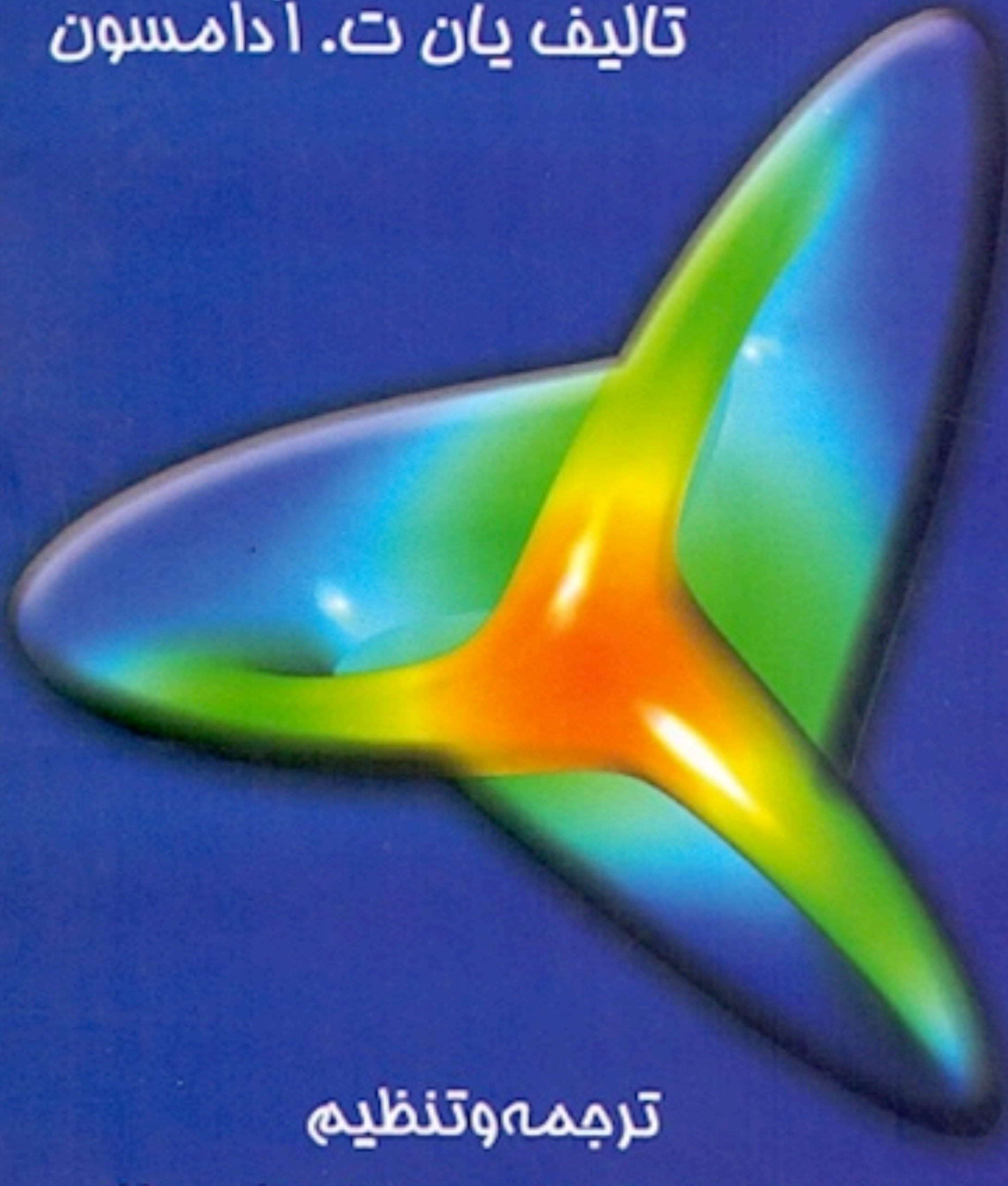
واحد مجلسی

خودآموز

توپولوژی عمومی

تالیف یان ت. آدامسون



ترجمه و تنظیم

مهندس علی توکلی - دکتر علی رجالی

خودآموز توپولوژی عمومی

مولف: یان تی.آدامسون

ترجمه و تنظیم: علی توکلی – علی رجالی

چاپ دوم آذر ۱۳۹۰

«مقدمه مولف»

این کتاب، یک «کتاب کار» نامیده می‌شود از این جهت که یک کتاب معمولی همانند بقیه کتابهای درسی نیست. کتابهای مرسوم، در هر بخش ابتدا تعاریف قابل استفاده را آورده سپس چند قضیه با اثبات کامل ارائه می نمایند و در ادامه چند مثال را اضافه می‌کنند. تمرین‌های کتاب توانایی درک مطالب از جمله تعریف و قضایا را برای خواننده مقدور می‌سازد. خواننده می‌تواند تعاریف، قضایا، اثباتها، مثالها و تمرینها را با خواندن این کتاب بدست آورد ولی با ترتیبی متمایز!

در قسمت اول کتاب، یک مرور سریع به تعاریف اصلی توپولوژی عمومی خواهیم داشت که همواره تعداد زیادی تمرین می‌باشد که بعضی از آنها را قضیه می‌نامند. البته استفاده از کلمه قضیه، به خاطر مشکل بودن آن نیست، بلکه بخاطر اهمیت و کاربرد آن می‌باشد. تمرینها بصورت خاصی درجه بندی نشده‌اند؛ به هر حال تمام مسائلی که در زندگی روزمره به ریاضیات بر می خورد به ترتیب سختی آنها مرتب نشده اند. بعضی از این مسائل ساده و ملموس اند در حالی که بعضی دیگر از نتایج سخت ریاضی هستند. راه حلهای تمرینها و اثبات قضایا در بخش اول کتاب آورده نشده است زیرا این یک کتاب کار بوده و خواننده را دعوت به تلاش می کند تا خود بتواند مسائل و قضایا را حل نماید. پس از تمرینهای مشکل‌تر، یک راهنمایی مختصر آورده شده تا خواننده بهتر بتواند در مورد مسائل فکر کند. قسمت دوم کتاب شامل

جوابهای کامل تمرینها و اثبات کامل قضایا می‌باشد.

توپولوژی عمومی یک شاخه بسیار مهم از ریاضیات می‌باشد، بالاخص برای آنهایی که بطور جدی‌تر به ریاضی و مسائل مطرح شده توسط استاد در کلاس می‌پردازند. روشهای مختلفی برای تدریس این درس آزمایش شده است، که یکی از آنها توسط رابرت لی مور (۱۹۷۴—۱۸۸۲) معرفی گردید و موفقیت آن به اثبات رسیده است. یکی از عوامل موفقیت مور، استفاده از دانشجویان و ارج دادن به آنها در پای تخته کلاس در هنگام تدریس می‌باشد. پیروان و مقلدان او از اینکه قادر به اجرای این روش بودند لذت برده و تعداد کمی این روش را در زندگی روزمره نیز استفاده می‌کردند. این کتاب حاصل زحمات اینجانب در تهیه کتابی مقدماتی و خودآموز توپولوژی عمومی، قابل استفاده برای نسل‌های متعدد از دانشجویان دانشگاه دندی، می‌باشد. به غیر از دانشجویانی که مور آنها را ارج و بها می‌داد، سایر دانشجویان روش تدریس او را با اشتیاق فراوان بکار می‌بردند.

دانشجویان در دانشگاه دندی پس از فراگیری مطالب مقدماتی و تلاش برای حل تمرینها (با نکته‌ها و اشاره‌های بسیار کمتر که در این کتاب آمده است) تنها زمانی راه حل کامل مسائل را می دیدند که بطور کامل در کلاس بحث و تبادل نظر کرده باشند. دانشجویان تمام مسائل را حل نمی‌کردند و در قیاس با سایر دروس، میزان شرکت دانشجویان در این درس بسیار بالا بود. دو تن از دانشجویان که این درس را به‌صورت خودآموز، بدون استفاده از استاد، با انجام تمرین اختیار کردند، نمرات عالی دریافت نمودند. در کلاس درس براحتی می‌توان مطمئن شد که دانشجویان قبل از تلاش برای حل مسائل به جوابهای آن مراجعه نکرده‌اند. اگر مسائل و راه حلها در یک جلد بیایند، نمی‌توان از رجوع به جوابها، قبل از حل مسائل، مطمئن بود. به خوانندگان توصیه می‌شود، چون این کتاب خودآموز می باشد، ابتدا سعی کنند مسائل را حل کنند

و سپس به راه حل آنها مراجعه نمایند.

لازم می‌دانم از دانشجویان دانشگاه دندی که با دقت روی مطالب این کتاب کار کرده‌اند، قدردانی کنم. بویژه از ملکوم دابسون و رز اندرسون. همچنین از دوست خوبم کیس ادواردمن به خاطر کمکهای مؤثرش صمیمانه تشکرمی کنم. بعلاوه از همسرم بخاطر تشویق هایش در طول نوشتن و تایپ این کتاب بی‌اندازه متشکرم.

دندی — اسکاتلند

آگوست ۱۹۹۵

«مقدمه مترجمین»

یکی از روشهایی که در یادگیری ریاضی و حل مسائل آن بسیار مفید است آنست که در برخورد با قضایای ریاضی آنها را به عنوان یک مسئله نگاه کرده و شروع به اثبات آن نمود. بدیهی است در ابتدا ممکن است نتوان به اثبات آن پی برد ولی فکر کردن روی مسئله قبل از دیدن حل آن، انسان را قادر می‌سازد که با روبرو شدن با مسائل جدید این جرأت حاصل شود که می‌توان مسائل را حل نمود. نکته‌ای که هست ممکن است در ابتدا این روش وقت‌گیر باشد ولی در اثر تکرار و آشنا شدن با نکات و تکنیک‌های قضایا، پس از مدتی اتکای به نفس پیدا نموده و در موقع امتحان براحتی می‌توان پاسخگوی مسائل جدید شد. ضمناً در این روش انسان همواره خود را در حال امتحان قرار می‌دهد و همین که به مشکل برخورد کرد در صدد حل آن بر می آید که ابتدا با دیدن راهنمایی قضیه و در نهایت حل کامل آن، اثبات قضیه در ذهن باقی می‌ماند و می‌توان به‌عنوان یک وسیله و ابزار در حل قضایا و مسائل مشکل‌تر استفاده نمود. از آنجایی که توپولوژی عمومی یکی از مهمترین دروس رشته ریاضی محض است و ایده های آن در تمام ریاضیات دیده می شود، قضایا و مسأل آن می تواند باعث رشد و ثبات فکری دانشجویان گردد. نویسنده کتاب روش بالا را در تألیف کتاب برگزیده است لذا ما ضمن تفکیک مطالب، آنرا برای خواننده با نام‌گذاری‌های گوناگون، به‌جای استفاده از کلمه تمرین، روان و آسان ساختیم به گونه ای که قابل

استفاده برای دانشجویان دیگر رشته ها مثل فیزیک و برق و الکترونیک به صورت خود آموز نیز باشد. امید است قابل استفاده علاقمندان و دانشجویان محترم قرار گیرد. با وجود آنکه کتاب چندین بار تصحیح گردیده است و در چاپ جدید نیز اینکار توسط تعدادی از همکاران به خوبی انجام گرفته، لیکن اگر خطای ترجمه و یا اشکالات فنی دیگری به نظر خوانندگان گرامی رسید، بسیار سپاسگزار خواهیم شد که ما را به نحو مقتضی در جریان قرار دهند.

در پایان لازم است از معاونت محترم پژوهشی دانشگاه آزاد اسلامی واحد شهر مجلسی و کارکنان کتابخانه و انتشارات این واحد که برای چاپ این کتاب زحمات بسیاری را متحمل شدند، صمیمانه تشکر و قدردانی نماییم. همچنین از زحمات آقای جعفر اسماعیلی و آقای مسعود گلناری برای تایپ و طراحی جلد کتاب، بسیار سپاسگزاریم.

«دکتر علی رجالی»
«استاد گروه ریاضی»
«دانشگاه اصفهان»

«مهندس علی توکلی»
«مربی گروه ریاضی»
«دانشگاه آزاد اسلامی واحد مجلسی»

فهرست مندرجات

بخش I

مطالب

فصل ۱

فضاهای توپولوژیک

در سراسر این کتاب نمادهای استاندارد زیر را بکار می‌بریم:

$\mathbb{N}$ مجموعهٔ اعداد طبیعی $\{۰, ۱, ۲, \ldots\}$ است.

$\mathbb{Q}$ مجموعهٔ اعداد گویا است.

$\mathbb{R}$ مجموعهٔ اعداد حقیقی است.

برای هر عدد صحیح مثبت n، $\mathbb{R}^n$ مجموعهٔ تمام $n-$ تایی‌های مرتب $(x_۱, x_۲, \ldots, x_n)$ از اعداد حقیقی است.

برای هر مجموعهٔ E، **مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های** E با $P(E)$ نشان داده می‌شود.

اگر X یک زیرمجموعهٔ E باشد، **متمم** آن نسبت به E با $C_E(X)$ نشان داده می‌شود.

ما با تعریفی شروع می‌کنیم که مفهوم آشنای فاصله را در روی یک خط، در یک صفحه یا در یک فضای سه بعدی برای مجموعه‌های دلخواه بکار می‌برد.

تعریف ۱ منظور از یک **متریک** روی E یک نگاشت d از $E \times E$ به $\mathbb{R}$ است بطوریکه:

م۱ برای هر دو نقطهٔ x و y در E داریم $d(x, y) \geq ۰$ و $d(x, y) = ۰$ اگر و تنها اگر $x = y$.

م۲ برای هر دو نقطهٔ x و y در E داریم $d(x,y) = d(y,x)$.
م۳ برای هر سه نقطهٔ x و y و z در E داریم

$$d(x,z) \leq d(x,y) + d(y,z)$$

که این نابرابری، نابرابری مثلثی است.

منظور از یک **فضای متریک**، زوج مرتبی مانند (E,d) شامل یک مجموعهٔ E و یک متریک d روی E است. وقتی متریک d در یک مبحث، مشخص باشد، به جای (E,d) می‌توان از «فضای متریک E» صحبت کرد.

هفت تمرین اول، برهان‌هایی ساده دارد. بررسی شرایط معرف یک متریک برای نگاشت‌های مفروض d آسان می‌باشد. تنها مشکلات احتمالی عبارتند از اثبات نابرابری مثلثی در تمرین ۲، که در آن به نابرابری کشی نیاز داریم.(اگر $a_1, \ldots, a_n; b_1, \ldots, b_n$ اعداد حقیقی باشند، آنگاه $(\sum a_i b_i)^2 \leq (\sum a_i^2)(\sum b_i^2)$) و در تمرین ۷ اثبات اینکه، $d(f,g) = 0$ ایجاب کند $f = g$. که در آن بایستی به یاد داشته باشیم که اگر یک تابع پیوسته در یک نقطهٔ a غیرصفر باشد آنگاه این تابع در یک زیر بازهٔ شامل a غیرصفر است.

مثال ۱ (تمرین ۱) فرض کنید $E = \mathbb{R}$ و برای هر x و y در E، $d(x,y) = |y-x|$. نشان دهید که d یک متریک روی E است و آنرا **متریک معمولی** می‌نامیم.

مثال ۲ (تمرین ۲) فرض کنید $E = \mathbb{R}^n$ و $d(x,y) = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i - x_i)^2}$ برای هر $x = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ و $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n)$ در E. نشان دهید که d یک متریک روی E است. ما آنرا متریک معمولی یا **متریک اقلیدسی** روی E می‌نامیم.

مثال ۳ (تمرین ۳) فرض کنید $E = \mathbb{R}^2$ و $d(x,y) = |y_1 - x_1| + |y_2 - x_2|$ برای هر $x = (x_1, x_2)$ و $y = (y_1, y_2)$ در E. نشان دهید d یک متریک روی E است.

مثال ۴ (تمرین ۴) فرض کنید $E=\mathbb{R}^{2}$ و $d(x,y)=\max\{|x_1-y_1|,|x_2-y_2|\}$ برای هر $x=(x_1,x_2)$ و $y=(y_1,y_2)$ در E. نشان دهید d یک متریک روی E است.

مثال ۵ (تمرین ۵) فرض کنید A یک مجموعه و E مجموعهٔ همه توابع با مقدار حقیقی و کراندار روی A باشد و $d(f,g)=\sup\limits_{x\in A}|g(x)-f(x)|$ برای هر f و g در E. نشان دهید d یک متریک روی E است. آنرا **متریک یکنواخت** روی E می‌نامیم.

مثال ٦ (تمرین ٦) فرض کنید E یک مجموعه باشد و

$$d(x,y)=\begin{cases} 0 & \text{اگر} \quad x=y \\ 1 & \text{اگر} \quad x\neq y \end{cases}$$

نشان دهید d یک متریک روی E است و آنرا **متریک گسسته** روی E می‌نامیم.

مثال ۷ (تمرین ۷) فرض کنید I یک فاصله از خط حقیقی و E مجموعهٔ توابع با مقدار حقیقی پیوسته روی I باشد و $d(f,g)=\int_I|g-f|$ برای هر f و g در E. نشان دهید که d یک متریک روی E است.

تعریف ۲ فرض کنیم (E,d) یک فضای متریک، r یک عدد حقیقی مثبت و a یک نقطه از E باشد در اینصورت مجموعهٔ $V_d(a,r)=\{x\in E:d(a,x)<r\}$، $r-$ **گوی** به مرکز a نامیده می‌شود. در صورتی که متریک مبحث مورد نظر مشخص باشد می‌توان زیرنویس d را حذف کرد.

تعریف ۳ مجموعهٔ $V'_d(a,r) = \{x \in E : \circ < d(a,x) < r\}$، $r-$ **گوی محذوف** یا **سوده** به مرکز a نامیده می‌شود. (این اصطلاح «گوی» از فضای اقلیدسی $R^۳$ گرفته شده است.)

براحتی نمی‌توان انگیزه تعریف بعدی را بیان کرد. در دو فصل اول کتاب، نه در کل کتاب، علت اصلی آن مشخص می‌شود. اما این تعریف احتمالاً با ملاحظه فضای متریک، که در تمرین ۱۵ آمده است، همراه با معرفی مجموعه‌ای باز که امکان مطالعه پیوستگی توابع را مقدور می‌سازد، بدون اینکه بطور دقیق به متریک اشاره‌ای شود، پیشنهاد شده است.

تعریف ۴ فرض کنید E یک مجموعه باشد. یک **توپولوژی** روی E، یک زیرمجموعهٔ T از $P(E)$ است یعنی مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های E، بطوریکه:

ت۱ E و $\varnothing$ متعلق به T هستند.

ت۲ اجتماع هر خانواده از مجموعه‌های در T نیز مجموعه‌ای از T است.

ت۳ مقطع هر خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌های در T نیز مجموعه‌ای از T است.

فرض کنید T و T' دو توپولوژی روی یک مجموعه E باشند. گوییم T **ضعیفتر** از T' است یا T' **قوی‌تر** از T است هرگاه $T \subseteq T'$.

راهنمایی بررسی شرایط توپولوژی در تمرین‌های ۸ و ۹ کاملاً بدیهی است. اما به توپولوژیهای معرفی شده در آنها مکرراً مراجعه می‌کنیم. تمرینهای ۱۰ تا ۱۳ مشکل نیستند ولی نیازمند کمی دقت در تشخیص حالتهای متفاوت هستند که باید درنظر گرفته شوند. توپولوژیهای معرفی شده در این تمرینها به‌عنوان مثال و مثال نقض مفید هستند به‌طوری که هر ریاضی‌دان جوان باید اندوختهٔ فراوانی از آنها داشته باشد.

تمرین ۱۵، همانطورکه در بالا ذکر شد، فرم اولیهٔ توپولوژیهای روی یک مجموعه است. بررسی شرط ت۳ وابسته به این واقعیت است که می‌نیمم یک مجموعه متناهی از اعداد حقیقی مثبت، یک عدد حقیقی مثبت است.

تمرین ١٦، آسان است. در تمرین ۱۷ نیاز داریم که برای هر q در $V(a,r)$ یک گوی به مرکز q پیدا کنیم که بطور کامل در $V_d(a,r)$ قرار می‌گیرد. رسم یک شکل

کوچک از موقعیت مسئله در حالت خاصی که $E=\mathbb{R}^{۲}$ و d یک متریک اقلیدسی است، شعاع مناسب را نشان خواهد داد.

در تمرینهای ۱۸ و ۱۹ یادآور می‌شویم که یک توپولوژی، مجموعه‌ای است از مجموعه‌ها.

از این‌رو برای اثبات برابری دو توپولوژی $T_{۱}$ و $T_{۲}$ ابتدا نشان می‌دهیم $T_{۱}\subseteq T_{۲}$ و سپس $T_{۲}\subseteq T_{۱}$.

مثال ۸ (تمرین ۸) فرض کنید E یک مجموعه باشد. نشان دهید $T=P(E)$، مجموعهٔ تمام زیرمجموعه‌های E، یک توپولوژی روی E است. آن را **توپولوژی گسسته** می‌گویند. بوضوح این توپولوژی قوی‌ترین توپولوژی روی E می‌باشد.

مثال ۹ (تمرین ۹) فرض کنید E یک مجموعه باشد. نشان دهید $T=\{\varnothing,E\}$ یک توپولوژی روی E است. آن را **توپولوژی بدیهی** یا **توپولوژی ناگسسته** می‌گویند و بوضوح این توپولوژی ضعیف‌ترین توپولوژی روی E است.

مثال ۱۰ (تمرین ۱۰) فرض کنید E یک مجموعه و p نقطه‌ای از E می‌باشد. نشان دهید مجموعهٔ $T_p=\{\varnothing\}\cup\{X\in P(E):p\in X\}$ یک توپولوژی روی E است. آن را **توپولوژی نقطهٔ خاص** می‌نامند. یک حالت ویژه آن توپولوژی $T=\{\varnothing,\{۰\},E\}$ روی $E=\{۰,۱\}$ است که آن را **توپولوژی سیرپینسکی** می‌نامند.

مثال ۱۱ (تمرین ۱۱) فرض کنید E یک مجموعه و p نقطه‌ای از E می‌باشد. نشان دهید مجموعه $T_{-p}=\{E\}\cup\{X\in P(E):p\notin X\}$ یک توپولوژی روی E است. آن را **توپولوژی نقطهٔ خارج شده** می‌نامند.

مثال ۱۲ (تمرین ۱۲) فرض کنید E یک مجموعهٔ نامتناهی باشد. نشان دهید مجموعهٔ $T = \{\varnothing\} \cup \{X \in P(E) : C_E(X)$ متناهی $\}$ یک توپولوژی روی E است. آن را **توپولوژی متمم باپایان** روی E می‌نامیم.

مثال ۱۳ (تمرین ۱۳) فرض کنید E یک مجموعهٔ نامتناهی و p یک نقطه از E می‌باشد. نشان دهید که $T = \{X \in P(E) : p \notin X$ یا $C_E(X)$ متناهی $\}$ یک توپولوژی روی E است. آن را **توپولوژی فورت** می‌نامند.

تمرین ۱۴ تمام توپولوژیهای ممکن روی یک مجموعهٔ سه عضوی را پیدا کنید.

تمرین ۱۵ فرض کنید (E, d) یک فضای متریک باشد. زیرمجموعهٔ U از E را نسبت به متریک d باز گویند اگر برای هر نقطهٔ x از U یک عدد حقیقی مثبت r_x وجود داشته باشد به طوری‌که $V_d(x, r_x) \subseteq U$. فرض کنید T_d مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های E باشد که نسبت به d باز هستند. نشان دهید T_d یک توپولوژی روی E است. آن را **توپولوژی ایجاد شده توسط متریک** d می‌نامیم.

تمرین ۱۶ فرض کنید E یک مجموعه باشد. نشان دهید توپولوژی ایجاد شده توسط متریک گسسته، همان توپولوژی گسسته است.

تمرین ۱۷ فرض کنید (E, d) یک فضای متریک، a یک عضو E و r یک عدد حقیقی مثبت باشد. ثابت کنید که $V_d(a, r) \in T_d$.

تمرین ۱۸ فرض کنید d یک متریک روی مجموعهٔ E باشد. d' را نگاشت از $E \times E$ به $\mathbb{R}$ بگیرید که با دستور $d'(x,y) = \min\{۱, d(x,y)\}$ برای هر x و y در E تعریف شده است. ثابت کنید d' یک متریک روی E است، بطوریکه $T_{d'} = T_d$.

تمرین ۱۹ نشان دهید متریکهای تعریف شده در تمرینهای ۳ و ۴ روی $\mathbb{R}^۲$، توپولوژیهای یکسان با متریک اقلیدسی ایجاد می‌کنند.

توپولوژی T روی مجموعهٔ E **متریک‌پذیر** نامیده می‌شود، هرگاه یک متریک d روی E موجود باشد بطوری‌که $T = T_d$ (توجه کنید که تمرینهای ۱۸ و ۱۹ نشان می‌دهند که متریک d لزوماً یکتا نیست.)

تمرینهای ۲۰ و ۲۱ شرایط بهتری را در تعریف متریک معرفی می‌کنند که مفید واقع می‌شوند. تمرین ۱۵ مدلی برای تعریف توپولوژیهای ایجاد شده فراهم می‌کند. بررسی اینکه نگاشتهای تعریف شده در تمرینهای ۲۲ و ۲۳ در شرایط مربوط صدق می‌کنند یا نه کاملاً سر راست است.

تمرین ۲۰ فرض کنید E یک مجموعه باشد. یک **شبه متریک** روی E یک نگاشت p از $E \times E$ به $\mathbb{R}$ است بطوری‌که علاوه بر شرایط م۱ و م۲ برای یک متریک، در شرط زیر نیز صدق می‌کند:

ش‌م۱ برای هر x و y در E داریم $p(x,y) \geq ۰$ و اگر $x = y$ آنگاه $p(x,y) = ۰$.

یک فضای شبه متریک یک زوج مرتب (E,p) می‌باشد که متشکل از یک مجموعهٔ E و یک شبه متریک p روی E است. نشان دهید چگونه توپولوژی ایجاد شده توسط یک شبه متریک تعریف می‌شود.

تمرین ۲۱ فرض کنید که E یک مجموعه باشد. یک **متریک گون** روی E یک نگاشت q از $E \times E$ به $\mathbb{R}$ است به طوری‌که در شرایط م۱ و م۳ برای یک متریک

صدق می‌کند اما شرط م۲ لزوماً برقرار نباشد. یک فضای متریک گون یک زوج مرتب (E, q) متشکل از یک مجموعهٔ E و یک متریک گون q روی E است. بررسی کنید که چگونه توپولوژی ایجاد شده توسط یک متریک گون تعریف می‌شود.

تمرین ۲۲ فرض کنید E یک مجموعه و f یک نگاشت از E به $\mathbb{R}$ باشد. نشان دهید که نگاشت p از $E \times E$ به $\mathbb{R}$ که برای هر x و y در E با دستور $p(x,y) = |f(x) - f(y)|$ تعریف می‌شود، یک شبه متریک روی E است.

تمرین ۲۳ نشان دهید که نگاشت q از $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$ به $\mathbb{R}$ داده شده توسط

$$q(x,y) = \begin{cases} y - x & \text{اگر } x \leq y \\ ۱ & \text{جاهای دیگر} \end{cases}$$

یک متریک گون روی $\mathbb{R}$ است.

تمرین ۲۴ فرض کنید (E, p) یک فضای شبه متریک باشد. رابطهٔ $R = \{(x,y) \in E \times E : p(x,y) = ۰\}$ را درنظر بگیرید. نشان دهید R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی E است. همچنین نشان دهید چگونه می‌توان یک متریک p^* روی E/R تعریف کرد بطوریکه برای x و y در E داشته باشیم؛ $p^*(\eta(x), \eta(y)) = p(x,y)$، که در آن η نگاشت کانونی پوشا از E به E/R است.

راهنمایی بررسی اینکه R یک رابطهٔ هم‌ارزی است آسان می‌باشد. برای تعریف یک متریک p^* روی E/R باید برای تمام R کلاسهای X و Y در R، $p^*(X,Y)$ را تعریف کنیم. طبیعی است برای انجام این کار عناصر x و y از E را به ترتیب در X و Y انتخاب کرده و قرار دهیم $p^*(X,Y) = p(x,y)$. اما لازم است نشان دهیم که $p^*(X,Y)$ همانطور که تعریف شده تنها به $R-$ کلاسهای X و Y بستگی دارد نه به انتخاب x و y.

تمرین ۲۵ فرض کنید E یک مجموعه باشد. یک **فرامتریک** روی E، نگاشت u از $E \times E$ به $\mathbb{R}$ که در
شرایط م۱ و م۲ برای یک متریک صدق می کنند و همچنین شرط زیر نیز برقرار است:

فم۳ برای هر سه نقطهٔ x، y و z در E داریم $u(x,z) \leq \max\{u(x,y), u(y,z)\}$.

بدیهی است که یک فرامتریک خود یک متریک است.

مثال ۱۴ نشان دهید هر مثلث در یک فضای فرامتریک، متساوی‌الساقین است و ضلعهای مساوی کوتاهتر از قاعده نیستند.

تمرین ۲۶ فرض کنید $\mathbb{Q}$ مجموعهٔ اعداد گویا و p یک عدد اول باشد. نگاشت u را از $\mathbb{Q} \times \mathbb{Q}$ به $\mathbb{R}$ بصورت زیر تعریف می‌کنیم. اگر $x = y$ قرار دهید $u(x,y) = \circ$. اگر x و y اعداد گویای متمایز باشند و $y - x = p^{\alpha} m/n$ که در آن m و n اعداد صحیح نسبت به هم اول هستند که بر p بخش‌پذیر نیستند آنگاه قرار می‌دهیم $u(x,y) = p^{-\alpha}$.
نشان دهید که u یک فرامتریک روی E است. آن را **متریک** $p-$ **تایی** گوییم.

یک **فضای توپولوژیکی** زوج مرتب مانند (E,T) است که متشکل از یک مجموعهٔ E و یک توپولوژی T روی E است. E را **مجموعهٔ اولیه** و T را توپولوژی فضای توپولوژیکی (E,T) می‌نامیم. وقتی توپولوژی T از مبحث مورد نظر مشخص باشد بجای (E,T) می‌توان از «فضای توپولوژیک E» سخن به میان آورد.

تعریف ۵ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیک باشد. مجموعه‌های متعلق به خانوادهٔ T، مجموعه‌های $T-$ باز نامیده می‌شوند و یا اگر T مشخص باشد بطور ساده آنها را **مجموعه‌های باز** گوییم. وقتی از این اصطلاح استفاده می‌کنیم شرایط ت۱ تا ت۳ بصورت زیر معرفی می‌شوند:

ت۱ E و $\varnothing$ مجموعه‌های باز هستند.
ت۲ اجتماع هر خانواده از مجموعه‌های باز، یک مجموعه باز است.
ت۳ مقطع هر خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌های باز، یک مجموعه باز است.

اگر T و T' توپولوژیهایی روی یک مجموعهٔ E باشند آنگاه T را قوی‌تر از T' یا T' را ضعیف‌تر از T گوییم هرگاه $T \supseteq T'$. بنابراین T قوی‌تر از T' است اگر و تنها اگر هر زیرمجموعهٔ $T'-$ باز، یک زیر مجموعهٔ $T-$ باز باشد.

تعریف ۶ فرض کنید T یک توپولوژی روی مجموعهٔ E باشد. یک **پایه** برای توپولوژی T، زیرمجموعه‌ای مانند B از T است بطوریکه که هر مجموعه در T بصورت اجتماع خانواده‌ای از عناصر B باشد.

منظور از معرفی مفهوم پایه یک توپولوژی بطور ساده آن است که امکان توصیف آن توپولوژی را بدون ارائه عملی تمام عناصرش بوجود آوریم. لذا برای ایجاد یک توپولوژی، معرفی مجموعهٔ پایه کفایت دارد.

اکنون دو قضیه می‌آوریم البته این نامگذاری نه به‌دلیل مشکل بودن آنهاست بلکه برای تأکید بر این است که از اهمیت کافی برای به خاطر سپردن برخوردار هستند. قضیه ۱ محکی را ارائه می‌دهد برای آنکه یک خانواده از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ E یک پایه برای توپولوژی داده شده T روی E باشد. البته این محک بطور مستقیم اثبات می‌شود. قضیه ۲ شرطی ارائه می‌دهد برای آنکه یک خانواده از زیرمجموعه‌های E پایه‌ای برای یک توپولوژی باشد. لذا در اینجا باید نشان دهیم که چگونه این توپولوژی از پایه مورد نظر ساخته می‌شود. به‌وضوح اگر B یک پایه برای یک توپولوژی T باشد آنگاه تمام مجموعه‌های T اجتماعی از عناصر B هستند. بنابراین غیرمنطقی نیست اگر مجموعهٔ تمام چنین اجتماع‌هایی را امتحان کنیم و ببینیم که آیا این مجموعه یک توپولوژی تشکیل می‌دهد. تمرینهای ۲۹ تا ۳۱ اثباتهای آسانی با بررسی شرایط قضیه ۲ دارند همچنین آنها بر اندوخته‌های ما از مثالهای توپولوژی می‌افزایند.

قضیه ۱ (تمرین ۲۷) فرض کنید T یک توپولوژی روی مجموعه E و B یک

زیرمجموعهٔ T باشد. آنگاه B یک پایه برای T است اگر و تنها اگر برای هر مجموعهٔ U در T و هر نقطهٔ x از U، مجموعهٔ W در B موجود باشد بطوریکه $x \in W \subseteq U$.

قضیه ۲ (تمرین ۲۸) فرض کنید E یک مجموعه و B مجموعه‌ای از زیرمجموعه‌های E باشد بطوریکه

۱) $E = \bigcup B$.

۲) برای هر مجموعه $W_۱, W_۲$ در B و هر نقطه x در $W_۱ \cap W_۲$ وجود داشته باشد مجموعه W در B بطوریکه $x \in W \subseteq W_۱ \cap W_۲$.

دراین‌صورت یک توپولوژی‌یکتا T_B روی E وجود دارد، بقسمی‌که B یک پایهٔ آن است.

تمرین ۲۹ فرض کنید E یک مجموعه و $(X_i)_{i\in I}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های دوبه‌دو مجزای E باشد به طوری‌که $\cup_{i\in I} X_i = E$. ثابت کنید $X = \{X_i\}$ یک پایه برای توپولوژی T_X روی E می‌باشد. توپولوژی‌هایی از این نوع به **توپولوژی افراز** معروفند. یک مثال خاص **توپولوژی فرد — زوج** روی $\mathbb{N}$ است که پایهٔ آن $\{\{۲k, ۲k+۱\}\}_{k\in\mathbb{N}}$ می‌باشد.

تمرین ۳۰ فرض کنید E یک مجموعهٔ کاملاً مرتب با رابطهٔ $\leq$ باشد (به این مفهوم که برای هر x و y در E داشته باشیم $y \leq x$ یا $x \leq y$). نشان دهید E همراه با خانوادهٔ همهٔ بازه‌های باز، یعنی همهٔ مجموعه‌های بفرم $\{t \in E : a < t < b\}$،$\{t \in E : t < a\}$ و یا $\{t \in E : t > b\}$ یک پایه برای یک توپولوژی روی E است، آن را **توپولوژی ترتیبی** روی E می‌نامند.

تمرین ۳۱ فرض کنید E یک مجموعهٔ مرتب کلی بوسیلهٔ رابطهٔ $\leq$ باشد. نشان دهید که E همراه با مجموعهٔ تمام مجموعه‌های بفرم $\{t \in E : t > a\}$، یک پایه برای یک توپولوژی روی E است. آن را **توپولوژی ترتیبی راست** روی E می‌نامیم.

تعریف ۷ فرض کنید E یک مجموعه و S یک مجموعه از زیر مجموعه‌های E باشد. مجموعهٔ $\tau(S)$ متشکل از همهٔ توپولوژی‌های روی E که شامل S هستند غیرتهی است چون $P(E)$ متعلق به $\tau(S)$ است. فرض کنید $T(S)$ مقطع تمام عناصر $\tau(S)$ باشد، یعنی مجموعهٔ همهٔ مجموعه‌هایی که هر کدام متعلق به تمام توپولوژیهایی در $\tau(S)$ است. در این‌صورت به آسانی بررسی می‌شود که $T(S)$ یک توپولوژی روی E شامل S است همچنین بدیهی است که کوچکترین توپولوژی روی E با این خاصیت است. $T(S)$ را **توپولوژی تولید شده** بوسیلهٔ S روی E، می‌نامیم.

مزیت ایده‌های معرفی شده در این‌جا آن است که ما برای توصیفمان از یک توپولوژی می‌توانیم از ارائه همه مجموعه‌های آن یا حتی همهٔ عناصر پایهٔ آن خودداری کنیم. تمرین ۳۲ تمام عناصر توپولوژی تولید شده توسط یک مجموعهٔ داده شده را مشخص می‌کند.

قضیه ۳ (تمرین ۳۲) فرض کنید E یک مجموعه و S یک مجموعه از زیر مجموعه‌های E باشد. آنگاه توپولوژی $T(S)$ روی E تولید شده بوسیلهٔ S، شامل مجموعهٔ E و همهٔ زیرمجموعه‌هایی است که اجتماع خانواده‌ای از مقطع باپایانی از مجموعه‌های در S می‌باشد.

تعریف ۸ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی باشد. زیر مجموعهٔ F از E، $T-$ **بسته** (یا بطور ساده بسته) گفته می‌شود اگر $C_E(F) \in T$. مجموعه‌های بسته دارای خواص زیر هستند:

ب۱ E و $\varnothing$ مجموعه‌های بسته هستند.

ب۲ مقطع هر خانواده از مجموعه‌های بسته، یک مجموعهٔ بسته است.
ب۳ اجتماع هر خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌های بسته، یک مجموعهٔ بسته است.

تمرین ۳۳ نشان می‌دهد که می‌توانیم به جای توصیف مستقیم یک توپولوژی با همهٔ مجموعه‌های آن (مجموعه‌های باز توپولوژی) تنها به مجموعه‌های بستهٔ آن اکتفا کنیم (البته این مجموعه‌های بسته در شرایط بالا صدق می‌کنند) بدیهی است که مجموعه‌های باز از یک توپولوژی باید متمم مجموعه‌های بسته باشند.

تمرین ۳۴ یک تمرین ساده از متممهای اجتماع و اشتراک است. (یک **مجموعهٔ شمارش پذیر** مجموعه‌ای است که یا متناهی باشد یا در تناظر یک‌به‌یک با مجموعهٔ اعداد طبیعی باشد. یک خانوادهٔ $(U_i)_{i\in I}$ شمار است اگر مجموعهٔ اندیس I شمارا باشد.)

تمرین ۳۵ و ۳٦ احتیاج به کمی دقت دارند اما نه بحثهای عمیق و طولانی.

قضیه ۴ (تمرین ۳۳) فرض کنید E یک مجموعه باشد و K یک خانواده از زیرمجموعه‌های E بطوریکه:

۱) E و $\varnothing$ متعلق به K باشند.

۲) اشتراک هر خانواده از مجموعه‌های K متعلق به K باشد.

۳) اجتماع هر خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌هایی در K، متعلق به K باشد.

آنگاه یک توپولوژی یکتای T روی E وجود دارد بطوری که K خانواده مجموعه‌های $T-$ بستهٔ E است.

تمرین ۳۴ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژی باشد. یک زیرمجموعه از E یک **مجموعهٔ** G_δ نامیده می‌شود اگر بصورت اشتراک یک خانوادهٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌های $T-$ باز باشد. یک زیرمجموعه از E، **مجموعهٔ** F_σ نامیده می‌شود هرگاه بصورت اجتماع شمارا از مجموعه‌های $T-$ بسته باشد.

مثال ۱۵ ثابت کنید:

۱) متمم یک مجموعهٔ G_δ در E، یک مجموعهٔ F_σ است و برعکس.

۲) اگر $K = \bigcup_{n\in N} K_n$ (که در آن همهٔ مجموعه‌های K_n، $T-$ بسته هستند) یک مجموعهٔ F_σ باشد، آنگاه خانوادهٔ $(F_n)_{n\in N}$ از مجموعه‌های بستهٔ E وجود دارد بطوریکه $K = \bigcup_{n\in N} F_n$ و برای هر عدد طبیعی n، داریم $F_n \subseteq F_{n+1}$.

تمرین ۳۵ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیک و p نقطه‌ای باشد که متعلق به مجموعهٔ E نیست. قرار دهید $E^* = E\cup\{p\}$ و خانوادهٔ $T^* = \{U\cup\{p\} : U\in T\}\cup\{\varnothing\}$ را تعریف کنید. نشان دهید که T^* یک توپولوژی روی E^* است بطوریکه زیرمجموعه‌های T^*- بسته E دقیقاً زیرمجموعه‌های $T-$ بستهٔ E هستند. ما T^* را **توپولوژی توسیع بستهٔ** T می‌نامیم. نشان دهید که توپولوژی نقطهٔ خاص T_p در تمرین ۱۰ همان توپولوژی توسیع بستهٔ توپولوژی گسسته روی $C_E\{p\}$ است.

تمرین ۳۶ فرض کنید $E = \{x\in\mathbb{R}\ ,\ -۱\le x\le ۱\}$ و

$$T = \{X\in P(E) : ۰\notin X \text{ یا } (-۱,۱)\subseteq X\}.$$

نشان دهید که T یک توپولوژی روی E است. این توپولوژی، **توپولوژی این یا آن** نامیده می‌شود. ثابت کنید تنها زیرمجموعه‌های $T-$ بستهٔ E عبارتند از $\{۱\}$ و $\{-۱\}$ و $\{۱,-۱\}$ و تمام زیرمجموعه‌هایی که شامل ۰ هستند.

تعریف ۹ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیک و a نقطه‌ای از E باشد. زیرمجموعهٔ V از E یک $T-$ **همسایگی** (یا به طور ساده یک همسایگی) از a نامیده

می‌شود اگر یک مجموعهٔ $T-$ باز U وجود داشته باشد به طوریکه $a \in U$ و $U \subseteq V$.
اگر V یک $T-$ همسایگی a باشد آنگاه می‌نویسیم $V' = C_V\{a\}$ و می‌گوییم V' یک $T-$ همسایگی سودهٔ نظیر V است. یک دستگاه اساسی از $T-$ همسایگی‌هایی a یا یک $T-$ همسایگی پایه a، خانوادهٔ $BN(a)$ از همسایگی‌های a است بطوریکه برای هر $T-$ همسایگی V از a یک مجموعهٔ W در $BN(a)$ وجود دارد به طوریکه $W \subseteq V$.

تمرین ۳۷ فرض کنید (E, d) یک فضای متریک و p یک نقطه از E باشد. نشان دهید مجموعهٔ گوی‌های به مرکز p و شعاع گویا یک پایه همسایگی برای p (برای توپولوژی ایجاد شده توسط متریک d) تشکیل می‌دهند.

قضیه ۵ (تمرین ۳۸) فرض کنید (E, T) یک فضای توپولوژیک باشد. زیرمجموعهٔ U از E مجموعه‌ای، $T-$ باز است اگر و تنها اگر یک $T-$ همسایگی از هر نقطه‌اش باشد.

تمرین ۳۹ فرض کنید T و T' توپولوژیهایی روی مجموعهٔ E باشند. ثابت کنید که T قوی‌تر از T' است اگر و تنها اگر برای هر نقطهٔ x از E، هر $T'-$ همسایگی از x یک $T-$ همسایگی از x باشد.

فرض کنید (E, T) یک فضای توپولوژیکی، p یک نقطه از E و $N(p)$ مجموعه $T-$ همسایگی‌های p باشد. آنگاه بنابر تعریف یک همسایگی، $N(p)$ در شرایط زیر صدق می‌کند:

ه۱ هر زیرمجموعهٔ E که شامل یک مجموعه از $N(p)$ است، خود در $N(p)$ است.

ه۲ اشتراک هر خانواده متناهی از زیرمجموعه‌های $N(p)$ متعلق به $N(p)$ است.

ه۳ نقطهٔ p متعلق به هر عضو $N(p)$ است.

هـ۴ برای هر زیرمجموعهٔ V از E در $N(p)$، مجموعهٔ W در $N(p)$ وجود دارد به طوریکه V یک $T-$ همسایگی از هر نقطهٔ W می‌باشد.

راهنمایی تحقیق شرایط هـ۱ تا هـ۳ آسان است. هـ۴ از مشاهدهٔ این مطلب نتیجه می‌شود که اگر $V \in N(p)$، یعنی V یک $T-$ همسایگی p باشد، آنگاه مجموعهٔ $T-$ باز W شامل p وجود دارد بقسمی که $W \subseteq V$. از اینرو W در $N(p)$ است و با استفاده از قضیهٔ ۵، یک $T-$ همسایگی از تمام نقاطش می‌باشد. لذا V که شامل W است نیز یک $T-$ همسایگی از تمام نقاط W با توجه به شرط هـ۱ است.

تمرین ۴۰ نشان می‌دهد که یک توپولوژی ممکن است روی یک مجموعهٔ E بوسیلهٔ محدود شدن به همسایگی‌های هر نقطه‌اش نسبت به توپولوژی، تعریف شود. با توجه به قضیه ۵ دیده می‌شود که مجموعه‌های باز در توپولوژی باید آنهایی باشند که متعلق به خانواده‌های همسایگی مد نظر گرفته شده برای تمام نقاط آنها هستند. چندان سخت نخواهد بود که ثابت کنیم خانوادهٔ همهٔ چنین مجموعه‌هایی در شرایط تعریف یک توپولوژی صدق می‌کند و هر همسایگی از یک نقطهٔ x نسبت به این توپولوژی متعلق به مجموعهٔ داده شدهٔ $N(x)$ است. ولی اثبات عکس آن یعنی اینکه هر مجموعه V در مجموعهٔ همسایگی داده شدهٔ $N(x)$ دقیقاً یک همسایگی از x در توپولوژی تعریف شده از این روش می‌باشد، که چندان آسان نیست. شرط (۴) برای این منظور لازم است.

قضیه ٦ (تمرین ۴۰) فرض کنید E یک مجموعه باشد. فرض کنید $(N(x))_{x\in E}$ یک خانواده از مجموعه‌های غیرتهی از زیرمجموعه‌های E باشد بطوری که:

۱) برای هر نقطهٔ x از E، هر زیرمجموعهٔ E که شامل یک زیرمجموعه در $N(x)$ است، متعلق به $N(x)$ باشد.

۲) برای هر نقطهٔ x از E، اشتراک هر خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌های $N(x)$، متعلق به $N(x)$ باشد.

۳) برای هر نقطهٔ x از E، نقطهٔ x در هر زیرمجموعهٔ $N(x)$ باشد.

۴) برای هر نقطهٔ x از E و هر زیرمجموعهٔ V در $N(x)$، مجموعهٔ W در $N(x)$ موجود باشد بطوریکه برای هر y در W، V متعلق به $N(y)$ باشد.

راهنمایی نشان دهید که یک توپولوژی یکتای T روی E موجود است بطوریکه برای هر نقطهٔ x از E، مجموعهٔ $N(x)$ برابر مجموعهٔ $T-$ همسایگی‌های x است.

تعریف ۱۰ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیک و A یک زیرمجموعهٔ E باشد. **درون** A اجتماع تمام زیرمجموعه‌های $T-$ باز E و مشمول در A است. یعنی بزرگترین زیرمجموعه $T-$ باز در A می‌باشد. درون A را با $Int_T(A)$ یا به‌طور ساده با $Int(A)$ نمایش می‌دهیم. **بستار** A، اشتراک تمام زیرمجموعهٔ $T-$ بسته شامل A است. یعنی کوچکترین زیرمجموعه $T-$ بسته شامل A می‌باشد. بستار A را با $Cl_T(A)$ یا به‌طور ساده با $Cl(A)$ نمایش می‌دهیم.

تمرینهای ۴۱ و ۴۲ به راحتی از تعاریف بستار و درون نتیجه می‌شوند.

(یادآوری می‌کنیم برای اثبات اینکه دو مجموعه $E_۱$ و $E_۲$ مساوی باشند. باید نشان دهیم $E_۱ \subseteq E_۲$ و سپس $E_۲ \subseteq E_۱$). در تمرین ۴۳ (جایی که $\subset$ نشانهٔ زیرمجموعهٔ سره است). خانواده‌ای که بدنبال آن هستیم باید نامتناهی باشد (این مطلب به سادگی از استقراء ریاضی و از تمرین ۴۱،(۱) ایجاب می‌شود که برای یک خانواده متناهی $(A_i)_{i\in I}$ داریم $(Int(\cap_{i\in I}A_i) = \cap_{i\in I}Int(A_i)$

تمرین ۴۴ از ما می‌خواهد که نشان دهیم یک توپولوژی ممکن است روی یک مجموعهٔ E با اکتفا کردن به بستار در توپولوژی، تعریف می‌شود. از تعریف بستار روشن است که اگر A یک مجموعهٔ $T-$ بسته باشد آنگاه $Cl_T(A) = A$.

بنابراین مجموعه‌ای بسته در این توپولوژی، بطوری که K عمل بستار باشد، عبارتست از زیرمجموعه‌های X بطوری که $K(X) = X$. بنابراین توپولوژی T_K را با این توضیح می‌توان معرفی نمود. برای اثبات اینکه T_K یک توپولوژی است، بهتر است از این خاصیت که برای زیرمجموعه‌های E با شرط $X \subseteq Y$ داریم $K(X) \subseteq K(Y)$، استفاده شود.

تمرین ۴۱ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی و A و B زیرمجموعه‌های E باشد. ثابت کنید

۱) $Int(A \cap B) = Int(A) \cap Int(B)$.

۲) $Cl\ (A \cup B) = Cl\ (A) \cup Cl\ (B)$.

۳) اگر $A \subseteq B$ آنگاه $Cl\ (A) \subseteq Cl\ (B)$ و $Int(A) \subseteq Int(B)$.

تمرین ۴۲ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی و A یک زیرمجموعه از E باشد. ثابت کنید که $Cl(C_E(A)) = C_E(Int(A))$.

تمرین ۴۳ مثالی از یک فضای توپولوژیکی (E,T) و یک خانواده از زیرمجموعه‌های $(A_i)_{i\in I}$ از E ارائه دهید به‌طوری که $Int(\cap_{i\in I} A_i) \subset \cap_{i\in I} Int(A_i)$.

تمرین ۴۴ فرض کنید E یک مجموعه و κ یک نگاشت از $P(E)$ به $P(E)$ باشد طوری که

۱) برای هر زیرمجموعهٔ X از E داریم، $\kappa(X) \supseteq X$

۲) برای هر زیرمجموعهٔ X از E داریم، $\kappa(\kappa(X)) = \kappa(X)$

۳) برای تمام زیرمجموعه‌های X و Y از E داریم، $\kappa(X \cup Y) = \kappa(X) \cup \kappa(Y)$.

۴) $\kappa(\varnothing) = \varnothing$

راهنمایی فرض کنید $T_\kappa = \{X \in P(E) : \kappa(C_E(X)) = C_E(X)\}$. نشان دهید که T_κ یک توپولوژی روی E است و همچنین برای هر زیرمجموعهٔ X از E داریم $Cl_{T_\kappa}(X) = \kappa(X)$.

تمرین ۴۵ فرض کنید E یک مجموعهٔ نامتناهی باشد. چنانچه κ را نگاشتی از $P(E)$ به $P(E)$ چنین تعریف شود:

$$\kappa(X) = \begin{cases} X & \text{اگر } X \text{ زیرمجموعه متناهی } E \text{ باشد} \\ E & \text{اگر } X \text{ زیرمجموعه نامتناهی } E \text{ باشد} \end{cases}$$

نشان دهید که κ در شرایط تمرین ۴۴ صدق می‌کند. همچنین توپولوژی T_κ توپولوژی متمم باپایان از تمرین ۱۲ است.

تعریف ۱۱ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی و A یک زیرمجموعهٔ E باشد. **مرز** A را مجموعهٔ بستهٔ $Fr\ (A) = Cl\ (A) \cap Cl(C_E(A))$ تعریف می‌کنیم.

(یک) A **همه‌جا چگال** نامیده می‌شود (یا بطور ساده **چگال**)، اگر $Cl\ (A) = E$.

(دو) A **هیچ‌جا چگال** نامیده می‌شود، اگر $Int(Cl\ (A)) = \varnothing$.

(سه) A **لاغر** نامیده می‌شود، اگر به‌صورت اجتماع یک خانوادهٔ شمارا از مجموعه‌های هیچ‌جا چگال باشد مجموعه‌های لاغر معمولاً بعنوان مجموعه‌های از **رستهٔ اول** معرفی شده‌اند و مجموعه‌هایی که از رستهٔ اول نباشند، مجموعه‌های از **رستهٔ دوم** گفته شده‌اند.

(E,T) یک فضای رسته‌ای اول (دوم) نامیده می‌شود، اگر E یک زیرمجموعهٔ رستهٔ اول (دوم) از E مطابق تعریف بالا باشد. فضاهای رسته‌ای اول، فضاهای لاغر نیز نامیده می‌شوند.

تمرین ۴۶ فرض کنید E یک مجموعهٔ غیرتهی، T توپولوژی گسسته روی E و A زیرمجموعهٔ E باشد. $Int(A)$ و $Cl\ (A)$ و $Fr\ (A)$ را پیدا کنید. ثابت کنید که (E,T) یک فضای رسته‌ای دوم است.

تمرین ۴۷ فرض کنید E یک مجموعهٔ غیرتهی، T توپولوژی بدیهی (ناگسسته) روی E و A یک زیرمجموعهٔ E باشد. $Int(A)$ و $Cl\ (A)$ و $Fr\ (A)$ را پیدا کنید. ثابت کنید که (E,T) یک فضای رسته‌ای دوم است.

تمرین ۴۸ فرض کنید T توپولوژی ترتیبی راست روی $\mathbb{R}$ باشد. نشان دهید که برای هر عدد حقیقی r مجموعهٔ $P_r = \{x \in \mathbb{R} : x < r\}$ هیچ‌جا چگال در $\mathbb{R}$ است. نتیجه بگیرید $(\mathbb{R},T)$ فضای لاغر است.

تعریف ۱۲ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی، A یک زیرمجموعهٔ E و x یک نقطهٔ E باشد. در این‌صورت x یک **نقطهٔ درونی** A گفته می‌شود اگر A یک $T-$ همسایگی x باشد.

x را یک **نقطهٔ چسبیدهٔ** یا **نقطهٔ بستاری** A گوییم اگر هر $T-$ همسایگی از x با A برخورد کند (یعنی با A اشتراک غیرتهی داشته باشد). x یک نقطهٔ **انباشتگی** A است اگر هر $T-$ همسایگی سودهٔ x با A برخورد کند.

x یک نقطهٔ $\omega-$ **انباشتگی** از A است اگر هر $T-$ همسایگی x شامل نامتناهی نقطه از A باشد.

x یک **نقطهٔ انقباضی** A است اگر هر $T-$ همسایگی از x شامل تعداد ناشمارا نقطه از A باشد.

x یک **نقطهٔ مرزی** A است اگر هر $T-$ همسایگی از x هم A و هم $C_E(A)$ را قطع کند.

نقطهٔ a از A **نقطهٔ تنهای** A گفته می‌شود، اگر نقطهٔ انباشتگی A نباشد.

تمرینهای ۴۹ و ۵۰ توصیفهای مفیدی از درون و بستار یک مجموعه به ما می‌دهند، البته اثباتها بطور مستقیم و هر کدام در دو قسمت بدست می‌آیند.

قضیه ۷ (تمرین ۴۹) نقاط $Int(A)$ دقیقاً نقاط درونی A هستند.

قضیه ۸ (تمرین ۵۰) نقاط $Cl\ (A)$ دقیقاً نقاط چسبیدهٔ A هستند.

تمرین ۵۱ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی و X یک زیرمجموعه از E باشد. ثابت کنید $IntX = C_X(Fr\ (X))$ و $Cl\ (X) = X \cup Fr\ (X)$.

تمرین ۵۲ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی و X یک زیرمجموعهٔ E باشد. برای زیرمجموعهٔ X از E قرار دهید $\alpha(X) = Int(Cl\ (X))$. ثابت کنید:

۱) اگر $X \subseteq Y$ آنگاه $\alpha(X) \subseteq \alpha(Y)$.

۲) اگر X باز باشد آنگاه $X \subseteq \alpha(X)$.

۳) برای هر زیرمجموعهٔ X از E، $\alpha(\alpha(X)) = \alpha(X)$.

۴) اگر X و Y مجموعه‌های باز مجزا باشند آنگاه $\alpha(X)$ و $\alpha(Y)$ نیز مجزا می‌باشند.

تمرین ۵۳ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی باشد. زیرمجموعهٔ X از E **باز منظم** نامیده می‌شود، اگر $X = \alpha(X)$ (همانند تمرین ۴۵). ثابت کنید که اشتراک هر خانوادهٔ متناهی از زیرمجموعه‌های باز منظم از E، باز منظم است. نشان دهید مجموعه‌های $X = \{x \in \mathbb{R} : ۰ < x < \frac{۱}{۲}\}$ و $Y = \{x \in \mathbb{R} : \frac{۱}{۲} < x < ۱\}$ زیرمجموعه‌های باز منظم $\mathbb{R}$ با توپولوژی معمولی هستند، اما $X \cup Y$ باز منظم نمی‌باشد.

تمرین ۵۴ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی باشد و A و B زیرمجموعه‌هایی از E به‌قسمی که $E = A \cup B$. ثابت کنید $E = Cl\ (A) \cup Int(B)$.

تمرین ۵۵ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی و A و B زیرمجموعه‌های E باشد. ثابت کنید که:

۱) $Fr(Cl\ (A)) \subseteq Fr\ (A)$ و $Fr(Int(A)) \subseteq Fr\ (A)$.

۲) $Fr(A \cup B) \subseteq Fr\ (A) \cup Fr\ (B)$.

مثالی ارائه دهید بطوریکه سه مجموعهٔ (۱) متمایز باشند و مثالی نیز ارائه دهید بطوریکه رابطهٔ شمولی در (۲) سره باشد.

تمرین ۵۶ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی، D یک زیرمجموعهٔ چگال و U یک زیرمجموعهٔ باز E باشد. ثابت کنید که $U \subseteq Cl(D \cap U)$.

تمرین ۵۷ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی و A یک زیرمجموعهٔ E باشد. نشان دهید که A هر زیرمجموعهٔ چگال D از E را قطع می‌کند اگر و تنها اگر $Int(A)$ غیرتهی باشد.

تمرین ۵۸ فرض کنید E یک مجموعه باشد و T_p توپولوژی نقطهٔ خاص روی E تعیین شده بوسیلهٔ نقطهٔ p باشد. ثابت کنید که $Cl\{p\} = E$. نشان دهید اگر F یک زیرمجموعهٔ بسته سرهٔ E باشد، آنگاه $Int(F) = \varnothing$. نشان دهید اگر X یک زیرمجموعهٔ E باشد بطوریکه p را شامل شود و t نیز نقطه‌ای متمایز از p باشد، آنگاه t یک نقطهٔ انباشتگی است اما یک نقطهٔ $\omega-$ انباشتگی از X نیست.

تعریف ۱۳ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی باشد. توپولوژی T یا فضای (E,T) را **شمارش‌پذیر نوع اول** گوییم، هرگاه هر نقطهٔ E یک پایه $T-$ همسایگی شمارا داشته باشد. معمولاً گفته می‌شود که فضاها و توپولوژیهای شمارش‌پذیر نوع اول در اصل اول شمارش پذیری صدق می‌کنند. توپولوژی T یا فضای (E,T) را **شمارش‌پذیر نوع دوم** گوییم، هرگاه یک پایهٔ شمارا برای T وجود داشته باشد. معمولاً گفته می‌شود فضاها و توپولوژیهای شمارش‌پذیر نوع دوم در اصل دوم شمارش‌پذیر صدق می‌کنند.

فضای (E,T) **تفکیک‌پذیر** گفته می‌شود اگر E دارای یک زیرمجموعهٔ چگال شمارا باشد.

برای کسانیکه می‌خواهند بطور اصولی پیش بروند، تمرینهای زیر بطور نسبی نتایج کاربردی از تعاریف هستند. تنها تمرین ٦۱ ممکن است مشکل بنظر برسد و آن وقتی است که ما باید یک پایهٔ شمارا برای یک فضای متریک تفکیک‌پذیر بسازیم. در اینجا ما باید از زیرمجموعهٔ چگال شمارای D، بنابر شرط تفکیک‌پذیری، شروع کنیم. در این‌صورت متریک بودن به ما اجازه می‌دهد که به گوی‌های مرکز نقاط D نگاه کنیم که این مجموعه‌ها بازند (بنابر تمرین ۱۷) و سپس تعدادی از اینها را بطور شمارا انتخاب کنیم. (مثلاً گوی‌های به شعاع $\frac{1}{n}$، برای هر عدد طبیعی n).

مجموعهٔ گوی‌هایی که از این روش بدست آمده‌اند شمارا هستند و می‌توان نشان داد که یک پایه نیز هستند.

تمرین ۵۹ ثابت کنید هر فضای شمارش‌پذیر نوع دوم تفکیک‌پذیر است.

تمرین ٦۰ ثابت کنید که فضاهای زیر تفکیک‌پذیرند، اما شمارش‌پذیر نوع دوم نیستند:

۱) E یک مجموعهٔ ناشمارا و T توپولوژی نقطهٔ خاص روی E باشد.

۲) E یک مجموعهٔ ناشمارا و T توپولوژی متمم باپایان روی E باشد.

تمرین ٦۱ فرض کنید (E, d) یک فضای متریک و T توپولوژی ایجاد شده توسط d باشد. ثابت کنید اگر (E, T) تفکیک‌پذیر باشد، آنگاه E شمارش‌پذیر نوع دوم هست.

تمرین ٦۲ ثابت کنید که هر فضای شمارش‌پذیر نوع دوم، شمارش‌پذیر نوع اول است.

تمرین ٦۳ ثابت کنید فضاهای توپولوژیکی زیر شمارش‌پذیر نوع اولند اما شمارش‌پذیر نوع دوم نیستند.

۱) E یک مجموعهٔ ناشمارا و T توپولوژی گسسته باشد.

۲) E یک مجموعهٔ ناشمارا و T توپولوژی نقطهٔ خاص روی E باشد.

تمرین ٦۴ نشان دهید که فضاهای توپولوژیک زیر شمارش‌پذیر نوع دومند.

۱) E یک مجموعهٔ ناشمارا و T توپولوژی گسسته روی E باشد.

۲) E یک مجموعه دلخواه و T توپولوژی بدیهی روی E باشد.

۳) $E = \mathbb{N}$ و T توپولوژی فرد $-$ زوج باشد.

۴) E یک مجموعهٔ شمارا و T هر توپولوژی نقطهٔ خاص روی E باشد.

