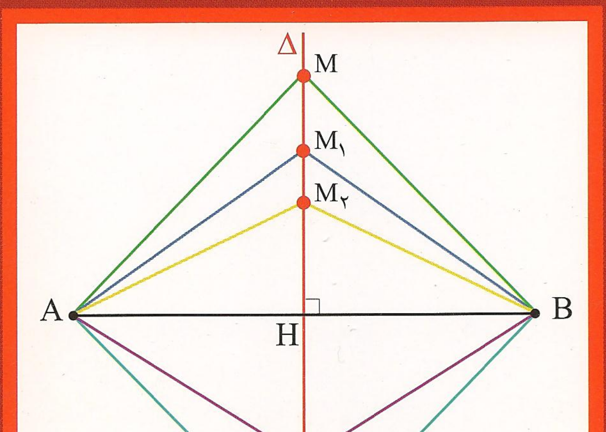
دایرة المعارف هندسه

۱۰

مکان هندسی و پوش در هندسهٔ مسطحه



مؤلّف : محمد هاشم رستمی

دایرة‌المعارف هندسه

«جلد دهم»

مکان هندسی و پوش در هندسهٔ مسطحه

مؤلف: محمّدهاشم رستمی

رستمی، محمدهاشم، ۱۳۱۸ـ
دایرةالمعارف هندسه / مؤلف محمدهاشم رستمی. ـ [ویرایش ۲]. ـ تهران: سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، انتشارات مدرسه، ۱۳۷۸.
ج.: مصور، جدول.
ISBN 964-353-462-6 (ج. ۱۰).
فهرستنویسی براساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار).
ویرایش قبلی با عنوان دایرةالمعارف مسائل هندسه منتشر شده است.
کتابنامه.
مندرجات: ج. ۱. ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی در هندسه مسطحه... ج. ۱۰. مکان هندسی و پوش در هندسهٔ مسطحه.
۱. هندسه ـ مسائل، تمرینها و غیره. الف. سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی، انتشارات مدرسه. ب. عنوان. ج. عنوان: دایرةالمعارف مسائل هندسه.
QA ۵۰۱ / ۵ / ر ۵ د ۲ ۵۱۶/۰۰۷۶

وزارت آموزش و پرورش
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
انتشارات مدرسه

دایرةالمعارف هندسه

(جلد دهم)

مکان هندسی و پوش در هندسهٔ مسطحه

مؤلف: محمدهاشم رستمی
یونیفرم جلد: گشتاسب فروزان
چاپ اوّل: پاییز ۱۳۸۰
تیراژ: ۵۰۰۰ نسخه
لیتوگرافی، چاپ و صحافی از: چاپخانه مدرسه

تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان‌زند
کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، شماره ۳۶
تلفن: ۹ـ۸۸۰۰۳۲۴
دورنویس (فاکس): ۸۹۰۳۸۰۹
شابک ۶ـ ۴۶۲ـ ۳۵۳ـ ۹۶۴
ISBN-964-353-462-6

فهرست

پیشگفتار

سپاس فراوان به درگاه پروردگار توانا که توفیق نگارش این مجموعه را عنایت فرمود. از سالها پیش، نیاز به تألیف مجموعهٔ کاملی از هندسه، شامل تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه احساس می‌شد تا علاقه‌مندان به این شاخه از ریاضی، با دسترسی به تمام مطالب مربوط به هر مبحث و حل و بررسی آنها، نه‌تنها به احاطه‌ای کامل بر آن مبحث دست یابند، بلکه خود نیز قضیه‌ها و مسأله‌ها را تعمیم دهند و یا، قضیه‌ها و مسأله‌های جدیدی در آن زمینه کشف کنند.

به این جهت از حدود سی و نه سال پیش، به جمع‌آوری تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسهٔ موجود در کتابهای ریاضی به زبان فارسی، ترجمه شده به فارسی، و کتابهای خارجی که در اختیار و یا در دسترس بود، برای تألیف دایرة‌المعارف هندسه اقدام، و تمام این مطالب براساس موارد زیر دسته‌بندی گردید :

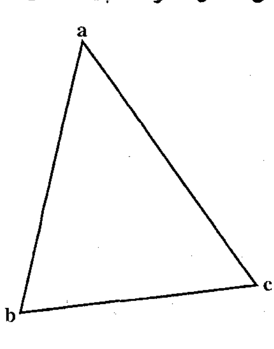
۱. ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی، در هندسهٔ مسطحه ؛
۲. رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه ؛
۳. مکانهای هندسی و ترسیمهای هندسی ؛
۴. تبدیلهای هندسی (انتقال، بازتاب، دوران، تجانس، انعکاس و ...) ؛
۵. مقطعهای مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی و سهمی) ؛
۶. هندسهٔ تحلیلی ؛
۷. هندسهٔ فضایی ؛
۸. هندسه‌های نااقلیدسی ؛
...

هریک از عنوانهای بالا با توجه به حجم مطالب، یک یا چند جلد از این دایرة‌المعارف را در بر می‌گیرد. به‌عنوان مثال، رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه شامل پنج جلد به شرح زیر است :

جلد ۳. نسبت پاره‌خطها در هندسهٔ مسطحه (نسبت و تناسب، قضیهٔ تالس، تشابه، ...) ؛
جلد۴. رابطه‌های متری در دایره ؛
جلد ۵. رابطه‌های متری در مثلث، مثلث و دایره‌های محیطی و محاطی و دایره‌های دیگر ؛
جلد ۶. رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه (متساوی الاضلاع، متساوی‌الساقین، قائم‌الزاویه و ...) ؛
جلد ۷. رابطه‌های متری در چندضلعیها (چهارضلعیها، چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای محاطی و محیطی، پنج‌ضلعیها، ...)

برای استفادهٔ بهینه از این مجموعه، ذکر چند نکته ضروری است :

- در این مجموعه، صورت قضیه‌ها و مسأله‌ها، همراه با شکل آنها داده شده است (مگر در موارد ویژه، مثل برخی ازمسأله‌های المپیادهای ریاضی، که رسم شکل درست، جزء هدفهای مسأله است) ؛ تا دانشجویان علاقه‌مند به حل آنها، پیش از مراجعه به راهنمایی یا حل، خود به حل آنها بپردازند.
- قضیه‌ها و مسأله‌های تاریخی هندسه، با ذکر تاریخچهٔ مختصری از زمان ارائه و راه‌حلهای آنها در مبحث مربوط به خود آمده‌اند، و غیر از مواردی خاص، تنها یک یا دو راه حل از آنها مطرح شده است ؛ زیرا برخی از این قضیه‌ها تاکنون به ده‌ها و حتی به صدها راه، حل شده‌اند ؛ مانند قضیهٔ فیثاغورس در مورد مثلث قائم‌الزاویه «مربع اندازهٔ وتر هر مثلث قائم‌الزاویه برابر است با مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه، $a^2 = b^2 + c^2$» که تنها به‌وسیلهٔ اقلیدس از ۸ راه اثبات گردیده است.
- مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، از جمله المپیادهای ریاضی ایران، و مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی کشورهای دیگر، به همان صورت ترجمه شده، یا نوشته شده در متن اصلی آنها آورده شده است.
- علامتهای به‌کار گرفته شده در مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و کشورهای مختلف به همان صورت متن اصلی آنها آمده است. به‌عنوان مثال، در المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف پاره‌خط AB به صورتهای $\overleftrightarrow{AB}$ ، |AB| و یا AB نشان داده شده است، و یا در المپیادهای ریاضی بلژیک از حروف کوچک مانند a، b و c برای نامگذاری رأسهای مثلث استفاده شده است. به‌عنوان مثال، گفته شده : در مثلث abc ضلعهای ab، bc و ac، ... .



● در دیگر قضیه‌ها و مسأله‌ها، تعریفها و شکلها، از حرفها و علامتهای یکسان استفاده شده است ؛ به‌عنوان مثال، همه جا نقطه‌ها با حرفهای بزرگ لاتین مانند : نقطه‌های A، B، C و ... ؛ و پاره‌خط AB به‌صورت AB و اندازهٔ زاویهٔ A به‌صورت $\hat{A}$ نشان داده شده است.

● شرح حال هندسه‌دانان بزرگ، پس از اوّلین قضیه و یا مسأله‌ای که به نام آنها مشهور است. (مانند قضیهٔ تالس، قضیهٔ دزارگ، قضیهٔ پاپوس، ...)، بعد از صورت آن قضیه یا مسأله، آورده شده است.

این جلد از دایرةالمعارف، شامل مکانهای هندسی و پوشهاست، که دارای ۷ بخش است :

بخش ۱. تعریف و قضیه
بخش ۲. نقطه، خط، زاویه
بخش ۳. مثلث
بخش ۴. چندضلعیها
بخش ۵. دایره
بخش ۶. مقطعهای مخروطی
بخش ۷. پوش

بخشهای ۱ تا ۶ شامل تعریفها، قضیه‌ها و مسأله‌های مربوط به مکانهای هندسی است و بخش ۷ شامل تعریفها، قضیه‌ها و مسأله‌های مربوط به پوشهاست.

هریک از بخشهای بالا خود شامل چند زیربخش است. به‌عنوان مثال بخش ۵، دایره، دارای ۵ زیربخش است :

۱.۵ . ربع دایره
۲.۵ . نیمدایره
۳.۵ . یک دایره
۴.۵ . دو دایره
۵.۵ . سه دایره و بیشتر

زیربخشهای بالا نیز به زیربخشهای جدیدی تقسیم شده‌اند. به‌عنوان مثال زیربخش ۳.۵ . یک دایره، شامل این زیربخشهاست :

۱.۳.۵ . تنها یک دایرهٔ ثابت
۲.۳.۵ . یک دایرهٔ ثابت، نقطه‌های ثابت

۵.۳.۳. یک دایرهٔ ثابت، خطهای ثابت

این زیربخشها نیز شامل زیربخشهای جدیدی هستند. به‌عنوان مثال زیربخش ۵.۳.۲. یک دایرهٔ ثابت، نقطه‌های ثابت، شامل زیربخشهای زیر است :

۵.۳.۲.۱. یک دایرهٔ ثابت، یک نقطهٔ ثابت

۵. ۳. ۲. ۲. یک دایرهٔ ثابت، دو نقطهٔ ثابت

۵. ۳. ۲. ۳. یک دایرهٔ ثابت، سه نقطهٔ ثابت

۵. ۳. ۲. ۴. یک دایرهٔ ثابت، چهار نقطهٔ ثابت

زیربخش ۵. ۳. ۲. ۱. یک دایرهٔ ثابت، یک نقطهٔ ثابت، خود شامل این زیربخشهاست :

۵.۳.۲.۱.۱. یک دایرهٔ ثابت، یک نقطهٔ ثابت در صفحهٔ دایره

۵.۳.۲.۱.۲. یک دایرهٔ ثابت، یک نقطهٔ ثابت درون دایره

۵.۳.۲.۱.۳. یک دایرهٔ ثابت، یک نقطهٔ ثابت روی دایره

۵.۳.۲.۱.۴. یک دایرهٔ ثابت، یک نقطهٔ ثابت برون دایره

۵.۳.۲.۱.۵. مسأله‌های ترکیبی مربوط به این قسمت

برخی از این زیربخشها خود به زیربخشهای جدیدی تقسیم شده‌اند، و در هر زیربخش مسأله‌ها با نظم و ترتیب ویژه‌ای ارائه گردیده‌اند.

در این جلد از دایرةالمعارف، قضیه‌ها و مسأله‌ها براساس اجزای ثابت داده شده در آنها تنظیم شده‌اند. به‌عنوان مثال، بخش ۲. نقطه، خط، زاویه، شامل مسأله‌هایی است که اجزای ثابت آنها : نقطه‌های ثابت، خطهای ثابت، زاویه‌های ثابت و یا ترکیبی از آنهاست.

به مثال زیر توجه کنید.

مسأله. B و C دو نقطهٔ ثابت و نقطهٔ D وسط آنهاست. A نقطهٔ متحرکی است که بر روی خط ثابت Δ ، عمود بر خط BC، تغییر مکان می‌دهد. نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC را H می‌نامیم و نقطهٔ A را در نقطهٔ M بر روی DH تصویر می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ M را تعیین کنید. داده‌های ثابت این مسأله سه نقطهٔ همخط B، C و D، و خط ثابت Δ است.

به همین دلیل این مسأله در زیر بخش ۲.۳.۳.۳. یک خط ثابت، سه نقطهٔ ثابت از زیربخش ۲.۳. خطهای ثابت، نقطه‌های ثابت از بخش ۲ آمده است.

امید است این مجموعه، مورد استفادهٔ دانش‌پژوهان ارجمند قرار گیرد و در شکوفایی استعدادهای آنان سهمی داشته باشد.

مؤلف، مدعی کامل بودن این دایرةالمعارف نیست. ولی، امیدوار است که با همکاری ریاضیدانان محترم، استادان، دانشجویان، دانش‌آموزان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه، بتواند

آن‌را کامل کند. بنابراین تقاضا دارد، قضیه‌ها و مسأله‌هایی را که در این مجموعه وجود ندارد، همچنین نظرات و پیشنهادهای اصلاحی و ارشادی خود را برای رفع کاستیها و تکمیل دایرةالمعارف، به نشانی ناشر یا مؤلف ارسال فرمایند، که پیشاپیش از این همکاری ارزنده، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

مؤلف

مکان هندسی، پوش

بخش ۱. تعریف و قضیه
بخش ۲. نقطه، خط، زاویه
بخش ۳. مثلث
بخش ۴. چندضلعی
بخش ۵. دایره
بخش ۶. مقطعهای مخروطی
بخش ۷. پوش

بخش ۱

• تعریف و قضیه

۱.۱. مکانهای هندسی وابسته به نقطه‌های ثابت
۱.۱.۱. مکانهای هندسی وابسته به یک نقطهٔ ثابت
۲.۱.۱. مکانهای هندسی وابسته به دو نقطهٔ ثابت

۲.۱. مکانهای هندسی وابسته به خطهای ثابت
۱.۲.۱. مکانهای هندسی وابسته به یک خط ثابت
۲.۲.۱. مکانهای هندسی وابسته به دو خط ثابت
۳.۲.۱. مکانهای هندسی وابسته به خطها و نقطه‌های ثابت
۴.۲.۱. مکانهای هندسی وابسته به دایره‌ها و نقطه‌های ثابت

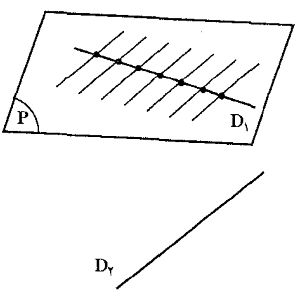
بخش ۱. تعریف و قضیه

در این بخش، مکانهای هندسی مهم در هندسهٔ مسطحه را که برای اثبات قضیه‌ها و حل مسأله‌ها، کاربرد فراوان دارند، معرفی، و آنها را تنها، به روش هندسی ثابت می‌کنیم.
اثبات بعضی از این مکانهای هندسی، مانند دایره، بیضی، هذلولی و سهمی (مقطعهای مخروطی) در هندسهٔ فضایی انجام می‌شود و در این بخش، تنها به تعریف آنها اکتفا می‌کنیم.
تعریف کامل مکانهای هندسی در صفحه و فضا، و اثبات آنها به روشهای هندسی و تحلیلی، در مجموعه کتابهای «مکانهای هندسی» آمده است؛ علاقه‌مندان می‌توانند به این مجموعه مراجعه کنند.

مکان هندسی

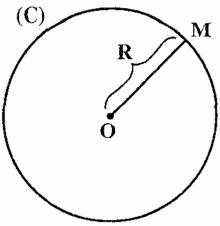
تعریف. مکان هندسی نقطه‌ای از فضای H که دارای خاصیت a باشد، شکل هندسی f است، هرگاه:
۱. هر نقطه از شکل f دارای خاصیت a باشد؛
۲. هر نقطه از فضای H که دارای خاصیت a است، متعلق به شکل f باشد.
برای توضیح، مکان هندسی نقطه‌ای از فضای H را که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله است در نظر می‌گیریم. اگر فضای H (میدان عمل) صفحه‌ای شامل A و B باشد، می‌دانیم که مکان هندسی، عمودمنصف پاره‌خط AB است. اگر H فضای سه‌بعدی باشد، مکان هندسی، صفحهٔ عمودمنصف پاره‌خط AB است. اگر H خط مستقیمی باشد که از A و B می‌گذرد، مکان هندسی مطلوب، نقطهٔ وسط پاره‌خط AB است. اگر H سطح کره‌ای باشد که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد، مکان هندسی مطلوب دایرهٔ عظیمه‌ای از این کره است که صفحهٔ آن بر AB عمود است. **نکته.** همین تعریف را می‌توان برای مکان هندسی خط راست، یا هر شکل هندسی دیگر که ویژگیهای لازم برای مکان هندسی بودن را دارد، بیان کرد. به‌عنوان مثال داریم:

قضیه. دو خط راست ناموازی D_1 و D_2 داده شده‌اند، مکان هندسی خطهای راستی که بر خط D_1 متکی و با خط راست D_2 موازی می‌باشند، یک صفحه شامل D_1 است که با خط D_2 موازی است.



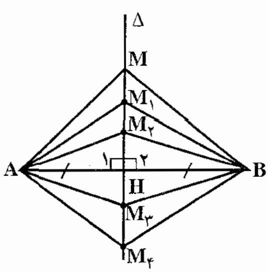
۱.۱. مکان هندسی وابسته به نقطه‌های ثابت

۱.۱.۱. مکان هندسی وابسته به یک نقطهٔ ثابت

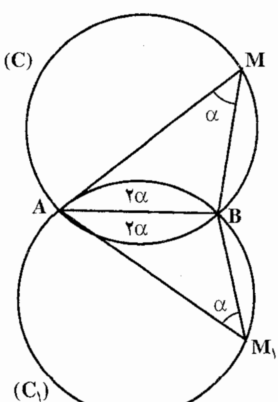


۱. **قضیه.** مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از نقطهٔ ثابتی واقع در آن صفحه به فاصلهٔ ثابتی باشد، یک دایره است که آن نقطهٔ ثابت، مرکز و آن مقدار ثابت، شعاع دایره نامیده می‌شوند. مانند دایرهٔ (C) به مرکز O و به شعاع R، که به‌صورت $C(O,R)$ نمایش داده می‌شود.

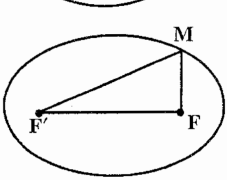
۲.۱.۱. مکانهای هندسی وابسته به دو نقطهٔ ثابت



۲. **قضیه.** مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه به یک فاصله است، عمودمنصف پاره‌خط AB است.



۳. **قضیه.** مکان هندسی نقطه‌ای مانند M از یک صفحه که از وصل‌کردن آن به دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه، زاویهٔ ثابت $A\hat{M}B = \alpha$ پدید می‌آید، کمانهایی از دو دایرهٔ متساوی است که بر دو نقطهٔ A و B می‌گذرند و زاویهٔ مرکزی مقابل به وتر مشترکشان برابر 2α است. این کمانها را کمان درخور، یا کمان حاوی زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AB می‌نامند.

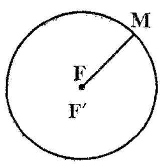


۴. **قضیه.** مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت F و F′ واقع در آن صفحه مقدار ثابت $2a > 0$ باشد، یک بیضی است که F و F′

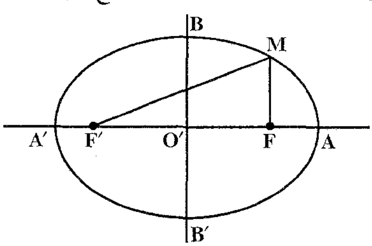
کانونها و $۲a$ عدد ثابت آن نامیده می‌شوند.
فاصلهٔ بین دو کانون را که عدد ثابتی است، فاصلهٔ کانونی بیضی می‌نامند و به $۲c$ نشان می‌دهند.
اگر M نقطه‌ای واقع بر بیضی به کانونهای F و F' و عدد ثابت $۲a$ باشد، داریم :

$$MF + MF' = ۲a$$

خروج از مرکز بیضی. نسبت $e = \frac{c}{a}$ را خروج از مرکز بیضی می‌نامند که چون $FF' < MF + MF'$ است، $۲c < ۲a$ و یا $c < a$ و $\frac{c}{a} < ۱$ است. خروج از مرکز بیضی را به e نشان می‌دهند ؛ $e = \frac{c}{a} < ۱$. هر قدر e به صفر نزدیکتر شود، بیضی به دایره نزدیکتر می‌شود و هر قدر e به ۱ نزدیکتر شود، بیضی کشیده‌تر می‌شود، یعنی به سمت یک پاره‌خط میل می‌کند. درصورتی که $e = ۰$ باشد، F بر F' منطبق گردیده و بیضی به دایره تبدیل می‌شود و اگر $e = ۱$ باشد، بیضی به پاره‌خط FF' تبدیل می‌شود.



محورهای تقارن، مرکز تقارن و رأسهای بیضی. بیضی دو محور تقارن دارد : یکی خط FF' که آن‌را محور تقارن کانونی بیضی می‌نامند و دیگری عمودمنصف پاره‌خط FF' که محور تقارن ناکانونی بیضی نامیده می‌شود. نقطهٔ O' محل تلاقی دو محور تقارن بیضی مرکز تقارن بیضی است که به‌طور خلاصه آن را مرکز بیضی می‌نامند. محور کانونی بیضی، بیضی را در A و A' و محور ناکانونی آن، بیضی را در دو نقطهٔ B و B' قطع می‌کنند که چهار نقطهٔ A، A'، B و B' را رأسهای بیضی می‌نامند. طول پاره‌خط AA' برابر $۲a$، عدد ثابت بیضی است. طول پاره‌خط BB' را به $۲b$ نشان می‌دهند.



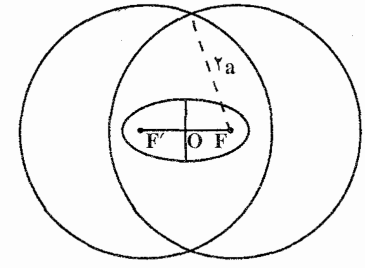
اگر نقطهٔ O' مرکز تقارن بیضی باشد، داریم :

$$AA' = ۲a \Rightarrow O'A = O'A' = a$$

$$BB' = ۲b \Rightarrow O'B = O'B' = b$$

$$FF' = ۲c \Rightarrow O'F = O'F' = c$$

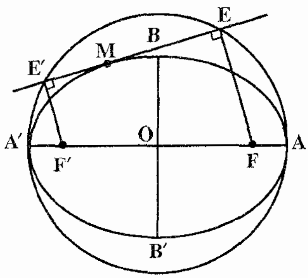
بین a، b و c رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ برقرار است.



دایره‌های هادی بیضی. دایره‌هایی که مرکزشان یک کانون بیضی و شعاع هر یک برابر ۲a است، دایره‌های هادی بیضی نامیده می‌شوند. دایرهٔ به مرکز F و شعاع ۲a را دایرهٔ هادی کانون F و دایرهٔ به مرکز ′F و به شعاع ۲a را دایرهٔ هادی کانون ′F می‌نامند. این دو دایره متقاطعند و بیضی به تمامی، داخل هریک از این دایره‌هاست.

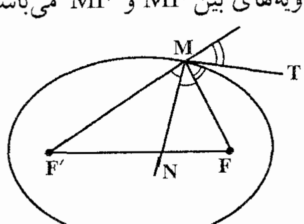
۵. **ویژگی دایره‌های هادی بیضی. قضیه.** هر نقطهٔ بیضی به یک فاصله از یک کانون و از دایرهٔ هادی کانون دیگر است.

دایرهٔ اصلی بیضی. دایره‌ای است که مرکزش، مرکز بیضی و شعاعش برابر a است. این دایره در دو نقطهٔ A و ′A دو سر قطر بزرگ بیضی، بر بیضی مماس است.



ویژگی دایرهٔ اصلی بیضی. دایرهٔ اصلی بیضی مکان هندسی تصویرهای کانون‌های بیضی روی خطهای مماس بر بیضی است. در شکل، E و ′E تصویرهای کانونهای F و ′F روی یک خط مماس بر بیضی است

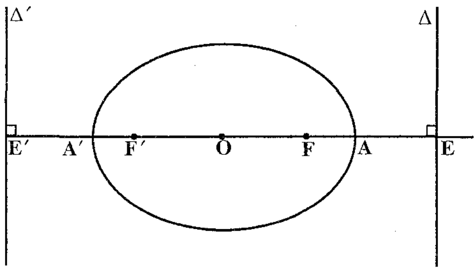
ویژگی خطهای مماس و قائم بر بیضی. خطهای مماس و قائم بر بیضی در هر نقطه واقع بر آن، نیمسازهای زاویه‌های بین شعاعهای حامل نقطهٔ تماس است (خط قائم نیمساز زاویهٔ درونی، و خط مماس نیمساز زاویهٔ برونی بین شعاعهای حامل نقطهٔ تماس است. در شکل MT و MN نیمسازهای زاویه‌های بین MF و ′MF می‌باشند.



نکته. با استفاده از ویژگی خطهای مماس بر بیضی، تعریف دیگری برای دایره‌های هادی بیضی به‌صورت زیر می‌توان بیان کرد:

دایرهٔ هادی هر کانون بیضی، مکان هندسی قرینه‌های آن کانون بیضی، نسبت به خطهای مماس بر بیضی است.

خطهای هادی بیضی. بیضی (E) به کانونهای F و F′ و عدد ثابت 2a را در نظر می‌گیریم. دو رأس کانونی این بیضی را A و A′ می‌نامیم. مزدوج توافقی کانونی F نسبت به دو نقطهٔ A و A′ را به‌دست می‌آوریم و E می‌نامیم. از این نقطه، که نقطهٔ ثابتی است، خط Δ را عمود بر محور کانونی بیضی رسم می‌کنیم. این خط را خط هادی بیضی وابسته به کانون F می‌نامیم.



همچنین نقطهٔ E′ مزدوج توافقی کانون F′ نسبت به دو نقطهٔ A و A′ را به‌دست آورده، E′ می‌نامیم و از E′ که نقطهٔ ثابتی است، خط Δ′ را عمود بر محور کانونی بیضی رسم می کنیم. این خط را خط هادی بیضی وابسته به کانون F′ می‌نامند. پس بیضی دارای دو خط هادی است که یکی خط هادی وابسته به کانون F و دیگری خط هادی وابسته به کانون F′ است.

نکتهٔ ۱. خطهای هادی بیضی به فاصلهٔ $\frac{a^2}{c}$ از مرکز بیضی قرار دارند یعنی :

$OE = OE' = \frac{a^2}{c}$ است ؛ زیرا $(FEAA')$ یک تقسیم توافقی است که در آن نقطهٔ O وسط پاره‌خط AA′ است، پس داریم :

$$OA^2 = OA'^2 = \overline{OE}.\overline{OF} \Rightarrow a^2 = c.\overline{OE} \Rightarrow \overline{OE} = \frac{a^2}{c} \Rightarrow OE = \frac{a^2}{c}$$

به روش مشابه ثابت می‌شود که $OE' = \frac{a^2}{c}$ است.

نکتهٔ ۲. فاصلهٔ هر خط هادی بیضی از کانون نظیرش برابر $\frac{b^2}{c}$ است. یعنی داریم :

$$FE = F'E' = \frac{b^2}{c}$$

زیرا :

$$FE = OE - OF = \frac{a^2}{c} - c = \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{b^2}{c}$$

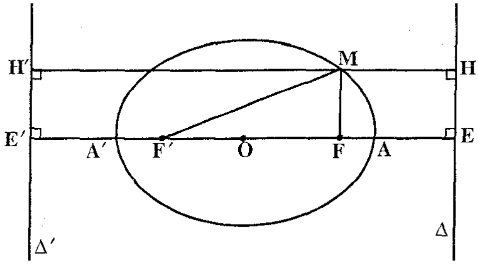
و به همین ترتیب :

$$F'E' = OE' - OF' = \frac{a^2}{c} - c = \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{b^2}{c}$$

نکتهٔ ۳. چون در بیضی $\frac{a}{c} > 1$ است، پس $\frac{a^2}{c} > a$ یعنی $OE > OA$ و $OE' > OA'$ می‌باشد. درنتیجه دو نقطهٔ E و 'E در خارج پاره‌خط 'AA، قطر بزرگ بیضی قرار دارند، یعنی خطهای هادی بیضی در خارج بیضی واقعند.

ویژگی خطهای هادی بیضی. نسبت فاصلهٔ هر نقطهٔ بیضی از یک کانون به فاصلهٔ آن نقطه از خط هادی وابسته به آن کانون، برابر مقدار ثابت $\frac{c}{a}$ است، یعنی اگر M نقطه‌ای واقع بر بیضی به کانون F و خط هادی Δ باشد، و از M عمود MH را بر خط Δ فرود آوریم، داریم :

$$\frac{MF}{MH} = \frac{c}{a} = e$$



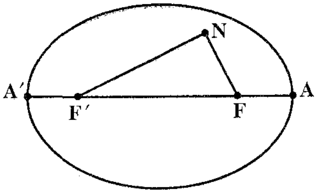
همچنین اگر 'H پای عمود رسم شده از M بر خط Δ'، خط هادی وابسته به کانون 'F باشد، داریم :

$$\frac{MF'}{MH'} = \frac{c}{a} = e$$

با استفاده از این ویژگی می‌توان بیضی را به‌صورت زیر تعریف کرد :

بیضی مکان هندسی نقطه هایی است که نسبت فاصلهٔ آنها از یک نقطهٔ ثابت به فاصلهٔ آنها از یک خط ثابت، مقدار ثابتی (کوچکتر از ۱) است. نقطهٔ ثابت، یک کانون و خط ثابت، خط هادی وابسته به آن کانون بیضی است.

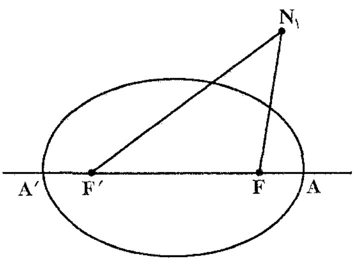
داخل و خارج بیضی. هر بیضی واقع در یک صفحه، آن صفحه را به سه ناحیه زیر بخش می‌کند :



الف. درون بیضی. مجموعهٔ نقطه‌هایی است که روی خط واصل بین آنها و هریک از کانونهای بیضی هیچ نقطه‌ای از بیضی وجود ندارد؛ به‌عبارت دیگر اگر N نقطه‌ای واقع در درون بیضی به کانونهای F و F' باشد، پاره‌خطهای NF و NF' بیضی را قطع نمی‌کنند.

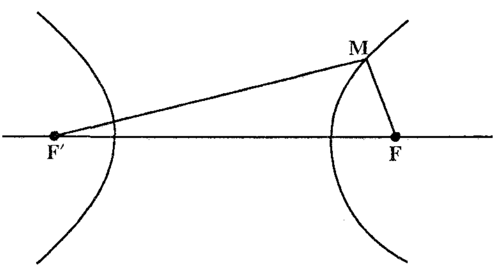
هر نقطه‌ای که در درون بیضی باشد، مجموع فاصله‌اش از دو کانون کمتر از عدد ثابت بیضی است. یعنی برای هر نقطهٔ N واقع در درون بیضی به کانونهای F و F' و عدد ثابت ۲a، داریم $NF + NF' < ۲a$.

ب. روی بیضی. مجموعهٔ نقطه‌هایی است که مجموع فاصله‌شان از دو کانون، برابر ۲a است. برای هر نقطهٔ M واقع بر بیضی به کانونهای F و F' و عدد ثابت ۲a داریم: $MF + MF' = ۲a$.



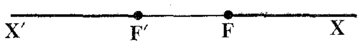
پ. برون بیضی. مجموعه نقطه‌هایی است که روی پاره‌خطهای واصل بین آنها و هریک از کانونها، حتماً یک نقطه از بیضی وجود دارد. به‌عبارت دیگر اگر N_1 نقطه‌ای واقع در برون بیضی به کانونهای F و F' باشد، پاره خطهای N_1F و N_1F'، بیضی را حتماً در یک نقطه قطع می‌کنند.

مجموع فاصلهٔ هر نقطه واقع در برون بیضی از دو کانون، بیشتر از ۲a است؛ یعنی برای هر نقطهٔ N_1 واقع در برون بیضی به کانونهای F و F' و عدد ثابت ۲a داریم $N_1F + N_1F' > ۲a$.

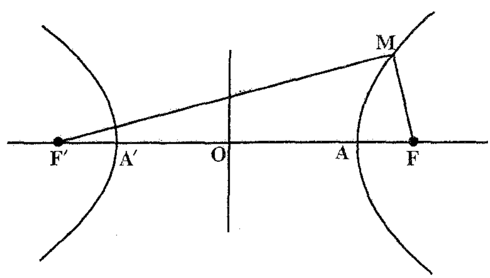


۶. قضیه. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که تفاضل فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت F و F' واقع در آن صفحه، برابر مقدار ثابت $۲a > ۰$ باشد، یک هذلولی است که دو نقطهٔ F و F' کانونها و ۲a عدد ثابت آن است. فاصلهٔ بین دو کانون را که مقدار ثابتی است، فاصلهٔ کانونی هذلولی نامیده و به ۲c نمایش می‌دهند، $FF' = ۲c$.
اگر M نقطه‌ای متعلق به هذلولی به کانونهای F و F' و عدد ثابت ۲a باشد، $|MF' - MF| = ۲a$ است. هذلولی دو شاخهٔ متمایز دارد که یکی را شاخهٔ کانون F و دیگری را شاخهٔ کانون F' می‌نامند. اگر M نقطه‌ای واقع بر شاخهٔ کانون F باشد، $MF' - MF = ۲a$ است.

خروج از مرکز هذلولی. نسبت $e = \frac{c}{a}$ خروج از مرکز هذلولی نامیده می‌شود، که چون $FF' > |MF' - MF|$ یعنی $۲c > ۲a$ و یا $۱ < \frac{c}{a}$ است، خروج از مرکز هذلولی همواره بزرگتر از ۱ می‌باشد. اگر $e = ۱$ باشد، هذلولی به دو نیمخط Fx و $F'x'$ (شکل) تبدیل می‌شود.



محورهای تقارن، مرکز تقارن و رأسهای هذلولی. هذلولی دو محور تقارن دارد، یکی FF' که آن را محور تقارن کانونی هذلولی می‌نامند و دیگری عمودمنصف پاره‌خط FF' که محور تقارن ناکانونی نامیده می‌شود. نقطهٔ O' محل برخورد این دو محور تقارن، مرکز تقارن هذلولی است. محور کانونی هذلولی، هذلولی را در دو نقطهٔ A و A' قطع می‌کند که دو رأس کانونی هذلولی نامیده می‌شوند. $AA' = ۲a$ ، طول قطر قاطع هذلولی نام دارد.



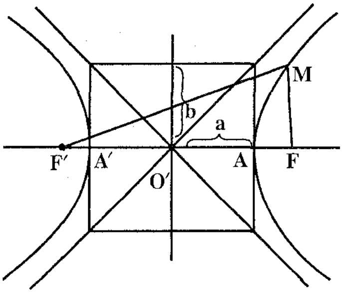
محور ناکانونی هذلولی، هذلولی را قطع نمی‌کند. امّا از نظر شباهت با بیضی دو نقطهٔ B و B' را روی محور ناکانونی چنان اختیار می‌کنند که $O'B = O'B' = b = \sqrt{c^۲ - a^۲}$ است، و BB' را قطرناکانونی هذلولی گویند. اگر O' مرکز هذلولی باشد، داریم :

$$AA' = ۲a \Rightarrow O'A = O'A' = a$$

$$BB' = ۲b \Rightarrow O'B = O'B' = b$$

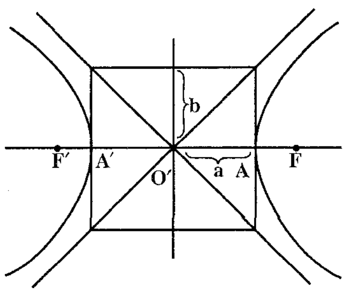
$$FF' = ۲c \Rightarrow O'F = O'F' = c$$

بین a، b و c رابطهٔ $c^۲ = b^۲ + a^۲$ برقرار است.

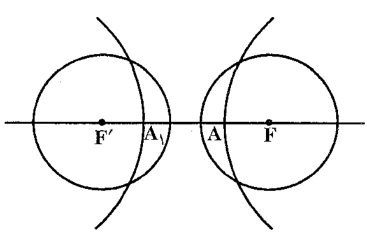


مجانبهای هذلولی. هذلولی دو مجانب دارد که از مرکز آن می‌گذرند. این مجانبها قطرهای مستطیلی هستند که مرکز آن، مرکز هذلولی، ضلعهایش $2a$ و $2b$ وموازی محورهای تقارن هذلولی‌اند.

هذلولی متساوی‌الساقین. اگر در هذلولی $a = b$ باشد، هذلولی متساوی‌الساقین یا متساوی‌القطرین نامیده می‌شود. در هذلولی متساوی‌الساقین مجانبها بر هم عمودند و داریم: $c = a\sqrt{2} = b\sqrt{2}$.



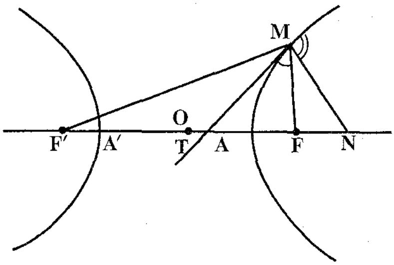
دایره‌های هادی هذلولی. دایره هایی به مرکز کانونها و به شعاع $2a$ می‌باشند. هذلولی دو دایرهٔ هادی دارد. یکی دایرهٔ هادی کانون F و دیگری دایره‌های کانون F′. چون در هذلولی، $2c > 2a$ است، هر کانون هذلولی در خارج دایرهٔ هادی کانون دیگر قرار دارد. دایره‌های هادی هذلولی می‌توانند متقاطع، مماس یا متخارج باشند.



۷. **ویژگی دایره‌های هادی هذلولی. قضیه.** هر نقطهٔ واقع بر یک شاخهٔ هذلولی از کانون نظیر آن شاخه و از دایرهٔ هادی کانون دیگر به یک فاصله است.

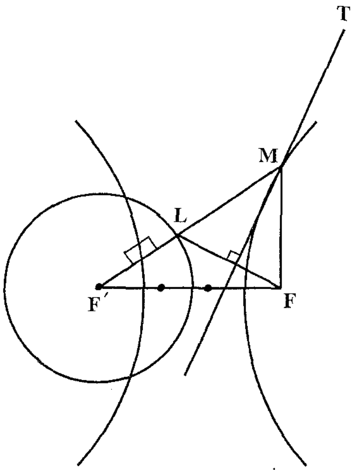
دایرهٔ اصلی هذلولی. دایره‌ای است که مرکزش، مرکز هذلولی است و شعاعش برابر a می‌باشد. این دایره در دو نقطهٔ A و A′ که رأسهای هذلولی‌اند، بر هذلولی مماس است.

ویژگی دایرهٔ اصلی هذلولی. دایرهٔ اصلی هذلولی مکان هندسی تصویر کانونهای هذلولی روی خطهایی مماس بر هذلولی است.

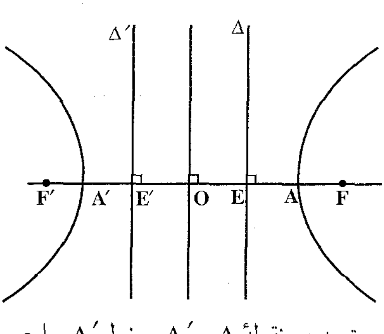


ویژگی خطهای مماس و قائم بر هذلولی. خطهای مماس و قائم بر هذلولی در هر نقطه واقع بر آن، نیمسازهای زاویه‌های بین شعاع حاملهای نقطهٔ تماسند (خط مماس، نیمساز زاویهٔ بین دو شعاع حامل و خط قائم، نیمساز زاویهٔ بین یک شعاع حامل و امتداد شعاع حامل دیگر است).

نکته. با استفاده از ویژگی خطهای مماس بر هذلولی، دایرهٔ هادی هذلولی را به‌صورت زیر می‌توان تعریف کرد:



دایره‌های هادی هذلولی، مکان هندسی قرینه‌های کانونهای هذلولی، نسبت به خطهای مماس بر هذلولی می‌باشند. به‌صورت دقیق‌تر می‌توان گفت: دایرهٔ هادی هر کانون، مکان هندسی قرینه‌های کانون دیگر نسبت به خطهای مماس بر هذلولی است.



خطهای هادی هذلولی. هذلولی (H) به کانونهای F و F′ و عدد ثابت ۲a را در نظر می‌گیریم. دو رأس هذلولی را A و A′ نامیده، مزدوج توافقی کانون F نسبت به دو نقطهٔ A و A′ را به‌دست آورده، نقطهٔ E می‌نامیم. از این نقطه که نقطهٔ ثابتی است، خط Δ را عمود بر محور کانونی هذلولی رسم می‌کنیم. این خط را خط هادی هذلولی وابسته به کانون F می‌نامند.

همچنین از نقطهٔ E′ مزدوج توافقی کانون F′ نسبت به دو نقطهٔ A و A′، خط Δ' را عمود بر محور کانونی هذلولی رسم می‌کنیم. این خط را خط هادی هذلولی وابسته به کانون F′ می‌نامند. پس هذلولی نیز دو خط هادی دارد.

نکتهٔ ۱. فاصلهٔ هر خط هادی هذلولی از مرکز هذلولی برابر $\frac{a^2}{c}$ است؛ زیرا $(FEAA')$ و $(F'E'AA')$ تقسیم توافقی هستند و O وسط پاره‌خط AA' است. پس داریم:

$$\overline{OA}^2 = \overline{OA'}^2 = \overline{OF}.\overline{OE} \Rightarrow a^2 = c.\overline{OE} \Rightarrow \overline{OE} = \frac{a^2}{c} \Rightarrow OE = \frac{a^2}{c}$$

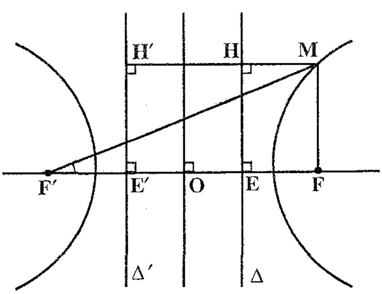
$$\overline{OA}^2 = \overline{OA'}^2 = \overline{OF'}.\overline{OE'} \Rightarrow a^2 = c.\overline{OE'} \Rightarrow \overline{OE'} = \frac{a^2}{c} \Rightarrow OE' = \frac{a^2}{c}$$

نکتهٔ ۲. فاصلهٔ هر خط هادی هذلولی از کانون نظیرش برابر $\frac{b^2}{c}$ است. زیرا داریم:

$$FE = OE - OF = \frac{a^2}{c} - c = \frac{a^2 - c^2}{c} = \frac{b^2}{c}$$

همچنین $FE' = \frac{b^2}{c}$ است.

نکتهٔ ۳. در هذلولی $\frac{a}{c} < 1$ است، بنابراین $\frac{a^2}{c} < a$ است. درنتیجه $OE < OA$ و $OE' < OA'$ می‌باشد. یعنی نقطه‌های E و E' روی پاره‌خط AA' (بین دو نقطهٔ A و A') قرار دارند. پس خطهای هادی هذلولی، خارج هذلولی واقعند و هیچ شاخه‌ای از هذلولی را قطع نمی‌کنند.

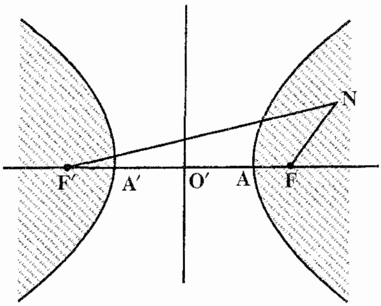


ویژگی خطهای هادی هذلولی. اگر از نقطهٔ M واقع بر هذلولی (H) به کانونهای F و F' و خطهای هادی Δ و Δ' عمودهای MH و MH' را بترتیب بر Δ و Δ' فرود آوریم، و از M به F و F' وصل کنیم، داریم:

$$\frac{MF}{MH} = \frac{MF'}{MH'} = \frac{c}{a} = e > 1$$

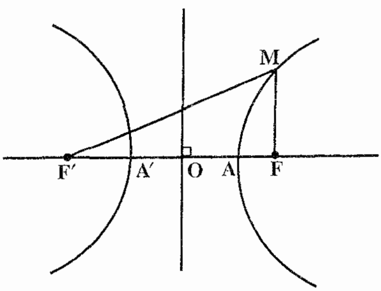
یعنی نسبت فاصلهٔ هر نقطهٔ هذلولی از یک کانون، به فاصله‌اش از خط هادی وابسته به همان کانون، برابر مقدار ثابت $\frac{c}{a}$ (خروج از مرکز هذلولی) است. از این ویژگی تعریف زیر برای هذلولی نتیجه می‌شود:

هذلولی مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت فاصله‌اش از یک نقطهٔ ثابت، به فاصله‌اش از یک خط ثابت برابر مقدار ثابتی (بزرگتر از ۱) است. این نقطهٔ ثابت یک کانون و آن خط ثابت، خط هادی وابسته به آن کانون نامیده می‌شود.

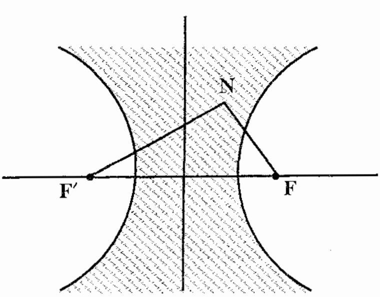


داخل و خارج هذلولی. هر هذلولی واقع در یک صفحه، آن صفحه را به سه ناحیه زیر بخش می‌کند:

الف. درون هذلولی. مجموعهٔ نقطه‌هایی است که روی پاره‌خطهای واصل بین آن نقطه‌ها و کانونها، یا هیچ نقطه‌ای وجود ندارد، و یا دو نقطه وجود دارد. این ناحیه شامل کانونهای هذلولی است. اگر N نقطه‌ای متعلق به درون هذلولی به کانونهای F و F′ و عدد ثابت ۲a باشد، $|NF - NF'| > 2a$ است.



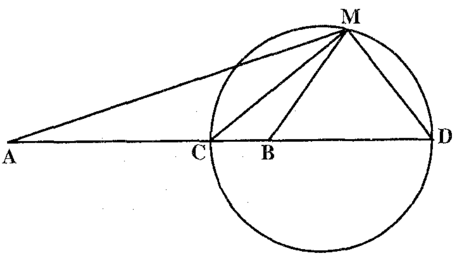
ب. روی هذلولی. مجموعهٔ نقطه‌هایی از صفحه است که قدرمطلق تفاضل فاصله‌شان از دو کانون برابر عدد ثابت هذلولی است. برای هر نقطهٔ M واقع بر هذلولی به کانونهای F و F′ و عدد ثابت ۲a داریم: $|MF - MF'| = 2a$.



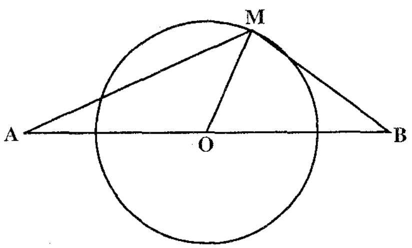
پ. برون هذلولی. مجموعهٔ نقطه‌هایی است که روی پاره‌خطهای واصل بین آن نقطه‌ها و هریک از کانونها، تنها یک نقطه از هذلولی وجود دارد. این ناحیه شامل مرکز و محور ناکانونی هذلولی است.

اگر N_1 نقطه‌ای متعلق به برون هذلولی به کانونهای F و F′ و عدد ثابت باشد، $|N_1F - N_1F'| < 2a$ است.

۸. **قضیه.** مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که حاصل‌ضرب فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه، مقدار ثابتی است، یک منحنی غیرمخروطی است.

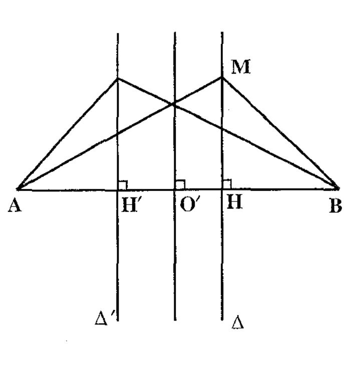


۹. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه برابر مقدار ثابت $k(k \neq 1)$ است، دایره‌ای است که دو سر قطرش پاره‌خط AB را به نسبت توافقی تقسیم می‌کنند. این دایره را دایرهٔ آپولونیوس می‌نامند.



۱۰. **قضیه**. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه برابر مقدار ثابت k^2 باشد، دایره‌ای است به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و به شعاع $R = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - AB^2}$.

۱۱. **قضیهٔ کارنو**. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه برابر مقدار ثابت k^2 باشد، دو خط راست عمود بر خط AB است، به‌قسمی که اگر O وسط پاره‌خط AB و H و H' پای دو خط عمود باشند، $OH = OH' = \frac{k^2}{2AB}$ است.



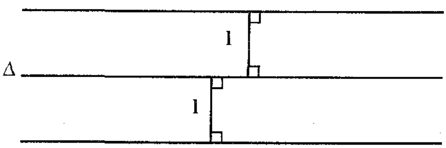
۱۲. دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ $AB = d$ مفروضند. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M از صفحهٔ گذرنده بر AB و یا در فضا به‌قسمی که:

$$\alpha.\overline{MA}^2 + \beta.\overline{MB}^2 = d^2$$

که در آن α و β دو عدد جبری مفروض می‌باشند.

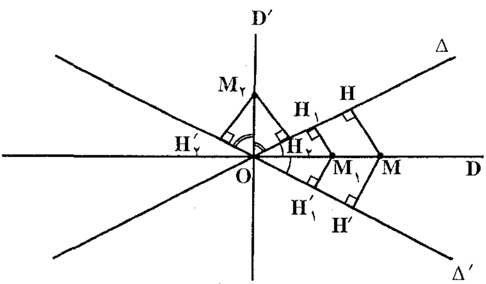
۲.۱. مکانهای هندسی وابسته به خطهای ثابت

۱.۲.۱. مکانهای هندسی وابسته به یک خط ثابت



۱۳. **قضیه.** مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که به فاصلهٔ معین l از خط ثابت Δ واقع در آن صفحه باشد، دو خط راست موازی خط Δ به فاصله l از آن و واقع در دو طرف آن می‌باشد.

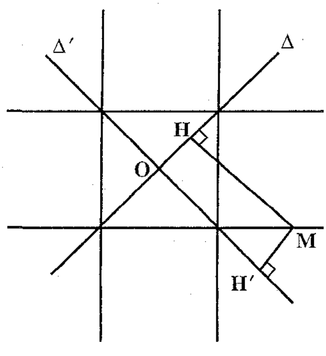
۲.۲.۱. مکانهای هندسی وابسته به دو خط ثابت



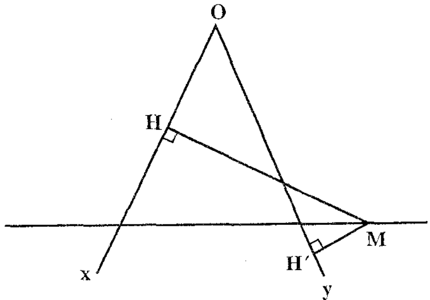
۱۴. **قضیه.** مکان هندسی نقطه‌ای که از دو خط راست متقاطع به یک فاصله است، نیمسازهای زاویه‌های بین آن دو خط راست است.

۱۵. دو خط متقاطع مفروضند. مکان هندسی نقطه‌هایی را پیدا کنید که مجموع فاصله‌های آنها از این دو خط برابر l باشد.

۱۶. دو خط متوازی مفروضند. مکان هندسی نقطه‌ای را پیدا کنید که مجموع فاصله‌های آنها از این دو خط، برابر l باشد.



۱۷. **قضیه.** مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل فاصله‌اش از دو خط راست متقاطع مقدار ثابت l باشد، امتداد ضلعهای مستطیلی است که آن دو خط قطرهای آن، و فاصلهٔ هر رأس از قطر مقابلش برابر l است.



نکته. مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل فاصله‌اش از دو نیمخط Ox و Oy مقدار ثابت l باشد، امتداد قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی به رأس O است که اندازهٔ ارتفاع وارد بر هر ساق آن برابر l است.

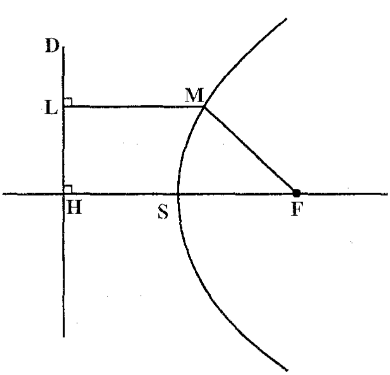
۱۸. دو خط موازی Δ و ′Δ داده شده‌اند. مکان هندسی نقطهٔ M از صفحهٔ این دو خط را بیابید که تفاضل فاصله‌اش از این دو خط برابر مقدار معلوم l باشد.

۱۹. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌ای که حاصل‌ضرب فاصله‌اش از دو خط ثابت، مقدار ثابتی باشد.

۲۰. مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌های آن از خطهای d و ′d مساوی k است، دو خط است که با d و ′d دستگاه توافقی تشکیل می‌دهند. در فضا برای دو خط موازی سطح استوانهٔ دواری است که محور آن موازی با دو خط است، و در غیر این صورت رویهٔ درجهٔ دومی است که معادلهٔ آن را در هندسهٔ تحلیلی می‌توان به‌دست آورد.

۲۱. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحه را تعیین کنید که نسبت فاصله‌اش از دو خط موازی Δ و ′Δ برابر عدد معلوم k باشد.

۱.۲.۳. مکانهای هندسی وابسته به خطها و نقطه‌های ثابت



۲۲. **قضیه.** مکان هندسی نقطه‌هایی از یک صفحه که از یک خط ثابت و از یک نقطهٔ ثابت به یک فاصله باشد، یک سهمی است که خط ثابت، خط هادی و نقطهٔ ثابت کانون این سهمی است.

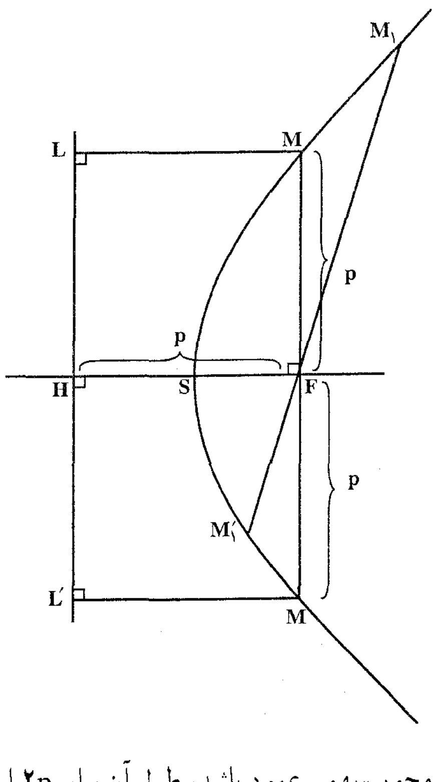
اگر M نقطه‌ای از سهمی به کانون F و خط هادی D باشد و از M عمود ML را بر D فرود آوریم، $MF = ML$ است.

MF را شعاع حامل نقطهٔ M می‌نامند. فاصلهٔ نقطهٔ F تا خط هادی، یعنی طول پاره‌خط FH را که مقدار ثابتی است، پارامتر یا ممیز سهمی می‌نامند و با P نمایش می‌دهند، $FH = P$.

خط FH محور تقارن سهمی است که به‌طور خلاصه آن‌را محور سهمی می‌نامند. نقطهٔ S وسط پاره‌خط FH رأس سهمی نامیده می‌شود.

خروج از مرکز سهمی. نسبت فاصلهٔ هر نقطهٔ سهمی از کانون، به فاصله‌اش از خط هادی آن، یعنی $\frac{MF}{ML} = ۱$، خروج از مرکز سهمی نامیده می‌شود. بنابراین خروج از مرکز سهمی برابر عدد ثابت ۱ است.

ویژگی کانونی سهمی. اگر خطی از F، کانون سهمی، بگذرد و سهمی را در دو نقطهٔ M و M' قطع کند، پاره‌خط MM' را یک وتر کانونی سهمی می‌نامند.

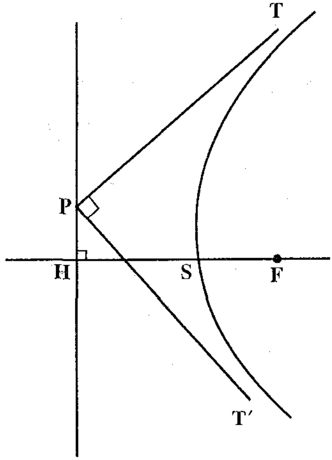


اگر وتر کانونی سهمی بر محور سهمی عمود باشد، طول آن برابر $۲p$ است؛ زیرا داریم:

$$ML = M'L' = FM = FM' = p \Rightarrow MM' = ۲p$$

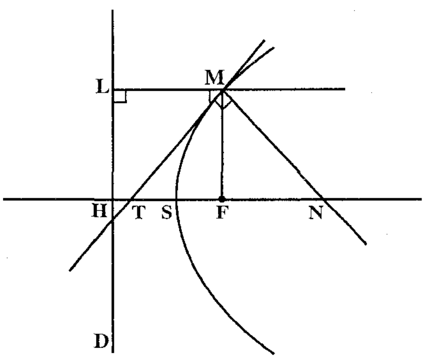
از این ویژگی برای رسم سهمی استفاده می‌کنند.

ویژگی خط هادی سهمی. خط هادی سهمی مکان هندسی نقطه‌هایی هست که از آن نقطه‌ها دو خط مماس عمود بر هم، بر سهمی می‌توان رسم کرد. این ویژگی را ثابت خواهیم کرد.



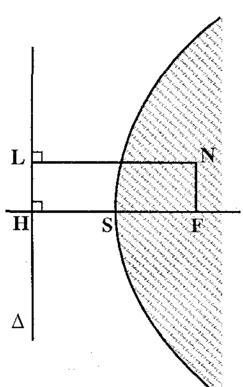
ویژگی خطهای مماس و قائم بر سهمی. خطهای مماس و قائم بر سهمی در یک نقطهٔ واقع بر آن نیمسازهای زاویه‌های بین شعاع حامل آن نقطه و خطی است که از آن نقطه موازی محور سهمی رسم می‌شود.

در شکل خطهای MT و MN که بترتیب مماس و قائم بر سهمی به کانون F و خط هادی D هستند، نیمسازهای زاویهٔ بین MF و ML می‌باشند.

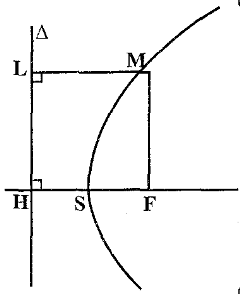


درون و برون سهمی. هر سهمی واقع در یک صفحه، آن صفحه را به سه ناحیهٔ زیر بخش می‌کند:

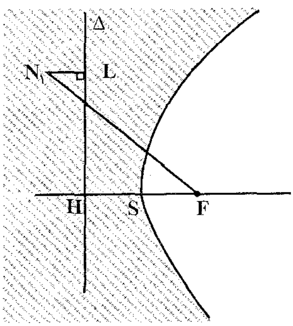
الف. درون سهمی. مجموعهٔ نقطه‌هایی است که روی پاره‌خطهای واصل بین آن نقطه‌ها و کانون سهمی هیچ نقطه‌ای از سهمی وجود ندارد. به‌عبارت دیگر اگر N نقطه‌ای واقع در درون سهمی به کانون F باشد، پاره‌خط NF، سهمی را در هیچ نقطه‌ای قطع نمی‌کند. هر نقطه‌ای که در درون سهمی باشد، فاصله‌اش تا کانون کمتر از فاصله‌اش تا خط هادی سهمی است. یعنی اگر N نقطه‌ای واقع



در درون سهمی به کانون F و خط هادی Δ باشد، $NF < NL$ است.

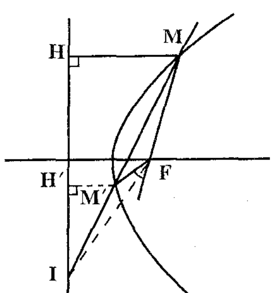


ب. روی سهمی. مجموعهٔ نقطه‌هایی هستند که به یک فاصله از کانون و خط هادی می‌باشند.
برای هر نقطهٔ M واقع بر سهمی به کانون F و خط هادی Δ داریم: $MF = ML$.

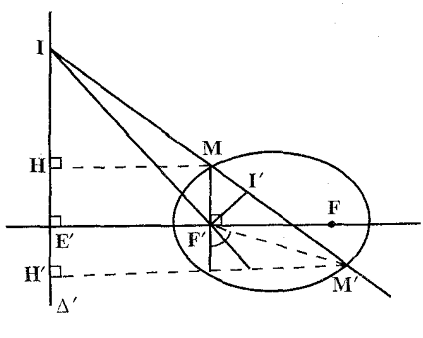


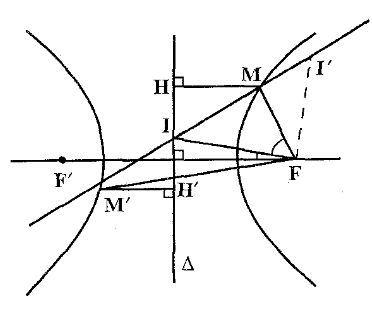
پ. برون سهمی. مجموعهٔ نقطه‌هایی است که روی پاره‌خط واصل بین آنها و کانون سهمی یک نقطه وجود دارد. به‌عبارت دیگر اگر N_1 نقطه‌ای واقع در برون سهمی باشد، پاره‌خط N_1F سهمی را در یک نقطه قطع می‌کند. هر نقطه‌ای مانند N_1 که برون سهمی به کانون F و خط هادی Δ است، فاصله‌اش تا کانون بیشتر از فاصله‌اش تا خط هادی است، یعنی داریم $N_1F > N_1L$.

چند خاصیت مشترک مقطعهای مخروطی

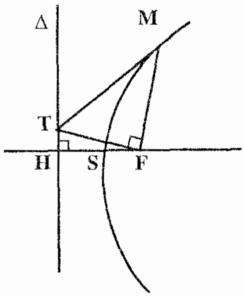


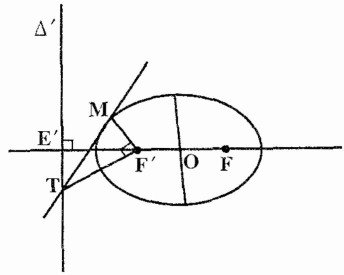
۲۳. قضیهٔ ۱. هرگاه خطی یک مقطع مخروطی را در M و M′ و یک خط هادی را در I قطع کند، خطی که از I به کانون F مربوط به آن خط هادی وصل شود، نیمساز یکی از زاویه‌های بین شعاعهای حامل نقطه‌های M و M′ است.



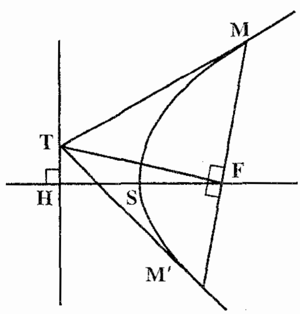


۲۴. قضیهٔ ۲. قطعه‌ای از مماس بر یک مقطع مخروطی، محدود بین نقطهٔ تماس و خط هادی هر کانون، از آن کانون به زاویهٔ قائمه دیده می‌شود. در شکل پاره‌خط MI از کانون F به زاویهٔ قائمه دیده می‌شود، یعنی $M\hat{F}T = 90^\circ$ است.

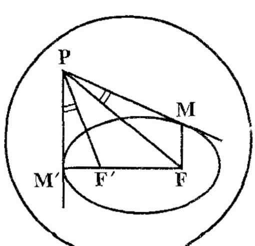




۲۵. قضیهٔ ۳. اگر از نقطهٔ T واقع بر خط هادی یک مقطع مخروطی دو مماس TM و TM_1 را بر آن مقطع رسم کنیم، خط MM_1 واصل بین نقطه‌های تماس، بر آن کانون می‌گذرد و بر FT عمود است.



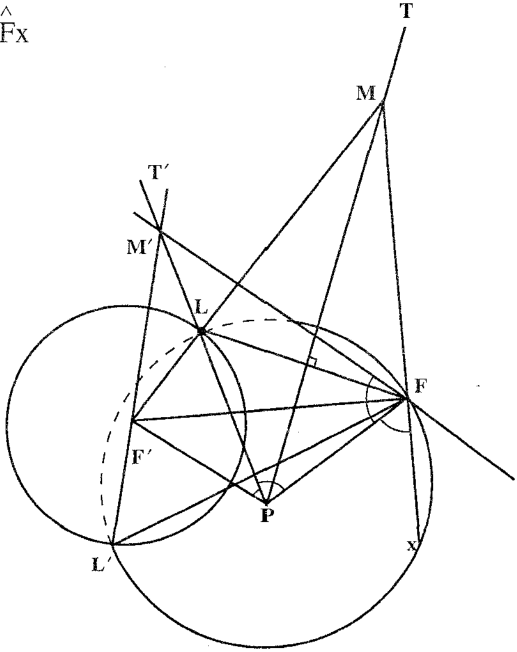
۲۶. قضیهٔ ۴. قضیهٔ پونسله. هرگاه از یک نقطه دو مماس بر یک مقطع مخروطی (بیضی یا هذلولی) رسم کنیم:



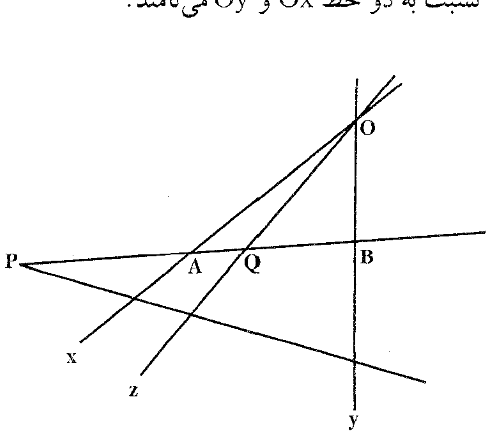
۱. زاویهٔ بین هر مماس و خطی که آن نقطه را به یک کانون وصل کند، برابر است با زاویهٔ بین مماس دیگر و خط واصل بین آن نقطه و کانون دیگر، یعنی در شکل $F\hat{P}M = F'\hat{P}M'$.

۲. خطی که نقطهٔ مفروض، یعنی نقطهٔ برخورد دو مماس را به یک کانون وصل می‌کند، نیمساز زاویهٔ بین شعاعهای حامل واصل از آن کانون به دو نقطهٔ تماس است. یعنی در شکل:

$$M'\hat{F}P = P\hat{F}x$$

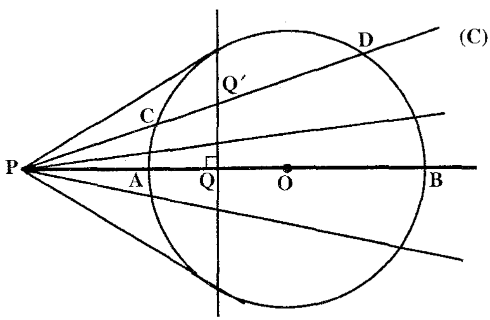


۲۷. مکان هندسی نقطه‌های مزدوج نقطه مفروض P نسبت به دو خط متقاطع Ox و Oy عبارت است از شعاع مزدوج توافقی خط OP نسبت به دو خط Ox و Oy. این مکان (خط Oz) را قطبی نقطهٔ P نسبت به دو خط Ox و Oy می‌نامند.



۴.۲.۱. مکانهای هندسی وابسته به دایره‌ها و نقطه‌های ثابت

۲۸. مکان هندسی مزدوجهای توافقی نقطهٔ مفروض P نسبت به نقطه‌های برخورد یک قاطع گذرنده از P با دایرهٔ $C(O,R)$ ، خطی است راست، عمود بر قطری از این دایره که از نقطهٔ P می‌گذرد.
این خط را قطبی نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ (C) می‌نامند.



۲۹. برای اثبات این که شکلی مکان هندسی است، کدام یک از روشهای زیر صحیح نیست؟
الف. هر نقطهٔ واقع بر مکان هندسی در شرایط فوق صدق کند و هر نقطهٔ خارج از مکان هندسی در شرایط صدق نمی‌کند.
ب. هر نقطه که در شرایط صدق نکند، بر مکان هندسی نیست و هر نقطهٔ مکان هندسی در شرایط صدق می‌کند.
ج. هر نقطه که در شرایط صدق کند بر مکان هندسی است و هر نقطهٔ مکان هندسی در شرایط صدق می‌کند.
د. هر نقطه که بر مکان هندسی واقع نباشد، در شرایط صدق نمی‌کند و هر نقطه که در شرایط صدق نکند، بر مکان هندسی نیست.
هـ. هر نقطه که در شرایط صدق کند، بر مکان هندسی است و هر نقطه که در شرایط صدق نکند، بر مکان هندسی نیست.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۱

بخش ۲

• نقطه، خط، زاویه

۲.۱. نقطه‌های ثابت

۲.۱.۱. یک نقطه

۲.۱.۲. دو نقطه

۲.۱.۳. سه نقطه

۲.۱.۳. ۱. سه نقطه در حالت کلی

۲.۱.۳. ۲. سه نقطهٔ همخط

۲.۱.۴. چهار نقطه

۲.۱.۵. مسأله‌های ترکیبی

۲.۲. خطهای ثابت

۲.۲.۱. پاره‌خط

۲.۲.۱.۱. یک پاره‌خط

۲.۲.۱.۲. دو پاره‌خط

۲.۲.۱.۳. سه پاره‌خط

۲.۲.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی

۲.۲.۲. نیمخط

۲.۲.۲.۱. دو نیمخط

۲.۲.۲.۲. نیمخط، پاره‌خط

۲. ۵. زاویه‌های ثابت

۱.۵.۲. زاویه در حالت کلی

۱.۱.۵.۲. یک زاویه

۲.۱.۵.۲. یک زاویه، یک نقطه

۳.۱.۵.۲. یک زاویه، دو نقطه

۴.۱.۵.۲. یک زاویه، پاره‌خط

۵.۱.۵.۲. یک زاویه، دایره

۲.۵.۲. زاویهٔ قائمه

۱.۲.۵.۲. یک زاویهٔ قائمه

۲.۲.۵.۲. یک زاویهٔ قائمه، یک نقطه

۳.۲.۵.۲. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۲. نقطه، خط، زاویه

شکلهای داده شده در این بخش ؛ نقطه‌ها، خطها و زاویه‌های ثابت یا ترکیبی از آنهاست و می‌خواهیم مکانهای هندسی مربوط به آنها را به‌دست آوریم.

۱.۲. نقطه‌های ثابت

۱.۱.۲. یک نقطه

۳۰. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را پیدا کنید که از نقطهٔ مفروض A می‌گذرند و شعاع آنها برابر R است.

۳۱. مکان هندسی مرکزهای تمام دایره‌های به شعاع مفروض a، که در یک صفحه قرار دارند و از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرند، عبارت است از :

الف) یک دایره　　　　　ب) یک خط راست

ج) دو خط راست　　　　　د) یک دایره

هـ) دو دایره

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۰

۳۲. **تعمیم یک مکان هندسی.** نقطهٔ معین O در یک صفحه مفروض است. مکان هندسی نقطهٔ M از این صفحه را تعیین کنید که فاصلهٔ آن از O، مساوی، کوچکتر یا بزرگتر از l باشد.

۳۳. مجموعهٔ تمام نقطه‌های یک صفحه را که فاصله‌شان تا یک نقطهٔ ثابت واقع در آن صفحه کمتر از ۲cm است، مشخص کنید.

۲.۱.۲. دو نقطه

۳۴. دو نقطهٔ متمایز A و B در صفحه مفروضند. مکان هندسی نقطهٔ M را طوری تعیین کنید که از A و B به یک فاصله باشد ؛ یا فاصلهٔ آن از A، کوچکتر از فاصلهٔ آن از B باشد ؛ یا فاصلهٔ آن از A، بزرگتر از فاصلهٔ آن از B باشد.

۳۵. دو نقطهٔ ثابت A و B در یک صفحه مفروضند. مکان هندسی نقطهٔ M از این صفحه را که فاصله‌هایش از دو نقطهٔ A و B در رابطهٔ $\frac{MA+MB}{MA-MB}=k$ صدق کند $(k \neq 1)$، به‌دست آورید.

۳۶. دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ $AB=8a$ مفروضند. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M، به‌طوری که داشته باشیم: $MA^2+MB^2=82a^2$

۳۷. دو نقطهٔ ثابت A و B و عدد ثابت k داده شده‌اند. مکان هندسی نقطهٔ C را چنان بیابید که $2AC^2+BC^2=k^2$ باشد.

۳۸. دو نقطهٔ ثابت A و B و دو عدد جبری m و n را درنظر می‌گیریم. مکان هندسی نقطهٔ C را چنان بیابید که $mAC^2+nBC^2=k^2$ باشد.

۳۹. دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ $AB=4a$ داده شده است. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M به قسمی که $MA^2-MB^2=24a^2$ باشد.

۴۰. دو نقطهٔ ثابت A و B در یک صفحه داده شده‌اند. مکان هندسی نقطهٔ M از این صفحه را بیابید که $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=k$ باشد (k عدد ثابتی است).

۴۱. A و B دو نقطهٔ ثابت واقع در یک صفحه می‌باشند. ثابت کنید مکان هندسی نقطه‌ای از این صفحه مانند M که، $\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k$ (k عدد ثابت) باشد، یک دایره است.

۴۲. دو نقطهٔ ثابت A و ′A داده شده‌اند. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M به‌طوری که داشته باشیم:

$$\frac{1}{MA^2}+\frac{1}{MA'^2}=\frac{1}{MP^2}$$

(MP فاصلهٔ M از خط ′AA است.)

۴۳. دو نقطهٔ A و B مفروضند. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M به‌طوری که نسبت فاصلهٔ AM به فاصلهٔ نقطهٔ B از خط AM مقدار ثابتی باشد.

۴۴. دو نقطهٔ A و I مفروضند. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند B را پیدا کنید، به‌طوری که مثلث ABC با مرکز دایرهٔ محاطی I وجود داشته باشد و تمام زاویه‌هایش از α $(90^\circ > \alpha > 60^\circ)$ کمتر باشند.

۴۵. دو نقطهٔ A و Q مفروضند. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند B را طوری بیابید که مثلث با زاویه‌های حادهٔ ABC وجود داشته باشد و Q مرکز ثقل آن باشد.

۴۶. دو نقطهٔ A و H مفروضند. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند B را پیدا کنید، به‌طوری که مثلث ABC وجود داشته باشد که H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای آن باشد و هر یک از زاویه‌های آن از α $(\alpha < \frac{\pi}{4})$ بیشتر باشد.

۴۷. دایرهٔ متغیری از دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد. اگر M نقطهٔ تماس این دایره با مماسی که بر AB عمود است باشد، مطلوب است مکان هندسی مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث AMB.

۴۸. دو نقطهٔ A و B داده شده‌اند. خطهایی را تعیین کنید (مکان هندسی) که نسبت فاصلهٔ این دو نقطه از آنها، برابر $\frac{m}{n}$ باشد.

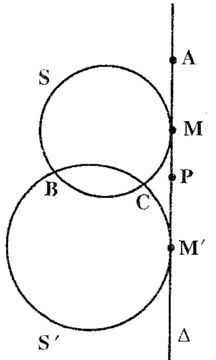
۳.۱.۲. سه نقطه

۱.۳.۱.۲. سه نقطه در حالت کلی

۴۹. سه نقطه در صفحه‌ای داده شده‌اند. از این نقطه‌ها، سه خط که مثلثی متساوی‌الاضلاع تشکیل می‌دهند، رسم شده است. مکان هندسی مرکز این مثلثها را بیابید.

۵۰. سه نقطهٔ A، B و C مفروضند. مکان قطب انعکاس را چنان تعیین کنید که A'، B' و C' منعکسهای نقطه‌های مفروض، رأسهای مثلث قائم‌الزاویه‌ای به رأس A' باشند.

۵۱. سه نقطهٔ ثابت A، B و C داده شده‌اند. بر نقطهٔ A خط متغیر Δ و بر نقطه‌های B و C، دو دایرهٔ S و S' را می‌گذرانیم که بر خط Δ مماس باشند. فرض می‌کنیم M و M' نقطه‌های تماس باشند. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ P، مزدوج توافقی A نسبت به دو نقطهٔ M و M'.



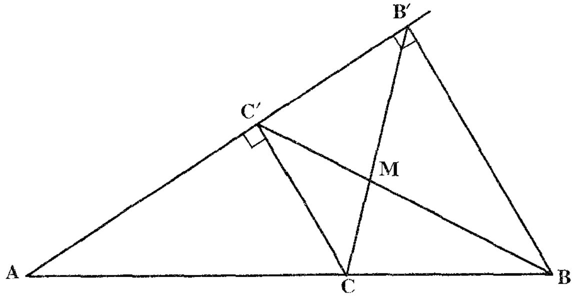
۲.۳.۱.۲. سه نقطهٔ همخط

۵۲. نقطه‌های A، B و C بر یک خط راست واقعند (B بین A و C است). مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را پیدا کنید، به‌طوری که $\cot g\, A\hat{M}B + \cot g\, B\hat{M}C = k$.

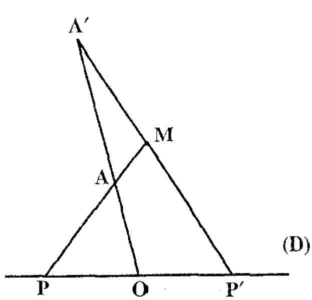
۵۳. روی یک خط راست سه نقطهٔ A، B و C (C بین A و B) را درنظر می‌گیریم. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطه‌هایی که از آنها قطعه خطهای AC و BC به زاویه‌های متساوی دیده شوند.

۵۴. سه نقطه A، B و C بر یک خط راست و نقطهٔ دلخواه D در صفحه و غیرواقع بر این خط مفروضند. خطهای راستی که از C عمود بر AD و BD رسم می‌شوند، خطهای BD و AD را در نقطه‌های P و Q قطع می‌کنند. مکان هندسی M، پای عمود وارد از C بر PQ، را بیابید و تمام نقطه‌هایی مانند D را که برای آنها، M نقطه‌ای ثابت است، پیدا کنید.

۵۵. A، B و C سه نقطه واقع بر یک استقامتند. بر A خط متحرکی می‌گذرانیم و از دو نقطهٔ دیگر عمودهای BB' و CC' را بر آن فرود می‌آوریم. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ برخورد قطرهای ذوزنقه‌ای که به این نحو به‌وجود می‌آید.



۵۶. دو نقطهٔ متغیر P و P' بر خط ثابت D به قسمی تغییر می‌کنند که همواره نسبت به نقطهٔ ثابت O از خط D قرینهٔ یکدیگرند. فرض می‌کنیم A و A' دو نقطهٔ ثابت غیرواقع بر یک خط راست باشند، مکان هندسی نقطهٔ برخورد دو خط AP و $A'P'$ چیست؟



۵۷. دو نقطهٔ ثابت A و B مفروضند و O وسط پاره‌خط AB است. ثابت کنید مکان هندسی نقطهٔ M درصورتی که $MO^2 = MA.MB$ باشد، یک هذلولی است.

۵۸. سه نقطهٔ A، B و C (B بین A و C) واقع روی خط راست xy مفروضند. مکان نقطهٔ تقاطع مماسهای وارده از A و C بر دایرهٔ متغیر مماس بر xy در نقطهٔ B را به‌دست آورید.
اولین دوره المپیادهای ریاضی ایران، ۱۳۶۳

۵۹. سه نقطهٔ A، B و C واقع بر یک استقامتند (A و B در یک طرف C قرار دارند). دایرهٔ متغیری مماس بر AB در نقطهٔ C را درنظر می‌گیریم. از A و B دو مماس بر این دایره متغیر رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند. مکان هندسی M را بیابید.

۶۰. سه نقطهٔ A، B و C روی یک خط راست، با همین ترتیب داده شده‌اند. از نقطهٔ C دو مماس CD و 'CD را بر دایره‌های متغیر گذرنده از دو نقطهٔ A و B رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطه‌های D و 'D را تعیین کنید.

۶۱. سه نقطهٔ ثابت A، B و C به‌همین ترتیب روی یک خط راست واقعند. از نقطهٔ C دو مماس CD و 'CD را بر دایرهٔ متغیری که از A و B می‌گذرد، رسم می‌کنیم. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M وسط پاره‌خط 'DD.

۶۲. نقطه‌های A، B و C بر یک خط راست واقعند (B بین A و C). دایره‌ای دلخواه با مرکز B اختیار می‌کنیم و نقطهٔ برخورد مماسهای رسم شده بر دایره از A و C را با M نشان می‌دهیم. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را بیابید، به‌طوری که نقطه‌های تماس خطهای راست AM و CM با دایره، به بازه‌های باز AM و CM متعلق باشند.

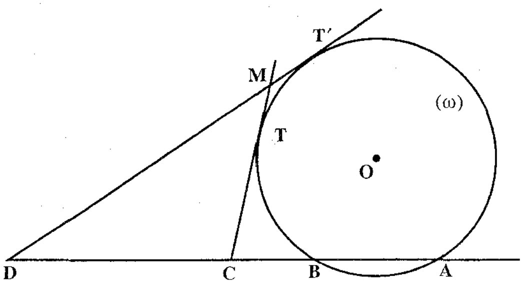
۶۳. سه نقطهٔ ثابت A، B و C بر یک خط و دایرهٔ متغیر O که از نقطه‌های B و C می‌گذرد مفروضند. قاطع متغیری که از A رسم شده است دایره را در E و F قطع می‌کند. مماسهای نقطه‌های E و F در M و خطهای OM و EF در P متقاطعند. مکان نقطهٔ P و M را معین نموده و تحقیق کنید اگر O تغییر مکان دهد، این مکانها چگونه تغییر می‌کنند.

۴.۱.۲. چهار نقطه

۶۴. در یک صفحه جهت‌دار چهار نقطهٔ A، B، C و D روی یک خط راست واقعند. مکان نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که دو زاویهٔ (MA , MB)، و (MC , MD) برابر باشند.

۶۵. چهار نقطهٔ A، B، C و D با همین ترتیب روی خط راست Δ داده شده‌اند. بر A و B یک دایره و بر C و D دایرهٔ دیگری مماس بر دایرهٔ اولی رسم می‌کنیم. اگر M نقطهٔ تماس این دو دایره باشد، مکان هندسی نقطهٔ M را بیابید.

۶۶. چهار نقطهٔ A، B، C و D به‌همین ترتیب بر خط مستقیم Δ قرار دارند. دایرهٔ متغیری بر A و B می‌گذرانیم و از C و D مماسهایی بر این دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در M تلاقی کنند. مکان هندسی نقطهٔ M چیست؟



۵.۱.۲. مسأله‌های ترکیبی

۶۷. دو نقطهٔ ثابت S و S_1 و عددهای ثابت k و k_1 مفروضند. اگر M' منعکس نقطهٔ غیرمشخص M در انعکاس (S و k) و N و N' بترتیب منعکسهای M و M' در انعکاس (S_1 و k_1) باشند، ثابت کنید:

۱. NN' از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

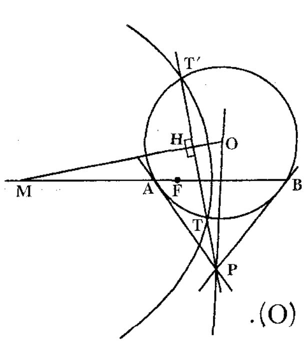
۲. مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی $MM'NN'$ خط مستقیم ثابتی است.

۶۸. دو نقطهٔ O و M داده شده است. پیدا کنید:

۱. مکان هندسی نقطه‌هایی در صفحه را که یک رأس مثلثی با مرکز دایرهٔ محیطی در نقطهٔ O و مرکز ثقل در نقطهٔ M، به حساب می‌آیند.

۲. مکان هندسی نقطه‌هایی در صفحه را که یک رأس مثلثی منفرجه با مرکز دایرهٔ محیطی در نقطهٔ O و مرکز ثقل در نقطهٔ M، به حساب می‌آیند.

۶۹. نقطه‌های M، A و B به همین ترتیب بر یک خط راست قرار دارند. بر نقطه‌های A و B دایرهٔ متغیر (O) را رسم می‌نماییم. اگر P نقطهٔ تقاطع مماسهای رسم شده بر دایرهٔ (O) در نقطه‌های B و A باشد، مطلوب است:



۱. مکان هندسی نقطهٔ H، تصویر P بر روی خط MO.

۲. مکان هندسی نقطه‌های برخورد PH با دایرهٔ (O).

۷۰. سه نقطهٔ A، B و C روی یک خط راست چنان قرار دارند که $AB = BC$ است. دایرهٔ متغیری از نقطه‌های B و C می‌گذرد و از A دو مماس AM و AM' را بر آن رسم می‌کنیم.

۱. مکان هندسی نقطه‌های M و M' را تعیین کنید.

۲. ثابت کنید $\frac{MB}{MC}$ مقدار ثابتی است و این مقدار را حساب کنید.

۷۱. سه نقطهٔ همخط P، A و B داده شده‌اند. نقطهٔ A بین دو نقطهٔ P و B است و $PA = a$ و $PB = b$ است. یک خط متحرک Δ از نقطهٔ P می‌گذرد.

۱. دایره‌های مماس بر Δ و گذرنده از نقطه‌های A و B را رسم کنید. نقطه‌های تماس با Δ را M_1 و M_2 بنامید.

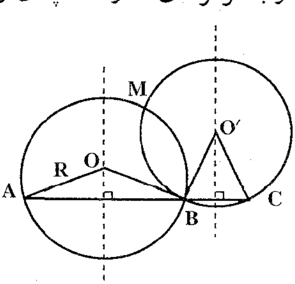
۲. مکان هندسی نقطه‌های M_1 و M_2 را وقتی خط Δ حول نقطهٔ P دوران می‌کند، تعیین کنید. وضع نقطه‌های A و B نسبت به این مکانهای هندسی چیست؟

۳. نشان دهید که دایرهٔ محیطی مثلث AM_1M_2 از یک نقطهٔ ثابت دیگر C نیز می‌گذرد. مکان هندسی مرکز این دایره را وقتی Δ حول نقطهٔ P دوران می‌کند، تعیین کنید.

۴. با فرض $PA = 1cm$، $PB = 4cm$ و زاویهٔ Δ با PB برابر 60°، اندازهٔ PM_1، PM_2، PC و شعاع کوچکترین دایرهٔ مماس بر Δ و گذرنده بر A و B را تعیین کنید و نشان دهید که M_1A یا M_2A عمود بر AB است.

۷۲. روی خط Δ سه نقطهٔ A، B و C (B بین A و C) چنان انتخاب شده‌اند که: $AB = 2BC = 2a$ می‌باشد.

۱. اگر R طول معلومی باشد، دو دایره به شعاعهای R و به مرکزهای O و O' چنان رسم کنید که اولی بر A و B، و دومی بر B و C بگذرد و O و O' هر دو در یک طرف Δ قرار گیرند. برحسب مقدارهای مختلف R بحث کنید و مکان هندسی نقطه‌های O و O' را وقتی R تغییر می‌کند، معلوم کنید.



۲. دو دایرهٔ O و 'O غیر از B در یک نقطهٔ دیگر D همدیگر را قطع می‌کنند. مکان هندسی نقطهٔ D را وقتی که R تغییر می‌کند، تعیین کنید.

۷۳. چهار نقطهٔ A، B، C و D بر یک استقامتند. بر A و B یک دایرهٔ متغیر (C) و بر C و D یک دایرهٔ متغیر ('C) می‌گذرانیم.

۱. ثابت کنید که محورهای اصلی این دو دایره پیوسته از نقطهٔ ثابتی می‌گذرند.

۲. از نقطهٔ ثابت مماسهایی بر دو دایرهٔ (C) و ('C) رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطه‌های تماس را تعیین کنید.

۲.۲. خطهای ثابت

۱.۲.۲. پاره‌خط

۱.۱.۲.۲. یک پاره‌خط

۷۴. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه را که از آن نقطه پاره‌خط AB تحت زاویهٔ قائمه دیده شود، تعیین کنید.

۷۵. روی پاره‌خط AC همهٔ مثلثهای ممکن ABC را طوری بنا می‌کنیم که در هریک از آنها $A\hat{B}D = F\hat{A}C$. BD و AF میانه‌های مثلثند. مکان نقطهٔ B و مکان نقطهٔ M، محل برخورد میانه‌ها را پیدا کنید.

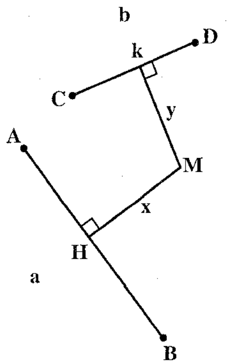
۷۶. بر روی پاره‌خط AD همهٔ متوازی‌الاضلاعهای ممکن را که در آن $B\hat{A}C = B\hat{D}A$ است، می‌سازیم. مطلوب است مکان نقطه‌های C، B و نقطهٔ O محل برخورد قطرها.

۲.۱.۲.۲. دو پاره‌خط

۷۷. پاره‌خطهای راست AB و CD برابرند، ولی موازی نیستند. مطلوب است، مکان هندسی نقطهٔ O، که دارای این ویژگی باشد : قرینهٔ پاره‌خط AB نسبت به نقطهٔ O ؛ در ضمن، قرینهٔ پاره‌خط CD نسبت به یک خط راست باشد.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، چکوسلواکی، ۱۹۶۸

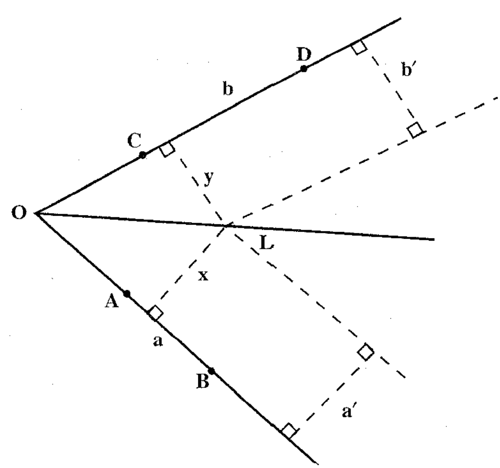
۷۸. مکان هندسی نقطه‌های گشتاور مساوی را برای دو پاره‌خط راست که طول و وضع آنها ثابت است، تعیین کنید.



نقطه‌های گشتاور مساوی نقطه‌هایی هستند که حاصل‌ضرب فاصلهٔ آنها از یک پاره‌خط در طول آن پاره‌خط با حاصل‌ضرب فاصلهٔ آنها از پاره‌خط دیگر در اندازهٔ آن پاره‌خط با هم برابر است. یعنی اگر AB و CD دو پاره‌خط به‌طولهای a و b، و x و y بترتیب فاصلهٔ نقطهٔ M از این دو پاره‌خط باشند، داریم:

$$MH.AB = MK.CD \quad \text{یا} \quad x.a = y.b$$

۷۹. دو پاره‌خط راست به‌طولهای a و b داده شده‌اند. ثابت کنید مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از هریک از این پاره‌خطها متناسب با طول آن پاره‌خط است، خط راستی است که از نقطه برخورد امتدادهای آن دو پاره‌خط می‌گذرد.



۸۰. ثابت کنید مکان هندسی نقطه‌هایی که تصویر آنها روی دو پاره‌خط AB و CD یعنی نقطه‌های P و Q، این پاره‌خطها را به نسبت معلومی تقسیم می‌کنند، یک خط راست MN است که M و N نقطه‌های برخورد عمودهای اخراج شده در A و C ؛ B و D بر خطهای AB و CD می‌باشند.

۸۱. دو پاره‌خط AB و $A'B'$، نقطهٔ C روی AB و نقطهٔ C' روی $A'B'$ و دو طول a و a' داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌های مانند L را بیابید که اگر P و P' تصویرهای آنها روی AB و $A'B'$ باشند، $a.CP = a'.C'P'$ باشد.

۳.۱.۲.۲. سه‌پاره‌خط

۸۲. ثابت کنید مکان هندسی نقطه‌های گشتاور برای سه پاره‌خط راست، دوبه‌دو، شش خط تشکیل می‌دهند که سه‌به‌سه در چهار نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند.

۴.۱.۲.۲. مسأله‌های ترکیبی

۸۳. نقطهٔ دلخواه M را بر پاره‌خط AB درنظر گرفته، مربعهای AMCD، MBEF را در یک طرف AB و در حالی که قطعات AM و MB بترتیب قاعده‌هایشان می‌باشند، رسم کرده‌ایم. دایره‌های محیطی این مربعها، به مرکزهای P، Q، در M، نیز در نقطهٔ دیگر N متقاطع می‌شوند. فرض می‌کنیم N' نمایشگر نقطهٔ تقاطع خطهای مستقیم AF و BC باشد.

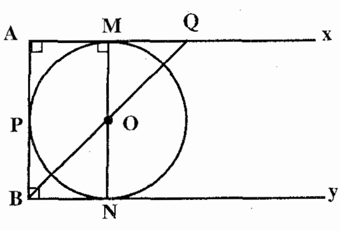
۱. ثابت کنید نقطه‌های N و N' منطبقند.

۲. ثابت کنید خطهای مستقیم MN بی‌توجه به اختیار M از نقطهٔ ثابت S می‌گذرند.

۳. مکان هندسی وسطهای PQ را چون M بین A و B تغییر کند، بیابید.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۵۹

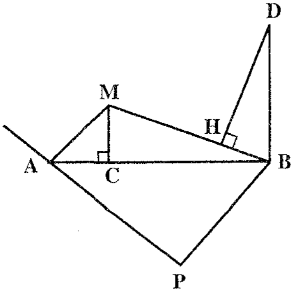
۸۴. پاره‌خط ثابت AB داده شده است. دو نیمخط موازی و همجهت Ax و By و دایرهٔ (O) که بر Ax، By و AB مماس است رسم می‌کنیم و نقطه‌های تماس این دایره با AB، Ax و By را بترتیب P، M و N می‌نامیم.



۱. روش تعیین نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ (O) را مشخص کنید.

۲. نشان دهید که سه نقطهٔ M، O و N همخطند و داریم: $AB = AM + BN$.

۳. فرض می‌کنیم Ax و By بترتیب حول نقطه‌های A و B چنان دوران کنند که با هم موازی باشند. مکان هندسی نقطهٔ Q، محل تلاقی خط BO با Ax، همچنین مکان هندسی نقطهٔ O را تعیین کنید.



۸۵. از نقطهٔ C واقع بر پاره‌خط AB، پاره‌خط $CM = CA$ را عمود بر AB اخراج می‌کنیم و فرض می‌کنیم که نقطهٔ C بین دو نقطهٔ A و B جابه‌جا می‌شود.

۱. مکان هندسی نقطهٔ M را تعیین کنید.

۲. از نقطهٔ B پاره‌خط $BD = BA$ را عمود بر AB اخراج می‌کنیم و از نقطهٔ D عمود DH را بر BM فرود می‌آوریم. مکان هندسی نقطهٔ H را وقتی نقطهٔ C تغییر مکان می‌دهد، بیابید.

۳. از نقطهٔ A عمودی بر AM و از نقطهٔ B عمودی بر BM اخراج می‌کنیم. این دو عمود در نقطهٔ P یکدیگر را قطع می‌کنند. نشان دهید که چهار ضلعی AMBP در دایره‌ای به مرکز O محاط است. مکان هندسی نقطهٔ O را بیابید.

۴. با فرض $AB = ۶cm$ و $M\hat{B}C = ۳۰^\circ$، اندازهٔ ضلعهای چهارضلعی AMBP را تعیین کنید.

۸۶. ۱. پاره‌خط AB به طول ۴ سانتیمتر داده شده است. دایره‌ای رسم کنید که بر دو نقطهٔ A و B بگذرد و از نقطه‌های واقع بر کمان بزرگ $\widehat{AB}$ از این دایره، وتر AB تحت زاویهٔ ۶۰ درجه دیده شود. مرکز این دایره را O بنامید.

۲. M را نقطه‌ای از پاره‌خط AB اختیار می‌کنیم. روی قوس بزرگ $\widehat{AB}$ نقطه‌ای مانند P را بیابید که از آن نقطه پاره‌خط AM تحت زاویهٔ ۳۰° دیده شود. برای این که مسأله تنها یک جواب داشته باشد، وضع نقطهٔ M روی پاره‌خط AB باید چگونه باشد؟ نشان دهید که PM از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد، هنگامی که M پاره‌خط AB را می‌پیماید.

۳. نشان دهید که عمود Px که از P بر AP رسم می‌شود، از یک نقطهٔ ثابت Q می‌گذرد و این که نقطهٔ L محل برخورد Px با عمودی که از M بر AB رسم می‌شود، روی دایرهٔ محیطی مثلث AMP قرار دارد. مکان هندسی نقطهٔ L را بیابید، هنگامی که M از A تا B تغییر مکان می‌دهد.

۴. نقطهٔ P را در حالتی تعیین کنید که M وسط پاره‌خط AB باشد و در این حالت خاص نقطهٔ P را P' بنامید. اندازهٔ مساحت قسمتی از دایرهٔ (O) را که خارج دایرهٔ به قطر AP' واقع است، تعیین کنید.

۸۷. پاره‌خط AB به طول ۱۰/۵ سانتیمتر داده شده است.

۱. نقطهٔ I را روی این پاره‌خط چنان تعیین کنید که این پاره‌خط را به نسبت داخلی $\frac{IA}{IB}=\frac{۴}{۳}$ تقسیم کند.

۲. اندازهٔ پاره‌خطهای IA و IB را تعیین کنید.

۳. نیمدایره‌ای به قطر IB رسم می‌کنیم. سپس وتر $IC=\frac{IB}{۲}$ را رسم می‌نماییم. آن‌گاه متوازی‌الاضلاع AICD را رسم می‌کنیم. ویژگی چهارضلعی ABCD چیست؟ اندازهٔ زاویه‌های B و A و سپس ضلع BC، و آن‌گاه ارتفاع آن را بیابید.

۴. نقطهٔ برخورد خطهای AD و BC را E می‌نامیم. نسبت مساحتهای دو مثلث BAE و BIC چه‌قدر است؟

۵. اکنون فرض می‌کنیم نقطه‌های A، I و B ثابت باشند و نقطهٔ C نیمدایرهٔ به قطر IB را طی کند، مکان هندسی نقطهٔ E را تعیین کنید.

۸۸. در صفحه‌ای دو قطعه خط ثابت AB و A′B′ مفروضند. M نقطه‌ای از صفحه است. M′ را چنان اختیار می‌کنیم که دو مثلث AMB و AM′B′ مستقیماً متشابه باشند. A′، B′ و M′ با A، B و M متناظرند.

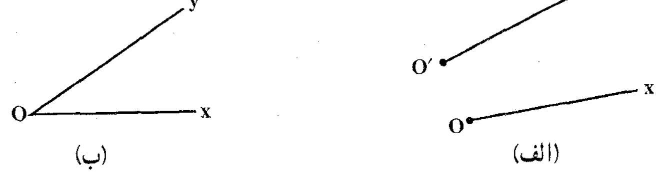
۱. مطلوب است تعیین مکان M برای این که MM′ با امتداد مفروض، متوازی شود.

۲. مطلوب است تعیین مکان M برای این که MM′ به طول معلوم l باشد.

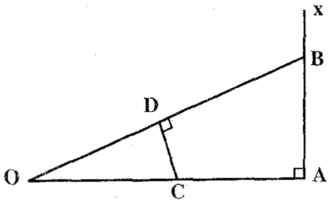
۲.۲.۲. نیمخط

۱.۲.۲.۲. دو نیمخط

۸۹. دو نیمخط در صفحه‌ای داده شده‌اند. مکان هندسی نقطه‌هایی در صفحه، به فاصلهٔ برابر از این نیمخطها را بیابید. (فاصلهٔ نقطه تا نیمخط، برابر است با فاصلهٔ این نقطه تا نزدیکترین نقطه از این نیمخط.)



۲.۲.۲.۲. نیمخط، پاره‌خط



۹۰. پاره‌خط OA و نیمخط Ax عمود بر OA را درنظر می‌گیریم. نقطهٔ O را به نقطهٔ B واقع بر Ax وصل می‌کنیم و از نقطهٔ C وسط پاره‌خط OA عمود CD را بر OB رسم می‌کنیم.

۱. خط پیموده شده به‌وسیلهٔ نقطهٔ وسط OB، همچنین مکان هندسی نقطهٔ D را وقتی B روی نیمخط Ax جابه‌جا می‌شود، تعیین کنید.

۲. مثلثهای OAB و OCD را با هم مقایسه کنید.

درستی رابطهٔ $OA.OC = OB.OD$ را ثابت کنید.

۳. در بقیهٔ مسأله فرض می‌کنیم $AB = a$ و $OA = ۲a$ (a طول ثابتی است). ثابت کنید که چهار نقطهٔ A، B، C و D همدایره‌اند. شعاع این دایره را برحسب a تعیین کنید.

۴. اندازهٔ پاره‌خطهای OB، CD و AD را برحسب a به‌دست آورید.

۹۱. در یک طرف پاره‌خط AB به طول a، نیمخطهای Ax و By را عمود بر AB اخراج می‌کنیم. اگر C نقطه‌ای باشد که روی Ax تا فاصلهٔ بسیار دور می‌تواند حرکت کند:

۱. مکان هندسی نقطهٔ H پای عمود رسم شده از A بر BC را بیابید.

۲. خط AH، خط By را در نقطهٔ D قطع می‌کند. وضع نقطهٔ H را برای حالتی که $CD = CA$ باشد، مشخص کنید. اندازهٔ پاره‌خط BH را برحسب a در این حالت تعیین کنید.

۳. فرض می‌کنیم $x = BH$ باشد. مقدار x را چنان تعیین کنید که $AD = DC$ باشد. (ابتدا نشان دهید که $BC = ۳BH$ است.) با توجه به مقدار به‌دست آمده برای x، نقطهٔ H و مثلث ACD را رسم کنید.

۴. اکنون فرض می‌کنیم که $AC = AD$ باشد. نشان دهید که $CH = a$. اگر x همواره برابر BH باشد، نشان دهید رابطهٔ $a^۲ = (x + a)x$ برقرار است و از آنجا رابطهٔ

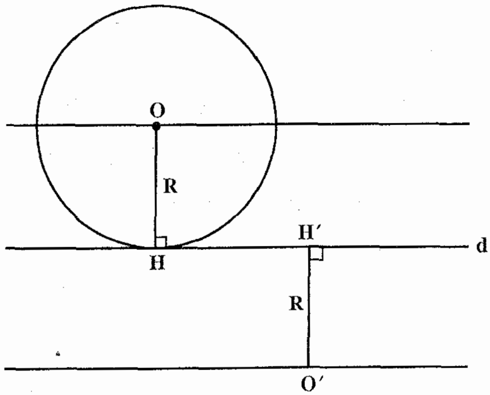
$x = \frac{a(\sqrt{۵} - ۱)}{۲}$ حاصل می‌شود.

طول $a\sqrt{۵}$ را بسازید و با استفاده از آن نقطهٔ H و مثلث ADC را رسم کنید. برای این ترسیمها $x = ۴cm$ اختیار شود.

۳.۲.۲. خط

۱.۳.۲.۲. یک خط

۹۲. مطلوب است مکان هندسی مرکز دایره‌های به شعاع R، که بر خط مفروض d مماس باشند.

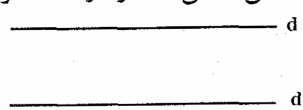


۹۳. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R را که از خط ثابت Δ وتری به طول معلوم l جدا می‌کنند، تعیین کنید.

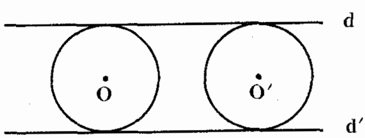
۲.۳.۲.۲. دو خط

۱.۲.۳.۲.۲. دو خط موازی

۹۴. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقاطی که از دو خط متوازی به یک فاصله باشند.



۹۵. مکان هندسی مرکزهای دایره‌هایی را بیابید که بر دو خط متوازی مماس باشند.



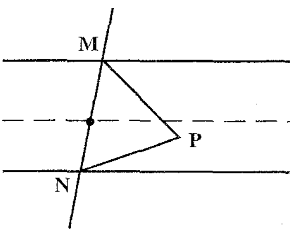
۹۶. دو خط متوازی را درنظر می‌گیریم. مکان هندسی وسطهای پاره‌خطهایی را که دو سرشان روی این دو خط واقعند، پیدا کنید.

۹۷. دو خط ثابت d_1 و d_2 با هم موازی‌اند. خط تغییرپذیر d آنها را در A و B قطع می‌کند. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M از خط d، به قسمی که $\frac{MA}{MB} = m$ شود.

۹۸. دو رأس مثلثی به ابعاد ثابت، روی دو خط متوازی مفروض می‌لغزند. مکان هندسی رأس سوم را پیدا کنید.

۹۹. دو خط موازی D و ′D داده شده‌اند. مکان هندسی مرکزهای متوازی‌الاضلاعهایی را بیابید که به‌وسیلهٔ دو خط موازی متغیر متقاطع با این دو خط، ایجاد می‌شوند.

۱۰۰. از نقطه‌ای به فاصلهٔ برابر از دو خط موازی مفروض، خط راستی رسم شده است که این خطها را در نقطه‌های M و N قطع می‌کند. مکان هندسی رأس P از مثلث متساوی‌الاضلاع MNP را بیابید.



۲.۲.۳.۲.۲. دو خط متقاطع

۱۰۱. **تعمیم مکان هندسی.** دو خط متقاطع Δ و ′Δ در صفحه مفروضند. مکان هندسی نقطهٔ M را تعیین کنید که:

۱. از Δ و ′Δ به یک فاصله باشد؛

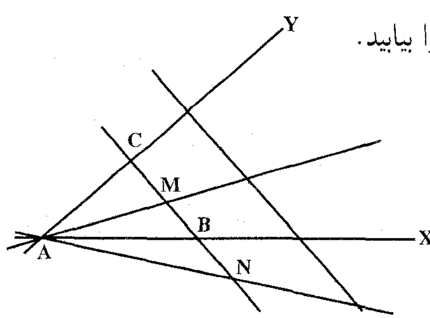
۲. فاصلهٔ M از خط Δ، کوچکتر از فاصلهٔ M از خط ′Δ باشد؛

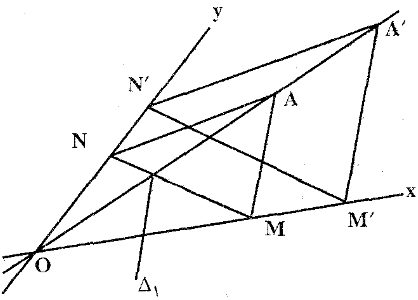
۳. فاصلهٔ M از خط Δ، بزرگتر از فاصلهٔ M از خط ′Δ باشد.

۱۰۲. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را که بر دو خط متقاطع داده شده مماسند، تعیین کنید.

۱۰۳. دو خط AX و AY به‌وسیلهٔ مجموعه خطهایی موازی، قطع شده‌اند. فرض می‌کنیم یکی از این خطها در دو نقطهٔ B و C آنها را قطع کرده است.

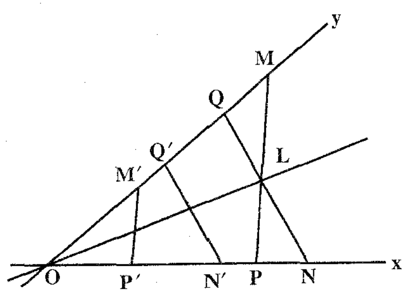
نقطهٔ M را چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط BC را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم کند. مکان هندسی این نقطه را بیابید.



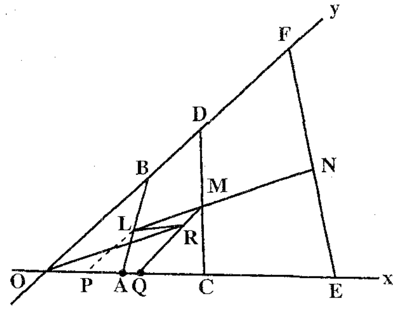


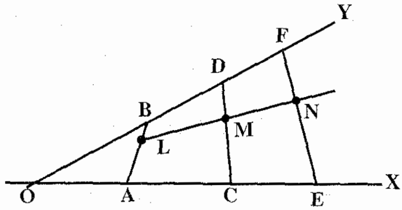
۱۰۴. دو خط متقاطع Ox و Oy را درنظر می‌گیریم. نقطه‌های M و M′ را روی Ox و نقطه‌های N و N′ را روی Oy چنان اختیار می‌کنیم که : $\frac{OM'}{OM}=\frac{ON'}{ON}=\frac{m}{n}$ باشد. از M و M′ دو خط موازی امتداد Δ و از N و N′ دو خط موازی امتداد Δ_2 رسم می‌کنیم. اگر خطهای متناظر در نقطه‌های A و A′ یکدیگر را قطع کنند، مکان هندسی نقطه‌های A و A′ را بیابید.

۱۰۵. بین دو خط Ox و Oy دو خط MP و NQ را که هرکدام با امتداد معینی موازی‌اند، چنان محاط کرده‌ایم که $\frac{MP}{NQ}=\frac{m}{n}$ است. مکان هندسی نقطهٔ L، محل برخورد این خطها را بیابید.



۱۰۶. دو خط Ox و Oy داده شده‌اند. روی Ox نقطهٔ A و روی Oy نقطهٔ B را اختیار می‌کنیم. آن‌گاه روی این دو خط و در یک امتداد این دو خط در یک‌سو، پاره‌خطهای AC = BD و سپس پاره‌خطهای CE = DF و... را می‌سازیم. مکان هندسی وسط پاره‌خطهای AB، CD ، EF و... را تعیین کنید.

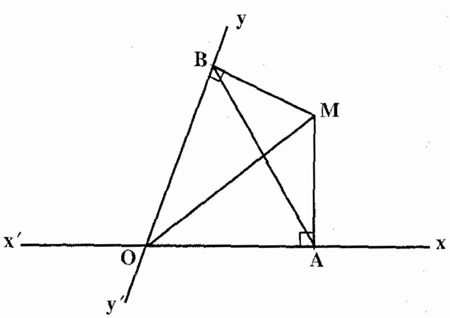




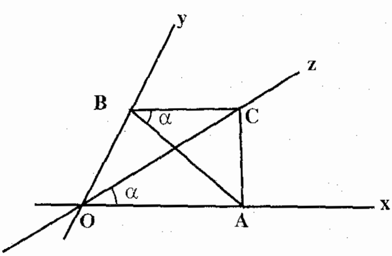
۱۰۷. دو خط Ox و Oy داده شده‌اند. روی این دو خط بترتیب پاره‌خطهای AC و BD ؛ CE و DF ؛ و... چنان قرار دارند که متناسب می‌باشند. یعنی داریم :

$$\frac{AC}{BD}=\frac{CE}{DF}=\cdots=\frac{m}{n}$$

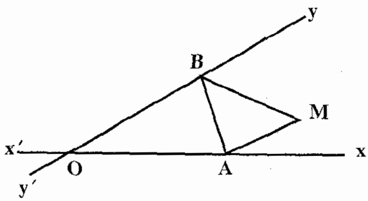
مکان هندسی نقطه‌های L، M، N و ... را بترتیب روی پاره‌خطهای AB، CD، EF و... چنان اختیار می‌کنیم که این پاره‌خطها را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم کنند. مکان هندسی این نقطه‌ها را تعیین کنید.



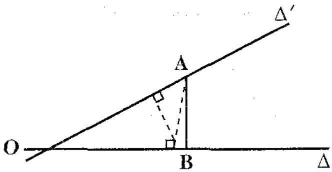
۱۰۸. دو خط متقاطع x′Ox و y′Oy داده شده‌اند. از نقطهٔ متغیر M واقع در صفحهٔ این دو خط، عمودهای MA و MB را بر Ox و Oy فرود می‌آوریم و از A به B وصل می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ M را بیابید، در صورتی که پاره‌خط AB طول ثابتی داشته باشد.



۱۰۹. دو رأس A و B از مثلث ABC بترتیب روی دو خط ثابت Ox و Oy می‌لغزند. مکان هندسی رأس C را تعیین کنید. در صورتی که زاویهٔ xOy مکمل زاویهٔ ACB باشد.



۱۱۰. مثلث ABM که اجزای آن نسبت به خود همواره ثابت باقی می‌مانند، در صفحهٔ خود طوری می‌لغزد که دو رأس آن A و B، دو خط متقاطع ′xx و ′yy را می‌پیماید. ثابت کنید مکان نقطهٔ M یک بیضی است.



۱۱۱. پاره‌خطی به طول ثابت طوری حرکت می‌کند که همواره دو انتهای آن بر دو خط متقاطع ثابت قرار دارد. مکان هندسی محل برخورد ارتفاعهای مثلثی را که از این پاره‌خط و دو خط متقاطع ساخته می‌شود، تعیین کنید.

۱۱۲. دو نقطه، روی دو خط راست متقاطع با سرعت برابر حرکت می‌کنند. ثابت کنید که نقطه‌ای در صفحه وجود دارد که در هر لحظه از زمان، به فاصلهٔ متساوی از نقطه‌های متحرک است.

۱۱۳. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه را که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو خط متقاطع نامتعامد واقع در آن صفحه، برابر مقدار ثابت k^2 باشد، تعیین کنید.

۱۱۴. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو خط ثابت، مقدار ثابتی باشد.

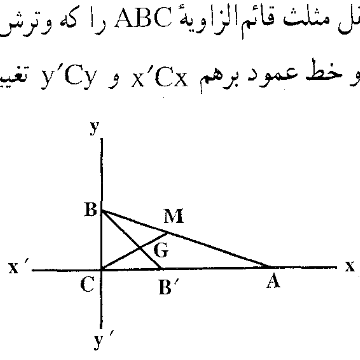
۱۱۵. به‌وسیلهٔ انعکاس، دو خط راست متقاطع را به دو دایرهٔ متساوی تبدیل کنید. مکان هندسی قطب این انعکاس چیست؟

۳.۲.۳.۲.۲. دو خط عمود برهم

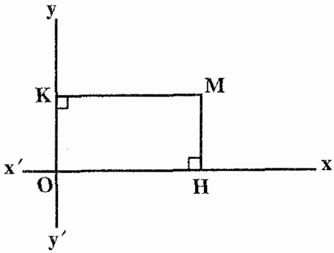
۱۱۶. اگر دو انتهای قطعه خط AB به طول ثابت روی دو محور متعامد YY' و XX' بلغزد، هر نقطه مانند M از AB، یک بیضی به محورهای XX' و YY' را می‌پیماید که طول نیمقطرهای آن برابر است با MA و MB.

۱۱۷. دو خط عمود بر هم $x'Ox$ و $y'Oy$ داده شده‌اند. پاره‌خط AB به طول ثابت روی این دو خط جابه‌جا می‌شود. مکان هندسی تصویر نقطهٔ O روی پاره‌خط AB را تعیین کنید.

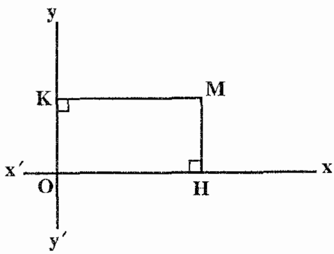
۱۱۸. مکان هندسی مرکز ثقل مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را که وترش AB، طول ثابتی دارد و دو سر اصلی وتر روی دو خط عمود برهم $x'Cx$ و $y'Cy$ تغییر مکان می‌دهد، تعیین کنید.



۱۱۹. مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که حاصل ضرب فاصله‌اش از دو خط عمود برهم داده شده، برابر مقدار ثابت k^2 باشد.



۱۲۰. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌هایی که مجموع مربعهای فاصله‌هایشان از دو خط عمود برهم، مساوی مقدار ثابت a^2 باشد.

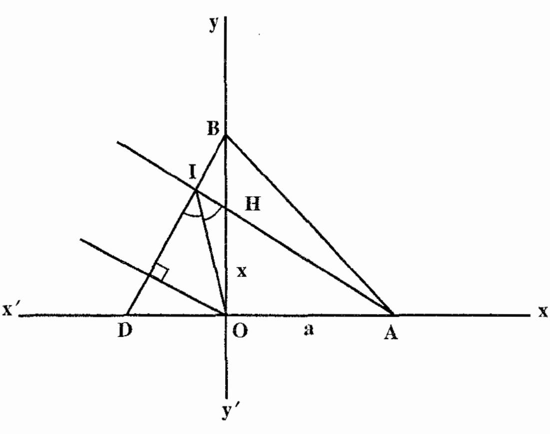


۴.۲.۲.۳.۲.۲. مسأله‌های ترکیبی

۱۲۱. الف. وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای طوری می‌لغزد که دو سرش همواره بر دو خط عمود برهم حرکت می‌کند. مکان هندسی رأس قائمهٔ آن را بیابید.

ب. بزرگترین ضلع مثلث متساوی‌الساقینی به زاویهٔ رأس °۱۲۰ چنان می‌لغزد که دو سرش همواره بر ضلعهای یک زاویهٔ °۶۰ قرار دارند. پیدا کنید مکان هندسی رأسی را که زاویه‌اش از همه بزرگتر است.

۱۲۲. دو خط عمود بر هم xx' و yy' که در O متقاطعند، مفروض است. روی Ox نقطهٔ A و روی Oy نقطهٔ B را چنان اختیار می‌کنیم که $OA = OB$ باشد. از A خط متغیری رسم می‌کنیم که OB را در نقطهٔ H مابین O و B قطع کند. عمودی که از B بر AH فرود آید، این خط را در I و xx' را در D قطع می‌کند.



۱. دو مثلث BDO و AHO را مقایسه کرده و نتیجه بگیرید که $DO = OH$ است و اگر H روی BO حرکت کند، مکان هندسی I چیست؟

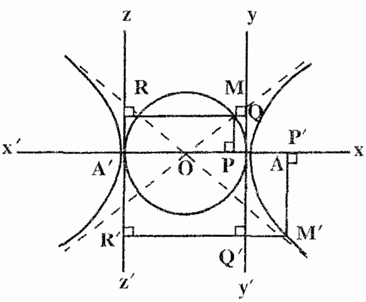
۲. ثابت کنید چهارضلعی IHOD محاطی است و مرکز دایرهٔ محیطی آن بر خط ثابتی واقع است.

۳. ثابت کنید که نیمساز زاویهٔ DIH از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۴. اگر $AO = a$ و $OH = x$ باشد، طول ضلعها و ارتفاعهای مثلث ABO را برحسب x و a حساب کنید.

۵. عمود OK را بر BI فرود می‌آوریم. ثابت کنید $KO = KI$ و مکان قرینهٔ O را نسبت به BD ، وقتی که H تغییر کند، به‌دست آورید.

۲.۲.۳.۳. سه خط و بیشتر



۱۲۳. خط xx' و دو عمود بر آن، yy' و zz' در نقطه‌های A ، A' داده شده است. از نقطهٔ M عمودهای MP ، MQ و MR را بر این خطها رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ M را بیابید در صورتی که $MP^2 = MQ.MR$ باشد.

۱۲۴. دو خط x و y مفروضند. رأسهای B و C از مثلث ABC بترتیب روی خطهای x و y حرکت می‌کنند. به‌طوری که هریک از ضلعهای مثلث با خط ثابتی موازی می‌ماند. مطلوب است تعیین مکان رأس A.

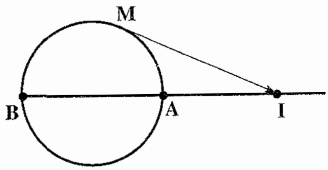
۲.۳. پاره‌خط، نیمخط، خط؛ و نقطه‌های ثابت

۲.۳.۱. پاره‌خط، نقطه

۲.۳.۱.۱. یک پاره‌خط، یک نقطه

۱۲۵. نقطهٔ A و پاره‌خط BC مفروضند. مکان نقطهٔ M را به‌دست آورید، به‌طوری که M رأس زاویهٔ قائمه‌ای باشد که یک ضلع آن از A می‌گذرد و دیگری پاره‌خط BC را قطع می‌کند.
المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۳

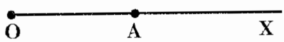
۱۲۶. پاره‌خط ثابت AB و نقطهٔ ثابت I بر امتداد آن داده شده است. از I مماس IM را بر دایره‌های متغیر گذرنده بر دو نقطهٔ A و B رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ M را تعیین کنید.



۲.۳.۲. نیمخط، نقطه

۱.۲.۳.۲. یک نیمخط، یک نقطه

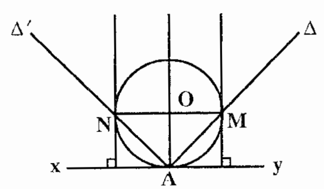
۱۲۷. نیمخط Ox و نقطهٔ A روی آن به فاصلهٔ ۲ سانتیمتر از نقطهٔ O داده شده‌اند. مکان هندسی نقطهٔ A را وقتی نیمخط Ox حول نقطهٔ O دوران کند، تعیین کنید.



۳.۳.۲. خط، نقطه

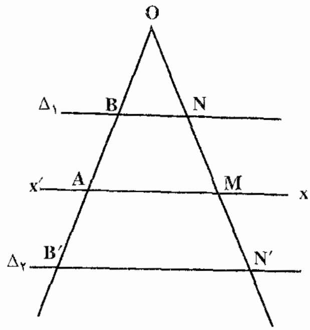
۱.۳.۳.۲. یک خط، یک نقطه

۱۲۸. دایره‌های مماس بر خط xy در نقطهٔ ثابت A را درنظر می‌گیریم. مکان هندسی نقطه‌های تماس خطهای مماس بر این دایره‌ها را که بر خط xy عمودند، تعیین کنید.



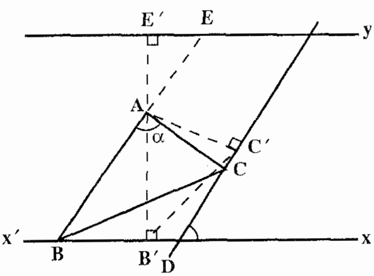
۱۲۹. روی یک خط نامحدود x′x، به مرکز هر نقطه‌ای به‌عنوان مثال نقطهٔ A، دایره‌ای به شعاع ثابت r رسم می‌کنیم. سپس نقطهٔ ثابت O را روی x′x اختیار کرده، به مرکز O و به شعاع متغیر دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (A , r) را در دو نقطهٔ B و C قطع کند. مکان هندسی نقطه‌های B و C را بیابید، در صورتی که شعاع دایرهٔ متغیر برابر وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای باشد که یک ضلع زاویهٔ قائمه‌اش r و ضلع دیگرش AO باشد.

۱۳۰. از نقطه‌ای واقع در خارج یک خط به همهٔ نقطه‌های واقع بر آن خط وصل می‌کنیم. مکان هندسی وسط پاره‌خطهای حاصل را پیدا کنید.



۱۳۱. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌هایی که قطعه خطهای واصل بین یک نقطهٔ O و نقطه‌های مختلف یک خط راست xx' را به نسبت معلوم $\frac{m}{n}$ تقسیم می‌کنند.

۱۳۲. خط راست $x'x$ و نقطهٔ A واقع در خارج آن مفروضند. از A به نقطهٔ B واقع بر $x'x$ وصل کرده، پاره‌خط AC را چنان رسم می‌کنیم که $B\hat{A}C = \alpha$ و $\frac{AB}{AC} = \frac{m}{n} = k$ باشد. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ C، وقتی B بر $x'x$ تغییر می نماید.



۱۳۳. خط $x'x$ و نقطهٔ A خارج این خط داده شده‌اند. از نقطهٔ A خطی دلخواه رسم می‌کنیم که $x'x$ را در نقطهٔ B قطع کند. آن‌گاه زاویهٔ BAC را برابر اندازهٔ معلومی رسم می‌کنیم و AC را چنان اختیار می‌کنیم که $\frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}$ باشد. مکان هندسی نقطهٔ C را وقتی خط AB حول نقطهٔ A دوران کند، پیدا کنید.

۱۳۴. نقطهٔ O، خط راست l و عدد حقیقی $a > 0$ معلومند. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ P، به‌شرطی که مجموع فاصله‌های آن از نقطهٔ O و خط راست l، برابر a باشد.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۲۴

۱۳۵. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌هایی که تفاضل فاصله‌شان از یک نقطهٔ ثابت و یک خط ثابت مقدار ثابتی باشد.

۱۳۶. مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه را که نسبت فاصله‌شان از یک نقطهٔ ثابت F و یک خط ثابت Δ مقدار ثابت کوچکتر از ۱ باشد، تعیین کنید.

۱۳۷. مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه را که نسبت فاصله‌شان از یک نقطهٔ ثابت و یک خط ثابت مقدار ثابتی بزرگتر از ۱ باشد، تعیین کنید.

۱۳۸. خط D و نقطهٔ A را در صفحهٔ P درنظر می گیریم. مکان هندسی نقطهٔ M از صفحهٔ P را که فاصله‌اش از خط D، نصف فاصلهٔ آن از نقطهٔ A باشد، تعیین کنید.

۱۳۹. مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه که نسبت فاصله‌شان از یک نقطهٔ ثابت F و یک خط ثابت Δ مقدار ثابت ۱ باشد، بیابید.

۱۴۰. مکان هندسی نقطه‌هایی که نسبت مربع فاصلهٔ آنها از نقطهٔ ثابت A به فاصلهٔ آنها از خط ثابت Δ، طول ثابتی باشد، چیست؟

۱۴۱. مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که مجموع مربعهای فاصله‌اش از یک نقطهٔ ثابت و از یک خط ثابت مقدار ثابتی باشد.

۱۴۲. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌هایی که تفاضل مربعهای فاصله‌شان از یک خط و یک نقطهٔ مفروض، برابر با مقدار ثابت k^2 باشد.

۱۴۳. پاره‌خط BC داده شده است. از نقطهٔ D واقع بر امتداد این پاره‌خط، عمود DF را رسم می‌کنیم. از F به C وصل کرده، روی CF نقطهٔ A را چنان اختیار می‌کنیم که $CA.CF = CB.CD$ باشد. مکان هندسی نقطهٔ A را بیابید.

۱۴۴. نقطه‌های M و M' روی یک خط ثابت طوری تغییر می‌کنند که حاصل ضرب فاصله‌هایشان از یک نقطهٔ ثابت خط، ثابت می‌ماند. نشان دهید که مکان هندسی مرکز دایره‌ای که از نقطه‌های M و M' و یک نقطهٔ ثابت صفحه می‌گذرد، یک خط راست است.

۱۴۵. روی صفحه‌ای، یک خط و یک نقطه در خارج این خط مفروضند. مکان هندسی مرکز مثلثی را پیدا کنید که یک رأس آن بر این نقطه و رأس دیگر آن، روی خط مفروض قرار دارد.

۱۴۶. بر روی صفحه‌ای، یک خط مستقیم و نقطه‌ای در خارج آن مفروض است. مکان هندسی رأس سوم مثلثی را بیابید که یک رأس آن بر روی نقطه و رأس دیگر آن بر روی خط مستقیم مفروض قرار دارد.

۱۴۷. نقطهٔ A و خط راست l در بیرون آن مفروضند. اگر B نقطه‌ای متغیر روی l باشد، مکان هندسی مجموعهٔ نقطه‌هایی مانند C، به قسمی که مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، کدام است؟

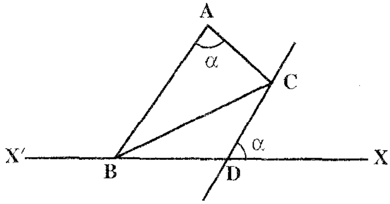
الف) بخشی از محیط یک دایره　　ب) یک خط راست

ج) دو خط راست موازی　　د) بخشی از محیط دو دایره

هـ) دو خط راست متقاطع

سومین المپیاد آزمایشی ایران

۱۴۸. نقطهٔ A و خط راست l مفروضند. B نقطه‌ای دلخواه روی l است. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را طوری بیابید که ABM مثلثی متساوی‌الاضلاع باشد.



۱۴۹. مثلث ABC حول A، رأس ثابت خود، چنان دوران می‌کند که همواره متشابه با خودش باقی‌می‌ماند و رأس B از آن خط ثابت X′X را می‌پیماید. ثابت کنید دایرهٔ محیطی این مثلث از نقطهٔ ثابت دیگری می‌گذرد.

۱۵۰. خط ثابت Δ و نقطهٔ ثابت S در خارج آن مفروضند. خطی متغیر از S مرور داده و دو نقطهٔ M و M′ را در طرفین S بر روی این خط انتخاب می‌کنیم به قسمی که:

$$\frac{1}{SM}+\frac{1}{SM'}=\frac{2}{SI} \quad \text{و} \quad SM+SM'=MH+M'H'$$

باشد. H و H′ تصویرهای M و M′ و I تصویر S بر روی خط Δ می‌باشند.
ثابت کنید که مکان هندسی نقطه‌های M و M′ یا دایره‌ای به مرکز S و مماس بر Δ می‌باشد و یا سهمی است که کانون آن S و خط هادی آن، خط Δ است.
(این مسأله نمونهٔ خاصی است از مکانهای هندسی که نقطهٔ موردنظر منحصربه‌فرد نیست و بلکه دو نقطهٔ مربوط به هم یک مکان احداث می‌کنند.)

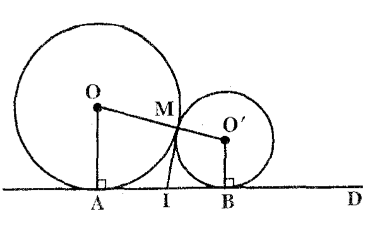
۱۵۱. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را بیابید که از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرند و بر یک خط ثابت مماسند.

۱۵۲. مطلوب است مکان هندسی مرکز دایره‌های گذرنده بر نقطهٔ معلوم A، خارج خط D، که بر روی خط راست معلوم D، پاره‌خطی به طول ۲l جدا کند.

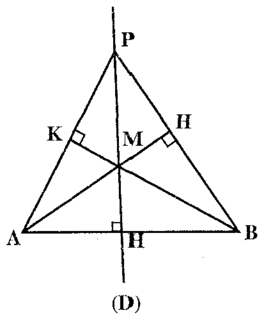
۱۵۳. دایره‌ای به شعاع ثابت R حول یکی از نقطه‌های محیطش که ثابت فرض شده است حرکت می‌کند. مکان هندسی نقطهٔ تماس این دایره را با مماسهای به امتداد ثابت پیدا کنید.

۲.۳.۳.۲. یک خط، دو نقطه

۱۵۴. دو دایرهٔ متغیر O و O′ در دو نقطهٔ ثابت A و B بر خط ثابت D مماسند و با یکدیگر نیز مماس خارج می‌باشند. مکان هندسی نقطهٔ تماس M این دو دایره را بیابید.



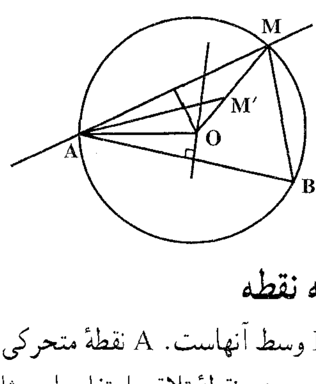
۱۵۵. دو نقطهٔ A و B و خط D عمود بر AB مفروض است. نقطه‌ای مانند M بر خط D اختیار می‌کنیم. عمودهای رسم شده از B و A بترتیب بر MB و MA یکدیگر را در نقطهٔ P قطع می‌کنند. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطهٔ P.



۱۵۶. خط Δ و نقطهٔ ثابت A غیرواقع بر آن داده شده است. این خط حول نقطهٔ ثابت O واقع بر آن دوران می‌کند. مکان هندسی نقطهٔ M، قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط Δ(OM = OA) را تعیین کنید.

۱۵۷. دو نقطهٔ A و B و خط راست l داده شده است. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را پیدا کنید که از A و B می‌گذرند و خط l را قطع می‌کنند.

۱۵۸. دایرهٔ متغیری از دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد. اگر M نقطهٔ دوم برخورد دایره و خط ثابتی باشد که از A می‌گذرد، مکان هندسی مرکز ثقل مثلثی که رأسهای آن A، M و مرکز دایره هستند، و مکان هندسی نقطهٔ وسط شعاعی را که از M می‌گذرد، به‌دست آورید.

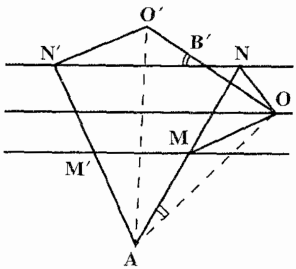


۳.۳.۳.۲. یک خط، سه نقطه

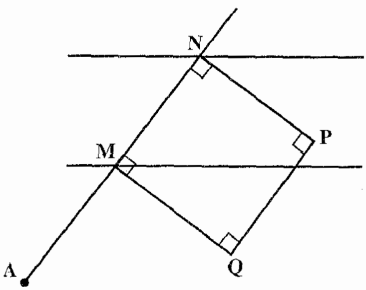
۱۵۹. B و C دو نقطهٔ ثابت و D وسط آنهاست. A نقطهٔ متحرکی است که بر روی خط معینی عمود بر BC تغییر مکان می‌دهد. نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC را H می‌نامیم و A را در M برروی DH تصویر می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ M چیست؟

۲.۳.۳.۴. دو خط، یک یا چند نقطه

۲.۳.۳.۴.۱. دو خط موازی، یک یا چند نقطه



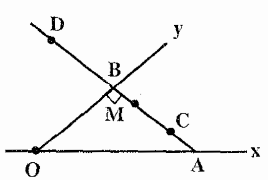
۱۶۰. دو خط موازی و نقطهٔ ثابت A غیر واقع بر آنها داده شده است. از نقطهٔ A خطی رسم می‌کنیم که این دو خط را در M و N قطع کند. روی MN مثلث MNO را چنان می‌سازیم که با مثلث مفروضی متشابه باشد. مکان هندسی نقطهٔ O را تعیین کنید.



۱۶۱. نقطهٔ ثابت A و دو خط موازی D و ′D داده شده‌اند. از A خطی رسم می‌کنیم که این دو خط را در M و N قطع کند. روی MN مربع MNPQ را می‌سازیم. مکان هندسی دو رأس P و Q را وقتی خط AMN حول رأس A دوران کند، تعیین کنید. همین مسأله را در صورتی که روی MN شکلی مشابه با شکل داده شده بسازیم، حل کنید.

۱۶۲. دو خط موازی D و ′D و نقطهٔ ثابت S در خارج آنها مفروض است. خط متغیری از S گذشته، D و ′D را در M و ′M قطع می‌کند. از S مماسهای ′ST و ST را بر دایرهٔ به قطر ′MM رسم می‌کنیم. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌های T و ′T .

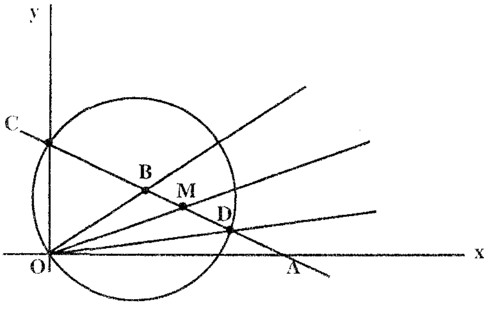
۲.۳.۳.۴.۲. دو خط متقاطع، یک یا چند نقطه



۱۶۳. دو خط Ox و Oy داده شده‌اند. از نقطهٔ A واقع بر Ox خط متغیری رسم می‌کنیم تا Oy را در B قطع کند. بر روی این خط دو نقطهٔ C و D را طوری می‌گیریم که $BC = BD = BO$ باشد. مکان هندسی نقطهٔ M، مزدوج نقطهٔ A نسبت به دو نقطهٔ C و D را تعیین کنید.

۱۶۴. دو خط متقاطع OX و OY و یک نقطهٔ P مفروضند. مطلوب است مکان هندسی وسطهای پاره‌خطهایی که به‌وسیلهٔ این دو خط، روی تمام قاطعهایی که از P رسم می‌شوند، جدا می‌شود.

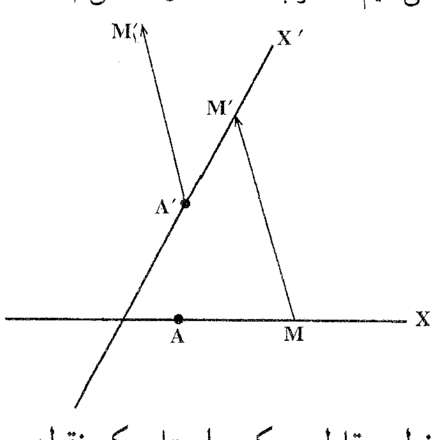
۱۶۵. دو خط ثابت OX و OY مفروضند. قاطع متغیری که از دو نقطهٔ ثابت A واقع بر Ox رسم می‌شود، Oy را در نقطهٔ B قطع می‌کند و دایرهٔ (B ,BO)، AB را در نقطه‌های C و D تلاقی می‌کند. نقطهٔ M را چنان اختیار می‌کنیم که $(AMCD) = -1$ باشد.



مکان هندسی نقطهٔ M را وقتی قاطع حول A دوران کند، تعیین کنید.

۱۶۶. دو خط Δ و Δ' به زاویهٔ α متقاطعند. دو نقطهٔ ثابت A و A' بترتیب بر روی آنها مفروضند. مطلوب است مکان قسمت مشترک دایره‌های C و C' در صورتی که اولی در A بر Δ و دومی در A' بر Δ' مماسند و همدیگر را تحت زاویهٔ θ قطع می‌کنند. حالتی را که $\alpha + \theta = k\pi$ است مورد بررسی قرار دهید.

۱۶۷. روی دو محور X و X' دو نقطه، قطعه‌های متساوی طی می‌کنند. A و A' دو نقطهٔ متناظر ثابت، و M و M' دو نقطهٔ متناظر متحرک است. از A بردار AM_1' را همسنگ با MM' رسم می‌کنیم. مطلوب است مکان هندسی M_1'.



۳.۴.۳.۳.۲. دو خط متقاطع، یک راستا، یک نقطه

۱۶۸. دو خط ثابت D و D' مفروضند. خط متغیری موازی با امتداد ثابت، آن دو خط را در B و C قطع می‌کند. اگر A نقطهٔ ثابتی باشد، مکان هندسی مرکز ثقل مثلث ABC را پیدا کنید.

۱۶۹. خط ثابت xy و نقطهٔ ثابت A واقع بر آن مفروض است. دایرهٔ متغیر (C) در نقطهٔ A بر xy مماس است.

۱. مکان هندسی نقطهٔ O، مرکز دایره را تعیین کنید.

۲. بر دایرهٔ (C) دو مماس T و T' را در امتداد مفروض Δ رسم می کنیم. مکان هندسی نقطه‌های M و M' نقطه‌های تماس T و T' با دایره را، تعیین کنید.

۳. قطر PQ از دایره به موازات امتداد Δ رسم می‌شود. مکان هندسی نقطه‌های P و Q را تعیین کنید.

۴. ثابت کنید چهارضلعی $PMQM'$ مربع بوده و دایرهٔ محاطی این مربع، وقتی که دایرهٔ (C) تغییر کند، مماس بر دو خط ثابت باقی می‌ماند.

۴.۳.۲. مسأله‌های ترکیبی

۱۷۰. نقطه‌های A، B و S با همین ترتیب روی یک خط راست داده شده‌اند. از نقطهٔ S، نیمخط Sx را که حول نقطهٔ S و در یک طرف خط AS دوران می‌کند، رسم می‌کنیم. از A و B عمودهای AH و BK را بر Sx رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم $AB = ۲a$ و $BS = ۲b$ $(a < b)$.

۱. مکان هندسی نقطه‌های H و K را تعیین کنید.

۲. دایرهٔ مماس بر AB و نیمخطهای Ax و BK را رسم کنید و مرکز آن را O بنامید.

۳. فرض می‌کنیم C، D و E بترتیب نقطه‌های تماس دایرهٔ (O) با خطهای AB، AH و BK باشند. مکان هندسی نقطهٔ O را وقتی Sx حول نقطهٔ S می‌چرخد، تعیین کنید. وضع خط DE نسبت به این مکان هندسی را تعیین کنید.

۴. با فرض $A\hat{S}x = ۳۰^\circ$، اندازهٔ R شعاع دایرهٔ (O) را برحسب a تعیین کنید.

۵. اکنون فرض می‌کنیم نیمخط Sx طوری انتخاب شود که بر دایرهٔ (O) مماس باشد و نقطهٔ تماس را T می‌نامیم. نشان دهید که سه نقطهٔ I، O و T همخطند. نقطه I وسط پاره‌خط AB، و مثلثهای IOC و IST متشابه‌اند و $a = ۱cm$ و $b = ۲cm$ است. اندازهٔ R و اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{S}x$ را تعیین کنید.

۱۷۱. نقطهٔ ثابت F بین دو خط موازی AD و $A'D'$ و روی خط AFA' عمود بر آن دو خط واقع است. نقطهٔ F رأس زاویهٔ قائمهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ متغیر DFD' است که ارتفاعش را FP می‌نامیم. ثابت کنید:

۱. $AD \times AD'$ مقداری ثابت است.

۲. مکان هندسی P دایره است.

۳. خط DD' بر یک بیضی مماس است.

۱۷۲. دو خط عمود برهم $x'Ox$ و $y'Oy$ و نقطهٔ P درون زاویهٔ xOy مفروض است. یک دایره که از دو نقطهٔ O و P می‌گذرد، $x'x$ را در A و $y'y$ را در B قطع می‌کند. مرکز این دایره را I می‌نامیم.

۱. اگر P' قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به خط AB باشد، نشان دهید که نقطهٔ P' روی دایره است و مکان هندسی نقطهٔ P'، هنگامی که شعاع دایره (I) تغییر می‌کند، یک خط راست است.

۲. مکان هندسی نقطهٔ H، وسط پاره‌خط PP' را بیابید.

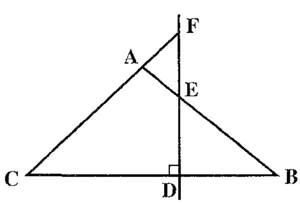
۳. مکان هندسی نقطهٔ G، مرکز ثقل مثلث PAB را تعیین کنید.

۴. دایرهٔ (I) را چنان رسم کنید که مثلث OAB قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین باشد.

۴.۲. خط، پاره‌خط و نیمخطهای ثابت

۱.۴.۲. یک خط، یک پاره‌خط

۱۷۳. روی یک خط عمود بر پاره‌خط ثابت BDC در نقطهٔ ثابت D، نقطه‌های E و F را چنان اختیار می‌کنیم که $DE.DF = BD.CD$ باشد. مکان هندسی نقطهٔ A، محل برخورد خطهای CF و BE را تعیین کنید.



۱۷۴. $\overrightarrow{AB}$ برداری است ثابت. انتهای $\overrightarrow{AC}$ همواره بر خط ثابت Δ قرار دارد و $\overrightarrow{AD}$ بر $\overrightarrow{AC}$ عمود و دو برابر آن است. مطلوب است مکان هندسی انتهای برآیند این سه بردار.

۱۷۵. قطعه خط AB و عمودمنصف آن، OEF را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ M چنان تغییر می‌کند که تصویرش روی AB نقطهٔ D است. EF خط MA را در E و MB را در F قطع می‌کند. مطلوب است مکان هندسی M، به شرط این که $\frac{DM^2}{DA.BD}$ مقداری ثابت شود.

۲.۴.۲. مسأله‌های ترکیبی

۱۷۶. روی خط راست $x'x$ دو نقطهٔ A و B به فاصلهٔ ۱۲ سانتیمتر داده شده است. از نقطهٔ A پاره‌خط $AC = ۳cm$ را عمودبر $x'x$ اخراج می‌کنیم و نیمخط Cy را که می‌تواند حول نقطهٔ C دوران کند، رسم می‌کنیم.

۱. مکانهای هندسی نقطه‌های A' و B'، تصویرهای قائم نقطه‌های A و B روی xy، همچنین مکانهای هندسی نقطه‌های I و J را که بترتیب وسط پاره‌خطهای AA' و BB' می‌باشد، وقتی خط Cy حول نقطهٔ C دوران کند، تعیین کنید.

۲. خط Cy را چنان رسم کنید که نسبت فاصله‌های دو نقطهٔ A و B از آن برابر $\frac{۳}{۵}$ باشد.

یکی از این خطهای Cy، خط xx' را در نقطهٔ M واقع بین A و B و خط Cy دیگر، در نقطهٔ M' بر امتداد AB خط xx' را قطع می‌کند. اندازهٔ MA، MB، $M'A$ و $M'B$ را تعیین کنید.

۳. دایرهٔ به قطر MM' نیمخط AC را در E قطع می‌کند. اندازهٔ AE و BE را تعیین کنید.

۴. از نقطهٔ A خطی موازی $M'E$ رسم می‌کنیم که EB را در نقطهٔ F قطع کند. اندازهٔ EF را تعیین کنید.

با امتحان مثلث EAF، در مورد خطهای EM و EM' چه می‌توان گفت؟

۱۷۷. پاره‌خط $AB = ۲a$ و خط xy که در نقطهٔ B بر AB عمود است، داده شده است. نقطهٔ A را به نقطهٔ دلخواه C از xy وصل می‌کنیم.

۱. مکان هندسی نقطهٔ M پای عمود رسم شده از B بر AC را وقتی نقطهٔ C روی xy تغییرمکان دهد، تعیین کنید.

۲. مکان‌هندسی نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC را وقتی نقطهٔ C روی xy تغییر مکان دهد، بیابید.

۳. نقطهٔ C را چنان تعیین کنید که دایرهٔ محیطی مثلث ABC بر خط Δ، موازی xy، مماس باشد.

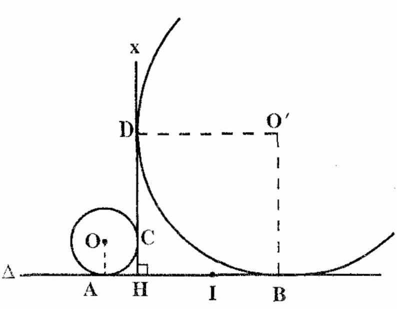
۴. فرض می‌کنیم Δ و A جدا از یکدیگر در دو طرف خط xy و Δ به فاصلهٔ a از xy باشند. مساحت مثلث ABC، همچنین مساحت سه قطعهٔ ایجاد شده به‌وسیلهٔ دایرهٔ محیطی این مثلث و ضلعهای مثلث ABC را برحسب a تعیین کنید.

۱۷۸. دو خط موازی $X'X$ و $Y'Y$ و یک عمود مشترک آنها، AB، داده شده است. (A روی $X'X$ و B روی $Y'Y$ است.) نقطهٔ C روی نیمخط AX می‌لغزد.
مثلث متساوی‌الساقین ADC ($AD = DC$) را چنان می‌سازیم که قاعدهٔ آن، AC، روی AX و رأس آن D، روی BY باشد. نقطهٔ برخورد AD و BC را M می‌نامیم. فرض می‌کنیم $AC = ۲x$ و $AB = a$ باشد.

۱. نسبت $\frac{MA}{MD}$ را تعیین کنید. مکان هندسی نقطهٔ M را وقتی نقطهٔ C روی AX تا فاصلهٔ بی‌نهایت دور می‌رود، تعیین کنید.
۲. مقدار x را برحسب a چنان بیابید که مثلث AMC متساوی‌الساقین باشد (دو حالت).
۳. مقدار x را برحسب a چنان بیابید که مثلث AMC قائم‌الزاویه در رأس M باشد. در این حالت ترسیم را انجام دهید.
۴. اندازهٔ مساحت ذوزنقهٔ ABDC را با فرض این که $AB = ۳cm$ و مثلث AMC متساوی‌الاضلاع باشد، با تقریب $۱mm^۲$ به‌دست آورید.

۱۷۹. از نقطهٔ B خط BA را عمودبر خط XY رسم می‌کنیم و نقطهٔ B را به نقطهٔ دلخواه D از خط XY وصل می‌کنیم. روی BD نقطهٔ C را به قسمی اختیار می‌کنیم که BD واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط BC و BD باشد.
۱. ثابت کنید که مثلثهای BAC و BAD متشابه‌اند.
۲. مکان هندسی نقطه‌های C، وسط پاره‌خط AC و BC را وقتی نقطهٔ D روی XY حرکت می‌کند، تعیین کنید.
۳. از نقطهٔ D خطی عمودبر XY اخراج می‌کنیم. این خط AC را در نقطهٔ E قطع می‌کند. فرض می‌کنیم که $AB = ۲a$ (طول معلومی است) و $A\hat{B}D = ۳۰^\circ$ باشد. اندازهٔ قطرها و مساحت ذوزنقهٔ BADE را برحسب a تعیین کنید.

۱۸۰. روی خط Δ دو نقطهٔ ثابت I و H و دو نقطهٔ متغیر A و B متمایز با I را چنان اختیار می‌کنیم که $IA = IB$ باشد. فرض می‌کنیم H بین I و A باشد. از نقطهٔ H نیمخط Hx را عمود بر خط Δ رسم می‌کنیم و دو دایرهٔ O و O′ را چنان می‌سازیم که: دایرهٔ



O در نقطهٔ A بر خط Δ و در نقطهٔ C بر Hx، و دایرهٔ O' در نقطهٔ B بر خط Δ، و در نقطهٔ D بر نیمخط Hx مماس باشند.

۱. ثابت کنید که $HD + HC = AB$ و $HD - HC = 2IH$.

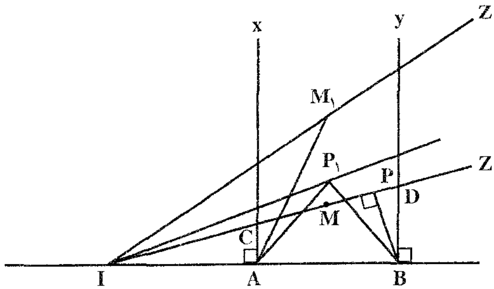
۲. ثابت کنید که نقطهٔ C مرکز ارتفاعی مثلث ABD است.

۳. مکان هندسی نقطهٔ M وسط پاره‌خط OO' را وقتی A و B روی Δ جابه‌جا می‌شود، با توجه به شرطهای داده شده در قبل، تعیین کنید.

۴. ثابت کنید که $DA = BC$ و $DE = CF$ است. E نقطهٔ دوم برخورد DA با دایرهٔ (O) است، و F نقطهٔ دوم برخورد BC با دایرهٔ (O').

۱۸۱. روی یک خط راست، سه نقطهٔ A، I و B اختیار شده‌اند. (A وسط IB است.) نیمخطهای Ax و By را عمود بر AB و در یک طرف آن رسم می‌کنیم. از نقطهٔ I نیمخط متغیر Iz را رسم می‌کنیم که Ax را در نقطهٔ C و By را در نقطهٔ D قطع می‌کند.

۱. مکان هندسی نقطهٔ M، وسط پاره‌خط CD را وقتی Iz حول نقطهٔ I دوران می‌کند، تعیین کنید.



نقطهٔ M را طوری تعیین کنید که $AM = AI$ باشد. این حالتِ نقطهٔ M را، M_1 بنامید.

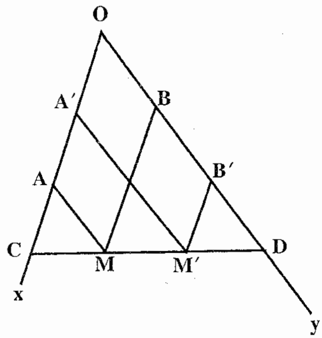
۲. پای عمود رسم شده از نقطهٔ B بر Iz را P می‌نامیم. مکان هندسی نقطهٔ P را وقتی Iz حول نقطهٔ I دوران کند، به‌دست آورید. Iz را چنان رسم کنید که $AP = BP$ باشد. نقطهٔ P در این حالت را P_1 بنامید. درمورد نقطه‌های M_1 و P_1 چه می‌توان گفت؟

۳. اگر Iz_1 وضعیت Iz برای نقطهٔ P_1 باشد، اندازهٔ ضلعهای ذوزنقهٔ محدب ABDC و مساحت آن را برای این حالت Iz_1 تعیین کنید. $AB = 4cm$ اختیار شود.

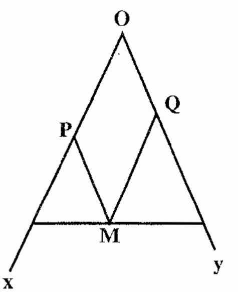
۵.۲. زاویه‌های ثابت

۱.۵.۲. زاویه در حالت کلی

۱.۱.۵.۲. یک زاویه



۱۸۲. زاویهٔ xOy مفروض است. از نقطهٔ M واقع در داخل زاویه، دو خط به‌موازات Ox و Oy رسم می‌کنیم تا آنها را در A و B قطع کند، اگر $MA + MB = 1$ باشد، مکان هندسی نقطهٔ M را پیدا کنید.



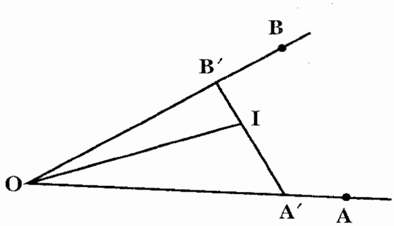
۱۸۳. از نقطهٔ M داخل زاویهٔ xOy دو خط موازی ضلعهای زاویه رسم می‌کنیم، تا آنها را در P و Q قطع کنند. مکان هندسی نقطهٔ M برای آن که محیط متوازی‌الاضلاع MPOQ مقدار ثابتی باشد کدام است؟

الف) یک دایره ب) یک پاره‌خط

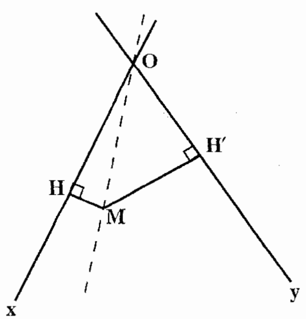
ج) یک بیضی د) دو پاره‌خط

هـ) دو دایره

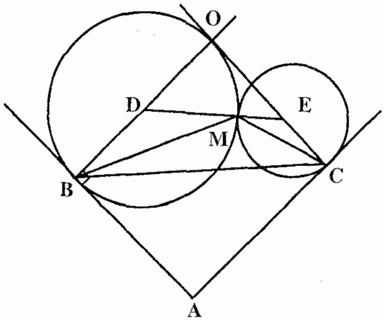
دومین المپیاد آزمایشی ایران



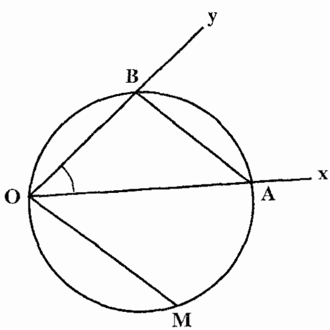
۱۸۴. روی ضلعهای OA و OB از زاویهٔ مفروض O دو نقطهٔ متغیر A′ و B′ را مشخص می‌کنیم، به‌طوری که نسبت $AA':BB'$ مقدار ثابتی باشد، و روی پاره‌خط $A'B'$ نقطهٔ I را طوری برمی‌گزینیم که نسبت $A'I:B'I$ ثابت باشد. مکان هندسی نقطهٔ I را بیابید.



۱۸۵. نشان دهید که تمام نقطه‌هایی که در داخل زاویهٔ معلوم xOy قرار دارند و فاصلهٔ آنها از Ox برابر m و از Oy برابر n است و $m:n = k$ (k معلوم است) می‌باشد، روی خط ثابتی که از رأس زاویه می‌گذرد، قرار دارند.



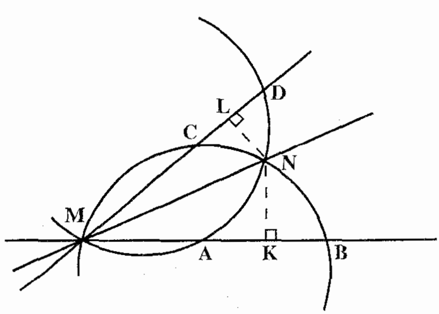
۱۸۶. دو نقطهٔ B و C روی ضلعهای زاویهٔ به رأس A و به فاصلهٔ l برابر از A اختیار شده‌اند. دو دایرهٔ مماس بر هم رسم می‌کنیم که یکی مماس بر AB در نقطهٔ B و دیگری مماس بر AC در نقطهٔ C باشد. مکان هندسی نقطهٔ M، نقطهٔ تماس این دو دایره را بیابید.



۱۸۷. روی دو ضلع زاویهٔ xOy، دو نقطهٔ A و B را چنان اختیار می‌کنیم که $OA + OB = l$ باشد. دایرهٔ محیطی مثلث OAB را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ O خطی موازی AB رسم می‌کنیم که این دایره را در نقطهٔ M قطع کند. مکان هندسی نقطهٔ M را وقتی A و B روی ضلعهای زاویه تغییر مکان می‌دهند، بیابید.

۱۸۸. روی ضلعهای زاویهٔ xOy، دو پاره‌خط OM و OM′ را به قسمی جدا می‌کنیم که $OM + OM' = l$ باشد. (l طول مفروضی است.) مکان مرکز دایرهٔ محیطی مثلث OMM′ را پیدا کنید.

۱۸۹. α زاویه‌ای معلوم است و می‌دانیم در مثلث ABC، $\hat{A}+\hat{B}=\alpha$. مسیر حرکت رأس C از این مثلث را پیدا کنید، به شرطی که رأسهای A و B روی ضلعهای زاویه‌ای می‌لغزند.
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۱



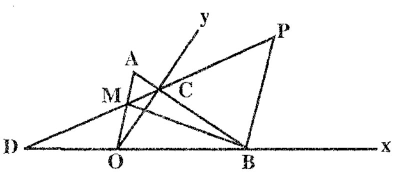
۱۹۰. روی ضلعهای زاویهٔ BMD، دو نقطه A و C را چنان تعیین می‌کنیم که A بین M و B و نقطهٔ C بین M و D باشد. اگر $AB = CD$ باشد، مکان هندسی نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی مثلثهای MCB و MAD را پیدا کنید.

۱۹۱. دایرهٔ متغیری که از رأس یک زاویهٔ مفروض می‌گذرد، دو ضلع این زاویه را در نقطه‌های A و B قطع می‌کند. مکان هندسی دو انتهای قطر موازی با وتر AB از این دایره را تعیین کنید.

۲.۱.۵.۲. یک زاویه، یک نقطه

۱۹۲. دو نیمخط که زاویهٔ مفروض α را تشکیل می‌دهند، از نقطهٔ O، در درون زاویه‌ای مفروض می‌گذرند. فرض کنید یک نیمخط، یک ضلع زاویه را در نقطهٔ A، و نیمخط دیگر، ضلع دیگر زاویه را در نقطهٔ B قطع می‌کند. مکان هندسی پای عمود وارد از O بر خط AB را پیدا کنید.

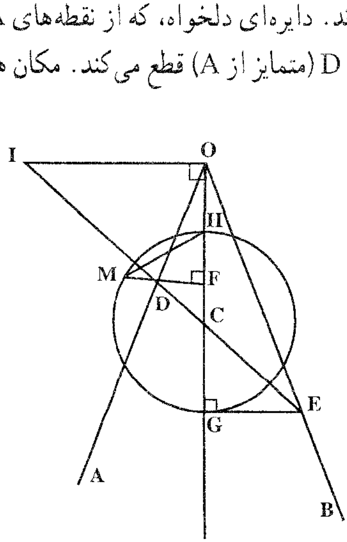
۱۹۳. زاویهٔ xOy و نقطهٔ A خارج آن مفروضند. بر A خطی رسم می‌کنیم تا Ox را در B و Oy را در C قطع کند. C را به M، وسط OA وصل می‌کنیم. از B خطی موازی OA رسم می‌کنیم تا MC را در P قطع کند. مطلوبست مکان هندسی نقطهٔ P.



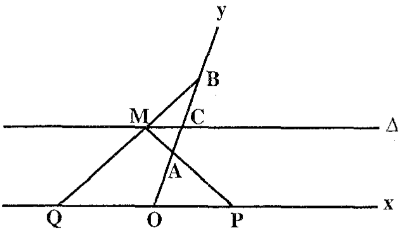
۱۹۴. زاویهٔ xOy و نقطهٔ A روی Ox مفروض است. دایره‌ای را که با Ox در نقطهٔ A و با Oy در نقطه‌ای مانند B مماس باشد درنظر می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ B، وقتی Oy حول نقطهٔ O دوران کند.

۱۹۵. زاویه‌ای با رأس A و یک نقطهٔ B داده شده‌اند. دایره‌ای دلخواه، که از نقطه‌های A و B می‌گذرد، ضلعهای زاویه را در نقطه‌های C و D (متمایز از A) قطع می‌کند. مکان هندسی مرکز ثقل مثلث ACD را پیدا کنید.

۱۹۶. دو خط OA و OB و نقطهٔ C واقع بر نیمساز زاویهٔ بین این دو خط داده شده‌اند. از نقطهٔ C واقع بر نیمساز زاویهٔ بین این دو خط، قاطع اختیاری رسم می‌کنیم تا OA و OB را در D و E قطع کند، از D و E عمودهای DF و EG را بر OC رسم می‌کنیم. اگر H وسط OC بر روی دایره به قطر GH حرکت کند، مطلوب است مکان هندسی مکان تلاقی DF با این دایره.



۲.۵.۱.۳. یک زاویه، دو نقطه



۱۹۷. دو خط Ox و Oy و دو نقطهٔ ثابت A و B بر روی Oy مفروضند. روی Ox دو نقطهٔ متغیر P و Q را درنظر می‌گیریم، به‌طوری که O وسط PQ باشد. مطلوب است مکان هندسی M، محل تلاقی AP و BQ.

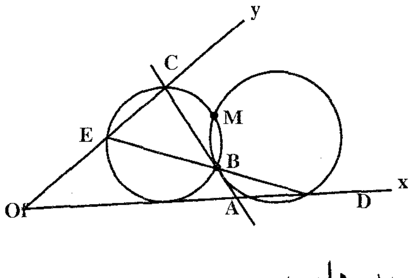
۱۹۸. در صفحهٔ xOy دو نقطهٔ ثابت A و B مفروضند. خط متغیری که از A می‌گذرد، خط Ox را در M و Oy را در N قطع می‌کند. از N خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا MB را در P قطع کند. مکان هندسی نقطهٔ P را تعیین کنید.

۲.۵.۱.۴. یک زاویه، پاره‌خط

۱۹۹. یک زاویه و دو پاره‌خط راست، روی ضلعهای آن داده شده است. نقطهٔ O واقع در درون زاویه را به نقطه‌های انتهایی این پاره‌خطهای راست وصل کرده‌ایم. مجموع مساحتهای دو مثلثی که به این ترتیب به دست می‌آید برابر است با S. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M، به شرطی که مجموع چنین مساحتهایی برای آن، برابر S باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۲

۲۰۰. نقطهٔ B درون زاویهٔ ثابت xOy داده شده است. از این نقطه، قاطع ثابت ABC و قاطع متغیر DBE را رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی دو مثلث BAD و BCE را وقتی قاطع DBE حول B دوران کند، تعیین کنید.



۲.۵.۱.۵. یک زاویه، دایره

۲۰۱. یک زاویه و دایره‌ای به مرکز O محاط در این زاویه، داده شده است. خط دلخواهی بر دایره مماس است و ضلعهای زاویه را در نقطه‌های M و N قطع می‌کند. مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث MON را بیابید.

۲.۵.۲. زاویهٔ قائمه

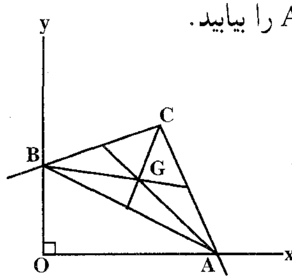
۲.۵.۲.۱. یک زاویهٔ قائمه

۲۰۲. نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB به طول a است که A و B همواره بر دو ضلع زاویه‌ای قائمه جابه‌جا می‌شوند. مکان هندسی نقطهٔ M را تعیین کنید.

۲۰۳. زاویهٔ قائمهٔ xOy مفروض است. نیمدایرهٔ به قطر ثابت $AB = 2R$ در داخل این زاویه به قسمی تغییر مکان می‌دهد که همواره نقطهٔ A را روی Ox و نقطهٔ B روی Oy قرار دارد. مکان هندسی نقطهٔ M، وسط کمان AB را تعیین کنید.

۲.۵.۲.۲. یک زاویهٔ قائمه، یک نقطه

۲۰۴. زاویهٔ قائمهٔ ACB حول نقطهٔ C که رأس این زاویه است دوران می‌کند و دو ضلع این زاویه دو خط ثابت عمود بر هم OAx و OBy را در A و B قطع می‌کنند. مکان هندسی مرکز ثقل مثلث ABC را بیابید.



۲.۵.۲.۳. مسأله‌های ترکیبی

۲۰۵. زاویهٔ قائمهٔ xOy در صفحه رسم شده است و نقطهٔ I داخل زاویهٔ محدب xOy واقع است. زاویهٔ قائمهٔ متحرک UIV را که رأسش نقطهٔ I ثابت می‌باشد درنظر می‌گیریم و فصل مشترک خطهای Ox و IU را نقطهٔ A و فصل مشترک خطهای Oy و IV را نقطهٔ B می‌نامیم. مطلوب است:

۱. مکان هندسی وسط قطعه خط AB.

۲. مکان هندسی نقطهٔ P رأس چهارم مستطیلی که سه رأس دیگر آن O، A و B باشند.

۳. مکان هندسی نقطهٔ Q رأس چهارم مستطیلی که سه رأس دیگر آن I، A و B باشند.

بخش ۳

• مثلث

۳.۱.۵.۱. تنها یک مثلث ثابت
۳.۱.۵.۲. مثلث، ارتفاع، خطهای عمود
۳.۱.۵.۳. مثلث، میانه یا اجزای مربوط به میانه
۳.۱.۵.۴. مثلث، نیمساز یا اجزای مربوط به نیمساز
۳.۱.۵.۵. مثلث، خطهای: موازی، پاد موازی
۳.۱.۵.۶. مثلث، رابطهٔ متری
۳.۱.۵.۷. مثلث، مساحت
۳.۱.۵.۸. مثلث، چند ضلعی
۳.۱.۵.۹. مثلث، دایره
۳.۱.۵.۱۰. مثلث، سایر موارد
۳.۱.۵.۱۱. مسأله‌های ترکیبی

۳.۲. مثلث‌های ویژه

۳.۲.۱. مثلث متساوی‌الاضلاع

۳.۲.۱.۱. خط و نقطه
۳.۲.۱.۲. مثلث ثابت، ...
۳.۲.۱.۲.۱. مثلث، رابطهٔ بین زاویه‌ها
۳.۲.۱.۲.۲. مثلث، رابطهٔ متری
۳.۲.۱.۲.۳. مثلث، دایرهٔ محیطی
۳.۲.۱.۲.۴. مسأله‌های ترکیبی

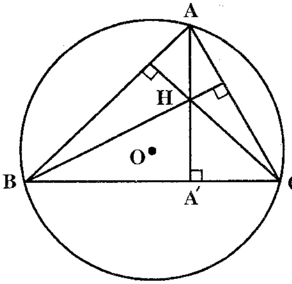
۳.۲.۲. مثلث متساوی‌الساقین

۳.۲.۲.۱. یک ضلع
۳.۲.۲.۲. یک خط، یک رأس، اندازهٔ زاویه
۳.۲.۲.۳. مثلث ثابت،...
۳.۲.۲.۳.۱. تنها یک مثلث ثابت
۳.۲.۲.۳.۲. مثلث، رابطهٔ متری

بخش ۳. مثلث

۳ . ۱. مثلث در حالت کلی

۳ . ۱ . ۱. نقطه، خط، زاویه

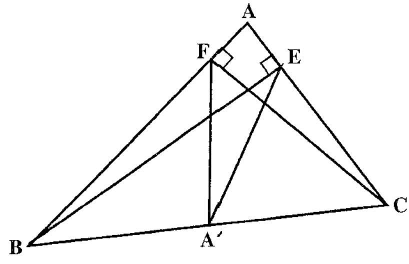


۲۰۶. در مثلث متغیر ABC نقطهٔ H محل برخورد ارتفاعها، و O مرکز دایرهٔ محیطی، ثابت است. بعلاوه H بر وسط ارتفاع AA' واقع است.

۱. مکان هندسی رأس A را معین کنید.

۲. ثابت کنید $AB^2 + AC^2 - BC^2 = AA'^2$.

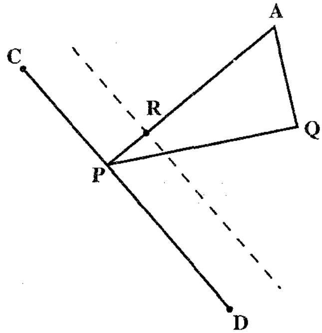
۲۰۷. A' وسط قاعده و E و F پای ارتفاعهای وارد بر دو ضلع جانبی یک مثلث متغیر، نقطه‌های ثابتی هستند و $A'E = A'F$. مکان هندسی رأسهای مثلث و مرکز ارتفاعی آن را بیابید.



۲۰۸. نقطه‌های بروکار یک مثلث ثابتند و اندازهٔ زاویهٔ بروکار، نصف یک زاویهٔ مثلث است. مکان هندسی رأسهای این مثلث را بیابید.

۲۰۹. قضیه. اگر یک رأس از مثلث متغیری ثابت باشد، رأس دوم آن خط راست مفروضی را بپیماید و مثلث همواره با مثلث مفروضی متشابه باشد، آن‌گاه رأس سوم مثلث خط راستی را می‌پیماید.

۲۱۰. مرکز ارتفاعی، وسط قاعده و راستای قاعدهٔ مثلث متغیری، ثابت است. نشان دهید که دایرهٔ محیطی این مثلث، از دو نقطهٔ ثابت می‌گذرد. مکان هندسی ثقل مثلث را بیابید.



۲۱۱. رأس A از مثلث متغیر APQ ثابت است و P روی خط ثابت CD حرکت می‌کند، AP خط ثابتی موازی با CD را در R قطع می‌کند، و PQ = AR ؛ زاویهٔ APQ ثابت است. مکان هندسی Q را تعیین کنید.

۲۱۲. یک رأس از یک مثلث متغیر، ثابت و ضلع روبه‌رو به این رأس با طولی متغیر، بر خطی ثابت قرار دارد. مکان هندسی تصویرهای این نقطهٔ ثابت روی نیمسازهای دو زاویهٔ دیگر مثلث را بیابید.

۲۱۳. در مثلث ABC طول و مکان قاعدهٔ AB ثابت است. اگر رأس C روی خط مستقیم حرکت کند، محل برخورد سه میانه روی چه خمی حرکت می‌کند؟

الف) یک دایره　　　ب) یک سهمی

ج) یک بیضی　　　د) یک خط مستقیم

هـ) خمی غیر از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۲

۲۱۴. اگر در مثلثی دو رأس B و C ثابت و رأس A روی خط معینی مانند Δ تغییر مکان دهد، ثابت کنید مکان هندسی محل برخورد میانه‌های مثلثها، خطی راست است، موازی با Δ .

۲۱۵. دو رأس a و b از مثلث abc ثابت هستند و رأس c از آن روی یک خط جابه‌جا می‌شود. کدام‌یک از نقطه‌های زیر نیز روی یک خط جابه‌جا می‌شود؟

الف) مرکز دایرهٔ محیطی مثلث　　　ب) مرکز ثقل مثلث

ج) مرکز ارتفاعی مثلث　　　د) قرینهٔ b نسبت به c

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۱

۲.۱.۳. یک نقطه، یک دایره

۲۱۶. دایرهٔ محیطی و نقطهٔ لوموان یک مثلث متغیر ثابت هستند. مکان هندسی مرکز ثقل این مثلث را تعیین کنید.

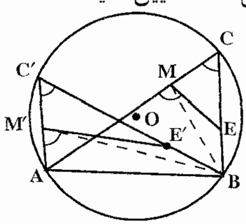
۲۱۷. مثلث متغیری یک رأس ثابت و دایرهٔ نه نقطهٔ ثابت دارد. مکان هندسی مرکز ارتفاعی این مثلث را بیابید.

۳.۱.۳. یک ضلع، یک زاویه یا رابطهٔ بین زاویه‌ها

۲۱۸. اگر یک ضلع و زاویهٔ مقابل به آن از مثلثی معلوم باشد، مکان هندسی نقطهٔ برخورد ارتفاعهای این مثلث را به‌دست آورید.

۲۱۹. ثابت کنید اگر یک ضلع و زاویهٔ مقابل به آن از مثلثی معلوم باشد، مکان مرکز ثقل، یک دایره است.

۲۲۰. قاعدهٔ AB از مثلث ABC و زاویهٔ رأس آن $\hat{C} = \alpha$ اندازهٔ ثابتی دارند. مکان هندسی وسط ضلعهای CA و CB را وقتی نقطهٔ C تغییر مکان می‌دهد، تعیین کنید.



۲۲۱. در مثلث ABC ، ضلع AB ثابت است و زاویهٔ C مقدار ثابتی دارد. روی ضلع BC نقطهٔ E را چنان اختیار می‌کنیم که این پاره‌خط را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم کند. از نقطهٔ E خطی رسم می‌کنیم که ضلع AC را در نقطهٔ M به قسمی قطع کند که زاویهٔ AME اندازهٔ معلومی داشته باشد. مکان هندسی نقطهٔ M کدام است؟

۲۲۲. در مثلثی رأسهای B و C ثابت هستند و زاویهٔ B همواره دو برابر زاویهٔ C باقی می‌ماند. مکان هندسی رأس A چه منحنیی است؟

۲۲۳. در مثلث ABC ضلع $BC = a$ از حیث طول و وضع ثابت است و داریم:

$\tan\frac{\hat{B}}{۲}\cdot\tan\frac{\hat{C}}{۲} = k$. مطلوب است مکان هندسی رأس A.

۴.۱.۳. یک ضلع، رابطهٔ متری

۱.۴.۱.۳. یک ضلع، رابطهٔ بین ضلعها

۲۲۴. قاعدهٔ BC از مثلث متغیر ABC ثابت است و مجموع $AB + AC = l$ نیز ثابت می‌باشد. مکان هندسی رأس A را بیابید.

۲۲۵. در مثلثی ضلع BC ثابت و رأس A طوری تغییر مکان می‌دهد که همواره $|AB - AC| = l$ است. مکان هندسی رأس A را تعیین کنید.

۲.۴.۱.۳. یک ضلع، رابطهٔ بین ضلعها و زاویه‌ها

۲۲۶. در مثلثی ضلع BC ثابت است و مقدار حاصل‌ضرب $AB \cdot AC \cdot \cos^2 \frac{\hat{A}}{2}$ نیز ثابت است. مکان هندسی رأس A چیست؟

۳.۴.۱.۳. یک ضلع، رابطهٔ بین ضلعها و اجزای دیگر

۲۲۷. مطلوب است تعیین مکان هندسی رأس A از مثلث ABC که در آن ضلع BC ثابت است و اگر M وسط BC باشد، رابطهٔ $AB \cdot AC = AM \cdot BC$ برقرار باشد.

