیم، فرض می‌کنیم:

$$PO = P'O$$

برای اثبات برابری این دو مثلث، به‌چه چیزی نیازداریم؟ دوزوج ضلع‌های برابررا می‌شناسیم: $PO = P'O$ (طبق ساختمان) و $OC = OC$ (روشن است). برای تکمیل اثبات، کافی است بدانیم (شکل ۳۴-c) که

$$PC = P'C$$



شکل ۳۵-a. از پایان به‌آغاز حرکت می‌کنیم.

تااین‌جا، اثبات را، ازنتیجهٔ مطلوب وحرکت در جهت شرط مفروض، آغازکردیم وتصمیم گرفتیم مسأله را از پایان به‌سمت آغاز طـی‌کنیم و فاصله‌ای راهم پیموده‌ایم، ولی‌ادامهٔ حرکت، که باید مارا به‌شرط‌برساند، هنوز در پردهٔ ابهام است. کار ما، به طور نمادی، درشکل ۳۵-a نشان داده شده است، درآن، به‌کمك نمودار، مشخص شده است‌که چه‌حکم‌هایی ازچه حکم‌های دیگری نتیجه می‌شود، همان‌طورکه در شکل‌های ۲۹-a تـا ۲۹-g و شکل ۳۰ نشان داده شدکـه چـه مقدارهایی، بـه‌کمك چه مقدارهای دیگری محاسبه می‌شوند. درشکل۳۵-a، هریك ازبرابری‌های قبلی، با سمت چپ خود، نشان داده شده‌اند:

$$\angle POC = \angle P'OC \qquad - \angle POC,$$
$$\triangle POC = \triangle P'OC \qquad - \triangle POC$$
$$OC = OC \qquad - OC$$

وغیره. درواقع هم، تنها بخش سمت چپ این برابری‌ها کافی است، زیرا سمت راست را می‌توان با تبدیل P به P' به‌دست آورد، یعنی به کمك عبور از نیم‌فضای واقع در بالای صفحه‌ای که از A، B، C و O گذشته است، به‌نیم فضایی‌که زیراین صفحه قرار دارد.

۲°. تغییر تنظیم مسأله. اکنون‌که مقداری روی نتیجه‌کارکردیم، توجه خود را به‌شرط قضیه‌ای‌که می‌خواهیم ثابت‌کنیم، معطوف می‌داریم. شرط ازچه تشکیل شده است؟

$\circ\angle POC$

$\angle P\overset{\circ}{O}A$ $\qquad$ $A,\overset{\circ}{B},C$ $\qquad$ $\angle P\overset{\circ}{O}B$

واقع بریك خطراست

شکل ۳۵-b. شکاف بین شرط و نتیجه

باید شرط را به‌نحوی تغییر دهیم‌که با تغییری‌که در نتیجه داده‌ایم، سازگار بشود؛ باید شرط را به‌نتیجه نزدیك‌کنیم؛ آن‌ها نباید ازهم دور باشند. ما باید ثابت‌کنیم (نتیجهٔ تغییریافته) که

$$\angle POC = \angle P'OC$$

با این فرض (شرط‌را، به‌صورت مشابهی، تغییر می‌دهیم) که‌داشته‌باشیم:

$$\angle POA = \angle P'OA, \qquad \angle POB = \angle P'OB$$

فرض به‌اندازهٔ کافی رضایت‌بخش است؛ هرسه برابری یکسان هستند و، هرکدام ازآن‌ها، معرف برابری دوزاویه‌است. حالا باید به‌شرط‌تغییریافتهٔ خود، نکته‌ای را اضافه‌کنیم، یعنی این حقیقت‌که سه‌پاره‌خط راست OA، OB و OC برهم‌منطبق نیستند وروی یك‌صفحه قراردارند. علاوه‌براین،

باید به‌نحوی آن را با نتیجه مربوط کرد. ولی چگونه؟

برای این‌که متوجه شویم که نقطه‌های A، B و C را می‌توان بریک خط راست قرار داد واین‌که، چنین وضعی ازآن‌ها، می‌تواند مفید باشد، استعداد کشف و به‌حدسی خوش‌شانس لازم است. (به‌جای این خط‌راست، هرخط راست دیگری را هم، که از O نگذشته باشد و با هیچ‌کدام ازپاره‌خط‌های OA، OB و OC موازی نباشد، می‌توان رسم کرد.) به‌این ترتیب، به‌تنظیم تازه‌ای ازحکم می‌رسیم که باید آن را ثابت کنیم.

شرط. A، B و C را، سه‌نقطهٔ واقع برخط راستی که از O نمی‌گذرد، فرض می‌کنیم. علاوه برآن، فرض می‌کنیم که

$$\angle POA=\angle P'OA, \qquad \angle POB=\angle P'OB$$

نتیجه. درآن صورت $\angle POC=\angle P'OC$

روی شکل ۳۵-b، این حکم به‌صورت نمادی نشان داده شده است.

۳°. ازآغاز به‌سمت پایان حرکت می‌کنیم. ضمن اشتغال به‌شرط، به‌رابطه‌هایی شبیه آن‌چه که، درکار با نتیجه داشتیم، می‌رسیم، منتهی در جهت عکس

چون

طبق فرض	$\angle POA=\angle P'OA$
طبق ساختمان	$PO=P'O$
روشن است	$OA=OA$

بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که

$$\triangle POA=\triangle P'OA$$

(شکل ۳۴ - d را ببینید)، از اینجا نتیجه می‌شود:

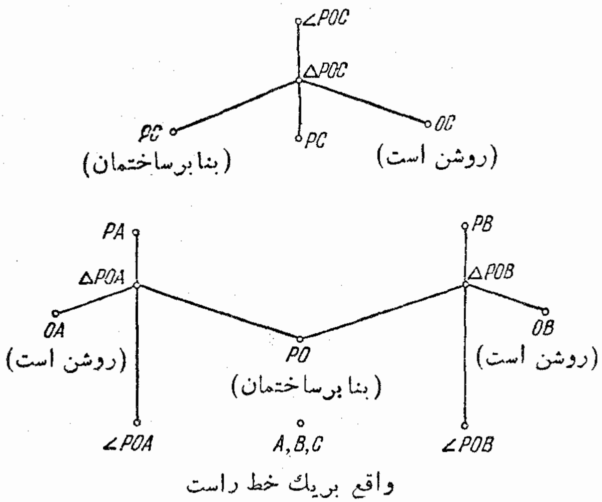
$$PA=P'A$$

(شکل ۳۴ - e را ببینید)، با استدلال مشابهی به‌دست می‌آید

$$PB=P'B$$

(شکل ۳۴-f و g را ببینید).

در بالا، اثبات را ازآغاز به‌طرف پایان، یعنی از شرط به‌سمت نتیجه،



شکل ۳۵—c. از آغاز به‌طرف پایان، حرکت می‌کنیم.

انجام دادیم.

روی شکل ۳۵-c، طرح ذهنی کار و هم آن‌چه که مربوط به شکل ۳۵-a بود، منعکس شده است. همان‌طور که شکل ۳۵-c نشان‌می‌دهد، بر پایهٔ همان استدلال‌های قبلی، یعنی $PA=P'A$ و $PB=P'B$، و ضمناً شرط اضافی اخیر، یعنی بر یك خط راست بودن A، B و C، ثابت کردیم $PC=P'C$. از مقایسهٔ این طرح با طرح شکل‌های ۳۵-a و ۳۵-b، می‌توان امیدوار بود که شکاف باقی مانده را، ازمیان برداریم.

۴°. حرکت ازهردو طرف. ثابت کننده (یا خواننده) خیلی زودبه‌دنبالهٔ اثبات پی‌می‌برد؛ و به‌این ترتیب، نتیجهٔ نهایی، بلافاصله جلو چشم او قرار می‌گیرد. با وجود این، همهٔ جزئیات را می‌نویسیم.

رابطهٔ مجهول

$$PC=P'C$$

را می‌توان براساس‌برابری مثلث‌ها به‌دست‌آورد (این قسمت حل،مربوط به‌حرکت از پایان به‌سمت آغاز است). در واقع، از رابطه‌های قبلی

$$PA = P'A, \qquad PB = P'B$$

وبرابری روشن

$$AB = AB$$

خیلی ساده، برابری مثلث‌های

$$\triangle PAB = \triangle P'AB$$

نتیجه می‌شود (روی شکل ۳۴-h؛ دراین‌جا ازآغاز به‌طرف پایان‌حرکت می‌کنیم). ولی، این هنوزآن دو مثلثی نیست‌که ما احتیاج داریم. برای این‌که برابری $PC = P'C$ رابه‌دست‌آوریم (که اثبات را تمام می‌کند)، می‌توانستیم مثلاً از برابری مثلث‌های

$$\triangle PAC = \triangle P'AC$$

شروع کنیم، که با توجه به‌برابری ثابت شدهٔ

$$PA = P'A$$

درست است (بازهم از پایان به‌سمت آغاز حرکت‌کردیم)، تنها اگرعلاوه بربرابری روشن

$$AC = AC$$

آگاهی اضافی زیررا هم دراختیار داشتیم:

$$\angle PAC = \angle P'AC$$

تااین‌جا، با درنظر گرفتن برابری مثلث‌های PAB و $P'AB$ـ که قبلاً ثابت‌کرده‌ایم‌ـ تنها می‌دانیم که

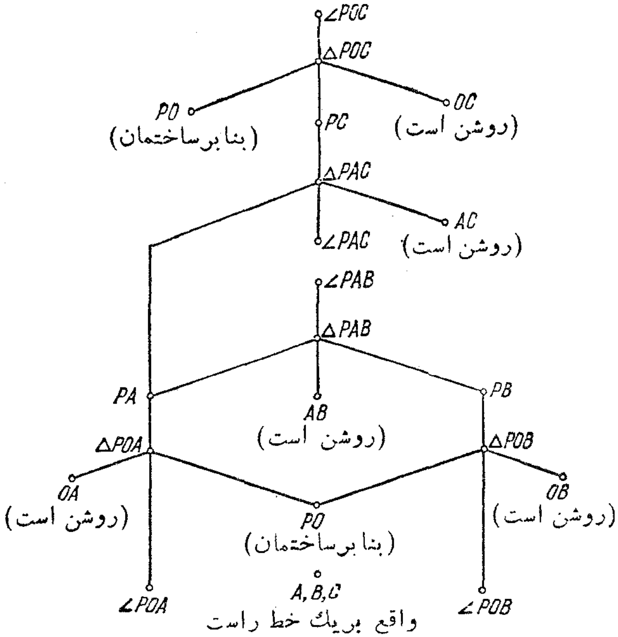
$$\angle PAB = \angle P'AB$$

(شکل ۳۴-i را ببینید).

(شکل ۳۵-d، متناظر است با تصور ذهنی، دراین مرحلهٔ حل). ولی چون، بنابرفرض، نقطه‌های A، B و C روی یك خط راست قراردار ند، بنابراین

$$\angle PAB = \angle PAC \quad \text{و} \quad \angle PAC = \angle P'AC$$

با این‌اشاره، شکاف به‌طورکامل پرمی‌شود (شکل ۳۵-e را ببینید؛ یکبار دیگر، شکل ۳۴ را، درکل خود، از نظربگذرانید).

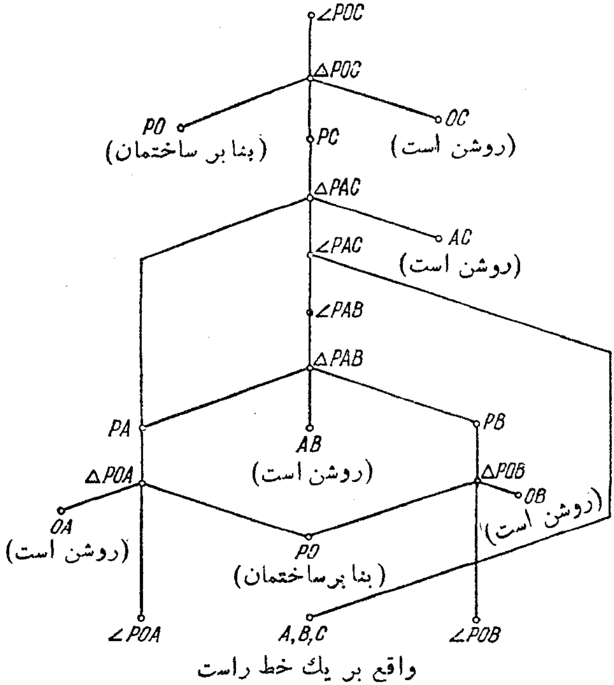


شکل ۳۵-d. از هردوطرف حرکت می‌کنیم.

آخرین گام اثبات ـ عبورازشکل ۳۵-d به شکل ۳۵-e ـ شایان‌توجه بسیار است؛ تنها دراین آخرین گام بودکه از مهم‌ترین جنبهٔ شرطاستفاده کردیم؛ این جنبه حکایت ازآن داشت‌که خطهای راست OA، OB و OC بریك صفحه قراردارند.

۵. نمودارهای ساده‌تر. در§§۲ تا ۶، یك مسألهٔ پیدا کردنی (و درحالت‌ماـ مسأله‌ای دربارهٔ محاسبه) و در تمرین ۴، یك مسألـهٔ اثباتی را مورد مطالعه قراردادیم. درهردو حالت، برای این‌که مسیرراه‌حل وساختارآن را روشن‌کنیم، از نموداری استفاده‌کردیم کـه شامل نقطه‌ها و خطهای ارتباطی بود. ضمن‌مقایسهٔ این دوحالت، می‌خواهیم مفهوم این‌نمودارها را، دقیق‌تر کنیم.

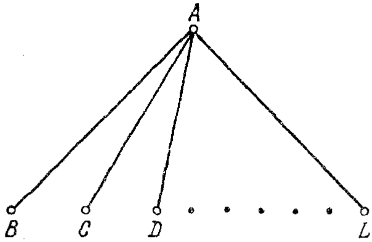
نمودار ساده‌ای، مثل آن‌چه درشکل ۳۶ می‌بینید، درنظر می گیریم. دراین نمودار، $n+1$ نقطه وجود دارد که یکی ازآن‌هـا، نقطهٔ A، در بالاوبقیه، نقطه‌های B، C، ...، L، درزیر قرار گرفته‌اند. نقطه‌ای که‌در



شکل ۳۵-e. آخرین شکاف ازبین می‌رود.

بالای دیگران قرار دارد، به‌هریك از نقطه‌های دیگر، به‌وسیلهٔ پاره‌خطی مربوط شده است. این گونه نمودارهای ساده، در واقع، به‌منزلهٔ «آجرهایی»، هستند که نمودارهایی از نوع شکل‌های ۲۹-a تا g، ۳۰، ۳۵-a تا e را می‌سازند. این ساده‌ترین نمودار، چه چیزی را بیان می‌کند؟

اگر ساده‌ترین نمودار، برای یك مسألهٔ پیداکردنی به‌کار رفته باشد، شبیه شکل‌های ۲۹-a تا g و ۳۰، آن‌وقت نقطه‌های *A*، *B*، *C*، ...، *L* نمایندهٔ کمیت‌ها هستند. (پاره‌خط، طول، حجم)؛ و اگرساده‌ترین نمودار متعلق به یك مسألهٔ اثباتی باشد، شبیه شکل‌های ۳۵-a تا e، آن‌وقت نقطه‌های واقع برآن، نمایندهٔ حکم‌ها هستند. درحالت اول، شکل ۳۶ نشان می‌دهدکه اگر مقدارهای *B*، *C*، ...، *L* معلوم باشند، می‌توان



شکل ۳۶. اگر B، C، D، ....، L در دسترس باشند، A در اختیار ما خواهد بود.

مقدار A را به دست آورد. درحالت دوم، شکل ۳۶ نشان می‌دهد که می‌توان حکم A را از روی حکم‌های B، C، ...، L نتیجه‌گرفت. به‌زبان دیگر، درحالت اول، ساده‌ترین نمودار بیان می‌کند که مقدار A، تابع‌معلومی ازمقدارهای B، C، ...، L است؛ و درحالت دوم- حکم A نتیجه‌ای است از حکم‌های B، C، ...، L. این‌طور هم می‌توان گفت: درحالت اول، ساده‌ترین نمودار، به‌این پرسش پاسخ می‌دهد: «با چه داده‌هایی، می‌توان مقدار A را پیدا کرد»، ودرحالت دوم: «با چه شرطهایی می‌توان حکم A را نتیجه گرفت».

باآن‌چه گفته‌شد، به‌سادگی معلوم می‌شود که‌می‌توان ازاین‌نمودارها، برای روشن کردن مسیر راه‌حل هرمسأله‌ای، از هرنوع که باشد، استفاده کرد. درهرمسألهٔ‌مشخص، نقطه‌های A، B، C، ...، L به‌معنای‌موضوع‌های مفروض یا موضوع‌های قابل دسترس‌اند. شکل ۳۶ نشان می‌دهد که، اگرنقطه‌های B، C، ...، L مفروض باشند، نقطهٔ A قابل دسترس است، یا مجموعهٔ داده‌های B، C، ...، L برای رسیدن به‌نقطهٔ A کافی است. نمودار، به‌این پرسش، پاسخ می‌دهدکه: «اگر بخواهیم به‌نقطهٔ A برسیم، قبلاً چه‌چیزهایی را باید بدانیم».

۶. مسأله‌های دیگر. گفتیم که از نمودار می‌توان برای روشن کردن مسیرراه حل هرمسألهٔ دلخواهی استفاده کرد (تمرین ۵ را ببینید)؛ ولی این کار ممکن است سخت وغیرطبیعی جلوه کند. مسأله‌هایی را پیدا کنید که حل آن‌ها را بتوان، به‌سادگی، با نمودار نشان داد، به‌نحوی که، ضمناً، این نمودار روشن وآموزنده باشد.

فصل هشتم

طرح و برنامه

از آرزو، اندیشهٔ مربوط به امکان‌هایی به وجود می‌آید که، به‌کمك آن‌ها ، تحقیق چیزی را می‌بینیم که با آن چه آرزوی ماست، شباهت دارد؛ و از این اندیشه - به اندیشهٔ پیداکردن امکان‌هایی برای رسیدن به این امکان‌ها، و همین طور تا آخر، و تا آن‌جا پیش‌می‌رویم تا به‌آغازی برسیم‌که در اختیار ما باشد.

ت. هوبس — Leviathaphan

§۱. طرح‌ریزی، به‌مثابه روش حل مسأله

در سخن هوبس،که درسرلوحهٔ این فصل آمده است، باکوتاهی ودقت بی‌مانندی، روش بی‌اندازه‌مهمی طرح شده است‌که روند حل مسأله را معین می‌کند. سعی می‌کنیم، این سخن را عمیق‌تر مورد مطالعه قرار دهیم و، به صورتی همه جانبه، بر این روند و همهٔ حالت‌های متفاوتی‌که درآن به‌کار

می‌رود، مسلط شویم.

دربرابر ما، یك مسأله قرارگرفته است. به زبان دیگر، هدف A رو به‌روی ما است که نمی‌توانیم بلافاصله به‌آن‌دست‌یابیم، ومی‌خواهیم‌شکل مناسبی برای عمل‌ها پیدا کنیم که بتواند ما را به‌این هدف برساند. این هدف می‌تواند به حوزهٔ عمل تعلق داشته باشد یا به حوزهٔ نظریه؛ و ممکن است مربوط به ریاضیات باشد ـ در این حالت، هدف، یك موضوع ریاضی است (عدد، مثلث،...) که باید آن را پیدا کنیم (محاسبه کنیم، بسازیم،...). هدف A هرچه باشد، می‌خواهیم‌آن را به‌دست‌آوریم.

«از تمایل، اندیشهٔ مربوط به‌بعضی امکان‌ها به‌وجود می‌آید»ـ این جمله، به‌خوبی ویژگی ذهن را روشن می‌کند. هدف، ما را به‌فکر وسیله می‌اندازد: معمولاً، بلافاصله بعد از تمایل، به‌فکر کارهای معینی می‌افتیم که برای تحقق این تمایل لازم‌اند. دربارهٔ کالایی‌که لازم دارم فکرمی‌کنم‌و، بلافاصله، به‌یاد مغازه‌ای می‌افتم‌که می‌توان‌این‌کالا را، ازآن‌جا، تهیه‌کرد.

به‌سخن هوبس برگردیم: «از تمایل، اندیشهٔ مربوط به‌بعضی امکان‌ها به‌وجود می‌آید»، که‌آن‌ها را B می‌نامیم و به‌کمك‌آن‌ها می‌توانیم A را به دست آوریم. ممکن است، این اندیشه، سرچشمه‌ای در تجربه‌های قبلی داشته باشد: «به‌این نکته توجه‌کرده‌ایم که B، چیزی شبیه A، که ما به‌آن تمایل داریم، تولید می‌کند». ما، به‌هرحال، فکر می‌کنیم که وقتی A را به دست می‌آوریم که B را در اختیار داشته باشیم. ولی ضمن فکر دربارهٔ B، اندیشهٔ مربوط به‌امکان‌هایی، و مثلاً C، به‌وجود می‌آیدکه، به‌کمك‌آن‌ها، بتوان B را به‌دست‌آورد: اگر C را در اختیار داشتیم، می‌توانستیم B را به‌دست‌آوریم. «وبه‌همین ترتیب، تا آخر» — C را وقتی می‌توانیم به‌دست آوریم که D را داشته باشیم، — « و تا آن جا پیش می‌رویم تا به‌آغازی برسیم‌که در اختیار ما باشد»؛ D را به‌شرطی می‌توانیم به‌دست‌آوریم‌که E را داشته باشیم، — ولی E دراختیار ما است. مسیر اندیشهٔ ما، به E ختم می‌شود، E را در اختیار داریم، E معلوم است.

رشتهٔ‌اندیشهٔ ما، شامل‌چندین «اگر» است: «این،اگرآن»، می‌گوییم:

A، اگر B؛ B، اگر C؛ C، اگر D؛ D، اگر E.

در E متوقف می‌شویم، زیـرا E بدون هیچ بحثی محقق است، بدون اضافه کردن «اگر».

(تقریباً لزومی ندارد یادآوری کنیم که تعداد «اگرها» یعنی تعداد گام‌های بینابینی، نقشی بـه‌عهـده نـدارد؛ در مثال ما، چهـار گام و پنج «هدف» یا «موضوع» وجود دارد، و درحالت کلی، می‌توان از n گام و $n+1$ موضوع صحبت کرد.)

به ایـن ترتیب، آن چـه را که هم اکنون دربارهٔ آن صحبت کردیم، می‌توان تنظیم طرح نامید. البته، به‌دنبال آن، باید به فکر تحقق طرح بود. از E آغاز می‌کنیم، «آغازی کـه در اختیـار ما است»، و D را بـه دست می‌آوریم، با پیدا کردن D باید به C برسیم ـ بعد به B و، سرانجام، به‌هدف مورد نظر خود A.

یادآوری می‌کنیم که، تنظیم طرح و تحقق آن، در دو جهت مخالف هم قرار دارند. تنظیم طرح را از (هدف، مجهول، نتیجه) آغاز کردیم و آن را در E (موضوع‌های مفروض، داده‌ها، شرط) به‌پایان رساندیم؛ ولی برای عملی کردن طرح، برعکس، از E به‌سمت A حرکت کردیم. به این ترتیب، درابتدا، دربارهٔ A، یعنی دربارهٔ هدف خود، اندیشیدیم و، سرآخر، به‌همان A دست یافتیم. اگرحرکت به‌سمت هدف را، حرکت درجهت مستقیم درنظر بگیریم، می‌توان گفت که، برای تنظیم طرح، باید در جهت معکوس حرکت کنیم. بنابراین، روش مهمی را که هوبس برای حل مسأله شرح داده است، می‌تـوان تنظیم طرح در جهت معکوس و یا حرکت از پایان به آغاز نامید؛ هندسه‌دانان یونـانی، این روش را «تجزیه» می‌نامیدند کـه به‌مفهوم «حل، از پایان بـه آغاز» است. اگر در جهت عکس، یعنی از موضوع‌هایی که در اختیار داریم به طرف هدف، حرکت کنیم (در حالت ما، از E به A)، روش حل را (که درمقابل روش قبلی قرار دارد)، تنظیم طرح درجهت مستقیم یا حرکت از آغاز به پایان یا سنتز گویند (سنتز، بـه زبان یـونـانی، یعنی «تحلیل»، «ترکیب»).

به‌خواننده توصیه می‌کنیم، روی مثال ساده‌ای، کار از انتها به‌آغازرا برای تنظیم طرح وازآغازبه‌انتها، برای‌عملی کردن‌آن، پیش‌خود مجسم کند. «من می‌توانستم کالای مورد علاقهٔ خود، A را از مغازه بخرم، اگر مبلغ B را می‌پرداختم؛ می‌توانستم مبلغ B را بپردازم، اگر ...». امیدوارم که خواننده، به‌سادگی، فن تنظیم طرح را فرا بگیرد و امیدوارم که هرگز برای عملی کردن طرح خود دچار اشکال نشود.

§۲. روش کلی‌تر

می‌کوشیم تا مثالی را که با دقت در فصل هفتم مورد تجزیه‌وتحلیل قراردادیم(وآن‌را روی شکل۳۰ روشن کردیم)، ازدیدگاه روش §۱، بررسی کنیم. با بررسی ایـن مثال، می‌توان با اطمینان، تمایل کلی روش را روشن کرد: حرکت در جهت عکس، از مجهول به‌مفروض در مرحلهٔ تنظیم طرح، و در جهت مستقیم، یعنی ازداده‌ها به‌مجهول، برای عملی کردن این طرح. ضمناً، روش، تأثیری در جزئیات حل ندارد.

نخستین گام را در نظر می‌گیریم. ضمن شرح تنظیم طرح در §۱، به عنوان روش حل مسأله، گفتیم کـه A منجر به B می‌شود، هدف اول جای خودرا به‌هدف‌دوم‌می‌دهد، به‌دست آوردن A،مربوط‌به‌این می‌شودکه‌بتوانیم B را به‌دست‌آوریم. درمثال مربوط به‌شکل ۳۰ هم، محاسبهٔ مجهول (حجم هرم‌ناقص)، منجربه‌محاسبهٔ دومجهول‌جدید شد (دوحجم)؛ دراین‌جا، به‌جای یك هدف، دو هدف «درجهٔ دوم» وجود دارد.

اگر یکبار دیگر به‌مثال مربوط به‌تمرین ۳۰ مراجعه‌کنیم و یادداشتی که درفصل‌هفتم به‌مناسبت‌تصورنموداری‌آن‌آوردیم، درك کنیم (به‌خصوص، تمرین۵ فصل‌هفتم را ببینید)، به‌سادگی می‌فهمیم‌که چطورباید روش §۱ را تعمیم‌داد، تا نه‌تنها مثال فصل‌هفتم، بلکه مجموعه‌ای نامتناهی ازحالت‌های مختلف را در بر بگیرد.

هدف A در برابر ما قرار دارد. نمی‌توانیم یکباره به آن دست یابیم، ولی متوجه می‌شویم‌که اگر چند موضوع B'، B''، B'''، ... را در اختیار

داشتیم، می‌توانستیم به A دسترسی پیدا کنیم. البته، آن‌ها را هم، هنوز در اختیار نداریم، ولی، حالا دیگر در این‌باره فکر می‌کنیم که آن‌ها را چگونه می‌توان به دست آورد ـ به زبان دیگر، B'، B'' و B'''، ... را، به عنوان هدف‌های درجهٔ دوم، در نظر می‌گیریم. سپس، بعد از مقداری فکر، به این نتیجه می‌رسیم که همهٔ هدف‌های درجـهٔ دوم ما، به‌شرطی قابل وصول‌اندکه چند مـوضوع جدیـد C'، C'' و C'''، ... را در اختیار داشته باشیم. در واقع، ایـن موضوع‌ها (C'، C''، C'''، ...) را هم در اختیار نداریم، ولی می‌توان برای به‌دست‌آوردن آن‌ها تلاش کرد ـ این‌ها، هدف‌های درجهٔ سوم ما خواهند بود، و غیره. به‌این ترتیب، تار طرح خود را می‌بافیم. می‌توان گفت: «به‌شرطی می‌توانستیم ایـن را داشته باشیم، که‌آن را، دیگری را و سومی را می‌داشتیم»ـ به‌همین ترتیب، تا جایی‌که به‌زمینه‌ای محکم برسیم، یعنی بـه‌موضوع‌هایی کـه، واقعاً، در اختیار داشته باشیم. تار طرح ما، از هدف‌هایی‌کـه زیر دست هدف نخستین A قـرار دارند، و از بستگی بین این هدف‌ها، تشکیل شده است. این هدف‌های زیردست ممکن است زیاد باشند، و در نتیجه، کار ساختن این تور پیچیده، ایـن تار درهم بافته، بـه سختی با واژه‌ها قابل توضیح باشد ـ ولی در این صورت، نموداری‌کـه از نقطه‌ها و خط‌های راست درست شده است (شبیه‌آن چه درفصل هفتم ساختیم) به‌کمک ما می‌آید؛ مثلاً، در۳° از ۵§ فصل‌دوم، هدف نخستین ما S بود، هدف‌های درجهٔ دوم ـ a، b و c وهدف‌های درجه‌سوم ـ l، m و n. (همچنین، تمرین ۲ فصل هفتم را ببینید.)

به‌نظرم، آن‌چه گفته شد، به‌اندازهٔ کافی، خصلت روشن روش‌کلی را ـ که حالت خاص آن را در ۱§ شرح دادیم، مشخص می‌کند؛ ما آن را روش حرکت از پایان به آغاز می‌نامیم. این روش، تنظیم طرح را هم دربردارد؛ نقطهٔ آغاز آن، هدف است (موضوع موردنظر، مجهول، نتیجه)ـ وما ازپایان به‌طرف‌آغاز و درجهت موضوع‌هایی‌که «در اختیار ما هستند» (موضوع‌های معلوم، داده‌ها، شرط) حرکت می‌کنیم. طرح ما، پیش‌بینی‌می‌کندکه بارسیدن به‌موضوع‌هایی‌که «در اختیار» ما هستند، می‌توان ازآن‌ها، به عنوان «نقطهٔ

عزیمت» استفاده کرد و با برگشتن به‌عقب و تعقیب معکوس همان مسیرقبلی، به‌طور مستقیم، به‌هدف رسید (۳° از تمرین ۲ فصل نهم را ببینید).

§۳. برنامه

آیا عددهای $\sqrt{۳}+\sqrt{۱۱}$ و $\sqrt{۵}+\sqrt{۸}$ با هم برابرند؟ و اگر جواب منفی‌است، کدام بزرگتراست؟ (مقدارهمهٔ رادیکال‌ها را، حسابی (یعنی‌مثبت) به‌حساب می‌آوریم).

اگر مختصری، از تبدیل‌های جبری اطلاع داشته باشیم، بـه‌سادگی می‌توانیم طرح پاسخ به این پرسش را بریزیم؛ حتی می‌توانیم، این طرح را چنان مشخص بریزیم کـه ناچار باشیم، به‌مناسبت ویژگی‌های خاص‌آن، نام تازه‌ای به‌آن بدهیم: برنامه.

در مورد عددهای مورد نظر ما، یا با هم بـرابـرند، یا اولی بزرگتر است و یا دومی. بین ایـن دو عدد، یکی از سه علامت $=$، $<$ یا $>$ را می‌توان قرار داد، ولی تنها یکی از این علامت‌ها می‌تواند برقرار باشد؛ که البته، هنوزاطلاعی ازآن نداریم، ولی امیدواریم به‌زودی‌آن را پیدا کنیم. به‌جای این علامت واحد و درست (که هنوزبرای ماناشناخته است)،علامت ? را قرار می‌دهیم و می‌نویسیم

$$\sqrt{۳}+\sqrt{۱۱} \ ? \ \sqrt{۵}+\sqrt{۸}$$

هرکدام از رابطه‌ها که، درواقع، برقرارباشد، می‌توانیم از چنان تبدیل‌های جبری‌استفاده‌کنیم که برای هرسه‌حالت‌قانونی‌باشند. مثلاً،می‌توان درابتدا، دو طرف را مجذورکرد؛ در این صورت، رابطهٔ بین دوطرف، تغییرنمی‌کند:

$$۳+۲\sqrt{۳۳}+۱۱ \ ? \ ۵+۲\sqrt{۴۰}+۸$$

با این عمل، تعداد رادیکال‌ها را کمتر کـرده‌ایـم: ابتدا چهار رادیکال داشتیم، اکنون دو رادیکال باقی مانده است. به‌تدریج، خود را ازقید این‌دو رادیکال هم‌آزاد می‌کنیم تا بتوانیم، به‌سادگی تشخیص دهیم‌که بـه‌جای ?، چه علامتی را بایدگذاشت.

لزومی ندارد کـه خواننده، همهٔ تبدیـل‌های جبری بعدی را، با همهٔ

نتیجه‌هایی که ازآن‌ها حاصل می‌شود، پیش‌بینی کند؛ با وجود این، باید برای او روشن باشدکه این تبدیل‌ها را می‌توان بدون اشکال انجام داد و مطمئن باشدکه به‌هدف مورد نظر او می‌انجامند. اومی‌تواند تصمیم بگیردکه، دراین حالت‌مشخص، لازم است اصطلاح خاصی به‌کاربرده شود واین طرح تفصیلی را برنامه بنامد (§۵ را ببینید).

همین یادآوری، در واقع، ما را به‌هدف خود در این بند، می‌رساند و نیازی به‌برنامه‌ریزی قبلی گام‌ها نیست. به‌این تبدیل‌ها می‌پردازیم:

$$۱+۲\sqrt{۳۳} \;?\; ۲\sqrt{۴۰},$$
$$۱+۴\sqrt{۳۳}+۱۳۲ \;?\; ۱۶۰,$$
$$۴\sqrt{۳۳} \;?\; ۲۷,$$
$$۵۲۸ \;?\; ۷۲۹$$

مسأله حل شد: معلوم شدکه کدام عدد بزرگتر است؛ روی رد پای خود به عقب برمی‌گردیم و می‌نویسیم:

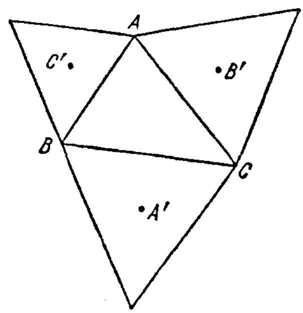
$$\sqrt{۳}+\sqrt{۱۱}<\sqrt{۵}+\sqrt{۸}$$

§۴. انتخاب بین چند طرح

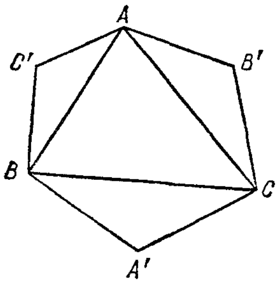
روی ضلع‌های مثلث (دلخواه) مفروضی، سه‌مثلث متساوی‌الاضلاع، در خارج مثلث ساخته‌ایم و مرکزهای آن‌ها را بـه هم وصل کرده‌ایم. ثابت کنید، مثلثی که به‌این ترتیب به دست می‌آید، متساوی‌الاضلاع است.

روی شکل ۳۷-a، مثلث مفروض ABC داده شده است؛ مرکزهای مثلث‌های متساوی‌الاضلاعی‌را، که به‌ترتیب روی ضلع‌های BC، CA و AB ساخته شده‌انـد، A' ، B' و C' می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که مثلث $A'B'C'$ متساوی‌الاضلاع است، ولو این که عجیب و ، تقریباً، غیرمحتمل بـه‌نظر می‌رسد: بـه دشواری می‌تـوان انتظار داشت که ضلع‌هـای مثلث $A'B'C'$، که‌نتیجه‌ای‌ازیک ساختمان‌کم‌وبیش‌بغرنجی‌است، همیشه باهم برابر باشند و هیچ ارتباطی به‌شکل مثلث (دلخواه) اصلی نداشته باشد. می‌توان حدس زدکه اثبات، نباید چندان ساده باشد.

نقطه‌های A'، B' و C'، بیش ازهمه موجب ناراحتی خیال می‌شوند- آن‌ها، جدا از سایر عنصرهای شکل ۳۷-a به نظر می‌آیند. با همهٔ این‌ها، این نارسائی، چندان جدی نیست. به سادگی می‌توان متوجه شدکه مثلث $BA'C$ متساوی‌الساقین است و،درآن، $A'B=A'C$ و $\angle BA'C=120°$. اگرروی‌شکل، این‌مثلث ودومثلث شبیه‌آن رارسم کنیم، «شکل پیوسته‌تری» به‌دست می‌آید (شکل ۳۷-b را ببینید).



شکل ۳۷-a. سه نقطهٔ منفرد



شکل ۳۷-b. پیوستگی بیشتر

با وجود این، هنوز نمی‌دانیم، چگونه به‌طرف هدف حرکت کنیم. چگونه می‌توان حکم مورد نظر را ثابت کرد؟ باشیوهٔ اقلیدس؟ به‌کمك هندسهٔ تحلیلی؟ با استفاده از مثلثات؟

۱°. چگونه‌می‌توان باپیروی ازسبك اقلیدس، ثابت کرد $A'B'=A'C'$؟ به‌این نتیجه وقتی می‌توان رسیدکه $A'B'$ و $A'C'$، ضلع‌هایی از دو مثلث برابر باشند ولی روی شکل، چنین مثلث‌هایی وجود ندارند و، تا این جا، معلوم نیست، چطور می‌توان آن‌ها را به‌دست‌آورد. این وضع، ما را بی‌پناه می‌کند ـ آیا روش دیگری نمی‌شود پیدا کرد؟

۲°. به کمك هندسهٔ تحلیلی، چطورمی‌توان ثابت کردکه $A'B'=A'C'$؟ مختصات نقطه‌های A، B و C را مفروض و مختصات نقطه‌های A'، B' و C' را مجهول می‌گیریم. با محاسبهٔ مجهول‌ها، برحسب داده‌ها، می‌توانیم

فاصله‌های موردنظر خود را پیدا کنیم و روشن‌کنیم که‌آیا برابرند یا نه! در این مورد، طرح کاملاً روشنی وجود دارد. ولی‌برای تحقق‌آن، باشش‌مجهول و شش معلوم سروکار داریم ... ـ نه، در ایـن جا هم چیز دلچسبی وجود ندارد، روش سوم را آزمایش‌کنیم.

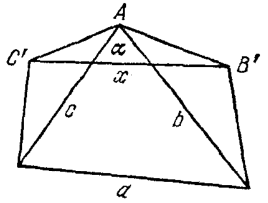
۳°. به‌کمك مثلثات، چگونه می‌توان ثابت کـردکه $A'B' = A'C'$؟ ضلع‌های a، b و c از مثلث ABC را معلوم و فاصله‌های

$$B'C' = x, \quad C'A' = y, \quad A'B' = z$$

را مجهول می‌گیریم. ظاهراً، دراین جا، وضع روبه‌راه‌تر از روش ۲° است؛ در این جا، تنها با سه معلوم و سه مجهول سروکار داریم.

۴°. در واقع، پیدا کردن هـر سه مجهول هم لازم نیست، کافی است تنها به دو مجهول دسترسی داشته باشیم. اگـر داشته باشیم $z = y$، درآن صورت، دو ضلع دلخواه مثلث $A'B'C'$ با یکدیگر برابر می‌شوند، و همین هم، برای ما کافی است.

۵°. از این بالاتر، حتی لزومی ندارد، دو مجهول را پیدا کنیم؛ اگر استدلال ظریف‌تری به‌کارببریم، معلوم می‌شودکه حتی‌به‌یکی ازمجهول‌هاهم می‌توان قناعت‌کرد. کافی است، مثلاً، x را برحسب a، b و c بیان کنیم؛ اگر این رابطه، نسبت به a، b و c متقارن باشد، در واقع امـر، بـه‌نتیجهٔ موردنظرخود رسیده‌ایم. (عبارتی‌را، نسبت به a، b وc، وقتی متقارن گوییم که با تبدیل این حرف‌ها، بدون تغییرباقی بماند.) در حقیقت، اگر برای x، چنین عبارتی به‌دست آیـد، همان عبارت بـرای y و z هم به دست خواهد آمد.



شکل ۳۷-c. دقت خودرا روی‌یك‌ضلع متمرکزکنید

با این که‌این‌طرح هم به‌قدرت کشف‌حل کننده، یعنی به‌پدیدار شدن یك‌اندیشهٔ کوچك، مربوط‌است، جالب ودلچسب‌به‌نظرمی‌آید و ارزش‌آن‌را داردکه خواننده، اجرای‌آن‌را به عهده‌بگیرد، (شکل ۳۷-c وتمرین ۳ را ببینید).

۶°. آیا می‌توان چیز آموزنده‌ای از این‌روایت بیرون کشید؟ به‌نظر من، بله.

اگر با چند طرح روبه‌رو هستیدکه هیچ‌کدام ازآن‌ها، به طور کامل، اطمینان‌بخش نیست، اگر درنقطهٔ عزیمت چند راه وجود دارد، قبل ازآن‌که در یکی ازآن‌ها به طور جدی پیش بروید، مختصری دربارهٔ هرکدام ازآن‌ها بیندیشید ـ شاید، این یا آن راه خاص، شما را به‌بن‌بست بکشاند.

§۵. طرح و برنامه

طرح را، می‌توان همچون جاده‌ای در نظر گرفت، که می‌خواهیم در مسیرآن مسافرت کنیم. ولی‌ممکن است طرح‌های مختلفی وجود داشته‌باشد. به‌دنبال‌طرحی ازعمل‌ها هستیم که، مستقیماً، ما را به‌هدف‌برساند؛ متأسفانه، همیشه نمی‌توان طرحی ریخت که به‌اندازهٔ کافی کامل باشد و، علاوه برآن، راه‌های ثمربخش زیادی، برای تنظیم طرح‌های متوالی وجود ندارد. گاهی، تنها قطعهٔ کوچکی ازمسیر دیده می‌شود، گاهی بخش بزرگتری ازآن و گاهی تمامی مسیر تا خود هدف، در برابر چشمان ما قرار می‌گیرد. همچنین، ممکن است مسیر را مه‌آلود و تار و یا کاملاً روشن ببینیم. درآن بخش از مسیر که بد دیده می‌شود و یا اصلاً دیده نمی‌شود، باید منتظر حادثه‌های مختلفی باشیم و خود را برای هر پیش‌آمدی آماده کنیم. بعضی از این پیش‌آمدها می‌تواند مطبوع باشد وبهترین‌آن‌ها (که هرگز نباید امید برخورد باآن‌هارا از دست بدهیم!)، می‌تواند سرچشمهٔ پیدایش یك اندیشهٔ درخشان باشد، اندیشه‌ای که، به‌صورتی نا منتظر، ماهیت مسأله را برای ما روشن کند.

اغلب، نمی‌توانیم طرح نهائی وکامل را، یکباره، به‌دست‌آوریم، در طرح ما، رخنه‌هایی وجود دارد وهمهٔ هدف مورد نظر ما را در برنمی‌گیرد. ولی، این وضع، نباید ما را متوقف‌کند، بایدکار را درجهت تحقق طرح‌خود ادامه دهیم و، همیشه، امیدوار باشیم که، ضمن کار، به‌اندیشه‌ای درخشان‌و یا، به‌طورساده، اندیشه‌ای‌تازه‌تربرخورد کنیم که، به‌کمك‌آن، بتوانیم‌شکاف‌های موجود را پرکنیم.

تفاوت‌طرح‌خوب ازطرح بد دراین‌است که، درطرح‌خوب، امیدبه‌ظهور

اندیشهٔ‌تازه، بیشتر است. درحالتی‌که، به‌اندیشه‌های تازه‌ای نیاز نداشته‌باشیم و، برعکس، اطمینان داشته باشیم، گام‌هایی‌که اندیشیده‌ایم و از پیش درنظر گرفته‌ایم، ما را به‌هدف می‌رسانند، آن وقت می‌توان طرح را کاملاً روشن‌و معین به‌حساب‌آورد وآن‌را برنامهٔ عمل نامید. گاهی، باید وقت زیادی صرف کرد و روی طرح‌های ناقص‌گوناگونی تجربه‌کرد، تا یکی ازآن‌ها، تبدیل به‌برنامه شود.

مثلاً §۳ را با §۴ مقایسه‌کنید.

§۶. روش‌و طرح

بسته به‌موقعیت‌های مختلف، هر یک از روش‌هایی‌که قبلاً دیده‌ایم می‌تواند موجب پیدایش یک طرح باشد؛ با وجود این، هر روشی نمی‌تواند بلافاصله تبدیل به طرحی تفصیلی یعنی برنامه بشود. مثلاً، به‌مسأله‌های ساختمانی هندسه توجه کنیم. می‌توان در تلاش حل‌آن‌ها، به‌کمک روش دو مکان‌هندسی بود. البته، این یک طرح است؛ ولی هنوزبه‌اندیشه‌های تکمیلی نیاز دارد: باید نقطهٔ مناسبی را پیدا کردکه بتوان مسأله را منجر به‌پیدا کردن‌آن کرد، باید شرط را به دو بخش چنان تقسیم‌کردکه دو مکان هندسی حاصل، موضع نقطهٔ مورد نظر را مشخص‌کنند.

یا مثلاً فرض‌کنیدکه بخواهیم یک مسألهٔ هندسی را، با روش دکارت، حل‌کنیم وآن را به‌دستگاهی ازمعادله‌ها، منجرکنیم. این‌هم، البته، یک‌طرح است؛ ولی در این جا هم، به اندیشه‌های تکمیلی نیاز داریم: باید به تعداد مجهول‌ها، معادله تشکیل داد و، علاوه برآن، راهی برای حل دستگاه حاصل پیدا کرد.

حرکت ازپایان به‌آغاز، روشی‌کاملاً کلی و مفید، برای تنظیم طرح است؛ ولی برای این‌که شکاف‌های بین مجهول و داده‌ها را ازمیان برداریم، روشن است‌که هنوز به‌اندیشه‌های دیگری نیاز داریم‌که به‌ماهیت هر مسأله مربوط می‌شوند. وقتی‌که تنظیم طرح درجهت معکوس به‌پایان برسدو بافت شکاف‌های موجود رشتهٔ ما کامل بشود، آن وقت نقشهٔ ما، به‌کلی صورت دیگری پیدا می‌کند. در این صورت است‌که برنامهٔ حرکت ازآغاز به پایان،

از داده‌ها به‌مجهول، در اختیار ما قرار می گیرد.

تمرین‌ها و یادداشت‌های تکمیلی

۱. ازپایان به‌آغاز یا از آغازبه پایان؟ درجهت معکوس یا درجهت‌مستقیم؟ تجزیه یا ترکیب؟ بنا براصطلاح‌هایی که‌داشتیم (§۲ را ببینید)، حکم «از پایان به‌آغازحرکت می کنیم»، به‌معنای استراتژی حل و به‌معنای‌مسیری مشخص برای تنظیم طرح راه‌حل است. آیا این، یك استراتژی منحصر به‌فرد است؟ یا بهترین آن‌هاست؟

۱°. دوباره به«مثال‌خودمان» برمی گردیم ـ به‌مثالی که آن‌را درفصل هفتم، از نظر نموداری، مورد مطالعه قرار دادیم. طرح نهائی حل این مثال درشکل ۲۹ـg نشان‌داده شده است؛ این طرح، عبارت است ازتارـ عنکبوتی از نقطه‌ها و خطها، مجهول‌های بینابینی و بستگی‌های متقابل آن‌ها، که در پرتگاه عمیقی که در ابتدا در بالای شکل دهان بازکرده بود ومجهول‌ها را از داده‌ها جدا می کرد، بافته شده‌است. بافتن این‌تار را از مجهول‌آغاز ودرجهت داده‌ها حرکت‌کردیم. روی شکل ۳۰، مرحله‌های متوالـی کار ما، نشان داده شده است. ایـن جهت گیری را معکـوس یا جهت گیری «ازپایان به‌آغاز» نامیدیم (روی‌شکل ۳۰، این جهت ازچپ به‌راست است).

طرح نهائی ، دستگاه کاملی از بستگی‌های متقابل است (شکل ۲۹ـg را ببینید؛ گاهی تار عنکبوت ما، می‌تواند از این هم بغرنج‌تر باشد) که جهت تشکیل خودش را نشان نمی‌دهد. ممکن بود، کسی ساختمان‌آن را از داده‌ها آغاز و حرکت خـود را، در جهتی‌کـه روی شکـل ۲۹ـg با پیکان‌ها نشان داده شده است، انتخاب کند (درست، به همان ترتیب، که برای تحقق طرح، عمل می کنیم). گستردن طرح دراین جهت را،می‌توان گسترش در جهت مستقیم یا حرکت ازآغاز به پایان نامید.

در ضمن، حل‌کنندهٔ دیگری (که در مقابل مسأله‌ای دیگر، و احتمالاً پیچیده‌تر،قرار گرفته است)، ممکن‌است طرح خودرا، بدون درنظر گرفتن

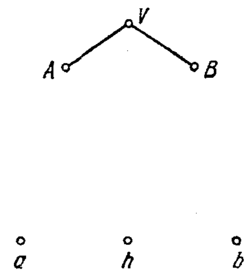
یك جهت واحد، تنظیم کند. خواه آغاز را بـه‌عنوان نقطهٔ عزیمت خود انتخاب کرده باشد و خواه پایان را، می‌تـواند گاهی از مجهول به سمت داده‌ها، و گاهی از داده‌ها به‌سمت مجهول حرکت کند؛ او، همچنین می‌تواند، متناوباً، به هر دو طرف حرکت کند؛ او حتی می‌تواند موضوع‌هایی را به هم مربوط کند که هنوز، هیچ کدام از آن‌ها، به‌آغاز یا پایان‌طرح او، وصل نشده‌اند؛ در ایـن مورد، در واقع، بین نقطه‌های منفردی پل می‌زند که امیدوار است، زمانی، به‌مجهول یا به‌داده‌ها متصل شوند. به‌این ترتیب، تنظیم طرح از پایان به‌آغاز را، هنوز نباید تنها امکان دانست. تمرین ۴ فصل هفتم، نمونهٔ مشخصی در این باره است.

۲°. در مثال ما، که در شکل ۳۰ جمع‌بندی شده است، طرح راه حل را، با حرکت از پایان به‌آغاز ریختیم. کار خود را، با کار کسی که تنظیم طرح راه حل همین مسأله را، با حرکت از آغاز به‌پـایـان ریخته است، مقایسه می‌کنیم.

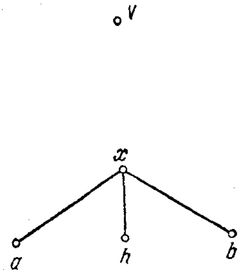
ما ازمجهول آغاز کردیم و، به‌همین مناسبت، پرسش‌هایی در برابرخود قرار دادیم که، به‌خصوص، به‌مجهول تکیه داشتند. مطلوب ما چیست؟ مجهول کدام است؟ چنین موضوعی راچگونه می‌توان پیداکرد؟ مجهولی ازاین نوع را چطورمی‌توان پیدا کرد؟ برای این که این مجهول به‌دست آید، به چه داده‌هایی نیاز داریم؟ و دو «داده»، دو مـوضـوع A و B، پیدا کردیم که می‌شدمجهول V را برحسب آن‌ها بیان کرد؛ با معلوم‌بودن آن‌ها، می‌توانستیم مجهول V را پیدا کنیم: $V=A-B$. ایـن مرحلهٔ کار ما، در شکل ۳۸ـa (که بخشی از شکل ۳۰ است) نشان داده شده است.

حل‌کنندهٔ دیگر، از راه دیگری می‌رود و از داده‌ها آغاز می‌کند: او پرسش‌هایی‌در برابر خود می‌گذارد، که متکی بر داده‌ها باشند. چه چیزی داده شده است؟ داده‌ها کدام‌اند؟ ازاین موضوع‌ها، چه حاصلی به‌دست می‌آید؟ ازچنین داده‌هایی، چگونه می‌توان استفاده‌کرد؟ آیا نمی‌توان، از این داده‌ها، چیزی سودمند بیرون کشید؟ و بالاخره متوجه می‌شود که

با استفاده از داده‌ها، می‌توان طول (ارتفاع) x را محاسبه کرد. یعنی x را برحسب a، h و b بیان کرد (با استفاده از همان تناسبی که ما، کمی دیرتر، برقرار کردیم؛ شکل ۲۹-f را ببینید). این مرحلهٔ کار او، در شکل ۳۸-b نشان داده شده است.



شکل ۳۸-a. حرکت به‌عقب



شکل ۳۸-b. حرکت به‌جلو

دوباره به‌راه‌حل خودمان برگردیم، به‌مرحله‌ای که درشکل ۳۸-a نشان داده شده است. با بیان مجهول V برحسب A و B، به دو مجهول تازهٔ A و B، به‌دو مسألهٔ (کمکی) تازه، برخورد کردیم:

اگر a، h و b معلوم باشند، A را پیدا کنید.

اگر a، h و b معلوم باشند، B را پیدا کنید.

واین‌ها، دومسألهٔ ریاضی با همان خصلت مسألهٔ اصلی هستند. با حرکت در جهت معکوس، دوباره از خود می‌پرسیم: این مجهول‌ها را، چگونه می‌توان پیدا کرد؟ برای پیدا کردن این مجهول‌ها، به چه داده‌هایی نیاز داریم؟

اکنون دوباره، متوجه حل‌کنندهٔ دوم می‌شویم؛ او به‌مرحله‌ای رسیده است که در شکل ۳۸-b نشان داده‌ایم. با پیدا کردن x، برحسب a، h و b، می‌تواند x را بـه عنوان یك مفروض اضافی در نظر بگیرد؛ به‌این ترتیب، اکنون تعداد بیشتری معلوم دراختیار دارد واین، شانس بیشتری

برای رسیدن به‌مجهول، به‌او می‌دهد. ولی او، با حرکت در این مسیر، به‌روشنی، به‌مسأله‌ای کمکی نرسیده است و باید پرسش‌هایی ازخود بکند که کمتر روشن هستند: از x چگونه باید استفاده کرد؟ چنین موضوع‌هایی درکجا به‌درد می‌خورند؟ آیا از این داده‌ها، نمی‌توان چیز مفیدی بیرون آورد؟

به این ترتیب، تفاوت اصلی بین ما و حل‌کنندهٔ دیگـر، تفاوت اصلی بین این دوموقعیت (که درشکل‌های ۳۸-a و ۳۸-b نشان داده‌شده‌اند)، در دورنمای کار است. اگر موفق شویم مسأله‌های کمکی را حل کنیم، به چه پیروزی می‌رسیم؟ و اگر اوموفق شود به‌پرسش‌های خود پاسخ دهد، کدام‌پیروزی را به‌دست می‌آورد؟ اگرما بتوانیم مجهول‌های کمکی خود را بیان کنیم (A و B را برحسب a، h و b)، در ایـن صورت خواهیم توانست، مجهـول اصلی را هم، برحسب آن‌ها، در اختیار داشته باشیم ($V=B-A$) — ودرنتیجه، مسألهٔ ما حل‌می‌شود. ولی‌اگرحل‌کننده‌ای که در جهت مستقیم حرکت می‌کند، بتواند مجهول بینابینی دیگری، و مثلاً y را، برحسب مقدارهای مفروض بیان کند، دوباره در برابر این پرسش قرار می‌گیردکه: با y چه بایدکرد؟ البته، ممکن است این حالت استثنائی هم پیش‌آیدکه: اگر شانس بیاورد، نقش y همان نقش «مجهول اصلی» باشد و، در این صورت، او هم به‌حل مسأله برسد.

۳°. تنظیم طرح، چه به‌طورمستقیم وچه به‌طورمعکوس، به‌یك‌اندازه ممکن است مواجه با موفقیت یا عدم موفقیت بشوند. وقتی‌که از پایان به‌آغازحرکت‌می‌کنیم، ممکن است به‌مسأله‌ای کمکی برسیم‌که قادربه‌حل آن نباشیم. وقتی هم‌که ازآغازبه‌پایان حرکت می‌کنیم، مرتباً به‌داده‌های تازه و تازه‌تری می‌رسیم، ولی ممکن است‌که همهٔ این مقدارها، بی‌فایده باشند: ممکن است‌که نتوانیم مجهول را ازآن‌ها بیرون بکشیم.

تنظیم طـرح، از این یـا آن جهت، نیاز به‌ترکیب شیوه‌های مختلف دارد. اگر درحرکت از پایان به آغاز، باید منتظر بودکه بخش عمده‌ای از وقت صرف حل مسأله‌هایی بشودکـه، به روشنی، خارج از خط قرار

دارند، درحرکت ازآغاز به‌پایان هم، باید وقت زیادی را صرف تردیدی کرد که برای انتخاب بین‌آن چه می‌توانیم به‌دست‌آوریم، لازم است، تا قادرباشیم محصول‌های بی‌فایده را کنار بزنیم و تنها ازآن‌چه سودمند است استفاده کنیم.

به‌طور کلی می‌توان گفت که، تنظیم طرح درجهت معکوس و حرکت از پایان به‌آغاز (که با اصطلاح هندسه‌دانان یونان «تجزیه» یا «آنالیز» نامیده می‌شود) برتری دارد. قانونی قطعی‌وبی‌چون‌وچرا، نمی‌توان‌ارائه داد، بهتراست، اول به‌مجهول (نتیجه، موضوع‌موردنظر) نظری‌بیندازیم و، سپس، داده‌ها را (شرط، موضوع‌هایی‌که دراختیارما قراردارند)،مورد بررسی قرار دهیم. کار را آغازکنید، از مجهول شروع کنید و از پایان به طرف‌آغازبروید و، اگر دلیل روشنی برای امتناع از حرکت دراین‌مسیر ندارید (و مثلاً، هیچ اندیشهٔ خوبی، شما را وادار به‌حرکت از داده‌ها نمی‌کند)، راه خود را، به‌طرف جلو، ادامه دهید.

۴°. اشاره‌های کوتاه دیگری‌هم، دراین‌جا، می‌آوریم، اگرچه دراین باره خیلی بیش از این‌ها، می‌توان صحبت کرد.

دربعضی موردها، مبنای‌مشخصی، برای‌انتخاب، وجود دارد. مثلاً، دربسیاری ازمسأله‌های عملی، موضوعی‌که می‌خواهیم‌پیداکنیم (بسازیم، در اختیار بگیریم، ...) می‌تواندکاملاً قابل فهم و در دسترس باشد،ولی موضوع‌هایی‌که بایدبرای رسیدن به‌هدف مورداستفاده قرارگیرند، به‌علت زیادی‌آن‌ها، ازجلوچشم فرارکنند. برای ما مشکل‌باشدکه تصمیم‌بگیریم ازکجاوکدام موضوع مشخص‌آغازکنیم، وسعت وفراوانی این‌موضوع‌ها، مانع از امکان سادهٔ انتخاب‌آن‌ها باشد؛ در چنین صورتی، طرح را باید در جهت معکوس تنظیم کرد.

وقتی‌که طرح را درجهت معکوس تنظیم کرده باشیم، برای اجرای‌آن درجهت مستقیم حرکت می‌کنیم (§۵ را به‌یادبیاورید)؛ ولی این‌اجرای طرح‌است نه تنظیم‌آن، چرا که همهٔ اندیشه‌ها ازقبل‌آماده شده‌اندوحال، تنها بایدآن‌ها را اجرا کنیم. این‌وضع، حتی می‌تواند‌این گمان را به‌وجود

آورد که کسی که تنظیم طرح را، درجهت مستقیم، انجام می‌دهد، ازنوعی اندیشه‌های آماده استفاده می‌کند؛ منظورمن، اندیشه‌هایی ناروشن‌واحتمالاً ناآگاهانه است.

دانشجویی، مطلب را این‌طور روشن‌کرده است: تجربه، به‌خودی‌خود (وبدون تجزیه‌وتحلیل قبلی) دشوار است وشبیه‌آن است که کسی بخواهد در شرایطی‌پیراشکی درست کندکه تمام اجزاءِ تشکیل دهندهٔآن را بداند، ولی دستورالعملی در اختیار نداشته باشد.

و البته، ضمن حل‌مسأله، نه بی‌اندازه خرده‌گیر ونه‌سهل‌انگار باشید. اگر حرکت را از مجهول، از پایان بـه آغاز، شروع کـرده‌اید ومی‌بینید که، اگراز داده‌ها عزیمت‌کنید، می‌توانید موفقیتی به‌دست‌آورید، بی‌هیچ تردیدی‌کار قبلی خود را رها کنید و به‌موضوع اخیر بپردازید.

۲. عاقل، از پایان آغاز می‌کند. یکی ازدوستان من، که هم ریاضی‌دان‌خوبی است و هم فیلسوفی خوب، یك روز برای من تعریف‌کردکه، ضمن تلاش برای اثبات هر قضیه‌ای، اغلب از این جا شروع می‌کندکه‌آن چه را که باید ثابت کرد، به‌ردیف عکس می‌نویسد واین شرح معکوس جملهٔ سنتی، او را به‌خوبی برای عمل مورد نیاز او، آماده می‌کند.

مثلی است معروف: «عاقل ازپایان آغاز می‌کند، احمق در آغاز ختم می‌کند».

۳. طرحی را که در ۴§ تنظیم کردیم، به‌اجرا درآورید.

۴. انتخاب از بین سه طرح. a را شعاع قـاعده و h را ارتفاع یك استوانهٔ دوار بگیرید. از قطر قاعدهٔ پایین، صفحه‌ای بگذرانیدکه بـر دایرهٔ قاعدهٔ بالا مماس باشد (یعنـی با آن، تنها یك نقطهٔ مشترك داشته باشد). این صفحه، استوانه‌را به‌دوبخش نابرابرتقسیم می‌کند. مطلوب‌است‌حجم بخش کوچکتر که بین قاعدهٔ پایین وصفحهٔ قاطع قرارگرفته است (حجم «سُم»).

طـرح این مسألـه ونخستین راه حل‌آن، متعلق بـه‌ارشمیدس است. ازهندسهٔ‌تحلیلی‌درفضا استفاده‌می‌کنیم. محوراستوانه‌را، به‌عنوان‌محور z، وصفحهٔ قاعدهٔ‌آن را، به‌عنوان‌صفحهٔ xoy ازدستگاه‌مختصات‌قائم، در

نظر می گیریم. فرض می کنیم، صفحه‌ای که استوانه رابه دو بخش تقسیم کرده است، صفحهٔ xoy را، روی محور y، قطع کند. در این صورت، معادله «دایره» قاعدهٔ پایین، چنین است:

$$x^{2}+y^{2}=a^{2}$$

و معادلهٔ صفحهٔ قاطع:

$$\frac{z}{h}=\frac{x}{a}$$

برای محاسبهٔ حجم مجهول، می‌توان ازمحاسبهٔ انتگرالی ویااصل کاوالیری استفاده کرد. در هر دو حالت، باید خانواده‌ای از مقطع‌های موازی را در نظر گرفت. سه طرح روشن وجود دارد: می‌توان مقطع را طوری عبور داد که

۱°. عمود برمحور x باشد؛

۲°. عمود بر محور y باشد؛

۳°. عمود بر محور z باشد.

کدام طرح را ترجیح می‌دهید؟ آن را اجرا کنید.

۵.۱۰ انتخاب بین دو طرح

۱°. به حل جدول مشغولیم، دچار تردید شده‌ایم. در برابر ما دو واژه قرار گرفته است: یکی شامل چهار حرف است که یك حرف آن معین و سه حرف آن مجهول است؛ واژهٔ دوم هشت حرف دارد که سه حرف آن معلوم و پنج حرف آن مجهول است. از کدام واژه آغاز کنیم، بهتر است؟ آیا می‌توان مبنایی برای انتخاب یکی از این دو واژه، با استفاده از داده‌های عددی، پیدا کرد؟

گمان می کنم که، به‌احتمال‌قوی، ممکن است، ولی تلاش دراین زمینه، باید جالب باشد.

۲°*. مسأله را می‌توان به‌صورتی کلی‌تر و (تا آن‌جا که ممکن است) دقیق‌تر، تنظیم کرد.

فرض می‌کنیم با واژه‌ای سر و کار داشته باشیم که شامل $k+l$ حرف

باشد که، از آن‌ها، k حرف معلوم و l حرف مجهول است. با این قصد به جست‌وجوی واژه می‌پردازیم که بتوانیم ضریب دشواری این جست‌وجو را پیدا کنیم.

فرض می‌کنیم، k حرف معلوم، کاملاً مشخص باشند، یعنی هم خود حرف‌ها و هم جای هرکدام از آن‌ها را در واژه بدانیم (مثلاً، در واژهٔ

ان ـ ـ ش ـ ـ ـ

که درآن، $k=3$ و $l=5$). دراین حالت، ضریب دشواری کشف واژه را می‌توان عدد N به‌حساب‌آورد که عبارت است از تعداد واژه‌هایی از زبان امروزی فارسی که شامل $k+l$ حرف و k حرف از آن، همان حرف‌های معلوم ودرهمان جای واژهٔ موردنظرما قرارداشته باشند. (البته، هر تابع صعودی و یکنوا از N را هم، می‌توان، بدون هیچ اشکالی، به عنوان ضریب دشواری انتخاب کرد، مثل $\ln N$.)

این تعریف، از لحاظ نظری، عقلانی به نظر می‌رسد، چرا که با بالا رفتن تعداد واژه‌های قابل قبول، دشواری انتخاب یك واژه از بین آن‌ها هم، زیادتر می‌شود. ولی در عمل، با ناهمواری‌هایی برخورد می‌کنیم. اگر واژه، به‌زبان فارسی «امروزی» تعلق نداشته باشد، چه پیش می‌آید؟ آیا تعریف ما، از دیدگاه شیفتگان جدول هم، رضایت‌بخش است؟ و در هر حال، تلاش عملی برای پیدا کردن عدد N، بی‌اندازه خسته‌کننده و حتی بی‌فایده است.

*۳°. به‌این ترتیب، هدف بغرنج‌تر دیگری در برابر ما قرارمی‌گیرد؛ می‌خواهیم‌ضرب‌دشواری را، طوری تعریف‌کنیم که تنها به k و l بستگی داشته‌باشد (یعنی، سایر شرطهارا برابرمی‌گیریم)ـ ضریب نوعی‌دشواری «متوسط». می‌خواهیم، همهٔ حالت‌هایی را که، درآن‌ها، k و l یکی‌است، یکسان در نظر بگیریم و تنها این مقدارهای عددی را به‌حساب‌آوریم. اگرهم، موفق شویم به‌چنین هدف بغرنجی برسیم، ضریب به‌صورت‌تابعی از دو متغیر k و l، یعنی به‌صورت $f(k, l)$ درخواهد آمد. روشن است که این تابع باید نسبت به k نزولی ونسبت به l صعودی باشد. ولی ما

هنوز، حتی نمی‌توانیم بگوییم، کدام بزرگترند: $f(۱, ۳)$ یا $f(۳, ۵)$؟

۴°. ولی اگرحرف‌ها، درواژه‌های زبان‌فارسی، بدون‌ارتباط بایکدیگر قرارگرفته باشند، آن وقت، عدد N، تعداد واژه‌های فارسی که k حرف معلوم‌و l حرف‌آزاد برای‌انتخاب دارند، بادستور ساده‌ای بیان می‌شود:

$$N = ۳۲^{l}$$

(عدد N را به‌معنایی به‌کار برده‌ایم که در ۲° شرح دادیم). بنابراین، می‌توانیم ضریب دشواری را، مثلاً، به‌این ترتیب تعریف کنیم:

$$f(k, l) = \frac{\log N}{\log ۳۲} = l$$

این تعریف، برای ضریب $f(k, l)$، منطقی به‌نظر می‌رسد، ولی پرسشی جدی را به‌وجود می‌آورد: تثبیت k حرف، تا چه‌اندازه، انتخاب l حرف بقیه را (که انتخاب‌آن‌ها، آزاد در نظرگرفته شده است، درحالی‌که، در واقع، این طور نیست)، محدود می‌کند؟

بعید است‌که بتوان، برای تابع $f(k, l)$، دستوری پیشنهاد کرد که، دست‌کم تا حدی، با حقیقت سازگار باشد. در هر حالتی، باید چنین دستوری، دست‌کم ازدوجهت، با رابطه‌ای‌که هم‌اکنون به‌دست‌آوردیم، اختلاف داشته باشد: $f(k, l)$ باید تابعی یکنوا و نزولی نسبت به k باشد و، اگر نه برای همهٔ زبان‌ها، دست‌کم برای چندزبان بتواند به‌کار رود.

۵°. دراین‌جا نمونه‌ای را پیشنهادمی‌کنیم که‌هم‌ناقص‌است وهم کاملاً جنبهٔ ذهنی دارد:

$$f(k,l) = \frac{\log[۳۲-\alpha k][۳۲-\alpha(k+۱)]\ldots[۳۲-\alpha(k+l-۱)]}{\log ۳۲}$$

پارامتر مثبت α را، به‌این جهت وارد در دستورکرده‌ایم‌که بتوان‌آن را باهرزبانی‌که، الفبای‌آن،شامل ۳۲ حرف است، سازگارکرد. این‌دستور، تنها برای واژه‌هایی مناسب است که برای تعداد حرف‌های‌آن‌ها داشته باشیم:

$$k+l<\frac{۳۱}{\alpha}+۱$$

۶°. این بحث‌ها، می‌تواند به‌منزلهٔ روزنه‌ای‌تلقی‌شود که تاحدی‌حوزهٔ کشف و ابتکار را روشن‌و، دقتی راکه می‌توان به‌آن دست یافت، روشن می‌کند.

۶. طرح واقعی. «خیال دارم، بلادرنگ، به‌مسأله‌ای مشغول شوم؛ شکل‌را مطالعه می‌کنم و در انتظار اندیشهٔ جالبی هستم که، تاکنون، به‌ذهنم نرسیده است». این، یك طرح حقیقی است. ممکن است کمی ساده‌لوحی، یا بیشتر خوش‌بینی باشد، ولی شما می‌توانید، استعداد خود را در کشف اندیشه‌های خوب، دوباره مورد ارزیابی قراردهید؛ دست‌کم، به‌این‌طرح می‌توان عادت‌کرد (و البته، نه همیشه).

۷. مسأله‌هایی را که قبلاً حل‌کرده‌اید، به‌خاطر بیاورید؛ دوباره روش حل خود را مرورکنید و، اگر می‌توانید، راه حل تازه‌ای، برمبنای طرح «از پایان به‌آغاز» برای‌آن‌ها پیدا کنید.

۸. خودتان را محدود نکنید. مثالی رادرنظرمی‌گیریم. فرض‌کنیم، می‌خواهیم قضیه‌ای از هندسهٔ مقدماتی را ثابت‌کنیم‌که، نتیجهٔ آن، چنین است:«... در این صورت، زاویه‌های ABC و EFG برابرند». باید این نتیجه رااز شرطی بیرون بیاوریم‌که شرح جزئیات آن ربطی به‌کار ما ندارد و، به همین دلیل، ازآن‌ها می‌گذریم.

درمرحله‌ای ازحل (و یا قبل ازآغازحل)، توجه خودرا، روی‌نتیجه، متمرکز می‌کنیم: نتیجه چیست؟ باید ثابت‌کنیم:

$$\angle ABC=\angle EFG$$

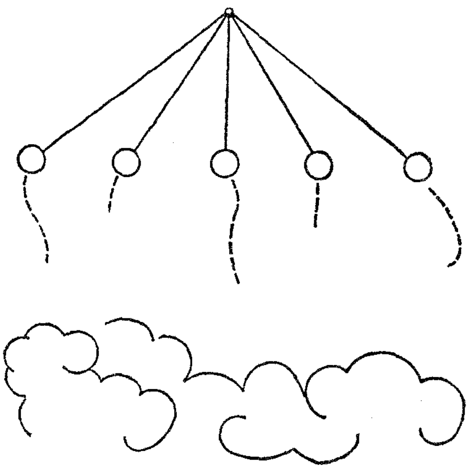
این حکم را چگونه می‌توان ثابت کرد؟ چنین نتیجه‌ای را، از چه‌شرطی می‌توان بیرون کشید؟

چندحقیقت نزدیك را،که از قبل می‌دانیم، به‌خاطر می‌آوریم؛راه‌های اثبات حکم‌هایی را به‌یاد می‌آوریم‌که با حکم مورد نظرماشباهت دارند.

دو زاویه برابرند

۱°. وقتی که زاویه‌هایی از مثلث‌های برابر باشند؛ یا
۲°. وقتی که زاویه‌هایی از دو مثلث متشابه باشند؛ یا
۳°. وقتی که زاویه‌های متناظر، درحالت دو خط موازی و یك قاطع باشند؛ یا
۴°. وقتی که مکمل‌های آن‌ها، با هم برابر باشند؛ یا
۵°. وقتی که محاط دریك دایره و روبه‌رو به‌یك کمان باشند.

پنج قضیهٔ مختلف برشمردیم، که‌ازهر کدام آن‌ها، می‌توان استفاده کرد، پنج شرط مختلف که می‌توان نتیجهٔ مورد نظر را از آن‌ها استخراج کرد. ازهر کدام آن‌ها، می‌توان آغاز کرد. مثلاً، می‌توان ۱° را آزمایش کرد؛ دو



شکل ۳۹. انتخاب تردیدآمیز

مثلث مناسب، و مثلاً مثلث‌های ABC و EFG، را رسم و تلاش برای اثبات برابری آن‌ها را آغاز کرد. اگر موفق شویم نتیجهٔ مورد نظرهم، بلافاصله حاصل می‌شود. ولی چگونه می‌توان ثابت کرد که $\triangle ABC = \triangle EFG$؟ این پرسش، موجب تغییر جهت طرح ما می‌شود. ولی می‌توانستیم تنظیم طرح را در جهت عکس، با عزیمت از هرکدام از

این پنج قضیه، آغاز کنیم. آیا امیدی وجود دارد که یکی از آن‌ها، امکان اثبات حکم را در اختیار ما بگذارد؟ کدامیك، در این مورد، شانس بیشتری دارد؟ اگر نمی‌توانیم، به‌این پرسش‌ها، پاسخ دهیم یا اگر، در پاسخ‌های خود، عدم‌رضایتی احساس می‌کنیم، آن‌وقت، بایددر کار انتخاب، دچار تردید شویم. سر یك چندراهی هستیم. باید یکی از چند راه را انتخاب کنیم؛ آغاز کار خوب بود، ولی ادامهٔ راه ناروشن و انتهای آن پوشیده در مه است. در شکل ۳۹، کوشیده‌ایم، این موقعیت را روشن کنیم.

هدف این‌مثال، این‌بود که دشواری‌موقعیت، ابهام انتخاب‌یکی ازچند طرح را، برای خواننده، روشن کند. در چنین موردهایی، توصیهٔ‌من این است: خیلی زود خودتان را محدود نکنید، دست و پای خودتان را، به خاطر انتخاب مسیری کوبیده‌تر و دقیق‌تر، نبندید. یکی را انتخاب کنید، ولی دیگران را به‌فراموشی نسپارید.

یك ریاضی‌دان خوب، مثل یك ژنرال خوب، باید توانایی تحمل هر پیش‌آمدی را داشته باشد: او باید امکان شکست حملهٔ خود را در نظر بگیرد و ازتأمین راه عقب‌نشینی غفلت نکند. یك طرح خوب، بایدچنان نرمشی داشته باشدکه بتواند خود را با دشواری‌هایی که پیش می‌آید، سازگار کند.

فصل نهم

مسأله‌های درون مسأله

اگر ضمن ساختمان و یا اثبات، به‌فرضی برخورد کنیم که قبلاً ثابت نشده، ولی برای استدلال لازم باشد، این فرض را، به‌خودی خود، تردیدآمیز به‌حساب می‌آوریم و به‌بررسی آن مشغول می‌شویم و آن را پیش قضیه (لم) می‌نامیم.

پروکل ـ تفسیری بر اقلیدس

... به دلیل ارتباط درك یك چیز، به‌درك چیزی دیگر، ... می‌توانیم بلافاصله متوجه شویم که آیا بهتر نیست ابتدا به بررسی دومی بپردازیم، یعنی ردیفی برای بررسی‌های خود قایل شویم.

دکارت ـ قانون‌های راه بردن عقل

می‌دانید بهترین راه حل این مسأله کدام است؟ ـ آن را کنار بگذارید و دربارهٔ مسأله‌ای دیگر فکر کنید.

استاد سنتی ریاضیات[1]

1. منظور مؤلف، جنبهٔ طنزآمیز سخن معلم ریاضیات است.

§۱. مسأله‌های کمکی

بعضی ازمشاهده‌های ولفگان کوهار، دربارهٔ میمون‌های آدم‌نما، برای ما بسیار جالب است. این است خلاصه‌ای از شرح یکی از آزمایش‌های او[1].

شامپانزه در اطاقکی جا دارد، جانور گرسنه است. در بیرون اطاقك، روی زمین، موز وجود دارد. شامپانزه می‌تواند دست خود را از لای میله‌های اطاقك بیرون آورد، ولی نمی‌تواند دست خود را به‌موز برساند. جانور، با جدیت ولی بی‌نتیجه، می‌کوشد به موز دست یابد، و حالا درست در مقابل‌آن نشسته است. دربیرون اطاقك، ولی درمحدوده‌ای که دردسترس شامپانزه است، قطعه‌چوبی روی‌زمین است، ولی‌جانور، ظاهراً، هیچ‌توجهی به‌آن ندارد. ناگهان، شامپانزه به هیجان می‌آید، قطعه چوب را برمی‌دارد، با بی‌دست وپایی، موز را تکان می‌دهد وآن قدر ادامه می‌دهد تا در دسترس قرار گیرد: بعد موز را برمی‌دارد و می‌خورد.

این میمون، دو مسأله را حل‌کرده است:

A. برداشتن موز.

B. برداشتن قطعه چوب.

مسألهٔA، قبل ازمسألهٔ B به‌وجودآمد. درابتدا، میمون هیچ‌علاقه‌ای به‌قطعه چوب نشان نمی‌داد، زیرا چوب قابل خوردن نبود؛ با وجود این، اول مسألهٔ B را حل‌کرد. حل مسألهٔ B، راه را برای حل مسألهٔ اصلی A باز کرد. میمون، مستقیماً، علاقه‌مند به‌حل مسألهٔ A بود، و تنها به طور غیرمستقیم، به‌حل مسألهٔ B متوجه شد؛ A، هدف مشخص میمون بود وB، تنها وسیله‌ای برای رسیدن به آن؛ A ، مسألهٔ اصلی و عمدهٔ او بود و B، تنها یك مسألهٔکمکی به‌حساب می‌آمد (که‌آن‌را مسألهٔ فرعی‌یا مسألهٔ درجه دوم هم، می‌توان گفت).

معنای این اصطلاح مهم را، در خطهای کلی خود، شرح می‌دهیم:

---

1. W. Köhler, The mentality of apes, New York, 1925

مسألهٔ کمکی، به مسأله‌ای گویند که باید به آن توجه، یا روی آن کار کنیم، این توجه یا کار، به خاطر خود این مسأله نیست، بلکه به این خاطر است که، به حل مسألهٔ دیگری، یعنی مسألهٔ اصلی ما، کمك می‌کند. مسألهٔ کمکی، وسیله‌ای است برای رسیدن به‌هدف، این وسیله، راه رسیدن به هدف را هموار می‌کند؛ مسألهٔ اصلی، هدف ما است و در انتهای مسیر قرار دارد.

راهی برای پیدا کردن راه حل مسأله به‌نظر نمی‌رسد، ولی با حل یك مسألهٔ کمکی، راه حل مسألهٔ اصلی هموار می‌شود ـ و این، مظهر خاصی از فعالیت عقلانی و ذهنی است ... و برای ما دشوار است که بتوانیم، عمل شامپانزه را، به‌عنوان یك رفتار عقلانی، تفسیر کنیم.

می‌خواهیم، مسأله‌های کمکی را، طبقه‌بندی کنیم و، برای این‌منظور، چند مثال ریاضی انتخاب می‌کنیم.

§۲. مسأله‌های هم ارز: تحویل یا تبدیل دوجانبه

از این مثال، آغاز می‌کنیم. فرض کنید، هدف ما این باشد که دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی زیر را حل کنیم:

$$\begin{aligned} x-y\quad &= -۴, \\ x+y+z &= ۵, \\ x+y-z &= ۳۱ \end{aligned} \qquad (A)$$

از دستگاه (A)، به‌دستگاه (B) عبور می‌کنیم، که برای آن

°۱. معادلهٔ اول، همان معادلهٔ اول دستگاه (A) است؛

°۲. معادلهٔ دوم، عبارت است از مجموع معادله‌های دوم و سوم دستگاه (A)؛

°۳. معادلهٔ سوم، عبارت است از تفاضل معادله‌های دوم و سوم دستگاه (A).

دستگاه تازهٔ شامل سه معادله، چنین می‌شود:

$$\begin{aligned} x-y &= -۴ \\ ۲(x+y) &= ۳۶ \qquad (B) \\ ۲z &= -۲۶ \end{aligned}$$

روش به‌دست‌آمدن دستگاه (B) نشان می‌دهد که، عددهای x، y و z که در دستگاه (A) صدق می‌کنند، الزاماً در دستگاه (B) هم صدق خواهند‌کرد. عکس این گزاره هم‌درست است: عددهای (x, y, z) صادق در دستگاه (B)، باید در دستگاه (A) هم صدق کنند. این اثبات را، به‌صورت دیگری هم، می‌توان انجام‌داد: دو طرف دو معادلهٔ آخر دستگاه (B) را بر ۲ تقسیم می‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\begin{aligned} x-y &= -۴ \\ x+y &= \ \ ۱۸ \qquad (C) \\ z &= -۱۳ \end{aligned}$$

از (C) می‌توان به (A) رسید، به‌این ترتیب که معادلهٔ اول (C) را نگه داریم و دو معادلهٔ دیگر را، یکبار با هم جمع و یکبار دیگر از هم کم کنیم. سخن کوتاه: اگر سه عدد x، y و z، در یکی از دو دستگاه (A) یا (B) صدق کنند، در دیگری هم‌صدق خواهند‌کرد.

دستگاه‌های (A) و (B)، متحد یکدیگر نیستند: در دو دستگاه، معادله‌های یکسانی وجود ندارد. بنابراین، به مفهوم دقیق خود، نمی‌توان حکم کرد که این دومسأله ـ که یکی از آن‌ها حل دستگاه (A) و دیگری حل دستگاه (B) را طلب می‌کند ـ متحدند. با وجوداین، می‌توان گفت که، این دو مسأله، هم ارزند. تعریف کلی هم ارزی، به‌مفهومی که در این جا به‌کار بردیم، چنین است: دو مسأله را هم‌ارزگوییم، وقتی که جواب یکی از آن‌ها، همان جواب دیگری باشد.

عبور از یك مسأله به‌مسأله هم‌ارز آن‌را، تحویل یا تبدیل دوجانبه (یا تبدیل معکوس، یا تبدیل هم ارز) گویند. مثلاً، عبور از مسألهٔ اصلی، که مربوط به‌حل دستگاه (A) است، به‌حل دستگاه (B)، یك تبدیل دوجانبه است، در مثال ما، این تبدیل مفید است: دستگاه (B)، به‌جواب نهایی، نزدیکتر

ازدستگاه (A) است. درواقع، (B) به (C) نزدیکتر است تا (A) به (C)؛ و(C) هم، تقریباً پایان حل است: دستگاه (C)، مقدارz را مستقیماً به‌دست می‌دهد و، برای پیدا کردن x و y هم، نیاز به‌صرف نیروی زیادی نیست.

۳§. زنجیرهٔ مسأله‌های هم ارز

به‌دستگاه (C) از ۲§ برمی‌گردیم؛ دو معادلهٔ اول دستگاه را، یکبار با هم جمع و بار دیگر از هم کم می‌کنیم، به‌این دستگاه می‌رسیم:

$$\begin{aligned} ۲x &= \quad ۱۴ \\ ۲y &= \quad ۲۲ \\ z &= -۱۳ \end{aligned} \qquad (D)$$

و ازآن‌جا

$$\begin{aligned} x &= \quad ۷ \\ y &= \quad ۱۱ \\ z &= -۱۳ \end{aligned} \qquad (E)$$

دنباله‌ای از پنج دستگاه داریم (که هرکدام ازآن‌ها، شامل سه‌معادله است):

(A), (B), (C), (D), (E)

هریك ازاین دستگاه‌ها، متناظر مسأله‌ای است دربارهٔ پیدا کردن‌مقدار مجهول‌های x، y و z، که در این دستگاه صدق کنند. [به‌کار بردن اصطلاح «مسأله» درمورد دستگاه (E) — که جواب نهایی «مسأله» را داده است ـ به مفهوم عادی و خاص خود نیست، بلکه بـه‌مفهوم عام وکلی‌آن است.] هر کدام از ایـن مسأله‌ها، با مسألهٔ قبلی (و هم بعدی) خـود، هم ارز است، درست، مثل حلقه‌ای از زنجیر، که به‌حلقه‌های مجاور خود وصل شده است؛ در این جا، با زنجیره‌ای از مسأله‌های هم ارز سروکار داریم.

در زنجیرهٔ ما، (A) حلقهٔ اول و (E) حلقهٔ آخر است؛ (A) دستگاه معادله‌های اصلی و(E) جواب‌آن است. دربرابرما، مسیر کاملاً بی‌خدشه‌ای وجود داردکه، ما را، به‌جواب می‌رساند. با آغازازمسألهٔ اولیه، زنجیره‌ای

از مسأله‌ها تشکیل می‌دهیم که هر حلقهٔ آن، هم ارز جواب و، نسبت به حلقهٔ قبلی، نزدیکتربه‌آن است؛ به‌این ترتیب، با عبورازمسأله‌ای به‌مسألهٔ دیگر، در گام‌آخر، به‌جواب دست می‌یابیم.

با وجود این، حتی در ریاضیات هم، ضمن جست‌وجوی مجهول یا تلاش برای پیدا کردن اثبات، اغلب به‌وضعی برخورد می‌کنیم که رضایت کامل ما را جلب نمی‌کند. به‌همین مناسبت، به‌بررسی مختصرنوع‌های دیگر مسأله‌های کمکی می‌پردازیم.

۴§. مسأله‌های کمکی بابهرهٔ بیشتریا بهرهٔ کمتر: تبدیل یك‌طرفه

به‌طرحی از یك مثال می‌پردازیم:

A. مطلوب است حجم یك هرم، به شرطی که ... داده شده باشد.

فرض می‌کنیم، داده‌ها، برای محاسبهٔ حجم هرم کافی باشند، ولی در بین‌آن‌ها، مساحت قاعده وارتفاع هرم وجود نداشته باشد ـ هیچ‌کدام ازاین دو مقدار در بین داده‌ها نباشد. برای ما، همین مطلب مهم است وکاری به نوع داده‌ها ورابطهٔ بین‌آن‌ها نداریم و، به‌همین‌دلیل، دربارهٔ آن‌ها، سکوت کرده‌ایم[1].

روشن‌است‌که حجم هرم‌را وقتی‌می‌توان محاسبه‌کردکه قاعده وارتفاع آن مفروض باشد، ولی به‌طوری‌که گفتیم، هیچ‌کدام از این دو مقدار داده نشده‌اند. از آن‌جا که این‌دو مقدار برای ما معلوم نیستند، تلاش می‌کنیم آن‌ها را محاسبه کنیم و، بنابراین، مسألهٔ تازه‌ای دربرابر ما قرار می‌گیرد.

B. مطلوب است قاعده و ارتفاع هرمی که . . . داده شده است.

درمسألهٔ A، یك مجهول و درمسألهٔ B، دو مجهول داریم؛ داده‌ها، در هر دو مسأله، یکی است (که ما، به آن‌ها، اشاره نکرده‌ایم). می‌توان گفت‌که بستگی بین این دو مسأله، یك‌طرفه و نامتقارن است. اگر بتوانیم B را حل‌کنیم، قاعده وارتفاع هرم برای ما معلوم خواهد شد و، در نتیجه، خواهیم توانست حجم‌آن را محاسبه، یعنی مسألهٔ A را حل‌کنیم. ولی اگر

---

۱. مسألهٔ مشخصی‌که به‌صورت A باشد، درتمرین۱۸ فصل‌چهارم، داده شده‌است.

بتوانیم مسألهٔ A را حل کنیم، به‌هیچ وجه به‌معنای این نیست که مسألهٔ B را هم می‌توانیم حل کنیم: با وجودی که از نتیجهٔ مسألهٔ A، رابطهٔ ساده‌ای بین دومجهول مسألهٔ B به‌دست می‌آید، پیدا کردن هریك ازاین دومجهول، به‌طورجداگانه، ممکن است با مشکلی جدی برخوردکند. به‌این ترتیب، با حل A، نسبت به حل B، بـه چیزکمتری می‌رسیم. از دو مسألهٔ A و B، می‌توان مسألهٔ A را با بهرهٔ بیشتر (ثمربخش‌تر) ومسألهٔ B را با بهرهٔ کمتر (کمتر ثمربخش) دانست.

آن‌چه را که در بالا گفتیم، به صورتی کلی‌تر تنظیم می‌کنیم. دو مسألهٔ حل نشدهٔ A و B وجود دارندکه، دربارهٔ آن‌ها، تنها می‌توان گفت: برای ما معلوم است که چگونه ازجواب مسألهٔ B، به جواب مسألهٔ A برسیم،ولی نمی‌دانیم که چگونه می‌توان از جواب مسألهٔ A به جواب مسألهٔ B رسید. در چنین موقعیتی می‌گوییم کـه: مسألهٔ A کم بهره‌تر از مسألهٔ B است، یا (معادل‌آن) B پر بهره‌تر از مسألهٔ A است.

عبور ازمسألهٔ اصلی به یك‌مسألهٔ کمکی، که پربهره‌تر یا کم‌بهره‌تر ازمسألهٔ اصلی‌باشد (که‌درهرحالت، هم‌ارزآن نیست)، تبدیل یك‌طرفه (یا تبدیل‌بدون برگشت) نامیده می‌شود. درمثال ما، مسألهٔ A کم بهره‌تر از مسألهٔ Bاست و، بنابراین، تبدیل A به B، یك طرفه است. خوانندهٔ با تجربه، می‌تواند مثال‌های زیادی را به خاطرآوردکه، درآن‌ها، تبدیل یك طرفه بتواند مفید واقع شود.

گاهی هم، تبدیل یك طرفه، در جهت عکس مفید است، یعنی تبدیلی که، درآن، مسألهٔ کمکـی، کمتر از مسألهٔ اصلی، ثمربخش باشد. این هم، طرحی برای یك مثال:

A. مطلوب است محاسبهٔ مجهول‌های x_1، x_2، ...، x_{n-1} و x_n، به شرطی که ...

B. مطلوب است محاسبهٔ x_1، به شرطی که ...

فرض می‌کنیم، داده‌ها وشرط، برای پیدا کردن مجهول کافی و، ضمناً، برای هر دو مسأله، یکسان باشند، ولی، از آن جا که این داده‌ها نقشی در

بحث ما ندارند، دربارهٔ آن‌ها سکوت می‌کنیم. این که، حل مسألهٔ A، به خودی‌خود، به‌معنای حل مسألهٔ B است، روشن است؛ ولی، درحالت کلی، نمی‌توان‌حکم کرد که با حل‌مسألهٔB،مسأله A هم‌حل شده است: بنابرتعریفی که کردیم، A ثمربخش‌تر از B است. در خیلی موردها، می‌توان، برای حل مسألهٔ A، از مسألهٔ B، به عنوان یك مسألهٔ کمکی، سود جست؛ مثلاً در فصل سوم، وقتی‌که‌مسألهٔ A را با روش بازگشتی حل می‌کردیم، x_1 را به عنوان‌مجهولی درنظر می‌گرفتیم که باید قبل ازدیگران به‌دست‌آید، یعنی کار خود را، ازمسألهٔ کمکی B آغازمی‌کردیم وآن را، به‌عنوان‌کلیدحل مسألهٔ A، در نظر می‌گرفتیم.

۵§. مسأله‌های کمکی غیرمستقیم

با مثالی‌آغاز می‌کنیم. این مسأله را در نظر می‌گیریم:

A. مطلوب‌است شعاع‌کرهٔ محیط برچهاروجهی منتظمی‌که طول یال آن معلوم است.

اگر نتوانید راه حل دیگری، برای مسألهٔ A، پیدا کنید، می‌توانید از مسألهٔ کمکی زیر، استفاده‌کنید:

B. مطلوب است شعاع دایرهٔ محیط بر مثلث متساوی‌الاضلاعی که طول ضلع آن، برای ما، معلوم است.

به‌مفهوم تعریفی‌که در§§ ۲ و ۴ داشتیم، عبورازA به B، نه‌تبدیل دو جانبه است و نه تبدیل یك جانبه. در واقع، احتمال نمی‌رودکه، از قبل و به‌طور روشن، بدانیم‌که چگونه می‌توان ازحل مسأله B به‌حل مسألهٔA ویا برعکس، از حل مسألهٔ A، به حل مسألهٔ B رسید؛ مسأله‌های A وB هم‌ارز نیستند و، به‌مفهوم تعریفی که داشتیم، نمی‌توان یکی را ثمربخش‌تر از دیگری دانست.

با همهٔ این‌ها، مسأله‌های A و B، خویشاوندند. مسألهٔ B، بامسألهٔ A، شباهت دارد؛ در این جا، با یکی از نمونه‌هایی سروکار داریم که گواه است بر شباهت عمیقی که بین هندسهٔ مسطحه با هندسهٔ فضایی وجود دارد.

و البته، به‌اعتقاد بسیاری ازما، مسألهٔ B، ساده‌ترازمسألهٔ A است؛ بسیار پیش می‌آیدکه، ضمن برخورد با مسألهٔ B، خیلی ساده و بدون هیچ زحمتی، راه حل آن را به‌خاطر بیاوریم. طبیعی است که، در چنین وضعی، این پرسش پیش‌آید: آیا پرداختن به‌مسألهٔ B، ارزشی دارد؟ آیا ایـن امید وجود دارد که، با حل مسألهٔ B، بتوانیم حل مسألهٔ A را ساده‌تر کنیم؟

ممکن است، حل مسألهٔ B، هیچ چیز با ارزشی برای حل مسألهٔ A، به‌ما ندهد ـ حتی در حالتی که شباهت بین دو مسألهٔ A و B کاملاً روشن، و راه حل مسألهٔ B هم، بـه طور کامل، معلوم باشد، ممکـن است با چنین وضعی برخوردکنیم. ولی، حتی اگر در نظر اول گمان رودکه حل مسألهٔ B بی‌ثمر است، بازهم می‌تـواند مفید واقع شود. مقایسهٔ A با مشابه آن B، می‌تواند برای حل مسألهٔ A، آموزنده و راهنما باشد و، در نتیجه، مسألهٔ B سودمند است. غالباً، وضع طوری نیست که بتوان حل مسألهٔ B را، در مسألهٔ A، مستقیماً تقلید کـرد؛ ولی، اغلب می‌توان، با استفاده از شباهت A و B، بـه‌اندیشهٔ کارسازی رسید. مثلاً، در حالت مسألهٔ «مسطحهٔ» B، شعاع مجهول برابراست با مضرب ساده و گویایی ازارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع ($\frac{۲}{۳}$ این ارتفاع). و ایـن، ممکن است انگیزه پرسشی باشد: پس، درحالت مسألهٔ «فضایی» A، وضع چگونه است؟ آیا شعاع کره هم، مضرب ساده وگویایی از ارتفاع چهاروجهی منتظم است؟ این پرسش ویاپرسش‌های مشابه‌آن، می‌تواند مفیدباشدوراه را برای حل مسألهٔ A بگشاید. همچنین، ممکن است، برای حل مسألـهٔ A، به‌شعاع دایرهٔ محیطی یکی از وجه‌های آن احتیاج داشته باشیم (مثلاً برای تعیین ارتفاع چهاروجهی، که مربع آن برابر است با تفاضل مربع‌های یال چهاروجهی و شعاع دایرهٔ محیطی قاعدهٔ آن)، دراین حالت، حل مسألهٔ B، به‌عنوان حلقهٔ زنجیری به‌حساب می‌آید که باید برای حل مسألهٔ A فراهم شود.

به‌طور کلی، می‌توان انتظارداشت که مطالعهٔ مسألهٔ B، حتی درحالتی که معادل A نیست یا ازآن پر بهره‌تر یا کـم بهره‌تر هم نیست، برای حل

مسألهٔ A، نتیجه‌ای در بـر داشته باشد. چنین مسأله‌ای را ، مسألهٔ کمکی غیر مستقیم، برای مسألهٔ A گویند.

§۶. کمك جزئی، کمك در روش، انگیزه، راهنمایی، عمل.

مسألهٔ کمکی، به‌طریقه‌های کاملاً متفاوتی، می‌تـوانـد به‌حل مسألهٔ اصلی کمك کند.

مسألهٔ کمکی، وقتی هم ارز مسألهٔ اصلی است کـه، با حل شدن آن، حل‌کامل مسألهٔ اصلی هم تأمین شود؛ همین داوری، درموردی هم که‌مسألهٔ کمکی، ثمربخش‌تر ازمسألهٔ اصلی باشد، درست است. (اختلاف این دو نوع مسألهٔ‌کمکی، وقتی بروزمی‌کندکه ما، قادر به‌حل مسألهٔ کمکی نباشیم. اگر موفق بـه‌حل مسألهٔ هم ارز نباشیم، مسألهٔ اصلی را هم نخواهیم توانست حل کنیم؛ در حالی‌کـه اگـر نتوانیم مسألـهٔ ثمربخش‌تر را حل‌کنیم، چنین دورنمای تیره و تاری برای حل مسألهٔ اصلی پدیدار نمی‌شود.)

بعضی ازگونه‌های مسأله‌های کمکی، حتی اگر هم به طور کامل حل شوند، حل‌کامل مسألهٔ اصلی را تضمین نمی‌کنند؛ با وجوداین، ممکن‌است، کمکی جزئی برای حل‌آن باشند. حل قسمتی ازمسألهٔ کمکی (و یا حتی‌حل کامل‌آن)، ممکن است خود، قسمتی ازحل مسألهٔ اصلی باشد و راه را برای ادامهٔ کارآماده کند (و یا ممکن است، حل همه یا قسمتی از مسألهٔ کمکی، به‌عنوان پایه‌ای، برای نتیجه‌گیری ویاساختمان مسألهٔ اصلی، مورداستفاده قرارگیرد).

حتی اگر مسألهٔ کمکی نتواند درجزء هم‌کمك‌کند، می‌تواند در روش کار به‌ما یاری برساند: می‌تواند روش حل را به‌ما تلقین کند، مسیرکلی راه حل را به‌ما نشان دهد، آغازکار را مشخص‌کند و غیره. انتخاب یك مسألهٔ کمکی‌که شبیه مسألهٔ اصلی، ولی ساده‌تـر ازآن باشد (مثال §۵ را ببینید)، می‌تواند در پیدا کردن روش حل مسألهٔ اصلی، به‌ما کمك‌کند.

ممکن است، درپایان حل مسألهٔ اصلی، نتوانیم‌آن جزء یا اندیشه‌ای

را که ازمسألهٔ کمکی اقتباس کرده‌ایم یا به‌ما تلقین شده‌است، تشخیص دهیم. با وجود این، کاملاً احتمال دارد که تحت تأثیر مسألهٔ کمکی بوده است که انگیزه‌ای برای حل مسألهٔ اصلی پیدا کرده‌ایم. چه بسا که مسألهٔ کمکی، به‌خاطر شباهت یا تباینی که با مسألهٔ اصلی داشته است،آن را مفهوم‌تر و دسترسی به‌آن راساده‌تر کرده است؛ ممکن است خاطره ما را زنده کرده است، قطار اندیشه را به حرکت واداشته است و، در نتیجه، به حقیقت‌هایی پی برده‌ایم که در حل مسألهٔ مورد بررسی، به‌ما کمك کرده‌اند.

مسألهٔ کمکی، به‌نحو ظریف‌تری هم می‌تواند عمل کند. با مشغول شدن به‌مسأله، راه حل‌های معلومی را می‌پذیریم. فرض کنید، کار را بتوان در دو مسیر ادامه داد، دو راه برای ادامهٔ حل پیدا کرده باشیم: یکی به طرف راست و دیگری به‌طرف چپ. کدامیك را انتخاب کنیم؟ کدامیك ازدو راه، با احتمال بیشتری، ما را به‌جواب می‌رساند؟ باید، به‌صورتی عقلانی، کار را ارزیابی کرد ـ و در این رابطه، مسألهٔ کمکی، می‌تواند راهنمائی مطلوب باشد. بسیار محتمل است که صرف وقت برای حل مسألهٔ کمکی، و تجربه‌ای که از این راه به‌دست می‌آید، بتواند برای حل مسألهٔ اصلی کاملاً مفید واقع شود.

گاهی، می‌توان کار با مسأله‌های کمکی را، به‌طورساده، به‌قصد کسب تجربه در نظر گرفت. ممکن است مسألهٔ اصلی، شامل اندیشه‌ای باشد که ما به‌آن‌خو نگرفته‌ایم. در چنین موردهایی باید از مسأله‌های ساده‌تری آغاز کرد که با همان مضمون اندیشه‌ای سروکاردارند؛ دراین‌جا، این‌گونه مسأله‌ها، نقش مسأله‌های کمکی غیر مستقیم را برای مسألهٔ اصلی به‌عهده دارند (که ممکن است، خیلی دور ازآن باشند).

باهمهٔ امکان‌های‌مثبت زیادی که درمورد مسأله‌های کمکی برشمردیم، در بعضی حالت‌ها فایدهٔ ناچیزی نصیب ما می‌شود و یا، حتی به کلی، بی‌فایده می‌ماند. به‌همین مناسبت، قبل ازآن‌که، به‌طورجدی، خودرا درگیر مسألهٔ کمکی کنیم، باید همهٔ امکان‌های آن را بررسی و شانس استفادهٔ ازآن را، ارزیابی کنیم.

تمرین‌ها و یادداشت‌های تکمیلی

۱. سرچشمه‌های قابل اطمینان مسأله‌های کمکی. مسألهٔ کمکی، می‌تواند «خود به‌خود»، از مسألهٔ اصلی «زاده شود». ولی ممکن است که، ضمن حل مسأله‌ای، به‌فکر استفاده از مسألهٔ کمکی بیفتیم، بدون این‌که چیز مشخصی درذهن ما وجود داشته باشد. برای چنین‌موردی است که‌وجود فهرستی ازسرچشمه‌های مسأله‌های کمکی (که بتوان مسألهٔ کمکی‌مفیدی را ازآن‌بیرون کشید)، لازم است. روش‌های مشخص زیادی، برای تنظیم مسأله‌های کمکی وجود داردکه ما، بعضی از مهم‌ترین‌آن‌ها را، مورد بررسی قرار خواهیم داد؛ در بسیاری موردها، می‌توان با این روش‌ها، به‌مسأله‌های کمکی معینی رسید، البته، بدون این‌که مفید بودن‌آن‌ها را بتوان تضمین کرد.

مسألهٔ کمکی، در هر مرحله‌ای از روند حل، می‌تواند پدید آید؛ ولی، فرض را براین می‌گذاریم که از خود فاز اصلی، خیلی دور نشده باشیم. همهٔ عنصرهای اصلی مسأله‌ـمجهول‌ها وداده‌ها، یا شرط و نتیجه‌ـ وهمچنین روشن‌ترین بخش‌های‌آن‌ها (مثل جنبه‌های مختلف شرط وغیره) رابررسی وبه‌طورکامل مطالعه کرده‌ایم، ولی هنوزبه‌طرح قابل اطمینانی نرسیده‌ایم و، بنابراین، می‌خواهیم هدفی جالب‌تر و دردسترس‌تر دربرابر خود داشته باشیم. در چنین موقعیت‌هایی، اطمینان داریم که بررسی عنصرهای اصلی مسأله، می‌تواندچنین هدفی را، با انتخاب مسألهٔ کمکی مناسبی، دراختیارما بگذارد. اکنون مهم‌ترین حالت‌ها را دنبال می‌کنیم.

۲. *Respice finem*. آرزوی رسیدن به‌هدف را می‌توان، به‌عنوان انگیزه درنظر گرفت؛ این انگیزه، ما را به‌کارهایی وامی‌داردکه، گمان می‌کنیم، می‌توانند ما را به‌هدف برسانند. پایان مورد آرزوی ما، وسیله را تلقین می‌کند. بنابراین، به‌پایان بنگرید، چشم ازهدف برندارید؛ هدف، اندیشهٔ شما را هدایت می‌کند. *Respice finem*، یعنی «پایان را بنگرید»؛ این جمله، در زمانی‌که زبان لاتین متداول بود، به‌صورت یك «ضرب‌المثل»

رواج داشت[1]. هوبس، این مطلب را روشن می‌کند: «... در همهٔ کارهای خود، آن چه را که می‌خواهید به دست بیاورید، به عنوان چیزی که همهٔ اندیشه‌های شما را به‌سمت دستیابی به‌آن جهت می‌دهد، در برابر چشمان خود داشته باشید».

با توجه به پایان مسأله، امیدواریم به اندیشهٔ وسیله‌هایی بیفتیم که برای حل آن، مناسب باشند. برای این که زمان رسیدن به‌این اندیشه را کوتاه کنیم، باید بکوشیم تا پایان را، با حداکثر روشنی پیش خود مجسم کنیم: چه چیزی خواسته شده است؟ چه نوع موضوعی را می‌خواهید پیدا کنید؟ مجهول چیست؟ نتیجه یا حکم شامل چه چیزی است؟ باید پیگیرانه نیروی خود را به‌کار بریم تا بتوانیم، وسیله‌های مناسب را مجسم کنیم: این موضوع را چگونه می‌توان به‌دست آورد؟ چنین موضوعی را در کجا می‌توان جست‌وجو کرد؟ کالایی از این نوع را در کدام مغازه می‌توان پیدا کرد؟ مجهول‌هایی از این گونه را، با چه شیوه‌ای می‌توان پیدا کرد؟ این گونه حکم‌ها را، از چه راهی می‌توان ثابت کرد؟

دو پرسش آخر، به ویژه، به‌مسأله‌های ریاضی مربوط می‌شوند: یکی از آن‌ها، به‌مسأله‌های پیدا کردنی و، دیگری، به مسأله‌های ثابت کردنی، مربوط است. هر یک از این دو حالت را، به‌طور جداگانه، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱°. مسأله‌های پیدا کردنی. شبیه §۴، طرحی از یک مسأله را در نظر می‌گیریم: «مطلوب است حجم یک هرم، به‌شرطی که . . . داده شده است». مجهول این مسأله، روشن است، ولی دربارهٔ داده‌ها و شرط چیزی گفته نشده است. این مجهول را چگونه می‌توان پیدا کرد؟ حجم هرم را چگونه می‌توان محاسبه کرد؟ برای به‌دست آوردن چنین مجهولی، به چه داده‌هایی نیاز داریم؟ داده‌های مسألهٔ ما، برای پیدا کردن مجهول،

---

۱. از یک شعر مربوط به‌سده‌های میانه:

Quidquid agis prudenter agas et respice finem

(هر کاری که می‌کنید، بهتر است به‌پایان بنگرید و از پایان انجام دهید.)

کافی است، ولی، از بخت بد، نمی‌توانیم مجهول را مستقیماً، از این داده‌ها، به‌دست‌آوریم. مابه‌دنبال داده‌های مناسب‌تری هستیم؛ درواقع، می‌خواهیم مسألهٔ دیگری، را پیدا کنیم که ساده‌تر و در دسترس‌تر باشد، ولی همین مجهول را داشته باشد.

اگر بتوانیم چنین مسأله‌ای راپیدا کنیم، ممکن است با موقعیت‌های مختلفی روبه‌رو شویم.

۲°. مسأله‌ای با همین مجهول که، قبلاً، حل شده است. اگر این شانس را بیاوریم و به‌چنین مسأله‌ای برخوردکنیم، آن وقت می‌توان داده‌های آن را، به‌عنوان مجهول‌های مسألهٔ کمکی در نظر گرفت ـ واز آن بیشتر، برای حل مسألهٔ اصلی جلورفت. این روندکار، درغالب موردها، مفید است. آن را، روی همان مسأله‌ای که تنها طرح آن را داده بودیم، روشن می‌کنیم.

مجهول، در این حالت، عبارت است از V، حجم هرم. برای این که، مسأله‌ای با این مجهول، خوب تنظیم شده باشد، باید مساحت S قاعده وطول h ارتفاع آن‌داده شده باشد. حل چنین مسأله‌ای رامی‌دانیم $\left(V=\frac{Sh}{۳}\right)$ و می‌توانیم‌آن را به‌خاطربیاوریم. از این راه حل، چگونه استفاده کنیم؟ طبیعی‌ترین راه این است که‌کوشش‌کنیم S و h را، براساس داده‌های مسأله، محاسبه کنیم. برای این منظور، باید S و h را، به‌عنوان مجهول‌های تازهٔ خود، درنظربگیریم؛ به‌این ترتیب، به‌دو مسألهٔ کمکی می‌رسیم که مجهول یکی S و مجهول دیگری h است؛ داده‌های این دو مسأله، همان داده‌های مسألهٔ اصلی است (نمونهٔ مشخص این حالت را، می‌توانید در تمرین‌های ۱۸ و ۱۹ از فصل چهارم، پیدا کنید).

۳°. این روند، غالباً مورد استفاده قرار می‌گیرد و در بسیاری موردها، می‌توان بارها آن را به‌کاربرد. فرض‌کنید، x، مجهول اولیه‌از مسألهٔ اصلی باشد. تلاش می‌کنیم، داده‌های مناسبی پیدا کنیم و متوجه می‌شویم که، اگر y'، y''، y'''، ... را می‌دانستیم، می‌توانستیم، با

استفاده از جواب مسأله‌هایی که قبلاً حل شده‌اند، x را به‌دست‌آوریم. y'، y''، y'''، . . . را به‌عنوان هدف‌تازه، به‌عنوان مجهول‌های درجه دوم، در نظر بگیریم. سپس، اگر از z'، z''، z'''، . . . اطلاع داشتیم، با استفاده از جواب مسأله‌هایی که قبلاً حل شده‌اند، می‌توانستیم y'، y''، y'''، . . . را به‌دست‌آوریم و، دوباره،مجهول‌های z'، z''، z'''، . . . را به‌عنوان هدف تازه، مجهول‌های درجه سوم، در نظر بگیریم و غیره. در واقع، از پایان به آغاز حرکت می‌کنیم (§۲ فصل هشتم را ببینید).

برای این‌که آمادگی انجام چنین کاری راداشته باشیم، باید ذخیره‌ای از مسأله‌های اساسی و قابل کاربرد در خود داشته باشیم و بتوانیم این ذخیره را به‌خوبی منظم و به‌خوبی، ازآن استفاده‌کنیم (تمرین ۴ فصل دوازدهم را ببینید).

۴°. مسألهٔ حل نشده با همین مجهول. چنین مسأله‌ای را، می‌توان کلید حل مسألهٔ اصلی دانست. این مسأله را، به‌عنوان یک‌مسألهٔ کمکی در نظر می‌گیریم و به‌حل‌آن می‌پردازیم. این روند مفید است، ولی اگر شرایط دیگر را مساوی بگیریم، نسبت به حالت ۲°،کمتر مساعد است. در واقع، در این جا، ابتدا باید مسألهٔ کمکی را حل‌کرد و، سپس علاوه برآن، به‌همان ترتیبی که در ۲° شرح داده شد،آن را به‌کار برد.

۵°. اگر به طور کلی، نمی‌توانیم از مجهولی که در مسأله معین شده است، استفاده‌کنیم، اگر نمی‌توانیم از مسأله‌ای با همین مجهول، که قبلاً حل شده است کمک بگیریم و یا نمی‌توانیم مسأله‌ای با همین مجهول بیندیشیم،آن وقت، می‌توانیم درجست‌وجوی مسأله‌ای بامجهول خویشاوند باشیم. مثلاً، اگر می‌خواهیم حجم یک هرم را پیدا کنیم و هیچ راه دیگری هم به‌ذهنمان نمی‌رسد، می‌توانیم روش‌های مختلف پیدا کردن مساحت مثلث را به خاطرآوریم و، سپس، سعی کنیم با شباهتی‌که بین مثلث و هرم مثلث‌القاعده (چهاروجهی) وجود دارد، چیز مفیدی برای مسألهٔ خود بیرون بکشیم.

۶°. مسأله‌های اثباتی. در این جا هم، می‌توانیم همهٔ آن چه را که در مورد مسأله‌های پیدا کردنی گفته‌ایم، با جزیی تغییر، تکرار کنیم، ولی ما به‌سرعت و با کوتاه‌کردن مطلب، از آن می گذریم.

در این جا هم، بهتر است از طرح یك مسأله آغاز کنیم. فرض کنید، بخواهیم این قضیه را ثابت‌کنیم: «اگر . . . درآن صورت، زاویه قائمه است» نتیجهٔ این قضیه، کاملاً معلوم است: «زاویه قائمه است». ولی ازشرط‌آن اطلاعی نداریم. این حکم را چگونه می‌توان ثابت‌کرد؟ نتیجه‌هایی از این نوع را از چگونه شرطهایی می‌توان بیرون آورد؟ این پرسش‌ها، انگیزه‌ای برای ما می‌شوند تا قضیهٔ دیگری را پیدا کنیم که همین حکم را داشته باشد، ولی اثبات‌آن ساده‌تر باشد.

اگر بخت به ما یاری کرد و قضیهٔ ثابت شده‌ای را با همان حکم پیدا کردیم، می‌توانیم شرط آن را به‌عنوان هدف بینابینی خود انتخاب کنیم، یعنی کوشش می‌کنیم، بر اساس شرط قضیهٔ اصلی، شرط این قضیهٔ بینابینی را ثابت‌کنیم.

این شیوهٔ کار، در غالب موردها، ما را به‌موفقیت می‌رساند. گاهی لازم است‌که این روند را تکرار کنیم و از چند هدف بینابینی استفاده‌کنیم و، به هر حال، با حرکت از پایان به آغاز، اثبات حکم مورد نظر را پیدا کنیم.

اگر قضیه‌ای را، با همین حکم، به خاطر آوریم که قبلاً در جایی ثابت نشده است، آن وقت، باید قبل ازهر کار، به‌اثبات آن بپردازیم. این تلاش می‌تواند مفید باشد، ولی ضمناً، باید تمام جانب‌های امر، با دقت مورد ارزیابی قرار گیرد.

در حالتی‌که نتوانیم قضیهٔ ثابت شده‌ای با همین حکم را به خاطر آوریم و یا نتوانیم قضیهٔ تازه‌ای با همین حکم را، که از عهدهٔ اثبات‌آن برآییم، فکر کنیم، آن وقت باید به‌جست‌وجوی قضیه‌ای برویم که حکمی شبیه حکم قضیهٔ ما داشته باشد.

۷°. با هر نوع مسأله‌ای‌که سر و کار داشته باشیم، می‌توان از قبل

اطمینان داشت که، برای حل آن، باید از آگاهی‌های قبلی خود، استفاده کنیم. ولی، به‌خصوص درحالتی که مسأله دشوار باشد، نمی‌توان باهمان اطمینان پیش‌بینی کرد که چه بخشی از این آگاهی‌ها را باید مورد استفاده قرار داد. به‌طور کلی، هر مسأله‌ای کـه قبلاً حل شده است، یا هر قضیهٔ قبلاً ثابت شده‌ای، به خصوص اگـر وجـه مشترکی با مسألهٔ ما داشته باشد، ممکن است مفید واقع شود، ولی، طبیعی است کـه برای مطالعهٔ همهٔ این مسألـه‌ها یا قضیه‌ها، وقت پیدا نمی‌کنیم. بحثی کـه در این جا داشتیم، می‌تواند ما را به‌سمت مهم‌تریـن نقطه‌های این وجه مشترک‌ها هدایت کند. درمسأله‌های پیدا کردنی، در درجهٔ اول، باید از مسأله‌های حل شده‌ای استفاده کرد که مجهولی از نوع مجهول مسألهٔ ما دارند؛ ودر حالت مسأله‌های اثباتی، از قضیه‌های ثابت شده‌ای که همان حکم قضیه ما را دارند. به‌این ترتیب، بی‌هیچ تردیدی باید از خود پرسید: مجهولی از این نوع را چگونه می‌توان پیدا کرد؟ حکمی از این گونه را چطور می‌شود ثابت کرد؟

۳. حذف جنبه‌ای از شرط یا اضافه کردن جنبه‌ای به آن. وقتـی کـه کار به کندی پیش رود و یا اصلاً پیشرفتی نداشته باشد، به‌تدریج شکیبایی‌خود را ازدست می‌دهیم و به‌سمت مسألهٔ دیگری تمایل پیدا می‌کنیم. درچنین موردی، می‌توان مسأله‌را تغییرشکل‌داد وآن را به‌مسأله‌ای خویشاوند تبدیل کرد، با این‌شرط که‌مطالعهٔ این‌مسألهٔ‌خویشاوند، برای‌حل‌مسألهٔ‌اصلی، مفیدبه‌نظر برسد. فهرست‌روشن‌ترین‌دگرگونی‌های‌ازاین‌نوع را می‌آوریم.

مسأله‌های پیدا کردنی:

۱°. حذف قید معینی از شرط مسأله؛

۲°. اضافه‌کردن قیدی به‌شرط.

تغییر ۱°، شرط را گسترده‌تر و تغییر ۲°، آن را مقیدتر می‌کند.

مسأله‌های اثبات‌کردنی:

۱°. حذف جنبه‌ای از شرط؛

۲°. اضافه‌کردن جنبه‌ای به‌شرط.

°۳. حذف جنبه‌ای از حکم؛

°۴. اضافه کردن جنبه‌ای به‌حکم.

تغییرهای °۱ و °۴، قضیه را تقویت و تغییرهای °۲ و °۳، آن را تضعیف می‌کند.

تأثیر این تغییرها، در یادداشت‌های تکمیلی ۴ و ۵، مورد بررسی قرار گرفته است.

۴. گسترده‌تر کردن و یا تنگ‌تر کردن شرط. دو شرط $A(x)$ و $B(x)$، شامل موضوع x، را درنظرمی‌گیریم که به‌یک مقوله مربوط باشند. گوییم $A(x)$ تنگ‌تر از $B(x)$، یا (بـه همان معنا) $B(x)$ گسترده‌تر از $A(x)$ است، وقتی کـه هر موضوع صادق در $A(x)$، در $B(x)$ هم صدق کند، (به این ترتیب، ایـن اصطلاح‌ها (اصطلاح‌های «تنگ‌تر» و «گسترده‌تر» را، به مفهوم دقیق خود این واژه‌ها به‌کار نمی‌بریم: درحالتی که $A(x)$ و $B(x)$ هم ارز باشند، می‌توان گفت که $A(x)$ تنگ‌تر از $B(x)$ و $B(x)$ تنگ‌تر از $A(x)$ است.)

°۱. گسترده‌ترکردن‌شرط،به‌معنای عبور از مسألهٔ اصلی، به‌مسألهٔ دیگری است کـه شرطی وسیع‌تر داشته باشد. خواننده متوجه شده است که، در فصل‌های قبل، اغلب، به‌چنین کاری دست زده‌ایم (ولو این که، آن را، با این عبارت‌ها، شرح نداده باشیم). مثلاً، در شرط مسأله‌های ساختمانی هندسه، معمولاً صحبت از نقطه است. ولی، وقتی که یک مکان هندسی را پیدا می‌کنیم که این نقطه متعلق به آن است، در واقع، تنهـا قسمتی از شرط را نگه می‌داریم و بقیـهٔ آن را حـذف، یعنی شرط را گسترده‌تـر می‌کنیم. بازهم یک مثال: وقتی که در ابتدا، تنها یک معادله، از دستگاه معادله‌های لازم برای پیدا کـردن چند مجهول، را تشکیل می‌دهیم، در واقع تنها بـه یک قسمت (یک جنبه، یک خواست، . . .) از شرط توجه می‌کنیم و، بنابراین، شرط را گسترده‌تر کرده‌ایم.

گسترش شرط، به خصوص، وقتی مفید است کـه بتوانیم دو تقاضا را برآوریم:

a) مجموعهٔ همهٔ موضوع‌هایی را که در شرط گسترش یافته صدق می‌کنند، شرح دهیم (جست‌وجو کنیم، برشمریم، . . .)؛

b) همهٔ موضوع‌هایی از این مجموعه را، که در شرط اولیه صدق نمی‌کنند، جدا کنیم.

گمان می‌کنم، خواننده بخوبی می‌داند که، به کمك روش دو مکان هندسی، چگونه می‌توان به‌این دوهدف رسید؛ دراین جا، توصیه‌می‌کنیم، یکباردیگر، ۳° از §۳ فصل ششم وبعضی تمرین‌ها ویادداشت‌های‌مربوط به‌معماها را از نظر بگذراند (تمرین ۲۳ فصل ششم را هم ببینید).

خواننده‌ای که با برنامهٔ دکارت آشنا باشد، به خوبی می‌تواند متوجه شودکه، به‌ترتیب دیگری هم، می‌توان ازگسترش شرط استفاده‌کرد.

۲°. تنگ‌ترکردن‌شرط، به‌معنای‌عبوراز‌مسألهٔ مفروض‌به‌مسأله‌دیگری است‌که شرطی‌محدودترداشته‌باشد. آن‌چه تاکنون دیده‌ایم، به‌طور عمده، چیزی‌دراختیارما نمی‌گذاردکه بتوانیم، به‌کمك آن، این‌کاربرد را روشن کنیم. ولی در این جا، یك مثال می‌آوریم.