۵) E یک مجموعهٔ شمارا و T هر توپولوژی نقطهٔ خارج شده روی E باشد.

٦) $E = \mathbb{R}$ و T توپولوژی متریک معمولی باشد.

۷) $E = \mathbb{R}$ و T توپولوژی ترتیبی راست باشد.

فصل ۲

نگاشتهای فضاهای توپولوژیکی

فرض کنید f یک نگاشت از مجموعهٔ E به مجموعهٔ E' باشد. اگر A یک زیرمجموعهٔ E باشد، معمولاً نماد $f(A)$ را برای **تصویر مستقیم** A تحت f بکار می‌بریم یعنی مجموعه‌ای که شامل تصاویر $f(a)$ برای هر a عضو A است.

همچنین، اگر A' یک زیرمجموعهٔ E' باشد، نماد $f^{-1}(A')$ را برای **تصویر معکوس** A' تحت f بکار می‌بریم، یعنی مجموعهٔ همهٔ نقاط x از E بطوریکه تصویر $f(x)$ در A' قرار می‌گیرد.

تعریف ۱ فرض کنید (E,T) و (E',T') فضاهای توپولوژیک باشند، x یک نقطهٔ E و f یک نگاشت از E به E' باشد. تابع f را در x، $(T,T')-$ **پیوسته** (یا بطور ساده پیوسته در x) گوییم اگر برای هر $T'-$ همسایگی V' از $f(x)$ یک $T-$ همسایگی V از x موجود باشد بطوریکه، $f(V) \subseteq V'$. نگاشت f را $(T,T')-$ پیوسته (یا بطور ساده پیوسته) گوییم اگر در هر نقطهٔ x از E تابعی $(T,T')-$ پیوسته باشد.

قضیه ۱ (تمرین ۶۵) فرض کنید (E,T) و (E',T') فضاهای توپولوژیکی باشند و f یک نگاشت از E به E' باشد. در اینصورت عبارات زیر معادلند:

۱) f پیوسته است.

۲) برای هر زیرمجموعهٔ T'– باز U' از E'، تصویر معکوس $f^{-1}(U')$، مجموعه‌ای T– باز است.

۳) برای هر زیرمجموعهٔ T'– بسته F' از E'، تصویر معکوس $f^{-1}(F')$، مجموعه‌ای T– بسته است.

تبصره شرط دوم در تمرین ٦۵ اغلب به‌عنوان تعریف پیوستگی بکار برده می‌شود، تأکید به اینکه در توپولوژی عمومی (در مقایسه با آنالیز حقیقی) ما بیشتر به خواص «سراسری» توابع علاقه مندیم تا به خواص «موضعی» آنها.

قضیه ۲ (تمرین ٦٦) فرض کنید (E_1, T_1) و (E_2, T_2) و (E_3, T_3) فضاهای توپولوژیکی باشند و f و g نیز به ترتیب، توابعی از E_1 به E_2 و E_2 به E_3 باشند. اگر f، (T_1, T_2)– پیوسته و g، (T_2, T_3)– پیوسته باشند در اینصورت $g \circ f$ تابعی، (T_1, T_3)– پیوسته است.

راهنمایی تمرین ٦٦ بستگی به این موضوع از نظریهٔ مجموعه‌ها دارد که برای هر زیرمجموعه U_3 از E_3 داریم، $(g \circ f)^{-1}(U_3) = f^{-1}(g^{-1}(U_3))$.

تعریف ۲ فرض کنید (E, T) و (E', T') فضاهای توپولوژیکی باشند. نگاشت f از E به E'، تابعی (T, T')– **همانریختی** یا **انتقال توپولوژیکی** گفته می‌شود اگر:

۱) f دوسویی باشد (بنابراین f یک نگاشت وارون از E' به E دارد که با f^{-1} نشان می‌دهیم).

۲) f تابعی (T, T')– پیوسته باشد،

۳) f^{-1} تابعی (T', T)– پیوسته باشد.

دو فضای توپولوژیک (E, T) و (E', T') را **همانریخت** گوییم، اگر یک (T, T')– همانریختی از E به E' موجود باشد. خاصیت $P(X)$ یک

خاصیت توپولوژیکی گفته می‌شود اگر $P((E,T))$ برقرار باشد و (E,T) و (E',T') همریخت باشند در اینصورت $P((E',T'))$ نیز برقرار باشد. یعنی خاصیتی که تحت همانریختی ها منتقل می شود.

قضیه ۳ (تمرین ٦٧) فرض کنید (E,T) و (E',T') فضاهای توپولوژیک باشند. نگاشت f از E به E' یک $(T,T')-$ همان‌ریخت است اگر و تنها اگر f تابعی $(T,T')-$ پیوسته باشد و یک نگاشت $(T',T)-$ پیوسته g از E' به E موجود باشد بطوریکه $f\circ g=I_{E'}$ و $g\circ f=I_E$ (جائیکه I_E و $I_{E'}$ به ترتیب نگاشتهای همانی از E به E و از E' به E' هستند.)

تعریف ۳ فرض کنید (E,T) و (E',T') فضاهای توپولوژیکی و f یک نگاشت از E به E' باشند. آنگاه f تابعی، $(T,T')-$ **باز** گفته می‌شود اگر تصویر مستقیم هر زیرمجموعهٔ $T-$ باز E تحت f یک زیرمجموعهٔ $T'-$ باز در E' باشد.

بطور مشابه f تابعی، $(T,T')-$ **بسته** گفته می‌شود اگر تصویر مستقیم هر زیرمجموعهٔ $T-$ بستهٔ E تحت f یک زیرمجموعهٔ $T'-$ بستهٔ E' باشد.

قضیه ۴ (تمرین ٦٨) فرض کنید (E,T) و (E',T') فضاهای توپولوژیکی بوده و f یک نگاشت دوسویی از E به E' باشد. در اینصورت f یک $(T,T')-$ همانریختی است اگر و تنها اگر f یک $(T,T')-$ پیوسته بوده و $(T,T')-$ باز یا $(T,T')-$ بسته باشد.

راهنمایی تمرین ٦٨ اساساً بستگی به این واقعیت دارد که اگر f یک دوسویی از E به E' با وارون f^{-1} باشد، آنگاه برای هر زیرمجموعهٔ X از E داریم $(f^{-1})^{-1}(X)=f(X)$.

تمرین ۶۹ فرض کنید $E = \mathbb{R}^{2}$ و $E' = \mathbb{R}$ و نگاشت f را از E به E' چنین درنظر می‌گیریم که برای هر نقطهٔ (x,y) از E، $f(x,y) = x$. ثابت کنید که f تابعی، $(T,T')-$ پیوسته است ولی $(T,T')-$ بسته نیست (جائیکه T,T' توپولوژیهای متریک معمولی هستند.)

تبصره قسمت دوم تمرین ۶۹ به ما کمک می‌کند که مثالی از یک مجموعهٔ بسته در صفحهٔ مختصات ارائه دهیم که تصویر آن روی محور x ها بسته نمی‌باشد.

تمرین ۷۰ فرض کنید (E,T) و (E',T') فضاهای توپولوژیکی بوده و f یک نگاشت از E به E' باشد. ثابت کنید که f تابعی، $(T,T')-$ پیوسته است اگر و تنها اگر برای هر زیرمجموعهٔ X' از E' داشته باشیم $f^{-1}(Cl_{T'}(X')) \supseteq Cl_T(f^{-1}(X'))$.

راهنمایی تمرین ۷۰ شامل دو قسمت می‌باشد. در اولین قسمت فرض می‌کنیم f تابعی، $(T,T')-$ پیوسته باشد و سعی می‌کنیم که نشان دهیم برای هر زیرمجموعهٔ X' از E' داریم $f^{-1}(Cl_{T'}(X')) \supseteq Cl_T(f^{-1}(X'))$.

برای انجام این کار لازم است یادآوری کنیم که برای هر دو زیرمجموعهٔ Y',X' از E' بطوریکه $X' \subseteq Y'$ خواهیم داشت $f^{-1}(X') \subseteq f^{-1}(Y')$ و همچنین $T-$ بستار یک زیرمجموعهٔ E کوچکترین مجموعهٔ $T-$ بستهٔ شامل آن است. برای قسمت دوم تمرین، باید نشان دهیم که اگر برای هر زیرمجموعهٔ X' از E' $f^{-1}(Cl_{T'}(X')) \supseteq Cl_T(f^{-1}(X'))$ آنگاه f تابعی، $(T,T')-$ پیوسته است. برای انجام این کار شرط (۳) تمرین ۶۵ را بکار می‌بریم.

بنابراین با یک زیرمجموعهٔ $T'-$ بسته از E' شروع کرده ثابت می‌کنیم که تصویر معکوس آن تحت f، مجموعه‌ای $T-$ بسته است. نکته‌ای که در اینجاست اینست که به خاطر بیاوریم بستار یک مجموعهٔ بسته، خودش می‌باشد.

تمرین ۷۱ فرض کنید (E,T) و (E',T') فضاهای توپولوژیکی و f یک نگاشت از E به E' باشند. ثابت کنید که f تابعی، $(T,T')-$ باز است اگر و تنها اگر برای هر زیرمجموعهٔ X از E داشته باشیم $f(Int_T(X)) \subseteq Int_{T'}(f(X))$.

راهنمایی تمرین ۷۱ از جهاتی شبیه تمرین ۷۰ می‌باشد، ما از این حقیقت استفاده می‌کنیم که اگر Y, X زیرمجموعه‌هایی از E باشند بطوریکه $X \subseteq Y$ آنگاه $f(X) \subseteq f(Y)$. همچنین یادآور می‌شویم که درون یک زیرمجموعه بزرگترین مجموعهٔ باز شمول در آن است و درون یک زیرمجموعهٔ باز خود مجموعه می‌باشد.

تمرین ۷۲ فرض کنید (E, T) و (E', T') فضاهای توپولوژیکی بوده و f یک تابع دوسویی از E به E' باشد. نشان دهید که f تابعی، $(T, T')-$ همانریختی است اگر و تنها اگر T' قویترین توپولوژی $T_{\circ}$ روی E' باشد، بطوری که f تابعی $(T, T_{\circ})-$ پیوسته گردد.

راهنمایی در قسمت اول تمرین ۷۲ فرض می‌کنیم که f تابعی، $(T, T')-$ همانریختی است. در این‌صورت اگر یک توپولوژی $T_{\circ}$ روی E' داشته باشیم بطوری که f تابعی، $(T, T_{\circ})-$ پیوسته باشد، آنگاه باید نشان دهیم که $T_{\circ} \subseteq T'$. برای این کار مجموعهٔ $T_{\circ}-$ باز $U_{\circ}$ را انتخاب کرده و $(T, T_{\circ})-$ پیوستگی و $(T', T)-$ پیوستگی f^{-1} را برای ثابت کردن $U_{\circ} \in T'$ بکار می‌بریم.

در قسمت دوم، منظور نشان دادن $(T', T)-$ پیوستگی f^{-1} است که از برهان خلف استفاده می‌کنیم. فرض می‌کنیم که یک مجموعهٔ $T-$ باز U وجود دارد بطوریکه تصویر معکوس آن تحت f^{-1}، $T'-$ باز نباشد. حال با استفاده از آن یک توپولوژی $T_{\circ}$ قویتر از T' می‌سازیم بطوری که f تابعی، $(T, T_{\circ})-$ پیوسته باشد.

تمرین ۷۳ فرض کنید (E, T) یک فضای توپولوژیک باشد، ثابت کنید که:

۱) T توپولوژی گسسته روی E می‌باشد اگر و تنها اگر برای هر فضای توپولوژیکی (E', T') هر نگاشت f از E به E' تابعی، $(T, T')-$ پیوسته باشد.

۲) T توپولوژی ناگسسته است اگر و تنها اگر برای هر فضای توپولوژیکی (E', T') هر نگاشت f از E' به E تابعی، $(T', T)-$ پیوسته باشد.

راهنمایی در تمرین ۷۳ قسمتهای فقط اگر، بدیهی است. برای ثابت کردن قسمتهای اگر، یک تابع f خاص را انتخاب می‌کنیم. تابع همانی تابعی است که این کار را انجام می‌دهد.

تمرین ۷۴ فرض کنید (E, T) یک فضای توپولوژیک باشد و g, f نگاشتهای $(T, T')-$ پیوسته از E به $\mathbb{R}$ (با توپولوژی معمولی) باشد. ثابت کنید که $\{x \in E : f(x) = g(x)\}$ زیرمجموعهٔ بسته‌ای از E می‌باشد؛ نتیجه بگیرید که اگر برای هر نقطهٔ x از یک زیرمجموعهٔ چگال D از E، $f(x) = g(x)$، آنگاه برای هر نقطهٔ x از E، $f(x) = g(x)$.

فصل ۳

توپولوژیهای القایی و هم القایی

در اولین قسمت از این فصل نشان می‌دهیم که چگونه ممکن است یک خانوادهٔ نگاشتها از یک مجموعهٔ E به مجموعه‌های مشخص یک خانواده از فضاهای توپولوژیک برای ساختن یک توپولوژی روی E بکار برده می‌شود. دو حالت خاص مهم وجود دارد که در مثالهای ۱ و ۲ توضیح داده شده‌اند، جائیکه ما از این ساختمان کلی برای تعریف زیرفضاها و حاصلضرب توپولوژیها استفاده می‌کنیم.

تعریف ۱ فرض کنید E یک مجموعه باشد و $((E_i, T_i))_{i\in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک و $(f_i)_{i\in I}$ نیز یک خانواده از نگاشتها از E به خانواده $(E_i)_{i\in I}$.
(به این معنا که برای هر اندیس $i \in I$، تابع f_i یک نگاشت از E به E_i می‌باشد.)

فرض کنید A مجموعهٔ همهٔ توپولوژیهای T روی E باشد بطوریکه برای هر اندیس i در I نگاشت f_i، تابعی $(T, T_i)-$ پیوسته باشد. این مجموعه غیرتهی است، زیرا توپولوژی گسسته متعلق به آن است. اشتراک A (یعنی خانواده‌ای از مجموعه‌های U بطوریکه U در هر یک از توپولوژیهای متعلق به A است.) نیز یک توپولوژی است و بسادگی دیده می‌شود که متعلق به A می‌باشد، همچنین ضعیف‌ترین توپولوژی T روی E می‌باشد بطوریکه هر نگاشت f_i، تابعی $(T, T_i)-$ پیوسته است. ما این توپولوژی را **توپولوژی القایی** روی E توسط خانوادهٔ نگاشتهای $(f_i)_{i\in I}$ می‌نامیم.

قضیه ۱ (تمرین ۷۵) با وضعیت شرح داده شده، توپولوژی القایی روی E توسط $(f_i)_{i\in I}$ عبارتست از توپولوژی $T(S)$ تولید شده توسط مجموعه $S=\{f_i^{-1}(U_i) : U_i \in T_i\}$.

تبصره تمرین ۷۵ روشی را برای بدست آوردن توپولوژی القایی ارائه می‌دهد. اثبات در دو قسمت و بسیار معمولی است. ما نشان می‌دهیم که $T(S)$ مشمول در توپولوژی القایی $T_\circ$ است، زیرا هر کدام از مجموعه‌های S متعلق به $T_\circ$ می باشد بخاطر اینکه همهٔ نگاشتها $(T_\circ, T_i)-$ پیوسته می‌باشند. سپس نشان می‌دهیم که $T_\circ$ در $T(S)$ قرار می‌گیرد، با توجه به اینکه $T(S)$ متعلق به خانواده A است.

قضیه ۲ (تمرین ۷۶) همچنان با توجه به روش مشابه، فرض کنید (E', T') یک فضای توپولوژیکی و g یک نگاشت از E' به E باشد. آنگاه g، تابعی $(T', T)-$ پیوسته است اگر و تنها اگر هر نگاشت $f_i \circ g$ تابعی، $(T', T_i)-$ پیوسته باشد.

راهنمایی در تمرین ۷۶ اگر g تابعی، $(T', T)-$ پیوسته باشد، آنگاه بنابر تمرین ٦٦ هر تابع $f_i \circ g$ نیز $(T', T_i)-$ پیوسته است. اگر همهٔ نگاشتهای $f_i \circ g$توابعی، $(T', T_i)-$ پیوسته باشند، آنگاه با نشان دادن اینکه برای هر مجموعهٔ U در T مجموعه $g^{-1}(U)$ در T' است، ثابت می‌کنیم که g تابعی $(T', T)-$ پیوسته است. برای این کار از نتیجه تمرین ۷۵ و توصیف تمرین ۳۲ از مجموعه‌ها در $T = T(S)$ استفاده می‌کنیم.

مثال ١٦ فرض کنید (E, T) یک فضای توپولوژیکی بوده و A یک زیرمجموعهٔ E باشد. چنانچه i نگاشت شمولی از A به E داده شده توسط $i(a) = a$ برای هر a از A باشد، توپولوژی القا شده روی A توسط خانوادهٔ تک عضوی نگاشت i، **توپولوژی زیر فضایی** یا **توپولوژی نسبی** روی A نامیده می‌شود. این توپولوژی را با T_A نمایش می‌دهیم. فضای توپولوژیکی (A, T_A) یک زیرفضای (E, T) نامیده می‌شود.

در این حالت مجموعهٔ S توضیح داده شده در قضیهٔ ۱ بصورت زیر است:

$S = \{X \in P(A) : X = i^{-1}(U) = U \cap A$ موجوداست‌بطوریکه T در U مجموعهٔباز$\}$

بدیهی است که S یک توپولوژی روی A است و از اینرو T_A شامل همهٔ زیرمجموعه‌های A بفرم $A \cap U$ است که U در توپولوژی T قرار دارد. مجموعه‌های توپولوژی T_A معمولاً باز در A گفته می‌شود.

تمرینهای ۷۷ تا ۸۱ نتایج سادهٔ معقولی از تعاریف هستند هر چند تمرین ۷۹ ممکن است احتیاج به اندکی دقت داشته باشد.

تمرین ۷۷ فرض کنید (E,T) فضای توپولوژیکی بوده و A یک زیرمجموعه از E و T_A توپولوژی زیرفضایی روی A باشد. ثابت کنید:

۱) زیرمجموعهٔ B از A مجموعه‌ای، T_A- بسته است اگر و تنها اگر $B = A \cap F$ جائیکه F یک زیرمجموعهٔ $T-$ بسته از E است.

۲) برای هر زیرمجموعهٔ B از A داریم $Cl_{T_A}(B) = A \cap Cl_T(B)$.

۳) برای هر زیرمجموعهٔ B از A داریم $Int_T(B) \subseteq Int_{T_A}(B)$. مثالی ارائه دهید که رابطهٔ شمولی در (۳)، می‌تواند سره باشد.

تمرین ۷۸ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی بوده و D یک زیرمجموعهٔ چگال از E و a نقطه‌ای از D و V یک T_D- همسایگی a باشد. ثابت کنید که $Cl_T(V)$ یک $T-$ همسایگی از a است.

تمرین ۷۹ فرض کنید (E,T) فضای توپولوژیکی باشد و A و B زیرمجموعه‌هایی از E بطوریکه $E = A \cup B$. چنانچه M زیرمجموعه‌ای از $A \cap B$ باشد که T_A- باز و T_B- باز است. ثابت کنید که M مجموعه‌ای، $T-$ باز است.

تمرین ۸۰ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی تفکیک پذیر باشد. ثابت کنید که اگر U یک زیرمجموعهٔ $T-$ باز از E باشد، آنگاه (U,T_U) نیز تفکیک پذیر است.

تمرین ۸۱ فرض کنید E یک مجموعهٔ ناشمارا و p یک نقطه از E و T_p توپولوژی نقطهٔ خاص روی E تعیین شده توسط p باشد. چنانچه $A=C_E\{p\}$. ثابت کنید که (E,T_p) تفکیک پذیر است ولی $(A,(T_p)_A)$ تفکیک پذیر نیست.

مثال ۱۷ فرض کنید $((E_i,T_i))_{i\in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیکی باشد. چنانچه $E=\prod\limits_{i\in I}E_i$ و برای هر اندیس i در I، فرض کنید π_i نگاشت تصویری از E به E_i باشد. توپولوژی القایی روی E توسط خانوادهٔ نگاشتهای $(\pi_i)_{i\in I}$، **توپولوژی حاصلضرب** روی E نامیده می‌شود، که ما آنرا با $\prod\limits_{i\in I}T_i$ نشان می‌دهیم. فضای توپولوژیکی $(\prod\limits_{i\in I}E_i,\prod\limits_{i\in I}T_i)$ حاصلضرب توپولوژیکی خانوادهٔ $((E_i,T_i))_{i\in I}$ نامیده می‌شود.

توپولوژی حاصلضرب توسط خانوادهٔ مجموعه‌های بفرم $\pi_i^{-1}(U_i)$ تولید می‌شود. جائیکه $i\in I$ و $U_i\in T_i$ یعنی مجموعه‌های بفرم $\prod\limits_{i\in I}X_i$ که برای همهٔ اندیسهای i داریم، $X_i=E_i$ و $X_{i_\circ}\in T_{i_\circ}$ برای یک $i_\circ$. در اینصورت یک پایه برای توپولوژی حاصلضرب، توسط خانوادهٔ همه مقاطع باپایان از این مجموعه‌ها بدست می‌آید. یعنی توسط خانوادهٔ مجموعه‌هایی بفرم $\prod\limits_{i\in I}X_i$ جائیکه $X_i\in T_i$ برای همهٔ اندیسهای i در I و $X_i=E_i$ برای تمام اندیسهای i در I مگر یک تعداد متناهی.

تمرین ۸۲ فرض کنید $((E_i,T_i))_{i\in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیکی غیرتهی باشد. اگر U یک زیرمجموعهٔ $(\prod T_i)-$ باز از $\prod E_i$ باشد، ثابت کنید که برای هر i در I داریم $\pi_i(U)=E_i$ مگر یک تعداد متناهی.

راهنمایی تمرین ۸۲ از این حقیقت که U اجتماعی از مجموعه‌های باز پایهٔ معرفی شده است، نتیجه می‌شود.

تمرین ۸۳ فرض کنید $((E_i, T_i))_{i\in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیک و (E, T) حاصلضرب توپولوژیکی آن باشد. برای هر اندیس i در I، فرض کنید A_i یک زیرمجموعه از E_i باشد. ثابت کنید $Cl_T(\prod A_i) = \prod(Cl_{T_i}(A_i))$.
راهنمایی در اینجا اثبات در دو قسمت انجام می‌گیرد. ابتدا نشان می‌دهیم که اگر x هر نقطهٔ از $Cl_T(\prod A_i)$ باشد، آنگاه برای هر اندیس j در I، تصویر $\pi_j(x)$ یک نقطهٔ چسبیدهٔ A_j است. سپس ثابت می‌کنیم که برای هر نقطه x از $\prod Cl_{T_j}(A_j)$ و هر مجموعهٔ $T-$ باز U شامل x، هر تصویر $\pi_j(U)$ از U مجموعه، A_j را قطع می‌کند. بنابراین U مجموعه $\prod A_j$ را قطع می‌کند.

تمرین ۸۴ فرض کنید $((E_i, T_i))_{i\in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیکی باشد. چنانچه I شمارا و هر فضای (E_i, T_i)، تفکیک پذیر یا شمارش پذیر نوع دوم باشد آنگاه $(\prod E_i, \prod T_i)$ نیز چنین است.

راهنمایی قسمت تفکیک پذیری تمرین ۸۴ اندکی مشکل است. ابتدا از یک مجموعهٔ چگال شمارای D_i برای هر E_i شروع می‌کنیم و سعی می‌کنیم یک زیرمجموعهٔ چگال شمارا همانند D از $\prod E_i$ سازیم. چون I شمارا است، بدون کاستن از کلیت می‌توان I را بعنوان مجموعه‌ای از اعداد طبیعی درنظر گرفت. در اینصورت عناصر $\prod E_i$ را می‌توان بعنوان بردارهای $(x_\circ, x_1, \ldots, x_n, \ldots)$ درنظر گرفت بطوریکه برای هر i در I، $x_i \in E_i$. حال D را مجموعهٔ همهٔ بردارهای $t = (d_\circ, d_1, \ldots)$ می‌گیریم، جائیکه هر d_i در مجموعهٔ چگال شمارای نظیر D_i قرار دارد و یک عدد طبیعی m وجود دارد بطوری که، برای همهٔ اندیسهای i از یک نقطهٔ خاص $i(t)$ به بعد، هر d_i در $m-$امین عضو نظیر مجموعهٔ D_i باشد. اکنون با کمی ابتکار می‌توانیم ثابت کنیم که D یک زیرمجموعهٔ چگال شمارا از E است.

تعریف ۲ فرض کنید $((E_i,T_i))_{i\in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیکی باشند و (E,T) یک فضای توپولوژی باشد، برای هر اندیس i در I فرض کنید f_i یک نگاشت $(T,T_i)-$ پیوسته از E به E_i باشد. در اینصورت ما می‌توانیم نگاشت f_I از E به حاصلضرب $\prod\limits_{i\in I} E_i$ را با قرار دادن $f_I(x)=(f_i(x))$ برای هر نقطهٔ x از E، تعریف کنیم. حال با توجه به قضیهٔ ۲، f_I تابع، $(T,\prod T_i)-$ پیوسته است.

تمرین ۸۵ با توجه به شرایط بالا، ثابت کنید:

۱) f_I یک‌به‌یک است اگر و تنها اگر خانوادهٔ $(f_i)_{i\in I}$ جدا کنندهٔ نقاط باشند. یعنی برای هر زوج از نقاط متمایز x و y از E، یک اندیس i در I وجود داشته باشد بطوریکه $f_i(x)\neq f_i(y)$.

۲) اگر T_I توپولوژی زیر فضایی القایی توسط $\prod T_i$ روی تصویر f_I در $\prod E_i$ باشد، آنگاه f_I تابعی، $(T,T_I)-$ باز است اگر خانوادهٔ $(f_i)_{i\in I}$ نقاط و مجموعه‌های بسته را جدا کند یعنی برای هر زیرمجموعهٔ $T-$ بستهٔ F از E و هر نقطهٔ x از E که در F نباشد، یک اندیس i در I موجود باشد بطوریکه $f_i(x)\notin Cl_{T_i}(f_i(F))$.

راهنمایی ادعای (۱) به طور آشکار نتیجه می‌شود. برای اثبات ادعای (۲) فرض کنید U یک زیرمجموعهٔ $T-$ باز از E باشد، برای نشان دادن اینکه $f_I(U)$ مجموعه‌ای، T_I- باز است، ما از قضیهٔ ۵ از فصل ۱ استفاده می‌کنیم. بنابراین فرض کنید $t=f_I(x)$ یک نقطه از $f_I(U)$ باشد. حال شرط «جداسازی نقاط و مجموعه‌های بسته شده» را برای $F=C_E(U)$ و x بکار ببرید.

مثال ۱۸ (تمرین ۸٦) فرض کنید $X=\{a,b,c\}$ و $T_\circ$ را توپولوژی $\{\emptyset,\{a\},X\}$ روی X تعریف کنید.

ثابت کنید که هر فضای توپولوژیکی (E,T) با یک زیرفضا از حاصلضرب توپولوژیکی (P,T_P) از خانوادهٔ $((X_i,T_i))_{i\in I}$ همانریخت است جائیکه $I=E\cup T$ و برای هر i در I داریم $(X_i,T_i)=(X,T_\circ)$.

راهنمایی تمرین ۸۵ را برای خانوادهٔ $(f_i)_{i\in I}$ از نگاشتهای E به $X_i=X$ که بصورت زیر داده شده است بکار ببرید.

$$f_p(t)=\begin{cases} c & \text{اگر} \quad t\neq p \\ b & \text{اگر} \quad t=p \end{cases}$$

و برای هر p در E،

$$f_U(t)=\begin{cases} a & \text{اگر} \quad t\in U \\ b & \text{اگر} \quad t\notin U \end{cases}$$

بطوریکه U در T باشد. (باید نشان دهید که هریک از نگاشتها $(T,T_\circ)-$ پیوسته است.)

در قسمت دوم فصل نشان می‌دهیم که چگونه یک خانواده از نگاشتها به یک مجموعهٔ E از مجموعه‌های خاص یک خانواده از فضاهای توپولوژیکی، ممکن است برای ساختن یک توپولوژی روی E بکار برده شود. مثال قابل توجه در حالت توپولوژی خارج قسمتی روی یک مجموعه از کلاسهای هم‌ارزی است.

تعریف ۳ فرض می‌کنیم E یک مجموعه و $((E_i,T_i))_{i\in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیکی باشد. برای هر اندیس i در I، فرض کنید g_i یک نگاشت از E_i به E باشد. چنانچه A مجموعه‌ای از همهٔ توپولوژیهای T روی E باشد بطوریکه هر یک از نگاشتهای g_i تابعی، $(T_i,T)-$ پیوسته باشد. بوضوح A غیرتهی است، چون توپولوژی بدیهی روی E متعلق به آن است. قویترین توپولوژی در A **توپولوژی هم‌القایی** روی E توسط خانوادهٔ $((g_i))_{i\in I}$ گفته می‌شود.

تمرینهای ۸۷ و ۸۸ واضح هستند.

قضیه ۳ (تمرین ۸۷) با شرایط داده شده، توپولوژی هم‌القایی T روی E توسط خانوادهٔ $(g_i)_{i\in I}$ شامل همهٔ زیرمجموعه‌های U از E می‌باشد بطوریکه برای هر اندیس i در I داریم، $g_i^{-1}(U) \in T_i$.

قضیه ۴ (تمرین ۸۸) باشرایط داده شده، فرض کنید (E',T') یک فضای توپولوژیکی باشد و f یک نگاشت از E به E' و T توپولوژی هم القایی روی E توسط $(g_i)_{i\in I}$ باشد. در اینصورت f تابع، $(T,T')-$ پیوسته است اگر و تنها اگر هر نگاشت $f \circ g_i$ تابعی، $(T_i,T')-$ پیوسته باشد.

مثال ۱ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی و R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی E باشد. η نگاشت پوششی کانونی از E به $\frac{E}{R}$، یعنی برای هر x از E، $\eta(x) = R - class(x)$.

توپولوژی هم القایی روی $\frac{E}{R}$ توسط خانوادهٔ تک عضوی شامل نگاشت η، **توپولوژی خارج قسمتی** روی $\frac{E}{R}$ گفته می‌شود. این توپولوژی بوسیلهٔ $\frac{T}{R}$ نشان داده می‌شود. $(\frac{E}{R},\frac{T}{R})$ را **فضای خارج قسمتی** از (E,T) مربوط به R گوییم.

تبصره فرض کنید (E,T) و (E',T') فضاهای توپولوژیک باشند و f یک تابع $(T,T')-$ پیوسته از E به E' باشد. چنانچه R_f رابطهٔ هم‌ارزی روی E باشد که با قرار دادن $(x,y) \in R_f$ اگر و تنها اگر $f(x) = f(y)$ تعریف شده باشد. چنانچه η نگاشت پوششی کانونی از E به روی $\frac{E}{R_f}$ باشد. فرض کنید f^* نگاشت دوسویی کانونی از $\frac{E}{R_f}$ بتوی $B = f(E)$ و j نگاشت کانونی یک‌به‌یک از B به E' باشد. بنابراین $f = j \circ f^* \circ \eta$. در اینصورت η تابعی، $(T,\frac{T}{R_f})-$ پیوسته است و j یک تابع $((T')_B,T')-$ پیوسته است. علاوه بر این چون $f^* \circ \eta$ تابعی، $(T,(T')_B)-$ پیوسته است لذا با توجه به قضیهٔ ۴، f^* تابع، $(\frac{T}{R_f},(T')_B)-$ پیوسته است.

تعریف ۴ اگر R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی یک مجموعهٔ E باشد و X یک زیرمجموعهٔ E باشد. آنگاه اجتماع همهٔ $R-$ کلاسهای عناصر X، $R-$ **اشباع** X، برابر مجموعهٔ $\eta^{-1}(\eta(X))$ می‌باشد. یک زیرمجموعهٔ X از E، $R-$ اشباع شده نامیده می‌شود اگر برابر اشباع شده خودش باشد. توجه می‌کنیم که اگر $\bar{X}$ یک زیر مجموعهٔ $\frac{E}{R}$ باشد، آنگاه $\eta^{-1}(\bar{X})$ مجموعه‌ای $R-$ اشباع شده است.

تمرین ۸۹ از تعریف توپولوژی خارج قسمتی $\frac{T}{R_f}$ و توضیحات آن پیروی می‌کند که ما در مورد مجموعه‌های اشباع شده بکار بردیم. همچنین اثبات تمرین ۹۰ نیز آسان است. تمرین ۹۱ را بهتر است از طریق سه استلزام (۲) $\Longleftarrow$ (۱)، (۳) $\Longleftarrow$ (۲)، (۱) $\Longleftarrow$ (۳) حل کنیم.

قضیه ۵ (تمرین ۸۹) با نمادهای توصیف شده، f^* یک تابع $(\frac{T}{R_f}, (T')_B)-$ همانریختی است اگر و تنها اگر برای هر زیر مجموعهٔ U از E که R_f- اشباع شده و $T-$ باز است، داشته باشیم $f(U) \in T_B$.

تعریف ۵ فرض کنید (E, T) یک فضای توپولوژیکی و R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی E باشد. **رابطهٔ** R **باز** یا **بسته** گفته می‌شود اگر نگاشت پوششی کانونی η از E به $\frac{E}{R}$ به ترتیب $(T, \frac{T}{R})-$ باز یا $(T, \frac{T}{R})-$ بسته باشد.

قضیه ٦ (تمرین ۹۰) فرض کنید (E, T) یک فضای توپولوژیک و R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی E باشد. در اینصورت R باز است اگر و تنها اگر برای هر مجموعهٔ $T-$ باز U، مجموعه $R-$ اشباع U نیز باز باشد.

تمرین ۹۱ فرض کنید (E, T) یک فضای توپولوژیکی و R یک رابطه هم‌ارزی روی E باشد. نشان دهید که شرایط زیر معادلند:

۱) R یک رابطهٔ باز است.

۲) درون هر زیرمجموعهٔ $R-$ اشباع شده از E نیز $R-$ اشباع شده است.

۳) بستار هر زیرمجموعهٔ $R-$ اشباع شده از E نیز $R-$ اشباع شده است.

قضیه ۷ (تمرین ۹۲) فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی و R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی E باشد. آنگاه R بسته است اگر و تنها اگر برای هر $R-$ کلاس C و هر مجموعهٔ $T-$ باز U که شامل C است یک مجموعهٔ $T-$ باز $R-$ اشباع شدهٔ W وجود داشته باشد بطوریکه $C \subseteq W \subseteq U$.

راهنمایی قضیهٔ ۷ شامل دو قسمت است. برای اثبات قسمت اول ما از مسیر زیر پیروی می‌کنیم.

چون U مجموعه‌ای، $T-$ باز است لذا $C_E(U)$، مجموعه‌ای $T-$ بسته است. بنابراین $\bar{F} = \eta(C_E(U))$، مجموعه‌ای $\frac{T}{R}-$ بسته است. بعلاوه $C_{\frac{E}{R}}(\bar{F})$، مجموعه‌ای $\frac{T}{R}-$ باز است در نتیجه $W = \eta^{-1}(C_{\frac{E}{R}}(\bar{F}))$، مجموعه‌ای $T-$ باز و $R-$ اشباع شده است.

برای قسمت دوم، فرض کنید شرط قضیه برقرار باشد و F یک زیرمجموعهٔ $T-$ بستهٔ E باشد. ما باید نشان دهیم $G = \eta^{-1}(\eta(F))$ یک مجموعه $T-$ بسته است. این مطلب در صورتی نتیجه می‌شود که ما بتوانیم ثابت کنیم $C_E(G)$ یک $T-$ همسایگی از هر یک از نقاط x می‌باشد. برای انجام این کار شرط قضیه را برای حالتی‌که $C = R(x)$ و $U = C_E(F)$ بکار می‌بریم.

در تمرین ۹۳ ما به دنبال یک $R-$ کلاس C و یک مجموعهٔ باز U شامل آن هستیم بطوری که هیچ مجموعهٔ اشباع شده بین C و U، موجود نباشد. تمرین ۹۴ چندان پیچیده نیست.

تمرین ۹۳ فرض کنید $E = \{(x,y) \in \mathbf{R}^۲ : y \geq ۰\}$. رابطهٔ هم‌ارزی R را روی E با قرار دادن $((x,y),(x',y')) \in R$ اگر و تنها اگر (۱) $y = y' \neq ۰$ یا (۲)

$y = y' = \circ$ و $x = x'$ تعریف می‌کنیم. ثابت کنید که R بسته نیست. (توپولوژی روی E، توپولوژی زیر فضایی توسط توپولوژی اقلیدسی روی $\mathbf{R}^{\mathsf{2}}$ است).

تمرین ۹۴ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیک و R یک رابطهٔ هم‌ارزی بسته روی E باشد. چنانچه U یک زیرمجموعهٔ $T-$ باز از E باشد. طبق قضیهٔ **۷** ما می‌دانیم که برای هر $R-$ کلاس C مشمول در U یک مجموعهٔ $T-$ باز $R-$ اشباع شدهٔ U_C موجود است بطوریکه $C \subseteq U_C \subseteq U$. ثابت کنید $\bigcup_{C \subseteq U} C = \bigcup_{C \subseteq U} U_C$.

تمرین ۹۵ از تمرین ۹۴ نتیجه بگیرید که اگر R یک رابطهٔ هم‌ارزی بسته روی E و X یک زیرمجموعهٔ $R-$ اشباع شده از E باشد. در اینصورت توپولوژی زیر فضایی القا شده توسط $\frac{T}{R}$ روی زیرمجموعهٔ $\eta(X)$ برابر توپولوژی خارج قسمتی T_X هم القا شده توسط تحدید رابطهٔ R به زیرمجموعهٔ $X \times X$ است که رابطهٔ $R' = \{(x_{\mathsf{1}}, x_{\mathsf{2}}) \in X \times X : (x_{\mathsf{1}}, x_{\mathsf{2}}) \in R\}$ می‌باشد.

راهنمایی برای این تمرین ابتدا نشان می‌دهیم که اگر $\bar{A}$ یک مجموعه از توپولوژی زیر فضایی القا شده بوسیلهٔ $\frac{T}{R}$ روی $\eta(X)$ باشد، در اینصورت $\eta^{-\mathsf{1}}(\bar{A})$ متعلق به توپولوژی زیر فضایی القا شده توسط T روی X می‌باشد و از این به آسانی نتیجه می‌شود که $\bar{A} \in \frac{T_X}{R'}$. برای اثبات عکس رابطهٔ شمولی، یک مجموعهٔ $\bar{A}$ را در $\frac{T_X}{R'}$ درنظر می‌گیریم در اینصورت $\eta^{-\mathsf{1}}(\bar{A})$ در T_X است و از اینرو بفرم $U \cap X$ می‌باشد. جائیکه U، مجموعه‌ای $T-$ باز است. فرض می‌کنیم $\mathbf{K}$ مجموعهٔ همهٔ $R-$ کلاسهای مشمول در U بعلاوه $B = \bigcup \mathbf{K}$ باشد، با استفاده از تمرین ۹۴ می‌بینیم که B، مجموعه‌ای $T-$ باز است و $\eta(B)$ مجموعه‌ای، $\frac{T}{R}-$ باز است. سپس ثابت می‌کنیم که $\eta^{-\mathsf{1}}(\bar{A}) = X \cap B$ و نتیجه می‌گیریم که $\bar{A} = \eta(X) \cap \eta(B)$ و بنابراین در توپولوژی زیر فضایی روی $\eta(X)$ قرار می‌گیرد.

فصل ۴

همگرایی

تعریف ۱ فرض کنید E یک مجموعه باشد. یک **فیلتر** روی E، یک خانوادهٔ ناتهی F از زیرمجموعه‌های E است بطوریکه:

ف۱ هر زیرمجموعهٔ E که شامل یک مجموعهٔ از F باشد، خودش در F باشد.

ف۲ مقطع هر خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌های عضو F در F باشد.

ف۳ همهٔ مجموعه‌های F غیرتهی باشد.

فرض کنید F یک فیلتر روی یک مجموعهٔ E باشد. خانوادهٔ B از زیرمجموعه‌های E یک پایه برای فیلتر F نامیده می‌شود اگر (۱) $B \subseteq F$ و (۲) برای هر مجموعهٔ V در F مجموعهٔ W در B موجود باشد بطوریکه $W \subseteq V$. در چنین وضعی می‌گوییم B، فیلتر F را تولید می‌کند.

تمرینهای ۹۶ تا ۱۰۱ یا شامل یک استفاده ساده‌ای از شرایط تعریف هستند یا یک نتیجه فوری از تعاریف می‌باشند.

تمرین ۹۶ فرض کنید E یک مجموعه و A یک زیرمجموعه غیرتهی از E باشد. نشان دهید که مجموعهٔ زیرمجموعه‌های E که شامل A هستند یک فیلتر روی E است و $\{A\}$ یک پایه برای این فیلتر است.

تمرین ۹۷ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیک و a یک نقطه از E باشد. ثابت کنید که مجموعهٔ همهٔ $T-$ همسایگی‌های a یک فیلتر روی E است (فیلتر $T-$ همسایگی در a) بطوریکه هر پایه $T-$ همسایگی در a یک پایه برای این فیلتر است.

تمرین ۹۸ فرض کنید E یک مجموعهٔ نامتناهی باشد. نشان دهید که خانوادهٔ زیرمجموعه‌های E که متمم باپایان دارند یک فیلتر روی E است. اگر $E = \mathbf{N}$ باشد، به این فیلتر، **فیلتر فرشه** گفته می‌شود. نشان دهید مجموعهٔ زیرمجموعه‌های $\mathbf{N}$ بفرم $\{n \in \mathbf{N} : n \geq k\}$ (برای هر عدد طبیعی k) یک پایه برای فیلتر فرشه است.

تمرین ۹۹ فرض کنید F و G فیلترهایی روی یک مجموعهٔ E باشد، نشان دهید که یک زیرمجموعهٔ X از E متعلق به هر دوی G, F است اگر و تنها اگر مجموعه‌های P در F و Q در G موجود باشند بطوریکه $X = P \cup Q$.

قضیه ۱ (تمرین ۱۰۰) فرض کنید B خانواده از زیرمجموعه‌های مجموعهٔ غیرتهی E باشد. در اینصورت B یک پایه برای یک فیلتر روی E است اگر و تنها اگر (۱) مقطع هر خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌های B شامل یک مجموعه در B باشد و (۲) B غیرتهی و $\emptyset$ متعلق به B نباشد.

تعریف ۲ فرض کنید $\mathbf{A}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های یک مجموعه E باشد. فرض کنید $\mathbf{A}'$ یک خانواده از مقاطع همهٔ خانواده‌های متناهی از مجموعه‌های در $\mathbf{A}$ باشد. اگر $\mathbf{A}'$ شامل مجموعهٔ تهی نباشد در اینصورت آن در شرایط قضیه ۱

صدق می‌کنند و از اینرو یک پایه برای یک فیلتر F روی E است. ما F را **فیلتر تولید شده توسط** A می‌نامیم.

تمرین ۱۰۱ فرض کنید F و G فیلترهایی روی یک مجموعهٔ E باشند بطوریکه برای هر زوج از زیرمجموعه‌های Y, X از E در $F \cup G$ داشته باشیم $X \cap Y \neq \emptyset$. نشان دهید فیلتر تولید شدهٔ توسط $F \cup G$ شامل همهٔ مجموعه‌های بفرم $P \cap Q$ است بطوریکه $P \in F$ و $Q \in G$.

یادآوری فرض کنید E یک مجموعه و R یک رابطهٔ روی E باشد (یعنی یک زیرمجموعه از $E \times E$) آنگاه R، یک رابطهٔ **مرتب** (بعضی اوقات یک **مرتب جزئی**) نامیده می‌شود اگر بازتابی، پاد متقارن و انتقالی باشد یعنی

۱) برای هر $x \in E$ داشته باشیم $(x, x) \in R$.

۲) برای هر $x, y \in E$ بطوریکه $(x, y) \in R$ و $(y, x) \in R$ داشته باشیم $x = y$.

۳) برای هر $x, y, z \in E$ بطوریکه $(x, y) \in R$ و $(y, z) \in R$ داشته باشیم $(x, z) \in R$.

یک زیرمجموعهٔ X از E **کاملاً مرتب بوسیلهٔ** R گفته می‌شود اگر برای هر زوج از عناصر x, y از X داشته باشیم $x = y$ یا $(x, y) \in R$ یا $(y, x) \in R$.

E **بطور استقرایی مرتب توسط** R گفته می‌شود اگر هر زیرمجموعهٔ X از E که کاملاً مرتب توسط R باشد دارای یک $R-$ زبرینه باشد، یعنی اگر عنصر m از E وجود داشته باشد بطوریکه برای هر x در X، $(x, m) \in R$ و برای هر عنصر m' از E داشته باشیم $(x, m') \in R$ در اینصورت $(m, m') \in R$.

تبصره **لم زرن** توضیح می‌دهد که هر مجموعهٔ بطور استقرایی مرتب شدهٔ E دارای یک عنصر $R-$ بیشین است. یعنی دارای عنصری مثل a بطوریکه هیچ عنصر دیگری مثل x از E جزء خود a وجود ندارد بطوریکه $(a, x) \in R$.

لم زرن هم‌ارز با **اصل انتخاب** می‌باشد که بیان می‌کند حاصلضرب هر خانواده از مجموعه‌های غیرتهی، یک مجموعه غیرتهی است. در این کتاب ما درستی اصل انتخاب را قبول می‌کنیم و بنابراین از لم زرن استفاده می‌کنیم.

قضیه ۲ (تمرین ۱۰۲) مجموعهٔ تمام فیلترها روی یک مجموعهٔ غیرتهی E توسط رابطهٔ شمولی بطور استقرایی مرتب شده است.

راهنمایی برای اثبات قضیهٔ ۲ ما باید نشان دهیم که هر مجموعهٔ $\mathbf{F}$ از فیلترهایی که توسط رابطهٔ شمولی کاملاً مرتب هستند دارای یک زبرینه است. اجتماع $\mathbf{F}$ در شرایط قضیهٔ ۱ صدق می‌کند. بنابراین فیلتر تولید شده توسط عنصر زبرینه است.

تبصره بوسیلهٔ کاربردی از لم زرن، قضیهٔ ۲ دلالت بر وجود عناصر $(\subseteq)-$ بیشین در خانوادهٔ فیلترها روی یک مجموعهٔ غیرتهی E دارد. این فیلترهای بیشین، **فرافیلتر** نامیده می‌شوند. همچنین به آسانی می‌توان نشان داد که برای هر فیلتر F روی یک مجموعهٔ E یک فرافیلتر روی E وجود دارد بطوریکه شامل F است.

قضیه ۳ (تمرین ۱۰۳) فرض کنید F یک فرافیلتر روی یک مجموعهٔ E باشد. اگر B, A زیرمجموعه‌های E باشند بطوریکه $A \cup B \in F$، در اینصورت $A \in F$ یا $B \in F$.

راهنمایی برای اثبات قضیهٔ ۳، فرض کنید که داشته باشیم $A \cup B \in F$ اما $A \notin F$ و $B \notin F$. چنانچه F' خانوادهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های X از E باشد بطوریکه $A \cup X \in F$. نشان دهید که F' یک فیلتر است، بطوریکه بطور سره شامل فرافیلتر F می‌باشد که این غیر ممکن است.

قضیه ۴ (تمرین ۱۰۴) فرض کنید $\mathbf{A}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ غیرتهی E باشد بطوریکه فیلتر F را روی E تولید کند. اگر برای هر

زیرمجموعهٔ X از E داشته باشیم $X \in \mathbf{A}$ یا $C_E(X) \in \mathbf{A}$، در اینصورت $\mathbf{A}$ یک فرافیلتر روی E است.

راهنمایی برای اثبات قضیهٔ ۴ فرض کنید F' یک فرافیلتر شامل F باشد. حال ثابت کنید اگر X یک مجموعه در F' باشد در اینصورت $C_E(X) \notin \mathbf{A}$ و از اینرو $X \in \mathbf{A}$.

نتیجه: فرض کنید E یک مجموعهٔ غیرتهی و a عضوی از E باشد. در اینصورت فیلتری که شامل همهٔ زیرمجموعه‌های E و شامل a باشد یک فرافیلتر روی E است.

تمرین ۱۰۵ فرض کنید F یک فرافیلتر روی یک مجموعهٔ E باشد. نشان دهید که $\bigcap F$ شامل حداکثر یک نقطه است چنانچه $\bigcap F = \{a\}$، در اینصورت F یک فرافیلتر شامل همهٔ زیرمجموعه‌های E شامل a می‌باشد.

راهنمایی فرض کنید که $\bigcap F$ شامل دو نقطه متمایز a و b باشد. چنانچه F' فیلتر تولید شده به‌وسیله $F \cup \{a\}$ باشد. نشان دهید که F' به‌طور سره فیلتر F را شامل می‌شود، که این یک تناقض است.

تمرین ۱۰۶ فرض کنید A یک زیرمجموعه از مجموعه E و F یک فیلتر روی E باشد. چنانچه F_A مجموعه زیرمجموعه‌های A و بفرم $A \cap X$ باشد جائیکه X در F است. نشان دهید F_A یک فیلتر روی A است اگر و تنها اگر همهٔ این مجموعه‌ها غیرتهی باشند. اگر F یک فرافیلتر روی E باشد، نشان دهید که این شرط برقرار است اگر و تنها اگر A متعلق به F باشد و در اینحالت، F_A یک فرافیلتر روی A است.

قضیه ۵ (تمرین ۱۰۷) هر فیلتر F روی یک مجموعهٔ غیرتهی E مقطع خانواده‌ای از فرافیلترهاست بطوریکه شامل F باشد.

راهنمایی برای هر مجموعهٔ X که در F نباشد، نشان دهید X متعلق به فرافیلتری که شامل فیلتر تولید شده بوسیلهٔ $F \cup \{C_E(X)\}$ نمی‌باشد.

قضیه ۶ (تمرین ۱۰۸) فرض کنید f یک نگاشت از مجموعهٔ E به مجموعهٔ E' باشد. اگر B یک پایه برای یک فیلتر روی E باشد در اینصورت $f(B) = \{f(X)\}_{X\in B}$ یک پایه برای یک فیلتر روی E' است. اگر B یک پایه برای یک فرافیلتر روی E باشد آنگاه $f(B)$ یک پایه برای یک فرافیلتر روی E' می‌باشد.

راهنمایی اثبات ادعای اول با کاربردی آسان از قضیه ۱ براحتی بدست می‌آید.
برای اثبات ادعای دوم، فرض کنید که B یک پایه برای یک فرافیلتر F روی E باشد. بعلاوه F' یک فیلتر روی E' و تولید شده توسط $f(B)$ باشد. با استفاده از قضیهٔ ۴ نشان دهید که F' یک فرافیلتر است (X' را مجموعه‌ای در F' انتخاب کنید و دو حالت $f^{-1}(X') \in F$ و $f^{-1}(X') \notin F$ را در نظر بگیرید).

قضیه ۷ (تمرین ۱۰۹) فرض کنید f نگاشتی از یک مجموعهٔ E به یک مجموعهٔ E' باشد. اگر B' یک پایه برای یک فیلتر روی E' باشد در اینصورت $f^{-1}(B') = \{f^{-1}(X')\}_{X'\in B'}$ یک پایه برای یک فیلتر روی E است اگر و تنها اگر هر مجموعه در B'، مجموعه $f(E)$ را قطع کند.

راهنمایی یک طرف (قسمت تنها اگر) بدیهی است. قسمت «اگر» با کاربردی از قضیه ۱ به آسانی نتیجه می‌شود.

تعریف ۳ حال فرض کنید (E, T) یک فضای توپولوژیکی و F یک فیلتر روی E باشد. نقطهٔ x از E حد یا **نقطهٔ حدی فیلتر** F و F همگرا به x یا دارای حد x نامیده می‌شود، اگر $T-$ همسایگی فیلتر $V(x)$ در x مشمول در فیلتر F باشد. اگر B یک پایه فیلتر روی E باشد در اینصورت x یک نقطهٔ حدی B و B همگرا به x است، اگر فیلتر تولید شده بوسیله B همگرا به x باشد.

تمرین ۱۱۰ فرض کنید T و T' توپولوژیهایی روی یک مجموعهٔ E باشند. نشان دهید که T قویتر از T' است اگر و تنها اگر هر فیلتر F روی E که همگرا به یک نقطه a در توپولوژی T است، در توپولوژی T' نیز همگرا به a باشد.

راهنمایی برای قسمت تنها اگر، چنانچه T قویتر از T' باشد در اینصورت هر $T'-$ همسایگی از یک نقطه، یک $T-$ همسایگی آن نقطه نیز می‌باشد. در قسمت اگر، ثابت می‌کنیم که هر مجموعهٔ $T'-$ باز، مجموعه‌ای $T-$ باز است و برای این کار نشان می‌دهیم که آن یک $T-$ همسایگی از هر یک از نقاط a است. ما این مطلب را با اختیار نمودن فیلتر F، فیلتر $T-$ همسایگی از a می‌باشد، بکار می‌بریم.

تمرین ۱۱۱ فرض کنید (E,T) و (E',T) فضاهای توپولوژیک باشند، f یک نگاشت از E به E' و p یک نقطه از E باشد. ثابت کنید که اگر f، تابعی $(T,T')-$ پیوسته در p باشد در اینصورت برای هر فیلتر F روی E بطوریکه همگرا به p باشد، پایهٔ فیلتر $f(F)$ همگرا به $f(p)$ می‌باشد.

راهنمایی این مطلب بسادگی از تعریف پیوستگی بدست می آید.

تعریف ۴ هرگاه (E,T) فضای توپولوژیکی و F یک فیلتر روی E باشد. نقطهٔ x یک **نقطهٔ چسبیدهٔ** F گفته می‌شود اگر x یک نقطهٔ چسبیدهٔ هر مجموعه در F باشد. چسبیدهٔ F یعنی $\mathrm{Adh}\ (F)$ مجموعهٔ تمام نقاط چسبیدهٔ F است، بنابراین $\mathrm{Adh}\ (F) = \bigcap_{X\in F} Cl\ (X)$. اگر B یک پایه برای یک فیلتر روی E باشد، x یک نقطهٔ چسبیدهٔ B گفته می‌شود هرگاه یک نقطهٔ چسبیدهٔ پایه فیلتر روی B باشد. چسبیدگی B یعنی $\mathrm{Adh}\ (B)$ مجموعهٔ نقاط چسبیدهٔ آن است.

تمرین ۱۱۲ نشان دهید $\mathrm{Adh}\ (B) = \bigcap_{X\in B} Cl\ (X)$.

راهنمایی برای انجام این کار ثابت کنید که دو طرف تساوی با چسبیدگی فیلتر تولید شده توسط B، برابر است.

تمرین ۱۱۳ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی و A یک زیرمجموعه از E باشد. ثابت کنید که نقطهٔ x از E چسبیدهٔ A است اگر و تنها اگر یک فیلتر F روی E وجود داشته باشد بطوریکه $A \in F$ و F همگرا به x باشد.

اگر x چسبیده از A باشد آنگاه $V_T(x) \cup \{A\}$ یک فیلتر با خواص مورد نیاز تولید می‌کند. عکس این مطلب با بکار بردن تعریف همگرایی بدیهی است.

قضیه ۸ (تمرین ۱۱۴) فرض کنید (E, T) یک فضای توپولوژیکی و B یک پایه برای یک فیلتر روی E باشد. چنانچه x یک نقطه از E و N یک سیستم اساسی از $T-$ همسایگی‌های x باشد. در اینصورت:

۱) x یک نقطهٔ حدی B است اگر و تنها اگر هر مجموعه در N شامل یک مجموعه از B باشد.

۲) x یک نقطهٔ چسبیدهٔ B است اگر و تنها اگر هر مجموعه در N، هر مجموعهٔ B را قطع کند.

هر چهار قسمت این قضیه توسط کاربردهایی از تعاریف نتیجه می‌شوند. نتایج زیر به آسانی بدست می‌آیند.

نتیجه ۱ (تمرین ۱۱۵) نقطهٔ x چسبیده یک فیلتر F است اگر و تنها اگر فیلتر F' وجود داشته باشد، بطوریکه شامل F بوده و همگرا به x باشد.

نتیجه ۲ (تمرین ۱۱۶) هر نقطهٔ حدی از یک فیلتر F، نقطه چسبیده F است.

نتیجه ۳ (تمرین ۱۱۷) هر نقطهٔ چسبیده از یک فرافیلتر U یک نقطهٔ حدی از U است.

تعریف ۵ فرض کنید E یک مجموعه و F یک فیلتر روی E باشد. چنانچه (E', T') فضای توپولوژیکی و f یک نگاشت از E به E' باشد، نقطهٔ x' از E' را **نقطهٔ حدی** f نسبت به F و f را **همگرا** به x' نسبت به F گوئیم هرگاه x' یک نقطهٔ حدی از پایهٔ فیلتر $f(F)$ باشد. x' یک **نقطهٔ چسبیدهٔ** f **نسبت به** F گفته می‌شود اگر آن یک **نقطهٔ چسبیده** از پایهٔ فیلتر $f(F)$ باشد.

تمرین ۱۱۸ فرض کنید $((E_i, T_i))_{i\in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیکی بوده و (E, T) حاصلضرب توپولوژیکی آن باشد. فرض کنید A یک مجموعه، F یک فیلتر روی A و f یک نگاشت از A به E باشد. نشان دهید که f همگرا به یک نقطهٔ x از E نسبت به F می‌باشد اگر و تنها اگر هر نگاشت مختصی $\pi_i \circ f$ همگرا به $\pi_i(x)$ نسبت به F باشد.

راهنمایی چنانچه f همگرا به x نسبت به F باشد برای نشان دادن اینکه $\pi_i \circ f$ همگرا به $\pi_i(x)$ نسبت به F است باید نشان دهیم که هر T_i- همسایگی V_i از $\pi_i(x)$ شامل یک مجموعه بفرم $(\pi_i \circ f)(X)$ است بطوریکه X در F است. ما اینکار را با استفاده از V_i برای ساختن یک $T-$ همسایگی از x در E انجام می‌دهیم.

بلعکس: ما یک $T-$ همسایگی V از x در نظر می‌گیریم و سعی می‌کنیم یک مجموعهٔ X در F پیدا کنیم بطوریکه $f(X) \subseteq V$. بر طبق تعریف توپولوژی حاصلضربی T، همسایگی V شامل یک حلصلضرب از مجموعه‌های T_i- باز مثل U_i است بطوری که تنها تعداد متناهی از آنها E_i نمی‌باشند. همگرایی $\pi_i \circ f$ را برای اندیسهای i متناظر با این مجموعهٔ متناهی برای ساختن مجموعه‌های X_i در F بطوریکه $(\pi_i \circ f)(X_i) \subseteq U_i$ استفاده می‌کنیم و نشان می‌دهیم که مقطع (متناهی) آنها مجموعهٔ X است که می‌خواستیم.

قضیه ۹ (تمرین ۱۱۹) در نمادگزاری معرفی شدهٔ قبل از تمرین ۱۱۸، x' یک نقطهٔ حدی از f نسبت به F است اگر و تنها اگر برای هر $T'-$ همسایگی V' از x' داشته باشیم $f^{-1}(V') \in F$. نقطه x' یک نقطهٔ چسبیدهٔ f نسبت به F است اگر و تنها اگر برای هر $T'-$ همسایگی V' از x' و هر مجموعهٔ X در F، مجموعه $V' \cap f(X)$ غیرتهی باشد.

راهنمایی هر چهار ادعای مطرح شده در قضیه به آسانی از طریق تعاریف و همچنین با استفاده از قضیهٔ ۸ بدست می‌آیند.

مثال ۱ فرض کنید $E=\mathbf{N}$، مجموعهٔ اعداد طبیعی، F فیلتر فرشه روی $\mathbf{N}$ و f یک نگاشت از $\mathbf{N}$ به E' باشد (بنابراین f یک دنباله از نقاط E' است). در اینصورت x' یک نقطهٔ حدی از این دنباله نسبت به فیلتر فرشه است اگر و تنها اگر برای هر T'– همسایگی V' از x' داشته باشیم $f^{-1}(V')\in F$، یعنی $C_{\mathbf{N}}(f^{-1}(V'))$ متناهی است. از اینرو x' یک نقطهٔ حدی f نسبت به F است اگر و تنها اگر برای هر T'– همسایگی V' از x' یک عدد طبیعی k موجود باشد بطوریکه $C_{\mathbf{N}}(f^{-1}(V'))\subseteq[0,k]$، یعنی برای تمام اعداد طبیعی n بزرگتر از k داشته باشیم $f(n)\in V'$.

مثال ۲ فرض کنید (E,T) و (E',T') فضای توپولوژیک و f نگاشتی از E به E' باشد. بعلاوه x نقطه‌ای در E باشد. چنانچه $F=V(x)$ فیلتر T– همسایگی در x باشد در اینصورت نقطهٔ x' از E' یک نقطهٔ حدی از f نسبت به $V(x)$ است اگر و تنها اگر برای هر T'– همسایگی V' از x' داشته باشیم $f^{-1}(V')\in V(x)$ یعنی اگر و تنها اگر یک T– همسایگی V از x وجود داشته باشد بطوریکه $V\subseteq f^{-1}(V')$ و بنابراین $f(V)\subseteq V'$. نقاط حدی f نسبت به $V(x)$ را (T,T')– نقاط حدی f در x نیز می‌گوئیم.

قضیه ۱۰ (تمرین ۱۲۰) با نمادگذاری مثال ۲، f در x، تابعی (T,T')– پیوسته است اگر و تنها اگر $f(x)$ یک نقطهٔ (T,T')– حدی از f در x باشد.

تعریف ٦ یک مجموعهٔ مرتب $(D,\leq)$ **مجموعهٔ جهت‌دار** گفته می‌شود اگر هر زوج $\{x,y\}$ از عناصر D دارای یک کران بالا باشد. فرض کنید $(D,\leq)$ یک مجموعهٔ جهت‌دار باشد و E یک مجموعه باشد. یک نگاشت ν از D به E یک **تور** در E با دامنهٔ D گفته می‌شود.

تعریف ۷ فرض کنید ν یک تور در E با دامنهٔ D باشد و A یک زیرمجموعه از E باشد. گوئیم ν **بطور تصادفی** در A است اگر عنصر k در D وجود داشته باشد بطوریکه برای هر عنصر n در D که $n \geq k$ داشته باشیم $\nu(n) \in A$. گوییم ν **بطور مکرر** در A است اگر برای هر عنصر n در D یک عضو n' از D موجود باشد بطوریکه $n' \geq n$، و $\nu(n') \in A$.