۲۲۸. ضلع BC از مثلثی در صفحه ثابت است و بین ضلعهای AB و AC و میانهٔ AD رابطهٔ $AB \cdot AC = AD^2 + h^2$ که در آن h طول ثابتی است، همواره برقرار است. مکان هندسی رأس A از مثلث را تعیین کنید. بحث دربارهٔ وجود مکان به‌حسب h و a (ضلع BC).
از مثلثی ضلع a و زاویهٔ A در دست است و می‌دانیم که بین دو ضلع دیگر مثلث و میانهٔ AD رابطه ذکر شده برقرار است. مثلث را رسم کنید.

۴.۴.۱.۳. یک ضلع، اندازهٔ ارتفاع

۲۲۹. مطلوب است مکان هندسی رأس A از مثلث ABC که در آن، قاعدهٔ BC ثابت، و اندازهٔ ارتفاع رأس A نیز مقدار ثابتی باشد.

۲۳۰. مکان هندسی مرکز ثقل مثلثهایی را بیابید که قاعدهٔ ثابتی دارند و طول ارتفاع نظیر این قاعده نیز ثابت است.

۵.۴.۱.۳. یک ضلع، اندازهٔ میانه یا رابطهٔ بین میانه‌ها

۲۳۱. ضلع AB از مثلث ABC ثابت و طول میانهٔ نظیر رأس A نیز ثابت است. مکان هندسی رأس C را به‌دست آورید.

۲۳۲. در مثلث ABC ضلع BC ثابت و طول میانهٔ AD نیز ثابت است. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ G، محل برخورد سه میانهٔ این مثلث، وقتی رأس A تغییر مکان دهد.

۲۳۳. در مثلث ABC ، قاعدهٔ AB ثابت و به طول ۲ واحد است. میانهٔ ضلع BC به طول ۱/۵ واحد است و همهٔ اوضاع ممکن را می‌تواند اختیار کند. مکان رأس C از مثلث، عبارت است از :

الف) یک خط راست به فاصله ۱/۵ واحد از A

ب) دایرهٔ به مرکز A و به شعاع ۲ واحد

ج) دایرهٔ به مرکز A و به شعاع ۳ واحد

د) دایرهٔ به شعاع ۳ واحد که مرکز آن به فاصلهٔ ۴ از B و در امتداد BA واقع است.

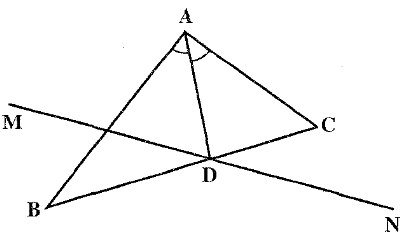
هـ) بیضی به کانون A

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۰

۲۳۴. از مثلث ABC ضلع BC ثابت و رأس A متغیر است. مطلوب است مکان هندسی رأس A با فرض آن‌که میانه‌های وارد بر دو ضلع AC و AB یکدیگر را به زاویهٔ قائمه قطع کنند.

۶.۴.۱.۳. یک ضلع، نیمساز یا اجزای مربوط به نیمساز

۲۳۵. دو رأس A و B از یک مثلث ثابتند و نقطهٔ D پای نیمساز زاویهٔ درونی A، روی خط ثابت MN حرکت می‌کند. مکان هندسی رأس C را تعیین کنید.



۲۳۶. طول ضلع BC و محل I_b و I_c از مثلث متغیر ABC در دست است. ثابت کنید :

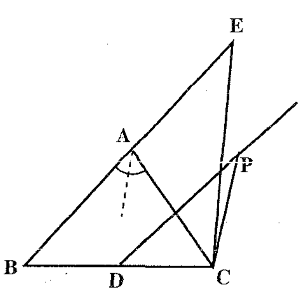
۱. رأس، یک خط مستقیم را رسم می‌کند.

۲. امتداد AB و AC ثابت است.

۳. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC ثابت است.

۴. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC یک دایره رسم می‌کند.

۲۳۷. قاعدهٔ BC از مثلث متغیر ABC ثابت است و مجموع AB + AC نیز ثابت می‌باشد. خطی که از نقطهٔ D، وسط BC، موازی AB رسم شود، با خطی که از نقطهٔ C موازی نیمساز داخلی زاویهٔ A رسم می‌شود، در نقطهٔ P متقاطعند. مکان هندسی نقطهٔ P را پیدا کنید.



۷.۴.۱.۳. یک ضلع، اندازهٔ مساحت

۲۳۸. مکان هندسی رأسهای مثلثهای هم‌ارزی را که قاعدهٔ مشترک دارند، تعیین کنید.

۲۳۹. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطهٔ برخورد سه میانهٔ تمام مثلثهایی که قاعده و مساحت آنها ثابت است.

۸.۴.۱.۳. یک ضلع، دایرهٔ محیطی

۲۴۰. مثلث ABC و دایرهٔ محیطی آن را درنظر می‌گیریم. نیمساز زاویهٔ داخلی A، دایره را در M قطع می‌کند. اگر نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث باشد، ثابت کنید که:

الف. $MB = MC = MO$

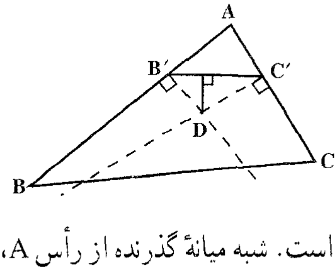
ب. اگر دو نقطهٔ B و C ثابت باشند، و نقطهٔ A دایرهٔ محیطی مثلث را بپیماید، مکان هندسی نقطهٔ O را تعیین کنید.

۵.۱.۳. مثلث ثابت، ...

۱.۵.۱.۳. تنها یک مثلث ثابت

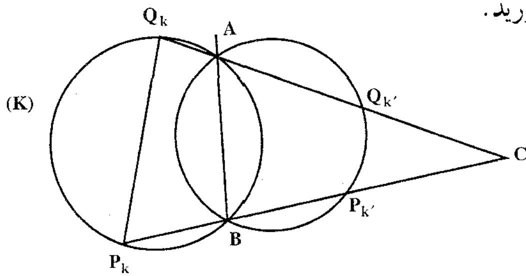
۲۴۱. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌هایی مانند P که اگر از آنها سه عمود PA'، PB' و PC' را بر ضلعهای مثلث ABC فرود آوریم، A'، B' و C' همخط باشند.

۲۴۲. روی دو ضلع AB و AC از مثلث ABC دو پاره‌خط مساوی AB' و AC' را جدا می‌کنیم. دو خط عمود برهم بر AB و AC در نقطه‌های B' و C'، یکدیگر را در D قطع می‌کنند. نشان دهید که اگر طول مشترک AB' و AC' تغییر کند، مکان هندسی نقطهٔ D یک خط راست است. مکان هندسی تصویر D نسبت به پاره‌خط $B'C'$ را به‌دست آورید.



۲۴۳. مثلث ABC داده شده است. شبه میانهٔ گذرنده از رأس A، مکان هندسی نقطه‌ای است که از آن نقطه پادموازیهای به طولهای مساوی در دو زاویهٔ B و C رسم می‌شوند.

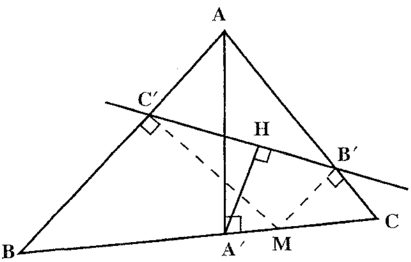
۲۴۴. مثلث ABC را درنظر می‌گیریم. برای هر دو دایرهٔ K و K' که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرند، نشان دهید که اگر P_k و Q_k محل برخورد دایرهٔ K با BC و AC، و P'_k و Q'_k محل برخورد دایرهٔ K' با همین دو ضلع باشند، آن‌گاه $P_kQ_k \| P_{k'}Q_{k'}$. سپس به کمک این موضوع، مکان هندسی مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای CP_kQ_k را به‌دست آورید.



۲.۵.۱.۳. مثلث، ارتفاع، خطهای عمود

۲۴۵. فرض کنید AA_1 ، BB_1 و CC_1 ارتفاعهای مثلث ABC باشند، خط راستی عمود بر AB، AC و A_1C_1 را در نقطه‌های K و L قطع می‌کند. ثابت کنید که مرکز دایرهٔ محیطی مثلث KLB_1 ، وقتی خط قاطع به موازات خود تغییر کند، روی خط راست BC قرار دارد.

۲۴۶. مثلث ABC داده شده است. مکان هندسی تصویر پای ارتفاع وارد بر قاعده را روی خطی که تصویرهای یک نقطهٔ متغیر روی قاعده را بر دو ضلع دیگر مثلث به‌هم وصل می‌کند، پیدا کنید.



۳.۵.۱.۳. مثلث، میانه یا اجزای مربوط به میانه

۲۴۷. نقطهٔ K روی ضلع AC از مثلث ABC و نقطهٔ P بر میانهٔ BDی آن طوری اختیار شده‌اند که مثلثهای APK و BPC معادل هستند. مکان هندسی نقطهٔ برخورد خطهای AP و BK کدام است؟

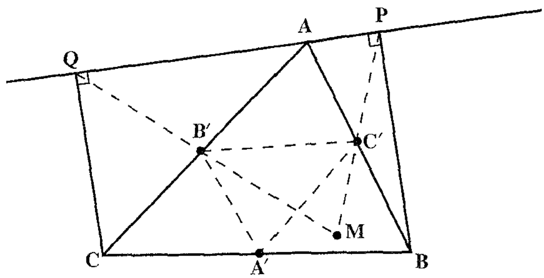
الف) یک دایره مماس بر BC — ب) یک دایره مماس بر AB و AC

ج) پاره‌خطی موازی AC — د) پاره‌خطی موازی BC

هـ) پاره‌خطی موازی AB

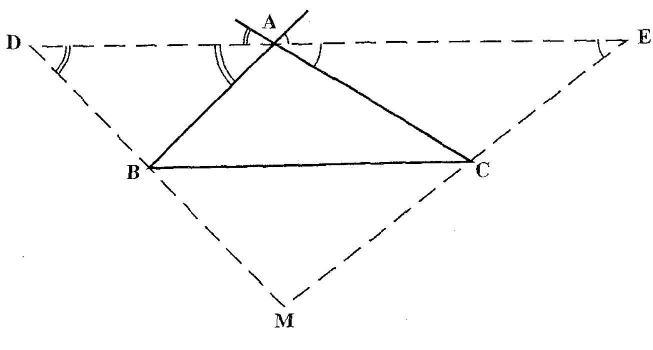
سومین المپیاد آزمایشی ایران

۲۴۸. مثلث ABC داده شده است. وسط ضلعهای BC، AC و AB را بترتیب A'، B' و C' می‌نامیم. از A خط متغیری می‌گذرانیم و از B و C عمودهای BP و CQ را بر آن رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ M، محل تلاقی PC' و QB' را بیابید.



۴.۵.۱.۳. مثلث، نیمساز یا اجزای مربوط به نیمساز

۲۴۹. مثلث ABC داده شده است. روی نیمسازهای زاویه‌های برونی زاویهٔ A، دو طول AD و AE را چنان اختیار می‌کنیم که $AD \cdot AE = AB \cdot AC$ باشد. مکان هندسی نقطهٔ M، محل برخورد خطهای BD و CE را بیابید.

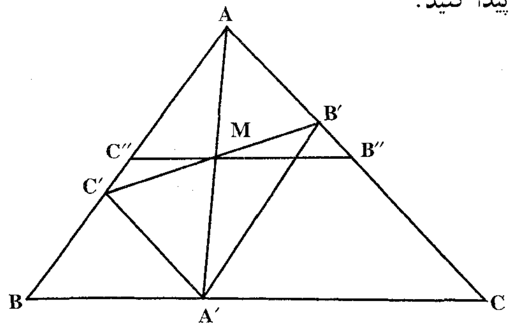


۵.۵.۱.۳. مثلث، خطهای: موازی، پاد موازی

۲۵۰. مثلث ABC مفروض است. مطلوب است تعیین مکان هندسی وسطهای قطعه‌خطهایی که به موازات ضلع BC رسم شده و به ضلعهای BC و AC محدود شوند.

۲۵۱. مثلث ABC مفروض است. خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا AB و AC را بترتیب در B' و C' قطع کند. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطهٔ M، محل برخورد BC' و CB'.

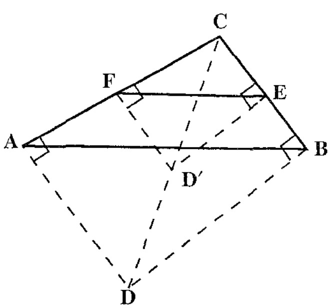
۲۵۲. نقطهٔ A' را روی ضلع BC از مثلث ABC اختیار کرده و از این نقطه‌ها خطهای $A'B'$ و $A'C'$ را به موازات ضلعهای AB و AC مثلث رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ M، محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع $A'B'AC'$ را وقتی A' روی ضلع BC حرکت کند، پیدا کنید.



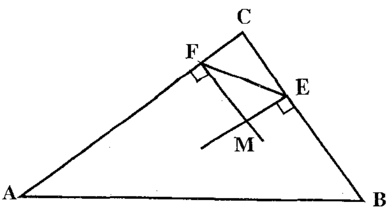
۲۵۳. مثلث ABC مفروض است. فرض کنید D نقطه‌ای دلخواه بر خط BC باشد. خطهای راستی که از D به موازات AB و AC می‌گذرند، AC و AB را بترتیب، در نقطه‌های E و F قطع می‌کنند. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را که از نقطه‌های D، E و F می‌گذرند، پیدا کنید.

۲۵۴. مثلث ABC داده شده است. مکان هندسی نقطه‌هایی را بیابید که خطهای رسم شده از هر یک از این نقطه‌ها به موازات ضلعهای a و bی مثلث، با هم برابر باشند. خط موازی ضلع a به دو ضلع دیگر محدود است و ...

۲۵۵. خطهایی موازی یک ضلع مثلث رسم می‌کنیم. سپس در دو انتهای نقطهٔ برخورد آنها با دو ضلع دیگر، دوخط عمود بر آن ضلعها رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ برخورد این عمودها را بیابید.



۲۵۶. خطی پاد موازی با ضلع AB از مثلث ABC رسم می‌کنیم تا دو ضلع AB و AC را بترتیب در E و F قطع کنند. در این دو نقطه دو خط عمود بر ضلعهای AB و AC اخراج می‌کنیم تا در نقطهٔ M یکدیگر را قطع نمایند. مکان هندسی نقطهٔ M را وقتی خطهای پادموازی به موازات خود تغییر کنند، به‌دست آورید.



۶.۵.۱.۳. مثلث، رابطهٔ متری

۲۵۷. طول ضلعهای مثلث ABC را با a، b و c نشان می‌دهیم. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M، به‌طوری که داشته باشیم:

$$MB^2 + MC^2 = MA^2$$

۲۵۸. مثلث ABC داده شده است. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را تعیین کنید به قسمی که $MB^2 + MC^2 = 2MA^2$ باشد.

۲۵۹. مثلث ABC به ضلعهای a، b و c داده شده است. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M به‌طوری که داشته باشیم:

$$MB^2 + MC^2 - 2AM^2 = \frac{a^2}{2}$$

۲۶۰. مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که مجموع مربعهای فاصله‌اش از سه رأس یک مثلث برابر مقدار ثابت k^2 باشد.

۲۶۱. از نقطهٔ متغیر D در داخل مثلث ABC، دو عمود DM و DN را بر ضلعهای AB و AC فرود می‌آوریم. اگر $CN \cdot AC = BM \cdot AB$ باشد، مکان هندسی نقطهٔ D را بیابید.

۲۶۲. مثلث ABC داده شده است. ثابت کنید مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحهٔ این مثلث، که عمودهای رسم شده از آن نقطه‌ها بر ضلعهای آن، روی ضلعها، پاره‌خطهایی متناسب با خود این ضلعها ایجاد می‌کنند، شش خط راست است که از یک نقطه می‌گذرد.

۲۶۳. مجموعه‌ای از دایره‌ها را درنظر می‌گیریم که فاصله‌شان از سه ضلع یک مثلث داده شده به نسبت همین ضلعها باشند. مکان هندسی مرکز این دایره‌ها را بیابید.

۲۶۴. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M، واقع در درون مثلثی مفروض، را طوری بیابید که فاصله‌های M تا ضلعهای مثلث مفروض، ضلعهای مثلثی معلوم به‌حساب آیند.

۲۶۵. مثلث ABC به ضلعهای a، b و c مفروض است. مکان هندسی نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$a \cdot MA^2 - b \cdot MB^2 - c \cdot MC^2 = 0$$

۲۶۶. مثلث ABC به ضلعهای a، b و c مفروض است. مکان هندسی نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که:

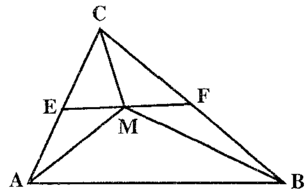
$$a^2 \cdot MA^2 - b^2 \cdot MB^2 - c^2 \cdot MC^2 = 0$$

۲۶۷. عددهای α، β، γ و k مفروضند. فرض کنید x، y و z معرف فاصله‌های نقطه‌ای مانند M در درون یک مثلث تا ضلعهای آن باشند. ثابت کنید که مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M به‌طوری که $\alpha x + \beta y + \gamma z = k$، مجموعه‌ای تهی، یک پاره‌خط، یا بر مجموعهٔ کلیهٔ نقطه‌های مثلث منطبق است.

۳.۱.۵.۷. مثلث، مساحت

۲۶۸. در درون مثلثی مفروض، مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را پیدا کنید که برای هریک از آنها، و هر نقطهٔ N از محیط مثلث، نقطه‌ای مانند P در درون یا روی محیط مثلث وجود داشته باشد، به‌طوری که مساحت مثلث MNP، از $\frac{1}{6}$ مساحت مثلث مفروض کمتر باشد.

۲۶۹. مکان هندسی نقطهٔ M واقع در داخل مثلث ABC را طوری پیدا کنید که مساحت مثلث MBA مساوی مجموع مساحتهای دو مثلث MBC و MAC باشد.



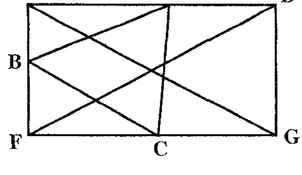
۳.۱.۵.۸. مثلث، چند ضلعی

۲۷۰. ضلعهای مثلثی مفروض، قطرهای سه متوازی‌الاضلاع محسوب می‌شوند. ضلعهای متوازی‌الاضلاعها به موازات دو خط راست l و p هستند. ثابت کنید که سه قطر این متوازی‌الاضلاعها متمایز از ضلعهای مثلث، در نقطه‌ای مانند M متقاطعند. مکان هندسی نقطهٔ M را پیدا کنید، به شرطی که l و p دلخواه و دوبه‌دو برهم عمود باشند.

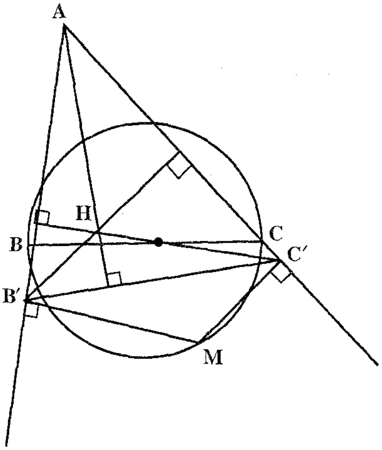
۲۷۱. تمام مستطیلهایی را که در مثلث ABC محاط بوده، یک ضلع آنها روی BC باشد درنظر می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ تلاقی قطرها.

۲۷۲. مکان هندسی مرکزهای کلیهٔ مستطیلهای ممکن محیطی مثلثی مفروض را بیابید. (مستطیل، محیطی خوانده می‌شود، اگر یکی از رأسهای مثلث بر یک رأس مستطیل منطبق باشد و دو رأس دیگرش بر دو ضلع از مستطیل که شامل این رأس نیستند، قرار گیرند.)

۲۷۳. یک مستطیل بر یک مثلث محیط است. اگر سه ضلع از ضلعهای مستطیل هرکدام بر یکی از رأسهای مثلث بگذرند. مکان هندسی مرکزهای مستطیلهای محیط بر مثلث مفروض را به‌دست آورید.



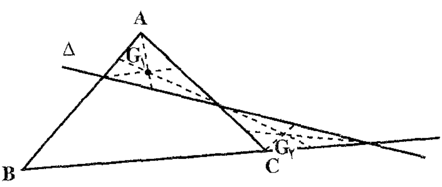
۳.۱.۵.۹. مثلث، دایره



۲۷۴. ′B و ′C تصویرهای نقطهٔ متغیری از دایره‌ای به قطر BC بر روی ضلعهای AB و AC از مثلث ABC هستند. مکان هندسی مرکز ارتفاعی مثلث متغیر ′AB′C را تعیین کنید.

۳.۱.۵.۱۰. مثلث، سایر موارد

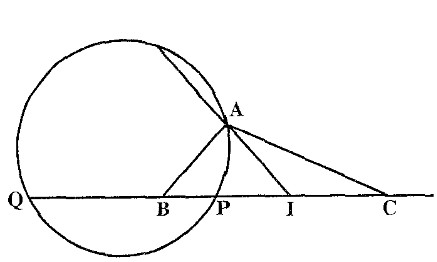
۲۷۵. نقطهٔ M در درون مثلثی طوری اختیار شده است که خط راست l وجود دارد که از M می‌گذرد و مثلث را به دو بخش چنان قسمت می‌کند که بر اثر نگاشتی متقارن نسبت به خط l، یک قسمت به درون یا بر محیط دیگری فرستاده می‌شود. مکان هندسی نقطهٔ M را پیدا کنید.



۲۷۶. مثلث ABC داده شده است خط راست Δ که موازی هیچ‌یک از ضلعهای مثلث نمی‌باشد، دو ضلع مثلث و امتداد ضلع سوم را قطع می‌کند و مثلثهای دیگری تشکیل می‌دهد. مطلوب است تعیین مکان هندسی مرکزثقل مثلثهایی که به این ترتیب تشکیل می‌شوند، وقتی که خط راست Δ تغییر می‌کند.

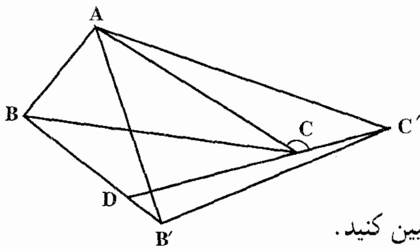
المپیادهای ریاضی فرانسه، ۱۹۹۵

۲۷۷. بر روی ضلعهای BC از مثلث ABC و بر امتداد آن نقطه‌های P و Q را مزدوج یکدیگر نسبت به B و C اختیار می‌کنیم. ثابت کنید دایرهٔ محیطی مثلث APQ از نقطهٔ ثابت دیگری می‌گذرد، سپس مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث APQ را بیابید.



۲۷۸. فرض کنید l خط دلخواهی باشد که از رأس A از مثلث ABC می‌گذرد و قاعدهٔ BC را در نقطهٔ M قطع می‌کند. مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای ABM و ACM را O_1 و O_2 می‌نامیم. مطلوب است مکان هندسی وسط پاره‌خط O_1O_2 وقتی l همهٔ وضعیتهای ممکن را اختیار کند.

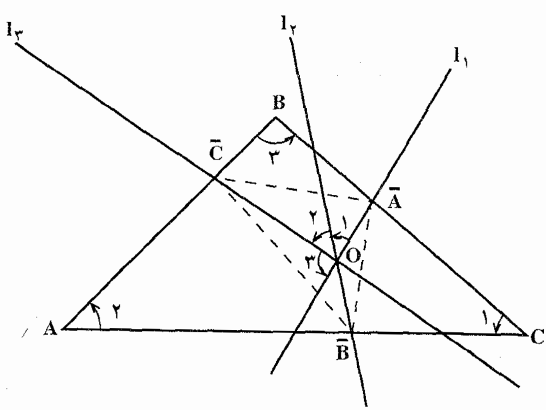
۲۷۹. مطلوب است مکان هندسی مرکزهای مثلثهای متساوی‌الاضلاعی که بر یک مثلث مفروض محیط شده‌اند.



۲۸۰. دو مثلث متشابه ABC و $AB'C'$ در رأس A مشترکند. مثلث ABC ثابت است و مثلث $AB'C'$ حول رأس A دوران می‌کند. مکان هندسی نقطهٔ D، محل برخورد خطهای BB' و CC' را تعیین کنید.

۱۱.۵.۱.۳. مسأله‌های ترکیبی

۲۸۱. مثلث ABC و نقطهٔ O داده شده‌اند. سه خط l_1، l_2 و l_3 از O رسم شده‌اند، چنان که زاویه‌های بین آنها با زاویه‌های مثلث مساوی‌اند. (با درنظر گرفتن جهت زاویه‌ها)؛ فرض کنید $\overline{A}$، $\overline{B}$ و $\overline{C}$ نقطه‌های برخورد این خطها با ضلعهای متناظر در ΔABC باشند (شکل).



الف) ثابت کنید اگر O :

۱. مرکز دایرهٔ محیطی،

۲. مرکز دایرهٔ محاطی،

۳. نقطهٔ برخورد ارتفاعها (مرکز ارتفاعی)؛ در مثلث ABC باشد، آن‌گاه O :

۱. بر مرکز ارتفاعی،

۲. بر مرکز دایرهٔ محیطی،

۳. بر مرکز دایرهٔ محاطی مثلث $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ منطبق خواهد بود.

ب) فرض کنید O نقطهٔ دلخواهی است و خطهای l_1، l_2 و l_3 حول O دوران می‌کند.

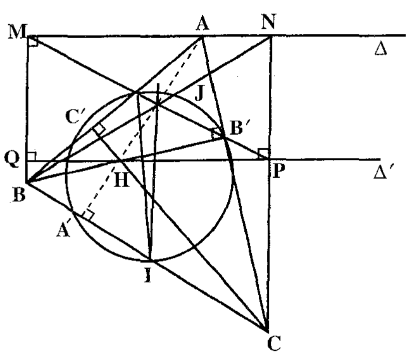
مطلوب است تعیین مکان هندسی :
۱. مرکزهای دایره‌های محیطی ؛
۲. مرکزهای دایره‌های محاطی ؛
۳. مرکزهای ارتفاعی مثلثهای $\overline{ABC}$.

۲۸۲. مثلث OAB با زاویهٔ حادهٔ AOB را درنظر می‌گیریم. از نقطهٔ $M \neq O$ عمودهایی بر OA و OB رسم شده است. پاهای این عمودها بترتیب P و Q می‌باشند. H نقطهٔ تقاطع ارتفاعهای ΔOPQ است. مکان H درصورتی که M مجاز باشد که (a) روی ضلع و (b) داخل مثلث OAB تغییر کند، چیست؟

هفتمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۵

۲۸۳. تصویرهای رأسهای A، B و C از مثلث ABC روی خطِ ثابت m از صفحهٔ مثلث ABC را بترتیب 'A، 'B و 'C می‌نامیم. سپس از این نقطه‌ها عمودهای "A'A، "B'B و "C'C را بترتیب بر ضلعهای BC، CA و AB رسم می‌کنیم. ثابت کنید :
۱. این خطها در یک نقطهٔ M همرسند.
۲. وقتی خط m از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گذرد، نقطهٔ M دایرهٔ محیطی این مثلث را می‌پیماید.

۲۸۴. دو خط موازی Δ و Δ' که از رأس A و نقطهٔ H محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC می‌گذرند، مفروضند. از B و C عمودهایی بر Δ و Δ' رسم می‌کنیم تا آنها را بترتیب در M، Q، N و P قطع کند. پای ارتفاعهای مثلث را 'A، 'B و 'C می‌نامیم.
۱. مطلوب است مکان هندسی مرکز مستطیل MNPQ و نشان دهید دایرهٔ محیطی مستطیل از 'A می‌گذرد.
۲. نشان دهید قطرهای MP و NQ از مستطیل MNPQ بر 'B و 'C می‌گذرد.



۲۸۵. مثلث ABC داده شده است. از نقطهٔ دلخواه L واقع در صفحهٔ این مثلث عمودهای LM و LN را بر ضلعهای a و b رسم می‌کنیم.

۱. مکان هندسی نقطه‌هایی را بیابید که $b \cdot CN = a \cdot CM$، باشد. رأس اصلی، رأس ثابت C از مثلث ABC است.

۲. مکان هندسی نقطه‌هایی را بیابید که برای آنها $a \cdot CP = b \cdot AR$ است. رأس C، رأس اصلی پاره‌خطهای روی ضلع a و رأس A، رأس اصلی پاره‌خطهای روی ضلع b است.

۲۸۶. مثلث ABC داده شده است. ثابت کنید:

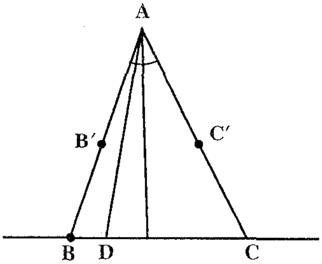
۱. مکان هندسی وسط همهٔ پاره‌خطهای موازی قاعدهٔ BC، محصور بین دو ضلع دیگر، میانهٔ AM از این مثلث است.

۲. مکان هندسی وسط همهٔ پاره‌خطهای پادموازی با BC و محصور بین دو ضلع، شبه میانهٔ این مثلث می‌باشد.

۲.۳. مثلثهای ویژه

۱.۲.۳. مثلث متساوی‌الاضلاع

۱.۱.۲.۳. خط، نقطه



۲۸۷. رأس A از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC ثابت است و خط BC از نقطهٔ ثابت D می‌گذرد.

۱. مکان هندسی هریک از رأسهای B و C را تعیین کنید.

۲. مکان هندسی وسطهای ضلعهای مثلث را بیابید.

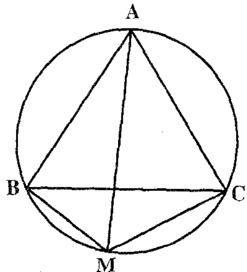
۲.۱.۲.۳. مثلث ثابت، ...

۱.۲.۱.۲.۳. مثلث، رابطهٔ بین زاویه‌ها

۲۸۸. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M، واقع در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و سازگار با شرط:

$$M\hat{A}B + M\hat{B}C + M\hat{C}A = ۹۰^\circ$$

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، ۱۹۷۸



۳.۲.۱.۲.۲. مثلث، رابطهٔ متری

۲۸۹. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض است. مکان هندسی نقطهٔ M را طوری تعیین کنید که:

$$MA = MB + MC$$

۲۹۰. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مفروض است. نقطه‌های D و E، بترتیب بر امتداد ضلعهای AB و AC‌ی مثلث، از طرف نقطه‌های B و C، طوری اختیار می‌شوند که:

$$BD \cdot CE = BC^2$$

مکان هندسی نقطهٔ برخورد خطهای DC و BE را پیدا کنید.

۲۹۱. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ این مثلث را تعیین کنید که مجموع فاصله‌اش از سه ضلع مثلث برابر l باشد.

۲۹۲. مثلث متساوی‌الاضلاع با ضلع به طول s مفروض است. مکان هندسی همهٔ نقطه‌های P از صفحهٔ مثلث را درنظر می‌گیریم که مجموع مربعهای فاصله‌های P تا رأسهای مثلث مقدار ثابت a باشد، این مکان هندسی:

الف. با شرط $a > s^2$ یک دایره است.

ب. اگر $a = 2s^2$ فقط شامل سه نقطه است و اگر $a > 2s^2$ یک دایره است.

ج. فقط وقتی که $s^2 < a < 2s^2$ یک دایرهٔ با شعاع مثبت است.

د. به ازای همهٔ مقدارهای a فقط شامل مقدار محدودی نقطه است.

هـ. هیچ‌یک از اینها نیست.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۶

۳.۲.۱.۲.۳. مثلث، دایرهٔ محیطی

۲۹۳. مثلث متساوی‌الاضلاع و دایرهٔ محیطی آن داده شده است. مکان هندسی نقطه‌های برخورد ارتفاعهای کلیهٔ مثلثهای محاطی ممکن در دایره را پیدا کنید، به شرطی که، دو ضلع از این مثلثها به موازات دو ضلع از مثلث مفروض باشند.

۲۹۴. دو مثلث متساوی‌الاضلاع داده شده است: ABC و $A_1B_1C_1$. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را طوری پیدا کنید که مساحتهای دو مثلث که با پاره‌خطهای MA، MB، MC و MA_1، MB_1، MC_1 تشکیل شده‌اند، برابر باشد.

۳.۱.۲.۳. مسأله‌های ترکیبی

۲۹۵. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، در دایره به مرکز O محاط است. امتداد AO دایرهٔ محیطی مثلث را در I قطع می‌کند. نقطهٔ اختیاری K روی ضلع BC را به نقطهٔ I وصل کرده، و عمودی در این نقطه بر IK اخراج می‌کنیم، تا ضلعهای AB و AC یا ادامهٔ آنها را بترتیب در M و N قطع کند.
۱. ثابت کنید K وسط MN است.
۲. ثابت کنید که $BM = CN$ است.
۳. وقتی K روی BC تغییر مکان دهد، مکان هندسی O' مرکز دایرهٔ محیطی مثلث IMN را تعیین کنید.

۲۹۶. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC محاط در دایرهٔ O مفروض است. از نقطهٔ M واقع بر کمان حاده $\overset{\frown}{AC}$ دو وتر MN و MP را بترتیب موازی با ضلعهای AB و AC رسم می‌کنیم. اگر M بر کمان $\overset{\frown}{AC}$ حرکت کند:
۱. ثابت کنید اندازهٔ زاویهٔ PMN برابر با یکی از دو مقدار ثابت، که تعیین می‌کنید، خواهد بود و وتر PN همواره بر یک دایرهٔ ثابت مماس می‌باشد.
۲. ثابت کنید نیمساز زاویهٔ MNP همواره از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرد.
۳. نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که مثلث MNP قائم‌الزاویه باشد.
۴. نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که زاویهٔ $M\hat{P}N$ دو برابر زاویهٔ $M\hat{N}P$ باشد.
۵. اگر طول ضلع مثلث ABC برابر a باشد، شعاع دایرهٔ محیطی آن و فاصلهٔ وتر NP را از مرکز دایره، برحسب a تعیین کنید.

۲.۲.۳. مثلث متساوی‌الساقین

۱.۲.۲.۳. یک ضلع

۲۹۷. مطلوب است مکان هندسی مرکز ثقل مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ که در آن ساق AB ثابت و رأس C متغیر است.

۲.۲.۲.۳. یک خط، یک رأس، اندازهٔ زاویه

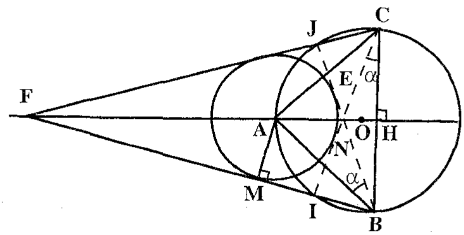
۲۹۸. یک رأس مثلث متساوی‌الساقین ABC که در آن $AC = AB$ و $B\hat{A}C = 40°$ است ثابت، و یک رأس دیگرش روی خط ثابت مفروض Δ حرکت می‌کند. مکان هندسی رأس دیگر را تعیین کنید.

۲۹۹. زاویهٔ A از مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ برابر $50°$ است. رأس A از این مثلث ثابت است و قاعدهٔ BC همواره از نقطهٔ ثابت D می‌گذرد. مکان هندسی دو رأس B و C را تعیین کنید.

۳.۲.۲.۳. مثلث ثابت، ...

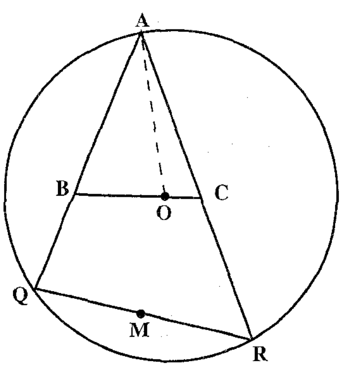
۱.۳.۲.۲.۳. تنها یک مثلث ثابت

۳۰۰. به مرکزهای رأس A از مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ دایرهٔ دلخواهی رسم می‌کنیم و از رأسهای B و C مماسهایی بر این دایره رسم می‌نماییم. مکان هندسی نقطه‌های برخورد مماسها را، وقتی شعاع دایره تغییر می‌کند، تعیین کنید.



۳۰۱. مکان هندسی محل برخورد قطرهای ذوزنقه‌های حاصل از برخورد خطهای موازی با قاعدهٔ یک مثلث متساوی‌الساقین را بیابید.

۳۰۲. مرکز دایره‌ای متغیر روی قاعدهٔ BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC است. این دایره از A گذشته و ضلعهای AB و AC را در Q و R قطع می‌کند. مکان هندسی وسط قطعه‌خط QR را بیابید.



۳.۲.۲.۳.۲. مثلث، رابطهٔ متری

۳۰۳. مکان هندسی نقطه‌هایی که فاصلهٔ آنها از ضلع BC در مثلثی، واسطهٔ هندسی بین فاصله‌های آن از دو ضلع AB و AC باشد، معمولاً منحنی درجهٔ چهارم است. در حالتی که $AB = AC$ ؛ یعنی مثلث متساوی‌الساقین باشد، این منحنی درجهٔ چهارم تجزیه می‌شود، و مکان مرکب است از یک دایره و یک هذلولی، این منحنیها را تعیین کنید.

المپیادهای ریاضی روسیه، ۱۹۶۳

۳.۲.۲.۳.۳. مثلث، دایرهٔ محیطی

۳۰۴. مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ داده شده است. M نقطه‌ای واقع بر دایرهٔ محیطی مثلث و P نقطهٔ برخورد AM با ضلع BC یا امتداد آن است. مکان هندسی مرکزهای دایره‌های محیطی دو مثلث BPM و CPM را وقتی M محیط دایرهٔ محیطی مثلث را بپیماید، تعیین کنید.

۳.۲.۲.۳.۴. مثلث، مقطعهای مخروطی

۳۰۵. مثلث متساوی‌الساقین OAB به رأس O داده شده است. مطلوب است مکان هندسی کانونهای مقطعهای مخروطی که در A بر OA و در B بر OB مماس باشند.

۳.۲.۲.۳.۵. مسأله‌های ترکیبی

۳۰۶. ثابت کنید که در هر مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$، اگر D نقطه‌ای از قاعدهٔ BC باشد، رابطهٔ زیر برقرار است:

$$\overline{AB}^2 = \overline{AD}^2 + \overline{BD} \cdot \overline{DC}$$

و اگر $\overline{BC}^2 + 2\overline{AD}^2 = 4\overline{AB}^2$ باشد، زاویهٔ AD و BC برابر 45° می‌باشد. به‌طور کلی اگر رابطهٔ $\overline{BC}^2 + k\overline{AD}^2 = 4\overline{AB}^2$ باشد (k عدد مثبت یا منفی)، امکان صحت آن را بحث کنید و درصورت امکان، زاویهٔ AD با قاعدهٔ BC را مشخص سازید. اگر در مثلث متساوی‌الساقین ABC، رأسهای A و B (طرفین یک ساق) ثابت بمانند، مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ D از قاعدهٔ BC، به قسمی که:

۱. $\overline{BD} \cdot \overline{BC}$ ثابت بماند.

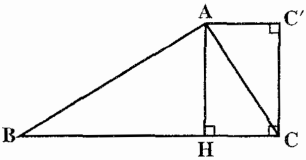
۲. همان مکان به فرض این‌که $\overline{BD} \cdot \overline{DC}$ ثابت بماند.

۳.۲.۳. مثلث قائم‌الزاویه

۱.۳.۲.۳. نقطه، خط

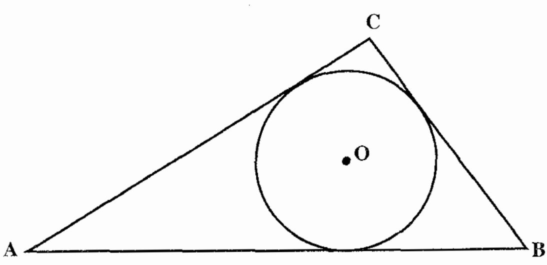
۳۰۷. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ که رأس A در آن ثابت می‌باشد، مفروض است. رأس B خط مفروض D را طی می‌کند و وتر BC همواره بر خط D عمود می‌ماند. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M وسط BC و همچنین مکان هندسی نقطهٔ C.

۳۰۸. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. نقطه‌های B و H در صفحه ثابت باقی می‌مانند. مطلوب است مکان چهارمین رأس مستطیلی که بر روی مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC بنا می‌شود. مشخصات این مکان را معلوم کنید.

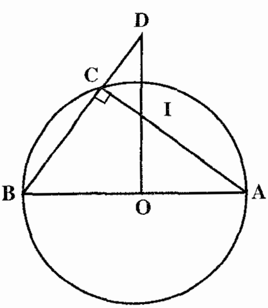


۲.۳.۲.۳. یک ضلع (وتر)

۳۰۹. اگر AB = ۲a وتر ثابت مثلثهای قائم‌الزاویه فرض شود، و رأس C تغییر کند، مکان هندسی مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی مثلث را پیدا کنید و ثابت کنید که این مکان، یکی از دو کمان دایره‌ای است به شعاع $a\sqrt{2}$ و گذرنده بر دو نقطهٔ A و B.



۳۱۰. وتر AB از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{C}=90^\circ)$ ثابت است. امّا رأس C از آن، روی دایرهٔ محیطی این مثلث تغییر مکان می‌دهد. یکی از دو ضلع زاویهٔ قائمه، مثلاً BC را به اندازهٔ خود از طرف C امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ D به‌دست آید (CD = CB). از D به O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث وصل می‌کنیم و نقطهٔ برخورد DO با AC را I می‌نامیم. مکان هندسی نقطهٔ I را بیابید.



۳.۳.۲.۳. مثلث ثابت، ...

۳ . ۲ . ۳ . ۳ . ۱. مثلث، رابطهٔ متری

۳۱۱. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{C}=90^\circ)$ داده شده است. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ P، به قسمی که $2PC^2 = PA^2 + PB^2$ باشد.

۳ . ۲ . ۳ . ۴. مسأله‌های ترکیبی

۳۱۲. طول ضلعهای مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را با a، b و c نمایش می‌دهیم:

۱. معین کنید G باری سنتر نقطه‌های A، B و C را با ضریبهای a^2، b^2 و c^2.

۲. مطلوب است مکان M، به‌طوری‌که داشته باشیم:

$$a^2MA^2 + b^2MB^2 + c^2MC^2 = 2b^2c^2$$

۳۱۳. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$، نقطهٔ H را روی BC اختیار کرده و از این نقطه عمودی بر BC اخراج می‌کنیم تا ضلعهای AB و AC یا امتداد آنها را بترتیب در I و J قطع کند.

۱. ثابت کنید $HB\cdot HC = HI\cdot HJ$

۲. فرض می‌کنیم نقطهٔ H روی BC حرکت کند. با استفاده از رابطهٔ بالا، مکان هندسی نقطه‌ای مانند M واقع بر خط HI را تعیین کنید، به قسمی که همواره رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$HM^2 = HI\cdot HJ$$

۳ . ۲ . ۳ . ۵. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین

۳۱۴. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC $(\hat{A}=90^\circ$ و $AB=AC=2a)$ داده شده است. دو نقطهٔ متغیر M و N روی ضلعهای AB و AC چنان اختیار می‌کنیم که $AN+AM=2a$ باشد. ثابت کنید:

۱. زاویهٔ $M\hat{D}N=90^\circ$ و $MD=ND$.

۲. مکان نقطهٔ O وسط MN را، وقتی که نقطه‌های M و N تغییر کنند، به‌دست آورید.

۳ . ۲ . ۳ . ۶. مثلث شبه‌قائم‌الزاویه

۳۱۵. مکان رأس M یک مثلث MAA' که ضلع AA' ثابت و تفاضل زاویه‌های A و A' برابر 90° (مثلث Pseudo - rectangle) باشد، چیست؟

بخش ۴

• چندضلعی

۴.۱.۴.۳.۳. مسأله‌های ترکیبی

۴.۱.۴.۴. لوزی

۴.۱.۴.۵. ذوزنقه

۴.۱.۴.۵.۱. ذوزنقه در حالت کلی

۴.۱.۴.۵.۱.۱. قاعده، ساق، قطر

۴.۱.۴.۵.۱.۲. مسأله‌های ترکیبی

۴.۱.۴.۵.۲. ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه

۴.۲. n ضلعی $(n \geq ۵)$

۴.۲.۱. شش ضلعی

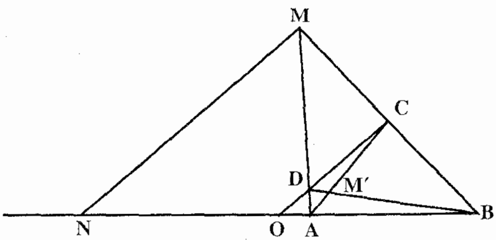
۴.۲.۲. n ضلعی منتظم

بخش ۴. چندضلعی

۱.۴. چهارضلعی

۱.۱.۴. چهارضلعی در حالت کلی

۳۱۶. در چهارضلعی ABCD رأسهای A و B دو نقطهٔ ثابت از صفحه می‌باشند. ضلعهای AD و BC با هم برابرند و طول ثابتی دارند. زاویهٔ بین آنها همواره برابر مقدار ثابتی مانند α باقی می‌ماند. مکان هندسی نقطهٔ M وسط ضلع CD را تعیین کنید. آیا ممکن است این چهارضلعی ذوزنقهٔ محاطی گردد؟ در صورتی که این امر میسر باشد، شرط امکان چیست؟ به‌طور کلی اگر در چهارضلعی ABCD رأسهای A و B ثابت بمانند و طول ضلعهای AB و AC و زاویهٔ آنها با هم تغییر نکنند، مکان هندسی نقطهٔ M وسط CD را تعیین کنید.



۳۱۷. دو ضلع مقابل AB و CD از چهارضلعی ABCD داده شده است. این دو ضلع در نقطهٔ O یکدیگر را قطع می‌کنند. در صورتی که ضلع AB ثابت بماند و ضلع CD حول نقطهٔ O دوران کند، مکان هندسی نقطهٔ M، محل برخورد دو ضلع AC و BD را تعیین کنید. همچنین مکان هندسی نقطهٔ M′، محل برخورد قطرهای این چهارضلعی را بیابید.

۳۱۸. در یک چهارضلعی، ضلع AB ثابت است و قطر BD و دو ضلع دیگر از آن نیز اندازهٔ ثابتی دارند. مکان هندسی نقطهٔ M وسط قطر AC و مکان هندسی نقطهٔ O، وسط پاره‌خط MN را بیابید.

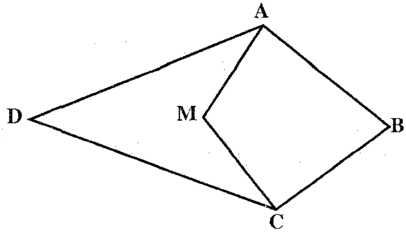
۳۱۹. چهارضلعی ABCD داده شده است. مکان هندسی نقطهٔ M را که دارای خاصیت زیر است :

$$S_{MAB} + S_{MCD} = S_{MAC} + S_{MBD}$$

تعیین کنید.

۳۲۰. مکان هندسی مرکز متوازی‌الاضلاع محاط در یک چهارضلعی داده شده را تعیین کنید.

۲.۱.۴. چهارضلعی کوژ



۳۲۱. چهارضلعی محدب ABCD داده شده است. مکان هندسی نقطه‌های M از صفحه این چهارضلعی را بیابید که دو چهارضلعی AMCD و ABCM دارای مساحتهای یکسان باشند.

الف) یک دایره　　　　　ب) کمانی از دایره

ج) خطی عمود بر BD است.　　　　د) خطی موازی AC است.

هـ) خطی است که با یکی از ضلعها موازی است.

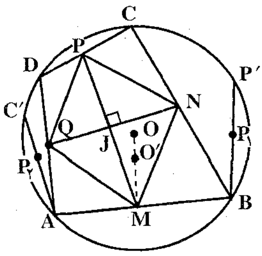
سیزدهمین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۴

۳۲۲. مکان هندسی مرکزهای مستطیلهایی را پیدا کنید که بر یک چهارضلعی کوژ مفروض محیطند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۹

۳۲۳. مکان هندسی مرکز بیضیهای محاط در یک چهارضلعی کوژ را تعیین کنید (از نیوتن).

۳.۱.۴. چهارضلعی محاطی



۳۲۴. چهارضلعی ABCD در دایره‌ای به مرکز O محاط است، به طوری که ضلع AB ثابت و طول ضلع CD نیز ثابت می‌باشد. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطهٔ برخورد خطهایی که وسطهای ضلعهای روبه‌رو را به هم وصل می‌کند.

۳۲۵. سه رأس از چهارضلعی محاطی متغیری ثابتند. مکان هندسی :

الف. مرکز ثقل چهارضلعی (محل برخورد خطهایی که وسطهای ضلعهای مقابل را به هم وصل می‌کند).

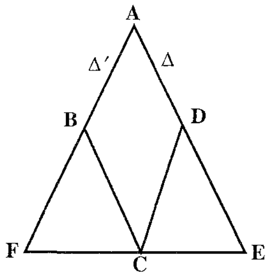
ب. پاد مرکز چهارضلعی (قرینهٔ مرکز ثقل نسبت به مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی) را به‌دست آورید.

۴.۱.۴. چهارضلعیهای ویژه

۱.۴.۱.۴. متوازی‌الاضلاع

۳۲۶. قضیهٔ مانهایم (Mannheim). یک متوازی‌الاضلاع مفصلدار ABCD را طوری در نظر می‌گیریم که رأس و نیمساز زاویهٔ A ثابت باشد. مکان رأس C را بیابید.

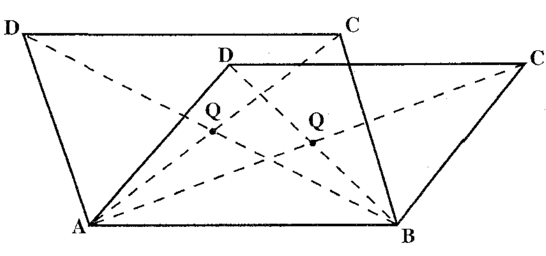
۳۲۷. مطلوب است مکان هندسی رأس چهارم متوازی‌الاضلاعی که محیطش مقدار ثابتی باشد و دو ضلع مجاور آن بر دو خط مفروض Δ و Δ' قرار داشته باشند.



۳۲۸. در متوازی‌الاضلاع ABCD، $AD = a$ و $AB = b$ است. در این متوازی‌الاضلاع دو رأس A و D ثابت می‌باشند. مکان هندسی رأسهای B و C را تعیین کنید.

۳۲۹. در متوازی‌الاضلاع ABCD یک ضلع و اندازهٔ ضلع دیگر ثابت است. مکان هندسی وسطهای ضلعهای دیگر را تعیین کنید.

۳۳۰. «لولایی» به صورت متوازی‌الاضلاع ABCD مفروض است. طولهای ضلعها و رأسهای A و B از آن ثابت هستند ولی رأسهای C و D متحرک (شکل). ثابت کنید که وقتی C و D حرکت کنند، Q نقطهٔ برخورد قطرها بر یک دایره حرکت می‌کند.



۳۳۱. مکان هندسی مرکز متوازی‌الاضلاعهایی را بیابید که یک قاعدهٔ ثابت (از نظر وضع و اندازه) دارند و طول ارتفاعهایشان نیز ثابت است.

۲.۴.۱.۴. مستطیل

۱.۲.۴.۱.۴. نقطه‌های ثابت

۳۳۲. مکان هندسی نقطه‌های برخورد قطرهای مستطیلهایی را پیدا کنید که ضلعهای آنها (یا امتدادهای آنها) از چهار نقطهٔ مفروض در صفحه می‌گذرند.

۲.۲.۴.۱.۴. نقطه، خط

۳۳۳. یک رأس در مستطیلی بر نقطه‌ای مفروض واقع است، و دو رأس دیگر آن، که به یک ضلع متعلق نیستند، بر دو خط راست عمود بر هم مفروض، قرار دارند. مکان هندسی رأس چهارم چنین مستطیلی را بیابید.

۳۳۴. دو رأس متوالی A و B از مستطیل ABCD روی یک خط ثابت مانند δ و یک رأس دیگر آن، به‌طور مثال C روی یک خط ثابت دیگر مانند Δ حرکت می‌کنند، به‌طوری که مستطیل مزبور همواره با مستطیل معلومی مشابه می‌باشد. مطلوب است تعیین مکان هندسی رأس D.

۳.۲.۴.۱.۴. مستطیل، رابطهٔ متری

۳۳۵. O را مرکز مستطیل و A_1A_2 و B_1B_2 را قطرهای آن می‌گیریم. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ P و رسم آن، به شرطی که، نقطهٔ P، در هر چهار نابرابری زیر صدق کند:

$$A_1P > OP \quad ; \quad A_2P > OP \quad ; \quad B_1P > OP \quad ; \quad B_2P > OP$$

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۰۴

۴.۲.۴.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی

۳۳۶. از نقطهٔ M به رأسهای مستطیل ABCD وصل می‌کنیم:

۱. ثابت کنید $MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$.

۲. مکان هندسی نقطه‌هایی را تعیین کنید که مجموع مربعهای فاصله‌های آن از چهار رأس مستطیل مفروض برابر k^2 باشد.

۳.۴.۱.۴. مربع

۱.۳.۴.۱.۴. یک مربع

۱.۱.۳.۴.۱.۴. تنها یک مربع

۳۳۷. مکان هندسی نقطه‌ای درون یک مربع به ضلع ۴ سانتیمتر را تعیین کنید که فاصله‌اش از یک ضلع مربع، دست کم یک سانتیمتر باشد.

۳۳۸. سکه‌ای به شعاع ۲ سانتیمتر را بر روی صفحهٔ مربع شکلی به ضلع ۱۰ سانتیمتر پرتاب می‌کنیم. مکان هندسی نقطه‌ای درون مربع را تعیین کنید که اگر مرکز سکه در آن جا قرار گیرد، سکه به طور کامل داخل مربع واقع می‌شود.

۲.۱.۳.۴.۱.۴. یک مربع، یک نقطه

۳۳۹. مربعی مانند Q داده شده است. رأس P از مثلث متساوی‌الاضلاع PKM ثابت، و رأس k روی محیط مربعی حرکت می‌کند. مکان هندسی M، رأس سوم مثلث را پیدا کنید.

۳.۱.۳.۴.۱.۴. یک مربع، رابطهٔ متری

۳۴۰. مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که مجموع توان سوم فاصله‌هایش از چهار ضلع یک مربع برابر مقدار ثابت معلومی باشد.

۲.۳.۴.۱.۴. دو مربع

۳۴۱. دو مربع که ضلعهایشان به طور متناظر موازی‌اند، داده شده است. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را تعیین کنید، به طوری که برای هر نقطهٔ P از مربع اول، نقطه‌ای مانند Q از مربع دوم وجود داشته باشد، به قسمی که مثلث MPQ متساوی‌الاضلاع باشد، فرض کنید طول ضلع مربع اول a و طول ضلع مربع دوم b باشد. به ازای چه رابطه‌ای بین a و b، مکان هندسی مطلوب، تهی نیست.

۳.۳.۴.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی

۳۴۲. مربع ABCD به ضلع ۴cm داده شده است. روی ضلع AD نقطهٔ E را چنان اختیار می‌کنیم که AE = ۳cm باشد و عمود AH را بر BE فرود می‌آوریم. این عمود CD را در نقطهٔ F قطع می‌کند.

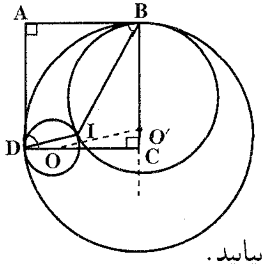
۱. ثابت کنید که DF = AE است و اندازهٔ پاره‌خطهای AH، CH و BH را محاسبه کنید.

۲. فرض می‌کنیم که نقطهٔ E از نقطهٔ A تا نقطهٔ B جابه‌جا می‌شود. مکان هندسی نقطهٔ H کدام است؟

۳. خط BE امتداد CD را در نقطهٔ M قطع می‌کند. ثابت کنید که چهارضلعی AHDM محاطی است. مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی این چهارضلعی را وقتی نقطهٔ E از A تا D می‌رود، تعیین کنید. اندازهٔ شعاع این دایره را وقتی AE = ۳ سانتیمتر باشد، به دست آورید.

۴. همواره فرض می‌کنیم AE = ۳cm باشد. اندازهٔ مساحت چهارضلعی محدب BCFH را بیابید.

۳۴۳. مربع ABCD به ضلع ۲a داده شده است. یک دایره مرکزش، نقطهٔ O روی DC و مماس در نقطهٔ D بر ضلع AD است. دایرهٔ دیگری، مرکزش، نقطهٔ O′ روی ضلع BC و مماس برونی به دایرهٔ اول در نقطه I، و مماس به ضلع AB در نقطهٔ B است.



۱. اندازهٔ زاویهٔ BID را بیابید.

۲. مکان هندسی نقطهٔ I را هنگامی که O روی ضلع CD جابه‌جا می‌شود، مشخص سازید. پاره‌خط OO′ نسبت به این مکان چه وضعی دارد؟ چه نتیجه‌ای در مورد مماس مشترک دو دایره در نقطهٔ I می‌توان گرفت؟

۳۴۴. مربع ABCD به ضلع a و به مرکز I داده شده است. نقطهٔ M را بر ضلع BC اختیار کرده و در امتداد ضلع CD، از طرف D، نقطهٔ N را چنان اختیار می‌کنیم که DN = BM باشد و متوازی‌الاضلاع MANP را طوری رسم می‌کنیم که MN قطری از آن باشد.

۱. نوع متوازی‌الاضلاع MANP را تعیین کنید.

۲. اگر M ضلع BC را بپیماید، مکان هندسی نقطهٔ O، مرکز MANP چیست و همچنین مکان هندسی نقطهٔ P.

۴.۴.۱.۴. لوزی

۳۴۵. همهٔ لوزیهایی را در نظر می‌گیریم که یک ضلع آنها پاره‌خط ثابت و معلوم ab باشد. مکان هندسی مرکزهای این لوزیها چیست؟

الف) عمودمنصف پاره خط ab　　ب) دایره به قطر ab

ج) مربع به قطر ab　　د) یک خط موازی با ab

هـ) دو خط موازی با ab

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

۳۴۶. در لوزی MNPQ قطرهای MP و MQ پیوسته از دو نقطهٔ ثابت A و B گذشته و امتداد NP و MQ و طولشان ثابت و بر AB عمود است.

۱. مطلوب است مکان هندسی رأسهای لوزی.

۲. مطلوب است مکان هندسی وسطهای ضلعهای لوزی.

۴.۱.۴.۵. ذوزنقه

۴.۱.۴.۵.۱. ذوزنقه در حالت کلی

۴.۱.۴.۵.۱.۱. قاعده، ساق، قطر

۳۴۷. دو قاعدهٔ ذوزنقهٔ ABCD به طول a و b می‌باشند و یکی از این قاعده‌ها یعنی AD از نظر وضع نیز ثابت است. طول یکی از دو ضلع دیگر $AB = c$ ثابت می‌باشد. مکان هندسی محل برخورد ساقها، همچنین مکان هندسی نقطهٔ برخورد دو قطر ذوزنقه را بیابید.

۳۴۸. در ذوزنقهٔ ABCD، قاعدهٔ AD از نظر طول و وضع ثابت است و قاعدهٔ BC طول ثابتی دارد. مکان هندسی محل برخورد ساقها و مکان هندسی نقطهٔ برخورد قطرها را در صورتی که رأس B روی خط ثابتی حرکت کند، تعیین کنید.

۳۴۹. قاعدهٔ AD و طول قاعدهٔ BC از ذوزنقهٔ ABCD داده شده است. مکان هندسی نقطهٔ برخورد ساقها، همچنین مکان هندسی نقطهٔ برخورد قطرهای این ذوزنقه را بیابید، در صورتی که نسبت اندازهٔ دو ساق برابر مقدار معلوم $\frac{m}{n}$ باشد.

۳۵۰. قاعدهٔ بزرگ یک ذوزنقه ثابت است و اندازهٔ قاعدهٔ کوچک نیز معلوم می‌باشد. در صورتی که مجموع اندازه‌های دو قطر این ذوزنقه برابر l باشد، مکان هندسی محل برخورد ساقهای آن را بیابید.

۳۵۱. ساق AB از ذوزنقهٔ ABCD ثابت است. اندازهٔ دو قاعدهٔ آن $AD = a$ و $BC = b$ ثابت می‌باشند. مکان هندسی نقطهٔ برخورد قطرها، همچنین مکان هندسی وسط ساق CD را تعیین کنید.

۴.۱.۴.۵.۱.۲. مسأله‌های ترکیبی

۳۵۲. ذوزنقه‌ای را در نظر می‌گیریم، به طوری که یک قاعدهٔ آن ثابت بوده و طول قاعدهٔ دیگر و نیز مجموع دو ساق آن ثابت باشد. مطلوب است:

۱. مکان هندسی دو رأس متحرک ذوزنقه.

۲. مکان هندسی نقطهٔ برخورد دو ساق.

۳. مکان هندسی نقطهٔ برخورد دو قطر.

۳۵۳. ذوزنقه‌ای را که یک قاعدهٔ آن ثابت بوده و طول قاعدهٔ دیگر و نیز تفاضل ساقها ثابت باشد در نظر می‌گیریم؛ مکان هندسی دو رأس متحرک و نقطهٔ برخورد ضلعهای غیرموازی و نقطهٔ تقاطع قطرها را به‌دست آورید.

۳۵۴. ذوزنقهٔ ABCD به قاعده‌های AB و CD در دایرهٔ O محاط است. M نقطهٔ اختیاری از دایرهٔ O و تصویر A را بر MD نقطهٔ H، تصویر C را بر MB نقطهٔ k، و محل برخورد AH و CK را P می‌نامیم. مطلوب است :

۱. مکان P و پوش MP.

۲. نشان دهید HK موازی با دو قاعده و مساوی با نصف مجموع آنهاست.

۲.۵.۴.۱.۴. ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه

۳۵۵. در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD (زاویه‌های A و B قائمه‌اند) ضلع AB واسطهٔ هندسی بین ضلعهای BC و AD می‌باشد و در وضع خود ثابت می‌ماند.

۱. مکان هندسی M، نقطهٔ برخورد قطرهای AC و BD را تعیین کنید.

۲. قرینهٔ M نسبت به عمودمنصف AB، نقطهٔ M' می‌باشد. ثابت کنید نقطهٔ M' بر روی دایره به قطر CD می‌باشد.

۳. اوضاع مختلف ضلع CD بر یک بیضی به مرکز وسط AB و قطر بزرگتر ۲a و قطر کوچکتر a مماس است (a طول AB می‌باشد).

۴. دایره‌هایی به قطر CD بر دو دایرهٔ ثابت مماس می‌باشند (دایره‌های سمت راست AB بر یک دایره و دایره‌های سمت چپ بر دایرهٔ دیگر مماس می‌باشند).

۵. ثابت کنید مثلث خاصی که در آن رابطهٔ (۱) برقرار باشد، وقتی وجود خواهد داشت که AS و AS' بترتیب نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ A باشند.

در حالتی که چنین مثلثی وجود داشته باشد :

الف. چه رابطه‌ای بین ارتفاعهای مثلث و چه رابطه‌ای بین سینوس زاویه‌های مثلث وجود دارد؟ صحت رابطهٔ زیر را تحقیق کنید :

$$\cot g^{۲}\frac{\hat{B}}{۲}+\cot g^{۲}\frac{\hat{C}}{۲}=۲\cot g^{۲}\frac{\hat{A}}{۲}$$

و از روی آن رابطه‌ای بین مجذورهای سینوسهای نصف زاویه‌های مثلث به دست آورید.

ب. چه رابطه‌ای بین طولهای AI، BI و CI وجود دارد؟

ج. رابطه‌ای بین طولهای شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی و خارجی به‌دست آورید.

د. رابطهٔ بین طولهای AI و $A'I$ را معلوم کنید.

۲.۴. n ضلعی $(n \geq 5)$

۱.۲.۴. شش ضلعی

۳۵۶. شش ضلعی منتظم متغیری یک رأس ثابت دارد و مرکزش روی خط راستی حرکت می‌کند. مکان هندسی رأسهای دیگر آن را تعیین کنید.

۲.۲.۴. n ضلعی منتظم

۳۵۷. مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ یک n ضلعی منتظم را که مجموع فاصله‌هایش از ضلعهای n ضلعی، مساوی n برابر سهم n ضلعی باشد، تعیین کنید.

۳۵۸. مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که مجموع مربعهای فاصله‌اش از رأسهای یک n ضلعی منتظم برابر مقدار ثابت k^2 باشد.

۳۵۹. مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که مجموع مربعهای فاصله‌اش از ضلعهای یک n ضلعی منتظم برابر مقدار ثابت k^2 باشد.

۳۶۰. مکان هندسی نقطه‌هایی را بیابید که مجموع توانهای pام فاصله‌های آنها از n ضلع یک چند ضلعی منتظم برابر مقدار ثابتی باشد؛ به فرض $2 < p \leq n-1$.

بخش ۵

• دایره

۱.۵. ربع دایرهٔ ثابت

۲.۵. نیمدایرهٔ ثابت،...

۱.۲.۵. یک نیمدایره

۱.۱.۲.۵. یک نیمدایره، یک نقطه

۲.۱.۲.۵. یک نیمدایره، یک خط مماس

۳.۱.۲.۵. یک نیمدایره، دو خط مماس

۴.۱.۲.۵. مسأله‌های ترکیبی

۲.۲.۵. دو نیمدایره

۳.۵. یک دایرهٔ ثابت،...

۱.۳.۵. تنها یک دایرهٔ ثابت

۲.۳.۵. یک دایرهٔ ثابت، نقطه‌های ثابت

۱.۲.۳.۵. یک دایره، یک نقطه

۱.۱.۲.۳.۵. یک دایره، یک نقطه در صفحهٔ دایره

۲.۱.۲.۳.۵. یک دایره، یک نقطه درون دایره

۳.۱.۲.۳.۵. یک دایره، یک نقطه روی دایره

۴.۱.۲.۳.۵. یک دایره، یک نقطه برون دایره

۵.۱.۲.۳.۵. مسأله‌های ترکیبی مربوط به این قسمت

۴.۵. دو دایرهٔ ثابت،...

۱.۴.۵. دو دایره در حالت کلی

۱.۱.۴.۵. تنها دو دایرهٔ ثابت

۲.۱.۴.۵. دو دایره، محور اصلی

۳.۱.۴.۵. دو دایره، مماس مشترک

۴.۱.۴.۵. دو دایره، یک خط یا یک راستای ثابت

۵.۱.۴.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶.۱.۴.۵. مسأله‌های ترکیبی

۲.۴.۵. دو دایرهٔ متخارج

۳.۴.۵. دو دایرهٔ مماس برون

۱.۳.۴.۵. تنها دو دایرهٔ مماس برون

۲.۳.۴.۵. دو دایره، محور اصلی

۳.۳.۴.۵. مسأله‌های ترکیبی

۴.۴.۵. دو دایرهٔ متقاطع

۱.۴.۴.۵. تنها دو دایرهٔ متقاطع

۲.۴.۴.۵. دو دایرهٔ متقاطع مساوی

۳.۴.۴.۵. دو دایرهٔ عمود بر هم

۴.۴.۴.۵. مسأله‌های ترکیبی

۵.۴.۵. دو دایرهٔ مماس درون

۶.۴.۵. دو دایرهٔ یکی درون دیگری (متداخل)

۷.۴.۵. دو دایرهٔ هم مرکز

۵.۵. سه دایرهٔ ثابت و بیشتر

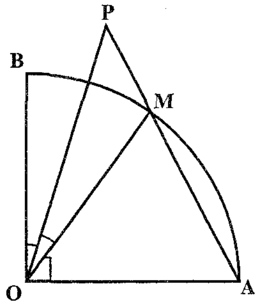
۱.۵.۵. سه دایره

۲.۵.۵. n دایره

۳.۵.۵. دسته دایره

بخش ۵. دایره

۱.۵. ربع دایرهٔ ثابت



۳۶۱. ربع دایرهٔ AOB مفروض است. M نقطه‌ای است از کمان $\overset{\frown}{AB}$. خط AM و نیمساز زاویهٔ BOM یکدیگر را در نقطهٔ P تلاقی می‌نمایند. مکان هندسی نقطهٔ P را وقتی نقطهٔ M کمان $\overset{\frown}{AB}$ را طی می‌کند، تعیین کنید.

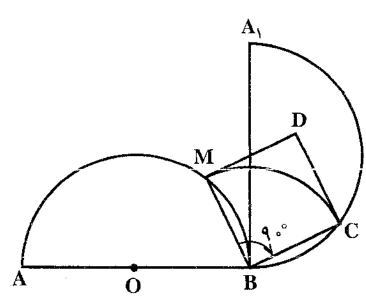
۲.۵. نیمدایرهٔ ثابت،...

۱.۲.۵. یک نیمدایره

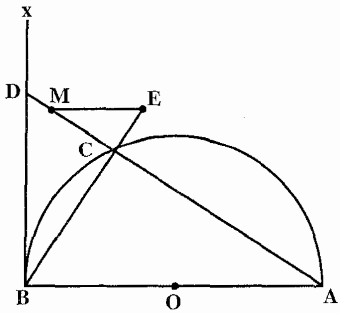
۱.۱.۲.۵. یک نیمدایره، یک نقطه

۳۶۲. نیمدایرهٔ به قطر AB و به مرکز O مفروض است. مماسی که بر این نیمدایره، در یکی از نقطه‌های آن مانند C رسم شود، امتداد قطر AB را در D قطع می‌کند و عمودی که از O، بر نیمساز زاویهٔ CDO فرود آید، مماس CD را در M قطع می‌کند. مطلوب است، مکان هندسی نقطهٔ M، هنگامی که نقطهٔ C روی نیمدایره حرکت کند.

۳۶۳. نیمدایره‌ای به قطر $AB = ۲R$ و نقطهٔ M بر آن مفروض است. در خارج مثلث $\overset{\Delta}{AMB}$ مربع MBCD را می‌سازیم. مطلوب است، مکان هندسی نقطه‌های C و D وقتی M بر محیط نیمدایره تغییر می‌نماید.



۲.۱.۲.۵. یک نیمدایره، یک خط مماس



۳۶۴. نیمدایرهٔ به قطر AB و مماس Bx بر آن مفروضند. نقطهٔ دلخواه C را روی نیمدایره در نظر می‌گیریم و نقطهٔ تلاقی AC را با Bx با D نشان می‌دهیم. روی خطی که B را به C وصل می‌کند، نقطهٔ E را چنان انتخاب می‌کنیم که BE = BD باشد و از E موازی با AB رسم می‌کنیم که AD را در M قطع کند. وقتی نقطهٔ C نیمدایره را بپیماید، مکان هندسی نقطهٔ M چیست؟

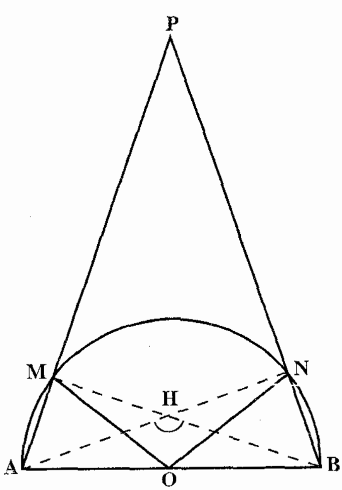
۳.۱.۲.۵. یک نیمدایره، دو خط مماس

۳۶۵. نیمدایرهٔ به قطر AB = ۲R مفروض است. از نقطهٔ متغیر P بر روی نیمدایره، مماس MN را رسم می‌کنیم تا مماسهای Ax و By بر دایره را در طرفین قطر AB، در نقطه‌های M و N قطع کند. ثابت کنید که:

۱. AM.BN مقداری ثابت است.

۲. اگر خطهای AN و BN در نقطهٔ Q یکدیگر را قطع کنند، مکان هندسی نقطهٔ Q را تعیین کنید.

۴.۱.۲.۵. مسأله‌های ترکیبی



۳۶۶. نیمدایرهٔ به قطر AB را در نظر گرفته، دو شعاع OM و ON را عمود بر هم رسم می‌کنیم.

۱. خطهای AM و BN یکدیگر را در نقطهٔ P قطع می‌کنند. مکان هندسی P را در صورتی که نقطهٔ M تغییر مکان دهد، به‌دست آورید.

۲. مکان هندسی نقطهٔ H محل تلاقی BM و AN را به‌دست آورید.

۳۶۷. نیمدایره‌ای به شعاع R و مرکز O داده شده است. زاویهٔ قائمه‌ای حول رأسش، نقطهٔ O، دوران می‌کند. ضلعهای این زاویه، نیمدایره را در نقطه‌های B و C قطع می‌کند. مماسهای در نقطه‌های B و C بر نیمدایره در نقطهٔ A یکدیگر را قطع می‌کنند. خط BC غیر از یک حالت ویژه، قطر نیمدایره را در نقطهٔ D و مماس AC را در نقطهٔ E قطع می‌نماید.

۱. مکان هندسی نقطهٔ A کدام است؟

۲. مکان هندسی نقطهٔ I وسط پاره‌خط BC چیست؟

۳. مثلثهای DOB و DAB را با هم مقایسه کنید و اندازهٔ زاویه‌های مثلث ADE را برحسب زاویهٔ $O\hat{E}C = \alpha$ به‌دست آورید (۲ حالت برای رسم شکل).

۴. فرض می‌کنیم $\alpha = ۳۰^\circ$ باشد. نقطهٔ A را تعیین کنید. در مورد مثلث ADE چه می‌توانیم بگوییم. فاصلهٔ نقطهٔ A از قطر نیمدایرهٔ (O) را به دست آورید و مساحت مثلث ADE را برحسب R محاسبه کنید.

۳۶۸. نیمدایره‌ای به قطر AB داده شده است. به مرکز نقطهٔ I واقع بر این نیمدایره، دایره‌ای رسم می‌کنیم که بر AB مماس باشد و نقطهٔ تماس را H می‌نامیم و مماسهای BF و AE را بر این دایره رسم می‌نماییم.

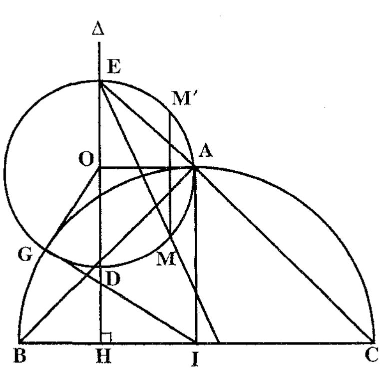
۱. ثابت کنید که AE موازی BF است.

۲. نشان دهید که EF در نقطهٔ I بر دایرهٔ (O) مماس است.

۳. اگر K نقطهٔ مقابل قطری نقطهٔ H از دایرهٔ (I) باشد، خط مماس در نقطهٔ K بر این دایره، خط BF را در نقطهٔ C و خط AE را در نقطهٔ D قطع می‌کند. مکان هندسی نقطه‌های C و D را وقتی نقطهٔ I روی کمان $\overset{\frown}{AB}$ تغییر مکان می‌دهد، تعیین کنید.

۴. نقطهٔ I را چنان تعیین کنید که $A\hat{B}F = ۶۰^\circ$ باشد، و مساحت چهارضلعی ABCD را برحسب R شعاع دایرهٔ (O) به‌دست آورید.

۳۶۹. نیمدایره‌ای به مرکز I و به قطر $BC = ۲R$ و شعاع IA عمود بر BC، داده شده است. خط Δ که بر BI در نقطهٔ H (بین B و I) عمود است، خط AB را در نقطهٔ D و امتداد CA را در نقطهٔ E قطع کرده است.



۱. مکان هندسی نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AED را وقتی نقطهٔ H بین دو نقطهٔ I و B

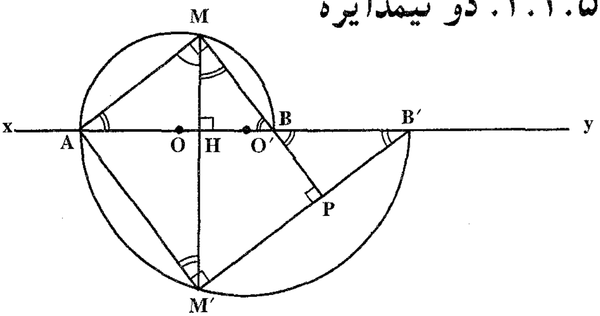
جابه‌جا می‌شود، تعیین کنید.

۲. مکان هندسی نقطهٔ M، محل برخورد نیمساز زاویهٔ AED با دایرهٔ (O) را مشخص سازید؛ همچنین مکان هندسی نقطهٔ M′ انتهای دیگر وتر MM′ از دایرهٔ (O) را که موازی وتر DE رسم می‌شود، تعیین کنید.

۳. اگر G دومین نقطهٔ برخورد دایره به مرکز (O) با نیمدایرهٔ (I) باشد، ثابت کنید، OG مماس بر نیمدایرهٔ (I) و IG مماس بر دایرهٔ (O) است. مکان هندسی نقطهٔ S، مرکز دایرهٔ محیطی چهارضلعی IAOG را وقتی H بین دو نقطهٔ I و B جابه‌جا می‌شود، تعیین کنید.

۴. در صورتی که $A\hat{I}G = ۶۰^\circ$ باشد، مساحت سطح بین دایرهٔ (O) و نیمدایرهٔ (I) را برحسب R، شعاع دایرهٔ (O)، تعیین کنید.

۲.۲.۵. دو نیمدایره



۳۷۰. بر خط xy سه نقطهٔ A، B و B′ به همین ترتیب مفروض است. نیمدایره‌های (O) و (O′) را در طرفین xy به قطرهای AB = ۲R و AB′ = ۲R′ رسم می‌کنیم. نقطهٔ دلخواه H را بر قطعه خط AB اختیار کرده در این نقطه عمودی بر xy رسم می‌کنیم که (O) و (O′) را بترتیب در M و M′ قطع می‌کند.

۱. ثابت کنید که نسبت $\frac{AM}{AM'}$ برابر مقدار ثابتی است و به وضع نقطهٔ H روی AB بستگی ندارد.

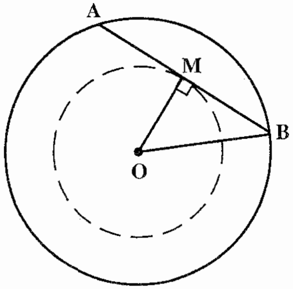
۲. اگر P نقطهٔ تلاقی خطهای BM و B′M′ باشد. وقتی که H قطعه خط AB را بپیماید، مکان P را تعیین کنید.

۳.۵. یک دایرهٔ ثابت،...

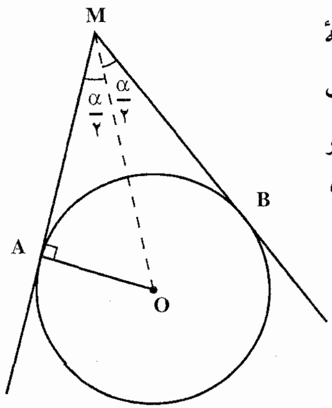
۱.۳.۵. تنها یک دایرهٔ ثابت

۳۷۱. ثابت کنید، مکان هندسی نقطه‌هایی که وسطهای شعاعهای دایره‌ای مفروض باشند، دایره‌ای است هم مرکز با آن دایره و با شعاعی نصف شعاع آن دایره.

۳۷۲. ثابت کنید، مکان هندسی وسط وترهایی به طول l از دایرهٔ $C(O,R)$، دایره‌ای است هم‌مرکز با آن دایره و به شعاع $\sqrt{R^{۲}-\frac{l^{۲}}{۴}}$.



۳۷۳. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحهٔ دایرهٔ $C(O,R)$، که از آن نقطه‌ها، این دایره تحت زاویهٔ مفروض α دیده شود (اندازهٔ زاویهٔ α بین دو مماس رسم شده از هر نقطهٔ مکان بر دایره برابر α باشد).



۳۷۴. مکان هندسی نقطه‌ای که از آن نقطه می‌توان دو مماس عمود بر هم بر دایرهٔ $C(O,R)$ رسم کرد. دایره‌ای است به مرکز دایرهٔ مفروض و به شعاع $R\sqrt{۲}$.

۳۷۵. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M از صفحه، که مماسهای رسم شده از آن نقطه‌ها بر دایرهٔ $C(O,R)$ به طول معلوم l باشند،دایره‌ای است به‌مرکز O و به شعاع $OM=\sqrt{l^{۲}+R^{۲}}$.

۳۷۶. مکان هندسی نقطه‌هایی برون دایره‌ای به قطر ۶ سانتیمتر را که پاره‌خطهای مماس رسم شده از آنها بر دایره، به طول ۴ سانتیمتر باشند، تعیین کنید.

۳۷۷. نقطهٔ M دایرهٔ به قطر AB را می‌پیماید. دایرهٔ مماس بر AB در نقطهٔ H را رسم می‌کنیم که دایرهٔ مفروض را در C و D قطع کند. مکان نقطهٔ P محل برخورد MH و CD را معین کنید.

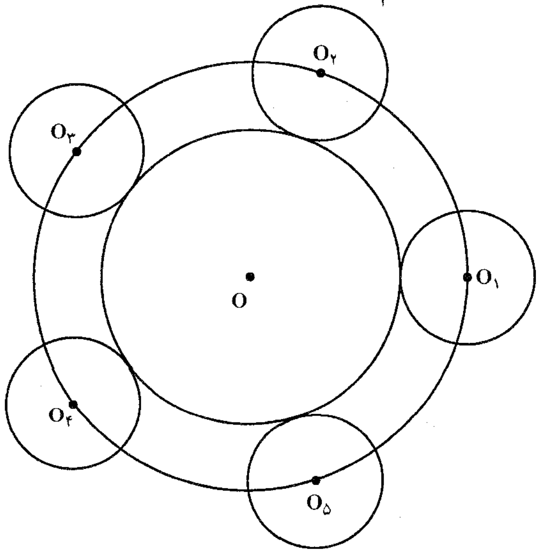
۳۷۸. **قضیهٔ لاهیر (Lahire)**. وقتی که یک دایرهٔ (γ) روی دایرهٔ (C) به شعاع دو برابر خود به‌طور داخلی و بدون لغزش می‌غلتد، هر نقطه از (γ) یک قطر از (C) و هر نقطه که نسبت به دایرهٔ (γ) وضع ثابتی داشته و غیرواقع بر روی محیط (γ) باشد، یک بیضی را می‌پیماید.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۲۶

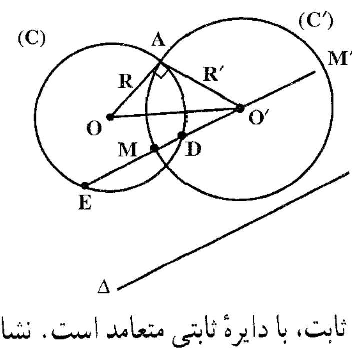
۳۷۹. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع ثابت r را که با دایرهٔ مفروض $C(O,R)$ در وترهایی به طول l مشترک هستند، تعیین کنید.

۳۸۰. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که با شعاع معلوم R' بر دایرهٔ مفروض $C(O,R)$ مماس باشند، دو دایرهٔ هم مرکز با آن دایره است.

۳۸۱. مکان هندسی مرکزهای دایره‌هایی را تعیین کنید که بر دایرهٔ مفروض به مرکز O و به شعاع R مماس بوده و شعاع آنها $\frac{R}{2}$ باشد.



۳۸۲. مکان هندسی مرکز دایره‌ای به شعاع R' را که بر دایرهٔ $C(O,R)$ عمود است، تعیین کنید.



۳۸۳. دایره‌ای متغیر با شعاع ثابت، با دایرهٔ ثابتی متعامد است. نشان دهید که دو انتهای قطری از دایرهٔ متغیر که راستای ثابتی دارد، روی دو دایرهٔ ثابت حرکت می‌کنند.

۳۸۴. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌هایی که قوتشان نسبت به دایرهٔ مفروض برابر p باشد.

۳۸۵. مکان هندسی نقطه‌های برخورد هر دو خط سیمسون دو نقطهٔ انتهای هر قطر از دایرهٔ محیطی مثلث را تعیین کنید.

۳۸۶. دایرهٔ S مفروض است. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطه‌های برخورد (الف) میانه‌ها، (ب) ارتفاعهای همهٔ مثلثهای حادالزوایا، منفرج الزاویه، و قائم‌الزاویهٔ محاط در آن.

۲.۳.۵. یک دایرهٔ ثابت، نقطه‌های ثابت

۱.۲.۳.۵. یک دایره، یک نقطه

۱.۱.۲.۳.۵. یک دایره، یک نقطه در صفحهٔ دایره

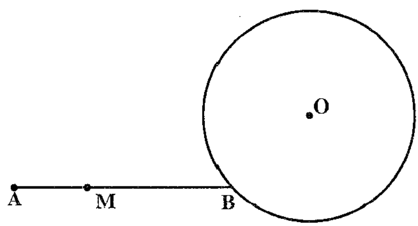
۳۸۷. مربع فاصلهٔ بین یک نقطهٔ ثابت و یک نقطهٔ متغیر برابر است با مجموع (یا تفاضل) قوتهای این دو نقطه نسبت به یک دایرهٔ ثابت. مکان هندسی نقطهٔ متغیر را بیابید.

۳۸۸. دایرهٔ به مرکز O و نقطهٔ A مفروضند. مطلوب است مکان هندسی وسط وترهایی که از نقطهٔ A در دایره رسم می‌شود.

۳۸۹. مطلوب است، تعیین مکان هندسی وسطهای وترهایی از یک دایره که از نقطهٔ معین P به زاویهٔ قائمه دیده می‌شوند.

۳۹۰. مکان هندسی وسط پاره‌خط متغیری را تعیین کنید که یک سر آن ثابت است و سر دیگر آن روی دایره‌ای ثابت حرکت می‌کند.

۳۹۱. دایرهٔ (O) و نقطهٔ A در صفحهٔ این دایره داده شده است. از نقطهٔ A به نقطهٔ اختیاری B از دایرهٔ (O) وصل می‌کنیم و نقطهٔ M را روی AB چنان اختیار می‌کنیم که $\frac{MB}{MA}=\frac{m}{n}$ باشد. مکان هندسی نقطهٔ M را تعیین کنید.



۳۹۲. زاویهٔ قائمه‌ای دور رأس خود دوران می‌کند. مطلوب است، مکان هندسی وسط پاره‌خطهای راستی که نقطه‌های برخورد ضلعهای زاویه با دایرهٔ مفروضی را به هم وصل می‌کنند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۳

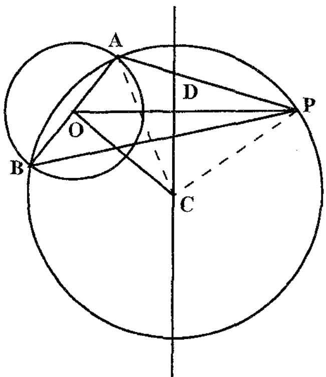
۳۹۳. نقطهٔ A از صفحهٔ دایرهٔ (O) را به نقطهٔ متغیر M از محیط آن وصل می‌کنیم. مکان هندسی نقطه‌های برخورد خط AM را با نیمسازهای زاویهٔ AOM پیدا کنید.

۳۹۴. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را بیابید که از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرند و بر یک دایرهٔ ثابت مماسند.

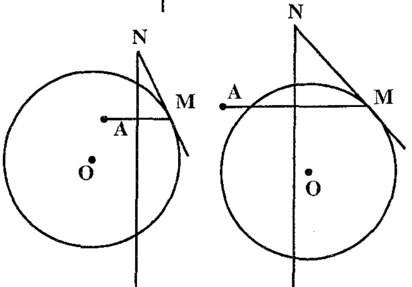
۳۹۵. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را پیدا کنید که از نقطهٔ A می‌گذرند و بر دایرهٔ مفروض C(O,R) عمودند. سپس دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطهٔ A و B گذشته و بر دایرهٔ مفروضی عمود باشد، همچنین دایره‌ای رسم کنید که از نقطهٔ مفروضی گذشته و بر دو دایرهٔ مفروض عمود باشد.

۳۹۶. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را پیدا کنید که از نقطهٔ مفروض A می‌گذرند و محیط دایرهٔ مفروضی را نصف می‌کنند.

۳۹۷. دایره‌ای به مرکز O و نقطهٔ P واقع در صفحهٔ آن مفروض است. نقطهٔ P را به دو طرف قطر AB از دایره وصل کرده، از سه نقطهٔ P، A و B یک دایره مرور می‌دهیم. مطلوب است، مکان هندسی مرکز این دایره وقتی که AB حول نقطهٔ O دوران کند.



۳۹۸. یک دایره و نقطهٔ A داده شده است. فرض کنید M معرف نقطه‌ای دلخواه بر روی دایره باشد. مکان هندسی نقطهٔ برخورد عمودمنصف پاره‌خط AM و مماس بر دایره را که از نقطهٔ M می‌گذرد، پیدا کنید.

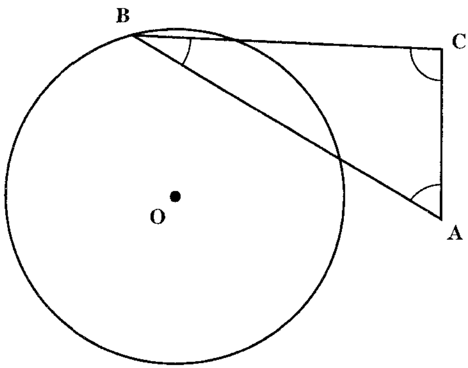


۳۹۹. دایره‌ای به مرکز O و نقطهٔ A داده شده‌اند. فرض کنید B معرف نقطه‌ای دلخواه از دایره باشد. مکان هندسی نقطه‌های برخورد مماسهای بر دایره در نقطهٔ B با خط راستی را که از O عمود بر AB رسم می‌شود، پیدا کنید.

۴۰۰. از نقطهٔ مفروض P قاطع PAA' را نسبت به دایرهٔ (O) رسم می‌کنیم و از A و A' دو مماس بر دایره می‌کشیم. از P خطی به موازات مماس نقطهٔ A رسم می‌کنیم تا مماس نقطهٔ A' را در M قطع کند. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M.

۴۰۱. دایرهٔ (O) و نقطهٔ A در صفحهٔ این دایره مفروضند. از A قاطعی رسم می‌کنیم تا دایره را در M و N تلاقی کند و محل تلاقی مماسهای بر دایره در نقطه‌های M و N را نقطهٔ T می‌نامیم. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ T وقتی که قاطع $\overline{AMN}$ تغییر می‌نماید.

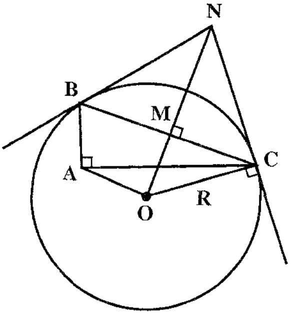
۴۰۲. یک دایره و یک نقطهٔ N در صفحه‌ای داده شده‌اند. فرض کنید AB وتری دلخواه از دایره و M معرف نقطهٔ برخورد خط AB و مماس بر دایرهٔ محیطی مثلث ABN در نقطهٔ N باشد. مکان هندسی نقطهٔ M را پیدا کنید.



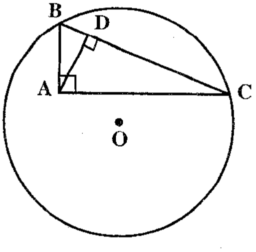
۴۰۳. نقطهٔ ثابت A را به تمام نقطه‌های یک دایره وصل کرده، روی هر یک از قطعه خطهای AB که به این طریق به‌دست می‌آیند، مثلث ABC را مشابه با مثلث معلومی رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ C را به‌دست آورید.

۴۰۴. قضیه. اگر یک رأس مثلث متغیری ثابت باشد، رأس دوم دایرهٔ مفروضی را بپیماید و مثلث همواره با مثلث مفروضی متشابه باشد، رأس سوم این مثلث یک دایره را می‌پیماید.

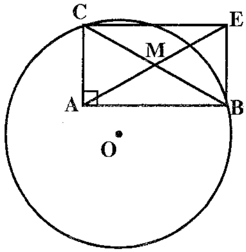
۴۰۵. یک رأس مثلث متساوی‌الاضلاعی ثابت و یک رأسش روی دایرهٔ ثابت مفروضی حرکت می‌کند. مکان رأس دیگر را بیابید.



۴۰۶. مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A}=۹۰^\circ)$ حول رأس زاویهٔ قائمه‌اش A چنان دوران می‌کند که دو رأس B و C از آن روی دایرهٔ ثابت C(O,R) قرار دارند. مماسهای در دو نقطهٔ B و C بر دایره، یکدیگر را در نقطهٔ N قطع می‌کنند. مکان هندسی نقطهٔ N را تعیین کنید.



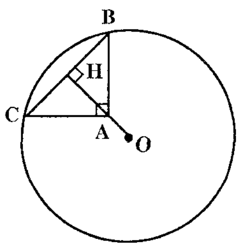
۴۰۷. مکان هندسی نقطهٔ D تصویر رأس قائم A روی وتر BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A}=۹۰^\circ)$ را که حول رأسش نقطهٔ A دوران می‌کند، و دو رأس B و C از آن دایرهٔ ثابتی را می‌پیمایند، تعیین کنید.



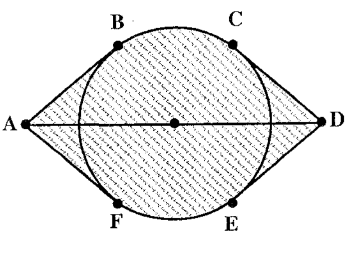
۴۰۸. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC‏ $(\hat{A}=90^\circ)$ حول نقطهٔ A رأس زاویهٔ قائمه‌اش که ثابت است دوران می‌کند به قسمی که B و C دایرهٔ مفروض (O,R) را می‌پیمایند. مکان هندسی رأس چهارم مستطیل BACE را پیدا کنید.

۴۰۹. رأس B از مثلث متساوی‌الساقین قائمه‌الزاویهٔ ABC که $\hat{A}=90^\circ$ می‌باشد، روی دایره‌ای حرکت می‌کند. اگر A ثابت باشد، مکان رأس C را بیابید.

۴۱۰. دایرهٔ (O) به مرکز O و شعاع R و نقطهٔ A در صفحهٔ این دایره داده شده است. تعداد نامتناهی مثلث مزدوج نسبت به این دایره وجود دارد که یک رأس آنها نقطهٔ A است. مکان هندسی مرکزهای دایره‌های محیطی این مثلثها را بیابید.



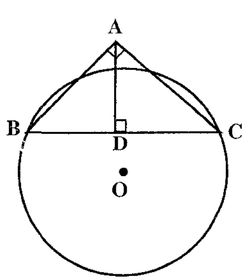
۴۱۱. دایرهٔ ثابت (O) داده شده است. دو سر وتر BC از مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC‏ $(\hat{A}=90^\circ)$ با طول ثابت روی دایرهٔ (O) حرکت می‌کند. مکان هندسی رأس A را تعیین کنید.



۴۱۲. جادهٔ مستقیمی از دشت می‌گذرد. جهانگرد روی جاده در نقطهٔ O ایستاده است. او می‌تواند از طریق جاده با سرعت ۶ کیلومتر در ساعت و از طریق دشت، با سرعت ۳ کیلومتر در ساعت حرکت کند. مطلوب است، مکان هندسی نقطه‌هایی که جهانگرد می‌تواند بعد از یک ساعت در آن جاده‌ها باشد.

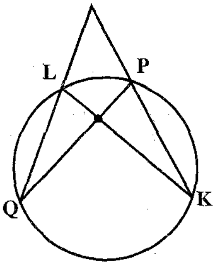
المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۵

۲.۱.۲.۳.۵. یک دایره، یک نقطه درون دایره



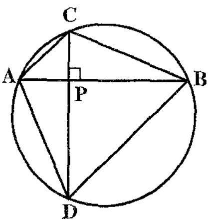
۴۱۳. از نقطهٔ D واقع در درون یک دایره، وتر دلخواه BDC را رسم می‌کنیم. آن‌گاه روی این وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را چنان می‌سازیم که D پای ارتفاع رأس A روی وتر BC باشد. مکان هندسی رأس A را بیابید.

۴۱۴. در دایرهٔ O وتر AB را در نظر می‌گیریم که از نقطهٔ ثابت C واقع در داخل دایره به زاویهٔ 90° رؤیت می‌شود. مکان هندسی نقطهٔ M وسط AB و مکان هندسی نقطهٔ P قطب AB نسبت به دایره را پیدا کنید.

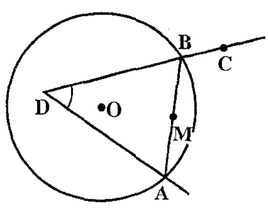


۴۱۵. دو وتر دلخواه PQ و KL از نقطه‌ای ثابت در درون دایره‌ای رسم شده‌اند. مکان هندسی نقطهٔ برخورد خطهای PK و QL را پیدا کنید.

۴۱۶. دایرهٔ O مفروض است. نقطه‌ای مانند A داخل این دایره فرض می‌کنیم. از A دو وتر عمود بر یکدیگر BE و CD را رسم می‌کنیم. مطلوب است مکان هندسی وسط BC و وسط DE، در صورتی که این دو وتر حول نقطهٔ A دوران کنند.

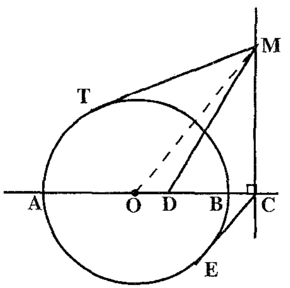


۴۱۷. دو وتر متعامد AB و CD در یک دایره حول نقطهٔ ثابت P می‌چرخند. نشان دهید که مرکزهای ارتفاعی دو مثلث متغیر ABC و ABD دایرهٔ یکسانی را می‌پیمایند. مکان هندسی مرکز ثقل این مثلثها را بیابید.

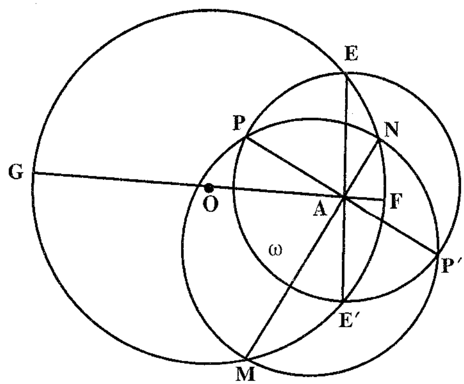


۴۱۸. زاویه‌ای با اندازهٔ ثابت در یک دایره محاط است. یکی از ضلعهای این زاویه از نقطهٔ ثابتی غیرواقع بر دایره می‌گذرد. مکان هندسی وسط وتر ایجاد شده به‌وسیلهٔ دو ضلع زاویه روی دایره را بیابید.

۴۱۹. برای نقطهٔ D واقع در درون دایرهٔ (O) مکان هندسی نقطه‌ای مانند M را بیابید که طول مماس MT رسم شده از M بر دایره برابر MD باشد (Porismesd' Euclido).

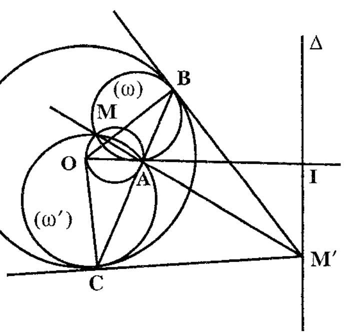


۴۲۰. دایرهٔ (O) به شعاع R و نقطهٔ ثابت A واقع در داخل آن مفروضند. از A وتر متغیری در دایره رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (O) را در M و N قطع کند. دایرهٔ (ω) به قطر MN رسم می‌نماییم و از A خطی بر MN عمود می‌کنیم تا دایرهٔ (ω) را در P و P′ قطع کند. مطلوب است، مکان هندسی نقطه‌های P و P′.



۴۲۱. نقطهٔ A در درون دایره‌ای اختیار شده است. مکان هندسی نقطه‌های برخورد مماسهای بر دایره در دو انتهای کلیهٔ وترهای ممکن را که از نقطهٔ A می‌گذرند، پیدا کنید.

۴۲۲. دایرهٔ (O) و نقطهٔ ثابت A در داخل آن مفروضند. از A قاطع متغیری رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های B و C قطع کند. بر AC و AB دایره‌های (ω) و (ω′) را چنان رسم می‌کنیم تا بترتیب در نقطه‌های C و B بر دایرهٔ (O) مماس باشند. مطلوب است، مکان هندسی M نقطهٔ تلاقی دیگر دایره‌های (ω) و (ω′).



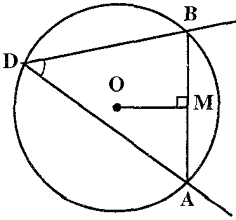
۴۲۳. مکان هندسی مرکزهای دایره‌هایی را که بر دایرهٔ ثابتی مماس بوده و از نقطهٔ ثابتی واقع در داخل آن دایره بگذرد، تعیین کنید.

۴۲۴. توپی کشسان که می‌توان از ابعادش چشم‌پوشی کرد، در درون یک میز بیلیارد دایره‌ای شکل، در نقطهٔ A، متمایز از مرکز آن قرار دارد. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند A را تعیین کنید که از آنها، این توپ چنان هدف‌گیری شود که پس از سه بار برخورد متوالی با کنارهٔ میز، با گذشتن از مرکز میز بیلیارد، به نقطهٔ A برسد.

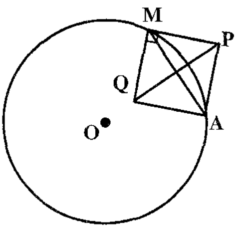
۳.۱.۲.۳.۵. یک دایره، یک نقطه روی دایره

۴۲۵. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که در نقطهٔ مفروض A از دایرهٔ C(O,R) بر این دایره مماسند.

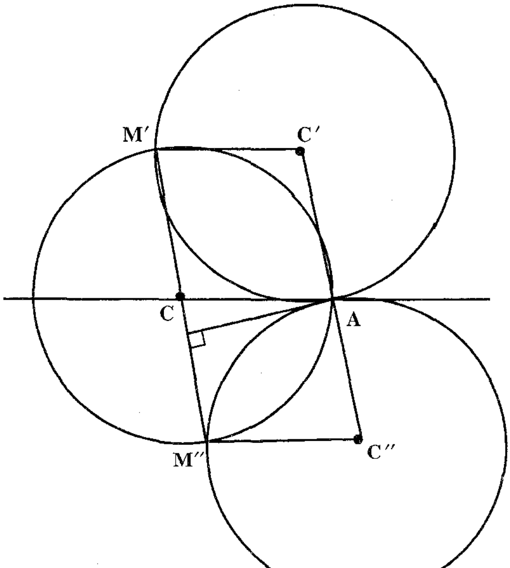
۴۲۶. رأس زاویهٔ ADB که اندازهٔ ثابتی دارد، روی دایرهٔ (O) واقع است و B و A نقطه‌های برخورد دو ضلع آن با دایره می‌باشند. مکان هندسی نقطهٔ M، وسط پاره‌خط AB، را وقتی زاویه، حول رأسش، نقطهٔ D، دوران کند تعیین کنید.



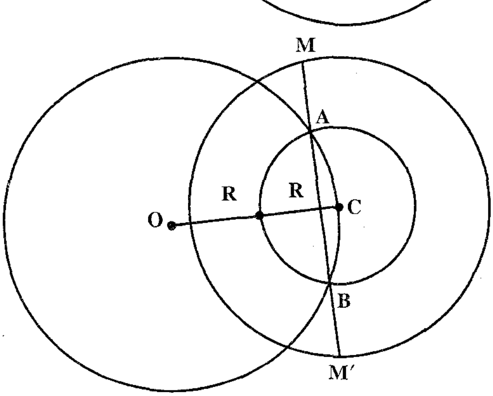
۴۲۷. روی دایرهٔ (O) نقطهٔ ثابت A و نقطهٔ متحرک M را در نظر گرفته AM را قطر قرار می‌دهیم و روی آن مربع APMQ را می‌سازیم. مکان هندسی نقطه‌های P و Q را معین کنید.

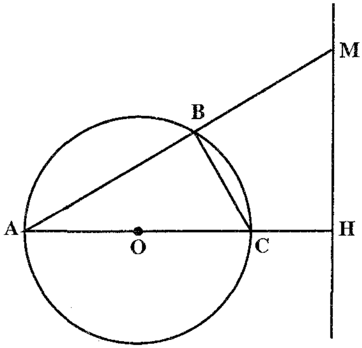


۴۲۸. از نقطهٔ A واقع بر دایرهٔ معلومی به مرکز C، دو دایرهٔ دیگر مساوی با دایرهٔ C و مماس با هم می‌گذرانیم، تا دایرهٔ اوّل را در M′ و M″ قطع کنند. مکان هندسی تصویر A روی M′M″ چیست؟



۴۲۹. نقطهٔ ثابت C واقع بر دایرهٔ به مرکز O عبارت است از مرکز مشترک دو دایره با شعاعهای R و ۲R. مطلوب است، مکان هندسی نقطهٔ تلاقی دایرهٔ به شعاع ۲R، با وتر مشترک دایرهٔ به مرکز O و دایرهٔ به شعاع R وقتی که اندازهٔ R تغییر کند.

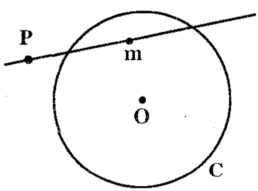




۴۳۰. دایرهٔ (O) و نقطهٔ ثابت A بر روی آن مفروض است. روی پاره‌خط AB نقطهٔ M را طوری می‌گیریم که $AB.AM = C^{te}$ باشد. مطلوب است، مکان هندسی نقطهٔ M و نیز مکان M را وقتی که A خارج و یا داخل دایره باشد.

۴۳۱. دایرهٔ O و نقطهٔ ثابت A روی محیط آن مفروضند. مکان هندسی مرکزهای ثقل مثلثهای ABC، محاط در این دایره را که ضلع BC از آنها دارای طول ثابتی است، پیدا کنید.

۴.۱.۲.۳.۵. یک دایره، یک نقطه برون دایره



۴۳۲. دایرهٔ C به مرکز O و نقطهٔ P در خارج آن مفروض است. از P قاطعی دلخواه نسبت به دایره رسم می‌شود. این قاطع وتری از دایره را مشخص می‌کند. نقطهٔ m وسط این وتر به کدام مکان زیر تعلق دارد؟

الف) خطی ثابت که بر O می‌گذرد.

ب) خطی که اگر از P دو مماس بر دایره رسم شود، بر نقطه‌های تماس می‌گذرد.

ج) دایره‌ای ثابت به مرکز P

د) دایره‌ای ثابت به مرکز O

هـ) دایره‌ای ثابت که مرکز آن وسط [OP] است.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

۴۳۳. نقطهٔ P، خارج دایرهٔ به مرکز O و شعاع r مفروض است. مکان هندسی وسط پاره‌خطهایی که P را به دایره وصل می‌کنند، عبارت است از :

الف) یک خط مستقیم عمود بر PO

ب) یک خط مستقیم موازی PO

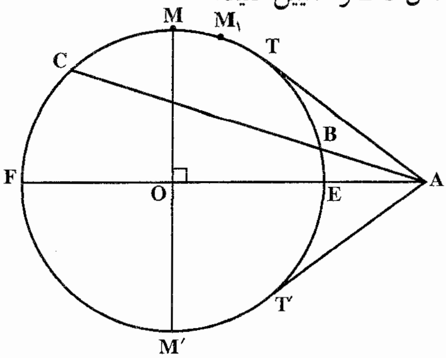
ج) یک دایرهٔ به مرکز P و شعاع r

د) یک دایرهٔ به مرکز وسط PO و شعاع ۲r

هـ) یک دایرهٔ به مرکز وسط PO و شعاع $\frac{r}{۲}$

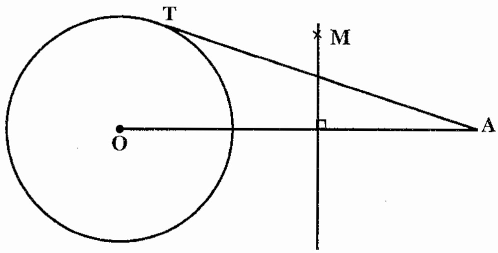
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۴

۴۳۴. از نقطهٔ A واقع در خارج دایرهٔ O، قاطع ABC را بر دایره رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ M_1 وسط کمان $\widehat{BC}$ را تعیین کنید.



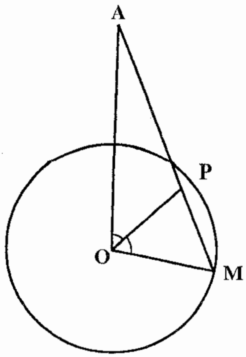
۴۳۵. دایرهٔ (O) و نقطهٔ M واقع در خارج آن مفروضند. مطلوب است، مکان هندسی نقطه‌هایی که طول مماسهای رسم شده از آن نقطه‌ها بر دایرهٔ (O)، با فاصلهٔ آن نقطه‌ها از M برابر باشند.

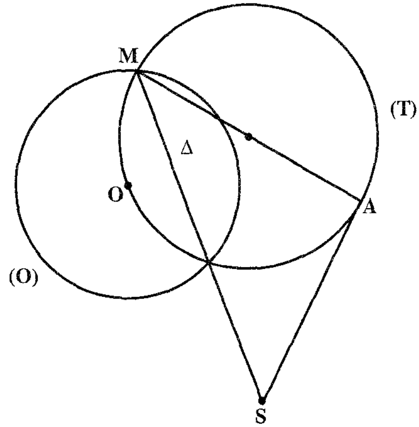
۴۳۶. نقطهٔ A و دایرهٔ C مفروضند. مکان هندسی نقطهٔ M را که قوتشان نسبت به دایرهٔ C برابر MA^2 می‌باشد، تعیین کنید.



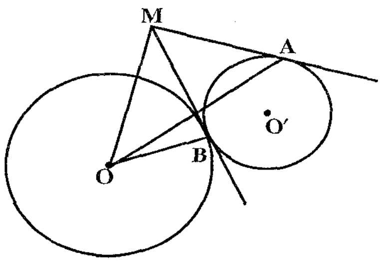
۴۳۷. مکان هندسی نقطه‌هایی که قوت آنها نسبت به دایرهٔ ثابت C(O,R) مقدار ثابت بزرگتر از R^2 است، چیست؟

۴۳۸. دایرهٔ به مرکز O و شعاع R و نقطهٔ A در خارج آن به فاصلهٔ OA = a مفروضند. نقطهٔ M را روی دایرهٔ مزبور اختیار کرده و نیمساز $\widehat{AOM}$ را رسم می‌کنیم تا AM را در P قطع کند. مطلوب است، تعیین مکان هندسی نقطهٔ P وقتی که نقطهٔ M روی دایره حرکت کند.





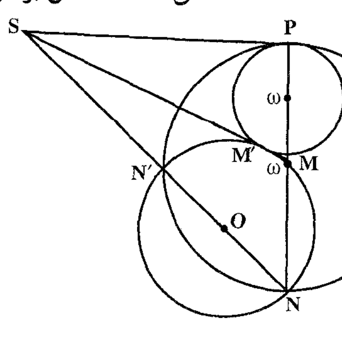
۴۳۹. نقطهٔ A در خارج دایره به مرکز O واقع است و M نقطهٔ اختیاری از دایرهٔ (O) است. دایرهٔ به قطر AM را T می‌نامیم و محور اصلی دو دایرهٔ (O) و (T) را Δ فرض می‌کنیم. مطلوب است، مکان هندسی نقطهٔ S، محل برخورد Δ با مماسی که از A بر دایرهٔ (T) رسم شود، وقتی که نقطهٔ M دایرهٔ (O) را بپیماید.



۴۴۰. دایره‌ای و نقطهٔ A در بیرون دایره داده شده‌اند. فرض کنید دایره‌ای که از A می‌گذرد، بر دایرهٔ مفروض در نقطهٔ دلخواه B مماس باشد و مماسهایی که بر دایرهٔ دوم از نقطه‌های A و B رسم می‌شوند، در نقطهٔ M متقاطع باشند. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را پیدا کنید.

۴۴۱. دایرهٔ (O) و نقطهٔ A واقع در خارج آن مفروض است. قطر متغیر MN از دایره را رسم می‌کنیم و نقطهٔ A را به M و N وصل نموده، امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه‌های دیگر M′ و N′ قطع نماید. مطلوب است، مکان هندسی نقطهٔ تلاقی دیگر دایره‌های AMN و AM′N′.

۴۴۲. دایرهٔ (O) و نقطهٔ P واقع در خارج آن مفروضند. از P قاطع متغیر PMN بر دایره رسم می‌کنیم. دایره‌هایی به قطرهای PM و PN، دایرهٔ (O) را در نقطه‌های دیگر M′ و N′ قطع می‌نمایند. مطلوب است، مکان هندسی نقطهٔ S محل برخورد MM′ و NN′.



۴۴۳. مکان هندسی مرکز دایره‌ای را که بر دایرهٔ ثابتی مماس بوده و از نقطهٔ ثابتی واقع در خارج آن دایره بگذرد، تعیین کنید.

۵.۳.۲.۱.۵. مسأله‌های ترکیبی مربوط به این قسمت

۴۴۴. دایرهٔ (O) به شعاع R و نقطهٔ ثابت A و عدد مثبت $k(k \neq 0)$ دایرهٔ متغیر به مرکز ω (ω روی دایرهٔ O) و شعاع $\rho = k.\omega A$ را در نظر می‌گیریم.

۱. پیدا کنید، مکان نقطهٔ H پای قطبی A نسبت به دایرهٔ ω و نتیجه بگیرید ω همواره بر دایرهٔ ثابتی عمود است.

۲. مکان نقطه‌های تماس دایره‌های نظیر ω را بیابید.

۴۴۵. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R و نقطهٔ A در درون دایره به فاصلهٔ $OA = a < R$ در دست است. دو وتر عمود بر هم در نقطهٔ A دایره را در نقطه‌های C، B، C' و B' قطع می‌کند (BB' و CC' دو وتر مفروضند).

۱. ثابت کنید که میانهٔ مثلث ABC، ارتفاع مثلث $AB'C'$ و بعکس، ارتفاع آن، میانهٔ این یکی است.

۲. مکان هندسی نقطهٔ H پای ارتفاع مثلث ABC و نقطهٔ M وسط ضلع BC را در صورتی که وترهای BB' و CC' حول A دوران کند، پیدا کنید.

۳. ثابت کنید که ضلعهای چهار ضلعی $BCB'C'$ در تمام حالتها بر بیضی ثابتی مماس می‌باشند.

۴. در نقطه‌های B، B'، C و C' مماسهایی بر دایرهٔ O رسم می‌کنیم تا با تقاطع یکدیگر چهار ضلعی MNPQ را تشکیل دهند. ثابت کنید که این چهارضلعی در تمام حالتها $CC'BB'$ محاطی باقی می‌ماند یعنی در دایرهٔ ثابتی محاط است (البته محیطی نیز می‌باشد، چون بر دایرهٔ ثابت O محیط می‌باشد).

۴۴۶. دایرهٔ (O) به مرکز O و به شعاع R و نقطهٔ ثابت A واقع در داخل آن مفروض است. M نقطهٔ متغیری است که دایرهٔ (O) را می‌پیماید.

۱. اگر K وسط AM باشد، مکان K را بیابید.

۲. عمود منصف AM دایرهٔ (O) را در P و Q قطع می‌کند. اگر H تصویر قائم O بر PQ باشد. ثابت کنید که مکان H بر مکان K منطبق است.

۳. اگر O' قرینهٔ O نسبت به PQ باشد، ثابت کنید که O' مرکز دایرهٔ محیطی مثلث APQ است و مکان O' را تعیین کنید.

۴۴۷. دایره‌ای به مرکز O و شعاع R و نقطهٔ A خارج این دایره مفروضند. از A قاطع ABC را نسبت به دایره رسم می‌کنیم و در B و C دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در M قطع کنند.

۱. ثابت کنید، هرگاه قاطع تغییر مکان دهد، مکان هندسی M عمودی است که از نقطهٔ ثابت P واقع بر AO بر آن اخراج می‌گردد، OP را حساب کنید.

۲. اگر AB=R و امتداد AO دایره را در H قطع کند، ثابت کنید که : $C\hat{O}H = ۴C\hat{A}O$.

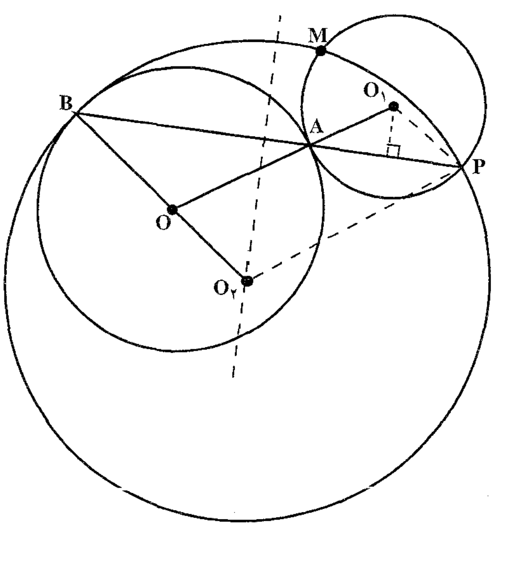
۳. اگر AB=R و $OM = ۲R$ باشند، طولهای AO، BC و OP را بر حسب R حساب کنید.

۴۴۸. در یک صفحه دایرهٔ (C) به مرکز O و نقطهٔ P واقع در خارج آن مفروض است. از P خطی رسم می‌کنیم که دایره را در A و B قطع کند.

۱. $O_۱$ و $O_۲$ مرکزهای دایره‌های $C_۱$ و $C_۲$ را پیدا کنید که از P گذشته و به ترتیب در A و B بر دایرهٔ C مماس باشد و این دایره‌ها را رسم کنید.

۲. ثابت کنید که چهار ضلعی $OO_۱PO_۲$ متوازی‌الاضلاع است.

۳. دایره‌های $C_۱$ و $C_۲$ علاوه بر P در نقطهٔ دیگر M مشترک هستند. وقتی قاطع PAB حول P حرکت کند، مکان هندسی نقطهٔ M را بیابید.



۴۴۹. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R و نقطهٔ ثابت I برون این دایره را در نظر می‌گیریم. قاطع متغیری که از نقطهٔ I می‌گذرد، دایره را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند. مستطیل ABCD را محاط در دایره رسم می‌کنیم.

۱. ثابت کنید که ضلع CD از این مستطیل از نقطهٔ ثابت I' می‌گذرد.

۲. مکان هندسی تصویر قائم نقطهٔ I روی قطرهای AC و BD مستطیل را تعیین کنید.

۳. مکان هندسی ایجاد شده به وسیلهٔ نقطه‌های M و M' که بترتیب وسطهای ضلعهای AB و CD می‌باشند، کدام است؟

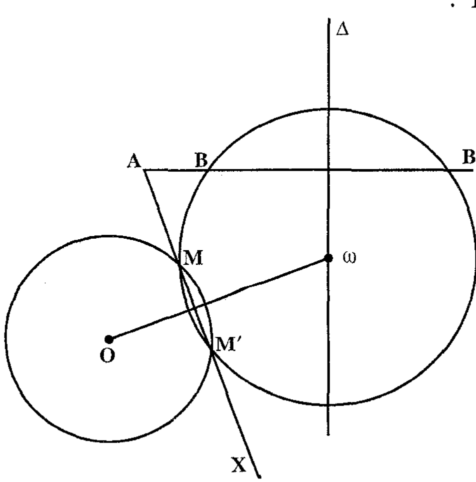
۴. فرض می‌کنیم که $OI = \frac{۳R}{۲}$ و زاویهٔ $\widehat{OIA} = ۳۰^\circ$ باشد. اندازهٔ مساحت مستطیل ABCD را به دست آورید. فرض کنید $R = ۴cm$ باشد.

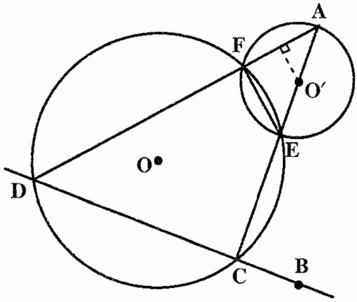
۲.۲.۲.۳.۵. یک دایره، دو نقطه

۱.۲.۲.۲.۳.۵. یک دایره، دو نقطه در صفحهٔ دایره

۴۵۰. در صفحهٔ دایرهٔ (O) دو نقطهٔ ثابت A و B مفروضند. از نقطهٔ A قاطع متغیری رسم می‌کنیم که دایره را در M و N قطع می‌کند. از این نقطه‌ها دو خط بر BM و BN عمود می‌کنیم که یکدیگر را در P قطع می‌کنند. ثابت کنید، مکان P، خطی است عمود بر AB.

۴۵۱. دایرهٔ (O) به شعاع R و نقطه‌های A و B مفروضند. از نقطهٔ A قاطع متغیری رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (O) را در M و M' قطع کند. مطلوب است، مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی BMM' .

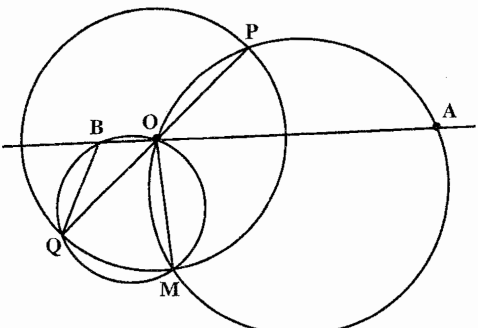




۴۵۲. دایرهٔ (O)، دو نقطهٔ A و B، و خط متغیری که از B می‌گذرد، مفروضند. این خط متغیر دایرهٔ (O) را در C و D قطع می‌کند و خطهای AC و AD دایرهٔ (O) را در E و F نیز قطع می‌کنند. نشان دهید که مرکز دایرهٔ AEF یک خط راست را می‌پیماید.

۴۵۳. رأسهای A و B از مثلث ABC ثابتند و رأس C بر دایره‌ای به مرکز A حرکت می‌کند، مطلوب است مکان هندسی پای نیمساز زاویهٔ A.

۴۵۴. اگر PQ قطر متغیری از یک دایرهٔ مفروض باشد و A و B دو نقطهٔ ثابت همخط با مرکز دایره، یعنی O، باشند، مکان هندسی نقطهٔ $M=(AP,BQ)$ را تعیین کنید.



۴۵۵. دو نقطهٔ A و B همخط با O، مرکز یک دایرهٔ مفروض، و قطر متغیر PQ از این دایره مفروضند؛ مکان هندسی نقطهٔ دوم برخورد دو دایرهٔ APO و BQO را بیابید.

۵.۳.۲.۲.۲. یک دایره، دو نقطه روی دایره

۵.۳.۲.۲.۲.۱. یک دایره، وتر

۴۵۶. یک مثلث متغیر، قاعده‌ای ثابت و دایرهٔ محیطی ثابتی دارد. مکانهای هندسی نقطه‌های وسط دو ضلع جانبی، و مکان هندسی وسط پاره‌خطی را که نقطه‌های وسط این دو ضلع را به هم وصل می‌کند، به دست آورید.

۴۵۷. مثلث ABC محاط در دایرهٔ (O) مفروض است. ارتفاعهای BB' و CC' در نقطهٔ H متقاطعند. اگر BC ثابت و نقطهٔ A بر روی کمان $\overset{\frown}{BAC}$ حرکت کند، مکان هندسی نقطهٔ H را تعیین کنید.

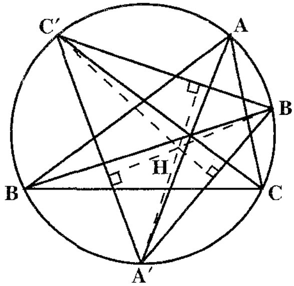
۴۵۸. مکان هندسی مرکز ثقل مثلث متغیری را بیابید که قاعده و دایرهٔ محیطی آن ثابت است.

۴۵۹. مثلث ABC محاط در دایرهٔ (O) مفروض است. نیمسازهای دو زاویهٔ B و C یکدیگر را در نقطهٔ I قطع می‌کنند. اگر BC ثابت بماند و نقطهٔ A بر روی کمان $\overset{\frown}{BAC}$ حرکت کند، مکان هندسی نقطهٔ I را تعیین کنید.

۴۶۰. فرض کنید B و C دو نقطهٔ ثابت از دایره‌ای مفروض باشند و A نقطه‌ای متغیر از این دایره باشد. مکان هندسی پای عمود وارد از وسط AB بر AC را پیدا کنید.

۴۶۱. فرض کنید B و C معرف دو نقطهٔ ثابت از دایره‌ای باشند و A نقطه‌ای دلخواه از این دایره باشد. فرض کنید H محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC و M تصویر H روی نیمساز زاویهٔ BAC باشد. مکان هندسی نقطهٔ M را بیابید.

۴۶۲. قاعدهٔ BC و دایرهٔ محیطی (O) از مثلث متغیر ABC ثابتند. مکان هندسی مرکز ارتفاعی مثلثی را که رأسهای آن محل برخورد امتداد نیمسازهای داخلی مثلث ABC و دایرهٔ (O) هستند، به‌دست آورید.



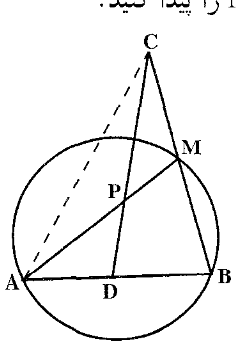
۴۶۳. A و B دو نقطهٔ ثابت از محیط دایره و XY قطر متغیری از آن است. مطلوب است، مکان هندسی نقطهٔ برخورد خطهای راست AX و BY. می‌توانید فرض کنید که AB، قطر دایره نیست.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۶

۴۶۴. دایرهٔ (O) به شعاع R و نقطه‌های ثابت A و B بر آن مفروضند. بر کمان $\widehat{AB}$ نقطهٔ C را در نظر گرفته و بر خط $\overline{AC}$ پاره‌خط $\overline{AD} = \overline{BC}$ را جدا می‌کنیم. مطلوب است مکان هندسی D وقتی C بر کمان $\widehat{AB}$ تغییر می‌نماید.

۴۶۵. وتر ثابت AB و نقطهٔ متغیر M واقع بر محیط دایره مفروضند. هرگاه بر امتداد AM نقطهٔ N را چنان بگیریم که MN=MB باشد. مکان هندسی نقطهٔ N را پیدا کنید.

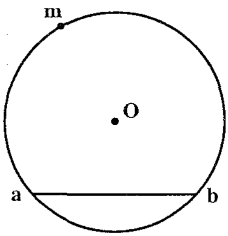
۴۶۶. دایرهٔ ثابتی را در نظر می‌گیریم و وتر ثابتی مانند AB از آن را رسم می‌کنیم و وسط AB را D می‌نامیم و فرض می‌کنیم نقطه‌ای مانند M روی دایرهٔ مزبور حرکت کند و قطعه خط BM را از طرف M به طول MC مساوی با MB امتداد می‌دهیم و فصل مشترک خطهای AM و CD را P می‌نامیم. مطلوب است، مکان هندسی نقطهٔ P وقتی نقطهٔ M دایرهٔ مفروض را بپیماید.



۴۶۷. مکان هندسی نقطهٔ تماس دو دایرهٔ مماس خارج را که در دو نقطهٔ ثابت A و B بر دایرهٔ داده شدهٔ (C) مماسند، تعیین کنید.

۴۶۸. دایره‌ای و وتر AB از این دایره داده شده است. فرض کنید N نقطه‌ای دلخواه روی خط AB باشد. دو دایره رسم می‌کنیم که هر یک از نقطهٔ N می‌گذرد و بر دایرهٔ مفروض، یکی در نقطهٔ A و دیگری در نقطهٔ B مماس است. فرض کنید M معرف دومین نقطهٔ برخورد این دایره‌ها باشد. مکان هندسی نقطهٔ M را پیدا کنید.

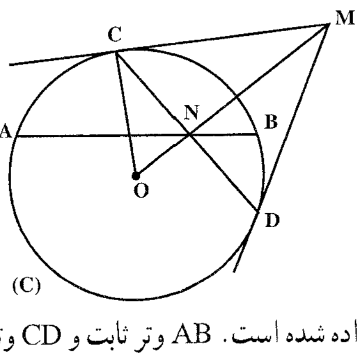
۴۶۹. دایرهٔ ثابت به مرکز O و به شعاع r و وتر ثابت [ab] از آن مفروض است. نقطهٔ غیرمشخص m بر دایره انتخاب می‌شود. نظیر نقطهٔ m نقطهٔ p وجود دارد که چهار ضلعی ampb متوازی‌الاضلاع باشد. نقطهٔ m که روی دایره تغییر مکان دهد، نقطهٔ p کدام مکان زیر را می‌پیماید؟



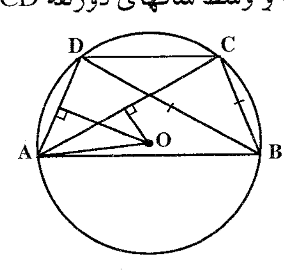
الف) دایره‌ای به شعاع r
ب) دایره‌ای به شعاع ۲r
ج) کمانی از دایرهٔ به مرکز O
د) پاره خطی که بر b می‌گذرد
هـ) مکانی غیر از اینها

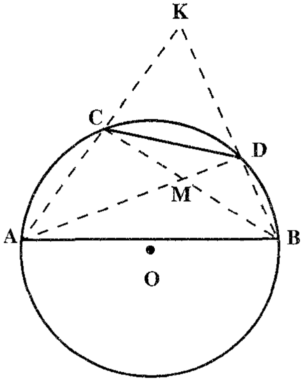
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

۴۷۰. دایرهٔ ثابت (C) و وتر ثابت AB و وتر متحرک CD مفروضند، به قسمی که وسط وتر CD همیشه بر روی AB است. مطلوب است، مکان هندسی M، نقطهٔ تلاقی مماسهایی که از C و D بر دایره رسم شوند.



۴۷۱. دایره‌ای به مرکز O داده شده است. AB وتر ثابت و CD وتری متغیر از این دایره است. مکان هندسی وسط قطرها و وسط ساقهای ذوزنقهٔ ABCD را تعیین کنید.





۴۷۲. وتر ثابت AB و وتر متغیر CD مفروض است. مکان هندسی مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای MCD و KCD را پیدا کنید. در صورتی که K نقطهٔ تلاقی AC و BD و نقطهٔ M محل تلاقی AD و BC باشد.

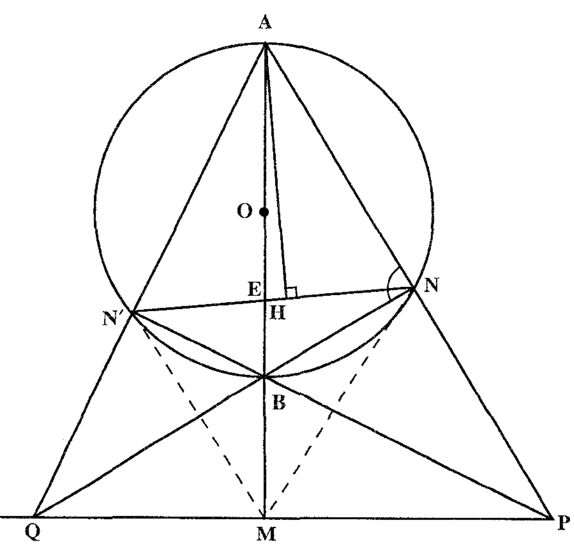
۲.۲.۲.۲.۳.۵. یک دایره، قطر

۴۷۳. نقطهٔ M روی دایره‌ای به مرکز O و به قطر ثابت AB در نظر می‌گیریم. قرینهٔ A را نسبت به M نقطهٔ D می‌نامیم. ثابت کنید، مکان هندسی نقطهٔ برخورد دو خط OD و BM، یک دایره است.

۴۷۴. در یک دایره به قطر AA' وتر غیرمشخص PQ را عمود بر AA' در نظر می‌گیریم. مکان نقطهٔ M فصل مشترک خطهای AQ و $A'P$ را به‌دست آورید.

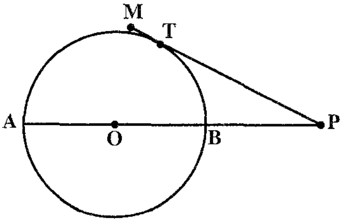
۴۷۵. قطر ثابت AB از دایرهٔ (O) مفروض است. از نقطهٔ متغیری واقع بر امتداد قطر، مماسی بر دایره رسم کرده و نیمساز زاویه‌ای را که این مماس با قطر می‌سازد، می‌کشیم. مطلوب است، مکان پای عمود رسم شده از مرکز دایره بر نیمساز زاویه.

بلانشت، ریاضیدان فرانسوی

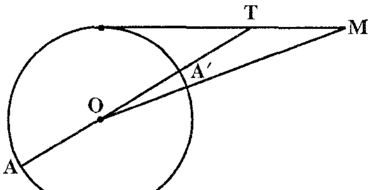


۴۷۶. دایره‌ای به قطر AB مفروض است. از نقطهٔ M واقع بر امتداد AB خط Δ را بر این قطر عمود می‌کنیم و از نقطهٔ غیرمشخص N واقع بر محیط دایره به A و B وصل می‌کنیم تا Δ را بترتیب در P و Q قطع کنند. اگر N' نقطهٔ دوم تقاطع AQ با دایره باشد و از A برخطی بر NN' عمود کنیم تا آن را در H قطع کند، مکان H چیست؟

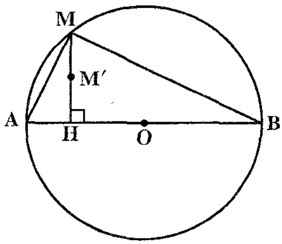
۴۷۷. از نقطهٔ P واقع بر امتداد قطر AB از دایرهٔ (O) مماس PT را بر دایره رسم می‌کنیم و روی آن طول PM=OP را جدا می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ M را وقتی P روی AB جابه‌جا می‌شود، تعیین کنید.



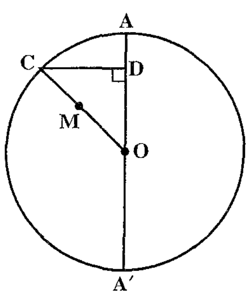
۴۷۸. مماسی که از نقطهٔ متغیر M بر دایرهٔ (O) رسم می‌شود، قطر ثابت ′AA را در نقطهٔ T قطع می‌کند. نشان دهید که مکان هندسی مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلثOMT از چهار خط راست تشکیل می‌شود. مکان هندسی مرکزهای دایره‌های محاطی خارجی را به‌دست آورید.



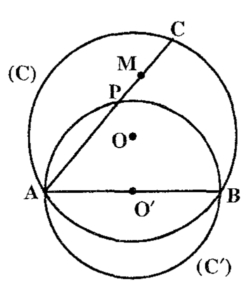
۴۷۹. دایره‌ای به قطر AB مفروض است. از نقطهٔ غیرمشخص M واقع بر محیط این دایره MH را بر AB عمود رسم کرده و در روی آن نقطهٔ ′M را چنان تعیین می‌کنیم که $\frac{AM'}{AM}=k$ باشد. اگر M بر محیط دایره حرکت کند، مکان هندسی نقطهٔ ′M را پیدا کنید.



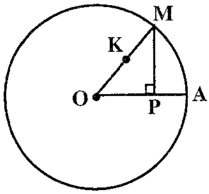
۴۸۰. در دایرهٔ (O) قطر ثابت ′AA مفروض است. از نقطهٔ C انتهای شعاع دلخواه OC عمود CD را بر این قطر فرود می‌آوریم و آن‌گاه OM=CD را روی OC جدا می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ M را تعیین کنید.



۴۸۱. دایرهٔ (C)، دایرهٔ (′C) را تحت قطر AB قطع کرده است. از نقطهٔ A قاطعی رسم می‌کنیم که این دو دایره را در P و C قطع کند. مکان هندسی نقطهٔ M وسط پاره‌خط PC را که بین دو دایره قرار دارد، تعیین کنید.



۳.۲.۲.۲.۳.۵. یک دایره، شعاع

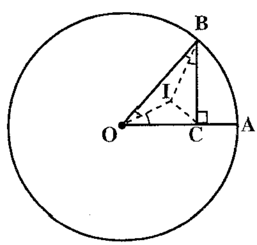


۴۸۲. در دایره‌ای شعاع ثابت OA و شعاع متغیر OM مفروضند. از M عمود MP را بر OA فرود آورده، از O طول MP=OK را بر OM جدا می‌کنیم، مکان نقطهٔ K چیست؟

۴۸۳. در دایرهٔ به مرکز O شعاع ثابت OA و شعاع متحرک OB را در نظر می‌گیریم و از B عمود BC را بر OA رسم می‌کنیم.

۱. مطلوب است، تعیین مکان هندسی نقطهٔ I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث OBC.

۲. ثابت کنید که BI از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.



۳.۲.۲.۲.۳.۵. مسأله‌های ترکیبی

۴۸۴. دایرهٔ (O) و نقطه‌های ثابت B و C و نقطهٔ متغیر A واقع بر دایره مفروضند. بر AB دایرهٔ (ω) و بر AC دایرهٔ (ω') مماس بر BC رسم می‌نماییم.

۱. مطلوب است، مکان هندسی نقطهٔ دیگر برخورد دایره‌های (ω) و (ω').

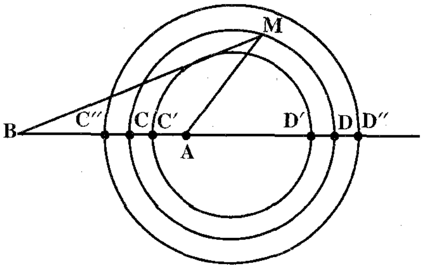
۲. اگر N نقطهٔ تقاطع AB با دایرهٔ (ω') و P محل تلاقی AC با دایرهٔ (ω) باشد. مکان هندسی نقطه‌های N و P را تعیین کنید.

۴۸۵. دو نقطهٔ A و B در سطح دایرهٔ معلوم O به شعاع R قرار دارند. قطر متغیر PQ را در دایره رسم کرده و خطهای PA، PB، QA و QB را رسم می‌کنیم تا با تقاطع با هم نقطه‌های M و N را به‌دست دهند.

۱. خط MN قطر PQ را در نقطهٔ S قطع می‌کند. مکان هندسی این نقطه را تعیین کنید.

۲. مکان هندسی نقطهٔ T وسط قطعه خط MN را مشخص سازید.

۳. مکان هندسی نقطه‌های M و N یک منحنی درجهٔ چهارم است. در دو حالت این منحنی به دو دایرهٔ منطبق بر هم (یک دایرهٔ مضاعف) تبدیل می‌شود. این دو حالت را معین کنید.



۴۸۶. دو نقطهٔ A و B و دایرهٔ (O) مکان هندسی نقطهٔ M را به‌طوری که $\frac{MA}{MB}$ مساوی با k‏ $(k<1)$ باشد، در نظر می‌گیریم.

۱. ثابت کنید که تمام نقطه‌های دایرهٔ (O') مکان هندسی نقطه‌های P به‌طوری که $\frac{PA}{PB}=k'$ و $k'<k$ باشد، در داخل دایرهٔ (O) واقع است.

۲. ثابت کنید که تمام نقطه‌های دایرهٔ (O'') مکان هندسی نقطه‌های Q به‌طوری که $\frac{QA}{QB}=k''$ و $k''>k$ باشد، در خارج دایرهٔ (O) واقع است.

۳. از مطالب بالا نتیجه بگیرید که برای هر نقطه مانند R که در داخل دایرهٔ (O) واقع باشد، داریم $\frac{RA}{RB}<k$ و برای هر نقطه که مانند S در خارج دایرهٔ (O) واقع باشد، داریم $\frac{SA}{SB}>k$.

۴۸۷. دو نقطهٔ A و B روی دایره‌ای به شعاع R و مرکز O، ثابتند. نقطهٔ I وسط وتر AB می‌باشد. وتر متغیر CD را چنان رسم می‌کنیم که در مثلث CID نسبت ارتفاع IH به قاعدهٔ CD با عکس قطر دایرهٔ محیطی مثلث CID متناسب باشد، یعنی $\frac{IH}{CD}=\frac{a}{2r}$ که در آن a طولی ثابت و r شعاع دایرهٔ محیطی مثلث CID می‌باشد. دایره‌های محیطی مثلثهای AIC و BID در نقطهٔ P و دایره‌های محیطی مثلثهای AID و BIC در نقطهٔ Q تقاطع می‌کنند. مکان هندسی نقطه‌های P و Q را وقتی وتر CD تغییر می‌کند، تعیین کنید. در چه صورت این مکانها، منحنیهای معادلند. همچنین در چه صورت این مکانها بر هم منطبقند؟

۴۸۸. دو نقطهٔ A و B روی محیط دایره ثابتند و نقطهٔ M تمامی محیط دایره را می‌پیماید. از نقطهٔ K وسط پاره‌خط راست MB، عمود KP را بر خط راست MA رسم کرده‌ایم.

a) ثابت کنید، همهٔ خطهای راست KP از یک نقطه می‌گذرند.

b) مجموعهٔ نقطه‌های P (مکان هندسی نقطهٔ P) را پیدا کنید.

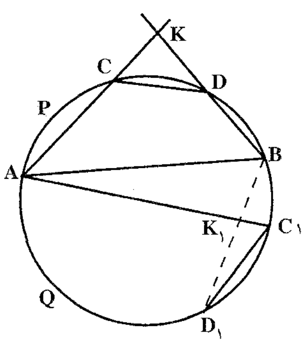
۴۸۹. ۱. مکان هندسی نقطه‌هایی را که قوسهای دایرهٔ گذرنده از دو نقطه ثابت را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کند، پیدا کنید.

۲. مطلوب است مکان رأس C از مثلث ABC که در آن ضلع AB ثابت و یکی از زاویه‌های A یا B دو برابر دیگری باشد.

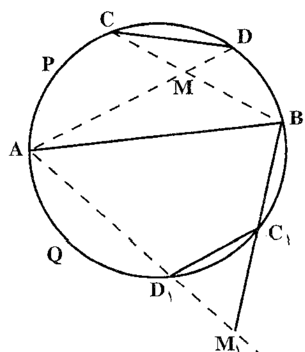
۴۹۰. در دایرهٔ (O) وتر ثابت AB و وتر متغیر CD را که در یک طرف کمان $\widehat{AB}$ واقع است، در نظر می‌گیریم.

۱. مکان هندسی نقطهٔ M محل تلاقی BC و AD را به‌دست آورید (روی قوس کوچک بترتیب نقطه‌های B، D، C و A و روی قوس بزرگ نقطه‌های B، C، D و A واقعند).

۲. مکان هندسی نقطهٔ برخورد AC و BD را تعیین کنید.



(ب)



(الف)

۴۹۱. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R و وتر AB از این دایره داده شده است. دایره‌ای به مرکز O′ مماس بر وتر AB در نقطهٔ H و مماس درونی بر قوس کوچک $\widehat{AB}$ از دایرهٔ (O) در نقطهٔ I است.

۱. ثابت کنید که IH نیمساز زاویهٔ KIO′ است، K تصویر قائم نقطهٔ I روی AB است.

۲. ثابت کنید که وقتی نقطهٔ H بین A و B جابه‌جا می‌شود، IH از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد. چگونگی تعیین نقطهٔ O′ را وقتی H نقطهٔ ثابتی از AB باشد، شرح دهید.

۳. خط مماس بر دایرهٔ (O′) در نقطهٔ I، خط AB را در نقطهٔ S قطع می‌کند. ثابت کنید که چهارضلعی SIEO قابل محاط شدن در یک دایره است. E وسط پاره‌خط AB است. مکان هندسی مرکز این دایره را وقتی H از A تا B حرکت می‌کند، تعیین کنید.

۴. ثابت کنید که پاره‌خط SH واسطهٔ هندسی بین SK و SL است. L نقطهٔ برخورد OI با AB است.

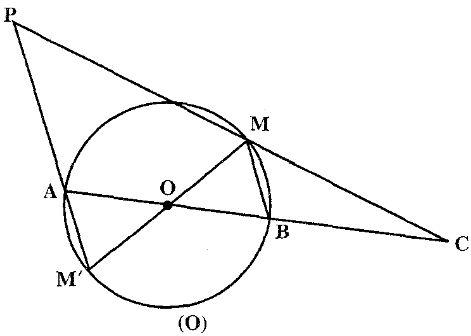
۵. فرض می‌کنیم که AB قطر و $\widehat{AOI} = ۳۰^\circ$ است. اندازهٔ شعاع R′ دایرهٔ O′ را برحسب R تعیین کنید.

۴۹۲. وتر ثابت AB و نقطهٔ متغیر M روی دایرهٔ (O) مفروضند.

الف. مکان نقطهٔ H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث AMB را پیدا کنید.

ب. مکان نقطه‌های مشترک دایرهٔ به مرکز M و به شعاع MH و دایرهٔ به مرکز H و به شعاع HM را به‌دست آورید.

۳.۲.۳.۵. یک دایره، سه نقطه

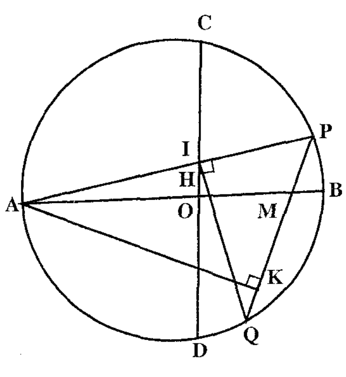


۴۹۳. دایرهٔ به مرکز O و به قطر AB و نقطهٔ ثابت C روی AB مفروض است. قطر متغیر ′MM از دایره را رسم می‌کنیم. ′AM و CM همدیگر را در P قطع می‌کنند. مطلوب است، مکان هندسی نقطهٔ P وقتی که M روی دایره حرکت کند.

۴۹۴. در مثلث ABC نیمساز داخلی زاویهٔ A ضلع BC را در I و دایرهٔ محیطی را در D قطع می‌کند. اگر مثلث طوری تغییر کند که نقطه‌های A، I و D ثابت بمانند، مکان مرکز ثقل مثلث را پیدا کنید.

۴.۲.۳.۵. یک دایره، چهارنقطه

۱.۴.۲.۳.۵. یک دایره، یک قطر، یک وتر



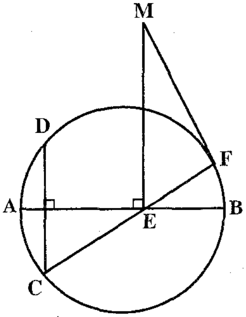
۴۹۵. دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R و به قطر AB مفروض است. وتر CD را در نقطهٔ H عمود بر OB رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم:

$AH = d\ ,\ (d < R)$

I نقطهٔ متغیر بر CD و AI دایره را در P قطع می‌کند، عمود رسم شده در I بر AI، کمان CBD را در Q قطع می‌کند.

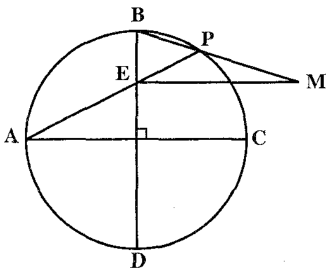
۱. مکان هندسی وسط PQ را تعیین کنید.

۲. مکان نقطهٔ K تصویر A را بر PQ به‌دست آورید.

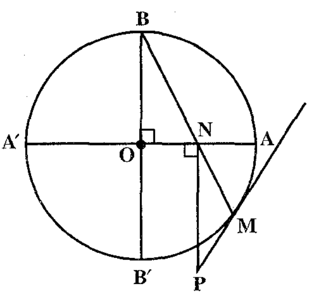


۴۹۶. دایره‌ای به قطر AB و وتر CD عمود بر این قطر داده شده است. خط قاطعی از نقطهٔ C رسم می‌کنیم که قطر AB را در نقطهٔ E و دایره را در نقطهٔ F قطع کند. خط مماس بر دایره در نقطهٔ F عمودی را که در نقطهٔ E بر AB اخراج می‌شود، در نقطهٔ M قطع می‌کند. مکان هندسی نقطهٔ M را وقتی قاطع رسم شده از نقطهٔ C تغییر می‌کند، تعیین کنید.

۲.۴.۲.۳.۵. یک دایره، دو قطر عمود بر هم

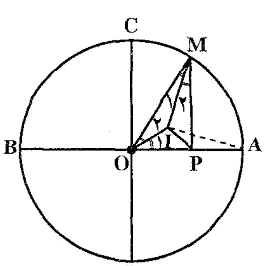


۴۹۷. دو قطر دو به دو عمود بر هم AC و BD در دایره‌ای رسم شده‌اند. فرض کنید P نقطه‌ای دلخواه از دایره باشد و PA، BD را در نقطهٔ E قطع کند. خط راستی که از E به موازات AC می‌گذرد، خط PB را در نقطهٔ M قطع می‌کند. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را، بیابید.

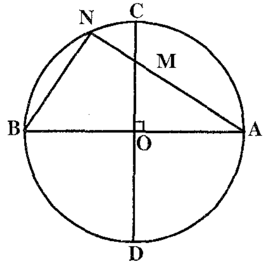


۴۹۸. AA' و BB' دو قطر عمود بر هم از دایرهٔ مفروض (O) هستند. وتر متغیری که از B می‌گذرد، (O) را در M و AA' را در N قطع می‌کند. نشان دهید که نقطهٔ برخورد مماسی که در M بر دایرهٔ (O) رسم می‌شود و خطی که در N بر AA' عمود می‌شود، یک خط راست را می‌پیماید.

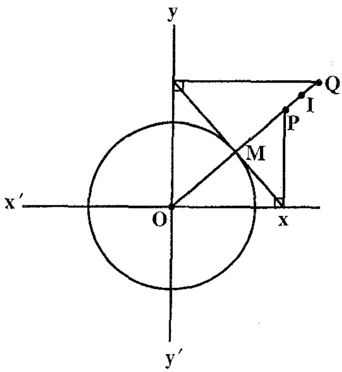
۴۹۹. اگر AB و CD دو قطر عمود بر هم ثابت از دایرهٔ به مرکز O و M نقطهٔ متغیری از دایره و P تصویر M روی CD باشد، مطلوب است مکان هندسی نقطه‌های برخورد خطهای OM و AP.



۵۰۰. در دایرهٔ (C) به مرکز O دو قطر عمود بر هم AB و CD را رسم می‌کنیم. اگر M نقطهٔ دلخواهی از این دایره و نقطهٔ P تصویر M روی AB باشد، مطلوب است، مکان هندسی مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث OPM وقتی که M بر محیط دایره تغییر می‌نماید.



۵۰۱. دایره‌ای به مرکز O و دو قطر عمود بر هم AB و CD مفروضند. از A خطی رسم می‌کنیم تا CD را در M و دایره را در N قطع کند. مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی چهار ضلعی OBNM چیست؟



۵۰۲. دایرهٔ O به شعاع R مفروض است. دو قطر عمود بر هم yOy' و xOx' رسم کرده و از نقطهٔ M واقع بر محیط دایره، مماسی بر آن رسم می‌کنیم تا $x'Ox$ و $y'Oy$ را بترتیب در A و B قطع کند. چنانچه نقطه‌های A و B بترتیب تصویرهای P و Q واقع بر OM باشند، مطلوب است، مکان هندسی نقطه I مزدوج توافقی O نسبت به P و Q، وقتی که M بر محیط دایرهٔ (O) تغییر می‌نماید.

۵۰۳. در دایرهٔ (O,R) دو قطر عمود بر هم AA' و DD' را رسم می‌کنیم. مثلث ABC در این دایره محاط شده و ضلعهای a، b و c آن در رابطهٔ :

$$b^2 + c^2 - a^2 = d^2 \text{ و } d = 0$$

صدق می‌کنند.

۱. تحقیق کنید که زاویهٔ A همیشه حاده است و بستگی به وضع محاط بودن مثلث در دایره ندارد.

۲. اگر M وسط BC باشد، تحقیق کنید که عبارت $MA^2 + MO^2$ همیشه مقداری است ثابت و از آن استنباط کنید که مکان هندسی نقطهٔ M کمان دایره‌ای است که مرکز و شعاع آن را پیدا خواهید کرد.

۵.۳.۲.۴.۳. یک دایره، چهار نقطهٔ همخط

۵۰۴. دو نقطهٔ A و B ثابت بر روی قطر معینی از دایرهٔ O به شعاع R واقعند. قطر متغیری مانند MN رسم می‌کنیم. خطهای AM، AN، BM و BN با تقاطع یکدیگر دو نقطهٔ P و Q به دست می‌دهند. مکان هندسی این نقطه‌ها را پیدا کنید.

۵. ۳. ۲. ۴. ۴. یک دایره، چهار نقطهٔ همدایره

۵۰۵. A، B، C و D نقطه‌های ثابتی روی دایرهٔ (O) هستند. خطهایی که از C و D به نقطهٔ متغیر P وصل می‌شوند، (O) را در Q و R نیز قطع می‌کنند. مکان هندسی S، نقطهٔ دوم برخورد دو دایرهٔ PQB و PRA را بیابید.

۵. ۳. ۳. یک دایره، خطهای ثابت

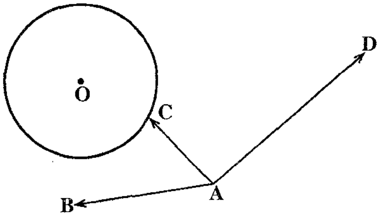
۵.۳.۳.۱. یک دایره، یک پاره‌خط، یک خط

۵.۳.۳.۱.۱.یک دایره، یک پاره خط

۵۰۶. قطعه خط ثابت AB و دایرهٔ ثابت O به شعاع R در دست است. مطلوب است، مکان هندسی رأسهای مثلثهایی به قاعدهٔ AB، به قسمی که سطح آنها متناسب باشد با قوت همین رأس نسبت به دایرهٔ (O).

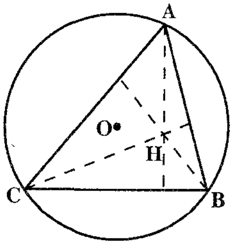
۵۰۷. دایرهٔ (C) و قطعه خط AA' مفروض است. از هر نقطهٔ M از دایره، قطعه خطی مانند MM' مساوی و موازی با AA' و در جهت آن رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ M چیست؟

۵۰۸. دایرهٔ ثابت (O) و بردار ثابت $\overrightarrow{AB}$ داده شده‌اند. نقطهٔ C انتهای بردار $\overrightarrow{AC}$ همواره بر دایرهٔ (O) واقع است و بردار $\overrightarrow{AD}$ بر $\overrightarrow{AC}$ عمود و طولش دو برابر طول آن است. مکان هندسی انتهای برآیند این سه بردار یعنی $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AB}+ \overrightarrow{AC}+ \overrightarrow{AD}$ را بیابید.



۵. ۳. ۳. ۱. ۲. یک دایره، یک راستای ثابت

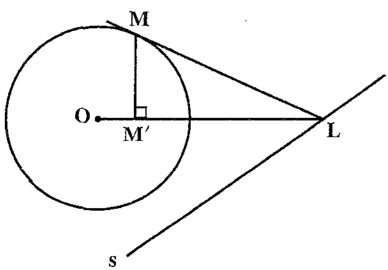
۵۰۹. دایره‌ای به شعاع معلوم طوری تغییر می‌کند که همواره بر دایرهٔ ثابت مفروضی مماس است. مکان هندسی نقطه‌های تماس این دایره را با مماسهایی به امتداد ثابت پیدا کنید.



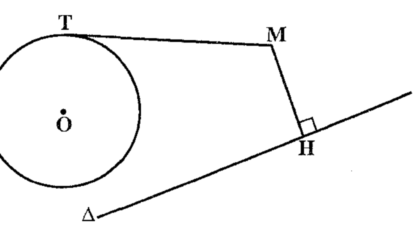
۵۱۰. دایرهٔ ثابت (O) و نقطهٔ ثابت A بر روی آن دایره مفروض است. BC وتری از این دایره است که همواره به موازات خود تغییر مکان می‌دهد. ثابت کنید که قطبی نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC، همواره بر نقطهٔ ثابتی می‌گذرد. مکان این نقطهٔ ثابت را وقتی که A روی دایره تغییر مکان دهد، به دست آورید.

۵.۳.۳.۱.۳. یک دایره، یک خط در صفحهٔ دایره

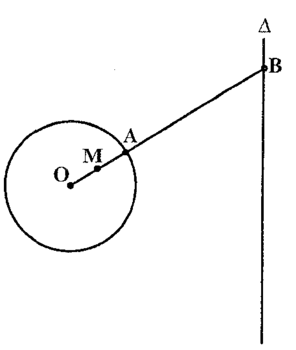
۵۱۱. دایرهٔ $C(O,R)$ و خط xy در یک صفحه داده شده‌اند. از تمام نقطه‌های دایره، عمودهایی بر xy فرود می‌آوریم. مکان هندسی وسط این پاره‌خطهای عمود را پیدا کنید.



۵۱۲. مماس LM که از نقطهٔ متغیر M روی دایرهٔ مفروض (O) بر این دایره رسم می‌شود، خط s را در L قطع می‌کند. مکان هندسی تصویر M بر OL را بیابید.



۵۱۳. مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که طول مماس رسم شده از آن بر یک دایرهٔ مفروض، واسطهٔ هندسی بین یک پاره‌خط مفروض و فاصلهٔ آن نقطه از یک خط ثابت است.



۵۱۴. دایرهٔ (O) و خط Δ داده شده‌اند. از نقطهٔ O مرکز دایره به نقطهٔ غیرمشخص A، واقع بر محیط دایره وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا خط Δ را در نقطهٔ B قطع کند. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M، مزدوج توافقی B نسبت به نقطه‌های O و A، وقتی که نقطهٔ A محیط دایرهٔ (O) را طی می‌کند.

۵. ۳. ۳. ۱. ۴. یک دایره، یک خط خارج دایره

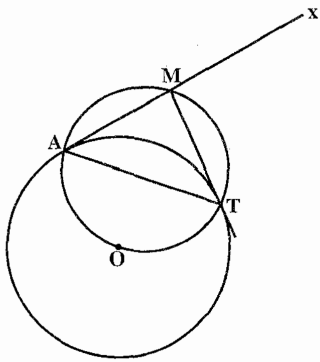
۵۱۵. مطلوب است، مکان هندسی مرکزهای دایره‌هایی که بر دایره و خط مفروضی مماس باشند (خط با دایره نقطهٔ مشترکی ندارد).

۵. ۳. ۳. ۱. ۵. یک دایره، یک خط مماس بر دایره

۵۱۶. دایرهٔ C و خط L مماس بر آن و نقطهٔ M واقع بر L در یک صفحه مفروضند. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند P را پیدا کنید که در شرایط زیر صدق کند:
دو نقطهٔ Q و R روی مماس L وجود داشته باشند که نقطهٔ M وسط پاره‌خط QR بوده و دایرهٔ C دایرهٔ محاطی داخلی مثلث PQR باشد.

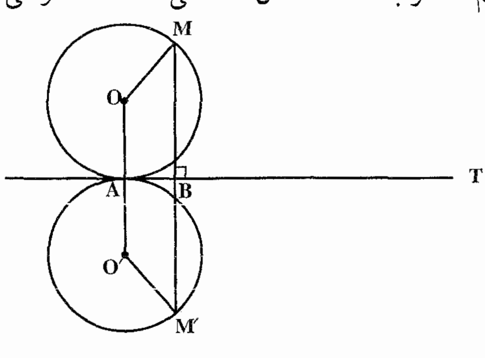
سی‌وسومین المپیاد بین‌المللی ریاضی، مسکو، ۱۹۹۲

۵۱۷. نقطهٔ M روی نیمخط Ax مماس در نقطهٔ ثابت A بر دایرهٔ (O) تغییر مکان می‌دهد. از M مماس MT را بر دایره رسم می‌کنیم. مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AMT را تعیین کنید.

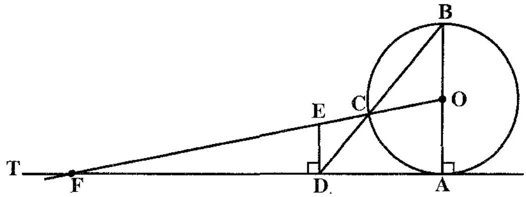


۵۱۸. خط D با دایرهٔ (O) به شعاع R مماس است. مطلوب است مکان هندسی مرکزهای دایره‌هایی که با خط D مماس بوده و بر دایرهٔ (O) عمود باشند.

۵۱۹. از نقطهٔ ثابت A واقع بر دایرهٔ (O) مماس T را بر دایره رسم می‌کنیم و از نقطهٔ دیگر M از دایره، عمود MB را بر مماس T فرود می‌آوریم و آن را به اندازهٔ $BM' = BM$ امتداد می‌دهیم. مطلوب است، مکان هندسی نقطهٔ M' وقتی نقطهٔ M روی دایره حرکت کند.



۵۲۰. دایرهٔ (O) به قطر AB داده شده است. از نقطه A مماس AT و از نقطه B قاطع BC بر دایره را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ D محل برخورد BC با AT خطی موازی AB رسم می‌نماییم تا OC را در نقطهٔ E قطع کند:



۱. مطلوب است، مکان هندسی نقطهٔ F مزدوج توافقی نقطهٔ C نسبت به نقطه‌های O و E.

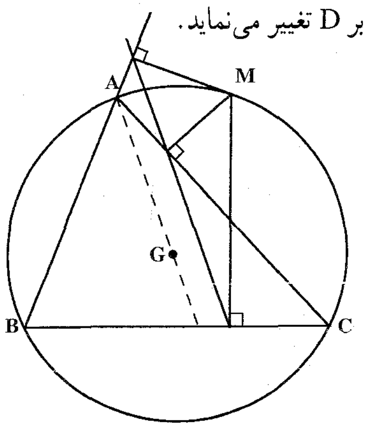
۲. قاطع BC را چنان رسم کنید تا DF = DA باشد.

۵۲۱. نقطهٔ ثابت A روی دایرهٔ به مرکز O قرار دارد. مماسی در نقطهٔ A بر دایره رسم می‌کنیم و از نقطهٔ متغیر B واقع بر این مماس، مماس دیگری مانند BC بر دایره می‌کشیم. مکان هندسی مرکزهای دایره‌های محیطی مثلث ABC را وقتی B، مماس مزبور را بپیماید، تعیین کنید.

۵۲۲. دایره‌ای به مرکز O را در نظر می‌گیریم و در یکی از نقطه‌های آن مانند B مماس Bx را بر آن رسم و فرض می‌کنیم نقطهٔ متحرکی مانند C دایرهٔ مزبور را بپیماید و فصل مشترک مماسی را که در نقطهٔ C بر دایره رسم می‌شود، با مماس Bx، نقطهٔ A می‌نامیم. مطلوب است، مکان هندسی نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای مثلث ABC (دایرهٔ محیطی مثلث ABC از نقطهٔ O می‌گذرد).

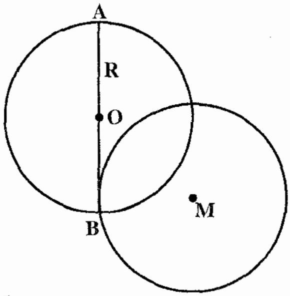
۵.۳.۳.۱.۶. یک دایره، یک خط قاطع

۵۲۳. دایرهٔ (O) و خط D متقاطع با دایره، مفروض هستند. از نقطهٔ غیر مشخص P واقع بر D مماسهای PT و PT′ را بر دایره رسم می‌نماییم. مطلوب است، مکان هندسی نقطهٔ H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث PTT′ وقتی که P بر D تغییر می‌نماید.



۵۲۴. در یک دایرهٔ معلوم بی‌شمار مثلث می‌توان محاط کرد به طوری که خط سمسون این مثلثها نسبت به یک نقطهٔ معلوم روی دایره، بر خطی مشخص منطبق باشد. مکان هندسی مرکزهای ثقل این مثلثها را پیدا کنید.

۵. ۳. ۳. ۱. ۷. یک دایره، یک قطر



۵۲۵. مکان هندسی مرکز دایره‌ای را که بر دایرهٔ مفروض به قطر AB عمود، و بر خط AB مماس است، تعیین کنید.

۵۲۶. مکان هندسی مرکزهای دایره‌هایی را که بر دایرهٔ مفروض $C(O,R)$ و یک قطر ثابت آن مانند AB مماس باشند، تعیین کنید.

۵۲۷. دایرهٔ S و خط راست l در یک صفحه داده شده است و می‌دانیم خط راست l، از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ S گذشته است. دایرهٔ S' را رسم می‌کنیم که از نقطهٔ O بگذرد و مرکز آن، روی خط راست l باشد. نقطهٔ تماس مماس مشترک دو دایرهٔ S و S' را با دایرهٔ S'، M می‌نامیم. مطلوب است، مکان هندسی نقطهٔ M.

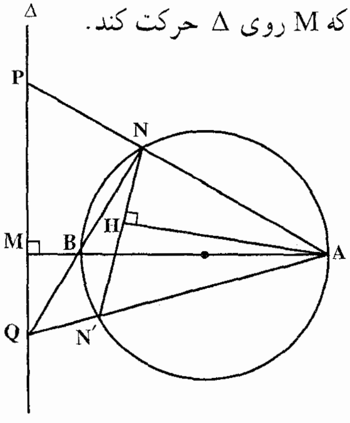
المپیادهای ریاضی سراسری روسیه، ۱۹۶۲

۵۲۸. پاره خط AB به طول ثابت، طوری تغییر مکان می‌دهد که A روی محیط دایره‌ای به مرکز O و به شعاع AB و نقطهٔ B روی خطی که از O می‌گذرد، حرکت می‌کند. ثابت کنید که یک نقطهٔ M از AB، یک بیضی را می‌پیماید.

۵. ۳. ۳. ۲. یک دایره، دو خط

۵. ۳. ۳. ۲. ۱. یک دایره، یک قطر، یک خط مماس

۵۲۹. دایرهٔ (C) به قطر ثابت AA' مفروض است. بر روی مماس Δ رسم شده از A بر دایره، نقطهٔ متغیر M را در نظر گرفته و محل تماس مماس رسم شده از M بر دایرهٔ (C) را P می‌نامیم. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ P وقتی که M روی Δ حرکت کند.



۵۳۰. دایره‌ای به قطر AB مفروض است. از نقطهٔ M واقع بر امتداد AB خط Δ را بر این قطر عمود می‌کنیم و از نقطهٔ غیر مشخص N واقع بر محیط دایره، به A و B وصل می‌کنیم تا Δ را بترتیب در P و Q قطع کند. اگر N' نقطهٔ دوم تقاطع AQ با دایره باشد، از A خطی بر NN' عمود می‌کنیم تا آن را در H قطع کند. مکان هندسی نقطهٔ H چیست؟

۵. ۳. ۳. ۲. ۲. یک دایره، دو راستای ثابت

۵۳۱. دایرهٔ محیطی و راستاهای دو ضلع یک مثلث متغیر ثابت است. مکان هندسی مرکزهای سه مماس این مثلث را بیابید.

۵. ۳. ۳. ۳. یک دایره، سه خط و بیشتر

۵.۳.۳.۳. ۱. یک دایره، یک قطر، دو خط مماس

۵۳۲. دایره‌ای به قطر AB مفروض است. از نقطهٔ غیر مشخص M' واقع بر روی دایره مماسی بر آن رسم می‌نماییم تا دو مماس در نقطه‌های A و B را در A' و B' قطع کند. مطلوب است، مکان هندسی نقطهٔ M محل تلاقی AB' و $A'B$.

۵۳۳. AB قطر دایرهٔ (O) و G یک نقطهٔ متحرک بر AB است. AA' عمود بر AB و مساوی AG رسم می‌شود. BB' عمود بر AB ، در همان طرف AB که AA' رسم شده است، مساوی BG رسم می‌شود. فرض کنید، O' ، نقطهٔ میانی پاره خط $A'B'$ باشد. وقتی G از A تا B حرکت کند، نقطهٔ O' :

الف) بر یک خط راست موازی AB حرکت می‌کند.

ب) ثابت می‌ماند.

ج) بر یک خط راست عمود بر AB حرکت می‌کند.

د) بر یک دایرهٔ کوچک، متقاطع با دایرهٔ داده شده حرکت می‌کند.

هـ) مسیری را می‌پیماید که نه دایره و نه خط مستقیم است.

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۷

۵. ۳. ۳. ۴. مسأله‌های ترکیبی

۵۳۴. دایره‌ای به قطر $AD = ۲R$ داده شده است. نقطهٔ B روی دایره جابه‌جا می‌شود. مماسهای در نقطه‌های A و B یکدیگر را در نقطهٔ I و DB خط AI را در نقطهٔ C قطع می‌کند.

۱. ثابت کنید که نقطهٔ I وسط پاره خط AC است.

۲. مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AIB را بیابید.

۳. مکان هندسی مرکز دایرهٔ محاطی مثلث AIB را تعیین کنید.

۴. زاویهٔ ADB را برابر ۳۰° اختیار می‌کنیم. اندازهٔ شعاع دایره‌های محاطی و محیطی مثلث AIB را بر حسب R تعیین کنید.

۵ . ۴ . دو دایرهٔ ثابت،...

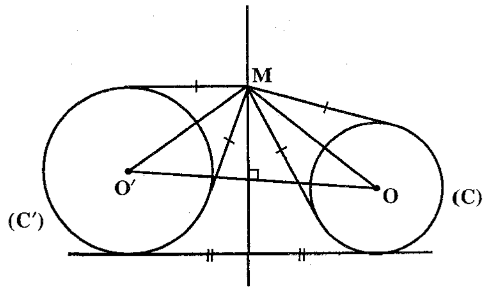
۵.۴.۱.دو دایره در حالت کلی

۵.۴.۱.۱. تنها دو دایرهٔ ثابت

۵۳۵. مکان هندسی نقطه‌های متساوی‌الفاصله از دو دایرهٔ داده شده را بیابید.

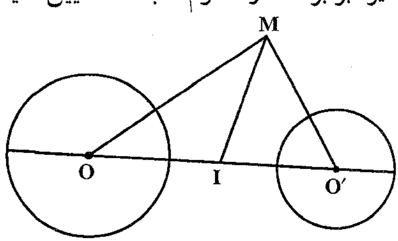
۵۳۶. مطلوب است، مکان هندسی نقطه‌ای که از آن نقطه دو دایرهٔ مفروض (C) و (C′) به یک زاویه رؤیت شوند.

۵۳۷. مکان هندسی نقطه‌هایی را که نسبت به دو دایرهٔ مفروض با مرکزهای متمایز دارای یک قوت باشند، تعیین کنید.

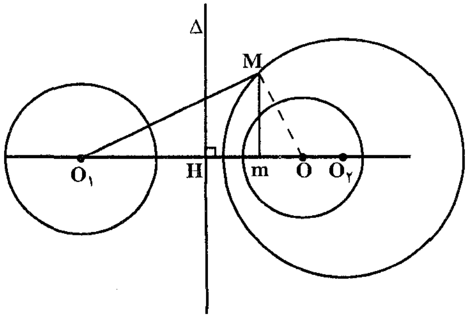


۵۳۸. دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ با مرکزهای متمایز مفروضند. مکان هندسی نقطهٔ M را که تفاضل قوت آن نسبت به این دو دایره برابر مقدار معلوم k باشد، تعیین کنید.

۵۳۹. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع قوتهای آن نسبت به دو دایرهٔ ثابت، مساوی مقدار ثابت k باشد.



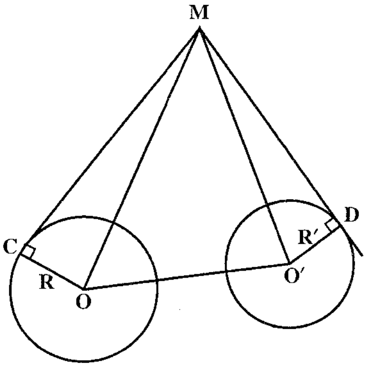
۵۴۰. مکان هندسی نقطه‌هایی که نسبت قوتشان نسبت به دو دایرهٔ ثابت برابر مقدار ثابت $k(k\neq 1)$ باشد، دایره‌ای از یک دستگاه دایره است که مرکزش خط‌المرکزین آن دو دایره را، به نسبت k تقسیم می‌کند.



۵۴۱. ثابت کنید، مکان هندسی نقطهٔ M به قسمی که p و q قوتهای آن نسبت به دو دایرهٔ مفروض در رابطهٔ $Ap + Bq + D = 0$ صدق کنند (A، B و D عددهای ثابتی هستند) یک دایره است.

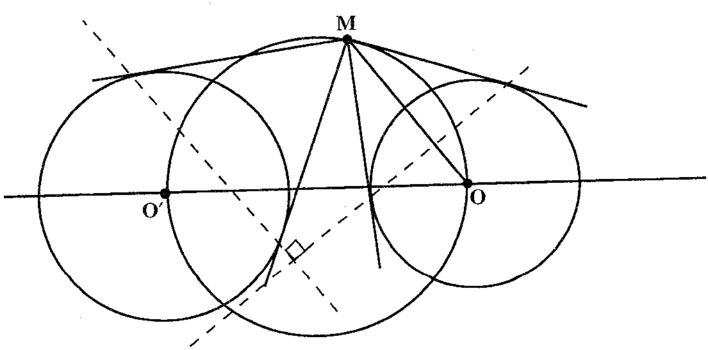
۵۴۲. دو دایره داده شده است. مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M را بیابید، به طوری که نسبت طول مماسهای رسم شده از M بر دایره‌های مفروض، برابر با مقدار ثابت k باشد.

۵۴۳. مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که تفاضل مربعهای طول دو مماس رسم شده از آن نقطه بر دو دایرهٔ (O,R) و (O',R') برابر مقدار ثابت k^2 باشد.



۵۴۴. از نقطهٔ I مرکز تجانس معکوس دو دایره قاطع $BCIC'B'$ را رسم می‌کنیم. نقطه‌های B و B' همچنین دو نقطهٔ C و C' متناظرند. اما دو نقطه B و C' همچنین نقطه‌های C و B' غیر متناظر هستند. مکان هندسی رأس A از مثلث قائم‌الزاویه BAC' که رأس آن یعنی A، روی نقطهٔ I تصویر می‌شود، کدام است؟

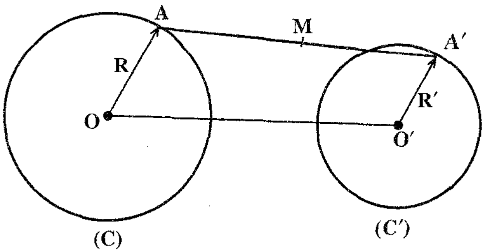
۵۴۵. نشان دهید مکان هندسی نقطه‌ای که خطهای قطبی آن نسبت به دو دایرهٔ مفروض بر هم عمودند، دایره‌ای است که خط‌المرکزین دو دایره، قطر آن است.



