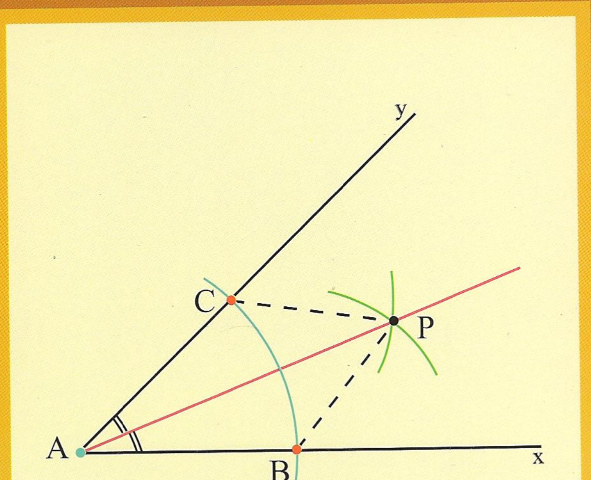
دایرة المعارف هندسه

۱۱

رسم شکلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه

(نقطه ، پاره خط ، نیمخط ، خط راست وزاویه)



مؤلّف : محمد هاشم رستمی

بسم الله الرحمن الرحیم

دایرة المعارف هندسه

«جلد یازدهم»

رسم شکلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه

(نقطه، پاره خط، نیمخط، خط راست و زاویه)

مؤلف: محمّدهاشم رستمی

فهرست

پیشگفتار

سپاس فراوان به درگاه پروردگار توانا که توفیق نگارش این مجموعه را عنایت فرمود. از سالها پیش نیاز به تألیف مجموعهٔ کاملی از هندسه شامل تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه احساس می‌شد، تا علاقه‌مندان به این شاخه از ریاضی با دسترسی به تمام مطالب مربوط به هر مبحث و حل و بررسی آنها، نه تنها به احاطه‌ای کامل بر آن مبحث دست‌یابند، بلکه خود نیز قضیه‌ها و مسأله‌ها را تعمیم دهند و یا قضیه‌ها و مسأله‌های جدیدی در آن زمینه کشف کنند. به این جهت از حدود سی‌و پنج سال پیش به جمع‌آوری تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسهٔ موجود در کتابهای ریاضی به زبان فارسی، ترجمه شده به فارسی، و کتابهای خارجی که در اختیار یا در دسترس بود، برای تألیف دایرةالمعارف هندسه اقدام، و تمام این مطالب براساس موارد زیر دسته‌بندی گردید:

۱. ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه
۲. رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه
۳. مکانهای هندسی و ترسیمهای هندسی در هندسهٔ مسطحه
۴. تبدیلهای هندسی (انتقال، بازتاب، دوران، تجانس، انعکاس،...)
۵. مقطعهای مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی و سهمی)
۶. هندسهٔ تحلیلی
۷. هندسهٔ فضایی
۸. هندسه‌های نااقلیدسی
...

هریک از عنوانهای بالا با توجه به حجم مطالب، یک یا چند جلد از این دایرةالمعارف را

دربر می‌گیرد، به‌عنوان مثال، رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه، شامل پنج جلد به شرح زیر است :

جلد ۳. نسبت پاره‌خطها در هندسهٔ مسطحه (نسبت و تناسب، قضیهٔ تالس، و...) ؛

جلد ۴. رابطه‌های متری در دایره ؛

جلد ۵. رابطه‌های متری در مثلث، مثلث و دایره‌های : محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر ؛

جلد ۶. رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه (مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلث متساوی‌الساقین، مثلث قائم‌الزاویه، ...) ؛ مثلثهای ویژه و دایره‌های : محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر ؛

جلد ۷. رابطه‌های متری در چند ضلعیها (چهارضلعی، چهار ضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای محاطی و محیطی، پنج‌ضلعی، شش‌ضلعی و...).

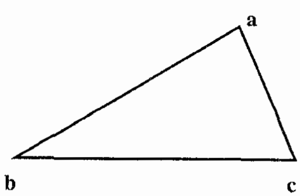
برای استفادهٔ بهینه از این مجموعه ذکر چند نکته ضروری است.

● در این مجموعه، صورت قضیه‌ها و مسأله‌ها همراه با شکل آنها داده شده است تا دانشجویان علاقه‌مند، پیش از مراجعه به راهنمایی یا حل، خود به حل آنها بپردازند (به استثنای برخی مسأله‌ها که رسم شکل توسط دانشجو، جزء هدفهای مسأله است).

● قضیه‌ها و مسأله‌های تاریخی هندسه، با ذکر تاریخچهٔ مختصری از زمان ارائه، و راه‌حلهای آنها در قسمت مربوط به خود آمده‌اند، و غیر از مواردی خاص، تنها یک یا دو راه‌حل از آنها مطرح شده است، زیرا برخی از این قضیه‌ها تاکنون به دهها و حتی به صدها راه، حل شده‌اند ؛ مانند قضیهٔ فیثاغورس درمورد مثلث قائم‌الزاویه «در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع اندازهٔ وتر، برابر است با مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه، $a^2 = b^2 + c^2$» که تنها به‌وسیلهٔ اقلیدس از ۸ راه اثبات گردیده است.

● مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، از جمله المپیادهای ریاضی ایران، و مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی کشورهای دیگر، به‌همان صورت ترجمه شده، یا نوشته شده در متن اصلی آورده شده است.

● علامتهای به‌کار گرفته شده در مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و کشورهای مختلف به‌همان صورت متن اصلی آنها آمده است. به‌عنوان مثال در المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف پاره‌خط $\overline{AB}$ به‌صورتهای $\overline{AB}$ ، $|AB|$ و یا AB نشان داده شده است، و یا در المپیادهای ریاضی بلژیک از حروف کوچک مانند a، b و c برای نامگذاری رأسهای مثلث استفاده شده، مثلاً گفته شده «در مثلث abc، ضلعهای ab، bc و ac، ...».



● در دیگر قضیه‌ها، مسأله‌ها، تعریفها و شکلها، از حرفها و علامتهای یکسان استفاده شده است ؛ به‌عنوان مثال همه‌جا، نقطه‌ها با حرفهای بزرگ لاتین مانند، نقطه‌های A، B، C و ... ؛ و پاره‌خط AB به‌صورت AB و اندازهٔ زاویهٔ A به‌صورت $\hat{A}$ نشان داده شده است.

این جلد از دایرةالمعارف هندسه، رسم شکلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه، شامل رسم نقطه، پاره‌خط، نیمخط، خط راست و زاویه است، که ۳ بخش دارد.

بخش ۱. ابزار، روشها و کاربردهای رسم شکلهای هندسی

بخش ۲. رسم نقطه

بخش ۳. رسم پاره‌خط، نیمخط، خط راست و زاویه

هریک از بخشهای بالا به زیر بخشهایی تقسیم شده است. به‌عنوان مثال بخش ۳، رسم پاره‌خط، نیمخط، خط راست و زاویه شامل این زیر بخشهاست :

۳.۱. رسم پاره‌خط

۳.۲. رسم نیمخط

۳.۳. رسم‌خط

۳.۴. رسم زاویه

هریک از زیر بخشهای بالا خود به زیربخشهایی تقسیم شده‌اند. به‌عنوان مثال زیر بخش ۳.۱ رسم پاره‌خط شامل زیر بخشهای زیر است :

۳.۱.۱. رسم پاره‌خط با معلوم بودن پاره‌خط، نیمخط، خط و زاویه

۳.۱.۲. رسم پاره‌خط با معلوم بودن مثلث

۳.۱.۳. رسم پاره‌خط با معلوم بودن چندضلعی

۳.۱.۴. رسم پاره‌خط با معلوم بودن دایره

۳.۱.۵. رسم پاره‌خط با معلوم بودن مقطعهای مخروطی زیر بخشهای بالا خود به زیر بخشهای دیگری تقسیم شده‌اند. به‌عنوان مثال زیربخش

۳.۱.۴. رسم پاره‌خط با معلوم بودن دایره شامل زیر بخشهای زیر است :

۳.۱.۴.۱. رسم پاره‌خط با معلوم بودن ربع دایره

۳.۱.۴.۲. رسم پاره‌خط با معلوم بودن نیمدایره

۳.۱.۴.۳. رسم پاره‌خط با معلوم بودن یک دایره

۳.۱.۴.۴. رسم پاره‌خط با معلوم بودن دو دایره

هر یک از زیر بخشهای بالا نیز به زیر بخشهای جدیدی تفکیک شده‌اند. به‌عنوان مثال زیر بخش ۳.۱.۴.۳. رسم پاره‌خط با معلوم بودن دایره شامل این زیر بخشهاست :

۳.۱.۴.۳.۱. رسم پاره‌خط با معلوم بودن تنها یک دایره
۳.۱.۴.۳.۲. رسم پاره‌خط با معلوم بودن یک دایره، نقطه
۳.۱.۴.۳.۳. رسم پاره‌خط با معلوم بودن یک دایره، پاره‌خط
۳.۱.۴.۳.۴. رسم پاره‌خط با معلوم بودن یک دایره، نیمخط
۳.۱.۴.۳.۵. رسم پاره‌خط با معلوم بودن یک دایره، خط
۳.۱.۴.۳.۶. رسم پاره‌خط با معلوم بودن یک دایره، زاویه
۳.۱.۴.۳.۷. رسم پاره‌خط با معلوم بودن یک دایره، نقطه، خط

...

زیر بخشهای بالا، خود هریک شامل زیر بخشهای جدیدی می‌باشند.