فرض‌کنید، بخواهیم این معادلهٔ درجهٔ n را حل کنیم:

$$x^n+a_۱x^{n-۱}+a_۲x^{n-۲}+\ldots+a_n=۰$$

با ضریب‌های درست $a_۱$، $a_۲$، . . .، a_n. بهتر است، ابتدا تحقیق کنیم، آیا این معادله ریشه‌ای درست دارد یا نه! با اضافه‌کردن این خواست اضافی ـ که باید ریشهٔ معادله، عددی درست باشد ـ در واقع، شرط‌آن را تنگ‌تر کرده‌ایم. ولی، جست و جوی ریشه‌های درست، به‌طور نسبی، ساده‌تر است (این‌گونه ریشه‌ها، باید مقسوم‌علیه‌هایی از عددآزاد a_n باشند)، و اگر موفق شویم چند ریشهٔ درست معادله را پیدا کنیم، با پایین‌آمدن درجهٔ معادله، پیدا کردن ریشه‌های دیگرهم ساده‌تر می‌شود. (مثال مشخص را می‌توانید در تمرین ۳۲ فصل دوم ببینید.)

تنگ‌تر کردن شرط، در مسأله‌های عمیق‌تر و جدی‌تر هم، می‌تواند کاربرد داشته باشد (تمرین ۱۱ را ببینید).

۵. مطالعهٔ قضیهٔ قوی‌تر یا ضعیف‌تر. دو حکم A و B را در نظر می‌گیریم.

اگر بدانیم که A از B نتیجه می‌شود (یعنی، وقتی می‌توانیم درستی A را نتیجه بگیریم که درستی B را در اختیار داشته باشیم)، گوییم A از B ضعیف‌تر است، یا (که به همان معنا است) B از A قوی‌تر است. این رابطهٔ بین A و B، به‌خصوص، وقتی جالب می‌شود که هیچ کدام از دو حکم A و B را، نتوانیم ثابت یا رد کنیم.

۱۰. بررسی پایه‌های ممکن اثبات. فرض کنید، می‌خواهیم ثابت کنیم که، دومقدار با هم برابر نیستند. مثلاً، فرض کنید که می‌خواهیم حکم A را ثابت کنیم که می‌گوید:

$$e < \pi$$

به‌سادگی متوجه می‌شویم که، عدد سومی وجود دارد که می‌توان، آن‌را، به‌سهولت، با دو عدد مفروض مقایسه کرد. در مثال، هم e و هم π را می‌توان با عدد ۳ مقایسه نمود. بنابراین، برای اثبات قضیهٔ A، قضیهٔ B را در نظر می‌گیریم که می‌گوید:

$$e < ۳ \quad \text{و} \quad ۳ < \pi$$

روشن است که A، نتیجهٔ مستقیمی از B است. حکم جدید B، چیزی بیشتر از A را ثابت می‌کند و، بنابراین، نسبت به A ـ که می‌خواستیم ثابت کنیم ـ قوی‌تر است.

به طور کلی توجه کنیم که، برای اثبات نابرابری عددهای گنگ، تقریباً همیشه، ناچاریم شبیه مورد بالا عمل کنیم، یعنی همیشه، باید در جست‌وجوی عدد گویایی باشیم که این دو عدد گنگ را از هم جدا می‌کند (یعنی، درحدفاصل آن‌ها، قراردارد). وقتی که به‌این‌صورت عمل‌می‌کنیم، به‌معنای آن است که حکم اولیه را به‌حکمی قوی‌تر تبدیل می‌کنیم: استفاده از عدد جداکننده، ما را به‌حکمی قوی‌تر می‌رساند.

در بررسی‌های جدی‌تری ازاین نوع، اغلب به‌این وضع برمی‌خوریم که، برای اثبات درستی قضیهٔ A، درجست‌وجوی قضیهٔ قوی‌تر B باشیم، قضیه‌ای که بتوان A را ازآن نتیجه گرفت و، ضمناً، به مناسبت موقعیت خاصی که دارد، ساده‌تر از A قابل بررسی باشد. با اثبات قضیهٔ B، مثل

این است که توانسته‌ایم «پایه» و مبنای درستی قضیهٔ A را، نمایان کنیم. البته، وقتی دربارهٔ قضیهٔ Bـ که باید A را از روی آن نتیجه گرفت ـ می‌اندیشیم، هنوز نمی‌دانیم که آیا قضیهٔ B را می‌توانیم ثابت کنیم یا نه؛ بالاتر از آن، حتی نمی‌دانیم، آیا قضیهٔ B درست است یا نه. بنابراین، در چنین موقعیتی، هنوز به‌هیچ وجه نمی‌توان قضیهٔ B را «پایه‌ای» برای درستی قضیهٔ A دانست، بلکه تنها «پایه‌ای ممکن» یا «پایه‌ای احتمالی» برای قضیهٔ A به‌شمار می‌رود.

۲°. مطالعهٔ نتیجه. فرض کنید بخواهیم برابری دو مقدار را ثابت کنیم. مساحت سطح کرهٔ به‌شعاع r را، S می‌گیریم و فرض می‌کنیم که می‌خواهیم این حکم را ثابت کنیم که

$$S = ۴\pi r^۲$$

می‌توان، در ابتدا به‌اثبات چیز کم‌تری قانع شد ـ قضیهٔ B ـ که می‌گوید:

$$S \leqslant ۴\pi r^۲$$

(احتمالاً، بتوانیم حکم B را، با در نظر گرفتن چندوجهی‌های محیط بر کره ثابت کنیم.) به‌هرحال، روشن است که B نتیجه‌ای از A است؛ قضیهٔ B را می‌توان از قضیهٔ A نتیجه گرفت، یعنی B، ضعیف‌تر از A است.

با وجود این، اثبات قضیهٔ ضعیف‌تر B، ممکن است سر آخر، ما را به‌اثبات درستی قضیهٔ A برساند. در واقع، تصور مربوط به اثبات B، ممکن است ما را به‌تصور اثبات قضیهٔ ضعیف‌تر دیگری هم ـ که با یك نابرابری دیگر سروکار دارد ـ بیندازد (که در این صورت، باید به‌جای چند وجهی‌های محیطی، چند وجهی‌های محاط در کره را درنظر گرفت) و، سپس، از ترکیب این دو قضیهٔ ضعیف‌تر، اثبات درستی قضیهٔ A به‌دست آید. در بررسی‌های ریاضی، اغلب به‌چنین موردهایی برخورد می‌کنیم.

وقتی که نمی‌توانیم قضیهٔ اصلی A را ثابت کنیم، قضیهٔ ضعیف‌تر B را به‌عنوان تکیه‌گاهی درنظر می‌گیریم و، با استفاده از نیروی محرکه‌ای که با اثبات B پدیدار می‌شود، خود را به A می‌رسانیم. این وضع، حتی برای اثبات ساده‌ترین قضیه‌ها هم، ممکن است پیش آید. مثلاً، می‌توان،

برای اثبات قضیهٔ کلی A، ابتدا قضیهٔ ضعیف‌تر B را ـ که مربوط به حالت خاصی از A است ـ ثابت و، سپس، از B به‌عنوان تکیه‌گاهی، برای جهش به‌سمت A، استفاده کرد.

آیا نمی‌توانید مثالی، در این مورد، پیدا کنید؟

۶. m و n را دو عدد مثبت و، ضمناً، $m>n$ می‌گیریم. مسأله‌های زیر را با هم مقایسه کنید.

A. مطلوب است مقسوم‌علیه‌های مشترك دو عدد m و n.

B. مطلوب است مقسوم‌علیه‌های مشترك m و $m-n$.

بین A و B، چه رابطهٔ منطقی وجود دارد؟

اگر قرار باشد مسألهٔ A را حل کنید، آیا ترجیح نمی‌دهید از A به B عبور کنید؟

از این اشاره، برای پیداکردن مقسوم‌علیه‌های مشترك دو عدد ۴۳۷ و ۳۲۳ استفاده کنید.

*۷. این مسأله‌ها را با هم مقایسه کنید:

A. ماکزیمم تابع $f(x)$ را پیدا کنید.

B. مقدارهایی از x را پیدا کنید، که به‌ازای آن‌ها، مشتق $f'(x)$ از تابع مفروض $f(x)$، برابر صفر شود.

چه رابطهٔ منطقی بین A و B وجود دارد؟

آیا در عبور از A به B، امتیازی نمی‌بینید؟

۸. مثلث دلخواهی را در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم:

O — مرکز دایرهٔ محیطی،

G — نقطهٔ برخورد میانه‌ها (مرکز ثقل)،

E — نقطه‌ای واقع بر خط راست OG، به نحوی که $۲OG=GE$ باشد (فرض می‌کنیم که نقطهٔ G بین O و E باشد).

دو قضیهٔ زیر را در نظر می‌گیریم:

A. سه ارتفاع مثلث، در یك نقطه به‌هم می‌رسند.

B. سه ارتفاع مثلث، از نقطهٔ E می‌گذرند.

بین A و B، چه رابطهٔ منطقی وجود دارد؟
آیا نوعی مزیت برای عبور از A به B نمی‌بینید؟
مسألهٔ B را حل کنید.

*۹. دو مسألهٔ زیر را با هم مقایسه کنید (همه جا، به‌ریشه‌های حسابی توجه داشته باشید):

A. ثابت کنید:

$$\lim_{x \to +\infty}(\sqrt{x+1}-\sqrt{x})=0$$

B. برای عدد مثبت و مفروض ε، مقدار مثبت x را طوری پیدا کنید که داشته باشیم:

$$\sqrt{x+1}-\sqrt{x}<\varepsilon$$

چه رابطهٔ منطقی بین A و B وجود دارد؟
آیا در عبور از A به B، مزیتی نمی‌بینید؟
مسألهٔ B را حل کنید.

۱۰. دو مسألهٔ زیر را مقایسه کنید (n، عددی است مثبت و درست):

A. این حکم را ثابت (یا رد) کنید:
اگر 2^n-1 عددی اول باشد، n هم عددی اول است.

B. این حکم را ثابت (یا رد) کنید:
اگر n عددی مرکب (غیر اول) باشد، 2^n-1 هم حتماً عددی مرکب است.

بین A و B، چه‌رابطهٔ منطقی وجود دارد؟
آیا در عبور از A به B مزیتی نمی‌بینید؟
B را ثابت کنید.

۱۱. جست‌وجوی نمونهٔ متناقض. نمونهٔ متناقض، اعتبار حکمی را، که باید درمورد همهٔ موضوع‌های یك مقوله صادق باشد، ازبین می‌برد: نمونهٔ متناقض، موضوعی از همین مقوله را نشان می‌دهد که، دربارهٔ آن، نمی‌توان حکم مفروض را به‌کار برد. جست‌وجوی نمونهٔ متناقض،

ویژگی‌هایی دارد که باید دربارهٔ آن‌ها بحث کنیم، اگرچه اگر بخواهیم مطلب را به‌اندازهٔ کافی بشکافیم، تا حدی، از بحث مورد نظر این کتاب دور می‌شویم.

*۱°. مسألهٔ ثابت کردنی. حکم زیر را ثابت یا ردکنید:

اگر رشتهٔ نامتناهی $a_1+a_2+a_3+\ \ldots$ متقارب باشد، رشتهٔ نامتناهی $a_1^3+a_2^3+a_3^3+\ \ldots$ هم متقارب خواهد بود.

بعد از مقداری کار، ممکن‌است، نسبت به‌درستی این حکم، بدگمان شویم؛ آن وقت است که سعی می‌کنیم، با پیدا کردن یك نمونهٔ متناقض آن را ردکنیم.

۲°. پرسش مربوط به پیدا کردن مسألهٔ کمکی، برای مسأله‌های پیدا کردنی. در جست و جوی یك نمونهٔ متناقض هستیم، یعنی می‌خواهیم رشته‌ای نامتناهی پیدا کنیم که با شرط مسأله سازگار باشد، ولی در نتیجه گیری حکم ۱° صدق نکند. بنابراین، در واقع، با یك مسألهٔ پیدا کردنی روبه‌رو هستیم. عنصرهای اصلی آن را، از نظر می‌گذرانیم.

مجهول چیست؟ ـ دنباله‌ای نامتناهی از عددهای حقیقی a_1، a_2، a_3، . . .

شرط کدام است؟ ـ شرط شامل دو جنبه است:

I. رشتهٔ $a_1+a_2+a_3+\ \ldots$ متقارب است.

II. رشتهٔ $a_1^3+a_2^3+a_3^3+\ \ldots$ متباعد است.

یادآوری می‌کنیم که این مسألهٔ پیداکردنی، بـه عنوان مسأله‌ای کمکی، در ارتباط با مسألهٔ اثباتی، به‌وجودآمده است.

۳°. باید تنها یك موضوع (دلخـواه) پیدا کـرد، که در شرط صدق کند. در مسأله‌های عادی مربوط به پیدا کردن مجهول، باید همهٔ جواب‌هائی را پیدا کرد که در شرط مسأله صدق می‌کنند. ولی در مسألهٔ ما، کافی است یك جواب (یك موضوع) را به دست آورد: کافی است یك نمونهٔ متناقض پیدا کنیم تا نادرستی حکم را ثابت کرده باشیم.

در موقعیت‌های دیگری هم، ممکن است، این وضع ـ کـه با وضع

عادی فرق دارد ـ پیش آید. لایب نیتس، در این مورد، توصیه‌ای دارد: «گاهی به‌همهٔ جواب‌ها و گاهی تنها به‌بعضی از جواب‌ها نیاز داریم. در حالتی که تنها به‌دنبال یك جواب هستید، باید به‌شرطهای موجود، شرطهایی تکمیلی اضافه کنید، کاری که اغلب، هنر و توانائی زیادی را می‌طلبد».

°۴*. تنگ‌تر کردن شرطها. به مطالعهٔ رشته‌های متقاربی می‌پردازیم کـه با بخش اول شرط ، سازگار بـاشند وامیدواریم بتوانیم، در بین آن‌هـا، به‌رشته‌ای برخورد کنیم کـه با بخش دوم شرط هم بسازد. طبیعی است که جست‌وجو را، از ساده‌ترین و روشن‌ترین حالت‌ها، آغاز کنیم.

ابتدا، دربارهٔ رشته‌هـای متقاربی می‌اندیشیم که با جمله‌های مثبت a_n تشکیـل شده باشند. ولی در ایـن صورت، باید، برای مقدارهای بزرگ n، داشته باشیم $a_n<1$، که در نتیجه خواهیم داشت: $a_n^3<a_n$ و، بنابراین، رشتهٔ با جملهٔ عمومی a_n^3 هم متقارب می‌شود. بـه این ترتیب، دراین‌حالت، بخش‌دوم شرط برقرار نمی‌شود و باید رشته‌هایی را موردبررسی قراردهیم که، علاوه برجمله‌های مثبت، دارای‌جمله‌های منفی هم باشند.

دراین‌جا، مشهورترین رشته‌ها، رشته‌های متناوب‌اند که، در آن‌ها، علامت‌های جمله‌ها، زنجیری را، به‌این صورت، تشکیل می‌دهند:

$$+-+-+-+-+-+-+-+-\ldots$$

اگر جمله‌هـای a_n چنین رشته‌ای را، از لحاظ قدر مطلق، در نظر بگیریم، یکنوا ونزولی است و به‌سمت صفر میل می‌کنند و، درنتیجه، رشته متقارب است؛ ولی در ایـن صورت، عددهای بـه‌صورت a_n^3 هم همین رفتاررا خواهد داشت و،درنتیجه، رشته‌ای هم که ازآن‌ها تشکیل می‌شود، متقارب است. بـه این ترتیب، بازهم بخش دوم شرط برقرار نمی‌شود و ناچاریم به‌دنبال رشته‌هائی برویم، که کمتر شناخته شده‌اند.

III. علامت‌های جمله‌هـای a_n، زنجیری به‌این صورت را تشکیل می‌دهند:

$$+--+--+--+--\ldots$$

حتی اگر شرط III را هم به شرطهای I و II اضافه کنیم، میدان کاملاً وسیعی برای انتخاب آزاد باقی می‌ماند. از این جا، ممکن است به‌این فکربرسیم که محدودیت تازه‌ای (که البته، خیلی‌هم دقیق، تنظیم نشده است) قایل شویم:

IV. رشتهٔ $a_1^3+a_2^3+a_3^3+\ldots$، باید در رابطه‌بامفهوم‌تقارب، رشتهٔ توافقی (یا همساز) $1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\ldots$ را به‌خاطر بیاورد.

خواست‌های III و IV ، که در اثـر کار و تلاش ذهنی پیدا شدند، به‌اندازهٔ کافی، شرط را تنگ‌تر می‌کنند (یادداشت تکمیلی ۴ را ببینید). این‌ها، ممکن است ما را به‌سمت نمونهٔ متناقض هدایت‌کنند وهم، ممکن است، جلو پیشرفت کار را بگیرنـد. ولی بـه‌نظر می‌رسدکه سودآن‌ها، برزیانشان بچربد؛ باوجود این، ازخواننده می‌خواهیم، خودش‌درتلاش پیدا کردن نمونهٔ متناقض باشد و از توانایی خاص خود، مدد بگیرد.

۵°. روند تناوب اثبات‌ها. موقعیت مناسبی است تـا از روندی یاد کنیم کـه هـر علاقه‌مند به حل مسأله‌هـای اثباتی ، بایـد با آن آشنا باشد و به‌آن عادت‌کند. (در سطح کارهای دبیرستانی، به‌کمترموردهایی از این‌گونه برمی‌خوریم‌که بتوانند برای چنین عادت‌هایی، مفید واقع شوند.)

فـرض کنید ، یك مسألهٔ اثباتی ، با حکم مشخص A، در بـرابـر ما باشدکه، ضمناً، از درستی یا نادرستی‌آن، اطلاعی نداریم: در موقعیتی مبهم و تردیدآمیز قـرار داریم. با حل مسأله، می‌خواهیم تردید خود را برطرف و حکم A را ثابت یا ردکنیم.

گاهی می‌تـوان روشی را پیدا کردکه در هر دو حالت مفید باشد، یعنی، روشی‌که ما را به‌اثبات حکم A یا ردآن ـ بدون این‌که از ابتدا بدانیم به‌چه نتیجه‌ای می‌رسیم ـ نزدیك‌کند، بـه‌زبان دیگر، روشی که بتواند ما را بـه‌جواب مسأله، در هـر دو حالت، بـرساند. ولی چنین پیش‌آمدهایی نادر است. در موردی کـه بخت ما یاری نکند و بهترین

روش را پیدا نکنیم، ناچاریم یکی از این دو راه را انتخاب‌کنیم: یا حکم A را ثابت کنیم ویا آن را رد کنیم. باید از بین این دو سمت متفاوت، یکی را برگزینیم. برای‌اثبات‌حکم A، یا باید مستقیماً حکمی را پیداکنیم‌که حکم مااز آن‌نتیجه شود ویا استراتژی‌خاصی، برای‌آن، در نظر بگیریم. برای ردکردن A، باید نمونه‌ای متناقض پیدا کنیم.

بهترین راه این است‌که، به‌طور متناوب، به‌هر دو حالت بپردازیم. وقتی‌که امید به‌موفقیت را، دریك‌جهت ازدست‌دادیم یاکاردراین‌جهت، صورتی خسته‌کننده به‌خود گرفت، باید به‌سمت دیگرروآوریم، ولی در ضمن بایدآماده باشیم که، در صورت لزوم، دوباره به‌همان سمت اول برگردیم؛ به‌این ترتیب، با جمع‌آوری آگاهی‌هایی در هر دو جهت، سرآخر، می‌توانیم به‌هدف خود دست یابیم.

۶°. گونهٔ بغرنج‌تری از این روند تناوب اثبات وجود دارد، که می‌توان ازآن در حالت‌های دشوارتر استفاده‌کرد و، به‌کمك‌آن، به هدف‌های جدی‌تری رسید.

اگر نمی‌توانیم حکم پیشنهادی A را ثابت‌کنیم، تلاش کنیم، به جای‌آن، حکم ضعیف‌تری‌را (که شانس‌بیشتری برای اثبات دارد) ثابت کنیم. اگر نمی‌توانیم حکم مورد نظر را ردکنیم، سعی‌کنیم، به جای‌آن حکم قوی‌تری را (که نادرستی‌آن، ساده‌تر کشف می‌شود) ردکنیم. اگر موفق شدیم حکم II را ثابت کنیم، سعی می‌کنیم، به‌دنبال آن، حکمی قوی‌تر از II را رد کنیم؛ و اگر موفق شدیم حکم II را ردکنیم، کوشش می‌کنیم، به‌دنبال آن، حکمی ضعیف‌تر از II را ثابت کنیم. اگر به‌این ترتیب، به‌اثبات قضیهٔ A، از هردو جهت، بپردازیم، می‌توان امیدوار بود که سرانجام، به‌اثبات خودآن برسیم. از این راه ممکن است چیزی بیشتر ازحکم A هم‌به‌دست‌آید، یعنی یاحکمی‌قوی‌تر از A ثابت شودو یا حکم A رد شود، ولی معلوم شودکه بخشی از حکم A درست است و، بنابراین، درستی حکمی ضعیف‌تر از A هم به‌دست‌آید.

اگر در مسیر جست‌وجوی متناوب اثبات‌ها، به این ترتیب پیش

رویم، و نمونه‌های متناقض را بسازیم، ممکن است به‌نتیجهٔ کامل‌تری برسیم. مثلاً، معلوم شود که قضیه‌ای درست است (زیرا، دیگر آن را ثابت کرده‌ایم) ولی در واقع نمی‌توان آن را قوی‌تر کرد (زیرا قضیهٔ قوی‌تر را رد کرده‌ایم). در این جاست که، به‌طور کلی، به‌نقش اثبات‌در تکامل دانش‌ها می‌رسیم.

۷°. نوع‌های دیگر روند اثبات متناوب، مثال‌های تاریخی جالب و نکته‌های فلسفی مربوط به‌آن را، می‌توانید در کتاب ای. لاکاتوش، به نام «اثبات و رد»، پیدا کنید.

۱۲*. هر جوابی که به‌دست آید، به درد می‌خورد. ثابت کنید، دو رشتهٔ متباعد

$$a_1+a_2+\dots+a_n+\dots,\ b_1+b_2+\dots+b_n+\dots$$

با جمله‌های مثبت و نزولی

$$a_1>a_2>a_3>\dots,\ b_1>b_2>b_3>\dots$$

وجود دارد، به‌نحوی که رشتهٔ

$$\min(a_1,b_1)+\min(a_2,b_2)+\dots+\min(a_n,b_n)+\dots$$

متقارب باشد. [همان‌طور که معمول است، $\min(a,b)$ یعنی کوچکترین عدد از دو عدد a و b.]

[دراین جا، لازم نیست همهٔ جواب‌هایی را پیدا کنیم که با شرط سازگار باشد، بلکه کافی است، تنها به‌یکی از این جواب‌ها دست یابیم. بنابراین، می‌توان از توصیهٔ لایب‌نیتس (که در یادداشت ۱۱ آوردیم) استفاده کرد: میدان جست‌وجو را تنگ‌تر کنید (متوجه باشید، ازاین‌راه، دشواری‌های تازه‌ای به‌وجود نیاید).]

۱۳. جست‌وجوی حالت‌های خاص یا تعمیم، مهم‌ترین سرچشمهٔ مسأله‌های کمکی مفید به‌شمار می‌رود.

فرض کنید، بخواهیم دربارهٔ تعداد مقسوم‌علیه‌های عدد n ــ که آن را $\tau(n)$ می‌نامیم ــ مطالعه کنیم. مثلاً (به حالت خاص می‌پردازیم)، مقسوم‌علیه‌های عدد ۱۲ عبارت است از ۱، ۲، ۳، ۴، ۶ و ۱۲ و، بنابراین، $\tau(12)=6$؛ در بین مقسوم‌علیه‌های ۱۲، دو عدد ۱ و ۱۲

وجود دارد ـ که مضمونی ندارند ـ و در مورد هر عدد n، می‌توان شبیه آن‌ها را پیدا کرد.

یکی از راه‌های رفتن به حالت‌های خاص، این است که، به طور مشخص، عددهای جداگانه را مورد بررسی قراردهیم؛ مثلاً، می‌توان متوجه شدکه $\tau(۳۰) = ۸$. یا این که می‌توان، منظم‌تر عمل کرد و جدولی برای $\tau(n)$، به‌ازای مقدارهای متوالی ۱، ۲، ۳، . . . از n، تشکیل دادکه‌آغاز آن، چنین است:

$$\tau(۱) = ۱, \quad \tau(۶) = ۴,$$
$$\tau(۲) = ۲, \quad \tau(۷) = ۲,$$
$$\tau(۳) = ۲, \quad \tau(۸) = ۴,$$
$$\tau(۴) = ۳, \quad \tau(۹) = ۳,$$
$$\tau(۵) = ۲, \quad \tau(۱۰) = ۴$$

راه دیگر رسیدن به حالت‌های خاص، این است که برخی گروه‌های عددی را در نظر بگیریم. اگر p، عددی اول باشد، در آن صورت

$$\tau(p) = ۲, \quad \tau(p^۲) = ۳, \quad \tau(p^۳) = ۴$$

از این جا (تعمیم می‌دهیم) نتیجه می‌گیریم که، برای هر توان مثبت و درست عدد اول p، داریم:

$$\tau(p^n) = n + ۱$$

اگر p و q، دو عدد اول و مختلف باشند، pq دارای چهار مقسوم‌علیه ۱، p، q و pq است و بنابراین

$$\tau(pq) = ۴$$

سپس، می‌توانیم به حاصل‌ضرب سه عدد اول بپردازیم و غیره. با تعمیم مطلب، می‌توان $\tau(n)$ را برای حالت $n = p_۱ \cdot p_۲ \cdot \cdot \cdot p_l$ پیدا کرد که، در آن، n برابر با حاصل‌ضرب l عدد اول مختلف باشد. به‌همین ترتیب، اگر گاهی به‌بررسی حالت‌های خاص و، سپس، تعمیم آن‌ها، بپردازیم، می‌توانیم سرانجام، عبارت مربوط به $\tau(n)$ را پیدا کنیم. (آن را پیدا کنید!)

این‌هاست امکان‌هایی که برای کشف حقیقت، نه تنها در نظریهٔ عددها، بلکه در تمامی شاخه‌های ریاضیات و، به‌طور کلی، در دانش، وجود دارد. با رفتن به‌طرف حالت‌های خاص، سعی می‌کنیم ساده‌ترین، محسوس‌ترین و در دسترس‌ترین بخش‌های مسأله را جدا کنیم؛ سپس، با رفتن به طرف تعمیم، می‌کوشیم تا نتیجه‌هایی را که از راه مشاهدهٔ میدان‌های محدود به‌دست آورده‌ایم، تقویت کنیم.

۱۴. شباهت هم، یکی از سرچشمه‌های نیرومند کشف حقیقت‌های تازه‌است. در ساده‌ترین حالت‌ها، می‌توان تقریباً راه حل مسألهٔ خویشاوند یا نزدیك را، رونویسی کرد. درموردهای دشوارتر، از یك شباهت ضعیف، نمی‌توان بلافاصله کمکی واقعی دریافت کرد، ولی این شباهت، ممکن است راه ادامه کار را، به‌ما نشان دهد.

حالت‌هایی که می‌توان، در آن‌ها، از شباهت استفاده کرد، بی‌اندازه متنوع‌اند؛ این مطلب را، می‌توان به‌روشنی روی بسیاری مثال‌ها، چه در فصل‌های گذشته و چه در فصل آینده، مشاهده کرد. مثلاً، به‌یکی از آن‌ها در ۳° از §۶ فصل اول اشاره می‌کنیم. می‌خواهیم زاویه‌ای از یك مثلث کروی را بسازیم که سه ضلع آن داده شده است. برای این ساختمان، از شباهتی که با مسأله‌ای از هندسهٔ مسطحه دارد، استفاده می‌کنیم: زاویهٔ مثلثی را بسازید که سه ضلع آن معلوم است.

سعی کنید چند زوج از این مسأله‌های مشابه را به‌یاد بیاورید.

همان‌طور که قبلاً هم گفته‌ایم، راه‌های بسیار دیگری هم، برای استفاده از شباهت، وجود دارد.

۱۵. و اگر موفق نشویم؟ ممکن است، امیدهایی که به‌مطالعهٔ مسأله‌های کمکی داریم، برآورده نشود و همهٔ تلاش‌های ما، مواجه با عدم موفقیت بشود. همیشه نباید نیرویی را که صرف مسأله‌های کمکی کرده‌ایم، هدر رفته به‌حساب آورد؛ می‌توانیم از ناکامی خود، چیزهایی بیاموزیم.

می‌خواهیم قضیهٔ A را ثابت کنیم. به قضیهٔ قوی‌تر B، که A را می‌توان از آن نتیجه گرفت، توجه کردیم. به‌اثبات قضیهٔ B مشغول شدیم

که، البته، اگرآن را ثابت می کردیم، قضیهٔ A هم، به‌خودی خود، ثابت می‌شد. ولی معلوم شدکه قضیهٔ B نادرست است. ایـن وضع، موجب دلخوری است، ولی تجربه‌ای که از اثبات قضیهٔ B به دست آورده‌ایم، ممکن است به ما کمك کند تا بهتر بتوانیم امکان‌های اثبات قضیهٔ A را ارزیابی کنیم.

می‌خواهیم قضیهٔ A راثابت کنیم. به‌قضیهٔ B پرداخته‌ایم که نتیجه‌ای از قضیهٔ A است و راحت‌تر از قضیهٔ A، به‌اثبات تن می‌دهد. اگرقضیهٔ B ثابت بشود، می‌توانیم ازآن، بـه‌عنوان کلیدی برای اثبات قضیهٔ A استفاده کنیم. قضیهٔ B ثابت شد، ولی تمام تلاش ما، برای استفادهٔ از آن، بـه‌عنوان کلیدی برای اثبات قضیهٔ A، مواجه با ناکامی می‌شود. این، دلخورکننده است، ولی، به هرحال، از تجربه‌هایی که ضمن اثبات قضیهٔ B بـه‌دست آورده‌ایـم، می‌توانیم برای ارزیابی بهتر امکان‌های اثبات قضیهٔ A، استفاده کنیم.

۱۶. مسأله‌های دیگر. با توجه به‌ایـن که، مسأله‌های کمکی برای حل برخی مسأله‌ها مفیدند، روشن کنیدکه چرا چنین است و، این مسأله‌ها، ازکجا ظاهر می‌شوند؟

چرا ؟ بستگی بین مسألـهٔ اصلی و مسألـهٔ کمکـی را روشن کنید؛ تمرین‌های ۶ـ۱۰ را ببینید.

از کجا؟ آیـا مسألهٔ کمکی در نتیجهٔ حرکت معکوس (یعنی حرکت از پایان به آغاز)، تعمیم، جست‌وجوی حالت‌هـای خاص یـا شباهت به‌وجود می‌آید؟ یا برای این منظور، سرچشمه‌های دیگری لازم است؟

فصل دهم

پیدایش اندیشه‌ها

و آن‌جا، در ذهن من،شعله‌ای از بلندی‌ها درخشید،
و همهٔ نیروی خود را، در جهت عمل قرار داد.

دانته

§۱. پرتو روشنایی

راه حل مسأله، ممکن است به صورتی کاملاً نامنتظر، در برابر ما پدیدار شود. مدتی روی یك مسأله کار می‌کنیم و در دوروبرآن، به حفاری می‌پردازیم، ولی‌پیشرفت نمایانی وجودندارد ـ ونا گهان، اندیشه‌ای‌درخشان می‌درخشد، الهامی پدید می‌آید و ما، یکباره، پرتوی بر تاریکی می‌بینیم. این، شبیه‌آن است که شما شب دیروقتی به‌اطاق مهمان‌خانه ناآشنائی‌بروید که حتی نمی‌دانید چراغ را ازکجا باید روشن کرد! در تاریکی، کلید برق را جست‌وجومی‌کنید، به‌مبلی برخورد می‌کنید، توده‌های مبهم درهم ریخته‌ای را احساس می‌کنید و . . . آهان، کلید برق پیدا شد، کلید را می‌زنید و همه

چیز، یکباره، روشن می‌شود. توده‌های مبهم درهم ریخته، شکل چیزهای آشنا را به‌خود می‌گیرند، ضمناً معلوم می‌شود که این‌چیزها، درست درهمان جاهایی هستند که باید باشند و به همان خوبی قرار گرفته‌اند که شما انتظارش را داشتید.

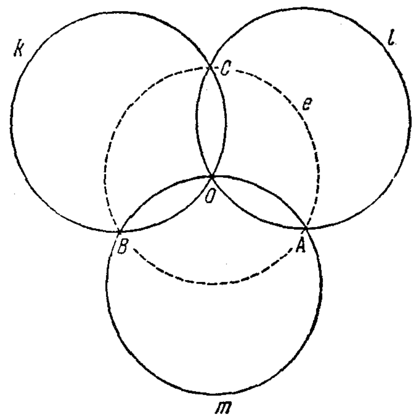
کسی هم که مسأله‌ای را حل می‌کند، می‌تواند دچار همین احساس‌ها بشود. اندیشه، عبارت است از درخششی ناگهانی، که نظم و ارتباط موجود بین اجزاء را روشن می‌کند، مناسب و درست بودن‌آن‌ها را نشان می‌دهد و به‌صحنه‌ای که تا آن زمان، ابهام، پراکندگی و سردرگمی حکومت می‌کرد، روشنی می‌بخشد.

ولی، درچنین موردهایی، تجربهٔ شخصی، از هر توضیحی با ارزش‌تر است. برای این‌که با مفهوم «تجربهٔ شخصی» بیشترآشنا شویم، به‌مثال‌هایی نیاز داریم. چه بسا که ساده‌ترین مثال‌های ریاضی بهتر از هر چیز دیگری برای این منظور باشند؛ این مثال‌ها، مصالح اصلی‌کار را در اختیار ما می‌گذارند، تشویش‌ها وشادی‌های ناشی ازکشف را در ما به‌وجودمی‌آورند و «چشمان ما را به‌روی حقیقت‌های روشن، باز می‌کنند.» (جملهٔ‌آخر را،از دکارت گرفته‌ایم.)

§۲. مثال

به‌خودم اجازهٔ این‌گستاخی را می‌دهم که خواننده را، به آزمایشی نه چندان بزرگ، بکشانم. یك مسألهٔ سادهٔ هندسی ـ والبته، نه مبتذل ـ تنظیم می‌کنم و، سپس، کوشش می‌کنم دنبالهٔ اندیشه‌هایی را که در جریان اثبات آن به وجود می‌آید، مجسم کنم. قصد دارم، آهسته جلو بروم و، خیلی‌کند، رازها را یکی بعد از دیگری فاش کنم؛ ضمناً، هرکدام از این رازها هم، نه یکباره، بلکه به‌تدریج، آشکار می‌شوند. امیدوارم، پیش ازآن‌که روایت، به طورکامل، به‌پایان برسد، خواننده بتواند اندیشهٔ اصلی را به‌چنگ‌آورد (البته، اگرچیزی مانع آن نشود) ـ و چون این اندیشه تا اندازه‌ای نامنتظر است، می‌تواند رضایت خود را ازکشف‌کوچکی که کرده است، آزمایش کند.

A. اگرسه دایره با یك شعاع، ازیك نقطه بگذرند،آن وقت،دایره‌ای هم که ازسه نقطهٔ برخورد دیگرآن‌ها می‌گذرد، دارای همان شعاع است.



شکل ۴۰-a. سه دایره‌ای که از یك نقطه می‌گذرند.

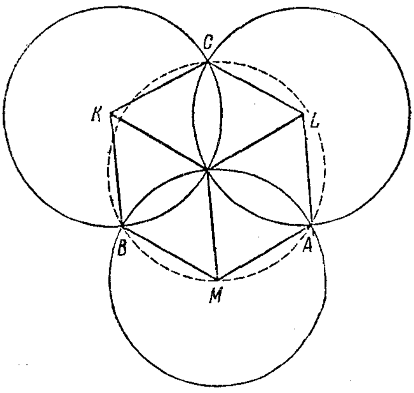
و این، همان قضیه‌ای است که می‌خواهیم ثابت کنیم. حکم قضیه، کوتاه و روشن است، ولی به‌نظر می‌رسدکه وارد جزئیات نشده است. شکل را رسم کنید (شکل ۴۰-a) و علامت‌های مناسبی روی آن بگذارید، آن وقت، به‌مسألهٔ زیر، که مفصل‌تر است، می‌رسیم:

B. سه دایرهٔ k، l و m، به شعاع r، از نقطهٔ O گذشته‌اند. دایره‌های l و m در نقطهٔ A، دایره‌های m و k در نقطهٔ B و دایره‌های k و l در نقطهٔ C، یکدیگر را قطع‌کرده‌اند. می‌خواهیم ثابت کنیم، دایره‌ای که از سه نقطهٔ A، B و C می‌گذرد، به شعاع r است.

روی شکل ۴۰-a ، چهار دایرهٔ k، l، m و e و چهار نقطهٔ برخورد آن‌ها، نشان داده شده است. ولی این‌شکل، ممکن است رضایت‌بخش به‌نظر نرسد، زیرا آن‌قدرها ساده نیست و، ضمناً، نارسا است؛ این تأثیر را در آدم می‌گذاردکه، روی‌آن، چیزی غایب است؛ به‌نظر می‌رسد، چیزی، که باید مهم و اصلی هم باشد، از توجه ما دور مانده است.

ما اکنون، با دایره‌ها سر و کار داریم. دایره چیست؟ هر دایره‌ای، به وسیله‌جای مرکز و مقدار شعاع آن، معین می‌شود: همهٔ نقطه‌های محیط دایره، به فاصله‌ای یکسان (برابر با شعاع) از مرکز واقع شده‌اند. ولی ما فراموش کردیم، این شعاع r را، که برای چهار دایره مشترك است، مورد توجه قرار دهیم؛ یعنی، بخش اصلی شرط را از یاد برده‌ایم. بنابراین، قبل از هر کار، مرکز دایره‌ها را نام‌گذاری می‌کنیم : K برای دایرهٔ k ، L برای دایرهٔ l و M برای دایرهٔ m . اکنون ، در چه جایی بهتر است شعاع r را رسم کنیم ؟ ظاهراً ، هیچ يك از سه دایرهٔ k ، l و m و یا هیچ يك از سه نقطهٔ A ، B و C ، رجحانی بر دیگران ندارد. بنابراین ، هر يك از سه مرکز را به سه نقطهٔ برخورد وصل می‌کنیم: K را به B ، C و O و غیره .

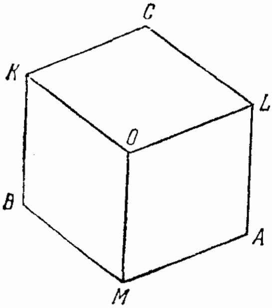
شکلی که به دست می‌آید (شکل ۴۰-b)، بیش از حد شلوغ است.



شکل ۴۰-b. تعداد زیادی خط

روی آن، به‌قدری خط (راست ومنحنی) وجود دارد که معلوم نیست، چگونه باید به‌آن نگاه کرد؛ شکل از زیر چشم فرار می‌کند و «نمی‌خواهد در يك‌جا بایستند». این شکل، تصویرهایی را به‌خاطر می‌آورد که، زمانی، در يك‌مجلهٔ قدیمی چاپ می‌شد، ــ این گونه تصویرها را، عمداً ، مبهم رسم می‌کردند:

اگر به‌طور معمولی به‌آن نگاه می‌کردید، شکلی روی‌آن دیده می‌شد؛ ولی اگر مجله را می‌چرخاندید، به‌آن موقعیت خاصی می‌دادید و از زاویهٔ‌معینی به‌آن نگاه‌می‌کردید، ناگهان شکل دیگری ظاهرمی‌شد، که شما را، به‌عنوان تفسیر کم و بیش جالبی نسبت بــه تصویـر اول، دچار شگفتی می‌کرد. آیا می‌توانید، از این شکل ترسناك، که پر از خط‌های راست و دایـره‌هـا است، شکل دیگری بیرون بکشید‌که، احتمالاً، شکل مفیدی برای هدف شما باشد؟



شکل ۴۰-C. به چی شباهت دارد؟

. . . .

شکل مورد نیاز، که زیر انبوهی‌از خط‌ها پنهان شده‌است، ممکن است‌یکباره به‌چشم بخورد و یا بــه تـدریـج، مورد شناسایی قـرار گیرد. تلاش‌هایی کـه در جهت حل مسألهٔ اصلی، یا یك موقعیت‌درجه دوم غیر اصلی به‌کار می‌بریم، ممکن است ما را به‌سمت شکل مجهول‌راهنمایی‌کند. مثلاً، وقتی‌که به‌رسم شکل‌کامل نشدهٔ خود مشغولیم، ممکن است متوجه شویم‌که تمامی شکل به‌طورکامل با‌بخشی ازآن که‌از«خط‌های‌راست» (پاره‌خط‌های راست) تشکیل شده است، معین می‌شود (شکل ۴۰-C).

موقعیت اخیر، اهمیت دارد، درواقع، هندسهٔ تصویر را ساده‌ترمی‌کند و، احتمالاً، جنبهٔ منطقی کار را روشن می‌کند. با تـوجه به‌این مـوقعیت، می‌توان تنظیم قضیه را، به‌صورت زیر، تغییر داد:

C. اگر هر یك از نه پاره خط

$$KO,\quad KC,\quad KB,$$
$$LC,\quad LO,\quad LA,$$
$$MB,\quad MA,\quad MO$$

برابر r باشند، آن وقت، نقطه E وجود دارد، به نحوی که هر یك از پاره‌خط‌های

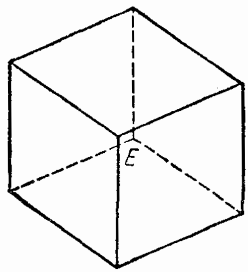
$$EA, \quad EB, \quad EC$$

همه، برابر r باشند.

حکم اخیر، توجه‌ما را، به‌شکل c-۴۰ جلب می کند. این، تصویری شایان توجه است؛ چیزآشنایی را به‌خاطر می‌آورد. (چه چیزی را؟)

البته، درهریك ازچهارضلعی‌های شکل c-۴۰، و مثلاً در چهارضلعی $OLAM$، بنابرشرط، هرچهار ضلع باهم برابرند، یعنی،همهٔ این‌چهارضلعی‌ها، لوزی هستند. لوزی، شکل کاملاً آشنایی است؛ با توجه ذهنی به این نکته از شکل، می‌توانیم تمامی شکل را بهتر «ببینیم». (این شکل، در مجموع خود، چه‌چیزی را به‌یاد شما می‌آورد؟)

درلوزی،ضلع‌های‌رو‌به‌رو باهم‌موازی‌اند. با تکیه براین وضع، می‌توان ۹ پاره خط راست را ـ که شکل ما ازآن‌ها تشکیل شده و در c-۴۰ نشان داده شده است ـ به‌سه گروه تقسیم کرد، به نحوی که در هر گروه، تنها پاره‌خطهای موازی وجود داشته‌باشند؛ مثلاً، دریکی ازاین گروه‌ها، پاره‌خطهای AL، MO و BK قراردارند. (حالا، این شکل، چه چیزی را ممکن است بـه یاد ما بیاورد؟)



شکل d-۴۰. البته!

. . . .

البته، شکل d-۴۰، تصویـر ۱۲ یال یك متوازی‌السطوح را نشان می‌دهد، به‌نحوی که همهٔ این تصویرها، طولی برابر دارند.

شکل c-۴۰، تصویر «متوازی‌السطوح ناآشکاری» است و، درآن، تنها ۳ وجه، ۷ رأس و ۹ یال دیده می‌شود، یعنی ۳ وجه، ۱ رأس و ۳ یال آن، روی شکل پیدا نیست. این شکل، بخشی از شکل d-۴۰ است، ولی بخشی که تمامی شکل مورد علاقهٔ ما را نشان می‌دهد. اگرمتوازی‌السطوح و جهت تصویرکردن‌آن، طوری انتخاب شده باشد،که تصویر ۹ یال‌آن ـ که در شکل c-۴۰ دیده می‌شود، برابر r شود (یعنی، بـه‌همان نحوی که باید

طبق شرط مسأله، باشند)، آن وقت، تصویر سه یال دیگر متوازی‌السطوح هم، باید برابر r باشند. از نقطهٔ E، تصویر رأس ناآشکارهشتم، سه پاره‌خط راست به‌طول r می‌گذرد، و خود این تصویر، مرکز دایره‌ای است به‌شعاع r، که از نقطه‌های A، B و C، عبور می‌کند.

قضیهٔ ما ثابت شد و، ضمناً، این اثبات، بر اساس اندیشه‌ای جالب و نامنتظر، انجام‌گرفت؛ این‌اندیشه، شامل این نکته بودکه شکل مسطحه‌را، به‌عنوان تصویر یك شکل فضایی در نظر گرفتیم.

(در این اثبات، از مفهوم‌های هندسهٔ فضایی استفاده‌کردیم. به‌نظرما، چنین اثباتی، خیلی بد نیست، به‌خصوص‌که خیلی ساده به‌دست‌آمد. البته، حالا که از موقعیت سادهٔ نقطهٔ E اطلاع داریم، می‌توان طول پاره‌خطهای EA، EB و EC را وارد بحث کرد و، بدون مراجعه به هندسهٔ فضایی»، کار را به‌پایان رسانید. ولی ما در این‌جا، به‌این دیدگاه نمی‌پردازیم.)

§۳. ویژگی‌های یك اندیشهٔ مفید

هم‌اکنون، روی یك مثال مناسب، چهره‌های مختلف یك اندیشهٔ‌مفید را نشان دادیم. پیدایش را، خیلی‌کند وآرام، مجسم کردیم. به جای این‌که پیروزمندانه فریاد بزنیم، آرام و با زبان الکن، آن را ظاهر ساختیم. (البته، به‌عمد، چنین کردیم، زیرا می‌خواستیم خواننده‌هم، درکشف حقیقت ریاضی، با ما شریك‌باشد.) مثال‌ما، ممکن‌است، ازجهت‌هایی، یك‌جانبه به‌نظربرسد، ولی در این مورد، چارهٔ دیگری نداشتیم، زیرا خود این اندیشه، جنبه‌های کاملاً متفاوتی دارد. ولی، اگر خواننده، مثال را با علاقه دنبال‌کرده باشد و اگر به‌پرتوی‌که بر تجربه‌های شخصی او انداخته است، توجه‌کافی داشته باشد، آن‌وقت می‌تواند، درهمین مثال، ویژگی‌هایی را ببیندکه در مورد هر اندیشهٔ مفیدی صدق می‌کند ودرغالب موردها، با آن‌ها، روبه‌رومی‌شویم.

در بیشتر موردها، اندیشهٔ مفید، بـه طور ناگهـانی، ظاهر می‌شود. اندیشهٔ مفید، عنصر مهم تازه‌ای را با خود دارد و دیدگاه ما را تغییر می‌دهد. به‌دنبال‌آن، به‌طورکامل اطمینان پیدا می‌کنیم که هدف قابل دسترس است.

ناگهانی بودن ـ ویژگی مهمی است، ولی بـه‌سختی می‌توان آن را شرح داد. اگربرای خواننده‌ای، ضمن مطالعهٔ شکل ۴۰ـb، شکل متوازی‌السطوح، ناگهان و از میان شلوغی خطها و حرف‌ها، «سربرآورده باشد»، منظور ما را بهتر می‌تـوانـد درك کند. احتمالاً، برای خواننده روشن شده باشدکه منظور ما از الهام چیست و چرا ظهور ناگهانی اندیشهٔ سازنده را، همچون توصیه‌ای که ازجانب احساس درونی ما تلقین می‌شود ویا به‌عنوان نشانه‌ای از ماهیت ماوراءطبیعی بودن‌آن، شرح می‌دهند.

به‌یاد بیاوریم، مهم‌ترین‌عنصری که درجریان‌اثبات‌قضیه، به‌وجودآمد، اندیشهٔ متوازی‌السطوح بود. حیرت‌آور است کـه، شکل فضایی، به‌صورت کلیدی برای حل یك مسألهٔ هندسهٔ مسطحه درآمد. عادی‌تر و طبیعی‌تر،آن آن است که کلید راه‌حل مسأله، به‌همان حوزهٔ خود مسأله تعلق داشته‌باشد. وقتی‌که با مسأله‌ای ازهندسهٔ مسطحه سروکار داریم، می‌توان انتظارداشت که عنصرکلیدی، مثلاً، خط جـدیـدی باشدکه باید به‌شکل اضافه شود، یا قضیهٔ آشنائی‌که به‌کار حل مسأله بخورد و ناگهان به‌ذهن آید، یا چیزهائی از این قبیل.

در حالت مورد بحث ما، تغییر این دیدگاه عادی، توانست بی‌اندازه ثمربخش باشد. دایره‌ها، ابتدا، به‌عقب صحنه رفتند و، سپس، به‌کلی ناپدید شدند؛درعوض‌پاره‌خطهای راست، جای‌آن‌ها را، در جلوصحنه، گرفتند،ضمناً، این پاره‌خطها را بـه‌عنوان شعاع در نظرگرفتیم و بـه‌یك متوازی‌السطوح مربوط‌کردیم. (این فکرازکجا آمد؟) شعاع‌های قبلی، نقطه‌های پایانی‌آن‌ها و چهارضلعی‌هایی که بـه‌وسیلهٔ این شعاع‌ها پدیدار شد، مفهوم‌های تازه‌ای پیدا کردندـ این‌ها، بـه صورت یال‌ها، رأس‌ها و وجه‌های یك جسم فضایی درآمدند. تغییر دیدگاهی‌که نسبت به‌عنصرهای این مسأله، به‌وجودآمد،نه تنهاآموزنده، بلکه ضمناً نمونه‌ای و «تیپیك» بود. هراندیشهٔ قاطع‌واساسی، در واقع، چنین انقلابی را در دیدگاه ما نسبت به‌اشیاء ایجاد می‌کند و،این وضع، تقریباً درمورد حل هر مسأله‌ای صادق است. همراه با ظهور اندیشه، عنصرهای مسأله، نقش تازه‌ای پیدا می‌کنند و به صورت مفهوم‌های تازه‌ای

در برابر ما قرار می‌گیرند. در جریان حل یك مسألهٔ هندسی، عنصرهای آن تغییر جا می‌دهند و مرتباً بـه صورت گروه‌بندی‌های تازه‌ای درمی‌آیند؛ این عنصرها، مثلث‌هایـی یا زوج مثلث‌هایـی را، با ضلع‌های متنـاظر، تشکیل می‌دهند، یابه‌صورت‌لوزی یا هرشکل آشنای دیگری درمی‌آیندکه بتواند در خدمت حل مسأله قرار گیرد. خطی که، تا قبل از ظهور اندیشه، تنها یك‌خط ساده بود، یکباره مفهـومی پیدا می‌کند: بـه‌صورت ضلع مثلثی درمی‌آیدکه تساوی‌آن با یك مثلث دیگر، می‌تواند برای هدف ما ، تعیین‌کننده باشد؛ یا به‌صورت خطی درمی‌آیدکه دو خط راست موازی دیگر را قطع کرده است‌و امثال آن. بعد از ظهور اندیشه، می‌توانیم بیشتر ببینیم: مفهوم‌هایی بیشتر، چشم‌اندازی گسترده‌تر و رابطه‌هایی زیادتر در جلو چشم ما قرار می‌گیرند. ظهور اندیشه، شبیه پیدا کردن‌کلید چراغ و روشن‌کردن اطاق تاریك است.

ظهوراندیشهٔ مفید،همراه با اطمینانی است‌که، برای رسیدن به‌هدف، در ما به وجود می‌آید. ناگهان اندیشه‌ای پدید می‌آید، مسیر تازه‌ای را در میان بی‌نظمی‌های ناهنجار قبلی روشن می‌کند و اطمینانی جدی برای ادامهٔ کار در ما بـه‌وجود می‌آورد. ایـن اطمینان، معمولاً با ایـن جمله‌ها، بیان می‌شود: «آهان، درست شد!»، «بالاخره، آن چـه را کـه می‌خواستم، پیدا کردم!»، «پس، رمزکار در این جاست!» و . . . در مثال ما، تنها کافی‌است متوجه‌متوازی‌السطوح بشویم؛ ولی اگرنتوانیدبه‌نقش این متوازی‌السطوح در حل مسأله پی ببرید، هنوز بـه‌اندیشهٔ تعیین‌کننده‌ای نرسیده‌اید. شما به چیزبیشتری نیازدارید! البته، لازم نیست، همهٔ جزئیات را ببینیدکه، مثلاً ، این متوازی‌السطوح، چگونه شما را به‌مقصد می‌رساند، ولی لازم است این احساس در شما به‌وجودآیدکه، ایـن اندیشه، بدون تردید، شما را به سمت هدف راهنمایی می‌کند.

§۴. رابطهٔ اندیشه با تصادف

آیا اندیشه‌ای به‌ذهن شما رسیده است؟ اگر پاسخ شما مثبت باشد، به معنای‌آن است که، شانس‌آورده‌اید. مگرنه این است که هروقت به‌اندیشه‌ای

نیازدارید، نمی‌توانید به‌آن دست یابید؟ مسألهٔ مشخصی جلوروی‌من است. به‌طور جدی به‌آن مشغول شده‌ام؛ آن را به‌صورتی روشن، برای خودتنظیم کرده‌ام؛ همهٔ جزئیات‌آن را، به‌روشنی، درذهن خودمجسم کرده‌ام. درمسألهٔ خود، غرق شده‌ام . . . منتظراندیشهٔ سودمندی هستم، ولی‌آیا ظاهرخواهد شد؟ ممکن است یکباره پیدا شود، ممکن است با گذشت زمان و به‌تدریج قوام بگیرد و ممکن است اصلاً، به‌چنین اندیشه‌ای نرسم.

ما نیازمند اندیشه‌های ثمربخش هستیم و، طبعاً، علاقه‌مندیم که این اندیشه‌های ثمربخش، جلو روی ما و دراختیار ما باشند. ولی، درواقع‌امر، اندیشه‌ها، ما را در اختیار خود دارند، آن‌ها هستندکه برما حکومت‌می‌کنند و خود، آزاد و خودسرند. ممکن است، به صورتی نامنتظر و ناگهانی ظاهر شوند، ولی در اغلب موردها، خود را پنهان می‌کنند و با تأخیر جلو می‌آیند؛ گاهی ما را وامی‌دارند که مدت‌ها در انتظار بمانیم و گاهی هم اصلاً به‌ندای‌فراخوان ما گوش‌نمی‌دهند. اندیشه‌ها، هروقت‌که خودبخواهند رو نشان می‌دهند، نه هروقت که ما انتظارآن‌ها را می‌کشیم. انتظار پدیدار شدن یك اندیشه، شبیه انتظار برد، در بازی لوتر است.

خوب، اگر به‌این ترتیب، قبول‌کنیم‌که اندیشه، مهمانی ناخوانده و تصادفی است، آن وقت، حل مسأله، تا حد زیادی، بستگی به پیش‌آمدهای خوش، پیدامی‌کند. وکم نیستندکسانی که‌این‌گونه فکرمی‌کنند. سه‌موئل‌باتلر[۱]، این فکر را، به‌صورتی زیرکانه بیان می‌کند:

همهٔ کشف‌ها، به‌ناچار پدید می‌آیند؛
ولی نه از طریق عقل‌آدمی و یا استدلال ظریف؛
آن‌ها به‌کسی رو می‌آورندکه خوشبخت‌تر است:
پرتو روشنائی، بی‌اختیار و ناگهانی برآن‌ها می‌افتد[۲].

---

۱. سه‌موئل‌باتلر (۱۶۱۲ـ۱۶۸۰)، شاعر طنزپرداز انگلیسی.
۲. در اصل

All The inventions that the world contains,
←

به سختی می‌توان باور کرد، عقیده‌ای که تا این حد طرفدار دارد، به‌کلی بی‌پایه است و هیچ گونه مبنای درستی ندارد. ولی آیا می‌توان آن را کاملاً درست دانست؟ آیا، وقتی که می‌خواهیم مسأله‌ای را حل کنیم، باید تمامی امید خود را به لطف و مرحمت پیش‌آمدها ببندیم؟

امیدوارم، خواننده‌ای که همهٔ فصل‌های گذشته را مطالعه کرده است، بتواند عقیدهٔ معینی، دراین‌باره، پیدا کند.

تمرین‌ها و یادداشت‌های تکمیلی

۱. ظهور ناگهانی اندیشه‌ها. یك نقل‌قول و تفسیر در بارهٔ آن.

۱°. نقل‌قولی از کتاب توماس‌پن[1] به‌نام The Age of Reason، می‌آوریم: هر پژوهشگری که دربارهٔ فعالیت و تکامل عقل انسانی مطالعه می‌کند، درعین‌حال که برمشاهده‌ها و تجربه‌های عقل خودش تکیه دارد، نمی‌تواند از دو مقولهٔ مختلفی که تفکر نام دارند، اجتناب کند: مقولهٔ اول، به آن‌هایی مربوط می‌شود که به کمك تفکر و تأمل خود، فعالانه ادامه می‌دهیم، ومقولهٔ دوم را، می‌توان آن‌هایی دانست که، به‌خودی خود و بی‌اختیار، در ذهن ما شعله‌ور می‌شوند. من همیشه به این بیگانه‌های داوطلب، حداکثر احترام را می‌گذارم و کوشش می‌کنم دریابم که تا چه حد توانسته‌اند به استعدادهای من امکان بدهند و تا چه اندازه روش التفات آمیزی با من داشته‌اند؛

→

Were not by, reason first found out, nor brains;
But pass for theirs who had the luck to light
Upon them by mistake or oversight.

۱. Thomas Paine (۱۷۳۹ ـ ۱۸۰۹)، روشنگر مشهور آمریکایی، رجل‌سیاسی ونویسندهٔ آثارسیاسی واجتماعی؛ ایالت«پنسیلوانیا»، که‌توماس‌پن در آن می‌زیست، به‌نام او نام‌گذاری شده است.

به‌این‌ترتیب بوده است که من‌توانسته‌ام، همهٔ آن چه را که می‌دانم، به‌دست آورم.

۲°. لیختن‌برگ[1]، درجایی متذکر می‌شودکه نبایدگفت «می‌اندیشم»، بلکه باید گفت «به ذهنم می‌رسد»، همچون موقعی که می‌گوییم: «باران می‌آید» یا «یخ‌می‌زند». لیختن‌برگ می‌خواهد بگویدکه، درفکر، رفتار‌هایی خودانگیزوبی‌مقدمه وجود داردکه نمی‌توان آن‌ها را هدایت کرد، درست به همان ترتیب که نمی‌توانیم نیروهای عظیم طبیعت را هدایت کنیم.

می‌توانستیم این راهم اضافه‌کنیم‌که رفتارعقل ما، گاهی به‌رفتاراسب یا قاطر چموش شباهت دارد، حیوان عجیبی‌که باید خودرا با اوتطبیق دهیم وگاهی‌هم او را هی کنیم تا بتوانیم به خدمت خود واداریم، زیرا معمولاً ازفرمان برداری ماسرپیچی می‌کند.

۲. دوآزمایش. بعضی وقت‌ها (والبته، نه‌خیلی زیاد)، زمانی را که صرف حل جدول واژه‌ها می‌کنیم، جبران می‌شود: دراین جا، می‌توان بعضی نکته‌ها دربارهٔ حل مسأله یادگرفت، زیرا روشن می‌کندکه ماچگونه فکر می‌کنیم و چگونه باید فکربکنیم.

۱°.درجدول واژه‌ها، به‌این توضیح، برای‌جملهٔ مجهول برمی‌خوریم: «احساسی‌عادی وهمگانی» (۱۲حرف). ابتدا ممکن است هیچ‌گونه‌حدسی دربارهٔ این واژه یا جمله نداشته باشید، حتی ممکن است توضیح آن را هم‌نفهمید. ولی، یکی‌ازواژه‌هایی راکه جملهٔ مورد نظرشما را قطع کرده است، کشف رمز می‌کنید و، در نتیجه، یکی از حرف‌های جملهٔ مجهول شما پیدا می‌شود، واژهٔ دیگری، حرف دیگری را به شما می‌دهد، بعد حرف‌سوم، حرف چهارم،... و ناگهان، جملهٔ مجهول «به ذهن شما راه می‌یابد».

قلم‌وکاغذی‌بردارید و به‌حل‌این مسأله، بامراجعه به‌بخش‌حل‌تمرین‌ها، بپردازید. ابتدا، به‌سطراول نگاه‌کنید، هنوزبرای‌کشف رمزآگاهی کمی‌در

---

۱. ژرژ کریستف لیختن‌برگ (۱۷۴۲ـ۱۷۹۹) فیزیک‌دان و نویسندهٔ آلمانی.

اختیارداريد، به‌سطردوم وبعدسوم و... مراجعه کنید. آیا می‌توانید جملهٔ مجهول را پیدا کنید؟ به‌این ترتیب است که می‌توانید بفهمید، چگونه «فکری به ذهن شما می‌رسد».

*۲°. اگراندکی باآنالیز ریاضی آشنا باشید، می‌توانید همین آزمایش را، باجست‌وجوی یك انتگرال نامعین، انجام دهید. کاغذرا به‌دست بگیرید و بخش حل تمرین‌های فصل دهم را باز کنید.

فصل یازدهم

کار ذهنی

ماریوت می‌گوید که عقل انسانی به‌صندوقچه می‌ماند: وقتی‌که می‌اندیشید مثل‌این است که صندوقچه‌را آن‌قدر تکان می‌دهید تا چیزی از آن بیرون بریزد. بنابراین، تردیدی نمی‌توان داشت کـه نتیجهٔ تفکر، تاحدی، به تصادف مربوط است. من اضافه می‌کنم که عقل انسانی، بیشتر به غربال شباهت دارد: وقتی که فکر می‌کنید، غربال را تا آن‌جا تکان می‌دهید، که ذره‌های کوچك از آن بیرون بریزند. به همان ترتیب کـه این ذره‌ها رد می‌شوند، توجه هوشیارانهٔ شما، آن‌هایی راکه برای کارمورد نظرتان مناسب تشخیص می‌دهـد، جدا می‌کند ودراختیار می‌گیرد.

یك‌قیاس دیگر: دژبان شهر، برای پیدا کردن دزد، به مردم دستور می‌دهد، در نزدیکی دروازه‌ای که مردغارت شده‌انتظار می‌کشد، رژه بروند. دراین‌جا می‌توان، برای صرفه‌جویی دروقت و کاهش میزان کار، از نوعی روش گزینشی استفاده‌کرد. مثلاً، اگرمرد غـارت شده ادعا

کند که دزد مرد است و نه‌زن، مردی میان سال است و نه جوان یا کودك، دراین صورت می‌توان آن‌هایی را که به این نشانی‌ها نمی‌خورند، از دژه در برابردروازه معاف کرد.

لایب نیتس Opuscules

§ ۱. چگونه می‌اندیشیم؟

کسی که مسأله‌ای را حل می‌کند، باید عقل واندیشهٔ خودرا بشناسد، درحالی که پهلوان باید ازوضع بدن ونیروی جسمانی خودآگاه باشد، تقریباً همان‌طور کـه سوارکار اسب خود را می‌شناسد. گمان می‌کنم که سوارکار، اسب‌های خودرا، نه‌ازدیدگاه علم خالص، بلکه از این جنبه مورد مطالعـه قرار می‌دهد که بتواند، از این راه، بهترین نتیجه‌ها را در مسابقه‌ها به‌دست آورد. او به‌شناخت ویژگی‌ها وهوس‌هایی ازاسب نیازداردکه به‌کارخاص او بخورد، نه به‌مطالعهٔ کلی درفیزیولوژی وروان‌شناسی اسب. آن‌چه دراین‌جا می‌خوانید، فصلی ازیك کتاب درسی روان‌شناسی نیست و، اگرنخواهیم‌دقت را رعایت کنیم، می‌توانیم آن‌را گفت و گویی بدانیم که، علاقه‌مندان به‌حل مسأله، دربارهٔ ویژگی‌های عقل واندیشهٔ خود انجام می‌دهند. همان طور که سوارکاران دربارهٔ اسب خودبحث می‌کنند؛ واین، بحثی به‌مراتب دشوارتر ازگفت وگودربارهٔ طرح انتزاعی موضوع‌های مشخص است.

§ ۲. تمایل به حل مسأله

مهم‌ترین بخش‌روند حل‌هرمسأله‌را، باید میل، شوق وعزم راسخ حل‌کننده، بـرای حل‌آن دانست. مسأله‌ای‌که نیت حل آن‌را دارید و به‌اندازهٔ کافی‌آن را فهمیده‌اید، هنوزبه‌هیچ وجه مسأله شما نیست. یك مسأله، وقتی به مسألهٔ واقعی شما تبدیل می‌شود ووقتی به‌طورکامل شمارا دربرمی‌گیرد، که به طورجدی وآن طورکه شاید و باید، تصمیم بگیرید و بخواهید آن را حل کنید.

ممکن است ازمسأله‌ای بیشتریاکمترخوشتان بیاید وتمایل شما به‌حل آن، نیرومندتریاضعیف‌ترباشد، ولی تأکید می‌کنم، تاوقتی‌که به تمایل کاملاً نیرومند نرسید، شانس‌شما برای حل یك‌مسألهٔ دشوار و واقعی، ناچیزاست.

تمایل به‌حل مسأله، به‌خودی خود، ثمربخش است، زیرا می‌تواند، سرآخر، منجربه‌تصمیمی جدی شودکه، بدون تردید، موجب تکانی درفکر شما خواهد شد.

§۳. هدف‌مند بودن تفکر

ممکن است، به مفهوم واقعی خود، «اسیر» یك مسأله شده باشید. خودمسأله «شما را اسیرکرده است» ودر موقعیتی نیستیدکه بتوانید خود را آزادکنید؛ همه‌جا شمارا تعقیب می‌کند.

گاهی یك‌مسأله، چنان برحل‌کنندهٔ خودمسلط می‌شودکه اوراپریشان می‌کند، به‌نحوی‌که قدرت درك‌چیزهایی راکه‌برای همهٔ دیگران روشن‌است، ازدست می‌دهد وچیزهایی را فراموش می‌کندکه هیچ‌کس وهرگزآن‌را ازیاد نمی‌برد. نیوتون، وقتی‌که به‌شدت روی مسأله‌های موردنظرش کارمی‌کرد، غالباً نهار خوردن را فراموش می‌کرد.

درواقع، توجه کسی‌که مسأله‌ای‌را حل می‌کند، توجهی گزینشی‌است. اونسبت به‌چیزهایی‌که گمان می‌کند به‌مسألهٔ اوربطی ندارند، بی‌توجه‌است. درعوض،کوچکترین چیزهایی راکه، ولو دردوردست، ارتباطی بامسألهٔ او پیدا می‌کنند، می‌بیند. واین، به‌بیان لایب نیتس، توجهی هدف‌مند وآگاهانه است .

§۴. نزدیکی راه حل

دانش‌آموزی امتحان‌کتبی ریاضی دارد. ازاونخواسته‌اند همهٔ مسأله‌ها را حل‌کند، ولی‌بایدراه‌حل حداکثرتعداد مسأله‌هایی‌راکه می‌تواند، بنویسد. درچنین وضعی، بهترین روش، احتمالاً این است که به‌سرعت همهٔ مسأله‌ها را ازنظربگذراند وآن‌هایی‌را انتخاب‌کندکه قابل دسترس‌تر وساده‌ترهستند.

البته، فرض بر این است که دانش‌آموز این استعداد را دارد که، تا اندازه‌ای، بتواند دشواری مسأله‌ها را ارزیابی کند و، تا حدی، قادر باشد «فاصلهٔ روانی» خودرا با حل مسأله‌ها «تخمین بزند». درواقع، هرکسی که به‌طور جدی به‌حل مسأله‌ای می‌پردازد، باید نزدیکی خودرا به‌راه‌حل وسرعت پیشرفت خودرا به‌سوی هدف نهایی، به‌صورتی زنده، احساس کند. چه‌بسا که نتواند آن‌را بیان کند ولی، به‌صورت مشخصی، احساس می‌کند: «کار رو به‌راه است وازهمین حالا راه حل را می‌بینم»، یا «کار به‌سختی وکندی پیش می‌رود، هنوز با راه حل فاصلهٔ زیادی دارم» ، یا «گیج شده‌ام، هیچ پیشرفتی وجودندارد» و یـا «آهسته آهسته به‌راه می‌آیم، ولی هنوزازراه حل فاصله دارم».

§۵. پیش‌بینی

همین که، به‌طور جدی، به‌حل مسأله‌ای مشغول می‌شویم، چیزی‌مارا برمی‌انگیزاند که دربارهٔ آیندهٔ کار بیندیشیم؛ تلاش می‌کنیم، روند آینده را پیش‌بینی کنیم، درانتظـار چیزی هستیم و می‌خواهیم طرح راه حل را حدس بزنیم. ولی طرح، ممکن است کم وبیش مبهم ویاحتی نادرست‌باشد، اگرچه غالباً خیلی نادرست نیست.

هرکسی که به‌حل مسأله‌ای مشغول می‌شود، ناچاراست به گمان‌هایی متوسل شود و یا فرض‌هایی را پیش بکشد. ولی تفاوت است بین حدس یك آدم تازه‌کار وبی‌تجربه، با حدس دانشمندی اندیشمند وعمیق.

آدم بی‌تجربه، همان‌طور که پشت گردن خودرا می‌خاراند ویا ته‌مداد خود را می‌جود، درانتظاریك آگاهی روشن وملموس است. اوتنها درانتظار اندیشه‌ای درخشان است و، برای این که ورود چنین اندیشه‌ای را تسریع کند، خیلی کم کار می‌کند (ویا حتی هیچ کاری انجام نمی‌دهد) . وقتی‌هم که اندیشهٔ موردنظرش ظاهرشد وحدسی درست به‌ذهن‌اورسید، تقریباً (یامطلقاً) بدون هیچ تردید وانتقادی، به‌آن دل می‌بندد وباآن، به‌عنوان راه‌حلی‌حاضر وآماده، برخورد می‌کند.

ولی آدم اندیشمند، بـا حدس‌های خـود، با تردید بیشتری برخورد

می‌کند. نخستین حدس او ، ممکن است این طـور باشد : « باید ۲۵ باشد» یا « من باید به او این طور واین طور بگویم». ولی، بلافاصله بعد از ایـن حدس، به‌آزمایش می‌پردازد وحتی ممکن است حدس خود را تغییردهد: «نه، ۲۵ نیست، بهتراست ۳۰ را امتحان کنم» یا «نه، این طور واین طور گفتن، معنایی ندارد، زیرا ممکن است او به من اعتراض کند و نظرمن را رد کند؛ ولی خوب، دراین صورت، من به اوخواهم گفت که ...» اوبا حرکت دراین مسیر، به‌کمك « آزمایش وخطا » و استفاده از تقریب‌های متوالی، می‌تواند سرانجام، به پاسخ درست برسد وطرح کامل راه حل را ارائه کند[1].

افراد آزموده‌تروعمیق‌تر، وقتی که نمی‌توانند تمامی جواب را به‌طور کامل پیداکنند، می‌کوشند تا بخشی ازآن را حدس‌بزنند، یا یك ویژگی‌جزئی از آن را به دست‌آورند، یا تقریبی ازجواب و یا حتی قسمتی از این تقریب را معین‌کنند. بعد تلاش می‌کنند تـا حدس خـود را تعمیم بدهند و، در عین حال، از جست وجوی امکان آزمایش آن هم غافـل نمی‌مانند و حدس خود را بـه محك آ گاهی‌های کامل‌تری می‌زنند کـه، در این مرحله از حـل، در اختیار دارند.

هرکسی، چه در کارخودکمترآزموده باشد و چه بیشتر، بدون تردید، صادقانه می‌خواهد به‌حدس خوبی دست‌یابد وبه‌اندیشهٔ واقعاً ثمربخشی برسد.

وهرکسی می‌خواهد بداندکه حدس او تا چه حد شانس درست بودن را دارد. این شانس را نمی‌توان به‌طور دقیق سنجید (و دراین‌جا، نمی‌خواهیم به تجزیه وتحلیل امکان‌های تقریبی ارزیابی‌آن بپردازیم). با وجود این، در بسیاری‌موردها، هرکسی که به‌حل مسأله‌ای‌مشغول است، ممکن‌است احساس معینی دربارهٔ دورنمای حدس خود داشته باشد. حتی افراد کاملاً عادی، که اطلاعی دربارهٔ اثبات واستدلال ندارند، ممکن است قوی‌ترین احساس‌ها را، نسبت به حدس‌های خـود، داشته باشند. در افـراد اندیشمند، احساس‌های مختلفی را می‌توان دید، ولی به هرحال، کسی که پیش‌بینی را کـرده است، همیشه تصوری دربارهٔ سرنوشت احتمالی حدس خود دارد. بـه این‌ترتیب،

---

۱. ۱°و۵° از ۲§ فصل دوم را ببینید.

به‌جزاین احساس که چه‌چیزی به‌مسألهٔ مورد نظر مربوط می‌شود وچه چیزی به‌آن مربوط‌نیست وبه جزاحساس نزدیکی راه‌حل، به‌وجود احساس دیگری هم در ذهن حل‌کنندهٔ مسأله پی می‌بریم: پیش بینی.

آیا این ملاحظه، ربطی به کاردارد؟ آیا با هدف خیلی فاصله داریم؟ این حدس تاکجا مفید است؟ ـ این پرسش‌ها، درگام به‌گام کار، با حل کنندهٔ مسأله همراه است. این پرسش‌ها، بیش از آن‌که به‌صورتی روشن تنظیم شده باشند، احساس می‌شوند وپاسخ آن‌ها هم، بیشتر از آن که پیش‌بینی شود، احساس می‌شود. آیا چنین پرسش‌هایی به‌حل‌کنندهٔ مسأله جهت هم می‌دهند، یا تنها او را همراهی می‌کنند؟ آیا این پرسش‌ها، دلیل علتی و سببی دارند یا تنها نوعی نشانه و عکس‌العمل به‌حساب می‌آیند؟ ـ من این را نمی‌دانم، ولی می‌دانم که اگرچنین‌احساس‌هایی درشما وجود نیاید، درواقع، به‌معنای آن است که به‌مسألهٔ خود علاقه‌مند نیستید.

§۶. میدان جست وجوها

من به ندرت ازساعت مچی خودم جدا می‌شوم، ولی هروقت که پیش آمده است، دایماً درتشویش پیداکردن آن بوده‌ام. همین‌که ساعتم راگم‌می‌کنم، طبق عادت، به‌جست وجوی‌آن درجای کاملاً مشخصی می‌پردازم: در میز تحریرم، یا درقفسه‌ای‌که معمولاً خرده ریزهای خود را درآن جا می‌گذارم ویا، بعضی وقت‌ها درجای دیگری (اگر به یادبیاورم‌که ساعت خود را درآن جا بازکرده‌ام).

این‌رفتار، طبیعی‌است. همین‌که به‌مسأله‌ای‌علاقه‌مندشویم، می‌کوشیم محدوده‌ای را معین‌کنیم و، دردرون‌آن، به‌جست وجوی راه حل بپردازیم. این محدوده، ممکن‌است مبهم باشد، ممکن است تاحدّی غیرقابل لمس‌باشد، ولی به‌هرحال، همین محدوده است‌که‌کار آیندهٔ ما را مشخص می‌کند. البته، تلاش برای حل مسأله، می‌تواند ازراه‌های مختلفی باشد، ولی درواقع،همهٔ آن‌ها، شبیه یکدیگرند و، همه‌آن‌ها، درداخل همان محدوده‌ای قراردارندکه از قبل (ولوناآگاهانه) معین شده است. وقتی‌که دریکی از تلاش‌های خود،

برای حل مسأله، به نتیجه نرسیم، احساس نومیدی می کنیم، اعتماد خودرا از دست می‌دهیم، تقریباً هیچ چیز دیگری بـه ذهنمان نمی‌رسد و نمی‌توانیم خود را از درون محدوده‌ای که برای خود تعیین کرده‌ایم، نجات‌دهیم. ما در واقع، در جست و جوی راه حل ، به‌طـورکلی، نیستیم، بلکه دنبال راه حل مشخصی هستیم که درچارچوب محدودهٔ مورد قبول قبلی ما قرار داشته‌باشد. ما، نـه درتمامی جهان، بلکه در میدان جست وجوی محدودی، بـه دنبال راه حل هستیم.

به این ترتیب، ظاهراً بهتر است کـه جست وجوی راه حل، دردرون میدان محدود ومناسبی، انجام گیرد. وقتی که می‌خواهید ساعت خود را پیدا کنید، بهتر است درجست وجوی آن، نه درتمامی دنیا یا سراسر یك شهر ویا حتی تمامی منزل، بلکه درست درمیز تحریرخود بروید، جایی که در گذشته، غالباً، ساعت خودرا در آن جا یافته‌اید. بی‌هیچ تردیدی بهتر است جست و جوی گم شدهٔ خود را، درمیدان محدودی انجام دهیم، نه این که بی‌فکرانه درموردهایی پافشاری کنیم که برایمان روشن است نمی‌توان هدف خود را در آن‌جا پیداکرد.

§۷. راه حل‌های بینابینی

روند حل مسأله، ممکن است خصلت تفکری واندیشه‌ای داشته باشد که درمورد افرادکم قدرت‌تر، گاهی به تخیلی بی ثمر تبدیل می‌شود. گاهی هم، می‌توان روند حل‌مسأله را، مسیری طولانی،سخت و پرپیچ وخم دانست که به سمت هدف می‌رود و در هرپیچ آن، یك راه حل بینابینی در انتظار ما است. این راه حل‌های بینابینی، احساسی درما به‌وجود می‌آورنـد (احساس قبلی را تأیید یا تکذیب می‌کنند) که، برای رسیدن به راه حل، چه چیزهایی بـه مسأله مربوط است و از چه چیزهایی باید صرف نظر کـرد و، در نتیجه، امید ما را برای نزدیك شدن به هدف، زیادتر یا کمتر می‌کنند. خود این راه‌حل‌های بینابینی و احساس ناگهانی ناشی از آن را، به سختی می‌توان بیان کرد، ولی غالباً وجود دارد:

«آهان، باید خودش باشد».

«نه، گمان نمی‌کنم، دراین‌جا، به جایی برسم. بهتراست آن یکی را امتحان کنم».

«این‌جا هم، چیزکی دیده می‌شود، دلم گواهی می‌دهد. ولی باید تلاش کنم و بیشتر نزدیك شوم».

یکی از مهم‌ترین نوع‌های راه حل بینابینی، گسترش میدان جست و ـ جوها و کنار گذاشتن محدودیت‌هایی است که تنگی آن‌ها جلو دست و پای ما را می‌گیرد.

۸§. بسیج و سازمان دهی

ما دربارهٔ ویژگی‌های فعالیت ذهنی انسان ـ کسی که مسأله را حل می‌کند ـ چیزکمی می‌دانیم. چه‌بسا که بغرنجی این فعالیت، بی‌حد ومرزباشد، ولی یك جنبهٔ آن کاملاً روشن است: هرقدر که حل کنندهٔ مسأله جلوترمی‌رود، آگاهی‌های بیشترو بیشتری دربارهٔ موضوع مورد مطالعه‌اش پیدا می‌کند.

دیدگاه وشناخت فرد را روی مسألهٔ ریاضی، درابتدا وانتهای کار، با هم‌مقایسه کنیم. وقتی مسأله‌ای پیدا می‌شود، طرح ساده‌ای دارد: حل کننده، ویژگی‌های مسأله را یا بدون جزئیات و یا با جزئیات بسیارکمی می‌بیند. او اغلب، قسمت‌های اصلی مسأله را تشخیص می‌دهد ـ مجهول‌ها و داده‌ها، شرط ونتیجه یا فرض وحکم را. ولی، طرحی که در پایان کار می‌بیند، چیز به کلی دیگری است: به چنان عنصرها و اضافه‌هایی مجهز شده است و چنان حالت بغرنج وهمه‌جانبه‌ای پیداکرده است که، درابتدا، حتی گمانی هم‌دربارهٔ آن‌ها نمی‌رفت. خط‌های کمکی به شکل اصلی اضافه ومجهول‌های کمکی به‌ـ کار گرفته‌شده‌است. آگاهی‌هایی که ازقبل، وظاهراً بی‌ارتباط بامسألهٔ‌مفروض، در ذهن حل کننده بوده است، کاربرد مشخص خود را پیداکرده‌اند وبه خوبی روشن شده است که: بله، این‌ها مهم‌ترین قضیه‌هایی بودند که به‌مسألهٔ ما، مربوط می‌شدند. حل کننده، به هیچ وجه نمی‌توانست، درابتدای کار وموقعی که تازه حل مسأله راآغاز کرده بود، پیش‌بینی کند که به‌خصوص این قضیه‌ها

هستندکه به کار او می‌خورند.

این مواد اولیه ـ عنصرهای کمکی، قضیه‌ها و غیره ـ ازکجا آمده‌اند؟ آن‌ها، درطول زمان، درخاطرهٔ حل کننده جمع شده‌اند و اکنون، وبرای حل یك مسألهٔ مشخص، به صورتی مناسب جدا و از ژرفای حافظه بیرون کشیده می‌شوند. جلب چنین آگاهی‌هایی را بسیج وبه کار گرفتن آن‌هارا درحل مسأله، سازمان دهی می‌نامیم.[۱]

روند حل یك مسأله، شبیه ساختن خانه است. ابتدا باید مصالح لازم را جمع‌آوری کرد، ولی تنها وجود مصالح کفایت نمی‌کند: توده‌ای ازسنگ را نمی‌توان خانه نامید. برای این که خانه‌ای ساخته شود، یامسأله‌ای به‌حل کامل خود برسد، باید عنصرهای جدا ازهم را به‌هم ترکیب کرد وآن‌ها رابه سمت مجموعهٔ واحدی که مورد نظر ما است سوق داد.

درعمل، نمی‌توان کاربسیج را، ازکار سازمان دهی جداکرد؛ آن‌ها به عنوان جنبه‌های متفاوت یك روند واحد، یکدیگر را کامل می‌کنند و این، همان روندکار ذهنی است که هدف نهایی آن، همان حل مسأله است. اگر این کار، به شدت درجریان باشد، همهٔ مصالح به‌کار گرفته می‌شود و به‌همهٔ گام‌های استعداد ذهنی شما نیاز می‌افتد ومجموعه‌ای بی پایان از جنبه‌ها و دیدگاه‌ها را به وجود می‌آورد. البته، اغلب ضمن عمل لازم است بعضی از عنصرهای عمل‌ذهنی خود را جداکنید وآن ها را بـا اصطلاح‌هایی همچـون انتزاع وتـرکیب، تشخیص و یادآوری و یـا تجدید گروه بندی و تکمیل، بیان کنید.

در بندهای بعد، کوشش می‌شود، این عمل‌ها شرح داده شود. البته، خواننده نباید منتظر باشد که بتوانیم مرز دقیق وروشنی بین ایـن مفهوم‌ها رسم کنیم ویا به تعریف‌های قطعی وبی چون و چرایی برسیم.

۹§. تشخیص و یادآوری

ضمن حل مسالـه، اگر بتوانیم عنصر آشنایی را تشخیص دهیم، خیلی

---

۱. با تمرین ۳۸ فصل دوم، مقایسه کنید.

خوشحال خواهیم شد. مثلاً، ضمن مطالعهٔ یك شکل هندسی، می‌توانیم مثلثی راکه قبلاً متوجه آن نبودیم یا دومثلث متشابه ویا شکل آشنای دیگری را کشف کنیم. ضمن بررسی یك رابطهٔ جبری، ممکن است متوجه یك مجذور کامل یا ترکیب آشنای دیگری بشویم. البته ممکن است باموقعیت پیچیده‌تری برخورد کنیم که، تشخیص آن، برای ما مفید باشد. حتی ممکن است ندانیم که آن را چگونه بنامیم و برای آن، تعریفی مشخص نداشته باشیم، ولی متوجه بشویم که، وجود آن، به صورت شگفت انگیزی برای ما آشنا ومهم است.

وقتی که موفق شویم، ضمن بررسی یك شکل، مثلثی را تشخیص دهیم، زمینهٔ خوبی برای احساس رضایت ما به‌وجود می‌آید. درواقع، قضیه‌هایی در بارهٔ مثلث می‌دانیم ومسأله‌های مختلفی دربارهٔ مثلث حل کرده‌ایم، بنابراین، چه‌بسا که یکی از این قضیه‌های آشنا ویا یکی از مسأله‌هایی که قبلاً حل شده است، بتواند برای حل مسألهٔ ما مفید واقع شود. باکشف همین مثلث، با میدان گسترده‌ای از آگاهی‌های قبلی خود، بستگی پیدا می‌کنیم که، چه‌بسا، یکی ازقسمت‌های آن بتواند به‌کارما بیاید. به این ترتیب، تشخیص، معمولاً ما را برمی‌انگیزاند تا همهٔ آن چه برای حل مسأله مفید است، به‌یادبیاوریم و، در نتیجه، به بسیج آگاهی‌های ما، در جهت مسألهٔ مورد نظر، کمك می‌کند.

§۱۰. تکمیل وتجدید گروه‌بندی

فرض می‌کنیم توانسته باشیم مثلث را روی شکل تشخیص دهیم وموفق شده باشیم قضیه‌ای از مثلث را، که احتمال مفید بودن برای مسألهٔ ما دارد، به یاد آوریم. بازهم فرض می‌کنیم که، برای کاربرد عملی این قضیه، لازم باشد یك خط کمکی، ومثلاً ارتفاع مثلث، را رسم کنیم. عنصرهای بالقوه مفید وبسیج کننده، که به درك مسألهٔ ما مربوط می‌شوند، معمولاً می‌توانند مسأله را غنی‌تر کنند، صورت قطعی‌تربه‌آن بدهند، سدها را بشکنند، کمبودها را جبران کنند و، دریك کلام، آن را تکمیل نمایند.

این تکمیل، مواد تازه‌ای به‌همراه داردکه به فهم مسأله کمك می‌کند

و گام مهمی درسازمان دهی آن به‌شمار می‌رود. با وجود این، گاهی می‌توان درسازمان دهی حل به‌نتیجه رسید، بدون این‌که مصالح تازه‌ای به آن اضافه کنیم. دراین‌حالت، تنها بایك تغییردرنظم عنصرهای موجود، از راه مطالعهٔ روابط بین آن‌ها درموضع‌گیری تازه‌ای‌که دارند، ازطریق جابه‌جا کردن یا تجدید گروه‌بندی آن‌ها، می‌توان به نتیجهٔ دلخواه رسید. با تجدیدگروه بندی عنصرها، درواقع«ساختار» درك خود را ازمسأله تغییرمی‌دهیم. به‌این‌ترتیب، تجدید گروه بندی، یعنی تغییر ساختار.

مطلب را، به‌طورمشخص‌تر شرح می‌دهیم. ممکن است کلید حل یك مسألهٔ هندسی، رسم یك خط کمکی باشد. ولی گاهی، گام قطعی درحل‌مسأله را می‌توان بدون هیچ‌گونه خطاضافی و درمحدودهٔ همان عنصرهای موجود، منتهی با برداشتی تازه، برداشت. مثلاً ممکن است متوجه شویم که بعضی ازخطهای راست، دومثلث متشابه به‌وجودآورده‌اند. وقتی‌که این‌شکل‌بندی تازه‌را درنظربگیریم، بین‌عنصرها رابطه‌هایی راکشف می‌کنیم‌که، تاآن‌موقع، به نظرمان نمی‌رسید؛ آن‌ها را درگروه‌بندی تازه‌ای می‌بینیم، ساختارتازه‌ای جلوما نمایان می‌شود، شکل را سازمان یافته‌تر، هم آهنگ‌تر وبا دورنمایی روشن‌تر می‌بینیم: مواد ومصالح مسأله، به صورت تازه‌ای در برابر ما قرار می‌گیرند.

تجدید گروه‌بندی ممکن است تکیه‌گاه ما را درمورد درك مسأله‌تغییر دهد. ممکن است عنصرها ورابطه‌هایی‌که، قبل از تجدیدگروه‌بندی، درطرح مقدم بودند، مقام درجه اول خود را از دست بدهند و به عقب طرح منتقل شوند، حتی ممکن است چنان عقب بروند که عملاً، درجریان حل مسأله، به حساب نیایند. برای این‌که جریان حل مسأله را بهتر سازمان دهیم، باید گاه به گاه چیزی را که قبلاً مربوط بـه کار می‌دانستیم، از گردونه خارج کنیم. باوجود این، معمولاً ودرمجموع، بیشتر اضافه وکمتر حذف می‌کنیم.

§۱۱. انتزاع و ترکیب

ضمن مطالعهٔ یك واحد مرکب، ممکن است توجه ما به‌این یا آن‌جزء

جلب شود. تمام حواس خود را، روی جزءِ معینی متمرکز و تمامـی توجه خود را معطوف به‌آن می‌کنیم، تکیهٔ کار خود را بر آن می‌گذاریم وآن را، ازهمهٔ آن چه دور وبرآن است جدامی‌کنیم ـ دریك‌کلام، آن را جدا ومنتزع می‌کنیم. سپس، نورافکن را به جزءِ دیگری می‌اندازیم و به‌مطالعهٔ انتزاعی جزءِ تازه‌ای می‌پردازیم وغیره.

بعد ازآن که یك رشته از اجزاء را مطالعه کردیم و ارزش و کارایی آن‌ها را سنجیدیم، ممکن است دوباره لازم باشد موقعیت تمامی مسألـه را، درمجموع وبه‌صورت واحد، بررسی کنیم. درواقع، بعد از ارزیابی اجزاء و قسمت‌های جداگانه، ممکن است «سیمای کلی»[1] مسأله تغییرکند. ممکن‌است اثر ترکیبی ارزش‌های قسمت‌های جداگانه، ما را به طرح فکـر تازه‌ای، در مورد موقعیت کلی مسأله برسانـد. ترکیب همهٔ اجزاء بـا یکدیگر ومطالعهٔ ویژگی‌های آن، به‌صورتی هم‌آهنگ و درارتباط با یکدیگر، غالباً امکان این طرح ریزی تازه را فراهم می‌کند.

تجزیه وترکیب، که مکمل یکدیگرند، می‌تواند موجب پیشرفت روند حل شود. تجزیه، کل واحد را بـه بخش‌هایی تقسیم می‌کند، ولـی ترکیب دوبارهٔ بعدی، بازهم موجب پیدایش همان واحد کل می‌شودکه، کم وبیش، با واحد نخستین متفاوت است. تجزیهٔ واحد به اجزاء تشکیل دهندهٔ آن (یا به‌زبان دیگر، انتزاع اجزاء ازواحدکل)، سپس به‌هم پیوستن آن‌ها به‌صورتی تازه، دوباره تجزیـه و دوباره ترکیب تازه‌ای از آن‌ها، این است راهی‌کـه درك ما رانسبت‌به‌مسأله، به‌تدریج، دگرگون می‌کندودورنمای روشن‌تری، برای حل آن، به ما می‌دهد.

§۱۲. دیاگرام (نگاره)

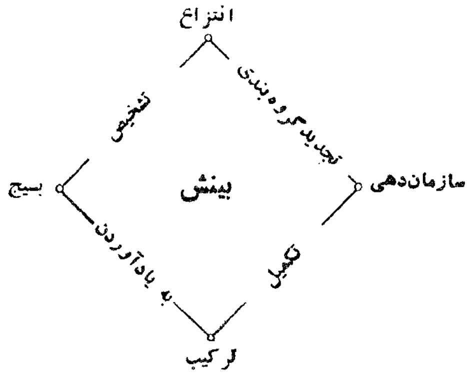
خلاصهٔ‌آن‌چه‌راکه‌دربندهای‌قبلی‌گفتیم، درشکل ۴۱ داده‌ایم. ارزیابی

---

۱. «Gestalt»، «vue d'ensemble»، «appearance of the whole»

این اصطلاح‌ها، در ساختمان‌های روان شناسی اروپای غربی و امریکا، نقشی اساسی دارند.

اهمیت این طرح را به‌خواننده وامی‌گذاریم. ۹ اصطلاح را، به‌صورت یك مربع درآورده‌ایم، یکی ازآن‌ها را درمرکز، چهارتا درچهار رأس وچهارتای دیگر را روی ضلع‌های مربع گذاشته‌ایم.



شکل ۴۱. چگونه می‌اندیشیم

بسیج و سازمان دهی را، به این جهت، در دوانتهای متقابل قطر (افقی) مربع گذاشته‌ایم که، این دوعمل، یکدیگر را ضمن کار کامل‌می‌کنند. بسیج، عنصرهایی راکه برای کار ما لازم است، از خاطره بیرون می‌کشد و، سازمان دهی، آن‌ها را در جهتی‌که برای هدف ما لازم است، به هم مربوط می‌کند.

انتزاع و ترکیب را هم، دردوانتهای متقابل قطر دیگر (قطرقائم)مربع گذاشته‌ایم، چراکه آن‌ها هم، درعمل مکمل یکدیگرند. انتزاع، قسمت‌های مشخصی از واحد به‌هم پیوسته را جدا می‌کند، وترکیب، دوباره قسمت‌های جدا شده را در واحد قابل درکی به هم می‌پیوندد.

روی ضلع‌هایی‌که از بسیج آغاز شده‌اند، تشخیص و به یادآوردن را گذاشته‌ایم، زیرا درعمل، بسیج عنصرهایی‌که به مسأله بستگی دارند، غالباً با تشخیص بعضی عنصرهای موجود درمسأله آغاز می‌شود و، همراه با آن، آگاهی‌هایی‌که به‌این عنصرها مربوط می‌شوند ـ و ازقبل باآن‌هاآشناهستیم ـ

به یاد ما می‌آید.

روی ضلع‌هایی که از سازمان دهی آغـاز می‌شود، واژه‌های تکمیل و تجدیدگروه‌بندی را قرارداده‌ایم، زیرا سازمان دهی، درعمل، به‌معنای تکمیل درك ما از مسأله است، به معنای آن است که از راه اضافه‌کردن قسمت‌های تازه و از بین بردن شکاف‌ها و نارسایی‌ها، مسأله را به‌کمال معینی برسانیم. سازمـان‌دهـی همچنین، به معنای تجدید گروه‌بندی و تجدید بنا، در تمامی درك ما از مسأله است.

وقتی اصطلاح‌هایی را می‌خوانیم که درطول ضلع‌های مربع قراردارند، باید از بسیج اجزاء به هدف سازمان دهی برسیم؛ همین‌که اجزاء را تشخیص دادیم وتمامی توجه خود را روی هرجزء منتزع شده متمرکز کردیم، امکان تجدید بنا، در درك تمامی مسأله، برای ما بـه وجود می‌آیـد. درست همین جزئی‌که به یاد می‌آوریم و معلوم می‌شود کـه می‌تواند برای عمل ترکیبی مفید باشد، می‌تواند به‌غنای درك ما ازمسأله‌کمك‌کند وآن را تکمیل نماید.

درجریان‌حل‌مسأله، بینش (یاپیش‌بینی) درمرکزفعالیت شما قراردارد، به همین جهت، جای آن را درمـرکز مربع استعاری خود قرارداده‌ایم. مـا ضمن حرکت‌خود، بابسیج‌کردن‌وسازمان دادن، با انتزاع‌وترکیب، باتشخیص ویادآوری عنصرهای مختلف، با گروه بندی و تکمیل درك خود از مسأله، می‌کوشیم تا حل مسأله یا جنبه‌ای از ویژگی این حل را پیش‌بینی کنیم، یا قسمتی ازمسیر مورد نظر را به دست‌آوریم. اگر پیش‌بینی یا بینش، ناگهانی پیش‌آید (همچون برقی‌که درآسمان‌می‌جهد)،آن را الهام یا اندیشهٔ درخشان می‌نامیم؛ داشتن چنین اندیشه‌ای، آرزوی باطنی هرکسی است.

عملکرد فکر، که روی‌شکل‌منعکس شده است، وقتی شکل مشخص‌تری به خود می‌گیرد که آن را درمورد موضوع معینی مـورد بررسی قراردهیم. چهار عملکرد فکر را، که متناظر با چهار ضلع مربع ما است، واهمیت زیادی برای حل مسأله‌های ریاضی دارند، در نظر می‌گیریم.

تشخیص	تجدید گروه‌بندی
استفاده از تعریف‌ها	تجدید سازمان مسأله

به یاد آوردن	تکمیل
قضیه‌ها و مسأله‌های آشنا	واردکردن عنصرهای کمکی

به‌یك موضوع دیگرهم توجه کنیم. همراه با پیشرفتی که درکارحاصل می‌شود، احساسی به‌وجود می‌آیدکه هدف عمل‌ها را روشن‌تر و نزدیکی راه حل‌را محسوس‌ترمی‌کند، احساسی که مبین درستی حدس‌ها وموفق بودن‌آن‌ها است. ضمن بحث‌دربارهٔ این‌موضوع، ضمناً یادآوری کرده‌ایم که‌افراد اندیشمند، با احساس‌های به‌کلی متفاوتی از هم جدا می‌شوند. نمی‌خواهم در این جا دربارهٔ نکته‌ای که‌بیشتر جنبهٔ معرفت ذهنی دارد، سکوت کنم: بعضی‌از گونه‌های این احساس، می‌تواند به‌عماکردهای ذهنی مربوط باشدکه درشکل ۴۱ منعکس شده است.

ما وقتی خوشحال می‌شویم که‌درکی کاملاً متعادل وهم‌آهنگ ازمسأله داشته باشیم؛ وقتی که درك ما شامل همهٔ عنصرهای ضروری و، ضمناً، تنها عنصرهای شناخته شده و آشنا، باشد. وقتی‌دریك کل هم‌آهنگ، به عنصرهای زیاد ومختلفی برخوردکنیم، اندیشهٔ حل، نزدیك به‌نظر می‌رسد. به‌نظرم، با به‌کاربردن این اصطلاح‌ها، توانسته باشم نشان دهم که این یاآن‌عماکردها ــ که‌آن‌ها را دراین‌جا بررسی کردیم ــ می‌توانند به‌خوبی کاررا به‌جلو برند ویا حتی به‌هدف برسانند.

وقتی درك ما از مسأله کاملاً متعادل است‌که ضرورتی برای تجدید گروه‌بندی عنصرهای آن‌را، احساس نکنیم؛ درك‌ما ازمسأله، وقتی‌سازگاری درونی داردکه نیازی به یادآوری عنصرها ومراجعهٔ به‌حافظه نداشته‌باشیم، وهرکدام ازاین عنصرها، به سادگی وخود به‌خود، دیگران را به یادبیاورد. اگرنیازی به‌فهم مسأله نداشته باشیم وهمه چیزآن، برای ما، روشن باشد، به‌معنای کامل بودن آن است؛ واگر همهٔ عنصرها را تشخیص داده باشیم، به‌معنای‌آن است‌که مسأله‌را می‌شناسیم وبرآن‌تسلط داریم. وقتی که‌عنصرها را به‌روشنی درك کنیم، می‌توانیم، بــه نوبت، هرکدام ازآن‌ها را به‌صورت انتزاعی بررسی وتمامی توجه خودرا روی‌آن متمرکز کنیم؛ ووقتی‌که درك ما هم‌آهنگ باشد، می‌توانیم ترکیب عنصرها را باموفقیت انجام دهیم. وقتی

اندیشه‌ای‌را نزدیك ودردسترس می‌بینیم که، درموردآن‌چه بینش می‌نامیم، پیشرفت قابل‌اطمینانی احساس‌کنیم.

می‌خواهیم این نشانه‌ها را-که به‌پیشرفت موفقیت‌آمیزما کمك‌می‌کنند- درطرحی منظم‌کنیم، به‌نحوی که ارتباط متقابل‌آن‌ها، به‌همان صورتی باشد که درمربع‌شکل۴۱ نشان داده‌ایم. به‌این مناسبت، هفت اصطلاح را در این طرح قرار می‌دهیم: چهار اصطلاحی‌که روی ضلع‌های مربع قرار دارند وسه اصطلاحی که روی قطرهای آن واقع شده‌اند. طرح چنین است:

عنصرها با موفقیت جدا شده‌اند:

روشن بودن عنصرها

عنصرها باموفقیت‌تشخیص‌داده شده‌اند: عنصرها با موفقیت‌گروه‌بندی شده‌اند:

احساس درك درست‌مسأله تعادل‌کامل دردرك مسأله

بینش:

نزدیکی اندیشهٔ نهایی

به یادآوردن با موفقیت: تکمیل با موفقیت:

سازگاری درونی مسأله پایان درك‌کامل مسأله

ترکیب با موفقیت:

هم‌آهنگی در درك مجموعهٔ کار

۱۳§. جزء ازکل خبر می‌دهد

کنارمن درخیابان، پسربچه‌ای است که‌آهنگی را با سوت می‌زند. من تنها یك یا دوضرب ازملودی را می‌گیرم واین همان ملودی است‌کـه خیلی دوست دارم، ولی مدت‌هاست‌که نشنیده‌ام. یکباره این ملودی ذهن مرا فرا-می‌گیرد، تمامی توجه‌مرا به‌خود جلب‌می‌کند وهمهٔ‌آن‌چه راکه تاآن لحظه، دراندیشهٔ من بود، کنارمی‌زند.

این حادثهٔ‌کوچك، می‌تواندنمونهٔ خوبی برای‌شرح «تسلسل‌اندیشه‌ها»

و «تداعی معانی» باشد، پدیده‌ای که ارسطو و، بعداز او، بسیاری ازمؤلفان دیگرهم، به‌آن پرداخته‌اند. بهترین توصیف این پدیده‌را، برادلی(*Bradley*) داده‌است: «ذهن آدمی چنان است که وقتی قسمتی ازآن چه قبلاً ـ و به‌طور جداگانه ـ به‌خود جذب کرده است، به‌یاد بیاورد، تمایل دارد بقیهٔ آن راهم بازسازی کند». به‌این ترتیب است که، وقتی یك‌ضرب ازملودی را می‌شنویم، ابتدا به‌تمامی ملودی علاقه‌مند می‌شویم و، سپس به‌تدریج، تمامی‌ضرب‌های باقی مانده را به‌یاد می‌آوریم. واین، یکی‌ازویژگی‌های تسلسل اندیشه‌ها و تداعی معانی است که کمبود عنصرها را به‌سادگی به‌یاد می‌آورد: «جزءازکل خبرمی‌دهد». وما، این جملهٔ کوتاه وساده را، به‌جای تعریف دقیق‌تر برادلی انتخاب می کنیم.

دربارهٔ دوواژهٔمهم«تمایل دارد» و«خبر می‌دهد» دقت کنید: حکم‌هایی از نوع:

«جزء ازکل خبر می‌دهد»،

«جزء تمایل به‌بازسازی کل دارد»،

«درجزء، امید به‌بازسازی کل وجوددارد»

را قابل قبول به‌حساب می‌آوریم، ولی حکم

«جزءکل را بازسازی می کند»،

به‌هیچ وجه، برای بیان «تسلسل اندیشه‌ها» و «تداعی معانی»، قابل قبول نیست، زیرا این قانون، ادعای بازسازی کل را ندارد، بلکه دراین‌باره، تنها ازتمایل، امید وشانس صحبت می کند. چیزهایی‌هم، دربارهٔ نیروی این‌تمایل می‌دانیم: وقتی‌که «جزء» درمرکزتوجه قرار گیرد، برای‌رسیدن به‌درك«کل»، ثمربخش‌ترمی‌شود؛ مجموعهٔ چندجزء، بازهم ثمربخش‌تراز حالتی که هرجزء به‌طورجداگانه درنظر گرفته شود، دربارهٔکل زمزمه می کند. این نکته،برای فهم نقش تداعی معانی در فعالیت ذهنی افراد، اهمیت زیادی دارد.

به‌طرحی ازیك‌مثال توجه کنیم. یك مسألهٔ ریاضی، ممکن است‌به‌کمك قضیهٔ Dـ که برای حل کننده آشنا است ـ خیلی زود حل شود، درحالی که بدون به‌کار گرفتن این قضیه، کارحل‌آن بسیاردشوار باشد. حل کنندهٔ مسأله،

درابتدا، گمانی‌دربارهٔ رابطهٔ‌قضیهٔ D بامسألهٔ خود ندارد، ولواین که‌به‌اندازهٔ کافی بااین قضیه آشنا باشد، اوچگونه می‌توانـد حدس بزندکـه، قضیهٔ D، چنین نقش قطعی‌را درحل مسأله به‌عهده دارد؟ دراین‌جا، حالت‌های مختلفی می‌توانند وجود داشته باشد.

حالت نسبتاً ساده، وقتی‌است که فرض مسأله وقضیهٔ D، وجه‌مشترکی داشته باشند. حل‌کننده، ابتدا یك جزء وبعد جزء دیگری ازمسأله‌را آزمایش می‌کند واین جزءِ مشترك را کشف می‌کند، سپس آن‌را جدا می‌کند و تمامی توجه خودرا روی‌آن متمرکزمی‌نماید، درنتیجه، این شانس را داردکه، به کمك همین جزءِ مشترك، تمامی قضیهٔ D را به‌طورکامل، به‌یاد بیاورد.

حالتی‌که مسأله، دردرك اولیهٔ خود، وجه مشترکی باقضیهٔ Dندارد، دشوارتراست. دراین حالت ممکن است، قضیه‌ای مثل C وجود داشته باشد که برای‌حل‌کننده‌آشنا باشد و، درضمن، درجزئی بامسألهٔ ما ودرجزءِدیگری باقضیهٔ D مشترك باشد، دراین صورت‌هم، امکان رسیدن بهD وجود دارد؛ به‌این ترتیب‌که ابتدا با C وسپس، ازطریق آن، با D تماس‌حاصل می‌شود.

روشن است‌که رشتهٔ تداعی، ممکن است طولانی‌ترباشد: فرض مسأله می‌تواند، ضمن تداعی، به A برسد، سپس ازطریق A به B، ازطریق B بـه C و، سر انجام، ازطریق C به D . هرقدر رشته درازتر باشد، باید بیشتـر «جعبه را تکان داد» یا «غربال را جنباند» تا، سرآخر، قضیهٔ موردنظر D از آن بیرون بیفتد.

تکان دادن جعبه وجنباندن غـربال را ، می‌توان بـه‌عنوان یك روش استعاری برای شرح فعالیت ذهنی درنظرگرفت. دربندهای قبل، که مضمون آن‌هارا درشکل۴۱ نشان داده‌ایم، کوشیدیم تا بااستعارهٔ‌کمتری، این‌فعالیت راتفسیرکنیم. این، تفسیری‌بود ازگونه‌های مختلف این فعالیت‌که،به‌اندازهٔ کافی، به حقیقت نزدیك است. همین فعالیت‌هاست که حل‌کننده می‌کوشد، به‌کمك آن‌ها، تماس لازم را با «قانون تداعی» داشته باشد.

در واقع، عنصر تشخیص، حل کنندهٔ مسأله را به‌این جهت به‌بحث و داوری می‌کشاندکه، این عنصر، تماس نزدیکی با تـداعی دارد. هـرعنصر

تازه‌ای که بسیج می‌شود و با درك مسأله ارتباط دارد، برای حل کننده این امکان را به‌وجود می‌آورد تا عنصرهای دیگری را ـ که ازراه تداعی باآن تماس دارند ـ به‌طرف خود بکشد. وقتی که حل کننده عنصری را جدا، وتمام توجه خودرا روی این عنصرانتزاعی متمرکزمی کند، شانس زیادی وجود دارد که عنصرهای دیگری که به‌مقولهٔ مورد نظرما مربوطاند، وارد عمل شوند. تجدید گروه‌بندی، می‌تواند عنصرهایی را به‌هم نزدیك کندکه، درمجموع خود و بنابر قانون تداعی، چیزی بیشترازهرعنصر جداگانه و انتزاعی، به‌ما بدهد.

باهمهٔ این‌ها، به‌دشواری می‌توان روندانديشه‌هایی راکه درذهن حل‌کننده جریان دارد، تنها با یك قانون تداعی، روشن کرد. به‌جزاین، باید چیزدیگری‌هم وجود داشته باشدکه، به‌کمك‌آن، بتوان عنصرهای مربوط را ازعنصرهای نامربوط، لازم‌را از غیرلازم وبافایده را ازبی‌فایده جدا کرد.

تمرین‌ها و یادداشت‌های تکمیلی

۱. تجربهٔ شما، رأی وداوری شماست. قصدما این است، به‌شما کمك‌کنیم تا بتوانید قدرت وتوانایی خود را درکارهای پژوهشی بالا ببرید. ولی، در واقع، تنها خودتان هستیدکه می‌توانید از عهدهٔ این کار برآیید. شما باید این موضوع‌را برای خود روشن کنیدکه، بین آن‌چه‌معمولاً انجام می‌دهید با آن‌چه درواقع باید انجام دهید، چه‌تفاوتی وجود دارد! این فصل‌برای کمك به‌شما نوشته‌شده‌است تابتوانید بهترازآن‌چه معمولاً انجام‌می‌دهید، به کار بپردازید.

تمرین‌های ۲ تا۶، ازشما می‌خواهد تامقام واقعی آن‌چه راخوانده‌اید، روشن کنید. قبل‌ازهمه، تلاش‌کنید، به‌تجربهٔ شخصی خودتان تکیه‌داشته باشید: به‌حادثه‌هایی که، ضمن کار، برایتان پیش‌آمده است وبدون این که به‌ذهن خود فشارآورید. این‌روش، بیشتراز هروضع دیگری، برای شما آموزنده است. بکوشید دراین‌باره باخودتان بحث کنید: آیا تجربهٔ شما، باآن‌چه درمتن خوانده‌اید ویا باطرح شکل ۴۱، سازگاراست؟

۲. بسیج. مسیری را که برای حل یك مسألهٔ هندسی گذرانده‌اید، به خاطر

آورید: در ابتدا با شکلی کم محتوی سروکار داشتید، ولی به تدریج توانستید، آن را به‌وسیلهٔ عنصرهای کمکی، کامل و کامل‌تر کنید و، همراه باآن، حل مسأله را به‌جلو ببرید.

۳. بینش. آیا می‌توانید «آن لحظهٔ طلایی وزیبا» را به یاد بیاورید که، ناگهان، متوجه شده‌اید، راه‌حل «روبه‌روی شما قراردارد»؟

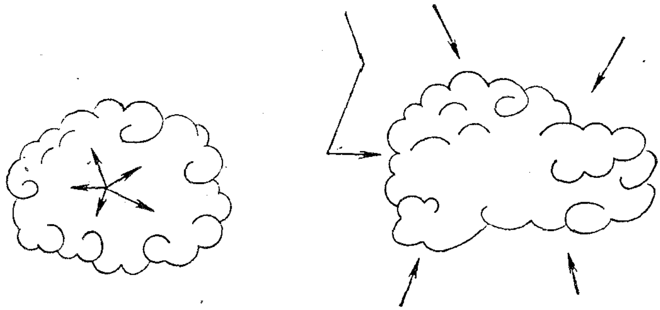
۴. جزء کل‌را زمزمه‌می‌کند... هرچه اجزاء بیشتری‌را بشناسیم، به‌همان‌اندازه، کل را بیشتر درك می‌کنیم. آیا موردی ازاین‌گونه را، درکارهای شخصی خود، سراغ دارید؟

۵. تشخیص. آیا می‌توانید موردی را به‌خاطرآورید که، درلحظه‌ای حساس ازحل مسأله، توانسته باشید عنصری‌را تشخیص دهید (یعنی، حالتی‌که، یکباره، متوجه شویدکه عنصرخاصی می‌تواند نقش عمده‌ای را به‌عهده بگیرد، نقشی‌که تاآن‌لحظه، به‌آن توجه نداشته‌اید)؟

۶. تجدید گروه‌بندی. آیا می‌توانید موردی‌را درکارهای گذشتهٔ خود به‌یاد آوریدکه، باگروه‌بندی تازه‌ای از عنصرهای شکل، توانسته باشیدکلید حل مسأله را به‌دست آورید؟

۷. کار ازدرون وکار از بیرون. یکی ازقسمت‌های اصلی کارحل‌کننده، این‌است که بتواند بین فرض مسأله و ذخیرهٔ تجربی خود، رابطه‌ای برقرارکند. می‌توان تلاش‌کردکه این ارتباط «ازدرون» و یا «ازبیرون» برقرارشود. اومی‌تواند با باقی ماندن در محدودهٔ مسأله، عضوهای جداگانهٔ آن را مورد مطالعه قراردهد، تاآن‌جاکه بتواند عنصری را دربین‌آن‌ها پیداکند که موجب جذب عنصر مفیدی ازبیرون بشود (یعنی عنصری‌که‌قبلاً یاد گرفته است وجزوآگاهی‌های اوبه‌حساب می‌آید). او همچنین می‌تواند حرکت خودرا ازبیرون‌آغازکند و، دربین‌آگاهی‌هایی‌که ازقبل دراختیار دارد، به‌جست وجوبپردازد تاجایی‌که بتواند عنصری‌راکه‌برای مسألهٔ‌او مفید به‌نظر می‌رسد، پیداکند. وقتی‌که حل‌کننده، مسأله‌را ازدرون مورد حمله قرارمی‌دهد، مسألهٔ موردنظر خود را، تمامی بخش‌ها وجنبه‌های مختلف آن‌را می‌شکافد ومطالعه می‌کند. ولی وقتی که ازبیرون حمله

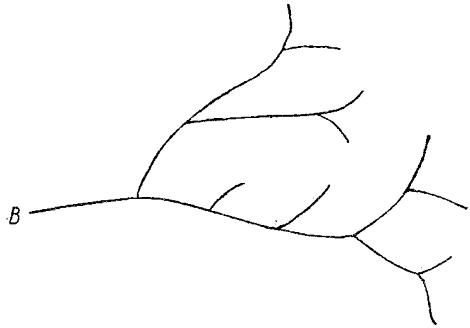
می‌کند، یك‌یك آگاهی‌های خودرا ازنظر می‌گذراند و، درگوشه‌های ذهن خود، به‌جست وجوی چیزی می‌پردازدکه بتواند درمورد مسألهٔ اوبه‌کار آید. درشکل ۴۲، کوشش کرده‌ایم، مفهوم «ازبیرون» و «ازدرون» را، روشن‌تر نشان دهیم.



شکل ۴۲. چه ازدرون حمله‌کنیم وچه ازبیرون، هدف مایکی است: می‌خواهیم ابرها را بپراکنیم وتیرگی را ازبین ببریم.

۸. پیچ‌وخم اکتشافی. شکل۴۳ را می‌توان، مثلاً، کوره راه‌هایی دانست‌که درداخل جنگلی پرفراز و نشیب، بدون نقشهٔ خاصی، وجود دارد؛ نقطهٔ B ورود را نشان می‌دهد. شکل ۴۳ را، همچنین، می‌توان به‌عنوان مسیری پرپیچ وخم درنظرگرفت‌که یك موش توانسته است، ضمن یك آزمایش روان‌شناسی، روی‌آن حرکت کند.

ولی همین شکل ۴۳ را می‌توان تجسمی ازکارکسی دانست‌که به حل مسأله مشغول است. بعدازآن‌که، درابتدا، مقداری وبه‌طورمستقیم‌جلو می‌رود، به‌کوره راه‌های پرپیچ‌وخمی برمی‌خوردکه (درواقع، یادرتصور حل‌کنندهٔ‌مسأله) به‌بن‌بست‌می‌رسد. درچنین‌حالتی، حل‌کننده، روی راهی که رفته است، به‌عقب برمی‌گردد تا متوجه یك راه‌فرعی دیگر می‌شود؛ همان‌جا وارد همین راه‌فرعی می‌شود وآن قدر پیش می‌رود تا به بن‌بست تازه‌ای برسد وبه‌ناچار دوباره به‌عقب برمی‌گردد. به همین ترتیب، کار خودرا ادامه‌می‌دهد. یك‌یك‌کوره راه‌ها راآزمایش می‌کند، بارها به‌عقب برمی‌گردد، بارها مسأله را می‌کاود و راه‌های تازه‌ای را جست و جو



شکل۴۳. راه‌ها، کوره راه‌ها، بن‌بست‌ها و راه‌های فرعی

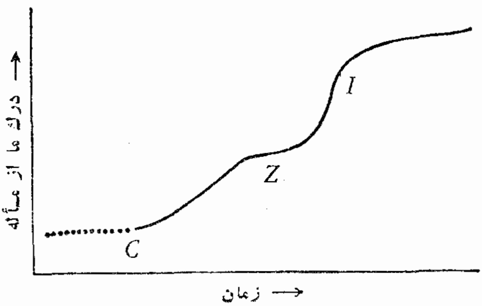
می‌کند تا، سرانجام، راه درست را به‌دست می‌آورد.

۹ . پیش‌روی. به‌همان اندازه که جریان حل مسأله به‌جلو برود، درك حل‌کننده‌هم، نسبت به‌مسألهٔ خود، تغییر می‌کند: مهم‌ترین چیز دراین مورد این است که مواد و مصالح مربوط به مسأله را بیشتروبیشتر جمع‌آوری می‌کند. فرض کنیم که بتوانیم مقدارمواد ومصالحی راکه، درهرلحظهٔ زمانی، به‌وسیلهٔ حل کننده جمع‌آوری می‌شود، ارزیابی کنیم و، ضمناً، بتوانیم این مصالح‌را، تاحدی، متناسب بامیزان درك حل کنندهٔ مسأله، به حساب آوریم. البته، این فرض، ساده‌لوحانه و غیرواقعی است، ولی این امکان را به‌ما می‌دهدکه بتوانیم منحنی پیشرفت روند حل مسأله‌را، پیش خود، مجسم کنیم.

در دستگاه مختصات (شکل ۴۴ را ببینید)، محور طول را محور زمان و محورعرض‌را «اندازهٔ»درك حل کننده ازمسألهٔ خود، درلحظهٔ مورد نظر، می‌گیریم. منحنی حاصل، درك حل‌کننده را از مسأله، همچون تابعی از زمان، نشان می‌دهد. این منحنی، به روشنی، روند حل را در ذهن حل‌کننده، مجسم می‌کند.

فرض می‌کنیم، روند حل مسأله، بدون فراموش کردن قسمت‌های پیدا شده، جریان داشته باشد؛ با این فرض است که منحنی شکل ۴۴ رسم‌شده‌است، یعنی منحنی که رو به‌بالا می‌رود (تابع ما، نسبت به‌زمان،

هرگـز نزولی نیست)؛ منحنی (از سمت چپ)، با خطی کـه صعودی تدریجی و تقریباً یك‌نواخت دارد، آغاز می‌شود (آن را با نقطه‌چین نشان‌داده‌ایم). این قسمت را بایـد متناظر با دوران ناآگاهانـهٔ حل مسأله دانست. نقطهٔ C، که از آن‌جا منحنی را با خط کامـل نشان



شکل ۴۴. آغاز کار آگاهانه ـ رکود ـ اندیشه‌ها، الهام، نقطهٔ عطف.

داده‌ایم، آغاز کار آگاهانه به‌حساب می‌آید. شیب منحنی درهر نقطه، معرف سرعت پیشرفت حل‌کننده، درلحظهٔ زمـانی متناظر است. این، سرعت تغییر را نشان مـی‌دهد: کمتریـن مقدار آن درنقطهٔ Z است، که نقطهٔ رکـود (آنی) است. مماس بـرمنحنی دراین نقطه، تقـریباً افقی است. برعکس، حداکثرسرعت، درنقطهٔ I ظاهر می‌شود، جایی که شیب‌حداکثررا دارد. I نقطهٔ عطف منحنی است، این‌نقطه برای حل‌ـ کننده سرنوشت ساز است، نقطهٔ بـروز اندیشه‌ها و لحظهٔ الهام است (نقطهٔ Z هم، نقطهٔ عطف‌است، منتهی با خصلتی متضادنقطهٔ I، زیرا شیب منحنی درنقطهٔ Z به‌حداقل خودمی‌رسد).

پیشرفت حـل در ذهن حـل‌کننده ، رونـدی بغرنج و جنبه‌هایی گوناگون وپایان‌ناپذیر دارد. شکل ۴۴ نمی‌تواند مدعی باشدکه قادر است تمامی این جنبه‌هارا روشن‌کند، ولـی می‌تواند به‌آن‌چه از قبل می‌دانستیم، چیزی‌اضافه‌کند و درك مارا از روند حل‌مسأله، تا حدی،

ملموس‌تر سازد. این شکل، مثلاً، می‌تواند شکل اساسی ۳۰ را کامل‌تر و با روشنایی بیشتر به ما بشناساند.

۱۰. شما هم مثل من هستید. همهٔ آن‌چه را که من دربارهٔ حل‌مسأله می‌دانم (ویا به‌نظرم می‌رسد که می‌دانم)، به‌برکت اندیشیدن درموردهایی که برایم جالب وثمربخش بوده است، به‌دست آورده‌ام. ضمن خواندن کتاب، بحث با دوستان، مذاکره بادانشجویان ویاشنیدن سخن‌رانی‌ها، به مطلب نامنتظری پی‌می‌برم و وسوسه می‌شوم تا بگویم: «شما هم مثل من هستید، شما هم اغلب همان کاری را می‌کنید که من انجام می‌دهم». اعتراف می‌کنم که این احساس «شما هم مثل من هستید»، حتی ضمن مشاهدهٔ رفتار جانوران، پرندگان، سگ‌ها و گاهی، حتی موش‌ها هم به‌وجود می‌آید.