۵۴۶. مکان هندسی رأس زاویه‌های قائمهٔ کلیهٔ مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین را، که دو انتهای وترهایشان بر دو دایرهٔ مفروض واقعند، پیدا کنید.

۵۴۷. دو دایره و دو نقطهٔ A و B (یکی روی هر دایره) با فاصله‌های برابر از وسط پاره‌خطی که مرکزهای آنها را به هم وصل می‌کند، داده شده است. مکان هندسی وسط پاره‌خط AB را بیابید.

۵۴۸. دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مفروضند. دو شعاع OA و $O'A'$ را موازی یکدیگر و ممتد در یک جهت رسم می‌کنیم. مطلوب است، مکان هندسی نقطهٔ M وسط قطعه خط AA'، وقتی که امتداد مشترک دو شعاع مزبور تغییر کند.



۵۴۹. مکان هندسی مرکزهای دایره‌هایی که بر دو دایرهٔ مفروض عمود باشند، قسمتی از محور اصلی آن دو دایره است که در برون آن دو دایره قرار دارد.

۵۵۰. دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ به شعاعهای R و R' مفروضند. مکان هندسی مرکز دایره‌ای که محیط دایرهٔ (C) را نصف و بر دایرهٔ (C') عمود گردد، خطی است عمود بر خط‌المرکزین دو دایرهٔ (C) و (C').

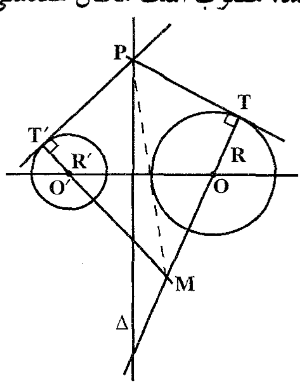
۵۵۱. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را که بر دو دایرهٔ مفروض مماسند، تعیین کنید.

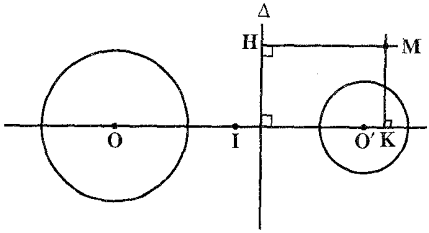
۵۵۲. مکان هندسی نقطه‌های تماس دایره‌هایی را بیابید که دو به دو بر هم مماسند و بر دو دایرهٔ ثابت نیز مماس می‌باشند.

۵ . ۴ . ۱ . ۲. دو دایره، محور اصلی

۵۵۳. از نقطهٔ P واقع بر محور اصلی دو دایرهٔ (O) و (O') دو قاطع PAB و $PA'B'$ را چنان رسم می‌کنیم که $A\hat{P}A' = \alpha$ و برابر مقدار ثابتی باشد، مطلوب است مکان هندسی مرکز دایرهٔ $ABB'A'$.

۵۵۴. از نقطهٔ P واقع بر محور اصلی دو دایرهٔ (O) و (O') و به شعاعهای R و R' مماسهای PT و PT' را بر آنها رسم می‌نماییم. مطلوب است، مکان هندسی نقطهٔ M محل تلاقی OT و $O'T'$ وقتی P بر محور اصلی دو دایره تغییر می‌نماید.





۵۵۵. دو دایرهٔ (O) و (O′) $(OO'=d)$ و به شعاعهای R و R′ و نقطهٔ اختیاری M در صفحهٔ آنها داده شده است. قوت نقطهٔ M را نسبت به دو دایره، به ترتیب P و P′ می‌نامیم. تصویر قائم نقطهٔ M را روی Δ که محور اصلی آنهاست H و وسط OO′ را I می‌نامیم:

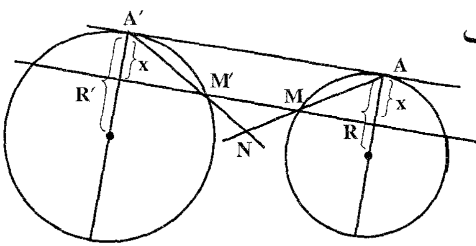
الف. درستی رابطه‌های زیر را ثابت کنید:

$$P+P'=2\overline{MI}^2+\frac{d^2}{2}-(R^2+R'^2) \tag{1}$$

$$4P.P'=(2\overline{MI}^2+\frac{d^2}{2}-R^2-R'^2)^2-4d^2.\overline{HM}^2 \tag{2}$$

ب. با فرض $R=R'$، مکان هندسی نقطهٔ M را طوری پیدا کنید که $P.P'=d^2.\overline{MK}^2$ باشد (K تصویر M روی OO′ است).

۵ . ۴ . ۱ . ۳. دو دایره، مماس مشترک



۵۵۶. خط AA′ مماس مشترک خارجی دو دایره است. اگر MM′ قاطع غیر مشخص موازی AA′ رسم شود و خط A′M و AM در نقطهٔ N متقاطع باشند، مکان هندسی نقطهٔ N را پیدا کنید.

۵۵۷. دو دایرهٔ (O) و (O′) و یکی از مماس مشترکهای این دو دایره که بر آن‌ها در نقطه‌های A و A′ مماس است، داده شده است. از نقطهٔ ثابت H واقع بر این مماس مشترک، قاطع دلخواه Δ را رسم می‌کنیم که این قاطع دایرهٔ (O) را در نقطه‌های B و C و دایرهٔ (O′) را در نقطه‌های B′ و C′ قطع می‌کند، مکان هندسی نقطه‌های برخورد AB و AC بترتیب با A′B′ و A′C′ را تعیین کنید.

۵ . ۴ . ۱ . ۴. دو دایره، یک خط یا یک راستای ثابت

۵۵۸. دو دایرهٔ ثابت در صفحه مفروضند. خطی متغیر موازی با خط‌المرکزین، دایره‌ها را در چهار نقطه قطع می‌کند. مطلوب است، مکان هندسی نقطه‌های تقاطع شعاعهای دایره‌هایی که بر این چهار نقطه می‌گذرند.

۵۵۹. دو دایرهٔ (O) و (O') و خط Δ عمود بر خط‌المرکزین آنها مفروضند. قطبیهای نقطهٔ P واقع بر Δ نسبت به دو دایره، یکدیگر را در Q قطع می‌کنند. مطلوب است، مکان هندسی Q وقتی P بر Δ تغییر می‌نماید.

۵ . ۴ . ۱ . ۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۶۰. به وسیلهٔ انعکاس دو دایرهٔ معلوم را به دو دایرهٔ متساوی تبدیل کنید. مکان قطب این انعکاس چیست؟

۵ . ۴ . ۱ . ۶. مسأله‌های ترکیبی

۵۶۱. ۱. مطلوب است تعیین مکان هندسی مرکزهای دایره‌هایی که محیطهای دو دایره را نصف کنند.

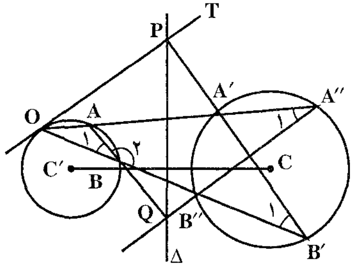
۲. دایره‌ای رسم کنید که محیطهای سه دایره را نصف کند.

۵۶۲. دو دایرهٔ متساوی (O) و (O') مفروضند. روی این دو دایره، از دو نقطهٔ مفروض A و A' در دو جهت مخالف، دو قوس متساوی AM و $A'M'$ را که دارای طول متغیرند، جدا می‌کنیم.

۱. مطلوب است مکان وسط قطعه خط MM'.

۲. ثابت کنید تصویر MM' روی این مکان، مقداری است، ثابت.

۵۶۳. دایره‌های ثابت (C) و (C') و نقطهٔ ثابت O بر دایرهٔ (C) مفروضند. از O مماس OT را بر دایرهٔ (C) رسم می‌کنیم، و وتر دلخواه و متغیر $A''B''$ را به موازات OT در دایرهٔ (C') رسم می‌نماییم. A'' و B'' را به O وصل می‌نماییم تا دایرهٔ (C') را در نقطه‌های دیگر A' و B' و دایرهٔ (C) را در A و B قطع نماید، ثابت کنید:



۱. AB پیوسته موازی $A'B'$ است.

۲. وقتی $A''B''$ به موازات OT تغییر می‌نماید، $A'B'$ از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۳. مکان هندسی نقطهٔ برخورد AB و $A''B''$ را به دست آورید.

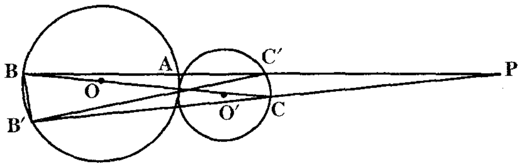
۵ . ۴ . ۲. دو دایرهٔ متخارج

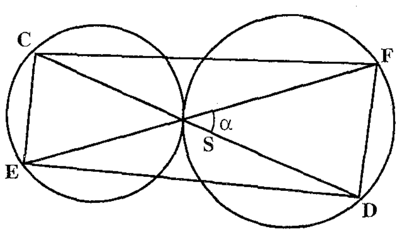
۵۶۴. مطلوب است مکان هندسی مرکزهای دایره‌های مماس بر دو دایرهٔ متخارج.

۵ . ۴ . ۳. دو دایرهٔ مماس برون

۵.۴.۳.۱. تنها دو دایرهٔ مماس برون

۵۶۵. دو دایرهٔ (O) و (O′)، به قطرهای $AB = 2R$ و $AC = 2R'$ مماس برون در نقطهٔ A مفروضند. از نقطهٔ A قاطع متغیری رسم می‌کنیم تا دایره‌های (O) و (O′) را بترتیب در B′ و C′ قطع نماید. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ P محل تلاقی BC′ و B′C .





۵۶۶. دو دایرهٔ (A) و (B) در نقطهٔ S مماس برون هستند. از نقطهٔ S دو قاطع CSD و ESF را رسم می‌کنیم که با هم زاویهٔ ثابت α را می‌سازند. مکان هندسی وسط قاعده‌های ذوزنقه CFDE را تعیین کنید.

۵۶۷. سه نقطهٔ C، A و B به همین ترتیب روی خطی واقعند. دایره‌های به قطر BA و AC را رسم می‌کنیم. قاطعی که از A می‌گذرد و دو دایره را در B′ و C′ قطع می‌کند. مکان نقطهٔ P فصل مشترک B′C و C′B را پیدا کنید.

۵۶۸. دو دایره در نقطهٔ A بر هم مماسند. خطی که از A می‌گذرد، برای دومین بار، این دایره‌ها را در نقطه‌های B و C، و خط دیگری، به همین منوال، دایره‌ها را در نقطه‌های B_1 و C_1 قطع می‌کند (B و B_1 بر یک دایره واقعند). مکان هندسی نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی مثلثهای AB_1C و ABC_1 را پیدا کنید.

۵۶۹. دو دایره در نقطهٔ A برهم مماس خارجند. از نقطه تماس آنها قاطع MM′ را با امتداد متغیر رسم می‌کنیم. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطه‌های P و Q رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاعی که روی MM′ ساخته می‌شود.

۵ . ۴ . ۳ . ۲. دو دایره، محور اصلی

۵۷۰. دو دایرهٔ مماس خارج مفروضند. از نقطهٔ M واقع بر محور اصلی آنها دو دایرهٔ مماس بر دو دایرهٔ مفروض می‌گذرد. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطه دیگر تقاطع این دو دایره، وقتی که M محور اصلی دو دایره را طی کند.

۵۷۱. دو دایرهٔ مماس خارج در نقطهٔ O و مماس بر خط D در نقطه‌های ثابت A و B را در نظر می‌گیریم. مکان هندسی نقطهٔ O را معین کنید.

۵ . ۴ . ۳ . ۳. مسأله‌های ترکیبی

۵۷۲. دو دایرهٔ (O) و (O′) به شعاعهای R و R′ در نقطهٔ A مماس خارجند. یک زاویهٔ قائمه حول رأسش نقطهٔ A دوران می‌کند. یک ضلع این زاویه دایرهٔ (O) را در نقطهٔ B و ضلع دیگر آن دایرهٔ (O′) را در نقطهٔ C قطع می‌کند.

۱. مستطیل BACM را رسم می‌کنیم. ثابت کنید که هر یک از ضلعهای MB و MC از یک نقطهٔ ثابت می‌گذرند.

۲. مکان هندسی نقطهٔ M را تعیین کنید.

۳. مکان هندسی نقطهٔ I وسط پاره‌خط BC را بیابید.

۴. ثابت کنید که خطهای مماس در نقطه‌های B و C بر دایره همواره متوازی‌اند.

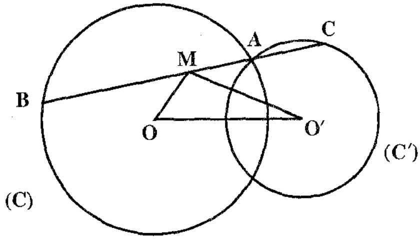
۵. در حالتی که BACM مربع است، اندازهٔ ضلعهایش را بر حسب R و R′ تعیین کنید.

۵ . ۴ . ۴. دو دایرهٔ متقاطع

۵ . ۴ . ۴ . ۱. تنها دو دایرهٔ متقاطع

۵۷۳. از نقطهٔ A محل برخورد دو دایره (O) و (O′) و به شعاعهای R و R′ قاطع متغیری رسم می‌کنیم و روی این قاطع دو پاره‌خط AN=AM را برابر نصف مجموع وترهای حاصل جدا می‌نماییم. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطه‌های M و N.

۵۷۴. دو دایره یکدیگر را در نقطهٔ A قطع کرده‌اند. از A قاطعی مرور می‌دهیم تا دایره را در B و C که در طرفین A قرار گرفته‌اند، قطع کند. روی خط قاطع در جهت وتر بزرگتر طول AM را مساوی تفاضل قطعات AC و AB جدا می‌کنیم. مطلوب است تعیین مکان نقطهٔ M وقتی که قاطع حول A دوران کند.



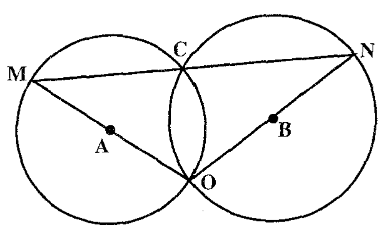
۵۷۵. از یک نقطهٔ برخورد دو دایره، یک قاطع در دو دایره رسم می‌کنیم. ثابت کنید مجموع قوتهای وسط این قاطع نسبت به دو دایره، مساوی صفر است. به کمک این خاصیت، مکان هندسی وسط قاطعی را که از یک نقطهٔ تقاطع دو دایرهٔ متقاطع می‌گذرد، تعیین کنید.

۵۷۶. از نقطهٔ A محل تلاقی دو دایرهٔ مفروض (O) و (O′) قاطع متغیری رسم می‌کنیم تا دو دایره را بترتیب در M و M′ قطع نماید. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ B واقع بر MM′ به طوری که داشته باشیم :

$$\frac{\overline{BM}}{\overline{BM'}} = k$$

۵۷۷. مطلوب است تعیین مکان هندسی نقطه‌هایی مانند M چنان که نسبت طولهای مماسهای رسم شده از M بر دو دایرهٔ متقاطع S_1 و S_2 برابر مقدار مفروضی باشد.

۵۷۸. از نقطهٔ C محل برخورد دو دایرهٔ متقاطع (A) و (B) قاطعی رسم می‌کنیم که دو دایره را بترتیب در M و N قطع کند. از M و N به مرکزهای دایره‌های متناظرشان وصل می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ برخورد خطهای MAO و NBO را تعیین کنید.

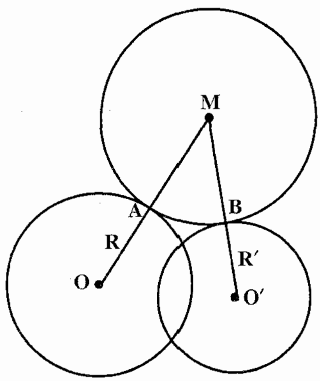


۵۷۹. دو دایرهٔ (O) و (O′) یکدیگر را در M قطع کرده‌اند. بر M دایرهٔ متغیری می‌گذرانیم که دایره‌های مفروض را در A و A′ قطع کند و MA′ و MA دایره‌های مفروض را بترتیب بار دیگر در B و B′ قطع کنند. مکان هندسی نقطهٔ دیگر برخورد دایره‌های محیطی مثلثهای MAA′ و MBB′ را به دست آورید.

۵۸۰. دو دایره در A و B متقاطعند. از A قاطعی متغیر می‌گذرد و دایره‌ها را غیر از A در نقطه‌های C و D قطع می‌کند. مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث BCD را پیدا کنید.

۵۸۱. دو دایرهٔ متقاطع مفروضند. مکان هندسی مرکزهای مستطیلهای با رأسهای واقع بر این دایره‌ها را بیابید.

۵۸۲. مکان هندسی مرکزهای دایره‌های مماس بر دو دایرهٔ متقاطع به مرکزهای O و ′O را تعیین کنید.



۵۸۳. وتر مشترک دو دایرهٔ متقاطع، مکان هندسی مرکز دایره‌ای است که محیط آن به وسیلهٔ دو دایره نصف می‌شود.

۵ . ۴ . ۴ . ۲. دو دایرهٔ متقاطع مساوی

۵۸۴. از نقطهٔ A محل برخورد دو دایرهٔ متساوی، قاطع متغیری رسم می‌کنیم که دو دایره را بار دیگر در B و C قطع کند. از B خط Bx را عمود بر BC و از C خطی به موازات خط‌المرکزین می‌کشیم تا Bx را در M قطع کند. مکان نقطهٔ M را وقتی که BC تغییر می‌کند، پیدا کنید.

۵۸۵. دو دایره، با شعاعهای برابر، در نقطه‌های A و B، یکدیگر را قطع کرده‌اند. خط راست دلخواهی که از نقطهٔ B می‌گذرد، دایره‌ها را در نقطه‌های دیگر X و Y قطع کرده است. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ وسط پاره‌خط راست XY.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۲

۵ . ۴ . ۴ . ۳. دو دایرهٔ عمود بر هم

۵۸۶. ثابت کنید اگر دو دایرهٔ (O) و (′O) بر یکدیگر عمود باشند، دایرهٔ به قطر ′OO مکان هندسی نقطه‌هایی است که مجموع قوت آنها نسبت به دو دایره، برابر با صفر است.

۵. ۴. ۴. ۴. مسأله‌های ترکیبی

۵۸۷. R و S دو دایره متقاطع هستند و M یکی از نقطه‌های تقاطع آنها است. l را خط دلخواهی می‌گیریم که از M بگذرد و دایره‌های R و S را در نقطه‌های A و B ببرد. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌های زیر وقتی l تغییر کند :

الف) نقطهٔ Q که پاره‌خط AB را به نسبت مفروض $AQ/QB = m/n$ تقسیم کند ؛

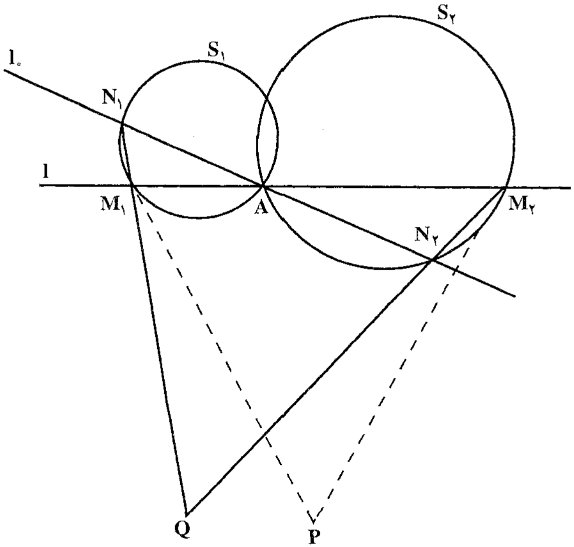
ب) رأس C از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC که روی پاره‌خط AB بنا شود ؛

ج) نقطهٔ P انتهای پاره‌خط OP که از نقطهٔ ثابت O مساوی و موازی با پاره‌خط AB و همجهت با آن رسم شود. (مطلوب است مکان هندسی انتهای بردارهای $\overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AB}$ که از نقطهٔ ثابت O رسم می‌شوند.)

۵۸۸. فرض می‌کنیم A یکی از نقطه‌های برخورد دو دایرهٔ S_1 و S_2 باشد. از A یک خط دلخواه l و یک خط ثابت l_0 را رسم می‌کنیم تا دایره‌های S_1 و S_2 را در نقطه‌های دیگر M_1 ، M_2 و N_1 ، N_2 ببرند ؛ M_1M_2P را مثلث متساوی‌الاضلاعی می‌گیریم که بر پاره‌خط M_1M_2 بنا شده است، و نقطهٔ برخورد خطهای M_1N_1 و M_2N_2 را Q می‌نامیم (شکل). ثابت کنید که وقتی خط l حول A دوران کند.

الف) رأس P از مثلث M_1M_2P یک دایرهٔ Σ را می‌پیماید و ضلعهای M_1P و M_2P حول نقطه‌های ثابتی مانند I_1 و I_2 دوران می‌کنند (M_1P از I_1 می‌گذرد، و M_2P از I_2) ؛

ب) Q دایرهٔ Γ را می‌پیماید. پیدا کنید مکان هندسی مرکز دایرهٔ Γ را وقتی خط مفروض l_0 وضعیتهای مختلفی اختیار کند.



۵۸۹. دو دایره، که فاصلهٔ بین مرکزهای آنها برابر d است، در نقطه‌های P و Q یکدیگر را قطع کرده‌اند. از نقطه‌های P، Q و نقطهٔ A واقع بر محیط دایرهٔ اول (A، غیر از P و Q است)، خطهای راستی گذرانده‌ایم که دایرهٔ دوم را، بترتیب، در نقطه‌های B و C قطع کرده‌اند.

a) ثابت کنید، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC برابر است با d.

b) اگر نقطهٔ A روی محیط دایرهٔ اول حرکت کند، مرکزهای دایره‌های محیطی مثلث ABC، چه مجموعه‌ای را تشکیل می‌دهند؟

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۶

۵۹۰. فرض کنید A یکی از دو نقطهٔ برخورد دو دایرهٔ مفروض باشد ؛ از نقطهٔ برخورد دیگر، خط دلخواهی رسم می‌شود که دایرهٔ اول را در نقطهٔ B، و دایرهٔ دیگر را در نقطهٔ C قطع می‌کند، هر دو نقطه، از نقطه‌های مشترک این دایره‌ها متمایزند. مطلوب است مکان هندسی :

الف. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC ؛

ب. مرکز ثقل مثلث ABC ؛

ج. محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC.

۵۹۱. ۱. چه رابطه‌ای باید بین d، خط‌المرکزین و r ، ′r شعاع دو دایرهٔ (C) و (′C) برقرار باشد تا این که دایرهٔ (′C) دایرهٔ (C) را در یک قطر قطع کند؟

۲. مکان مرکزهای دایرهٔ (γ) را چنان تعیین کنید تا دو دایرهٔ (C) و (′C) را در قطرشان قطع کند.

۵ . ۴ . ۵. دو دایرهٔ مماس درون

۵۹۲. دو دایره در نقطهٔ A مماس داخلی هستند. AB و AC قطرهای آنها می‌باشند از A خطی با امتداد متغیر رسم می‌کنیم که دایره‌ها را در ′B و ′C قطع می‌کند. مکان نقطهٔ M محل تلاقی ′BC و ′CB را به دست آورید.

۵۹۳. دو دایره که با هم در نقطهٔ A مماس درونی‌اند، داده شده است. مماسی بر دایرهٔ کوچکتر، دایرهٔ بزرگتر را در نقطه‌های B و C قطع می‌کند. مکان هندسی مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC را پیدا کنید.

۵ . ۴ . ۶. دو دایرهٔ یکی درون دیگری (متداخل)

۵۹۴. دو دایره متداخل مفروض است، مطلوب است مکان هندسی مرکزهای دایره‌های مماس بر این دو دایره.

۵۹۵. دو دایره متداخل $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مفروضند. مکان هندسی مرکز دایره‌ای که بر دو دایره C و C' مماس باشند، کدام است؟

الف) یک خط راست

ب) یک دایره

ج) یک بیضی

د) دو بیضی

دومین دوره المپیادهای ریاضی ایران، اصفهان

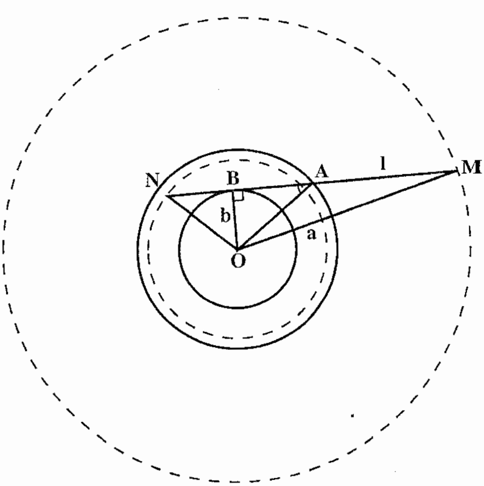
۵۹۶. بین دو دایرهٔ A و B که هم مرکز نیستند و نقطهٔ مشترکی ندارند، دایرهٔ (C) را مماس بر دو دایرهٔ A و B رسم می‌کنیم. سپس دایرهٔ D را مماس بر دایرهٔ C و دایره‌های A و B رسم می‌کنیم و بالاخره یک دایرهٔ E را مماس بر D و A و B و ...

۱. ثابت کنید نقطه‌های تماس دایره‌های C ، D ، E و... روی یک دایره‌اند.

۲. اگر سری دایره‌های بالا با دایرهٔ N به شعاع n کامل شود، ثابت کنید، یک سری جدید دایره‌ها با شروع از یک نقطهٔ دلخواه، بعد از n دایرهٔ پیاپی، کامل خواهند شد.

۵ . ۴ . ۷. دو دایرهٔ هم مرکز

۵۹۷. دو دایرهٔ هم مرکز مفروضند. A نقطه‌ای روی دایرهٔ بزرگتر است، و B و C نقطه‌های برخورد دایرهٔ بزرگتر با مماس متغیر BC بر دایرهٔ کوچکترند. مکان هندسی مرکز ارتفاعی مثلث متغیر ABC را تعیین کنید.



۵۹۸. دو دایرهٔ هم مرکز به مرکز مشترک O داده شده‌اند. از نقطهٔ B واقع بر دایرهٔ درونی مماسی بر آن رسم می‌کنیم تا دایرهٔ دیگر را در نقطهٔ A قطع کند. روی این خط مماس از نقطهٔ A پاره‌خطهای $AM=AN$ را به طول معین l جدا می‌کنیم. مکان هندسی انتهای این پاره‌خطها یعنی M و N را تعیین کنید.

۵۹۹. مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که نسبت قوتهای آن نسبت به دو دایرهٔ هم مرکز به مرکز O ، برابر با مقدار معلوم k $(k \neq 0)$ باشد.

۶۰۰. دو دایرهٔ متحدالمرکز به شعاعهای R و r $(R > r)$ در صفحه را در نظر می‌گیریم. فرض کنید P نقطه‌ای ثابت روی دایرهٔ کوچک و B نقطهٔ متغیری روی دایرهٔ بزرگ باشد. پاره‌خط BP دایرهٔ بزرگ را دوباره در C قطع می‌کند. از P عمودی بر BP رسم کنید تا دایرهٔ کوچک را در A قطع کند (اگر این عمود بر دایرهٔ کوچک در P مماس باشد، آن‌گاه A=P).

الف. تمام مقدارهای ممکن $AB^2 + BC^2 + CA^2$ را زمانی که B روی دایرهٔ بزرگ تغییر نماید، تعیین کنید.

ب. مکان هندسی نقطهٔ وسط پاره‌خط AB را به دست آورید.

بیست و نهمین المپیاد بین‌المللی ریاضی، استرالیا، ۱۹۸۸

۵ . ۵. سه دایرهٔ ثابت و بیشتر

۵.۵ .۱. سه دایره

۶۰۱. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌هایی که قطبیهای آنها، نسبت به سه دایره که مرکزهایشان همخط نیستند، سه خط همرس باشند، همچنین مکان هندسی نقطه‌های همرسی قطبیهای آنها را بیابید.

۶۰۲. مکان هندسی نقطهٔ P را که مماسهای PA ، PB و PC رسم شده از آن نقطه، بر سه دایرهٔ هم محور مفروض، در رابطهٔ $PA.PB:PC^2 = k$ صدق می‌کنند، به دست آورید.

۵ .۵ .۲. n دایره

۶۰۳. مکان هندسی نقطه‌هایی که بین قوت آنها نسبت به n دایره، رابطهٔ خطی برقرار باشد، چیست؟

۵ .۵ .۳.دسته دایره

۶۰۴. یک دسته دایره مفروض است. ثابت کنید نسبت قوتهای یک نقطهٔ متغیر روی یک دایرهٔ این دسته دایره، نسبت به دو دایرهٔ دیگر این دسته دایره، مقداری ثابت است و بعکس، مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت قوتهایش نسبت به دو دایرهٔ مفروض با در نظر گرفتن اندازه و علامت مقدار ثابتی باشد، دایره‌ای هم محور با دایره‌های مفروض است.

بخش ۶

• مقطعهای مخروطی

۳.۶. سهمی

۱.۳.۶. نقطه‌های ثابت

۱.۱.۳.۶. رأس، یک نقطه

۲.۳.۶. خطهای ثابت

۱.۲.۳.۶. خط هادی، خط مماس

۲.۲.۳.۶. سه‌خط مماس

۳.۳.۶. خطهای ثابت، نقطه‌های ثابت

۱.۳.۳.۶. خط هادی، یک نقطه

۲.۳.۳.۶. خط مماس، رأس

۳.۳.۳.۶. یک خط، دو نقطه

۴.۳.۳.۶. دو خط، یک نقطه

۴.۳.۶. سهمی ثابت، ...

۱.۴.۳.۶. تنها یک سهمی ثابت

۲.۴.۳.۶. یک سهمی ثابت، نقطه‌های ثابت

۱.۲.۴.۳.۶. تنها یک سهمی، رأس

۲.۲.۴.۳.۶. یک سهمی ثابت، کانون

۳.۴.۳.۶. یک سهمی ثابت، خطهای ثابت

۱.۳.۴.۳.۶. یک سهمی، یک خط

۲.۳.۴.۳.۶. یک سهمی، یک راستا موازی محور

۳.۳.۴.۳.۶. یک سهمی، محور، خط مماس در رأس

۴.۳.۴.۳.۶. یک سهمی، دوخط مماس

۵.۳.۴.۳.۶. یک سهمی، کانون، هادی، یک خط عمود برمحور

۵.۳.۶. دو سهمی ثابت

۶.۳.۶. مسأله‌های ترکیبی

۴.۶. مقطعهای مخروطی به‌طور کلی

۱.۴.۶. خط هادی، دو نقطه

۲.۴.۶. دو خط هادی، یک نقطه

۳.۴.۶. یک خط هادی، یک خط مماس

۴.۴.۶. سه خط

۵.۴.۶. مثلث

۶.۴.۶. چند ضلعی

۱.۶.۴.۶. مستطیل

۷.۴.۶. دایره، خط، خط هادی

۸.۴.۶. هذلولی، مرکز، رأس

۵.۶. شکل‌ها به‌طور کلی

بخش ۶. مقطعهای مخروطی

۱.۶. بیضی

۱.۱.۶. نقطه‌های ثابت

۶۰۵. از یک بیضی، یک نقطه و مرکز دایرهٔ اصلی آن در دست است. مکان کانونهای آن را بیابید.

۲.۱.۶. خطهای ثابت، نقطه‌های ثابت

۱.۲.۱.۶. یک خط مماس، یک کانون

۶۰۶. بیضیهایی را که دارای یک کانون مشترک می‌باشند و بعلاوه طول قطر بزرگشان باهم مساوی است و بر یک خط مفروض مماسند، درنظر می‌گیریم. مطلوب است تعیین مکان هندسی مرکزهای این بیضیها.

۲.۲.۱.۶. محور کانونی، سه‌نقطه

۶۰۷. بر روی خط XY سه نقطهٔ F، ′F و P (P خارج قطعه خط ′FF است) را درنظر می‌گیریم. از نقطهٔ P مماسهایی بر بیضیهای به کانونهای F و ′F رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطه‌های تماس را بیابید.

۳.۲.۱.۶. دو خط مماس، یک کانون

۶۰۸. بیضی به کانون F و مماس بر دو خط T و ′T مفروض است. مکان مرکز این بیضی را پیدا کنید.

۴.۲.۱.۶. دو خط مماس، دو نقطه

۶۰۹. مکان هندسی مرکز بیضیهایی را که در دو نقطهٔ معلوم M و N بر دو خط مماسند، تعیین کنید. همچنین مکان هندسی مرکز و کانون F بیضیهایی را که بر دو خط داده شده مماسند و کانون دیگرشان ′F ثابت است، تعیین کنید.

۳.۱.۶. یک زاویهٔ ثابت، ۲a و ۲b

۶۱۰. مطلوب است مکان هندسی مرکزهای بیضیهای مساوی با یک بیضی مفروض به طریقی که همواره بر دو ضلع زاویه قائمه معلوم XOY مماس باقی بمانند.

۴.۱.۶. خطهای ثابت، دایره‌های ثابت

۱.۴.۱.۶. یک خط مماس، یک دایره

۶۱۱. یک خط و یک دایره ثابت مماس برهم مفروضند؛ یک بیضی مماس بر این خط را طوری درنظر می‌گیریم که کانونهایش دو نقطه متقاطر متغیر از دایره باشند. مطلوب است: مکان دو انتهای قطر کوچکتر این بیضی.

۲.۴.۱.۶. یک خط مماس، یک دایرهٔ هادی

۶۱۲. یک دایرهٔ هادی و یک مماس از یک بیضی در دست است. مطلوب است مکان هندسی کانون دیگر.

۵.۱.۶. بیضی ثابت،...

۱.۵.۱.۶. تنها یک بیضی ثابت

۶۱۳. مطلوب است مکان هندسی نقطه‌هایی که از آن نقطه‌ها بتوان دو مماس عمود برهم بر یک بیضی رسم کرد.

۱.۱.۵.۱.۶. یک بیضی ثابت، اندازهٔ یک زاویه

۶۱۴. مکان هندسی نقطهٔ M رأس زاویه‌ای ثابت برابر α را به‌دست آورید که یک ضلع آن از کانون F یک بیضی می‌گذرد و ضلع دیگر آن بر بیضی مماس است.

۶۱۵. مکان هندسی نقطه‌های لوموان یک مثلث قائم‌الزاویه را بیابید که وترش از نظر طول و وضع، ثابت است.

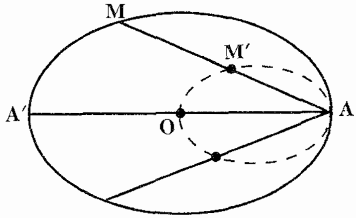
۲.۱.۵.۱.۶. یک بیضی ثابت، نقطه‌های ثابت

۱.۲.۱.۵.۱.۶. یک بیضی، کانونها

۶۱۶. اگر M نقطه‌ای معین از بیضی به کانونهای F و F' باشد، مطلوب است تعیین مکان هندسی مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث MFF'.

۶۱۷. بیضی به کانونهای F و F′ مفروض است، دو قطعه خط موازی و متحدالجهت FM و F′M′ را محدود به محیط بیضی رسم نموده ؛ در M مماس بر بیضی رسم می‌کنیم. ثابت کنید این مماس بر نیمساز زاویهٔ MF′M′ عمود است و نیز مطلوب است مکان هندسی نقطه تلاقی مماسهای بر بیضی در نقطه‌های M و M′ وقتی که امتدادهای دو خط موازی FM و F′M′ تغییر کنند.

۶۱۸. نقطهٔ M بیضی به کانونهای F و F′ را می‌پیماید. عمودی که از مرکز O به مماس نقطهٔ M فرود می‌آید، MF را در P و MF′ را در P′ قطع می‌کند. مکان هندسی نقطه‌هایP و P′ را تعیین کنید.



۶.۱.۵.۱.۲.۲. یک بیضی، رأسها

۶۱۹. مکان هندسی وسطهای وترهایی از بیضی را که در یک رأس بیضی همرسند، تعیین کنید.

۶۲۰. نقطهٔ M از یک بیضی را به دو انتهای قطر بزرگ AA′ وصل می‌کنیم. از A و A′ دو عمود بر AM و A′M اخراج می‌کنیم. اگر M′ محل تقاطع این دو خط باشد، مکان هندسی M′ را بیابید.

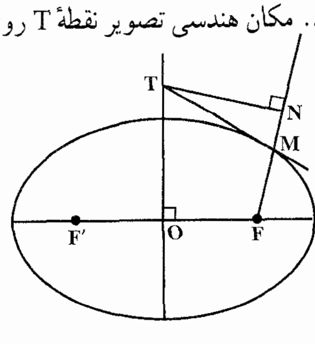
۶۲۱. دو رأس A و A′ نظیر محور کانونی بیضی مفروض را به نقطهٔ متحرک M واقع بر محیط بیضی وصل می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث AA′M را پیدا کنید.

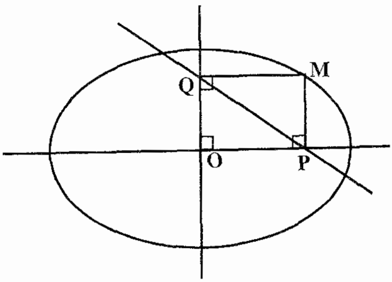
۶.۱.۵.۱.۳. یک بیضی ثابت، خطهای ثابت

۶.۱.۵.۱.۳.۱. یک بیضی، محورهای بیضی

۶۲۲. از نقطهٔ M واقع بر یک بیضی مماس MT را بر آن رسم می‌کنیم که قطر کوچک بیضی را در نقطهٔ T قطع می‌کند. مکان هندسی تصویر نقطهٔ T روی شعاع حامل FM را تعیین کنید.

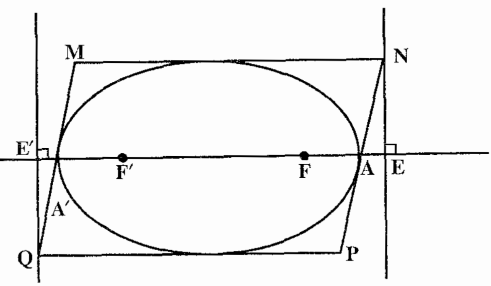
مسأله‌ای از اشتینر





۶۲۳. از نقطهٔ M واقع بر یک بیضی به مرکز O، دو عمود بر محورهای بیضی رسم می‌کنیم. ثابت کنید، خطی که نقطه‌های P و Q پای این عمودها را به‌هم وصل می‌کند، از یک نقطهٔ ثابت N می‌گذرد و مکان هندسی نقطهٔ N وقتی نقطهٔ M منحنی داده شده را بپیماید، یک بیضی به مرکز O است.

۶.۱.۵.۱.۳.۲. یک بیضی، خطهای هادی



۶۲۴. هنگامی که یک رأس متوازی الاضلاعی محیط بر یک بیضی، یکی از خطهای هادی بیضی را بپیماید، ثابت کنید، رأس مقابل آن خط هادی دیگر بیضی را طی می‌کند و دو رأس دیگر متوازی‌الاضلاع دایرهٔ اصلی بیضی را می‌پیمایند.

۶.۱.۵.۱.۳.۳. یک بیضی، خطهای مماس

۶۲۵. از دو رأس A و ′A قطر بزرگ یک بیضی دو مماس بر منحنی رسم می‌کنیم، یک مماس غیر مشخص دیگر بر این بیضی دو مماس را در M و ′M قطع می‌کند. فرض می‌کنیم تصویر ′M روی OM (O مرکز بیضی است) نقطهٔ P باشد. ثابت کنید مکان نقطهٔ P دایره‌ای است گذرنده بر O .

۶.۱.۵.۱.۳.۴. یک بیضی، راستای ثابت

۶۲۶. مکان هندسی وسطهای وترهایی از بیضی که باهم موازی‌اند، قطری از بیضی است. مکان هندسی وسطهای وترهایی از بیضی را که با محور کانونی (ناکانونی) بیضی موازی‌اند، محور ناکانونی (محور کانونی) بیضی است.

۶.۱.۵.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶۲۷. از یک کانون بیضی خطی رسم می‌کنیم به‌طوری که هریک از مماسهای رسم شده بر یک بیضی را تحت زاویه α قطع کند (α مقدار معلوم است). ثابت کنید مکان هندسی نقطهٔ تلاقی این خط با مماس، دایره‌ای است که در نقطه‌های مشترک با بیضی، بر بیضی مماس است.

۶.۱.۵.۲.دو بیضی ثابت

۶۲۸. دو بیضی که دارای کانونهای مشترک می‌باشند، مفروضند. زاویه قائمه‌ای را درنظر می‌گیریم که یک ضلع آن بر یکی از این بیضیها و ضلع دیگرش بر بیضی دیگر مماس باشد. مکان هندسی رأس زاویهٔ قائمه را پیدا کنید.

۶۲۹. دو بیضی مساوی که محورهای بزرگ آنها بر یک امتدادند و در یک رأس مماسند مفروضند یکی از بیضیها را روی دیگری می‌غلتانیم. مکان هندسی کانونهای بیضی متحرک را پیدا کنید.

۶.۲. هذلولی

۶.۲.۱. نقطه‌های ثابت

۶.۲.۱.۱.یک کانون، دو نقطه

۶۳۰. یک کانون از هذلولی ثابت است و این هذلولی از دو نقطهٔ ثابت می‌گذرد. مکان هندسی کانون دیگر و مرکز آن را پیدا کنید.

۶.۲.۲. خطهای ثابت

۶.۲.۲.۱.یک مجانب، یک خط هادی

۶۳۱. مطلوب است تعیین مکان کانونها و رأسهای هذلولیهایی که یک مجانب A و یک هادی D از آنها معلوم باشد.

۶.۲.۳. خطهای ثابت، نقطه‌های ثابت

۶.۲.۳.۱.محور کانونی، سه نقطه

۶۳۲. روی خط راست XY سه نقطه F ، F′ و P(P بین F و F′) مفروضند. هذلولی به کانونهایF و F′ را درنظر می‌گیریم از نقطه P مماسهایی بر این هذلولی رسم می‌کنیم؛ مطلوب است مکان نقطه تماس این مماسها.

۶.۲.۳.۲.دو خط مماس، یک کانون

۶۳۳. دو خط ثابت همواره بر یک هذلولی که یک کانونش معلوم است، مماس هستند. مکان کانون دیگر هذلولی چیست؟

۶.۲.۳.۳.دو مجانب، دو نقطه

۶۳۴. مطلوب است مکان هندسی مرکزهای هذلولیهایی که از دو نقطه ثابت مفروض گذشته و مجانبهایشان موازی امتدادهای معلومی باشند.

۶.۲.۳.۴.محور تقارن، یک نقطه

۶۳۵. مطلوب است مکان هندسی رأسهای هذلولیهای متساوی‌الساقین، که از نقطهٔ معلوم M گذشته و محور تقارن غیر افقی آنها خط معلوم XY باشد.

۶.۲.۴. دایره‌های ثابت، نقطه‌های ثابت

۶.۲.۴.۱.دایرهٔ اصلی، یک نقطه

۶۳۶. مکان کانونهای یک هذلولی در صورتی که دایرهٔ اصلی (O) و یک نقطه M از آن داده شده باشند، چیست؟

۶.۲.۵. هذلولی ثابت،...

۶.۲.۵.۱. تنها یک هذلولی ثابت

۶۳۷. مکان هندسی نقطه‌ای که از آن نقطه می‌توان دو مماس عمود بر هم بر یک هذلولی رسم کرد، دایره‌ای است به مرکز هذلولی و به شعاع $\sqrt{a^2 - b^2}$، در صورتی که $a \geq b$ باشد. (دایرهٔ مونژ)

۶.۲.۵.۲. یک هذلولی ثابت، یک نقطه

۶۳۸. نقطهٔ A را روی یک هذلولی درنظر می‌گیریم. قاطع متغیری از A رسم می‌کنیم. محل تلاقی این قاطع با منحنی و یکی از مجانبهای آن Ox بترتیب M و N می‌باشد. مکان نقطهٔ P قرینهٔ N نسبت به M چیست؟

۶.۲.۶. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶۳۹. مکان رأس یک زاویهٔ قائمه که ضلعهایش بترتیب، مماس بر یک بیضی و یک هذلولی همکانون باشد، چیست؟

۶.۲.۷. مسأله‌های ترکیبی

۶۴۰. خط غیرمشخصی هذلولی را در A و ′A و مجانبهایش را در B و ′B قطع می‌کند، ثابت کنید:

۱. وسطهای ′AA و ′BB برهم منطبق است.

۲. از نقطه M واقع بر منحنی مماسی برآن رسم می‌کنیم تا مجانبها را در Q و ′Q قطع کند، M وسط ′QQ است؟

۳. خطی موازی امتداد معین Δ ، هذلولی را در نقطه‌های K و ′K قطع می‌کند. مطلوب است مکان هندسی وسط پاره‌خط ′KK .

۶۴۱. هذلولیهای متساوی‌الساقین متغیر را درنظر می‌گیریم که یک کانون F دارند و خطهای هادی نظیر این کانون از نقطهٔ معلوم A می‌گذرند.

۱. مطلوب است تعیین مکان مرکز و کانون دیگر ؛

۲. ثابت کنید که خطهای هادی دوم نیز از نقطه ثابتی می‌گذرند.

۶.۳. سهمی

۶.۳.۱. نقطه‌های ثابت

۶.۳.۱.۱.رأس، یک نقطه

۶۴۲. سهمی متغیر به رأس S و گذرنده بر نقطهٔ ثابت A مفروض است. مطلوب است تعیین مکان نقطهٔ تلاقی مماس در A و محور سهمی.

۶.۳.۲. خطهای ثابت

۶.۳.۲.۱. خط هادی، خط مماس

۶۴۳. مکان کانون سهمی را پیدا کنید که خط هادی آن ثابت است و بر یک خط ثابت مماس است.

۶۴۴. مکان هندسی رأس سهمیهایی را بیابید که یک خط هادی مشترک دارند و بر یک خط ثابت داده شده مماسند.

۶.۳.۲.۲. سه خط مماس

۶۴۵. مطلوب است مکان هندسی کانونهای سهمیهایی که بر سه خط مفروض مماس باشند.

۳.۳.۶. خطهای ثابت، نقطه‌های ثابت

۱.۳.۳.۶. خط هادی، یک نقطه

۶۴۶. مطلوب است مکان هندسی کانون و رأس سهمیهایی که هادی آنها خط مفروض D بوده و از نقطهٔ ثابت A بگذرند.

۲.۳.۳.۶. خط مماس، رأس

۶۴۷. مطلوب است مکان هندسی کانون سهمیهایی که دارای رأس S و خط مماس T باشند.

۳.۳.۳.۶. یک خط، دو نقطه

۶۴۸. مطلوب است تعیین مکان هندسی کانونهای سهمیهایی که از نقطه ثابت A گذشته و در رأس S بر خط مفروضی مماس باشند.

۶۴۹. مطلوب است مکان هندسی کانون سهمیهایی که بر دو نقطه ثابت بگذرند و هادیشان با امتداد مفروضی موازی باشد.

۴.۳.۳.۶. دو خط، یک نقطه

۶۵۰. مطلوب است مکان کانونهای سهمیهایی که بر خط راست مفروضی در یک نقطه معلوم مماس بوده و نیز بر یک خط راست دیگر مماس باشند.

۶۵۱. از یک سهمی خط مماس و نقطه تماس و امتداد محورش معلومند. مکان هندسی کانون آن را بیابید.

۴.۳.۶. سهمی ثابت، ...

۱.۴.۳.۶. تنها یک سهمی ثابت

۶۵۲. ثابت کنید خط هادی سهمی مکان هندسی نقطه‌هایی است که از آن نقطه‌ها دو مماس عمود برهم، می‌توان بر آن رسم کرد.

۶۵۳. مطلوب است مکان هندسی رأسهای زاویه‌های قائمه‌ای که ضلعهای آن نرمال (قائم) وارده بر یک سهمی مفروض باشند.

۶۵۴. مکان هندسی رأسهای زاویه‌های به اندازهٔ ثابت، محیط بر یک سهمی را به‌دست آورید.

۶۵۵. از نقطهٔ متغیر M واقع بر روی سهمی خط قائمی بر آن رسم می‌کنیم تا محور را در نقطه N قطع کند. مکان هندسی نقطه I وسط MN را معین کنید.

۶.۳.۴.۲. یک سهمی ثابت، نقطه‌های ثابت

۶.۳.۴.۲.۱. یک سهمی، رأس

۶۵۶. مکان هندسی وسط وترهایی از یک سهمی را که در نقطهٔ S، رأس سهمی همرسند، تعیین کنید.

۶.۳.۴.۲.۲. یک سهمی، کانون

۶۵۷. از کانون F یک سهمی ؛ خط راستی چنان رسم می‌کنیم که باخط مماس متغیری زاویهٔ معلومی (از حیث اندازه و جهت) بسازد. مطلوب است مکان هندسی رأس این زاویه و ثابت کنید که این مکان بر سهمی مزبور مماس است.

۶.۳.۴.۳. یک سهمی ثابت، خطهای ثابت

۶.۳.۴.۳.۱. یک سهمی، یک خط

۶۵۸. ثابت کنید در یک سهمی مکان هندسی وسطهای وترهای موازی با یک خط مفروض، نیمخطی است موازی با محور و برعکس.

۶.۳.۴.۳.۲. یک سهمی، یک راستا موازی محور

۶۵۹. از نقطهٔ متغیر P واقع بر خط راست xx' که به موازات محور سهمی می باشد مماسهای PM و PM' را بر سهمی رسم می‌کنیم. مطلوب است مکان مرکز دایرهٔ محیطی مثلث PMM' .

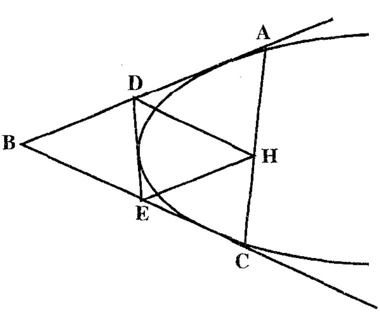
۶۶۰. اگر M نقطه غیر مشخصی از یک سهمی به کانون F و MD موازی با محور آن باشد، مطلوب است مکان مرکزهای دایره‌هایی که بر FM و MD و محور مماس باشند.

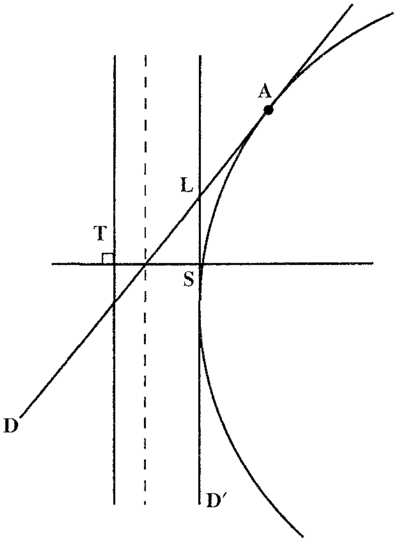
۶.۳.۴.۳.۳. یک سهمی، محور، مماس در رأس

۶۶۱. از نقطه متغیر M واقع بر سهمی، مماسی بر آن رسم می‌کنیم تا مماس در رأس S را در Q و محور را در T قطع کند. مکان هندسی نقطهٔ I وسط پاره‌خط QT را پیدا کنید.

۶.۳.۴.۳.۴. یک سهمی، دو خط مماس

۶۶۲. دو خط ثابت مماس بر یک سهمی داده شده‌اند. خط مماس متغیری بر سهمی دو خط مماس ثابت را در دو نقطه قطع می‌کند. از این دو نقطه، خطهایی موازی مماسهای ثابت رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطهٔ برخورد این دو خط را بیابید.





۶۶۳. خطهای D' و D_A واقع در یک صفحه همدیگر را در نقطهٔ L قطع می‌کنند. خط D' مماس بر رأس سهمی (S) و خط D_A مماس بر همین سهمی در نقطهٔ معلوم A است (A نقطه‌ای است از خط D_A غیر از L). مطلوب است:

۱. تعیین کانون F و خط هادی D از این سهمی. آیا F و D می‌توانند مواضع مختلف بگیرند؟

۲. اگر D' و A ثابت بمانند و D_A در حول A بچرخد ولی همواره با D' متقاطع باشد، ثابت کنید که نقطهٔ T محل تقاطع D_A و محور سهمی (P) بر روی خط D' موازی D حرکت خواهد کرد.

۶.۳.۴.۳.۵. یک سهمی، کانون، هادی، خط عمود بر محور

۶۶۴. سهمی به کانون F و هادی Δ مفروض است. خط D عمود بر محور سهمی را درنظر می‌گیریم. از نقطهٔ متغیر M واقع بر سهمی، مماسی بر آن رسم می‌کنیم تا D را در T قطع کند. از T عمودی بر FM فرود می‌آوریم و پای آن را P می‌نامیم. مکان نقطهٔ P چیست؟

۶.۳.۵. دو سهمی ثابت

۶۶۵. مکان هندسی رأسهای زاویه‌های قائمه‌ای که ضلعهای آنها بترتیب بر دو سهمی همکانون مفروض مماس باشد، پیدا کنید.

۶.۳.۶. مسأله‌های ترکیبی

۶۶۶. سهمیهایی که کانون آنها نقطه معلوم F و هادی آنها بر نقطهٔ مفروض A می‌گذرند، مفروضند. مطلوب است:

۱. رسم هادی این سهمیها که از نقطهٔ معلوم M می‌گذرند (بحث).

۲. مکان هندسی نقطه‌های M برای این که دو سهمی گذرنده بر آنها دارای محورهای عمود برهم باشند.

۶۶۷. دو محور عمود برهم Ox و Oy مفروض است. سهمیهای به رأس O و محور Ox را درنظر می‌گیریم؛ مطلوب است:
۱. مکان هندسی نقطه‌های تماس مماسهایی که بر این سهمیها به موازات خط معلوم Δ رسم می‌شوند.
۲. مکان هندسی نقطه‌های تماس مماسهایی که از نقطهٔ معلوم A روی Oy بر این سهمیها رسم می‌شوند.

۶۶۸. ۱. از نقطهٔ A واقع بر محور سهمی نرمالی بر آن رسم کنید.
۲. مطلوب است مکان هندسی پای این نرمال وقتی که سهمی طوری تغییر کند که کانون و محورش ثابت بمانند.

۴.۶. مقطعهای مخروطی به‌طور کلی

۱.۴.۶. خط هادی، دو نقطه

۶۶۹. مقاطع مخروطی را درنظر می‌گیریم که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرند و دارای یک هادی مشترک D می‌باشند. مکان هندسی F کانون نظیر هادی D را پیدا کنید و قسمتهایی از این مکان نظیر بیضی و هذلولی و سهمی را مشخص کنید.

۶۷۰. خط هادی و دو نقطه از یک مقطع مخروطی داده شده‌اند. مکان کانون آن را به‌دست آورید.

۲.۴.۶. دو خط هادی، یک نقطه

۶۷۱. مطلوب است مکان هندسی کانونهای مقطعهای مخروطی که دارای یک نقطه مشترک M و دو خط هادی موازی مفروض D و D' باشند.

۳.۴.۶. یک خط هادی، یک خط مماس

۶۷۲. از یک مقطع مخروطی یک خط هادی، یک مماس و خروج از مرکز داده شده‌اند، مکان هندسی کانون وابسته به آن هادی را به‌دست آورید.

۴.۴.۶. سه خط

۶۷۳. دو خط موازی D و D' و خط سوم T مفروضند. مکان هندسی کانونهای مقطعهای مخروطی را که D و D' هادیهای آن و T یک مماس آن باشد، چیست؟

۵.۴.۶. مثلث

۶۷۴. مکان هندسی کانونهای مقطعهای مخروطی مماس به ساقهای مساوی AB و AC در نقطه‌های B و C ، از یک مثلث معلوم متساوی‌الساقین ABC ‏(AB = AC)، از نیمساز زاویهٔ A و دایرهٔ محیطی مثلث تشکیل می‌شوند.

۶.۴.۶. چند ضلعی

۱.۶.۴.۶. مستطیل

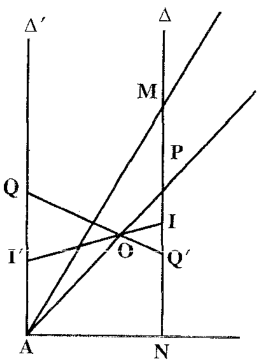
۶۷۵. مطلوب است مکان هندسی کانونهای مقطعهای مخروطی مماس بر چهار ضلع یک مستطیل، و یا امتداد آنها.

۷.۴.۶. دایره، خط، خط هادی

۶۷۶. مکان هندسی نقطه‌هایی را که نسبت فاصلهٔ آنها از یک دایره و از یک خط، برابر مقدار ثابت $\frac{m}{n}$ است، بیابید.

۸.۴.۶. هذلولی، مرکز، رأس

۶۷۷. مقطع مخروطی (C) به مرکز O و به رأس کانونی A مفروض است. از نقطهٔ P واقع بر OA قاطع متغیر Δ را رسم می‌کنیم تا (C) را در M و N قطع کند. هذلولی گذرنده بر P را (H) نامیده و مجانبهای آن را AM و AN می‌نامیم. مطلوب است مکان Q دومین نقطهٔ تلاقی Δ با هذلولی (H) وقتی که Δ حول (P) دوران کند.



۵.۶. شکلها به‌طور کلی

در این قسمت مسأله‌هایی مربوط به تعیین مکان هندسی در شکلها (به‌طور کلی) ارائه گردیده‌اند. شکل (F) می‌تواند هر شکل هندسی، به‌عنوان مثال، یک مثلث، یک دایره، یک بیضی و یا ... باشد.

۶۷۸. اگر یک شکل چنان تغییر مکان دهد که همواره متشابه با خودش باشد. یک نقطه‌اش ثابت باشد و یک نقطهٔ دیگرش خط ثابتی را بپیماید، مکان هندسی نقطه‌های دیگر این شکل، خطهای ثابتی خواهند بود که مجانس یکدیگرند و مرکز تجانس آنها نقطهٔ ثابت شکل است.

۶۷۹. در یک صفحه دو شکل (F) و (F′) مستقیماً متشابه‌اند. ثابت کنید که روی هر خط D از شکل F نقطه‌ای مانند M وجود دارد که متناظر آن M′ نیز روی D واقع است. مکان هندسی M و M′ را وقتی که خط D حول نقطهٔ ثابتی دوران کند، به‌دست آورید.

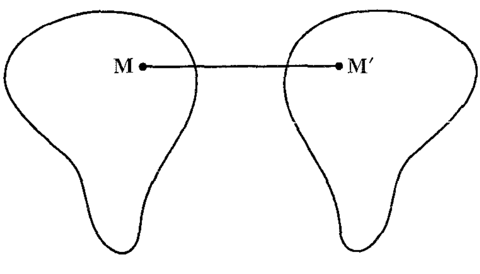
۶۸۰. هرگاه در صفحه‌ای دو نقطهٔ M و M′ نقطه‌های متناظر دو شکل (F) و (F′) که مستقیماً متشابه می‌باشند، درنظر بگیریم. مکان هندسی نقطهٔ M_1 که قطعه خط MM′ را به نسبت معلومی تقسیم کند، شکل (F_1) است که با دو شکل مفروض متشابه است.

۶۸۱. در صفحه‌ای دو شکل مستقیماً متشابه (F) و (F′) مفروضند. اگر از نقطهٔ ثابت O قطعه $O\mu$ را همسنگ با MM′ که دو نقطهٔ متناظر متغیر را به هم وصل می‌کند، رسم کنیم، مکان هندسی μ شکل (φ) است که مستقیماً متشابه با دو شکل مفروض است.

۶۸۲. در صفحه‌ای دو شکل مستقیماً متشابه (F) و (φ) و نقطهٔ ثابت ω مفروضند. M و μ دو نقطهٔ متناظر غیرمشخص می‌باشند. خط MM′ را همسنگ با $\omega\mu$ رسم می‌کنیم. ثابت کنید M′ شکل (F′) را که مستقیماً با دو شکل مفروض متشابه است، طی می‌کند.

۶۸۳. M ، M′ و M″ نقطه‌های متناظر سه شکل F ، F′ و F″ واقع در یک صفحه می‌باشند که مستقیماً متساوی‌اند. مکان هندسی M را چنان تعیین کنید تا مثلث MM′M″ قائم‌الزاویه شود. (به فرض شکلها دوبه‌دو دارای سه نقطه مضاعفند که در رأسهای یک مثلث واقعند.)

۶۸۴. دو شکل F و F′ به‌طور معکوس متساوی‌اند، M و M′ نقطه‌های متناظرند. مطلوب است تعیین مکان هندسی M وقتی که $MM' = l$ باشد. l طول معلومی است.



بخش ۷

• پوش

بخش ۷. پوش

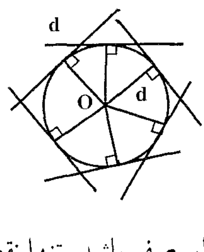
۱.۷. تعریف و قضیه

در برخی مسأله‌های هندسه، به تعیین وضع خطها یا منحنیهایی برخورد می‌شود که بایستی بر منحنی ثابتی مماس باقی بمانند. این قبیل مسأله‌ها به مسأله‌های تعیین پوش یا لفاف خطها و منحنیها مشهورند. در هندسهٔ متوسطه می‌توان این مسأله‌ها را به عنوان مکان هندسی خطها یا منحنیهای مذکور منظور داشت. به این معنی که هر منحنی را می‌توان به عنوان مکان هندسی نقطه‌های آن منحنی، یا مکان هندسی خطهای مماس بر آن منحنی (یا منحنیهای معلومی که بر این منحنی مماسند) تلقی کرد. در صورت اخیر معمولاً از هر نقطهٔ صفحه دو خط مماس (یا دو منحنی معلوم از منحنیهای یک دسته) بر منحنی مفروض، می‌توان رسم کرد. این دو مماس وقتی برهم منطبق می‌شوند که نقطهٔ مذکور بر روی منحنی مفروض قرار گیرد.

با ملاحظهٔ این نکته، تعیین مکان هندسی خطها (یا منحنیهای یک دسته) به تعیین مکان هندسی نقطه‌ها منجر می‌شود. راه حل، معمولاً به تعیین این نقطه معین بر روی خط مفروض (یا منحنی معلومی از دسته منحنیهای مشخص) منجر می‌گردد. برای روشنتر شدن تعریف پوش به مطالب زیر توجه کنید:

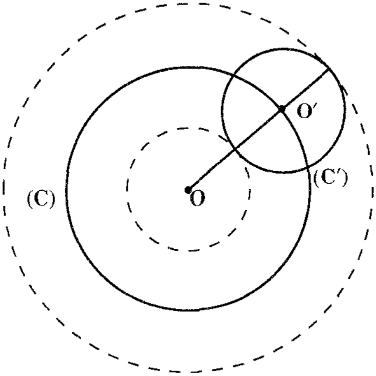
پوش یک خط راست. اگر خط راستی طبق قانون معینی تغییر مکان دهد، امّا در هر وضعیتش بر منحنی ثابتی مماس باشد، این منحنی ثابت را منحنی پوش، یا به‌طورکلی، پوش آن خط راست می‌نامند.

مثال. پوش خطهای متساوی‌الفاصله از یک نقطهٔ ثابت (خطهای راستی که از یک نقطهٔ ثابت به فاصلهٔ ثابتی قرار دارند) دایره‌ای است که آن نقطهٔ ثابت مرکز آن و آن فاصلهٔ ثابت، شعاع آن است.



نکته. در صورتی که فاصله برابر صفر باشد، تنها نقطهٔ ثابت، پوش جواب است.

پوش یک منحنی. پوش یک منحنی که طبق قانون معینی تغییر می‌کند، منحنی ثابتی است که در وضعیتهای مختلفی که آن منحنی متغیر دارد، بر آن مماس است.



مثال. پوش دایره‌های متغیری به شعاع ثابت R'، که مرکزشان روی دایرهٔ ثابت $C(O,R)$ حرکت می‌کند، دو دایرهٔ هم مرکز با دایرهٔ (C) و به شعاع $R+R'$ و $|R-R'|$ می‌باشند.

تعریف. به‌طورکلی هرگاه مجموعه‌ای از خطها یا منحنیها که طبق قانون معینی تغییر می‌کنند بر خط ثابتی یا منحنی ثابتی مماس باشند، این خط ثابت یا منحنی ثابت را **منحنی پوش** یا **لفاف** آن مجموعه خطها یا منحنیها می‌نامند.

مورد استفاده. همچنان که یک نقطه می‌تواند به وسیلهٔ نقطهٔ برخورد دو مکان هندسی مشخص شود، یک خط راست هم می‌تواند به وسیلهٔ دو پوش مشخص شود. زیرا این خط بر هر یک از دو منحنی مماس می‌باشد. بنابراین برای رسم یک خط، کافی است یک منحنی پوش و یک شرط داده شده را که آن خط به آن وابسته است، مشخص سازیم.

۲.۷. نقطه، خط، زاویه

۱.۲.۷. نقطه‌های ثابت

۱.۱.۲.۷. دو نقطه

۶۸۵. مطلوب است پوش خطهایی که مجموع فاصله‌های دو نقطهٔ ثابت از آنها مساوی مقدار ثابت k^2 باشد.

۶۸۶. حاصلضرب فاصله‌های خطی متغیر از دو نقطهٔ ثابت F و F' مقداری است ثابت. معلوم کنید که اوضاع مختلف این خطها بر بیضی یا هذلولی ثابتی مماس است.

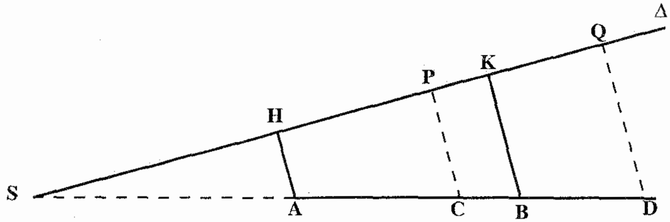
۶۸۷. مجموع مربعات فاصله‌های دو نقطهٔ ثابت A و B از خطهای متغیری ثابت می‌ماند. معلوم کنید که اوضاع مختلف این خطها همواره بر بیضی یا هذلولی ثابتی مماس می‌باشند.

۶۸۸. اختلاف مربعات فاصله‌های دو نقطهٔ ثابت از خطی متغیر، مقداری است ثابت. معلوم کنید که اوضاع مختلف این خطها، بر سهمی ثابتی مماس است.

۶۸۹. دو نقطهٔ ثابت A و B و دو عدد ثابت α و β مفروضند. خطهایی در نظر می‌گیریم که اگر فاصله‌های آنها از نقطه‌های A و B مرتباً AH و BK باشند، رابطهٔ زیر محقق باشد:

$$\alpha.\overline{AH}^2 - \beta.\overline{Bk}^2 = k^2$$

(k مقداری است ثابت). محقق کنید که اوضاع مختلف خط مفروض بر بیضی یا هذلولی ثابتی مماس می‌باشند (مگر این که $\alpha - \beta = 0$ باشد که در این صورت بیضی و هذلولی به سهمی بدل می‌شوند). α و β مثبت فرض شده‌اند.



۶۹۰. دو نقطهٔ ثابت A و B و دو عدد ثابت و مثبت α و β مفروضند. خطهایی در نظر می‌گیریم که اگر فاصله‌های آنها از نقطه‌های A و B مرتباً AH و BK باشند. همواره رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$\alpha.\overline{AH}^2 + \beta.\overline{Bk}^2 = k^2 \quad \text{(k مقداری است ثابت)}$$

نشان دهید که اوضاع مختلف خط مفروض همواره بر بیضی یا هذلولی ثابتی مماس می‌باشد.

۷.۲.۱.۲. مسأله‌های ترکیبی

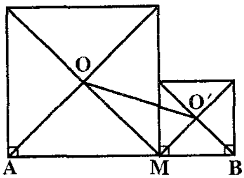
۶۹۱. دو نقطهٔ ثابت A و C و مثلثی متغیر که A یک رأس آن و H محل تلاقی ارتفاعهای این مثلث به‌طوری که شعاع دایرهٔ محیطی این مثلث همیشه مساوی با ارتفاع رأس A است، داده شده است.

۱. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M وسط ضلع مقابل به زاویهٔ A.

۲. پوش دایرهٔ محیطی مثلث را پیدا کنید.

۷.۲.۲. پاره‌خطهای ثابت

۶۹۲. قطعه خط AC دو قطعه خط DM و DN را به نسبت عکس تقسیم می‌کند؛ یعنی داریم، $\frac{AM}{AD} = \frac{CD}{CN}$. پوش AC را معین کنید.



۶۹۳. پاره‌خط AB به وسیلهٔ نقطهٔ M به پاره‌خطهای اضافی (جمع شدنی) یا نقصانی (کم شدنی) تقسیم شده است. روی هریک از این قطعه‌ها یک مربع در یک طرف AB می‌سازیم، در طرفی که پاره‌خطها یا افزودنی هستند و یا در طرفی که پاره‌خطها کم‌کردنی می‌باشند.
نشان دهید که پوش خطی که مرکزهای مربعها را به هم وصل می‌کند یک سهمی است.

۳.۲.۷. خطهای ثابت

۱.۳.۲.۷. خطهای موازی

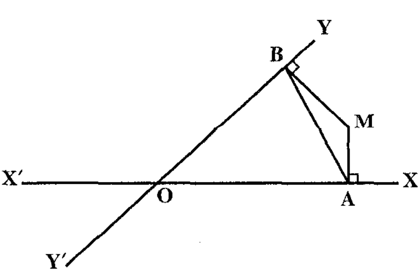
۶۹۴. دو محور موازی و همجهت X، X' و عمود مشترک آنها AA' را در نظر می‌گیریم. CC' روی این محورها طوری حرکت می‌کند که همواره $\overline{AC}.\overline{A'C'}=-b^2$ است. پوش خط CC' چیست؟

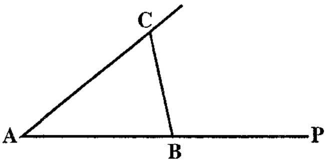
۶۹۵. دو خط موازی X و X' و عمود مشترکشان AA' مفروض است. دو نقطهٔ M و M' همواره در یک طرف AA' دو خط X و X' را می‌پیمایند به‌طوری‌که $AM.A'M'=C^{te}$ است. ثابت کنید خط MM' همواره بر یک بیضی که یکی از محورهایش AA' می‌باشد، مماس است.

۲.۳.۲.۷. خطهای متقاطع

۶۹۶. روی دو خط متقاطع $X'OX$ و $Y'OY$ نقطه‌هایی را در نظر می‌گیریم که روی این دو خط پاره‌خطهای متناسب جدا کنند: ثابت کنید پوش هر خط که دو نقطهٔ متناظر را به هم وصل می‌کند، سهمی مماس بر دو خط مفروض است.

۶۹۷. دو خط متقاطع غیرعمود بر هم $X'OX$ و $Y'OY$ و نقطهٔ متغیر M در صفحهٔ آنها داده شده است. از M دو عمود MA و MB را بترتیب بر $X'X$ و $Y'Y$ فرود می‌آوریم. پوش پاره‌خط AB را در صورتی که AB طول ثابتی داشته باشد، تعیین کنید.





۶۹۸. قطعه خط BC با طول ثابت، طوری حرکت می‌کند که دو انتهای آن همواره بر دو خط ثابت AB و AC قرار دارد. پوش دایرهٔ محیطی مثلث ABC را تعیین کنید.

۶۹۹. دو خط عمود بر هم $x'Ox$ و $y'Oy$ داده شده‌اند. نقطهٔ O مرکز مشترک تمام بیضیهایی است که محورهایشان $x'Ox$ و $y'Oy$ است و اندازهٔ مساحتشان ثابت می‌باشد. پوش این بیضیها را بیابید.

۳.۳.۲.۷. سه خط

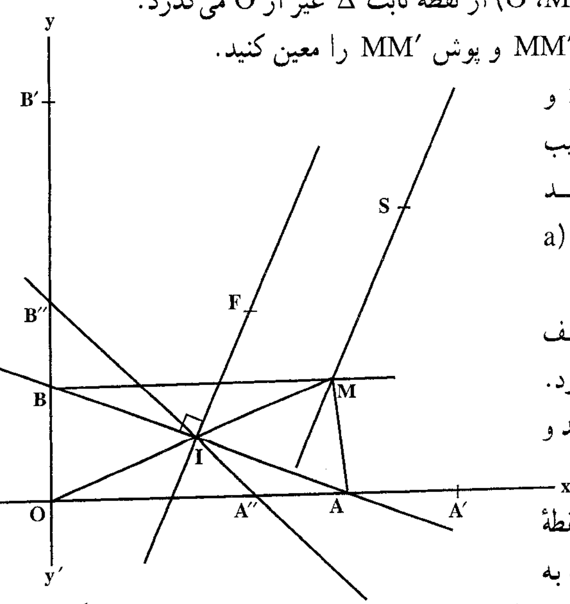
۷۰۰. دو نقطه M و M' بر Δ و Δ' تغییر مکان می‌دهد، وسط MM' همواره بر خط ثابت D است. معین کنید، پوش خط MM' را.

۴.۳.۲.۷. مسأله‌های ترکیبی

۷۰۱. روی دو خط مفروض D و D' که در نقطهٔ O متقاطعند، از دو نقطهٔ A و A' واقع روی آنها دو قطعهٔ متغیر AM و $A'M'$ را چنان جدا می‌کنیم که $\frac{AM}{A'M'}$ مقدار ثابتی باشد.

۱. ثابت کنید که دایرهٔ $(O \text{، } M \text{، } M')$ از نقطهٔ ثابت Δ غیر از O می‌گذرد.

۲. مکان تصویر Δ را روی MM' و پوش MM' را معین کنید.



۷۰۲. دو محور عمود بر هم $x'Ox$ و $y'Oy$ و نقطه‌های A و B بترتیب روی Ox و Oy مفروضند به‌طوری‌که $OA + OB = a$ (a عددی مثبت است).

۱. نشان دهید که عمود منصف پاره‌خط AB بر نقطهٔ ثابتی می‌گذرد. مکان نقطهٔ I وسط AB را بیابید و پوش AB را معین نمایید.

۲. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ M رأس چهارم مستطیلی که به وسیلهٔ OA و OB ساخته می‌شود و نشان دهید عمود وارد از M بر AB بر نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۴.۲.۷. خطهای ثابت، نقطه‌های ثابت

۱.۴.۲.۷. یک خط، یک نقطه

۷۰۳. خط Δ و نقطهٔ ثابت O در خارج آن مفروض است. پاره‌خط AB به طول ثابت a روی خط Δ می‌لغزد. مطلوب است پوش BT، عمود اخراج شده از نقطهٔ B بر خط OA.

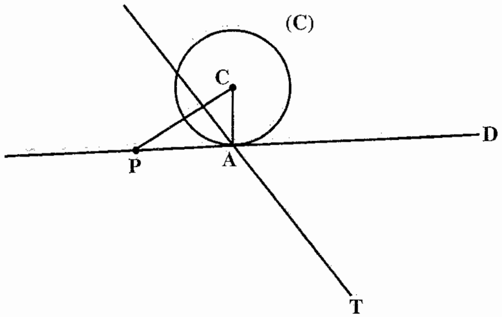
۷۰۴. خط راست Δ و نقطهٔ F خارج از این خط مفروض است. زاویهٔ $X\hat{A}Y$ در صفحهٔ شکل به قسمی می‌لغزد که رأس A خط Δ را طی می‌کند و ضلع AX دائماً از نقطهٔ ثابت F عبور می‌نماید. مطلوب است تعیین پوش AY.

۷۰۵. خط XY و نقطهٔ O خارج از آن مفروض است. نقطهٔ O را به متغیر M روی XY وصل می‌کنیم. مطلوب است پوش نیمسازهای زاویه‌هایی که XY و OM تشکیل می‌دهند.

۷۰۶. در یک صفحه، زاویهٔ XOY به مقدار ثابت α حول O رأس خود دوران می‌کند. مطلوب است تعیین پوش (لفاف) دایرهٔ محیطی مثلث تشکیل شده از OX و OY و خط مفروض D واقع در صفحه.

۷۰۷. رأس زاویهٔ قائمه‌ای بر روی خط ثابت Δ حرکت می‌کند و یک ضلع آن بر نقطهٔ ثابت F مرور می‌کند. ثابت کنید که ضلع دوم همواره بر سهمی ثابتی مماس است.

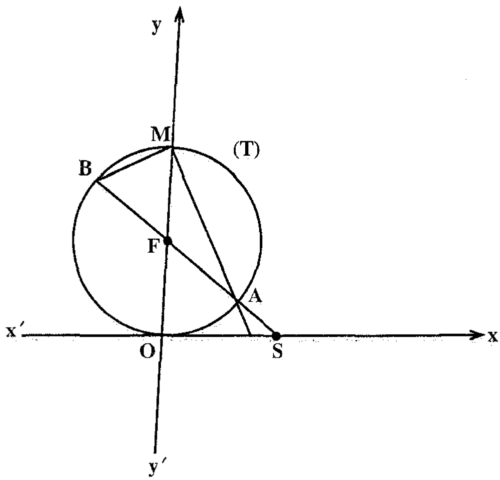
۷۰۸. دایره به مرکز C و به شعاع R چنان جابه‌جا می‌شود که در یک طرف خط D بر D مماس است. پیدا کنید پوش قطبی یک نقطهٔ ثابت O از خط D را نسبت به دایرهٔ C و محل تلاقی این قطبی را با این پوش پیدا کنید.



۲.۴.۲.۷. یک خط، دو نقطه

۷۰۹. خط D مفروض است. روی این خط نقطه‌ای مانند A و خارج از آن نقطه‌ای مانند B انتخاب می‌کنیم؛ دایره‌ای به شعاع متغیر و گذرنده بر A و B خط D را در نقطهٔ دیگری مانند M قطع می‌کند. مطلوب است تعیین پوش مماس در نقطهٔ M بر این دایره.

۷.۲.۴.۳. دو خط، یک نقطه



۷۱۰. دو محور عمود بر هم $x'Ox$ و $y'Oy$ و نقطهٔ ثابت S بر $x'x$ و نقطهٔ متغیر M بر $y'y$ دایرهٔ به قطر OM را T می‌نامیم. S را به مرکز این دایره وصل می‌کنیم تا آن را در A و B قطع کند. مطلوب است پوش قطعه خط MA و MB وقتی که M خط yy' را طی کند.

۷۱۱. دو خط D و D' و یک نقطهٔ F مفروضند ؛ یک خط Δ به طریقی حرکت می‌کند که خطهای X و X' که نقطهٔ F را به محل برخورد این خط با خطهای D و D' وصل می‌کند در صفحه جهت‌دار زاویه ثابت $(X,\hat{X'})$ مخالف $(D,\hat{D'})$ تشکیل می‌دهد. ثابت کنید که Δ پوش یک بیضی و یا یک هذلولی به مماسهای D و D' و یک کانون F را تشکیل می‌دهد.

۷.۲.۵. زاویه

۷۱۲. ضلعهای زاویهٔ قائمه xOy را به وسیلهٔ DE چنان قطع می‌کنیم که مساحت مثلث DOE مقداری است ثابت و برابر با a^2. مطلوب است پوش ضلع DE.

۷۱۳. قطعه خط متغیر AB بر ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ xOy می‌لغزد به قسمی که $OA \times OB = a^2$ مقداری ثابت باقی می‌ماند. بر روی نیمساز زاویهٔ xOy نقطهٔ F را به طول $OF = a$ تعیین کنید :

۱. ثابت کنید که زاویهٔ BFA مقدار ثابتی دارد و با تغییر وضع AB تغییر نمی‌کند.

۲. نتیجه بگیرید که اوضاع مختلف خط AB بر هذلولی متساوی‌الساقین ثابت مماس است و نقطهٔ تماس وسط AB می‌باشد.

۳.۷. مثلث

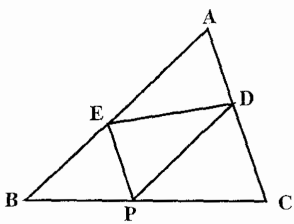
۷۱۴. پوش قاعدهٔ مثلثی را بیابید که اندازهٔ زاویهٔ روبه‌روی آن از نظر اندازه و وضع ثابت است و مجموع اندازهٔ دو ضلع مجاور به آن زاویه نیز ثابت می‌باشد.

۷۱۵. مطلوب است لفاف قاعدهٔ BC از مثلث BAC که محیطش ثابت بوده و زاویهٔ A از لحاظ وضع و مقدار تغییر نکند.

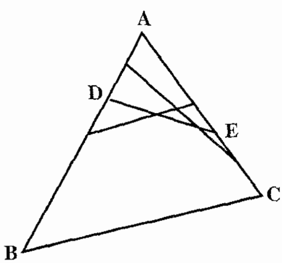
۷۱۶. مثلث ABC را که در آن زاویهٔ A از نظر وضع و اندازه ثابت است و مساحت آن نیز مقدار ثابتی می‌باشد، در نظر می‌گیریم. پوش ضلع BC را تعیین کنید.

۷۱۷. اگر مثلث متغیری قاعدهٔ ثابت داشته باشد و اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی آن نیز ثابت باشد پوش دایرهٔ نه نقطهٔ آن را تعیین کنید.

۷۱۸. مثلث ABC مفروض است. اگر P و Q تصویرهای نقطهٔ M واقع بر BC بر روی AB و AC باشد ؛ پوش خط PQ یک سهمی است؟



۷۱۹. نقطهٔ P را بر روی قاعدهٔ BC از مثلث ABC انتخاب کرده و خطهای PD و PE را به موازات ضلعهای AB و AC رسم می‌کنیم. پوش اوضاع مختلف خط DE با تغییر نقطهٔ P بر قاعدهٔ BC را، تعیین کنید.



۷۲۰. در مثلث ABC قاطعهایی رسم می‌کنیم به قسمی که ضلعهای AB و AC را مرتباً در نقطه‌های D و E قطع کنند به قسمی که $AD = EC$ باشد. پوش اوضاع مختلف این قاطعها را بیابید.

۷۲۱. مثلث قائم‌الزاویهٔ AOB ($\hat{AOB} = 90^\circ$) مفروض است. فرض کنیم I وسط وتر AB باشد. روی این خط دو نقطهٔ M و M' را طوری جدا می‌کنیم که $\frac{IM'}{IM}$ برابر مقدار معلومی باشد. مطلوب است تعیین پوش PQ خط واصل بین P، تصویر M روی OA، و Q تصویر M' روی OB.

۷۲۲. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین OAB قائمه در رأس O و $OA = OB = ۲a$ مفروض است. نقطه‌های متغیر M و N را بترتیب روی ساقهای OA و OB چنان می‌گیریم که $OM + ON = ۲a$ باشد. ثابت کنید: اگر F وسط AB باشد.

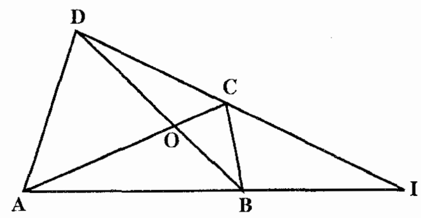
الف. $MF = NF$ و زاویهٔ $\widehat{MFN} = ۹۰^\circ$ است. مکان نقطهٔ I وسط MN را به‌دست آورید.

ب. بیضیهای متغیر (E) به کانونهای M و N گذرنده بر نقطهٔ ثابت O را در نظر می‌گیریم. ثابت کنید مماس بر این بیضیها در نقطهٔ O خطی است ثابت. بعلاوه این بیضیها بر BC نیز مماسند.

۴.۷. چندضلعی

۱.۴.۷. چهارضلعی

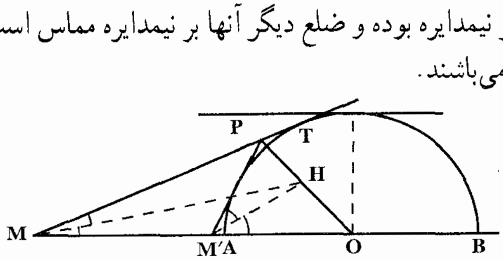
۷۲۳. ضلع AB از چهارضلعی ABCD ثابت و قطرهای چهارضلعی در نقطهٔ O همدیگر را به نسبت ثابت بخش می‌کنند. مطلوب است پوش خط CD.



۵.۷. دایره،...

۱.۵.۷. نیمدایره

۷۲۴. نیمدایره‌ای به قطر ۲R مفروض است. ثابت کنید که نیمسازهای زاویه‌هایی که یک ضلع آنها AB قطر نیمدایره بوده و ضلع دیگر آنها بر نیمدایره مماس است، همواره بر سهمی ثابتی مماس می‌باشند.



۲.۵.۷. تنها یک دایره

۷۲۵. مطلوب است تعیین پوش خطهایی که با دایرهٔ مفروضی، زاویهٔ α می‌سازند.

۳.۵.۷. یک دایرهٔ ثابت، نقطه‌های ثابت

۱.۳.۵.۷. یک دایره، یک نقطه

۱.۱.۳.۵.۷. یک دایره، یک نقطه در صفحهٔ دایره

۷۲۶. یک ضلع زاویهٔ قائمه‌ای از نقطهٔ ثابت F می‌گذرد و رأس زاویه، محیط دایره‌ای را طی می‌کند. لفاف ضلع دیگر زاویه را پیدا کنید.

ماکلورن

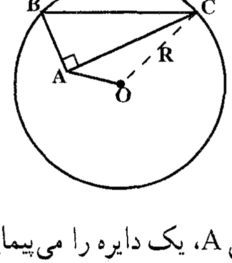
۲.۱.۳.۵.۷. یک دایره، یک نقطه درون دایره

۷۲۷. دایرهٔ (C) به مرکز (O) و نقطهٔ H در داخل آن مفروضند. مطلوب است تعیین پوش ضلعهای مثلثهای محاط در دایرهٔ (C) که H محل برخورد ارتفاعهای آن باشد.

از لوموان، پل سره **POUL SERRET**

۷۲۸. دایرهٔ (O) به شعاع R و نقطهٔ ثابت G در داخل آن مفروض است. مطلوب است تعیین پوش ضلعهای مثلثهای محاط در دایرهٔ (O) که G محل تلاقی-میانه‌هایش باشند.

۷۲۹. دایرهٔ (O) به شعاع R و نقطهٔ ثابت A در آن مفروض است. وتر BC در این دایره طوری تغییر مکان می‌دهد که زاویهٔ BAC پیوسته قائمه می‌ماند. مطلوب است پوش وتر BC.



۷۳۰. زاویهٔ $X\hat{A}Y = \alpha$ طوری در صفحه‌اش می‌لغزد که رأسش A، یک دایره را می‌پیماید و بعلاوه، ضلع AX از نقطهٔ ثابت F واقع در داخل دایره عبور می‌کند. پوش ضلع AY را پیدا کنید.

۳.۱.۳.۵.۷. یک دایره، یک نقطه روی دایره

۷۳۱. در دایرهٔ (O) دو وتر AB و AC چنان تغییر می‌کنند که نقطهٔ A ثابت بوده و $AB \times AC = k^2$ است. مطلوب است لفاف ضلع BC از مثلث ABC.

۷۳۲. دایره‌ای به شعاع ثابت R و نقطهٔ ثابت S بر روی آن در دست است. نقطهٔ متغیر M را بر روی آن انتخاب کرده و SM را به طول SN امتداد می‌دهیم به قسمی که $\overline{SM}^2 - \overline{SN}^2 = a^2$ باشد (a طولی است ثابت). ثابت کنید خط Δ که از نقطهٔ N بر SN عمود می‌شود، همواره بر بیضی یا هذلولی ثابتی مماس است.

۷.۵.۳.۱.۴. یک دایره، یک نقطه برون دایره

۷۳۳. یک زاویهٔ $X\hat{A}Y = \alpha$ در صفحه‌اش طوری می‌لغزد که رأس A از آن، یک دایره به مرکز O را طی می‌کند و ضلع AX از نقطهٔ ثابت F خارج از دایره می‌گذرد، مطلوب است پوش ضلع AY.

۷۳۴. مطلوب است پوش وترهایی از دایرهٔ مفروض (O) که از نقطهٔ ثابت P واقع در خارج دایره، به زاویهٔ قائمه رؤیت می‌شود.

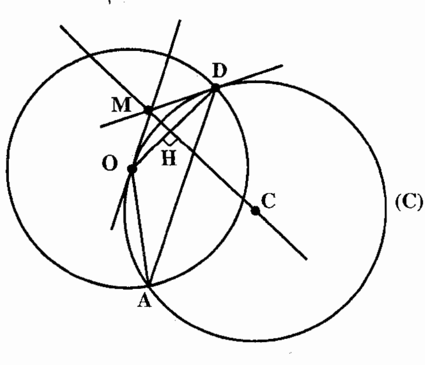
۷.۵.۳.۱.۵. یک دایره، یک نقطه درون یا برون دایره

۷۳۵. دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R و نقطهٔ A که بر روی دایره نیست، مفروضند. فرض می‌کنیم $OA = d$ و M نقطهٔ متغیری از دایرهٔ O به مرکز M و به شعاع MA را دایرهٔ M می‌نامیم. پوش محور اصلی دو دایرهٔ O و N را پیدا کنید.

۷.۵.۳.۲. یک دایره، دو نقطه

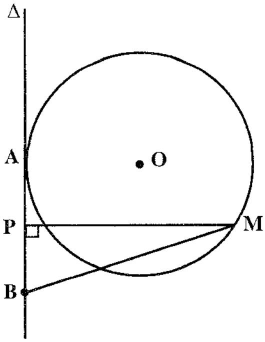
۷۳۶. روی دایرهٔ (O) دو نقطهٔ ثابت A و B و نقطهٔ متغیر C را در نظر می‌گیریم. مطلوب است تعیین پوش (لفاف) دایرهٔ اولر از مثلث ABC.

۷۳۷. دایرهٔ متغیر (C) که از مرکز O و یک نقطهٔ ثابت A از دایرهٔ (O) می‌گذرد، دایرهٔ (O) را در D نیز قطع می‌کند. مکان هندسی نقطهٔ M، نقطهٔ برخورد مماسهای رسم شده بر (C) در O و D، را به‌دست آورید. نشان دهید که خط MC بر دایرهٔ ثابتی هم مرکز با (O)، مماس است.



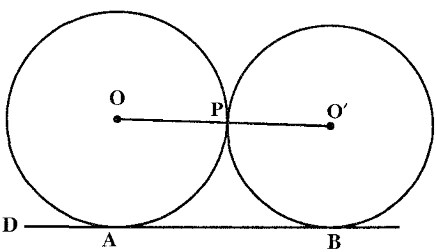
۴.۵.۷. دایره، خط

۱.۴.۵.۷. یک دایره، یک خط



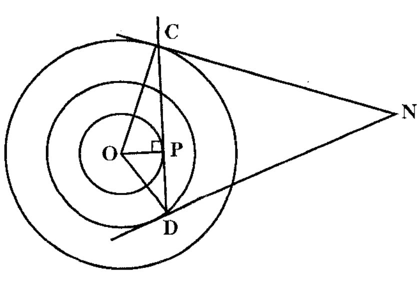
۷۳۸. دایرهٔ O و خط Δ مماس در نقطهٔ A بر آن داده شده‌اند. از نقطهٔ اختیاری M واقع بر دایره، عمود MP را بر خط مماس فرود می‌آوریم و روی خط مماس طول $PB = PA$ را جدا می‌کنیم. ثابت کنید پوش دایرهٔ محیطی مثلث AMB یک دایرهٔ ثابت است.

۵.۵.۷. دو دایره



۷۳۹. شعاعهای OM و O′M′ از دو دایرهٔ ثابت، حول مرکزهای O و O′ به قسمی دوران می‌کنند که زاویهٔ $(\widehat{OM, O'M'})$ مقدار ثابت α است. مطلوب است تعیین پوش قطعه خط MM′.

۷۴۰. خط D و دو نقطهٔ ثابت A و B واقع بر آن و نقطهٔ ثابت P واقع در خارج این خط داده شده‌اند. دو دایرهٔ متغیر رسم می‌کنیم که در نقطه‌های A و B بر خط D و در نقطهٔ P بر یکدیگر مماس خارج باشند. پوش خط‌المرکزین این دو دایره را بیابید.



۷۴۱. دو دایرهٔ هم مرکز داده شده‌اند. زاویهٔ CND که اندازه‌اش مقدار ثابتی است، چنان است که هر ضلعش بر یکی از دو دایره در نقطه‌های C و D مماس است. پوش پاره‌خط CD را تعیین کنید.

۷۴۲. ضلع Ax از زاویهٔ قائمهٔ xAy بر دایرهٔ ثابتی مماس است و رأس A روی دایره‌ای هم مرکز با اوّلی حرکت می‌کند. لفاف (پوش) ضلع Ay را معین کنید.

۷۴۳. دو دایرهٔ متقاطع به مرکزهای O و ′O و به شعاعهای R و ′R داده شده‌اند. قاطعهایی در نظر می‌گیریم که نقطه‌های تقاطع آنها با دایره‌های O و ′O نسبت به هم مزدوج باشند؛ ثابت کنید که اوضاع مختلف این قاطعها، بر مقطع مخروطی ثابتی مماس می‌باشند.

۶.۵.۷. مسأله‌های ترکیبی

۷۴۴. دایرهٔ به مرکز O و به شعاع r مفروض است. نقطهٔ F داخل دایرهٔ (O) قرار دارد. زاویهٔ قائمهٔ AFB حول رأسش F دوران کرده و ضلعهایش دایره را در نقطه‌های A و B قطع می‌کنند. مطلوب است:

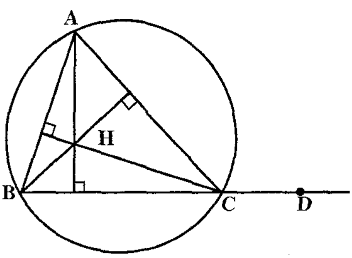
۱. تعیین مکان هندسی تصویرهای نقطه‌های F و O بر روی وتر AB.

۲. ثابت کنید که AB همواره بر یک بیضی به کانونهای O و F مماس است.

۷۴۵. یک رأس مثلث متغیری که در دایرهٔ ثابتی محاط است، ثابت است و ضلع مقابل آن رأس، از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

الف. مکان هندسی مرکز ارتفاعی مثلث را بیابید.

ب. ثابت کنید دایرهٔ نه نقطهٔ این مثلث بر دو دایرهٔ هم مرکز مماس است.



۶.۷. مقطعهای مخروطی

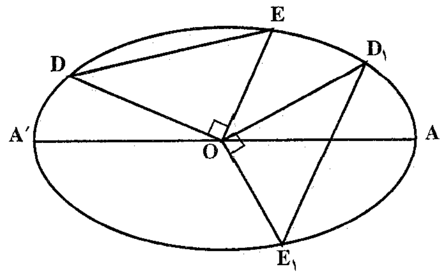
۱.۶.۷. بیضی

۷۴۶. بیضی (E) که محور بزرگش ثابت است، حول مرکزش (O مرکز) در صفحه خود دوران می‌کند. مطلوب است پوش مماسهای موازی با نیمساز زاویه‌هایی که بین محور بزرگش و خط ثابت Δ تشکیل می‌شود.

۷۴۷. بیضیهایی که یک کانون F آنها ثابت و طول محور بزرگ آنها ثابت و برابر 2a می‌باشند و همواره بر نقطهٔ ثابت A می‌گذرند، مفروضند. ثابت کنید که اوضاع مختلف این بیضیها بر بیضی به کانونهای A و F، و به طول محور بزرگ 4a − AF مماس می‌باشند.

۷۴۸. پوش وترهایی از یک بیضی را تعیین کنید، که دو انتهای قطرهای مزدوج بیضی را به هم وصل می‌کنند.

۷۴۹. زاویهٔ قائمه‌ای که رأس آن در مرکز بیضی است حول مرکز بیضی دوران می‌کند و ضلعهای آن بیضی را در وترهایی قطع می‌کنند. پوش اوضاع مختلف این وترها را بیابید.



۷۵۰. یک بیضی داده شده است. پوش دایره‌هایی را بیابید که مرکزشان روی این بیضی است و مماس بر دایره‌ای به مرکز یک کانون بیضی هستند.

۷۵۱. بیضی به مرکز O داده شده است. پوش ضلعهای مثلثهایی را بیابید که نقطهٔ O مرکز ثقل آنها است و در این بیضی محاطند.

۲.۶.۷. هذلولی

۷۵۲. مطلوب است تعیین پوش مجانبهای هذلولیهایی که در یک کانون F و هادی نظیرش D مشترک باشند.

۳.۶.۷. سهمی،...

۱.۳.۶.۷. تنها یک سهمی

۷۵۳. از نقطهٔ متغیر M واقع بر روی یک سهمی، مماس MT را بر سهمی و خط MX را به موازات محور آن رسم می‌کنیم. مطلوب است پوش خط قرینه MT نسبت به MX.

۲.۳.۶.۷. یک سهمی، یک نقطه

۷۵۴. اگر 'MM وتر متحرک گذرنده بر کانون F یک سهمی باشد. دایره‌هایی به قطرهای FM و 'FM بر یک خط مماس می‌ماند؛ مطلوب است پوش مماس مشترک دوم این دایره‌ها.

۳.۳.۶.۷. یک سهمی، یک خط

۷۵۵. لفاف دایره‌هایی را پیدا کنید که مرکزهای آنها بر سهمی مفروضی واقع بوده و بر خط ثابتی عمود بر محور سهمی مماسند.

۴.۳.۶.۷. یک سهمی، یک خط مماس، دو نقطه

۷۵۶. خط D مماس بر یک سهمی مفروض است. فرض می‌کنیم A نقطهٔ تماس و B محل تلاقی آن با محور سهمی باشد. مطلوب است تعیین مکان کانون؛ و همچنین مکان رأس و پوش هادی این سهمی.

۵.۳.۶.۷. یک سهمی، دو خط مماس، کانون

۷۵۷. یک سهمی با دو مماس ثابت PT و PT′ مفروض است. دایرهٔ به شعاع متغیر و گذرنده بر P و کانون F سهمی PT و PT′ را بترتیب در M و M′ قطع می‌کند. ثابت کنید، پوش MM′ سهمی است.

۶.۳.۶.۷. مسأله‌های ترکیبی

۷۵۸. سهمی به محور Ox و مماس در رأس آن یعنی Oy مفروض است. اگر M نقطه متغیری از منحنی باشد، MA و MB را بترتیب بر Ox و Oy و همچنین Bz را بر AB عمود می‌نماییم؛

۱. ثابت کنید Bz از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

۲. پوش AB را نیز معین کنید.

۷۵۹. یک سهمی و دو مماس PA و PA′ در نقطه‌های A و A′ مفروض است از نقطه متغیر Q واقع بر خط AA′ خطهای QM′ و QM را به موازات مماسهای نامبرده رسم می‌کنیم تا PA را در M و PA′ را در M′ قطع کنند. ثابت کنید:

۱. پوش MM′ سهمی است.

۲. خطی که از نقطهٔ Q به موازات محور کشیده شده است، MM′ را در نقطهٔ تماس قطع می‌کند.

۴.۶.۷. مقطع مخروطی به‌طورکلی

۷۶۰. یک مقطع مخروطی داده شده است. پوش وتر مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای را تعیین کنید که رأس قائم آنها در مرکز این مقطع مخروطی و دو انتهای وتر مثلث، روی این مقطع مخروطی باشند.

راهنمایی و حل

از آن‌جا که به گفتهٔ جورج پولیا J. Polya استاد بزرگ آموزش ریاضی «دانشجو می‌تواند برای حل مسأله‌ها از کار مستقل و شخصی خود تا جایی که ممکن است، استفاده نماید. ولی در صورتی که او را با مسأله‌ای که باید حل کند تنها بگذارند و به او کمک نکنند، یا این کمک به اندازهٔ کافی نباشد، ممکن است اصلاً نتواند پیشرفت کند؛ و اگر بیش از اندازه به او یاری شود، دیگر کاری باقی نمی‌ماند که او انجام دهد.»، در این مجموعه، برخی از مسأله‌ها حل شده‌اند. تعدادی راهنمایی برای حل دارند و حل برخی دیگر از مسأله‌ها به عهدهٔ دانش‌پژوهان واگذار شده است، تا این جلد از دایرة‌المعارف بتواند نقش و سهمی در تقویت قوهٔ تفکر و خلاقیت ذهنی آنان داشته باشد.

بدیهی است که راه‌حلها و راهنماییهای ارائه شده در این مجموعه بهترین و یا ساده‌ترین راه‌حل یا راهنمایی نمی‌باشند؛ و به‌طور یقین، دانشجویان با دقت نظر و بهره‌گیری از ذهن خلاق خویش به راه‌حلهایی ساده‌تر و یا جالبتر از راه‌حلهای موجود در این مجموعه دست خواهند یافت.

هر چند سعی فراوان شده است تا مطالب این مجموعه خالی از اشتباه باشند، امّا ممکن است باز هم اشکالها و نادرستیهایی وجود داشته باشد. بدین‌جهت از دانش‌آموزان، دانشجویان، استادان، ریاضی‌دانان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه درخواست می‌شود نظرهای ارشادی و اصلاحی خود، همچنین راه‌حلهای جالبتر یا ساده‌تر برای مسأله‌های حل شده، و راه‌حلهای مناسب و جالب برای مسأله‌های حل نشده را به نشانی مؤلف یا ناشر ارسال فرمایند تا برای هرچه پربارتر کردن محتوای این مجموعه و رفع کاستیهای آن مورد استفاده قرار گیرد؛ ضمن سپاسگزاری از این لطف و همکاری، برای ارج نهادن به تلاشهایی که در این راه انجام خواهد شد، بهترین و جالبترین راه‌حل برای هر مسأله، همچنین تعمیم قضیه‌ها یا مسأله‌ها، به‌نام فرستندهٔ آن، در چاپهای بعدی دایرة‌المعارف درج خواهد شد.

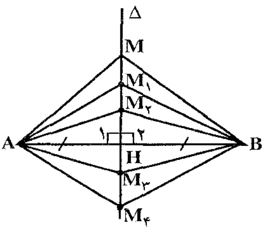
راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۱. تعریف و قضیه

۱.۱. مکانهای هندسی وابسته به نقطه‌های ثابت

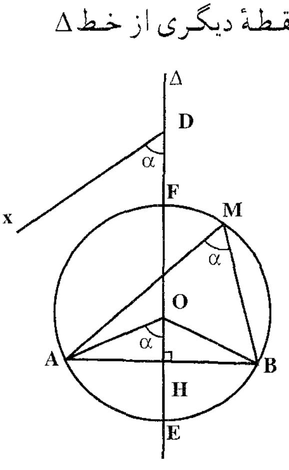
۱.۱.۱. مکانهای هندسی وابسته به یک نقطهٔ ثابت

۱. اثبات این قضیه، در بخش مقطعهای مخروطی در هندسهٔ فضایی است.

۲.۱.۱. مکانهای هندسی وابسته به دو نقطهٔ ثابت

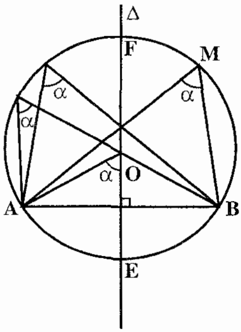


۲. از A به B وصل کرده، خط Δ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با AB را H می‌نامیم. اگر M نقطه‌ای از این عمودمنصف باشد و از M به A و B وصل کنیم، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MAH و MBH، به‌دلیل برابری دو ضلع زاویهٔ قائمه برابرند؛ زیرا $HA = HB$، MH مشترک، و $\hat{H}_1 = \hat{H}_2$ است؛ پس $MA = MB$ است. بعکس اگر M نقطه‌ای باشد که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد، روی عمودمنصف پاره‌خط AB است؛ زیرا اگر H وسط پاره‌خط AB باشد، از برابری دو مثلث MAH و MBH به حالت برابری سه ضلع ($MA = MB$، $HA = HB$ و MH مشترک) نتیجه می‌شود که $\hat{H}_1 = \hat{H}_2 = 90^\circ$، یعنی MH عمود بر AB است و چون میانه نیز هست، پس MH عمودمنصف پاره‌خط AB است، یعنی نقطهٔ M روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. هر نقطهٔ دیگری از خط Δ (نقطه‌های M_1، M_2، M_3، M_4، ...) ویژگی نقطهٔ M را دارند.



۳. دو نقطهٔ ثابت A و B را در صفحهٔ P در نظر می‌گیریم. وسط پاره‌خط AB را نقطهٔ H می‌نامیم و خط Δ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ دلخواه D واقع بر Δ، نیمخط Dx را چنان رسم می‌کنیم که $H\hat{D}x = \alpha$ باشد. از یکی از دو نقطهٔ A و B، به‌عنوان مثال از نقطهٔ A خطی به موازات Dx رسم می‌کنیم تا خط Δ را در نقطهٔ O قطع کند. به مرکز O و به شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره از نقطهٔ B نیز می‌گذرد و

اندازهٔ کمان $\widehat{AEB}$ برابر ۲α است ؛ زیرا $A\hat{O}H = \alpha$ است، پس زاویهٔ مرکزی $A\hat{O}B = ۲\alpha$ است. کمان $\widehat{AFB}$ مکان هندسی نقطهٔ مورد نظر، یعنی، مکان هندسی نقطه‌ای مانند M است که از وصل کردن آن به دو نقطهٔ A و B زاویهٔ $A\hat{M}B = \alpha$ پدید می‌آید، زیرا :

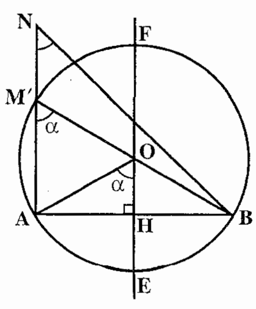


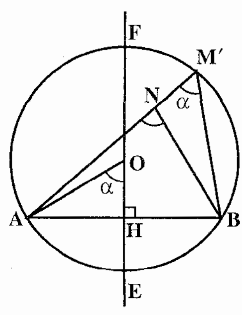
۱. هر نقطه مانند M که روی این کمان قرار داشته باشد و از این نقطه به دو نقطهٔ A و B وصل کنیم، اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{M}B$ برابر α است، زیرا :

$$A\hat{M}B = \frac{\widehat{AEB}}{۲} = \frac{۲\alpha}{۲} = \alpha$$

۲. نقطهٔ N رأس هر زاویه مانند $A\hat{N}B = \alpha$ که ضلعهایش از دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرد و در طرف کمان $\widehat{AFB}$ واقع است، روی کمان $\widehat{AFB}$ قرار دارد. زیرا اگر نقطهٔ N روی کمان $\widehat{AFB}$ نباشد، یا داخل دایرهٔ (O,OA) واقع است که در این‌صورت $A\hat{N}B > \alpha$ خواهد بود، یا نقطهٔ N خارج دایرهٔ بالا قرار دارد که در این‌صورت $A\hat{N}B < \alpha$ است، زیرا در حالت نخست، اگر نقطهٔ برخورد امتداد AN با دایره را M' بنامیم و از M' به نقطهٔ B وصل کنیم، داریم :

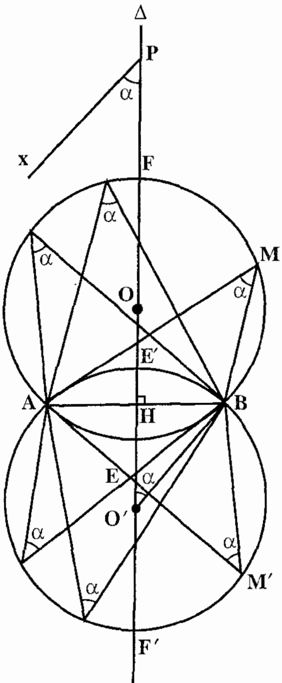
$$A\hat{N}B = A\hat{M'}B + M'\hat{B}N = \alpha + M'\hat{B}N \Rightarrow A\hat{N}B > \alpha$$





و در حالت دوم، اگر نقطهٔ برخورد AN با دایره را M' بنامیم، داریم :

$$A\hat{N}B = A\hat{M'}B - M'\hat{B}N = \alpha - M'\hat{B}N \Rightarrow A\hat{N}B < \alpha$$



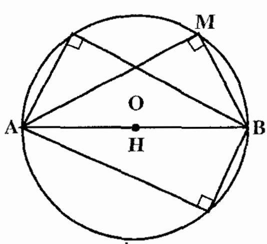
بنابراین نقطهٔ N روی کمان $\widehat{AFB}$ است. این کمان، کمان حاوی، یا کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB یا مقابل به پاره‌خط AB نامیده می‌شود.

اگر از نقطهٔ B خطی موازی Dx رسم کنیم تا عمودمنصف پاره‌خط AB را در نقطهٔ O' قطع کند و دایرهٔ به مرکز O' و به شعاع $O'B = O'A$ را رسم کنیم تا عمودمنصف پاره‌خط AB را در نقطه‌های E' و F' قطع کند، کمان $\widehat{AF'B}$ نیز کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB است. بنابراین مکان هندسی نقطه‌ای مانند M از یک صفحه که از وصل کردن آن نقطه، به دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه زاویهٔ $A\hat{M}B = \alpha$ پدید می‌آید، کمانهایی از دو دایرهٔ همنهشت در آن صفحه است که بر دو نقطهٔ مزبور می‌گذرند و زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به وتر مشترکشان برابر ۲α است.

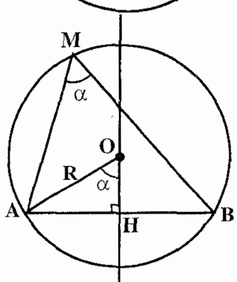
تبصره ۱. کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB را، مکان هندسی نقطه‌ای که از آن نقطه، پاره‌خط AB به زاویهٔ α رؤیت می‌شود، نیز می نامند.

تبصره ۲. کمانهای $\widehat{AEB}$ و $\widehat{AE'B}$ از دو دایره، کمان درخور زاویهٔ $۱۸۰^\circ - \alpha$ وابسته به پاره‌خط AB است ؛ زیرا :

$$\widehat{AEB} = \widehat{AE'B} = ۲\alpha \Rightarrow \widehat{AFB} = \widehat{AF'B} = ۳۶۰ - ۲\alpha \Rightarrow A\hat{M}B = ۱۸۰ - \alpha$$



تبصره ۳. کمان درخور زاویهٔ ۹۰ درجه وابسته به پاره‌خط AB، دایره‌های به قطر AB است. زیرا در این حالت دو دایرهٔ (O,OA) و $(O',O'A)$ بر هم منطبق شده، مرکز مشترکشان نقطهٔ H، وسط پاره‌خط AB است.



تبصره ۴. شعاع دایره‌ای که کمان درخور زاویهٔ α وابسته به پاره‌خط AB به طول a، بخشی از آن است، $R = \dfrac{a}{۲\sin\alpha}$ و فاصلهٔ مرکز این دایره از وتر AB، $OH = |R\cos\alpha| = \dfrac{a}{۲|\tan\alpha|}$ است. به‌عنوان مثال اگر

طول پاره‌خط AB برابر ۴ سانتیمتر باشد و کمان درخور زاویهٔ °۳۰ وابسته به این پاره‌خط را رسم کنیم، شعاع دایرهٔ مربوط به این کمان درخور، برابر است با :

$$R = \frac{۴}{۲\sin ۳۰^\circ} = \frac{۴}{۲\times\frac{۱}{۲}} = ۴\text{cm}$$

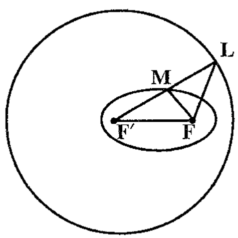
و فاصلهٔ مرکز دایره از پاره‌خط AB برابر است با :

$$OH = |R\cos\alpha| = |۴\cos ۳۰^\circ| = ۴\times\frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۲\sqrt{۳}$$

۵. دایرهٔ هادی کانون F' را رسم می‌کنیم. اگر M نقطه‌ای از بیضی باشد، از M به F و F' وصل می‌کنیم و نقطهٔ برخورد $F'M$ با دایرهٔ هادی کانون F' را L می نامیم. داریم :

$$\begin{cases} MF + MF' = ۲a & (۱) \\ MF' + ML = F'L = ۲a & (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow MF = ML$$

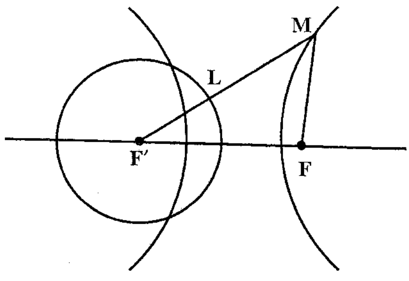


بعکس هر نقطه‌ای که این ویژگی را داشته باشد، به بیضی تعلق دارد.

۷. اگر M نقطه‌ای متعلق به شاخهٔ کانون F باشد و دایرهٔ هادی کانون F' را رسم کرده باشیم (شکل)، داریم :

$$\begin{cases} MF' - ML = ۲a & (۱) \\ MF' - MF = ۲a & (۲) \end{cases}$$

$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow MF = ML$$



بعکس هر نقطه‌ای که این ویژگی را داشته باشد، به شاخهٔ کانون F تعلق دارد. برای نقطه‌های متعلق به شاخهٔ کانون F'، اثبات به روش مشابه انجام می‌شود.

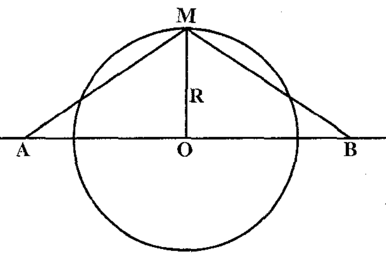
۸. اثبات این قضیه به روش تحلیلی در جلد اول مجموعهٔ مکانهای هندسی آمده است.

۹. دو نقطهٔ ثابت A و B را روی صفحهٔ P در نظر گرفته، خط راست $\widehat{AB}$ را رسم می‌کنیم و روی این خط دو نقطهٔ C و D را چنان اختیار می کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم کنند، یعنی (۱) $\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=k$ باشد. دایرهٔ به قطر CD مکان هندسی مورد نظر، یعنی مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر k است. زیرا :

۱. هر نقطه مانند M که روی این دایره قرار داشته باشد، نسبت فاصله‌اش از A و B برابر k است. زیرا اگر از M به نقطه‌های A، B، C و D وصل کنیم، چون (ABCD) یک تقسیم توافقی است، پس دستگاه (M - ABCD) دستگاهی توافقی می‌باشد و چون دو شعاع غیرمتوالی این دستگاه توافقی یعنی MC و MD بر هم عمود می‌باشند (زاویهٔ $C\hat{M}D$ محاطی روبه‌رو به قطر و برابر °۹۰ است)، پس این دو شعاع نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی زاویه‌های بین دو شعاع دیگر می‌باشند. یعنی MC نیمساز زاویهٔ داخلی AMB و MD نیمساز زاویهٔ خارجی AMB است. از طرفی می‌دانیم نیمسازهای هر زاویه، ضلع روبه‌رو به آن زاویه را به نسبت دو ضلع دیگر تقسیم می‌کنند، پس داریم :

$$\frac{CA}{CB}=\frac{MA}{MB}=k$$

۲. هر نقطه مانند M که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت k، یعنی (۲) $\frac{MA}{MB}=k$ باشد، روی دایره به قطر CD قرار دارد. زیرا اگر از M به نقطه‌های A، B، C و D وصل کنیم، از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\frac{MA}{MB}=\frac{CA}{CB}=\frac{DA}{DB}=k$.
امّا این رابطه نشان می‌دهد که MC و MD بترتیب نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی رأس M از مثلث AMB می‌باشند که چون این دو نیمساز بر هم عمودند، پس : $C\hat{M}D=90^\circ$ و در نتیجه نقطهٔ M روی دایرهٔ به قطر CD واقع است. این دایره را دایرهٔ آپولونیوس می‌نامند (Appolonieus of perga).



۱۰. اگر نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و AB=a و M نقطه‌ای از مکان هندسی مورد نظر باشد، داریم :

$$MA^2+MB^2=k^2 \qquad (1)$$

در مثلث MAB، پاره‌خط MO میانهٔ نظیر ضلع AB است و بنا به رابطهٔ میانه‌ها در مثلث می‌توان نوشت :

$$MA^2+MB^2=2MO^2+\frac{AB^2}{2}$$

و یا :

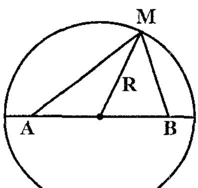
$$MA^{۲} + MB^{۲} = ۲MO^{۲} + \frac{a^{۲}}{۲} \quad (۲)$$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) داریم :

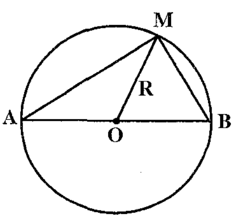
$$۲MO^{۲} + \frac{a^{۲}}{۲} = k^{۲} \Rightarrow OM = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲k^{۲} - a^{۲}} \quad (۳)$$

با توجه به ثابت بودن نقطهٔ O و مقدارهای $k^{۲}$ و a، رابطهٔ (۳) نشان می‌دهد که مکان هندسی نقطهٔ M، دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و به شعاع $R = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲k^{۲} - a^{۲}}$ است. بعکس هر نقطه روی این دایره انتخاب کنیم، مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت $k^{۲}$ است.

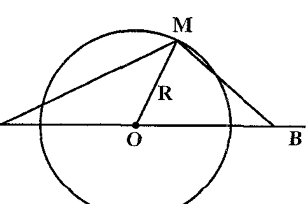
بحث. شرط امکان مسأله آن است که $۲k^{۲} - a^{۲} \geq ۰$ یا $k^{۲} \geq \frac{a^{۲}}{۲}$ باشد. در این صورت :



۱. اگر $k^{۲} > a^{۲}$ باشد، $R > \frac{a}{۲}$ و در نتیجه دو نقطهٔ A و B درون دایره مکان واقع می‌شوند.

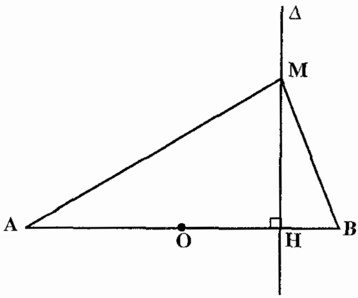


۲. اگر $k^{۲} = a^{۲}$ باشد، $R = \frac{a}{۲}$، و دایرهٔ مکان از دو نقطهٔ A و B می‌گذرد. در حقیقت در این حالت دایرهٔ مکان، دایرهٔ به قطر پاره‌خط AB است.



۳. اگر $\frac{a^{۲}}{۲} < k^{۲} < a^{۲}$ باشد، $R < \frac{a}{۲}$ و دو نقطهٔ A و B در برون دایرهٔ مکان قرار دارد.

۴. اگر $k^{۲} = \frac{a^{۲}}{۲}$ باشد، R=۰ و در نتیجه تنها نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB جواب مسأله است.



۱۱. وسط پاره‌خط AB را O می‌نامیم. اگر M یک نقطه از مکان هندسی موردنظر باشد، با فرض MA>MB داریم:

$$MA^2 - MB^2 = k \quad (1)$$

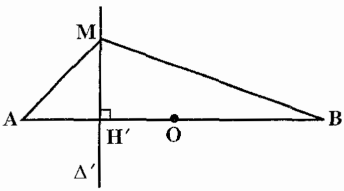
در مثلث MAB میانهٔ MO را رسم می‌کنیم و از M عمود MH را بر AB فرود می‌آوریم. بنا به رابطهٔ دوم میانه‌ها، در مثلث MAB داریم:

$$MA^2 - MB^2 = 2\overline{AB}.\overline{OH} \quad (2)$$

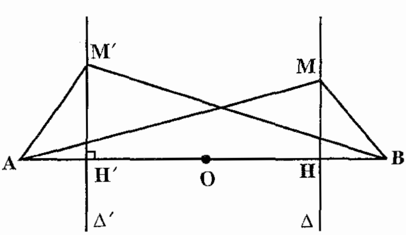
از رابطه‌های (۱) و (۲) با فرض AB=a داریم:

$$2\overline{AB}.\overline{OH} = k \Rightarrow \overline{OH} = \frac{k}{2\overline{AB}} = \frac{k}{2a} = \text{مقدار ثابت}$$

از رابطهٔ بالا با توجه به ثابت بودن نقطهٔ O نتیجه می‌شود که H نقطهٔ ثابتی است. یعنی همهٔ نقطه‌هایی مانند M که برای آنها $MA^2 - MB^2 = k$ است، روی خطی قرار دارند که در نقطهٔ H بر AB عمود است. بعکس، بسادگی دیده می‌شود که هر نقطه واقع بر این خط عمود (MH)، تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k است. بنابراین مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه مقدار ثابت k است، خطی است راست مانند Δ عمود بر خط AB در نقطه‌ای مانند H به قسمی که اگر O وسط پاره‌خط AB و AB=a باشد، $\overline{OH} = \frac{k}{2a}$ است.



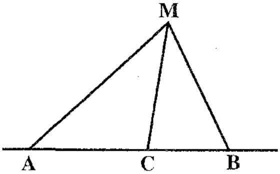
نکتهٔ ۱. اگر MB>MA، یعنی $MB^2 - MA^2 = k$ $(k>0)$ باشد، مکان هندسی نقطهٔ M خط راستی مانند ′Δ است که بر خط AB در نقطه‌ای مانند ′H عمود است به قسمی که ′H قرینهٔ نقطهٔ H نسبت به نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB است. یعنی داریم: $\overline{OH'} = \frac{k}{2a}$



نکتهٔ ۲. اگر $\left|MA^2 - MB^2\right| = k$ اختیار شود، هر دو خط Δ و ′Δ مکان هندسی نقطهٔ M را تشکیل می‌دهند.

نکتهٔ ۳. قرارداد. برای روشن شدن رابطهٔ تفاضل مربعهای فاصلهٔ یک نقطه از دو نقطهٔ ثابت، ترتیب دو نقطهٔ ثابت را درنظر می‌گیریم. بدین‌صورت که اگر گفته شود: مکان هندسی نقطهٔ M را بیابید که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر k است؛ یعنی $MA^۲ - MB^۲ = k$ می‌باشد، و اگر گفته شود: مکان هندسی نقطهٔ M را بیابید که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ B و A برابر k است، یعنی $MB^۲ - MA^۲ = k$ مورد نظر است؛ مگر این که مسأله، خود رابطه را داده باشد.

۱۲. اگر $\alpha + \beta = ۰$، رابطه چنین نوشته می‌شود:



$$MA^۲ - MB^۲ = \frac{d^۲}{a}$$

و می‌دانیم که مکان هندسی نقطهٔ M خطی است عمود بر AB، و در فضا، صفحهٔ عمود بر AB.

اگر $\alpha + \beta \neq ۰$، اگر C نقطهٔ غیرمشخصی از AB باشد، به موجب رابطهٔ استوارت داریم:

$$\overline{MA}^۲.\overline{BC} + \overline{MB}^۲.\overline{AC} + \overline{MC}^۲.\overline{AB} + \overline{BC}.\overline{CA}.\overline{AB} = ۰ \quad (۱)$$

و بنا به فرض:

$$\alpha.\overline{MA}^۲ + \beta.\overline{MB}^۲ = d^۲ \quad (۲)$$

C را به قسمی اختیار می‌کنیم که در دو رابطه، ضریبهای $\overline{MA}^۲$ و $\overline{MB}^۲$ متناسب باشند، یعنی داشته باشیم:

$$\frac{\overline{BC}}{\alpha} = \frac{\overline{CA}}{\beta} = \frac{\overline{BA}}{\alpha + \beta}$$

از آن‌جا:

$$\overline{BC} = \frac{\alpha.\overline{BA}}{\alpha + \beta} \quad \text{و} \quad \overline{CA} = \frac{\beta.\overline{BA}}{\alpha + \beta}$$

به‌جای BC و CA در رابطهٔ (۱)، مقدارهای آنها را قرار می‌دهیم:

$$\frac{(\alpha.\overline{MA}^۲ + \beta.\overline{MB}^۲)\overline{BA}}{\alpha + \beta} + \overline{MC}^۲.\overline{BA} - \frac{\alpha\beta.\overline{BA}^۲}{(\alpha + \beta)^۲} = ۰$$

با توجه به رابطهٔ (۲) خواهیم داشت:

$$-\frac{d^۲}{\alpha + \beta} + \overline{MC}^۲ + \frac{\alpha\beta}{(\alpha + \beta)^۲}.\overline{AB}^۲ = ۰$$

از آن‌جا :

$$\overline{MC}^{2} = \frac{(\alpha+\beta)d^{2} - \alpha\beta\,\overline{AB}^{2}}{(\alpha+\beta)^{2}}$$

در صفحه، مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای است به شعاع

$$\frac{1}{|\alpha+\beta|}\sqrt{(\alpha+\beta)d^{2} - \alpha\beta\,\overline{AB}^{2}}$$

و مرکز C که باری‌سانتر (باری سنتر) نقطه‌های A و B با ضریبهای α و β است. در فضا، مکان هندسی نقطهٔ M کره‌ای به همان مرکز و به همان شعاع است ؛ برای این که مکان موجود باشد، باید :

$$(\alpha+\beta)d^{2} - \alpha\beta\,\overline{AB}^{2} \geq 0$$

اگر $(\alpha+\beta)d^{2} - \alpha\beta\,\overline{AB}^{2} = 0$ باشد، مکان به نقطهٔ C تبدیل می‌شود.

۲.۱. مکانهای هندسی وابسته به خطهای ثابت

۱.۲.۱. مکانهای هندسی وابسته به یک خط ثابت

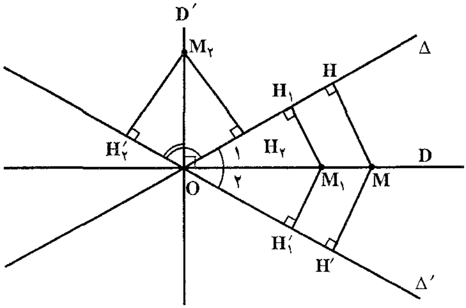
۱۳. خط Δ را در صفحهٔ P درنظر می‌گیریم و دو خط Δ_1 و Δ_2 را موازی Δ و به فاصلهٔ l از آن رسم می‌کنیم. برای این‌کار از نقطهٔ اختیاری H واقع بر Δ عمودی بر آن اخراج می‌کنیم و روی این عمود و در دو طرف H، طولهای $MH = MH' = l$ را جدا می‌کنیم. سپس از نقطه‌های M و M' دو خط Δ_1 و Δ_2 را موازی خط Δ رسم می‌کنیم. این دو خط، مکان هندسی نقطه‌ای از صفحهٔ P می‌باشند که از خط Δ به فاصلهٔ l واقع است ؛ زیرا :

۱. هر نقطه مانند N که روی یکی از دو خط Δ_1 یا Δ_2 قرار داشته باشد، از خط Δ به فاصلهٔ l واقع است ؛ زیرا اگر پای عمود رسم شده از N بر خط Δ را H' بنامیم، چهارضلعی $MHH'N$ که ضلعهایش دو به دو متوازی‌اند، متوازی‌الاضلاع است، که چون زاویه‌هایش قائمه‌اند، مستطیل می‌باشد ؛ پس $NH' = MH = l$ است.

۲. هر نقطه‌ای مانند E که به فاصلهٔ l از خط Δ قرار داشته باشد، بر یکی از دو خط Δ_1 یا Δ_2 واقع است. زیرا اگر از E عمود EH'' را بر خط Δ فرود آوریم، از این که $EH'' = MH = l$ و $EH'' \| MH$ و $\hat{H} = \hat{H}' = 90^\circ$ نتیجه می‌شود که چهارضلعی $MHH''E$ مستطیل و در نتیجه $ME \| HH''$ یا $ME \| \Delta$ است، یعنی نقطهٔ E روی خط Δ_1 (یا Δ_2) قرار دارد.

نکته. بنا به اصل توازی، از هر نقطه مانند M، تنها یک خط، موازی خط Δ می‌توان رسم کرد.

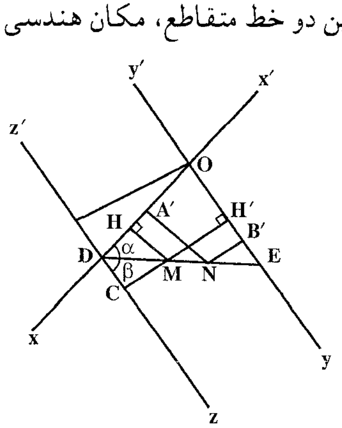
۱.۲.۲. مکانهای هندسی وابسته به دو خط ثابت



۱۴. دو خط Δ و Δ' متقاطع در نقطهٔ O را در نظر می‌گیریم. نیمسازهای زاویه‌های بین این دو خط را رسم می‌کنیم و D و D' می‌نامیم.

۱. اگر M نقطه‌ای واقع بر یکی از دو خط نیمساز D و D' قرار داشته باشد، از دو خط Δ و Δ' به یک فاصله است ؛ زیرا اگر از M عمودهای MH و MH' را بترتیب بر خطهای Δ و Δ' فرود آوریم، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OMH و OMH' به حالت تساوی وتر و یک زاویهٔ حاده همنهشتند ($OM = OM$، $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و $\hat{H} = \hat{H}' = 90°$) ؛ بنابراین $MH = MH'$ است.

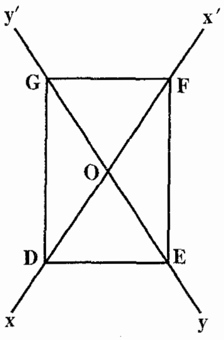
۲. هر نقطه‌ای مانند M که به یک فاصله از دو خط Δ و Δ' قرار داشته باشد، یعنی $MH = MH'$ باشد، بر یکی از دو خط نیمساز D و D' قرار دارد ؛ زیرا اگر از M به O وصل کنیم، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OMH و OMH' به‌دلیل تساوی وتر و یک ضلع همنهشتند ($OM=OM$، $MH = MH'$، $\hat{H} = \hat{H}' = 90°$)، پس $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$، یعنی MO نیمساز یک زاویهٔ بین دو خط Δ و Δ' است ؛ به عبارت دیگر نقطهٔ M روی یکی از دو خط نیمساز D یا D' واقع است. پس می‌توان گفت : نیمسازهای بین دو خط متقاطع، مکان هندسی نقطه‌هایی هستند که از آن دو خط، به یک فاصله‌اند.



(الف)

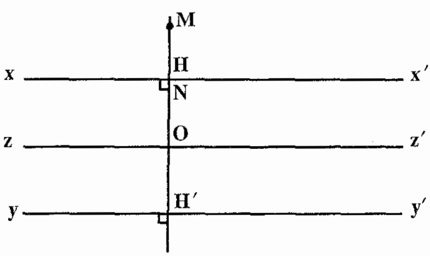
۱۵. دو خط متقاطع xx' و yy' را در نظر می‌گیریم (شکل). می‌خواهیم مکان نقطهٔ M واقع در داخل زاویهٔ xOy را چنان تعیین کنیم که $MH + MH' = l$ باشد. MH' را تا نقطهٔ C به اندازهٔ MH امتداد می‌دهیم. پس $H'C = l$، بنابراین C روی خط zz' که به فاصلهٔ l از yy' رسم شود قرار دارد و دو مثلث قائم‌الزاویهٔ HDM و DCM با هم برابرند (چرا؟). در نتیجه $\alpha = \beta$ ؛ ولی $\beta = \hat{E}$، پس

$\alpha = \hat{E}$ و مثلث ODE متساوی‌الساقین است. از آن‌چه گذشت نتیجه می‌شود که M روی قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین ODE قرار دارد که رأس D از آن، از برخورد خط zz' که به فاصلهٔ l از yy' رسم شده است، با xx'، مشخص می‌شود و به سهولت می‌توان ثابت کرد که هر نقطه مانند N روی DE اختیار شود، مجموع فاصله‌هایش از Ox و Oy برابر l است. مکان خواسته شده برای نقطه‌های داخل زاویهٔ xOy خط DE و برای زاویه‌های xOy'، $y'Ox'$ و $x'Oy$ خطهای DG، GF و FE که تشکیل یک مستطیل می‌دهند، می‌باشند (شکل (ب)).



(ب)

۱۶. فرض کنیم فاصلهٔ دو خط موازی xx' و yy' برابر d باشد (شکل). سه حالت می‌توان تمیز داد:



حالت اول. l>d.

خطهای داده شده روی صفحه سه ناحیهٔ (۱)، (۲) و (۳) ایجاد می‌کنند (ناحیهٔ ۱ بالای xx'، ناحیهٔ ۲ بین xx' و yy' و ناحیهٔ ۳ زیر yy'). فرض می‌کنیم M نقطه‌ای از ناحیهٔ (۱) باشد. از این نقطه عمودی بر دو خط مفروض فرود می‌آوریم و از نقطهٔ O وسط HH'، خط zz' را به موازات دو خط مفروض رسم می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$MH + MH' = MO - OH + MO + OH' = ۲MO$$

$$l = ۲MO \Rightarrow MO = \frac{l}{۲}$$

بنابراین هر نقطه از ناحیهٔ (۱) متعلق به مکان، به فاصلهٔ $\frac{l}{۲}$ از خط zz' واقع است. به همین ترتیب هر نقطه از ناحیهٔ (۳) نیز که متعلق به مکان باشد، به فاصلهٔ $\frac{l}{۲}$ از خط zz' قرار دارد. اگر N نقطه‌ای از ناحیهٔ (۲) باشد، خواهیم داشت:

$$NH + NH' = HH' = d$$

و چون $d<l$ است، پس هیچ یک از نقطه‌های ناحیهٔ (۲) متعلق به مکان نیست.

حالت دوم. l=d.

در این حالت هیچ یک از نقطه‌های ناحیه‌های (۱) و (۳)، متعلق به مکان نمی‌باشد؛ زیرا

MH یا MH' بزرگتر از d بوده و $MN+MH'>l$ خواهد بود؛ ولی هر نقطه از ناحیهٔ (۲) متعلق به مکان است.

حالت سوم. $l<d$.

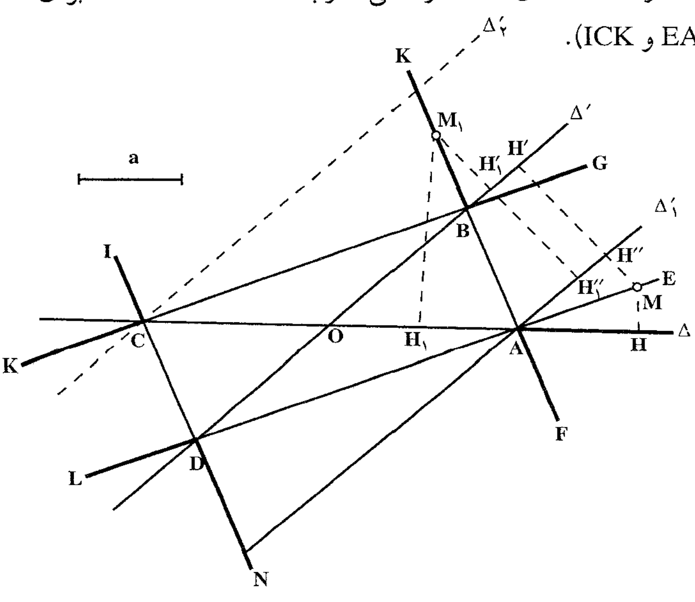
در این حالت هیچ یک از نقطه‌های ناحیه‌های (۱)، (۲) و (۳) نمی‌تواند متعلق به مکان باشد. زیرا برای ناحیه‌های (۱) و (۳)، $MN+MH'>l$ و برای ناحیهٔ (۲)، $NH+NH'=d$ خواهد بود و چون $d>l$، پس:

$$NH+NH'>l$$

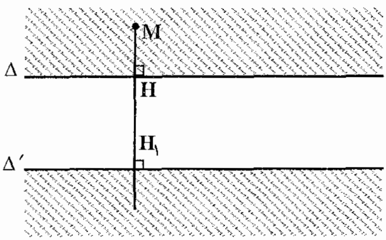
۱۷. دو خط متقاطع Δ و Δ' در نقطهٔ O را در نظر می‌گیریم. M را نقطه‌ای از مکان هندسی مورد نظر اختیار می‌کنیم. یعنی نقطه‌ای که اگر MH و MH' فاصله‌های آن از Δ و Δ' باشند، داشته باشیم:

$$MH-MH'=k \text{ یا } MH'-MH=k$$

خط Δ' را در راستای $H'M$ و در دو جهت به طول k انتقال می دهیم، و فرض می کنیم Δ'_1 و Δ'_2 انتقال یافته‌های Δ' باشند. می‌توان نشان داد که M از Δ' و Δ'_1 به یک فاصله است (شکل، که در آن $MH'-MH=k$ و $M_1H_1-M_1H'_1=k$). از این‌جا نتیجه می‌شود که مکان هندسی نقطه‌های خواسته شده، نیمسازهای چهار زاویهٔ حاصل از خط Δ با خطهای Δ'_1 و Δ'_2 هستند، ولی در این حالت فقط نقطه‌های واقع بر امتداد ضلعهای مستطیل $ABCD$، نقطه‌های مطلوب هستند (رابطهٔ $MH-MH'=k$ برای نقطه‌های واقع بر KBG و LDN صادق است، در حالی که رابطهٔ $MH'-MH=k$، برای نقطه‌های واقع بر EAF و ICK).

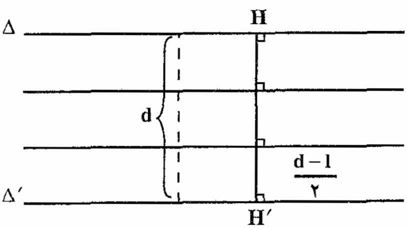


۱۸. از M خطی عمود بر Δ و Δ' رسم می‌کنیم و پای عمودها را H و H' می‌نامیم. فاصلهٔ بین این دو خط موازی را مساوی d فرض می کنیم. حالتهای زیر را خواهیم داشت :



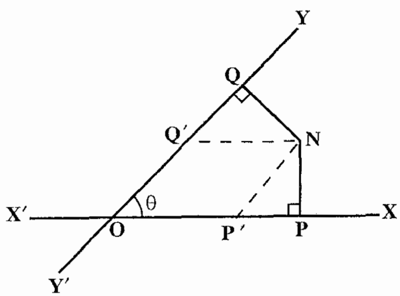
۱. اگر $d=l$ باشد، تمام نقطه‌هایی از صفحه که خارج دو خط Δ و Δ' واقع است، جواب مسأله‌اند. به‌عنوان مثال برای نقطهٔ دلخواه M از این مجموعه داریم :

$$MH' - MH = HH' = d = l$$



۲. اگر $d>l$ باشد، مکان هندسی نقطهٔ M، دو خط موازی خطهای Δ و Δ'، بین این دو خط و هر یک به فاصلهٔ $\frac{d-l}{۲}$ از یک خط و به فاصلهٔ $\frac{d+l}{۲}$ از خط دیگر هستند.

۳. اگر $d<l$ باشد، جواب مسأله مجموعه‌ای تهی است.



۱۹. باید مکان هندسی نقطهٔ M را چنان جستجو کنیم تا حاصل‌ضرب فاصله‌هایش از دو خط XX' و YY'، یعنی $MP\times MQ$، مساوی $k^۲$ باشد. روی این خطها محورهای XX' و YY' را در نظر گرفته، فرض می کنیم x، y مختصات نقطهٔ M باشد (شکل). داریم :

$$MQ = |X|\sin\theta \;،\; MP = |Y|\sin\theta$$

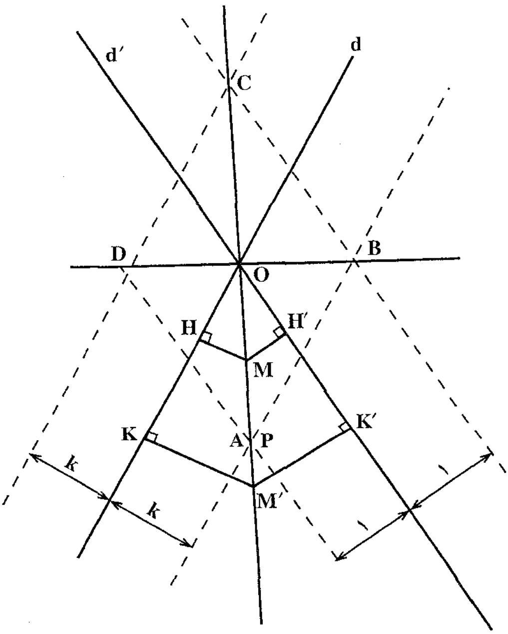
و در نتیجه :

$$|XY|\sin^۲\theta = k^۲ \Rightarrow XY = \pm\frac{k^۲}{\sin^۲\theta}$$

مکان M، پس دو هذلولی مزدوج است که مجانبهایشان خطهای مفروض و فاصله‌های رأسهایش از این خطها، مساوی k می‌باشد.

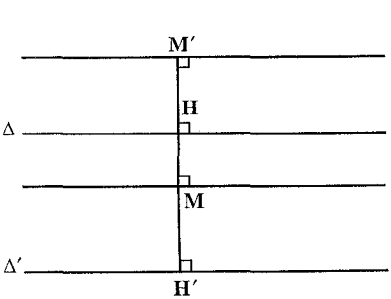
۲۰. اگر M نقطه‌ای باشد که نسبت فاصلهٔ آن از خط d به فاصلهٔ آن از خط d' مساوی k باشند، هر نقطهٔ M' از خط OM همین خاصیت را دارد (O نقطهٔ تقاطع d و d' است). این حکم از تشابه مثلثهای قائم‌الزاویه‌ای ثابت می‌شود که از رسم عمودهای وارد از M و M' بر d و d' پدید می‌آید.

برای تعیین مکان مطلوب، ابتدا نقطه‌هایی از مکان را پیدا می‌کنیم که فاصلهٔ آنها از خط d مساوی k و از خط d' مساوی ۱ باشد. این نقطه‌ها منحصر به چهار نقطه می‌باشند که از تقاطع دو خط موازی با d به فاصلهٔ k از آن، و دو خط موازی d' به فاصلهٔ ۱ از آن تعیین می‌شوند. این چهار نقطه که در شکل با A، B، C و D نموده شده‌اند، رأسهای متوازی‌الاضلاعی به مرکز O (نقطهٔ تقاطع d و d') می‌باشند.



با توجه به مقدمه‌ای که گفته شد، نسبت فاصله‌های هر نقطه از خطهای دو قطر AC و BD از این متوازی‌الاضلاع از d و d'، مساوی k است. به فرض این‌که M' نقطه‌ای از مکان مطلوب فرض شود، به طریق زیر می توان ثابت کرد که این نقطه روی یکی از دو خط AC و BD است. M' را به O وصل می‌کنیم؛ این خط یکی از دو خط موازی با d را که به فاصلهٔ k از آن رسم شده‌اند، در P قطع می‌کند. چون نسبت فاصله‌های P از d و d' مانند M'، مساوی k است و فاصلهٔ P از d مساوی k می‌باشد، باید فاصلهٔ P از d' مساوی ۱ باشد، یعنی P منطبق بر یکی از چهار نقطهٔ A، B، C و D است و در نتیجه M' باید روی یکی از دو قطر AC و BD باشد و خطهای این دو قطر مکان هندسی خواسته شده‌اند.

۲۱. دو خط موازی Δ و Δ' را اختیار می‌کنیم.



فرض می‌کنیم M نقطه‌ای از مکان هندسی مورد نظر باشد. یعنی داشته باشیم $\frac{MH}{MH'} = k$. از M خطی موازی Δ و Δ' رسم می‌کنیم. این خط مکان هندسی نقطهٔ M است. زیرا هرنقطه واقع بر این خط، نسبت

فاصله‌اش از Δ و Δ' برابر k است. بعکس هر نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از Δ و Δ' برابر k باشد، روی این خط است.

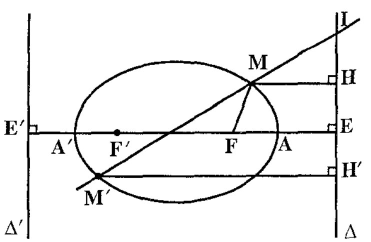
نکتهٔ ۱. نقطهٔ M می‌تواند بین دو خط Δ و Δ' و یا در خارج آنها باشد. بنابراین دو خط موازی Δ و Δ' جواب مسأله است.

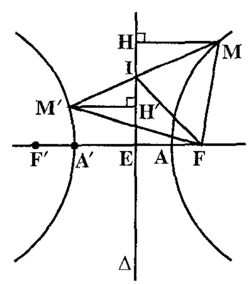
نکتهٔ ۲. اگر برای نسبت فاصلهٔ M از دو خط Δ و Δ'، ترتیب خاصی مورد نظر نباشد، دو خط دیگر هم جواب مسأله‌اند و این دو خط، خطهایی هستند که از نقطه‌های M_1 و M'_1 که برای آنها $\frac{M_1H'}{M_1H} = \frac{M'_1H'}{M'_1H} = k$ است، موازی خطهای Δ و Δ' رسم می‌شوند.

۱.۲.۳. مکانهای هندسی وابسته به خطها و نقطه‌های ثابت

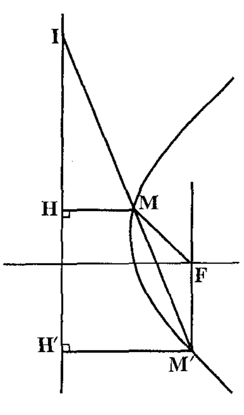
۲۲. اثبات این قضیه در مقطعهای مخروطی خواهد آمد.

۲۳. اگر Δ خط هادی نظیر کانون F، و نقطه‌های I، M و M' نقطه‌های برخورد یک قاطع با Δ و مقطع مخروطی باشند، باید ثابت کنیم IF، نیمساز زاویهٔ درونی یا برونی زاویهٔ MFM' است.





می‌دانیم که:



$$\frac{MF}{MH} = \frac{M'F}{M'H'} = e$$

$$\Rightarrow \frac{MH}{M'H'} = \frac{FM}{FM'} \quad (۱)$$

$$MH \| MH' \Rightarrow \frac{MH}{M'H'} = \frac{IM}{IM'} \quad (۲)$$

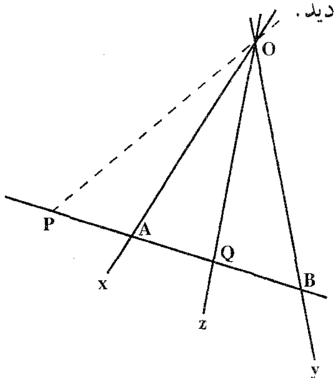
$$(۱) \text{ و } (۲) \Rightarrow \frac{IM}{IM'} = \frac{FM}{FM'} \quad (۳)$$

از رابطهٔ (۳) نتیجه می‌شود که FI نیمساز زاویهٔ درونی یا برونی زاویهٔ MFM' است.

۲۴. اثبات به کمک تعریف خط مماس بر منحنی در یک نقطه انجام می‌شود. با توجه به این که نیمسازهای دو زاویهٔ مجانب بر هم عمودند.

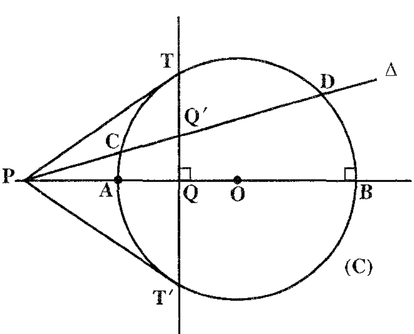
۲۵. می‌دانیم که $T\hat{F}M' = T\hat{F}M = 90^\circ$ است. پس $M'FM$ خطی راست است و FT عمود بر MM' می‌باشد.

۲۶. اثبات این قضیه را در مقطعهای مخروطی خواهید دید.



۲۷. از نقطهٔ P خط دلخواهی رسم می‌کنیم تا دو خط Ox و Oy را بترتیب در A و B قطع کنند. مزدوج توافقی نقطهٔ P نسبت به دو نقطهٔ A و B را Q می‌نامیم. از O به P و Q وصل می‌کنیم. دستگاه (O - PQAB) توافقی است. پس هر خطی که از نقطهٔ P بگذرد و شعاعهای دستگاه را قطع کند، نقطه‌های برخورد، تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند. بدیهی است هر نقطه مانند Q از خط OQ مزدوج توافقی نقطهٔ P نسبت به نقطه‌های برخورد OP با Ox و Oy است؛ پس مکان هندسی خواسته شده، خط OQ است که آن را قطبی نقطهٔ P نسبت به دو خط Ox و Oy می‌نامند.

۴.۲.۱. مکانهای هندسی وابسته به دایره‌ها و نقطه‌های ثابت



۲۸. دایرهٔ O و نقطهٔ P را در نظر می‌گیریم. قطری که بر P گذشته، دایره را در A و B قطع کرده است و Q مزدوج توافقی P را نسبت به A و B به‌دست آورده‌ایم. حال از نقطهٔ P قاطع غیرمشخصی مانند Δ رسم می‌کنیم تا دایره را در C و D قطع کند و Q' مزدوج توافقی نقطهٔ P را نسبت به دو نقطهٔ C و D به‌دست می‌آوریم. از Q به Q' وصل می‌کنیم. خط QQ' مکان هندسی مورد نظر است که در نقطهٔ ثابت Q بر قطر AB (قطر گذرنده بر P) عمود است. زیرا دو نقطهٔ C و D بر دایره‌ای قرار دارند که قطرش پاره‌خط PQ را به‌نسبت توافقی تقسیم کرده‌اند. بنابراین داریم:

$$\frac{CP}{CQ} = \frac{AP}{AQ} \ (1) \quad \text{و} \quad \frac{DP}{DQ} = \frac{AP}{AQ} \ (2)$$

$$(۱) و (۲) \Rightarrow \frac{CP}{CQ} = \frac{DP}{DQ} \Rightarrow \frac{PC}{PD} = \frac{QC}{QD} = \frac{Q'C}{Q'D} \quad (۳)$$

از رابطهٔ (۳) نتیجه می‌گیریم که در مثلث CQD دو خط QP و 'QQ ضلع CD را به‌نسبت دو ضلع دیگر تقسیم کرده‌اند ؛ پس نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ Q از این مثلثند و بر هم عمود می‌باشند، یعنی 'QQ بر AB عمود است.

بسادگی دیده می‌شود که هر نقطه از خط 'QQ ، مزدوج توافقی نقطهٔ P نسبت به نقطه‌های برخورد دایره O با خطی است که آن نقطه را به نقطهٔ P وصل می‌کند.

نکته. چون خط مماس، حد خط قاطع بر یک منحنی است، پس اگر از P مماسهای PT و 'PT را بر دایرهٔ (O) رسم کنیم نقطه‌های T و 'T به قطبی نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ (O) تعلق دارند و از این ویژگی برای رسم قطبی یک نقطه نسبت به یک دایره می‌توان استفاده نمود.

۲۹. گزینهٔ (ب) درست است.

برای اثبات آن که یک شکل هندسی، یک مکان هندسی است، ضروری است که :

(۱) شامل همهٔ نقطه‌های دارای شرایط باشد ؛

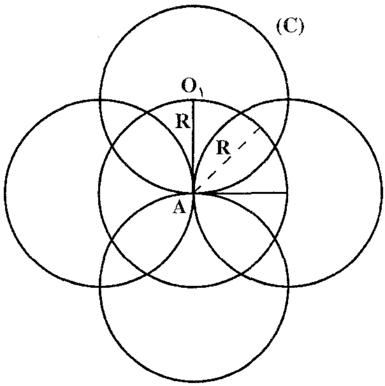
(۲) هیچ نقطه‌ای را که واجد شرایط نیست، شامل نباشد.

با این معیار، (ب) برقراری شرط (۱) را تضمین نمی‌کند، یعنی (ب) مبین آن نیست که هر نقطه که در شرایط صدق کند، بر مکان هندسی قرار دارد.

راهنمایی و حل مسأله‌های بخش ۲. نقطه، خط، زاویه

۱.۲. نقطه‌های ثابت

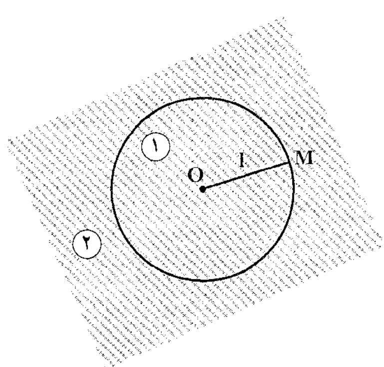
۱.۱.۲. یک نقطه



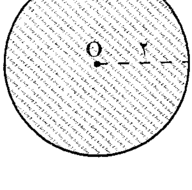
۳۰. یکی از این دایره‌ها، به‌عنوان مثال دایرهٔ $C(O_1, R)$ را در نظر می‌گیریم. $O_1A = R$ و A نقطهٔ ثابتی است. پس مکان هندسی نقطهٔ O_1 یعنی جواب مسأله، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع R است.

۳۱. گزینهٔ (د) درست است.
این مکان هندسی دایره‌ای به مرکز همان نقطهٔ ثابت و به شعاع a است.

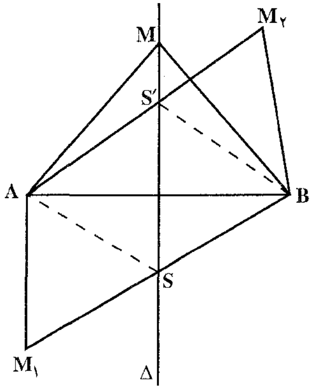
۳۲. بدیهی است این مسأله سه جواب دارد. اولی دایره‌ای به مرکز O و به شعاع l، دومی نقطه‌های داخل این دایره (بدون نقطهٔ O)، سومی نقطه‌های برون دایره در صفحه است.



۳۳. این مجموعه، بخش درونی دایره‌ای به مرکز آن نقطه و به شعاع ۲cm است.



۲.۱.۲. دو نقطه



۳۴. در حالت اول که MA=MB، مکان هندسی، خط Δ عمودمنصف پاره‌خط AB است؛ در حالت $M_1A < M_1B$، مکان یکی از دو نیمصفحه‌ای است که خط Δ در صفحه پدید می‌آورد و نقطهٔ A در آن واقع شده است؛

$$M_1B = M_1S + SB = M_1S + SA$$

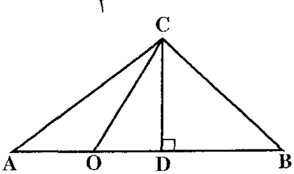
در مثلث AM_1S، $M_1S + SA > M_1A$، پس $M_1A < M_1B$. به همین ترتیب برای حالت سوم ثابت می‌شود $M_2A > M_2B$.

۳۵. از رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود $\frac{MA}{MB} = \frac{k+1}{k-1} = k'$. پس مکان هندسی نقطهٔ M یک دایره است (دایرهٔ آپولونیوس) که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k' تقسیم می‌کند.

۳۶. می‌دانیم مکان هندسی نقطهٔ M که برای آن $MA^2 + MB^2 = k^2$ است (A و B نقطه‌های ثابت و k مقدار ثابت). دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O، وسط پاره‌خط AB و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - AB^2}$ است. بنابراین مکان هندسی خواسته شده، دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و به شعاعی برابر مقدار ثابت زیر است:

$$R = \frac{1}{2}\sqrt{2(82a^2) - 64a^2} = 5a$$

۳۷. نقطهٔ دلخواه O را روی AB درنظر می‌گیریم. از C عمود CD را بر AB فرود می‌آوریم. داریم:

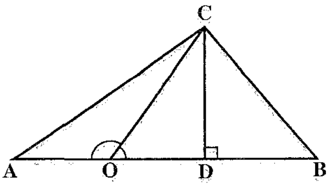


$$AC^2 = AO^2 + OC^2 + 2AO.OD$$
$$\Rightarrow 2AC^2 = 2AO^2 + 2OC^2 + 4AO.OD \ (1)$$
$$BC^2 = BO^2 + OC^2 - 2BO.OD \ (2)$$

با توجه به فرض $2AC^2 + BC^2 = k^2$، دو رابطهٔ بالا را با هم جمع می‌کنیم و $OA = \frac{AB}{3} = \frac{d}{3}$ قرار می‌دهیم. خواهیم داشت:

$$k^2 = 2(\frac{d}{3})^2 + 3OC^2 + (\frac{2d}{3})^2 \Rightarrow OC^2 = \frac{3k^2 - 2d^2}{9} \Rightarrow OC = \text{مقدار ثابت}$$

بنابراین با توجه به ثابت بودن نقطهٔ O، مکان هندسی نقطهٔ C، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\frac{1}{3}\sqrt{3k^2 - 2AB^2}$ است.



۳۸. تصویر نقطهٔ C روی AB را نقطهٔ P می‌نامیم و نقطهٔ O را روی پاره‌خط AB چنان اختیار می کنیم که $\frac{OA}{OB} = \frac{n}{m}$ باشد. با فرض $AB = d$ داریم:

$AO = \frac{nd}{m+n}$ و $BO = \frac{md}{m+n}$. در مثلثهای CAO و CBO داریم:

$$AC^2 = AO^2 + OC^2 + 2AO.OD$$

$$BC^2 = BO^2 + OC^2 - 2BO.OD$$

$$m.AC^2 = m.AO^2 + m.OC^2 + 2m.AO.OD$$

$$m.AC^2 = m.AO^2 + m.OC^2 + \frac{2mnd}{m+n}.OD \quad (1)$$

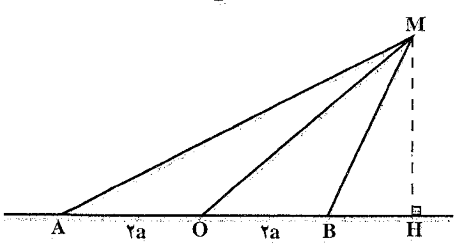
و به روش مشابه داریم:

$$n.BC^2 = n.BO^2 + n.OC^2 - \frac{2mnd}{m+n}.OD \quad (2)$$

$$(1)+(2) \Rightarrow m.AC^2 + n.BC^2 = k^2 = \frac{mn(m+n)d^2}{(m+n)^2} + (m+n)CO^2$$

$$\Rightarrow OC^2 = \frac{k^2}{m+n} - \frac{mn}{(m+n)^2}d^2 = \text{مقدار ثابت} \Rightarrow OC = R'$$

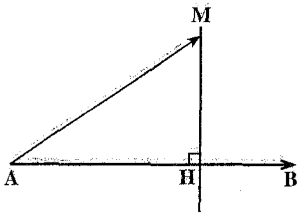
پس مکان هندسی نقطهٔ C دایره‌ای به مرکز نقطهٔ ثابت O و به شعاع $OC = R'$ است.



۳۹. این مکان عمودی است که به فاصلهٔ ۵a از نقطهٔ A و در سمت راست A بر AB اخراج می‌شود. زیرا اگر نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB، و M یک نقطه از مکان باشد، داریم:

$$MA^2 - MB^2 = 2AB.OH \Rightarrow 24a^2 = 2(4a).OH \Rightarrow OH = 3a$$

$$\Rightarrow AH = 2a + 3a = 5a$$

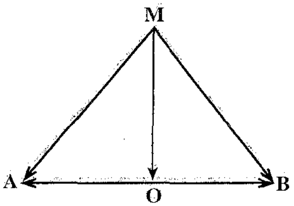


۴۰. تصویر یک نقطهٔ M از مکان روی خط AB را H می‌نامیم. بنا به تعریف ضرب درونی دو بردار داریم :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{AB}=\overline{AH}.|\overrightarrow{AB}|=k$$

$$\Rightarrow \overline{AH}=\frac{k}{|\overrightarrow{AB}|}= \text{مقدار ثابت}$$

در نتیجه H نقطهٔ ثابتی است. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M خط راستی است که در نقطهٔ ثابت H بر خط AB عمود می‌شود.



۴۱. وسط پاره‌خط AB را O می‌نامیم، داریم :

$$\overrightarrow{MA}.\overrightarrow{MB}=k$$

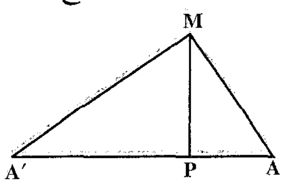
$$\Rightarrow (\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OA}).(\overrightarrow{MO}+\overrightarrow{OB})=k$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MO}^{۲}+\overrightarrow{MO}(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB})+\overrightarrow{OA}.\overrightarrow{OB}=k \quad , \quad \overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=۰$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MO}^{۲}+\overrightarrow{OA}(\frac{-\overrightarrow{OA}}{۲})=k$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{MO}^{۲}=\frac{\overrightarrow{OA}^{۲}}{۲}+k \Rightarrow \left|\overrightarrow{MO}\right|=\sqrt{\frac{AB^{۲}}{۸}+k}= \text{مقدار ثابت}$$

پس مکان هندسی نقطهٔ M، دایره‌ای است به مرکز O وسط پاره‌خط AB و به شعاع مقدار ثابت.

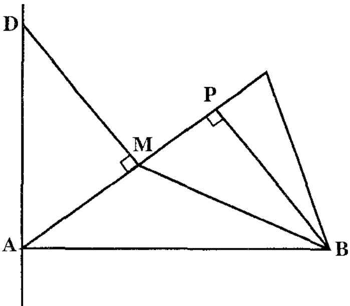


۴۲. فرض می‌کنیم در مثلث MAA′ داشته باشیم (شکل) :

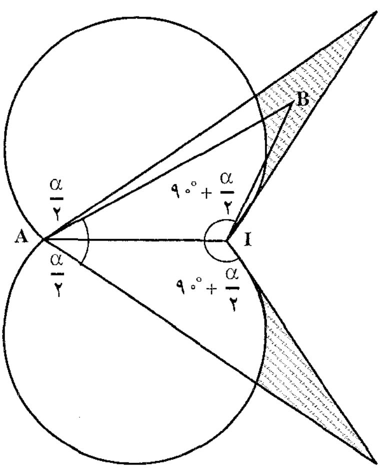
$$\frac{۱}{MA^{۲}}+\frac{۱}{MA'^{۲}}=\frac{۱}{MP^{۲}}$$

اگر P بین A و A′ باشد، این مثلث قائم‌الزاویه در رأس M می‌باشد و مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به قطر AA′ است، و اگر P خارج قطعهٔ AA′ باشد، تفاضل زاویه‌های A و A′ برابر $\frac{\pi}{۲}$ است.

در حالت اخیر مثلث Pseudo - rectangle است و بنابراین مکان M، دایرهٔ به قطر AA' و یا هذلولی متساوی‌الساقین به رأسهای A و A' است.



۴۳. از M عمودی بر MA و از A عمودی بر AB اخراج می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ D قطع کنند و پای عمود رسم شده از B بر AM را P می‌نامیم. از تشابه دو مثلث AMD و BPA نتیجه می‌گیریم که D نقطهٔ ثابتی است ؛ زیرا داریم : $\frac{AD}{AB} = \frac{AM}{BP} = k$ ؛ پس $AD = k.AB$ مقدار ثابتی است، و مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به قطر پاره‌خط AB است.

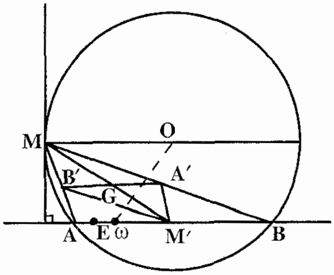


۴۴. اگر A، B و C زاویه‌های مثلث ABC باشند، آن‌وقت زاویه‌های مثلث ABI برابرند با : (شکل).

$\frac{\hat{A}}{۲}$، $\frac{\hat{B}}{۲}$ و $\frac{\hat{C}}{۲} + ۹۰°$. درنتیجه، مکان هندسی مطلوب، یک جفت مثلث است که دو ضلع آنها پاره‌خط و سومی کمانی است که بخشی است از قطعهٔ رسم شده بر AI که حاوی زاویهٔ $\frac{\alpha}{۲}$ است.

۴۵. AQ را، از طرف نقطهٔ Q، امتداد دهید و روی این نیمخط، نقطه‌ای مانند M به‌طوری که $QM = \frac{۱}{۲}AQ$ و نقطه‌ای مانند $A_۱$ به‌طوری که $MA_۱ = AM$، اختیار کنید ؛ M وسط ضلع BCی مثلث ABC است ؛ $C\hat{B}A_۱ = B\hat{C}A$ و $A\hat{B}A_۱ = ۱۸۰° - B\hat{A}C$ درنتیجه، اگر دایره‌هایی به قطر AM، $MA_۱$ و $AA_۱$ رسم کنیم، آن‌وقت، مکان هندسی مطلوب، عبارت است از نقطه‌های واقع در بیرون دو دایرهٔ اول و در درون دایرهٔ سوم.

۴۶. چهار حالت در نظر می‌گیریم : یا مثلث ABC حاده است، یا یکی از زاویه‌های A، B و C منفرجه است. در همهٔ حالتها، می‌توان اندازهٔ زاویه‌های مثلث ABH را برحسب اندازهٔ زاویه‌های مثلث ABC پیدا کرد.



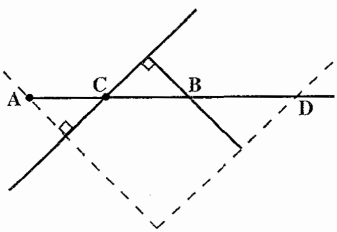
۴۷. اگر A' ، B' و M' وسطهای ضلعهای مثلث ABC باشند، مثلثهای MAB و $M'A'B'$ مجانس یکدیگرند در تجانس $(G, \frac{-۱}{۲})$ (G محل برخورد میانه‌های مثلث MAB است). و اگر ω مرکز دایرهٔ محیطی مثلث $M'A'B'$ باشد، داریم :

$$\frac{\overline{G\omega}}{\overline{GO}} = -\frac{۱}{۲} = \frac{\overline{GM'}}{\overline{GM}}$$

پس $\omega M'$ با OM موازی است و ω خط AB را از نقطهٔ E که با رابطهٔ :

$$M'E = \frac{۲}{۳} M'A$$

معین شده است می‌پیماید.



۴۸. دو نقطهٔ C و D را روی پاره‌خط AB و در امتداد آن چنان اختیار می‌کنیم که این پاره‌خط را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم کنند. یعنی داشته باشیم :

$$\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = \frac{m}{n}$$

مجموعهٔ تمام خطهایی که از دو نقطهٔ C و D می‌گذرند جواب مسأله‌اند.

تبصره ۱. اگر اندازهٔ جبری پاره‌خطها مورد نظر باشد، یعنی $\frac{m}{n}$ عددی جبری باشد، یکی از دو دسته خط گذرنده از C یا D جواب است. به این ترتیب که اگر $\frac{m}{n} > ۰$ باشد، دسته خط گذرنده از نقطهٔ D جواب مسأله است و اگر $\frac{m}{n} < ۰$ باشد، دسته خط گذرنده از C جواب می‌باشد.

تبصره ۲. اگر $\frac{m}{n} = ۱$ باشد و اندازهٔ جبری، مورد نظر نباشد، C وسط پاره‌خط AB و دسته خط گذرنده از این نقطه یک جواب است و جواب دیگر، دسته خطی است که با امتداد AB موازی‌اند.

۲.۱.۳. سه نقطه

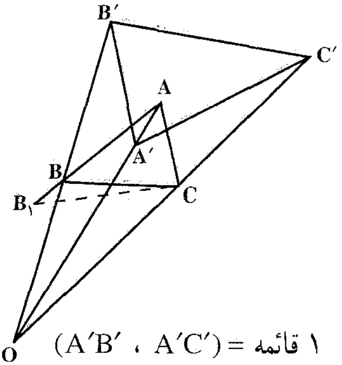
۲.۱.۳.۱. سه نقطه در حالت کلی

۴۹. فرض کنید سه نقطهٔ مفروض، یک مثلث ABC تشکیل دهند. دو خانوادهٔ ممکن از مثلثهای متساوی‌الاضلاع محیط بر مثلث ABC، وجود دارد. خانوادهٔ اول، به طریق زیر به‌دست می‌آید. دایره‌هایی بر روی ضلعهای مثلث طوری رسم می‌کنیم که کمانهای این دایره‌ها که بیرون مثلث واقعند، به اندازهٔ زاویهٔ $\frac{۴\pi}{۳}$ باشند. یک نقطهٔ دلخواه A_1، روی دایرهٔ ساخته شده بر روی BC اختیار می‌کنیم. خط راست A_1B، دایرهٔ مرسوم بر BA را، برای بار دوم، در نقطه‌ای مانند C_1 و خط راست A_1C، دایرهٔ مرسوم بر CA را در نقطه‌ای مانند B_1 قطع می‌کنند. مثلث $A_1B_1C_1$ یکی از مثلثهای متعلق به خانوادهٔ اول است. فرض کنید E، F و G نقطهٔ برخورد نیمسازهای مثلث $A_1B_1C_1$ با دایره‌های مرسوم بر ضلعهای مثلث مفروض باشند. نقطه‌های E، F و G ثابتند (E وسط کمان دایرهٔ رسم شده بر BC است و با مثلث ABC، در یک طرف BC قرار دارند). نقطه‌های E، F و G مرکز مثلثهای متساوی‌الاضلاع ساخته شده در درون و روی ضلعهای مثلث ABC هستند. مثلث EFG متساوی‌الاضلاع است و مرکز آن بر نقطهٔ میانه‌ای مثلث ABC منطبق است. مرکز مثلث $A_1B_1C_1$ بر روی دایرهٔ محیطی مثلث EFG قرار دارد؛ مربع شعاع این دایره، برابر می‌شود با $\frac{۱}{۹}(\frac{a^۲+b^۲+c^۲}{۲}-۲S\sqrt{۳})$. که در آن، a، b و c طول ضلعهای مثلث ABC هستند و S مساحت آن است.

دومین خانواده از مثلثهای متساوی‌الاضلاع محیط بر مثلث ABC، به شرط آن که کمانهای بیرونی دایره‌هایی که بر روی ضلعهای مثلث بنا شده‌اند، (هر کدام) برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ باشند، به‌دست می‌آید. مکان مطلوب، عبارت است از دو دایرهٔ هم‌مرکز، که مرکزهایشان بر نقطهٔ میانه‌ای مثلث ABC منطبقند و شعاعهایشان برابرند با:

$$\frac{۱}{۳}\sqrt{\frac{۱}{۲}(a^۲+b^۲+c^۲)\pm ۲S\sqrt{۳}}$$

۵۰. اگر O قطب انعکاس باشد، بنا به فرض داریم :



$$(A'B' \text{ ، } A'C') = \text{۱ قائمه}$$

و یا

$$(A'B' \text{ ، } OA)+(OA \text{ ، } A'C') = \text{۱ قائمه} \quad (۱)$$

اما AB و A′B′ نسبت به زوج (OA ،OB) متباینند و داریم :

$$(A'B' \text{، } OA)+(AB \text{، } OB) = ۰$$

و همچنین

$$(OA \text{، } A'C')+(OC \text{، } AC) = ۰$$

با جمع دو رابطهٔ بالا و با استفاده از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود :

$$(AO \text{، } OB)+(OC \text{، } AC)+ \text{۱ قائمه} = ۰$$

با جمع (OB ،OC) به طرفین رابطهٔ بالا، خواهیم داشت :

$$(OB \text{ ،} OC) = (AB \text{ ،} AC) + \text{۱ قائمه}$$

پس مکان O دایره‌ای است که از B و C می‌گذرد (شکل).

فرض کنیم B_1 محل برخورد AB و با عمود رسم شده از C بر AC باشد، B_1 روی دایرهٔ مزبور است ؛ زیرا :

$$(B_1B \text{، } B_1C) = (AB \text{، } AC)$$

به همین ترتیب این دایره از محل برخورد AC و عمود رسم شده از B بر AB می‌گذرد، وقتی که A، B و C بر یک خط راست واقع باشند، $(AB \text{ ،} AC)=۰$ است، پس یک قائمه $=(OB \text{ ،} OC)$ و در این حالت مکان O دایرهٔ به قطر BC است.

۵۱. نقطهٔ برخورد BC با خط Δ را نقطهٔ D می‌نامیم، داریم :

$$DM^۲ = DM'^۲ = \overline{DB} \times \overline{DC}$$

و چون D وسط MM′ و نقطه‌های P و A مزدوج هم نسبت به دو نقطهٔ M و M′ هستند، می‌توان نوشت :

$$\overline{DB}.\overline{DC} = \overline{DA}.\overline{DP} \text{ و } \overline{DM}^۲ = \overline{DA}.\overline{DP}$$

این رابطه نشان می‌دهد که چهار نقطهٔ A، B، C و P روی یک دایره‌اند، و یا نقطهٔ P روی

دایرهٔ محیطی مثلث ABC واقع است. چون Δ نمی‌تواند CB را بین B و C قطع کند، مکان هندسی نقطهٔ M در داخل کمان $\overset{\frown}{BAC}$ است.

۲.۳.۱.۲. سه نقطهٔ همخط

۵۲. بر BM در نقطهٔ M عمودی اخراج می‌کنیم، فرض کنید P معرف نقطهٔ برخورد این عمود و عمود رسم شده بر خط راست اصلی در نقطهٔ B باشد. نشان می‌دهیم که مقدار PB مقدار ثابتی است. فرض کنید $M\hat{B}C$ برابر φ باشد؛ K و L معرف پای عمودهای وارد از A و C بر MB هستند. بنا به فرض:

$$\frac{MK}{KA}+\frac{LM}{LC}=k$$

امّا:

$$LC=BC\sin\varphi\ ,\ AK=BA\sin\varphi$$

بنابراین:

$$\frac{MK}{BA\sin\varphi}+\frac{LM}{BC\sin\varphi}=k$$

$$\Leftrightarrow \frac{BM\pm BK}{BA\sin\varphi}+\frac{BM\pm BL}{BC\sin\varphi}=k$$

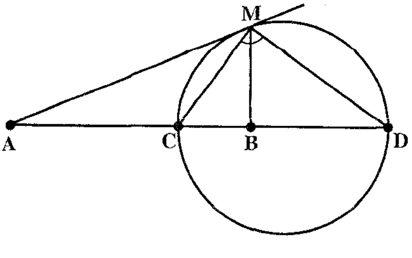
$$\Leftrightarrow \frac{BM}{\sin\varphi}(\frac{۱}{BA}+\frac{۱}{BC})\pm(\frac{BK}{BA\sin\varphi}-\frac{BL}{BC\sin\varphi})=k$$

$$\Leftrightarrow \frac{BM}{\sin\varphi}=\frac{k.BA.BC}{BA+BC}$$

$$\Leftrightarrow PB=\frac{k.BA.BC}{BA+BC}$$

که همین را می‌خواستیم ثابت کنیم. در نتیجه، مکان هندسی مطلوب، عبارت است از دو دایره که بر خط راست AC در نقطهٔ B مماسند و قطرشان برابر است با $\frac{k.BA.BC}{BA+BC}$.