امید است این مجموعه، مورد استفادهٔ دانش‌پژوهان ارجمند قرار گیرد و در شکوفایی استعدادهای آنان سهمی داشته باشد :

مؤلف مدعی کامل بودن این دایرةالمعارف نیست، ولی امیدوار است که با همکاری ریاضیدانان محترم، استادان، دانشجویان، دانش‌آموزان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه، بتواند آن را کامل کند. بنابراین تقاضا دارد قضیه‌ها و مسأله‌هایی را که در این مجموعه وجود ندارد، همچنین نظرات و پیشنهادهای اصلاحی و ارشادی خود را برای رفع کاستیها و تکمیل دایرةالمعارف به نشانی ناشر یا مؤلف ارسال فرمایند، که پیشاپیش از این همکاری ارزنده صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

مؤلف

رسم شکلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه

(نقطه، پاره‌خط، نیمخط، خط راست و زاویه)

بخش ۱ . ابزار، روشها و کاربردهای رسم شکلهای هندسی

بخش ۲ . تعیین نقطه

بخش ۳ . رسم پاره‌خط، نیمخط، خط، زاویه

بخش ۱

• ابزار، روشها و کاربردهای رسم شکلهای هندسی

۱.۱. مکانهای هندسی

۲.۱. شرطهای لازم برای رسم کردن یک شکل

۳.۱. ابزارهای ترسیم

۴.۱. ترسیمهای اساسی هندسی

۵.۱. روشهای حل مسأله‌های ترسیمی

۱.۵.۱. کاربرد مستقیم قضیه‌ها
۲.۵.۱. روش سازنده
۳.۵.۱. روش تحلیلی
۴.۵.۱. ترسیمهای هندسی با استفاده از مکانهای هندسی
۵.۵.۱. ترسیمهای هندسی به کمک تبدیلهای هندسی
۶.۵.۱. ترسیمهای هندسی با استفاده از شکلهای کمکی
۷.۵.۱. ترسیمهای هندسی با استفاده از روش تشابه
۸.۵.۱. ترسیمهای هندسی با تا کردن کاغذ
۹.۵.۱. ترسیم، تنها با یک وسیله

۱.۶. کاربردهایی از ترسیم شکلهای هندسی

۱.۶.۱. حل هندسی مسأله‌های جبری

۱.۱.۶.۱. اثبات درستی اتحادهای جبری

۲.۱.۶.۱. حل هندسی معادله‌های جبری

۱.۲.۱.۶.۱. روش تناسبها

۲.۲.۱.۶.۱. روش اضافه کردن مساحتها

۳.۱.۶.۱. حل هندسی نامعادله‌های جبری

۲.۶.۱. استفاده از رسم شکلها برای اثبات قضیه‌ها

۳.۶.۱. استفاده از رسم شکلها برای پیدا کردن خاصیتهای جدید

۴.۶.۱. تبدیل مساحتها

بخش ۱. ابزار، روشها و کاربردهای رسم شکلهای هندسی

رسم شکلهای هندسی یا ساختمانهای هندسی را بسیاری از ریاضیدانان، عنصر اصلی آموزش ریاضی می‌دانند زیرا برای رسم شکلهای هندسی، بخشهای زیادی از هندسه، مانند تعریفها، قضیه‌ها، رابطه‌های متری، مکانهای هندسی، تبدیلهای هندسی و ... مورد استفاده قرار می‌گیرند.

جورج پولیا استاد آموزش ریاضی، در کتاب چگونه مسأله را حل کنیم آورده است، «شکلها نه تنها موضوع بحث مسأله‌های هندسی را تشکیل می‌دهند، بلکه همچنین کمک مهمی به حل همه‌گونه مسأله‌هایی می‌کنند که در آغاز هیچ ارتباطی با هندسه ندارند.»

دو دلیل عمده برای توجه به شکلها در حل مسأله‌ها وجود دارد:

۱. اگر مسألهٔ ما یک مسألهٔ هندسی بوده باشد، باید برای آن یک شکل در نظر بگیریم. این شکل ممکن است در ذهن و تخیل ما باشد یا بر روی یک برگ کاغذ ترسیم شده باشد؛ ....، ولی اگر بخواهیم همهٔ جزییات را یکی پس از دیگری آزمایش کنیم، نمی‌توانیم همهٔ آنها را همزمان در خاطر نگاه داریم، بلکه ملاحظهٔ آنها پس از آن که بر روی کاغذ ترسیم شده باشند، امکان‌پذیر است. یک کیفیت جزیی که در تخیّل ما نقش بسته باشد، ممکن است فراموش شود، ولی اگر بر روی کاغذ بیاید باقی می‌ماند. و چون به آن باز گردیم ما را به یاد ملاحظات قبلی می‌اندازد و از بعضی ناراحتیهایی که در امر به یاد آوردن ملاحظهٔ قبلی حاصل می‌آید، ما را خلاص می‌کند. مثلثی که قائم‌الزاویه یا متساوی‌الساقین نیست نباید به این صورتها ترسیم شوند. مثلثی با زاویه‌های ۴۵°، ۵۰° و ۷۵° مثلثی «کلی» است که از خطر قائم‌الزاویه بودن یا متساوی‌الساقین بودن مصون است.

برای تأکید دربارهٔ نقشهای متفاوت خطهای مختلف ممکن است از خطهای نازک، یا پر، و نقطه‌چین، یا از قلمهای رنگی استفاده کنید. خطهای کمکی را می‌توانید کمرنگ بکشید، ...

۲. اکنون به‌صورت خاص استفاده از شکلها را در مسأله‌های ساختمانهای هندسی (ترسیمهای هندسی) مورد بحث قرار می‌دهیم.

ملاحظهٔ تفصیلی چنین مسأله‌ای را با رسم کردن شکلی مشتمل بر مجهول و داده‌ها آغاز می‌کنیم که در آن همهٔ این عاملها بدان سان که در صورت مسأله بیان شده، جمع آمده است.

برای آن که مسأله را به‌صورتی مشخص و متمایز بفهمیم، لازم است که هر داده و هر جزء از شرط را جداگانه مورد مطالعه قرار دهیم، سپس همهٔ اجزاء را دوباره به هم می‌پیوندیم و شرط را به‌صورت یک کل ملاحظه می‌کنیم (تجزیه و ترکیب مجدد) و در آن می‌کوشیم که پیوندهای گوناگونی را که مستلزم آنهاست، همزمان درنظر بگیریم و آنها را ببینیم. به ندرت امکان آن هست که بدون رسم کردن یک شکل برروی کاغذ بتوانیم همهٔ این جزییات را از هم جدا سازیم و بار دیگر آنها را با هم ترکیب کنیم....

۳. اکنون به بحث دربارهٔ نکته‌هایی مربوط به رسم عملی شکلها می‌پردازیم.

الف. آیا شکلها را باید درست رسم کنیم یا تقریبی، و این کار، با اسبابهای ترسیم صورت بگیرد یا با دست، بدون اسباب؟

هر دو گونه شکل مزایای مخصوص به خود دارند....

ب. شکل کشیده شده نباید هیچ خصوصیت ناخواسته‌ای را تلقین کند. اجزاء مختلف شکل نباید از ارتباطهای ظاهری خبر دهند که در صورت مسأله خواسته نشده است،... هنگامی که مثلثی نمایشهای هندسی و شکلها و نمودارهای گوناگون، در همهٔ علوم، و نه تنها در فیزیک و شیمی و علوم طبیعی، بلکه در علم اقتصاد و حتی روانشناسی، به‌کار می‌رود. با کاربرد یک نمایش هندسی مناسب، در آن می‌کوشیم، که همهٔ چیزها را به زبان شکلها بیان کنیم و هرگونه مسأله را به شکل مسأله‌های هندسه درآوریم.

بدین ترتیب، حتی اگر مسأله شما یک مسألهٔ هندسه نیست، می توانید کوشش کنید تا برای آن یک شکل بکشید. **یافتن یک نمایش هندسی روشن برای یک مسأله غیر هندسی، برداشتن گامی مهم به جانب حل آن مسأله است.**

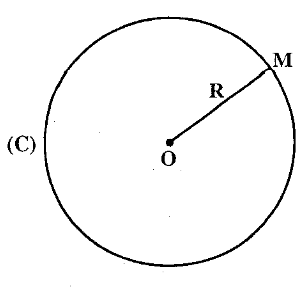
در این بخش مفاهیمی از هندسه که در ترسیمهای هندسی کاربرد بیشتری دارند، روشها، ابزار و کاربردهای رسم شکلهای هندسی، مورد بررسی قرار می‌گیرند.

۱.۱. مکانهای هندسی

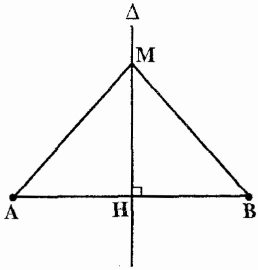
یکی از ابزارهای مهم و لازم برای ترسیم شکلهای هندسی، مکانهای هندسی می‌باشند. برای تعیین یک نقطه، دو مکان هندسی (دو شرط)، برای تعیین یک خط راست اگر بخواهیم با دو نقطه مشخص شود، چهار مکان هندسی (چهار شرط)، و اگر بخواهیم با یک نقطه و یک راستا مشخص شود، به سه شرط نیازمندیم.

مکانهای هندسی مهم. در این جا، به معرفی برخی از مکانهای هندسی در هندسهٔ مسطحه می‌پردازیم، که در ترسیمهای هندسی کاربرد بیشتری دارند.