فرض کنید D و D' مجموعه‌های جهت‌دار باشند و ν و ν' تورهایی در E به ترتیب با دامنه‌های D و D' باشند. ν' را یک **زیر تور** از ν گوییم اگر یک نگاشت φ از D' به D موجود باشد بطوریکه:

۱) $\nu' = \nu \circ \varphi$ و

۲) برای هر عنصر n از D یک عنصر n' از D' موجود باشد بطوریکه برای هر d' از D' با شرط $d' \geq n'$، داشته باشیم $\varphi(d') \geq n$.

مثال ۳ فرض کنید $(D, \leq)$ مجموعه اعداد طبیعی $\mathbf{N}$ با ترتیب معمولی باشد. بوضوح $(D, \leq)$ یک مجموعهٔ جهت‌دار است. فرض کنید E یک مجموعهٔ دلخواه باشد. بنابراین یک دنبالهٔ s از عناصر E یک تور در E با دامنهٔ $\mathbf{N}$ است. دنبالهٔ دیگر s' از نقاط E (که همچنین یک تور در E با دامنهٔ $\mathbf{N}$ می‌باشد) یک زیر دنباله از s است هرگاه s' یک زیر تور از s باشد.

قضیه ۱۱ (تمرین ۱۲۱) فرض کنید ν یک تور در E با دامنهٔ D باشد. چنانچه $\mathbf{A}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های E باشد بطوریکه ν بطور مکرر در هر زیرمجموعه از $\mathbf{A}$ باشد. اگر اشتراک هر زوج از عناصر $\mathbf{A}$ شامل یک عضو از $\mathbf{A}$ باشد، در اینصورت یک زیر تور ν' از ν وجود دارد بطوریکه برای هر عضو X از $\mathbf{A}$، ν' بطور تصادفی در X باشد.

تبصره برای ساختن یک زیر تور از ν، ابتدا باید یک مجموعهٔ جهت‌دار $\bar{D}$ به‌عنوان دامنه انتخاب می‌کنیم. می‌توان به $D' = D \times \mathbf{A}$ نگاه کرد و نشان داد که رابطهٔ R' روی D' داده شده بصورت $((d,A),(d_1,A_1)) \in R'$ اگر و تنها اگر $d \leq d_1$ و $A \supseteq A_1$ یک رابطهٔ مرتب است. اگر تعریف کنیم $\bar{D} = \{(d,A) \in D' : \nu(d) \in A\}$ و $\bar{R}$ را تحدید R' روی $\bar{D}$ بگیریم، در اینصورت براحتی می‌توان نشان داد که $(\bar{D},\bar{R})$ یک مجموعهٔ جهت‌دار است. اکنون فرض کنید $\nu' = \nu \circ \varphi$ جائیکه φ نگاشتی از $\bar{D}$ به D داده شده توسط $\varphi((d,A)) = d$ برای هر $(d,A) \in \bar{D}$ باشد. براحتی می‌توان ثابت کرد که ν' یک زیر تور از ν است و بطور تصادفی در هر مجموعه از $\mathbf{A}$ است.

تعریف ۸ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی و x یک نقطه از E باشد. چنانچه ν یک تور در E با دامنهٔ D باشد. در اینصورت ν همگرا به x و x نقطهٔ حدی از ν گفته می‌شود اگر برای هر $T-$ همسایگی V از x، تور ν بطور تصادفی در V باشد. نقطهٔ x، **نقطهٔ چسبیدهٔ** ν گفته می‌شود اگر برای هر $T-$ همسایگی V از x، تور ν بطور مکرر در V باشد.

قضیه ۱۲ (تمرین ۱۲۲) فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی و ν یک تور در E باشد. نقطهٔ a از E یک نقطهٔ چسبیدهٔ ν است اگر و تنها یک زیر تور از ν و همگرا به a موجود باشد.

راهنمایی اگر a یک نقطهٔ چسبیدهٔ ν باشد آنگاه مجموعهٔ $T-$ همسایگیهای a در شرایط قضیه ۱۱ روی $\mathbf{A}$ صدق می‌کند. اگر a یک نقطهٔ چسبیدهٔ ν نباشد در اینصورت باید یک $T-$ همسایگی V از a چنان موجود باشد که ν بطور مکرر در V نباشد. بنابراین ν (و از اینرو تمام زیر تورهای آن) باید بطور تصادفی در $C_E(V)$ قرار گیرند.

تعریف ۹ فرض کنید ν یک تور در یک مجموعهٔ E باشد. چنانچه:

$$F(\nu) = \{X \in P(E) : \text{باشد} \ X \ \text{بطور تصادفی در} \ \nu\}$$

در اینصورت $F(\nu)$ یک فیلتر روی E است؛ که ما آنرا **فیلتر وابسته به تور** ν می‌نامیم.

فرض کنید F یک فیلتر روی مجموعهٔ E باشد، در اینصورت F توسط رابطهٔ مرتب R تعریف شده بصورت $(X,Y) \in R$ اگر و تنها اگر $X \supseteq Y$ جهت‌دار است. فرض کنید ν یک نگاشت از F به E باشد بطوریکه $\nu(X) \in X$ برای هر مجموعهٔ X در F. دراینصورت ν یک تور در E است؛ گوییم که این **تور وابسته به فیلتر** F است.

قضیه ۱۳ (تمرین ۱۲۳) فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی، F یک فیلتر روی E و x یک نقطه از E باشد. در اینصورت F همگرا به x است اگر و تنها اگر هر تور وابسته به F همگرا به x باشد.

راهنمایی توجه دارید که اگر F همگرا به x باشد، آنگاه برای هر $T-$ همسایگی V از x داریم $V \in F$. در اینصورت برای هر مجموعهٔ X از F بطوریکه $R-$ بزرگتر از V باشد داریم $\nu(X) \in V$.

اگر F همگرا به x نباشد باید یک $T-$ همسایگی V از x چنان وجود داشته باشد که متعلق به F نباشد. بنابراین هر مجموعه در F، مجموعه $C_E(V)$ را قطع می‌کند. این مشاهده به ما اجازه می‌دهد که یک تور وابسته به F بسازیم بطوریکه بطور تصادفی در V نیست و بنابراین همگرا به x نیست.

قضیه ۱۴ (تمرین ۱۲۴) فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی، ν یک تور در E و x یک نقطه از E باشد. در اینصورت ν همگرا به x است اگر و تنها اگر فیلتر $F(\nu)$ همگرا به x باشد.

راهنمایی این بلافاصله از تعاریف گفته شده نتیجه می‌شود.

قضیه ۱۵ (تمرین ۱۲۵) فرض کنید (E,T) و (E',T') فضاهای توپولوژیکی، f یک نگاشت از E به E' و x یک نقطه از E باشد. در اینصورت f تابعی (T,T') پیوسته در x است اگر و تنها اگر برای هر تور ν در E که همگرا به x باشد، تور $f \circ \nu$ در E' همگرا به $f(x)$ باشد.

راهنمایی قسمت «تنها اگر» ساده است. قسمت «اگر» با این فرض که f در x پیوسته نیست بدست می‌آید، بنابراین یک $T'-$ همسایگی V' از $f(x)$ وجود دارد بطوریکه برای هر $T-$ همسایگی V از x مجموعهٔ $f(V)$ مشمول در V' نیست. این به ما اجازه می‌دهد که یک تور ν با دامنهٔ $V_T(x)$ تعریف کنیم که همگرا به x است اما $f \circ \nu$ به $f(x)$ همگرا نیست.

تمرین ۱۲۶ فرض کنید ν یک تور در یک مجموعهٔ E با دامنهٔ D باشد. چنانچه $\nu' = \nu \circ \varphi$ یک زیرتور از ν با دامنهٔ D' باشد. ثابت کنید (۱) اگر ν به یک نقطهٔ a از E همگرا باشد در اینصورت ν' نیز باید چنین باشد. (۲) اگر a یک نقطهٔ چسبیدهٔ ν' باشد آنگاه a یک نقطهٔ چسبیدهٔ ν است.

راهنمایی این نتایج به آسانی از تعاریف گفته شده حاصل می‌شود.

تعریف ۱۰ یک تور ν در مجموعهٔ E یک **فراتور** یا یک **تور جهانی** گفته می‌شود اگر برای هر زیرمجموعهٔ X از E، ν بطور تصادفی در X باشد یا ν بطور تصادفی در $C_E(X)$ باشد.

تمرین ۱۲۷ ثابت کنید (۱) هر زیرتور از یک فراتور خود یک فراتور است. (۲) هر تور دارای یک زیرتور است که، فراتور است.
راهنمایی قسمت اول از یک بحث شبیه آنچه که در مورد قسمت اول تمرین ۱۲۶ استفاده کردیم بدست می‌آید.

در قسمت دوم، برای یک تور داده شده $\nu : D \longrightarrow E$، باید یک زیرتور تولید کنیم بطوریکه یک فراتور باشد. برای انجام اینکار قضیهٔ ۱۱ را بکار می‌بریم. خانوادهٔ S را از همهٔ مجموعه‌های Q از زیرمجموعه‌های E طوری در نظر می‌گیریم بطوریکه (۱) ν بطور مکرر در هر زیرمجموعه در Q باشد و (۲) Q تحت مقطع باپایان بسته باشد. به آسانی می‌توان نشان داد که S بطور استقرایی مرتب شده توسط رابطهٔ شمول است و با توجه به لم زرن یک عنصر بیشین $Q_\circ$ دارد. از قضیهٔ ۱۱، ν یک زیرتور ν' دارد

بطوریکه برای هر عنصر X از $Q_\circ$ تور ν' بطور تصادفی در X است. برای نشان دادن اینکه ν' یک فراتور است، باید نشان دهیم که برای هر زیرمجموعهٔ X از E، ν' بطور تصادفی در X است یا ν' بطور تصادفی در $C_E(X)$ است. ما اینکار را با نشان دادن اینکه هر زیرمجموعهٔ A از E، برابر A یا متمم آن متعلق به $Q_\circ$ است انجام می‌دهیم. و برای این منظور باید از خاصیت $(\subseteq)-$ بیشینه بودن $Q_\circ$ استفاده کنیم.

تمرین ۱۲۸ فرض کنید E یک مجموعه، ν یک تور در E و F یک فیلتر روی E باشد. ثابت کنید (۱) اگر ν یک فراتور باشد در اینصورت فیلتر $F(\nu)$ وابسته به ν یک فرافیلتر است. (۲) اگر F یک فرافیلتر باشد در اینصورت هر تور وابسته به F یک فراتور است.

راهنمایی قسمت اول از تعاریف فراتور و $F(\nu)$ و کاربردی از قضیه ۴ نتیجه می‌شود.

برای اثبات قسمت دوم، فرض کنید ν یک تور وابسته به یک فرافیلتر F باشد. باید نشان دهیم که برای هر زیرمجموعهٔ Y از E داریم (۱) ν بطور تصادفی در Y است یا (۲) ν بطور تصادفی در $C_E(Y)$ است. فرض کنید (۱) برقرار باشد؛ در اینصورت ν مسلماً بطور مکرر در $C_E(Y)$ می‌باشد. ما می‌توانیم نشان دهیم که $F \cup \{C_E(Y)\}$ یک فیلتر شامل F تولید می‌کند. بنابراین باید F باشد، زیرا F یک فرافیلتر است. پس $C_E(Y) \in F$. بنابراین نتیجه می‌گیریم که برای هر مجموعهٔ X' در F که $X' \subseteq C_E(Y)$ داریم $\nu(X') \subseteq C_E(Y)$، یعنی ν بطور تصادفی در $C_E(Y)$ است.

فصل ۵

اصول موضوعی

فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیک باشد.

تعریف ۱ توپولوژی T و فضای (E,T)، $\mathbf{T}_\circ$ گفته می‌شود اگر برای هر زوج نقاط متمایز x و y از E، یک $T-$ همسایگی از یکی از آنها وجود داشته باشد که شامل دیگری نباشد، یعنی یک $T-$ همسایگی از x موجود باشد که شامل y نیست یا یک $T-$ همسایگی از y موجود باشد که شامل x نیست. یک **فضای** $T_\circ$ گاهی یک **فضای کلوموگراف** گفته می‌شود.

تمرین ۱۲۹ نشان دهید که توپولوژی نقطهٔ خاص روی یک مجموعه، یک فضای $T_\circ$ است.

راهنمایی برای حل این مسئله نقاط متمایز a و b را در E اختیار کرده و حالتهای زیر را در نظر می‌گیریم:

۱) یکی از این نقاط همان نقطهٔ خاص p در تعریف توپولوژی باشد،

۲) هر دوی a و b متمایز از p باشند.

تمرین ۱۳۰ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیک باشد. ثابت کنید که T فضای $T_\circ$ است اگر و تنها اگر برای هر زوج از نقاط متمایز x و y در E داشته باشیم $Cl_T\{x\} \neq Cl_T\{y\}$.

راهنمایی برای قسمت «تنها اگر» نشان دهید که یا $x \in Cl_T\{x\}$ و $x \notin Cl_T\{y\}$ یا $y \in Cl_T\{y\}$ و $y \notin Cl_T\{x\}$. (آزمون تمرین ۵۰ را برای نقطه‌ای که در بستار یک مجموعه باشد به خاطر بیاورید.) برای قسمت «اگر» بهتر است که با برهان خلف پیش برویم، فرض کنید که شرط برقرار باشد اما (E,T) فضای $T_\circ$ نباشد.

تمرین ۱۳۱ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی باشد. R را رابطه‌ای روی E تعریف شده، توسط $(x,y) \in R$ اگر و تنها اگر $Cl_T\{x\} = Cl_T\{y\}$ در نظر بگیرید. نشان دهید که فضای خارج قسمتی $(\frac{E}{R}, \frac{T}{R})$ فضای $T_\circ$ است.

راهنمایی برای اثبات این نتیجه، ابتدا نشان دهید که تابع پوشای کانونی η از E به $\frac{E}{R}$ یک نگاشت باز است (برای انجام اینکار فرض کنید U یک زیرمجموعهٔ $T-$ باز از E است و ثابت کنید که $U = \eta^{-1}(\eta(U))$.

اکنون فرض کنید $X = \eta(x)$ و $Y = \eta(y)$ دو نقطهٔ متمایز از $\frac{E}{R}$ باشد، چون X و Y متمایز هستند پس $(x,y) \notin R$ و بنابراین $Cl_T\{x\} \neq Cl_T\{y\}$. لذا یک مجموعهٔ $T-$ باز U وجود دارد که شامل تنها یکی از نقاط x و y است و نه هر دو. نشان دهید که $\eta(U)$ تنها شامل یکی از عناصر متناظر در X و Y است.

تمرین ۱۳۲ نشان دهید که توپولوژی T_p ایجاد شده بوسیلهٔ شبه متر یک p روی مجموعهٔ E فضای $T_\circ$ است اگر و تنها اگر p دقیقاً یک متر یک باشد.

فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی باشد. رابطهٔ A را تعریف شده روی E توسط قرار دادن $(x,y) \in A$ اگر و تنهااگر $x \in Cl_T\{y\}$ در نظر بگیرید.

تمرین ۱۳۳ نشان دهید رابطهٔ A بازتابی و انتقالی است. همچنین A پاد متقارن است اگر و تنها اگر توپولوژی T، فضای $T_\circ$ باشد.

تعریف ۲ یک فضای توپولوژیکی (E,T) **فضای الکساندرف** گفته می‌شود اگر اشتراک هر خانواده از زیرمجموعه‌های $T-$ باز E، مجموعه‌ای $T-$ باز باشد.

تمرین ۱۳۴ فرض کنید (E,T) یک فضای الکساندرف باشد. نشان دهید که یک زیرمجموعهٔ K از E مجموعه‌ای $T-$ بسته است اگر و تنها اگر هرگاه $y \in K$ و $(x,y) \in A$ آنگاه $x \in K$. (که A رابطهٔ تعریف شده در قبل از تمرین ۱۳۳ است.)

تعریف ۳ توپولوژی T و فضای (E,T)، $\mathbf{T}_1$ گفته می‌شود اگر برای هر زوج از نقاط متمایز x و y در E یک $T-$ همسایگی از هر کدام از آنها موجود باشد که شامل دیگری نیست، یعنی وجود دارد یک $T-$ همسایگی از x که شامل y نیست و یک $T-$ همسایگی از y که شامل x نیست. یک **فضای** T_1 را گاهی **فضای فرشه** نیز می‌گوییم.

تمرین ۱۳۵ فرض کنید E یک مجموعه با بیش از یک عنصر باشد. نشان دهید که توپولوژی نقطهٔ خاص روی E فضای T_0 است، ولی T_1 نیست.

تمرین ۱۳۶ توپولوژی T روی $\mathbf{Z}$، مجموعهٔ اعداد صحیح، تولید شده توسط مجموعه‌های بفرم $\{2n-1, 2n, 2n+1\}$ برای هر عدد صحیح n، **توپولوژی عددی روی $\mathbf{Z}$** نامیده می‌شود. نشان دهید اگر k یک عدد صحیح فرد باشد، آنگاه $\{k\}$، مجموعه‌ای $T-$ باز است، در حالیکه اگر k صحیح زوج باشد آنگاه $\{k\}$ مجموعه‌ای $T-$ بسته است. ثابت کنید که توپولوژی عددی فضای T_0 است اما T_1 نیست.

تمرین ۱۳۷ نشان دهید که توپولوژی T_q تولید شده بوسیلهٔ یک نیم متریک روی مجموعهٔ E، $T_\circ$ است.

قضیه ۱ (تمرین ۱۳۸) فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیک باشد. در این‌صورت شرایط زیر معادلند:

۱) T یک توپولوژی $T_۱$ است.

۲) برای هر نقطهٔ x از E مجموعهٔ $\{x\}$، مجموعه‌ای $T-$ بسته است.

۳) برای هر نقطهٔ x از E اشتراک فیلتر $T-$ همسایگیهای x برابر $\{x\}$ است.

راهنمایی این قضیه را بصورت (۲) $\Longleftarrow$ (۱) , (۳) $\Longleftarrow$ (۲) , (۱) $\Longleftarrow$ (۳) اثبات کنید. البته برهان همگی آنها ساده می‌باشد.

تمرین ۱۳۹ فرض کنید (E,T) یک فضای $T_۱$، A یک زیرمجموعه از E و x یک نقطهٔ چسبیدهٔ A باشد. ثابت کنید که اگر x متعلق به A نباشد در اینصورت هر $T-$ همسایگی از x شامل تعداد نامتناهی نقطه از A است.

راهنمایی فرض کنید یک $T-$ همسایگی V از x شامل تنها تعداد باپایان نقطه از A باشد. چنانچه خاصیت $T_۱$ را برای x و این خانوادهٔ متناهی از نقاط بکار ببریم آنگاه می‌توان یک همسایگی از x ساخت که A را قطع نکند.

تمرین ۱۴۰ فرض کنید (E,T) یک فضای $T_۱$ با یک پایهٔ متناهی برای توپولوژی T باشد. نشان دهید که E متناهی و T گسسته است.

راهنمایی با یک نقطهٔ x از E شروع کنید چنانچه در یک مجموعهٔ $B_۱$ از پایه باشد. اگر $\{x\} \neq B_۱$ ما خاصیت $T_۱$ را برای تولید یک مجموعهٔ دیگر $B_۲$ از پایه و شامل x

که به طور سره مشمول در $B_۱$ باشد بکار می‌بریم. با تکرار این روش، ما یک دنبالهٔ نزولی سره از مجموعه‌های پایه داریم بطوریکه باید جایی متوقف شود، زیرا پایه متناهی است.

تمرین ۱۴۱ ثابت کنید که تنها توپولوژی $T_۱$ روی یک مجموعهٔ متناهی، توپولوژی گسسته است.

تعریف ۴ توپولوژی T و فضای (E,T)، $\mathbf{T}_۲$ نامیده می‌شود اگر برای هر زوج از نقاط متمایز x و y از E، $T-$ همسایگی‌های مجزایی از x و y موجود باشند. **فضاهای** $T_۲$ بیشتر مواقع **فضاهای هاسدرف** گفته می‌شوند. در فرانسه، توپولوژی $T_۲$ را فضای جدا کننده نامند.

تمرین ۱۴۲ فرض کنید E یک مجموعهٔ نامتناهی و T توپولوژی متمم باپایان روی E باشد. ثابت کنید که T، توپولوژی $T_۱$ است ولی هاسدرف نمی‌باشد.
راهنمایی واضح است که T، توپولوژی $T_۱$ است. نشان دهید که اگر آن هاسدرف باشد در اینصورت E باید یک مجموعهٔ متناهی باشد.

تمرین ۱۴۳ نشان دهید که توپولوژی T_d ایجاد شده بوسیلهٔ یک متریک d روی مجموعهٔ E هاسدرف است.

تمرین ۱۴۴ فرض کنید E مجموعهٔ $\mathbf{N}\cup\{\infty\}$ باشد جایی که ∞ سمبلی است که عدد طبیعی نیست. فرض کنید q نگاشتی از $E\times E$ به $\mathbf{R}$ تعریف شده بوسیله ضابطه زیر باشد:

۱) برای هر x در E، $q(x,x)=۰$.

۲) برای هر $x \neq \circ$ در E، $q(x, \circ) = ۱$.

۳) برای هر $x \neq \infty$ در E، $q(x, \infty) = ۱$.

۴) برای هر عدد صحیح مثبت n، $q(\circ, n) = q(\infty, n) = \frac{۱}{n}$.

۵) برای هر عدد صحیح مثبت m و n، $q(m, n) = |\frac{۱}{m} - \frac{۱}{n}|$.

نشان دهید که q یک نیم‌متریک روی E است و توپولوژی ایجاد شده بوسیلهٔ q روی E هاسدرف نیست. (نشان دهید که $\circ$ و ∞ هیچ همسایگی مجزایی ندارند.)

تمرین ۱۴۵ فرض کنید E مجموعهٔ

$$\{(x,y) \in R^{۲} : y \geq \circ \text{ بطوریکه } y, x \text{ اعداد گویا باشند}\}$$

باشد. چنانچه θ را یک عدد گنگ اختیار کنیم. برای هر نقطهٔ (x,y) از E و هر عدد حقیقی مثبت ε مجموعهٔ زیر را تعریف می‌کنیم.

$$\begin{aligned} N_\varepsilon(x,y) = \{(x,y)\} &\cup \{(t,\circ) : |t - x - \theta y| < \varepsilon \ , \ t \text{ گویا}\} \\ &\cup \{(t,\circ) : |t - x + \theta y| < \varepsilon \ , \ t \text{ گویا}\}. \end{aligned}$$

$N_\varepsilon(x,y)$ شامل (x,y) همراه با دو بازه روی اعداد گویای محور x هاست که این بازه‌ها بمرکز نقاطی هستند که خطوطی که از (x,y) می‌گذرند و شیب آنها $\frac{۱}{\theta}$ و $-\frac{۱}{\theta}$ است را روی محور x ها قطع می‌کنند. فرض کنید $V(x,y)$ خانوادهٔ زیرمجموعه‌های N از E باشد بطوریکه N شامل مجموعه‌ای بفرم $N_\varepsilon(x,y)$ باشد. خانوادهٔ مجموعه‌های $(V(x,y))_{(x,y)\in E}$ در شرایط قضیهٔ ٦ از فصل اول صدق می‌کند. بنابراین یک توپولوژی T_θ روی E چنان ایجاد می‌کند که برای هر نقطه (x,y) از E خانوادهٔ $V(x,y)$ یک فیلتر $T_\theta-$ همسایگی از (x,y) است. ثابت کنید که توپولوژی T_θ هاسدرف است.

با یک نمودار مراکز بازه‌ها را برای $N_\varepsilon(x_۱,y_۱)$ و $N_\varepsilon(x_۲,y_۲)$ مشخص کنید. ε را آنقدر کوچک بگیرید که این بازه‌ها همدیگر را قطع نکنند.

قضیه ۲ (تمرین ۱۴۶) فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی باشد. در اینصورت عبارات زیر معادلند:

۱) T هاسدرف است.

۲) برای هر نقطهٔ x از E، اشتراک $T-$ همسایگیهای بستهٔ x برابر $\{x\}$ است.

۳) اگر یک فیلتر F روی E همگرا به نقطهٔ x باشد، در اینصورت x تنها نقطهٔ چسبیدهٔ F است.

۴) یک فیلتر F روی E حداکثر یک نقطه حدی می‌تواند داشته باشد.

راهنمایی برای اثبات استلزام (۲) $\Longrightarrow$ (۱) نشان دهید که برای هر نقطهٔ y متمایز از x یک همسایگی بستهٔ x وجود دارد که شامل y نیست. اثبات (۳) $\Longrightarrow$ (۲) از این خاصیت که یک نقطهٔ چسبیده به یک فیلتر همگرا به x باید در هر همسایگی بستهٔ x قرار گیرد، استفاده کنید. قسمت (۴) $\Longrightarrow$ (۳) بدیهی است. اگر (۴) برقرار باشد و T هاسدرف نباشد، در اینصورت نقاط متمایز y, x وجود دارند بطوریکه هر همسایگی از x، هر همسایگی از y را قطع می‌کند. این مطلب ما را قادر می‌سازد که فیلتری بسازیم که همگرا به x و به y باشد.

تمرین ۱۴۷ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی و A یک زیرمجموعه از E باشد. ثابت کنید که اگر T، توپولوژی T_k $(k = ۰, ۱, ۲)$ باشد آنگاه توپولوژی زیرفضایی T_A نیز T_k است.

تمرین ۱۴۸ فرض کنید $((E_i, T_i))_{i\in I}$ یک خانوادهٔ غیرتهی از فضاهای توپولوژیکی غیرتهی باشد و (E,T) فضای حاصلضرب این خانواده باشد. ثابت کنید که (E,T)، فضای T_k است اگر و تنها اگر همهٔ فضاهای (E_i,T_i)، T_k باشند $(k = ۰, ۱, ۲)$.

تمرین ۱۴۹ نشان دهید که یک فضای توپولوژیکی (E,T) هاسدرف است اگر و تنها اگر قطر D از $E \times E$ یک مجموعه $(T \times T)-$ بسته باشد.
راهنمایی فرض کنید P متمم D در $E \times E$ باشد. اگر (E,T) هاسدرف باشد، با اثبات اینکه P باز است نشان می‌دهیم که D بسته است. ما اینکار را با اثبات اینکه D یک $T \times T-$ همسایگی از هر نقطهٔ (x,y) آن است، انجام می‌دهیم. توجه کنید که اگر $(x,y) \in P$ آنگاه x, y نقاط متمایز از E است، بنابراین ما می‌توانیم شرط هاسدرف بودن را بکار بریم.

برعکس، اگر D بسته باشد آنگاه P باز است. اگر y, x نقاط متمایز از E باشد آنگاه $(x,y) \in P$ و بنابراین P یک همسایگی (x,y) است.

تمرین ۱۵۰ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی و (E',T') یک فضای هاسدرف باشد. چنانچه f و g نگاشتهای $(T,T')-$ پیوسته از E به E' باشند. ثابت کنید که مجموعهٔ $A = \{x \in E : f(x) = g(x)\}$ مجموعه‌ای، $T-$ بسته است.

راهنمایی اگر $t \notin A$ آنگاه $f(t) \neq g(t)$، بنابراین ما می‌توانیم شرط هاسدرف را روی E' بکار ببریم و مجموعه‌های باز و مجزا شامل این نقاط را بدست آوریم. پیوستگی g, f را برای پیدا کردن همسایگیهای V, U از t استفاده کنید که اشتراک آنها A را قطع نمی‌کند.

تمرین ۱۵۱ فرض کنید (E,T) و (E',T') و f همانند تمرین ۱۵۰ باشند. ثابت کنید که نمودار f، یعنی مجموعهٔ G از نقاط (x,y) در $E \times E'$ بطوریکه $y = f(x)$، یک زیرمجموعهٔ $T \times T'-$ بسته از $E \times E'$ می‌باشد.

راهنمایی اگر (x,y) یک نقطه از متمم نمودار (که می‌خواهیم ثابت کنیم باز است) باشد آنگاه $y \neq f(x)$. بنابراین می‌توانیم شرط هاسدرف را برای بدست آوردن مجموعه‌های $T'-$ باز مجزای U' و V' به ترتیب شامل $y, f(x)$ بکار ببریم.

پیوستگی f یک زیرمجموعهٔ $T-$ باز U از E و شامل x را بدست می‌دهد بطوری که $f(U) \subseteq U'$. نشان دهید که $U \times V'$، مجموعه G را قطع نمی‌کند.

تمرین ۱۵۲ نشان دهید که اگر E یک مجموعهٔ متناهی باشد در اینصورت تنها توپولوژی هاسدرف روی E همان توپولوژی گسسته است.
راهنمایی این مطلب براحتی از تمرین ۱۴۰ نتیجه می‌شود. بطور متناوب ممکن است خاصیت هاسدرف را برای همهٔ زوجهای $(x_1, x_2), \dots, (x_1, x_n)$ بکار ببریم و مجموعه‌های باز $U_2, \dots, U_n$ را که شامل x_1 باشند اما شامل $x_2, \dots, x_n$ نباشند را بدست آوریم. سپس اشتراک این مجموعه‌های باز را در نظر بگیرید.

تعریف ۵ توپولوژی T و فضای (E, T) را $T_{2\frac{1}{2}}$ یا **کاملاً هاسدرف** گویند، اگر برای هر دو نقطه متمایز x, y از E، $T-$ همسایگیهای V, W به ترتیب از x, y موجود باشد بطوریکه $Cl\ (V) \cap Cl\ (W) = \emptyset$.

تمرین ۱۵۳ نشان دهید که توپولوژی شیب گنگ در تمرین ۱۴۵، هاسدرف است اما کاملاً هاسدرف نیست.

راهنمایی نشان دهید که بستار $N_\varepsilon(x, y)$ شامل اجتماع دو نوار نامتناهی بشکل صلیب می‌باشد. این دو صلیب باید یکدیگر را قطع کنند.

تمرین ۱۵۴ فرض کنید $E = \{(x, y) \in \mathbf{R}^2 : y \geq 0\}$ باشد. برای هر نقطهٔ (x, y) از E بطوریکه $y > 0$. چنانچه $B(x, y)$ خانوادهٔ دیسکهای $D((x, y), r)$ بمرکز (x, y) و شعاع r باشند جائیکه $0 < r \leq y$. برای هر نقطه $(a, 0)$ از E چنانچه $B(a, 0)$ خانوادهٔ مجموعه‌های بفرم

$$D((a, 0), r) = \{(a, 0)\} \cup \{(x, y) \in E : y > 0, (x - a)^2 + y^2 < r^2\}$$

که r یک عدد حقیقی مثبت است.

برای تمام نقاط (x,y) از E، فرض کنید $V(x,y)$ خانواده‌ای زیرمجموعه‌های N از E باشد بطوری که N شامل یک مجموعه در $B(x,y)$ است. خانوادهٔ مجموعه‌های $(V(x,y))_{(x,y)\in E}$ در شرایط قضیهٔ ٦ از فصل ۱ صدق می‌کنند، بنابراین یک توپولوژی T روی E وجود دارد بطوریکه برای هر نقطه (x,y) از E، خانوادهٔ $V(x,y)$ فیلتر $T-$ همسایگی (x,y) است. توپولوژی T را **توپولوژی نیم — دیسک** روی E گویند.

مثال ۴ نشان دهید که توپولوژی نیم — دیسک کاملاً هاسدرف است.

راهنمایی با استفاده از نمودار نشان دهید که اگر q,p متمایز باشند آنگاه بستارهای $\frac{d}{۳}-$ گوی‌های حول q,p یکدیگر را قطع نمی‌کنند (جائیکه d فاصلهٔ اقلیدسی معمولی بین q,p است).

تعریف ٦ توپولوژی T و فضای (E,T) **منظم** گفته می‌شود اگر برای هر نقطهٔ x از E و هر زیرمجموعهٔ $T-$ بستهٔ A که شامل x نیست، مجموعه‌های $T-$ باز و مجزای V,U وجود دارند بقسمی که $x \in U$ و $A \subseteq V$.

توپولوژی T و فضای (E,T)، $\mathbf{T}_۳$ گفته می‌شوند اگر $T_۱$ و منظم باشد.

تمرین ۱۵۵ نشان دهید که توپولوژی نیم — دیسک روی نیم صفحهٔ بالایی، منظم نیست.

راهنمایی فرض کنید $p=(a,۰)$ یک نقطه روی محور افقی باشد و F متمم $D(p,۱)$ در E باشد. نشان دهید که F شامل اجتماعی از بازه‌های $(a-۱,a)$ و $(a,a+۱)$ روی محور افقی است بطوریکه هر مجموعهٔ باز شامل p این اجتماع را قطع می‌کند.

تمرین ۱۵٦ نشان دهید که توپولوژی عددی روی $\mathbf{Z}$ منظم نیست.

تمرین ۱۵۷ فرض کنید $E = \{a, b, c\}$ و $T = \{\emptyset, E, \{a\}, \{b, c\}\}$. ثابت کنید که T منظم است ولی T_1 نیست.

راهنمایی مجموعه‌های $T-$ بسته و زوجهای (x, F) شامل یک نقطهٔ x و مجموعهٔ $T-$ بستهٔ F که شامل x نیست را مشخص کنید، در هر حال با یک نگاه کوتاه به T می‌توان مجموعه‌های بازی که هیچ اشتراکی با یکدیگر ندارند را پیدا کرد.
T، توپولوژی T_1 نیست زیرا تمام مجموعه‌های تک عضوی بسته نیستند.

تمرین ۱۵۸ فرض کنید (E, T) یک فضای توپولوژیکی باشد. ثابت کنید که T منظم است اگر و تنها اگر برای هر نقطهٔ x از E و هر مجموعهٔ $T-$ باز U شامل x، یک مجموعهٔ $T-$ باز U' شامل x موجود باشد بطوریکه $Cl\ (U') \subseteq U$.

راهنمایی اگر T منظم و U یک مجموعهٔ $T-$ باز شامل x باشد، خاصیت منظم بودن را برای x و مجموعهٔ $T-$ بستهٔ $C_E(U)$ بکار برید.
اگر شرط برقرار باشد و F یک مجموعهٔ $T-$ بسته که شامل x نیست آنگاه شرط را برای $U = C_E(F)$ بکار ببرید.

تمرین ۱۵۹ نشان دهید که یک فضای توپولوژیکی (E, T) منظم است اگر و تنها اگر هر نقطهٔ x یک دستگاه اساسی از $T-$ همسایگیهای شامل مجموعه‌های $T-$ بسته، داشته باشد.

راهنمایی فرض کنید که T منظم باشد. برای نشان دادن اینکه هر نقطهٔ دارای یک دستگاه اساسی از $T-$ همسایگی‌های بسته است باید در هر $T-$ همسایگی از x یک $T-$ همسایگی بسته پیدا کنیم. هر $T-$ همسایگی V از x شامل یک مجموعهٔ باز U شامل x است. برای این مجموعهٔ باز نتیجهٔ تمرین ۱۵۸ را بکار ببرید. برای اثبات عکس آن، تمرین ۱۵۸ را در جهت عکس استفاده کنید.

تمرین ۱۶۰ نشان دهید که هر زیر فضای یک فضای منظم، یک فضای منظم است.

تعریف ۷ توپولوژی T و فضای (E,T) **کاملاً منظم** گفته می‌شود اگر برای هر x از E و هر زیرمجموعهٔ $T-$ بستهٔ A از E که شامل x نیست، یک نگاشت پیوسته f از E به بازهٔ بستهٔ $[0,1]$ موجود باشد بطوریکه $f(x)=0$ و برای هر نقطهٔ t در A، $f(t)=1$. توپولوژی T و فضای (E,T)، $\mathbf{T}_{3\frac{1}{2}}$ گفته می‌شوند اگر T_1 و کاملاً منظم باشند. فضای $T_{3\frac{1}{2}}$ اغلب یک **فضای تیخونف** نیز گفته می‌شود.

تبصره همانطور که در بخش (۵) تذکر دادیم اصطلاحات علمی در این موضوع کاملاً دقیق نمی‌باشند. بعضی نویسنده‌گان مفهوم کاملاً منظم و $T_{3\frac{1}{2}}$ را یکسان در نظر می‌گیرند.

مثالی از یک فضا موجود است بنام سر بطری تیخونف که T_3 است اما $T_{3\frac{1}{2}}$ نیست. [مثالهای نقض در توپولوژی اثر، استین و سیباخ، صفحه ۱۰۹ را ببینید.]

تمرین ۱۶۱ فرض کنید $E=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : y\geq 0\}$ باشد. برای هر نقطهٔ (x,y) از E بطوریکه $y>0$، چنانچه $B(x,y)$ خانوادهٔ مجموعه‌هایی باشد که برای هر عدد حقیقی مثبت ε، بشکل $E\cap V((x,y),\varepsilon)$ هستند. برای هر نقطهٔ $(x,0)$ از E فرض کنید $B(x,0)$ خانوادهٔ مجموعه‌هایی بفرم $\{(x,0)\}\cup V((x,\varepsilon),\varepsilon)$، برای هر عدد حقیقی مثبت ε باشد. قرار دهید $B=\bigcup_{(x,y)\in E} B(x,y)$. در اینصورت B یک پایه برای یک توپولوژی T روی E است که **توپولوژی دیسک مماس نمی‌سکی** گفته می‌شود. نشان دهید T، $T_{3\frac{1}{2}}$ است.

راهنمایی برای نشان دادن اینکه توپولوژی نمی‌سکی T_1 است، ما باید دو نقطهٔ متمایز p و q بگیریم و حالات زیر را درنظر بگیریم (۱) p و q روی محور افقی نباشد. (۲) p و q هر دو روی محور افقی باشند. (۳) یکی از p و q روی محور افقی باشد و دیگری نباشد. در هر حال با رسم شکل به آسانی می‌توان همسایگیهای از p و q یافت که در شرط T_1 صدق کند.

چنانچه F یک زیرمجموعهٔ بسته از E و p یک نقطهٔ خارج از F باشد بطوری که یک $T-$ همسایگی V از p وجود دارد که مشمول در $C_E(F)$ است. حال چند حالت

زیر را بررسی کنید (۱) p روی محور افقی نباشد و (۲) p روی محور افقی باشد، و با رسم یک منحنی تابعی پیوسته از E به $[۰,۱]$ که مقدار ۰ را در p و ۱ را در هر نقطه از F اختیار کند، بیابید.

تمرین ۱۶۲ نشان دهید که هر فضای کاملاً منظم، یک فضای منظم است.

راهنمایی برای نشان دادن اینکه یک فضای کاملاً منظم (E,T) منظم است، فرض کنید a یک نقطهٔ E باشد و F یک زیرمجموعهٔ $T-$ بسته باشد که شامل a نیست. یک نگاشت پیوستهٔ $f: E \longrightarrow [۰,۱]$ وجود دارد بطوریکه $f(a) = ۰$ و $f(F) = \{۱\}$. زیرمجموعه‌های باز مجزا از $[۰,۱]$ بگیرید که شامل ۰ و ۱ باشند و به تصویر معکوس آنها تحت f نگاه کنید.

تمرین ۱۶۳ نشان دهید که توپولوژی حاصلضرب از یک خانواده از فضاهای کاملاً منظم، یک فضای کاملاً منظم است.

راهنمایی فرض کنید a یک نقطه از فضاهای حاصلضرب باشد و F یک زیرمجموعهٔ بسته که شامل a نیست. در اینصورت متمم F باز است و لذا شامل یک حاصلضرب از زیرمجموعه‌های باز U_i از فضاهای عامل است که برای i های موجود به جز در یک مجموعهٔ متناهی J تمام فضا هستند. چنانچه کاملاً منظم بودن را برای فضاهای عامل E_i برای i در J بکار بریم، آنگاه توابع پیوسته $f_i: E_i \longrightarrow [۰,۱]$ وجود دارند که مقدار ۰، را در $i-$ امین تصویر a و ۱ را در همهٔ نقاط در متمم U_i اختیار کند. اکنون از این توابع f_i برای ساختن یک تابع پیوستهٔ f از فضای حاصلضرب به $[۰,۱]$ استفاده می‌کنیم بطوریکه $f(a) = ۰$ و $f(F) = \{۱\}$.

قضیه ۳ (تمرین ۱۶۴) (قضیهٔ جادهی تیخونف) یک فضای توپولوژیکی فضای تیخونف $(T_{۳\frac{۱}{۲}})$ است اگر و تنها اگر همانریخت با یک زیر فضا از حاصلضرب یک خانواده از فضاهایی باشد که همگی مساوی $[۰,۱]$ با توپولوژی متریک معمولی هستند.

راهنمایی قسمت اگر ساده است.
برای اثبات قسمت «تنها اگر»، فرض کنیم (E,T) یک فضای کاملاً منظم باشد.

چنانچه F مجموعه همهٔ نگاشتهای پیوسته از E به $[\circ, ۱]$ باشد. برای هر f در F قرار دهید $I_f = [\circ, ۱]$ و $P = \prod_{f\in F} I_f$. یک نگاشت g از E به P تعریف کنید که برای هر x در E، $g(x) = (f(x))_{f\in F}$. ابتدا (با استفاده از خاصیت $T_۱$) ثابت کنید که g یک‌به‌یک است (بنابراین ما یک نگاشت معکوس $g^{-۱}$ از $g(E)$ به E داریم) بطوری که g پیوسته است، و بالاخره $g^{-۱}$ پیوسته است.

تعریف ۸ توپولوژی T و فضای توپولوژیکی (E,T) **نرمال** گفته می‌شوند اگر برای هر زوج از زیرمجموعه‌های $T-$ بستهٔ مجزای A و B، زیرمجموعه‌های $T-$ باز مجزای U و V بترتیب شامل A و B وجود داشته باشد. توپولوژی T و فضای (E,T) را $\mathbf{T}_۴$ گویند، اگر $T_۱$ و نرمال باشد.

تبصره در اینجا نیز چندین نظر متفاوت برای این اصطلاحات وجود دارد. بعضی از نویسندگان $T_۴$ را استفاده می‌کنند در جائیکه ما آنرا نرمال می‌نامیم و نرمال را استفاده می‌کنند جائیکه ما $T_۴$ را بکار می‌بریم. می‌توان نشان داد که فضای نمی‌سکی $T_{۳\frac{۱}{۲}}$ است اما $T_۴$ نیست. [مثالهای نقض در توپولوژی اثر استین و سیباخ ص ۱۰۱]

مثال ۵ فرض کنید $\omega_\circ$ اولین اوردینال نامتناهی و $\omega_۱$ اولین اوردینال ناشمارا بوده و $\Omega_\circ = [\circ, \omega_\circ]$ و $\Omega_۱ = [\circ, \omega_۱]$ با توپولوژی ترتیبی باشند. در اینصورت $TP = \Omega_\circ \times \Omega_۱$ با توپولوژی حاصلضرب، **قطعه تیخونف** نامیده می‌شود. می‌توان نشان داد که این فضا $T_۴$ است.

تمرین ۱۶۵ نشان دهید که توپولوژی عددی روی $\mathbf{Z}$ نرمال نیست.

تمرین ۱۶۶ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی باشد. نشان دهید که (E,T) نرمال است اگر و تنها اگر برای هر مجموعهٔ $T-$ باز U و هر زیرمجموعهٔ $T-$ بستهٔ A از U، یک مجموعه $T-$ باز U' وجود داشته باشد به قسمی که $A \subseteq U'$ و $Cl(U') \subseteq U$.

قضیه ۴ (تمرین ۱٦۷) (لم اوریزون) فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی نرمال باشد. اگر A و B زیرمجموعه‌های $T-$ بستهٔ مجزا از E باشند آنگاه یک نگاشت پیوستهٔ f از E به $[۰,۱]$ وجود دارد بطوریکه $f(A)=\{۰\}$ و $f(B)=\{۱\}$.

راهنمایی فرض کنید $U_۱ = C_E(B)$، در اینصورت $U_۱$ یک زیرمجموعهٔ $T-$ باز شامل A است. طبق تمرین ۱٦٦ یک مجموعهٔ $T-$ باز $U_۰$ وجود دارد بطوریکه $A \subseteq U_۰$ و $Cl\ (U_۰) \subseteq U_۱$. باز اگر تمرین ۱٦٦ را برای $Cl\ (U_۰)$ و $U_۱$ بکار ببریم مجموعهٔ $T-$ باز $U_{\frac{۱}{۲}}$ وجود دارد بقسمی که $Cl\ (U_۰) \subseteq U_{\frac{۱}{۲}}$ و $Cl\ (U_{\frac{۱}{۲}}) \subseteq U_۱$.

نشان دهید که چگونه از تمرین ۱٦٦ برای ساختن استقرایی مجموعه‌های باز U_r که r عددی گویا دوتایی از فاصلهٔ $[۰,۱]$ و با مخرجی از یک توان ۲ است، استفاده می‌کنیم بطوریکه برای اعداد گویای $r_۲, r_۱$ از این نوع که $r_۱ < r_۲$ داشته باشیم $Cl\ (U_{r_۱}) \subseteq U_{r_۲}$. حال تعریف کنید $f : E \longrightarrow [۰,۱]$ توسط:

$$f(x) = \begin{cases} ۱ & \text{اگر} \quad x \in B \\ \inf\{r \in [۰,۱] : x \in U_r\} & \text{اگر} \quad x \notin B. \end{cases}$$

یقیناً $f(A)=\{۰\}$ و $f(B)=\{۱\}$.

باید نشان دهیم که f پیوسته است. توپولوژی معمولی روی $[۰,۱]$ توسط خانوادهٔ زیرمجموعه‌های بفرم $[۰,s)$ و $(t,۱]$ تولید شده است. بنابراین تنها نیاز داریم که ثابت کنیم تصویر معکوس چنین مجموعه‌هایی تحت f، $T-$ باز هستند. برای انجام اینکار ابتدا ثابت می‌کنیم که $f^{-۱}[۰,s) = \bigcup_{r\in K} U_r$ جائیکه K مجموعه‌ای از اعداد گویای دوتایی r در $[۰,s)$ است و از اینرو $f^{-۱}(t,۱] = \bigcup_{r\in L}(C_E(C(U_r))$ جاییکه L مجموعه‌ای از اعداد گویای دوتایی در $(t,۱]$ است.

قضیه ۵ (تمرین ۱٦۸) (قضیهٔ گسترش تیتز) فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی نرمال و F یک زیر مجموعهٔ $T-$ بستهٔ از E باشد. در اینصورت هر نگاشت پیوسته از F به یک بازهٔ بستهٔ کراندار I از $\mathbf{R}$ می‌تواند به یک نگاشت پیوسته از E به I گسترش یابد.

راهنمایی بازهٔ بستهٔ کراندار I را برابر $[-۱, ۱]$ بگیرید. نشان دهید که $A = f^{-۱}[-۱, -\frac{۱}{۳}]$ و $B = f^{-۱}[\frac{۱}{۳}, ۱]$ زیرمجموعه‌های مجزای $T-$ بسته از E هستند. با بکار بردن لم اوریزون، یک نگاشت پیوستهٔ g از E به $[-\frac{۱}{۳}, \frac{۱}{۳}]$ چنان وجود دارد بطوریکه $g(A) = \{-\frac{۱}{۳}\}$ و $g(B) = \{\frac{۱}{۳}\}$. قرار دهید $f_۰ = f$ و $g_۰ = g$ و $f_۱$ تحدید $f_۰ - g_۰$ به F باشد. ثابت کنید که $f_۱(F) \subseteq [-\frac{۲}{۳}, \frac{۲}{۳}]$. این عمل را برای تعریف دنباله‌ای از نگاشتهای $f_n : F \longrightarrow [-(\frac{۲}{۳})^n, (\frac{۲}{۳})^n]$ و $g_n : E \longrightarrow [-\frac{۱}{۳}(\frac{۲}{۳})^n, \frac{۱}{۳}(\frac{۲}{۳})^n]$ با این شرط که $f_{n+۱}$ تحدید $f_n - g_n$ به F است، تکرار کنید.

حال آزمون کشی را برای همگرایی یکنواخت بکار ببرید و نشان دهید که سری Σg_n همگرایی یکنواخت روی E است. این مطلب نشان می‌دهد که تابع مجموع g پیوسته است. بالاخره ثابت کنید که برای هر نقطهٔ x از F، داریم $g(x) = f(x)$.

تمرین ۱۶۹ فرض کنید (E, T) یک فضای توپولوژیکی باشد. اگر $E = F_۱ \cup F_۲$ که $F_۱$ و $F_۲$ زیرمجموعه‌های $T-$ بستهٔ E هستند و هر کدام در توپولوژی زیرفضایی خود نرمال می‌باشند، ثابت کنید که (E, T) نرمال است.

راهنمایی فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های $T-$ بستهٔ مجزا از E باشند. در اینصورت $A \cap F_۱$ و $B \cap F_۱$ زیرمجموعه‌های $T_{F_۱}-$ بسته از $F_۱$ هستند. چون $T_{F_۱}$ نرمال است مجموعه‌های $T_{F_۱}-$ باز مجزا شامل این مجموعه‌ها وجود دارند، اینها بصورت اشتراک $F_۱$ با زیرمجموعه‌های $T-$ باز E هستند، مانند $U_۱$ و $V_۱$. قرار دهید $U'_۱ = U_۱ \cup C_E(F_۱)$ و $V'_۱ = V_۱ \cup C_E(F_۱)$. اینها زیرمجموعه‌های $T-$ باز از E و بترتیب شامل A و B هستند. بطور مشابه $U'_۲$ و $V'_۲$ را با استفاده از نرمال بودن $T_{F_۲}$ تعریف کنید. سپس نشان دهید که $U = U'_۱ \cap U'_۲$ و $V = V'_۱ \cap V'_۲$ مجموعه‌های مجزای $T-$ باز هستند که بترتیب شامل A و B می‌باشند.

تمرین ۱۷۰ فرض کنید (E, T) یک فضای نرمال و F یک زیرمجموعهٔ $T-$ بسته از E باشد. چنانچه f یک نگاشت پیوسته از زیرمجموعهٔ F به

$I^{2} = \{(x,y) \in \mathbf{R}^{2} : 0 \leq x, y \leq 1\}$ باشد، ثابت کنید که یک نگاشت پیوسته g از E به I^{2} وجود دارد بطوریکه تحدید g به F برابر f است.

راهنمایی این یک کاربرد ساده از قضیهٔ گسترش تیتز است.

تعریف ۹ فرض کنید A و B زیرمجموعه‌هایی از E باشند، در اینصورت A و B **جدا شده** گفته می‌شوند هرگاه $B \cap Cl\ (A) = \emptyset = A \cap Cl\ (B)$. فضای (E,T) و توپولوژی T **کاملاً نرمال** گفته می‌شود، اگر برای هر زوج از زیرمجموعه‌های جدا شدهٔ A و B از E، زیرمجموعه‌های $T-$ باز مجزای U و V وجود داشته باشد بقسمی که $A \subseteq U$ و $B \subseteq V$. فضای (E,T) و توپولوژی T، T_5 گفته می‌شود اگر کاملاً نرمال و T_1 باشد. در اینجا نیز اختلاف نظر در مورد اصطلاحات وجود دارد، در بعضی از کتابها T_5 را برای کاملاً نرمال استفاده می‌کنند و برعکس.

مثال ٦ نشان دهید که قطعه تیخونف کاملاً نرمال نمی‌باشد.

تمرین ۱۷۱ فرض کنید (E,d) یک فضای متریک باشد. در اینصورت توپولوژی القایی T_d توسط d، کاملاً نرمال است.

راهنمایی فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های جدا شدهٔ E باشند. هر نقطهٔ a از A در متمم بستار B قرار دارد، که یک مجموعهٔ باز است. پس یک گوی به مرکز a مانند $V_d(a, r(a))$ وجود دارد که مشمول در این متمم است. فرض کنید $U = \bigcup_{a\in A} V_d(a, \frac{1}{2} r(a))$، آنگاه U مجموعه‌ای باز شامل A است. با روشی مشابه یک مجموعهٔ باز V و شامل B تعریف کنید و نشان دهید که U و V مجزا هستند.

قضیه ٦ (تمرین ۱۷۲) یک فضای توپولوژیکی (E,T) کاملاً نرمال است اگر و تنها اگر هر زیر فضای آن نرمال باشد.

راهنمایی ۱) فرض کنید (E,T) کاملاً نرمال باشد. می‌توان ثابت کرد که هر زیر فضای آن کاملاً نرمال است. برای انجام اینکار با استفاده از تمرین ۷۷ نشان‌دهید که اگر F زیر مجموعه ای از E و A و B زیرمجموعه‌های جدا شده نسبت

به توپولوژی زیر فضایی باشند، آنگاه آنها زیرمجموعه‌های جدا شده از E نسبت به T هستند.

۲) اکنون فرض کنید که همهٔ زیر فضاهای (E,T) نرمال هستند. فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های جدا شده از E باشند. خاصیت نرمال بودن زیر فضای $X = C_E(Cl_T(A) \cap Cl_T(B))$ را برای زیرمجموعه‌های بستهٔ مجزای $X \cap Cl_T(A)$ و $X \cap Cl_T(B)$ از آن بکار ببرید.

تمرین ۱۷۳ فرض کنید $E = \mathbf{R}$ باشد. فرض کنید T توپولوژی روی E شامل همهٔ مجموعه‌های بفرم $U \cup V$ که U یک مجموعهٔ باز معمولی و V یک زیرمجموعهٔ از اعداد گنگ هستند. ثابت کنید که (E,T)، فضای $T_۴$ است. (این فضای (E,T)، یک **خط گسترده شده** نامیده می‌شود).

راهنمایی فرض کنید T^* توپولوژی اقلیدسی معمولی روی E باشد. از این حقیقت که $T^* \subseteq T$ نتیجه می‌شود که T فضای $T_۱$ است.

حال فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های مجزای $T-$ بسته از E باشند. چنانچه $A_۱$ و $B_۱$ اشتراک آنها با $\mathbf{Q}$ (مجموعهٔ اعداد گویا) باشد. نشان دهید که این مجموعه‌ها، زیرمجموعه‌های T^*- جدا شده از E هستند. چون T^* کاملاً نرمال است (بنابر تمرین ۱۷۱) زیرمجموعه‌های T^*- باز مجزای $U_۱$ و $V_۱$ از E وجود دارند که بترتیب شامل $A_۱$ و $B_۱$ هستند. فرض کنید $U = U_۱ \cup (A \cap C_E(\mathbf{Q}))$ و $V = V_۱ \cup (B \cap C_E(\mathbf{Q}))$ باشد. نشان دهید که U و V مجموعه‌های $T-$ باز مجزایی هستند که بترتیب شامل A و B می‌باشند.

تمرین ۱۷۴ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیک باشد. چنانچه i و j اعضایی از مجموعهٔ $\{۰, ۱, ۲, ۲\frac{۱}{۲}, ۳, ۳\frac{۱}{۲}, ۴, ۵\}$ باشند. ثابت کنید که اگر T فضای T_j و $i < j$ باشد آنگاه T یک T_i توپولوژی نیز هست.

فصل ٦

فشردگی

تعریف ۱ فرض کنید E یک مجموعه و A یک زیرمجموعه از E باشد. یک **پوشش** از A یک خانواده از زیرمجموعه‌های E است که اجتماع آنها شامل A است. یک **زیر پوشش** از یک پوشش A، یک زیر خانواده است بطوریکه یک پوشش از A نیز می‌باشد. اگر (E,T) یک فضای توپولوژیکی باشد و A یک زیرمجموعه از E باشد در اینصورت یک پوشش باز از A یک پوشش است بطوریکه همهٔ زیرمجموعه‌های آن $T-$ باز باشند.

فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی باشد. یک زیرمجموعهٔ A از E **فشرده** گفته می‌شود اگر هر پوشش $T-$ باز از A یک زیر پوشش متناهی داشته باشد. (E,T) فضای **فشرده موضعی** گفته می‌شود اگر هر نقطهٔ E دارای یک $T-$ همسایگی فشرده باشد.

گوئیم یک خانواده $(F_i)_{i\in I}$ از زیرمجموعه‌های یک مجموعهٔ E دارای **خاصیت مقطع باپایان** است اگر برای هر زیرمجموعهٔ متناهی J از I، اشتراک $\bigcap\limits_{i\in J} F_i$ غیر تهی باشد.

تمرین ۱۷۵ فرض کنید E یک مجموعهٔ نامتناهی و T توپولوژی متمم باپایان روی E باشد. ثابت کنید که (E,T) فشرده است.

راهنمایی بعد از اینکه یک مجموعه از پوشش را انتخاب نمودید، تعداد زیادی از عناصر E که پوشیده نشوند باقی نمی‌ماند.

تمرین ۱۷۶ ثابت کنید که یک فضای توپولوژیکی گسسته فشرده است اگر و تنها اگر متناهی باشد.

راهنمایی در حقیقت هر فضای متناهی، فشرده است. اگر E فضای گسسته نامتناهی باشد، براحتی می‌توان یک پوشش باز ساخت که هیچ زیر پوشش متناهی نداشته باشد.

قضیه ۱ (تمرین ۱۷۷) فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی و A یک زیرمجموعه از E باشد. در اینصورت A فشرده است اگر و تنها اگر برای هر خانواده $(F_i)_{i\in I}$ از زیرمجموعه‌های T_A- بستهٔ A با خاصیت مقطع باپایان، داشته باشیم $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$.

راهنمایی این یک تمرین آسان است که از خواص دمرگان زیر استفاده می‌شود، $C_E(\bigcap\limits_{i\in I} X_i) = \bigcup\limits_{i\in I} C_E(X_i)$ و $C_E(\bigcup\limits_{i\in I} X_i) = \bigcap\limits_{i\in I} C_E(X_i)$.

قضیه ۲ (تمرین ۱۷۸) فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیک باشد. در اینصورت عبارات زیر معادلند:

۱) (E,T) فشرده است.

۲) هر فیلتر روی E دارای حداقل یک نقطهٔ چسبیده است.

۳) هر فرافیلتر روی E همگراست.

راهنمایی برای اثبات (۲) $\Longleftarrow$ (۱) توجه کنید که اگر F یک فیلتر روی E باشد در اینصورت خانواده $(Cl(X))_{X\in F}$ از مجموعه‌های بسته دارای خاصیت مقطع باپایان است.

برای استنتاج (۳) $\Longrightarrow$ (۲) تذکر این نکته لازم است که هر نقطهٔ چسبیدهٔ یک فرافیلتر، یک نقطهٔ حدی می‌باشد.

برای اثبات (۱) $\Longrightarrow$ (۳) یک خانواده از مجموعه‌های بسته با خاصیت مقطع با پایان را در نظر بگیرید. این خانواده یک فیلتر تولید می‌کند که مشمول در یک فرافیلتر می‌باشد، بطوریکه یک نقطهٔ حدی p دارد. نشان دهید که p در همهٔ مجموعه‌های بسته از خانواده قرار دارد.

قضیه ۳ (تمرین ۱۷۹) فرض کنید (E,T) یک فضای هاسدرف باشد. در اینصورت هر زیر مجموعهٔ فشردهٔ E، یک مجموعه $T-$ بسته است.
راهنمایی فرض کنید K یک زیرمجموعهٔ فشردهٔ E باشد. چنانچه a یک نقطه خارج K باشد خاصیت هاسدرف را برای a و هر نقطهٔ x در K بکار ببرید. سپس مجموعه‌های باز مجزای شامل a و x را بدست می‌آوریم که این یک پوشش باز برای K را می‌دهد که دارای یک زیر پوشش متناهی است. حال از مجموعه‌های شامل a که نظیر مجموعه‌های باز زیر پوشش شده‌اند برای ساختن یک همسایگی از a که K را قطع می‌کند، استفاده کنید.

تمرین ۱۸۰ ثابت کنید که اجتماع هر خانوادهٔ متناهی از زیرمجموعه‌های فشرده از یک فضای توپولوژیکی یک مجموعه فشرده است.
راهنمایی یک پوشش باز برای اجتماع مجموعه‌ها، پوشش برای هر یک از مجموعه‌های فشرده است.

قضیه ۴ (تمرین ۱۸۱) فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی فشرده باشد. در اینصورت هر زیرمجموعهٔ $T-$ بسته از E فشرده است.
راهنمایی یک پوشش باز برای زیرمجموعهٔ بستهٔ F همراه با متمم $C_E(F)$ یک پوشش باز از E است.

تمرین ۱۸۲ ثابت کنید که اشتراک هر خانوادهٔ غیرتهی از زیرمجموعه‌های فشردهٔ یک فضای هاسدرف، یک فضای فشرده است.
راهنمایی تمرینهای ۱۷۹ و ۱۸۱ را بکار ببرید.

قضیه ۵ (تمرین ۱۸۳) هر فضای هاسدرف فشرده، نرمال است.
راهنمایی با تمرین ۱۷۹ مطابقت کنید.

قضیه ۶ (تمرین ۱۸۴) فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی فشرده، (E',T') یک فضای توپولوژیکی دلخواه و f یک نگاشت $(T,T')-$ پیوسته از E به E' باشد. در اینصورت $f(E)$ فشرده است.
راهنمایی اگر ما تعریف پیوستگی را از تصویر معکوس مجموعه‌های باز، استفاده کنیم این مطلب بدیهی است.

قضیه ۷ (تمرین ۱۸۵) فرض کنید (E,T) یک فضای فشرده، (E',T') یک فضای هاسدرف و f یک نگاشت دوسویی $(T,T')-$ پیوسته از E به E' باشد. در اینصورت f، تابعی $(T,T')-$ همانریختی است.
راهنمایی آنچه باقی می‌ماند اینست که نشان دهید $f^{-۱}$، تابعی $(T',T)-$ پیوسته است. یک زیرمجموعهٔ $T-$ بستهٔ F از E اختیار کنید و با استفاده از تمرین‌های ۱۸۱، ۱۸۴، ۱۷۹ سعی کنید که نشان‌دهید $(f^{-۱})^{-۱}(F) = f(F)$ مجموعه‌ای $T'-$ بسته است.

قضیه ۸ (تمرین ۱۸۶) (قضیه تیخونف) فرض کنید $(E_i,T_i)_{i\in I}$ یک خانواده از فضاهای توپولوژیکی و (E,T) فضای توپولوژیکی حاصلضربی آن باشد. اگر همهٔ فضاهای (E_i,T_i) فشرده باشند آنگاه (E,T) نیز فشرده است. اگر همهٔ فضاهای E_i غیرتهی باشند و (E,T) فشرده باشد آنگاه همهٔ فضاهای (E_i,T_i) نیز فشرده هستند.

راهنمایی ۱) فرض کنید تمام فضاهای عامل فشرده باشند. چنانچه U یک فرافیلتر روی فضای حاصلضرب باشد. برای هر اندیس i خانوادهٔ $i-$ امین تصویر از همهٔ مجموعه‌های در U، پایه‌ای برای یک فرافیلتر U_i روی E_i است (تمرین ۱۰۸ را ملاحظه کنید). هر کدام از این فرافیلترهای U_i به نقطه‌ای مثل a_i همگرا هستند. ثابت کنید که U همگرا به نقطهٔ $a = (a_i)$ از حاصلضرب است.