۵۳. اگر M نقطه‌ای از این مکان هندسی باشد، $A\hat{M}C=B\hat{M}C$ است، یعنی MC نیمساز زاویهٔ AMB است. نیمساز خارجی این زاویه را رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ D خط AB را قطع کند. چهار نقطهٔ A، B، C و D تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند. پس D نقطهٔ ثابتی است. از طرفی $C\hat{M}D=۹۰^\circ$ است. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به قطر CD است.

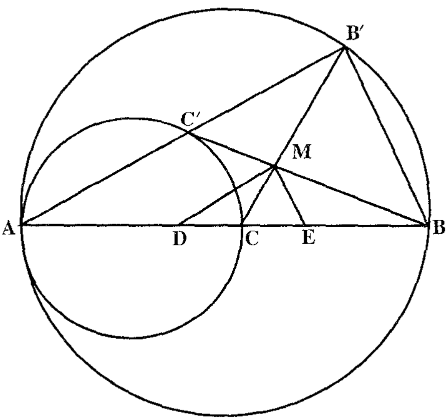


۵۴. اگر N نقطهٔ برخورد خطهای راست PQ و AB باشد، آن‌وقت :

$$\frac{CN}{AN}=\frac{PC}{AQ}=\frac{CB}{AC}$$

یعنی، نقطهٔ N ثابت است. مجموعهٔ نقطه‌های مطلوب، دایره‌ای به قطر CN است. اکنون، اگر M نقطه‌ای ثابت باشد، آن‌وقت D بر خط راستی قرار دارد که با خط MN موازی است و از نقطهٔ ثابتی مانند L روی خط راست AB، به‌طوری که $\frac{AL}{LB}=\frac{AN}{CN}$، می‌گذرد. L نسبت به پاره‌خط AB، به همان نحوی قرار می‌گیرد که N نسبت به پاره‌خط AC.

۵۵. دایرهٔ به قطر AB، از B' و دایرهٔ به قطر AC، از C' می‌گذرد. BB' و CC' موازی‌اند، پس :



$$\frac{BM}{BB'}=\frac{MC'}{CC'}$$

و یا :

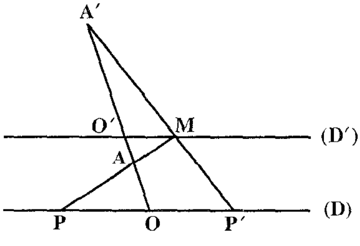
$$\frac{BM}{AB}=\frac{MC'}{AC}=\frac{BC'}{AB+AC}$$

از آن‌جا :

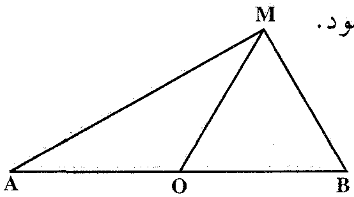
$$\frac{BM}{BC'}=\frac{AB}{AB+AC}$$

درنتیجه مکان M مجانس دایرهٔ به قطر AC است در تجانس $(B,\frac{AB}{AB+AC})$. خطهای MD و ME را بترتیب به موازات $C'A$ و $C'C$ رسم می‌کنیم. D و E با A و C متناظرند، پس مکان مطلوب دایرهٔ به قطر DE می‌باشد.

۵۶. فرض می‌کنیم M یک نقطه از مکان هندسی موردنظر باشد. از نقطهٔ M خطی موازی خط D رسم می‌کنیم تا AA' را در نقطهٔ O' قطع کند. دستگاه $(M-AA'OO')$ توافقی است ؛ زیرا روی خط D که موازی (D') یا شعاع MO' رسم شده است، به‌وسیلهٔ سه شعاع MO، MA و MA' دو پاره‌خط مساوی جدا شده است $(OP=OP')$. پس $(OO'A'A)$ یک تقسیم توافقی است که چون A'، A و O



نقطه‌هایی ثابتند، پس O' هم نقطهٔ ثابتی است. پس مکان هندسی نقطهٔ M، خط راستی است که از نقطهٔ O' به موازات خط D رسم می‌شود.



۵۷. بنا به قضیه‌ها در مثلث داریم:

$$MA^{۲}+MB^{۲}=۲MO^{۲}+\frac{AB^{۲}}{۲}$$

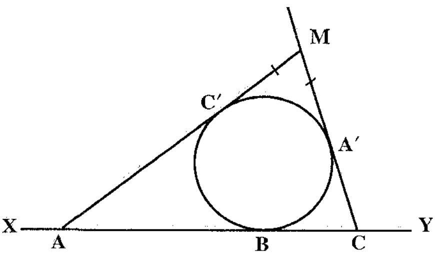
پس:

$$MA^{۲}+MB^{۲}=۲MA.MB+\frac{AB^{۲}}{۲}\Rightarrow$$

$$(MA-MB)^{۲}=\frac{AB^{۲}}{۲}\Rightarrow$$

$$|MA-MB|=\frac{AB}{\sqrt{۲}}=\frac{۲OA}{\sqrt{۲}}=\sqrt{۲}OA$$

چون $\sqrt{۲}OA$ مقداری ثابت است، پس مکان هندسی نقطهٔ M یک هذلولی است که A و B دو کانون آن می‌باشند.



۵۸. اگر $AB>BC$ و M فصل مشترک مماسهای رسم شده از A و B به دایرهٔ مماس در B بر XY باشد، این دایرهٔ محاطی داخلی یا محاطی خارجی نظیر رأس M از مثلث MAC می‌باشد. ابتدا فرض می‌کنیم محاطی باشد (شکل) داریم:

$$AM=AC'+C'M=AB+C'M\ ،$$

$$CM=CA'+A'M=CB+A'M\ ،$$

و یا:

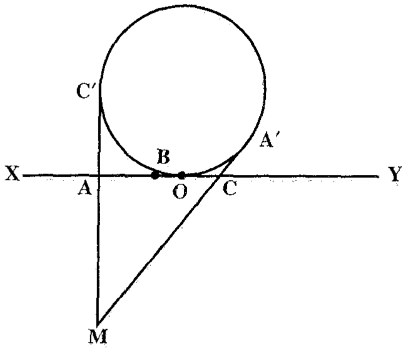
$$AM-CM=AB-CB$$

یا اگر O وسط AC باشد:

$$AM-CM=۲OB$$

پس نقطهٔ M متعلق به شاخهٔ راست هذلولی (H) به کانونهای A، C و یک رأس B می‌باشد. بعکس، اگر M یک نقطه غیرمشخص از این شاخهٔ هذلولی (H) باشد، دایرهٔ محاطی داخلی مثلث MAC را رسم می‌کنیم؛ $B_۱$ نقطهٔ تماس آن با XY بر B منطبق است؛ چون با استدلالی مشابه قبل ثابت می‌شود:

$$AM-CM=AB_۱-CB_۱=۲O_۱B$$



ولی بنا به فرض $AM - CM = ۲OB$ ، پس B_1 بر B منطبق است. حال دایرهٔ محاطی خارجی زاویهٔ M را درنظر می‌گیریم، داریم :

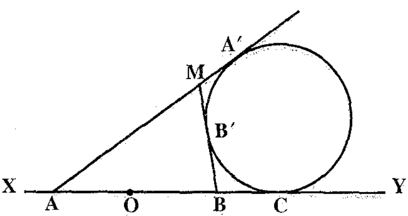
$$AM = C'M - C'A = C'M - AB$$

$$CM = A'M - A'C = A'M - CB$$

و یا :

$$CM - AM = AB - CB = ۲OB$$

بنابراین نقطهٔ M متعلق به شاخهٔ چپ هذلولی فوق‌الذکر می‌باشد. درنتیجه : مکان مطلوب هذلولی (H) به کانونهای A و C و به یک رأس B می‌باشد. اگر $AB = BC$ باشد، مکان عمودمنصف AC می‌باشد.



۵۹. فرض کنیم M محل برخورد مماسهای AA' و BB' در نقطه‌های A و B بر دایرهٔ مماس بر XY در نقطهٔ C باشد (شکل) داریم :

$$AM = AA' - A'M, BM = BB' + B'M$$

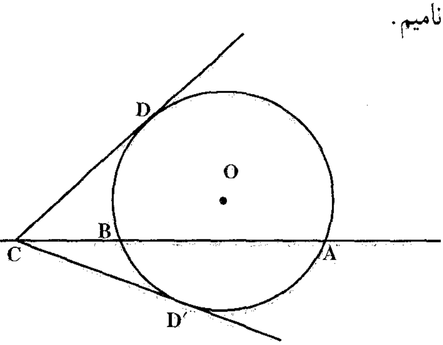
یا چون $A'M = B'M$ است، پس :

$$AM + BM = AA' + BB' = AC + BC = ۲OC$$

O وسط AB است.

در نتیجه M متعلق به بیضی (E) به کانونهای A و B به محور بزرگتر ۲OC می‌باشد. بعلاوه وقتی شعاع تغییر کند، مماس AA' تمام جهتهای داده شده را اختیار می‌کند و M هم تمام بیضی (E) را طی می‌کند. بنابراین مکان خواسته شده بیضی است.

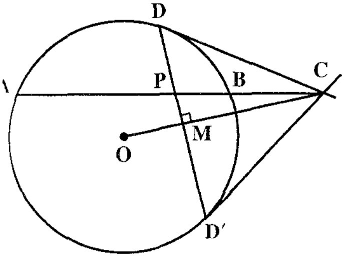
۶۰. یکی از دایره‌های گذرنده بر A و B را (O) می‌نامیم.



می‌دانیم که $CD^۲ = CD'^۲ = CA.CB$. امّا $CA.CB$ مقدار ثابتی است. بنابراین :

$CD = CD' =$ مقدار ثابت

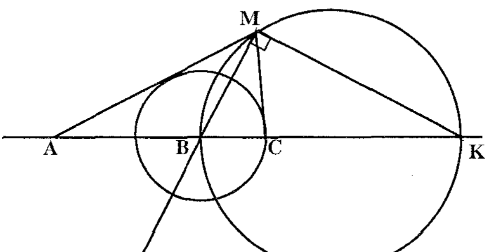
پس مکان هندسی نقطه‌های D و D' دایره‌ای به مرکز C و به شعاع $\sqrt{CA.CB}$ است.



۶۱. وتر DD' خط AB را در نقطهٔ P قطع می‌کند، که نقطه‌ای است ثابت، زیرا قوت نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ (O) و تمام دایره‌های گذرنده بر A و B یکسان است. ((AB) محور اصلی این دایره‌هاست).

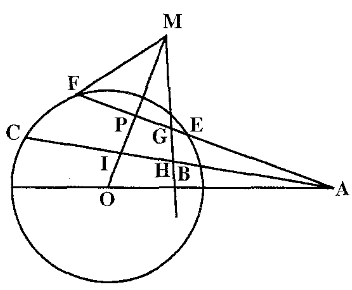
چون M وسط DD' است، پس $P\hat{M}C = ۹۰^\circ$ می‌باشد و مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به قطر PC است.

۶۲. از آن‌جا که MB نیمساز زاویهٔ AMC است، $\frac{AM}{MC} = \frac{AB}{BC}$. درنتیجه، نیمساز زاویهٔ خارجی زاویهٔ AMC، خط AC را در نقطهٔ ثابت K قطع می‌کند: $\frac{AK}{KC} = \frac{AB}{BC}$، و مجموعهٔ مطلوب از نقطه‌های M، کمان دایرهٔ رسم شده به قطر BK و محصور بین خطهای راست عمود بر پاره‌خط AC که از نقطه‌های A و C می‌گذرند، است.



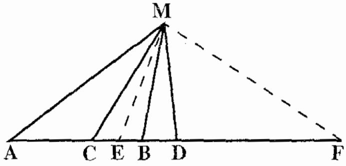
۶۳. مکان P دایره‌ای به قطر OA و این دایره از نقطهٔ I وسط BC می‌گذرد. اگر شعاع دایرهٔ (O) را R فرض کنیم، خواهیم داشت:

$$OP.OM = R^۲$$



پس M و P منعکس یکدیگرند که قطب انعکاس O و قوت انعکاس $R^۲$ است. پس مکان M خطی است مستقیم، عمود بر OA و منعکس دایرهٔ به قطر AO است و این خط قطبی نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ O است که EF را در G و BC را در H قطع می‌کند. وقتی O عمود منصف BC را بپیماید، نقطه‌های I و H ثابت می‌مانند و دایرهٔ به قطر OA تشکیل یک دستگاه دایره می‌دهد که به‌وسیلهٔ A و I مشخص می‌شوند و خط MH یک دسته خط به رأس H به‌وجود می‌آورد.

۲.۱.۴. چهار نقطه



۶۴. راه اول. فرض کنیم Δ یکی از نیمسازهای زاویهٔ بین MA و MD، و Δ' یکی از نیمسازهای زاویهٔ بین MB و MC باشد (شکل)، داریم :

$$(MA , \Delta)+(MD , \Delta)=\circ;\cdots \qquad (۱)$$

$$(MB , \Delta')+(MC , \Delta')=\circ;\cdots \qquad (۲)$$

دو طرف رابطه را از هم کم می‌کنیم :

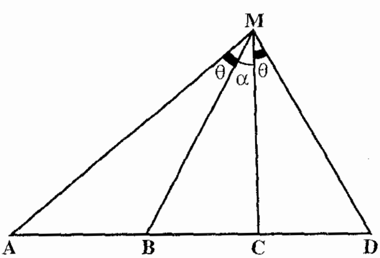
$$(MA , \Delta)+(\Delta' , MB)+(MD , \Delta)+(\Delta' , MC)=\circ$$

مقدار $۲(\Delta , \Delta')$ را به طرفین اضافه می‌کنیم :

$$(MA , MB)+(MD , MC)=۲(\Delta , \Delta') \quad (۳)$$

دستگاه (۱)، (۲) با دستگاه (۱) و (۳) معادل است.

برای این که (MA ،MB) با (MC ،MD) برابر باشند، لازم است که $۲(\Delta , \Delta')$ مضربی از ۲ قائمه باشد، یعنی Δ و Δ' یا بر هم منطبق و یا بر هم عمود باشند. یعنی دو زاویهٔ (MA ،MD) و (MB ،MC) دارای یک نیمساز باشند. اگر E و F پای این نیمسازها باشند، E و F نسبت به AD و BC مزدوج توافقی می‌باشند و می‌توان آنها را با رسم به‌دست آورد. و چون $E\hat{M}F =$ ۱ قائمه پس مکان، دایرهٔ به قطر EF است. برای این که مسأله ممکن شود، باید AD و BC از هم نگذرند.



راه دوم. با توجه به شکل، بنا به فرض زاویهٔ $A\hat{M}B = C\hat{M}D$ می‌باشد. سطح مثلث CMD برابر است با $\frac{۱}{۲}MC.MD.\sin\theta$ و سطح مثلث BMA برابر است با $\frac{۱}{۲}MA.MB.\sin\theta$. نسبت سطح این دو مثلث، چون ارتفاع آنها مشترک است، چنین نوشته می‌شود :

$$\frac{MC.MD}{MB.MA}=\frac{CD}{AB}$$

که مقداری ثابت است. طولهای AB، BC و CD ثابت می‌باشند، همچنین سطح مثلث BMD برابر است با :

$$\frac{۱}{۲}MB.MD\sin(\alpha+\theta)$$

و سطح مثلث AMC عبارت است از : $\frac{1}{2}MA.MC\sin(\alpha+\theta)$

نسبت این دو سطح نیز چون در ارتفاع مشترکند، عبارت است از :

$$\frac{MB.MD}{MA.MC}=\frac{BD}{AC}$$

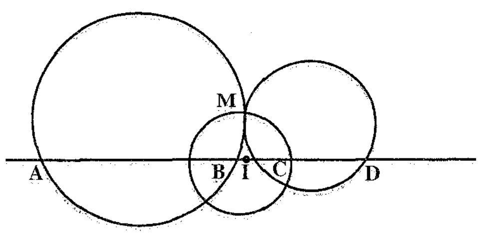
چون این دو نسبت را درهم ضرب کنیم، خواهیم داشت :

$$\frac{MD^2}{MA^2}=\frac{CD}{AB}.\frac{BD}{AC}$$

نسبت فاصله‌های نقطهٔ M از دو نقطهٔ ثابت D و A مقداری ثابت است. مکان نقطهٔ M دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AD را به نسبت توافقی تقسیم می‌کند (دایرهٔ آپولونیوس).

۶۵. مماس مشترک دو دایره را رسم می‌کنیم تا خط راست Δ را در نقطهٔ I قطع کند. داریم :

$$IM^2=\overline{IA}.\overline{IB}=\overline{IC}.\overline{ID}$$



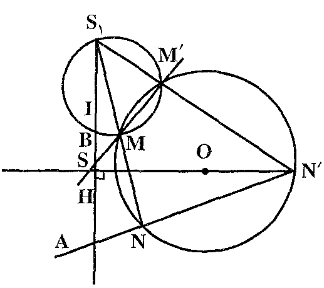
رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که I نقطهٔ ثابتی است. بنابراین IM مقدار ثابتی می‌باشد و درنتیجه مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز I و به شعاع IM است.

۶۶. با توجه به برابری $MT=MT'$ و ثابت بودن نقطه‌های C و D داریم :

$$MD+MC=(DT'-MT')+(MT+CT)$$

$$=DT'+CT-MT'+MT=DT'+CT$$

اما با توجه به رابطه‌های $DT'^2=DB.DA$ و $CT^2=CB.CA$ و ثابت بودن نقطه‌های A، B، C و D، CT و DT' طولهای ثابتی هستند، پس : مقدار ثابت $=MD+MC$ و درنتیجه مکان هندسی نقطهٔ M، یک بیضی به کانونهای C و D و عدد ثابت $DP'+CP$ است.



۲.۱.۵. مسأله‌های ترکیبی

۶۷.۱. چنانچه M نقطه‌ای از صفحهٔ شکل و M' منعکس آن در انعکاس (k و S)، و N و N' بترتیب منعکسهای M و M' در انعکاس (S_1, k_1) و A نقطهٔ تقاطع NN' با خط SS_1 باشد، در این صورت NN' منعکس دایرهٔ محیطی S_1MM' است. در صورتی که B محل برخورد SS_1 با دایرهٔ محیطی S_1MM' باشد، داریم:

$$SM.SM' = SB.SS_1 = k = \text{ثابت}$$

که چون S_1 و S ثابت هستند، SB و درنتیجه نقطهٔ B ثابت خواهد بود. و چون NN' منعکس دایره S_1MM' است، می‌توان نوشت:

$$S_1B.S_1A = S_1M.S_1N = k_1 = \text{مقدار ثابت}$$

درنتیجه S_1A و از آن‌جا A ثابت است. یعنی NN' از نقطهٔ ثابت A می‌گذرد.

۲. اگر (O) مرکز دایرهٔ محیطی $MM'O'N$ به شعاع R در یک حالت خاص باشد،

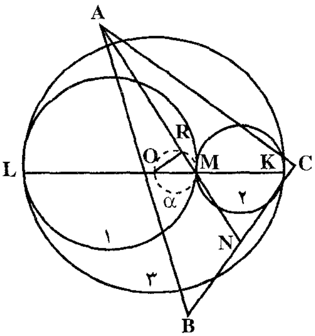
$$\begin{cases} P_{S(O)} = SM.SM' = SO^2 - R^2 = k \\ P_{S_1(O)} = S_1M.S_1N = S_1O^2 - R^2 = k_1 \end{cases}$$

از کم کردن طرفین رابطه‌های بالا، نتیجه می‌شود:

$$SO^2 - S_1O^2 = k - k_1 = \text{مقدار ثابت}$$

از ملاحظهٔ این رابطه‌ها نتیجه می‌شود که مکان (O) که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت S و S_1 مقداری است ثابت، خطی است مستقیم عمود بر S_1S که می‌توان پای عمود را از رابطهٔ زیر به‌دست آورد:

$$\overline{IH} = \frac{k - k_1}{2\overline{SS_1}} = \frac{k_2}{2\overline{SS_1}}$$ (I وسط SS_1 و H پای عمود است)



۶۸. الف. فرض کنید A (شکل) یک رأس مثلث باشد. پاره‌خط AM را، از طرف M، طوری امتداد دهید که امتداد آن، به بزرگی:

$$MN = \frac{1}{2}AM$$

باشد. نقطهٔ N وسط ضلع روبه‌رو به رأس A

است. درنتیجه، N باید در درون دایرهٔ محیطی مثلث قرار گیرد، یعنی، در درون دایرهٔ به شعاع OA و مرکز O. از O، عمودی مانند OR بر AN رسم کنید. باید نابرابری $AR > RN$ برقرار باشد. اگر $\widehat{AMO} \geq ۹۰^\circ$ آن وقت این نابرابری خودبه‌خود برقرار است. اگر $\widehat{AMO} < ۹۰^\circ$، آن وقت:

$$AM - MR > MN + MR \Rightarrow$$

$$AM - \frac{۱}{۲}AM > ۲MR \Rightarrow AM > ۴MR$$

اما R روی دایرهٔ α به قطر OM قرار دارد، بنابراین A باید بیرون دایره‌ای که با دایرهٔ α به نسبت تجانس ۴ و مرکز M، متجانس است، قرار گیرد. بعلاوه، نقطهٔ N نباید روی دایرهٔ α قرار گیرد، زیرا در این صورت، ضلع مثلث که وسطش این نقطه است، با عمود بودن بر ON، روی خط راست AN قرار می‌گیرد، یعنی، تمامی رأسهای مثلث بر یک خط راست قرار دارند. درنتیجه، A روی دایره‌ای که با α به مرکز تجانس M و نسبت ۲، متجانس است، قرار ندارد. بنابراین، اگر روی خط راست OM نقطه‌های L و K را طوری اختیار کنیم که $LO:OM:MK = ۳:۱:۲$، و به قطر LM، دایرهٔ ۱ و به قطر MK، دایرهٔ ۲ را رسم کنیم، آن وقت مکان هندسی مطلوب، کلیهٔ نقطه‌های بیرون دایرهٔ ۱ با برداشتن نقطه‌های دایرهٔ ۲، بجز نقطهٔ K است (نقطهٔ K جزو مکان هندسی است).

ب. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی و M مرکز ثقل مثلث باشد، آن وقت K (قسمت (الف) را ببینید) نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث است. امّا، فاصلهٔ میان مرکز دایرهٔ محیطی مثلث منفرجه تا نقطهٔ برخورد ارتفاعهای آن، از شعاع دایرهٔ محیطی مثلث بزرگتر است. درنتیجه، رأسهای مثلث منفرجه، در درون دایرهٔ ۳، که به قطر LK رسم شده است، و بیرون دایرهٔ ۱ با برداشتن نقطه‌های دایرهٔ ۲، قرار دارند (رأس زاویه‌های منفرجه، در درون دایرهٔ ۲ قرار می‌گیرد).

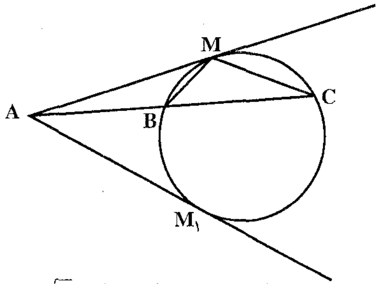
۶۹. ۱. خط $\overline{MAB}$ قطبی نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ (O) است، و چون قطبی نقطهٔ P از M می‌گذرد، قطبی M نیز از نقطهٔ P خواهد گذشت و چون قطبی هر نقطه بر خط واصل بین آن نقطه و مرکز دایره عمود است، پس PH قطبی نقطهٔ M نسبت به دایره می‌باشد و از آن‌جا اگر F نقطهٔ برخورد $\overline{MAB}$ با PH باشد، نقطهٔ F مزدوج توافقی M نسبت به AB است، که چون نقطه‌های M، A و B ثابت هستند، با تغییر دایره، خط PH تغییر کرده، لیکن نقطهٔ F ثابت می‌ماند و چون $\widehat{MHF} = ۹۰^\circ$ است، پس مکان هندسی نقطهٔ H تصویر بر روی MO، دایره‌ای است به قطر MF.

۲. چون PH قطبی M نسبت به دایرهٔ (O) است، پس MT و 'MT پیوسته بر دایرهٔ (O) مماس است و درنتیجه پیوسته داریم:

$$MT^2 = MT'^2 = MA.MB = P_{M(O)} = \text{مقدار ثابت}$$

یعنی مکان T و 'T دایره‌ای است به مرکز M و شعاع $R' = \sqrt{MA.MB}$.

۷۰. قوت نقطهٔ A را نسبت به دایره می‌نویسیم.



$$AM'^2 = AM^2 = AB.AC$$

$$\Rightarrow AM^2 = AM'^2 = a.2a$$

$$\Rightarrow AM^2 = AM'^2 = 2a^2$$

$$AM = AM' = a\sqrt{2}$$

پس مکان هندسی نقطه‌های M و 'M دایره‌ای است به مرکز A و شعاع معلوم $a\sqrt{2}$.

از M به B و C وصل می‌کنیم، دو مثلث AMB و AMC با یکدیگر متشابه‌اند؛ چون زاویهٔ A در هر دو مشترک است، $\hat{C}_1 = \hat{M}_1 = \frac{\overset{\frown}{MB}}{2}$، پس:

$$\Delta AMB \sim \Delta AMC \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{AM}{AC} \Rightarrow$$

$$\frac{MB}{MC} = \frac{a\sqrt{2}}{2a} \Rightarrow \frac{MB}{MC} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

۷۱. ۱، ۲ و ۳. رابطه‌های متری در دایره و...

۴. از ویژگی مثلث °۳۰ــ°۶۰ــ°۹۰ استفاده کنید.

۱.۷۲. با توجه به فرض مسأله باید $2R \geq 2a$ یا $R \geq a$ باشد، مکان هندسی نقطهٔ O عمود منصف پاره‌خط AB و مکان هندسی نقطهٔ 'O عمودمنصف پاره‌خط BC است، در هر دو مورد، آن دو نیمخطی که در یک طرف خط AB قرار دارند.

۲. مثلثهای OO'B و OO'D در رأسهای B و D متساوی‌الساقین و BD عمودمنصف 'OO است. با توجه به اندازه‌های داده شده a ثابت و R متغیر مکان هندسی نقطهٔ D را می‌توان به‌دست آورد.

۱.۷۳. بر (A، B) و (C، D) بینهایت دایره می‌گذرند که دو به دو، دارای یک محور اصلی می‌باشند و قوت تمام نقطه‌هایشان نسبت به دو دایره مساوی است. از بین تمام دایره‌های گذرنده بر (A، B) و (C، D) یکی به قطر (AB) و (CD) است که محور اصلی آنها، Δ بر

OO' عمود است و چنانچه H پای عمود باشد، داریم :

$$P_{H(O')} = \overline{HN}^2 = \overline{HC}.\overline{HD}$$

$$P_{H(O)} = \overline{HM}^2 = \overline{HB}.\overline{HA}$$

و درنتیجه :

$$\overline{HN}^2 = \overline{HM}^2 = \overline{HA}.\overline{HB} = \overline{HC}.\overline{HD}$$

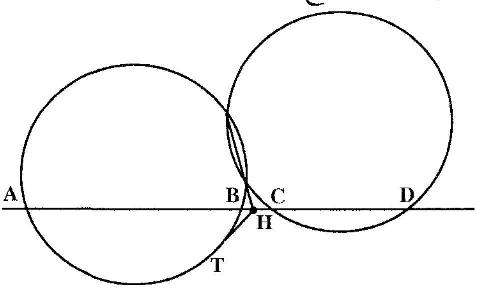
و از طرفی می‌دانیم قوت H نسبت به کلیهٔ دایره‌های گذرنده بر B و A و همچنین دایره‌های گذرنده بر D و C مقداری است ثابت، برابر :

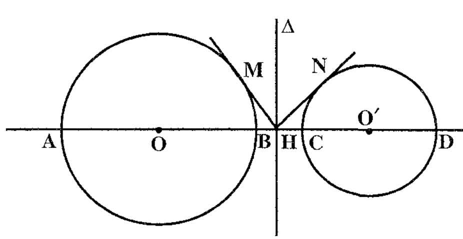
$$P_{H(A,B)} = P_{H(C,D)} = \overline{HA}.\overline{HB} = \overline{HC}.\overline{HD}$$

یعنی، قوت H نسبت به کلیهٔ دایره‌های گذرنده بر (A ،B) و (C ،D) مساوی است و یا این که H بر محور اصلی دو به دوی آنها واقع است و یا به عبارت دیگر محور اصلی آنها از نقطهٔ ثابت H می‌گذرد.

۲. اگر از نقطهٔ H مماس HT را بر یکی از دو دایره رسم کنیم، داریم :

مقدار ثابت $= HA.HB = HT^2$ پس HT مقدار ثابتی است، و چون H نقطهٔ ثابتی است، بنابراین مکان هندسی نقطهٔ T دایره‌ای به مرکز H و به شعاع $\sqrt{HA.HB}$ است.



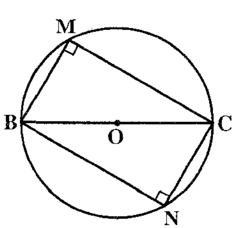


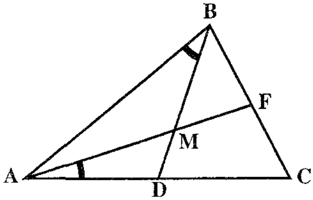
۲.۲. خطهای ثابت

۱.۲.۲. پاره خط

۱.۱.۲.۲. یک پاره‌خط

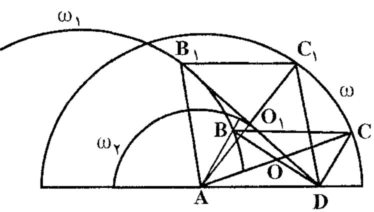
۷۴. این مکان هندسی، دایره‌ای به قطر AB است.





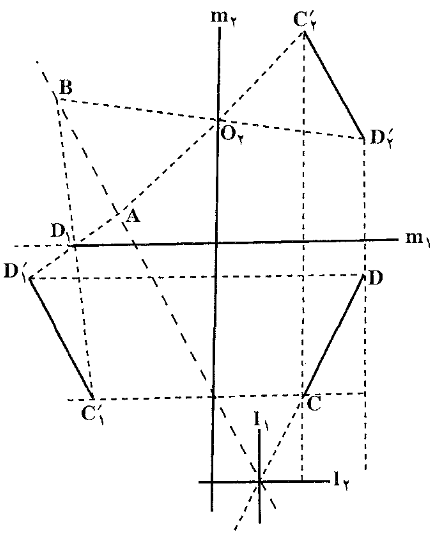
۷۵. از برابری $A\hat{B}D = F\hat{A}C$ نتیجه می‌شود که $DB = \frac{\sqrt{3}}{2}AC$ است. چون $DB = \frac{\sqrt{3}}{2}AC$ مقداری ثابت، و D نقطهٔ ثابتی است، پس مکان هندسی نقطهٔ B دایره‌ای به مرکز D و به شعاع $\frac{\sqrt{2}}{2}AC$ است.

چون $\frac{DM}{DB} = \frac{1}{3}$ است، پس مکان هندسی نقطهٔ M، دایره‌ای است مجانس دایرهٔ مکان هندسی نقطهٔ B، نسبت به مرکز تجانس D و نسبت تجانس $\frac{1}{3}$.



۷۶. حل مسأله به آسانی به‌دست می‌آید. مکان C دایرهٔ $\omega(A ، AD\sqrt{2})$ و مکان B دایرهٔ $\omega_1 = \overline{DA}(\omega)$ و مکان O دایره $\omega_2(A ، AD\frac{\sqrt{2}}{2})$ است (شکل).

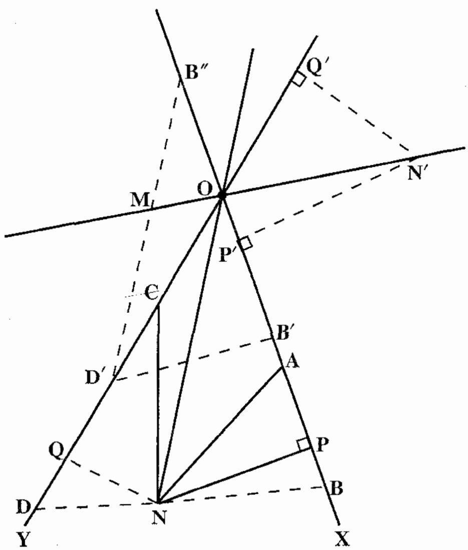
۲.۱.۲.۲. دو پاره‌خط



۷۷. قرینهٔ پاره‌خط راست AB، نسبت به نقطهٔ مجهول O را $A'B'$ می‌نامیم. خط راست دلخواه l را طوری در نظر می‌گیریم که $C'D'$ قرینهٔ پاره‌خط راست CD نسبت به l، موازی $A'B'$ باشد. چون $C'D' \| A'B' \| AB$ بنابراین، خط راست l موازی یکی از نیمسازهای (عمودبرهم) l_1 و l_2 بین خطهای راست AB و CD می‌باشد (شکل). قرینهٔ پاره‌خط راست CD نسبت به خط راست l را، در حالت $l \| l_1$ با $C'_1D'_1$ و در حالت $l \| l_2$ با $C'_2D'_2$ نشان می‌دهیم.

چون $\overrightarrow{C'_1D'_1} = -\overrightarrow{C'_2D'_2}$، بنابراین یکی از دو بردار $\overrightarrow{C'_1D'_1}$ یا $\overrightarrow{C'_2D'_2}$ و مثلاً اولی، برابر

بردار $\overrightarrow{AB}$ است. در این حالت، دو پاره‌خط راست $A'B'$ و $C'_1D'_1$ تنها وقتی بر هم منطبقند (با انتخاب متناظر خط راست $l\|l_1$) که نقطهٔ $O=O_1$ روی خط راست $m\perp l_1$، به یک فاصله از نقطه‌های A و D باشد. به‌همین ترتیب، پاره‌خطهای راست $A'B'$ و $C'_2D'_2$ (با انتخاب متناظر $l\|l_2$) وقتی، و تنها وقتی، برهم منطبقند که $O=O_2$ بر خط راست $m_2\perp l_2$، به یک فاصله از نقطه‌های A و C، باشد. به این ترتیب، مکان مطلوب نقطهٔ O، عبارت است از اجتماع این دو خط راست m_1 و m_2.



۷۸. فرض می‌کنیم N یک نقطه از مکان هندسی خواسته شده باشد. در این صورت داریم:

$$NP.AB=NQ.CD$$

$$\Rightarrow \frac{NP}{NQ}=\frac{CD}{AB}$$

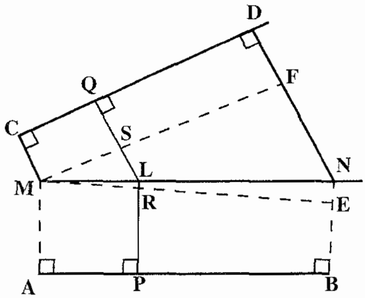
بنابراین فاصله‌های نقطهٔ N از دو پاره‌خط به‌طور معکوس با این دو پاره‌خط متناسبند. در مثلث، مکان هندسی نقطهٔ N میانهٔ رأس نظیر آن دو ضلع است. برای رسم این خط روی OX پاره‌خط $OB'=AB$ و روی OY پاره‌خط $OD'=CD$ را جدا می‌کنیم. $B'D'$ را رسم کرده، از نقطهٔ O، به نقطهٔ M وسط $B'D'$ وصل می‌کنیم. این خط مکان هندسی نقطهٔ خواسته شده است. پادمیانهٔ OM' نیز مکان هندسی دیگر خواسته شده در مسأله است، برای نقطه‌های واقع بر این خط داریم:

$$AB.N'P'=CD.N'Q'$$

تبصرهٔ ۱. چهارخط OX، OY، OM و OM' یک دستگاه توافقی می‌سازند؛ زیرا اگر خط $B'B''$ را موازی OX رسم کنیم، سه شعاع دیگر دستگاه روی آن دو پاره‌خط مساوی ایجاد می‌کنند.

تبصرهٔ ۲. مجموعه خطهای OM و OM' مکان هندسی رأسهای دو مثلث هم‌ارز NAB و NCD می‌باشند.

۷۹. دو پاره‌خط $AB = a$ و $CD = b$ را که از نظر وضع و اندازه ثابتند در نظر می‌گیریم. نقطهٔ برخورد امتداد AB و CD را O می‌نامیم. دو پاره‌خط عمودبر خطهای AB و CD به اندازهٔ a' و b' متناسب با a و b اخراج کرده، خطهایی موازی AB و CD رسم می‌کنیم، تا در نقطهٔ L یکدیگر را قطع کنند. از O به L وصل می‌کنیم. خط OL مکان هندسی خواسته شده است.



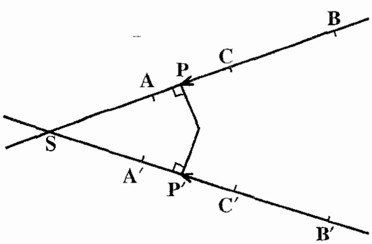
۸۰. فرض می‌کنیم که دو انتهای A و C همچنین B و D متناظرند، از A و C دو عمود اخراج می‌کنیم تا در نقطهٔ M یکدیگر را قطع کنند و از B و D نیز دو عمود اخراج می‌کنیم تا در N متقاطع شوند. از نقطهٔ M خطهایی موازی AB و CD رسم می‌کنیم تا NB و ND را در E و F قطع کنند. از نقطهٔ دلخواه L واقع بر MN خطهایی عمود بر AB و CD رسم می‌کنیم تا این خطها را در P، R، S و Q قطع کنند. در این صورت داریم:

$$\frac{MR}{RE} = \frac{MS}{SF} \quad \text{یا} \quad \frac{AP}{PB} = \frac{CQ}{QD}$$

تبصره. ۱. درصورتی که نقطه‌های A و D، همچنین B و C را متناظر در نظر بگیریم مکان هندسی یک خط دیگر است. این دو خط در نقطه‌های برخورد عمودهایی که از وسط پاره‌خطهای AB و CD اخراج می‌شوند، متقاطعند.

۲. قضیه برای حالتی که نقطه‌های مکان روی AB و CD به موازات امتدادهای معینی تصویر شوند، نیز درست است. در این حالت از نقطه‌های A و B خطهایی موازی امتداد معلوم موازی با CD رسم می‌کنیم.

۳. اگر سه پاره‌خط معلوم داده شده باشند، و خطهای نظیر MN را برای دو به دوی پاره‌خطها رسم کنیم، این سه خط از یک نقطه می‌گذرند.



۸۱. دو حالت برای بررسی وجود دارد. یکی این که جهت پاره‌خطهای CP و $C'P'$ از طرف نقطه‌های C و C' به طرف نقطهٔ S، محل برخورد دو خط AB و $A'B'$ باشد، و دیگر این که در جهتهای مخالف قرار داشته باشند. در حالت دوم یکی از

پاره‌خطهای CP به‌عنوان مثال، در امتداد CS است. حال آن که $C'P'$ در امتداد عکس آن می‌باشد.

این مکان هندسی را می‌توان به‌طور اختصار، مکان هندسی نقطه‌های پاره‌خطهای معکوس نامید؛ زیرا پاره‌خطهای مشخص شده با طولهای داده شدهٔ a و b به‌طور معکوس متناسبند.

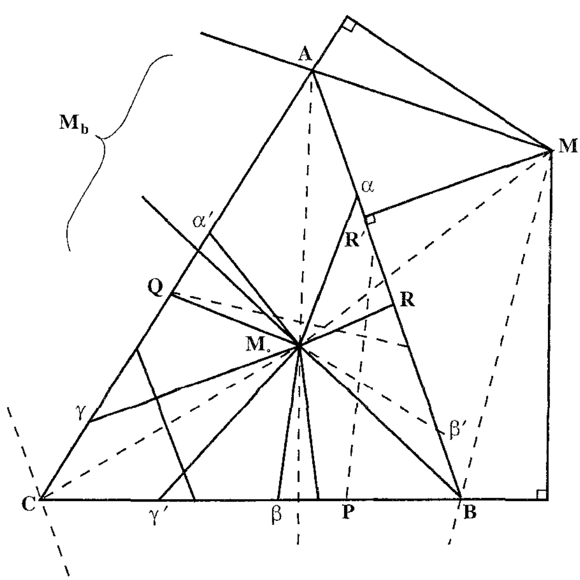
۲.۲.۱.۳. سه‌پاره‌خط

۸۲. AM و $AM_\circ$ را برای پاره‌خطهای $\alpha\beta'$ و $\gamma\alpha'$ درنظر می‌گیریم و به‌همین ترتیب.... سه خط درونی یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند و همچنین است این نکته برای هر دسته خطهای درونی و هر دسته خطهای برونی. درنتیجه اگر MB مکان هندسی گشتاورهای مساوی برای $\alpha\beta'$ و $\beta\gamma$ باشد، خواهیم داشت:

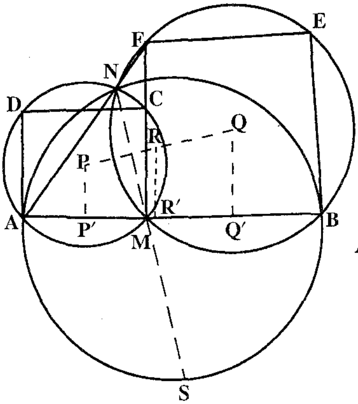
$$\alpha\beta'.MR = \gamma\alpha'.MQ \quad \text{و} \quad \alpha\beta'.MR = \beta\gamma'.MP$$

درنتیجه $\gamma\alpha'.MQ = \beta\gamma'.MP$ و بنابراین نقطهٔ M به مکان هندسی مربوط به $\beta\gamma'$ و $\gamma\alpha'$ تعلق دارد. همچنین $M_\circ$ به مکان هندسی مربوط به سه پاره‌خط تعلق دارد. دو نقطهٔ دیگر متناظر را نیز می‌توان به‌دست آورد.

مکان هندسی پاره‌خطهای مساوی را برای سه پاره‌خط واقع بر یک خط مستقیم را، با درنظر گرفتن دو به دوی این پاره‌خطها، تعیین کنید.



۴.۱.۲.۲. مسأله‌های ترکیبی



۱.۸۳. ۱. شکل را درنظر می‌گیریم. قطعه‌های AN، NF، BC و CN را رسم می‌کنیم. در این صورت، $A\hat{N}M = ۴۵^\circ$ و $M\hat{N}F = ۱۳۵^\circ$. بنابراین:

$$A\hat{N}F = A\hat{N}M + M\hat{N}F = ۴۵^\circ + ۱۳۵^\circ = ۱۸۰^\circ$$

بنابراین N بر AF قرار دارد. از آن‌جا که AC قطر است:

$$A\hat{N}C = ۹۰^\circ،\ A\hat{N}B = A\hat{N}M + M\hat{N}B = ۴۵^\circ + ۴۵^\circ = ۹۰^\circ$$

درنتیجه C بر BN واقع است، و به این ترتیب AF و BC در N متقاطع می‌شوند. بنابراین، $N = N'$ و این اولین قسمت مسأله را ثابت می‌کند.

۲. خط MN از آن جا که $A\hat{N}M = M\hat{N}B = ۴۵^\circ$ است، زاویهٔ ANB را نصف می‌کند. بنابراین چون NM را امتداد دهیم، نیمدایرهٔ تحتانی به قطر AB را نصف می‌کند. وسط این نیمدایره را S می‌نامیم. از آن‌جا که به‌ازای هر M واقع بر AB، $AN \perp BN$ است، N، هنگامی که M از A به‌طرف B تغییر می‌کند، نیمدایرهٔ فوقانی به قطر AB را می‌پیماید، در حالی که S همواره وسط نیمدایرهٔ تحتانی باقی می‌ماند. این موضوع نشان می‌دهد که S به اختیار M بستگی ندارد، و به این ترتیب قسمت دوم مسأله نیز ثابت می‌شود.

۳. فرض کنیم PP'، QQ' و RR' بترتیب عمودهایی بر AB از P، Q و R وسط قطعه خط PQ باشند. از آن‌جا که RR' خط واصل وسطهای دو ساق ذوزنقهٔ $P'Q'QP$ است:

$$RR' = \frac{۱}{۲}(PP' + QQ') = \frac{۱}{۲}.\frac{AM + MB}{۲} = \frac{AB}{۴}$$

این مطلب نشان می‌دهد که فاصلهٔ R از AB مقدار ثابتی است. چون $M = A$ باشد، $P' = A$ و $AQ' = AB/۲$ می‌شود و بنابر آن، $AR' = AB/۴$، و چون $M = B$ باشد، $P'B = AB/۲$ و $Q' = B$ می‌شود و بنابر آن، $R'B = AB/۴$. بنابراین مکان R پاره‌خط به طول $AB/۲$ موازی با AB به فاصلهٔ $AB/۴$ بالای آن است؛ این پاره‌خط توسط عمودمنصف AB نصف می‌شود.

۱.۸۴. از ویژگی خطهای مماس رسم شده از یک نقطه بر دایره استفاده کنید.
۲. ساده است.
۳. AQ و AB را با هم مقایسه کنید.
۴. ساده است.

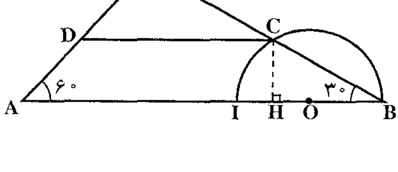
۱.۸۵. از مثلث ACM استفاده کنید.
۲. بررسی کنید که نقطهٔ H را به کدام نقطهٔ ثابت می‌توان وابسته کرد.
۳. همین بررسی را برای نقطهٔ O انجام دهید.
۴. از ویژگی مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین و مثلث $۳۰^\circ - ۶۰^\circ - ۹۰^\circ$ استفاده کنید.

۸۶. پاره‌خط PM در زاویهٔ APB چه وضعی دارد؟ نقطهٔ ثابت و رسم به راحتی نتیجه می‌شود. به اندازهٔ زاویهٔ APx توجه کنید. چهارضلعی AMLP چگونه است؟
به وضع نقطهٔ L توجه کنید، C مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AMP است. درمورد مثلث ACM چه فکر می‌کنید؟ ببینید سطح خواسته شده اختلاف کدام دو سطح است.

۱.۸۷. پاره‌خط AB را به ۷ قسمت برابر تقسیم کنید. نقطهٔ I سومین قسمت از طرف A است، یعنی: $\frac{IA}{IB} = \frac{۳}{۴}$.

۲. $IA = \frac{۳}{۷}$، $AB = \frac{۳}{۷} \times ۱۰/۵ = ۴/۵\,CM$، $IB = ۶CM$.

۳. ABCD ذوزنقهٔ محدب است. IC که برابر شعاع نیمدایره است، مساوی ضلع شش‌ضلعی منتظم محاط در دایره‌ای است که در آن $B\hat{I}C = ۶۰^\circ$ و $I\hat{B}C = ۳۰^\circ$ است، و هنگامی که اندازهٔ زاویهٔ C محاط در نیمدایره ۹۰° است، زاویهٔ A مساوی با زاویهٔ $B\hat{I}C$، و برابر ۶۰° است.



$BC = IB\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ است. در صورتی که مثلث BIC نصف یک مثلث متساوی‌الاضلاع باشد، اما $IB = ۶cm$ است، از آن‌جا: $BC = ۳\sqrt{۳}cm$.

ارتفاع CH، در نیم مثلث متساوی‌الاضلاع BCH برابر است با:

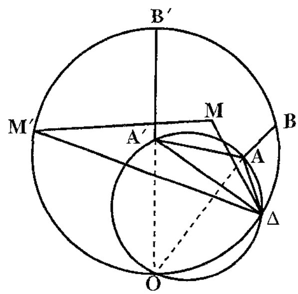
$$CH = \frac{BC}{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}}{۲}cm$$

۴. نسبت مساحتها به نسبت مربع نسبت تشابه است، یعنی داریم :

$$\frac{\text{مساحت } BAE}{\text{مساحت } BIC}=(\frac{BA}{BI})^۲=(\frac{۱۰/۵}{۶})^۲=\frac{۴۹}{۱۶}$$

۵. مکان هندسی نقطهٔ E نیمدایرهٔ به قطر AB است، وقتی که $\hat{E}$ قائمه باشد و ضلعهایش از دو نقطهٔ ثابت می‌گذرد.

۱.۸۸. ارتباط نقطه‌ای (M , M') یک همسانی است مستقیم که به‌وسیلهٔ قطعه خطهای متناظر AB و $A'B'$ مشخص می‌شوند. اگر O نقطهٔ برخورد AB و $A'B'$ باشد، نقطهٔ مضاعف این تبدیل نقطهٔ دیگر برخورد دایره‌های $(AA'O)$ و $(BB'O)$ است. پس اگر M نقطه‌ای وابسته به AB باشد، متناظر آن M' را می‌توان با رسم مثلث $\Delta MM'$ که مستقیماً با $\Delta AA'$ مساوی است به‌دست آورد. برای این که MM' موازی با خط مفروض D باشد، باید :



$(D, MM') = ۰$;

و یا $(D, \Delta M)+(\Delta M, MM') = ۰$;

و یا این که : $(D, \Delta M) = (AA', \Delta A)$;

زیرا : $(\Delta M, MM') = (\Delta A, AA')$;

پس مکان M خط ΔM است که با رابطهٔ بالا تعریف می‌شود.

۲. دو مثلث $\Delta AA'$ ، $\Delta MM'$ مستقیماً متشابه‌اند و داریم :

$$\frac{\Delta M}{\Delta A}=\frac{MM'}{AA'} \quad ;$$

و برای این که $MM' = 1$ باید $\Delta M = \frac{\Delta A}{AA'}\times 1$. پس مکان M دایره‌ای است به مرکز Δ که شعاعش $\frac{\Delta A}{AA'}\times 1$ است.

۲.۲.۲. نیمخط

۱.۲.۲.۲. دو نیمخط

۸۹. اگر نقطه‌های انتهایی نیمخطها بر هم منطبق نباشد، آن وقت، مکان هندسی مطلوب، از خطهای زیر تشکیل می‌شود : نیمسازهای دو زاویه که با خطهای راستی که نیمخطهای مفروض را دربر دارند، تشکیل شده‌اند، عمودمنصف پاره‌خطی که نقطه‌های انتهایی نیمخطها را به هم وصل می‌کند و دو سهمی (سهمی، مکان هندسی نقطه‌هایی است که از یک نقطه و یک خط راست مفروض به یک فاصله‌اند). اگر نقطه‌های انتهایی بر هم منطبق باشند، آن وقت مکان هندسی مطلوب، عبارت است از نیمساز زاویهٔ تشکیل شده با نیمخطها و نیز قسمتی از صفحه، محصور در درون زاویهٔ تشکیل شده با عمودهای رسم شده بر نقطه‌های انتهایی نیمخطها.

۲.۲.۲.۲. نیمخط، پاره‌خط

۹۰. ۱. مکان وسط OB، نیمخطی است که از نقطهٔ C موازی Ax رسم می‌شود و مکان نقطهٔ D، نیمدایره‌ای به قطر OC است.

۲. از مثلثهای متشابه استفاده کنید.

۳. چهارضلعی ABDC محاطی است ؛ زیرا $\hat{D}+\hat{A}=180^\circ$ است.

۴. از تشابه مثلثهای OAD و OBC استفاده کنید.

۹۱. ۱. مکان هندسی بی‌درنگ به‌دست می‌آید.

۲. ویژگی مثلث CAD را بررسی کنید.

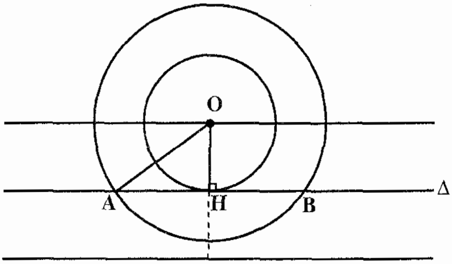
۳. برای این که ثابت کنیم $BC = 3BH$ است، از مثلثهای متشابه استفاده کنید. برای محاسبهٔ x از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC استفاده کنید.

۴. ابتدا ارتفاعهای مثلث ACD را مقایسه کنید و از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC استفاده نمایید.

۳.۲.۲. خط

۱.۳.۲.۲. یک خط

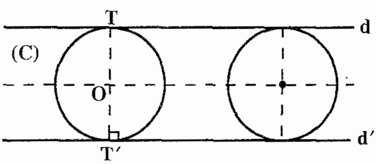
۹۲. اگر C (O ،R) یکی از این دایره‌ها باشد که در نقطهٔ H بر خط ثابت d مماس است، $OH = R$ مقدار ثابتی است یعنی نقطهٔ O، مرکز این دایره، از خط d به فاصلهٔ ثابت R، واقع است ؛ بنابراین مکان هندسی این نقطه دو خط راست موازی خط d، در دو طرف آن و به فاصلهٔ R از d می‌باشند.



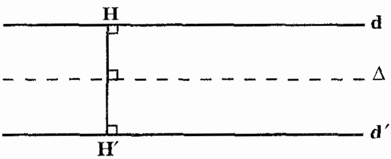
۹۳. فاصلهٔ مرکز این دایره از خط Δ مقدار ثابتی است. بنابراین مکان هندسی موردنظر دو خط موازی Δ در طرفین آن، و به فاصلهٔ $\sqrt{R^۲ - \frac{l^۲}{۴}}$ از آن است.

۲.۳.۲.۲. دو خط

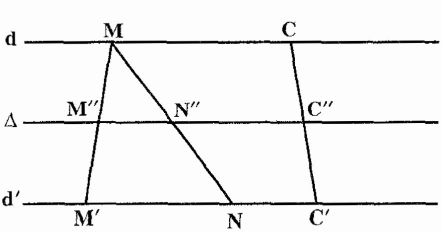
۲.۳.۲.۲.۱. دو خط موازی



۹۴. این مکان، خطی است راست موازی آن دو خط و به یک فاصله از آنها. برای رسم این خط، یک عمود مشترک دو خط، به‌عنوان مثال HH′ را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ M، وسط پاره‌خط HH′، خط راستی موازی دو خط داده شده رسم می‌کنیم.



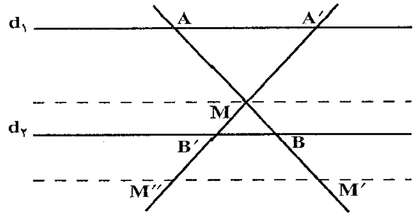
۹۵. دایرهٔ C (O , R) را که در دو نقطهٔ T و T′ بر دو خط موازی d و d′ مماس است، درنظر می‌گیریم. می‌دانیم که T، O و T′ بر یک خط قرار دارند و TT′ عمود مشترک دو خط موازی و O وسط این عمود مشترک است. یعنی O نقطه‌ای است که از دو خط موازی d و d′ به یک فاصله است ؛ بنابراین مکان هندسی آن، خط راستی است که از این نقطه موازی دو خط d و d′ رسم می‌شود.



۹۶. دو خط موازی d و d′ و پاره‌خط MM′ را که دو سرش روی این دو خط است در نظر می‌گیریم. وسط این پاره‌خط را M″ نامیده، از این نقطه خط Δ را موازی خطهای d و d′ رسم می‌کنیم. این خط مکان هندسی موردنظر است ؛ زیرا بسادگی می‌توان ثابت کرد که هر نقطه از این خط، وسط پاره‌خطی است که دو سرش روی دو خط d و d′ است، و هر پاره‌خطی که دو سرش روی دو خط d و d′ است، وسطش روی Δ است.

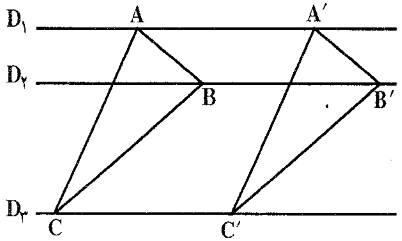
۹۷. روی پاره‌خط AB دو نقطهٔ M و M′ را چنان اختیار می‌کنیم که :

$$\frac{MA}{MB}=\frac{M'A}{M'B}=m$$

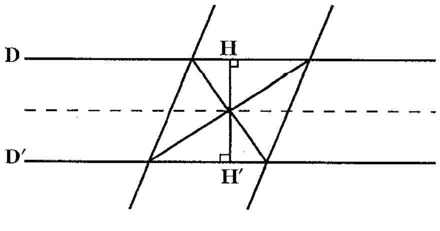


خطهای راستی که از M و M′ موازی خطهای d۱ و d۲ رسم شوند، مکان هندسی خواسته شده می‌باشند.

۹۸. دو رأس A و B از مثلث ABC روی دو خط متوازی D۱ و D۲ می‌لغزند، مکان هندسی رأس C، خط D۳، موازی آنها است. زیرا $\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{A'B'}$ می‌باشد و مثلث A′B′C′ از مثلث ABC با انتقالی برابر AA′ به‌دست می‌آید و $\overrightarrow{CC'}=\overrightarrow{AA'}=\overrightarrow{BB'}$.



۹۹. این مکان هندسی خطی است موازی دو خط موازی ثابت داده شدهٔ D و D′، که به یک فاصله از این دو خط است.

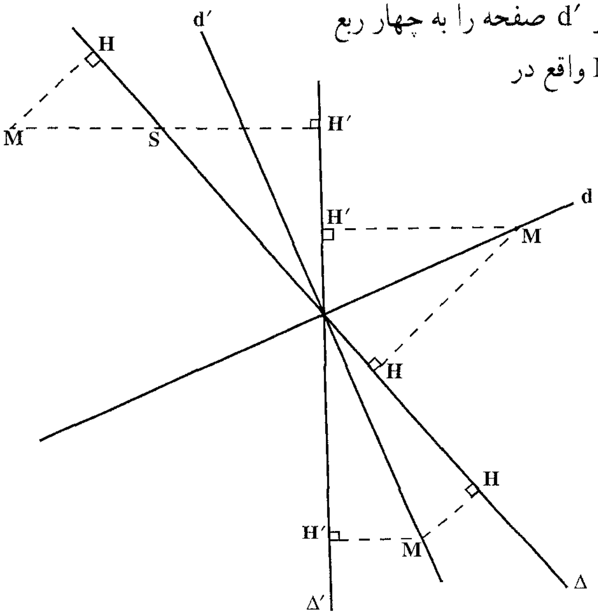


۱۰۰. مکان هندسی مطلوب، دو خط راست، عمود بر خطهای مفروض است.

۲.۲.۳.۲.۲. دو خط متقاطع

۱۰۱. می‌دانیم در حالت اول مکان هندسی دو خط d و ′d نیمسازهای زاویه‌های دو خط Δ و ′Δ است که بر هم عمودند.

در حالت دوم دو خط d و ′d صفحه را به چهار ربع صفحه تقسیم می‌کنند. M واقع در



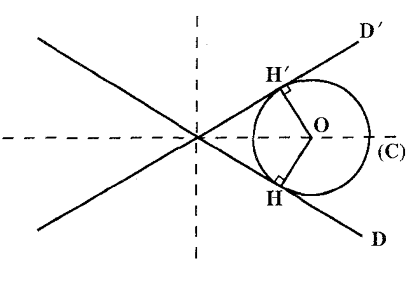
یکی از دو ربعی است که Δ داخل آن است.

$$MH' = MS + SH' \quad , \quad MH < MS$$

پس:

$$MH < MH'$$

در حالت سوم M داخل یکی از دو ربعی است که ′Δ داخل آن است. می‌توان تعمیمی را که در این سه مثال ذکر شد، در بیشتر مکانهای هندسی به‌کاربرد.



۱۰۲. اگر دایرهٔ (C) به مرکز O یکی از این دایره‌ها باشد، و از O مرکز دایره به H و ′H ، نقطه‌های تماس دایره با دو خط D و ′D وصل کنیم، $OH = OH'$ است؛ یعنی نقطهٔ O از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. بنابراین مکان هندسی خواسته شده، نیمسازهای زاویه‌های ایجاد شده بین دو خط متقاطع داده شده می‌باشند.

۱۰۳. اگر نقطهٔ M روی پاره‌خط BC چنان اختیار شود که $\frac{MB}{MC}=\frac{m}{n}$ باشد، مکان هندسی نقطهٔ M، خط AM است، و در صورتی که نقطهٔ N در امتداد پاره‌خط BC باشد، به قسمی که $\frac{NB}{NC}=\frac{m}{n}$ است، مکان هندسی نقطهٔ N، خط AN می‌باشد.

۱۰۴. این مکان‌هندسی خطی است که از O می‌گذرد و شامل نقطه‌های A و 'A است.

۱۰۵. این مکان، خط راستی است که از مبدأ می‌گذرد.

۱۰۶. وسطهای پاره‌خطهای EF ،CD ،AB و... را بترتیب N ،M ،L و... می‌نامیم.
از L و M دو خط LP و MQ را موازی OY و از L خط LR را موازی OX رسم می‌کنیم. چهارضلعی LPQR متوازی‌الاضلاع است و داریم:

$$LP=RQ=\frac{OB}{۲}\ ,\ MQ=\frac{OD}{۲}\Rightarrow$$

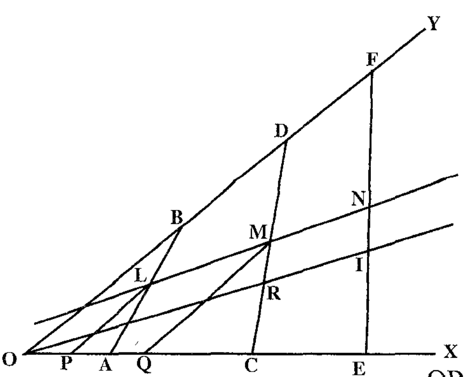
$$MR=MQ-RQ=\frac{BD}{۲}\ (۱)$$

$$OP=\frac{OA}{۲}\ ,\ OQ=\frac{OC}{۲}\Rightarrow$$

$$PQ=\frac{OC-OA}{۲}=\frac{AC}{۲}=\frac{BD}{۲}=LR\ (۲)$$

$$(۱)\ و\ (۲)\Rightarrow LR=RM$$

پس مثلث LRM متساوی‌الساقین است؛ بنابراین خط LM موازی نیمساز OI از زاویهٔ XOY است. به‌همین ترتیب MN موازی نیمساز OI می‌باشد. پس مکان هندسی نقطه‌های L، M، N و ... خط راستی موازی نیمساز زاویهٔ XOY می‌باشد. این خط را، شال، ریاضیدان فرانسوی، خط میانه نامیده است.



۱۰۷. خطهای MQ ،LP و LR را به موازات OY و OX رسم می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$LP=\frac{OB}{۲}\ ,\ MQ=\frac{OD}{۲}$$

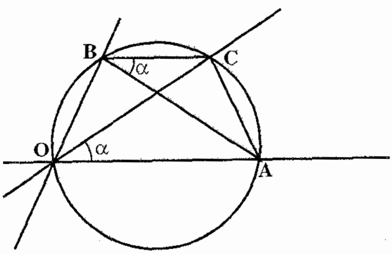
$$\Rightarrow MR=\frac{BD}{۲}$$

همچنین داریم:

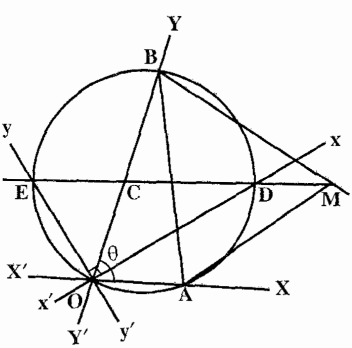
$$OP=\frac{AO}{۲}\ و\ OQ=\frac{OC}{۲}\Rightarrow LR=\frac{AC}{۲}$$

از آن‌جا، $LR = MR$ و مثلث MLR متساوی‌الساقین است. LM موازی نیمساز OI است. همچنین موازی MN خواهد بود. بنابراین خط LMN مکان هندسی موردنظر است.

۱۰۸. چهارضلعی OAMB محاطی است؛ زیرا دو زاویهٔ رو به روی آن، یعنی A و B قائمه‌اند. دایرهٔ محیطی این چهارضلعی را رسم می‌کنیم. در این دایره، وتر AB طول ثابتی دارد و زاویهٔ AOB نیز ثابت است. پس می‌توان گفت که بخشی از این دایره، کمان درخور زاویهٔ $XOY = \alpha$ روبه‌رو به پاره‌خط ثابت AB است. یعنی دایرهٔ ثابتی می‌باشد. این دایره جای چهارضلعی OAMB را عوض می‌کند، اما اندازه‌ها را تغییر نمی‌دهد. یعنی OM طول ثابتی دارد. پس مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA است.

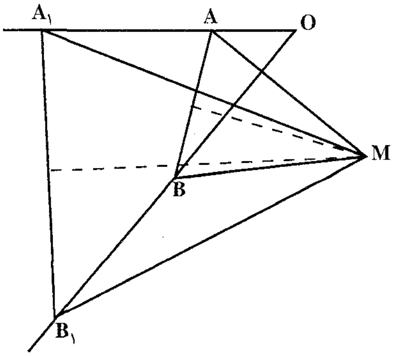


۱۰۹. چهارضلعی ABCD محاطی است زیرا دو زاویهٔ مقابلش مکمل یکدیگرند. دایرهٔ محیطی این چهارضلعی را رسم می‌کنیم. این دایره شعاع ثابتی دارد و در آن، مقدار ثابت $= A\hat{O}C = A\hat{B}C$ است. پس مکان هندسی رأس C، خط OZ است که از O می‌گذرد و با OX زاویه‌ای برابر α می‌سازد. اگر یک قطر این دایره را OD بنامیم، و روی OZ دو طول $OC_1 = OC_2 = l$ را جدا کنیم، پاره‌خط C_1C_2 مکان هندسی نقطهٔ C را مشخص می‌کند.



۱۱۰. قطر دایرهٔ محیطی مثلث OAB مساوی است با $\frac{AB}{\sin\theta}$ که تغییرناپذیر می‌باشد. (شکل) با توجه به این که این دایره نسبت به مثلث ABM وضع ثابتی دارد، خطهای xx' و yy' که نقطهٔ O را به دو انتهای قطری که از M می‌گذرد وصل می‌کند، ثابت و برهم عمودند؛ زیرا قوسهای $\overset{\frown}{AD}$ و $\overset{\frown}{BE}$ تغییرناپذیرند؛ از طرف دیگر طولهای MD و ME نیز ثابتند، پس وقتی ABM تغییر می‌کند، دو انتهای قطعه خط ED روی خطهای عمودبرهم xx'، yy' می‌لغزد و نقطهٔ M از خط DE یک بیضی به محورهای تقارن این خطها و به طولهای ۲ME و ۲MD را طی خواهد کرد. وقتی که M یک نقطه از AB باشد، مسأله را اثبات کنید.

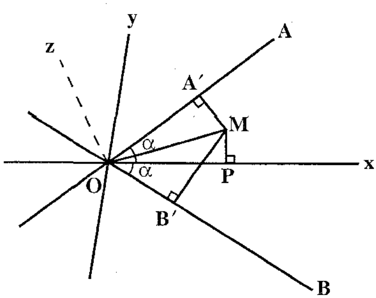
۱۱۱. این مکان هندسی یک دایره است.



۱۱۲. فرض کنید O نقطهٔ برخورد خطهای راست باشد و A و A_1 دو وضعیت یک نقطه روی یکی از خطها در لحظه‌های متفاوت، و B و B_1 وضعیتهای نقطهٔ دیگر روی خط دیگر، در همان لحظه‌ها باشند (شکل). عمودهایی بر وسطهای AB و A_1B_1 اخراج کنید و نقطهٔ برخورد آنها را با M نشان دهید.

$\Delta AA_1M = \Delta BB_1M$ ، زیرا سه ضلع برابر دارند : هرکدام، از دیگری با دوران به اندازهٔ زاویهٔ AOB دور مرکز M، به‌دست می‌آید. این دوران، هر نقطه روی AO را به وضعیت متناظر نقطه‌ای روی OB بدل می‌کند، بنابراین، نقطهٔ M ویژگی مطلوب را داراست.

۱۱۳. این مکان هندسی یک بیضی است.



۱۱۴. فرض می‌کنیم دو خط A، B و MA' ، MB' فاصله‌های یک نقطهٔ M از این خطها باشد. باید مکان نقطه‌های M را چنان پیدا کنیم که :

$MB'^2 - MA'^2 = k^2 \quad \dots (1)$

اگر محورهای Ox و Oy را نیمسازهای زاویه‌های بین این دو خط فرض کنیم و x و y مختصات نقطهٔ M باشد، داریم :

$$\overrightarrow{OA'} + \overrightarrow{A'M} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$$

و اگر این رابطه را روی Oz تعریف شده با رابطهٔ $(Ox,\hat{O}z) = \alpha + \frac{\pi}{2}$ تصویر کنیم (شکل)، حاصل می‌شود :

$$\text{تصویر } \overrightarrow{A'M} = -x\sin\alpha + y\cos\alpha \Rightarrow$$

$$|MA'| = |-x\sin\alpha + y\cos\alpha|$$

و به‌همین روش :

$$\overrightarrow{OB'} + \overrightarrow{B'M} = \overrightarrow{OP} + \overrightarrow{PM}$$

و با تصویر این رابطه روی محور عمود بر OB خواهیم داشت :

$$|\overline{MB'}| = |x\sin\alpha + y\cos\alpha| \ ,$$

و با قرار دادن این مقدارها در رابطهٔ (۱) حاصل می‌شود :

$$|x\sin\alpha + y\cos\alpha|^{۲} - |-x\sin\alpha + y\cos\alpha|^{۲} = k^{۲} \;;$$

و یا :

$$xy = \frac{k^{۲}}{۲\sin ۲\alpha}$$

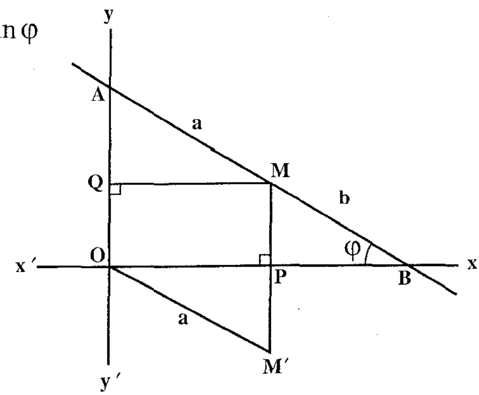
که معادله یک هذلولی متساوی‌الساقین نسبت به مجانبهایش می‌باشد.

۳.۲.۳.۲.۲. دو خط عمودبرهم

۱۱۶. چنانچه $MA = a$ و $MB = b$ ، و اگر x و y مختصات نقطهٔ M و $A\hat{B}O = \varphi$ باشد (شکل)، داریم :

$$x = OP = QM = a\cos\varphi$$

$$y = PM = b\sin\varphi$$



با قرار دادن این مقدارها در رابطهٔ $\cos^{۲}\varphi + \sin^{۲}\varphi = ۱$ خواهیم داشت :

$$\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} - ۱ = ۰$$

که معادلهٔ بیضی نسبت به محورهایش می‌باشد.

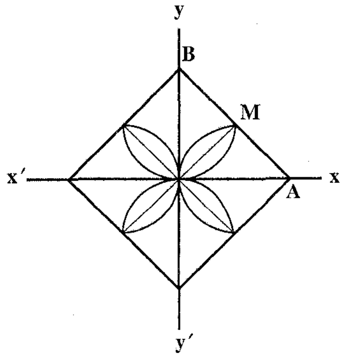
می‌توان مسأله را چنین اثبات نمود :

OM' را موازی با AB رسم می‌کنیم تا MP را در M' قطع کند، داریم :

$$\frac{PM}{PM'} = \frac{MB}{M'O} = \frac{b}{a}$$

بنابراین مکان M' دایره‌ای است به مرکز O و به شعاع a و مکان M یک بیضی است به محورهای ۲a و ۲b.

۱۱۷. این مکان هندسی یک رزاسه Rosace (به شکل گل سرخ یا ستاره) و چهار شاخه است.



۱۱۸. میانه‌ها یکدیگر را به فاصلهٔ $\frac{۲}{۳}$ طول هر میانه از رأس مثلث قطع می‌کنند. اما چون میانهٔ CM طول ثابتی دارد، (زیرا $CM = \frac{AB}{۲}$ است)، پس CG نیز پاره‌خطی به طول ثابت است. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC، دایره‌ای به مرکز C و به شعاع $\frac{۲}{۳} \times \frac{۱}{۲} AB = \frac{AB}{۳}$ است.

۱۱۹. این مکان هندسی یک هذلولی متساوی‌الساقین است که دو خط عمود برهم جانبهای آن می‌باشند.

۱۲۰. داریم:

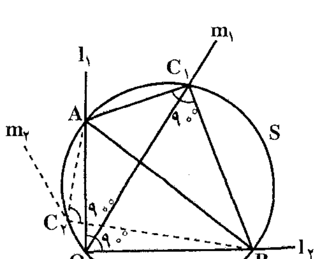
$$MA^۲ + MB^۲ = a^۲ \ , \ MB = OA$$

$$\Rightarrow OA^۲ + MB^۲ = a^۲ \Rightarrow OM^۲ = a^۲ \Rightarrow OM = R$$

پس مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز O و به شعاع a است.

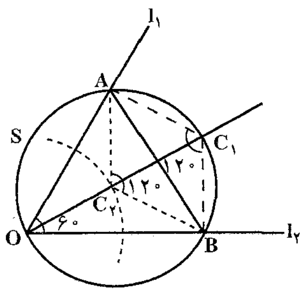
۲ . ۲ . ۳ . ۲ . ۴ . مسأله‌های ترکیبی

۱۲۱. الف. نقطه‌های $C_۱$ و $C_۲$ در شکل (الف) بر دایرهٔ محیطی مثلث ABO واقعند. وقتی پاره‌خط AB طوری بلغزد که دو سرش بر ضلعهای زاویهٔ $l_۱\hat{O}l_۲$ باشند، رأسهای $C_۱$ و $C_۲$ از مثلث $ABC_۱$ و $ABC_۲$ خطهای $m_۱$ و $m_۲$ را که از O می‌گذرند، می‌پیمایند [دقیقتر بگوییم، پاره‌خطهایی از این خطها را می‌پیمایند. تعیین طول این پاره‌خطها به خواننده واگذار می‌شود].



(الف)

ب. نقطهٔ C_1 در شکل (ب) بر S، دایرهٔ محیطی مثلث ABO واقع است. نقطهٔ C_2 مرکز این دایره است. وقتی پاره‌خط AB طوری بلغزد که دو سرش بر ضلعهای زاویهٔ $l_1\hat{O}l_2$ واقع باشد، رأس C_2 از مثلث ABC_2 دایره‌ای به مرکز O را می‌پیماید [به بیان دقیقتر C_1 پاره‌خطی از این خط را می‌پیماید و C_2 کمانی از دایره را].



(ب)

۱۲۲. ۱. چون OA = OB است و زاویه‌های $H\hat{A}O$ و $D\hat{B}O$ نظر به تعامد ضلعها مساوی‌اند، دو مثلث مساوی می‌شوند و از آن‌جا OD = OH می‌شود، چون دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABI و AOB در وتر AB مشترکند، پس مکان نقطهٔ I دایره‌ای است به قطر AB.

۲. چهارضلعی IHOD محاطی است زیرا $\hat{I} = \hat{O} = 90^\circ$ و خط DH قطر دایره می‌شود که روی نیمساز زاویهٔ DOH می‌باشد، به دلیل این‌که مثلث ODH قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است و نیمساز زاویهٔ $H\hat{O}D$ خط DH را نصف می‌کند، پس مکان مرکز، روی این نیمساز واقع است.

۳. چون زاویهٔ OIH قائمه است، پس نیمساز با خط IH زاویهٔ 45° باید بسازد، بعلاوه، مثلث DHO قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است، پس زاویهٔ $H\hat{D}O = 45^\circ$ و از آن‌جا قوس $\widehat{HO} = 90^\circ$ می‌شود، پس برای این‌که زاویهٔ بین IH و نیمساز مساوی 45° باشد، باید نیمساز از نقطهٔ O بگذرد.

۴. اگر OA = a و OH = x فرض شود داریم:

$$OD = OH = x \ , \ OA = OB = a$$

پس:

$$AB = a\sqrt{2} \quad \text{و} \quad AD = a + x$$

$$\overline{BD}^2 = \overline{AB}^2 + \overline{AD}^2 - 2AD.OA =$$

$$2a^2+(a+x)^2-2a(a+x)=$$
$$2a^2+a^2+x^2+2ax-2a^2-2ax$$

پس : $DB^2=a^2+x^2$ لذا : $DB=\sqrt{a^2+x^2}$

ضلعها معلوم شد، حال ارتفاعها را به‌دست می‌آوریم. $OB=a$ و از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم :

$$DM\cdot AB=OB\cdot AD\ ,\ DM=\frac{OB\cdot AD}{AB}$$

یا : $DM=\frac{\sqrt{2}}{2}(a+x)$ همچنین : $AI=\frac{OB\cdot AD}{DB}$

پس : $AI=\frac{a\sqrt{x^2+a^2}\,(a+x)}{x^2+a^2}$

به این ترتیب سه ارتفاع مشخص شده است.

۵. درمثلث قائم‌الزاویهٔ IKO چون زاویهٔ $K\hat{I}O$ به‌طوری که در بالا گفته شده، مساوی $45°$ است، پس مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین می‌شود. از آن‌جا $IK=OK$ خواهد شد.

چون بنا به فرض O و O' نسبت به خط BD قرینه‌اند، پس $BO=BO'$ می‌شود. لذا مکان دایره‌ای است به مرکز B و به شعاع ثابت OB که مساوی a است.

۲.۲.۳.۳. سه خط و بیشتر

۱۲۳. ۱. از رابطهٔ $MP^2=MQ\cdot MR$ نتیجه می‌شود $MP^2=PA\cdot PA'$. پس مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به قطر AA' است.

۲. اما می‌توانیم داشته باشیم : $M'P'^2=M'Q'\cdot M'R'$ یا $M'P'^2=P'A\cdot P'A'$

اما اگر $M'P'$ را با y و فاصلهٔ OP را با x و شعاع دایره را با a مشخص کنیم، خواهیم داشت :

$$y^2=(x-a)(x+a)=x^2-a^2$$

این معادله، یک هذلولی متساوی‌الساقین به قطر قاطع $AA'=2a$ را مشخص می‌کند.

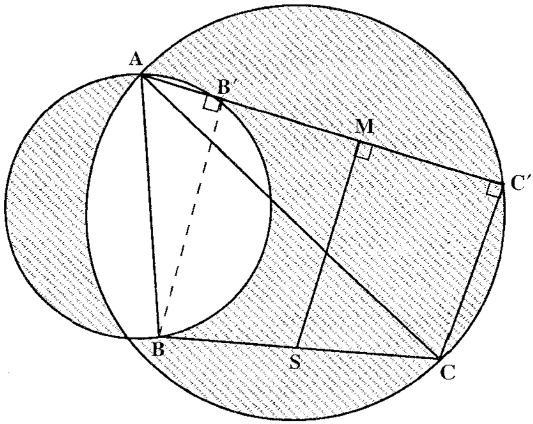
پس مکان هندسی کامل از یک دایره و یک هذلولی متساوی‌الساقین تشکیل می‌شود.

۱۲۴. این مکان خط راستی است که از نقطهٔ برخورد دو خط x و y می‌گذرد.

۲. ۳. پاره‌خط، نیمخط، خط؛ و نقطه‌های ثابت

۲. ۳. ۱. پاره‌خط، نقطه

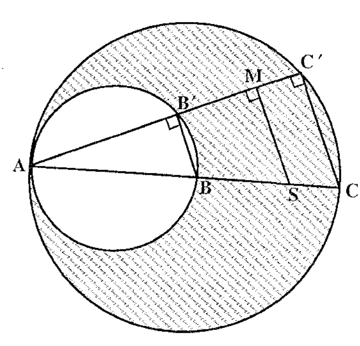
۲. ۳. ۱. ۱. یک پاره‌خط، یک نقطه



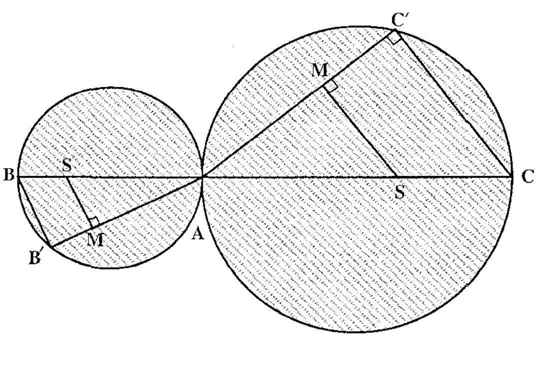
۱۲۵. دو دایره به قطرهای AB و AC رسم می‌کنیم. قسمت هاشورخورده، مکان هندسی نقطهٔ M است که یک ضلع آن از A گذشته و ضلع دیگر BC را در نقطهٔ S قطع می‌کند.

برای اثبات AM را وصل می‌کنیم تا دو دایره را در B′ و C′ قطع کند و B′ را به B و C′ را به C وصل می‌کنیم. به‌طوری که در شکل ملاحظه می‌شود BB′ و CC′ بر AM عمودند. چون MS بنا به فرض بر AM عمود است، MS که موازی با CC′ و BB′ است، BC را در S قطع می‌کند (قضیهٔ تالس). برای هر دو قسمت هاشورخورده حکم صادق است.

در حالت خاصی که نقطهٔ A روی خط BC باشد، شکل مسأله به دو صورت زیر درمی‌آید:



مکان M قسمت هاشورخورده به‌غیر از BC است.



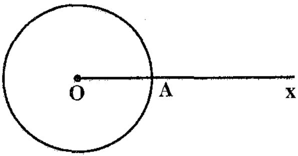
مکان M قسمت هاشورخورده به‌غیر از AC و AB است.

۱۲۶. بنا به رابطهٔ متری در دایره داریم: $IM^2 = IA \cdot IB$ اما $IA.IB$ به دلیل ثابت بودن سه نقطهٔ I، A و B مقداری است ثابت، پس IM مقدار ثابتی است و چون I نقطهٔ ثابتی می‌باشد، پس مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز I و به شعاع $IM = \sqrt{IA.IB}$ است.

۲ . ۳ . ۲. نیمخط، نقطه

۲ . ۳ . ۲ . ۱. یک نیمخط، یک نقطه

۱۲۷. این مکان هندسی یک دایره به مرکز O و به شعاع ۲ سانتیمتر است.



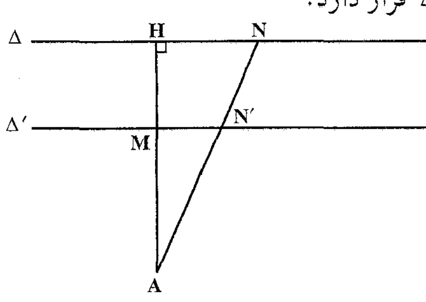
۲ . ۳ . ۳. خط، نقطه

۲ . ۳ . ۳ . ۱. یک خط، یک نقطه

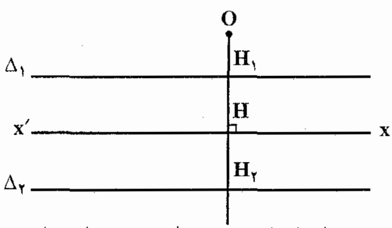
۱۲۸. زاویه‌های MAy و NAx ثابت می‌باشند و اندازهٔ هریک برابر $45°$ است. مکانهای هندسی نقطه‌های M و N، نیمخطهای $A\Delta$ و $A\Delta'$ می‌باشند.

۱۲۹. مکان هندسی خواسته‌شده شامل دو خط راست موازی $X'X$ است و در دو طرف آن است که به فاصلهٔ r از $X'X$ قراردارند. بعلاوه این مکان هندسی دایرهٔ به مرکز نقطهٔ ثابت (O) و به شعاع r را نیز شامل می‌شود؛ زیرا از این دایره نقطهٔ برخورد دایره‌ای به شعاع ثابت و مرکز متغیر به مرکز ثابت و شعاع متغیر است.

۱۳۰. نقطهٔ ثابت A و خط Δ را درنظر می‌گیریم. از A خط AH را عمود بر Δ رسم می‌کنیم و وسط پاره‌خط AH را M می‌نامیم و از M خط Δ' را موازی Δ رسم می‌کنیم. این خط مکان هندسی نقطهٔ خواسته‌شده است. بسادگی ثابت می‌شود که هر نقطه از این خط به مکان هندسی خواسته شده تعلق دارد و هر نقطه که متعلق به مکان هندسی خواسته شده باشد، بر خط Δ' قرار دارد.

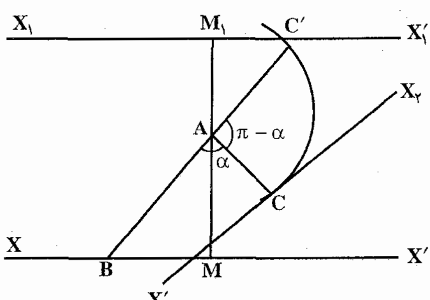


۱۳۱. نقطهٔ اختیاری A از خط $x'x$ را به O وصل می‌کنیم. روی پاره‌خط OA و در امتداد آن دو نقطهٔ B و B' را چنان می‌توان اختیار کرد که $\frac{BO}{BA}=\frac{B'O}{B'A}=\frac{m}{n}$ باشد. حال نقطهٔ متغیر M از $x'x$ و نقطه‌های N و N' واقع بر OM را چنان درنظر می‌گیریم که $\frac{m}{n}=\frac{N'O}{N'M}=\frac{NO}{NM}$ باشد. بنابراین $\frac{BO}{BA}=\frac{NO}{NM}$ و $\frac{B'O}{B'A}=\frac{N'O}{N'M}$ است. از این رابطه‌ها نتیجه می‌شود که NB و $N'B'$ موازی $x'x$ می‌باشند، یعنی N و N' روی خطهایی قرار دارند که از نقطه‌های B و B' موازی $x'x$ رسم می‌شود و هنگامی که M خط $x'x$ را بپیماید، N و N' دو خط ثابت موازی آن را خواهند پیمود.



نکته. می‌توان از O عمود OH را بر خط $x'x$ رسم کرد و روی خط OH دو نقطهٔ H_1 و H_2 را چنان پیدا کرد که $\frac{m}{n}=\frac{H_2O}{H_2H}=\frac{H_1O}{H_1H}$ باشد.

بدیهی است که دو نقطهٔ H_1 و H_2 ثابت می‌باشند. حال از این دو نقطه، دو خط موازی خط $x'x$ رسم می‌کنیم. این دو خط مکان هندسی خواسته شده می‌باشند؛ زیرا بسادگی می‌توان ثابت کرد که نقطه‌های واقع بر این دو خط، ویژگی مکان هندسی موردنظر را دارند.



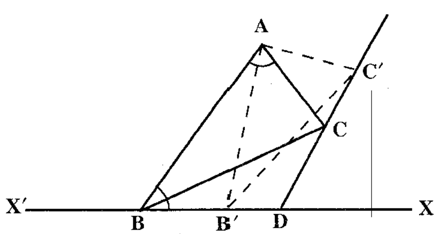
۱۳۲. اگر B نقطهٔ دلخواهی از خط XX' و C نقطه‌ای باشد که $B\hat{A}C=\alpha$ و همچنین $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=\frac{m}{n}=k$ است.

چنانچه AB را تا نقطهٔ C' به نحوی امتداد دهیم که $AC=AC'$ باشد، در این‌صورت $C\hat{A}C'=\pi-\alpha$ بوده و داریم $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC'}}=k$، یعنی وقتی B بر XX' تغییر می‌نماید، پیوسته C' مجانس B در تجانس (A, k) می‌باشد و C از دوران C' حول A، به اندازهٔ زاویهٔ $(\pi-\alpha)$ به‌دست می‌آید. و در نتیجه حل مسأله چنین است:

ابتدا خط $X_1X'_1$ مجانس خط XX' در تجانس (A, k) را تعیین نموده و XX'_1 را حول نقطهٔ A به اندازهٔ زاویهٔ $(\pi-\alpha)$ دوران می‌دهیم تا به‌صورت $X_2X'_2$ درآید. خط $X_2X'_2$ مکان نقطهٔ C است.

۱۳۳. **راه اول.** در امتداد پاره‌خط BA و در طرف نقطهٔ A، پاره‌خط $AE = AC$ را جدا می‌کنیم. از E خطی موازی خط $X'X$ رسم می‌نماییم. اگر از A عمودی بر این دو خط موازی رسم کنیم تا $X'X$ را در B' و خط موازی آن را در E' قطع کند، $\frac{AB'}{AE'} = \frac{m}{n}$ می‌باشد. حال زاویهٔ $B'AC'$ را برابر زاویهٔ BAC رسم می‌کنیم، به قسمی که $AC' = AE'$ باشد. از نقطهٔ C' خطی عمود بر AC' رسم می‌کنیم تا $X'X$ را در نقطهٔ D قطع کند. دو زاویهٔ $B'AC'$ و XDC' باهم برابرند؛ زیرا ضلعهایشان دو به دو برهم عمودند. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ C، خط DY است که برای رسم آن، کافی است از یکی از نقطه‌های مکان هندسی موردنظر، مثلاً C، خطی رسم کنیم که با $X'X$ زاویه‌ای برابر $B\hat{A}C$ بسازد.

راه دوم. از نقطهٔ C خطی رسم می‌کنیم که با $X'X$ زاویهٔ $C\hat{D}X = B\hat{A}C$ بسازد. این خط مکان هندسی موردنظر است. برای اثبات، خط دلخواه را رسم می‌کنیم. (C' روی خط DC است). حال کافی است ثابت کنیم $\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}$ است.

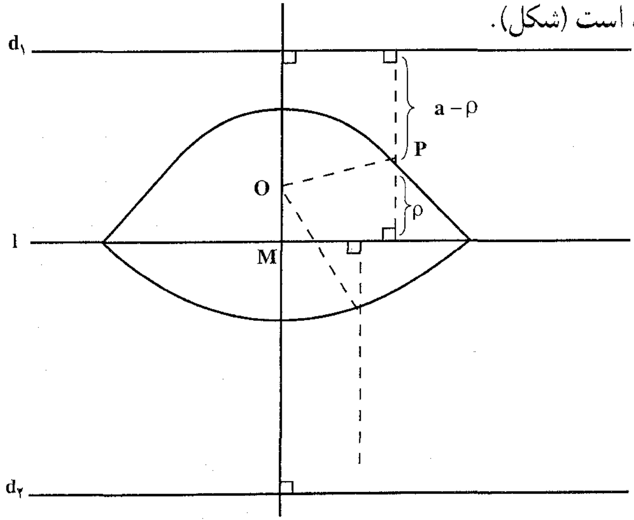


چهارضلعی ABDC محاطی است؛ زیرا $C\hat{D}X = B\hat{A}C$ است، پس $A\hat{B}B' = A\hat{C}C'$. همچنین چهارضلعی $AB'DC'$ نیز محاطی می‌باشد؛ زیرا $B'\hat{A}C' = B\hat{A}C = C\hat{D}X$ است. از طرفی $B\hat{A}A' = C\hat{A}C'$ است. پس دو مثلث ABB' و ACC' متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AB'}{AC'} = \frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}$$

تبصره. مسألهٔ بالا را به‌صورت زیر نیز می‌توان بیان کرد. مثلث ABC حول رأس ثابت خود، A چنان حرکت می‌کند که همواره متشابه با خودش می‌باشد. اگر رأس B خط ثابت $X'X$ را بپیماید، مکان هندسی رأس C را تعیین کنید.

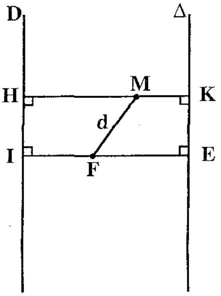
۱۳۴. راه اول. فاصلهٔ P از نقطهٔ O را r و فاصلهٔ P از خط راست l را ρ می‌نامیم. می‌خواهیم مکان هندسی P را طوری پیدا کنیم که، برای آن، داشته باشیم: $r+\rho=a$. درحالتی که فاصهٔ O از خط راست l بزرگتر از a باشد، مسأله جواب ندارد. درحالتی که فاصلهٔ O از l برابر a باشد مکان p عبارت است از پاره‌خط OM، که از O بر l عمود شده است (شکل).



به حالتی می‌پردازیم که فاصلهٔ O از خط راست l کمتر از a باشد.
دو خط راست d_1 و d_2 را موازی l_2 و به فاصلهٔ a از آن، رسم می‌کنیم. نقطهٔ P را در داخل نوار بین l و d_1 درنظر می‌گیریم. اگر این نقطه، متعلق به مکان باشد، باید برای آن داشته باشیم:

$$r=a-\rho$$

از طرف دیگر، فاصلهٔ بین دو خط راست موازی l و d_1 برابر است با a؛ بنابراین فاصلهٔ نقطهٔ P از d_1 برابر می‌شود با $a-\rho$، یعنی r. به این‌ترتیب، نقطهٔ P باید از نقطهٔ O و خط راست d_1 به یک فاصله باشد. مکان هندسی چنین نقطه‌ای عبارت است از یک سهمی به کانون O و با خط هادی d_1. البته، کمانی از این سهمی جزو مکان است که در نوار بین l و d_1 محصور باشد.



به همین ترتیب در نوار بین l و d_2 هم، کمانی از یک سهمی دیگر به کانون O و با خط هادی d_2 به‌دست می‌آید.
مکان مطلوب، عبارت است از دو کمان مزبور از سهمی‌ها.
راه دوم. باتوجه به شکل روبه‌رو، اگر D و F خط و نقطهٔ ثابت، M یک نقطه از مکان هندسی باشد، به‌طوری که $MH+MF=l$،

چنانچه MH را تا نقطهٔ K چنان امتداد دهیم که $MK = MF$ باشد، داریم:

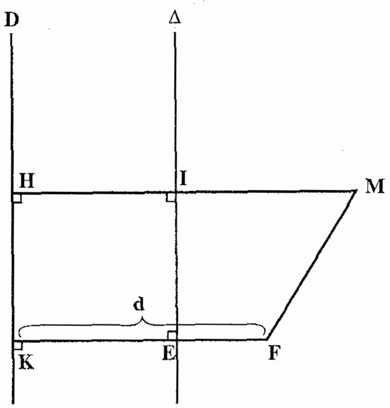
$$HK = MH + MF = MH + MK = l$$

یعني اولاً. مکان K خطی است مستقیم، موازی D و به فاصلهٔ l از آن.
ثانیاً. فاصلهٔ M از خط و نقطهٔ F به یک فاصله است. و در نتیجه مکان M یک سهمی است به کانون F و خط هادی Δ و پارامتر $P = FE = IE - IF = l - d$.

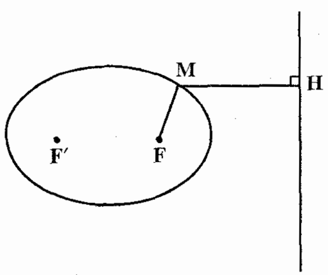
۱۳۵. اگر D و F خط و نقطهٔ ثابت و M یک نقطه از مکان باشد، به‌طوری که $MH - MF = l$ است. چنانچه بر MH نقطهٔ I را چنان تعیین کنیم که: $ML = MF$ باشد، داریم:

$$MH - MF = MH - MI = IH = l$$

یعنی اولاً. مکان I خطی است مستقیم، موازی D و به فاصلهٔ l از آن.
ثانیاً. فاصلهٔ M از خط Δ و نقطهٔ F به یک فاصله است. پس مکان M سهمی است، به کانون F و خط Δ و پارامتر $P = FE = FK - EK = d - l$.

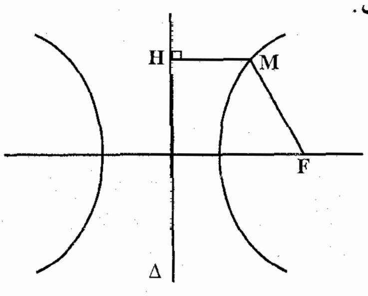


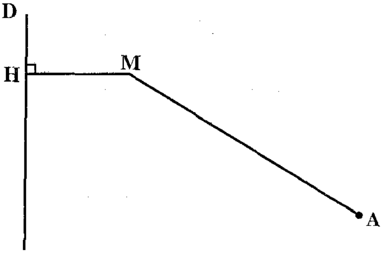
۱۳۶. این مکان یک بیضی است که نقطهٔ F یک کانون و خط Δ، خط هادی وابسته به این کانون است.



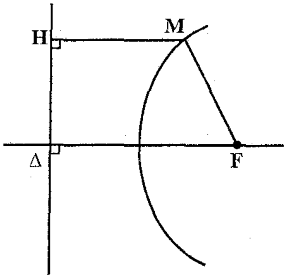
۱۳۷. این مکان هندسی یک هذلولی است که نقطهٔ ثابت، کانون آن، و خط ثابت، خط هادی نظیر آن کانون است.

$$\frac{MF}{MH} = e > ۱$$

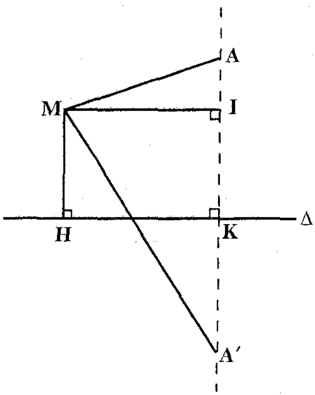




۱۳۸. این مکان هندسی یک هذلولی است؛ زیرا اگر M یک نقطه از مکان هندسی داده شده باشد، داریم: $\frac{MA}{MH}=2>1$.



۱۳۹. این مکان هندسی یک سهمی است که نقطهٔ ثابت F کانون آن، و خط ثابت Δ، خط هادی آن است.



۱۴۰. A نقطهٔ ثابت و خط Δ، خط مفروض است. مکان M، مطلوب است، به قسمی که $\frac{MA^2}{MH}=a$ باشد (a طولی است ثابت). اگر A′ قرینهٔ A نسبت به خط Δ باشد، مشاهده می‌شود که:

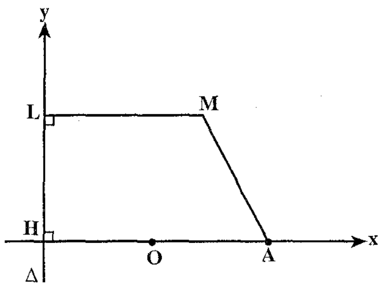
$$MA'^2-MA^2=IA'^2-IA^2$$
$$=(IA'+IA)(IA'-IA)$$

ولی $IA'-IA=2KI=2MH\ ,\ IA'+IA=AA'$

پس: $MA'^2=MA^2+2AA'\cdot MH$

یعنی: $MA'^2=(a+2AA')MH$ پس $\frac{MA'}{MA}=\sqrt{1+\frac{2AA'}{a}}$ مقداری است ثابت.

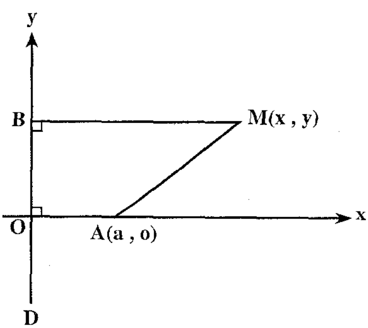
نسبت فاصله‌های نقطهٔ M از دو نقطهٔ A و A′ مقداری است ثابت، مکان دایره‌ای است که قطر آن قطعهٔ مزدوج AA′، به نسبت داده شده می‌باشد.



۱۴۱. خط Δ و نقطهٔ A را درنظر می‌گیریم. M را نقطه‌ای از مکان هندسی موردنظر اختیار می‌کنیم و عمود ML را بر Δ رسم می‌کنیم. داریم :

$$ML^2 + MA^2 = k^2$$

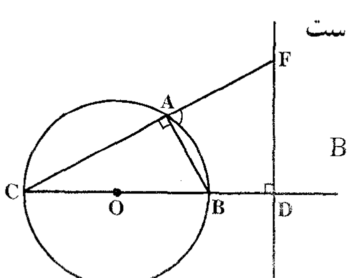
ثابت می‌شود که این مکان هندسی یک بیضی است که مرکزش نقطهٔ O وسط AH است، و محور کانونی‌اش عمودمنصف AH می‌باشد. (با انتخاب خط ثابت به‌عنوان محور yها و خط AH برای محور xها، مسأله به راحتی اثبات می‌شود).



۱۴۲. فرض کنیم D و A خط و نقطهٔ مفروض باشند. از M و A دو عمود MB و AO را بر D فرود می‌آوریم (شکل)، مکان نقطه‌های M را طوری جستجو می‌کنیم که : $MB^2 - MA^2 = k^2$ باشد. دو محور مختصات Ox و Oy را مطابق شکل درنظر می‌گیریم :
فرض می‌کنیم $OA = a$ و M به مختصات x و y باشد، داریم :

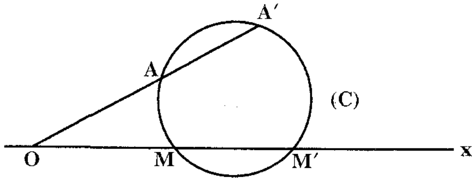
$$BM^2 = x^2\ ,\ MA^2 = (x-a)^2 + y^2$$
$$\Rightarrow \left[x^2 - (x-a)^2 - y^2 = k^2\right],\ \Rightarrow y^2 = 2ax - a^2 - k^2$$

معادلهٔ بالا، معادلهٔ یک سهمی به پارامتر a که رأسش به طول $x = \dfrac{a^2 + k^2}{2a}$ است، می‌باشد.



۱۴۳. این مکان هندسی دایرهٔ BAC، منعکس خط راست DF است. همچنین داریم :

$$BE \cdot BA = BD \cdot BC\ ,\ BE \cdot AE = DE \cdot FE$$



۱۴۴. نقطهٔ ثابت A و خط $x'x$ را در خارج آن درنظر می‌گیریم و نقطه O را روی این خط درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $OM \cdot OM' = k$ باشد.
دایرهٔ اختیاری (C) را بر سه نقطهٔ A، M و M' می‌گذرانیم و نقطهٔ برخورد OA با این دایره را A' می‌نامیم. این نقطه ثابت است. زیرا داریم:

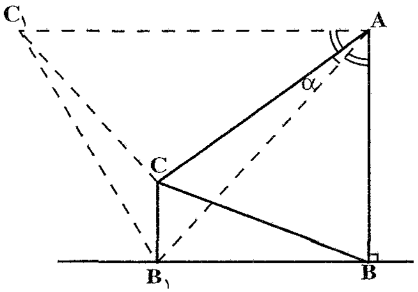
$$OA \cdot OA' = OM \cdot OM' = k$$

سپس دایره‌های (C) همواره از دو نقطه ثابت A و A' می‌گذرند و بنابراین مکان هندسی مرکزشان، عمودمنصف پاره‌خط AA' است.

۱۴۵. نقطهٔ مفروض را با A، خط مفروض را با l نشان می‌دهیم. رابطهٔ $AO \perp l$ را درنظر می‌گیریم. به آسانی می‌توان دریافت که مکان هندسی مطلوب F نسبت به خط AO متقارن بوده و بنابراین کافی است که فقط نیمصفحه واقع در طرف راست AO را مورد مطالعه قرار دهیم. بدیهی است که نقطهٔ K (K به AO تعلق دارد) با شرط $AK = 2KO$ به مکان هندسی F متعلق خواهد بود. از نقطهٔ K خط m را به موازات خط l رسم می‌کنیم. M را مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع ABC و بالای خط m، AD را ارتفاع مثلث ABC درنظر می‌گیریم. به دلیل این که AOB و ADB زاویه‌های قائمه هستند، از این‌رو نقطه‌های O و D روی دایره‌ای به قطر AB واقع شده و بدین‌ترتیب $A\hat{O}D = A\hat{B}D = 60°$ خواهد بود. مثلثهای AOD و AKM متشابه بوده و از این‌رو $A\hat{K}M = 60°$ است. اگر نقطهٔ M زیر خط m واقع باشد، آن‌گاه به طریق مشابه $A\hat{K}M = 120°$ خواهد بود. عکس این امر نیز درست است: هرنقطه‌ای مانند M با شرط این‌که $A\hat{K}M$ یا مساوی $60°$ و یا مساوی $120°$ است، به مکان هندسی F تعلق دارد. سرانجام مکان هندسی F، دو خط مستقیم گذرنده بر نقطهٔ K رانشان می‌دهد که با خط AO زاویه‌های $60°$ و $120°$ و با خط l زاویه‌های $30°$ و $150°$ می‌سازند.

۱۴۶. A را نقطهٔ مفروض، l را خط مفروض، A' را متقارن نقطهٔ A حول خط l و m را خط گذرنده بر نقطهٔ A' به موازات l درنظر می‌گیریم. به آسانی دریافت می‌شود که مکان هندسی F نسبت به خط AA' متقارن بوده و از این‌رو فقط نیمصفحه واقع در طرف راست AA' را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم.
فرض می‌کنیم که C نقطه‌ای ازمکان هندسی F بوده، و در بالای خط m واقع باشد. همچنین تصور می‌کنیم که B رأس دوم مثلث ABC است. آن‌گاه دایره‌ای با شعاع AB

و مرکز B از نقطه‌های A، A' و C می‌گذرد. از این‌رو نتیجه می‌شود که $A\hat{A'}C = ۳۰°$ است. و اگر نقطهٔ C زیر خط m واقع باشد، آن‌گاه $A\hat{A'}C = ۱۵۰°$ خواهد بود. همچنین بدیهی است که فقط یک نقطهٔ A' وجود دارد که به مکان F روی خط m متعلق است. بدین‌ترتیب نقطه‌های مکان هندسی F که در نیمصفحه راست AA' قرار دارند، روی دو نیمخط ناشی از نقطهٔ A' واقع بوده و با AA' زاویه‌های ۳۰° و ۱۵۰° می سازند. ثابت کنید که این زوج نیمخطها واقع در نصفه طرف راست مجموعهٔ نقطه‌های F است. سرانجام مکان هندسی F دو خط مستقیم را ارایه می‌دهد که از نقطه A' با زاویه‌های ۳۰° و ۱۵۰° با خط AA' و با زاویه‌های ۶۰° و ۱۲۰° با خط مفروض l عبور می کنند.



۱۴۷. گزینهٔ (هـ) درست است. مطابق شکل، نخست از A عمودی بر خط l رسم نموده و پای عمود را نقطهٔ B درنظر می‌گیریم و مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را می‌سازیم. سپس از نقطهٔ C عمود CB_1 را بر l رسم نموده و مثلث متساوی‌الاضلاع AB_1C_1 را بر آن بنا می‌کنیم. بدیهی است که نقطه‌های C و C_1 دو نقطه از مکان موردنظر می‌باشند. اکنون مطابق شکل داریم:

$$\left.\begin{array}{l} B_1\hat{A}B = C_1\hat{A}C = ۶۰° - \alpha \\ AC = AB \\ AC_1 = AB_1 \end{array}\right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \Delta ABB_1 \approx \Delta ACC_1 \\ C_1\hat{C}A = A\hat{B}B_1 = ۹۰° \end{array}$$

(درحالت دوضلع و زاویهٔ بین)

ازاین جا روشن می‌شود که $CC_1 \perp AC$ و چون AC ثابت می‌باشد، پس مکان فوق، خط راستی عمود بر AC است و یک خط راست دیگر با همین شرایط در سمت راست AB وجود دارد، بنابراین مکان فوق از دو خط راست متقاطع تشکیل می‌شود. (سؤال: این دو خط چه زاویه‌ای با یکدیگر می‌سازند؟)

۱۴۸. مکان هندسی مطلوب، عبارت است از دو خط راست، که از نقطهٔ قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط راست l می‌گذرند و با l زاویهٔ ۶۰° می‌سازند.

۱۴۹. دایره‌های محیطی مثلثها از نقطهٔ ثابت D می‌گذرد، به قسمی که $C\hat{D}X = B\hat{A}C = \alpha$ باشد.

۱۵۰. اگر فرض کنیم که : $SM - MH = m$ و $SM - M'H' = m'$ باشد، چون طول MK را بر روی MM' برابر MH و طول $M'K$ را برابر $M'H'$ بر روی MM' (درجهت مخالف MK) جدا کنیم، نقطهٔ K منحصر به فرد خواهد بود. زیرا :

$$SM - MH + SM - M'H' = m + m' = \text{۰}$$

می‌باشد. پس :

$$SM - MH = KS \;,\; SM' - M'H' = SK$$

می‌باشد. از $m + m' = \text{۰}$ حاصل می‌شود یا :

$$m = m' = \text{۰} \qquad (\text{۱})$$

در این‌صورت $SM = MH$ و $SM' = M'H'$ مکان نقطه‌های M و M' سهمی است به کانون S و خط هادی HH'. چون نقطهٔ S نقطهٔ ثابتی است و یا : $m = -m'$ دراین‌صورت S وسط MM' خواهد بود و چون :

$$\frac{\text{۱}}{SM} + \frac{\text{۱}}{SM'} = \frac{\text{۲}}{SI}$$

پس $SM = SM' = SI$ یعنی مکان نقطه‌های M و M' دایره‌ای است به مرکز S که در نقطهٔ I بر خط HM' مماس است. باید توجه کرد که در فرض $m = -m' = \text{۰}$ ، اگر $SM' - M'H' = SK$ و $SM - MH = KS$ انتخاب شوند، به فرض $SM + SM' = MM'$ و $HM + H'M' = MM'$ (فرض مسأله) MM' مجموع SM و SM' و مجموع MH و $M'H'$ است. نقطهٔ وسط MM' عیناً همان خاصیت نقطهٔ S را نسبت به MH و $M'H'$ دارد؛ زیرا اگر SM و SM' را $\frac{MM'}{\text{۲}}$ فرض کرده و اختلافهای $SM - MH$ و $SM' - M'H'$ را تشکیل دهیم، به همان رابطه‌های قبل برخورد می‌کنیم. پس S نقطهٔ وسط MM' می‌باشد و داریم :

$$HM + H'M' = MM'$$

پس :

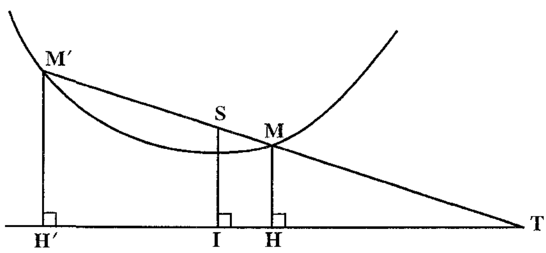
$$HM - \frac{MM'}{\text{۲}} = \frac{MM'}{\text{۲}} - H'M'$$

و چون $HM - SM = SM' - H'M'$ ، پس $SM' = SM = \frac{MM'}{\text{۲}}$. درمورد سهمی

قضیه از خاصیت این‌که کانون F و خط هادی نسبت به سهمی مزدوجند، نتیجه می‌شود. یعنی قطب خط هادی سهمی نسبت به سهمی، کانون است یا به‌عبارت دیگر هر قاطعی که از کانون سهمی رسم شود، و سهمی را در دو نقطهٔ M و ′M، و خط هادی را در نقطهٔ T قطع کند، تصویر I کانون بر خط‌هادی و نقطهٔ T نسبت به تصویرهای H و ′H، نقطه‌های M و ′M مزدوج توافقی می‌باشند. پس رابطه‌های:

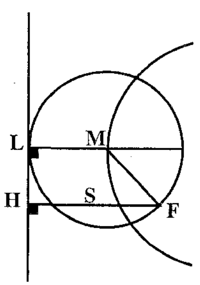
$$\frac{\overline{SM}}{\overline{SM'}} = -\frac{\overline{TM}}{\overline{TM'}} \quad \text{یا} \quad \frac{\overline{IH}}{\overline{IH'}} = -\frac{\overline{TH}}{\overline{TH'}}$$

نظیر است. از تشابه مثلثهای TMH و TSI و ′TM′H رابطهٔ $\frac{۱}{SM} + \frac{۱}{SM'} = \frac{۲}{SI}$ به‌دست می‌آید.

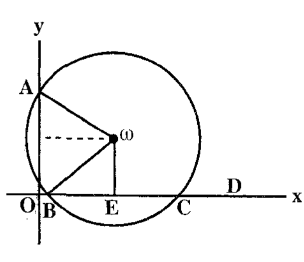


درمورد دایره حاجتی به توضیح نیست؛ زیرا دایره که به مرکز ثابت بر خط ثابتی مماس باشد، خاصیت مذکور در مسأله را دارا می‌باشد.

۱۵۱. خط ثابت D و نقطهٔ ثابت F را درنظر می‌گیریم. اگر M مرکز یکی از دایره‌های موردنظر مسأله باشد، و از M عمود ML را بر D فرود آوریم، MF = ML است. یعنی نقطهٔ M از نقطهٔ ثابت F و از خط ثابت D به یک فاصله است. پس مکان هندسی آن یک سهمی به کانون F و خط هادی D است.



۱۵۲. فرض کنیم ω مرکز دایره‌ای باشد که گذرنده بر A بوده و روی خط D، وتر BC = ۲۱ را جدا کرده باشد (شکل). دو محور مختصات OX و OY را مطابق شکل درنظر می‌گیریم.



داریم:

$$\overline{\omega B}^{۲} = \overline{\omega E}^{۲} + I^{۲}$$

و یا:

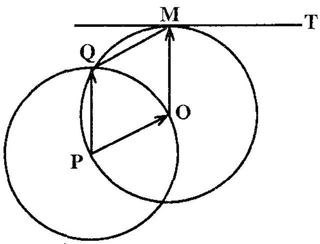
$$\overline{\omega A}^{۲} = \overline{\omega E}^{۲} + I^{۲}$$

و یا:

$$\overline{\omega A}^{۲} - \overline{\omega E}^{۲} = I^{۲}$$

حال تفاضل مربعهای فاصله‌های ω از نقطهٔ A و خط D مقداری است ثابت. پس مکان هندسی نقطهٔ ω یک سهمی است.

۱۵۳. امتداد مفروض را T و نقطهٔ ثابت را P فرض می‌کنیم. وقتی دایره به مرکز O و به شعاع R حول P تغییر می‌کند، مکان O دایره به مرکز P و به شعاع R است.



از P بردار $\overrightarrow{PQ}$ را همسنگ OM (شعاع نقطهٔ تماس) رسم می‌کنیم. نقطهٔ Q ثابت می‌ماند؛ زیرا امتداد T ثابت است، و شکل OPQM متوازی‌الاضلاع است. $\overrightarrow{QM} = \overrightarrow{PO}$ می‌باشد. پس مکان M دایره‌ای است به مرکز Q و به شعاع R که از انتقال دایره به مرکز P و به شعاع R، به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{PQ}$ به دست می‌آید. مکان دومی نیز وجود دارد که قرینهٔ اولی نسبت به P می‌باشد.

۲.۳.۳.۲. یک خط، دو نقطه

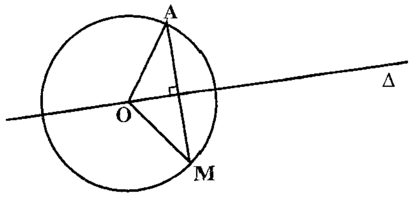
۱۵۴. خط مماس در نقطهٔ M خط D را در نقطهٔ I قطع می‌کند و داریم:

$$IA = IB = IM \Rightarrow IM = \frac{AB}{۲} = \text{مقدار ثابت}$$

پس مکان هندسی نقطهٔ M، نیمدایره‌ای به قطر AB است و در همان طرفی از خط AB واقع است که نیمدایره‌های دیگر قرار دارند.

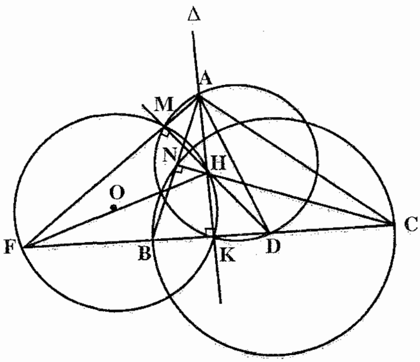
۱۵۵. درمثلث PAB دو خط AM و BM که بر ضلعهای PB و PA عمودند، دو ارتفاع مثلثند، پس M محل تلاقی ارتفاعها است و خط D که از M بر AB عمود است، ارتفاع سوم مثلث است. پس از P، رأس مثلث می‌گذرد و چون خط ثابتی است، همان مکان هندسی مطلوب است. برعکس هر نقطه اختیاری که بر خط D فرض کنیم، رأس مثلثی است که ارتفاعهای AH و BK از آن، یکدیگر را در M، روی PH قطع می‌نمایند.

۱۵۶. پاره‌خط OA ثابت است و داریم $OM = OA$. پس مکان هندسی نقطهٔ M، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA است.



۱۵۷. اگر خط AB با l موازی نباشد، آن وقت دو دایره وجود دارند که از A و B می‌گذرند و بر l مماسند. فرض کنید O_1 و O_2 مرکزهایشان باشند. مکان هندسی مطلوب، خط راست O_1O_2 بجز بازهٔ (O_1O_2) است. اگر AB با l موازی باشد، آن‌وقت مکان هندسی مطلوب، عبارت است از نیمخطی عمود بر l.

۲. ۳. ۳. ۳. یک خط، سه نقطه



۱۵۹. اگر Δ امتداد معین عمود بر BC و A یک نقطهٔ دلخواه از آن و M تصویر A بر DH در این حالت باشد، AM را امتداد می‌دهیم تا BC را در F قطع کند، چون $\hat{M} = \hat{K} = 90°$ است، پس دایره‌های به قطرهای FH و AD از نقطه‌های K و M می‌گذرند و می‌توان گفت:

$$P_{D(FH)} = DH \cdot DM = DH(DH + MH) = DH^2 + DH \cdot MH \quad (1)$$

و همچنین

$$P_{H(AD)} = DH \cdot MH \quad (2)$$

و ازطرفی H محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC است، پس:

$$AH \cdot HK = HN \cdot HC \quad (3)$$

و چون $\hat{N} = 90°$ است، پس دایرهٔ به قطر BC (به مرکز D و شعاع $R = BD = DC$) از N می‌گذرد و داریم:

$$P_{H(BC)} = HN \cdot HC = R^2 - d^2 = DB^2 - DH^2 \quad (4)$$

از مقایسهٔ رابطه‌های (۱)، (۲)، (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که:

$$DK \cdot DF = DH^2 + NH \cdot HC = DH^2 + DB^2 - DH^2 = DB^2$$

و یا $DB^2 = DK \cdot DF$ و از این رابطه با توجه به این‌که D وسط BC است، نتیجه می‌گیریم که K، F، B و C مزدوج توافقی هستند و چون در تقسیم توافقی (FKBC) سه نقطهٔ ثابت است. نقطهٔ چهارم یعنی F، ثابت بوده و درنتیجه مکان M دایره‌ای به قطر DF است که در آن F مزدوج توافقی K است نسبت به BC.

۲. ۳. ۳. ۴. دو خط، یک یا چند نقطه

۲. ۳. ۳. ۴. ۱. دو خط موازی، یک یا چند نقطه

۱۶۰. فرض می‌کنیم MNO و $M'N'O'$ دو وضع مشابه از مثلث باشند، داریم :

$$\frac{AM}{AN}=\frac{AM'}{AN'}=\frac{MN}{M'N'}=\frac{NO}{NO'}$$

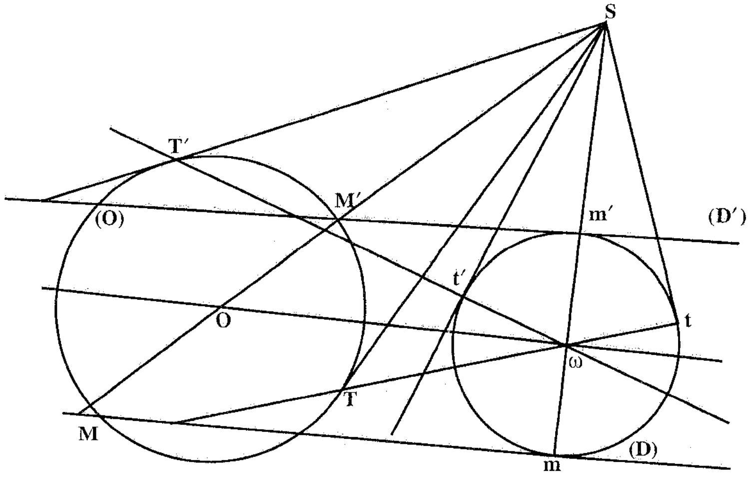
مثلثهای ANO و $AN'O'$ متشابه‌اند ؛ بنابراین باتوجه به ثابت بودن نقطهٔ A و این‌که N خط راستی را می‌پیماید، مکان هندسی نقطهٔ O، خط $OB'O'$ است که خطهای موازی را با زاویه‌ای برابر زاویهٔ NAO قطع می‌کند.

۱۶۱. مکان هندسی هر رأس، خطی است که با خطهای موازی D و D'، زاویهٔ ثابتی می‌سازند. برای تعیین این زاویهٔ ثابت، می‌توان دو وضع از مربع را ساخت و اگر مربع دوم $M'N'P'Q'$ باشد، مکان هندسی P و Q خطهای PP' و QQ' خواهند بود.

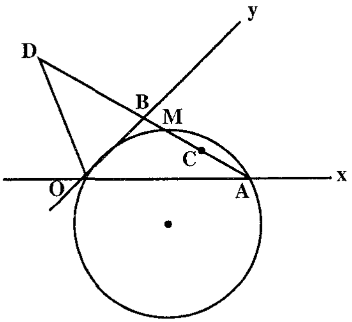
۱۶۲. تصویر S را بر D و D'، نقطه‌های m و m' می‌نامیم. مرکز دایره به قطر mm' را ω فرض می‌کنیم. اگر O وسط MM' باشد، ωO موازی با خطهای D و D' است و می‌توان نوشت :

$$\frac{SO}{S\omega}=\frac{OM}{\omega m}$$

دایرهٔ O تبدیل یافتهٔ دایرهٔ ω است، نسبت به مرکز S، پس T و T' تبدیل‌یافتهٔ نقطه‌های t و t' (t و t' محل برخورد مماسهای وارد از S بر O) می‌باشند. مثلثهای $S\omega O$ و StT و $St'T'$ متشابه‌اند. چون $S\hat{\omega}O=\frac{\pi}{2}$ و $S\hat{t}T=S\hat{T}'t'=\frac{\pi}{2}$. پس نقطه‌های T و T' روی خطهای ωt و $\omega t'$ هستند.



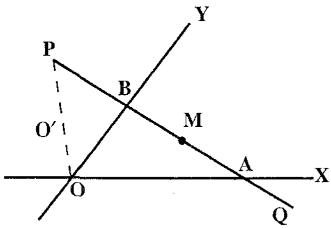
۲.۳.۳.۲.۴.۲. دو خط متقاطع، یک یا چند نقطه



۱۶۳. چون دو نقطهٔ A و M نسبت به نقطه‌های C و D مزدوج توافقی یکدیگرند و نقطهٔ B وسط پاره‌خط CD است، پس داریم:

$\overline{BO}^2 = \overline{BM}\cdot\overline{BA}$ یا $\overline{BC}^2 = \overline{BM}\cdot\overline{BA}$

این رابطه نشان می‌دهد، دایره‌ای که بر سه نقطهٔ A،M و O می‌گذرد، درنقطهٔ O بر OB مماس است. در نتیجه، مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای است که بر A بگذرد و در O بر Oy مماس شود.



۱۶۴. فرض می‌کنیم یک خط از P گذشته و OX و OY را در نقطه‌های A و B قطع کند. ما باید مکان M، وسط AB را به‌دست آوریم. Q قرینهٔ P نسبت به M را درنظر می‌گیریم؛ داریم PB = AQ . درنتیجه نقطهٔ Q متعلق به هذلولی به مجانبهای OX و OY و گذرنده بر P می‌باشد، و Q تمام این هذلولی (H) را وقتی که قاطع در تمام جهتها تغییر می‌نماید طی می‌کند و چون $PM = \frac{1}{2}PQ$ می‌باشد، بنابراین مکان M، هذلولی (H′)، مجانس (H) به مرکز P و با نسبت $\frac{1}{2}$ است. مرکزش O′ وسط OP، مجانبهایش خطهایی می‌باشند که از O′ موازی با OX و OY رسم می‌شوند و چون (H′) از P می‌گذرد، از O قرینهٔ P نسبت به O′ نیز خواهد گذشت.

۱۶۵. این مکان هندسی یک دایره است.

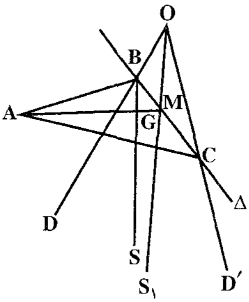
۱۶۶. فرض کنید M یک نقطه از قسمت مشترک دو دایرهٔ (C) و (C′) باشد. نشان دهید $2(MA\ ,\ MA') = \theta + \alpha + k\pi$. از آن‌جا نتیجه بگیرید مکان مطلوب، از دو دایره عمود برهم تشکیل شده که از A و A′ می‌گذرند. در حالت $\alpha + \theta = k\pi$ یکی از دایره‌ها تبدیل به خط AA′ ، و دیگری دایرهٔ به قطر AA′ است.

۱۶۷. بنا به فرض AM = A′M′ و چون AM_1 و MM′ همسنگ می‌باشند (شکل)، داریم:

$$M_1M' = AM \Rightarrow M_1M' = A'M'$$

دیده می‌شود که $A'M_1$ بر نیمساز زاویهٔ $A'M'M_1$ عمود است. یعنی با نیمساز خارجی زاویهٔ X′OX موازی است. مکان هندسی M_1 خط $A'X_1$ است، زیرا وقتی M′ خط X′ را طی کند، نقطهٔ M_1 تمام خط $A'X_1$ را خواهد پیمود. اگر به‌جای A نقطهٔ

غیرمشخصی را برای مبدأ بردار MM' اختیار کنیم، مکان انتهای بردار، خطی موازی با $A'X'_1$ خواهد بود. می‌توان از مکان M'_1 برای رسم MM' که موازی امتداد مفروض یا به‌طول معینی باشد، استفاده کرد.



۲ . ۳ . ۳ . ۴ . ۳ . دو خط متقاطع، یک راستا، یک نقطهٔ ثابت

۱۶۸. اگر O نقطهٔ برخورد دو خط (D) و (D′) باشد، و خط (Δ) به امتداد ثابت، (D) و (D′) را در B و C قطع کند، مثلثهای OBC همواره مجانس یکدیگر نسبت به O می‌باشند (شکل) و مکان نقطهٔ M وسط خط BC، خطی مانند (δ_1) است که از O می‌گذرد و چون $\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{AM}} = \frac{۲}{۳}$ می‌باشد، مکان نقطهٔ G، خطی است مانند (δ)، متناظر خط (δ_1) در تجانس $(A \text{ و } \frac{۲}{۳})$.

۲ . ۳ . ۴ . مسأله‌های ترکیبی

۱۷۰. ۱. آسان است. به حدود مکانهای هندسی که Sx کدام زاویه را می‌پیماید فکر کنید.

۲. نقطهٔ O روی کدام خط است؟

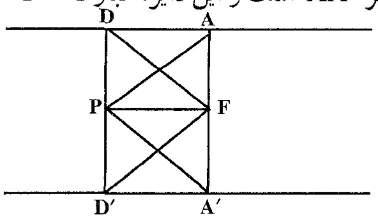
۳. اندازهٔ زاویهٔ AOB چیست؟ مکان هندسی را محدود کنید.

۴. ویژگی مثلث AOB .

۵. شکل را در حالت خاص درنظر بگیرید. نیمخطهای OI و OT چه وضعیتی خواهند داشت؟ زاویه‌های مثلثهای IOC و IST را مقایسه کنید. برای محاسبهٔ زاویهٔ ASx، ابتدا تانژانت نصف زاویه را در یک مثلث قائم تعیین کنید.

۱۷۱. دو مثلث FAD و FA′D′ متشابه‌اند.

پس $\frac{AD}{FA} = \frac{FA'}{A'D'}$ و مقدار ثابت $= AD \cdot A'D' = FA \cdot FA'$. چهارضلعیهای FPAD و FPA′D′ قابل محاط‌شدن در دایره می‌باشند و دو مثلث PAA′ و FDD′ دارای زاویه‌های برابرند. پس مکان P دایرهٔ به قطر AA′ است و این دایره عبارت است

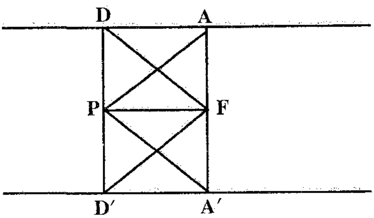


از دایرهٔ اصلی یک بیضی که یکی از کانونهایش F است و P تصویر کانون روی خط مماس DD′ است. پس DD′ بر بیضی مذکور مماس است.

۱۷۲. ۱. زاویه‌های POA و P′OA را باهم مقایسه کنید.
۲. به مکان هندسی نقطهٔ P′ توجه کنید.
۳. با رعایت و توجه به مکان هندسی نقطهٔ I، مسأله را حل کنید.
۴. ساده است.

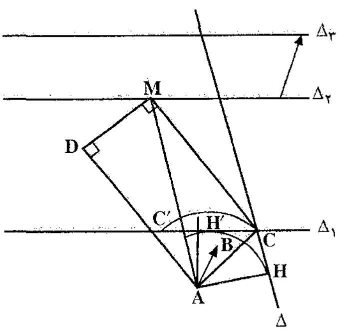
۴.۲. خط، پاره‌خط و نیمخطهای ثابت

۲.۴.۱. یک خط، یک پاره‌خط



۱۷۳. مثلث ABC در رأس A قائمه است. پس مکان هندسی نقطهٔ A دایره‌ای به قطر BC است.

۱۷۴. اگر C نقطهٔ دلخواهی از خط Δ و D نقطهٔ متناظر C باشد، به‌نحوی که داشته باشیم $\overrightarrow{AD} = ۲\overrightarrow{AC}$ و $AD \perp AC$ ، در این حالت داریم:



$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{AC} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$$

که با تغییر C بر Δ نقطهٔ M ، انتهای برآیند بردارهای $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ تغییر می‌نماید. ولی در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMC داریم:

$$\overline{AM}^۲ = \overline{AC}^۲ + \overline{CM}^۲ = ۵\overline{AC}^۲$$

و یا:

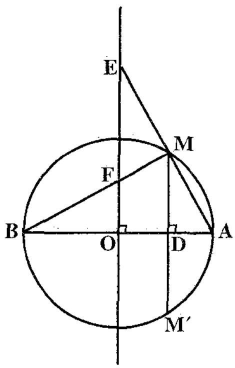
$$\frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AC}} = \sqrt{۵} \quad , \quad \tan M\hat{A}C = ۲$$

پس اگر C را حول نقطهٔ A به اندازهٔ زاویهٔ $\alpha = M\hat{A}C = \operatorname{Arc}\tan(۲)$ دوران دهیم، به‌صورت C′ واقع بر AM درمی‌آید که خواهیم داشت:

$$\frac{AM}{AC'} = \frac{AM}{AC} = \sqrt{۵}$$

و از این رابطه نتیجه می‌گیریم که M مجانس C′ است، به مرکز تجانس A و نسبت تجانس $k = \sqrt{۵}$ ؛ پس اگر Δ را چون نقطهٔ A به اندازهٔ $\alpha = M\hat{A}C = \operatorname{Arc}\tan(۲)$

دوران دهیم تا به‌صورت Δ_1 درآید، خط Δ_2 مجانس Δ_1 در تجانس $(A, k=\sqrt{5})$ مکان هندسی نقطهٔ M ، انتهای بردار $\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$ است که اگر Δ_2 را به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{AB}$ انتقال دهیم، مکان نقطهٔ N، انتهای بردار برآیند بردارهای $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AB}$ به‌دست می‌آید.



۱۷۵. DM را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ به‌قطر AB را در M' قطع کند. خواهیم داشت :

$$DM'^2 = DA.DB$$

بنابراین :

$$\frac{DM^2}{DA.DB} = \frac{DM^2}{DM'^2} = k$$

یا $\frac{DM}{DM'} = k$. پس مکان M یک بیضی است که دایرهٔ به قطر AB ، دایرهٔ اصلی آن است.

۲.۴.۲.مسأله‌های ترکیبی

۱۷۶. ۱. از کمان درخور و مکان هندسی وسط وترهایی از یک دایره که از یک نقطه می گذرند، استفاده کنید.

۲. از تقسیم پاره‌خطها به نسبت معین استفاده کنید.

۳. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه را به‌کار بندید.

۴. قضیهٔ تالس را به‌کار بندید.

۱۷۷. ۱و ۲. از کمان درخور زاویه استفاده کنید و از مکان هندسی وسط یک پاره‌خط که یک سرش ثابت است.

۳. وضع نقطهٔ تماس دایره با خط Δ را بررسی کنید.

۴. از دستور محاسبهٔ مساحت مثلث و مساحت قطعهٔ دایره استفاده کنید.

۱۷۸. ۱. از تشابه مثلثهای متشابه استفاده کنید. مکان هندسی نقطهٔ M ، خط راست موازی Ax است.

۲. نخست بررسی کنید که با چه شرطی مثلث MAC متساوی‌الساقین است. سه حالت می‌تواند داشته باشد، ۲ حالت فقط پذیرفتنی است. ضلعها را برحسب a و x به دست آورید.

۳. از عکس قضیهٔ فیثاغورس در مورد مثلث AMC استفاده کنید.
۴. باید مساحت یک ذوزنقهٔ محدب را با به‌کار بردن رابطه‌های متری محاسبه کنید. قبل از هر چیز مقدار x را تعیین کنید، برای این که، مثلث ADC متساوی‌الاضلاع باشد.

۱۷۹. ۱. حالت دوم تشابه مثلثها.
۲. از کمان درخور استفاده کنید و مکان هندسی وسط وترهای رسم شده از یک نقطه در یک دایره.
۳. ویژگی مثلث °۳۰ـ°۶۰ـ°۹۰، مساحت یک ذوزنقهٔ محدب.

۱۸۰. ۱. از ویژگی مماسهای رسم شده از یک نقطه بر یک دایره استفاده کنید.
۲ و ۳. مثلث AMB را امتحان کنید.
۴. پاره‌خطهای DA و BC را به کمک مثلثها باهم مقایسه کنید.

۱۸۱. ۱. از مکان هندسی وسط پاره‌خطهایی که دو سرشان روی دو خط ثابت است، استفاده کنید.
۲. از کمان درخور زاویهٔ °۹۰ استفاده کنید.
۳. زاویهٔ BIz_1 را حساب کنید.

۲.۵.زاویه‌های ثابت

۲.۵.۱.زاویه در حالت کلی

۲.۵.۱.۱.یک زاویه

۱۸۲. روی Ox طولی برابر l مانند OC جدا می‌کنیم. MC ضلع Oy را در D قطع می‌کند.

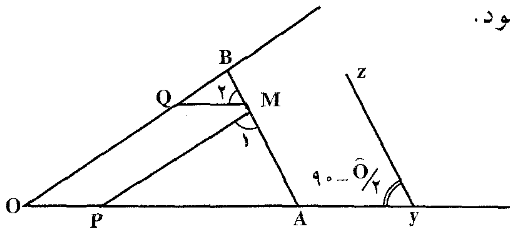
به‌فرض $MA + MB = l$، گفتیم: $OA + AC = l$

پس: $MA = AC \quad , \quad \hat{C} = A\hat{M}C$

ولی: $A\hat{M}C = \hat{D}$

می‌باشد، پس $\hat{C} = \hat{D}$ و $OD = l$. بنابراین M روی قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین OCD قرار دارد که طول هر ساق آن l است، و بعکس هر نقطه مانند M' روی CD اختیار کنیم، $M'A'$ و $M'B'$ را به موازات Ox و Oy رسم می‌کنیم. خواهیم داشت $M'A' + M'B' = l$ پس CD مکان نقطهٔ M است.

۱۸۳. گزینهٔ (ب) درست است. از روی Oy زاویه $O\hat{y}z$ را به اندازهٔ $۹۰-\frac{\hat{O}}{۲}$ جدا می‌کنیم و از M موازی آن رسم می‌کنیم تا مثلث OAB پدید آید. این مثلث متساوی‌الساقین در رأس O می‌شود.



$$\Delta OAB : \begin{cases} MP \parallel OB \Rightarrow \hat{M}_۱ = \hat{B} = \hat{A} \Rightarrow MP = AP \\ MQ \parallel OA \Rightarrow \hat{M}_۲ = \hat{A} = \hat{B} \Rightarrow MQ = BQ \end{cases}$$

محیط متوازی‌الاضلاع $= MQ + QO + MP + OP$

$= BQ + OQ + QP + AP + OP + OB + OA =$ مقدار ثابت

در نتیجه مکان هندسی مطلوب یک پاره‌خط است.

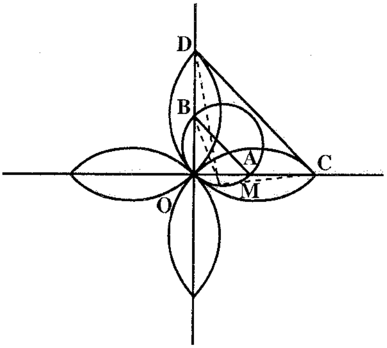
۱۸۴. این مکان هندسی یک خط راست است.

۱۸۵. مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو خط متقاطع برابر مقدار معلوم $k=\frac{m}{n}$ است، دو خط راست‌گذرنده بر نقطهٔ تقاطع آنهاست که دستگاه حاصل از چهار خط یک دستگاه توافقی می‌سازند. حال در مورد یک زاویه تنها یک نیمخط جواب مسأله است.

۱۸۶. مرکزهای دو دایرهٔ دلخواه را D و E ، و نقطهٔ برخورد عمودهای بر AB و AC در نقطه‌های B و C را O می‌نامیم. از M به B و C وصل می‌کنیم. چهارضلعی ABOC محاطی است ؛ زیرا دو زاویهٔ B و C از آن قائمه‌اند. پس $\hat{O} = ۱۸۰^\circ - \hat{A}$ است. از طرفی مثلثهای MBD و MCE متساوی‌الساقین هستند، پس داریم :

$$B\hat{M}C = ۱۸۰^\circ - (\frac{\hat{D}+\hat{E}}{۲}) = ۱۸۰^\circ - (\frac{\hat{A}}{۲}) = ۱۸۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲} = \text{مقدار ثابت}$$

بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M ، کمان درخور زاویهٔ $۱۸۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$ روبه‌رو به پاره‌خط BC است.



۱۸۷. ۱. اگر $l = OA + OB$ مقدار داده شده باشد، $OC = OD = l$ را روی دو خط جدا کرده، نقطهٔ M را به دو نقطهٔ C و D وصل می‌کنیم. داریم:

$$AM = OB = AC$$

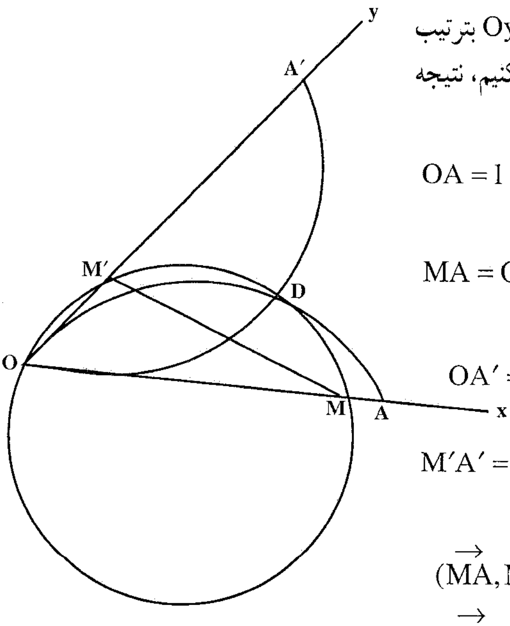
و

$$OA = MB = BO$$

از آن‌جا مثلثهای MAC و MBD متساوی‌الساقین می‌باشند اما زاویه‌های MAC و MBD که هریک مکمل یکی از دو زاویهٔ مساوی OAM و OBM هستند، باهم برابرند.

از آن‌جا $O\hat{C}M = O\hat{D}M$. در نتیجه چهارنقطهٔ O ، M ،C و D همدایره‌اند. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M نیمدایرهٔ به قطر CD است.

۲. اگر زاویهٔ COD قائمه نباشد، مکان هندسی، کمان درخور زاویهٔ COD روبه‌رو به پاره‌خط DC است. مکان هندسی کامل از چهار کمان تشکیل می‌شود.



۱۸۸. اگر $x\hat{O}y = \alpha$ باشد و روی Ox و Oy بترتیب طولهای $OA = OA' = l$ را جدا کنیم، نتیجه می‌شود:

$$OA = l = OM + OM' = OM + MA$$

پس:

$$MA = OM'$$

به همین‌ترتیب:

$$OA' = OM' + M'A' = OM' + OM$$

پس:

$$M'A' = OM$$

از طرف دیگر:

$$(\overrightarrow{MA}, \overrightarrow{M'O}) = (\overrightarrow{MO}, \overrightarrow{M'A'}) = \pi - \alpha$$

بنابراین از $\overrightarrow{MA}$ به $\overrightarrow{M'O}$ و از $\overrightarrow{MO}$ به $\overrightarrow{M'A'}$ با دورانی به اندازهٔ $\pi - \alpha$ می‌توان رسید. مرکز این دوران، نقطهٔ D، فصل مشترک کمانهای درخور زاویهٔ $\pi - \alpha$ است که روی OA و ′OA رسم شوند. این

نقطه همواره ثابت است و دایرهٔ محیطی مثلث OMM' همواره از D می‌گذرد. مکان هندسی مرکز این دایره، عمودمنصف پاره‌خط OD است.

۱۸۹. پاره‌خط راست XY که در آن، X و Y ، جای رأس C در حالتهایی است که یکی از نقطه‌های A یا B ، روی رأس زاویه باشد.

۱۹۰. در چهارضلعی MDNA داریم: $N\hat{A}M + N\hat{A}B = 180^\circ$ و

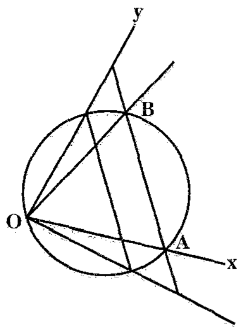
$$M\hat{D}N + N\hat{A}M = 180^\circ \Rightarrow N\hat{A}B = C\hat{D}N$$

به‌طریق مشابه، $N\hat{B}A = D\hat{C}N$ و بنابه فرض $AB = CD$ ، پس داریم:

$\Delta CND \cong \Delta ANB \Rightarrow NK = NK$ (ارتفاع دو مثلث)

پس نقطهٔ N روی نیمساز M واقع است.

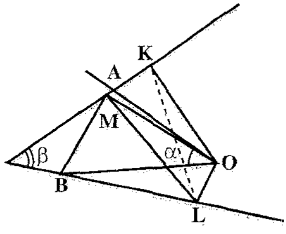
۱۹۱. این مکان هندسی دو خط راست است.



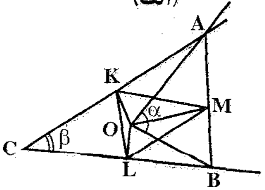
۲.۱.۵.۲. یک زاویه، یک نقطه

۱۹۲. فرض کنید C معرف رأس زاویهٔ مفروض و β اندازهٔ آن باشد. عمودهای OK و OL را از O بر ضلعهای زاویه فرود می‌آوریم (شکل (الف)). بر چهارضلعی OKAM می‌توان دایره‌ای محیط کرد. درنتیجه داریم، $K\hat{M}O = K\hat{A}O$. به همین ترتیب، $O\hat{M}L = O\hat{B}L$.

به این ترتیب، $K\hat{M}L = K\hat{A}O + O\hat{B}L = \alpha + \beta$ ، یعنی M روی کمانی از دایره که از K و L می‌گذرد و حاوی زاویهٔ $\alpha + \beta$ است، قرار دارد. تمامی نقطه‌های این کمان، به مجموعه‌ای از نقطه‌ها متعلقند. اگر $\beta \leq \alpha$ ، آن وقت هیچ نقطهٔ دیگری در مجموعهٔ نقطه‌ها نیست. و اگر $\beta > \alpha$ ، آن وقت به مجموعهٔ نقطه‌ها، نقطه‌هایی مانند M واقع در طرف دیگر خط راست KL ، که به ازای آنها $K\hat{M}L = \alpha - \beta$ ، اضافه می‌شود (شکل (ب)). در این



(الف)

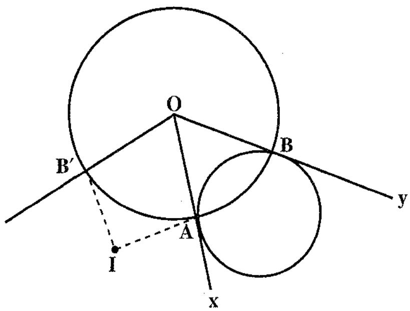


(ب)

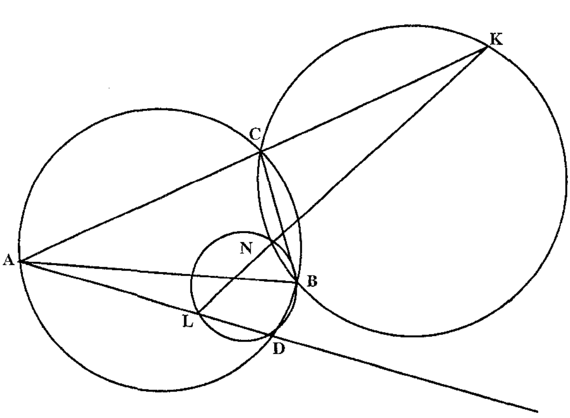
حالت، مجموعهٔ نقطه‌ها، یک جفت کمان است که نقطه‌های انتهایشان را وضعیتهای حدی زاویهٔ AOB تعیین می‌کند. اگر نیمخطهای زاویهٔ ثابت β و زاویهٔ متحرک α امتداد داده شوند، و به‌جای زاویه‌ها، زوجهایی از خطهای راست درنظر گرفته شوند، آن وقت مجموعهٔ نقطه‌های مطلوب، یک جفت دایره (شامل هردو کمانهای ذکر شده در بالا) است.

۱۹۳. چون M وسط OA است، پس BP و BM نسبت به BO و BA مزدوج یکدیگرند. اگر این چهار خط را با PM قطع کنیم، می‌بینیم که M و P نسبت به C و D مزدوج همدیگرند. پس C روی قطبی نقطهٔ M نسبت به زاویهٔ xOy واقع است. این قطبی مکان مطلوب است.

۱۹۴. $OB = OA$ ، پس نقطهٔ B بر دایرهٔ (C) به مرکز O و به شعاع OA واقع است. بعکس اگر B' نقطه‌ای دلخواه از دایرهٔ (C) باشد و خط OB' و مماسهای $B'I$ و AI را در B' و A بر دایره رسم کنیم، چون $IA = IB'$ و از طرفی IA و IB' بر Ox و OB' در B' عمودند، دایرهٔ به مرکز I و به شعاع IA، با خط Ox در نقطهٔ A و با خط OB' در B' مماس خواهد بود. پس B' نقطهٔ تماس یک خط، مانند OB' و یک دایرهٔ مماس بر Ox در نقطهٔ A می‌باشد. پس دایرهٔ (C) مکان هندسی خواسته شده است.



۱۹۵. حالتی را درنظر بگیرید که نقطه B در درون زاویهٔ مفروض واقع است. پیش از هرچیز، یادآوری می‌کنیم که تمامی مثلثهای BCDی ممکن متشابه‌اند. (شکل) ؛ زیرا $B\hat{C}D = B\hat{A}D$ و $B\hat{D}C = B\hat{A}C$. بنابراین اگر N وسط CD باشد، آن وقت زاویه‌های BNC و BND ثابتند. دایره‌ای برمثلث BNC محیط می‌کنیم و فرض می‌کنیم K دومین نقطهٔ برخورد این دایره با AC باشد. چون $B\hat{K}A = ۱۸۰^\circ - B\hat{N}C$ ، K نقطه‌ای ثابت است. به همین ترتیب، L ، دومین نقطهٔ برخورد دایرهٔ محیطی مثلث BND و خط



راست AD هم، ثابت است. داریم :

$L\hat{N}K = L\hat{N}B + B\hat{N}K = ۱۸۰^\circ - B\hat{D}A + B\hat{C}K = ۱۸۰^\circ$ ، یعنی N روی خط راست LK قرار دارد. مجموعهٔ نقطه‌هایی مانند N ، پاره‌خط LK است و مکان هندسی مرکز ثقل مثلث ACD ، پاره‌خطی به موازات LK است که AK را به نسبت ۱ :۲ تقسیم می‌کند (و به کمک تبدیل تجانسی به مرکز A و نسبت تجانس برابر با $\frac{۲}{۳}$ ، به‌دست می‌آید).

۱۹۶. فرض می‌کنیم I محل برخورد DE با نیمساز خارجی زاویهٔ O باشد. این دو نیمساز نسبت به دو ضلع زاویهٔ مزدوج توافقی یکدیگرند و C و I نسبت به D و E مزدوج می‌باشند.
تصویر D و E بر OC یعنی G و F نسبت به O و C مزدوج همدیگرند، پس داریم :

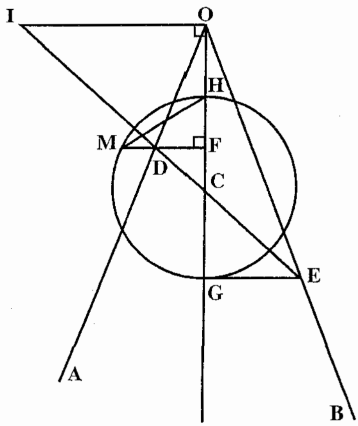
$$HC^۲ = \overline{HF} \times \overline{HG}$$

اگر M محل برخورد دایره به قطر HG با DF باشد، داریم :

$$HM^۲ = \overline{HF} \times \overline{HG}$$

از آن‌جا : $HM^۲ = HC^۲ \Rightarrow HM = HC$

از آن‌جا مکان هندسی M روی دایرهٔ به قطر OC است.



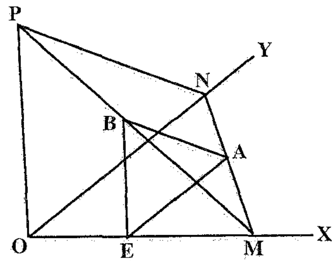
۲.۵.۱.۳. یک زاویه، دو نقطه

۱۹۷. از نقطهٔ M خط Δ را به موازات Ox رسم می‌کنیم تا Oy را در C قطع کند. چون O وسط MO و PQ است، پس M Δ مزدوج توافقی نسبت به MP و MQ است و Oy آنها را قطع کرده و در نتیجه O و C مزدوج هم نسبت به A و B هستند ؛ چون A ، B و O ثابت است. در نتیجه C ثابت است، پس مکان M خط Δ است.

۱۹۸. AE را به موازات ON رسم می‌کنیم (شکل). داریم :

$$\frac{ME}{MO}=\frac{MA}{MN}=\frac{MB}{MP}$$

رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که EB با OP موازی است و چهارضلعی OPNM همواره مجانس چهارضلعی EBAM است. پس مکان P خط موازی EB و رسم شده از O است.



۲.۵.۱.۴. یک زاویه، پاره‌خط

۱۹۹. این مکان هندسی، عبارت است از پاره‌خطی راست.

۲۰۰. از نقطهٔ M به سه نقطهٔ ثابت A ، B و C وصل می‌کنیم. زاویهٔ AMC مقدار ثابتی دارد ؛ زیرا داریم :

$$A\hat{M}C = A\hat{M}B + B\hat{M}C = A\hat{D}B + O\hat{E}D = ۱۸۰^\circ - D\hat{O}E = \text{مقدار ثابت}$$

پس مکان هندسی نقطهٔ M ، کمان درخور زاویهٔ $\hat{C}-۱۸۰^\circ$ روبه‌رو به پاره‌خط AC است.

۲.۵.۱.۵. یک زاویه، دایره

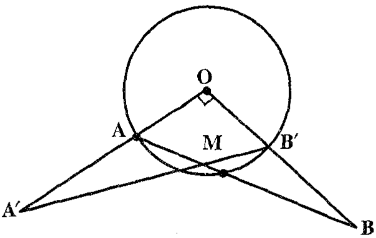
۲۰۱. فرض کنید A معرف رأس زاویه باشد. می‌توان ثابت کرد که مرکز دایرهٔ محیطی مثلث MON بر نقطهٔ برخورد نیمساز AO و دایرهٔ محیطی مثلث AMN ، منطبق است. فرض کنید α اندازهٔ این زاویه، r شعاع دایره و K وسط AO باشد. روی نیمساز AO ، نقطه‌های L و P را طوری اختیار می‌کنیم که :

$$|AL|=\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{۲}(۱-\sin\frac{\alpha}{۲})} \quad , \quad |AP|=\frac{r}{\sin\frac{\alpha}{۲}(۱+\sin\frac{\alpha}{۲})}$$

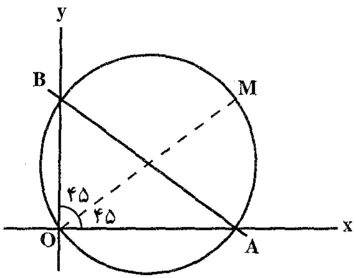
مکان هندسی مطلوب، عبارت است از پاره‌خط KL (K به این مجموعه متعلق نیست و L متعلق است) و نیمخط با مبدأ P و واقع بر نیمساز زاویه.

۲.۵.۲. زاویهٔ قائمه

۱.۲.۵.۲. یک زاویهٔ قائمه



۲۰۲. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB ، OM میانهٔ نظیر وتر است. پس $OM = \frac{AB}{۲} = \frac{a}{۲}$ ، مقدار ثابتی است. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M ، بخشی از دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\frac{a}{۲}$ است.

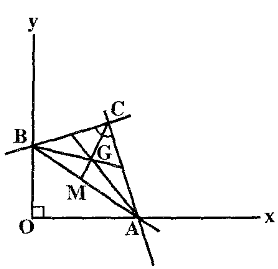


۲۰۳. اگر فرض کنیم که M ، وسط $\overset{\frown}{AB}$ باشد، چون $\hat{O} = ۹۰°$ ، پس همواره دایرهٔ به قطر AB از نقطهٔ O می‌گذرد. یعنی همواره داریم که :

$\overset{\frown}{AMB} = ۱۸۰°$

پس اگر از O به M وصل کنیم، OM نیمساز زاویهٔ $A\hat{O}B$ است، بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M ، نیمساز زاویهٔ $x\hat{O}y$ می‌باشد.

۲.۲.۵.۲. یک زاویهٔ قائمه، یک نقطه



۲۰۴. خط AB قطر دایرهٔ OACB است ؛ پس نقطهٔ وسط AB ، یعنی M ، روی d عمودمنصف وتر OC (که پاره‌خط ثابتی است) قرار دارد. پس مکان هندسی M خط d است و مکان هندسی G ، مرکز ثقل مثلث ABC ، خط متناظر با خط d ، در تجانس (C،۲:۳) است.

۳.۲.۵.۲. مسأله‌های ترکیبی

۲۰۵. ۱، ۲ و ۳.از ویژگی چهارضلعی محاطی و مستطیل استفاده کنید.

راهنمایی و حل مسأله‌های بخش ۳. مثلث

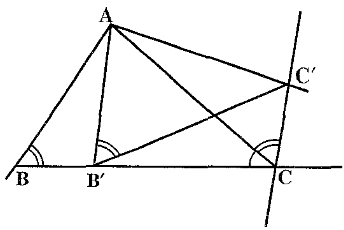
۱.۳. مثلث در حالت کلی

۱.۱.۳. نقطه، خط، زاویه

۲۰۶. ۱. اگر OH خط رسم شده از نقطهٔ A به موازات BC را در نقطهٔ K قطع کند، نقطهٔ K ثابت، مکان هندسی دایره‌ای به قطر HK است.

۲. از رابطه‌های مربوط به اندازهٔ ضلع مقابل به زاویهٔ قائمه و حاده استفاده کنید.

۲۰۸. این مکانهای هندسی سه خط راست است.

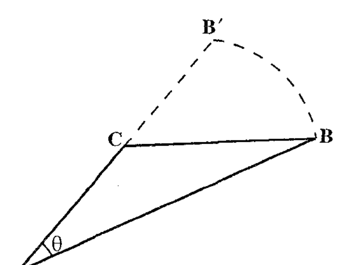


۲۰۹. **راه اول.** فرض کنید A (شکل) رأس ثابت باشد و ABC موضعی از مثلث متغیر باشد که قاعدهٔ BC از مثلث روی خط مفروض P قرار می‌گیرد. AB′C′ موضع دلخواه دیگری از مثلث متغیر را نشان می‌دهد. پاره‌خط AB′ از نقطه‌های C و C′ با زاویه‌های مساوی دیده می‌شود. پس چهارضلعی AB′CC′ یک چهارضلعی محاط در دایره است و $A\hat{C}C' = A\hat{B'}C'$.

پس :
$$B\hat{C}C' = B\hat{C}A + A\hat{C}C' = B\hat{C}A + A\hat{B'}C'$$

دو زاویهٔ آخری معلومند. پس خط CC′ با خط مفروض P زاویهٔ ثابتی می‌سازد. بعلاوه C نقطهٔ ثابتی است. پس CC′ خط ثابتی است، و قضیه اثبات شده است.

راه دوم. بنابه فرض زاویهٔ (AB , AC) با زاویهٔ مفروض θ برابر و نسبت $\frac{AB}{AC}$ مساوی نسبت مفروض k می‌باشد. پس از دوران به اندازهٔ θ حول نقطهٔ A ، نقطه B تبدیل به B′ روی AC می‌شود و B′ خط (p′) را که مستقیماً با (p) برابر است طی می‌کند. از طرف دیگر چون $\frac{AC}{AB'} = \frac{AC}{AB} = \frac{۱}{k}$ ،

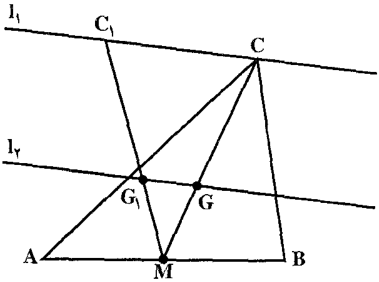


مسیر C خطی است مانند (β) مجانس (p') نسبت به A و با نسبت $\frac{1}{k}$ ، پس (β) مستقیماً با (p) متشابه است.

۲۱۱. این مکان هندسی یک خط راست است.

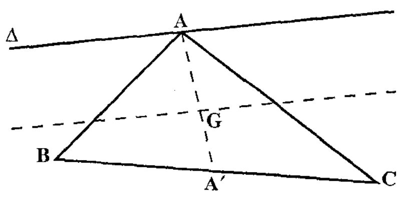
۲۱۲. این مکان هندسی یک خط راست است.

۲۱۳. گزینهٔ (د) درست است.



خط مستقیمی را که رأس C روی آن حرکت می‌کند، l_1 می‌نامیم، اگر C_1 وضع دلخواهی از رأس C روی خط l_1 باشد، G و G_1 مرکزهای جرم (محل برخورد میانه‌های) مثلثهای CAB و C_1AB دارای ویژگی $CG = \frac{2}{3}CM$ و $C_1G_1 = \frac{2}{3}C_1M$ هستند. بنابراین خط GG_1 موازی CC_1 است. از این‌رو اگر C روی خط l_1 حرکت کند، G روی خط l_2 که موازی l_1 است، حرکت می‌کند.

۲۱۴. وسط ضلع BC را A' می‌نامیم. بنابه ویژگی میانه‌های مثلث، اگر G مرکز ثقل مثلث باشد، $\frac{A'G}{A'A} = \frac{1}{3}$ است. چون نقطهٔ A' ثابت و نقطهٔ A خط Δ را می‌پیماید، پس مکان هندسی نقطهٔ G، خط راستی موازی Δ است.



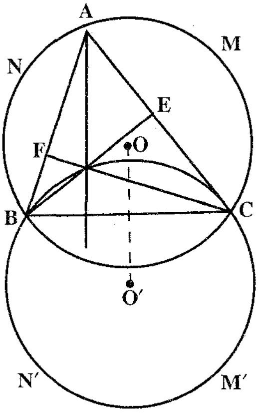
۲۱۵. گزینه‌های (الف، ب و د) درست است.

۲.۱.۳. یک نقطه، یک دایره

۲۱۶. این مکان هندسی یک دایره است (نقطهٔ لوموان هر مثلث، محل برخورد شبه میانه‌های آن است).

۲۱۷. این مکان هندسی یک دایره است.

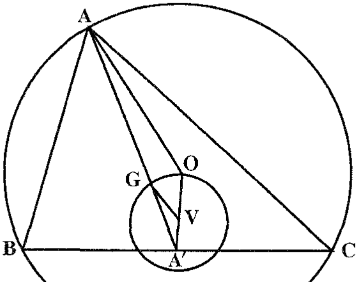
۳.۱.۳. یک ضلع، یک زاویه یا رابطهٔ بین زاویه‌ها



۲۱۸. اگر a و $\hat{A}$ اجزای معلوم باشد، دایرهٔ محیطی مثلث، به مرکز O مشخص می‌شود. اگر ارتفاع AD را رسم کنیم تا دایره را در K قطع کند و محل برخورد ارتفاعها را H بنامیم، برای هر حالت A ، ضلع BC عمودمنصف HK است، در نتیجه دو مثلث BHC و BKC همنهشتند. ولی دایرهٔ O، دایرهٔ محیطی مثلث BKC نیز هست ؛ در نتیجه دایرهٔ محیطی BHC دایره‌ای است مساوی با آن که مرکزش O′ ، قرینهٔ O نسبت به BC است.

وقتی A کمان $\overset{\frown}{CAB}$ را می‌پیماید، H و K بترتیب دو کمان مساوی از O′ و O را می‌پیمایند. قطرهای BOM و CON را رسم می‌کنیم : موقعی که A از M تا N را می‌پیماید، H از B تا C را می‌پیماید، و اگر A کمانهای $\overset{\frown}{NB}$ و $\overset{\frown}{MC}$ را بپیماید، H کمانهای قرینهٔ آنها را نسبت به BC یعنی BN′ و CM′ را می‌پیماید، پس مکان کامل H ، کمان N′BCM′ است.

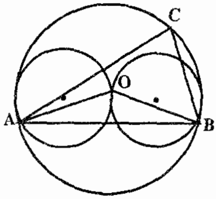
تبصره. می‌توانیم مسأله بالا را به این صورت نیز بیان کنیم که دایرهٔ محیطی مثلثی که از دو رأس یک مثلث و محل برخورد ارتفاعهای آن تشکیل می‌شود، با دایرهٔ محیطی آن مثلث برابر است.



۲۱۹. اگر زاویهٔ $\hat{A}$ و ضلع a از مثلث ABC معلوم باشد، مسأله را حل شده فرض می‌کنیم، دایرهٔ محیطی مثلث ABC معلوم است (کمان درخور زاویهٔ A روبه‌رو به ضلع BC)، اگر $AA' = m_a$ و OA و OA′ را رسم کنیم، و از G خطی موازی AO رسم نماییم، تا OA′ را در V قطع کند، نظر به تشابه دو مثلث A′VG و A′OA داریم :

$$A'V : A'O = A'G : A'A = ۱ : ۳ \quad \text{و یا} \quad A'V = \frac{۱}{۳}A'O$$

در نتیجه V نقطه‌ای ثابت روی عمودی است که از O بر BC فرود آید. همچنین $VG = \frac{۱}{۳}R$ در نتیجه مکان هندسی نقطهٔ G دایره‌ای است به مرکز V و شعاع $\frac{۱}{۳}R$.

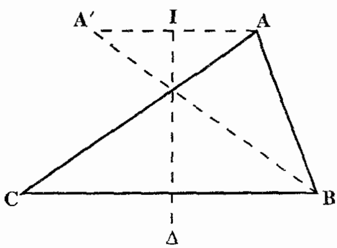


۲۲۰. مرکز کمان درخور زاویهٔ C روبه‌رو به پاره‌خط AB را O می‌نامیم. مکان هندسی وسطهای دو ضلع AC و BC، دو دایرهٔ مساوی به قطرهای OA و OB می‌باشند. بخشی از این دو دایره که بین وتر AB و کمانی که $\overset{\frown}{ACB}$ را کامل می‌کند، به مکان هندسی وسط ضلعهای مثلثی تعلق دارد، که زاویهٔ رأسش $180^\circ - \hat{C}$ است.

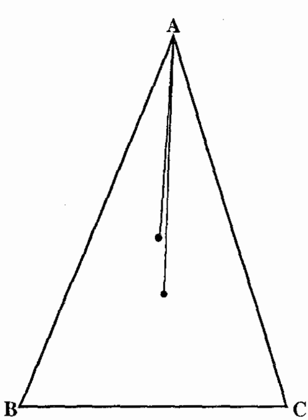
۲۲۱. دو موقعیت C و C′ از رأس C را می‌سازیم. داریم :

$$\frac{BE}{EC} = \frac{BE'}{E'C'} = \frac{m}{n} \qquad و \qquad A\hat{M}'E' = A\hat{M}E$$

در نتیجه دو مثلث EMC و E′M′C′ که دو زاویهٔ متناظر برابر دارند، متشابه‌اند. از آن‌جا دو مثلث BME و BM′E′ که دو ضلع متناظر متناسب و زاویهٔ برابر بین این ضلعها، یعنی $\hat{E} = \hat{E}'$ را دارند، متشابه می‌باشند. همچنین $A\hat{M}'B = A\hat{M}B$ است، بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M ، کمان درخور زاویهٔ $A\hat{M}B$ روبه‌رو به پاره‌خط AB ، برای یکی از وضعیتهای دلخواه نقطهٔ C است.



۲۲۲. چون A′ قرینهٔ A نسبت به عمودمنصف CB باشد و چون زاویه‌های AA′B و ABA′ هردو برابر زاویهٔ C مثلث می‌باشند، پس $AA' = AB$ و $\frac{AI}{AB} = \frac{1}{2}$ است. مکان هندسی جواب مسأله، مقطع مخروطی به کانون A و خط هادی Δ عمودمنصف ضلع BC می‌باشد.



۲۲۳.

$$\tan\frac{\hat{B}}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}}$$

$$\tan\frac{\hat{C}}{2} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}}$$

از ضرب دوطرف رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود که :

$$\tan\frac{\hat{B}}{2}.\tan\frac{\hat{C}}{2} = \frac{p-a}{p} = k$$

یا :

$$\frac{b+c-a}{b+c+a} = k$$

یا :

$$k(b+c)+a = (b+c)-a$$

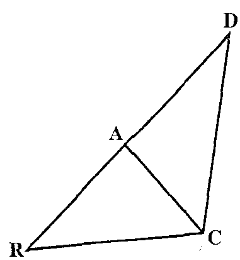
یا :
$$b+c=AB+AC=\frac{a(1+k)}{1-k}$$

یعنی مکان هندسی رأس A یک بیضی است به کانونهای B و C و مقدار ثابت $\frac{a(1+k)}{1-k}$.

۳ . ۱ . ۴. یک ضلع، رابطهٔ متری

۳ . ۱ . ۴ . ۱ . یک ضلع، رابطهٔ بین ضلعها

۲۲۴. ضلع BA را به اندازهٔ AD = AC امتداد می‌دهیم. BD = l است، پس مکان هندسی نقطهٔ D دایره‌ای به مرکز B و به شعاع l است که نقطهٔ ثابت C ، درون این دایره است. چون AD = AC است، دایرهٔ به مرکز A و به شعاع AD یا AC، بر دایرهٔ (B,l) مماس است و از نقطهٔ ثابت C می‌گذرد، پس مکان هندسی رأس A یک بیضی است به کانونهای B و C و عدد ثابت l .



۲۲۵. این مکان هندسی یک هذلولی است که دو نقطهٔ B و C کانونهای آن می‌باشند.

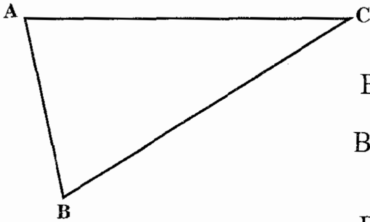
۳ . ۱ . ۴ . ۲ .یک ضلع، رابطهٔ بین ضلعها و زاویه‌ها

۲۲۶. راه اول. فرض می‌کنیم BB' و CC' فاصله‌های B و C از نیمساز خارجی زاویهٔ A باشند، داریم :

$$BB'=c\cos\frac{A}{2}\quad,\quad CC'=b\cos\frac{A}{2}$$

و از آن‌جا :
$$BB'\times CC'=bc\cos^2\frac{A}{2}$$

بنابراین فاصله‌های رأسهای B و C از نیمساز خارجی رأس A ، مقداری است ثابت و مکان هندسی رأس A یک بیضی است به کانونهای B و C، که طول محور کوچکش، جذر $bc\cos^2\frac{A}{2}$ می‌باشد.



راه دوم. در مثلث ABC می‌توان نوشت :

$$BC^{۲} = AB^{۲} + AC^{۲} - ۲AB.BC\cos\hat{A}$$

$$BC^{۲} = (AB + AD)^{۲} - ۲AB.AC(۱ + \cos\hat{A})$$

$$BC^{۲} = (AB + AC)^{۲} - ۴AB.AC\cos^{۲}\frac{\hat{A}}{۲}$$

بنابه فرض $AB \times AC\cos^{۲}\frac{\hat{A}}{۲} = k$ ، پس :

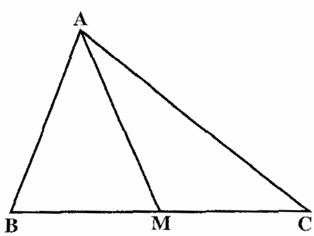
$$(AB + AC)^{۲} = BC^{۲} + ۴k$$

$$\Rightarrow AB \times AC = \sqrt{BC^{۲} + ۴k} = k'$$

پس مجموع فاصله‌های نقطهٔ A از دو نقطهٔ ثابت B و C مقداری است ثابت و برابر با k. در نتیجه مکان هندسی نقطهٔ A یک بیضی است که B و C کانونهای آن می‌باشند.

۳. ۱. ۴. ۳. یک ضلع، رابطهٔ بین ضلعها و اجزای دیگر

۲۲۷. بنا بر قضیهٔ میانه‌ها داریم :



$$AB^{۲} + AC^{۲} = ۲AM^{۲} - \frac{BC^{۲}}{۲}$$

و چون $۲AB.AC = ۲AM.BC$ ، پس از جمع و تفریق این دو رابطه نتیجه می‌شود :

$$(AB + AC)^{۲} = (\frac{BC}{\sqrt{۲}} + AM\sqrt{۲})^{۲}$$

و

$$(AC - AB)^{۲} = (\frac{BC}{\sqrt{۲}} - AM\sqrt{۲})^{۲}$$

بنابراین :

$$AB + AC = (\frac{BC}{\sqrt{۲}} + AM\sqrt{۲})$$

و

$$AC - AB = \pm(\frac{BC}{\sqrt{۲}} - AM\sqrt{۲})$$

پس $AC = \frac{BC}{\sqrt{۲}}$ یا $AB = \frac{BC}{\sqrt{۲}}$.

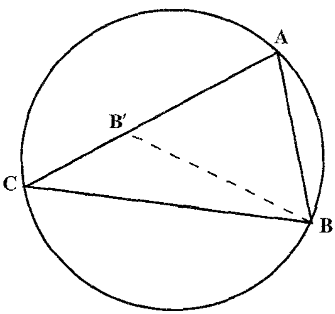
پس A روی دو دایره به مرکزهای B و C و به شعاع $\frac{BC}{\sqrt{2}}$ واقع است. هر نقطه از این‌دو دایره یک نقطه از مکان است؛ زیرا اگر در رابطهٔ $AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2}$ ، به‌جای AB ، به‌طور مثال مقدار $\frac{BC}{\sqrt{2}}$ را قرار دهیم، حاصل می‌شود:

$$AC = AM\sqrt{2}$$

بنابراین:

$$AB \times AC = AM \times BC$$

پس مکان تشکیل می‌شود از دو دایرهٔ کامل به مرکزهای B و C و به شعاع $\frac{BC}{\sqrt{2}}$.



۲۲۸. چون رابطهٔ بین ضلعهای AB و AC و میانهٔ AD را بنویسیم، خواهیم داشت:

$$AB^2 + AC^2 = 2AD^2 + \frac{BC^2}{2}$$

و بنابه فرض مسأله،

$$AB.AC = AD^2 + h^2$$

پس با حذف AD خواهیم داشت:

$$(AB - AC)^2 = \frac{a^2}{2} - 2h^2$$

و یا (به فرض $h < \frac{a}{2}$)

$$AB - AC = \sqrt{\frac{a^2}{2} - 2h^2}$$

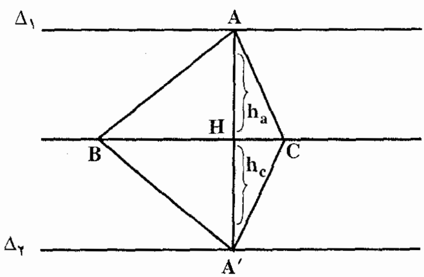
پس مکان A هذلولی به‌طول محور حقیقی برابر $\sqrt{\frac{a^2}{2} - 2h^2}$ می‌باشد. بدیهی است که اگر $\frac{a^2}{2} - 2h^2$ منفی باشد، مسأله جواب ندارد و مکانی هم وجود ندارد.

رسم مثلثی با معلومات a و $\hat{A}$ و رابطهٔ $AB.AC = AD^2 + h^2$ در حقیقت بدل می‌شود به رسم مثلثی با معلومات a و $\hat{A}$ و $b - c = d$ (اختلاف دو ضلع دیگر) و مسأله در واقع بدل می‌شود به تقاطع یک دایره (دایرهٔ محیطی مثلث چون a و A معلوم است) با یک مقطع مخروطی که کانونهای آن برروی دایره است.

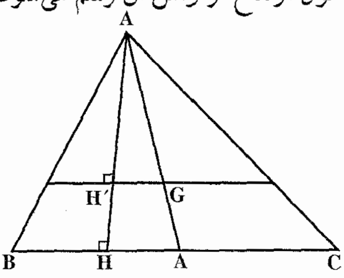
چون کمان درخور زاویهٔ A را برروی وتر a رسم کنیم، دایرهٔ محیطی مثلث رسم می‌شود. پس اگر طول $AB' = AB$ را از AC جدا کنیم، زاویهٔ $C\hat{B}'B$ معلوم است، زیرا زاویه خارجی مثلث متساوی‌الساقین ABB' است. پس مساوی است با $\frac{\pi}{2}+\frac{\hat{a}}{2}$. پس مکان B' دایره‌ای است معلوم (کمان درخور $\frac{\pi+\hat{a}}{2}$ برروی BC). ولی CB' که اختلاف ضلعهای b و c مثلث می‌باشد معلوم است. پس نقطهٔ B' را می‌توان تعیین کرد و تعیین رأس A دیگر اشکالی ندارد (توجه کنید که مثلث $CB'B$ در دست است. زیرا ضلع $BC = a$ معلوم است و همچنین ضلع $CB' = b - c$ زاویهٔ B' نیز برابر $\frac{\pi+\hat{a}}{2}$ معلوم است رسم مثلث اشکالی ندارد).