۱۱. موش‌ها وآدم‌ها[۱]. زن خانه‌دار به‌سرعت وارد حیاط شد، تله‌موش را روی زمین گذاشت (این، از همان تله‌موش‌های قدیمی بود: قفس کوچکی، با دری که محکم بسته می‌شد)، دخترش را صداکرد تاگربه را به‌آن‌جا بیاورد. به‌نظر می‌رسید که موش، هدف این تدارك را می‌فهمد،با هیجان از خودش ناآرامی نشان می‌داد، دیوانه‌وار به‌این طرف وآن‌طرف‌تله می‌رفت وخودش‌را به‌میله‌های‌باریك اطراف‌می‌زد و، سرانجام درلحظهٔ آخر، توانست خود را با فشار به میان دو میله واردکند، ازمیان‌آن‌ها خود را بیرون‌بکشد وبه‌حیاط همسایه فرارکند. ظاهراً،فاصلهٔ‌بین دومیله،درهمان‌جایی که موش توانست فرارکند، کمی گشادتر بود. و به‌این‌ترتیب، هم زن‌خانه‌دار وهم، بعداز او، گربه، مأیوس و دمق شدند. ولی، علاقهٔ من درابتدا متوجه موش بود، به نحوی که برایم دشواربود احساس خود را نسبت به زن خانه‌دار و گربه بیان‌کنم، ولی پیش خودم به‌موش تبریك گفتم. او توانست‌یك مسألهٔ جدی را حل کند و، در واقع، درس‌آموزنده‌ای به‌من‌داد.

---

۱. این عنوان، برای‌خوانندهٔ امریکایی، خیلی‌زود، داستان معروف اشتاین‌بك، به‌همین نام را تداعی می‌کند.

مسیر حل مسأله‌ها هم، درست به‌همین ترتیب باید باشد. باید به آزمایش بعد ازآزمایش بپردازیم، تاجایی‌که، به‌تصادف، به روزنه‌ای برسیم که تفاوتی جزئی با دیگران دارد وتمامی حل‌مسأله هم، به‌همان جا مربوط است. باید چنان همه‌جانبه به‌آزمایش بپردازیم که امکان بررسی همهٔ جانب‌ها را به‌دست‌آوریم. مگر نه این است که از ابتدا نمی‌دانیم، کدام شکاف کمی فراخ‌تر از دیگران است و ما درست از طریق آن، می‌توانیم خود را نجات دهیم؟

روش‌اصلی که برای حل‌مسأله به‌کارمی‌رود، برای‌آدم‌ها وموش‌ها، یکی است. آزمایش کنید، دوباره ودوباره‌آزمایش کنید تا، با تلاش‌همه‌جانبه، امکان مساعد را برای‌شما به‌وجودآورد. البته، ازحق‌نگذریم که آدم‌ها ، اغلب، بهتر از موش‌ها مسأله را حل می‌کنند. آدم لازم نیست، تمام وجود خودرا روی مانع بیندازد، او می‌تواند ازاندیشهٔ خودکمك بگیرد و راهی را برودکه تفکر اوحکم می‌کند، اومی‌تواند خیلی چیزها را به‌تلاش خود اضافه‌کند و از عدم موفقیت‌های خود، درس‌هایی بگیردکه برای او، به‌مراتب، آموزنده‌تر از موش باشد.

فصل دوازدهم

نظام ذهن

روش، یعنی جا به‌جا کردن و به نظم در آوردن چیزی که ذهن نقاد، به‌منظور کشف حقیقتی، متوجه آن‌شده است.

دکارت. قانون‌های راه‌بردن عقل

§ ۱. چگونه باید فکر کرد؟

درفصل یازدهم تلاش کردیم ویژگی‌های مشخص‌کنندهٔ کار ذهنی شخص را، ضمن حل یك مسأله (ریاضی یا غیر ریاضی) شرح دهیم. ولـی آیا آن‌چه مشخص‌کننده است، درست وعاقلانه هم‌هست؟ کار ذهنی ما می‌تواند به‌این ترتیب جریان داشته باشد، ولی‌آیا باید به‌همین‌ترتیب جاری باشد؟

به‌این پرسش‌ها، به‌دلیل ابهام‌هایی که وجود دارد، به سختی می‌توان پاسخ منجز ویگانه‌ای داد؛ ولی طرح آن‌ها را، برای نشان‌دادن جهت اصلی طرح خود، لازم دانستیم. با تکیه برتجربهٔ ذهنی کارکسانی که حل مسأله‌ها را آزموده‌اند ــ وما در فصل یازدهم با آن‌آشنا شدیم ــ تلاش می‌کنیم تا از کارکرد ذهن (گام‌ها، روندها وغیرآن)، آن‌چه‌را برای حل‌مسأله مفیداست، برشمریم و، درعین‌حال، کوشش می‌کنیم، مقام هر یك از این‌کارکردها را، درجریان حل‌مسأله، معین کنیم.

این‌عمل‌های مفیدرا، که درحل‌مسأله به‌کار می‌روند، به‌صورتی کوتاه وفشرده بیان و، ضمن‌آن، ازپرسش‌ها وتوصیه‌های‌لازم و «مقرر» یادمی‌کنیم.

باید برای‌خواننده روشن باشدکه این گونه پرسش‌ها وتوصیه‌ها را به‌دو گونه می‌توان تفسیر کرد: یا به‌عنوان نقل‌قول از گفت‌وگوی پژوهشگر باخودش، ویا به‌عنوان مراجعهٔ معلم با تجربه‌تر، به‌دانش‌آموزی که می‌خواهد از او کمك بگیرد.

§ ۴. متمرکزکردن دقت روی هدف

وقتی می‌خواهید مسأله‌ای را حل‌کنید، غالباً دربارهٔآن فکر می‌کنید. حتی‌ممکن است تاآن‌جا فکر شمارا به‌خود مشغول‌کندکه به‌اندیشه‌ای مزاحم تبدیل شود. ولی تنها فکرکردن ساده، به‌مسأله، کافی نیست، باید به‌صورتی پیگیر دربارهٔآن بیندیشید، به‌نحوی‌که مسأله را به‌صورتی روشن دربرابر خود ببینید و، قبل از هرچیز، ازخود بپرسید: چه‌چیزی از ما خواسته‌اند؟

در جریان حل مسأله، موردهای مناسب بسیاری، برای طرح این پرسش، پیش می‌آید. وقتی‌که در یکی از مسیرهای فرعی، بیش از اندازهٔ لازم، فرورفته‌اید وممکن است، سرآخر، شما را به‌بن‌بست بکشاند یا ازهدف اصلی به‌کلی دورکند، وقتی‌که احساس می‌کنید از نظر فکری سرگردان شده‌اید، بسیار به‌جاست، دوباره، ازخود بپرسید: چه‌چیزی ازماخواسته‌اند؟و دوباره هدف اصلی را درمرکز توجه خود قرار دهید.

هدف‌مسأله عبارت‌است‌از پیدا کردن‌مجهول. برای این‌که‌توجه خود را روی این‌هدف متمرکزکنید، از خودتان بپرسید: مجهول کدام است؟ هدف قضیه، عبارت است از نتیجه‌گیری از راه استدلال. دراین مورد باید این پرسش را دربرابر خود قرار دهید: به‌کدام نتیجه باید رسید؟

بعد ازآن‌که‌هدف مسأله، یعنی‌مجهول وموضوع آن، را تشخیص‌دادید، باید ازهمهٔ آن‌چه دراختیار دارید، صورت‌برداری‌کنید تا بتوانید عنصرهایی ازآن‌ها را، که احتمالاً برای رسیدن به‌هدف به‌درد می‌خورند، جداکنید. بنابراین، باید ازخودتان بپرسید: چه‌چیزی دراختیار دارید؟

فرض‌کنیم، می‌خواهید رابطه‌ای بین دوعنصر برقرارکنید و راهی جست‌وجوکنیدکه شما را ازیکی به‌دیگری برساند. دراین‌جا، بررسی‌هرکدام

ازآن‌ها وتوجه‌نوبتی به‌این وآن‌عنصر، می‌تواند به‌شما کمك‌کند. از یك‌عنصر آغاز کنید و، بعد، به‌سراغ دیگری بروید، به‌نحوی که بتوانید، غالباً و پشت سرهم، ازخود بپرسید: چه چیزی خواسته‌اند؟ چه چیزی دراختیار داریم؟

وقتی با یك مسأله سروکار دارید و می‌خواهید مجهولی را پیدا کنید، معنای این پرسش‌ها چنین است: مجهول چیست ؟ چه‌چیزی داده شده است؟ شرط مسأله کدام است؟ وقتی که می‌خواهید قضیه‌ای را ثابت کنید و، با استدلال، نتیجه‌ای را به‌دست‌آورید، پرسش‌ها به‌این گونه‌اند: به‌چه نتیجه‌ای باید رسید؟ درچه موقعیتی (وباچه‌شرطی)قرار داریم؟

این پرسش‌ها، چه فایده‌ای دارند ؟ فایدهٔ آن‌ها این است‌که ما را وامی‌دارند، نسبت‌به‌بخش‌ها وعنصرهای مسأله، توجه‌کنیم. به‌اعتقاد دکارت، روش حل مسأله، عبارت است از متوجه‌کردن دقت خود به همهٔ آن‌چه به اجزای مسأله مربوط می‌شود؛ توجه دایمی ازیك جزء به‌جزءِ دیگر، درهمان ردیفی که‌قرار گرفته‌اند. من دراین‌مورد تردید ندارم‌که بخش‌های اصلی‌مسأله (مجهول، معلوم وشرط) وبخش‌های اصلی‌قضیه (نتیجه گیری وشرط)، به‌کار وعمل عنصرهای مسأله مربوط است. گاهی این کارکردها، چنان مهم‌اند که لازم است، قبل از هراقدامی، به‌بررسی‌آن‌ها بپردازیم. بعد از آن‌که مسأله را، درمجموع خود وبه‌صورت‌کامل، به‌خوبی درك‌کردید، توجه خود را به‌بخش‌های اصلی‌آن معطوف‌کنید.

§ ۳. ارزیابی دورنمای کار

کسی‌که به‌طور جدی به‌حل مسأله‌ای مشغول است، خیلی‌خوب، میزان نزدیکی به‌هدف وسرعت پیشرفت خود به‌سوی‌آن‌را، احساس می‌کند؛ همچنین، خیلی‌خوب، به‌هر تغییری‌که در دورنمای طرح او پدید می‌آید، پی می‌برد. ولی، گاهی این تمایل پیدا می‌شود که پا را از دایرهٔ تنها یك احساس، بیرون بگذاریم و، هوشیارانه‌تر ودقیق‌تر، امکان خود را برای‌حل مسأله، ارزیابی‌کنیم، گره اصلی مسأله را تشخیص دهیم و دورنمای کار را بسنجیم. این تمایل، به‌خصوص، در موردهای زیر، بیشتر وجود دارد.

بعضی مسأله‌ها، چاره‌ناپذیر و ناامیدکننده به‌نظر می‌رسند. اگرمسأله، چاره‌ناپذیر است، نباید به‌خود اجازه‌داد که، به‌طور کامل، درآن فرو رویم؛ دراین‌جا، بایدازخود بپرسیم: آیا به‌طورکلی، پاسخی برای‌آن‌چه خواسته‌اند، وجود دارد؟ آیا پاسخی روشن وعقلانی پیدا می‌شود؟ اگـر از وجـود پاسخ اطمینان داریم، آیا می‌توانیم آن‌را پیدا کنیم؟

وقتی با مسأله‌ای سروکار داریم که باید مجهول‌آن را پیدا کرد، باید به‌این پرسش پاسخ بدهیم که: آیا جواب وجود دارد؟ پرسش‌های مشخص‌تری هم می‌توان دربرابر خود قرار داد: آیا تنها یك جواب وجود دارد یا تعداد آن‌ها بیش ازیکی است، یا اصلاً جوابی وجود ندارد؟ آیا شرط مـوجود، برای تعیین مجهول، لازم و کافی است؛ یا بیش از حد لزوم است، یا شرطی ناکافی است؟

وقتی با مسأله‌ای‌اثباتی واستدلالی سروکار داریم، پرسش‌های مربوط چنین‌اند: آیاقضیه درست است یا نادرست؟ می‌توان پرسش‌های‌مشخص‌تری طرح کرد: آیا قضیه درست است؟ آیا برای درستی قضیه، به شرط قوی‌تری نیاز نداریم؟ آیا فرمول‌بندی و تنظیم قضیه، صورتی‌منطقی دارد؟ آیا شرطی ضعیف‌تر ومحدودتر، برای اثبات قضیه کافی نیست؟

البته، تا زمانی که به‌پایان کار خود نرسیده‌ایم، یعنی تا وقتی که هنوز مسأله را حل نکرده‌ایم، نمی‌توانیم به‌هیچ کدام ازاین پرسش‌ها، پاسخی‌قاطع ومشخص بـدهیم. ولی، این پـرسش‌ها، بنا به‌ماهیت خود، به پاسخ کاملاً مشخصی نیاز ندارند. کافی‌است، پاسخ‌آن‌ها را، تنها حدس بزنید ویااحتمال بدهید. باتلاش‌برای‌حدس درست، می‌توانیم موقعیت خودرا نسبت به‌مسأله، دقیق‌ترکنیم واین، همان‌چیزی است که به‌آن علاقه‌مندیم. این پرسش‌ها، که به‌صورتی‌فشرده ازآن‌ها یادکردیم، برای جهت‌دادن به‌استدلال‌ها هم‌می‌توانند مفید واقع شوند. محتاطانه‌ترین (و درعین‌حال، دقیق‌ترین) این پـرسش‌ها، چنین است: آیا احتمال وجود پاسخ یا جواب برای مسأله وجود دارد؟ وآیا این احتمال زیاد است؟ یك قضیه، می‌تواند درست باشد یا نادرست، ولی احتمال‌کدام یك بیشتر است؟

درچه لحظه‌ای، باید این پرسش‌ها را دربرابر خود گذاشت؟ دراین مورد، هیچ گونه قانون‌فوری ودقیقی وجودندارد. نه‌چنین قانونی رامی‌توان پیداکرد ونه، وجودآن، لزومی دارد! آن‌ها را می‌توان، اغلب به‌دنبال پرسش‌های § ۲ـ که به‌بخش‌های اصلی مسأله مربوطاند ـ طرح کرد.

§ ۴. در جست‌وجوی روش

هدف نهایی، وسیله را زمزمه می‌کند؛ مطالعه وتجزیه و تحلیل‌هدف (مجهول یا حکم موردنظر)، می‌تواند به‌پیداکردن جواب مسأله کمك کند. می‌دانیم هر پرسشی، موجب طرح پرسش دیگری می‌شود: چه چیزی را از ما خواسته‌اند؟ مجهول کدام است؟ برای به‌دست‌آوردن این مجهول، به‌چه داده‌هایی نیاز داریم؟ چنین پرسش‌هایی می‌توانند آغازگر راهی باشندکه ما را درجهت عکس (از مجهول به معلوم) راهنما شوند. مثلاً، اگر در طرح اصلی مسأله، داده‌هایی را ببینیم که، به‌یاری‌آن‌ها، بتوان مجهول را پیدا کرد،می‌توان همین «داده‌ها» را،به‌نوبت و به‌عنوان هدف «بینابینی»، درنظر گرفت وکار را ادامه داد تا، سرانجام، از پایان مسأله، به‌آغاز آن برسیم. (۲° از تمرین ۱ فصل هشتم را ببینید.)

درمسأله‌هایی که‌باید حکمی‌را ثابت‌کنیم، پرسش‌های مربوطه‌چنین‌اند: چه‌چیزی ازما خواسته‌اند؟ به‌کدام‌نتیجه‌ای باید دست‌یابیم؟ چگونه می‌توان به‌این نتیجه رسید؟ نتیجه‌ای از این‌گونه را، از کدام شرط می‌توان به‌دست آورد؟

به جای این که تکیهٔ خود را بر مجهول (یا حکم) مسأله قرار دهیم، می‌توانیم توجه خود را روی داده‌ها (یا فرض‌ها) متمرکز کنیم: چه چیزی داده شده است؟ به‌چه مناسبت، این داده‌ها می‌توانند مفید باشند؟ ازاین داده‌ها، چه‌نتیجه‌ای را می‌توان بیرون‌کشید؟ همین‌پرسش‌ها رامی‌توان درمورد قضیه‌های استدلالی طرح کرد: چه‌شرطی وجود دارد؟ به چه مناسبت، ممکن است این شرط به درد بخورد؟ از این شرط، چه حکمی را می‌توان نتیجه گرفت؟ این پرسش‌ها، می‌تواند سرآغازی باشد، برای پیداکردن راه

مستقیم حل مسأله (تمریـن ۱ فصل هشتم را ببینید: ایـن مطلب را نبایـد فراموش‌کرد که، معمولاً ، طرح نقشه برای کاردرجهت عکس، برطرح نقشه برای کار درجهت مستقیم، برتری دارد).

متأسفانه، اغلب پیش می‌آید که نمی‌توانیم، نه‌درجهت مستقیم و نه درجهت‌معکوس، برنامهٔ‌رضایت‌بخشی‌طرح کنیم. درچنین موردهایی، می‌توان به پرسش‌های دیگری متوسل شد تا دربرابر پیدا کردن روش حل مسأله، به ما کمك کنند. دراین‌جا، برخی ازاین پرسش‌ها را می‌آوریم (که البته، ازهمان آغاز کار هم، می‌توان به‌آن‌ها متوسل شد): مسألهٔ ما ازچه نوعی است و به چه‌گروهی از مسأله‌ها تعلق دارد؟ آیا با فلان مسألهٔ حل شده، خویشاوندی دارد؟آیا با بهمان مسألهٔ‌آشنا، شباهتی دارد؟ اگر سعی کنیم مسأله را رده‌بندی کنیم وبکوشیم تا رابطه یا شباهت‌آن را، با مسأله‌ای آشنا، پیدا کنیم، می‌توانیم روشی‌آشنا، برای آغاز بررسی مسأله، پیدا کنیم؛ و این، درواقع، نخستین بخش از راهی است‌که می‌تواند ما را به طرف جواب راهنمایی کند. ضمن تلاش برای جست وجوی «خویشاوندی» مسألهٔ خود، بیش ازهمه، به رابطه ونزدیکی‌مسأله‌هایی‌توجه می‌کنیم‌که‌برای ما مفیدباشند: آیامسأله‌ای را می‌شناسیم که به مسألهٔ ما نزدیك باشد؟ آیا نمی‌توانیم مسأله‌ای را پیدا کنیم‌که با مسألهٔ ما «خویشاونـد» باشد؟ شبیه مسألهٔ ما باشد؟ کلی‌تر از آن باشد؟ حالت خاصی از آن باشد؟ البته، این خطـر وجود دارد کـه چنین پرسش‌هایی،شما را ازمسیر صحیح خود دورکند؛ بنابراین، بهتر است آن‌هارا کمی بعدترمطرح کنیم، وقتی که‌مضمون مسأله، درذهن‌ما، به‌طورکاملاً روشن وتثبیت شده‌ای نقش بسته باشد، یعنی‌وقتی‌که، دیگرامکان دورشدن ازمسأله وگم‌کردن مفهوم آن، وجود نداشته باشد.

§۵. آیا درمسأله، جنبهٔ امیدوارکننده‌ای وجود دارد؟

وقتی‌که با موضوعی مادی سروکارداشته باشید (مثلاً بخواهید شاخهٔ درختی را ببرید)، خود به خود، مناسب‌ترین موقعیت لازم را، بـرای خود فراهم می‌کنید. درحالتی هم‌که خود را،برای حل مسأله‌ای، آماده می‌کنید،

باید به همین نحو عمل کنید: باید چنان وضعی به خود بگیرید که درواقع، مسأله را، به صورتی مناسب‌تر، یا به صورتی که جنبه‌های مختلف آن در دسترس شما باشد، در اختیار داشته باشید. دربارهٔ مسأله می‌اندیشید، آن را درذهن خود، این‌طوروآن‌طور، می‌چرخانید، می‌کوشید به صورتی درآیدکه آن را ساده‌تر و راحت‌تر ببینید. جنبه‌ای ازمسأله، که کار خود را ازآن‌آغاز کرده‌اید، ممکن است مناسب‌ترین جنبهٔ آن نباشد. آیا مسأله، به ساده‌ترین، روشن‌ترین و روبه راه ترین شکل ممکن، تنظیم شده است؟ آیا نمی‌توان مسأله را به شکل دیگری تنظیم‌کرد؟

البته، طبیعی است که شمامی‌خواهید مسأله را (با تبدیل به‌مسأله‌ای، هم ارزآن)، به‌بهترین‌صورت ممکن‌تنظیم کنید، به‌نحوی که آشناتر، جالب‌تر، دردسترس‌تر و دارای دورنمایی بهتر باشد.

هدف شما درکاراین است که بتوانید شکاف بین «آن چه مـی‌خواهید»، با «آن چه به شما داده‌اند» پرکنید و رابطه‌ای بین مجهول با معلوم (فرض) برقرارکنید. آیا ممکن نیست، تنظیم صورت مسأله را، به‌نحوی تغییردادکه مجهول ومعلوم، یا نتیجه و فرض، تا آن جاکه ممکن است به هم نزدیک‌تر شوند؟

نتیجه یا فرض (ویا هردو را با هم)، به صورتی دیگر درآورید، ولی این کار را طوری انجام دهیدکه، این دو بخش مسأله، به هم نزدیک‌ترشوند. مجهول یا معلوم مسأله (یاحتی‌تمامی مسأله) را چنان تغییر دهیدکه مجهول ومعلوم، نسبت به قبل، نزدیکی بیشتری داشته باشند.

همان طورکه حل مسأله جلو می‌رود، روی تصویری که کارمی‌کنید، خط‌ها وساختمان‌های تـازه‌ای پدیدار می‌شود و، درنتیجه، حل‌کنندهٔ مسأله، باکار ذهنی خود، و به وسیلهٔ اجزاء وبستگی‌های تازه‌ای، تصویر را کامل‌تر می‌کند. هرتبدیل وتغییری که در مسأله به وجود آید، عنصرهای تازه‌ای را درآن وارد می‌کند. یکی ازراه‌های اساسی، برای واردکردن مواد تازه وبالا بردن میزان‌آگاهی‌ما ازمسأله، مراجعهٔ به تعریف است.

مثلاً، فرض‌کنید با یک‌هرم ناقص‌سروکارداشته باشیم (مثل‌فصل‌هفتم).

هرم ناقص چیست؟ چه تعریفی دارد؟ ـ هرم ناقص، به‌قسمتی از هرم گفته‌می‌شود که با برشی موازی با قاعده و کنار گذاشتن هرم کوچکتر، به دست آمده باشد. این‌تعریف، ما را به‌بررسی دوجسم جدید وامی‌دارد: هرم‌بزرگ وهرم کوچك؛ وچه بسا که یکی از این هرم‌ها، یاحتی هر دوی آن‌ها، برای درك بهتر مسأله، مفید باشد.

با مراجعه به تعریف عنصرهای موجود در شرط مسأله، به عنصرهای تازه‌ای برخوردمی‌کنیم که‌آن‌ها هم، به‌نوبهٔ خود، منجربه عنصرهای‌تازه‌تری می‌شوند؛ واگر به همین ترتیب جلو برویم، به تدریج، درك ما از مسأله، گسترده و گسترده‌تر می‌شود. روند گسترش شرط مسأله، غالباً، ما را به حل مسأله‌نزدیك‌تر می‌کند، ولی البته، موردهایی‌هم وجود داردکه، این‌جریان، تنها موجب «بادکردن» مسأله به وسیلهٔ اجزاء اضافی وغیرلازم می‌شود.

دشواری‌های زیادی، برای‌تبدیل و دگرگون‌کردن شرط مسأله وجود دارد،بعضی ازآن‌ها را، تنها دربرخی حالت‌های خاص می‌توان به‌کاربرد و، بعضی دیگر، خصلتی عام‌تر دارند (تمرین‌های ۱ و۲ را در پایان همین فصل ببینید).

§۶. درجست وجوی آگاهی‌های سودمند

روند حل مسأله، بستگی جدی به این مطلب دارد که بتوانیم بین مسأله وعنصرهای لازمی ازدانش خودـ‌که ازقبل ذخیره داریمـ‌رابطهٔ‌مناسبی برقرارکنیم. وقتی تلاش می‌کنیم مسأله را به صورت دیگری ـ که برای‌حل مناسب‌تر است ـ درآوریم، در واقع، درتعقیب یافتن همین رابطه هستیم؛ ضمناً، مبداء حرکت ما، خودمسأله است؛ می‌کوشیم تا با نفوذ در «ابرهایی» که آن را احاطه‌کرده است، «از درون» به‌مطالعهٔ آن بپردازیم. ولی گاهی، این رابطه را می‌توان از انتهای دیگر جست وجو کرد، یعنی از این راه که تلاش‌کنیم، آگاهی‌های مفیدی را «دربیرون» پیدا و «از بیرون» خود رابه مسأله نزدیك کنیم.

غیرممکن است بتوانیم همهٔ‌آگاهی‌ها وذخیره‌های ذهنی خود را بررسی

کنیم و یا، حتی، از نظر بگذرانیم. بنابراین، باید از بررسی قسمتی از دانش خود آغاز کنیم، که احتمال بستگی آن با مسألهٔ مورد نظر ما، بیشتر باشد.

اگر از میدانی که مسألهٔ مورد نظر شما به‌آن مربوط می‌شود، اطلاع دارید، باید «نقطه‌های کلیدی» را، یعنی حقایقی را، که به احتمال زیادتری می‌توانند مورد استفادهٔ شما قرار گیرند، بشناسید. درست مثل کارگر ماهری که ابزار مناسب کار خود را آماده می‌کند، شما هم، به «تهیهٔ» چیزهایی بپردازید که هم در دسترس باشند و هم به کار آیند.

وقتی با مسأله‌ای پیداکردنی کار می‌کنید و باید مجهولی را به دست آورید، به مسأله‌هایی توجه کنید که با همین مجهول سروکار دارند؛ چه بسا یکی از این مسأله‌ها بتواند نقطهٔ آغازی برای حرکت در جهت عکس باشد (فصل هشتم را ببینید). وقتی با یك مسألهٔ اثباتی کار می‌کنید، به عنوان نقطهٔ آغاز، قبل از همه، به قضیه‌هایی مراجعه کنید که دارای همان حکم قضیهٔ مورد بررسی شما هستند.

دراین جا، چه حقایقی، کلیدی و اساسی هستند؟ آیا مسأله‌های حل شده‌ای وجود ندارند که همین مجهول را داشته باشند؟ آیا قضیه‌های ثابت شده‌ای پیدا نمی‌شوند که همین حکم را داشته باشند؟ اگر می‌خواهید همهٔ آگاهی‌های مفید ذخیرهٔ دانشی خود را (مفید، برای حل مسألهٔ مورد نظر)، دریك جا جمع کنید، این پرسش‌ها می‌توانند مفید واقع‌شوند. اگر این پرسش‌ها سودی به بار نیاورد، آن وقت می‌توانید به‌آگاهی‌های بغرنج‌تر یا ساده‌تر خود مراجعه کنید، یا مسأله‌هایی را درنظر بگیرید که قبلاً بررسی کرده‌اید و اجزایی کلی‌تر یا خاص‌تر از مسألهٔ شما دارند (در این مورد، ناچار نیستید به این نکته تکیه داشته باشید که با مجهول سروکار دارید یا نتیجه گیری). بدون تردید، درذخیرهٔ دانشی شما عنصرهایی وجود دارد که به کارحل مسألهٔ مورد نظرتان بخورد و به نحوی با آن بستگی داشته باشد. ولی این بستگی در کجاست؟ چگونه می‌توان این بستگی را پیدا کرد؟ شما می‌توانید ازتعمیم‌ها، جست وجوی حالت‌های خاص و شباهت‌ها استفاده کنید و، اگرذخیرهٔ دانشی شما چندان زیاد نیست، می‌توانید در همهٔ زمینه‌هایی که، به‌نحوی، به‌مسألهٔ

شما مربوط می‌شوند، به جست و جو بپردازید.

طبیعی است، هرچه دانش شما وسیع‌ترباشد وهرچه آن‌ها را بهترمنظم کرده باشید، به همان اندازه، شانس بیشتری برای پیدا کردن عنصرهای لازم خواهید داشت (تمرین ۴ را ببینید).

§۷. آیا باید موقعیت خود را ارزیابی کرد؟

فرض کنیم از پیشرفت کار خود راضی نباشید، اندیشه‌های گوناگونی که بـه ذهن شما رسیده، دچارشکست شده باشند وهمهٔ راه‌های مختلفی کـه آزمایش کرده‌اید، به‌بن‌بست انجامیده باشند. درشکِل تأمل می‌کنید، جزءهای بسیاری را به تجزیه وتحلیل می‌کشید، ولی به‌جایی نمی‌رسید، ظاهراً چیزی کم دارید، عنصر اصلی، خود را پنهان‌کرده است، حلقهٔ مهم ارتباطی ازجلو ذهن شما می‌گریزد.

ممکن است درموقعیتی باشیدکه تمامی‌تلاش شما صرف‌مطالعهٔ مسیرها و بن‌بست‌های جنبی می‌شـود و، در نتیجه، رنجی را کـه متحمل می‌شوید، ارتباطی به‌موضوع اصلی موردنظرشما نداشته باشد. درچنین وضعی، دوباره به عقب برگردید ومسأله را، به‌همان صورت اولیه و واقعی خودش، ازنظر بگذرانید. یکبار دیگر، به‌داده‌ها ومجهول‌ها، یافرض وحکم مسأله، مراجعه کنید. آیا به‌تمامی شرط‌های‌مسأله، درمجموع وبه‌طورکامل، توجه داشته‌اید؟ آیا از همهٔ داده‌ها استفاده کرده‌اید؟ آیا تمامی فرض ومحدودیت‌های آن را مورد مطالعه قرار داده‌اید؟ آیا در بررسی‌های خود، همهٔ بخش‌های مسأله را وارد کرده‌اید؟

به‌خصوص، وقتی‌که اطمینان دارید، برای پیداکردن مجهول ویابرای اثبات حکم، همهٔ داده‌ها، همهٔ شرطهـای مسأله و یـا همهٔ فرض‌های قضیه، ضرورت دارند، طرح چنین پرسش‌هایی کاملاً به جا ومفید است. حتماً، اگر در این باره، به‌یقین کامل هم نرسیده باشید وتنها حدس می‌زنیدکه همهٔفرض‌ها وجزء جزءِ شرط مسأله، ممکن است به‌دردبخورند، بازهم جای این پرسش‌ها وجوددارد ومی‌تواندمفیدواقع‌شود. طرح این پرسش‌ها، شما رامتوجه نکته‌هایی

می‌کندکه، تا آن زمان، متوجه نبوده‌اید و، بنابراین، ممکن است شما را به سمت حلقهٔ گم شده، راهنما شود.

ممکن است اشکال مربوط به این باشدکه نتوانسته‌اید معنای اصطلاح‌های اساسی مربوط به داده‌ها و شرط مسأله را بفهمید. آیا مفهوم همهٔ بخش‌های مهم مسأله را به خوبی درك کرده‌اید و هیچ ابهامی درمورد آن‌ها ندارید؟ این پرسش، شما را تشویق می‌کند دوباره به عقب، به تعریف‌ها و مفهوم‌ها، برگردید و، بنابراین، درك خود را ازمسأله گسترش دهید. چه‌بسا از این راه بتوانید داده‌ها را به صورت بهتری تنظیم کنید و عنصرهای مفید تازه‌ای به دست آورید.

§ ۸. هنر طرح پرسش

دربندهای قبل، به طور خلاصه ونمونه‌ای، دربارهٔ تلاش‌های ذهنی یا «گام‌های» ذهنی حل‌کنندهٔ مسأله، گفت و گو کردیم. هریك از این گام‌ها، با پرسش مربوط به‌خودش (که با حروف خوابیده چاپ شده است) همراه بود که می‌توانست به تمرکز کار حل‌کننده و به‌کشف جزئیات این گام، کمك کند. این مطلب مهم است که، حل‌کنندهٔ مسأله (یا معلم)، از این پرسش‌ها چگونه می‌تواند استفاده کند!

هرکدام از این پرسش‌ها، اگر به‌جا و به‌موقع طرح شوند، می‌توانند انگیزه‌ای برای اندیشه‌ای باشدکه موجب پاسخی درست شود وجهت مثبتی به فکر بدهد و، درنتیجه، حل مسأله را گامی به جلو ببرد. به‌این ترتیب، پرسش می‌تواند نقش محرکی را داشته باشد و به عکس‌العمل مطلوب سرعت بدهد (شیمی دانان، به‌این محرك‌ها «کاتالیزور» می‌گویند). چنین پرسش‌هایی، درواقع، القاکنندهٔ اندیشه‌ها هستند.

البته، دربعضی موردها، درانتخاب پرسش سرگردان می‌مانیم ونمی‌دانیم به‌کدام پرسش باید متوسل شویم. دراین صورت، باید یك یك پرسش‌ها را از نظر بگذرانید تا، سرانجام، به پرسشی که سودمند است، دست یابید. بنابراین، از بندهای قبل می‌توانید، همچون سیاهه‌ای از پرسش‌های مناسب،

استفاده کنیدکه باید نیاز خود را، ضمن مراجعه به آن‌ها، برآورید.

ولی نباید از این فهرست، بدون هیچ نظمی و بـا انتخاب تصادفی و حدسی، استفاده کرد؛ همچنین نباید به پرسش‌ها، به طـور مکانیکی وسطحی و با انتخابی تصادفی، برخورد کرد. ضمن مراجعه بـه سیاههٔ پرسش‌ها، همچون کارگر ماهری باشیدکه، برای کار خود، به جعبهٔ ابزار خود مراجعه می‌کند. چنین کارگری، ابتدا، کاری را که باید انجام دهد، با دقت براندازمی‌کند و، بعد، ابزار خود را انتخاب‌می‌کند. چه‌بسا ناچار شود چند وسیله را آزمایش کند تا به‌وسیلهٔ مورد نیازخود برسد، ولی حتی دراین حالت هم، کورکورانه وتصادفی، وسیله‌ها را ازجعبه بیرون نمی‌آورد، یا آن‌ها را، به طورمکانیکی وباهمان ردیفی‌که چیده شده‌اند، مورداستفاده قرارنمی‌دهد، بلکه انتخاب او عاقلانه است و با توجه به موقعیتی که با آن مواجه است، انجام می‌گیرد. انتخاب پرسش‌های لازم، ازمجموعهٔ همهٔ پرسش‌های موجـود درفهرست هم، باید به همین ترتیب باشد.

البته یك‌کارگر، مهارت خود را، قبل ازهرچیز، از راه تجربهٔ‌طولانی وتوجه دقیق به‌کار دیگران، به‌دست می‌آورد. شماهم از همین راه می‌توانید روش به‌کارگرفتن پرسش‌ها را یادبگیرید. قانونی وجود نداردکه، به‌یاری‌آن، بتوان درهر مورد مشخص، پرسش لازم را پیدا کرد. با وجـود این، اگر از تجربهٔ خود درموفقیت‌ها وعدم موفقیت‌ها استفاده کنید، واگر هدف موردنظر خود را به درستی درك‌کرده باشید، شانس زیادی درانتخاب بهترین پرسش‌ها خواهید داشت.

یك‌کارگرخوب، ابزار خود را همیشه به‌ترتیبی درست وبا نظمی‌کامل درجعبه می‌چیند. شما هم، اگر پرسش‌ها را، نه به ردیفی‌که دراین‌جا طـرح کردیم، بلکه بنا به‌تجربهٔ خود، منظم کنید واگر نقش آن‌ها را درجریان حل مسأله، به‌خوبی فهمیده باشید، به‌احتمال زیاد،خواهید توانست «حرفه‌ای‌تر» با مسأله برخوردکنید، ازبرخوردهای تصادفی پرهیزکنید و به بهترین امکان موجود دست یابید.

ممکن‌است‌هر نظام‌ذهنی، به‌مجموعه‌ای ازپرسش‌هاوقانون کاربردآن‌ها،

نیاز داشته باشد. ولی، چگونه می‌توان هنرطرح پرسش‌ها را یادگرفت؟ آیا هنر یادگیری طرح پرسش‌ها هم، از قانون معینی پیروی می‌کند؟

تمرین‌ها و یادداشت‌های تکمیلی

۱. صورت مسأله را تغییر دهید. صورت مسألهٔ ما این است که حکمی را ثابت (یا رد) کنیم: «اگر A درست باشد، آن‌گاه B هم درست است». گاهی بهتر است صورت مسأله را تغییر دهیم و تلاش خود را در اثبات (یارد) مسألهٔ زیر، که با مسألهٔ اولیه هم‌ارز است، به‌کاربریم: «اگر B نادرست باشد، آن‌گاه، A هم نادرست است»[1]. (تمرین ۱۰ فصل نهم را ببینید).

موقعیت مشابه دیگری را هم شرح می‌دهیم. فرض کنید x مجهول و a، b، c، ...، l داده‌های مسأله باشند (مجهول و داده‌ها می‌توانند، مثلاً، اندازه‌های قسمت‌های مختلف یك شکل هندسی باشند). ممکن است مناسب‌تر باشد، نقش مجهول x را، با یکی از داده‌ها، ومثلاً a، عوض کنیم. به‌این ترتیب، بـه‌مسألهٔ تازه‌ای می‌رسیم که مجهول آن a و داده‌های آن x، b، c، ...، l است. (تمرین‌های ۳۴، ۳۵ و ۳۶ از فصل دوم را ببینید).

دراین‌جا، از دو نوع تغییر درصورت مسأله صحبت کـردیم، بدون این‌که به‌مضمون واقعی پرسش موردنظر، توجه داشته بـاشیم. استفاده از چنین تغییرهایی، بدون شك، بستگی به‌ابتکار حل کنندهٔ مسأله دارد.

۲. مسأله را به‌زبان ریاضی در آورید. فرمول‌بندی طـرح بزرگ دکارت را ـ که در §۱ فصل‌دوم دربارهٔ‌آن بحث‌کردیم ـ می‌توان خلاصه کرد و به صورت‌توصیه‌ای کوتاه درآورد: «مسألهٔ‌شما هرچه‌باشد، آن‌را به‌مسأله‌ای ریاضی تبدیـل‌کنید و، بـرای این منظور، به‌صورت یـك معادلهٔ جبری درآورید». طرح دکارت عملـی نیست، ولی می‌تـوان به‌صورتی عام‌تـر به‌آن جـان بخشید: «مسألهٔ خود را به زبـان ریاضی درآورید». البته، موقعیت شما در به‌کاربستن این توصیه، به‌آن‌جا مـربوط می‌شود که، از نظرریاضی، تا چه‌حد غنی هستید. مثلاً، اگرمی‌توانید علاوه برنمادهای

---

۱. این‌نوع تغییردرصورت مسأله،مضمون اصلی «برهان خلف»را تشکیل‌می‌دهد.

جبری ـ مثل دکارت ـ از نمادهـای محاسبهٔ دیفرانسیلی و انتگرالی هم استفاده کنید، طبعاً به‌تعداد خیلی بیشتری از مسأله‌هـا دسترسی خواهید داشت.

مفهوم «زبان ریاضی»، اگر به معنای کلی آن گرفته شود، مـی‌تواند برای هرساختمان منطقی، قابل دسترس باشد. وقتی‌که این توصیه، تا این حد وسیع گرفته شود: «آن را به‌زبان ریاضی درآوریـد»، ممکن است از نظر عملی بی‌معنا به‌نظرآید، زیرا دراین‌صورت، ممکن است تـوصیهٔ ما تنها به‌این معنی باشدکه: «سعی کنید به‌روشنی بیشتری دست یابید»[1].

با وجود این، دربعضی از تفسیرهای محدود، حتی اگر ابهام‌هایی‌هم داشته باشد، می‌توان‌اغلب فایده‌ای جست‌وجو کرد. نمودارها، منحنی‌ها و شکل‌های هندسی‌هم، می‌توانند صورت‌های گوناگونی از زبان ریاضی به‌حساب‌آیند. غالباً،رسم شکل، که مسأله را به‌زبان‌ریاضی بیان می‌کند، بسیار مفید است. بعضی افراد، به‌این‌هم نیاز دارندکـه اندیشهٔ خود را، به‌کمك گونه‌ای از نمادهای ریاضی، بیان‌کنند (با تمرین ۹ فصل‌چهاردهم مقایسه کنید).

۳. این حکم را ثابت‌کنید: اگـر يك ضلع مثلث، از واسطهٔ عـددی دو ضلع دیگرآن، کوچکتر باشد، زاویهٔ مقابل به‌این ضلع هم، از واسطهٔ عددی دو زاویهٔ دیگر، کوچکتر است.

---

۱. قسمت عمده‌ای از «زبان ریاضی» را، به مفهـوم وسیع این اصطلاح، «زبان» علامتی منطق ریاضی معاصر تشکیل می‌دهد، که به‌وجود آمدن آن را، اغلب، به‌لایب‌نیتس نسبت می‌دهند، کسی‌که بارها از «روش عمومی وهمه‌کاره»صحبت کرده‌است (بعضی از ریاضی‌دانان، حتی‌مفهوم «زبان‌ریاضی» را با این «بیان» علامتی، یکی می‌دانند). ولی ما دراین‌جا، حتی‌اشاره‌ای هم، به‌این‌گوناگونی «زبان‌ریاضی» نمی‌کنیم، چراکه‌این‌بحث، به‌طور کلی، به‌دوران‌پیش‌ازشکفتگی منطق ریـاضی مـربوط می‌شود. آن چه امروز وجود دارد، بحث‌گسترده‌ای است‌که دربارهٔ نقش منطق ریـاضی، در روش‌آموزش و ریاضیات آموزشی، جریان دارد.

(مهم‌ترین بخش‌های مسأله کدام‌اند؟ آن‌ها را به‌زبان‌ریاضی بیان کنید. برای این منظور، از مثلثات مقدماتی استفاده کنید.)

۴. تنظیم درست وترکیب خوب ذخیرهٔ آگاهی‌ها، برای‌حل مسأله بسیار مهم است. تنظیم خوب ذخیرهٔ ذهنی آگاهی‌هاست که راه ورود به‌دانش ما و استفادهٔ ازآن را ساده می‌کند ومی‌تواند حتی مهم‌تر از میزان دانش ما باشد. زیادی دانش، گاهی زیان می‌رساند و مانع از آن می‌شود که حل‌کننده، روش ساده‌ای برای حل‌مسأله پیدا کند، در حالی‌که تنظیم درست وخوب‌آگاهی‌ها، همیشه وبدون استثنا، مفید است.

وقتی‌که ذخیرهٔ آگاهی‌ها، به‌خوبی تنظیم‌شده باشد، آن‌وقت، موضوع‌های موردنیاز، نزدیک‌تر وقابل دسترس‌تر، قرار می‌گیرند؛ موضوع‌هایی که معمولاً باهم به‌کار می‌روند، باهم‌نگهداری می‌شوند و طوری‌پهلوی هم‌قرار می‌گیرندکه بتوان، موضوع‌های مربوط به‌هم را، به‌راحتی (دو‌به‌دو یا به‌صورت مجموعه‌ای بزرگتر) گروه‌بندی کرد.

البته، چیدن عاقلانهٔ‌کتاب درکتابخانه یا چیدن منظم ابزار درجعبه، مفید است، ولی چیدن عاقلانهٔ آگاهی‌ها درحافظه، فایده‌ای خیلی بیشتر دارد و، ضمناً، به‌مراقبت بیشتری هم نیاز دارد. حالا، برخی نکته‌های مهمی راکه برای این مواظبت لازم است، می‌آوریم.

۱°. درهر پرسش‌مشخص، همیشه حقایق‌کلیدی وجود دارد (مسأله‌های‌کلیدی، قضیه‌های کلیدی)، که باید در طبقهٔ اول گنجهٔ حافظهٔ شما جای گیرند. وقتی می‌خواهید حل‌مسأله‌ای راآغاز کنید، باید چند حقیقت کلیدی، درنزدیکی‌شما وکاملاً در دسترس شما باشند ـ درست مثل کارگر پرتجربه‌ای که، غالباً، لازم‌ترین وسیله‌ها را، در نزدیک‌ترین جاها قرار می‌دهد.

اگر می‌خواهید حکمی از هندسهٔ مسطحه را، درفضای اقلیدسی، ثابت کنید، حقیقت‌های‌کلیدی شما، به‌طورطبیعی، عبارتند ازسه حالت برابری وسه حالت‌تشابه مثلث‌ها. وقتی در دستگاه دکارتی کار می‌کنید ومی‌خواهید مسأله‌ای از هندسهٔ مقدماتی را، به دستگاهی از معادله‌ها ،تبدیل کنید،

این حقیقت‌های کلیدی می‌توانند قضیهٔ فیثاغورث و قضیهٔ مربوط به‌تناسب پاره‌خط‌ها، درمثلث‌های متشابه، باشند. به‌همین ترتیب، می‌توان حقیقت‌های کلیدی را در مورد تقارب رشته‌ها و یا دیگر موردها، درنظر گرفت.

۲°. این جا، از دو پرسشی یاد می‌کنیم که، همیشه و درهرحال، می‌توانند به‌حل کنندهٔ مسأله یاری برسانند: به‌کمك چه داده‌هایی می‌توان چنین مجهولی‌را به‌دست‌آورد؟ چنین حکمی‌را، به‌کمك چه فرض‌هایی می‌توان ثابت کرد؟ ازآن‌جاکه این پرسش‌ها غالباً‌مطرح می‌شوند، باید مسأله‌هایی راکه مجهول یکسانی‌دارند، همچنین قضیه‌های‌آشنایی راکه حکم‌یکسانی دارند، «با هم نگه داشت».

۳°. آیاشهری راکه درآن زندگی می‌کنید، به‌خوبی می‌شناسید؟ اگر واقعاً با شهرخود به‌خوبی آشناهستید، باید بتوانید کوتاه‌ترین راه را، بین هردو نقطهٔ‌آن، همچنین راحت‌ترین وسیله‌را برای حرکت بین این‌دو نقطه، انتخاب‌کنید. تنظیم‌آگاهی‌های شما هم، باید به‌همین‌ترتیب باشد. در زمینه‌ای که روی آن کار می‌کنید، بایدبتوانید عملی‌ترین وراحت‌ترین بستگی بین هردو نقطه را پیدا کنید.

اگرآگاهی‌ها، به‌بهترین صورت خود، تنظیم شده باشد، کمك می‌کند تا مسأله‌های نزدیك به‌هم را «مشاهده» کنیم. می‌توان مسأله‌هایی را پیداکردکه به‌هم بستگی دارند وبا روشی عمومی حل می‌شوند، همچنین می‌توان مسأله‌هایی‌را پیداکردکه، بستگی‌آن‌ها، به‌خاطر مجهول مشترك یاداده‌های مشترك و یا شباهت دیگری باشد.

می‌دانیم اقلیدس، تنهاکتاب «مقدمات» را ننوشته‌است. او تألیف‌های دیگری هم دارد. یکی ازکتاب‌های او به‌نام «داده‌ها»، شامل خلاصه‌ای از داده‌های مختلف است‌که، به‌یاری‌آن‌ها، می‌توان موضوع‌های هندسی را معین‌کرد. من تقریباً اطمینان دارم‌که اقلیدس، کتاب «داده‌ها»ی خود را، به‌این‌خاطر تألیف‌کرده است‌که، با جمع‌کردن موضوع‌های مربوط به

هم، به‌صورتی ساده و قابل دسترس، بتواند به خوانندگانی کمك کند که، اغلب، از خود می‌پرسند: با چه داده‌هایی می‌توان چنین مجهـولی را پیدا کرد؟

۵. با چه داده‌هایی می‌توان چنین مجهولی را پیدا کرد؟ ساده‌ترین مسأله‌هایی را فکر کنید که مجهول هریك ازآن‌ها، یکی از جمله‌های زیر باشد:

°۱. نقطهٔ P را پیدا کنید؛

°۲. طول پاره‌خط AB را به‌دست‌آورید؛

°۳. مطلوب است مساحت مثلث ABC؛

°۴. حجم چهار وجهی $ABCD$ چقدر است؛

(هر کدام از حرف‌های A،B،C،D و P، به‌معنای یك نقطه‌اند.)

۶. از چه فرض‌هایی می‌توان این حکم‌ها را نتیجه گرفت؟ ساده‌ترین قضیه‌های هندسهٔ مسطحه را نام ببرید که یکی از نتیجه‌های زیر، حکمی از آن باشد:

°۱. ... آن‌گاه $AB=EF$؛

°۲. ... آن‌گاه $\angle ABC=\angle EFG$؛

°۳. ... آن‌گاه $AB:CD=EF:GH$؛

°۴. ... آن‌گاه $AB<AC$.

(هر کدام ازحرف‌های A،B،C،...، نمایندهٔ یك نقطه هستند.)

۷. آگاهی‌هایی که به‌موضوع موردنظر ما مربوط‌اند. اگر چهارضلعی، باضلع‌های a،b،c،d ومساحت S، یك چهارضلعی محاطی ومحیطی باشد (یعنی بتواند در دایره‌ای محاط و بر دایرهٔ دیگری محیط شود)، داریم:

$$S^{2}=abcd$$

(اثبات این‌حکم، بسته به‌این که ازبستگی‌های بین داده‌های آن‌آگاه باشید، یا برعکس، اطلاعی ازآن‌ها نداشته باشید، می‌تواند ساده‌یا دشوار باشد.)

۸. شباهت‌های بین مثلث و چهار وجهی. در این‌جا دو مسأله شبیه به هم می‌آوریم که‌یکی ازآن‌ها به‌مثلث ودیگری به‌چهار وجهی مربوط‌می‌شود.

دایره‌ای را در مثلث مفروض محاط کنید.

کره‌ای را درچهار وجهی مفروض محاط کنید.

مسأله‌ها یا قضیه‌های دیگری را نام ببرید که، دو به‌دو، با هم شبیه باشند. آیا حل یا اثبات‌آن‌ها هم شبیه یکدیگرند؟ اگر جواب منفی‌است، چه ارتباطی با یکدیگر دارند؟

۹. قضیه‌ای‌را دربارهٔ مثلث تنظیم کنیدکه‌باقضیهٔ زیر، که دربارهٔ چهاروجهی است، شبیه باشد:

پاره خطی‌که وسط دو یال متقابل چهار وجهی را به‌هم وصل می‌کند، از مرکز ثقل هر مقطعی از چهار وجهی که موازی این دو یال باشد، می‌گذرد.

آیا قضیهٔ مربوط به‌مثلث، به‌اثبات قضیهٔ مربوط به‌چهار وجهی‌کمك می‌کند؟ همین پاسخ‌را درمورد قضیه‌های تمرین‌های ۱۰ و ۱۱ دربارهٔ چهار وجهی، بدهید.

۱۰. (ادامه). صفحه‌ای‌که از وسط دویال متقابل یك چهار وجهی بگذرد، حجم‌آن را نصف می‌کند.

۱۱. (ادامه). اگر صفحهٔ نیمساز زاویهٔ دو وجهی یك چهاروجهی را رسم کنیم، یال مقابل‌را به‌نسبت مساحت‌های دو وجهی‌که این زاویهٔ دو وجهی را تشکیل می‌دهند، تقسیم می‌کند.

۱۲. آیا خویشاوند مسأله را می‌شناسید؟ دستگاه سه معادلهٔ زیر را، با مجهول‌های x،yو z حل کنید (مقدارهای a،bوc معلوم‌اند):

$$x^2y^2+x^2z^2=axyz$$
$$y^2z^2+y^2x^2=bxyz$$
$$z^2x^2+z^2y^2=cxyz$$

[دراین‌جا، سه معادلهٔ سه‌مجهولی‌داریم. ساده‌ترین‌این‌نوع دستگاه‌ها، دستگاه‌های خطی‌است. آیا می‌توانید دستگاه مفروض‌را، به‌دستگاهی خطی تبدیل کنید؟ می‌توانیم‌آن‌را این‌طور بنویسیم:

$$\frac{1}{y^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{a}{xyz}$$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{z^2}=\frac{b}{xyz}$$

$$\frac{1}{x^2}+\frac{1}{y^2}=\frac{c}{xyz}$$

که اگرحاصل‌ضرب xyz را معلوم فرض‌کنیم، نسبت‌به x^{-2}، y^{-2}و z^{-2}، دستگاهی خطی است. جواب به این‌صورت خواهد بود:

$$\frac{1}{x^2}=\frac{A}{xyz} \text{ و } \dots$$

و، بنابراین، دورنمای تازه‌ای دربرابر ما گشوده‌می‌شود (آیا شما آن را می‌بینید؟)]

۱۳. به تعریف‌ها مراجعه کنید. سه دایرهٔ f، f' و v را، به‌ترتیب، به‌مرکزهای F، F' و V درنظر می‌گیریم. دایره‌های f و f' ثابت و دایرهٔ v متغیر است. f' و v در داخل f، ولی‌دربیرون یکدیگر، قراردارند. این‌حکم را ثابت‌کنید: اگر دایرهٔ متغیر v برهردو دایرهٔ ثابت f و f' مماس باشد، مکان هندسی مرکزآن، یك بیضی‌است. (بیضی‌یعنی‌چه؟)

۱۴. جست‌وجوی نزدیك‌ترین حوالی. آیا مسألهٔ قبل (تمرین ۱۳) را پسندیدید؟ حل‌آن را چطور؟ دراین‌صورت، به‌بررسی حوالی نزدیك‌آن بپردازید ـ روی درخت، سیب‌رسیده وخوش‌مزه‌ای پیداکرده‌اید، ولی مگرممکن نیست، بازهم از این‌نوع سیب، روی درخت وجود داشته باشد؟

مسأله را تغییرشکل بدهید: ممکن است به‌حالت‌کلی یا حالت‌های خاص، حالت حدی یا مسأله‌ای شبیه‌آن برسید. چه‌بسا چیزهای‌جالبی کشف‌کنید، ولی به‌هرحال، عادت به‌کارهای پژوهشی، درشما تقویت می‌شود.

می‌خواهید مکان هندسی نقطهٔ V را پیداکنید. این تغییر شکل‌ها را در مورد دایره‌های ثابت f و f' و دایرهٔ متغیر v درنظر بگیرید.

۱°. حالت خاص. دایره‌های f و f' هم‌مرکزند.

۲°، حالت حدی. f خط راست ثابت و f' دایرهٔ ثابتی است

(«خارج» f، یعنی غیر متقاطع با f)؛ v بر f و f' مماس است.

۳°. مسألهٔ شبیه. دو دایرهٔ f و f' خارج یکدیگرند و v، که بر f و f' مماس است، نسبت به‌هردوی آن‌ها یك خصلت دارد: v یا بیرون هر دو دایرهٔ f و f' است ویا هردو دایرهٔ f و f'، داخل v قرار گرفته‌اند.

۴°. حالت خاصی برای ۳°. f و f' را دو دایرهٔ مساوی بگیرید، بقیهٔ شرط حالت ۳° به‌قوت خود باقی است.

خودتان سعی کنید حالت‌های خاص و حالت‌های حدی دیگر و، همچنین، مسأله‌های دیگر شبیه مسألهٔ اصلی و نوع‌های مختلف آن‌ها را پیدا کنید.

۱۵. دقت وعمل. ۱°. آیا آن‌طور که دکارت حکم می کند (عنوان فصل را ببینید)، درست است که روش، چیزی جز ضرورت توجه به همهٔ عنصرهایی که به‌موضوع موردعلاقهٔ ما بستگی دارند (به‌ترتیب، یکی بعد ازدیگری و به‌همان ردیفی که قرار گرفته‌اند) نیست؟ من جرأت نمی کنم آن را تأیید کنم. ولی، دراین مطلب تردید ندارم که بخش عمده‌ای از کار پژوهشگر این است که هم به عنصرهای موضوع مورد مطالعهٔ خود، ضمن مطالعهٔ پشت‌سرهم آن‌ها، و هم به‌مجموعهٔ آن‌ها به‌عنوان یك واحد کل، توجه جدی داشته باشد.

پرسش «مجهول چیست؟» وتوصیهٔ «به‌مجهول توجه داشته باشید»، یك هدف را دنبال می کنند وآن این است که حل کنندهٔ مسأله، باید به مجهول توجه دقیق داشته باشد. پژوهشگر، ضمن کار منظم خود، و همان‌طور که پیش می‌رود، باید به‌ندای درونی‌خود پاسخ دهد.

مسأله را، به‌طور کامل ودرمجموع خود، درنظر داشته باشید.

متوجه مجهول باشید.

به‌داده‌ها توجه کنید.

شرط را درنظر بگیرید.

به‌هرفرض، به‌طورجداگانه، توجه داشته باشید.

هر نکته ازشرط را، به‌طور جداگانه، درنظر بگیرید.

بادقتی خاص به بخشی‌ازفرض توجه کنیدکه هنوزمورد استفاده قرار نداده‌اید.

نکته‌ای ازشرط راکه هنوزبه‌کارنگرفته‌اید، با دقت، تجزیه‌وتحلیل کنید.

وغیره.

۲°. دقت را می‌توان آغاز عمل به حساب آورد. به‌مجهول توجه کنید! مجهول چیست؟ چنین مجهولی راچگونه می‌توان به‌دست‌آورد؟ با چه داده‌هایی می‌توان به‌چنین مجهولی رسید؟ آیا با مسأله‌ای که چنین‌مجهولی داشته باشد، آشنا هستید (آن را حل‌کرده‌اید)؟ توجه به مجهول، پژوهشگررا تحریك می کند تا درحافظهٔ خود بـه کاوش بپردازد وببیند آیا قبلاً مسأله‌ای باهمان مجهول حل‌کرده است! اگر در این جست وجوموفق شود، می‌تواند مسألهٔ خود را، با حرکت از انتها به‌ابتدا، حل کند (فصل هشتم را ببینید).

اگرچه چنین حالتی (یعنی کار رجعتی ناشی ازدقت در مجهول)، غالباً پیش می‌آید وبسیارسودمند است، باید توجه داشت که دقت در هرجزء دیگرمسأله‌هم، می‌تواند منجربه پیدا کردن رابطه‌های مفیـدی شود و، درنتیجه، عمل موفقیت‌آمیزی‌را به‌دنبال داشته‌باشد. مثلاً، توجه به‌اصطلاحی که درصورت مسأله به‌کار رفته است، ممکن است ما را وادارد تا به تعریف این اصطلاح مراجعه کنیم و، از آن‌جـا، بتوانیم تغییرمفیدی درصورت مسأله بدهیم وعنصرهای مفید تازه‌ای را وارد درمسأله کنیم.

۳°. توجه ودقت متوالی درعنصرهای مختلف‌مسأله یادرترکیب‌های گوناگون این عنصرها، موجب می‌شود تا پژوهشگر، جنبه‌ای‌را درمیان آن‌ها کشف کندکه راه را برای ورود به‌عمل منطقی ویا (بهتر ازآن)، راه را برای ورود به‌منطقی بودن عمل بازکند. پژوهشگـر منتظرلحظه‌ای است که اندیشه‌ای ناگهانی، اورا به‌مسیرعمل بیندازد.

۱۶. اندیشهٔ بارآور. اندیشهٔ خلاق. اندیشه‌ای‌را می‌توان بارآور وثمربخش دانست که منجربه حل مسألهٔ مشخص مفروضی بشود؛ اندیشه‌ای را می‌توان خلاق نامیدکه بتواندامکان‌های لازم‌را، برای حل مسأله‌های آینده، فراهم کند. هرقدراین امکان‌ها، برای تعدادبیشتری ازمسأله‌ها به کار رود و مسأله‌های متنوع‌تری را دربر گیرد، سطح خلاقیت اندیشه، بالاتراست.

گاهی، حتی اگر پژوهشگر موفق به‌حل مسأله نشود، ممکن است کار اوخلاق باشد، مثلاً، وقتی که نیروی اوصرف کشف روش‌هایی شده باشد که بتوانند برای حل مسأله‌های دیگری مورد استفاده قرار گیرند. حتی اگرکسی بتواند مسأله‌ای غیرقابل حل، ولی جالب، از خود باقی بگذارد که، سرآخر، منجربه اندیشه‌های ثمربخشی بشود، بازهم بایدکار اورا خلاق دانست.

به گمان من، یونانی‌ها، با باقی گذاشتن مسألهٔ تثلیث زاویه (یعنی تقسیم یك زاویهٔ غیرمشخص، به‌سه قسمت برابر)، کار خلاقهٔ بزرگی انجام دادند. باوجودی‌که خود، این‌مسأله راحل نکردند وباوجودی که در جریان سده‌های متوالی، صرف همهٔ نیروها برای حل آن، بی‌ثمرماند. توجه کنیم‌که مسأله تثلیث زاویه، توانست این دشواری را آشکارکندکه هر پاره‌خط و هرزاویه‌ای را می‌توان به‌دوقسمت برابر تقسیم‌کرد، درحالی‌که (به‌کمك پرگاروخط‌کش)، تنها بعضی اززاویه‌ها را می‌توان به‌صورت سه‌زاویهٔ برابردرآورد (مثل زاویهٔ ۹۰درجه)[1]. به‌دنبال‌همین‌اندیشه، مسألهٔ تقسیم زاویه‌به ۵، ۷ و ۱۷ قسمت برابر طرح شدکه، سرانجام، به‌حل معادله‌ها به کمك رادیکال‌ها مربوط شد و، بالاخره، به‌کشف‌های گوس، آبل وگالوا منجرشد و نظریه‌ای

---

۱. در هندسهٔ نااقلیدسی لباچوسکی، که خویشاوند هندسهٔ اقلیدسی است، تنها زاویه‌های خاص و همچنین، تنها پاره خط‌های خاصی را می‌توان (به‌کمك پرگار و خط‌کش) به‌سه قسمت برابرتقسیم‌کرد.

به‌وجود آورد که راه حل مسأله‌های گوناگون و پرشماری را روشن می‌کرد، مسأله‌هایی که یونانی‌های طرح کنندهٔ مسألهٔ تثلیث زاویه، حتی تصور آن راهم نمی‌کردند.

فصل سیزدهم

قانون‌های کشف

با آن‌که، درچنین‌موردهایی، به‌سختی می‌توان دستور-العمل‌های کلی صادرکرد وهرکسی بایدبا درایت‌خود راه را پیدا کند، تلاش می‌کنم راه را به تازه‌کاران نشان دهم.

نیوتون ـ حساب عمومی

تاامروز مسأله‌های زیادی پیدا کرده‌ام، زیرا بـرای مطالعهٔ دانش، مثال‌ها از قانون‌ها جالب‌ترند.

نیوتون ـ همان‌جا

§ ۱ . گوناگونی قاعده‌ها

به‌همان اندازه‌کـه کارحل کنندهٔ مسألـه پیش می‌رود، چهـرهٔ بیرونی مسأله‌هم دچارتغییر می‌شود. در هـر مرحلهٔ تازه، حل کننده با موقعیت‌های تازه‌ای روبه‌رو می‌شود و، دوباره، مشکل انتخاب راه حل درست بینابینی، دربرابر او خودنمایی می‌کند: چطور باید ازعهدهٔ این وضع برآمد؟ نخستین

و نزدیک‌ترین گام را چگونه باید برداشت؟ اگر روش حل کننده بی‌نقص باشد، اگر استراتژی درستی‌را، برای حل مسأله، انتخاب کرده باشد، می‌تواند گام بعدی‌را، باآغاز ازموقعیت موجود و زیرراهنمایی قانون‌های دقیق، تنها به یاری‌استدلال وداوری‌بردارد. ولی، باکمال تأسف، روش عمومی وبی‌نقصی برای حل مسأله وجود ندارد: تاکنون قاعده‌های دقیقی پیدا نشده است‌که بتوان درهرموقعیتی ازآن‌ها استفاده کرد و، به‌احتمال قوی، چنین‌قاعده‌هایی هرگزپیدا نخواهد شد.

قاعده‌ها، می‌توانند خصلت‌های متفاوتی داشته باشند. قانون‌های رفتار، اصول کار، راهنمایی‌های کوتاه ودستورها، غالباً به‌اندازهٔ کافی سودمند هستند، ولی‌هرگز، دقت‌قاعده‌های ریاضیات ومنطق را ندارند. قانون‌ریاضی، «درازای بدون پهنا» را به‌خاطرمی‌آوردکه سیاهی وسفیدی را ازهم‌جداکرده است. با وجود این، قاعده‌های کاملاً معقولی وجود داردکه دست آدم را، تاحدی، بازمی‌گذارد ومیدان معینی را، برای مانورهای بعدی، دراختیارما قرارمی‌دهد. دراین‌جا، خطی برای مرزبندی قطعی پیدا نمی‌شود، ولی،واقع امراین است‌که ماهم، اغلب، نه با سیاهی وسفیدی مطلق، بلکه بانوع‌های مختلف رنگ خاکستری سروکارداریم.

ظاهراً، باید رویه‌ها، شیوه‌های تفکر ونوعی تجربه‌های ذهنی وجود داشته باشندکه بتوان ازآن‌ها، ضمن حل مسأله ـ دربسیاری از موقعیت‌ها وچه‌بسا بیشترآن‌ها ـ استفاده‌کرد. وازقرارمعلوم، مثال‌ها وبحث‌های فصل‌های قبل، می‌تواند دلیلی بروجود این رویه‌ها باشد. به این ترتیب، نباید پرسید: «آیا قانون‌هایی برای‌کشف وجوددارد، یعنی، آیا قاعده‌های دقیقی پیدا می‌شود که برای کشف چیزی، پیروی ازآن‌ها ضرورت داشته باشد؟». پرسش را باید، به‌نحودیگری و،مثلاً، به‌این‌ترتیب طرح‌کرد: «آیا اصول یا راهنمایی‌هایی وجود داردکه بیان‌گررویه‌هایی باشند وبتوان ازاین رویه‌ها، درحل مسأله‌ها، استفاده‌کرد.؟»

۲§. عقلانی بودن

عمل یا قضاوتی را عقلانی می‌خوانیم که برپایهٔ استدلال‌هایی روشن و «محسوس» قرار گرفته باشد وسرچشمهٔ مبهمی مثل عادت، احساس‌یا«الهام» نداشته باشد. حکمی راکه به‌صورت یك قضیهٔ ریاضی، بعداز مطالعهٔ دقیق و انتقادی استدلال‌آن، بیان می‌کنیم، شکل‌مقدماتی یك قضاوت عقلانی‌است. ازبعضی جهت‌ها، فایدهٔ عمدهٔ مطالعهٔ استدلال ریاضی دراین است که، بیش‌از هرچیزدیگری، مارا به‌آن‌شیوهٔ عقلانی ایده‌آل (دراندیشیدن) نزدیك می‌کند که می‌تواند شایستهٔ انسان ـ این «موجود عاقل» ـ باشد.

باوجود این، هنوزروشن نیست‌که عقلانی بودن عمل حل‌کنندهٔ‌مسأله را، درچه چیزی باید دید؟ فرض‌کنیم، به‌یکی ازموقعیت‌های معمولی دچار شده باشیم؛ ازاین راه است که می‌توانیم دشوارهای عقلانی‌بودن عمل را، مشخص‌تر، موردبررسی قراردهیم. وقتی حل‌کننده روی مسألهٔ A کارمی‌کند، معلوم می‌شودکه این مسأله، با مسألهٔ دیگر B بستگی دارد. بررسی مسألهٔ اخیر، ممکن است ما را به‌هدف، یعنی به‌جواب مسألهٔ اصلی A، نزدیك‌تر کند. ولی مطالعهٔ مسألهٔ B، ممکن است همراه با صرف وقت و نیروی بی‌فایده‌ای باشد. بنابراین، حل‌کننده، دربرابرپرسشی قرار می‌گیرد: آیا باید با صرف نظر کردن از مسألهٔ خویشاوند B، کار روی مسألهٔ A را ادامه دهد و یا، برعکس، مطالعهٔ مسألهٔ A رابه‌وقت دیگری موکول‌کند و تلاش خودرا روی مسألهٔ B بگذارد؟ دوراهی‌که دربرابر اوقراردارد، مربوط به این است که نمی‌داند آیا، ضمن تجزیه و تحلیل مسألهٔ A، باید به مسألهٔ بینابینی B مراجعه‌کند یانه! چه‌مبنایی وجود داردکه بتوان، براساس آن، روش اورا عقلانی دانست؟

یکی‌ازمهم‌ترین فایده‌هایی‌که، ازمسألهٔ B، عاید حل‌کننده می‌شود، این است‌که حافظهٔ اورا بیدارمی‌کند و«عنصرهایی» را به‌یاد او می‌آورد که، برای حل مسألهٔ مورد نظراویعنی مسألهٔ A، مفید است. چقدرشانس وجود داردکه کارروی مسألهٔ B، به‌نتیجهٔ مطلوب برسد؟ ارزیابی‌آن، به‌نحوی که، تنها بر استدلال‌های «منطقی» و «عقلانی» متکی باشد، ممکن نیست؛ دراین

مورد، غالباً، حل‌کننده احساسی مبهم و آشفته دارد.

باوجوداین، دلیل‌هایی منطقی، له یا علیه استفاده ازمسألهٔ B به‌عنوان یك مسألهٔ کمکی، می‌تواند وجود داشته باشد که، بعضی ازآن‌ها را، درفصل نهم بررسی کرده‌ایم. حل‌کننده، به‌چه‌ترتیب، هردوعامل را به‌حساب آورد: هم‌احساس‌های مبهم و دقیقاً ذهنی، وهم ملاحظه‌های کاملاً عینی؟ احتمالاً باید ابتدا استدلال‌هایی راکه به‌روشنی شکل گرفته‌اند، با دقت مورد تجزیه‌و تحلیل قراردهد و، سپس، برای به‌دست آوردن راه‌حل قطعی، بدون این‌که به‌طور کامل به‌این تجزیه و تحلیل‌ها اطمینان داشته باشد، به ذهن خود و به احساس مبهم وشکل نگرفتهٔ خود، مراجعه کند. ظاهراً این، عقلانی‌ترین روشی است که می‌توان درپیش گرفت. تجربه نشان داده است که تجزیه و تحلیل متناوب ملاحظه‌هایی که دقیقاً شکل گرفته‌اند واندیشیدن دربارهٔ‌آن‌ها، می‌تواند تأثیر مناسبی بر الهام‌های ذهنی و احساس‌های مبهم بگذارد و، در نتیجه، ظاهراً باید چنین روندی را، عاقلانه‌ترین نوع کار به‌حساب‌آورد.

درهرحال، حل‌کننده باید خود را به‌این امرعادت دهد که بتواند بین احساس‌های مبهم خود واستدلال‌های روشن، نوعی تعادل برقرارکند. واین، احتمالاً، مهم‌ترین چیزی است که باید یاد بگیرد. به‌نظر من، مهم‌ترین قانونی را، که‌باید راهنمای حل‌کننده باشد، می‌توان به‌این ترتیب بیان‌کرد:

هرگز درجهت مخالف احساس خود حرکت نکنید، ولی ضمناً، تلاش کنید تا هوشیارانه همهٔ استدلال‌هایی راکه له یا علیه طرح شما وجود دارد، ارزیابی کنید.

§ ۳. صرفه‌جویی، بدون خست

تمایل به صرفه‌جویی، نیازی به توضیح ندارد. هرکسی ازکشش شما به‌طرف صرفه‌جویی درموجودی خود وصرف هرچه کمتر وقت، نیرو و پول برای انجام تکلیف‌ها، اطلاع دارد. ظاهراً، مهم‌ترین موجودی شما، عقل شماست و محافظت ازنیروهای ذهنی، احتمالاً، مهم‌ترین نوع صرفه‌جویی می‌باشد. وقتی باکمتر می‌توان به‌نتیجه رسید، بیشترمصرف نکنید. این، اصل

اساسی صرفه جویی است؛ در جریان حل مسأله‌هم، وقتی کوشش می‌کنید جواب را با حداقل مواد کمکی به‌دست‌آورید، باهمین اصل روبه‌رو هستید.

البته، قبل‌ازهمه، بایدخود مسأله وموادی‌راکه مستقیماً به‌آن مربوط می‌شوند، با دقت مورد بررسی قرارداد؛ طبیعی است‌که تلاش نخستین در جهتی باشد و، برای پیداکردن امکان راه‌حل، در درجهٔ اول، درراهی گام برداشته شودکه نیازی به‌استفادهٔ ازوسیله‌های غیرمستقیم نداشته باشد. اگر چنین امکانی پیدا نشود، باید به‌سراغ مطالبی رفت‌که ارتباط مستقیم کمتری بامسأله دارند، ولی‌هنوزبه‌آن نزدیك‌اند. اگردراین جا هم، چیزسودمندی پیدانشد، می‌توان دورتررفت، ولی این‌یك‌اصل‌کلی است‌که‌بایدآن‌را رعایت کرد: تاجایی‌که‌کمترین امیدی‌برای‌حل مسأله به‌کمك موضوع‌های نزدیك‌تر وجوددارد، خودبه‌خود، دربرابرصرف وقت ونیروی خود، برای مطالبی‌که نسبت‌به‌مسأله‌دورترند، مقاومت‌می‌کنیم. این صرفه‌جویی عاقلانه رامی‌توان باجملهٔ کوتاه زیربیان کرد:

تاآن‌جاکه ممکن است، خود را نزدیك به‌مسأله نگه‌دارید.

البته، نمی‌توانیم پیش‌بینی‌کنیم‌که تاچه‌اندازه لازم است ازموادی‌که مستقیماً به‌مسأله مربوط‌اند، دورشویم. آدم فوق‌العاده‌ای که برروشی کلی تسلط داشته باشد، می‌تواند مسیرخودرا، بااطمینان، پیش‌بینی‌کند و موادی راکه برای حل مسألهٔ خود لازم دارد، انتخاب‌کند ـ ولی ما، چنین‌قدرتی‌را نداریم. تنهاکاری‌که می‌توانیم انجام دهیم، این است‌که، باتوجه به‌اصل صرفه‌جویی، ابتدا به‌مطالعهٔ خود مسأله بپردازیم و، بعد، اگراین مطالعه ناکافی به‌نظررسید، بررسی دور و نزدیك به‌مسأله را آغازکنیم و، اگراین بررسی‌هم کم بود، به‌تدریج از مسأله دورتر شویم. کسی‌که تصمیم به‌حل مسأله‌ای گرفته است، نمی‌تواند ازقبل، میزان «مخارج» آن را تعیین‌کند و برای‌آن محدودیتی قایل‌شود. چه‌بسا، ناچارباشد بهای زیادی برای حل‌آن بپردازد. یك‌حل‌کنندهٔ پیگیر، باید اصل امتناع از محدودیت راهم، به‌اصل صرفه‌جویی اضافه‌کند.

... ولی باید آماده باشید، تاهرجا برای حل مسأله لازم است، ازآن

دور شوید.

§۴. پیگیری، ولی همراه با نرمش

«نبوغ، یعنی حوصله».

«نبوغ، عبارت است ازیك درصد الهام ونود ونه درصدعرق ریختن»

یکی‌ازاین‌جمله‌ها را بوفون[1] ودیگری را ادیسون گفته است؛ هردوی آن‌ها، یك‌مفهوم دارند: کسی که می‌خواهد از عهدهٔ حل مسأله‌ای برآید، باید پیگیر باشد، به هدف خود اعتقاد داشته باشد و، قبل از موقع، تسلیم نشود.

ولی، آن چه برای هدف‌درست است، ممکن است‌برای قسمتی‌ازهدف درست نباشد. وقتی قسمتی یا جنبه‌ای ازمسأله مورد مطالعه قرار می‌گیرد، البته باید پیگیربود وخیلی زود تسلیم نشد، ولی ضمناً، باید دورنما راهم ارزیابی کرد و، برای بازهم فشردن پرتقالی‌که تاحد خشکی چلانده شده است، پافشاری نکرد.

موضوعی راکه مورد بررسی قرار داده‌اید، تاوقتی‌که هنوز امیدی برای رسیدن به‌اندیشه‌های ثمربخش وجود دارد، ترك نکنید.

کارحل‌کننده، تاحد زیادی، عبارت است ازبسیج همهٔ منابع؛ او باید دایماً درفکربیرون‌کشیدن نکته‌های تازه‌ای ازذهن خود باشد، نکته‌هایی که برای حل مسأله لازم‌اند. نکتهٔ لازم ممکن است به‌جزء یا جنبه‌ای ازمسأله بیشترمربوط باشد تادیگرجنبه‌ها وقسمت‌ها و، به‌خصوص، به‌کمك همین جزء (یاجنبه)، ساده‌تربه‌خاطرما بیاید. ولی حل‌کننده، ازقبل‌نمی‌داند،کدام‌قسمت یاکدام جنبه ازمسأله، اورا به‌هدف نزدیك‌ترمی‌کند. بنابراین، چارهٔ دیگری ندارد، جزاین‌که به‌بررسی همهٔ قسمت‌ها و همهٔ جنبه‌ها، و دردرجهٔ اول، به مهم‌ترین واساسی‌ترین آن‌ها بپردازد.

برای این‌که حل‌کننده بتواند، بدون هدردادن وقت، قلمروگسترده‌ای را مورد بررسی قراردهد، نباید مدتی طولانی دریك‌جا متوقف شود، یاخیلی

---

۱. ژرژبوفون (۱۷۰۷ــ۱۷۸۸)، طبیعت‌شناس مشهور فرانسوی.

زود، دوباره به‌آن‌جا برگردد. جست و جوهای او باید همه‌جانبه باشد و بکوشدتا، درهرمرحله، به‌چیزتازه‌ای دست یابد: جزء تازه یا ترکیب تازه‌ای از آن‌چه مطالعه کرده است پیداکند، یا درمورد بخش‌ها یا ترکیب‌هایی که پیداکرده است، به‌دید تازه‌ای برسد. البته، هدف همهٔ این‌ها دراین است که نورتازه وروشن کننده‌تری برتمامی مسأله انداخته شود.

بابیانی کوتاه می‌توان گفت که، بایدپیگیری لازم را بانرمش‌وانعطاف‌پذیری تکمیل کرد؛ باید ضمن مطالعهٔ موضوع‌های گوناگون پیگیری‌داشت.

... ولی درهرفاصله ازکارتلاش کنید به‌قسمت‌هایی که هنوز نپرداخته‌اید، توجه‌کنید وروی اندیشهٔ سودمندی‌که حاصل بررسی‌های شماست،تکیه کنید.

روشن‌ترین خطری‌که سرراه این توصیه وجود دارد، این‌است که، با فقدان انعطاف‌پذیری، گرفتار دورباطل بشویم، یعنی تنها یك راه را، بدون هیچ تغییری وبدون هیچ پیشرفتی، دوباره ودوباره تکرار کنیم[1].

§ ۵. قانون برتری

اگربرای یك مسأله، دوراه وجودداشته باشدکه ازهرنظر یکسان باشند وبه‌یك اندازه ما را به‌حل‌آن امیدوارکنند وتنها اختلاف آن‌ها دراین باشدکه، ظاهراً، یکی ازراه‌ها ساده‌تر ازدیگری است، به‌طور طبیعی، ابتدا راه‌حلی را آزمایش می‌کنیم که ساده‌تر می‌نماید. این‌جا (وتقریباً به‌صورتی پیش افتاده)، ازقانون برتری‌استفاده می‌کنیم، که می‌توان آن‌را به‌این‌صورت تنظیم کرد:

ساده‌تر بردشوارتر، برتری دارد.

ولی این‌شکل تنظیم قانون، تاحدزیادی، نارسا است. باید جمله‌ای محدودکننده وشرطی ـ مثل «برای سایر شرایط یکسان» ـ به‌آن‌اضافه‌کنیم. به‌این مناسبت یادآوری می‌کنیم که، گرچه ازاین محدودیت مهم، آشکارا

---

۱. درشطرنج، این قانون وجود داردکه: اگرحرکتی، سه‌بار وبدون هیچ‌تغییری تکرار شود، بازی پایان می‌یابد و هیچ‌کدام از دو طرف، برنده به حساب نمی‌آیند.

نام نمی‌بریم، باید آن‌را درهمهٔ‌موردهای مربوط به‌تنظیم قانون‌های برتری، خودبه‌خود، درنظربگیریم. دراین‌جا، ازدوقانون مشهوردیگر، ازاین نوع، یاد می‌کنیم:

آن چه آشناتر است، برآن‌چه ناآشناتراست برتری دارد.

موضوعی که نقطه‌های مشترك بیشتری بامسألهٔ ما داشته باشد، نسبت به‌موضوعی‌که شامل نقطه‌های مشترك کمتری است، برتری دارد.

درستی این قانون‌ها روشن است، ولی به‌کار بستن آن‌ها، به‌همان اندازه، ساده وروشن نیست. توجه به‌محدودیت مربوط به«یکسان بودن‌سایر شرایط»، به‌خصوص اگرتنها به‌نظرآید و روشنی «محسوسی» نداشته باشد، ممکن است به‌قابلیت زیادی ازطرف حل‌کننده نیازداشته باشد.

قانون‌های دیگری‌هم، برای تشخیص برتری، وجود دارندکه به‌این اندازه‌کلی نیستند و اختصاصی‌تر به‌شمار می‌روند. برای این که بتوانیم موضوع‌ها را، به ردیف اهمیت وبرتری آن‌ها، تنظیم کنیم، باید مرتباً آن‌ها را، ازجهت‌های مختلف، طبقه‌بندی کنیم. یکی ازگونه‌های طبقه‌بندی را در این‌جا می‌آوریم که، گرچه ممکن است کامل نباشد، به گونه‌ای است‌که بسیاری ازموردها را می‌توان، به‌طورطبیعی، باآن تطبیق داد:

۱°. جزءهای مسأله.

۲°. آگاهی‌های مفید.

۳°. مسأله‌های کمکی.

درسه بند بعدی، قانون برتری را، با توجه به‌این طبقه‌بندی، مورد بررسی قرارداده‌ایم.

§۶. جزءهای مسأله

وقتی حل مسأله‌ای‌را آغازمی‌کنید، هنوز نمی‌دانید چه جزءهایی از آن، مهم‌ترازدیگران است. درهمین‌جا، این خطروجود داردکه به‌طرف جزء کم اهمیتی ازمسأله چنان جلب شویدکه به‌سختی بتوانید ازآن دل برکنید. به‌همین مناسبت، کار را بـا مطالعهٔ مسأله، درمجموع خود و به‌عنوان یك

واحدکل، آغاز کنید وتا وقتی به‌طور کامل به‌هدف مسأله پی‌نبرده‌اید، نیروی خود را پراکنده نکنید وبه فکر جزء آن نیفتید.

کل برجزء برتری دارد.

وقتی احساس کردید، مطالعهٔ بیشتر تمامی مسأله، به‌صورت یك واحد به‌هم پیوسته، فایده‌ای ندارد ومی‌خواهید به‌بررسی‌های جزیی‌تری بپردازید، متوجه‌باشیدکه درمورد قسمت‌های مختلف مسأله‌هم، نوعی «سلسله‌مراتب» وجود دارد. عمده‌ترین جزءها، درلایهٔ بالا ودرنزدیك‌ترین محل به «محور» مسأله، قراردارد (می‌دانیم‌که فرض وحکم در قضیه‌ها، مجهول و معلوم و شرط درمسأله‌ها، عمده‌ترین جزءها هستند) . طبیعی است که باید مطالعهٔ تفصیلی مسأله‌را، با جزءهای مفید آغاز کنیم. باید، نه‌به‌طور ساده، بلکه به‌صورتی کاملاً روشن، توجه کنیم که نتیجه‌گیری ، وفرض‌هایی‌که این نتیجه‌گیری باید ازآن‌ها حاصل شود، یا مجهول‌ومعلوم، وشرطی که‌درمورد آن‌ها وجوددارد، کدام‌اند.

جزءهای عمده، برسایر جزءها برتری دارند.

هرجزء عمده ، می‌تواند به جزءهای کوچکتری تقسیم شود: فرض می‌تواند شامل چند بخش باشد ، شرط می‌تواند چندگانه باشد ، مجهول می‌تواند مرکب وشامل چند جزء جداگانه باشد ، معلوم می‌تواند متعدد باشد ـ ولو این که در مطالعهٔ اولیهٔ خود، آن‌ها را به صورت کامل و به هم پیوسته، دیده باشیم. به دنبال جزءهای عمده، توجه خود را به قسمت‌های جداگانهٔ این‌جزءهای عمده معطوف‌می‌کنیم: می‌توان، به‌طورجداگانه، هریك ازفرض‌ها، هریك ازمجهول‌ها، هرجنبه‌ای ازشرط وهربخشی ازحکم و نتیجه‌گیری را مورد مطالعه قرار داد. جزءهای دیگر مسأله را می‌توان، نسبت به‌جزءهای عمده‌ـ که بالاترین لایه را تشکیل می‌دهند ـ وجزءهای کوچکترناشی ازآن‌ها ـ که لایهٔ بعدی را می‌سازند ـ دورترازمحور به‌حساب آورد. درمیان جزءهای دورترهم، ممکن است ارشدیت وجود داشته باشد (مثلاً ، اگرمفهوم A درشکل‌گیری قضیه دخالت‌داشته باشد ومفهوم‌دیگری مثل B برای تعریف A لازم باشد، روشن است که B، از «محور» مسأله

دورتراست تا A). سعی کنید تاآن‌جا که لازم است، از «محور» مسأله دور نشوید. وقتی که دوجزء شرطهای یکسانی داشته باشند، اول به‌جزئی بپردازید که به‌محور مسأله نزدیک‌تر است.

جزءهای نزدیک‌تر، برجزءهای دورتر برتری دارند.

§۷. آگاهی‌های سودمند

بارها گفته‌ایم، یکی از مهم‌ترین کارها (واحتمالاً، مهم‌ترین آن‌ها)، عبارت است ازبسیج عنصرهای لازم موجود در ذخیرهٔ دانشی خود، وتطبیق آن‌ها با عنصرهای مسأله. برای‌این‌منظور، می‌توان «ازدرون» و «ازبیرون» حرکت کرد. می‌توان مسأله را بازکرد ومنصفانه قسمت‌های مختلف آن را مورد مطالعه قرارداد، به‌این‌امیدکه به فراخواندن بعضی‌آگاهی‌های‌مفید ـ که در درون مسأله وجود دارد ـ کمک‌کند؛ ولی می‌توان از بیرون با مسأله برخوردکرد وباگشت وگذار درمیدان‌های مختلف ذخیرهٔ علمی خود، میدان آگاهی‌های سودمند را پیداکرد. در بند قبل، راه جست وجوی از درون را دیدیم ، حالا کوشش‌می‌کنیم نحوهٔ کار از بیرون را، برای نزدیك شدن به مسأله دنبال کنیم.

هرآگاهی یاتجربه‌ای که درگذشته به دست‌آورده‌ایم، ممکن است‌برای حل مسألهٔ موردنظرمامفید باشد. ولی، روشن است، نمی‌توان نقطه به‌نقطهٔ آگاهی‌های خود را مورد بازدید قرار داد و تمامی تجربه‌های گذشتهٔ خود را، از نظر گذراند. حتی وقتی با یك مسألهٔ ریاضی سروکار داریم، و صحبت برسر میدانی کاملاً روشن ومنظم از آگاهی‌هایی است‌که ازقبل وضمن حل مسأله‌ها و اثبات قضیه‌ها ذخیره کرده‌ایم ، آن هم در مورد شاخهٔ مشخصی از ریاضیات، بازهم نمی‌توان به مطالعهٔ همهٔ موردهایی که به‌مسأله مربوط می‌شود پرداخت وهمهٔ موضوع‌ها را، یکی بعدازدیگری، موردبررسی قرارداد. بنابراین، ناچاریم خود را محدودکنیم و چنان نقطه‌هایی را مورد جست وجو قرار دهیم که شانس سودمند بودنشان، بیشتر از دیگران است.

می‌خواهیم‌قضیه‌ای راثابت‌کنیم. جزءهای عمدهٔآن را مطالعه‌کرده‌ایم

(حکم، فرض، شرط). اکنون می‌خواهیم در خاطرهٔ خود، به جست‌وجو بپردازیم و درمیان مسأله‌هایی که قبلاً حل کرده‌ایم، آن را که می‌تواند مفید باشد، پیدا کنیم. طبعاً، سراغ مسأله‌ای می‌رویم که با مسألهٔ ما وجه مشترکی داشته باشد؛ مجهول یا یکی از مجهول‌های آن‌ها، مثل‌هم باشند، درهمه یا یکی از فرض‌ها مشترك باشند، هر دو براساس یك مفهوم اصلی ساخته شده باشند و غیره. کم و بیش احتمال دارد، هرکدام از مسأله‌هایی که قبلاً حل کرده‌ایم، سودمند به نظر آیند، ولی درتوان ما نیست به همهٔ آن‌ها بپردازیم.

درمیان همهٔ نقطه‌های اشتراکی که ممکن است بین مسألهٔ ما و مسأله‌های حل شدهٔ قبلی وجود داشته باشد، یکی شایستهٔ توجه بیشتری است و آن، مجهول است (استفاده ازمسأله‌ای که دارای همان مجهول مسألهٔ ماست، به خصوص، از این جهت مفید است که می‌توانیم آن را، درجهت عکس، یعنی باحرکت ازآخر به‌اول، حل کنیم). البته، دربعضی موردهای خاص، می‌توان جنبه‌های دیگری را ترجیح داد، ولی به طورکلی، واگرسایر شرطها یکسان باشد، باید قبل از همه به‌مطالعهٔ مجهول پرداخت.

مسأله‌های حل شده‌ای که دارای همان مجهول مسألهٔ مورد بحث ما هستند، برسایر مسأله‌های حل شده برتری دارند.

اگر نتوانیم مسألهٔ حل شده‌ای را، با همان مجهول مسألهٔ موردبحث، پیدا کنیم، می‌توان به‌جست و جوی مسأله‌ای با مجهول خویشاوند پرداخت. چنین مسأله‌هایی، اگر چه در درجهٔ اول نیستند، به‌هر حال حق تقدم دارند.

درحالت اثبات یك قضیه هم، وضع به‌همین ترتیب است. قبل از همه باید در جست و جوی قضیه‌های ثابت شده‌ای بود که همان حکم قضیهٔ ما را داشته باشند.

قضیه‌های ثابت‌شده‌ای که، درحکم‌خود، با قضیه موردنظرما مشترك‌اند، بر سایر قضیه‌ها برتری دارند.

در مرحلهٔ بعدی، باید قضیه‌هایی را قرارداد که حکمی خویشاوند با مسألهٔ مورد نظرما دارند.

۸§. مسأله‌های کمکی

یکی از مشخص‌ترین نکته‌هایی که، ضمن حل یك مسأله، با آن مواجه می‌شویم، انتخاب مسألهٔ کمکی مناسب است. چنین مسألهٔ کمکی را می‌توان با حرکت از درون یا از بیرون مسأله‌ای که دربرابر ما قراردارد، ویـا (به طریقی که غالباً عاقلانه است)، به نوبت، گاهی از درون و گاهی از بیرون، جست وجو کرد. انواع مهم مسأله‌های کمکی ـ اگـر شرطهای دیگریکسان باشند ـ شانس بیشتری نسبت به مسأله‌های دیگر دارند.

مسألهٔ کمکی می‌تواند، درجهت‌های گوناگون، حل مسألهٔ مـورد نظر را پیش ببرد: ممکن است به‌حل مسألهٔ ما کمك واقعی (بـه اصطلاح، کمك مادی) برساند، یا ازنظر روش کارمفید باشد؛ ممکن است به‌عنوان یك راهنما یا یك مثال، تأثیر تحریکی داشته باشد و غیره. ولی نوع کمك برای ما فرق نمی‌کند، آن چه برای ما مهم است، این است که شانس به‌دست آوردن این کمك، ازمسأله‌های کمکی که مستقیم‌تر به مسألهٔ ما مربوط‌اند، یا دقیقاً با آن ارتباط دارند، خیلی بیشتر ازمسأله‌هایی است که بستگی کمتری بـا مسألهٔ ما دارنـد.

مسأله‌هایی که هم ارزمسأله ما باشند، بر مسأله‌های دیگری که به‌مسألهٔ ما منجر می‌شوند ویا آن را دربر می‌گیرند، برتری دارند ومسأله‌های اخیرهم، بر سایر مسأله‌ها برتری دارند. (فصل نهم را ببینید).

۹§. خلاصه

عقلانی بودن. هرگـز علی‌رغم احساس خود عمل نکنید، ولـی ضمناً، سعی کنید هوشیارانه همهٔ دلیل‌هایی راکه له وعلیه شما وجود دارد، بسنجید.

صرفه‌جویی، ولی بدون خست. تا جایی که‌ممکن است به مسأله‌نزدیك شوید،ولی ضمناً خود را آماده کنید که، درصورت لزوم، وتاآن‌جا که‌لازم‌است، از مسأله دورشوید.

پیگیری، ولی همراه با نرمش. تا وقتی امیدی برای بـه دست آوردن اندیشهٔ ثمربخشی باقی‌مانده است، مطلب را رها نکنید ولی، درهرمرحله از

کار، تلاش کنید ازجنبه‌های دیگرمسأله هم سود بجویید واندیشه‌های سودمند را، ازآن چه تاکنون مورد مطالعه قرارداده‌اید، به دست‌آورید.

قانون برتری. ساده‌تر، بر دشوارتر برتری دارد.

آشناتر بر نا آشناتر برتری دارد.

موضوعی که نقطه‌های مشترك بیشتری با مسألهٔ ما دارد، برموضوعی که نقطه‌های مشترك کمتری با آن دارد، برتری دارد.

کل بر جزء برتری دارد. جزء مهم‌تر بر دیگر جزءها برتری دارد. جزءهای نزدیك‌تر، برجزءهای دورتر برتری دارند.

مسأله‌هایی که قبلاً حل شده‌اند و با مسألهٔ ما مجهول مشترك دارند، برسایرمسأله‌های حل شده برتری دارند. قضیه‌هایی که قبلاً حل شده‌اند و با قضیهٔ مورد نظرما دارای حکم مشترکی هستند، برسایر قضیه‌های ثابت شده، برتری دارند.

مسأله‌های هم‌ارز با مسألهٔ ما، برسایر مسأله‌هایی که به‌مسألهٔ مامنجر می‌شوند یا آن را دربرمی‌گیرند، برتری دارند ومسأله‌های اخیرهم، برسایر مسأله‌ها ترجیح دارند.

ودرهمهٔ این‌موردها، باید اضافه کرد: به‌شرط‌یکسان بودن سایرشرطها.

تمرین‌ها ویادداشت‌های تکمیلی

۱. با استعداد، متخصص وتازه‌کار. انسان با استعداد بـه قانون می‌اندیشد و موافق با آن عمل می‌کند ودربارهٔ وجود آن‌هـا، حتی تردید به خود راه نمی‌دهد. متخصص، بدون آن که دربارهٔ قانون فکرکند، موافق باآن‌عمل می‌کند و، هرجاکه لازم باشد، می‌تواند خود را با آن تطبیق دهد ورفتار خود را، با توجه به‌آن، تنظیم کند. تازه‌کارهم می‌کوشد قانون را به کار برد وباآغاز از تجربهٔ قبلی (و اندك) خود، با دقت آن را ارزیابی کند.

البته هیچ کدام ازاین‌ها، تازه‌نیست. اوگوستین مقدس[1]، دربارهٔ سخن-

---

۱. اوگوستین «خوشبخت» (۳۵۴ ـ ۴۳۰ میلادی)، یکی از نخستین دانشمندان علوم الهی مسیحی، متفکر ومبلغ. او در کلیسای‌کاتولیك، منزلتی والا یافت و در ردیف «مقدسان» درآمد.

دانان وقانون‌های سخن گفتن، می گوید: «آن‌ها با بلاغت‌سخن می گویند، زیرا قانون‌ها را رعایت می‌کنند و، بلاغت سخن خود را از دست می‌دهند، زیرا از قانون پیروی می کنند».

۲. نتیجه‌ها وطرح‌ها. آیا این میوه‌آمادهٔ چیدن است؟ آیا، برای این منظور، به اندازهٔ کافی پخته شده است؟ البته، اگر بردرخت بماند، ممکن است بیشتر برسد وخوش‌مزه‌تر بشود. از طرف دیگر، با باقی ماندن بردرخت، ممکن است به‌وسیلهٔ پرندگان خورده شود ویـا به وسیلهٔ حشره‌ها از بین برود، باد آن را ازدرخت جداکند ویابچه‌های همسایه ازآن استفاده کنند؛ به هرحال، من نمی‌توانم همهٔ احتمال‌ها را برشمرم وبگویم به چه‌ترتیب فاسدمی‌شود یاازبین‌می‌رود. آیا ارزش دارد، آن را بردرخت باقی‌بگذاریم؟ یا ازنظررنگ‌وبو وشکل خود به‌حدکمال رسیده است، به‌اندازهٔ کافی نرم شده است وصورت ظاهر آن دل‌چسب و جذاب است؟

رنگ‌وبو وشکل، وضع ظاهری را بیان می کنند و نرمی، تاحـدی، از مزهٔ میوه‌سخن می گوید. ولی این‌هانمی‌توانندکیفیت میوه را تضمین کنند. وقتی در باغچهٔ خود، رشد میوه‌ای را دنبال می کنم، همین نشانه‌ها برایم به‌اندازهٔ کافی امیدوارکننده‌اند ویا، دست کم، من این طور گمان می کنم. والبته، اگرآشنایی کمتری بامیوه داشته باشم، طبعاً ارزیابی من تقریبی‌تر خواهد بود. به هرحال، ارزیابی طعم میوه را، بـه کمك صورت ظاهری آن، می‌توان تاحدی، «عینی» دانست. این گونه ارزیابی‌ها، تاحد زیادی، به تجربـه بستگی دارد و، در نتیجه، می‌توان گفت بیشتر عینی است تا استدلالی.

آیا می‌ارزد این گام را برداریم؟ آیا طرح، به‌آن اندازه پخته شده‌است که‌آن را وارد عمل کنند؟ البته، اطمینان کامل به این که طرح انتخابی‌ما، اثری‌مطلوب داشته باشد، نمی‌توان داشت. اگر بیشتر دربارهٔ آن بیندیشیم، ممکن است به دورنمای آن بهتر پی ببریم. ولی، ازطرف دیگر، باید دیر یا زود تصمیم بگیریم ودرحال حاضرهم، طرح بهتری به ذهن مانمی‌رسد. آیا باید بی‌درنگ، طبق‌طرح، وارد عمل شد؟ آیا دورنمای آن، به‌اندازهٔ

کافی، روشن است؟

مثل مورد جمع آوری میوه، ضمن اجرای طرح هم، نشانه‌های معینی بروز می‌کند، ولی به‌سختی می‌توان تصمیم قطعی را، تنها براساس استدلال و دلیل‌های ناشی از عقل سلیم گرفت. ارزیابی این احتمال که، طعم میوه، یا موقعیتی که درجریان حل مسأله پیش می‌آید، می‌تواند کافی باشد، به احساس‌هایی از ذهن مربوط می‌شود که نمی‌توان آن‌ها را، تاآخر، مورد تجزیه و تحلیل قرارداد.

۳. شیوهٔ کار. هرکسی که درتلاش تنظیم قانون‌های کشف است، باید به این نکته توجه داشته باشد که، افرادمختلف، مسأله‌هارا با روش‌های مختلفی حل می‌کنند. هرکسی که توانائی حل مسأله‌ها را دارد، بـه شیوهٔ خاص خودش عمل می‌کند.

دوحل کنندهٔ مسأله را با هم مقایسه می‌کنیم: یکی با درك یك مهندس ودیگری با درك یك فیزیك دان. وقتی یك مسأله را در برابر این دونفر قراردهیم، طبعاً با روش‌های متفاوتی به حل آن‌ها می‌پردازند، زیرا برای هرکـدام از آن‌ها، جنبه‌ای ازکار اهمیت دارد. مهندس در جست وجوی راه حلی روشن‌تر، کوتاه‌تر وثمربخش‌تر است (راه حلی «کم خرج‌تـر» و «عملی‌تر»)، درحالی که فیزیك دان، درتلاش پیدا کردن اصولی است که مبنای راه حل اوقرار گیرد. مهندس می‌خواهد «اندیشه‌ای ثمربخش» داشته باشد و فیزیك دان بـه دنبال «خلاقیت» است (یادداشت ۱۶ از فصـل دوازدهم را ببینید). به همین مناسبت است که ترجیح می‌دهند از راه‌های مختلف، به هدف مشترك برسند.

به مثال مشخص‌تری توجه کنیم. فرض می‌کنیم، برای حل مسأله‌ای که در برابر مهندس وفیزیك دان قرارگرفته است، دو راه وجـود داشته باشد. از یك طرف، شباهتی بین این مسأله با مسألهٔ A، که قبلاً حل‌شده است، وجود داشته باشد. ازطـرف دیگر، به نظر برسد، ایـن مسأله در مسیری قرار دارد که روش کلی B آن را تلقین می‌کند. باید بین این دو مسیر A و B، یکی را انتخاب کـرد. گمان من این است کـه، در چنین

موقعیتی (سایرشرطها را یکسان می‌گیریم)، مهندس به مسألهٔ مشخص A وفیزیك دان به روش کلی B متوسل می‌شود.

این نمونه نشان می‌دهد که شیوهٔ کار حل کننده، درواقع، مربوط به آن است که چه چیزی را ترجیح می‌دهد و برای چه چیزی حق تقدم قایل است. بنابراین، به «قانون برتری» ـ که در§۹ ازآن صحبت کردیم ـ باید چیزی اضافه کرد (مثلاً: « روش کلی برحقایق جداگانه برتری دارد» یا برعکس). دربعضی‌موردها، پیش‌می‌آیدکه قانونی، نسبت به‌دیگرقانون‌ها، اهمیت بیشتری پیدا می‌کند (در این مورد، قانون X برقانون Y برتری

فصل چهاردهم

شاگردی و معلمی

آن چه شما را به کشف کـردن واداشته است، کوره‌راهی درذهن شما می‌گشاید که، بازهم، هروقت به‌چنین ضرورتی برخورد کنید، می‌توانید ازآن استفاده کنید.

گئورک لیختن برگ

Aphorismen, Berlin. 1902 – 1906

هرگونه معرفت انسانی، ازتفکر و تأمل آغاز می‌شود، از آن‌ها به‌مفهوم‌ها می‌رسد و، سرانجام، بـه اندیشه، ختم می‌شود.

امانوئل کانت ــ انتقاد عقل خالص

من می‌کوشم چنان بنویسم که، هرکسی‌که آن را می‌خواند، بتواند بـه معنای درونی و کنه آن پی‌ببرد و سرچشمه‌های آن را پیداکند، به نحوی‌که، گویا، خود آن را دریافته است.

گوتفرید ویلهلم لایب نیتس

Schriften (جلد هفتم)

§۱. معلمی دانش نیست[1]

برخی از اعتقادهای خود را، دربارهٔ روش معلمی، هنر معلم بودن و تسلط برکار معلمی، با شما درمیان می‌گذارم.

این دیدگاه‌ها، نتیجهٔ سال‌ها تجربه است. بیان دیدگاه‌های شخصی، همیشه‌درست‌نیست و، اگرکارآموزش برمبنایی علمی و نظری‌تنظیم شده‌بود، من هم جرأت نمی‌کردم در این باره وقت شما را بگیرم. ولی، درواقع، چنین مبنایی‌وجودندارد و، به‌اعتقاد من، آموزش نتوانسته است، دست‌کم تاامروز، حتی شاخه‌ای از روان شناسی عملی باشد.

معلمی، رابطهٔ معینی با شاگردی دارد. پژوهش تجربی ونظری در زمینهٔ روندیادگیری (کسب‌آگاهی‌های تازه)، یکی ازشاخه‌های روان‌شناسی را تشکیل می‌دهد که، ضمناً، فوق‌العاده پیشرفت‌کرده است. با وجود این، من دراین‌جا، با موضوع دیگری‌کاردارم. می‌خواهم در این‌جا، به‌طورعمده، به دشواری‌های جریان تدریس بپردازم، مثل تدریس جبر یا روش تدریس ریاضیات‌که، بیش از هرچیز، به‌کارمداوم ودرازمدت‌معلمان مربوط می‌شود، درحالی که روان شناسی، تقریباً تمامی توجه خود را، روی شرایط ساده و کوتاه مدت، متمرکزکرده است. به این ترتیب، روان شناسی می‌تواند ما را به نکته‌هایی هدایت‌کند، ولی این نکته‌ها، تنها اشاره‌هایی، برای حل مسألهٔ مورد نظر ما دارند و، به‌هیچ وجه، نمی‌توانند مدعی به دست آوردن حکم نهایی باشند.

§۲. هدف آموزش

بدون این‌که از هدف‌های آموزش آگاه باشیم، نمی‌توانیم کار معلم‌را ارزیابی‌کنیم. تا زمانی که به توافق معینی، نسبت به هدف آموزش نرسیم، نمی‌توانیم در بارهٔ روندآموزش، به صورتی قابل فهم، داوری‌کنیم.

اجازه بدهید مشخص‌تر صحبت کنم. توجه من به آموزش ریاضیات

---

۱. §§ ۱ تا ۷ این فصل، سخن‌رانی مؤلف، در چهل وششمین نشست سالانهٔ انجمن ریاضی‌دانان امریکا در برکلی است، که قبلاً هم چاپ شده‌اند.

دبیرستانی ویکی از اندیشه‌های قدیمی دربارهٔ هدف ایـن آموزش است. این اندیشه ـ که بی‌شك در درجهٔ اول اهمیت قرار دارد ـ حاکی است که: باید اندیشیدن را به جوانان یاد داد.

خود من به‌این مطلب اعتقادکامل دارم و گمان می‌کنم شما هم، اگر کاملاً و دربست بـا آن موافق نباشید، دست‌کم تـا حدی، آن را بپذیرید. ممکن است شما، تربیت نیروی اندیشه را، هدف نخست ریاضیات دبیرستانی ندانید و، مثلاً ،آن را در درجهٔ دوم اهمیت قراردهید؛ حتی در چنین حالتی، همین جنبهٔ مشترك، برای ثمربخش‌کردن بحث ما، کافی خواهدبود.

شعار «اندیشیدن را بیاموزید»، به این معناست‌که معلم ریاضیات نـه تنها باید به سرچشمهٔ آگاهی‌ها بپردازد، بلکه ضمناً، باید تلاش‌کند تا استعداد دانش‌آموزان را دربررسی این آگاهی‌ها، پرورش دهد: او باید سطح توانایی اندیشیدن را درشاگـردان خـود بالا ببرد. چه بسا، این هدف، بـه توضیح مفصل‌تـری نیازداشته باشـد، ولی در این جاکافـی است تنها بـر دو نکته تکیه کنیم.

اولاً اندیشه، که در این‌جا دربارهٔآن صحبت می‌کنیم، خیالی واهی‌و بیهوده‌نیست، بلکه عبارت است از « تفکر هدایت شده » یا « تفکر ارادی » (ویلیام جیمس)[1]، یا « تفکربارآور » (ماکس ورت هیمر)[2]. این نوع‌اندیشه را می‌توان، دست‌کم درتقریب اول، بـا « حل مسأله » یکی دانست. ومن اعتقاد دارم‌که، یکی از مهم‌ترین هدف‌های ریاضیات دبیرستانی، عبارت‌است از تکامل توانایی حل مسأله در دانش آموزان.

ثانیاً، اندیشهٔ ریاضی را نباید یك اندیشهٔ « صوری » خالص به حساب آورد. اندیشهٔ ریاضی، تنها براصل‌ها، تعریف‌ها و اثبات‌های دقیـق، استوار نیست، بلکه ضمناً، بسیاری از چیزهـای دیگر را هم، دربـرمی‌گیرد: تعمیم حالت‌های مورد بررسی، به کاربردن استقراء، استفاده از شباهت‌ها، کشف یا

---

۱. به یادداشت ابتدای فصل پنجم مراجعه‌کنید.

۲. ماکس‌ورت‌هیمر (*M. wertheimer*) (۱۸۸۰ـ۱۹۴۳)، روان‌شناس بزرگ آلمانی و یکی از بنیان‌گذاران به اصطلاح «روان شناسی گشتالت».

روشن‌کردن مضمون‌ریاضی یك موقعیت مشخص. برای معلم ریاضی، مورد - های مناسب بسیاری پیش می‌آیدکه بتواند دانش‌آموزان را با این‌مرحله‌های «غیرصوری» ولی بسیار مهم روند تفکر آشناکند و، به نظر من، باید ازاین موقعیت‌ها، خیلی بیشتر از آن چه در زمان ما معمول است، استفاده‌کند. به صورتی کاملاً فشرده، والبته ناقص، باید گفت: باید بـا تمام امکان‌هـا، هنر ثابت‌کردن را یاد داد، بدون این‌که هنرکشف‌کردن، به‌فراموشی سپرده‌شود.

§۳. معلمی، هنر است

معلمی دانش نیست، هنراست. این عقیده، ازطرف افراد مختلف،آن‌قدر گفته شده است که من از تکرارآن خجالت می‌کشم. با وجود این، اگر ازکلی بافی‌های پیش پا افتاده صرف نظرکنیم وبه موردهای جزئی ومشخص بپردازیم، این جملهٔ کوتاه (وظاهراً پیش پا افتاده)، می‌تواند بـه صورتی شایسته، ما را دربرخورد با بعضی دشواری‌های حرفهٔ خود، یاری دهد.

روشن است‌که معلمی، وجه اشتراك زیادی با هنر تئاتر دارد. فـرض می‌کنیم‌که شما باید اثباتی را به کلاس خود ارائه دهیدکـه خیلی خوب آن را می‌دانید، زیرا از سال‌های گذشته، بارها وبارها، آن را بـرای شاگردان خود درس داده‌اید. البته، شما هیچ علاقه‌ای به این اثبات نمی‌توانید داشته باشید، ولی لطفاً این بی‌علاقگی خود را بـه‌کلاس نشان ندهید. اگر کلاس متوجه‌کسالت شما بشود، تمامی کلاس همراه با شما، بـه‌کسالت می‌افتد. با شروع اثبات، تلاش‌کنید خود را علاقه‌مند نشان دهید؛ درجریان اثبات،هیچ فرصتی را، برای متوجه‌کردن دانش‌آموزان به اندیشه‌های جالب، از دست ندهید: وقتی‌که اثبات را تمام‌کردید، سعی‌کنید خود را شگفت زده‌نشان دهید و به دانش‌آموزان فرصت بدهید، متوجه حالت روحی شما بشوند. شما باید به چنان نمایشی بـرای دانش‌آموزان بپردازیدکـه رابطهٔ شما را با موضوع مورد بحث، خیلی بیشتر ازآن چه در واقع وجود دارد، نشان دهد.

باید اعتراف‌کنم‌که من، ازچنین موردهایی، لذت می‌برم، به خصوص حالا،که سنم بالا رفته است و به ندرت می‌توانم چیز تازه‌ای‌کشف‌کنم: وقتی

که مثل یك هنرپیشه، خود را درحالتی قرارمی‌دهم کـه گویا دارم چیزی را کشف‌می کنم (البته، این کشف، مدت‌هاقبل و به صورت کلی‌تری، انجام گرفته است ومن‌تنها، درنقش یك کشف‌کننده، بازی‌می کنم)، احساس رضایت زیادی به من دست می‌دهد.

معلمی، وجه‌اشتراك زیادی‌هم باموسیقی دارد (اگرچه، به‌این‌مطلب، خیلی‌کم پرداخته‌اند). می‌دانیدکه معلم ناچار است، اغلب، دربارهٔ مطلبی، نه یك یا دوبار، بلکه سه، چهار، پنج‌بار و بیشتر، صحبت‌کند. ولـی روشن است که تکرار بیانی، بی‌وقفه و بدون تغییر لحن یك جمله، جلو اظهار نظر شنوندگان را می گیرد وهدف اصلی را، که این تکرار به خاطـر آن صورت می گیرد، ازبین می‌برد. دراین مورد، باید ازآهنگ‌سازان یادگرفت که‌مشکل را به بهترین وجهی حل کرده‌انـد. یکی ازجالب‌تریـن شکل‌های موسیقی، زمینه‌ای است که بتوان، در موردهای مختلف، آن را با «تغییرهای جزئی» (واریاسیون‌ها) اجراکـرد. معلم باید از این شکل موسیقی بهره‌جویـی‌کند: جملهٔ خود را به‌ساده‌ترین صورت‌ممکن بیان‌کنید؛ باردوم، باتغییرهای‌لازمی، آن را تکرارکنید؛ دفعهٔ سوم، چیزهای تازه‌ای به آن اضافه‌کنید و به‌مطلب رنگی‌روشن‌تر بدهید وغیره. بعد ازپایان‌کار، می‌توانید، دوباره، همان‌فرمول‌ـ بندی اول را تکرار کنید. یکی دیگر از شکل‌های مهم موسیقی، « روندو (*rondo*)» است. درکار معلمی هم، می‌توانیـم از ایـن شکل موسیقی الهام بگیریم، به این ترتیب که، مفهوم اصلی بحث مـورد نظر خود را، چندبار، بدون هیچ تغییری یا با تغییری‌کوچك، تکرارکنیم و، درفاصلهٔ این تکرارها، به شرح موضـوع بپردازیم. امیدوارم، همان طور کـه از «واریاسیون‌های» بتهوون ویا «روندوی» موتسارت لذت می‌برید، اندکی‌هم دربارهٔ روش‌های معلمی بیندیشید...

معلمی، گاهی به «شعر» و گاهی‌به «طنزو نکته‌پردازی» نزدیك‌می‌شود. اجازه‌بدهید داستان‌کوچکی ازاینشتاین بزرگ برای شما نقل‌کنم. روزی در بحث اینشتاین با گروهی از فیزیك دانان حضور داشتم. وقتی از اوپرسیدند «چرا همهٔ الکترون‌ها، بارمساوی دارند؟» اول یك بارجملهٔ پرسشی راتکرار

کرد و، بعد، ادامه داد «خوب، چرا همهٔ‌پوست گردوها به‌یك اندازه هستند؟» به چه مناسبت اینشتاین به‌خود اجازه‌داد این‌طورحرف بزند؟ آیا تنها به این خاطر که دوستداران خود را شرمنده کند؟ گمان نمی‌کنم چنین قصدی داشته است. به نظرمن، در این‌جا ، مبنای عمیق‌تری وجود دارد. تصور می‌کنم، آن‌چه را من به‌تصادف شنیدم، به‌هیچ‌وجه نباید تصادفی‌دانست. منظور اوهر چه بود، من برای خودم نتیجه‌ای گرفتم؛ انتزاع کار درستی است، ولی باید از هر امکانی سودجست تاآن‌را به‌صورتی محسوس‌تر وقابل لمس‌تر درآورد. این درست است که، معمولاً ، نمی‌توانید چیزی را پیداکنیدکه برای توضیح ساختمان انتزاعی شماکاملاً خوب باشد، ولی قبول کنیدکه هیچ چیزی راهم نمی‌شودکاملاً بد دانست؛ همان‌گونه‌که هیچ بیانی کاملاً شاعرانه، یا به کلی دور از هرگونه ظرافت شاعرانه نیست. مونتل می‌گفت: «حقیقت این است که موضوع چنان عظیم است که نباید هیچ چیزی را، برای دست‌یابی به‌آن، حقیرشمرد». به‌همین مناسبت، هرگاه غریزه به‌شما تلقین کردکه وقت آن‌است کمی از روحیهٔ «شاعرانه» ویا «طنز» استفاده کنید، به خاطر نارسائی آن در توضیح مضمون موضوع، ازآن صرف‌نظر نکنید.

۴§ . سه اصل یادگیری

معلمی یك حرفه است و، مثل هرحرفهٔ دیگری، شگردها وحیله‌های خاص خودش را دارد. هرمعلم خوبی، روش خودش را دارد وازهمین جاست که هرمعلم خوب، از معلم خوب دیگر تمیز داده می‌شود.

هرشیوهٔ مؤثر تدریس، باید متناظر با روش معینی از یادگیری باشد. ما چیزخیلی‌زیادی دربارهٔ روند یادگیری نمی‌دانیم، ولی همین تکه پاره‌های مبهمی که دربارهٔ جنبه‌های روشن‌آن دراختیار داریم، می‌توانند به کارمعلمی ما، روشنی بخشد. اجازه بدهید این تکه پاره‌های مبهم را ــ که می‌توانند بعضی از جنبه‌های یادگیری را روشن کنند ــ به صورت سه اصل یادگیری مطرح کنیم. هم انتخاب این سه اصل و هم نحوهٔ تنظیم آن‌ها، از خود من است، ولی به خودی خود، نمی‌توان اساس آن‌ها را تازه به حساب آورد.

این اصل‌ها، قبلاً هم، بارها و به‌صورت‌های گوناگون تنظیم شده‌اند، نتیجه‌ای از تجربهٔ سده‌های متوالی و مورد تأیید صاحب نظران‌اند و، به جز آن، بررسی‌های فراوان روان شناسی از روند یادگیری، آن‌ها را تأیید کرده‌است.

«اصل‌های یادگیری» را، به‌عنوان «اصل‌های آموزش» هم، می‌توان موردبررسی قرارداد؛ وهمین امرموجب شده است که ما، آن‌ها را دراین جا، مورد بحث قرار دهیم؛ با وجود این، بعداً به‌تفصیل به‌این مطلب خواهیم پرداخت.

۱°. یادگیری فعال. اغلب، وبا بیان‌های مختلف، می گویند: یادگیری بایدفعال و زنده‌باشد، نه‌بی‌روح ودستوری؛ یعنی،یادگیری نبایدتنها براساس یك‌نوع تلقی خاص قرار گیرد. اگرشماتنها خود را به‌خواندن کتاب، یاشنیدن سخن‌رانی‌ها، یا شرکت درکلاس‌ها ویا دیدن فیلم‌ها محدودکنید، نخواهید توانست‌نیروی درك شخصی خود را، به‌صورتی‌فعال‌و زنده، به‌کار اندازید؛ درچنین حالتی، شما احتمالاً می‌توانید یادبگیرید ولی، بدون تردید، نه‌خیلی زیاد و نه به اندازهٔ کافی.

بیان دیگری ازهمین عقیده وجود داردکه به‌آن‌چه دراین‌جا گفتیم نزدیك است: بهترین روش یادگرفتن یك مطلب‌آن است‌که خودتان آن‌را کشف‌کنید. لیختن برگ (فیزیك‌دان آلمانی سدهٔ هیجدهم، که بیشتر به‌خاطر جمله‌های قصار وضرب‌المثل‌های‌خود مشهور است)، نکتهٔ جالبی‌به‌این‌مطلب اضافه می‌کند: آن‌چه شمارا به‌کشف‌کردن واداشته است، کوره راهی در ذهن شما می‌گشاید، که، باز هم، هروقت به‌چنین‌ضرورتی برخورد کنید، می‌توانید از آن استفاده کنید. مطلب را به‌این ترتیب هم می‌توان تنظیم‌کرد که، اگر چه خیلی زیبا وفصیح نیست، می‌تواند کاربرد گسترده‌ای داشته باشد: برای این‌که یادگیری هرچه بیشتر ثمربخش باشد، دانش‌آموز باید، تا آن‌جا که موقعیت هرموضوع اجازه می‌دهد، تلاش‌کند تا بیشترین قسمت ممکن آن را، خودش مستقلاً کشف‌کند.

مضمون اصلی اصل یادگیری فعال همین است. این اصل خیلی‌قدیمی است وبیان اندیشهٔ «روش سقراطی» برآن نهاده شده است.

۲°. بهترین انگیزه. می‌گوییم یادگیری باید فعال و زنده باشد، ولی اگر دانش‌آموز دلیلی برای این موضوع نداشته باشد، نمی‌تواند فعالیت خود را ظاهر کند. باید فعالیت ذهنی او را با انگیزه‌ای ـ ومثلاً امید به گرفتن جایزه ـ تحریک کنیم. ولی، بهترین انگیزه برای آموختن، علاقهٔ دانش‌آموز به‌موضوع مورد مطالعه، و بهترین پاداش برای فعالیت جدی‌ذهنی او، لذتی است که از این فعالیت می‌برد. اگر این بهترین را دراختیار نداریم، باید بکوشیم تا به‌جای‌آن، انگیزهٔ خوب‌یا حتی‌نسبتاًخوب دیگری، بگذاریم؛ نباید در کنار انگیزه‌های‌خالص‌درونی، انگیزه‌های دیگر یادگیری‌را فراموش‌کنیم.

برای این‌که یادگیری‌دانش‌آموز، به‌اندازهٔکافی، ثمربخش باشد، باید او را به‌موضوع مورد مطالعه‌اش علاقه‌مندکرد، تا ازخود جریان یادگیری‌لذت ببرد. با وجود این، درکنار این بهترین انگیزه، انگیزه‌های دیگری‌هم، برای یادگیری، وجود دارد که بعضی از آن‌ها را می‌توان مطلوب دانست. (نتیجهٔ استفاده از روش‌های نادرست تحریک دانش‌آموزان به‌کار، چیزی‌جز بی‌میلی او به آموختن نیست).

وما، این را، اصل بهترین انگیزه نامیده‌ایم.

۳°. تسلسل مرحله‌های یادگیری. با نقل قطعه‌ای از سخن کانت آغاز می‌کنیم: «هرگونه معرفت انسانی از تفکر و تأمل آغاز می‌شود، از آن‌جا به مفهوم‌ها می‌رسد و، سرانجام، به‌اندیشه‌ها ختم‌می‌شود». درترجمهٔ سخن‌کانت، از اصطلاح‌های «تأمـل»، «مفهوم» و «اندیشه» استفاده کرده‌ایم. من قـادر نیستم (ومگر کس دیگری قادر است؟) معنای دقیقی راکه مورد نظرکانت در این اصطلاح‌ها بوده است، روشن‌کنم؛ ولی با اجازهٔ شما، آن‌چه خـودم از این سخن کانت فهمیده‌ام، طرح می‌کنم.

یادگیری از عمل و درك آغاز می‌شود، ازآن‌جا به‌کلام ومفهوم می‌رسد وباید به‌ویژگی تازه‌ای از ذخیرهٔ ذهنی منجر شود.