۲) اگر تمام مجموعه‌های E_i غیرتهی باشند و حاصلضرب (E, T) فشرده باشد، در اینصورت تصویرهای π_i، توابع $(T, T_i)-$ پیوسته و پوشا هستند.

تعریف ۲ یک فضای توپولوژیکی (E, T) **فشرده شمارشی** گفته می‌شود، اگر هر پوشش باز شمارا از E دارای یک زیر پوشش متناهی باشد.

قضیه ۹ (تمرین ۱۸۷) فرض کنید (E, T) یک فضای توپولوژیکی باشد. در این‌صورت عبارات زیر معادلند:

۱) (E, T) فشردهٔ شمارشی است.

۲) هر خانوادهٔ شمارش‌پذیر از زیرمجموعه‌های $T-$ بستهٔ E با خاصیت مقطع باپایان، دارای مقطع غیرتهی است.

۳) هر زیرمجموعهٔ نامتناهی شمارش‌پذیر از E دارای یک نقطهٔ $\omega-$ انباشتگی است.

۴) هر دنباله در E دارای یک نقطهٔ چسبیده است.

راهنمایی هم‌ارزی (۲) $\Longleftrightarrow$ (۱) استدلالی همانند تمرین ۱۷۷ ثابت می‌شود. برای اثبات (۴) $\Longleftarrow$ (۳) فرض کنید $\sigma : \mathbf{N} \longrightarrow E$ دنباله‌ای از نقاط E باشد. قرار دهید $A = \sigma(\mathbf{N})$. حالتهایی که A متناهی و A نامتناهی باشد را درنظر بگیرید. برای استنتاج (۳) $\Longleftarrow$ (۴) توجه کنید که هر زیرمجموعهٔ نامتناهی شمارا از E یک دنباله از نقاط E (با استفاده از تعریف شمارش‌پذیری) ایجاد می‌کند.

برای اثبات (۱) $\Longrightarrow$ (۳) فرض کنید (۳) برقرار باشد. چنانچه (U_n) یک پوشش باز شمارا از E باشد. بدون کاهش از کلیت می‌توان فرض کرد که همهٔ مجموعه‌های U_n متمایز هستند و هیچکدام مشمول در اجتماع مجموعه‌های U_i برای $i < n$ نیست. اگر این پوشش هیچ زیر پوشش متناهی نداشته باشد، یک مجموعهٔ نامتناهی X بسازید که هیچ نقطهٔ $\omega-$ انباشتگی نداشته باشد.

بالاخره برای اثبات (۳) $\Longrightarrow$ (۱) فرض کنید یک زیرمجموعهٔ نامتناهی شمارش‌پذیر S از E بدون نقطهٔ $\omega-$ انباشتگی، وجود دارد. چنانچه Z مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های متناهی از S باشد؛ آنگاه Z شمار است. چون S دارای هیچ نقطهٔ $\omega-$ انباشتگی نیست. لذا هر نقطهٔ x از E دارای یک همسایگی باز U_x است بطوریکه $S \cap U_x$ متناهی است. برای هر مجموعهٔ (متناهی) F در Z، فرض کنید U_F اجتماع مجموعه‌های U_x باشد بطوریکه S را در F قطع کند. نشان دهید که $(U_F)_{F\in Z}$ یک پوشش باز شمارا از E است که زیرپوشش باپایان ندارد.

تمرین ۱۸۸ هر فضای فشرده، یک فضای فشردهٔ شمارشی است.

تمرین ۱۸۹ ثابت کنید اگر (E,T) یک فضای فشرده و (E',T') یک فضای فشردهٔ شمارشی باشد. در اینصورت $(E \times E' \ , \ T \times T')$ فشردهٔ شمارشی است.

راهنمایی بحث‌های اینجا کمی دقت بیشتری لازم دارند. فرض کنید $(U_n)_{n\in N}$ یک پوشش باز شمارا از $E \times E'$ باشد. یک دنبالهٔ صعودی (G_n) از مجموعه‌های باز $E \times E'$ تشکیل دهید که برای هر عدد طبیعی n بصورت $G_n = \bigcup\limits_{k\leq n} U_k$ تعریف شده باشد. برای هر n فرض کنید H_n مجموعهٔ نقطه‌های y' در E' باشد بطوریکه یک $T'-$ همسایگی V' از y' چنان وجود داشته باشد که $E \times V' \subseteq G_n$. نشان دهید که همهٔ H_n ها، مجموعه‌های $T'-$ باز هستند و (H_n) یک دنبالهٔ صعودی است.

اگر E فشرده باشد آنگاه هر زیرمجموعهٔ $E \times E'$ که بفرم $E \times \{b\}$ باشد نیز فشرده است. با به کار بردن این مطلب می‌توانیم نشان دهیم که (H_n) یک پوشش باز (شمارا) در E' است. پس باید دارای یک زیر پوششی باپایان باشد. چون (H_n) صعودی است پس یکی از مجموعه‌های H_n مثل H_p باید مساوی E' باشد. از این موضوع می‌توان نتیجه گرفت که $E \times E' = U_۱ \cup \cdots \cup U_p$، یعنی (U_n) یک زیر پوشش متناهی دارد.

تعریف ۳ یک فضای توپولوژیکی (E,T) **فشردهٔ دنباله‌ای** گفته می‌شود اگر هر دنباله در E دارای یک زیر دنبالهٔ همگرا باشد.

تمرین ۱۹۰ فرض کنید (E,T) و (E',T) فضاهای توپولوژیکی و f یک نگاشت $(T,T')-$ پیوسته از E به E' باشند. ثابت کنید که اگر (E,T) فشردهٔ شمارشی یا فشردهٔ دنباله‌ای باشد در اینصورت $f(E)$ نیز چنین است.

راهنمایی برای حالت فشردگی شمارشی از تکنیک تمرین ۱۸۴ استفاده کنید. برای حالتی که (E,T) فشردهٔ دنباله‌ای باشد. فرض کنید σ یک دنباله در $f(E)$ باشد. یک دنبالهٔ ν در E به صورت $\nu(n) = x_n$ تعریف کنید جایی که x_n یک نقطه از E است به طوریکه $f(x_n) = \sigma(n)$. حال یک زیردنبالهٔ همگرا از σ با استفاده از یک زیر دنبالهٔ همگرای ν بسازید.

تمرین ۱۹۱ فرض کنید $\omega_۱$ اولین اوردینال ناشمارا با توپولوژی ترتیبی باشد. نشان دهید که $\omega_۱$ فشردهٔ دنباله‌ای است اما فشرده نیست.

راهنمایی می‌توان نشان داد که برای هر عدد اوردینال γ، تالی آن $\Gamma = \gamma \cup \{\gamma\}$ که با توپولوژی ترتیبی مجهز شده است، فشرده می‌باشد. برای انجام این کار فرض کنید $(U_i)_{i\in I}$ یک پوشش باز از Γ باشد. بعلاوه S زیر مجموعه‌ای از Γ شامل تمام نقاط y باشد که بازهٔ $[۰,y)$ بتواند توسط تعداد متناهی از مجموعه‌های U_i پوشیده شود. نشان دهید که S دارای یک کوچکترین کران بالاست، مثل α. ثابت کنید که α باید همان γ باشد و نتیجه بگیرید که Γ فشرده است. در حالت خاص $\Omega_۱$ فشرده است و از این رو فشردهٔ شمارشی است.

برای نشان دادن اینکه $\omega_۱$ فشردهٔ شمارشی است، نشان می‌دهیم که هر زیرمجموعهٔ نامتناهی شمارا از $\omega_۱$ دارای یک نقطهٔ $\omega-$ انباشتگی در $\omega_۱$ است. چنین زیر مجموعه‌ای به طور قطع دارای یک نقطهٔ $\omega-$ انباشتگی در $\Omega_۱$ است. نشان می‌دهیم که این نمی‌تواند برابر $\omega_۱$ باشد و از این رو باید یک عضو $\omega_۱$ باشد. (زیرا اگر A یک زیرمجموعهٔ شمارش پذیر از $\omega_۱$ باشد. چنانچه α کوچکترین کران بالا (که در حقیقت

اجتماع آنها است) از A باشد در اینصورت α شمارش‌پذیر است، از اینرو برابر ω_1 نیست و همسایگی $[\alpha, \omega_1)$ از ω_1 به هیچ وجه A را قطع نمی‌کند.)

تمرین ۱۹۲ فرض کنید $I = [0, 1]$ و P حاصلضرب توپولوژیکی خانوادهٔ $(X_i)_{i \in I}$ باشد بقسمی که برای هر اندیس i در I داشته باشیم $X_i = I$. نشان دهید که P فشرده است اما فشردهٔ دنباله‌ای نیست.

راهنمایی ۱) با بکار بردن قضیهٔ هاینه بورل در آنالیز ریاضی، I فشرده است. لذا با توجه به قضیهٔ تیخونف، P فشرده است.

۲) برای نشان دادن اینکه P فشردهٔ دنباله‌ای نیست، ثابت کنید اگر $f : I \longrightarrow I$ نقطه‌ای در P باشد در اینصورت یک دنبالهٔ (f_n) از نقاط P همگرا به f است اگر و تنها اگر دنبالهٔ $(f_n(x))$ برای تمام نقاط x از I همگرا به $f(x)$ باشد. دنبالهٔ (f_n) را در P بصورت،

$$f_n(x) = x \text{ امین عدد در بسط دودویی } -n$$

تعریف کنید. نشان دهید که این دنباله زیردنبالهٔ همگرا ندارد.

تمرین ۱۹۳ نشان دهید که اگر P فضای حاصلضرب تعریف شده در تمرین ۱۹۲ باشد، آنگاه $\omega_1 \times P$ فشردهٔ شمارشی است ولی فشرده و فشردهٔ دنباله‌ای نیست.

راهنمایی تمرین (۱) ۱۹۲ را برای P، تمرین ۱۹۱ را برای ω_1 و تمرین ۱۸۹ را برای حاصلضرب بکار ببرید. اگر $\omega_1 \times P$ فشرده باشد در اینصورت ω_1 نیز فشرده است. اگر $\omega_1 \times P$ فشردهٔ دنباله‌ای باشد در اینصورت P نیز چنین خواهد بود.

تمرین ۱۹۴ فرض کنید E یک مجموعهٔ نامتناهی باشد و p یک نقطه از E باشد. نشان دهید که توپولوژی فورت روی E (تمرین ۱۳ را ببینید) هم فشرده و هم فشردهٔ دنباله‌ای است.

راهنمایی برای نشان دادن اینکه T فشرده است، یک پوشش باز در نظر گرفته و به مجموعه ای از پوشش که شامل نقطهٔ p است نگاه کنید.

برای نشان دادن اینکه T فشردهٔ دنباله‌ای است، فرض کنید σ دنباله‌ای در E باشد و دو حالت $\sigma(\mathbf{N})$ متناهی و $\sigma(\mathbf{N})$ نامتناهی را در نظر بگیرید. در حالت دوم نشان دهید که یک زیردنباله همگرا به p وجود دارد.

قضیه ۱۰ فرض کنید (E,d) یک فضای متریک و T توپولوژی تولید شده روی E بوسیلهٔ d باشد. در اینصورت عبارات زیر معادلند:

۱) (E,T) فشرده است.

۲) (E,T) فشرده شمارشی است.

۳) (E,T) فشرده دنباله‌ای است.

راهنمایی برای اثبات این قضیه به نظر می‌رسد که فقط در آن قسمت از آنالیز قرار دارد که توسط یک خطتوپولوژی و آنالیز حقیقی را جدا می‌کند. خواننده را به بخش ۲۴ کتاب مقدمه‌ای بر توپولوژی و آنالیز مدرن سیمونز (G.F.Simmons) ارجاع می‌دهیم.

قضیه ۱۱ (تمرین ۱۹۵) (قضیه الکساندرف) فرض کنید (E,T) یک فضای هاسدرف موضعاً فشرده باشد. در اینصورت یک فضای هاسدرف فشرده $(E_۱,T_۱)$، یک نقطهٔ ∞ از $E_۱$، و یک همانریختی پوشای i از E به متمم $\{\infty\}$ در $E_۱$ همراه با توپولوژی زیر فضایی، وجود دارد.

راهنمایی فرض کنید $E_۱ = E \cup \{\infty\}$ و ∞ یک عنصری که در E قرار ندارد. چنانچه $T_۱ = T \cup T_۰$ که $T_۰$ مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های $E_۱$ به فرم $C_E(K) \cup \{\infty\}$ باشد، بطوریکه K زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از E است.

ثابت می‌شود که $T_۱$ یک توپولوژی روی $E_۱$ است برای اینکه نشان دهید $T_۱$ تحت اجتماع دلخواه و اشتراک متناهی بسته است، باید حالات گوناگونی را مورد بررسی قرار دهید.

فرض کنید i نگاشت طبیعی یک‌به‌یک از E به $E_۱$ باشد. پس آن یک همانریختی پوشا از E به $i(E)$ است.

برای اینکه نشان دهید $T_۱$ هاسدرف است، فرض کنید a و b نقاط متمایزی از $E_۱$ باشند. دو حالت را درنظر بگیرید. a و b هر دو در $E_۱$ هستند یا یکی از آنها برابر ∞ است. در حالت دوم از فشردگی موضعی (E,T) استفاده کنید.

برای اینکه نشان دهیم T_1 فشرده است، یک پوشش باز از E_1 را درنظر بگیرید. یکی از مجموعه‌های پوشش باید به فرم $C_E(K) \cup \{\infty\}$ باشد جائیکه K زیرمجموعهٔ فشرده‌ای از E است. اشتراکهای مجموعه‌های باقی‌مانده از پوشش با E تشکیل یک پوشش برای K می‌دهد.

تعریف ۴ فرض کنید (E, T) یک فضای کاملاً منظم باشد. چنانچه $C^*(E)$ مجموعهٔ همهٔ نگاشتهای پیوسته از E به $I = [0, 1]$ باشد و برای هر f در $C^*(E)$ قرار دهید $I_f = I$. فرض کنید $P_E = \prod_{f \in C^*(E)} I_f$ باشد. آنگاه P_E فشرده است، چون هر یک از عواملش فشرده هستند. چنانچه e نگاشتی از E به P_E باشد بطوریکه $e(x)_f = f(x)$ برای هر نقطهٔ x در E و هر نگاشت f در $C^*(E)$. طبق قضیهٔ جادهی تیخونف e یک همانریختی از E بروی $e(E)$ است. ما βE را بستار $e(E)$ تعریف می‌کنیم. چون βE زیرمجموعهٔ بسته‌ای از فضای فشردهٔ P_E است، پس βE فشرده است. در این صورت زوج مرتب $(\beta E, e)$ **فشرده سازی استون — چک** از (E, T) گفته می‌شود.

قضیه ۱۲ (تمرین ۱۹۶) فرض کنید (E, T) یک فضای کاملاً منظم، و (E', T') یک فضای هاسدرف فشرده و f یک نگاشت پیوسته از E به E' باشد. در اینصورت یک نگاشت پیوستهٔ βf از βE به E' وجود دارد بطوریکه $(\beta f) \circ e = f$.

راهنمایی چون (E', T') هاسدرف و فشرده است لذا نرمال است و از اینرو کاملاً منظم است. $P_{E'}$ و e' را بطور مشابه با P_E و e تعریف کنید. برای هر نگاشت f' در $C^*(E')$ نگاشت تصویری $\pi_{f' \circ f} : P_E \longrightarrow I$ پیوسته است. نشان دهید که یک نگاشت پیوستهٔ H از P_E به $P_{E'}$ وجود دارد بطوریکه $H \circ e = e' \circ f$. ثابت کنید که $(e')(E')$ زیرمجموعهٔ بستهٔ $P_{E'}$ است و نتیجه بگیرید که $H(\beta E) \subseteq (e')(E')$. بالاخره نشان دهید که $\beta f = (e')^{-1} \circ (H|\beta E)$ نگاشت پیوستهٔ مطلوب از βE به E' است.

فصل ۷

همبندی

فرض کنیم (E,T) یک فضای توپولوژیکی باشد. به یادآوریم که دو زیرمجموعهٔ A و B را جدا شده می‌گویند هرگاه: $A \cap Cl_T(B) = \emptyset = B \cap Cl_T(A)$

تمرین ۱۹۷ ثابت کنید که اگر A و B زیرمجموعه‌های بسته و مجزای E باشند، آنگاه آنها جدا شده هستند. ثابت کنید که اگر A و B زیرمجموعه‌های باز و مجزای E باشند، آنگاه آنها جدا شده هستند.

تعریف ۱ یک فضای توپولوژیکی (E,T) را **همبند** گویند هرگاه تنها زیرمجموعه‌های E که $T-$ باز و $T-$ بسته‌اند، E و $\emptyset$ باشند. فضایی را که همبند نباشند **ناهمبند** می‌نامند.

قضیه ۱ (تمرین ۱۹۸) فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی باشد. آنگاه عبارات زیر معادلند:

۱) (E,T) ناهمبند است؛

۲) E اجتماع دو زیرمجموعه جدا شدهٔ ناتهی است؛

۳) E اجتماع دو زیرمجموعهٔ $T-$ بستهٔ ناتهی مجزاست؛

۴) E اجتماع دو زیرمجموعهٔ $T-$ باز ناتهی مجزاست.

تعریف ۲ فرض کنیم (E,T) یک فضای توپولوژیکی و A زیرمجموعه‌ای از E باشد. در این‌صورت A را همبند (یا ناهمبند) گوییم برحسب این که فضای (A,T_A) همبند (یا ناهمبند) باشد.

تبصره وقتی سعی در اثبات همبند بودن یک فضای توپولوژیکی داریم، اغلب با برهان خلف ناهمبند بودن فضا را فرض کرده و سپس با استفاده از هر یک از شرایط قضیه ۱، به تناقض می‌رسیم.

تمرین ۱۹۹ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی و A زیرمجموعه‌ای از E باشد. ثابت کنید که A ناهمبند است اگر و تنها اگر آن را بتوان به صورت اجتماع دو زیرمجموعهٔ جدا شدهٔ ناتهی در E بیان نمود.

راهنمایی هرگاه A اجتماع دو زیرمجموعهٔ T_A- بستهٔ ناتهی و مجزا باشد، نشان دهید که این زیرمجموعه‌ها، مجموعه‌های جدا شدهٔ E هستند. چنانچه A اجتماع دو زیرمجموعهٔ ناتهی E باشد که نسبت به توپولوژی T جدا شده هستند، نشان دهید که این زیرمجموعه‌ها، نسبت به توپولوژی زیرفضایی T_A جدا شده هستند.

قضیه ۲ (تمرین ۲۰۰) فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی و A زیرمجموعه‌ای همبند از E باشد. در این‌صورت هر مجموعهٔ B با شرط $A \subseteq B \subseteq Cl_T(A)$ همبند است.

راهنمایی فرض کنید B ناهمبند باشد؛ مثلاً $B = X \cup Y$ که در آن X و Y زیرمجموعه‌های جدا شدهٔ ناتهی E هستند؛ زوج $A \cap X$ و $A \cap Y$ را بررسی کنید.

قضیه ۳ (تمرین ۲۰۱) فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی و $(A_i)_{i\in I}$ خانواده‌ای از زیرمجموعه‌های همبند در E باشد. نشان دهید که اگر $\cap_{i\in I}A_i$ ناتهی باشد، آنگاه $A=\cup_{i\in I}A_i$ همبند است.
راهنمایی فرض کنید A ناهمبند باشد؛ مثلاً اگر $A=X\cup Y$ که در آن X و Y زیر مجموعه‌های جدا شده ناتهی E هستند. برای هر اندیس i در I، زوج $A_i\cap X$ و $A_i\cap Y$ را در نظر بگیرید.

تمرین ۲۰۲ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی، A و B زیرمجموعه‌های همبند E باشند بطوریکه $A\cap Cl_T(B)\neq\emptyset$. ثابت کنید که $A\cup B$ همبند است.
راهنمایی فرض کنید $A\cup B=X\cup Y$، که در آن X و Y زیرمجموعه‌های جدا شدهٔ ناتهی E باشند. زوج‌های $A\cap X$، $A\cap Y$، $B\cap X$، و $B\cap Y$ را بررسی کنید.

تمرین ۲۰۳ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی، و $(A_n)_{n\in \mathbf{N}}$ یک دنبالهٔ از زیرمجموعه‌های همبند E باشد به طوری که $A_n\cap A_{n+۱}\neq\emptyset$ برای هر عدد طبیعی n. ثابت کنید $\cup_{n\in\mathbf{N}}A_n$ همبند است.
راهنمایی مجموعه‌های $B_n=A_۰\cup A_۱\cup\cdots\cup A_n$ را در نظر بگیرید؛ نشان دهید که آنها همبند با اشتراک ناتهی هستند. حال تمرین ۲۰۱ را به کار ببرید.

تمرین ۲۰۴ نشان دهید که $(\mathbf{Z},T)$ همبند است، که در آن T توپولوژی عددی $\mathbf{Z}$ است.
راهنمایی ثابت کنید که اگر $\mathbf{Z}=A\cup B$ بطوریکه A و B جدا شده باشند، بعلاوه عدد صحیحی مانند k در A موجود باشد، آنگاه $k+۱$ و $k-۱$ نیز در A می‌باشند.

تمرین ۲۰۵ ثابت کنید که یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ با توپولوژی معمولی خود، همبند است اگر و تنها اگر یک بازه باشد.

راهنمایی به آسانی نشان داده می‌شود که اگر یک زیرمجموعهٔ $\mathbf{R}$ بازه نباشد، آنگاه آن همبند نمی‌باشد.
برای اثبات همبند بودن یک بازهٔ E، از برهان خلف استفاده می‌کنیم، فرض کنیم که یک ناهمبندی مانند $E = A \cup B$ داریم. نقاط a و b را به ترتیب از A و B اختیار می‌کنیم؛ با فرض $a < b$ قرار می‌دهیم $c = \sup([a, b] \cap A)$ و نشان دهید که $c \in A \cap B$.

قضیه ۴ (تمرین ۲۰۶) فرض کنید (E, T)، (E', T') دو فضای توپولوژیکی و f نگاشتی (T, T')- پیوسته از E به E' باشد. اگر A زیرمجموعه‌ای همبند از E باشد؛ آنگاه $f(A)$ زیرمجموعه‌ای همبند از E' است.
راهنمایی فرض کنید $A' = f(A)$ همبند نباشد. در این صورت A' اجتماع دو مجموعهٔ ناتهی، باز و مجزا در توپولوژی زیرفضایی روی A' می‌باشد، مثلاً $A' \cap X'$ و $A' \cap Y'$ که در آن X' و Y' زیرمجموعه‌های T' باز E' است. حال زوج $A \cap f^{-1}(X')$ و $A \cap f^{-1}(Y')$ را بررسی کنید.

تمرین ۲۰۷ فرض کنید f نگاشتی پیوسته از یک بازهٔ E در $\mathbf{R}$ به $\mathbf{R}$ باشد. هرگاه a و b نقاطی از E و k عددی حقیقی باشد به طوری که $f(a) < k < f(b)$، ثابت کنید که نقطه‌ای مانند c از E وجود دارد به‌قسمی که $f(c) = k$.

تمرین ۲۰۸ فرض کنید (E, T) یک فضای توپولوژیکی و (E', T') یک فضای گسسته با دو نقطه باشد. ثابت کنید که (E, T) ناهمبند است اگر و تنها اگر نگاشتی پوشا و (T, T')- پیوسته از E به E' وجود داشته باشد.
راهنمایی ۱) فرض کنید که E ناهمبند باشد؛ مثلاً $E = U \cup V$ که در آن U و V زیرمجموعه‌های T- باز مجزا و ناتهی هستند. نگاشت $f : E \longrightarrow E'$ را با دستور زیر تعریف کنید:

$$f(x) = \begin{cases} \text{۰} & \text{اگر} \quad x \in U \\ \text{۱} & \text{اگر} \quad x \in V \end{cases}$$

۲) هرگاه f نگاشتی پوشا و پیوسته از E به روی E' وجود داشته باشد زوج، $f^{-1}\{1\}$ و $f^{-1}\{0\}$ را بررسی کنید.

قضیه ۵ (تمرین ۲۰۹) فرض کنید $((E_i,T_i))_{i\in I}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیکی و (E,T) حاصلضرب توپولوژیکی آنها باشد. اگر همهٔ فضاها در این خانواده همبند باشند آنگاه حاصلضرب آنها نیز همبند است. اگر همهٔ مجموعه‌های E_i ناتهی باشند و (E,T) همبند باشد آنگاه همهٔ فضاهای (E_i,T_i) نیز همبند هستند.

راهنمایی ۱) ابتدا به حاصلضرب (E,T) از دو فضای همبند (E_1,T_1) و (E_2,T_2) بیندیشید. فرض کنید این حاصلضرب ناهمبند باشد. در این صورت $E=U\cup V$ که در آن U و V مجموعه‌های $T-$ باز ناتهی و مجزا هستند. فرض کنید u و ν به ترتیب نقاطی از U و V باشند و قرار دهید $A_1=\{(x,y)\in E: y=\pi_2(u)\}$ و $A_2=\{(x,y)\in E: x=\pi_1(\nu)\}$ در این صورت (A_1,T_{A_1}) و (A_2,T_{A_2}) به ترتیب با (E_1,T_1) و (E_2,T_2) همانریخت هستند و لذا همبند می‌باشند. از طرفی $A_1\cap A_2$ ناتهی است زیرا شامل $(\pi_1(\nu),\pi_2(u))$ است. از اینرو $A=A_1\cup A_2$ همبند است. حال زوج $A\cap U$ و $A\cap V$ را برای حصول یک تناقض بررسی کنید.

تبصره اثبات برای حاصلضرب خانواده‌ای دلخواه از فضاهای همبند، کمی پیچیده‌تر است، لیکن بر ایده یکسانی استوار است.

۲) اگر همهٔ مجموعه‌های E_i ناتهی باشند و حاصلضرب (E,T) همبند باشد، آنگاه تصویرهایی π_i پوشا و $(T,T_i)-$ پیوسته می‌باشند.

فرض کنیم (E,T) یک فضای توپولوژیکی و x نقطه‌ای از E باشد. اجتماع همهٔ زیرمجموعه‌های همبند E که شامل x هستند، به وضوح همبند است، و بزرگترین زیرمجموعهٔ همبند E است که شامل x می‌باشد؛ آن را **مؤلفه همبند** x می‌نامیم. بدیهی است که x به مؤلفه همبند خود تعلق دارد.

تعریف ۳ یک فضای توپولوژیکی را **کلاً ناهمبند** گوییم، هرگاه به‌ازای هر نقطهٔ x از E، مؤلفه همبند x مجموعهٔ $\{x\}$ باشد.

تمرین ۲۱۰ فرض کنید (E,T) و (E',T') دو فضای توپولوژیکی همبند و A و A' به ترتیب زیرمجموعه‌های سره E و E' باشند. ثابت کنید که متمم $A\times A'$ در $E\times E'$ همبند است.

تمرین ۲۱۱ نشان دهید که هر فضای توپولوژیکی گسسته، کلاً ناهمبند است.

تمرین ۲۱۲ نشان دهید که مجموعهٔ اعداد گویا همراه با توپولوژی معمولی به عنوان یک زیرفضای خط حقیقی، کلاً ناهمبند است ولی گسسته نیست.
راهنمایی اگر x عددی گویا باشد آنگاه $\{x\}$ همبند است؛ اما اگر A زیرمجموعه‌هایی از $\mathbf{Q}$ باشد که بطور سره شامل $\{x\}$ است و y نقطه‌ای از A متمایز از x باشد، آنگاه عددی گنگ مانند z بین x و y وجود دارد و لذا A، با توجه به اشتراکش با $(-\infty,z)$ و (z,∞)، ناهمبند است.

قضیه ٦ (تمرین ۲۱۳) فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی باشد. برای هر نقطهٔ x از E، مؤلفهٔ همبند x، مجموعه‌ای $T-$ بسته است. رابطهٔ R روی E تعریف شده توسط $(x,y)\in R$ اگر و تنها اگر y متعلق به مؤلفه همبند x باشد، یک رابطهٔ هم‌ارزی روی E است و فضای خارج قسمتی $(\frac{E}{R},\frac{T}{R})$ کلاً ناهمبند است.

راهنمایی برای اثبات ادعای اول توجه کنید که اگر $K(x)$ مؤلفهٔ همبند x باشد، آنگاه $\overline{K(x)}$ همبند است.

اثبات هم‌ارزی بودن رابطهٔ R دشوار نیست، در صورتی که تعریف مؤلفهٔ همبند یک نقطه را به خاطر آوریم.

فرض کنیم C یک عنصر $\frac{E}{R}$ و K مؤلفهٔ همبند آن باشد. اگر K شامل بیش از یک نقطه باشد، آنگاه $\eta^{-1}(K)$ شامل بیش از یک مؤلفه همبند در E است و لذا ناهمبند است، مثلاً اشتراکهای A_1 و B_1 با دو زیرمجموعهٔ بسته E. نشان دهید که

A_1 و B_1 بسته و نیز اجتماع $R-$ رده‌های بسته هستند. نتیجه بگیرید که $\eta(A_1)$ و $\eta(B_1)$، مجموعه K را جدا می‌کنند.

تعریف ۴ یک فضای توپولوژیکی (E,T) را **موضعاً همبند** گوئیم، هرگاه به‌ازای هر نقطهٔ x از E و هر $T-$ همسایگی V از x یک $T-$ همسایگی همبند x مشمول در V وجود داشته باشد.

تمرین ۲۱۴ نشان دهید که هر فضای گسسته با بیش از یک نقطه فضای موضعاً همبند است ولی همبند نیست.

تمرین ۲۱۵ زیرمجموعهٔ $S = A \cup B$ از $\mathbf{R}^2$ را در نظر بگیرید که در آن $B = \{(0,0)\}$ و $A = \{(x,y) \in R^2 : x > 0 \quad y = \sin(\frac{1}{x})\}$. ثابت کنید S (به عنوان یک زیرفضای $\mathbf{R}^2$ با توپولوژی معمولی) همبند است ولی موضعاً همبند نیست.
راهنمایی A همبند است، زیرا تصویر یک مجموعهٔ همبند در $\mathbf{R}^+$ تحت یک نگاشت پیوسته است؛ همچنین $B \cap Cl(A) \neq \emptyset$.

قضیه ۷ (تمرین ۲۱۶) فضای توپولوژیکی (E,T) موضعاً همبند است اگر و تنها اگر مؤلفه‌های همبند هر زیرمجموعهٔ $T-$ باز E، مجموعه $T-$ باز باشد .

راهنمایی فرض کنید (E,T) موضعاً همبند، U زیرمجموعه‌ای باز از E، K مؤلفه‌ای از U و t نقطه‌ای از K باشد. در اینصورت U یک همسایگی t است و لذا یک همسایگی همبند t وجود دارد که بایستی مشمول در K باشد.

برعکس، فرض کنید که مؤلفه‌های همبند هر زیرمجموعهٔ باز یک مجموعه باز باشد. هرگاه V یک همسایگی از x باشد در اینصورت مجموعه‌ای بازی مانند U مشمول در V وجود دارد. حال به مؤلفه‌ای x در U نگاه کنید.

تمرین ۲۱۷ ثابت کند که فضای خارج قسمتی یک فضای موضعاً همبند، یک فضای موضعاً همبند است.

راهنمایی فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی و R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی E باشد. چنانچه $\bar{K}$ یک مؤلفهٔ همبند از زیرمجموعه $\frac{T}{R}-$ باز $\bar{U}$ از $\frac{E}{R}$ باشد قرار دهید $U=\eta^{-1}(\bar{U})$. نشان دهید که $\eta^{-1}(\bar{K})$ اجتماع مؤلفه‌های همهٔ نقاط خود در U است، و لذا $T-$ باز است.

تمرین ۲۱۸ فرض کنید $((E_i,T_i))_{i\in I}$ خانواده‌ای از فضاهای توپولوژیکی و (E,T) حاصلضرب توپولوژیکی این خانواده باشند. ثابت کنید که اگر همهٔ فضاهای (E_i,T_i) موضعاً همبند، و همه بجز تعدادی متناهی از آنها همبند باشند آنگاه (E,T) موضعاً همبند است.

راهنمایی قرار دهید $J=\{i\in I:$ همبند نیست $(E_i,T_i)\}$. فرض کنید x نقطه‌ای از E و V یک همسایگی از x باشد. برای دستیابی به یک $T-$ همسایگی همبند x مشمول در V، به یاد آورید که V شامل حاصلضربی مانند $\prod_{i\in I} U_i$ است که در آن هر U_i، مجموعه‌ای T_i- باز است و برای هر اندیس i، غیر از یک زیرمجموعهٔ متناهی معین K از I، $U_i=E_i$. اکنون از موضعاً همبند بودن فضاهای (E_i,T_i) با شرط $i\in J\cup K$ استفاده کنید.

بخش II

جوابها

فصل ۸

جوابهای فصل ۱

جواب ۱ (a) $d(x,y)=|y-x|\geq \circ$ برای هر x و y در $\mathbf{R}$.

$$d(x,y)=\circ \Longleftrightarrow |y-x|=\circ \Longleftrightarrow y-x=\circ \Longleftrightarrow y=x$$

(b) برای هر x و y در $\mathbf{R}$،

$$d(y,x)=|y-x|=|x-y|=d(x,y)$$

(c) برای هر x و y و z در $\mathbf{R}$ داریم

$$d(x,z)=|z-x|=|(z-y)+(y-x)|\leq |z-y|+|y-x|=d(x,y)+d(y,z).$$

بنابراین d یک متریک روی $\mathbf{R}$ است.

جواب ۲ (a) برای هر x و y در $\mathbf{R}^n$،

$$d(x,y)=\sqrt{(\sum_{i=۱}^{n}(y_i-x_i)^{۲})}\geq \circ$$

$y=x \Longleftrightarrow i=1,\ldots,n$ ، $y_i=x_i \Longleftrightarrow \sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2=0 \Longleftrightarrow d(x,y)=0$.

(b) برای هر x و y در $\mathbf{R}^n$،

$$d(x,y)=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2}=\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(x_i-y_i)^2}=d(y,x)$$

(c) برای هر x و y و z در $\mathbf{R}^n$ داریم،

$$\begin{aligned}(d(x,y) &+ d(y,z))^2=\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2\\ &+ 2\left(\left(\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2\right)\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\geq \sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)^2+\sum_{i=1}^{n}(z_i-y_i)^2+2\sum_{i=1}^{n}(y_i-x_i)(z_i-y_i)\\ &\quad \left[\text{با استفاده از نامساوی کشی } \left(\sum a_i^2\right)\left(\sum b_i^2\right)\geq\left(\sum a_ib_i\right)^2\right]\\ &= \sum_{i=1}^{n}((y_i-x_i)+(z_i-y_i))^2=\sum_{i=1}^{n}(z_i-x_i)^2\\ &= (d(x,z))^2.\end{aligned}$$

پس d یک متریک روی $\mathbf{R}^n$ است.

جواب ۳ (a) $d(x,y)=|y_1-x_1|+|y_2-x_2|\geq 0$ برای هر x و y در $\mathbf{R}^2$.

$$d(x,y)=0\Longleftrightarrow|y_1-x_1|+|y_2-x_2|=0\Longleftrightarrow|y_1-x_1|=|y_2-x_2|=0\Longleftrightarrow y=x.$$

(b) برای هر x و y در $\mathbf{R}^2$،

$$d(y,x)=|x_1-y_1|+|x_2-y_2|=|y_1-x_1|+|y_2-x_2|=d(x,y).$$

(c) برای هر x و y و z در $\mathbf{R}^2$ داریم:

$$\begin{aligned}d(x,y)+d(y,z) &= |y_1-x_1|+|y_2-x_2|+|z_1-y_1|+|z_2-y_2|\\ &\geq |(y_1-x_1)+(z_1-y_1)|+|(y_2-x_2)+(z_2-y_2)|\\ &= |z_1-x_1|+|z_2-x_2|=d(x,z).\end{aligned}$$

پس d یک متریک روی $\mathbf{R}^۲$ است.

جواب ۴ (a) $d(x,y) = \max\{|y_۱ - x_۱|, |y_۲ - x_۲|\} \geq ۰$ برای هر x و y در $\mathbf{R}^۲$،

$$d(x,y) = \max\{|y_۱ - x_۱|, |y_۲ - x_۲|\} = ۰ \iff |y_۱ - x_۱| = |y_۲ - x_۲| = ۰$$
$$\iff y = x.$$

(b) بدیهی است که $d(x,y) = d(y,x)$ برای هر x و y در $\mathbf{R}^۲$،
(c) برای هر x و y و z در $\mathbf{R}^۲$ داریم:

$$d(x,y) + d(y,z) = \max\{|y_۱ - x_۱|, |y_۲ - x_۲|\} + \max\{|z_۱ - y_۱|, |z_۲ - y_۲|\}.$$

بنابراین داریم

$$d(x,y) + d(y,z) \geq |y_۱ - x_۱| + |z_۱ - y_۱| \geq |z_۱ - x_۱|$$

و بطور مشابه

$$d(x,y) + d(y,z) \geq |z_۲ - x_۲|.$$

پس

$$d(x,y) + d(y,z) \geq \max\{|z_۱ - x_۱|, |z_۲ - x_۲|\} = d(x,z),$$

پس d یک متریک روی $\mathbf{R}^۲$ است.

جواب ۵ (a) $d(f,g)$ سوپریمم یک مجموعه از اعداد حقیقی نامنفی است. بنابراین برای هر f و g در E، $d(f,g) \geq ۰$. همچنین

$$d(f,g) = ۰ \iff \{|g(x) - f(x)|\}_{x \in A} = \{۰\} \iff g(x) = f(x) \ x \in A \ \text{برای هر}$$
$$\iff g = f.$$

(b) $d(g,f)=d(f,g)$ برای هر f و g در E.

(c) فرض کنید f و g و h سه عنصر دلخواه E باشند.

برای هر عضو $x_۱$ از A داریم:

$$\begin{aligned} |h(x_۱)-f(x_۱)| &\leq |h(x_۱)-g(x_۱)|+|g(x_۱)-f(x_۱)| \\ &\leq \sup_{x\in A}|h(x)-g(x)|+\sup_{x\in A}|g(x)-f(x)|, \end{aligned}$$

بنابراین

$$\sup_{x\in A}|h(x)-f(x)| \leq \sup_{x\in A}|h(x)-g(x)|+\sup_{x\in A}|g(x)-f(x)|,$$

یعنی $d(f,h)\leq d(f,g)+d(g,h)$ پس d یک متریک روی E است.

جواب ٦ (a) برای هر x و y در E، $d(x,y)\geq ۰$ و $x=y \Longleftrightarrow d(x,y)=۰$.

(b) برای هر x و y در E، $d(y,x)=d(x,y)$.

(c) اگر $x=y$ یا $y=z$ آنگاه $d(x,z)=d(x,y)+d(y,z)$.

پس فرض کنید که $x\neq y$ و $y\neq z$ در اینصورت خواهیم داشت

$$d(x,y)+d(y,z)=۲>d(x,z),$$

بنابراین d یک متریک روی E است.

جواب ۷ (a) برای هر f و g در E، $d(f,g)\geq ۰$.

اگر $f\neq g$ باشد نقطهٔ a از I چنان وجود دارد که $|g(a)-f(a)|\neq ۰$. چون f و g پیوسته‌اند یک زیر بازهٔ J از I شامل a و یک عدد حقیقی مثبت m وجود دارند بطوریکه برای تمام نقاط x در J، $|g(x)-f(x)|\geq m$. این نتیجه می‌دهد که

$$\int_I |g-f| \geq ml(J)>۰,$$

جاییکه $l(J)$ طول بازهٔ J است. بنابراین $d(f,g)=\circ \Longleftrightarrow g=f$.

(b) $d(g,f)=d(f,g)$ برای هر f و g در E.

(c) برای هر f و g و h در E داریم:

$$\begin{aligned} d(f,g)+d(g,h) &= \int_I |g-f| + \int_I |h-f| \\ &= \int_I |g-f| + |h-g| \geq \int_I |h-f| \\ &= d(f,h), \end{aligned}$$

پس d یک متریک روی E است.

جواب ۸ (a) $\emptyset \in \mathbf{P}(E)$ و $E \in \mathbf{P}(E)$.

(b) اگر $(X_i)_{i\in I}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های E باشد در اینصورت $\bigcup\limits_{i\in I} X_i \in \mathbf{P}(E)$.

(c) اگر $(X_i)_{i\in I}$ یک خانوادهٔ متناهی از زیرمجموعه‌های E باشد در اینصورت $\bigcap\limits_{i\in I} X_i \in \mathbf{P}(E)$.

جواب ۹ بدیهی است.

جواب ۱۰ (a) $\emptyset \in T_p$ و چون $p \in E$ لذا $E \in T_p$ است.

(b) فرض کنید $(X_i)_{i\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های در T_p باشد. اگر تمام مجموعه‌های X_i تهی باشند. در اینصورت $\bigcup\limits_{i\in I} X_i = \emptyset \in T_p$. اگر حداقل یکی از مجموعه‌های X_i مثل $X_{i_\circ}$ غیرتهی باشد پس $p \in X_{i_\circ}$ و لذا $p \in \bigcup\limits_{i\in I} X_i$. بنابراین $\bigcup\limits_{i\in I} X_i \in T_p$.

(c) فرض کنید $(X_i)_{i\in I}$ یک خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌های در T_p باشد. اگر حداقل یکی از مجموعه‌های X_i تهی باشد، آنگاه $\bigcap X_i = \emptyset \in T_p$. اگر تمام

مجموعه‌های X_i غیرتهی باشند، برای هر i در I داریم $p \in X_i$. بنابراین $p \in \bigcap_{i\in I} X_i$ و لذا $\bigcap_{i\in I} X_i \in T_p$.

جواب ۱۱ (a) $E \in T_{-p}$ و چون $p \notin \emptyset$ لذا داریم $\emptyset \in T_{-p}$.

(b) فرض کنید $(X_i)_{i\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های در T_{-p} باشد. اگر حداقل یکی از مجموعه‌های X_i برابر E باشد آنگاه $\bigcup_{i\in I} X_i = E \in T_{-p}$. اگر همهٔ مجموعه‌های X_i زیرمجموعه‌های سرهٔ E باشند آنگاه $p \notin X_i$ برای هر $i \in I$. پس $p \notin \bigcup_{i\in I} X_i$ و لذا $\bigcup_{i\in I} X_i \in T_{-p}$.

(c) فرض کنید $(X_i)_{i\in I}$ یک خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌های در T_{-p} باشد. اگر همهٔ مجموعه‌های X_i برابر E باشند آنگاه $\bigcap X_i = E \in T_{-p}$. اگر حداقل یکی از مجموعه‌هامثل $X_{i_\circ}$ زیرمجموعهٔ سرهٔ E باشد، در این‌صورت $p \notin X_{i_\circ}$. و لذا $p \notin \bigcap_{i\in I} X_i$ (که یک زیرمجموعهٔ $X_{i_\circ}$ است). بنابراین $\bigcap_{i\in I} X_i \in T_{-p}$.

جواب ۱۲ (a) $\emptyset \in T$ و چون $C_E(E) = \emptyset$ متناهی است، لذا $E \in T$.

(b) فرض کنید $(X_i)_{i\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های در T باشد. اگر تمام مجموعه‌های $X_i = \emptyset$ در اینصورت $\bigcup_{i\in I} X_i = \emptyset \in T$. اگر حداقل یکی از مجموعه‌های X_i مثل $X_{i_\circ}$. غیر تهی باشد داریم

$$C_E(\bigcup_{i\in I} X_i) = \bigcap_{i\in I} C_E(X_i) \subseteq C_E(X_{i_\circ}),$$

که متناهی است. بنابراین $\bigcup_{i\in I} X_i \in T$.

(c) فرض کنید $(X_i)_{i\in I}$ یک خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌های در T باشد. اگر حداقل یکی از مجموعه‌های X_i تهی باشد آنگاه $\bigcap_{i\in I} X_i = \emptyset \in T$. اگر همهٔ مجموعه‌های X_i غیرتهی باشند، خواهیم داشت $C_E(\bigcap_{i\in I} X_i) = \bigcup_{i\in I} C_E(X_i)$ که

اجتماع متناهی از مجموعه‌های متناهی است. از اینرو متناهی است. پس $\bigcap_{i\in I} X_i \in T$.

جواب ۱۳ (a) چون $p \notin \emptyset$ پس $\emptyset \in T$. از طرفی $C_E(E) = \emptyset$ متناهی است لذا $E \in T$.

(b) فرض کنید $(X_i)_{i\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های در T باشد. اگر برای هر i در I، $p \notin X_i$ در اینصورت $p \notin \bigcup_{i\in I} X_i$، بنابراین $\bigcup_{i\in I} X_i \in T$. اگر حداقل یکی از مجموعه‌های X_i مثل $X_{i_\circ}$ موجود باشد بقسمی که $p \in X_{i_\circ}$ در اینصورت $C_E(X_{i_\circ})$ متناهی است و لذا $C_E(\bigcup_{i\in I} X_i) = \bigcap_{x\in I} C_E(X_i) \subseteq C_E(X_{i_\circ})$ نیز متناهی است. پس $\bigcup_{i\in I} X_i \in T$.

(c) فرض کنید $(X_i)_{i\in I}$ یک خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌های در T باشد. اگر برای هر i در I، $p \in X_i$ در اینصورت برای هر i در I، $C_E(X_i)$ متناهی است و از اینرو $C_E(\bigcap_{i\in I} X_i) = \bigcup_{i\in I} C_E(X_i)$ متناهی است، بنابراین $\bigcap_{i\in I} X_i \in T$. اگر حداقل یکی از مجموعه‌های X_i مثل $X_{i_\circ}$ وجود داشته باشد بقسمی که $p \notin X_{i_\circ}$ آنگاه $p \notin \bigcap_{i\in I} X_i$ و لذا $\bigcap_{i\in I} X_i \in T$.

جواب ۱۴ فرض کنید $E = \{a, b, c\}$. در اینصورت ۲۹ توپولوژی روی E وجود دارد:

۱) $\{E, \emptyset\}$.

۲) $\mathbf{P}(E)$.

۳—۵) سه توپولوژی شبیه $\{E, \emptyset, \{a\}\}$.

۶—۸) سه توپولوژی شبیه $\{E, \emptyset, \{a, b\}\}$.

۹—۱۴) شش توپولوژی شبیه $\{E, \emptyset, \{a\}, \{a, b\}\}$.

۱۵—۱۷) سه توپولوژی شبیه $\{E, \emptyset, \{a\}, \{b, c\}\}$.

۱۸—۲۰) سه توپولوژی شبیه $\{E, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}\}$.

۲۱—۲۳) سه توپولوژی شبیه $\{E, \emptyset, \{a\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$.

۲۴—۲۹) شش توپولوژی شبیه $\{E, \emptyset, \{a\}, \{b\}, \{a,b\}, \{a,c\}\}$.

جواب ۱۵ (a) $\emptyset \in T_d$ و $E \in T_d$.

(b) فرض کنید $(X_i)_{i\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های در T_d باشد. چنانچه a نقطه‌ای از $\bigcup_{i\in I} X_i$ باشد. در اینصورت یک اندیس $i_\circ$ در I چنان وجود دارد که $a \in X_{i_\circ}$. چون $X_{i_\circ} \in T_d$، یک عدد حقیقی مثبت r وجود دارد بقسمی که $V_d(a,r) \subseteq X_{i_\circ}$. در اینصورت $V_d(a,r) \subseteq \bigcup_{i\in I} X_i$. بنابراین $\bigcup_{i\in I} X_i \in T_d$.

(c) فرض کنید $(X_i)_{i\in I}$ یک خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌های در T_d باشد. چنانچه a نقطه‌ای از $\bigcap_{i\in I} X_i$ باشد. در اینصورت برای هر اندیس i در I یک عدد حقیقی مثبت r_i وجود دارد بطوریکه $V_d(a,r_i) \subseteq X_i$. فرض کنید r کوچکترین عدد از r_i ها باشد. آنگاه r یک عدد حقیقی مثبت است و $V_d(a,r) \subseteq \bigcap_{i\in I} X_i$. لذا $\bigcap_{i\in I} X_i \in T_d$.

جواب ۱۶ فرض کنید X یک زیرمجموعه از E باشد. چنانچه a نقطه‌ای از X باشد. در اینصورت $V_d(a,۱) = \{a\} \subseteq X$. بنابراین $X \in T_d$. و این نتیجه می‌دهد که $T_d = \mathbf{P}(E)$ توپولوژی گسسته می‌باشد.

جواب ۱۷ فرض کنید q عضوی از $V_d(a,r)$ باشد.
قرار دهید $s = r - d(a,q)$. در اینصورت داریم $V_d(q,s) \subseteq V_d(a,r)$، زیرا اگر x نقطه‌ای در $V_d(q,s)$ باشد آنگاه داریم

$$d(a,x) \leq d(a,q) + d(q,x) < d(a,q) + s = r.$$

جواب ۱۸ (۱)(a)برای تمام نقاط xوyدرEداریم $d'(x,y)=\min\{1,d(x,y)\}\geq 0$.

$$d'(x,y)=0\iff \min\{1,d(x,y)\}=0\iff d(x,y)=0\iff x=y.$$

(b) برای تمام x و y در E داریم $d'(x,y)=d'(y,x)$.

(c) فرض کنید x و y و z نقاطی از E باشند. حاصل جمع $d'(x,y)+d'(y,z)$ را در نظر بگیرید. اگر $d'(x,y)=1$ یا $d'(y,z)=1$ در اینصورت داریم $d'(x,y)+d'(y,z)\geq 1\geq d'(x,z)$. در غیر اینصورت داریم $d'(x,y)=d(x,y)$ و $d'(y,z)=d(y,z)$ و از اینرو $d'(x,y)+d'(y,z)\geq d(x,z)\geq d'(x,z)$. بنابراین d' یک متریک روی E می‌باشد.

(۲) فرض کنید $U\in T_d$ و p نقطه‌ای در U باشد. در این‌صورت وجود دارد عدد حقیقی مثبت r بطوریکه $V_d(p,r)\subseteq U$. قرار دهید $r'=\min\{r,1\}$. در اینصورت $V_{d'}(p,r')=V_d(p,r')\subseteq V_d(p,r)\subseteq U$، پس $U\in T_{d'}$.
برعکس، فرض کنید $U'\in T_{d'}$. چنانچه p عنصری از U' باشد، در اینصورت یک عدد حقیقی مثبت r' وجود دارد بطوریکه $V_{d'}(p,r')\subseteq U'$. بوضوح می‌توان فرض کرد که $r'\leq 1$. لذا $V_d(p,r')=V_{d'}(p,r')\subseteq U'$. بنابراین $U'\in T_d$.

جواب ۱۹ فرض کنید d_2 و d_3 و d_4 متریکهایی روی $\mathbf{R}^2$ باشند که در تمرینهای ۲،۳،۴ معرفی شدند. چنانچه X زیرمجموعه‌ای از $\mathbf{R}^2$ باشد.

۱) فرض کنید X یک مجموعهٔ d_2- باز باشد، یعنی نسبت به متریک d_2 باز باشد. چنانچه p نقطه‌ای از X باشد. در اینصورت یک عدد حقیقی مثبت r وجود دارد بقسمی که $V_{d_2}(p,r)\subseteq X$. لذا $V_{d_3}(p,r)\subseteq V_{d_2}(p,r)$ و $V_{d_4}(p,\frac{r}{\sqrt{2}})\subseteq V_{d_2}(p,r)$. بنابراین $V_{d_3}(p,r)\subseteq X$ و $V_{d_4}(p,\frac{r}{\sqrt{2}})\subseteq X$. در نتیجه X مجموعه‌ای d_3- باز و هم d_4- باز است.

۲) فرض کنید X، مجموعه‌ای d_3- باز باشد. چنانچه p نقطه‌ای از X باشد. در اینصورت عدد حقیقی مثبت r چنان وجود دارد که $V_{d_3}(p,r) \subseteq X$. چون $V_{d_2}(p,\frac{r}{\sqrt{2}}) \subseteq V_{d_3}(p,r)$. لذا داریم $V_{d_2}(p,\frac{r}{\sqrt{2}}) \subseteq X$. بنابراین X، مجموعه‌ای d_2- باز است و از اینرو d_4- باز نیز هست.

۳) فرض کنید X، مجموعه‌ای d_4- باز باشد. چنانچه p نقطه‌ای از X باشد. در اینصورت عدد حقیقی مثبت r چنان وجود دارد که $V_{d_4}(p,r) \subseteq X$. چون $V_{d_2}(p,r) \subseteq V_{d_4}(p,r)$ لذا داریم $V_{d_2}(p,r) \subseteq X$. بنابراین X، مجموعه‌ای d_2- باز است و از اینرو d_3- باز نیز هست. لذا $T_{d_2} = T_{d_3} = T_{d_4}$.

جواب ۲۰ اگر p یک شبه متریک روی E باشد، آنگاه برای هر نقطهٔ a از E و هر عدد حقیقی مثبت r، مجموعهٔ $V_p(a,r) = \{x \in E : p(a,x) < r\}$ را $r-$ گوی بمرکز a تعریف می‌کنیم. در اینصورت گوییم که یک زیرمجموعهٔ U از E نسبت به شبه متریک p باز است اگر برای هر نقطهٔ t از U، یک عدد حقیقی مثبت r_t چنان وجود داشته باشد که $V_p(t,r_t) \subseteq U$. مجموعهٔ T_p از همهٔ زیرمجموعه‌هایی که نسبت به p باز هستند یک توپولوژی است و این مطلب مانند تمرین ۱۵ نشان داده می‌شود. این توپولوژی را توپولوژی تولید شده توسط p نامیده می‌شود.

جواب ۲۱ همانند تمرین ۲۰ است.

جواب ۲۲ (a) $p(x,y) = |f(x) - f(y)| \geq 0$ و $p(x,x) = 0$.

(b) $p(x,y) = |f(x) - f(y)| = |f(y) - f(x)| = p(y,x)$.

(c) $p(x,y) + p(y,z) = |f(x) - f(y)| + |f(y) - f(z)| \leq |f(x) - f(z)| = p(x,z)$.

جواب ۲۳ (a) اگر $y \leq x$ آنگاه $q(x,y) = y - x \geq 0$. اگر $x < y$ آنگاه $q(x,y) = 1 > 0$. چنانچه $x = y$ آنگاه $q(x,y) = 0$. اگر $q(x,y) = 0$ ما نمی‌توانیم داشته باشیم $x < y$ لذا $y \leq x$. بنابراین $0 = q(x,y) = y - x$، پس $x = y$.

(b) فرض کنید x و y و z نقاطی از E باشند. اگر دو تا از این نقاط مساوی باشند، یقیناً خواهیم داشت $q(x,z) \leq q(x,y) + q(y,z)$.

اکنون فرض کنید همهٔ این سه نقطه متمایز باشند. شش حالت زیر را می‌توان در نظر گرفت: $z < y < x$، $y < z < x$، $z < x < y$، $x < z < y$، $y < x < z$، $x < y < z$ در هر یک از این حالتها داریم $q(x,z) \leq q(x,y) + q(y,z)$.

جواب ۲۴ فرض کنید X و Y دو $R-$ کلاس باشند. فرض کنید x_1 و x_2 عناصری از E در X و y_1 و y_2 عناصری از E در Y باشند. در اینصورت داریم $p(x_1, x_2) = p(x_2, x_1) = 0$ و $p(y_1, y_2) = p(y_2, y_1) = 0$.

از اینرو

$$\begin{aligned} p(x_1, y_1) &\leq p(x_1, x_2) + p(x_2, y_1) = p(x_2, y_1) \leq p(x_2, y_2) + p(y_2, y_1) \\ &= p(x_2, y_2). \end{aligned}$$

و

$$\begin{aligned} p(x_2, y_2) &\leq p(x_2, y_1) + p(y_1, y_2) = p(x_2, y_1) \leq p(x_2, x_1) + p(x_1, y_1) \\ &= p(x_1, y_1), \end{aligned}$$

بنابراین $p(x_1, y_1) = p(x_2, y_2)$.

بنابراین تعریف پیشنهاد شده برای p^* بصورت $p^*(X,Y) = p(x,y)$ می‌باشد، جایی که $x \in X$ و $y \in Y$، بستگی به انتخاب x و y ندارد. به وضوح $p^*(\eta(x), \eta(y)) = p(x,y)$.

برای نشان دادن اینکه p^* یک متریک است، بصورت زیر عمل می‌کنیم (با این تذکر که x، y و z عناصری از E و انتخاب شده از $R-$ کلاسهای X و Y و Z هستند.)

(a) $p^*(X,X) = p(x,x) = \circ$ و $p^*(X,Y) = p(x,y) \geq \circ$.
اگر $p^*(X,Y) = \circ$ آنگاه $p(x,y) = \circ$. بنابراین $(x,y) \in R$ و از اینرو $X = Y$.
(b) $p^*(X,Y) = p(x,y) = p(y,x) = p^*(Y,X)$.
(c) $p^*(X,Y) + p^*(Y,Z) = p(x,y) + p(y,z) \geq p(x,z) = p^*(X,Z)$.

جواب ۲۵ فرض کنید x و y و z سه نقطه از E باشند. قرار دهید $a = u(x,y)$، $b = u(y,z)$ و $c = u(x,z)$. فرض کنید $c = \max\{a,b,c\}$. بنابر فم۳، $c \leq \max\{a,b\}$ و $\max\{a,b\} \leq \max\{a,b,c\} = c$. پس مثلاً $c = \max\{a,b\} = a$.
لذا داریم $c = a$ و $b \leq c$.

جواب ۲۶ (a) برای هر x و y داریم $u(x,y) \geq \circ$ و $u(x,x) = \circ$.
اگر $x \neq y$ آنگاه $u(x,y) > \circ$. بنابراین اگر $u(x,y) = \circ$ آنگاه داریم $x = y$.
(b) اگر $y - x = \dfrac{p^\alpha m}{n}$ آنگاه $x - y = \dfrac{p^\alpha(-m)}{n}$. بنابراین داریم $u(y,x) = p^{-\alpha} = u(x,y)$.
(c) فرض کنید $y - x = p^\alpha \dfrac{m}{n}$ و $z - y = p^\beta \dfrac{q}{r}$. در اینصورت $z - x$ بفرم $p^\gamma \left(\dfrac{s}{t}\right)$ می‌باشد که $\gamma \geq \min\{\alpha, \beta\}$. بنابراین

$$u(x,z) = p^{-\gamma} \leq \max\{p^{-\alpha}, p^{-\beta}\} = \max\{u(x,y), u(y,z)\}$$

جواب ۲۷ (۱) فرض کنید B یک پایهٔ برای T باشد.
اگر U یک مجموعه در T بوده و x نقطه‌ای از U باشد. در اینصورت یک خانوادهٔ $(W_i)_{i\in I}$ از مجموعه‌های در B وجود دارد بطوریکه $\bigcup_{i\in I} W_i = U$. چون $x \in U$، یک اندیس $i_\circ$ در I چنان وجود دارد که $x \in W_{i_\circ}$ و لذا $W_{i_\circ} \subseteq U$.
(۲) برعکس، فرض کنید که شرط برقرار باشد.
چنانچه U مجموعه‌ای در T باشد. برای هر نقطهٔ x از U یک مجموعهٔ W_x در B وجود دارد بقسمی که $x \in W_x$ و $W_x \subseteq U$. در اینصورت $U = \bigcup_{x\in U} W_x$. پس B یک پایه برای T است.

جواب ۲۸ فرض کنید T مجموعهٔ همهٔ زیرمجموعه‌های E باشد بطوریکه اجتماعی از خانوادهٔ مجموعه‌های در B هستند. اگر بتوانیم نشان دهیم که T یک توپولوژی است در اینصورت بدیهی است که B یک پایه برای T است و آن تنها توپولوژی با پایهٔ B می‌باشد. T یقیناً خواص ت۱ و ت۲ برای یک توپولوژی را دارد. برای نشان دادن اینکه T در شرط ت۳ صدق می‌کند بوضوح کافیست نشان دهیم که اگر $U_۱$ و $U_۲$ مجموعه‌هایی در T باشند در اینصورت $U_۱ \cap U_۲$ نیز در T می‌باشد.

پس فرض کنید x نقطه‌ای در $U_۱ \cap U_۲$ است. چون $x \in U_۱$ یک مجموعهٔ $W_۱$ در B وجود دارد بطوریکه $x \in W_۱ \subseteq U_۱$ و چون $x \in U_۲$ یک مجموعهٔ $W_۲$ در B چنان وجود دارد که $x \in W_۲ \subseteq U_۲$. با استفاده از فرضها یک مجموعهٔ W_x در B وجود دارد بقسمی که $x \in W_x$ و $W_x \subseteq W_۱ \cap W_۲ \subseteq U_۱ \cap U_۲$. از این نتیجه می‌گیریم که $U_۱ \cap U_۲ = \bigcup_{x \in U_۱ \cap U_۲} W_x$ و لذا $U_۱ \cap U_۲ \in T$.

جواب ۲۹ شرایط تمرین ۲۸ به آسانی توسط X برقرار شده است.

جواب ۳۰ فرض کنید a و b و c و d عناصری از E باشند که $a \le b$ و $c \le d$. اگر $\max\{a,c\} \ge \min\{b,d\}$ آنگاه مجموعه‌ای $\{t : a < t < b\}$ و $\{t : c < t < d\}$ مجزا هستند. در غیر اینصورت این بازه‌های باز یکدیگر را در بازهٔ باز $\{t : \max\{a,c\} < t < \min\{b,d\}\}$ قطع می‌کنند. بنابراین شرایط تمرین ۲۸ برقرار است.

جواب ۳۱ $\{t : t > a\} \cap \{t : t > b\} = \{t : t > \max\{a,b\}\}$. دوباره شرایط تمرین ۲۸ برقرار شده است.

جواب ۳۲ فرض کنید S' خانواده‌ای از زیرمجموعه‌هایی باشد که اجتماعهایی از خانواده‌های مقاطع باپایان از مجموعه‌های در S هستند و E نیز در S' باشد.

در اینصورت S' یک توپولوژی روی E است که شامل S می‌باشد. از اینرو $S' \supseteq T(S)$. از طرف دیگر چون $T(S)$ یک توپولوژی شامل S است باید شامل تمام مجموعه‌های در S' باشد. بنابراین $T(S) \supseteq S'$. در نتیجه $T(S) = S'$ می‌باشد.

جواب ۳۳ فرض کنید $T = \{U \in \mathbf{P}(E) : C_E(U) \in K\}$.
در اینصورت T یک توپولوژی روی E می‌باشد و F مجموعه‌ای $T-$ بسته است $\Longleftrightarrow C_E(F) \in T \Longleftrightarrow C_E(C_E(F)) = F \in K$.