۳.۱.۴.۴. یک ضلع، اندازهٔ ارتفاع

۲۲۹. مکان هندسی رأس A، دو خط موازی ضلع BC در دو طرف آن، و به فاصلهٔ ثابت، برابر اندازهٔ ارتفاع رأس A است.



۲۳۰. با توجه به ویژگی مرکز ثقل مثلث، این مکان هندسی خط راستی موازی قاعدهٔ داده شده است که به فاصلهٔ $\frac{2}{3}$ طول ارتفاع از رأس آن رسم می‌شود.

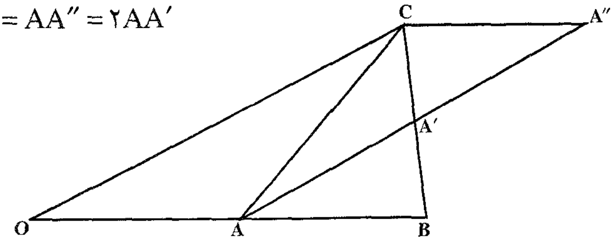


به عبارت دیگر اگر BC ضلع ثابت و AH ارتفاع نظیر این ضلع باشد، نقطهٔ H' را روی AH چنان اختیار می‌کنیم که $AH' = 2H'H$ باشد. آن‌گاه از H' خطی موازی BC رسم می‌کنیم. این خط مکان هندسی خواسته شده است و از نقطهٔ G، مرکز ثقل مثلثها نیز می‌گذرد.

۵.۴.۱.۳. یک ضلع، اندازهٔ میانه یا رابطهٔ بین میانه‌ها

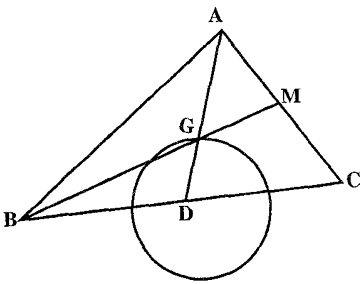
۲۳۱. پاره‌خط AA' را از طرف A' به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا A'' به دست آید. چهارضلعی $ACA''B$ که قطرهایش منصف یکدیگرند، متوازی‌الاضلاع است و AB مساوی و موازی CA'' می‌باشد. اگر از C موازی AA'' رسم کنیم تا امتداد BA را در O قطع کند، چهارضلعی $OCA''A$ که ضلعهایش دو به دو موازی‌اند نیز متوازی‌الاضلاع است و OA موازی و مساوی CA''، پس $OA = AB$ است و :

$$OC = AA'' = ۲AA'$$



و چون O نقطه‌ای ثابت و OC نیز طولی ثابت است، پس C روی دایره‌ای به مرکز O و شعاع دو برابر میانه می‌باشد (O به فاصلهٔ AB از A و در امتداد BA قرار دارد).

۲۳۲. چون ؛ مقدار ثابت $= DG = \frac{AD}{۳}$ ، پس مکان G دایره‌ای به مرکز D و به شعاع $\frac{AD}{۳}$ است.



بعکس چون همهٔ نقطه‌های این دایره از D، وسط BC و به فاصلهٔ ثابت $\frac{AD}{۳}$ واقعند، هر نقطه از دایرهٔ داده شده، محل برخورد سه میانهٔ مثلثی خواهد بود که طول میانهٔ آن مقدار ثابت AD و دو رأس آن B و C باشند.

۲۳۳. گزینهٔ (د) درست است.

شاید ساده‌ترین راه حل این مسأله، هندسهٔ تحلیلی باشد.

فرض کنید $A(۰,۰)$ ، $B(۲,۰)$ و $C(x,y)$ سه رأس مثلث باشد، آن‌گاه مختصات نقطهٔ وسط BC عبارت است از : $(\frac{x+۲}{۲},\frac{y}{۲})$ ، بنابراین با استفاده از فرمول فاصلهٔ دو نقطه داریم :

$$\sqrt{(\frac{x+۲}{۲})^۲+(\frac{y}{۲})^۲}=\frac{۳}{۲}\ ,\ (\frac{x+۲}{۲})^۲+(\frac{y}{۲})^۲=\frac{۹}{۴}$$

یا

$$(x+۲)^۲+y^۲=۹$$

که معادلهٔ دایره‌ای به شعاع ۳ سانتیمتر است که مرکز آن در امتداد BA و به فاصلهٔ ۴

سانتیمتر از B است.

یا :

اگر a، b و c اندازه‌های ضلعهای مثلث باشند، با توجه به نابرابریهای بین ضلعهای مثلث، برای $a-b$ دو مقدار حدی $a-b=۰$ و $a-b=۲$ وجود دارد. از فرمول میانه و به‌ازای $m_a=\frac{۳}{۲}$ خواهیم داشت :

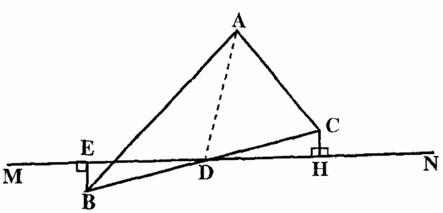
$$۲b^۲+۸=۹+a^۲ \Rightarrow ۲b^۲-a^۲=۱$$

که به ازای مقدارهای حدی $a-b$، بترتیب داریم :

$(a=۱\ ,\ b=۱)$ یا $(a=۷\ ,\ b=۵)$

بنابراین، ماکسیمم فاصلهٔ بین وضعیتهای نهایی c برابر ۶ سانتیمتر است. این حقایق که به‌طور کامل جمع‌آوری شوند، به همان نتیجهٔ فوق منجر خواهد شد.

۳.۱.۴.۶. یک ضلع، نیمساز یا اجزای مربوط به نیمساز



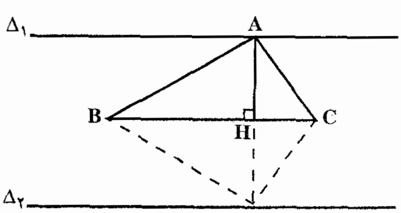
۲۳۵. خطهای BE و CH را عمود بر MN رسم می‌کنیم (E و H پای عمودها هستند). داریم :

$$\frac{CH}{BE}=\frac{DC}{DB}\ ,\ \frac{CA}{BA}=\frac{DC}{DB}\ ,\ \frac{CA}{CH}=\frac{BA}{BE}$$

در نتیجه، مکان هندسی نقطهٔ C یک مقطع مخروطی است که از نقطهٔ B می‌گذرد، یک کانون آن نقطهٔ A و یک خط هادی آن خط MN است.

۲۳۷. این مکان هندسی یک دایره است که از نقطهٔ D می‌گذرد.

۳.۱.۴.۷. یک ضلع، اندازهٔ مساحت

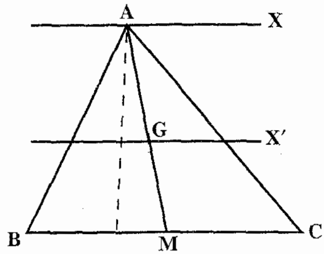


۲۳۸. مثلث ABC را یکی از مثلثهای مورد نظر فرض می‌کنیم که در آن، ضلع $BC=a$ معلوم و S مساحت آن نیز مشخص است. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. داریم :

$$S=\frac{۱}{۲}a.AH \Rightarrow AH=\frac{۲S}{a}=\text{مقدار ثابت}$$

بنابراین مکان هندسی رأس A، دو خط موازی BC و به فاصلهٔ $\frac{۲S}{a}$ از آن است.

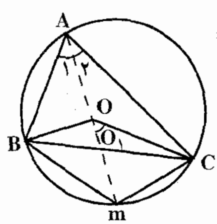
۲۳۹. مکان هندسی رأس A، خط ثابت AX، موازی BC و به فاصلهٔ h از آن است، و چون $\frac{MG}{MA}=\frac{۱}{۳}$ است، پس G مجانس A نسبت به مرکز تجانس M است و مکان هندسی آن مجانس مکان هندسی رأس A است.



۸.۴.۱.۳. یک ضلع، دایرهٔ محیطی

۲۴۰. از O به B و C وصل می‌کنیم. چون $\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$، پس $\overset{\frown}{MB}=\overset{\frown}{MC}$. در نتیجه MB = MC . مثلث OMC متساوی‌الساقین است، چون :

$$O\hat{C}M=\frac{\hat{C}}{۲}+\frac{\hat{A}}{۲}$$



از طرفی $\hat{O}_۱$ زاویهٔ خارجی مثلث AOC است، پس :

$$\hat{O}_۱=\frac{\hat{A}}{۲}+\frac{\hat{C}}{۲}$$

پس مثلث OMC متساوی‌الساقین است و در آن : OM = OC .

در نتیجه :

$$OM=MC=MB$$

اگر نقطهٔ A تغییر مکان دهد، همواره نیمساز آن از M می‌گذرد، بنابراین همیشه رابطهٔ :

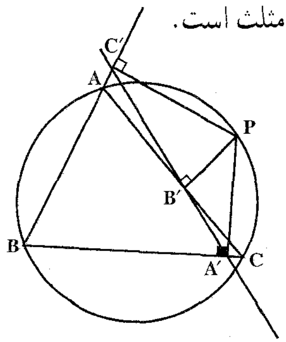
$$MB=MO=MC$$

صدق می‌کند، پس مکان هندسی نقطه‌های O، دایره‌ای است به مرکز M و به شعاع معلوم MB و یا MC.

۳.۱.۵. مثلث ثابت، ...

۳.۱.۵.۱. تنها یک مثلث ثابت

۲۴۱. این مکان هندسی دایرهٔ محیطی مثلث است ؛ زیرا بنا بعکس قضیهٔ سمسون، اگر تصویرهای یک نقطه روی ضلعها یا امتداد ضلعهای یک مثلث، روی یک خط راست قرار داشته باشند، آن نقطه روی دایرهٔ محیطی آن مثلث است.



۲۴۳. AS را شبه میانهٔ مثلث می‌نامیم. کافی است ثابت کنیم که SD پاد موازی با AB، مساوی است با SE که پاد موازی با AC است.

از نقطهٔ S پاد موازی MN را نسبت به BC رسم می‌کنیم. می‌دانیم که $SM = SN$ است. مثلثهای DSM و ESN متساوی‌الساقین هستند، زیرا زاویه‌های D و M با زاویهٔ B برابرند و ... از آن‌جا $SD = SM$ و $SE = SN$ است. همچنین پاد موازیهای SD و SE با هم برابرند.

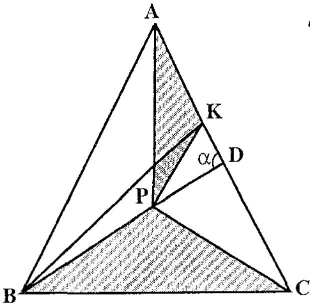
همین ویژگی برای تمام نقطه‌های شبه میانه برقرار است ؛ زیرا مثلث GFH که متشابه با مثلث DSE است، متساوی‌الساقین است. اما مثلث IFJ نیز متساوی‌الساقین می‌باشد ؛ زیرا زاویه‌های I و J با زاویهٔ A برابرند. از آن‌جا $IG = JH$.

تبصره. شبه میانهٔ AD علاوه بر ویژگی بالا، مکان هندسی وسط پاد موازیهایی است که نسبت به ضلع BC رسم می‌شوند.

۲۴۴. $P_{K'}Q_{K'}$ پاد موازی با AB و AB پاد موازی با P_KQ_K است. پس $P_{K'}Q_{K'}$ موازی P_KQ_K است. مکان هندسی مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای CP_KQ_K ، ...

۳.۱.۵.۲. مثلث ، ارتفاع، خطهای عمود

۲۴۵. ثابت کنید که در نتیجهٔ تغییر مکان خط راست KL، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث KLB_1 یک خط راست را می‌پیماید.



۳.۵.۱.۳. مثلث، میانه، یا اجزای مربوط به میانه

۲۴۷. گزینهٔ (ج) درست است. زیرا :

$$S_{APK} = S_{APD} - S_{PKD} = \frac{۱}{۲} AD.PD\sin\alpha - \frac{۱}{۲} KD.PD\sin\alpha$$

$$= \frac{۱}{۲} PD\sin\alpha(AD - KD) = \frac{۱}{۲} PD.AK\sin\alpha$$

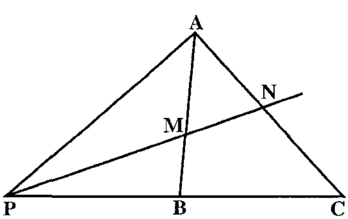
$$S_{BPD} = \frac{۱}{۲} BD.DC\sin\alpha = \frac{۱}{۲} BP.AD\sin\alpha$$

$$\frac{AK}{AD}.\frac{PD}{BP} = ۱ \quad \text{یا} \quad AK.PD = BD.AD, \ (S_{APK} = S_{BPC} \ \text{زیرا})$$

اما بنا به قضیهٔ منلائوس در مثلث BDK :

$$\frac{AK}{AD}.\frac{DP}{PB}.\frac{BM}{MK} = ۱$$

در نتیجه $BM = MK$ ، یعنی مکان هندسی مطلوب میان خط مثلث ABC، موازی با ضلع AC است (اگر نقطه‌های P و K روی خطهای راست AC و BD اختیار شوند، آن وقت مکان هندسی، خط راستی است به موازات AC که از وسط پاره‌خطهای AB و BC می‌گذرد).



پی‌نویس. قضیهٔ منلائوس در مثلث ABC : هرگاه خط راست xy ضلعهای AB، AC و BC از مثلث ABC را مطابق شکل، در نقطه‌های M، N و P قطع کند، داریم :

$$\frac{MA}{MB}.\frac{PB}{PC}.\frac{NC}{NA} = ۱$$

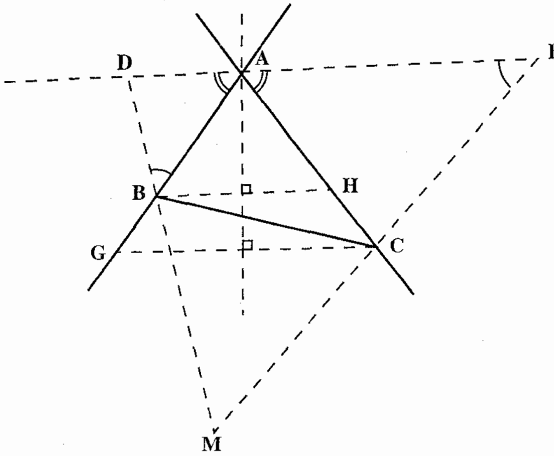
۲۴۸. مثلثهای $AC'P$ و $AB'Q$ متساوی‌الساقین هستند. بنابراین داریم :

$$\hat{M} = B\hat{A}C = B'\hat{A}'C'$$

پس نقطهٔ M به دایرهٔ محیطی مثلث $A'B'C'$ تعلق دارد ؛ یعنی این دایره، مکان هندسی نقطهٔ M است.

۴.۵.۱.۳. مثلث، نیمساز یا اجزای مربوط به نیمساز

۲۴۹. مکان هندسی نقطهٔ M



دایره‌ای است که بر دو نقطهٔ B و C می‌گذرد. این دایره از نقطه‌های H و G، قرینه‌های B و C، نسبت به نیمساز زاویهٔ درونی A می‌گذرد. رابطهٔ

$$AD.AE = AB.AC$$

را می‌توان چنین نوشت:

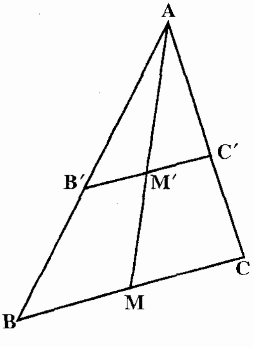
$$\frac{AD}{AB} = \frac{AC}{AE}$$

از طرفی $D\hat{A}B = C\hat{A}E$ است. پس دو مثلث ADB و ACE متشابه‌اند. از تشابه آنها نتیجه می‌شود که $D\hat{B}A = A\hat{E}C$. در نتیجه چهارضلعی ABME محاطی است. در این چهارضلعی زاویهٔ BMC مکمل زاویهٔ ثابت BAE، یعنی مساوی $B\hat{A}D$ می‌باشد. یعنی اندازهٔ زاویهٔ BMC مقدار ثابتی است؛ پس مکان هندسی نقطهٔ M، کمان درخور زاویهٔ BAD، روبه‌رو به پاره‌خط BC است.

۵.۵.۱.۳. مثلث، خطهای: موازی، پاد موازی

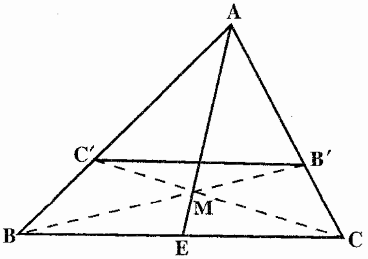
۲۵۰. اگر M وسط BC، و M' وسط $B'C'$ باشد که با BC موازی است، داریم:

$$\frac{B'M'}{M'C'} = \frac{BM}{MC} = ۱$$



یعنی خطهای CC' و BB' و MM' که روی دو خط متوازی، قطعه‌های متناسب جدا کرده‌اند، همرسند پس MM' از A می‌گذرد و M' روی میانهٔ AM است.

بعکس هر نقطهٔ اختیاری M' از میانهٔ AM را در نظر گرفته، موازی BC، خط $B'C'$ را رسم می‌کنیم. M' وسط $B'C'$ خواهد بود. بنابراین میانهٔ AM مکان هندسی خواسته شده است.

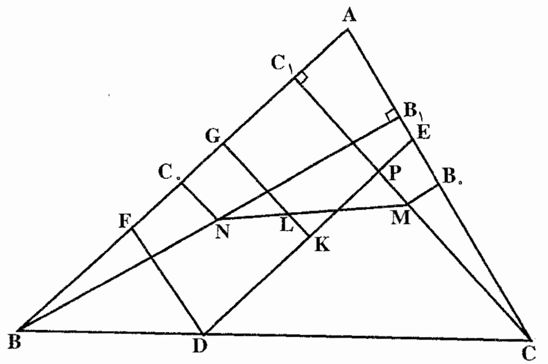


۲۵۱. می‌دانیم که در هر ذوزنقه، محل برخورد دو قطر، وسطهای دو قاعده، و محل برخورد دو ساق، روی یک خط راست قرار دارند. در این‌جا چون قاعدهٔ CC' و M، محل برخورد دو قطر، همواره متغیر است، پس مکان هندسی نقطهٔ M، خطی است که رأس A، محل برخورد دو ساق را به E وسط قاعدهٔ ثابت BC وصل می‌کند.

۲۵۲. مکان هندسی، خطی است موازی BC که از وسط AA' (میانه یا ارتفاع) رسم می‌شود.

۲۵۳. فرض کنید B_0 و C_0 وسط ضلعهای AC و AB، و BB_1 و CC_1 ارتفاع باشند، K وسط DE باشد (شکل) و C_0K و C_0N بر AB عمود باشند و B_0M بر AC عمود باشد. در این صورت،

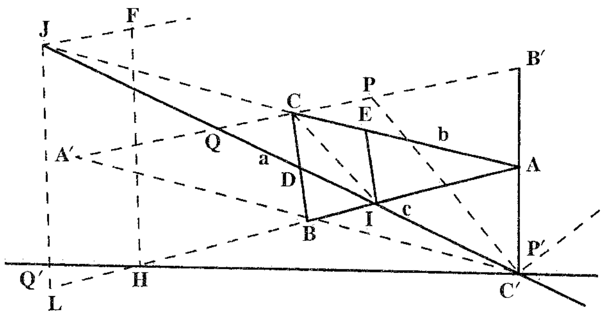
$$\frac{ML}{NM}=\frac{GC_1}{C_0C_1}=\frac{KP}{C_0C_1}=\frac{DC}{BC}$$



(تساوی آخری، از تشابه مثلثهای DCE و ABC نتیجه می‌شود، K، P و C_0، C_1 نقطه‌های متناظر در این مثلثها هستند). به همین روش عمودمنصف DF، MN را در نقطه‌ای مانند L_1 طوری قطع می‌کند که $\frac{NL_1}{NM}=\frac{BD}{BC}$، یعنی، نقطه‌های L و L_1 بر هم منطبقند.

مکان هندسی خواسته شده، خط راست MN است.

۲۵۴. مکان هندسی یک خط راست است. کافی است دو نقطه از آن را مشخص سازیم. اگر مثلث $A'B'C'$ را رسم کنیم (از A، B و C خطهایی بترتیب موازی BC، AC و AB رسم می‌کنیم) رأس C' به مکان هندسی خواسته شده تعلق خواهد داشت. نقطهٔ I پای نیمساز زاویهٔ درونی C نقطهٔ دیگری از مکان هندسی است زیرا اگر از این نقطه خطهای ID و IE را موازی ضلعهای b و a رسم کنیم $ID = IE$ است. بنابراین خط $C'I$ مکان هندسی خواسته شده است.



تبصره ۱. بسادگی می‌توان نشان داد که برای دیگر نقطه‌های این مکان، به عنوان مثال نقطه‌ای که روی ضلع AC است، باید پاره‌خط موازی HF را مساوی AC در نظر گرفت و ... نقطهٔ J رابطهٔ $JL = CA$ را می‌دهد.

۲. اگر نقطهٔ I پای نیمساز باشد، دیده می‌شود که مکان هندسی خواسته شدهٔ $C'IJ$ قاعدهٔ AB را به دو پاره‌خط BI و IA که مستقیماً متناسبند با ضلعهای مجاور a و b، تقسیم می‌کند.

۳. مکان هندسی $C'IQ$ پاد نیمساز زاویهٔ C' از مثلث $A'B'C'$ است. بدین معنی که خط Isotomique نیمساز CP است؛ زیرا $CP = CQ$ است. از آن‌جا داریم:

$$\frac{QA'}{QB'} = \frac{IB}{IA} = \frac{a}{b} = \frac{C'B'}{C'A'} = \frac{PB'}{PA'}$$

۴. مکان هندسی مورد نظر در این جا، همانند مکان هندسی متعلق به پاد نیمساز $C'Q$ از نیمساز خارجی $C'P'$ است.

۵. پاد نیمساز ویژگیهای جالبی دارد.

۲۵۵. از A و B دو انتهای ضلع AB، دو عمود بر ضلعهای AC و BC اخراج می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آنها را D می‌نامیم. خط CD قطر دایرهٔ محیطی مثلث ABC که از رأس C می‌گذرد، مکان هندسی مورد نظر است.

۲۵۶. مکان هندسی، خط راستی است که از رأس A می‌گذرد. برای اثبات، دو ارتفاع AE و BF را رسم می‌کنیم. نقطهٔ H محل برخورد این دو ارتفاع یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر است زیرا خط EF یکی از پادموازیهای ضلع AB است. بنابراین مکان هندسی خواسته شده، ارتفاع CH از مثلث ABC است.

۶.۵.۱.۳. مثلث، رابطهٔ متری

۲۵۷. نخست باری سنتر نقطه‌های B، C و A را با ضریبهای ۱، ۱ و ۱− به‌دست می‌آوریم. اگر A وسط پاره‌خط BC باشد، کافی است باری سنتر A' و A را به‌دست آوریم. این باری سنتر با ضریبهای ۲ و ۱− به‌دست می‌آید. داریم: $۲IA' - IA = ۰$ یعنی قرینهٔ A نسبت به A' است. اگر M نقطه‌ای از فضا باشد، رابطهٔ لایبنیتز را می‌نویسیم:

$$MB^۲ + MC^۲ - MA^۲ = (۱+۱-۱)IM^۲ + IB^۲ + IC^۲ - IA^۲$$

$$= IM^۲ + IB^۲ + IC^۲ - IA^۲$$

و

$$IA^۲ = ۴AA'^۲ = ۲(b^۲ + c^۲) - a^۲$$

چون:

$$IB^۲ + IC^۲ = c^۲ + b^۲$$

پس:

$$MB^۲ + MC^۲ - MA^۲ = IM^۲ + a^۲ - (b^۲ + c^۲)$$

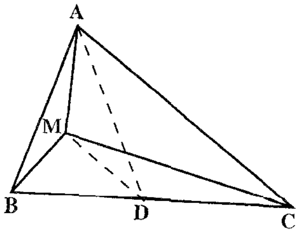
بنابراین

$$MB^۲ + MC^۲ = MA^۲$$

چنین می‌شود

$$IM^۲ = b^۲ + c^۲ - a^۲$$

اگر $b^۲ + c^۲ - a^۲ > ۰$ باشد، داریم: $\hat{A} < ۹۰^\circ$. مکان مطلوب، کرهٔ به مرکز I و به شعاع $\sqrt{b^۲ + c^۲ - a^۲}$ است. اگر $b^۲ + c^۲ - a^۲ = ۰$ باشد، داریم $\hat{A} = ۹۰^\circ$ مکان به یک نقطه تبدیل می‌شود. اگر $b^۲ + c^۲ - a^۲ < ۰$ باشد، داریم $\hat{A} > ۹۰^\circ$ است. مسأله جواب ندارد.



۲۵۸. در مثلث $\overset{\Delta}{MBC}$ میانهٔ MD را رسم می‌کنیم، داریم که:

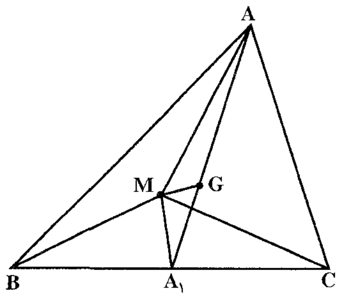
$$MB^۲ + MC^۲ = ۲MD^۲ + \frac{BC^۲}{۲} \Rightarrow ۲AM^۲ = ۲MD^۲ + \frac{BC^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow ۲(AM^۲ - BD^۲) = \frac{BC^۲}{۲} \Rightarrow AM^۲ - BD^۲ = \frac{BC^۲}{۴}$$

مکان هندسی نقطه‌هایی که تفاضل مربعهای فاصله‌شان از دو نقطهٔ ثابت، مقدار ثابتی است خطی است که از M بر AD عمود شود و فاصلهٔ پای این عمود از وسط پاره‌خط واصل بین دو نقطه عبارت است از: $\frac{k^2}{AD}$.

۲۵۹. مکان هندسی خواسته شده، عمودمنصف میانهٔ AI از مثلث ABC است.

۲۶۰. این مکان هندسی دایره‌ای است که به وسیلهٔ نقطهٔ G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC رسم می‌شود و شعاعش $m=\sqrt{\frac{k^2-(a'^2+b'^2+c'^2)}{3}}$ است، که در آن a'، b' و c'، $\frac{2}{3}$ طول میانه‌های مثلث ABC می‌باشند، زیرا اگر M نقطه‌ای از این مکان هندسی برای مثلث ABC باشد، داریم:



$MA^2+MB^2+MC^2=k^2$ اما اگر A' وسط ضلع BC باشد، $MB^2+MC^2=2MA'^2+\frac{BC^2}{2}$ در نتیجه داریم:

$$\Rightarrow MA^2+2MA'^2+\frac{a^2}{2}=k^2 \Rightarrow MA^2+2MA'^2=k^2-\frac{a^2}{2}$$

مرکز ثقل مثلث را G می‌نامیم. با توجه به ثابت بودن دو نقطهٔ A و A' و این که $AG=2GA'$ است، داریم:

$$MA^2+2MA'^2=3MG^2+\frac{2}{3}AA'^2=k^2-\frac{a^2}{2}$$

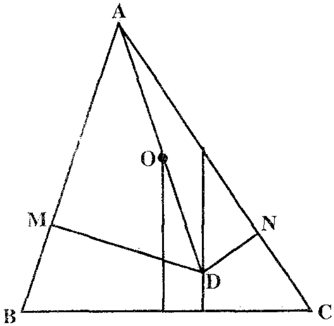
از آن‌جا:

$$MG^2=\frac{k^2-a^2-\frac{2}{3}AA'^2}{3} \Rightarrow MG=\text{مقدار ثابت}$$

پس مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز G و به شعاع MG است.

نکته. با فرض $GA=a'$ ، $GB=b'$ و $GC=c'$ داریم:

$\frac{a^2}{2}-\frac{2}{3}AA'^2=a'^2+b'^2+c'^2$ است.



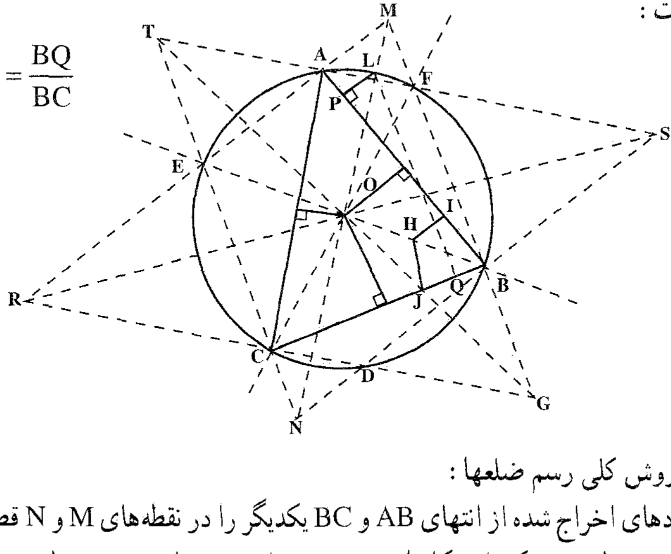
۲۶۱. نقطه‌های A، M، D و N روی دایرهٔ O به قطر AD قرار دارد. نظر به قوت دو نقطهٔ B و C نسبت به این دایره و با توجه به فرض مسأله، BO مساوی CO می‌باشد ؛ یعنی نقطهٔ O وسط AD روی عمودمنصف BC قرار دارد و در نتیجه، مکان هندسی D مجانس این عمودمنصف نسبت به مرکز تجانس A و با نسبت تجانس ۲ می‌باشد. برای رسم مکان، عمودمنصف پاره‌خط BC را رسم کرده، از نقطهٔ A خطی رسم می‌کنیم تا آن را در O قطع کند. AO را به اندازهٔ خودش ادامه می‌دهیم تا D به‌دست آید، اگر از D بر BC عمود کنیم، آن قسمت از این عمود که محصور بین BC و AC است، جواب مسأله است.

۲۶۲. ۱. قطرهای دایرهٔ محیطی که از رأسهای مثلث ABC می‌گذرند، عمودهای BC و CD را در انتهای قطر گذرنده از A و O قطع می‌کنند. از آن‌جا داریم :

$$\frac{BI}{BA}=\frac{BJ}{BC}$$

فاصله‌ها می‌توانند از رأسهای متوالی A، B و ... محاسبه شوند. به این ترتیب خواهیم داشت :

$$\frac{AP}{AB}=\frac{BQ}{BC}$$



۲. روش کلی رسم ضلعها :

عمودهای اخراج شده از انتهای AB و BC یکدیگر را در نقطه‌های M و N قطع می‌کنند. بنابراین خط MN یکی از مکانهای هندسی خواسته شده است. دو خط شبیه MN نیز وجود دارد. شش خط مکان هندسی از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گذرند.

۲۶۳. این مکان هندسی از چهار خط تشکیل می‌شود که نقطهٔ لوموان مثلث را به نقطه‌های I، I_a ، I_b و I_c مرکزهای دایره‌های محاطی مثلث وصل می‌کنند. به عنوان مثال، دایرهٔ به قطر IK را بررسی می‌کنیم.

نقطهٔ I مرکز دایره‌ای است که فاصلهٔ آن از ضلعهای مثلث برابر صفر است. نقطهٔ K مرکز دایره‌ای به شعاع صفر است که فاصله‌های آن تا ضلعها متناسب با آنهاست. اگر خطهای $B'C'$ ، $C'A'$ و $A'B'$ را موازی ضلعهای مثلث به فاصله‌های a' ، b' و c' و متناسب با این ضلعها رسم کنیم، دایرهٔ محاطی مثلث $A'B'C'$ ، یک دایرهٔ جواب مسأله است. زیرا رأسهای A' ، B' و C' بترتیب روی AK، BK و CK است و مرکز I' روی IK واقع است، از آن‌جا ...

تبصره. خطهای موازی رسم شده در خارج مثلث ABC، مکانهای هندسی واقع بر امتداد KI را مشخص می‌کنند و ...

۲۶۴. برای این که طولهای x، y و z ضلعهای یک مثلث باشد، لازم و کافی است که نابرابریهای $x<y+z$ ، $y<z+x$ و $z<x+y$ برقرار باشند. اما مجموعهٔ نقطه‌هایی که به ازای آنها، مثلاً، $x=y+z$ ، پاره‌خطی با نقطه‌های انتهایی واقع بر پای نیمسازهاست (در پای نیمساز، دو طول برابرند، پس سومی باید برابر با صفر باشد ؛ در نتیجه، تساوی برقرار است ؛ و از حل مسألهٔ قبل نتیجه می‌شود که این برابری برای کلیه نقطه‌های پاره‌خط درست است).

جواب. مکان هندسی مطلوب عبارت است از نقطه‌های واقع در درون مثلث با رأسهای پای نیمسازها.

۲۶۵. مکان M دایرهٔ (Γ) است که مرکزش نقطهٔ G باری سنتر نقطه‌های A، B و C با ضریبهای a، $-b$ و $-c$ بوده و شعاعش جذر عبارت زیر است :

$$\frac{-a.\overline{GA}^{2}+b.\overline{GB}^{2}+c.\overline{GC}^{2}}{a-b-c};$$

پس G بر نقطهٔ I' مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مثلث ABC در زاویهٔ A منطبق است. از طرف دیگر دایرهٔ (Γ) بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC عمود است. زیرا اگر O مرکز دایرهٔ (ABC) و R شعاع آن باشد، قوت O نسبت به (Γ) عبارت است از :

$$\frac{a.\overline{OA}^{2}-b.\overline{OB}^{2}-c.\overline{OC}^{2}}{a-b-c};\quad \text{یا } R^{2}$$

به این ترتیب دایرهٔ (Γ) به سهولت رسم می‌شود.

۲۶۶. فرض کنیم G باری سنتر نقطه‌های A، B و C با ضریبهای a^2، $-b^2$ و $-c^2$ باشد. مکان M دایرهٔ (Γ) است که مرکزش نقطهٔ G و شعاعش جذر عبارت زیر است :

$$\frac{-a^2.\overline{GA}^2+b^2.\overline{GB}^2+c^2.\overline{GC}^2}{a^2-b^2-c^2};$$

تبصره‌های زیر دایرهٔ (Γ) را به سهولت مشخص می‌کنند :

دایرهٔ (Γ) از رأس B می‌گذرد زیرا اگر M بر B منطبق شود $MA=c$ ، $MB=0$ و $MC=a$ و برای این مقادیر رابطهٔ :

$a^2.\overline{MA}^2-b^2.\overline{MB}^2-c^2.\overline{MC}^2=0$ برقرار است و همچنین دایرهٔ (Γ′) از C می‌گذرد. از طرف دیگر قوت نقطهٔ O مرکز دایرهٔ (O) به شعاع R، دایرهٔ محیطی مثلث ABC، نسبت به دایره (Γ) برابر است با :

$$\frac{a^2.\overline{OA}^2-b^2.\overline{OB}^2-c^2.\overline{OC}^2}{a^2-b^2-c^2}$$

و یا R^2 . پس دایرهٔ (Γ) بر دایرهٔ (O) عمود است. و از آن‌جا دایرهٔ (Γ) دایره‌ای است که بر OB، OC در نقطه‌های B و C مماس است.

اگر مثلث ABC در رأس A قائمه باشد، $a^2-b^2-c^2=0$ بوده و مکان هندسی نقطهٔ M خط BC است.

۲۶۷. نشان دهید که اگر M_1 و M_2 دو نقطهٔ متمایز و متعلق به مکان هندسی باشند، آن وقت هر نقطه مانند M از قطعهٔ خط راست M_1M_2 که در درون مثلث محصور است هم، به این مکان هندسی متعلق است. برای اثبات حکم اخیر، فاصله‌های M_1 تا ضلعهای مثلث را با x_1 ، y_1 و z_1 و فاصلهٔ M_2 را با x_2 ، y_2 و z_2 نشان می‌دهیم. در این صورت، می‌توانیم x، y و z، فاصله‌های M تا ضلعهای مثلث، را برحسب این مقدارها و فاصله‌های بین M_1 ، M_2 و M نشان دهیم. مثلاً اگر $|\overrightarrow{M_1M}|=k|\overrightarrow{M_1M_2}|$ و جهتهای $\overrightarrow{M_1M}$ و $\overrightarrow{M_1M_2}$ یکی باشد، آن وقت، $x=(1-k)x_1+kx_2$ و $y=(1-k)y_1+ky_2$ و $z=(1-k)z_1+kz_2$. به این ترتیب، نتیجه می‌شود که اگر برابری، به ازای سه نقطهٔ غیر همخط در درون مثلث، برقرار باشد، آن وقت برای کلیهٔ نقطه‌های مثلث هم برقرار است.

تبصره. حکم مسأله، برای چندضلعی محدب دلخواه هم درست است. بعلاوه، می‌توانیم همهٔ نقطه‌های در صفحه را در نظر بگیریم، اما، فاصله‌های از خط راست نقطه‌های واقع در طرفین خط، باید با علامتهای مخالف اختیار شوند.

۷.۵.۱.۳. مثلث، مساحت

۲۶۸. تنها یک چنین نقطه‌ای وجود دارد، یعنی مرکز ثقل (نقطهٔ میانه‌ای) مثلث. بسادگی دیده می‌شود که در این حالت، به ازای هر نقطهٔ N روی محیط مثلث، می‌توانیم یکی از رأسهای مثلث را به عنوان نقطهٔ P اختیار کنیم. نقطهٔ دیگری مانند M_1 اختیار می‌کنیم. فرض می‌کنیم این نقطه در درون مثلث AMD یا روی محیط آن واقع باشد، که در آن M مرکز ثقل مثلث ABC و D وسط AC است. از M_1، خط راستی به موازات BD رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد این خط و AD را نقطهٔ N می‌گیریم و نقطهٔ برخورد آن با AM را به M_2 نشان می‌دهیم. به وضوح، به ازای هر نقطهٔ P در درون مثلث یا بر محیط آن، مساحت مثلث M_1NP از مساحت یکی از مثلثهای AM_2N، M_2NC و M_2NB تجاوز نمی‌کند. همچنین روشن است که $S_{AM_2N} < S_{AMD} = \frac{1}{6}S$. بعلاوه، اگر $AD = DC = a$ و $ND = x$، آن وقت $\frac{S_{M_2NC}}{S_{MDC}} = \frac{M_2N}{MD} \cdot \frac{NC}{DC} = \frac{a^2 - x^2}{a^2} \leq 1$

بالاخره،

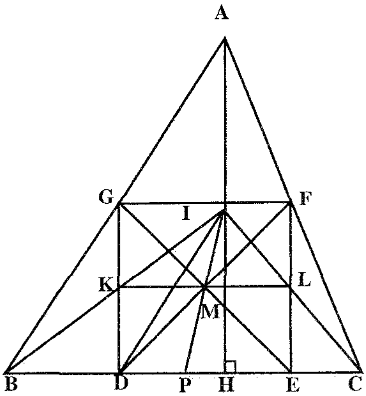
$$\frac{S_{M_2NB}}{S_{AMD}} = \frac{M_2N}{MD} \cdot \frac{ND}{AD} = \frac{(a-x)x}{a^2} < 1$$

۲۶۹. مکان هندسی خواسته شده، خط EMF موازی AB است، خط واصل بین وسطهای ضلعهای مثلث ABC ؛ زیرا مساحت مثلث MAB نصف مساحت مثلث ABC است.

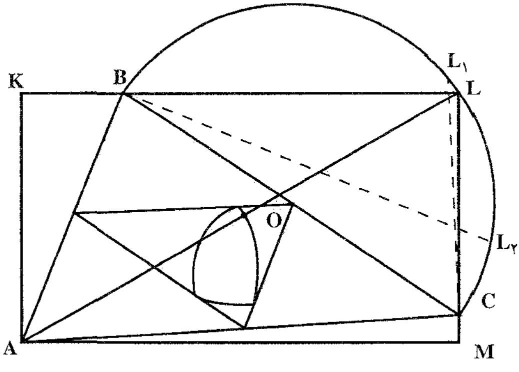
۸.۵.۱.۳. مثلث، چندضلعی

۲۷۰. اجتماع سه متوازی‌الاضلاع ساخته شده، متوازی‌الاضلاعی محیط بر مثلث مفروض که به چهار متوازی‌الاضلاع کوچکتر تفکیک شده است، تشکیل می‌دهد. بسادگی می‌توان نسبتهایی را که هر قطر، هریک از قطرهای مورد بحث دیگر را تقسیم می‌کند، برحسب قطعه‌های ضلعهای متوازی‌الاضلاع بزرگتر، پیدا کرد. اگر متوازی‌الاضلاعها، مستطیل باشند، آن وقت با انتقال دو تا از سه قطر در نظر گرفته شده، مثلثی قابل انطباق بر مثلث مفروض به‌دست می‌آوریم، و این بدان معنی است که زاویه‌های بین آنها، با زاویه‌های متناظر مثلث و یا با مکملهای آنها برابرند. مکان هندسی خواسته شده، دایره‌ای است که از وسط ضلعهای مثلث داده شده می‌گذرد.

۲۷۱. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم و EFGD را یک مستطیل جواب. اگر K و L وسطهای ضلعهای DG و EF و M وسط LK باشد، نقطهٔ M در عین حال نقطهٔ تلاقی قطرهای مستطیل نیز می‌باشد و باید این مکان را پیدا کنیم. خط BK ارتفاع AH را در وسط آن قطع می‌کند و داریم $\frac{IA}{IH}=\frac{KG}{KD}=1$ و نیز CL از I می‌گذرد و IM از P وسط BC زیرا داریم: $\frac{PB}{PC}=\frac{MK}{ML}$ پس نقطهٔ M بر قطعه خطی که وسط ارتفاع AH را به وسط ضلع BC وصل می‌کند واقع است. از طرفی چون G ضلع AB را بپیماید نقطهٔ K، قطعه خط BI و M قطعه خط PI را طی می‌کند؛ پس مکان هندسی نقطهٔ M، قطعه خط PI است.



۲۷۲. اگر ABC (شکل) مثلث مفروض باشد و یک رأس مستطیل محیطی AKLM، بر A منطبق باشد (B روی KL و C روی LM واقع است)، آن وقت L به نیمدایرهٔ به قطر BC متعلق است و زاویه‌های ABL و ACL منفرجه‌اند، یعنی، L دو وضعیت حداکثر دارد: L_1 و L_2، $L_1\hat{C}A = L_2\hat{B}A = 90^\circ$، در صورتی که، مرکز O، کمانی را متجانس با کمان L_1L_2، به مرکز تجانس A و نسبت $\frac{1}{2}$، می‌پیماید.



جواب. اگر مثلث حاده باشد، آن‌وقت مجموعهٔ نقطه‌های مطلوب، مثلثی خمیده است که کمانهایی از نیمدایره‌های رسم شده به قطر میانخطهای مثلث، روبه درون مثلث تشکیل شده با این میانخطها، تشکیل می‌دهند، اگر مثلث حاده نباشد، آن وقت مجموعهٔ نقطه‌های مطلوب، عبارت است از دو کمان از نیمدایره‌هایی که روی دو میانخط کوچکتر به یک نحو رسم شده‌اند.

۳.۱.۵.۹. مثلث، دایره

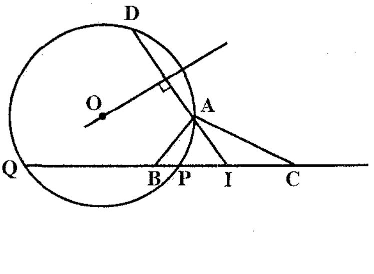
۲۷۴. مکان هندسی مرکز ارتفاعی مثلث متغیر $AB'C'$، دایره‌ای است که قطر آن، ضلع EF از مثلث پادک نسبت به رأس A است.

۳.۱.۵.۱۰. مثلث، سایر موارد

۲۷۵. توجه کنید که اگر خط راستی مانند l، واجد ویژگی لازم، از M بگذرد، آن وقت یا خط راستی مانند l_1 که از M و یک رأس مثلث می‌گذرد و یا خط راستی مانند l_2 که از M می‌گذرد و بر یک ضلع مثلث عمود است، و واجد همین ویژگی هستند، وجود دارد. در حقیقت، فرض کنید خط l، ضلعهای AB و CBی مثلث ABC را در نقطه‌های C_0 و A_0 قطع کند و فرض کنید نقطه‌ای مانند B_1، قرینهٔ B نسبت به l، در درون مثلث ABC موجود باشد. l را حول M دوران می‌دهیم، بنابراین B_1، با حرکت بر روی کمان دایرهٔ متناظر، تا این که نقطهٔ C_0 یا A_0 بر رأس A یا C منطبق شود، یا به ضلعهای BC یا AB نزدیک می‌شود (و خط l_1 را به‌دست می‌آوریم) و یا بر ضلع متناظر قرار می‌گیرد (و به خط l_2 می‌رسیم). اگر a معرف مجموعهٔ نقطه‌های مثلث ما، واقع در درون چهارضلعی محدود به نیمسازهای مرسوم به کوچکترین و بزرگترین ضلع مثلث و عمودهای مرسوم در وسطهایشان، باشد (اگر مثلث مفروض متساوی‌الساقین باشد، آن وقت a تهی است. در بقیهٔ حالتها a چهارضلعی یا پنج ضلعی است)، مکان هندسی خواسته شده عبارت است از همهٔ نقطه‌های مثلث بجز نقطه‌های درونی a.

۲۷۷. فرض می‌کنیم I وسط BC باشد، داریم:

$$\overline{IB}^2 = \overline{IP}.\overline{IQ} = C^{te}$$

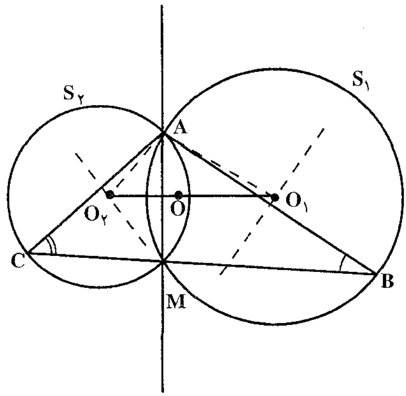


اگر میانهٔ AI دایره را در D قطع کند، داریم:

$$\overline{IA}.\overline{ID} = \overline{IP}.\overline{IQ} = \overline{IB}^2 = C^{te}$$

پس D نقطهٔ ثابتی است و مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث APQ، عمودمنصف پاره‌خط ثابت AD است.

۲۷۸. روشن است که $A\hat{B}M = A\hat{O_1}O_2$. (زیرا هریک از این دو زاویه با نصف کمان $\overset{\frown}{AM}$ از دایرهٔ S_1 مساوی‌اند؛ همچنین داریم $A\hat{C}M = A\hat{O_2}O_1$. بنابراین وقتی l حول A دوران کند، ΔAO_1O_2 طوری تغییر می‌کند که همیشه با خودش (و با مثلث ABC) متشابه باقی بماند. چون نقطهٔ A ثابت است و نقطه‌های O_1 و O_2 خطهایی را می‌پیمایند، عمودمنصفهای AB و AC را، نتیجه می‌گیریم که وسط O_1O_2 نیز یک خط را می‌پیماید.

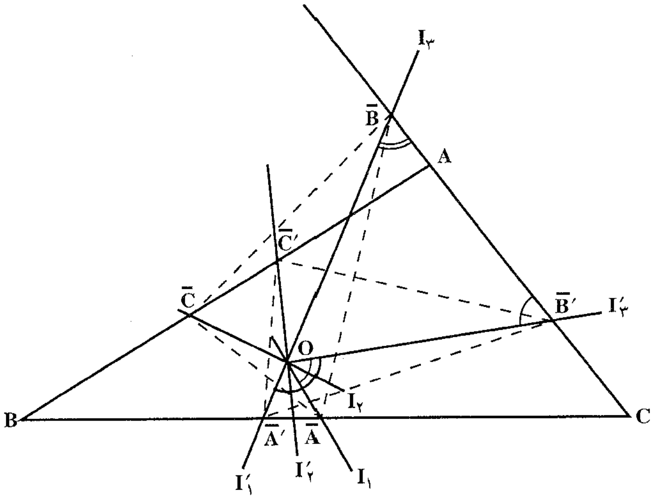


۲۷۹. پاسخ. روی ضلعهای مثلث و در درون مثلث، کمانهایی برابر °۱۲۰ می‌سازیم. دایره‌ای که از نقطه‌های وسط این کمانها بگذرد، مکان هندسی مطلوب است. محاسبه‌ها را با استفاده از عددهای مختلط انجام دهید. برای این منظور، باید با معادلهٔ مختلط خط راست و دایره آشنا بود.

۲۸۰. چون دو مثلث ABC و $AB'C'$ متشابه‌اند، پس $\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'}$ است. از طرفی $B\hat{A}B' = C\hat{A}C'$ است. بنابراین دو مثلث ABB' و ACC' متشابه‌اند. از تشابه این دو مثلث نتیجه می‌شود که $A\hat{B}B' = A\hat{C}C'$. پس زاویهٔ ACD که مکمل ACC' است، مکمل زاویهٔ ABB' یا ABD نیز هست. درنتیجه چهارضلعی ABDC محاطی است، یعنی مکان هندسی نقطهٔ D دایرهٔ محیطی مثلث ثابت ABC است.

۳ . ۱ . ۵ . ۱۱ . مسأله‌های ترکیبی

۲۸۱. فرض می‌کنیم $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ و $\overline{A'}\overline{B'}\overline{C'}$ دو وضعیت دلخواه از $\Delta\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ باشند (شکل). چون زاویهٔ بین $O\overline{A}$ و $O\overline{B}$ ($O\overline{A'}$ و $O\overline{B'}$) با زاویهٔ بین $\overline{A}C$ و $\overline{B}C$ مساوی است،



نتیجه می‌گیریم که :

$$\overline{A}\hat{O}\overline{B}+\overline{A}\hat{C}\overline{B}=\overline{A'}\hat{O}\overline{B'}+\overline{A'}\hat{C}\overline{B'}=180^\circ$$

$$O\hat{\overline{A}}C+O\hat{\overline{B}}C=O\hat{\overline{A'}}C+O\hat{\overline{B'}}C=180^\circ$$

و نیز این‌که $O\hat{\overline{A'}}\overline{A}=O\hat{\overline{B'}}\overline{B}$ و $O\hat{\overline{A}}\overline{A'}=O\hat{\overline{B}}\overline{B'}$

پس مثلثهای $O\overline{A}\overline{A'}$ و $O\overline{B}\overline{B'}$ متشابه‌اند ؛ به همین طریق می‌توان نشان داد که مثلث $O\overline{C}\overline{C'}$ نیز با آنها متشابه است. از اینجا نتیجه می‌شود که $\Delta\overline{A'}\overline{B'}\overline{C'}$ از مثلث $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ به توسط یک تجانس مارپیچی به مرکز O به‌دست می‌آید. پس وقتی خطهای l_1 ، l_2 و l_3 حول O دوران کنند، مثلث $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ تغییر می‌کند ولی با خودش متشابه باقی می‌ماند ؛ مرکز دوران هردو وضعیت از این مثلث همان نقطهٔ ثابت O است. از این‌جا و با توجه به این‌که رأسهای مثلث بر خط حرکت می‌کنند، نتیجه می‌شود که هریک از نقطه‌های آن یک خط را می‌پیماید و همین پاسخگوی سؤال مطرح شده در قسمت (ب) است. وضعیت نقطهٔ O نسبت به همهٔ مثلثهای $\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ یکی است ؛ بنابراین برای پیدا کردن وضعیت آن در این مثلثها، کافی است یکی از آنها مثلاً مثلث $\overline{A_0B_0C_0}$ راکه عمودهای وارد از O بر ضلعهای ABC پدید می‌آید درنظر بگیریم.

۱. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی ΔABC باشد، ضلعهای $\Delta \overline{A_0B_0C_0}$ با ضلعهای ΔABC موازی‌اند. (میانخطهای مثلث) و O محل برخورد ارتفاعهای $\Delta A_0B_0C_0$ است.

۲. اگر O مرکز دایرهٔ محاطی ΔABC باشد، آن‌گاه $O\overline{A_0} = O\overline{B_0} = O\overline{C_0}$، و O مرکز دایرهٔ محیطی $\overline{A_0B_0C_0}$ است.

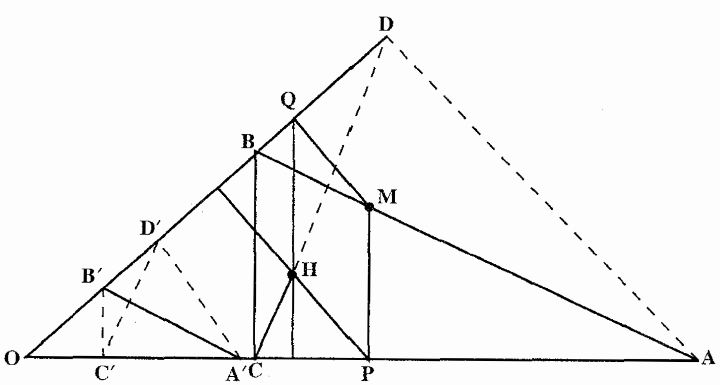
۳. اگر O نقطهٔ برخورد ارتفاعهای ΔABC باشد، آن‌گاه O نقطهٔ برخورد نیمسازهای مثلث $\overline{A_0B_0C_0}$ است ($O\hat{A}_0\overline{B}_0 = O\hat{C}\overline{B}_0$ زیرا این زاویه‌ها در دایرهٔ محیطی $O\overline{A_0CB_0}$ روبه‌رو به یک کمانند؛ به دلیل مشابه داریم: $O\hat{A}_0C_0 = O\hat{B}\overline{C}_0$

و با توجه به تشابه مثلثهای $AC\overline{C}_0$ و $AB\overline{B}_0$ داریم: $O\hat{C}\overline{B}_0 = O\hat{B}\overline{C}_0$)

۲۸۲. (a). O را به‌عنوان مبدأ درنظر می‌گیریم و بردارهای: $\overrightarrow{OA}$، $\overrightarrow{OB}$، ... را به A، B، H، M، P و Q نمایش می‌دهیم. در شکل $MP \| QH$ است، زیرا هر دو بر O عمودند. به همین ترتیب $MQ \| PH$ است و بنابراین MPHQ متوازی‌الاضلاع می‌باشد. درنتیجه: $H - P = Q - M$، یا به عبارت دیگر:

$H = P + Q - M$ (۱) است. اکنون اگر $AM/AB = t$ باشد، داریم:

$M = A + t(B - A) = (1 - t)A + tB$ (۲)



فرض می‌کنیم C پای ارتفاع از B به OA و D پای ارتفاع از A به OB باشد (شکل را ملاحظه کنید). در این‌صورت ادعا می‌کنیم که:

$P = (1 - t)A + tC$ (۳)

$Q = tB + (1 - t)D$ (۴)

برای اثبات (۳)، به‌طور آزمایشی می‌نویسیم :

$$P_1 = (1-t)A + tC$$

واضح است که P_1 واقع بر OA است. از (۲) داریم :

$$M - P_1 = t(B-C)$$

بنابراین پاره‌خط P_1M موازی CB، و درنتیجه بر OA عمود است، و این ثابت می‌کند $P_1 = P$ و ادعایمان ثابت می‌شود. اثبات (۴) به‌طور کامل مشابه این اثبات است. با قرار دادن (۲)، (۳) و (۴) در (۱)، به‌دست می‌آوریم :

$$H = (1-t)A + tC + tB + (1-t)D - (1-t)A - tB$$

یا :

$$H = tC + (1-t)D \quad (5)$$

چون t از ۰ تا ۱ تغییر کند، M از A تا B می‌رود، و H، بنا به (۵) از D تا C حرکت می‌کند، بنابراین مکان H قطعه خط DC است.

(b). می‌توانیم ΔOAB را به عنوان اجتماع پاره‌خطهای $A'B'$ موازی AB، آن‌گونه که در شکل مشخص شده، درنظر بگیریم. در یکی از چنین پاره‌خطهایی، فرض می‌کنیم C' پای ارتفاع از B' به OA، و D' پای ارتفاع از A' به OB باشد. بنابه قسمت (a)، چون M در امتداد $A'B'$ حرکت کند، H امتداد $D'C'$ را می‌پیماید، بنابراین هنگامی که M از میان تمام مثلث OAB عبور کند، H مثلث ODC را طی می‌کند.

۲۸۴. ۱. اگر I و J بترتیب وسطهای BC و AH باشد، در ذوزنقهٔ $BQNC$ خط $I\omega$ که وسط دو ضلع NQ و BC را به‌هم وصل کرده با NC موازی است به همین ترتیب ωI با MN. بنابراین $I\hat{\omega}J = 90^\circ$، پس ω روی دایره به قطر IJ واقع است. وقتی که Δ حول نقطهٔ A دوران کند، خط ωJ حول نقطهٔ J دوران خواهد کرد. ω روی دایرهٔ به قطر IJ حرکت خواهد کرد، مکان ω دایرهٔ به قطر IJ است. در چهارضلعی $AA'CN$ زاویه‌های A' و N قائمه‌اند پس این چهارضلعی محاطی است. داریم :

$$(A'N, A'A) = (CN, CA) (\mathrm{mod}\, \pi)$$

به همین ترتیب چهارضلعی $A'BQH$ محاطی است بنابراین :

$$(A'A, A'Q) = (BH, BQ) = (BH, CN) (\mathrm{mod}\, \pi)$$

داریم :

$$(A'N, A'B) + (A'A, A'Q) = (CN, CA) + (BH, CN)$$

$$= (BH, CA) (\mathrm{mod}\, \pi)$$

یعنی : $(A'N\ ,\ A'Q)=\frac{\pi}{۲}(\mod \pi)$

یعنی A' روی دایرهٔ به قطر NQ واقع است.

۲. چهارضلعی $AMBB'$ محاطی است $(\hat{M}=\hat{B'}=۹۰^\circ)$

بنابراین : $(B'M\ ,\ B'B)=(AM\ ,\ AB)(\mod \pi)$

به همین ترتیب چهارضلعی $CPB'H$ محاطی است $(\hat{B'}=\hat{P}=۹۰^\circ)$

بنابراین :

$$(B'P\ ,\ B'B)=(B'P\ ,\ B'H)=(CP\ ,\ CH)(\mod \pi)$$

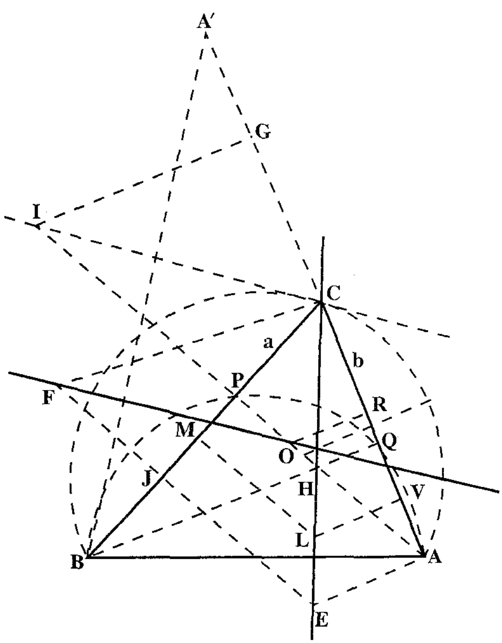
خطهای AM و CP برهم و AB و CH برهم عمودند، داریم :

$$(AM, AB)=(CP\ ,\ CH)(\mod \pi)$$

بنابراین : $(B'M\ ,\ B'B)=(B'P\ ,\ B'B)(\mod \pi)$

این رابطه نشان می‌دهد که نقطه‌های M، P و B' روی یک خط واقعند.

۲۸۵. ۱. نیمدایرهٔ به قطر AB رابطهٔ $a.CP=b.CQ$ را می‌دهد، زیرا عمودهای AP و BQ روی ارتفاع رأس C از مثلث، یکدیگر را قطع می‌کنند و چون رأس C نیز به مکان هندسی خواسته شده، تعلق دارد پس ارتفاع CH مکان هندسی موردنظر است. زیرا برای تمام نقطه‌های این ارتفاع داریم :



$$a.CM=b.CN$$

۲. کافی است دو نقطه از مکان هندسی را مشخص کنیم. فرض کنیم $AR=CQ$ باشد. نقطهٔ O به مکان هندسی تعلق دارد. داریم : $a\cdot CP=b\cdot CQ=b\cdot AR$.

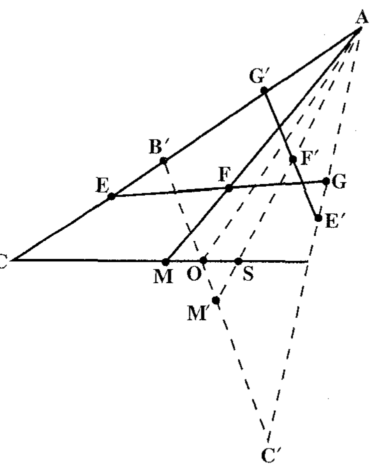
Fنقطه‌ای است که به پاره‌خط $AC=b$ یا به رابطهٔ $a\cdot CJ=b\cdot AC=b^۲$ مربوط است. بنابراین FQ جواب مسأله است.

تبصره. ۱. اگر پاره‌خط CQ را از C به G ببریم، خط QF با خط CI موازی می‌شود، بدین معنی که OF موازی ارتفاع مثلث BCA' است که برای آن $CA' = CA$ است.
۲. بدون استفاده از ویژگی ارتفاع می‌توان ثابت کرد که مکان هندسی خواسته شده، یک خط راست است زیرا داریم:

$$a \cdot CM = b \cdot CN \ , \ a \cdot CP = b \cdot CQ \Rightarrow$$
$$\frac{CM}{CN} = \frac{b}{a} \ , \ \frac{CP}{CQ} = \frac{b}{a} \Rightarrow \frac{CM}{CN} = \frac{CP}{CQ} = \frac{b}{a}$$

پس مکان هندسی نقطهٔ L، خط CL، مکان هندسی نقطه‌هایی است که تصویر آنها روی دو پاره‌خط، پاره‌خطهای متناظر متناسب ایجاد می‌کنند.

۲۸۶. ۱. نقطهٔ F وسط پاره‌خط EG روی میانهٔ AM است.



۲. با چرخانیدن مثلث حول نیمساز AO پاره‌خطهای $AC' = AC$ و $AB' = AB$ را اختیار می‌کنیم، در این صورت پاد موازیهای $B'C'$ و $E'G'$ را خواهیم داشت.
مکان هندسی نقطه‌های وسط این پاد موازیها روی میانهٔ AM' از مثلث $AB'C'$ است. درنتیجه مکان هندسی نقطه‌های وسط پاد موازیها، خط AS شبه میانهٔ رسم شده از رأس A است (قرینهٔ میانهٔ AM نسبت به نیمساز AO).

۲.۳. مثلثهای ویژه

۳.۲.۱. مثلث متساوی‌الاضلاع

۳.۲.۱.۱. خط، نقطه

۲۸۷. ۱. چون $A\hat{B}D = A\hat{C}D = ۶۰^\circ$ و پاره‌خط AD ثابت است، مکان هندسی رأسهای B و C کمان درخور زاویهٔ ۶۰° روبه‌رو به پاره‌خط AD و در دوطرف آن می‌باشند.

۲. اگر B' وسط AB و C' وسط AC باشد، داریم: $\frac{AB'}{AB} = \frac{AC'}{AC} = \frac{۱}{۲}$ بنابراین مکان هندسی نقطهٔ B'' مجانس مکان هندسی نقطه B، و مکان هندسی نقطهٔ C' مجانس مکان هندسی نقطهٔ C نسبت به مرکز تجانس A و با نسبت تجانس $\frac{۱}{۲}$ است.

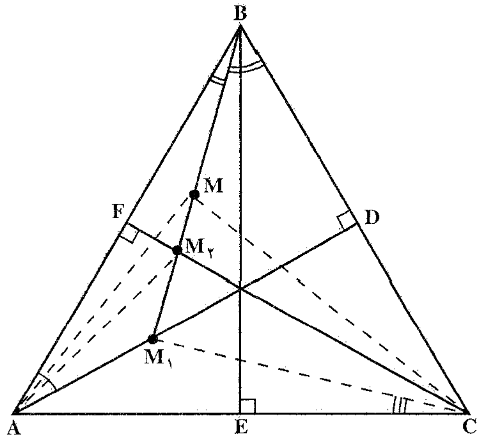
۳ . ۲ . ۱ . ۲ . مثلث ثابت، ...

۳ . ۲ . ۱ . ۲ . ۱ . مثلث، رابطهٔ بین زاویه‌ها

۲۸۸. همهٔ نقطه‌های واقع بر ارتفاعهای مثلث متساوی‌الاضلاع، دارای ویژگی موردنظر مسأله هستند. مثلاً اگر M_1 ، نقطه‌ای واقع بر ارتفاع وارد بر ضلع BC باشد (شکل) داریم :

$$M_1\hat{A}B + M_1\hat{B}C + M_1\hat{C}A = M_1\hat{A}B + M_1\hat{B}C + M_1\hat{B}A$$

$$= M_1\hat{A}B + A\hat{B}C = 90^\circ$$



ثابت می‌کنیم، در درون مثلث، نقطه‌های دیگری با این ویژگی پیدا نمی‌شود. برعکس، فرض می‌کنیم، نقطهٔ M، که روی هیچ‌کدام از ارتفاعهای مثلث نیست، این ویژگی را داشته باشد. BM را وصل می‌کنیم و محل برخورد آن را با ارتفاعهای وارد بر ضلعهای BC و AB بترتیب، M_1 و M_2 می‌نامیم. اگر برای هرسه نقطهٔ M، M_1 و M_2 (که قطعاً متمایزند)، شرط مسأله برقرار باشد، باید داشته باشیم :

$$M\hat{A}M_1 = M\hat{C}M_1 \ , \ M\hat{A}M_2 = M\hat{C}M_2$$

ولی در این‌صورت، نقطهٔ C' ، قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به خط راست BM، باید هم روی محیط دایرهٔ محیطی مثلث AMM_1 و هم روی محیط دایرهٔ محیطی مثلث AMM_2 واقع شود. بنابراین، دو دایره‌ای که هر دو از نقطه‌های A، M و C' می‌گذرند ($C' \neq A$ ، زیرا خط راست BM بر ضلع AC عمود نیست)، باید منطبق باشند و این ممکن نیست، زیرا نقطه‌های M، M_1 و M_2 نمی‌توانند روی یک دایره باشند.

۳ . ۲ . ۱ . ۲ . ۲ . مثلث، رابطهٔ متری

۲۸۹. راه اول. نقطهٔ M را روی کمان $\widehat{BC}$ اختیار می‌کنیم. در چهارضلعی ABMC داریم: $AM \cdot BC = AB \cdot MC + AC \cdot MB$ و چون $AB = AC = BC$ است، پس نتیجه می‌شود:

$$MA = MB + MC$$

راه دوم. روی AM پاره‌خط AN را مساوی MB جدا می‌کنیم و از N به C وصل می‌کنیم. $C\hat{B}M = C\hat{A}M$ و دو مثلث ANC و BMC همنهشتند؛ چون $AN = BM$ و $AC = BC$ و $C\hat{B}M = C\hat{A}M$ است. بنابراین، $NC = MC$. چون $B\hat{M}C = ۱۲۰^\circ$، پس $A\hat{N}C = ۱۲۰^\circ$، درنتیجه $M\hat{N}C = ۶۰^\circ$. یعنی مثلث NMC متساوی الاضلاع یعنی $NC = MN = MC$ است. بنابراین داریم:

$$AM = AN + NM \Rightarrow AM = MB + MC$$

۲۹۰. مجموعهٔ نقطه‌های مطلوب، کمان BC از دایرهٔ محیطی مثلث ABC، نظیر زاویهٔ مرکزی ۱۲۰° است.

۲۹۱. نقطهٔ O را یکی از این نقطه‌ها اختیار می‌کنیم و فاصلهٔ این نقطه از ضلعهای مثلث را m، n و r می‌نامیم؛ داریم:

$$m + n + r = AD + ۲r = AL \Rightarrow r = \text{مقدار معلوم}$$

۲۹۲. گزینهٔ (الف) درست است. محورهای مختصات را به گونه‌ای درنظر می‌گیریم که مختصات رأسهای مثلث مفروض عبارت باشند از $(۰ , ۰)$ و $(s , ۰)$ و $(\frac{s}{۲} , \frac{s\sqrt{۳}}{۲})$. نسبت به این محورها مختصات P را (x , y) می‌گیریم. نقطهٔ P به مکان هندسی موردنظر تعلق دارد اگر و تنها اگر:

$$a = x^۲ + y^۲ + (x - s)^۲ + y^۲ + (x - \frac{s}{۲})^۲ + (y - \frac{s\sqrt{۳}}{۲})^۲$$

و این هم‌ارز است، اگر و تنها اگر: $a = (۳x^۲ - ۳sx) + (۳y^۲ - s\sqrt{۳}y) + ۲s^۲$

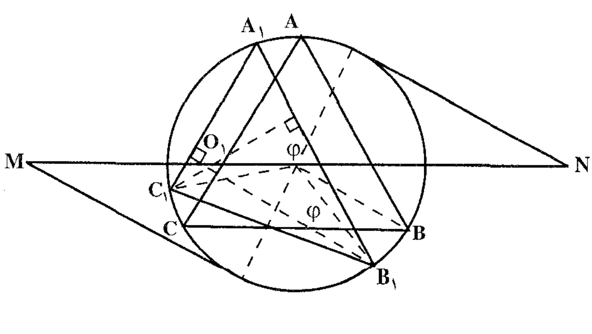
و
$$\frac{a - ۲s^۲}{۳} = (x - \frac{s}{۲})^۲ + (y - \frac{s\sqrt{۳}}{۶})^۲ - \frac{s^۲}{۳}$$

$$\frac{a - s^۲}{۳} = (x - \frac{s}{۲})^۲ + (y - \frac{s\sqrt{۳}}{۶})^۲$$

مکان هندسی نقطهٔ P اگر $a < s^2$ باشد، یک مجموعه تهی است ؛ اگر $a = s^2$ باشد، منحصر به یک نقطه است ؛ اگر $a > s^2$ باشد، یک دایره است.

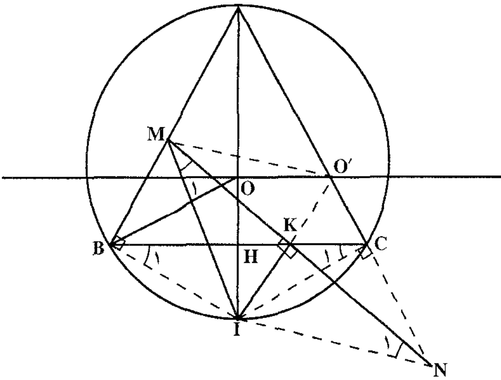
۳. ۲. ۱. ۲. ۳. مثلث، دایرهٔ محیطی

۲۹۳. فرض کنید ABC (شکل) مثلث متساوی‌الاضلاع اصلی، $A_1B_1C_1$، مثلثی دلخواه با شرطهای $A_1C_1 \| AC$ و $A_1B_1 \| AB$، O مرکز دایره و O_1 نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث $A_1B_1C_1$ باشد. فرض کنید $B\hat{O}B_1 = \varphi$. چون $O_1B_1 \| OB$، داریم $O\hat{B_1}O_1 = \varphi$ ؛ چون $C_1\hat{O_1}B_1 = C_1\hat{O}B_1 = 120^\circ$ چهارضلعی $C_1O_1OB_1$ محاطی است و بنابراین، $O_1\hat{O}C_1 = O_1\hat{B_1}C_1 = 30^\circ - \varphi$. به این‌ترتیب $O_1\hat{O}B = \varphi + 120^\circ + 30^\circ - \varphi = 150^\circ$، یعنی، خط راست OO_1 با CB موازی است. برای پیدا کردن مسیری که نقطهٔ O_1، هنگامی که در امتداد این خط راست حرکت می‌کند، می‌پوشاند، توجه کنید که برای تعیین جای نقطهٔ O_1، از نقطهٔ متغیر B_1، خط راستی به موازات OB رسم می‌کنیم تا خط راستی را که از O به موازات CB می‌گذرد، قطع کند. به وضوح، دورترین نقطه‌ها، به‌ازای نقطه‌های انتهایی قطر عمود بر OB به‌دست می‌آیند. بنابراین، MN (قطعه‌ای از خط موازی با CB، به طول 4R و نقطهٔ وسط O)، قسمتی از مکان هندسی است. کلّ مکان هندسی، عبارت است از سه پاره‌خط (با نقطه‌های انتهایی برداشته شده) از این‌قبیل.



۲۹۴. مکان هندسی خواسته شده، عبارت است از یک خط راست و یک دایره.

۳ . ۲ . ۱ . ۳. مسأله‌های ترکیبی



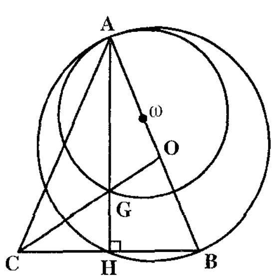
۲۹۵. ۱. چهارضلعی MKIB محاطی است زیرا $\hat{K}=۹۰^\circ$ و همچنین $A\hat{B}I=۹۰^\circ$. چون روبه‌رو به قطر است . درنتیجه $\hat{M}_۱=\hat{B}_۱$ و چون $\widehat{IC}=۶۰^\circ$ است ، پس $\hat{M}_۱=\hat{B}_۱=۳۰^\circ$ می‌باشد. همچنین اگر از C به I وصل کنیم، چهارضلعی IKCN نیز محاطی است. درنتیجه $\hat{C}_۱=\hat{N}_۱$ پس $\hat{C}_۱=\hat{N}_۱=۳۰^\circ$ ، بنابراین مثلث IMN متساوی‌الساقین است و چون IK ارتفاع است، میانه نیز می‌باشد یعنی نقطهٔ K وسط پاره‌خط MN است.

۲ . دومثلث قائم‌الزاویهٔ ICN و MIB بنا به حالت برابری وتر و یک ضلع همنهشتند و چون IM = IN است و IC = IB ، درنتیجه BM = CN .

۳. اگر ′O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث IMN باشد و از ′O به O وصل کنیم خط ′OO موازی KH یا ضلع BC از مثلث ABC می‌باشد. بنابراین باتوجه به ثابت بودن نقطهٔ O مکان هندسی نقطهٔ ′O خطی است که از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC موازی ضلع BC رسم می‌شود. (مثلثهای ′IMO و OBI متساوی‌الاضلاعند).

۳ . ۲ . ۲. مثلث متساوی‌الساقین

۳ . ۲ . ۲ . ۱. یک ضلع

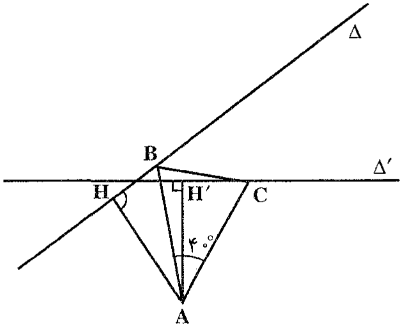


۲۹۷. اگر ABC یک وضع مثلث ABC باشد که در آن AH ارتفاع وارد بر قاعدهٔ BC و G محل برخورد میانه‌ها (مرکز ثقل) است. در این‌صورت اگر ضلع AB ثابت و رأس C تغییر نماید ؛ اولاً ـ میانهٔ وارد بر ضلع BC ارتفاع نیز می‌باشد. لذا مکان H دایره‌ای است به قطر AB ؛

ثانیاً ـ بنا به خاصیت میانه‌ها $\frac{AG}{AH}=\frac{۲}{۳}$ است. یعنی G مجانس H در تجانس ($k=\frac{۲}{۳}$ ، A) می‌باشد و چون مکان هندسی نقطهٔ H دایرهٔ (O) می‌باشد. پس مکان هندسی نقطهٔ

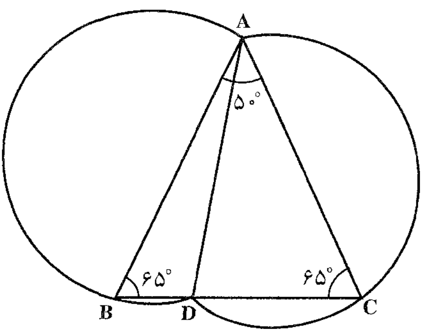
G دایرهٔ (ω) مجانس دایرهٔ (O) با مرکز تجانس A و نسبت تجانس $k=\frac{۲}{۳}$ است که در نقطهٔ A بر دایرهٔ (O) مماس است.

۳ . ۲ . ۲ . ۲ . ۲ . یک خط، یک رأس، اندازهٔ زاویه



۲۹۸. چنانچه ABC یک وضع دلخواه مثلث متساوی‌الساقین موردنظر باشد ؛ در این‌صورت $B\hat{A}C=۴۰^\circ$ است که چون $AB=AC$ می‌باشد، رأس C دوران یافته رأس B نسبت به مرکز دوران A و زاویهٔ دوران ۴۰° است. پس مکان هندسی رأس C خطی است مانند Δ' که از دوران خط Δ (مکان هندسی رأس B) حول مرکز دوران A و با زاویهٔ دوران ۴۰° به‌دست می‌آید.

۲۹۹. داریم :



$$A\hat{B}D=A\hat{C}D=\frac{۱۸۰^\circ-۵۰^\circ}{۲}=۶۵^\circ$$

پس مکان هندسی رأسهای B و C کمان در خورهای زاویهٔ ۶۵° روبه‌رو به پاره‌خط ثابت AD و در دو طرف آن می‌باشند.

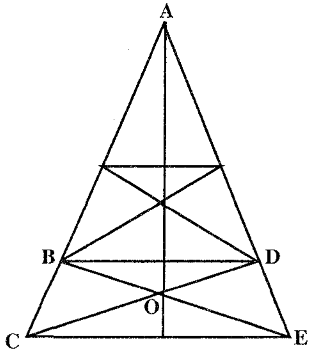
۳ . ۲ . ۲ . ۳ . مثلث ثابت

۳ . ۲ . ۲ . ۳ . ۱. تنها یک مثلث ثابت

۳۰۰. مماسهای رسم‌شده بر دایرهٔ به مرکز A، درچهار نقطهٔ E، F، I و J یکدیگر را قطع می‌کنند.

۱ . مکان هندسی نقطه‌های E و F خط EAF عمودمنصف ضلع BC است.

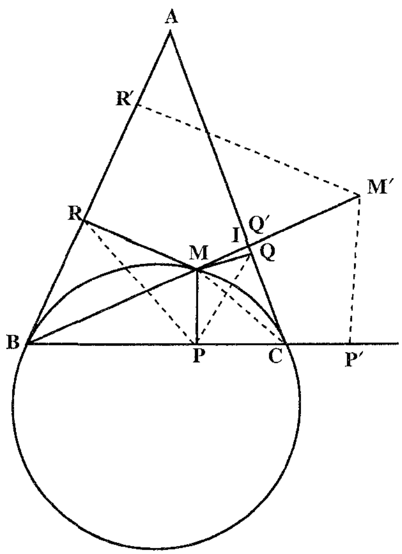
۲ . مکان هندسی نقطه‌های I و J، دایرهٔ محیطی مثلث ABC است زیرا اگر نقطه‌های تماس را M و N بنامیم از آن‌جا $B\hat{I}C=B\hat{A}C=۹۰^\circ$ ، پس I روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC است. پس مکان کامل از دو قسمت تشکیل می‌شود : خط AH و دایرهٔ ABC.



۳۰۱. خطهای موازی BD و CD زاویه‌های متناظر مساوی زیر را ایجاد می‌کنند:

$A\hat{B}D = A\hat{C}E \ , \ A\hat{D}B = A\hat{E}C$

ازطرفی $\hat{C} = \hat{E}$ و $\hat{B} = \hat{D}$ یعنی مثلثهای ABD و ACE متساوی‌الساقین هستند؛ یعنی $AB = AD$ و $AC = AE$ است. اما می‌دانیم خطهای CD و BE روی نیمساز زاویهٔ A یکدیگر را قطع می‌کنند؛ بنابراین این نیمساز، مکان هندسی محل برخورد قطرهای دوزنقه‌های موردنظر می‌باشند.



۳. ۲. ۲. ۳. ۲. مثلث، رابطهٔ متری

۳۰۳. **راه حل اول.** اگر نقطهٔ M در درون مثلث ABC باشد به قسمی که: $\overline{MP}^{۲} = \overline{MQ} \times \overline{MR}$ باشد چهار ضلعی محاطی MQCP نتیجه می‌دهد که زاویه‌های

$P\hat{M}C = P\hat{Q}C$ و همچنین چهارضلعی محاطی MPBR نتیجه می‌دهد که زاویه‌های

$B\hat{M}P = B\hat{R}P$؛ ولی از تناسب $\frac{MR}{MP} = \frac{MP}{MQ}$ و مشاهدهٔ این‌که زاویه‌های

QMP و RMP به‌علت مکمل بودن با زاویه‌های B و C مثلث متساوی‌الساقین، خود متساوی‌اند، نتیجه می‌شود که مثلثهای MQP و MRP متشابه‌اند. پس زاویه‌های MRP و MPQ باهم متساوی‌اند و همچنین زاویه‌های MQP و MPR نیز باهم متساوی‌اند، بنابراین:

$$P\hat{Q}C = \frac{\pi}{۲} - M\hat{Q}P \ , \ B\hat{R}P = \frac{\pi}{۲} - M\hat{R}P$$

پس:

$$B\hat{M}C = P\hat{M}C + P\hat{M}B = B\hat{R}P + P\hat{Q}C =$$

$$= \frac{\pi}{۲} - M\hat{R}P + \frac{\pi}{۲} - M\hat{Q}P$$

یعنی:

$$B\hat{M}C = \pi - (M\hat{R}P + M\hat{Q}P)$$

یعنی : $B\hat{M}C=\pi-(M\hat{P}R+M\hat{P}Q)$

یعنی $R\hat{M}C$ مکمل $R\hat{P}C$ می‌باشد، $R\hat{P}Q=\hat{A}$ است زیرا :

$$R\hat{P}Q=M\hat{B}P+M\hat{C}Q$$

و این دو زاویه، هریک، متمم $Q\hat{M}C$ و $R\hat{M}B$ می‌باشند که به‌علت عمود بودن MQ بر AC، و MR بر AB، زاویهٔ $R\hat{M}Q$ مکمل A خواهد بود ؛ یعنی به‌صورت ساده‌تر $P\hat{M}Q$ مکمل $\hat{C}$ و $P\hat{M}B$ مکمل $\hat{B}$، پس $M\hat{Q}R$ مکمل $\hat{A}$ و مساوی $B\hat{M}C$ است، پس مکان هندسی نقطه M کمان درخور مکمل زاویهٔ A بر روی BC است یعنی دایره‌ای است که بر ضلعهای AB و AC مثلث ABC در نقطه‌های B و C مماس است.

اگر نقطهٔ M' در خود سطح مثلث صاحب چنین خاصیتی باشد، از تشابه مثلثهای $P'M'B$ و PMB نتیجه می‌شود که :

$$\frac{M'P'}{MP}=\frac{BM'}{BM}$$

و همچنین به روش مشابه :

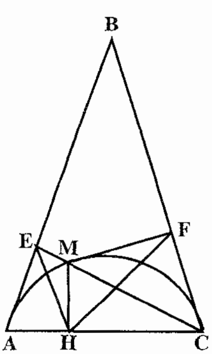
$$\frac{M'R'}{MR}=\frac{BM'}{BM}\ ,\ \frac{M'Q'}{MQ}=\frac{IM'}{MI}$$

پس : $\frac{BM}{MQ}=\frac{BM'}{BM}$. اگر I نقطهٔ تلاقی BMM' با AC باشد از تناسب نتیجه می‌شود که :

$$\frac{IM'}{MI}=\frac{BM'}{BM}$$

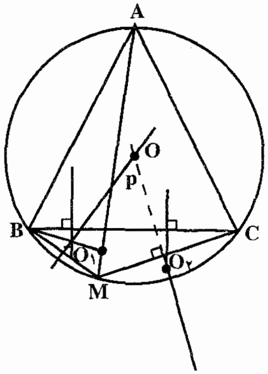
(زیرا : $\overline{MP}^2=\overline{MQ}\cdot\overline{MR}\ ,\ \overline{M'P'}^2=\overline{M'Q'}\cdot\overline{M'P'}$)

یعنی نقطه‌های M و M' نسبت به I و B مزدوجند. پس نقطهٔ M' تبدیلی است همولوژیک از دایرهٔ قبل با همولوژی به مرکز B و محور CA و این تبدیل یک هذلولی است که خطهای BC و BA مجانبهای آن می‌باشند.



راه‌حل دوم. کمانی از دایره، که بر ساقهای مثلث در نقطه‌های A و C (دو انتهای قاعده) مماس است.

ABC را مثلث مفروض (AB = BC)، M را نقطه‌ای از مکان مجهول و E ، F و H را، بترتیب، تصویرهای نقطهٔ M بر ضلعهای AB ، BC و AC می‌گیریم (شکل). چهارضلعیهای AEMH و CHMF متشابه‌اند : زاویه‌های متناظر برابرند و بنابه شرط، دو ضلع مجاور متناسبند.



۳. ۲. ۲. ۳. ۳. مثلث، دایرهٔ محیطی

۳۰۴. مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث، محل برخورد عمودمنصفهای ضلعهای آن است. نقطهٔ O_1 را مرکز دایرهٔ محیطی مثلث MPB و O_2 را مرکز دایرهٔ محیطی مثلث MPC اختیار کنید. مکانهای هندسی این دو نقطه، خطهای راستی هستند که بر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گذرند.

۳. ۲. ۲. ۳. ۴. مثلث، مقطعهای مخروطی

۳۰۵. مکان مطلوب شامل قسمتهای زیر است:

۱. مرکز دایره محیطی مثلث OAB (وقتی که مقطع مخروطی سهمی است.)

۲. دایرهٔ محیطی مثلث OAB غیر از رأسهای مثلث، وقتی که مقطع هذلولی است که نسبت به عمودمنصف AB قرینه یکدیگرند، وقتی که روی کمان $\widehat{AOB}$ است، مقطع بیضی است بطوری که شامل O نباشد.

۳. ۲. ۲. ۳. ۵. مسأله‌های ترکیبی

۳۰۶. مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$، را درنظر می‌گیریم و نقطهٔ D را روی قاعدهٔ BC اختیار می‌کنیم. از D به A وصل می‌کنیم. بنابه رابطهٔ استوارت در مثلث داریم:

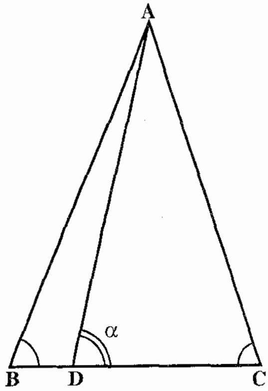
$$BC(AD^۲ + BD.DC) = AB^۲ \cdot DC + AC^۲ \cdot DB$$

$$\Rightarrow BC(AD^۲ + BD.DC) = AB^۲ \cdot DC + AB^۲ \cdot DB$$

$$\Rightarrow BC(AD^۲ + BD.DC) = AB^۲(DC + DB) = AB^۲ \cdot BC$$

$$\Rightarrow AB^۲ = AD^۲ + BD.DC \Rightarrow \overline{AB}^۲ = \overline{AD}^۲ + \overline{BD} \cdot \overline{DC}$$

اندازهٔ زاویهٔ ADC را برابر α اختیار کنید و با استفاده از دو رابطهٔ $\overline{AB}^۲ = \overline{AD}^۲ + \overline{BD}.\overline{DC}$ و $\overline{BC}^۲ + ۲\overline{AD}^۲ = ۴\overline{AB}^۲$ ثابت کنید $\alpha = ۴۵^\circ$ است،...

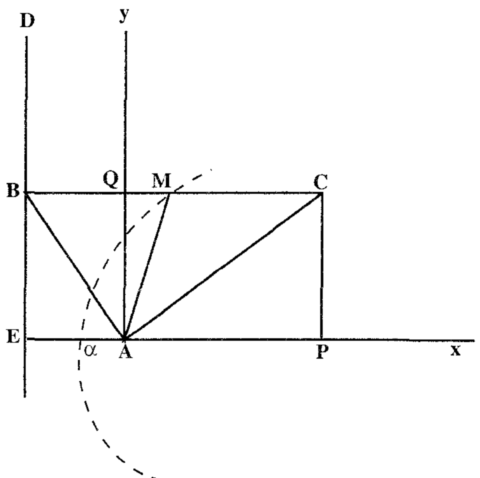


۳ . ۲ . ۳. مثلث قائم‌الزاویه

۳ . ۲ . ۳ . ۱. نقطه، خط

۳۰۷. مکان هندسی نقطهٔ M یک سهمی به کانون A و هادی D ؛ زیرا وقتی B خط D را طی کند، نقطهٔ M تمام این سهمی را خواهد پیمود. برای به‌دست آوردن مکان هندسی رأس C، از A عمود Ax را بر D و سپس Ay و CP را عمود بر Ax رسم می‌کنیم (شکل) در مثلث قائم‌الزاویه BAC داریم :

$$\overline{AQ}^{2} = BQ \cdot QC \Rightarrow \overline{PC}^{2} = EA \cdot AP \cdots (1)$$



حال فرض کنیم $AE = a$ و x و y مختصات نقطهٔ C باشد. دراین صورت رابطهٔ (۱) به‌صورت $y^{2} = ax$ درمی‌آید.

بنابراین مکان نقطهٔ C یک سهمی است به رأس A و محور Ax و پارامتر $\frac{a}{2}$.

۳ . ۲ . ۳ . ۲. یک ضلع (وتر)

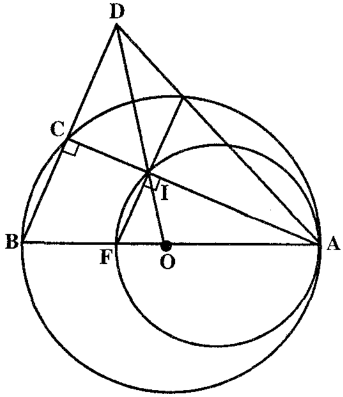
۳۰۹. داریم :

$$O\hat{A}B + O\hat{B}A = 45^{\circ} \Rightarrow A\hat{O}B = 135^{\circ} \Rightarrow$$

مکان O کمان درخور زاویهٔ °۱۳۵ روبه‌رو به AB است.

شعاع دایره‌ای که این کمان درخور جزیی از آن است برابر است با :

$$R = O_1A = a\sqrt{2}$$



۳۱۰. از A به D وصل می‌کنیم. از نقطهٔ I خطی موازی CD رسم می‌کنیم تا AB را در نقطهٔ F قطع کند. در مثلث ABD، خطهای AC و DO میانه‌اند. پس I نقطهٔ برخورد میانه‌های این مثلث است. بنابراین $\frac{AI}{AC}=\frac{۲}{۳}$ است. پس مکان هندسی نقطهٔ I دایره‌ای است مجانس دایرهٔ محیطی مثلث ABC نسبت به مرکز تجانس A و نسبت تجانس $\frac{۲}{۳}$. این دایره به قطر AF است.

۳. ۲. ۳. ۳. مثلث ثابت،...

۳. ۳. ۳. ۳. ۱. مثلث، رابطهٔ متری

۳۱۱. مکان هندسی نقطهٔ P یک خط راست است.

۳. ۳. ۳. ۴. مسأله‌های ترکیبی، ...

۳۱۲. ۱. تصویر A را روی BC نقطهٔ H می‌نامیم. داریم:

$$\frac{\overrightarrow{HB}}{\overrightarrow{HC}}=-\frac{AB^۲}{AC^۲}=-\frac{c^۲}{b^۲}$$

و یا:

$$b^۲\,\overrightarrow{HB}+c^۲\,\overrightarrow{HC}=۰$$

یعنی H باری‌سنتر نقطه‌های B و C است، با ضریبهای $b^۲+c^۲=a^۲$.

پس باری‌سنتر نقطه‌های A، B و C عبارت است از G وسط AH.

۲. اگر M نقطه‌ای از صفحه باشد بنابر رابطهٔ لایبنیتز می‌توان نوشت:

$$a^۲MA^۲+b^۲MB^۲+c^۲MC^۲=(a^۲+b^۲+c^۲)GM^۲+a^۲GA^۲+b^۲GB^۲+c^۲GC^۲$$

و:

$$GA^۲=\frac{۱}{۴}AH^۲=\frac{b^۲c^۲}{۴a}$$

و یا:

$$GB^۲=GH^۲+HB^۲$$

$$\frac{b^۲c^۲}{۴a^۲}+\frac{c^۴}{a^۲}=\frac{b^۲c^۲+۴c^۴}{۴a^۲}$$

و یا :
$$GC^2=\frac{b^2c^2+4b^4}{4a^2}$$

بنابراین :

$$a^2MA^2+b^2MB^2+c^2MC^2+2a^2GM^2+\frac{1}{4a^2}\left[a^2b^2c^2+5(b^4c^4+b^2c^4)\right]$$

$$=2a^2GM^2+\frac{3b^2c^2}{2}$$

از آن‌جا :
$$a^2MA^2+b^2MB^2+c^2MC^2=2b^2c^2$$

پس :
$$2a^2GN^2+\frac{3b^2c^2}{2}+2a^2c^2$$

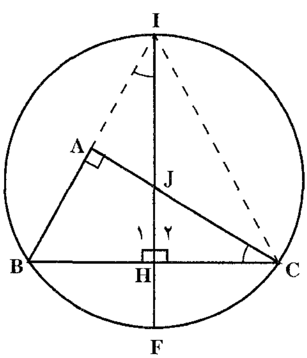
$$GM^2=\frac{b^2c^2}{4a^2}\rightarrow GM=\frac{bc}{2a}$$

مکان G دایره‌ای است به مرکز G و به شعاع $\frac{bc}{2a}$ یعنی دایرهٔ به قطر AH.

مثال. طول ضلعهای مثلث ABC را a، b و c نمایش می‌دهیم. مطلوب است مکان M به‌طوری که $MB^2+MC^2-2MA^2=\frac{a^2}{2}$ باشد.

راهنمایی. مکان مطلوب عمود منصف میانهٔ AI از مثلث ABC است.

۳۱۳. راه اول. ۱. دو مثلث BHI و HJC متشابه‌اند زیرا



$\hat{I}=\hat{C}$ و $\hat{H}_1=\hat{H}_2=90^\circ$ است. پس داریم $\frac{BH}{JH}=\frac{IH}{CH}$ درنتیجه خواهیم داشت

$$HB\cdot HC=HI\cdot HJ$$

۲. بنا به فرض داریم $HM^2=HI\cdot HJ$

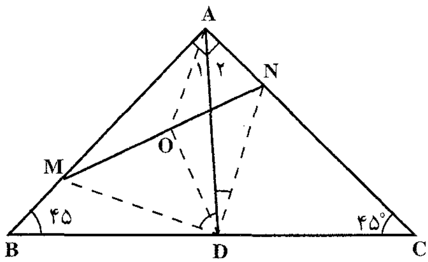
پس می‌توان نوشت $HB\cdot HC=HM^2$. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به قطر BC است.

راه دوم. از I به C وصل کرده، دایرهٔ محیطی مثلث IBC را رسم می‌کنیم. داریم $HF=HJ$، همین‌طور داریم $HB\cdot HC=FH\cdot IH$. پس $HB\cdot HC=HJ\cdot HI$.

۳ . ۳ . ۳ . ۵. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین

۳۱۴. داریم :

$$BM = AN \ , \ AM = CN \ , AB = AC = ۲a \ , \ AN + AM = ۲a \Rightarrow MB = AN$$



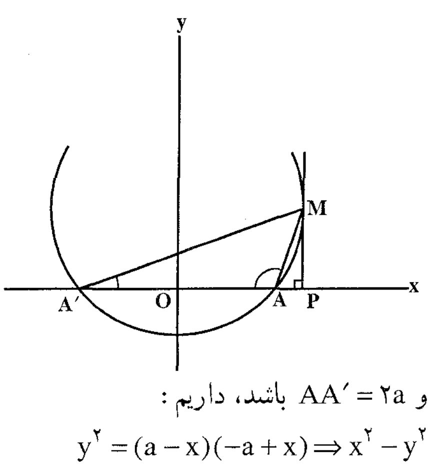
دو مثلث AND و BMO همنهشتند. زیرا $AD = DB$ (میانهٔ وارد بر وتر مثلث قائم‌الزاویه نصف وتر است) و $BM = AN$ ، از طرفی $\hat{A}_۱ + \hat{A}_۲ = ۹۰^\circ$ و $\hat{B} + \hat{A}_۱ = ۹۰^\circ$ ، پس $\hat{A}_۲ = \hat{B}$ است. از همنهشتی این دو مثلث نتیجه می‌شود که $MD = ND$.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AMN چون AO میانه است، پس $AO = MO = NO$. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMN چون DO میانه است، پس $DO = MO = NO$ و نتیجه می گیریم که $MO = NO = AO = DO$. بنابراین مثلث AOD متساوی‌الساقین است و مکان هندسی نقطهٔ O، عمودمنصف پاره‌خط AD می‌باشد.

۳ . ۲ . ۳ . ۶. مثلث شبه‌قائم‌الزاویه

۳۱۵. MP را بر AA' عمود می‌کنیم. داریم :

$$\hat{A} = \hat{M}_۱ + \frac{\pi}{۲}$$



ولی بنا به فرض $\hat{A} = \hat{A}' + \frac{\pi}{۲}$ پس $\hat{M}_۱ = \hat{A}'$ و درنتیجه MP بر دایرهٔ محیطی مثلث MAA' مماس است (شکل).

بنابراین $PM^۲ = PA \cdot PA'$ یا اگر x و y مختصات نقطهٔ M نسبت به محورهای Ox (امتداد AA') و Oy عمودمنصف AA' و $AA' = ۲a$ باشد، داریم :

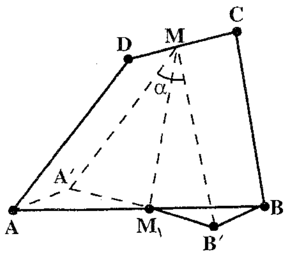
$$y^۲ = (a - x)(-a + x) \Rightarrow x^۲ - y^۲ = a^۲$$

بنابراین مکان M یک هذلولی متساوی‌الساقین به رأسهای A و A' می‌باشد.

راهنمایی و حل مسأله‌های بخش ۴. چند ضلعی

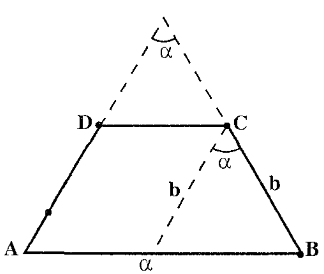
۱.۴. چهارضلعی

۱.۱.۴. چهارضلعی در حالت کلی



۳۱۶. اگر در چهارضلعی ABCD طولهای AD = BC و زاویهٔ بین آنها α باشد، اگر از نقطهٔ M وسط CD خط MA′ را مساوی و موازی DA و خط MB′ را مساوی و موازی CB رسم کنیم، خط A′B′ بر وسط AB مرور می‌کند؛ زیرا مثلثهای M_1BB' و M_1AA' مساوی‌اند:

$BB' = MC$ ($MC = MD$) و $AA' = MD$ و AA' و BB' موازی‌اند. شکل $A'BB'A$ متوازی‌الاضلاع بوده و قطرهای آن منصّف یکدیگرند پس نقطهٔ M_1 وسط AB نقطهٔ ثابتی است و چون مثلث $A'MB'$ متساوی‌الساقین ($AD = CB$) و زاویهٔ رأس آن ثابت و برابر α است، پس ارتفاع آن تغییر نمی‌کند و مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز M_1 و به شعاع M_1M می‌باشد.



چهارضلعی ABCD در حالت خاصی ذوزنقهٔ محاطی می‌گردد دراین‌صورت زاویهٔ α باید همان زاویهٔ ضلعهای CB و AD باشد؛ پس شرط امکان مسأله آن است که:

$$CD = a - 2b\sin\frac{\alpha}{2}$$

پس اگر این شرط برای ضلع چهارم CD برقرار باشد، چهارضلعی ABCD می‌تواند ذوزنقهٔ محاطی گردد و درغیر این‌صورت غیرممکن است.

درحالت کلی، مانند حالت قبل می‌توان ثابت کرد که مکان نقطهٔ M وسط CD، دایره‌ای است به مرکز M_1 و به شعاع ثابت، زیرا همان ترسیم قبل، مثلث $MA'B'$ را به‌دست

می‌دهد و نقطهٔ M_1 وسط AB می‌گردد و چون طول BC و AD و زاویهٔ بین آنها ثابت است، پس شکل مثلث $A'MB'$، شکلی تغییرناپذیر است. رابطهٔ میانه‌ها به‌صورت :

$$MA'^{2} + MB'^{2} = 2MM_1^{2} + \frac{A'B'^{2}}{2}$$

نشان می‌دهد که MM_1 طول ثابتی دارد (زیرا ضلعهای $A'M$ ، MB' و $A'B'$ از مثلث $A'MB'$ ثابت می‌باشند) ؛ پس مکان M دایره‌ای است به‌مرکز M_1 و به شعاع M_1M .

۳۱۷. از نقطهٔ M خط MN را موازی OCD رسم می‌کنیم و رابطه‌های متری موجود بین AN ، NM و طولهای داده شده را بررسی می‌کنیم. فرض می‌کنیم $OA = a$ ، $OB = b$ ، $AB = b - a = l$ ، $OC = c$ و $OD = d$ باشد، از تشابه مثلثهای متشابه NBM و OBD و سپس NAM و OAC داریم :

$$\frac{MN}{NB} = \frac{OD}{OB} = \frac{d}{b} \;;\; MN = NB \cdot \frac{d}{b}$$

$$\frac{MN}{NA} = \frac{OC}{OA} = \frac{c}{a} \;;\; MN = NA \cdot \frac{c}{a}$$

$$\Rightarrow NA \cdot \frac{c}{a} = NB \cdot \frac{d}{b} \text{ و } NB = NA + l$$

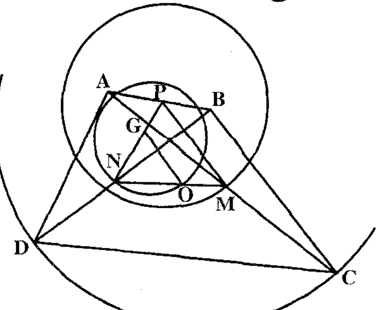
$$\Rightarrow NA \cdot \frac{c}{a} = NA \cdot \frac{d}{b} + l \cdot \frac{d}{b}$$

$$\Rightarrow NA\left(\frac{bc - ad}{ab}\right) = l \cdot \frac{d}{b} \Rightarrow NA = l \cdot \frac{ad}{bc - ad} = C^{te}$$

$$\Rightarrow MN = NA \cdot \frac{c}{a} = l \cdot \frac{cd}{bc - ad}$$

پس مکان هندسی نقطهٔ N_1 دایره‌ای به مرکز N روی AB و به شعاع مقدار ثابت بالاست. مکان هندسی نقطهٔ M' دایره‌ای به مرکز N' و شعاع $N'M'$ است.

۳۱۸. دو ضلع BC و AD را با طول ثابت، فرض می‌کنیم. مثلث ABD با داشتن سه ضلع ثابت وضع ثابتی دارد ؛ از آن‌جا، مکان هندسی رأس C، دایره‌ای به مرکز B و به شعاع BC است. (نقطه B ثابت و طول ضلع BC نیز ثابت است).



از نقطهٔ M وسط قطر AC خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در نقطهٔ P قطع کند.

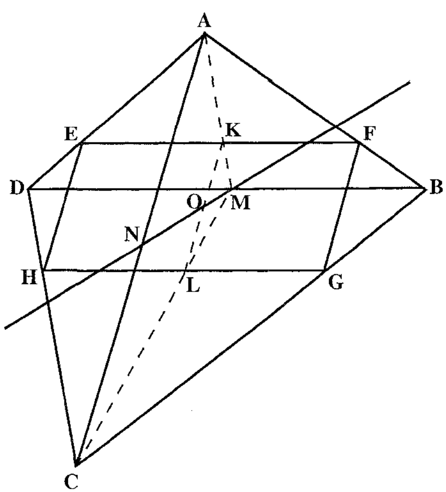
نقطهٔ P وسط ضلع AB نقطهٔ ثابتی است و چون $PM = \frac{BC}{2}$ مقدار ثابتی است، پس مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز P وسط AB و به شعاع $\frac{1}{2}BC$ است.

برای تعیین مکان هندسی نقطهٔ O، وسط قطر BD را N می‌نامیم و از N به P وصل می‌کنیم؛ سپس از O خطی موازی MP رسم می‌کنیم تا PN را در نقطهٔ G قطع کند. G وسط پاره‌خط MP نقطهٔ ثابتی است و $GO = \frac{MP}{2} = \frac{BC}{4}$ طول ثابتی دارد، پس مکان هندسی نقطهٔ O دایره‌ای به مرکز G و به شعاع $\frac{BC}{4}$ است.

نکته. برای پیدا کردن مکان هندسی وسط پاره‌خطهایی که ضلعهای روبه‌روی چهارضلعی را به‌هم وصل می‌کنند، به‌روش مشابه برای نقطهٔ O می‌توان عمل کرد.

۳۱۹. این مکان خطی است که وسطهای قطرهای چهارضلعی را به‌هم وصل می‌کند.

۳۲۰. برای رسم متوازی‌الاضلاع EFGH محاط در چهارضلعی ABCD، کافی است ضلع EF را موازی قطر BD و ضلع FG را موازی قطر AC رسم کنیم. خطهای GH و EH که موازی EF و FG رسم می‌شوند، یکدیگر را در نقطهٔ H روی ضلع CD قطع می‌کنند.



نقطهٔ O مرکز متوازی‌الاضلاع، وسط پاره‌خط LK است که وسطهای دو ضلع روبه‌روی EF و GH از متوازی‌الاضلاع را به‌هم وصل می‌کند. امّا مکان هندسی نقطه L، میانهٔ AM از مثلث ABD و مکان هندسی نقطهٔ K میانهٔ CM از مثلث CBD است. درنتیجه مکان هندسی نقطهٔ O میانهٔ MN از مثلث AMC است. به‌عبارت دیگر مکان هندسی نقطهٔ O خطی است که وسطهای دو قطر چهارضلعی را به‌هم وصل می‌کند.

نکته. قسمتی از خط MN که در خارج چهارضلعی قرار می‌گیرد، مکان هندسی مرکز متوازی‌الاضلاعهایی است که روی امتداد ضلعهای چهارضلعی ساخته می‌شوند.

۴ . ۱ . ۲. چهارضلعی کوژ

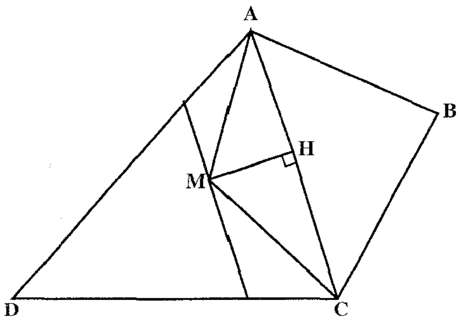
۳۲۱. پاسخ صحیح گزینهٔ (د) می‌باشد. اگر M نقطه‌ای ازمکان باشد، داریم :

$$S(AMCD) = S(A\overset{\Delta}{D}C) - S(A\overset{\Delta}{M}C)$$

$$S(ABCM) = S(A\overset{\Delta}{B}C) + S(A\overset{\Delta}{M}C)$$

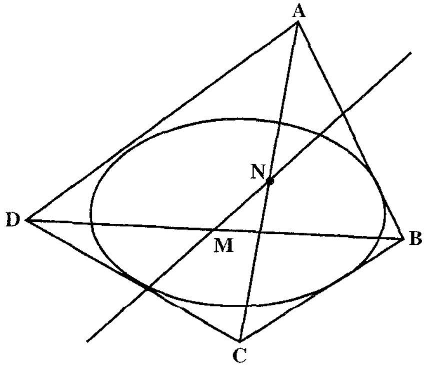
$$S(AMCD) = S(ABCM) \Rightarrow S(A\overset{\Delta}{D}C) - S(A\overset{\Delta}{M}C) = S(A\overset{\Delta}{B}C) + S(A\overset{\Delta}{M}C)$$

$$\Rightarrow ۲S(A\overset{\Delta}{M}C) = S(A\overset{\Delta}{D}C) - S(A\overset{\Delta}{B}C) = \text{مقداری ثابت}$$



ازاین‌جا نتیجه می‌شود که مساحت مثلث AMC مقداری ثابت است، و چون طول AC ثابت است، پس باید ارتفاع MH مقداری ثابت داشته باشد ؛ یعنی : مکان هندسی نقطهٔ M خطی است موازی AC که به فاصلهٔ MH از خط AC رسم شود.

۳۲۳. این مکان هندسی خطی است که وسطهای قطرهای چهارضلعی را به‌هم وصل می کند. برای یک بیضی داده شده می‌توان شکل را طوری تصویر کرد که تصویر بیضی، یک دایره باشد. دراین‌صورت چهارضلعی ABCD که MN خط واصل بین وسطهای قطرهای آن می‌باشد به چهارضلعی abcd تبدیل می‌شود که mn خط واصل بین وسطهای قطرهای آن تصویر MN است. اما نقطهٔ O مرکز دایره روی mn قرار دارد و این مرکز تصویر مرکز O از بیضی داده شده است. پس نقطهٔ O روی خط MN است.

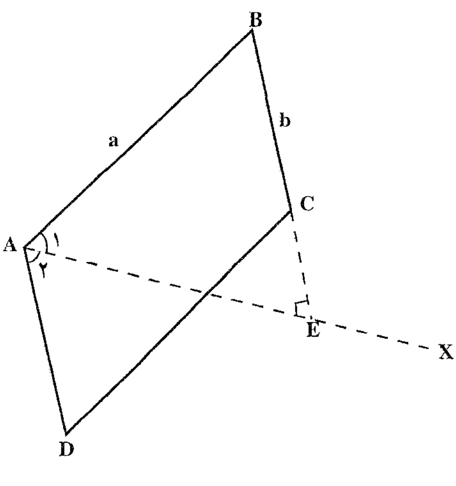


۳.۱.۴. چهارضلعی محاطی

۳۲۴. فرض می‌کنیم M ، N ، P و Q وسطهای ضلعها باشند. داریم : $MN = PQ = \frac{AC}{۲}$ و این دو قطعه خط با AC موازی است. لذا چهارضلعی MNPQ متوازی‌الاضلاع است و نقطهٔ J محل تقاطع قطرهای آن، وسط MP است. پس هرگاه مکان هندسی نقطهٔ P را به‌دست آوریم، مکان هندسی نقطهٔ J از روی آن با تجانس به مرکز M و نسبت $\frac{MJ}{MP} = \frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید. اما مکان P دایره‌ای به مرکز O است، زیرا چون طول CD ثابت است فاصلهٔ آن از مرکز دایره یعنی OP همواره مقدار ثابتی است، لذا مکان J دایره‌ای است که مرکزش O' وسط MO و شعاعش $O'J = \frac{OP}{۲}$ است. حال فرض کنیم D' وضع نقطهٔ D در حالتی باشد که C بر B منطبق است و C' وضع نقطهٔ C در حالتی باشد که D روی A می‌افتد. پس اگر $P_۱$ وسط BD' و $P_۲$ وسط AC' باشد، چون P کمان $\overset{\frown}{P_۱PP_۲}$ را می‌پیماید، نقطهٔ J کمانی متجانس با آن را نسبت به نقطهٔ M می‌پیماید. هرگاه CD بر کمان تحتانی AB قرار گیرد، نقطهٔ J باز هم کمان دایره‌ای به مرکز O' و شعاع $O'J$ را می‌پیماید که آن را می‌توان مثل حالت قبل محدود کرد.

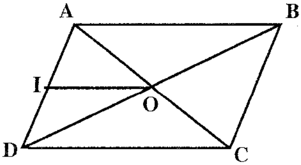
۴.۱.۴. چهارضلعیهای ویژه

۱.۴.۱.۴. متوازی‌الاضلاع

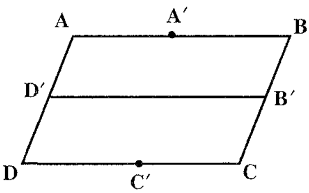


۳۲۶. فرض می‌کنیم : $AB = a$ ، $BC = b$ و AX نیمساز زاویهٔ BAD (شکل) باشد. BC را امتداد می‌دهیم تا AX را در E قطع کند. مثلث BAE متساوی‌الساقین است ؛ چون که : $\hat{E} = \hat{A}_۲ = \hat{A}_۱$ و از آن‌جا، $BE = a$ و بنابراین نقطهٔ C یک بیضی به مرکز A که یکی از محورهایش AX و به‌طول $۲(a+b)$ و محور دومش به طول $۲(a-b)$ می‌باشد طی می‌کند.

۳۲۷. مکان هندسی رأس متغیر C قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی است که رأس آن A، رأس ثابت متوازی‌الاضلاع و محل برخورد دو خط، و طول هر ساقش برابر نصف محیط متوازی‌الاضلاع است.



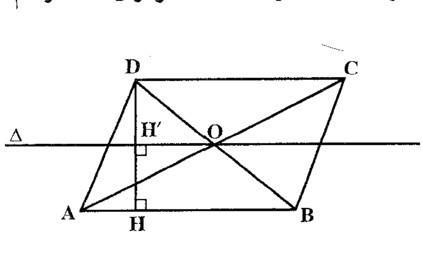
۳۲۸. مکان هندسی نقطه‌های B و C بترتیب، دو دایره به مرکزهای A و D و به شعاع b است.



۳۲۹. ضلع AD از متوازی‌الاضلاع را از نظر وضع و اندازه ثابت فرض کنید $(AD = a)$.
اندازهٔ ضلعهای AB و CD را مساوی مقدار ثابت b بگیرید. اگر A' ، B' ، C' و D' بترتیب وسطهای ضلعهای AB ، BC ، CD و DA باشند، D' نقطهٔ ثابتی است ؛ $D'A' = b$ و $AA' = DC' = \frac{b}{۲}$ است، بنابراین مکان هندسی نقطهٔ A' دایره‌ای به مرکز A و به شعاع $\frac{b}{۲}$ ، مکان هندسی نقطهٔ B' دایره‌ای به مرکز D' و به شعاع b ، مکان هندسی نقطهٔ C' دایره‌ای به مرکز D و به شعاع $\frac{b}{۲}$ است.

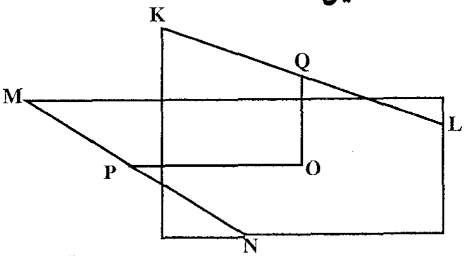
۳۳۰. چون طول ضلع BC تغییر نمی‌کند و B ثابت است، با حرکت متوازی‌الاضلاع «لولایی»، نقطهٔ C بر دایره‌ای به مرکز B حرکت می‌کند. ولی Q از C براثر یک تجانس به مرکز نقطهٔ ثابت A و با نسبت $\frac{۱}{۲}$ به‌دست می‌آید. پس Q بر دایره‌ای حرکت می‌کند که بر اثر این تبدیل از دایره‌ای که C بر آن حرکت می‌کند، به‌دست می‌آید.

۳۳۱. قاعدهٔ AB از متوازی‌الاضلاع ABCD از نظر طول و وضع، و ارتفاع DH از نظر اندازه ثابت است. اگر مرکز متوازی‌الاضلاع را O بنامیم مکان هندسی نقطهٔ O خط راست Δ است که از نقطهٔ H' وسط DH موازی AB رسم می‌شود.



۲.۴.۱.۴. مستطیل

۱. ۲.۴.۱.۴. نقطه‌های ثابت

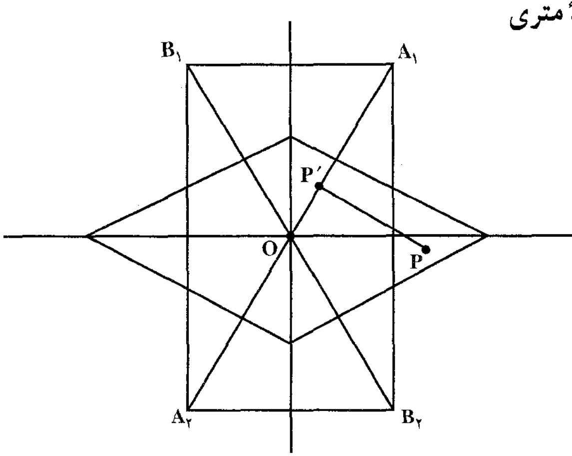


۳۳۲. اگر M ، N ، L و K نقطه‌های مفروض باشند (M و N روی ضلعهای متقابل مستطیل قرار دارند، همین‌طور L و K)، و P وسط MN ، Q وسط KL و O نقطهٔ برخورد قطرهای مستطیل باشد (شکل)، آن وقت $P\hat{O}Q = 90^\circ$. در نتیجه، مکان هندسی مطلوب، دایرهٔ مرسوم به قطر PQ است.

۲. ۲.۴.۱.۴. نقطه، خط

۳۳۳. اگر O رأس زاویه و ABCD مستطیل باشد (A ثابت است)، آن وقت نقطه‌های A ، B ، C ، D و O بر یک دایره واقعند. درنتیجه، $C\hat{O}A = 90^\circ$ ، یعنی نقطهٔ C روی خط راست عمود بر OA که از O می‌گذرد، قرار دارد.

۳. ۲.۴.۱.۴. مستطیل، رابطهٔ متری



۳۳۵. P را نقطهٔ دلخواهی از صفحه و P' را تصویر آن، بر خط راست A_1A_2 می‌گیریم (شکل). روشن است که A_1P وقتی بزرگتر، برابر یا کوچکتر از OP است که A_1P' ، بزرگتر، برابر یا کوچکتر از OP' باشد. بنابراین برای این که نقطهٔ P با نابرابری $A_1P > OP$ سازگار باشد، باید در نیمصفحه‌ای قرار گیرد که، مرز آن، عمودمنصف پاره‌خط A_1O است و در طرف نقطهٔ O قرار دارد. به همین ترتیب، نقطهٔ P ، وقتی با نابرابری $A_2P > OP$ سازگار است که در نیمصفحهٔ شامل O و با مرز عمودمنصف A_2O واقع باشد و غیره.

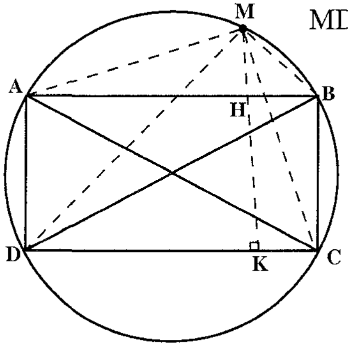
بنابراین، مکان هندسی نقطه P ، برای این که به‌طور هم‌زمان، در هر چهار نابرابری صدق کند، عبارت است از بخش مشترک این چهارنیمصفحه، یعنی بخش درونی متوازی‌الاضلاعی که با رسم عمودمنصفهای پاره‌خطهای A_1O ، A_2O ، B_1O و

B_2O ساخته می‌شود. این متوازی‌الاضلاع همیشه یک لوزی است، زیرا قطرهای آن نیمسازهای زاویه‌هایی هستند که A_1A_2 و B_1B_2 با هم می‌سازند؛ یعنی، این قطرها، برهم عمودند.

۴.۱.۴.۲.۴. مسأله‌های ترکیبی

۳۳۶. ۱. عمود MH را بر AB فرود می‌آوریم و امتداد می‌دهیم تا DC را در نقطهٔ K قطع کند.

$$MA^2 = MH^2 + AH^2 \quad , \quad MB^2 = MH^2 + HB^2$$
$$MD^2 = MK^2 + AH^2 \quad , \quad MC^2 = MK^2 + HB^2$$



در نتیجه

$$MA^2 + MC^2 = MB^2 + MD^2$$

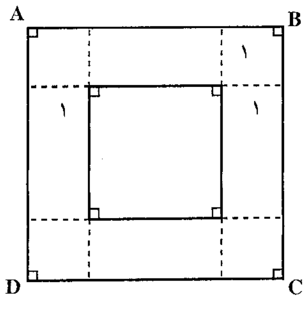
۲. چون $MA^2 + MC^2 = \frac{k^2}{2}$ پس مکان هندسی، دایره‌ای است به مرکز O محل تقاطع قطرها و به شعاع $MO = \frac{\sqrt{k^2 - a^2}}{2}$.

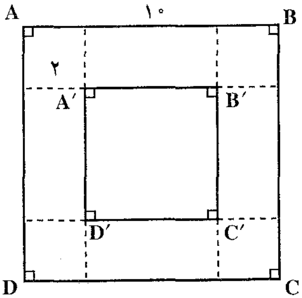
۴.۱.۴.۳. مربع

۴.۱.۴.۳.۱. یک مربع

۴.۱.۴.۳.۱.۱. تنها یک مربع

۳۳۷. مربع ABCD به ضلع ۴ سانتیمتر را درنظرمی‌گیریم. چهار خط موازی ضلعهای این مربع به فاصلهٔ ۱ سانتیمتر از آنها و در درون مربع رسم می‌کنیم. مربع $A'B'C'D'$ به‌دست می‌آید. نقطه‌های روی این مربع جواب مسأله‌اند. زیرا هر نقطه واقع بر ضلعهای این مربع از ضلعهای مربع ABCD به فاصلهٔ ۱ سانتیمتر قرار دارند و رأسهای این مربع از دو ضلع مربع ABCD به فاصلهٔ ۱ سانتیمتر می‌باشند.





۳۳۸. مربع داده شده را ABCD فرض می‌کنیم. چهار خط موازی ضلعهای این مربع به فاصلهٔ ۲ سانتیمتر از آنها در درون مربع رسم می‌کنیم؛ مربع $A'B'C'D'$ ایجاد می‌شود. درون این مربع جواب مسأله است.

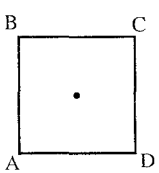
۴.۱.۴.۳.۱.۲. یک مربع، یک نقطه

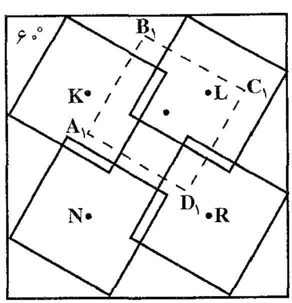
۳۳۹. متذکر می‌شویم که نقطهٔ M را می‌توان با دوران PK به اندازهٔ ۶۰ درجه، دور نقطهٔ P به‌دست آورد. مکان هندسی مطلوب، عبارت است از مربعی مساوی مربع Q که از دوران آن به اندازهٔ ۶۰ درجه نسبت به نقطهٔ P به‌دست آمده است.

۴.۱.۴.۳.۱.۳. یک مربع، رابطهٔ متری

۳۴۰. این مکان هندسی دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O محل تقاطع قطرهای مربع است.

۴.۱.۴.۳.۲. دو مربع





۳۴۱. اگر مربع اول، دور نقطهٔ M به اندازهٔ زاویهٔ °۶۰ (شکل را ببینید) در جهت گردش عقربه‌های ساعت، یا خلاف گردش عقربه‌های ساعت دوران کند، آن وقت باید کاملاً در درون مربع دوم قرار بگیرد. بعکس، به هر مربع واقع در درون مربع بزرگتر، و برابر با مربع کوچکتر، که ضلعهایش با ضلعهای مربع بزرگتر زاویهٔ °۳۰ و °۶۰ تشکیل می‌دهند، نقطه‌ای مانند M نظیر می‌شود که ویژگی لازم را دارد. (این مربع در شکل با خط‌چین نشان داده شده است) این نقطه مرکز دوران به اندازهٔ زاویهٔ °۶۰ است که مربع ABCD را به مربع $A_1B_1C_1D_1$ می‌برد؛ این نقطه، از نقطهٔ O_1 با دوران دور O درجهت لازم، به اندازهٔ زاویهٔ °۶۰ به‌دست می‌آید.

وضعیتهای نهایی مربع $A_1B_1C_1D_1$ (وقتی که دو رأس آن روی ضلعهای مربع بزرگتر قرار گیرند) را درنظر بگیرید. مرکزهای آنها، رأسهای مربع KLRN به‌حساب می‌آیند که ضلعش برابر با $b-\frac{1}{2}a(\sqrt{3}+1)$ است (ضلعهای مربع KLRN با ضلعهای مربعهای

مفروض موازی‌اند و مرکز آن بر مرکز مربع بزرگتر منطبق است). مرکزهای خانوادهٔ دیگری از مربعها که با ضلعهای مربع، مربع بزرگتر زاویه‌های 30° و 60° تشکیل می‌دهند نیز مربع KLRN را پر می‌کنند. بنابراین، مکان هندسی مطلوب عبارت است از اجتماع دو مربع، که یکی از مربع KLRN با دوران آن دور O به اندازهٔ زاویهٔ 60° در یک جهت و دیگری با دوران به اندازهٔ زاویهٔ 60° در جهت مخالف به‌دست می‌آید.

اگر $b \geq \frac{a}{2}(\sqrt{3}+1)$، مسأله جواب دارد (ممکن است نقطه‌های P و Q روی محیط مربعها قرار گیرند).

۴.۱.۴.۳.۳. مسأله‌های ترکیبی

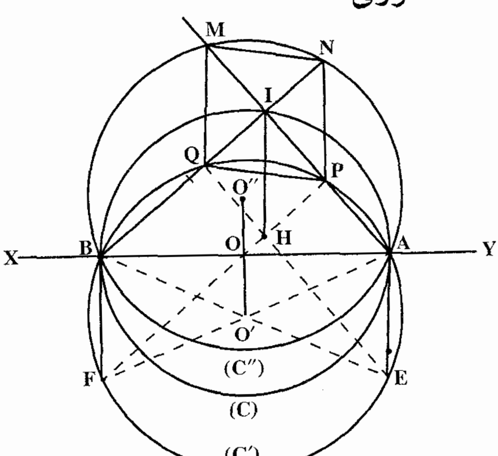
۳۴۲. ۱. مقایسه مثلثها رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه.

۲. از کمان درخور زاویهٔ قائمه استفاده کنید.

۳. ویژگی چهارضلعی محاطی و مکان هندسی وسط پاره‌خطهای واصل بین یک نقطهٔ ثابت و نقطه‌های یک خط ثابت.

۴. آسان است.

۴.۱.۴.۴. لوزی



۳۴۵. گزینه (ب) درست است.

۱.۳۴۶. چون در لوزی قطرها برهم عمودند، لذا اگر I محل تلاقی قطرهای لوزی باشد $B\hat{I}A = 90^\circ$ است و دایرهٔ (C) به قطر AB از I می‌گذرد و این دایره، مکان هندسی نقطهٔ I محل تلاقی قطرهای آن است. در صورتی که MNPQ یک وضع لوزی باشد، چنانچه $\overrightarrow{BF}$ و $\overrightarrow{AE}$ را همسنگ $\overrightarrow{MQ}$ رسم نماییم چهارضلعی AEQM و BFPN متوازی‌الاضلاع بوده و نقطه‌های E و F ثابت می‌باشند و $EQ \stackrel{\parallel}{=} AM$ و $BN \stackrel{\parallel}{=} FP$ و در نتیجه EQ بر BQ و FP نیز بر AM عمود است و مثلثهای BQE و APF قائم‌الزاویه بوده و وترهای آنها باهم برابر و اقطار مستطیل ABEF می‌باشند و دایرهٔ (C′) به قطر

$AF = BE$ و پیوسته از P و Q می‌گذرند و این دایره مکان رأسهای P و Q می‌باشد و مکان دو رأس دیگر M و N دایره دیگری مانند (C'') است که از انتقال دایرهٔ (C') همسنگ با بردار $\overrightarrow{QM} \mathrel{\underline{\|}} \overrightarrow{EA}$ به‌دست می‌آید (چون OO' وسط پاره‌خط BE را به وسط پاره‌خط BA وصل نموده، پس $OO' \mathrel{\underline{\|}} \frac{AE}{۲}$ یا $O'O'' = AE$ و از آن‌جا می‌توان گفت دایرهٔ C'' قرینهٔ دایرهٔ C' نسبت به AB است.

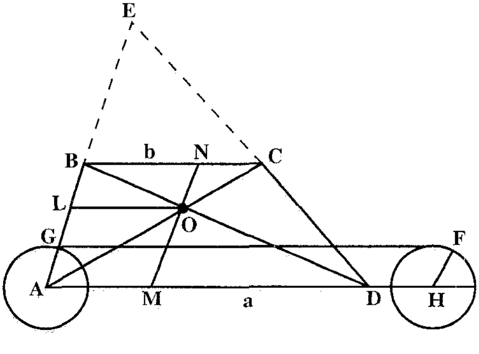
۲. چهارضلعی IPHQ مستطیل بوده و IH از U وسط PQ می‌گذرد و در نتیجه $MQ \mathrel{\underline{\|}} IH$ و $IU \mathrel{\underline{\|}} \frac{MQ}{۲}$ یعنی مکان U وسط PQ از انتقال دایرهٔ (C) به قطر AB (مکان I) به اندازهٔ بردار $\frac{\overrightarrow{MQ}}{۲}$ و مکان وسط پاره‌خط MN با انتقال دایره به قطر AB همسنگ با بردار $\frac{\overline{QM}}{۲}$ به‌دست می‌آید.

و همچنین مکان وسطهای دو پاره‌خط MQ و PN با انتقال مکان P و Q همسنگ با بردار $\frac{\overrightarrow{OM}}{۲}$ به‌دست می‌آید.

۴.۱.۴.۵. ذوزنقه

۴.۱.۴.۵.۱. ذوزنقه در حالت کلی

۴.۱.۴.۵.۱.۱. قاعده، ساق، قطر



۳۴۷. نقطهٔ برخورد دو ساق را E و نقطهٔ برخورد قطرهای ذوزنقه را O می‌نامیم. از O خطی موازی ساق AB رسم می‌کنیم تا دو قاعدهٔ AD و BC را در M و N قطع کند و از O خطی موازی AD رسم می‌کنیم تا AB را در نقطهٔ L قطع کند. داریم :

$$LO = AM = \frac{ab}{a+b} = \text{مقدار ثابت} \quad (۱)$$

$$\frac{AE}{BE} = \frac{a}{b} \Rightarrow \frac{AE}{AE - BE} = \frac{a}{a-b} \Rightarrow \frac{AE}{AB = c} = \frac{a}{a-b} \Rightarrow AE = \frac{ac}{a-b} \quad (۲)$$

$$\frac{OM}{AB} = \frac{OD}{DB} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow \frac{OM}{c} = \frac{a}{a+b} \Rightarrow OM = \frac{ac}{a+b} \quad (۳)$$

رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد که M نقطهٔ ثابتی است.

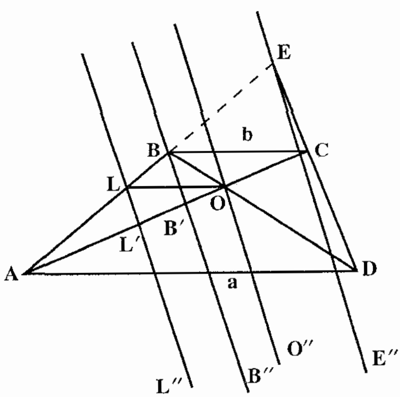
رابطهٔ (۲) نشان می‌دهد که مکان هندسی نقطه E دایره‌ای به مرکز A و به شعاع $\frac{ac}{a-b}$ است. رابطهٔ (۳) با توجه به ثابت بودن نقطهٔ M نشان می‌دهد که مکان هندسی نقطهٔ O دایره‌ای به مرکز M و به شعاع $\frac{ac}{a+b}$ است.

تبصره. مکان هندسی نقطهٔ F که به وسیلهٔ خطی موازی قاعده‌ها به ذوزنقه مربوط می‌شود به‌قسمی که خط موازی ساق AB را در نقطهٔ ثابت G قطع می‌کند و FG طول ثابتی دارد، یک دایره است، زیرا مکان هندسی نقطهٔ G دایره‌ای به مرکز A و به شعاع AG است ؛ پس مکان هندسی نقطهٔ F دایره‌ای به مرکز H و به شعاع FH است. چنان که :

$AH = FG =$ مقدار ثابت

$FH = AG =$ مقدار ثابت

۳۴۸. فرض می‌کنیم $AD = a$ و $BC = b$ و رأس B روی خط BB'' بلغزد. تمام نقطه‌های خط AB، خطی موازی BB'' را می‌پیمایند. همچنین $AL = AB.\frac{a}{a+b}$ بنابراین نقطهٔ L خط LL'' موازی با خط BB'' را طی می‌کند. بنابراین برای یک موقعیت B' از رأس B داریم :

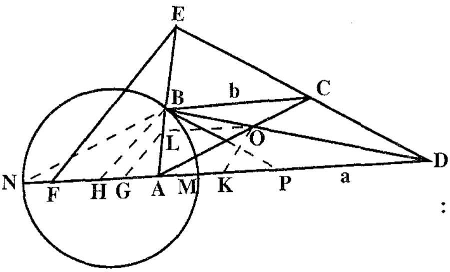


$$AL' = AB'.\frac{AL}{AB} = AB'.\frac{a}{a+b}$$

از آن‌جا L' وضع جدید نقطهٔ L است.

همچنین $AE = AB.\frac{a}{a-b}$

بنابراین نقطه‌های B و E به‌طور مشابه خطهایی موازی با LL'' را طی می‌کنند. اگر B یک دایره را بپیماید، نقطهٔ E نیز یک دایره را طی می‌کند، همچنین است برای نقطهٔ L . نقطهٔ A' مرکز تشابه همهٔ دایره‌هاست. نقطهٔ O دایره‌ای می‌پیماید که مساوی با دایره‌ای است که نقطهٔ L می‌پیماید.



۳۴۹. کافی است مکان هندسی یک نقطه از خط AB به عنوان مثال مکان هندسی نقطهٔ B را بدانیم. از B خط BP را موازی CD رسم می‌کنیم. P نقطهٔ ثابتی است زیرا $AP = a - b$ و داریم:

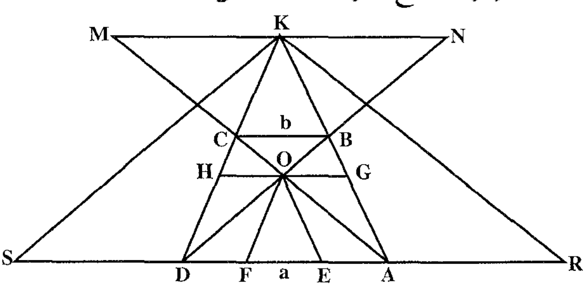
$$\frac{AB}{BP} = \frac{m}{n}$$

بنابراین مکان هندسی نقطهٔ B دایره‌ای به قطر MN است که قطرش MN پاره‌خط AP را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم می‌کند (دایرهٔ آپولونیوس). مکان هندسی دیگر نقطه‌های واقع بر خط AB دایره‌ای مشابه دایرهٔ به قطر MN است، زیرا داریم:

$$\frac{AE}{EP} = \frac{AB}{BP} = \frac{m}{n}$$

خط EF موازی خط BH ، شعاع دایرهٔ مکان هندسی نقطه‌های E است.

خطهای LG و OK موازی خط BH مرکز و شعاع دایرهٔ مکان هندسی نقطه‌های L و O را مشخص می‌کنند.



۳۵۰. ذوزنقهٔ ABCD را که در آن قاعدهٔ بزرگ $AD = a$ ثابت و اندازهٔ قاعدهٔ $BC = b$ و مجموع دو قطر $AC + BD = l$ است، درنظر می‌گیریم.

چهارضلعیهای MKRA و KNDS متوازی‌الاضلاعند و داریم:

$$AR = KM = KN = DS = \frac{ab}{a-b}$$

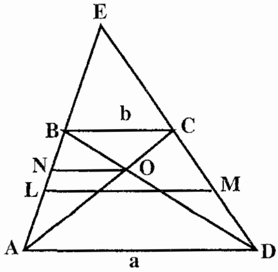
پس نقطه‌های R و S ثابتند.

همچنین داریم: $\frac{AM}{AC} = \frac{KM}{BC} = \frac{a}{a-b} \Rightarrow AM = AC.\frac{a}{a-b}$

از آن‌جا: DN یا $SK = BD.\frac{a}{a-b}$

$RK + SK = (AC+BD).\frac{a}{a-b} = \frac{al}{a-b} =$ مقدار ثابت

پس مکان هندسی رأس، یک بیضی به کانونهای R و S و عدد ثابت $\frac{al}{a-b}$ است.



۳۵۱. نقطهٔ برخورد دو قطر ذوزنقه را O می‌نامیم. از O خطی موازی قاعده‌ها رسم می‌کنیم تا ساق AB را در نقطهٔ N قطع کند. وسط ساق AB را L و وسط ساق CD را M می‌نامیم. می‌دانیم که:

$$\frac{OA}{OC}=\frac{OB}{OD}=\frac{a}{b}\Rightarrow ON=\frac{ab}{a+b} \quad (۱)$$

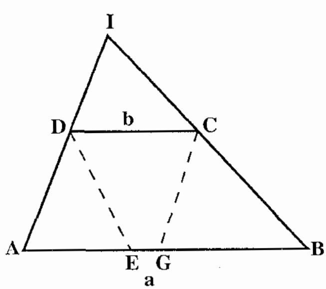
$$LM=\frac{a+b}{۲} \quad (۲)$$

از طرفی $\frac{NA}{NB}=\frac{a}{b}$ است، پس N نقطهٔ ثابتی است.

بنابراین مکان هندسی نقطهٔ O دایره‌ای به مرکز N و به شعاع $\frac{ab}{a+b}$ است. به دلیل ثابت بودن L و LM مکان هندسی نقطهٔ M دایرهٔ به مرکز L و به شعاع $\frac{a+b}{۲}$ است.

تبصره. مکان هندسی تمام نقطه‌های واقع بر DCE، DB و AC روی خط ABE قرار دارد. همین ویژگی برای تمام نقطه‌هایی مانندP که روی پاره‌خطی موازی قاعدهٔ ذوزنقه با طول ثابت قرار دارند، برقرار است. دیده می‌شود که این پاره‌خط موازی، از نقطهٔ ثابتی روی ABE می‌گذرد.

۴.۱.۴.۵.۱.۲. مسأله‌های ترکیبی



(الف)

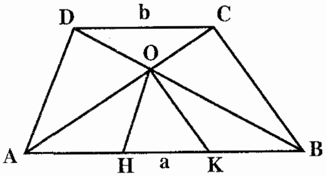
۳۵۲. ۱. ذوزنقه ABCD به قاعدهٔ ثابت $AB = a$ و قاعدهٔ دیگر $CD = b$ ، $AD + BC = l$ را درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $a > b$ باشد. DE را موازی CB رسم می‌کنیم (شکل) داریم:

$AE = a - b$ ؛

بنابراین E نقطه‌ای است ثابت. داریم:

$$DA + DE = AD + CB = l$$

پس مکان D ، بیضی به کانونهای A و E و طول محور اطول l می‌باشد. زیرا اگر D یک نقطه از این بیضی باشد، این نقطه مربوط به ذوزنقهٔ ABCD که C رأس چهارم آن از رسم DC هم‌ارز با EB به‌دست آمده، می‌باشد. به همین طریق مشاهده می‌شود که C یک بیضی مساوی با بیضی قبل را که از انتقال آن به اندازهٔ $\overrightarrow{EB}$ نتیجه شده، طی می‌کند.



(ب)

۲. فرض می‌کنیم I محل برخورد دو ساق باشد (شکل) داریم:

$$\frac{AI}{AD}=\frac{AB}{AE}=\frac{a}{a-b}\Rightarrow AI=\frac{a}{a-b}\times AD$$

و با رسم CG موازی DA خواهیم داشت:

$$\frac{BI}{BC}=\frac{BA}{BG}=\frac{a}{a-b}\Rightarrow BI=\frac{a}{a-b}\times BC$$

از آن‌جا:

$$AI+BI=\frac{a}{a-b}\times 1$$

و مکان I بیضی به کانونهای A ، B و طول محور اطول $\frac{a}{a-b}\times 1$ می‌باشد.

۳. فرض می‌کنیم O محل تلاقی (شکل ب) قطرها باشد. OH ؛ OK را موازی با DA ؛ CB رسم می‌کنیم، داریم:

$$\frac{HA}{HB}=\frac{OD}{OB}=\frac{b}{a}\quad,\quad\frac{KB}{KA}=\frac{OC}{OA}=\frac{b}{a}\quad;$$

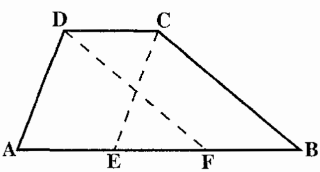
بنابراین H و K نقطه‌های ثابتند. از طرف دیگر:

$$\frac{OH}{DA}=\frac{BO}{BD}=\frac{a}{a+b}\quad,\quad\frac{OK}{CB}=\frac{AO}{AC}=\frac{a}{a+b}$$

پس:

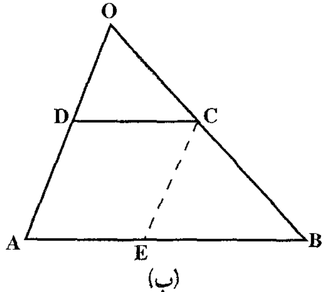
$$OH+OK=\frac{a}{a+b}(DA+CB)=\frac{al}{a+b}$$

و مکان O بیضی به کانونهای H و K و طول محور اطول $\frac{al}{a+b}$ می‌باشد.



(الف)

۳۵۳. اولاً. مکان هندسی دو رأس متحرک: ذوزنقهٔ ABCD را که در آن $AB=a$ ثابت و $CD=b$ و $BC-AD=1$ می‌باشد، درنظر می‌گیریم، فرض می‌کنیم $a>b$ باشد. CE را موازی DA رسم می‌کنیم (شکل الف). $BE=a-b$ مقداری است ثابت، از طرف دیگر $EC=AD$ و در نتیجه $BC-CE=1$ بنابراین مکان C یک شاخه از هذلولی به کانونهای B و E می‌باشد، زیرا هر نقطه C از این شاخه به یک مثلث BCE



(ب)

و در نتیجه به یک ذوزنقه ABCD مربوط می‌شود.
مکان D نیز یک شاخه از هذلولی می‌باشد، که از انتقال شاخه قبل به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{CD} = b$ به‌دست می‌آید.
ثانیاً. مکان نقطهٔ O فصل مشترک ضلعهای غیرموازی (شکل ب) داریم:

$$\frac{OB}{CB} = \frac{OA}{CE} = \frac{AB}{EB} \quad ;$$

یا:

$$\frac{OB - OA}{l} = \frac{a}{a - b}$$

یا:

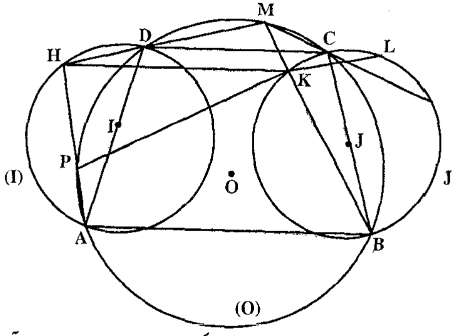
$$OB - OA = \frac{al}{a - b}$$

پس مکان هندسی نقطهٔ O یک شاخهٔ هذلولی به کانونهای A و B می‌باشد.
ثالثاً. برای تعیین مکان هندسی نقطهٔ I فصل مشترک قطرها، IH و IK را موازی با ضلعهای DA و CB رسم می‌کنیم (شکل ب)، داریم:

$$\frac{IK}{BC} = \frac{AI}{AC} = \frac{BI}{BD} = \frac{IH}{DA} \Rightarrow \frac{IK - IH}{BC - DA} = \frac{AI}{AC}$$

ولی $\frac{AI}{AC} = \frac{a}{a+b}$ در نتیجه: $IK - IH = \frac{al}{a+b}$ در نتیجه مکان هندسی نقطهٔ I یک شاخه از هذلولی به کانونهای K و H می‌باشد.

۳۵۴. ۱. خطهای PA و PC بترتیب بر MD و MB عمودند. داریم:



$$(PA, PC) = (MD, MB)$$

چون M روی دایرهٔ O است، داریم:

$$(MD, MB) = (DA, DC)$$

$$(MD, MB) = (AD, AB)$$

نتیجه می‌شود:

$$(PA, PD) = (DA, DC)$$

پس P روی دایرهٔ O است. زمانی که MD یک دور کامل حول D بگردد، خط AP که بر آن عمود است یک دور حول A خواهد گردید و نقطهٔ P یک دور کامل دایره را طی خواهد کرد.

یافتن پوش. $\widehat{CKM} = ۹۰^\circ$ و کمانهای $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{MP}$ مکملند ؛ پس طول وتر MP ثابت است ؛ این وتر پوش دایرهٔ به مرکز C است.

۲. مرکز دایرهٔ به قطر AD را I و مرکز دایرهٔ به قطر BC را J و M محل تلاقی CD با BJ. نقطه‌های H و K روی دایره‌های (I) و (J) واقعند. داریم :

$$(LK, IC) = (BK, BC) = (BM, BC) = (DM, DC)$$

در نتیجه :
$$(LK, LC) = (DH, LC)$$

این رابطه نشان می‌دهد بردارهای $\overrightarrow{LK}$ و $\overrightarrow{DH}$ همسنگند. بنابراین به موازات بردار $\overrightarrow{IJ}$ نقطهٔ I را به J و D را به L و H را به K انتقال می‌دهیم، از آن‌جا :

$$\overrightarrow{HK} = \overrightarrow{IJ}$$

بنابراین قطعه خط HK موازی است با قاعدهٔ ذوزنقه، و مساوی با نصف مجموع دو قاعده است.

۴.۱.۴.۵.۲. ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه

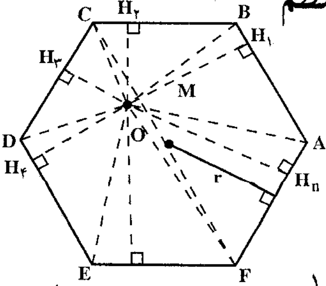
۳۵۵. در ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ ABCD$(\hat{A} = \hat{B} = ۹۰^\circ)$ و $AB^۲ = AD.BC$ و ضلع AB از نظر وضع و اندازه ثابت است. از رابطهٔ داده شده نتیجه می‌شود که دو قطر این ذوزنقه برهم عمودند. با توجه به ویژگیهای بالا مسأله را حل کنید.

۲.۴. n ضلعی (n≥۵)

۱.۲.۴. شش ضلعی

۳۵۶. مکان هندسی رأسهای دیگر، خطهای راستی هستند که در یک نقطه همرسند.

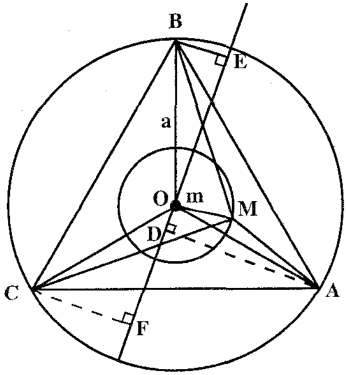
۲.۲.۴. n ضلعی منتظم



۳۵۷. این مکان هندسی مجموعهٔ نقطه‌های درون n ضلعی است زیرا اگر M یک نقطه از مکان هندسی واقع در درون n ضلعی منتظم ...ABCDE به ضلع a باشد و از این نقطه به رأسهای n ضلعی وصل کنیم، با فرض این که سهم n ضلعی برابر r باشد، داریم :

$$\text{مساحت n ضلعی منتظم} = \frac{۱}{۲}n.a.r = \frac{۱}{۲}a(MH_۱ + MH_۲ + MH_۳ + \ldots)$$

$$\Rightarrow nr = MH_۱ + MH_۲ + MH_۳ + \ldots$$



۳۵۸. حالت مشکلتر، آن است که تعداد ضلعهای چندضلعی منتظم فرد باشد. فرض می‌کنیم M یک نقطه از مکان هندسی موردنظر، a شعاع دایرهٔ محیطی n ضلعی و $OM = m$ باشد. همهٔ رأسهای n ضلعی را روی خطی عمود بر OM تصویر می‌کنیم. اکنون رابطه‌های مربوط به مربع ضلع مقابل به زاویه‌های حاده و منفرجه را می‌نویسیم. داریم:

$$\Delta AOM \Rightarrow AM^{۲} = a^{۲} + m^{۲} - ۲m.AD\ ,$$

$$\Delta BOM \Rightarrow BM^{۲} = a^{۲} + m^{۲} + ۲m.BE\ ,$$

$$\Delta COM \Rightarrow CM^{۲} = a^{۲} + m^{۲} + ۲m.CF$$

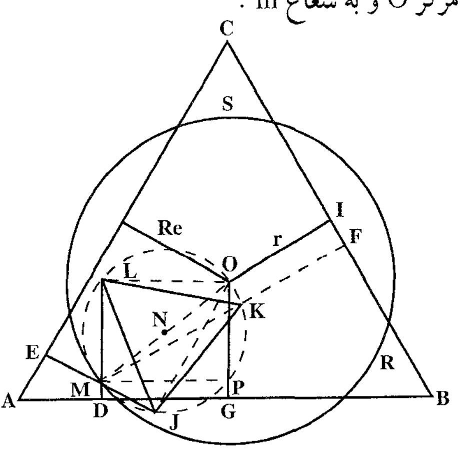
از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$AM^{۲} + BM^{۲} + CM^{۲} = k^{۲} = ۳a^{۲} + ۳m^{۲} + ۲m(BE + CF - AD)$$

برای یک محور دلخواه EDF که از مرکز ثقل n ضلعی می‌گذرد، فاصله‌ها از رأسهای n ضلعی رسم می‌شود. مجموع فاصله‌هایی که در یک طرف محور قرار می‌گیرند برابر است با مجموع فاصله‌هایی که در طرف دیگر محور قرار می‌گیرند. پس مقدار داخل پرانتز برابر صفر است. پس داریم:

$$k^{۲} = ۳a^{۲} + ۳m^{۲} \Rightarrow m^{۲} = \frac{k^{۲}}{۳} - a^{۲} = \text{مقدار ثابت}$$

پس مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای است به مرکز O و به شعاع m .



۳۵۹. چندضلعی منتظم، به مرکز O و شعاع دایرهٔ محاطی درونی r را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم M یک نقطه از مکان هندسی موردنظر باشد. نقطهٔ M را روی ضلعهای چندضلعی در نقطه‌های D ، E و F تصویر می‌کنیم. به عبارت دیگر فاصله‌های نقطهٔ M از ضلعها را MD ، ME و MF می‌نامیم. تصویر نقطهٔ O روی خطهای MD ، ME و MF را در نقطهٔ J ، K و L تصویر می‌کنیم.

مثلث JKL متساوی‌الاضلاع است. با توجه به مثلث متساوی‌الاضلاع ABC (به‌عنوان چندضلعی منتظم) با فرض $OM = m$ و $OI = OG = r$

داریم :

$$MD = r - ML \Rightarrow MD^2 = r^2 - 2r.ML + ML^2$$

$$ME = r - MJ \Rightarrow ME^2 = r^2 - 2r.MJ + MJ^2$$

$$MF = r + MK \Rightarrow MF^2 = r^2 + 2r.MK + MK^2$$

فرض :

$$MD^2 + ME^2 + MF^2 = k^2$$

$$\Rightarrow k^2 = 3r^2 + (ML^2 + MJ^2 + MK^2) + 2r(MK - ML - MJ)$$

قسمت داخل پرانتز آخر برابر صفر است.

$$ML^2 + MJ^2 + MK^2 = k^2 - 3r^2$$

و پرانتز قبل از آن مجموع مربعهای فاصلهٔ یک نقطهٔ M از رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاع JKL است که برابر است با :

$$ML^2 + MJ^2 + MK^2 = 3MN^2 + 3MN^2 = 6MN^2 = \frac{3}{2}MO^2 = \frac{3}{2}m^2$$

بنابراین نتیجه می شود :

$$k^2 = 3r^2 + \frac{3}{2}m^2 \Rightarrow m^2 = \frac{2k^2 - 6r^2}{3} = \text{مقدار ثابت}$$

پس مکان هندسی نقطهٔ M ، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $m = \sqrt{\dfrac{2k^2 - 6r^2}{3}}$ است.

۳۶۰. این مکان هندسی، یک دایره است.

راهنمایی و حل مسأله‌های بخش ۵. دایره

۱.۵. ربع دایرهٔ ثابت

۳۶۱. اگر نقطهٔ O' محل برخورد عمودمنصفهای دو پاره‌خط OA و OB باشد، $O'P = \frac{R}{\sqrt{2}}$ و چون نقطهٔ O ثابت است، پس مکان هندسی نقطهٔ P دایره‌ای به مرکز O' و به شعاع $\frac{R}{\sqrt{2}}$ است.

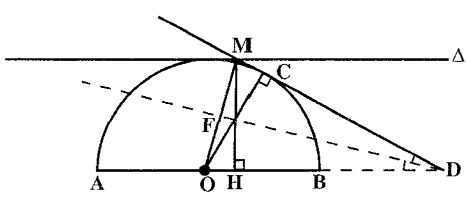
۲.۵. نیمدایرهٔ ثابت

۱.۲.۵. یک نیمدایره

۱.۱.۲.۵. یکِ نیمدایره، یک نقطه

۳۶۲. مثلث DMO متساوی‌الساقین است. چون DF هم نیمساز و هم ارتفاع است، پس $MD = OD$. بنابراین ارتفاعهای وارد بر دو ساق نیز با هم مساوی‌اند، یعنی :

$$MH = OC = R$$



پس مکان هندسی نقطهٔ M خطی است موازی AD به فاصلهٔ R از آن که بر نیمدایرهٔ O مماس است.

۳۶۳. اگر M نقطهٔ دلخواهی از نیمدایره و BMDC مربعی باشد که به ضلع MB ساخته شده باشد، $MB = BC$ و $M\hat{B}C = 90^\circ$ است، و درنتیجه نقطهٔ M با دورانی به مرکز B و شعاع $MB = l$ بر C منطبق می‌شود، یعنی مکان هندسی نقطه C همان نیمدایرهٔ به

قطر AB است که با دورانی به مرکز B و زاویهٔ $\alpha = ۹۰^\circ$ به‌دست می‌آید و چون $M\hat{B}D = ۴۵^\circ$ و $BD = \sqrt{۲}MB$ است، لذا مکان D نیز مجانس نیمدایره، با مرکز تجانس B و نسبت تجانس $\sqrt{۲}$ است که نسبت به مرکز B و به اندازهٔ $\alpha = ۴۵^\circ$ دوران یافته باشد.

۲.۱.۲.۵. یک نیمدایره، یک خط مماس

۳۶۴. از تشابه مثلثها و ویژگی مثلثهای قائم‌الزاویه استفاده کنید.

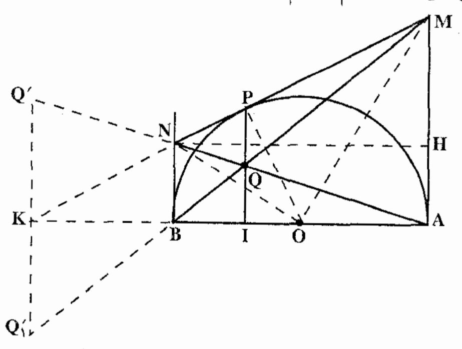
۳.۱.۲.۵. یک نیمدایره، دو خط مماس

۳۶۵. چون AM مساوی PM است و $BN = NP$ و OP بر MN عمود است و زاویهٔ MON یک قائمه است (زیرا OM نیمساز POA و ON نیمساز PON می‌باشد).

پس $\overline{PM}.\overline{PN} = R^۲$ یا $\overline{BM}.\overline{BN} = R^۲$ مقداری ثابت است (ممکن بود اثبات را از مثلث قائم‌الزاویهٔ MNH نیز نتیجه گرفت، زیرا $MN = AM + BN$ به علت تساویهای $MP = MA$ و $NP = BN$ و چون $NM^۲ = NH^۲ + HN^۲$ با ملاحظهٔ $NH = AB$ و $HM = BM - BN$ نتیجه می‌شود که:

$$(AM + BN)^۲ = ۴R^۲ + (AM - BN)^۲$$

چون اعمال طرفین را انجام دهیم حاصل می‌شود: $AM.BN = R^۲$).



خطهای MB و NA در نقطهٔ Q تلاقی می‌کنند؛ بنابر خاصیت چهارضلعی کامل هر قطر به وسیلهٔ دو قطر دیگر به نسبت توافقی تقسیم می‌شود، پس محل تلاقی MN با AB یعنی نقطهٔ K مزدوج I نسبت به A و B می‌باشد و همچنین قطر سوم که نقطهٔ K را به نقطهٔ تلاقی AM و BN وصل می‌کند، یعنی خطی که از K بر AB عمود می‌شود، باید

قطرهای MB و NA را به نسبت توافقی تقسیم کند (این امر مسلم است، زیرا خط عمود از K بر AB قطبی نقطهٔ I نسبت به دایره می‌باشد)، پس نقطهٔ Q' مزدوج Q نسبت به A و N و نقطهٔ Q'_1 مزدوج Q نسبت به M و B می‌باشد، چون قطر سوم $Q'Q'_1$ باید به‌وسیلهٔ دو قطر AN و BM به نسبت توافقی تقسیم شود، پس نقطه‌های Q_1 و Q'_1 نسبت به نقطهٔ K و نقطهٔ برخورد AM و BN (یعنی بینهایت دور) باید مزدوج باشد، پس K وسط $Q_1Q'_1$ می‌باشد. خط PI خطی است که رأس پنجم چهار ضلعی MABN (یعنی نقطهٔ تلاقی AM و BN یعنی بینهایت دور) را به نقطهٔ تلاقی قطرهای BM و AN وصل می‌کند و موازی قطر سوم است و به نسبت توافقی تقسیم می‌شود، پس Q وسط IP می‌باشد. نقطهٔ Q دارای عرضی است نصف عرض نقطهٔ P، پس مکان Q بیضی است که قطر بزرگ آن AB و قطر کوچک آن شعاع قائم‌دایره می‌باشد.

۴.۱.۲.۵. مسأله‌های ترکیبی

۱.۳۶۶. زاویهٔ $\hat{APB}$ ، زاویهٔ خارجی است و مقدار آن برابر است با :

$$\hat{P}=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{MN}}{۲}=\frac{۱۸۰^\circ-۹۰^\circ}{۲}=۴۵^\circ$$

بنابراین مکان آن کمان درخور زاویهٔ ۴۵° نسبت به ضلع AB است.

۲. H زاویهٔ داخلی و مقدار آن برابر است با $\frac{MN+AB}{۲}$ ، پس $\hat{H}=\frac{۱۸۰^\circ+۹۰^\circ}{۲}=۱۳۵^\circ$

بنابراین مکان هندسی نقطهٔ H کمان درخور زاویهٔ ۱۳۵° نسبت به ضلع AB است.

۱.۳۶۷ و ۲. آسان است.

۳. از مجموع زاویه‌های یک مثلث استفاده کنید.

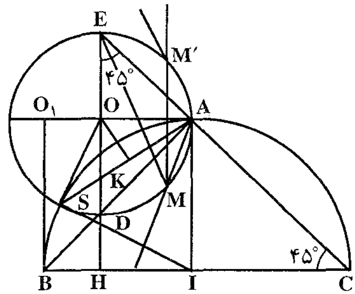
۴. به نصف یک مثلث متساوی‌الاضلاع یعنی به مثلث ۳۰° ـ ۶۰° ـ ۹۰° فکر کنید.

۱.۳۶۸. ویژگی مماسهای رسم شده از یک نقطه بر دایره را به‌کار برید. زاویه‌های EAB و FBA را مقایسه کنید.

۲. امتداد OI کدام است؟

۳. درمورد چهارضلعی ABCD چه می‌توانیم بگوییم؟ نقطه‌های C و D را به دو نقطهٔ ثابت صفحه وابسته کنید.

۴. آسان است.

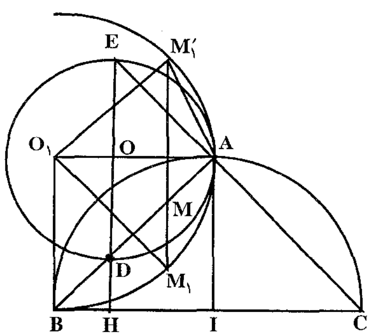


(الف)

۱.۳۶۹ ۱. مثلث ABC که در دایره‌ای به قطر BC محاط است، قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. مثلث EAD قائم الزاویه در رأس A است و زاویهٔ E از آن، که متمم زاویهٔ C است، برابر ۴۵° است. نقطهٔ O وسط پاره‌خط DE، AO بر DE و مماس بر (I) در نقطهٔ A است (شکل الف).

نقطهٔ O این خط مماس را در فاصلهٔ A و $O_۱$ می‌پیماید، زیرا $AO_۱ = IB$.

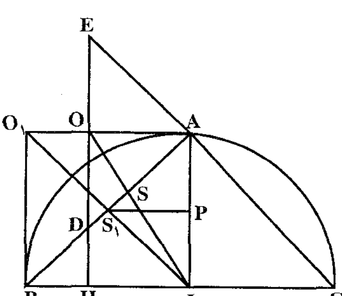
۲. $\hat{DAM} = \hat{DEM}$ است و EM نیمساز زاویهٔ $\hat{DEA}$ است، پس ۲۲° و $۳۰'$ = $\hat{DAM}$. AM نیمساز زاویهٔ BAI است، پس نقطهٔ M روی این خط (نیمساز) تغییر مکان می‌دهد. خط پیموده شده به‌وسیلهٔ M محدود بین دو نقطهٔ A و $M_۱$ است، جایی که دایرهٔ $(O_۱)$ به شعاع $O_۱A$ ، این نیمساز را قطع می‌کند (شکل ب).



(ب)

نقطهٔ M' قرینهٔ نقطهٔ M نسبت به خط AO، قطعه‌ای از خط $AM'_۱$ را که قرینهٔ $AM_۱$ نسبت به خط AO می‌باشد، طی می‌کند.

۳. OI یک محور تقارن دو دایرهٔ (I) و (O) است. OG قرینهٔ OA و IG قرینهٔ IA است. از آن‌جا، IG مماس بر دایرهٔ (O) و OG مماس بر دایرهٔ (I) است (شکل الف). چهار ضلعی IAOG قابل محاط شدن در دایره‌ای به قطر OI است، مرکز آن نقطهٔ S وسط OI می‌باشد. این نقطه، بخشی از خط راستی را می‌پیماید که از نقطهٔ P وسط AI موازی AO رسم می‌شود و محدود بین دو نقطهٔ P و $S_۱$ است که $S_۱$ نقطهٔ برخورد قطرهای مربع $AIBO_۱$ می‌باشد (شکل پ).



(پ)

۴. داریم:

$$\hat{AIG} = ۶۰^\circ \quad , \quad \hat{AIO} = ۳۰^\circ \quad , \quad \hat{AID} = ۶۰^\circ$$

$$AO = AI \tan ۳۰^\circ = R\frac{\sqrt{۳}}{۳} = R'$$

$S_{\Delta AOG}-$ مساحت‌قطاع $AOG + S_{\Delta AIG}-$ مساحت‌قطاع $AIG =$ مساحت بین دوقوس $\overset{\frown}{AG}$

$$A\hat{O}G=۱۲۰^\circ (=۲AOI); AIG \text{ قطاع } S=\frac{\pi R^۲}{۶}\ ,\ AOG \text{ قطاع } S=\frac{\pi OA^۲}{۳}=\frac{\pi R^۲}{۹}$$

$$S_{\Delta AIG}=\frac{R^۲\sqrt{۳}}{۴}$$ (AIG مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع R است)

$$S_{\Delta AOG}=\frac{۱}{۲}AG.OK, AG=R$$

$$OK=\frac{R'}{۲}=\frac{R\sqrt{۳}}{۶}\Rightarrow S_{\Delta AOG}=\frac{R^۲\sqrt{۳}}{۱۲}$$

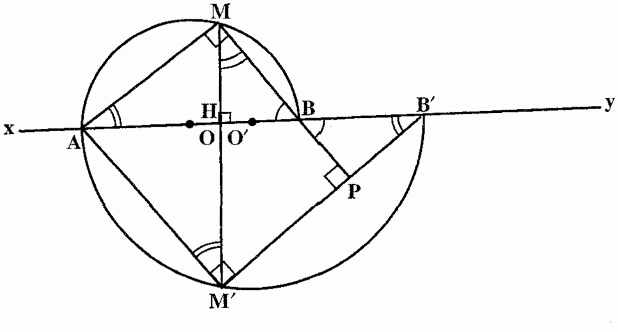
$$\Rightarrow \overset{\frown}{AG} \text{ بین دو قوس } S=\frac{\pi R^۲}{۶}-\frac{R^۲\sqrt{۳}}{۴}+\frac{\pi R^۲}{۹}-\frac{R^۲\sqrt{۳}}{۱۲}=\frac{۵\pi R^۲}{۱۸}-\frac{R^۲\sqrt{۳}}{۳}$$

۲.۲.۵. دو نیمدایره

۱.۳۷۰. از M و M′ به A و B وصل می‌کنیم. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AMB و AM′B′ داریم:

$$AM^۲=AH.AB\ (۱)$$

$$AM'^۲=AH.AB'\ (۲)$$



$$\frac{(۱)}{(۲)}\Rightarrow \frac{AM^۲}{AM'^۲}=\frac{AH.AB}{AH.AB'}=\frac{AB}{AB'}=\frac{۲R}{۲R'}=\frac{R}{R'}$$

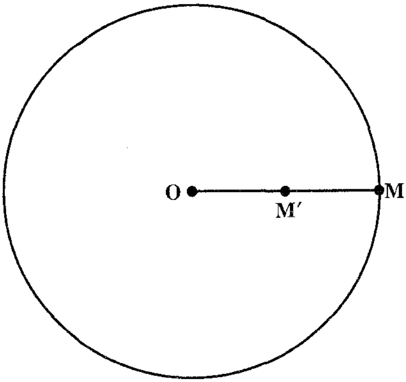
$$\Rightarrow \frac{AM}{AM'}=\sqrt{\frac{R}{R'}}=$$ مقدار ثابت

۲. چهارضلعی AMPM′ محاطی است.

۳.۵. یک دایرهٔ ثابت

۱.۳.۵. تنها یک دایرهٔ ثابت

۳۷۱. اگر نقطهٔ M' وسط شعاع OM از دایرهٔ $C(O,R)$ باشد، مقدار ثابت $= \frac{R}{۲} = OM'$ است و چون O ثابت می‌باشد، پس مکان هندسی نقطهٔ M' دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\frac{R}{۲}$ است (این دایره مجانس دایرهٔ (C) نسبت به مرکز تجانس O و نسبت تجانس $\frac{۱}{۲}$ است).



۳۷۲. داریم :

$$AB = l, MB = MA = \frac{l}{۲}, OB = R$$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{OB^۲ - MB^۲} = \sqrt{R^۲ - \frac{l^۲}{۴}}$$

$$\Rightarrow OM = \sqrt{R^۲ - \frac{l^۲}{۴}}$$

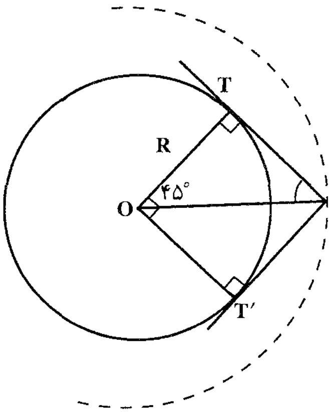
پس مکان هندسی نقطهٔ C دایره‌ای به مرکز B و به شعاع $\sqrt{R^۲ - \frac{l^۲}{۴}}$ است.

۳۷۳. فرض می‌کنیم M یک نقطه از مکان هندسی موردنظر باشد، یعنی زاویهٔ بین دو مماس MA و MB برابر α باشد. از O به A و M وصل می‌کنیم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OMA داریم :

$$O\hat{M}A = \frac{\alpha}{۲}\ ,\ OA = R\ ,\ \sin\frac{\alpha}{۲} = \frac{OA}{OM}$$

$$\Rightarrow OM = \frac{R}{\sin\frac{\alpha}{۲}} = \text{مقدار ثابت}$$

با توجه به ثابت بودن نقطهٔ O، مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\frac{R}{\sin\frac{\alpha}{۲}}$ است.

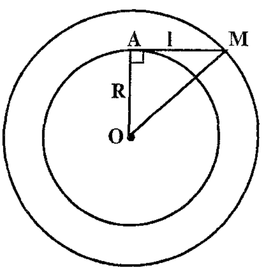


۳۷۴. اگر M یکی از نقطه‌های مکان هندسی موردنظر باشد، داریم :

$$O\hat{M}T = ۴۵^\circ$$
$$\Rightarrow MT = OT = R$$
$$\Rightarrow OM^۲ = R^۲ + R^۲ = ۲R^۲ \Rightarrow OM = R\sqrt{۲}$$

پس مکان دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R\sqrt{۲}$ است.

۳۷۵. مثلث OAM قائم‌الزاویه است و داریم :



$$MA = l, OA = R \Rightarrow OM = \sqrt{OA^۲ + AM^۲}$$
$$= \sqrt{R^۲ + l^۲}$$
$$\Rightarrow OM = \sqrt{R^۲ + l^۲} = \text{مقدار ثابت}$$

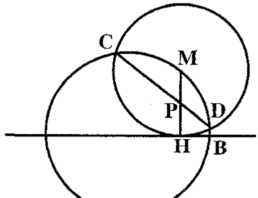
پس مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\sqrt{R^۲ + l^۲}$ است.

۳۷۶. داریم :

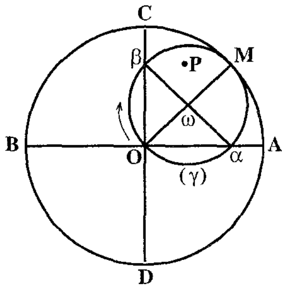
$$۲R = ۶ \Rightarrow R = ۳cm, l = ۴cm$$

این مکان دایره‌ای است، به مرکز آن دایره و به شعاع ۵ ؛ زیرا :

$$R' = \sqrt{R^۲ + l^۲} = \sqrt{۹ + ۱۶} = ۵$$



۳۷۷. فرض کنیم $MH = r$ و $MP = x$ ، نقطهٔ P چون روی محور اصلی دو دایره واقع است، پس قوت آن نسبت به دو دایره یک اندازه است. $r^۲ - x^۲ = x(۲r - x)$. از آن‌جا $x = \frac{r}{۲}$ ، پس P وسط MH است و چون $\frac{PH}{HM} = \frac{۱}{۲}$ وقتی M دایرهٔ به قطر AB را طی می‌کند، P بیضی را طی می‌کند که دایرهٔ مذکور دایرهٔ اصلی آن است.



۳۷۸. فرض می‌کنیم α یک نقطه از (γ) و A یک نقطه از (C) باشند که در شروع غلتیدن (γ) روی (C) بر هم منطبق باشند. قوسهای MA و $M\alpha$ دارای طولهای مساوی می‌باشند، چون غلتیدن بدون لغزش است.

می‌گوییم α قطر گذرنده بر A از دایرهٔ (C) را طی می‌کند، چون اگر A' فصل مشترک $O\alpha$ با (C) باشد و اگر شعاع دایرهٔ (C) را به r نمایش دهیم، داریم:

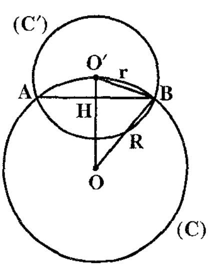
$$\widehat{M\alpha}=\frac{r}{۲}\times M\hat{\omega}\alpha \ , \ \widehat{MA'}=r\times M\hat{O}A'=r\times\frac{M\hat{\omega}\alpha}{۲}$$

بنابراین قوسهای $\widehat{M\alpha}$ و $\widehat{MA'}$ دارای یک طول می‌باشند و درنتیجه A' بر A منطبق است. از طرف دیگر اگر M با شروع از A یک چهارم دور بپیماید، α شعاع AO را خواهد پیمود و اگر M یک دور تمام بپیماید، α از A به B رفته و از B به A برخواهدگشت (شکل). نقطهٔ β متقاطر α قطر CD را که عمود بر AB است، خواهد پیمود.

اگر فرض کنیم که قطر $\alpha\beta$ به‌طور تثبیت شده‌ای وابسته به دایرهٔ (γ) است، هر نقطهٔ P که بسته به r باشد، به قطر $\alpha\beta$ نیز بسته خواهد شد و مکان هندسی نقطهٔ P یک بیضی است.

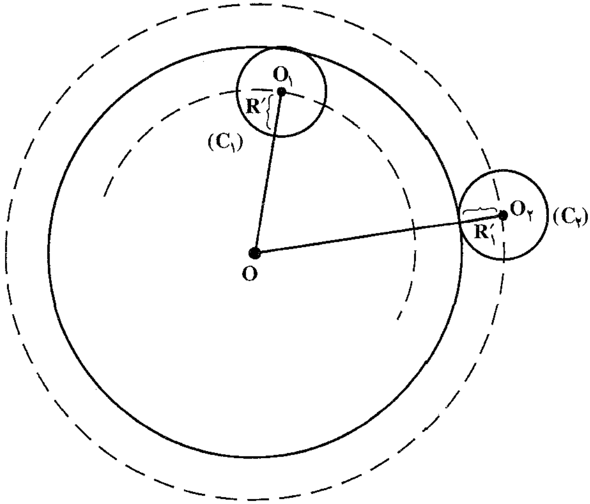
۳۷۹. اگر H وسط یکی از وتر مشترکهای AB به‌طول ثابت l باشد، داریم:

$$O'H=\sqrt{r^۲-\frac{l^۲}{۴}}\ , OH=\sqrt{R^۲-\frac{l^۲}{۴}}$$

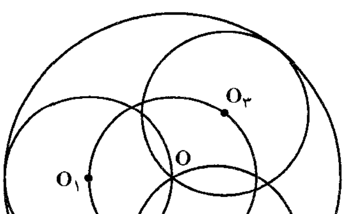


$$OO'=OH+O'H=\sqrt{R^۲-\frac{l^۲}{۴}}+\sqrt{r^۲-\frac{l^۲}{۴}}=R'$$

پس مکان هندسی دایره‌ای هم مرکز با دایرهٔ (C) است، یعنی دایره‌ای به مرکز O و به شعاع مقدار ثابت R'.



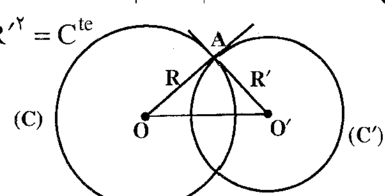
۳۸۰. اگر $C_1(O_1, R')$ یکی از دایره‌های مماس درون با دایرهٔ (C) باشد، $OO_1 = |R - R'|$ است، پس مکان هندسی نقطهٔ O_1 دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $|R - R'|$ می‌باشند. حال اگر $C_2(O_2, R'_1)$ یکی از دایره‌های مماس برون با دایرهٔ $C(O, R)$ باشد، مقدار ثابت $= OO_2 = R + R'$ است، پس مکان هندسی نقطهٔ O_2 دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R + R'$ است.