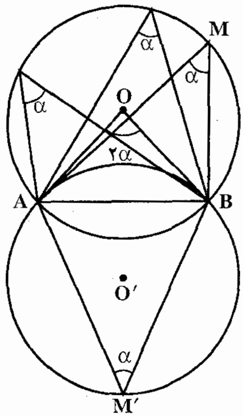
۱. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از نقطهٔ ثابتی واقع در آن صفحه به فاصلهٔ ثابتی باشد، یک دایره است، که آن نقطهٔ ثابت مرکز و آن فاصلهٔ ثابت، شعاع دایره نامیده می‌شوند. دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R را به‌صورت C (O , R) نشان می‌دهند.



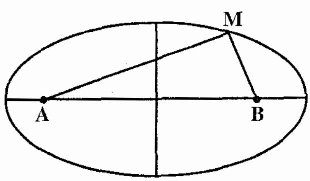
۲. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه به یک فاصله است، عمودمنصف پاره‌خط AB است.



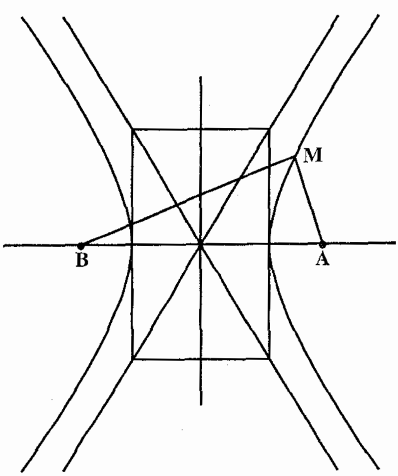
۳. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از آن نقطه پاره‌خط مفروض AB، تحت زاویهٔ معلوم α دیده می‌شود، بخشهایی از دو دایرهٔ مساوی است که بر دو نقطهٔ A و B می‌گذرند و زاویهٔ مرکزی روبه‌رو به وتر مشترکشان برابر ۲α است. این کمانها را، کمان درخور یا کمان حاوی زاویهٔ α می‌نامند.

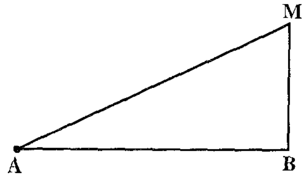


۴. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که مجموع فاصله‌شان از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر عدد ثابت ۲a است، یک بیضی به کانونهای A و B و عدد ثابت ۲a است.

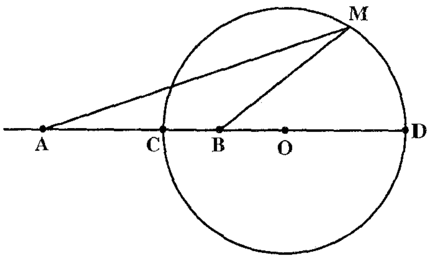


۵. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که تفاضل فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت ۲a است، یک هذلولی به کانونهای A و B و عدد ثابت ۲a‌است.

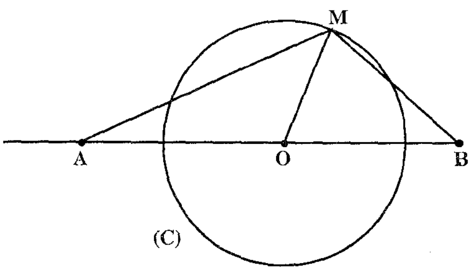




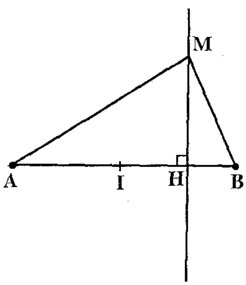
۶. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که حاصلضرب فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه مقدار ثابتی است، یک منحنی درجهٔ چهارم است.



۷. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه مقدار ثابتی است، یک دایره است که قطرش پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم می‌کند. این دایره را دایرهٔ آپولونیوس می‌نامند $(k \neq 1, 0)$.

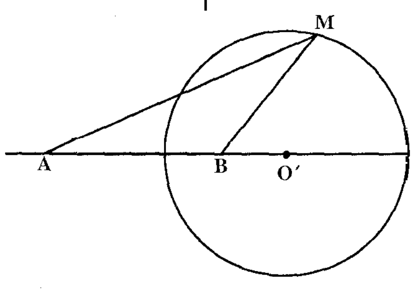


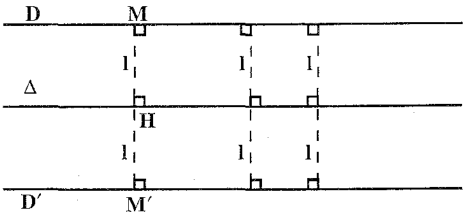
۸. مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعهای فاصله‌هایش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت k^2 است، یک دایره است که مرکزش نقطهٔ O' وسط پاره‌خط AB و شعاعش $R = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - AB^2}$ است.



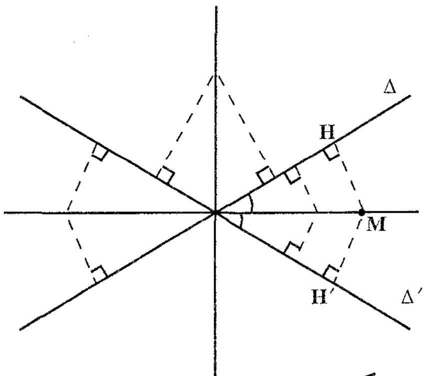
۹. مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B برابر مقدار ثابت k^2 است، خطی است راست عمودبر AB در نقطه‌ای مانند H به قسمی که اگر I وسط پاره‌خط AB باشد، $\overline{IH} = \frac{k^2}{2\overline{AB}}$ است.

۱۰. مکان هندسی نقطهٔ M از یک صفحه، که بین فاصله‌هایش از دو نقطهٔ ثابت A و B واقع در آن صفحه و عددهای p، q و r رابطهٔ $p\overline{MA}^2 + q\overline{MB}^2 = r$ برقرار باشد $(\frac{-q}{p} \neq 1)$، یک دایره است به مرکز O' چنان که $\frac{\overline{O'A}}{\overline{O'B}} = \frac{-q}{p}$ و شعاعش $R = \frac{\sqrt{r(p+q) - a^2pq}}{|p+q|}$ است که a طول پاره‌خط AB است.

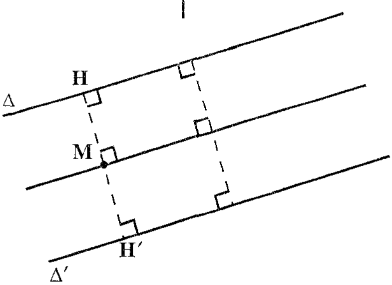




۱۱. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از یک خط راست Δ واقع در یک صفحه به فاصلهٔ معلوم l باشد، دو خط راست موازی آن خط، در دو طرف آن و به فاصلهٔ l از آن است.

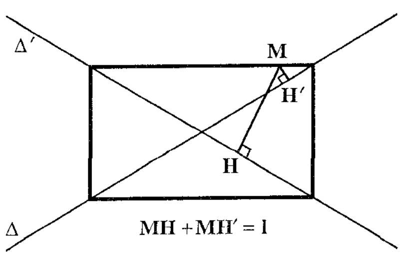


۱۲. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از دو خط متقاطع واقع در آن صفحه به یک فاصله است، نیمسازهای زاویه‌های بین آن دو خط است.

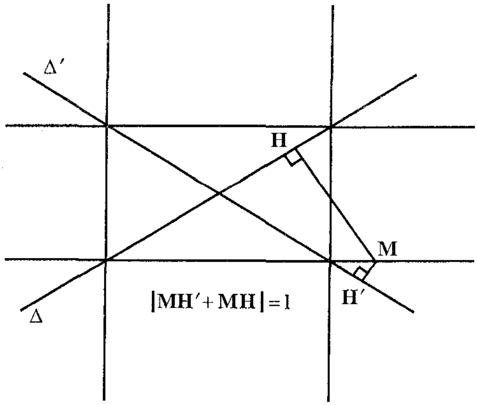


۱۳. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که از دو خط موازی واقع در آن صفحه به یک فاصله است، یک خط موازی آن دو خط، بین آنها و به یک فاصله از آنهاست.

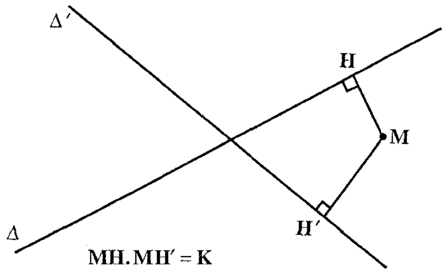
۱۴. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که مجموع فاصله‌اش از دو خط متقاطع واقع در آن صفحه برابر مقدار ثابت l باشد، ضلعهای مستطیلی است که آن دو خط قطرهای آن هستند و فاصلهٔ هر رأس این مستطیل از قطر مقابلش برابر l است.



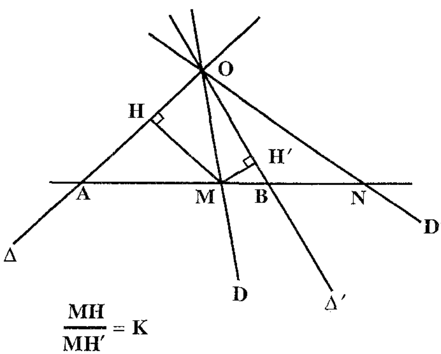
تبصره. اگر دو خط متوازی باشند، دو خط مکان هندسی (در صورت وجود) موازی آنها هستند.