برای بررسی، خواهش می‌کنم، ابتدا به‌اصطلاح‌هایی‌که در تفسیر من از سخن‌کانت به‌کار رفته است، تـوجه‌کنید، به خصوص به‌آن‌هایـی‌که شما می‌توانید، با توجه به‌تجربه‌های شخصی خود، روشن‌تر بشوید (این‌کـه از شما می‌خواهم به‌تجربهٔ شخصی خودتان مراجعه‌کنید، به این علت است‌که

این موضوع، یکی از هدف‌های موردنظر من است). «یادگیری» کلاسی را به‌یاد می‌آوردکه شما، به‌عنوان شاگرد یا معلم، درآن حضور دارید، «عمل و درك» باید تصور کار با چیزهای مشخص ـ سنگ‌ریزه‌ها و سیب‌ها، پرگار وخط‌کش، وسیله‌های‌آزمایشگاهی وغیره ـ ومشاهده ومطالعهٔ آن‌ها را به‌یاد شما بیاورد. هروقت‌که دربارهٔ چیزهای مقدماتی وساده فکر می‌کنیم، همین تفسیر مشخص، به‌طور طبیعی، برای ما به‌وجود می‌آید. ولی به‌تدریج می‌توان همین مرحله‌ها را، درضمن کار با موضوع‌های‌بغرنج‌تر هم، پیداکرد. سه‌مرحله را درکار درنظرمی‌گیریم: مرحلهٔ بررسی، مرحلهٔ شکل‌گیری ومرحلهٔ فراگیری.

مرحلهٔ اول ـ مرحلهٔ بررسی ـ خیلی نزدیك به‌عمل و درك است و، بیش از همه، در سطح ابتکار یا شهود قرار دارد.

مرحلهٔ دوم ـ مرحلهٔ شکل‌گیری ـ از تعریف‌ها واثبات‌ها آغازمی‌شود وتا سطح عالی مفهوم‌ها، بالا می‌رود.

مرحلهٔ سوم ـ مرحلهٔ فراگیری ـ درآخر قراردارد: این‌مرحله، به‌تلاش برای درك «اهمیت درونی» مسأله پاسخ می‌دهد. در این‌مرحله، دانش‌آموز باید موضوع مورد مطالعه را فرا گرفته ووارد در دستگاه آگاهی‌های خود کرده باشدکه، درنتیجه، دایرهٔ فهم ذهنی او گسترش می‌یابد. این مرحله، راه را، از یك‌طرف، به‌سمت‌کاربرد موضوع و، ازطرف دیگر، به‌سمت تعمیم‌آن، باز می‌کند.

نتیجه بگیریم: برای ثمربخش‌بودن روند یادگیری، مرحلهٔ بررسی باید قبل ازمرحلهٔ بیان شفاهی وآموزش مفهوم باشد؛ نتیجهٔ‌کار باید این باشدکه موضوع مورد یادگیری، به‌ذخیرهٔ کلی‌آگاهی‌های دانش‌آموز اضافه شود و او را به‌سطح بالاتری از دانش برساند.

چنین است اصل تسلسل مرحله‌های یادگیری.

۵§. سه‌اصل آموزش

معلم باید بداندکه روند یادگیری چگونه جریان دارد. معلم باید از

راه‌های بی‌نتیجه یا کم نتیجهٔ کسب دانش، پرهیز کند وراه‌های ثمـربخش را ترجیح دهد. برای این منظور می‌تواند از سه اصلی که یاد کـردیم، استفاده کند، یعنی اصل یادگیری فعال، اصل بهترین انگیزه و اصل تسلسل مرحله‌ها. این سه اصل یـادگیری را مـی‌توان، در عین حـال ، بـه عنوان سه اصل آموزش وتدریس هم‌در نظرگرفت. با وجود این، نباید شرط لازم‌را فراموش کرد: معلم نه‌تنها باید این سه‌اصل‌را به‌یاد داشته باشد، بلکه بایدآن‌ها را، با تمام وجود خود، وبرپایهٔ تجربهٔ علمی وشخصی خود، عمیقاً احساس‌کند.

۱°. یادگیری فعال. البته آن‌چـه درکلاس مورد تـوجه معلم است، اهمیت دارد ، ولـی هزار بـار مهم‌تر از آن، چیزی است که مـورد توجه دانش‌آموز است. اندیشه‌ها باید از ذهن خوددانش‌آموز بیرون بیاید. در این میان، نقش معلم را می‌توان با نقش ماما وقابله مقایسه‌کرد.

این، نصیحت رسمی سقراط است؛ گفت‌وگوی سقراطی، بهترین‌شکل آموزش با بهترین نتیجه است ـ معلم دبیرستان، این‌مزیت را نسبت به‌معلم دانشگاه داردکه می‌تواند، به‌صورت گسترده‌ای، از شیوهٔ گفت‌وگو استفاده کند. ولی باکمال تأسف، میزان وقتی که، در دبیرستان، برای هرمادهٔ درسی گـذاشته‌اند ، چنان محدود است‌کـه برگزارکردن همه درس‌هـا، به‌صورت گفت‌وگو، ممکن نیست. باهمهٔ این‌هـا، اصل قدیمی ما، به‌قوت خـود باقی است: با همین امکان‌هایی‌که دارید، حداکثر تلاش خود را به‌کاربرید، تاخود دانش‌آموزان، درجریان‌کشف، شرکت داشته باشند.

من اطمینان دارم‌که دراین راه، خیلی بیشتر ازآن‌چه تاکنون معمول بوده است، می‌توان کارکـرد. اجازه بدهید حیله‌ای را به شما تـوصیه‌کنم: به‌دانش‌آموزان امکان بدهید، در تنظیم صورت مسأله‌هایی‌که باید حل‌کنند، شرکت داشته باشند. اگرشاگرد،رد پای‌کار خودش را درطرح مسأله‌هاببیند، خیلی فعال‌تر دربارهٔ آن خواهدکوشید.

یادآوری می‌کنم، کار دانشمندی‌که مسأله‌ای را طرح می‌کند، ممکن است‌خیلی‌بیشترازیك‌کشف جزئی‌اهمیت داشته باشد. اغلب حل مسأله‌تأثیر کمتری در ماهیت مطلب دارد و، از نظـر اندیشه‌ای، نسبت به‌شکل‌گیری

خود مسأله، کمتر بکر و بدیع است. بنابراین، اگر شرایطی فراهم‌کنید که دانش‌آموز بتواند مسأله‌های خاص خودش را طرح کند، نه‌تنها او را به‌کار جدی‌تر تحریك، بلکه نیروی خلاقیت ذهنی او را هم تقویت‌کرده‌اید.

۴°. بهترین انگیزه. معلم باید خودش‌را واسطه‌ای بداندکه می‌خواهد مقداری از ریاضیاتی را که می‌داند، دراختیار جوانان قرار دهد. ولی، اگر واسطه‌ای درعرضهٔ جنس‌خود با دشواری روبه‌رو شود و کالای او روی‌دستش بماند، یا خریداران از خرید کالای او سرباز زنند، نباید تقصیر را به‌گردن خریداران بیندازد. به‌خاطر داشته باشیدکه، معمولاً، حق با خریدار است. جوانی‌هم‌که از یادگرفتن ریاضیات سر باز می‌زند، ممکن است حق داشته باشد. هیچ دلیلی وجود ندارد‌که شاگرد شما، تنبل یا بی‌هوش باشد، بلکه خیلی ساده، ممکن است به‌چیز دیگری علاقه‌مند باشد. آخر، دنیای ما پر است از این‌همه چیزهای جالب! وظیفهٔ شما، به‌عنوان یك معلم و به‌عنوان کسی که می‌خواهد آگاهی دیگران را بالا ببرد، این است‌که دانش‌آموز را به‌ریاضیات علاقه‌مند کند، ظرافت و زیبایی‌آن را به‌او نشان دهد و به‌او بفهماند که اگر فرصت تسلط برآن را از دست بدهد، درآینده متأسف خواهد شد.

بنابراین، معلم باید تمامی‌توجه خود را درانتخاب مسأله و تنظیم‌آن به‌کار برد و آن‌را، به‌بهترین صورت ممکن، به‌دانش‌آموزان‌عرضه‌کند. مسأله باید نه‌تنها از موضع معلم، بلکه ضمناً، از موضع شاگردهم، جالب ومفهوم باشد. چه بهترکه بشود درس را، در رابطه با تجربهٔ روزانهٔ شاگردان‌طرح کرد و، بازهم بهتر ازآن، با شوخی و جناس ومعما در هم آمیخت. مسأله‌را می‌توان با موضوعی آغاز کرد‌که برای دانش‌آموزان روشن است و چه بهتر که، این موضوع، امکان‌کاربرد عملی مسأله ویا موضوعی مورد علاقهٔ عموم باشد. اگر می‌خواهیم نیروی‌آفرینش دانش‌آموزان را تحریك‌کنیم، باید مبنا ودستگیره‌ای **در اختیار آن‌ها بگذاریم تا مطمئن شوند تلاش آن‌ها بیهوده** و عبث نیست.

به‌خصوص، علاقهٔ دانش‌آموز، بهترین انگیزهٔ او درکار است. ولی،

انگیزه‌های دیگری‌هم وجود داردکه نبایدآن‌ها را از دست‌داد. بازهم اجازه می‌خواهم، حیلهٔ کوچکی را به‌شما توصیه‌کنم. قبل از این که دانش‌آموز به کار بپردازد، از او بخواهید نتیجه را حدس بزند، ولـو بخشی از آن را. دانش‌آموزی‌که فرضیه‌ای را ارائه‌کند، در واقع، خود را به‌آن وابسته کرده است؛ حیثیت واحساس او، درگـرو فرضیهٔ اوست و، با بی‌صبری، درانتظار آن‌است‌که ببیند حدس او درست‌است‌یا نه؛ او با اشتیاق به‌سرنوشت مسأله وکارکلاس علاقه‌مند می‌شود و، در آن لحظه‌ها، هیچ‌چیز دیگری نظر او را جلب نمی‌کند.

یادآوری می‌کنم‌کـه درکار یك دانشمند، حدس همیشه قبل از اثبات قرار دارد. به‌این‌ترتیب، اگر از دانش‌آموز بخواهید نتیجه را حدس بـزند، بازهم، نه‌تنها علاقهٔ اورا به‌کار برانگیخته‌اید، بلکه به‌شکل‌گیری وتقویت نیروی ذهنی او هم‌کمك‌کرده‌اید.

۳°. تسلسل مرحله‌ها. عیب اصلی‌کتاب‌های ریاضی دبیرستانی در این است‌که‌تقریباً همه مسأله‌های موجود درآن‌ها، ازصورت‌های متعارف وعادی انتخاب شده‌است. منظور من ازمسأله‌های عادی، مسأله‌هایی است‌که‌میدان کاربرد تنگی دارند، تنها به‌روشن‌کردن یك قانون خدمت می‌کنند وتمرین ـ هایی برای‌کاربرد همان یك‌قانون هستند. من‌این را نفی نمی‌کنم‌که این‌گونه مثال‌ها، هم مفید وهم لازم‌اند، ولی دو مرحلهٔ مهم‌آموزش درآن‌ها وجـود ندارد: مرحلهٔ بررسی وپژوهش ومرحلهٔ فراگیری. هدف این دو مـرحله این است‌که مسألهٔ موردبررسی‌را باشرایط موجود وباآگاهی‌هایی‌که قبلاً به‌دست آورده‌ایم،مربوط می‌کند. مسأله‌های عادی، این‌دو منظور را برنمی‌آورند، زیرا از قبل معلوم است‌که برای روشن شدن قانـون معینی طرح شده‌اند و اهمیت آن‌ها، تنها درخدمت‌کردن به‌همین قانون است. البته، گاهـی دراین مسأله‌ها، به‌قانون یا قانون‌های دیگری هم توجه می‌شود‌که، دراین‌صورت، مسأله‌های مفیدتری به‌حساب می‌آیند. حقیقت ایـن است‌که، در دبیرستان، باید درکنار مسأله‌های عادی، دست‌کم گاه به‌گاه،مسأله‌های عمیق‌تری هم به‌دانش‌آموزان داده شود، مسأله‌هایی‌که زمینه‌های غنی‌تری داشته باشند و

امکان ورود دانش‌آموزان را، به کارهای جدی‌تر علمی، فراهم کنند.

یک‌توصیهٔ عملی کوچک: وقتی می‌خواهید چنین‌مسأله‌هایی را در کلاس مورد بحث قرار دهید، ازهمان ابتدا، یك بررسی وپژوهش‌مقدماتی به‌دانش‌آموزان پیشنهاد کنید؛ این‌حیله، اشتهای‌آن‌ها را درحل مسأله و رسیدن به جواب تحریك می‌کند. این مطلب را هم فراموش نکنید که مقداری ازوقت کلاس را، برای بحث دربارهٔ نتیجه‌ای که به‌دست آمده است، باقی بگذارید. البته، این بحث را ضمن حل مسأله‌های دیگری هم، می‌توان انجام‌داد.

۴°. این بحث ـ که ناچار شدیم خود را درمحدودهٔ انتخاب سه اصل آموزش ، یعنی اصل یادگیری فعال، اصل بهترین انگیزه و اصل تسلسل مرحله ، قرار دهیم ـ بحثی کاملاً نارسا بود؛ با وجود این، به‌نظر من، یك معلم باید آن‌را درتمام کار روزانهٔ خود درنظر داشته باشد، چراکه می‌تواند به‌طور جدی به‌بارور بودن کار اوکمك کند. همچنین، به‌نظر من، در تنظیم کتاب‌های درسی دبیرستانی، دربرنامه‌ریزی هر درس وهربخشی از برنامهٔ یك درس، باید به‌این سه اصل توجه داشت.

البته، من به هیچ‌وجه خیال ندارم شما را وادارم تا بدون بحث و بی‌هیچ تردید، این سه‌اصل را بپذیرید؛ این سه‌اصل، نتیجه‌ای از یك دیدگاه خاص است و، طبعاً، منعکس کنندهٔ دیدگاه معینی است، درحالی‌که شما می‌توانید دیدگاه دیگری داشته باشید. درکارآموزش ـ مثل سایر موردها و ازآن جمله زندگی ـ این مطلب کمتر مهم است که دیدگاه شماچگونه است، مهم‌تر ازآن این‌است که آیاشما اصولاً دراین‌مورد دیدگاهی دارید، یااصلاً دربارهٔ‌آن فکر نکرده‌اید. این‌هم خیلی مهم است که: بتوانید از دیدگاه‌خود، در زندگی، استفاده‌کنید. تنها اصلی راکه حاضر نیستم بپذیرم، اصلی است که، بنابرآن، خود مبلغ، اعتقادی نسبت به نظری که تبلیغ می‌کند، نداشته باشد.

§۶. دو مثال

مثال، مفیدتر از قانون است! هیچ‌چیزی نمی‌تواند به‌اندازهٔ مثال،

برای روشن کردن موضوع موردبحث، مفیدباشد! اجازه بدهید من هم به‌ذکر مثال بپردازم ؛ گمان می‌کنم ذکر مثال‌های مشخص، خیلی با ارزش‌تر از هرگونه استدلال کلی است. توجه من دراین‌جا، بیشتر به‌آموزش درسطح دبیرستان است؛ به همین مناسبت، مثال‌هایی هم‌که مـی‌آورم، به‌همین زمینه مربوط مـی‌شود. من، در مجموع ، از انتخاب ایـن مثال‌هـا راضی هستم و می‌توانم‌دلیل‌آن‌را هم بگویم: من تلاش می‌کنم مسأله‌ها را طوری انتخاب کنم‌که، به‌نحوی، یادآور تجربهٔ من درکارهای پـژوهشی خودم بـاشد؛ در واقع، با مقیاس‌کوچکتری، همان نقشی را بازی می‌کنم‌که، گویادارم راهی به‌طرف‌کشف می‌گشایم.

۱°. مسأله‌ای برای کلاس هفتم. یکی از بهترین شکل‌هـای معلمی، گفت‌وگوی سقراطی است. معلم می‌تواند دریکی ازکلاس‌هـای دبیرستان، ومثلاً کلاس هفتم، این گفت‌وگو راآغاز کند.

«هنگام ظهر، درسانفرانسیسکو، چه ساعتی است؟»

ـ این‌را هرکسی می‌داند ـ ممکن‌است یك جوان‌زرنگ این‌طورجواب بدهد ویا حتی بگوید: «پرسش احمقانه‌ای است! البته، ساعت دوازده».

«درساکرامنتو، ظهر چه ساعتی است؟»

ـ ساعت دوازده، البته دوازده روز نه دوازده شب.

«خوب، درنیویورك، چه‌ساعتی ظهر می‌شود؟»

ـ ساعت دوازده.

«ولی من گمان می‌کنم درسانفرانسیسکو و درنیویورك، در زمان‌های مختلفی، ظهرفرا می‌رسد. پس به‌من‌بگویید: چطورهم دراین‌جا وهم‌درآن‌جا، هنگام ظهر، ساعت دوازده است».

ـ خوب، فرض‌کنید این‌طور باشد: در سانفرانسیسکو، ظهر درساعت دوازده زمان معمول‌غربی، ودرنیویورك درساعت دوازده زمان معمول‌شرقی فرا می‌رسد.

«زمان معمول درساکرامنتو کدام است؟ شرقی یاغربی؟»

ـ البته غربی.

«آیا ظهر، برای مردمی که درسانفرانسیسکو زندگی می‌کنند ومردمی که ساکن ساکرامنتو هستند، دریك زمان فرامی‌رسد؟»

«نمی‌توانید پاسخ بدهید؟ پس سعی کنید پاسخ این پرسش را حدس بزنید: ظهر کجا زودتر فرا می‌رسد، درسانفرانسیسکو یا ساکرامنتو؟ یا احتمالاً در هر دوشهر، در یك‌زمان ظهر می‌شود؟...»

آیا از شیوهٔ بحث من با شاگردان کلاس هفتم ــ که درحال و هوای سقراطی بود ــ خوشتان‌آمد؟ پاسخ شما هرچه باشد، خودتان می‌توانید به‌سادگی دنبالهٔ‌آن را بگیرید. معلم باید باطرح پرسش‌های مناسب، به‌شیوهٔ سقراطی، این مفهوم‌ها را ازخود شاگردان بیرون بکشد:

الف) باید بین «ظهر نجومی» با «ظهر قراردادی» فرق گذاشت.

ب) باید تعریف هرکدام از این‌دو «ظهر» را پیداکرد.

پ) باید معنای «زمان‌معمول»واین که، چرا سطح کرهٔ‌زمین رابه‌منطقه‌های زمانی تقسیم می‌کنند، فهمید.

ت) مسأله باید، سر آخر، به این صورت تنظیم شود: «در چه ساعتی از زمان معمول غربی، ظهر نجومی در سانفرانسیسکو فرا می‌رسد؟»

ث) تنها فرضی که برای این‌مسأله لازم‌است، اطلاع ازطول جغرافیایی سانفرانسیسکو است (به‌تقریبی که برای کلاس هفتم کافی باشد).

مسأله، خیلی ساده‌نیست. من آن‌را درمورد دو گروه ازمعلمان‌دبیرستان آزمایش کرده‌ام: یکی از گروه‌ها ۲۵دقیقه و گروه دیگر ۳۵ دقیقه، برای‌حل آن، وقت صرف کردند.

۲°. باید بگوییم که این مسأله، برای کلاس هفتم، ارزش‌های زیادی دارد. مهم‌تر از همهٔ‌آن‌ها، احتمالاً این است که در مسأله، براهمیت یکی از روندهای بسیار مهم ذهنی تکیه شده است (چیزی که متأسفانه، در بسیاری ازمسأله‌های دبیرستانی، پیدا نمی‌شود) ــ روند تشخیص مفهومی از ریاضیات، که در یك مسألهٔ مشخص مفروض وجود دارد. برای این که دانش‌آموز بتواند از عهدهٔ حل مسألهٔ مربوط به«ظهر» برآید، باید بستگی بین زمان و طول جغرافیایی راکشف کند: ارتفاع موضع خورشید درهر نقطه از سطح زمین،

متناسب با طول جغرافیایی این نقطه، تغییر می‌کند.

نسبت به‌بیشتر مسأله‌های بیمار و مصنوعی، که در دورهٔ دبیرستان مطرح می‌شود، این مسأله را می‌توان مسأله‌ای سالـم و «واقعی» دانست. شکل طرح مسأله‌های مربوط به‌ریاضیات کار بسته، همیشه مهم است و گاهی مهم‌ترین جنبه را تشکیل می‌دهد؛ مسألهٔ کوچك ما هم، که قابل‌طرح در هر کلاس دبیرستانی است، از این‌خصلت جدا نیست. همچنین خاطرنشان‌می‌کنیم که یك مسألهٔ جدی در زمینهٔ ریاضیات کاربسته، ممکن است به‌نتیجه‌ای جدی درعمل ـ ومثلاً، به‌بهترکردن جریان تولید ـ منجر شود؛ مسألهٔ کوچك ما هم، برای دانش‌آموزان کلاس هفتم، روشن می‌کندکه چرا دستگاهـی از ۲۴ منطقهٔ«ساعتی»لازم‌است وچرا زمان‌را، درمحدودهٔ هرمنطقه، یکسان‌می‌گیرند. به‌طورکلی، به‌نظر من، این مسألهـ به‌شرطـی که درست و با استادی مطرح شود ـ می‌تواند به‌باز یافتن استعداد خود، به دانشمند و مهندس آینده کمك کند؛ این مسأله می‌تواند به‌رشد فکری دانش‌آموزانی هم‌که درآینده، درکار حرفه‌ای خود، نیازی به‌ریاضیات ندارند، کمك‌کند.

ضمناً یادآوری می‌کنیم که این‌مسأله می‌تواند به‌روشن‌ترشدن‌حیله‌های کوچکی که قبلاً یادکرده‌ایم، کمك‌کند؛ مثلاً، این مسأله نشان می‌دهد که چگونه می‌توان دانش‌آموزان را بـرانگیخت تا خود، درشکل‌گیری صورت مسأله شرکت کنند (با ۱° از§۵ مقایسه‌کنید). به‌طورکلی، مرحلهٔ پژوهشی، که به‌شاگرد امکان تنظیم خود مسألـه را می‌دهد، بسیار مهم است (با ۳° از §۵ مقایسه‌کنید). درآخر هم می‌توان از دانش‌آموزان خواست تا نظـر خود را دربارهٔ محتوای اصلی نتیجه ارائه‌دهند (با ۲° از §۵ مقایسه‌کنید).

۳° مسأله‌ای برای کلاس دهم. به‌مسألهٔ‌دیگری می‌پردازیم وازمسأله‌ای آشنا در زمینهٔ ساختمان هندسی آغاز مـی‌کنیم: مثلثی را با معلوم بودن سه ضلع‌آن، رسم‌کنید. ازآن‌جاکه‌شباهت‌وقیاس، سرچشمهٔ‌بسیاری‌از کشف‌هاست، به‌طور طبیعی، این پرسش پیش می‌آید: مسألهٔ مشابه این مسأله، در هندسهٔ فضایی، کدام است؟ دانش‌آموز دبیرستانی، که مختصری با هندسهٔ‌فضایی‌آشنا باشد، پاسخ‌را می‌داند: یك‌چهاروجهی‌را، با‌معلوم بودن‌شش‌یال‌آن، بسازید.

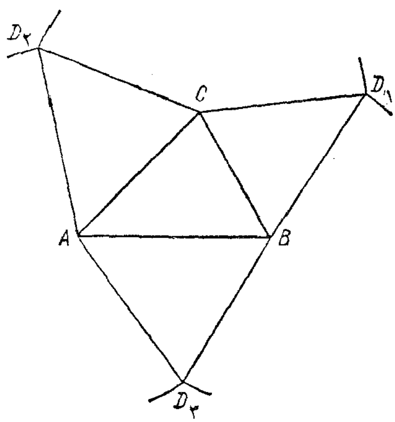
یادآوری‌می‌کنیم‌که این‌مسأله، به‌مسأله‌هایی‌که در دبیرستان درزمینهٔ «رسم‌فنی»مطرح می‌کنند،بسیارنزدیك است. مهندسان و طراحان، همیشه از رسم استفاده می‌کنند، تا آگاهی دقیق‌تری از قطعه ماشین‌یا قسمت‌ساختمانی که‌موردنظرآن‌هاست، پیداکنند. در این‌جا هم، می‌خواهیم یك چهار وجهی بسازیم‌که طول یال‌های‌آن را در دست داریم. مثلاً ، ممکن‌است بخواهیم، یك‌چنین چهار وجهی را ازچوب بتراشیم.

چنین تنظیمی از مسأله، منجر به‌این خواست می‌شودکه جواب دقیق را، به کمك پرگار و خط‌کش، به‌دست‌آوریم و به‌این پرسش پاسخ دهیم که، برای این منظور، چه عنصرهایی از چهار وجهی را باید پیداکرد. ضمن‌بحث درکلاس (که به‌وسیلهٔ معلم، جهت داده می‌شود)، می‌توان به‌شکل نهایی صورت مسأله رسید:

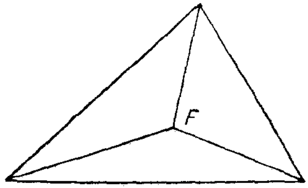
در چهار وجهی $ABCD$، طول شش یال‌آن

$$AB, BC, CA, AD, BD, CD$$

معلوم است . قاعدهٔ چهار وجهی را، مثلث ABC می‌گیریم. به‌کمك پرگار و خط‌کش زاویه‌های دو وجهی را، که این قاعده با هرکدام از سه وجه‌جانبی تشکیل‌داده‌اند، بسازید.



شکل a-۴۵. چهار وجهی را با معلوم بودن شش یال آن رسم‌کنید.



شکل b-۴۵. F تصویر رأس D، بر قاعدهٔ ABC است.

این‌زاویه‌ها را، مثلاً وقتی که بخواهیم جسم خود را ازچوب بتراشیم، لازم داریم؛ با وجود این، درجریان بحث، می‌توان عنصرهای دیگری از چهار وجهی را، ضمن گفت‌و‌گو انتخاب کرد، مثلاً:

الف) ارتفاعی که از رأس D، رأس مقابل به‌قاعده، می‌گذرد.

ب) پای F این ارتفاع، روی صفحهٔ مثلث ABC.

عنصرهای الف) و ب) به‌ساختن جسم کمك می‌کنند؛ به‌کمك همین عنصرها، می‌توان زاویه‌های موردنظر را هم بدست آورد، بنابراین ارزش دارد، ساختمان خود را از پاسخ گفتن به‌همین پرسش‌ها آغاز کنیم.

۴°. روشن است که به سادگی می‌توانیم چهار مثلث وجه‌های چهار وجهی را بسازیم وما آن را درشکل ۴۵ـa، یك‌جا جمع کرده‌ایم. قوس‌های کوچکی را، که برای ساختن شکل، مورد استفاده قرار داده‌ایم، به‌این‌جهت نگه داشته‌ایم که فراموش نکنیم:

$$.CD_1 = CD_2 ،BD_3 = BD_1 ،AD_2 = AD_3$$

شکل ۴۵ـa را، روی یك مقوا رسم می‌کنیم، آن‌را از مقوا جدا می‌کنیم، سه مثلث کناری را درطول ضلع‌های مثلث ABC خم می‌کنیم و به‌هم می‌چسبانیم؛ به‌این‌ترتیب، یك نمونهٔ فضایی به‌دست می‌آوریم که می‌توانیم روی‌آن، ارتفاع وزاویه‌های موردنظررا، به‌تقریب، اندازه بگیریم. کارهایی ازاین‌قبیل، خیلی‌آموزنده‌است،ولی ما رابه‌هدف اصلی‌خودنمی‌رساند:ما باید ارتفاع، قاعده و زاویه‌های چهاروجهی را به‌کمك پرگار وخط‌کش بسازیم.

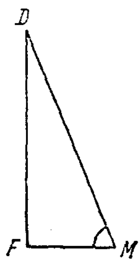
۵°. دراین‌جا، اگر «فرض کنیم، مسأله حل‌شده است» ـ درکل یاجزء خود ـ ممکن است به‌ما کمك کند. شکل را به‌حالتی تصور می‌کنیم که سه وجه جانبی، به‌وضعی که موردنظر ماست، بالاآمده باشند. روی‌شکل ۴۵ـb، تصویر قائم چهار وجهی را روی صفحهٔ قاعده (یعنی صفحهٔ مثلث ABC) داده‌ایم؛ نقطهٔ F، تصویر رأس D، یعنی پای ارتفاع وارد ازنقطهٔ D، است.

۶°. برای رسیدن از شکل ۴۵ـa به شکل ۴۵ـb، می‌توان از نمونهٔ مقوایی استفاده کرد ویا، بدون‌آن‌و با استدلال، به‌نتیجه‌رسید. به‌یکی ازسه‌وجه جانبی، ومثلاً وجه BCD، توجه می‌کنیم که، درابتدا، درهمان‌صفحهٔ ABC،

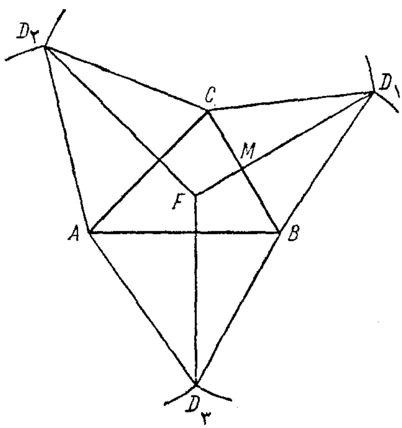
یعنی درصفحهٔ (افقی) شکل ۴۵ـa قرار دارد. فرض‌می‌کنیم، مثلث BCD_1 دور ضلع BC دوران کند؛ تمام توجه خودرا روی حرکت نقطهٔ D_1 متمرکز می‌کنیم. D_1، کمانی از یك دایره را طی می‌کند. مرکز این دایره روی یال BC قرار دارد؛ صفحهٔ این دایره، برمحور دوران BC (کـه محوری است افقی) عمود است؛ بنابراین، نقطهٔ D_1 روی صفحهٔ قائم حرکت می‌کند. به این‌ترتیب، تصویر مسیر حـرکت آن، روی صفحهٔ افقی (یعنی روی صفحهٔ شکل۴۵ـa)، خط راستی‌است عمود بر BC که از نقطهٔ D_1(موضع نخستین متحرك ما) گذشته باشد.

ولی به‌جز مثلث BCD_1، دو مثلث دیگـر هم وجود داردکـه دوران می‌کنند. به‌این‌ترتیب، سه‌رأس متحرك داریم، به‌نحوی‌که هرکدام ازآن‌ها، روی دایره‌ای ـکه صفحه‌ای قائم داردـ حرکت می‌کنند و، سرانجام، در یك نقطه به‌هم می‌رسند (کدام نقطه؟)

۷°. گمان می‌کنم تا همین‌جا، برای رسیدن به‌نتیجه، برای خـوانندهٔ ما کافی باشد؛ عمودهایی‌که از نقطه‌های D_1،D_2 و D_3 به‌ترتیب بر پاره‌خطهای BC،CA و AB رسم‌کنیم (شکل۴۵ـc)، در نقطه‌ای به‌نام F به‌هم



شکل ۴۵ـd. دنبالهٔ کار مشکل نیست.



شکل ۴۵ـc. سه متحرك، در یك نقطه به‌هم می‌رسند.

می‌رسند، که به‌پرسش ب) پاسخ می‌دهد. (برای پیداکردن نقطهٔ F، رسم دو عمود کافی است؛ عمود سوم را تنها برای آزمایش دقت شکل می‌توان رسم کرد.) دنبالهٔ کار دشوار نیست. M را نقطهٔ برخورد خطهای راست D_1F و BC می‌گیریم (شکل ۴۵-c)، مثلث FMD را با وتر $MD = MD_1$ و ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ MF رسم می‌کنیم (شکل ۴۵-d). روشن است که FD همان ارتفاع و زاویهٔ FMD همان زاویهٔ دو وجهی است که قاعدهٔ ABC با وجه جانبی DBC می‌سازد. و این‌ها، همان چیزهایی است که می‌خواستیم.

۸°. یکی‌از ارزش‌های یک‌مسألهٔ خوب دراین است که بتوان‌مسأله‌های خوب دیگری ازآن بیرون کشید. یادآوری می‌کنیم که راه‌حل فوق، ممکن است وباید، تردیدهایی‌را به‌وجودآورد. روی شکل وبا درنظرگرفتن جسم‌هایی‌که دوران می‌کنند، به‌این نتیجه رسیدیم‌که هرسه عمود، دریك نقطه به‌هم می‌رسند. ولی این نتیجه‌گیری، در واقع، به‌هندسه مربوط است و نه فیزیك؛ بنابراین، باید با استدلال خالص هندسی، و بدون ارتباط با اندیشهٔ حرکت، ثابت شود.

البته، آن‌چه درقسمت‌های ۶° و ۷° آوردیم، تاحدی‌از اندیشهٔ‌حرکت جدا بود ونتیجه‌گیری‌ها را براساس هندسهٔ خالص فضایی به‌دست آوردیم (برخورد سطح‌های فضایی، تصویر قائم؛ با ۳° از ۲§ فصل ششم مقایسه کنید) . ولی حکم ما، در واقع، یك قضیه از هندسهٔ مسطحه است نه هندسهٔ فضایی. بنابراین، بایدآن‌را بدون یاری هندسهٔ فضایی، وتنها در درون‌هندسهٔ مسطحه، ثابت‌کرد (چگونه؟)

۹°. توجه‌کنیدکه این مسأله می‌تواند بعضی از مطالبی را، که قبلاً دربارهٔآن‌ها صحبت‌کرده‌ایم، روشن‌کند. مثلاً، دراین‌موردهم، دانش‌آموزان می‌توانند (وباید) در تنظیم نهایی صورت مسأله دخالت‌کنند؛ مرحلهٔ بررسی و پژوهشی هم دراین مسأله، به‌روشنی، دیده می‌شود و، از این بابت، زمینه‌ای غنی‌دارد.

دراین مسأله، نکتهٔ دیگری هم وجود داردکه من، به‌خصوص،

می‌خواهم روی آن تأکید کنم: مسأله طوری تنظیم شده است که توجه دانش‌آموزان‌را به‌خود جلب می‌کند. با وجودی که‌این‌مسأله، ارتباط مستقیمی با تجربهٔ روزانهٔ دانش‌آموز ندارد (آن‌طورکه مسألهٔ قبلی داشت)، ازجایی آغاز می‌کندکه برای دانش‌آموزان کاملاً روشن است (ساختن یك مثلث، با معلوم بودن سه ضلع آن)؛ به‌همین مناسبت، ازهمان ابتدا، دربحث شرکت می‌کنند وبه‌دنبالهٔ کارعلاقه‌مند می‌شوند؛ ازجنبهٔ کاربرد عملی‌آن (رسم‌فنی)، که به‌جای خود مهم است، دیگرصحبتی نمی‌کنیم.

معلم، اگر فقط بخواهد، ولو این‌که توانایی زیادی نداشته باشد، می‌تواند توجه وعلاقهٔ همهٔ دانش‌آموزان خود را، به‌طرف این‌مسأله جلب کند؛ البته، به‌استثنای یکی دونفری‌که ممکن است‌کند ذهنی علاج‌ناپذیری داشته باشند.

§۷. آموزش معلمان

موضوع دیگری را هم می‌خواهم مورد بررسی قرار دهم: مسألهٔ‌آماده کردن معلم. و این، مسأله‌ای بسیار مهم است. در این مورد، در موقعیت کاملاً خوبی‌قرار دارم، چراکه تقریباً به‌طورکامل، با«عقیده ودیدگاه‌رسمی» موافقم (منظورم «توصیه‌های انجمن ریاضی امریکا، دربارهٔ آماده‌کردن معلم ریاضیات» است. من تنها به‌خودم اجازه داده‌ام‌که از این متن، به‌عنوان «توصیه‌های رسمی»[1] نام ببرم). من تنها روی دونکتهٔ اساسی تکیه می‌کنم

---

۱. این توصیه‌ها، درشمارهٔ ۶۷ (۱۹۶۰)، صفحه‌های ۹۸۲ــ۹۹۱ نشریهٔ
The American Mathematical Monthly
چاپ شده است. انجمن ریاضی امریکا
The Mathematical Association of America
که به‌طورخلاصه MAA نامیده می‌شود ــ تقریباًهمهٔ ریاضی‌دانان‌فعال وخلاق، و بسیاری ازمعلمان ومربیان‌ریاضیات‌را، درخود جمع کرده‌است. این‌انجمن، کمیسیون تربیتی خود را مأمور کرد تا به‌دشواری‌های مربوط به ریاضیات دبیرستانی بپردازد (با نام اختصاری $CUPM$)، که بسیاری از مشهورترین

که، در گذشته، وقت وانرژی زیادی را صرف آن‌ها کرده‌ام؛ حتی تقریباً تمامی کار معلمی خود را، در ده سال اخیر.

یکی از این‌دو نکته، به‌نقش‌مضمون «مواد» (ریاضی) درسی در دستگاه تربیت معلم‌آینده، و دومی به «روش‌های آموزشی»، مربوط می‌شود.

۱°. محتوای «مواد» درسی. حالا دیگرخیلی‌ها از این‌حقیقت غم‌انگیز آگاهندکه معلمان دبیرستان‌های ما، عموماً، به‌اندازهٔ کافی برموضوع درس خود مسلط نیستند.

البته، به‌معلمانی هم‌که آمادگی خوبی دارند، برخورد می‌کنیم، ولی حتی دربین‌آن‌ها هم، کم نیستند کسانی‌که (ومن با چنین‌کسانی برخورد داشته‌ام)علاقهٔ به‌درس‌دادن وفایده‌بخشیدن به‌دیگران، چنان نیرویی درآن‌ها داردکه هرکسی‌را مجذوب‌خود می‌کند، باوجود این، مسألهٔ آمادگی‌ریاضی، به‌سختی علاقهٔ آن‌ها را به خود جلب می‌کند. دربخش محتوای کتاب‌های درسی، اگرچه نمی‌شود «توصیه‌های رسمی» راکامل و تمام شده دانست، ولی بدون‌شک، با تجزیه وتحلیل این «توصیه‌ها»، می‌توان راه واقعی بهبود بخشیدن به‌آمادگی معلمان را پیدا کرد. من تنها می‌خواهم به‌نکته‌ای اشاره کنم‌که، به‌اعتقاد عمیق من، باید در «توصیه‌های رسمی» می‌آمد.

تسلط من بر بعضی موضوع‌ها، از راه جمع‌شدن آگاهی‌ها وعادت‌های اکتسابی به‌دست‌آمده است: «مهارت‌ها». مهارت، یعنی توانایی استفاده از آن‌چه‌که ازدانش‌ها می‌دانیم (آگاهی‌ها)؛ البته، مهارت، بدون نوعی‌استقلال فکری، خود ویژگی واستعدادکشف، ممکن نیست. مهارت در ریاضیات‌یعنی توانایی حل مسأله، پیداکردن روش اثبات، تجزیه وتحلیل انتقادی نتیجه‌گیری‌ها، استفاده‌ازساده‌ترین‌شیوه‌های ممکن‌ساختمان‌های ریاضی و، بالاخره،

→ ریاضی‌دانان و مربیان درآن عضویت داشتند. کمیتهٔ خاصی از این کمیسیون (با نام‌اختصاری PTT)، به‌بررسی آموزش معلمان پرداخت. «جون کمه‌نی»، ریاضی‌دان‌ومربی‌مشهور، ریاست‌این کمیته‌را به‌عهده‌داشت، توصیه‌هاوراهنمایی‌هایی‌که PTT تهیه کرد، مورد تأیید $CUPM$ و هیأت مدیرهٔ MAA قرار گرفت. همین «توصیه‌ها» است‌که پولیا آن‌ها را رسمی می‌نامد.

تشخیص مفهوم‌های ریاضی وموقعیت‌ها ومورد‌های مشخص.

هر کسی با این امر موافق است که، مهارت در ریاضیات، مهم‌تر و حتی خیلی مهم‌تر از آگاهی و معرفت، به‌تنهایی، است. همه می‌خواهند، در دبیرستان، نه تنها دانش ریاضی به‌دانش‌آموزان داده شود، بلکه مهارت‌ها وتوانایی‌های آن‌ها، یعنی استقلال فکری، خود ویژگی و نیروی خلاقیت را هم، درآن‌ها، تکامل بخشند. ولی تقریباً هیچ کس، این چیزهای عالی را، از خود معلم ریاضیات، نمی‌خواهد، واین، یك معما است. «توصیه‌های رسمی» هم، دراین مورد سکوت کرده‌است. کسی که ریاضیات‌را، به‌قصد به‌دست‌آوردن یك‌درجهٔ علمی دنبال می‌کند، باید به‌کارهای علمی ـ پژوهشی بپردازد و، قبل از آن که درجهٔ علمی‌خود را بگیرد، این امکان را پیدا می‌کند‌که دربعضی‌سمینارها شرکت‌کند و، ضمن‌آماد‌گی برای‌اخذ دیپلم، به‌کارهای مستقل‌علمی بپردازد. ولی، دربارهٔ معلم ریاضی آینده، هیچ‌کس، چنین امکانی‌را فراهم نکرده است و در «توصیه‌های رسمی» هم، حتی‌کلمه‌ای دربارهٔ کار مستقل وکار علمی ـ پژوهشی، سخن نرفته است. وقتی‌که معلم هرگز به‌کارخلاق نپرداخته‌باشد، چگونه می‌تواندالهام‌بخش، راهنما ویاری‌دهندهٔ شاگردخود، درکارآفرینند‌گی باشد ویا، حتی به‌طور ساده، فعالیت شاگردان خود را دنبال کند؟ معلمی‌که تمامی دانش خود را، از راه مشاهدهٔ خالص، به‌دست آورده است، چگونه می‌تواند توانایی فعال‌کردن شاگردان خود را در درس ریاضی، داشته باشد؟

معلمی‌که، درتمام زند‌گی‌خود، حتی‌یك‌بار، به‌اندیشهٔ درخشانی‌نرسیده است، کاملاً ممکن است‌که، به‌جای تشویق‌کار مستقل شاگرد نوآور خود، او را مورد سرزنش هم قرار دهد.

به‌اعتقاد من، همین موضوع است‌که‌کمبودی جدی، درمعلم ریاضی دبیرستان، به‌وجودآورده است: اوهیچ‌گونه تجربه‌ای دربارهٔ کار فعال‌ریاضی ندارد و، به‌همین‌مناسبت، نمی‌توان‌او را درزمینه‌ای که‌می‌خواهد به‌شاگردان خود بیاموزد، استاد دانست.

من نمی‌توانم، دراین مورد، نوعی «اکسیر» تجویز کنم، ولی‌می‌توانم تجربهٔ خودم را درمیان بگذارم . من سمینارهایی برای حل مسأله، برای

معلمان تشکیل داده‌ام و، بارها، این گونه سمینارها را اداره کرده‌ام. مسأله‌هایی که دراین سمینارها مطرح می‌شد، به‌هیچ دانش اضافی، که بیرون از چارچوب برنامهٔ دبیرستانی باشد، نیاز نداشت، ولی تمرکز ذهنی بالایی (و گاهی، خیلی بالا) و، همچنین، قدرت داوری درست‌وسالمی‌را طلب می‌کرد: تلاش معلم را، درحل مسأله، می‌توان کار «خلاق» او به حساب آورد. می‌کوشیدم‌سمینارهای خود را طوری تنظیم کنم که شرکت‌کنندگان بتوانند، تقریباً بی‌هیچ تغییری، از همان درسی که تدریس می‌کنند، استفاده کنند و، درنتیجه، این امکان را به‌دست‌آورند که مهارت واستادی خود را، درتسلط به ریاضیات مقدماتی، قدرت بخشند. حتی به‌آن‌ها امکان می‌دادم که بتوانند معلمی خود را، تمرین کنند (معلم، وقت‌آزاد خود را، درمیان گروه کوچکی از هم‌کاران‌خود می‌گذراند و، درضمن، مسئولیتی درسی هم به‌عهده داشت) (به «توصیه‌هایی به معلم و معلم معلمان» در ابتدای کتاب‌هم مراجعه کنید.

۲°. روش تدریس. تجربهٔ برخوردی که با صدها معلم ریاضی داشته‌ام، این تأثیر را درمن گذاشته است که، آن‌ها نسبت به‌درس «روش‌تدریس» چنان احساسی دارند که هیچ شباهتی به شوق وعلاقه ندارد. درمورد معلم «روش تدریس» هم، که معمولاً جزو درس‌های رشته‌های ریاضی مؤسسه‌های عالی‌ـ تربیت معلم است، کم وبیش، وضع به‌همین ترتیب است. معلمی که موفق شدم بی‌پرده با او به گفت‌وگو بنشینم، به‌این مناسبت می‌گفت: «درس‌های ریاضی‌ما، شبیه بیفتک سختی است که اصلاً قادر به‌جویدن‌آن نیستیم؛ درس «روش تدریس» ما را هم، می‌توان به‌سوپ بی‌رمقی تشبیه کرد که، حتی یك تکه گوشت هم، درآن پیدا نمی‌شود».

باید جرأت کنیم واین پرسش عادی‌را دربرابر خود قرار دهیم که: آیا درس روش تدریس، برای‌معلم‌آینده، لازم‌است؟ آیاتمامی این درس، بی‌فایده و بی‌معنی نیست؟ گمان می‌کنم، تبادل‌آزاد عقیده دراین زمینه، بیشتر از قرولندهای دائمی، می‌تواند مفید باشد.

تردیدی نیست که، دراین مورد، با موضوع‌های بغرنج‌زیادی سروکار داریم. آیا می‌توان «شیوهٔ معلمی» و «روش‌تدریس» را یاد داد؟ (همان‌طور

که بسیاری ازما معتقدیم، «معلمی» هنراست؛ وآیامی‌توان هنررا یاد داد؟). آیا اصولاً رشته‌ای، به‌عنوان روش آموزش ریاضی، وجود دارد؟ (آن‌چه معلم به‌شاگرد خود می‌دهد، به‌هیچ‌وجه، بهتر ازآن‌چه، به‌خودی خود، در او شکل می‌گیرد، نیست: «معلمی»، به‌خصلت‌ها و ویژگی‌های فردی معلم مربوط می‌شود و، به‌همان تعدادی‌که معلم خوب وجود دارد، روش تدریس خوب هم پیدا می‌شود). وقتی‌که برای تربیت معلمان صرف می‌شود، بین درس‌های ریاضی، درس‌های روش‌شناسی (روش تدریس) و تدریس عملی، تقسیم شده است. آیا می‌توان برای درس روش تدریس، وقت‌کمتری را اختصاص داد؟ (دربسیاری‌ازکشورهای اروپایی، نسبت به‌امریکا، توجه‌خیلی کمتری نسبت به‌این درس دارند.)

امیدوارم، جوانانی که شجاع‌تر وپر حرارت‌تر از من هستند، بتوانند برای بحث جدی وبدون پیش‌داوری، درمورد این مسأله، فرصتی پیدا کنند.

من تنها می‌توانم ازتجربهٔ شخصی خودم صحبت‌کنم؛ وپاسخ من، در این مورد، روشن است: به‌گمان من، درس‌های روش تدریس، لازم است. با این‌که، آن‌چه دراین‌جا شرح دادم، دور ازحقیقت نیست، با تجربهٔ خودم، توانسته‌ام متنی، یا بهتر بگویم متنی مقدماتی، برای «روش تدریس» آماده کنم‌که، به‌اعتقادمن، باید در درس روش‌شناسی برای‌معلمان ریاضی، گنجانده شود. آن‌چه من، برای‌تدریس به‌معلمان ریاضی درنظرگرفته‌ام، طوری‌تنظیم شده است‌که، تقریباً، شامل همهٔ‌آن چیزهایی است‌که می‌توان از درس‌های «روش تدریس» به‌دست‌آورد. درعنوان‌ها، معمولاً، به‌موضوع اصلی درس ریاضی اشاره‌شده است وزمانی‌که برای‌متن‌ریاضی وروش تدریس‌آن‌اختصاص یافته، به‌تقریب، چنین است: نه دهم وقت برای متن درس ویك‌دهم برای روش‌تدریس‌آن. دورهٔ این‌درس، تاحدامکان، به‌صورت گفت‌وگودرآمده‌است. طرح نکته‌های روش‌شناسی ــ چه ازجانب من وچه از جانب محصل، جنبهٔ تصادفی دارد. ولی، وقتی‌که خواسته‌ام حقیقت مهمی را نتیجه بگیرم و یا به‌حل مسأله‌ای بپردازم، تقریباً همیشه، بابحث دربارهٔ دیدگاه‌های روش‌ـ شناسی، به‌پایان برده‌ام. از شنونده می‌پرسم: «آیا می‌توانید از این مطلب،

در درس‌های کلاسی خود، استفاده کنید؟ کدام نکتهٔ برنامه، اجازهٔ چنین کاربردی را می‌دهد؟ بیش از همه، به‌چه‌چیزی، باید توجه‌خاص کرد؟ به‌چه ترتیبی، این مطلب را در کلاس شرح می‌دهید؟ از این گونه پرسش‌ها، در متن‌های امتحانی هم‌آورده‌ام. با وجود این، تمام تلاش خود را، درجهت انتخاب مسأله‌هایی گذاشته‌ام که بتوانند جنبه‌ای از روند یادگیری را روشن کنند.

۳°. «توصیه‌های رسمی»، درس «روش‌های تدریس» را «درسی برای مطالعهٔ طرح‌ها وبرنامه‌ها» می‌نامد و، بیش‌از آن، دراین‌باره صحبتی نمی‌کند. باوجود این، اندرزی درآن‌ها دیده می‌شود که، به‌نظر من، فوق‌العاده عالی است (اگر راستش را بخواهید، این اندرز را به‌سادگی نمی‌توان کشف کرد؛ برای‌این منظور، باید به‌صورتی جدی به‌جست‌وجو پرداخت و، بامطالعهٔ متوالی متن، جملهٔ آخر بخش «درسی، برای بررسی طرح‌هاو برنامه‌ها»را، باتوصیه‌هایی برای «مرحلهٔ IV[1]»مقایسه کرد). این اندرز، چنین است: معلمی که قصدداردد‌رس «روش‌های تدریس ریاضیات» را بخواند، باید خیلی‌خوب برخود ریاضیات تسلط داشته باشد. من می‌خواهم اضافه کنم که، ضمناً، باید نوعی تجربهٔ «علمی- پژوهشی» هم، ولو ساده، داشته باشد. کسی که این تجربه را نداشته باشد، چگونه‌می‌تواند درشنوندگان‌خود، روحیهٔ پژوهشی‌مستقل را به‌وجود آورد، چیزی که می‌توان‌آن‌را، یکی‌از مهم‌ترین جنبه‌های معلم‌آینده‌دانست.

به‌اندازهٔ کافی، شما را، با پرحرفی خاص پیرمردان، خسته کردم، ولی امیدوارم، فایده‌ای هم از آن برده باشید. پیشنهاد می‌کنم، دو نکتهٔ زیر، که حاصل تمامی گفت‌وگوهای من است، به «توصیه‌های رسمی» اضافه شود.

I. آمادگی معلم ریاضیات، باید با نوعی‌کار مستقل («خلاق») — متناسب باسطح وظیفه‌ای‌که دارند — همراه باشد. از راه تشکیل سمینارهایی دربارهٔ حل مسأله، و یا از راه‌های دیگر، می‌توان به‌این هدف رسید.

II. درس روش‌شناسی یا روش‌های تدریس، باید دقیقاً با درس

---

۱. «مرحلهٔ IV» در «توصیه‌های رسمی» (معلمان آنالیز ریاضی، جبر خطی، نظریهٔ‌احتمال ودیگر شاخه‌های اختصاصی‌ریاضیات) را می‌توان، برای‌معلمان رشته‌های تخصصی ریاضیات دانست.

ریاضیات یا تدریس عملی، بستگی داشته باشد؛ مطالعهٔ مستقیم این درس را — اگر چنین چیزی ممکن باشد — می‌توان تنها به معلمان مدرسه‌های عالی واگذاشت که هم تجربهٔ علمی — پژوهشی در زمینهٔ ریاضیات دارند و هم تجربهٔ تدریس عملی.

§۸. موقعیت معلم[1]

قبلاً هم این مطلب را گفته‌ام که من، در درس‌های خود به‌معلمان، بیشتر به‌درس «روش‌های تدریس» پرداخته‌ام. ضمن تدریس آن‌ها، همیشه توجه خود را روی موضوع‌هایی متمرکز کرده‌ام که بتوانند در کار روزانهٔ معلمان مفید باشد. به‌همین دلیل هرگز نتوانسته‌ام خود را از موضوع مربوط به «مسأله»، که معلم هرروز باآن سروکار دارد، و موضوع مربوط به «موقعیت معلم»، جدا کنم. یادداشت‌های من، به‌تدریج، شکل جمله‌های قصاررا به‌خود گرفت و، سر آخر، بیان کوتاه خود را، به‌صورت «ده دستورالعمل، برای معلمان» پیدا کرد.

ده دستورالعمل برای معلمان

۱. به موضوع درس خود، علاقه‌مند باشید.

۲. برمادهٔ درسی خود، مسلط باشید.

۳. بدانید، از چه راهی می‌توانید آن‌چه را درنظر دارید، یاد بدهید؟ بهترین روش یاد دادن را خودتان پیدا کنید.

۴. به‌چهرهٔ شاگردان خودنگاه کنید، تامتوجه انتظارهای آن‌هابشوید. دشواری‌های آن‌ها را کشف کنید؛ توانایی این را داشته باشید که بتوانید خودتان را به‌جای آنان بگذارید.

۵. به‌آگاهی‌های خشک و عریان قناعت نکنید. بکوشید مهارت را

---

۱. این تکه، در واقع، ارتباط باقسمت‌های قبلی ندارد. من دراین‌جا، خلاصه‌ای از مقالهٔ خودم را، به‌نام «توصیه‌هایی به‌معلمان»، که درسال ۱۹۵۹ چاپ‌شده است، آورده‌ام.

ـ که لازمهٔ عقل و اندیشه است ـ و عادت به کار منظم را، در دانش‌آموزان تقویت کنید و تکامل بخشید.

۶. بکوشید تا حدس زدن و پیش‌بینی کردن را، به‌آنان بیاموزید.

۷. سعی کنید، اثبات کردن را به دانش‌آموزان یاد بدهید.

۸. درمسأله‌ای که طرح شده است، چیزی را جست‌وجو کنید که، برای حل مسأله‌های دیگر، مفید است. از موقعیتی کـه مسألهٔ مشخص مفروض دارد، روش کلی را کشف کنید.

۹. راز خودرا، بلافاصله، فاش نکنید. اجازه بدهید دانش‌آموزان ـ تا آن‌جا که می‌توانند ـ تلاش خودرا برای حل یا حدس راه حل، به کار برند؛ به دانش‌آموزان امکان بدهید، هرچه بیشتر، خودشان کشف کنند.

۱۰. بـا اشاره‌های خود، دانش‌آموزان را راهنمایی کنید، ولی عقیدهٔ خودرا، به زور، به‌آن‌ها تحمیل نکنید.

اکنون می‌خواهم تفسیری کوتاه، براین «ده قانون»، بنویسم.

وقتی این قانون‌ها را تنظیم می‌کردم، بیشتر توجهم به‌شرکت کنندگان سمینارهایی بود که برای معلمان ریاضیات دبیرستانی تشکیل می‌دادم. ولی در واقع، از این توصیه‌ها می‌تـوان، برای هرنوع آمـوزش در هردرسی و با هر سطحی، استفاده کـرد. ولی، بـه‌خصوص در دبیرستان و به خصوص دربرابر دبیران ریاضی، امکان زیادی برای استفاده از برخی از این «قانون‌ها» وجود دارد؛ دراین مورد، به‌ویژه، باید از توصیه‌های ۶، ۷ و ۸ نام برد.

چه نمونهٔ معتبر و با نفوذی می‌تواند مؤید این ده توصیه باشد؟ همکار عـزیز معلم! هیچ لزومی ندارد که از نمونهٔ معتبر و بـا نفوذی پیروی کنید. فرض را براین بگیرید که تنها بـاید از تجربهٔ شخصی خود و از اعتباری کـه برپایهٔ این تجربه پیدا کرده‌اید، پیروی کنید. سعی کنید، معنای هر توصیه را، درموقعیت مشخصی که باآن سروکار دارید، بفهمید. توصیه را، در کلاس، به آزمایش بگذارید و عقیدهٔ خودتان را، تنها بعداز تجزیه و تحلیل بی‌غرضانـهٔ تجربهٔ خود، اعلام کنید.

حالا این ده «قانون» را پشت سرهم، وبا توجه خاص به‌معلم‌ریاضیات، مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۱°. تنها یك شیوهٔ واقعی وانکار ناپذیر، درآموزش، وجوددارد: اگر معلم به درس خود علاقه‌مند باشد، به کلاس هم علاقه‌مند می‌شود.

همین یادآوری بایدبرای روشن شدن نخستین ومهم‌ترین دستورالعمل، کافی باشد: به‌موضوع درس خود علاقه‌مند باشید.

۲°. اگر به‌موضوع درس، علاقه‌ای ندارید، معلمی را کنار بگذارید، زیرا هرگز نخواهید توانست، به‌خوبی، ازعهدهٔ آن برآیید. علاقه، شرطی بی‌تغییر وبدون جانشین است[1]؛ این شرط، کاملاً لازم است، ولی به تنهایی کافی نیست. صادقانه‌ترین علاقه‌مندی‌ها وپربارترین حیله‌های تدریسی، نمی‌توانند به شما کمك کنند تا چیزی راکه خودتان نمی‌دانید یا بد می‌دانید، به دیگران یاد بدهید.

همین اشاره، باید برای روشن‌شدن دستور دوم، کافی باشد: به‌موضوع مادهٔ درسی خود، مسلط باشید.

معلم باید، هم به مادهٔ درسی خــود علاقه‌مند باشد وهم‌آن را بداند. من، به‌این‌دلیل، علاقه‌را درمقام‌نخست جا داده‌ام که، درصورت وجودعلاقهٔ واقعی، امکان این را خواهید داشت که دانش‌لازم را به‌دست آورید، درحالی که، فقدان علاقه، حتی اگر دانش لازم هم، کم وبیش، وجـود داشته باشد، خیلی ساده، شما را به یك معلم بد تبدیل خواهدکرد.

۳°. چه‌بسا خواندن یك‌کتاب خوب و یا شنیدن یك سخن‌رانی خوب، دربارهٔ روند روان‌شناسانهٔ یادگیری، برای شما سودمند باشد، ولی نه‌مطالعهٔ کتاب ونه شنیدن سخن‌رانی، به‌طورمجرد وبه‌تنهایی، نمی‌تواند جنبهٔ‌تعیین‌کننده ولازم‌این روند را روشن‌کند. هیچ وسیلهٔ دیگری هم، برای این‌منظور، کافی نیست: شما باید بدانید ازچه راهی می‌توانید، آن چه را لازم است، یاد بدهید؛ شما باید روند یاد دادن را، با تجربه شخصی خودتان، بـه‌دست

---

[1] Sine qua non (لاتینی) ــ شرط تغییر ناپذیر.

آورید. این تجربه، از راه مطالعهٔ مستقل و از راه دقت و نظارت بر کار شاگردانتان، به‌دست می‌آید.

البته، این بداست که اصلی را بپذیرید، بدون این که محرک‌های درونی تشویق‌کننده‌ای برای آن داشته باشید، ولی بدتر از آن وقتی است که تنها در حرف به‌آن بها بدهید. با وجود این، موردی وجود دارد که، به هیچ‌وجه، نمی‌شود بـه موافقت سطحی یا بیرونـی بـاآن، رضایت داد. منظورم، اصل بنیادی معلمی، یعنی اصل آموزش فعال است[1]. باید به‌طور جدی به این نکته توجه داشته باشید که این اصل، درجریان آموزش، نقشی تعیین کننده دارد. بهترین روش آموزش کدام است؟ این را باید خودتان کشف کنید.

۴°. حتی اگر دانش لازم را داشته باشید، علاقه‌ای زنده از خود نشان دهید و، تا حدی، روند آموزش را هم درک کرده باشید، باز هم ممکن است معلم ضعیفی باقی بمانید. نمی‌خواهم این حالت را عام بدانم، ولی آن قدرها هم، نادر و استثنایی نیست. بعضی از ما دلمان می‌خواهد با معلم خود، به‌صورتی کاملاً مناسب و در همهٔ زمینه‌ها، تماس داشته باشیم، ولی تصمیم نمی‌گیریم برخورد با کلاس خود را، رو به راه کنیم. برای این که، یاددادن، که به‌صورتی انفرادی ـ به وسیلهٔ معلم ـ اداره می‌شود، نتیجهٔ خوبی برای آنان که باید یاد بگیرند ـ یعنی دانش‌آموزان ـ به بارآورد، باید تماس معینی بین دو طرف برقرار باشد: معلم بایـد بتوانـد خود را در موقعیت شاگرد قرار دهـد و، در لحظه‌های لازم، به یاری او بشتابد و زیر بازوی او را بگیرد. به‌ایـن خاطر است که دستورالعمل زیر داده شده است: به چهرهٔ شاگردان نگاه‌کنید. سعی کنید به انتظارهای آنان پی‌ببرید و دشواری‌های آنان را درك کنید. این توانایی را داشته باشید که خود را به جای دانش آموزان بگذارید.

واکنش دانش‌آموزان، دربرابر چیزی که به آنان می‌آموزید، به‌میزان آمادگی آن‌ها، کشش‌های آن‌ها و برنامه‌ای که برای آیندهٔ خود دارند، بستگی پیدا می‌کند؛ بنابراین، همیشه بـا خود بیندیشید و درشیوهٔ کار خود درنظـر

---

۱. ۱° از § ۴ و ۱° از § ۵ را هـم ببینید. همچنین توصیه می‌کنم دو «قانون» دیگری را هم، که قبلاً مورد بررسی قرار داده‌ایم، درنظر بگیرید.

بگیرید که: چه چیزهایی را می‌دانند وچه چیزهایی را نمی‌دانند؛ چه چیزهایی را می‌خواهند بدانند و چه چیزهایی آنان را به‌شوق نمی‌آورد؛ چه چیزهایی را باید بدانند و از چه چیزهایی‌می‌توان صرف نظرکرد.

۵°. چهار«قانون» فوق را، می‌توان اساس‌هنرمعلمی دانست. مجموعهٔ آن‌ها، روی هم، چیزی ازنوع شرطهای‌لازم وکافی را، برای تعلیم‌موفقیت‌آمیز، تشکیل می‌دهند. اگر بـه موضوع درس خود علاقه‌مند باشید وآن را به خوبی بدانید؛ اگرعلاوه برآن، بتوانید خود را به جای شاگرد قرار دهید ومتوجه شوید، چه چیزی اورا بـه شوق می‌آورد ودرکجا به دشواری بـر می‌خورد؛ در این صورت، یا معلم خوبی هستید ویا، به زودی، معلم خوبی خواهید شد. شما احتمالاً، هنوز به مقداری تجربه نیاز دارید.

به نتیجه‌هایی می‌پردازیم که ناشی از «قانون»های مذکـور هستند و، طبیعی است که، به طـور عمده از آن‌هایی نام می‌بریم که بـه موقعیت معلم ریاضیات دبیرستانی، مربوط می‌شود.

هردانشی از دوقسمت تشکیل می‌شود: بخش آگاهی‌ها («دانش خالص و نظری») و بخش «مهارت‌ها» («توانایی در بـه کارگرفتن دانش نظری»). مهارت، هنر است؛ مهارت، یعنی توانایی استفاده از آگاهی‌ها، برای رسیدن به مقصود؛ همچنین، مهارت را می‌توان به عنوان قدرتی‌که در اثر ممارست وتجربهٔ طولانی به دست می‌آید، تعریف‌کرد؛ به‌زبان‌کوتاه می‌توان گفت‌که: مهارت، یعنی توانایی درکار منظم.

مهارت در ریاضیات، یعنی توانایی حل مسأله، قدرت اثبات واستدلال و، همچنین، توانایی درتجزیه وتحلیل انتقادی جواب یا اثبات. مهارت، در ریاضیات، به‌مراتب مهم‌تر است از یك دانش خالص وازآگاهی‌های خشك و عریان. به‌همین مناسبت، دستورالعمل زیر، برای معلمان اهمیت زیادی‌دارد: به بعضی خصلت‌های منفرد اکتفا نکنید، سعی‌کنید دانش‌آموزان خود را بـه سمت «مهارت» بکشانید وبه «کار منظم» عادت دهید.

ازآن‌جاکه، در ریاضیات، مهارت مهم‌تر از دانش است، به‌اعتقاد من، در تدریس ریاضیات، این‌که «چگونه یادمی‌دهند» خیلی مهم‌تر ازآن است که

«چه چیزی را یاد می‌دهند».

۶°. اول حدس بزنید، بعد ثابت کنید؛ کشف، معمولاً به‌همین ترتیب انجام می‌شود. شما باید این را بدانید (بهتر از همه، از تجربهٔ خودتان) و، علاوه‌برآن، باید بدانیدکه معلم ریاضیات، امکان‌هایی عالی،برای نشان‌دادن نقش حدس زدن و کشف‌کردن، دراختیار دارد. بنابراین، به خوبی می‌تواند این خصلت عقل انسانی را، کـه ارزش فوق‌العاده‌ای برای هر کار پژوهشی دارد، تکامل دهد. چگونگی اخیر، به آن اندازه‌که لازم است، گسترش پیدا نکرده و، به همین دلیل، شایستهٔ توجـه خاص است. توصیه می‌کنم، دراین بـاره، مراقب شاگـردان خود باشید: سعی‌کنید، حدس زدن را بـه آن‌ها بیاموزید.

شاگردان ضعیف و «سهل اندیش»، ممکن است حدس‌ها وپیشنهادهای «وحشی» وعجیب وغریبی طرح کنند. چیزی که بایـد به‌این گونـه شاگردان بیامـوزیم، حدس زدن « عقلانـی»، «معنی‌دار» و « در جهت درست» است. حدس زدن عقلانی، برپایهٔ استفادهٔ بامعنی از قیاس وشباهت قراردارد و، در حساب آخر، شامل‌تمام مرحله‌های «داوری نزدیك به حقیقت» است، چیزی که، درهرکار علمی،نقش عمده‌ای به‌عهده دارد[1].

۷°. « ریاضیات، مکتب خوبی، برای داوری نزدیك به‌حقیقت‌است».

این‌حکم، نتیجه‌گیری‌هـای مربوط بـه « قانون » قبلی را، جمع‌بندی می‌کند؛ این حکم،که ممکن است بعضی را متعجب‌کند، کاملاً تازه است و حتی، می‌توانم ادعاکنم‌که، به مؤلف تعلق دارد.

« ریاضیات، مکتب‌خوبی، برای داوری‌های قیاسی (استدلالی)است».

این حکم، کسی را متحیر نمی‌کند و، چه‌بسا، نوعی ازآن، بـه‌اندازهٔ خود ریاضیات، سابقه داشته است. درواقع، مطلب خیلی گسترده‌تر از این‌ها است. مرزهای ریاضیات، تمامی پهنهٔ‌داوری‌های استدلالی را در برمی‌گیرد. این مرزها، هردانشی راکه‌توانسته باشد تاآن‌جا پیشرفت کندکه، مفهوم‌های مربوط به‌آن را بتوان به‌صورت مجردو به شکل «منطقی ـ ریاضی» بیان‌کرد،

---

۱. فصل پانزدهم را ببینید.

شامل می‌شود. در بیرون این مرزها، جایی برای داوری استدلالی واقعی وجود ندارد (مثلاً در زندگی روزانهٔ خود، به‌ندرت با داوری «استدلالی» دقیق، مواجه‌می‌شویم). روشن‌است (ولزومی‌ندارد، دربارهٔ این دیدگاه‌مورد قبول همه، به‌تفصیل صحبت‌کنیم) که معلم ریاضیات، باید همهٔ شاگردان‌خود را (احتمالاً، به جزشاگردان پایین‌ترین کلاس‌ها)، با داوری استدلالی آشنا کند: سعی‌کنید، اثبات‌کردن را به آن‌ها بیاموزید.

۸°. «مهارت»، بخش مهم‌تر فرهنگ ریاضی را تشکیل می‌دهد وخیلی مهم‌تروبا ارزش‌تر است ازآگاهی ساده‌نسبت‌به‌حقیقت‌ها وقضیه‌های مشخص. ولی این «مهارت» را چگونه باید یادداد؟ دانش‌آموزان، تنها از طریق تقلید و، به‌خصوص، تمرین وعمل، می‌توانند این توانایی را به دست‌آورند.

وقتی، حل مسأله‌ای را دنبال می‌کنید، جنبه‌های‌آموزندهٔ آن را جدا کنید. جنبهٔ مشخصی از راه حل را، وقتی می‌توان «آموزنده» دانست‌که‌قابل تقلید باشد، یعنی، علاوه برحل مسألهٔ مفروض، بتواند برای حل مسأله‌های دیگری هم به‌کاررود. وقتی‌که برویژگی‌های آموزندهٔ راه حل تکیه‌می‌کنید، به‌جای این‌که تنها به ستایش آن‌ها بپردازید (چیزی‌که می‌تواند اثرمعکوس داشته باشد)، با شیوهٔ رفتار خود، آن‌رابرجسته‌کنید (هرمعلم خوب، باید تا حدی، یك هنرپیشه باشد). اگر ویژگی مورد نظر، با هنرمندی نشان داده شود، می‌تواند راه حل شما را، به‌یك راه حل نمونه ویك روش آموزنده، تبدیل کند، به نحوی‌که دانش‌آموزان بتوانند، درحل مسأله‌های دیگر، آن را سرمشق خود خود قراردهند[1]. واین، همان چیزی‌است‌که دردستورالعمل آمده است: درمسأله‌ای‌که طرح شده است، چیزی را جست‌وجوکنیدکه‌برای حل مسأله‌های دیگر مفید باشد. از موقعیتی که مسألهٔ مشخص مفروض دارد، روش‌کلی را کشف‌کنید[2].

---

۱. اگر اندیشه‌ای یك بار به‌کار رود، شیوه‌ای هنری است، ولی اگر دویا سه بار به‌کار رود، روش نامیده می‌شود.

۲. اگر در این باره تفصیل بیشتری بخواهید، باید تمامی این کتاب را بخوانید.

۹°. می‌خواهم شما را با حیلهٔ کوچکی آشنا کنم که، هرمعلمی بایدازآن آگاه باشد. ضمن بحث دربارهٔ مسأله، از دانش آموزان بخواهید، راه حل مسأله یا جواب آن را حدس بزنند. دانش‌آموزی که حدسی به ذهنش می‌رسد وجرأت می‌کند آن را باصدای بلند اعلام کند، درواقع، مسئولیتی را برای ادامهٔ کار، به‌عهده می‌گیرد. ازاین نترسیدکه، ضمن بحث خود، از راه‌منحرف شود؛ اوراهی را دنبال می‌کندکه به ذهنش رسیده است و، چه‌بساکه، حق‌هم با او باشد[1].

این حیلهٔ کوچك را، می‌توان حالت خاصی از «قانون» زیر به‌حساب آورد که، ضمناً، قسمتی از قانون‌های ۳ و ۶ را هم شامل می‌شود: رازخود را، بلافاصله فاش نکنید. اجازه بدهید دانش‌آموزان،تا جایی‌که می‌توانند، تلاش خود را برای حل یا حدس راه حل به‌کار برند. به دانش‌آموزان امکان بدهید، هرچه بیشتر، خودشان کشف‌کنند.

در واقع، افتخار کشف این «قانون»، متعلق به ولتر است، که آن را به‌صورت جملهٔ کوتاهی بیان کرده است:

«*Le secret d'etre ennuyeux c'est de tout dire*»

«اگر می‌خواهید همه را کسل کنید، همه‌چیز را تا آخربگویید».

۱۰°. دانش‌آموزمحاسبهٔ طولانی‌خود را به‌من نشان می‌دهد. بانگاهی که به‌سطرآخرآن می‌اندازم، متوجه نادرست‌بودن محاسبه می‌شوم. باوجود این، عجله‌ای درمطلع کردن دانش‌آموز، از این امر نمی‌کنم. ترجیح می‌دهم تمامی محاسبه را «گام‌به‌گام» مرورکنم و سطربه‌سطر آن را بخوانم: «آغاز کار خوب است ، نخستین نتیجه‌گیری شما درست است. دنبالهٔ آن هم همین طور. خوب پیش رفته‌ای. سطر بعد هم اشتباهی ندارد. خوب، دربارهٔ این سطر چه فکر می‌کنی؟». سرچشمهٔ اشتباه دراین سطر است و، اگر دانش‌آموز خودش‌آن راکشف‌کند، این شانس را خواهد داشت‌که چیزی یادبگیرد. ولی اگر بلافاصله می‌گفتم: «این غلط است»، به احتمال زیاد، دانش‌آموز از من می‌رنجید و، درعمل، ازشنیدن سخنان من سر باز می‌زد. و اگربه خودم حق

1. با ۲° از §۵ مقایسه کنید.

بدهم، بیش از اندازه، تکرار کنم: «این غلط است»، دانش‌آموز از من متنفر می‌شود و، درنتیجه ، همهٔ تلاش‌های بعدی درمورد او، به‌هدر می‌رود.

همکار عزیز معلم! از بیان جملهٔ «اشتباه کرده‌اید»، پرهیز کنید. به‌جای آن بگوییم: «در کل، حق باشماست، ولی...». باور کنید که این، نه‌دورویی، بلکه انسانیت است. ممکن است «قانون»۴، شما را به‌این‌فکر انداخته‌باشد، ولی این توصیه را می‌توان وباید به‌طریقه‌های مختلف تکرار کرد: با اشاره‌های‌خود دانش‌آموزان را راهنمایی کنید، ولی‌عقیدهٔ خود را، با زور، به‌آن‌ها تحمیل نکنید.

دو «قانون» ۹ و ۱۰ ، یك هدف را دنبال می‌کنند. این‌ها روشن‌می‌کنند که، تاآن‌جا که شرایط موجود آموزش اجازه می‌دهد، باید به‌دانش‌آموز امکان‌آزادی و ابتکار داد. معلم ریاضیات، به‌دلیل کمی وقت ، غالباً وسوسه می‌شود که درجهت خلاف ایـن «قانون»، یعنی برخلاف اصل آموزش فعال حرکت کند. گاهی، برای رسیدن به‌جواب، چنان‌شتاب می‌کند که، دانش‌آموز فرصتی برای توجه و بـررسی مطلب پیدا نمی‌کند. ممکن است، به‌سرعت، مفهومی را مطرح ویا قاعده‌ای را تنظیم کند، بدون‌این‌که بحث‌کافی دربارهٔ آن شده باشد و، درنتیجه، بدون این‌که دانش‌آموز، ضرورت این مفهوم یا قاعده را احساس کرده باشد. گاهی ممکن است، به‌اصطلاح، مثل ماشین کار کند، یعنی از وسیله‌ای و امکانی استفاده کند (مثلاً، یك خط راست کمکی در شکل هندسی رسم کند) کـه مسأله را، بلافاصله، به‌نتیجه بـرساند، ولی این وسیله طوری باشد که دانش‌آموز، هرگز در زندگی خود، باآن مواجه‌نشده باشد. وآدمی‌چگونه می‌تواند، دربارهٔ چنین‌حیله‌ای که، همچون بلای‌آسمانی وبه‌طور ناگهانی، براو نازل شده است، بیندیشد؟

خیلی‌از وسوسه‌ها، ممکن‌است این اصل‌را خراب کند. به‌همین‌مناسبت، باید به‌جنبه‌های دیگری هم توجه داشته باشید:

به‌دانش‌آموزان امکان بدهید ، پرسش‌های خـود را مطرح کنند و یا خودتان پرسش‌هایی را مطرح‌کنید که زبان حال‌آن‌ها باشد.

این امکان را به‌وجودآورید که دانش‌آموزان، به‌پرسش‌ها پاسخ‌بدهندو

یا خودتان به‌آنها پاسخ بدهید، منتهی به صورتی کـه بتواند معرف پاسخ دانش‌آموزان شما باشد.

درهر حالتی، از طرح پرسش‌هایی که هرگز به ذهن کسی نمی‌رسد، واز آن‌جمله به‌ذهن خود شما، پرهیز کنید.

تمرین‌ها ویادداشت‌های تکمیلی

بخش اول

۱. طول جغرافیایی سان‌فرانسیسکورا $122°, 25', 41''$ بگیرید و به‌پرسش ت) از ۱° §۶ پاسخ بدهید.

۲. سال‌های کبیسه‌ای. سال معمولی، ۳۶۵ روز دارد وسال کبیسه‌ای ۳۶۶ روز. nامین سال، به‌شرطی که‌شمارهٔ‌آن بر ۱۰۰ بخش‌پذیر نباشد (پایین‌تر را ببینید)، تنها وقتی سال کبیسه است کـه بـر ۴ بخش‌پذیر باشد. nامین سال، به‌شرطی که n مضربی از ۱۰۰ باشد، وقتی (وتنها وقتی) سال کبیسه است که n مضربی از ۴۰۰ باشد. مثلاً، سال‌های ۱۹۶۸ و ۲۰۰۰، سال‌های کبیسه‌اند، درحالی که سال‌های ۱۹۶۹ و ۱۹۰۰، سال‌هـای کبیسه نیستند. این‌قاعده، درسدهٔ سیزدهم وبه‌وسیلهٔ پاپ گریگوری، برقرار شد.[1]

سال نجومی به‌فاصله‌ای از زمان گفته می‌شود که، درطـول آن، کرهٔ زمین، یك دور کامل به دور خورشید می‌چرخد. اگر فرض کنیم که «سال‌ـ گریگوری»، به‌طور کامل، با سال نجومی تطبیق می‌کند، فاصلهٔ زمانـی سال نجومی را پیدا کنید.

۳. با استفاده از ۸° §۶، با امکان‌های فضایی، حکمی را که از شکل ۴۵ـc نتیجه می‌شود، ثابت کنید.

۴. (ادامه). همین‌حکم را، با امکان‌های مسطحه‌ثابت کنید.

۵. در۹° از §۶، پرسش‌هایی را به یاد آوردیم کـه، قبلاً، برای بـررسی و

---

۱. این قانون، درسال ۱۵۸۲، مورد قبول عام قرار گرفت وبه‌تقویم گریگوری مشهور شد.

روشن کردن مسأله‌های ۳° تا ۸° از ۶§، آورده بودیم. آیا پرسش‌های دیگری، از این‌قبیل، نمی‌توانید طرح کنید؟

بخش دوم

۶. چرا به‌خصوص حل مسأله؟ من‌این اعتقاد را حفظ کرده‌ام که آموزش حل مسأله، باید بخش مهمی از بسیاری دوره‌ها را، حتی دوره‌هایی که از نظر مضمون به‌کلی باهم متفاوت‌اند، تشکیل دهد، واین‌که حل مسأله، بخشی جدا نشدنی و حقی مسلم برای هر دوره‌ای از ریاضیات دبیرستانی است. همان‌طور که قبلاً تأکید کرده‌ام (۵° پیش‌گفتار و ۲§ فصل‌حاضررا ببینید)، این اعتقاد، استخوان‌بندی این کتاب و کتاب‌های دیگری از من را، که موضوعی نزدیك به این کتاب دارند، تشکیل می‌دهند. اگر فصل‌های گذشته، نتوانسته باشند خواننده را، نسبت به درستی این دیدگاه، قانع کنند، گمان نمی‌کنم بتوانم کمك دیگری به‌او بکنم. با وجوداین، به‌خودم اجازه می‌دهم، نکته‌های دیگری را دراین‌جا، دربارهٔ نقش حل مسأله در دورهٔ آموزش دبیرستانی، یادآور شوم.

۱°. در این جا، دربارهٔ تدریس ریاضیات در دبیرستان و هدف‌های آن، صحبت‌می کنیم. روش واقع‌گرایانه‌ای که می‌تواند پاسخ‌گوی این‌موضوع باشد، باید برامکان استفادهٔ عملی دانش‌آموزان، ازآن‌چه یادگرفته‌اند، بنانهاده‌شود. البته، دانش‌آموزان با هم فرق دارند‌ــ‌بعضی ازآن‌ها، ازآن چه‌آموخته‌اند، بیشتر می‌توانند استفاده کنند و، بعضی دیگر، کمتر؛ تعداد شاگردانی هم‌که به‌هریك از این دو مقوله مربوط می‌شوند، می‌تواند درصدهای مختلفی از تعدادکل‌آن‌ها را تشکیل دهد. چقدر خوب بود، اگر آمار مطمئنی در این مورد دراختیار داشتیم، ولی فعلاً چنین‌آماری در دسترس ما نیست. ارزیابی کمیتی که، بعد از این، مورد استفاده قرار داده‌ام، تقریبی است و با هیچ گونه آمارگیری دقیقی، تأیید نشده است و تنها برای مشخص‌تر شدن بحث، وارد متن کرده‌ام[1].

---

۱. روشن است که مؤلف، در ارزیابی‌های خود، به‌واقعیت‌های جامعهٔ امریکایی، توجه داشته است.

۲°. فرض می‌کنیم، کسانی‌که ریاضیات را، در حجم دبیرستانی آن (جبر، هندسه وغیره)، یاد می‌گیرند، از نظر دورنمای استفاده از ریاضیات در حرفهٔ آیندهٔ خود، به سه گروه تقسیم شوند: ریاضی‌دانان آینده، کسانی‌که‌از ریاضیات‌استفاده می‌کنند، وکسانی‌که ازآن استفاده نمی‌کنند.

مرزهای گروه‌اول راآزادتر می گیریم: فیزیک‌دانان نظری، اخترشناسان وآن‌دسته از مهندسانی را هم‌که از ریاضیات درکارهای پژوهشی خود استفاده می‌کنند، جزو «ریاضی‌دانان» یا«ریاضی‌دانان متخصص» به‌حساب می‌آوریم. همهٔ این‌ها ۱٪ دانش‌آموزان را تشکیل می‌دهند. (تعدادکسانی که بتوانند درآینده، دررشتهٔ ریاضیات، به‌درجهٔ دانشمندی برسند، قریب ۱٪ دانش‌آموزان موجود است.)

مهندسان، دانشمندان غیرریاضی‌دان (و ازآن‌جمله، برخی از آن‌هایی که به‌علوم اجتماعی مشغول‌اند)، معلمان ریاضیات وبعضی از رشته‌های دیگر وغیره، به‌گروهی از افرادتعلق دارندکه درحرفهٔ خود، از ریاضیات استفاده می‌کنند، ولی درآن، متخصص نیستند. آن‌هایی را هم، که در فعالیت حرفه‌ای خود، از ریاضیات استفاده نمی‌کنند، ولی برای مطالعهٔ موفقیت‌آمیزبعضی رشته‌های‌دیگر، به‌بعضی‌آگاهی‌های ریاضی نیازدارند، جزو این گروه به حساب می‌آوریم. تعداد کل‌کسانی را که از ریاضیات استفاده می‌کنند، می‌توان حدود ۲۹٪تعدادکل دانش‌آموزان دانست.

بسیاری از بقیهٔ دانش‌آموزان، ممکن است از ریاضیات استفاده کنند، ولی در واقع، هرگز به‌ریاضیاتی‌بیشتر ازآن‌چه‌دردبستان خوانده‌اند، نیاز ندارند. می‌توان ۷۰٪ دانش‌آموزان‌را، وابسته‌به‌این گروه دانست‌که، در آینده، نیازی‌به‌ریاضیات ندارند (این عدد،اگرچه تقریبی است، ولی‌به‌کلی جعلی و دور از حقیقت نیست): تقریباً همهٔ قاضی‌ها و وکیلان، صاحبان کسب و کار، روحانیون وغیره را می‌توان‌متعلق به‌این گروه دانست.[1]

---

۱. ممکن است این‌آمار(که مربوط به‌شرایط امریکا در سال‌های ۵۰ سدهٔ بیستم است؛دراین‌سال‌ها،مؤلف‌کتاب خود راآماده وچاپ‌می‌کرد)امروزدیگر به‌هیچ وجه منطبق با واقعیت نباشد؛ در زمان ما، در تمامی جهان، ریاضیات چنان

۳°. ما از قبل نمی‌دانیم، درآینده، چه‌کسی چه حرفه‌ای خواهدداشت و، بنابراین، نمی‌توانیم از قبل، این یاآن دانش‌آموز را، به‌گروه معینی منتسب کنیم. از این‌جا، معلوم می‌شودکه آموزش ریاضیات، باید بر دو اصل استوار باشد:

اولاً، هر دانش‌آموزی‌باید، بدون‌توجه به‌حرفه‌ای‌که درآینده خواهد داشت، بتواند ازآن‌چه‌که یاد می‌گیرد، سود ببرد؛

ثانیاً، دانش‌آموزانی‌که استعداد معینی در ریاضیات دارند، به‌این‌دانش جلب شوند و نحوهٔ آموزش طوری نباشد که آن‌ها را از این‌دانش متنفر کند.

من مبنای کار را بر این می‌گیرم که خواننده، اگر نه به طور کامل، دست‌کم تا حدی، با این اصل‌هاموافقت دارد. من به‌این امر اعتقاد دارم که‌تنظیم‌برنامهٔ‌آموزشی،بدون‌توجه‌جدی ودایمی‌به‌این دواصل، بی نتیجه وغیر مسئولانه است.

اکنون اجازه بدهید، درباره فایده‌ای‌که هریك از سه‌گروه مذکور (۲° را ببینید) می‌توانند ازحل مسأله ببرند، مختصری توضیح بدهم.

۴°. البته، توانایی درحل‌مسأله‌های‌ریاضی، نیاز به‌آشنایی بامضمون غیرریاضی مسأله‌ها دارد، ولی، خیلی بیش ازآن نیاز به‌مهارت‌های‌ذهنی دارد وآن‌چیزی را طلب می‌کندکه، معمولاً، در زندگی روزانه به عقل سلیم معروف شده است. معلمی‌که می‌خواهد به‌همهٔ دانش‌آموزان خود ــ چه‌آن‌هاکه درآینده‌به‌ریاضیات‌نیاز دارند وچه‌آن‌هاکه ازریاضیات استفاده نخواهندکرد ــ سود برساند، باید جریان حل مسأله را طوری دنبال کند که یك سوم آن شامل ریاضیات و دو سوم بقیه شامل عقل سلیم باشد. البته، تلقین‌عقل سلیم وایجاد مهارت‌های ذهنی لازم، کار چندان‌ساده‌ای نیست، ولی اگر معلم ریاضیات دراین امر موفق شود، توانسته است خدمت واقعی خود را به‌همهٔ دانش‌آموزان، صرف‌نظر از حرفه وشیوهٔ

→ اعتباری پیداکرده است‌که کمتر رشته‌ای از معرفت انسانی را می‌توان پیدا کردکه به ریاضیات نیازی نداشته باشد.

زندگی‌آیندهٔ آن‌ها، انجام دهد. این خدمت، بیشتر ازآن‌جهت ارزش‌دارد که توانسته است برای‌آن ۷۰٪ دانش‌آموزانی هم‌که در زندگی آیندهٔ خود نیازی به‌ریاضیات کاربسته ندارند، مفید واقع شود.

۲۹٪ دانش‌آموزان، که از ریاضیات‌استفاده خواهندکرد، بایدمهارت‌های معینی (مثلاً، درانجام‌تبدیل‌های جبری)، که‌برای‌ادامهٔ تحصیل‌آن‌ها لازم است، به‌دست‌آورند؛ ولی به‌خصوص همین‌شاگردان، که ذهنی‌عملی دارند و واقعیت‌های عملی را تعقیب می‌کنند، اگر مطمئن نباشندکه به دنبال یك هدف عملی هستندکه ممکن است جایی به‌کار آن‌ها بیاید، تبدیل‌های صوری را، با بی‌میلی انجام می‌دهند. بهترین راهی‌که معلم، دراین‌مورد، می‌تواند انتخاب‌کند، این است‌که ضرورت روش‌های ریاضی را در دانش‌های طبیعی ودر مسأله‌های عملی، برای دانش‌آموزان روشن کند.

ریاضی‌دانان‌متخصص‌آینده، تنها ۱٪ ازمجموع دانش‌آموزان راتشکیل می‌دهند، ولی تربیت‌آن‌ها، اهمیتی درجه اول دارد، زیرا اگرآن‌ها به‌راه دیگری بروند وحرفه‌ای برخلاف استعداد خود انتخاب‌کنند، در واقع، جامعهٔ امروزی، از امکان‌هایی‌که در استعداد آن‌ها وجود دارد، محروم می‌شود. مهم‌ترین کاری‌که معلم دبیرستان، می‌تواند برای این ۱٪ انجام دهد، این‌است‌که علاقهٔ‌آن را نسبت به‌ریاضیات بیدار کند (گمان‌نمی‌کنم، این موضوع‌اهمیت زیادی داشته باشدکه‌آن‌چه در دبیرستان‌یاد می‌گیرند، کمی بیشتر باشد یا کمی‌کمتر، چراکه همهٔ‌این‌ها، به‌هرحال، جزء ناچیزی است از آن‌چه باید درآینده بیاموزد). به‌این‌ترتیب، حل مسأله، راهی گسترده در ریاضیات است، ولی تنها راه نیست وبا راه‌های مهم دیگری پیوند دارد (یادداشت تکمیلی ۷ را، پایین‌تر، ببینید). یادآوری می‌کنیم که معلم‌ناچار است، دربین مسأله‌هایی‌که انتخاب می‌کند، به‌آن‌هایی هم بپردازدکه، گرچه دشوارترند ووقت بیشتری‌را می‌گیرند، به‌خاطرظرافت ریاضی ومضمون عمیق خود، از بقیهٔ مسأله‌ها متمایز می‌شود. (فصل پانزدهم را ببینید).

۶. امید من این است که، همان‌طور که قبلاً هم گفته‌ام، استدلال‌های مربوط به فایدهٔ آموزش حل مسأله دردبیرستان را، بتوانید درهمهٔ بخش‌های این کتاب و بسیاری از دیگر نوشته‌های من، پیدا کنید. در زیر، به برخی پرسش‌های خاصی که در این زمینه وجود دارد، پرداخته‌ایم.

۷. حل مسأله و ساختن نظریه. معلم آزموده وعلاقه‌مند به کارخود، می‌تواند مسأله‌ای جدی، که ضمناً خیلی هم دشوار نباشد، انتخاب کند و، ضمن کمك به‌دانش‌آموزان، آن‌ها را از طریق این مسأله، به عنوان دروازهٔ ورودی، به‌یك نظریهٔ کلی برساند. اثبات گنگ بودن عدد $\sqrt{2}$ یا اثبات وجود مجموعه‌ای نامتناهی از عددهای اول، نمونه‌هایی از این گونه مسأله‌های جدی هستند. به‌یاری مسألهٔ اول، می‌توان خود را به بحث مربوط به‌مفهوم عدد حقیقی رسانید، و به‌یاری مسألهٔ دوم، نظریهٔ عددها را مورد بررسی قرارداد.

ازهمین راه، می‌توان به‌شباهتی که بین بحث مربوط به‌این گونه‌درس‌ها، با تاریخ واقعی دانش وجود دارد، اشاره کرد. حل یك مسألهٔ مهم وصرف نیرو برای رسیدن به‌ماهیت وواقعیت‌وجودی آن، می‌تواند راه‌را به‌سمت دانشی تازه باز کند ویا، حتی طلیعهٔ دوران تازه‌ای در دانش باشد. نباید گالیله را با مسألهٔ او دربارهٔ سقوط اجسام ویا کپلر را با مسألهٔ او دربارهٔ مدار مریخ فراموش کنیم.

مارتین واگن‌شین، درکتاب خود[1]، اندیشه‌ای را مطرح کرده است که، به‌اعتقاد من، برای طرح برنامهٔ کتاب‌های درسی، شایستهٔ توجه بسیار است: به‌جای این که معلم، باپرحرفی دربارهٔ تمامی برنامه، خود راغرق روشن کردن‌خرده‌ریزهای بیهوده کند، باید توجه‌خود را، روی چند مسألهٔ واقعاً مهم‌متمرکز کند و، بدون هیچ‌شتابی، به‌بحث دربارهٔ آن‌ها بپردازد. دانش‌آموزان باید، درحدی ودرسطحی که برای‌آن میسر است، دورنمای مسأله را، از سمت‌های مختلف، بررسی کنند، آن‌ها باید خودشان راه‌حل

---

1. *M. Wagenschein, Exemplarisches Lehren im Mathematikunterricht, Der Mathematikunterricht* 8 (1962)

وجواب را پیدا کنند و، درنتیجه، با راهنمایی معلم، برخی از نتیجه‌هایی را که می‌توان از این راه‌حل ویا جواب به‌دست‌آورد، پیش بینی کنند. به‌این ترتیب است که مسأله، نمونه‌ای و الگویی برای همهٔ شاخه‌های دانش می‌شود. این تنها طرح مقدماتی اندیشهٔ مربوط به آموزش از روی نمونه‌هااست وبه‌همین مناسبت‌است که هرمربی ومعلمی که با تنظیم‌طرح‌ها وبرنامه‌ها سروکار دارد، باید با کتاب «واگن‌شین» آشنا باشد (تمرین ۱۲ را هم ببینید).

دوباره یادآوری می‌کنیم، حتی‌یك مسأله، به‌شرطی که به‌عنوان‌نمونه والگو مورد بررسی‌قرار گیرد، می‌تواند راه را به‌سمت‌تمامی دانش‌بگشاید ویانمونه ومورد مثالی‌برای‌آن‌بشود. باتوجه به‌این‌موضوع وموضوع‌های شبیه‌آن است که جرأت می‌کنم‌برآن‌چه در§۲ گفته‌ام، تأکید کنم: «اندیشهٔ خلاق وثمربخش را می‌توان ، دست‌کم در تقریب اول، با حل مسأله، یکی دانست».

۸. حل مسأله و فرهنگ عمومی. بسیاری از مردم (و ازآن‌جمله، خود من)، معتقدندکه، یکی از مهم‌ترین هدف‌های‌آموزش دبیرستانی، وحتی‌احتمالاً مهم‌ترین‌آن‌ها،عبارت است ازبالابردن سطح‌فرهنگ عمومی‌دانش‌آموزان. حالا، به این موضوع می‌پردازیم و، البته، خود را درگیر تعریف مفهوم «فرهنگ‌عمومی»نمی‌کنیم، زیرا این‌خطر درکمین ماست‌که‌راه خود را گم کنیم و دربحث‌های بی‌سرانجام مربوط به‌خود این مفهوم، غرق شویم.

آموزش هنر حل‌مسأله در درس‌های ریاضی، امکانی فوق‌العاده، برای شکل گرفتن نوعی ذخیرهٔ ذهنی وعقلانی در دانش‌آموزان و، درنتیجه، بالابردن قوهٔ درك آن‌هاست که، به‌اعتقاد من، عنصراصلی فرهنگ‌عمومی را تشکیل می‌دهد. در زیر، فهرستی از بعضی جنبه‌ها را آورده‌ام؛ این فهرست کامل نیست و تنها جنبه‌های کلیدی و مهم‌تر را در بر می‌گیرد، جنبه‌هایی که، امیدوارم، برای‌سطح‌عادی دبیرستان‌های ما، قابل‌فهم‌باشد. بسیاری از عنصرهای این فهرست را دراین کتاب ویا کتاب‌ها ومقاله‌های نزدیك به‌موضوع این‌کتاب، روشن‌کرده‌ام (یادداشت‌های تکمیلی ۹ و ۱۱

را هم ببینید).

مجهول　　　　داده‌ها　　　　شرط

تعمیم　　　　حالت خاص

شباهت

استدلال دقیق

حدس نزدیك به‌حقیقت

زبان

شکل　　　　رابطه

برای آشنایی بیشتر به‌رابطهٔ فرهنگ عمومی با آموزش ریاضیات، می‌توانید به‌کتاب «ویتن برگ» هم مراجعه کنید[1].

۹. زبان‌شکل. کسانی‌هستند‌که، برای ملموس کردن‌اندیشهٔ‌خود، به‌تصورهای هندسی‌آن، نیازدارند؛ حتی بعضی‌ها، تلاش می‌کنند تا عبارت‌های‌معمولی زبان‌را، در ذهن خود، به‌صورت شکل‌های هندسی مجسم‌کنند. این‌گونه افراد، وقتی‌که‌روی مسأله‌ای فکرمی‌کنند، کاغذ وقلم‌را به‌دست‌می‌گیرند وآغاز به رسم خط‌های مختلفی می‌کنند؛ این‌ها، تنها با زبان شکل‌های هندسی‌است که‌می‌توانند با مسألهٔ موردنظر خود، دست و پنجه نرم‌کنند.

۱۰. اندیشه‌ها وحقیقت‌های مهمی وجود دارند‌که،مستقیماً، ارتباطی با هندسه ندارند، ولی می‌توان آن‌ها را، بهتر از هرچیز دیگر، به‌کمك شکل‌های هندسی، نمودارها ونگاره‌ها بیان‌کرد: مثلاً، نشانه‌های‌موسیقی از این‌گونه‌اند، که با گذاشتن نقطه‌های در سطح‌های مختلف (بالاتر یا پایین‌تر)، می‌توان ارتفاع صداها را بیان‌کرد ویا، نمادهای شیمیایی، که می‌توان، به‌یاری آن‌ها، ترکیب ساختمانی وشیمیایی ماده را، بانمادهای هندسی (نقطه‌ها و خط‌های رابط) بیان کرد. به‌طریق هندسی وبه‌کمك

---

1. *A. I. Wittenberg, Bildung und Mathematik, Stuttgart, 1963.*

رابطه‌هایی که بین تصویرهای هندسی وجود دارد، می‌توان عددها و یا رابطه‌های عددی‌را، به‌شیوه‌های گوناگون بیان کرد؛ هندسهٔ تحلیلی وسیله‌ای است سامان یافته که، شبیه یك واژه‌نامهٔ دو زبانی، زبان رابطه‌را به‌زبان شکل‌هندسی و برعکس، ترجمه می‌کند. اندیشهٔ هندسهٔ تحلیلی، اساس همهٔ نمودارها، نگاره‌ها، جدول‌ها (نوموگرام‌ها) وغیرآن را، که در اقتصاد، صنعت وعلوم خالص به‌کار می‌روند، تشکیل می‌دهد. نمایش‌های‌هندسی، در روش‌های خالص ریاضی‌هم به‌کار می‌رود ومی‌توانند برای روشن‌کردن بسیاری از موضوع‌های ریاضیات دبیرستانی، مورد استفاده قرار گیرد؛ در تمرین ۱۰، این مطلب را، به‌نحوی که در درس‌های عادی دبیرستانی با آن برخورد نمی‌کنیم، روشن‌کرده‌ایم.

۲°. نمودارها و نگاره‌هایی که در دانش‌های مختلف به‌کار می‌روند، اساساً، دقیق ویك ارزشی هستند، زیرا شکل مفروض، باید دقیقاً منعکس کنندهٔ رابطه‌های عددی موردنظر باشد. با وجود این، باید یادآوری کرد که، گاهی، ممکن است از چنان نمایش‌های هندسی استفاده شود که‌همراه با برخی‌ابهام‌ها باشند. مثلاً، به‌گمان من، شکل۴۲ دارای ارزش‌معرفتی معینی است، ولی باکنایه یا استعاره‌ای که برروی کاغذآمده است ویایك بیان‌شفاهی، فرق‌چندانی ندارد. شکل‌های ۴۳ و۴۴ هم‌از همین‌گونه‌اند. برعکس، شکل‌های ۴۷ـa تا ۴۷ـe (از ۵§ فصل پانزدهم)، مفهوم دقیق ریاضی‌دارند: آن‌ها، معرف مجموعهٔ همهٔ مثلث‌ها و بعضی از زیرمجموعه‌های این مجموعه هستند. جالب‌تر از آن، این است که، این شکل‌ها، چیز بیشتری‌را هم‌نشان می‌دهند ـ روندی که، دراین مرحله، نمی‌توانستیم به‌روشنی پیش خود مجسم‌کنیم: روند تفکر قیاسی.

دو طرح یا شکلی که، از لحاظ ظاهری، به‌هم شباهت دارند، می‌توان به‌وسیلهٔ یکی، مفهوم دقیقی را شرح‌داد، وبه‌وسیلهٔ دیگری، مفهومی استعاری و مبهم را بیان کرد؛ بین اشاره‌های شاعرانه و دقت ریاضی، مرحله‌های بسیاری وجود داردکه می‌توان، هر یك ازآن‌ها را، درطرحی

شبیه «طرح کشتی‌رانی» روشن کرد[1].

۳°. هندسه، به‌عنوان علم مربوط به‌فضا، چشم‌اندازهای زیادی‌دارد. می‌توان آن‌را، به‌عنوان یك دانش‌خالص قیاسی درنظر گرفت که برپایهٔ دستگاهی از اصل موضوع‌ها بنا نهاده شده است. درعین‌حال، هندسه، یعنی توانایی مشاهده واین، یك حرفه است. بالاخره، هندسه را می‌توان بخشی از فیزیك دانست (آن‌طور که گاهی فیزیك‌دان‌ها گمان می‌کنند؛ ولی البته، ریاضی‌دانان به‌این‌موضوع اعتراض‌دارند). هندسه، اگرجزئی از فیزیك به‌حساب‌آید، درعین‌حال، میدانی است‌که می‌توان، در آن‌جا، به‌کشف‌های قیاسی وشهودی نایل شد و، سپس، آن‌ها را با استدلال استحکام بخشید. به‌آن‌چه تا این‌جا برشمردیم، نکتهٔ دیگری را هم باید اضافه‌کنیم: هندسه، سرچشمهٔ نمادها و نشانه‌هایی است‌که دربرخی‌نوع‌های زبان، به‌صورتی عادی یا دقیق، به‌کار می‌رود و، در هرحال، مفید و آموزنده است.

به‌این‌ترتیب، این «درس اخلاقی» دربرابر معلم قرار می‌گیرد: اگر می‌خواهید به‌دانش‌آموزان خود، واقعاً چیزی یاد بدهید، نه این‌که، به‌صورتی ساده وپرشتاب، از نکته‌های متفرق موجود دربرنامه بگذرید، نباید به‌هیچ‌کدام از این جنبه‌ها وچشم‌اندازها بی‌اعتنا باشید. به‌خصوص، از تأکید پیش از موقع ویا پافشاری بیش‌از اندازه برجنبهٔ اصل موضوعی هندسه، پرهیزکنید، تا دانشمندان ومهندسان‌آینده (وهمچنین، هنرپیشگان و فیلسوفان‌آینده) را نسبت به‌هندسه متنفر نکنید، کسانی‌که ممکن‌است، بیشتر مفتون‌شکل‌های هندسی، یا تجسم‌اجسام فضایی، یاکشف‌های‌قیاسی ویا، بالاخره، طرح‌ها ونمودارها باشند وهمین‌ها هم، موجب وانگیزه‌ای برای تفکر وتأمل آن‌ها شده باشد.

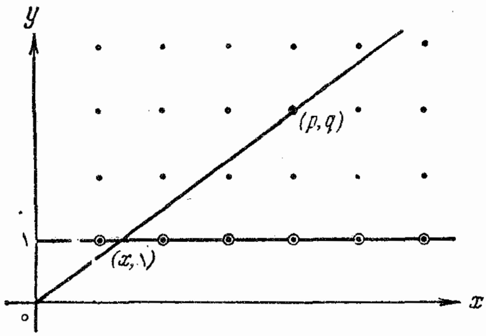
۱۰. عددهای گویا وگنگ. آن‌چه دراین‌جامی‌خواهیم، دربارهٔ‌آن، صحبت

---

۱. منظور، طرح کاملاً تقریبی رودخانه است‌که راهنمای ناخدای کشتی‌های رودخانه‌ای است ــ این نقشه‌ها، مقیاسی ندارند وفاصله‌ها را نشان نمی‌دهند و تنها، بعضی از راه‌های آبی ومنطقه‌های کناره‌ای را مشخص می‌کنند.

کنیم، تنها طرح مقدماتی و اجمالی موضوعی است که باید با دقت و تفصیل تمام، در کلاس مورد بحث قرار گیرد؛ زیرا این، یکی از حساس‌ترین و ظریف‌ترین مسأله‌هایی است که در دورهٔ ریاضیات دبیرستانی وجود دارد. به‌منظور ساد‌گی کار، از بعضی اصطلاح‌ها و نمادهای هندسهٔ تحلیلی استفاده می‌کنم، اگر چه فرض را براین می‌گیرم که خواننده به‌طور کامل با آن آشنا نباشد؛ تنها کافی است توانایی مختصری در رسم نمودار داشته باشید.

x و y را، طبق معمول، مختصات دستگاه قائم دکارتی می‌گیریم. خط راست به معادلهٔ $y=۱$ را، خط راست عددی می‌نامیم (که نقش «خط کش اندازه گیری ایده‌آل» را به‌عهده دارد). به‌شکل ۴۶ توجه کنید؛ در این شکل، گره‌های شبکهٔ عددهای درست، یعنی نقطه‌های با مختصات صحیح، نشان داده شده است. روی آن، به‌خصوص، گره‌هایی از شبکه که برخط راست عددی قرار دارند، متمایز شده‌اند.



شکل ۴۶. خط راست عددی و گره‌های شبکه

روی شکل ۴۶، عدد x، معرف نقطهٔ $(x \text{ ، } ۱)$ از خط راست عددی است. خط راستی رسم می‌کنیم که از نقطهٔ $(x \text{ ، } ۱)$ و مبداء مختصات $(۰ \text{ ، } ۰)$ بگذرد. برای این که عدد x گویا باشد، لازم و کافی است که این خط راست از یک گره $(p \text{ ، } q)$ شبکه عبور کند. (البته، متفاوت با مبداء مختصات)؛ در واقع، در این صورت، از تشابه مثلث‌ها نتیجه

می‌شود:

$$\frac{x}{۱}=\frac{p}{q}$$

معلم باید این پرسش را دربرابر دانش‌آموزان قرار دهد:

نقطهٔ (۰,۰) متعلق به شبکه است؛ آیا هر خطی که از این نقطه می‌گذرد، حتماً از گره دیگری از شبکهٔ عددهای درست هم خواهد گذشت؟ و دست‌کم برای مدتی (نسبتاً کافی) باید خود را از وسوسهٔ پاسخ‌گویی به‌این پرسش دور نگه دارد.

روشن‌است که، دراین‌جا، تنها دوحالت می‌توان درنظر گرفت: خط راستی که از مبداء مختصات می‌گذرد، یا از نقطهٔ دیگری از شبکه (غیر از مبداء مختصات) می‌گذرد ویا ازچنین نقطه‌ای عبور نمی‌کند. کدامیك از این دوحالت محتمل‌تر است؟

معلم باید این امکان را به دانش آموزان خود بدهد تا، برمبنای شکل ۴۶، همهٔ دشواری‌های مهمی را که، به خاطر این پرسش، در برابر خود می‌بینند، حل‌کنند (ممکن‌است، برای این‌منظور، ساعت‌ها، هفته‌ها وحتی ماه‌ها وقت لازم باشد!) وتنها بعد ازآن است که به‌بحث دربارهٔ گنگ بودن عدد $\sqrt{۲}$ وتقریب عددهای گنگ به‌وسیلهٔ عددهای گویا بپردازد (به‌قول فلیکس‌کلاین، باید ازشکل۴۶، به‌عنوان تکیه‌گاهی برای مطالعهٔ کسرهای مسلسل، استفاده‌کرد).

۱۱. جدی‌بودن بحث. آیا لازم است در دبیرستان، استدلال‌های ریاضی را یاد بدهیم؟ به گمان من، درپاسخ‌دادن به‌این‌پرسش، هیچ تردیدی نباید کرد. بله، لازم است، مگر این‌که شرایط نامساعدی مانع ادامهٔ روش معمول مابشود. استدلال جدی ودقیق، نشانه‌ای است‌که ریاضیات را متمایز می‌کند؛ این، واقعی‌ترین بخش ریاضیات، به‌عنوان یك دانش، درفرهنگ‌عمومی‌است. دانش‌آموزی که استدلال ریاضی، تأثیرمطلوبی براو نگذاشته باشد، در واقع، از مهم‌ترین جنبهٔ تفکر روشنفکری محروم مانده است.

استدلال‌های ریاضی را، تاچه‌انـدازه باید جدی و دقیق انجام‌داد؟ و چگونه؟ پـاسخ به‌این پـرسش، چندان ساده نیست و دشواری‌های فراوانی به‌همراه دارد. نادیده‌گرفتن‌این دشواری‌ها، از سنجیدگی‌پاسخ ما می‌کاهد؛ تنها دنبال‌کردن سنت‌ها ـ چه درست و چـه غلط ـ راهی نیست که بتواند برنامه‌ریزان‌کتاب‌های درسی دبیرستانی را، به‌طرحی عاقلانه وسنجیده برساند.

استدلال داریم تااستدلال؛ استدلال را باشیوه‌های مختلفی می‌توان انجام‌داد. قبل‌ازهمه، بایدبه‌این‌نکته توجه‌کرد: یك‌شیوهٔ استدلال، برای سن‌مفروض‌یا سطح‌پیشرفت مفروض، مناسب‌است، درحالی‌که‌شیوه‌های دیگر ممکن است زودرس ویا ابتدایی باشند.

۱°. این یکی از دیدگاه‌های مربوط به‌روند استدلال ریاضی است، که، با روشنی کامل، به‌وسیلهٔ دکارت شرح‌داده شده است.

من، از «قانون‌های راه بردن عقل» او، سومین را نقل مـی‌کنم: «درموضوع‌هایی که مورد مطالعهٔ ماست، نباید درجست‌وجوی چیزی باشیم که دیگران فکر می‌کنند یا خود ما دربارهٔ آن تصور مـی‌کنیم، بلکه باید چیزی را جست‌وجوکنیم که می‌تـوانیم آن را آشکارا و به روشنی ببینیم‌یا از راه استدلال قیاسی‌ثابت کنیم، زیرا دانش، به‌صورت دیگری، به دست نمی‌آید». دکارت، ضمن روشن‌کردن این قانون، دو «مسیر شناخت» را پشت‌سرهـم مورد مطالعه قـرار مـی‌دهد: معرفت شهودی واستدلال قیاسی. بحث دربارهٔ استدلال قیاسی را، چنین آغاز می‌کند: «روشنی و درستی معرفت شهودی، نه تنها درمورد حکم‌های جداگانه، بلکه در هرنوع بحثی، باید برقرار باشد . مثلاً در مجموع ۲ و ۲ همان چیزی است که درمجموع ۳ و ۱؛ باید با معرفت‌شهودی نه‌تنهااین‌رادرك‌کردکه ۲ و ۲ تشکیل۴ را می‌دهند و، همچنین ۳و۱، به۴ منجر می‌شوند، بلکه این را هم فهمیدکه از دو موضوع نخست، الزاماً سومی نتیجه می‌شود».

استدلال‌قیاسی‌ریاضی، ازنظر دکارت، رشته‌ای از نتیجه‌گیری‌هاست،

همچون دنبالهٔ به هم پیوسته‌ای از گام‌های متوالی. برای درستی استدلال قیاسی، تنها درك شهودی این مطلب لازم است که نتیجه‌گیری پایان هریك از این گام‌ها، به‌روشنی وضرورتاً، نتیجه‌ای از آگاهی‌هایی باشدکه قبلاً کسب کرده‌ایم (مستقیماً از راه معرفت شهودی یا، غیر مستقیم، وبراساس گام‌های قبلی استدلال قیاسی).

[درفصل هفتم دیدیم که طرح انشعابی، بیشتر شبیه ساختار اثبات است تا زنجیر ساده‌ای که از حلقه‌های متوالی تشکیل شده باشد؛ با وجود این، دکارت تنها از زنجیرصحبت می‌کند. اگر دکارت، باتصور اثبات به‌کمك دیاگرام ـ که ما آن‌را درفصل هفتم مطالعه‌کردیم، آشنا بود، آن‌وقت، طلب می‌کردکه باید هرعنصر این‌دیاگرام ـ وازآن‌جمله، هرعنصر شکل ۳۶ ـ برروشنی شهودی متکی باشد.]

۲°. ولی، ریاضیات، چشم‌اندازهای زیادی دارد. مثلاً، می‌توان ریاضیات را، همچون «بازی» با نمادها درنظر گرفت، که طبق قانونی ذهنی عمل می‌کند و، با تمام توجه لازم، کوشش می‌شود تا این‌قانون به‌هم نخورد. [این چشم‌انداز، به‌زمان ما مربوط می‌شود؛ پنجاه سال پیش، اغلب ریاضی‌دانان و اغلب فیلسوفان، این دیدگاه را، نوعی انقلاب به حساب می‌آوردند. پیدایش این دیدگاه را باید تحت‌تأثیر کارهای داوید هیلبرت بزرگ دانست که برای برخی از بررسی‌های او ـ به‌خصوص آن‌ها که به‌بنیان‌های ریاضیات مربوط می‌شد ـ بسیار مفید بود.]

دراین «بازی» بانمادها، برای این نمادها ویا نشانه‌ها، هیچ مفهوم عملی ومشخصی درنظرگرفته نمی‌شود (اگر هم، چنین مفهومی وجود داشته باشد، ما توجهی به‌آن نمی‌کنیم) دراین «بازی»، «استدلال» وجود دارد و، ضمناً، دراین استدلال، «بازی» عبارت است از شرح «درستی ساختمان» دستور یا رابطهٔ جدید (یعنی، ترکیبی از نمادها که پاسخ‌گوی قانون است). گام وقتی درست برداشته شده است که‌بتوان دستورجدید را، باتوجه‌به‌بعضی‌دستورهای اولیه («اصل موضوع‌ها»)،

دستورهایی که در گام‌های قبلی به‌دست‌آمده‌اند و تعریف‌هایی که درهمان ابتدا تثبیت شده‌اند، بااستفاده از قانون‌های نتیجه‌گیری، به طور کامل و با دقت شرح‌داد. چه اثبات و چه حکم مورد اثبات، باید، تا حد امکان، «کوتاه» باشند، یعنی هم گام‌ها کوتاه وهم عنصرهای تشکیل‌دهندهٔ آن‌ها، به‌قدر ممکن، کوچک باشند.

۳°. بین دو دیدگاه مرزی و افراطی اثبات ـ که در۱° و ۲° مورد بررسی قرار دادیم ـ دیدگاه‌های دیگری هم وجود دارد. حقیقت این است که، درك اثبات ریاضی، ضمن عبور از هر دوران علمی به‌دوران بعد، دچار دگرگونی شده است. تاریخ این دگرگونی و نیروهای محرك‌آن، برای ما معلمان، بسیار جالب است: با پی‌بردن به‌این مطلب که چگونه انسان توانسته است به‌این یاآن‌نوع درك برسد، بهتر ومسلطتر می‌توان‌فرزندان امروزی بشریت‌را درك‌کرد و به‌تربیت آن‌ها پرداخت (با یادداشت تکمیلی ۱۳ مقایسه کنید).

دانشمندی که به‌کارعلمی- پژوهشی مشغول‌است، نسبت‌به‌دیدگاه‌هایی که برای‌بررسی ریاضیات وجود دارد، حساسیتی ندارد؛ اوترجیح می‌دهد، شیوه‌ای را برگزیند که بیشتر از دیگر شیوه‌ها، به‌کار خاص او می‌خورد. ولی، درسطح‌دبیرستان، انتخاب ما نمی‌تواند آزادباشد؛ اگر بحث برسر انتخاب بین ۱° و ۲° باشد (یعنی، انتخاب بین دو دیدگاهی از استدلال که به‌این یا آن چشم‌انداز مربوط می‌شود)، به احتمال زیاد، کسی دچار تردید نمی‌شود. گمان می‌کنم که هرکسی، و از آن‌جمله ریاضی‌دان حرفه‌ای، درك شهودی موضوع را برساختمان صوری ـ منطقی‌ترجیح‌می‌دهد. ژاك‌آدامار[1]، ریاضی‌دان برجستهٔ‌زمان ما، این مطلب را چنین بیان می‌کند: «هدف دقت ریاضی این است که

---

۱. ژاك آدامار (۱۸۶۵ـ۱۹۶۳)، یکی ازبزرگ‌ترین ریاضی‌دانان فرانسوی پایان سدهٔ نوزدهم و نیمهٔ اول سدهٔ بیستم ومؤلف نوشته‌های پرارزش وعمیقی در زمینهٔ نظریهٔ عددها وآنالیز ریاضی و، همچنین، تألیف بسیار عمیق و جالبی در هندسهٔ دبیرستانی.

به موفقیت‌های معرفت شهودی صورت قانونی بدهد و آن‌را تصویب کند ـ ریاضیات، هرگز هیچ هدف دیگری نداشته است»[۱]. اگر از ریاضی‌دانان حرفه‌ای بگذریم، احتمالاً حتی یک نفر هم باقی نمی‌ماند که قادر باشد، به‌طور شاید و باید، برای استدلال‌های صوری، ارزش بالاتری قایل باشد. برعکس استدلال صوری، معرفت شهودی از مسیری طبیعی به‌ما می‌رسد، از طرف دیگر، معرفت شهودی خیلی سریع‌تر و تقریباً بدون تأثیرهای بیرونی (و یا تأثیر فوق‌العاده ناچیز آن‌ها) به‌ما می‌رسد، درحالی که، استدلال صوری را، قبل از آن که با منطق و قانون‌های بحث آشنا شده باشیم، حتی نمی‌توانیم بفهمیم.

به‌همین مناسبت است که، به گمان من، در آموزش دبیرستانی باید تکیهٔ بیشتری بر معرفت شهودی داشته باشیم تا بر استدلال قیاسی و قبل از آن که به‌استدلال قیاسی بپردازیم، از معرفت شهودی دانش‌آموزان یاری بطلبیم. ضمن انجام استدلال‌ها و اثبات‌ها هم، باید خیلی بیشتر به‌اندیشهٔ دکارت (۱° را ببینید) نزدیک باشیم تا اندیشهٔ منطق‌دانان امروزی (۲° را ببینید).

به‌جوانان زیادی برخورده‌ام که نسبت به‌دانش و صنعت احساس علاقه می‌کنند و حتی، به‌نظر می‌رسد که، دارای استعداد هم هستند، ولی به‌طور قاطع و بی‌تردید، از یاد گرفتن ریاضیات سرباز می‌زنند، و من گمان می‌کنم که توانسته باشم علت‌های این موضوع را روشن کنم.

۴°. اجازه بدهید مثالی بیاورم. این حکم را در نظر می‌گیرم: از سه نقطهٔ مفروضی که بریک خط راست واقع باشند، تنها یکی بین دوتای دیگر قرار دارد.

یادآوری می‌کنیم که این حکم، دربارهٔ خاصیتی صحبت می‌کند که، به خصوص، معرف و مشخص کنندهٔ خط راست است: اگر سه نقطه متعلق به‌محیط دایره‌ای باشند، هیچ کدام از آن‌ها، نقشی غیر از دوتای

---

۱. از کتاب امیل بورل، به‌نام «درس‌هایی از نظریهٔ تابع‌ها» چاپ ۱۹۲۸ پاریس.

دیگرندارد؛ برای هیچ‌کدام‌ازآن‌ها نمی‌توان واژهٔ «بین» را به‌کاربرد، به‌نحوی‌که درمورد دو نقطهٔ دیگر بی‌معنا باشد.

آیا لازم است این‌حکم‌مربوط به سه‌نقطهٔ واقع بریك خط راست‌را ثابت کنیم؟ ممکن‌است در دانشگاه ودر درسی‌که به بررسی‌بنیان‌های هندسه‌مربوط‌است، اثبات این‌حکم ـ باتکیه بردستگاه اصل‌موضوعی ـ اهمیت زیادی داشته باشد، ولی طرح چنین اثباتی برای دانش آموز کلاس‌دهم، که به‌مطالعهٔ هندسه‌ای سازمان یافته مشغول است، کاری بیهوده است.

این اعتقاد من است‌که، البته، ممکن است کسانی باآن موافق نباشند. برای این‌که عقیدهٔ خود را دراین‌باره پیدا کنید، باید واکنش کلاس را دربرابر چنین اثباتی آزمایش کنید. من هم، از همین راه، به‌اعتقاد خود رسیده‌ام. اکثریت شاگردان، خیلی‌ساده، کسل می‌شوند ـ آن‌ها، ازهمان‌ابتدا، هیچ‌گونه «چون وچرائی» درمطلب نمی‌بینند. اقلیت بااستعدادتر، که به‌آن‌اندازه بی‌تفاوت نیستند، به‌طورشهودی، حس می‌کنندکه این اثبات ارزشی ندارد و، به‌همین مناسبت، آن را دنبال نمی‌کنند (البته، این احساس ممکن است دانسته نباشد) . تنها ممکن است یك یا دو شاگرد پیدا شود (که احتمالاً ، با استعدادترین شاگردان باشند) که آشکارا به پا خیزند و اعلام کنند که قبلاً هم از این حقیقت آگاه بوده‌اند و، این اثبات ، چیزی به آگاهی آن‌ها نیفزوده است. هروقت‌که در سال‌های دبیرستانی ، چنین اثباتی‌به‌من پیشنهاد می‌شد، دقیقاً همین واکنش‌را نشان می‌دادم. من این ادعا را ندارم‌که می‌توانم مسیر فکر یك‌جوان نوباوه را دقیقاً بفهمم (چراکه، کمی‌پیش، ازمرز ۶۰سال‌گذشته‌ام)، روی این مطلب هم پافشاری نمی‌کنم‌که، همه‌جا، حق با این‌جوان نوباوه است، اما به‌سادگی می‌توانم واکنش خودم را، نسبت به چنین اثباتی، مجسم کنم. این‌گونه اثبات‌ها ، مرا به‌این نتیجه می‌رسانیدکه یا معلم احمق است و یا ریاضیات، دانشی احمقانه است ویا هردوی‌آن‌ها. با این

موقعیت ذهنی که پیدا می‌کردم، یا به‌توضیح‌های معلم گوش نمی‌دادم ویا، اگراین کار برایم ممکن نبود، باعدم رضایت، بی‌میلی وناباوری، آن‌ها را می‌شنیدم.

مطلب هرچه باشد، اعتقاد من این است که واکنش دشمنانه نسبت به این گونه اثبات‌ها، امری طبیعی وقانون‌مند است[۱].