۳۸۱. برای دایره‌های مماس برون، چون فاصلهٔ تمام مرکزهای دایره‌های مکان، از دایرهٔ مفروض به اندازهٔ $\frac{3R}{2}$ است، پس مکان هندسی مرکزهای این دایره‌ها، دایره‌ای است به مرکز O و شعاع $\frac{3R}{2}$ و برای دایره‌های مماس درون، مکان هندسی مرکز دایره‌های جواب مسأله دایره‌ای به شعاع $\frac{R}{2}$ است.

۳۸۲. اگر مرکز دایرهٔ به شعاع R' را O' بنامیم، داریم :

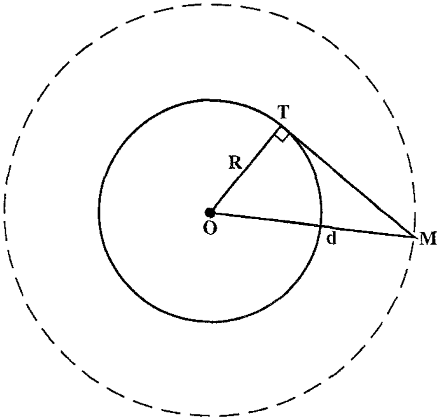
$$OO'^2 = R^2 + R'^2 = C^{te}$$



پس $OO' = \sqrt{R^2 + R'^2}$. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ O' دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\sqrt{R^2 + R'^2}$ است.

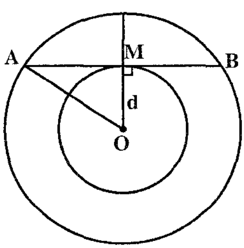
۳۸۴. اگر M یک نقطه از مکان باشد، برحسب این که M داخل یا خارج دایره باشد، دو حالت درنظر می‌گیریم :

الف. M خارج دایره است، در این صورت داریم :



$$P_{M(C)} = d^{۲} - R^{۲} \Rightarrow d^{۲} = R^{۲} + P\ (۱) \Rightarrow d = \sqrt{R^{۲} + P}$$

ب. M داخل دایره است، در این صورت می‌توان نوشت :



$$P_{M(C)} = -(d^{۲} - R^{۲}) = P \text{ یا } d^{۲} = P - R^{۲}$$

و یا

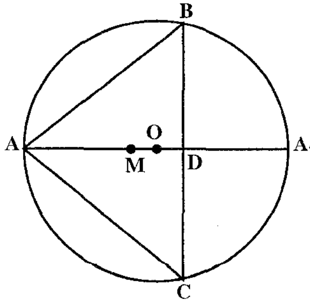
$$d = \sqrt{P - R^{۲}}\ (۲)$$

چنانچه ملاحظه می‌شود، در هر حالت d یعنی فاصلهٔ نقطهٔ M تا مرکز دایره مقداری است ثابت، و درنتیجه، مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای است به مرکز دایرهٔ (C) و شعاع

$$R' = d = \sqrt{P - R^{۲}} \quad \text{و یا} \quad R' = d = \sqrt{R^{۲} + P}$$

۳۸۵. این مکان هندسی دایرهٔ نه نقطهٔ آن مثلث است.

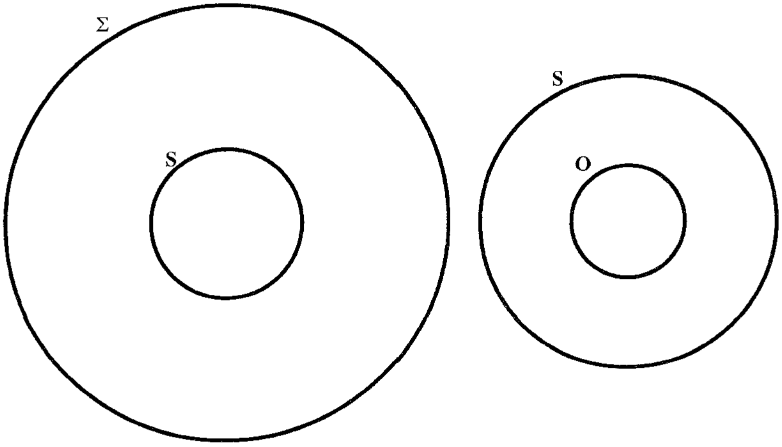
۳۸۶. ابتدا باید توجه کرد که نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC، محاط در دایرهٔ S، درون ΔABC و بنابراین درون دایرهٔ S قرار می‌گیرد. از سوی دیگر، به‌ازای هر نقطهٔ M در داخل S می‌توانیم یک مثلث ABC در S محاط کنیم که M مرکز هندسی آن باشد. برای این کار کافی است یک نقطهٔ D بر قطر $AA_۱$ که از M می‌گذرد انتخاب کنیم (که در آن $AM \le MA_۱$)



(الف)

به‌طوری که $AM:MD = ۲:۱$ (شکل ۱) و سپس وتر BC متعلق به دایره را طوری از D بگذرانیم که BC بر OD عمود باشد، پس مکان هندسی مرکز هندسی همهٔ مثلثهای محاط

در دایرهٔ S دقیقاً مجموعهٔ Kی همهٔ نقطه‌هایی است که در درون S واقعند (شکل ۲، الف). اگر H مرکز ارتفاعی ΔABC محاط در دایرهٔ S به مرکز O باشد و M مرکز هندسی آن، آن‌گاه $OH:OM = ۳:۱$. از این‌جا نتیجه می‌شود که مکان هندسی مرکز ارتفاعی همهٔ مثلثهای محاط در دایرهٔ S بر مجموعهٔ Kی همهٔ نقطه‌های واقع در داخل دایرهٔ Σ هم مرکز با S و با شعاعی سه برابر شعاع S منطبق است (شکل ۲، ب). اکنون کافی است یادآور شویم که مرکز ارتفاعی مثلث حادةالزوایای ABC درون مثلث و درنتیجه درون S قرار دارد (شکل ۳، الف). مرکز ارتفاعی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC محاط در دایرهٔ S و قائمه در رأس A بر A منطبق است و بنابراین بر S واقع است (شکل۳، ب). سرانجام، مرکز ارتفاعی مثلث منفرج الزاویهٔ ABC محاط در S و با زاویهٔ منفرجه در رأس A، بر امتداد ارتفاع AP از طرف A واقع است و بنابراین بیرون از S واقع می‌شود (شکل ۳، ج). بنابراین، مکان هندسی مرکز ارتفاعی همهٔ مثلثهای حادةالزوایای محاط در S منطبق است بر مجموعهٔ Kی همهٔ نقطه‌هایی که درون S واقعند ؛ این مکان هندسی برای مثلثهای قائم‌الزاویهٔ محاط در S، بر دایرهٔ S منطبق است و برای مثلثهای منفرج‌الزاویهٔ محاط در S، متشکل است از نقطه‌های واقع بر طوق بین دو دایرهٔ هم مرکز S و Σ (شکل ۲، ب).

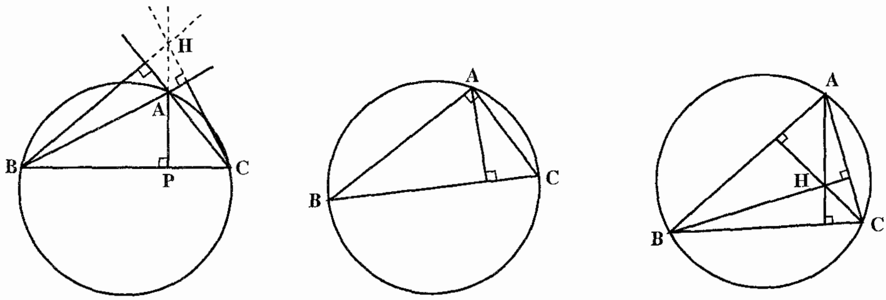


(ب) (الف)

(شکل ۲)

سرانجام، چون مرکز هندسی مثلث ABC محاط در S از مرکز ارتفاعی آن بر اثر یک تجانس به مرکز O، مرکز S و با نسبت ۱/۳ به‌دست می‌آید، از این‌جا نتیجه می‌شود که مکان هندسی مرکز هندسی همهٔ مثلثهای حادةالزوایای محاط در S بر مجموعهٔ Kی همهٔ

نقطه‌هایی منطبق است که درون دایرهٔ σ هم مرکز با S و با شعاعی برابر با ۱/۳ شعاع S، قرار دارند. به‌همین ترتیب، مکان هندسی مرکز هندسی همهٔ مثلثهای قائم‌الزاویهٔ محاط در S بر دایرهٔ σ منطبق است و مکان هندسی مرکز هندسی همهٔ مثلثهای منفرج‌الزاویهٔ محاط در S بر مجموعهٔ نقطه‌های واقع در طوق بین σ و S (شکل ۲، الف).



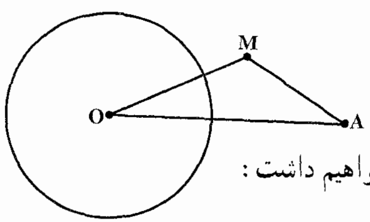
(الف) (ب) (ج)

۲.۳.۵. یک دایرهٔ ثابت، نقطه‌های ثابت

۱.۲.۳.۵. یک دایره، یک نقطه

۱.۱.۲.۳.۵. یک دایره، یک نقطه در صفحهٔ دایره

۳۸۷. دایرهٔ $C(O, R)$، نقطهٔ ثابت A و نقطهٔ متغیر M را در صفحهٔ این دایره درنظر می‌گیریم. بنا به فرض داریم:



الف. $AM^2 = P_{O(A)} + P_{O(M)}$. ازآن‌جا خواهیم داشت:

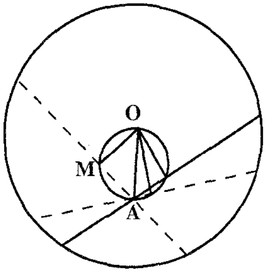
$$AM^2 = OA^2 - R^2 + OM^2 - R^2 \Rightarrow MO^2 - MA^2 = 2R^2 - OA^2 = \text{مقدار ثابت}$$

پس مکان هندسی نقطهٔ M خطی است راست عمود بر خط OA.

ب. $AM^2 = P_{O(A)} - P_{O(M)}$. در این صورت داریم:

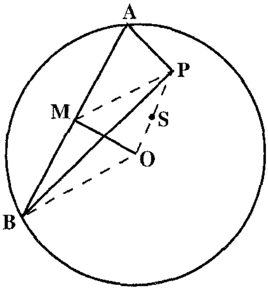
$$AM^2 = OA^2 - R^2 - (OM^2 - R^2) \Rightarrow MA^2 + MO^2 = OA^2 = \text{مقدار ثابت} = K^2$$

پس مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای است به مرکز وسط پاره‌خط OA و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2K^2 - OA^2}$.



۳۸۸. اگر O را به وسطهای وترها وصل کنیم، زاویه‌های قائمهٔ روبه‌رو به وتر OA به‌وجود می‌آیند. بنابراین محاط در دایرهٔ به شعاع $\frac{OA}{۲}$ هستند.

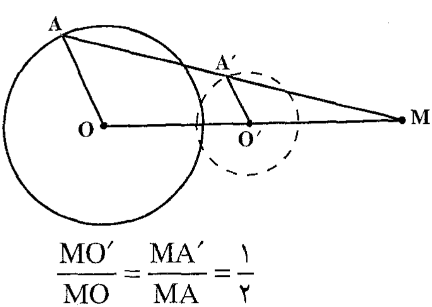
بحث. برحسب آن که نقطهٔ A داخل دایره، روی دایره یا خارج دایره باشد، تمام یا بخشی از دایرهٔ به شعاع $\frac{OA}{۲}$ جزء مکان هندسی است.



۳۸۹. فرض می‌کنیم AB یکی از وترهای مفروض و زاویهٔ $A\hat{P}B$ قائمه و M وسط AB باشد. نقطهٔ O مرکز دایره را به M وصل کرده، ملاحظه می‌کنیم که مثلث OMB قائم‌الزاویه است، پس داریم $OM^۲ + MB^۲ = R^۲$ امّا در مثلث قائم‌الزاویهٔ APB میانهٔ PM نصف وتر و بنابراین مساوی با MB است. پس داریم $OM^۲ + MP^۲ = R^۲$ یعنی مجموع مجذورهای فاصله‌های نقطهٔ M از دو نقطهٔ O و P مساوی مقدار ثابت $R^۲$ است و بنابراین مکان هندسی آن دایره‌ای است که مرکز آن نقطهٔ S وسط OP و شعاع آن $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲R^۲ - OP^۲}$ است.

شرط امکان مسأله آن است که $OP^۲ \le ۲R^۲$ یعنی $OP \le R\sqrt{۲}$ باشد و بنابراین باید P در داخل دایره‌ای هم مرکز با دایرهٔ مفروض و به شعاع $R\sqrt{۲}$ واقع باشد.

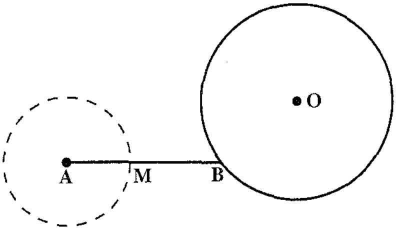
۳۹۰. مکان مطلوب دایره‌ای است که شعاع آن نصف شعاع دایرهٔ ثابت است و مرکز آن وسط پاره‌خط واصل بین نقطهٔ ثابت و مرکز دایرهٔ ثابت می‌باشد، زیرا اگر $C(O, R)$ دایرهٔ مفروض و M نقطهٔ ثابت و نقطهٔ A وسط پاره‌خط MA و نقطهٔ O' وسط پاره‌خط OM باشد، داریم:



$$\frac{MO'}{MO} = \frac{MA'}{MA} = \frac{۱}{۲}$$

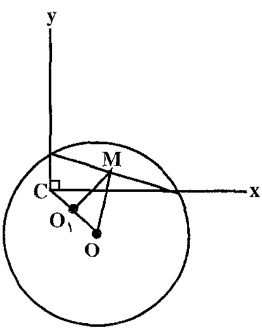
یعنی نقطه‌های O' و A' مجانس نقطه‌های O و A نسبت به مرکز تجانس M و نسبت تجانس $\frac{۱}{۲}$ است.

۳۹۱. این مکان، دایره‌ای مجانس دایرهٔ (O) نسبت به مرکز تجانس A و با نسبت تجانس $k=\frac{n}{m+n}$ است؛ زیرا داریم:



$$\frac{MA+MB}{MA}=\frac{m+n}{n}\Rightarrow\frac{AB}{MA}=\frac{m+n}{n}\Rightarrow\frac{AM}{AB}=\frac{n}{m+n}=$$ مقدار ثابت

تبصره. اگر روی خط AB دو نقطه با شرط $\frac{MB}{MA}=\frac{m}{n}$ اختیار کنیم، مسأله دو جواب دارد. ولی اگر $\frac{m}{n}$ عددی جبری باشد، مسأله تنها یک جواب خواهد داشت.

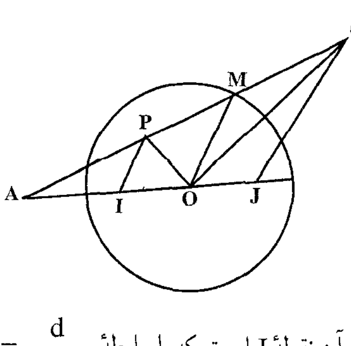


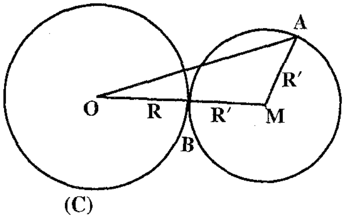
۳۹۲. اگر O مرکز دایرهٔ مفروض، R مقدار شعاع آن و C، رأس زاویهٔ قائمه باشد، آن وقت، مکان هندسی موردنظر، دایره‌ای است که مرکز آن، در وسط پاره‌خط راست OC قرار دارد و شعاع آن، برابر است با $\sqrt{2R^2-|OC|^2}$.

۳۹۳. فرض کنیم $OA=d$ و $OM=R$ اگر پای نیمساز داخلی $A\hat{O}M$ را P بنامیم، (شکل)، داریم:

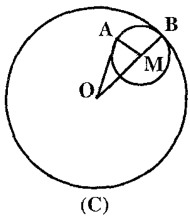
$$\frac{AP}{PM}=\frac{d}{R}\ ,\ \frac{PA}{PM}=\frac{-d}{R}\ ,\ \frac{AP}{AM}=\frac{d}{d+R}$$

پس نقطهٔ P دایرهٔ مجانس دایرهٔ (O) در تجانس $(A,\frac{d}{R+d})$ را می‌پیماید که شعاع آن $\frac{dR}{d+R}$ و مرکز آن نقطهٔ I است که با رابطهٔ $\frac{AI}{AO}=\frac{d}{R+d}$ معین شده است و به‌همین ترتیب اگر Q پای نیمساز خارجی $A\hat{O}M$ باشد، $\frac{AQ}{MQ}=\frac{d}{R}$ و $\frac{AQ}{AM}=\frac{d}{d-R}$ و Q دایرهٔ مجانس دایرهٔ (O) را می‌پیماید که شعاع آن $\frac{dR}{d-R}$ و مرکز آن نقطهٔ J است که با رابطهٔ $\frac{AJ}{AO}=\frac{d}{d-R}$





۳۹۴. دایرهٔ $C(O, R)$ و نقطهٔ ثابت A را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم M مرکز یک دایره به شعاع R' از دایره‌های مکان هندسی موردنظر یعنی مرکز دایره‌ای باشد که بر دایرهٔ (C) در نقطهٔ B مماس خارج است و از نقطهٔ A می‌گذرد. در این صورت داریم :



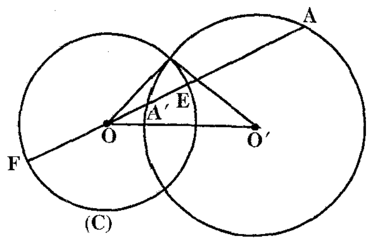
مقدار ثابت $= MO - MA = (R + R') - R' = R$

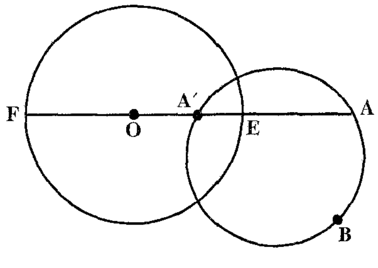
پس مکان هندسی نقطهٔ M یک هذلولی به کانونهای A و O و عدد ثابت R است. درصورتی که نقطهٔ A درون دایرهٔ $C(O, R)$ باشد، داریم :

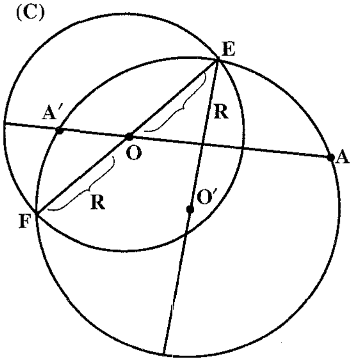
$$MA + MO = R' + R - R' = R$$

پس مکان هندسی نقطهٔ M یک بیضی به کانونهای A و O و عدد ثابت R است.

۳۹۵. قطری از دایرهٔ $C(O, R)$ را که از نقطهٔ A می‌گذرد، رسم می‌کنیم و دو سر این قطر را E و F می‌نامیم. هر دایره که بر نقطهٔ A بگذرد و بر دایرهٔ (C) عمود باشد، بر نقطهٔ A' مزدوج توافقی نقطهٔ A نسبت به دو نقطهٔ E و F نیز می‌گذرد، پس مکان هندسی مرکز این دایره‌ها عمود منصف پاره‌خط AB است. برای رسم دایره‌ای که بر دو نقطهٔ A و B بگذرد، مزدوج توافقی نقطهٔ A نسبت به دو قطر دایرهٔ مفروض را که از نقطهٔ A می‌گذرد، A' می‌نامیم. دایرهٔ گذرنده از A، A' و B جواب مسأله است.







۳۹۶. دایرهٔ $C(O, R)$ و نقطهٔ A را در صفحهٔ این دایره درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم دایرهٔ $C'(O', R')$ یکی از دایره‌های جواب مسأله باشد، یعنی دایره‌ای باشد که از نقطهٔ A گذشته و دایرهٔ (C) را نصف کرده است. قطری از دایرهٔ (C) را که از A می‌گذرد، رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (C) را در نقطهٔ A' قطع کند. قوت نقطهٔ O نسبت به دایرهٔ (C') برابر است با :

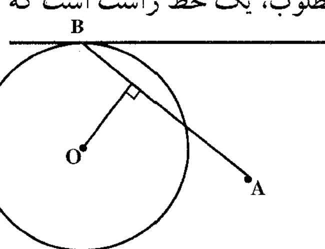
$$\overline{OA}.\overline{OA'} = \overline{OE}.\overline{OF} = -R^2 \Rightarrow \overline{OA'} = \frac{-R^2}{\overline{OA}} = \text{مقدار ثابت}$$

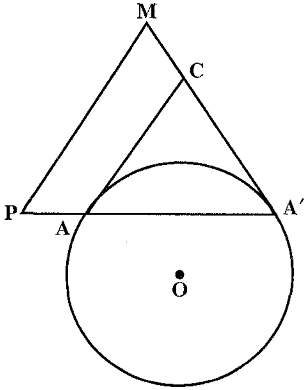
پس نقطهٔ A' ثابت است، یعنی هر دایره‌ای که از A بگذرد و دایرهٔ (C) را نصف کند، از نقطهٔ A' نیز می‌گذرد. بنابراین مکان هندسی مرکز این دایره‌ها عمودمنصف پاره‌خط AA' است.

۳۹۷. اگر C مرکز دایرهٔ دوم باشد، این نقطه روی عمودمنصف AB است. شعاعهای CA و CP را وصل کرده، شعاع دایرهٔ ثابت را R می‌نامیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAC داریم : $AC^2 = OC^2 + R^2$ و چون $AC = CP$، بنابراین $CP^2 - CO^2 = R^2$ و بنابراین تفاضل مجذورهای فاصله‌های نقطهٔ C از دو نقطهٔ ثابت O و P مساوی با مقدار ثابت R^2 است و مکان آن خطی است عمود بر OP که پای آن D، از وسط OP به فاصلهٔ $\frac{R^2}{2OP}$ واقع است.

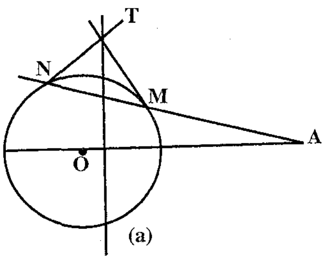
۳۹۸. فرض کنید N معرف نقطهٔ برخورد عمودمنصف و مماس باشد ؛ O مرکز دایره و R شعاع آن است. داریم : $ON^2 - NA^2 = R^2 + MN^2 - NA^2 = R^2$.
بنابراین مکان هندسی مطلوب، خط راستی عمود بر OA است.

۳۹۹. مجموعهٔ نقطه‌های مطلوب، یک خط راست است که قطبی نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ مفروض است.





۴۰۰. اگر C نقطهٔ تلاقی دو مماس باشد، مثلث CAA' متساوی‌الساقین بوده و با مثلث MPA' متشابه است، پس MPA' نیز متساوی‌الساقین می‌باشد و $MP = MA'$ است. $MA'^{۲}$ قوت نقطهٔ M نسبت به دایرهٔ (O) و $MP^{۲}$ قوت نقطهٔ M نسبت به نقطهٔ P (دایرهٔ به شعاع صفر) است، پس مکان هندسی نقطهٔ M محور اصلی دایرهٔ (O) و نقطهٔ P است.

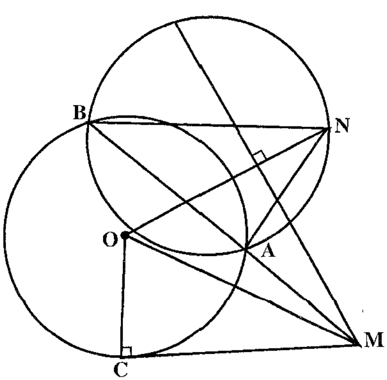


۴۰۱. اگر AMN قاطع دلخواه رسم شده از A و نقطهٔ T، نقطهٔ تقاطع مماسهای رسم شده از M و N بر دایره باشد، خط AMN قطبی T نسبت به دایرهٔ (O) است.

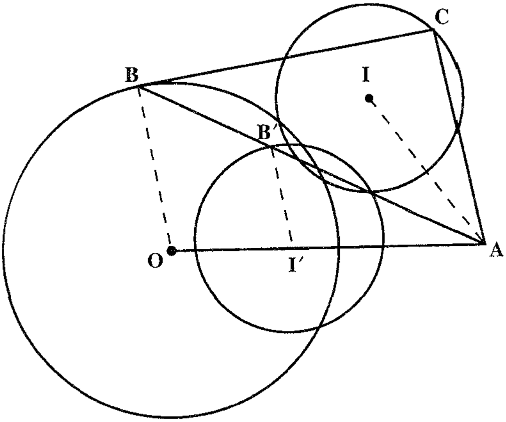
چنانچه قاطع AMN تغییر نماید، نقطهٔ T تغییر نموده لیکن پیوسته T قطب خط AMN است، یعنی مکان T قطبهای خطهای گذرنده بر A است. یعنی مکان T قطبی نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ (O) می‌باشد، (زیرا قطبهای کلیهٔ خطهایی که از یک نقطه می‌گذرند بر قطبی آن نقطه واقعند.)

۴۰۲. فرض کنید O معرف مرکز دایرهٔ مفروض، R شعاع آن و MC مماس بر دایره باشد. داریم :

$$MO^{۲} - MN^{۲} = MO^{۲} - MB.MA = MO^{۲} - MC^{۲} = R^{۲}$$

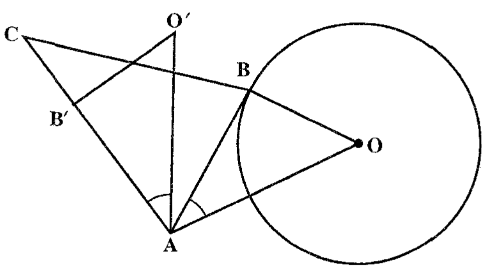


یعنی نقطهٔ M روی خط راستی عمود بر خط راست ON قرار دارد. بسادگی، می‌توان نشان داد که همهٔ نقطه‌های این خط، به مکان هندسی تعلق دارند.



۴۰۳. چون مثلث ABC متشابه با مثلث معلومی است، زاویهٔ $\hat{A}$ و نسبت $\frac{AC}{AB}$ از آن در دست است.

فرض می‌کنیم $B\hat{A}C = \alpha$ و $\frac{AC}{AB} = \frac{p}{q}$ باشد. روی AB نقطهٔ B' را چنان اختیار می‌کنیم که $\frac{AB'}{AB} = \frac{p}{q}$ باشد و $AB' = AC$. مکان هندسی B' دایره‌ای است مانند I که مجانس با دایرهٔ O نسبت به مرکز A نسبت $\frac{p}{q}$ است. حال اگر خط AB' و دایرهٔ I را حول A به زاویهٔ α دوران دهیم، نقطهٔ B' بر C منطبق شده، I وضع مشخص I' را اختیار می‌کند، لذا نقطهٔ C بر دایرهٔ I' واقع است که وضع آن بستگی به AB ندارد.



۴۰۴. فرض کنید ABC (شکل) یک موضع مثلث متغیر باشد، که در آن A رأس ثابت است و B روی دایرهٔ مفروض به مرکز O، قرار دارد. روی AC، AB' را برابر AB جدا کنید و روی AB' مثلث $AO'B'$ را همنهشت با AOB رسم کنید، به‌طوری که دو مثلث به‌طور متشابه قرار گرفته باشند، یعنی بتوان با دوران AOB حول رأس A آن را بر روی $AO'B'$ منطبق کرد.
چون بنابر شیوهٔ ترسیم بالا، $O'\hat{A}B' = O\hat{A}B$، داریم $O'\hat{A}O = B'\hat{A}B$. زاویهٔ دوم در آخرین تساوی، مفروض است، پس AO' با خط ثابت AO زاویهٔ ثابتی می‌سازد؛ پس راستای AO' ثابت است. بعلاوه، AO' با طول مفروض AO برابر است؛ پس نقطهٔ O' ثابت است و چون $O'B' = OB$، نقطهٔ B' یک دایره، (B') را می‌پیماید.
چون مثلث ABC همواره با مثلث مفروضی متشابه است، داریم:

$$AC : AB' = AC : AB$$

پس مکان هندسی C یک دایره، (O'') است که با مکان هندسی B' متجانس است و قضیه اثبات می‌شود.

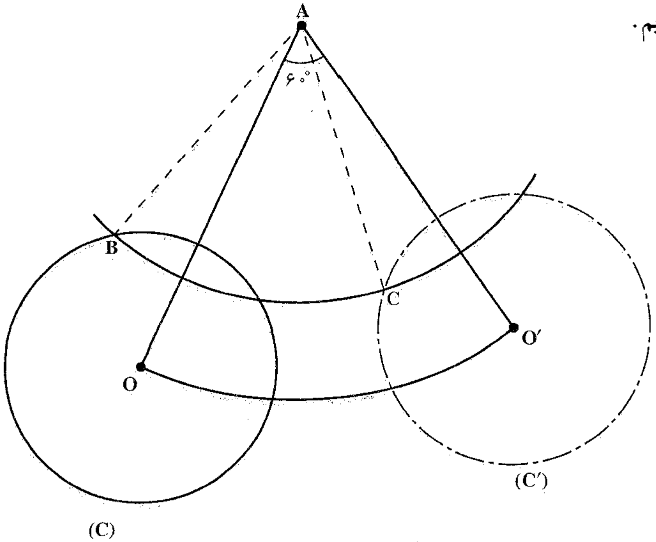
به‌عنوان تمرین، نشان دهید که مثلث AOO''، که O'' مرکز دایرهٔ (O'') است، با مثلث مفروض تشابه مستقیم دارد.

نکته. اگر دایرهٔ مفروض (O)، که مسیر رأس B است، به‌طور صلب حول نقطهٔ ثابت مفروض A به اندازهٔ زاویهٔ مفروض BAC دوران کند، مکان جدید این دایره همان (B') یعنی مکان هندسی نقطهٔ B' است. مکان هندسی C دایره‌ای است که در تجانس $(A, AC:AB)$ با دایرهٔ (B') متناظر است.

۴۰۵. اگر A رأس ثابت و B رأسی از مثلث ABC متکی بر دایرهٔ (C) باشد، چنانچه به (C) دورانی به مرکز A و زاویهٔ $\alpha = 60°$ داده شود، نقطهٔ B بر C منطبق می‌شود، درنتیجه وقتی B بر دایرهٔ (C) تغییر می‌نماید، C وضع جدید نقطه‌های مختلف B واقع بر دایرهٔ (C) خواهد بود که با دوران دایرهٔ (C) حول نقطهٔ A به زاویهٔ $\alpha = 60°$ به‌دست می‌آید، یعنی مکان C دایرهٔ (C') است که از دوران دایرهٔ C حول نقطهٔ A و با زاویهٔ $\alpha = 60°$ به‌دست می‌آید.

یادآوری. ۱. درصورتی که به‌جای دایرهٔ (C) خط D باشد، باز مکان نقطهٔ C از دوران خط D به‌دست می‌آید.

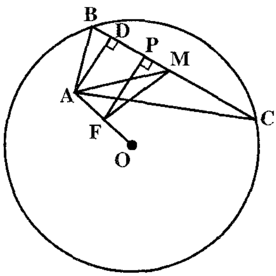
۲. چنانچه به جای مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلث متساوی‌الساقین باشد، مجدداً دایره یا خط Dی مکان B را، با دورانی حول A و با زاویهٔ $\alpha = \hat{A}$ مکان رأس C، به‌دست می‌آوریم.



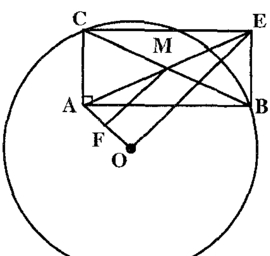
۴۰۶. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OCN داریم :

$$OM.ON = OC^{۲} = R^{۲}$$

چون مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز F وسط AO و به شعاع $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲R^{۲} - AO^{۲}}$ است، پس مکان هندسی نقطهٔ N منعکس دایرهٔ (F , FM) نسبت به مرکز انعکاس O و قوت انعکاس $R^{۲}$ است و می‌دانیم که این منعکس یک دایره است که به راحتی می‌توان آن را مشخص کرد.

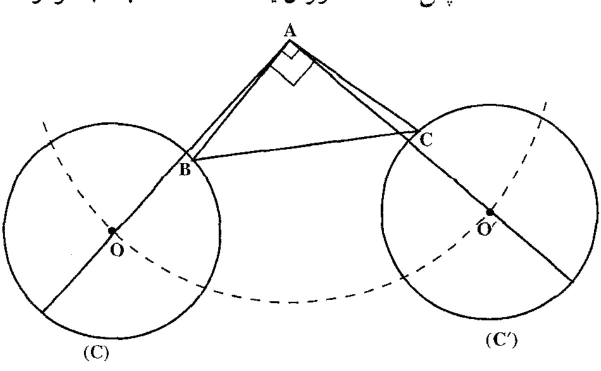


۴۰۷. دایرهٔ ثابت C (O , R) را درنظر می‌گیریم. می‌دانیم که مکان هندسی نقطهٔ M وسط وتر BC دایره‌ای به مرکز نقطهٔ F وسط AO و به شعاع $MF = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲R^{۲} - AO^{۲}}$ است. مکان هندسی نقطهٔ D نیز همین دایره است، زیرا اگر از نقطهٔ F عمودبر FP را بر BC رسم کنیم، P وسط MD می‌باشد، چون F وسط AO و خطهای OM، FP و AD موازی‌اند. بنابراین $FD = FM = C^{te}$ است.

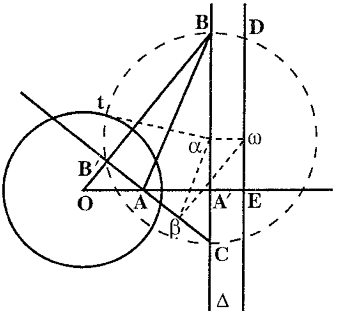


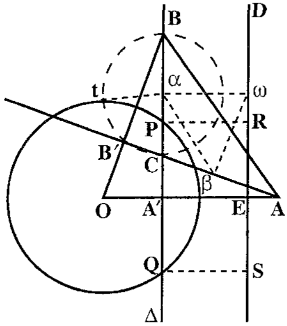
۴۰۸. از O به A وصل می‌کنیم، وسط پاره‌خط AO را F و وسط وتر BC را M می‌نامیم. M وسط AE نیز هست، پس $AE = ۲AM$ و $AO = ۲AF$ می‌باشد. از آن‌جا $OE = ۲FM$ ، یعنی مقدار ثابتی است، زیرا می‌دانیم که $FM = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲R^{۲} - AO^{۲}}$ است.

۴۰۹. چون $AB = AC$ و $B\hat{A}C = ۹۰^{\circ}$ است، پس نقطهٔ C دوران یافتهٔ نقطهٔ B نسبت به مرکز دوران A و زاویهٔ دوران ۹۰° است. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ C دایره‌ای است که از دوران دایرهٔ (O) نسبت به مرکز دوران A و با زاویهٔ دوران ۹۰° به‌دست می‌آید.



۴۱۰. یک مثلث ABC به رأس A مزدوج نسبت به دایرهٔ (O) را می‌سازیم. برای این کار نقطهٔ B را روی خط Δ ، قطبی نقطهٔ A نسبت به دایره، اختیار می‌کنیم و نقطهٔ برخورد قطبی نقطهٔ B با خط Δ را C می‌نامیم. برای تعیین مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC، از نقطه‌های α و β که بترتیب وسط ضلعهای BC و CA می‌باشد، عمودهایی بر این ضلعها اخراج می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ ω قطع کنند.





مثلثهای ABO و $\alpha\beta\omega$ ضلعهای متناظر موازی دارند، پس مجانس یکدیگرند و چون $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{\alpha\beta}$ مختلف‌الجهت هستند، پس مجانس معکوس یکدیگرند و نسبت تجانس برابر است با $\frac{\overline{AB}}{\overline{\alpha\beta}} = -۲$. بنابراین داریم :

$$\frac{\overline{AO}}{\overline{\alpha\omega}} = -۲ \Rightarrow \overline{\alpha\omega} = \frac{\overline{OA}}{۲}$$

نقطهٔ برخورد Δ و OA را A′ می‌نامیم و عمود ωE را بر OA فرود می‌آوریم. خواهیم داشت :

$$\overline{\alpha\omega} = \overline{A'E}$$

و از آن‌جا داریم :

$$\overline{A'E} = \frac{\overline{OA}}{۲}$$

این رابطه نشان می‌دهد که نقطهٔ E ثابت است، پس مکان هندسی نقطهٔ ω خط D است که از نقطهٔ E عمود بر خط راست OA رسم می‌شود.

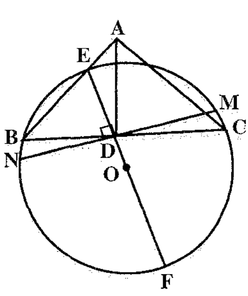
بعکس ثابت می‌شود هر نقطه از خط D به مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلثهای ABC تعلق دارد. برای اثبات از نقطهٔ دلخواه ω واقع بر D عمود $\omega\alpha$ را بر خط Δ فرود می‌آوریم و به‌جستجوی ساختن نقطه‌های B و C قرینه نسبت به نقطهٔ α و مزدوج نسبت به دایرهٔ (O) می‌پردازیم.

فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد. دایرهٔ (γ) به قطر پاره‌خط BC باید بر دایرهٔ (O) عمود باشد. حال اگر از نقطهٔ α مرکز دایرهٔ (γ) مماس αt را بر دایرهٔ (O) رسم کنیم، طول این مماس باید برابر $\alpha B = \alpha C$ شعاع دایرهٔ (γ) باشد. اکنون ساختمان زیر حاصل می‌شود.
از نقطهٔ α، تصویر نقطهٔ ω روی خط Δ، مماس αt را بر دایرهٔ (O) رسم می‌کنیم. به مرکز α و به شعاع αt دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره‌خط Δ را در دو نقطهٔ B و C قطع می‌کند. دایرهٔ محیطی مثلث ABC به مرکز نقطهٔ ω می‌باشد.
برای این که ترسیم بالا امکان داشته باشد، باید نقطهٔ α خارج دایرهٔ (O) واقع باشد. اگر نقطهٔ A درون دایرهٔ (O) باشد، خط Δ به تمامی، خارج دایرهٔ (O) قرار می‌گیرد و در این صورت هر نقطهٔ ω از خط D به مکان هندسی تعلق دارد.
اگر نقطهٔ A درون دایرهٔ (O) باشد، خط Δ دایرهٔ (O) را در دو نقطهٔ P و Q قطع می‌کند. در این حالت برای این که نقطهٔ ω به مکان هندسی خواسته شده تعلق داشته باشد، نقطهٔ α روی خط Δ در خارج پاره‌خط PQ و برای آن باید نقطهٔ ω خارج پاره‌خط RS اختیار شود.

۴۱۱. یکی از مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین $ABC(\hat{A} = 90^\circ)$ را که طول وترش $BC = a$ است، درنظر می‌گیریم. عمودمنصف وتر BC را رسم می‌کنیم. این عمودمنصف از رأس A و از مرکز دایره می‌گذرد. چون BC طول ثابتی دارد، پس فاصلهٔ آن از مرکز دایره و طول ارتفاع AH مقدار ثابتی است. بنابراین OA طول ثابتی دارد، درنتیجه مکان هندسی رأس A دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA است.

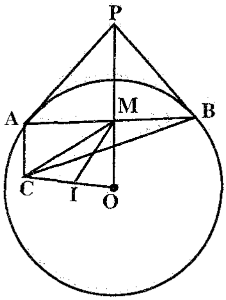
۴۱۲. پاسخ در شکل داده شده است. خطهای راست AB، AF، DC و DE بر دایره مماسند. زاویه‌های BAF و CDE، هرکدام برابر ۶۰ درجه‌اند و طول پاره‌خط راست AD برابر ۱۲ کیلومتر است.

۲.۱.۲.۳.۵. یک دایره، یک نقطه درون دایره



۴۱۳. از نقطهٔ D وتر MN را عمود بر قطر OD رسم می‌کنیم.
این وتر ثابت است و داریم:
$$DM^2 = DN^2 = DB.DC = C^{te}$$
از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC می‌توان نوشت:
$$AD^2 = DB.DC$$
درنتیجه داریم:
$$AD^2 = DB.DC = \text{مقدار ثابت}$$
چون حاصلضرب BD .DC ثابت و D نقطهٔ ثابتی است، پس مکان هندسی نقطهٔ A

دایره‌ای به مرکز D و به شعاع $\sqrt{DB.DC}$ یا $\sqrt{r^۲ - d^۲}$ است، که r شعاع دایرهٔ (O) و $OD = d$ است.



۴۱۴. اگر I وسط CO باشد (شکل) در مثلث MCO می‌نویسیم :

$$OM^۲ + MC^۲ = ۲(IM^۲ + OI^۲)$$

پس : $CM = MA$

$$OM^۲ + MA^۲ = ۲(IM^۲ + OI^۲)$$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ OAM می‌نویسیم :

$$OM^۲ + MA^۲ = OA^۲$$

پس : $۲IM^۲ + ۲OI^۲ = OA^۲$

یا : $IM^۲ = \frac{OA^۲ - ۲OI^۲}{۲} =$ مقدار ثابت

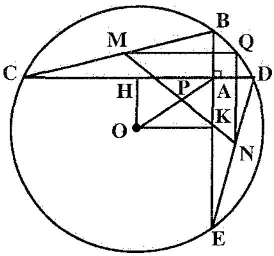
از رابطهٔ بالا معلوم می‌شود که مکان M دایره‌ای است به مرکز I و شعاع $\sqrt{\frac{OA^۲ - ۲OI^۲}{۲}}$

از طرف دیگر می‌دانیم :

$$OP.OM = OA^۲$$

پس M منعکس P است، نسبت به قطب انعکاس O و قوت انعکاس $OA^۲$. بنابراین مکان P منعکس مکان M یعنی دایرهٔ دیگری است که منعکس دایرهٔ مکان M می‌باشد.

۴۱۵. این مکان، قطبی نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ مفروض است.



۴۱۶. چهارضلعی CBDE را رسم می‌کنیم و نقطه‌های M، Q و N بترتیب وسطهای CB، BD و DE را به هم وصل می‌کنیم. مثلث MQN در رأس Q قائم‌الزاویه است، زیرا MQ با CD و QN با BE موازی است. اگر H و K وسطهای CD و BE فرض شوند، خط MN از نقطهٔ P وسط HK می‌گذرد و چون شکل OHAK مستطیل است، پس P وسط OA می‌باشد. بنابراین نقطهٔ P وسط MN نقطهٔ ثابتی است. ثابت می‌کنیم که طول MN نیز مقداری است ثابت.

$$MN^۲ = MQ^۲ + QN^۲$$

و : $QN = \frac{BE}{۲} = EK \ , \ MQ = \frac{CD}{۲} = OH$

پس : $CH^2 = R^2 - OH^2 \ , \ MN^2 = OH^2 + EK^2$

و : $EK^2 = R^2 - OK^2$

بنابراین : $MN^2 = 2R^2 - (OH^2 + OK^2)$

و : $OH^2 + OK^2 = OA^2$

یا : $MN^2 = 2R^2 - OA^2$

چون R و OA مقادیر ثابتی می‌باشند، بنابراین طول MN ثابت است و مکان نقطه‌های M و N دایره‌ای است به مرکز P و به قطر $\sqrt{2R^2 - OA^2}$.

۴۱۸. رأس زاویه، تغییر مکان می‌دهد، امّا مکان هندسی خواسته شده دایره‌ای هم مرکز با دایرهٔ (O) است.

۴۱۹. برای این که $MD = MT$ را بسازیم، نقطهٔ M را روی قطر ADC در نقطهٔ C تصویر می‌کنیم. داریم :

$$MD^2 = MT^2 = MO^2 - R^2$$

از آن‌جا می‌توان نوشت :

$$MD^2 - MC^2 = MO^2 - MC^2 - R^2 \Rightarrow DC^2 = OC^2 - R^2$$

و

$$OC^2 - R^2 = (OC + R)(OC - R) = AC.BC$$

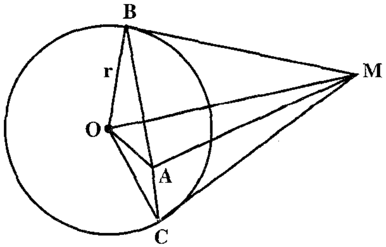
از آن‌جا، مکان هندسی نقطهٔ M عمود MC است که برای آن داریم :

$$AC.BC = \overline{DC}^2$$

۴۲۰. چون PP' وتری از دایرهٔ به قطر MN و عمودبر قطر MN است، پس $AP = AP'$. درنتیجه $P_{A(O)} = -\overline{AM}.\overline{AN} = -\overline{AP}^2$. بنابراین طول AD مقداری است ثابت و برابر نصف وتر عمود بر قطر FG از دایرهٔ (O) در نقطهٔ A. زیرا :

$$P_{A(O)} = -\overline{AM}.\overline{AN} = -\overline{AF}.\overline{AG} = -\overline{AE}^2 = -\overline{AP}^2$$

پس مکان P و P' دایره‌ای است، به مرکز A و شعاع $AE = AP = AP'$.



۴۲۱. فرض کنید O معرف مرکز دایره، r شعاع دایره، $|OA| = a$، BC وتری که از A می‌گذرد و M نقطهٔ برخورد مماسها باشد. در این صورت :

$$OM^2 = BM^2 + r^2$$

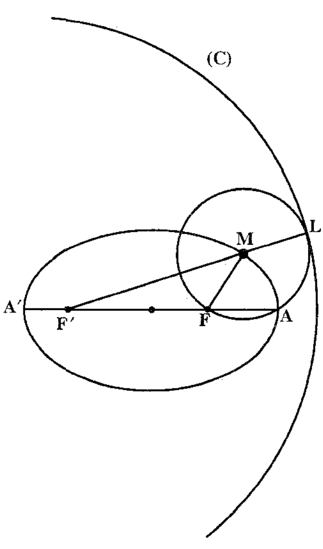
$$AM^2 = BM^2 - \frac{1}{4}BC^2 + (\frac{1}{2}BC - BA)^2$$

$$= BM^{2} - BC.BA + BA^{2}$$
$$= BM^{2} - BA.AC = BM^{2} - r^{2} + a^{2}$$

بنابراین، $OM^{2} - AM^{2} = 2r^{2} - a^{2}$. یعنی، مجموعهٔ نقطه‌های مطلوب، خط راستی عمود بر OA است. این خط را قطبی نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ مفروض می‌نامند.

۴۲۲. اگر BAC یک وضع غیر مشخص قاطع گذرنده بر A و M نقطهٔ تقاطع دیگر دایره‌های (ω) و (ω') گذرنده بر AB و AC و مماس بر دایرهٔ (O) بترتیب در نقطه‌های B و C باشند، چنانچه M قطب انعکاس و $k = P_{A(O)} = \overline{AB}.\overline{AC}$ قوت انعکاس باشد، در این انعکاس. منعکس دایرهٔ (O) بر خودش منطبق است و مماس و در نقطهٔ C بر دایرهٔ (O) منعکس دایرهٔ (ω) است. زیرا در انعکاس زاویه‌ها ثابت می‌ماند و چون (ω) و (O) برهم مماس هستند، منعکسهای آنها نیز مماس می‌باشند و از طرفی C منعکس B است و از آن‌جا CM' منعکس (ω) است و به‌همین دلیل مماس در نقطهٔ B بر دایرهٔ (O) منعکس دایرهٔ (ω') می‌باشد و از آن‌جا M' محل برخورد مماسهای بر دایرهٔ (O) در نقطه‌های B و C منعکس M نقطهٔ تقاطع دیگر دایره‌های (ω) و (ω') می‌باشد و چون BC قطبی M' نسبت به دایرهٔ (O) است. درنتیجه قطبی A از M'' از M' گذشته و یا مکان M' مکان قطبی نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ (O) است، پس Δ قطبی نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ (O) مکان هندسی نقطهٔ M' منعکس M محل تلاقی دایره‌های (ω) و (ω') است که بر OA عمود می‌باشد و مکان M منعکس Δ است و منعکس Δ دایره‌ای است به قطر OA.

۴۲۳. این مکان یک بیضی است. نقطهٔ ثابت یک کانون بیضی و دایرهٔ ثابت، دایرهٔ هادی نظیر کانون دیگر بیضی است. صورت این قضیه تعریف دیگری برای بیضی است.



۴۲۴. اگر B و C اوّلین و دومین نقطهٔ برگشت باشند و O مرکز میز باشد، آن وقت، BO نیمساز زاویهٔ CBA است. مسیر توپ نسبت به قطر شامل C، متقارن است، بنابراین، A بر این قطر واقع است. اگر $B\hat{C}O = C\hat{B}O = \varphi$، آن وقت $A\hat{B}O = \varphi$ و $B\hat{O}A = ۲\varphi$ ؛ با به‌کار بردن قانون سینوسها در مثلث $ABO(OA = a, BO = R)$ به‌دست می‌آوریم:

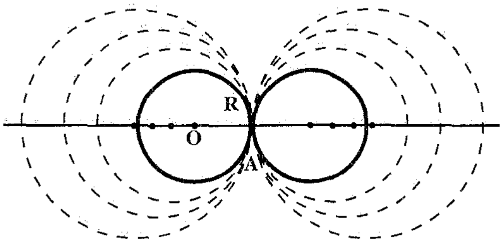
$$\frac{R}{\sin ۳\varphi} = \frac{a}{\sin \varphi}$$

که از آن‌جا $\cos ۲\varphi = \frac{R-a}{۲a}$ و به‌ازای $a > \frac{R}{۳}$، می‌توانیم φ را پیدا کنیم.

جواب. نقطه‌های واقع در بیرون دایره به شعاع $\frac{R}{۳}$ و به مرکزِ، مرکز میز بیلیارد.

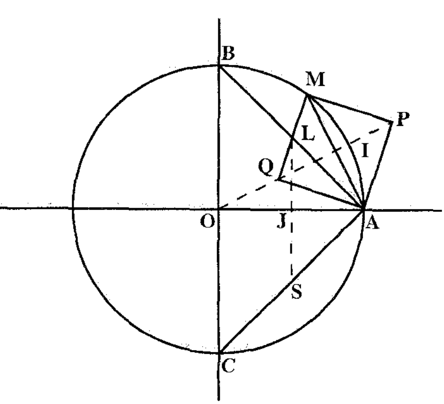
۳.۱.۲.۳.۵. یک دایره، یک نقطه روی دایره

۴۲۵. اگر O مرکز دایره و A نقطهٔ تماس دایره‌ها باشد، مکان هندسی موردنظر خط OA است.



۴۲۶. اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AB}$ ثابت است. به‌همین دلیل اندازهٔ وتر AB ثابت می‌باشد، پس مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OM (فاصلهٔ نقطهٔ O از وتر AB) است.

۴۲۷. نقطه‌های P و Q را می‌توان از روی نقطهٔ I مرکز مربع به‌وسیلهٔ یک دوران °۴۵ حول نقطهٔ A و یک تجانس به مرکز A و با نسبت $\frac{AP}{AI} = \frac{AQ}{AI} = \sqrt{۲}$ به‌دست آورد. امّا اگر مکان I معلوم شود، مکان P و Q با تبدیلهای بالا از روی مکان I معلوم می‌شود. امّا مکان I دایره‌ای به قطر OA است (زیرا I وسط AM و Q بر AM عمود است و $\frac{AM}{AI} = ۲$



یا $\frac{AI}{AM}=\frac{۱}{۲}$ است). بنابراین مکان P و Q دایره‌هایی به مرکزهای L و S که از نقطهٔ A می‌گذرند و آنها عبارت از دایرهٔ محیطی مثلثهای ABO و دایرهٔ محیطی مثلث ACO می‌باشند.

چون نقطهٔ I یک دور کامل بر مکان هندسی خود حرکت کند، P و Q نیز یک دور کامل مکان هندسی خود را می‌پیمایند.

۴۲۸. مرکزهای دو دایره را C' و C'' می‌نامیم. خط $C'C''$ از نقطهٔ A می‌گذرد و دو چهارضلعی $M'C'AC$ و $M''C''AC$ لوزی‌اند، یعنی $M'CM''$ خط راست است و مکان هندسی خواسته شده دایره‌ای است به قطر AC.

۴۲۹. اگر وتر مشترک AB دایرهٔ به شعاع ۲R را در نقطه‌های M و M' قطع کند، از M و B دو مماس ME و BD را بترتیب بر دو دایرهٔ ۲R و R رسم کرده و ثابت کنید $CE = ۴CD$ و نتیجه بگیرید که E نقطهٔ ثابتی است و مکان M دایره‌ای است به قطر CE.

۴۳۰. A روی دایره است. قطر AO را رسم می‌کنیم و روی قطر، نقطهٔ H را طوری می‌گیریم که $AC.AH = AB.AM$ باشد، چهار ضلعی BCHM محاطی است، چون $\hat{B}=۹۰^\circ$ است، پس $\hat{H}=۹۰^\circ$ می‌شود، پس مکان نقطهٔ M خطی است که در H بر قطر AC عمود می‌شود. A روی دایره نیست. فرض می‌کنیم A خارج دایره بوده و ABM قاطع اختیاری باشد، داریم:

$$AB.AM = k$$

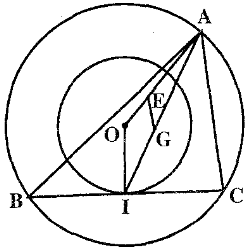
قوت A را نسبت به دایرهٔ P می‌نامیم. داریم:

$$AB.AB' = P$$

از رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود که:

$$\frac{AM}{AB'}=\frac{k}{P}=C^{te}$$

یعنی M مجانس B' است، چون M روی دایره است، پس مکان B' مجانس دایره‌ای است به مرکز A و به نسبت $\frac{k}{P}$.

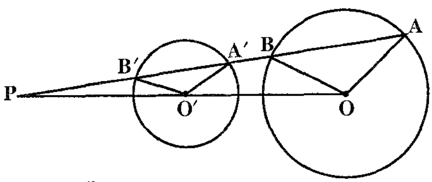


۴۳۱. اگر ضلع BC طول ثابتی داشته باشد، فاصله‌اش از O مرکز دایره نیز ثابت خواهد بود، پس مکان I وسط AB دایره‌ای به مرکز O است (شکل) و چون $\frac{\overrightarrow{AG}}{\overrightarrow{AI}}=\frac{۲}{۳}$ است، پس نقطهٔ G، دایرهٔ مجانس مکان I را در تجانس $(A,\frac{۲}{۳})$ می‌پیماید.

۴.۱.۲.۳.۵. یک دایره، یک نقطه برون دایره

۴۳۲. گزینهٔ (هـ) درست است.

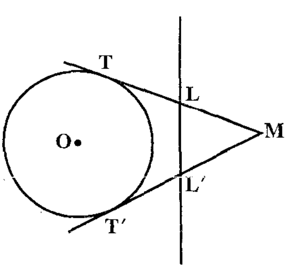
۴۳۳. گزینهٔ (هـ) درست است. فرض کنید A بر دایرهٔ مفروض به مرکز O و شعاع r واقع است. پاره‌خط PA را رسم کنید. فرض کنید A' وسط PA و O' وسط PO باشد. برای این‌که ببینید مکان مطلوب دایره‌ای است به مرکز O' و شعاع $\frac{r}{۲}$ مثلثهای متشابه POA و $PO'A'$ را درنظر بگیرید. به‌ازای هر نقطهٔ A از دایرهٔ مفروض داریم:



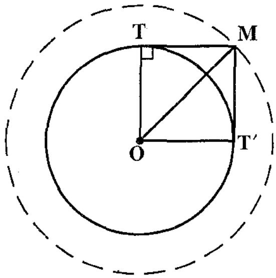
$$O'A'=\frac{۱}{۲}OA=\frac{۱}{۲}r$$

۴۳۴. قطری از دایره را که از نقطهٔ A می‌گذرد و قطر عمود بر این قطر را رسم می‌کنیم. واضح است که برای قاطع AEF، نقطه‌های M و M' دو نقطه از مکان می‌باشند. اگر از نقطهٔ A مماسهای AT و $A'T'$ را بر دایره رسم کنیم، نقطه‌های T و T' نیز ثابت می‌باشند، پس...

۴۳۵. M را دایره‌ای به شعاع صفر می‌توان فرض کرد. نقطه‌های خواسته شده باید نسبت به دایرهٔ مفروض و نقطهٔ M (دایره به شعاع صفر) یک قوت داشته باشند، پس بر محور اصلی این دو واقعند. بنابراین از M دو مماس MT و MT' را بر دایره رسم نموده وسطهای مماسها را به هم وصل می‌کنیم (محور اصلی M و دایره)، این خط جواب است.



۴۳۶. این مکان محور اصلی نقطهٔ A و دایرهٔ (C) می‌باشد (نقطهٔ A را دایره و به شعاع صفر درنظر می‌گیریم).



۴۳۷. اگر M یک نقطه از مکان هندسی موردنظر، یعنی نقطه‌ای باشد که قوت آن نسبت به دایرهٔ C (O, R) برابر $P > R^۲$ باشد، داریم:

$$MO^۲ - R^۲ = P \Rightarrow MO = \sqrt{P + R^۲} > R\sqrt{۲}$$

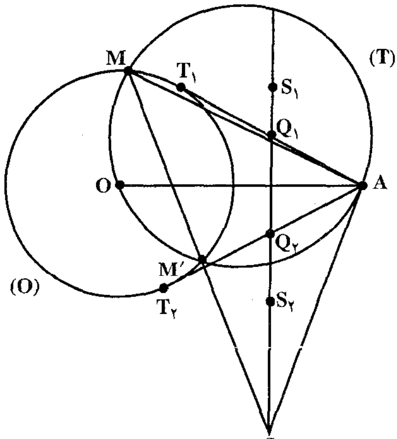
پس مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز O و به شعاعی بزرگتر از $R\sqrt{۲}$ است.

نکته. مکان هندسی نقطه‌هایی که قوت آنها نسبت به دایرهٔ C (O , R) برابر $R^۲$ است، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R\sqrt{۲}$ است، زیرا مماس MT رسم شده از یک نقطه مانند M بر دایره به طول R است.

$$MT^۲ = MT'^۲ = R^۲ \Rightarrow MT = MT' = R$$

پس چهارضلعی $OTMT'$ مربع و $OM = R\sqrt{۲}$ است.

۴۳۸. چون OP نیمساز است، پس $\frac{PM}{PA} = \frac{OM}{OA} = \frac{R}{a}$ و یا $\frac{PM + PA}{AP} = \frac{R + a}{a}$ نتیجه می‌شود $\frac{AM}{AP} = \frac{R + a}{a} = k$. بنابراین P مجانس نقطهٔ M است، نسبت به مرکز A و با نسبت $\frac{a}{R + a}$، چون مکان M دایرهٔ (O) است، پس مکان P مجانس این دایره است، نسبت به مرکز A و با نسبت $\frac{a}{R + a}$.



۴۳۹. دومین نقطهٔ برخورد (O) و (T) را نقطهٔ M' می‌نامیم. چون SA بر (T) مماس است، داریم:

$$\overline{SM}.\overline{SM'} = SA^۲$$

پس قوت نقطهٔ S نسبت به دایرهٔ (O) و نسبت به دایره‌ای که نقطهٔ A روی آن واقع است، یکی است. پس روی محور اصلی آنها واقع است، یعنی روی خط $Q_۱Q_۲$، خطی که وسط مماس $AT_۱$ را به وسط مماس $AT_۲$ وصل

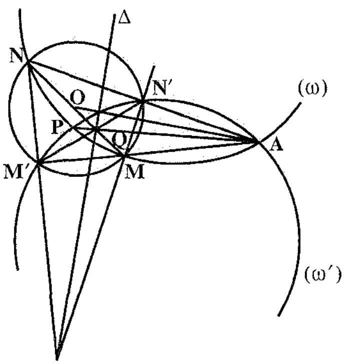
می‌کند. AT_1 و AT_2 مماسهایی هستند که از نقطهٔ A بر دایرهٔ (O) رسم شده‌اند. اگر نقطه‌های برخورد Q_1Q_2 با عمودهایی که از A بر AT_1 و AT_2 اخراج می‌شوند را S_1 و S_2 بنامیم، داخل قطعه خط S_1S_2 جزو مکان S نیست.

۴۴۰. اگر B نقطهٔ تماس و O مرکز دایرهٔ مفروض باشد، آن‌وقت

$$OM^2 - AM^2 = OM^2 - BM^2 = OB^2 = R^2$$

بنابراین، M روی خط راستی عمودبر OA قرار دارد.

۴۴۱. چنانچه A قطب و $k = P_{A(O)} = \overline{AN}.\overline{AN'} = \overline{AM}.\overline{AM'}$



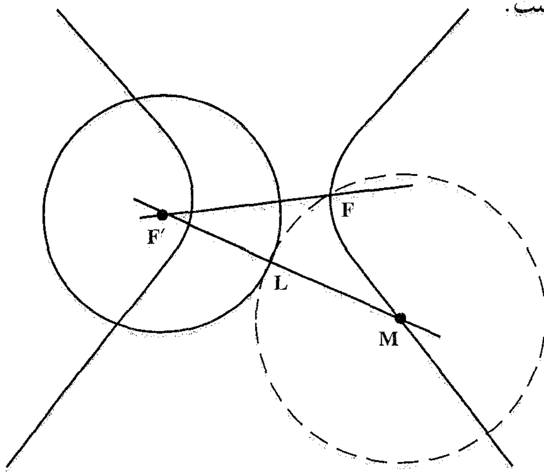
قوت انعکاس اختیار کنیم. N' و M' بترتیب منعکسهای N و M است و درنتیجه منعکس دایرهٔ (O) برخودش منطبق و $M'N'$ و MN بترتیب منعکسهای دایره‌های AMN و $AM'N'$ است. درصورتی که P نقطهٔ تقاطع دیگر دایره‌های AMN و $AM'N'$ باشد، منعکسهای آنها، خطهای MN و $M'N'$ در نقطه‌ای مانند Q متقاطعند و Q نقطهٔ تقاطعشان منعکس P است و $\overline{AQP}$ خطی است مستقیم و داریم $AP.AQ = k$ و چون قطبی A نسبت به $M'N$ و MN' از نقطهٔ Q می‌گذرد، می‌توان گفت، مکان Q قطبی نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ (O) بوده و منعکس آن، همان مکان P می‌باشد. دایره‌ای است که از A می‌گذرد و منعکس Δ مکان Q است در انعکاس $(A, k = P_{A(O)})$.

۴۴۲. MM' و NN' بترتیب محورهای اصلی دایره‌های (O,ω) و (O,ω') می‌باشند و چون دایره‌های ω و ω' در نقطهٔ P مماسند، درنتیجه مماس بر آنها در نقطهٔ P محور اصلی دایره‌های (ω,ω') است که چون سه محور اصلی سه دایرهٔ (O,ω,ω') همرسند، بنابراین MM' و NN' در نقطهٔ S مرکز اصلی سه دایرهٔ (O,ω,ω') متقاطعند. داریم:

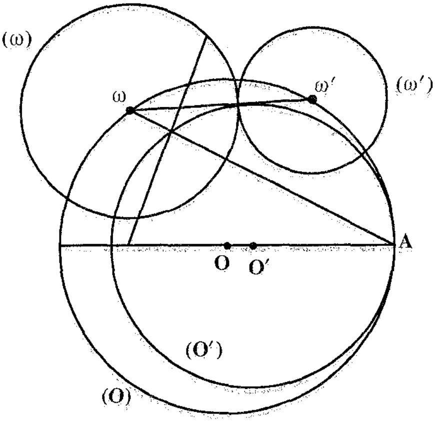
$$P_{S(O)} = P_{S(P)} = SP_2 = SM.SM' = SN.SN'$$

پس می‌توان گفت نقطهٔ S نسبت به دو دایرهٔ (O) به شعاع R و دایرهٔ (P , ۰) دارای یک قوت است که درنتیجه S روی محوراصلی دو دایرهٔ (P , ۰) و (O , R) یا محور اصلی آنها مکان S محل تلاقی MM' و NN' است و برای رسم آن از P مماس PT را بر دایرهٔ (O) رسم نموده و از وسط PT عمودی بر PO رسم می‌کنیم.

۴۴۳. این مکان هندسی یک هذلولی است؛ زیرا اگر M یک نقطهٔ از این مکان هندسی، F نقطهٔ ثابت، دایره به مرکز F′ دایرهٔ ثابت و L نقطهٔ تماس دو دایره باشد، همواره $ML = MF$ است.



۵.۱.۲.۳.۵. مسأله‌های ترکیبی مربوط به این قسمت



۴۴۴. H پای قطبی نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ ω است. داریم:

۱. $\omega H \times \omega A = \rho^2$

و یا $\omega H \times \omega A = k^2 . \omega A^2$

و یا $\omega H = k^2 . \omega A$

رابطهٔ اخیر را می‌توان چنین نوشت:

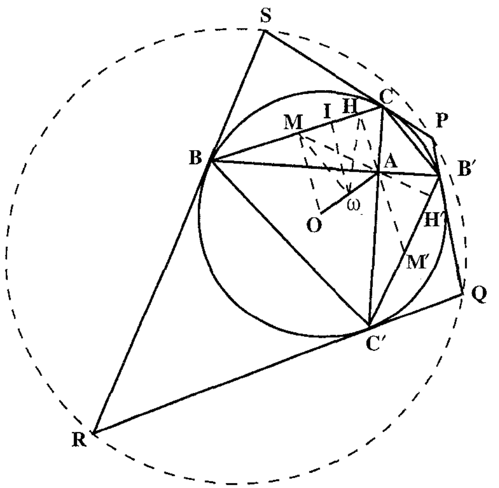
$$AH - A\omega = -k^2 . A\omega$$

از آن‌جا:

$$AH = (1-k^2)A\omega$$

مکان H دایرهٔ (O′) مجانس دایرهٔ (O) است به مرکز تجانس O و نسبت تجانس $1-k^2$. این دایره بر A می‌گذرد و $AO' = (1-k^2)AO$ و $OO' = k'.OA$. قطر دایرهٔ ω در امتداد AH است و به‌وسیلهٔ دایرهٔ O′ به نسبت توافقی بخش شده، پس دایرهٔ ω بر دایرهٔ ω′ عمود است. بعکس هر دایره‌ای که مرکزش روی O باشد بر دایرهٔ O′ نیز عمود باشد، بر دایرهٔ ω منطبق است.

۲. فرض می‌کنیم ω و ω' دو دایرهٔ مماس خارج و M نقطهٔ تماس باشد. این دو دایره بر دایرهٔ O' عمودند. محور اصلی آنها مماس مشترکشان است که از M و O' می‌گذرد، درنتیجه، $O'M^2 = O'A^2$ و یا $O'M = O'A$ ؛ از آن‌جا M روی دایرهٔ O' است. بعکس اگر مماس در M بر O' دایرهٔ O را در ω و ω' قطع کند. دایره‌هایی که به مرکزهای ω و ω' رسم شوند در M برهم مماسند، پس مکان نقطه‌های M کمانی از دایرهٔ (O') است، به‌طوری که مماس بر این دایره در هرنقطهٔ آن کمان دایرهٔ (O) را قطع می‌کند.



۱.۴۴۵. اگر خط AM میانهٔ مثلث ABC باشد، زاویهٔ $MAB = MBA$ می‌باشد (خاصیت میانهٔ مثلث قائم‌الزاویه)، یعنی زاویهٔ MAB متمم زاویهٔ BCA، پس متمم زاویهٔ $BB'C'$ می‌باشد، زیرا دو زاویهٔ BCA و $BB'C'$ مقابل قوس $\widehat{BC'}$ با هم برابرند، پس زاویهٔ متقابل به رأس به زاویهٔ MAB متمم زاویهٔ $AB'C'$ بوده، یعنی امتداد MA بر $B'C'$ عمود می‌باشد، پس میانهٔ مثلث ABC ارتفاع $AB'C'$ می‌باشد. عکس مطلب نیز محقق است، زیرا میانهٔ $AB'C'$ را به‌همین طریق می‌توان ثابت کرد که ارتفاع ABC خواهد بود.

۲. خط OM بر وسط BC عمود است، پس:

$$OM^2 + BM^2 = OB^2 = R^2$$

و چون $BM = MA$ می‌باشد (خاصیت میانهٔ مثلث قائم‌الزاویه) پس:

$$OM^2 + MA^2 = R^2$$

پس مکان M دایره‌ای است به مرکز ω وسط OA و به شعاع $\sqrt{\dfrac{2R^2 - a^2}{2}}$، زیرا در

مثلث OMA رابطهٔ میانه چنین است :

$$OM^۲ + MA^۲ = ۲\omega M^۲ + \frac{OA^۲}{۲}$$

و یا

$$R^۲ = ۲\omega M^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$

پس ωM مقداری است ثابت و شعاع مکان هندسی نقطهٔ M است. مکان هندسی نقطهٔ H نیز همین دایره است، زیرا عمودمنصف HM بر نقطهٔ ω می‌گذرد، پس $\omega H = \omega M$ می‌باشد.

۳. ضلعهای چهارضلعی $CBC'B'$ همواره بر بیضی به کانونهای A و O که دایرهٔ اصلی آن همان دایرهٔ مکان هندسی M و H است، مماس می‌باشند، زیرا مکان نقطهٔ H این دایره است ضلع BC، ضلع دوم زاویهٔ قائمهٔ BHA می‌باشد که رأس آن نقطهٔ H بر دایرهٔ به مرکز ω و شعاع OM واقع است و ضلع اول آن یعنی HA بر نقطهٔ ثابت A مرور می‌کند، پس ضلع دوم آن یعنی BC بر بیضی مذکور همواره مماس می‌باشد. بدیهی است که جمیع ضلعهای چهارضلعی دارای همین خاصیت می‌باشند، یعنی چهارضلعی $BCB'C'$ همواره بر بیضی ثابتی محیط و در دایرهٔ ثابتی محاط می‌باشد.

۴. چون در نقطه‌های B، B'، C و C' مماسهایی بر دایرهٔ (O) رسم می‌کنیم تا یکدیگر را قطع کنند، چهارضلعی PQRS به‌دست می‌آید. این چهارضلعی محاطی است، زیرا به‌سهولت می‌شود ثابت کرد که مجموع زاویه‌های روبه‌روی آن همواره برابر ۱۸۰° می‌باشد. مثلاً مجموع زاویه‌های S و Q این چهارضلعی چنین محاسبه می‌شود. اندازهٔ زاویهٔ S برابر است با نصف تفاوت اندازه‌های قوسهای $\overset{\frown}{CB'C'B}$ و $\overset{\frown}{CB}$ یعنی $\hat{S} = \frac{\overset{\frown}{CB'C'B} - \overset{\frown}{CB}}{۲}$ و اندازهٔ زاویهٔ Q برابر است با نصف تفاوت اندازه‌های قوسهای $\overset{\frown}{B'CBC'}$ و $\overset{\frown}{C'B'}$ یعنی :

$$\hat{Q} = \frac{\overset{\frown}{B'CBC'} - \overset{\frown}{C'B'}}{۲}$$

پس :

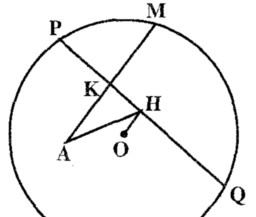
$$\hat{S} + \hat{Q} = \frac{\overset{\frown}{CB'} + \overset{\frown}{B'C'} + \overset{\frown}{C'B} - \overset{\frown}{CB}}{۲} + \frac{\overset{\frown}{B'C} + \overset{\frown}{CB} + \overset{\frown}{BC'} - \overset{\frown}{C'B'}}{۲}$$

پس $\widehat{BC'}+\widehat{CB'}$ دو برابر اندازهٔ $\widehat{CB'}+\widehat{C'B}$ ولی در شکل مشاهده می‌شود $\hat{S}+\hat{Q}=\widehat{CB'}+\widehat{C'B}$ زاویهٔ CAB می‌باشد (اندازهٔ زاویه‌ای که رأس آن در درون دایره است برابر است با نصف مجموع اندازه‌های قوسهایی که در دایره جدا می‌کند).

پس $\hat{S}+\hat{Q}=۱۸۰^\circ$ و چهارضلعی محاطی می‌باشد. دایرهٔ محیطی این چهارضلعی دایره‌ای ثابت است. اگر شکل چهارضلعی محاطی $BCB'C'$ را نسبت به دایرهٔ محیطی آن تبدیل کنیم (توسط قطب و قطبی معکوس نسبت به این دایره) رأسها به ضلعها و ضلعها به رأسها بدل می شوند، پس ضلعهای BC و CB' و $B'C'$ و $C'B$ مرتباً به رأسهای S، P، Q و B چهارضلعی برونی تبدیل می‌شوند ولی چون ضلعهای BC، CB' ، $B'C'$ و $C'B$ بر بیضی ثابتی مماس می‌باشند، پس قطبهای آنها یعنی، رأسهای S، P، Q و R بر مقطع مخروطی ثابتی قرار دارند ولی در حالت معینی ثابت شد که این مقطع مخروطی دایره است، پس برای همهٔ حالتها، همواره دایره خواهد بود. وانگهی سهل است ثابت کرد که مبدل یک مقطع مخروطی با قطب و قطبی معکوس نسبت به دایره‌ای که مرکز آن یکی از کانونهای مقطع مخروطی است همواره دایره است.

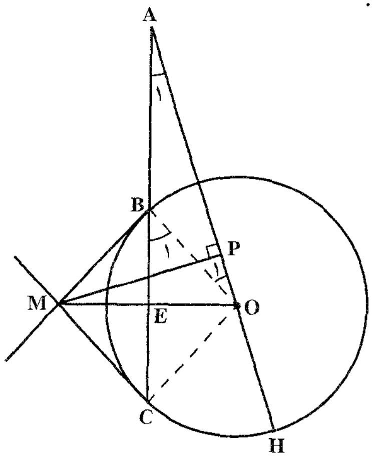
در این مسأله مشاهده می‌شود که بینهایت چهارضلعی وجود دارد که همواره بر بیضی ثابتی محیط و در دایرهٔ ثابتی محاطند و همچنین همین چهارضلعیهایی که بر دایرهٔ ثابت محاطند (و تعداد آنها بینهایت است) چهار ضلعیهای محیطی ایجاد می‌کنند که بر دایرهٔ محاطی چهارضلعیهای قبل محیط و در دایرهٔ ثابت دیگری محاط می‌باشند. این مسأله مثالی از زنجیرهای پونسله است.

پونسله ریاضیدان فرانسوی، به‌طور کلی ثابت کرده است که اگر n ضلعی بر مقطع مخروطی محیط و در مقطع مخروطی دیگری محاط باشد، بینهایت از این n ضلعیها وجود دارد و اگر از رأسهای n ضلعیها مماسهایی بر مقطعهای مخروطی رسم شود زنجیری از این n ضلعیها تشکیل می‌شود که مرتباً در مقطع مخروطی محاط و بر مقطع مخروط دیگری محیط می‌باشند.



۴۴۶. ۱. چون $\frac{AK}{AM}=\frac{1}{2}$ و A نقطهٔ ثابتی است، مکان هندسی نقطهٔ K دایره‌ای است که مجانس دایرهٔ (O) نسبت به مرکز تجانس A و نسبت تجانس $\frac{1}{2}$ می‌باشد.

۴۴۷. ۱. دو مثلث OPM و AEO متشابه‌اند، در نتیجه:



$$\frac{OP}{OE}=\frac{OM}{AO}=\frac{MP}{AE}$$

$$OB^2=OE.OM \quad (1)$$

و

$$AO.OP=OB^2 \quad (2)$$

$$(1) و (2) \Rightarrow AO.OP=OE.OM$$

$$\Rightarrow OP=\frac{OE.OM}{AO} \quad (3)$$

چون در رابطهٔ (۱) OB^2 ثابت، OE نیز ثابت است، پس OM نیز ثابت می‌باشد. در رابطهٔ (۳) چون AO ثابت است، پس OP نیز ثابت است، یعنی مکان هندسی M خطی است که از نقطهٔ ثابت P عمود بر AO اخراج می‌شود.

۲. از O به B و C وصل می‌کنیم، مثلث ABO متساوی‌الساقین است، در نتیجه $\hat{A}_1=\hat{O}_1$ و چون $\hat{B}_1$ زاویهٔ خارجی است، پس $\hat{B}=2\hat{A}_1$. از طرفی چون $\hat{B}=\hat{C}$ پس $\hat{C}=2\hat{A}$ ، و چون $C\hat{O}H$ زاویهٔ خارجی مثلث ACO است، پس $C\hat{O}H=3\hat{A}$.

۳. محاسبه آسان است.

۴۴۹. ۱. از تقارن می‌توان استفاده کرد یا از یک تساوی سادهٔ مثلثها.

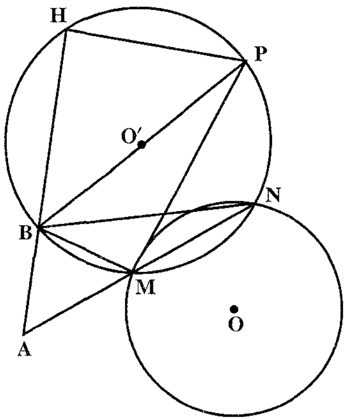
۲. آسان است.

۳. آسان است.

۴. مثلث $30^\circ-60^\circ-90^\circ$ ، محاسبهٔ فاصلهٔ وترهای شناخته شده از مرکز دایره.

۲.۲.۳.۵. یک دایره، دو نقطه

۱.۲.۲.۳.۵. یک دایره، دو نقطه در صفحهٔ دایره



۴۵۰. چون $P\hat{N}B = P\hat{M}B = 90^\circ$ است، پس دایرهٔ به قطر PB از نقطه‌های M و N می‌گذرد، و این دایره، خط AB را در نقطهٔ H قطع می‌کند. داریم:

$AB.AH = AM.AN =$ مقدار ثابت

پس H نقطهٔ ثابتی است و چون $B\hat{H}P = 90^\circ$ است، مکان P خط ثابتی است که از نقطهٔ H بر AB اخراج می‌شود.

۴۵۱. راه اول. اگر AX قاطع دلخواه رسم شده از A و نقطه‌های M و M′ نقطه‌های تقاطعش با دایرهٔ (O) و دایرهٔ (ω)، دایرهٔ محیطی مثلث BMM′ باشد، در این حالت با تغییر قاطع AX نقطه‌های M و M′ و در نتیجه دایرهٔ (ω) تغییر می‌نماید. لکن با تغییر AX مقدار

$P_{A(O)} = AM.AM' = d^2 - R^2 =$ ثابت است (۱)

و از طرفی اگر AB در نقطهٔ دیگر B′ دایرهٔ (ω) را قطع نماید. داریم:

$AM.AM' = AB.AO' = P_{A(O)} =$ مقداری ثابت است (۲)

و از رابطهٔ (۲) چون AB.AB′ مقداری است ثابت، در نتیجه نقطهٔ B′ ثابت است و دایرهٔ محیطی مثلث BMM′ پیوسته از دو نقطهٔ ثابت B′ و B می‌گذرد و از آن‌جا مکان مرکز دایرهٔ محیطی آن، خط Δ عمودمنصف BB′ است.

راه دوم. اگر صورت مسأله چنین باشد:

دایرهٔ (O) و نقطه‌های متمایز A و B مفروضند. از B قاطع متغیری رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (O) را در نقطه‌های C و D قطع کند. AC و AD را وصل می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های E و F قطع نمایند. مطلوب است، مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث AEF.

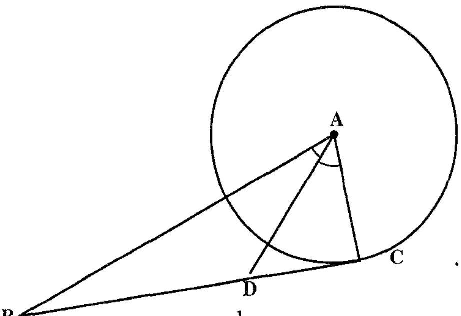
حل. اگر BCD قاطع دلخواه گذرنده بر B و متقاطع با دایرهٔ (O) باشد، چنانچه A را قطب و $k = P_{A(O)}$ را قوت انعکاس انتخاب کنیم، $AE.AC = AF.AD = P_{A(O)}$ است و در این حالت، منعکس دایرهٔ (O) بر خودش منطبق است و خط CD منعکس دایرهٔ (ω) (دایرهٔ محیطی مثلث AEF) می‌باشد. در صورتی که B′ نقطهٔ تقاطع AB با

دایرهٔ (ω) باشد، داریم:

$$AB'.AB = AE.AC = AF.AD = P_{A(O)} = \text{مقدار ثابت}$$

که چون A، B و $k = P_{A(O)}$ ثابت است، B' ثابت بوده و دایرهٔ محیطی مثلث AEF پیوسته از A و B' می‌گذرد، یعنی مکان دایرهٔ محیطی مثلث AEF، عمودمنصف پاره‌خط AB' است (B' منعکس B است در انعکاس $(A , k = P_{A(O)})$).

۴۵۳. چون AD نیمساز است، پس:



$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = \frac{AB}{R} \Rightarrow \frac{DB}{DC} = k$$

$$\frac{BD}{DC+BD} = \frac{k}{1+k} \Rightarrow \frac{BD}{BC} = \frac{k}{1+k}$$

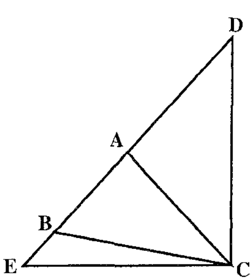
پس $\frac{BD}{BC}$ همواره برابر با مقدار ثابتی است.

بنابراین D مجانس نقطهٔ C است، نسبت به مرکز C و با نسبت ثابت $\frac{k}{1+k}$. چون مکان C دایره‌ای است، به مرکز A، پس مکان D مجانس این دایره است نسبت به مرکز تجانس B.

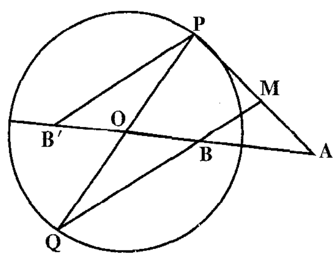
۴۵۴. اگر B' نقطهٔ متقارن B نسبت به O باشد (شکل الف)، دو مثلث OQB و OPB' همنهشتند و از برابری زاویه‌های این دو مثلث نتیجه می‌شود که خطهای BM و PB' موازی‌اند؛ پس:

$$AM : AP = AB : AB'$$

نسبت دوم را می‌دانیم، پس دو نقطهٔ متغیر P و M با نقطهٔ ثابت A همخطند و نسبت فاصله‌هایشان از A ثابت است. یا به عبارت دیگر، نقطه‌های P و M نقطه‌های متناظر یکدیگر در تجانس $(A , AB' : AB)$ هستند و چون P دایرهٔ مفروض را می‌پیماید، مکان هندسی M نیز دایره‌ای با مرکز و شعاع معلوم است.



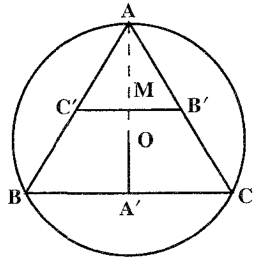
(ب)



(الف)

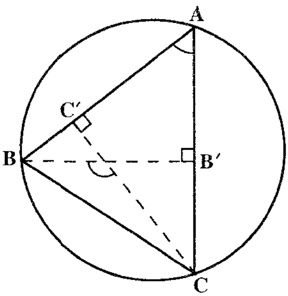
۲.۲.۲.۳.۵. یک دایره، دو نقطه روی دایره

۱.۲.۲.۲.۳.۵. یک دایره، وتر

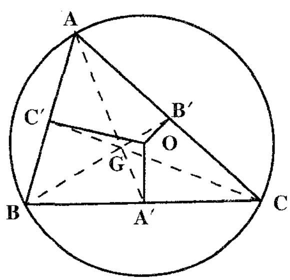


۴۵۶. مثلث ABC را که قاعدهٔ BC و دایرهٔ محیطی آن ثابت است، در نظر می‌گیریم. وسطهای سه ضلع AB، AC و BC را بترتیب C'، B' و A' می‌نامیم. چون $\frac{CB'}{CA}=\frac{BC'}{BA}=\frac{۱}{۲}$ است. مکان هندسی نقطه‌های C' و B' بترتیب مجانس دایرهٔ محیطی مثلث ABC نسبت به مرکز تجانسهای C و B و نسبت تجانس $\frac{۱}{۲}$ است.

اگر نقطهٔ M وسط $B'C'$ باشد، $A'MA$ خطی راست است و داریم: $\frac{A'M}{A'A}=\frac{۱}{۲}$. پس مکان هندسی نقطهٔ M مجانس دایرهٔ محیطی مثلث ABC نسبت به مرکز تجانس A' و نسبت تجانس $\frac{۱}{۲}$ است.



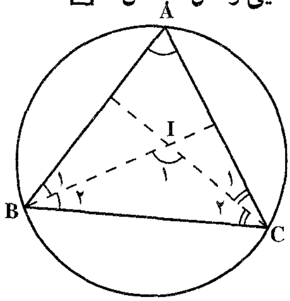
۴۵۷. چون $\hat{B'}=\hat{C'}=۹۰^\circ$، پس $\hat{A}+\hat{H}=۱۸۰^\circ$ از طرفی اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ همیشه ثابت است، چون روبه‌رو به کمان ثابت $\overset{\frown}{BC}$ می‌باشد، پس اندازهٔ زاویهٔ $\hat{H}$ نیز همواره ثابت است. بنابراین مکان خواسته شده کمان درخور زاویهٔ $\hat{H}=۱۸۰^\circ-\hat{A}$ روبه‌رو به ضلع BC می‌باشد.



۴۵۸. اگر A' وسط ضلع ثابت BC از مثلث ABC باشد، با توجه به ویژگی مرکز ثقل مثلث داریم:

$$\frac{A'G}{A'A}=\frac{۱}{۳}$$

پس نقطهٔ G مجانس نقطهٔ A نسبت به مرکز تجانس A و نسبت تجانس $\frac{۱}{۳}$ است، چون مکان نقطهٔ A دایرهٔ محیطی مثلث می‌باشد، پس مکان هندسی نقطهٔ G مجانس این دایره نسبت به مرکز تجانس A' و نسبت تجانس $\frac{۱}{۳}$ است.



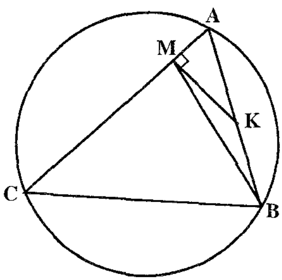
۴۵۹. در مثلث IBC داریم :

$$\hat{I}_1+\hat{C}_2+\hat{B}_2=180^\circ$$

و در مثلث ABC داریم :

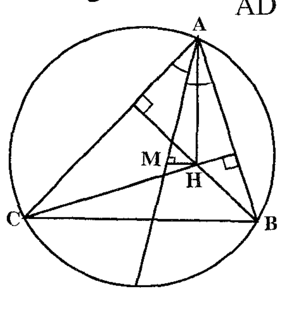
$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$$

در نتیجه $\hat{A}+2\hat{B}_1+2\hat{C}_1=180^\circ$. پس $\frac{\hat{A}}{2}+\hat{B}_1+\hat{C}_1=90^\circ$. بنابراین $\frac{\hat{A}}{2}+180^\circ-\hat{I}_1=90^\circ$، پس $B\hat{I}C=90^\circ+\frac{\hat{A}}{2}$. چون $\hat{A}$ ثابت است، پس $B\hat{I}C$ نیز ثابت می‌باشد، بنابراین مکان هندسی نقطهٔ I کمان درخور زاویهٔ $B\hat{I}C=90^\circ+\frac{\hat{A}}{2}$ روبه‌رو به ضلع BC می‌باشد.

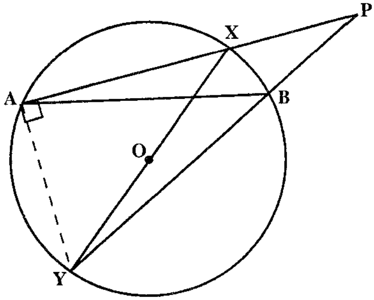


۴۶۰. فرض کنید K معرف وسط AB و M پای عمود وارد از K بر AC باشد. همهٔ مثلثهای AKM (با دو زاویهٔ برابر) متشابه‌اند، در نتیجه، همهٔ مثلثهای ABM متشابه‌اند. اکنون بسادگی به‌دست می‌آید که مکان هندسی خواسته شده، دایره‌ای است به وتر BC و زاویهٔ روبه‌رو به این کمان برابر با زاویهٔ AMB یا زاویهٔ متمم آن است (کمان کوچکتر این دایره، در همان طرف BC قرار دارد که کمان کوچکتر دایرهٔ اصلی واقع است).

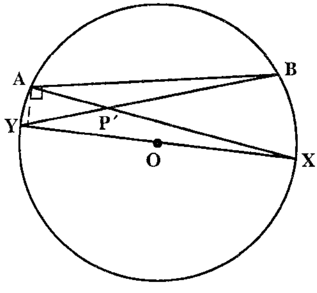
۴۶۱. ثابت می‌کنیم $\frac{AM}{AD}=|\cos B\hat{A}C|$، که در آن، D نقطهٔ برخورد AM با دایره است. فرض کنید O معرف مرکز دایره، P وسط BC و K وسط AH باشد. مثلثهای DOA و MKA متشابه‌اند. بنابراین $\frac{MA}{AD}=\frac{AK}{DO}=\frac{OP}{OB}=\cos B\hat{A}C$. مکان هندسی مطلوب، عبارت است از دو کمان، متعلق به دو دایرهٔ متمایز.



۴۶۳. در شکل، دو موقعیت از قطر متغیر XY نشان داده شده است. در هر دو حالت، زاویهٔ XAY برابر ۹۰ درجه و زاویهٔ AYB مقداری ثابت است. بنابراین، در شکل (a)، زاویهٔ APB هم (که متمم AYB است)، مقداری ثابت دارد و به همین ترتیب، اندازهٔ زاویهٔ AP′Y در شکل (b)، ثابت است (زیرا متمم زاویهٔ AYB است). زاویهٔ AP′B هم که مکمل زاویهٔ AP′Y است، زاویه‌ای با اندازهٔ ثابت است.

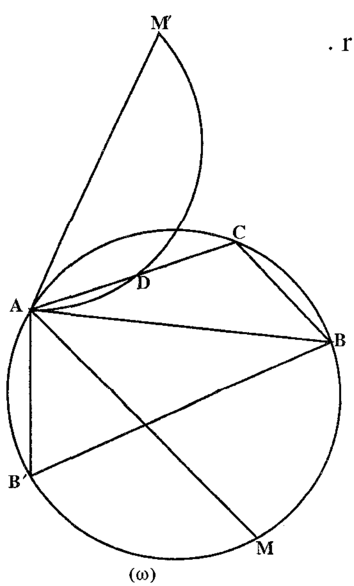


(a)



(b)

مکان هندسی نقطهٔ P، در شکل (a)، با توجه به ثابت بودن زاویهٔ APB، عبارت است از کمان دایره‌ای که از A و B می‌گذرد. به همین ترتیب، در شکل (b)، با توجه به ثابت بودن زاویهٔ AP′B، نقطهٔ P′ روی کمان دایره‌ای است که از A و B می‌گذرد. مثلث APY (در شکل (a)) با مثلث AP′Y (در شکل (b)) با هم متشابه‌اند و زاویه‌های APB و AP′B مکمل یکدیگرند. بنابراین P و P′ روی یک دایره‌اند. شعاع این دایره، با توجه به قانون سینوسها، برابر است با $r = \dfrac{AB}{2\sin\hat{P}}$.



(ω)

۴۶۴. اگر C نقطهٔ دلخواهی از کمان $\overset{\frown}{AB}$ باشد، زاویهٔ $A\hat{C}B$ پیوسته ثابت و مساوی نصف کمان $\overset{\frown}{A\omega B}$ خواهد بود.

در صورتی که کمان $\overset{\frown}{AB'}$ مساوی $\overset{\frown}{CB}$ جدا کنیم $AB' = AD$ است و چون چهارضلعی B′ACB ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است در نتیجه:

$B'\hat{A}C = A\hat{C}B =$ مقدار ثابت

چنانچه B′ را دورانی به مرکز A و زاویهٔ $A\hat{C}B = \alpha$ داده شود بر D منطبق می‌شود

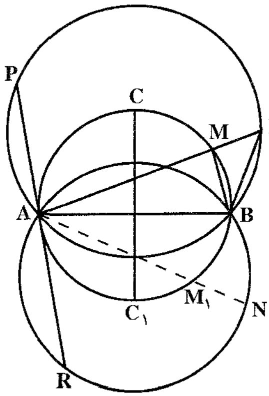
و چنانچه نقطهٔ C بر کمان $\overset{\frown}{AB}$ تغییر نماید، B' بر کمان $\overset{\frown}{AM}$ $(\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{AB})$ تغییر می‌نماید.

که در نتیجه مکان D از دوران کمان $\overset{\frown}{AM}$ حول A به زاویهٔ $\alpha = A\hat{C}B$ حاصل می‌شود.

۴۶۵. داریم:

بنا به فرض $MN = MB$

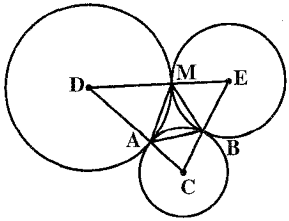
$$\overset{\Delta}{BMN} \Rightarrow M\hat{B}N = M\hat{N}B \Rightarrow M\hat{N}B = \frac{1}{2}A\hat{M}B$$ متساوی‌الساقین



و چون $A\hat{B}M$ زاویهٔ ثابتی است، پس $A\hat{N}B$ هم مقدار ثابتی است و از N، ضلع AB به زاویهٔ ثابت رؤیت می‌شود. اگر نقطهٔ M بر نقطه‌های A و B منطبق شود، مثلاً M روی A قرار گیرد کمان BNP مکان نقطهٔ N است (PR مماس بر دایره در A) در حالت قبل M در یک طرف وتر AB قرار گرفته است. به طریق مشابه ثابت می‌شود که کمان BN_1R مکان نقطهٔ N است. هرگاه M طرف دیگر وتر باشد، به سهولت ثابت می‌شود که مرکز کمانهای BNP و BN_1R نقطه‌های C و C_1 وسطهای کمانهای BMA و BM_1A می‌باشند.

۴۶۶. نقطهٔ P مرکز ثقل مثلث ABC است، پس $\frac{DP}{DC} = \frac{1}{3}$ است. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ P مجانس مکان هندسی نقطهٔ C نسبت به مرکز تجانس D و نسبت تجانس $\frac{1}{3}$ است. امّا $\frac{BC}{BM} = 2$ می‌باشد، یعنی مکان هندسی نقطهٔ C دایره‌ای است، مجانس دایرهٔ ثابت داده شده با نسبت ۲، پس مکان هندسی نقطهٔ P یک دایره است.

۴۶۷. دو دایره را D و E و نقطهٔ تماسشان را M می‌نامیم.



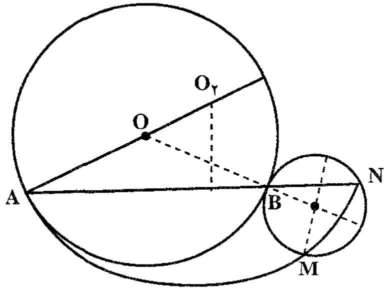
فرض می‌کنیم دایرهٔ D در نقطهٔ A و دایرهٔ E در نقطهٔ B بر دایرهٔ ثابت C مماس باشد، داریم:

$$A\hat{M}B = \frac{\hat{D}+\hat{E}}{2} = 90^\circ - \frac{\hat{C}}{2}\ ,\ A\hat{C}B = \text{مقدار ثابت}$$

$$\Rightarrow A\hat{M}B = \text{مقدار ثابت}$$

پس مکان هندسی نقطهٔ M کمان درخور زاویهٔ $\frac{\hat{C}}{۲}-۹۰^\circ$ مقابل به پاره‌خط ثابت AB است.

نکته. بخش دیگر این کمان درخور به مکان هندسی نقطهٔ M در حالتی اختصاص دارد که دو دایرهٔ D و E مماس داخل باشند.



۴۶۸. اندازهٔ زاویه‌های AMN و BNM را می‌توان برحسب اندازهٔ زاویهٔ مرکزی متناظر با کمان ABی دایرهٔ مفروض، نشان داد (حالتهای مختلف جای N را در نظر بگیرید)؛ با این کار، می‌توان اندازهٔ زاویهٔ AMB را تعیین کرد. مکان مطلوب، یک دایره است.

۴۶۹. گزینهٔ (الف) درست است.

۴۷۰. فرض می‌کنیم N وسط وتر CD باشد، در مثلث قائم‌الزاویه OCM می‌توان نوشت:

$$\overline{OC}^{۲}=\overline{OM}\times\overline{ON}$$

و یا

$$\overline{OM}.\overline{ON}=R^{۲}$$

بنابراین M منعکس N نسبت به O با قوت $R^۲$ است، پس مکان M منعکس خط AB نسبت به O با قوت $R^۲$ می‌باشد.

۴۷۱. مکان هندسی وسطهای AD و AC دایره‌ای به قطر AO است و مکان هندسی وسط BC و وسط BD دایره‌ای به قطر BO می‌باشد. زیرا به عنوان مثال، اگر نقطهٔ E وسط وتر AD باشد، $A\hat{E}O=۹۰^\circ$ و AO ثابت است.

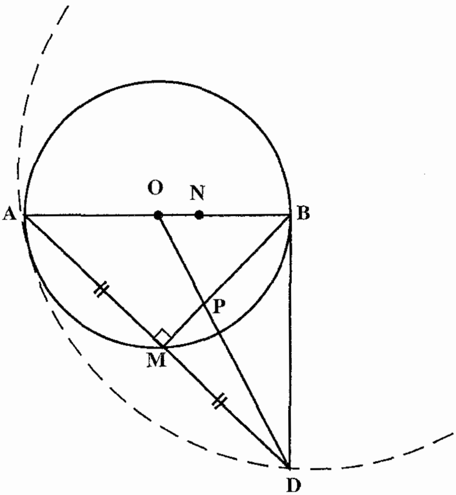
۴۷۲. اگر M مرکز دایرهٔ محیطی مثلث KCD و KE مماس بر این دایره در K باشد، چون CKD محاطی و CND مرکزی است، پس $C\hat{N}D=۲C\hat{K}D$، یعنی زاویه‌های مثلث متساوی‌الساقین CND ثابت است. چون طول وتر CD نیز ثابت است، پس قطعه‌های NC، NO و NK با هم متساوی و به طول ثابتی هستند و داریم:

$$E\hat{K}D=K\hat{C}D=۱۸۰^\circ-A\hat{C}D=A\hat{B}D$$

$\Rightarrow AB\parallel KE$ چون و $NK\perp KE\Rightarrow NK\perp AB$

اگر وضع CD تغییر کند، مکان هندسی K دایره‌ای است گذرنده بر AB و چون KN به طول و امتداد ثابت است، پس مکان دایره‌ای است برابر با O. به روش مشابه ثابت

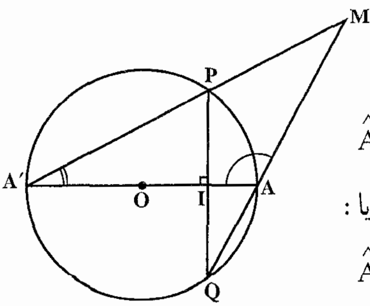
می‌شود که مکان هندسی مرکز دایرهٔ محیطی مثلث MCD دایره‌ای است که از M می‌گذرد، هرگاه این دایره را به اندازهٔ $\overrightarrow{N_1M}$ انتقال بدهیم (N_1 مرکز دایرهٔ محیطی مثلث CMD است).



۲.۲.۲.۲.۳.۵. یک دایره، قطر

۴۷۳. چون زاویهٔ $\hat{M}$ روبه‌رو به قطر AB است، پس $\hat{M} = 90^\circ$ و چون AM = MD است، پس مثلث ABD متساوی‌الساقین است و نقطهٔ P محل تلاقی دو میانهٔ OD و BM می‌باشد و AB یک ساق ثابت این مثلث است، ولی رأس D تغییر مکان می‌دهد و مکان هندسی رأس D دایره‌ای است به مرکز B و به شعاع AB = BD . از طرفی $\overrightarrow{OP} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OD}$. پس مکان نقطهٔ P دایرهٔ مجانس مکان D، یعنی دایره‌ای به مرکز N و به شعاع $\frac{1}{3}AB$ است، به قسمی که $\overrightarrow{ON} = \frac{1}{3}\overrightarrow{OB}$. در واقع مجانس نقطهٔ B مرکز دایرهٔ مکان رأس D نیز نقطهٔ N است، یعنی ON برابر $\frac{1}{3}OB$ می‌باشد.

۴۷۴. زاویه‌های A' و Q (شکل) مساوی‌اند ؛ ولی $\hat{A}$ در مثلث MAA' مساوی است با :

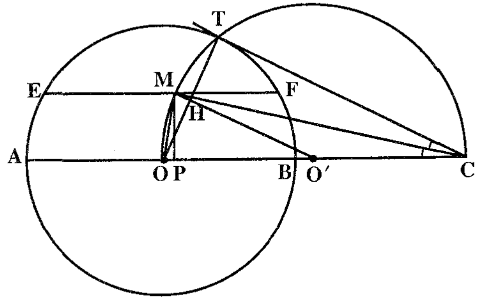


$$\hat{A} = \frac{\pi}{2} + \hat{Q}$$

(چون A زاویهٔ خارجی مثلث AIQ می‌باشد) و یا :

$$\hat{A} = \frac{\pi}{2} + \hat{A}' \Rightarrow \hat{A} - \hat{A}' = \frac{\pi}{2}$$

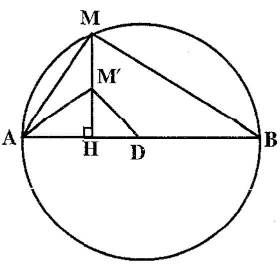
بنابراین، مثلث MAA' یک مثلث Psedo-rectangle و M متعلق به هذلولی متساوی‌الساقین (H) به رأسهای A و A' می‌باشد. بعلاوه به ازای هر نقطهٔ M این هذلولی یک وتر PQ وجود دارد و مکان نقطهٔ M، هذلولی (H) می‌باشد.



۴۷۵. از نقطهٔ C واقع بر امتداد AB مماس CT را بر دایرهٔ (O) رسم می‌کنیم. CM نیمساز زاویهٔ TCO و M تصویر O روی این نیمساز است. دایرهٔ به قطر OC و به مرکز O′ از T و M می‌گذرد و O′M عمودمنصف OT است. MP را بر OC عمود می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OMP و OMH با هم برابرند، زیرا وتر OM در هر دو مشترک است و $M\hat{O}P = H\hat{M}O$، پس $MP = OH = \frac{OT}{۲} = \frac{R}{۲}$. بنابراین نقطهٔ M به فاصلهٔ ثابت $\frac{R}{۲}$ از AB واقع است و مکان هندسی نقطهٔ M خط EF است که موازی با AB و به فاصلهٔ $\frac{R}{۲}$ از آن است. واضح است که قرینهٔ EF نسبت به AB، قسمتی دیگر از مکان است و EF نامحدود است.

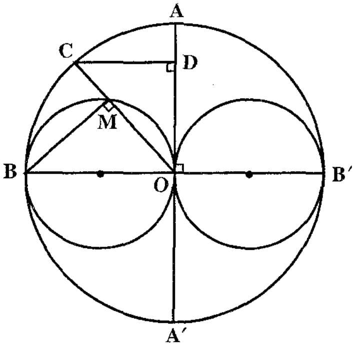
۴۷۶. AM و NQ دو ارتفاع از مثلث APQ می‌باشند، پس PN′ ارتفاع سوم این مثلث بوده و از B نیز می‌گذرد. ارتفاعهای مثلث APQ نیمسازهای زاویه‌های مثلث MNN′ می‌باشند، پس N′B نیمساز زاویهٔ MN′N است، چون N′B بر AN′ عمود است، AN′ نیمساز خارجی MN′N است، پس نقطه‌های M، E، B و A تشکیل تقسیم توافقی می‌دهند، چون B، A و M ثابتند. پس نقطهٔ E ثابت است. مکان H دایرهٔ به قطر AE است (E نقطهٔ برخورد AM و N′N است).

۴۷۷. مثلث POM متساوی‌الساقین است. ارتفاعهای MH و OT با هم برابرند، از آن‌جا $MH = R = OC$. پس نقطهٔ M به فاصلهٔ ثابتی از خط AB قرار دارد. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M نیمخط Δ است که از نقطهٔ C موازی خط AB رسم می‌شود.



۴۷۹. از نقطهٔ M′ عمودی بر AM′ اخراج می‌کنیم تا AB را در D قطع کند. دایرهٔ به قطر AD جواب است. زیرا داریم:

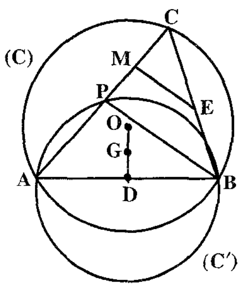
$$\frac{AM'^{۲}}{AM^{۲}} = \frac{AD}{AB} = k^{۲} \Rightarrow AD = k^{۲}.۲R = \text{مقدار ثابت}$$



۴۸۰. قطر BB' عمود بر قطر AA' را رسم می‌کنیم و از B به M وصل می‌نماییم. داریم :

$$OD \perp OA \ , \ OM = CD$$
$$\Rightarrow \Delta OMB \cong \Delta ODC \ ,$$
$$\Rightarrow B\hat{M}O = 90^\circ$$

پس مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به قطر OB است.

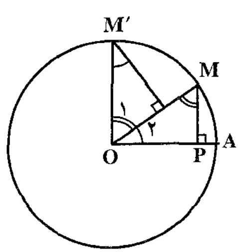


۴۸۱. از O عمود OD را بر وتر AB فرود می‌آوریم و وسط پاره‌خط OD را G می‌نامیم. مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز G و به شعاع AG است. اگر P پای عمود رسم شده از B بر AC است، M پای عمود رسم شده از نقطهٔ E وسط BC بر PC است.

۳.۲.۲.۲.۳.۵. یک دایره، شعاع

۴۸۲. شعاع OM' را عمود بر AO رسم می‌کنیم و از M' به K وصل می‌کنیم، دو مثلث MPO و $M'KO$ همنهشتند، چون $KO = MP$ و $M'O = MO = R$، درضمن $\hat{M}_1 + \hat{O}_2 = 90^\circ$ و $\hat{O}_1 + \hat{O}_2 = 90^\circ$، پس $\hat{O}_1 = \hat{M}_1$، پس دو مثلث بنا به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین همنهشتند. از این همنهشتی نتیجه می‌گیریم که :

$\hat{M}' = \hat{O}_2$ و $\hat{O}_1 = \hat{M}_1$ ولی $\hat{M}_1 + \hat{O}_2 = 90^\circ$



پس $\hat{M}_1 + \hat{O}_2 = 90^\circ$، پس در مثلث $M'KO$ زاویهٔ K برابر 90° است، بنابراین مکان نقطهٔ K دایره‌ای است به شعاع $M'O$.

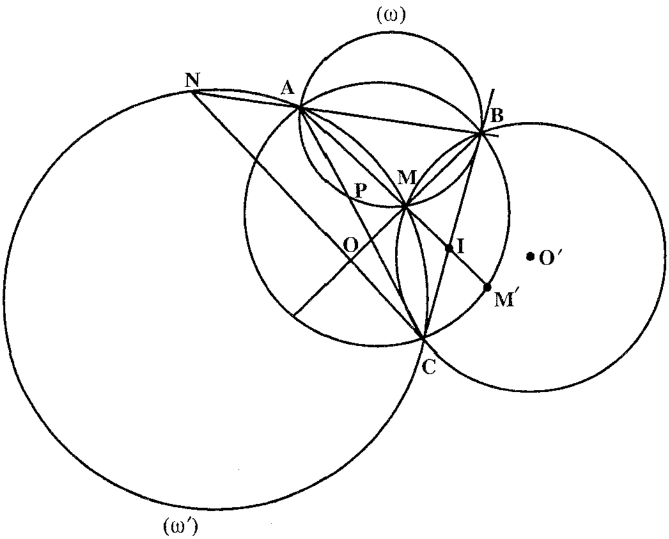
۳.۲.۲.۳.۵. مسأله‌های ترکیبی

۴۸۴. ۱. اگر M نقطهٔ تقاطع دیگر دایره‌های (ω) و (ω') در این حالت باشد، خط AM محور اصلی دایره‌های (ω) و (ω') بوده و از نقطهٔ I وسط BC مماس مشترک دو دایره می‌گذرد و چون BC ثابت است، I وسط آن و طولش نیز ثابت بوده و داریم:

$$\overline{IM}.\overline{IA} = \overline{IB}^2 = \text{مقدار ثابت} \qquad (1)$$

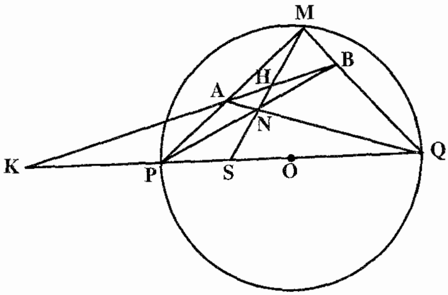
و از طرفی:

$$P_{I(O)} = \left|\overline{IM}.\overline{IA}\right| = \left|\overline{IA}.\overline{IM'}\right| \qquad (2)$$



از ملاحظهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $\left|\overline{IM}\right| = \left|\overline{IM'}\right|$؛ یعنی M قرینهٔ M′ است، نسبت به I و همچنین از ملاحظهٔ رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود که M منعکس A است در انعکاس $(I\ ,\ IB^2 = k)$. لذا مکان M منعکس مکان A در انعکاس $(I\ ,\ k = IB^2)$ است که این مکان دایره‌ای است مانند (O′) قرینهٔ دایرهٔ (O) نسبت به BC.

۲. داریم: $\overline{BA}.\overline{BN} = \overline{BC}^2 = \text{مقدار ثابت}$. یعنی مکان N منعکس نقطهٔ A است در انعکاس $(B\ ,\ \overline{BC}^2 = k)$ و چون مکان A دایرهٔ (O) است که از B می‌گذرد، لذا N منعکس دایرهٔ (O) است که خطی است مستقیم که از C گذشته و بر BO عمود است و همچنین مقدار ثابت $= \overline{CP}.\overline{CA} = \overline{CB}^2$ است. نتیجه می‌شود مکان P منعکس مکان A در انعکاس $(C\ ,\ k = \overline{CB}^2)$ است، یعنی مکان P نیز خطی است مستقیم که از B گذشته و بر $\overline{CO}$ عمود است.



۴۸۵. ۱. چون چهارضلعی MBNA را در نظر بگیریم، نقطه‌های P و Q رأسهای پنجم و ششم و خط PQ قطر سوم آن است، پس نقطه‌های تقاطع S و K قطرها و MN و AB با PQ نسبت به P و Q مزدوجند، یعنی K مزدوج S نسبت به P و Q می‌باشد، پس $\overline{OS}.\overline{OK} = R^2$ می‌باشد. اما مکان K خط ثابت AB می‌باشد، پس مکان S دایره‌ای است که منعکس این خط می‌باشد، و بر O می‌گذرد (قطب انعکاس O و قوت انعکاس R^2 می‌باشد).

۲. اگر T وسط MN باشد، بنابر قضیهٔ قطرهای چهارضلعیها، می‌دانیم که وسطهای سه قطر هر چهارضلعی کامل بر یک خط مستقیم واقعند، پس نقطهٔ T (وسط MN) و C (وسط AB) و O (وسط PQ) بر یک خط مستقیم واقعند، ولی نقطه‌های C (وسط AB) و O (وسط PQ) دو نقطهٔ ثابتند، پس مکان نقطهٔ T همین خط است، یعنی خط OC.

۳. مکان هندسی نقطه‌های M و N یک منحنی درجهٔ چهارم است، زیرا با تغییر قطر PQ دیدیم مکان S یک دایره است. پس خط MN این دایره را در نقطهٔ دیگری جز S مانند S' قطع می‌کند و برای این دو نقطه، نقطه‌های M و N تغییر نمی‌کنند ولی نقطهٔ H مزدوج S نسبت به M و N بر روی خط AB حرکت می‌کند. پس برای هر خطی مستقیم دو وضع مختلف از M و N وجود دارد و منحنی مکان از درجهٔ چهارم است.

اگر نقطه‌های A و B بر روی قطری از دایره قرار گیرند در یکی از مسأله‌های پیش دیدیم که مکان آنها یک دایره است به مرکز S (در این صورت S نقطهٔ ثابتی است و K و نیز طول SK ثابت است)، یعنی منحنی درجهٔ چهارم مکانهای M و N به دو دایرهٔ منطبق تبدیل می‌شود. حالت دیگر موقعی است که نقطه‌های A و B بر روی دایره واقع باشند. در این صورت نیز مکان M و N دو دایرهٔ منطبق می‌باشد.

۴۸۶. مکان هندسی نقطهٔ M، دایره‌ای است که قطرش CD پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند (دایرهٔ آپولونیوس). این دایره را رسم می‌کنیم.

۱. اگر دو نقطهٔ C' و D' را چنان اختیار کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت $k' < k$ تقسیم کنند، پاره‌خط $C'D'$ داخل پاره‌خط CD واقع می‌شود، پس دایرهٔ (O') یعنی دایرهٔ به قطر $C'D'$ داخل دایرهٔ (O) قرار خواهد گرفت.

۲. اگر نقطه‌های C'' و D'' را چنان اختیار کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت $k'' > k$

تقسیم کنند، پاره‌خط $C''D''$ خارج پاره‌خط CD قرار می‌گیرد، پس دایرهٔ به قطر $C''D''$ خارج دایرهٔ (O) واقع می‌شود.

۳. از قسمتهای ۱ و ۲ این مطلب مشخص است.

۴۸۷. چون شکل را به قوت $\overline{IA}\times\overline{IB}$ و به قطب I منعکس کنیم، دایرهٔ (O) تغییر نمی‌کند و منعکس CD وتر $C'D'$ می‌شود به قسمی که :

$$\frac{C'D'}{CD}=\frac{ID'}{IC} \quad \text{و یا} \quad \frac{C'D'}{CD}=\frac{ID'\times ID}{IC\times ID}$$

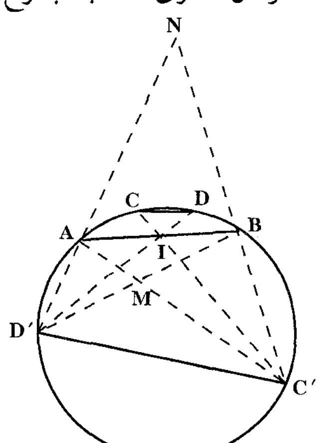
پس چون $\overline{ID'}\times\overline{ID}=\overline{IA}\times\overline{IB}$ یعنی $b^{2}-R^{2}$ می‌باشد (۲b طول وتر ثابت AB می‌باشد)، پس $\frac{C'D'}{CD}=\frac{b^{2}-R^{2}}{IC\times ID}$ ولی بنا به فرض مسأله $\frac{IH}{CD}=\frac{a}{2r}$ ؛ دایرهٔ محیطی مثلث ICD به خط $C'D'$ تبدیل می‌شود و از رابطهٔ بالا حاصل می‌شود :

$$a.CD=2r.IH=IC\times ID$$

(زیرا حاصلضرب قطر دایرهٔ محیطی در ارتفاع هر ضلع برابر حاصلضرب دو ضلع دیگر است) بنابراین با برقرار کردن CD از روی $C'D'$ خواهیم داشت :

$$a.\frac{IC\times ID\times C'D'}{b^{2}-R^{2}}=\overline{IC}\times\overline{ID} \quad \text{و یا} \quad C'D'=\frac{b^{2}-R^{2}}{a}$$

یعنی $C'D'$ طول ثابتی است. نقطه‌های P و Q، یعنی نقطهٔ تقاطع دایره‌های (BID , AIC) و دایره‌های (BIC , AID) به نقطه‌های M و N نقطه‌های تقاطع وترهای (AD' , BC') و (AC' , BD') تبدیل می‌شوند. چون منعکس دایرهٔ AIC خط BC' است و همچنین برای سایر دایره‌ها زاویهٔ AMB مقدار ثابتی دارد، زیرا اندازهٔ آن مساوی است با مجموع نصف قوس $\widehat{AB}$ و نصف قوس $\widehat{C'D'}$ چون وترهای AB و $C'D'$ ثابت می‌باشند. این قوسها نیز ثابتند، پس زاویهٔ AMB مقدار ثابتی دارد و مکان M کمان درخور این زاویه بر روی AB می‌باشد. همچنین اندازهٔ زاویهٔ ANB نیز ثابت است، زیرا اندازهٔ آن تفاوت نصف قوس $C'D'$ و نصف قوس AB می‌باشد. این مقدار نیز ثابت است، پس مکان هندسی N نیز کمان درخور این زاویه بر روی AB می‌باشد. اگر $C'D'$ به قطر دایره بدل شود، مشاهده می‌شود که اندازه‌های AMB و ANB بر روی هم برابر قوس



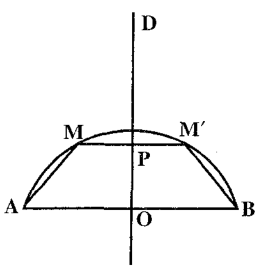
$C'D'$ یعنی 180° می‌باشند، یعنی چهارضلعی AMBN محاطی است و مکان نقطهٔ M بر مکان N منطبق است. اگر وتر ثابت AB به قطر بدل شود، در این صورت مشاهده می‌شود که اندازهٔ زاویهٔ M و زاویهٔ N باز هم مکمل یکدیگرند، یعنی کمان درخور زاویهٔ N بر روی AB دایره‌ای ایجاد می‌کند که با دایرهٔ حاصل از کمان درخور زاویهٔ M بر AB برابر است، یعنی دو دایرهٔ متساوی که نسبت به AB قرینه‌اند به‌دست می‌آیند.

۴۸۸. a) C را انتهای دیگر قطری از دایره می‌گیریم که از A گذشته است. AMC، زاویه‌ای قائمه است. چون $MK = KB$ و $PK \| MC$، بنابراین خط راست PK، پاره‌خط راست BC را در وسط آن قطع می‌کند : $BH = HC$. به این ترتیب، همهٔ خطهای راست PK، از نقطهٔ H وسط پاره‌خط راست BC می‌گذرند.

b) از (a) نتیجه می‌شود که همهٔ نقطه‌های P، روی محیط دایره‌ای قرار دارند که به قطر AH رسم شود. چون زاویهٔ HBA قائمه است، این دایره از نقطهٔ B هم می‌گذرد.

۴۸۹. ۱. قوسِ دایره رسم کنیم که از دو نقطهٔ مفروض A و B می‌گذرد.

فرض کنیم M و M' نقطه‌هایی باشند که این قوس را به سه قسمت متساوی تقسیم کرده‌اند. اگر AM، MM' و $M'B$ را رسم نماییم، این سه وتر متساوی خواهند بود. در نتیجه نقطهٔ P که فصل مشترک وتر MM' و خط D عمودمنصف AB می‌باشد، خواهیم داشت : $MA = 2MP$ و از آن‌جا : $\frac{MA}{MP} = 2$ نقطهٔ M روی یک شاخهٔ هذلولی به کانون A و به خط هادی D و خروج از مرکز ۲ که نسبت به خط D در همان طرف نقطهٔ A می‌باشد قرار دارد و بعکس. M نقطه‌ای است غیرمشخص از این شاخه و قوس دایره‌ای مانند AMB وجود دارد که $AM = 2MP$ و خواهیم داشت : $AM = MM' = M'B$ و نقطهٔ M در ثلث این قوس ابتدا از A واقع است.



بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M این شاخه هذلولی است و مکان نقطهٔ M' قرینهٔ این شاخه نسبت به خط D است.

۲. دایرهٔ محیطی ABC را در نظر می‌گیریم. برای این که یکی از زاویه‌های A و B دو برابر دیگری باشد، لازم و کافی است که نقطهٔ C در $\frac{1}{3}$ قوس $\overset{\frown}{ACB}$ ابتدا از A یا B قرار گیرد و ملاحظه می‌شود که مکان نقطهٔ C همان است که در فرض اول به‌دست آوردیم.

۴۹۰. بسادگی ثابت می‌شود که $\hat{M}+\hat{M}_1=180^\circ$ است، پس چهارضلعی $AMBM_1$ محاطی است و مکان هندسی به وضع CD ارتباطی ندارد و اگر C یا D بر نقطه‌های B یا A منطبق شوند، باز هم مجموع زاویه‌های AMB و AM_1B برابر 180° است (شکل الف).

در شکل (ب) نیز $A\hat{K}B+A\hat{K}_1B=180^\circ$ و چهارضلعی $AKBK_1$ محاطی است و اثبات شبیه اثبات قبلی است.

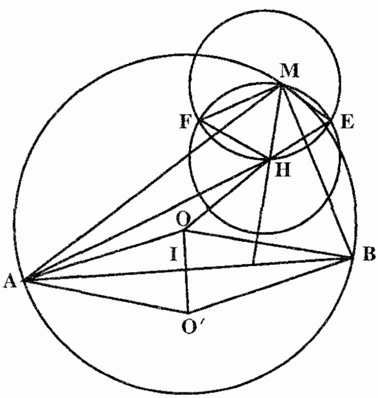
۴۹۱. ۱ و ۲. مثلثهای متساوی‌الساقین...

۳. مکان هندسی وسط پاره‌خطهای واصل بین یک نقطهٔ ثابت و یک خط ثابت.

۴. رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه.

۵. مثلث متساوی‌الاضلاع.

۴۹۲. راه اول. الف. می‌دانیم:



$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OM}=\overrightarrow{OH}$$

و اگر I وسط AB باشد:

$$\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}=2\overrightarrow{OI}$$

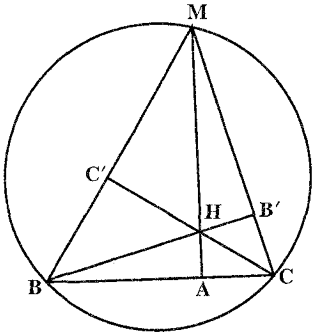
پس: $\overrightarrow{OH}=\overrightarrow{OM}+2\overrightarrow{OI}=\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MH}$

و از آن‌جا $\overrightarrow{MH}=2\overrightarrow{OI}$. بنابراین مکان H از مکان M با انتقالی برابر $2\overrightarrow{OI}$ یا OO' (O' قرینهٔ O نسبت به AB است) به‌دست می‌آید و دایره‌ای است، به مرکز O' و برابر با دایرهٔ (O).

ب. مثلثهای MEH و MFH متساوی‌الاضلاعند. بردارهای $\overrightarrow{ME}$ و $\overrightarrow{MF}$ با $\overrightarrow{MH}$ برابر بوده و با آن زاویهٔ 60° می‌سازند. از مکان M به مکان نقطه‌های E و F با انتقالی به طول OO' که با MH زاویهٔ 60° می‌سازد، می‌توان رسید، پس مکان نقطه‌های E و F دو دایره برابر با دایرهٔ (O) می‌باشند که مرکزهای آنها رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاعی است که روی OO' ساخته شود.

راه دوم. می‌دانیم: $2\overrightarrow{EO}=\overrightarrow{HA}$، پس اگر قرینهٔ نقطهٔ O را نسبت به BC نقطهٔ O' بنامیم $\overrightarrow{O'O}=\overrightarrow{HA}$ خواهد شد، در نتیجه چهارضلعی $OAHO'$ متوازی‌الاضلاع می‌شود، پس $OA=O'H=R$ خواهد شد، یعنی مکان نقطهٔ H دایره‌ای است به مرکز

O' قرینهٔ O نسبت به BC و به شعاع R یا به عبارت دیگر اگر دایرهٔ (O) را به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{OO'}$ انتقال بدهیم، مکان به‌دست می‌آید.



راه سوم. چهارضلعی $AC'HB'$ محاطی است و چون اندازهٔ زاویهٔ M همواره مقدار ثابتی است، پس:

$$C'\hat{H}B' = B\hat{H}C = \pi - \hat{M}$$

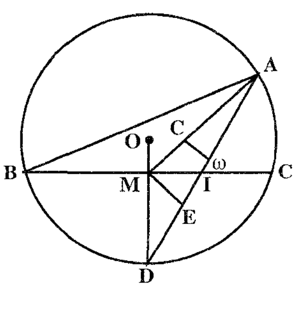
مقدار ثابتی خواهد بود، یعنی مکان نقطهٔ H کمان درخور BC به زاویهٔ ثابت $\pi - \hat{M}$ می‌باشد.

۵.۳.۲.۳. یک دایره، سه نقطه

۴۹۳. دو خط AM' و BM هر دو بر AM عمودند، پس با هم موازی‌اند. دو مثلث CAP و CBM نسبت به مرکز تجانس C مجانس یکدیگرند؛ از آن‌جا:

$$\frac{CP}{CM} = \frac{CA}{CB}$$

در نتیجه وقتی M روی دایرهٔ C حرکت کند، مکان P مجانس دایرهٔ (O) نسبت به مرکز C و به نسبت $\frac{CA}{CB}$ است.



۴۹۴. اگر M وسط BC باشد، زاویهٔ $I\hat{M}D$ قائمه است، پس مکان M دایرهٔ به قطر ID است و چون $\frac{\overline{AG}}{\overline{AM}} = \frac{۲}{۳}$ است، پس مکان G دایرهٔ مجانس مکان M در تجانس $(A, \frac{۲}{۳})$ است (شکل).

۵.۳.۲.۴. یک دایره، چهار نقطه

۵.۳.۲.۴.۱. یک دایره، یک قطر، یک وتر

۴۹۵. M مرکز دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویهٔ PIQ است. قوت M را نسبت به این دایره می‌نویسیم:

$$\overline{AM}^2 - \overline{MP}^2 = \overline{AI} \times \overline{AP}$$

چهارضلعی BHIP محاطی است، چون $\hat{H} = \hat{P} = ۹۰°$. داریم :

$$AI \times AP = AH \times AB = ۲dR$$

بنابراین

$$AM^۲ - MP^۲ = ۲dR \quad (۱)$$

مثلث OMP در رأس M قائمه است، پس :

$$OM^۲ + MP^۲ = R^۲ \quad (۲)$$

دو طرف رابطهٔ (۱) و (۲) را با هم جمع می‌کنیم.

$$MA^۲ + MO^۲ = R^۲ + ۲dR \quad (۳)$$

اگر S وسط OA باشد، قضیهٔ میانه‌ها را در مثلث OAM می‌نویسیم.

$$MA^۲ + MO^۲ = ۲SM^۲ + \frac{R^۲}{۲}$$

با رابطهٔ (۳) مقایسه می‌کنیم، می‌شود :

$$۲SM^۲ + \frac{R^۲}{۲} = R^۲ + ۲dR$$

و یا

$$SM = \frac{۱}{۲}\sqrt{R(۴d + R)}$$

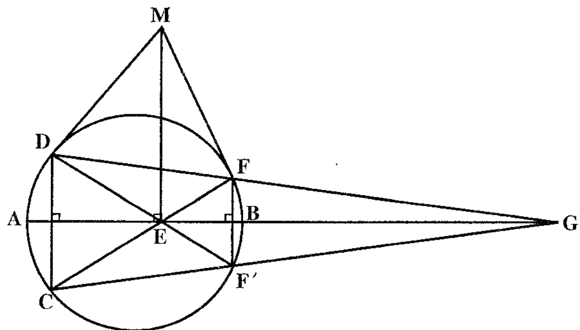
پس M روی دایره‌ای است به مرکز S و به شعاع $\frac{۱}{۲}\sqrt{R(۴d+R)}$. این دایره بر C و D می‌گذرد، زیرا داریم :

$$SC^۲ = SH^۲ = HC^۲ = (d - \frac{R}{۲})^۲ + d(۲R - d) = \frac{R(۴d + R)}{۴}$$

وقتی که P کمان $\overset{\frown}{CB}$ را طی کند، Q کمان $\overset{\frown}{BD}$ را طی خواهد کرد و M کمانی از دایرهٔ T را که بین MO و M′O واقعند طی خواهد کرد (MO و M′O وسطهای وترهای BC و BD است) بنابراین مکان M رسم می‌شود.

۳. خطهای OM و AK با عمودمنصف MK که بر S می‌گذرد، موازی‌اند. داریم : SK = SM . بنابراین K روی دایرهٔ (T) است. بردارهای $\overrightarrow{AK}$ و $\overrightarrow{OM}$ موازی و ثابتند و K کمان $\overset{\frown}{M_۱'D}$ و $\overset{\frown}{CM_۱}$ از دایرهٔ (T) را طی می‌کند، این کمان مکان K است.

۴۹۶. قرینهٔ نقطهٔ F نسبت به قطر AB را F′ می‌نامیم. خط DF′ از نقطهٔ E می‌گذرد و خطهای DF و DF′ یکدیگر را روی قطر AB در نقطهٔ G قطع می‌کنند. خط EM قطبی نقطهٔ G نسبت به دایره است. بنابراین قطبی نقطهٔ M از نقطهٔ G می‌گذرد. امّا این قطبی از نقطهٔ F نیز می‌گذرد، پس FG قطبی نقطهٔ M نسبت به دایره است. چون این

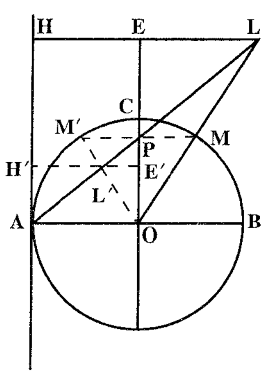


خط دایره را در نقطهٔ D قطع می‌کند. خط مماس بر دایره در نقطهٔ D از نقطهٔ M می‌گذرد و این خط مماس مکان هندسی نقطهٔ M است. می‌توان ثابت کرد که تمام نقطه‌های این خط مماس به مکان هندسی مورد نظر تعلق دارند. در واقع، اگر M نقطه‌ای روی خط مماس بر دایره در نقطهٔ D باشد، از نقطهٔ M مماس دیگر MF را رسم و DF را نیز رسم می‌کنیم که AB را در نقطهٔ G قطع کند. چون خطی DF قطبی نقطهٔ M از نقطهٔ G می‌گذرد، قطبی نقطهٔ G از نقطهٔ M می‌گذرد.

از طرف دیگر، خط GC، قرینهٔ GD نسبت به AB، دایره را در نقطهٔ ′F قرینهٔ نقطهٔ F قطع می‌کند و ′DF و CF یکدیگر را در نقطهٔ E از قطر AB، واقع بر قطبی نقطهٔ G قطع می‌کنند؛ از آن‌جا، این قطبی خط EM است و این خط عمود بر AB است. در نتیجه نقطهٔ M، یک نقطه از مکان هندسی مورد نظر است.

۲.۴.۲.۳.۵. یک دایره، دو قطر عمود بر هم

۴۹۷. چهارضلعی DEPM را در نظر بگیرید که در آن $D\hat{E}M = D\hat{P}M = 90^\circ$، در نتیجه، این چهارضلعی، چهارضلعیی محاطی است. بنابراین، $D\hat{M}E = D\hat{P}E = 45^\circ$. مکان هندسی مطلوب، خط راست DC است.



۴۹۹. فرض کنیم L فصل مشترک خطهای AP و OM باشد. LH را بر مماس در A بر دایرهٔ (O) عمود می‌کنیم (شکل). این خط، CD را در E قطع می‌کند. داریم:

$$\frac{OL}{AO} = \frac{ML}{PM}, \quad \frac{OL}{OM} = \frac{EL}{PM}$$

و یا با توجه به این که $AO = OM$ است:

$$\frac{ML}{PM} = \frac{EL}{PM} \Rightarrow \text{یا } ML = EL$$

در نتیجه: $LO = LH$

و اگر L' فصل مشترک OM' و AP داخل دایرهٔ (O) باشد، ثابت می‌شود $L'O = L'H'$ است، پس L و L' متعلق به سهمی (P) به کانون O و هادی AH [مماس در A بر دایرهٔ (O)]می‌باشند، این سهمی از C و D گذشته و AC و AD مماسهای در این نقطه‌ها می‌باشند. وقتی که M و M' دایره را طی کنند، L و L' سهمی را طی خواهند کرد. بنابراین سهمی (P)، مکان L و L' است.

۵۰۰. اگر I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث OMP در یک حالت خاص باشد، I محل تلاقی نیمسازهای داخلی زاویه‌های مثلث بوده و داریم: $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و $\hat{M}_1 = \hat{M}_2$ و چون P تصویر M بر AB است، بنابراین $\hat{M} + \hat{O} - \hat{P} = 90^\circ$ و در نتیجه $\hat{M}_1 + \hat{O}_2 = 45^\circ$ است و $M\hat{I}O = 135^\circ$ و چون دو مثلث $\overset{\Delta}{MIO}$ و $\overset{\Delta}{AIO}$ به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین آنها همنهشتند، پس $M\hat{I}O = O\hat{I}A = 135^\circ$ است و با تغییر M زاویهٔ $A\hat{I}O = 135^\circ$ ثابت خواهد ماند و از آن‌جا می‌توان گفت، مکان I کمان درخور زاویهٔ 135° گذرنده بر پاره‌خط OA است.

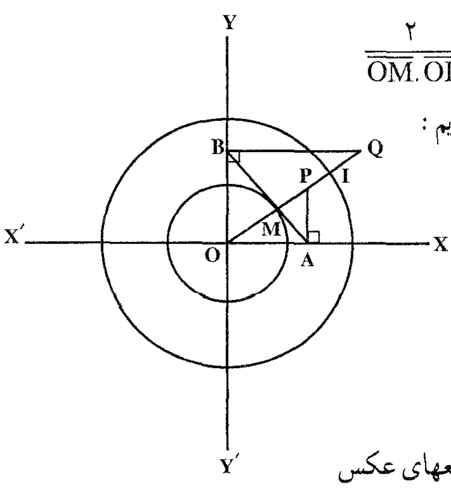
۵۰۱. این مکان قطعه خطی است که بر عمودمنصف OB واقع است و طول آن مساوی شعاع دایره است. دو سر این قطعه خط عبارتند از فصل مشترکهای BC و BD با عمودمنصف قطعه خط OB.

۵۰۲. بنا به رابطهٔ دکارت داریم:

$$\frac{2}{\overline{OI}} = \frac{1}{\overline{OP}} + \frac{1}{\overline{OQ}}$$

و یا

$$\frac{2}{\overline{OM}.\overline{OI}} = \frac{1}{\overline{OM}.\overline{OP}} + \frac{1}{\overline{OM}.\overline{OQ}} \quad (1)$$



در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ OAP و OBQ داریم:

$$\overline{OA}^2 = \overline{OM}.\overline{OP} \quad (2)$$

و

$$\overline{OB}^2 = \overline{OM}.\overline{OQ} \quad (3)$$

در نتیجه رابطهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$\frac{2}{\overline{OM}.\overline{OI}} = \frac{1}{\overline{OA}^2} + \frac{1}{\overline{OB}^2} \quad (4)$$

و چون در هر مثلث قائم‌الزاویه، مجموع مربعهای عکس

ضلعهای آن، برابر عکس مربع ارتفاع وارد بر وترش می‌باشد، پس رابطهٔ (۴) چنین می‌شود:

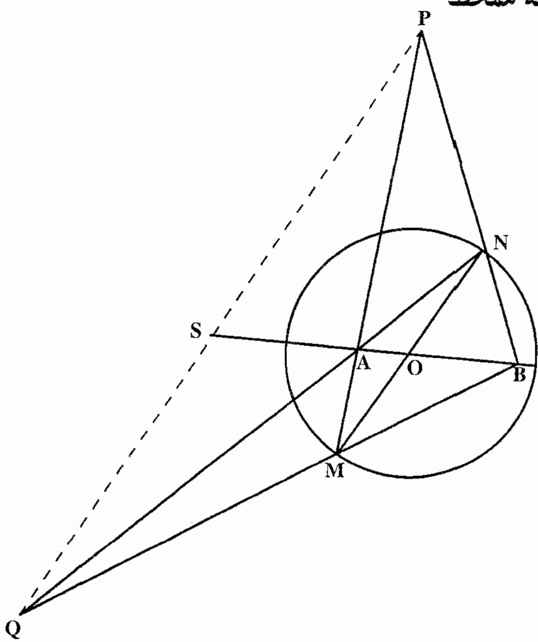
$$\frac{۲}{\overline{OM}.\overline{OI}} = \frac{۱}{\overline{OA}^{۲}} + \frac{۱}{\overline{OB}^{۲}} = \frac{۱}{\overline{OM}^{۲}}$$

و در نتیجه $\overline{OM}.\overline{OI} = ۲\overline{OM}^{۲}$ یا $OI = ۲\overline{OM}$، یعنی مکان هندسی نقطهٔ I مزدوج نقطهٔ O نسبت به PQ، دایره‌ای است به مرکز O و به شعاع $\overline{OI} = ۲\overline{OM} = ۲R$.

یادآوری. اگر M روی XX' یا YY' باشد، P روی M و Q در بینهایت است و اگر M روی Q باشد، P در بینهایت است و در این دو حالت نیز داریم:

$\overline{OI} = ۲\overline{OM}$

۵.۳.۲.۴.۳. یک دایره، چهار نقطهٔ همخط



۵۰۴. چون چهارضلعی ANBM را در نظر بگیریم. نقطه‌های P و Q رأسهای پنجم و ششم این چهارضلعی کامل و خط PQ قطر سوم آن خواهد بود. چون هر قطر با دو قطر دیگر در چهار نقطه به نسبت تقسیم توافقی قطع می‌شود، پس قطر PQ توسط قطرهای MN و AB در نقطه‌های P، Q و R و نقطهٔ تقاطع MN با PQ به رابطهٔ تقسیم توافقی بخش می‌شود. از طرف دیگر قطر MN نیز توسط قطرهای AB و PQ به نسبت توافقی تقسیم می‌شود و چون O وسط MN است، پس نقطهٔ تقاطع PQ با MN که بایستی مزدوج O نسبت به M و N باشد، در بینهایت دور قرار می‌گیرد (چون O وسط MN است) پس MN با PQ موازی است. همچنین قطر AB توسط MN و PQ به نسبت توافقی تقسیم می‌شود، پس نقطه‌های O و S نسبت به A و B مزدوجند. یعنی نقطهٔ S، نقطهٔ ثابتی است (زیرا نقطه‌های A، B و O، نقطه‌های ثابتی می‌باشند)، پس خط PQ همواره بر نقطهٔ ثابت S مرور کرده و با قطر

متغیر MN موازی باقی می‌ماند. اکنون از تشابه دو مثلث BON و BSP حاصل می‌شود که $\frac{SB}{OB}=\frac{SP}{ON}$. چون SB و OB مقدارهای ثابتی می‌باشند (نقطه‌های B، O، A و S، نقطه‌های ثابتی هستند) و شعاع ON نیز تغییر نمی‌کند، پس طول SP، همواره ثابت است و مکان P دایره‌ای است به مرکز S و به شعاع $SP=\frac{SB}{OB}\times R$. مکان نقطهٔ Q نیز همین دایره می‌باشد.

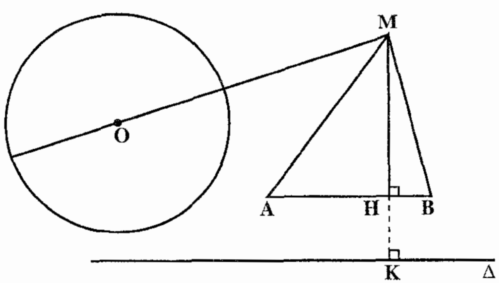
۴.۴.۲.۳.۵. یک دایره، چهار نقطهٔ همدایره

۵۰۵. با تعیین چند موقعیت از نقطه S، مکان هندسی آن‌را بیابید.

۳.۳.۵. یک دایرهٔ ثابت، خطهای ثابت

۱.۳.۳.۵. یک دایره، یک پاره خط، یک خط

۱.۱.۳.۳.۵. یک دایره، یک پاره خط



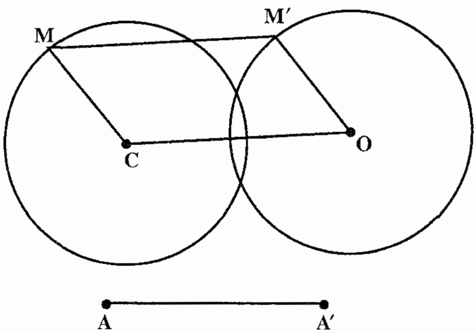
۵۰۶. سطح مثلث MAB برابر است با $MH\times AB$ یا $a\times MH$ (a طول AB است) ولی این سطح متناسب است با قوت M نسبت به دایرهٔ (O)، یعنی:

$$a.\overline{MH}=k(\overline{OM}^2-R^2)$$

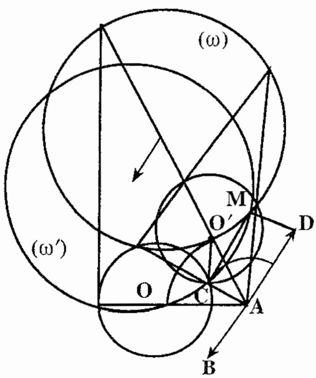
k عددی ثابت است. رابطهٔ بالا را می‌توان چنین نوشت:

$$k.\overline{OM}^2=a.\overline{MH}+kR^2=a(MH+\frac{kR^2}{a})$$

چون طولی برابر $\frac{kR^2}{a}$ بر MH بیفزاییم، یعنی خطی به موازات AB و به فاصلهٔ $\frac{kR^2}{a}$ رسم کنیم (خط Δ) $a(\overline{MH}+\frac{kR^2}{a})=a\overline{MK}$ خواهد بود، پس $k.\overline{OM}^2=a\overline{MK}$ و مسألهٔ قبل حاصل می‌شود. نسبت مربع فاصلهٔ نقطهٔ M از نقطهٔ O به فاصلهٔ M از خط Δ طولی است ثابت، پس مکان M یک دایره است.



۵۰۷. از C خط CO را موازی و مساوی با 'AA رسم می‌کنیم. از O به 'M و از C به M وصل می‌کنیم. چهارضلعی OM′MC متوازی‌الاضلاع است، پس $CM = OM' = R$ در نتیجه مکان 'M دایره‌ای است به مرکز C و به شعاع R یعنی شعاع دایرهٔ C.



۵۰۸. اگر C نقطهٔ دلخواهی از دایرهٔ (O) و D نقطهٔ متناظر C باشد، به نحوی که داشته باشیم:

$$\overrightarrow{AD} = ۲\overrightarrow{AC} , \quad \overrightarrow{AD} \perp \overrightarrow{AC}$$

در این حالت داریم:

$$\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD} = \overrightarrow{AC} + \overrightarrow{CM}$$

که با تغییر C بر دایرهٔ (O) نقطهٔ M انتهای برآیند بردارهای $\overrightarrow{AC} + \overrightarrow{AD}$ تغییر می‌نماید. لیکن در مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{AMC}$ داریم:

$$\overline{AM}^{۲} = \overline{AC}^{۲} + \overline{CM}^{۲} = ۵\overline{AC}^{۲}$$

و یا

$$\tan M\hat{A}C = ۲ , \quad \frac{\overrightarrow{AM}}{\overrightarrow{AC}} = \sqrt{۵}$$

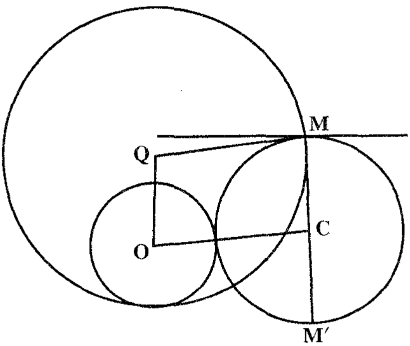
بنابراین اگر C را حول نقطهٔ A به اندازهٔ زاویهٔ $\alpha = M\hat{A}C = \text{Arc}\tan(۲)$ دوران دهیم، به صورت 'C واقع بر AM درمی‌آید، که خواهیم داشت:

$$\frac{\overline{AM}}{\overline{AC'}} = \frac{\overline{AM}}{\overline{AC}} = \sqrt{۵}$$

و از این رابطه نتیجه می‌گیریم که M مجانس 'C است. در تجانس $(A, k = \sqrt{۵})$ و از آن‌جا نتیجه می‌گیریم که اگر دایرهٔ (O) را به اندازهٔ زاویهٔ $\alpha = M\hat{A}C = \text{Arc}\tan(۲)$ دوران دهیم تا به صورت دایرهٔ (′O) درآید. دایرهٔ (ω) مجانس دایرهٔ (′O) در تجانس

$(A, k=\sqrt{۵})$ مکان هندسی نقطهٔ M انتهای بردار $\overrightarrow{MA}=\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AC}$ است، و اگر دایرهٔ (ω) را به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{AB}$ انتقال دهیم تا به صورت دایرهٔ (ω') مکان هندسی نقطهٔ N، انتهای برآیند هندسی بردارهای $\overrightarrow{AN}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AB}$ می‌باشد.

۲.۱.۳.۳.۵. یک دایره، یک راستای ثابت

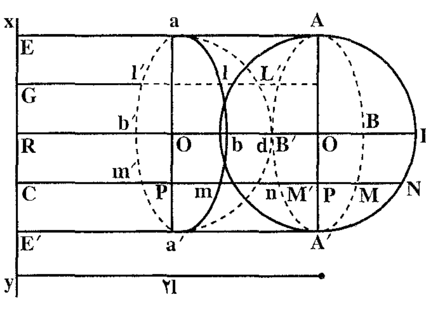


۵۰۹. اگر O دایرهٔ ثابت و C دایرهٔ متغیر باشد (شکل)، $\overrightarrow{OQ}$ را همسنگ شعاع نقطهٔ M رسم می‌کنیم:

$$\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{CM}$$

پس Q نقطهٔ ثابتی است و مکان M از مکان C با یک انتقال به اندازهٔ $\overrightarrow{OQ}$ حاصل می‌شود و این مکان دایرهٔ به مرکز Q و به شعاع مجموع یا تفاضل دو شعاع دایره‌های C و O می‌باشد (برحسب این که دایره‌ها مماس خارجی یا داخلی باشند). به همین ترتیب می‌توان مکان هندسی نقطهٔ ′M را معین نمود که قرینهٔ مکان هندسی نقطهٔ M نسبت به O می‌باشد.

۳.۱.۳.۳.۵. یک دایره، یک خط در صفحهٔ دایره



۵۱۱. خط xy و دایرهٔ به قطر ′AA را در نظر می‌گیریم و فاصلهٔ مرکز دایره از خط xy را مساوی ۲l فرض می‌کنیم.

برای نقطه‌ای اختیاری مانند N از دایره خواهیم داشت:

$$NC = ۲l + NP \quad \text{یا} \quad mC = \frac{۱}{۲}NC'$$

از آن‌جا

$$Cm = l + \frac{۱}{۲}PN$$

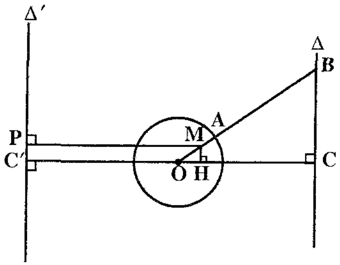
بنابراین، اگر ما خطهای عمود مانند PN را به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم، بیضی ′ABA′B را خواهیم داشت که در آن $BB' = \frac{۱}{۲}AA'$ است. چون که منحنی ′aba′b

به این ترتیب به‌دست می‌آید که روی هر خط موازی OR یک طول ثابت Mm، مساوی l را جدا کنیم، این منحنی مساوی منحنی اول به‌دست می‌آید، زیرا داریم :

$$\frac{PM}{PN}=\frac{OB}{OD} \text{ یا } \frac{Pm}{Pn}=\frac{Ob}{Od}$$

بنابراین $aba'b'$ یک بیضی است.

۵۱۲. این مکان هندسی یک دایره است.



۵۱۴. اگر A نقطهٔ دلخواهی از دایرهٔ به مرکز O و نقطهٔ M مزودج B نسبت به OA باشد، بنا به رابطهٔ دکارت داریم :

$$\frac{۲}{\overline{OA}}=\frac{۱}{\overline{OM}}+\frac{۱}{\overline{OB}} \qquad (۱)$$

و اگر C پای عمود وارد از O بر خط Δ و نقطهٔ H تصویر M بر OC باشد، می‌توان نوشت :

$$\frac{\overline{OM}}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OH}}{\overline{OC}}$$

و یا

$$\overline{OB}=\frac{\overline{OM}.\overline{OC}}{\overline{OH}}$$

و یا

$$\frac{۱}{\overline{OB}}=\frac{\overline{OH}}{\overline{OM}.\overline{OC}}$$

و در نتیجه رابطهٔ (۱) چنین نوشته می‌شود :

$$\frac{۲}{\overline{OA}}=\frac{۱}{\overline{OM}}+\frac{\overline{OH}}{\overline{OM}.\overline{OC}}=\frac{\overline{OC}+\overline{OH}}{\overline{OM}.\overline{OC}} \qquad (۲)$$

و اگر Δ' قرینهٔ Δ نسبت به مرکز دایرهٔ (O) و MP عمود وارد از M بر Δ' باشد، داریم :

$$\overline{OC}+\overline{OH}=-\overline{MP}$$

و در نتیجه رابطهٔ (۲) را می‌توان به صورت زیر نوشت :

$$\frac{۲}{\overline{OA}}=\frac{-\overline{MP}}{\overline{OM}.\overline{OC}}$$

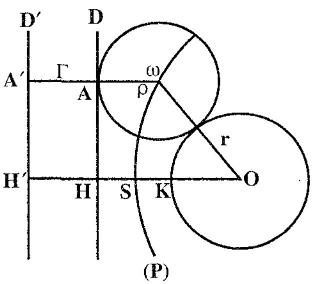
چنانچه فاصلهٔ مرکز دایره از Δ را a و OA = R فرض کنیم، چنین می‌شود :

$$\frac{۲}{R}=\left|\frac{-\overline{MP}}{\overline{OM}.a}\right|=\frac{MP}{OM.a}$$

و یا
$$\frac{MO}{MP}=\frac{R}{2a}= \text{مقدار ثابت}$$

از این رابطه نتیجه می‌گیریم که چون نسبت فاصله‌های نقطهٔ M از نقطهٔ ثابت O و خط ثابت Δ' مقداری ثابت است، پس مکان هندسی نقطهٔ M بیضی، یا هذلولی، و یا سهمی است، به کانون O و خط هادی Δ'، بر حسب آن که $\frac{R}{2a}<1$ یا $\frac{R}{2a}>1$ و یا $\frac{R}{2a}=1$ باشد.

۴.۱.۳.۳.۵. یک دایره، یک خط خارج دایره



(الف)

۵۱۵. دایرهٔ به مرکز O و به شعاع r و خط D را در نظر می‌گیریم. فرض کنیم ω و ρ مرکز و شعاع دایره‌ای باشد که بر D و دایرهٔ مفروض مماس باشد؛ باید مکان ω را معین کنیم.

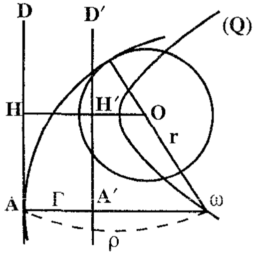
الف. فرض می‌کنیم (ω) با دایرهٔ (O) مماس خارج (شکل الف) باشد. ωA را بر D عمود می‌کنیم. داریم:

$$\omega O=r+\rho=r+\omega A$$

پس اگر D' را به فاصلهٔ r (در ناحیه‌ای که شامل O نیست) موازی با D رسم کنیم، داریم $\omega O=\omega A'$. در نتیجه ω متعلق به سهمی (P) به کانون O و هادی D' که رأسش وسط HK قرار دارد، می‌باشد. بعلاوه اگر ω سهمی (P) را طی کند، به طور مسلّم داریم:

$$O\omega=r+\omega A$$

و بنابراین مکان مرکز ω این دایره‌ها سهمی (P) است.



(ب)

ب. فرض کنیم دایرهٔ (O) با دایرهٔ (ω) مماس داخل باشد (شکل ب)؛ در این صورت داریم:

$$O\omega=\rho-r=\omega A-r$$

پس اگر موازی D' را به فاصلهٔ r از D در همان طرفی که O قرار دارد؛ رسم کنیم، داریم: $\omega O=\omega A'$. در نتیجه ω متعلق به سهمی (Q) به کانون O و هادی D' می‌باشد.

بعکس. اگر ω یک نقطهٔ غیر مشخص از سهمی (Q) باشد، داریم : $\omega O = \omega A - r$ و دایرهٔ به مرکز ω و به شعاع ωA بر خط D مماس بوده و با دایرهٔ (O) نیز مماس داخل می‌باشد، بنابراین مکان مرکزهای دایره‌های (ω) در این حالت، سهمی (Q) است.

۵.۱.۳.۳.۵. یک دایره، یک خط مماس بر دایره

۵۱۶. اگر در مثلث ABC محل تلاقی دایرهٔ محاطی را با BC، نقطهٔ N بگیریم و O را مرکز دایرهٔ محاطی فرض کنیم و M را وسط ضلع BC بگیریم، آن‌گاه امتداد خط MO، پاره‌خط AN را نصف می‌کند (عکس این قضیه هم درست است).

اثبات. لم را به روش برداری ثابت می‌کنیم. I را وسط AN می‌گیریم. می‌دانیم که شرط لازم و کافی برای این که سه نقطهٔ X، Y و Z روی خط راست باشند، این است که $\overrightarrow{OY} = \alpha.\overrightarrow{OZ} + (1-\alpha).\overrightarrow{OX}$ (Y بین Z و X و O نقطه‌ای دلخواه است). بنابراین کافی است ثابت کنیم : $\overrightarrow{NO} = \alpha.\overrightarrow{NI} + (1-\alpha)\overrightarrow{NM}$. در این صورت O روی محور MI قرار می‌گیرد. $\overrightarrow{x}$ را بردار واحد محور xها می‌گیریم. داریم :

$$\overrightarrow{NI} = \frac{1}{2}\overrightarrow{NA} \quad \text{و} \quad \overrightarrow{NM} = \left((p-c) - \frac{a}{2}\right)\overrightarrow{x} = \left(\frac{b-c}{2}\right)\overrightarrow{x}$$

$$\overrightarrow{NO} = \frac{a\overrightarrow{NA} + b\overrightarrow{NB} + c\overrightarrow{NC}}{a+b+c} = \left(\frac{a}{2p}\right)\overrightarrow{NA} + \frac{c(p-c)\overrightarrow{x} + b(p-b)(-\overrightarrow{x})}{2p}$$

$$= \left(\frac{a}{2p}\right)\overrightarrow{NA} + \frac{(c-b)(a-b-c)\overrightarrow{x}}{2\times 2p}$$

$$= \left(\frac{a}{p}\right)\overrightarrow{NI} + \left(\frac{b-c}{2}\right)\left(\frac{b+c-a}{2p}\right)\overrightarrow{x}$$

$$= \left(\frac{a}{p}\right)\overrightarrow{NI} + \left(\frac{b-c}{2}\right)\overrightarrow{x} \times \left(\frac{p-a}{2}\right)$$

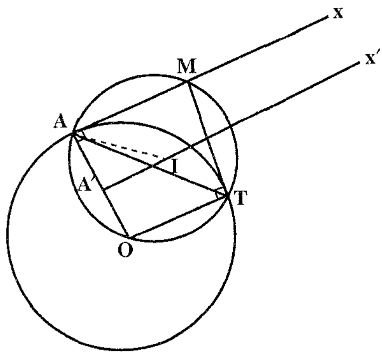
$$= \left(\frac{a}{p}\right)\overrightarrow{NI} + \left(\frac{p-a}{p}\right)\overrightarrow{NM}$$

واضح است که $\frac{p-a}{p} + \frac{a}{p} = 1$، پس کافی است بگیریم : $\alpha = \frac{a}{p}$.

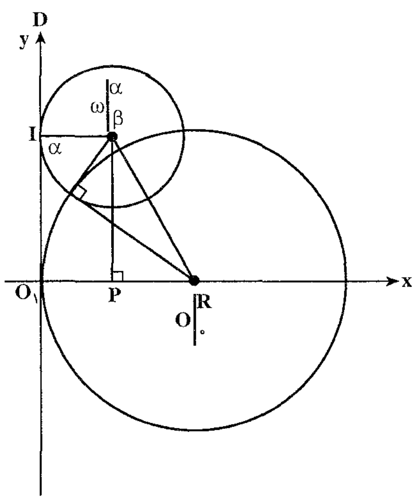
برای به‌دست آوردن مکان P چنین عمل می‌کنیم. MO را رسم کرده و از طرف O

امتداد می‌دهیم. نقطهٔ دلخواه I را روی امتداد MO در نظر می‌گیریم و N را به I وصل می‌کنیم و به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم، نقطهٔ P به‌دست می‌آید، پس مکان هندسی نقطهٔ P مجانس امتداد MO نسبت به مرکز N و نسبت ۲ است.

۵۱۷. چهارضلعی OAMT محاط در یک دایره است؛ زیرا دو زاویهٔ روبه‌روی A و T از آن قائمه‌اند. مرکز دایرهٔ محیطی این چهارضلعی، نقطهٔ I وسط پاره‌خط OM است که این نقطه مرکز دایرهٔ محیطی مثلث OAM نیز هست. چون M روی نیمخط ثابت Ax تغییر مکان می‌دهد، O نقطهٔ ثابتی است و I وسط DM است، پس مکان هندسی نقطهٔ I نیمخط راستی است که از وسط OA موازی Ax رسم می‌شود.



۵۱۸. اگر O_1 نقطهٔ تماس خط D با دایرهٔ (O) را مبدأ مختصات و خط D محور yها و (ω) دایرهٔ مماس بر خط D و عمود بر دایرهٔ (O) باشد، بنا به خاصیت دایره‌های عمود بر هم، داریم (R' شعاع دایرهٔ (ω)) $\omega O^2 = R^2 + R'^2$ و اگر P تصویر ω بر O_1x باشد، می‌توان نوشت:



$$\omega P^2 + PO^2 = R^2 + R'^2$$

$$\beta^2 + (R-\alpha)^2 = R^2 + \alpha^2$$

و یا

$$\beta^2 + R^2 - \alpha^2 - 2R\alpha = R^2 + \alpha^2$$

و یا

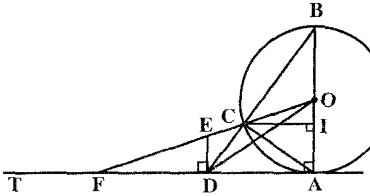
$$\beta^2 = 2R\alpha$$

$$y^2 = 2Rx$$

یعنی مکان (ω) سهمی است.

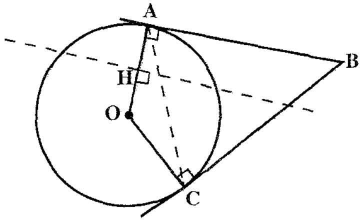
۵۱۹. شعاع OA را به طول $OA' = OA$ امتداد می‌دهیم. اگر نیمصفحهٔ شامل دایرهٔ مفروض را حول AT دوران دهیم و بر نیمصفحهٔ دیگر منطبق کنیم، M بر M' و O بر O' منطبق می‌شود پس $O'M' = OM$، یعنی M' بر دایره‌ای به مرکز O' و مساوی با دایرهٔ

مفروض واقع است (این دایره نیز در A بر AT مماس است). بعکس اگر M' نقطه‌ای از دایرهٔ اخیر باشد، عمود رسم شده از M' بر مماس T دایرهٔ (O) را در نقطه‌ای مانند M قطع می‌کند، به طوری که $BM = BM'$، زیرا با دورانی در جهت عکس اوّلی می‌توان دایرهٔ (O') را بر دایرهٔ (O) و M' را بر M منطبق ساخت، پس مکان M' دایره‌ای است مساوی با دایرهٔ مفروض و به مرکز O'.

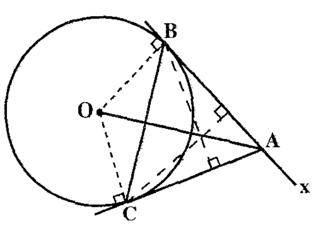


۵۲۰. ۱. اگر OC مماس AT را در F قطع کند، نقطهٔ F همواره مزدوج توافقی نقطهٔ C نسبت به نقطه‌های E و O است، زیرا دستگاه (D ـ EOBA) که در آن قطر AB موازی DE رسم شده و به وسیلهٔ شعاعهای DA، DO و DB به دو قسمت مساوی تقسیم می‌شود، توافقی است. در نتیجه هر خط که دستگاه توافقی را قطع کند، نقطه‌های برخورد، تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند؛ پس (OECF) یک تقسیم توافقی است و با تغییر قاطع BC، نقطهٔ F پیوسته بر مماس AT تغییر می‌نماید، یعنی AT مکان هندسی نقطهٔ F، مزدوج توافقی C، نسبت به OE است.

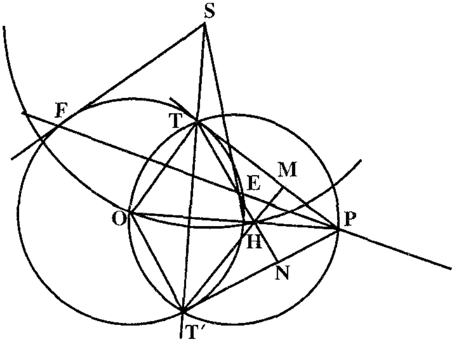
۲. برای رسم قاطع BC به نحوی که $FD = DA$ باشد، بایستی نقطهٔ C را تعیین کنیم. برای این منظور چنانچه پاره‌خط CI را موازی AT رسم نماییم، چون $FD = DA$ است، دستگاه (C.BIOA) توافقی خواهد بود؛ زیرا پاره‌خط FDA که موازی شعاع CI رسم شده به وسیلهٔ سه شعاع دیگر به دو قسمت مساوی تقسیم شده و از آن‌جا ابتدا نقطهٔ I مزدوج توافقی B نسبت به OA را تعیین نموده و از I موازی مماس AT رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ خواسته شدهٔ C قطع کند.



۵۲۱. چون $O\hat{A}B = O\hat{C}B = 90^\circ$، پس چهارضلعی ABCO محاطی است. در نتیجه دایره‌ای که از C، B و A بگذرد، از O نیز می‌گذرد. چون دایرهٔ محیطی این مثلث از A و O نیز می‌گذرد، پس همیشه مرکز آن روی عمودمنصف OA می‌باشد.



۵۲۲. ۱ و ۲. دایرهٔ محیطی مثلث ABC از نقطهٔ ثابت O، مرکز دایره، می‌گذرد.



۶.۱.۳.۳.۵. یک دایره، یک خط قاطع

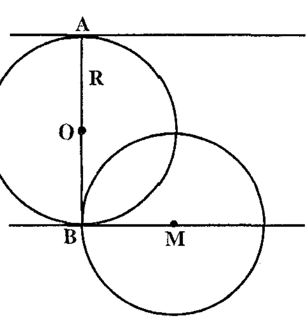
۵۲۳. اولاً. دایرهٔ به قطر OP از T و T′ می‌گذرد. ثانیاً. OP یکی از ارتفاعهای مثلث PTT′ بوده و اگر T′M و TN ارتفاعهای دیگر مثلث PTT′ باشند، نقطهٔ H محل تلاقی آنها روی OP واقع است و چون T′M‖OT و TN‖OT′ (دو خط عمود بر یک خط موازی‌اند) می‌باشند، چهارضلعی OTHT′ که قطرهایش نیز برهم عمودند، لوزی است. درنتیجه نقطهٔ H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث PTT′ قرینهٔ (O) نسبت به TT′ می‌باشد.

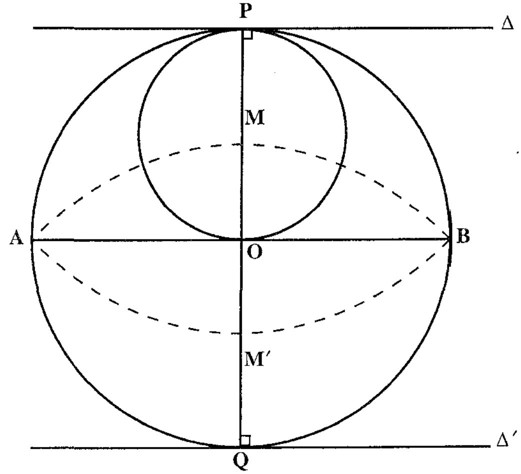
ثالثاً. TT′ قطبی نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ (O) بوده و اگر از E و F نقطه‌های تلاقی خط D با دایره، مماسهایی بر دایره رسم کنیم، S نقطهٔ تقاطع این مماسها قطب خط D می‌باشد و چون نقطهٔ P قطب خط TT′ بر خط D قطبی نقطهٔ S واقع است، بنابراین S بر قطبی نقطهٔ P یعنی TT′ واقع می‌باشد یا به عبارت دیگر TT′ از S می‌گذرد.

چون خط D ثابت است، قطب آن S ثابت بوده و می‌توان آن را تعیین کرد. همچنین چنانچه گفته شد TT′ از S گذشته و H قرینهٔ O نسبت به TT′ می‌باشد، پس SH = SO بوده و دایرهٔ به مرکز S و شعاع SO از H می‌گذرد یا به عبارت دیگر مکان H محل تلاقی ارتفاعهای مثلث PTT′، کمان دایره‌ای است به مرکز S و شعاع SO واقع در داخل زاویهٔ $T\hat{S}T'$.

۷.۱.۳.۳.۵. یک دایره، یک قطر

۵۲۵. این مکان هندسی، دو خط راست موازی است، که از دوسر قطر AB عمود بر AB رسم می‌شوند.



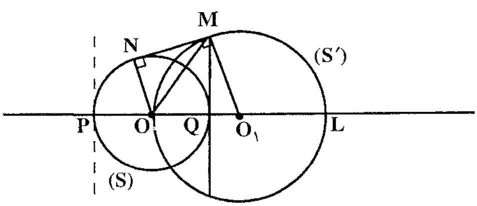


۵۲۶. این مکان هندسی بخشی از دو سهمی است، به کانون O و خطهای هادی Δ و ′Δ که از دو انتهای قطر PQ عمود بر AB رسم می‌شوند.

۵۲۷. مکان مطلوب، عبارت است از دو خط راست مماس بر دایرهٔ S در نقطه‌های P و Q (به استثنای خود نقطه‌های P و Q).
نقطهٔ تماس مماس مشترک دو دایرهٔ S و ′S با دایرهٔ S را N می‌نامیم. در این صورت :

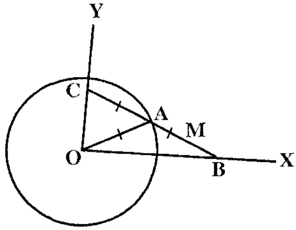
$$N\hat{O}M = O\hat{M}O_1 = M\hat{O}O_1$$

$(OO_1 = O_1M \ , \ ON \| O_1M)$.



بنابراین زاویهٔ MQO قائمه است و خط راست MQ در نقطهٔ Q بر دایرهٔ S مماس است (شکل).
از طرف دیگر از هر نقطهٔ واقع بر خط راست جواب، به شرطی که روی محیط S نباشد، می‌توان دایره‌ای گذراند که مرکزش روی خط راست l باشد و درضمن از O بگذرد.

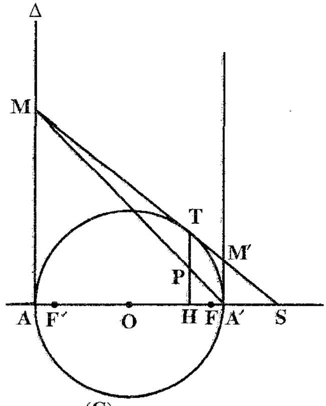
۵۲۸. BA را به اندازهٔ خود AC امتداد می‌دهیم (شکل) مثلث BOC قائم‌الزاویه است $(\hat{O} = 90^\circ)$ و نقطهٔ C خط OY عمود بر OX را طی می‌کند. بنابراین قطعه خط AB به طول ثابت، روی دو خط عمود برهم می لغزد. هر نقطهٔ M از این قطعه خط یک بیضی به محورهای OX و OY به طولهای ۲CM و ۲BM را می‌پیماید.



۲.۳.۳.۵ . یک دایره، دو خط

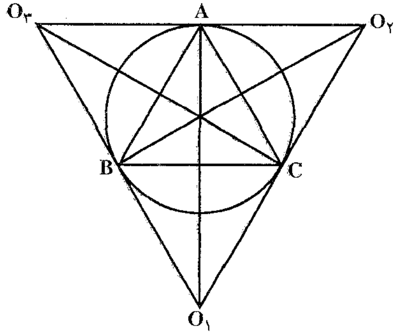
۱.۲.۳.۳.۵. یک دایره، یک قطر، یک خط مماس

۵۲۹. محل تلاقی MT را با 'AA نقطهٔ S و محل تلاقی آن با مماس رسم شده از 'A بر دایره را 'M می‌نامیم. تصویر T را روی 'AA نقطهٔ H فرض می‌کنیم. TH قطبی نقطهٔ S نسبت به دایرهٔ (C) است، پس تقسیمهای ('SHAA) و ('STMM) توافقی‌اند. از آن‌جا دستگاه ('A'_STMM) ، دستگاه توافقی است. خط HP موازی با شعاع 'A'M از دستگاه مفروض بوده و P وسط HT است. در نتیجه متعلق به بیضی (E) است. این بیضی از دایرهٔ (C) نتیجه شده (نسبت عرض هر نقطه از بیضی به نقطهٔ نظیرش از دایره برابر با $\frac{1}{2}$ است. در صورتی که این نقطه‌ها بر محور 'AA تصویر شوند) وقتی M روی Δ تغییر مکان دهد، T دایرهٔ (C) و نقطهٔ P بیضی (E) را طی خواهد کرد. مکان مطلوب همان بیضی است.



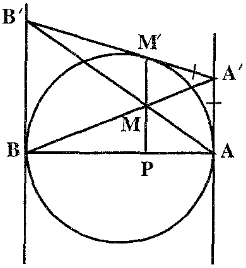
۲.۲.۳.۳.۵. یک دایره، دو راستای ثابت

۵۳۱. مرکزهای سه مماس یک مثلث، مرکزهای دایره‌های محاطی برونی مثلث است. فرض کنید امتداد دو ضلع AB و AC ثابت باشد و مکان هندسی نقطه‌های O_1 ، O_2 و O_3 را تعیین کنید.



۵.۳.۳.۳ . یک دایره، سه خط و بیشتر

۵.۳.۳.۳.۱. یک دایره، یک قطر، دو خط مماس



۵۳۲. فرض می‌کنیم M' نقطهٔ تماس $A'B'$ باشد؛ می‌گوییم MM' بر AB عمود است، یعنی موازی BB' می‌باشد (شکل).

زیرا:

$$\frac{A'M}{MB}=\frac{A'A}{B'B}$$

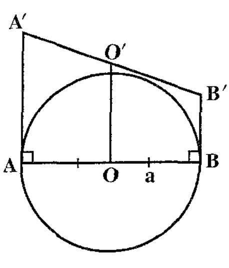
ولی $A'A=A'M'$ و $B'B=B'M'$

پس:

$$\frac{A'M}{MB}=\frac{A'M'}{M'B'}$$

رابطهٔ اخیر ثابت می‌کند که MM' موازی $B'B$ می‌باشد. بعلاوه در ذوزنقهٔ $AA'B'B$ خط $M'P$ موازی دو قاعده می‌باشد و به سهولت ثابت می‌شود که M وسط $M'P$ است و مکان M یک بیضی است که محور کانونیش AB و طول محور ناکانونیش $\frac{AB}{۲}$ می‌باشد.

۵۳۳. گزینهٔ (ب) درست است؛ زیرا $A'ABB'$ یک ذوزنقه است. میانهٔ آن OO' بر AB عمود است. $OO'=\frac{۱}{۲}(AA'+BB')=\frac{۱}{۲}(AG+BG)=\frac{۱}{۲}AB$ در نتیجه O' به فاصلهٔ ثابت از O روی عمود بر AB قرار دارد و بنابراین نقطهٔ O' یک نقطهٔ ثابت است.



۵.۳.۳.۴ . مسأله‌های ترکیبی

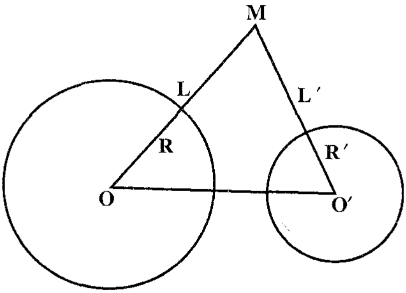
۵۳۴. ۱. یک ویژگی مثلث قائم‌الزاویه را به‌کار برید یا ببینید حالتی را که OI خط میانهٔ تعدادی مثلث است.

۲ و ۳. ساده است.

۴. رابطه‌های متری در مثلث ۳۰°ـ۶۰°ـ۹۰°.

۴.۵.دو دایرهٔ ثابت

۵ . ۴ . ۱.دو دایره در حالت کلی



۵ . ۴ . ۱ . ۱.تنها دو دایرهٔ ثابت

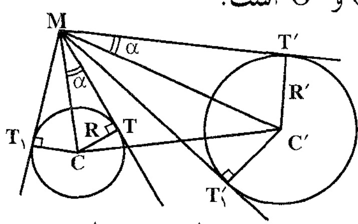
۵۳۵. دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم M یک نقطه از مکان هندسی موردنظر باشد. از M به O و O' وصل می‌کنیم تا دایره‌های (O) و (O') را در L و L' قطع کنند. داریم :

$$ML = ML'$$

از آن‌جا خواهیم داشت :

$$|MO - MO'| = (ML + R) - (ML' + R') = R - R'$$

پس مکان هندسی نقطهٔ M هذلولی به کانونهای O و O' است.