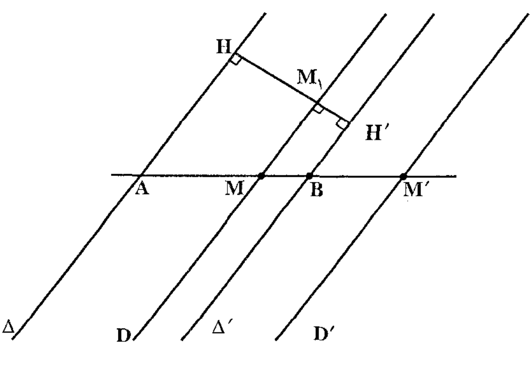
۱۵. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که تفاضل فاصله‌اش از دو خط ثابت واقع در آن صفحه، برابر مقدار ثابت l باشد، امتداد ضلعهای مستطیلی است که آن دو خط قطرهای آنند، و فاصلهٔ هر رأس مستطیل از ضلع مقابلش برابر l است.



۱۶. مکان هندسی نقطه‌ای که حاصلضرب فاصله‌اش از دو خط ثابت واقع در آن صفحه مقدار ثابتی است، هذلولی است که آن دو خط مجانبهای آن هستند.

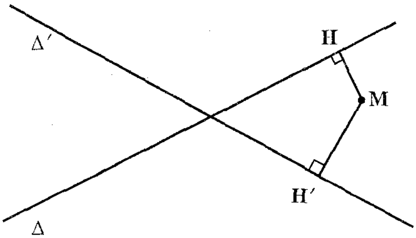


۱۷. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از دو خط متقاطع واقع در آن صفحه مقدار ثابتی باشد، دو خط راست است که بر نقطهٔ تقاطع آن دو خط می‌گذرند و با آن دو خط یک دستگاه توافقی می‌سازند.

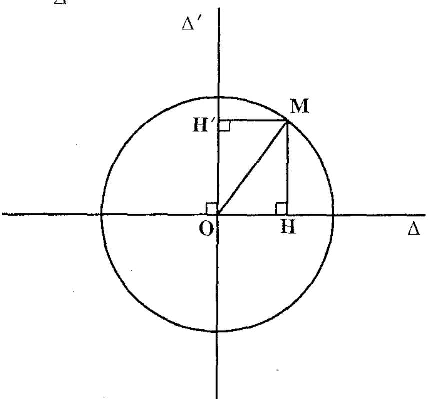


تبصره. اگر دو خط مفروض متوازی باشند، دو خط مکان هندسی نیز با آنها موازی‌اند (رأس دستگاه توافقی در فاصلهٔ بینهایت دور واقع است).

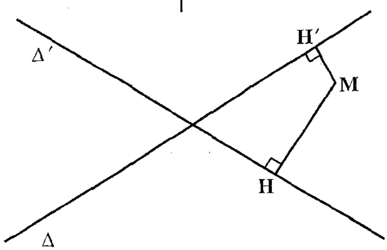
۱۸. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو خط متقاطع واقع در آن صفحه، مقدار ثابت k^2 باشد، یک بیضی است که قطر بزرگش بر نیمساز زاویهٔ حادهٔ بین آن دو خط منطبق است.



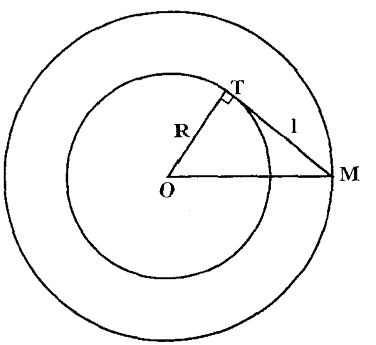
تبصره. اگر دو خط متقاطع بر هم عمود باشند، مکان هندسی نقطهٔ M یک دایره است که مرکزش محل برخورد آن دو خط است.



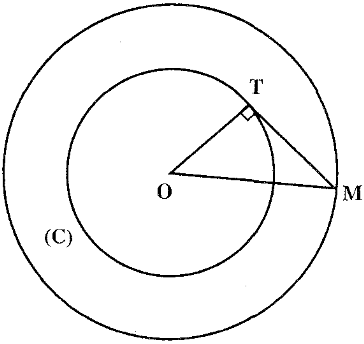
۱۹. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که قدرمطلق تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو خط متقاطع برابر مقدار ثابتی باشد، هذلولی متساوی‌القطرین است.



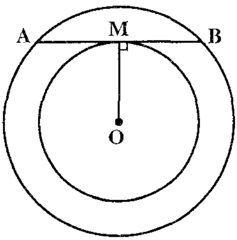
۲۰. مکان‌هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که طول مماسهای رسم شده از آن نقطه بر دایرهٔ ثابت $C(O , R)$ برابر مقدار ثابت l باشد، دایره‌ای است که مرکزش مرکز همان دایره و شعاعش $R' = \sqrt{l^2 + R^2}$ است.



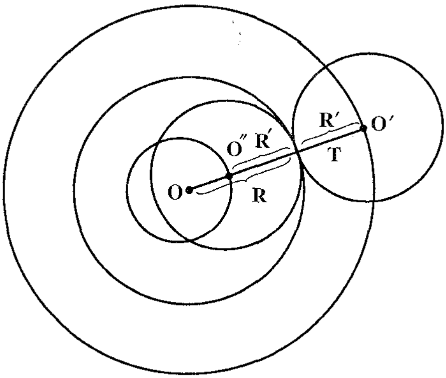
۲۱. مکان هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که قوت آن نسبت به دایرهٔ ثابت C (O , R) واقع در آن صفحه، مقدار ثابت p باشد، یک دایره به مرکز O و به شعاع $R' = \sqrt{p + R^{۲}}$ است.



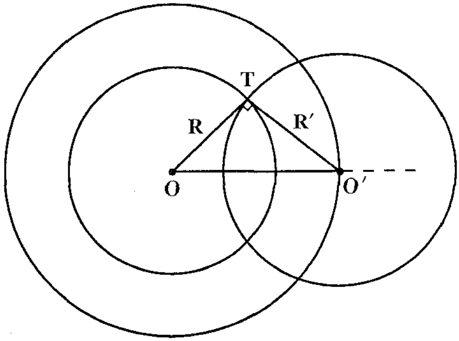
۲۲. مکان هندسی وسط وترهایی به طول l از یک دایرهٔ ثابت C (O , R)، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R' = \sqrt{R^{۲} - \frac{l^{۲}}{۴}}$ است.



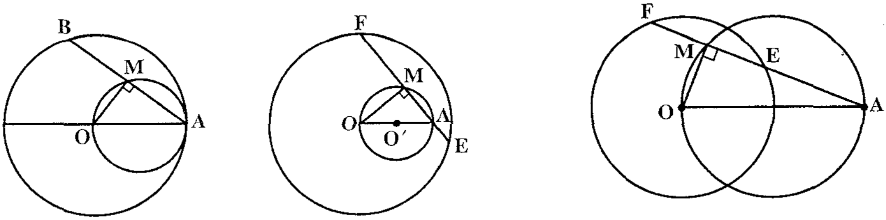
۲۳. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R′ که بر دایرهٔ C (O , R) مماسند، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R + R′ (مماس برونی) یا |R − R′| (مماس درونی) است.



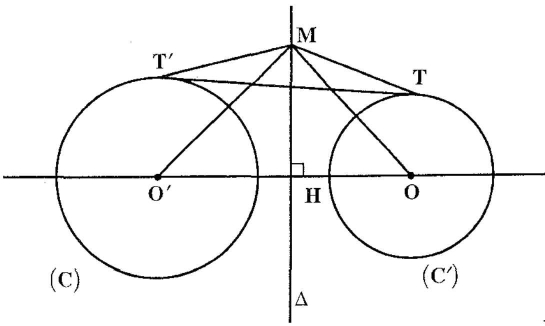
۲۴. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R′ که بر دایرهٔ C (O , R) عمودند، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R'' = \sqrt{R^{۲} + R'^{۲}}$ است.



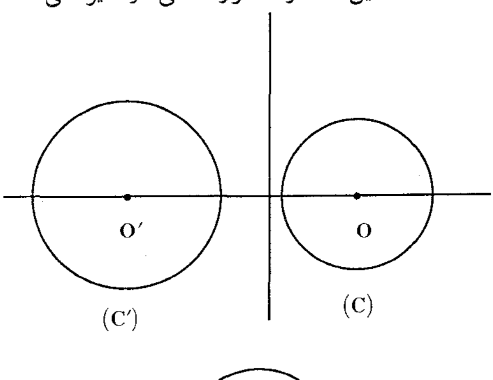
۲۵. مکان‌هندسی وسط وترهایی که از نقطهٔ مفروض A نسبت به دایرهٔ مفروض $C(O, R)$ رسم می‌شوند، دایره‌ای به قطر OA است (یا بخشی از این دایره، بنا به آن که نقطهٔ A، نسبت به دایرهٔ (C) چه وضعی داشته باشد).



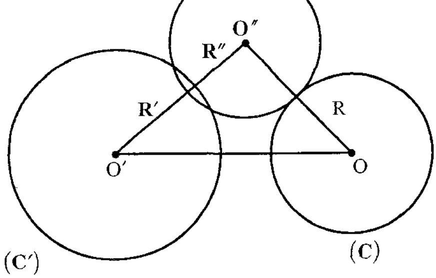
۲۶. مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت به دو دایرهٔ متمایز $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ قوت برابر داشته باشد، خطی است عمود بر خط‌المرکزین دو دایره در نقطه‌ای مانند H به قسمی که اگر I وسط پاره‌خط OO' باشد، $\overline{IH} = \dfrac{R^2 - R'^2}{2\overline{OO'}}$ است. این خط را محور اصلی دو دایره می‌نامند.