۱، می‌توان نمونه‌های به‌کلی مخالفی را هم پیداکرد، اگرچه ممکن است بسیار نادر باشد. دراین‌جا، دربارهٔ یکی ازآن‌ها برای شما صحبت می‌کنم. درسال ۱۹۴۵، درهشتمین المپیاد ریاضی که برای دانش‌آموزان کلاس‌های هفتم و هشتم درمسکو تشکیل شده بود، این‌مسأله هم به‌شرکت‌کنندگان داده‌شده بود: **رأس‌های A، B و C ازمثلث ABC را به‌نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 واقع برضلع‌های مقابل به‌این رأس‌ها (و البته غیر از یك رأس دیگر) وصل کرده‌ایم، ثابت کنید، وسط پاره خط‌های AA_1، BB_1 و CC_1 روی یك خط راست قرار ندارند.** تنظیم کنندگان کار المپیاد، این پاسخ را در نظر داشتند: وسط پاره‌خط‌های AA_1،BB_1وCC_1، سه‌خط‌داخلی‌مثلث را تشکیل‌می‌دهند، ومثلث‌جدید abc را می‌سازند، ولی «روشن است» که خط راست نمی‌تواند هر سه ضلع مثلث (و نه امتداد آنها را) قطع‌کند. ولی ر. دوبروشین، دانش‌آموز کلاس هشتم(که البته، امروز ریاضی‌دان مشهوری است)، این «استدلال»را نپذیرفته بود؛ او در ورقهٔ خود چنین نوشته بود: «من مدت‌هاست می‌کوشم ثابت کنم که یك خط راست نمی‌تواند هرسه ضلع مثلث را در نقطه‌های داخلی‌آن قطع کند، ولی دراین‌کار موفق نشده‌ام، زیرا، با کمال تأسف، نمی‌دانم خط راست یعنی چه؟» [در هندسه، خط راست با اصل موضوع‌هایی شرح‌داده می‌شود که شامل آن ویژگی‌های خط راست است که ثابت‌نمی‌شوند؛ دربین‌این‌اصل موضوع‌ها، یکی هم معادل با این حکم است که خط راست نمی‌تواند همهٔ‌ضلع‌های مثلث را قطع‌کند (اصل‌موضوع پاش)؛ روشن است که دوبروشین شاگردکلاس‌هشتم، از فهرست این ویژگی‌های «مقدماتی» خط راست، که به طور غیرمستقیم، همان‌تعریف «خط‌راست» را تشکیل‌می‌دهند، اطلاعی‌نداشت‌ونمی‌دانست برای اثبات حکم موردنظر خود، به‌چه‌چیزی باید تکیه‌کند.] با وجوداین، موردهایی از این‌قبیل‌که دربارهٔ آن‌صحبت‌کردم (و درآن، دانش‌آموزی ازکلاس

←

۵°. گونه‌های بسیاری از استدلال وجود دارد . به‌نظر من، نقش استدلال، درتشکیل وپیشرفت دانش، پیچیده‌تر ازآن است‌که در ابتدا به‌نظر مـی‌رسد؛ دراین مورد، مطالبی وجـود دارد کـه بیشتر جنبهٔ فلسفی‌پیدا می‌کنند. باوجوداین، مابه‌جنبهٔ دیگری‌ازکارتوجه‌می‌کنیم: به‌افراد تازه‌کار، چه نوع استدلالی‌را باید یاد داد؟ وقتی‌که مطلب‌را، به‌این‌ترتیب، طرح‌کنیم، ساده‌تر می‌توان‌آن‌رادنبال‌کرد و، ضمناً، من عقیدهٔ مشخصی دراین مورد دارم که، با اجازهٔ خوانندگان، آن‌را در میان می‌گذارم.

قبل از همه، باید دانش‌آموزان قانع شوند کـه استدلال و اثبات، به‌آن‌چه‌آن‌هامی‌آموزند، خدمت‌می‌کند و،علاوه‌برآن‌درجاهای‌دیگری هم، برای آن‌ها لازم ومفید است. مثلاً، در رسیدگی‌هـای قضایی و در دادگاه‌ها، وجود استدلال ضرورت‌دارد. متهمی مظنون به‌تقصیری است، ولی این هنوز ظن است، نه‌اطمینان. این‌که متهم، در واقـع، گناه‌کار است یا نه، چیزی‌است‌که باید ثابت‌شود. هدف استدلال‌های قضایی این است‌که تردید را برطرف کند و، باید گفت‌که، روشن‌ترین و طبیعی‌ترین هدف استدلال ریاضی هم، همین است. نسبت به درستی یك حکم ریـاضی ــ کـه به‌روشنی تنظیم شده است، تـردید داریـد: نمی‌دانید، این حکم، درست است یا غلط. دراین‌حالت، در برابر شما دو راه وجود دارد: برای‌این‌که تردید را برطرف‌کنید، باید یا درستی حکم را ثابت‌کنید ویا آن‌را ردکنید.

هشتم، به این خاطرکه نتوانسته است مسأله راحل‌کند، جایزهٔ اول را گرفته است)، آن‌قدر نادر واستثنایی است‌که‌نمی‌توان، براساس‌آن، توصیه‌ای‌برای کار معلمی به‌دست‌آورد. دانش‌آموزانی‌که چنین قابلیت‌هایی از خـود نشان می‌دهند و به‌روشنی می‌توان آیندهٔ درخشان‌آن‌ها را در دانش پیش‌بینی‌کرد، باید مورد توجه‌خاص وانفرادی قرارگیرند.(ای.م. یاگلوم ــ ویراستارترجمهٔ روسی)

اکنون می‌توانم این مطلب را روشن کنم که معتقدم، اثبات حکم مربوط به سه نقطهٔ واقع بریك خط راست، نمی‌توانـد جایی در دورهٔ دبیرستانی داشته باشد. وقتی کـه این حکم را، دربرابر جوانی، کـه سال‌های دبیرستانی را می‌گذراند، قراردهیم، هیچ‌گونه تردیدی‌دربارهٔ درستی آن ندارد. در این‌جا، مسألهٔ برطرف‌کردن تردید، دربرابر این دانش‌آموز قرارنگرفته است و، بنابراین، اثبات‌آن، بی‌فایده، بی‌هدف و بی‌معنی به نظرمی‌رسد. موقعیت وقتی دشوارتر می‌شودکه اثبات از اصل موضوعی آغازشودکه شامل بررسی چند حالت است وسیزده‌سطر ازکتاب درسی را به خود اختصاص داده است. این‌گونه اثبات‌ها، در دانش‌آموز این تأثیر را می‌گذاردکـه گمان‌کند،کار ریاضیات این است که چیزهای‌کاملاً واضح را، از راه‌هایی دشوار وناروشن ثابت‌کند.

۶°. البته، اثبات‌حکم مربوط به سه نقطهٔ واقـع بریك خط راست، همان طور که قبلاً هم یادآوری کرده‌ام، درجای خود وبه‌موقع خود، لازم است. ولی، وقتی‌که آن را برای دانش آموزان دبیرستانی مطرح کنیم، گناهی بزرگ وغیر قابـل‌گذشت مرتکب شده‌ایم و، درواقـع، سطح طرح مطالب را به هم ریخته‌ایم ومطابی لازم را درموقعیتی‌غیر لازم طرح‌کرده‌ایم (یادداشت تکمیلی ۱۶ را هم ببینید).

درسطح کار پژوهشی ـ علمی، می‌توان مطالبی را طرح‌کردکه، به صورت معرفت شهودی، واضح به‌نظرمی‌آیند؛ در آن‌جا، طـرح چنین مطالبی ممکن است دلیل‌های قانع کننده‌ای داشته باشد و، بنابراین، بهترین‌کاری که ریاضی دان می‌تواند انجام دهد، اقدام بـه اثبات آن است. برای‌آشنایی با چنین موقعیت‌هایی، درسطح دبیرستان، می‌توان از تمرین ۱۲ وهمچنین‌بعضی ازتمرین‌های فصل پانزدهم استفاده کرد.

۷°. قبل ازآن‌که این‌بحث را خاتمه بدهم، باید شما را از یك‌گناه بخشش‌ناپذیر، برحذرکنم: سوء استفاده از «استدلال‌های» مبتذل‌وپیش‌پا افتاده. پرکردن‌کتاب‌های درسی از استدلال‌ها واثبات‌های غیرلازم؛ آن هم درمواردی‌که نتیجهٔ پایانی ازهمان آغاز روشن است، واستناد

به مطالب پیش پا افتاده و کاملاً واضح، می‌تواند تأثیر نامطلوبی بر شاگردان با استعدادبگذارد وآن‌ها را ازنیروی ذهنی معرفت شهودی خود ـ که درصنعت و دانش (ومنجمله، ریاضیات) نقش عظیمی دارد، محروم کند.

این اشتباه بزرگ، دراثر توجه نکردن به سطح کار تحصیلی، پیش می‌آید. تنها ریاضی‌دان‌حرفه‌ای ـ ونه‌دانش‌آموزدبیرستانی ـ است که می‌تواند ازرشته‌استدلال‌های صوری متوالی لذت‌ببردواز آن‌ها، برای هدف‌های پژوهشی خود استفاده کند. ریاضی‌دان ناچار است به چنین دقت‌ها وبازبینی‌هایی بپردازد، اگرچه، بخش جالب ودل‌چسب کار او را تشکیل نمی‌دهد. منطق، به‌خانمی می‌ماندکه جلو درخروجی‌مغازهٔ بدون فروشنده‌ای ایستاده است وارزش هریك از چیزهایی راکه داخل سبد بزرگی ریخته شده است، تعیین می‌کند.

۱۲. آیا نقشهٔ جغرافیایی می‌تواند کامل باشد؟ نقشهٔ جغرافیایی عبارت است از نمایش بخشی از سطح زمین روی صفحهٔ کاغذ.

۱°. برای این‌که بهتر بتوانیم ازعهدهٔ پاسخ به‌این پرسش برآییم، ابتدا آن را تعمیم می‌دهیم وحالت عمومی جدید مسأله را، با تفصیل بیشتری مورد مطالعه قرار می‌دهیم. (این عبور از حالت خاص به حالت کلی وازسطح شهودی مطالعهٔ‌آن، به سطحی انتزاعی‌تر، اهمیت زیادی دارد؛ در این‌جا ، عمداً مطلب را یکباره وبدون مقدمه چینی آورده‌ایم، ولی درکلاس باید به تدریج وبا احتیاط به‌آن پرداخت.)

نگاشت (یاتصویر) سطح S را، روی سطح دیگر S'، درنظر می‌گیریم. ضمناً، فرض می‌کنیم که این نگاشت، درتناظر یك به‌یك باشد، یعنی هـر نقطهٔ P از سطح S متناظر با تنها یك نقطهٔ P' از سطح S' ـ تصویر نقطهٔ P ـ وبرعکس، هرنقطهٔ P' ازصفحهٔ S' متناظر باتنهایك نقطهٔ P از صفحه S ـ تصویر معکوس P' ـ باشد. بـه جز این، فرض می‌کنیم، نگاشت‌ما «پیوسته» باشد، یعنی نقطه‌هایی که‌منحنی «هموار» را روی یك سطح تشکیل می‌دهند، متناظر با مجموعهٔ نقطه‌هایی باشند

که، روی سطح‌دیگرهم، منحنی «همواری» را به وجود آورده‌اند. L_1 و L_2 را دوخط (راست یا منحنی) واقع برسطح S می‌گیریم که تحت زاویهٔ α، یکدیگر را در نقطهٔ P قطع کرده باشند و L'_1 و L'_2 را، خطهای متناظرآن‌ها روی سطح S' فرض می‌کنیم. دوخط L'_1 و L'_2 در نقطه P'ـ تصویر Pـ وتحت زاویه‌ای مثل α' یکدیگر را قطع می‌کنند. α' را تصویرزاویهٔ α، و α را تصویر معکوس زاویهٔ α' می‌نامیم.

[وقتی که با یك نقشهٔ جغرافیایی سروکار داریم، S عبارت است از بخشی ازسطح زمین و S'، بخش متناظر آن درصفحه. خطهای «مهم» سطح زمین، عبارتند از کنارهٔ دریاها و اقیانوس‌ها، رودخانه‌ها، مرز کشورها، جاده‌های شوسه و راه آهن ـ هریك از این خطها، متناظربا خط معینی از نقشه است.]

۲°. اکنون می‌توانیم تعریف دقیق را بدهیم. نگاشت را کامل می‌نامیم، وقتی که با دوشرط زیر سازگار باشد:

I) طول همهٔ خطهابه‌یك‌نسبت (که مقیاس نقشه نامیده می‌شود)، کوچك شده باشند؛

II) همهٔ زاویه‌ها، ضمن تصویر، ثابت بمانند.

همین شرطها را، مفصل‌تر تنظیم می‌کنیم.

I) هرنگاشتی (یا هرتصویری) ، متناظر با مقیاسی معین، یعنی نسبت دوعدد ثابت است (مثلاً ، ۱:۱۰۰۰۰۰۰). ضمناً، به خودی خود، معلوم است که: اگرخط L' برسطح S'، تصویر خط L ازسطح S باشد، نسبت طول خط L' برطول خط L، مقدار ثابتی است (در مثال ما: ۱:۱۰۰۰۰۰۰) که به‌اندازهٔ خط وجای‌آن، در روی سطح، بستگی ندارد.

II) هر زاویهٔ α' از S'، برابراست با زاویهٔ متناظر آن α از S.

۳°. حالا که به تعریف روشن‌تری دست یافته‌ایم، اجزاء مشخص آن را مورد بررسی قرار می‌دهیم.

۳a°. فرض کنید، روی یك نقشهٔ جغرافیایی خوب، مقیاس ۱:۱۰۰۰۰۰۰ مشخص‌شده باشد؛ ولی روشن‌است که خود این نسبت، به‌معنای آن است که مقیاسی تقریبی است. آیا مقیاس، می‌تواند برای تمامی سطح نقشهٔ جغرافیایی، دقیق و به‌یك معنا باشد؟ و اگر جواب مثبت باشد، آیا دراین‌ضمن، زاویه‌ها ثابت‌می‌مانند؟ برای این پرسش‌ها، باید درجست‌وجوی پاسخ بود.

۳b°. اگر بتوان سطح S را، بامقیاس ثابتی برسطح S' تصویر کرد، درآن‌صورت روشن‌است که، باید بتوان سطحی را، که از نظر هندسی متشابه با سطح S است، با مقیاس ۱:۱ برسطح S' تصویر کرد، یعنی به‌نحوی که کوچکتر یا بزرگتر نشود. به‌عنوان مثال، فرض می‌کنیم، کره‌ای که روی‌آن زندگی می‌کنیم، کره‌ای کامل و دقیق باشد. اگر قسمتی از سطح زمین را، به‌طور کامل و با مقیاس ۱:۱۰۰۰۰۰۰، برصفحهٔ کاغذ تصویر کنیم، آن‌وقت، بخش متناظر از کره‌ای که قطرآن برابر یك‌ملیونیم قطر کرهٔ زمین‌باشد، باید برهمین‌صفحهٔ کاغذتصویری داشته باشدکه، خطهای متناظرآن‌ها ــ تصویر و تصویر معکوس ــ طولی برابر وزاویه‌های متناظر آن‌ها، مقداری برابر داشته باشند.

۳c°. می‌توانیم‌صفحهٔ‌کاغذ را بپیچانیم وبه‌صورت‌سطح‌مخروطی یا استوانه‌ای‌درآوریم و، برعکس، می‌توانیم‌سطح استوانه‌ای‌یامخروطی را بگسترانیم و به‌صورت صفحه درآوریم. چنین تبدیلی، تصویر (یا نگاشت) «کامل» سطح خمیدهٔ استوانه‌ای یا مخروطی‌را روی صفحه به‌دست می‌دهد (فرض می‌کنیم‌که روی صفحهٔ کاغذ، خطهای مرزی و رودخانه‌ها رسم شده باشند)؛ روشن است که طول‌ها و زاویه‌ها، دراین ضمن، ثابت می‌مانند.

ولی‌آیا می‌توان‌سطح کره‌را هم، به‌همین‌ترتیب، باحفظ همهٔ‌طول‌ها وزاویه‌ها، برصفحه گسترد؟ حدس می‌زنیم‌که، این‌عمل، ممکن‌نیست؛ احتمالاً حدس ما براساس تجربه‌ای باشدکه، مثلاً، ضمن پوست‌کندن سیب یا سیب‌زمینی به‌دست‌آورده‌ایم.

۴°. اکنون‌دیگرمی‌توانیم‌روشن‌کنیم که‌هستهٔ اصلی‌مسألهٔ‌ماچیست.

آیا می‌توان بخش S ازکره را بربخش S' از صفحه تصویر کرد (با فرض این‌که نقطه‌های این دو سطح، درتناظر یك به‌یك باشند)، به نحوی‌که همهٔ طول‌ها وهمهٔ زاویه‌ها ثابت بمانند؟

برخلاف انتظارخود، فرض می‌کنیم، چنین نگاشتی ممکن باشد؛ نتیجه‌هایی‌که از این‌فرض حاصل می‌شود، در۵° و۶° توضیح داده‌ایم.

۵°. طول‌ها ثابت می‌مانند. p و q را دو نقطهٔ متفاوت از S (بخشی از کره یا تمام‌آن) وL راطولی واقع بر S، که p را به q وصل کرده است، می‌گیریم؛ سپس، p'، q' وL' را، به‌ترتیب، تصویرهای p، q و L بر بخش S' صفحه (یا به‌طور ساده برصفحه) فرض می‌کنیم. بنابر فرض، طول‌های L و L' باهم برابرند. اگر L کوتاه‌ترین‌خطی ازکره باشد[۱] که دونقطهٔpوq را به‌هم وصل کرده‌اند، یعنی‌ازهرخط‌دیگری که‌این دونقطه را به‌هم وصل‌کرده است، کوچکتر باشد، درآن‌صورت، چون نگاشت ما طول را حفظ می‌کند، بنابراین طول L' هم باید از هر خط دیگری که دو نقطهٔ p' و q' را به‌هم وصل می‌کند، کوچکتر باشد، یعنی کوتاه‌ترین خطی باشدکه این دو نقطه را درصفحه به‌هم می‌پیوندند (خواننده، حتماً با چنین خطی‌آشنا است). می‌دانیم‌که این‌کوتاه‌ترین خط، بر صفحه عبارت است از خط راست وبرکره عبارت است از کمانی از دایرهٔ عظیمه. نتیجهٔ این استدلال چنین‌است: کمان‌های دایره‌های‌عظیمه از کرهٔ S، ضمن‌تصویر، به‌پاره‌خط‌هایی از‌صفحهٔ S' تبدیل می‌شوند. درحالت‌خاص، ضلع‌های مثلث‌کروی، که کمان‌هایی از دایره‌های عظیمه هستند، درتصویر، به‌ضلع‌های‌یك مثلث معمولی، یعنی‌پاره‌خط‌های‌راست، تبدیل‌می‌شوند.

۶°. زاویه‌ها ثابت می‌مانند. به‌این‌ترتیب، باید هر زاویه ازمثلث کروی مذکور، با زاویهٔ متناظر خود درمثلث معمولی، برابر باشد.

---

۱. چنین خط‌هایی از سطح S را، ریاضی‌دانان، خط ژئودزیك می‌نامند (مثلاً، می‌توانید به‌کتاب «هندسه، درگذشته وحال»، مقالهٔ «کشف راز دیگری از هندسه» مراجعه کنید).

ولی این ممکن نیست. زیرا مجموع زاویه‌های مثلث معمولـی برابر است با ۱۸۰ درجه، درحالی‌که (خواننده باید این را بداند) مجموع زاویه‌های مثلث‌کروی از ۱۸۰ درجه بیشتر است[۱]. بنابراین، نگاشت کامل کره برصفحه، ممکن نیست.

۷°. مسأله‌ای را که هم‌اکنون حل‌کردیم، می‌توان ادامه‌داد، هم درجهت کاربردعملی (نقشه‌برداری) وهم‌درجهت یك‌نظریهٔ‌جدی (بخشی ازهندسهٔ دیفرانسیلی‌که بحث مرکزی آن «*theorema egregium*» گـوس[۲] است. ومنجر به‌نظریهٔ نسبیت عمومی می‌شود). درایـن‌جا، چند نکته، که چندان بالاتـر از سطح برنامهٔ دبیرستانی نیست، ولـی به‌آن‌چه گفته‌ایم کاملاً مربوط می‌شود، می‌آوریم. آن‌ها را به‌خاطر بسپارید.

a۷°. مثلث مسطحه (معمولی، اقلیدسی) و مثلث‌کروی چنانندکه هریك ازضلع‌های یکی ازآن‌ها، باضلع متناظر خود در دیگری، برابر است. ثابت‌کنیدکه، بااین شرط (وآن‌چه در۵° و۶° دیدیم)، هر زاویهٔ مثلث کروی ، بزرگتر از زاویهٔ متناظر خود در مثلث مسطحه است، (به‌یاد بیاوریدکه یادداشت مربوط به زیادی مجموع زاویه‌های مثلث اول، نسبت به‌زاویه‌های مثلث دوم، نقشی تعیین‌کننده در۶° داشت.)

b۷°. شرطهایی‌که در ۲° تنظیم‌کـردیم ، مستقل نیستند. دومی، نتیجه‌ای از اولی است، یعنی اگر شرط I) برقـرار باشد ، شرط II) هم باید برقرار شود.

---

۱. مثلاً به‌کتاب‌های«هندسه‌درگذشته وحال»،مقالهٔ «هندسهٔ‌کیهانی» و«لباچوسکی وهندسهٔ نااقلیدسی»، می‌توانید مراجعه‌کنید.

۲. نام‌گـذاری *theorema egregium* (لاتینی به‌معنای «قضیهٔ مشهور») را کارل فردریك‌گوس به‌این حکم‌دادکه، به‌اصطلاح «انحناء سطح» ضمن‌هرگونه خمیدگی‌آن ثابت می‌ماند. این قضیه، درتکامل‌خود، منجر به‌اصطلاح «هندسهٔ درونی سطح» شد، که‌حالت‌خاصی ازآن، مبنای «نظریهٔ‌نسبیت‌عمومی اینشتین قرارگرفت.

c°۷. شرط I) را نمی‌توان از شرطII) نتیجه گرفت. نگاشت‌های بسیاری از کره روی صفحه وجود دارد که همهٔ زاویه‌ها حفظ می‌شوند[۱]، درحالی‌که نسبت طول‌منحنی واقع برکره، برطول تصویر آن روی صفحه، مقدار ثابتی باقی نمی‌ماند. (وبا توجه به‌قضیه‌ای‌که در ۵° و۶° ثابت‌کردیم، نمی‌تواند چنین باشد.)

d°۷. نگاشت‌هایی‌از کره برصفحه وجود داردکه، ضمن‌آن‌ها، تمام مساحت‌ها حفظ می‌شوند[۲] (ولی‌زاویه‌هاثابت‌نمی‌مانند).

e°۷. نگاشت‌هایی از کره برصفحه وجود دارند که، ضمن آن‌ها، کوتاه‌ترین خطها، حفظ می‌شوند، یعنی نگاشت‌هایی‌که، ضمن آن‌ها، کمان‌های دایره‌های عظیمه، به‌خط‌های‌راست‌تبدیل می‌شوند[۳](درحالی که، زاویه‌ها ثابت نمی‌مانند).

۸°. دربحث‌های قبلی، به‌مسألهٔ مربوط به‌نقش پیوستگی، توجهی نکردیم؛ دراین مورد هم می‌توان‌آگاهی‌های دقیقی ارائه‌داد، ولی گمان می‌کنم‌که نشود این توضیح‌ها را درحد سطح برنامهٔ دبیرستانی پایین‌آورد.

۱۳. چه چیزهایی را باید بیاموزیم؟ مملکت، به‌شما به‌عنوان معلم، اعتماد کرده است و باور دارد که به‌کلاس خود چیز یاد می‌دهید. بنابراین، مسألهٔ شما این است: چیزی بیاموزیدکه هم برای جامعه و هم برای خود دانش‌آموز مفید باشد.

---

۱. نگاشت یك‌سطح برسطح دیگر را، وقتی‌که دارای این‌خاصیت‌باشد، نگاشت همدیس (کنفرم=حافظ زاویه‌ها) گویند. ϕ'، تصویر حومهٔ‌کوچك ϕ نقطهٔ p از سطح S، با نگاشت همدیس برS'، با ϕ «تقریباً متشابه» است، یعنی‌دارای همان شکل ϕ است.

۲. این نگاشت را، نگاشت هم‌ارزی گویند.

۳. یعنی خطهای ژئودزیك کره به خطهای ژئودزیك صفحه تبدیل می‌شوند. (این‌گونه نگاشت‌های یك سطح برسطح دیگر را، **نگاشت‌های ژئودزیك** گویند.)

ممکن است، برای این توصیه، ارزش زیـادی قایل نباشید، ولی، در واقع، خیلی مهم‌تـر و عمیق‌تر از آن است کـه تصور می کنید. بنابراین، همیشه مسألهٔ خود را به‌خاطر داشته باشید و هرگز، نه در برنامه‌های کوتاه‌مدت ونه دربرنامهٔ درازمدت خود (یعنی نه‌درطرحی که‌برای ساعت تدریس نزدیك خود دارید ونه درطرحی که برای تمام دوران تدریس‌تهیه می کنید)، آن‌را ازنظر دور ندارید. دربرابرخود، دانش‌آموز خوب وبا استعدادی را تصورکنیدکه، هنوز به‌شیوه‌هـای بدمدرسه‌ای عادت نکرده است واز شما نگرانی ووحشتی ندارد؛چنین نوجوانی، درهـر لحظه ممکن است ازشما بپرسد: «آقای معلـم، این مطلب، کجا به‌درد می‌خورد؟» اگر همیشه این بچهٔ نجیب را به‌یـاد داشته باشید وبرنامهٔ آموزش خود را طوری‌بریزیدکه، درهر زمانی، بتوانید پاسخ او را بدهید، ویا بهتر ازآن، چنان علاقه ورضایت اورا جلب کنیدکه نیازی به‌این پرسش نبینند،آن‌وقت،می‌توان شما را معلم خوبی دانست.

به گمان من، در زندگی و کار معلم، وسوسه‌هـای فراوانی وجود دارد، ممکن است وسوسه شویم چیزهایی‌را طرح کنیم که ساده‌ترباشند وراحت‌تر بتوان‌آن‌ها را فهمید. ولی‌آیا بایدتنها چیزهایی رابیاموزیم که فهم آن‌ها ساده است؟ آیاآن‌چه راکه به‌سادگی می‌توان یاد داد، همیشه مفید است؟

یك مربی با استعداد وآزموده، می‌تواند راه نگه‌داشتن توپ روی بینی را به‌خوك دریایی بیاموزد. ولی آیـا، آن‌وقت، خـوك دریایی می‌تواند ماهی‌ها را هم به‌راحتی صید کند؟

۱۴. اصل ژنتیك[۱]. تنظیم‌برنامهٔ آموزش، چیزی بیشتر ازآن است‌که‌حقایق و نظریه‌هایی برای یاددادن انتخاب شود. این مطلب هم مهم است که، این‌حقیقت‌ها ونظریه‌ها، به‌چه ردیفی وبا چه‌روشی یاد داده‌شود.

---

۱. نمی‌توان این مطلب را یادآوری نکردکه، در این‌مورد، چه اختلافی جدی بین نظر مؤلف با هواداران مکتب بورباکی وجود دارد.

اصل ژنتیك دراین مورد، خیلی‌چیزها به‌ما می‌دهد.

۱°. اصل‌ژنتیك را، درآموزش، به‌گونه‌های مختلفی‌می‌توان‌تعبیر کرد. مثلاً، ضمن طرح شاخه‌ای از دانش (یا نظریه، یا عقیده)، باید به‌بچه امکان بدهیم تا بتواند مهم‌ترین مرحله‌های تکامل ذهنی انسان را، دنبال‌کند. البته، نباید به‌او اجازه‌داد تا هزاران اشتباهی را که بشر درگذشته مرتکب شده است، دوباره آزمایش‌کند؛ در این مورد، تنها به‌مهم‌ترین مرحله‌ها نظر داریم.

این اصل، قاعده‌ای بی‌تغییر و غیرقابل بحث را معین نمی‌کند، برعکس‌امکان‌های‌بسیاری، برای انتخاب‌آزاد، دراختیار ما می‌گذارد. این‌که‌کدام مرحله‌ها را باید مهم‌تر دانست و ازچه اشتباه‌هایی باید صرف‌نظرکرد، امری قابل‌تفسیر است. اصل ژنتیك، راهنمای‌فکراست و نه عاملی‌برای تغییرآن.

به‌خصوص، برای‌این‌که برموقعیت‌اخیر تکیه‌کنیم، شاید بهترباشد که اصل ژنتیك را بااحتیاط بیشتر (وباآزادی بیشتر) تنظیم‌کنیم. اگر بدانیم‌که نوع‌انسانی، به‌طورکلی، چگونه می‌تواندانش‌یا فکرمعینی را کسب‌کند، بهتر می‌توانیم در این‌باره که چگونه می‌توان این دانش‌هارا به‌بچه یادداد، داوری‌کنیم. (در۳° ازیادداشت تکمیلی ۱۱، به‌این تنظیم، خیلی نزدیك شده بودیم.)

۲°. تکیه‌گاه اصل ژنتیك، براصل مشابهی در زیست‌شناسی‌است. تکامل فردی هر موجود زنده، همان تاریخ تکامل نوعی را که به‌آن تعلق دارد، تکرار می‌کند . این مطلب به‌معنای آن است‌که جنین موجود مفروض، ضمن عبور ازمرحله‌های تکاملی،که ازتخمك باردار آغاز وبه‌شخصیت رسیده وکامل موجود ختم می‌شود، در هریك از این مرحله‌ها، یکی از نیاکان خود را به‌یاد می‌آورد ودنبالهٔ این مرحله‌های پیشرفت، تمامی تکامل نوع زیستی مفروض را، منعکس می‌کند. اگربه‌جای «تکامل فردی هرموجود زنده»، از اصطلاح علمی آن «رشدشناسی» (*Ontogeny*) استفاده‌کنیم، وبه‌جای جملهٔ «تاریخ

تکامل نوع زیستی» واژهٔ «نژادشناسی» (*phylogeny*) را به کار بریم، آن‌وقت، «قانون اصلی زیست‌شناسی» را می‌توان، از زبان ارنست‌هه کل [*Haeckel* (۱۸۳۴-۱۹۱۹)] زیست‌شناس آلمانی، این‌طور بیان کرد: «رشدشناسی، تکراری از نژادشناسی است».

البته، این شباهت، تنها می‌تواند اندیشهٔ ما را راهنمایی و هدایت کند، و نه این که مبنای تمامی آموزش را برمبنای اصل ژنتیك قرار دهیم؛ بنابراین، «اصل ژنتیك» را، نه به‌عنوان یك «اصل ضروری و اجباری»، بلکه تنها به‌عنوان سرچشمه‌ای برای پیداکردن اندیشه‌های جالب، باید در نظر گرفت.

۳°. مثلاً، اصل ژنتیك، می‌تواند اساس مرحله‌های متوالی را که در ۳° از §۴و۳° از §۵ موردبحث قراردادیم، به‌ما نشان‌دهد. درواقع، درتکامل تاریخی رشته‌های مختلف دانش (چه‌نظریه‌ها وچه اعتقادها)، می‌توان سه مرحله را تشخیص داد. در مرحلهٔ نخست (پژوهشی)، براساس برخورد با داده‌های ناشی‌ازمشاهده وتجربه، نخستین اندیشه‌های امیدوارکننده، ولی‌غالباً نارسا وحتی‌اشتباه، پدید می‌آید. مرحلهٔ بعدی، مرحلهٔ انتزاع است؛ داده‌های تجربی‌شکل‌می‌گیرند، اصطلاح‌های مناسب وارد درکار وقانون‌مندی‌ها تشخیص داده می‌شوند. در مرحلهٔ آخر، مرحلهٔ کاربرد، قانون‌مندی‌هایی که پیدا شده است، از دیدگاه کلی‌تری موردبررسی قرار می‌گیرند، تعمیم می‌یابند و کاربرد خود را، درعمل، پیدا می‌کنند.

درواقع، تنهامطالعهٔ نوشته‌های‌اصلی مؤلفان‌بزرگ، مارابه‌ضرورت اصل ژنتیك قانع می‌کند. این‌مطالعه را، می‌توان باگردش زنده‌کننده درهوای صاف وفرح‌بخشی مقایسه کرد که بعد از تنفس درهوای گرفته وخفقان‌آور کتاب‌های درسی، انجام می‌گیرد. جیمس‌کلارك ماکسول، در مقدمهٔ اثر بزرگ خود «رساله‌ای دربارهٔ الکتریسیته ومغناطیس» می‌نویسد: «برای مطالعهٔ هر موضوعی، خواندن نوشته‌های اصلی که به‌این موضوع مربوط می‌شود، فوق‌العاده مفید است، زیرا وقتی

می‌توانیم بردانشی مسلط شویم که جریان زایش آن‌را ببینیم».

۴°. طبق اصل ژنتیك، درآموزش، باید همان راهی را راهنمای خود قرار دهیم که کاشفان نخستین رفته‌اند. وطبق اصل آموزش فعال، این راه باید، با حداکثر امکان، مستقلاً کشف شود. از ترکیب این دو اصل، این نتیجه حاصل می‌شود که دانش‌آموز، باید آن‌چه را که می‌خواهد یاد بگیرد، دوباره کشف کند. دراین‌جا، تنها نظری گذرا و سریع، بریکی ازمهم‌ترین جنبه‌های روندآموزش انداختیم، وخواننده می‌تواند، برای بررسی دقیق‌تر، به کتاب‌های ویتن‌برگ[1] مراجعه کند.

۱۵. لفاظی بی‌حاصل. «فرهنگ عمومی» ـ اصطلاحی رایج است؛ ولی اغلب کسانی که آن‌را به‌کار می‌برند، از مفهوم نادرست آن استفاده می‌کنند. هیچ‌چیزی ساده‌تر از این نیست که دربارهٔ «فرهنگ عمومی» صحبت‌شود. دربرنامهٔ دبیرستانی، می‌توان به‌غریب‌ترین ووحشی‌ترین چیزها برخورد، که تنها به عنوان این که «فرهنگ عمومی را بالا می‌برند» تبرئه می‌شوند.

«فرهنگ عمومی را بالا ببرید» ، «اندیشیدن را یاد بگیرید»، «مسأله حل کردن را بیاموزید» ـ این‌ها اصطلاح‌های متداولی است که، با مفهوم درست و عمیقی که دارند، به‌سادگی به‌صورتی نادرست تعبیر می‌شوند وبه‌معنای نادرست خود به‌کار می‌روند. با وجود این، بین این سه‌بیان، اختلاف وجود دارد و، ظاهراً، آخرین آن‌ها، در موقعیت بهتری نسبت به‌دیگران قرار دارد.

جملهٔ «حل مسأله را بیاموزید» را نه تنها به‌کمك اصطلاح کلی دیگر (که البته ممکن‌است به‌نادرستی تفسیرشوند) بلکه به‌یاری مثال‌های مشخص آموزنده‌ای‌هم، می‌توان روشن کرد (من، چه دراین کتاب

1. *A. I. Wittenberg, Bildung und Mathematik, Stuttgart, 1963.*

A. I. Wittenberg, Soeur Sainte — Jeanne—de—France, and F. Lemay, Redécouvrir les mathematiques, Neuchatel 1963.

و چه در کتاب‌های دیگری که دراین زمینه‌نوشته‌ام، تلاش کرده‌ام، از این مثال‌ها به‌فراوانی بیاورم).

یادآوری می‌کنم‌که لفاظی‌های بی‌حاصلی را که دربارهٔ چگـونگی حل مسأله متداول شده‌است، می‌توان به‌سادگی فاش کرد: «به‌نحوی یاد بدهیدکه در واقع، باید مسأله را حل کرد، به‌نحوی‌که جالب‌تـر باشد! درکلاس خود، روی چند مسأله‌کار کرده‌اید؟ مسأله‌هـای شما، چه جنبه‌های مفیدی برای دانش‌آموزان داشته است؟...».

۱۶. درهم و برهمی در سطح‌های مختلف برنامه. ریاضی‌دانـان امروزی، بیشتر با مجموعه‌ها، گردانند‌ه‌ها، گروه‌ها، میدان‌هـا و امثال آن کار دارند تا هندسه و جبر سنتی. به‌همین مناسبت، ناچاریم قبل از این‌که این مـواد سنتی را به‌دانش‌آمـوزان یـاد بدهیم، به سراغ مجموعه، گرداننده، گروه، میدان و... برویم. این عقیدهٔ‌کم وبیش رایجی‌است و، به‌اعتقاد من، یکی از بدترین عقیده‌ها است:

«جوانان امـروزی امریکا، خیلی خیلی بیشتر ازآن که پیاده‌روی کنند، مسیرهای موردنیاز خود را پشت فرمان اتومبیل می‌گذرانند. بنابراین، باید قبل ازآن‌که راه‌رفتن‌را یاد بگیرند، راه هدایت‌اتومبیل را به‌آن‌ها آموخت!»

۱۷. آیسه‌دورا دونکان، رقاصهٔ مشهوری‌بود؛ وقتی‌که من سال‌های جوانی را می‌گذراندم، اوهمان‌قدر مشهورشده بود، که بعدها مریلین‌مونرو[۱] شهرت‌پیداکرد. ولی، چه‌رابطه‌ای بین‌این‌رقاصه‌وموضوع وموردبحث ماوجود دارد؟ ممکن است فکرجالبی به‌نظرتان برسد: آیا نمی‌شودکار تنظیم برنامه وشرح کتاب‌های درسی را به‌عهده «مرکزی» گذاشت که از یك استاد دانشگاه ویك معلم دبیرستان تشکیل شده باشد؟ انتظار می‌رودکه ترکیب دوراندیشی ریاضی یك استاد باتجربهٔ تـربیتی یك معلم، بتواند، حاصل‌خوبی‌به‌بارآورد. البته، همین‌طوراست، ولی...

درسال‌های جوانی من، همهٔ مسأله‌ها را، با روایتی، به‌آیسه‌دورا–

---

۱. مریلین مونرو (۱۹۲۶–۱۹۶۲) ــ هنرپیشهٔ مشهور سینمای امریکا.

دونکان مربوط می‌کردند، که ظاهراً روزی به برناردشاو گفته بود: «... آیا نمی‌ارزد در این باره فکر کنیم که بچهٔ ما چگونه می‌توانست باشد ـ با عقل شما و با زیبایی من» و برناردشاو پاسخ داده بود: «بله، بله، البته، ولی آیا نمی‌ارزد دراین باره هم بیندیشیم که، چه‌بسا، بچه ما، زیبایی من وعقل تو را به‌ارث ببرد».

شما هم ممکن است به کتاب‌هایی برخورد کنید که، درآن‌ها، دور-اندیشی یك معلم ریاضی دبیرستانی با تجربهٔ تربیتی یك‌استاد دانشگاه، در دبیرستان (که البته هرگز چنین تجربه‌ای را به‌دست نیاورده‌است) ترکیب شده باشد.

۱۸. سطح آگاهی‌ها . بنه‌دیکت اسپینوزای فیلسوف، در «رسالهٔ اصلاح فکر[1]» خود، چهار سطح آگاهی ودانش را از هم جدا کرده است. او این چهارسطح آگاهی را، باچهار تفسیر روشن کرده است.

آن‌چه در زیر، از ۱° تا ۴°، آمده است، سعی می‌کنیم، تا حدی، این مرحله‌ها را روشن کنیم.

۱°. دانش‌آموز «قانون» را حفظ ونسبت به‌آن اعتماد می‌کند؛ با وجود این، او قادر است از این «قانون» استفاده‌کند و، در عمل به درستی، آن‌را به‌کار برد. ما این‌مرحله را، مرحلهٔ یادگیری مکانیکی قانون می‌نامیم.

۲°. دانش‌آموز، «قانون» را درمورد حالت‌های خاص ساده‌ای آزمایش می‌کند ونتیجه می‌گیرد که، درهمه‌جا، نتیجهٔ درست به‌دست می‌آید. این، مرحلهٔ درك استقرائی قانون است.

۳°. دانش‌آموز، اثبات قانون را می‌فهمد. این، مرحلهٔ درك ذهنی قانون است.

۴°. دانش‌آموز، به‌طور کامل، برقانون تسلط پیدا می‌کند وبه‌چنان سطحی می‌رسد که هیچ‌اثری ازتردید، نسبت به‌درستی قانون، دراو باقی نمی‌ماند. این، مرحلهٔ درك درونی قانون است.

1. *Tractatus de intellectus Emendatione*

۵°. من نمی‌دانم، آیا اندیشهٔ اسپینوزا همین‌گونه بوده است یانه! ولی، به‌هرحال، معلم باید خیلی خـوب، از اختلاف بین سطح‌هـای متفاوت آگاهی، مطلع باشد. برنامه، از معلم می‌خواهدکه این یاآن بخش ریاضیات را، در فـلان حجم، به‌دانش‌آموزان یاد بدهـد. ولـی دانش‌آمـوزان را، در این‌مورد، به‌کدام سطح از درك وآگاهـی باید رسانید؟ آیادرك مکانیکی کافی است؟آیا معلم، باید دانش‌آموزان‌خودرا تا سطح درك درونی بالا ببرد؟ دراین جا، دربرابر ما، دو هدف کاملاً متفاوت قرار دارد ـ ولی ازاین‌جا به‌بعد، چه برای معلم و چه برای شاگرد، فرقی نداردکه‌کدام‌یك از این‌هدف‌ها را تعقیب می‌کنند.

۶°. برای بررسی موقعیت معلم در برابـر این چهارسطح آگاهی ـ که‌به‌وسیلهٔ اسپینوزا مشخص شده‌است‌ـبه‌پرسش‌های زیادی برخورد می‌کنیم. چگونه می‌توان دانش‌آمـوزان را به‌این یاآن سطح‌آگاهـی رسانید؟ چگونه می‌توان تحقیق کردکه دانش‌آموزان به کدام یك از این سطح‌ها رسیده‌اند؟ به‌سختی می‌توان پاسخ این پرسش‌ها را، درحد درك درونی، پیدا کرد.

۷°. البته، ناچار نیستیم خود را به‌همین چهار مـرحلهٔ آگاهـی، محدودکنیم؛ سطح دیگری ازآگاهی وجود داردکه بدون تردید بـاید موردتوجه معلمان‌ودانش‌آموزان قرار گیرد (به‌خصوص‌دانش‌آموزانی که می‌خواهند، درآینده، دانشمند وپژوهشگرباشند) ـ واین مرحله‌ای است که، درآن، آگاهی‌ها به‌خوبی‌تثبیت شده‌اند، به‌خوبی‌موردمقایسه قرارگرفته‌اند، به‌خوبی ارزیابی شده‌اندو، دریك‌کلام، به‌خوبی‌تنظیم ومرتب‌شده‌اند. (با یادداشت‌تکمیلی۴ ازفصل دوازدهم،مقایسه‌کنید.)

معلمی که می‌خواهد آگاهی دانش‌آموزان خود را به‌سطحی برساند که به‌خوبی تنظیم ومرتب شده باشند، باید به‌خصوص درمورد آشنا کردن آن‌ها با موضوع‌ها وحقیقت‌های تازه، احتیاط به‌خرج دهد. یك حقیقت تازه، نباید ازخلاء به‌وجود آید؛ آن را باید به‌آن‌چه که دورـ وبر ماست مربوط‌کرد، به‌آگاهی‌های دانش‌آموز و به‌تجربهٔ روزانهٔ او

ربط داد، و با تکیهٔ برآن‌ها، توضیح مطالب را پیداکرد؛ در واقع، هر موضوع تازه، بایدبه‌صورت پاسخ به کنجکاوی‌های طبیعی دانش‌آموزان، طرح شود.

به‌جز این، به محض این‌که حقیقت تازه‌ای روشن‌شد، باید ازآن، برای‌حل مسأله‌های دیگر(که‌درپرتواین حقیقت، ساده‌ترحل می‌شوند) و برای افکندن نوری تازه برآگاهی‌های قبلی‌دانش‌آموز وبرای کشف چشم‌اندازهای تازه استفاده کرد.

دانش‌آموز پشت‌کاردار و ثـابت قدم، باید هـرحقیقت تازه را، با دقت، مـورد مطالعه قـرار دهد، بایـد بارها آن‌را مـرور کند، از دیدگـاه‌های مختلف به‌ارزیابی‌آن بپردازد؛ ضمن این‌که با دقت واز جانب‌های مختلف آن را بررسی می‌کند، سعی‌کند جـای مناسب‌آن را در دستگاه آگاهی‌هـای موجود خود پیدا کند تا، درنتیجه، بتواند به‌طور طبیعی به‌خویشاونـدی‌آن باآگاهی‌های قبلی خود پـی ببرد. به‌این‌ترتیب است‌که دانش‌آموز می‌تواند، با تکیه برمعرفت شهودی خود، این‌تکهٔ‌تازه از دانش خود را، با کمترین اشکال و بیشترین‌نتیجه، فرابگیرد. ازاین گذشته، او باید تلاش‌کند، آن‌چه را هم‌اکنون فراگرفته است، گسترش‌دهد و تکامل‌بخشد؛ وبرای این منظور، کاربردهای‌آن‌را بیابد، آن را تعمیم دهد، به‌حالت‌های خاص‌آن بپردازد، موضوع‌های شبیه‌آن را پیداکند و، در یک‌کلام، باهمهٔ روش‌ها وامکان‌هایـی‌که در اختیار دارد، آن‌را مورد تجزیه وتحلیل قراردهد.

۸°. اگر در وظیفهٔ معلمی خود صادق باشیم، خواهیم تـوانست شیوه‌هـای لازم را، بـرای تثبیت حقیقت تازه درآگاهی‌هـای ریاضی دانش‌آموز، ایجاد بستگی بین‌آن وآگاهی‌های قبلی او وقوام‌دادن‌آن درصحنهٔ کاربردها، پیداکنیم. دراین‌صورت، می‌توانیم امیدوار باشیم که این آگاهی‌هایی که خوب تثبیت شده‌اند، خوب قوام گـرفته‌اند، با دیگر آگاهی‌ها خوب مربوط شده‌اند وخوب تنظیم ومرتب شده‌اند، سرآخر، به‌دانش درونی تبدیل شوند.

۱۹. تکرار و تباین. اگر به‌فعالیت تربیتی خود علاقه‌مندید و اگر، ضمناً، موسیقی را هم دوست دارید، می‌توانید شباهت‌های زیادی بین این‌دو پیدا کنید؛ این مقایسه، باهمهٔ «غیرعملی بودن»آن، می‌تواند در کار معلمی شما مفیدواقع شود ـ این مقایسه، به‌شما کمك می‌کندتابتوانیدموضوع‌های مورد نیاز خود را در تدریس، استادانه‌تر و ثمربخش‌تر، منظم کنید.

منظورمن، کدام شباهت‌هاست؟ تکرار وتباین (*repetition and-contrast*) درهمهٔ هنرها، وازآن‌جمله هنر معلمی، نقشی‌مهم به‌عهده دارد، ولی نقش‌آن‌ها در موسیقی، نمایان‌تر است. بنابراین، خصلت‌هایی‌از اثرهای موسیقی ازنوع پیش‌درآمد، ادامهٔ‌آن، تکرار وتباین، تناوب متن، می‌تواند برای یك معلم خوب ، آموزنده باشد. او می‌تواندشباهت‌هایاخصلت‌هایی را پیداکندکه در متن‌درس‌ها ویا دیگر نوشته‌ها وجود دارد.

۲۰. از درون و از بیرون. وقتی‌که روی این‌کتاب می‌اندیشیدم و آن را می‌نوشتم، بیشترتوجهم به‌معلم ریاضی دبیرستان بود و، به‌خصوص، این موقعیت او را که در زیر شرح می‌دهم، درنظر داشتم. معلم، مسأله‌ای را به‌کلاس خود پیشنهاد می‌کند؛ دانش‌آموزان باید ابتدا خودشان به‌کار مشغول شوند و، سپس، آن را درکلاس مورد بحث قرار دهند. این موقعیت، روش اندیشیده‌ای را طلب می‌کند. اگر معلم، به‌کلی، خودرا بی‌طرف نگاه‌دارد، پیشرفت‌لازم به‌دست‌نمی‌آید؛ و اگر به‌طور فعال درکار شرکت‌کند، این خطر پیش می‌آیدکه ابتکار دانش‌آموزان خفه شود. معلم، چگونه می‌تواند از این‌دوحالت قطبی پرهیز کند؟ تا چه‌حدی باید به‌دانش‌آموزان خود یاری برساند.

بهتر است مسأله را به‌طریق دیگری طرح کنیم: نباید پرسید «تاچه حدی؟»، بلکه باید پرسید «چگونه؟». معلم، چگونه باید به‌دانش‌ـ آموزان خود کمك کند؟ برای این منظور، راه‌های زیادی وجوددارد.

۱°. موردهایی پیش می‌آیدکه معلم، ضمن طرح‌چند پرسش، ناچار می‌شود، برای وادار کردن دانش‌آموزان به‌کار، آن‌ها را چندبارتکرار

کند. در گفت‌و گوی زیر، نقطه‌ها، نشانهٔ سکوت دانش‌آموزان است. معلم، بعد از مقداری بحث می گوید:

«دوباره به‌من بگویید: مجهول چیست؟»

ـ طول پاره خط AB.

«مجهولی از این نوع را، چگونه می‌توان پیدا کرد؟»

. . . .

«چگونه می‌توان طول یك پاره‌خط را پیدا کرد؟»

. . . .

«چه داده‌هایی لازم است تا بتوانیم طول یك پاره‌خط را پیدا کنیم؟»

. . . .

«مگر قبلاً چنین مسأله‌هایی را حل نکرده‌ایم؟ منظورمن مسأله‌هایی است که مجهول آن‌ها طول یك پاره‌خط بودولازم بودآن راپیداکنیم؟»

ـ به نظرم، حل کرده‌ایم.

«درچنین حالتی، چگـونه عمل کـرده‌ایم؟ با چه داده‌هایـی، طول مجهول را محاسبه کرده‌ایم؟»

. . . .

«به شکل نگاه کنید. آیا پاره‌خط AB را روی آن می بینید؟ طول آن، همان مجهول ماست. کدام پاره خط‌ها داده شده است؟»

ـ پاره‌خط AC مفروض است.

«بسیار خوب، دیگر کدام پاره‌خط داده شده است؟»

ـ پاره‌خط BC هم داده شده است.

«به پاره‌خط‌های AB ، AC و BC نگاه کنید. با هم چه رابطه‌ای دارند؟ چگونه می‌توانید آن‌را شرح دهید؟»

ـ AB ، AC و BC، ضلع‌های مثلث ABC هستند.

«این، چگونه مثلثی است؟»

. . . .

بله... موردهایی پیش می‌آیدکه معلم باید، بیش از اندازه، تحمل کند.

۲°. معلمی که حوصله و تحمل کمتری دارد ، می‌تواند به طـریق

دیگری عمل کند ومستقیماً به دانش‌آموزان بگوید: «قضیهٔ فیثاغورث را در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC به‌کار برید».

۳°. دو روندی که در ۱° و۲° شرح دادیم، چه فرقی باهم دارند؟

نخستین تفاوت آن‌ها این است که، اولی طولانی و دومی کوتاه است. این، یك تفاوت آشکار است.

تفاوت دیگری هم وجود دارد وآن این است که، روند۱° امکان بیشتری برای‌بروز ابتکارهای دانش‌آموز به‌وجودمی‌آورد تا روند۲°.

ولی بین این دو روند، اختلاف ظریف‌تری هم وجود دارد.

پرسش‌ها واشاره‌های هدایت‌کننده‌ای که معلم، در روند ۱°، مورد استفاده قرارداده است، به‌احتمال زیاد، از ذهن خود دانش‌آموزان هم عبور می‌کند. اگر به‌آن‌ها دقت بیشتری بکنید، متوجه می‌شوید که بسیاری از این پرسش‌ها و اشاره‌هارا می‌توان، به‌عنوان وسیله‌هایی، نه تنها برای حل مسألهٔ مفروض، بلکه برای حل بسیاری از مسأله - های دیگر، وحتی می‌توان گفت، برای‌بسیاری از گونه‌های مسأله‌ها، به‌کار برد. واین وسیله، در دسترس همگان قراردارد؛ البته ، افراد پخته‌ترو با تجربه‌ترکه «آمادگی آموزشی بیشتری» دارند،می‌توانند باآزادی بیشتر وتوانایی بالاتر ازآن استفاده‌کنند.

ولی راهنمایی معلم را، آن‌طورکه در۲° آمده است، نمی‌توان وسیله‌ای برای حل مسأله‌های دیگرهم به‌حساب‌آورد؛ این‌راهنمایی، عمل مشخصی را نشان می‌دهدکه، خارج از هر ارتباطی‌با یك‌اندیشهٔ کلی، می‌تواند درمورد این مسألهٔ خاص به‌کار رود.

کمك درونی به‌چنان کمکی می‌گوییم که هرحل کننده‌ای که به‌طور جدی به‌مسألهٔ خود علاقه‌مند باشد و، ضمناً، باپرسش‌های‌روش‌شناسی آشنا باشد، به‌احتمال قوی، بتواند خودش به خودش بکند. کمك بیرونی به‌کمکی گوییم که رابطهٔ ضعیفی باپرسش‌های روش‌شناسی‌داشته باشد واحتمال ضعیفی وجود داشته باشد که حل‌کننده بتواند چنین کمکی را به‌خودش بکند. به‌نظر من، مهم‌ترین تفاوت روندهای ۱° و

۳°. در این است که معلم، درحالت اول، کمك درونی به‌دانش‌آموز می‌کند، درحالی‌که درحالت دوم، تنها کمك بیرونی را در اختیار او می‌گذارد.

۴°. با توجه به‌اصل‌آموزش فعال، بایدکمك درونی را بر کمك بیرونی ترجیح بدهیم. معلم باید ازکمك بیرونی، تنها به‌عنوان‌آخرین علاج استفاده کند، وقتی‌که همهٔ امکان‌های مربوط به‌کمك درونی را به‌کار برده وموفق نشده است (ویا، احتمالاً، درموردی‌که وقت‌تنگ باشد).

احتمال این‌که کمك بیرونی بتواند مفید واقع‌شود، بسیارکم‌است؛ کمك خارجی شبیه هدیهٔ آسمانی والهام غیبی است ومی‌تواند، خیلی زود، موجب دل‌سردی شود. کمك درونی، مفیدترین وسیله‌ای است که معلم می‌تواند ازآن‌استفاده‌کند. دانش‌آموز به‌سادگی ازآن‌استفاده می‌کند، به‌خوبی تشخیص می‌دهدکه این پرسش‌ها به اوکمك می‌کنند و، بالاخره، درمی‌یابدکه خودش هم می‌تواند چنین پرسش‌هایی را در برابر خود قرار دهد. به‌این‌ترتیب، دانش‌آموز یاد می‌گیرد که از پرسش‌ها، به‌نحو ثمربخشی، استفاده‌کند؛ سخن معلم، در واقع،حرف دل خود اوست و، درنتیجه، در موقعیت‌های مشابه، به او یاری می‌رساند.

برای این‌که معلم بتواند به‌دانش‌آموز خود،کمك درونی برساند، می‌تواند از همهٔ راهنمایی‌ها و «پرسش‌های رسمی» فصل دوازدهم استفاده‌کند؛ دراین مورد، فصل دوازدهم را باید فصل مرکزی این کتاب دانست. البته، قبل از هر کار، باید با موقعیت خاصی، که می‌خواهد از این پرسش‌ها استفاده‌کند، کاملاً آشنا باشد. این‌کتاب، به‌این منظور طرح‌ریزی وآماده شده است‌که بتواند به معلم، در کار او، کمك‌کند.

۲۱. هروقت احساس‌می‌کنم‌که خیلی‌حرف‌زده‌ام وموقع‌آن‌است‌که پرسشی در برابر شنوندگان قرار دهم، به‌یاد یك شعر فولکلوریك‌آلمانی می‌افتم

که ترجمهٔ تقریبی آن‌چنین است:

تنها یك نفر حرف می‌زند و دیگران گوش می‌دهند.

همه‌چیز گواه بر آن است که این جا «کلاس درس» است.

۲۲. تا چه‌اندازه دشوار است؟ هم‌دانشمند وهم معلم، با این پرسش روبه‌رو می‌شوند: اولی، وقتی‌که درگیر حل یك مسأله است و دومی، وقتی که می‌خواهد بداند آن را چگونه برای کلاس خود طرح کند. برای پاسخ گفتن به‌این پرسش، باید بیشتر به «غریزه» و «احساس» متوسل شد تا استدلال روشن. معمولاً هم، همه می‌توانند دشواری مسأله را، تاحد نسبتاً دقیقی، روشن کنند: دانشمند به‌وسیلهٔ تحقیقی که روی درستی نتیجهٔ پژوهش‌های خودانجام می‌دهد، ومعلم به‌وسیلهٔ امتحان.

برای‌ارزیابی‌دشواری یك مسأله، اغلب عامل‌های کمی را می‌توان ارائه داد؛ ولی همین مقداری که وجود دارد، باید بادقت مورد توجه قرار گیرد.

۱°. حجم حوزهٔ بررسی. فرض‌کنیم جرمی اتفاق افتاده باشد (و مثلاً، بچه‌ای شیشهٔ پنجره‌ای را شکسته باشد) و مقصر، یکی از n دانش‌آموز باشد. روشن‌است که، اگر شرایط دیگررا مساوی‌بگیریم، دشواری حل‌مسأله (یعنی‌پیدا کردن مقصر)، بابزرگ شدنn، افزایش می‌یابد. به‌طور کلی می‌توان گفت که با بزرگتر شدن حجم حوزهٔ مورد بررسی، دشواری مسأله بیشتر می‌شود (با § ۶ فصل یازدهم مقایسه کنید).

۲°. تعداد عنصرهایی‌که با هم مورد بررسی قرار می‌گیرند. فرض کنید، دانش‌آموزان باید مسأله‌ای را حل‌کنند‌که، ضمن‌آن، لازم است از n قاعدهٔ مختلفی که درآخرین فصل درس ریاضی خود خوانده‌اند، استفاده کنند؛ واین فصلی است که، دانش‌آموزان، خیلی‌کمتر ازفصل‌های قبل، باآن‌آشنا هستند. درچنین وضعی، روشن‌است که با بزرگتر شدن n، دشواری مسأله افزایش می‌یابد؛ طبعاً، هرچه تعداد عنصرهایی که تاکنون باهم مورد بررسی قرار نگرفته‌اند و، ضمناً، برای‌حل

مسألۀ مفروض باید با هم ترکیب شوند، بیشتر باشد، دشواری‌مسأله هم بیشتر خواهد شد.

۳°. آن‌چه گفتیم، می‌تواند به‌ما کمك کندتا دربارۀ دشواری‌مسأله، پیش ازآن‌که حل‌آن را آغاز کرده باشیم، داوری کنیم. و اما، داوری تجربی دربارۀ دشواری مسأله، یعنی قضاوتی که بعد از تلاش‌های‌لازم برای حل مسأله به‌وجود می‌آید، کم و بیش به روش آماری مربوط می‌شود. یك‌مثال‌ساده: از دومسأله‌ای که، درامتحان، به‌دانش‌آموزان داده شده است، اولی را ۸۲ نفر ودومی را ۳۹ نفر حل کرده‌اند. روشن است‌که، مسألۀ دوم برای این گروه دانش‌آموزان، دشوارتر است. آیا همین مسأله، برای گروه دوم دانش‌آموزان هم، دشوارتر است؟ آمارنشان می‌دهدکه، اگر تفاوتی غیرتصادفی بین این دو گروه نباشد، در هردو مورد، نتیجۀ کم و بیش یکسانی به‌دست می‌آید. و این، همان جایی است‌که با ناهمواری رو به‌رو می‌شویم. درمسأله‌های‌آموزشی به‌عامل‌های بسیاری برمی‌خوریم که، معمولاً به‌حساب نمی‌آیند، درحالی‌که نقشی‌عمده به‌عهده‌دارند؛ مثلاً، اختلاف «تصادفی» و «غیر تصادفی» به‌کلی غیرقابل اندازه‌گیری است. به‌عنوان مثال، نوع طرح یك قسمت درس به‌وسیلۀ معلم، تکیه‌ای‌که برموضوع خاصی می‌کند، حالت روحی او درموقع تدریس، وخیلی عامل‌های دیگری‌که قابل پیش‌بینی وقابل محاسبه نیستند، می‌توانند نسبت به عامل‌هایی که به‌آمار درمی‌آیند، تأثیرجدی‌تری برجریان‌امتحان‌داشته باشند. دراین‌جا، به‌صورتی‌کاملاً سطحی، با یکی از علت‌های‌فراوان موجود، برخورد می‌کنیم که باید ما را وادارد تا در برخورد با هرگونه ارزیابی‌های آماری مربوط به آموزش، با احتیاط و بدگمانی روبه‌رو شویم.

وقتی‌که یك ریاضی‌دان با مسأله‌ای سروکار داردکه دویست یا دو هزار سال از طرح‌آن می‌گذرد، ولی هنوزکسی نتوانسته است آن را حل‌کند، آن‌وقت، مبنای «آماری» درستی دراختیار اوست‌که بگوید،

مسألهٔ مفروض دشوار است (درنظریهٔ عددها، از این‌گونه مسأله‌ها، به‌فراوانی پیدا می‌شود).

۲۳. دشواری مسأله و ارزش آموزشی آن. داوری دربارهٔ دشواری مسأله، کار ساده‌ای نیست، ولی مشکل‌تر از آن، ارزیابی آموزشی مسأله است ـ با وجود این، وقتی که معلم مسأله‌ای را درکلاس طرح می‌کند، باید تلاش کند تا همهٔ این‌عامل‌ها را به‌حساب آورد.

دراین‌راه، ممکن‌است،مرتب‌کردن مسأله‌هایی که‌درسطح‌دبیرستانی قرار دارند، به‌او کمك کند. زحمت چنین تنظیمی‌را، فرانك دنك کشیده است[1]. آن‌چه در زیر می‌خوانید، تا حدی با نوع تنظیم دنك فرق دارد؛ مسأله‌ها را به‌چهار نوع تقسیم می‌کنیم.

۱°. قاعدهٔ کار (یا مثال نمونه‌ای) دربرابرشماست. مسأله بااستفادهٔ مستقیم (ومکانیکی) از قاعده یا با نسخه‌برداری مستقیم (ومکانیکی) از مثال نمونه‌ای، حل می‌شود. علاوه برآن، قاعده‌ای که باید مورد استفاده قرارگیرد و یا مثالی که باید به آن استناد شود ، مستقیماً در برابر چشمان دانش‌آموزان است ؛ معمولاً ، بعد از هر درس، چنین مسأله‌هایی به‌دانش‌آموزان‌داده می‌شود تا باقاعده یا روش موردنظر، آشنایی بیشتری پیداکنند. چنین مسأله‌هایی، به‌هیچ‌چیز بیشتری، جز مقداری عمل، نیاز ندارند؛ این مسأله‌ها، تنها می‌توانند قاعده‌ای یا روشی‌را به‌دانش‌آموز یاد بدهند وفایدهٔ دیگری ندارند (حتی درمورد این فایدهٔ منحصر، باز هم این خطر وجود داردکه دانش‌آموز آن را به طور مکانیکی فرا بگیرد و به «درك درونی» نسبت به‌آن دست نیابد).

۲°. به‌کاربردن قاعده (یا مثال نمونه‌ای)، به‌نحوی که دانش‌آموز باید آن را انتخاب کند. دراین حالت‌هم، مثل حالت‌قبل، مسأله، با استفاده از قاعده‌ای که دانش‌آموز باآن آشناست یا نسخه‌برداری از

---

1. *F. Denk, W. Hartkopf, G. Polya, Heuristik, Der, Mathematikunterricht* (1964)

قضیه‌ای که قبلاً درکلاس ثابت شده است، حل می‌شود؛ ولی برای دانش‌آموز روشن نشده است که کدام‌قاعده یا مثال رابابد مورداستفاده قرار دهد. دراین حالت، دانش‌آموز بایدتوانایی‌معینی‌درکاربردمطالبی که خوانده است، داشته باشد و، ضمناً، این استعداد را داشته باشد که بتواند قاعده‌یا مثال موردنظر خود را انتخاب‌کند ومورد استفاده قرار دهد.

۳°. انتخاب ترکیبی از قاعده‌ها (یا مثال‌های نمونه‌ای). برای حل مسأله، باید دویا چند قاعده یا مثال قبلاً حل شده را، مورد استناد قرارداد. فرض براین‌است که مسأله، آن‌قدرهادشوار نباشد و به مسأله‌های ترکیبی‌شبیه‌باشدکه، قبلاً، دانش‌آموزباآن‌هابرخورد داشته است. البته، اگر ترکیب کاملاً تازه باشد، یا اگر به‌ترکیب زیادی از آگاهی‌ها (و یا ترکیب آگاهی‌هایی از زمینه‌های به‌کلی متفاوت) نیاز داشته باشد، دیگر مسأله به‌ابتکارهای زیادی محتاج است و از مسأله‌های دشوار به‌حساب می‌آید.

۴°. مسأله‌هایی‌که به‌سطح مسأله‌های پژوهشی ـ علمی نزدیک‌اند. آیا می‌توان خط مرزی مشخصی، بین مسأله‌هایی‌که در ۳° از آن‌ها صحبت کردیم ومسأله‌های پژوهشی ـ علمی، رسم‌کرد؟

در فصل پانزدهم کوشیده‌ام بعضی از جنبه‌های خاص «مسأله‌های پژوهشی ـ علمی درسطح دبیرستان» را شرح دهم و، به صورتی‌کلی، دربارهٔ آن‌ها بحث‌کنم.

به‌طورکلی، این‌امکان وجود داردکه با افزایش دشواری مسأله‌ها، به‌مفهومی که در ۱° و ۲° از یادداشت تکمیلی ۲۲ آوردیم، ارزش آموزشی آن‌ها هم بالا برود، به‌خصوص، اگر این را پذیرفته باشیم که هدف آموزش این‌است‌که «اندیشیدن را بیاموزد»؛ با توجه به‌این هدف است‌که دربارهٔ ارزش مسأله‌ها صحبت می‌کنیم.

۲۴. بعضی‌گونه‌های مسأله. برای این که معلم، بتواند گاه به‌گاه دنبالهٔ مسأله‌های یکنواخت وکهنهٔ کتاب‌های درسی‌را پاره‌کند، من گونه‌هایی

از مسأله‌های نامتعارف را جمع‌آوری کرده‌ام («ریاضیات واستدلال‌های نزدیك به‌حقیقت» ـ ۱۹۶۷، صفحهٔ ۴۲۵ وبعدازآن). دراین‌جا می‌خواهم‌مسأله‌ای به‌آن‌ها اضافه کنم‌که به‌گروه«حدس‌شما ممکن‌است اشتباه باشد» تعلق دارد (تمرین۲۶)، و همچنین مسألهٔ تازه‌ای‌دربارهٔ «شاه‌ماهی‌قرمز»[1]. مسأله‌های‌نوع اخیرطوری‌ساخته‌شده‌اندکه، درهمان آغاز، چیزی به‌نظر حل‌کننده می‌رسد کـه، در واقع، ربطی به مسأله ندارد و تـوجه شخص را از مسیر اصلـی و پنهان شدهٔ مسأله، کـه ثمربخش‌تر است، منحرف می‌کند. مسأله‌های ازنوع «شاه ماهی‌قرمز» را باید بااحتیاط زیاد مورد استفاده قرارداد. آن‌هارا باید به‌شاگردانی عرضه‌کردکه‌ذهنی‌خلاق‌دارند تا بتوان توانایی‌آن‌هارا درانتخاب‌مسیر درست ارزیابی‌کرد (با تمرین ۲۵ مقایسه‌کنید).

۲۵. باقی ماندهٔ تقسیم چند جمله‌ای زیررا بر $x^{2}-1$ پیداکنید[2]:

$$x^{3}+x^{5}+x^{7}+x^{11}+x^{13}+x^{17}+x^{19}$$

۲۶. دو کره بر یکدیگر مماس‌اند. این دو کره، به‌وسیلهٔ صفحهٔ مماس مشترك اصلی، که از نقطهٔ تماس می‌گذرد، از هم جدا شده‌اند. به‌جـز این،

---

۱. مؤلف، این اصطلاح را، از ضرب‌المثل انگلیسی

to draw a red herring across the path

گرفته است‌که ترجمهٔ تحت‌اللفظی آن چنین است: «کشاندن شاه‌ماهی قرمز درجهت عرض مسیر»، یعنی «با بوی تند بیگانه، از مسیر خارج کردن». یا «به‌کمك موضوع نامربوطی، فرد را از موضوع اصلی منحرف‌کردن».

۲. اجازه بدهید نمونهٔ دیگری از نوع مسأله‌های «شاه‌ماهی‌قرمز»، که بسیارهم رایج است، بیاورم: «از دوشهر، که به فاصلهٔ ۵۰ کیلومتر از یکدیگر قرار دارند، دو نقطهٔ A و B به‌طرف یکدیگر حرکت کـردند: اولی با سرعت ۶ کیلومتر درساعت و دومی باسرعت ۴ کیلومتر درساعت. همزمان با A، مگسی با سرعت ۲۰ کیلومتر در ساعت به‌طرف B پرواز می‌کند: همین کـه مگس به‌B رسید، برمی‌گردد و به‌طـرف A می‌آید؛ بعد از رسیدن به A، دوباره به‌سمت B می‌پرد؛ مگس پرواز خود را به‌همین‌ترتیب ادامه می‌دهد تا دو نقطهٔ A و B به‌هم برسند. مگس چه‌راهی را طی‌کرده است؟»

یادداشت ای. م. یاگلوم (ویراستار ترجمهٔ روسی)

آن‌ها دارای مجموعه‌ای نامتناهی از صفحه‌های مماس مشترك هستند که مخروط مماس مشترك این دو کره را احاطه کرده‌اند. این مخروط، بر هریك از دو کره در طول دایـره‌ای مماس است و قسمتی از سطح مخروط که بین این دو دایره قـرار گـرفته است، مخروط ناقصی را تشکیل می‌دهد.

فرض کنیم، مولد t از مخروط ناقص داده شده باشد؛ مطلوب است محاسبه:

۱°. سطح جانبی مخروط ناقص؛

۲°. مساحت قسمتی از صفحهٔ مماس «اصلـی» که به‌مخروط مماس محدود شده است.

(آیا داده‌ها، برای پیداکردن مجهول‌ها، کافی هستند؟)

۲۷. کار فصلی. سه جسم را درنظر می‌گیریم:

a) منشور منتظم با قاعدهٔ n ضلعی؛

b) هرم منتظم با قاعدهٔ n ضلعی؛

c) دو هرمی منتظم n ضلعی[1].

هریك از این‌جسم‌ها، برکـره‌ای محیط شده‌اند، به‌نحوی که نقطهٔ تماس هر وجه جسم باکره، در مرکز ثقل آن وجه قرار دارد.

برای هرکدام از جسم‌های a)، b) و c):

۱°. مطلوب است نسبت مساحت s سطح قاعده به مساحت سطح کل S.

۲°. مطلوب است محاسبهٔ نسبت$\frac{S^3}{V^2}$، که در آن، V عبارت است از حجم جسم.

۳°. جدولی تشکیل دهید و، درآن، مقدارهای عددی نسبت ۲° را، برای حالت‌هایی که n برابر ۳، ۴، ۵ و ۶ باشد، قرار دهید.

---

۱. «دو هرمی» به چند وجهی گفته می‌شود که از قراردادن قاعده‌هـای مساوی دو هرم به‌وجود آمده باشد، دوهرمی منتظم n ضلعی، از دوهرم منتظم با قاعدهٔ n ضلعی به‌دست می‌آید.

۴°. حالت حدی را، وقتی که $n \to \infty$، شرح دهید؛ حد نسبت‌های قسمت ۲° را محاسبه و جدولی شبیه قسمت ۳° برای آن‌ها تشکیل دهید.

۵°. این مسأله را بررسی کنید (فرض کنید که جواب آن را، ازقبل، نمی‌دانید): «چند وجهی با حداقل مقدار مساحت پیدا کنید، به‌شرطی که تعداد وجه‌های آن G و حجم آن برابر V باشد».

برای حالت‌هایی که G برابر ۴، ۶، ۸، ۱۲ و ۲۰ باشد، همین حکم را تنظیم کنید و، ضمناً، روشن کنید برچه اساسی درست است، یعنی براساس کاری که انجام داده‌اید، استدلال‌هایی له یا علیه این حکم‌ها پیدا کنید.

۶°. سعی کنید، بین مسأله‌هایی که می‌شناسید، مسأله‌ای را جست‌و جو کنید که، بتواند، در دبیرستان، برای نزدیک‌شدن به‌هندسهٔ فضایی مفید باشد.

این مسأله را، به‌روشنی، تنظیم کنید.

به پرسش‌های «درونی» توجه کنید (به فصل دوازدهم این کتاب مراجعه کنید)، به‌خصوص به‌آن‌ها که، برای حل مسألهٔ انتخابی شما، می‌توانند مفید واقع شوند.

مسیر راه حل مسأله‌ای را که انتخاب کرده‌اید، با دیاگرام نشان دهید (همان کاری را که ما برای محاسبهٔ حجم‌هرم ناقص انجام‌دادیم؛ فصل هفتم را ببینید).

۷°. چگونه می‌توانید نوع انتخاب خود واهمیت آن‌را، برای گروهی از دانش‌آموزان یا معلمان، روشن کنید؟

۸°. قطر یک چندوجهی محدب، به‌پاره‌خطی گویند که دو رأس آن را به‌هم وصل کند و به‌طور کامل (به‌استثنای دو انتهای آن) در داخل چند وجهی (و نه برروی سطح آن) واقع شده باشد. فرض کنید تعداد قطرهای چندوجهی برابر D باشد.

مطلوب است محاسبهٔ D:

a) برای هریك از پنج چند وجهی منتظم؛
b) برای چند وجهی که، همهٔ G وجه‌آن، مثلث باشند؛
c) برای چند وجهی درحالت کلی، به‌شرطی دارای G_n وجه n ضلعی باشد ($n=۳, ۴, ۵, \ldots$) و

$$G_۳+G_۴+G_۵+\ldots=G$$

۹°. (غیر اجباری). اگر ازآن‌چه تا این‌جا گفته‌شد، به‌اندیشه‌ای ریاضی رسیده‌اید ـ که به‌زمینهٔ مورد نظرشما مربوط باشد، ولو این‌که هنوز نمی‌توانید آن را، به‌صورتی کاملاً روشن و تا آخر، پیش خود مجسم کنید ـ آن‌وقت، آن را به‌روشنی‌و با اختصار،در این‌جا شرح دهید.

[آن‌چه دربالا مورد گفت‌وگو قرار گرفت، مثال خوبی برای «تقسیم‌نهایی قفسه» است‌که من، معمولاً، درنوشته‌های خود، برای معلم دبیرستان لازم می‌دانم. قسمت ۵° را درتمرین۳۶ فصل‌پانزدهم و قسمت ۸° را در تمرین ۱۴ همان فصل، موردبررسی قرار داده‌ایم. پاسخ‌های بعضی‌ازشنوندگان به‌پرسش‌های قسمت‌های ۶° و۷°، شکل گفت‌وگوی بین معلم وشاگرد را دارد، شبیه گفت‌وگوهایی‌که دراین کتاب برخورد کرده‌اید.]

۲۸. دربارهٔ سخنرانی در گردهم‌آیی‌های ریاضی: قانون تسرمه‌لو. نقش سخن‌رانی در گردهم‌آیی ریاضی‌دانان، خیلی‌کم، نقش معلم‌را درکلاس به‌خاطر می‌آورد: دراین‌جا، اختلاف خیلی بیشتر از شباهت است. در این‌جا هم، سخن‌ران، مثل معلم، می‌خواهد مطلب تازه‌ای را برای شنوندگان خود شرح دهد ، ولی اختلاف در نوع شنوندگان است که، دراین‌جا، خود ازگروه سخن‌رانان تشکیل شده است‌که، چه‌بسا، مقام علمی آن‌ها از سخن‌ران، بالاتر هم باشد. نه موقعیت سخن‌ران ساده است ونه سخن‌رانی همیشه‌همراه با موفقیت. علت‌این امر، بیش‌ازآن‌که به‌اشتباه‌های مشخص مربوط باشد، با گستردگی باورنکردنی ریاضیات بستگی پیدا می‌کند. هر ریاضی‌دان ، تنها می‌تواند بخشی

ازدانش امروز را به‌خوبی یادبگیرد و، معمولاً، درشاخه‌های‌دیگری که حوزهٔ کار ریاضی‌دانان‌دیگراست، نمی‌تواند به‌خوبی خودرا توجیه کند.

۱°. ارنست تسرمه‌لو، که نام او با به‌اصطلاح «اصل‌انتخاب» در نظریهٔ کلی مجموعه‌ها همراه است، وقت زیادی را درکافه می‌گذراند. بحث‌هایی که پشت میز باهمکاران خود داشت، بیشتر به‌یادآوری‌های تمسخرآمیزنسبت به‌ریاضی‌دانان دیگر، مربوط می‌شد. او، ضمن‌تفسیر یك سخن‌رانی که در آن روزها با موفقیت درجمع ریاضی‌دانان انجام شده بود، سبك سخن‌ران را به‌باد انتقاد می‌گرفت و، سرآخر، عدم رضایت خود را، به‌صورتی کوتاه وفشرده، در دوقانونی بیان می‌کرد که، با تأکید پر نیشخند او، باید راهنمای هرسخن‌رانی باشند:

I. هرگز نمی‌توانید دربارهٔ حماقت شنوندگان خود، مبالغه کنید.

II. برموضوع‌هـای روشن تکیه کنید و از کنار مطالب واقعـی بگذرید[۱].

اگر حمله‌های تسرمه‌لو، درمجموع، عادلانه به‌نظر نمی‌رسید، در جزئیات خود، کاملاً دقیق وقانع‌کننده بودند. «دو قانون» او هـم، شامل همین قضاوت می‌شوند. من، از زمانـی‌که آن‌هـا را شنیده‌ام، هرگز نتوانسته‌ام آن‌ها را فرامـوش کنم. سال‌ها گذشته است و من قانع‌شده‌ام که این دوقانون، اگرخوب تفسیرشوند، می‌توانندراهنمای خوب وعاقلانه‌ای برای عمل باشند.

۲°. سخن‌ران یك‌کنفرانس ریاضی، معمولاً، طوری به‌شنوندگان خود می‌نگردکه، گویا، هرکدام از آن‌ها باید نظری قطعی دربارهٔ موضوع موردبحث او داشته باشند و، به‌خصوص، از همهٔ جـزئیات

---

۱. دراصل آلمانی:

I. Du kannst Deine Hörer nicht dumm genug einschätzen.

II. Bestehe auf dem Selbstverstandlichen und husche über das Wesentliche hinweg.

آخرین مقالهٔ او آگاه باشند. حقیقت این که، اغلب، سخن‌ران متوجه این مطلب هست، ولی ترجیح می‌دهد که به آن اهمیت ندهد. برای او ساده‌تر است که برای این موضوع ارزشی قایل نباشد. سخن‌ران می‌تواند خیلی چیزها از تفسیر زیر، که از قانون اول تسرمه‌لو کرده‌ایم، یاد بگیرد: «از این نترسید که دانش شنوندگان خودرا دست کم بگیرید؛ از این بترسید که دربارهٔ دانش آن‌ها، مبالغه کرده باشید».

۳°. چه چیزی در کار یك ریاضی‌دان، مهم‌تر است؟ به‌طور کلی، هر جزء از اثبات اهمیت دارد؛ ولی در کنفرانس ریاضی، تقریباً غیر ممکن است که بتوان به‌همهٔ جنبه‌های مطلب، به‌تفصیل و با استدلال کافی پرداخت. حتی اگر امکان پرداختن به‌همهٔ جزئیات هم وجود داشته باشد، شنوندگان در موقعیتی نیستند که بتوانند همهٔ آن‌ها را دنبال کنند. بنابراین: «فرار از مطالب واقعی»، یعنی فرار از اثبات‌های دقیق .

گاهی‌ممکن است، یك اثبات برمبنای نکته‌ای باشد که بتوان آن‌را با معرفت شهودی فهمید . یك سخن‌ران خوب، باید بتواند جنبه‌های اساسی اثبات خود را، چنان خوب جدا کند و چنان به‌روشنی بیان کند که برای همهٔ شنوندگان قابل فهم باشد. اگر سخن‌رانی چنین باشد، می‌تواند برای همهٔ شنوندگان مفید واقع‌شود و آگاهی‌های سودمندی به‌آن‌ها بدهد؛ ضمناً ودر واقع، در این‌مورد، از قانون دوم تسرمه‌لو پیروی کرده است : «برآن چه واضح است. تکیه کنید».

۲۹. پایان گفتار. در دوران جوانی، به‌رمان‌های آناتول‌فرانس، علاقه‌مند بودم. من بیشتر به‌لحن داستان‌ها علاقه داشتم تا خود موضوع آن؛ لحن‌حکیم ودانشمندی که به‌رفتار انسان‌ها، با نیشخندی ظریف وتوأم با غم‌خواری، می‌نگرد.

آناتول فرانس، مطلبی هم در بارهٔ موضوع مورد بحث ما دارد: «سعی نکنید، با زیاد یاددادن به‌آن‌ها، غرور وتکبرخود را ارضا کنید. فقط کنجکاوی آن‌ها را بیدار کنید. چشم شنوندگان خود را باز کنید،

ولی ازسنگین کردن بارمغزآن‌ها بپرهیزید. کافی‌است جرقه‌ای درآن‌ها به‌وجود آورید. هرجاکه خوراکی برای آتش وجود داشته باشد، شعلهٔ آن، به‌خودی خود، فروزان می‌شود» («باغ اپیکور»).

برای ما دلچسب‌تر است‌که این‌قطعه را، این‌طور بنویسیم: «سعی نکنید با طرح انبوهی مطلب برای دانش‌آموزان، غرورخود را ارضا کنید... تنها به‌این‌خاطرکه بخواهیدآن‌ها را به «فراوانی» دانش‌خود قانع کنید...».

فصل پانزدهم

حدس و روش علمی

استدلال غیر ریاضی، نقشی اساسی در استدلال‌های ریاضی دارد.

ایسای‌شور ـ رساله‌ها، برلین، ۱۹۰۱

در هررشته‌ای از دانش، به‌سختی می‌توان روشی را شرح‌دادکه بتوان ردپای آن را تا نخستین کشف دنبال‌کرد. . . دست‌کم، دربارهٔ روند خلاقیت ریاضی، می‌توان به نکتهٔ ساده‌ای اشاره‌کرد که مورخان دانش، بارها وبارها، برآن تأکیدکرده‌اند: مشاهده، جای مهمی را دراین روند دارد ونقش عمده‌ای، در مورد آن، به‌عهده داشته است.

شارل هرمیت ـ مجموعهٔ نوشته‌ها، پاریس، ۱۹۰۵-۱۹۱۷

چه در مورد پدیده‌های ذهنی و چه در مورد پدیده‌های واقعی ـ که قابل درك به‌وسیلهٔ حواس ما هستند ـ سرچشمه‌های فراوانی درمشاهده وجود دارد.

شارل هرمیت ـ نامه‌ای به‌ستیل‌تس، پاریس، ۱۹۰۵

§۱. کار پژوهشی ـ علمی، درسطح دبیرستان

درآموزش ریاضی، باید پیش‌بینی شودکه دانش‌آموز با همهٔ جنبه‌های فعالیت ریاضی (البته، درحد مقرر) آشنایی پیدا کند. به‌خصوص، این مهم است که بتواند مسیری به‌سمت کار خلاق مستقل (البته، درحد امکان) پیدا کند.

ولی، فعالیت یك ریاضی‌دان حرفه‌ای ، بی‌اندازه شدید است و، از بسیاری جهت‌ها ، با نوع کاری که دانش‌آموز درکلاس دارد، مغایرت پیدا می‌کند. دراین مورد، چه نکته‌هایی باید مورد توجه خاص قرار گیرد؟ بعد از آن‌که با چند مثال آشنا شدیم، به‌این پرسش پاسخ می‌دهیم. این مثال‌ها نشان می‌دهندکه معلم خوب می‌تواند، با انتخاب مسأله‌های مناسب وطرح به‌موقع آن‌ها، حتی درسطح دبیرستانی، دانش‌آموزان را به‌کاری وادارد که خیلی به‌کار پژوهشی مستقل، نزدیك است.

§۲. مثال

«بامفروض بودن P، محیط یك مثلث قائم‌الزاویه ومتساوی‌الساقین، مساحت S آن را پیدا کنید» . از این‌گونه مسأله‌ها، معمولاً درکتاب‌های مسأله، به‌فراوانی پیدا می‌شود. به‌طورکلی، این، مسألهٔ بدی نیست؛ ولی اگر به‌صورتی مجرد وجدا ازمسأله‌های خویشاوند خود طرح‌شود، آن‌وقت، مسألهٔ خیلی جالبی نخواهد بود . طرح مسأله را به‌صورت زیر، با طرح معمولی آن مقایسه وبه‌تفاوت آن‌ها توجه کنید:

«در زمان‌های دور، وقتی‌که زمین فراوان بود، ولی هرچیز دیگری به‌زحمت پیدا می‌شد، هرساکن غرب میانه، صدها آکر مرتع، ولی تنها صد یارد ریسمان در اختیار داشت. او می‌خواست با استفاده از تمامی ریسمان خود، قطعه زمینی را محصورکند. روی شکل‌های مختلف قطعه زمین فکر کرد و، باکمال تعجب، متوجه شدکه چه مساحت کمی را می‌تواند حصار بکشد.

خوب، حالا شما چه شکلی از قطعه زمین را ترجیح می‌دهید ؟ ولی

فراموش نکنیدکه شما باید بتوانید، با دراختیار داشتن‌محیط‌آن، مساحت‌آن را محاسبه کنید».

- مربع.
- مستطیلی با ضلع‌های ۲۰ و ۳۰.
- مثلث متساوی‌الاضلاع.
- مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین.
- دایره.

«بسیار خوب. من هم می‌توانم چند شکل اضافه کنم:
مستطیل با ضلع‌های ۱۰ و ۴۰؛
مثلث متساوی‌الساقین با ضلع‌های ۴۲، ۲۹ و ۲۹؛
ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین، با ضلع‌های ۴۲، ۱۳، ۳۲ و ۱۳؛
شش ضلعی منتظم؛
نیم دایره».

«همهٔ این شکل‌ها، محیطی برابر دارندکه، بنابر فرض مسأله، برابر است با ۱۰۰ یارد. مساحت هریك از این ده شکل را، برحسب یارد مربع، محاسبه و به‌ترتیب کم شدن مقدار مساحت تنظیم کنید. قبل از محاسبه، سعی کنید حدس بزنید: کدام یك از مساحت‌ها از همه بزرگتر و کدام‌یك از همه کوچکتر است؟»

این مسأله‌را می‌توان‌درهر کلاسی که محاسبهٔ‌مساحت‌هارا یادگرفته‌اند، طرح کرد. این‌هم جدول محاسبهٔ مساحت‌ها:

شکل	مساحت (دربعضی موردها، تقریبی)
دایره	۷۹۵
شش ضلعی منتظم	۷۲۲
مربع	۶۲۵
مستطیل ۲۰ × ۳۰	۶۰۰
نیم‌دایره	۵۹۴
مثلث متساوی‌الاضلاع	۴۸۱

ذوزنقهٔ ۴۲، ۱۳، ۳۲ و ۱۳	۴۴۴
مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین	۴۳۰
مثلث ۴۲، ۲۹، ۲۹	۴۲۰
مستطیل ۱۰ × ۴۰	۴۰۰

«آیا پرسش دیگری باقی مانده است؟»

§۳. بحث

هدف اصلی ما این بود که توجه دانش‌آموزان را به‌فهرست شکل‌ها ومساحت‌های آن‌ها ـ که درجریان حل مسأله تشکیل دادیم ـ جلب کنیم، مضمون این فهرست، باید، اشاره‌هایی برای دانش‌آموزان داشته باشد. در این‌جا، هرچه معلم کمترصحبت کند، بهتر است. اگر وقفه‌ای درکار پیش‌آید، معلم می‌تواند محتاطانه، با طرح پرسش‌هایی، به‌دانش‌آموزان روح بدهد؛ از این‌قبیل:

«دربارهٔ این فهرست، چه‌چیزی می‌توانید بگویید؟»

«دایره، جای نخست را درفهرست گرفته است. دراین مورد، چیزی به‌نظرتان نمی‌رسد؟»

«در فهرست، چند مثلث وچندچهارضلعی وجود دارد. کدام نوع‌چهار ضلعی، جلودار دیگران است؟ درمورد مثلث‌ها، وضع چگونه است؟»

«بله، احتمالاً درست باشد، ولی‌آیا می‌توانید آن‌را ثابت کنید؟»

«اگرنمی‌توانیدآن‌را ثابت کنید، برچه‌پایه‌هایی آن‌رادرست‌می‌پندارید؟»

«مثلث را می‌توان یك چهارضلعی به‌حساب آوردکه طول یکی از ضلع‌های‌آن برابرصفر باشد (یا یکی از زاویه‌های‌آن برابر۱۸۰ درجه‌باشد). آیا این‌مطلب کمکی به‌شما می‌کند؟»

وسرانجام، دیر یازود، واحتمالاً خوددانش‌آموزان به‌طور مستقل، باید به‌این نتیجه‌ها برسندکه:

فهرستی‌که تنظیم کرده‌ایم، به‌ماتلقین می‌کند:

بین همهٔ شکل‌های مسطحه‌ای که محیطی برابر دارند، دایره دارای

بیشترین مساحت است.

بین همهٔ چهارضلعی‌هایی که محیط برابر دارند، بیشترین مساحت متعلق به‌مربع است.

بین همهٔ مثلث‌های با محیط‌برابر، حداکثر مساحت را مثلث‌متساوی‌الاضلاع دارد.

درمیان همهٔ n ضلعی‌هایی که محیطی برابر داشته باشند ، مساحت n ضلعی منتظم از همه بیشتر است.

با مطالعهٔ این فهرست، به نتیجهٔ دیگری هم می‌توان رسید : اگر دو چندضلعی منتظم، محیطی برابر داشته باشند، مساحت‌بیشتر متعلق به‌آن‌چند‌ضلعی است‌که تعداد ضلع‌هایش بیشتر باشد. (از آن‌جاکه دایره را می‌توان یك چند ضلعی با حداکثر تعداد ضلع‌ها به‌حساب‌آورد، بنابراین، مساحت آن هم، حداکثر خواهد شد.)

البته، هیچ‌کدام از این‌حکم‌ها را نمی‌توان، تنها بااین فهرست، ثابت کرد، ولی از این فهرست می‌توان، به‌عنوان مبنایی، برای امید به درستی این حکم‌ها استفاده‌کرد.

تجربه می‌تواند مبنای خوبی برای تلقین‌یك مفهوم‌کلی و، ضمناً، در تأیید آن باشد: درستی یك‌حکم درتعداد زیادی ازحالت‌ها، شهادتی‌جدی به نفع درستی حکم‌کلی است.

از این فهرست ، می‌توان نتیجه‌گیری‌های مشابه دیگری هم به‌دست آورد، ضمناً اضافه شدن تعداد مثال‌ها، موجبی برای بروز فرضیه‌های تازه است.

§۴. بازهم یك‌مثال

«یونانیان باستان، تصور جالبی درمورد مثلث داشتندکه ما امروزآن

را رابطهٔ هرون می‌نامیم وبا برابری زیر بیان می‌کنیم[1]

$$S^{2}=p(p-a)(p-b)(p-c)$$

که درآن، S مساحت مثلث؛ a،b و c سه ضلع آن و

$$p=\frac{a+b+c}{2}$$

نصف محیط آن است.

اثبات رابطهٔ هرون چندان ساده نیست ومن نمی‌خواهم، دراین‌جا، به‌آن بپردازم. ولی ، با در دست نداشتن اثبات، نمی‌توانیم به‌درستی این رابطه‌اطمینان داشته باشیم ـ ممکن‌است حافظهٔ من، ضمن نوشتن این‌رابطه، اشتباه‌کرده باشد. آیا نمی‌توانید ، این رابطه را مورد تحقیق قرار دهید؟ به چه‌ترتیب ، می‌توان به‌این‌تحقیق دست‌زد؟»

ـ آن‌را درمورد مثلث متساوی‌الاضلاع آزمایش‌می‌کنیم.

دراین حالت داریم: $a=b=c$ و $p=\frac{3a}{2}$ و رابطه، به‌نتیجهٔ درستی می‌رسد.

«دیگر چه‌کاری می‌توانیم انجام دهیم؟»

ـ اجازه بدهیدآن را درمورد مثلث قائم‌الزاویه آزمایش‌کنیم.

ـ دربارهٔ مثلث متساوی‌الساقین هم می‌توان‌آزمایش‌کرد.

درحالت اول $c^{2}=a^{2}+b^{2}$ ودرحالت دوم $a=b$، ودرهر دوحالت (در این‌جا، تنها به مقداری تبدیل‌های جبری نیاز داریم)، رابطهٔ هرون به نتیجهٔ درستی می‌رسد. (از خواننده می‌خواهیم، خود، این تبدیل‌های جبری را انجام دهد.)

«خوب، به‌چه نتیجه‌ای می‌رسید؟»

ـ باید، به‌درستی رابطه، باور داشته باشیم.

«آیا بازهم نمی‌توانید حالت خاصی را پیداکنیدکه، تا حدی، نمونـه

---

۱. ظاهراً، ارشمیدس هم از این رابطه اطلاع داشت . ارشمیدس سه سده پیش از هرون می‌زیست.

باشد؟»

«دربارهٔ مثلثی که «خراب» شده باشد، چه عقیده‌ای دارید؟ منظورمن، حالت حدی یا مرزی مثلث است، وقتی که تبدیل به‌یك پاره‌خط شده باشد».

دراین حالت $p=c$ (یا a یا b) و روشن‌است که رابطهٔ ما، به نتیجهٔ درستی می‌رسد.

ـ آقای معلم، خواهش می‌کنم بگویید، چقدر باید آزمایش کرد تا به درستی رابطه، اطمینان پیدا کنیم؟

معلم می‌تواند، باآغاز ازاین پرسش، بحث خود را شروع کند.

۵§. تصور نموداری استدلال استقرایی

باآزمایش‌هایی که در۴§، درمورد رابطهٔهرون-انجام دادیم، چه‌چیزی را به‌دست آوردیم وبه‌چه چیزی نرسیدیم؟ همهٔ تحقیق‌های ما به مثلث‌هایی مربوط می‌شد که شکل مشخصی‌داشتند؛ بنابراین، مسأله را می‌توان باشرح همهٔ نوع‌های ممکن مثلث، روشن کرد.

x، y و z را، ضلع‌های مثلث می‌گیریم و آن‌ها را به‌ترتیب اندازهٔ طول آن‌ها می‌نویسیم، یعنی فرض می‌کنیم:

$$0<x\leqslant y\leqslant z$$

ضمناً، باید داشته باشیم:

$$x+y>z$$

ازآن‌جاکه تنها شکل مثلث، ونه اندازه‌های آن، موردنظر ماست، می‌توان فرض کرد:

$$z=1$$

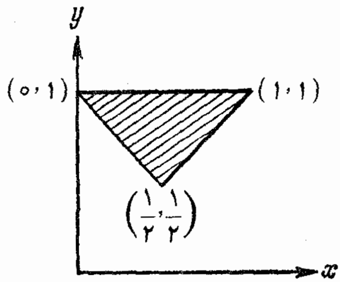
به‌این‌ترتیب، سه نابرابری داریم:

$$x\leqslant y,\quad y\leqslant 1,\quad x+y>1 \qquad (1)$$

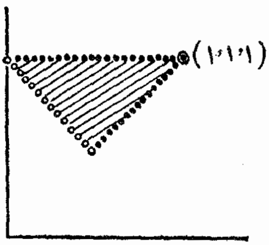
اکنون، مثلث با ضلع‌های x، y و ۱، ویا به‌صورت کوتاه، مثلث $(x,y,1)$ را با نقطهٔ (x,y) از صفحه نشان می‌دهیم (x و y مختصات‌قائم

دکارتی هستند). هریك از سه نابرابری (۱)، موضع نقطهٔ (x, y) را، در صفحه، محدود به یك نیم صفحه می‌کند (در دو حالت اول، همراه با مرز نیم‌صفحه و درحالت سوم، بدون مرزآن). اگر هرسه نابرابری را باهم در نظر بگیریم، به فصل مشترك سه نیم صفحه، یا مجموعهٔ نقطه‌هایی که معرف اشتراك سه‌نیم صفحه است، می‌رسیم. این فصل مشترك، مثلثی است (شکل ۴۷-a) با رأس‌های (۱،۱)، (۰ ، ۱) و $\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2}\right)$ (که ضمناً شامل رأس (۱،۱) و دوضلعی است که ازاین رأس عبورمی‌کنند، ولی شامل رأس سوم وضلع سوم نیست)؛ این شکل معرف مجموعهٔ همهٔ مثلث‌های مختلف است و هر نقطهٔ (x,y) آن نماینده یك مثلث مشخص $(x, y, 1)$ است؛ ضمناً، نقطه‌های مختلف، نمایندهٔ مثلث‌های با شکل‌های مختلف‌اند.

کدام یك از نقطه‌های شکل ۴۷-a، پاسخ‌گوی حالت‌های خاصی از مثلث‌اند که در ۴§ بررسی کردیم؟



شکل ۴۷-a. مجموعهٔ شکل‌های مثلث.



شکل ۴۷-b. آزمایش، برای مثلث متساوی‌الاضلاع

ابتدا، رابطهٔ هرون‌را، برای مثلث‌متساوی‌الاضلاع، آزمایش می‌کنیم. این مثلث، پاسخ‌گوی نماد (۱ ، ۱ ، ۱) است که روی شکل ۴۷-b، با نقطهٔ (۱،۱) نشان داده شده است.

سپس، رابطه را برای مثلث‌های قائم‌الزاویه، تحقیق می‌کنیم. اگر مثلث $(x, y, 1)$ قائم‌الزاویه باشد، آن‌وقت، ضلع بزرگتر ۱، وتر آن خواهد

بود و بنابراین

$$x^{۲}+y^{۲}=۱$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که مثلث‌های قائم‌الزاویه، کمانی از یک دایره (به شعاع واحد) را نشان می‌دهند (شکل c-۴۷).

بعد، به‌مثلث‌های متساوی‌الساقین می‌پردازیم. دراین‌جا، بایددوحالت درنظر گرفت: حالت اول وقتی که دوضلع بزرگتر مثلث با هم برابرند و بنابراین

$$y=۱$$

وحالت دوم، وقتی‌که دو ضلع کوچکتر مثلث با هم برابرند، یعنی وقتی‌که

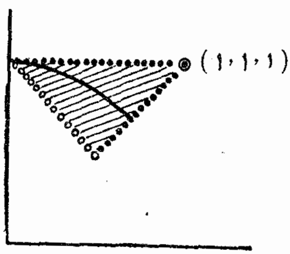
$$x=y$$

از این‌جا نتیجه می‌شود، نقطه‌هایی که نمایندهٔ مثلث‌های متساوی‌الساقین هستند، دوپاره‌خط مرزی را پر می‌کنندکه درشکل d-۴۷ نشان‌داده شده‌اند (خطهای کامل را روی این‌شکل ببینید. این خطها روی شکل‌های b-۴۷ و c-۴۷ با نقطه‌های سیاه نشان‌داده شده‌اند).

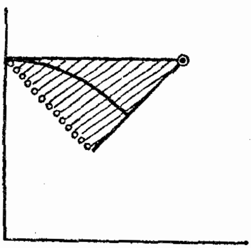
بالاخره، برای مثلث‌های بامساحت صفر داریم:

$$x+y=۱$$

این «مثلث‌ها»، پاره‌خط مرزی‌سوم را به‌وجود می‌آورندکه روی‌شکل e-۴۷ با خط کامل نشان‌داده شده است(روی شکل‌های b-۴۷، e-۴۷ و d-۴۷، این پاره‌خط را با دایره‌های توخالی نشان‌داده‌ایم).

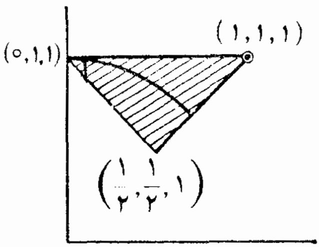


شکل c-۴۷ . . . . و برای مثلث‌های قائم‌الزاویه



شکل d-۴۷ . . . . و برای مثلث‌های متساوی‌الساقین

بامطالعهٔ دنبالهٔ شکل‌های b-۴۷ تا e-۴۷، به‌روشنی، روند پیشرفت استدلال استقرائی‌را می‌بینیم. درابتدا (شکل b-۴۷ را ببینید)، آزمایش‌حکم، تنها یك نقطه ازکل شکل را در برمی‌گرفت. سپس، روی شکل، به‌تدریج، خط‌های کامل بیشتر وبیشتری پدیدار شدکه درحیطهٔ آزمایش قرارگرفته‌اند.



شکل e-۴۷ . . . و برای مثلث‌های با مساحت صفر.

نقطه‌های معرف‌مثلث‌های حالت‌های خاص، که رابطهٔ هرون درموردآن‌ها صدق می‌کند، درطول این خطها قرار گرفته‌اند. با وجود این، هنوز رابطهٔ هرون، برای «تودهٔ اصلی» مثلث‌های کلی، مورد تحقیق قرار نگرفته است ؛ نقطه‌های معرف این مثلث‌ها، درمحدود خطها و در داخل‌حوزه واقع شده‌اند. ولی، علی‌رغم این موضوع، می‌توان‌اشاره‌کرد: ازآن‌جاکه رابطهٔ هرون برای همهٔ نقطه‌های مرزی حوزهٔ مثلثی و، همچنین، برای خطی از این‌حوزه که آن را قطع می‌کند، درست است، به‌طورطبیعی‌می‌توان انتظارداشت‌که‌این رابطه، برای‌همهٔ بقیهٔ‌حالت‌ها هم، درست باشد. جزء، کاملاً قانع‌کننده، کل را زمزمه و تلقین می‌کند.

§۶. مثالی از تاریخ

دراین‌جا، به‌بررسی مسأله‌ای از هندسهٔ فضایی می‌پردازیم . در این راه، از مسیری پیروی می‌کنیم‌که دو ریاضی‌دان بزرگ رفته‌اند و ، برای این‌که اثر روایت من بیشتر باشد، نام‌آن‌ها راکمی بعدتر می‌آورم.

۱°. شباهت، مسأله را تلقین می‌کند. چند وجهی‌که به‌وسیلهٔ چندوجه محدود شده باشد، با چند ضلعی‌که به‌وسیلهٔ چند پاره خط محدود شده باشد، شباهت‌دارد. شباهت‌بین چندوجهی‌درفضا با چندضلعی درصفحه، روشن است. ولی‌چندضلعی‌ها، برای‌بررسی، ساده‌تر و در دسترس‌تر ازچندوجهی‌ها هستند؛ می‌توان‌انتظارداشت‌که، هرمسألهٔ مربوط به‌چندضلعی، خیلی ساده‌تر ازمسألهٔ متناظر آن درهندسهٔ فضایی (که به‌ویژگی چندوجهی مربوط می‌شود) باشد.

با کشف حقیقتی در مورد یك چندضلعی، می‌توان درجست و جوی موقعیت مشابهی برای چندوجهی بود؛ دراین جست‌وجو، احتمال زیادی، برای پیدا کردن چیزی آموزنده، وجود دارد.

مثلاً ،می‌دانیم که مجموع زاویه‌های مثلث، برای همهٔ مثلث‌ها، مقدار ثابتی است، به‌شکل یا اندازه‌های مثلث بستگی ندارد و برابر است با ۱۸۰ درجه، یا دو قائمه یا π (با واحد رادیان؛ از این به بعد ترجیح می‌دهیم، برای بیان اندازهٔ زاویه‌ها، از مقیاس رادیان استفاده کنیم). حکم کلی‌تر این است که، مجموع زاویه‌های داخلی هرn ضلعی، برابر است با $\pi(n-۲)$. آیا نمی‌توان چیز مشابهی درمورد چند وجهی‌ها پیدا کرد؟

۲°. می‌کوشیم تا از همهٔ امکان‌ها استفاده‌کنیم. هنوزهدف ما، کاملاً روشن نیست. می‌خواهیم، اطلاعی دربارهٔ مجموع زاویه‌های چند وجهی پیدا کنیم، ولی به‌کدام زاویه‌ها نظر داریم؟

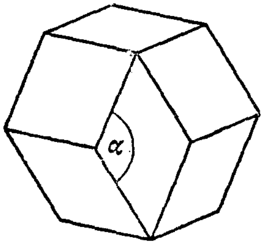
هریال‌چند وجهی، متناظر بایك زاویهٔ دو وجهی است‌که وجه‌های آن، درطول همین یال، یکدیگر را قطع کرده‌اند. هر رأس چند وجهی، متناظر است بایك زاویهٔ جسمی (یا کنج) که به‌وسیلهٔ تعدادی وجه (سه یا بیشتر)، که دراین رأس به‌هم رسیده‌اند، به‌وجود آمده است. کدام یك از این‌دونوع زاویه‌را باید مطالعه کنیم؟آیایکی‌ازاین دونوع زاویه،ویژگی ساده‌ای‌دارند؟ مثلاً ، درمورد مجموع شش‌زاویهٔ دووجهی یك چهاروجهی، چه‌وضعی‌وجود دارد؟ درمورد مجموع چهار کنج (یا زاویهٔ جسمی) آن، چه می‌توان گفت؟

به‌نظر می‌رسد که هیچ‌کدام از این دو مجموع، مستقل از شکل چهار وجهی نیستند (تمرین ۱۵ را ببینید). چه بدبختی! انتظار نداشتیم که چهار وجهی، این‌طور تك‌روی کند. گمان می‌کردیم که با مثلث شباهت دارد.

ولی، ممکن است، هنوز همه چیز را از دست نداده باشیم ؛ آخر، هنوز از همهٔ امکان‌ها استفاده نکرده‌ایم. چند وجهی، علاوه بر دونوع یاد‌شده، زاویه‌های ازنوع دیگری هم دارد (که ضمناً، قابل‌دسترس‌تر ازدونوع دیگر هم هستند): هر n ضلعی، که یك وجه چند وجهی را تشکیل می‌دهد، دارایn زاویهٔ داخلی‌مسطحه است. این زاویه‌ها را، به‌طورساده، زاویه‌های

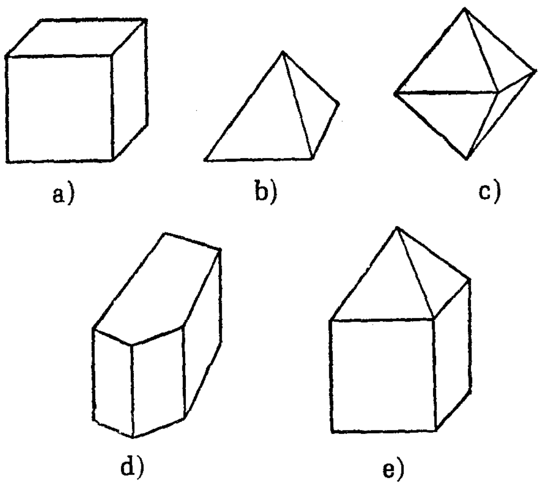
مسطحهٔ چندوجهی می‌نامیم و تلاش می‌کنیم، مجموع همهٔ زاویه‌های مسطحهٔ یك چند وجهی را به‌دست آوریم؛ این مجموع را $\sum\alpha$ می‌نامیم (شکل ۴۸ را ببینید).

۳°. مشاهده می‌کنیم. اگر، به‌عنوان یك پژوهشگر، راهی به مسأله پیدا نمی‌کنیم و چشم‌اندازی برای آن نمی‌بینیم، همچون یك آزمایش‌گر به‌مسأله نزدیك شویم: تعدادی چندوجهی انتخاب و، برای هر یك از آن‌ها، $\sum\alpha$ (یعنی، مجموع زاویه‌های مسطحه) را محاسبه می‌کنیم. می‌توان از مکعب آغاز کرد (شکل ۴۹-a). هر وجه مکعب، یك مربع است؛ مجموع زاویه‌های یك مربع برابر است با 2π. مکعب شش وجه دارد و، بنابراین، مجموع زاویه‌های مسطحهٔ $\sum\alpha$، درحالت مکعب، چنین می‌شود.



شکل ۴۸. زاویهٔ مسطحهٔ یك چند وجهی.

$$\sum\alpha = 6 \times 2\pi = 12\pi$$



شکل ۴۹. چند وجهی‌ها.

این‌مسأله‌را، به‌همین‌ترتیب، درمورد چهار وجهی وهشت وجهی (شکل‌های ۴۹-b و ۴۹-c) هم می‌توان حل کرد. در این‌جا، مشکلی پیش نمی‌آید.

سه نوع چند وجهی که تا این‌جا بررسی‌کردیم، منتظم بودند. اکنون به‌بررسی یک چند وجهی نـامنظم، ومثلاً یك منشور بـا قاعدهٔ پنج ضلعی (شکل ۴۹-d) می‌پردازیم. این‌چند وجهی، دونوع وجه‌دارد: پنج‌مستطیل و دوپنج ضلعی؛ بنابراین، در این حالت

$$\sum\alpha = ۵ \times ۲\pi + ۲ \times ۳\pi = ۱۶\pi$$

سپس، یك چند وجهی درنظر می‌گیریم‌که، درکلاس، کمتر بـا آن برخورد داشته‌ایم: مکعبی‌که به‌یك هرم آراسته شده است («شیروانی» هرمی: شکل e-۴۹ را ببینید). این‌چند وجهی، شبیه «برجی» است‌که ۹ وجه دارد: پنج وجه آن مربع وچهار وجه دیگرآن مثلث است: مجموع زاویه‌های مسطحهٔ آن، چنین است.

$$\sum\alpha = ۵ \times ۲\pi + ۴ \times \pi = ۱۴\pi$$

نتیجهٔ این‌آزمایش‌ها را درجدول I مرتب‌کرده‌ایم، که درآن، منظور از G، تعداد وجه‌های چند وجهی است:

جدول I

شکل چند وجهی	G	$\sum\alpha$
مکعب.	۶	۱۲π
چهار وجهی.	۴	۴π
هشت وجهی.	۸	۸π
منشور با قاعدهٔ پنج‌ضلعی.	۷	۱۶π
برج.	۹	۱۴π

آیا چیز مناسبی دراین‌جا نمی‌بینید: یك قانون‌مندی یا یك قاعده؟

۴°. با توجه به‌هدفی معین، مشاهده می‌کنیم. تعجبی‌ندارد‌که تاکنون

نتوانسته‌ایم، از آن‌چه که جمع‌آوری کرده‌ایم، چیزی کشف کنیم: تنهامشاهده، وبدون این‌که هدفی راهنمای آن باشد، به‌ندرت ممکن است به‌نتیجهٔ قابل توجهی برسد.

اگر کمی دربارهٔ آن‌چه انجام داده‌ایم، فکر کنیم، می‌توانیم راه خروج از دشواری را پیدا کنیم. در۳°، چند بار، مجموع زاویه‌های مسطحه، یعنی $\sum\alpha$، را محاسبه کردیم؛ در این محاسبه از این راه رفتیم که پشت‌سر هم، مجموع زاویه‌های هروجه‌را به‌دست‌آوردیم: مجموع‌زاویه‌های هر وجه، برای ما، معلوم بود و، همین امر، راهنمای ما در این محاسبه بود. اکنون، مجموع همهٔ زاویه‌های مسطحهٔ واقع دریك رأس چندوجهی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم. ازاین مجموع، اطلاع دقیقی نداریم، ولی این‌را می‌دانیم که مجموع زاویه‌های مسطحه هر رأس چندوجهی، از ۲π کمتر است، زیرا ۲π، اندازهٔ یك زاویهٔ کامل است. (البته، دراین جا، به چندوجهی های محدب نظر داریم که، به‌طور شهودی، معنای آن را می‌فهمیم؛ اثبات این حکم را درهر کتاب درسی می‌توان پیدا کرد.) اگر تعداد رأس‌های چند وجهی را B بگیریم، درآن صورت، برای مجموع کلی زاویه‌های مسطحه داریم:

$$\sum\alpha < ۲\pi B$$

این رابطه را با آن‌چه از «آزمایش» به‌دست‌آورده بودیم، مقایسه می‌کنیم. جدول II را، که در واقع، تفصیل همان جدول I است، تنظیم می‌کنیم:

جدول II

$۲\pi B$	B	$\sum\alpha$	G	شکل چند وجهی
۱۶π	۸	۱۲π	۶	مکعب . . . .
۸π	۴	۴π	۴	چهار وجهی . . . .
۱۲π	۶	۸π	۸	هشت وجهی . . . .
۲۰π	۱۰	۱۶π	۷	منشور با قاعدهٔ پنج ضلعی. . . .
۱۸π	۹	۱۴π	۹	برج . . . .

از این جدول دیده می‌شود که، درهمهٔ چند وجهی‌ها، عدد $۲\pi B$ بزرگتر از $\sum\alpha$ است؛ اگر توجه بیشتری به‌جدول بکنید، بی‌تردید متوجه می‌شوید که اختلاف این دو عدد، مقداری است ثابت: $۲\pi B - \sum\alpha = ۴\pi$

از این رابطهٔ ساده چه نتیجه‌ای می گیریم؟ به‌احتمال زیاد، به‌این فکر می‌افتید که، این رابطه، نه‌تنها برای چند وجهی‌های موردمطالعه، بلکه به‌طورکلی برای هرچند وجهی محدبی باید درست باشد. بنابراین، به‌این حکم می‌رسیم که

$$\sum\alpha = ۲\pi B - ۴\pi \qquad (?)$$

علامت سئوالی‌راکه در داخل پرانتز، جلو این رابطه، نوشته‌ایم، بایدبه‌این معنا بگیریم که این‌رابطه هنوز ثابت‌نشده‌است ـ این‌یك فرضیه‌است‌نه قضیه.

۵°. دربارهٔ فرضیهٔ خود تحقیق می‌کنیم. مشاهده، سرانجام‌مارا به‌حکمی جالب رسانید. ولی‌آیا اشتباه نمی‌کنیم؟

آن‌را، بازهم، درمورد چندنمونهٔ دیگر به‌آزمایش می گذاریم. علاوه برمکعب، چهاروجهی وهشت‌وجهی، هنوز دوچند وجهی‌منتظم دیگرداریم: دوازده وجهی و بیست وجهی. دربارهٔ آن‌هاهم، تحقیق می کنیم. به‌جزاین‌ها می‌توان، منشور با قاعده n ضلعی، هرم با قاعدهٔ n ضلعی وهرم مضاعف با قاعدهٔ n ضلعی‌را هم درنظر گرفت (منظور از هرم مضاعف با قاعدهٔ n ضلعی، دو هرم با قاعده‌های برابر است‌که روی قاعده‌ها به‌هم چسبانده شده باشند؛ روشن است که قاعده‌ها، جزو وجه‌ها نیستند) . خواننده، خود مـی‌تواند به سادگی، جدول II را دربارهٔ این‌چند وجهی‌ها ادامه دهد:

جدول II (ادامه)

شکل چند وجهی	G	$\sum\alpha$	B	$۲\pi B$
دوازده وجهی	۱۲	۳۶π	۲۰	۴۰π
بیست وجهی	۲۰	۲۰π	۱۲	۲۴π
منشور باقاعدهٔ n ضلعی. . .	$n+۲$	$(۴n-۴)\pi$	$۲n$	$۴n\pi$
هرم با قاعدهٔ n ضلعی. . . .	$n+۱$	$(۲n-۲)\pi$	$n+۱$	$(۲n+۲)\pi$
هرم‌مضاعف‌باقاعدهٔnضلعی. .	$۲n$	$۲n\,\pi$	$n+۲$	$(۲n+۴)\pi$

چه خوب، حکم رابطهٔ (?)، با همهٔ حالت‌های مورد بررسی، سازگار است. با وجود این، هنوز حکم ما ثابت نشده‌است، تنها با این آزمایش‌ها، رد نشده است.

۶°. تأمل‌هایی برای ادامهٔکار. برای‌محاسبهٔ $\sum\alpha$، همه‌جا ازیك روش استفاده‌کردیم: همه‌جا از محاسبهٔ مجموع زاویه‌های متعلق به‌یك وجه‌آغاز کردیم. چرا از همین روند برای حالت‌کلی استفاده نکنیم؟ برای این که، به‌این امرتحقق بخشیم، باید نشانه‌های تازه‌ای‌را وارد درعمل کنیم. فرض کنید

$$s_1, s_2, s_3, \ldots, s_G$$

به‌ترتیب، به‌معنای تعداد یال‌های نخستین، دومین، سومین،... و آخرین وجه باشند. طبق این نشانه‌گذاری، داریم:

$$\sum\alpha = \pi(s_1 - 2) + \pi(s_2 - 2) + \ldots + \pi(s_G - 2) =$$
$$= \pi(s_1 + s_2 + \ldots + s_G - 2G)$$

از طرف دیگر، تعدادکل یال‌ها، در همهٔ G وجه، برابر است با

$$s_1 + s_2 + s_3 + \ldots + s_G$$

دراین‌مجموع، هریال‌چندوجهی دوبار به‌حساب می‌آید (زیرا، هریال، فصل مشترك دو وجه است) و، بنابراین

$$s_1 + s_2 + \ldots + s_G = 2P$$

که درآن، P به‌معنای تعداد یال‌های چند وجهی است. از این‌جا به‌دست می‌آید:

$$\sum\alpha = 2\pi(P - G) \qquad (!)$$

بیان دومی برای $\sum\alpha$ پیدا کردیم، ولی بین آن‌ها، اختلافی جدی وجود دارد؛ می‌خواستیم حکم (?) را ثابت‌کنیم، حکم (!) ثابت شد. اگر بین دو رابطهٔ (?) و (!)، $\sum\alpha$ را حذف‌کنیم، به‌دست می‌آید:

$$G + B = P + 2 \qquad (??)$$

که هنوز ثابت نشده است و، به‌همین مناسبت، نشانهٔ (??) را در برابر آن قرارداده‌ایم. در واقع، بیان (??) هم، به‌اندازهٔ بیان (?) تردیدآمیز است؛

آن‌ها به‌وسیلهٔ‌رابطهٔ ثابت شده (!) به‌هم‌مربوط شده‌اند و، بنابراین، یاهردو درست‌اند ویا هردو نادرست؛ این دو بیان، هم‌ارز یکدیگرند.

۷°. آزمایش. رابطهٔ‌مشهور (??)و، همچنین، رابطهٔ کمترمشهور(?)، به‌وسیلهٔ اولر پیدا شد، ولی او نمی‌دانست که دکارت هم‌قبلاً به‌آن پرداخته بود. دربارهٔ کار دکارت روی این مسأله، از روی جملهٔ کوتاهی می‌توان قضاوت‌کرد که دربین یادداشت‌های چاپ نشدهٔ او پیدا کردند و یك سده بعد از مرگ اولر، آن را منتشرکردند.

اولر، دو مقالهٔ خود را، به این مسأله اختصاص داده است و دریك مقالهٔ سوم هم، به‌صورتی‌کوتاه، به‌آن اشاره کرده است. آخرین اشارهٔ او به‌مجموع زاویه‌های جسمی چهار وجهی مربوط می‌شود (که، همان‌طورکه در۲° یادآوری‌کردیم، به‌شکل آن مربوط می‌شود).

ضمن بررسی این مسأله درقسمت‌های قبل، ما به‌طورکلی، از مقالهٔ اول اولر پیروی‌کردیم که، درآن، شرح داده است که چگونه توانسته است به‌کشف خود برسد؛ او دراین مقاله، به‌اثبات صوری مسأله نپرداخته وآن را درمورد تعداد زیادی مثال موردتحقیق قرار داده است. بازهم شیوهٔ اولر را دنبال می‌کنیم. اگر مقدار P را هم، درجدول‌های قبل وارد کنیم، به جدول III می‌رسیم.

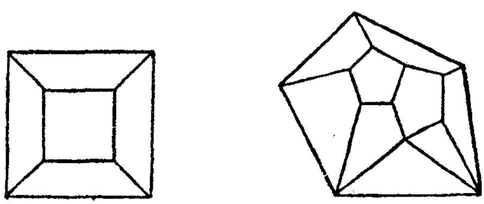
جدول III

شکل چند وجهی	G	B	P
چهار وجهی	۴	۴	۶
مکعب	۶	۸	۱۲
هشت وجهی	۸	۶	۱۲
دوازده وجهی	۱۲	۲۰	۳۰
بیست وجهی	۲۰	۱۲	۳۰
برج	۹	۹	۱۶
منشور با قاعدهٔ nضلعی . . .	$n+۲$	۲n	۳n
هرم با قاعدهٔ n ضلعی	$n+۱$	$n+۱$	۲n
هرم‌مضاعف‌باقاعدهٔnضلعی. .	۲n	$n+۲$	۳n

رابطهٔ (??)، به‌وسیلهٔ هرسطر از جدول III موردتأیید قرارمی گیرد؛ این وضع ما را تا حدی نسبت به‌درستی آن قانع مـی کند، ولی البته، هنوز اثبات‌آن نیست.

۸°. دربارهٔ نتیجه‌هایی که به‌دست آمده است، می‌اندیشیم. اولر، در مقالهٔ دوم خود تلاش می کند تا رابطهٔ (??) را ثابت کند؛ ولی تلاش او به نتیجه نمی‌رسد. درواقع، بحث‌های قبلی، ما را کاملاً به‌اثبات نزدیک کـرده است، تنها باید بتوانیم راهی برای ادامهٔ کار پیدا کنیم.