۵۳۶. اگر M یک نقطه از مکان باشد. به نحوی که از آن‌جا دو دایرهٔ مفروض تحت یک زاویه دیده شود، یعنی اگر از آن‌جا مماسهایی بر دو دایره رسم کنیم، داشته باشیم :

$$T\hat{M}T_1 = T'\hat{M}T'_1$$

در این صورت داریم :

$$C\hat{M}T = C'\hat{M}T' = \alpha$$

و در نتیجه دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{MCT}$ و $\overset{\Delta}{MC'T'}$ متشابه بوده و داریم :

$$\frac{CT}{C'T'} = \frac{MC}{MC'}$$

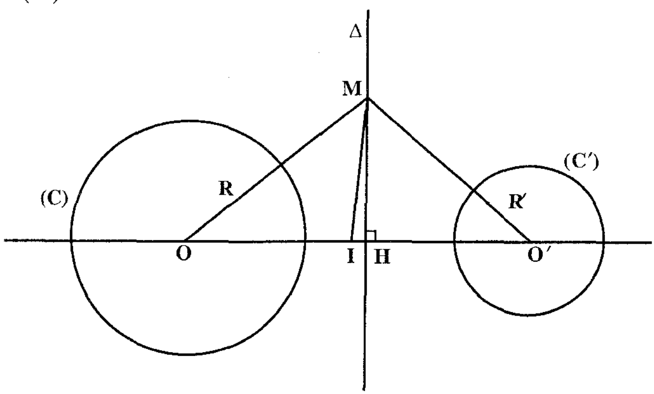
و یا

$$\frac{MC}{MC'} = \frac{R}{R'} = k = \text{مقدار ثابت}$$

یعنی، مکان نقطهٔ M که نسبت فاصله‌شان از C و C' برابر مقدار ثابت $k = \frac{R}{R'}$ است، دایره‌ای است که قطری از آن که بر CC' منطبق است، پاره‌خط CC' را به نسبت توافقی $k = \frac{R}{R'}$ تقسیم می‌کند.

۵۳۷. دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم M یک نقطه از مکان هندسی موردنظر، یعنی نقطه‌ای باشد که نسبت به این دو دایره دارای قوت مساوی است. در این‌صورت خواهیم داشت :

$$P_{M(O)} = P_{M(O')} \Rightarrow MO^2 - R^2 = MO'^2 - R'^2 \Rightarrow MO^2 - MO'^2 = R^2 - R'^2 = C^{te}$$



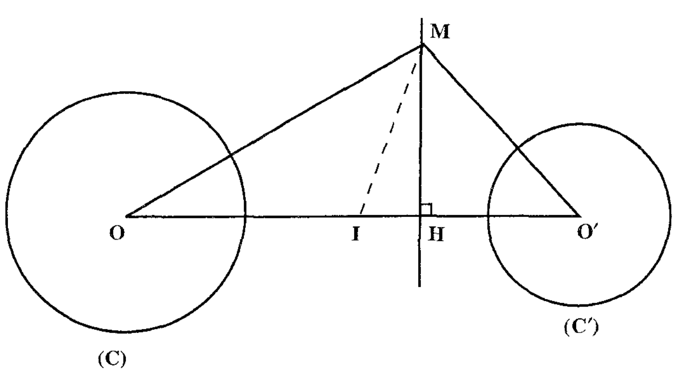
چون دو نقطهٔ O و O' ثابتند، پس مکان هندسی نقطهٔ M خط راستی عمود بر OO' خط‌المرکزین دو دایره است به قسمی که اگر I وسط خط‌المرکزین OO' و H پای این خط عمود باشد، $\overline{IH} = \frac{R^2 - R'^2}{2\overline{OO'}}$ است. بسادگی ثابت می‌شود که هر نقطه از این خط نسبت به دو دایره قوت برابر دارد. این خط را محور اصلی دو دایره می‌نامند.

۵۳۸. دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم M یک نقطه از مکان هندسی موردنظر باشد، یعنی داشته باشیم : $P_{M(O)} - P_{M(O')} = k$

در این صورت خواهیم داشت :

$$MO^2 - R^2 - (O'M - R'^2) = k$$

$$\Rightarrow MO^2 - MO'^2 = R^2 - R'^2 + k = \text{مقدار ثابت}$$



چون تفاضل مربعهای فاصلهٔ نقطهٔ M از دو نقطهٔ ثابت O و O' مقدار ثابتی است، پس مکان هندسی این نقطه خطی راست عمود بر OO' در نقطه‌ای مانند H است به قسمی که اگر I وسط پاره‌خط OO' باشد، $\overline{IH} = \dfrac{R^2 - R'^2 + k}{2\overline{OO'}}$ است.

۵۳۹. اگر O و O' مرکزهای دو دایره و R و R' شعاعهای آنها و M یک نقطه از مکان باشد، بنابه تعریف قوت نقطه داریم:

$$P_{M(O)} = MO^2 - R^2 \qquad (1)$$

و

$$P_{M(O')} = MO'^2 - R'^2 \qquad (2)$$

از جمع این دو رابطه نتیجه می‌شود:

$$P_{M(O)} + P_{M(O')} = MO^2 + MO'^2 - (R^2 + R'^2) \qquad (3)$$

و در مثلث $M\overset{\Delta}{O}O'$ می‌توان نوشت:

$$MO^2 + MO'^2 = 2MI^2 + \frac{OO'^2}{2} \qquad (4)$$

از ملاحظهٔ رابطه‌های (۳) و (۴) و فرض مسأله نتیجه می‌گیریم که:

$$2MI^2 + \frac{OO'^2}{2} = k + R^2 + R'^2$$

$$MI^2 = \frac{2k + 2R^2 + 2R'^2}{4} \qquad (5)$$

چون طرف دوم این رابطه مقداری است ثابت، پس طرف اوّل نیز ثابت است، یعنی مکان M دایره‌ای است به مرکز I وسط خط‌المرکزین و شعاع

$$R''' = MI = \frac{1}{2}\sqrt{2k + 2R^2 + 2R'^2 - OO'^2}$$

بحث. شرط امکان مسأله آن است که: $2k + 2R^2 + 2R'^2 - OO'^2 > 0$ و یا $2k + 2R^2 + 2R'^2 > OO'^2$ باشد.

۵۴۰. چنانچه (O_2) دایرهٔ مطلوب و M یک نقطه از آن دایره باشد، $P_{M(O_2)} = 0$ است و

$$P_{M(O_1)} = P_{M(O_1)} - P_{M(O_2)} = \overline{O_1O_2}.\overline{MH}$$

$$P_{M(O)} = P_{M(O)} - P_{M(O_2)} = 2\overline{OO_2}.\overline{Hm}$$

و یا

$$\frac{P_{M(O_1)}}{P_{M(O)}} = \frac{P_{M(O_1)} - P_{M(O_2)}}{P_{M(O)} - P_{M(O_2)}} = \frac{2\overline{O_1O_2}.\overline{mH}}{2\overline{O_2O}.\overline{mH}} = \frac{\overline{O_1O_2}}{\overline{O_2O}} = k$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که O_2 خط‌المرکزین OO_1 را به نسبت k تقسیم کرده است.

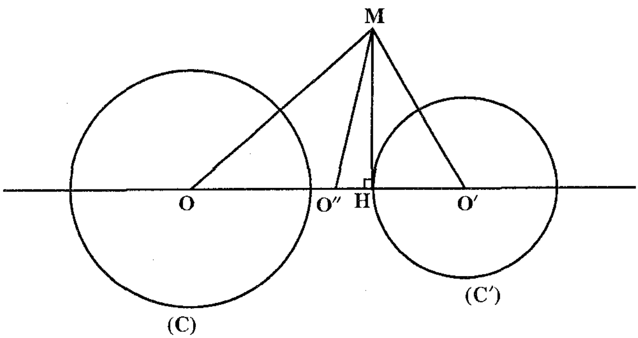
چنانچه $k = 1$ باشد، $\frac{P_{M(O_1)}}{P_{M(O)}} = k = 1$ یا $P_{M(O_1)} = P_{M(O)}$ ، یعنی M بر محور اصلی واقع است.

۵۴۱. دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را اختیار می‌کنیم. اگر M نقطه‌ای از مکان هندسی موردنظر باشد، یعنی $P_{M(O)} = p$ و $P_{M(O')} = q$ باشد، داریم :

$$A.p + B.q + D = 0$$

$$\Rightarrow A(\overline{MO}^2 - R^2) + B(\overline{MO'}^2 - R'^2) + D = 0$$

$$\Rightarrow A.\overline{MO}^2 + B.\overline{MO'}^2 = A.R^2 + B.R'^2 - D$$



نقطهٔ O'' را روی OO' چنان اختیار می‌کنیم که $\frac{\overline{O''O'}}{\overline{O''O}} = \frac{A}{B}$ باشد. بدیهی است که O'' نقطه ثابتی است و از M عمود MH را بر OO' فرود می‌آوریم. با توجه به شکل داریم :

$$A.(MO''^2 + OO''^2 + 2\overline{OO''}.\overline{O''H}) + B.(\overline{MO''}^2 + \overline{O'O''}^2 - 2\overline{O''O'}.\overline{O''H})$$
$$= A.R^2 + B.R'^2 - D$$

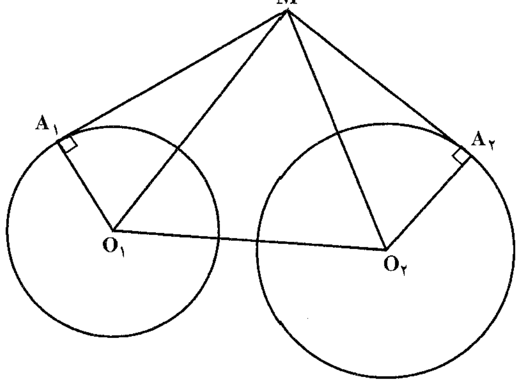
با توجه به رابطهٔ $A.\overline{O''O} = B.\overline{O''O'}$ از رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود :

$$(A + B)\overline{MO''}^2 = -A.\overline{OO''}^2 - B.\overline{O'O''}^2 + A.R^2 + B.R'^2 - D$$

$$\Rightarrow \overline{MO''}^2 = \frac{A(R^2 - \overline{OO''}^2) + B(R'^2 - \overline{OO''}^2) - D}{A + B} = \text{مقدار ثابت}$$

پس مکان هندسی نقطهٔ M یک دایره به مرکز O'' و به شعاع جذر مقدار بالاست.

۵۴۲. فرض کنید O_1 و O_2 مرکز دایره‌های مفروض و r_1 و r_2 شعاعهایشان باشند، M نقطه‌ای از مجموعهٔ مطلوب است و MA_1 و MA_2 مماسها هستند. بنابه فرض، $MA_1 = k.MA_2$، در نتیجه، $MO_1^2 - k^2.MO_2^2 = r_1^2 - k^2r_2^2$. بنابراین به ازای $k \neq 1$، مجموعهٔ خواسته شده از نقطه‌های M، دایره‌ای است که مرکزش روی خط راست O_1O_2 است، در صورتی که به ازای $k = 1$ مجموعهٔ مطلوب، خط راستی عمود بر O_1O_2 است.



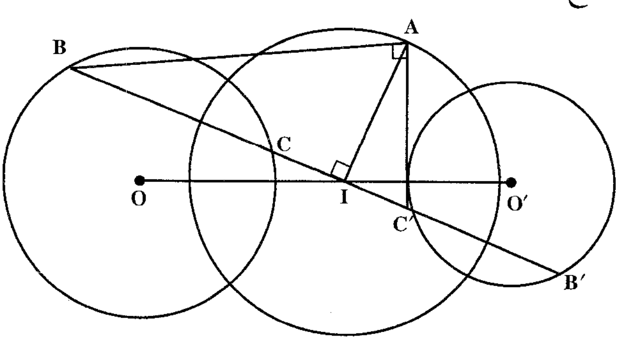
۵۴۳. فرض می‌کنیم M یک نقطه از مکان هندسی موردنظر باشد، یعنی داشته باشیم: $MC^2 - MD^2 = k^2$ خواهیم داشت:

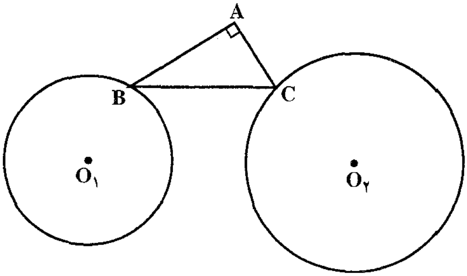
$$MO^2 - R^2 - (MO'^2 - R'^2) = k^2$$

$$\Rightarrow MO^2 - MO'^2 = R^2 + k^2 - R'^2 = \text{مقدار ثابت}$$

پس مکان هندسی نقطهٔ M خطی است مانند Δ عمود بر OO'.

۵۴۴. مکان هندسی خواسته شده، دایرهٔ (I,IA) است؛ زیرا $\overline{IA}^2 = \overline{IB}.\overline{IC}$ مقدار ثابتی است، پس IA مقدار ثابتی می‌باشد و چون I ثابت است، پس این مکان هندسی دایره‌ای به مرکز I و به شعاع IA است.





۵۴۶. فرض کنید O_1 و O_2 معرف مرکز دایره‌های مفروض و r_1 و r_2 شعاعهای آنها باشند. دو مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین O_1O_2O و O_1O_2O' با وتر O_1O_2 را درنظر بگیرید. مکان هندسی مطلوب، دو طوق با مرکزهای O و O' و شعاعهای زیر است:

شعاع خارجی $\frac{\sqrt{2}}{2}(r_1+r_2)$ و شعاع داخلی $\frac{\sqrt{2}}{2}|r_1-r_2|$. این حکم را ثابت می‌کنیم. فرض کنید M نقطه‌ای روی دایرهٔ O_1 و N نقطه‌ای روی دایرهٔ O_2 باشد. اگر M ثابت باشد و N دایرهٔ دوم را بپیماید، آن وقت رأسهای قائمهٔ مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین، دو دایره به شعاع $\frac{\sqrt{2}}{2}r_2$ را می‌پیمایند. که از دایرهٔ O_2 با دوران دور M به اندازهٔ زاویهٔ 45° (هردو در جهت گردش عقربه‌های ساعت یا خلاف گردش عقربه‌های ساعت) و به دنبال آن تبدیل تجانسی به مرکز تجانس M و نسبت $\frac{\sqrt{2}}{2}$، به‌دست می‌آیند. فرض کنید O_M مرکز یکی از این دایره‌ها باشد. نقطهٔ O_M، از O_2 با دورانی دور M در جهت مناسب و به دنبال آن تبدیلی تجانسی به مرکز تجانس M و نسبت $\frac{\sqrt{2}}{2}$، به‌دست می‌آید. اما O_M با دورانی متناظر و تبدیل تجانسی به مرکز تجانس O_2 قابل دسترسی است. در نتیجه، وقتی که M دایرهٔ O_1 را می‌پیماید، O_M دایره‌ای به شعاع $\frac{\sqrt{2}}{2}r_1$ و مرکز O یا O' را می‌پیماید.

۵۴۷. فرض کنید O_1 و O_2 معرف مرکز دایره‌ها و r_1 و r_2 شعاعهای آنها باشند و M وسط AB و O وسط O_1O_2 باشد. داریم (بنابر دستور طول میانه):

$$|O_1M|^2=\frac{1}{4}(2r_1^2+2|O_1B|^2-|AB|^2)$$

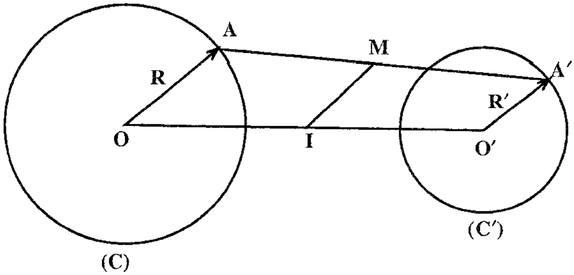
$$|O_2M|^2=\frac{1}{4}(2r_2^2+2|O_2A|^2-|AB|^2)$$

$$|O_1B|^2=\frac{1}{2}(|O_1O_2|^2+4|OB|^2-2r_2^2)$$

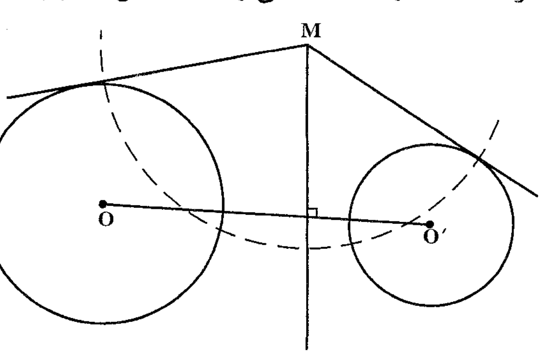
$$|O_2A|^2=\frac{1}{2}(|O_1O_2|^2+4|OA|^2-2r_1^2)$$

بنابراین $|O_1M|^2 - |O_2M|^2 = r_1^2 - r_2^2$ ، یعنی نقطهٔ M روی عمودی بر O_1O_2 واقع است. اگر دایره‌ها شعاعهای مختلف داشته باشند و متقاطع نباشند، مکان هندسی مطلوب، عبارت است از دو پاره‌خط که به‌دو روش زیر به‌دست می‌آیند :
از پاره‌خط با نقطه‌های انتهایی در وسطهای مماسهای مشترک خارجی به نقطه‌های واقع بین وسطهای مماسهای مشترک داخلی را برمی‌داریم (اگر M نقطه‌ای روی پاره‌خط با نقطه‌های انتهایی در وسطهای مماسهای مشترک داخلی باشد، آن وقت خط راستی که از M عمود بر OM می‌گذرد، دایره را قطع نمی‌کند). در حالتهای باقیمانده (دایره‌ها متقاطع یا برابرند) مکان هندسی مطلوب، سرتاسر پاره‌خط با نقطه‌های انتهایی در وسطهای مماسهای مشترک خارجی است.

۵۴۸. اگر I وسط پاره‌خط O′O باشد، در ذوزنقهٔ OAA′O′ ، مقدار ثابت $= \frac{R+R'}{2} = IM$ است. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز I و به شعاع $\frac{R+R'}{2}$ است.

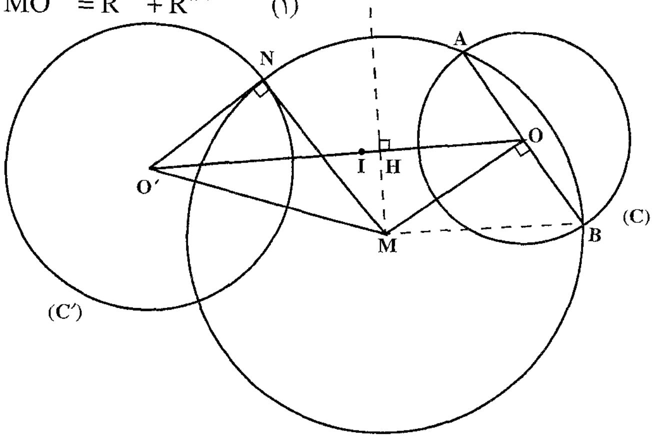


۵۴۹. اگر (M,R'') دایره‌ای باشد که بر دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ عمود باشد، $P_{M(O)} = R''^2$ و $P_{M(O')} = R''^2$ ، پس $P_{M(O)} = P_{M(O')}$ بنابراین نقطهٔ M بر محور اصلی دو دایرهٔ (O) و (O′) واقع است، یعنی مکان هندسی موردنظر قسمتی از محور اصلی دو دایره است که از آن نقطه‌ها می‌توان دو مماس به طولهای مساوی بر دو دایره رسم کرد.



۵۵۰. دو دایره $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم دایرهٔ $C''(M,R'')$ یک دایره از مکان هندسی موردنظر باشد، یعنی دایره‌ای باشد که بر دایرهٔ (C') عمود است و محیط دایرهٔ (C) را نصف می‌کند. چون دایرهٔ (C'') بر دایرهٔ (C') عمود است، پس داریم :

$$MO'^{2} = R'^{2} + R''^{2} \qquad (1)$$



و چون دایرهٔ (C'')، دایرهٔ (C) را نصف می‌کند، پس داریم :

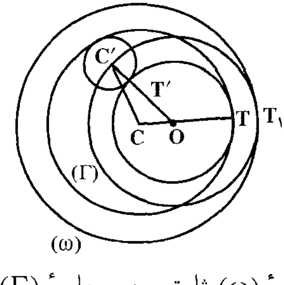
$$MO^{2} + R^{2} = R''^{2} \qquad (2)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$MO'^{2} - R'^{2} = MO^{2} + R^{2} \Rightarrow MO'^{2} - MO^{2} = R^{2} + R'^{2} = \text{مقدار ثابت}$$

بنابراین با توجه به ثابت بودن دو نقطهٔ O و O' مکان هندسی نقطهٔ M خطی راست است عمود بر OO'، خط‌المرکزین دو دایرهٔ داده شده.

۵۵۱. برحسب آن که دو دایره، متداخل یا متخارج باشند، دو حالت درنظر می‌گیریم :

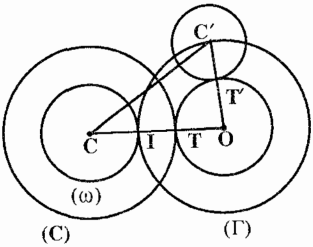


الف. دو دایرهٔ (C) و (C') متداخلند ؛ چنانچه دایرهٔ (O) به شعاع R'' یکی از دایره‌های مماس بر دایره‌های (C) و (C') و به شعاعهای R و R' باشد، در صورتی که دو دایرهٔ (Γ) و (ω) بترتیب به مرکزهای (O) و (C) و به شعاعهای $R'' + R'$ و $R + R'$ رسم کنیم، دایرهٔ (ω) ثابت بوده و دایرهٔ (Γ) پیوسته از نقطهٔ C' گذشته و بر دایرهٔ (ω) مماس است و در این حالت بنابه تعریف، مکان (O) یا بیضی و یا هذلولی است و چون

$$OC' + OC = OT' + C'T' + CO = OT + OC + C'T'$$

و یا $OC' + OC = CT + C'T' = R + R' =$ مقدار ثابت

بنابراین مکان (O) بیضی است به کانونهای C و C′ و مقدار ثابت $R - R' = 2a$.

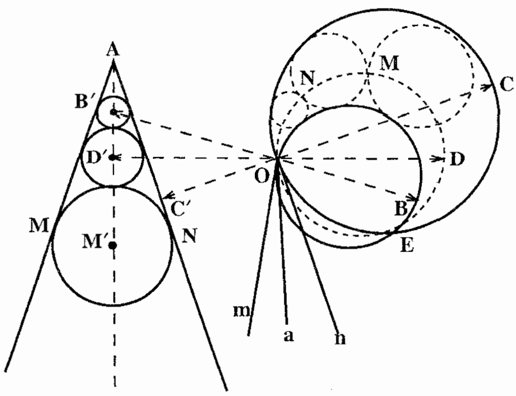


ب. دو دایرهٔ (C) و (C′) متخارجند. چنانچه (O) یکی از دایره‌های مماس بر دایره‌های (C) و (C′) باشد، در صورتی که دو دایرهٔ (ω) و (Γ) بترتیب به مرکزهای (C) و(O) و شعاعهای $R - R'$ و $R'' + R'$ رسم نماییم، دایرهٔ (Γ) پیوسته بر دایرهٔ (ω) مماس و از نقطهٔ C′ می‌گذرد. یعنی مکان (O) یا بیضی و یا هذلولی است و در این حالت داریم :

$$OC - OC' = OC - OI = CI = R - R' = \text{مقدار ثابت}$$

یعنی، مکان (O) هذلولی است به کانونهای C و C′ و مقدار ثابت $R - R' = 2a$.

۵۵۲. تعدادی از دایره‌های دوبه‌دو مماس برهم و مماس بردو ضلع زاویهٔ A را رسم می‌کنیم. انعکاسی به مرکز انعکاس O و قوت انعکاس k^2 را درنظر می‌گیریم. منعکس دو ضلع زاویه و نیمساز این زاویه، که مرکزهای دایره‌ها روی آن قرار دارند، دایره‌هایی هستند که از نقطهٔ O می‌گذرند، از آن‌جا داریم :



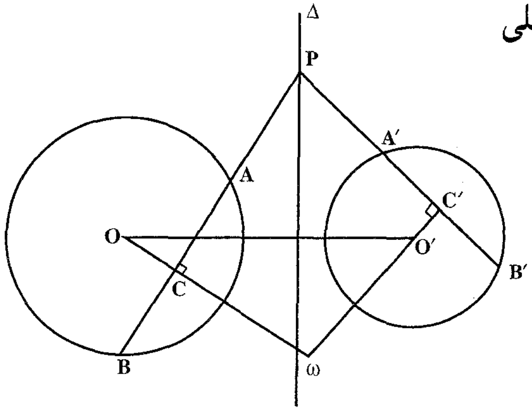
$$OB.OB' = OC.OC' = OD.OD' = k^2$$

منعکسهای دایره‌های دوبه‌دو مماس برهم، دایره‌هایی هستند که دوبه‌دو بر هم مماسند و بر دایره‌های منعکس دو ضلع زاویه و نیمساز زاویه نیز مماس می‌باشند. از آن‌جا به قضیهٔ زیر می‌رسیم :

قضیه. هنگامی که یک مجموعه از دایره‌های دوبه‌دو مماس برهم را در دو دایرهٔ B و C محاط کنیم، نقطه‌های تماس آنها روی یک دایرهٔ D قرار دارند.

تبصره. مکان هندسی نقطه‌های تماس دایره‌ها، دایرهٔ OD است که این دایره، منعکس نیمساز AD′ است و این دایره، دایرهٔ نیمساز دایره‌هایی است که در نقطهٔ O و E متقاطعند. خط مماس Oα که متناظر آن است، نیمساز زاویهٔ mOn است.

۲.۱.۴.۵. دو دایره، محور اصلی



۵۵۳. چون $PA.PB = PA'.PB'$ است، پس از چهار نقطهٔ A، B، A' و B' یک دایره می‌گذرد و مرکز این دایره، نقطهٔ ω محل تلاقی عمودمنصفهای AB و $A'B'$ می‌باشد. این عمودمنصفها بترتیب از O و O' می‌گذرند و چهارضلعی $PC\omega C'$ محاطی است و $A\hat{P}A' + \hat{\omega} = ۱۸۰^\circ$ یا $O\hat{\omega}O' = ۱۸۰^\circ - \alpha$، پس مکان هندسی نقطهٔ ω، کمان درخور زاویهٔ $(۱۸۰^\circ - \alpha)$ است که روی قطعه خط OO' رسم شود.

۵۵۴. چون P بر محور اصلی دو دایره واقع است، بنابراین $PT = PT'$ است و دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $\overset{\Delta}{PTM}$ و $\overset{\Delta}{PT'M}$ به حالت تساوی وتر و یک ضلع همنهشتند، از همنهشتی آنها نتیجه می‌شود که:

$$MT = MT'$$

ویا

$$MO' + O'T' = MO + OT$$

$$MO' - MO = OT - O'T' = R - R' = \text{مقدار ثابت}$$

یعنی مکان هندسی نقطهٔ M، هذلولی است به کانونهای مرکزهای دو دایره، و مقدار ثابت تفاضل شعاعهای آن دو دایره است.

۵۵۵. الف. ۱.

$$P + P' = MO^۲ + MO'^۲ - (R^۲ + R'^۲)$$

چون:

$$MO^۲ + MO'^۲ = \frac{OO'^۲}{۲} + ۲\overline{MI}^۲ = \frac{d^۲}{۲} + ۲\overline{MI}^۲$$

پس:

$$P + P' = ۲\overline{MI}^۲ + \frac{d^۲}{۲} - (R^۲ + R'^۲)$$

۲. داریم:

$$P - P' = ۲\overline{OO'} \times \overline{HM} = ۲d.\overline{HM}$$

$$۴P.P' = (P + P')^۲ - (P - P')^۲$$

$$۴P.P' = (۲\overline{MI}^۲ + \frac{d^۲}{۲} - R^۲ - R'^۲)^۲ - ۴d^۲.\overline{HM}^۲ \qquad (۲)$$

ب. با فرض $R = R'$ ، رابطهٔ (۲) را می‌توان چنین نوشت :

$$(2\overline{MI}^2 + \frac{d^2}{2} - 2R^2)^2 - 4d^2.\overline{HM}^2 = 4d^2.\overline{MK}^2$$

و یا $$4P.P' = (2\overline{MI}^2 + \frac{d^2}{2} - 2R^2)^2 - 4d^2.\overline{HM}^2 \quad (3)$$

و یا $$(2\overline{MI}^2 + \frac{d^2}{2} - 2R^2)^2 - 4d^2(\overline{HM}^2 + \overline{MK}^2) = 0$$

چون محور اصلی دو دایره عمودمنصف OO' است، پس داریم :

$$\overline{HM}^2 + \overline{MK}^2 = \overline{IM}^2$$

از آن‌جا : $$(2\overline{MI}^2 + \frac{d^2}{2} - 2R^2)^2 - 4d^2.\overline{MI}^2 = 0 \qquad (4)$$

این رابطه را به‌ترتیب زیر می‌نویسیم :

$$(2\overline{MI}^2 + \frac{d^2}{2} - 2R^2 + 2d.\overline{MI})(2\overline{MI}^2 + \frac{d^2}{2} - 2R^2 - 2d.\overline{MI}) = 0$$

و یا $$\left[(2\overline{MI} + d^2) - 4R^2\right]\left[(2\overline{MI} - d)^2 - 4R^2\right] = 0$$

بالاخره : $$\left[2\overline{MI} + (d + 2R)\right]\left[2\overline{MI} + (d - 2R)\right] \times$$

$$\left[2\overline{MI} - (d - 2R)\right]\left[2\overline{MI} - (d + 2R)\right] = 0 \quad (5)$$

دو حالت درنظر می‌گیریم :

حالت اول. $d > 2R$. در این حالت دو عامل اوّلیهٔ رابطهٔ (۵) نمی‌توانند صفر باشند. از دو عامل آخر داریم :

$$2\overline{MI} - (d - 2R) = 0$$

$$\overline{MI} = \frac{d}{2} + R$$

$$2\overline{MI} - (d + 2R) = 0$$

$$\overline{MI} = \frac{d}{2} - R$$

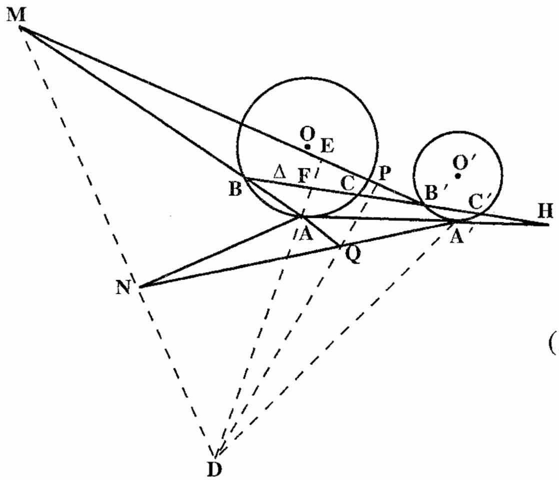
مکان مطلوب از دو دایره تشکیل شده است که بر دو دایرهٔ (O) و (O′) مماسند (حالت دوم را مورد بحث قرار دهید).

۳.۱.۴.۵ . دو دایره، مماس مشترک

۵۵۶. فرض می‌کنیم فاصلهٔ AA' تا MM' برابر x باشد. داریم :

$$A'M'^{2} = R'x \quad , \quad AM^{2} = Rx$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود : $\frac{AM}{A'M'} = \sqrt{\frac{R}{R'}}$ و چون $AA'\|MM'$ است، پس $\frac{AN}{A'N} = \sqrt{\frac{R}{R'}}$. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ N یک دایره است که قطرش پاره‌خط AA' را به نسبت توافقی تقسیم می‌کند (دایرهٔ آپولونیوس).



۵۵۷. اگر این نقطه‌ها، M ، N ، P و Q باشند، نخست ثابت می‌کنیم که این چهار نقطه همدایره‌اند. اگر نقطهٔ A_1 را روی دایرهٔ (O) در همسایگی نقطهٔ A اختیار کنیم، داریم :

$$(BA,BC) = (A_1A, A_1C)$$

فرض می‌کنیم که نقطهٔ A_1 بینهایت به نقطهٔ A نزدیک شود. دراین صورت قاطع AA_1 به مماس بر دایره در نقطهٔ A یعنی به مماس AA' تبدیل می‌شود و داریم :

$$(BA,BC) = (AA',AC)$$

یا

$$(MQ,\Delta) = (AA',NP) \quad (۱)$$

همچنین به‌طور مشابه برای نقطه‌های A' ، B' و C' از دایرهٔ (O') و مماس در نقطهٔ A' بر دایرهٔ (O') می‌توان نوشت :

$$(B'A',B'C') = (AA',A'C')$$

یا

$$(MP,\Delta) = (AA',NQ) \quad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$(MQ,\Delta) - (MP,\Delta) = (AA',NP) - (AA',NQ)$$

یا

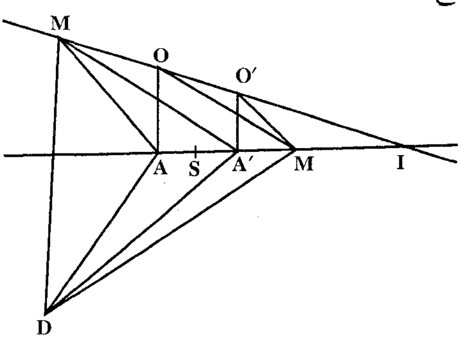
$$\Rightarrow (MQ,\Delta) + (\Delta,MP) = (NQ,AA') + (AA',NP)$$

$$\Rightarrow (MQ,MP) = (NQ,NP)$$

و این رابطه نشان می‌دهد که چهار نقطهٔ M ، N ، P و Q روی یک دایره که آن را ω می‌نامیم واقعند.

حال ثابت می‌کنیم که این دایره ثابت است یعنی مستقل از قاطع Δ است.

اگر D نقطهٔ برخورد MN و PQ باشد، AD را رسم می‌کنیم که NP را در E و Δ را در F قطع کند. چون دایرهٔ (ω) از چهار نقطهٔ M ، N ، P و Q می‌گذرد، این دایره، مزدوج نسبت به مثلث $AA'D$ است. امّا نقطه‌های A و A' ثابتند. بنابراین اگر ثابت کنیم که D نقطهٔ ثابتی است، آن‌گاه ثابت خواهد شد که دایرهٔ (ω) ثابت است. خط AD قطبی نقطهٔ A' نسبت به دایرهٔ (ω) است و تقسیم $(MPEA')$ توافقی است. اگر دستگاه توافقی $(A-MPEA')$ را با قاطع Δ قطع کنیم، تقسیم توافقی (BCFH) را خواهیم داشت. از آن‌جا نتیجه می‌شود که قطبی نقطهٔ H نسبت به دایرهٔ (O) از نقطهٔ F می‌گذرد و چون این قطبی از نقطهٔ A نیز می‌گذرد، خط AF قطبی نقطهٔ H نسبت به دایرهٔ (O) است. بنابراین AD بر OH عمود است. به‌همین ترتیب دیده می‌شود که $A'D$ نیز بر $O'H$ عمود است. بنابراین نتیجه می‌شود که D نقطهٔ ثابتی است. در نتیجه مکان هندسی خواسته شده، دایرهٔ (ω) است که مزدوج نسبت به مثلث $AA'D$ است.



تبصره. می‌توان ثابت کرد که دایرهٔ (ω) به دسته دایره‌ای تعلق دارد که با دو دایرهٔ (O) و (O') مشخص می‌شود.

برای اثبات نخست می‌گوییم که نقطهٔ ω مرکز دایرهٔ (ω) روی OO' قرار دارد.

از نقطهٔ A' عمودی بر AD رسم می‌کنیم. این عمود با OH موازی است و OO' را در نقطهٔ ω قطع می‌کند. برای این که اثبات کنیم ω مرکز دایرهٔ (ω) است، کافی است، ثابت کنیم که $A\omega$ موازی $O'H$ است، یعنی داریم:

$$\frac{\overline{I\omega}}{\overline{IO'}}=\frac{\overline{IA}}{\overline{IH}}$$

اما به روشنی داریم:

$$\frac{\overline{I\omega}}{\overline{IO}}=\frac{\overline{IA'}}{\overline{IH}} \quad , \quad \frac{\overline{IO}}{\overline{IO'}}=\frac{\overline{IA}}{\overline{IA'}}$$

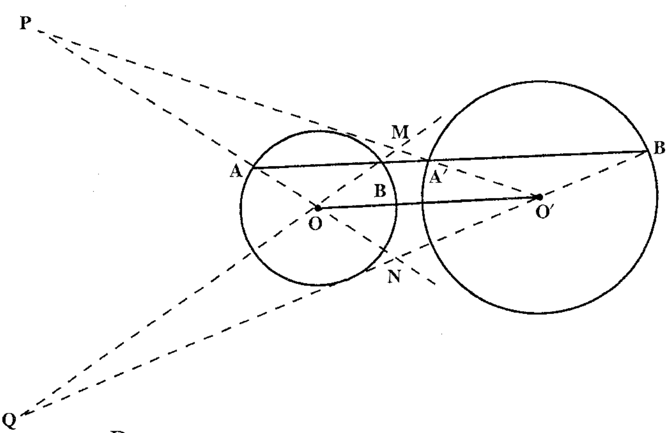
از ضرب کردن عضوهای نظیر این دو رابطه، رابطهٔ بالا ثابت می‌شود. بعلاوه ρ شعاع

دایرهٔ (ω) در رابطهٔ $\rho^2 = \overline{\omega K}.\overline{\omega A'}$ صدق می‌کند. طرف دوم این رابطه قوت نقطهٔ ω نسبت به دایرهٔ (γ) به قطر AA' است. از آن‌جا دایرهٔ (ω) عمود بر دایرهٔ (γ) است. از طرفی قوت نقطهٔ S وسط پاره‌خط AA' نسبت به دایرهٔ (ω) برابر $\overline{SA}^2$ است. امّا این مقدار قوت نقطهٔ S نسبت به دایره‌های O و O' نیز هست. بنابراین نتیجه می‌شود که سه دایرهٔ (O) ، (O') و (ω) دوبه‌دو دارای یک محور اصلی می‌باشند که از نقطهٔ S بر خط $\omega OO'$ عمود می‌شود. پس دایرهٔ (ω) به دسته دایره‌ای تعلق دارد که دو دایرهٔ (O) و (O') دایره‌های مبنای آن هستند.

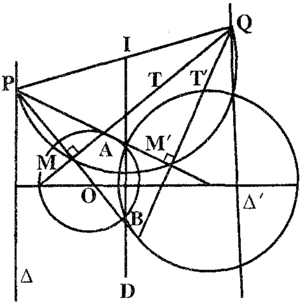
۴.۱.۴.۵ . دو دایره، یک خط یا یک راستای ثابت

۵۵۸. قاطعی موازی OO' خط‌المرکزین دایره‌های (O) و (O') ، این دایره‌ها را به‌طور مرتب در نقطه‌های A ، B ، A' و B' قطع کرده است. شعاعهای OA' و OB' شعاعهای OA و OB را در نقطه‌های M ، N ، P و Q قطع کرده‌اند. مطلوب است مکان هندسی این نقطه‌ها با تغییر قاطع (حرکتهای به موازات OO'). وقتی ملاحظه کنیم که مثلثهای MBA' و MOO' متشابه‌اند، خواهیم داشت :

$$\frac{MO}{MO'} = \frac{OB}{O'A'} = \frac{R}{R'}$$



نسبت فاصله‌های M از نقطه‌های ثابت O و O' به نسبت ثابت $\frac{R}{R'}$ است، پس مکان M دایره‌ای است که قطر آن قطعهٔ مزدوج OO' به نسبت شعاعهای دایره‌ها می‌باشد، مکان هندسی N ، P و Q نیز همین دایره می‌باشد. نتیجه می‌شود که در ترسیم مذکور چهارضلعی MNQP محاطی است.

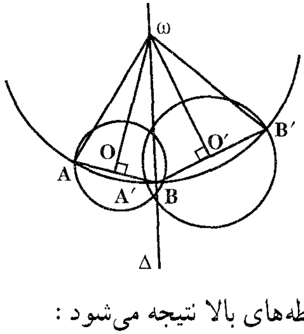


۵۵۹. اگر P نقطهٔ دلخواهی از Δ و خطهای T و ′T قطبی‌های آن نسبت به دایره‌های (O) و (′O) باشند که در نقطهٔ Q متقاطعند، چنانچه P بر Δ تغییر نماید، T و ′T در نتیجه Q تغییر نموده لیکن پیوسته $\hat{M}' = \hat{M} = 90^\circ$ بوده و دایرهٔ به قطر PQ. اولاً از M و ′M گذشته. ثانیاً این دایره بر دایره‌های (O) و (′O) عمود است، زیرا پای قطبی مزدوج قطب انعکاس است، نسبت به دوسر قطری از دایره که از قطب انعکاس گذشته باشد و از طرف دیگر می‌دانیم دایره‌ای که بر دو دایرهٔ مفروض عمود باشد، مرکزش بر محور اصلی دو دایره واقع است و از آن‌جا، مرکز دایرهٔ به قطر PQ بر خط D محور اصلی دو دایره واقع بوده و از آن‌جا نقطهٔ Q ، قرینهٔ P نسبت به I مرکز دایرهٔ عمود بر دایره‌های (O) و (′O) می‌باشد و چون I بر محور اصلی واقع است، می‌توان گفت Q قرینهٔ P نسبت به یکی از نقطه‌های محور اصلی دو دایره است و بنابراین مکان هندسی نقطهٔ Q خط ′Δ ، قرینهٔ Δ نسبت به محور اصلی دو دایره می‌باشد.

۴.۵ . ۱ . ۵ . سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۶۰. نقطهٔ P را قطب انعکاس غیرواقع بر دو دایرهٔ (O) و (′O) اختیار کنید. منعکسهای این دو دایره را O_1 و O'_1 بنامید. اندازهٔ شعاع دایره‌های O_1 و O'_1 باید برابر باشند. از آن‌جا مکان هندسی نقطهٔ P را به‌دست آورید.

۴.۵ . ۱ . ۶ . مسأله‌های ترکیبی



۵۶۱. ۱. اگر (ω) مرکز یکی از دایره‌های مطلوب باشد که دایره‌های O و ′O را بترتیب در قطرهای AB و ′A′B قطع کرده است، در این‌صورت داریم :

$$\begin{cases} \omega A^2 = \omega O^2 + AO^2 = \omega O^2 + R^2 \\ \omega B'^2 = \omega O'^2 + B'O'^2 = \omega O'^2 + R'^2 \end{cases}$$

و چون $\omega B' = \omega A = R''$ است. لذا از کم کردن رابطه‌های بالا نتیجه می‌شود :

$\omega O^2 - \omega O'^2 = R'^2 - R^2 =$ مقداری ثابت است

یعنی مکان (ω) که تفاضل مربعات فاصله‌هایش از دو نقطهٔ ثابت O و ′O برابر مقدار

ثابتی است، خطی است مستقیم عمود بر خط‌المرکزین. چنانچه I پای عمود و H وسط OO' باشد، داریم :

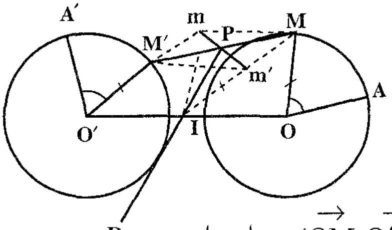
$$\omega O^2 - \omega O'^2 = 2\overline{OO'}.\overline{IH}$$
$$\Rightarrow 2\overline{OO'}.\overline{IH} = R'^2 - R^2$$

یا

$$\overline{IH} = \frac{R'^2 - R^2}{2\overline{OO'}}$$

یعنی Δ یا مکان هندسی خواسته شده، قرینهٔ محور اصلی دو دایره O و O' نسبت به نقطهٔ I وسط خط‌المرکزین این دو دایره است.

۲. اگر ω مرکز دایرهٔ مطلوب باشد. ω از یک طرف روی خط Δ مکان هندسی مربوط به دو دایرهٔ O و O' (قسمت ۱)، و از طرف دیگر روی خط Δ' مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که دو دایرهٔ O' و O'' را نصف می‌کند، قرار دارد و بنابراین ω محل برخورد این دو خط است.



۵۶۲. اگر از یک نقطهٔ همسنگ بردارهای $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{O'A'}$ ، $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{O'M'}$ را رسم کنیم، با استفاده از فرض مسأله ملاحظه می‌شود که نیمسازهای زاویه‌های $(\overrightarrow{OA},\overrightarrow{O'A'})$ و $(\overrightarrow{OM},\overrightarrow{O'M'})$ متوازی‌اند.

۱. فرض کنیم I و P وسطهای OO' و MM' باشند. $\overrightarrow{Im}$ و $\overrightarrow{Im'}$ را همسنگ با $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{O'M'}$ رسم می‌کنیم. بردارهای $\overrightarrow{mM}$ و $\overrightarrow{M'm'}$ همسنگ خواهند بود (شکل) ؛ زیرا هردو خط همسنگ $\frac{OO'}{2}$ می باشند، پس $MmM'm'$ متوازی‌الاضلاع است و P وسط mm' است. از طرف دیگر مثلث Imm' متساوی‌الساقین است. میانهٔ IP نیمساز زاویهٔ $m\hat{I}m'$ است. این نیمساز خط راست ثابتی است، مانند D زیرا با نیمساز زاویه $(OA,O'A')$ موازی است. مکان P قطعه‌ای از خط D است که وسط آن I و طولش مساوی است با $2r$ ، قطر دو دایره، زیرا تصویر Im روی خط D یعنی IP از ۰ تا r تغییر می‌کند.

۲. داریم :

$$\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{MM'}+\overrightarrow{M'O'}+\overrightarrow{O'O}=0$$

از آن‌جا :

$$\overrightarrow{MM'}=\overrightarrow{OO'}-\overrightarrow{OM}+\overrightarrow{O'M'}$$

اگر رابطه را برروی D تصویر کنیم، خواهیم داشت :

$$\text{تصویر}\ \overrightarrow{OO'} = \text{تصویر}\ \overrightarrow{MM'}$$

زیرا $\overrightarrow{OM}$ و $\overrightarrow{O'M'}$ تصویرهای برابر دارند.

تبصره. ارتباط نقطهٔ (M,M') دو دایره مورد بحث یک تساوی معکوس است که در آن محور تقارن خط D و انتقال تصویر OO' روی D است.

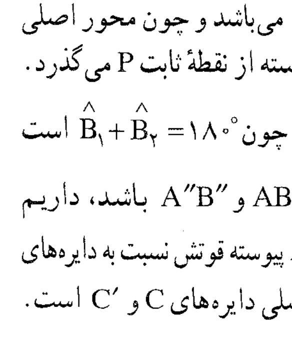
۵۶۳. ۱. (۱) $\hat{A}'' = \hat{B}' = \frac{\overparen{A'B''}}{2}$ و (۲) $\hat{O}_1 = \hat{B}_1 = \frac{\overparen{OA}}{2}$ و (۳) $\hat{A}'' = \hat{O}_1$ (زیرا $OT \parallel A''B''$ و OA'' قاطع است) از ملاحظهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) نتیجه می‌گیریم که $\hat{B}_1 = \hat{B}'$ یعنی خطهای AB و $A'B'$ پیوسته موازی‌اند.

۲. اگر نقطهٔ P محل برخورد $A'B'$ با OT باشد دو مثلث OPA' و OPB' متشابه‌اند؛ پس : $\frac{PA'}{OP} = \frac{OP}{PB'}$ و یا $\overline{OP}^2 = PA' \cdot PB'$ و از ملاحظهٔ این رابطه معلوم می‌شود که قوت نقطهٔ P نسبت به دو دایرهٔ (C) و (C') برابر است و یا به‌عبارت دیگر P محل برخورد $A'B'$ و OT روی محور اصلی دایره‌های C و C' می‌باشد و چون محور اصلی و مماس OT ثابت می‌باشند، نقطهٔ P ثابت بوده و $A'B'$ پیوسته از نقطهٔ ثابت P می‌گذرد.

۳. چهارضلعی $ABB''A''$ محاطی است زیرا $\hat{B}_1 = \hat{A}''_1$ و چون $\hat{B}_1 + \hat{B}_2 = 180^\circ$ است لذا $\hat{B}_2 + \hat{A}''_1 = 180^\circ$ و درنتیجه اگر Q نقطهٔ تقاطع AB و $A''B''$ باشد، داریم $QA \cdot QB = QA'' \cdot QB''$ یعنی Q نقطهٔ تقاطع $A''B''$ و AB پیوسته قوتش نسبت به دایره‌های C و C' مساوی است و یا به‌عبارت دیگر مکان Q محور اصلی دایره‌های C و C' است.

۵.۴.۲. دو دایرهٔ متخارج

۵۶۴. فرض می‌کنیم (O,r) و (O',r') که در آن $r > r'$ است، دایره‌های مفروض و (ρ,ω) دایرهٔ مماس بر این دو دایره باشد. برحسب اوضاع مختلف تماس دایره‌ها، چهار حالت اتفاق می‌افتد :



۱. دایرهٔ (ρ,ω) با دو دایره، مماس خارج است (شکل). در این حالت داریم :

$\omega O = \rho + r$ و $\omega O' = \rho + r'$

و یا : $\omega O - \omega O' = r - r'$

بنابراین ω متعلق به شاخهٔ نظیر کانون O' از هذلولی (H)به کانونهای O و O' که طول محور قاطعش $r-r'$ است، می‌باشد. بعکس اگر ω یک نقطه از این شاخه باشد، داریم :

$$\omega O-\omega O'=r-r' \Rightarrow \omega O-r=\omega O'-r';\cdots \qquad (۱)$$

ولی $\omega O>r$ ؛ زیرا اگر $\omega O<r$ باشد، از تساوی (۱) نتیجه می‌شود : $\omega O'<r'$ و ω بنابراین داخل (O) و (O') قرار می‌گیرد و این غیرممکن است ، چون این دایره‌ها متخارجند. پس فرض می کنیم ;$\omega O=r+\rho$ و با قراردادن در رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود :

$$\omega O'=r'+\rho;$$

این تساویها ثابت می کند که دایرهٔ به مرکز ω و به شعاع ρ با دایره‌های مفروض، مماس خارج می‌باشد.

بنابراین مکان ω این شاخه از هذلولی می‌باشد.

۲. (ρ,ω) با دو دایره مماس داخل است. داریم :

$$\omega O=\rho-r;\omega O'=\rho-r';$$

یا :

$$\omega O'-\omega O=r-r';$$

بنابراین ω متعلق به شاخهٔ دوم هذلولی (H) می‌باشد. حالت عکس این مسأله با استدلالی مشابه با قبل ثابت می‌شود ؛ و مکان ω شاخهٔ دوم هذلولی H می‌باشد.

۳. دایرهٔ (ρ,ω) با یکی مماس خارجی و با دیگری مماس داخلی می‌باشد. در این حالت داریم :

$$\omega O=\rho+r,\omega O'=\rho-r',\cdots \quad (۱)$$

یا

$$\omega O=\rho-r,\omega O'=\rho+r',\cdots \quad (۲)$$

در حالت (۱)، داریم : $\omega O-\omega O'=r+r'$ و در (۲) $\omega O'-\omega O=r+r'$ بنابراین ω متعلق به هذلولی (H_1) به کانونهای O و O' و به طول محور کانونی $r+r'$ می‌باشد و بعکس آن، مشابه قسمتهای قبل ثابت می‌شود. مکان ω هذلولی (H_1) است. درنتیجه مکان مرکزهای دایره‌های مماس بر (O) و (O') دو هذلولی (H) و (H_1) می‌باشد.

۵ . ۴ . ۳ . دو دایرهٔ مماس برون

۵ . ۴ . ۳ . ۱ . تنها دو دایرهٔ مماس برون

۵۶۵. چون در دو دایرهٔ مماس، نقطهٔ تماس آنها یکی از مرکزهای تجانس آنها می‌باشد، درنتیجه، A مرکز تجانس دایره‌های (O) و (O') بوده و بنابه خاصیت تجانس $BB'\|CC'$ است

و می‌توان نوشت :

$$\frac{BP}{BC'} = \frac{R}{R-R'} \text{ و یا } \frac{PB'}{PC} = \frac{PB}{PC'} = \frac{BB'}{CC'} = \frac{R}{R'}$$

از این‌رابطه نتیجه می‌شود که P مجانس C' است در تجانس $(B\ ,\ k = \frac{R}{R-R'})$، و چون مکان C' دایرهٔ (O) است، پس مکان P دایره است. و از طرفی می‌دانیم در دو دایرهٔ متجانس مرکزهای آنها مجانس یکدیگرند و نسبت تجانس، مساوی نسبت دو شعاع است. پس شعاع دایرهٔ مکان P را اگر R'' بنامیم، داریم :

$$R'' = \frac{RR'}{|R-R'|} \text{ و یا } \overline{R\omega} = \frac{R}{R-R'} \cdot \overline{BO'} = \frac{R(۲R+R')}{R-R'}$$

۵۶۶. مکان هندسی نقطهٔ J وسط قاعدهٔ CE، دایره‌ای هم‌مرکز با دایرهٔ A و مکان هندسی نقطهٔ I وسط قاعدهٔ DF، دایره‌ای هم‌مرکز با دایرهٔ (B) است. زیرا وترهای CE و DF در دو دایره، طولهای ثابتی دارند.

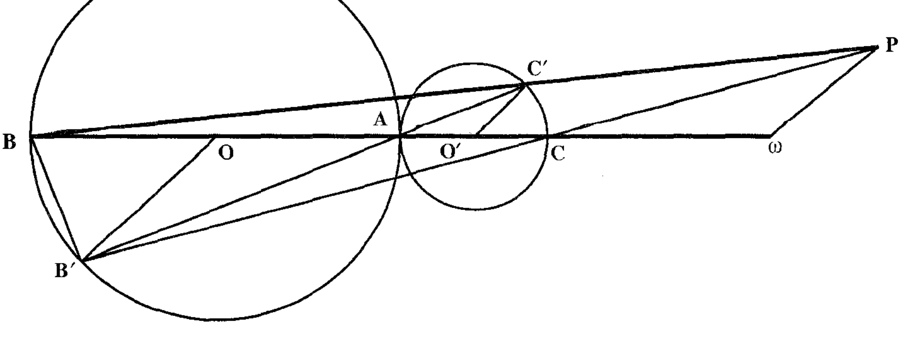
نکته. اگر دو دایره مماس درونی باشند، دو قاطع رسم شده ساقهای ذوزنقه را می‌سازند.

۵۶۷. نقطهٔ A مرکز تجانس دو دایره است. $\overrightarrow{BB'}$ و $\overrightarrow{CC'}$ موازی است. داریم :

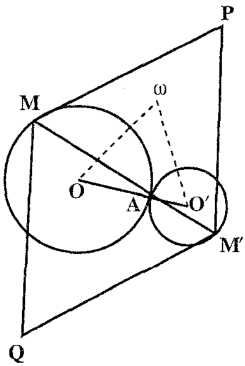
$$\frac{PB}{PB-PC'} = \frac{R}{R-R'} \text{ یا } \frac{PB}{PC'} = \frac{BB'}{CC'} = \frac{R}{R'}$$

و $\frac{PB}{BC'} = \frac{R}{R-R'}$. پس مکان نقطهٔ P، مجانس مکان C' در تجانس $(B\ ,\ \frac{R}{R-R'})$ است، و این مکان، دایره‌ای است به مرکز ω و به شعاع $\frac{RR'}{R-R'}$ به قسمی که

$B\omega = \frac{R}{R-R'} \cdot BO' = \frac{R}{R-R'}(۲R+R')$ می‌باشد.



۵۶۸. اگر O_1 و O_2 مرکز دایره‌های مفروض و Q_1 و Q_2 مرکز دایره‌های محیطی مثلثهای ABC_1 و AB_1C باشند، آن‌وقت $O_1Q_1O_2Q_2$ متوازی‌الاضلاع است. خط راست Q_1Q_2 از وسط پاره‌خط O_1O_2 (نقطهٔ D) می‌گذرد. دومین نقطهٔ برخورد دایره‌های محیطی مثلثهای ABC_1 و AB_1C، قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط راست Q_1Q_2 است. مکان هندسی مطلوب، دایره‌ای به شعاع AD و به مرکز نقطهٔ D است.



۵۶۹. به ضلع MM' می‌توان دو مثلث متساوی‌الاضلاع $MM'P$ و $MM'Q$ را ساخت. آنها نسبت به MM' قرینه‌اند. یکی از آنها مثلاً $MM'P$ را که سوی مستقیم دارد درنظر می‌گیریم. وقتی که M' دایرهٔ (O') را طی کند مثلث $AM'P$ مستقیماً متشابه با مثلث مفروض خواهد بود زیرا داریم:

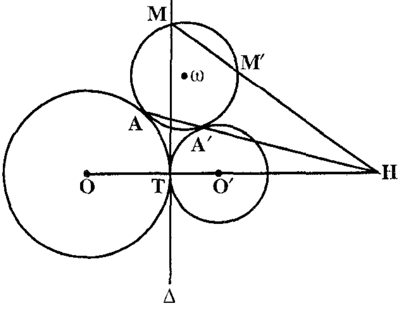
$$(M'P \text{ و } M'M) = \text{۶۰}^{\circ};$$

$$\frac{M'A}{M'P} = \frac{M'A}{M'M} = \frac{r'}{r+r'};$$

r و r' شعاعهای دایره‌های مفروض می‌باشند.

در نتیجه درحالی که A ثابت است M' دایرهٔ (O') و رأس P یک دایره‌مانند (Γ) را طی خواهد کرد که از دایرهٔ (O') نتیجه می‌شود همچنان‌که P از M' به‌دست می‌آید. برای این‌که دایرهٔ (Γ) را دقیقاً معلوم کنیم، مثلث متساوی‌الاضلاع $OO'\omega$ را در سوی مستقیم روی OO' می‌سازیم. ω مرکز دایرهٔ (Γ) و ωA شعاع آن است زیرا A یکی از مواضع نقطهٔ P است وقتی M' به A برسد، P نیز بر A منطبق می‌شود. مکان Q قرینه دایرهٔ (Γ) نسبت به OO' است.

۵.۴.۳.۲. دو دایره، محور اصلی



۵۷۰. فرض کنیم (ω) دایره‌ای است که از M گذشته و به دو دایرهٔ (O) و (O') که در نقطهٔ T مماس خارج می‌باشند در نقطه‌های A و A' مماس است. دایرهٔ (ω) با هر دو دایرهٔ مفروض یا مماس خارجی، و یا مماس داخلی خواهد بود. بنابراین AA' که

مرکزهای تجانس دایره‌های (ω) و (O) و همچنین (ω) و (O') را به‌هم وصل می‌کند چون تجانسها از یک نوع می‌باشند ازنقطهٔ H مرکز تجانس مستقیم (O) و (O') می‌گذرد و علاوه‌بر آن A با A' غیرمتناظر است و داریم:

$$HA \times HA' = HT^{2};$$

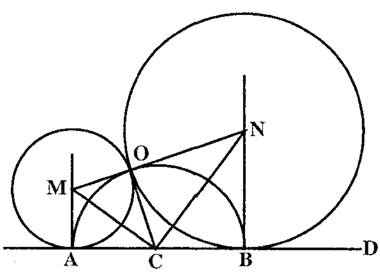
پس اگر M' نقطه دیگر تقاطع HM و (ω) باشد داریم:

$$HM \times HM' = \overline{HT}^{2};$$

و بعکس هر دایره که از M و M' بگذرد اگر بر یکی از دایره‌های مفروض مماس باشد بر دیگری نیز مماس خواهد بود.

پس نقطهٔ M' نقطهٔ دوم تلاقی دو دایرهٔ (ω) است که به موجب رابطهٔ قبل مکان M' منعکس محور اصلی Δ نسبت به قطب H و با قوت HT^{2} است، یعنی دایرهٔ به قطر TH.

۵۷۱. مماس مشترک OC را رسم می‌کنیم، داریم: $CO = CB$ و $CO = CA$ پس مکان نقطهٔ O دایره‌ای است به مرکز C وسط AB و به شعاع نصف AB.



۵ . ۴ . ۳ . ۳. مسأله‌های ترکیبی

۵۷۲. ۱. به اندازهٔ زاویه‌های ABM و ACM توجه کنید.

۲. به اندازهٔ زاویهٔ M توجه کنید.

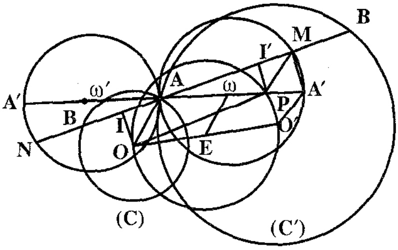
۳. به اندازهٔ زاویهٔ OIO' توجه کنید.

۴. شعاعهای OB و $O'C$ چگونه‌اند؟

۵. H و K نقطه‌های برخورد IO و IO' با AB و AC هستند. فرض کنید $HA = AK = x$. مثلثهای IOO'، KAO'، IOO' و HOA را باهم مقایسه کنید.

۵ . ۴ . ۴. دو دایرهٔ متقاطع

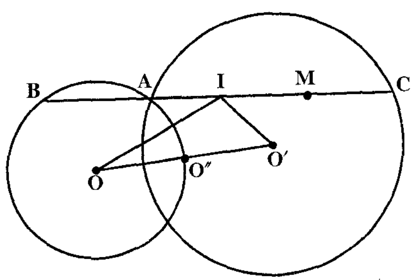
۵ . ۴ . ۴ . ۱. تنها دو دایرهٔ متقاطع



۵۷۳. اگر BAB' قاطع دلخواه گذرنده بر A و نقطه‌های I و I' وسطهای وترهای AB و AB' باشد در این‌صورت داریم :

$$\frac{BB'}{۲} = II' = AM = AN$$

چنانچه OP را موازی BB' رسم نماییم $\overrightarrow{II'} = \overrightarrow{OP} = \overrightarrow{AM}$ است و در نتیجه $\overrightarrow{PM} \underline{\parallel} \overrightarrow{OA}$ است. یعنی مکان نقطهٔ M از انتقال مکان نقطهٔ P به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OA}$ به‌دست می‌آید و چون $O\hat{P}O' = ۹۰^\circ$ است پس مکان P دایرهٔ E به قطر $\overline{OO'}$ می‌باشد و از آن‌جا می‌توان گفت مکان هندسی نقطهٔ M دایرهٔ به قطر OO' است که همسنگ بردار $\overrightarrow{PM} = \overrightarrow{OA}$ انتقال یافته باشد و چون N پیوستهٔ قرینهٔ M نسبت به A است، پس مکان N دایره ω' قرینهٔ دایرهٔ (ω) نسبت به نقطهٔ A می‌باشد.

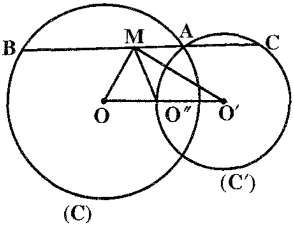


۵۷۴. برای آن‌که به مسأله کلیت بدهیم فرض می‌کنیم AM را مساوی مجموع جبری AB و AC جدا کنیم ؛ یعنی وقتی که B و C در یک طرف A هستند، AM را مساوی مجموع AB و AC جدا کنیم. حال فرض کنیم I وسط AM باشد، واضح است که در این‌صورت I وسط BC هم خواهد بود و داریم :

$\overline{IA} \times \overline{IB} + \overline{IA} \times \overline{IC} = ۰$ و یا $\overline{IA} \times \overline{IB} = -\overline{IA} \times \overline{IC}$

اما $\overline{IA} \times \overline{IB} = \overline{IO}^۲ - R^۲$ و $\overline{IA} \times \overline{IC} = \overline{IO'}^۲ - R'^۲$

پس $\overline{IO}^۲ + \overline{IO'}^۲ = R^۲ + R'^۲$ بنابراین مجموع مجذورات فاصله‌های I از O و O' مساوی مقدار ثابتی است و مکان نقطهٔ I دایره‌ای است که مرکزش O'' وسط OO' است. این دایره از A نیز می‌گذرد زیرا مجموع مجذورات فاصله‌های A از O و O' مساوی با $R^۲ + R'^۲$ است. مکان نقطهٔ M مجانس مکان فوق نسبت به مرکز A و با قوت ۲ می‌باشد.



۵۷۵. قاطع BAC راکه از نقطهٔ A محل برخورد دو دایره رسم شده است، درنظر می‌گیریم، و وسط پاره‌خط BC را M می‌نامیم. داریم :

$$\overline{MB}=-\overline{MC}\Rightarrow \overline{MB}+\overline{MC}=۰$$

$$P_{M(C)}=\overline{MA}\cdot\overline{MB} \text{ و } P_{M(C')}=\overline{MA}\cdot\overline{MC}$$

$$\Rightarrow P_{M(C)}+P_{M(C')}=\overline{MA}\cdot\overline{MB}+\overline{MA}\cdot\overline{MC}=\overline{MA}(\overline{MB}+\overline{MC})=\overline{MA}\times ۰=۰$$

برای تعیین مکان هندسی نقطهٔ M، وسط پاره‌خط OO' را O'' می‌نامیم و از M به O، O' و O'' وصل می‌کنیم. در مثلث MOO' بنا به قضیهٔ میانه‌ها داریم :

$$MO^۲+MO'^۲=۲MO''^۲+\frac{OO'^۲}{۲}$$

اما بنا به فرض :

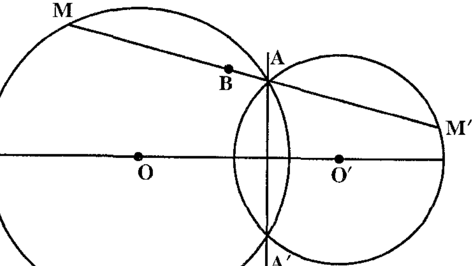
$$P_{M(C)}+P_{M(C')}=۰\Rightarrow OM^۲-R^۲+O'M^۲-R'^۲=۰$$

$$\Rightarrow OM^۲+OM'^۲=R^۲+R'^۲$$

از مقایسه این رابطه با رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود :

$$۲MO''^۲+\frac{OO'^۲}{۲}=R^۲+R'^۲\Rightarrow MO''=\frac{۱}{۲}\sqrt{۲(R^۲+R'^۲)-OO'^۲}$$

پس مکان هندسی نقطهٔ M وقتی قاطع حول نقطهٔ تقاطع A دوران کند، دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O'' وسط OO' و به شعاع ثابت $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲(R^۲+R'^۲)-OO'^۲}$ است.



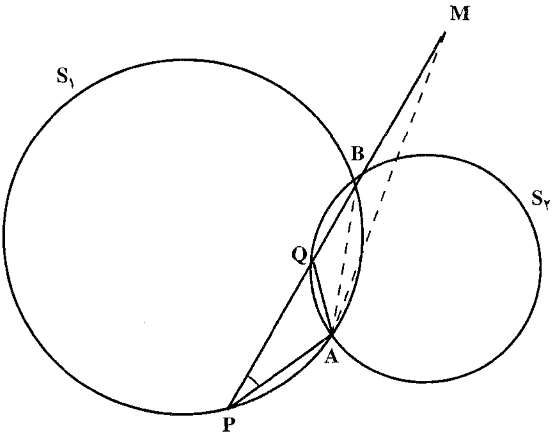
۵۷۶. اگر $\overline{MAM'}$ قاطع دلخواه گذرنده بر A و B نقطه‌ای از آن باشد به نحوی که $\frac{\overline{BM}}{\overline{BM'}}=k$، در این‌صورت داریم :

$$\begin{cases}P_{B(O)}=\overline{BA}\cdot\overline{BM}\\ P_{B(O')}=\overline{BA}\cdot\overline{BM'}\end{cases}$$

طرفین این دو رابطه را برهم تقسیم می‌نماییم.

$$\frac{P_{B(O)}}{P_{B(O')}}=\frac{\overline{BA}\cdot\overline{BM}}{\overline{BA}\cdot\overline{BM'}}=\frac{BM}{BM'}=k$$

یعنی پیوسته نسبت قوتهای B نسبت به دو دایره برابر مقداری ثابت است. لذا مکان B دایره‌ای است که جزء دایره‌های دستگاه (O, O', AA') بوده و مرکزش پاره‌خط OO' را به نسبت k تقسیم می‌نماید.



۵۷۷. نقطه‌های برخورد دایره‌های S_1 و S_2 را با حروف A و B نشان می‌دهیم؛ بعلاوه نقطه‌های برخورد خط MB را با دایره‌های S_1 و S_2 بترتیب P و Q می‌نامیم (شکل). چون نسبت m/n یعنی نسبت طول پاره‌خطهای مماس از M بر دایره‌های مفروض را داریم، نسبتهای زیرهم، برای ما معلوم خواهند بود.

$$\frac{MP}{MQ}=\frac{MP}{MQ}\cdot\frac{MB}{MB}=\frac{m^2}{n^2}$$

از این معادله نتیجه می‌شود که اگر $m = n$ ، نقطه‌های P و Q برهم منطبق می‌شوند و M بر AB واقع است؛ بنابراین ازاین‌جا به بعد فرض می‌کنیم $m \neq n$.

اکنون ΔAQP را درنظر می‌گیریم. وقتی M حرکت کند این مثلث تغییر می‌کند؛ اما زاویهٔ APQ ثابت می‌ماند، زیرا همیشه روبه‌رو به کمان ثابتی از دایرهٔ S_1 است و همچنین زاویهٔ $A\hat{Q}P = 180^\circ - A\hat{Q}B$ ثابت می‌ماند، زیرا زاویهٔ AQB روبه‌رو به کمان ثابتی از دایرهٔ S_2 است. در نتیجه، این مثلث متشابه با خودش باقی می‌ماند. رأس A از این مثلث حرکت نمی‌کند و P دایرهٔ S_1 را می‌پیماید؛ درنتیجه نقطهٔ M (که بر ضلع QP از مثلث قرار دارد و چنان است که $MP/MQ = m^2/n^2$) دایرهٔ S را می‌پیماید که از S_1 براثر یک تجانس مارپیچی به مرکز A و زاویهٔ دوران PAM و نسبت تجانس AM/AP به دست می‌آید.

روشن است که دایرهٔ S از نقطهٔ A می‌گذرد؛ اکنون نشان می‌دهیم که این دایره از نقطهٔ B نیز می‌گذرد. برای این کار کافی است نقطهٔ C را روی دایرهٔ S_1 طوری بیابیم که $C\hat{A}B = P\hat{A}M$ ؛ چون $A\hat{C}B = A\hat{P}M$ ، مثلثهای ACB و APM متشابه خواهند بود $(AC/AB = AP/AM)$ ، و بنابراین تجانس فوق‌الذکر C را به B بدل می‌کند.

اکنون مکان هندسی مطلوب را به طریق زیر می‌توان رسم کرد. از یکی از دو نقطهٔ A یا

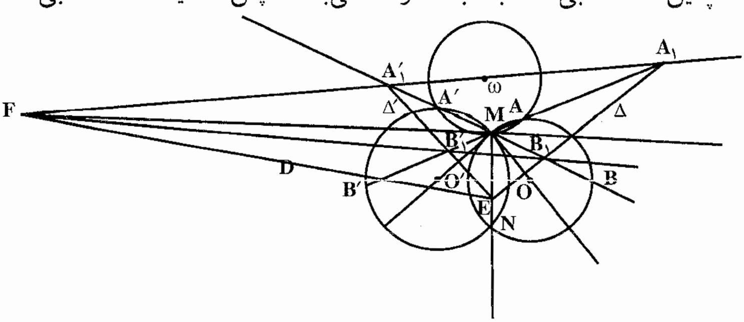
B، محلهای برخورد دو دایرهٔ S_1 و S_2 ، خط دلخواهی می‌گذرانیم که S_1 و S_2 را در نقطه‌های P و Q قطع کند. نقطهٔ M را بر این خط طوری پیدا می‌کنیم که $MP/MQ = m^2/n^2$ ، که در آن m/n همان نسبت معلوم طول مماسهاست. دایره‌ای که از A، B و M می‌گذرد (یا دقیقتر بگوییم، کمانی از این دایره که خارج از S_1 و S_2 قرار دارد) همان کمان مطلوب است.

۵۷۸. از C به A و B وصل می‌کنیم. دو مثلث CAB و OMN متشابه‌اند. بنابراین $A\hat{O}B = A\hat{C}B = C^{te}$. پس مکان هندسی نقطهٔ O کمان درخور زاویهٔ ثابت $A\hat{C}B$ روبه‌رو به پاره‌خط AB (خط‌المرکزین دو دایره) است.

۵۷۹. خطهای Δ و Δ' منعکسهای دایره‌های (O) و (O′) را با قطب M وقوت عدد دلخواه k تعیین می‌نماییم.

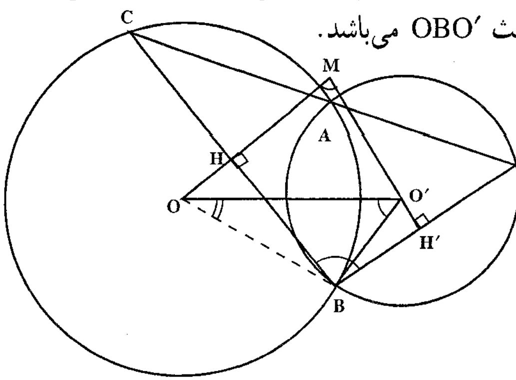
نقطهٔ E محل برخورد Δ و Δ' روی MN وترمشترک دایره‌های (O) و (O′) واقع است. زیرا منعکس نقطهٔ N که بر دایره‌های (O) و (O′) قراردارد از یک طرف بر Δ و از طرف دیگر بر Δ' و درنتیجه نقطهٔ تلاقی آنهاست.

B_1 و A_1 نقطه‌های تلاقی Δ با MB و MA منعکسهای B و A و همچنین B'_1 و A'_1 نقطه‌های تقاطع Δ' با MB' و MA' منعکسهای B' و A' است و از آن‌جا $B_1B'_1$ و $A_1A'_1$ بترتیب منعکسهای دایره‌های MBB' و MAA' است. چنانچه دایره‌های MBB' و MAA' نقطهٔ تقاطع دیگری داشته باشند، منعکسهای آنها متقاطع بوده و نقطهٔ تقاطعشان منعکس نقطهٔ تقاطع دایره‌های MBB' و MAA' است. یعنی F محل تلاقی $A_1A'_1$ و $B_1B'_1$ منعکس نقطهٔ تقاطع دایره‌های MBB' و MAA' می‌باشد.
چون دایره‌های (O) و (O′) و نقطهٔ M و عدد k ثابت است Δ و Δ' و نقطهٔ E ثابت می‌مانند. درصورتی که با تغییر دایرهٔ (ω) دایرهٔ MBB' و همچنین $B_1B'_1$ و $A_1A'_1$ و در نتیجه نقطهٔ F تغییر می‌کند و در هر حال FM قطبی نقطهٔ E نسبت به $B_1A'_1$ و $A_1A'_1$ و همچنین ME قطبی F نسبت به Δ و Δ' می‌باشد. پس FE یا خط D قطبی M نسبت



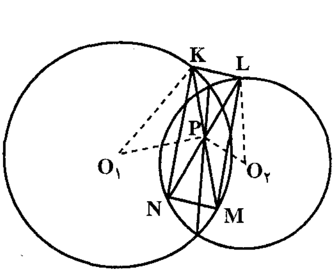
به Δ و Δ' خواهد بود که پیوسته نقطهٔ F بر D واقع است. یعنی مکان F قطبی M نسبت به Δ و Δ' است که چون خطهای Δ و Δ' و نقطهٔ M ثابت است، خط D ثابت است و مکان نقطهٔ برخورد دایره‌های MBB' و MBA' منعکس خط D قطبی M نسبت به Δ و Δ' در انعکاس (M , k) می‌باشد.

۵۸۰. H وسط BC بر OM و H' وسط BD بر $O'M$ واقع است و چون چهارضلعی $MHBH'$ محاطی است پس دو زاویهٔ $O\hat{M}O'$ و $H\hat{B}H'$ مکمل یکدیگرند. امّا زاویهٔ $O\hat{B}O'$ با زاویهٔ $H\hat{B}H'$ برابر است. (زیرا زاویهٔ $O\hat{O'}B$ با $C\hat{D}B$ و زاویهٔ $O'\hat{O}B$ با $D\hat{C}B$ مساوی‌اند) درنتیجه دو مثلث $OO'B$ و BCD متشابه‌اند. نتیجه می‌شود که دو زاویهٔ $O\hat{M}O'$ و $O\hat{B}O'$ مکمل یکدیگرند (یا برابر در حالتی که C و D در یک طرف A باشند) و چهارضلعی $MOBO'$ محاطی است، یعنی مکان M دایرهٔ محیطی مثلث OBO' می‌باشد.



۵۸۱. فرض کنید O_1 و O_2 معرف مرکز دایره‌های مفروض باشند و خط راست O_1O_2 دایره‌ها را در نقطه‌های A، B، C و D (به‌طور متوالی) قطع کند. دو حالت درنظر بگیرید:

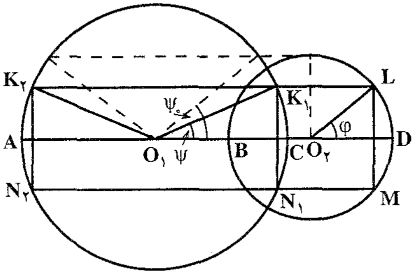
الف. مستطیل KLMN طوری قرارگرفته که رأسهای مقابل به هم K و M، بر یک دایره قرار دارند درحالی که L و N بر دایرهٔ دیگر واقعند. در این حالت، اگر P نقطهٔ برخورد قطرها باشد (شکل الف)، آن وقت



(الف)

$$|O_1P|^2 - |O_2P|^2 = \left(|O_1K|^2 - |KP|^2\right) = -\left(|O_2L|^2 - |LP|^2\right)$$
$$= |O_1K|^2 - |O_2L|^2 = R_1{}^2 - R_2{}^2$$

که در آن R_1 و R_2 شعاع دایره‌ها هستند، یعنی، نقطهٔ P بر وتر مشترک دایره‌ها قرار دارد؛ وسط وتر مشترک و نقطه‌های انتهایی آن مستثنی هستند، زیرا در این حالت مستطیل تباهیده می‌شود.



(ب)

ب. دو رأس مجاور به هم مستطیل KLMN بر یک دایره واقعند و دوتای دیگر بر دایرهٔ دیگر قراردارند. چون عمودهای وارد از O_1 بر KN و از O_2 بر LM، باید آنها را نصف کنند، خط راست O_1O_2 محور تقارن مستطیل KLMN است.

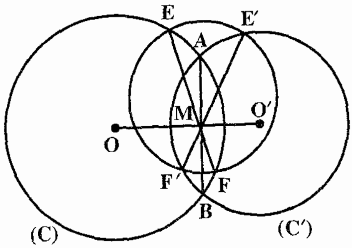
فرض کنید R_2 کمتر از R_1 باشد و شعاع O_2L با خط‌المرکزین دایره‌ها زاویهٔ φ تشکیل دهد. از L، خط راستی به موازات O_1O_2 رسم می‌کنیم. این خط، دایرهٔ O_1 را در دو نقطه مانند K_1 و K_2 قطع می‌کند، و به نقطهٔ L، دو مستطیل: K_1LMN_1 و K_2LMN_2 متناظر است (شکل ب). با تغییر کردن φ از ۰ تا $\frac{\pi}{2}$، زاویهٔ ψ، تشکیل شده با شعاع O_1K_1 و نیمخط O_1O_2، از ۰ تا مقدار معین ψ_0 تغییر می‌کند. با تغییر بیشتری در φ (از $\frac{\pi}{2}$ تا π)، ψ، از ψ_0 تا صفر کاهش می‌یابد. در ضمن، مرکز مستطیلهای K_1LMN_1 پاره‌خطی را از وسط CD تا وسط BC، جز نقطه‌های انتهایی و نقطهٔ برخورد این پاره‌خط با وتر مشترک دایره‌ها، می‌پیمایند. به همین ترتیب، مرکز مستطیلهای K_2LMN_2، در بازهٔ با نقطه‌های انتهایی وسطهای AB و AD انباشته‌اند (نقطه‌های انتهایی بازه، جزء مکان هندسی نیستند).

اگر سه رأس مستطیل و، بنابراین، رأس چهارم بر یک دایره قرارگیرند، آن‌وقت مرکز مستطیل بر مرکز دایرهٔ متناظر با آن منطبق می شود.

بنابراین، مکان هندسی، اجتماعی از سه بازه است: نقطه‌های انتهایی بازهٔ اوّل ــ بترتیب، وسطهای AB و AD، نقطه‌های انتهایی بازهٔ دوم ــ وسطهای BC و CD نقطه‌های انتهایی بازهٔ سوم ــ نقطه‌های برخورد دایره‌هاست، وسط وتر مشترک کنارگذاشته می‌شود.

۵۸۲. این مکان هندسی هذلولی به کانونهای O و O' و مقدار ثابت $2a=|R-R'|$ می‌باشد زیرا داریم:

$$|MO-MO'|=|R-R'|$$

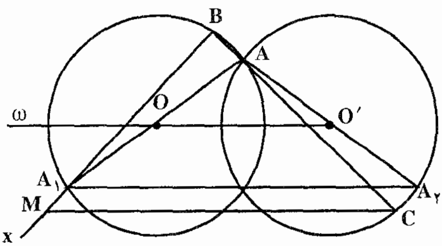


۵۸۳. اگر M نقطهٔ دلخواهی از وتر مشترک AB دو دایرهٔ (C) و (C′) باشد و از این‌نقطه وترهای به‌طول مینیمم EF و E′F′ را بترتیب در دایره‌های (C) و (C′) رسم کنید داریم:

$$P_{M/C'} = -ME'^2 = -MF'^2 \quad \text{و} \quad P_{M/C} = -ME^2 = -MF^2$$

از آن‌جا که $P_{M/C} = P_{M/C'}$ است پس $ME^2 = ME'^2$ و از آن‌جا $ME = ME'$ و درنتیجه $EF = E'F'$ پس دایرهٔ به‌قطر EF از نقطه‌های E′ و F′ می‌گذرد و این دو دایره به‌وسیلهٔ دایره‌های (C) و (C′) نصف می‌شود، پس وترمشترک AB مکان هندسی مرکز دایره‌هایی است که محیطشان به‌وسیله دو دایره (C) و (C′) نصف می‌شود.

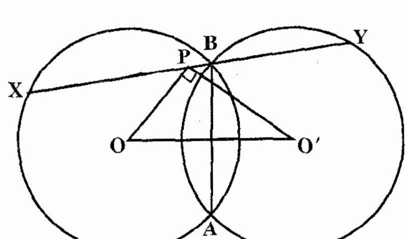
۵.۴.۴.۲. دو دایرهٔ متقاطع مساوی



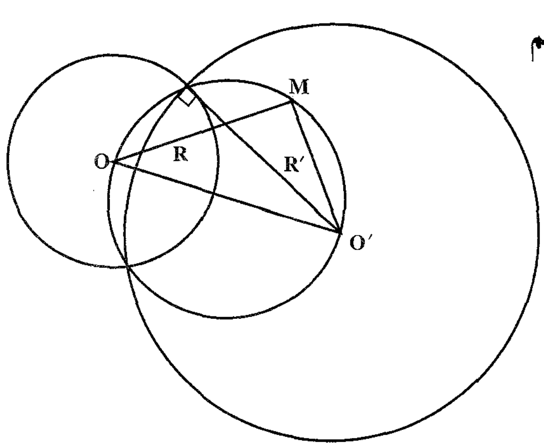
۵۸۴. اگر A_1 و A_2 نقطه‌های متقابل قطری A در دو دایرهٔ O و O′ باشد، خط Bx همواره از A_1 و خط رسم‌شده از C به موازات Bx همواره از A_2 می‌گذرد (شکل) و شکل A_1A_2CM متوازی‌الاضلاع است و $\overrightarrow{CM} = \overrightarrow{A_2A_1}$؛ پس مکان هندسی نقطهٔ M از مکان هندسی نقطهٔ C با یک انتقال برابر $\overrightarrow{A_2A_1}$ به‌دست می‌آید و این مکان دایره‌ای برابر دایره‌های مفروض و به مرکز ω است به قسمی که:

$$\overrightarrow{O'\omega} = \overrightarrow{A_2A_1} = 2\overrightarrow{O'O}$$

۵۸۵. حالت خاصی است از مسأله‌ای که دو دایره شعاع برابر نداشته باشند.



۵ . ۴ . ۴ . ۳ . دو دایرهٔ عمود برهم



۵۸۶. دو دایرهٔ عمودبرهم $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را درنظر می‌گیریم. می‌دانیم که

$$OO'^{2} = R^{2} + R'^{2} \quad (1)$$

است. M را نقطه‌ای از مکان هندسی موردنظر اختیار می‌کنیم. داریم :

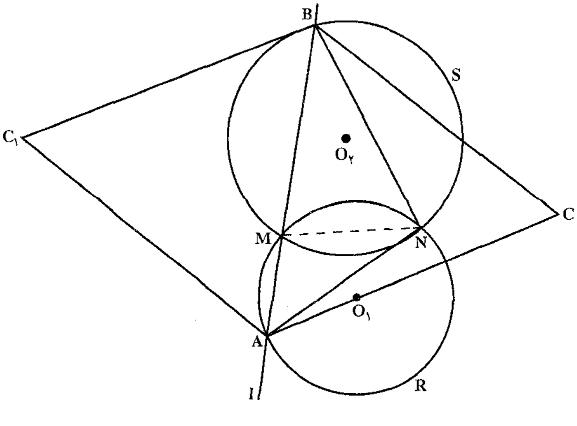
$$MO^{2} - R^{2} + MO'^{2} - R'^{2} = 0 \Rightarrow MO^{2} + MO'^{2} = R^{2} + R'^{2} \qquad (2)$$

$$(1),(2) \Rightarrow MO^{2} + MO'^{2} = OO'^{2} \Rightarrow O\hat{M}O' = 90^{\circ}$$

یعنی نقطهٔ M روی دایرهٔ به قطر OO' قراردارد. بدیهی است هر نقطه از این دایره ویژگی موردنظر را دارا هست.

۵ . ۴ . ۴ . ۴ . مسأله‌های ترکیبی

۵۸۷. دومین نقطهٔ برخورد دایره‌های R و S را با N نشان می‌دهیم و N را به A و به B وصل می‌کنیم (شکل). ملاحظه می‌کنیم که زاویه‌های BAN و ABN به انتخاب خط l بستگی ندارند : درواقع $B\hat{A}N = M\hat{A}N$ و زاویهٔ BAN با وتر ثابت MN مشخص می‌شود ؛ همچنین داریم $A\hat{B}N = M\hat{B}N$. بنابراین سومین زاویهٔ مثلث ABN یعنی $A\hat{N}B = \phi$ به انتخاب l بستگی ندارد. (این استدلال کامل نیست.) روی شکل تنها حالتی را درنظر گرفته‌ایم که M بین A و B باشد. اما اگر A درطرف دیگر MN قرارداشت، A بین B و M واقع می‌شد) اگر B در طرف دیگر MN بود، Bبین



A و M واقع می‌شد (تکمیل استدلال را با درنظر گرفتن این دو حالت به خواننده وامی‌گذاریم.) توجه داریم که زاویهٔ ϕ را می‌توان برحسب α، زاویهٔ بین دو دایرهٔ R و S، به‌دست آورد. درواقع چون زاویه‌ها به انتخاب خط l بستگی ندارند، l را عمودبر MN اختیار می‌کنیم. در این‌صورت NA و NB بر قطرهای NO_1A و NO_2B منطبق می‌شوند (O_1، O_2 مرکز R و S) و بنابراین یا $\phi = O_1\hat{N}O_2 = \alpha$، یا $\phi = 180^\circ - \alpha$.
بعلاوه، چون زاویه‌های ΔANB به انتخاب l بستگی ندارند، نسبت $NB/NA = k$ نیز به آن بستگی نخواهد داشت. پس، B از A براثر یک تشابه مارپیچی به‌مرکز N، زاویهٔ دوران ϕ، و نسبت تجانس k به‌دست می‌آید. (بسادگی می‌توان دید که نسبت تجانس $k = NB/NA$ برابر است با r_2/r_1، نسبت شعاعهای R و S : زیرا اگر l را عمود بر MN اختیار کنیم، داریم $NB = 2r_2$ و $NA = 2r_1$. دلیل دیگری برای این امر آن است که تجانس مارپیچی با نسبت k دایرهٔ R به شعاع r_1 را به دایرهٔ S به شعاع r_2 بدل می‌کند).
اکنون روشن است که اگر نقطهٔ Q پاره‌خط AB را به نسبت ثابت $AQ/QB = m/n$ تقسیم کند، شکل مثلث ANQ به انتخاب خط l بستگی پیدا نمی‌کند؛ به‌عبارت دیگر، نه زاویهٔ $A\hat{N}Q = \phi_1$ و نه نسبت $NQ/NA = k_1$ هیچ‌یک به l بستگی ندارند. بنابراین Q از A براثر یک تجانس مارپیچی به مرکز N زاویهٔ دوران ϕ_1 و نسبت تجانس k_1 به‌دست می‌آید. بنابراین مکان هندسی همهٔ این نقطه‌های Q دایره‌ای است که از دایرهٔ R (مکان هندسی نقطهٔ A) براثر تجانس مذکور به‌دست می‌آید.
مسألهٔ مکان هندسی رأس C از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را هم که بر قاعدهٔ AB بنا شود و همیشه در یک‌طرف l باشد، کم‌و بیش به همین روش می‌توان حل کرد (مثلث ABC یا همیشه در همان‌طرف l که N هست قراردارد یا همیشه نسبت به N در طرف دیگر l واقع است). در این‌جا هم شکل ΔANC به انتخاب l بستگی ندارد. بنابراین، مکان هندسی مطلوب یک دایره است که براثر تجانس مارپیچی از دایرهٔ R به‌دست می‌آید. اگر، همان‌طورکه درصورت مسأله آمده، لازم ندانیم که نقطهٔ C همیشه در یک‌طرف l باشد، آن‌گاه مکان هندسی مطلوب متشکل از دو دایره خواهد بود: یکی از آنها مکان آن دسته از نقطه‌های C است که با N در یک طرف l واقعند، و دیگری مکان هندسی نقطه‌های C_1 است که با N در دوطرف l واقعند. (اگر دایره‌های R و S متساوی باشند و اگر $O_1\hat{N}O_2 = 60^\circ$، آن‌گاه دایره‌ای که توسط C_1 پیموده می‌شود به نقطهٔ N

بدل می‌شود). قسمت (ج)، هم به روش مشابهی حل می‌شود. پاره‌خط NP_1 را موازی با AB و همطول و همجهت با ABرسم می‌کنیم. بدیهی است که زاویه $A\hat{N}P_1 = \phi_2$ و نسبت $NP_1/NA = k_2$ به انتخاب I بستگی ندارند. پس مکان هندسی این نقطه‌های P_1 دایره‌ای است که از R براثر تجانس مارپیچی به مرکزN، زاویهٔ چرخش ϕ_2 و ضریب تجانس k_2 به‌دست می‌آید. این دایره قابل انطباق است با دایرهٔ به شعاع OP، حاصل از جداکردن پاره‌خط OP به موازات AB، مساوی و همجهت با آن، از نقطهٔ ثابت دلخواه O و درنظرگرفتن مکان هندسی نقطه‌های P که بدین‌ترتیب به‌دست می‌آیند.

تذکر. نکتهٔ اصلی در حل این مسأله از (الف) تا (ج) این بود که دایره‌های R و S از یکدیگر براثر یک تجانس مارپیچی به‌دست می‌آمدند که نقطهٔ A از R را به نقطهٔ B از S بدل می‌کرد. به همین روش می‌توان نشان داد که اگر R شکل دلخواهی باشد و اگر S از R براثر یک تجانس مارپیچی به‌دست آید که نقطهٔ A از R را به نقطهٔ B از S بدل می‌کند، آن‌گاه مکان هندسی:

الف. نقطه‌های Q که پاره‌خط AB را به نسبت مفروض $AQ:QB = m:n$ تقسیم می‌کنند؛

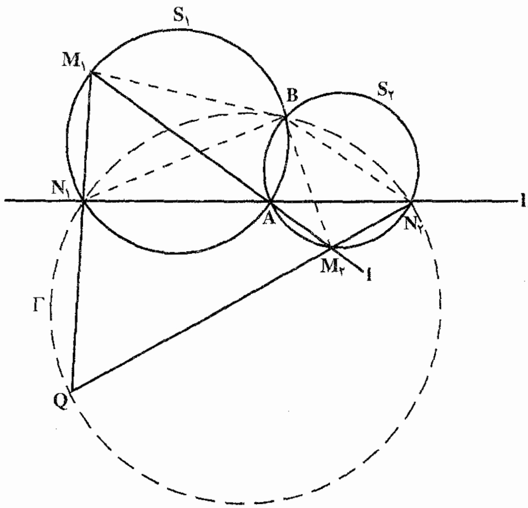
ب. رأسهای C از مثلثهای متساوی‌الاضلاع ABC، مرسوم بر پاره‌خط AB، که هم‌اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{A}C$ از آنها مقدار ثابت $60°$ است و همجهت دوران آنها (از نیمخط AB به نیمخط AC) ثابت است؛

ج. نقطه‌های P، منتهای پاره‌خطهای OP که از نقطهٔ ثابت O به موازات پاره‌خط AB و مساوی و همجهت با آن جدا می‌شوند، شکلی است متشابه با R و S.

برهان این قضیه درست مانند راه‌حل مسألهٔ بالا است.

۵۸۸. الف. چهارضلعی BM_1M_2P را درنظر می‌گیریم که در آن B دومین نقطهٔ برخورد S_1 و S_2 است. وقتی M_1M_2 حول A دوران داده شود، مثلث BM_1M_2 متشابه با خودش باقی می‌ماند؛ بنابراین چهارضلعی BM_1M_2P نیز متشابه با خودش باقی می‌ماند. اکنون همهٔ حکمهای مسأله را می‌توان باتوجه به این نکات نتیجه‌گرفت که نقطهٔ B از این چهارضلعی ثابت می‌ماند، رأسهای M_1 و M_2 دایره‌های S_1 و S_2 را می‌پیمایند و ضلع M_1M_2 همیشه از نقطهٔ ثابت A می‌گذرد. (فرض می‌کنیم مثلث M_1M_2P با ضلع معین M_1M_2 رسم شده است ــ یا در همان طرفی که مثلث BM_1M_2 واقع است و یا درطرف مقابل آن؛ درغیر این‌صورت باید فرض شود P بر دو دایره حرکت می‌کند و باید تغییرات مربوط به آن را درمورد خطهای M_1P و M_2P درصورت مسأله وارد کرد.)

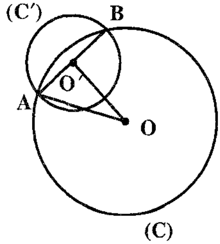
ب. چون $\Delta BM_1M_2 \sim \Delta BN_1N_2$ ، نتیجه می‌شود که $\Delta BM_1N_1 \sim \Delta BM_2N_2$ ؛ درنتیجه $B\hat{N_1}M_1 = B\hat{N_2}M_2$ و بنابراین می‌توان دایره‌ای بر چهارضلعی BN_1QN_2 محیط کرد. اما این بدان معنی است که مکان هندسی نقطه‌های Q دایرهٔ Γ محیط بر مثلث BN_1N_2 است. وقتی l_0 حول A دوران کند، مثلث BN_1N_2 تغییر می‌کند ولی همیشه متشابه با وضع اوّلیه‌اش باقی می‌ماند. چون درعین‌حال نقطهٔ B ثابت می‌ماند و نقطه‌های N_1 و N_2 دایره‌های S_1 و S_2 را می‌پیمایند، نتیجه می‌شود که مرکز دایرهٔ Γ ، دایرهٔ محیطی این مثلث، دایره‌ای را می‌پیماید.



۵۸۹. a. O_1 و O_2 را مرکزهای دو دایرهٔ مفروض بگیرید و O_3 را طوری انتخاب کنید که چهارضلعی $AO_1O_2O_3$ متوازی‌الاضلاع باشد. نقطهٔ O_3 ، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است.

b. مکان مطلوب، عبارت است از محیط دایرهٔ به مرکز O_2 (از دایره دوم) و با شعاعی برابر با شعاع دایرهٔ اوّل، به‌جز دو نقطهٔ P^* و O^* که با انتقالی که O_1 را به O_2 می‌رساند، از دو نقطهٔ P و Q به‌دست آمده‌اند.

۵۹۰. توجه کنید که تمامی مثلثهای ABCDی حاصل، متشابه‌اند. درنتیجه، اگر در هر مثلث نقطه‌ای مانند K که ضلع BC را به یک نسبت تقسیم می‌کند، اختیار کنیم، آن‌وقت، چون زاویهٔ AKC بدون تغییر باقی می‌ماند، نقطهٔ K یک دایره را می‌پیماید. بنابراین، نقطهٔ Mکه AK را به نسبت ثابت تقسیم می‌کند، دایره‌ای را می‌پیماید که از دایرهٔ اوّلی با تبدیل تجانسی به مرکز A و نسبت تجانس $k = \frac{AM}{AK}$ ، به‌دست می‌آید. از این استدلال در تمامی قسمتها : (الف)، (ب) و (ج)، استفاده می‌شود.



۵۹۱. ۱. فرض کنیم AB وتر مشترک دو دایرهٔ (C) و (C′) باشد. اگر این وتر قطری از دایرهٔ (C′) باشد، چنانچه O و O′ مرکزهای دو دایره فرض شوند (شکل) داریم:

$$OA^2 = OO'^2 + O'A^2 ;$$

یا

$$r^2 = d^2 + r'^2$$

بعکس اگر این رابطه برقرار باشد، مثلث قائم‌الزاویه‌ای که ضلعهای قائمه‌اش d و r′ باشد، وترش r خواهد بود و (C′) دایرهٔ (C) را در یک قطر قطع می‌کند.

۲. فرض کنیم O و O′ و ω مرکزهای دایره‌های (C)، (C′) و (γ) و r، r′ و ρ شعاع آنها باشند به‌موجب قسمت اوّل داریم:

$$r^2 = \overline{O\omega}^2 + \rho^2$$

و

$$r'^2 = \overline{O'\omega}^2 + \rho^2$$

و یا

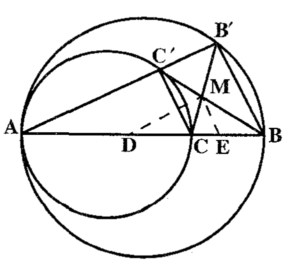
$$\overline{O\omega}^2 - r^2 = \overline{O'\omega}^2 - r'^2 = \rho^2$$

پس مکان مطلوب منطبق است بر مکان نقطه‌هایی که قوتهای متساوی منفی نسبت به دو دایره (C) و (C′) دارند.

برای این‌که این مکان موجود باشد، لازم است که (C) و (C′) متقاطع باشند و در این‌صورت مکان مطلوب وتر مشترک آنهاست.

۵. ۴. ۵. دو دایرهٔ مماس درون

۵۹۲. BB′ و CC′ باهم موازی‌اند زیرا بر AB′ عمودند. داریم:



$$\frac{BM}{BB'} = \frac{MC'}{CC'} \quad \text{یا} \quad ; \frac{BM}{AB} = \frac{MC'}{AC} = \frac{BC'}{AB+AC}$$

و از آن‌جا:

$$\frac{BM}{BC'} = \frac{AB}{AB+AC} ;$$

پس مکان هندسی نقطهٔ M مجانس دایرهٔ به‌قطر AC است، نسبت به مرکز تجانس B و با نسبت $\frac{AB}{AB+AC}$. اگر MD و ME را به موازات C′A و C′C رسم کنیم، D و E با A و C متناظرند. پس مکان، دایرهٔ به‌قطر DE است.

۵۹۳. فرض کنید R و r معرف شعاع دایره‌های مفروض باشند $(R \ge r)$ و D نقطهٔ تماس وتر BC و دایرهٔ کوچکتر باشد. فرض کنید K و L نقطه‌های برخورد وترهای AC و AB با دایرهٔ کوچکتر باشند، و بالاخره، فرض کنید O مرکز دایرهٔ محاطی مثلث ABC باشد. چون اندازه‌های زاویه‌ای کمانهای AK و AC برابرند، $|AK| = rx$ و $|AC| = Rx$ بنابراین، به‌دست می‌آوریم :

$$|DC|^2 = |AC| \cdot |CK| = (R-r)Rx^2$$

به همین ترتیب، $|AB| = Ry$ و $|DB|^2 = (R-r)Ry^2$ ؛ درنتیجه $\frac{CD}{DB} = \frac{x}{y} = \frac{AC}{AB}$ ،

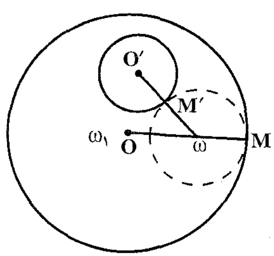
یعنی، AD نیمساز زاویهٔ BAC است. بعلاوه، داریم :

$$\frac{AO}{OD} = \frac{AC}{CD} = \frac{Rx}{\sqrt{(R-r)Rx}} = \sqrt{\frac{R}{R-r}}$$

بنابراین، مکان هندسی مطلوب، دایره‌ای است به شعاع $\rho = r = \frac{AO}{AD} = \frac{r\sqrt{R}}{\sqrt{R} + \sqrt{R-r}}$ ، که با دو دایرهٔ مفروض درهمان نقطهٔ A مماس درونی است.

۵ . ۴ . ۶. دو دایرهٔ یکی درون دیگری (متداخل)

۵۹۴. فرض می‌کنیم (O , r) و (O' , r') دایره‌های مفروض (دایرهٔ دوم داخل دایرهٔ اوّل است) و (ω , ρ) دایرهٔ مماس بر این دو دایره [دایرهٔ (ω) مماس داخلی با (O) و مماس داخلی و یا خارجی با (O') می‌تواند باشد]. ابتدا فرض می‌کنیم (O') و (ω) مماس خارجی باشند، داریم :



$$O\omega = r - \rho \quad \text{و} \quad O'\omega = r' + \rho$$
$$\Rightarrow O\omega + O'\omega = r + r' \qquad (1)$$

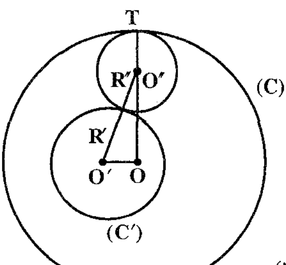
بنابراین ω متعلق به بیضی (E) به کانونهای O و O′ و محور بزرگ $r + r'$ می‌باشد. بعکس. فرض می‌کنیم ω یک نقطه از این بیضی باشد. چون بیضی شعاع حامل کوچکتر یا مساوی $a + c$ می‌باشد، داریم : $O\omega \le \frac{r+r'}{2} + \frac{OO'}{2}$ و چون (O')

داخل (O) می‌باشد، پس: $\frac{OO'}{۲} < \frac{r-r'}{۲}$ ازجمع نظیربه‌نظیر این دو نامساوی حاصل می‌شود $O\omega < r$ و با فرض: $O\omega = r - \rho$ از (۱) نتیجه می‌شود و $O'\omega = r' + \rho$ یعنی دایرهٔ به مرکز ω و به شعاع ρ مماس داخلی با (O) و مماس خارجی با (O') می‌باشد. بنابراین مکان مرکزهای ω بیضی (E) می‌باشد.

حال فرض می‌کنیم دایرهٔ $(\omega_۱ , \rho_۱)$ با دو دایرهٔ (O) و (O') مماس داخلی باشد. خواهیم داشت:

$$O\omega_۱ = r - \rho_۱ \text{ و } O'\omega_۱ = \rho_۱ - r' \Rightarrow O\omega_۱ + O'\omega_۱ = r - r'$$

پس $\omega_۱$ متعلق به بیضی $(E_۱)$ به کانونهای O و O' و محور بزرگ به طول $r - r'$ می‌باشد و طبق روش قبل ثابت می‌شود که هر نقطه از بیضی $(E_۱)$ مرکز یک دایرهٔ مماس بر دو دایرهٔ مفروض می‌باشد. بنابراین مکان $\omega_۱$ بیضی $(E_۱)$ می‌باشد.



۵۹۵. گزینهٔ (ج) درست است. O'' رامرکز یکی از این دایره‌ها با شعاع R'' فرض می‌کنیم.

داریم:

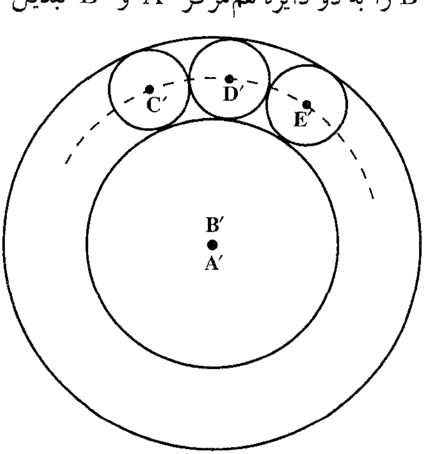
$$O''O' = R'' + R' \quad (۱)$$

$$O''O = R - R'' \quad (۲)$$

مقدار ثابت $= R + R' = O''O + O''O' \Leftarrow (۲)$ و (۱)

پس مکان هندسی نقطهٔ O'' یک بیضی به کانونهای O و O' و عدد ثابت $R + R'$ است.

۵۹۶. کافی است به‌وسیلهٔ انعکاس دو دایرهٔ A و B را به دو دایرهٔ هم‌مرکز A' و B' تبدیل کنیم. تمام دایره‌های C'، D'، ... با هم مساوی خواهند شد. نقطه‌های تماس روی دایره‌ای هم‌مرکز با دایره‌های C' و D'، ... واقع می‌شوند و اگر nدایره یک مدار تشکیل‌دهند، می‌توان آنها را محاط در n قطاع مساوی درنظر گرفت و نقطهٔ شروع سری جدید دایره‌ها هر نقطه‌ای باشد، برای دوباره‌رسیدن به نقطهٔ شروع بیش از n قطاع وجود نخواهد داشت.



۵ . ۴ . ۷. دو دایرهٔ هم‌مرکز

۵۹۷. این مکان هندسی یک دایره است.

۵۹۸. شعاع دو دایره را a و b $(a > b)$، می‌نامیم. داریم :

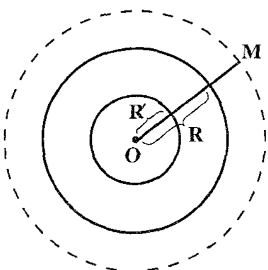
$$AB = \sqrt{a^{۲} - b^{۲}} \text{ و } BM = l + \sqrt{a^{۲} - b^{۲}} \text{ و } BN = -l + \sqrt{a^{۲} + b^{۲}}$$

$$OM^{۲} = BM^{۲} + b^{۲} = l^{۲} + a^{۲} + ۲l\sqrt{a^{۲} - b^{۲}} = \text{مقدار ثابت}$$

$$ON^{۲} = l^{۲} + a^{۲} - ۲l\sqrt{a^{۲} - b^{۲}} = \text{مقدار ثابت}$$

پس مکان هندسی خواسته‌شده دو دایره به مرکز O و به شعاعهای OM و ON است.

۵۹۹. اگر M یک نقطه از مکان هندسی موردنظر، یعنی نقطه‌ای باشد که نسبت قوتهای آن نسبت به دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ برابر k باشد، داریم :



$$P_{M(C)} = OM^{۲} - R^{۲} \text{ ،}$$

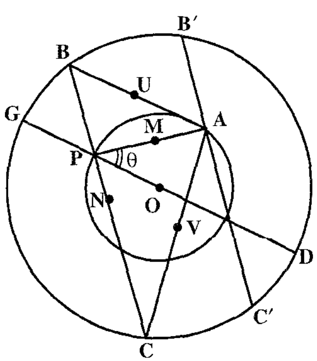
$$P_{M(C')} = OM^{۲} - R'^{۲} \text{ ، } P_{M(C)} = KP_{M(C')}$$

$$\Rightarrow OM^{۲} - R^{۲} = k(OM^{۲} - R'^{۲}) \Rightarrow (k-۱)OM^{۲} = kR'^{۲} - R^{۲}$$

$$\Rightarrow OM^{۲} = \frac{kR'^{۲} - R^{۲}}{k-۱} \Rightarrow OM = \sqrt{\frac{kR'^{۲} - R^{۲}}{k-۱}} = \text{مقدار ثابت}$$

بنابراین مکان هندسی نقطهٔ M، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\sqrt{\frac{kR'^{۲} - R^{۲}}{k-۱}}$ است.

۶۰۰. راه اول. فرض می‌کنیم $O\hat{P}A = \theta$ ، GD قطری است که از P می‌گذرد که M وسط PA و N وسط BC می‌باشد. مجموع موردنظر را S می‌نامیم. داریم :



$$S = BC^{۲} + CA^{۲} + AB^{۲}$$
$$= (BP + PC)^{۲} + PC^{۲} + PA^{۲} + BP^{۲} + PA^{۲}$$

$$=2(PA^2+PB^2+PC^2+BP.PC) \qquad (1)$$

$PA=2r\cos\theta,$

$BP=BN-PN=\sqrt{R^2-r^2\cos\theta}-r\sin\theta,$

$PC=PN+NC=PN+BN=\sqrt{R^2-r^2\cos\theta}+r\sin\theta,$

$BP\cdot PC=GP\cdot PD=R^2-r^2$

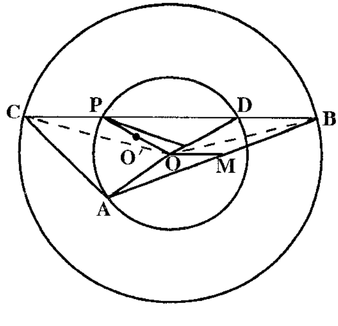
با جایگذاری این مقادیر در رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید :

$$S=r\left[4r^2\cos^2\theta+2(R^2-r^2\cos^2\theta+r^2\sin^2\theta+R^2-r^2\right]=6R^2+2r^2$$

این مجموع مقداری ثابت است و بنابراین به P بستگی ندارد. برای قسمت دوم از A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا دایرهٔ بزرگ را در نقطه‌های C' و B' قطع کند. این نقطه‌ها، رأسهایی از مستطیلهای $BPAB'$ و $CPAC'$ هستند. U وسط قطر AB ، PB' نیز می‌باشد و $\overrightarrow{PU}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PB'}$. به‌طریق مشابه $\overrightarrow{PV}=\frac{1}{2}\overrightarrow{PC'}$ (Vوسط AC است).
چون B' و C' همان دایره (O,R) را تعریف می‌کنند، پس U و V بر تصویر دایرهٔ (O,R) تحت تجانس $H(P,\frac{1}{2})$ قراردارند.

راه دوم. AD را رسم می‌کنیم باتوجه به قضیهٔ اوّل میانه‌ها در مثلثهای ABD و ADC داریم :

$$AB^2+AC^2+BC^2=AB^2+AC^2+(DC+DB)^2$$
$$=(AB^2+DB^2)+(AC^2+DC^2)+2DC.DB$$
$$=2R^2+\frac{4r^2}{2}+2R^2+\frac{4r^2}{2}+2(R^2-r^2)$$
$$=6R^2+2r^2$$

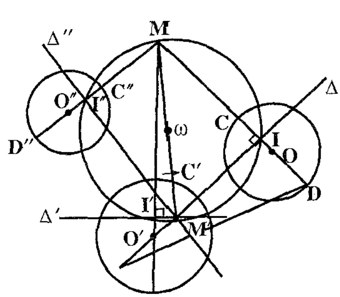


برای قسمت دوم، اگر M وسط AB باشد، $PM = \frac{AB}{2}$، و در مثلث OAB، OM میانه، و درنتیجه $OM^2 = \frac{R^2 + r^2}{2} - \frac{AB^2}{4}$، لذا $MO^2 + MP^2 = \frac{R^2 + r^2}{2}$ و مقداری ثابت است و چون O و P نیز ثابتند، پس مکان M دایره‌ای به مرکز O' وسط OP و شعاع $\frac{R}{2}$ است، زیرا $MO' = \frac{R}{2}$.

۵.۵. سه دایرهٔ ثابت و بیشتر

۵ . ۵ . ۱ . سه دایره

۶۰۱. اگر M یک نقطه از مکان باشد به نحوی که قطبی آن نسبت به دایره‌های (O)، (O') و (O'') که بترتیب Δ ، Δ' و Δ'' می‌باشند در نقطهٔ M' همرس باشند ؛ در این‌صورت اوّلاً وقتی قطبی M از M' بگذرد، قطبی M' نیز از M خواهد گذشت. ثانیاً اگر I ، I' و I'' پای قطبیهای مزبور باشند (MICD) و $(MI'C'D')$ و $(MI''C''D'')$ هر دسته تشکیل یک تقسیم توافقی می‌دهند و چون $\hat{I} = \hat{I'} = \hat{I''} = 90^\circ$ است، در نتیجه دایرهٔ به قطر MM' از نقطه‌های I، I' و I'' گذشته و بر دایره‌های مفروض (O)، (O') و (O'') عمود است ؛ یعنی مکان M و M' پیوسته دایره‌ای است عمود بر سه دایرهٔ مفروض و چون تنها یک دایره یافت می‌شود که برسه دایرهٔ مفروض عمود باشد و این دایره مرکزش مرکز اصلی سه دایره و شعاعش طول مماسی می‌باشد که از مرکز اصلی بر دایره‌های بالا رسم می‌شود، در نتیجه می‌توان گفت مکان M و M' دایرهٔ عمود بر سه دایرهٔ مفروض می‌باشد.



۵ . ۵ . ۲.n دایره

۶۰۳. این مکان هندسی یک دایره است. زیرا اگر P، P_1، P_2 و ... و P_n قوت نقطهٔ M از مکان موردنظر نسبت به دایره‌های C ، C_1 ، C_2 ، ... و C_n و α ، α_1 ، α_2 ،... و α_n عددهای جبری باشند، داریم :

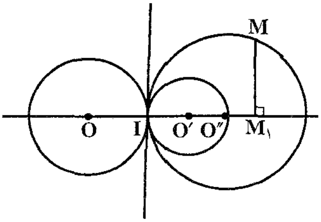
$$\alpha.P+\alpha_1.P_1+\alpha_2.P_2+\cdots+\alpha_n.P_n=0$$

۵ . ۵ . ۳. دسته دایره

۶۰۴. فرض کنیم (O)، (O') و (O'') سه دایرهٔ متعلق به یک دستگاه باشند، اگر M نقطهٔ متغیری از (O'') ، P و P'' قوتهای آن نسبت به (O)و (O') و I پای محور اصلی و M_1 تصویر M روی خط‌المرکزین باشند، داریم :

$$P=2\overline{OO''}\times\overline{IM_1}\ ;$$

$$P'=2\overline{O'O''}\times\overline{IM_1}\ ;$$



پس : $\dfrac{P}{P'}=\dfrac{\overline{OO''}}{\overline{O'O''}}$ ، بنابراین $\dfrac{P}{P'}$ مستقل از وضع M در روی دایرهٔ (O'') است.

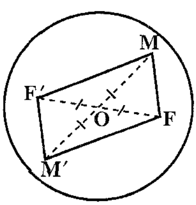
راهنمایی و حل مسأله‌های بخش ۶. مقطعهای مخروطی

۶.۱. بیضی

۶.۱.۱. نقطه‌های ثابت

۶۰۵. فرض کنیم F و F′ کانونهای یک بیضی گذرنده بر نقطهٔ M، به دایرهٔ اصلی مفروض، به مرکز Oو به شعاع aباشد. این بیضی از M′ قرینهٔ Mنسبت به O می‌گذرد و در متوازی‌الاضلاع MFM′F′ داریم :

$$FM + FM' = F'M + F'M' = MF + MF' = 2a \ ;$$



در نتیجه کانونهای F و F′ متعلق به بیضی (E) به کانونهای M و M′ و به دایرهٔ اصلی مفروض می‌باشند.

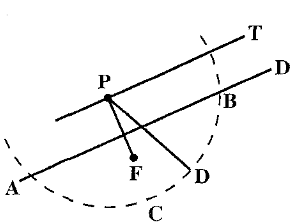
بعکس، اگر Fیک نقطه از بیضی (E) و F′ قرینه آن نسبت به O باشد، داریم :

$$MF + MF' = FM + FM' = 2a \ ;$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که بیضی به کانونهای F و F′ که شامل Mمی‌باشد دایرهٔ اصلی‌اش همان دایرهٔ مفروض می‌باشد، بنابراین مکان F و F′ بیضی (E) است.

۶.۱.۲. خطهای ثابت، نقطه‌های ثابت

۶.۱.۲.۱. یک خط مماس، یک کانون

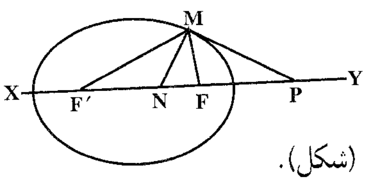


۶۰۶. فرض می‌کنیم O مرکز بیضی باشد، که طول محور بزرگ آن ۲a و F یکی از کانونهایش بوده و بر خط مفروض T مماس باشد. FP را بر T عمود می‌کنیم و OP را وصل می‌کنیم، P متعلق به دایرهٔ اصلی است و داریم $OP = a$ و از طرف دیگر F داخل این دایره می‌باشد. $OF < OP$ ، بنابراین O یک نقطه از دایرهٔ (P) به مرکز P و به شعاع a بوده و نسبت به D عمودمنصف خط FP در طرفی است که F قرار دارد. و یا به طریق دیگر می‌توان گفت که O متعلق به قوس $\widehat{ACB}$ دایرهٔ (P) می‌باشد.

بعکس. اگر O یک نقطهٔ غیرمشخص از این قوس باشد، یک بیضی می‌توان چنان یافت که دایرهٔ اصلی‌اش (O,a)، یکی از کانونهایش F، و مماس بر خط T باشد. پس مکان هندسی نقطهٔ O، قوس $\widehat{ACB}$ می‌باشد.

اگر $a \leq \frac{PF}{۲}$ باشد، بیضی که در شرایط قبل صدق کند، وجود ندارد.

۶.۱.۲.۲. محور کانونی، سه نقطه



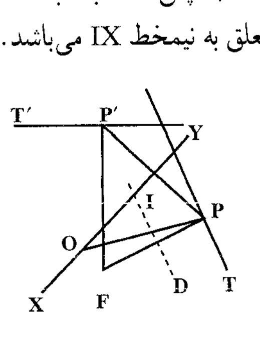
۶۰۷. فرض می‌کنیم M نقطهٔ تماس خط مماس PM با یکی از این بیضیها باشد. خط قائم MN را رسم می‌کنیم، در مثلث MFF′ ؛ MN و MP نیمسازهای داخلی و خارجی زاویهٔ M می‌باشند (شکل).

بنابراین N مزدوج توافقی P نسبت به F′ و F است و نقطه‌ای ثابت است، از طرفی چون $N\hat{M}P$ قائمه است، بنابراین M متعلق به دایرهٔ به قطر NP می‌باشد.

بعکس. اگر M یک نقطه از این دایره باشد، در دستگاه توافقی M - PNFF′ شعاعهای مزدوج MP و MN بر هم عمودند و نیمسازهای زاویهٔ دو شعاع دیگر می‌باشند ؛ و در نتیجه MP بر بیضی به کانونهای F و F′ ، و گذرنده بر M، مماس است. بنابراین مکان مطلوب دایره‌ای به قطر PN است.

۶.۱.۲.۳. دو خط مماس، یک کانون

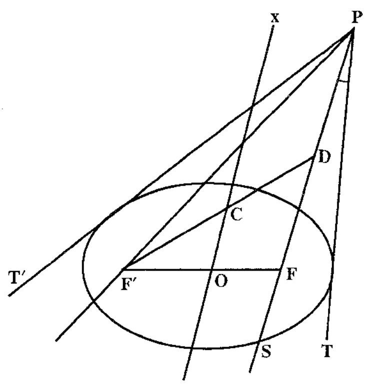
۶۰۸. فرض می‌کنیم O مرکز یکی از این بیضیهایی باشد که در شرایط داده شده صادق باشد. FP و FP′ را بر T و T′ عمود می‌کنیم (شکل) ؛ P، P′ دو نقطه از دایره اصلی‌اند ؛ پس O متعلق به YX عمودمنصف PP′ می‌باشد ؛ از طرف دیگر داریم $OF < OP$ (چون در بیضی $c < a$ است). پس O نسبت به D عمودمنصف FP در طرفی است که F قرار دارد ؛ یعنی O متعلق به نیمخط IX می‌باشد.

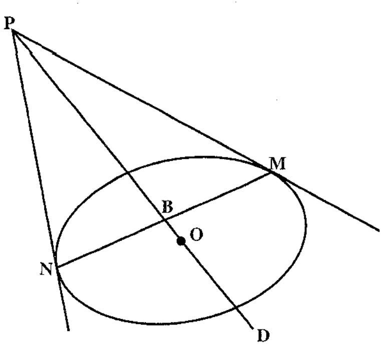


بعکس. اگر O یک نقطه غیرمشخص از این نیمخط باشد ؛ یک بیضی با دایرهٔ اصلی به مرکز O و به شعاع OP و به کانون F (زیرا F داخل این دایره قرار دارد) و مماس بر T و T' وجود دارد.
بنابراین مکان مرکز O، نیمخط IX است.

۴.۲.۱.۶. دو خط مماس، دو نقطه

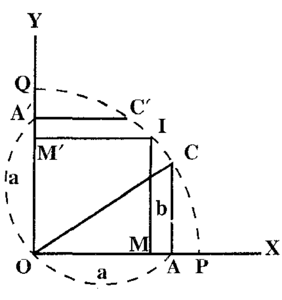
۶۰۹. ۱. مکان هندسی نقطهٔ O مرکز بیضی روی خطی است که نقطهٔ B وسط پاره‌خط MN را به نقطهٔ P محل برخورد دو خط مماس وصل می‌کند.
۲. مکان هندسی کانون F خطی مانند SFP است که با PT زاویه‌ای برابر زاویهٔ $F'PT'$ می‌سازد، یعنی $F\hat{P}T = F'\hat{P}T'$ است. (بنا به قضیهٔ پونسله)، و مکان هندسی نقطهٔ O مرکز بیضی، خطی است که از وسط پاره‌خط FF' موازی خط SP رسم می‌شود زیرا به طور ثابت $OC = CD$ است.





۳.۱.۶. یک زاویهٔ ثابت، ۲a و ۲b

۶۱۰. می‌دانیم مکان هندسی رأسهای زاویه‌های قائمه محیط بر یک بیضی به محورهای ۲a و ۲b محیط دایره‌ای است که مرکزش مرکز بیضی و شعاعش $\sqrt{a^2+b^2}$ می‌باشد. در نتیجه مرکز I یک بیضی به محورهای ۲a، ۲b و مماس بر OX و OY متعلق به ربع دایرهٔ PQ (شکل) به مرکز O و به شعاع $\sqrt{a^2+b^2}$ می‌باشد. ولی



حد فاصلهٔ مرکز بیضی تا یک مماس a، b است. بنابراین I نمی‌تواند همه نقطه‌های روی ربع دایره را اختیار کند و باید روی کمان CC' محدود به دو خط AC و $A'C'$ موازی با محورهای OX و OY به فاصلهٔ a از O قرار گیرد: زیرا اگر فاصلهٔ I از یکی، کوچکتر از a باشد، فاصله‌اش از دیگری بزرگتر از b می‌باشد. و بعکس چون:

$$\overline{IM}^2 + \overline{IM'}^2 = a^2 + b^2 \ ,$$

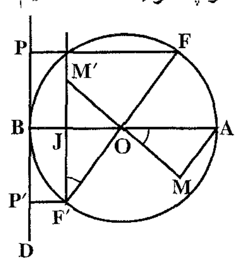
بعکس. فرض می‌کنیم I یک نقطه غیرمشخص از کمان $\overset{\frown}{CC'}$ باشد؛ یک بیضی به مرکز I و به محورهای ۲a، ۲b مماس بر OX وجود دارد چون $b \le IM \le a$ می‌باشد، این بیضی بر OY مماس است. (زیرا $OI = \sqrt{a^2 + b^2}$). مماس دومی که از O بر بیضی رسم می‌شود بر OX عمود است یعنی بر OY منطبق است.

۴.۱.۶. خطهای ثابت، دایره‌های ثابت

۱.۴.۱.۶. یک خط مماس، یک دایره

۶۱۱. اگر M یک رأس از محور کوچکتر باشد. داشتیم (شکل)

$$PF \times P'F' = \overline{OM}^2 \ ;$$



ولی:

$$4PF \times P'F' = (PF + P'F')^2 - (PF - P'F')^2 \ ;$$

یا با فرض این که r شعاع دایره باشد:

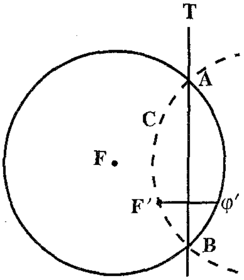
$$4PF \times P'F' = 4r^2 - \overline{IF}^2 = \overline{F'I}^2 = 4\overline{F'J}^2 \ ;$$

$$PF \times P'F' = \overline{F'J}^2 \ ,$$

در نتیجه: $OM = F'J$ و مثلثهای AOM و $OF'J$ با هم مساوی‌اند (چرا) پس:

$\widehat{OMA} = \widehat{OJF'} = \frac{\pi}{2}$ و مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای به قطر OA است. زیرا وقتی که F دایرهٔ (O) را طی می‌کند، M تمام دایرهٔ به قطر OA را خواهد پیمود. و به همین ترتیب، رأس M' دایرهٔ به قطر OB را می‌پیماید.

۶.۱.۴.۲. یک خط مماس، یک دایرهٔ هادی



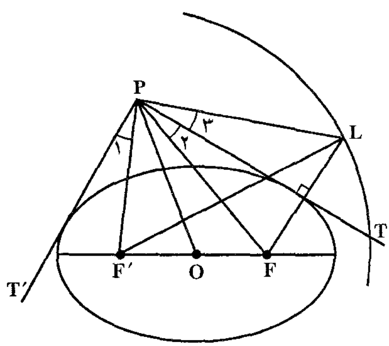
۶۱۲. بیضی به دایرهٔ هادی به مرکز F و به شعاع ۲a و خط مماس T را در نظر می‌گیریم، F' کانون دوم داخل دایره (F) قرار دارد و φ' قرینهٔ این نقطه نسبت به T روی محیط دایره (F) است. بنابراین F' متعلق به قوس $\overset{\frown}{ABC}$ (شکل) داخل دایرهٔ (F) قرینهٔ (F) نسبت به T می‌باشد و بعکس اگر F' یک نقطهٔ انتخاب شده باشد، بیضی به دایرهٔ هادی (F) و کانون دوم F' بر T مماس است.

بنابراین مکان F' قوس $\overset{\frown}{ABC}$ می‌باشد.

برای این که این مکان وجود داشته باشد باید دایرهٔ (E) و قرینه‌اش نسبت به T متقاطع باشند. یعنی T دایرهٔ (F) را قطع کند. شرطی که با برهان بررسی شد کافی است.

۶.۱.۵. بیضی ثابت، ...

۶.۱.۵.۱. تنها یک بیضی ثابت



۶۱۳. P را نقطه‌ای فرض می‌کنیم که از آن نقطه دو مماس عمود بر هم PT و PT' بر بیضی به کانونهای F و F' رسم شده است. می‌دانیم که قرینهٔ کانون F نسبت به مماس PT یعنی نقطهٔ L روی دایرهٔ هادی کانون F' قرار دارد بنابراین $F'L = ۲a$ و $PL = PF$. از طرفی بنا به قضیهٔ پونسله $\hat{P}_۱ = \hat{P}_۲$ است. امّا چون $\hat{P}_۲ = \hat{P}_۳$ است. پس $\hat{P}_۱ = \hat{P}_۳$ است. در نتیجه $F'\hat{P}L = T'\hat{P}T = ۹۰^\circ$ است. بنابراین مثلث $PF'L$ در رأس P قائم‌الزاویه است و داریم:

$$PF'^{۲} + PL^{۲} = F'L^{۲} \Rightarrow PF'^{۲} + PF^{۲} = (۲a)^{۲} = ۴a^{۲} \qquad (۳)$$

امّا

$$PF^{۲} + PF'^{۲} = ۲PO^{۲} + \frac{FF'^{۲}}{۲} = ۲PO^{۲} + ۲c^{۲} \qquad (۴)$$

$$(۳) \text{ و } (۴) \Rightarrow ۲PO^{۲} + ۲c^{۲} = ۴a^{۲} \Rightarrow PO^{۲} = ۲a^{۲} - c^{۲} = a^{۲} + b^{۲}$$

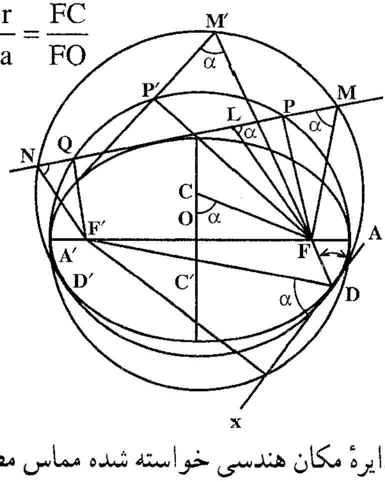
$$\Rightarrow PO = \sqrt{a^{۲} + b^{۲}}$$

بنابراین مکان هندسی نقطهٔ P دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\sqrt{a^2+b^2}$ است. این دایره را دایرهٔ مونژ می‌نامند.

۱.۱.۵.۱.۶. یک بیضی ثابت، اندازهٔ یک زاویه

۶۱۴. فرض می‌کنیم M و M′ دو وضع از رأس زاویهٔ ثابت α باشند. نقطهٔ P تصویر کانون F روی یک خط مماس دلخواه بر بیضی، روی دایرهٔ اصلی بیضی یعنی دایرهٔ به قطر AA′ است. از طرفی دیگر مثلثهای قائم‌الزاویهٔ FPM و F′P′M′ متشابه‌اند. پس مکان هندسی نقطهٔ M یک دایره است که شعاعش برابر حاصلضرب OA در نسبت FM به FP است. برای مشخص کردن این مکان از نقطهٔ F خطی چنان رسم می‌کنیم که $O\hat{F}C = P\hat{F}M$ باشد. مثلثهای OFC و PFM متشابه‌اند و فاصله‌های FO، FC به نسبت FP به FM می‌باشند. پس C، مرکز دایرهٔ مکان M است. اگر r شعاع CM باشد، خواهیم داشت:

$$\frac{r}{OA} = \frac{FM}{FP} \quad \text{یا} \quad \frac{r}{a} = \frac{FC}{FO}$$



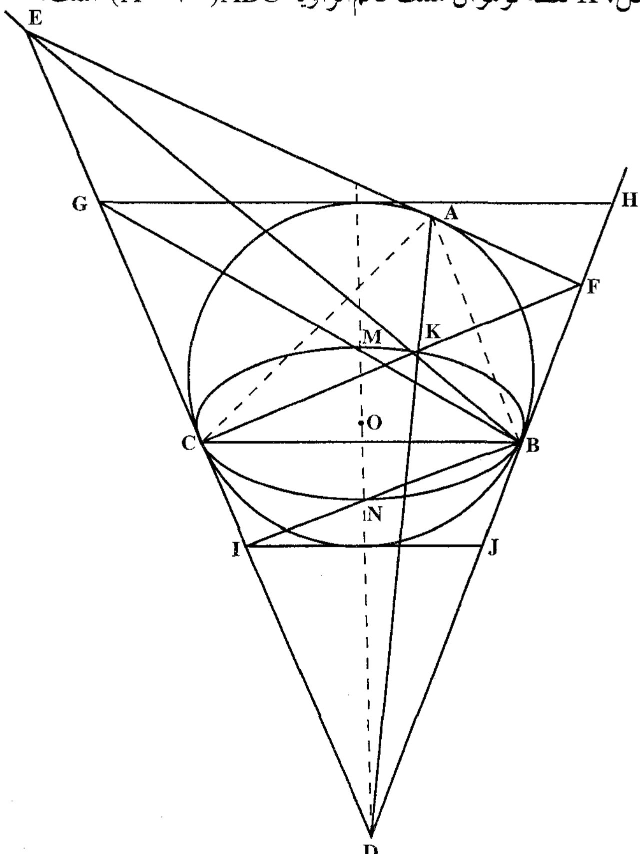
تبصره. ۱. بیضی بر دایرهٔ مکان هندسی خواسته شده مماس مضاعف است. نقطه‌های تماس D و D′ به موقعیتی تعلق دارند که خط مماس با شعاع حامل واصل به نقطه‌های تماس، زاویهٔ α می‌سازند یعنی، $F'\hat{D}x = \alpha$ است.

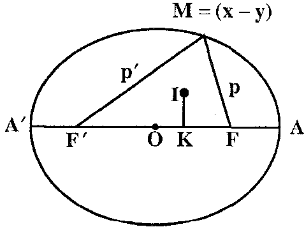
۲. نقطهٔ N از کانون F′ که برای آن $F'\hat{N}M = \alpha$ است، نیز همین مکان هندسی را می‌دهد. FL دایره‌ای را مشخص می‌کند که با دایرهٔ مکان هندسی M برابر است؛ امّا مرکز آن نقطهٔ C′ است.

۳. دایرهٔ MM′N را دایرهٔ پونسله Poncelet می‌نامند.

۶۱۵. این مکان هندسی یک بیضی است که قطر بزرگش برابر وتر مثلث قائم‌الزاویه و قطر کوچکش نصف این وتر است.

در شکل، K نقطهٔ لوموان مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC($\hat{A} = 90°$) است.





۶.۱.۵.۱.۲. یک بیضی ثابت، نقطه‌های ثابت

۶.۱.۵.۱.۲.۱. یک بیضی، کانونها

۶۱۶. در مثلث ABC اگر ′A، ′B، ′C نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی داخلی با ضلعها و r شعاع این دایره و S مساحت مثلث باشد. داریم:

$$AB' = AC' = p - a \ , \ BC' = BA' = p - b \ ,$$

$$CA' = CB' = p - c \ , \ S = pr \ ;$$

فرض می‌کنیم x، y مختصات نقطهٔ M و X، Y مختصات مرکز I دایرهٔ محاطی داخل

مثلث $MF'F$ (شکل) نسبت به محورهای بیضی باشد می‌توان نوشت :

$$X = OK = F'K - c = a + c - p - c = a - (a - \frac{cx}{a}) = \frac{cx}{a} \;,$$

و یا

$$x = \frac{aX}{c} \;;$$

و :

$$Y = KI = r = \frac{S}{P} = \frac{cy}{a+c} \;;$$

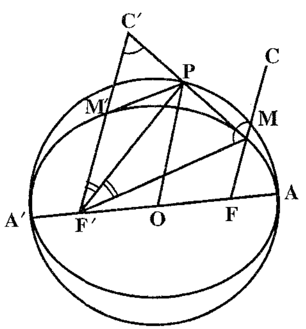
و یا $y = \frac{(a+c)Y}{c}$ و با قرار دادن این مقادیر x و y در معادلهٔ $\frac{x^{۲}}{a^{۲}} + \frac{y^{۲}}{b^{۲}} = ۱$ خواهیم داشت :

$$\frac{X^{۲}}{c^{۲}} + \frac{(a+c)^{۲}Y^{۲}}{b^{۲}c^{۲}} = ۱ \;;$$

و یا :

$$\frac{X^{۲}}{c^{۲}} + \frac{(a+c)Y^{۲}}{(a-c)c^{۲}} = ۱ \;,$$

این معادله نمایش یک بیضی به همان محورهای تقارن بیضی مفروض می‌باشد. یکی از این محورها FF' دیگر به طول $\frac{۲bc}{a+c}$ است.



۶۱۷. فرض می‌کنیم C' فصل مشترک مماس در M و $F'M'$ باشد. با توجه به خاصیت مماس بر بیضی داریم (شکل).

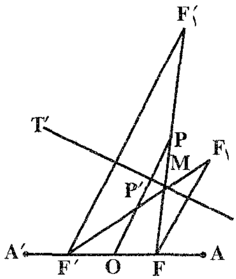
$$F'\hat{C}'M = C\hat{M}C' \quad \text{ولی} \quad F'\hat{M}C' = C\hat{M}C'$$

و از آن‌جا

$$F'\hat{M}C' = F'\hat{C}'M$$

بنابراین مثلث $F'MC'$ متساوی‌الساقین است و نیمساز زاویه $M\hat{F'}C'$ ارتفاع و میانه می‌باشد.

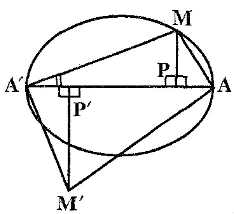
و می‌دانیم P تصویر F' روی مماس MC' متعلق به دایرهٔ اصلی می‌باشد، از طرف دیگر چون P وسط MC' است، OP موازی FM و $F'M'$ می‌باشد. با استدلال مشابه ثابت می‌شود که مماس در M' از انتهای P قطعه خط $OP = a$ می‌گذرد ؛ بنابراین مکان هندسی فصل مشترک P مماسها، دایرهٔ اصلی است، زیرا وقتی که نقطهٔ M بیضی را طی کند، P این دایره را خواهد پیمود.



۶۱۸. F_1 و F'_1 قرینه‌های دو کانون F و F′ را نسبت به خط T، مماس در نقطهٔ M معین می‌کنیم F_1 و F'_1 دایره‌های هادی بیضی را می‌پیمایند. پس مکان هندسی نقطهٔ P که وسط FF'_1 است دایره‌ای به مرکز P و به شعاع a است و همچنین مکان هندسی نقطهٔ P′ دایره‌ای به مرکز F′ و به شعاع a است.

۶.۱.۵.۱.۲.۲. یک بیضی، رأسها

۶۱۹. اگر وترهایی از بیضی را در نظر بگیریم که در رأس A همرس می‌باشند، مکان هندسی وسط این وترها یک بیضی است که مجانس بیضی داده شده نسبت به مرکز تجانس A و نسبت تجانس $\frac{1}{2}$ است زیرا اگر AM یکی از این وترها و M′ وسط آن باشد $\frac{AM'}{AM}=\frac{1}{2}$ است.



۶۲۰. با توجه به شکل دو مثلث MPA و AP′M′ متشابه‌اند. داریم:

$$\frac{M'P'}{P'A}=\frac{AP}{PM}$$

و از تشابه دو مثلث A′P′M′ و M′PA′ نیز می‌توان نوشت:

$$\frac{M'P'}{P'A'}=\frac{A'P}{PM}\ ,$$

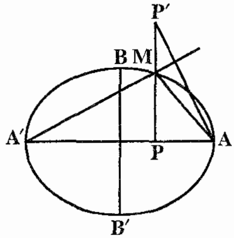
و از آن‌جا:

$$\frac{\overline{M'P'}^2}{P'A\times P'A'}=\frac{PA\times PA'}{\overline{PM}^2}\ ;$$

و چون M واقع بر بیضی است. داریم:

$$\frac{PM^2}{PA.PA'}=-\frac{b^2}{a^2}\Rightarrow\frac{\overline{M'P'}^2}{\overline{P'A}\times\overline{P'A'}}=-\frac{a^2}{b^2}$$

و مکان هندسی نقطهٔ M′ یک بیضی است که یک محور آن AA′، و طول محور دیگر آن $\frac{2a^2}{b}$ می‌باشد.



۶۲۱. فرض می کنیم H محل برخورد ارتفاعهای رسم شده از M و A باشد. مثلثهای APH و MPA′ متشابه‌اند (چرا) و می‌توان نوشت :

$$\frac{PH}{PA'}=\frac{PA}{PM}\ ;$$

یا :

$$\overline{PH}\times\overline{PM}=-\overline{PA}\times\overline{PA'}\ ,$$

(با توجه به این که چهار قطعه دارای جهتند) ولی در بیضی داریم :

$$\overline{PM}^{2}=-\frac{b^{2}}{a^{2}}\times\overline{PA}\times\overline{PA'}$$

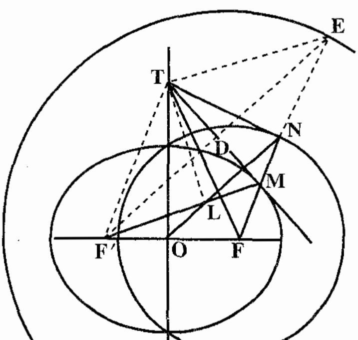
در نتیجه :

$$PH\times PM=\frac{a^{2}}{b^{2}}\times\overline{PM}^{2}\Rightarrow\frac{PH}{PM}=\frac{a^{2}}{b^{2}}\ ,$$

نقطهٔ H از نقطهٔ M با ضرب عرض این نقطه در $\frac{a^2}{b^2}$ نتیجه می‌شود ؛ بنابراین مکان H یک بیضی است که یکی از محورهایش AA′ و طول محور دیگرش $\frac{a^2}{b^2}$ می‌باشد. اگر رأسهای A، A′ محور بزرگ را به B، B′ رأسهای محور کوچک بدل کنیم، نتیجهٔ مشابهی را به‌دست خواهیم آورد.

۶.۱.۵.۱.۳. یک بیضی ثابت، خطهای ثابت

۶.۱.۵.۱.۳.۱. یک بیضی، محورهای بیضی

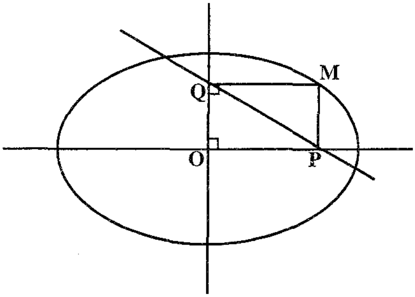


۶۲۲. از کانون F′ عمود F′D را بر خط مماس فرود می‌آوریم و امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ هادی کانون F را در نقطهٔ E قطع کند. می‌دانیم که DE = F′D و FE = ۲a از نقطهٔ تماس M می‌گذرد. امّا FT = TF′ = TE . در نتیجه مثلث FTE متساوی‌الساقین است و عمود TN از وسط قاعدهٔ FE می‌گذرد. پس $FN=\frac{1}{2}FE=a$ است.

بنابراین مکان هندسی نقطهٔ N دایره‌ای به مرکز F و به شعاع a است.

تبصره. اگر نقطهٔ T را روی F′M تصویر کنیم، خط NL از مرکز بیضی می‌گذرد.

۶۲۳. این قضیه برای حالتی که عمودهای MP و MQ بر دو قطر مزدوج دلخواه بیضی نیز رسم می‌شوند، درست است.



۶.۱.۵.۱.۳.۲. یک بیضی، خطهای هادی

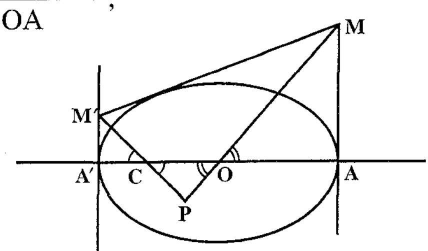
۶۲۴. زیرا دو مماس رسم شده بر بیضی از یک نقطه واقع بر یک خط هادی، دایرهٔ اصلی بیضی را در دو انتهای یک قطر از آن قطع می‌کنند.

۶.۱.۵.۱.۳.۳. یک بیضی، خطهای مماس

۶۲۵. باید ثابت کنیم که، C، فصل مشترک M′P و AA′ نقطه‌ای ثابت است (شکل). برای این منظور دو مثلث متشابه CA′M′ و MAO را در نظر می‌گیریم ؛ داریم :

$$\frac{A'C}{AM}=\frac{A'M'}{OA}$$

$$\Rightarrow A'C=\frac{AM\times A'M'}{OA}\ ;$$

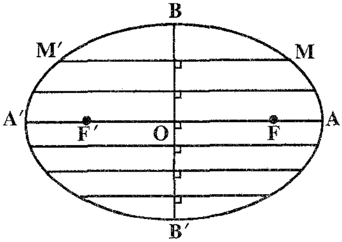


ولی OA = a و ما می‌دانیم که

$$AM\times A'M'=b^2\ ;\ \Rightarrow A'C=\frac{b^2}{a}\ ,$$

بنابراین C نقطه‌ای ثابت است و مکان هندسی نقطهٔ P دایره‌ای به قطر OC است، زیرا اگر M تمام مماس در A را طی کند، نقطهٔ P تمام این دایره را می‌پیماید.

۶.۱.۵.۱.۳.۴. یک بیضی، راستای ثابت



۶۲۶. محورهای کانونی و ناکانونی بیضی، محورهای تقارن بیضی می‌باشند. بنابراین اگر وتر دلخواه MM' موازی محور کانونی بیضی باشد وسط آن روی محور ناکانونی بیضی است و به همین ترتیب، مطلب برای وترهای موازی محور ناکانونی بیضی نیز درست است.

۶.۱.۵.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶۲۷. بیضی به محور کانونی AA' و کانونهای F و F' را در نظر گرفته و دایرهٔ اصلی آن را رسم می‌کنیم ؛ اگر M یک نقطهٔ غیرمشخص از این دایره باشد، عمود MT بر FM یک مماس بر بیضی است. FM' را در صفحه جهتدار طوری رسم می‌کنیم که :

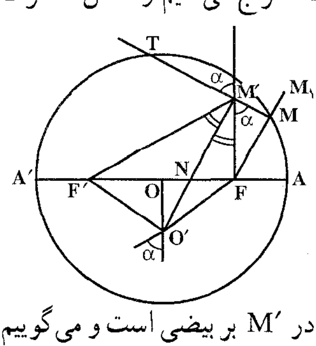
$$(F\hat{M'},MT)=\alpha \;;$$

مقصود ما تعیین مکان M' است وقتی که M دایرهٔ اصلی را طی کند، روی FM قطعه خط $FM_1=FM'$ را جدا می‌کنیم داریم :

$$\frac{FM_1}{FM}=\frac{FM'}{FM}=\frac{1}{\sin\alpha}\;;$$

بنابراین مکان M_1 دایرهٔ (O_1) متجانس دایرهٔ (O) نسبت به F با نسبت تجانس $\dfrac{1}{\sin\alpha}$ می‌باشد. و چون $FM'=FM_1$ و $(FM_1\hat{,}FM')=90^\circ-\alpha$ می‌باشد. بنابراین مکان M' دایره (O') می‌باشد که از دوران (O_1) حول F به اندازهٔ $\dfrac{\pi}{2}-\alpha$ به‌دست می‌آید.

مرکز O' از O نتیجه می‌شود (همان‌طوری که M' از M به‌دست می‌آید) بنابراین O' را به طریق زیر به‌دست می‌آوریم. از O عمودی بر AA' اخراج می‌کنیم و فصل مشترک این خط را با خط FO' رسم شده از F به طوری که $(FO'\hat{,}OO')=\alpha$ می‌باشد، به‌دست می‌آوریم (شکل). شعاع دایرهٔ (O') مساوی با $\dfrac{a}{\sin\alpha}$ است ($2a$ طول محور بزرگ است).



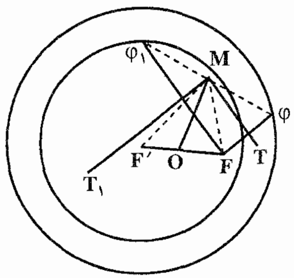
فرض می‌کنیم (O') با بیضی دارای یک نقطهٔ مشترک باشد. اگر M' این نقطه باشد ؛ $M'T$ مماس در M' بر بیضی است و می گوییم

که این خط همچنین در M' بر دایره (O') مماس است یعنی $O'M'$ نرمال بر بیضی یا نیمساز زاویهٔ $F\hat{M'}F'$ و یا چهارضلعی $O'FM'F'$ محاطی می‌باشد. زیرا :

$$F\hat{O'}F' = 2\alpha \text{ و } F\hat{M'}F' = \pi - 2\alpha ,$$

و دایره‌ای که از O' می‌گذرد از وسط قوس FF' خواهد گذشت ؛ پس $M'O'$ نیمساز زاویهٔ $F\hat{M'}F'$ می‌باشد.

۶.۱.۵.۲. دو بیضی ثابت



۶۲۸. اگر F و F' کانونهای دو بیضی (E) و (E_1)، و $2a$ و $2a_1$ طول محورهای بزرگ آنها و $FF' = 2c$ باشد. دایره‌های هادی به مرکز F' را رسم کرده. فرض می‌کنیم T یک مماس بر (E)، T_1 یک مماس بر (E_1) باشد ؛ قرینه‌های φ و φ_1 نقطهٔ F نسبت به این مماسها بترتیب روی دایره‌های هادی به مرکز F' قرار دارند. و برای این که مماسها بر هم عمود باشند لازم و کافی است که : $\varphi\hat{F}\varphi_1 = \frac{\pi}{2}$ و یا این که T، T_1 در M وسط $\varphi\varphi_1$ متقاطع باشند. MO، MF، MF' را رسم می‌کنیم ؛ با استفاده از قضیه میانه‌ها در مثلث MFF' (شکل) می‌توان نوشت :

$$\overline{MF}^2 + \overline{MF'}^2 = 2\overline{MO}^2 + 2c^2 \ ;$$

یا چون $MF = M\varphi$ است :

$$\overline{M\varphi}^2 + \overline{MF'}^2 = 2\overline{MO}^2 + 2c^2 \ ; \qquad (1)$$

ولی به فرض این که $F'\varphi$ ، $F'\varphi_1$ رسم شده باشند، در مثلث $F'\varphi\varphi_1$ داریم :

$$\overline{F'\varphi}^2 + \overline{F'\varphi_1}^2 = 2\overline{MF'}^2 + 2\overline{M\varphi}^2 \ ;$$

یا

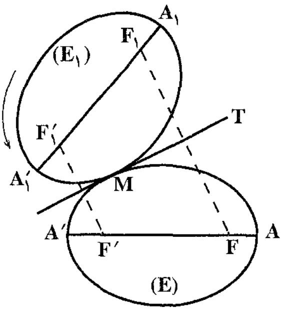
$$\overline{MF'}^2 + \overline{M\varphi}^2 = 2a^2 + 2a_1^2 \ ;$$

و با استفاده از تساوی (۱) می‌توان نوشت :

$$2a^2 + 2a_1^2 = 2\overline{MO}^2 + 2c^2 \Rightarrow \overline{MO}^2 = a^2 + a_1^2 - c^2 \ ;$$

این تساوی ثابت می‌کند که M متعلق به دایرهٔ به مرکز O و به شعاع $\sqrt{a^2 + a_1^2 - c^2}$ می‌باشد. (با توجه به این که $a_1^2 + a^2 - c^2 > 0$ است زیرا c از a و a_1 کوچکتر می‌باشد).

از طرف دیگر، وقتی که زاویهٔ قائمه $\varphi F \varphi_1$ حول نقطهٔ F دوران می‌کند، M تمام این دایره را که مکان مطلوب می‌باشد طی می‌کند. وقتی که $a = a_1$ باشد، $OM = \sqrt{a^2 + b^2}$ و مکان، دایره مونژ است.



۶۲۹. فرض می‌کنیم بیضی (E_1) روی بیضی مساوی خودش (E) بغلتد، رأسهای A_1 و A در مبدأ حرکت بر هم منطبقند. اگر بعد از t لحظه، بیضی (E_1) بیضی (E) را تا نقطهٔ M طی کرده باشد و MT مماس مشترک در این نقطه باشد (شکل). قوسهای MA_1 و MA بر هم قابل انطباقند، پس وترهای MA_1 ، MA مساوی و دارای شیبهای برابر روی MT می‌باشند، در نتیجه (E_1) و (E) نسبت به MT قرینه یکدیگرند، بنابراین کانونهای F_1 و F'_1 بیضی غلتان، قرینه‌های کانونهای F و F' نسبت به مماس MT می‌باشند و مکان این نقطه‌ها دایره‌های هادی بیضی (E) می‌باشد.

۲.۶. هذلولی

۱.۲.۶. نقطه‌های ثابت

۱.۱.۲.۶. یک کانون، دو نقطه

۶۳۰. F، M و M' مفروضند، داریم:

$$|MF - MF'| = 2a$$

$$|M'F - M'F'| = 2a$$

پس

$$MF - MF' = M'F - M'F'$$

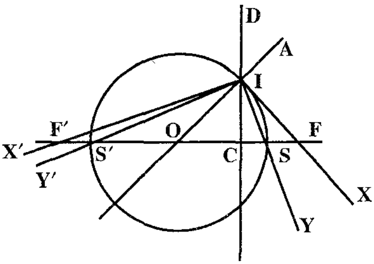
یا

$$F'M' - F'M = M'F - MF$$

بنابراین: مقدار ثابت $= F'M' - F'M$. یعنی مکان کانون F' یک هذلولی است که M و M' دو کانون و $M'F - MF$ مقدار $2a$ می‌باشد و چون $\frac{FO}{FF'} = \frac{1}{2}$. پس مکان هندسی نقطهٔ O، هذلولی مجانس مکان هندسی نقطهٔ F' در تجانس $(F, \frac{1}{2})$ است.

۶.۲.۲. خطهای ثابت

۶.۲.۲.۱. یک مجانب، یک خط هادی

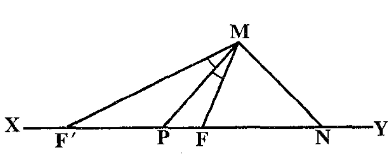


۶۳۱. یک هذلولی رسم می‌کنیم که مجانب و خط هادیش خطهای داده شده A و D باشند. دایرۀ اصلی این هذلولی را نیز رسم می‌کنیم؛ می‌دانیم که خط D وتر تماس مماسهای بر دایرۀ اصلی از کانون نظیر F بوده و نقطۀ I محل برخورد A و D تصویر F روی خط A می‌باشد بنابراین کانون F روی خط X واقع است که از نقطۀ I بر A عمود فرود آید.

بعکس. فرض کنیم F نقطۀ غیرمشخصی از X بوده و O فصل مشترک خط A با عمود FC که بر خط D رسم شده است باشد؛ F کانون نظیر خط D از هذلولی است که مرکزش نقطۀ O است و خط هادیش D و یکی از مجانبهایش A می‌باشد. پس مکان F همین خط X خواهد بود. اگر F′ کانون دوم باشد: OF′ = OF و وقتی که F خط X را طی می‌کند F′ نیز خطی مانند X′ را طی خواهد کرد که از نقطۀ I می‌گذرد. فرض کنیم S و S′ رأسهای هذلولی باشند دستگاه I.S′SCF توافقی بوده و شعاعهای مزدوج IS و IS′ متعامدند. این شعاعها نیمسازهای زاویۀ تشکیل شده به وسیلۀ دو شعاع دیگر می‌باشند و مکان هندسی رأسهای هذلولی، نیمسازهای Y و Y′ زاویه‌های تشکیل شده از خطهای D و X می‌باشند.

۶.۲.۳. خطهای ثابت، نقطه‌های ثابت

۶.۲.۳.۱. محور کانونی، سه نقطه



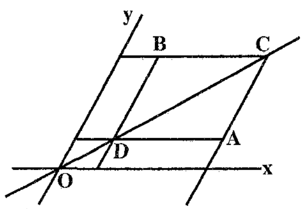
۶۳۲. فرض می‌کنیم M یک نقطه تماس مماس PM با یکی از این هذلولیها باشد. قائم MN را رسم می‌کنیم MP و MN نیمسازهای داخلی و خارجی زاویۀ M از مثلث F′MF (شکل) می‌باشند، بنابراین N مزدوج توافقی P نسبت به FF′ است و M متعلق به دایرۀ به قطر PN می‌باشد.

بعکس. اگر M یک نقطه از این دایره باشد. یک هذلولی به کانونهای F و 'F و گذرنده بر M وجود دارد، زیرا در دستگاه توافقی 'M.PNFF شعاعهای مزودج MP و MN بر هم عمودند، پس نیمسازهای زاویهٔ دو شعاع دیگر می‌باشد. در نتیجه، P داخل 'FF می‌باشد و PM نیمساز داخلی 'FMF و بنابراین مماس در M بر هذلولی است و هذلولی از این نقطه می‌گذرد. بنابراین مکان مطلوب دایرهٔ به قطر PN است.

۲.۳.۲.۶. دو خط مماس، یک کانون

۶۳۳. اگر دو خط ثابت مماس، T و 'T، و F کانون معلوم هذلولی باشد، φ و φ' قرینه‌های F نسبت به T، 'T روی دایرهٔ هادی نظیر کانون دیگر واقعند. بنابراین 'F روی خط عمودمنصف $\varphi\varphi'$ قرار دارد.

۳.۳.۲.۶. دو مجانب، دو نقطه

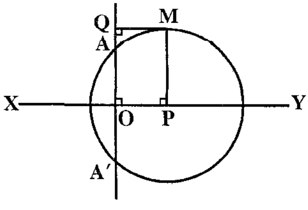


۶۳۴. باید مکان هندسی مرکزهای هذلولیهای گذرنده بر نقطه‌های A و B که مجانبهایشان موازی AC و BC می‌باشند، به‌دست آوریم. فرض می‌کنیم O مرکز یکی از این هذلولیها باشد. مجانبهایش Ox و Oy موازی BC و AC می‌باشند. مختصات نقطه‌های A و B را بترتیب به (x,y) و (x',y') نمایش می‌دهیم. مختصات نقطه‌های C و D بترتیب می‌شوند (x,y') و (x',y) برای این که Ox و Oy مجانبهای یک هذلولی گذرنده بر A و B فرض شوند، لازم و کافی است که $xy = x'y'$ یا $\frac{x}{x'} = \frac{y'}{y}$ باشد.

برای این که این تناسب برقرار باشد. لازم و کافی است که سه نقطهٔ O، C و D واقع بر یک استقامت باشند (شکل). بنابراین مکان O خط CD است.

۴.۳.۲.۶. محور تقارن، یک نقطه

۶۳۵. فرض می‌کنیم A و 'A دو رأس یک هذلولی باشند.



MP و MQ را بر XY و 'AA عمود می‌کنیم (شکل). داریم:

$$\overline{OQ}^2 - \overline{QM}^2 = \overline{OA}^2 \;;\; \ldots \qquad (1)$$

$$\overline{PM}^2 - \overline{OP}^2 = \overline{OA}^2$$

$$\overline{PM}^2 = \overline{OP}^2 + \overline{OA}^2 = \overline{PA}^2 \Rightarrow PM = PA$$

پس نقطه‌های A و ′A متعلق به دایرهٔ به مرکز P و به شعاع PM می‌باشند.

$$\frac{1}{b^2}+\frac{1}{\overline{AB_1}^2}=\frac{1}{h^2}\ ,\ \dots \qquad (2)$$

با مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) حاصل می‌شود $AB_1 = c = AB$ و این ثابت می‌کند که B و B_1 بر هم منطبقند (چون هر دو در یک طرف D قرار دارند)، و یا این که $C\hat{A}B = 90°$ و از آن‌جا $\hat{B}+\hat{C}=90°$ است. از طرف دیگر مثلث ABB' متساوی‌الساقین است و $A\hat{B}'B=\hat{m}=\hat{B}$ ولی : $\hat{B}'=\pi-m$.

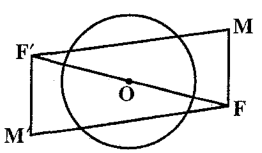
پس : $$\hat{B}'=\pi-\hat{B}=\pi-(\frac{\pi}{2}-\hat{C})=\frac{\pi}{2}+\hat{C}$$

یا : $$\hat{B}'-\hat{C}=\frac{\pi}{2}$$

بعکس، اگر A و ′A دو نقطهٔ قرینه نسبت به XY از این دایره باشند، تساوی قبل و رابطهٔ (۱) برقرار بوده ؛ در نتیجه هذلولی تعریف شده به وسیلهٔ رأسهایش و نقطهٔ M متساوی‌الساقین است. بنابراین مکان هندسی مطلوب دایرهٔ به مرکز P و به شعاع PM می‌باشد.

۴.۲.۶. دایره‌های ثابت، نقطه‌های ثابت

۱.۴.۲.۶. دایرهٔ اصلی، یک نقطه



۶۳۶. فرض می‌کنیم F و ′F کانونهای یک هذلولی گذرنده بر M و به دایرهٔ اصلی (O، a) باشد. این منحنی از ′M قرینه M نسبت به O می‌گذرد و داریم :

$$MF'-MF=\varepsilon 2a\ ;\quad (1)\quad (\varepsilon=\pm 1)$$

و در نتیجه با توجه به متوازی‌الاضلاع $MFM'F'$ خواهیم داشت :

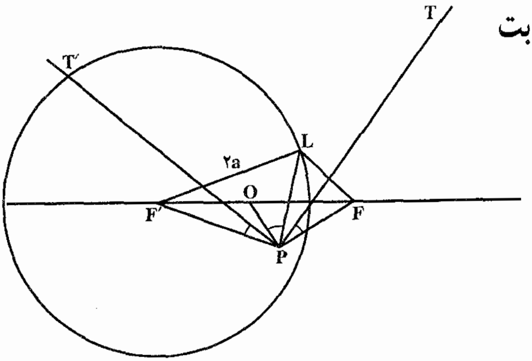
$$M'F+MF=\varepsilon 2a\quad (2)\qquad \text{و}\qquad MF'-M'F'=\varepsilon 2a\quad (3)$$

این تساویها ثابت می‌کند که F و ′F متعلق به هذلولی (H) به کانونهای M و ′M و به دایره اصلی (O، a) می‌باشند.

بعکس، اگر F و ′F دو نقطه از این هذلولی باشند، قرینه‌های آنها نسبت به O رابطه‌های (۲) و (۳) و در نتیجه رابطهٔ (۱) را برقرار می‌کند ؛ پس هذلولی به کانونهای F و ′F و گذرنده بر M، به دایرهٔ اصلی (O, a) می‌باشد. بنابراین مکان هندسی نقطه‌های F و ′F هذلولی (H) می‌باشد.

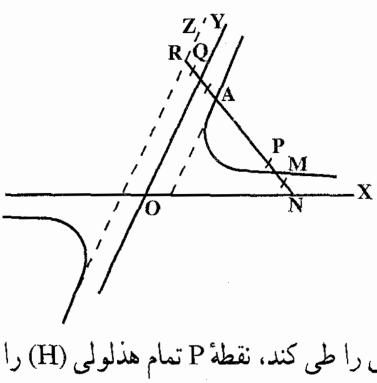
۶.۲.۵. هذلولی ثابت، ...

۶.۲.۵.۱. تنها یک هذلولی ثابت



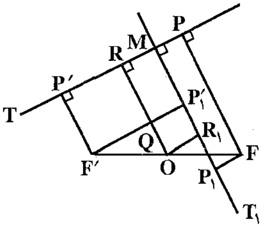
۶۳۷. می‌دانیم که اگر از یک نقطه دو خط مماس بر یک هذلولی رسم کنیم، زاویهٔ بین یک خط مماس و خط واصل از آن نقطه به یک کانون، برابر است با زاویهٔ بین خط مماس دیگر و خط واصل از آن نقطه به کانون دیگر، یعنی اگر از نقطهٔ P مماسهای PT و PT′ را بر هذلولی به کانونهای F و F′ و عدد ثابت ۲a رسم کنیم، داریم $F\hat{P}T = F'\hat{P}T'$. بنابراین اگر دو مماس بر هم عمود باشند و قرینهٔ F نسبت به مماس PT را L بنامیم $F'\hat{P}L = 90^\circ$ خواهد بود و با توجه به برابری $PF = PL$ و با فرض این که O مرکز هذلولی باشد، ثابت می‌شود که $PO = \sqrt{a^2 - b^2}$. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ P دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\sqrt{a^2 - b^2}$ است. این دایره در صورتی وجود دارد که $a \geq b$ باشد. در حالت $a = b$ این دایره به یک نقطه که همان مرکز هذلولی است تبدیل می‌شود.

۶.۲.۵.۲. یک هذلولی ثابت، یک نقطه



۶۳۸. فرض می‌کنیم Q نقطهٔ تلاقی قاطع با OY مجانب دیگر باشد. AQ را به اندازهٔ خود تا R امتداد می‌دهیم (شکل) ؛ مکان R خط Z موازی با OY است. داریم : $QA = MN$. بنابراین قطعه‌های RA و PN مساوی و در یک جهتند، پس نتیجه می‌شود که P متعلق به هذلولی (H) به مجانبهای OX، Z و گذرنده بر A می‌باشد ؛ بعلاوه، وقتی M هذلولی مفروض را طی کند، نقطهٔ P تمام هذلولی (H) را خواهد پیمود. بنابراین مکان P هذلولی (H) می‌باشد.

۶.۲.۶. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۶۳۹. بیضی (E) و هذلولی (H_1) به کانونهای مشترک F و ′F، $FF' = 2c$ که طول محورهای کوچک آنها $2b$ و $2b_1$ می‌باشند در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم دو خط عمود بر هم T و T_1 که اوّلی از قطعه ′FF عبور نکرده و دومی آن را قطع کرده، داده شده باشند. F، ′F و O را روی این خطها تصویر می‌کنیم (شکل). داریم:

$$\overline{FP} \times \overline{F'P'} = \overline{P_1M} \times \overline{P'_1M} = \overline{R_1M_1}^2 - \overline{R_1P'_1}^2 = \overline{OR}^2 - \overline{OQ}^2 :$$

$$\overline{FP_1} \times \overline{F'P'_1} = \overline{PM} \times \overline{P'M} = \overline{MR}^2 - \overline{P'R}^2 = \overline{OR_1}^2 - \overline{F'Q}^2 ;$$

از جمع نظیر به نظیر این دو رابطه خواهیم داشت:

$$\overline{FP} \times \overline{F'P'} + \overline{FP_1} \times \overline{F'P'_1} = (\overline{OR}^2 + \overline{OR_1}^2) - (\overline{OQ}^2 + \overline{F'Q}^2)$$

$$= \overline{OM}^2 - c^2 \;\; ; \; \ldots \qquad (1)$$

بعلاوه، اگر T مماس بر بیضی و T_1 مماس بر هذلولی باشد، داریم:

$$\overline{FP} \times \overline{F'P'} = b^2 \;\; , \;\; \overline{FP_1} \times \overline{F'P'_1} = -b_1^2 \; ,$$

و با قرار دادن این مقدارها حاصل می‌شود:

$$b^2 - b_1^2 = \overline{OM}^2 - c^2 \Rightarrow \overline{OM}^2 = b^2 + c^2 - b_1^2 \; ,$$

طرف دوم رابطهٔ اخیر همواره مثبت است (چون در هذلولی $c > b_1$ است) و ملاحظه می‌شود که M متعلق به دایرهٔ (Γ) هم مرکز با این مقاطع مخروطی و به شعاع جذر $b^2 + c^2 - b_1^2$ می‌باشد. این دایره بر مستطیل حاصله از مماسهای در رأسهای محور کوچک بر بیضی، و مماسهای بر هذلولی در رأسهایش محیط است. بنابراین خارج دو مقطع مخروطی قرار دارد.

بعکس. اگر M یک نقطه از دایرهٔ (Γ) باشد؛ از این نقطه مماس MT را بر بیضی و سپس MT_1 را عمود بر MT رسم می کنیم داریم:

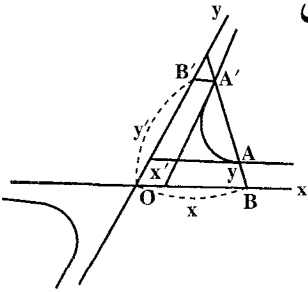
$$\overline{OM}^2 = b^2 + c^2 - b_1^2 \;\; , \;\; \overline{FP} \times \overline{F'P'} = b^2 ,$$

و از رابطهٔ (۱) حاصل می‌شود:

$$b^2 + \overline{FP_1} \times \overline{F'P'_1} = b^2 + c^2 - b_1^2 - c^2 \Rightarrow \overline{FP_1} \times \overline{F'P'_1} = -b_1^2 \; ;$$

در نتیجه خط T_1 بر هذلولی مماس است. بنابراین مکان مطلوب دایرهٔ (Γ) می‌باشد.

۷.۲.۶. مسأله‌های ترکیبی



۶۴۰. ۱. برای این که ثابت کنیم وسطهای AA' و BB' برهم منطبقند. باید ثابت کنیم $AB = B'A'$ (شکل). اگر (x,y)، (x',y') مختصات A، A' نسبت به مجانبها باشد، داریم:

$$x.y = x'.y' \Rightarrow \frac{x}{x'} = \frac{y'}{y}$$

و در نتیجه:

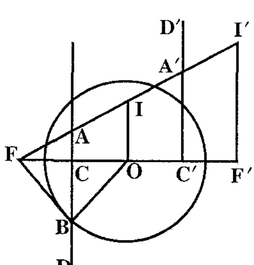
$$\frac{B'A}{B'A'} = \frac{A'B}{AB} \Rightarrow \frac{B'A - B'A'}{B'A'} = \frac{A'B - AB}{AB} \;;$$

چون هر دو صورت برابر AA' می‌باشد. بنابراین $B'A' = AB$.

۲. اگر خط قاطع به خط مماس بدل شود، A و A' بر نقطهٔ تماس M که وسط BB' (یا QQ') است منطبق می‌شود.

۳. فرض می‌کنیم قاطع به موازات امتداد معین Δ تغییر نماید. مکان وسطهای BB' خطی است گذرنده بر O، و مکان وسطهای AA' (یا KK') تمام این خط (اگر قاطع دو شاخه هذلولی را تلاقی کند) یا دو نیمخط متعلق D است (اگر دو نقطهٔ تلاقی قاطع با هذلولی متعلق به یک شاخه باشد).

این خط D را قطر مزدوج نظیر امتداد مفروض Δ می‌نامند. باید توجه داشت که قطر مزدوج AA' از نقطهٔ تماس مماس موازی با AA' (یا KK') اگر وجود داشته باشد، (یعنی وقتی که A ، A' و یا K ، K' متعلق به یک شاخه‌اند) می‌گذرد.



۶۴۱. ۱. فرض کنیم O مرکز و F' کانون دوم یک هذلولی متساوی‌الساقین باشد که F کانون اوّلش بوده و خط هادی نظیر آن D از نقطهٔ مفروض A می‌گذرد. می‌دانیم که خط هادی وتر تماس مماسهای رسم شده از F به دایرهٔ اصلی بوده و OB یک خط مجانب است؛ چون $B\hat{O}F = ۴۵°$، نقطهٔ C پای خط هادی، وسط OF خواهد بود و محور غیرقاطع FA را در نقطهٔ I قطع می‌کند که نقطه‌ای ثابت است، زیرا قرینهٔ F است نسبت به A. ملاحظه می‌شود که نقطهٔ O روی دایره‌ای به قطر FI است از طرف دیگر اگر نقطهٔ O نقطه‌ای غیرمشخص از این دایره باشد، عمود AD

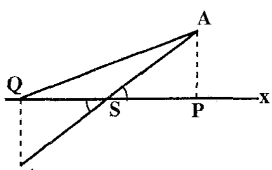
بر OF آن را در وسطش، O قطع می‌کند و O مرکز هذلولی متساوی‌الساقینی است که کانونش F و خط هادی نظیرش AD می‌باشد.
مکان نقطهٔ O دایره‌ای به قطر FI است. ′F چون کانون دوم است، عمود در ′F بر محور، خط FA را در قرینهٔ F نسبت به I قطع می‌کند و مکان ′F دایرهٔ به‌قطر I′F است.
۲. خط هادی دوم، ′D، خط FA را در ′A قطع می‌کند که قرینهٔ A نسبت به I بوده و در نتیجه نقطه‌ای ثابت است.

۳.۶ .سهمی

۱.۳.۶ .نقطه‌های ثابت

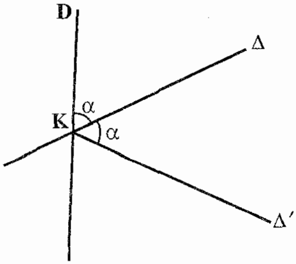
۱.۱.۳.۶ .رأس، یک نقطه

۶۴۲. فرض کنیم SX محور یک سهمی به رأس S و گذرنده بر A باشد. AP را عمود بر SX (شکل) رسم می‌کنیم. می‌دانیم تحت مماس مساوی دو برابر طول نقطهٔ تماس است. مماس در A محور را در Q قرینهٔ P نسبت به S قطع می‌کند.



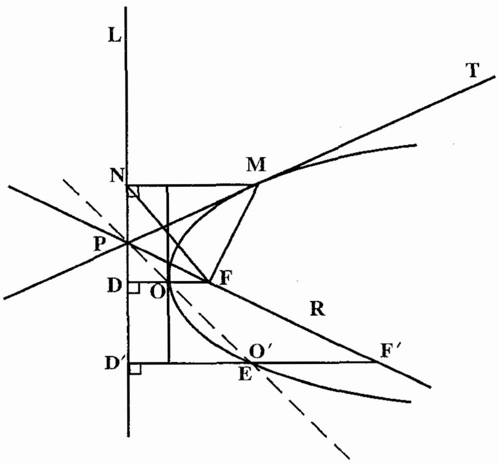
باید مکان Q را وقتی که SX حول نقطهٔ S دوران کند، تعیین کنیم، ′QA را عمود بر محور رسم می‌کنیم تا SA را در نقطهٔ ′A قطع کند. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ A′QS و APS همنهشتند (چرا؟) ؛ پس $SA' = SA$ و ′A نقطه‌ای ثابت است، در نتیجه نقطهٔ Q متعلق به دایرهٔ به قطر ′SA می‌باشد. بعکس فرض کنیم Q یک نقطه از این دایره باشد QS را تا نقطهٔ P مساوی خودش امتداد می‌دهیم ؛ مثلثهای A′QS و APS همنهشتند، پس AP بر QP عمود است ؛ و سهمی به محور SP و گذرنده بر A، بر QA در A مماس است. بنابراین مکان Q دایره‌ای به قطر ′SA است.

۲.۳.۶.خطهای ثابت



۱.۲.۳.۶. خط هادی، خط مماس

۶۴۳. D و Δ بترتیب خط هادی و خط مماس ثابت فرض شده‌اند. از K نقطهٔ تلاقی آنها خط Δ′ را چنان می‌کشیم که α = α′ شود. Δ′ مکان کانون F است. زیرا قرینه‌های F نسبت به Δ باید روی D قرار گیرند.



۶۴۴. خط مماس ثابت را TP، و خط هادی ثابت را LD می‌نامیم. یک سهمی دلخواه به کانون F و هادی LD را درنظر می‌گیریم. اگر از این کانون F عمود FD را بر خط هادی فرود آوریم. نقطهٔ O رأس سهمی وسط پاره‌خط FD است. در نتیجه مکان هندسی رأس سهمی خط POE است. زیرا به‌طور ثابت خواهیم داشت:

$$D'O' = O'F'$$

۲.۲.۳.۶. سه خط مماس

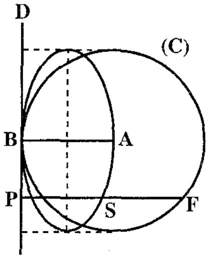
۶۴۵. برای این که سهمیهای مماس بر سه خط مفروض وجود داشته باشند، باید این خطها تشکیل مثلثی را بدهند، زیرا یک سهمی فقط دارای یک مماس به موازات یک امتداد معین است و هردو مماس از یک نقطه می‌گذرد.

فرض کنیم AB ، BC وCA بر سهمی به کانون F مماس باشند. تصویرهای F روی این سه خط برروی یک خط راست یعنی برروی مماس در رأس قرار دارند. بنابراین طبق قضیهٔ F.Simson روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC قرار دارد.