جواب ۳۴ (۱) فرض کنید $G = \bigcap_{i\in I} U_i$ (جائیکه I شمارش‌پذیر است و همهٔ U_i، مجموعه‌های $T-$ باز هستند.) یک مجموعهٔ G_δ باشد. در اینصورت $C_E(G) = C_E(\bigcap_{i\in I} U_i) = \bigcup_{i\in I} C_E(U_i)$، یک مجموعهٔ F_σ است، زیرا همهٔ $C_E(U_i)$، مجموعه‌های $T-$ بسته‌اند.

بطور مشابه متمم یک مجموعهٔ F_σ یک مجموعهٔ G_δ است.

(۲) برای هر عدد طبیعی n، فرض کنید $F_n = \bigcup_{p\leq n} K_p$. هر یک از مجموعه‌های F_n، مجموعه‌ای $T-$ بسته هستند. علاوه بر این برای همهٔ اعداد طبیعی n، $F_n \subseteq F_{n+1}$ و $\bigcup_{n\in\mathbf{N}} F_n = \bigcup_{n\in\mathbf{N}} K_n = K$.

جواب ۳۵ (۱) با استفاده از فرضها $\emptyset \in T^*$ و $E \in T$، بنابراین $E^* = E \cup \{p\} \in T^*$.

(۲) فرض کنید $(U_i^*)_{i\in I}$ خانواده از مجموعه‌های در T^* باشد. اگر همهٔ مجموعه‌های U_i^* تهی باشند، در اینصورت $\bigcup_{i\in I} U_i^* = \emptyset \in T^*$. در غیر اینصورت چنانچه

$I' = \{i \in I : U_i^* \neq \emptyset\}$. برای هر اندیس i در I' یک مجموعهٔ U_i در T وجود دارد بطوریکه $U_i^* = U_i \cup \{p\}$. پس $\bigcup_{i\in I} U_i^* = \bigcup_{i\in I'} U_i^* = (\bigcup_{i\in I'} U_i) \cup \{p\} \in T^*$

(۳) فرض کنید $(U_j^*)_{j\in J}$ یک خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌های در T^* باشد. اگر حداقل یکی از مجموعه‌های U_j^* تهی باشد، در اینصورت $\bigcap_{j\in J} U_j^* = \emptyset \in T^*$.
در غیر اینصورت، برای هر اندیس j در J یک مجموعهٔ U_j در T وجود دارد بطوریکه $U_j^* = U_j \cup \{p\}$. بنابراین $\bigcup_{j\in J} U_j^* = (\bigcup_{j\in J} U_j) \cup \{p\} \in T^*$.
لذا T^* یک توپولوژی روی E^* است.

فرض کنید X یک زیرمجموعه از E باشد. در اینصورت X، مجموعه‌ای T^*- بسته است $\iff (C_E(X)) \cup \{p\} \in T^* \iff C_{E^*}(X) \in T^* \iff X$ مجموعه‌ای، $T-$ بسته باشد. بالاخره $U \in T_p \iff U = \emptyset$ یا $U = X \cup \{p\}$ جائیکه X زیرمجموعه‌ای از $C_E\{p\}$ است $\iff U = \emptyset$ یا $\cup\{p\}$ (یک مجموعه از توپولوژی گسسته روی $U \iff U = C_E\{p\}$ عضو توپولوژی توسیع بسته از توپولوژی گسسته روی $C_E\{p\}$ باشد.

جواب ۳۶ (۱) $\circ \notin \emptyset$ پس $\emptyset \in T$. همچنین $E \subset (-۱, ۱)$ پس $E \in T$.

(۲) فرض کنید $(U_i)_{i\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های در T باشد. چنانچه برای تمام اندیسهای i در I، $\circ \notin U_i$، آنگاه $\circ \notin \bigcup_{i\in I} U_i$. بنابراین $\bigcup_{i\in I} U_i \in T$. در غیر اینصورت یک اندیس $i_\circ$ در I چنان وجود دارد که $(-۱, ۱) \subseteq U_{i_\circ}$. لذا $(-۱, ۱) \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$ و از اینرو $\bigcup_{i\in I} U_i \in T$.

(۳) فرض کنید $(U_j)_{j\in J}$ یک خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌های در T باشد. فرض کنید $(-۱, ۱) \subseteq U_j$ برای تمام اندیس‌های j در J. پس $(-۱, ۱) \subseteq \bigcap_{j\in J} U_j$ و لذا $\bigcap_{j\in J} U_j \in T$. در غیر اینصورت یک اندیس $j_\circ$ در J چنان وجود دارد که $\circ \notin U_{j_\circ}$. در

اینصورت $\bigcap\limits_{j\in J} U_j$ $\notin$ ۰ و $\bigcap\limits_{j\in J} U_j \in T$. بنابراین T یک توپولوژی روی E است.

فرض کنید X زیرمجموعه‌ای از E باشد. در اینصورت X، مجموعه‌ای $T-$ بسته است $C_E(X) \in T \iff$

$\iff (-۱,۱) \subseteq C_E(X)$ یا $۰ \notin C_E(X)$

$\iff X \subseteq C_E((-۱,۱))$ یا $۰ \in X$

$\iff \emptyset$ یا $\{۱\}$ یا $\{-۱\}$ یا $X = \{-۱,۱\}$ یا در غیر اینصورت $۰ \in X$.

جواب ۳۷ فرض کنید V یک T_d- همسایگی از p باشد. در اینصورت یک مجموعهٔ T_d- باز U وجود دارد بطوریکه $p \in U \subseteq V$. چون U مجموعه‌ای T_d- باز است و $p \in U$ پس یک عدد حقیقی مثبت r وجود دارد بطوریکه $V_d(p,r) \subseteq U$.
یک عدد گویای مثبت q وجود دارد بطوریکه $q < r$، لذا $V_d(p,q) \subseteq V_d(p,r) \subseteq U \subseteq V$.
بنابراین مجموعهٔ گوی‌های بمرکز p و شعاع گویای مثبت تشکیل یک پایه همسایگی می‌دهد.

جواب ۳۸ (۱) فرض کنید U یک مجموعهٔ $T-$ باز و p یک نقطه از U باشد. چون U یک مجموعهٔ $T-$ باز شامل p است، پس U یک $T-$ همسایگی از p می‌باشد.

(۲) برعکس، فرض کنید U یک $T-$ همسایگی از هر یک از نقاطش باشد. در اینصورت برای هر نقطهٔ x از U یک مجموعهٔ $T-$ باز U_x وجود دارد بقسمی که $x \in U_x$ و $U_x \subseteq U$. بنابراین $U = \bigcup\limits_{x\in U} U_x$ و از اینرو $T-$ باز است.

جواب ۳۹ قویترین توپولوژی روی E توپولوژی گسستهٔ $\mathbf{P}(E)$ است. ضعیفترین توپولوژی روی E توپولوژی ناگسسته $\{E,\emptyset\}$ است.

فرض کنید T قویتر از T' باشد. چنانچه x نقطه‌ای از E و V' یک $T'-$ همسایگی از x باشد. در اینصورت یک مجموعهٔ $T'-$ باز U' وجود دارد بطوریکه $x \in U'$ و

$U' \subseteq V'$. چون $T \subseteq T'$ پس U' مجموعه‌ای $T-$ باز می‌باشد. از اینرو V' یک $T-$ همسایگی از x است.

برعکس، فرض کنید که برای هر نقطهٔ x از E، هر $T'-$ همسایگی یک $T-$ همسایگی باشد. چنانچه U' یک مجموعهٔ $T'-$ باز باشد. آنگاه U' یک $T'-$ همسایگی از هر یک از نقاطش است و از اینرو یک $T-$ همسایگی از هر یک از نقاطش می‌باشد. بنابراین U' مجموعه‌ای $T-$ باز است. پس $T' \subseteq T$، یعنی T قویتر از T' است.

جواب ۴۰ فرض کنید $T = \{U \in \mathbf{P}(E) : U \in N(x)$، U برای تمام نقاط x از $\}$.
در اینصورت

۱) E و $\emptyset$ متعلق به T هستند.

۲) فرض کنید $(U_i)_{i\in I}$ یک خانواده از مجموعه‌های در T باشند. چنانچه $x \in \bigcup_{i\in I} U_i$. در اینصورت یک اندیس $i_\circ$ در I وجود دارد بطوریکه $x \in U_{i_\circ}$. چون $U_{i_\circ}$ در T می‌باشد داریم $U_{i_\circ} \in N(x)$. همچنین $\bigcup_{i\in I} U_i \supseteq U_{i_\circ}$ لذا نتیجه می‌گیریم که $\bigcup_{i\in I} U_i \in N(x)$؛ از اینرو $\bigcup_{i\in I} U_i \in T$.

۳) هرگاه $(U_j)_{j\in J}$ خانواده‌ای متناهی از مجموعه‌هایی در T باشد و $x \in \bigcap_{i\in I} U_i$. آنگاه برای هر اندیس j در J داریم $U_j \in N(x)$. این نتیجه می‌دهد که برای هر $x \in \bigcap_{j\in J} U_j$ داریم $\bigcap_{j\in J} U_j \in N(x)$. لذا $\bigcap_{j\in J} U_j \in T$.

بنابراین T یک توپولوژی روی E است.

فرض کنید x عنصری از E و V یک $T-$ همسایگی از x باشد. در اینصورت یک مجموعهٔ U در T وجود دارد بطوریکه $x \in U$ و $U \subseteq V$. چون $U \in N(x)$ (زیرا $U \in T$) نتیجه می‌گیریم $V \in N(x)$.

برعکس، فرض کنید x نقطه‌ای از E و V مجموعه‌ای در $N(x)$ باشد. چنانچه $U = \{y \in E : V \in N(y)\}$. بوضوح $x \in U$. سپس $U \subseteq V$، زیرا اگر $y \in U$ خواهیم داشت $V \in N(y)$ و از اینرو $y \in V$. بالاخره $U \in T$. برای مشاهدهٔ این مطلب فرض کنید t نقطه‌ای از U باشد. چون $V \in N(t)$ یک مجموعهٔ W در $N(t)$ چنان وجود دارد که برای تمام نقاط w از W، $V \in N(w)$. چون برای هر نقطهٔ w از W، $V \in N(w)$ لذا $W \subseteq U$. از طرفی $W \in N(t)$ پس $U \in N(t)$. بنابراین $U \in T$ و لذا V یک $T-$ همسایگی از x است. یکتایی T بدیهی است.

جواب ۴۱ $Int\ (A) \subseteq A, Int\ (B) \subseteq B$ نتیجه می‌دهد که $Int\ (A) \cap Int\ (B) \subseteq A \cap B$. چون $Int\ (A) \cap Int\ (B)$ یک مجموعهٔ باز مشمول در $A \cap B$ است، پس $Int\ (A) \cap Int\ (B) \subseteq (A \cap B)$.

برعکس، $Int\ (A \cap B)$ زیرمجموعهٔ بازی از $A \cap B$ است و از اینرو زیرمجموعه‌ای بازی از A است. پس $Int\ (A \cap B) \subseteq Int\ (A)$. بطور مشابه $Int\ (A \cap B) \subseteq Int\ B$. بنابراین داریم $Int\ (A \cap B) \subseteq Int\ (A) \cap Int\ (B)$.

لذا $Int\ (A \cap B) = Int\ (A) \cap Int\ (B)$.

بطور مشابه $Cl\ (A \cup B) = Cl\ (A) \cup Cl\ (B)$. اگر $A \subseteq B$، $Cl\ (B)$ مجموعهٔ بسته‌ای است که شامل B است پس شامل A می‌باشد. لذا $Cl\ (B) \supseteq Cl\ (A)$. بطور مشابه اگر $A \subseteq B$ خواهیم داشت، $Int\ (A) \subseteq Int\ (B)$.

جواب ۴۲ چون $Int\ (A) \subseteq A$ داریم $C_E(Int\ A) \supseteq C_E(A)$. از طرفی $Int\ (A)$ باز است، لذا $C_E(Int\ A)$ بسته است و بنابراین $C_E(Int\ A) \supseteq Cl(C_E(A))$.

برعکس، $Cl(C_E(A))$ یک مجموعهٔ بستهٔ شامل $C_E(A)$ است. بنابراین $C_E(Cl(C_E(A)))$ یک مجموعهٔ باز مشمول در A است. این نتیجه می‌دهد که $C_E(Cl(C_E(A))) \subseteq Int\ (A)$ و لذا $C_E(Int\ A) \subseteq Cl(C_E(A))$. از اینرو داریم $Cl(C_E(A)) = C_E(Int\ A)$.

جواب ۴۳ فرض کنید (E, T)، فضای $\mathbf{R}$ همراه با توپولوژی تولید شده بوسیلهٔ متریک معمولی باشد. برای هر عدد طبیعی $n \geq ۱$ قرار دهید

$A_n = \{x \in \mathbf{R} : x > -\frac{۱}{n}\}$. سپس برای تمام چنین nهایی، $Int\ (A_n) = A_n$.
بنابراین داریم:

$$\bigcap_{n \geq ۱} Int\ A_n = \bigcap_{n \geq ۱} A_n = \{x \in R : x \geq ۰\} \supset Int(\bigcap_{n \geq ۱} A_n) = \{x \in R : x > ۰\}.$$

جواب ۴۴ از شرط (۳) نتیجه گرفته می‌شود که اگر X و Y زیرمجموعه‌هایی از E باشند بقسمی که $X \subseteq Y$ در اینصورت $\kappa(X) \subseteq \kappa(Y)$ بنابراین:

۱) $\kappa(C_E(\emptyset)) = \kappa(E) = E = C_E(\emptyset)$. پس $\emptyset \in T_\kappa$.
$\kappa(C_E(E)) = \kappa(\emptyset) = \emptyset = C_E(E)$. پس $E \in T_\kappa$.

۲) فرض کنید $(U_i)_{\in I}$ خانواده‌ای از مجموعه‌های در T_k باشد. در اینصورت $\kappa(C_E(\bigcup_{i \in I} U_i)) \supseteq C_E(\bigcup_{i \in I} U_i)$. از طرفی داریم که برای تمام j در I،

$$\kappa(C_E(\bigcup_{i \in I} U_i)) = \kappa(\bigcap_{i \in I}(C_E(U_i))) \subseteq \kappa(C_E(U_j)) = C_E(U_j).$$

از اینرو

$$\kappa(C_E(\bigcup_{i \in I} U_i)) \subseteq \bigcap_{i \in I}(C_E(U_i)) = C_E(\bigcup_{i \in I} U_i)$$

پس $\kappa(C_E(\bigcup_{i \in I} U_i)) = C_E(\bigcup_{i \in I} U_i)$ و بنابراین $\bigcup_{i \in I} U_i \in T_\kappa$.

۳) فرض کنید $(U_j)_{j \in J}$ خانواده‌ای متناهی از مجموعه‌های در T_κ باشد. بنابراین با استفاده از شرط (۳)

$$\begin{aligned} \kappa(C_E(\bigcap_{j \in J} U_j)) &= \kappa(\bigcup_{j \in J}(C_E(U_j))) \\ &= \bigcup_{j \in J} \kappa(C_E(U_j)) = \bigcup_{j \in J}(C_E(U_j)) \\ &= C_E(\bigcap_{j \in J} U_j) \end{aligned}$$

لذا $\bigcap_{j \in J} U_j \in T_\kappa$. در نتیجه T_κ یک توپولوژی روی E می‌باشد.

فرض کنید F زیرمجموعه‌ای از E باشد. در اینصورت F، مجموعه‌ای $T_\kappa-$ بسته است $\kappa(F) = F \iff \kappa(C_E(C_E(F))) = C_E(C_E(F)) \iff C_E(F) \in T_\kappa \iff$.
اکنون فرض کنید X زیرمجموعه‌ای از E باشد. چون $\kappa(X) \supseteq X$ و $\kappa(\kappa(X)) = \kappa(X)$، لذا $\kappa(X)$ زیرمجموعهٔ $T_\kappa-$ بسته‌ای است که شامل X می‌باشد. بنابراین $\kappa(X) \supseteq Cl_{T_\kappa}(X)$. از طرف دیگر، چون $Cl_{T_\kappa}(X)$، مجموعه‌ای $T_\kappa-$ بسته است و $Cl_{T_\kappa}(X) \supseteq X$ نتیجه می‌گیریم که $Cl_{T_\kappa}(X) = \kappa(Cl_{T_\kappa}(X)) \supseteq \kappa(X)$. بنابراین $Cl_{T_\kappa}(X) = \kappa(X)$.

جواب ۴۵ تحقیق این‌که κ در شرایط تمرین ۴۴ صدق می‌کند، آسان می‌باشد زیرا:

$$\begin{aligned} U \in T_\kappa &\iff \kappa(C_E(U)) = C_E(U) \\ &\iff C_E(U) \ \text{متناهی یا برابر } E \text{ باشد} \\ &\iff U \ \text{عضو توپولوژی متمم باپایان باشد} \end{aligned}$$

جواب ۴۶ برای هر زیرمجموعهٔ A از E داریم، $Int\ A = Cl\ A = A$ و $Fr\ A = \emptyset$. همچنین A هیچ‌جا چگال است $A = \emptyset \iff Int\ Cl\ (A) = \emptyset \iff$. بنابراین اگر E غیرتهی باشد آنگاه نمی‌توان آنرا بصورت یک اجتماع از زیرمجموعه‌های هیچ‌جا چگال نشان داد. پس E از رستهٔ دوم است.

جواب ۴۷ داریم:

$$Int\ (A) = \begin{cases} \emptyset & \text{اگر } A \neq E \\ E & \text{اگر } A = E \end{cases}$$

$$Cl\ (A) = \begin{cases} \emptyset & \text{اگر } A = \emptyset \\ E & \text{اگر } A \neq \emptyset \end{cases}$$

$$Fr\ (A) = \begin{cases} \emptyset & \text{اگر } A = E \text{ یا } \emptyset \\ E & \text{جاهای دیگر ،} \end{cases}$$

A هیچ‌جا چگال است $\iff Int\ Cl\ (A) = \emptyset \iff Cl\ (A) \neq E \iff A = \emptyset$.

بنابر تمرین ۴۶، مجموعه E از رستهٔ دوم می‌باشد.

جواب ۴۸ $Cl\ (P_r) = \{x \in \mathbf{R} : x \leq r\}$. و $Int\ Cl\ (P_r) = \emptyset$، پس P_r هیچ‌جا چگال است. همچنین $\mathbf{R} = \bigcup_{n \in \mathbf{N}} P_n$. بنابراین $\mathbf{R}$ لاغر است.

جواب ۴۹ (۱) فرض کنید x یک نقطهٔ درونی از A باشد. در اینصورت یک مجموعهٔ $T-$ باز U وجود دارد بطوریکه $x \in U$ و $U \subseteq A$. از اینرو $U \subseteq Int\ (A)$ و لذا $x \in Int\ (A)$.

(۲) برعکس اگر $x \in Int\ (A)$ آنگاه چون $Int\ (A)$ مجموعه‌ای $T-$ باز و $Int\ (A) \subseteq A$ است. فوراً نتیجه می‌گیریم که x یک نقطهٔ درونی از A است.

جواب ۵۰ فرض کنید $x \in Cl\ (A)$. اگر x یک نقطهٔ چسبیدهٔ A نباشد در اینصورت یک همسایگی V از x وجود دارد بطوریکه $V \cap A = \emptyset$. مجموعهٔ V شامل یک مجموعهٔ باز U و شامل x است بطوریکه $U \cap A = \emptyset$. بنابراین $C_E(U) \supseteq A$. چون $C_E(U)$ مجموعهٔ بستهٔ شامل A است. داریم $C_E(U) \supseteq Cl\ (A)$ و لذا $x \notin U$ که این تناقض است. بنابراین $x \in Cl\ (A)$ نتیجه می‌دهد که x یک نقطهٔ چسبیدهٔ A است.

برعکس، فرض کنید $x \notin Cl\ (A)$. در اینصورت یکه زیرمجموعهٔ بستهٔ F وجود دارد بطوریکه $A \subseteq F$ و $x \notin F$. پس $C_E(F)$ یک مجموعهٔ باز شامل x است، از اینرو یک همسایگی x است و $C_E(F) \cap A = \emptyset$. پس x یک نقطه چسبیدهٔ A نیست، بنابراین x یک نقطهٔ چسبیدهٔ A ایجاب می‌کند که $x \in Cl\ (A)$.

جواب ۵۱ داریم $X \subseteq Cl\ (X)$ و $Fr\ (X) = Cl\ (X) \cap Cl\ C_E(X) \subseteq Cl\ (X)$، بنابراین $X \cup Fr\ (X) \subseteq Cl\ (X)$.

برعکس فرض کنید $x \in Cl\ (X)$. اگر $x \notin Fr\ (X)$ آنگاه یک همسایگی V از x وجود دارد که $C_E(X)$ را قطع نمی‌کند و از اینرو مشمول در X است. پس $x \in V \subseteq X$ و لذا $x \in X$. بنابراین $Cl\ (X) \subseteq X \cup Fr\ (X)$. از اینرو $Cl\ (X) = X \cup Fr\ (X)$. حال ملاحظه کنید:

$$\begin{aligned} C_X(Fr\ (X)) &= X \cap C_E(Cl\ (X) \cap Cl\ C_E(X)) \\ &= (X \cap C_E Cl\ (X)) \cup (X \cap C_E Cl\ C_E(X)) \\ &= (X \cap Int\ (X)) \cup (X \cap Int\ C_E(X)) \\ &= X \cap Int\ (X) = Int\ (X). \end{aligned}$$

جواب ۵۲ (۱) $X \subseteq Y \Longleftarrow Cl(X) \subseteq Cl(Y) \Longleftarrow Int\ Cl(X) \subseteq Int\ Cl(Y)$. بنابراین $\alpha(X) \subseteq \alpha(Y)$.

(۲) اگر X باز باشد، چون $X \subseteq Cl\ (X)$ پس داریم $X \subseteq Int\ Cl\ (X) = \alpha(X)$.

(۳) چون $\alpha(X)$ باز است داریم $\alpha(X) \subseteq \alpha(\alpha(X))$.
از طرفی $Int\ Cl\ (X) \subseteq Cl\ (X)$، داریم

$$Cl\ Int\ Cl\ (X) \subseteq Cl\ Cl\ (X) = Cl\ (X)$$

و بنابراین $Int\ Cl\ Int\ (X) \subseteq Int\ Cl\ (X)$ یعنی $\alpha(\alpha(X)) \subseteq \alpha(X)$. لذا $\alpha(\alpha(X)) = \alpha(X)$.

(۴) فرض کنید X و Y مجموعه‌های باز مجزا باشند. بعلاوه $\alpha(X) \cap \alpha(Y) \neq \emptyset$. چنانچه t نقطه‌ای از $\alpha(X) \cap \alpha(Y)$ باشد. در اینصورت $t \in Int\ Cl\ (X) \subseteq Cl\ (X)$. پس هر مجموعه باز شامل t، مجموعه X را قطع می‌کند و لذا $\alpha(Y) \cap X \neq \emptyset$. فرض کنید ω نقطه‌ای از $\alpha(Y) \cap X$ باشد. در اینصورت داریم $\omega \in Int\ Cl\ (Y) \subseteq Cl(Y)$.

پس هر مجموعهٔ باز شامل ω، مجموعه Y را قطع می‌کند. در حالت خاص X، مجموعه Y را قطع می‌کند که این یک تناقض است.

جواب ۵۳ فرض کنید $(U_i)_{i\in I}$ خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌های منظم باز باشد.
با استفاده از تمرین (۲) ۵۲ داریم $\alpha(\bigcap_{i\in I} U_i) \supseteq \bigcap_{i\in I} U_i$، زیرا $\bigcap_{i\in I} U_i$ باز است.
برای هر اندیس i در I داریم، $U_i \supseteq \bigcap_{i\in I} U_i$ و لذا با استفاده از تمرین ۵۲ قسمت (۱) $\alpha(U_i) \supseteq \alpha(\bigcap_{i\in I} U_i)$. چون $\alpha(U_i) = U_i$ پس $\bigcap_{i\in I} U_i \supseteq \alpha(\bigcap_{i\in I} U_i)$. لذا $\bigcap_{i\in I} U_i$ منظم باز است.

فرض کنید $X = (۰, \frac{۱}{۲})$ و $Y = (\frac{۱}{۲}, ۱)$ باشد. در اینصورت داریم $Cl\ (X) = [۰, \frac{۱}{۲}]$ و لذا $\alpha(X) = (۰, \frac{۱}{۲})$ بطور مشابه $\alpha(Y) = (\frac{۱}{۲}, ۱)$. همچنین $Cl\ (X \cup Y) = [۰, ۱]$ در اینصورت $\alpha(X \cup Y) = (۰, ۱) \supset \alpha(X) \cup \alpha(Y) = X \cup Y$.
پس $X \cup Y$ منظم باز نمی‌باشد.

جواب ۵۴ فرض کنید $A \cup B = E$. چنانچه x نقطه‌ای از E باشد که در $Cl\ (A)$ نیست. در اینصورت $x \notin A$ و از اینرو $x \in B$. علاوه بر این یک همسایگی V از x وجود دارد بقسمی که A را قطع نمی‌کند، پس مشمول در B است. بنابراین B یک همسایگی از x است یعنی $x \in Int\ (B)$. پس $Cl\ (A) \cup Int\ (B) = E$.

جواب ۵۵ (۱) ابتدا

$$\begin{aligned} Fr\ Cl\ (A) &= Cl\ Cl\ (A) \cap Cl\ C_E Cl\ (A) \\ &= Cl\ (A) \cap Cl\ C_E Cl\ (A) \\ &\subseteq Cl\ (A) \cap Cl\ C_E(A) = Fr\ (A). \end{aligned}$$

سپس داریم:

$$\begin{aligned} Fr\ Int\ (A) &= Cl\ Int\ (A) \cap Cl\ C_E Int\ (A) \\ &= Cl\ Int\ (A) \cap C_E Int\ (A) \\ &= Cl\ Int\ (A) \cap Cl\ C_E(A) \\ &\subseteq Cl\ (A) \cap Cl\ C_E(A) = Fr\ (A) \end{aligned}$$

اختیار کنید $A = (۰,۱) \cup (۱,۲) \cup \{۳\}$. در اینصورت داریم:

$$\begin{aligned} Int\ (A) &= (۰,۱) \cup (۱,۲), \\ Cl\ (A) &= [۰,۲] \cup \{۳\}, \\ Fr\ (A) &= \{۰,۱,۲,۳\}, \\ Fr\ Int\ (A) &= \{۰,۱,۲\}, \\ Fr\ Cl\ (A) &= \{۰,۲,۳\}. \end{aligned}$$

(۲)

$$\begin{aligned} Fr\ (A \cup B) &= Cl\ (A \cup B) \cap Cl\ (C_E(A \cup B)) \\ &= (Cl\ (A) \cup Cl\ (B)) \cap Cl\ (C_E(A) \cap C_E(B)) \\ &= \{Cl\ (A) \cap Cl\ (C_E(A) \cap C_E(B))\} \cup \\ &\quad \{Cl\ (B) \cap\ Cl\ (C_E(A) \cap C_E(B))\} \\ &\subseteq \{Cl\ (A) \cap Cl\ C_E(A)\} \cup \{Cl\ (B) \cap Cl\ C_E(B)\} \\ &= Fr\ (A) \cup Fr\ (B). \end{aligned}$$

حال درنظر بگیرید $A = [۰,۱)$ و $B = (۱,۲)$. در اینصورت $A \cup B = (۰,۲)$. در این حالت می‌بینیم که $Fr\ (A) = \{۰,۱\}$ و $Fr\ (B) = \{۱,۲\}$ اما $Fr(A \cup B) = \{۰,۲\}$.

جواب ۵۶ فرض کنید x نقطه‌ای از U باشد.
چنانچه V یک $T-$ همسایگی از x باشد. در اینصورت $U\cap V$ یک $T-$ همسایگی از x است. چون D چگال است، x متعلق به بستار D است و لذا داریم $(U\cap V)\cap D\neq\emptyset$. بنابراین $V\cap(U\cap D)\neq\emptyset$ و از اینرو $x\in Cl(U\cap D)$. پس $U\subseteq Cl(U\cap D)$.

جواب ۵۷ فرض کنید $Int\ (A)\neq\emptyset$. چنانچه D یک زیرمجموعهٔ چگال از E باشد. اگر x نقطه‌ای از $Int\ (A)$ باشد پس $Int\ (A)$ یک همسایگی از x است. چون $x\in Cl\ (D)=E$ لذا $Int\ (A)$، مجموعه D را قطع می‌کند و از اینرو $D\cap A\neq\emptyset$.
برعکس، فرض کنید $Int\ (A)=\emptyset$. در اینصورت $Cl(C_E(A))=C_E(Int\ (A))=E$ پس $C_E(A)$ چگال است و A را قطع نمی‌کند.

جواب ۵۸ فرض کنید F یک زیرمجموعهٔ بسته از E و شامل p باشد. در اینصورت $C_E(F)$ یک زیرمجموعهٔ باز از E است، بطوریکه شامل p نیست. از اینرو $C_E(F)=\emptyset$ پس $F=E$. لذا $Cl\{p\}=E$.
فرض کنید F' یک زیرمجموعهٔ بسته محض از E باشد. در اینصورت $C_E(F')$ یک زیرمجموعهٔ غیرتهی باز از E است و لذا شامل p می‌باشد در نتیجه هیچ مجموعه باز مشمول در F' نمی‌تواند شامل p باشد. بنابراین تنها مجموعهٔ باز مشمول در F' تهی است و از اینرو $Int\ F'=\emptyset$.
فرض کنید X زیرمجموعه‌ای از E باشد که شامل p است.
چنانچه t نقطهٔ متمایز از p و V یک همسایگی از t باشد. در اینصورت V شامل یک مجموعهٔ باز U شامل t می‌باشد. چون U غیرتهی است. پس شامل p است لذا $V'\cap X$ شامل p می‌باشد. بنابراین t یک نقطهٔ بستاری از X است. $V=\{p,t\}$ یک همسایگی از t است به قسمی که $V\cap X$ متناهی است پس t یک نقطهٔ $\omega-$ انباشتگی نیست.

جواب ۵۹ فرض کنید (E,T) یک فضای شمارش‌پذیر نوع دوم باشد. چنانچه $(B_k)_{k\in K}$ یک پایهٔ شما را برای T باشد. برای هر اندیس k در K فرض کنید x_k یک نقطه از B_k باشد. قرار دهید $X=\{x_k\}_{k\in K}$، آنگاه X یک زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر از E است. ادعا می‌کنیم که X چگال است. برای اثبات، فرض کنید p نقطه‌ای از E و V یک همسایگی از p باشد. در اینصورت V شامل یک مجموعهٔ باز است. و از اینرو شامل یک مجموعهٔ باز پایه‌ای شامل p مانند $p\in B_{k_\circ}\subseteq V$ می‌باشد. لذا $V\cap X$ شامل $x_{k_\circ}$ است و بنابراین غیرتهی است. پس $p\in Cl\ (X)$. لذا X چگال است.

جواب ٦۰ (۱) همانند تمرین ۵۸ داریم $Cl\{p\}=E$. بنابراین $\{p\}$ زیرمجموعهٔ شمارای چگالی از E است. پس (E,T_p) تفکیک‌پذیر است.

برای هر نقطهٔ x از E مجموعهٔ $\{x,p\}$ باز است و از اینرو باید اجتماعی از مجموعه‌های هر پایهٔ T باشد در حقیقت باید متعلق به هر پایهٔ T باشد. از این مجموعه‌ها تعداد ناشمارا وجود دارد. پس هیچ پایهٔ شمارش‌پذیر برای T وجود ندارد.

(۲) فرض کنید K یک زیرمجموعهٔ شمارش‌پذیر نامتناهی از E باشد.
در اینصورت $C_E(Cl\ (K))$ باز است و از اینرو باید یا تهی باشد یا متمم باپایان داشته باشد. اما $C_E(Cl_E\ Cl\ (K))=Cl\ (K)\supseteq K$ نامتناهی است. پس $C_E(Cl\ (K))=\emptyset$، یعنی $E=Cl\ (K)$، بنابراین K چگال است. لذا (E,T) تفکیک‌پذیر می‌باشد.

فرض کنید یک پایهٔ شمارای $(B_i)_{i\in I}$ برای T وجود داشته باشد. چنانچه p یک نقطه از E باشد بعلاوه $J=\{i\in I: p\in B_i\}$. در اینصورت $\bigcap_{i\in J} B_i=\{p\}$ (زیرا اگر $q\neq p$ آنگاه $C_E\{q\}$ یک مجموعهٔ $T-$ باز است که شامل p می‌باشد و لذا یک مجموعهٔ $B_{i_\circ}$ وجود دارد که $i_\circ\in J$ و $p\in B_{i_\circ}\subseteq C_E\{q\}$. بنابراین $q\notin B_{i_\circ}$). از این

نتیجه گرفته می‌شود که $C_E\{p\}$ (که ناشماراست) برابر $\bigcup\limits_{i\in J}(C_E(B_i))$ می‌باشد (که اجتماعی شمارا از مجموعه‌های متناهی است و از اینرو شماراست) اما این یک تناقض است. پس (E,T) شمارش‌پذیر نوع دوم نیست.

جواب ۶۱ فرض کنید $\{x_k\}_{k\in K}$ یک زیرمجموعهٔ چگال شمارا از E باشد. چنانچه $B=\{V_d(x_k,\frac{۱}{n})\}_{k\in K,n\in \mathbf{P}}$ که $\mathbf{P}$ مجموعهٔ اعداد صحیح مثبت می‌باشد. در این‌صورت B یک خانوادهٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز است. ادعا می‌کنیم که آن یک پایه برای توپولوژی متریک روی E می‌باشد.

فرض کنید U یک مجموعهٔ $T-$ باز باشد. اگر x نقطه‌ای از U باشد یک عدد صحیح مثبت m وجود دارد بطوریکه $V_d(x,\frac{۱}{m})\subseteq U$. چون $\{x_k\}$ چگال است، لذا $V_d(x,\frac{۱}{۲m})$ شامل یکی از نقاط x_k مثل $x_{k_\circ}$ است. پس $x\in V_d(x_{k_\circ},\frac{۱}{۲m})\subseteq V_d(x,\frac{۱}{m})\subseteq U$.

جواب ۶۲ فرض کنید $(B_k)_{k\in K}$ یک پایهٔ شمارا برای (E,T) باشد. چنانچه p نقطه‌ای از E باشد. قرار دهید $J=\{k\in K: p\in B_k\}$. در اینصورت $(B_k)_{k\in K}$ یک خانوادهٔ شمارش‌پذیر از مجموعه‌های باز شامل p است. ادعا می‌کنیم که این یک پایه همسایگی برای p می‌باشد. برای نشان دادن این مطلب ،فرض کنید V یک همسایگی از p باشد. در اینصورت V شامل یک مجموعهٔ باز U می‌باشد که شامل p است. از اینرو U شامل یکی از مجموعه‌های B_k است که شامل p می‌باشد. یعنی یکی از مجموعه‌های B_k که k در J است.

جواب ۶۳ (۱) فرض کنید p نقطه‌ای از E باشد. در اینصورت $\{p\}$ تشکیل یک پایه همسایگی برای p می‌دهد. هر پایه برای T باید شامل همهٔ مجموعه‌های بفرم

$\{x\}$ باشد. و تعداد ناشمارا از این نوع وجود دارد. پس (E,T) شمارش‌پذیر نوع اول است اما شمارش‌پذیر نوع دوم نیست.

(۲) در تمرین ٦٠ قسمت (۱) دیدیم که (E,T) شمارش‌پذیر نوع دوم نیست. مجموعهٔ $\{p\}$ یک پایه همسایگی در p است. اگر $q \neq p$ مجموعهٔ $\{p,q\}$ یک پایه همسایگی در q است. بنابراین (E,T) شمارش‌پذیر نوع اول است.

جواب ٦۴ (۱) اگر E شمارش‌پذیر باشد، آنگاه $\{\{x\}\}_{x\in E}$ یک پایهٔ شمارا برای توپولوژی گسسته روی E است.

(۲) اگر E یک مجموعه باشد، آنگاه $\{E,\emptyset\}$ یک پایه شمارا برای توپولوژی ناگسسته روی E است.

(۳) پایهٔ $\{\{2k,2k+1\}\}_{k\in\mathbf{N}}$ برای توپولوژی فرد $-$ زوج روی $\mathbf{N}-$ شمارا است.

(۴) فرض کنید $E=\{x_0,x_1,x_2,\ldots\}$ و T توپولوژی نقطهٔ خاص T_{x_0} باشد. در اینصورت می‌بینیم که $\{\{x_0\},\{x_0,x_1\},\{x_0,x_2\},\ldots\}$ یک پایهٔ شمارا برای T است.

(۵) فرض کنید $E=\{x_0,x_1,x_2,\ldots\}$. چنانچه T توپولوژی نقطه خارج شده T_{-x_0} باشد. در اینصورت $\{E,\{x_1\},\{x_2\},\{x_3\},\ldots\}$ یک پایهٔ شمارا برای T است.

(٦) مجموعهٔ تمام فاصله‌های باز با نقاط انتهایی گویا یک پایهٔ شمارش‌پذیر برای توپولوژی معمولی روی $\mathbf{R}$ است.

(۷) مجموعهٔ همهٔ فاصله‌های بفرم $\{x\in\mathbf{R} : x>r\}$ که r گویاست، یک پایهٔ شمارش‌پذیر برای توپولوژی ترتیبی راست روی $\mathbf{R}$ است.

فصل ۹

جوابهای فصل ۲

جواب ٦٥ (a) فرض کنید f پیوسته باشد.
چنانچه U' یک زیرمجموعهٔ $T'-$ باز از E' باشد. بعلاوه x نقطه‌ای از $f^{-1}(U')$ باشد. در اینصورت $f(x) \in U'$ و لذا U' یک $T'-$ همسایگی از $f(x)$ است. چون f پیوسته است پس یک $T-$ همسایگی V از x چنان وجود دارد که $f(V) \subseteq U'$. لذا $x \in V \subseteq f^{-1}(f(V)) \subseteq f^{-1}(U')$. بنابراین $f^{-1}(U')$ یک $T-$ همسایگی از x است. در نتیجه $f^{-1}(U')$، مجموعه‌ای $T-$ باز است.

(b) فرض کنید $f^{-1}(U')$ برای هر زیرمجموعهٔ $T'-$ باز U' از E'، مجموعه‌ای $T-$ باز باشد.

چنانچه F' یک زیرمجموعه $T'-$ بسته از E' باشد. در اینصورت $C_{E'}(F')$، مجموعه‌ای $T'-$ باز است و از اینرو $C_E(f^{-1}(F')) = f^{-1}(C_{E'}(F'))$، مجموعه‌ای $T-$ باز است. بنابراین $f^{-1}(F')$، مجموعه‌ای $T-$ بسته است.

(c) فرض کنید $f^{-1}(F')$ برای هر زیرمجموعهٔ $T'-$ بسته F' از E'، مجموعه‌ای $T-$ بسته باشد. چنانچه x نقطه‌ای از E و V' یک $T'-$ همسایگی از $f(x)$ باشد.
در اینصورت یک مجموعهٔ $T'-$ باز U' وجود دارد بقسمی که $f(x) \in U' \subseteq V'$. بنابراین $C_{E'}(U')$، مجموعه‌ای $T'-$ بسته است و لذا

$C_E(f^{-1}(U')) = f^{-1}(C_{E'}(U'))$، مجموعه‌ای $T-$ بسته است.
بنابراین $f^{-1}(U')$، مجموعه‌ای $T-$ باز است و لذا یک $T-$ همسایگی از x است.
چون $f(f^{-1}(U')) \subseteq U' \subseteq V'$، نتیجه می‌گیریم که f پیوسته است.

جواب ٦٦ فرض کنید $U_۳$ یک زیرمجموعهٔ $T_۳-$ باز از $E_۳$ باشد. چون g پیوسته است لذا $g^{-1}(U_۳)$ یک زیرمجموعهٔ $T_۲-$ باز از $E_۲$ می‌باشد. از طرفی f پیوسته است لذا، $f^{-1}(g^{-1}(U_۳))$ یک زیرمجموعه $T_۱-$ باز از $E_۱$ می‌باشد. امّا $(gof)^{-1}(U_۳) = f^{-1}(g^{-1}(U_۳))$، پس gof پیوسته است.

جواب ٦٧ اگر یک نگاشت g از E' به E وجود داشته باشد بطوریکه $gof = I_E$ و $fog = I_{E'}$، در اینصورت f دوسویی است و g معکوس آن می‌باشد. نتیجهٔ مطلوب فوراً حاصل می‌شود.

جواب ٦٨ (۱) فرض کنید f یک $(T,T')-$ همانریختی باشد. در اینصورت f، تابعی $(T,T')-$ پیوسته است. برای نشان دادن اینکه f، تابعی $(T,T')-$ باز است. فرض کنید U یک مجموعه $T-$ باز باشد. چون f^{-1}، تابعی $(T',T)-$ پیوسته است، نتیجه گرفته می‌شود که $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$، مجموعه‌ای $T'-$ باز است. بنابراین f، تابعی $(T,T')-$ باز است.

بطور مشابه f، تابعی $(T,T')-$ بسته می‌باشد.

(۲) برعکس، فرض کنید f، تابعی $(T,T')-$ پیوسته و $(T,T')-$ باز باشد.
برای نشان دادن اینکه f، یک $(T,T')-$ همانریختی است کافیست نشان دهیم که f^{-1}، تابعی $(T',T)-$ پیوسته است. چنانچه U یک زیرمجموعهٔ $T-$ باز از E باشد، در این‌صورت $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$، مجموعه‌ای $T'-$ باز است. بنابراین f^{-1}، تابعی $(T',T)-$ پیوسته است. یک بحث مشابه برای حالتی که f تابعی $(T,T')-$ بسته باشد بکار می‌رود.

جواب ۶۹ فرض کنید (a,b) نقطه‌ای از $\mathbf{R}^۲$ باشد.
چنانچه V' یک همسایگی از a در $\mathbf{R}$ باشد. یک عدد حقیقی مثبت r وجود دارد بطوریکه $V(a,r) \subseteq V'$. فرض کنید $V = V((a,b),r)$. در اینصورت داریم $f(V) \subseteq V'$، لذا f پیوسته است.

مجموعهٔ نقاط $\{(x,y) \in \mathbf{R}^۲ : xy = ۱\}$ در $\mathbf{R}^۲$ بسته است. اما تصویر آن تحت f، مجموعهٔ $\{x \in \mathbf{R} : x \neq ۰\}$، در $\mathbf{R}$ بسته نیست. پس f بسته نیست.

جواب ۷۰ (۱) فرض کنید f، تابعی $(T,T')-$ پیوسته باشد.
چنانچه X' زیرمجموعهٔ از E' باشد. در اینصورت $Cl_{T'}(X')$ یک زیرمجموعهٔ $T'-$ بسته از E' است و لذا $f^{-۱}(Cl_{T'}(X'))$ یک زیرمجموعهٔ $T-$ بسته از E است. چون $X' \subseteq Cl_{T'}(X')$ نتیجه گرفته می‌شود که $f^{-۱}(X') \subseteq f^{-۱}(Cl_{T'}(X'))$. از طرفی $Cl_T(f^{-۱}(X'))$ کوچکترین مجموعهٔ $T-$ بستهٔ شامل $f^{-۱}(X')$ است پس داریم $Cl_T(f^{-۱}(X')) \subseteq f^{-۱}(Cl_{T'}(X'))$.

(۲) برعکس، فرض کنید که برای هر زیرمجموعهٔ X' از E' داریم $Cl_T(f^{-۱}(X')) \subseteq f^{-۱}(Cl_{T'}(X'))$. چنانچه F' یک زیرمجموعهٔ $T'-$ بسته از E' باشد. در اینصورت $f^{-۱}(Cl_{T'}(F')) = f^{-۱}(F')$ و لذا

$$f^{-۱}(F') \supseteq Cl_T(f^{-۱}(F')) \supseteq f^{-۱}(F')$$

بنابراین $f^{-۱}(F') = Cl_T(f^{-۱}(F'))$ و از اینرو $T-$ بسته است، پس f پیوسته است.

جواب ۷۱ (۱) فرض کنید f، تابعی $(T,T')-$ باز باشد.
چنانچه X زیرمجموعه‌ای از E باشد. در اینصورت، چون $Int_T(X) \subseteq X$ داریم $f(Int(X)) \subseteq f(X)$. از طرفی f، تابعی $(T,T')-$ باز است و $f(Int_T(X))$ یک زیرمجموعهٔ $T'-$ باز از $f(X)$ می‌باشد، بنابراین $f(Int_T(X)) \subseteq Int_{T'}(f(X))$.

(۲) برعکس، فرض کنید که برای هر زیرمجموعهٔ X از E داریم $f(Int_T(X)) \subseteq Int_{T'}(f(X))$. چنانچه X یک زیرمجموعهٔ T− باز از E باشد. در اینصورت داریم $f(X) = f(Int_T(X)) \subseteq Int_{T'}(f(X)) \subseteq f(X)$ پس $Int_{T'}(f(X)) = f(X)$ و لذا $f(X)$ مجموعه‌ای T'− باز است. همچنین f تابعی (T, T')− باز می‌باشد.

جواب ۷۲ (۱) فرض کنید f یک (T, T')− همانریختی باشد.
چنانچه $T_\circ$ یک توپولوژی روی E' باشد بقسمی که f تابعی $(T, T_\circ)$− پیوسته باشد. بعلاوه $U_\circ \in T_\circ$، در اینصورت $f^{-1}(U_\circ) \in T$. چون f^{-1}، تابعی (T', T)− پیوسته است لذا، $(f^{-1})^{-1}(f^{-1}(U_\circ)) \in T'$. یعنی $U_\circ \in T'$. بنابراین $T_\circ \subseteq T'$. لذا T' قویترین توپولوژی $T_\circ$ روی E' است بقسمی که f تابعی $(T, T_\circ)$− پیوسته باشد.

(۲) برعکس، فرض کنید که T' قویترین توپولوژی $T_\circ$ باشد بقسمی که f تابعی $(T, T_\circ)$− پیوسته باشد. برای نشان دادن اینکه f یک تابع (T', T)− همانریختی است، آنچه باقی می‌ماند اینست که نشان دهیم f^{-1} تابعی (T', T)− پیوسته است. اگر اینطور نباشد، آنگاه یک مجموعهٔ T− باز U وجود دارد بقسمی که $(f^{-1})^{-1}(U) = f(U)$، مجموعه‌ای T'− باز نیست آنگاه $T_\circ$ توپولوژی ایجاد شده روی E' توسط $T' \cup \{f(U)\}$ باشد. پس f، تابعی $(T, T_\circ)$− پیوسته است و لذا $T_\circ \subseteq T'$. بنابراین $f(U) \in T'$، که یک تناقض می‌باشد. بنابراین f^{-1}، تابعی (T', T)− پیوسته است و از اینرو f، یک (T, T') همانریختی است.

جواب ۷۳ (۱) فرض کنید (E, T) یک فضای توپولوژیکی گسسته باشد.
چنانچه (E', T') یک فضای توپولوژیکی و f نگاشتی از E به E' باشد. فرض کنید U' یک زیرمجموعهٔ T'− باز از E' باشد. در اینصورت داریم $f^{-1}(U') \in \mathbf{P}(E) = T$. بنابراین f، تابعی (T, T')− پیوسته است. برعکس، فرض کنید که برای هر فضای توپولوژیکی (E', T')، هر نگاشت f از E به E'، تابعی (T, T')− پیوسته باشد.

در حالت خاص، $I_E : E \longrightarrow E$، تابعی $(T, \mathbf{P}(E))-$ پیوسته است. بنابراین برای هر زیرمجموعهٔ X از E داریم $(I_E)^{-1}(X) = X \in T$. لذا $T = \mathbf{P}(E)$، یعنی T توپولوژی گسسته است.

(۲) فرض کنید (E, T) یک فضا با توپولوژی ناگسسته، (E', T') یک فضای توپولوژیکی و f نگاشتی از E' به E باشد.
تنها مجموعه‌های T، مجموعه E و $\emptyset$ هستند. چون $f^{-1}(E) = E'$ و $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$ هر دو در T' هستند، نتیجه گرفته می‌شود که f، تابعی $(T', T)-$ پیوسته است.
برعکس، فرض کنید که برای هر فضای توپولوژیکی (E', T')، هر نگاشت f از E' به E، تابعی $(T', T)-$ پیوسته باشد.

در حالت خاص، $I_E : E \longrightarrow E$، تابعی $(\{E, \emptyset\}, T)-$ پیوسته است. فرض کنید U یک مجموعهٔ $T-$ باز باشد، در اینصورت $U = (I_E)^{-1}(U) \in \{E, \emptyset\}$. پس $T = \{E, \emptyset\}$.

جواب ۷۴ فرض کنید $A = \{x \in E : f(x) = g(x)\}$، یک راه دیگر بیان اینست که بگوییم $A = \{x \in E : (f-g)(x) = \circ\} = (f-g)^{-1}\{\circ\}$. چون $\{\circ\}$ یک زیرمجموعهٔ بستهٔ $\mathbf{R}$ است و $f - g$ پیوسته می‌باشد، $(f-g)^{-1}\{\circ\}$، مجموعه‌ای $T-$ بسته است.

فرض کنید $K = \{x \in E : f(x) = g(x)\} \supseteq D$، جاییکه D چگال باشد. چون $Cl\ (D) = E$، کوچکترین مجموعهٔ بسته شامل D مجموعه E می‌باشد و K بسته است پس $K = E$. بنابراین برای هر x در E، داریم $f(x) = g(x)$.

فصل ۱۰

جوابهای فصل ۳

جواب ۷۵ فرض کنید $T_\circ$ توپولوژی القایی روی E توسط خانوادهٔ $(f_i)_{i\in I}$ باشد. بعلاوه $T(S)$ توپولوژی تولید شده توسط S باشد.

اگر U_i هر زیرمجموعهٔ T_i– باز E_i باشد، چون f_i، تابعی $(T_\circ, T_i)$– پیوسته است پس $f^{-1}(U_i) \in T_\circ$. بنابراین $S \subseteq T_\circ$ و از اینرو $T(S) \subseteq T_\circ$.

دوباره فرض کنید U_i یک زیرمجموعهٔ T_i– باز از E_i باشد. چون $f^{-1}(U_i) \in S$، ایجاب می‌کند که $f^{-1}(U_i) \in T(S)$. پس هر نگاشت f_i تابعی $(T(S), T_i)$– پیوسته است. بنابراین $T(S) \in \mathbf{A}$ و لذا $T(S) \supseteq T_\circ$. بنابراین $T(S) = T_\circ$.

جواب ۷۶ (۱) فرض کنید g، تابعی (T', T)– پیوسته باشد. چون هر نگاشت f_i، تابعی (T, T_i)– پیوسته است، پس هر نگاشت $f_i \circ g$ تابعی (T', T_i)– پیوسته است.

(۲) برعکس، فرض کنید هر نگاشت $f_i \circ g$، تابعی (T', T_i)– پیوسته باشد.

چنانچه U یک زیرمجموعهٔ T– باز E باشد. در اینصورت $U = \bigcup\limits_{k\in K} \bigcap\limits_{j\in J_k} f_j^{-1}(U_j)$ که هر J_k یک زیرمجموعهٔ متناهی از I است و

برای هر اندیس j در J_k مجموعهٔ U_j، مجموعه‌ای T_j- باز است. داریم

$$g^{-1}(U) = \bigcup_{k\in K}\bigcap_{j\in J_k} g^{-1}(f_j^{-1}(U_j)) = \bigcup_{k\in K}\bigcap_{j\in J_k} (f_j\circ g)^{-1}(U_j)$$

که $T'-$ باز است زیرا هر مجموعهٔ $(f_j\circ g)^{-1}(U_j)$ چنین است و همهٔ مجموعه‌های اندکس J_k متناهی هستند. بنابراین g تابعی $(T',T)-$ پیوسته است.

جواب ۷۷ (۱) B مجموعه‌ای T_A- بسته است لذا $C_A(B)$، مجموعه‌ای T_A- باز است. در نتیجه یک زیرمجموعهٔ $T-$ باز U از E وجود دارد بقسمی که $C_A(B) = A\cap U$. در اینصورت $C_E(U)$، مجموعه‌ای $T-$ بسته است و $B = A\cap C_E(U)$.

برعکس، فرض کنید $B = A\cap F$ که F یک مجموعه $T-$ بسته است. پس $C_A(B) = A\cap C_E(F)$. چون $C_E(F)$، مجموعه‌ای $T-$ باز است لذا نتیجه می‌گیریم که $C_A(B)$، مجموعه‌ای T_A- باز است. پس B، مجموعه‌ای T_A- بسته است.

(۲) چون $A\supseteq B$ و $Cl_T(B)\supseteq B$ داریم $A\cap Cl_T(B)\supseteq B$. از طرفی $Cl_T(B)$، مجموعه‌ای $T-$ بسته است لذا $A\cap Cl_T(B)$، یک T_A- بسته است. بنابراین $Cl_{T_A}(B)\subseteq A\cap Cl_T(B)$. چون $Cl_{T_A}(B)$، مجموعه‌ای T_A- بسته است، یک مجموعهٔ $T-$ بستهٔ F وجود دارد بقسمی که $Cl_{T_A}(B) = A\cap F$. در اینصورت $F\supseteq B$ و لذا $F\supseteq Cl_T(B)$. این ایجاب می‌کند که $Cl_{T_A}(B) = A\cap F\supseteq A\cap Cl_T(B)$. پس $Cl_{T_A}(B) = A\cap Cl_T(B)$.

(۳) $Int_T(B)\subseteq B$ پس $A\cap Int_T(B) = Int_T(B)$ و از اینرو $Int_T(B)$ یک T_A- باز است. پس $Int_T(B)\subseteq Int_{T_A}(B)$.

برای اینکه نشان دهید رابطهٔ شمول در (۳) سره است، فرض کنید B یک زیرمجموعهٔ E باشد بطوریکه $T-$ باز نیست. در اینصورت اگر $A = B$، خواهیم داشت $Int_{T_A}(B) = B$. امّا چون B مجموعه‌ای $T-$ باز نیست لذا، $Int_T(B)$ به طور سره در B است.

جواب ۷۸ چون V یک T_D همسایگی از a است. یک مجموعهٔ $T-$ باز U وجود دارد بطوریکه $a \in D \cap U \subseteq V$.

فرض کنید x نقطه‌ای از U و W یک $T-$ همسایگی از x باشد. در اینصورت $U \cap W$ یک $T-$ همسایگی از x است. چون D چگال است، پس $x \in Cl_T(D) = E$. این نتیجه می‌دهد که $(U \cap W) \cap D \neq \emptyset$. از اینرو $W \cap (D \cap U) \neq \emptyset$. بنابراین $W \cap V \neq \emptyset$. لذا $x \in Cl_T(V)$. پس $a \in U \subseteq Cl_T(V)$. در نتیجه $Cl_T(V)$ یک $T-$ همسایگی a است.

جواب ۷۹ چون M مجموعه‌ای T_A- باز است، یک مجموعهٔ $T-$ باز U وجود دارد بقسمی که $M = A \cap U$. بطور مشابه، چون M مجموعه‌ای T_B- باز است یک مجموعهٔ $T-$ باز V موجود است به طوریکه $M = B \cap V$.

در اینصورت داریم $A \cap U \cap V = B \cap V \cap V = B \cap V = M$ و $B \cap U \cap V = A \cap U \cap U = A \cap U = M$. بنابراین

$$M = M \cup M = [A \cap (U \cap V)] \cup [B \cap (U \cap V)] = (A \cup B) \cap (U \cap V) = U \cap V$$

که $T-$ باز است.

جواب ۸۰ فرض کنید (E, T) تفکیک‌پذیر باشد. چنانچه D یک زیرمجموعهٔ چگال شمارا از E باشد. بعلاوه U یک زیرمجموعهٔ باز E باشد. قرار دهید $D' = D \cap U$، آنگاه D' یقیناً شماراست. ادعا می‌کنیم که $Cl_{T_U}(D') = U$. فرض کنید x نقطه‌ای از U و N یک T_U- همسایگی از x باشد. یک مجموعهٔ $T-$ باز W وجو دارد که $x \in U \cap W \subseteq N$. اکنون $U \cap W$ یک $T-$ همسایگی از x است و $x \in E = Cl_T(D)$. بنابراین $U \cap W \cap D \neq \emptyset$. از اینرو $(U \cap W) \cap (U \cap D) \neq \emptyset$ و لذا $N \cap D' \neq \emptyset$. بنابراین $x \in Cl_{T_U}(D')$. پس D' یک زیرمجموعهٔ چگال شمارا از U است. در نتیجه (U, T_U) تفکیک‌پذیر است.

جواب ۸۱ طبق تمرین ۵۸، $Cl_{T_p}\{p\} = E$. بنابراین $\{p\}$ زیرمجموعهٔ چگال شمارا از E است. پس (E, T_p) تفکیک‌پذیر است.

فرض کنید D زیرمجموعه‌ای از A باشد. در اینصورت $p \notin D$ و لذا $p \in C_E(D)$. از اینرو $C_E(D)$، مجموعه‌ای T_p- باز است. بنابراین D مجموعه‌ای T_p- بسته است. در اینصورت $Cl_{(T_p)_A}(D) = A \cap Cl_{T_p}(D) = A \cap D = D$. اگر D شمارا باشد، بستار آن، $Cl_{(T_p)_A}(D)$ نیز شمارا است و از اینرو برابر A که ناشمارا است، نمی‌باشد. پس A دارای زیرمجموعهٔ چگال شمارا نمی‌باشد.

جواب ۸۲ فرض کنید U یک زیرمجموعهٔ $(\prod T_i)-$ باز از $\prod E_i$ باشد.
در اینصورت $U = \bigcup\limits_{k \in K} B_k$ که برای هر اندیس k در K مجموعهٔ $B_k = \prod\limits_{i \in I} X_{ik}$ است. و برای هر i در I داریم $X_{ik} \in T_i$ در حالیکه $I_k = \{i \in I : X_{ik} \neq E_i\}$ متناهی است. پس $\bigcap\limits_{k \in K} I_k$ متناهی است. اگر $i_\circ \notin \bigcap\limits_{k \in K} I_k$ آنگاه یک اندیس $k_\circ$ وجود دارد بقسمی که $X_{i_\circ k_\circ} = E_{i_\circ}$. لذا

$$\pi_{i_\circ}(U) \supseteq \pi_{i_\circ}(B_{k_\circ}) = \pi_{i_\circ}(\prod_{i \in I} X_{i_{k_\circ}}) = E_{i_\circ}.$$

جواب ۸۳ فرض کنید $x \in Cl_T(\prod A_i)$. چنانچه j اندیس دلخواه در I و V_j یک T_j- همسایگی از $\pi_j(x)$ در E_j باشد. آنگاه V_j شامل یک مجموعهٔ T_j- باز U_j است که شامل $\pi_j(x)$ می‌باشد.

فرض کنید $U = \prod X_i$ جاییکه $X_j = U_j$ و برای $i \neq j$، $X_i = E_i$. در اینصورت U یک مجموعهٔ $T-$ باز شامل x است. بنابراین $U \cap \prod A_i \neq \emptyset$. اگر $y \in U \cap \prod A_i$ آنگاه $\pi_j(y) \in \pi_j(U) \cap A_j = U_j \cap A_j$. پس $U_j \cap A_j$ غیرتهی است و از اینرو $\pi_j(x) \in Cl_{T_j}(A_j)$. بنابراین $Cl_T(\prod A_j) \subseteq \prod Cl_{T_j}(A_j)$.

برعکس، فرض کنید $x \in \pi Cl_{T_j}(A_j)$.
چنانچه V یک $T-$ همسایگی x باشد. در اینصورت V شامل یک مجموعهٔ $T-$ باز شامل x است و از اینرو شامل یک مجموعهٔ $T-$ باز پایه شامل x بمانند U، است.

فرض کنید $U = \prod_{i\in I} U_i$ جاییکه برای هر اندیس i در I مجموعهٔ U_i، یک T_i- باز است و علاوه براین $U_i = E_i$ برای تمام اندیسهای i که در یک زیرمجموعهٔ مشخص متناهی J از I نیستند. برای هر اندیس j در J، U_j یک T_j- همسایگی از $\pi_j(x)$ است که متعلق به $Cl_{T_j}(A_j)$ است. از اینرو برای هر اندیس j در J داریم $U_j \cap A_j \neq \emptyset$. برای $j \notin J$ داریم $U_j \cap A_j = E_j \cap A_j = A_j \neq \emptyset$. از اینرو $U \cap \prod A_j = \prod(U_j \cap A_j) \neq \emptyset$. بنابراین $x \in Cl_T(\prod A_j)$. لذا $\prod Cl_{T_j}(A_j) \subseteq Cl_T(\prod A_j)$.

جواب ۸۴ (۱) فرض کنید $E = \prod_{i\in I} E_i$ و $T = \prod_{i\in I} T_i$. برای هر اندیس i در I، چنانچه $D_i = \{p_n^i : n \in \mathbf{N}\}$ یک زیرمجموعهٔ چگال شمارا از E_i باشد.
قرار دهید D مجموعهٔ همهٔ نقاط t از E بطوریکه برای هر اندیس i در I، $\pi_i(t) \in D_i$ و یک اندیس $i(t)$ در I و یک عدد طبیعی m موجود باشد بطوریکه برای هر $i > i(t)$، داشته باشیم $\pi_i(t) = p_m^i$. لذا D یک زیرمجموعهٔ شمارا از E است. باید نشان دهیم که D در E چگال است.

فرض کنید x نقطه‌ای از E و V یک همسایگی x باشد. در اینصورت V شامل یک مجموعهٔ $T-$ باز است و لذا شامل یک مجموعهٔ $T-$ باز پایه U است که شامل x می‌باشد. قرار دهید $U = \prod_{i\in I} U_i$ جاییکه $U_i \in T_i$ برای هر i در I و $U_i = E_i$ برای هر اندیس i مگر در یک تعداد متناهی i. پس یک اندیس $i_\circ$ وجود دارد بطوریکه برای هر $i > i_\circ$، داریم $U_i = E_i$.

اگر $i \leq i_\circ$ در اینصورت، چون D_i در E_i چگال است، یک نقطه از D_i در U_i همانند $p_{n_i}^i$ وجود دارد. فرض کنید t نقطه‌ای از D باشد بطوریکه برای $i \leq i_\circ$، $\pi_i(t) = p_{n_i}^i$ و برای $i > i_\circ$، $\pi_i(t) = p_\circ^i$. در اینصورت $t \in D \cap U \subseteq D \cap V$. بنابراین $x \in Cl_T D$، یعنی D یک زیرمجموعهٔ شمارا و چگال E است.