سعی کنیم به‌این مطلب بپردازیم که معنای نتیجه گیری (!) را دریابیم. به‌خصوص، توجه خود را به‌این نکته معطوف مـی‌کنیم که، با تغییر شکل چند وجهی، چه وضعی پیش مـی‌آیـد. تغییر را، به‌صورتی پیوسته، در نظر می گیریم، یعنی فرض‌می کنیم، شیب وجه به‌تدریج تغییر کند؛ دراین میان، تغییردایمی خطها و نقطه‌های برخوردوجه‌ها (یال‌ها و رأس‌های‌چندوجهی)، منجر به‌تغییر «هیأت» یا «ساختار ریختی»چندوجهی نمی‌شود؛ به‌زبان دیگر، رابطهٔ متقابل بین یال‌ها و رأس‌های آن ثابت می‌ماند. ضمناً، عددهای G، P وB (یعنی به‌ترتیب، تعداد وجه‌ها، یال‌ها و رأس‌ها) ثابت می‌مانند. دراین‌تغییر چند وجهی، ممکن است، هر زاویهٔ مسطحهٔ α، به‌طور جداگانه، تغییر کند، ولی با توجه به‌رابطهٔ (!) (که‌آن را ثابت‌کرده‌ایم)، این تغییر، نمی‌تـواند برمجموع زاویه‌های مسطحه تأثیر بگذارد، یعنی مجموع $\sum\alpha$ همهٔ زاویه‌ـ های مسطحه، ثابت مـی‌ماند. این گونه تغییر درشکل نخستین چند وجهی، امکان‌هایی را دراختیار ما می گذارد؛ تنها این تغییر را باید طوری داد که ،



a) b)

شکل ۵۰. چند وجهی پهن شده

درآن، با راحتی بیشتری بتوان مجموع (ثابت) $\sum\alpha$ را محاسبه کرد.

یکی از وجه‌های چند وجهی را، به‌عنوان قاعده درنظر می گیریم. فرض می‌کنیم، این قاعدهٔ انتخابی افقی باشد؛ آن‌را منبسط (وهمراه‌آن، بقیهٔ چند وجهی را، منقبض) می‌کنیم، به‌نحوی که بتوان تصویر قائم همهٔ چند وجهی را روی آن به‌دست آورد. شکل ۵۰-a حالت مکعب وشکل ۵۰-b حالت چند وجهی کلی را، دراین مورد، نشان می‌دهد. چه دراین‌جا وچه در آن‌جا، یك‌چند وجهی «پهن‌شده» دربرابر ما قرار گرفته است؛ این چندوجهی از دو صفحهٔ محدود منطبق برهم (و با یك دوره) تشکیل شده است که از آن‌ها، صفحهٔ بالایی به ۱ — G چند ضلعی کوچکتر تقسیم‌شده است (G، تعداد وجه‌های چند وجهی اصلی است) وصفحهٔ پایین شامل جزءهای کوچکتری نیست. تعداد ضلع‌های چند ضلعی «کناره» را r می گیریم.

مجموع $\sum\alpha$ را برای‌چند وجهی «پهن‌شده» محاسبه می کنیم(می‌دانیم که این مجموع با مجموع زاویه‌های مسطحه در چند وجهی اصلی، یکی است). این مجموع، از سه بخش تشکیل شده است:

مجموع زاویه‌های «صفحهٔ محدود پایینی» (قاعدهٔ «منبسط شده») که برابر است با π $(r-۲)$؛

مجموع زاویه‌های «حاشیه‌ای» (که درمجاورت‌رأس‌های قاعدهٔ پایین قرار دارند، باز هم برابر همان مقدار، یعنی $\pi(r-۲)$ است؛

مجموع زاویه‌های «درونی» صفحهٔ بالایی، که همهٔ آن‌ها دور $B-r$ رأس داخلی قرارگرفته‌اند و، بنابراین، مجموع‌آن‌ها برابر است با

$$(B-r)۲\pi$$

اگر مجموع این سه نوع زاویه را به‌دست‌آوریم، به‌دست می‌آید:

$$\sum\alpha=۲(r-۲)\pi+(B-r)۲\pi=۲\pi B-۴\pi$$

و این، حکم (?)و، درنتیجه، حکم (??) را ثابت می‌کند.

۷§. روش علمی: حدس بزنید وآزمایش کنید.

مثال‌هایی که آوردیم، به‌ما اجازه می‌دهند تا چند اشارهٔ کلی داشته

باشیم. البته، اگر این مثال‌ها را با تفصیل بیشتری شرح داده بودیم و یا به مثال‌های بیشتری پرداخته بودیم (به‌تمرین‌ها و یادداشت‌های تکمیلی آخر فصل مراجعه کنید)، این اشاره‌ها طبیعی‌تر و مستدل‌تر به‌نظر می‌رسید. با وجود این، براساس همین بررسی کوتاه هم، می‌توان چیزهایی را عنوان کرد.

مشاهده می‌تواند منجر به‌کشف شود.

هدف مشاهده این‌است که حقیقت، طرح یا قانونی‌را، که به‌طورمنظم تکرار می‌شود، کشف کند. در مشاهده شانس زیادی وجود دارد‌که نظر ما را به‌نتیجه‌ای جلب کند، به‌شرطی‌که اندیشه یا هدف معینی، این مشاهده را هدایت کند (۴° از§۶ را ببینید).

مشاهده، تکیه‌گاهی برای رسیدن به‌تعمیم وحدس است، ولی اثبات آن نیست:

حدس خود را روی حالت‌های خاص‌آن و روی حقیقت‌هایی‌که ازآن ناشی می‌شود، آزمایش کنید.

تأیید حالت‌های‌خاص ویا نتیجه‌ها، به‌معنای تأکیدی براحتمال درستی حدس شما است.

بین نشانهٔ اثبات‌وخوداثبات، بین حدس‌وحقیقت، اختلاف جدی‌قایل‌باشید.

شباهت‌هارا حقیر نشمارید ـ آن‌ها ممکن است شما را به‌کشف‌حقیقت‌ـ های تازه‌ای رهنمون شوند (ما این مطلب را، درمورد شباهت چند ضلعی‌ها با چند وجهی‌ها، روشن کردیم؛ ۱° از §۶ را ببینید).

حالت‌های حدی را بررسی کنید (مثل مثلث‌های بامساحت صفریاچند‌ـ وجهی‌های با حجم صفر؛ §۴ و ۸° از §۶ را ببینید).

این اشاره‌ها را، باید دقیق‌تر، مفصل‌تر و منظم‌تر و به‌یاری مثال‌ها ونمونه‌های خیلی‌بیشتری روشن کرد. ولی به‌همین صورتی‌هم‌که در این کتاب داده شده است وهمان‌قدری‌که می‌شود از مثال‌های قبلی بهره گرفت و، چه بهتر، ازبحث خوبی‌که دراین‌باره درکلاس به‌وجود می‌آید، می‌تواندبه‌اندازهٔ کافی، خصلت بررسی‌های علمی‌را برای دانش‌آموزان روشن کند. فیلسوفان، چه آن‌هاکه قبلاً بوده‌اند وچه آن‌هاکه امروز هستند، نظرهای متفاوتی در

بارهٔ مفهوم‌های «بررسی علمی»، «روش علمی» ، «استقراء» و غیره دارند؛ ولی، در واقع، خودآن‌ها به‌چه چیزی مشغول‌اند؟ فرضیه‌ای‌را حدس‌می‌زنند و، بعد، سعی می‌کنندآن‌را درآزمایش‌مورد تحقیق قراردهند. اگر می‌خواهید خصلت روش علمی‌را درسه واژه شرح دهید، به‌نظر من، باید گفت:

حدس بزنید و آزمایش کنید

§۸. دربارهٔ بعضی جنبه‌های مسأله «خصلت پژوهشی ـ علمی»

مسأله‌هایی که مورد بررسی قرار داده‌ایم، تا حدی با مسأله‌های عادی ومتعارف فرق دارند. دراین‌جا می‌خواهم، به‌خصوص، روی سه‌جنبه تکیه کنم.

۱°. دانش‌آموز، مسأله را از معلم خود ویا ازکتاب درسی می‌گیرد و، غالباً، معلم دراین‌باره که آیا دانش‌آموز به‌مسأله‌های انتخابی علاقه‌ای نشان می‌دهد یا نه، تشویشی به‌خود راه نمی‌دهد (درموردکتاب‌های درسی، احتمال این وضع، باز هم بیشتر است). ضمناً، برای ریاضی‌دان، انتخاب مسأله، یکی از مهم‌ترین گام‌ها است: او باید بیندیشد ومسأله‌ای را پیدا کند که مورد علاقه‌اش باشد وتوان و نیروی او را به‌طرف خود جلب کند، ولی درعین‌حال، خارج از طاقت او نباشد. در §§۲ و۴، معلم طوری عمل می‌کند که دانش‌آموزان بتوانند، خود در طرح مسأله شرکت کنند. (با ۱° از §۴ فصل چهاردهم، مقایسه کنید.)

۲°. بسیاری از مسأله‌های کتاب‌های مسأله ویاکتاب‌های درسی، خیلی‌کم به یکدیگر ارتباط دارند: آن‌ها به‌روشن کردن یك قانون مشخص خدمت می‌کنند وتنها کسب مهارت را درکاربرد همین قانون در نظر دارند. وقتی‌که این مسأله‌ها خدمت خود را انجام دادند، می‌توان (وباید) آن‌ها را به‌فراموشی‌سپرد. مسأله‌های §§۲ و۶، خصلتی‌متفاوت‌دارند ـ این‌مسأله‌ها، متنی غنی و پر بار دارند؛ آن‌ها پرسش‌های آموزنده‌ای را موجب می‌شوند

که ازآن‌ها، به‌نوبهٔ خود، مسأله‌های تازه‌ای پدید می‌آید واین وضع تاجایی ادامه می‌یابد که مسألهٔ نخستین، حوزهٔ کاملاً گسترده‌ای‌را دربر می‌گیرد. (درمورد تمرین‌ها ویادداشت‌های تکمیلی آخر فصل هم، وضع به‌همین‌گونه است.)

۳°. دربسیاری ازمکتب‌ها، «حدس‌زدن» راکفر می‌شمارند، درحالی که درهر پژوهش علمی (وازآن‌جمله، در ریاضیات) باید «ابتدا حدس زد و، سپس، ثابت‌کرد» ـ این، تقریباً، یك قانون است.

درمسأله‌های‌موردبررسی ما، مشاهده، حدس، نتیجه‌گیری‌های‌استقرائی ودر یك‌کلام، استدلال‌های نزدیك به‌حقیقت، نقشی اساسی به‌عهده داشتند.

۴°. اگرچه قسمت ۱° (که به‌تشکیل مسأله مربوط می‌شد)، به‌هیچ‌وجه فرعی و درجهٔ دوم نیست، ولی دو قسمت بعدی آن، اهمیت بیشتری دارند. مسأله‌هایی‌که متنی غنی دارند وبه‌دنیای واقع دور و بر ما مربوط می‌شوند و، همچنین، مسأله‌هایی‌که به‌نتیجه‌گیری‌های‌ذهنی‌نزدیك به‌حقیقت می‌انجامند وتوانایی بحث و استدلال را در دانش‌آموزان قوت می‌بخشند، خیلی بهتر از مسأله‌هایی هستندکه کتاب‌های درسی را از آن‌ها پرکرده‌اند و تنها به‌این درد می‌خورندکه دانش‌آموز را درموردکاربرد یك قاعدهٔ‌جداگانه، تمرین بدهند.

§۹. نتیجه‌ها

مثال‌ها ونمونه‌هایی، شبیه آن‌چه دراین فصل داشتیم، به‌نظر من، می‌توان درسطح دبیرستان مطرح‌کرد؛ این‌گونه مطالب، درسه جهت، برای دانش‌آموزان مفید است:

اولاً آن‌ها را به‌ریاضیات علاقه‌مند می‌کند، زیرا امکان‌هایی برای‌کار خلاق و مستقل دراختیارآن‌ها می‌گذارد؛

ثانیاً (واحتمالاً، این،مهم‌ترهم باشد، زیرا علاقهٔ‌بسیاری ازشاگردان رابه‌خودجلب می‌کند)، موجب می‌شوندکه‌دانش‌آموزان، نه‌تنها ریاضیات، بلکه سایر دانش‌ها را هم بفهمند ـ این‌گونه مسأله‌ها، مفهوم اولیه، ولی

قانع‌کنندهٔ «بررسی استقرائی» و «روش علمی» را به‌آن‌ها می‌آموزد؛

ثالثاً، چشم‌اندازی از ریاضیات‌را دربرابر دانش‌آموزان می‌گشایدکه، با وجود اهمیتی‌که دارد، کمتر دربارهٔ آن صحبت می‌شود: دراین مسأله‌ها، ریاضیات به‌صورت دانشی‌جلوه می‌کندکه با دانش‌های دیگر مربوط به‌طبیعت خویشاوند نزدیك می‌شود و به‌صورت «نوعی‌از دانش‌های تجربی» درمی‌آید، که درآن‌مشاهده (تجربه) وشباهت می‌تواند منجربه‌کشف‌شود (این‌چشم‌انداز ریاضیات، به‌خصوص، باید مورد توجه‌کسانی قرار گیرد که، درآینده، به ریاضیات نیاز دارند، مثل دانشمندان علوم طبیعی ومهندسان).

امیدوارم، کشف ریاضی، روش علمی و استقراء، به عنوان یکی از جنبه‌های ریاضیات، بتواند درآینده جایی در برنامهٔ دبیرستانی پیدا کند و، مثل امروز، تا به‌این اندازه مورد تحقیر قرار نگیرد.

تمرین‌ها ویادداشت‌های تکمیلی

بخش ۱

۱. آیا درمیان حدس‌های مختلفی که براساس فهرست ۲§ (و تنظیم آن در ۳§) زده‌اید، نمونه‌هایی وجود داردکه بتوانید خودتان آن‌ها را ثابت کنید؟ حکم قابل دسترسی را انتخاب وآن را ثابت‌کنید.

۲. (۴§ را ببینید). روش‌های دیگری برای تحقیق درستی رابطهٔ هرون فکر کنید.

۳. (۵§ را ببینید). a، b و c را طول ضلع‌های مثلث و d را طول نیمساز زاویهٔ مقابل به‌ضلع c می‌گیریم.

۱°. d را برحسب a، b و c بیان کنید.

۲°. نتیجه‌ای را که به‌دست آورده‌اید، درچهار حالت شکل b-۴۷ تا e-۴۷، مورد تحقیق قرار دهید.

۴. (۵§ را ببینید). روی شکل e-۴۷، کمان‌به‌شعاع واحد مثلث را (مثلثی که نقطه‌های آن، معرف مثلث‌های با شکل‌های مختلف است) به‌دو بخش تقسیم‌می‌کند، یکی از این‌بخش‌ها دربالای کمان ودیگری در زیرآن قرار

دارد. چه نوع مثلث‌هایی پاسخ‌گوی نقطه‌های بخش اول وچه نوع مثلث‌هایی پاسخ‌گوی نقطه‌های بخش دوم هستند؟

۵. (۸° از ۶§ را ببینید) . سعی کنید عبور از چند وجهی «به‌صورت کلی» را به‌چند وجهی «پهن‌شده» دقیق‌تر شرح دهید.

۶. یك چند وجهی محدب با G وجه، B رأس و P یال درنظر بگیرید؛ G_n (که درآن $n=۳, ۴, \ldots$) به‌معنای تعداد وجه‌های n ضلعی و B_n به معنای تعداد کنج‌های n وجهی است. $\sum G_n$ و $\sum B_n$ چقدر است، که در آن نماد $\sum$ به معنای $\sum\limits_{n=۳}^{\infty}$ است. (البته، دربین همهٔ عددهای G_n، تنها تعداد محدودی مخالف صفر است؛ به‌همین ترتیب درمورد B_n؛ بنابراین $\sum$، در واقع امر، به‌معنای مجموعی محدود است . در برخی از مسأله‌های بعدی هم، که با همین فرض‌ها باشند، $\sum$ به همین معنا است.)

۷. (ادامه). تعداد زاویه‌های مسطحه را، به‌چند طریق مختلف، بیان کنید.

۸. (ادامه) با رسم قطرهای غیرمتقاطع وجه‌های چندوجهی، هر وجه آن‌را به‌مثلث‌هایی تقسیم کنید. به‌چند طریق مختلف، تعداد مثلث‌هایی را پیدا کنید که، به‌این‌ترتیب، روی تمامی سطح چند وجهی به‌وجود می‌آیند.

۹. ثابت کنید

$$P \geqslant \frac{۳G}{۲}, \quad P \geqslant \frac{۳B}{۲}$$

آیا درحالت اول، ممکن است در موقعیتی ، به‌علامت برابری رسید؟ در مورد رابطهٔ دوم هم، به‌همین پرسش، پاسخ دهید.

۱۰. ثابت کنید که در هر چند وجهی محدب، مقدار متوسط زاویهٔ مسطحه از $\frac{\pi}{۳}$ کمتر نیست، ولی‌همیشه از $\frac{۲\pi}{۳}$ کمتر است.

۱۱. ثابت کنید که، در هر چند وجهی محدب ، حتماً وجهی وجود دارد که تعداد ضلع‌های آن، از شش کمتر است.

۱۲. B ، تعداد رأس‌های یك چند وجهی محدب را معلوم فرض می‌کنیم،

حداکثر مقدار ممکن عدد G، تعداد وجه‌ها، وعدد P، تعداد یال‌ها، را پیداکنید. با چه شرطهایی به‌این مقدارها می‌رسند؟

۱۳. G، تعداد وجه‌های یک چند وجهی محدب را مفروض می گیریم، مطلوب است حداکثر مقدار ممکن B و P (تعداد رأس‌ها و یال‌ها). با چه شرطهایی، به‌این مقدارهای حداکثر می‌رسید؟

۱۴. اگر پاره‌خط راستی، دو رأس از چند وجهی محدبی را به‌هم وصل کند، آن‌وقت،این پاره‌خط یایک‌یال، یا یك قطر وجه ویایك قطرچندوجهی خواهد بود؛ این پاره‌خط، وقتی قطر چند وجهی است که، به‌جز دو انتهای آن، هیچ نقطهٔ دیگری ازآن، متعلق‌به‌سطح چندوجهی نباشد. تعداد قطرهای چند وجهی را Dمی گیریم وحرف‌های P،G،B،G_n و B_n را هم، به‌همان مفهوم‌های قبلی، فرض می کنیم.

۱°. مطلوب‌است محاسبهٔ D، برای پنج حالت‌چند وجهی منتظم.

۲°. مطلوب‌است محاسبهٔ D، برای منشور با قاعدهٔ n ضلعی، هرم با قاعدهٔ n ضلعی وهرم مضاعف با قاعدهٔ n ضلعی.

۳°. درحالتی‌که همهٔ وجه‌های چند وجهی، چندضلعی‌هایی باتعداد ضلع‌های برابرباشند، D را برحسب G پیدا کنید($n=۳,۴,۵,...$).

۴°. D را درحالت‌کلی بیان کنید.

حالت‌کلی را با مثال‌هایی روشن کنید. احتیاط کنید: ممکن است پرسش‌ها به‌صورت درستی طرح نشده باشند.

۱۵. (۲° از§۶راببینید)مجموع شش زاویهٔ دو وجهی‌ازیک‌چهاروجهی را $\sum\delta$ و مجموع چهار کنج سه وجهی آن را $\sum\omega$ می‌نامیم. این دو مجموع را، برای سه حالت حدی زیر، پیدا کنید:

۱°. چهار وجهی به صورت مثلثی در آمده است، به نحوی که سه یال چهار وجهی به ضلع‌های این مثلث و سه یال بقیه به‌پاره‌خطهایی تبدیل شده‌اندکه نقطهٔ درونی مثلث را به‌سه رأس آن وصل می کنند.

۲°. چهار وجهی به‌صورت چهارضلعی محدبی درآمده است، به

نحوی که شش یال چهار وجهی به ضلع‌ها و قطرهای این چهارضلعی تبدیل شده باشند.

۳°. یکی از رأس‌ها به‌سمت بی‌نهایت برود، سه‌یالی که به‌این رأس منتهی می‌شوند، به‌صورت سه‌خط موازی وعمود بر وجه مقابل به‌این رأس درآیند.

(کرهٔ واحدی‌را درنظرمی‌گیریم که مرکزآن دررأس کنج چندوجهی باشد. بخشی از سطح آن که در داخل این کنج قرار گرفته است، چند ضلعی کروی نامیده می‌شود. مساحت این‌چند ضلعی کروی، برابر است با اندازهٔ «زاویهٔ جسمی» یا کنج.)

۱۶. (ادامه). پاسخ تمرین ۱۵ را مطالعه کنید. دو مجموعی راکه به‌دست آورده‌اید با هم مقایسه کنید. آیا تغییر آن‌ها، یك خصلت دارند؟ آیا سازگار با هم تغییر می‌کنند؟

۱۷. تعداد وجه‌های چند وجهی را G، تعداد رأس‌های آن را B و تعداد یال‌های آن‌را P بگیرید؛مجموع همهٔ (P) زاویهٔ دو وجهی آن‌را $\sum\delta$ و مجموع همهٔ (B) کنج‌آن را $\sum\omega$ می‌گیریم. این دو مجموع رابرای مکعب محاسبه کنید.

۱۸. (ادامه). مجموع $\sum\delta$ و $\sum\omega$ را برای بررسی‌درساده‌ترین‌دوحالتی که هرم با قاعدهٔ n ضلعی به‌هرمی باحجم صفر تبدیل‌شده است، محاسبه کنید.

۱۹. (ادامه). مجموع $\sum\delta$ و $\sum\omega$ را، برای بررسی حالت‌های حدی منشور و هرم مضاعف با قاعدهٔ n ضلعی، محاسبه کنید.

۲۰. (ادامه). برای همهٔ این‌حالت‌ها، مجموع‌های $\sum\delta$ و$\sum\omega$ را، باعددهای G، B و P، مقایسه کنید؛ به‌دنبال این مطلب بروید که این مقدارها چگونه تغییر می‌کنند. تغییرهای کدام یك از این مقدارها، ارتباط بیشتری با یکدیگر دارند؟

۲۱. (ادامه). اگر موفق شده‌اید قانونی را پیدا کنید، که به‌وسیلهٔ همهٔ «مشاهده‌های» شما تأیید شده است، سعی کنیدآن را ثابت کنید.

بخش ۲

۲۲. سعی‌کنید، پاسخ به‌پرسش‌های زیر را حدس بزنید:

از بین‌همهٔ مثلث‌هایی‌که دریك دایره‌محاط شده‌اند، مساحت‌کدامیك حداکثر است؟

از بین همهٔ چهارضلعی‌هایی‌که در یك‌دایرهٔ مفروض محاط شده‌اند، مساحت کدامیك حداکثر است؟

از بین همهٔ n ضلعی‌های محاط در یك دایـره، مساحت کدام بیشتر است؟

۲۳. سعی‌کنید، پاسخ پرسش‌های زیر را حدس بزنید:

از بین همهٔ مثلث‌هایی کـه بر یك دایـرهٔ مفروض محیط شده‌اند، مساحت‌کدامیك حداقل است؟

از بین همهٔ چهارضلعی‌هـای محیط بر یك دایـره، مساحت کـدامیك حداقل است؟

از بین همهٔ n ضلعی‌های محیط بر یك‌دایره، مساحت‌کدامیك حداقل است؟

۲۴. اصل فقدان پایه‌های‌کافی. پاسخ‌های «طبیعی»که به‌تمرین‌های ۲۲و ۲۳ داده می‌شود، درست‌انـد. دراین‌جـا، نمی‌خواهیم به‌اثبات آن‌ها بپردازیم، بلکه می‌خواهیم بفهمیم، چـرا درچنین موردهایی، مـردم معمولاً درست حدس می‌زنند.

البته، نباید انتظار داشت که ما بتوانیم پاسخ دقیقی به‌این پرسش بدهیم. با وجود این، فکـر می‌کنم که توضیح زیر بتواند به‌خوبـی، احساسی راکه در بسیاری افراد وجود دارد، بیان‌کند.

چرا چند ضلعی‌های منتظم را، این‌طور می‌شناسیم؟ «کامل»ترین و متقارن‌ترین شکل‌های مسطحه، دایره است؛ دایره، بی‌نهایت محـور تقارن دارد، زیرا نسبت به هر قطر خود متقارن است. در میان همهٔ n ضلعی‌ها، n ضلعی منتظم، «به‌کمال نزدیك‌تر است» (یعنی‌به‌دایره)؛ n ضلعی‌های منتظم، متقارن‌ترین n ضلعی‌ها هستند، زیرا بیش از همهٔ

nضلعی‌های دیگر، محور تقارن دارند. به‌همین مناسبت، می‌توان انتظار داشت که چند ضلعی منتظم‌محاطی، بهتراز دیگران، دایره را «پر کند» (وچند ضلعی منتظم محیطی، محکم‌تـر از دیگران، دایـره را «در بر بگیرد»).

شباهت هم، دراین‌جا، دارای نقشی است. در مسأله‌های مـربوط به‌شکل‌های با محیط برابر هم (۳§ و تمرین ۱ را ببینید)، کـه شبیه ایـن مسأله‌ها تنظیم شده بودند ، نقش اکسترمم به‌عهدهٔ همین چند ضلعی‌های منتظم بود.

استدلال‌های نزدیك به‌حقیقت دیگری‌هم وجـود دارد. در این‌جا، یکی ازآن‌ها را، که خیلی ظریف ودرنتیجه شایان‌توجه است، انتخاب می‌کنیم. بحث ما دربارهٔ مسأله‌هایی است که شامل‌چند مجهول هستند وهمهٔ‌آن‌ها با یك‌شرط، که برای همهٔ مجهول‌ها یکی‌است،سازگارند: در ارتباط با این شرط، هیچ‌کدام از رأس‌های چند ضلعی، در موقعیت مناسب‌تری نسبت به‌دیگران قرار نـدارد؛ همین مطلب را درمـورد ضلع‌های چند ضلعی هم می‌توان گفت. بنابراین، می‌توان نتیجه گرفت که جواب مسأله هم ، نه ضلع‌ها و نه زاویه‌ها، نباید امتیازی نسبت به‌هم داشته‌باشند، یعنی بایدباهم‌برابرباشند. بنابراین می‌توان انتظار داشت که جواب مسأله،باید چندضلعی منتظم باشد.

همین تصور، اساس اندیشه‌ای نزدیك به‌حقیقت را تشکیل می‌دهد که ماکوشش می‌کنیم آن را، به‌ترتیب زیر، تنظیم کنیم:

«در موردهمهٔ امکان‌هایی‌که در دسترس داریم، درشرایطی‌که هیچ مبنای‌کافی وجود نداشته باشد، نباید هیچ‌کدام ازآن‌ها را بر دیگران ترجیح دهیم».

این را می‌توان اصل فقدان پایه‌های کافی، برای انتخاب‌چیزی یا برتری چیزی نسبت به‌دیگران دانست. ایـن اصل، می‌تواند نقش معینی درحل مسأله‌ها داشته باشد؛ اغلب، به‌یاری این‌اصل می‌توان جواب‌را حدس زد ویا روندی‌راکه منجر به‌یافتن‌جواب می‌شود، پیدا

کرد. در ریاضیات، می‌توان این اصل را به‌صورتی خاص تنظیم کرد:
«وقتی که مجهول‌ها، در شرط مسأله، نقشی یکسان داشته باشند، می‌توان انتظار داشت که درجواب مسأله‌هم، با نقشی یکسان ظاهر شوند».

ویا با بیانی کوتاه‌تر: «بی‌تفاوتـی درشرطها، به‌معنای بی‌تفاوتـی درنتیجه گیری‌هااست». وبالاخره: «می‌توان‌انتظارداشت، مجهول‌هایی که شرطهایی یکسان دارند، مقدارهایی‌یکسان داشته باشند».

همان‌طور که قبلاً هم دیدیم، ایـن اصل، درهندسه منجر به‌این حدس می‌شود که شکل مجهول باید متقارن بـاشد. به‌همین مناسبت، می‌توان اصل فقدان پایه‌های کافی را، به‌ترتیب‌های زیر که ساده‌تر و قابل‌فهم‌تراست، بیان کرد (اگرچه تا حدی مبهم‌تر می‌شود):

«می‌توان‌انتظار داشت که هرگونه تقارنی که در داده‌ها وشرطهای مسأله وجود داشته باشد، انعکاس خود را درجواب هم پیدا کند».

«تقارن، موجب تقارن می‌شود».

«تقارنی که در داده‌ها و شرطهای مسأله وجـود دارد، نه تنها در «جواب»، بلکه در «روند راه حل» هم، باید منعکس شود.

البته، نبایدفراموش کنیم که، دراین‌جا، صحبت ازیك اصل‌اکتشافی است ونمی‌توان آن‌را، جانشین اثبات کرد.

اصل فقدان پایه‌های کافی، در دانش‌های دیگـر (غیر از ریاضیات خالص) هم، دارای نقش معینی است.

[می‌توان مثالی گویا، درنقض این‌اصل‌آورد (که ما، برای‌سادگی، از اصطلاح‌های جبری درآن استفاده می‌کنیم). این مسأله را در نظر بگیرید: n چند جمله‌ای اصلی از n عـدد داده شده است، می‌خواهیم خود این عددها را پیدا کنیم . اصل فقدان پایه‌های کافی به ما تلقین می‌کند که این n عدد باید یکسان باشند. ولی ضمناً باید انتظار داشته باشیم کـه n ریشهٔ یك معادلهٔ جبری بـا ضریب‌هـای «دلخواه» باید مختلف باشند.]

۲۵. بیچاره الاغ. الاغی که خیلی گرسنه بود، به دو بغل علف خشك، که کاملاً یکسان و به‌یك اندازه اشتهاآور بودند، برخورد کرد؛ یك بغل علف خشك درسمت چپ او و بغل دیگر درسمت راست او بود؛ خود الاغ‌درست در وسط‌آن‌هاقرار داشت، به‌نحوی که علف‌ها، نسبت به‌او، دقیقاً قرینهٔ یکدیگر بودند. نیرویی که هریك از دو تودهٔ علف، الاغ را به‌طرف خود می‌کشید، یکسان بود. الاغ نتوانست هیچ‌کدام از آن‌ها را بردیگری ترجیح دهد و، به‌همین مناسبت از گرسنگی‌مرد.

بیچاره الاغ ــ او قربانی اصل فقدان پایه‌های کافی (برای انتخاب یکی از دوبغل علف) شد.

۲۶. از میان همهٔ چند وجهی‌های دارای B رأس که درکرهٔ مفروضی محاط شده‌اند، حجم کدامیك بیشتر است؟

برای حالت‌های $B = ۴,۶,۸$، سعی کنید پاسخ‌را حدس بزنید.

۲۷. از میان همهٔ چند وجهی‌های با G وجه که برکرهٔ مفروضی محیط‌شده‌اند، حجم‌کدامیك حداقل است؟ جواب را برای حالت‌های $G = ۴,۶,۸$، حدس بزنید.

۲۸. کره‌ای به‌شعاع r مفروض است؛ حجم مکعب محاط درآن را پیدا کنید.

۲۹. کره‌ای به‌شعاع r درنظر بگیرید. در دایرهٔ خط‌استوای‌آن، یك شش‌ـ ضلعی منتظم محاط وبعد هرشش رأس‌آن را به‌دوقطب شمال وجنوب کره وصل کنید. این هشت رأس را می‌توان به‌عنوان رأس‌های یك هرم مضاعف درنظر گرفت. حجم‌آن را محاسبه کنید.

آیا ملاحظه‌ای یا نکته‌ای دراین مورد ندارید؟

۳۰. کره‌ای به شعاع r داده شده است؛ حجم هشت وجهی منتظم محیط برآن را محاسبه کنید.

۳۱. منشور قائم با قاعدهٔ شش ضلعی را ، برکره‌ای به شعاع r محیط کرده‌ایم. سطح جانبی منشور در شش نقطه ودرطول دایرهٔ استوا بر کره، به‌فاصله‌های مساوی از یکدیگر، مماس است. حجم منشور را

پیدا کنید.

آیا به نکته‌ای یا ملاحظه‌ای پی برده‌اید؟

۳۲. جسم‌های هندسی را که درتمرین‌های ۲۸ و ۲۹ داشتیم، باهم مقایسه کنید، همچنین جسم‌های تمرین‌های ۳۰ و ۳۱ را؛ سعی کنید توضیحی نزدیک به حقیقت، برای نتیجه‌هایی که در این تمرین‌ها به‌دست آورده‌اید، پیدا کنید.

۳۳. یك حدس نزدیك به‌حقیقت: از دو چند وجهی محاط در کره، که تعداد رأس‌های هردو برابر B باشد، آن‌که یال‌ها و وجه‌های بیشتری دارد، بهتر کره را «پر می‌کند». فرض می‌کنیم که این حدس درست باشد؛ دراین صورت، فکر می‌کنید چه نوع چند وجهی جواب تمرین ۲۶ باشد؟

۳۴. بازهم یك حدس نزدیك به‌حقیقت: از دوچند وجهی باتعداد وجه‌های برابر G، که بریك کره محیط شده‌اند، آن‌که رأس‌ها و یال‌های بیشتری دارد، بهتر کره را «دربرمی‌گیرد». این حدس را درست فرض می‌کنیم، دراین‌صورت، فکر می‌کنید جواب تمرین ۲۷، چه چندوجهی باشد؟

۳۵. آیا در ارتباط با تمرین ۳۲، بازهم متوجه نکته‌ای نشده‌اید؟

۳۶. از بین همهٔ چند وجهی‌هایی که تعداد وجه‌های برابر G و سطح کل یکسانی دارند، حجم کدامیك بیشتر است؟

با فرض $G=۴، ۶، ۸$، سعی کنید جواب را حدس بزنید.

۳۷. همهٔ جواب‌های این دستگاه را پیدا کنید:

$$\begin{cases} ۲x^۲-۴xy+۳y^۲=۳۶ \\ ۳x^۲-۴xy+۲y^۲=۳۶ \end{cases}$$

دراین‌جا، چه ارتباطی با اصل فقدان پایه‌های کافی، می‌بینید؟

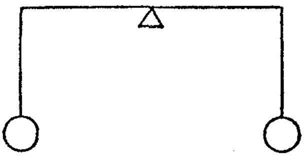
۳۸. همهٔ جواب‌های این دستگاه را پیدا کنید:

$$\begin{cases} ۶x^۲+۳y^۲+۳z^۲+۸(yz+zx+xy)=۳۶ \\ ۳x^۲+۶y^۲+۳z^۲+۸(yz+zx+xy)=۳۶ \\ ۳x^۲+۳y^۲+۶z^۲+۸(yz+zx+xy)=۳۶ \end{cases}$$

۳۹. همهٔ جواب‌های این دستگاه را پیدا کنید:

$$\begin{cases} x^۲+۵y^۲+۶z^۲+۸(yz+zx+xy)=۳۶ \\ ۶x^۲+y^۲+۵z^۲+۸(yz+zx+xy)=۳۶ \\ ۵x^۲+۶y^۲+z^۲+۸(yz+zx+xy)=۳۶ \end{cases}$$

۴۰. اصل فقدان پایه‌های کافی در فیزیك، یا «طبیعت نمی‌تواند بی پیش‌گویی باشد». درآغاز نوشتهٔ ارشمیدس «دربارهٔ تعادل شکل‌های مسطح یا دربارهٔ مرکز ثقل شکل‌های مسطح»، مسأله‌ای دربارهٔ تعادل اهرم وجود دارد. (اهرم، به‌میلهٔ سخت افقی گفته می‌شود که دارای یك نقطهٔ اتکا می‌باشد؛ از وزن خود میله صرف نظر می‌شود.) ارشمیدس، حالتی را درنظر می‌گیرد که نقطهٔ اتکا درست در وسط اهرم واقع باشد و باری که به‌دو انتهای آن آویزان است، باهم برابر باشند (شکل ۵۱)؛ او این مطلب را واضح می‌داند که، در این حالت کاملاً متقارن، دستگاه در وضع تعادل است ـ پوستولات اول ارشمیدس می‌گوید: «وزن‌های مساوی، در فاصله‌های مساوی، در تعادل قرار می‌گیرند». در واقع، اهرم درهمان موقعیت «الاغ بیچاره» است (تمرین ۲۵ را ببینید) وهیچ گونه پایه‌ای کافی برای تمایل به‌این یا آن سمت ندارد.



شکل ۵۱. وزن‌های مساوی در فاصله‌های مساوی.

سعی می‌کنیم، عمیق‌تر، در ماهیت این مسأله وارد شویم. فرض کنیم، کسی، قانونی را بپذیرد که با پوستولات ارشمیدس، متناقض باشد، مثلاً: در وضعی که شکل ۵۱ دارد، بار سمت راست پایین می‌افتد. این حکم را درست می‌گیریم، درآن‌صورت، اگر این قانون برای من، که به‌اهرم نگاه می‌کنم، درست باشد، برای دوست من، که رو در روی من در طرف دیگر اهرم ایستاده است وبه‌آن نگاه می‌کند، غلط ازآب درمی‌آید؛ بنابراین، قانونی که پوستولات ارشمیدس را نقض کند، نمی‌تواند درحالت کلی درست باشد. این بحث مختصر به ما

کمك می‌کند تا به‌راز هواداری‌خود ازپوستولات ارشمیدس پی ببریم: نمی‌خواهیم به‌این فرض تن دهیم که، قانون‌های طبیعت این اجازه را به‌ما نمی‌دهند تا وضع اهرم را پیش‌بینی کنیم.

۴۱. n نقطهٔ‌کره. دوباره، تمرین‌های ۲۶ و ۲۷ را به‌یاد می‌آوریم و آن‌ها را بـه عنوان دو نـمونهٔ اول، از مـیان رشته مسأله‌های شبیه هم، در نظرمی گیریم.

روی سطح یك‌کرهٔ مفروض، n نقطه طوری درنظر بگیریدکه

۱°. چندوجهی محاط درکره، که رأس‌های‌آن دراین نقطه‌ها باشد، حجمی حداکثر داشته باشد؛

۲°. n وجهی محیط بر کره، که در این نقطه‌ها بر کره مماس است، حداقل حجم را داشته باشد؛

۳°. کوتاه‌ترین فاصله، از $\frac{n(n-1)}{2}$ فاصله‌ای کـه بین این n نقطه وجود دارد، حداکثر مقدار ممکن باشد (مسأله‌ای که «ماکـزیمم» و «می‌نیمم» را با هم مطرح‌می کند).

۴°. n بار یکسانی که متقابلاً یکدیگـر را دفـع می کنند و دراین نقطه‌ها قرار گرفته‌اند، دستگاهی را تشکیل دهند که حداکثر پایداری را در تعادل الکتروستاتیکی داشته باشد.

۵°. روی سطح کـره، توده‌ای از چیزی را به‌طـور پیوسته پخش کرده‌ایم که تراکم‌آن در هـریك از n نقطه، اندازه گـرفته می‌شود. می‌خواهیم این نقطه‌ها را طوری انتخاب‌کنیم که باکمك نتیجهٔ‌اندازه‌گیری‌ها، بتوان به‌بهترین وضع ممکن، کل این توده را، تخمین زد.

درهرپنج‌مسأله، درحالت‌هایی که n را ۴، ۶، ۸، ۱۲و۲۰ بگیریم، این نقطه‌ها، قاعدتاً باید رأس‌های چندوجهی منتظم‌محاطی را تشکیل دهند؛ ولی، همان‌طورکه درمثال‌های دیگری‌هم دیده‌ایم، ممکن‌است جواب مسأله نباشند.

بخش ۳

۴۲. مسأله‌های دیگر. چند مسألهٔ دیگر با جنبهٔ پـژوهشی ـ علمی در نظر

بگیرید که با مسأله‌های این فصل متفاوت، ولی شبیه آن‌ها باشند. به پرسش‌های زیر (ویا پرسش‌هایی مشابه‌آن‌ها) به‌طور جدی‌توجه کنید: آیامسأله با برنامه مطابقت دارد و کدام‌جنبهٔ‌آن؟ آیا مسأله،آموزنده است؟ آیـا متنی پر بار دارد؟ آیا انـدیشهٔ مهمی را روشن مـی‌کند؟ آیا، برای حل آن، می‌تـوان روش استقرایی یـا استدلال نزدیك به حقیقت‌را به‌کار برد؟ آیا می‌توان‌آن را، برای‌اثبات مستقل، به‌کلاس داد؟ برای‌کلاس، به‌چه صورتی باید آن‌را طرح کرد؟

۴۳. در §۴، برای تأیید یك رابطهٔ کلی، آن را درحالت‌های خاص مورد بررسی‌قرار دادیم. درکجا، بازهم به‌چنین موردهایی برخورد کرده‌اید؟ بحث مشابهی را، درمـورد چند حالت دیگـر انجام‌دهید. این گـونه بحث‌ها، چه فایده‌ای دارد؟

۴۴. هدف‌اصلی‌ما در§۵ این‌بود که یکی ازچشم‌اندازهای استدلال استقرایی را، به صورتی نموداری، روشن کنیم. آیا ممکن است دانش‌آموزان، فایدهٔ دیگری هم از این بند برده باشند؟

۴۵. کسرهای متناوب. کسرهای

$$\frac{۱}{۶}=۰/۱۶۶۶۶۶۶...،$$

$$\frac{۱}{۷}=۰/۱۴۲۸۵۷۱۴۲...،$$

$$\frac{۱}{۸}=۰/۱۲۵$$

متعلق به سه نوع مختلف کسر هستند. کسر دهدهی معرف $\frac{۱}{۸}$، متناهی است، و دوکسر دهدهی دیگر نامتناهی. در واقـع، دراین‌جا، با کسر دهدهی‌بازگشتی، تکراری‌یا متناوب سروکار داریم؛ آن‌هارا معمولاً، به‌این‌صورت می‌نویسند:

$$\frac{۱}{۶}=۰/۱(۶)$$

$$\frac{۱}{۷}=۰/(۱۴۲۸۵۷)$$

بخش تکراری کسر اعشاری ـ دنبالهٔ رقم‌هایی که به‌همین ردیف و بی‌نهایت بار تکرارمی‌شود، یا دورهٔ گردش کسر ـ را در داخل پرانتز قرار می‌دهند. دورهٔ گردش کسر $\frac{۱}{۶}$ شامل یك رقم و دورهٔ گردش کسر $\frac{۱}{۷}$ شامل شش رقم است؛ به طور کلی، تعداد رقم‌های دورهٔ گردش را طول آن می‌نامند. نمایش دهدهی عدد $\frac{۱}{۷}$، یك کسر متناوب‌ساده است، درحالی که نمایش دهدهی عدد $\frac{۱}{۶}$، یك کسر متناوب مرکب است. در اولی، قبل از دورهٔ گردش، هیچ رقم دیگری وجود ندارد، درحالی که در دومی، قبل از دورهٔ گردش، رقم‌هایی وجود دارد که دراین دوره دخالتی ندارند. باز هم یك مثال، برای هر کدام از این سه نوع کسر دهدهی:

$$\frac{۱۹}{۲۰}=۰/۹۵ \qquad \frac{۱۹}{۲۷}=۰/(۷۰۳), \qquad \frac{۳۹}{۴۴}=۰/۸۸(۶۳),$$

بامطالعهٔ این‌سه نوع کسر، سعی کنید هرچه بیشتردربارهٔ طول‌دورهٔ گردش، دربارهٔ توزیع رقم‌ها در دورهٔ گردش و دربارهٔ هرچیز دیگری که‌توجه شمارا جلب می‌کند، کسب اطلاع کنید؛ بکوشید حدس‌هایی راکه دراثرمشاهده به‌ذهنتان رسیده‌است، اثبات یا ردکنید.

خودتان کسرهایی را انتخاب‌کنیدکه می‌خواهید به‌عنوان موضوع مورد مشاهده دراختیار داشته باشید، یا کسرهـای دهدهی را درنظر بگیریدکه متناظر با گروه عددهای از ۱° تا ۷° هستند:

۱°. $\frac{۱}{۷}$، $\frac{۲}{۷}$، $\frac{۳}{۷}$، $\frac{۴}{۷}$، $\frac{۵}{۷}$، $\frac{۶}{۷}$، $\frac{۷}{۷}$؛

۲°. $\frac{۱}{۷}$، $\frac{۱۰}{۷}$، $\frac{۱۰۰}{۷}$، ...؛

۳°. همهٔ کسرهای کـوچکتر از واحد وساده نشدنی، کـه مخرج آن‌ها کمتر از ۱۴ باشد؛

۴°. همهٔ کسرهای کوچکتر از واحد با مخرج ۲۷؛

۵°. $\frac{۱}{۳}$، $\frac{۱}{۷}$، $\frac{۱}{۱۱}$، $\frac{۱}{۳۷}$، $\frac{۱}{۴۱}$، $\frac{۱}{۷۳}$، $\frac{۱}{۱۰۱}$، $\frac{۱}{۲۳۹}$؛

۶°. $\frac{۱}{۹}$، $\frac{۱}{۹۹}$، $\frac{۱}{۹۹۹}$، $\frac{۱}{۹۹۹۹}$؛

۷°. $\frac{۱}{۱۱}$، $\frac{۱}{۱۰۱}$، $\frac{۱}{۱۰۰۱}$، $\frac{۱}{۱۰۰۰۱}$؛

بدون این‌که رابطه‌های آموزندهٔ زیر را از قلم بیندازید:

$$۷/۰۰۰۰۰... = ۶/۹۹۹۹۹...,$$
$$۰/۵۰۰۰۰... = ۰/۴۹۹۹۹...$$

سعی کنید معنای آن‌ها را بفهمید.

۴۶. (ادامه). به‌این کسرها توجه کنید:

$$\frac{۱}{۱۱} = ۰/۰۹۰۹۰۹...,\qquad \frac{۱}{۹} = ۰/۱۱۱۱۱...,$$
$$\frac{۱}{۳۷} = ۰/۰۲۷۰۲۷...,\qquad \frac{۱}{۲۷} = ۰/۰۳۷۰۳۷...,$$
$$\frac{۱}{۱۰۱} = ۰/۰۰۹۹۰۰۹۹...,\qquad \frac{۱}{۹۹} = ۰/۰۱۰۱۰۱۰۱...,$$
$$\frac{۱}{۳۶۹} = ۰/۰۰۲۷۱۰۰۲۷۱...,\qquad \frac{۱}{۲۷۱} = ۰/۰۰۳۶۹۰۰۳۶۹...,$$

و قانون‌مندی نمایان آن‌ها را روشن کنید.

۴۷. (ادامه). اگر از کسرهای دهدهی آغاز کنیم و، سپس، از مبنای ۱۰، به‌مبنای ۲ برویم، به کسرهای دو دوئی می‌رسیم. مثلاً

$$\frac{۱}{۳} = ۰/۰۱۰۱۰۱۰۱...$$

این برابری وقتی درست است که بخش سمت راست را کسر دو دوئی متناوب درنظر بگیریم، یعنی اگر آن را بتوانیم به‌این صورت بسط دهیم:

$$\frac{۱}{۳} = \frac{۱}{۲^۲} + \frac{۱}{۲^۴} + \frac{۱}{۲^۶} + \frac{۱}{۲^۸} + ...$$

کسرهای دو دویی را مورد بررسی قرار دهید، همان‌طور که در تمرین‌های ۴۵ و ۴۶، کسرهای دهدهی را بررسی کردیم.

۴۸. (ادامه). ارزش‌ها و نارسایی‌های طرح بررسی تمرین‌های ۴۵، ۴۶ و ۴۷ را (از نظر کتاب درسی و روش‌شناسی)، متذکر شوید.

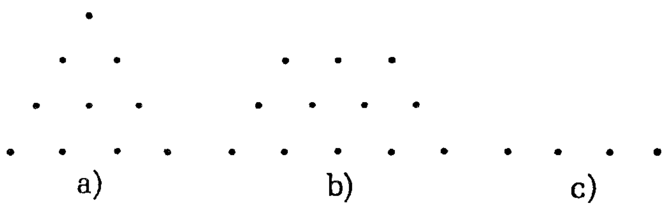
۴۹. عددهای ذوزنقه‌ای. شکل ۵۲-a، یك عدد مثلثی را نشان می‌دهد

$$۱+۲+۳+۴=۱۰$$

(با تمرین ۳۹ فصل سوم وشکل ۱۸-a مقایسه کنید). شبیه‌آن، عدد

$$۳+۴+۵=۱۲$$

را که‌روی‌شکل۵۲-b نشان‌داده‌شده است، می‌توان «عدد ذوزنقه‌ای» نامید. اگر بخواهیم حالت‌های حدی را هم، در بررسی خود وارد کنیم (که البته، اغلب کار درستی است)، آن‌وقت، باید عددهای شکل ۵۲-a و ۵۲-c را هم، «ذوزنقه‌ای» به‌حساب آوریم. ولی در این‌صورت، هرعدد درست ومثبتی«ذوزنقه‌ای» می‌شود (زیرا می‌توان آن را به‌صورت دنباله‌ای از نقطه‌ها نوشت؛ شکل۵۲-c را ببینید) و ، درنتیجه، تعریف ما، بدون مضمون، ازآب درمی‌آید، ولی، از این وضع، می‌توان نجات پیدا کرد.



شکل ۵۲. عددهای مثلثی و ذوزنقه‌ای.

$t(n)$ را تعداد عددهای ذوزنقه‌ای می‌گیریم که می‌توان با عدد درست ومثبت n به‌وجودآورد، یعنی $t(n)$ عبارت است ازتعدادنمایش عدد n به‌صورت مجموعی ازعددهای‌درست ومثبت متوالی. چند مثال:

$$۶=۱+۲+۳,$$
$$۱۵=۷+۸=۴+۵+۶=۱+۲+۳+۴+۵$$

اگر داشته باشیم:

$$n=1,2,3,6,15,81,105$$

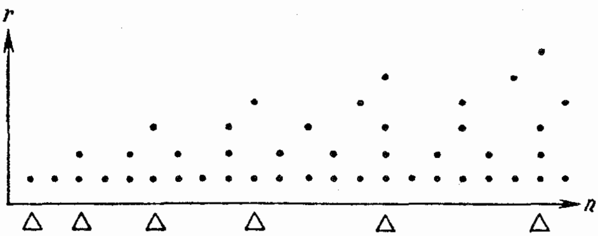
آن‌وقت، خواهیم داشت:

$$t(n)=1,1,2,2,4,5,8$$

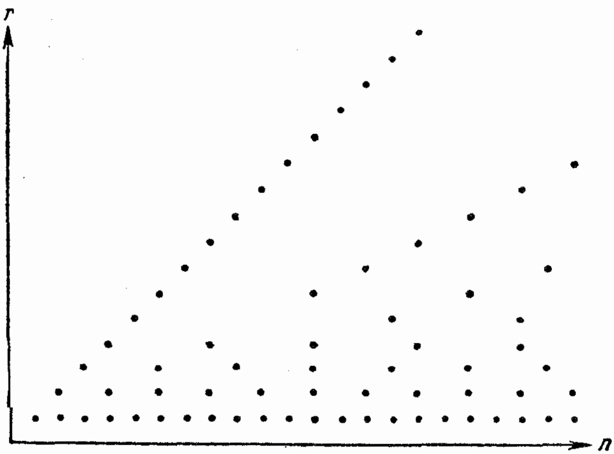
از این مشاهده‌ها، «تعریف ساده‌ای» برای $t(n)$ پیدا کنید؛ اگر این تعریف را پیدا کردید، آن را ثابت کنید.

۵۰. (ادامه). شکل‌های ۵۳-a و ۵۳-b به‌شما کمك می‌کند تابتوانید نتیجه‌های مشاهده‌های خود را بهتر ببینید. اگرعدد n، به‌این صورت نوشته شده باشد:

$$n=a+(a+1)+(a+2)+\dots+(a+r-1)$$



شکل ۵۳-a. نمایش ذوزنقه‌ای عدد n به‌کمك r حلقه.



شکل ۵۳-b. برای خوانندهٔ متفکر (شکل از لایب نیتس)؛ r عبارت است از مقسوم علیه n.

(مجموع r جمله)، آن‌وقت، آن را نمایش ذوزنقه‌ای r حلقه‌ای عدد n می‌نامیم. وقتی (وتنها وقتی) که عدد n نمایشی n حلقه‌ای داشته باشد، روی شکل ۵۳-a، نقطه‌ای به‌طول n وعرض r را، با دایرهٔ سیاه، علامت می‌گذاریم.

اگر $t(n) = ۱$، آن وقت، تنها نمایش ذوزنقه‌ای عدد n، نمایشی «بی‌معنی» و «تو خالی» ازآن خواهد بود (که برای‌آن $r = ۱$). روی شکل ۵۳-a، عددهای n راکه برای آن‌ها $t(n) = ۱$، مشخص کنید.

اگر p عددی اول باشد، $t(p)$ برابر چیست؟

۵۱. (ادامه). $s(n)$ را تعداد نمایش‌های عدد n، به‌صورت مجموع عددهای مثبت وفرد متوالی می‌گیریم. بیان $s(n)$ را پیدا کنید.

چند نمونه

$$۱۵ = ۳ + ۵ + ۷,$$
$$۴۵ = ۱۳ + ۱۵ + ۱۷ = ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳,$$
$$۴۸ = ۲۳ + ۲۵ = ۹ + ۱۱ + ۱۳ + ۱۵ =$$
$$= ۳ + ۵ + ۷ + ۹ + ۱۱ + ۱۳$$

اگر داشته باشیم:

$$n = ۲, ۳, ۴, ۱۵, ۴۵, ۴۸, ۱۰۵$$

آن وقت، خواهیم داشت:

$$s(n) = ۰, ۱, ۱, ۲, ۳, ۳, ۴$$

۵۲. طرحی که برای بررسی تمرین‌های ۴۹ و ۵۰ درنظر گرفته شده است، ارزیابی کنید.

۵۳. سه شکل مسطحه درنظر بگیرید:

۱°. مربعی با قطر قائم؛

۲°. دایره‌ای (به شعاع r)، محیط براین مربع؛

۳°. مربعی با ضلع قائم، محیط براین دایره.

قطر قائم شکل ۱°، هریك از دو شکل دیگر را، به‌دونیمهٔ متقارن

نسبت به‌هم، تقسیم می‌کند. اگر این شکل‌های مسطحه را دور محور قائم آن‌ها دوران دهیم، سه جسم به‌دست می‌آید:

۱°. مخروط مضاعف (شبیه‌هرم‌مضاعف؛ باتمرین ۲۷ فصل‌چهاردهم مقایسه کنید)؛

۲°. کره؛

۳°. استوانه.

برای هرسه جسم، این‌ها را محاسبه کنید:

V- حجم،

S- سطح،

A- مساحت شکل مسطحه‌ای که از دوران آن، جسم‌های ما به وجود آمده است:

P- محیط این شکل مسطحه،

X_A- فاصلهٔ مرکز ثقل نیمی ازشکل مسطحه تا محور دوران،

X_P- فاصلهٔ مرکز ثقل نصف محیط شکل مسطحه تامحور دوران.

۱۸ مقداری را که به‌دست آورده‌اید، دریك جدول ۶ × ۳ منظم کنید؛ دوباره آن را مشاهده کنید و سعی کنید نتیجهٔ مشاهده‌های خود را روشن کنید.

۵۴. بازهم یك مسأله با خصلت پژوهشی، که درسطح کار دبیرستانی قرار دارد؛ این‌مسأله، می‌تواند به‌عنوان یکی از عنصرهای راهنما، مورد استفادهٔ معلم قرار گیرد.

نقطهٔ (x, y, z) فضای سه بعدی، به‌طور عادی، به‌وسیلهٔ سه مختص (قائم) x، y و z، مشخص می‌شود. چهار مجموعهٔ نقطه‌های K، O، π و Ob را درنظر می‌گیریم ؛ هر یك از این مجموعه‌ها به‌وسیلهٔ دستگاهی از نابرابری‌ها (که می‌تواند تنها شامل یك نابرابری هم‌باشد) تعریف شده‌اند و هرمجموعه، تنها شامل نقطه‌هایی است که مختصات‌آن‌ها، درنابرابری‌های‌متناظرآن صدق می‌کنند (والبته، تنها شامل همین نقطه‌ها).

دراین جا، چهار دستگاه نابرابری داده شده است:

$$|x|\leqslant ۱,\quad |y|\leqslant ۱,\quad |z|\leqslant ۱; \qquad (K)$$

$$|x|+|y|+|z|\leqslant ۲; \qquad (O)$$

(π) همهٔ نابرابری‌های (K) و (O)، که‌مجموعهٔ نقطه‌های مشترك‌دو مجموعهٔ (K) و (O) رامشخص‌می کند؛

$$|y|+|z|\leqslant ۲,\quad |z|+|x|\leqslant ۲,\quad |x|+|y|\leqslant ۲ \qquad (Ob)$$

طبیعت هندسی این چهار مجموعه را، به‌تفصیل، شرح دهید، همهٔ جنبه‌های موجود درآن را نشان‌دهید (تقارن‌ها را فراموش نکنید!)؛ برای راحتی کار، همهٔ این‌ها را، در جدولی منظم‌کنید.

رابطهٔ متقابل چهار جسمی را، که‌به‌این ترتیب به‌دست می‌آید، پیدا کنید.

حجم V و سطح S هرکدام از جسم‌ها را پیدا کنید.

کاری راکه انجام داده‌اید، به‌سمت‌چه تعمیم‌هایی می‌توانیدهدایت کنید؟

(در این‌جا، می‌تواند مدل‌هایی که به‌کمك ورق ساخته می‌شود، مفید باشد؛ با تمرین ۵۵ از فصل دوم مقایسه کنید).

۵۵. توجه کنیدکه

$$\begin{aligned}
&\sqrt{۲}-۱ &&=\sqrt{۲}-\sqrt{۱}\\
&(\sqrt{۲}-۱)^{۲}=۳-۲\sqrt{۲} &&=\sqrt{۹}-\sqrt{۸}\\
&(\sqrt{۲}-۱)^{۳}=۵\sqrt{۲}-۷ &&=\sqrt{۵۰}-\sqrt{۴۹}\\
&(\sqrt{۲}-۱)^{۴}=۱۷-۱۲\sqrt{۲} &&=\sqrt{۲۸۹}-\sqrt{۲۸۸}
\end{aligned}$$

نتیجهٔ مشاهدهٔ خود را تعمیم دهید و، سپس، آن‌چه را که حدس زده‌اید، ثابت کنید.

۵۶. همچنین توجه کنیدکه

$$۲-\sqrt{۳}=\sqrt{۴}-\sqrt{۳}$$

$$(۲-\sqrt{۳})^{۲}=\sqrt{۴۹}-\sqrt{۴۸}$$

$$(۲-\sqrt{۳})^{۳}=\sqrt{۶۷۶}-\sqrt{۶۷۵}$$

$$(۲-\sqrt{۳})^۴=\sqrt{۹۴۰۹}-\sqrt{۹۴۰۸}$$

بکوشید آن‌چه که می‌بینید، تعمیم دهید و، سپس، حدس خود را ثابت کنید.

۵۷. تنها حدس، به‌خودی‌خود، آن‌قدرها مهم نیست، ولی راهی که برای آزمایش آن درنظر می‌گیرید، همیشه مهم است.

۵۸. حدس و حقیقت. در روایتی که می‌خواهم نقل کنم، ودرمورد درستی آن هیچ مسئولیتی به‌عهده نمی‌گیرم، صحبت از آقای جون و دربان است. می‌توان فرض‌کرد که آقای جون، عضوجامعهٔ سلطنتی [آکادمی علوم انگلستان] است و این توانایی را داردکه فرضیه را از حقیقت دقیقاً ثابت شده، تمیزدهد، ولی درموردی که می‌خواهیم ازآن‌صحبت کنیم، تمیزدادن این اختلاف، نه به‌عهدهٔ جون، بلکه به‌عهدهٔ دربان جامعهٔ سلطنتی است.

روزی، آقای جون، با کمی تأخیر، برای شرکت‌درنشست جامعهٔ سلطنتی آمد؛ او آشکارا عصبی بود وعجله می‌کرد. او می‌بایست کلاه خود را به محل جالباسی بسپارد وشماره‌ای بگیرد. دربان، که درآن روز درمحل‌جالباسی نگهبانی می‌داد، برای خوش‌خدمتی گفت: «آقا، شما می‌توانید معطل نشوید، من ترتیب کلاه شما را خواهم داد». آقای جون، بدون در دست داشتن‌شماره، به‌طرف محل نشست‌جامعهٔ سلطنتی عزیمت‌کرد؛ با وجود این‌که از دربان تشکر کرد، دربارهٔ سرنوشت کلاه خود، کمی نگران بود. ولی وقتی‌که ازجلسه بازگشت و به‌طرف جالباسی رفت، دربان بلافاصله، کلاه او را تقدیم کرد. آقای جون، ظاهراً راضی بود؛ به‌همین مناسبت، نمی‌دانم چه چیزی او را وادار کرد بپرسد: «شما از کجا می‌دانیدکه کلاه من، همین است؟». من نمی‌دانم که دربان، از چه چیز این پرسش‌خوشش نیامد؛ شاید لحن آقای جون، بیش از حد دلسوزانه بود؛ به هرحال، او با تندی پاسخ‌داد: «لزومی ندارد من بدانم‌که این کلاه مال شما هست یا نه، آقا؛ ولی این، همان‌کلاهی است‌که شما به من سپردید».

حل تمرین‌ها

فصل اول

۱. دایره‌ای به شعاع مفروض و به مرکز مفروض.

۲. دو خط راست موازی با خط راست مفروض.

۳. عمودمنصف پاره‌خطی که دو نقطهٔ مفروض را به‌هم وصل می‌کند.

۴. خط راستی، موازی با خط راست مفروض، واقع در بین‌آن‌ها و به یك فاصله از آن‌ها.

۵. دوخط راست‌عمود برهم؛ نیمسازهای‌زاویه‌هایی که دوخط راست مفروض، با هم می‌سازند.

۶. دو کمان دایره که از A و B می‌گذرند و، نسبت به خط راست AB، قرینهٔ یکدیگرند.

۸. روش دو مکان هندسی. تمرین ۱ را ببینید.

۹. روش دو مکان هندسی. تمرین‌های ۱ و ۲ را ببینید.

۱۰. روش دو مکان هندسی. تمرین‌های ۲ و ۶ را ببینید.

۱۱. روش دو مکان هندسی. تمرین‌های ۱ و ۶ را ببینید.

۱۲. روش دو مکان هندسی. تمرین ۵ را ببینید.

۱۳. روش دو مکان هندسی. تمرین ۲ را ببینید

۱۴. روش دو مکان هندسی. تمرین‌های ۱ و ۲ را ببینید.

۱۵. روش دو مکان هندسی. تمرین ۶ را ببینید.

۱۶. با توجه به تقارن، به مسألهٔ ۲ از§۳، یا تمرین ۱۲، منجر می‌شود.

۱۷. روش دو مکان هندسی. تمرین ۶ را ببینید.

۱۸. a) اگر X طوری جابه‌جا شود که مثلث‌های XCA و XCB هم‌ارز باشند، مکان هندسی نقطهٔ X، میانه‌ای است که از C می‌گذرد (ثابت کنید!)؛ بنابراین، نقطهٔ مجهول در محل برخورد میانه‌ها است. b) اگر X طوری جابه‌جا شود که مساحت مثلث XAB برابر با یک‌سوم مساحت مثلث XBC باقی بماند، مکان هندسی آن عبارت است از خط راستی موازی با AB و به‌فاصله‌ای برابر یک‌سوم ارتفاع رأس C از آن (تمرین ۲ را ببینید)؛ نقطهٔ مجهول، در محل برخورد چنین خط‌های راستی قرار دارد. [در هر دو راه حل، از روش «دو مکان هندسی» استفاده شده است.]

۱۹. مرکز دایرهٔ محاطی را، به‌دوانتهای ضلع a، وصل کنید. درمثلثی که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید، زاویه‌ای که رأس آن درمرکز دایرهٔ محاطی است، برابر می‌شود با $۱۸۰^\circ-\frac{\beta+\gamma}{۲}$، یعنی $۹۰^\circ+\frac{\alpha}{۲}$.

روش دومکان هندسی. تمرین‌های ۲ و ۶ را ببینید.

۲۰. مرکز O دایرهٔ محیطی را، به یکی از دو انتهای ضلع a وصل و از O عمودی براین ضلع رسم کنید؛ مثلث قائم‌الزاویه‌ای به دست می‌آید که وتر آن R، یک زاویهٔ حادهٔ آن α و ضلع روبه‌روی به‌این زاویه برابر $\frac{a}{۲}$ است. چون R و α داده شده است، می‌توانید a را بسازید. اکنون مثلث مجهول را، با فرض معلوم بودن ضلع a ومقدارهای α و r رسم کنید (تمرین ۱۹ را ببینید).

۲۱. مثلث مجهول را، با وصل مرکز دایرهٔ محاطی به سه رأس آن، به‌سه مثلث کوچکتر تقسیم کنید. با برابرقراردادن مساحت مثلث، ازدوراهی که به‌دست می‌آید، خواهیم داشت:

$$\frac{۱}{۲}r(a+b+c)=\frac{۱}{۲}a.h_a$$

بنابراین، با در دست داشتن a ، h_a و r، می‌توانید پاره خطی برابر

$a+b+c$ بسازید واین، شما را به‌تمرین ۲۲ می‌رساند.

۲۲. مرکز دایرهٔ محاطی O را به‌رأس A وصل واز O عمودی برضلع b (یا c) رسم‌کنید. مثلث قائم‌الزاویه‌ای به‌دست می‌آیدکه درآن، یکی از زاویه‌های حاده وضلع روبه‌روی به‌این زاویه معلوم است($\frac{\alpha}{2}$ و r). اگر ضلع دیگر مجاور به‌زاویهٔ قائمه را x بگیریم، داریم:

$$a+b+c-2a=2x$$

بنابراین، با در دست داشتن $a+b+c$ و a، می‌توانیم x را و، سپس به کمك x و r، زاویهٔ α را بسازیم. با استفاده از تمرین ۱۹، می‌توانید مثلث مجهول را، به‌کمك زاویهٔ α ومقدارهای a و r بسازید.

۲۳. شکل‌کمکی: مثلث قائم‌الزاویهٔ به‌قاعدهٔ a وضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ h_b.

۲۴. شکل‌کمکی: تمرین ۲۳ را ببینید.

۲۵. شکل‌های کمکی: تمرین ۲۳ را ببینید.

۲۶. شکل‌کمکی: مثلث قائم‌الزاویه‌ای با ضلع مجاور به‌زاویهٔ قائمهٔ h_a وزاویهٔ مقابل به‌آن β.

۲۷. شکل‌های‌کمکی: تمرین ۲۶ را ببینید. راه‌حل دوم را، در تمرین ۳۷ پیدا کنید.

۲۸. شکل‌کمکی: مثلث قائم‌الزاویه به وتر d_α وضلع مجاوربه‌زاویهٔ قائمهٔ h_a.

۲۹. شکل‌کمکی: مثلثی با سه ضلع معلوم.

۳۰. فرض‌کنید $a>c$؛ شکل‌کمکی: مثلثی‌باضلع‌های $a-c$، b و d.

۳۱. تعمیمی از تمرین ۳۰. در واقع، در تمرین ۳۰ داریم: $\varepsilon=0$.
شکل‌کمکی: مثلثی با ضلع‌های a و c و زاویهٔ ε.

۳۲. شکل‌کمکی: مثلثی‌که دو ضلع آن a و $b+c$ ویك زاویهٔ آن $\frac{\alpha}{2}$ است.

۳۳. شکل کمکی : مثلثی که دو ضلع آن a و $b+c$ و یك زاویهٔ آن

$90^\circ + \frac{\beta-\gamma}{2}$ است.

۳۴. شکل کمکی: مثلثی بامعلوم بودن $a+b+c$ (ضلع)، h_a (ارتفاع) و $90^\circ + \frac{\alpha}{2}$ (زاویه).

۳۵. فرض‌ها را، شبیه §۶، ۱° تغییر دهید. فرض کنید یکی از شعاع‌ها کوچك و دیگری به همان انـدازه بزرگ شود. شکل کمکی: دایره‌ای با دو مماس که از نقطهٔ خارجی برآن رسم شده‌اند و دو مستطیل.

۳۶. با §۶، ۱° مقایسه کنید. شکل کمکی: دایرهٔ محیطی مثلثی که سه رأس آن، مرکزهای دایره‌های مفروض‌اند.

۳۷. مثلث مجهول، با هر مثلث دیگری به زاویه‌های α و β متشابه است. اندازه‌های مثلث مجهول، از روی d_γ، به‌دست مـی‌آید (این روش، به‌کار مسألهٔ ۲۷ هم می‌خورد).

۳۸. روش تشابه: مرکز تشابه، در رأس مثلث قائم‌الزاویـهٔ مفروض است. نقطهٔ برخورد نیمساز این‌زاویه با وتر، یکی‌از رأس‌های مربع‌مجهول است.

۳۹. تعمیم تمرین ۳۸: مرکز تشابه در A (یا در B).

۴۰. روش تشابه: مرکزتشابه درمرکز دایره است. یکی‌از محورهای تقارن مربع مجهول، برمحور تقارن قطاع مفروض، منطبق است.

۴۱. روش تشابه: شکل‌های متشابه عبارتند از دایره‌هایی‌که بر خط راست مفروض مماس‌اند ومرکز آن‌ها، روی عمودمنصف پاره‌خطی است‌که دونقطهٔ مفروض را به‌هم وصل می‌کند. مرکزتشابه، محل برخورد این‌عمود با پاره‌خط مفروض است. مسأله دوجواب دارد.

۴۲. بااستفاده ازتقارن‌نسبت به‌نیمساز زاویه‌ای‌که مماس‌های‌مفروض با هم می‌سازند، نقطهٔ دیگری از محیط دایرهٔ مجهول به‌دست می‌آید. برای دنبالهٔ کار، تمرین ۴۱ را ببینید.

۴۳. اگر از مرکـز دایرهٔ محاطـی به‌نقطه‌های تماس وصل‌کنیم، بین

شعاع‌ها، به‌ترتیب، زاویه‌هایی برابر $\alpha-۱۸۰^\circ$، $\beta-۱۸۰^\circ$،... تشکیل می‌دهند. بعد، ازروش تشابه استفاده می‌کنیم (این روش را درمورد هرنوع چند ضلعی محیطی، با تعداد دلخواه ضاع، می‌توان به‌کار برد).

۴۴. اگرمساحت مثلث‌را S وضلع‌های آن‌را a، b و c بنامیم، داریم:

$$۲S=a.h_a=b.h_b=c.h_c$$

اگر مثلثی، با ضلع‌های h_a ، h_b و h_c بسازیم، مساحت‌آن را S' وارتفاع‌های آن را a' ، b' و c' بگیریم، داریم:

$$۲S'=h_a.a'=h_b.b'=h_c.c'$$

وبنابراین، $\frac{a}{a'}=\frac{b}{b'}=\frac{c}{c'}$. به‌این ترتیب، مثلث باضلع‌های a'، b' و c' (که می‌توان آن‌را ساخت)، با مثلث مجهول متشابه است.

۴۵. اگر مثلاً داشته باشیم: $h_a=۱۵۶$، $h_b=۶۵$ و $h_c=۶۰$، دیگر از روش مسألهٔ قبل نمی‌توانیم استفاده کنیم، زیرا رسم مثلث کمکی، با ضلع‌های ۱۵۶، ۶۵ و ۶۰ ممکن نیست. درحالی‌که مثلث مجهول وجود دارد.

تنهاراه خروج ازتناقض، تعمیم است. k و l و m سه‌عدد مثبت دلخواه و (دراین‌جا، از علامت‌گذاری‌هایی غیر از آن‌چه در تمرین ۴۴ داشتیم، استفاده می‌کنیم) a'، b' و c' را ارتفاع‌های مثلث با ضلع‌های kh_a، lh_b و mh_c می‌گیریم. دراین‌صورت داریم: $\frac{a}{ka'}=\frac{b}{lb'}=\frac{c}{mc'}$. مثلاً ، مثلث با ضلع‌های ۱۵۶، ۶۵ و ۱۲۰ $(=۲\times۶۰)$ وجود دارد.

۴۶. فرض‌کنیم مسأله حل شده است. مرکز دایرهٔ محیطی را به یکی از دو انتهای ضلع a وصل و ازهمان‌جا عمودی براین ضلع فرودآورید. از وجود مثلث قائم‌الزاویهٔ (به‌دست‌آمده) با وتر R، زاویهٔ α و ضلع‌مقابل به آن $\frac{a}{۲}$، نتیجه می‌شودکه می‌توان رابطه‌ای بین این مقدارها برقرار کرد، یعنی هر کدام از این سه مقدار به کمك دوتای دیگر به دست می‌آید. (این رابطه را می‌توان به‌کمك مثلثات بیان کرد: $a=۲R\sin\alpha$). اگر فرض‌های

مسأله بـا این رابطه سازگار نباشد، مسأله جواب ندارد و، اگر هم بـا آن سازگار باشد، مسأله مبهم‌است (بی‌نهایت جواب دارد).

۴۷. a) مثلاً ساختن مثلثی‌با زاویه‌های α، β و γ، یاغیرممکن‌است ویا مبهم. b) مسأله‌هایـی از این‌نوع را می‌توان شبیه تمرین ۴۶ و ۴۷-a به‌دست آورد. وجود جواب، به‌معنای وجود رابطهٔ معلومی بین‌این‌فرض‌ها است؛ بنابراین، اگرفرض‌ها دراین رابطه صدق‌کنند، تعدادجواب‌ها بی‌نهایت است واگر صدق نکنند، جوابی وجود نـدارد. c) ازحل تمرین ۴۶ استفاده کنید. مسأله‌را به‌ساختن مثلثی‌با a، α و β منجرکنید. d) با استفاده ازحل تمرین ۴۶، مسأله را به‌تمرین ۱۹ منجرکنید.

۴۸. از عامل‌هایـی‌که بـرای ما معلوم نیست و درسرعت صوت اثر می‌گذارند (مثل باد، تغییر درجهٔ حرارت وغیره)، صرف‌نظرمی‌کنیم. تفاضل زمان‌هایی را که دو نقطهٔ دیده‌بانـی A و B ثبت‌کرده‌اند، محاسبه می‌کنیم. با این تفاوت زمانی، تفاوت فاصلهٔ $AX-BX$ به‌دست می‌آید؛ مکان‌هندسی X، یك هذلولی می‌شود . هذلولی دوم هم از مقایسهٔ فرض‌های مـربوط به نقطه‌های C و A (یا C و B) پیدا می‌شود. برخورد این دو هذلولی، جای X را معین می‌کند. شباهت با تمرین ۱۵: مشاهده‌های مفروض، منجر به‌دو مکان هندسی، برای پیداکردن نقطهٔ مجهول می‌شوند. اختلاف اساسی: در تمرین ۱۵، مکان هندسی‌ها دایره و، در این‌جا، هذلولی هستند . هذلولی را نمی‌توان به‌کمك پرگار وخط‌کش ساخت و، برای‌ساختن‌آن، باید ازدستگاه‌های دیگری استفاده‌کرد. ضمناً، می‌توان یك وسیلهٔ اختصاصی ساخت‌که، به کمك‌آن، بتوان‌نقطهٔ X را از روی‌نقطه‌های A، B و C وباتوجه به‌فرض‌ها، به‌دست آورد.

۴۹. اگر روش مکان‌هـای هندسی را، از روی شرحی‌که در §۱، ۲° دادیم، به‌طور سطحی بفهمیم، آن‌وقت، از این مکان‌هـای هندسی نمی‌توان استفاده‌کرد. درحالی‌که، این مکان‌های‌هندسی، بی‌اندازه مفیدند و، همان‌طور که دیدید، درمثال‌های قبل، بارهـا، ازآن استفاده کـردیم. از این‌جا نتیجه می‌شودکه بایدآن‌چه راکه در§۱، ۲° آورده‌ایم، بسط دهیم: به‌عنوان مکان

هندسی، نه تنها یك خط راست یا دایـرهٔ جداگانه، بلکه مجموعه‌ای متناهی ازخطهای راست، دایره‌ها، پاره‌خطهای راست وکمان‌های دایره را می‌توان درنظر گرفت.

۵۱. اگر بخش‌هایی‌که شرط را، به‌آن‌هـا تقسیم‌کرده‌ایم، در مجموع خود، با تمامی شرط هم‌ارز باشد، دراین صورت، روش‌هـای مختلف تقسیم هم، باید هم‌ارز یکدیگر باشند. همین موقعیت است‌که اجازه مـی‌دهد مثلاً حکم‌کنیم: سه عمود منصف ضلع‌های مثلث، دریك نقطه به‌هم می‌رسند ویا، شش صفحهٔ عمود منصف یال‌های یك چهار وجهی، در یك نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

۵۳. ۱°. به‌عنوان داده‌ها، هرسه عنصر دلخواه ازمثلث را می‌توانید درنظر بگیرید (مواظب باشید دچار حالتی شبیه تمرین ۴۶ یا ۴۷ نشوید) و سعی‌کنید، به‌کمك‌آن‌ها، مثلث‌را بسازید. دراین‌جا، چند ترکیب داده‌ایم‌که، ساختمان متناظر آن‌ها، دشوار نیست.

$$a,\quad h_b,\quad R;$$
$$a,\quad h_b,\quad m_b;$$
$$a,\quad h_b,\quad m_a;$$
$$h_a,\quad d_a,\quad b;$$
$$h_a,\quad m_a,\quad m_b;$$
$$h_a,\quad m_b,\quad m_c;$$
$$h_a,\quad h_b,\quad m_a;$$
$$a,\quad b,\quad R$$

همچنین، می‌توان دو زاویهٔ αوβ را با هرپاره‌خط دلخواه مثلث (به‌جزآن‌چه در تمرین‌های ۲۷ و۳۷ آمده است) در نظر گـرفت. حالت کمی دشوارتر، عبارت است از حالت α، r و R.

۲°. مسأله‌های مهمی درموردکنج سه‌وجهی وجود داردکه شبیه§۶، ۳° می‌توان ازآن‌ها، بدون استفادهٔ روشن از هندسهٔ ترسیمی، حل‌کرد. یکی از آن‌ها را می‌آوریم: «درکنج سه‌وجهـی، زاویهٔ مسطحهٔ A و زاویـه‌های

دووجهی متصل به‌آن، α و β، معلوم است. می‌خواهیم دوزاویهٔ مسطحهٔ دیگر B و C را بسازیم». حل این مسأله ساده است، ولی ما به‌آن نمی‌پردازیم.

۳°. به‌عنوان نمونه‌ای شبیه §۳، ۱°، یادداشت تکمیلی ۵۰ را ببینید. سعی کنید نمونه‌های فضایی، شبیه مثال‌های §۳، ۲° و §۳، ۳° و تمرین‌های ۱۴ و ۱۸ را پیدا کنید.

فصل دوم

۱. اگر بوب، x سکهٔ پنج سنتی و y سکهٔ ده سنتی داشته باشد، شرط مسأله را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$5x+10y=350$$
$$x+y=50$$

که بعد از تبدیل‌های ساده، به‌همان دستگاه §۲، ۳° منجر می‌شود.

۲. فرض کنیم، از m لوله، آب وارد و از n لوله، آب خارج شود. لوله‌هایی که آب را وارد حوض می‌کنند، به‌ترتیب، اولی در a_1 دقیقه، دومی در a_2 دقیقه، ... و mامین در a_m دقیقه حوض را پر می‌کنند؛ و لوله‌هایی که آب از طریق آن‌ها از حوض خارج می‌شود، به ترتیب، در b_1 دقیقه، b_2 دقیقه، ... و b_n دقیقه حوض را خالی می‌کنند. اگر همهٔ لوله‌ها (از هردو نوع) باز باشند، درچه مدتی، حوض (خالی) را پر خواهند کرد؟

زمان مجهول t، از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$\frac{t}{a_1}+\frac{t}{a_2}+\ldots+\frac{t}{a_m}-\frac{t}{b_1}-\frac{t}{b_2}-\ldots-\frac{t}{b_n}=1$$

(اگر برای t، عددی منفی به‌دست آید، آن را چگونه تفسیر می‌کنید؟ آیا ممکن است، مسأله اصلاً جوابی نداشته باشد؟ دربارهٔ چنین حالتی، چه توضیحی دارید؟)

۳. الف) مستر ووکاج (این نام فامیل، برای خلیج‌نشینان، به‌اندازهٔ فامیل سمیت برای امریکایی‌ها عمومی است)، یک‌سوم درآمد خود را خرج خوراك، یک‌سوم آن را خرج منزل و یک‌ششم آن را خرج لباس می‌کند؛ او

خرج دیگری ندارد (خلیج‌نشینان خوشبخت، مالیات‌نمی‌دهند). او می‌خواهد بداند، با پس‌انداز سالیانهٔ خود، چه مدت می‌تواند زندگی کند؟

ب) چه فشار الکتریکی باید بین دو بستی که سه سیم به مقاومت‌های ۳، ۴ و ۶ اهم را به‌هم وصل می‌کنند، قرارداد تا نیروی مجموع جریانی که از سیم می‌گذرد، برابر ۱ آمپر شود؟

وغیره.

۴. اگر w را به $-w$ تبدیل کنیم، x تغییر نمی‌کند. این، به‌معنای آن است که اگر پرواز درجهت موافق باد آغاز شود و، در بـرگشت، درجهت مخالف باد باشد، هواپیما (به‌شرطـی که بخواهد همان زمان قبلی را در راه باشد) باید درهمان نقطهٔ حالت قبلی، دور بزند.

۵. دستگاه

$$x+y=v,$$
$$ax+by=cv$$

کاملاً شبیه دستگاهی است که در §۶، ۲° به‌دست‌آوردیم.

۶. محورهای مختصات را، نسبت به‌پاره خط AB، به همان تـرتیب §۵، ۱° قرار می‌دهیم و فرض می‌کنیم $AB=a$. مختصات (x, y) مـرکز دایرهٔ موردنظر، که برچهار دایرهٔ دیگر مماس است، در معادله‌های زیرصدق می‌کنند:

$$a-\sqrt{x^۲+y^۲}=\sqrt{(x-\frac{a}{۴})^۲+y^۲}-\frac{a}{۴}\ ;\ x=\frac{a}{۲}$$

که ازآن‌جا به‌دست می‌آید:

$$y=\frac{۳a}{۸}$$

۷. رابطهٔ هرون، آن‌قدرکه درابتدا به‌نظر می‌رسد، کار را به تفصیل نمی‌کشاند. اگر متوجه شویم، علامت‌های مثبت ومنفی را، درچهار عـامل ضرب، چگونه قرار دهیم، کار به‌اندازهٔ کافی ساده می‌شود:

$$\begin{aligned}16S^2&=(a+b+c)(-a+b+c)(a-b+c)(a+b-c)=\\&=[(b+c)^2-a^2][a^2-(b-c)^2]=\\&=(2bc-a^2+b^2+c^2)(2bc+a^2-b^2-c^2)=\\&=4b^2c^2-(b^2+c^2-a^2)^2=\\&=4(l^2+n^2)(l^2+m^2)-(2l^2)^2\end{aligned}$$

۸. الف) آگاهی‌های تکمیلی لازم. برای حل مسأله §۵، °۳ باید آشنایی بیشتری با هندسهٔ مسطحه داشت، درحالی‌که برای حل مسألهٔ °۴، بیشتر به‌هندسهٔ فضایی نیاز داریم (ابتدا باید حدس زد و، سپس، ثابت کرد که k عمود بر a است).

ب) تقارن‌ها. سه مقدار A، B و C نقش مشابهی دارند، به زبان دیگر، مسأله نسبت به A، B و C متقارن است. ضمن‌حل °۳، از این‌تقارن استفاده‌کردیم، درحالی‌که در°۴ به‌آن‌اعتنایی‌نکردیم وظاهراً، برایA نسبت به B و C، امتیازی قایل شدیم.

پ) تنظیم طرح. در°۳ «منظم‌تر» آغاز کردیم و، ازهمان ابتدا، به‌کار خود اعتمادی نسبی داشتیم. در واقع، این روش، با روشنی کامل، ما را به‌دستگاهی از هفت معادله رسانید که، درنظر اول، خیلی مفصل می‌نمود (این روش را، نمی‌توان نارسا دانست، زیرا نه‌تنها امکان نوشتن معادله‌ها را می‌دهد، بلکه راه‌حل دستگاه حاصل‌را هم پیش‌بینی می‌کند). روش‌مناسبی راکه برای °۴ انتخاب‌کردیم، خیلی روشن نبود، ولی به‌جای خود ارزش داشت و(باتوجهی که‌به‌یك‌نکته‌کردیم) به‌سرعت، ما رابه‌نتیجهٔ نهایی‌رسانید.

۹. $V^2=\dfrac{l^2m^2n^2}{36}=\dfrac{2ABC}{9}$.

۱۰. از سه رابطهٔ §۵، °۳، که a^2، b^2 و c^2 را بر حسب l، m و n بیان می‌کند، به‌دست می‌آید:

$$l^2+m^2+n^2=P^2$$

$$l^2=P^2-a^2,\ m^2=P^2-b^2,\ n^2=P^2-c^2$$

که امکان می‌دهد، نتیجهٔ تمرین ۹ را این طور بنویسیم:

$$V=\frac{(P^2-a^2)(P^2-b^2)(P^2-c^2)}{36}$$

۱۱. $d^2=l^2+m^2+n^2$

۱۲. از نتیجهٔ تمرین ۱۱ استفاده کنید:

$$d^2=\frac{a^2+b^2+c^2}{2}$$

۱۳. چهار وجهی، با شش یـال آن معین می‌شود ـ این نتیجه، مشابه فضایی این مسألهٔ مسطحه است که مثلث را می‌توان با معلوم بودن سه ضلع آن معین کرد. از طرف دیگـر، شکل هندسی مورد نظر از شش یـال (یعنی، چهار وجهی یاد شده) را می‌توان، با انتخاب قطر متناظر هریك از وجه‌های جعبه‌ای که درتمرین‌های ۱۱ و ۱۲ داشتیم، به‌دست آورد. حجم این جعبه برابراست با lmn. ازجعبه، ۴ چهار وجهی «قائم‌الزاویهٔ» برابر جدا می‌کنیم (منظور از چهاروجهی «قائم‌الزاویه»، چهاروجهی‌است که یکی‌ازکنج‌های‌آن سه قائمه باشد)، که حجم هرکدام ازآن‌ها برابر است با $\frac{lmn}{6}$ (تمریـن ۹ را ببینید). اکنون حجم چهار وجهی مفروض به‌دست می‌آید:

$$V=lmn-\frac{4lmn}{6}=\frac{lmn}{3}$$

سپس، اگر از رابطه‌های $l^2=P^2-a^2$ وغیره ـ که درتمریـن ۱۰ به‌دست آوردیم ـ استفاده کنیم، به‌دست می‌آید:

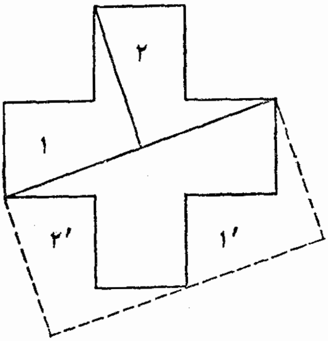
$$V^2=\frac{(P^2-a^2)(P^2-b^2)(P^2-c^2)}{9}$$

۱۴. به‌تمرین ۱۰ توجه می‌کنیم: اگرداشته باشیم $V=0$، باید یکی از عامل‌ها، ومثلاً $P^2-a^2=l^2$، برابر صفر شودکه، درایـن‌صورت، دو وجه به‌صورت پاره‌خطـی راست درمـی‌آیند و دو وجه دیگر به‌مثلث‌هـای قائم‌الزاویهٔ منطبق برهم، تبدیل می‌شوند.

به تمرین ۱۳ توجه می‌کنیم: اگر داشته باشیم $V=0$، چهار وجهی به یك مستطیل (دومستطیل منطبق بر هم) تبدیل مـی‌شود (هر چهار وجه آن، به‌مثلث‌های‌قائم‌الزاویهٔ‌برابرتبدیل می‌شوند؛ در واقع اگرداشته باشیم:

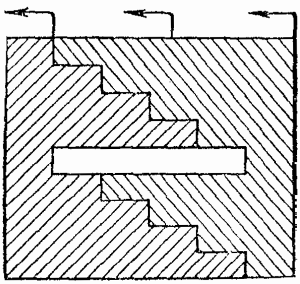
$P^۲-a^۲=۰$، داریم: $a^۲=b^۲+c^۲$).

۱۵. همان‌طور که از برابری انتهای ۷§ دیده می‌شود، یکی از ضلع‌های x مستطیل مجهول، برابر است با وتـر مثلث قائـم‌الزاویه‌ای کـه ضلع‌های مجاور به‌زاویهٔ قـائمهٔ آن a و $۳a$ باشد. پاره‌خط x رامی‌توان در داخـل صلیب، به‌چهـار طـریق مختلف‌جاداد(اگرچه، اختلاف‌جدی، با یکدیگر نـدارند)؛ مرکز پاره‌خط، باید برمرکز صلیب منطبق بـاشد و آن را به‌دو قسمت برابر تقسیم‌کند.



شکل ۵۴

طول $\frac{x}{۲}$ برابر باضلع دیگر مستطیل‌است. اکنون دیگرجواب مسأله،به‌سادگی به‌دست می‌آید (شکل ۵۴ را ببینید).


شکل ۵۵

۱۶. a) $x^۲=۱۲\times۹-۸\times۱$، $x=۱۰$.

b) قسمت سمت راست‌را بـه اندازهٔ یك واحد به طـرف بالا و به اندازهٔ یك واحد به‌سمت چپ ببرید؛ شکل‌حاصل، یك‌مربع‌خواهدبود،زیرا

$$۱۰=۹+۱=۱۲-۲$$

c) به‌احتمال زیاد، تقارن مرکزی حفظ می‌شود.

همهٔ این‌ها، درشکل ۵۵ روشن شده است.

۱۷. سنگینی بار قاطر را x وسنگینی بار الاغ را y می‌گیریم، دراین صورت داریم:

$$x+۱=۳(y+۱),\qquad y+۱=۲(x-۱),$$

$$y=\frac{۱۱}{۵}(=۲۲۰\ \text{واحد})\qquad x=\frac{۱۳}{۵}(=۲۶۰\ \text{واحد}),$$

۱۸. فرض می‌کنیم، آقای سمیت h کیلوگرم، خانم‌سمیت w کیلوگرم بار داشته باشند. وزن بار مجاز، بدون پرداخت اضافی، را هم x کیلوگرم می‌گیریم. داریم:

$$h+w=۹۴,\ \frac{h-x}{۱/۵}=\frac{w-x}{۲}=\frac{۹۴-x}{۱۳/۵};\ \ x=۴۰$$

۱۹. سهم فرزندان برابر است با ۷۰۰، ۵۰۰ و $x=۴۰۰$ کرون، که x از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آید:

$$x+(x+۱۰۰)+(x+۳۰۰)=۱۶۰۰$$

۲۰. به‌هرکدام از پسرها، ۳۰۰۰ لیور می‌رسد.

۲۱. اگرسهم هر فرزند را x وتمام مبلغ‌ارثیه‌را y بگیریم، آن‌وقت، سهم هریك از فرزندان را می‌توان چنین نوشت:

اولی: $$x=۱۰۰+\frac{y-۱۰۰}{۱۰}$$

دومی: $$x=۲۰۰+\frac{y-x-۲۰۰}{۱۰}$$

سومی: $$x=۳۰۰+\frac{y-۲x-۳۰۰}{۱۰}$$

. . . .

تفاضل مقدارهای سمت راست دو معادلهٔ دلخواه از معادله‌های بالا، برابر است با $\frac{x+۱۰۰}{۱۰}-۱۰۰$. چون این تفاضل باید برابر صفر باشد، به‌دست‌می‌آید: $x=۹۰۰$ و، بنابراین، $y=۸۱۰۰$. تعداد فرزندان، ۹نفر می‌شود.

۲۲. پول هریك از سه نفر را، در ابتدای بازی، به‌ترتیب x، y و z می‌گیریم. ضمناً، مفید است که مجموع آن‌ها را هم s بنامیم:

$$x+y+z=s(=۷۲)$$

جدولی‌تشکیل می‌دهیم وپول هرکدام را، در چهار مرحله یادداشت می‌کنیم (مجموع پول سه نفر، همیشه برابر است با s):

سومی	دومی	اولی
z	y	x
$۲z$	$۲y$	$۲x-s$
$۶z$	$۶y-۲s$	$۶x-۳s$
$۱۲z-s=۲۴$	$۱۲y-۴s=۲۴$	$۱۲x-۶s=۲۴$

ازآن‌جا: $x=۳۸$، $y=۲۶$، $z=۸$.

۲۳. این‌مسأله، شبیه مسأله‌ای‌است‌که در§۴، ۱° و ۲° موردبررسی قرار دادیم و، ضمناً، حالت خاصی است از تمرین ۲ که تنها باید فرض‌کرد: $m=۳$، $n=۰$، $a_۱=۳$، $a_۲=\frac{۸}{۳}$ و $a_۳=\frac{۱۲}{۵}$. از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$t=\frac{۸}{۹}$ (هفته).

۲۴. نیوتون می‌خواسته است تمرین ۲ را تعمیم دهد، ولی خیلی‌دور نمی‌رود، زیرا وجود لوله‌های تخلیه‌کننده یا «زیرآب‌ها» را درنظر نمی‌گیرد. بنابراین، در مسألهٔ او ازحرف‌های b خبری نیست و $n=۰$ است.

۲۵. قیمت‌هر کیلوگندم، جو و ارزن، به‌ترتیب برابراست با ۵، ۳ و ۲ شلینگ. تمرین ۲۶ را ببینید.

۲۶. x، y و z را ارزش سه‌نوع کالا و p_v را ارزش مجموعهٔ سه نوع کالایی می‌گیریم، که درآن به‌ترتیب، به‌اندازهٔ a_v، b_v، و c_v واحدوزن از سه نوع کالا وجود دارد ($v=۱, ۲, ۳$). دستگاه سه معادلهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$a_v x+b_v y+c_v z=p_v$$

که درآن $v=۱, ۲, ۳$. این تعمیم از تمرین۲۵ به‌دست می‌آید، اگر جدول عددی

۴۰	۲۴	۲۰	۳۱۲
۲۶	۳۰	۵۰	۳۲۰
۲۴	۱۲۰	۱۰۰	۶۸۰

را باجدول حرفی زیر عوض‌کنیم:

$$\begin{matrix} a_1 & b_1 & c_1 & p_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & p_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & p_3 \end{matrix}$$

تعمیم سه نوع کالا، به n نوع کالا، کار دشواری نیست.

۲۷. فرض کنید.

α، مقدار علف یک‌آکر چراگاه، قبل از چریدن؛

β، مقدار علفی که یک گاو در یک هفته می‌خورد؛

γ، مقدار علفی که در یک هفته درهرآکر می‌روید؛

a_1، a_2 و a، تعداد گاوها؛

m_1، m_2 و m، عددآکرها؛

t_1، t_2 و t، تعداد هفته‌ها درسه حالت مورد نظر باشند.

در این‌جا، a، α، β و γ مجهول وهشت مقدار دیگر معلوم‌اند. شرط‌های مسأله را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$m_1(\alpha+t_1\gamma)=a_1t_1\beta,$$
$$m_2(\alpha+t_2\gamma)=a_2t_2\beta,$$
$$m(\alpha+t\gamma)=at\beta$$

این دستگاه را می‌توان شامل سه مجهول $\frac{\alpha}{\beta}$، $\frac{\gamma}{\beta}$ و a دانست که منجر به‌مقدار زیر برای a می‌شود:

$$a=\frac{m[m_1a_2t_2(t-t_1)-m_2a_1t_1(t-t_2)]}{m_1m_2t(t_2-t_1)}$$

که با توجه به‌مقدارهای عددی به‌دست می‌آید: $a=36$.

۲۸. اگر x را تعداد سال‌های عمر دیوفانت بگیریم، به معادلهٔ زیر می‌رسیم:

$$\frac{x}{6}+\frac{x}{12}+\frac{x}{7}+5+\frac{x}{2}+4=x$$

که از آن‌جا نتیجه می‌شود: $x=84$.

۲۹. اگر جملهٔ اول‌تصاعد را a وقدر نسبت آن را d بگیریم، باتوجه

به‌شرط‌های مسأله، به‌این‌دو معادله می‌رسیم:

$$a+(a+d)+\ldots+(a+۴d)=۱۰۰$$

$$(a+۲d)+(a+۳d)+(a+۴d)=۷[a+(a+d)]$$

یا

$$۵a+۱۰d=۱۰۰,\ ۱۱a-۲d=۰$$

ازآن‌جا $a=\frac{۵}{۳}$ و $d=\frac{۵۵}{۶}$، وتصاعد مطلوب چنین است:

$$\frac{۱۰}{۶},\ \frac{۶۵}{۶},\ \frac{۱۲۰}{۶},\ \frac{۱۷۵}{۶},\ \frac{۲۳۰}{۶}$$

۳۰.

$$\frac{m}{q}+m+mq=۱۹$$

$$\frac{m^۲}{q^۲}+m^۲+m^۲q^۲=۱۳۳$$

فرض کنید: $q+\frac{۱}{q}=x$؛ دستگاه به‌این‌صورت درمی‌آید:

$$m(x+۱)=۱۹,\qquad m^۲(x^۲-۱)=۱۳۳$$

باتقسیم معادلهٔ دوم برمعادلهٔ اول، به‌معادله‌ای می‌رسیم که، همراه بامعادلهٔ اول، یك دستگاه خطی، نسبت به mx و x، تشکیل می‌دهند. از آن‌جا به دست می‌آید: $m=۶$، $x=\frac{۱۳}{۶}$ ، $q=\frac{۳}{۲}$ یا $q=\frac{۲}{۳}$. در نتیجه ، دو تصاعد (و در واقع، یك تصاعد) پیدا می‌شود:

$$۹,\ ۶,\ ۴ \quad \text{یا} \quad ۴,\ ۶,\ ۹$$

۳۱. داریم:

$$a(q^۳+q^{-۳})=۱۳,\qquad a(q+q^{-۱})=۴$$

که از تقسیم آن‌ها بریکدیگر، به یك معادلهٔ دو مجذوری می‌رسیم. تصاعد مطلوب، چنین است:

$$\frac{۱}{۵},\ \frac{۴}{۵},\ \frac{۱۶}{۵},\ \frac{۶۴}{۵}$$

(و یا همین عددها، با ردیف عکس).

۳۲. تعداد شریك‌ها را x می‌گیریم. مقدار سود را، به دو طریق،

می‌نویسیم:

$$(۸۲۴۰+۴۰x.x)\frac{x}{۱۰۰}=۱۰x.x+۲۲۴$$

یا

$$x^{۳}-۲۵x^{۲}+۲۰۶x-۵۶۰=۰$$

این معادله، ریشهٔ منفی ندارد ($x=-p$ را آزمایش کنید). اگر معادله دارای ریشهٔ گویا باشد، این ریشه، یکی از مقسوم‌علیه‌های درست و مثبت عدد ۵۶۰ است. بنابراین، احتمال دارد که x، برابر با یکی از عددهای زیر باشد:

$$۱, ۲, ۴, ۵, ۷, ۸, ۱۰, ۱۴, ۱۶, \ldots$$

و در واقع، جواب‌ها برابرند با ۷، ۸ و ۱۰. (البته، اولر ابتدا مقدارهای جواب را درنظر گرفته است و، سپس، شرح مربوط به بازرگانان را، روی کاغذ آورده است.)

۳۳. مرکزهای چهار دایرهٔ مماس بر ضلع‌ها، رأس‌های یك مربع را تشکیل می‌دهند که قطرآن را، به‌دو طریق، می‌توان نوشت:

$$(۴r)^{۲}=۲(a-۲r)^{۲}$$

که از آن به‌دست می‌آید:

$$r=\frac{a(\sqrt{۲}-۱)}{۲}$$

۳۴. ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین (وارد بر قاعده) را، می‌توان به صورت $x+\frac{d}{۲}$ نوشت. آن‌وقت

$$\left(x+\frac{d}{۲}\right)^{۲}+\left(\frac{b}{۲}\right)^{۲}=a^{۲},\ x^{۲}+\left(\frac{b}{۲}\right)^{۲}=\left(\frac{d}{۲}\right)^{۲}$$

که با حذف x، به‌دست می‌آید:

$$۴a^{۴}-۴d^{۲}a^{۲}+b^{۲}d^{۲}=۰$$

۳۵. a) این معادله، نسبت به $d^{۲}$ و $b^{۲}$، از درجهٔ اول، ولی نسبت به $a^{۲}$، از درجهٔ دوم است. بنابراین، حل مسأله نسبت به a، دشوارتر از

حل آن نسبت به‌دو مجهول دیگر است.

d (b، وقتی وتنها وقتی مثبت است که داشته باشیم: $۴a^۲>b^۲$؛

b، وقتی وتنها وقتی مثبت است که داشته باشیم: $d^۲>a^۲$؛

a، وقتی و تنها وقتی دوجواب مثبت مختلف‌را قبول می‌کند که داشته باشیم: $d^۲>b^۲$.

خواننده می‌تواند ازاین‌جا، نتیجه‌هایی به‌دست‌آورد. نیوتون، جواب تمرین ۳۴ را، این طور تفسیر می‌کند: «از این‌جا معلوم می‌شود که چرا تحلیل‌گران ما را وا می‌دارند تا اختلافی بین معلوم ومجهول قایل شویم. از آن‌جاکه به‌هرحالتی از داده‌ها ومجهول‌ها، با محاسبه‌ای یکسان می‌رسیم، بهتر آن است که، آن‌ها را، بدون هیچ تفاوتی، مورد مقایسه قرار دهیم. راحت‌تر از همه، این است که برای معلوم‌ها و مجهول‌ها، حقوقی برابر در نظر بگیریم و راهی را انتخاب کنیم که ما را، به‌ساده‌ترین صورت، به‌معادله برساند».

۳۶. برای تشکیل معادله، راهی مخالف آن‌چه مسأله تلقین می‌کند، انتخاب می کنیم : x، α، β، γ و δ را معلوم و l را مجهول می گیریم. از مثلث UVG (با استفاده‌ازقضیهٔ سینوس‌ها) GV را برحسب x، $\alpha+\beta$ و γ، بیان می‌کنیم. ازمثلث VUH، مقدار HV را، برحسب x، β و $\delta+\gamma$ وازمثلث GHV (با استفاده از قضیهٔ کسینوس‌ها)، l را برحسب GV، HV و δ پیدا می کنیم و، سپس، بااستفاده از بیان GV و HV، به‌دست می‌آوریم:

$$l^۲=x^۲\left[\frac{sin^۲(\alpha+\beta)}{sin^۲(\alpha+\beta+\gamma)}+\frac{sin^۲\beta}{sin^۲(\beta+\gamma+\delta)}-\right.$$
$$\left.-\frac{۲sin(\alpha+\beta)sin\beta cos\delta}{sin(\alpha+\beta+\delta)sin(\beta+\gamma+\delta)}\right]$$

که ازآن‌جا، می‌توان $x^۲$ را برحسب l، α، β، γ و δ بیان کرد.

۳۷. از دو زاویهٔ دیگر مثلث، زاویهٔ بزرگتر را β و زاویهٔ کوچکتر را γ می گیریم. اگرزاویهٔ β حاده باشد، پنج پاره‌خط c، h_a، d_α، m_a و b، که از رأس A گذشته‌اند، به‌همین ردیفی که نوشته‌ایم، قرار می گیرند. از دو مثلث قائم‌الزاویه‌ای که ارتفاع h_a به‌وجود می‌آورد، داریم:

$$\beta=\frac{\pi}{۲}-\frac{\alpha}{۴}, \qquad \gamma=\frac{\pi}{۲}-\frac{۳\alpha}{۴}$$

از مثلث‌هایی که به‌وسیلهٔ میانهٔ m_a به‌وجود می‌آیند، به‌دست می‌آید:

$$\frac{\frac{a}{۲}}{m_a}=\frac{sin\frac{\alpha}{۴}}{sin\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{۳\alpha}{۴}\right)}=\frac{sin\frac{۳\alpha}{۴}}{sin\left(\frac{\pi}{۲}-\frac{\alpha}{۴}\right)}$$

از آن‌جا

$$sin\frac{\alpha}{۴}cos\frac{\alpha}{۴}=sin\frac{۳\alpha}{۴}cos\frac{۳\alpha}{۴},$$

$$sin\frac{\alpha}{۲}=sin\frac{۳\alpha}{۲}\Longrightarrow\frac{\alpha}{۲}=\pi-\frac{۳\alpha}{۲},$$

$$\alpha=\frac{\pi}{۲}$$

۳۸. S، $۲p$، c، a و b را، به‌ترتیب، مساحت، محیط، وتر و دو ضلع دیگر مثلث می‌گیریم. S و p معلوم و a، b و c مجهول‌اند. برای این که دستگاه

$$a+b+c=۲p, \qquad ab=۲S, \qquad c^۲=a^۲+b^۲$$

را حل کنیم، $(a+b)^۲$ را به‌دو طریق بیان می‌کنیم:

$$(۲p-c)^۲=c^۲+۴S \implies c=p-\frac{S}{p}$$

۳۹. مثلث را با ضلع‌های $۲a$، u و v در نظر می‌گیریم، که درآن، $u+v=۲d$؛ ارتفاع وارد برضلع $۲a$ را، h فرض می‌کنیم.

a و h و d داده شده‌است، باید u و v را پیداکنیم.

تصویرهای قائم u و v برضلع $۲a$ را x و y می‌گیریم‌وفرض می‌کنیم:

$$x-y=۲z$$

دراین‌صورت، داریم:

$$x+y=۲a$$

$$u^۲=h^۲+x^۲, \qquad v^۲=h^۲+y^۲$$

$$u^۲-v^۲=x^۲-y^۲$$

یا

$$۲d(u-v)=۲a.۲z,$$

$$u=d+\frac{a}{d}z, \qquad v=d-\frac{a}{d}z,$$

$$x=a+z, \qquad y=a-z,$$

$$\left(d+\frac{a}{d}z\right)^۲=h^۲+(a+z)^۲,$$

$$z^۲=d^۲\left(۱-\frac{h^۲}{d^۲-a^۲}\right)$$

۴۰. a و b را دوضلع مجاور یك متوازی‌الاضلاع و c و d را قطرهای آن می گیریم. دراین‌صورت

$$۲(a^۲+b^۲)=c^۲+d^۲$$

(قطرهای متوازی‌الاضلاع، آن‌را به‌چهار مثلث‌تقسیم می کنند؛ قضیهٔ کسینوس‌ها را، دربارهٔ دو مثلث مجاور بنویسید).

۴۱. $(۲b-a)x^۲+(۴a^۲-b^۲)(۲x-a)=۰$.

درحالت $a=۱۰$ و $b=۱۲$ داریم: $x=\frac{۱۶(-۸+۳\sqrt{۱۱})}{۷}$، که به $\frac{۳۲}{۷}$ خیلی نزدیك است. حالت $a=۲b$ را روشن کنید.

۴۲. $\frac{a^۲(۳+\sqrt{۳})}{۲}$.

۴۳. شش ضلعی، از سه مـربع و چهار مثلث تشکیل شده است، کـه مساحت هر یك ازمثلث‌ها برابر است با S. بنابراین مساحت شش ضلعی‌برابر $۲c^۲+۴S$ می‌شود.

۴۴. مثلث قائم‌الزاویه‌را به‌سه مثلث تقسیم کنیدکه رأس مشترك‌آن‌ها درمرکز دایرهٔ محاطی مثلث باشد. از مقایسهٔ مساحت‌ها، خواهیم داشت:

$$\frac{d}{۲}\cdot\frac{a+b+c}{۲}=\frac{ab}{۲},$$

$$d=\frac{2ab}{a+b+c}=\frac{2ab(a+b-c)}{(a+b)^2-c^2}=a+b-c$$

۴۵. $\frac{1}{3}$، $\frac{2}{9}$، $\frac{2}{9}$، $\frac{2}{9}$. این نتیجه ، از این‌جا حاصل می‌شود که ضلع‌های مثلث بزرگتر، به وسیلهٔ رأس‌های مثلث محاطی، به‌نسبت ۱:۲ تقسیم می‌شود.

۴۶. ابتدا به ساده‌ترین حالت، وقتی که مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، می‌پردازیم. ممکن است تقارن آن، ما را به این فکر برساند که ، در این حالت، چهار مثلث کوچك هم، متساوی‌الاضلاع هستند. ولی اگر چنین باشد، باید ضلع‌های مثلث‌های کوچك، موازی ضلع‌های مثلث اصلی باشند. ودراین‌صورت، خصلتی ازشکل را نمایان می‌کندکه، نه‌تنها درحالت‌خاص، بلکه درحالت کلی، موجب حل آن می‌شود. خط‌های راستی موازی یکی از ضلع‌های مثلث‌طوری رسم‌کنیدکه‌دوضلع دیگررا به‌پنج قسمت مساوی‌تقسیم کنند. این عمل‌را، برای هرسه ضلع مثلث انجام دهید (یعنی‌سه بار). به این ترتیب، مثلث مفروض، به‌۲۵مثلث کوچکترتقسیم می‌شودکه با هم برابرو با مثلث‌اصلی‌متشابه‌اند. به‌سادگی‌می‌توان‌ازاین‌۲۵ مثلث، چهارمثلث‌موردنظر را جداکرد، که مساحت هرکدام ازآن‌ها، $\frac{1}{25}$ مساحت‌مثلث اصلی‌است(البته، این تنها جواب ممکن نیست، ولی ما از اثبات‌آن می‌گذریم).

۴۷. مسألهٔ کلی را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم، فاصلهٔ نقطهٔ P، واقع در درون مستطیل، از چهار رأس آن، به‌ترتیب، برابر a، b، c و d و ازچهارضلع آن، به‌ترتیب، x، y، x' و y' باشد(رأس‌ها وضلع‌هارا به‌ردیف دوری درنظر می‌گیریم، یعنی به‌ردیفی که با حرکت روی دایره، در جهت عقربه‌های ساعت متناظر باشد). آن‌وقت

$$a^2=y'^2+x^2, b^2=x^2+y^2, c^2=y^2+x'^2, d^2=x'^2+y'^2,$$

از آن‌جا

$$a^2-b^2+c^2-d^2=0$$

درمسألهٔ مفروض داریم: $a=5$، $b=10$، $c=14$، بنابراین

$$d^2=25-100+196=121 \implies d=11$$

(توجه کنید: a، b و c مقدار d را معین می‌کنند ولی به‌کمك آن‌ها، نمی‌توان ضلع‌های $x+x'$ و $y+y'$ مستطیل را به‌دست‌آورد).

۴۸. u را ضلع مربع می‌گیریم. با توجه به‌نام‌گذاری‌های تمرین ۴۷ داریم:

$$x+x'=y+y'=u$$

و به سه معادله، با سه مجهول x، y و u می‌رسیم.

$$x^2+(u-y)^2=a^2,\ x^2+y^2=b^2,\ y^2+(u-x)^2=c^2$$

و از آن‌جا

$$2uy=u^2+b^2-a^2,\ \ 2ux=u^2+b^2-c^2$$

اگراین دوبرابری‌را مجذور و، سپس، با هم‌جمع کنیم، به‌معادلهٔ دومجذوری زیر، نسبت به u می‌رسیم:

$$u^4-(a^2+c^2)u^2+\frac{(b^2-a^2)^2+(b^2-c^2)^2}{2}=0$$

حالت‌های خاص را مورد بررسی قرار دهید:

الف) $u^2=2a^2$ یا $u=0$؛

ب) $u=a$؛

پ) u موهومی است (به‌جز حالت $c^2=2b^2=2u^2$)؛

ت) u موهومی است (به‌جز حالت $a^2=c^2=u^2$).

۴۹. $\frac{100\pi}{4}$ و $\frac{100\pi}{2\sqrt{3}}$ یا به‌ترتیب ۷۸/۵۴ درصد و ۹۰/۶۹ درصد. (درواقع، برای عبور ازمیز (مربع‌شکل) به صفحهٔ بی‌انتها، باید از مفهوم حد استفاده کرد، ولی ما به‌بحث تفصیلی دراین‌باره نمی‌پردازیم و به‌تصور شهودی اکتفا می‌کنیم.)

۵۰. با دنبال‌کردن روند تمرین ۳۳، قطر مکعب مجهول را، به‌دو طریق می‌نویسیم:

$$(4r)^2=3(a-2r)^2,$$

$$r=\frac{(2\sqrt{3}-3)a}{2}$$

۵۱. چهار رأس متوالی مستطیلی، از نقطهٔ P واقع در فضا، به‌ترتیب، به فاصلهٔ a، b، c و d قرار دارند. سه تا از این فاصله‌ها معلوم‌اند، فاصلهٔ چهارم را پیدا کنید.

رابطهٔ

$$a^2-b^2+c^2-d^2=0$$

(حل تمرین ۴۷ را ببینید)، که از آن می‌توان جواب مسأله را به‌دست‌آورد، برای حالت کلی (فضایی) هم، به‌قوت خود باقی است. این نتیجه‌را می‌توان، مثلاً دربارهٔ نقطهٔ P و رأس‌های انتهایی یك مکعب مستطیل به‌کار برد، زیرا هردو قطر چنین مکعب مستطیلی، درعین‌حال، قطرهای یك مستطیل هم هستند.

۵۲. حل مسألهٔ هندسهٔ فضایی، اغلب به‌یك «شکل‌کلیدی مسطحه» مربوط می‌شود که پیداکردن‌آن، همهٔ‌درهارا می‌گشاید و امکان به‌دست‌آوردن همهٔ رابطه‌های اصلی را می‌دهد.

از ارتفاع هرم صفحه‌ای می‌گذردکه با ضلع قاعده موازی (و بر دو ضلع دیگرآن عمود) است. مثلث متساوی‌الساقینی‌که از برخورد هرم با این صفحه به‌دست می‌آید، همان شکل‌کلیدی است؛ ارتفاع این مثلث برابر h، قاعده آن ــ که برابر a فرض می‌کنیم ــ برابر ضلع قاعدهٔ هرم وهریك از ساق‌های آن برابر $2a$ است، زیرا هرکدام ازآن‌ها، ارتفاع یکی از وجه‌های جانبی (سهم هرم) را تشکیل می‌دهند. از آن‌جا

$$(2a)^2=\left(\frac{a}{2}\right)^2+h^2$$

و بنابراین، مساحت مطلوب، چنین است:

$$5a^2=\frac{4h^2}{3}$$

۵۳. مثلاً: سطح جانبی یك‌هرم منتظم باقاعدهٔ شش‌ضلعی، چهاربرابر سطح قاعدهٔ آن است. اگر طول ضلع قاعده‌برابر a باشد، طول h ارتفاع‌آن

را پیدا کنید ($h=a\sqrt{6}$؛ تمرین ۵۷ را هم ببینید).

۵۴. مجموع مربع‌های قطرهای متوازی‌الاضلاع، برابراست بامجموع مربع‌های ضلع‌های آن (تنظیم دیگری از نتیجهٔ تمرین ۴۰).

فرض کنید A، B و C به‌ترتیب، مجموع مربع‌های ۴ قطر، ۱۲ یال و ۱۲ قطر وجه‌های جانبی باشد، دراین‌صورت داریم:

$$A=B=\frac{C}{۲}$$

(از نتیجهٔ تمرین ۴۰، دوباره استفاده کنید.)

۵۵. $\frac{۱۰۰\pi}{۶}$ و $\frac{۱۰۰\pi\sqrt{۲}}{۶}$، یا به‌ترتیب ۵۲/۳۶ درصد و ۷۴/۰۷ درصد (به‌تقریب). با ۶° از حل تمرین ۵۴ فصل پانزدهم، مقایسه کنید.

۵۶. مجذور مساحت موردنظر چنین است:

$$۱۶\,p(p-a)(p-b)(p-c)$$

که به‌رابطهٔ هرون شباهت دارد.

۵۷. ضلع مثلث‌را a، حجم‌چهار وجهی منتظم‌را T وحجم‌هشت‌وجهی منتظم را O می‌گیریم.

راه حل اول. هشت وجهی را به دو هرم منتظم با قاعده‌های مشترک تقسیم‌می‌کنیم. قاعدهٔ مشترک این‌دوهرم، مربعی است به‌مساحت $a^۲$. ارتفاع هرکدام از این هرم‌ها، برابراست با $\frac{a}{\sqrt{۲}}$ («شکل مسطحهٔ کلیدی» ازقطر قاعدهٔ هرم می‌گذرد) وبنابراین

$$O=۲\frac{a^۲}{۳}\cdot\frac{a}{\sqrt{۲}}=\frac{a^۳\sqrt{۲}}{۳}$$

اکنون صفحه‌ای از ارتفاع چهار وجهی (که طول‌آن را h می‌نامیم) ویکی از یال‌های جانبی می‌گذرانیم؛ در مقطع («شکل مسطحهٔ کلیدی») دو مثلث قائم‌الزاویه به‌دست می‌آیدکه ازآن‌ها داریم:

$$h^۲=a^۲-\left(\frac{۲a\sqrt{۳}}{۶}\right)^۲=\left(\frac{a\sqrt{۳}}{۲}\right)^۲-\left(\frac{a\sqrt{۳}}{۶}\right)^۲=\frac{۲a^۲}{۳}$$

به‌این‌ترتیب

$$T=\frac{۱}{۳}\cdot\frac{a}{۲}\cdot\frac{a\sqrt{۳}}{۲}\cdot\frac{a\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}=\frac{a^۳\sqrt{۳}}{۱۲}$$

و در نتیجه

$$O=۴T$$

راه حل دوم. چهار وجهی منتظمی را با یال $۲a$ وحجم $۲^۳T$ در نظر می گیریم؛ چهار صفحه انتخاب می کنیم که هرکدام از آن‌ها از وسط سه یال منتهی به‌یك رأس گذشته باشند. این‌چهار صفحه، چهار وجهی را به‌۴ چهار وجهی کوچکتر به‌حجم T و یك هشت وجهی به حجم O تقسیم می کنند. از آن‌جا

$$۴T+O=۸T$$

که دوباره به‌دست می‌آید: $O=۴T$.

۵۸. C را منشور مفروض (تورت) و D را منشور مجهول (که تنها سطح بالایی آن را لعاب گرفته است) می گیریم. a و h راضلع قاعده وارتفاع منشور c، و x و y را ضلع قاعده و ارتفاع منشور D فرض می کنیم.

شرطهایی که منشور D را معین می کنند، بااین‌معادله‌ها بیان‌می‌شوند:

$$x^۲=\frac{a^۲+۴ah}{۹},$$

$$x^۲y=\frac{a^۲h}{۹},$$

$$h=\frac{۵a}{۱۶}$$

در نتیجه

$$x=\frac{a}{۲},\quad y=\frac{۵a}{۳۶},\quad \frac{y}{x}=\frac{۵}{۱۸}$$

منشور D را طوری ببرید که مرکز p، قاعدهٔ بالای آن، برمرکز P قاعدهٔ بالای منشور C منطبق‌وضلع‌ها یا قطرهای مربع p با ضلع‌های‌مربع P موازی باشد. به‌این ترتیب، C و D دارای چهار صفحهٔ تقارن مشترك هستند؛ این

صفحه‌ها، بقیهٔ «تورت» Cرا به ۸ قسمت مساوی تقسیم می‌کنندکه حجم هر کدام از آن‌ها برابر حجم D است و به‌اندازهٔ D دارای لعاب‌اند.

۵۹. نسبت حجم‌ها $\frac{۱}{c}:\frac{۱}{b}:\frac{۱}{a}$ و نسبت مساحت‌ها چنین است:

$$\frac{b+c}{a}:\frac{c+a}{b}:\frac{a+b}{c}$$

۶۰. تفاضل حجم‌های مخروط ناقص و استوانه، برابر است با

$$\pi h\left[\frac{a^{۲}+ab+b^{۲}}{۳}-\frac{(a+b)^{۲}}{۲}\right]=\frac{\pi h(a-b)^{۲}}{۱۲}$$

این تفاضل همیشه مثبت است وتنها درحالت $a=b$، دو جسم برهم منطبق می‌شوند[۱].

۶۱. شعاع دایرهٔ محیطی ABC را r می‌گیریم، داریم:

$$r^{۲}=h(۲R-h), r=\frac{۲}{۳}\cdot\frac{\sqrt{۳}a}{۲}$$

وبنابراین

$$R=\frac{a^{۲}}{۶h}+\frac{h}{۲}$$

(درعمل، معمولاً ازجملهٔ $\frac{h}{۲}$ صرف‌نظر می‌کنند.)

۶۲. Cرا مرکزو r راشعاع کرهٔمحیطی‌فرض می‌کنیم. «دوشکل‌مسطحهٔ کلیدی»، یعنی دو مقطع چهار وجهی وجود دارد؛ یکی ازآن‌ها، صفحه‌ای است که از یال b و وسط یال روبه‌روی آن می‌گذرد؛ و دیگری، صفحه‌ای که از وسط یال b ویال روبه‌روی‌آن عبور می‌کند. این دو مقطع بریکدیگر عمودند؛ فصل مشترك‌آن‌ها، d، وسط یال‌ها را به هم وصل می‌کند و از

---

۱. روشن است‌که «مازاد» و«کمبود» حجم مخروط ناقص، نسبت به‌حجم استوانه، مربوط به‌دوران مثلث‌های (قائم‌الزاویهٔ) مساوی دور یك محور است؛ این مثلث‌ها،دراولی، نسبت به‌دومی، دورتر ازمحورقرارگرفته‌است و، بنابراین، موجب حجم بیشتری می‌شود.