بعکس. اگر F یک نقطه از این دایره باشد. تصویرهای C′ ، A′ و B′ این نقطه روی این خطها، واقع بر یک استقامتند. در نتیجه خطها بر سهمی به کانون F مماسند. A′B′C′ مماس در رأس این سهمی می‌باشد. بنابراین مکان مطلوب دایرهٔ محیطی مثلث ABC است (به استثنای رأسهایش).

۶.۳.۳.خطهای ثابت، نقطه‌های ثابت

۶.۳.۳.۱. خط هادی، یک نقطه



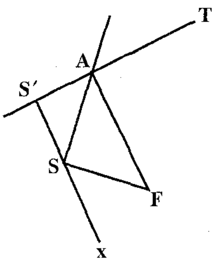
۶۴۶. AB را عمود بر هادی D رسم می‌کنیم ؛ فرض کنیم F کانون یکی از این سهمیها باشد. داریم :

$$AF = AB$$

پس F متعلق به دایرهٔ (C) به مرکز A و به شعاع AB می‌باشد (شکل). بعکس اگر F یک نقطه غیرمشخص از این دایره باشد. داریم : AF = AB و سهمی به کانون F و هادی D از A می‌گذرد بنابراین مکان F دایره (C) می‌باشد. رأس سهمی به کانون F نقطهٔ S در وسط FP عمود وارده از F بر D قرار دارد ؛ دایرهٔ (C) را حول D ، ۶۰° دوران می‌دهیم تا (C) به (C_1) و F به F_1 تبدیل شود. S تصویر F_1 روی صفحه شکل می‌باشد، چون که :

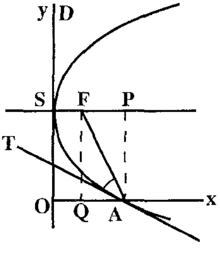
$$PS = \frac{PF}{۲} = PF\cos ۶۰^\circ = PF_1 \cos ۶۰^\circ$$

در نتیجه مکان هندسی رأس S تصویر دایرهٔ (C_1) ؛ یعنی بیضی به محور کوچک AB و محور بزرگ ۲AB [قطر دایره (C)] می‌باشد.



۶.۳.۳.۲. خط مماس، رأس

۶۴۷. اگر خط مماس در رأس سهمی خط مماس T را در A قطع کند ؛ تصویر F روی خط مماس T نقطه A است، و محور سهمی که منطبق بر SF می‌باشد بر SA عمود است (شکل). مثلث قائم‌الزاویهٔ SAF که رأس S آن ثابت و رأس A ی آن T را طی می‌نماید و وتر AF که همواره بر T عمود است را درنظر می‌گیریم، مکان رأس F یک سهمی است به رأس S و محور Sx عمود بر T و پارامتر نصف طول قطعه خط S′S فاصلهٔ S تا T .



۶.۳.۳.۳. یک خط، دو نقطه

۶۴۸. فرض کنیم F کانون یک سهمی که در رأس S بر خط معلوم D مماس و گذرنده بر نقطهٔ مفروض A است باشد. OA را عمود بر D و AP و FQ را عمود بر OA رسم می کنیم (شکل) ؛ داریم :

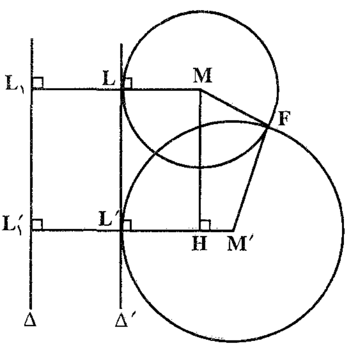
$$\overline{PA}^۲ = ۴SF \times SP \;;$$

یعنی : $\overline{QF}^{2} = 4OA \times OQ$;

یا اگر $a = OA$ و x و y مختصات نقطهٔ F نسبت به خطهای OA و OD باشد :

$y^{2} = 4ax$

بنابراین مکان F سهمی است به رأس O و کانون A.



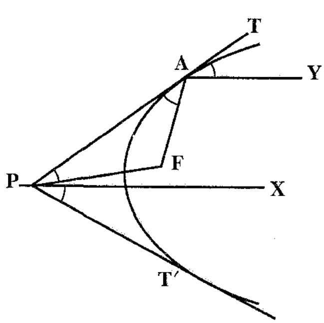
۶۴۹. اگر M و M′ دو نقطهٔ ثابت و Δ امتدادی موازی خط هادی سهمی باشد، یکی از سهمیهای موردنظر به خط هادی Δ′ را درنظر می‌گیریم و از M و M′ عمودهای ML و M′L′ را بر Δ′ و از M عمود MH را بر M′L′ فرود می‌آوریم، دایره‌های (M,ML) و (M′,M′L′) را رسم می‌کنیم. یک نقطه برخورد این دو دایره F ، کانون سهمی است.

از F به M و M′ وصل می‌کنیم. داریم :

$$|FM' - FM| = |M'L' - ML| = M'H$$

مقدار ثابتی است و چون دو نقطهٔ M و M′ نیز ثابتند، پس مکان هندسی کانون F هذلولی به کانونهای M و M′ و عدد ثابت HM′ است.

۶.۳.۳.۴. دو خط، یک نقطه



۶۵۰. فرض می‌کنیم F کانون یک سهمی مماس بر خط T در A و بر خط T′ باشد. از فصل مشترک این مماسها و A خطهای PX و AY را موازی با محور سهمی رسم می‌کنیم (شکل). داریم :

$$P\hat{A}F = T\hat{A}Y = P\hat{A}X ,$$

و بنابه قضیهٔ پونسله :

$$P\hat{A}X = F\hat{P}T'$$

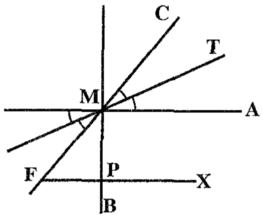
بنابراین $P\hat{A}F = F\hat{P}T'$ در نتیجه PT′ در P بر دایرهٔ محیطی مثلث APF مماس است.

از این قرار F متعلق به دایرهٔ گذرنده بر A و مماس بر PT′ در P می‌باشد.

بعکس. اگر F یک نقطه از این دایره باشد، سهمی به کانون F که در A بر خط T مماس است بر خط T' نیز مماس خواهد بود چون PX ، AY موازی با محورند.

$$F\hat{P}T' = P\hat{A}F = T\hat{A}Y = A\hat{P}X$$

و چون که : $F\hat{P}T' = A\hat{P}X$ ، PT' بر سهمی مماس است. بنابراین مکان F دایره‌ای گذرنده بر A و مماس بر خط T در نقطهٔ P است.

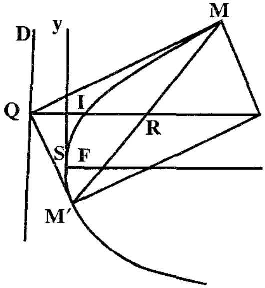


۶۵۱. فرض کنیم T خط مماسی است که M نقطهٔ تماس آن بوده و MA موازی با محور می‌باشد (شکل). MB را عمود بر MA رسم می‌کنیم. اگر F کانون سهمی با شرطهای داده شده باشد، بنابر خاصیت زاویه‌ای مماس، F روی خط FC قرینهٔ MA نسبت به T واقع است، و بعکس سهمی‌ای که کانونش F (نقطهٔ غیرمشخص از MC) و محورش موازی MA و مماس بر خط T باشد ؛ در M بر FC مماس است. پس مکان F خط MC می‌باشد.

۶.۳.۴. سهمی ثابت، ...

۶.۳.۴.۱. تنها یک سهمی ثابت

۶۵۲. خط هادی سهمی قطبی نقطهٔ A است و هر نقطه از این خط، قطب قطری از دایرهٔ α است، و مماسهایی که از این نقطه بر سهمی رسم شوند، قطبیهای دوسر قطر نظیر می‌باشند. هر دو نقطهٔ دوسر هر قطر از دایرهٔ α ، بر دو ضلع یک زاویهٔ قائمهٔ به رأس O واقعند. بنابراین قطبیهای آنها برهم عمودند.



۶۵۳. فرض کنیم MP و $M'P$ دو قائم عمود بر هم سهمی مفروض باشند (شکل). مماسها در نقطه‌های M و M' برهم عمودند و نقطهٔ تقاطعشان Q روی هادی D قرار دارد. در مستطیل $QMPM'$ ، QP از وسط MM' گذشته و موازی است با محور، و $QI = IR$. فرض کنیم x و y مختصات I ، X و Y مختصات نقطهٔ P نسبت به محور و مماس در رأس سهمی باشد. داریم :

$$y = Y$$

و یا از طرف دیگر چون $QP = ۴QI$ است :

$$\frac{P}{۲} + X = ۴(\frac{P}{۲} + x) \ ,$$

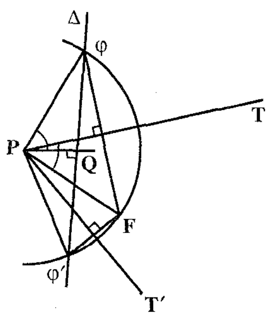
یا :

$$x=\frac{X}{۴}-\frac{۳P}{۸}\ ,$$

و با قرار دادن مقادیر x و y در معادلهٔ سهمی $y^{۲}-Px=۰$ حاصل می‌شود :

$$Y^{۲}-\frac{P}{۲}X+\frac{۳P^{۲}}{۴}=۰$$

معادلهٔ بالا معادلهٔ یک سهمی به محور سهمی مفروض و پارامتر $\frac{P}{۴}$ که رأسش محل برخورد Sx با خط $X=\frac{۳P}{۲}$ است، می‌باشد.



۶۵۴. فرض می‌کنیم سهمی مفروض به کانون F و هادی Δ باشد. نقطهٔ P را درنظر می‌گیریم و از آن مماسهایی بر سهمی رسم می‌کنیم. برای این منظور دایرهٔ به مرکز P و به شعاع PF را رسم می‌کنیم ؛ این دایره، Δ را در φ و ′φ قطع می‌کند. مماسهای مطلوب خطهای PT و ′PT عمودمنصفهای Fφ و ′Fφ می‌باشد. فرض می‌کنیم $T\hat{P}T'=\alpha$ و α حاده باشد. داریم (شکل) :

$$\varphi\hat{P}\varphi'=\varphi\hat{P}F+F\hat{P}\varphi'$$

یا :

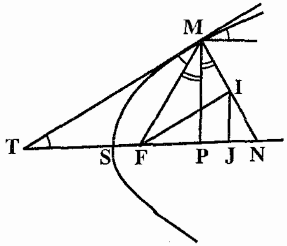
$$\varphi\hat{P}\varphi'=۲(T\hat{P}F+F\hat{P}T')=۲\alpha$$

۲α کوچکتر از دو قائمه می‌باشد، قوس ′φFφ کوچکتر از یک نیمدایره می‌باشد ؛ درنتیجه P و F در دوطرف Δ واقعند ؛ از طرف دیگر اگر PQ را عمود بر Δ رسم کنیم، $\varphi\hat{P}Q=\frac{۱}{۲}\varphi\hat{P}\varphi'=\alpha$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ PQφ داریم :

$$\frac{P\varphi}{PQ}=\frac{۱}{\cos\alpha}\quad \text{یا}\quad \frac{PF}{PQ}=\frac{۱}{\cos\alpha}$$

پس مکان P آن شاخه از هذلولی (H) به کانون F و هادی نظیر Δ و خروج از مرکز $\frac{۱}{\cos\alpha}$ می‌باشد.

اگر α منفرجه باشد ؛ با استدلال مشابه ثابت می‌شود که مکان P آن شاخه از هذلولی به کانون F و هادی نظیر Δ و خروج از مرکز $-\frac{۱}{\cos\alpha}$ می‌باشد.



۶۵۵. فرض کنیم F کانون سهمی و MT مماس بر آن باشد. (شکل) F وسط TN است و داریم :

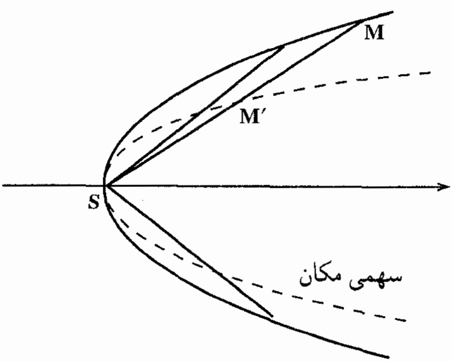
$$\frac{TN}{۲}=\frac{TP+PN}{۲}=\frac{TP}{۲}+\frac{p}{۲}=TS+\frac{p}{۲}=TF$$

می‌دانیم FI موازی با TM یعنی عمود بر MN است.
پس اگر IJ را بر محور عمود کنیم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ FIN داریم :

$$IJ^{۲}=FJ.JN=FJ.\frac{p}{۲}=۲\frac{p}{۴}FJ$$

از رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود : که مکان I یک سهمی است به رأس F و پارامتر $\frac{p}{۴}$ و محور سهمی مفروض.

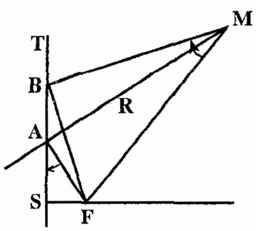
۶.۳.۴.۲. یک سهمی ثابت، نقطه‌های ثابت



۶.۳.۴.۲.۱. یک سهمی، رأس

۶۵۶. این مکان یک سهمی است که مجانس سهمی داده شده نسبت به مرکز تجانس S و بانسبت تجانس $\frac{۱}{۲}$ می‌باشد. زیرا اگر SM یک وتر از سهمی و M′ وسط آن باشد $\frac{\overline{SM'}}{\overline{SM}}=\frac{۱}{۲}$ است.

۶.۳.۴.۲.۲. یک سهمی، کانون



۶۵۷. سهمی به کانون F و مماس در رأس آن ST و یک مماسی که از نقطهٔ اختیاری B روی ST بر آن رسم شده (شکل)، درنظر می‌گیریم. خط FM را طوری رسم می‌کنیم که $(F\hat{M},BM)=\alpha$ باشد ؛ باید مکان نقطهٔ M را به‌دست آوریم :

FA را طوری رسم می‌کنیم که $(F\hat{A},ST)=\alpha$ باشد، A یک نقطه از مکان است.

چهارضلعی FMBA چون $(FM,\hat{BM}) = (FA,ST)$ می‌باشد محاطی است ؛ و چون $M\hat{B}F = ۹۰^\circ$ می‌باشد پس $F\hat{A}M = ۹۰^\circ$ است و نقطهٔ M متعلق به عمود AR، بر FA است.

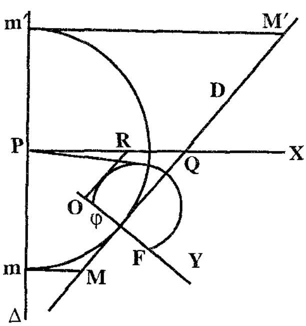
بعلاوه اگر از هر نقطهٔ M از این خط، به یک نقطه مانند B از ST وصل کنیم، BM بر سهمی مماس است و از آن‌جا مکان نقطهٔ M این خط AR است.

بالاخره تصویر F یعنی A روی AR ؛ روی AR مماس در رأس واقع است. در نتیجه AR بر سهمی مماس است.

۶.۳.۴.۳. یک سهمی ثابت، خطهای ثابت

۶.۳.۴.۳.۱. یک سهمی، یک خط

۶۵۸. سهمی به کانون F و هادی (Δ) و خط D را درنظر می‌گیریم. فصل مشترک خط D را با سهمی به دست می‌آوریم. برای این کار φ قرینه F را نسبت به D به‌دست می‌آوریم. $F\varphi$ خط Δ را در P قطع می‌کند. بر F و φ دایرهٔ دلخواهی می‌گذرانیم و از P مماس PT را بر آن دایره رسم می‌کنیم (محل تماس را T می‌نامیم) و بعد PT را در دوطرف P نقل می‌کنیم تا نقطه‌های m و m' به‌دست آیند. از m و m' دو عمود بر Δ رسم می‌کنیم تا D را در M و M' قطع کند. M و M' نقطه‌های خواسته شده‌اند.

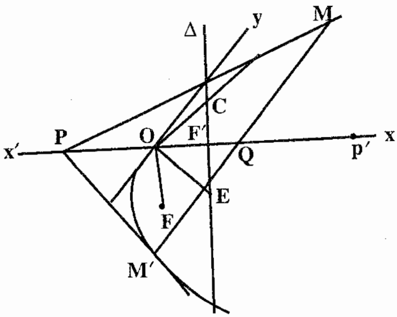


چون $Pm = Pm'$ است پس خط PX (خطی که از P موازی محور رسم شده) خط D را در نقطهٔ Q وسط MM' قطع می‌کند. پس وقتی D به موازات خود تغییر مکان دهد و سهمی را قطع کند نقطهٔ φ هم روی نیمخط PY نیز تغییر محل می‌دهد. از نقطهٔ O وسط PF خط OR را عمود بر PY رسم می‌کنیم. نقطهٔ Q وسط MM' نیمخط RX را می‌پیماید.

این خط را قطر سهمی نسبت به امتداد وتر D می‌نامند.

بعکس، اگر R نقطه‌ای از سهمی و Rx موازی با محور باشد. وترهای موازی با OR (مماس بر سهمی در نقطه R) به وسیلهٔ خط Rx به دو قسمت متساوی تقسیم می‌شوند.

۶.۳.۴.۳.۲. یک سهمی، یک راستا موازی محور



۶۵۹. فرض کنیم F کانون سهمی و O فصل مشترک $x'x$ و منحنی باشد (شکل). معادلهٔ سهمی نسبت به Ox و مماس Oy به‌صورت $y^2 = 2p'x$ (که در آن $p' = 2OF$ است) می‌باشد. اگر P' دومین نقطهٔ برخورد دایرهٔ PMM' و xx' باشد. داریم :

$$M'Q \times QM = PQ.QP' \;;$$

یا :
$$y^2 = 2x \times QP'$$

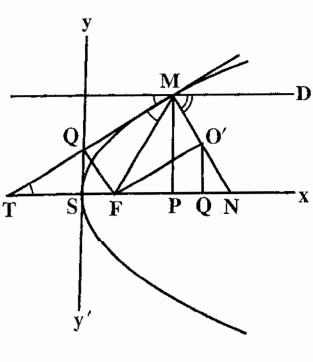
پس $QP' = p'$ و در نتیجه $PP' = 2x + p'$ ؛ بعلاوه اگر F' وسط PP' باشد ؛ داریم :

$$PF' = x + \frac{p'}{2}$$

یا :
$$OF' = \frac{p'}{2} = OF \;;$$

بنابراین F' نقطه‌ای ثابت است ؛ وقتی که P خط Ox' را طی کند. می‌دانیم C مرکز دایرهٔ محیطی مثلث PMM' محل برخورد عمود وارد بر xx' در F' و عمود وارده بر MM' در وسطش Q می‌باشد. بنابراین C تغییر مکانش روی خط Δ است. و اگر OE را بر Oy عمود کنیم تا Δ را در E قطع کند. وقتی P خط Ox' را طی کند، نقطهٔ C نیمخط EA را طی خواهد کرد.

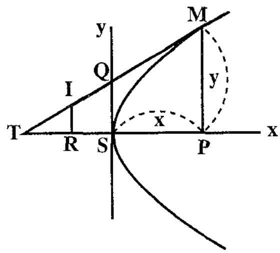
بنابراین مکان C نیمخط EA است و اگر xx' بر محور سهمی منطبق شود ؛ نقطه C بر F منطبق شده ؛ یعنی مرکزهای دایره‌های PMM' بر روی نقطهٔ F قرار خواهد گرفت.



۶۶۰. دو دایره وجود دارند که بر سه خط FM و MD و SX مماس باشند ؛ O و O' مرکزهای این دایره‌ها محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های حاصل از FM با MD و SX می‌باشد. MO در M بر سهمی مماس است. و مثلث MFT متساوی‌الساقین می باشد. بنابراین زاویه‌های FTM و FMT برابرند یعنی FO بر MT عمود است.

پس نقطهٔ O تصویر F روی MT است، بنابراین روی Sy مماس در رأس سهمی قرار دارد (شکل). از طرف دیگر وقتی M سهمی را طی کند، نقطه O نیز تمام خط $y'Sy$ را طی خواهد کرد ؛

بنابراین مکان O خط $y'Sy$ است. و مکان O' وسط MN، یک سهمی به رأس F و پارامتر $\frac{P}{4}$ و محور سهمی مفروض است.



۶.۳.۴.۳.۳. یک سهمی، محور، مماس در رأس

۶۶۱. معادلهٔ سهمی نسبت به محورش و مماس در رأسش با فرض آن که x و y مختصات M باشد عبارت است از:

$$y^2 = 2px,\ldots \quad (1)$$

اگر x' و y' مختصات نقطهٔ I باشد، می‌دانیم S وسط TP تحت مماس می‌باشد، بنابراین داریم:

$$TS = 2RS \;,$$

یا:

$$x = -2x'$$

و

$$y = 4y' \text{ و یا } PM = 4RI$$

و با قرار دادن این مقادیر در رابطهٔ (۱) خواهیم داشت:

$$16y'^2 = -4px' \Rightarrow \text{ یا } y'^2 = -\frac{p}{4}x' \;,$$

بنابراین مکان I یک سهمی است به رأس S و پارامتر $\frac{1}{8}$ پارامتر سهمی مفروض و محورش مختلف‌الجهت با محور سهمی مفروض می‌باشد.

۶.۳.۴.۳.۴. یک سهمی، دو خط مماس

۶۶۲. برای مماس دلخواه سومی یعنی DE داریم:

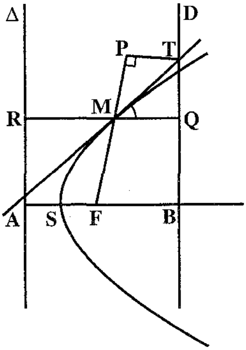
$$\frac{EC}{EB} = \frac{DB}{AD}$$

زیرا اگر از نقطهٔ D خطی موازی BC رسم کنیم تا وتر AC را در نقطهٔ H قطع کند و از H خطی موازی مماس AB رسم کنیم تا مماس BC را در نقطهٔ E قطع کند، تساویهای زیر را خواهیم داشت:

$$\frac{EC}{EB} = \frac{CH}{AH} = \frac{EH \text{ یا } DB}{DA}$$

از آن‌جا، خط DE که به این روش رسم می‌شود مماسهای BA و BC را به نسبت عکس تقسیم می‌کند و این خط DE ، همان خط مماس متحرک است. بنابراین اگر

متوازی‌الاضلاع DBEH را بسازیم، رأس H روی وتر واصل بین دو نقطهٔ تماس قرار خواهد داشت.



۶.۳.۴.۳.۵. یک سهمی، کانون، هادی، خط عمود بر محور

۶۶۴. سهمی به کانون F و هادی Δ ؛ و T نقطهٔ تقاطع خط D را با مماس در M درنظر می‌گیریم. RMQ را عمود بر Δ رسم می‌کنیم (شکل). داریم :

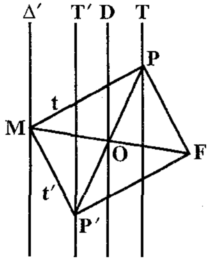
$$P\hat{M}T = Q\hat{M}T$$

پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MPT و MQT برابرند (چرا؟) ؛ در نتیجه P قرینه Q است نسبت به MT، همچنین R قرینه F نسبت به این مماس می‌باشد. در نتیجه خواهیم داشت :

$$FP = RQ$$

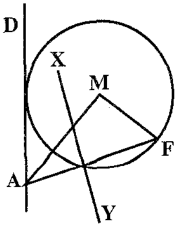
از گفته‌های بالا چنین نتیجه می‌شود که نقطهٔ P متعلق به دایرهٔ (C) به مرکز F و به شعاع AB (فاصلهٔ خط D و هادی) می‌باشد ؛ پس وقتی M سهمی را طی کند، FM یک دوران کامل می‌نماید بنابراین مکان P دایرهٔ (C) است.

۶.۳.۵. دو سهمی ثابت



۶۶۵. دو سهمی به کانون F را که مماس در رأسهای آنها دو خط موازی T و T′ می‌باشند (شکل)، درنظر می‌گیریم. فرض کنیم t یک مماس برسهمی اوّل و t′ هم یک مماس بر سهمی دوم باشد ؛ P و P′ تصویرهای F روی t و t′ برروی T′ و T واقعند برای اینکه t و t′ برهم عمود باشند لازم و کافی است $P\hat{F}P'$ قائمه باشد. بنابراین FPMP′ یک مستطیل است (قطرهای FM و PP′ در O منصف یکدیگرند) ؛ ولی O وسط PP′ روی خط D که موازی با T و T′ متساوی‌الفاصله از آنها می‌باشد، قرار دارد ؛ و چون FM = ۲FO است پس نقطهٔ M متعلق به خط Δ موازی با D که به فاصلهٔ دو برابر فاصلهٔ F تا D است، می‌باشد ؛ بعلاوه اگر P خط T را طی کند، خط t عمود بر FP در نقطه P ، خط Δ را در یک نقطه مانند M که تمام خط Δ را طی می‌کند قطع خواهد کرد. پس مکان مطلوب خط Δ است.

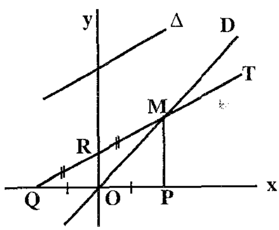
۶.۳.۶. مسأله‌های ترکیبی



۶۶۶. ۱. **رسم هادی.** مماسی که از A بر دایرهٔ به مرکز M و به شعاع FM رسم شود، هادی مطلوب است. اگر $MA > MF$ باشد، مسأله دارای دو جواب و اگر $MA = MF$، یعنی روی XY عمودمنصف AF باشد، دارای یک جواب و به ازاء $MA < MF$ دارای جواب نیست.

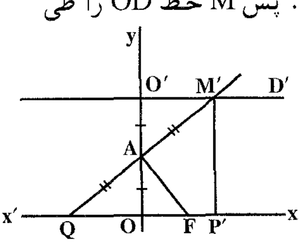
۲. دو سهمی گذرنده بر M که دارای محورهای عمود برهم باشند درنظر می‌گیریم، برای این که دو محور برهم عمود باشند لازم و کافی است که هادیهای آنها یعنی خطهایی که از A بر دایرهٔ به مرکز M و به شعاع MF مماس می‌شوند برهم عمود باشند؛ یعنی باید: $MA = MF.\sqrt{۲}$ و یا $\frac{MA}{MF} = \sqrt{۲}$ باشد. و از آن‌جا مکان هندسی نقطه M دایره‌ای به قطر قطعه خط BC از خط AF است، که نقطه‌های C و B آن به‌وسیلهٔ رابطه‌های زیر مشخص می‌شوند:

$$-\frac{\overline{BA}}{\overline{BF}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CF}} = \sqrt{۲}$$



(الف)

۶۶۷. ۱. سهمی به رأس O و محور Ox را درنظر می‌گیریم؛ فرض کنیم خط T مماس موازی خط Δ بر این سهمی باشد. اگر M نقطهٔ تماس و MP عرض آن باشد؛ می‌دانیم نقطهٔ O (رأس سهمی) وسط تحت مماس PQ است (شکل الف). وقتی که سهمی تغییر کند، تمام مثلثهای MPQ که ضلعهایشان نظیر به نظیر باهم موازی‌اند متشابه باقی می‌مانند. بنابراین زاویهٔ MOP که خط MO میانهٔ مثلث MQP با ضلع QP می‌سازد ثابت می‌ماند، و نقطهٔ M روی خط OD که از نقطهٔ O و یک نقطهٔ M از T گذشته، تغییر مکان می‌دهد. $RM = QR$ است. از طرف دیگر وقتی که سهمی تغییر کند خط مماس T تمام موقعیتهای موازی Δ را اشغال می‌کند. پس M خط OD را طی می‌کند. و از آن‌جا این خط مکان هندسی نقطهٔ M است.

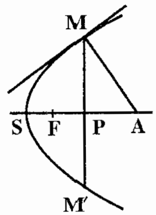


(ب)

۲. فرض کنیم M′ نقطهٔ تماس (غیر از مماس در رأس باشد) مماس رسم شده از نقطه A بر یکی از سهمیها باشد. رأس O (شکل ب) وسط تحت مماس QP′ می‌باشد. پس $AM' = QA$ و درنتیجه $AO' = OA$ است؛ پس نقطهٔ

M' خط D' را طی می‌کند (D' خطی است که از نقطهٔ O' که با رابطهٔ $OO' = ۲AO$ مشخص می‌شود، موازی محور XX' رسم شده است).
بنابراین وقتی که سهمی تغییر کند، کانون F محور xx' را طی می‌کند و چون AM' بر AF عمود است. M' تمام خط D' را طی خواهد کرد. بنابراین خط D' مکان هندسی نقطهٔ M' است.

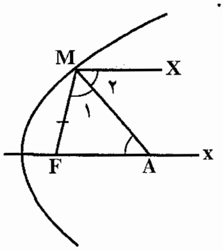
۶۶۸. ۱. فرض کنیم MA یک نرمال گذرنده بر نقطهٔ A از محور و MB مماس در M بر سهمی باشد (شکل الف). می‌دانیم تحت قائم PA برابر P و تحت مماس BP مساوی دوبرابر طول نقطه تماس و یا ۲SP می‌باشد. در نتیجه برای به‌دست آوردن نقطهٔ M از A به طرف رأس $AP = p$ و سپس $PB = ۲PS$ را جدا می‌کنیم.



(الف)

دایرهٔ به قطر AB، عمود بر محور در نقطهٔ P را، در M و M' قطع می‌کند. AM و AM' نرمالهای مطلوب می‌باشند. برای این که مسأله ممکن باشد، باید $SA \geq p$ وقتی که $SA = p$ باشد M و M' بر نقطهٔ S رأس منطبق می‌باشند.

۲. MX را موازی محور رسم می‌کنیم ؛ نرمال MA نیمساز زاویهٔ $F\hat{M}X$ یعنی $\hat{M}_۲ = \hat{M}_۱$ می‌باشد ولی $\hat{A} = \hat{M}_۲$ ؛ پس $\hat{A} = \hat{M}_۱$ درنتیجه $FM = FA$ می‌باشد. بنابراین نقطهٔ M متعلق به دایرهٔ به مرکز F و به شعاع FA است (شکل ب).

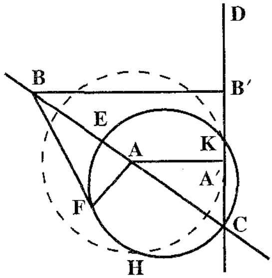


(ب)

بعکس. اگر M یک نقطهٔ غیرمشخص این دایره باشد. $\hat{A} = \hat{M}_۱$ ولی $\hat{A} = \hat{M}_۲$، پس $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$ و در سهمی به کانون F و محور Fx که از M می‌گذرد، MA قائم است ؛ چون نیمساز زاویهٔ حاصل از شعاع حامل این نقطه و موازی با محور می‌باشد. در نتیجه مکان هندسی نقطهٔ M دایرهٔ به مرکز F و به شعاع FA می‌باشد.

۴.۶ .مقطعهای مخروطی به طور کلی

۶ . ۴ . ۱. خط هادی، دو نقطه

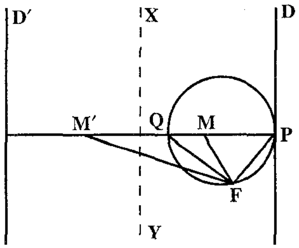


۶۶۹. AA' و BB' را عمود بر D رسم می‌کنیم. اگر F کانون یکی از مقطعهای مخروطی باشد، نسبتهای $\frac{AF}{AA'}$ و $\frac{BF}{BB'}$ برابر است با خروج از مرکز، پس با هم متساوی بوده و بعکس، اگر F نقطه‌ای باشد که $\frac{AF}{AA'}=\frac{BF}{BB'}$ مقطع مخروطی به کانون F و هادی نظیر D که خروج از مرکزش $\frac{AF}{AA'}$ باشد، از A و B می‌گذرد. پس باید مکان هندسی نقطهٔ F را چنان تعیین نمود که $\frac{FA}{FB}=\frac{AA'}{BB'}$ و یا $\frac{FA}{FB}=\frac{CA}{CB}$. این مکان هندسی دایره‌ای به قطر CE است و نقطهٔ E مزدوج توافقی C نسبت به AB است. نقطه F کانون بیضی سهمی و یا هذلولی است برحسب آن که خروج از مرکز $\frac{AF}{AA'}$، کوچکتر، مساوی، و یا بزرگتر از یک باشد. یعنی $AF < AA'$ یا $AF = AA'$ یا $AF > AA'$. دایرهٔ به مرکز A و به شعاع AA' رسم می‌کنیم فرض می‌کنیم که این دایره، دایرهٔ به قطر CE را در نقطه‌های H و K قطع کند. نقطه‌های قوس $\overset{\frown}{HCK}$ کانونهای هذلولی نقطه‌های قوس $\overset{\frown}{HEK}$ کانونهای بیضی و نقطه‌های H و K کانونهای سهمی می‌باشند (شکل).

ممکن است دایره‌هایی که رسم می‌کنیم یکدیگر را قطع نکنند در این حالت برحسب این که دایرهٔ به قطر CE داخل و یا خارج دایرهٔ به مرکز A و به شعاع AA' باشد، مقطعهای مخروطی یا همه بیضی بوده و یا همه هذلولی خواهند بود.

۶۷۰. می‌دانیم هرگاه خطی مقطع مخروطی را در M و M' و یک هادی را در I قطع کند خطی که از I به کانون F نظیر خط هادی وصل شود نیمساز یکی از زاویه‌های بین شعاعهای حامل نقطه‌های M و M' است. بنابراین اگر نقطه‌های مفروض M و M' باشند، آنها را امتداد می‌دهیم تا هادی را درI قطع کنند. P مزدوج توافقی I را نسبت به M' و M به‌دست می‌آوریم. دایرهٔ به قطر IP مکان هندسی خواسته شده است.

۶.۴.۲. دو خط هادی، یک نقطه



۶۷۱. خط XY موازی با D و D′ متساوی‌الفاصله از آنها، محور تقارن مقطع مخروطی می‌باشد و در نتیجه این مقطع مخروطی از M′ قرینهٔ M نسبت به XY می‌گذرد (شکل).

فرض می‌کنیم F کانون نظیر D یک مقطع مخروطی و P فصل مشترک MM′ و D باشد. داریم:

$$\frac{MF}{MP}=\frac{M'F}{M'P}\ ;\quad \frac{MF}{M'F}=\frac{MP}{M'P}\ ;$$

بنابراین F متعلق به مکان نقطه‌هایی است که نسبت فاصله‌شان از دو نقطهٔ M و M′ مساوی $\frac{PM}{PM'}$ می‌باشد. و اگر Q مزدوج توافقی P نسبت M′ و M باشد، این مکان دایرهٔ به قطر PQ می‌باشد.

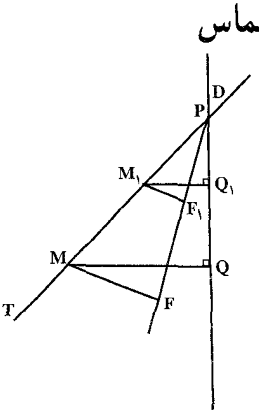
بعکس، فرض کنیم F یک نقطهٔ غیرمشخص (غیر از P و O) از دایرهٔ به قطر PQ باشد. مقطع مخروطی به کانون F و هادی نظیر D گذرنده بر M، بر M′ نیز می‌گذرد، چون بنابه گفتهٔ قبل:

$$\frac{FM}{FM'}=\frac{PM}{PM'}\Rightarrow\frac{M'F}{M'P}=\frac{MF}{MP}$$

بنابراین D′ هادی دوم این مقطع مخروطی می‌باشد.

بنابراین مکان F دایره‌ای به قطر PQ است و چون F′ قرینهٔ F نسبت به XY می‌باشد، بنابراین مکان F′ قرینهٔ دایره قبل نسبت به XY می‌باشد.

۶.۴.۳. یک خط هادی، یک خط مماس

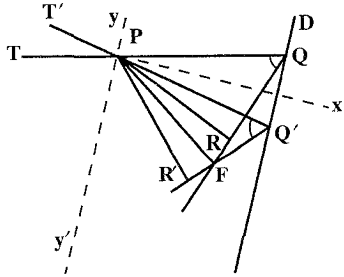


۶۷۲. مکان هندسی خط PF است. برای به‌دست آوردن خط PF فرض می‌کنیم M_1 نقطهٔ غیرمشخص از T باشد. چون فاصلهٔ M_1Q_1 معلوم است و داریم:

$$\frac{M_1F_1}{M_1Q_1}=e\Rightarrow M_1F_1=M_1Q_1.e\ ;$$

بنابراین طول M_1F_1 نیز معلوم است. پس به مرکز M_1 و به شعاع $M_1Q_1.e$ دایره‌ای رسم می‌کنیم و از P مماسی بر آن رسم می‌کنیم تا مکان مطلوب به‌دست آید.

۴.۴.۶. سه خط



۶۷۳. خط yy' که موازی با D و D' و به یک فاصله از آنها رسم شده است، محور تقارن این مقطعهای مخروطی می‌باشد. و در نتیجه این مقطعها مماسند بر یک خط T' که قرینهٔ خط T نسبت به yy' است. پس باید مکان کانونهای مقطعهای مخروطی را چنان پیدا کنیم که خط D یکی از خطهای هادی آن بوده و بر دو خط T و T' مماس شوند (شکل). فرض کنیم F کانون نظیر خط D باشد می‌دانیم که PF نیمساز یکی از زاویه‌های تشکیل شده از FQ و FQ' است. به‌عبارت دیگر اگر PR و PR' فاصله‌های نقطهٔ P از FQ و FQ' باشند، داریم : $PR = PR'$ و در نتیجه $PQ = PQ'$. مثلثهای قائم الزاویهٔ PRQ و $PR'Q'$ همنهشت بوده پس :

$\widehat{PQF} = \widehat{PQ'F}$ و چهارضلعی $PQQ'F$ قابل محاط در دایره است و نقطهٔ F روی دایرهٔ محیطی مثلث PQQ' است.

بعکس. اگر F نقطه‌ای از این دایره باشد، زاویه PQF مساوی است با $PQ'F$ ، پس $PR = PR'$ و خطهای FQ و PQ' نسبت به FP قرینه بوده و مقطع مخروطی به کانون F که خط هادی نظیرش D باشد و مماس بر T بوده، مماس بر T' نیز خواهد بود زیرا می‌دانیم که این مماسها نسبت به PF قرینه‌اند.

پس مکان هندسی نقطهٔ F دایرهٔ محیطی مثلث PQQ' و مکان کانون دوم F' قرینهٔ این دایره نسبت به خط yy' است.

۵.۴.۶. مثلث

۶۷۴. ۱. بیضیهایی را درنظر می‌گیریم که قطر بزرگشان روی نیمساز AG است. کانونهای این بیضیها نیز روی همین خط قرار دارند. همین مطلب برای هذلولیهایی که محور قاطعشان روی AG است درست است. حالت حدی بین بیضیها و هذلولیها سهمی BLC است که برخط IJ مماس است. نقطه‌های I و J وسط ضلعهای مساوی مثلث ABC می‌باشند. کانون O از این سهمی، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است. همچنین بخش OG که تا بی‌نهایت دور از طرف G ادامه دارد. مکان هندسی کانونهای بیضیهاست. امتداد OAH نیز مکان هندسی کانونهای هذلولیهاست. نقطهٔ A اختصاص به حالتی دارد که منحنی به خطهای داده شده AB و AC تبدیل می‌شود.

۲. دایرهٔ محیطی ABDC مکان هندسی کانونهای بیضیها و هذلولیهایی است که محور کوچکشان یا محور غیر قاطعشان روی نیمساز AG از زاویهٔ A است. خط دلخواهی موازی BC رسم می‌کنیم که دایره را قطع کند. E و F را کانونهای یک بیضی مماس بر ضلعهای مساوی مثلث متساوی‌الساقین ABC در نقطه‌های B و C فرض می‌کنیم. کافی است ثابت کنیم که EC و FC با خط مماس ACT زاویه‌های برابر می‌سازند. $E\hat{C}A = \frac{\widehat{ABE}}{2}$ ؛ زاویه FCT برابر نصف کمان $\widehat{ACF}$ است. پس این دو زاویه باهم برابرند. همچنین E و F می‌توانند کانونهای یک بیضی مماس به BA و CA در نقطه‌های B و C باشند.

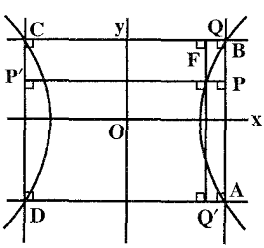
بحث. اگر خط موازی، بر دایره در نقطهٔ D مماس باشد، بیضی به دایره‌ای تبدیل می‌شود که D مرکز آن است. BC یک بیضی نامحدود است که B و C کانونهای آن می‌باشند:

$$A\hat{B}M = A\hat{B}N$$

هنگامی که خط موازی، بین BC و رأس A است، یک هذلولی به کانونهای M و N خواهیم داشت. زیرا کمان $\widehat{BDC}$ مکان هندسی کانونهای بیضیها و کمان $\widehat{BAC}$ مکان هندسی کانونهای هذلولیها است.

۶.۴.۶. چند ضلعی

۱.۶.۴.۶. مستطیل



۶۷۵. فرض می‌کنیم مستطیل ABCD، به ضلعهای $AB = 2b$ و $CB = 2a$ باشد. از نقطهٔ غیرمشخص F عمودهای PP' و QQ' را بر ضلعها اخراج می‌کنیم. می‌دانیم که حاصلضرب فاصله‌های یک کانون مقطع مخروطی از دو مماس موازی در بیضی مساوی $-b^2$ و در هذلولی برابر b^2 می‌باشد پس اگر F یکی از کانونهای مقطع مخروطی محاط در مستطیل باشد، داریم:

$$\overline{FP} \times \overline{FP'} = \overline{FQ} \times \overline{FQ'} \dots \quad (1)$$

بعکس، فرض می‌کنیم این تساوی برقرار باشد. یک مقطع مخروطی به کانون F و مماس بر سه ضلع مستطیل وجود دارد و از طرفی بنابه رابطهٔ (۱) این مقطع مخروطی بر ضلع چهارم مماس است.

بنابراین مقصود ما محاسبهٔ مکان نقطه‌های F است به‌طوری که بستگی $\overline{FP}\times\overline{FP'}=\overline{FQ}\times\overline{FQ'}$ برقرار باشد.

محور مختصات Ox و Oy موازی با ضلعهای مستطیل و گذرنده بر مرکز آن درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم x و y مختصات نقطهٔ F باشد داریم:

$$(a-x)(-a-x)=(b-y)(-b-y)\ ,$$

یا:

$$x^{2}-y^{2}=a^{2}-b^{2}$$

که معادلهٔ مکان است. این معادله نمایش یک هذلولی متساوی‌الساقین نسبت به محورهایش و گذرنده بر رأسهای مستطیل می‌باشد.

قسمت هذلولی داخل مستطیل، نمایش مکان کانونهای بیضیهای محاط در مستطیل، و قسمت خارج، مکان کانونهای هذلولی می‌باشد. بنابراین می‌توان گفت که یک مقطع مخروطی یک بیضی و یا یک هذلولی است برحسب این که، یک کانون، بین دو مماس موازی و یا خارج آن باشد. اگر $a=b$، یعنی اگر ABCD مربع باشد. مکان هندسی، نیمسازهای محورها که قطرهای مربعند، می‌باشند.

۶.۴.۷. دایره، خط، خط هادی

۶۷۶. این مکان هندسی دو خط راست متساوی‌الفاصله از خط هادی یک مقطع مخروطی (و موازی آن) است، که یکی از کانونهایش مرکز دایرهٔ داده شده است.

۶.۴.۸. هذلولی، مرکز، رأس

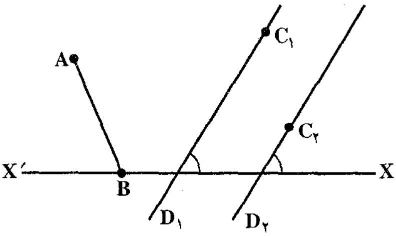
۶۷۷. وسطهای کلیه وترهای یک مقطع مخروطی که با امتداد Δ متوازی‌اند روی خط گذرنده بر مرکز مقطع مخروطی واقعند (قطر مزدوج امتداد Δ) اگر M و N محل تلاقی C با Δ (Δ بر P و Q می‌گذرد) باشند، دومین نقطهٔ تلاقی Δ را با هذلولی نقطهٔ I (I وسط PQ) می‌نامیم. از A به موازات Δ رسم می‌کنیم تا (C) را در Q′ قطع کند. بنابه خواص هذلولی، I وسط MN نیز هست پس I ، O و I′ وسط AQ روی یک خطند و نقطه‌های Q ، O و Q′ روی یک خطند داریم:

$$\frac{OQ}{OQ'}=\frac{OP}{OA}=\text{مقدار ثابت}$$

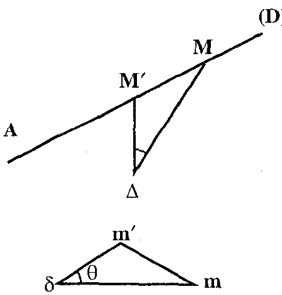
پس تمام نقطه‌های Q مجانس تمام نقطه‌های Q′ در تجانس به مرکز O و به نسبت

$\frac{OP}{OA}$ اند. اگر P داخل (C) باشد وقتی Q' روی (C) حرکت کند، نقطه‌های Q روی مقطع مخروطی (T) که مجانس (C) است حرکت خواهد کرد ؛ اگر P خارج B باشد قسمتی از (T) را طی خواهد کرد.

۵.۶ .شکلها به طور کلی



۶۷۸. شکل (F) را که طول نقطهٔ ثابتش A متشابه با خود به قسمتی تغییرمکان می‌دهد که نقطهٔ B خط $X'X$ را می‌پیماید در نظر می‌گیریم. اگر C_1 و C_2 دو نقطهٔ دلخواه از این شکل باشند، مکان هندسی آنها دو خط $C_1D_1Y_1$ و $C_2D_2Y_2$ خواهد بود که باهم موازی‌اند، زیرا با خط $X'X$ زاویهٔ ثابتی می‌سازند. پس این خطها مجانس یکدیگرند و مرکز تجانس آنها نقطهٔ A است.



۶۷۹. فرض کنیم Δ نقطه مضاعف همسانی است. دو نقطهٔ M و M' را روی (D) درنظر می‌گیریم. برای این که این نقطه‌ها متناظر باشند لازم و کافی است که :

$(\Delta M, \Delta M') = \theta$ و $\frac{\Delta M'}{\Delta M} = k$ (θ و k زاویه و نسبت همسانی‌اند) به عبارت دیگر $\Delta MM'$ باید مستقیماً با مثلث مفروض $\delta mm'$ متشابه باشد یعنی :

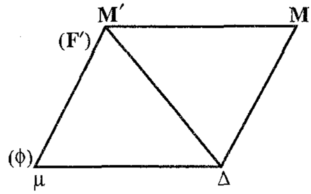
$(\Delta M, D) = (\delta m, mm')$;

$(\Delta M', D) = (\delta m', mm')$;

ملاحظه می‌شود که زوج (M, M') موجود و منحصر به فرد است (شکل).

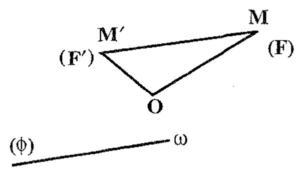
وقتی که (D) حول نقطهٔ ثابت A دوران کند زاویه‌های $(\Delta M, D)$ و $(\Delta M', D)$ ثابت می‌مانند و مکان M و M' دو دایرهٔ گذرنده بر Δ و A خواهند بود.

۶۸۰. زیرا اگر Δ نقطه مضاعف همسانی تعریف شده با (F) و (F') باشد همه مثلثهای $\Delta MM'$ متشابه خواهند بود، پس همه مثلثهای ΔMM_1 نیز باهم متشابه خواهند بود زیرا دارای یک زاویهٔ مساوی بین دو ضلع متناسب می‌باشند و $\frac{MM'}{M\Delta}$ مقداری ثابت است و مکان M_1 شکلی متشابه با (F) است.



۶۸۱. فرض کنیم Δ نقطه مضاعف همسانی شکلهای (F) و (F') (شکل) باشد. کافی است خاصیت مطلوب را وقتی O بر Δ منطبق است ثابت کنیم. به دو وضع نقطهٔ ثابت O برای مکان μ دو شکل که به‌وسیله انتقال متناظر یکدیگرند دارد که مستقیماً برابرند.

ΔM و $\Delta M'$ را می‌کشیم و $\Delta\mu$ را همسنگ با MM' رسم می‌کنیم، زاویهٔ $(\Delta M, \Delta M')$ و نسبت $\frac{\Delta M'}{\Delta M}$ وقتی که M و M' شکلهای (F) و (F') را طی کنند ثابت می مانند پس مثلث $\Delta MM'$ با یک مثلث مفروض مستقیماً متشابه خواهد بود، پس مثلث $\Delta\mu M'$ که مستقیماً با آن برابر است با یک مثلث مفروض متشابه است. و رأس Δ از آن، ثابت است. μ شکل (Φ) را طی خواهد کرد که مستقیماً با (F') متشابه است و Δ نیز نقطهٔ مضاعف در همسانی (Φ) و (F') است.



۶۸۲. در همسانی (F) و (Φ) فرض کنیم نقطهٔ O از (F) با نقطهٔ ω از (Φ) متناظر است. برای زوج نقطه‌های M و μ داریم (شکل):

مقدار ثابت $= \frac{OM}{\omega\mu}$ و مقدار ثابت $= (\widehat{OM, \omega\mu})$ ؛

پس نتیجه می‌گیریم مقدار ثابت $= \frac{OM}{MM'}$ و مقدار ثابت $= (OM, MM')$ ، بنابراین وقتی که M شکل (F) را طی کند مثلث OMM' با یک مثلث مفروض متشابه خواهد ماند. رأس O از آن، ثابت است بنابراین رأس M' شکل (F') که مستقیماً با (F) متشابه است طی خواهد کرد.

۶۸۳. برای این که $MM'M''$ قائمه باشد، لازم و کافی است که $PP'P''$ نیز قائمه گردد یعنی اگر $P'P''$ وتر مثلث باشد خواهیم داشت:

$$\overline{PP'}^{2} + \overline{PP''}^{2} - \overline{P'P''}^{2} = 0 \; ; \qquad (1)$$

اما:

$$PP' = \frac{\mu O'' \times OO'}{2R} \; ;$$

و

$$PP'' = \frac{\mu O' \times OO''}{2R} \; ;$$

و

$$P'P'' = \frac{\mu O \times O'O''}{2R} \; ;$$

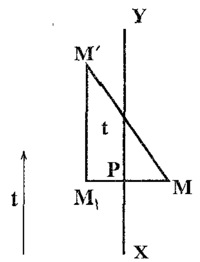
و رابطهٔ (۱) چنین می‌شود :

$$\overline{OO'}^{2}\times\overline{\mu O''}^{2}+\overline{OO''}^{2}\times\overline{\mu O'}^{2}-\overline{O'O''}^{2}\times\overline{\mu O}^{2}=0 \quad ;$$

مکان μ دایرهٔ (Γ) است که از O' و O'' می‌گذرد و بر دایرهٔ $OO'O''$ عمود است. اگر PP' یا PP'' وتر مثلث فرض شوند، دو دایره متعامد دیگر به‌دست می‌آید. و مکان M از قرینه‌های این سه دایره نسبت به $O'O''$ تشکیل می‌شود.

۶۸۴. می‌دانیم که هر تساوی معکوس نتیجه‌ای از یک تقارن نسبت به XY و یک انتقال t موازی با این محور می‌باشد، با فرض M متناظر آن M' را با تعیین قرینه M نسبت به XY به‌دست می‌آوریم، سپس M_1M' را همسنگ بردار انتقال می‌کشیم، داریم :

$$\overline{MM'}^{2}=\overline{M_1M}^{2}+\overline{M_1M'}^{2}=4\overline{PM}^{2}+t^{2}$$



برای این که MM' برابر l شود، لازم و کافی است که $\overline{PM}^{2}=\frac{l^{2}-t^{2}}{4}$ و از آن‌جا :

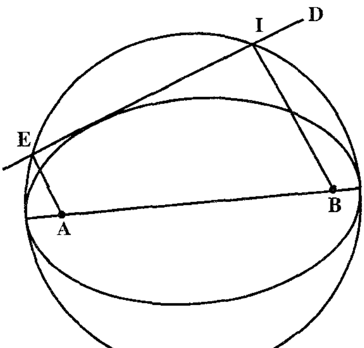
$PM=\frac{1}{2}\sqrt{l^{2}-t^{2}}$ و برای این که M وجود داشته باشد باید $l\geq t$ با این شرط مکان M از دو خط موازی با XY و به فاصلهٔ $\frac{1}{2}\sqrt{l^{2}-t^{2}}$ تشکیل می‌گردد.

راهنمایی و حل مسأله‌های بخش ۷. پوش

۲.۷. نقطه، خط، زاویه

۱.۲.۷. نقطه‌های ثابت

۱.۱.۲.۷. دو نقطه

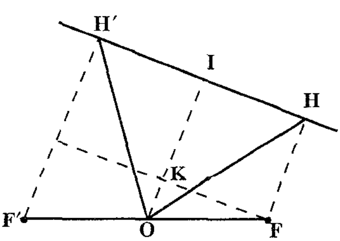


۶۸۵. اگر A و B نقطه‌های ثابت و D یکی از خطهای متغیر باشد به‌نحوی که داشته باشیم:

$BI + AE = k^2$

در این صورت I و E بترتیب تصویرهای B و A روی خط D بوده و بنا به تعریف بیضی و هذلولی، A و B می‌توانند کانونهای یک بیضی یا هذلولی، و D مماس بر آن و I و E تصویرهای کانونها بر دایرهٔ اصلی فرض نمود لذا می‌توان گفت پوش خطهای D بیضی یا هذلولی است به کانونهای A و B و قطر کوچک k.

یادآوری. اگر A و B یک طرف خطهای D باشند، پوش آنها بیضی و چنانچه A و B در دو طرف D باشند، پوش خطهای D هذلولی است.



۶۸۶. این مسأله نیز عکس نتیجه‌ای از قضایایی است که در هندسه ذکر می‌شود. در این جا ما مستقیماً مسأله را حل می‌کنیم. چون: $F'H' \times FH = b^2$ مقداری ثابت است (اگر خط در یک سمت نقطه‌های F و F′ باشد این حاصلضرب مثبت والّا منفی خواهد بود یعنی اگر خط امتداد FF′ را در بیرون قطعهٔ FF′ قطع کند حاصلضرب مثبت و اگر در درون قطعهٔ F′F قطع کند حاصلضرب منفی خواهد بود)، در این شکل این مقدار ثابت مثبت

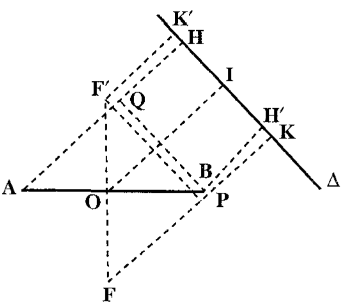
است، عمودمنصف HH' خط FF' را در نقطهٔ O وسط آن قطع می‌کند و $OH = OH'$ خواهد بود ولی :

$$4F'H' \times FH = (F'H' + FH)^2 - (F'H' - FH)^2$$

و چون $F'H' + FH = 2OI$ و $F'H' - FH = 2OK$ پس لازم است که : $OI^2 - OK^2 = b^2$ باشد و چون $\overline{OK}^2 = \overline{OF}^2 - \overline{KF}^2$ و یا $\overline{OK} = c^2 - \overline{IH}^2$ و چون $KF = IH$ و OF طول ثابتی است (مثلاً برابر c) پس :

$$\overline{OI}^2 + \overline{IH}^2 = c^2 + b^2 \quad \text{و یا} \quad \overline{OI}^2 - (c^2 - \overline{IH}^2) = b^2$$

و چون $\overline{OI}^2 + \overline{IH}^2 = \overline{OH}^2$ پس $OH = \sqrt{b^2 + c^2} = a$. مکان هندسی نقطهٔ H دایره‌ای به مرکز O است و زاویهٔ قائمهٔ $H'HF$ چنان حرکت می‌کند که رأس H آن دایره‌ای به مرکز O طی می‌کند. وضع اوّل HF بر نقطهٔ ثابت F می‌گذرد، پس اوضاع مختلف ضلع دوم HH' بر بیضی یا هذلولی ثابتی مماس است که F و F' کانونهای آن می‌باشد. تمیز هذلولی و بیضی اشکالی ندارد.



۶۸۷. خط متغیر Δ چنان است که $\overline{AH}^2 + \overline{BH'}^2 = k^2$ مقداری ثابت است. چون مربع $BFAF'$ را به قطر AB تکمیل کنیم، مشاهده می‌شود که :

$$AH + BH' = FK + F'K' = 2OI$$

(O وسط AB می‌باشد) و اگر $F'P$ و BQ را موازی خط Δ رسم کنیم، روشن است که دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $F'FP$ و ABQ برابرند. بنابراین $F'P = AQ$.

از طرف دیگر بنا به رابطهٔ : $\overline{AH}^2 + \overline{BH'}^2 = k^2$ خواهیم داشت :

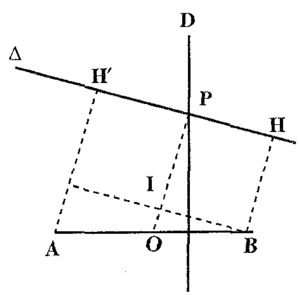
$$(\overline{AH} + \overline{BH'})^2 + (\overline{AH} - \overline{BH'})^2 = 2k^2$$

یعنی $4\overline{OI}^2 + \overline{AQ}^2 = 2k^2$ ولی $AQ = F'P = KK'$ پس $4\overline{OI}^2 + \overline{KK'}^2 = 2k^2$ و $\overline{KK'}^2 = 4\overline{IK}^2$ پس :

$\overline{OI}^2 + \overline{IK}^2 = \dfrac{k^2}{2}$ و چون $\overline{OI}^2 + \overline{IK}^2 = \overline{OK}^2$ ، پس OK مقداری ثابت است و مسأله

به مسألهٔ قبل منجر می‌شود. زاویهٔ قائمهٔ $KK'F$ چنان است که رأس K آن دایره‌ای به مرکز O می‌پیماید و ضلع KF آن بر نقطهٔ ثابت F مرور می‌کند، پس ضلع Δ آن بر بیضی یا هذلولی ثابتی مماس است. از این مسأله معلوم می‌شود که اگر در بیضی یا هذلولی مربعی بر روی دو کانون (به‌قسمی که بعد کانونی قطر مربع باشد) بنا شود، برای خط مماس، این خواص وجود دارد: حاصلضرب فاصله‌های دو کانون از مماس مقداری ثابت است و مجموع مربعات فاصله‌های دو رأس دیگر مربع کانونی از مماس، مقداری ثابت است.

۶۸۸. راه‌حل اوّل. خط متغیر Δ چنان است که $\overline{AH'}^{۲} - \overline{BH}^{۲} = k^{۲}$ مقداری ثابت است



ولی: $\overline{AH'}^{۲} - \overline{BH}^{۲} = (\overline{AH'} + \overline{BH})(\overline{AH'} - \overline{BH})$

و $AH' + BH = ۲OP$

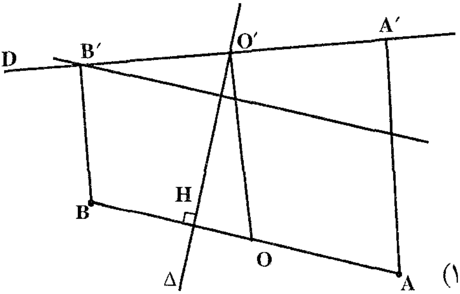
و $AH' - BH = ۲OI$

پس $۴ \times OP \times OI = k^{۲}$

و یا $OP \times OI = \frac{k^{۲}}{۴}$

و چون مکان I دایره‌ای است به قطر OB، پس مکان P، منعکس این دایره به قوت $\frac{k^{۲}}{۴}$ نسبت به قطب O می‌باشد؛ یعنی خط ثابت D.

زاویهٔ قائمهٔ HPO که رأس P آن خط ثابت D را می‌پیماید چنان است که ضلع اوّل PO بر نقطهٔ ثابت O مرور می‌کند پس اوضاع مختلف ضلع دوم Δ بر سهمی ثابتی به کانون O که مماس بر رأس آن خط D است همواره مماس است.



راه‌حل دوم. با توجه به شکل روبه رو اگر D یک وضع خط متغیر و A' و B' بترتیب تصویرهای A و B روی آن باشند، داریم :

$$(۱)\quad AA'^{۲} - BB'^{۲}$$

$$= (AA' + BB')(AA' - BB') = ۲OO'.A'E = k^{۲}$$

از تشابه دو مثلث $A'B'E$ و $OO'H$ نتیجه می‌شود :

$$(۲)\quad OO'.A'E = B'E.OH \text{ و یا } \frac{OO'}{B'E} = \frac{OH}{A'E}$$

از ملاحظه رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$\overline{AA'}^{۲} - \overline{BB'}^{۲} = ۲OH.B'E = k^{۲}$$

و یا $$OH = \frac{k^{۲}}{۲B'E} = \frac{k^{۲}}{۲AB} = \text{مقدار ثابت}$$

که چون O وسط AB و طول OH ثابت است H و از آن‌جا A ثابت خواهد بود. یعنی مکان تصویر (O) روی خط متغیر D پیوسته بر خط ثابت Δ واقع است که در این صورت بنا به تعریف و خواص سهمی، Δ می‌تواند مماس بر سهمی در رأس آن باشد. لذا پوش D سهمی است به کانون (O) و رأس H و محور تقارن AB.

۶۸۹. دو نقطهٔ C و D را نسبت به A و B مزدوج با رابطه‌های زیر

$$\frac{DA}{DB} = \frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}} \text{ و } \frac{CA}{CB} = -\frac{\sqrt{\beta}}{\sqrt{\alpha}}$$

اختیار می‌کنیم (البته اگر $\alpha = \beta$ باشد نقطهٔ D در بینهایت دور خواهد بود) اگر S نقطهٔ تقاطع خط متغیر Δ با خط AB باشد. رابطه‌های :

$$\frac{AH}{DQ} = \frac{SA}{SD} \quad , \quad \frac{AH}{CP} = \frac{SA}{SC}$$

به‌دست می‌آیند و بنابراین :

$$\frac{\overline{DQ}}{\overline{SD}} = \frac{\overline{CP}}{\overline{SC}} \text{ و همچنین } \overline{AH} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SD}}.\overline{DQ} = \frac{\overline{SA}}{\overline{SC}}.\overline{CP}$$

از رابطهٔ اخیر، مقدارهای SC و SD از روی $\overline{DQ}.\overline{CP}$ به‌دست می‌آیند :

($\overline{SD}-\overline{SC}=\overline{CD}$ معلوم است) و

$$\overline{SD}=\frac{\overline{DQ}}{\overline{DQ}-\overline{CP}}.\overline{CD}\ ,\ \ \overline{SC}=\frac{\overline{CP}}{\overline{DQ}-\overline{CP}}.\overline{CD}$$

بنابراین $\overline{SA}=\overline{SC}-\overline{AC}$ و یا $\overline{SA}=\dfrac{\overline{AD}.\overline{CP}-\overline{AC}.\overline{DQ}}{\overline{DQ}-\overline{CP}}$ و همچنین برای $\overline{SB}$:

$$\overline{BK}=\frac{\overline{SB}}{\overline{SC}}.\overline{CP}=\frac{\overline{SB}}{\overline{SD}}.\overline{DQ}$$

بنابراین پس از محاسبه‌های نظیر محاسبه‌های بالا :

$\overline{SB}=\dfrac{\overline{BD}.\overline{CP}+\overline{CB}.\overline{DQ}}{\overline{DQ}-\overline{CP}}$ پس $\overline{SB}=\overline{SC}+\overline{CB}$

بنابراین $\alpha\overline{AH}^2-\beta\overline{BK}^2$ برابر خواهد بود با :

$$\frac{\alpha(\overline{AD}.\overline{CP}-\overline{AC}.\overline{DQ})^2-\beta(\overline{BD}.\overline{CP}+\overline{CB}.\overline{DQ})^2}{\overline{CD}^2}$$

که پس از بسط به صورت :

$$\frac{(\alpha\overline{AD}^2-\beta\overline{BD}^2)\overline{CP}^2+(\alpha\overline{AC}^2-\beta\overline{CB}^2)\overline{DQ}^2}{\overline{CD}^2}$$

$$-\frac{2(\alpha\overline{AD}.\overline{AC}+\beta\overline{BD}.\overline{CB})\overline{CP}.\overline{DQ}}{\overline{CD}^2}$$

نوشته می‌شود و چون بنابر رابطه‌های تعریف نقطه‌های C و D :

$$\alpha\overline{AC}^2-\beta\overline{CB}^2=\alpha\overline{AD}^2-\beta\overline{DB}^2=0$$

پس $\alpha\overline{AH}^2-\beta\overline{BK}^2=k^2$ رابطهٔ :

$$\frac{-2(\alpha\overline{AD}.\overline{AC}+\beta\overline{BD}.\overline{CB})\overline{CP}.\overline{DQ}}{\overline{CD}^2}=k^2$$

را به‌دست می‌دهد.

در طرف اوّل عبارت داخل پرانتز مقداری است ثابت زیرا مقدارهای AD، AC، BD و CB همگی مقدارهای ثابتی می‌باشند و بعلاوه :

$\alpha\overline{AD}.\overline{AC}=\beta\overline{BD}.\overline{CB}$ می‌باشد. پس $\overline{CP}.\overline{DQ}=h^2$ مقداری ثابت است. یعنی

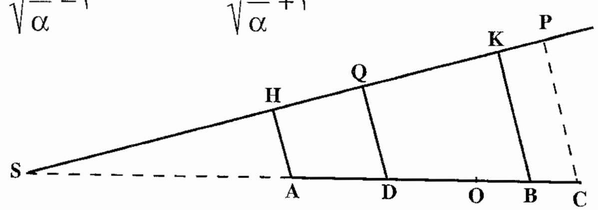
اوضاع مختلف خط، بر بیضی یا هذلولی به کانونهای C و D مماس می‌باشند. اگر $\alpha=\beta$ باشد، پوش سهمی خواهد بود.

تبصره. با ملاحظهٔ این که دو نقطهٔ متقارن نسبت به کانون سهمی نسبت به این نقطه و نقطهٔ بینهایت دور (کانون دوم سهمی) مزدوج می‌باشند، می‌شود این مسأله را به‌صورت قضیهٔ زیر ذکر کرد:

قضیه. اگر دو نقطه بر محور کانونی یک مقطع مخروطی نسبت به کانونها مزدوج توافقی باشند و نسبت هر نقطه نسبت به دو کانون (قدر نسبت فاصله‌های این نقطه از دو کانون) عدد $h=\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}$ باشد، ترکیب خطی $\overline{AH}^2-h^2.\overline{BK}^2$ مقداری ثابت است. AH و BK فاصله‌های دو نقطهٔ مفروض از یک مماس مقطع مخروطی می‌باشند (در مورد سهمی چون یک کانون در بینهایت است $h=1$ می‌باشد).

۶۹۰. دو نقطهٔ C و D بر روی AB چنان اختیار می‌کنیم که:

$$\frac{DB}{DA}=-\frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}+1}{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}-1}\ ,\ \frac{CB}{CA}=-\frac{\sqrt{\frac{\alpha}{\beta}}-1}{\sqrt{\frac{\beta}{\alpha}}+1}$$



در این صورت به سهولت می‌شود ثابت کرد که اگر O نقطهٔ وسط CD باشد رابطه‌های زیر محقق است:

$$\sqrt{\alpha}\ \overline{OC}+\sqrt{\beta}\ \overline{OB}=0\ ,\ \alpha\overline{OA}+\beta\overline{OB}=0$$
$$\sqrt{\alpha}\ \overline{OA}-\sqrt{\beta}\ \overline{OC}=0$$

و

حال می‌توان مقدارهای AH و BK را با تشابه مثلثهای SAH و SDQ و SKB و SCP به‌دست آورد:

$$\frac{\overline{CP}}{\overline{DQ}}=\frac{\overline{SC}}{\overline{SD}}\ ,\ \frac{\overline{AH}}{\overline{CP}}=\frac{\overline{SA}}{\overline{SC}}\ ,\ \frac{\overline{AH}}{\overline{DQ}}=\frac{\overline{SA}}{\overline{SD}}$$

پس $\frac{\overline{SC}}{\overline{DC}}=\frac{\overline{CP}}{\overline{CP}-\overline{DQ}}$ و $AH=\frac{SA}{SC}\times\frac{1}{CP}$ و چون $\overline{SA}=\overline{SC}-\overline{AC}$

پس
$$\overline{AH}=\frac{\overline{AC}.\overline{DQ}-\overline{AD}.\overline{CP}}{\overline{CD}}$$

و همچنین
$$\overline{BK}=\frac{\overline{BD}.\overline{CP}+\overline{CB}.\overline{DQ}}{\overline{CD}}$$

بنابراین عبارت $\alpha\overline{AH}^2+\beta\overline{BK}^2=k^2$ بدل می‌شود به عبارت :

$$\frac{(\alpha\overline{AC}^2+\beta\overline{CB}^2)\overline{DQ}^2+(\alpha\overline{AD}^2+\beta\overline{DB}^2)\overline{CP}}{\overline{CD}^2}$$
$$+\frac{2\overline{CP}.\overline{DQ}(\alpha\overline{AD}.\overline{AC}-\beta\overline{CB}.\overline{BD})}{\overline{CD}^2}=k^2$$

چون عبارت $\alpha\overline{AC}^2+\beta\overline{CB}^2$ و $\alpha\overline{AD}^2+\beta\overline{BD}^2$ را از روی تعریفهای نقطه‌های C و D حساب کنیم، مشاهده می‌شود که :

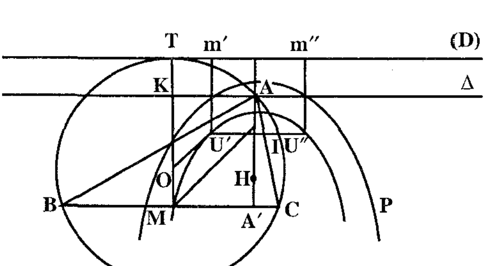
$$\alpha\overline{AD}^2+\beta\overline{BD}^2=\alpha\overline{AC}^2+\beta\overline{CB}^2=\frac{2\alpha\beta}{\alpha+\beta}\overline{AB}^2$$

و عبارت $\alpha\overline{BD}.\overline{CB}-\beta\overline{AC}.\overline{AD}=0$ می‌باشد. پس نتیجه می‌شود که

$$\alpha\overline{AH}^2+\beta\overline{BK}^2=\frac{2\alpha\beta\overline{AB}^2}{\alpha+\beta\overline{CD}^2}(\overline{CI}^2+\overline{DQ}^2)=k^2$$

و یا $\overline{CP}^2+\overline{DQ}^2=h^2$ که مقداری ثابت است. مجموع مربعهای فاصله‌های نقطه‌های C و D از خطهای متغیری مقداری ثابت است. اوضاع مختلف این خطها بر بیضی یا هذلولی ثابتی مماس می‌باشند.

۲.۱.۲.۷. مسأله‌های ترکیبی



۶۹۱. ۱. در مثلث ABC وسط ارتفاع AH را I و پای ارتفاع رأس A را A′، عمود رسم شده از A بر AH را Δ و تصویر M را بر Δ نقطهٔ K می‌نامیم. چون O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است پس $AH=2OM$ یعنی : $\overrightarrow{AI}=\overrightarrow{OM}$ پس چهارضلعی OAIM متوازی‌الاضلاع است در نتیجه :

$$MI=OA, OA=AA'=MK$$

از آنجا
$$MI=MK$$

پس نقطهٔ M روی سهمی (II) به کانون I و به خط هادی Δ است. بعکس یک نقطهٔ M از سهمی بالا حتماً وسط BC خواهد بود. نقطه O را با شرط : $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{IA}$ در نظر می‌گیریم. دایرهٔ به مرکز O بر A می‌گذرد و عمود رسم شده از M بر OM را قطع می‌کند وقتی که $OA > OM$ و یا $IM > IA$ باشد. بنابراین اگر M خارج دایرهٔ به مرکز I که بر A می‌گذرد باشد، این دایره سهمی (II) را در دو نقطهٔ u' ، u'' که بر روی عمود رسم شده از I بر IA واقعند، قطع می‌کند. شرط بالا بیان می‌کند که M روی یک کمان دیگری از سهمی (II) که به وسیله خط $u'u''$ ایجاد شده واقع است (در نیمهٔ صفحه‌ای که شامل H است و خارج $u'u''$ مکان M است).

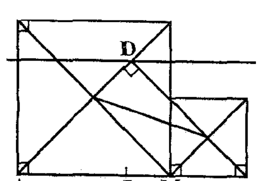
۲. رابطهٔ $\overrightarrow{MO} = \overrightarrow{IA}$ نشان می‌دهد که مکان هندسی نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC، از مکان هندسی نقطهٔ M با انتقال بردار $\overrightarrow{IA}$ به‌دست می‌آید. اگر D خطی باشد که در این انتقال از Δ نتیجه شده باشد، مکان O دو کمان از سهمی P به کانون A و به خط هادی D است که در همان نیمصفحه نسبت به Δ واقع است. در نتیجه دایره‌ای که همواره بر A می‌گذرد بر D مماس است. اگر m' و m'' تصویرهای u' و u'' بر D باشد، پوش دایرهٔ O، خط (D) است.

۲.۲.۷. پاره‌خطهای ثابت

۶۹۲. به موجب عکس قضیهٔ آپولونیوس لفاف قطعه خط AC، قوسی است از یک سهمی که DM و DN دو مماس بر آن می‌باشند.

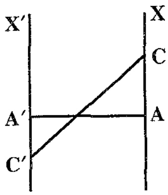
راه دیگر. سهمی مماس در نقطه‌های M و N بر خطهای داده شده بر تمام خطهای AC که پاره‌خطهای DM و DN را به نسبت عکس تقسیم می‌کنند، مماس است. پس قوسی از این سهمی، پوش خطهای AC است.

۶۹۳. کانون این سهمی وسط پاره‌خط AB و خط هادی آن خطی است که از نقطهٔ D رأس قائم مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ADB موازی AB رسم می‌شود.



۳.۲.۷. خطهای ثابت

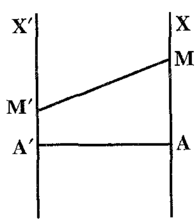
۱.۳.۲.۷. خطهای موازی



۶۹۴. هذلولی به رأسهای A و ′A که طول محور کوچک آن 2b می‌باشد در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ C بر این منحنی مماسی (غیر از CA) رسم می‌کنیم و فرض کنیم ″C فصل مشترکش با ′X باشد؛ داریم:

$$\overline{AC}\times\overline{A'C''}=-b^2;$$

ولی بنا به فرض $\overline{AC}\times\overline{A'C'}=-b^2$؛ بنابراین ″C و ′C بر هم منطبق و ′CC مماس بر هذلولی و در نتیجه پوش خطهای ′CC می‌باشد. زیرا وقتی که C خط X را طی کند، ′CC بر تمام مماسهای بر این منحنی منطبق خواهد شد (شکل).



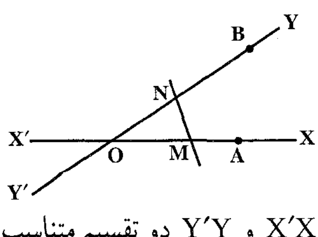
۶۹۵. فرض می‌کنیم $AM\times A'M'=k^2$; $AA'=2a$ باشد. بیضی که یکی از محورهایش ′AA و طول محور دومش 2k می‌باشد در نظر می‌گیریم (شکل) از نقطهٔ M مماسی بر این بیضی رسم می‌کنیم (غیر از AM) و فرض می‌کنیم ″M فصل مشترک آن با ′X باشد. ″M نسبت به ′AA در طرفی است که نقطه M قرار دارد. از طرف دیگر داریم:

$$AM\times A'M''=k^2;$$

بنابراین: $AM\times A'M''=AM\times A'M'$ و $A'M''=A'M'$

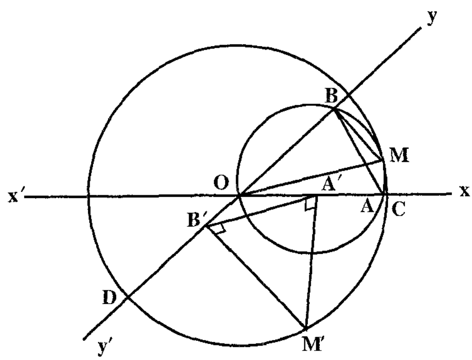
بنابراین ′M و ″M و در نتیجه ′MM و ″MM بر هم منطبقند و ′MM بر بیضی مماس است.

۲.۳.۲.۷. خطهای متقاطع



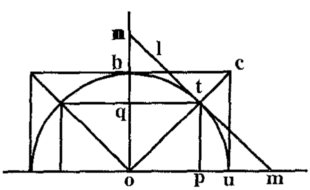
۶۹۶. در دو تقسیم متناسب مفروض فرض می‌کنیم A نقطه‌ای از X′X که متناظر O از Y′Y و B نقطه‌ای از Y′Y که متناظر O از X′X است باشد. سهمی (P) که در A و B بر X′X و Y′Y بترتیب مماس است در نظر می‌گیریم. مماسهای بر این سهمی روی X′X و Y′Y دو تقسیم متناسب تشکیل می‌دهند که در آنها A با O و O با B متناظر است. بنابراین، این تقسیمها برابرند با تقسیمهای داده شده. از آن‌جا نتیجه می‌شود که خطهایی که نقطه‌های متناظر را در دو تقسیم داده شده به هم وصل می‌کند مماس بر سهمی (P) می‌باشند.

۶۹۷. پوش پاره‌خط AB شبه آسترویيدی است که محورهای تقارنش نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط متقاطع x′Ox و y′Oy است.



۶۹۸. پوش دایرهٔ محیطی مثلث ABC، یک دایره است.

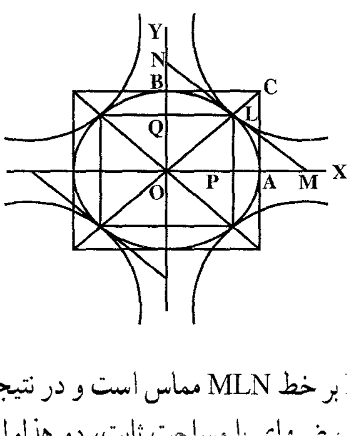
۶۹۹. مساحت بیضی داده شده برابر πab است.



همچنین داریم:

$OA.OB =$ مقدار ثابت $= 2k^2$

با مراجعه به شکل (الف) بلافاصله تشخیص داده می‌شود که با تبدیل کردن، مختصات دایره با یک نسبت داده شده به شکل (ب) و نتیجه‌های زیر می‌رسیم:



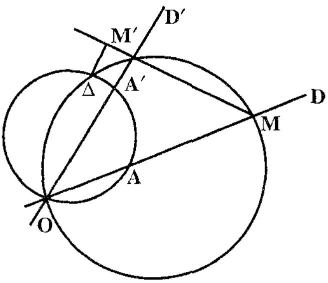
مستطیل OPLQ نصف مستطیل OACB است. بنابراین مساحتش برابر k^2 است. خط مماس MLN به وسیلهٔ نقطهٔ تماس به دو پاره‌خط مساوی تبدیل می‌شود و مثلث MON مساحت ثابتی دارد زیرا دو برابر مستطیل OPLQ است. اکنون به نتیجهٔ زیر می‌رسیم:

هذلولی متساوی‌الساقین با قوّت k^2، در نقطهٔ L بر خط MLN مماس است و در نتیجه بر بیضی داده شده مماس است. در نتیجه پوش بیضیهای با مساحت ثابت، دو هذلولی متساوی‌الساقین است که Ox و Oy مجانبهای آن و k^2 قوت آنها هستند.

۳.۳.۲.۷. سه خط

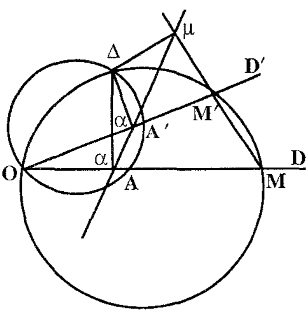
۷۰۰. بر روی خطهای جهتدار Δ و Δ' مواقع خاص M و M' را A و A' بنامید. نشان دهید M و M' روی Δ و Δ' قسمتهای مشابه طی می‌کنند. نتیجه بگیرید که پوش MM' سهمی می‌باشد که کانون آن نقطه‌ای است که بردار $\overrightarrow{AM}$ را به $\overrightarrow{A'M'}$ تبدیل می‌کند.

۴.۳.۲.۷. مسأله‌های ترکیبی



(الف)

۷۰۱. ۱. نقطه‌های M و M' دو تقسیم متشابه را طی می‌کند و Δ نقطهٔ مضاعف این همسانی نقطهٔ دیگر تلاقی دو دایرهٔ (OAA') و (OMM') است پس هر دایرهٔ مانند (شکل الف) (O, M, M') از Δ می‌گذرد.



(ب)

۲. Δ روی دایرهٔ محیطی مثلث OMM' است. تصویرهای آن روی ضلعهای مثلث یعنی نقطه‌های α، α' و μ به موجب قضیه سمسون روی یک خط راست واقعند. پس مکان μ خط $\alpha\alpha'$ است (شکل ب). زاویهٔ قائمه $\Delta\mu M$ را در نظر می‌گیریم. رأسش μ خط ثابت $\alpha\alpha'$ را طی می‌کند، یکی از ضلعهایش از نقطهٔ ثابت Δ می‌گذرد، پس لفاف یا پوش ضلع دیگر یک سهمی است به کانون Δ که مماس در رأس آن $\alpha\alpha'$ است.

۷۰۲. ۱ و ۲. نقطه‌های A' و B' را بترتیب روی Ox و Oy طوری می‌گیریم که $OA' = OB' = a$ باشد. داریم:

$$AA' = OA' - OA = a - OA = OB$$

و از آن‌جا:

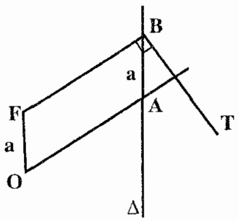
$$(\overrightarrow{A'A}, \overrightarrow{OB}) = ۹۰^\circ \quad \text{و} \quad AA' = OB$$

از آن‌جا بردار $\overrightarrow{OB}$ از انتقال بردار $\overrightarrow{A'A}$ به زاویهٔ $-\frac{\pi}{۲}$ و به مرکز F به‌دست آمده است.

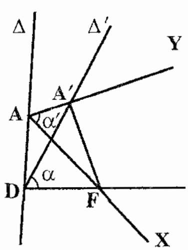
نقطهٔ I محل تلاقی عمودمنصفهای OA' و OB' است. نقطه‌های A و B در این دوران متناظر هم، و عمودمنصف AB بر F می‌گذرد. مثلثهای FAB و FAI قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقیند.

۴.۲.۷. خطهای ثابت، نقطه‌های ثابت

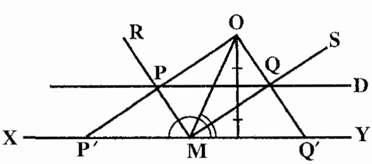
۱.۴.۲.۷. یک خط، یک نقطه



۷۰۳. از O همسنگ $\overrightarrow{AB}$، $(\overrightarrow{OF})$ را رسم می‌کنیم. FB موازی OA است. پس FB بر BT عمود است (شکل). وقتی که AB روی Δ بلغزد، رأسهای B زاویهٔ قائمهٔ FBT، روی Δ تغییر می‌کند و ضلع BF هم از نقطهٔ ثابت F می‌گذرد؛ در نتیجه پوش BT یک سهمی است به کانون F، که خط Δ مماس در رأس آن می‌باشد.



۷۰۴. فرض کنیم $X\hat{A}Y = \alpha$ باشد؛ FD و FA′ را عمود بر Δ و AY رسم می‌کنیم (شکل) چهارضلعی FDAA′ محاطی است (چرا؟) پس $F\hat{D}A' = \alpha$ است؛ نقطهٔ A′ روی خط ثابت Δ′ که از D گذشته و با DF زاویهٔ α می‌سازد تغییر می‌کند. از طرفی ضلع A′Y از زاویهٔ قائمهٔ FA′Y که رأس آن روی Δ′ تغییر می‌کند؛ و ضلع A′F از نقطهٔ ثابت F می‌گذرد؛ پوشش یک سهمی است به کانون F که مماس در رأس آن Δ′ می‌باشد.



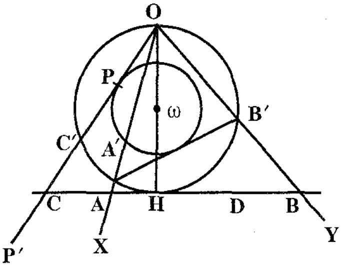
۷۰۵. فرض کنیم MR و MS نیمسازهای زاویه‌های حاصل از XY و MO باشند. OPP′ و OQQ′ را بر این خطها عمود می‌کنیم (شکل).

در دو مثلث متساوی‌الساقین OMP′ و OMQ′ (چرا؟) داریم:

$$OP = \frac{OP'}{۲}; \qquad OQ = \frac{OQ'}{۲};$$

در نتیجه نقطه‌های P و Q روی خط D (عمود وارده بر وسط فاصلهٔ O تا XY) موازی با XY تغییر می‌کند.

پس وقتی که M روی XY تغییر کند؛ رأسهای P و Q زاویه‌های قائمه OPR و OQS، که ضلعهای OP و OQ آن از نقطهٔ ثابت O می‌گذرند، روی خط ثابت D تغییر می‌کنند؛ پس پوش ضلعهای PR و QS یک سهمی است به کانون O که مماس در رأس آن، خط D می‌باشد.



۷۰۶. فرض کنیم OAB مثلثی باشد که از D و ضلعهای زاویهٔ XOY تشکیل می‌شود. شکل را نسبت به O و با قوت $OH^۲$ مربع فاصلهٔ O از D منعکس می‌کنیم. منعکس D دایرهٔ به قطر OH و منعکس دایرهٔ محیطی مثلث OAB، خط $A'B'$ است.

بنا به فرض زاویهٔ $A'\hat{O}B'$ α مساوی یا $۲^d - \alpha$ است و پوش $A'B'$ دایرهٔ (ω) است که متحدالمرکز با دایرهٔ به قطر OH است (شکل). پوش دایرهٔ محیطی مثلث AOB منعکس دایرهٔ (ω) است که آن را رسم می‌کنیم، مرکز این دایره روی OH است و با خط OP یعنی مماس رسم شده از قطب انعکاس O بر دایره (ω) در P' نیز مماس است و داریم :

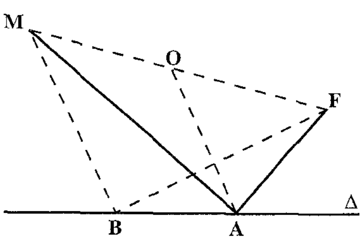
$$OP.OP' = \overline{OH}^۲ = OC \times OC' \;;$$

اما $$OC' = ۲OP \;;$$

پس $$OP.OP' = ۲OC \times OP \;;$$

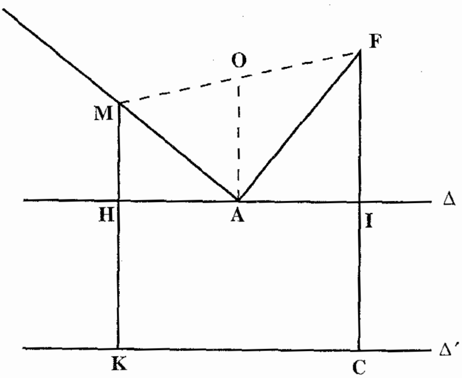
و یا $$OP' = ۲OC \;;$$

به این ترتیب P' به‌دست می‌آید. اگر I' (در شکل نیست) محل تلاقی OH با عمود رسم شده از P' بر OP' باشد پوش دایرهٔ محیطی مثلث OAB دایره‌ای به مرکز I' و به شعاع $I'P'$ است.



۷۰۷. حل این مسأله در واقع همان قضیهٔ معروف هندسه است که در کتابهای هندسه تدریس می‌شود : تصویر کانون سهمی بر روی مماسهای یک سهمی خط مماس بر رأس سهمی می‌باشد ولی در مسأله ما مستقیماً به تعیین این سهمی می‌پردازیم. بدین صورت که زاویهٔ قائمهٔ FAM را در نظر می‌گیریم که رأس A آن بر خط ثابت Δ قرار دارد و ضلع اوّل آن بر نقطهٔ ثابت F می‌گذرد، ضلع دوم به وضع AM قرار می‌گیرد. اکنون مسأله را برعکس طرح می‌کنیم یعنی می‌کوشیم خطی که از نقطهٔ معین M چنان رسم شود که زاویهٔ قائمهٔ MAF صاحب خاصیت مذکور باشد، تعیین کنیم. بدیهی است که رأس زاویهٔ قائمهٔ مطلوب بر روی دایرهٔ به قطر MF قرار دارد و این دایره، خط Δ را معمولاً در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند ؛ یعنی مسأله دو جواب دارد و زاویه‌های قائمهٔ MAF و MBF هر دو صاحب این خاصیتند که رأس

آنها بر Δ قرار دارد و ضلع اول آنها بر نقطهٔ F مرور می کند، پس از نقطهٔ معین M چنین زاویه‌های قائمه به دو صورت وجود دارند و یا اگر ضلعهای دوم این زاویه‌ها را (یعنی MA و MB) را مماس بر منحنی فرض کنیم معمولاً از نقطهٔ M در صفحه دو مماس از این نقطه بر منحنی رسم می‌شود. اکنون می کوشیم که مکان نقطهٔ M را چنان تعیین کنیم که این دو مماس منطبق باشند. مکان نقطهٔ M همان منحنی خواهد بود که خطهای MA و MB بر آن مماسند (دو مماس بر هم وقتی منطبق می‌شوند که نقطهٔ مفروض بر روی منحنی قرار گیرد) اگر دو مماس MA و MB منطبق شوند نقطه‌های A و B بر هم منطبق می‌شوند و دایرهٔ به قطر MF باید بر خط Δ مماس باشد، در این صورت مرکز این دایره بر خط AO که از نقطهٔ A بر Δ عمود می‌شود قرار دارد و ضمناً قطر دایره در نقطهٔ O نصف می‌شود؛ یعنی: $OM = OA = OF$ خواهد بود ولی $MF = ۲OA$ یعنی $MF = MH + FI$؛ پس اگر عمود

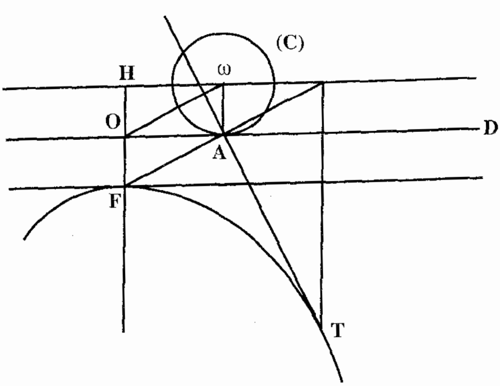


FI را به اندازهٔ $IC = HK$ برابر FI امتداد دهیم روشن است که $MK = MF$ خواهد بود؛ یعنی مکان M سهمی است به کانون F که خط هادی آن خط Δ' و خط مماس بر رأس آن خط Δ می‌باشد و قضیه ثابت می‌شود.

۷۰۸. مرکز دایرهٔ (C) را ω و محل تماس دایره را با D نقطهٔ A می‌نامیم و نقطهٔ ثابت F را چنان می‌گیریم که داشته باشیم:

$$\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{\omega A}$$

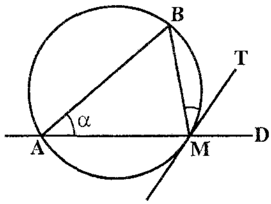
قطبی نقطهٔ O نسبت به دایرهٔ C، خطی است که از A بر $O\omega$ عمود شود؛ یعنی عمود رسم شده



از A بر FA، چون $\overrightarrow{OF} = \overrightarrow{\omega A}$ است، پس $O\omega$ موازی با FA است بنابراین قطبی O مماس است بر سهمی به کانون F و خط D بر رأس آن سهمی مماس است. این سهمی

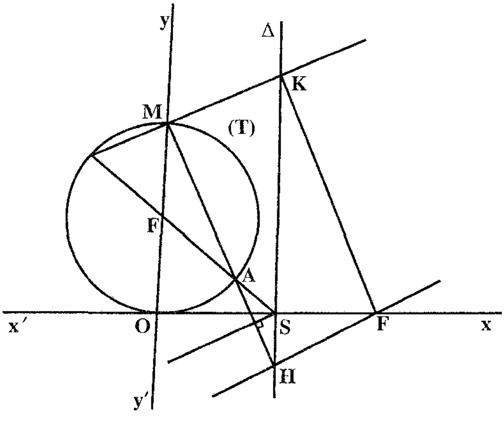
پوش یک نقطه ثابت از P است، خط هادی این سهمی خطی است که از H (قرینهٔ F نسبت به O) به موازات D رسم شود (کلیه نقطه‌های ω روی این خط است) اگر محل تلاقی FB را با خط هادی، K بنامیم و محل تلاقی قطبی O با پوش، نقطه T محل تلاقی عمود رسم شده از K بر خط هادی سهمی با سهمی است.

۷.۲.۴.۲. یک خط، دو نقطه

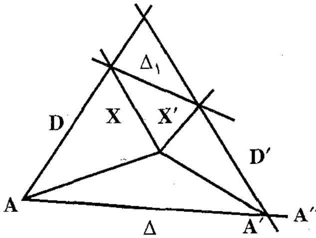


۷۰۹. فرض کنیم MT مماس در M باشد. زاویهٔ BMT مساوی $\hat{BAM} = \alpha$ می‌باشد. (چون D و AB معلومند، زاویهٔ بین آنها یعنی α نیز معلوم است.) پس $\hat{BMT} = \alpha$ است. رأس M این زاویه روی خط D تغییر می‌نماید و ضلع BM آن همواره از نقطهٔ ثابت B می‌گذرد. پس پوش MT یک سهمی است به کانون B و مماس D ؛ از طرف دیگر وقتی M خط D را بپیماید، خط T بر تمام مماسهای بر این سهمی منطبق خواهد شد و چون از M یک مماس غیر از D می‌گذرد، بنابراین پوش مماس T، سهمی P است.

۷.۲.۴.۳. دو خط، یک نقطه



۷۱۰. اگر H و K محل تلاقی خطهای MA و MB با خط Δ (عمود رسم شده از S بر x′x خط Δ است) و I وسط OM باشد، مثلثهای متساوی‌الساقین ASH و BSK بترتیب با مثلثهای متساوی‌الساقین AIM و BIM متشابه‌اند. عمودمنصفهای AH و BK بر S می‌گذرد در نتیجه عمود رسم شده از H بر MA و از K بر MB، بر F قرینه O نسبت به S می‌گذرد، پس خطهای MA و MB بر سهمی P به کانون F مماسند و خط Δ بر رأس این سهمی مماس می‌باشد. این سهمی، پوش خطهای MA و MB است وقتی که M روی yy′ حرکت کند.



۷۱۱. فرض می‌کنیم Δ_1 یک وضع از Δ باشد. تا :

$(X,X') \neq (D,D')$;

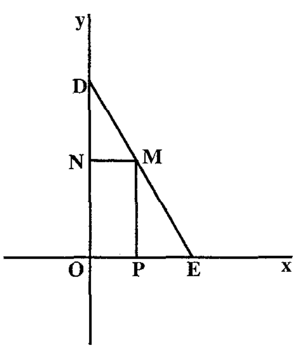
باشد. چهارضلعی به ضلعهای متوالی X، X′ ، D′ و D چهارضلعی محاطی نبوده و در نتیجه بنا به قضیهٔ Simson تصویرهای F روی D، D′ و Δ_1 واقع بر یک استقامت نیست (شکل).

پس این نقطه‌ها یک دایره را معین می‌کنند و مقطع مخروطی (C) به کانون F (که این دایره، دایرهٔ اصلی آن می‌باشد) مماس بر D، D′ و Δ_1 است. حال فرض می‌کنیم AA′ یک وضع غیرمشخص Δ باشد. می‌گوییم AA′ بر (C) مماس است. چون اگر از A مماس AA″ (به غیر از D) را بر (C) رسم کنیم، داریم :

$(FA,FA'') = (X,X')$,

ولی $(FA,FA'') = (FA,FA')$ ؛ پس A″ بر A′ منطبق و در نتیجه AA′ بر (C) مماس است.

۵.۲.۷. زاویه



۷۱۲. به فرض داریم :

$$\frac{OD \times OE}{۲} = a^۲$$

از نقطهٔ M وسط DE عمودهای MP و MN بر محورهای Ox و Oy فرود می‌آوریم.

$OE = ۲MN$ و $OD = ۲MP$

پس $\frac{۴MP \times MN}{۲} = a^۲$ یا $MP \times MN = \frac{a^۲}{۲}$ ولی MN و MP مختصات نقطهٔ M نسبت به محورهای مختصات Ox و Oy می‌باشند پس $x.y = \frac{a^۲}{۲}$ یا $y = \frac{a^۲}{۲x}$ بنابراین مکان M یک هذلولی متساوی‌القطرین است که مجانبهای آن Ox و Oy می‌باشند و چون قسمتی از مماس بر هذلولی محصور بین مجانبها به وسیلهٔ نقطهٔ تماس نصف می‌شود، پس DE همواره بر هذلولی مذکور مماس است و به عبارت دیگر لفاف DE این هذلولی است.

۷۱۳. ۱. چون ملاحظه کنیم که $OI=OH=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ می‌باشد، پس به فرض $OA=x$ و $OB=y$ رابطه‌های زیر در دست است:

$$\overline{FA}^2=\overline{FH}^2+\overline{HA}^2\ ,\ \overline{AB}^2=x^2+y^2\ ,\ xy=a^2$$

و $\overline{FB}^2=\overline{IB}^2+\overline{BF}^2$ یعنی:

$$\overline{FB}^2=\frac{a^2}{2}+(y-\frac{a\sqrt{2}}{2})^2\ ,\ \overline{FA}^2=\frac{a^2}{2}+(x-\frac{a\sqrt{2}}{2})^2$$

و در مثلث ABF داریم:

$$\overline{AB}^2=\overline{BF}^2+\overline{FA}^2-2\overline{BF}.\overline{FA}\cos\hat{F}$$

یعنی: $$x^2+y^2=x^2+y^2-a\sqrt{2}(x+y)+2a^2-2\overline{BF}.\overline{FA}\cos\hat{F}$$

و یا $$a\sqrt{2}(x+y-a\sqrt{2})=2\overline{BF}.\overline{FA}\cos\hat{F}$$

ولی $$BF\times FA=\sqrt{(x^2-ax\sqrt{2}+a^2)(y^2-ay\sqrt{2}+a^2)}$$

پس:

$$BF\times FA=\sqrt{x^2y^2-axy\sqrt{2}(x+y)+a^2(x^2+y^2)-a^3\sqrt{2}(x+y)+2a^2xy+a^4}$$

و یا $$BF\times FA=\sqrt{a^4-2a^3\sqrt{2}(x+y)+3a^4+a^2(x^2+y^2)}$$

ولی $$x^2+y^2=(x+y)^2-2a^2$$

پس: $$BF\times FA=\pm\sqrt{a^2(x+y)^2-2a^3\sqrt{2}(x+y)+2a^4}$$

و یا $$BF\times FA=\pm a(x+y-a\sqrt{2})$$

زیرا زیر رادیکال مجذور این عبارت است.

بنابراین رابطهٔ نهایی چنین است:

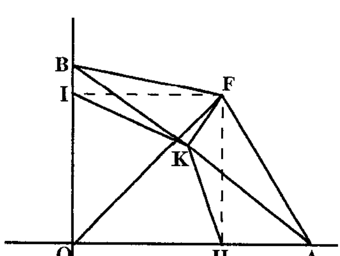
$$a\sqrt{2}(x+y-a\sqrt{2})=\pm 2a(x+y-a\sqrt{2})\cos\hat{F}$$

یعنی $\cos\hat{F}=\pm\frac{\sqrt{2}}{2}$ یعنی زاویهٔ F برابر 45° یا 135° می‌باشد ولی ترسیم نشان می‌دهد که زاویهٔ F منفرجه است پس زاویهٔ F برابر 135° می‌باشد.

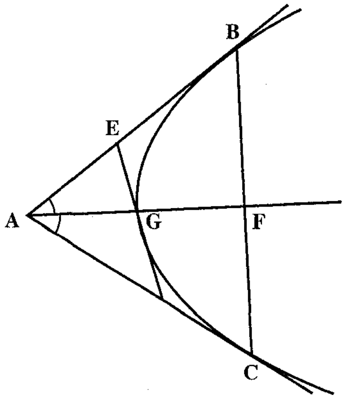
۲. اگر از F عمود FK را بر AB فرود آوریم و نقطهٔ K را به نقطه‌های I و H وصل کنیم، زاویهٔ IKH به‌دست می‌آید. ثابت می‌کنیم که این زاویه مقداری ثابت دارد زیرا چهارضلعی FHAK محاطی است (زاویه‌های FHA و FKA قائمه‌اند) که FA قطر دایرهٔ محیطی آن

می‌باشد. پس زاویهٔ HKA مساوی زاویهٔ AFH می‌باشد. همچنین چهارضلعی FKBI نیز محاطی است (که FB قطر دایرهٔ محیطی آن است) پس زاویهٔ IKB مساوی زاویهٔ IFB می‌باشد ولی زاویهٔ IKH برابر است با $(\hat{HKA}+\hat{IKB})-{}^\circ۱۸۰$ ولی چون $\hat{HKA}+\hat{IKB}=\hat{IFB}+\hat{AFH}$ و مجموع طرف دوم برابر است با $\hat{BFA}-\hat{IFH}$ یعنی $۴۵^\circ = {}^\circ۹۰ - {}^\circ۱۳۵$ پس زاویهٔ $\hat{IKH}={}^\circ۱۳۵$ می‌باشد و مقداری ثابت است. پس مکان هندسی نقطهٔ K کمان درخور ${}^\circ۱۳۵$ است بر روی وتر IH (نقطه‌های I و H نقطه‌های ثابتی هستند چون تصویرهای نقطهٔ ثابت F بر روی ضلعهای Ox و Oy می‌باشند)؛ زاویهٔ قائمهٔ AKF چنان تغییر می‌کند که رأس K آن دایرهٔ ثابتی را می‌پیماید و ضلع اوّل KF آن بر نقطهٔ ثابت F مرور می‌کند پس ضلع دوم AB بر مقطع مخروطی ثابتی مماس است که F یکی از کانونهای آن است. در این‌جا این مقطع مخروطی هذلولی متساوی‌الساقینی است که Ox و Oy مجانبهای آن می‌باشند و قضیهٔ کلاسیک «قطعه مماس متغیر محصور بین دو مجانب از کانون هذلولی در تحت زاویهٔ ثابتی رؤیت می‌شود» به‌دست می‌آید.

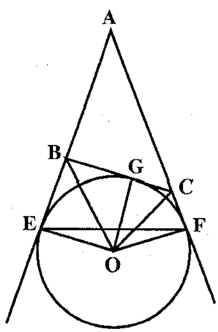
چون نقطهٔ F بیرون دایرهٔ مکان نقطهٔ K است پس خط AB بر هذلولی مماس است. مکان نقطهٔ K یعنی کمان درخور ${}^\circ۱۳۵$ بر روی IH دایره‌ای است که مرکز آن O می‌باشد. زیرا این کمان مرکزی دارد که از I و H به یک فاصله است و چون OI = OH می‌باشد، می‌شود بسهولت ثابت کرد که OK نیز با آنها مساوی است و مکان نقطهٔ K دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OH خواهد بود. نقطهٔ F بیرون این دایره است (اندازهٔ زاویهٔ محاطی در سه ربع دایره ${}^\circ۱۳۵$ می‌باشد، پس مرکز کمان درخور زاویهٔ ${}^\circ۱۳۵$ بر روی IH نقطهٔ O است)؛ نقطهٔ تماس را می‌شود بسهولت نشان داد که نقطهٔ وسط AB می‌باشد، زیرا اگر وضع دیگری از AB مانند A′B′ در نظر بگیریم، نقطهٔ تلاقی آنها به علت این که AB′ با A′B موازی است در حد، بر وسط AB منطبق می‌گردد.



۳.۷. مثلث



۷۱۴. مثلث ADE را که اندازهٔ زاویهٔ DAE از آن از نظر وضع و اندازه ثابت است و $AD + AE = 1$ نیز مقدار ثابتی است در نظر می‌گیریم. ضلعهای AD و AE را از طرف D و E به طولهای $AB = AC = 1$ امتداد می‌دهیم. از B به C وصل می‌کنیم. نیمساز زاویهٔ A را رسم می‌کنیم تا BC را در F قطع کند. سهمی به کانون F و مماس بر AB و AC در نقطه‌های B و C پوش قاعدهٔ DE است. رأس این سهمی نقطهٔ G وسط پاره‌خط AF است.



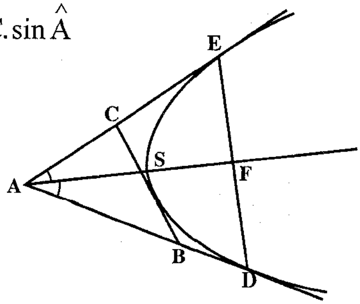
۷۱۵. فرض کنیم مثلث متساوی‌الساقین AEF چنان رسم شود که مجموع دو ساق آن برابر با محیط مثلث ABC باشد :

$$AE + AF = AB + BC + CA$$

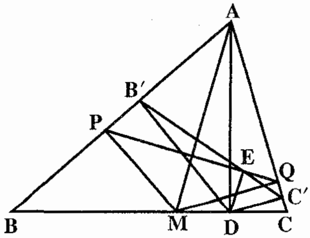
نیمسازهای خارجی دو زاویهٔ C و B را رسم می‌کنیم که یکدیگر را در O قطع می‌کنند، داریم : $OG = OE = OF$ پس ضلع BC همواره مماس بر دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OE یا OF است و از آن‌جا نتیجه می‌گیریم که لفاف ضلع BC، قوس EGF از دایرهٔ مذکور است.

۷۱۶. پوش این ضلع یک هذلولی است که خطهای AE و AD مجانبهای آن می‌باشند. هنگامی که مثلث مساحت ثابتی داشته باشد AB.AC نیز ثابت است زیرا داریم :

$$S_{ABC} = \frac{۱}{۲} AB.AC.\sin\hat{A}$$



۷۱۷. این پوش یک دایره است.



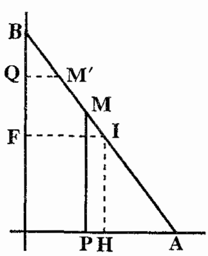
۷۱۸. ارتفاع AD مثلث را رسم می‌کنیم. دایرهٔ به قطر AM از نقطه‌های P، Q و D نیز می‌گذرد (چرا؟) از طرفی طبق قضیهٔ Simson، نقطه‌های B′ ، C′ و E تصویرهای D روی AB، AC و PQ واقع بر یک استقامتند، بنابراین وقتی که M روی BC تغییر کند، زاویهٔ قائمهٔ PED که رأسش روی خط ثابت B′C′ تغییر می‌کند و ضلع ED از نقطهٔ ثابت D می‌گذرد ؛ پوش ضلع PE و یا PQ آن، یک سهمی است به کانون D که مماس در رأس آن B′C′ می‌باشد.

نکته. باید توجه داشت که این سهمی بر ارتفاعهای وارده از رأسهای B و C مثلث ABC مماس است.

زیرا وقتی که M بر B و یا C منطبق شود ؛ PQ تبدیل به یکی از ارتفاعهای فوق‌الذکر می‌شود.

۷۱۹. پوش DE یک سهمی است.

۷۲۰. پوش مورد نظر یک سهمی است.



۷۲۱. IH و IK را عمود بر OA و OB رسم می‌کنیم (شکل) داریم :

$$\frac{IM}{IA}=\frac{HP}{HA}\ ;\ \frac{IM'}{IB}=\frac{KQ}{KB}\ ,$$

با تقسیم طرفین این تناسبها نظیر به نظیر حاصل می‌شود :

$$-\frac{\overline{IM}}{\overline{IM'}}=\frac{\overline{HP}}{\overline{KQ}}\times\frac{\overline{KB}}{\overline{HA}}=\frac{\overline{HP}}{\overline{KQ}}\times\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}}\ ;$$

و با استخراج :

$$\frac{\overline{HP}}{\overline{KQ}}=-\frac{\overline{IM}}{\overline{IM'}}\times\frac{\overline{OA}}{\overline{OB}}\ ,$$

نسبت $\frac{\overline{IM}}{\overline{IM'}}$ بنا به فرض مقداری ثابت است و $\frac{\overline{HP}}{\overline{KQ}}$ نیز مقداری ثابت است پس P و Q روی OA و OB تقسیمهای متناسب به‌وجود می‌آورند و خط PQ، پوشش یک سهمی است. این سهمی بر OA، OB، KH و بر PQ مماس است و کانونش F نقطهٔ مشترک دایره‌های محیطی چهار مثلث حاصله از این چهار خط (که سه به سه در نظر گرفته شوند) می‌باشد و خط واصل بین تصویرهای F روی این خطهای مماس در رأس می‌باشد.

۴.۷. چندضلعی

۱.۴.۷. چهارضلعی

۷۲۳. فرض می‌کنیم $\frac{OB}{OD}=k'$ و $\frac{OA}{OC}=k$ باشد. چون نقطهٔ O بردارهای $\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BD}$ را به نسبت دو عدد جبری ثابت بخش می‌کنند نتیجه می‌شود :

$$OA=k(OA+AC)$$

و

$$\frac{AC}{AO}=\frac{k-۱}{k}=k_۱$$

و

$$OB=k'(OB+BD)$$

$$\frac{BD}{BO}=\frac{k'-۱}{k'}=k'_۱$$

نقطه‌های C و D تبدیل یافته یکدیگر نسبت به O در تجانسهای (A,k) و $(B,k'_۱)$ اند پس D مجانس C در تجانس به نسبت :

$$\frac{k'-۱}{k'}:\frac{k-۱}{k}=\frac{k'_۱}{k}$$

و به مرکز I است خط AB را توسط رابطهٔ جبری زیر تعریف می‌کنیم.

$$k'_۱(۱-k_۱)\overline{BA}=(k'_۱-۱)\overline{BI}$$

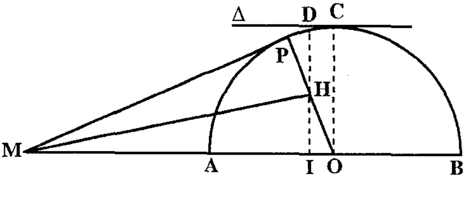
و

$$\frac{IA}{IB}=\frac{k-۱}{k'-۱}$$

پس پوش CD نقطهٔ I است. توجه کنید اگر $K=K'$ باشد، نقطهٔ I در بینهایت است. در این حالت CD موازی با AB است.

۵.۷. دایره

۱.۵.۷. نیمدایره



۷۲۴. اگر زاویهٔ PMO از این زاویه‌ها باشد و زاویهٔ PM′O یکی دیگر از این زاویه‌ها، مشاهده می‌شود نیمساز زاویهٔ PM′O یعنی M′H و نیمساز زاویهٔ PMO یعنی

MH در نقطهٔ H که بر روی نیمساز PH زاویهٔ خارجی مثلث PMM' یکدیگر را قطع می‌کنند.

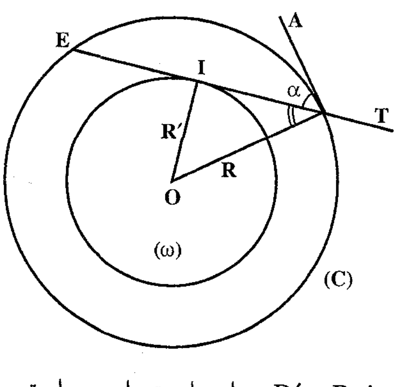
بنابراین از نقطهٔ H معمولاً دو خط از خطهای مذکور می‌گذرد، خط PH و خط PH'. اگر این دو خط بر هم منطبق شوند از نقطهٔ H فقط یک خط می‌گذرد و مکان H همان منحنی است که اوضاع مختلف MH بر آن مماس است. اگر نقطهٔ M' در بینهایت بر M منطبق شود، روشن است که حد نقطهٔ H که همواره بر شعاع OP واقع است، در حد نیز بر حد شعاع OP واقع خواهد بود؛ ولی وقتی نقطهٔ M' بر M قرار گیرد نقطهٔ P بر نقطهٔ تماس T خط MP با دایره قرار می‌گیرد یعنی در حد شکل دوم به‌دست می‌آید:

نیمساز MH زاویهٔ PMO در نقطهٔ H که بر تلاقی شعاع OP با این نیمساز واقع است، بر منحنی مکان H مماس خواهد بود، ولی چون H روی نیمساز است، پس $HI = HP$ خواهد بود، از طرف دیگر اگر عمود IH را تا تقاطع آن با مماس افقی نیمدایره امتداد دهیم تا نقطهٔ D به‌دست آید، $ID = OC = R$ خواهد بود. پس:

$$\overline{OP} = \overline{OH} + \overline{HP} = \overline{ID} = \overline{IH} + \overline{HD}$$

پس $OH = HD$ یعنی نقطهٔ H از مرکز O و مماس افقی به یک فاصله است، پس مکان هندسی آن سهمی است به کانون O و خط هادی Δ مماس افقی نیمدایره (قسمتی از سهمی به مماسهای واقعی نیمدایره جواب می‌دهد که بین نقطه‌های A و B محصور باشد).

۲.۵.۷. تنها یک دایره



۷۲۵. اگر TE یکی از خطهایی باشد که با دایرهٔ (C) به شعاع R زاویهٔ α ساخته است، در این صورت داریم $A\hat{T}E = \alpha$ و یا $I\hat{T}O = \frac{\pi}{۲} - \alpha$ و در نتیجه اگر از مرکز دایره بر IE عمود کنیم، در مثلث قائم‌الزاویه $\overset{\Delta}{OIT}$ می‌توان نوشت:

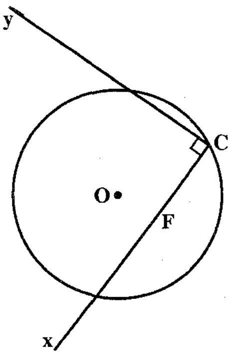
$$IO = R' = OT\cos(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = R\sin\alpha$$

یعنی FT بر دایره‌ای به مرکز (O) و به شعاع $R' = R\sin\alpha$ مماس است یا به عبارت دیگر دایرهٔ (ω) به مرکز (O) و شعاع $R' = R\sin\alpha$ پوش خطهایی است که با دایرهٔ (C) زاویهٔ α می‌سازند.

۳.۵.۷. یک دایرهٔ ثابت، نقطه‌های ثابت

۱.۳.۵.۷. یک دایره، یک نقطه

۱.۱.۳.۵.۷. یک دایره، یک نقطه در صفحهٔ دایره

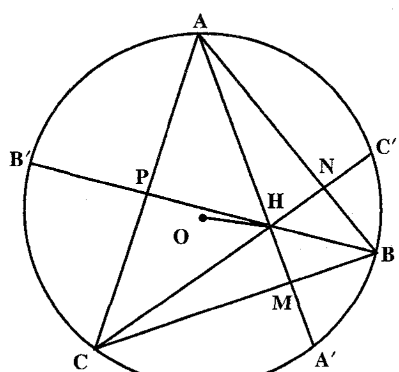


۷۲۶. می‌توان رأس C را تصویر F روی Cy در نظر گرفت. چون مکان تصویرهای کانونهای بیضی و هذلولی روی هر خط مماس، دایره اصلی است، پس Cy مماس بر بیضی یا هذلولی است که دایرهٔ اصلی آن دایرهٔ (O) و یکی از کانونهایش نقطهٔ F است. و از آن‌جا نتیجه می‌گیریم که لفاف Cy بیضی یا هذلولی است.

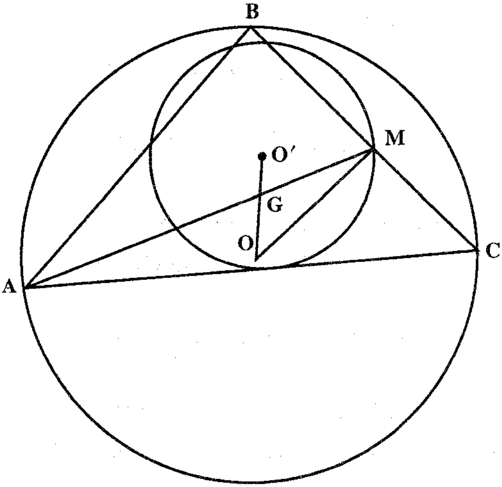
نکته. اگر نقطهٔ F درون دایره باشد، پوش Cy بیضی است و در صورتی که نقطهٔ F بیرون دایره باشد، این پوش هذلولی است.

یادداشت. مسألهٔ بالا از دانشمند انگلیسی ماکلورن (۱۷۴۶ـ۱۶۹۸) است ولی عموماً آن را به دانشمند فرانسوی لاهیر نسبت می‌دهند از جمله کارهای عمده ریاضی ماکلورن کتابی است به نام «Traité des fluxions».

۲.۱.۳.۵.۷. یک دایره، یک نقطه درون دایره



۷۲۷. اگر ABC یکی از مثلثهای محاط در دایرهٔ (O) به نحوی باشد که H محل برخورد ارتفاعهای آن است، در این صورت قرینه‌های H نسبت به ضلعهای مثلث بر دایرهٔ (O) واقع است. یعنی ′A، ′B و ′C قرینه‌های H نسبت به ضلعها است یا به عبارت دیگر دایرهٔ (O) مکان هندسی قرینه‌های H نسبت به ضلعهای مثلثهای محاط در دایرهٔ (O) است که H محل برخورد ارتفاعهای آنها باشد. و از طرفی بنا به خاصیت بیضی یا هذلولی (قرینه‌های هر کانون نسبت به خطهای مماس بر بیضی یا هذلولی بر دایرهٔ هادی کانون دایره واقعند)، پس می‌توان گفت، ضلعهای مثلث ABC بر بیضی یا هذلولیی مماسند که H یک کانون آن بوده و دایرهٔ (O)، دایرهٔ هادی کانون دیگر آن می‌باشد و چون H داخل دایره است ؛ لذا نتیجه می‌گیریم که پوش ضلعهای مثلث یک بیضی است به کانونهای H و O و مقدار ثابت $R = ۲a$.



۷۲۸. اگر ABC یکی از مثلثهای محاط در دایرهٔ (O) باشد به‌طوری که G محل تلاقی میانه‌های آن است، چنانچه AM یکی از میانه‌های مثلث باشد. در این صورت پیوسته داریم $\frac{\overline{AG}}{\overline{GM}}=-\frac{1}{2}$: یعنی مکان هندسی نقطهٔ M مجانس مکان هندسی نقطهٔ A است در تجانس $(G, k=-\frac{1}{2})$.

و از طرف دیگر می‌دانیم OM بر BC عمود است یا به عبارت دیگر نقطهٔ M تصویر (O) روی BC می‌باشد و از آن‌جا می‌توان گفت، BC مماس بر یک بیضی است به کانون (O) و دایرهٔ اصلی (′O) به شعاع $\frac{R}{2}$ که مجانس دایرهٔ (O) در تجانس $(G, k=-\frac{1}{2})$ می‌باشد.

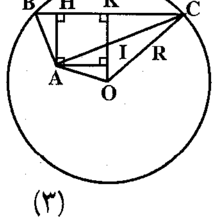
۷۲۹. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC می‌توان نوشت :

$$\overline{AH}^2=\overline{BH}.\overline{CH}=(\frac{BC}{2}-KH)(\frac{BC}{2}+KH)=\frac{BC^2}{4}-HK^2 \qquad (1)$$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ OKC داریم :

$\frac{BC^2}{4}=KC^2=R^2-OK^2$ (۲) از ملاحظه رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که :

$$AH^2=R^2-OK^2-HK^2$$



و یا : $AH^2+OK^2+KH^2=R^2 \qquad (3)$

و در مثلث قائم‌الزاویه OAI می‌توان نوشت :

$$AI^2=\overline{OA}^2-OI^2=\overline{OA}^2-(OK-IK)^2=OA^2-(OK-AH)^2$$

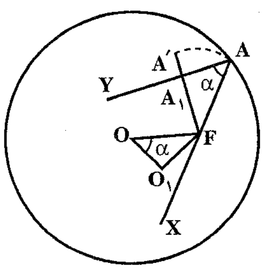
$$AI^2 = \overline{OA}^2 - \overline{OK}^2 - AH^2 + 2OK.AH \qquad (4)$$

از ملاحظه رابطه‌های (۳) و (۴) و با توجه به این که $KH = AI$ است نتیجه می‌شود که :

$R^2 - \overline{OA}^2 = 2OK.AH$ و یا مقدار ثابت $= \dfrac{R^2 - \overline{OA}^2}{2} = OK.AH$ از ملاحظهٔ این رابطه نتیجه می گیریم که چون پیوسته حاصلضرب فاصله‌های نقطه‌های ثابت A و O از BC مقداری ثابت است در نتیجه BC پیوسته بر یک بیضی یا هذلولی به کانونهای A و O مربع نصف قطر کوچک $b^2 = \dfrac{R^2 - OA^2}{2}$ مماس و چون A نیز داخل دایرهٔ (O) است، لذا پوش BC بیضی خواهد بود.

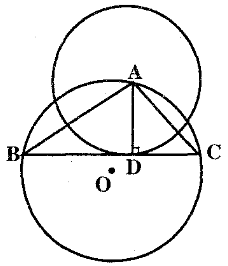
۷۳۰. FA_1 را بر AY عمود کرده و روی این خط $FA' = FA$ را در نظر می‌گیریم. مکان نقطه A' دایره‌ای است که از دایره O با یک دوران حول F به اندازهٔ زاویهٔ $90° - \alpha$ نتیجه می‌شود و از طرف دیگر داریم $\sin\alpha = \dfrac{FA_1}{FA} = \dfrac{FA_1}{FA'}$، بنابراین مکان هندسی نقطهٔ A_1 دایرهٔ (C_1) متجانس دایرهٔ مکان هندسی نقطهٔ A' به مرکز F و با نسبت $\sin\alpha$ می‌باشد. مرکز O_1 این دایره از O همان‌طوری که A_1 از A نتیجه می‌شود به‌دست می‌آید یعنی با رسم OO_1 به‌طوری که :

$$F\hat{O}O_1 = F\hat{A}A_1 = \alpha$$



(این زاویه‌ها در یک جهتند) و رسم FO_1 عمود بر OO_1 ؛ و اما شعاع این دایرهٔ مساوی $r\sin\alpha$، که در آن r شعاع دایرهٔ مفروض است می‌باشد، و بنا به فرض $OF < r$، پس $O_1F < r\sin\alpha$ و از این‌جا نتیجه می‌شود که F داخل دایرهٔ (C_1) قرار دارد. با این تحقیق زاویهٔ قائمه FA_1Y را در نظر می گیریم ؛ رأس آن دایرهٔ (C_1) را طی می کند و یکی از ضلعهای آن از نقطهٔ ثابت F داخل (C_1) می‌گذرد. بنابراین پوش ضلع دوم A_1Y یک بیضی است که یکی از کانونهای آن F و دایرهٔ اصلی آن (C_1) می‌باشد.

۷.۵.۳.۱.۳. یک دایره، یک نقطه روی دایره



۷۳۱. از A خط AD را بر وتر BC عمود می‌کنیم. اگر R شعاع دایرهٔ (O) فرض شود، می‌دانیم :

$$AB.AC = AD \times ۲R$$

یا :

$$k^۲ = AD \times ۲R$$

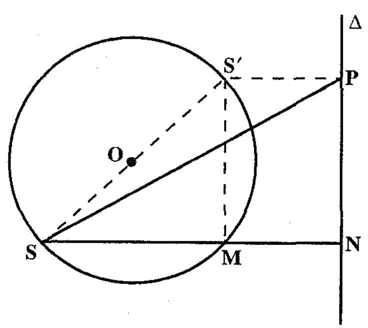
و از آن‌جا : $AD = \frac{k^۲}{۲R}$ پس AD مقداری ثابت است. پس BC همواره بر دایره‌ای به مرکز A و به شعاع $\frac{k^۲}{۲R}$ مماس است و از آن‌جا لفاف ضلع BC، دایرهٔ مذکور است.

۷۳۲. چون $\overline{SN}^۲ - \overline{SM}^۲ = a^۲$ می‌باشد و نقطهٔ S' قرینهٔ S نسبت به مرکز O دایره نیز نقطهٔ ثابتی است، پس طول SP (P تصویر نقطهٔ S' بر روی خط Δ می‌باشد) مقداری است ثابت چون :

$$\overline{SM}^۲ = \overline{SS'}^۲ - \overline{S'M}^۲$$

و یا

$$\overline{SM}^۲ = ۴R^۲ - \overline{NP}^۲$$



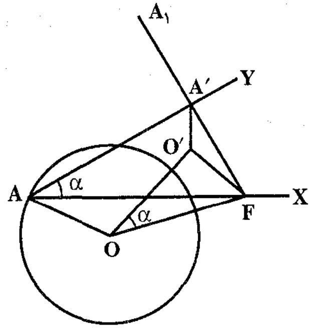
چون $NP = S'M$ می‌باشد پس :

$$\overline{SN}^۲ - \overline{SM}^۲ = \overline{SN}^۲ - ۴R^۲ + \overline{NP}^۲ = a^۲$$

و یا $\overline{SN}^۲ + \overline{NP}^۲ = ۴R^۲ + a^۲$ ولی $\overline{SN}^۲ + \overline{NP}^۲ = \overline{SP}^۲$ پس $SP = \sqrt{۴R^۲ + a^۲}$

بنابراین مکان هندسی نقطهٔ P دایره‌ای است به مرکز S و به شعاع $\sqrt{۴R^۲ + a^۲}$ ؛ زاویهٔ قائمهٔ $S'PN$ چنان حرکت می‌کند که رأس P آن بر دایرهٔ ثابتی به مرکز S قرار دارد و ضلع اوّل PS' آن بر نقطهٔ ثابت S' می‌گذرد، ضلع دوم Δ آن بر بیضی یا هذلولی به کانونهای S' و قرینهٔ S' نسبت به S مماس می‌باشد.

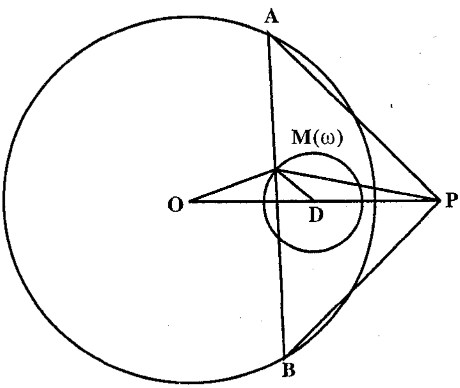
۴.۱.۳.۵.۷. یک دایره، یک نقطه برون دایره



۷۳۳. فرض می‌کنیم A' تصویر F روی AY باشد؛ روی FA' طول $FA_1 = FA$ را جدا می‌کنیم؛ مکان A_1 دایره (O_1) است که از دایره (O) با دوران حول F به اندازهٔ $\frac{\pi}{۲} - \alpha$ حاصل می‌شود و همچنین داریم:

$$\frac{FA'}{FA_1} = \frac{FA'}{FA} = \sin\alpha \ ,$$

مکان A' دایره (O') مجانس دایرهٔ (O_1) نسبت به F با نسبت تجانس $\sin\alpha$ می‌باشد. مرکز O' از مرکز O (همان‌طوری که A' از A نتیجه می‌شود) به‌دست می‌آید و شعاع (O') برابر $O'A'$ می‌باشد. بعلاوه دو مثلث $FO'A'$ و FOA متشابه‌اند چون آنها به وسیلهٔ دوران ـ تجانس به هم مربوطند و اما بنا به فرض $OF > OA$ پس داریم: $O'F > O'A'$. بنابراین اگر زاویهٔ قائمه $AA'F$ را در نظر بگیریم رأسش دایره (O') را طی می‌کند و ضلع $A'F$ آن از نقطه ثابت F واقع در ناحیهٔ خارجی این دایره می‌گذرد. بنابراین پوش ضلع دوم AA' یا AY، هذلولی به دایرهٔ اصلی دایرهٔ (O') (که یکی از کانونهایش F است) می‌باشد.

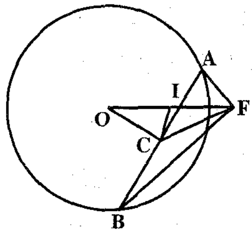


۷۳۴. راه اوّل. اگر AB وتری از دایرهٔ (O) باشد که در آن $(\overrightarrow{PA} \hat{,} \overrightarrow{PB}) = ۹۰°$ است. چنانچه M وسط AB باشد، $\overline{OM}$ عمودمنصف AB بوده و داریم: $PM = \frac{AB}{۲} = MB = MA$

$$OM^۲ + \overline{MB}^۲ = OM^۲ + \overline{PM}^۲$$
$$= R^۲ = \text{مقدار ثابت}$$

که چون مجموع مربعهای فاصله‌های نقطهٔ M وسط AB از دو نقطهٔ ثابت O و P مساوی مقدار ثابتی است در نتیجه مکان هندسی نقطهٔ M، دایره‌ای است مانند (ω) به مرکز D وسط OP و شعاع $r = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲R^۲ - OP^۲}$ یا به عبارت دیگر می‌توان گفت تصویر (O) بر خط AB روی دایرهٔ (ω) است و در نتیجه پوش AB هذلولی است به کانونهای P و O و دایرهٔ اصلی (ω).

یادآوری. اگر P داخل دایرهٔ (O) باشد. به همان طریق بالا ثابت می‌شود که پوش وتر AB بیضی است به کانونهای P و O و دایرهٔ اصلی (ω) :



راه دوم. فرض می‌کنیم AB وتری باشد که از نقطهٔ F واقع در خارج دایره تحت زاویه قائمه رؤیت شود. OC را بر AB عمود می‌کنیم و C را به I وسط OF وصل می‌کنیم؛ در مثلث OCF (شکل) داریم :

$$\overline{CO}^{۲} + \overline{CF}^{۲} = ۲\overline{CI}^{۲} + ۲\overline{OI}^{۲} \ldots \qquad (۱)$$

ولی CF در مثلث AFB میانه و مساوی CA و $\overline{CO}^{۲} + \overline{CA}^{۲} = r^{۲}$ (r شعاع دایره) و بنابراین رابطهٔ (۱) به صورت :

$$r^{۲} = ۲\overline{CI}^{۲} + ۲\overline{OI}^{۲} \Rightarrow \overline{CI}^{۲} = \frac{۱}{۲}(r^{۲} - ۲\overline{OI}^{۲}) \ \ldots \qquad (۲)$$

برای این که CI وجود داشته باشد، باید $OI < \frac{r}{\sqrt{۲}}$ یا $OF < r\sqrt{۲}$ باشد.

از این‌جا معلوم می‌شود برای وجود وترهای AB که از نقطهٔ F به زاویهٔ قائمه دیده شوند، نقطهٔ F باید داخل دایره ارتوپتیک (Orthoptiquc) دایرهٔ مفروض قرار گیرد. با برقراری این شرط تساوی (۲) می‌گوید که C دایرهٔ به مرکز I را طی می‌کند، نقطهٔ O خارج این است (r کوچکتر از ۲OI) و داریم :

$$r^{۲} < ۴\overline{OI}^{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲}(r^{۲} - ۲\overline{OI}^{۲}) < OI^{۲} \Rightarrow \overline{CI}^{۲} < \overline{OI}^{۲};$$

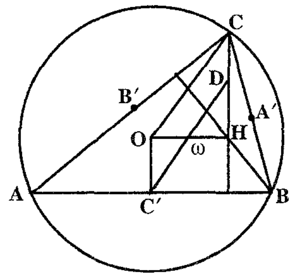
بعلاوه اگر ما زاویهٔ قائمه OCA را در نظر بگیریم رأس C، دایرهٔ به مرکز I را طی می کند و ضلع CO از نقطهٔ O خارج این دایره می‌گذرد. بنابراین ضلع دوم CA همواره بر هذلولی به دایرهٔ اصلی، دایرهٔ به مرکز I و به شعاع IC (که یکی از کانونهایش O است) مماس باقی می‌ماند، و چون IF = OI است، پس F کانون دیگر این هذلولی است.

۵.۱.۳.۵.۷. یک دایره، یک نقطه درون یا برون دایره

۷۳۵. با توجه به تفاضل قوتهای نقطهٔ A نسبت به دایرهٔ O و M پوش مطلوب، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع $\frac{|R^{۲} - d^{۲}|}{۲R}$ است.

۲.۳.۵.۷. یک دایره، دو نقطه

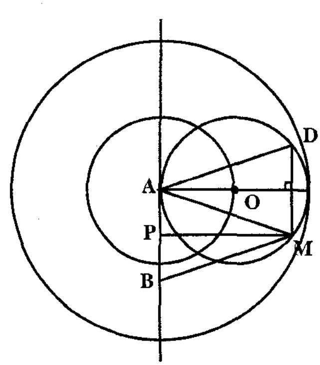
۷۳۶. فرض کنیم R شعاع دایرهٔ (O) و C' وسط ضلع AB و H محل تلاقی سه ارتفاع مثلث ABC و D وسط CH باشد. داریم $OCDC'$ (شکل) متوازی‌الاضلاع است و $C'D = OC = R$ قطری از $(A'B'C')$ دایرهٔ اولر مثلث ABC است. بنابراین این دایره در نقطهٔ D بر دایره (C') به مرکز C' و به شعاع R مماس است از طرف دیگر $\overrightarrow{CD}$ همسنگ با $\overrightarrow{OC'}$ است. وقتی که C دایرهٔ (O) را طی کند، D تمام دایرهٔ (C') را طی می‌کند و پوش یا لفاف دایرهٔ $(A'B'C')$ دایرهٔ (C') است.



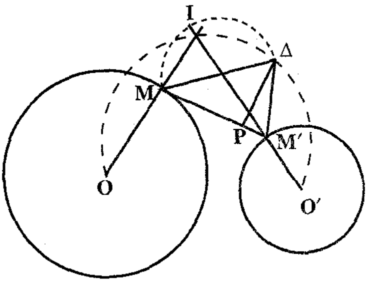
۴.۵.۷. دایره، خط

۱.۴.۵.۷. یک دایره، یک خط

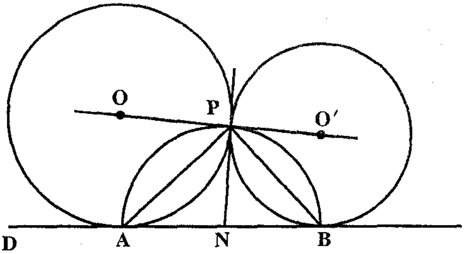
۷۳۸. قرینهٔ نقطهٔ M نسبت به قطر عمود بر خط مماس در نقطهٔ A را D می‌نامیم و از D به A وصل می‌کنیم، D نقطهٔ ثابتی است. دایرهٔ محیطی مثلث AMD که دایرهٔ ثابتی است، با دایرهٔ O مساوی است. مکان هندسی مرکز آن، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع OA است. این دایره همواره با دایرهٔ ثابتی که مرکزش A و شعاعش ۲OA می‌باشد، مماس است.



۵.۵.۷. دو دایره

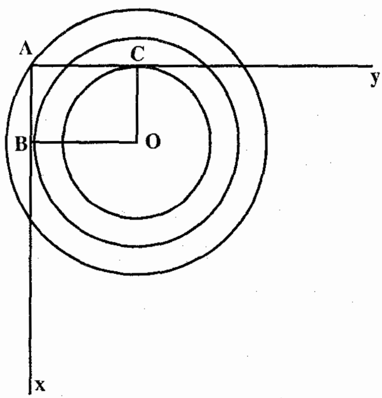


۷۳۹. نقطه‌های M و M′ قوسهای مستقیماً متشابه را طی می‌کنند (شکل). نقطهٔ مضاعف Δ از این همسانی را به‌دست می‌آوریم. I نقطهٔ تلاقی دو قطعه متناظر OM و O′M′ است، Δ نقطهٔ دیگر تلاقی دو دایرهٔ (O,O′,I) و (M,M′,I) است. ΔP را عمود بر MM′ رسم می‌کنیم وقتی که شعاعهای OM و O′M′ حول O و O′ دوران کنند، Δ ثابت می‌ماند و همه مثلثهای ΔMM′ متشابه خواهند بود و همچنین مثلث ΔPM با یک مثلث مفروض متشابه خواهد بود و P دایره‌ای را طی می‌کند و چنانچه زاویهٔ قائمه ΔPM را در نظر بگیریم. یک ضلع این زاویه از نقطهٔ ثابت Δ می‌گذرد و رأسش دایره‌ای را طی می‌کند. پس لفاف یا پوش ضلع دیگر PM و یا MM′ یک بیضی و یا یک هذلولی است که یکی از کانونهای آن نقطهٔ Δ و دایرهٔ اصلی آن مکان نقطهٔ P است.



۷۴۰. دو دایرهٔ متغیر C(O,R) و C′(O′,R′) را که بترتیب در نقطه‌های A و B بر خط D و در نقطهٔ P بر یکدیگر مماس می‌باشند، در نظر می‌گیریم. مماس مشترک درونی این دو دایره را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با خط D را N می‌نامیم. PN خط ثابتی است و NA = NB = NP است، پس مثلث APB در رأس N قائمه است و دایرهٔ به قطر AB در نقطه P بر خط OO′ مماس است. بنابراین پوش خط‌المرکزین این دو دایره، نیمدایرهٔ به قطر AB است.

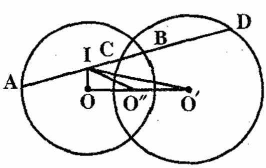
۷۴۱. اگر از O مرکز مشترک دو دایره، عمود OP را بر CD فرود آوریم، OP طول ثابتی دارد، زیرا در چهارضلعی محاطی NCOD($\hat{C} = \hat{D} = 90^\circ$) مثلث COD ثابت است، پس دایرهٔ محیطی این چهارضلعی ثابت بوده، CD طول ثابتی دارد، بنابراین به دلیل ثابت بودن نقطهٔ O، فاصلهٔ CD از O مقدار ثابتی است. در نتیجه پوش پاره‌خط CD دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OP است.



۷۴۲. فرض کنیم O مرکز مشترک دو دایرهٔ هم مرکز باشد. OC را بر ضلع Ay عمود می‌کنیم. شکل OBAC مستطیل است. در این شکل چون اندازهٔ OA و OB ثابتند، پس اندازهٔ OC نیز ثابت است و زاویهٔ A به هر ترتیب قرار گیرد، ضلع Ay به فاصلهٔ ثابتی از O واقع می‌شود، پس همواره ضلع Ay بر دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OC مماس است، یعنی لفاف (۱) ضلع Ay، این دایره است.

۷۴۳. اگر نقطه‌های A و B نقطه‌های برخورد قاطع با دایرهٔ (O)، C و D نقطه‌های برخورد آن با دایرهٔ (O′) باشد، نقطه‌های C و D نسبت به A و B مزدوجند، پس اگر عمودی از O بر قاطع فرود آوریم، بر وسط AB وارد می‌شود و خواهیم داشت (I نقطهٔ وسط AB) :

$$\overline{IB}^2 = \overline{IC}.\overline{ID}$$



ولی $\overline{IC}.\overline{ID}$ قوت نقطهٔ I نسبت به دایرهٔ (O′) می‌باشد، پس :

$\overline{IB}^2 = \overline{OB}^2 - \overline{OI}^2$ ولی $\overline{IB}^2 = \overline{IO'}^2 - R'^2$

یعنی $R^2 - \overline{OI}^2$ پس : $R^2 - \overline{OI}^2 = \overline{IO'}^2 - R'^2$

و یا $\overline{IO}^2 + \overline{IO'}^2 = R^2 + R'^2$

چون مجموع مربعهای فاصله‌های نقطهٔ I از دو نقطهٔ ثابت O و O′ مقداری ثابت است، پس مکان هندسی نقطهٔ I دایره‌ای است که مرکز آن وسط OO′ می‌باشد. اکنون مسأله

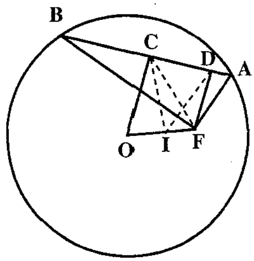
به مسألهٔ دیگری برمی‌گردد : زاویهٔ قائمهٔ $O\hat{I}D$ چنان حرکت می‌کند که رأس I آن دایرهٔ ثابتی را می‌پیماید و ضلع اوّل، OI بر نقطهٔ ثابت O می‌گذرد. ضلع دوم، ID آن بر مقطعی مخروطی مماس است که O و O′ کانونهای آن و دایرهٔ مکان I، دایرهٔ اصلی آن می‌باشد.

۶.۵.۷. مسأله‌های ترکیبی

۷۴۴. ۱. فرض می‌کنیم $OF = ۲c$ و I وسط OF و C و D تصویرهای O و F روی AB باشند (شکل). خطهای CI، CF و ID را رسم می‌کنیم. در مثلث OCF داریم:

$$\overline{CO}^۲ + \overline{CF}^۲ = ۲\overline{CI}^۲ + ۲c^۲$$

$$\overline{CO}^۲ + \overline{CA}^۲ = r^۲$$



ولی $CF = CA$

پس: $r^۲ = ۲\overline{CI}^۲ + ۲c^۲ \Rightarrow \overline{CI}^۲ = \frac{۱}{۲}(r^۲ - ۲c^۲)$

از طرف دیگر $ID = IC$ (چون I روی عمودمنصف CD قرار دارد) و مکان C و D دایرهٔ به مرکز I و به شعاع جذر $\frac{۱}{۲}(r^۲ - ۲c^۲)$ می‌باشد. این دایره همواره وجود دارد (چون $r > ۲c$ و در نتیجه $r^۲ > ۴c^۲$ می‌باشد).

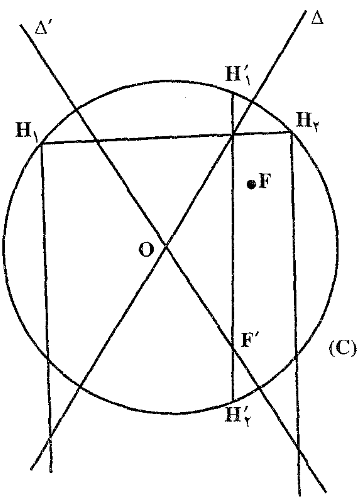
از طرف دیگر I داخل دایرهٔ (O) است. چون $OI < r - \sqrt{\frac{۱}{۲}(r^۲ - ۲c^۲)}$ که به سهولت ثابت می‌شود. این ثابت می‌کند که این دایره تمامش به وسیلهٔ نقطه‌های C و D طی می‌شود.

با توجه به این که O و F داخل این دایره قرار دارند یا $c < \sqrt{\frac{۱}{۲}(r^۲ - ۲c^۲)}$ ؛ این نامساوی معادل با نامساوی $۲c < r$ که بنا به فرض درست است، می‌باشد.

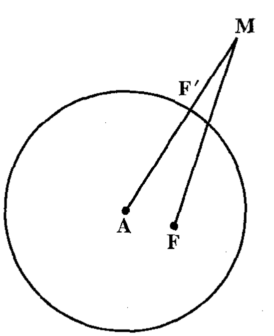
۲. زاویهٔ قائمهٔ ACO را در نظر می‌گیریم. ضلع CO به‌طور ثابت از O می‌گذرد. رأس C دایرهٔ (I) را که قبلاً مشخص شد، طی می‌کند. بنابراین پوش ضلع دوم CA یا AB یک بیضی به دایرهٔ اصلی (I) و کانونهای O و F می‌باشد.

۶.۷. مقطعهای مخروطی

۱.۶.۷. بیضی



۷۴۶. تمام بیضیهای (E) دارای یک دایرهٔ اصلی (C) به مرکز O و به شعاع a هستند (a نصف محور بزرگ بیضی). فرض می‌کنیم F_0 یکی از کانونهای بیضی (E_0) باشد. امتداد محور اطول بیضیهای (E) با امتداد Δ موازی‌اند. فرض می‌کنیم F و F′ کانونهای بیضی دیگر (E) باشد. H_2H_1 محل تلاقی دایرهٔ (C) با خطهای F_0F و H'_1 و H'_2 محل تلاقیش با F'_0F باشد. عمودهای رسم شده از H_1 و H_2 بر F_0F دو مماس مشترک بیضیهای (E) و (E_0) بوده و موازی با نیمسازهای تشکیل شده با یکی از زاویه‌های حادث بین دو محور بزرگ این بیضیها و عمودهای رسم شده از H'_1 و H'_2 بر F_0F' دو مماس مشترک این بیضیها می‌باشند، که با نیمساز دیگر زاویه‌های تشکیل شده بین محورهای بزرگ دو بیضی موازی‌اند، پس پوش مطلوب بیضی (E_0) است.



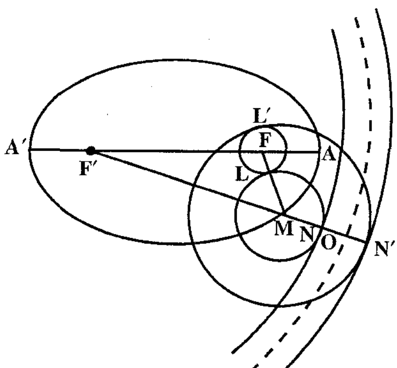
۷۴۷. مکان هندسی کانون دوم F′ این بیضیها، دایرهٔ به مرکز A و به شعاع $2a - AF$ می‌باشد. اگر کانون F′ بر روی این دایره حرکت کند، دو بیضی در نقطه‌ای تلاقی می‌کنند که $MF'_1 = MF'$ باشد؛ زیرا $MF' + MF = 2a$ و نیز $MF' + MF'_1 = 2a$ می‌باشد، پس $MF' = MF'_1$ می‌باشد، پس نقطهٔ M با F'_1 و F′ مثلث متساوی‌الساقینی می‌سازند. اگر F'_1 بر F′ منطبق گردد، نقطهٔ M بر شعاع AF′ قرار می‌گیرد به قسمی که $MF' + MF = 2a$ باشد و چون $MF' = MA - AF'$ است، پس $MA + MF = MF' + MF + F'A = 4a - AF$ می‌شود، پس مکان M (یعنی نقطهٔ تماس بیضی به کانونهای F و F′) بیضی است به کانونهای A و F و محور بزرگ $4a - AF$.

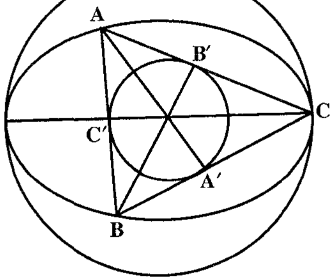
تبصره. این مسأله تعمیم مسألهٔ شلجمی یا سهمی اطمینان پرتاب گلوله است که در مکانیک متوسطه ذکر شده است. اگر کوکبهایی در نقطهٔ A با سرعت متساوی حول بیضیهای مدار خود حرکت کنند جمیع این مدارها در بیضی لفاف مذکور محاطند (یعنی با آن مماس می‌باشند) پس در حرکت خود (که به قانون کپلر دورهٔ حرکت برابر است) در یک موقع در A مجتمع می‌شوند و مجدداً متفرق شده و باز هم در A مجتمع می‌شوند و این کار تا آخر ادامه می‌یابد. ممکن است این مطلب، بیان کوکبهای متناوب باشد که نور آنها به تناوب معینی مرتباً رو به تزاید می‌گذارد و کم می‌شود تا مجدداً به کمال نور خود برسد. اگر در نتیجهٔ یک حادثه کیهانی کوکبی در نقطهٔ A منفجر شود، به قسمی که قطعات آن همه با یک سرعت پراکنده شوند، چنین امری رخ می‌دهد و امکان بیانی برای کوکبهای متناوب به این طریق به‌دست می‌آید.

۷۴۸. با در نظر گرفتن قطرهای عمود بر هم دایرهٔ اصلی، دایرهٔ مماس به وترهایی که انتهای دوبه‌دوی قطرهای مزدوج عمود بر هم را به هم وصل می‌کنند، دایره‌ای هم مرکز با دایرهٔ اوّلی است. از آن نتیجه می‌شود که پوش وترهایی که انتهای دوبه‌دوی هر دو زوج از قطرهای مزدوج را به هم وصل می‌کنند، یک بیضی است که هم مرکز و متشابه با بیضی داده شده است. اگر شعاع دایرهٔ اصلی a باشد، شعاع دایرهٔ پوش $\frac{a}{\sqrt{۲}}$ و همچنین برای بیضی پوش، نیمهٔ قطرهایش $\frac{a}{\sqrt{۲}}$ و $\frac{b}{\sqrt{۲}}$ است.

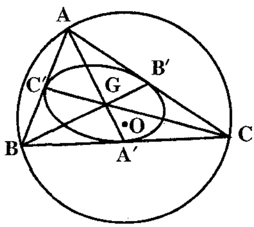
۷۴۹. این پوش، دایره‌ای است که مرکزش مرکز بیضی است.

۷۵۰. M را نقطه‌ای بر بیضی به کانونهای F و F′ اختیار می‌کنیم و فرض می‌کنیم MN دایره‌ای دلخواه (به مرکز M و شعاع دلخواه) باشد. دایرهٔ هادی کانون F′ را رسم می‌کنیم. تمام دایره‌هایی که به مرکز M یک نقطه از بیضی و به شعاع MF رسم می‌شوند، در نقطه‌هایی مانند O بر دایرهٔ هادی کانون F′ مماسند. از آن‌جا پوش دایره‌هایی که به مرکز M رسم می‌شوند و مماس بر دایرهٔ LF می‌باشند، دایره‌ای است هم مرکز با دایرهٔ هادی کانون F′ که F′N شعاع آن است. برای دایره‌هایی که با دایرهٔ هادی کانون F مماس داخل هستند. پوش، دایره‌ای است که F′N′ شعاع آن است.



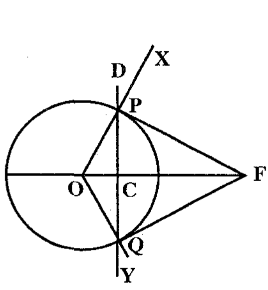


۷۵۱. با در نظر گرفتن دایرۀ اصلی بیضی، نقطۀ O' که متناظر نقطۀ O است، نشان می‌دهد که تعداد نامحدودی مثلث محاط در دایرۀ اصلی وجود دارند که نقطۀ O' مرکز ثقل آنهاست. ضلعهای تمام این مثلثها بر بیضی اشتاینر که از پای میانه‌ها می‌گذرد و نقطۀ O' مرکز آن است، مماس می‌باشند. همین ویژگی برای مثلثهای محاط در یک بیضی نیز برقرار است، پس پوش مورد نظر مسأله، یک بیضی است که نقطۀ O مرکز آن است، زیرا این مثلثها، میانه‌هایشان، بیضی پوش را می‌توان تصویر قائم مثلثهای محاط در دایره، میانه‌های آنها و بیضی پوش اشتاینر روی صفحه‌ای دانست که موازی صفحۀ دایره نباشد.



نکته. اگر یک دایرۀ (O) و نقطه‌ای ثابت مانند G درون این دایره داشته باشیم، تعداد بیشماری مثلث می‌توان در این دایره محاط کرد که نقطۀ G مرکز ثقل آنها باشد. ضلعهای این مثلثها بر بیضی ثابتی مماسند.

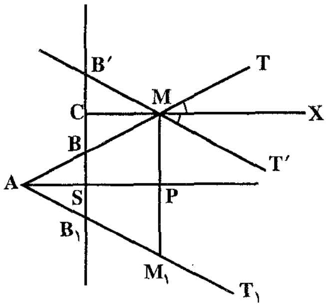
۲.۶.۷. هذلولی



۷۵۲. یک هذلولی رسم می‌کنیم که یکی از کانونهای آن F و هادی نظیرش D باشد. دایرۀ اصلی این هذلولی را رسم نموده و می‌دانیم که خط D وترش تماس مماسهای FP و FQ می‌باشند که از نقطۀ F بر این دایره رسم می‌شوند و همچنین خطهای OX و OY که شعاعهای نقطه‌های تماس می‌باشند مجانبهای هذلولی هستند. به عبارت دیگر مجانبهای هذلولی را که با شرایط مفروض داده شده است، به ترتیب زیر می‌توان به‌دست آورد که روی خط D دو نقطۀ دلخواه F و Q و قرینه نسبت به C اختیار نموده، و عمودهای PX و QY را به خطهای FP و FQ فرود آوریم (شکل). زاویۀ قائمۀ FPX چنان تغییر می‌کند که ضلع FP از نقطۀ ثابت F می‌گذرد و رأس P روی خط ثابت D تغییر مکان می‌دهد. پوش ضلع دیگر زاویۀ قائمه یعنی PX یک سهمی است که کانونش F بوده و مماس در رأسش خط D است. پوش خط QY نیز همین سهمی است.

۷.۶.۳. سهمی،...

۷.۶.۳.۱. تنها یک سهمی



۷۵۳. فرض کنیم A و B فصل مشترک MT با محور و مماس در رأس باشد (شکل).
AT_1 قرینهٔ AT نسبت به محور، بر سهمی مماس است. در نتیجه MT' قرینهٔ MT نسبت به MX با AT_1 موازی است. از M عمودی بر محور رسم می‌کنیم تا آن را در P و AT_1 را در M_1 قطع کند و فرض می‌کنیم B'، B_1 و C فصل مشترکهای T' و T_1 و MX با مماس در رأس باشند.

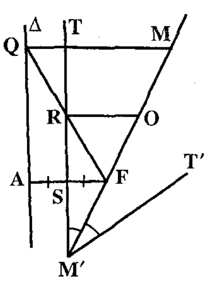
می‌دانیم S وسط تحت مماس AP است و داریم: $SB = \frac{PM}{2}$.

و چون $$SB + SB' = 2SC = 2PM \Rightarrow SB' = \frac{3PM}{2}$$

و از آن‌جا $\frac{SB'}{SB} = 3$ و در نتیجه $\frac{\overline{SB'}}{\overline{SB}} = -3$.

پس T' مجانس T_1 نسبت به قطب S و قوت ۳- می‌باشد و پوش T' یک سهمی است مجانس سهمی مفروض در این دستگاه تجانس.

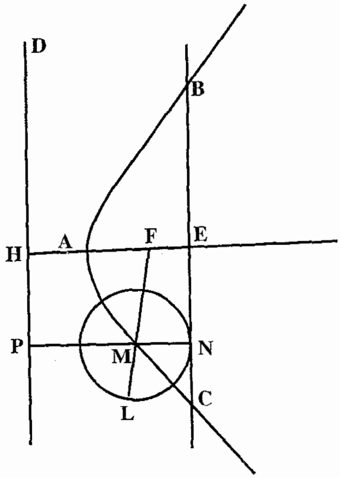
۷.۶.۳.۲. یک سهمی، یک نقطه



۷۵۴. فرض کنیم Δ و ST هادی و مماس در رأس بر سهمی باشند (شکل). MQ را عمود بر Δ رسم می‌کنیم، FQ خط ST را در R قطع می‌کند. سپس RO را بر ST عمود می‌کنیم. نقطه‌های S، R و O بترتیب وسطهای FA، FQ و FM می‌باشند، پس O مرکز دایره‌ای است به قطر FM.

از طرف دیگر $FO = \frac{FM}{2}$ و $RO = \frac{MQ}{2}$ است ولیکن $FM = MQ$، پس $RO = OF$ است، بنابراین دایرهٔ به قطر FM در نقطهٔ R بر ST مماس است. به همین ترتیب ثابت می‌شود که دایرهٔ به قطر FM' بر ST مماس در رأس بر سهمی مماس است. دومین مماس مشترک T'، قرینهٔ T است نسبت به خط‌المرکزین MM' که فاصله‌اش از F مساوی FS می‌باشد. بنابراین پوش T' دایره‌ای است به مرکز F و به شعاع FS.

۷.۶.۳.۳. یک سهمی، یک خط



۷۵۵. سهمی به کانون F و هادی D را در نظر می‌گیریم. BC بر محور سهمی عمود است. به مرکز نقطهٔ M واقع بر سهمی، دایره‌ای مماس بر BC رسم می‌کنیم. داریم :

$$MN = ML \ , \ MF = MP$$

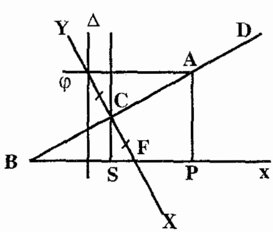
پس

$$FL = MF + ML$$

$$= MP + MN = PN = HE$$

چون HE مقداری است ثابت، پس دایرهٔ متغیر به مرکز M بر دایرهٔ ثابت به مرکز F و شعاع اندازهٔ HE مماس است و از آن‌جا نتیجه می‌گیریم لفاف دایره‌های متغیر، دایرهٔ ثابت مذکور است و این دایره از B و C نیز می‌گذرد.

۷.۶.۳.۴. یک سهمی، یک خط مماس، دو نقطه

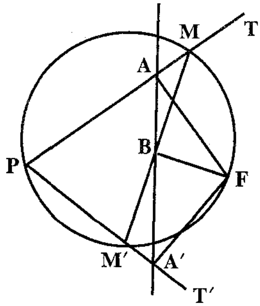


۷۵۶. مکان کانون F. فرض کنیم Bx محور سهمی با شرایط مفروض باشد. AP را عمود بر Bx رسم می‌کنیم (شکل). می‌دانیم خطی که از C وسط AB بر Bx عمود شود، مماس در رأس S بر سهمی می‌باشد و همچنین عمودمنصف AB از F کانون می‌گذرد، پس خط YX عمودمنصف AB مکان هندسی F کانون این سهمی است.

مکان رأس. با توجه به این که زاویهٔ $B\hat{S}C = \frac{\pi}{2}$ است، دایرهٔ به قطر BC از نقطهٔ S می‌گذرد. بنابراین مکان نقطهٔ S رأس دایره‌ای است به قطر BC.

پوش هادی. فرض کنیم φ قرینهٔ F نسبت به مماس D باشد، φ متعلق به هادی Δ و Aφ موازی با محور یعنی عمود بر Δ می‌باشد.

زاویهٔ AφΔ قائمه است، ضلع Aφ آن از نقطهٔ ثابت A و رأس φ روی خط ثابت XY تغییر می‌کند، پس پوش φΔ و یا Δ هادی سهمی، یک سهمی است به کانون F و هادی XY.

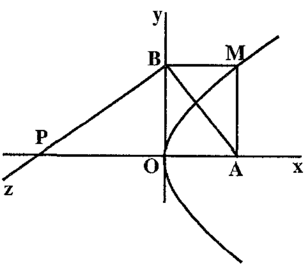


۷.۶.۳.۵. یک سهمی، دو خط مماس، کانون

۷۵۷. اگر A و A′ تصویرهای F روی T و T′ باشند (شکل)، می‌دانیم AA′ مماس در رأس سهمی است. از طرف دیگر B تصویر F روی MM′ روی AA′ قرار دارد (قضیهٔ Simson)، بنابراین MM′ بر سهمی مفروض مماس است.

بعکس. اگر MM′ یک مماس بر سهمی باشد، A، A′ و B تصویرهای F روی ضلعهای مثلث PMM′ واقع بر یک استقامتند و F متعلق به دایرهٔ محیطی مثلث PMM′ می‌باشد، به عبارت دیگر M و M′ متعلق به دایرهٔ گذرنده بر P و F می‌باشند.

۷.۶.۳.۶. مسأله‌های ترکیبی



۷۵۸. ۱. فرض کنیم P محل برخورد Bz و محور باشد. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABP (شکل) داریم: $\overline{OB}^2 = -\overline{OA}.\overline{OP}^2$ ولی $OB = AM$ و M روی سهمی است، پس $\overline{AM}^2 = 2p.\overline{OA}$ و از آن‌جا:

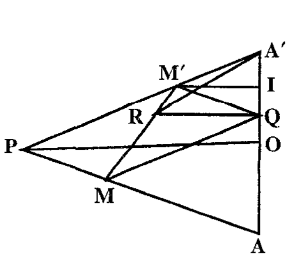
$$-\overline{OA}.\overline{OP} = 2p.\overline{OA} \Rightarrow \overline{OP} = -2p$$

پس P نقطه‌ای است ثابت.

۲. ضلع Bz زاویهٔ قائمهٔ PBA، از نقطهٔ ثابت P می‌گذرد و بعلاوه رأس B روی Oy تغییر می‌کند. بنابراین پوش AB ضلع دوم این زاویه، یک سهمی است به کانون P و مماس در رأس Oy.

۷۵۹. ۱. داریم:

$$\frac{A'M'}{M'Q} = \frac{A'P}{PA} \Rightarrow \frac{A'M'}{PM} = \frac{A'P}{PA}$$



پس M و M′ دو نقطهٔ متناظر از دو تقسیم متناسب جدا شده روی PA و PA′، که در آن P و A متناظرهای A′ و P می‌باشند و در نتیجه MM′ بر یک سهمی مماس است و پوشش این منحنی است، زیرا وقتی Q خط AA′ را بپیماید، M تمام خط PA را طی خواهد کرد و MM′ بر تمام مماسها منطبق خواهد شد.

۲. خط PO که P را به وسط AA' وصل می‌کند، موازی با محور است. $M'I$ را موازی با PO یعنی با محور رسم می‌کنیم. برای تحقیق این که R نقطهٔ تماس MM' است، کافی است ثابت کنیم $M'I$ خط $A'R$ را در وسطش قطع می‌کند و یا این که I وسط $A'Q$ است و این نتیجه از تجانس $A'M'Q$ و $A'PA$ به‌دست می‌آید.

۴.۶.۷. مقطع مخروطی به طورکلی

۷۶۰. در مورد بیضی، این پوش یک دایره است که مرکزش، مرکز بیضی و شعاعش $\frac{ab}{\sqrt{a^2+b^2}}$ است. برای هذلولی، شعاع این دایره $\frac{ab}{\sqrt{b^2-a^2}}$ است که در آن a نصف عدد ثابت است و هنگامی حقیقی است که $b>a$ باشد.

فهرست منابع

۱. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد اول. هاورد. و. ایوز. ترجمهٔ دکتر محمد قاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۲. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد دوم. هاورد. و. ایوز. ترجمهٔ دکتر محمد قاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۳. آمادگی برای المپیادهای ریاضی. واسیلیف ـ گوتن ماخر ـ رابرت ـ توم. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۴. آمادگی برای شرکت در المپیاد ریاضی ایران. هوشنگ شرقی. نشر علوم پایه.
۵. المپیادهای بین‌المللی ریاضی. جلد اول. ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ناس، نشر نام.
۶. المپیادهای بین‌المللی ریاضی. جلد دوم. مورای. اس. کلامکین. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ناس، نشر نام.
۷. المپیادهای ریاضی ایران. دکتر عبادا... محمودیان. انتشارات دانشگاه شریف.
۸. المپیادهای ریاضی بلژیک. انجمن استادان ریاضی بلژیک. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات فاطمی.
۹. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد اول. ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ محمد قاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۱۰. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد دوم. مورای. اس. کلامکین. ترجمهٔ دکتر محمد قاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۱۱. المپیادهای ریاضی لنینگراد. د. فومین. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات انیشتن.
۱۲. المپیادهای ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ پرویز شهریاری- ابراهیم عادل. انتشارات مشعل دانشجو.
۱۳. بازآموزی و بازشناخت هندسه. هـ.س.م. کوکس تیر- س.ل. گریتزر. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات مدرسه.
۱۴. برگزیدهٔ مسائل هندسه. گروهی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ عادل ارشقی، موسسهٔ خدمات فرهنگی رسام.
۱۵. تاریخ ریاضیات. جلد اول. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۶. تاریخ ریاضیات. جلد دوم. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.

۱۷. تاریخ هندسه. پی‌یر مارشال. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری. موسسهٔ مطبوعاتی علمی.

۱۸. تبدیلهای هندسی. جلد اول. ای. م. یاگلم. ترجمهٔ اسدا... کارشناس ـ عمید رسولیان. مرکز نشر دانشگاهی.

۱۹. تبدیلهای هندسی. جلد دوم. ای. م. یاگلم. ترجمهٔ محمد باقری. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۲۰. تبدیلهای هندسی. جلد سوم. ای. م. یاگلم. ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۲۱. تئوری مقدماتی اعداد. جلدهای اول و دوم. دکتر غلامحسین مصاحب. انتشارات دهخدا.

۲۲. چگونه مسأله حل کنیم؟ جورج پولیا. ترجمهٔ احمد آرام. مؤسسهٔ مطبوعاتی کیهان.

۲۳. چند قضیهٔ هندسه. نگارش دکتر احمد شرف‌الدین.

۲۴. ۴۵۰ مسألهٔ ریاضی با حل. محمدحسین پرتوی ـ حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.

۲۵. حل‌المسائل هندسهٔ جدید. حسن مولایی، ناشر کتابفروشی سعدی.

۲۶. حل‌المسائل هندسه و مخروطات جدید. محمدحسین پرتوی ـ محمدعلی پرتوی. ناشر کتابفروشی سعدی.

۲۷. حل مسائل ریاضیات. محمدعلی واعظیان. ناشر محمدحسن علمی.

۲۸. حل مسائل متمم هندسه. دکتر کارونه. ترجمهٔ محمد باقر ازگمی ـ احسانا... قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.

۲۹. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان چهارم ریاضی. حسینعلی شاهورانی، انتشارات کاویان.

۳۰. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان ششم ریاضی و داوطلبان متفرقه. عباس ذوالقدر.

۳۱. حل مسائل هندسه برای سال چهارم دبیرستان. محمدباقر ازگمی ـ غلامرضا بهنیا ـ باقر امامی ـ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.

۳۲. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی. داریوش شاهین. انتشارات جاویدان.

۳۳. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی و کنکور دانشکده‌ها، غلامعلی ریاضی ـ علی حسن‌زاده ـ محمدحسین پرتوی ـ محمد عابدی. مؤسسهٔ مطبوعاتی شرقی.

۳۴. حل مسائل هندسه و مخروطات برای سال ششم ریاضی و داوطلبان کنکور. محمد باقر ازگمی ـ پرویز شهریاری ـ غلامرضا بهینا ـ باقر امامی ـ علی اصغر شیخ رضایی. موسسهٔ مطبوعاتی احمدعلمی.

۳۵. خلاصهٔ زندگینامهٔ علمی دانشمندان. بنیاد دانشنامهٔ بزرگ فارسی. انتشارات علمی و فرهنگی.
۳۶. خلاقیت ریاضی. جورج پولیا. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۳۷. خطهای راست و منحنی‌ها. ن.ب. واسی‌لی‌یو ـ و.ل. گوتن ماخر. ترجمهٔ پرویز شهریاری، ابراهیم عادل. انتشارات تهران.
۳۸. در پی فیثاغورس. شه پان النسکی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات امیرکبیر.
۳۹. دورهٔ حل‌المسائل هندسه برای دبیرستان. جلدهای اول و دوم. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری ـ شرکت سهامی چاپ و انتشارات کتب ایران.
۴۰. دورهٔ کامل خودآموز هندسهٔ علوم تجربی. محمدهاشم رستمی. نشر گزاره.
۴۱. دورهٔ مجلهٔ ریاضی آشتی با ریاضیات و آشنایی با ریاضیات. پرویز شهریاری.
۴۲. دورهٔ مجلهٔ ریاضی برهان. انتشارات مدرسه.
۴۳. دورهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. وزارت آموزش و پرورش.
۴۴. دورهٔ مجلهٔ ریاضی یکان. عبدالحسین مصحفی.
۴۵. روش حل مسائل هندسه. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری، بنگاه مطبوعاتی فریدون علمی.
۴۶. ریاضیات زنده. ی. پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر میترا.
۴۷. ریاضیدانان نامی. دکتر اریک تمپل بل. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری. انتشارات امیرکبیر.
۴۸. سرگرمیهای هندسه. ی. پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات خوارزمی.
۴۹. قضایا و مسائل هندسه. غلامرضا یاسی‌پور.
۵۰. گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی. جی. ال. برگرن. ترجمهٔ دکتر محمد قاسم وحیدی اصل ـ دکتر علیرضا جمالی. انتشارات فاطمی.
۵۱. محاسبه‌های برداری. پرویز شهریاری.
۵۲. مجموعهٔ مقالات و مسائل ریاضی. غلامرضا یاسی‌پور.
۵۳. مسأله‌های المپیادهای ریاضی امریکا. موری. اس. کلامکین. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. نشر بردار.
۵۴. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در شوروی سابق. واسیلیف ـ یه گوروف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر توسعه.
۵۵. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف. جمعی از ریاضیدانان شوروی سابق. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.

۵۶. مسأله‌های تاریخی ریاضیات. و. د. چیستیاکوف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر نی.

۵۷. مسأله‌های ریاضی آسان ولی... گروهی از ریاضیدانان شوروی سابق. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر گستره.

۵۸. مسأله‌های دشوار ریاضی. کنستانتین شاخنو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.

۵۹. مسائل ریاضیات مقدماتی. ای. خ. لیواشینسکی. ترجمهٔ غلامرضا بهنیا. انتشارات احمد علمی.

۶۰. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد اول. چارلز. ت. سالکیند. ترجمهٔ سید حسین جوادپور ـ محمد قزل ایاغ. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۶۱. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد دوم. چارلز. ت. سالکیند. ترجمهٔ علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۶۲. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد سوم. چارلز. ت. سالکیند. ارل. ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۶۳. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد چهارم. آرتینو گاگلیون ـ شل. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۶۴. مسائل مسابقات ریاضی (کنکورهای ریاضی شوروی سابق) و.س. کوشچنکو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. مؤسسه انتشارات امیرکبیر.

۶۵. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ دکتر سعید فارابی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۶۶. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان، گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ محمد مهدی ابراهیمی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۶۷. مسائل و تمرینات لگاریتم و ریاضیات. احسانا... قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.

۶۸. مسائل هندسه و حل آنها برای داوطلبان کنکور دانشکده‌ها. محمدباقر ازگمی ـ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.

۶۹. مسأله‌هایی در هندسهٔ مسطحه. ای. ف. شاریگین. ترجمهٔ ارشک حمیدی. انتشارات مبتکران.

۷۰. مهمترین مسأله‌ها و قضیه‌های ریاضی. شکلیارسکی ـ چنتسوف یاگلوم. ترجمهٔ پرویز شهریاری ابراهیم عادل. انتشارت مجید، انتشارات فردوس.

۷۱. نابرابریها. پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۷۲. نابرابریهای هندسی. نیکولاس د. کازارینوف. ترجمهٔ دکتر محمدحسن بیژن‌زاده. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۳. نه مقالهٔ هندسه. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری.
۷۴. هندسهٔ ایرانی. ابوالوفا محمدبن محمد البوزجانی. ترجمهٔ سید علیرضا جذبی. انتشارات سروش.
۷۵. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی. ماروین جی. گرینبرگ. ترجمهٔ م. هـ. شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۶. هندسه برای سال ششم دبیرستانها (مجموعهٔ علوم) محمد باقر ازگمی ـ باقر امامی ـ غلامرضا بهنیا ـ پرویز شهریاری ـ علی اصغر شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۷۷. هندسهٔ تحلیلی. حسین غیور ـ محسن غیور. انتشارات صفی علیشاه.
۷۸. هندسه‌های جدید. جیمز. ار. اسمارت. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. انتشارات مدرسه.
۷۹. هندسه در گذشته و حال. ترجمه و تألیف پرویز شهریاری. از مجموعه کتابهای سیمرغ.
۸۰. هندسهٔ دلپذیر. دکتر احمد شرف‌الدین. انتشارات مدرسه.
۸۱. هندسهٔ دوایر. دکتر محسن هشترودی. انتشارات مجلهٔ ریاضی یکان.
۸۲. هندسهٔ دورهٔ کاردانی تربیت معلم رشتهٔ علوم ریاضی. صفر با همت شیروانه ده ـ حسین غیور ـ حسین دوستی. شرکت چاپ و نشر ایران.
۸۳. هندسهٔ ۲ نظام جدید آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
۸۴. هندسهٔ سال چهارم دبیرستان. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری.
۸۵. هندسهٔ سالهای اول، دوم، سوم و چهارم دبیرستان نظام قدیم آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
۸۶. هندسهٔ مسطحه. مقدمه‌ای بر هندسهٔ نوین مثلث و دایره. ناتان آلتشیلر کورت. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۸۷. هندسهٔ مقدماتی از دیدگاه پیشرفته. ادوین. ا. موئیز. ترجمهٔ دکتر امیر خسروی ـ محمود نصیری. انتشارات مبتکران.
۸۸. هندسهٔ موئیز ـ دانز. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۸۹. هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستان. وزارت آموزش و پرورش.
۹۰. هندسه ۱ نظام جدید آموزشی. وزارت آموزش و پرورش.

91. EXERCICES DE GEOMETRIE PAR. F.G.M.

92. EXERCICES DE GEOMETRIE PAR. Th. CARONNET.

93. EXERCICES DE GEOMETRIE MODERNE (TRANSVERSALES). PAR. G. PAPELIER.

94. EXERCICES DE GEOMETRIE MODERNE (POLES, POLAIRES, PLANS POLAIRES). PAR G. PAPELIER.

95. GEOMETRY A HIGH SCHOOL COURSE. SERGE LANGE. GENE MURROW.

96. GIANT COLOR BOOK OF MATHEMATICS. BY IRVING ADLER.

97. GUIDES PRATIQUES BORDAS.
II. GEOMETRIE PAR ROBERT ARDRE´.

98. JACOBS HAROLD. R. GEOMETRY.

99. LES NOMBRES ET LEURS MYSTERES PAR ANDRE´ WARUSFEL.

100. MATHEMATICS AROUND US.

101. MEMENTO DE MATHEMATIQUES USUELLES PAR. A. PONT.

102. PLANE GEOMETRY. WITH SPACE CONCEPTS. A.M. WELCHONS. W.R. KRICKENBERGER, HEIEN. R. PEARSON.

103. PRECIS DE GEOMETRIE PAR ANDRÉ VIEILLEFOND. P. TURMEL.

104. PRENTICE HALL GEOMETRY BY ROBERT KALINE, MARY KAY CORBITT.

105. PRINCIPLES AND PROBLEMS OF PLANE GEOMETRY BY BARNETT RICH.

106. RESOLUTION DES PROBLEMES ELEMENTAIRES DE GEOMETRIE PAR. E. J. HONNET.

107. THE COLLEGE BOARDS EXAMINATION BY. MARTIN MC. DONOUGH. ALVIN. J. HANSEN.