(۲) فرض کنید که هر فضای (E_i, T_i) دارای پایهٔ شمارای B_i برای توپولوژی T_i باشد. در اینصورت خانوادهٔ زیرمجموعه‌های $\prod U_i$ که برای هر i در I داریم $U_i \in B_i$

یا $U_i = E_i$ و برای هر i مگر در یک تعداد متناهی، $U_i = E_i$، شماراست و پایه‌ای برای توپولوژی حاصلضربی $\prod T_i$ است.

جواب ۸۵ (۱) فرض کنید f_I یک‌به‌یک باشد. چنانچه x و y نقاط متمایزی از E باشند. در اینصورت $f_I(x) \neq f_I(y)$. پس حداقل یک اندیس i در I وجود دارد بقسمی که $\pi_i f_I(x) \neq \pi_i f_I(y)$، یعنی $f_i(x) \neq f_i(y)$. بنابراین خانوادهٔ $(f_i)_{i\in I}$ جدا کنندهٔ نقاط می‌باشند.

برعکس، فرض کنید $(f_i)_{i\in I}$ جدا کنندهٔ نقاط باشد. در اینصورت اگر x و y نقاط متمایز E باشند یک اندیس i در I وجود دارد بطوریکه $f_i(x) \neq f_i(y)$ و از اینرو $f_I(x) \neq f_I(y)$. پس f یک‌به‌یک است.

(۲) فرض کنید $(f_i)_{i\in I}$ جدا کنندهٔ نقاط و مجموعه‌های بسته باشد.

چنانچه U یک زیرمجموعهٔ $T-$ باز از E باشد. اگر $t = f_I(x)$ نقطه‌ای از $(f_I)(U)$ باشد، یک اندیس i در I وجود دارد بقسمی که

$$f_i(x) \notin Cl_{T_i}((f_i)(C_E(U))) = F_i$$

فرض کنید $U_i = C_{E_i}(F_i)$ و برای $j \neq i$، $U_j = E_j$. در اینصورت $X = \prod\limits_{j\in I} U_j$ در توپولوژی حاصلضربی $\prod\limits_{j\in I} T_j$ باز است و $t \in X \cap (f_I)(U)$ که در توپولوژی زیرفضایی T_I روی $(f_I)(U)$ باز است. لذا $(f_I)(U)$ یک همسایگی از هر یک از نقاطش در توپولوژی زیرفضایی است و از اینرو در این توپولوژی باز است. بنابراین f_I، تابعی $(T, T_I)-$ باز است.

جواب ۸۶ برای هر نقطهٔ p از E، فرض کنید f_p نگاشتی از E به X تعریف شده توسط رابطهٔ زیر باشد:

$$f_p(t) = \begin{cases} c & \text{اگر} \quad t \neq p \\ b & \text{اگر} \quad t = p \end{cases}$$

برای اثبات اینکه f_p، تابعی $(T, T_\circ)-$ پیوسته است باید بررسی کنیم که مجموعهٔ $(f_p)^{-1}\{a\}$، مجموعه‌ای $T-$ باز است. اما این بدیهی است، چون $(f_p)^{-1}\{a\} = \emptyset$.

برای هر زیرمجموعهٔ $T-$ باز U از E، فرض کنید f_U نگاشتی از E به X بصورت:

$$f_U(t) = \begin{cases} a & \text{اگر} \quad t \in U \\ b & \text{اگر} \quad t \notin U \end{cases}$$

باشد. چون $U = (f_U)^{-1}(\{a\})$ مجموعه‌ای $T-$ باز است پس f_U، تابعی $(T, T_\circ)-$ پیوسته است.

فرض کنید $I = X \cup T$ و خانوادهٔ $(f_i)_{i \in I}$ را در نظر بگیرید. بوضوح جدا کنندهٔ نقاط می‌باشد، زیرا اگر s و t نقاط متمایز در E باشند خواهیم داشت $f_s(s) = b$ ولی $f_s(t) = c$. بنابراین f_I یک نگاشت یک‌به‌یک است.

برای اینکه نشان دهیم خانوادهٔ $(f_i)_{i \in I}$ جدا کنندهٔ نقاط و مجموعه‌های بسته است. فرض کنید F یک زیرمجموعهٔ $T-$ بستهٔ E و x نقطه‌ای خارج F باشد. قرار دهید $U = C_E(F)$. در اینصورت $f_U(x) = a$، اما برای هر نقطه t در F داریم $f_U(t) = b$. بنابراین $f(F) = \{b\}$ و $Cl_{T_U}(f(F))$ کوچکترین زیرمجموعهٔ $T_\circ-$ بسته شامل $f(F)$ برابر $\{b, c\}$ است، که شامل a نیست. پس f_I، تابعی $(T, T_I)-$ باز است. از اینرو f_I، تابعی $(T, T_I)-$ همانریختی است.

جواب ۸۷ فرض کنید $T' = \{U \in \mathbf{P}(E) : g_i^{-1}(U) \in T_i$ ،I برای هر i در $\}$. در اینصورت T' یک توپولوژی روی E است و هر نگاشت g_i، تابعی $(T_i, T')-$ پیوسته است. بنابراین $T' \subseteq T$، توپولوژی هم القایی.

از طرف دیگر اگر V یک مجموعهٔ $T-$ باز باشد، چون هر نگاشت g_i، تابعی $(T_i, T)-$ پیوسته است پس $g_i^{-1}(V)$، مجموعهٔ T_i- باز است. لذا $V \in T'$ و در نتیجه $T \subseteq T'$.

جواب ۸۸ (۱) فرض کنید f، تابعی (T,T')– پیوسته باشد.
چون هر g_i، نگاشتی (T_i,T)– پیوسته است، این ایجاب می‌کند که هر تابع $f\circ g_i$، یک نگاشت (T_i,T')– پیوسته است.

(۲) برعکس، فرض کنید هر تابع $f\circ g_i$ یک نگاشت (T_i,T')– پیوسته باشد. چنانچه U' یک مجموعهٔ T'– باز باشد. برای هر اندیس i در I داریم $(f\circ g_i)^{-1}(U')\in T_i$، یعنی $g_i^{-1}(f^{-1}(U'))\in T_i$. پس $f^{-1}(U')\in T$. لذا f، تابعی (T,T')– پیوسته است.

جواب ۸۹ (۱) فرض کنید f^* یک تابع $(\frac{T}{R_f},(T')_B)$– همانریختی باشد. چنانچه U یک زیرمجموعهٔ T– باز از E باشد بطوریکه R_f– اشباع شده باشد مثلاً بصورت $U=\bigcup\limits_{x\in X} R_f(x)$ باشد که X یک مجموعه است. در اینصورت $U=\eta^{-1}(\eta(U))$ و لذا $\eta(U)$، مجموعه‌ای $\frac{T}{R_f}$– باز است. چون f^* یک تابع $(\frac{T}{R_f},(T')_B)$– همانریختی است. پس تابعی $(\frac{T}{R_f},(T')_B)$– باز است. بنابراین $(f^*)(\eta(U))$، مجموعه‌ای $(T')_B$– باز است. ولی $f=f^*\circ\eta$، بنابراین خواهیم داشت: $f(U)=(f^*)(\eta(U))\in(T')_B$.

(۲) برعکس، فرض کنید که برای هر زیرمجموعهٔ T– باز U از E که R_f– اشباع شده است داریم $f(U)\in(T')_B$. چنانچه W یک مجموعهٔ $\frac{T}{R_f}$– باز باشد. در اینصورت $\eta^{-1}(W)$، مجموعه‌ای T– باز و R_f– اشباع شده است. از اینرو داریم $f(\eta^{-1}(W))\in(T')_B$. بنابراین این ایجاب می‌کند که $(f^*)(\eta(\eta^{-1}(W)))\in(T')_B$، یعنی $(f^*)(W)\in(T')_B$.

بنابراین f^*، تابعی $(\frac{T}{R_f},(T')_B)$– باز است و لذا $(\frac{T}{R_f},(T')_B)$– همانریختی است.

جواب ۹۰ (۱) فرض کنید R باز باشد. چنانچه U یک مجموعهٔ $T-$ باز باشد. در اینصورت با توجه به مفرضات $\eta(U)$، مجموعه‌ای $\frac{T}{R}-$ باز است. از اینرو $\eta^{-1}(\eta(U))$، مجموعه‌ای $T-$ باز است. ولی $\eta^{-1}(\eta(U))$ اشباع شده از U است.

(۲) برعکس، فرض کنید که اشباع شده هر مجموعهٔ $T-$ باز مجموعه‌ای $T-$ باز باشد.

چنانچه U یک زیرمجموعه $T-$ باز E باشد. در اینصورت طبق فرض $\eta^{-1}(\eta(U))$، مجموعه‌ای $T-$ باز است. بنابراین $\eta(U)$، نیز $\frac{T}{R}-$ باز است. از اینرو η، تابعی $(T, \frac{T}{R})-$ باز است یعنی R یک رابطهٔ باز است.

جواب ۹۱ (۱) $\Longleftarrow$ (۲). فرض کنید R یک رابطهٔ باز است.

چنانچه A یک زیرمجموعهٔ $R-$ اشباع شده از E باشد آنگاه $A = \eta^{-1}(\eta(A))$. فرض کنید $U = Int_T(A)$. چون U مجموعه‌ای $T-$ باز و R باز است، لذا $\eta(U)$ مجموعه‌ای $\frac{T}{R}-$ باز و از اینرو $\eta^{-1}(\eta(U))$، یک مجموعه $T-$ باز است چون $U \subseteq A$، داریم $A = \eta^{-1}(\eta(A)) \supseteq \eta^{-1}(\eta(U))$. بنابراین $U \supseteq \eta^{-1}(\eta(U))$، بزرگترین زیرمجموعهٔ $T-$ باز مشمول در A است. از طرفی همواره داریم $U \subseteq \eta^{-1}(\eta(U))$. بنابراین $U = \eta^{-1}(\eta(U))$، یعنی U یک مجموعه $R-$ اشباع شده است.

(۲) $\Longleftarrow$ (۳). فرض کنید که درون هر مجموعهٔ $R-$ اشباع شده مجموعه $R-$ اشباع شده باشد. چنانچه B یک زیرمجموعهٔ $R-$ اشباع شدهٔ E باشد، یعنی $B = \eta^{-1}(\eta(B))$. چون B اجتماع $R-$ کلاسهایی از تمام عناصر B است پس $C_E(B)$ اجتماع $R-$ کلاسهای تمام عناصر E است که در B نباشد. بنابراین $C_E(B)$، مجموعه‌ای $R-$ اشباع شده است. از اینرو، با توجه به مفروضات، نتیجه می‌گیریم که $Int\ (C_E(B)) = C_E(Cl\ (B))$، نیز $R-$ اشباع شده است. بنابراین $Cl\ (B)$، مجموعه‌ای $R-$ اشباع شده است.

(۳) $\Longleftarrow$ (۱). فرض کنید بستار هر مجموعهٔ $R-$ اشباع شده، یک مجموعه $R-$ اشباع شده باشد. چنانچه U یک زیرمجموعهٔ $T-$ باز E باشد. قرار دهید $U' = \eta^{-1}(\eta(U))$، که $R-$ اشباع شده است. در اینصورت $C_E(U')$، مجموعه‌ای $R-$ اشباع شده است و از اینرو با توجه به مفروضات،

$Cl\ (C_E(U')) = C_E(Int\ (U'))$، نیز $R-$ اشباع شده است. این ایجاب می‌کند که $Int\ (U')$، یک مجموعه $R-$ اشباع شده است. چون $U \subseteq U'$ و U مجموعه‌ای $T-$ باز است خواهیم داشت $U \subseteq Int\ (U')$. از اینرو $U' = \eta^{-1}(\eta(U)) \subseteq \eta^{-1}(\eta(Int\ U'))$. بنابراین $Int\ (U') = U'$ و از اینرو U' باز است. پس $\eta^{-1}(U)$ یک مجموعه $\frac{T}{R}-$ باز است. بنابراین R یک رابطهٔ باز است.

جواب ۹۲ (۱) فرض کنید R مجموعه‌ای بسته باشد.
چنانچه C یک $R-$ کلاس و U یک مجموعهٔ $T-$ باز باشد به طوریکه $C \subseteq U$. چون $C_E(U)$ مجموعه‌ای $T-$ بسته است، لذا $\eta(C_E(U))$، یک مجموعه $\frac{T}{R}-$ بسته است. از اینرو $C_{\frac{E}{R}}(\eta(C_E(U)))$، نیز $\frac{T}{R}-$ باز است. بنابراین آن ایجاب می‌کند که $W = \eta^{-1}(C_{\frac{E}{R}}(\eta(C_E(U))))$، یک مجموعه $T-$ باز و $R-$ اشباع شده است. پس خواهیم داشت $C \subseteq W$ و $W \subseteq U$.

(۲) برعکس، فرض کنید که برای هر $R-$ کلاس C و هر مجموعهٔ $T-$ باز U شامل C یک مجموعهٔ $T-$ باز اشباع شدهٔ W وجود دارد به قسمی که $C \subseteq W \subseteq U$.

چنانچه F یک زیرمجموعهٔ $T-$ بسته از E باشد. قرار دهید $G = \eta^{-1}(\eta(F))$. باید نشان دهیم که G مجموعه‌ای $T-$ بسته است، که از این نتیجه گرفته می‌شود $\eta(F)$ نیز $\frac{T}{R}-$ بسته است. فرض کنید x نقطه‌ای از $C_E(G)$ باشد. چنانچه $C = R(x)$. در اینصورت $C \cap G = \emptyset$ (چون G یک اجتماع از $R-$ کلاسهایی است که شامل x نیستند.) بنابراین $C \cap F = \emptyset$. پس $C_E(F)$ یک مجموعهٔ $T-$ باز شامل C است. با توجه به مفروضات یک مجموعهٔ $T-$ باز اشباع شده W وجود دارد به طوریکه $C \subseteq W \subseteq C_E(F)$. در اینصورت $W \cap G = \eta^{-1}(\eta(W)) \cap \eta^{-1}(\eta(F)) = \emptyset$. بنابراین $W \subseteq C_E(G)$. از اینرو $C_E(G)$ یک $T-$ همسایگی از هر یک از نقاطش بمانند x است و لذا $T-$ باز است. پس G مجموعه‌ای $T-$ بسته است.

جواب ۹۳ فرض کنید C یک $R-$ کلاس $(\circ, \circ)$ باشد، به طوریکه شامل تنها نقطه $(\circ, \circ)$ باشد. چنانچه $U = \{(x,y) \in R^{۲} : x^{۲} + y^{۲} < ۱ \text{ و } y \geq \circ\}$ ، آنگاه U زیرمجموعهٔ بازی از E است و $C \subseteq U$. هر مجموعهٔ باز W که مشمول در U است

می‌بایست شامل نقاطی (x,y) با $y \neq 0$ باشد. اما $R-$ کلاس چنین نقاطی مشمول در U نیست. بنابراین R مجموعه‌ای بسته نیست.

جواب ۹۴ فرض کنید $\mathbf{K}$ مجموعه $R-$ کلاسهای C باشد به طوریکه $C \subseteq U$. در اینصورت بوضوح $\bigcup \mathbf{K} \subseteq \bigcup_{C\in\mathbf{K}} U_C$.

برعکس، فرض کنید $x \in \bigcup_{C\in\mathbf{K}} U_C$، پس C_1 وجود دارد بطوریکه $x \in U_{C_1}$. از طرفی U_{C_1} یک اجتماع از $R-$ کلاسها می‌باشد. بنابراین x متعلق به یکی از این کلاسهاست که البته در $\mathbf{K}$ می‌باشد، زیرا $U_{C_1} \subseteq U$. پس $x \in \bigcup \mathbf{K}$. بنابراین $\bigcup_{C\in\mathbf{K}} U_C \subseteq \bigcup \mathbf{K}$.

جواب ۹۵ چون X اشباع شده است، خواهیم داشت $X = \eta^{-1}(\eta(X))$. فرض کنید $\bar{A} \in (\dfrac{T}{R})_{\eta(X)}$. در اینصورت یک مجموعهٔ $\bar{B}$ در $\dfrac{T}{R}$ وجود دارد به قسمی که $\bar{A} = \eta(X) \cap \bar{B}$. در اینصورت $\eta^{-1}(\bar{A}) = \eta^{-1}(\eta(X)) \cap \eta^{-1}(\bar{B}) = X \cap \eta^{-1}(\bar{B})$ و $X \cap \eta^{-1}(\bar{B}) \in T_X$، زیرا $\eta^{-1}(\bar{B}) \in T$. بنابراین $\bar{A} \in \dfrac{(T_X)}{(R|(X\times X))}$.

برعکس، فرض کنید $\bar{A}$ یک مجموعه در $\dfrac{(T_X)}{(R|(X\times X))}$ باشد. در اینصورت $\eta^{-1}(\bar{A}) \in T_X$ و لذا یک زیرمجموعهٔ $T-$ باز U موجود است به طوریکه $\eta^{-1}(\bar{A}) = U \cap X$. چنانچه $\mathbf{K}$ مجموعهٔ $R-$ کلاسهای C باشد به طوریکه $C \subseteq U$. در اینصورت $B = \bigcup_{C\in\mathbf{K}} C = \bigcup_{C\in\mathbf{K}} U_C$ و از اینرو $T-$ باز است. البته $B \supseteq \eta^{-1}(\bar{A})$، چون برای هر عضو $\bar{a}$ از $\bar{A}$ داریم $\eta^{-1}(\bar{a}) \subseteq U$. از اینرو $X \cap B \supseteq \eta^{-1}(\bar{A}) = X \cap U \supseteq X \cap B$. بنابراین $\eta^{-1}(\bar{A}) = X \cap B$. چون $B = \eta^{-1}(\eta(B))$، مجموعه‌ای $T-$ باز است. بنابراین $\eta(B)$، نیز $\dfrac{T}{R}-$ باز است. امّا $\bar{A} = \eta(\eta^{-1}(\bar{A})) = \eta(X \cap B) = \eta(X) \cap \eta(B)$. بنابراین $\bar{A} \in (\dfrac{T}{R})_{\eta(X)}$.

فصل ۱۱

جوابهای فصل ۴

جواب ۹۶ (۱) فرض کنید $F = \{X \in \mathbf{P}(E) : X \supseteq A\}$.
اگر $X \in F$ و $Y \supseteq X$، چون $X \supseteq A$ و $Y \supseteq X$، داریم $Y \supseteq A$، یعنی $Y \in F$.
اگر $X_1, X_2 \in F$ آنگاه $X_1 \supseteq A$ و $X_2 \supseteq A$. بنابراین $X_1 \cap X_2 \supseteq A$، یعنی $X_1 \cap X_2 \in F$. اگر $X \in F$ آنگاه $X \supseteq A \neq \emptyset$، بنابراین $X \neq \emptyset$. پس F یک فیلتر روی E است.

(۲) $\{A\} \subseteq F$ و اگر $X \in F$ آنگاه $X \supseteq A$. بنابراین $\{A\}$ یک پایه برای فیلتر F است.

جواب ۹۷ بررسی کردن آن ساده است.

جواب ۹۸ بررسی کردن آن ساده است.

جواب ۹۹ (۱) فرض کنید $X \in F \cap G$. در اینصورت $X = X \cup X$، $X \in F$ و $X \in G$.

(۲) برعکس، فرض کنید $X = P \cup Q$ که $P \in F$ و $Q \in G$، در اینصورت $X \supseteq P$، بنابراین $X \in F$ و $X \supseteq Q$، پس $X \in G$.

جواب ۱۰۰ (۱) فرض کنید B یک پایه برای یک فیلتر F روی E باشد.
چنانچه $(X_i)_{1\leq i\leq n}$ یک خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌های در B باشد. چون $B \subseteq F$ نتیجه گرفته می‌شود که $X_1 \cap \cdots \cap X_n \in F$ و لذا $X_1 \cap \cdots \cap X_n$ شامل یک مجموعه در B است. چون F غیرتهی است و هر مجموعه در F شامل یک مجموعه در B است، نتیجه گرفته می‌شود که B غیرتهی است. چون $\emptyset \notin F$ و $B \subseteq F$، داریم $\emptyset \notin B$.

(۲) برعکس، فرض کنید شرایط تمرین برقرار باشند.
چنانچه $F = \{X \in \mathbf{P}(E)$:باشد B شامل یک مجموعه در خانوادهٔ $X\}$. در اینصورت F یک فیلتر روی E با پایهٔ B است.

جواب ۱۰۱ فرض کنید Φ فیلتر تولید شده توسط $F \cup G$ باشد.
چنانچه S مجموعهٔ مقاطع همهٔ خانواده‌های متناهی از مجموعه‌های در $F \cup G$ باشد. پس $X \in \Phi$ ایجاب می‌کند که X شامل یک مجموعه در S است. هر مجموعه در S بفرم $P \cap Q$ است جائیکه $P \in F$ و $Q \in G$. اگر $X \supseteq P \cap Q$ جائیکه $P \in F$ و $Q \in G$، در اینصورت داریم $X = X \cup X = X \cup (P \cap Q) = (X \cup P) \cap (X \cup Q)$. چون $X \cup P \supseteq P$ و $X \cup Q \supseteq Q$ خواهیم داشت $X \cup P \in F$ و $X \cup Q \in G$. لذا $X \in S$. بنابراین $\Phi = S$، که همان چیزی است که می‌خواستیم.

جواب ۱۰۲ فرض کنید $\mathbf{F}$ یک مجموعه از فیلترهای روی E باشد که بوسیلهٔ رابطهٔ شمول کاملاً مرتب شده است. چنانچه $\mathbf{A}$ اجتماع $\mathbf{F}$ باشد. بعلاوه $(X_i)_{i\in I}$ یک خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌های در $\mathbf{A}$ باشد. برای هر اندیس i در I یک فیلتر F_i در $\mathbf{F}$ وجود دارد بقسمی که $X_i \in F_i$. چون $\mathbf{F}$ مجموعه‌ای $(\subseteq)-$ کاملاً مرتب است، یک اندیس j در I وجود دارد بقسمی که $X_i \in F_j$ برای هر i در I. از اینرو $\bigcap_{i\in I} X_i \neq \emptyset$.
پس $\mathbf{A}$ یک فیلتر F روی E تولید می‌کند که به وضوح $(\subseteq)-$ زبرینه $\mathbf{F}$ می‌باشد.

جواب ۱۰۳ فرض کنید $A \notin F$ و $B \notin F$.
چنانچه $F' = \{X \in \mathbf{P}(E) : A \cup X \in F\}$. در اینصورت F' یک فیلتر روی E است (توجه کنید که $\emptyset \in F'$ زیرا $A \notin F$). بوضوح $F \subseteq F'$ و $B \in F'$، اگرچه $B \notin F$. بنابراین $F \subset F'$، که متناقض با این حقیقت است که F یک فرافیلتر است.

جواب ۱۰۴ فرض کنید F فیلتر تولید شده بوسیلهٔ $\mathbf{A}$ و F' یک فرافیلتر باشد که شامل F است، البته $\mathbf{A} \subseteq F'$. چنانچه X یک مجموعه در F' باشد. در اینصورت $C_E(X) \notin \mathbf{A}$، زیرا اگر $C_E(X) \in \mathbf{A}$، در اینصورت $C_E(X) \in F'$ و $X \cap C_E(X) = \emptyset \in F'$. این تناقض است، چون F' یک فیلتر است. از اینرو $X \in \mathbf{A}$ و بنابراین $F' \subseteq A$. پس $\mathbf{A} = F'$ یک فرافیلتر است.

جواب ۱۰۵ فرض کنید F یک فرافیلتر باشد.
چنانچه $\cap F$ شامل دو نقطهٔ متمایز a و b باشد. بعلاوه F' فیلتر تولید شده توسط $F \cup \{a\}$ باشد، بوضوح $F \subseteq F'$ و $\{a\} \in F'$. اما $\{a\}$ متعلق به F نیست چون شامل b نیست. پس $F \subset F'$، که تناقض است زیرا F یک فرافیلتر می‌باشد. بنابراین $\cap F$ نمی‌تواند بیش از یک نقطه داشته باشد.
اگر $\cap F = \{a\}$ آنگاه $F \subseteq G$، فیلتر همهٔ مجموعه‌هایی که شامل $\{a\}$ است. از اینرو $F = G$، زیرا F یک فرافیلتر است.

جواب ۱۰۶ (۱) فرض کنید F_A یک فیلتر روی A باشد. در اینصورت همهٔ مجموعه‌های در F_A غیرتهی هستند.

(۲) برعکس، فرض کنید که همهٔ مجموعه‌های در F_A غیرتهی باشند.
اگر $X \cap A \in F_A$ و Y' یک زیرمجموعه از A باشد بقسمی که $Y' \supseteq X \cap A$ داریم

$$Y' = Y' \cup (X \cap A) = (Y' \cup X) \cap (Y' \cup A) = (Y' \cup X) \cap A \in F_A,$$

زیرا $Y' \cup X \in F$ (چون $X \in F$ و $Y' \cup X \supseteq X$)
اگر $(X_i \cap A)_{i \in I}$ یک خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌های در F_A باشد در اینصورت $\cap(X_i \cap A) = (\cap X_i) \cap A \in F_A$، زیرا $\cap X_i \in F$.
با توجه به مفروضات، تمام مجموعه‌های در F_A غیرتهی هستند. بنابراین F_A یک فیلتر روی A است.

(۳) اگر $A \in F$، آنگاه برای هر X در F، داریم $X \cap A \neq \emptyset$. بنابراین F_A یک فیلتر روی A است.

(۴) برعکس، فرض کنید F یک فرافیلتر و برای هر X در F، داشته باشیم $X \cap A \neq \emptyset$. اگر $A \notin F$ آنگاه $F \cup \{A\}$ یک فیلتر تولید می‌کند که بطور سره شامل F است. این غیرممکن است، چون F یک فرافیلتر می‌باشد. بنابراین $A \in F$.

(۵) فرض کنید F یک فرافیلتر و F_A یک فیلتر روی A باشد. اگر F_A یک فرافیلتر روی A نباشد آنگاه یک فیلتر F' روی A وجود دارد که بطور سره شامل F_A است. فرض کنید Y' یک زیرمجموعه از A باشد بقسمی که متعلق به F' است اما در F_A نیست. در اینصورت $F \cup \{Y'\}$ یک فیلتر روی E است که بطور سره شامل F می‌باشد. این غیرممکن است. بنابراین F_A یک فرافیلتر است.

جواب ۱۰۷ فرض کنید X یک مجموعه باشد بطوریکه متعلق به F نیست.
در اینصورت برای هر مجموعهٔ M در F نمی‌توانیم داشته باشیم $M \subseteq X$ و از اینرو باید $M \cap C_E(X) \neq \emptyset$. بنابراین $F \cup \{C_E(X)\}$ یک فیلتر روی E تولید می‌کند بطوریکه مشمول در فرافیلتری بمانند F_X است. چون $C_E(X) \in F_X$، باید داشته باشیم $X \notin F_X$. بنابراین X متعلق به اشتراک تمام فرافیلترهای شامل F نیست. از اینرو این اشتراک خود فیلتر F می‌باشد.

جواب ۱۰۸ (۱) چون $B \neq \emptyset$، داریم $f(B) \neq \emptyset$. از طرفی $\emptyset \notin B$، لذا $\emptyset \notin f(B)$.

فرض کنید X'_1 و X'_2 مجموعه‌هایی در $f(B)$ باشند. در اینصورت مجموعه‌های X_1 و X_2 در B وجود دارند بقسمی که $X'_1 = f(X_1)$ و $X'_2 = f(X_2)$. از طرفی $X_2 \in B$، X_1 لذا یک مجموعهٔ W در B وجود دارد بقسمی که $W \subseteq X_1 \cap X_2$. پس باید داشته باشیم

$$f(W) \subseteq f(X_1 \cap X_2) \subseteq f(X_1) \cap f(X_2) = X'_1 \cap X'_2.$$

پس $f(B)$ یک پایهٔ فیلتر روی E' است.

(۲) فرض کنید B یک پایه برای فرافیلتر F روی E باشد.
چنانچه F' فیلتر تولید شده بوسیلهٔ $f(B)$ روی E' باشد. بعلاوه X' یک زیرمجموعهٔ از E' باشد. اگر $f^{-1}(X') \in F$ آنگاه $f^{-1}(X')$ شامل یک مجموعهٔ W در B است. پس $f(W) \subseteq f(f^{-1}(X')) \subseteq X'$ و از اینرو $X' \in F'$. اگر $f^{-1}(X') \notin F$ آنگاه، چون F یک فرافیلتر روی E است، $C_E(f^{-1}(X')) \in F$ و از اینرو $C_E(f^{-1}(X')) = f^{-1}(C_{E'}(X'))$ شامل یک مجموعهٔ W در B است. در اینصورت $f(W) \subseteq C'_{E'}(X')$ و لذا $C'_{E'}(X') \in F'$. بنابراین F' یک فرافیلتر روی E' می‌باشد.

جواب ۱۰۹ (۱) فرض کنید $f^{-1}(B')$ یک پایه برای یک فیلتر روی E باشد. در اینصورت برای هر مجموعهٔ X' در B' داریم $f^{-1}(X') \neq \emptyset$ و از اینرو $X' \cap f(E) \neq \emptyset$.

(۲) برعکس، فرض کنید که برای هر X' در B'، داشته باشیم $X' \cap f(E) \neq \emptyset$. پس $\emptyset \notin f^{-1}(B')$ و $f^{-1}(B') \neq \emptyset$ (چون $B' \neq \emptyset$). چنانچه X_1 و X_2 مجموعه‌هایی در $f^{-1}(B')$ باشند. در اینصورت مجموعه‌های X'_1 و X'_2 در B' وجود دارند بطوریکه $X_1 = f^{-1}(X'_1)$ و $X_2 = f^{-1}(X'_2)$. یک مجموعهٔ W' در B' وجود دارد بقسمی که $W' \subseteq X'_1 \cap X'_2$. در اینصورت

$f^{-1}(B')$ پس $.f^{-1}(W') \subseteq f^{-1}(X'_1 \cap X'_2) = f^{-1}(X'_1) \cap f^{-1}(X'_2) = X_1 \cap X_2$
یک پایهٔ فیلتر روی E است.

جواب ۱۱۰ (۱) فرض کنید T قویتر از T' باشد. چنانچه F فیلتری باشد که $T-$ همگرا به a است. در اینصورت $F \supseteq V_T(a)$، که فیلتر $T-$ همسایگی از a است. چون T قویتر از T' است، هر $T'-$ همسایگی از a یک $T-$ همسایگی است. پس $F \supseteq V_{T'}(a)$، که فیلتر $T'-$ همسایگی از a است. و از اینرو F، فیلتری $T'-$ همگرا به a است.

(۲) برعکس، فرض کنید که هر فیلتر روی E که $T-$ همگرا به a است، $T'-$ همگرا به a نیز باشد. چنانچه U' یک مجموعهٔ $T'-$ باز و p نقطه‌ای از U' باشد. در اینصورت $U' \in V_{T'}(p)$. چون $V_T(p)$ فیلتری $T-$ همگرا به p است، از مفروضات نتیجه گرفته می‌شود که $T'-$ همگرا به p است. بنابراین $V_T(p) \supseteq V_{T'}(p)$ و در حالت خاص $U' \in V_T(p)$. پس U' یک $T-$ همسایگی از هر یک از نقاطش است و لذا $T-$ باز می‌باشد. بنابراین $T' \subseteq T$، یعنی T قویتر از T' است.

جواب ۱۱۱ فرض کنید F یک فیلتر روی E باشد که همگرا به p است.
چنانچه V' یک $T'-$ همسایگی از $f(p)$ باشد. چون f، تابعی $(T,T')-$ پیوسته در p است، یک $T-$ همسایگی V از p وجود دارد بقسمی که $f(V) \subseteq V'$. چون F همگرا به p است، داریم $V \in F$ و بنابراین $f(V) \in f(F)$. پس V' متعلق به پایهٔ فیلتر روی $f(F)$ است. از اینرو $f(F)$ همگرا به $f(p)$ است.

جواب ۱۱۲ فرض کنید F یک فیلتر با پایه B باشد است. در اینصورت طبق تعریف چسبندگی یک پایه فیلتر،

$$Adh(B) = Adh(F) = \bigcap_{X \in F} Cl(X) \subseteq \bigcap_{X \in B} Cl(X).$$

فرض کنید $X_\circ$ مجموعه‌ای در F باشد. در اینصورت یک مجموعهٔ $B_\circ$ در B وجود دارد بطوریکه $X_\circ \supseteq B_\circ$ و لذا $\bigcap_{X\in B} Cl(X) \subseteq Cl(B_\circ) \subseteq Cl(X_\circ)$. پس داریم $\bigcap_{X\in B} Cl(X) \supseteq \bigcap_{X\in F} Cl(X)$. از اینرو $\bigcap_{X\in B} Cl(X) = \bigcap_{X\in F} Cl(X)$.

جواب ۱۱۳ (۱) فرض کنید x یک نقطهٔ چسبیده A باشد. در اینصورت هر $T-$ همسایگی V از x، مجموعه A را قطع می‌کند. این نتیجه می‌دهد که $V_T(x) \cup \{A\}$ یک فیلتر تولید می‌کند به قسمی که شامل A است و $T-$ همگرا به x است.

(۲) برعکس، فرض کنید یک فیلتر F وجود دارد بقسمی که $A \in F$ و F فیلتری $T-$ همگرا به x است. چنانچه V یک $T-$ همسایگی از x باشد. در اینصورت $V \in F$. از طرفی $A \in F$ لذا $A \cap V \neq \emptyset$. بنابراین x نقطه چسبیده A است.

جواب ۱۱۴ (۱) فرض کنید x یک نقطهٔ حدی B باشد. بنابراین فیلتر F با پایهٔ B همگرا به x است. چنانچه V یک مجموعه در N باشد. در اینصورت $V \in F$. از اینرو V شامل یک مجموعه در B است.

برعکس، فرض کنید هر مجموعه در N شامل یک مجموعه در B باشد. چنانچه V یک $T-$ همسایگی از x باشد. در اینصورت V شامل یک مجموعه در N است و از اینرو شامل یک مجموعه در B است. پس V متعلق به فیلتر F با پایهٔ B است. از اینرو F (و لذا B) همگرا به x می‌باشد.

(۲) فرض کنید x یک نقطهٔ چسبیدگی از B باشد،
در اینصورت x نقطه چسبیده هر مجموعه در فیلتر تولید شده بوسیلهٔ B است. پس هر $T-$ همسایگی از x هر مجموعه در آن فیلتر را قطع می‌کند. چون هر مجموعه در N یک $T-$ همسایگی از x است و هر مجموعه در B متعلق به فیلتر است، نتیجه می‌گیریم که هر مجموعه در N هر مجموعه در B را قطع می‌کند.

برعکس، فرض کنید هر مجموعه در N هر مجموعه در B را قطع کند. چنانچه V یک $T-$ همسایگی از x و X هر مجموعه در فیلتر با پایهٔ B باشد. در اینصورت V شامل یک مجموعه W در N است و X شامل یک مجموعه Y در B می‌باشد. چون $W \cap Y \neq \emptyset$ نتیجه گرفته می‌شود که $V \cap X \neq \emptyset$. بنابراین x نقطه چسبیدهٔ B است.

جواب ۱۱۵ (۱) فرض کنید x نقطه چسبیدهٔ F باشد. در اینصورت هر مجموعه در $V_T(x)$ هر مجموعه در F را قطع می‌کند. از اینرو $F \cup V_T(x)$ یک فیلتر F' روی E را تولید می‌کند. بوضوح $F' \supseteq F$ و F' همگرا به x است.

(۲) برعکس، فرض کنید $F \subseteq F'$ جائیکه F' یک فیلتر است بطوریکه همگرا به x باشد. در اینصورت هر $T-$ همسایگی از x متعلق به F' است. چون هر مجموعه در F متعلق به F' نیز می‌باشد نتیجه گرفته می‌شود که هر مجموعه در F هر $T-$ همسایگی از x را قطع می‌کند. بنابراین x نقطه چسبیدهٔ F می‌باشد.

جواب ۱۱۶ اگر x یک نقطهٔ حدی از فیلتر F باشد در اینصورت $V_T(x) \subseteq F$ و لذا هر $T-$ همسایگی از x هر مجموعه در F را قطع می‌کند. بنابراین x نقطه چسبیدهٔ F می‌باشد.

جواب ۱۱۷ اگر x نقطه چسبیدهٔ یک فرافیلتر F باشد، یک فیلتر F' وجود دارد بقسمی که $F' \supseteq F$ و F' همگرا به x است. اما چون F یک فرافیلتر است، $F' \supseteq F$ ایجاب می‌کند که $F' = F$. پس F همگرا به x می‌باشد.

جواب ۱۱۸ (۱) فرض کنید f همگرا به x نسبت به F باشد. چنانچه V_i یک T_i- همسایگی از $\pi_i(x)$ باشد. در اینصورت V_i شامل یک مجموعهٔ T_i- باز U_i شامل $\pi_i(x)$ است. فرض کنید $V = \prod_{j\in I} Y_j$ جائیکه برای $j \neq i$، $Y_j = E_j$ و $Y_i = U_i$. در اینصورت V یک زیرمجموعه $T-$ باز از E و شامل x است. از اینرو یک $T-$ همسایگی از x است. لذا یک مجموعهٔ X در F وجود دارد بقسمی که $V \supseteq f(X)$. بنابراین $U_i = (\pi_i)(V) \supseteq (\pi_i)(f(X)) = (\pi_i \circ f)(X)$ ، پس $\pi_i \circ f$ همگرا به $\pi_i(x)$ نسبت به F است.

(۲) برعکس، فرض کنید هر $\pi_i \circ f$ همگرا به $\pi_i(x)$ نسبت به فیلتر F است. چنانچه V یک $T-$ همسایگی از x باشد. در اینصورت یک خانوادهٔ $(U_i)_{i\in I}$ وجود دارد بطوریکه هر U_i یک مجموعهٔ T_i- باز است و برای هر i که در یک زیرمجموعهٔ متناهی مشخص J از I نیست $U_i = E_i$ و $x \in \prod_{i\in I} U_i \subseteq V$. برای هر j در J، U_j یک T_j- همسایگی از $\pi_j(x)$ است. در اینصورت یک مجموعهٔ X_j در F وجود دارد بقسمی که $(\pi_j \circ f)(X_j) \subseteq U_j$. فرض کنید $X = \bigcap_{j\in J} X_j$، در اینصورت $X \in F$ و $f(X) \subseteq V$. پس f همگرا به x نسبت به F می‌باشد.

جواب ۱۱۹ (۱) فرض کنید x' یک نقطهٔ حدی f نسبت به F باشد. چنانچه V' یک $T'-$ همسایگی از x' باشد. در اینصورت یک مجموعهٔ X در F وجود دارد بقسمی که $f(X) \subseteq V'$. در اینصورت $f^{-1}(V') \supseteq f^{-1}(f(X)) \supseteq X$ و لذا $f^{-1}(V') \in F$.

برعکس، فرض کنید که برای هر همسایگی V' از x' داشته باشیم $f^{-1}(V') \in F$. در اینصورت برای هر همسایگی V' از x' داریم $V' \supseteq f(f^{-1}(V'))$. بنابراین x' یک نقطهٔ حدی f نسبت به F است.

(۲) فرض کنید x' یک نقطه چسبیدهٔ f نسبت به F باشد. چنانچه V' یک $T'-$ همسایگی از x' و X یک مجموعه در F باشد. در اینصورت $V' \cap f(X) \neq \emptyset$ (چون x نقطه چسبیدهٔ $f(F)$ می‌باشد). برعکس آن بدیهی است.

جواب ۱۲۰ (۱) فرض کنید f، تابعی $(T,T')-$ پیوسته در x باشد.
چنانچه V' یک $T'-$ همسایگی از $f(x)$ باشد. در اینصورت یک $T-$ همسایگی V از x وجود دارد بطوریکه $f(V') \supseteq V'$. پس $f(x)$ یک نقطهٔ $(T,T')-$ حدی از f در x است.

(۲) برعکس، فرض کنید $f(x)$ یک نقطه $(T,T')-$ حدی f در x باشد.
چنانچه V' یک $T'-$ همسایگی از $f(x)$ باشد. در اینصورت یک $T-$ همسایگی V از x وجود دارد بقسمی که $f(V) \subseteq V'$. پس f، تابعی $(T,T')-$ پیوسته در x است.

جواب ۱۲۱ فرض کنید R رابطهٔ داده شده بوسیلهٔ $(X,Y) \in R$ اگر و تنها اگر $Y \supseteq X$، روی $\mathbf{A}$ باشد. در اینصورت $(\mathbf{A}, R)$ یک مجموعهٔ جهت‌دار است.

فرض کنید $D' = D \times \mathbf{A}$ و R' یک رابطهٔ ترتیبی روی D' داده شده بوسیلهٔ $((d,A),(d_۱,A_۱)) \in R'$ اگر و تنها اگر $d \le d_۱$ و $(A, A_۱) \in R$ باشد.

قرار دهید $\bar{D} = \{(d,A) \in D' : \nu(d) \in A\}$. چنانچه $\bar{R}$ تحدید رابطهٔ R' روی $\bar{D} \times \bar{D}$ باشد. ادعا می‌کنیم که $(\bar{D}, \bar{R})$ یک مجموعهٔ جهت‌دار است. برای مشاهدهٔ این مطلب، فرض کنید $(d_۱, A_۱)$ و $(d_۲, A_۲)$ عناصری از $\bar{D}$ باشند. عنصر A از $\mathbf{A}$ چنان وجود دارد که $A \subseteq A_۱ \cap A_۲$، جاییکه $(A_۱, A) \in R$ و $(A_۲, A) \in R$. چون ν بطور مکرر در A است یک عنصر d از D وجود دارد بقسمی که $d \ge d_۱$ و $d \ge d_۲$ و $\nu(d) \in A$. پس $(d,A) \in \bar{D}$ و از $(d_۱, A_۱)$ و $(d_۲, A_۲)$، $\bar{R}-$ بزرگتر است.

فرض کنید φ نگاشتی از $\bar{D}$ به D تعریف شده بوسیله $\varphi(d,A) = d$ برای هر $(d,A) \in \bar{D}$ باشد. چنانچه $\nu' = \nu \circ \varphi$، ما باید نشان دهیم که ν' یک زیر تور از ν می‌باشد. برای این منظور، فرض کنید d یک عضو از D باشد. چنانچه A عضوی از $\mathbf{A}$ باشد. چون ν بطور مکرر در A است یک عضو $d_۱$ از D وجود دارد بطوریکه $d_۱ \ge d$ و $\nu(d_۱) \in A$.

اکنون فرض کنید $(d_۲, A_۲)$ عضوی از $\bar{D}$ باشد که $\bar{R}-$ بزرگتر از $(d_۱, A)$ است.
در اینصورت $\varphi(d_۲, A_۲) = d_۲ \ge d_۱ \ge d$. پس ν' یک زیر تور از ν می‌باشد.

بالاخره نشان می‌دهیم که ν' بطور تصادفی در هر مجموعه از $\mathbf{A}$ است.
پس فرض کنید A یک عضو از ν باشد. با استفاده از فرض یک عضو d از D وجود دارد بطوریکه $\nu(d) \in A$. چنانچه $(d_۱, A_۱)$ عضوی از $\bar{D}$ باشد که $\bar{R}-$ بزرگتر از (d, A) باشد. در اینصورت $\nu'(d_۱, A_۱) = \nu(d_۱) \in A_۱ \subseteq A$. پس ν' بطور تصادفی در A است.

جواب ۱۲۲ (۱) فرض کنید a نقطه چسبیدگی از ν باشد. در اینصورت ν بطور مکرر در هر $T-$ همسایگی از a است. مجموعهٔ $V_T(a)$ در شرایط $\mathbf{A}$ از قضیهٔ ۱۱ صدق می‌کند. بنابراین یک زیر تور ν' از ν وجود دارد بقسمی که بطور تصادفی در هر $T-$ همسایگی از a است. پس ν' همگرا به a می‌باشد.

(۲) برعکس، فرض کنید a یک نقطه چسبیدگی ν نباشد.
در اینصورت یک $T-$ همسایگی V از a وجود دارد بطوریکه ν بطور مکرر در V نیست، و از اینرو بطور تصادفی در $C_E(V)$ می‌باشد. بنابراین هر زیر تور ν' از ν بطور تصادفی در $C_E(V)$ است و لذا همگرا به a نیست.

جواب ۱۲۳ (۱) فرض کنید F همگرا به x باشد، بطوریکه $V(x) \subseteq F$.
چنانچه ν یک تور وابسته به F باشد. بعلاوه V یک $T-$ همسایگی از x باشد.
برای هر مجموعهٔ X در F که $R-$ بزرگتر از V باشد داریم، $\nu(x) \in X \subseteq V$. بنابراین ν بطور تصادفی در V است. پس ν همگرا به x است.

(۲) برعکس، فرض کنید F همگرا به x نباشد. در اینصورت یک $T-$ همسایگی V از x وجود دارد بقسمی که متعلق به F نیست. بنابراین برای هر مجموعهٔ X در F داریم $X \cap C_E(V) \neq \emptyset$. فرض کنید a_X عنصری از $X \cap C_E(V)$ باشد. چنانچه ν توری با دامنهٔ F باشد که برای هر X در F، $\nu(X) = a_X$. در اینصورت ν همگرا به x نیست، اما وابسته شده به F است.

جواب ۱۲۴ (۱) فرض کنید ν همگرا به x باشد. در اینصورت ν بطور تصادفی در هر $T-$ همسایگی از x قرار دارد. بنابراین هر $T-$ همسایگی از x متعلق به $F(\nu)$ است، یعنی $V_T(x) \supseteq F(\nu)$. پس $F(\nu)$ همگرا به x است.

(۲) برعکس آن بدیهی است.

جواب ۱۲۵ (۱) فرض کنید f تابعی $(T,T')-$ پیوسته در x باشد.
چنانچه ν یک تور در E باشد که همگرا به x است. بعلاوه V' یک $T'-$ همسایگی از $f(x)$ باشد. در اینصورت یک $T-$ همسایگی V از x وجود دارد بطوریکه $f(V) \subseteq V'$. چون ν همگرا به x است، ν بطور تصادفی در V است. بنابراین $f \circ \nu$ بطور تصادفی در $f(V)$ است. و لذا در V' است. بنابراین $f \circ \nu$ همگرا به $f(x)$ می‌باشد.

(۲) برعکس، فرض کنید f تابعی $(T,T')-$ پیوسته در x نباشد.
در اینصورت یک $T'-$ همسایگی V' از $f(x)$ وجود دارد بقسمی که برای هر $T-$ همسایگی V از x مجموعهٔ $f(V)$ مشمول در V' نیست. برای هر $T-$ همسایگی V از x، فرض کنید a_V عضوی از V باشد که $f(a_V) \notin V'$. توری با دامنهٔ $V_T(x)$ را در نظر بگیرید که برای هر V در $V_T(x)$، $\nu(V) = a_V$. در اینصورت ν همگرا به x است اما $f \circ \nu$ همگرا به $f(x)$ نیست.

جواب ۱۲٦ (۱) فرض کنید ν همگرا به a باشد.
چنانچه V یک $T-$ همسایگی از a باشد. چون ν بطور تصادفی در V است یک عضو d از D وجود دارد که برای هر $n \geq d$، $\nu(n) \in V$. چون $\nu' = \nu \circ \varphi$ یک زیر تور از ν است، یک عضو d' از D' (جاییکه D' دامنهٔ ν' است) وجود دارد بطوریکه برای هر

$n' \geq d'$ داریم $\varphi(n') \geq d$ و لذا $\nu(\varphi(n')) = \nu'(n') \in V$. پس ν' بطور تصادفی در V است. بنابراین ν' همگرا به a است.

(۲) فرض کنید a نقطه چسبیدهٔ ν' باشد.
بعلاوه V یک $T-$ همسایگی از a باشد. چنانچه d یک عضو D باشد. در اینصورت یک عضو d' از D' وجود دارد بطوریکه برای هر $n' \geq d'$ داریم $\varphi(n') \geq d$. چون ν' بطور مکرر در V است، یک عضو n' در D' وجود دارد بقسمی که $n' \geq d'$ و $\nu'(n') \in V$. در اینصورت داریم $\varphi(n') \geq d$ و $\nu(\varphi(n')) = \nu'(n') \in V$. بنابراین ν بطور مکرر در V است. پس a نقطه چسبیدهٔ ν می‌باشد.

جواب ۱۲۷ (۱) فرض کنید $\nu : D \longrightarrow E$ یک تور و $\nu' = \nu \circ \varphi : D' \longrightarrow E$ یک زیر تور باشد.
چنانچه یک ν فراتور باشد. بعلاوه X یک زیر مجموعه از E باشد. در اینصورت $\nu(a)$ بطور تصادفی در X است یا $\nu(b)$ بطور تصادفی در $C_E(X)$ است. با توجه به بحث تمرین (۱) ۱۲٦ نتیجه می‌گیریم که در حالت (a)، ν' بطور تصادفی در X است و در حالت (b)، ν' بطور تصادفی در $C_E(X)$ است. پس ν' یک فراتور می‌باشد.

(۲) فرض کنید $\mathbf{S}$ خانواده‌ای از همهٔ مجموعه‌های Q از زیرمجموعه‌های E باشد بطوریکه (۱) ν بطور مکرر در هر زیرمجموعه از E متعلق به Q باشد و (۲) Q تحت مقطع باپایان بسته است.

در اینصورت $\mathbf{S}$ بطور استقرایی مرتب شده بوسیلهٔ رابطهٔ شمول است و لذا، با استفاده از لم‌زرن یک عضو $(\subseteq)-$ بیشین بمانند $Q_\circ$ دارد. با استفاده از قضیه ۱۱، ν دارای یک زیرتور ν' است که بطور تصادفی در هر زیرمجموعه از E متعلق به $Q_\circ$ قرار دارد. فرض کنید A یک زیرمجموعه از E باشد. ادعا می‌کنیم که A یا متممش متعلق به $Q_\circ$ می‌باشد.

برای مشاهدهٔ این مطلب، فرض کنید برای هر مجموعهٔ X در $Q_\circ$ تور ν بطور مکرر در $A \cap X$ است. در اینصورت $Q_\circ \cup \{A\} \supseteq Q_\circ$ و $Q_\circ \cup \{A\}$ متعلق به $\mathbf{S}$

می‌باشد. از اینرو چون $Q_\circ$، یک $(\subseteq)-$ بیشین در $\mathbf{S}$ است، داریم $A \in Q_\circ$.

از طرف دیگر فرض کنید که یک مجموعهٔ X_1 در $Q_\circ$ وجود دارد بقسمی که ν بطور تصادفی در $C_E(A \cap X_1)$ است. در اینصورت $Q_\circ \cup (C_E(A \cap X_1)) \supseteq Q_\circ$ و متعلق به $\mathbf{S}$ است. از اینرو چون $Q_\circ$ در $\mathbf{S}$، یک $(\subseteq)-$ بیشین است، داریم $C_E(A \cap X_1) \in Q_\circ$. از طرفی $C_E(A) \supseteq C_{X_1}(A \cap X_1)$، نتیجه گرفته می‌شود که $Q_\circ \cup C_E(A) \in \mathbf{S}$ و بنابراین، طبق نکات بالا، $C_E(A) \in Q_\circ$. بنابراین ν' یک فراتور است.

جواب ۱۲۸ (۱) فرض کنید ν یک فراتور باشد. فیلتر وابسته شده به ν بصورت زیر است

$$F(\nu) = \{X \in P(E) : \text{است } X \text{ بطور تصادفی در } \nu\}$$

برای هر زیرمجموعهٔ X از E داریم (۱) ν بطور تصادفی در X است یا در غیراینصورت (۲) ν بطور تصادفی در $C_E(X)$ است، یعنی $X \in F(\nu)$ یا $C_E(X) \in F(\nu)$. بنابراین $F(\nu)$ یک فرافیلتر است.

(۲) فرض کنید F یک فرافیلتر باشد. چنانچه ν تور وابسته شده به F باشد. بعلاوه Y یک زیرمجموعهٔ E باشد و ν بطور تصادفی در Y نباشد. بنابراین ν بطور مکرر در $C_E(Y)$ است، یعنی برای هر مجموعهٔ X در F یک مجموعهٔ X' در F وجود دارد بقسمی که $X' \subseteq X$ و $\nu(X') \in C_E(Y)$، چون $\nu(X') \in X'$ این نشان می‌دهد که $X' \cap C_E(Y) \neq \emptyset$ و لذا $X \cap C_E(Y) \neq \emptyset$. ما نتیجه می‌گیریم که $F \cup \{C_E(Y)\}$ یک فیلتر F' تولید می‌کند بطوریکه شامل F است. چون F یک فرافیلتر می‌باشد باید داشته باشیم $F' = F$ و لذا $C_E(Y) \in F$. پس برای هر مجموعهٔ X' در F بطوریکه $X' \subseteq C_E(Y)$ داریم $\nu(X') \in X' \subseteq C_E(Y)$. بنابراین ν بطور تصادفی در $C_E(Y)$ است. پس ν یک فراتور می‌باشد.

فصل ۱۲

جوابهای فصل ۵

جواب ۱۲۹ فرض کنید T توپولوژی نقطهٔ خاص روی E و تعیین شده توسط نقطهٔ p باشد. بعلاوه a و b نقاط متمایز از E باشند. اگر یکی از این نقاط بمانند a، برابر نقطهٔ خاص p باشد، در اینصورت $\{a\} = \{p\}$ یک $T-$ همسایگی از a می‌باشد که شامل b نیست. اگر a و b هر دو مخالف p باشند در اینصورت $\{a, p\}$ یک $T-$ همسایگی از a است که شامل b نمی‌باشد. پس (E, T) فضای $T_\circ$ است.

جواب ۱۳۰ (۱) فرض کنید که T فضای $T_\circ$ باشد.
چنانچه x و y نقاط متمایزی از E باشند چون T فضای $T_\circ$ است یک $T-$ همسایگی V_x از x وجود دارد بقسمی که شامل y نیست یا یک $T-$ همسایگی V_y از y وجود دارد که شامل x نیست. در حالت اول $x \in Cl_T\{x\}$ ولی $x \notin Cl_T\{y\}$. در حالت دوم $y \in Cl_T\{y\}$ ولی $y \notin Cl_T\{x\}$. بنابراین در هر حالت داریم $Cl_T\{x\} \neq Cl_T\{y\}$.

(۲) برعکس، فرض کنید که برای هر زوج از نقاط متمایز x و y از E داریم $Cl_T\{x\} \neq Cl_T\{y\}$.
چنانچه (E, T) یک فضای $T_\circ$ نباشد. آنگاه یک زوج از نقاط متمایز a و b در E

وجود دارد بقسمی که هر $T-$ همسایگی از a شامل b است و هر $T-$ همسایگی از b شامل a می‌باشد. بنابراین $a \in Cl\{b\}$ و $b \in Cl\{a\}$. پس $\{a\} \subseteq Cl\{b\}$ و $\{b\} \subseteq Cl\{a\}$. این نتیجه می‌دهد که $Cl\{b\} \subseteq Cl\{a\}$ و $Cl\{a\} \subseteq Cl\{b\}$. از اینرو $Cl\{a\} = Cl\{b\}$، که یک تناقض است. لذا (E,T) فضای $T_۰$ می‌باشد.

جواب ۱۳۱ فرض کنید η نگاشت پوشای کانونی از E به $\frac{E}{R}$ باشد. ثابت می‌کنیم که η تابعی $(T,\frac{T}{R})-$ باز است. چنانچه U یک زیر مجموعهٔ $T-$ باز از E باشد. در اینصورت داریم $\eta^{-۱}(\eta(U)) = \bigcup_{x\in U} R(x)$، جائیکه $R(x)$ یک $R-$ کلاس x است. فرض کنید x یک نقطه از U و $t \in R(x)$ باشد. در اینصورت $Cl\{t\} = Cl\{x\}$ و لذا $x \in Cl\{t\}$. از اینرو هر مجموعهٔ $T-$ باز شامل x، شامل t نیز می‌باشد. در حالت خاص، $t \in U$. از اینرو $U \subseteq \eta^{-۱}(\eta(U)) \subseteq U$. پس $\eta^{-۱}(\eta(U))$، مجموعه‌ای $T-$ باز است و لذا $\eta(U)$، نیز $\frac{T}{R}-$ باز است. بنابراین η، تابعی $(T,\frac{T}{R})-$ باز می‌باشد.

اکنون فرض کنید X و Y نقاط متمایزی از $\frac{E}{R}$ باشد، چنانچه برای $x \in E$ و $y \in E$، $X = \eta(x)$ و $Y = \eta(y)$. در اینصورت $(x,y) \notin R$ و لذا $Cl_T\{x\} \neq Cl_T\{y\}$. بنابراین یک مجموعهٔ باز شامل x وجود دارد که شامل y نیست یا یک مجموعهٔ باز شامل y وجود دارد که شامل x نیست. فرض کنید مجموعهٔ باز U وجود دارد بطوریکه $x \in U$ و $y \notin U$ باشد. در اینصورت $\eta(U)$ یک مجموعهٔ $(\frac{T}{R})-$ باز شامل $X = \eta(x)$ است. باید نشان دهیم که $\eta(U)$ شامل $Y = \eta(y)$ نیست. اگر $Y = \eta(y) \in \eta(U)$، آنگاه یک نقطهٔ t از U وجود دارد بطوریکه $\eta(y) = \eta(t)$، بدین ترتیب داریم $Cl_T\{y\} = Cl_T\{t\}$. لذا $t \in Cl_T\{y\}$. حال U یک مجموعهٔ $T-$ باز شامل t است، بنابراین $U \cap \{y\} \neq \emptyset$ یعنی، $y \in U$. که تناقض با انتخاب U است. پس $(\frac{E}{R},\frac{T}{R})$ فضای $T_۰$ می‌باشد.

جواب ۱۳۲ (۱) فرض کنید p یک متریک باشد.

چنانچه x و y نقاط متمایزی از E باشند. قرار دهید $r = p(x,y)$. چون p یک متریک

است لذا r غیر صفر می‌باشد. پس $V_p(x,r)$ یک T_p- همسایگی از x است که شامل y نیست.

(۲) برعکس، اگر p یک متریک نباشد، نقاط متمایز x و y وجود دارند بقسمی که $p(x,y)=0$. در اینصورت برای هر عدد حقیقی مثبت r داریم $y\in V_p(x,r)$ و $x\in V_p(y,r)$. این نتیجه می‌دهد که توپولوژی T_p فضای T_0 نیست.

جواب ۱۳۳ (۱) فرض کنید x نقطه‌ای از E باشد. چون $x\in Cl_T\{x\}$ داریم $(x,x)\in A$. پس A بازتابی است.

(۲) فرض کنید x و y و z نقاطی از E باشند بقسمی که $(x,y)\in A$ و $(y,z)\in A$. برای نشان دادن اینکه $(x,z)\in A$، یعنی $x\in Cl_T\{z\}$، چنانچه V یک $T-$ همسایگی از x باشد. در اینصورت V شامل یک زیرمجموعهٔ $T-$ باز U شامل x است. چون $x\in Cl_T\{y\}$ مجموعهٔ U، $\{y\}$ را قطع می‌کند، یعنی، $y\in U$، بنابراین U یک $T-$ همسایگی از y است. چون $y\in Cl_T\{z\}$ نتیجه گرفته می‌شود که U مجموعه $\{z\}$ را قطع می‌کند. پس V مجموعه $\{z\}$ را قطع می‌کند و از اینرو $x\in Cl_T\{z\}$ و این همان چیزی است که نیاز داشتیم. پس A انتقالی است.

(۳) فرض کنید (E,T) یک فضای T_0 باشد.
اگر $(x,y)\in A$ و $(y,x)\in A$ در اینصورت داریم $x\in Cl_T\{y\}$ و همچنین $y\in Cl_T\{x\}$. این نتیجه می‌دهد که $Cl_T\{x\}=Cl_T\{y\}$. بنابراین با استفاده از تمرین ۱۳۰، داریم $x=y$. پس A پاد متقارن است.
برعکس، فرض کنید A پاد متقارن باشد.
چنانچه x و y نقاط متمایزی از E باشند در اینصورت نمی‌توانیم هر دوی $(x,y)\in A$ و $(y,x)\in A$ را داشته باشیم. بنابراین نمی‌توانیم داشته باشیم $y\in Cl_T\{x\}$ و $x\in Cl_T\{y\}$، لذا $Cl_T\{x\}\neq Cl_T\{y\}$. از اینرو، با استفاده از تمرین ۱۳۰، (E,T) فضای T_0 است.

جواب ۱۳۴ (۱) فرض کنید K مجموعه‌ای $T-$ بسته باشد.
اگر $y \in K$ و $(x,y) \in A$ در اینصورت $x \in C_T\{y\}$. امّا چون $\{y\} \subseteq K$ داریم $Cl_T\{y\} \subseteq Cl_T K = K$. پس $x \in K$.

(۲) برعکس، فرض کنید K یک زیرمجموعه از E باشد بقسمی که هرگاه $y \in K$ و $(x,y) \in A$ داشته باشیم $x \in K$. چون (E,T) یک فضای الکساندروف است اجتماع هر فامیل از زیر مجموعه‌های $T-$ بستهٔ E، مجموعه‌ای $T-$ بسته است. از این به آسانی نتیجه می‌گیریم که $Cl_T(K) = \bigcup\limits_{y \in K} Cl_T\{y\}$. بنابراین اگر x نقطه‌ای از $Cl_T(K)$ باشد باید داشته باشیم $x \in Cl_T\{y\}$، یعنی برای یک نقطهٔ y از K، $(x,y) \in A$. ولی این نتیجه می‌دهد که $x \in K$، پس $Cl_T K = K$ و از اینرو K مجموعه‌ای $T-$ بسته است و این همان ادعایی است که می‌خواستیم.

جواب ۱۳۵ در تمرین ۱۲۹ دیدیم که توپولوژی نقطهٔ خاص یک فضای $T_\circ$ است. اگر T توپولوژی نقطهٔ خاص تعیین شده بوسیلهٔ نقطهٔ p باشد و a نقطه‌ای متمایز از p باشد، آنگاه هر مجموعهٔ $T-$ باز شامل a، شامل p نیز هست. بنابراین T فضای $T_۱$ نمی‌باشد.

جواب ۱۳۶ اگر k عددی فرد باشد، مثلاً $k = ۲n + ۱$، در اینصورت $\{k\}$ اشتراک مجموعه‌های $T-$ باز $\{۲n - ۱, ۲n, ۲n + ۱\}$ و $\{۲n + ۱, ۲n + ۲, ۲n + ۳\}$ می‌باشد و از اینرو $T-$ باز است.