مرکز C می‌گذرد.

اکنون، فاصلهٔ نقطهٔ C تا یال b را x (انتهای دوم این‌عمود، وسط یال b است) و ارتفاع یکی از دو وجه چهار وجهی را، که مثلث‌های متساوی‌الساقین‌اند، h می‌گیریم؛ آن‌وقت

$$h=\frac{۳a^۲}{۴}$$

ازمطالعهٔ مثلث‌های قائم‌الزاویه‌ای که درمقطع به‌دست می‌آیند، نتیجه می‌شود:

$$h^۲=d^۲+\left(\frac{b}{۲}\right)^۲,$$

$$r^۲=x^۲+\left(\frac{b}{۲}\right)^۲,$$

$$r^۲=(d-x)^۲+\left(\frac{a}{۲}\right)^۲$$

حالا، برای پیدا کردن چهار مجهول خود، چهار معادله داریم. h بلافاصله از معادلهٔ اول و، سپس، d از معادلهٔ دوم، به‌دست می‌آیند. بعداز d، بهتر است x را پیدا کنیم (برای این منظور، می‌توان یکی از دو معادلهٔ آخر را، از دیگری کم کرد). بالاخره

$$r^۲=\frac{a^۲}{۴}\cdot\frac{۴a^۲-b^۲}{۳a^۲-b^۲}$$

(امتحان: اگر $b=a\sqrt{۳}=۲h$، آن‌وقت $r=\infty$).

امکان کاربرد: دو مثلث متساوی‌الاضلاع محکم (به‌ضلع a) را، که‌در یك ضلع مشترك، به‌هم لولا شده‌اند، می‌توان باچنان زاویه‌ای از هم دور کرد که هرچهار رأس‌آن، برسطح کروی مورد بررسی، درطرف مقعر آن قرار گیرند. بعد از آن، بااندازه گیری b، می‌توان r را محاسبه کرد (برای عدسی محدب، به‌وسیلهٔ بغرنج‌تری نیاز پیدا می‌کنیم).

۶۳. اگر در تمرین ۶۲ فرض‌کنیم $a=b$، آن وقت یك چهار وجهی منتظم خواهیم داشت:

$$r^۲=\frac{۳a^۲}{۸}$$

و

$$sin\frac{\alpha}{۲}=\frac{\frac{a}{۲}}{r}=\frac{\sqrt{۶}}{۳},$$

$$\alpha=۱۰۹^\circ,۲۸'$$

این زاویه‌را می‌توان به‌عنوان زاویهٔ بین دواتصال ظرفیتی متقارن اتم کربن (و مثلاً، درمولکول $CH_۴$) درنظر گرفت.

۶۴. x را فاصلهٔ L تا پرده می گیریم. دراین‌صورت

$$\frac{I}{x^۲}=\frac{I'}{(d-x)^۲}$$

وبنابراین

$$x=\frac{d\sqrt{I}}{\sqrt{I}+\sqrt{I'}}$$

(درعمل، مسأله را طور دیگری در نظر می‌گیرند: I مفروض است، d و x را اندازه می‌گیرند و، به‌این ترتیب، I' را به‌دست می‌آورند.)

۶۶. ۳۵ مایل (تمرین ۶۷ را ببینید).

۶۷. نام‌گذاری‌های کلی را وارد می‌کنیم (در پرانتزها، مقدارهای عددی متناظر، داده شده است):

$a\left(\frac{۷}{۲}\right)$ — سرعت نامه‌رسان A،

$b\left(\frac{۸}{۳}\right)$ — سرعت نامه‌رسان B،

c (۱) — فاصلهٔ زمانی (به‌ساعت) بین حرکت A و B،

d (۵۹) — فاصلهٔ (به‌مایل) بین نقطه‌های آغاز حرکت.

دراین‌صورت داریم:

$$x+y=d,\quad \frac{x}{a}-\frac{y}{b}=c,\quad x=\frac{a(bc+d)}{a+b}$$

نیوتون این مسأله را، به ترتیب زیر، تعمیم داده است: «سرعت دو نامه‌رسان، یکی درجهت از A به B و دیگری درجهت از B به A، همچنین فاصلهٔ زمانی بین آغاز حرکت دو نفر و، بالاخره، فاصلهٔ بین دو نقطهٔ آغاز حرکت‌آن‌ها، داده شده است، نقطهٔ برخوردآن‌ها را پیدا کنید».

۶۸. از این نام‌گذاری‌ها استفاده می‌کنیم:

u — سرعت آرت،

v — سرعت بیل،

t_1 — زمان (از لحظهٔ حرکت) تا برخورد اول،

t_2 — زمان تا برخورد دوم،

d — فاصلهٔ مجهول بین خانه‌های آن‌ها.

دراین‌صورت

$$ut_1 = a, \qquad ut_2 = d+b,$$
$$vt_1 = d-a, \qquad vt_2 = 2d-b$$

۱°. اگر نسبت $\frac{u}{v}$ را به‌دوطریق نشان‌دهیم، داریم:

$$\frac{a}{d-a} = \frac{d+b}{2d-b}$$

که اگر ریشهٔ صفر را حذف‌کنیم، به‌دست می‌آید: $d = 3a-b$.

۲°. البته‌آرت. از لحاظ عددی $\frac{u}{v} = \frac{3}{2}$.

۶۹. تمرین ۷۰ را ببینید.

۷۰. فاصلهٔ زمانی بین‌آغاز حرکت ولحظه‌ای‌که $n+1$ دوست، برای نخستین‌بار دوباره، به‌هم می‌رسند، از $2n-1$ مرحله تشکیل شده است:

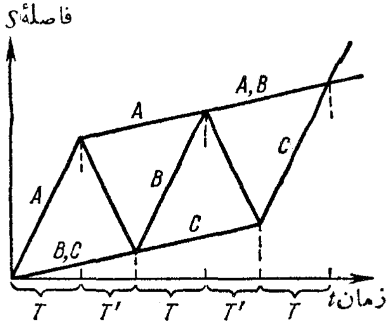
۱) بوب با A می‌رود،

۲) بوب تنها می‌رود،

۳) بوب با B می‌رود،

۴) بوب تنها می‌رود،

. . . .



شکل ۵۶

$(۲n-۱)$ بوب با L می‌رود.

روی شکل ۵۶، کـه در آن $n=۳$ فـرض شده است ، ایـن پنج مرحله را روشن کرده‌ایم؛ پاره‌خطها معرف مسافرت‌های دوستان A، B و C است، که با حرف‌هـای متناظر خود نشان داده شده‌اند. پاره‌خطهایی که شیب بیشتری دارند، نشانهٔ حرکت با اتـومبیل است . از تقارن رونـد (که‌به‌خصوص، روی‌شکل، به‌خوبی دیده می‌شود) نتیجه می‌شود کـه همهٔ n مـرحله‌ای که در ردیف زوج قـرار گرفته‌اند، فاصلهٔ زمانی برابر، ومثلاً T دارند، وهمهٔ $n-۱$ مرحله‌ای هم که در ردیف‌فرد قرارگرفته‌اند، دارای‌فاصلهٔ زمانی‌برابر، ومثلاً T'، هستند. حرکت مجموع را، بعد از $۲n-۱$ مرحله [یعنی $nT+(n-۱)T'$ واحـد زمان] ، به‌دو طریق مختلف بیان مـی‌کنیم (ابتدا با تعقیب بوب و، سپس، با تعقیب یکی از یارانش):

$$nTc-(n-۱)T'c=Tc+(n-۱)(T+T')p$$

ازآن‌جا

$$\frac{T}{T'}=\frac{c+p}{c-p}$$

۱°. سرعت حرکت تمامی‌گروه برابر است با

$$\frac{nTc-(n-۱)T'c}{nT+(n-۱)T'}=c\frac{c+(۲n-۱)p}{(۲n-۱)c+p}$$

۲°. سهمی ازکل‌حرکت‌که بوب در اتومبیل تنها است:

$$\frac{(n-۱)T'}{nT+(n-۱)T'}=\frac{(n-۱)(c-p)}{(۲n-۱)c+p}$$

۳°. نتیجه‌گیری‌های ۱° و ۲° ، به‌خصوص، برای حالت‌هـای حدی

روشن است [البته، نتیجه‌گیری ۲°، برای‌حالت $n=\infty$ کمتر واضح است]:

	$p=\circ$	$p=c$	$n=۱$	$n=\infty$
۱°. سرعت حرکت گروه	$\frac{c}{۲n-۱}$	c	c	p
۲°. سهم زمانی‌که بوب تنها است:	$\frac{n-۱}{۲n-۱}$	$\circ$	$\circ$	$\frac{c-p}{۲c}$

۷۱. $t_۱$ را زمان افتادن سنگ و $t_۲$ را زمان رسیدن صدای برخوردآن به‌شما می‌گیریم. از رابطه‌های

$$T=t_۱+t_۲,\quad d=\frac{gt_۱^۲}{۲},\ d=ct_۲$$

به‌دست می‌آید:

$$d=\left\{-\frac{c}{\sqrt{۲g}}+\sqrt{\frac{c^۲}{۲g}+cT}\right\}^۲$$

۷۲. $\angle ACO=\beta'$ می‌گیریم. ازآن‌جاکه

$$\frac{\sin\omega}{\sin\beta}=\frac{AB}{AO},\quad \frac{\sin\omega'}{\sin\beta'}=\frac{AC}{AO}$$

بنابراین

$$\frac{\sin\omega.\sin\beta'}{\sin\omega'.\sin\beta}=\frac{t}{t'}.$$

ازطرف دیگر، $\beta'=\beta-(\omega'-\omega)$؛ $\frac{\sin\beta'}{\sin\beta}$ را به دو طریق بیان می‌کنیم:

$$\cot g\beta=\cot g(\omega'-\omega)-\frac{t\sin\omega'}{t'\sin\omega\sin(\omega'-\omega)}$$

۷۳. اگر سه معادله را باهم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\circ=a+b+c$$

اگر a، b و c در این شرط صدق نکنند، مسأله ناممکن است، یعنی

عددهایی برای x، y و z وجودندارندکه، به‌طورهم‌زمان، درسه معادله صدق کنند. اگر هم a، b و c با این شرط سازگار باشند، مسأله نامعین است، یعنی بی‌نهایت جواب دارد؛ مثلاً از دومعادلهٔ اول به‌دست می‌آید:

$$x = z + \frac{۳a + b}{۷},$$

$$y = z + \frac{۲a + ۳b}{۷}.$$

ضمناً، z می‌تواند هرعدد دلخواه باشد.

با تمرین‌های ۴۷ و ۴۸ مقایسه کنید.

۷۴. بامقایسهٔ ضریب‌های جمله‌های هم‌درجه دردوطرف برابری، پنج معادله برای مجهول‌های p، q و r به‌دست می‌آید:

$$۱ = p^۲, \quad ۴ = ۲pq, \quad -۲ = q^۲ + ۲pr, \quad -۱۲ = ۲qr, \quad ۹ = r^۲$$

معادلهٔ اول $p = \pm ۱$ را می‌دهد؛ ازآن‌جا، با استفاده از معادله‌های دوم وسوم، دودستگاه جواب به دست می‌آید:

$$p = ۱, \quad q = ۲, \quad r = -۳, \quad p = -۱, \quad q = -۲, \quad r = ۳$$

که ضمناً، دردومعادلهٔ آخرهم صدق می‌کنند.

درحالت کلی، ازعبارت درجهٔچهارم، شبیه‌آن چه درسمت چپ برابری داریم، نمی‌توان ریشهٔ دوم گرفت، زیرا برای دستگاهی که تعداد معادله‌های آن، بیشتر ازتعداد مجهول‌ها است، همیشه نمی‌توان جوابی پیداکرد.

۷۵. ازبرابر قراردادن ضریب‌های متناظر دردوطرف تساوی، به‌دست می‌آید:

$$۱)\ aA = bB = cC = ۱,$$

$$۲)\ bC + cB = cA + aC = aB + bA = ۰$$

از ۲) نتیجه می‌شود:

$$bC = -cB, \quad cA = -aC, \quad aB = -bA$$

ازضرب این‌سه برابری به‌دست می‌آید:

$$abcABC = -abcABC,$$

$$abcABC = ۰$$

ولی از ۱) نتیجه می‌شود:

$$abc\,ABC = ۱$$

تناقض حاصل نشان می‌دهد که اتحاد پیشنهادی ناممکن است (یعنی دستگاه شش معادلهٔ شش مجهولی ما، ناسازگار است).

۷۶. عددهای $x = ۵t$، $y = ۶۰ - ۱۸t$ و $z = ۴۰ + ۱۳t$، وقتی و تنها وقتی مثبت‌اند که داشته باشیم: $۰ < t < \frac{۶۰}{۱۸}$. بنابراین، t می‌تواند ۱، ۲ و ۳، و (x, y, z) یکی از گروه‌های زیر باشد:

$$(۵, ۴۲, ۵۳),\ (۱۰, ۲۴, ۶۶),\ (۱۵, ۶, ۷۹)$$

۷۷. تمرین ۷۶ را ببینید. دستگاه

$$x + y + z = ۳۰$$
$$۱۴x + ۱۱y + ۹z = ۳۶۰$$

در این مقدارها صدق می‌کند:

$$x = ۲t,\ \ y = ۴۵ - ۵t,\ \ z = ۳t - ۱۵$$

که در آن، t برابر است با ۵، ۶، ۷، ۸ یا ۹.

۷۸.

$$۱۰۰ + x = y^۲,\ \ ۱۶۸ + x = z^۲$$

که اگر از هم کم کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(z - y)(z + y) = ۶۸$$

عدد ۶۸ را تنها به سه طریق می‌توان به صورت ضرب دو عامل نوشت:

$$۶۸ = ۱ \times ۶۸ = ۲ \times ۳۴ = ۴ \times ۱۷$$

مجموع و تفاضل دو عدد درست، باید هر دو زوج یا هر دو فرد باشند. بنابراین، تنها در یک حالت به جواب می‌رسیم:

$$z - y = ۲,\ \ z + y = ۳۴,$$
$$z = ۱۸,\ \ y = ۱۶,\ \ x = ۱۵۶$$

۷۹. بوب x تمبر دارد و در آلبوم دوم او، y هفتم تمام تمبرها وجود دارد؛ x و y، عددهایی درست و مثبت‌اند.

$$\frac{۲x}{۱۰}+\frac{yx}{۷}+۳۰۳=x$$

و بنابراین

$$x=\frac{۳\times۵\times۷\times۱۰۱}{۲۸-۵y}$$

مخرج طرف راست، باید مثبت و فرد باشد، زیرا مخرج مقسوم‌علیهی از صورت است و صورت کسر هم، عددی فرد است. به‌این ترتیب، تنها سه حالت پیش می‌آید که، از آن‌ها، تنها حالت آخر قابل قبول است: $y=۵$ و $x=۳۵۳۵$

۸۵. قیمت جدید خودنویس را x و تعداد آن‌ها را y می‌گیریم، در این صورت داریم:

$$xy=۳۱۹۳$$

که درآن $x<۵۰$. چون $۳۱۹۳=۳۱\times۱۰۳$، برابر است با حاصل‌ضرب دوعدد اول، بنابراین، دارای چهارمقسوم علیه‌است ۱، ۳۱، ۱۰۳ و ۳۱۹۳. درنتیجه $x=۱$ یا $x=۳۱$. وچون، به‌هرحال $x>۱$ است، داریم: $x=۳۱$.

۸۶. ۱°. ناسازگاری. درمیان سه صفحه، یادوصفحهٔ موازی وغیرمنطبق برهم وجوددارد ویا سه صفحه، درسه خط راست مختلف موازی، یکدیگر را قطع می‌کنند.

۲°. عدم استقلال. خط راستی وجود دارد که هر سه صفحه از آن می‌گذرند (ضمناً، دوصفحه یا هرسه صفحه، می‌توانند برهم منطبق باشند).

۳°. سازگاری و استقلال. صفحه‌ها، دارای یك نقطهٔ مشترك منحصر به فرد هستند.

۸۷. درکتاب‌های درسی دبیرستانی، «مسأله‌های کلامی» زیادی‌وجود دارد که، البته، خیلی‌متنوع نیستند. باکمال تأسف، دراین مسأله‌ها، معمولاً، موردهایی دیده نمی‌شود که، به خصوص، برای آشنایی وتسلط بر «روش دکارت» مفید باشد.

درتمرین‌های گذشته، خواننده می‌تواند با بعضی پرسش‌های مفیدی که برای حل مسأله‌ها به‌کارمی‌آیند، آشنا شود. دراین‌جا، پرسش‌های دیگری

مطرح شده است که می‌توانند، بعد از هر تمرین، بـه روشن‌تر شدن آن کمك کنند (خود شما هم می‌توانید، پرسش‌های مشابه دیگری پیدا کنید).

آیا نتیجه را نمی‌شود آزمایش کرد؟ (تمرین ۴.)

حالت‌های مرزی را آزمایش کنید. (تمرین ۱۴.)

آیا همین نتیجه را، به‌طریق دیگری، نمی‌توان به‌دست آورد؟ راه‌های مختلف را باهم مقایسه کنید. (تمرین ۸.)

آیا نمی‌شود نتیجه‌گیری را به‌طریق دیگری روشن کرد؟ (تمرین ۳.)

مسأله را تعمیم دهید. (تمرین ۲.)

دربارهٔ مسألهٔ مشابهی فکر کنید. (تمرین ۵۱.)

باآغاز از یك مسأله وطـرح این‌پرسش‌ها وپرسش‌هایی مشابـه آن‌ها می‌توان مسأله‌های تازه‌ای پیدا کرد که بسیاری از آن‌ها می‌توانند جالب و درعین‌حال، ساده باشند. به‌هرحال، طرح چنین پرسش‌هایی، نه تنهابـه درك عمیق‌تر خود مسأله کمك می‌کند، بلکه ضمناً، توانایی خواننده را، برای‌حل مسأله به‌طور کلی، بالا می‌برد.

دراین‌جا، دومسأله‌می‌آوریم که‌از تکامل‌مسأله‌های قبلی به‌دست‌آمده‌اند (والبته، خیلی هم، ساده نیستند):

۱°. نتیجهٔ تمرین ۳۶ را آزمایش کنید:

a) با فرض $\alpha=\delta$، $\beta=\gamma$ و $\alpha+\beta=۹۰^\circ$؛

b) با فرض $\alpha=\delta$، $\beta=\gamma$، ولی معلوم نبودن مقدار $\alpha+\beta$.

c) باقراردادن δ، γ، β و α، به‌ترتیب، به‌جای α، β، γ و δ.

۲°. مسألهٔ فضایی مشابه تمرین ۴۹ را پیدا کنید.

فصل سوم

۱. حکم، برای $n=۰$ و $n=۱$ روشن است. فرض می‌کنیم، دستور دوجمله‌ای، برای مقداری از n درست باشد:

$$(۱+x)^n=۱+\cdots+C_n^{r-۱}x^{r-۱}+C_n^r x^r+\cdots+x^n$$

اگر دوطرف این برابری را در $(۱+x)$ ضرب کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(۱+x)^{n+۱}=۱+\cdots+[C_n^r+C_n^{r-۱}]x^r+\cdots+x^{n+۱}$$

با توجه به رابطهٔ بازگشتی ۲° از ۶§، ضریب x^r در بسط $(۱+x)^{n+۱}$، چنین می‌شود:

$$C_{n+۱}^r$$

به‌این‌ترتیب، دستور دوجمله‌ای، که درستی آن‌را برای توان n مفروض گرفتیم، برای توان $n+۱$ هم درست است. توجه کنید که، در این‌جا هم، از شرط مرزی ۶§، ۲° استفاده کردیم. در کجا؟

۲. نتیجهٔ تمرین ۱ را ثابت شده می‌گیریم. فرض کنید

$$x=\frac{b}{a}$$

و درنظر بگیرید:

$$a^n(۱+x)^n=(a+b)^n$$

۳. این حکم راکه: «S_p، یک چند جمله‌ای ازدرجهٔ $P+۱$ نسبت به n است»، به‌عنوان‌یکی ازفرض‌های ممکن درنظربگیرید. این فرض، درمورد حالت‌های سادهٔ $(p=۰\ ,\ ۱\ ,\ ۲)$ درست است (وهمین مطلب ما را به سمت این فرض هدایت‌کرد: آغاز ۳§ را ببینید). فرض می‌کنیم که این‌حکم، برای همهٔ مقدارهای p تا $k-۱$ درست باشد، یعنی برای مقدارهای $p=۰،۱،۲،\cdots،k-۱$ (به‌زبان دیگر، برای $S_۰، S_۱، S_۲، \cdots، S_{k-۱}$).

از این‌جا، می‌توان نتیجه‌گرفت (برابری آخر ۴§ را ببینید)، که‌عبارت

$$C_{k+۱}^۲S_{k-۱}+C_{k+۱}^۳S_{k-۲}+\cdots+S_۰=P$$

(نام‌گذاری P را، برای سادگی کار وارد کرده‌ایم)، یك چندجمله‌ای ازدرجهٔ k است. از این برابری به‌دست می‌آید:

$$S_k=\frac{(n+۱)^{k+۱}-۱-P}{k+۱} \qquad (۱)$$

چون چند جمله‌ای P، نسبت به n از درجهٔ k است وبزرگترین جملهٔ بسط $(n+۱)^{k+۱}$، برابر $n^{k+۱}$، نمی‌تواند با جملهٔ دیگری ساده شود، بنابراین، S_k عبارتی ازدرجهٔ $(k+۱)$، نسبت به n، می‌شود.

ما با این فرض به‌نتیجهٔ مطلوب رسیدیم‌که S_{0} را از درجهٔ ۱، S_{1} را از درجهٔ ۲، ... و S_{k-1} را از درجهٔ k گرفتیم. به زبان استعاری می‌توان گفت‌که این ویژگی مجموع S_k (یعنی این‌که درجهٔ آن برابر $k+1$ است) «تمایلی غلبه ناپذیر به‌سمت تعمیم و گسترش» دارد. ما ازقبل می‌دانستیم که S_{0}، S_{1} و S_{2} دارای این‌ویژگی هستند، بنابراین، با توجه به‌آن چه ثابت کردیم، S_{3} هم دارای همین ویژگی است؛ وباز با توجه به‌همین اثبات، باید S_{4} و سپس S_{5} وغیره هم، این ویژگی را داشته باشند.

این مطلب‌هم که‌ضریب بزرگترین جمله درمجموع S_k برابر با $\frac{1}{k+1}$ است، از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود.

بعضی از مسأله‌هایی‌که درزیرمورد بررسی قرارمی‌گیرند، امکان‌همین نتیجه‌گیری را، با روش‌های دیگری، به دست می‌دهد (تمرین‌های ۲ تا ۷ فصل چهارم را هم ببینید).

۴. $$S_{4}=S_{2}\cdot\frac{6S_{1}-1}{5}=\frac{n(n+1)(2n+1)(3n^{2}+3n-1)}{30}$$

اثبات این رابطه را، با روش استقرای ریاضی وبدون هیچ اشکالی، می‌توان انجام داد.

۵. شیوهٔ محاسبه از §§ ۲، ۳و۴و،همچنین،تمرین ۳، روشن می‌شود.

۶. پیدا می‌کنیم (با § ۴ مقایسه کنید):

$$n^{k}-(n-1)^{k}=C_{k}^{1}n^{k-1}-C_{k}^{2}n^{k-2}+\cdots+(-1)^{k-1}C_{k}^{k}$$

۷. پیدا می‌کنیم (با § ۴ مقایسه کنید)

$$[n(n+1)]^{k}-[(n-1)n]^{k}=n^{k}[(n+1)^{k}-(n-1)^{k}]=$$
$$=2C_{k}^{1}n^{2k-1}+2C_{k}^{3}n^{2k-3}+2C_{k}^{5}n^{2k-5}+\cdots$$

۸. پیدا می‌کنیم (با § ۴ مقایسه کنید):

$$(2n+1)[n(n+1)]^{k}-(2n-1)[(n-1)n]^{k}=$$
$$=n^{k}[(n+1)^{k}+(n-1)^{k}]+$$
$$+2n^{k+1}[(n+1)^{k}-(n-1)^{k}]=2(C_{1}^{0}+2C_{k}^{1})n^{2k}+$$

$$+2(C_k^2+2C_k^3)n^{2k-2}+\cdots$$

۹. از تمرین ۷، با استفاده از بازگشت‌وروش استقرای ریاضی، به‌دست می‌آید.

۱۰. از تمرین ۸، با استفاده از بازگشت و روش استقرای ریاضی، به‌دست می‌آید.

۱۱. این‌ها، سه‌حالت خاص نخستین‌اند:

$$2S_1=n(n+1)$$
$$0=n^2(n+1)-2nS_1$$
$$2S_3=n^3(n+1)-3n^2S_1+3nS_2$$

درحالت $k=1$ می‌توان، تنها با کمی اختلاف، S_1 را به‌کمک «روش گوس کوچك» پیداکرد (§ ۱ را ببینید).

درحالت $k=2$، به‌طورغیر مستقیم، دوباره به‌همان S_1 می‌رسیم.

درحالت $k=3$، مقدار S_3 به‌دست می‌آید، به‌شرطی‌که از مقدارهای S_1 و S_2 آگاه باشیم.

به‌طورکلی، با این روش می‌توان S_k را، بر حسب S_0، S_1، S_2، ... و S_{k-1}، به‌دست‌آورد، به‌شرطی‌که k عددی فردباشد ونه زوج. این نتیجه، تا حدی نشان می‌دهدکه چرا، راهی‌که برای محاسبهٔ S_1 ما را به‌موفقیت رسانید (§ ۱ را ببینید)، در مورد S_2 نتوانست نتیجه‌بخش باشد (با § ۲ مقایسه کنید). همچنین‌خاطر نشان می‌کنیم‌که ممکن است‌ازمقایسهٔ‌نتیجه‌گیری مابا §§۲و۴ وتمرین‌های ۶و۱۰ بتوانیم چیزهایی بیاموزیم وچه بسا که کسی بتواند آن را درموقعیت‌های مناسبی به‌کاربرد.

۱۲. باتوجه به‌تمرین‌های ۹ و ۱۰، کافی است تحقیق کنیم که این‌حکم برای $S_1(x)$ درست است وضمناً

$$S_2(x)=S_1(x).\frac{2x+1}{3}$$

۱۳. الف) به‌کمک «روش گوس کوچك» (قسمت اول § ۱ را ببینید) داریم:

$$[1+(2n-1)]+[3+(2n-3)]+\cdots=2n.\frac{n}{2}=n^2$$

ب) قسمت دوم § ۱ را به‌کار ببرید؛ پایین‌تر را ببینید.

پ) به‌حالت کلی می‌پردازیم وتصاعدی حسابی را با جملهٔ اول a، قدر نسبت d وتعداد جمله‌های n در نظر می گیریم:

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+[a+(n-1)d]$$

جملهٔ آخر، یعنی $a+(n-1)d$ را b می‌نامیم؛ دراین صورت (قسمت دوم § ۱ را ببینید):

$$S=a+(a+d)+(a+2d)+\cdots+(b-2d)+(b-d)+b$$

$$S=b+(b-d)+(b-2d)+\cdots+(a+2d)+(a+d)+a$$

که اگر آن‌ها را با هم جمع و، سپس، نصف کنیم، به‌دست می‌آید:

$$S=\frac{a+b}{2}n$$

درحالت خاص $a=1$ و $b=2n-1$ داریم:

$$S=\frac{1+(2n-1)}{2}n=n^2$$

ت) دومین شکل ۱۸ — b را ببینید.

ث) حل تمرین ۱۴ را ببینید.

۱۴. داریم:

$$1+9+25+\cdots+(2n-1)^2=1+4+9+16+\cdots+$$
$$+(2n-1)^2+(2n)^2-$$
$$-4(1+4+9+\cdots+n^2)=\frac{2n(2n+1)(4n+1)}{6}-$$
$$-4\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}=\frac{n(4n^2-1)}{3}$$

۱۵. ازهمان روش تمرین ۱۴ استفاده کنید:

$$\frac{4n^2(2n+1)^2}{4}-8\frac{n^2(n+1)^2}{4}=n^2(2n^2-1)$$

۱۶. با استفاده ازعلامت‌گذاری تمرین ۱۲:

$$1^k+3^k+\cdots+(2n-1)^k=S_k(2n)-2^kS_k(n)$$

۱۷. گاهی پاسخ‌دادن بـه یك رشته پرسش‌ها، ساده‌تر ازپاسخ دادن به یك پرسش جداگانـه است (این وضـع را « معمای پژوهشگر » می‌نامنـد). همراه با مجموع

$$2^2+5^2+8^2+\cdots+(3n-1)^2=U$$

مجموع زیر را هم درنظر می‌گیریم:

$$1^2+4^2+7^2+\cdots+(3n-2)^2=V$$

دراین صورت داریم (با تمرین ۱۶ مقایسه کنید):

$$U+V+9S_2(n)=S_2(3n)$$

علاوه برآن، روشن است که

$$U-V=3+9+15+\cdots+(6n-3)=3n^2$$

به این ترتیب، به دومعادلهٔ خطی، نسبت به مجهول‌های U و V می‌رسیم، که با حل آن نه‌تنها U بلکه V هم به‌دست می‌آید:

$$U=\frac{n(6n^2+3n-1)}{2}\ ,\ V=\frac{n(6n^2-3n-1)}{2}$$

راه حل دیگری برای این مسأله، درتمرین ۱۸ داده شده است.

۱۸. با تعمیم‌علامت گذاری §۳ (که درمورد حالت‌خاص $a=d=1$ بود)، فرض می‌کنیم:

$$S_k=a^k+(a+d)^k+(a+2d)^k+\cdots+[a+(n-1)d]^k$$

روشن است که $S_0=n$. اگر دررابطهٔ

$$(a+nd)^{k+1}-[a+(n-1)d]^{k+1}=C_{k+1}^1[a+(n-1)d]^kd+$$
$$+C_{k+1}^2[a+(n-1)d]^{k-1}d^2+\cdots$$

به‌جای n، مقدارهای ۱،۲،۳،...، n را قراردهیم و عبارت‌های حاصل را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(a+dn)^{k+1}-a^{k+1}=C_{k+1}^1S_kd+C_{k+1}^2S_{k-1}d^2+$$
$$+\cdots+S_0d^{k+1}$$

که از آن‌جا، و با روش بازگشتی، S_1، S_2،...، S_k به دست می‌آید. حالت $a=2$، $d=3$، $k=2$ را به تفصیل بررسی کنید؛ تمرین ۱۷ را هم ببینید.

۱۹. با توجه به نتیجه‌گیری‌های §§ ۲ و ۳، مجموع مجهول، به این صورت درمی‌آید:

$$\frac{1\times 2}{2}\times 2+\frac{2\times 3}{2}\times 3+\frac{3\times 4}{2}\times 4+\cdots+\frac{(n-1)n}{2}\times n=$$

$$=\frac{1}{2}\left[(2^3-2^2)+(3^3-3^2)+(4^3-4^2)+\cdots+(n^3-n^2)\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\left(S_3-S_2\right)=\frac{(n-1)n(n+1)(3n+2)}{24}$$

۲۰. (a $\frac{n(n^2-1)}{6}$ ؛ (b $1^{n-1}\times 2^{n-2}\times 3^{n-3}\cdots(n-1)^1$ ؛

(c $\frac{n^2(n^2-1)}{12}$.

۲۱. E_1 را در § ۱ و E_2 را در تمرین ۱۹ پیدا کرده‌ایم. ثمربخش‌ترین جریان حل، برقضیه‌ای از جبر عالی تکیه دارد، که بنابر آن، هرچند جمله‌ای مقدماتی متقارن را می‌توان برحسب مجموع توان‌های مشابه، بیان کرد:

$$E_1=S_1,$$

$$E_2=\frac{1}{2}\left[(S_1)^2-S_2\right],$$

$$E_3=\frac{1}{6}\left[(S_1)^3+2S_3-3S_1S_2\right],$$

$$E_4=\frac{1}{24}\left[(S_1)^4+3(S_2)^2+8S_1S_3-6(S_1)^2S_2-6S_4\right]$$

اگر نتیجه‌هایی را که در §§ ۱، ۲ و ۳ و در تمرین ۴ به‌دست آوردیم، به‌این‌ها

اضافه کنیم ومقایسهٔ برخی‌ویژگی‌های عبارت کلی («هم‌فشار»[1]) E_k برحسب S_1، S_2، ...، S_k، با نتیجه گیری‌های تمرین‌های ۹ و ۱۰، می‌توان نه تنها درجهٔ جملهٔ بزرگتر، بلکه حتی ضریب آن راهم، به‌دست آورد:

$$E_k(n) = \frac{n^{۲k}}{k!۲^k} + \cdots$$

از این‌جا، نتیجه می‌شود که عبارت $E_k(n)$، به ازای $k \geqslant ۲$، برعبارت زیر بخش‌پذیر است:

$$(n-k+۱)(n-k+۲)\cdots(n-۱)[n(n+۱)]^{\frac{۳-(-۱)^k}{۲}}$$

۲۲. فرایند a)، حالت خاصی از فرایند b) است. درواقع، اگر $A_{n+۱}$ تنها نتیجه‌ای از A_n باشد، می‌توان حکم کرد که $A_{n+۱}$ نتیجه‌ای از $A_۱$، $A_۲$، ...، $A_{n-۱}$ و A_n است؛ یعنی اگر گزارهٔ IIa) درست باشد، باید گزارهٔ IIb) هم درست باشد. بنابراین، اگر فرایند b) را در نظر بگیریم، باید با فرایند a) هم موافق باشیم.

فرایند b) را می‌توان منجربه فرایند a) کرد. این گزاره را که فرض‌های $A_۱$، $A_۲$، ...، A_n، به طور هم‌زمان، درست‌اند، به B_n نشان می‌دهیم. دراین صورت:

گزارهٔ I) به این معنا است که $B_۱$ درست است؛

گزاره IIb) را، می‌توان به گزارهٔ ساده‌تری تبدیل کرد، یعنی $B_{n+۱}$ باید نتیجه‌ای از B_n باشد.

به این‌ترتیب، گزاره‌های I) و IIb) که به دنبالهٔ $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، ... مربوط می‌شوند، به گزاره‌های I) و IIa) تبدیل می‌شوند، که درآن، تنها به جای $A_۱$، $A_۲$، $A_۳$، ...، دنبالهٔ $B_۱$، $B_۲$، $B_۳$، ... را در نظر گرفته‌ایم.

۲۳. شکل ۱۵ — b را می‌توان‌برای روشن‌کردن حالتی درنظر گرفت

---

۱. یعنی به نحوی که جمله‌های این عبارت دارای « وزن»های یکسانی هستند (که ازمجموع «وزن»های عامل‌های این جمله به‌دست آمده‌اند؛ ضمناً «وزن» S_i برابر i در نظر گرفته می‌شود).

که‌بوب، کارل، دیك، روی و آلن (متناظر با حرف‌هایی که درانتهای کوی‌هایی که از شمال باختری به‌جنوب خاوری می‌روند) باید چادر را بر پا کنندو پنج جوان دیگر، ریکی، آلف، آلکس، آرت و بیل (کوی‌هایی که ازشمال خاوری به جنوب باختری می‌روند) برای تهیهٔ شام آماده می‌شوند. باآغاز از این حالت، می‌توان متوجه شدکه هرتقسیم جوان‌ها به‌دو گروه پنج نفری، روی شکل ۱۵ — b، متناظر است با کوتاه ترین مسیر ازبالا تا پایین و، برعکس، هریك ازاین مسیرهای پیچ‌وخم‌دار، متناظر با یکی از این تقسیم‌ها است(یعنی در تناظر یك به یك قراردارند!). بنابراین تعداد تقسیم‌ها، برابر ۲۵۲ است (شکل ۱۶ — b را ببینید).

۲۴. دراین‌جا، با حالت کلی خاصی روبه روهستیم که درتمرین ۲۳ و روی‌شکل ۱۵ — b داشتیم.

عضوهای مجموعه را ، با عددهای ۱ تا n ، نام‌گذاری می کنیم و kامین عضو را متناظر با kامین « قاعدهٔ » (ردیف افقی) مثلث پاسکال قرار می‌دهیم. یك عضو، وقتی و تنها وقتی به زیرمجموعهٔ مفروض تعلق داردکه مسیر پیچ وخم‌دار، از قاعدهٔ مربوط خارج شود و (درطول کوی آخر) از شمال‌باختری به‌جنوب خاوری حرکت کند. بنابراین، هرزیرمجموعهٔ r عضوی از مجموعهٔ مفروض n عضوی را، می‌توان، با مسیری پیچ وخم‌دار که به نقطهٔ ثابتی ختم‌شده است، یکی دانست؛ به‌این ترتیب، با محاسبهٔ تعداد این مسیرها، تعداد زیر مجموعه‌ها هم به‌دست می‌آید.

۲۵. $\frac{n(n-۱)}{۱\times ۲}$ پاره‌خط و $\frac{n(n-۱)(n-۲)}{۱\times ۲\times ۳}$ مثلث.

۲۶. اگر n نقطه «به‌صورتی کلی» درفضا قرارگرفته باشند، آن وقت، تعداد چهار وجهی‌هایی که رأس‌های آن‌ها، درچهار نقطهٔ دلخواه از این n نقطه باشند، برابر است با

$$\frac{n(n-۱)(n-۲)(n-۳)}{۱\times ۲\times ۳\times ۴}$$

$.C_n^2 - n = \frac{n(n-3)}{2}$.۲۷

۲۸. دوقطری ازچند ضلعی‌محدب که یکدیگررا دردرون n ضلعی قطع می‌کنند، دوقطر یك چهارضلعی هستند که رأس‌های‌آن، چهار رأس دلخواه از nضلعی‌مفروض باشند. بنابراین، تعداد قطرهای مجهول n ضلعی، برابراست‌با

$$\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1\times2\times3\times4}$$

۲۹. وجه قرمز را می‌توان به

$$C_6^1 = 6$$

طریق مختلف انتخاب کرد. از پنج وجه باقی‌مانده، دووجه‌آبی‌را می‌توان به

$$C_5^2 = 10$$

طریق انتخاب کرد. بنابراین، شکل وجه این شش وجهی را می‌توان‌به

$$C_6^1 . C_5^2 = 6\times10 = 60$$

طریق مختلف (با توجه به شرطهای مورد نظر) با سه رنگ مفروض رنگ‌کرد.

$$C_n^r . C_{s+t}^s = \frac{n!}{r!(n-r)!} . \frac{(s+t)!}{s!t!} = \frac{n!}{r!s!t!}$$.۳۰

۳۱. مجموعه‌ای‌شامل n عضو را به‌h زیر مجموعهٔ جدا ازهم (یعنی، به‌نحوی که، هیچ دو زیر مجموعه‌ای، دارای اشتراك نباشند) تقسیم‌کنید، طوری که زیر مجموعهٔ اول شامل r_1 عضو، زیر مجموعهٔ دوم شامل r_2 عضو،... و زیر مجموعهٔ hام شامل r_h عضو باشند و ضمناً

$$r_1 + r_2 + r_3 + \dots + r_h = n$$

تعدادکل این گونه تقسیم‌ها برابر است با

$$\frac{n!}{r_1!r_2!r_3!\cdots r_h!}$$

شماره‌گذاری و انتخاب نام‌گذاری، برای زیر مجموعه‌ها، اهمیت اساسی دارد ، زیرا اگر بین عددهای r_1 ، r_2 ، ... ، r_h، عددهای برابر وجود داشته باشد، بهٔ وسیلهٔ نام‌گذاری از یکدیگر تمیز داده شوند . مثلاً ، در تمرین ۲۳، بین پنج جوانی که چادر را بر پا می‌کردند و پنج جوان دیگری که به‌آماده‌کردن‌شام مشغول‌بودند، اختلاف گذاشتیم؛ یا روی شکل۱۵ — b

(که در واقع، همان‌نمونهٔ قبلی به‌زبانی دیگر است) بین دو مسیر پیچ و خم‌داری که، نسبت به‌خط قائم میانه (که نخستین A را به‌آخرین A وصل می‌کند)، متقارن بودند، فرق قایل شدیم؛ یا درتمرین ۳۰، r وجهی راکه با یك رنگ بودند با s وجهی که به‌رنگ دیگر بودند ـ حتی اگر r و s (تصادفاً) برابر باشند ـ مخلوط نکردیم.

۳۲. هریك ازچهار روشی که در §۸ و تمرین ۲۴ نشان دادیم، برای اثبات این ویژگی، می‌توانند مناسب باشند.

۱°. شبکهٔ خیابان‌هایی که، نسبت به‌قائم گذرنده از رأس بالای مثلث پاسکال، متقارن باشند.

۲°. رابطهٔ بازگشتی وشرط مرزی هم، دارای ویژگی تقارن هستند.

۳°. با استفاده ازعلامت فاکتوریل ($۱ \times ۲ \times ۳ \times \dots \times m = m!$)، داریم:

$$C_n^r = \frac{n(n-۱)\dots(n-r+۱)}{۱\times ۲\times \dots \times r} =$$

$$= \frac{n(n-۱)\dots(n-r+۱)(n-r)\dots\times ۲\times ۱}{۱\times ۲\times \dots \times r(n-r)\dots\times ۲ \times ۱} =$$

$$= \frac{n!}{r!(n-r)!} = \frac{n!}{(n-r)!r!} = C_n^{n-r}$$

۴°. ازآن که، دو جملهٔ‌ای $(a+b)^n$، با جا به‌جاکردن حرف‌های a و b، تغییر نمی‌کند، باید ضریب جمله‌های $a^r b^{n-r}$ و $a^{n-r}b^r$ با یکدیگر برابر باشند.

۵°. اگر ازمجموعه‌ای که شامل n عضو است، زیر مجموعه‌ای‌شامل r عضو جداکنیم، زیرمجموعه‌ای شامل $n-r$ عضو باقی‌می‌ماند. بنابراین، تعداد زیر مجموعه‌های r عضوی، باید برابر باشد با تعداد زیرمجموعه‌های $n-r$ عضوی.

۳۳. $C_n^۰ + C_n^۱ + C_n^۲ + \dots + C_n^n = ۲^n$.

اثبات. در بسط $(a+b)^n$، قرار دهید: $a=b=۱$.

اثبات دیگر. از رأس بالای مثلث پاسکال تا قاعدهٔ nام، ۲^n مسیرپیچ-

و خم‌دار وجود دارد: اگـر روی شکل ۱۵-b مسیری را انتخاب کنیم که به‌جنوب می‌رود، درهرتقاطع، مواجه با انتخاب یك مسیر ازدومسیرموجود می‌شود.

بازهم یك اثبات دیگر. هرمجموعهٔ nعضوی، دارای 2^n زیرمجموعه است (با به‌حساب‌آوردن مجموعهٔ تهی وخود مجموعهٔ اصلی؛ این‌ها متناظر با ضریب‌های C_n^0 و C_n^n دو جمله‌ای هستند) ؛ این روشن است، زیـرا ضمن تشکیل زیر مجموعه، می‌توانیم، هریك از n عضو مجموعه‌را، درآن داخل کنیم ویا ازآن‌کنار بگذاریم.

۳۴. $C_n^0-C_n^1+C_n^2-\dots+(-1)^nC_n^n=0$ $(n\geqslant 1)$.

اثبات. دربسط $(a+b)^n$ قرار دهید $a=1$، $b=-1$.

اثبات دیگر. با توجه به‌شرط مرزی و رابطهٔ بازگشتی، داریم:

$$\begin{aligned}
C_n^0 &= C_{n-1}^0\\
-C_n^1 &= -C_{n-1}^0-C_{n-1}^1\\
C_n^2 &= \qquad C_{n-1}^1+C_{n-1}^2\\
&\dots\dots\dots\dots\\
(-1)^{n-1}C_n^{n-1} &= \qquad (-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-2}+(-1)^{n-1}C_{n-1}^{n-1}\\
(-1)^nC_n^n &= \qquad\qquad (-1)^nC_{n-1}^{n-1}
\end{aligned}$$

جمع کنید!

بازهم یك اثبات دیگر. هرمسیرپیچ وخم‌دار به‌سمت‌قاعدهٔ $(n-1)$ام به دو مسیری کـه به قاعدهٔ nام می‌رود، منشعب می‌شود، که یکی از آن‌ها درجهت‌زاویهٔ «مثبت» $(r=0, 2, 4,\dots)$ و دیگری درجهت‌زاویهٔ «منفی» است $(r=1, 3, 5,\dots)$.

۳۵. شبیه‌آن (درطول خیابان چهارم):

$$1+5+15+35=56$$

ودرحالت‌کلی (درطول خیابان rام):

$$C_r^r+C_{r+1}^r+C_{r+2}^r+\dots+C_n^r=C_{n+1}^{r+1}$$

اثبات باروش استقرای ریاضی. حکـم برای $n=r$ درست است؛ در

واقع، بنا به شرط مرزی، داریم:

$$C_r^r = C_{r+1}^{r+1}$$

اکنون فرض می‌کنیم، حکم بـرای مقداری از n درست باشد، آن‌ـ وقت، اگر به‌هردو طرف برابری C_{n+1}^r را اضافه کنیم (با تـوجه به دستور بازگشتی) به‌دست می‌آید:

$$C_r^r + C_{r+1}^r + \cdots + C_n^r + C_{n+1}^r = C_{n+1}^{r+1} + C_{n+1}^r = C_{n+2}^{r+1}$$

که حکم ما را به‌ازای $n+1$ ثابت می‌کند.

اثبات دیگر. روی شکل ۱۷ (I)، A معرف نقطهٔ بـالایی و L نقطهٔ مفروضی است که متناظـر با مقدارهـای $n+1$ و $r+1$ است؛ تعداد کـل کوتاه‌ترین مسیرهای پیچ‌وخم‌داری که از A به L می‌روند، بـرابـر است با C_{n+1}^{r+1}. در هریك از این مسیرها، برای عبور از چهـار راه rام به چهار راه $(r+1)$ ام، باید ازخیابانی‌استفاده کرد؛ تعداد مسیرهایی‌که برای این‌منظور استفاده مـی‌شود، عبارتند از تنها خیابـان صفر، تنها خیابان صفر وخیابان اول، ...، تنها خیابان‌های از صفر تا rام و، به‌ترتیب، برابرند با

$$C_r^r,\ C_{r+1}^r,\ C_{r+2}^r\ ,\cdots,\ C_n^r$$

به‌این‌ترتیب، مجموع این عددها، تعدادکل مسیرها را به مـا می‌دهد، یعنی عدد C_{n+1}^{r+1}.

۳۶. ابتدا عددها را درطول شمال باختری‌خط مرزی (شکل ۱۶ــb را ببینید) جمع کنید، سپس، درنخستین‌خیابان مورب، بعد دومین... وبالاخره درطول پنجمین؛ به‌ترتیب، به‌دست می‌آید:

$$۶,\ ۲۱,\ ۵۶,\ ۱۲۶,\ ۲۵۲,\ ۴۶۲$$

مجموع آن‌ها ۹۲۳ می‌شودکه آن‌را بیهوده، درجدول پاسکال، جست‌وجـو می‌کردیم، با وجود این، خیلی نزدیك به‌آن، این‌عدد وجود دارد:

$$۹۲۴ = C_{۱۲}^{۶}$$

یادآوری می‌کنیم که می‌توانستیم زحمت انجام عمل جمع‌را به‌خود راه‌ندهیم (و ازآن‌جمله، برای ردیف بعدی؛ ششمین ردیف)؛ ولـی برای این منظور، باید از نتیجه‌گیری تمرین ۳۵ وجدول ضریب‌های دوجمله‌ای استفاده کنیم؛

از این راه (و با آغاز از مثال نمونه‌ای خود)، به‌سادگی می‌توان، برای حالت کلی، ثابت کرد:

$$\sum_{l=0}^{m}\sum_{r=0}^{n} C_{l+r}^{r} = C_{m+n+2}^{m+1} - 1$$

۳۷. درسمت چپ این برابری، عامل‌های اول ضرب ازقاعدهٔ پنجم و عامل‌های دوم از قاعدهٔ چهارم مثلث پاسکال برداشته شده‌اند؛ عدد سمت راست برابری را می‌توان درقاعدهٔ نهم پیدا کرد. برای رابطهٔ مشابه $1\times1+5\times4+10\times6+10\times4+5\times1=126$ (?) ، نقش مشابهی برای قاعده‌های پنجم، سوم‌وهشتم وجوددارد. حالت کلی‌تری که‌درتمرین ۹داشتیم، مربوط به nامین، باز هم nامین و $(2n)$ امین قاعده می‌شد. براساس این نمونه‌ها، می‌توان قضیهٔ زیر را درنظر گرفت:

$$C_m^0C_n^r + C_m^1C_n^{r-1} + C_m^2C_n^{r-2} + \dots + C_m^rC_n^0 = C_{m+n}^r$$

در واقع، دراین‌جا، تفسیر گسترش یافتهٔ علامت‌گذاری‌های قبلی رادر نظرگرفته‌ایم؛ به‌این مناسبت، تمرین ۷۰ (III) را ببینید.

هردو اثبات §۹ را، می‌توان برای‌حالت‌کلی‌تر هم، به‌کار برد. روش هندسی را می‌توان از مقایسهٔ شکل ۱۷ (II) باشکل ۱۷ (III) حدس زد. روش تحلیلی، به محاسبهٔ ضریب x^r از بسط زیر ـ به‌دو طریق ـ مربوط می‌شود:

$$(1+x)^m(1+x)^n = (1+x)^{m+n}$$

۳۸. عامل‌های اول ضرب‌های سمت چپ این‌برابری، به‌ردیف مورب اول (بعد از ردیف صفر) مثلث پاسکال وعامل‌های دوم به ردیف مورب دوم تعلق‌دارند؛ عدد سمت راست برابری‌را هم، می‌توان در ردیف مورب‌چهارم پیداکرد. اگر این رابطه را در نظر بگیریم که

$$1\times10+3\times6+6\times3+10\times1=56$$

همین نقش به‌عهدهٔ ردیف مورب دوم ، باز هم ردیف دوم وردیف پنجم قرار می‌گیرد. درحالت کلی‌تر، که تمرین ۳۵ وشکل۱۷ (I) به‌آن مربوط می‌شود، می‌توان ردیف‌های صفرم و r ام و $(r+1)$ ام را درنظر گرفت.

از این نمونه‌ها، قضیهٔ کلی نتیجه می‌شود:

$$C_r^r C_{s+n}^s + C_{r+1}^r C_{s+n-1}^s + C_{r+2}^r C_{s+n-2}^s + \cdots + C_{r+n}^r C_s^s =$$
$$= C_{r+s+n+1}^{r+s+1}$$

۱ثبات هندسی (کلی‌تر از اثبات تمرین ۳۵ وشبیه‌اثبات ۹§ وتمرین ۳۷) به‌ترتیب زیـر است: روی شکـل ۱۷ (IV)، نقطهٔ L به‌صورت یك ارزشی با عددهای $r+1+s+n$ (تعدادکل کوی‌ها) و $r+1+s$ (تعداد کوی‌هایی که درسمت راست وبه‌طرف پایین قرار دارنـد)، معین مـی‌شود؛ بنابراین تعدادکل کوتاه‌ترین مسیرهای پیچ وخم‌دار از رأس A تا نقطهٔ L، برابر است با

$$C_{r+s+n+1}^{r+s+1}$$

درهریك از این‌مسیرها، برای عبوراز nامین ردیف مورب به $(n+1)$امین ردیف، باید از خیابانی استفاده‌کرد؛ مسیرهایی را تنظیم می‌کنیم که متناظر با سمت چپ رابطهٔ مورد نظر ما هستند، وبراساس انتخاب خیابان مذکور، تعداد همهٔ مسیرها را، یکباره، محاسبه می‌کنیم.

جالب بود اگر به‌موازی این اثبات، اثبات تحلیلی را هـم برای ۹§ و تمرین ۳۷ می‌آوردیم، و رابطهٔ مورد علاقهٔ خود را از راه بررسی ضرب دو رشته پیدا می‌کردیم؛ ولی، این کار، خیلی ساده نیست و، در مورد آن، ابهام‌هایی وجود دارد. همچنین، پیدا کردن رابطهٔ (جبری؟) بین دو دستور خویشاوند، که در این‌جا و در تمرین ۳۷ پیدا کردیم، مـی‌توانست جالب باشد، ولی چگونگـی رسیدن به این هدف هم، هنوز روشن نشده است.

۳۹. عدد

$$1+2+3+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2} = C_{n+1}^2$$

n امین عدد مثلثی است. ردیف‌مورب دوم مثلث پاسکال (بعد از ردیف‌صفرم وردیف اول)، از عددهای مثلثی ۱، ۳، ۶، ۱۰،... تشکیل شده است.

۴۰. عدد

$$C_2^2 + C_3^2 + C_4^2 + \cdots + C_{n+1}^2 = C_{n+2}^3 = \frac{n(n+1)(n+2)}{6}$$

n امین عدد هرمی است؛ تکیهٔ این‌حکم، بر تمرین ۳۵ است. عددهای هرمی

۱، ۴، ۱۰، ۲۰، ۳۵ درمثلث پاسکال، در ردیف مورب سوم (بعد ازردیف عددهای مثلثی) قرار گرفته‌اند.

یادداشت. عبارت‌های مربوط به‌عددهای مثلثی وهرمی، قبل از آن‌که دستور کلی ضریب‌های دوجمله‌ای به‌طور روشن پیدا شود (§۷)، به دست آمده بود؛ ازهمین عبارت‌ها، می‌توان (با استفاده ازروش استقرای ریاضی)، دستور دوجمله‌ای را بیرون آورد.

۴۱. $1^2+2^2+\dots+n^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.

۴۲. امیدوارم، خواننده، حالت‌های $n=1, 2, 3$ را هم امتحان کرده باشد.

C_{n-1}^{t-1} طریق مختلف، برای نمایش عدد n به‌صورت مجموع t عدد درست مثبت وجود دارد.

حالت‌های $t=1$ و $t=n$ پیش‌پاافتاده وحالت‌های $t=2$ و $t=n-1$، خیلی ساده است. برای پیدا کردن اثبات، در حالت کلی، فاصلهٔ $0<x<n$ را روی محور عددی درنظر می‌گیریم؛ عددهای درست داخل این فاصله، عبارتند از: $x=1,2,3,\dots,n-1$. از این $n-1$ نقطه، $t-1$ نقطهٔ دلخواه را، به‌عنوان نقطه‌های تقسیم، انتخاب می‌کنیم؛ فاصلهٔ ما با t زیر فاصله (که‌طول هر کدام، عددی درست است) تقسیم‌می‌شودو، ازآن گذشته، عدد n به‌صورت مجموع t عدد درمی‌آید.

۴۳. رابطه‌هایی را، که درشکل ۱۹ـa نشان داده شده‌است ـ برای مقدارهای مفروض n، مورد تحقیق قرار دهید.

۱°. $F_n=C_{n-1}^0+C_{n-2}^1+C_{n-3}^2+\cdots$.

۲°. از دستور بازگشتی §۶، ۲° استفاده کنید (با تمرین ۱۵ فصل چهارم، مقایسه کنید).

۴۴. ۱°. $G_n=C_{n-1}^0+C_{n-3}^1+C_{n-5}^2+\cdots$.

۲°. از دستور بازگشتی استفاده کنید.

۳°. تغییرشیب، منجر به‌دنبالهٔ y_1، y_2، y_3، ... می‌شود، که‌بستگی به پارامتری دارد (که می‌تواندضریب زاویه ـ عدد درست ومثبت qـ باشد)

و در رابطهٔ بازگشتی صدق می‌کند (تمرین ۱۴ فصل چهارم را ببینید):

$$y_n = y_{n-1} + y_{n-q}$$

درحالت $q = 1$، ضریب زاویه برابر ۰ می‌شود و

$$y_n = 2y_{n-1}$$

۴۵. تعداد کوتاه‌ترین مسیرهایی که نقطهٔ بالایی A را به نقطهٔ L_h وصل می‌کنند، با دو عدد n و r مشخص می‌شود، که درآن

$$n = n_1 + n_2 + \dots + n_h$$

(تعداد کل کوی‌ها) و

$$r = r_1 + r_2 + \dots + r_h$$

(تعداد کوی‌هایی که از شمال باختری به جنوب خاوری مـی‌روند)؛ علاوه برآن، باید با این شرط محدودکننده هم‌سازگار باشد که این مسیرها از $h-1$ نقطهٔ مفروض بینابینی L_1، L_2، ...، L_{h-1} هم می‌گذرند؛ این نقطه‌هـا، به‌ترتیب، متناظر با این عددها هستند:

$$n_1 \quad \text{و} \quad r_1$$

$$n_1 + n_2 \quad \text{و} \quad r_1 + r_2$$

. . . .

$$n_1 + n_2 + \dots + n_{h-1} \quad \text{و} \quad r_1 + r_2 + \dots + r_{h-1}$$

۴۶. a) روی شکل ۲۰ـa، دو مسیر نشان‌داده شده است که متعلق به‌مجموعهٔ اصلی هستند، ولی در زیـر مجموعهٔ ۱) نیستند. همهٔ آن‌ها از A شروع و به نقطهٔ C ختم می‌شوند و از یك نقطهٔ بینابینی عبور می‌کنند. نقطهٔ B روی محور تقارن قرار دارد وهریك از مسیرها را به‌دو بخش AB و BC تقسیم می‌کند. خط‌های شکستهٔ AB، نسبت به‌این محور، قرینهٔ یکدیگرند وهیچ‌یك از نقطه‌های درونی آن‌ها، براین‌محور تقارن قرار ندارد؛ وبه‌همین ترتیب، خط‌های شکسته BC. یکی از این مسیرها به‌زیر مجموعهٔ ۲) تعلق دارد ودیگری به‌زیرمجموعهٔ ۳). برعکس، هر مسیری که متعلق به این زیرـ مجموعه باشد، مسیر «همتایی»، شبیه آن‌چه درشکل ۲۰ـa نشان داده‌ایم، دارد؛ به‌دومین نقطهٔ مشترك مسیر با محور تقارن تـوجه کنید (نقطهٔ اول،

همان رأس مثلث پاسکال است). این تقابل، به ما امکان می‌دهد تا بین زیر‌مجموعه‌های ۲) و ۳)، تناظر یك به‌یك برقرار کنیم.

b) مسیرها را، به‌نحو دیگری هم، می‌توان مقابله کرد: اگر در شکل ۲۰ـa، خطهای شکستهٔ AB نسبت به‌خط راست AB قرینهٔ یکدیگرند (تقارن محوری)، در شکل ۲۰ـb نسبت به وسط پاره‌خط AB قرینه‌اند (تقارن مرکزی).

c) از a) و b) نتیجه می‌شود که

$$C_n^r = N + ۲C_{n-۱}^r$$

که با استفادهٔ متوالی از عبارت‌های

$$C_n^r = C_{n-۱}^{r-۱} + C_{n-۱}^r,\ \ C_{n-۱}^r = \frac{n-r}{n} C_n^r$$

دو بیان مختلف به‌دست می‌آید:

$$N = C_{n-۱}^{r-۱} - C_{n-۱}^r = \frac{۲r-n}{n} C_n^r$$

برای به‌دست‌آوردن این رابطه فرض کردیم $۲r > n$؛ با وجود این، با تکیه بر تقارن مثلث پاسکال، می‌توان از این محدودیت خلاص شد.

۴۷. از استقرای ریاضی استفاده می‌کنیم. نتیجهٔ پیش‌بینی‌شده‌را، برای $n = ۱, ۲, ۳$ ($m = ۰, ۱$)، از روی شکل تحقیق کنید.

از $۲m$ به $۲m+۱$. با ادامهٔ مسیر به‌طول $۲m$، که با محور تقارن برخورد دیگری جز A ندارد، دو مسیر به‌طول $۲m+۱$ به‌دست می‌آید‌که دارای‌همان ویژگی‌هستند. اگر فرض کنیم که نتیجهٔ موردنظر، برای $n = ۲m$ درست‌باشد، به‌این‌ترتیب معلوم‌می‌شود که‌مقدار‌مجهول، برای $n = ۲m+۱$ به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$۲C_{۲m}^m$$

از $۲m+۱$ به $۲m+۲$. با درنظر گرفتن مسیری به‌طول $۲m+۱$، که پاسخ‌گوی خواستی باشد‌که در بالا دربارهٔ آن صحبت کردیم، در بیشتر موردها، برای مسیر به‌طول $۲m+۲$، دو مسیر پیدا می‌شود که پاسخ‌گوی

همین‌خواست هستند [به‌استثنای مسیرهایی که در قاعدهٔ $(2m+1)$ ام، در دو نقطهٔ نزدیك به‌محور تقارن‌ختم می‌شوند]. همهٔ این‌ها را پیش خودمجسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم که نتیجه برای $n=2m+1$ درست باشد؛ اکنون اگر از حالت خاص تمرین ۴۶ استفاده‌کنیم، تعداد مجهول مسیرها را برای $n=2m+2$ به‌دست خواهیم‌آورد:

$$4C_{2m}^{m}-2\frac{1}{2m+1}C_{2m+1}^{m+1}$$

که بعد از تبدیل‌های لازم، چنین می‌شود:

$$C_{2m+2}^{m+1}$$

بدون به‌کار گرفتن روش استقرای ریاضی. از عبارت اولی که برای N درتمرین۴۶، c) به‌دست‌آوردیم، استفاده‌کنید و این‌مجموع‌را درنظر بگیرید:

$$2\sum(C_{n-1}^{r-1}-C_{n-1}^{r})$$

با شرط $\frac{n}{2}<r\leqslant n$؛ این عبارت، تعداد مسیرها و، به‌خصوص، آن‌هایی را که قبلاً پیش‌بینی کرده‌ایم، به‌ما می‌دهد. (تنها باید، با دقت، به‌اختلاف‌بین حالت‌های $n=2m$ و $n=2m+1$ توجه داشته باشید.)

۴۸. $0, 1, 6, 21, 50, 90, 126, 141, 126, \ldots$

$0, 1, 7, 28, 77, 161, 266, 357, 393, 357, \ldots$

همهٔ عددهای قاعدهٔ هفتم، به‌جز ۱، ۳۹۳ و (دوباره) ۱، بر۷ بخش‌پذیرند.

۴۹. شبیه تمرین ۱ ثابت می‌شود.

۵۰. شبیه تمرین ۱ روشن می‌شود.

۵۱. با تمرین ۳۳ مقایسه‌کنید.

۵۲. با تمرین ۳۴ مقایسه‌کنید.

۵۳. §۹ را ببینید، سپس، شبیه تمرین ۳۷ تعمیم دهید.

۵۴. خط‌های مایل

$1, 1, 1, 1, 1, \ldots;$

$1, 2, 3, 4, 5, \ldots;$

$1, 3, 6, 10, 15, \ldots,$

که از شمال خاوری به‌جنوب باختری می‌روند، در جدول پاسکال هم وجود دارند.

۵۵. تقارنی که در سطرهای اول دیده می‌شود ، برای سطرهای بعدی هم وجود دارد؛ بنابراین کافی است سطرهای هفتم وهشتم را، تا خط میانی بنویسیم:

$$\frac{۱}{۸} \quad \frac{۱}{۵۶} \quad \frac{۱}{۱۶۸} \quad \frac{۱}{۲۸۰}$$

$$\frac{۱}{۹} \quad \frac{۱}{۷۲} \quad \frac{۱}{۲۵۲} \quad \frac{۱}{۵۰۴} \quad \frac{۱}{۶۳۰}$$

۵۶. مخرج‌های کسرهایی که درهریك از قاعده‌های مثلث همساز قرار دارند، با ضریب‌های دوجمله‌ای متناسب‌اند؛ ضمناً ، ضریب تناسب، همان جملهٔ مرزی است. مثلاً ، عددهایی ازاین دومثلث، که درجای یکسانی‌قرار دارند، چنین‌اند:

C_n^r	$\frac{۱}{(n+۱)C_n^r}$
مثلث پاسکال	مثلث لایب نیتس

اثبات. درحالت $r=۰$، شرط مرزی‌مثلث همساز، برقرار است. برای تحقیق درمورد رابطهٔ بازگشتی، ابتدا سمت چپ آن را بنویسید و، سپس، از بیان ضریب‌های دو جمله‌ای استفاده کنید:

$$\frac{۱}{(n+۱)C_n^{r-۱}}+\frac{۱}{(n+۱)C_n^r}=\frac{C_{n+۱}^r}{(n+۱)C_n^{r-۱}\ C_n^r}=$$

$$=\frac{۱}{n+۱}\cdot\frac{(n+۱)!}{r!(n+۱-r)!}\cdot\frac{(r-۱)!(n-r+۱)!}{n!}\cdot\frac{n!(n-r)!}{n!}=$$

$$=\frac{(r-۱)!(n-r)!}{n!}=\frac{۱}{nC_{n-۱}^{r-۱}}$$

۵۷. در هریك از این برابری‌ها، درسمت چپ، عددی قرار دارد که ستون مایل‌مثلث لایب نیتس باآن‌آغاز می‌شود (شکل۲۲)، ودرسمت‌راست، مجموع همهٔ‌عددهای ستون مایل‌بعدی. برای اثبات، حل‌تمرین ۵۸ رابببینید.

۵۸. از رابطهٔ برگشتی مثلث لایب‌نیتس استفاده کنید:

$$\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۱۲}=\frac{۱}{۱۲}$$

$$\frac{۱}{۱۲}-\frac{۱}{۲۰}=\frac{۱}{۳۰}$$

$$\frac{۱}{۲۰}-\frac{۱}{۳۰}=\frac{۱}{۶۰}$$

$$\frac{۱}{۳۰}-\frac{۱}{۴۲}=\frac{۱}{۱۰۵}$$

. . . .

این برابری‌ها را با هم جمع کنید! (از «بی‌انتها بودن» ردیف جمله‌ها درستون‌دوم، می‌توان «صرف‌نظر کرد».) می‌توان این‌حالت خاص را، نمونه قرارداد وفرض‌کلی زیر را مطرح کرد: درمثلث لایب نیتس (آن‌را بی‌انتها در درنظر بگیرید)، مجموع همهٔ عددهای یك ستون مایل، با انتخاب از عددی به‌بعد، درجهت جنوب باختری‌برابر است با عدد شمال باختری‌همسایهٔ همین عددآغازی. با قراردادن به‌جای‌واژه‌های

«لایب‌نیتس»، «نامتناهی»، «جنوب‌باختری» و «شمال باختری»

واژه‌های

«پاسکال»، «متناهی»، «شمال خاوری» و «جنوب خاوری»

به‌جای نتیجه‌ای که هم‌اکنون به دست آوردیم، نتیجهٔ تمرین ۳۵ به‌دست می‌آید، که می‌تواند به‌منزلهٔ نورتازه‌ای باشد که بر«شباهت به‌مفهوم‌مقابل» آن‌چه درتمرین ۵۵ دیدیم، می‌اندازد.

۵۹. باتوجه به‌رابطه‌ای که جملهٔ عمومی مثلث همساز را بیان می‌کند (تمرین۵۶)، سطر $(r-۱)$ام درمسألهٔ ما، ازسطرمتناظر خود درتمرین۵۷، تنها در یك عامل ثابت اختلاف دارد $(r=۲, ۳, \ldots)$، ومجموع جمله‌های آن برابر است با

$$\frac{۱}{(r-۱)!(r-۱)}$$

۶۱. حاصل این ضرب، برابر است با ۱. خواننده‌ای که با نظریهٔ رشته‌های نامتناهی آشنا است، می‌تواند برابری زیر را درنظر بگیرد:

$$1+x+x^{2}+\dots+x^{n}+\dots=(1-x)^{-1}$$

او می‌داندکه این برابری با چه شرطی معنا دارد و، آن وقت، می‌تواند آن را با دقت ثابت کند.

۶۲. $a_0+a_1+a_2+\dots+a_n$؛ تمرین ۶۱ حالت خاصی از تمرین ۶۲ است.

۶۳. هریك از این رشته‌ها، متناظر است با ردیفی از مثلث پاسکال. مجموع رشتهٔ اول را در تمرین ۶۱ پیدا کردیم. با استفاده از تمرین ۶۲ و تمرین ۳۵، به‌دست می‌آید:

$$1+2x+3x^{2}+4x^{3}+\dots=(1+x+x^{2}+\dots)^{2}$$

$$1+3x+6x^{2}+10x^{3}+\dots=(1+x+x^{2}+\dots)^{3}$$

و به‌طور کلی

$$C_r^r+C_{r+1}^r x+C_{r+2}^r x^{2}+\dots+C_{r+n}^r x^{n}+\dots=$$
$$=(1+x+x^{2}+\dots)^{r+1}=(1-x)^{-r-1}$$

برای اثبات، می‌توانید از روش استقرای ریاضی استفاده‌کنید.

۶۴. درحاصل‌ضرب زیر، از دو راه، ضریب x^n را پیدا کنید.

$$(1-x)^{-r-1}(1-x)^{-s-1}$$

(این عمل، شبیه روش تحلیلی حل تمرین ۳۷؛ براساس §۹، °۳ می‌باشد.)

۶۵. کلید راه‌حل:

$$1(2n-1)-2(2n-2)+3(2n-3)-\dots+(2n-1)1=n$$

برای اثبات این رابطه، ضریب x^{2n-2} را درحاصل‌ضرب‌های زیر پیدا کنید:

$$(1+2x+3x^{2}+4x^{3}+\cdots)(1-2x+3x^{2}-4x^{3}+\cdots)=$$
$$=(1-x)^{-2}(1+x)^{-2}=(1-x^{2})^{-2}=1+2x^{2}+$$
$$+3x^{4}+4x^{6}+\cdots+nx^{2n-2}+\cdots$$

۶۶. ضریب‌های مورد نظر، به ترتیب، برابرند با: ۱، ۰، ۰، ۰، که

می‌توان براساس فرض نیوتون، آن‌ها را، به‌دست‌آورد.

۶۷. ضریب‌های مجهول، به‌ترتیب، برابرند با $\frac{۲}{۳}$، $-\frac{۱}{۹}$، $\frac{۴}{۸۱}$، $-\frac{۷}{۲۴۳}$، که یکبار دیگر، فرض نیوتون را تأیید می‌کنند، زیرا این ضریب‌ها را، در واقع، از طریق‌های مختلفی به‌دست آورده‌ایم.

۶۸.

$$(۱+x)^{\frac{۱}{۳}}(۱+x)^{\frac{۲}{۳}}=$$

$$=\left(۱+\frac{x}{۳}-\frac{x^۲}{۹}+\frac{۵x^۳}{۸۱}-\frac{۱۰x^۴}{۲۴۳}+\cdots\right)\times$$

$$\times\left(۱+\frac{۲x}{۳}-\frac{x^۲}{۹}+\frac{۴x^۳}{۸۱}-\frac{۷x^۴}{۲۴۳}+\cdots\right)=$$

$$=۱+x+۰x^۲+۰x^۳+۰x^۴+\cdots$$

که بازهم، فرض نیوتون را تأیید می‌کند.

۶۹. با استفاده از نتیجهٔ تمرین ۶۱، می‌توان نوشت:

$$۱+\frac{-۱}{۱}x+\frac{(-۱)(-۲)}{۱\times۲}x^۲+\frac{(-۱)(-۲)(-۳)}{۱\times۲\times۳}x^۳+\cdots=$$

$$=۱-x+x^۲-x^۳+\cdots=[۱-(-x)]^{-۱}=(۱+x)^{-۱}$$

که فرض‌نیوتون، ازجهت کاملاً دیگری، تأیید می‌کند. آیا می‌توان، براساس فرض نیوتون، بقیهٔ رشته‌های تمرین ۶۳ را به دست‌آورد؟

۷۰.

$$C^r_{r-۱-x}=\frac{r-۱-x}{۱}\cdot\frac{r-۲-x}{۲}\cdots\frac{-x}{r}=$$

$$=(-۱)^r\frac{x}{۱}\cdots\frac{x-r+۲}{r-۱}\cdot\frac{x-r+۱}{r}$$

۷۱. توجه کنید که

$$\frac{x}{n}=\frac{(x+n)+(x-n)}{۲n}$$

بنابراین، عبارت مفروض، برابر است با

$$C^{۲n}_{x+n}+C^{۲n}_{x+n-۱}$$

وضریب‌های دوجمله‌ای هم، عددهای درستی هستند.

۷۲. بنابر فرض نیوتون، ضریب x^n در بسط $(1+x)^{-r-1}$ برابر است با

$$C^n_{-r-1}=(-1)^n C^n_{n+r}=(-1)^n C^r_{r+n}$$

دراین‌جا، ابتدا ازتمرین ۷۰ (II) و، سپس، تمرین ۳۲، با فرض درست و غیر منفی بودن r، استفاده‌کردیم. با تبدیل x به $-x$ و، در نتیجه، x^n به $(-1)^n x^n$، نتیجهٔ اصلی تمرین ۶۳ به دست می‌آید، که فرض نیوتون رادر حالت خاص مهمی، یعنی برای مقدارهای درست و منفی a، تأیید می‌کند.

۷۳. از رابطهٔ

$$(C^0_a+C^1_a x+\cdots+C^r_a x^r+\cdots)(C^0_b+\cdots+$$
$$+C^{r-1}_b x^{r-1}+C^r_b x^r+\cdots)=$$
$$=C^0_{a+b}+C^1_{a+b}x+\cdots+C^r_{a+b}x^r+\cdots$$

نتیجه می‌گیریم (تمرین ۶۰) که

$$C^0_a C^r_b+C^1_a C^{r-1}_b+\cdots+C^r_a C^0_b=C^r_{a+b} \qquad (*)$$

اگر در این رابطه $a=m$ و $b=n$ قرار دهیم، به عبارتی می‌رسیم که در تمرین ۳۷ به‌دست‌آوردیم؛ باوجود این، توجه‌کنیم‌که مقدارهای m،nوa،b یکسان نیستند: دوعدداول، عددهایی درست وغیرمنفی‌اند، درحالی که‌دوعدد دوم، عددهایی دلخواه هستند.

۷۴. رابطهٔ (*) را، از فرض نیوتون ـ که برای ما ثابت نشده بود ـ درآوردیم ـ بنابراین، خود این رابطه هم، هنوزیك فرضیه است.

حالت خاصی از رابطهٔ (*) یا وقتی که aوb عددهایی درست ومثبت باشند، درتمرین ۳۷ ثابت کردیم. حالت خاص دیگر این رابطه ـ وقتی که عددهای aوb درست ومنفی باشند ـ با توجه به تمرین ۷۲، با نتیجهٔ تمرین ۶۱ هم‌ارز است و، بنابراین، آن را هم می‌توان ثابت شده دانست. (توجه کنید که رابطهٔ (*)، همان بستگی مورد نظر را بین تمرین‌های ۳۷ و ۳۸-

برقرار می‌کند؛ یادداشت انتهای تمرین ۳۸ را ببینید.)

آیا می‌توان از نتیجهٔ تمرین ۳۷ـ که حالت خاصی از رابطهٔ(*) استـ برای اثبات رابطهٔ (*)، درحالت‌کلی خود، استفاده کرد؟ (پاسخ این پرسش مثبت‌است، به‌شرطی‌که ازحقیقت جبری زیر، که به‌این پرسش‌مربوط می‌شود، آگاه باشیم: یك چند جمله‌ای با دومتغیر x و y که، به‌ازای همهٔ مقدارهای این متغیرها به سمت صفر میل‌کند، متحد با صفر است.)

این علامت‌گذاری را وارد می‌کنیم:

$$C_a^{0}+C_a^{1}x+C_a^{2}x^{2}+\cdots C_a^{n}x^{n}+\cdots=f_a(x)$$

رابطهٔ (*) درواقع، با رابطهٔ زیر هم‌ارز است.

$$f_a(x)f_b(x)=f_{a+b}(x)$$

اکنون فرض می‌کنیم (*) درست باشد، درآن صورت

$$f_a(x)f_a(x)f_a(x)=f_{2a}(x)f_a(x)=f_{3a}(x)$$

وبه طورکلی، برای هرعدد درست ومثبت n، داریم:

$$[f_a(x)]^n=f_{na}(x)$$

فرض‌کنید m عددی درست (مثبت یا منفی) باشد؛ چون فرض نیوتون در مورد عددهای درست a (چه مثبت وچه منفی) برای ما محقق‌است(تمرین‌های ۱ و ۷۲ را ببینید)، نتیجه می‌گیریم که

$$[f_{\frac{m}{n}}(x)]^n=f_m(x)=(1+x)^m,$$

$$f_{\frac{m}{n}}(x)=(1+x)^{\frac{m}{n}}$$

به این ترتیب، فرض نیوتون، درمورد همهٔ نماهای گویای a درست است.

[در واقع، درآخرین‌گام خود، تاحدی ریسك کرده‌ایم، زیرا به این مطلب توجه نکردیم‌که کدام یك از جواب‌های ممکن ریشهٔ n ام عدد، باید در نظرگرفته شود؛ بنابراین، دراستدلال ما رخنه‌ای وجود داردکه پرکردن آن،به‌اندازهٔ‌کافی دشوار است؛ دست‌کم توانسته‌ایم عنصرهای مهمی را، که برای اثبات‌کامل لازم است، پیداکنیم. صدوپنجاه سال بعد ازنوشتهٔ‌نیوتون،

در سال ۱۸۲۶ رسالهٔ نیس هنریك آبل، ریاضی‌دان بزرگ نروژی، ازچاپ خارج شد، که درآن، مسألهٔ تقارب و جمع بندی رشته‌های دوجمله‌ای، واز آن‌جمله برای مقدارهای مختلف x و a، مورد بررسی قرار گرفت و نظریهٔ عمومی رشته‌های نامتناهی تا حد زیادی پیشرفت کرد.]

۷۵. عددهای ۱، ۲، ۶و ۲۰ را می‌توان روی‌محور تقارن مثلث‌پاسکال پیداکرد. درواقع، ضریب x^n برابر است‌با

$$(-۴)^n C^n_{-\frac{۱}{۲}} = ۴^n \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \ldots \times (۲n-۱)}{۲ \times ۴ \times ۶ \times \ldots \times ۲n} =$$

$$= \frac{۱ \times ۳ \times ۵ \times \ldots \times (۲n-۱) \times ۲ \times ۴ \times ۶ \times \ldots \times ۲n}{n!n!} = C^n_{۲n}$$

۷۶.

$$a_۰ u_۰ = b_۰,$$
$$a_۰^۲ u_۱ = a_۰ b_۱ - a_۱ b_۰,$$
$$a_۰^۳ u_۲ = a_۰^۲ b_۲ - a_۰ a_۱ b_۱ + (a_۱^۲ - a_۰ a_۲) b_۰,$$
$$a_۰^۴ u_۳ = a_۰^۳ b_۳ - a_۰^۲ a_۱ b_۲ + (a_۰ a_۱^۲ - a_۰^۲ a_۲) b_۱ -$$
$$-(a_۱^۳ - ۲a_۰ a_۱ a_۲ + a_۰^۲ a_۳) b_۰$$

۷۷. حالت‌های $n = ۰، ۱، ۲، ۳$، که درتمرین ۷۶بررسی‌کردیم، اجازه می‌دهند فرض‌کنیم که، $a_۰^{n+۱} u_n$، یك چند جمله‌ای نسبت به a و b است‌که جمله‌های آن

۱) نسبت به حرف a دارای یك درجه‌اند،

۲) نسبت به حرف b از درجهٔ واحدند،

۳) اگر به‌جای a_n و b_n، به‌ترتیب، $a_n c^n$ و $b_n c^n$ بگذاریم (مثل این است‌که cx را به‌جای x بگذاریم)، آن وقت u_n به $u_n c^n$ تبدیل می‌شود.

۷۸. $u_n = b_n - b_{n-۱}$؛ اگر u_n را برحسب aوb متناظربا اندیس‌های خود در نظربگیریم، و، سپس، قرار دهیم: $a_۱ = a_۲ = \ldots = a_n = ۱$، این نتیجه‌به‌عنوان‌حالت‌خاص‌به‌دست‌می‌آید. آن‌رابرای‌حالت‌های $n = ۰، ۱، ۲، ۳$ مورد تحقیق قرار دهید (تمرین ۷۶ را ببینید).

۷۹. $u_n = b_۰ + b_۱ + b_۲ + \ldots + b_n$ (تمرین ۶۲ را ببینید)، اگر

ضریب‌های u_n را برحسب a و b با اندیس‌های مربوطه درنظر بگیریم و، سپس، قراردهیم $a_0 = 1$ ، $a_1 = -1$ و $a_2 = a_3 = \ldots = 0$، آن وقت این نتیجه، به‌عنوان حالت خاصی، به‌دست می‌آید. واین، وسیلهٔ خوبی برای تحقیق است؛ درحالت‌های $n = 0, 1, 2, 3$، آن را تحقیق کنید (تمرین ۷۶ را ببینید).

.۸۰

$$1 - \frac{x}{6} + \frac{x^2}{40} - \frac{x^3}{336} + \ldots + \frac{(-1)^n x^n}{(2 \times 4 \times 6 \times \ldots \times 2n)(2n+1)} + \ldots$$

.۸۱

$$a_1 u_1 = 1,$$
$$-a_1^3 u_2 = a_2,$$
$$a_1^5 u_3 = 2a_2^2 - a_1 a_3,$$
$$-a_1^7 u_4 = 5a_2^3 - 5a_1 a_2 a_3 + a_1^2 a_4,$$
$$a_1^9 u_5 = 14a_2^4 - 21a_1 a_2^2 a_3 + 3a_1^2 a_3^2 + 6a_1^2 a_2 a_4 - a_1^3 a_5$$

۸۲. حالت‌هایی را که درتمرین ۸۱ در نظرگرفتیم، می‌توان ادامه داد ونتیجه گرفت که $a_1^{2n-1} u_n$ یك چند جمله‌ای نسبت به‌حرف‌های a است، به نحوی که هر جملهٔ آن:

۱) از درجهٔ $(n-1)$ است،

۲) وزنی برابر $2n - 2$ داشته باشد[1].

واین، مبنایی است برای این که:

۱) اگر a_n را به $a_n c$ تبدیل کنیم (که وقتی پیش می‌آید که $c^{-1}x$ را به جای x بگذاریم). آن وقت u_n به $u_n c^{-n}$ تبدیل می‌شود.

۲) اگر a_n را به $a_n c^n$ تبدیل کنیم (که وقتی پیش می‌آید که cy را به جای y بگذاریم)، آن وقت u_n به $u_n c^{-1}$ تبدیل می‌شود.

---

۱. مثلاً، «وزن» a_5 برابر ۵، «وزن» $a_1 a_4^2$ برابر ۹ و «وزن» $a_i^m b_j^n$ برابر $mi + nj$ می‌باشد.

۸۳. داریم:

$$x=\frac{y}{1-y},\ \ y=\frac{x}{1+x}\ ;$$

بنابراین

$$y=x-x^{2}+x^{3}-x^{4}+\dots$$

به این ترتیب، می‌بینیم که اگر درشرطهای تمرین ۸۱، فرض‌کنیم $a_n=1$، آن وقت $u_n=(-1)^{n-1}$. و این می‌تواند وسیلهٔ خوبی، برای تحقیق نتیجه‌هایی باشد که در تمرین ۸۱ به دست آوردیم؛ این تحقیق را برای $n=1,2,3,4,5$ انجام دهید.

۸۴. $1-4x=(1+y)^{-2}$ یا

$$y=-1+(1-4x)^{-\frac{1}{2}}=2x+6x^{2}+\dots+C_{2n}^{n}x^{n}+\dots$$

(تمرین ۷۵ را ببینید).

۸۵.

$$y=\left[-1+(1+4ax)^{\frac{1}{2}}\right](2a)^{-1}=x-ax^{2}+2a^{2}x^{3}-5a^{3}y^{4}+$$
$$+14a^{4}x^{5}-\dots$$

ضریب x^n برابر است با

$$\frac{(4a)^{n}}{2a}C_{\frac{1}{2}}^{n}=\frac{(-1)^{n-1}a^{n-1}}{n}C_{2n-2}^{n-1}$$

(محاسبه، شبیه تمرین ۷۵ انجام می‌شود) و ضریب u_n درتمرین ۸۱ را هم باید همین مقدار گرفت، به‌شرطی که داشته باشیم:

$$a_1=1،\ a_2=a\ ،a_3=a_4=\dots=0$$

۸۶. $$y=x-\frac{x^{2}}{2}+\frac{x^{3}}{3}-\frac{x^{4}}{4}+\dots+\frac{(-1)^{n-1}x^{n}}{n}+\dots$$

۸۷. $$u_0=u_1=u_2=1,\ u_3=\frac{4}{3},\ u_4=\frac{7}{6}$$

۸۸. استقرای ریاضی. حکم برای $n=3$ درست‌است. $n>3$ می گیریم و فرض می‌کنیم، حکم برای ضریب‌های قبل از ضریب u_n ثابت شده باشد،

یعنی

$$u_{n-1}>1,\ u_{n-2}>1,\ \dots,\ u_3>1$$

می‌دانیم $u_0=u_1=u_2=1$، بنابراین

$$nu_n=u_0u_{n-1}+u_1u_{n-2}+\dots+u_{n-1}u_0>n$$

۸۹. فرض می‌کنیم:

$$y=u_0+u_1x+u_2x^2+\dots+u_nx^n+\dots,$$

$$\frac{d^2y}{dx^2}=2\times 1u_2+\dots+n(n-1)u_nx^{n-2}+\dots$$

که با توجه به‌معادلهٔ دیفرانسیلی مفروض، به‌دست می‌آید:

$$n(n-1)u_n=-u_{n-2}$$

وبا توجه به شرط اصلی معلوم می‌شود:

$$u_0=1,u_1=0$$

وبالاخره، به‌ازای $m=1,2,3,\dots$ داریم:

$$u_2m=\frac{(-1)^m}{(2m)!},\ \ u_{2m-1}=0,$$

$$y=1-\frac{x^2}{2!}+\frac{x^4}{4!}-\frac{x^6}{6!}+\dots$$

۹۰.

$$B_n=B_{n-5}+A_n,$$

$$C_n=C_{n-10}+B_n,$$

$$D_n=D_{n-25}+C_n,$$

$$E_n=E_{n-50}+D_n$$

از رابطهٔ اخیر به‌ازای $n=100$ نتیجه می‌شود

$$E_{100}=E_{50}+D_{100}$$

و رابطهٔ قبلی، به‌ازای $n=20$، می‌دهد:

$$D_{20}=C_{20}$$

ضمناً، فرض کردیم $D_{-5}=0$، زیرا، هرمقداری به‌این شکل وبا اندیس‌منفی، به‌طورطبیعی، صفر به‌حساب می‌آید. این نمونه‌ها، ویژگی‌اصلی این‌دستگاه معادله‌ها را روشن می‌کنند: هر مجهولی که درآن قرار دارد (مثلاً E_{100})،

تنها درحالتی می‌تواند محاسبه شود که قبلاً مجهولی با همین حرف و با اندیسی کوچکتر (مثلاً $E_{۵۰}$) وهمچنین مجهولی با علامت حرف الفبای‌قبل ازآن (مثلاً $D_{۱۰۰}$) محاسبه شده‌باشد. (حالت‌هایی وجود داردکه تنها به‌یک حرف قبلی منجر می‌شود، مثل $D_{۲۰}$، درحالت‌های دیگر، باید به مقدارهای مرزی تکیه‌کرد که، قبل از تشکیل معادله، برای ما معلوم بودند؛ که در این‌جا عبارتند از $B_{۰}$، $C_{۰}$، $D_{۰}$، $E_{۰}$ و A_n به‌ازای $n=۰, ۱, ۲, \dots$)، به‌زبان‌ساده، محاسبهٔ مجهول‌ها، به‌محاسبهٔ همان مجهول‌ها با اندیس‌کوچکتر ویاحرف‌های‌قبلی، یعنی‌سرآخر، به‌مقدارهای مرزی‌منجر می‌شوند. (اختلاف در نام‌گذاری‌ها، نباید شباهت بین محاسبه‌ای را که هم اکنون انجام دادیم با پیداکردن ضریب‌های دو جمله‌ای به‌کمك رابطهٔ بازگشتی وشرط مرزی، تحت‌الشعاع قرار دهد؛ §۶°، ۲° را ببینید.)

ازخواننده می‌خواهیم، طرح عملی محاسبه را بریزد ونتیجه را، برای نمونه‌های عددی زیر، مورد تحقیق قرار دهد:

$$B_{۱۰}=۳,\ C_{۲۵}=۱۲,\ D_{۵۰}=۴۹,\ E_{۱۰۰}=۲۹۲$$

۹۱. استقرای‌ریاضی: فرض می‌کنیم‌عبارت مفروض برای $y^{(n)}$ درست باشد؛ اگر ازآن مشتق بگیریم، به‌عبارت زیر می‌رسیم:

$$y^{(n+۱)}=(-۱)^{n+۱}(n+۱)!x^{-n-۲}\ln x+(-۱)^n x^{-n-۲}[n!+ +(n+۱)C_n]$$

که به‌همان صورت مورد نظر درمی‌آید، به‌شرطی‌که فرض‌کنیم:

$$C_{n+۱}=n!+(n+۱)C_n$$

رابطهٔ اخیر را، به‌این‌صورت می‌نویسیم:

$$\frac{C_{n+۱}}{(n+۱)!}=\frac{C_n}{n!}+\frac{۱}{n+۱}$$

که با فرض $C_۱=۱$ به دست می‌آید:

$$C_n=n!\left(۱+\frac{۱}{۲}+\frac{۱}{۳}+\frac{۱}{۴}+\dots+\frac{۱}{n}\right)$$

۹۲. پیداکردن مجموع جمله‌های یک تصاعد هندسی را، می‌توان

خویشاوند این مسأله دانست. اگر مجموع مورد نظر را S بنامیم، داریم:

$$(1-x)S=1+x+x^2+\dots+x^{n-1}-nx^n=\frac{1-x^n}{1-x}-nx^n$$

که از آن‌جا، مقدار S به‌دست می‌آید:

$$S=\frac{1-(n+1)x^n+nx^{n+1}}{(1-x)^2}$$

۹۳. از علامت گذاری و نتیجهٔ تمرین ۹۲ استفاده کنید؛ مجموع مجهول را T فرض می کنیم وعبارت زیر را درنظر می گیریم:

$$(1-x)T=1+3x+5x^2+7x^3+\dots+(2n-1)x^{n-1}-n^2x^n=$$
$$=2S-(1+x+x^2+\dots+x^{n-1})-n^2x^n$$

که سرانجام، با تبدیل‌های سادهٔ جبری، نتیجه می‌شود:

$$T=\frac{1+x-(n+1)^2x^n+(2n^2+2n-1)x^{n+1}-n^2x^{n+2}}{(1-x)^3}$$

۹۴. حاصل مجموع

$$1^k+2^kx+3^kx^2+\dots+n^kx^{n-1}$$

را می‌توان باروش‌بازگشت پیدا کرد ومحاسبهٔ‌حالت k را به‌محاسبهٔ حالت‌های $k-1$، $k-2$، ...، ۲، ۱، ۰ منجرکرد؛ شبیه آن‌چه در تمرین‌های ۹۲ و ۹۳ انجام دادیم.

۹۵. از دوطرف رابطهٔ زیر مشتق بگیرید:

$$1+x+x^2+\dots+x^n=\frac{1-x^{n+1}}{1-x}$$

تمرین‌های ۹۳ و۹۴ را هم، با همین روش می‌توان حل کرد.

۹۶. براساس نمونه‌ها، می‌توان، به‌این حدس رسید:

$$1\times C_n^0+2C_n^1+3C_n^2+\dots+(n+1)C_n^n=(n+2)2^{n-1}$$

(دشواری حدس، ممکن است در تشخیص تصور بستگی بین حاصل‌ضرب‌های 1×3، 2×4، 4×5؛ 8×6، 16×7 باشد.)

برای اثبات، ابتدا از دوطرف اتحاد زیر، مشتق بگیرید:

$$C_n^0x+C_n^1x^2+C_n^2x^3+\dots+C_n^nx^{n+1}=x(1+x)^n$$

وسپس $x = ۱$ فرض کنید.

۹۷. استقرای ریاضی. به‌ازای $n = ۱$ حکم واضح است، رابطهٔ زیر هم درست است:

$$\frac{a_n(n+\alpha)-a_۱(۱+\beta)}{\alpha-\beta}+a_{n+۱}=$$
$$=\frac{a_{n+۱}(n+۱+\alpha)-a_۱(۱+\beta)}{\alpha-\beta}=a_{n+۱}$$

۹۸. از نتیجهٔ تمرین ۹۷ استفاده کنید، درآن فرض کنید:

$$a_۱=\frac{p}{q}, \alpha=p,\ \beta=q-۱$$

مجموع موردنظر، چنین است:

$$\frac{p}{p-q+۱}\left(\frac{p+۱}{q}\cdot\frac{p+۲}{q+۱}\cdots\frac{p+n}{q+n-۱}-۱\right)$$

۹۹. ۱°. ۸، $۴\sqrt{۲}$، $۴\sqrt{۳}$، ۶.

۲°. $I_n=۲n\sin\frac{\pi}{n}$، $C_n=۲n\,tg\frac{\pi}{n}$

سپس، می‌توان مستقیماً و با استفاده از اتحادهای مثلثاتی معلوم، آن را آزمایش کرد.

۱۰۰. برای مثال بیشتر ازکاربرد روش استقرای ریاضی، به‌کتاب «استقراء ریاضی»، از انتشارات خوارزمی (از مترجم همین کتاب) مراجعه کنید. مسأله‌هایی راکه با روش استقرای ریاضی حل می‌شوند ومضمون‌آن‌ها شبیه تمرین‌های بخش‌های دوم و سوم تمرین‌های این فصل است، می‌توان درکتاب‌های مربوط به‌نظریهٔ احتمال وآنالیز ترکیبی پیداکرد. مسأله‌هایی را هم که به‌بخش‌چهارم وتمرین‌های ۶۱ تا۶۳ مربوط می‌شوند، بایددرکتاب‌هایی جست‌وجو کرد که به رشته‌های نامتناهی ونظریهٔ تابع‌های با متغیر مختلط اختصاص دارند. مسأله‌هایی شبیه تمرین‌های ۸۷ تا ۸۹، بخش بزرگی از نظریهٔ معادله‌های دیفرانسیلی را تشکیل می‌دهند.

برای چنین مسأله‌هایی، سرچشمه‌ای پایان ناپذیر وجود دارد. در

این جا، تنها یک نمونه می‌آوریم که به ضریب‌های چند جمله‌ای مربوط می‌شود (با تمرین‌های ۲۹-۳۱ مقایسه کنید). ضریب‌های بسط سه جمله‌ای

$$(a+b+c)^n$$

به‌ازای $n=۰,۱,۲,۳$ را می‌توان به گره‌های یک شبکهٔ فضایی (دریک‌هشتم اول) مربوط کرد، شبیه ضریب‌های دو جمله‌ای

$$(a+b)^n$$

که به‌وسیلهٔ مثلث پاسکال به گره‌های یک شبکهٔ مسطحه (در ربع‌اول) مربوط می‌شدند. در شبکهٔ فضایی چه‌شباهت‌هایی درموردشرط‌مرزی، رابطهٔ باز گشتی، خیابان‌ها و قاعده‌ها با مثلث پاسکال و با تمرین‌های ۳۲-۴۰ وجود دارد؟ همهٔ این‌هارا چگونه می‌توان باتمرین‌های ۴۸-۵۲ مربوط کرد؟ علاوه‌براین، می‌توان به‌ویژگی‌های عددی ـ نظری مربوط به ضریب‌های دو جمله‌ای و ضریب‌های چند جمله‌ای وغیر آن‌هم پرداخت.

فصل چهارم

۰۱ A را رأس هرم، مقابل به‌قاعدهٔ آن، می‌گیریم. قاعدهٔ هرم را به n مثلث با مساحت‌های

$$S_۱, S_۲, \cdots, S_n$$

تقسیم می‌کنیم و n چهار وجهی حاصل را در نظر می‌گیریم که ارتفاع مشترک آن‌ها h، و این n مثلث، قاعده‌های آن‌ها باشند. اگر حجم n چهاروجهی را، که با عبور صفحه‌هایی از رأس A به‌دست آمده‌اند، به‌ترتیب

$$V_۱,\ V_۲,\ \cdots,\ V_n$$

بنامیم، خواهیم داشت:

$$S_۱+S_۲+\cdots+S_n=S$$

$$V_۱+V_۲+\cdots+V_n=V$$

اگر فرض کنیم که دستور مورد نظر برای این چهاروجهی‌های خاص درست باشد:

$$V_۱=\frac{S_۱h}{۳},\ V_۲=\frac{S_۲h}{۳},\ \ldots,\ V_n=\frac{S_nh}{۳}$$

با جمع کردن (انطباق) آن‌ها، می‌توان دستور مجهول را، برای حجم هرم درحالت کلی، به‌دست آورد:

$$V=\frac{Sh}{۳}$$

۰۴ چند جمله‌ای درجهٔ k، درحالت کلی، به‌این‌صورت است:

$$f(x)=a_۰x^k+a_۱x^{k-۱}+\dots+a_k$$

(که‌درآن، $a_۰\neq ۰$). اگربه‌جای x، به‌ترتیب، عددهای ۱، ۲، ۳، ...، n را قرار دهیم و، سپس، نتیجه‌ها را با هم جمع کنیم، باتوجه به‌نام‌گذاری تمرین ۱۲ فصل سوم، داریم:

$$f(۱)+f(۲)+\dots+f(n)=a_۰S_k(n)+a_۱S_{k-۱}(n)+\dots+a_kS_۰(n)$$

که با توجه به‌نتیجهٔ تمرین ۳ از فصل سوم، نتیجه می‌گیریم که سمت راست عبارت است از یك چند جمله‌ای از درجهٔ $(k+۱)$، نسبت به n.

۰۳ نتیجهٔ تمرین ۳۵ فصل سوم را، می‌توان این‌طور نوشت:

$$C_۰^r+C_۱^r+C_۲^r+\dots+C_n^r=C_{n+۱}^{r+۱}$$

[تمرین ۷۰ (III)، فصل‌سوم را ببینید]. با استفاده ازتمرین۴، چندجمله‌ای مفروض را، این‌طور می‌نویسیم:

$$f(x)=b_۰C_x^k+b_۱C_x^{k-۱}+\dots+b_kC_x^۰$$

که درآن (حل تمرین ۴ را ببینید) $b_۰=k!a_۰\neq ۰$. به جای x، به ترتیب عددهای ۰، ۱، ۲، ۳، ...، n را قرار می‌دهیم ونتیجه‌های حاصل را با هم جمع می‌کنیم؛ درآن‌صورت (با استفاده از صورت تازه‌ای که هم‌اکنون از تمرین ۳۵ فصل سوم دادیم)، به‌دست می‌آید:

$$f(۰)+f(۱)+f(۲)+\dots+f(n)=b_۰C_{n+۱}^{k+۱}+b_۱C_{n+۱}^k+\dots+$$
$$+b_kC_{n+۱}^۱$$

سمت راست این رابطه، عبارت است از چند جمله‌ای درجهٔ $(k+۱)$ ام، نسبت به n.

۰۴ با مقایسهٔ ضریب‌های x^k (بزرگترین‌درجهٔ x) در دو طرف اتحاد، معلوم می‌شود که

$$a_0=\frac{b_0}{k!}$$

اگر این مقدار را در اتحاد خود قرار دهیم، به‌دست می‌آید:

$$a_0x^k+a_1x^{k-1}+\dots+a_k-k!a_0C_x^k=b_1C_x^{k-1}+\dots+b_kC_x^0$$

اکنون، اگر در رابطهٔ اخیر، ضریب‌های x^{k-1} را در دوطرف مقایسه کنیم، مقدار b_1 برحسب a_0 و a_1 به‌دست می‌آید؛ و اگر همین‌روش را ادامه‌دهیم به‌ترتیب؛ b_0، b_1، b_2، ...، b_k به‌دست می‌آیند.

۵. باید چهار عدد b_0، b_1، b_2 و b_3 را طوری پیدا کرد که رابطهٔ

$$x^3=b_0C_x^3+b_1C_x^2+b_2C_x^1+b_3C_x^0$$

نسبت به x، یك اتحاد بشود. این رابطه را، می‌توان چنین نوشت:

$$x^3=\frac{b_0}{6}(x^3-3x^2+2x)+\frac{b_1}{2}(x^2-x)+b_2x+b_3$$

ازمقایسهٔ ضریب‌های x^3، x^2، x^1، x^0 دردو طرف تساوی، به‌دست‌می‌آید:

$$1=\frac{b_0}{6},$$

$$0=-\frac{b_0}{2}+\frac{b_1}{2},$$

$$0=\frac{b_0}{3}-\frac{b_1}{2}+b_2$$

$$0=b_3$$

و درنتیجه

$$b_0=6,\ \ b_1=6,\ \ b_2=1,\ \ b_3=0$$

اکنون، اگـر از رونـد کار درتمرین ۳ $(k=3)$ استفاده‌کنیم، بعداز تبدیل‌های ساده، به‌دست می‌آید:

$$1^3+2^3+\dots+n^3=6C_{n+1}^4+6C_{n+1}^3+C_{n+1}^2=\frac{(n+1)^2n^2}{4}$$

۶. همان‌طور که درتمرین ۳ ثابت کردیم، پنج‌عدد ثابت c_0، c_1، c_2، c_3 و C_4 وجود دارد، به نحوی که

$$1^3+2^3+3^3+\dots+n^3=c_0n^4+c_1n^3+c_2n^2+c_3n+c_4$$

برای همهٔ مقدارهای درست و مثبت n برقرار باشد. به جای n، به‌ترتیب، عددهای ۵،۴،۳،۲،۱ را قرار می‌دهیم، پنج معادله برای پنج مجهول c_0، c_1، c_2، c_3، c_4 به‌دست می‌آید. اگر این دستگاه پنج مجهولی را حل کنیم، خواهیم داشت:

$$c_0=\frac{1}{4},\ c_1=\frac{1}{2},\ c_2=\frac{1}{4},\ c_3=0,\ c_4=0$$

یعنی، به‌همان نتیجهٔ تمرین ۵، منتهی با زحمت بیشتری، رسیدیم.

۷. به‌کمك تمرین ۳، می‌توان اثبات دیگری، برای تمرین ۳ از فصل سوم ـ به جزیك نکتهٔ آن ـ بـه‌دست‌آورد: روندکار درتمرین ۳، امکان پیدا کردن ضریب n^{k+1} را درعبارت $S_k(n)$ به دست نمی‌دهد. (البته، با بعضی نکته‌های تکمیلی، این ضریب را هم می‌توان پیدا کرد.)

۸. بله، سازگار است، زیرا خط راست با معادله‌ای به‌صورت

$$y=ax+b$$

بیان می‌شود، کـه سمت راست آن چند جمله‌ای از درجهٔ کوچکتر یا برابـر واحد است.

۹. به‌نظرمی‌رسد، ساده‌ترین منحنی مربوط به درون یابی، خط راست منطبق برمحور x است؛ و آن، یك چند جمله‌ای از درجهٔ صفر ومتحد با صفر است. هرچندجمله‌ای دیگر، به ناچار درجه‌ای بزرگتر یا برابر n دارد، چرا که دارای n ریشهٔ مختلف x_1، x_2، ...، x_n است.

۱۰. درجهٔ چند جمله‌ای درون یاب لاگرانژ، درآخرین دستور§۳،از $n-1$ تجاوزنمی‌کند؛ واین، تنها چند جمله‌ای درون یاب با این پایین‌ترین درجه می‌باشد. درواقع، اگـر دوچند جمله‌ای وجود داشته باشدکـه درجهٔ آن‌ها از $n-1$ تجاوز نکنند و درهـر یك از n نقطهٔ مفروض، یك مقدار را قبول کنند، تفاضل آن‌ها دارای n ریشهٔ مختلف می‌شود، کـه بیشتراز درجهٔ این تفاضل است (البته، به شرطی که متحد با صفر نباشد). بنابراین، چند جمله‌ای لاگرانژ،تنها چندجمله‌ای‌است که درجهٔآن از $n-1$ تجاوز نمی‌کند و، ضمناً، کم درجه‌ترین چندجمله‌ای ممکن است.

۱۲. a) روشن است، زیرا برای مقدارهای ثابت c_1 و c_2 داریم:

$$(c_1y_1+c_2y_2)'=c_1y_1'+c_2y_2'$$

b) تابع $y=e^{rx}$، وقتی و تنها وقتی جواب معادلهٔ دیفرانسیلی است که r ریشهٔ معادلهٔ مفسر زیر باشد:

$$r^n+a_1r^{n-1}+a_2r^{n-2}+\ldots+a_n=0$$

c) اگر معادلهٔ مفسر دارای m ریشهٔ مختلف r_1، r_2، ...، r_m باشد و c_1، ...، c_m، عددهای ثابت دلخواهی باشند، آن وقت تابع

$$y=c_1e^{r_1x}+c_2e^{r_2x}+\ldots+c_me^{r_mx}$$

جواب‌معادلهٔ دیفرانسیلی خواهد بود و (می‌توان ثابت کرد)، باشرط $m=n$، جواب‌کلی معادله است.

۱۳. معادلهٔ مفسر، به این صورت است:

$$r^2+1=0$$

وبنابراین، جواب کلی معادلهٔ دیفرانسیلی، به این‌صورت درمی‌آید:

$$y=c_1e^{ix}+c_2e^{-ix}$$

که با توجه به شرط اولیه، داریم:

$$c_1+c_2=1,\ \ ic_1-ic_2=0$$

و از آن‌جا $c_1=c_2=\frac{1}{2}$؛ به‌این ترتیب، جواب خاص مجهول، چنین است:

$$y=\frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$$

به این ترتیب، تابع $y=\cos x$ هم، جوابی ازمعادلهٔ دیفرانسیلی مفروض‌و با شرط اولیه سازگار است (تمرین ۸۹ فصل سوم را هم ببینید).

۱۴. a) روشن است.

b) $y_k=r^k$، وقتی وتنهاوقتی‌جواب معادلهٔ تفاضلی است‌که r ریشهٔ معادلهٔ جبری تمرین ۱۲ ــ b باشد.

c) اگرمعادلهٔ تمرین ۱۲ ــ b دارای m ریشهٔ مختلف r_1، r_2، ...، r_m باشد و c_1، c_2، ...، c_m ثابت‌های دلخواهی باشند، آن وقت

$$y_k=c_1r_1^{\,k}+c_2r_2^{\,k}+\ldots+c_mr_m^k$$

جواب معادلهٔ تفاضلی ما است؛ اگر داشته باشیم $m=n$، آن وقت (می‌توان ثابت کرد) که این، جواب کلی است.

۱۵. معادلهٔ نسبت به r به این صورت است:

$$r^2-r-1=0$$

و بنابراین، جواب کلی معادلهٔ تفاضلی، به این صورت است:

$$y_k=c_1\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k+c_2\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k$$

به ازای $k=0$ و $k=1$ (شرطهای اولیه)، به دست می‌آید:

$$c_1+c_2=0,\quad c_1\frac{1+\sqrt{5}}{2}+c_2\frac{1-\sqrt{5}}{2}=1$$

از آن‌جا $c_1=\frac{1}{\sqrt{5}}$ و $c_2=-\frac{1}{\sqrt{5}}$؛ و بنابراین، عبارت مجهول، برای جملهٔ kام دنباله فیبوناچی، چنین می‌شود:

$$y_k=\frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^k-\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^k\right]$$

۱۶. معادلهٔ

$$2r^2-r-1=0$$

دارای ریشه‌های $r=1$ و $r=-\frac{1}{2}$ است. بنابراین، با توجه به‌تمرین ۱۴

$$y_k=c_1+\frac{(-1)^kc_2}{2^k}$$

که با استفاده از شرطهای اولیه (حالت‌های $k=0$ و $k=1$) c_1 و c_2 به دست می‌آید، از آن‌جا

$$y_k=\frac{a+2b}{3}+(-1)^k\frac{a-b}{3\times 2^{k-1}}$$

۱۷. اگرحرکت واقعی را بتوان‌به‌عنوان انطباقی که شامل سه‌حرکت باشد، درنظر گرفت، مختصات نقطهٔ متحرك را، درلحظهٔ زمانی t، می‌توان

این طور نوشت:

$$x=x_۱+x_۲+x_۳=tv\cos\alpha،$$

$$y=y_۱+y_۲+y_۳=tv\sin\alpha-\frac{۱}{۲}gt^۲$$

که با حذف t، معادلهٔ مسیر گلوله پیدا می‌شود:

$$y=xtg\alpha-\frac{gx^۲}{۲v^۲\cos^۲\alpha}$$

که معادلهٔ یك سهمی است.

۱۹. مجهول دوتا است: قاعده وارتفاع چهار وجهی (شکل ۲۵ — a را ببینید).

۲۰. این علامت‌گذاری‌ها را درنظر می‌گیریم:

Vـ حجم چهار وجهی،

Sـ قاعدهٔ آن،

Hـ ارتفاع آن،

hـ ارتفاع قاعده‌که برضلع a فرودآمده است.

آن وقت

$$V=\frac{SH}{۳}\ ,\qquad S=\frac{ah}{۲}$$

و بنابراین

$$V=\frac{ahH}{۶}$$

ولی نه H ونه h، هیچ‌کدام، برای ما معلوم نیستند.

۲۱. تصویر قائم چهار وجهی‌ما (تمرین ۱۸ را ببینید) برصفحه‌ای‌که برپاره خط b عمود وازیك انتهای آن‌گذشته است، عبارت است ازیك‌مربع. هرقطراین‌مربع‌برابر a ومساحت‌آن برابر $\frac{a^۲}{۲}$ است ومی‌توان‌آن را به‌عنوان قاعدهٔ منشوری (مکعب مستطیلی) درنظر گرفت‌که ارتفاع آن برابر b باشد (شکل ۲۵ — b را ببینید). این‌منشور به‌پنج‌چهاروجهی (غیرمتقاطع) تقسیم

می‌شود که‌یکی‌ازآن‌ها چهاروجهی‌تمرین۱۸ است (که حجم‌آن‌را V گرفتیم)؛ درمورد چهار تای دیگر می‌توان گفت که، آن‌ها باهم برابرند، قاعدهٔ هر کدام ازآن‌ها مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی الساقینی است به مساحت $\frac{a^۲}{۴}$ و ارتفاع هریك از آن‌ها برابر است با b. به این ترتیب:

$$\frac{a^۲b}{۲}=V+\frac{۴a^۲b}{۱۲}$$

و از آن‌جا

$$V=\frac{a^۲b}{۶}$$

۲۲. صفحه‌ای‌که از یال a ووسط یال مقابل به‌آن عبور کند، صفحهٔ تقارن چهاروجهی مفروض است و آن را به‌دو چهاروجهی برابر، تقسیم می‌کند (شکل ۲۵-c را ببینید)؛ مساحت قاعدهٔ مشترك آن‌ها (این قاعدهٔ مشترك، يك مثلث متساوی‌الساقین است) برابر است با $\frac{ab}{۲}$ وارتفاعی‌برابر $\frac{a}{۲}$ دارند. درنتیجه، حجم موردنظر چنین می‌شود:

$$V=\frac{۲}{۳}\cdot\frac{a}{۲}\cdot\frac{ab}{۲}=\frac{a^۲b}{۶}$$

از این گونه صفحه‌های‌تقارن، درچهاروجهی‌ما، به‌دومورد می‌توان برخورد کرد؛ این دوصفحه، شکل مفروض را به‌چهارقسمت مساوی تقسیم می‌کنند که هرکدام ازآنها، يك‌چهاروجهی است. از همین‌جا، راه دیگری هم، برای حل‌مسأله پیدا می‌شود (که البته، خیلی‌کم، با راه‌حل‌قبلی تفاوت دارد).

۲۳. چهار وجهی مفروض را می‌توان به‌عنوان حالت حدی يك شبه‌منشور درنظر گرفت‌که ارتفاع آن برابر b و هریك از دو قاعدهٔ آن به سمت پاره‌خطی به‌طول a میل‌کرده باشد؛ مقطع متوسط‌آن، عبارت است از مربعی به‌ضلع $\frac{a}{۲}$ (شکل ۲۵-d را ببینید). بنابراین، با فرض

$$h=b,\ L=۰,\ M=\frac{a^۲}{۴},\ N=۰$$

بنابر رابطهٔ حجم شبه منشور، به‌دست می‌آید: $V=\frac{a^{2}b}{6}$

۲۴. چون بیانی که برای حجم V در تمرین ۲۰ به‌دست‌آوردیم، باید با نتیجه‌گیری‌های سه روش مختلف بعدی (تمرین‌های ۲۱، ۲۲ و ۲۳) سازگار باشد، باید داشته باشیم:

$$Hh=ab$$

این رابطه را می‌توان، بدون این‌که، مساحت مثلث متساوی‌الساقینی را که از برخورد چهاروجهی با صفحهٔ تقارن به دست می‌آید، به‌دوطریق مختلف محاسبه کنیم (تمرین ۲۲، شکل ۲۵-e)، ثابت کنیم. به‌این‌ترتیب، راه‌چهارمی به‌دست می‌آید که از تمرین ۱۹ آغاز می‌کند و به‌بررسی تمرین ۲۰ کشیده می‌شود.

۲۵. راهی که از تمرین ۱۹ واز راه تمرین ۲۰ به‌تمرین ۲۴ رسیدیم، تا حد زیادی طولانی وبغرنج بود. مضمون راه‌حل تمرین ۲۲، روشن‌تر و عینی‌تر است : در آن‌جا با موفقیت از تقارن شکل استفاده شد (و درست به‌همین علت است که ساده‌تر از حالتی به‌نظر می‌رسد که از تقارن استفاده نکردیم)؛ به‌این‌ترتیب، عقل‌سلیم حکم می‌کند که ازتمرین ۲۲ استفاده کنیم. آیا نمی‌توانید بازهم نتیجه‌ای از تمرین ۲۲ بگیرید؟

۲۶. $L=M=N$ و بنابراین $V=Lh$.

۲۷. $N=0$ ، $M=\frac{L}{4}$ و بنابراین $V=\frac{Lh}{3}$.

۲۸. L_i ، M_i ، N_i و V_i را مقدارهای مربوط به P_i، شبیه L، M، N و V مربوط به P، می‌گیریم ($i=1, 2, \ldots, n$). همهٔ شبه‌منشورها ارتفاعی برابر h دارند. روشن است

$$L_1+L_2+\cdots+L_n=L,$$
$$M_1+M_2+\cdots+M_n=M,$$
$$N_1+N_2+\cdots+N_n=N,$$
$$V_1+V_2+\cdots+V_n=V$$

روی این برابری‌ها، عمل‌هایی انجام می‌دهیم که از لحاظ خصلت و ردیف با

سمت راست رابطهٔ زیر مشخص می‌شود:

$$\sum_{i=1}^{n}\left(\frac{L_i+4M_i+N_i}{6}h-V_i\right)=\frac{L+4M+N}{6}h-V$$

تفاضل سمت راست را، همچون واحدی یگانه درنظر می‌گیریم ، آن وقت ، سمت چپ را مجموعی از n تفاضل شبیه سمت راست به حساب می‌آوریم. اگر n تفاضل از $n+1$ تفاضلی که به‌وسیلهٔ رابطهٔ اخیر به‌هم مربوط شده‌اند، به‌سمت صفر میل کنند، حتماً، تفاضل $(n+1)$ ام هم به‌سمت صفر میل می‌کند.

۲۹. تصویر قائم چهاروجهی ما، بر صفحه‌ای که از یال l گذشته‌است، عبارت است‌از یك چهارضلعی. [درحالت خاص تمرین ۲۱، این چهارضلعی، یك مربع است (شکل ۲۵-b را ببینید)؛ ولی درحالت کلی، یك چهارضلعی غیر مشخص است.] یکی از قطرهای این چهارضلعی عبارت است از یال l وقطر دیگر آن، پاره‌خطی‌است مساوی وموازی‌یال n. این چهارضلعی، قاعدهٔ منشوری است به‌ارتفاع h ، که به‌پنج چهاروجهی تقسیم شده است ؛ یکی ازآن‌ها، چهاروجهی مفروض است وچهارتای بقیه، هرم‌هایی هستندکه، در موردآن‌ها ، دستور حجم شبه‌منشور به‌کار می‌رود (تمرین ۲۷ را ببینید). از همین‌دستور، برای منشور هم می‌توان استفاده‌کرد (تمرین ۲۶ را ببینید) و، بنابراین (با توجه به‌تمرین ۲۸)، برای چهاروجهی مفروض هم، قابل استفاده است.

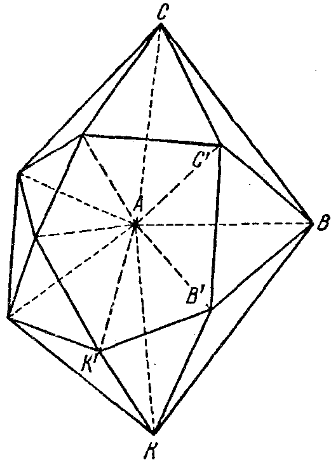
۳۰. روی شکل ۵۷، یك‌شبه‌منشور، نشان‌داده شده است؛ B، C، ...، Kـ رأس‌های قاعدهٔ‌پایین‌آن (واقع درروی صفحهٔ کاغذ) و B'، C'، ...، K'ـ رأس‌های قاعدهٔ بالای‌آن هستند.

۱°. هرمی را در نظر بگیرید که قاعدهٔ‌آن، قاعدهٔ بالای شبه‌منشور و رأس‌آن، نقطهٔ دلخواه A از قاعدهٔ پایین باشد.

۲°. نقطهٔ A را به‌نقطه‌های B، C، ...، K ازقاعدهٔ‌پایین وصل‌کنید. هریك از پاره‌خط‌هایی را، که به‌این ترتیب به‌دست می‌آید، می‌توان با ضلع معینی از قاعدهٔ بالا (یعنی یال شبه‌منشور) متناظر کرد ؛ ضمناً، این پاره‌خط

و ضلع متناظر آن دویـال مقابل یك چهاروجهی‌را تشکیل می‌دهند(مثلاً، پاره‌خط AB متناظر است بـا ضلع $B'C'$ وباهم، چهاروجهی $ABB'C'$ را معین می‌کنند).

۳°. پاره‌خطهـایی که رأس A را به‌نقطه‌های B، C،...، K وصل می‌کنند، قاعدهٔ پایین‌را به‌مثلث‌هایی تقسیم می‌کنند. هریك از این‌مثلث‌ها را می‌توان با نقطه‌ای از قاعدهٔ بالا متناظرکرد؛ ضمناً، در این تنـاظر، هرمی به‌دست می‌آید که قاعدهٔ آن، مثلث انتخاب‌شده و رأس‌آن، نقطهٔ متناظر این‌مثلث می‌باشد (این، یك



شکل ۵۷

هرم مثلث‌القاعده، یعنی یك‌چهاروجهی است؛ مثلاً،مثلث ABC را می‌توان با نقطهٔ C' متناظر گرفت‌که چهاروجهی $ABCC'$ را معین می‌کنند).

شبه‌منشور ما به‌جسم‌هایی تقسیم می‌شود که در ۱°، ۲° و ۳° شرح داده شد. قاعدهٔ بالایی شبه‌منشور، در جسم ۱°، به‌صورت یك چندضلعی مسطحه، به‌طورکامل شرکت می‌کند؛ درجسم ۲°، ضلع‌های این‌چندضلعی و در جسم ۳°، تنها رأس‌هـای آن شرکت دارند. قـاعدهٔ پـایین شبه منشور به‌مثلث‌هایی تقسیم شده است (که شکل‌هایی مسطحه‌اند) ودر تشکیل جسم ۳° وارد شده‌اند؛ درجسم ۲°، پاره‌خطهایی متعلق به‌قاعدهٔ پایین و درجسم ۱°، تنها یك‌نقطه از قاعدهٔ پایین دخالت کرده‌اند. نتیجهٔ تمرین ۲۷ را در مورد ۱° و ۳° و نتیجهٔ تمرین ۲۹ را در مورد چهاروجهی ۲° به‌کاربرید. با استفاده از تمرین ۲۸، می‌توانید درستی رابطهٔ کلی حجم شبه‌منشور را، برای شبه‌منشور $BC\ldots KB'C'\ldots K'$ درشکل ۵۷، ثابت کنید.

۳۱. حل تمرین ۲۹ کامل نیست، زیرا درآن، تنها یکی از سه حالت

ممکن، مورد بررسی قرارگرفته است دو پاره‌خط l و n وتصویر قائم n' از پاره‌خط n برصفحه‌ای‌موازی n و گذرنده بر l را درنظرمی گیریم؛ همچنین، نقطهٔ برخورد دوخط‌راستی‌که شامل‌پاره‌خطهای l و n' هستند، I می‌نامیم. سه‌حالت پیش می‌آید:

۰) نقطهٔ I به‌هیچ‌یك از پاره‌خطهای l و n' تعلق ندارد؛

۱) نقطهٔ I، تنها به‌یکی از این پاره‌خطها تعلق دارد؛

۲) نقطهٔ I، به‌هردو پاره‌خط تعلق دارد.

در تمرین ۲۹، تنها حالت۲) مورد بررسی قرارگرفت. ولی درحالت ۱) می‌توان چهاروجهی را به‌عنوان تفاضل دوچهاروجهی در نظرگرفت‌که پاسخ‌گوی شرطهای حالت ۲) هستند؛ و در حالت ۰) به‌عنوان تفاضل دو چهاروجهی‌که به‌شرطهای ۱) پاسخ می‌دهند. اگر به‌تمرین ۲۸ توجه کنیم، با این نکته‌ها، اثبات تمرین ۲۹ کامل می‌شود.

۳۲. جسمی‌که در شکل ۵۷ نشان داده شده است ، طوری است که

۱) قاعده‌های‌آن، چندضلعی‌هایی محدب‌اند؛

۲) هررأس یکی از قاعده‌ها (با تناظر یك‌به‌یك) با ضلعی از قاعدهٔ دیگر متناظر است . (مثلاً ، رأس B متناظر یال $B'C'$ ورأس C' متناظر یال BC است.)