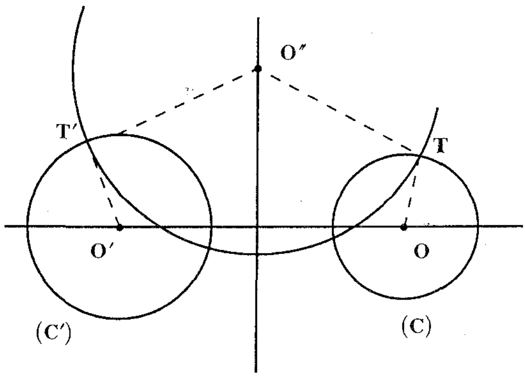


۲۷. مکان‌هندسی نقطه‌ای که بین P و P′ قوتهای آن نسبت به دو دایرهٔ $C(O, R)$ و $C'(O', R')$ رابطه $kP + k'P' = k''$ برقرار باشد (k و k′ و k″ عددهای معلومی هستند)، یک دایره یا یک خط راست است.

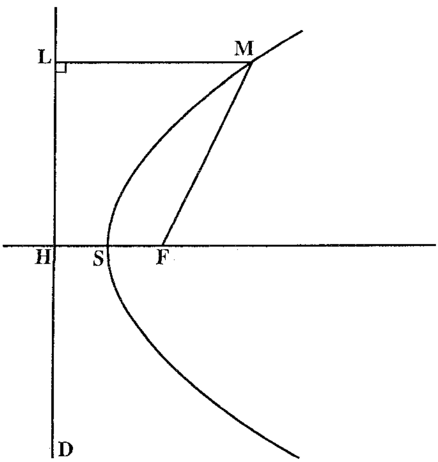


۲۸. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R″ که بر دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ مماسند، هذلولی است.



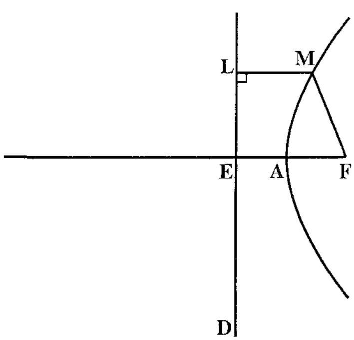


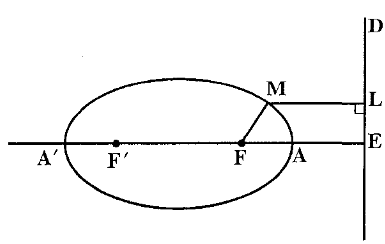
۲۹. مکان‌هندسی مرکز دایره‌های عمود بر دو دایرهٔ متمایز $C\,(O\,,\,R)$ و $C'(O',R')$ بخشی از محور اصلی دو دایره است که در خارج دو دایره قرار دارد.



۳۰. مکان‌هندسی نقطه‌ای از یک صفحه که فاصله‌اش از نقطهٔ ثابت F و خط ثابت Δ واقع در آن صفحه برابر باشد، یک سهمی به‌کانون F و خط هادی Δ است.

۳۱. مکان‌هندسی نقطهٔ M از یک صفحه که نسبت فاصله‌اش از نقطهٔ ثابت F به فاصله‌اش از خط ثابت Δ واقع در آن صفحه مقدار ثابت $e \neq ۱$ باشد، یک بیضی یا یک هذلولی است. بنابر آن که بترتیب $e < ۱$ یا $e > ۱$ باشد.





۲.۱. شرطهای لازم برای رسم کردن یک شکل

برای حل یک مسأله، به‌ویژه رسم کردن یک شکل هندسی، باید داده‌های مسأله، یا تعداد شرطهای لازم برای حل مسأله به‌اندازهٔ کافی باشد. تعداد شرطهای لازم برای رسم بعضی شکلهای هندسی به‌صورت زیر است :

برای تعیین یک نقطه، دو شرط لازم است. نقطه را می‌توان فصل مشترک دو مکان هندسی دانست. برای تعیین یک خط، از لحاظ مشخص شدن آن به کمک دو نقطه، چهار شرط و از لحاظ داشتن یک نقطه و راستای آن، سه شرط لازم است.

برای تعیین یک دایره، از لحاظ جای مرکز و اندازهٔ شعاع آن، سه شرط لازم است. دو شرط برای تعیین مرکز و یک شرط برای تعیین شعاع آن.

باید توجه داشت که تعداد شرطهای لازم برای تعیین یک شکل از لحاظ اندازه با شرطهای لازم برای تعیین آن شکل، از نظر وضعیت با هم یکسان نیست. به‌عنوان مثال، برای رسم یک پاره‌خط از نظر اندازه (که وضع قرار گرفتن آن در صفحه موردنظر نیست)، تنها یک شرط لازم است که همان اندازهٔ پاره‌خط می‌باشد. اما اگر بخواهیم پاره‌خطی رسم کنیم که موقعیت آن در صفحهٔ شکل (یعنی نقطهٔ ابتدا و انتهای آن) مشخص باشد، به چهار شرط نیاز داریم. بدیهی است که با معلوم بودن دو نقطهٔ ابتدا و انتهای یک پاره‌خط، طول آن نیز مشخص است.

برای تعیین دایره، از لحاظ اندازه، تنها یک معلوم که همان اندازهٔ شعاع دایره باشد، کافی است. زیرا در این صورت یک نقطه از صفحهٔ شکل را مرکز قرار داده و با داشتن اندازهٔ شعاع، دایره رسم می‌شود. اما تعیین دایره از لحاظ موقعیت در صفحهٔ شکل، به سه شرط نیاز دارد ؛ دو شرط برای تعیین مرکز و یک شرط هم برای اندازهٔ شعاع، تا دایره رسم شود.

چون در بیشتر مسأله‌های ترسیمی اساسی و پایهٔ هندسه، رسم یک شکل از لحاظ اندازهٔ ضلعها و زاویه‌ها موردنظر است، بنابراین، تعداد معلومها، یا شرطهایی را که از این دیدگاه برای ترسیم مورد استفاده باشد، بررسی می‌کنیم.

برای رسم یک پاره‌خط تنها یک معلوم که اندازهٔ آن می‌باشد، لازم است.

برای رسم یک دایره، تنها یک معلوم که اندازهٔ شعاع آن می‌باشد، لازم است.

برای رسم یک مثلث، سه شرط لازم است :

الف. اندازه‌های سه ضلع مثلث، ب. اندازهٔ دو ضلع و یک زاویهٔ مثلث، پ. اندازهٔ دو زاویه و یک ضلع مثلث.

برای رسم یک مثلث متساوی‌الساقین یا قائم‌الزاویه، دو شرط و برای رسم مثلث متساوی‌الاضلاع یک شرط کافی است.

تبصرهٔ ۱. برای رسم مثلث، سه جزء معلوم را نمی‌توان سه زاویه درنظر گرفت؛ زیرا با معلوم بودن دو زاویه، زاویهٔ سوم مثلث نیز مشخص است. پس معلوم بودن سه زاویه از مثلث، داشتن دو شرط محسوب می‌شود.

تبصرهٔ ۲. رسم مثلث با معلوم بودن سه ضلع، دو ضلع و یک زاویه، دو زاویه و یک ضلع، حالتهای کلاسیک رسم مثلث نامیده می‌شوند.

برای رسم مثلث، شرطهای داده شده می‌توانند بسیار متنوع و گوناگون باشند.

یک چهار ضلعی (چهار ضلعی محدب) با داشتن پنج شرط رسم می‌شود (سه شرط برای رسم یک مثلث حاصل از سه رأس چهارضلعی، دو شرط برای تعیین رأس چهارم).

تبصره. اگر برای رسم چهارضلعی، زاویه هم داده شده باشد، تعداد آنها حداکثر می‌تواند سه زاویه باشد.

برای رسم چهار ضلعیهای ویژه (چهار ضلعیهایی مانند متوازی‌الاضلاع، مستطیل، مربع، لوزی، ذوزنقه، چهارضلعی محاطی،...) تعداد شرطهای لازم کمتر از پنج شرط می‌باشد. به‌عنوان مثال، برای رسم چهارضلعی محاطی و ذوزنقه، چهار شرط لازم است (حداقل یکی از معلومها باید ضلع باشد). برای رسم متوازی‌الاضلاع یا ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین سه شرط لازم است (حداقل یکی ضلع باشد و دو معلوم دیگر دو زاویهٔ اصلی آنها باشد). برای رسم لوزی و مستطیل دو شرط (برای مستطیل هیچکدام از دو شرط زاویه نباشد و برای لوزی حداقل یک شرط ضلع باشد)، برای رسم مربع یک شرط (این شرط نباید زاویه باشد) لازم است.

هر چهارضلعی با رسم قطرها به چند مثلث تجزیه می‌شود. از این نظر رسم چند ضلعیها به کمک رسم مثلثها، انجام می‌شود.

برای رسم پنج‌ضلعی، شش ضلعی و دیگر چند ضلعیها نیز می‌توان تعداد شرطها را تعیین کرد. بدیهی است برای رسم چند ضلعیهای منتظم نسبت به چند ضلعیهای نامنتظم، شرایط کمتری لازم است.

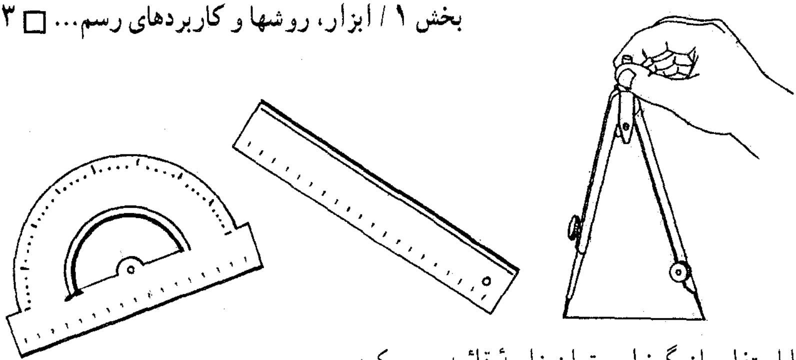
۳.۱. ابزارهای ترسیم

برای رسم شکلهای هندسی، ابزارهای مختلفی مانند خط‌کش، پرگار، نقاله و گونیا وجود دارند.