اگر k زوج باشد، مثلاً $k = ۲n$، پس $\{k\}$ متمم اجتماع خانواده همهٔ مجموعه‌های $T-$ باز بفرم $\{۲m - ۱, ۲m, ۲m + ۱\}$ با $m \neq n$ است. این اجتماع $T-$ باز است و لذا $\{k\}$ مجموعه‌ای $T-$ بسته است. برای نشان دادن اینکه توپولوژی اعداد فضای $T_\circ$ است. فرض کنید x و y اعداد صحیح متمایز باشند. اگر یکی از اینها مثلاً x فرد

باشد. در اینصورت $\{x\}$ یک $T-$ همسایگی از x است بطوریکه شامل y نیست. اگر x و y هر دو زوج باشند، در اینصورت $\{x-۱, x, x+۱\}$ یک $T-$ همسایگی از x می‌باشد که شامل y نیست. توپولوژی اعداد $T_۱$ نیست، چون هیچ $T-$ همسایگی از $۲n$ وجود ندارد که شامل $۲n+۱$ نباشد.

جواب ۱۳۷ فرض کنید x و y نقاط متمایزی از E باشند.
چنانچه $r = q(x,y)$ و $s = q(y,x)$. در اینصورت $V_q(x,r)$ یک T_q- همسایگی از x است بقسمی که شامل y نیست و $V_q(y,s)$ یک T_q- همسایگی از y است بطوریکه شامل x نیست.

جواب ۱۳۸ $(۱) \Longleftarrow (۲)$ فرض کنید T یک توپولوژی $T_۱$ باشد.
چنانچه x نقطه‌ای از E باشد. نشان می‌دهیم که $Cl\{x\} = \{x\}$. اگر t نقطه‌ای از E متمایز از x باشد، آنگاه یک مجموعهٔ $T-$ باز U شامل t وجود دارد بقسمی که شامل x نیست. پس t یک نقطهٔ چسبیدهٔ از $\{x\}$ نمی‌باشد. بنابراین $t \notin Cl\{x\}$. این نتیجه می‌دهد که $Cl\{x\} = \{x\}$ و لذا $\{x\}$ مجموعه‌ای $T-$ بسته است.
$(۲) \Longleftarrow (۳)$ فرض کنید که برای هر نقطهٔ t از E مجموعهٔ $\{t\}$ یک مجموعه‌ای $T-$ بسته باشد. چنانچه x نقطه‌ای از E و y نقطه‌ای از $\cap N(x)$ باشد، جائیکه $N(x)$ فیلتر $T-$ همسایگی از x باشد. در اینصورت هر $T-$ همسایگی از x شامل y است و لذا $\{y\}$ را قطع می‌کند. بنابراین $x \in Cl_T\{y\} = \{y\}$. پس $y = x$ و از اینرو $\cap N(x) = \{x\}$.

$(۳) \Longleftarrow (۱)$ فرض کنید که برای هر نقطهٔ t از E داشته باشیم $\cap N(t) = \{t\}$.

چنانچه x و y نقاط متمایزی از E باشند. چون $y \notin \{x\} = \cap N(x)$. لذا یک $T-$ همسایگی از x وجود دارد بقسمی که شامل y نیست. بطور مشابه یک $T-$ همسایگی از y وجود دارد بطوریکه شامل x نیست. بنابراین T فضای $T_۱$ است.

جواب ۱۳۹ فرض کنید V یک $T-$ همسایگی از x باشد.

چنانچه V شامل تعداد متناهی نقطه از A بمانند $a_1،\ldots،a_n$ باشد. در اینصورت همسایگی‌های $V_1،\ldots،V_n$ از x وجود دارند بقسمی که $a_i \notin V_i$ $(i = 1،\ldots،n)$. پس $V \cap V_1 \cap V_2 \cap \cdots \cap V_n$ یک $T-$ همسایگی از x است که شامل هیچ نقطه‌ای از A نیست. این یک تناقض است، چون x یک نقطهٔ چسبیدهٔ A است. بنابراین V باید شامل تعداد نامتناهی نقطه از A باشد.

جواب ۱۴۰ فرض کنید x نقطه‌ای از E باشد. یک مجموعهٔ B_1 در پایهٔ متناهی وجود دارد بطوریکه $x \in B_1$. اگر $B_1 \neq \{x\}$، آنگاه یک نقطهٔ $x_1 \neq x$ وجود دارد بقسمی که $x_1 \in B_1$. چون T فضای T_1 است، پس یک $T-$ همسایگی V از x وجود دارد که شامل x_1 نیست. در اینصورت $V \cap B_1$ باید شامل یک مجموعهٔ باز پایه‌ای B_2 باشد که شامل x است اما شامل x_1 نیست. پس $B_1 \supseteq B_2$.

اگر $B_2 \neq \{x\}$ می‌توانیم این روند را تکرار کنیم. بنابراین یک دنبالهٔ نزولی اکیداز مجموعه‌های باز پایه‌ای بدست می‌آید. چون تنها تعداد متناهی از این مجموعه‌های باز پایه‌ای وجود دارند این فرایند باید متوقف شود، یعنی باید یکی از مجموعه‌های باز پایه‌ای برابر $\{x\}$ باشد. بنابراین توپولوژی گسسته می‌باشد و چون تعداد متناهی از مجموعه‌های باز پایه‌ای وجود دارند پس مجموعهٔ E نیز تعداد متناهی نقطه دارد.

جواب ۱۴۱ این یک نتیجهٔ بدیهی از تمرین ۱۴۰ است، چون یک مجموعهٔ متناهی دارای تعداد متناهی زیر مجموعه است. از اینرو هر توپولوژی روی یک مجموعهٔ متناهی دارای یک پایهٔ متناهی است.

جواب ۱۴۲ فرض کنید E یک مجموعهٔ نامتناهی و T توپولوژی متمم باپایان روی E باشد. اگر a و b نقاط متمایزی از E باشند در اینصورت $C_E\{a\}$ یک مجموعهٔ

$T-$ باز است بطوریکه شامل b است اما شامل a نیست. همچنین $C_E\{b\}$ یک مجموعه $T-$ باز شامل a است که شامل b نمی‌باشد. بنابراین (E,T)، فضای T_1 است.

فرض کنید (E,T) هاسدرف باشد. در اینصورت اگر a و b نقاط متمایزی از E باشند مجموعه‌های مجزای $T-$ باز U و V به ترتیب شامل a و b وجود خواهند داشت. پس باید داشته باشیم $E = C_E(U \cap V) = C_E(U) \cup C_E(V)$ متناهی است و این یک تناقض می‌باشد. بنابراین (E,T) هاسدرف نیست.

جواب ۱۴۳ فرض کنید x و y نقاط متمایزی از E باشد. چنانچه $r = d(x,y)$. در اینصورت $V_d(x, \frac{r}{2})$ و $V_d(y, \frac{r}{2})$ به ترتیب همسایگی‌های مجزایی از x و y هستند. زیرا اگر یک نقطهٔ z در اشتراک آنها وجود می‌داشت در اینصورت $d(x,z) < \frac{r}{2}$ و $d(y,z) < \frac{r}{2}$ و از اینرو، $r = d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y) = d(x,z) + d(y,z) < r$ که یک تناقض است.

جواب ۱۴۴ بررسی نامساوی مثلثی $q(x,z) \leq q(x,y) + q(y,z)$ کمی کسل کننده اما ساده است. (بستگی به این دارد که هر یک از z, y, z برابر 0، ∞ یا یک عدد مثبت باشد)

برای نشان دادن اینکه (E,T) هاسدرف نیست. فرض کنید U و V به ترتیب T_q- همسایگی‌هایی از 0 و ∞ باشند. در اینصورت اعداد مثبت حقیقی r و s چنان وجود دارند که $V_q(0,r) \subseteq U$ و $V_q(\infty,s) \subseteq V$. فرض کنید n عدد صحیح بزرگتر از $\frac{1}{r}$ و $\frac{1}{s}$ باشد. پس $q(0,n) = q(\infty,n) = \frac{1}{n}$ کوچکتر از هر دوی r و s است، بنابراین U و V مجزا نمی‌باشند و لذا (E,T) هاسدرف نیست.

جواب ۱۴۵ فرض کنید (x_1,y_1) و (x_2,y_2) نقاط متمایزی از E باشند.
چون x_1، y_1، x_2، y_2 اعداد گویا هستند و θ گنگ است لذا $x_1 - \theta y_1$ و $x_2 - \theta y_2$

متمایز هستند و $x_۱ + \theta y_۱$ و $x_۲ + \theta y_۲$ نیز متمایز هستند. فرض کنید:

$$\varepsilon = \min\{|(x_۱ - \theta y_۱) - (x_۲ - \theta y_۲)| \text{ و } |(x_۱ + \theta y_۱) - (x_۲ + \theta y_۲)|\}.$$

در اینصورت $N_{\frac{\varepsilon}{۴}}(x_۱, y_۱)$ و $N_{\frac{\varepsilon}{۴}}(x_۲, y_۲)$ به ترتیب $T_\theta-$ همسایگی‌های مجزایی از $(x_۱, y_۱)$ و $(x_۲, y_۲)$ می‌باشند. پس فضای (E, T_θ) هاسدرف است.

جواب ۱۴۶ (۱) $\Longleftarrow$ (۲) فرض کنید (E, T) هاسدرف باشد.
چنانچه x نقطه‌ای از E و y نقطه‌ای متمایز از x باشد. $T-$ همسایگی‌های مجزای V از x و W از y وجود دارند. چون $W \cap V = \emptyset$ نتیجه گرفته می‌شود که $y \notin Cl(V)$ که یک $T-$ همسایگی بستهٔ از x است. بنابراین y در هر $T-$ همسایگی بسته از x نمی‌باشد. پس اشتراک خانوادهٔ $T-$ همسایگی‌های بستهٔ x برابر $\{x\}$ است.

(۲) $\Longleftarrow$ (۳) فرض کنید شرط (۲) برقرار باشد.

چنانچه F یک فیلتر روی E باشد بطوریکه همگرا به x است یعنی $F \supseteq N(x)$، که $N(x)$ فیلتر $T-$ همسایگی از x است. اگر y نقطه چسبیده از F باشد. در اینصورت y متعلق به بستار هر $T-$ همسایگی از x است و از اینرو متعلق به هر $T-$ همسایگی بستهٔ x است. بنابراین $y = x$، یعنی x تنها نقطهٔ چسبیدگی از F می‌باشد.

(۳) $\Longleftarrow$ (۴) فرض کنید شرط (۳) برقرار باشد. چنانچه F یک فیلتر در E و x و y نقاط حدی F باشند. در این‌صورت آنها نقاط چسبیده F هستند. بنابراین با توجه به شرط (۳)، $x = y$ می‌باشد.

(۴) $\Longleftarrow$ (۱) فرض کنید شرط (۴) برقرار باشد اگر T هاسدرف نباشد یک زوج از نقاط متمایز x و y وجود دارد بقسمی که هر $T-$ همسایگی از x هر $T-$ همسایگی از y را قطع می‌کند. بنابراین $N(x) \cup N(y)$ یک فیلتر F تولید می‌کند که همگرا به x و y است، و این یک تناقض است. بنابراین T هاسدرف می‌باشد.

جواب ۱۴۷ (برای نمونه) فرض کنید (E,T) فضای T_2 (هاسدرف) باشد. چنانچه a_1 و a_2 نقاط متمایزی از یک زیرمجموعهٔ A از E باشند. در اینصورت زیرمجموعه‌های مجزایی $T-$ باز U_1 و U_2 از E وجود دارند که بترتیب شامل a_1 و a_2 هستند. پس $A \cap U_1$ و $A \cap U_2$ زیرمجموعه‌های T_A- باز مجزای A هستند که به ترتیب شامل a_1 و a_2 می‌باشند. پس (A, T_A) هاسدرف می‌باشد.

جواب ۱۴۸ (برای نمونه) فرض کنید فضاهای (E_i, T_i)، همگی T_0 باشند. چنانچه x و y نقاط متمایزی از $E = \prod E_i$ باشند. در اینصورت یک اندیس j در I وجود دارد بطوریکه $\pi_j(x) \neq \pi_j(y)$. از اینرو یک T_j- همسایگی از یکی از این نقاط وجود دارد بطوریکه شامل دیگری نیست، مثلاً $\pi_j(x) \in V_j$ و $\pi_j(y) \notin V_j$. برای $i \neq j$ فرض کنید $V_i = E_i$. در اینصورت $\prod_{i \in I} V_i$ یک $T-$ همسایگی از x است که شامل y نیست. لذا (E,T) فضای T_0 است.

فرض کنید فضای حاصلضرب (E,T) هاسدرف باشد. چنانچه x_{i_0} و y_{i_0} نقاط متمایزی از E_{i_0} باشند. بعلاوه x و y نقاطی از E می‌باشد بطوریکه $\pi_{i_0}(x) = x_{i_0}$ و $\pi_{i_0}(y) = y_{i_0}$ و برای هر $j \neq i_0$، $\pi_j(x) = \pi_j(y)$ باشند. در اینصورت $T-$ همسایگی‌های مجزای U و V وجود دارند که به ترتیب شامل x و y می‌باشد. زیرمجموعه‌های متناهی J و K از I و خانواده‌های $(U_i)_{i \in I}$ و $(V_i)_{i \in I}$ از زیرمجموعه‌های T_i- باز E_i وجود دارند بقسمی که برای $i \notin J$، $U_i = E_i$ و برای $i \notin K$، $V_i = E_i$. همچنین $x \in \prod_{i \in I} U_i \subseteq U$ و $y \in \prod_{i \in I} V_i \subseteq V$. بنابراین U_{i_0} و V_{i_0}، $T_{i_0}-$ همسایگی‌های مجزایی هستند که به ترتیب شامل x_{i_0} و y_{i_0} می‌باشند. بنابراین (E_{i_0}, T_{i_0}) هاسدرف است.

جواب ۱۴۹ فرض کنید $P = C_{E \times E}(D)$.

۱) چنانچه (E,T) فضای هاسدرف باشد. بعلاوه (x,y) نقطه‌ای از P باشد. چون $x \neq y$ است، زیرمجموعه‌های $T-$ باز مجزای U و V از E وجود دارند

بقسمی که به ترتیب شامل x و y هستند. در اینصورت $U \times V$ یک $(T \times T)-$ همسایگی از (x,y) است بطوریکه D را قطع نمی‌کند. (زیرا اگر $(a,a) \in D \cap (U \times V)$ شود خواهیم داشت $a \in U \cap V = \emptyset$ که یک تناقض است.) پس $(x,y) \in U \times V \subseteq P$. بنابراین P یک $(T \times T)-$ همسایگی از (x,y) می‌باشد. در نتیجه P مجموعه‌ای $(T \times T)-$ باز است و لذا D یک مجموعه $(T \times T)-$ بسته می‌باشد.

۲) برعکس، فرض کنید D مجموعه‌ای $(T \times T)-$ بسته باشد.

چنانچه x و y نقاط متمایزی از E باشد. در اینصورت (x,y) متعلق به مجموعهٔ $(T \times T)-$ باز P است. از اینرو مجموعه‌های $T-$ باز U و V از E وجود دارند بطوریکه $(x,y) \in U \times V \subseteq P$. در اینصورت U و V مجموعه‌های $T-$ باز مجزا هستند که به ترتیب شامل x و y می‌باشند. بنابراین (E,T) فضای هاسدرف است.

جواب ۱۵۰ فرض کنید $A = \{x \in E : f(x) = g(x)\}$.

چنانچه t نقطه‌ای دلخواه که در A نباشد. در اینصورت $f(t) \neq g(t)$. چون (E',T') فضای هاسدرف است، مجموعه‌های $T'-$ باز مجزای U' و V' وجود دارند که به ترتیب شامل $f(t)$ و $g(t)$ هستند. چون f و g پیوسته می‌باشند، مجموعه‌های $T-$ باز U و V شامل t وجود دارند بقسمی که $f(U) \subseteq U'$ و $g(V) \subseteq V'$. در اینصورت $U \cap V \subseteq C_E(A)$. زیرا اگر نقطه‌ای بمانند a از A در $U \cap V$ باشد، خواهیم داشت $f(a) \in f(U) \subseteq U'$ و $g(a) \in g(V) \subseteq V'$ و لذا $f(a) = g(a) \in U' \cap V' = \varnothing$. بنابراین $C_E(A)$ یک $T-$ همسایگی از هر یک نقاط t می‌باشد. لذا $C_E(A)$ مجموعه‌ای $T-$ باز است و در نتیجه A، یک مجموعه $T-$ بسته است.

جواب ۱۵۱ فرض کنید G نمودار f و G' متمم G در $E \times E'$ باشد. چنانچه (x, y) نقطه‌ای از G' باشد. در اینصورت $y \neq f(x)$. چون (E', T') هاسدرف است، زیرمجموعه‌های مجزای $T'-$ باز U' و V' از E' وجود دارند بقسمی که $f(x) \in U'$ و $y \in V'$. از طرفی f تابعی $(T, T')-$ پیوسته است لذا یک زیرمجموعهٔ $T-$ باز U از E و شامل x چنان وجود دارد که $f(U) \subseteq U'$. در اینصورت $U \times V'$ یک $(T \times T')-$ همسایگی از (x, y) است. فرض کنید (a, b) نقطه‌ای از $U \times V'$ باشد در اینصورت $f(a) \in f(U) \subseteq U'$، $b \in V'$ و بنابراین $f(a) \neq b$. لذا داریم $(x, y) \in U \times V' \subseteq G'$. پس G' مجموعه‌ای $(T \times T')-$ باز است. بنابراین G مجموعه‌ای $(T \times T')-$ بسته است.

جواب ۱۵۲ فرض کنید $E = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$.
چون (E, T) هاسدرف است، مجموعه‌های $T-$ باز U_2،...،U_n وجود دارند که به ترتیب شامل x_1 بوده ولی شامل x_2،...،x_n نیستند. بنابراین $\{x_1\}$ مجموعه‌ای $T-$ باز است، بطور مشابه $\{x_2\}, \ldots, \{x_n\}$، نیز $T-$ باز هستند. بنابراین T توپولوژی گسسته می‌باشد.

جواب ۱۵۳ در تمرین ۱۴۵ نشان دادیم که توپولوژی شیب گنگ T_θ هاسدرف است.
فرض کنید (x, y) نقطه‌ای از E و ϵ عدد حقیقی مثبت باشد در اینصورت

$$\begin{aligned} Cl_{T_\theta}(N_\epsilon(x, y)) \supseteq \{(r, s) \in E : |(r - \theta s) - (x - \theta y)| < \epsilon\} \\ \cup \{(r, s) \in E : |(r + \theta s) + (x + \theta y)| < \epsilon\}. \end{aligned}$$

این نتیجه می‌دهد که اگر (x, y) و (x', y') نقاط متمایزی از E باشند و V و V'، $T_\theta-$ همسایگی‌هایی از (x, y) و (x', y')، در اینصورت داریم $Cl\ (V) \cap Cl\ (V') \neq \emptyset$. پس (E, T_θ) کاملاً هاسدرف نمی‌باشد.

جواب ۱۵۴ فرض کنید p و q نقاط متمایزی از E باشند.
چنانچه d فاصلهٔ اقلیدسی معمولی بین p و q باشد. در اینصورت $Cl(D(p, \frac{d}{3})) \cap Cl(D(q, \frac{d}{3})) = \emptyset$.

جواب ۱۵۵ فرض کنید $p = (a, 0)$ نقطه‌ای از محور افقی باشد. چنانچه F متمم مجموعهٔ

$$\{p\} \cup \{(x, y) \in E : y > 0, (x-a)^2 + y^2 < 1\}$$

نسبت به E باشد. در اینصورت F یک مجموعهٔ $T-$ بسته است و $p \notin F$. بعلاوه F شامل همهٔ نقاط بشکل $(t, 0)$ است بطوریکه $a - 1 < t < a + 1$. هر مجموعهٔ باز شامل p تعدادی از این نقاط را شامل می‌شود، از اینرو نمی‌تواند با مجموعه‌های بازی که شامل F هستند، مجزا باشد، لذا T منظم نیست.

جواب ۱۵۶ فرض کنید $k = 2n$ یک عدد صحیح زوج باشد. در اینصورت $\{k\}$ در توپولوژی اعداد یک مجموعهٔ بسته است. البته $2n + 1$ متعلق به این مجموعهٔ بسته نیست. اما کوچکترین مجموعهٔ باز شامل $\{2n\}$ برابر $\{2n-1, 2n, 2n+1\}$ است. لذا نمی‌توانیم یک مجموعهٔ باز پیدا کنیم که شامل $\{2n\}$ باشد ولی شامل $2n + 1$ نباشد. پس توپولوژی اعداد منظم نیست.

جواب ۱۵۷ تنها زیرمجموعه‌های $T-$ بسته، $\emptyset$ و E و $\{a\}$ و $\{b, c\}$ هستند. بنابراین تنها زوجهای مرتب (x, F) شامل یک نقطهٔ x و یک مجموعهٔ $T-$ بستهٔ F که شامل x نیست برابر $(a, \emptyset)$ و $(b, \emptyset)$ و $(c, \emptyset)$ و $(a, \{b, c\})$ و $(b, \{a\})$ و $(c, \{a\})$ هستند. در هر حالت بدیهی است که چگونه مجموعه‌های باز مجزای V و U را پیدا کنیم طوریکه

$x \in U$ و $F \subseteq V$. پس T منظم است. همچنین T فضای T_1 نیست، زیرا $\{b\}$، $\{c\}$، مجموعه‌ای $T-$ بسته نمی‌باشند.

جواب ۱۵۸ (۱) فرض کنید T یک فضای منظم باشد.
چنانچه x نقطه‌ای از E و U یک مجموعهٔ $T-$ باز شامل x باشد. در اینصورت $C_E(U)$ یک مجموعهٔ $T-$ بسته است که شامل x نیست. از اینرو مجموعه‌های $T-$ باز مجزای U' و V' وجود دارند بطوریکه $x \in U'$ و $C_E(U) \subseteq V'$. همچنین $U' \cap V' = \emptyset$ لذا $U' \subseteq C_E(V') \subseteq U$.
چون $C_E(V')$ مجموعه‌ای $T-$ بسته است، لذا $Cl(U') \subseteq C_E(V') \subseteq U$.

(۲) برعکس، فرض کنید شرط قضیه برقرار باشد.
چنانچه x نقطه‌ای از E باشد و F یک مجموعهٔ $T-$ بسته که شامل x نیست. در اینصورت $C_E(F)$ مجموعهٔ $T-$ باز شامل x است. با استفاده از مفروضات یک مجموعهٔ $T-$ باز U' وجود دارد بطوریکه $x \in U'$ و $Cl(U') \subseteq C_E(F)$. چنانچه V' متمم $Cl(U')$ باشد آنگاه V' مجموعه‌ای $T-$ باز است و بوضوح داریم $x \in U'$ و $F \subseteq V'$ و $U' \cap V' = \emptyset$. بنابراین T یک توپولوژی منظم است.

جواب ۱۵۹ (۱) فرض کنید T منظم باشد.
چنانچه x نقطه‌ای از E و V یک $T-$ همسایگی از x باشد. در اینصورت یک مجموعهٔ $T-$ باز U وجود دارد بقسمی که $x \in U \subseteq V$. چون T منظم است. از تمرین ۱۵۸ نتیجه می‌گیریم که یک مجموعهٔ $T-$ باز U' وجود دارد بقسمی که $x \in U' \subseteq Cl(U') \subseteq U \subseteq V$. خانوادهٔ همهٔ مجموعه‌های بسته $Cl(U')$ بدست آمده از این روش یک دستگاه اساسی از $T-$ همسایگی‌هاست.

(۲) برعکس، فرض کنید هر نقطه از E دارای یک پایهٔ $T-$ همسایگی از مجموعه‌های $T-$ بسته باشد. چنانچه x نقطه‌ای از E و U یک مجموعهٔ $T-$ باز

شامل x باشد در اینصورت U یک $T-$ همسایگی از x می‌باشد. با استفاده از مفروضات یک $T-$ همسایگی بسته F از x وجود دارد بقسمی که $x \in F \subseteq U$. چون F یک $T-$ همسایگی از x است، یک مجموعهٔ $T-$ باز U' وجود دارد بطوریکه $x \in U' \subseteq F$. در اینصورت داریم $x \in U'$ و $Cl(U') \subseteq F \subseteq U$. پس T منظم می‌باشد.

جواب ۱۶۰ فرض کنید (E,T) یک فضای منظم و A یک زیرمجموعه از E باشد. چنانچه a نقطه‌ای از A و F یک زیرمجموعهٔ T_A- بسته از A باشد که شامل a نیست. در اینصورت یک زیرمجموعهٔ $T-$ بستهٔ F' از E وجود دارد بقسمی که $F = F' \cap A$. چون $a \notin F'$ و (E,T) منظم است. لذا مجموعه‌های $T-$ باز مجزای U و V وجود دارند بقسمی که $a \in U$ و $F \subseteq V$. در اینصورت $A \cap U$ و $A \cap V$ مجموعه‌های T_A- باز مجزا هستند بطوریکه $a \in A \cap U$ و $F \subseteq A \cap V$. بنابراین (A, T_A) منظم است.

جواب ۱۶۱ (۱) فرض کنید p و q نقاط متمایزی از E باشند.
اگر p و q روی خط افقی نباشد و d فاصلهٔ اقلیدسی معمولی p تا q باشد. در اینصورت $E \cap V(p,d)$ یک مجموعهٔ $T-$ باز شامل p است که شامل q نیست و $E \cap V(q,d)$ یک مجموعهٔ $T-$ باز است که شامل q است ولی شامل p نیست.

اگر $p = (x, ۰)$ روی خط افقی باشد و $q = (s,t)$ روی خط افقی نباشد. در اینصورت $\{p\} \cup V((x, \frac{t}{۲}), \frac{t}{۲})$ یک مجموعهٔ $T-$ باز شامل p است به طوریکه شامل q نیست و $V(q,t)$ یک مجموعهٔ $T-$ باز شامل q است که شامل p نیست. پس T توپولوژی $T_۱$ است.

(۲) فرض کنید F یک زیرمجموعهٔ $T-$ بستهٔ E باشد و p یک نقطه که در F نیست. اگر $p = (x,y)$ روی خط افقی نباشد، یک عدد حقیقی مثبت r وجود دارد بقسمی که $V(p,r) \subseteq C_E(F)$. تابع $f : E \longrightarrow [۰,۱]$ را تعریف می‌کنیم بطوریکه

$f(t) = ۱$ برای هر $t \notin V(p,r)$ بعلاوه $f(t) = d(t,p)/r$ برای تمام $t \in V(p,r)$.
بنابراین f پیوسته است و $f(p) = ۰$ و $f(t) = ۱$ برای هر $t \in F$، بطوریکه $d(t,p)$ فاصلهٔ اقلیدسی معمولی از t تا p می‌باشد.

اگر $p = (x, ۰)$ روی محور افقی باشد آنگاه یک عدد صحیح مثبت r وجود دارد بقسمی که $\{p\} \cup V((x,r),r) \subseteq C_E(F)$. تابع $f : E \longrightarrow [۰, ۱]$ را چنین تعریف می‌کنیم که $f(p) = ۰$, $f(t) = ۱$، برای هر $t \notin \{p\} \cup V((x,r),r)$ و برای تمام نقاط $t \in V((x,r),r)$، $f(t) = \dfrac{d(t,p)}{d(q_t,p)}$(در اینجا q_t نقطه‌ای است که خط و اصل p و t محیط $V((x,r),r)$ را قطع می‌کند و d متریک اقلیدسی معمولی است). در اینصورت f پیوسته است، $f(p) = ۰, f(t) = ۱$ برای هر t در F. بنابراین (E,T) کاملاً منظم است و از اینرو $T_{۳\frac{۱}{۲}}$ می‌باشد.

جواب ۱٦۲ فرض کنید (E,T) یک فضای کاملاً منظم باشد.
برای نشان دادن اینکه این فضا منظم است، فرض کنید a نقطه‌ای از E و F یک زیرمجموعهٔ بستهٔ E باشد که شامل a نیست. چون (E,T) کاملاً منظم است، یک نگاشت پیوستهٔ f از E به $[۰, ۱]$ وجود دارد بقسمی که $f(a) = ۰, f(t) = ۱$ برای هر نقطهٔ t از F. فواصل $[۰, \frac{۱}{۴}), (\frac{۳}{۴}, ۱]$ زیرمجموعه‌های باز از $[۰, ۱]$ هستند. از اینرو $f^{-۱}[۰, \frac{۱}{۴})$ و $f^{-۱}(\frac{۳}{۴}, ۱]$ زیرمجموعه‌های باز E و مجزا هستند. همچنین داریم $a \in f^{-۱}[۰, \frac{۱}{۴})$ و $F \subseteq f^{-۱}(\frac{۳}{۴}, ۱]$. بنابراین (E,T) منظم است.

جواب ۱٦۳ فرض کنید $((E_i, T_i))_{i\in I}$ یک خانواده از فضاهای کاملاً منظم و (E,T) حاصلضرب آنها باشد. چنانچه a نقطه‌ای از E و F و یک زیرمجموعه بسته E شامل a نباشد در این‌صورت $C_E(F)$ مجموعه‌ای $T-$ باز است و بنابراین خانوادهٔ $(U_i)_{i\in I}$ از مجموعه‌های T_i- باز و یک زیرمجموعهٔ متناهی J از I وجود دارند بقسمی که $U_i = E_i$ برای هر $i \notin J$ و $a \in \prod_{i\in I} U_i \subseteq C_E(F)$. برای هر اندیس i در J یک نگاشت پیوسته f_i از E_i به $[۰, ۱]$ چنان وجود دارد که $f_i(\pi_i(a)) = ۰, f_i(t_i) = ۱$ و

برای هر $t_i \in C_{E_i}(U_i)$. فرض کنید $f = \sup_{i\in J}(f_i \circ \pi_i)$. در اینصورت f نگاشتی پیوسته از E به $[۰,۱]$ است و $f(a) = ۰$ و $f(t) = ۱$ برای هر t در F. بنابراین (E,T) کاملاً منظم است.

جواب ۱۶۴ (۱) فاصله $[۰,۱]$ بوضوح $T_{۳\frac{۱}{۲}}$ است، پس (با استفاده از تمرین ۱۶۳) هر حاصلضرب فضاهای همانریخت با $[۰,۱]$ نیز $T_{۳\frac{۱}{۲}}$ می‌باشد و به آسانی می‌توان نشان داد که هر زیرفضای یک فضای $T_{۳\frac{۱}{۲}}$ یک فضای $T_{۳\frac{۱}{۲}}$ باشد.

(۲) فرض کنید (E,T) یک فضای $T_{۳\frac{۱}{۲}}$ باشد.
چنانچه F مجموعهٔ توابع پیوسته از E به $[۰,۱]$ باشد. برای هر f در F فرض کنید $I_f = [۰,۱]$. قرار دهید $P = \prod_{f\in F} I_f$ و تابع g از E به P را به این صورت تعریف می‌کنیم که $g(x) = (f(x))_{f\in F}$، برای هر x در E.

(۱) ادعا می‌کنیم که g یک‌به‌یک است.
فرض کنید x و y نقاط متمایزی از E باشند. چون (E,T) فضای $T_۱$ است، $\{y\}$ یک مجموعهٔ $T-$ بسته است بطوریکه شامل x نیست. از طرفی T، فضای $T_{۳\frac{۱}{۲}}$ است، لذا یک نگاشت پیوستهٔ $f_۰$ از E به $[۰,۱]$ وجود دارد بقسمی که $f_۰(x) = ۰$ و $f_۰(y) = ۱$. از اینرو $g(x), g(y)$ در مؤلفهٔ $f_۰-$ ام متفاوت هستند و لذا $g(x) \neq g(y)$.

(۲) حال نشان می‌دهیم که g پیوسته است.
فرض کنید x نقطه‌ای از E و V' یک همسایگی از $g(x)$ در P باشد.
در اینصورت یک زیرمجموعهٔ متناهی G از F و یک خانوادهٔ $(V'_f)_{f\in F}$ از زیرمجموعه‌های باز $[۰,۱]$ وجود دارد بقسمی که برای هر $f \notin G$ داریم $V'_f = [۰,۱]$ و علاوه بر این $g(x) \in \prod\limits_{f\in F} V'_f \subseteq V'$. برای برای هر نگاشت f در G، تابع f پیوسته است و لذا یک $T-$ همسایگی V_f از x در E وجود دارد بقسمی که $f(V_f) \subseteq V'_f$.
فرض کنید $V = \bigcap\limits_{f\in G} V_f$. آنگاه V یک $T-$ همسایگی از x است و $g(V) \subseteq V'$.

(۳) بالاخره نشان می‌دهیم که تحدید g^{-1} به $g(E)$ پیوسته است.
فرض کنید $p = g(x)$ نقطه‌ای از $g(E)$ و V یک $T-$ همسایگی از $x = g^{-1}(p)$ باشد. پس V شامل یک زیرمجموعهٔ $T-$ باز U از E و شامل x است. چون (E,T) کاملاً منظم است یک نگاشت پیوستهٔ f_1 از E به $[0,1]$ وجود دارد بقسمی که $f_1(x) = 0$ و برای هر y از $C_E(U)$، داریم $f_1(y) = 1$ و از اینرو برای هر نقطهٔ y از $C_E(V)$ نیز چنین است. فرض کنید $V'_{f_1} = [0,1)$ و $V'_f = [0,1]$ برای هر $f \neq f_1$. بنابراین $V' = \prod_{f\in F} V'_f$ یک همسایگی از $p = g(x)$ در P است.

ثابت می‌کنیم که $(g^{-1})(V' \cap g(E)) \subseteq V$. فرض کنید t نقطه‌ای از $(g^{-1})(V' \cap g(E))$ باشد در اینصورت $g(t) \in V'$. اگر $t \notin V$ آنگاه $f_1(t) = 1$ و لذا $g(t) \notin V'$، بنابراین $t \in V$. پس g یک همانریختی از E به روی $g^{-1}(E)$ در $\prod_{f\in F} I_f$ است.

جواب ۱۶۵ فرض کنید $2n$ و $2n+2$ اعداد صحیح زوج متوالی باشند. در اینصورت $\{2n\}$ و $\{2n+2\}$ در توپولوژی اعداد بسته‌اند. از طرفی کوچکترین مجموعه‌های باز از توپولوژی اعداد که شامل آنها هستند به‌ترتیب برابر $\{2n-1, 2n, 2n+1\}$ و $\{2n+1, 2n+2, 2n+3\}$ می‌باشند. این نتیجه می‌دهد که ما نمی‌توانیم مجموعه‌های باز مجزا پیدا کنیم که شامل مجموعه‌های بستهٔ مجزای $\{2n\}$ و $\{2n+2\}$ باشد. پس توپولوژی اعداد نرمال نیست.

جواب ۱۶۶ با تمرین ۱۴۰ مقایسه کنید.

جواب ۱۶۷ فرض کنید $U_1 = C_E(B)$. در اینصورت U_1 یک زیرمجموعهٔ $T-$ باز از E است که شامل A می‌باشد. بنابر تمرین ۱۵۸ یک زیرمجموعهٔ $T-$ باز U_0 وجود دارد بقسمی که $A \subseteq U_0$ و $Cl(U_0) \subseteq U_1$.

اکنون فرض کنید که برای یک عدد طبیعی k یک دنبالهٔ از مجموعه‌های $T-$ باز $(U_{\frac{i}{2^k}})_{0\leq i\leq 2^k}$ ساخته باشیم بطوریکه برای $i = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$ داریم $Cl(U_{\frac{i}{2^k}}) \subseteq U_{\frac{(i+1)}{2^k}}$. (در حالت خاص این مطلب را برای $k = 0$ انجام دادیم). از تمرین ۱۵۸ نتیجه می‌گیریم که برای $j = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$ یک مجموعهٔ $T-$ باز $U_{\frac{(2j+1)}{2^{k+1}}}$ وجود دارد بطوریکه

$$Cl(U_{\frac{j}{2^k}}) = Cl(U_{\frac{2j}{2^{k+1}}}) \subseteq U_{\frac{2j+1}{2^{k+1}}}$$

و

$$Cl(U_{\frac{2j+1}{2^{k+1}}}) \subseteq U_{\frac{j+1}{2^k}} = U_{\frac{2j+2}{2^{k+1}}}.$$

با استفاده از استقرا نتیجه گرفته می‌شود که برای هر عدد گویای دوتایی r (عدد گویایی با مخرج توانی از ۲) در $[0, 1]$، یک مجموعهٔ باز U_r وجود دارد بقسمی که هرگاه r_1 و r_2 اعداد گویای دوتایی باشند که $r_1 < r_2$ در اینصورت داریم $Cl(U_{r_1}) \subseteq U_{r_2}$.

حال تابع $f : E \longrightarrow [0, 1]$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{اگر} \quad x \in B \\ \inf\{r \in [0, 1] : x \in U_r\} & \text{اگر} \quad x \in U_1 = C_E(B). \end{cases}$$

نشان خواهیم داد که f پیوسته است.

چون توپولوژی $[0, 1]$ توسط تمام بازه‌های بشکل $[0, s)$ و $(t, 1]$ تولید می‌شود، کافیست نشان دهیم که تصویر وارون تحت f از چنین بازه‌هایی، $T-$ باز است.

(۱) نشان می‌دهیم که $f^{-1}[0, s) = \bigcup\limits_{r\in K} U_r$ جائیکه K مجموعهٔ اعداد گویای دوتایی r است طوریکه $0 \leq r < s$. فرض کنید $x \in f^{-1}[0, s)$، در اینصورت $f(x) < s$ و یک عدد گویای دوتایی r_1 وجود دارد بطوریکه $f(x) \leq r_1 < s$. بنابراین $x \in U_{r_1}$. از اینرو داریم $x \in \bigcup\limits_{r\in K} U_r$. برعکس، فرض کنید $f^{-1}[0, s) \subseteq \bigcup\limits_{r\in K} U_r$. $x \in \bigcup\limits_{r\in K} U_r$. در اینصورت داریم $x \in U_{r_1}$، جائیکه r_1 یک عدد گویای دوتایی است که $0 \leq r_1 < s$. پس $f(x) \leq r_1 < s$ و لذا $x \in f^{-1}[0, s)$. بنابراین $\bigcup\limits_{r\in K} U_r \subseteq f^{-1}[0, s)$. از اینرو $f^{-1}[0, s) = \bigcup\limits_{r\in K} U_r$ و لذا باز است.

(۲) حال ادعا می‌کنیم که $f^{-1}(t, 1] = \bigcup_{r\in L}(C_E(Cl\ (U_r)))$ جائیکه L مجموعهٔ اعداد گویای دوتایی r است که $t < r \leq 1$.

فرض کنید $x \in f^{-1}(t, 1]$. در اینصورت $f(x) > t$، و اعداد گویای دوتایی r_1 و r_2 وجود دارند بطوریکه $t < r_1 < r_2 < f(x)$. پس $x \notin U_{r_2}$. از طرفی $Cl\ (U_{r_1}) \subseteq U_{r_2}$، نتیجه می‌گیریم که $x \notin Cl\ (U_{r_1})$. بنابراین $x \in C_E(Cl\ (U_{r_1}))$. پس $f^{-1}(t, 1] \subseteq \bigcup_{r\in L} C_E(Cl\ (U_r))$.

برعکس، فرض کنید $x \in \bigcup_{r\in L}(C_E(Cl\ (U_r)))$، مثلاً برای $r_1 \in L$، $x \notin U_{r_1}$. بنابراین $f(x) \geq r_1 > t$ و لذا $x \in f^{-1}(t, 1]$. از اینرو داریم $\bigcup_{r\in L}(C_E(Cl\ (U_r))) \subseteq f^{-1}(t, 1]$.

لذا $f^{-1}(t, 1] = \bigcup_{r\in L}(C_E(Cl\ (U_r)))$، مجموعه‌ای $T-$ باز است.

این نتیجه می‌دهد که f پیوسته است. بدیهی است که $f(A) = \{0\}$ و $f(B) = \{1\}$.

جواب ۱۶۸ در نظر بگیرید $I = [-1, 1]$ و فرض کنید:

$$
\begin{aligned}
A &= f^{-1}[-1, -\frac{1}{3}] = \{x \in F : -1 \leq f(x) \leq -\frac{1}{3}\}\\
B &= f^{-1}[\frac{1}{3}, 1] = \{x \in F : \frac{1}{3} \leq f(x) \leq 1\}.
\end{aligned}
$$

چون f پیوسته است و $[-1, -\frac{1}{3}]$ و $[\frac{1}{3}, 1]$ بسته‌اند لذا A و B مجموعه‌های T_F- بسته هستند و از اینرو $T-$ بسته‌اند. بوضوح مجزا نیز می‌باشند. با استفاده از یک صورت از لم اوریزون یک نگاشت پیوستهٔ g از E به $[-\frac{1}{3}, \frac{1}{3}]$ وجود دارد بقسمی که $g(A) = \{-\frac{1}{3}\}$ و $g(B) = \{\frac{1}{3}\}$. قرار دهید $f_0 = f$ و $g_0 = g$ و $f_1 = (f_0 - g_0)|F$. در اینصورت نشان می‌دهیم که برای هر x در F، داریم $|f_1(x)| \leq \frac{2}{3}$. این مطلب با درنظر گرفتن سه حالت زیر نتیجه می‌شود:

الف) اگر $x \in A$ آنگاه $-1 \leq f(x) = f_0(x) \leq -\frac{1}{3}$ و $g(x) = -\frac{1}{3}$. پس

$0 \leq f_0(x) - g_0(x) \leq -\frac{2}{3}$.

ب) اگر $x \in B$ آنگاه $1 \leq f(x) = f_0(x) \leq \frac{1}{3}$ و $\frac{1}{3} = g(x)$. پس $\frac{2}{3} \leq f_0(x) - g_0(x) \leq 0$.

ج) اگر $x \in C_F(A \cup B)$ در اینصورت $\frac{1}{3} \leq f(x) \leq -\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{3} \leq g(x) \leq -\frac{1}{3}$. پس داریم $\frac{2}{3} \leq f_0(x) - g_0(x) \leq -\frac{2}{3}$.

اکنون فرض کنید $A_1 = f_1^{-1}[-\frac{2}{3}, -\frac{1}{3}.\frac{2}{3}]$ و $B_1 = f_1^{-1}[\frac{1}{3}.\frac{2}{3}, \frac{2}{3}]$. بطریق مشابه یک تابع پیوستهٔ g_1 از E به $[-\frac{1}{3}.\frac{2}{3}, \frac{1}{3}.\frac{2}{3}]$ وجود دارد بقسمی که $g_1(A_1) = \{-\frac{1}{3}.\frac{2}{3}\}$ و $g_1(B_1) = \{\frac{1}{3}.\frac{2}{3}\}$ و اگر قرار دهیم $f_2 = (f_1 - g_1)|F$ داریم $|f_2(x)| \leq (\frac{2}{3})^2$، برای هر x از F. با تکرار این روش برای هر عدد طبیعی n یک نگاشت پیوستهٔ g_n از E به $[-\frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n, \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n]$ و یک نگاشت پیوستهٔ f_n از F به $[-(\frac{2}{3})^n, (\frac{2}{3})^n]$ وجود دارد بطوریکه برای تمام اعداد طبیعی n، $f_{n+1} = (f_n - g_n)|F$.

سری توابع $\sum g_n$ را درنظر بگیرید. ادعا می‌کنیم که این سری بطور یکنواخت همگرا روی E است. چنانچه ϵ عدد حقیقی مثبت باشد. یک عدد صحیح مثبت N وجود دارد بقسمی که $(\frac{2}{3})^N < \epsilon$. در اینصورت برای هر زوج از اعداد طبیعی m و n که $n > m > N$ داریم

$$\begin{aligned}
|g_m(x) &+ g_{m+1}(x) + \cdots + g_n(x)| \\
&\leq |g_m(x)| + |g_{m+1}(x)| + \cdots + |g_n(x)| \\
&\leq \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^m + \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^{m+1} + \cdots + \frac{1}{3}(\frac{2}{3})^n \\
&\leq (\frac{2}{3})^m \\
&< (\frac{2}{3})^N < \epsilon
\end{aligned}$$

برای هر نقطهٔ x از E. پس $\sum g_n$ بطور یکنواخت همگرا روی E است. اگر g تابع حاصل جمع آن باشد در اینصورت g پیوسته است. نشان می‌دهیم که برای هر نقطهٔ x از F، $g(x) = f(x)$. فرض کنید ϵ یک عدد حقیقی مثبت باشد و x نقطه‌ای از F باشد، در اینصورت برای تمام اعداد طبیعی m بزرگتر از N، داریم:

$$|f(x) - g_۰(x) - g_۱(x) - \cdots - g_m(x)| = |f_{m+۱}(x)| \leq (\frac{۲}{۳})^{m+۱} < \epsilon.$$

پس $\sum g_n(x)$ همگرا به $f(x)$ است، یعنی همانطور که می‌خواستیم $g(x) = f(x)$.

جواب ۱۶۹ فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های $T-$ بستهٔ مجزای E باشند. برای $i = ۱,۲$ مجموعه‌های $A_i = A \cap F_i$ و $B_i = B \cap F_i$ زیرمجموعه‌های T_i- بستهٔ مجزا از F_i هستند. از اینرو برای $i = ۱,۲$ مجموعه‌های $T-$ باز U_i و V_i وجود دارند بقسمی که $A_i \subseteq U_i \cap F_i$ و $B_i \subseteq V_i \cap F_i$ و $U_i \cap V_i \cap F_i = \emptyset$. برای $i = ۱,۲$، فرض کنید $U_i' = U_i \cup C_E(F_i)$ و $V_i' = V_i \cup C_E(F_i)$. در اینصورت برای $i = ۱,۲$ می‌بینیم که U_i' و V_i' زیرمجموعه‌های $T-$ باز هستند که بترتیب شامل A و B می‌باشند. قرار دهید $U = U_۱' \cap U_۲'$ و $V = V_۱' \cap V_۲'$. اینها مجموعه‌های $T-$ باز شامل A و B بترتیب هستند. نشان می‌دهیم که U و V مجزا هستند.

فرض کنید $x \in U \cap V$. چون $E = F_۱ \cup F_۲$ لذا $x \in F_۱$ یا $x \in F_۲$. چنانچه $x \in F_۱$ در اینصورت داریم

$$x \in U \Longrightarrow x \in U_۱' \Longrightarrow x \in U_۱ \cup C_E(F_۱) \Longrightarrow x \in U_۱.$$

از اینرو $x \in U_۱ \cap F_۱$. بطور مشابه داریم $x \in V_۱ \cap F_۱$، که یک تناقض است. زیرا $U_۱ \cap V_۱ \cap F_۱ = \emptyset$. پس (E, T) نرمال است.

جواب ۱۷۰ فرض کنید $\pi_۱$ و $\pi_۲$ اولین و دومین نگاشتهای مؤلفه‌ای از $I^۲$ به I باشد. در اینصورت $\pi_۱ \circ f$ و $\pi_۲ \circ f$ نگاشتهای پیوسته از F به I هستند. بنابراین با

استفاده از قضیهٔ گسترش تیتز، نگاشتهای پیوستهٔ $g_۱$ و $g_۲$ از E به I وجود دارد بقسمی که $g_i|F = \pi_i \circ f$ $(i = ۱, ۲)$. تابع $g : E \longrightarrow I^۲$ را بصورت $g(x) = (g_۱(x), g_۲(x))$ برای هر x در E تعریف می‌کنیم. در اینصورت g پیوسته است و $g|F = f$.

جواب ۱۷۱ فرض کنید A و B زیرمجموعه‌های جدا شده از E باشند.

چنانچه a نقطه‌ای از A باشد. چون $a \in C_E Cl_{T_d}(B)$، که T_d- باز است، یک عدد حقیقی مثبت $r(a)$ وجود دارد بقسمی که $V_d(a, r(a)) \subseteq C_E Cl_{T_d}(B)$. قرار دهید $U = \bigcup_{a\in A} V_d(a, \frac{۱}{۲}r(a))$. در اینصورت U مجموعهٔ T_d- باز شامل A است. بطور مشابه اگر b نقطه‌ای از B باشد، یک عدد حقیقی مثبت $s(b)$ وجود دارد بطوریکه $V_d(b, s(b)) \subseteq C_E Cl_{T_d}(A)$. در اینصورت $V = \bigcup_{b\in B} V_d(b, \frac{۱}{۲}s(b))$ مجموعهٔ T_d- باز شامل B است. نشان می‌دهیم که $U \cap V = \emptyset$.

فرض کنید یک نقطه x در $U\cap V$ وجود داشته باشد. در اینصورت نقاط a از A و b از B وجود خواهند داشت بطوریکه $x \in V_d(a, \frac{۱}{۲}r(a))$ و $x \in V_d(b, \frac{۱}{۲}s(b))$. از اینرو خواهیم داشت $d(a, b) \leq d(a, x) + d(x, b) < \frac{۱}{۲}r(a) + \frac{۱}{۲}s(b) \leq \max\{r(a), s(b)\}$. پس $a \in V_d(b, s(b))$ یا $b \in V_d(a, r(b))$، که هر دو تناقض می‌باشند. لذا (E, T) کاملاً نرمال می‌باشد.

جواب ۱۷۲ (۱) فرض کنید (E, T) کاملاً نرمال باشد.

باید ثابت کنیم که هر زیر فضا نه تنها نرمال است بلکه در واقع کاملاً نرمال است. فرض کنید F یک زیرمجموعه از E و A و B زیرمجموعه‌های جدا شدهٔ F باشند. در اینصورت داریم $A \cap Cl_T(B) = (A \cap F) \cap Cl_T(B) = A \cap (F \cap Cl_T(B)) = A \cap Cl_{T_F}(B) = \emptyset$. بطور مشابه $B \cap Cl_T(A) = \emptyset$. پس A و B زیرمجموعه‌های جدا شدهٔ E هستند. از اینرو زیرمجموعه‌های $T-$ باز مجزای U و V از E وجود دارد بطوریکه $A \subseteq U$ و $B \subseteq V$. در اینصورت $U \cap F$ و $V \cap F$ زیرمجموعه‌های T_F- باز مجزا از F هستند بقسمی که $A \subseteq U \cap F$ و $B \subseteq V \cap F$. پس (F, T_F) کاملاً نرمال است.

(۲) برعکس، فرض کنید هر زیر فضای (E,T) نرمال باشد.
چنانچه A و B زیرمجموعه‌های جدا شدهٔ E باشند. قرار دهید $X = C_E(Cl_T(A) \cap Cl_T(B))$. در اینصورت $X \cap Cl_T(A)$ و $X \cap Cl_T(B)$ زیرمجموعه‌های T_X- بسته از X هستند و بوضوح مجزا می‌باشند. چون (X,T_X) نرمال است، مجموعه‌های T_X- باز مجزای U و V وجود دارند که به ترتیب شامل $X \cap Cl_T(A)$ و $X \cap Cl_T(B)$ هستند. چون X، مجموعه‌ای $T-$ باز است لذا U و V مجموعه‌های $T-$ باز هستند، علاوه بر این $A = A \cap C_E Cl_T(B) \subseteq Cl_T(A) \cap C_E Cl_T(B) = Cl_T(A) \cap X \subseteq U$.
بطور مشابه $B \subseteq V$. پس (E,T) کاملاً نرمال است.

جواب ۱۷۳ توپولوژی اقلیدسی معمولی روی E را با T^* نمایش می‌دهیم.
در اینصورت همهٔ مجموعه‌های T^*- باز، $T-$ باز هستند. چون T^* یک توپولوژی T_1 است، پس T یک توپولوژی T_1 است. حال فرض کنید A و B مجموعه‌های $T-$ بستهٔ مجزا باشند، چنانچه $A_1 = A \cap Q$ و $B_1 = B \cap Q$.
نشان می‌دهیم که A_1 و B_1 زیر مجموعه‌های T^*- جدا شده از E هستند، یعنی $Cl_{T^*}(A_1) \cap B_1 = \emptyset = Cl_{T^*}(B_1) \cap A_1$. فرض کنید یک نقطهٔ x عضو $Cl_{T^*}(A_1) \cap B_1$ داشته باشیم. U را یک مجموعهٔ $T-$ باز شامل x بگیرید در اینصورت $U = U^* \cup V$ است که $U^* \in T^*$ و $V \subseteq C_E(Q)$. چون $x \in B_1 \subseteq Q$، باید داشته باشیم $x \in U^*$. از اینرو U^* مجموعه A_1 را قطع می‌کند (زیرا $x \in Cl_{T^*}(A_1)$).
پس U مجموعه A را قطع می‌کند. بنابراین $x \in Cl_T(A) \cap B = A \cap B = \emptyset$، که یک تناقض است. پس $Cl_{T^*}(A_1) \cap B_1 = \emptyset$. بطور مشابه $Cl_{T^*}(B_1) \cap A_1 = \emptyset$.

بنابراین A_1 و B_1 زیرمجموعه‌های جدا شده از E با توپولوژی معمولی T^* که بوسیلهٔ یک متریک القا شده است، و لذا کاملاً نرمال است. بنابراین زیرمجموعه‌های T^*- باز مجزای U_1 و V_1 از E وجود دارند بقسمی که $U_1 \supseteq A_1$ و $V_1 \supseteq B_1$. قرار می‌دهیم $U = U_1 \cup (A \cap C_E\ (Q))$ و $V = V_1 \cup (B \cap C_E\ (Q))$. بنابراین U و V مجموعه‌های مجزای $T-$ باز هستند که به ترتیب شامل A و B می‌باشند. لذا (E,T) نرمال است و از اینرو T_4 است.

جواب ۱۷۴ استلزامهای $T_0 \Longrightarrow T_1$، $T_1 \Longrightarrow T_2$، $T_2 \Longrightarrow T_{2\frac{1}{2}}$ نتایج روشنی از تعاریف هستند. برای نشان دادن $T_{2\frac{1}{2}} \Longrightarrow T_3$، فرض کنید x و y نقاط متمایزی از E باشند. چون فضاهای T_3، فضای T_1 هستند نتیجه گرفته می‌شود که $\{y\}$ یک مجموعهٔ $T-$ بسته است. از طرفی $x \notin \{y\}$ پس از منظم بودن T نتیجه می‌گیریم که مجموعه‌های $T-$ باز مجزای U_1 و V_1 وجود دارند بقسمی که $x \in U_1$ و $\{y\} \subseteq V_1$، یعنی $y \in V_1$. اکنون $Cl_T(V_1)$ یک مجموعهٔ $T-$ بسته است و x متعلق به آن نیست زیرا دارای یک $T-$ همسایگی U_1 است که V_1 را قطع نمی‌کند. از اینرو با استفاده دوباره از منظم بودن، مجموعه‌های $T-$ باز مجزای U_2 و V_2 بدست می آیند که $x \in U_2$ و $Cl_T(V_1) \subseteq V_2$. نشان می‌دهیم که $Cl_T(U_2) \cap Cl_T(V_1) = \emptyset$. اگر یک نقطهٔ z در این اشتراک وجود داشته باشد، خواهیم داشت $z \in V_2$. اما در اینصورت V_2 یک همسایگی از z خواهد بود که U_2 را قطع نمی‌کند و این تناقض با فرض می‌باشد که $z \in Cl(U_2)$. بنابراین U_2 و V_1 بترتیب، $T-$ همسایگی‌هایی از x و y می‌باشند که بستارشان مجزاست، پس T کاملاً هاسدرف است.

فرض کنید T فضای $T_{3\frac{1}{2}}$ باشد. در اینصورت T فضای T_1 و کاملاً منظم است. از اینرو، با استفاده از تمرین ۱۶۲، می‌بینیم که T توپولوژی T_1 و منظم است، یعنی T_3 است.

فرض کنید T، فضای T_4 باشد. در اینصورت T بطور قطع T_1 است. برای نشان دادن اینکه T کاملاً منظم است، فرض کنید a نقطه‌ای از E و F یک زیرمجموعهٔ $T-$ بسته از E باشد که شامل a نیست. در اینصورت $\{a\}$ و F زیرمجموعه‌های $T-$ بستهٔ مجزا هستند. (با استفاده از خاصیت T_1) طبق لم اوریزون نگاشت پیوسته‌ای از E به $[0, 1]$ وجود دارد، که برای نشان دادن کاملاً منظم بودن T استفاده می‌شود. بنابراین T فضای $T_{3\frac{1}{2}}$ است.

بالاخره اگر T یک فضای T_5 باشد، آنگاه T_1 و کاملاً نرمال است. از طرفی چون زیر مجموعه‌های بسته و مجزا، جدا شده می‌باشند، پس از تعریف کاملاً نرمال بودن نتیجه گرفته می‌شود که T نرمال است و از اینرو T_4 است.

فصل ۱۳

جوابهای فصل ٦

جواب ۱۷۵ فرض کنید E یک مجموعهٔ نامتناهی و T توپولوژی متمم باپایان روی E باشد. چنانچه $(U_i)_{i\in I}$ یک پوشش $T-$ باز از E باشد. فرض کنید $U_{i_\circ}$ یک مجموعهٔ غیرتهی از پوشش باشد. در این‌صورت $C_E(U_{i_\circ})$ متناهی است مثلاً $C_E(U_{i_\circ}) = \{p_۱, \dots, p_n\}$. برای $j = ۱, \dots, n$ یک مجموعهٔ U_{i_j} از پوشش وجود دارد بقسمی که $p_j \in U_{i_j}$. در این‌صورت $E = U_{i_\circ} \cup U_{i_۱} \cup \dots \cup U_{i_n}$. پس (E, T) فشرده است.

جواب ۱۷٦ (۱) هر فضای توپولوژیکی (E, T) در صورتی‌که E یک مجموعهٔ متناهی باشد، فشرده است. بنابراین در حالت خاص هر فضای گسستهٔ متناهی فشرده است.

(۲) فرض کنید (E, T) یک فضای گسسته باشد که E نامتناهی است.
در این‌صورت $(\{x\})_{x\in E}$ یک پوشش باز E است بطوریکه دارای زیرپوشش متناهی نیست. بنابراین (E, T) فشرده نیست.

جواب ۱۷۷ (۱) فرض کنید A فشرده است.
چنانچه $(F_i)_{i\in I}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های T_A- بستهٔ A با خاصیت مقطع باپایان باشد. برای هر اندیس i در I یک زیرمجموعهٔ $T-$ بستهٔ F_i' از E وجود دارد بقسمی که $F_i = F_i' \cap A$. اگر $\bigcap\limits_{i\in I} F_i = \emptyset$ داریم $A \cap (\bigcap\limits_{i\in I} F_i') = \emptyset$ و از اینرو $\bigcup\limits_{i\in I} C_E(F_i') = C_E(\bigcap\limits_{i\in I} F_i') \supseteq A$. بنابراین $(C_E(F_i'))_{i\in I}$ یک پوشش $T-$ باز از A می‌باشد. با استفاده از فرضیات، یک زیرمجموعهٔ متناهی J از I وجود دارد بقسمی که $A \supseteq \bigcup\limits_{i\in I} C_E(F_i')$، لذا $A \supseteq C_E(\bigcap\limits_{i\in J} F_i')$ و بنابراین $\bigcap\limits_{i\in J}(A \cap F_i') = \emptyset$، یعنی، $\bigcap\limits_{i\in J} F_i = \emptyset$. این یک تناقض است (زیرا (F_i) دارای خاصیت مقطع باپایان است). از اینرو $\bigcap\limits_{i\in J} F_i \neq \emptyset$.

(۲) برعکس، فرض کنید که شرط حکم برقرار باشد.
چنانچه $(U_i)_{i\in I}$ یک پوشش $T-$ باز از A باشد. در این‌صورت $\bigcup\limits_{i\in I} U_i \supseteq A$ و لذا $A \cap C_E(\bigcup\limits_{i\in I} U_i) = \emptyset$. بنابراین $(A \cap C_E(U_i))_{i\in I}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های T_A- باز A می‌باشد بقسمی که اشتراک کلی آن تهی است. از اینرو این خانواده نمی‌تواند دارای خاصیت مقطع باپایان باشد. پس یک زیرمجموعهٔ متناهی J از I وجود دارد بطوریکه $\bigcap\limits_{i\in J}(A \cap C_E(U_i)) = \emptyset$.
از اینرو $A \cap C_E(\bigcup\limits_{i\in J} U_i) = A \cap (\bigcap\limits_{i\in J}(C_E(U_i)) = \emptyset$ و لذا داریم $A \subseteq \bigcup\limits_{i\in J} U_i$. پس A فشرده است.

جواب ۱۷۸ (۱) $\Longleftarrow$ (۲) فرض کنید (E,T) فشرده است.
چنانچه F یک فیلتر روی E باشد. در این‌صورت خانوادهٔ $(Cl\ (X))_{X\in F}$ دارای خاصیت مقطع باپایان است. از اینرو $\bigcap\limits_{X\in F} Cl\ (X)$ غیرتهی است، یعنی F دارای حداقل یک نقطهٔ چسبیدگی است.
(۲) $\Longleftarrow$ (۳) فرض کنید هر فیلتر روی E دارای حداقل یک نقطهٔ چسبیدگی باشد.

چنانچه F یک فرافیلتر روی E باشد. در این‌صورت F دارای یک نقطهٔ چسبیدگی مثل p است. اما هر نقطهٔ چسبیدگی از یک فرافیلتر، یک نقطهٔ حدی است. پس F همگرا به p است.

(۳) $\Longleftarrow$ (۱) فرض کنید هر فرافیلتر روی E همگرا باشد.

چنانچه $(F_i)_{i\in I}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های $T-$ بستهٔ E باشد که دارای خاصیت مقطع باپایان است. این خانواده یک فیلتر تولید می‌کند که مشمول در یک فرافیلتر Ψ است که همگرا به نقطه‌ای مثل p می‌باشد. ادعا می‌کنیم که $p \in \bigcap\limits_{i\in I} F_i$. فرض کنید F_i مجموعه‌ای از خانواده باشد. برای هر $T-$ همسایگی V از p داریم $F_i \in \Psi$ و $V \in \Psi$. لذا $F_i \cap V \neq \emptyset$. بنابراین $p \in Cl\ (F_i) = F_i$. پس $\bigcap\limits_{i\in I} F_i \neq \emptyset$ و از اینرو (E,T) فشرده است.

جواب ۱۷۹ فرض کنید (E,T) یک فضای هاسدرف و K یک زیرمجموعهٔ فشرده از E باشد. چنانچه a نقطه‌ای از $C_E(K)$ باشد. برای هر نقطهٔ x از K مجموعه‌های مجزای $T-$ باز V_x, U_x وجود دارند بقسمی که $x \in U_x$ و $a \in V_x$. در اینصورت $(U_x)_{x\in K}$ یک پوشش باز برای K است. بنابراین یک زیرپوشش متناهی وجود دارد لذا یک زیرمجموعهٔ متناهی $\{x_۱, \ldots, x_n\}$ از K وجود دارد بطوریکه $K \subseteq U_{x_۱} \cup U_{x_۲} \cup \cdots \cup U_{x_n}$. فرض کنید $V = V_{x_۱} \cap V_{x_۲} \cap \cdots \cap V_{x_n}$، آنگاه V یک مجموعهٔ باز شامل a است و $V \cap (U_{x_۱} \cup \cdots \cup U_{x_n} = \emptyset$. از اینرو $V \subseteq C_E(K)$. پس $C_E(K)$ یک $T-$ همسایگی از هر یک از نقاطش است، لذا $T-$ باز است. بنابراین K، مجموعه‌ای $T-$ بسته است.