شرط ۲)، کمتر از آن‌چه در ابتدا به‌نظر می‌رسد ، محدودکننده است: در واقع، بسیاری ازجسم‌هایی راکه ظاهراً با این شرط نمی‌سازند، می‌توان به‌عنوان حالت‌های حدی جسم‌هایی درنظرگرفت‌که با شرطهای مفروض سازگارند و، بنابراین، باتوجه به‌ملاحظهٔ پیوستگی ویا ملاحظه‌های‌مناسب دیگری، می‌توان اثبات را دربارهٔ این‌جسم‌ها هم گسترش داد.

اثبات تمرین ۳۶ از محدودیت‌های ۱) و ۲) آزاد است، ولی این اثبات، برمحاسبهٔ انتگرالی تکیه‌دارد.

۳۳. $n=۰$ ، در این صورت $L=M=N=۱$ ، $I=۲$؛ و دستور سیمپسون درست است.

$n=۲m-۱$ ، یعنی n عددی فرد است ؛ در این صورت

$L=N=1$، $M=I=0$؛ دستور سیمپسون درست است .

$n=2m$، یعنی n عددی زوج است؛ درآن‌صورت $L=N=1$،

$M=0$، $I=\frac{2}{n+1}$؛ دستور سیمپسون برای $n=2$ ، و نه

برای هیچ‌عدد زوج و مثبت دیگری، درست است.

۳۴. درحالت چندجمله‌ای $f(x)=a+bx+cx^2+dx^3$ می‌توان همچون انطباق حالت‌های خاص $n=0,1,2,3$ ازتمرین ۳۳ عمل کرد.

۳۵. تبدیل

$$x=a+\frac{h(t+1)}{2}$$

فاصلهٔ $a\leqslant x\leqslant a+h$ را به‌فاصلهٔ $-1\leqslant t\leqslant 1$ و هرچندجمله‌ای با درجهٔ کوچکتر یا مساوی ۳ نسبت به x را، به‌چندجمله‌ای دیگری از همین درجه نسبت به t تبدیل می‌کند.

۳۶. دستگاه‌مختصات قائم x، y و z را درنظر می‌گیریم وشبه‌منشور را طوری قرار می‌دهیم که قاعدهٔ پایین‌آن برصفحهٔ $z=0$ و قاعدهٔ بالای آن برصفحهٔ $z=h$ منطبق باشد. حجم شبه‌منشور، باانتگرال

$$V=\int_0^h Q(z)dz \qquad (1)$$

بیان می‌شود، که درآن، $Q(z)$ عبارت است ازمساحت مقطع شبه‌منشور با صفحه‌ای که موازی قاعدهٔ پایین وبه‌فاصلهٔ t ازآن رسم شده‌باشد.

درحالتی که شبه‌منشور، n یال جانبی داشته‌باشد، این‌مقطع، یك n ضلعی می‌شود؛ اگر یال‌های جانبی شبه‌منشور، به‌وسیلهٔ دستگاه معادله‌های

$$x_i=a_iz+c_i \,,\; y_i=b_iz+d_i \qquad (2)$$

داده شده‌باشند، مساحت این‌مقطع بارابطهٔ زیر بیان می‌شود:

$$Q(z)=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(x_iy_{i+1}-x_{i+1}y_i) \qquad (3)$$

(مفهوم است که یال $(n+1)$ام را منطبق بریال اول می‌گیریم ، یعنی $a_{n+1}=a_1$، $b_{n+1}=b_1$، ...، $y_{n+1}=y_1$).

برابری‌های (۲) و (۳) نشان می‌دهند که $Q(z)$ ، یک‌چندجمله‌ای نسبت به z و از درجهٔ کوچکتر یا مساوی ۲ می‌باشد و، بنابراین ، با توجه به‌تمرین ۳۵ ، قاعدهٔ سیمپسون ازتمرین ۳۳ را می‌توان در مورد انتگرال (۱) به‌کاربرد؛ وازآن‌جاکه روشن است، عبارت‌های

$$Q(0)=L,\ Q\left(\frac{h}{2}\right)=M,\ Q(h)=N$$

به‌ترتیب عبارتند از مساحت قاعدهٔ پایین، مساحت مقطع متوسط و مساحت قاعدهٔ بالا؛ به‌همان رابطهٔ حجم شبه منشور ـ که درتمرین ۲۳ پیداکردیم ـ می‌رسیم .

یادداشت تکمیلی ۱۱، ۱۸ و ۳۷، به‌توضیح بیشتری نیازندارند.

فصل پنجم

۱. مجهول: حجم V؛ داده‌ها: مقدارهای a و h؛ شرط: حجم منشور منتظم مربع‌القاعده با ضلع قاعدهٔ a وارتفاع h، برابر است با V

۲. می‌توان مجهول‌ها را دو عدد حقیقی x و y دانست ، ولی می‌توان مجهول منحصر را مقداری دو مؤلفه‌ای گرفت‌که مؤلفه‌های آن x و y باشند ومی‌توان آن را، از نظر هندسی، به‌عنوان نقطه‌ای از صفحه درنظر گرفت‌که مختصات‌آن (در دستگاه دکارتی) x و y باشد.

شرط، به‌طورکامل، با این‌معادله داده شده است:

$$x^2+y^2=1$$

دربارهٔ داده‌ها، می‌توان اصلاً صحبتی نکرد (اگر مسأله راکمی تغییر دهیم و درسمت معادله، به‌جای ۱ ، عدد r^2 را قراردهیم،آن‌وقت می‌توان r را به‌عنوان «داده» درنظر گرفت.)

یکی ازجواب‌ها: $x=1$ ، $y=0$؛ جواب دیگر: $x=\frac{3}{5}$ ، $y=-\frac{4}{5}$

وغیره. دستگاه‌کامل همهٔ جواب‌ها را می‌توان، از نظر هندسی ، به‌عنوان مجموعهٔ همهٔ نقطه‌های واقع برمحیط دایره‌ای به شعاع ۱ و مرکز مبداء

مختصات دانست.

۳. جواب ندارد (مجموعهٔ جواب، مجموعه‌ای تهی است).

۴. هشت جواب وجود دارد:

(۲، ۳) (۳، ۲) (−۲، ۳) (−۳، ۲) (۲، −۳) (۳، −۲)
(−۲، −۳) (−۳، −۲)

این‌ها، نقطه‌های با مختصات درست هستند که برمحیط دایره‌ای به‌مرکز مبداء مختصات و شعاع $\sqrt{۱۳}$ قراردارند. (پیدا کردن چنین جواب‌هایی ـ یعنی جواب‌های درست یک‌معادله ـ درنظریهٔ عددها، بلورشناسی و غیره، نقش مهمی به‌عهده دارند.)

۵. مجهول سه‌مؤلفه‌ای (x, y, z) را، به‌صورت نقطه‌ای از فضا با مختصات x، y و z درنظر می‌گیریم.

۱°. مجموعهٔ جواب تشکیل شده‌است ازنقطه‌های درونی یک هشت‌وجهی، به‌مرکز مبداء مختصات ورأس‌های

(۱، ۰، ۰)؛ (−۱، ۰، ۰)؛ (۰، ۱، ۰)؛ (۰، −۱، ۰)؛ (۰، ۰، ۱)؛
(۰، ۰، −۱)

۲°. مجموعهٔ جواب عبارت‌است ازنقطه‌های درونی ونقطه‌های واقع برسطح همین هشت‌وجهی.

۶. تنظیم قضیه را، به‌نحوی که بخش‌های اصلی‌قضیه مشخص باشند، می‌آوریم:

اگر a، b و c، ضلع مثلث قائم‌الزاویه و، ضمناً، ضلع c روبه‌رو به‌زاویهٔ قائمه باشد، آن‌گاه

$$c^{۲}=a^{۲}+b^{۲}$$

۷. ابتدا باید تنظیم قضیه را به‌نحوی درآوریم که صورت معمولی «اگر ـ آن‌گاه»، به‌صورتی‌تبدیل شود که شرط ونتیجه راکاملاً مشخص کند. قضیه، فعلاً به‌این‌صورت است:

«اگر n مجذورکامل باشد، آن‌گاه $d(n)$ عددی فرد است»

«اگر n مجذورکامل نباشد، آن‌گاه $d(n)$ عددی زوج است»

که بـا استفاده ازشکل منطقی «وقتی و فقط وقتی» ، می‌توان آن‌را این‌طور تنظیم کرد:

«n، وقتی وتنهاوقتی مربع کامل است که $d(n)$ عددی فرد باشد».

۱۶. از حـالت چندضلعی محدب آغاز کنید ، آن‌وقت ، این پرسش را مطرح کنیدکه با تغییرشکل‌هایی که می‌تواند به‌وجودآید، چه‌بحثی در حالت کلی پیش می‌آید.

۱°. فرض کنید $n-۱$ پـاره‌خطی که یك‌رأس چندضلعی را به $n-۱$ رأس دیگر وصل می‌کند و $n-۲$ زاویهٔ بین هردوپـاره‌خط مجاور ، معلوم باشند.

۲°. با رسم $n-۳$ قطری که از یك رأس می‌گذرند ، چندضلعی را به $n-۲$ مثلث تقسیم کنید ؛ این مثلث‌هـا ، وقتی کاملاً معین‌اند، کـه n ضلع چندضلعی وطول $n-۳$ قطری که‌آن‌را تقسیم کرده‌اند معلوم‌باشد.

۳°. دوباره، مثلث‌هایی را درنظر بگیریدکه با رسم قطرهایی که ازیك رأس گذشته‌اند، به‌وجودآمده‌باشند. طوری از یك‌مثلث به‌مثلث بعدی عبور کنیدکه هرمثلث ضلع مشترکی بـا مثلث بعدی خود داشته‌باشد. فرض‌کنید سه‌جزء ازمثلث اول معلوم باشد، از مثلث‌های بعدی هم، درهرکدام دوجزء معلوم بگیرید، یك‌جزء هم‌که با مثلث قبلی خودش مشترك است.

۴°. دستگاه مختصات قائم را درنظر بگیرید و مختصات هررأس را ، در این دستگاه، مفروض بگیرید ؛ به‌این‌تـرتیب $۲n$ مقدار معلوم خـواهیم داشت که، به‌کمك‌آن‌ها، نه‌تنها چندضلعی، بلکه جای‌آن نسبت به‌محورهای مختصات هم معین می‌شود. ولی ما به‌جای چندضلعی کاری نداریم و،چون جای دستگاه مختصات روی صفحه، با سه‌پارامتر تعیین می‌شود، برای‌تعیین چندضلعی به $۲n-۳$ معلوم نیازداریم.

۱۷. قاعده ، بـا معلوم‌بودن $۲n-۳$ داده معین می‌شود (تمرین ۱۶ را ببینید). برای تعیین رأس مقابل به‌این قاعده،کافی است سه‌مختص‌آن در دستگاهی داده‌شود که صفحهٔ xOy آن برقاعدهٔ هرم، مبداء مختصات بریکی از رأس‌های قاعده ومحور Ox بریکی ازضلع‌هایی که‌از O گذشته است،منطبق

باشد. تعداد کل داده‌های لازم، برابر است با $2n$.

۱۸. $2n$ داده (با مسألهٔ ۱۷ مقایسه کنید).

۱۹. چندجمله‌ای، به‌این‌صورت است:

$$f_0 x_v^n + f_1 x_v^{n-1} + \cdots + f_{n-1} x_v + f_n$$

که در آن، f_j عبارت است از چندجمله‌ای درجهٔ J از $v-1$ متغیر x_1، x_2، ...، x_{v-1}. با استفاده از تمرین ۳۵ فصل سوم و روش استقرای ریاضی، می‌توان ثابت کرد که تعداد موردنظر داده‌ها (تعداد ضریب‌های چندجمله‌ای)، برابر است با

$$C_{n+v}^{v} = C_{0+v-1}^{v-1} + C_{1+v-1}^{v-1} + \cdots + C_{n+v-1}^{v-1}$$

۲۰. v جعبه از $n+v$ جعبه‌ای را که به‌ردیف گذاشته‌ایم، علامت می‌گذاریم (مثلاً، اگر بخواهید، می‌توان با علامت «ضرب‌در» آن‌ها را مشخص کرد). در هریك از جعبه‌هایی که قبل از نخستین جعبهٔ علامت‌گذاری شده (جعبهٔ شمارهٔ ۱) قراردارند، «شیء» x_1 را قرار می‌دهیم؛ در جعبه‌های علامت‌گذاری نشده‌ای که بین جعبه‌های شمارهٔ ۱ و شمارهٔ ۲ (دومین جعبه علامت‌گذاری‌شده) قراردارند، x_2 را قرار می‌دهیم؛ همچنین، در جعبه‌هایی که بین دو جعبهٔ شمارهٔ ۲ و شمارهٔ ۳ واقع‌اند، x_3 را می‌گذاریم؛ ...؛ و بالاخره، درجعبه‌های بین دو جعبهٔ $(v-1)$ام و vام، x_v را قرار می‌دهیم؛ درجعبه‌هایی که بعد ازآخرین جعبهٔ علامت‌گذاری‌شده قرار گرفته‌اند، عامل ۱ را می‌گذاریم. به‌این‌ترتیب، هرانتخاب v جعبه‌ای از کل $n+v$ جعبه، متناظر است باحاصل‌ضربی به‌صورت

$$x_1^{m_1} x_2^{m_2} x_3^{m_3} \cdots x_v^{m_v} \quad (m_1 + m_2 + m_3 + \cdots + m_v \leqslant n)$$

یعنی، یکی از جمله‌های چندجمله‌ای. این استدلال را، می‌توان به‌صورت یك‌استدلال ریاضی درآورد (با تمرین ۴۰ فصل سوم مقایسه کنید).

تمرین‌های ۸-۱۵، نیازی به‌بحث اضافی ندارند.

فصل ششم

۱. $1°.$ ۹ تقاضا ازنوع $r(x) = 0$؛

۲°. ۹ تقاضا از نوع $r(x)=0$؛

۳°. ۳۶ تقاضا ازنوع $r(x, y)=0$؛

۴°. ۷ تقاضا ازنوع $r(x, y, z, w)=0$.

(به‌این مطلب اهمیتی نداده‌ایم که این تقاضاها، مستقل نیستند.)

روی‌هم، ۶۱ شرط.

۲. فرض کنیدکه x دارای n مؤلفه است: x_1، x_2، ...، x_n.

۳. مجهول‌های جدید y_1، y_2 و y_3 راواردکنید، $x_1=y_1$، $x_4=y_2$ و x_2 و x_3 را، به‌عنوان مؤلفه‌های مجهول y_3 وترکیب‌جنبه‌های r_2) و r_3) (یعنی برقراری هردو باهم) از شرط را به‌عنوان یکی ازجنبه‌های شرط‌جدید در نظر بگیرید؛ آن‌وقت (با توجه به‌علامت‌گذاری‌ها)، دستگاه بازگشتی زیر را به‌دست می‌آورید:

$$s_1(y_1)=0,$$
$$s_2(y_1, y_2)=0,$$
$$s_3(y_1, y_2, y_3)=0$$

۴. فرض کنید، y_1 دارای‌مؤلفه‌های x_1، x_2، x_3، و y_2 دارای‌مؤلفه‌های x_4، x_5، x_6 باشد؛ $y_3=x_7$ بگیرید، سه‌جنبهٔ اولیهٔ‌شرط، یعنی r_1)، (r_2)، (r_3) را در یك جنبهٔ s_1) و سه‌جنبهٔ بعدی r_4) ، (r_5) ، (r_6) را در یك جنبهٔ s_2) متحدکنید؛ در نتیجه، به‌همان دستگاه تمرین ۳ می‌رسید.

۵. این‌طرح، دراساس، با آن‌چه در ۲° از ۴§ بررسی کردیم، اختلافی ندارد.

۶. این ، حالت خاصی از دستگاه ۴§ ، ۱° می‌باشد (با تمرین ۲۲ فصل سوم مقایسه‌کنید).

۷. دو مکان هندسی برای خط راست (با ۵° از ۲§ مقایسه‌کنید). درواقع، همهٔ وترهای دایرهٔ مفروض، که طولی برابر داشته‌باشند، بردایره‌ای که با دایرهٔ مفروض هم‌مرکز است، مماس هستند (وبه‌سادگی می‌توان آن‌را رسم کرد).

۸. روی خط راست a، نقطهٔ A و روی خط‌راست b، نقطهٔ B را

طوری انتخاب کنید که به‌فاصلهٔ $\frac{l}{۲}$ از نقطهٔ برخورد دوخط راست a و b باشند. دایره‌ای رسم کنید که برخط راست a درنقطهٔ A، وبرخط راست b در نقطهٔ B مماس باشد؛ ازآن‌جا که هریك از دونقطهٔ A و B را دردوجا می‌توان پیدا کرد، از این گونه دایره‌ها، چهارتا خواهیم داشت. یکی از این چهار دایره، دایرهٔ محاطی خارجی مثلثی است که با خطهای راست a، b و x درست شده است. بنابراین، خط راست مجهول x باید بریکی از این چهار دایره مماس باشد. در این‌جا، با دومکان هندسی برای خط راست، سروکار داریم (با §۲، °۵ وتمرین ۷ مقایسه کنید).

۰۹. تحریف «حرف مامك» که با شرط مسألهٔ ما سازگار باشد، عبارت است از «حکم فرما» («حکم فرما ثابت نشده است»).

۰۱۱. °۱. ابتدا، «مقدارثابت» c مربع وفقی‌را پیدا کنید. ازیك‌طرف، مجموع همهٔ ۹ مجهول x_{ik} برابر است با

$$۱+۲+۳+\cdots+۹=۴۵$$

از طرف دیگر، این‌عدد باید ازمجموع سه‌سطر به‌دست‌آید (مجموع عددهای هرسطر، برابر است با c). بنابراین

$$۴۵=۳c$$

یعنی $c=۱۵$.

°۲. عددهای سه‌سطر و دوقطر را باهم جمع کنید؛ این مجموع برابر است با $۵c$. عددهای دوسطر و دوستون کناری (که شامل عدد خانهٔ وسطی $x_{۲۲}$ نیستند) را باهم جمع کنید؛ این‌مجموع برابر $۴c$ می‌شود. به‌این‌ترتیب

$$۳x_{۲۲}=۵c-۴c=۱۵$$

(چرا؟) ــ یعنی $x_{۲۲}=۵$.

°۳. برای این که همهٔ سطرها وستون‌های مرزی را پرکنید، همهٔ انواع ممکن تبدیل عدد ۱۵ را به‌صورت مجموع سه‌عدد، به‌جز $۵(=x_{۲۲})$ بنویسید، یعنی با سه‌عدد ازعددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۶، ۷، ۸ و۹، مجموع ۱۵را درست کنید. بعد ازکمی‌آزمایش، به‌دست می‌آورید:

$$
\begin{aligned}
۱۵=۱+۶+۸&= \\
=۲+۶+۷&= \\
=۲+۴+۹&= \\
=۳+۴+۸&
\end{aligned}
$$

۴°. عددهایی را که درتمام حالت‌ها ، تنها یکبار آمده‌اند ، به‌صورت سیاه نشان داده‌ایم؛ آن‌هارا باید در وسط سطر (یاستون) مربوطه قرارداد. بقیهٔ عددهارا (که به‌صورت نازك نشان‌داده‌شده‌اند)، که هرکدام دوبار تکرار شده‌اند، باید درگوشه‌های مربع وفقی قرارداد.

۵°. یکی از عددهای سیاه (ومثلاً ، ۱) را انتخاب کنید و آن‌را $x_{۱۲}$ بنامید. یکی ازعددهای نازکی راکه در ردیف ۱ نوشته شده است (یعنی ۶ یا ۸) را $x_{۱۱}$ بگیرید. دفعهٔ اول ، ازچهار حالت ممکن و دفعهٔ دوم از دو حالت ممکن ، یکی را انتخاب‌کرده‌اید ؛ از این به‌بعد ، دیگر انتخاب آزاد ندارید ؛ با استفادهٔ متوالی از تبدیل‌های عدد ۱۵ (۳° را ببینید) ، هربار ناچار به‌انتخابی منحصر به‌فرد هستید . در این‌جا ، یکی از این مربع‌های وفقی راآورده‌ایم:

۸	۱	۶
۳	۵	۷
۴	۹	۲

دراین‌جا، تعداد ۸ = ۲ × ۴ حالت مختلف به‌دست می‌آید که، به‌مفهومی، با هم برابرند، زیرا همهٔ آن‌هارا می‌توان به‌کمك دوران وتقارن، از روی یکی ازآن‌ها به‌دست‌آورد. حل این‌مربع وفقی، معنای عدد ۶۱ را، که در حل تمرین ۱ به‌دست‌آوردیم، روشن می‌کند.

۱۲. ۱°. اگر رقم سمت‌چپ عدد چهاررقمی ما ازواحد بزرگتر باشد، ضمن ضرب در ۹، به‌عددی باتعداد رقم‌های بیشتر تبدیل می‌شود. بنابراین، صحبت برسرعددی به‌صورت $\overline{۱abc}$ می‌باشد.

۲°. چون $\overline{۱abc} \times ۹ = \overline{۹xyz}$ ، بنابراین عدد موردنظر به‌صورت $\overline{۱ab۹}$ می‌باشد.

۳°. به این ترتیب، داریم

$$(۱۰^۳+۱۰^۲a+۱۰b+۹)\times ۹ = ۹\times ۱۰^۳+۱۰^۲b+۱۰a+۱،$$
$$۸۹a+۸=b$$

از آن به‌دست می‌آید : $a=۰$ و $b=۸$؛ عدد مجهول ، برابر است با[1] $۱۰۸۹=۳۳^۲$.

۱۳. ۱°. چون $\overline{ab}.\overline{ba}$ یك‌عدد سه‌رقمی‌است، بنابراین $a.b<۱۰$. فرض می‌کنیم $a<b$؛ در این‌صورت ، ده‌حالت پیش می‌آید:

$$a=۱،\quad ۲\leqslant b\leqslant ۹;\quad a=۲،\quad b=۳ \text{ یا } ۴$$

۲°. $$(۱۰a+b)(۱۰b+a)=۱۰۰c+۱۰d+c،$$
$$۱۰(a^۲+b^۲-d)=۱۰۱(c-ab)$$

ازاین‌جا نتیجه می‌شودکه $a^۲+b^۲-d$ بر ۱۰۱ بخش‌پذیر است؛ ولی

$$-۹<a^۲+b^۲-d\leqslant ۸۲$$

ودر نتیجه $a^۲+b^۲-d=۰$.

۳°. $a^۲+b^۲=d\leqslant ۹$.ازآن‌جا $b<۳$و،بنابراین، $a=۱$ ، $b=۲$ وازآن‌جا $c=۲$، $d=۵$.

۱۴. مسأله را می‌توان این‌طور فهمید : عدد درست و مثبت x را پیداکنیدکه مجذورآن (در عدد نویسی دهدهی) تنها ازرقم‌های برابر واحد

---

۱. بنابراین، مضمون مسأله تغییر نمی‌کند، اگر آن‌را به‌این‌صورت تنظیم‌کنیم: عددی چهاررقمی پیداکنیدکه مجذورکامل باشد و اگرآن را در ۹ ضرب کنیم، همان عدد به‌ردیف‌عکس به‌دست آید. این‌مسأله‌را، درشکل‌جدیدخود، می‌توان به‌همان صورت قبلی حل‌کرد وشرط اضافی را، تنها درآخرکار وروی جواب آزمایش‌کرد.

تشکیل شده‌باشد (دقیق‌تر: ثابت کنیدکه مسألهٔ اخیر، جواب ندارد).

۱°. فقط بخشی (بخش کوچکی) ازشرط را نگه دارید: رقم آخر عدد $x^۲$ برابر است با ۱. چون رقم‌آخر عدد $x^۲$، تنها به‌رقم‌آخرعدد x بستگی دارد، کافی است عددهای یک‌رقمی ۰، ۱، ۲، ۳، ۴، ۵، ۶، ۷، ۸ و ۹ را در نظر بگیریم؛ مجذور این‌عددها، به‌ترتیب، چنین است:

۰، ۱، ۴، ۹، ۱۶، ۲۵، ۳۶، ۴۹، ۶۴، ۸۱

(توجه‌کنید که عددهای $x^۲$ و $(۱۰-x)^۲$، به‌یک‌رقم ختم می‌شوند.) به‌این ترتیب، تنها عددهایی به‌کار ما می‌آیندکه به ۱ یا ۹ ختم شده‌باشند.

۲°. تنها بخشی از شرط (بخش بزرگتری از شرط) را نگه دارید: $x^۲$ باید به‌دو رقم ۱۱ ختم‌شود. اکنون‌کافی است تنها عددهای دورقمی را، یعنی با توجه به ۱°، تنها ده عدد ۰۱، ۱۱، ۲۱،...،۹۱ را درنظر بگیریم (از دو عدد x و $۱۰۰-x$، کافی است یکی‌را انتخاب‌کنیم). مجذور هیچ‌یک از این عددها به ۱۱ ختم نمی‌شود و، ازاین‌جا، حکم مسأله ثابت می‌شود.

نتیجه: گاهی بهتر است «مسألهٔ اثباتی» را به «مسألهٔ پیداکردنی» تبدیل کنیم.

۱۵. این، یک‌معما نیست. سعی می‌کنیم چنین دومثلثي را پیدا کنیم.

۱°. بین پنج عنصر مذکور، نمی‌توان هرسه ضلع را در نظرگرفت، زیرا، در این‌صورت، دومثلث با هم‌برابر وهرشش‌عنصر (دردومثلث) متحد یکدیگر می‌شوند.

۲°. این‌می‌ماندکه فرض‌کنیم، در دو مثلث، دوضلع وسه‌زاویه برهم منطبق باشند. ولی اگر سه‌زاویه از مثلثی با سه‌زاویه از مثلث دیگر برابر باشند، دومثلث متشابه‌اند.

۳°. a، b و c را سه‌ضلع مثلث اول و b، c و d را سه‌ضلع مثلث دوم می‌گیریم؛ اگر درمثلث‌های متشابه مفروض، ضلع‌های a، b، c متناظر با ضلع‌های b، c، d (به‌همین ردیف) باشند، باید داشته‌باشیم:

$$\frac{a}{b}=\frac{b}{c}=\frac{c}{d}$$

یعنی، ضلع‌های a، b، c و d، به‌صورت تصاعد هندسی باشند. و این، کاملاً ممکن است، اینک یک‌مثال

$$a=۸,\ b=۱۲,\ c=۱۸,\ d=۲۷$$

توجه کنیم که $۸+۱۲>۱۸$ و، ضمناً، دو مثلث با ضلع‌های ۸، ۱۲، ۱۸ و ۱۲، ۱۸، ۲۷ متشابه یکدیگرند و، بنابراین، زاویه‌های برابر دارند.

۱۰۱۶. °۱. سه‌عدددرست x، y و z را طوری پیدا کنید که‌داشته‌باشیم.

$$x+y+z=۹,\quad ۱\leqslant x<y<z$$

بعد از مقداری‌آزمایش، معلوم می‌شود که تنها سه‌جواب وجود دارد (حالتی راکه ۹ دلار به‌سه‌قسمت مساوی تقسیم شود، کنار می‌گذاریم).

$$۹=۱+۲+۶=$$
$$=۱+۳+۵=$$
$$=۲+۳+۴$$

°۲. این‌سه‌سطر را، به‌صورت مربع طوری بنویسید که مجموع عددها در هرستون برابر ۹ باشد. در واقع، این کار را، به‌یک ترتیب می‌توان انجام‌داد(به‌شرطی که تبدیل سطرها وستون‌هارا به‌یکدیگر، مختلف به‌حساب نیاوریم):

۱	۲	۶
۳	۴	۲
۵	۳	۱

°۳. حالا، به‌بقیهٔ جنبه‌های «درجه دوم» شرط می‌پردازیم. چون بزرگترین عدد، در این جدول برابر ۶ است، بنابراین، سطر اول مربوط به «آرت» می‌شود، و اولین ستون مربوط به‌بستنی. تنها عددی از این مربع که دو برابر عدد دیگری از همان سطر در ستون اول است، عبارت است از ۴؛ درنتیجه، سطر دوم مربوط به‌بیل وستون دوم متعلق به‌ساندویچ

است. بالاخره، مبلغی که سام بابت آب‌میوه پرداخته است، در برخورد سطر آخر وستون‌آخر قرار دارد، یعنی ۵ دلار.

۱۷. ۱°. زن x هدیه می‌خرد ، هرکدام به x سنت؛ شوهر y هدیه خرید هرهدیه y سنت. بنابرشرط مسأله، باید داشته‌باشیم:

$$x^{۲}-y^{۲}=۷۵$$

۲°. عدد $۷۵=۳\times۵\times۵$ دارای شش‌مقسوم‌علیه است:

$$(x-y)(x+y)=۱\times۷۵=۳\times۲۵=۵\times۱۵$$

وبنابراین، تنها سه‌امکان وجود دارد:

$$x-y=۱ \qquad x-y=۳ \qquad x-y=۵$$

یا   یا

$$x+y=۷۵ \qquad x+y=۲۵ \qquad x+y=۱۵$$

در نتیجه، این‌جدول به‌دست می‌آید:

شوهر	زن
۳۷	۳۸
۱۱	۱۴
۵	۱۰

۳°. اکنون به‌دیگر شرطهای «درجه دوم» می‌پردازیم. سرآخر، یك جواب منحصر به‌دست می‌آید:

آنا: ۳۸؛ بیل‌براون: ۳۷

۱۴؛ جوجونس: ۱۱

بتی: ۱۰؛   ۵

به‌این‌ترتیب، نام خانوادگی «مری» باید «جونس» باشد.

۱۸. ازهمان ابتدا معلوم است‌که تعداد نوع‌های ممکن، محدوداست ($۲۴=!۴$). ولی اگر کمی دقت‌کنید، متوجه می‌شوید که پرداختن برهمهٔ آن‌ها، لزومی ندارد.

۱°. فرض کنید a، b، c و d، تعداد بطری‌هایی باشدکه هرکدام از

چهار خانم خالی کرده‌اند. خانم آدامس، خانم براون، خانم ویلسون و خانم گرین، در این‌صورت

$$a+b+c+d=۱۴$$
$$a+۲b+۳c+۴d=۳۰$$

و بنابراین

$$b+۲c+۳d=۱۶$$

۲°. از برابری آخر دیده می‌شود که b و d یا هردو فرد و یا هردو زوج‌اند. بنابراین، چهارحالت پیش می‌آید:

b	d	$c=۸-\frac{b+۳d}{۲}$
۳	۵	-۱
۵	۳	۱
۲	۴	۱
۴	۲	۳

که تنها حالت آخر قابل‌قبول است. به‌این‌ترتیب

$$d=۲,\ c=۳,\ b=۴,\ a=۵$$

بنابراین، نام خانوادگی خانم‌ها، چنین است:

آنا گرین، بتی ویلسون، سه‌سیل براون و دوروتی آدامس.

۱۹. تعدادسال‌های سن هر پسر را عددی درست می‌گیریم. همهٔ حالت‌های تبدیل ۷۲ را، به‌صورت ضرب سه عامل می‌آوریم؛ در مورد هر تجزیه، مجموع عامل‌ها را جلو آن نوشته‌ایم:

$۱\times۱\times۷۲$	۷۴	$۲\times۲\times۱۸$	۲۲
$۱\times۲\times۳۶$	۳۹	$۲\times۳\times۱۲$	۱۷
$۱\times۳\times۲۴$	۲۸	$۲\times۴\times۹$	۱۵
$۱\times۴\times۱۸$	۲۳	$۲\times۶\times۶$	**۱۴**
$۱\times۶\times۱۲$	۱۹	$۳\times۳\times۸$	**۱۴**
$۱\times۸\times۹$	۱۸	$۳\times۴\times۶$	۱۳

تنها مجموعی که دوبار تکرار شده‌است، به‌صورت‌سیاه نشان‌داده شده است. اشاره به‌وجود (تنها یك) پسر بزرگتر، به‌ما امکان می‌دهد جواب را پیدا کنیم: پسرها، ۸ سال، ۳ سال و۳سال دارند.

۲۰. اغلب، برای حل معماها، بهتر است شرط‌آن‌هارا، به‌جنبه‌های مختلف تقسیم کنیم. خواننده می‌تواند چنین‌معماهایی‌را درکتاب کورومسکی «اندیشهٔ ریاضی»، آ. پ. دوموریاد «درقلمرو ریاضیات»، ش. النسکی «در پی فیثاغورث» (که هرسه به‌فارسی ترجمه شده‌اند) مراجعه کند. نمونه‌ای ازاین‌گونه مسأله‌هارا، ازمجلهٔ *American Mathematical Monthly* شمارهٔ ۶۴ (۱۹۵۷)می‌آوریم.

مهمان پرسید: «این‌ها بچه‌های شما هستندکه درحیات بازی‌می‌کنند؟» صاحب‌خانه پاسخ‌داد: «نه، این‌ها عبارتند ازبچه‌های من (که بیشتر از همه هستند)، بچه‌های برادرمن (او کمتر ازمن بچه‌دارد)، بچه‌های خواهرمن (آن‌ها بازهم‌کمترند) وبچه‌های پسرعمویم (که‌کمتر ازهمه هستند) و جالب این‌است که‌حاصل‌ضرب چهارعددی که معرف تعداد بچه‌ها درهرخانواده‌است، برابر است با شمارهٔ منزل ماکه شمامی‌توانید به خیابان بروید و آن را ببینید».

مهمان گفت: «من‌کمی ریاضیات می‌دانم، می‌روم شمارهٔ منزل شما را ببینم تا بدانم تعداد بچه‌های هرخانواده چقدر است». ولی، وقتی‌که از خیابان برگشت، گفت: «فرض‌های من، برای پیداکردن پاسخ‌قطعی‌کافی نیست. به‌من بگوییدکه‌آیا پسرعموی شما تنها یك‌فرزند دارد؟» و وقتی‌که صاحب‌خانه پاسخ خودرا داد، مهمان بارضایت‌گفت: «حال دیگر می‌دانم در هرخانواده چندفرزند وجود دارد».

شما هم، به‌این‌پرسش، پاسخ بدهید (باتمرین ۱۹ مقایسه‌کنید).

۲۲. ۲) °۴ از ۲§، $l=5$ ؛ ۳) تمرین ۶، $n=4$ ؛ ۴) °۱ از ۴§، $n=4$ ؛ ۵) °۳ از۵§ فصل دوم؛ °۲ از۴§.

۲۴. نقش x، y و z دراین‌دستگاه سه‌معادلهٔ سه‌مجهولی، کاملاً یکی است. دستگاه به‌این مفهوم متقارن است که تبدیل دوری مجهول‌ها، هیچ

تغییری دردستگاه نمی‌دهد وتنها جای معادله‌هارا عوض می‌کند. ازاین‌جا، به‌سادگی نتیجه‌می‌شود که: $x=y=z$ که، باتوجه به‌آن، بلافاصله به‌دست می‌آید.

$$x=y=z=۵ \quad و \quad ۶x=۳۰$$

تنها این مطلب می‌ماند که یك‌ارزشی‌بودن مجهول‌ها را ثابت‌کنیم. این‌نتیجه را هم می‌توان، بااستفاده ازیکی ازراه‌حل‌های دستگاه معادله‌های خطی، به‌دست آورد.

۲۵.

$$\begin{aligned} y+z&=a \\ x\quad\ +z&=b \\ x+y\quad\ &=c \end{aligned}$$

هرتبدیلی از مجهول‌های x، y و z، شکل عبارت‌های واقع در سمت‌چپ معادله‌ها را تغییر نمی‌دهد. فرض می‌کنیم $x+y+z=s$ (این‌مجموع هم، باتبدیل مجهول‌های x، y و z، تغییر نمی‌کند). اگر سه‌معادلهٔ‌مفروض را جمع کنیم، بلافاصله به‌دست می‌آید:

$$s=\frac{a+b+c}{۲}$$

وبه‌این ترتیب، دستگاه منجر به‌سه‌معادله‌ای می‌شودکه هرکدام از آن‌ها، تنها شامل یك‌مجهول است:

$$s-x=a، \quad s-y=b، \quad s-z=c$$

دستگاه ما درمجموع (و نه فقط نسبت به‌مجموعهٔ عبارت‌هایی که در سمت چپ قرارگرفته‌اند)، نسبت به‌زوج عددهای $(x، a)$، $(y، b)$، $(z، c)$ متقارن است.

۲۶. فرض کنید

$$x+y+u+v=s$$

وشبیه تمرین ۲۵ عمل کنید.

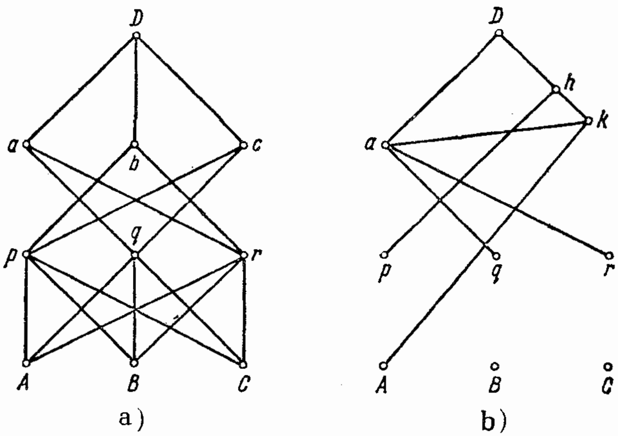
تمرین‌های ۱۰، ۲۱، ۲۳ و ۲۷ به‌توضیح بیشتری نیاز ندارند[1].

فصل هفتم

۰۱ پاره‌خطهای شکل ۳۱ — b، معرف رابطهٔ $V=Q+۴T+۴P$ هستند. روشن است که

$$Q=a^{۲}h,\quad T=\frac{h}{۲}\cdot\frac{b-a}{۲}\cdot a\ ,\quad P=\frac{h}{۳}\left(\frac{b-a}{۲}\right)^{۲}$$

شکل ۳۱ — b را، با بستگی‌هایی که به‌این رابطه‌ها پاسخ دهند، تکمیل کنید و روشن کنید که به‌همان عبارتی برای V می‌رسید که در §۲ به‌دست آوردید.



شکل ۵۸

۰۲ شکل ۵۸ — a و b را ببینید؛ این‌شکل، طرح ذهنی حل کننده را، بلافاصله قبل از آخرین گام تعیین کننده (که در پایان §۵ فصل دوم شرح داده شده است) منعکس می‌کند.

---

۱. این‌هم جواب جدول واژه‌های §۱ این‌فصل: گالوا $=x_1$؛ نزدیک $=x_2$؛ یتیمر $=x_3$؛ گاندی $=x_4$؛ لندنی $=x_5$؛ انکار $=x_6$.

۳. تمرین ۹۹ ازفصل سوم را ببینید. نقطه‌های شکل ۳۲، معرف این مقدارها هستند.

p_6

p_6

p_{12}

p_{12}

p_{24}

p_{24}

p_{48}

p_{48}

p_{96}

p_{96}

یادداشت‌های تکمیلی ۴، ۵ و ۶، نیازی به توضیح بیشتر ندارند.

فصل هشتم

۳. همان‌طور که ازشکل ۳۷ — c دیده می‌شود

$$AB' = \frac{b}{\sqrt{3}}, \quad AC' = \frac{c}{\sqrt{3}}$$

اگردرمثلث $B'AC'$، قضیهٔ کسینوس‌ها را به‌کاربریم، به‌دست می‌آید:

$$3x^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{3}\right)$$

برای بیان $bc\cos\alpha$ ، قضیهٔ کسینوس‌ها را درمثلث ABC به‌کار برید؛ $bc\sin\alpha = 2S$ قراردهید، که درآن، Sعبارت است از مساحت مثلث ABC، این رابطه را به‌دست خواهیدآورد:

$$6x^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 4\sqrt{3}S$$

ومی‌بینیم که مقدار x، نسبت به a، b و c، متقارن است.

۴. این مقطع‌ها، چنین‌اند.

۱°. مستطیلی به‌مساحت $2yz=\frac{2hx\sqrt{a^2-x^2}}{a}$؛

۲°. مثلث‌قائم‌الزاویه‌ای به‌مساحت $\frac{h(a^2-y^2)}{2a}=\frac{xz}{2}$؛

۳°. قطعه‌ای از دایره.

طرح ۲° بر دیگران ترجیح دارد (زیرا تابع نسبت به y، گویا است)؛ حجم مجهول برابر است با

$$\frac{1}{2}\int_{-a}^{a} xz\,dy=\frac{2a^2h}{3}\,.$$

یادداشت‌های تکمیلی ۱، ۲، ۵، ۶، ۷ و ۸، به توضیح بیشتری نیاز ندارند.

فصل نهم

۵. §۴ را ببینید. قضیهٔ A را، که در §۴، ۱° تنظیم و روی شکل ۲۴ ـ b روشن‌شده است، به‌کمک قضیهٔ ضعیف‌تر B، که در §۴، ۲° تنظیم و روی شکل ۲۴ ـ a روشن شده است، ثابت کردیم.

۶. مسأله‌های A و B هم‌ارزند، ولی فایدهٔ عبور از A به B این‌است که، دراین‌جا، با عددهای کمتری سروکار داریم. اگر از این عبور، چندبار استفاده کنیم، به‌ترتیب، این‌زوج عددها را به‌دست می‌آوریم:

(۴۳۷، ۳۲۳)؛ (۳۲۳، ۱۱۴)؛ (۲۰۹، ۱۱۴)؛ (۱۱۴، ۹۵)؛ (۹۵، ۱۹)؛
(۷۶، ۱۹)؛ (۵۷، ۱۹)؛ (۳۸، ۱۹)؛ (۱۹، ۱۹)

به‌این‌ترتیب، بنابراین، مقسوم‌علیه‌های مشترک دوعدد ۴۳۷ و ۴۲۳ عبارتند از ۱ و ۱۹، یعنی عدد ۱۹، که ضمناً، بزرگترین مقسوم‌علیه مشترک دو عدد مفروض است. روندی را، که در این تمرین بـاآن‌آشنا شدید، می‌توان در حالت کلی هم به‌کاربرد و، بنابراین، اهمیت زیادی دارد : آن را آلگوریتم اقلیدس گویند.

۷. ۱°. با در نظر گرفتن بعضی شرطهای مهم، B از A گسترده‌تر است (یک‌حالت ساده: درفاصلهٔ بستهٔ $a\leqslant x\leqslant b$، تابع $f(x)$، معین، پیوسته و

قابل مشتق‌گیری باشد؛ علاوه برآن، تابع در نقطه‌های $x=a$ و $x=b$ به‌ماکزیمم خود نرسد).

۲°. مسألهٔ مربوط به‌پیداکردن ریشه‌های معادلهٔ $f'(x)=0$، در بسیاری موردها، ساده‌تر ومعمولی‌تر است؛ ضمناً، با روش معلومی می‌توان ریشه‌هایی از $f(x)$ راکه پاسخ‌گوی ماکزیمم نیستند، حذف کرد.

۸۰. ۱°. قضیهٔ B قوی‌تر است؛ قضیهٔ A را می‌توان بلافاصله از آن نتیجه گرفت.

۲°. B ساده‌تر از A ثابت می‌شود، زیرا B؛ درمقایسه با A، جزء مهم اضافی داردکه می‌توان، بررسی را از همان‌جاآغازکرد؛ درحالی‌که اگر تنها باحکم (کامل) A سروکار داشته‌باشیم، ابتدا باید درجست وجوی این جزء یا حقیقتی مشابه‌آن باشیم؛ قضیهٔ قوی‌تر B، در دسترس‌تر ازقضیهٔ A است، زیرا قضیهٔ B، شامل جزئیات بیشتری است.

۳°. یک‌رأس مثلث را A ووسط ضلع روبه‌روی به‌آن‌را M بگیرید؛ ابتدا ثابت‌کنید دو مثلث MGO و AGE متشابه‌اند، که از آن‌جا نتیجه می‌شود: $MO\|AE$.

۸۱. ۱°. A، یک‌مسألهٔ اثباتی و B، یک‌مسألهٔ پیداکردنی است؛ B دلچسب‌تر از A به‌نظر می‌رسد؛ از همان ابتدا معلوم است کـه حل‌کامل مسألهٔ B، حکم مسألهٔ A را تأیید یا رد می‌کند.

۲°. A،مسأله‌ای مربوط به‌حد و B، مسأله‌ای مربوط به‌نابرابری‌های جبری است؛ به‌همین مناسبت، مسألهٔ B، مقدماتی‌تر ازمسألهٔ A است.

۳°. حالت ساده‌تر $\varepsilon\geqslant 1$ راکنار می‌گذاریم. در حالت $\varepsilon<1$، به‌ترتیب، نابرابری‌های زیررا داریم:

$$\sqrt{x+1}<\varepsilon+\sqrt{x};\ 1<\varepsilon^2+2\varepsilon\sqrt{x};\ \frac{(1-\varepsilon^2)^2}{4\varepsilon^2}<x$$

به‌این‌ترتیب، باآغازازمقداری برای x، وبعدازآن، تفاضل $\sqrt{x+1}-\sqrt{x}$، از هرعدد دلخواه و مثبت ε کوچکتر می‌شود. و این، حکم A را هم ثابت می‌کند.

۱۰. ۱°. A و B دوحکم هم‌ارزند (هرکدام از این حکم‌ها، معکوس دیگری است)؛ بنابراین، دومسألهٔ A و B نیز هم‌ارزند.

۲°. مرکب بودن n، به‌معنای وجود دوعدد درست a و b است، به‌نحوی که داشته‌باشیم $n=ab$، $a>1$، $b>1$. اول بودن n، به‌معنای نفی «مرکب‌بودن» آن است (از حالت $n=1$ می‌گذریم) و، بنابراین، در موردآن، تکیه‌گاه کمتری داریم؛ در نتیجه، B مطلوب‌تر از A است.

۳°. اگر داشته‌باشیم: $n=ab$، داریم: $2^n-1=(2^a)^b-1$، که بر 2^a-1 بخش‌پذیر است.

۱۱. فرض کنید:

$$a_{3m-2}=2m^{-\frac{1}{3}}\ ,\ a_{3m-1}=a_{3m}=-m^{-\frac{1}{3}}\quad (m=1,2,3,\ldots)$$

۱۲. ابتدا فرض کنید:

$$\min(a_n, b_n)=\frac{1}{n^2}$$

(به‌همین‌ترتیب، می‌توانید، هررشتهٔ متقارب دیگری را هم، که جمله‌های مثبت نزولی داشته‌باشد، انتخاب کنید.)

رشته‌های

$$(1)+\left(\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{49}+\frac{1}{64}+\cdots+\frac{1}{42^2}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{42^2}+\cdots,\right.$$

$$(1)+(1)+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{16}+\frac{1}{25}+\frac{1}{36}\right)+\left(\frac{1}{36}+\frac{1}{36}+\cdots+\frac{1}{36}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{43^2}+\cdots\right.$$

که از «پاره‌هایی» متناظر بایکدیگر که به‌وسیلهٔ پرانتزها مشخص‌شده‌اند تشکیل یافته‌اند. دربعضی از این پاره‌ها، هرجمله برابر است با می‌نیمم انتخابی زوج عددهای a_n و b_n؛ در پاره متناظر آن در رشتهٔ دیگر، همهٔ جمله‌ها با هم برابرند وهرکدام‌ازآن‌ها برابر است باآخرین جملهٔ پارهٔ قبلی از

همان رشته، ضمناً، مجموع همهٔ این‌جمله‌ها برابر است با ۱. این دونوع پاره، در هردورشته، به‌تناوب وجود دارند.

رشته‌های ما، هنوز به‌طور کامل باشرط مسأله سازگار نیستند: جمله‌های آن‌ها، به‌مفهوم غیراکید خود، نزولی‌اند (یعنی به‌مفهوم «$\geqslant$»)، نه به‌مفهوم اکید (یعنی به‌معنای «$>$»). ولی این نقص را، به‌سادگی می‌توان برطرف کرد: از همهٔ جمله‌های پاره‌ای از رشته، که شامل عددهای برابر است، جمله‌های متوالی یک‌تصاعد عددی را، که جملهٔ اول وقدرنسبت به‌اندازهٔ کافی کوچك دارد و مجموع آن کمتر از $\frac{1}{2}$ است، کم کنید.

۱۳. اگر p_1، p_2، …، p_l، عددهای اول مختلف باشند و داشته باشیم: $n=p_1^{\alpha_1}p_2^{\alpha_2}\ldots p_l^{\alpha_l}$، آن‌وقت

$$\tau(n)=(\alpha_1+1)(\alpha_2+1)\cdots(\alpha_l+1)$$

۱۴. تمرین ۵۰ از فصل اول و °۱ از § ۳ فصل اول؛ °۲ و °۳ از §۵ فصل دوم؛ §۲ و ۱ ازفصل سوم.

۱۶. چرا؟ بازهم دوتمرین، شبیه تمرین‌های ۶ تا ۱۰ می‌آوریم:

I) این دومسأله را باهم مقایسه کنید:

A. $\sqrt[4]{100}$ را محاسبه کنید؛

B. $\sqrt{10}$ را محاسبه کنید.

II) $f(x)$ و $g(x)$ را دو تابع مفروض می‌گیریم. دومسألهٔ زیر را مقایسه کنید:

A. ثابت کنید $\int_a^b f(x)dx \geqslant \int_a^b g(x)dx$؛

B. ثابت کنید $f(x)\geqslant g(x)$، اگر $a\leqslant x\leqslant b$.

ازکجا؟ مسأله‌های کمکی، به‌صورتی آشکار یا پنهانی، به‌طور طبیعی، از یکی ازچهار سرچشمهٔ مذکور، به‌وجود می‌آیند. به‌عنوان مثال‌های آموزنده‌ای که روشن کنندهٔ این ادعا هستند، می‌توان ازتعمیم، رفتن به‌حالت خاص واستفاده ازشباهت که درحل‌تمرین ۸۴ فصل‌سوم به کاررفته‌اند، نام‌برد.

یادداشت‌های تکمیلی ۱، ۲، ۳، ۴ و ۱۵ بـه توضیح اضافی نیازی ندارند.

فصل دهم

۲. ۱°. ش . . . .
ش . . . . ف .
ش . د . . . . ف .
ش . د . . . . . ش . ف .
ش . د . . . پ . ش . ف .
ش . د . د . پ . ش . ف .

۲°.

$$\int\sqrt{x^{7}-x^{4}}\,dx=$$
$$=\int x^{2}\sqrt{x^{3}-1}\,dx=$$
$$=\int\sqrt{x^{3}-1}\,.x^{2}dx=$$
$$=\frac{1}{3}\int\sqrt{x^{3}-1}\,.3x^{2}dx=$$
$$=\frac{1}{3}\int(x^{3}-1)^{\frac{1}{2}}.d(x^{3}-1)$$

یادداشت ۱، به توضیح اضافی نیازی ندارد.

فصل یازدهم

۲. شکل‌های ۱ — a تا ۱ — f ؛شکل‌های ۲۹ — a تا ۲۹ — f وشکل جامع ۳۰.

۳. دو مثالی را ببینید که در حل تمرین ۲ به یاد آوردیم؛ در مثال اول، می‌توان صحبت ازلحظهٔ به‌وجودآمدن شکل ۱ — f در ذهن شماکرد؛ ودر مثال دوم، از لحظهٔ به وجود آمدن شکل ۲۹ — c.

۴. تمرین ۲ از فصل دهم.

۵. مثلاً این نقش را درشکل۲۳، تشخیص طول‌های x_1، x_2، ...، x_n، ریشه‌های چند جمله‌ای مجهول $f(x)$، به‌عهده دارد.

۶. عبور از شکل ۴ — a به‌شکل۴ — b.

یادداشت‌های ۱، ۷، ۸، ۹، ۱۰ و ۱۱، نیازی به‌توضیح اضافی ندارند.

فصل دوازدهم

۳. شرط کدام است؟

$$a<\frac{b+c}{2}$$

نتیجه‌گیری مسأله چیست؟

$$\alpha<\frac{\beta+\gamma}{2}$$

که با نابرابری زیر هم‌ارز است

$$2\alpha<\pi-\alpha$$

و یا

$$\alpha<\frac{\pi}{3}$$

آگاهی‌های کمکی لازم:

$$a^2=b^2+c^2-2bc\cos\alpha$$

به‌این ترتیب

$$\cos\alpha=\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc}>$$

$$>\frac{b^2+c^2-\frac{(b+c)^2}{4}}{2bc}=$$

$$=\frac{3(b^2+c^2)}{8bc}-\frac{1}{4}\geqslant$$

$$\geqslant \frac{۶bc}{۸bc} - \frac{۱}{۴} = \frac{۱}{۲} = cos\frac{\pi}{۳}$$

۱۰۵. °۱. نقطهٔ P بـه دو خط راست مفروض تعلق دارد؛ بـا تکمیل ساختمان،...؛

نقطهٔ P، به‌یك خط راست مفروض و یـك دایرهٔ مفروض تعلق دارد؛ با تکمیل ساختمان،...؛

نقطهٔ P به دو دایرهٔ مفروض تعلق دارد، با تکمیل ساختمان،...

°۲. در مثلث ABC، دوضلع AC و BC و زاویهٔ بین آن‌ها داده شده است،...؛

در مثلث ABC، ضلع BC و دو زاویه‌داده شده است،...؛

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، دو ضلع AC و BC داده شده است،...

°۳. قاعده و ارتفاع مثلث ABC داده شده است،...؛

سه ضلع مثلث ABC داده شده است،...

(همچنین، می‌توان هر گروه از فرض‌های °۲ را در نظر گرفت.)

°۴. مساحت مثلث ABC، قاعدهٔ چهار وجهی، وطول ارتفاع وارداز رأس D براین قاعده داده شده است،...؛

طول دو یال AB و CD از چهار وجهی و فاصلهٔ بین خطهای راست AB و CD داده شده است،...(با تمرین ۱۸ فصل چهارم وبعد ازآن مقایسه کنید).

۱۰۶. °۱. اگر دو مثلث ABC و EFG برابر باشند،...؛

اگرشکل $ABEF$ متوازی‌الاضلاع باشد،...

°۲. اگر دو مثلث ABC و EFG متشابه باشند،...؛

اگر دو زاویهٔ ABC و EFG حاده وضلع‌هایی موازی با هم یا عمود بر هم داشته باشند،...؛

اگر زاویـه‌های ABC و EFG، دو زاویـه محاطی در یـك دایره و روبه‌روی یك کمان یا دو کمان برابر باشند،...

وغیره (تمرین ۸ فصل هشتم را ببینید).

۳°. اگر شکل‌های $ABCD$ ... و... $EFGH$ ... متشابه‌باشند (ضمناً، نقطه‌های دو شکل، به‌همین ردیف، متناظر یکدیگر باشند)،...؛

اگرداشته‌باشیم: $AE\|BF\|CG\|DH$، ضمناً نقطه‌های A، B، CوD به‌یك خط راست و نقطه‌های E، F، G و H بـه خط راست دیگری متعلق باشند،... (تنظیم مشابهی از ایـن قضیه، چنین است: «دو ضلع یك زاویه، به‌وسیلهٔ خط‌های راست مـوازی به‌پـاره‌خط‌های متناسب تقسیم‌می‌شوند»).

۴°. اگردر مثلث ABC داشته باشیم $\angle C < \angle B$،...

۷. این، مسأله‌ای‌بسیارجالب‌است: مطلوب است‌مساحت یك‌چهارضلعی که هم قابل محاط در یك دایره وهم قابل محیط بردایره‌ای دیگر باشد، به‌شرطی که‌طول ضلع‌های آن، a، b، c و d، معلوم باشند

مسألهٔ خویشاوندنزدیك به‌این‌مسأله، دوازده‌قرن پیش ودرهندوستان، به وجود آمد. اگر دربـارهٔ این مسأله شنیده باشید و آن را به‌یاد بیاورید، کمك بزرگی به‌شما خواهد بود. مصرانه از خود بپرسید: آیا خویشاوندی از این مسأله را می‌شناسید؟ آیـا مسأله‌ای را می‌شناسید کـه همین مجهول را داشته باشد؟

در واقع، مسألهٔ خویشاوندی که مورد نظر ماست، هم در مجهول و هم در داده‌ها، بـا مسألهٔ مـا مشترك است؛ علاوه‌برآن، شامل نیمی ازشرط مسألهٔ ما هم می‌باشد. این مسأله‌چنین است: مطلوب است مساحت S، یك چهارضلعی محاطی، برحسب ضلع‌های a، b، c وdآن. جواب این مسأله، این است:

$$S^2=(p-a)(p-b)(p-c)(p-d)$$

که‌در آن داریم:

$$2p=a+b+c+d$$

اگر از این مطلب آگاه باشیم، کار به‌سادگی بـه پایان می‌رسد: اگر چهارضلعی محیطی، وضلع‌هایaو cروبه‌روی هم وضلع‌های b وdروبه‌روی هم باشند، داریم:

$$a+c=b+d=p$$

۸. تمرین ۴۷ فصل اول، ۲° از § ۵ فصل دوم، تمرین ۱۰ فصل دوم، تمرین ۱۳ فصل دوم، تمرین ۵۱ فصل دوم و ۳° از § ۶ فصل چهاردهم را ببینید.

۹. میانه‌ای که از رأس A بر قاعدهٔ BC فرودآید، هرپاره خط موازی BC و محدود به ضلع‌های مثلث را نصف می‌کند.

(مقطع مورد نظر در چهاروجهی ــ متوازی‌الاضلاع است. اگر صفحه‌ای از یک یال چهاروجهی و از وسط یال مقابل آن عبور کند، چهار وجهی را در مثلثی قطع می‌کند، که می‌تواند برای اثبات قضیهٔ مربوط به چهار وجهی مفید باشد.)

۱۰. میانهٔ هر مثلث، مساحت آن را نصف می‌کند. (درحالت چهارـ وجهی، قضیهٔ مورد نظر را باید از اصل کاوالیری نتیجه گرفت، زیرا صفحهٔ مورد بررسی، مساحت هرمقطعی راکه در تمرین ۹ داشتیم، نصف می‌کند.)

۱۱. نیمساز داخلی مثلث، ضلع مقابل را به نسبت دوضلع دیگر قطع می‌کند.

۱۲. فرض کنید

$$b+c-a=2A,\qquad c+a-b=2B,\qquad a+b-c=2C;$$

در این صورت

$$\frac{1}{x^2}=\frac{A}{xyz},\qquad \frac{1}{y^2}=\frac{B}{xyz},\qquad \frac{1}{z^2}=\frac{C}{xyz}$$

که از ضرب این سه معادله در یکدیگر، به‌دست می‌آید:

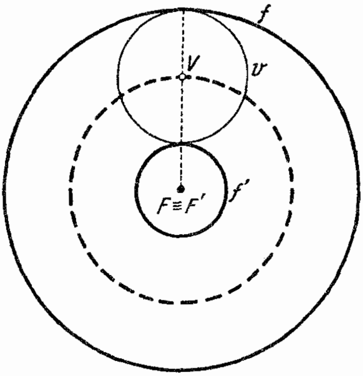
$$xyz=ABC$$

و بنابراین

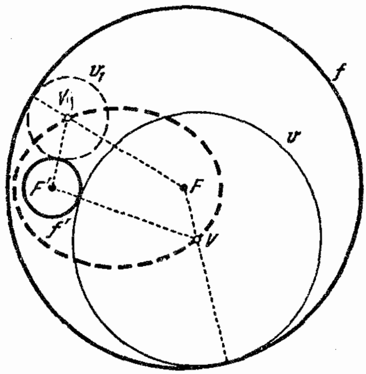
$$x^2=BC,\qquad y^2=CA,\qquad z^2=AB$$

برای بررسی کامل مسأله، تنها باید به‌حالت‌هایی بپردازیم که‌یکی یا چند تا از مجهول‌های x، y و z به‌سمت صفر میل می‌کنند.

۱۳. درحالت عادی، بیضی‌را با دو کانون‌آن تعریف می‌کنند. مطالعهٔ این تعریف، می‌تواند منجر به‌این پرسش‌شود: «کانون‌ها در کجا قرار گرفته‌اند؟» که، در نتیجه، ما را به‌فرض قوی‌تری می‌رساند که‌کار اثبات را ساده‌تر می‌کند:



شکل ۵۹-b. کانون‌های بیضی برهم منطبق‌اند



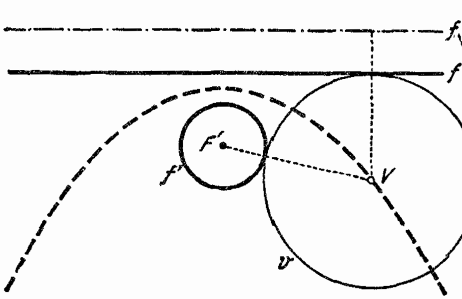
شکل ۵۹-a. بیضی چیست؟

با فرض‌های موجود نسبت به f، f' و v، مکان هندسی مرکز V، عبارت است از یك بیضی با کانون‌های F و F'. درواقع، این فرض مبتنی برتعریف بیضی است؛ روی شکل ۵۹-a به‌سادگی دیده می‌شود:

$$FV+F'V=r+r'$$

که‌در آن، r و r' عبارتند از شعاع‌های دایره‌های f و f'.

۱۰۱۴°. دایره‌ای هم‌مرکز بـا دایره‌های f و f' و به‌شعاع $\frac{r+r'}{2}$ (شکل ۵۹-b).



شکل ۵۹-c. حالت حدی بیضی

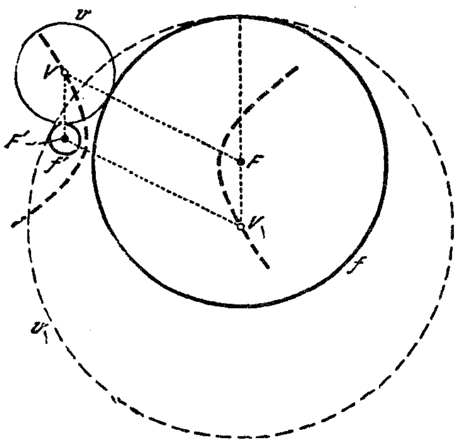
۲°. یك سهمی به کانون F' و خط هادی $f_1 \| f$ (شکل ۵۹-c).

۳°. هذلولی به کانون‌های F و F' (شکل ۵۹-d).

۴°. عمود منصف پاره خط FF' (شکل ۵۹-e).

بازهم چند «سیب» می‌چینیم که، احتمالاً، شیرینی کمتری دارند.

۵°. حالت حدی برای تمرین ۱۳ یا برای حالت ۳° ازآن: دایرهٔ f' به نقطه‌ای ازمحیط دایرهٔ f تبدیل شده است؛ مکان هندسی مورد نظر، عبارت است از یك خط راست.

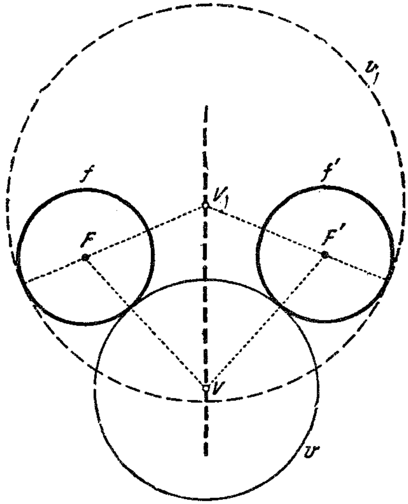


شکل ۵۹-d. هذلولی چیست؟

۶°. حالت‌حدی‌حالت۲°: دایرهٔ f' تبدیل‌به‌نقطهٔ F' شده‌است؛ دایرهٔ v برخط راست f مماس است و از نقطهٔ F' می‌گذرد؛ مکان هندسی مطلوب عبارت‌است ازیك سهمی به‌کانون F' و خط‌هادی f.

۷°. حالت‌حدی ۴°: $r = r' = 0$؛ دودایرهٔ f و f' بـه‌نقطه‌هایی‌تبدیل شده‌اند، کـه دایرهٔ متغیر v از آن‌ها می‌گذرد؛ مکان هندسی مطلوب، یك‌خط راست است.

پرسش‌های دیگری هم می‌توان طرح کرد:



شکل ۵۹-e. حالت خاص هذلولی

دربارهٔ ۳°. امتداد مجانب‌های هذلولی چیست و مرکز آن کجاست؟ روشن است که امتداد مجانب‌ها و نقطهٔ برخوردآن‌ها را باید ازروی‌دایره‌های مفروض f و f' پیدا کرد. ولی چگونه؟ و چرا این طور؟

دربارهٔ ۵°. آیا خط راست (نامتناهی)، حالت حدی بیضی است؟ برای هذلولی هم‌می‌توان همین پرسش‌را داد. آیا ممکن است، قسمتی ازخط‌راست، حالت حدی بیضی وقسمت دیگرآن، حالت حدی هذلولی باشد؟ و غیره.

یادداشت‌های تکمیلی ۱، ۲، ۴، ۱۵ و ۱۶، نیازی به توضیح اضافی ندارند.

فصل سیزدهم

یادداشت‌های تکمیلی ۱، ۲ و ۳، نیازی به‌توضیح بیشتر ندارند.

فصل چهاردهم

۰۱ تقریباً $\frac{۲}{۳}$۹ دقیقه بعدازظهر. [طول نصف‌النهار «مرکزی» (غربی) زمان معیار درغرب برابر ۱۲۰ درجه است.]

۰۲ اگر ۴۰۰ سال متوالی «گریگوری» ، دقیقاً برابر با ۴۰۰ سال نجومی باشد، درآن صورت، طول یك سال نجومی برابر است با

$$\frac{۹۷ \times ۳۶۶ + ۳۰۳ \times ۳۶۵}{۴۰۰} = ۳۶۵ + \frac{۹۷}{۴۰۷}$$

روز، یعنی ۳۶۵ روز، ۵ ساعت، ۴۹ دقیقه و ۱۲ ثانیه؛ و این‌تنها ۲۶ثانیه از سال واقعی نجومی بیشتر است. تفاوت ناچیز است : در هر ۳۳۲۳ سال یك روز اختلاف پیدا می کند.

۰۳ چون $BD=BD_1$ و $CD=CD_1$ ، بنابراین نقطهٔ D روی‌فصل مشترك دوکره قرار دارد: شعاع BD_1 با مرکز B و شعاع CD_1 بامرکز C. این دو کره دریك دایره مشترك‌اندکه صفحه آن برخط راست BC عمود است و، بنابراین، صفحه‌ای افقی است‌که مثلث ABC روی آن قرار دارد. به‌این ترتیب، تصویر قائم F از نقطهٔ D برصفحهٔ افقی، به‌عمودی متعلق است‌که از نقطهٔ D_1 بر BC فرود آمده باشد؛ به‌همین ترتیب، نقطه‌های D_2 و D_3 هم به D مربوط‌اند.

۰۴ نقطهٔ F مرکز اصلی سه دایـره‌ای است‌که به‌وسیلهٔ کمـان‌هایی در شکل a-۴۵ نشان داده شده‌اند [مرکز اصلی سه دایره ، نقطه‌ای است‌که از سه‌دایره به‌یك قوت باشد] وخطهای‌راست D_1F ، D_2F و D_3F محورهای اصلی دو به‌دوی همین دایره‌ها هستند و درنقطهٔ F به‌هم می‌رسند.

۰۵ با °۴ از §۶ مقایسه کنید: آمـاده‌کردن مدل و، درنتیجه، پیدایش این اندیشه.

۰۱۲ درپاسخ‌های زیر، تنها طرح مطلب را داده‌ایم.

a°۷. بااستفاده ازقضیهٔ کسینوس‌ها درمثلث (معمولی) مسطحه ومثلث کروی، مسأله منجر به‌اثبات نابرابری زیر می‌شود:

$$\frac{b^2+c^2-a^2}{2bc} > \frac{-\cos b\cos c+\cos a}{\sin b\sin c}$$

که‌درآن $0<a<\pi$ ، $0<b<\pi$ ، $0<c<\pi$ و پاره‌خط‌های a ، b و c ، ضلع‌های یك مثلث‌اند. به‌کمك تبدیل‌های سادهٔ جبری، می‌توان این نابرابری را از این حقیقت نتیجه گرفت که تابع $\frac{\sin x}{x}$ ، وقتی‌که x ازصفر تا π تغییر می‌کند، به‌طور یکنوا نزولی است.

۷°b. باتوجه به‌فرض‌پیوستگی، مثلث کروی «خیلی کوچك» رامی‌توان «تقریباً مسطحه» و «تقریباً برابر» با تصویر خود برصفحه، که تقریباً همان ضلع‌ها را دارد، دانست. از این‌جا نتیجه می‌شودکه زاویه‌های متناظر این دو مثلث هم، «تقریباً برابرند».

۷°c. تصویر رسم‌الجسمی (ستریوگرافیك) کره (از قطب شمالی روی صفحهٔ استوا)، زاویه‌ها را ثابت نگه می‌دارد.

۷°d. قضیهٔ ارشمیدس دربارهٔ مساحت سطح منطقهٔ کروی (قسمتی از سطح کره که بین دو صفحهٔ موازی قرار گرفته باشد) به نگاشت ساده‌ای منجر می‌شودکه مساحت‌ها را ثابت نگه می‌دارد[1].

۷°e. تصویر مرکزی نیم‌کره برصفحه‌ای که از مرکزکره گذشته است ، کوتاه‌ترین خط‌های کره را به‌کوتاه‌ترین خط‌های صفحه تبدیل می‌کند.

۲۵. باقی ماندهٔ مجهول ، چند جمله‌ای است که درجهٔ آن از واحد تجاوز نمی‌کند و، بنابراین، می‌توان آن را به‌صورت $ax+b$ نوشت. فرض می‌کنیم، مسأله حل شده است و خارج قسمت تقسیم را $q(x)$ می‌گیریم. آن‌گاه

$$x^3+x^5+\ldots+x^{17}+x^{19}=(x^2-1)\cdot q(x)+ax+b$$

---

۱. دراین‌جا، صحبت بر سر به‌اصطلاح تصویر استوانه‌ای کره است که کره را بر استوانهٔ قائم محیط برآن تصویر می‌کند. دراین نگاشت، هرنقطهٔ A ازکره به‌نقطهٔ A' ازسطح استوانه‌ای تبدیل می‌شود، به‌نحوی که خط افقی AA' محور استوانه را قطع می‌کند. سپس، سطح استوانه‌ای را (با برش روی مولد آن) روی صفحه می‌گسترانند.

اگر، در این جا، $x=1$ و $x=-1$ قرار دهیم، به دو معادلهٔ دو مجهولی نسبت به a و b می‌رسیم:

$$\text{۷}=a+b\,,\qquad -\text{۷}=-a+b$$

از آن‌جا $b=\text{۰}$ و $a=\text{۷}$ و، بنابراین، باقی ماندهٔ مجهول عبارت است از $\text{۷}x$.

این‌که همهٔ نماهای ۳،۵،۷، ...، ۱۷ و ۱۹، عددهایی اول هستند، ممکن است در ابتدا، اثری در ذهن ما بگذارند، درحالی‌که این وضع، هیچ ربطی به‌ماهیت مسأله ندارد؛ اگرهریك از این نماها را با هرعدد فرد ومثبت دیگری عوض‌کنیم، نتیجه تغییر نمی‌کند[1].

۲۶. °۱. $\pi t^{\text{۲}}$؛ °۲. $\frac{\pi t^{\text{۲}}}{\text{۴}}$.

یادداشت‌های تکمیلی ۶ تا ۱۱، ۱۳ تا ۲۴ و ۲۷ تا ۲۹، به توضیح بیشتری نیاز ندارند.

فصل پانزدهم

۱. «شکلی با محیط مفروض را پیدا کنید که حداکثر سطح را داشته باشد»؛ این مسأله را می‌توان درسطح‌های مختلف کلاس‌های دبیرستانی، با طرح مسأله‌های مناسب، مطرح کرد.

۲. تقارن‌نسبت به a، b و c؛ آزمایش به‌کمك اندازه‌های انتخاب‌شده.

۳. °۱. نیمساز d، ضلع مقابل c را، به‌نسبت دو ضلع دیگر، تقسیم می‌کند. بنابراین

---

۱. مسأله‌ای که در پاورقی صفحهٔ ۵۰۳ داده شده است، خصلت دیگری دارد: در آن‌جا، شرط مسأله به‌ما این فکر (زیادی) را تلقین می‌کند که مجموع طول پاره خط‌هایی راکه مگس پروازکرده است، باهم جمع کنیم، در حالی‌که هیچ نیازی به‌این‌کار نیست. هریك از نقطه‌ها به‌اندازهٔ $\text{۵}=\frac{\text{۵۰}}{\text{۴}+\text{۶}}$ ساعت حرکت کرده‌اند تا به‌هم رسیده‌اند؛ مدت حرکت مگس هم، همین ۵ ساعت است و، بنابراین، $\text{۵}\times\text{۲۰}=\text{۱۰۰}$ کیلومتر پرواز کرده است.

$$\left(\frac{ac}{a+b}\right)^{۲}=a^{۲}+d^{۲}-۲ad\cos\frac{\gamma}{۲}$$
$$\left(\frac{bc}{a+b}\right)^{۲}=b^{۲}+d^{۲}-۲bd\cos\frac{\gamma}{۲}$$

که با حذف γ به‌دست می‌آید:

$$d^{۲}=\frac{ab[(a+b)^{۲}-c^{۲}]}{(a+b)^{۲}}$$

۲°. اگر داشته باشیم: $a=b=c$ ، خواهیم داشت:

$$d^{۲}=\frac{۳a^{۲}}{۴}$$

و اگر داشته باشیم: $a^{۲}+b^{۲}=c^{۲}$ ، به‌دست می‌آید:

$$\frac{d}{a\sqrt{۲}}=\frac{b}{a+b}$$

درستی این تناسب هم، به‌سادگی، از تشابه مثلث‌هایی که‌در شکل وجود دارد، به‌دست می‌آید (آن را پیدا کنید).

اگر داشته باشیم $a=b$ ، به‌دست می‌آید : $d^{۲}=a^{۲}-\left(\frac{c}{۲}\right)^{۲}$.

اگر داشته باشیم $a+b=c$ ، نتیجه می‌شود: $d=۰$.

۴. نقطه‌های واقع دربالای کمان، متناظر بامثلث‌های حاده‌الزاویه و نقطه‌های واقع در زیر کمان، متناظر بامثلث‌های منفرجه‌الزاویه‌اند.

۵. تصویر مرکزی سطح چندوجهی بریکی از وجه‌های آن w («پنجره»)؛ مرکزتصویر را می‌توان هرنقطه‌ای واقع درخارج چندوجهی، که به‌اندازهٔ کافی به‌نقطه‌های درونی «پنجرهٔ» w نزدیك باشد، انتخاب کرد.

۶. $\Sigma G_n=G$ ، $\Sigma B_n=B$.

۷. $\Sigma nG_n=\Sigma nB_n=۲P$.

۸. از تمرین‌های ۶ و ۷ ، تعریف ۲° از §۶ و نتیجهٔ ۸° از §۶ استفاده کنید:

$$\Sigma(n-۲)G_n=۲P-۲G=\Sigma\frac{\alpha}{\pi}=۲B-۴$$

۹. ازتمرین‌های ۷ و ۶ نتیجه می‌شود:

$$۲P=\Sigma nG_n \geqslant ۳\Sigma G_n = ۳G,$$
$$۲P=\Sigma nB_n \geqslant ۳\Sigma B_n = ۳B$$

درسطراول، وقتی و تنها وقتی، علامت برابری برقرار است که همهٔ وجه‌ها مثلث باشند و درسطردوم، وقتی وتنها وقتی که به‌هررأس، سه‌یال‌رسیده‌باشد.

۱۰. اثبات اول. پیش قضیه‌ای راکه در زیر آورده‌ایم، معلوم بگیرید ولی، بعداً، خودتان آن را ثابت کنید.

پیش قضیه: اگر مجموعه‌ای از کمیت‌ها را، بتوان به زیرمجموعه‌های جدا از هم، طوری تقسیم کرد که برای هریك از زیرمجموعه‌ها، مقدار متوسط کمیت‌ها کمتر از a باشد، در آن صورت، مقدار متوسط کمیت‌های مجموعهٔ اصلی هم، کمتر از a خواهد بود.

اگر، به‌جای رابطهٔ «کمتر» (رابطهٔ $<$) هریك از رابطه‌های $\leqslant$، $>$ یا $\geqslant$ را قرار دهیم، بازهم درستی پیش قضیه، به قوت خود باقی است. این پیش قضیه را دوبار درمورد ۱° و ۲° به‌کار می‌بریم.

۱°. برای وجه n ضلعی، مقدار متوسط زاویهٔ مسطحه، برابر است با

$$\frac{(n-۲)\pi}{n}=\left(۱-\frac{۲}{n}\right)\pi \geqslant \frac{\pi}{۳}$$

۲°. مجموع‌زاویه‌های‌مسطحه‌ای ازچندوجهی، که دریك‌رأس‌مشترك‌اند (یعنی، مجموع زاویه‌های مسطحهٔ هر کنج) همیشه از ۲π کوچکتر و تعداد این زاویه‌ها بزرگتر یا مساوی ۳ می‌باشد؛ بنابراین مقدار متوسط زاویه‌های مسطحه، برای هررأس، از $\frac{۲\pi}{۳}$ کوچکتر می‌شود.

اثبات دوم. بنابر ۶° از §۶ وتمرین ۷، مقدار متوسط زاویهٔمسطحه، برابر است با

$$\frac{\Sigma\alpha}{۲P}=\frac{۲\pi(P-G)}{۲P}=\pi\left(۱-\frac{G}{P}\right)$$

و بنابراین، با توجه به‌تمرین ۹، داریم:

$$\frac{\Sigma\alpha}{۲P} \geqslant \frac{\pi}{۳}$$

علامت تساوی، زمانی برقرار است که همهٔ وجه‌های چندوجهی، مثلث باشند.

از طرف دیگر، باتوجه به‌قضیهٔ اولر (۸° از ۶§ را ببینید)، داریم:

$$\frac{\Sigma\alpha}{۲P} = \frac{۲\pi B - ۴\pi}{۲P} = \frac{\pi B}{P} - \frac{۲\pi}{P}$$

و بنابراین، با توجه به‌تمرین ۹

$$\frac{\Sigma\alpha}{۲P} \leqslant \frac{۲\pi}{۳} - \frac{۲\pi}{P}$$

۱۱. اثبات اول. مقدار متوسط زاویهٔ وجه n ضلعی از چند وجهی، چنین است:

$$\frac{(n-۲)\pi}{n} = \left(۱ - \frac{۲}{n}\right)\pi \geqslant \frac{۲\pi}{۳}$$

دراین‌جا، فرض می‌کنیم $n \geqslant ۶$. به‌این ترتیب، اگر همهٔ وجه‌ها، شش یا بیشتر ضلع داشته باشند، مقدار متوسط زاویهٔ مسطحهٔ چندوجهی، بزرگتر یا مساوی $\frac{۲\pi}{۳}$ می‌شود که، درنتیجه، حکم تمرین ۱۰ را نقض می‌کند.

اثبات دوم. بنابرقضیهٔ اولر، تمرین ۹ و تمرین ۷ داریم:

$$\begin{aligned} ۱۲ &= ۶G - ۲P + ۶B - ۴P \leqslant \\ &\leqslant ۶G - ۲P = \\ &= \Sigma(۶-n)G_n, \\ ۱۲ &\leqslant ۳G_۳ + ۲G_۴ + G_۵ \end{aligned}$$

بنابراین، دست‌کم، یکی از سه عدد $G_۳$ ، $G_۴$ و $G_۵$، باید مثبت باشد.

۱۲. ۱°. اگر دست‌کم یک وجه n ضلعی داشته باشیم، که در آن، $n>۳$، می‌توان آن را به‌کمک قطرهای وجه، به $n-۲$ مثلث تقسیم کرد و، سپس، این $n-۲$ مثلث را با $n-۲$ وجه مثلثی شکل عوض کرد (دراین‌جا، $n>۱$)، بدون این‌که تعداد رأس‌ها تغییر کند. بنابراین، عدد P وقتی می‌تواند به‌حداکثر خود برسد که همهٔ P وجه، مثلثی شکل باشند.

۲°. با توجه به‌تمرین ۹ داریم: $2P \geqslant 3G$ ؛ ضمناً تساوی، وقتی، و تنها وقتی، برقرار است که داشته باشیم:

$$G_3 = G \quad \text{و} \quad G_4 = G_5 = \dots = 0$$

بنابراین

$$G + B = P + 2 \geqslant \frac{3}{2}G + 2,$$

$$B \geqslant \frac{1}{2}G + 2,$$

و

$$G \leqslant 2(B-2)$$

$$P = G + (B-2) \leqslant 3(B-2)$$

ضمناً، علامت برابری، وقتی و تنها وقتی برقرار است که همهٔ وجه‌ها، مثلثی شکل باشند.

۱۳. شبیه دو حالت تمرین ۱۲، دراین‌جا هم به‌دست می‌آید:

$$B \leqslant 2(G-2), \qquad P \leqslant 3(G-2)$$

ضمناً، برابری وقتی و تنها وقتی برقرار است که از هررأس چندوجهی، سه‌یال عبور کند.

این نابرابری‌ها،کاربرد جالبی دارند. مثلاً ، نابرابری دوم‌رامی‌توان، به‌ترتیب زیر، بانتیجهٔ تمرین ۹، مربوط کرد:

$$\frac{P+6}{3} \leqslant G \leqslant \frac{2P}{3}$$

که‌به‌ازای $P = 6$ نتیجه می‌شود:

$$4 \leqslant G \leqslant 4$$

یعنی با حالت چهاروجهی سر و کار داریم. ولی به‌ازای $P = 7$

$$\frac{13}{3} \leqslant G \leqslant \frac{14}{3}$$

یعنی برای G ، عددی درست به دست نمی‌آید ؛ بنابراین ، به این نتیجه می‌رسیم که: چند وجهی محدب باهفت وجه وجود ندارد، حقیقتی که اولر هم به‌آن توجه‌کرده بود.

۱۴.

۱°.					
برای	چهاروجهی	مکعب	هشت‌وجهی	دوازده‌وجهی	بیست‌وجهی
	۰	۴	۳	۱۰۰	۳۶

۲°.			
برای	منشور باقاعدهٔ nضلعی	هرم باقاعدهٔ nضلعی	هرم مضاعف باقاعدهٔ nضلعی
	$n(n-۳)$	۰	$۱+\frac{n(n-۳)}{۲}$

۳°.			
	$\frac{(G-۲)(G-۴)}{۸}$	$\frac{G^{۲}-۵G+۲}{۲}$	$\frac{۹G^{۲}-۴۲G+۸}{۸}$
n:	۳	۴	۵

حالت $n>۵$ ممکن نیست (تمرین ۱۱ را ببینید)؛ برای $n=۶,۷,\ldots$، مسأله معنا ندارد.

۴°. اگر D را برحسب G_n بیان کنیم (تمرین‌های ۷ و ۸ را ببینید)، به‌دست می‌آید:

$$D=\frac{B(B-۱)}{۲}-P-\Sigma\frac{n(n-۳)}{۲}G_n=$$

$$=۱-\frac{۱}{۴}\Sigma(۲n-۳)(n-۲)G_n+\frac{۱}{۸}\left[\Sigma(n-۲)G_n\right]^{۲}$$

۱۵.

	۱°	۲°	۳°
$\Sigma\delta$:	۳π	۲π	$\frac{۵\pi}{۲}$
$\Sigma\omega$:	۲π	۰	π

۱۶. تغییر هردو مجموع تمرین ۱۵، خصلت مشابهی دارد: درهرحال تغییر $\Sigma\omega$ دو برابر تغییر $\Sigma\delta$ است؛ علاوه برآن $۲\Sigma\delta-\Sigma\omega=۴\pi$.

آیا این وضع، برای هرچهاروجهی درست است؟[۱]

۱۷. باتمرین ۲۰ مقایسه کنید.

---

۱. پرسش اخیر را می‌توان شبیهی ازهندسهٔ فضایی، برای قضیهٔ مربوط به‌مجموع زاویه‌های مثلث مورد بررسی قرار داد («قضیهٔ مربوط به مجموع زاویه‌های چهاروجهی»).

۱۸. حالت‌های ۱° و ۳° از تمرین ۱۵ را تعمیم دهید و نتیجه را با تمرین ۲۰ مقایسه کنید.

۱۹. با تمرین ۲۰ مقایسه کنید.

۲۰.	$۲\sum\delta-\sum\omega$	G	B	P
چهار وجهی	۴π	۴	۴	۶
مکعب	۸π	۶	۸	۱۲
هرم با قاعدهٔ n ضلعی	$(۲n-۲)\pi$	$n+۱$	$n+۱$	$۲n$
منشور باقاعدهٔ nضلعی	$۲n\pi$	$n+۲$	$۲n$	$۳n$
هرم n ضلعی مضاعف	$(۴n-۴)\pi$	$۲n$	$n+۲$	$۳n$

از سه مقدار B، P و G، تنها G، با بالارفتن تفاضل $۲\sum\delta-\sum\omega$ به‌طور یکنوا، صعود می‌کند.

۲۱. $۲\sum\delta-\sum\omega=۲\pi G-۴\pi$.[1]

برای اثبات، مساحت قسمتی از سطح کروی را که به‌وسیلهٔ وجه‌های زاویهٔ جسمی (کنج) یك رأس جدا شده است، برحسب زاویه‌های دو وجهی یال‌هایی که از این رأس گذشته‌اند، بیان کنید. به‌یاد بیاوریم که مساحت مثلث کروی با زاویه‌های α، β و γ، برابر است با $\alpha+\beta+\gamma-\pi$؛ ازآن‌جا، بیانی برای مساحت چند ضلعی کروی پیدا کنید. به این عبارت می‌رسید (با استفاده از تمرین‌های ۶ و ۷):

$$\sum\omega=۲\sum\delta-\sum\pi(n-۲)B_n=۲\sum\delta-۲\pi(P-B)$$

۲۲. پاسخ‌های عادی چنین است: مثلث متساوی‌الاضلاع، مربع، n ضلعی منتظم.

۲۳. به‌طور طبیعی، همان پاسخ‌های تمرین ۲۲ داده می‌شود (که درست‌هم هست).

۲۶. پاسخ‌های عادی: چهاروجهی منتظم، هشت‌وجهی‌منتظم، مکعب.

---

۱. و این، شبیه فضایی قضیهٔ مسطحه دربارهٔ مجموع زاویه‌های چند ضلعی است (در رابطهٔ مربوط به‌مجموع زاویه‌های n ضلعی، جملهٔ πn وجود دارد، که در آن، n عبارت است از تعداد ضلع‌های n ضلعی).

۲۷. پاسخ‌های عادی: چهاروجهی منتظم، هشت‌وجهی منتظم، مکعب.

۲۸. قطرمکعب، بریکی از قطرهای کره منطبق است. بنابراین، اگر یال مکعب را a بگیریم، داریم:

$$(۲r)^۲ = ۳a^۲$$

به‌این ترتیب، حجم مجهول برابر است با

$$a^۳ = \frac{۸\sqrt{۳}r^۳}{۹}$$

۲۹. مساحت شش‌ضلعی منتظم به‌ضلع r را، S می‌گیریم؛ حجم‌مجهول برابر است با

$$\frac{۲ \times ۶Sr}{۳} = \sqrt{۳}r^۳$$

بنابراین، برای حالت $B = ۸$، پاسخ نزدیك به‌حقیقتی که در تمرین ۲۶ به‌نظرمان رسیده بود، نادرست است. (ولی، برای حالت‌های $B = ۴$ و $B = ۶$، پاسخ درست داده بودیم.)

۳۰. مساحت و ارتفاع وجه هشت وجهی را، به ترتیب، S و h می‌گیریم. درآن‌صورت، حجم مجهول (باتقسیم هشت وجهی به‌هشت‌هرم)، به‌این‌صورت بیان می‌شود:

$$V = \frac{۸Sr}{۳} = \frac{۸r}{۳} \cdot \frac{h^۲}{\sqrt{۳}}$$

با توجه به‌تقارن، کره برهمهٔ وجه‌های هشت وجهی، در مرکز آن‌ها، مماس است. بنابراین، h وترمثلث قائم‌الزاویه‌ای است که، رأس زاویهٔ قائمهٔ آن برمرکز هشت‌وجهی واقع است و به‌وسیلهٔ ارتفاع این مثلث (که به‌طول r است) به‌دو پاره‌خط به‌طول‌های $\frac{h}{۳}$ و $\frac{۲h}{۳}$ تقسیم می‌شود. از آن جا

$$\frac{h}{۳} \times \frac{۲h}{۳} = r^۲$$

و با حذف h، به‌دست می‌آید:

$$V = 4\sqrt{3}r^3$$

۳۱. حجم منشور، برابر است با

$$6 \times \frac{r^2}{\sqrt{3}} \times 2r = 4\sqrt{3}r^3$$

با توجه به پاسخی‌که برای حالت $G=8$ به تمرین ۲۷ دادیم، انتظار این جواب را نداشتیم (جواب‌های ما، برای حالت‌های $G=4$ و $G=6$ در تمرین ۲۷ ، درست بود).

۳۲.	G	B	P
مکعب	۶	۸	۱۲
هرم مضاعف با قاعدهٔ شش ضلعی منتظم	۱۲	۸	۱۸
هشت وجهی منتظم	۸	۶	۱۲
منشور با قاعدهٔ شش ضلعی منتظم	۸	۱۲	۱۸

چندوجهی‌های منتظم را با چندوجهی‌های نامنتظم (که درمسابقهٔ ما، چندوجهی‌های متناظر منتظم خود را شکست داده‌اند) مقایسه می‌کنیم، البته، آن‌ها در رابطه با تعداد عنصرهایی‌که از قبل داده شده‌اند، حقی برابر دارند (درحالت اول، تعداد رأس‌ها، و درحالت دوم، تعداد وجه‌ها یکی است)، ولی در رابطه با سایر عنصرها، چندوجهی‌های نامنتظم، بغرنج‌ترند: در حالت اول وجه‌ها و یال‌های بیشتری دارند و درحالت دوم رأس‌ها و یال‌های بیشتری. آیا این وضع، شکافی راکه ظاهراً دراصل فقدان پایه‌ها، برای انتخاب برتر، به‌وجود آورده است، روشن نمی‌کند؟

۳۳. آن که، همهٔ وجه‌های آن مثلث باشد (تمرین ۱۲ را ببینید).

۳۴. آن که، از همهٔ رأس‌های آن، سه یال عبور کند (تمرین ۱۳ را ببینید).

۳۵. بین مکعب و هشت وجهی، رابطهٔ معکوس «دوگانه‌ای» وجود دارد؛ دو چند وجهی نامنتظم «رقیب» آن‌ها هم، همین وضع را نسبت به‌هم دارند. این وضع به ما اجازه می‌دهد بگوییم که: جواب‌های مسأله‌هایی که مضمون تمرین‌های ۲۶ و ۲۷ را تشکیل می‌دهند، به شرط یکی بودن تعداد

عنصرهای مفروض، بازهم نسبت به‌هم دررابطهٔ‌معکوس (توپولوژیك)هستند (با تمرین‌های ۳۳ و ۳۴ مقایسه کنید).

۳۶. قاعدتاً باید به‌این پرسش هم، شبیه‌تمرین ۲۷ پاسخ بدهیم؛ ولی در این جا هم، پاسخ «طبیعی» برای حالت‌های $G=۴$ و $G=۶$ درست و برای حالت $G=۸$ نادرست است.

۳۷. باید نقطه‌های برخورد دو بیضی مساوی را که، نسبت به خط $x=y$، قرینهٔ یکدیگرند، پیدا کنیم. از تفاضل دو معادله به‌دست می‌آید: $x^۲=y^۲$. از چهار جواب

$$(۶,۶),\ (-۶,-۶),\ (۲,-۲),\ (-۲,۲)$$

تنها دو تا از آن ها، به‌اصل فقدان پایه‌های کافی، پاسخ مثبت می‌دهند. (با تمرین ۲۴ فصل ششم مقایسه کنید.)

۳۸. از تفاضل معادله‌ها، بـه‌دست می‌آید: $x^۲=y^۲=z^۲$. از هشت جواب

$$(۱,۱,۱),\ (-۱,-۱,-۱),$$
$$(۳,-۳,-۳),\ (-۳,۳,۳),\ (-۳,۳,-۳),$$
$$(۳,-۳,۳),\ (-۳,-۳,۳),\ (۳,۳,-۳)$$

تنها دو تا به‌اصل فقدان پایه‌های کافی، پاسخ مثبت می‌دهند.

۳۹. این دستگاه‌هم، همان‌جواب‌های دستگاه تمرین ۳۸ را دارد،ولی برابری $x^۲=y^۲=z^۲$، در اینجا، دشوارتر به‌دست می‌آید.

۴۲. تمرین‌های ۴۳ تا ۵۶ را ببینید.

۴۳. ۱°. نتیجهٔ هرمسأله‌ای راکه «به‌صورت حرفی» نوشته شده‌باشد، می‌توان‌با این روش (یعنی ازراه تحقیق حالت‌های خاص) مورد بررسی قرار داد؛ ۳° از § ۴ فصل دوم و تمرین ۷۲ از فصل دوم را ببینید.

۲°. وقتی که رابطه‌ای یا فرمولی را درمورد حالت‌های خاص آزمایش کنیم، بهتر می‌توانیم‌آن را بشناسیم وبهتر به‌ساختمان‌آن پی می‌بریم. علاوه برآن، چنین تلاش‌هایی می‌تواند موجب بروز اندیشه‌های کلی ومهمی درما بشود؛ مثلاً، می‌توان متوجه‌شدکـه یکی از فرمول‌ها، برای کلی شدن آن

شایسته است و یا یکی از آن‌ها بـرای کاربرد ساده‌تر است. علاوه بر همهٔ این‌ها، می‌توان از این راه، جریان استدلال استقرایی را دنبال کـرد، یعنی جریانی که، بـه‌کمك آن، می‌توان حالت کلی را از روی حالت‌های خاص به‌دست آورد. امیدوارم که معلم ترجیح دهد با بحث‌هایی شبیه § ۴، امکان رشد ذهنی دانش آموزان خود را فراهم کند.

۴۴. هر یك از نقطه‌های حوزه‌ای که در شکل ۴۷–a نشان داده شده است، نمایندهٔ مثلثی با شکل معینی است. بنابراین، شکل ۴۷–a، می‌تواند دانش آموزان را بـا یکی از کاربردهای شکل، در دانش، آشنا کند (مثلاً، دیاگرام شاخص، در ترمودینامیك). به‌جز این، شکل ۴۷–a، وسیلهٔ خوبی است تا دانش آموز تجربهٔ مفیدی در مورد تعبیر هندسی نامعادله‌های خطی پیدا کند.

۴۵. در این‌جا، از بعضی حقیقت‌های ریاضی، کـه می‌توان از بررسی کسرهای دهدهی به‌دست آورد، یاد می‌کنیم.

هـر سه‌نوع کسرهای دهدهی مورد بررسی، عددهـایی گویا هستند؛ برعکس، هر عدد گویا را می‌توان به‌صورت یکی از این سه نوع‌کسردهدهی درآورد. اختلاف بین این کسرها، ناشی از نوع عامل‌های اول مخرج عدد گویایی است کـه‌باید به‌کسر دهدهی تبدیل شود: اگر در مخرج عدد گویا، عاملی از ۱۰ وجود نداشته باشد، تبدیل آن به‌کسر دهدهی، به‌صورت کسر متناوب ساده درمی‌آید؛ اگرهمهٔاین عامل‌ها، مقسوم علیه‌هایی از ۱۰ باشند، کسر دهدهی، متناهی می‌شود و، بالاخره، اگر در بین عامل‌های اول مخرج کسر، دست‌کم یکی ازمقسوم علیه‌های ۱۰ و دست‌کم یك عاملی که‌مقسوم‌علیه ۱۰ نیست، وجود داشته باشد، آن وقت، باکسردهدهی متناوب مرکب سروکار داریم. [وقتی که‌از مخرج b در عدد گویای $\frac{a}{b}$ صحبت می‌کنیم، کسر $\frac{a}{b}$ را ساده نشدنی درنظر می‌گیریم، یعنی فرض می‌کنیم که a و b، مقسوم‌علیه مشترکی به‌جز واحد ندارند و ضمناً $b \geqslant 1$. در ضمن، دو حالت روشن

را استثنا می‌کنیم: حالتی که‌در آن داریم ۱ $=b$ (حالت عددهای درست) و حالتی‌که می‌توان کسر دهدهی نامتناهی را به‌صورت‌کسری متناهی نوشت.]

طول دورهٔ گردش کسر دهدهی، بستگی به‌مقدار صورت‌کسر عددگویا ندارد.

اگر مخرج کسر گویا، برابر عدد اول p باشد، طول دورهٔ گردش، مقسوم علیهی از ۱ $-p$ خواهد بود. (به‌طور کلی: طول دورهٔ گردش، برای عدد گویای با مخرج b عبارت است از $\varphi(b)$ــ تعداد عددهای درست و مثبتی که از b تجاوز نمی‌کند و نسبت به b اول است. دربارهٔ کسرهای متناوب مرکب، چه می‌توان گفت؟)

اگر مخرج کسر گویا، عددی اول و طول دورهٔ گردش، عددی زوج باشد، آن وقت، هر رقم از نیمهٔ دوم دورهٔ گردش، رقم متناظر خود را در نیمهٔ اول، تا ۹ تکمیل می‌کند. (مثلاً، برای

$$\frac{۱}{۷}=۰/(۱۴۲۸۵۷)$$

داریم:

$$۱+۸=۹,\quad ۴+۵=۹,\quad ۲+۷=۹$$

با اطلاع از این ویژگی، می‌توان در محاسبهٔ کسر دهدهی، مقداری از وقت را صرفه جویی کرد.)

اگر مخرج کسر عددگویا بر ۳ بخش پذیر نباشد، مجموع رقم‌های دورهٔ تناوب آن بر ۹ بخش پذیر خواهد بود. مثلاً، برای حالت

$$\frac{۱۵}{۴۱}=۰/(۳۶۵۸۵)$$

$$۳+۶+۵+۸+۵=۲۷$$

از خواننده می‌خواهیم، این حکم‌ها را در بارهٔ مثال‌های دیگری هم آزمایش کند: اثبات آن‌ها دشوار نیست، ولی مستلزم مقداری آشنایی با نظریهٔ عددها است؛ علاقه‌مند کردن خوانندگان با این نظریه، یکی از هدف‌های ما است.

۴۶. مشاهده:

$$۹ \times ۱۱ = ۹۹،\ ۲۷ \times ۳۷ = ۹۹۹،\ ۹۹ \times ۱۰۱ = ۹۹۹۹،$$
$$۲۷۱ \times ۳۶۹ = ۹۹۹۹۹$$

توضیح: بنابراین، باید داشته باشیم:

$$۲۷ \times ۰/۰۳۷۰۳۷... = ۰/۹۹۹۹۹۹... = ۱$$

مقایسهٔ موقعیت‌های کوچك با حقایق عمیق، نباید موجب شرمندگی ما بشود؛ چنین مقایسه‌ای، می‌تواند بسیار آموزنده باشد. گامی را که از «مشاهده» به‌طرف «توضیح» برداشتیم واز مشاهدهٔ قانون‌مندی به‌خودقانون رسیدیم، در مقایسهٔ با گامی که‌از کپلر به‌سمت نیوتون برداشته شده است، بسیار ناچیز می‌نماید، ولی به‌هرحال، این دو گام، خویشاوند یکدیگرند واز نظر مضمون با هم فرقی ندارند.

۴۷. به‌استثنای حکم‌آخر (در مورد مجموع رقم‌ها در دورهٔ گردش)، همهٔ حکم‌های دیگر تمرین ۴۵، در دیگر دستگاه‌های شمار هم، با حکم مشابهی متناظرند. مثلاً، دربسط دودویی

$$\frac{۳}{۵} = ۰/(۱۰۰۱)$$

(دورهٔ گردش برابر است با ۱ — ۵) و

$$۱ + ۰ = ۱،\ ۰ + ۱ = ۱$$

۴۸. ارزش: صرف نظر ازکار محاسبه‌ای پر زحمت، کار فرعی تبدیل به کسرهای دهدهی و تجزیهٔ به‌عامل‌ها.

بهرهٔ عمیق‌تر: درك بهتر مفهوم عددهای حقیقی («در مورد نمایش عددهای $\sqrt{۲}$ و π به‌صورت دهدهی، وضع از چه قرار است») و ورود به نظریهٔ عددها.

بالا رفتن سطح فرهنگ عمومی: امکان کافی برای نتیجه گیری‌های استقرایی و رسیدن به‌قانون‌مندی‌ها، با آغاز از آزمایش‌های ساده.

درتمرین ۴۶، به صورتی بسیار ظریف، براساس مشاهده، حدس زده می‌شود و خود حدس مبنای استدلال دقیق قرار می‌گیرد؛ قانونی به‌دست

می‌آید که براساس مسألهٔ مورد مطالعه، روشن می‌شود[1].

۴۹. تمرین ۵۰ را ببینید.

۵۰. روی شکل‌های ۵۳-a و ۵۳-b، تابع $t(n)$، به معنای تعداد نقطه‌هایی است که طولی برابر n دارند. اگر داشته باشیم: $n=۱,۲,۴,۸,۱۶$، خواهیم داشت: $t(n)=۱$.

اگر n، عدد فرد و اول باشد، داریم: $t(p)=۲$.

با همهٔ این یادآوری‌های مهم (و بعد ازمقایسهٔ شکل‌های ۵۳ ـ a و ۵۳ ـ b) بازهم، احتمالاً، «آزمایش‌های» بیشتری و، ضمناً، کمی زیرکی می‌خواهد تا بتوان این قانون را کشف کرد: $t(n)$ برابر است با تعداد مقسوم‌علیه‌های فرد عدد n. به‌خواننده توصیه می‌کنیم، این قانون را ثابت کند. برای اثبات، می‌توان از یادآوری‌های زیر استفاده کرد:

۱°. نمایش ذوزنقه‌ای، که درتمرین ۵۰ مورد بحث است، بااین برابری هم‌ارز است:

$$۲n=r(r+۲a-۱)$$

۲°. از دو عامل r و $r+۲a-۱$، یکی زوج ودیگری فرد است؛ ضمناً، عامل فرد باید مقسوم‌علیهی ازعدد n باشد.

۳°. کوچکترین عدد ازاین‌دو عامل، برابر است باتعداد حلقه‌های n.

۴°. اگر n و r مفروض باشند، a جوابی منحصر دارد.

۵۱. ازنماد $\tau(n)$، به‌مفهومی که درتمرین ۱۳ فصل نهم نشان‌داده‌ایم، استفاده می‌کنیم. قاعده را می‌توان به‌پنج حالت زیر تقسیم کرد:

---

1. کارل فردریک گوس، مطالعهٔ کسرهای دهدهی متناوب را، به‌عنوان شاخه‌ای از نظریهٔ عددها، مورد مطالعه قرار داد. او، برای جست وجوهای «آزمایشی» خود، از سنگینی محاسبه‌ها وکارعظیم با عددها، روگردان نشد ومثلاً، جدول کاملی از نمایش دهدهی ۱۰۰۰ عدد گویای

$$۱,\frac{۱}{۲},\frac{۱}{۳},\ldots,\frac{۱}{۱۰۰۰}$$

تشکیل داد (بعضی از این عددها، دورهٔ گردشی به طول چند صدرقم دارند.)

۱°. اگر n، عدد فرد وغیرمجذور کامل باشد، آن‌گاه

$$s(n)=\frac{\tau(n)}{2}$$

۲°. اگر n، عددی فرد ومجذور کامل باشد، آن‌گاه

$$s(n)=\frac{\tau(n)+1}{2}$$

۳°. اگر n، عددی زوج وبخش‌ناپذیر بر ۴ باشد، آن‌گاه

$$s(n)=0$$

۴°. اگر n بر ۴ بخش‌پذیر وغیرمجذور کامل باشد، آن‌گاه

$$s(n)=\frac{\tau\left(\frac{n}{4}\right)}{2}$$

۵°. اگر n بر ۴ بخش‌پذیر و، ضمناً، مجذور کامل باشد، آن‌گاه

$$s(n)=\frac{\tau\left(\frac{n}{3}\right)+1}{2}$$

برای اثبات این‌قاعده، توجه کنید که

$$n=(2a+1)+(2a+3)+\cdots+(2a+2r-1)=r(r+2a)$$

اگر n بر ۴ بخش‌پذیر باشد (به‌این‌مطلب توجه کنید):

$$\frac{n}{4}=\frac{r}{2}\left(\frac{r}{2}+a\right)$$

۵۲. طرح موردعلاقهٔ خود را، باطرحی‌که درتمرین ۴۸ موردبررسی قراردادیم، مقایسه می‌کنیم. درحالت موردنظرما، مسأله‌خصلت‌مصنوعی‌تری دارد، باروری‌آن‌کمتر است، قانون را دشوارتر می‌توان حدس زد؛ با همهٔ این‌ها، اثبات‌آن، اگر چه پرزحمت است، آگاهی‌های قبلی‌کمی می‌خواهد و، به‌نظر من، این‌طرح باید موردتوجه قرار گیرد.

شکل ۵۳ ـ a، نمونهٔ‌آموزنده‌ای از رابطهٔ دوتایی بین کمیت‌ها و نمایش نموداری‌آن‌ها را نشان می‌دهد (بین دوعدد درست ومثبت n و r، که درآن، n برابراست بامجموع r عدد درست ومثبت متوالی). شکل ۵۳-b،

رابطهٔ مهم‌تری‌را که‌بین‌دوعدد درست وجود دارد،آن‌هم به‌صورتی روشن‌تر، نشان‌می‌دهد. مطالعهٔ‌مقدماتی این‌دو دیاگرام، می‌تواند برای‌ورود به‌مفهوم کلی «رابطه یا نسبت دوتایی» مفید باشد[1].

۵۳. کمیت‌های مجهول‌را می‌توان، بدون‌استفاده ازمحاسبهٔ‌انتگرالی، به‌دست آورد (مثلاً ، می‌توان از اصل کاوالیری یا قاعدهٔ هولدن استفاده کرد). نتیجهٔ محاسبه، درجدول زیر تنظیم شده است:

	مخروط مضاعف	کره	استوانه	
V	$\frac{2\pi a^3}{3}$	$\frac{4\pi a^3}{3}$	$2\pi a^3$	$1:2:3$
S	$2\sqrt{2}\pi a^2$	$4\pi a^2$	$6\pi a^2$	$\sqrt{2}:2:3$
A	$2a^2$	πa^2	$4a^2$	$2:\pi:4$
P	$4\sqrt{2}a$	$2\pi a$	$8a$	$2\sqrt{2}:\pi:4$
X_A	$\frac{a}{3}$	$\frac{4}{3\pi}a$	$\frac{a}{2}$	$\frac{X_A}{X_P}=\frac{2}{3}$
X_P	$\frac{a}{2}$	$\frac{2}{\pi}a$	$\frac{3}{4}a$	

$$S=\sqrt{2}\frac{dV}{da}, \qquad S=\frac{dV}{da} \qquad S=\frac{dV}{da}$$

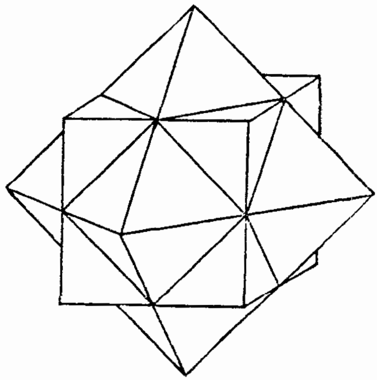
$$P=\sqrt{2}\frac{dA}{da} \qquad P=\frac{dA}{da} \qquad P=\frac{dA}{da}$$

---

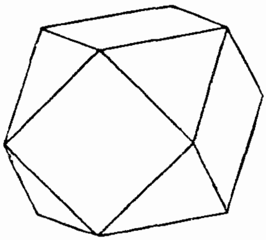
۱. نسبت دوتایی در یک مجموعهٔ M عضوی ، به هر رابطه‌ای گفته می‌شود که بتواند دو عضو موردبحث مجموعه را ازهم جدا کند (مثلاً ، نسبت کوچکتری در مجموعهٔ عددها، یا نسبت «مادر ــ دختر» درمجموعهٔ آدم‌ها و غیره).

۵۴. مسأله به صورتی مفصل تنظیم شده است و، در این کار، عمدی داشته‌ایم: مسأله‌هایی که مضمون «عملی» دارند، ممکن است در ابتدا شامل ابهام‌هایی باشند. من، به‌بعضی از جنبه‌هایی که به‌بحث اختصاصی نیاز دارند، اشاره می‌کنم.

۱°. نقطه‌های مربوط به‌هریك از این مجموعه‌ها، حوزهٔ داخلی و سطح یك‌چندوجهی را پر می‌کنند (شکل‌های ۶۰ ـ a تا ۶۰ ـ c).



شکل ۶۰ ـ a. با نگاه‌کردن به K و O، π و Ob را پیش خود مجسم کنید.

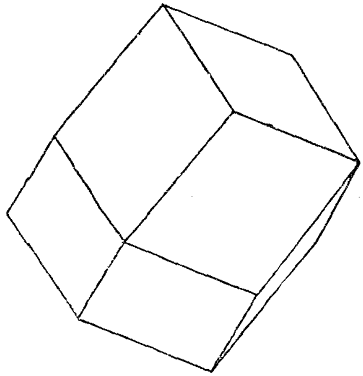


شکل ۶۰ ـ b. مقطع π

K ـ مکعب و وجه‌های آن مربع است.

O ـ هشت‌وجهی منتظم با وجه‌های مثلث متساوی‌الاضلاع (با تمرین ۵ فصل پنجم مقایسه کنید).

π ـ مقطع چندوجهی‌های K و O؛ آن‌را مکعب هشت‌وجهی گویند. این چندوجهی دارای ۱۴ وجه است که ۶تای آن‌ها مربع‌اند و از وجه‌های مکعب K جداشده‌اند و ۸ تا، مثلث‌هایی متساوی‌الاضلاع که از وجه‌های هشت‌وجهی O جدا شده‌اند.



شکل ۶۰ - c. پوستهٔ محدب Ob

Ob - هم شامل K است و هم شامل O ؛ این‌جسم ، کوچکترین مجموعهٔ محدبی است که شامل این‌دو چندوجهی باشد - پوستهٔ محدب آن‌ها. وجه‌های Ob لوزی‌اند؛ این‌چندوجهی را دوازده وجهی لوزوی گویند.

با بریدن هشت چهاروجهی مساوی از K ، می‌توان از K به π رسید.

با اضافه‌کردن شش‌هرم مساوی به K ، می‌توان از K به Ob رسید.

۲°. رأس‌های این‌چهار نوع چندوجهی را دراین‌جا داده‌ایم:

K: $(\pm ۱، \pm ۱، \pm ۱)$

O: $(\pm ۲، ۰، ۰)$، $(۰، \pm ۲، ۰)$، $(۰، ۰، \pm ۲)$

π: $(۰، \pm ۱، \pm ۱)$ $(\pm ۱، ۰، \pm ۱)$، $(\pm ۱، \pm ۱، ۰)$

Ob: رأس‌های دوچند وجهی K و O

۳°. جدول‌زیر، تعداد رأس‌ها (B)، وجه‌ها (G) و یال‌ها (P) را در هریك ازچندوجهی‌های ما، داده است:

	G	B	P
K:	۶	۸	۱۲
O:	۸	۶	۱۲
P:	۶+۸	۱۲	۲۴
Ob:	۱۲	۸+۶	۲۴

۴°. K، O و π در Ob محاط‌اند. از ۱۴ رأس پوستهٔ محدب Ob، هشت‌رأس منطبق بررأس‌های مکعب K ، وبقیهٔ شش‌رأس، رأس‌های هشت‌وجهی O هستند؛ مرکزهای ۱۲وجه Ob، رأس‌های چندوجهی π هستند.

هریال مکعب K ، درتناظر معینی با یك یال هشت‌وجهی O است؛

آن‌ها یکدیگر را نصف می‌کنند؛ آن‌ها، قطرهای یکی از وجه‌های Ob را تشکیل می‌دهند؛ نقطهٔ برخوردآن‌ها، رأسی ازچندوجهی π است.

°۵ . هرچهار چندوجهی، به‌صورتی مشابه، متقارن‌اند ؛ این تقارن‌ها را روی شکل‌آشناتر مکعب K، مشخص می‌کنیم.

مکعب، دونوع صفحهٔ تقارن دارد: سه‌صفحه‌ای که‌موازی با دو وجه مقابل به هم هستند و از میان آن‌ها می‌گذرند ؛ شش‌صفحه‌ای که از زوج یال‌های مقابل به‌هم می‌گذرند . این ۹ صفحهٔ تقارن از مرکز مکعب K می‌گذرند وآن‌را به ۴۸ چهاروجهی مساوی تقسیم می‌کنند.

در مکعب، سه‌نوع مختلف محور تقارن وجود دارد: شش‌تا ازآن‌ها، وسط دویال مقابل K را به‌هم وصل می‌کنند (هریك از این محورها ، محل برخورد دوصفحهٔ تقارن‌اند)؛ چهارتا ، دورأس مقابل مکعب را به‌هم وصل می‌کنند (هریك ازاین محورها، محل برخورد سه‌صفحهٔ تقارن‌اند)؛ سه‌محور تقارن، ازوصل‌کردن مرکزهای‌دووجه‌متقابل‌مکعب به‌دست‌می‌آیند (که هریك ازآن‌ها، محل برخورد چهارصفحهٔ تقارن‌اند). هر ۱۳ محور تقارن، ازمرکز مکعب می‌گذرند. اگر محور تقارنی، از محل برخورد n صفحهٔ تقارن به‌دست‌آید ، «محور تقارن مرتبهٔ n» نامیده می‌شود؛ اگر مکعب را دور چنین محوری به‌اندازهٔ $\frac{۳۶۰}{n}$ درجه دوران دهیم، به‌خودش تبدیل می‌شود.

مرکز مکعب، مرکز تقارن آن است؛ همهٔ صفحه‌های تقارن و همهٔ محورهای تقارن، از این‌مرکز می‌گذرند.

°۶. دونوع تقسیم فضا، که در تمرین ۵۵ فصل دوم دربارهٔآن‌صحبت داشتیم، به‌چندوجهی‌های K و Ob مربوط می‌شود . در نوع اول ، هرکره در مکعبی محاط است و این مکعب ، تمامی فضا را ، بدون رخنه و بدون این‌که پوشش دوباره‌ای ایجاد شود، پرمی‌کنند. در نوع دوم، هرکره دریك هشت‌وجهی لوزوی محاط است و این هشت‌وجهی‌های لوزوی هم، تمامی فضا را، بدون رخنه و بدون‌پوشش دوباره، پرمی‌کنند.

°۷ . برای‌این‌حجم V،دوچندوجهی π و Ob را محاسبه‌کنیم، می‌توان

از مکعب آغاز کرد. اگر چندوجهی محیط بر یک کره باشد، V و S دقیقاً به‌هم بستگی پیدا می‌کنند:

$$K:\qquad S=۲۴,\qquad V=\frac{۱}{۳}\times ۱\times S=۸,$$

$$O:\qquad S=۱۶\sqrt{۳},\qquad V=\frac{۱}{۳}\times\frac{۲}{\sqrt{۳}}\times S=\frac{۳۲}{۳},$$

$$\pi:\qquad S=۱۲+۴\sqrt{۳}\quad V=\frac{۲۰}{۳},$$

$$Ob:\qquad S=۲۴\sqrt{۲},\qquad V=\frac{۱}{۳}\sqrt{۲}\,S=۱۶$$

۸°. این مثال، نمونهٔ خوبی برای واردکردن چند مفهوم کلی است: حل دستگاه نامعادله‌های خطی، برخورد پوستهٔ محدب جسم‌های محدب، تقارن فضایی و غیره.

چند پرسش اختصاصی‌تر: آیا زوج چندوجهی‌های دیگری پیدا می‌شود که رابطهٔ متقابلی شبیه مکعب و هشت وجهی داشته باشند؟ آیا چندوجهی‌های دیگری می‌توان پیدا کرد که بشود به‌کمک آن‌ها فضا را پر کرد؟ و غیره.

۵۵. برای $n=۱,۲,۳,\ldots$ داریم:

$$(\sqrt{۲}-۱)^n=\sqrt{m+۱}-\sqrt{m}$$

که در آن، m عدد درستی است که، به‌صورت معینی، با n بستگی دارد. این حکم را، با روش استقرای ریاضی، ثابت کنید (که دشوار نیست).

۵۶. فرض کنید، a، b و D سه‌عدد درست و مثبت و D غیرمجذور کامل باشد وضمناً، داشته‌باشیم:

$$a^۲-b^۲D=۱$$

مثلاً، $a=۲$، $b=۱$ و $D=۳$. اگر n را عدد درست و مثبتی فرض کنیم، آن‌وقت، عددهای درست‌ومثبت A و B وجود دارند، به‌نحوی که‌داشته‌باشیم:

$$(a-b\sqrt{D})^n=A-B\sqrt{D}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که

$$(a+b\sqrt{D})^n=A+B\sqrt{D}\;,$$

$$A^{۲} - B^{۲}D = (a + b\sqrt{D})^n (a - b\sqrt{D})^n =$$
$$= (a^{۲} - b^{۲}D)^n = ۱$$

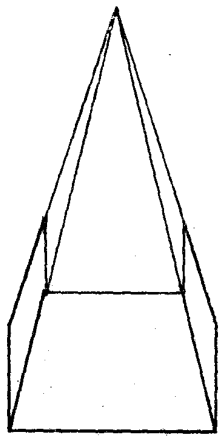
وهم این که

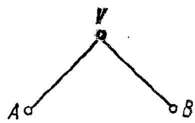
$$(a - b\sqrt{D})^n = \sqrt{A^{۲}} - \sqrt{B^{۲}D} =$$
$$= \sqrt{A^{۲}} - \sqrt{A^{۲} - ۱}$$

تغییر اندکی لازم است تا بتوان ، به‌همین‌ترتیب ، نتیجهٔ تمرین ۵۵ را تعمیم داد ویاآن‌را با تمرین حاضر، به‌یک‌مسأله تبدیل کرد.

یادداشت‌های تکمیلی ۲۴، ۲۵، ۴۰، ۴۱، ۵۷ و ۵۸، نیازی به‌توضیح اضافی ندارند.

فهرست موضوعی

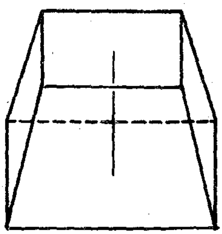




a   b

$V = B - A$

مسألهٔ مناسب
خویشاوند

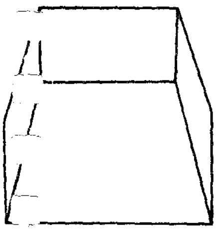


b

V

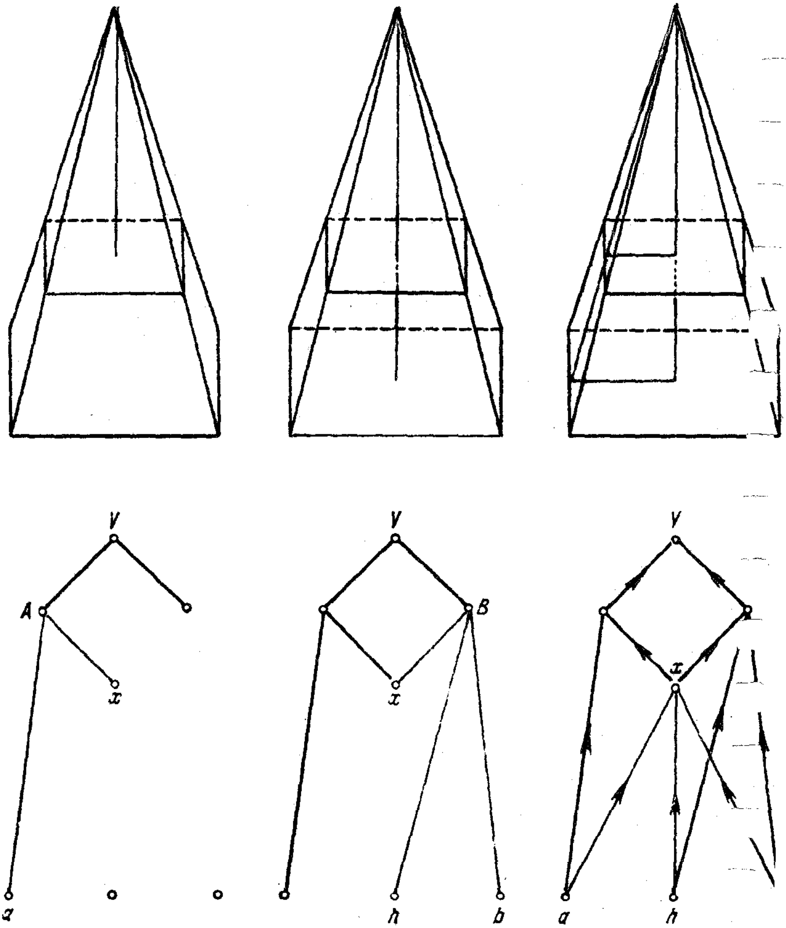
a   h   b

چه داده شده است؟



V

چه خواسته‌شده‌است؟



$$A = \frac{a^2 x}{3}$$

مقداری ازاین نوع را،
چگونه می‌توان محاسبه
کرد؟

$$B = \frac{b^2 (x+h)}{3}$$

به همین ترتیب
محاسبه کنید

$$\frac{x}{x+h} = \frac{a}{b}$$

ـرح واقعی حرکت
ـازداده‌ها به‌مجهول