به‌کمک خط‌کش مدرج می‌توان خط راست یا پاره‌خطهایی به طولهای معلوم را رسم کرد و طول پاره‌خطها را اندازه گرفت.

به‌کمک پرگار می‌توان دایره‌هایی که مرکز و شعاعشان داده شده است، رسم کرد.

بااستفاده از نقاله می‌توان زاویه‌ها را اندازه گرفت. همچنین زاویه‌ای به اندازهٔ موردنظر رسم کرد که یک ضلع آن مشخص باشد.



با استفاده از گونیا می‌توان زاویهٔ قائمه رسم کرد.

ابزارهای دیگری برای ترسیم مانند خط‌کش موازی، پیستوله، پانتوگراف، مربع‌ساز، ثلث‌ساز،... وجود دارد.

ترسیم با خط‌کش و پرگار. برای رسم شکلهای هندسی می‌توان از تعداد محدودی ابزار ترسیم استفاده کرد. به‌عنوان مثال می‌توان شکل را تنها با استفاده از خط‌کش و پرگار یا تنها بااستفاده از پرگار رسم کرد.

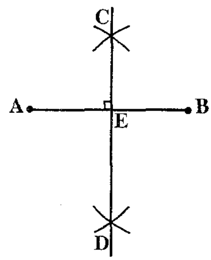
ریاضیدانان یونانی عهد باستان برای رسم شکلهای هندسی، تنها از خط‌کش غیر مدرج و پرگار فروریختنی استفاده می‌کردند. ابداع این روش را به افلاطون نسبت می‌دهند. اما امروزه خط‌کش غیر مدرج و پرگار فروریختنی را خط‌کش و پرگار اقلیدسی می‌نامند.

خط‌کش و پرگار اقلیدسی. الف. خط‌کش اقلیدسی که آن را مختصراً خط‌کش (یا ستاره) خواهیم نامید، مدرج نیست. با آن صرفاً می‌توان خط مستقیمی رسم کرد که از دو نقطهٔ مفروض بگذرد. غیر از این نمی‌توان عملی را با خط‌کش انجام داد؛ به‌عنوان مثال با آن نمی‌توان فاصلهٔ بین دو نقطه را اندازه گرفت، یا این که به‌وسیلهٔ آن ادعا کرد که دو قطعه خط، متساوی (همطول)اند.

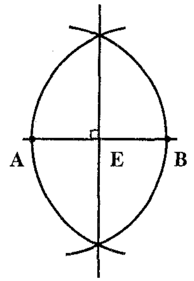
ب. پرگار اقلیدسی. با پرگار اقلیدسی که آن را به طور مختصر پرگار خواهیم نامید، فقط می‌توان دایره‌ای رسم کرد که مرکز آن نقطه‌ای مانند P باشد و از نقطهٔ مفروض دیگری مانند Q بگذرد. این تنها عملی است که می‌توان با پرگار انجام داد. به‌عنوان مثال اگر نقطهٔ سومی مانند P' (متمایز از P و Q) مفروض باشد، نمی‌توان سوزن پرگار را در P' قرار داد و دایره‌ای به این مرکز و شعاع PQ رسم کرد. به این دلیل است که پرگار اقلیدسی را پرگار فروریختنی Collapsing Compass می‌گویند. بدین معنی که به محض حرکت دادن سوزن پرگار از نقطه‌ای به نقطهٔ دیگر، پرگار فرو می‌ریزد.

مثالی از یک مسألهٔ ترسیمی سادهٔ حل شده با پرگار مدرن، و بعد پرگار اقلیدسی، تفاوت در روشی را که باید به‌کار برد، توضیح می‌دهد. شکل (الف) روش آشنای یافتن وسط یک پاره‌خط

با ترسیم را نشان می‌دهد. در این شکل، AC و BC باید همنهشت باشند. AD و BD نیز باید همنهشت باشند، اما AC و AD لزوماً همنهشت نیستند. شکل (ب) همین مسأله را حل شده با پرگار اقلیدسی نشان می‌دهد. در این حالت، برای شعاع موردنظر از اندازهٔ AB استفاده شده، زیرا طول آن را می‌توان با استفاده از یکی از دو سر آن به‌عنوان مرکز کمان مطلوب، معین کرد، در حالی که شعاع دلخواه AC در شکل (الف) را با استفاده از پرگار اقلیدسی نمی‌توان بار دیگر با نقطهٔ B به‌عنوان مرکز دایره درنظر گرفت.



(الف)

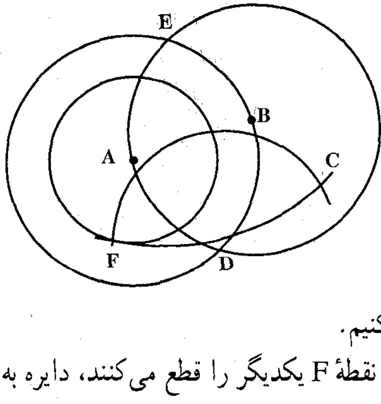


(ب)

به‌نظر می‌آید که پرگارهای مدرن امروزی، قدری قوی‌تر از پرگار اقلیدسی یا فروریزنده باشند. عجیب آن که، این دو، ابزارهایی معادل یکدیگرند. یعنی هر ترسیمی را که با پرگار امروزی می‌توان انجام داد، با پرگار اقلیدسی نیز می‌توان انجام داد. به قضیهٔ زیر توجه کنید.

قضیه. پرگار متعارف و پرگار فروریزنده (اقلیدسی) از لحاظ ریاضی معادلند.

اثبات. نشان می‌دهیم که یک دایره را می‌توان با پرگار اقلیدسی، با معلوم بودن مرکز آن و دو نقطهٔ دیگری که طول شعاع آن را مشخص می‌کنند، رسم کرد. یعنی مسأله‌مان ساختن دایره‌ای به مرکز A و شعاع BC است.



۱. دایرهٔ به مرکز A و گذرنده از B را رسم می‌کنیم.

۲. دایرهٔ به مرکز B و گذرنده از A را رسم می‌کنیم. این دو دایره در D و E برخورد می‌کنند.

۳. دایرهٔ به مرکز E و گذرنده از C را رسم می‌کنیم.

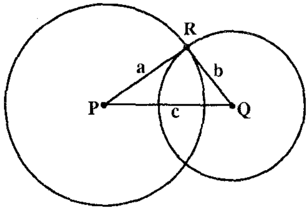
۴. دایرهٔ به مرکز D و گذرنده از C را رسم می‌کنیم.

۵. دایره‌های مرحله‌های (۳) و (۴) بار دیگر در نقطهٔ F یکدیگر را قطع می‌کنند، دایره به مرکز A و شعاع AF دایرهٔ مطلوب است.

با استفاده از مثلثهای همنهشت، ثابت کنید که AF همنهشت با BC است.

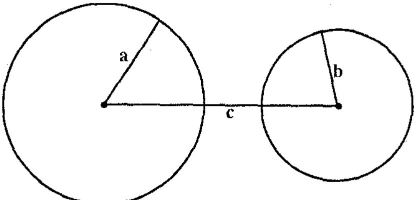
نکته. با همهٔ محدودیتهایی که برای خط‌کش و پرگار اقلیدسی ذکر شد، همواره می‌توان به‌کمک آنها هر طول و هر زاویهٔ مفروضی را انتقال داد.

در زمان حاضر، روش ترسیم با خط‌کش و پرگار از لحاظ ریاضی مورد توجه فراوان است و هنگامی که به یافتن شکلهایی که با این روش رسم می‌شوند می‌پردازیم، به مسأله‌های جالبی برمی‌خوریم، حل بعضی از این مسأله‌ها در رسم فنی ارزش عملی دارند و نقشه‌کشهای حرفه‌ای آنها را می‌دانند. به هر حال از هر روشی که برای رسم شکلهای هندسی استفاده کنیم، ابزارهای ترسیم فیزیکی و نظریهٔ ریاضی متناظر با آنها در اختیار ماست.

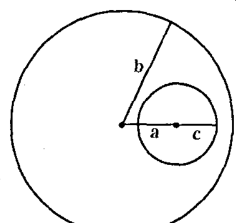


$a + b < c$ $a + c < b$ $b + c < a$

(الف)



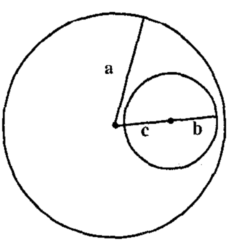
$a + b < c$



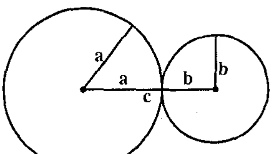
$a + c < b$

در هر حالت، نظریهٔ ریاضی دقیق است ولی حاصل کار با ابزارهای فیزیکی، تقریبی بیش نیست. برای توجیه ترسیمهایی که با خط‌کش و پرگار انجام می‌شود، به قضیه‌ای نیاز است که چگونگی برخورد دایره‌ها را بیان کند. فرض کنید دو دایره به شعاعهای a و b داریم که فاصلهٔ مرکزهایشان c است. اگر مانند شکل (الف) دایره‌ها یکدیگر را در دو نقطه قطع کنند، هریک از عددهای a، b و c از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر است.