جواب ۱۸۰ فرض کنید $(K_i)_{i\in I}$ یک خانوادهٔ متناهی از زیرمجموعه‌های فشردهٔ در E باشد. چنانچه $(U_j)_{j\in J}$ یک پوشش باز برای $\bigcup\limits_{i\in I} K_i$ باشد. در این‌صورت $(U_j)_{j\in J}$ پوشش بازی از هر یک از مجموعه‌های فشردهٔ K_i نیز هست. بنابراین برای هر اندیس

i در I یک زیرمجموعهٔ متناهی J_i از J وجود دارد بقسمی که $K_i \subseteq \bigcup_{j\in J_i} U_j$. فرض کنید $J' = \bigcup_{i\in I} J_i$. آنگاه J' یک مجموعهٔ متناهی است و $\bigcup_{i\in I} K_i \subseteq \bigcup_{j\in J'} U_j$. لذا $\bigcup_{i\in I} K_i$ فشرده است.

جواب ۱۸۱ فرض کنید (E,T) یک فضای فشرده و F یک زیرمجموعهٔ $T-$ بسته از E باشد. چنانچه $(U_i)_{i\in I}$ یک پوشش $T-$ باز از F باشد، بطوریکه $F \subseteq \bigcup_{i\in I} U_i$. در این‌صورت $C_E(F) \cup (\bigcup_{i\in I} U_i) = E$. از اینرو یک زیرمجموعهٔ متناهی J از I وجود دارد بقسمی که $C_E(F) \cup (\bigcup_{i\in J} U_i) = E$. در این‌صورت $F \subseteq \bigcup_{i\in J} U_i$. لذا F فشرده است.

جواب ۱۸۲ فرض کنید $(K_i)_{i\in I}$ یک خانواده از زیرمجموعه‌های فشردهٔ فضای هاسدرف (E,T) باشد. در این‌صورت هر یک از مجموعه‌های K_i، مجموعه‌ای $T-$ بسته است. لذا $\bigcap_{i\in I} K_i$، یک مجموعه $T-$ بسته است و یک زیرمجموعه از هر یک از مجموعه‌های فشردهٔ K_i است. از اینرو $\bigcap_{i\in I} K_i$ فشرده است.

جواب ۱۸۳ فرض کنید (E,T) یک فضای هاسدرف فشرده باشد. چنانچه A, B زیرمجموعه‌های بستهٔ مجزا از E باشند. در این‌صورت A فشرده است و بنابر تمرین ۱۷۹ برای هر نقطهٔ b از B می‌توانیم یک مجموعهٔ باز U_b شامل A و یک مجموعهٔ باز V_b شامل b بسازیم بطوریکه $U_b \cap V_b = \emptyset$. در این‌صورت $(V_b)_{b\in B}$ یک پوشش باز B است، که فشرده نیز می‌باشد. بنابراین یک زیرمجموعهٔ متناهی $\{b_۱, \ldots, b_n\}$ از B وجود دارد بقسمی که $B \subseteq V_{b_۱} \cup \cdots \cup V_{b_n} = V$. قرار دهید $U = U_{b_۱} \cap \cdots \cap U_{b_n}$. در این‌صورت U, V مجموعه‌های باز مجزایی هستند که بترتیب شامل A, B هستند. لذا (E,T) نرمال است.

جواب ۱۸۴ فرض کنید $(U'_i)_{i\in I}$ یک پوشش $T'-$ باز از $f(E)$ باشد. در این‌صوت $(f^{-1}(U'_i))_{i\in I}$ یک پوشش $T-$ باز از E است (زیرا f تابع $(T,T')-$ پیوسته است). از اینرو یک زیرمجموعهٔ متناهی J از I وجود دارد بقسمی که $E=\bigcup\limits_{i\in J} f^{-1}(U'_i)$. در این‌صورت داریم

$$f(E)=f(\bigcup_{i\in J} f^{-1}(U'_i))=\bigcup_{i\in J} f(f^{-1}(U'_i))\subseteq\bigcup_{i\in J} U'_i$$

پس $f(E)$ فشرده می‌باشد.

جواب ۱۸۵ فرض کنید (E,T) فشرده، (E',T') هاسدرف و f یک نگاشت دو سویی $(T,T')-$ پیوسته از E به روی E' باشد. باید نشان دهیم که f^{-1}، تابعی $(T',T)-$ پیوسته است.

فرض کنید F یک زیرمجموعهٔ $T-$ بسته از E باشد. چون E فشرده و F بسته است، لذا F فشرده است. همچنین f پیوسته است لذا $f(F)$ فشرده می‌باشد. از طرفی E' هاسدرف است، لذا $f(F)$ بسته است، یعنی $(f^{-1})^{-1}(F)$، مجموعه‌ای $T'-$ بسته است. پس f^{-1} تابعی $(T',T)-$ پیوسته است.

جواب ۱۸۶ (۱) فرض کنید فضاهای (E_i,T_i) فشرده باشند. چنانچه U یک فرافیلتر روی E باشد. برای هر اندیس i در I، خانوادهٔ $\{\pi_i(X)\}_{X\in U}$ پایه‌ای برای یک فرافیلتر U_i روی E_i است. چون هر (E_i,T_i) فشرده است، پس هر یک از فرافیلترهای U_i به یک نقطهٔ a_i از E_i همگراست.

فرض کنید a نقطه‌ای از E باشد که برای هر اندیس i در I، $\pi_i(a)=a_i$. ادعا می‌کنیم که U به a همگراست. چنانکه V یک $T-$ همسایگی از a باشد، در این‌صورت یک زیرمجموعهٔ متناهی J از I و یک خانوادهٔ $(X_i)_{i\in J}$ وجود

دارند بقسمی که برای هر اندیس i در J مجموعهٔ X_i یک زیرمجموعهٔ T_i– باز از E_i است و $a \in \bigcap_{i\in J} \pi_i^{-1}(X_i) \subseteq V$. برای هر اندیس i در J مجموعهٔ X_i یک T_i– همسایگی از a_i است و لذا متعلق به U_i است. از اینرو برای هر اندیس i در J داریم $\pi_i^{-1}(X_i) \in U$. لذا چون J باپایان است داریم $V \in U$. بنابراین U همگرا به a است. پس (E, T) فشرده است.

(۲) برعکس، فرض کنید همهٔ مجموعه‌های E_i غیرتهی و (E, T) فشرده باشد. برای هر اندیس i در I، تصویر π_i یک تابع (T, T_i)– پیوسته و پوشا است. بنابراین برای هر اندیس i، مجموعهٔ $E_i = \pi_i(E)$ فشرده است.

جواب ۱۸۷ (۱) $\Longleftarrow$ (۲) با تمرین ۱۷۷ مقایسه کنید.

(۳) $\Longleftarrow$ (۴) فرض کنید هر زیرمجموعهٔ نامتناهی شمارا دارای یک نقطهٔ ω– انباشتگی باشد. چنانچه $\sigma : \mathbf{N} \longrightarrow E$ یک دنباله در E باشد. قرار دهید $A = \sigma(\mathbf{N})$. اگر A متناهی باشد در این‌صورت σ بوضوح دارای یک نقطه چسبیدگی است. اگر A نامتناهی باشد، آن دارای یک نقطهٔ ω– انباشتگی a است، و a نیز بوضوح یک نقطهٔ چسبیدگی σ است.

(۴) $\Longleftarrow$ (۳) فرض کنید هر دنباله دارای یک نقطهٔ چسبیدگی باشد. چنانچه A یک زیرمجموعهٔ نامتناهی شمارا از E باشد. آنگاه یک نگاشت دو سویی σ از $\mathbf{N}$ به روی A وجود دارد که البته دنباله‌ای در E است. با توجه به فرضیات، σ دارای یک نقطهٔ چسبیدگی a در E است. در این‌صورت a یک نقطهٔ ω– انباشتگی از A است.

(۳) $\Longleftarrow$ (۱) فرض کنید هر زیرمجموعهٔ نامتناهی شمارا دارای یک نقطهٔ ω– انباشتگی باشد. چنانچه $(U_n)_{n\in\mathbf{N}}$ یک پوشش باز شمارا از E باشد. می‌توانیم فرض کنیم که مجموعه‌های U_n همگی متمایزند و هیچ کدام از آنها مشمول در اجتماع ما قبل خود نیست. فرض کنید این پوشش دارای هیچ زیرپوشش متناهی نباشد. در این‌صورت برای هر عدد طبیعی m یک نقطهٔ x_m وجود دارد بقسمی

که $\bigcup\limits_{n<m} U_n$ $x_m \notin$ و $x_m \in \bigcup\limits_{n\leq m} U_n$. نقاط x_m همگی متمایزند، بنابراین مجموعهٔ $X = \{x_m\}$ نامتناهی است.

ادعا می‌کنیم که X دارای هیچ نقطهٔ $\omega-$ انباشتگی نیست. زیرا اگر p یک نقطه از E باشد، یک عدد طبیعی k وجود دارد بقسمی که $p \in U_k$ و U_k یک $T-$ همسایگی از p است بطوریکه شامل تعداد متناهی نقطه از X است.

(۱) $\Longleftarrow$ (۳) فرض کنید یک زیرمجموعهٔ نامتناهی شمارای S از E وجود دارد که نقطهٔ $\omega-$ انباشتگی ندارد. در این‌صورت برای هر نقطهٔ x از E باید یک زیرمجموعهٔ باز U_x وجود داشته باشد که شامل x است اما شامل حداکثر تعداد شمارش‌پذیر نقطه از S می‌باشد. فرض کنید Z مجموعه‌ای (شمارش‌پذیر) از زیرمجموعه‌های متناهی S باشد. برای هر مجموعهٔ F در Z فرض کنید $I_F = \{x \in E : U_x \cap S = F\}$ و $U_F = \bigcup\limits_{x\in I_F} U_x$. در این‌صورت $(U_F)_{F\in Z}$ یک پوشش باز شمارش‌پذیر از E است. ولی اگر $\{F_1, F_2, \dots, F_k\}$ یک زیرمجموعهٔ متناهی از Z باشد داریم:

$$\begin{aligned} S\cap(U_{F_1}\cup U_{F_2}\cup\cdots\cup U_{F_k}) &= (S\cap U_{F_1})\cup(S\cap U_{F_2})\cup\cdots\cup(S\cap U_{F_k}) \\ &= F_1\cup\cdots\cup F_k. \end{aligned}$$

که متناهی است. بنابراین پوشش باز شمارای $(U_F)_{F\in Z}$ دارای هیچ زیرپوشش متناهی نیست. بنابراین (E,T) فشردهٔ شمارشی نیست.

جواب ۱۸۸ بدیهی است.

جواب ۱۸۹ فرض کنید (E,T) یک فضای فشرده و (E',T') یک فضای فشردهٔ شمارشی باشد. چنانچه $(U_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک پوشش $(T\times T')-$ باز شمارا از $E\times E'$ باشد. برای هر عدد طبیعی n، قرار دهید $G_n = \cup_{0\leq k\leq n} U_k$. در اینصورت برای هر عدد طبیعی n، $G_n \subseteq G_{n+1}$. فرض کنید H_n مجموعه‌ای از نقاط y از E' باشد بطوریکه

یک T'− همسایگی V' از y وجود داشته باشد که $E \times V' \subseteq G_n$. هر H_n، مجموعهٔ T'− باز است، زیرا اگر $y \in E'$ و V' یک T'− همسایگی از y باشد بطوریکه $E \times V' \subseteq G_n$. در اینصورت یک T'− همسایگی W' از y وجود دارد بقسمی که V' یک T'− همسایگی از تمام نقاط W' است. این موضوع نشان می‌دهد که $W' \subseteq H_n$. پس H_n یک T'− همسایگی از هر یک نقاط خودش y می‌باشد و از اینرو T'− باز است.

چون $G_n \subseteq G_{n+1}$، برای هر عدد طبیعی n، داریم $H_n \subseteq H_{n+1}$. ادعا می‌کنیم که $\cup_{n\in\mathbb{N}} H_n = E'$. فرض کنید b نقطه‌ای از E' باشد. برای هر نقطهٔ x از E نقطهٔ (x,b) متعلق به یکی از مجموعه‌های خانوادهٔ (G_n)، مثلاً $(x,b) \in G_{n(x)}$ است. پس برای هر نقطهٔ x از E یک مجموعهٔ T− باز V_x و یک مجموعهٔ T'− باز V'_x وجود دارد بقسمی که $(x,b) \in V_x \times V'_x \subseteq G_{n(x)}$. بنابراین $B = E \times \{b\} \subseteq \cup_{x\in E}(V_x \times V'_x)$. اما بوضوح B همانریخت با E است و از اینرو فشرده است. پس یک زیرمجموعهٔ متناهی $\{x_1, \ldots, x_n\}$ از E وجود دارد بقسمی که $B \subseteq \cup_{1\leq k\leq n} V_{x_k} \times V'_{x_k}$. بنابراین اگر $m(b) = \max\{n(x_1), \ldots, n(x_n)\}$ آنگاه $B \subseteq \cup_{1\leq k\leq n} G_{n_{(x_k)}} = G_{m(b)}$. فرض کنید $V' = \cap_{1\leq k\leq n} V'_{x_k}$، در اینصورت V' یک T'− همسایگی از b است. لذا داریم $B \subseteq (\cup_{1\leq k\leq n} V_{x_k}) \times V' = E \times V' \subseteq G_{m(b)}$ و از اینرو $b \in H_{m(b)}$.

پس $(H_n)_{n\in\mathbb{N}}$ یک پوشش T'− باز شمارش‌پذیر برای E' است. بنابراین یک عدد طبیعی $\mathbf{p}$ وجود دارد بقسمی که $H_p = E'$. در اینصورت برای هر نقطهٔ y از E' یک T'− همسایگی V' وجود دارد بقسمی که $E \times V' \subseteq G_p$، یعنی برای هر نقطهٔ x از E داریم $(x,y) \in G_p$. پس $G_p = E \times E'$. بنابراین $E \times E' = U_1 \cup U_2 \cup \cdots \cup U_p$.

جواب ۱۹۰ (۱) فشردگی شمارشی: با تمرین ۱۸۴ مقایسه کنید.

(۲) فشردگی دنباله‌ای: چنانچه σ یک دنباله در $f(E)$ باشد، جاییکه E فشردهٔ دنباله‌ای است. برای هر عدد طبیعی n فرض کنید x_n نقطه‌ای از E باشد بطوریکه $f(x_n) = \sigma(n)$. بنابراین یک دنبالهٔ v در E داریم بطوریکه $\sigma = f \circ v$ (v بوسیلهٔ

$v(n) = x_n$ تعریف می‌شود). با استفاده از فرضیات، v دارای یک زیر دنبالهٔ همگرای v' است. بنابراین $f \circ v'$ یک زیردنبالهٔ همگرا از σ است.

جواب ۱۹۱ فرض کنید γ یک عدد اوردینال باشد. چنانچه $\Gamma = \gamma \cup \{\gamma\}$. در اینصورت Γ خوش ترتیب است. هر زیرمجموعهٔ غیرتهی X از Γ دارای یک بزرگترین کران پایین (اولین عضو آن) و یک کوچکترین کران بالا (اولین عضو مجموعهٔ تمام کرانهای بالای X، که یک مجموعهٔ غیرتهی است زیرا γ یک کران بالای X است.) می‌باشد.

فرض کنید $(U_i)_{i \in I}$ یک پوشش باز از Γ باشد (جاییکه Γ دارای توپولوژی ترتیبی است). چنانچه

$$S = \{y \in \Gamma : \text{توسط تعداد متناهی از عناصر پوشش، پوشیده شود.} \ [\circ, y)\}$$

فرض کنید α کوچکترین کران بالای S باشد. یک اندیس $i_\circ$ در I وجود دارد بطوریکه $\alpha \in U_{i_\circ}$. مجموعهٔ $U_{i_\circ}$ مشمول در S است. اگر $\alpha \neq \gamma$ در اینصورت یک بازهٔ (x, y) وجود دارد بقسمی که $\alpha \in (x, y) \subseteq U_{i_\circ}$. پس $y \in S$، اما $y > \alpha$، که این یک تناقض است. پس $\alpha = \gamma$ و از اینرو $S = \Gamma$. بنابراین Γ فشرده است.

در حالت خاص $\Omega_۱ = w_۱ \cup \{w_۱\}$ فشرده است و از اینرو فشردهٔ شمارشی است. بنابراین هر زیر مجموعهٔ نامتناهی $w_۱$ دارای یک نقطهٔ $w-$ انباشتگی در $\Omega_۱$ است. ولی $w_۱$ یک نقطهٔ $w-$ انباشتگی از هر زیرمجموعهٔ نامتناهی $w_۱$ نیست. بنابراین هر زیرمجموعهٔ نامتناهی از $w_۱$ دارای یک نقطهٔ $w-$ انباشتگی در $w_۱$ است. لذا $w_۱$ فشردهٔ شمارشی است.

برای اینکه ببینیم $w_۱$ فشردهٔ دنباله‌ای است، فرض کنید σ یک دنباله در $w_۱$ باشد. اگر $\sigma(\mathbf{N})$ متناهی باشد در اینصورت بدیهی است که σ دارای یک زیردنبالهٔ همگراست. اگر $\sigma(\mathbf{N})$ نامتناهی باشد. در اینصورت $\sigma(\mathbf{N})$ دارای یک نقطهٔ $w-$ انباشتگی مثل α در $w_۱$ است. α دارای یک پایهٔ همسایگی شمارا (شامل $\{\alpha\}$ است اگر α یک حد ترتیبی نباشد، شامل تعداد شمارا فاصله‌های $(\beta, \alpha]$ است جاییکه

β یک عدد ترتیبی کمتر از α باشد وقتی که α یک حد ترتیبی باشد) است و لذا یک دنبالهٔ $(V_n)_{n\in\mathbf{N}}$ از همسایگیهای α چنان وجود دارد که برای هر عدد طبیعی n، $V_n \subseteq V_{n+1}$. با انتخاب یک نقطه از $\sigma(\mathbf{N})$ از هر همسایگی V_n یک دنباله بدست می‌آوریم بطوریکه همگرا به α است. بنابراین w_1 فشردهٔ دنباله‌ای است. ولی w_1 فشرده نیست، زیرا پوشش $([0,\alpha))_{\alpha\in w_1}$ دارای هیچ زیر پوشش متناهی نیست.

جواب ۱۹۲ با توجه به قضیهٔ هاینه‌بورل، I فشرده است. از اینرو با توجه به قضیهٔ تیخونوف P فشرده است. (طبق قضیهٔ هاینه‌بورل از آنالیز حقیقی می‌دانیم که هر بازهٔ بستهٔ کراندار $E=[a,b]$ فشرده است. برای اثبات، فرض کنید $(U_i)_{i\in I}$ یک پوشش باز E باشد. چنانچه A مجموعه‌ای از نقاط x در E باشد که زیر فاصله‌های $[a,x]$ می‌تواند توسط تعداد متناهی مجموعه از پوشش، پوشیده شوند. در اینصورت فرض کنید $c=\sup A$ و ثابت کنید که $c=b$ و $c\in A$.)

عناصر P توابعی از I به I هستند. ادعا می‌کنیم که یک دنبالهٔ (f_n) از عناصر P همگرا به نقطهٔ f از P است اگر و تنها اگر دنبالهٔ $(f_n(x))$ از نقاط I برای هر x از I همگرا به $f(x)$ باشد. ابتدا فرض کنید که (f_n) همگرا به f باشد و x نقطه‌ای از I باشد. چنانچه V یک همسایگی از $f(x)$ در I باشد. فرض کنید برای $t\neq x$، $V_t=I$ و $V_x=V$. در اینصورت $\prod_{t\in I} V_t$ یک همسایگی از f در P است. بنابراین یک عدد صحیح مثبت n_0 وجود دارد بقسمی که برای هر $n>n_0$ داریم $f\in\prod_{t\in I} V_t$. از اینرو برای هر $n>n_0$ داریم $f_n(x)\in V_x=V$. پس $(f_n(x))$ همگرا به $f(x)$ است.

برعکس، فرض کنید (f_n) دنباله‌ای از عناصر P باشد بطوریکه برای هر x در I، $(f_n(x))$ همگرا به $f(x)$ باشد.

چنانچه V یک همسایگی از f در P باشد. در اینصورت یک خانوادهٔ $(X_t)_{t\in I}$ از زیر مجموعه‌های باز I و یک زیرمجموعهٔ متناهی J از I وجود دارد بقسمی که برای هر t که در J نباشد $X_t=I$ و $f\in\prod_{t\in I} X_t\subseteq V$. برای هر x در J دنبالهٔ $(f_n(x))$ به $f(x)$ همگراست. بنابراین برای هر x در J یک عدد صحیح مثبت n_x وجود دارد

بقسمی که برای هر $n > n_x$ داریم $f_n(x) \in X_x$. فرض کنید $n_\circ = \max_{x\in J}\{n_x\}$.
در اینصورت برای هر $n > n_\circ$ داریم $f_n \in \prod_{t\in I} X_t$. بنابراین (f_n) همگرا به f است.

اکنون یک دنباله در P تعریف کرده بطوریکه دارای هیچ زیردنبالهٔ همگرا نیست.
فرض کنید (f_n) بصورت زیر داده شده باشد:

$$f_n(x) := x \text{ امین عدد در بسط دودویی } -n.$$

چنانچه (f_{n_k}) یک زیردنباله باشد. فرض کنید p نقطه‌ای از I باشد بطوریکه برای حالتیکه n_k زوج یا فرد است داشته باشیم، $f_{n_k}(p) = ۱$ یا $\circ$. دنبالهٔ $(f_{n_k}(p))$ برابر $(\circ, ۱, \circ, ۱, \ldots)$ است که همگرا نیست. پس (f_{n_k}) همگرا نیست. بنابراین P فشردهٔ دنباله‌ای نیست.

جواب ۱۹۳ با توجه به تمرین ۱۹۱، $w_۱$ فشردهٔ شمارشی است. طبق قضیهٔ تیخونوف P فشرده است. بنابراین $w_۱ \times P$، طبق تمرین ۱۸۹، فشردهٔ شمارشی است.
اگر $w_۱ \times P$ فشرده باشد در اینصورت هر عامل آن فشرده است (زیرا تصویر هر نگاشت پیوسته از یک فضای فشرده، فشرده است). اما $w_۱$ فشرده نیست(تمرین ۱۹۱).
اگر آن فشردهٔ دنباله‌ای باشد در اینصورت هر عامل آن فشردهٔ دنباله‌ای است (زیرا تصویر پیوستهٔ یک فضای فشردهٔ دنباله‌ای، فشردهٔ دنباله‌ای است، تمرین ۱۹۰). اما P فشردهٔ دنباله‌ای نیست، تمرین ۱۹۲). بنابراین $w_۱ \times P$ نه تنها فشرده نیست بلکه فشردهٔ دنباله‌ای نیز نمی‌باشد.

جواب ۱۹۴ فرض کنید $(U_i)_{i\in I}$ یک پوشش باز E باشد.
برای حداقل یک اندیس $i_\circ$ در I داریم $p \in U_{i_\circ}$. چون $p \notin C_E(U_{i_\circ})$ نتیجه می‌گیریم که $C_E(U_{i_\circ})$ متناهی است و بعنوان مثال شامل نقاط $x_۱, \ldots, x_n$ است. برای

$k=1,\ldots,n$ یک اندیس i_k در I وجود دارد بقسمی که $x_{i_k}\in U_{i_k}$. بنابراین $E=U_{i_0}\cup U_{i_1}\cup\cdots\cup U_{i_n}$. پس E فشرده است.

فرض کنید σ دنباله‌ای در E باشد. اگر $\sigma(\mathbf{N})$ متناهی باشد در اینصورت σ دارای یک زیر دنبالهٔ همگراست. پس فرض کنید $\sigma(\mathbf{N})$ نامتناهی باشد. در این حالت σ دارای یک زیر دنبالهٔ همگرا به p است.

جواب ۱۹۵ فرض کنید $E_1=E\cup\{\infty\}$ و $\infty\notin E$. چنانچه $T_1=T\cup T_0$ جاییکه T_0 خانواده همه زیرمجموعه‌های E_1 بفرم $\{\infty\}\cup C_E(K)$ است که K یک زیرمجموعهٔ فشرده از E است.

ادعا می‌کنیم که T_1 یک توپولوژی روی E_1 است.

(۱) $\emptyset\in T$، پس $\emptyset\in T_1$.

(۲) $E_1=\{\infty\}\cup C_E(\emptyset)$ و $\emptyset$ فشرده است لذا $E_1\in T_1$.

(۳) چون T یک توپولوژی است اجتماع هر خانواده از مجموعه‌های در T متعلق به T است و از اینرو متعلق به T_1 است.

فرض کنید $(\{\infty\}\cup C_E(K_i))$ یک خانواده از مجموعه‌های در T_0 باشد جاییکه K_i فشرده است. در اینصورت

$$\cup_{i\in I}(\{\infty\}\cup C_E(K_i))=\{\infty\}\cup(\cup_{i\in I}C_E(K_i))=\{\infty\}\cup C_E(\cap_{i\in I}K_i)$$

که متعلق به T_0 است زیرا $\cap_{i\in I}K_i$ فشرده است (تمرین ۱۸۰ را ببینید). این نتیجه می‌دهد که $\cup_{i\in I}(\{\infty\}\cup C_E(K_i))$ در T_1 است.

بالاخره فرض کنید $U\in T$ و $\{\infty\}\cup C_E(K)\in T_0$ جاییکه K فشرده است. در اینصورت داریم

$$\begin{aligned} U\cup(\{\infty\}\cup C_E(K)) &= \{\infty\}\cup C_E(C_E(U))\cup C_E(K)\\ &= \{\infty\}\cup C_E(K\cap C_E(U)). \end{aligned}$$

اکنون $K \cap C_E(U)$ فشرده است. از این نتیجه گرفته می‌شود که $U \cup (\{\infty\} \cup C_E(K)) \in T_\circ$ و از اینرو متعلق به T_1 است. بنابراین T_1 تحت اجتماع بسته است.

(۴) چون T یک توپولوژی است اشتراک هر خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌های در T، در T است.
فرض کنید $(\{\infty\} \cup C_E(K_i))_{i\in I}$ یک خانوادهٔ متناهی از مجموعه‌های در $T_\circ$ باشد (جاییکه مجموعه‌های K_i فشرده‌اند). در اینصورت

$$\cap_{i\in I}(\{\infty\} \cup C_E(K_i)) = \{\infty\} \cup (\cap_{i\in I} C_E(K_i)) = \{\infty\} \cup C_E(\cup_{i\in I} K_i).$$

چون $\cup_{i\in I} K_i$ فشرده است (تمرین ۱۸۱)، دیده می‌شود که $\cap_{i\in I}(\{\infty\} \cup C_E(K_i))$ متعلق به $T_\circ$ است و از اینرو متعلق به T_1 است.

بالاخره فرض کنید U مجموعه‌ای در T باشد و $\{\infty\} \cup C_E(K)$ یک مجموعه در $T_\circ$ باشد، جاییکه K فشرده است. در اینصورت $U \cap (\{\infty\} \cup C_E(K)) = U \cap C_E(K)$ متعلق به T است، زیرا K مجموعه‌ای $T-$ بسته است (تمرین ۱۷۹). از اینرو $U \cap (\{\infty\} \cup C_E(K))$، در T_1 است.

بنابراین T_1 تحت عمل اشتراک با پایان بسته است. لذا T_1 یک توپولوژی است.
بدیهی است که یک تابع یک‌به‌یک $i : E \longrightarrow E_1$ داریم و $(T_1)_{i(E)} = T$، بنابراین i یک همانریختی از E بروی $i(E)$ است.

اکنون نشان می‌دهیم که T_1 هاسدرف است. فرض کنید a و b نقاط متمایزی از E_1 باشند. اگر a و b هر دو متعلق به E باشند در اینصورت $T-$ همسایگیهای مجزایی دارند که T_1- همسایگی نیز می‌باشند. اگر $a \in E$ و $b = \infty$ در اینصورت چون (E, T) موضعاً فشرده است، a دارای یک $T-$ همسایگی فشردهٔ K می‌باشد. در اینصورت K و $\{\infty\} \cup C_E(K)$، T_1- همسایگیهای مجزایی از a و $b = \infty$ هستند.
بالاخره نشان می‌دهیم که (E_1, T_1) فشرده است.

فرض کنید $(V_i)_{i\in I}$ یک پوشش T_1- باز E_1 باشد. حداقل یک اندیس $i_\circ$ در I وجود دارد به‌قسمی که $\infty \in V_{i_\circ}$. بعنوان مثال فرض کنید $V_{i_\circ} = \{\infty\} \cup C_E(K)$

جاییکه K فشرده است. خانوادهٔ $(V_i \cap E)_{i \in I}$ یک پوشش $T-$ باز K است. از اینرو یک مجموعهٔ متناهی $\{i_1, \ldots, i_n\}$ از اندیسهای در I وجود دارد به‌قسمی که $K \subseteq (V_{i_1} \cap E) \cup \cdots \cup (V_{i_n} \cap E)$. از این فوراً نتیجه گرفته می‌شود که $E_1 = V_{i_0} \cup V_{i_1} \cup \cdots \cup V_{i_n}$. بنابراین E_1 فشرده است.

جواب ۱۹٦ چون (E', T') فضای هاسدرف فشرده است پس نرمال است و از اینرو کاملاً منظم است. فرض کنید $P_{E'} = \prod_{f' \in C^*(E')} I_{f'}$، جاییکه برای هر عضو f' از $C^*(E')$، $I_{f'} = [0, 1]$. فرض کنید $e' : E' \longrightarrow P_{E'}$ توسط $(e'(x'))_{f'} = f'(x')$ برای هر x' در E' و هر f' در $C^*(E')$ تعریف شده باشد. برای هر نگاشت f' در $C^*(E')$ نگاشت $\pi_{f' \circ f} : P_E \longrightarrow I$ پیوسته است. از اینرو یک نگاشت پیوسته H از P_E به $P_{E'}$ چنان وجود دارد که برای هر f' در $C^*(E')$، $\pi'_{f'} \circ H = \pi_{f' \circ f}$. پس برای هر f' در $C^*(E')$ داریم

$$\pi'_{f'} \circ H \circ e = \pi_{f' \circ f} \circ e = f' \circ f = \pi_{f'} \circ e' \circ f$$

و بنابراین $H \circ e = e' \circ f$.

اکنون $(e')(E')$ تصویر یک مجموعهٔ فشردهٔ E' تحت یک نگاشت پیوسته است. پس یک زیر مجموعهٔ فشردهٔ فضای هاسدرف $P_{E'}$ است و از اینرو بسته‌است. بنابراین‌داریم

$$\begin{aligned} H(\beta E) &= H(Cl(e(E))) \subseteq Cl(H(e(E))) \\ &= Cl((e')(f(E))) \subseteq Cl((e')(E')) = (e')(E'). \end{aligned}$$

فرض کنید $\beta f = (e')^{-1} \circ (H|\beta E)$، در اینصورت βf یک نگاشت پیوسته از βE به E' است و داریم:

$$(\beta f) \circ e = (e')^{-1} \circ (H|\beta E) \circ e = (e')^{-1} \circ e' \circ f = f.$$

فصل ۱۴

جوابهای فصل ۷

جواب ۱۹۷ اگر A و B مجموعه‌های بسته و مجزا باشند در اینصورت داریم $A \cap Cl\ (B) = A \cap B = \emptyset$ و $B \cap Cl\ (A) = B \cap A = \emptyset$. بنابراین A و B جدا شده هستند.

اگر A و B مجموعه‌های باز و مجزا باشند در اینصورت داریم $A \subseteq C_E(B)$ که بسته است. پس $Cl\ (A) \subseteq C_E(B)$ و از اینرو $Cl\ (A) \cap B = \emptyset$. بطور مشابه $A \cap Cl\ (B) = \emptyset$. بنابراین A و B جدا شده هستند.

جواب ۱۹۸ (۱) $\Longleftarrow$ (۲) فرض کنید (E, T) ناهمبند باشد.
در اینصورت یک زیرمجموعهٔ A از E، $A \neq \emptyset$ و $A \neq E$ وجود دارد بقسمی که هم $T-$ باز و هم $T-$ بسته است. بنابراین A و $C_E(A)$ مجزا و $T-$ بسته هستند. لذا جدا شده هستند و همچنین $E = A \cup C_E(A)$.
(۲) $\Longleftarrow$ (۳) فرض کنید $E = A \cup B$ جاییکه A و B مجموعه‌های جدا شدهٔ غیر تهی هستند. در اینصورت

$$Cl\ (A) = Cl\ (A) \cap (A \cup B) = (Cl\ (A) \cap A) \cup (Cl\ (A) \cap B) = Cl\ (A) \cap A = A$$

بنابراین A بسته است. بطریق مشابه B نیز بسته است.
(۳) $\Longleftarrow$ (۴) فرض کنید $E = A \cup B$ جاییکه A و B مجموعه‌های بستهٔ مجزای غیر تهی باشند. در اینصورت $A = C_E(B)$ و $B = C_E(A)$ مجموعه‌های باز غیر تهی مجزا هستند که اجتماعشان E است.
(۴) $\Longleftarrow$ (۱) فرض کنید $E = A \cup B$ جاییکه A و B مجموعه‌های باز غیر تهی مجزا هستند. در اینصورت $A = C_E(B)$ و از اینرو بسته است. پس (E,T) ناهمبند است.

جواب ۱۹۹ (۱) فرض کنید A ناهمبند باشد. در اینصورت $A = X \cup Y$ جاییکه X و Y مجموعه‌های T_A- بستهٔ غیرتهی و مجزا هستند. نشان می‌دهیم که X و Y زیرمجموعه‌های جدا شدهٔ E هستند. لذا نتیجه حاصل می‌شود زیرا $X \cap Cl_T\ (Y) = X \cap A \cap Cl_T(Y) = X \cap Cl_{T_A}(Y) = X \cap Y = \emptyset$ و بطور مشابه $Y \cap Cl_{T_A}(X) = \emptyset$.

(۲) فرض کنید $A = X \cup Y$ جاییکه X و Y زیرمجموعه‌های جدا شدهٔ غیرتهی از E هستند. داریم $X \cap Cl_{T_A}(Y) = X \cap A \cap Cl_T(Y) = X \cap Cl_T(Y) = \emptyset$ و بطور مشابه $Y \cap Cl_{T_A}(X) = \emptyset$. لذا A اجتماع دو زیر مجموعهٔ جدا شدهٔ غیر تهی از A می‌باشد. پس A ناهمبند است.

جواب ۲۰۰ فرض کنید A همبند باشد و $A \subseteq B \subseteq Cl\ (A)$.
اگر B ناهمبند باشد در اینصورت $B = X \cup Y$ جاییکه X و Y زیر مجموعه‌های جدا شدهٔ غیر تهی از E هستند. در اینصورت $A = (A \cap X) \cup (A \cap Y)$ و $A \cap X$ و $A \cap Y$ جدا شده هستند. چون A همبند است در اینصورت $A \cap X = \emptyset$ یا $A \cap Y = \emptyset$، فرض کنید $A \cap X = \emptyset$. پس $A \subseteq Y$. این نتیجه می‌دهد $X \subseteq B \subseteq Cl_T(A) \subseteq Cl_T(Y)$، جاییکه $X = X \cap Cl_T(Y) = \emptyset$، که این یک تناقض است. بنابراین B همبند می‌باشد.

جواب ۲۰۱ فرض کنید $A=\bigcup\limits_{i\in I}A_i$ ناهمبند باشد. مثلاً داشته باشیم $A=X\cup Y$ جاییکه X و Y زیرمجموعه‌های جدا شدهٔ غیر تهی از E هستند.

برای هر اندیس i در I یا $A_i\cap X=\emptyset$ یا $A_i\cap Y=\emptyset$. فرض کنید برای یک اندیس $i_\circ$ در I داشته باشیم $A_{i_\circ}\cap X=\emptyset$. در اینصورت $A_{i_\circ}\subseteq Y$. از اینرو $\bigcap\limits_{i\in I}A_i\subseteq Y$. از این نتیجه گرفته می‌شود که برای هر اندیس i در I داریم $A_i\cap X=\emptyset$. بنابراین $X=X\cap(\bigcup\limits_{i\in I}A_i)=\emptyset$، که یک تناقض است. بنابراین A همبند است.

جواب ۲۰۲ فرض کنید $A\cup B=X\cup Y$ که X و Y مجموعه‌های جدا شده هستند بنابراین $A=(A\cap X)\cup(A\cap Y)$ و مجموعه‌های $A\cap X$ و $A\cap Y$ جدا شده هستند. در اینصورت $A\cap X=\emptyset$ یا $A\cap Y=\emptyset$. بعنوان مثال فرض کنید $A\cap Y=\emptyset$ و لذا $A\subseteq X$. بطور مشابه داریم $B\subseteq X$ یا $B\subseteq Y$. اگر $B\subseteq Y$ آنگاه $\emptyset\neq A\cap Cl\ (B)\subseteq X\cap Cl\ (Y)=\emptyset$، که یک تناقض می‌باشد. پس $B\subseteq X$. بنابراین داریم $A\cup B\subseteq X$ و لذا $Y=\emptyset$ که باز یک تناقض است.

جواب ۲۰۳ برای هر عدد طبیعی n، فرض کنید $B_n=A_\circ\cup A_\lor\cup\cdots\cup A_n$. در اینصورت بوضوح $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{N}}B_n=B_\circ=A_\circ$ که غیر تهی است، زیرا $A_\circ\cap A_1\neq\emptyset$. اکنون $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}B_n=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n$. هر یک از مجموعه‌های B_n همبند هستند (با استفاده از یک بحث استقرایی ساده). از این نتیجه می‌گیریم که $\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}A_n=\bigcup\limits_{n\in\mathbb{N}}B_n$ همبند است (با استفاده از تمرین ۲۰۱).

جواب ۲۰۴ فرض کنید که $\mathbb{Z}=A\cup B$ که A و B جدا شده هستند و A غیرتهی می‌باشد. فرض کنید k نقطه‌ای از A است. اگر k زوج باشد در اینصورت

$V = \{k-1, k, k+1\}$ یک $T-$ همسایگی از k است. چون $k \notin Cl_T(B)$ لذا V، مجموع B را قطع نمی‌کند. بنابراین $k-1$ و $k+1$ در B نیستند. از اینرو $k-1$ و $k+1$ در A هستند. اگر k فرد باشد در اینصورت $W = \{k, k+1, k+2\}$ کوچکترین $T-$ همسایگی از $k+1$ است. چون A را قطع می‌کند پس نتیجه گرفته می‌شود که $k+1 \in Cl_T(A)$ و از اینرو $k+1 \notin B$ پس $k+1 \in A$. بطور مشابه با در نظر گرفتن $T-$ همسایگی $\{k-2, k-1, k\}$ از $k-1$ نتیجه می‌گیریم که $k-1 \in A$.

با استقرا (بطرف بالا و پایین) نتیجه می‌گیریم که هر عدد صحیح در A است. پس $A = \mathbb{Z}$، $B = \emptyset$ و $(\mathbb{Z}, T)$ همبند است.

جواب ۲۰۵ (۱) فرض کنید A یک زیر مجموعه از $\mathbb{R}$ باشد که بصورت یک فاصله نیست. در اینصورت باید نقاط a و b از A وجود داشته باشند بطوریکه $a < b$ و بازهٔ $[a,b]$ مشمول در A نیست. پس یک نقطهٔ c باید وجود داشته باشد بقسمی که $a < c < b$ و $c \notin A$. در اینصورت اشتراکهای A با فاصله‌های $(-\infty, c)$ و (c, ∞) تشکیل یک ناهمبندی برای A می‌دهد.

پس یک زیر مجموعهٔ همبند از $\mathbb{R}$ باید یک فاصله باشد.

(۲) برعکس، فرض کنید E یک فاصله از $\mathbb{R}$ باشد.

چنانچه E ناهمبند باشد. در اینصورت زیر مجموعه‌های بستهٔ F و G از $\mathbb{R}$ وجود دارد بقسمی که $E = (E \cap F) \cup (E \cap G)$ و $E \cap F \neq \emptyset$ و $E \cap G \neq \emptyset$ و $E \cap F \cap G = \emptyset$. قرار دهید $A = E \cap F$ و $B = E \cap G$. چنانچه a و b بترتیب نقاطی از A و B باشند. می‌توان فرض کرد که $a < b$. در اینصورت $[a,b] \subseteq E$.

مجموعهٔ $X = [a,b] \cap A$ غیر تهی است و از بالا بوسیلهٔ b کراندار است. بنابراین دارای کوچکترین کران بالا مثل c است. چون $a \leq c \leq b$ و a و b در بازهٔ E هستند. نتیجه می‌گیریم که c در E می‌باشد. چون c کوچکترین کران بالای X است لذا برای هر عدد حقیقی مثبت ϵ یک نقطهٔ از X وجود دارد که بزرگتر از $c - \epsilon$ است. به این معنا که هر همسایگی از c، مجموعه X را قطع می‌کند. بنابراین c در بستار X است

و از اینرو در A است. باز چون c یک کران بالا از X است نتیجه می‌گیریم که برای هر عدد حقیقی مثبت ϵ که $c+\epsilon < b$ داریم $c+\epsilon \notin X$. از اینرو $c+\epsilon \in B$. لذا c در بستار B است پس در B است. اما این یک تناقض می‌باشد، زیرا A و B مجزا هستند. بنابراین E همبند است.

جواب ۲۰۶ فرض کنید $f(A) = (f(A)\cap X') \cup (f(A)\cap Y')$ جاییکه X' و Y' زیر مجموعه‌های $T'-$ باز E' هستند بطوریکه $f(A)\cap X'\cap Y' = \emptyset$، اما $f(A)\cap X' \neq \emptyset$ و $f(A)\cap Y' \neq \emptyset$. چون f تابعی $(T,T')-$ پیوسته است، $f^{-1}(X')$ و $f^{-1}(Y')$، مجموعه‌ای $T-$ باز هستند. علاوه بر این $A\cap f^{-1}(X')$ و $A\cap f^{-1}(Y')$ غیرتهی هستند و $A\cap f^{-1}(X')\cap f^{-1}(Y') = \emptyset$. همچنین داریم $A = (A\cap f^{-1}(X'))\cup(A\cap f^{-1}(Y'))$. بنابراین A ناهمبند است، که یک تناقض است.

جواب ۲۰۸ (۱) فرض کنید (E,T) ناهمبند باشد مثلاً $E = U\cup V$ که U و V زیر مجموعه‌های $T-$ باز غیر تهی مجزای E هستند.

نگاشت $f : E \longrightarrow E' = \{۰, ۱\}$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم

$$f(x) = \begin{cases} ۰ \quad \text{اگر} & x\in U \\ ۱ \quad \text{اگر} & x\in V \end{cases}$$

چون U و V غیر تهی هستند پس f پوشاست. اگر T' توپولوژی گسسته روی E' باشد، در اینصورت دیده می‌شود که f تابعی $(T,T')-$ پیوسته است.

(۲) برعکس، فرض کنید یک نگاشت $(T,T')-$ پیوستهٔ پوشای f از E به E' موجود باشد.

در اینصورت داریم $E = f^{-1}\{۰\}\cup f^{-1}\{۱\}$، $f^{-1}\{۰\}\cap f^{-1}\{۱\} = \emptyset$، $f^{-1}\{۰\} \neq \emptyset$ و $f^{-1}\{۱\} \neq \emptyset$ بعلاوه $f^{-1}\{۰\}$ و $f^{-1}\{۱\}$، مجموعه‌ای $T-$ باز هستند. بنابراین (E,T) ناهمبند هستند.

جواب ۲۰۹ (۱) اگر (E,T) همبند باشد و همهٔ مجموعه‌های E_i غیر تهی باشند در اینصورت تصویرهای π_i پوشا هستند. چون هر π_i تابعی $(T,T_i)-$ پیوسته است لذا نتیجه می‌گیریم که هر $E_i = \pi_i(E)$ همبند است.

(۲) برعکس، فرض کنید فضاهای (E_i,T_i) همگی همبند باشند.
اگر (E,T) ناهمبند باشد، مجموعه‌های باز غیرتهی مجزای U و V وجود دارند بقسمی که $E = U \cap V$. فرض کنید u و v به‌ترتیب نقاطی از U و V باشند. چون U و V مجموعه‌های $T-$ بازند، خانواده‌های $(U_i)_{i\in I}$ و $(V_i)_{i\in I}$ وجود دارند بقسمی که برای هر اندیس i در I مجموعه‌های U_i و V_i، نیز T_i- باز هستند و برای هر i که در یک زیرمجموعهٔ متناهی مشخص J از I نباشد، $U_i = V_i = E_i$ و $u \in \Pi_{i\in I}U_i \subseteq U$ و $v \in \Pi_{i\in I}V_i \subseteq V$. برای راحتی فرض کنید که $J = \{۱,۲,\ldots,n\}$.
چون (E,T) ناهمبند است پس E غیر تهی است، از اینرو همهٔ مجموعه‌های E_i غیر تهی می‌باشند. برای هر اندیس i که در J نیست فرض کنید p_i نقطه‌ای باشد که در E_i است. اکنون مجموعه‌های $A_۱,\ldots,A_n$ را بصورت زیر تعریف می‌کنیم:

$$A_۱ = \{x\in E:\ ۱ < i \leq n \quad \text{برای} \quad \pi_i(x)=\pi_i(u) \quad \text{و} \quad i \notin J \quad \text{برای} \quad \pi_i(x)=p_i\},$$
$$A_n = \{x\in E:\ ۱ \leq i < n \quad \text{برای} \quad \pi_i(x)=\pi_i(v) \quad \text{و} \quad i \notin J \quad \text{برای} \quad \pi_i(x)=p_i\}$$

و برای $۱ < k < n$.

$$A_k = \{x\in E: ۱ \leq i < k \ \text{برای}\ \pi_i(x)=\pi_i(v) \ \text{و}\ k < i \leq n \ \text{برای}\ \pi_i(x)=\pi_i(u)$$
$$i \notin J \ \text{برای}\ \pi_i(x)=p_i\}$$

برای $k = ۱,۲,\ldots,n$ بدیهی است که فضای (A_k,T_{A_k}) همانریخت با (E_k,T_k) است و از اینرو همبند است. برای $k = ۱,۲,\ldots,n-۱$ مجموعهٔ $A_k \cap A_{k+۱}$ غیر تهی است چون شامل نقطهٔ x_k است بطوریکه برای $i = ۱,\ldots,k$، $\pi_i(x_k)=\pi_i(v)$،

بعلاوه $i = k+۱, \dots, n$، $\pi_i(x_k) = \pi_i(u)$ و برای $i \notin J$، $\pi_i(x_k) = p_i$. بنابراین $A = \cup_{۱\leq k\leq n} A_k$ همبند است.

اکنون $A = (A\cap U)\cup(A\cap V)$، $A\cap U \neq \emptyset$، $A\cap V \neq \emptyset$ و از اینرو $A\cap U\cap V \neq \emptyset$. ولی این یک تناقض است، زیرا $U \cap V = \emptyset$. بنابراین (E,T) همبند است.

جواب ۲۱۰ داریم

$$\begin{aligned} C_{E\times E'}(A\times A') &= (C_E(A)\times E')\cup(E\times C_{E'}(A')) \\ &= ((\cup_{i\in I}K_i)\times E')\cup(E\times(\cup_{j\in J}K'_j)). \end{aligned}$$

جاییکه $(K_i)_{i\in I}$ خانواده‌ای از مؤلفه‌های همبند $C_E(A)$ است و $(K'_j)_{j\in J}$ خانواده‌ای از مؤلفه‌های همبند $C_{E'}(A')$ است.

چون هر مجموعهٔ $K_i \times E'$ هر مجموعهٔ $E \times K'_j$ را قطع می‌کند و همهٔ این مجموعه‌ها همبند هستند لذا با استفاده از یک بحث عادی نتیجه می‌گیریم که $C_{E\times E'}(A\times A')$ همبند است.

جواب ۲۱۱ فرض کنید (E,T) یک فضای توپولوژیکی گسسته و x نقطه‌ای از E باشد. اگر A یک زیر مجموعه‌از E باشد بطوریکه $A \supseteq \{x\}$، در اینصورت A ناهمبند است. اما $\{x\}$ همبند است. از اینرو $\{x\}$ یک مؤلفه همبند x است.

جواب ۲۱۲ فرض کنید x یک عدد گویا باشد. در اینصورت $\{x\}$ یک زیر مجموعهٔ همبند شامل x است. اگر A زیر مجموعه‌ای از Q باشد بقسمی که $A \supset \{x\}$. فرض کنید y نقطه‌ای از A و متمایز از x باشد. یک عدد حقیقی گنگ z بین x و y وجود دارد. در اینصورت $A = (A\cap(-\infty,z))\cup(A\cap(z,\infty))$ یک ناهمبندی از A است، بنابراین A همبند نیست. از اینرو $\{x\}$ موئلفهٔ همبندی از x است. بنابراین Q کاملاً ناهمبند می‌باشد.

فرض کنید T توپولوژی معمولی روی $\mathbf{R}$ باشد. چنانچه U مجموعه‌ای T_Q- باز شامل x باشد. در اینصورت $U \supseteq Q \cap I$ جاییکه I یک فاصلهٔ باز از $\mathbf{R}$ است. از اینرو $U \neq \{x\}$ و لذا T_Q گسسته نمی‌باشد.

جواب ۲۱۳ برای هر نقطهٔ x از E فرض کنید $K(x)$ مؤلفهٔ همبند x باشد. چون $K(x)$ همبند است، بنابراین $ClK(x)$ نیز همبند است. از اینرو $ClK(x) \subseteq K(x)$. از طرفی $K(x) \subseteq ClK(x)$. پس $ClK(x) = K(x)$ و لذا $K(x)$ بسته است.
رابطهٔ R بوضوح بازتابی است.

برای نشان دادن خاصیت متقارن، فرض کنید $(x,y) \in R$. در اینصورت $y \in K(x)$. پس x متعلق به یک مجموعهٔ همبند است (به نام $K(x)$) که شامل y می‌باشد. پس $x \in K(y)$. بنابراین $(y,x) \in R$.

برای نشان دادن خاصیت انتقالی فرض کنید $(x,y) \in R$ و $(y,z) \in R$. در اینصورت $y \in K(x)$ و $z \in K(y)$. داریم $y \in K(x) \cap K(y)$ و از اینرو $K(x) \cup K(y)$ یک مجموعهٔ همبند شامل x است. بنابراین $K(x) \cup K(y) \subseteq K(x)$ و لذا $z \in K(x)$. یعنی $(x,z) \in R$.

اکنون فرض کنید C عضوی از $\frac{E}{R}$ و K مؤلفهٔ همبند آن باشد.
چنانچه K شامل بیش از یک نقطه از $\frac{E}{R}$ باشد. در اینصورت $\eta^{-1}(K)$ شامل بیش از یک مؤلفهٔ همبند از E است و از اینرو ناهمبند است. بنابراین زیرمجموعه‌های $T-$ بستهٔ A و B از E وجود دارند بقسمی که $\eta^{-1}(K) \subseteq A \cup B$، $A \cap \eta^{-1}(K) \neq \emptyset$، $B \cap \eta^{-1}(K) \neq \emptyset$ و $A \cap B \cap \eta^{-1}(K) = \emptyset$. چون K مجموعه‌ای $\frac{T}{R}-$ بسته است (یک مؤلفه می‌باشد)، مجموعه‌های $A_1 = A \cap \eta^{-1}(K)$، $B_1 = B \cap \eta^{-1}(K)$ $T-$ بسته هستند و داریم $\eta^{-1}(K) = A_1 \cup B_1$، $A_1 \neq \emptyset$، $B_1 \neq \emptyset$ و $A_1 \cap B_1 = \emptyset$.
چون $A_1 \cap B_1 = \emptyset$ نتیجه می‌گیریم که A_1 و B_1 اجتماعی از $R-$ کلاسهای کامل است. از اینرو $A_1 = \eta^{-1}(\eta(A_1))$ و $B_1 = \eta^{-1}(\eta(B_1))$. بنابراین $\eta(A_1)$ و $\eta(B_1)$ مجموعه‌های $\frac{T}{R}-$ بسته هستند. چون $K = \eta(A_1) \cup \eta(B_1)$ و $\eta(A_1) \cap \eta(B_1) = \emptyset$ لذا K همبند نیست.

این یک تناقض است. بنابراین $(\frac{E}{R}, \frac{T}{R})$ کاملاً ناهمبند است.

جواب ۲۱۴ فرض کنید E فضای گسسته با بیش از یک نقطه باشد.
اگر p نقطه‌ای از E باشد در اینصورت $E = \{p\} \cup C_E\{p\}$ که نشان می‌دهد (E,T) ناهمبند است. اگر x نقطه‌ای از E باشد و V یک همسایگی از x. در اینصورت $\{x\}$ همسایگی همبند x و مشمول در V است. بنابراین (E,T) موضعاً همبند است.

جواب ۲۱۵ فرض کنید $A = \{(x,y) \in R^{۲} : x > ۰, y = \sin(\frac{۱}{x})\}$ و چنانچه $B = \{(۰,۰)\}$. در اینصورت $A = f(\mathbb{R}^{+})$ جاییکه f تابع تعریف شده بوسیلهٔ $f(x) = (x, \sin\frac{۱}{x})$ برای هر عدد حقیقی غیر صفر x است. چون $\mathbb{R}^{+}$ همبند است و f پیوسته لذا A همبند است. B همبند است و چون $(۰,۰)$ یک نقطهٔ چسبیدهٔ A است خواهیم داشت $B \cap Cl\ (A) \neq \emptyset$. از اینرو $S = A \cup B$ همبند است (تمرین ۲۰۲).

بعلاوه $(۰,۰)$ هیچ همسایگی همبند مشمول در $\frac{۱}{۲}-$ گوی با مرکز $(۰,۰)$ ندارد، بنابراین S موضعاً همبند نیست.

جواب ۲۱۶ (۱) فرض کنید (E,T) موضعاً همبند باشد.
چنانچه U یک زیرمجموعهٔ $T-$ باز E باشد. K را مؤلفه همبند از نقاط U بگیرید و فرض کنید t نقطه‌ای از K باشد.

چون U باز است پس U یک $T-$ همسایگی از t است. ازاینرو یک $T-$ همسایگی همبند N از t موجود است که مشمول در U است. در اینصورت $N \subseteq K$ پس K یک $T-$ همسایگی از t است بنابراین K باز است.

(۲) برعکس، فرض کنید هر مؤلفه از هر زیرمجموعهٔ $T-$ باز E، یک مجموعه $T-$ باز باشد. چنانچه x نقطه‌ای از E و V یک $T-$ همسایگی از x باشد. در اینصورت V شامل یک مجموعهٔ $T-$ باز شامل x مثل U است. مؤلفه K از x در U،

طبق فرض، $T-$ باز است. بنابراین K یک $T-$ همسایگی همبند x مشمول در V است.

جواب ۲۱۷ فرض کنید (E,T) فضای موضعاً همبند و R یک رابطهٔ هم‌ارزی روی E باشد. چنانچه $\overline{U}$ یک زیرمجموعهٔ $T/R-$ باز از E/R، $\overline{x}$ نقطه‌ای از $\overline{U}$ و $\overline{K}$ مؤلفه همبند $\overline{x}$ در $\overline{U}$ باشد. باید نشان دهیم که $\overline{K}$ مجموعه‌ای $T/R-$ باز است یعنی، $\eta^{-1}(\overline{K})$، $T-$ باز است. فرض کنید x نقطه‌ای از $\eta^{-1}(\overline{K})$ باشد. در این‌صورت $x \in U = \eta^{-1}(\overline{U})$ که $T-$ باز است. بنابراین چون (E,T) موضعاً همبند است. مؤلفه همبند C_x از x در U، مجموعه‌ای $T-$ باز است. چون C_x همبند است و η تابعی $(T,T/R)-$ پیوسته است از اینرو $\eta(C_x)$ همبند و شامل $\eta(x)$ است، که متعلق به $\overline{K}$ است. پس $\eta(C_x) \subseteq \overline{K}$ و در نتیجه:

$$\eta^{-1}(\overline{K}) \supseteq \eta^{-1}(\eta(C_x)) \supseteq C_x$$

پس $\bigcup_{x\in\eta^{-1}(\overline{K})} C_x = \eta^{-1}(\overline{K})$ که $T-$ باز است. از اینرو $\overline{K}$ مجموعه‌ای $T/R-$ باز است.

جواب ۲۱۸ فرض کنید $J = \{i \in I : (E_i,T_i)$ همبند نیست $\}$. طبق فرض J متناهی است. چنانچه x نقطه‌ای از E و V یک $T-$ همسایگی از x باشد. یک خانوادهٔ $(U_i)_{i\in I}$ وجود دارد که $x \in \prod_{i\in I} U_i \subseteq V$ و هر U_i مجموعهٔ T_i- باز است و همچنین برای تمام اندیس‌های i که در یک زیرمجموعهٔ متناهی مشخص K نیستند داریم $U_i = E_i$. برای هر اندیس i که در $J \cup K$ نیست قرار دهید $V_i = E_i$. برای اندیس‌های i در $J \cup K$ فضای (E_i,T_i) موضعاً همبند است. بنابراین یک مجموعهٔ همبند T_i- همسایگی مثل V_i از $\pi_i(x)$ مشمول در U_i موجود است. در این‌صورت $\prod_{i\in I} V_i$ یک $T-$ همسایگی همبند از x مشمول در V است.

راهنمای مطالعه

کتاب‌های توپولوژی عمومی به تعداد زیادی وجود دارند، اگرچه متناهی می‌باشند و نمی‌توان ادعا کرد که شمارش ناپذیر هستند. پس از سالها تدریس گوناگون که داشتم و منجر به این کتاب گردید غرق در تمام آنها شده و در هر یک به نکات جالبی پی بردم. کتاب مقدمات ریاضی، توپولوژی عمومی، قسمت‌های ۱ و ۲ از بورباکی (N.Bourbaki) که توسط ناشر Hremann and Wesley در سال ۱۹٦٦ چاپ شده بود، را بدقت مطالعه نمودم. همچنین کتاب توپولوژی عمومی اثر ویلارد (S.Willard) که توسط ناشر Addison - Wesley در سال ۱۹۷۰ چاپ شده بود را مطالعه کردم. هر دو کتابهای مذکور، گسترده‌تر از کتابهای فعلی بوده و بالاتر از یک کتاب درسی است. بعلاوه مرجع خوبی برای کار در توپولوژی می‌باشد.

مثالهای جالب و مثالهای نقض در کتاب «مثالهای نقض در توپولوژی» اثر L.A.Steenand J.A. Seebach توسط ناشر Holt, Rinehart and Winston در سال ۱۹۷۰ موجود می‌باشد.

بالاخره، دایره‌المعارف کاری مشابه همین کتاب وجود دارد که برای کار بیشتر می‌توان به کتاب

Fundamentals of general topology : Problems and excercises

اثر A. V. Arkhangelsk ii and V.I. Ponomarer که در سال ۱۹۸۴ توسط ناشر Reidel به‌چاپ رسیده است، مراجعه کرد.

واژه‌نامه

. A

نقطه انباشتگی .... Accumulation point

نقطه چسبیده، نقطه بستاری .... Adherent point

. B

پایه .... Base

گوی .... Ball

. C

مجموعه بسته .... Closed set

بستار .... Closure

فشرده .... Compact

فضای کاملاً نرمال .... Completely normal space

فضای کاملاً منظم .... Completely regular space

نقطه انقباضی .... Condensation point

مؤلفه .... Component

همبند .... Connected

پیوسته .... Continuous

همگرا .... Convergence

شمارا .... Countable

فشرده شمارشی .... Countably compact

پوشش .... Cover

Coarsest topology .... ضعیف‌ترین توپولوژی

D .

Deleted neighbourhood .... همسایگی سوده

Dense .... چگال

Digital topology .... توپولوژی عددی

Directed set .... مجموعه جهت‌دار

Disconnected .... ناهمبند

Discrete .... گسسته

E .

Either - or topology .... توپولوژی این یا آن

Euclidean .... اقلیدسی

Eventually .... بطور تصادفی

Everywhere dense .... همه‌جا چگال

Excluded point topology .... توپولوژی نقطه خارج شده

F .

Finest topology .... قویترین توپولوژی

Finite complemant topology .... توپولوژی متمم باپایان

Finite intersection property .... خاصیت مقطع باپایان

First axiom of countability .... اصل اول شمارش پذیری

First category set .... مجموعه رسته اول

First countable space .... فضای شمارش پذیر نوع اول

Fort topology .... توپولوژی فورت

Frechet space .... فضای فرشه

Frequently .... بطور مکرر

Frontier point .... نقطه مرزی

Fundamental system .... دستگاه اساسی

H .

Half - disc topology .... توپولوژی نیم — دیسک

Hausdorff space .... فضای هاسدرف

Homemorphism .... همانریختی

I .

Indiscrete topology .... توپولوژی ناگسسته

Inductively ordered .... بطور استقرایی مرتب

Interior .... درون

Interior point .... نقطه درونی

Isolated point .... نقطه تنها

L .

Limit point .... نقطه حدی

Locally compact space .... فضای فشرده موضعی

Locally connected space .... فضای همبند موضعی

M .

Mapping .... گسترش تابع

Meagre space .... فضای لاغر

Metric space .... فضای متریک

N .

Neighbourhood .... همسایگی

Nemytskii topology .... توپولوژی نمی سکی

Net .... تور

Normal space .... فضای نرمال

Nowhere dense .... هیچ‌جا چگال

O .

Odd - even topology .... توپولوژی فرد — زوج

باز	Open
پوشش باز	Open cover
رابطه مرتب	Order relation
توپولوژی ترتیبی	Order topology
.	P
متریک $P-$ تایی	P-adic metric
مرتب جزیی	Partial order
توپولوژی نقطه خاص	Particular piont topology
توپولوژی افراز	Partition topology
توپولوژی حاصل‌ضرب	Product topology
شبه متریک	Pseudometric
همسایگی سوده	Punctured neighbourhood
.	Q
متریک گون	Quasimetric
توپولوژی خارج قسمتی	Quotient topology
.	R
$R-$ اشباع شده	R-Saturate
فضای منظم	Regular spece
توپولوژی نسبی	Relative topology
توپولوژی ترتیبی راست	Right order topology
.	S
خط گسترده شده	Scattered line
اصل دوم شمارش پذیری	Second axiom of countability
رسته دوم	Second category
فضای تفکیک پذیر	Separable space
مجموعه‌های جدا شده	Separated subsets