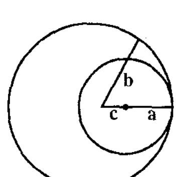
اگر به سه طریق مختلف از نابرابری مثلثی در مثلث PQR استفاده کنیم، این سه نابرابری به‌دست می‌آیند، ولی اگر یکی از این نابرابریها در جهت دیگر برقرار باشد، دایره‌ها یکدیگر را قطع نمی‌کنند؛ حالتهایی که در سه شکل دیگر نشان داده شده‌اند، و اگر مجموع دو تا از این عددها با عدد سوم برابر باشد، دایره‌ها مماس می‌شوند.



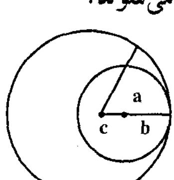
$b + c < a$



$a + b = c$

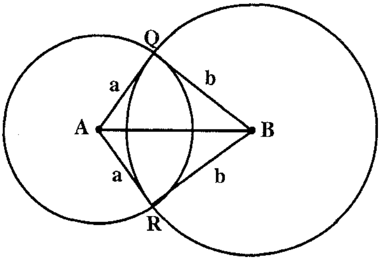


$a + c = b$



$b + c = a$

این وضعیت در قضیهٔ زیر توصیف شده است.



قضیهٔ دو دایره. دو دایره به شعاعهای a و b داده شده‌اند که فاصلهٔ بین مرکزهای آنها c است. اگر هر کدام از عددهای a، b و c از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر باشد، دو دایره در دو نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند و این دو نقطه در دو طرف خطی که دو مرکز را به هم وصل می‌کند، قرار دارند.

این قضیه را می‌توانید ثابت کنید. امّا ما، آن را به‌عنوان یک اصل موضوع می‌پذیریم.

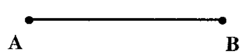
۴.۱. ترسیمهای اساسی هندسی

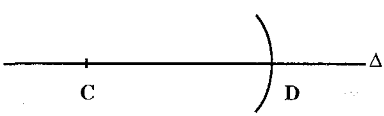
ترسیمهای ساده‌ای هستند که از آنها به‌عنوان پایه‌هایی برای ترسیمهای مشکلتر استفاده می‌کنیم. این ترسیمها که همه در صفحه انجام می‌شوند، عبارتند از:

ترسیم ۱. رسم پاره‌خطی مساوی با یک پاره‌خط داده شده (انتقال پاره‌خط).

پاره‌خط AB و خط Δ داده شده است. می‌خواهیم روی خط Δ پاره‌خطی همنهشت با پاره‌خط AB رسم کنیم.

ترسیم: نقطهٔ اختیاری C را روی خط Δ اختیار کرده، به مرکز این نقطه و به شعاعی برابر AB، قوسی رسم می‌کنیم تا خط Δ را در نقطهٔ D قطع کند. پاره‌خط CD جواب مسأله، یعنی پاره‌خطی همنهشت با پاره‌خط AB است.

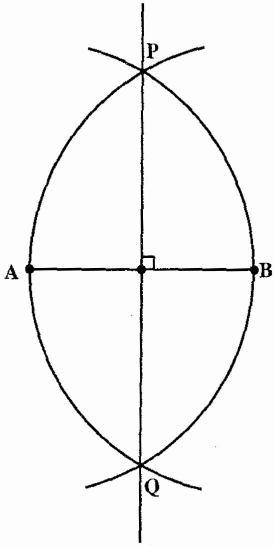




نکته. دایرهٔ به مرکز C و به شعاع AB، خط Δ را در دو نقطهٔ D و D′ قطع می‌کند. بنابراین روی خط Δ از نقطهٔ اختیاری C دو پاره‌خط CD و CD′ را همنهشت با پاره‌خط AB می‌توان رسم کرد.

ترسیم ۲. رسم عمودمنصف یک پاره‌خط.

پاره‌خط AB داده شده است. می‌خواهیم عمودمنصف این پاره‌خط را رسم کنیم.



ترسیم : ۱. دایره‌ای به مرکز A و به شعاع $r = AB$ رسم می‌کنیم.

۲. دایره‌ای به مرکز B و به شعاع $r = AB$ رسم می‌کنیم.

اینک می‌توان به قضیهٔ دو دایره استناد کرد. زیرا هریک از عددهای r، r و r از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر است. بنابراین دو دایره در دو نقطهٔ P و Q یکدیگر را قطع می‌کنند.

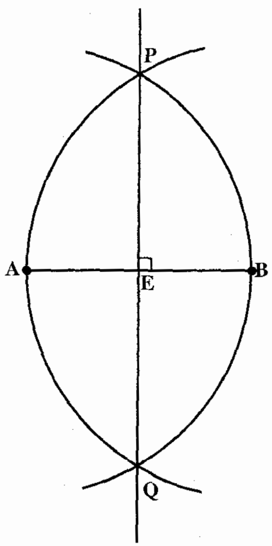
● خط PQ را رسم می‌کنیم.

● چون P از A و B به یک فاصله است، پس روی عمودمنصف پاره‌خط AB قرار دارد. به‌همین دلیل Q روی عمودمنصف پاره‌خط AB است. بنابراین خط PQ عمودمنصف پاره‌خط AB است.

نکته. لازم نیست که شعاع دایره را حتماً $r = AB$ اختیار کنیم، بلکه کافی است $r > \frac{AB}{۲}$ باشد تا دو دایره یکدیگر را قطع کنند.

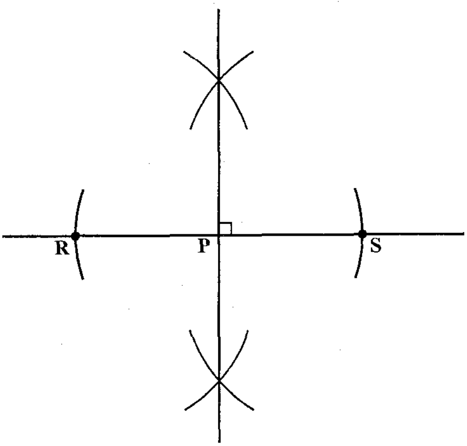
ترسیم ۳. نصف کردن یک پاره‌خط، یا تعیین نقطهٔ وسط یک پاره‌خط.

پاره‌خط AB داده شده است. می‌خواهیم نقطه وسط این پاره‌خط را به‌دست آوریم.



ترسیم : به‌روش ترسیم ۲، خط PQ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد خط PQ با پاره‌خط AB یعنی نقطهٔ E جواب مسأله است و داریم $AE = EB$.

ترسیم ۴. ترسیم خط عمود بر یک خط از یک نقطه واقع بر آن خط، خط L و نقطهٔ P واقع بر آن داده شده است. می‌خواهیم از نقطهٔ P خطی عمود بر خط L رسم کنیم.

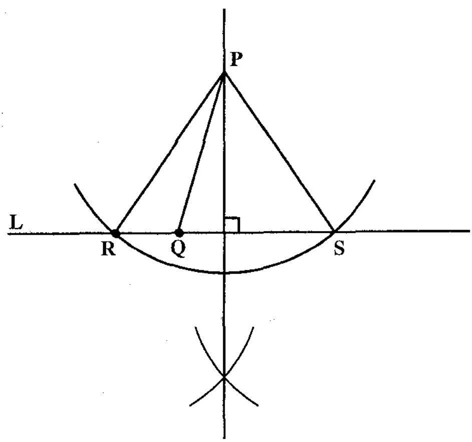


ترسیم : ۱. دایرهٔ دلخواهی به مرکز P رسم می‌کنیم تا خط L را در دو نقطهٔ R و S قطع کند.

۲. عمودمنصف پاره‌خط RS را رسم می‌کنیم. این عمودمنصف، خطی است که از نقطهٔ P برخط L عمود رسم شده است.

ترسیم ۵. ترسیم خط عمود بر یک خط از نقطه‌ای واقع در خارج آن خط.

خط L و نقطهٔ P خارج آن داده شده است. می‌خواهیم از نقطهٔ P خطی عمود بر خط L رسم کنیم.

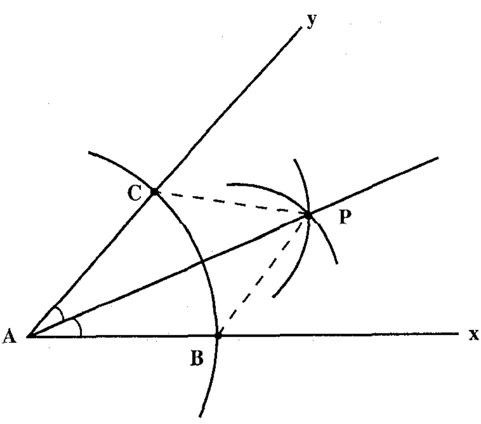


ترسیم : ۱. نقطهٔ Q را روی خط L اختیار کرده، به مرکز P و به شعاع $r > PQ$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. چون نقطهٔ Q درون این دایره قرار دارد، بنابراین خط L دایره را در دو نقطهٔ R و S قطع می‌کند.

۲. عمودمنصف پاره‌خط RS را رسم می‌کنیم. این خط از نقطهٔ P می‌گذرد زیرا P از دو نقطهٔ R و S به یک فاصله است.

ترسیم ۶. ترسیم نیمساز یک زاویه.

زاویهٔ xAy داده شده است. می‌خواهیم نیمساز این زاویه را رسم کنیم.



ترسیم : ۱. دایرهٔ دلخواهی به مرکز A رسم می‌کنیم. این دایره دو ضلع زاویهٔ A را در دو نقطهٔ B و C قطع می‌کند. بدیهی است که $AB = AC$ است.

۲. دایره‌ای به مرکز B و به شعاع $r = BC$ رسم می‌کنیم.

۳. دایره‌ای به مرکز C و به شعاع

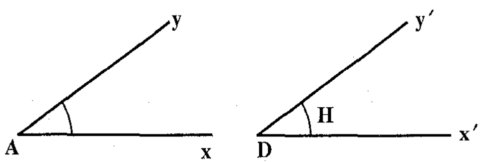
$r = BC$ رسم می‌کنیم. این دو دایره یکدیگر را قطع می‌کنند (زیرا قضیهٔ دو دایره برای آنها برقرار است. هریک از عددهای r، r و r از مجموع دو عدد دیگر کوچکتر است). P را نقطهٔ برخورد این دو دایره می‌گیریم که با نقطهٔ A در یک طرف BC نباشد.

۴. AP را رسم می‌کنیم: این نیمخط، نیمساز زاویهٔ xAy است: یعنی داریم $x\hat{A}P = P\hat{A}y$؛ زیرا دو مثلث PAC و PAB، به دلیل تساوی سه ضلع متناظر، همنهشتند $(AP = AP\ ,\ PC = PB = r\ ,\ AB = AC)$ بنابراین $x\hat{A}P = P\hat{A}y$، یعنی AP نیمساز زاویهٔ xAy است.

نکته. در مرحله‌های ۲ و ۳ می‌توانیم شعاع دایره‌ها را هر عدد بزرگتر از $\frac{BC}{۲}$ اختیار کنیم.

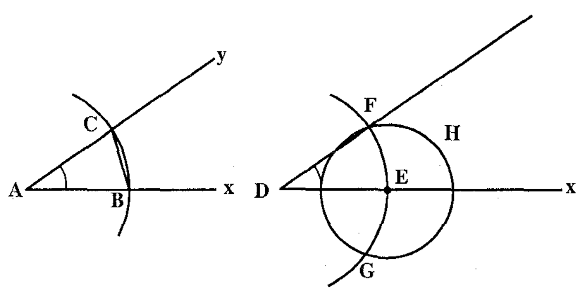
ترسیم ۷. ترسیم زاویه‌ای همنهشت با یک زاویهٔ در یک طرف نیمخطی مفروض.

زاویهٔ xAy و نیمخط Dx' و نیمصفحهٔ H که این نیمخط مرز آن است، داده شده است. می‌خواهیم نیمخط Dy' را چنان رسم کنیم که Dy' در H باشد، و زاویهٔ $x'Dy'$ همنهشت با زاویهٔ xAy باشد.



ترسیم: ۱. دایره‌ای به مرکز A و به شعاع دلخواه r رسم می‌کنیم. این دایره، دو ضلع زاویهٔ xAy را در B و C قطع می‌کند.

۲. دایره‌ای به مرکز D و به شعاع $r = AB = AC$ رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد این دایره با نیمخط Dx' را E می‌نامیم.



۳. دایره‌ای به مرکز E و به شعاع $S = BC$ رسم می‌کنیم. این دو دایره یکدیگر را در دو نقطه F و G قطع می‌کنند که در دو طرف پاره‌خط DE قرار دارند؛ F را نقطه‌ای می‌گیریم که در H واقع است.

۴. نیمخط DF را رسم می‌کنیم.

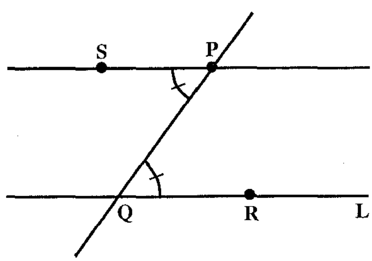
این نیمخط، نیمخط خواسته شده است. طبق حالت تساوی سه ضلع، دو مثلث ABC و DEF همنهشتند. بنابراین دو زاویهٔ $B\hat{A}C$ و $E\hat{D}F$ همنهشتند و زاویهٔ EDF یا $x'Dy'$ زاویه خواسته شده است.

ترسیم ۸. ترسیم یک خط، موازی با یک خط داده شده از یک نقطه خارج آن.

خط L و نقطهٔ P خارج آن داده شده‌اند. می‌خواهیم از نقطهٔ P خطی موازی خط L رسم کنیم.

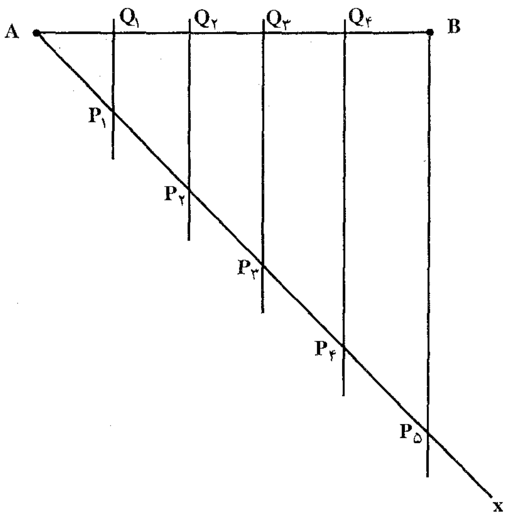
ترسیم: ۱. Q و R را دو نقطهٔ دلخواه از خط L درنظر می‌گیریم و نیمخط PQ را رسم می‌کنیم.

۲. با روش ترسیم ۷، زاویهٔ QPS را همنهشت با زاویهٔ PQR رسم می‌کنیم به نحوی که S و R در دو طرف PQ باشند. زاویه‌های QPS و PQR زاویه‌های متبادل درونی‌اند. بنابراین $PS \| QR$ است. پس خط PS جواب مسأله است.



ترسیم ۹. تقسیم یک پاره‌خط به n پاره‌خط همنهشت.

پاره‌خط AB داده شده است. می‌خواهیم آن را به n پاره‌خط همنهشت تقسیم کنیم (در شکل حالت =n نشان داده شده است).



ترسیم : ۱. نیمخط دلخواهی به مبدأ A مانند نیمخط Ax رسم می‌کنیم.

۲. روی نیمخط Ax، n پاره‌خط همنهشت AP_1 ، P_1P_2 ، P_2P_3 ، ... و $P_{n-1}P_n$ را به دنبال هم رسم می‌کنیم (طول این پاره‌خطها دلخواه است به شرط آن که همگی به یک طول باشند. پس نقطهٔ P_1 را می‌توان به دلخواه روی نیمخط Ax اختیار کرد و سپس پاره‌خطهای بعدی را با پرگار به اندازهٔ AP_1 به دنبال هم رسم نمود).

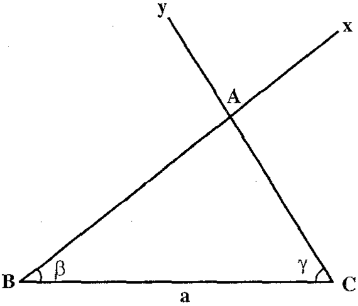
۳. P_nB را رسم می‌کنیم.

۴. از نقطه‌های P_1 ، P_2 ، ... و P_{n-1} خطهایی به موازات خط P_nB رسم می‌کنیم تا پاره‌خط AB را در نقطه‌های Q_1 ، Q_2 ، ... و Q_{n-1} قطع کنند.

چون این خطهای موازی روی مورب AP_n پاره‌خطهای همنهشت جدا کرده‌اند، روی پاره‌خط AB هم پاره‌خطهای همنهشت جدا می‌کنند. بنابراین نقطه‌های Q_1 ، Q_2 ، ... و Q_{n-1} پاره‌خط AB را به n پاره‌خط همنهشت متوالی تقسیم می‌کنند.

ترسیم ۱۰. ترسیم مثلث با معلوم بودن دو زاویه و ضلع بین آن دو زاویه.

از مثلث ABC زاویه‌های $\hat{B}=\beta$ ، $\hat{C}=\gamma$ و ضلع BC=a داده شده است. می‌خواهیم این مثلث را رسم کنیم.



ترسیم : ۱. پاره‌خط BC به طول a را رسم می‌کنیم.

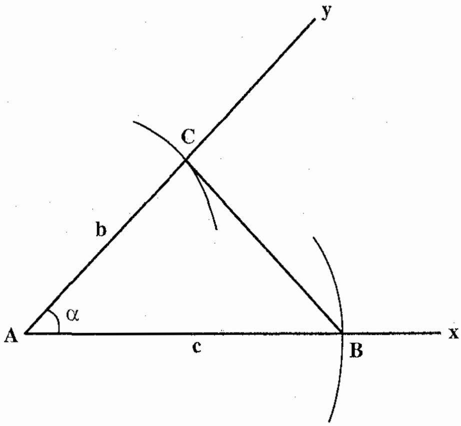
۲. از نقطهٔ B نیمخط Bx را چنان رسم می‌کنیم که با نیمخط BC زاویه‌ای مساوی زاویهٔ $\hat{B}=\beta$ بسازد.

۳. از نقطهٔ C نیمخط Cy را طوری رسم می‌کنیم که با نیمخط CB زاویه‌ای مساوی زاویهٔ $\hat{C}=\gamma$ بسازد.

A نقطهٔ برخورد دو نیمخط Bx و Cy رأس سوم مثلث ABC است. شرط امکان مسأله آن است که $\hat{B}+\hat{C}=\beta+\gamma<180^\circ$ باشد.

ترسیم ۱۱. ترسیم مثلث با معلوم بودن دو ضلع و زاویهٔ بین آن دو ضلع.

دو ضلع AB=c و AC=b و زاویهٔ $B\hat{A}C=\alpha$ در مثلث ABC داده شده است. می‌خواهیم مثلث را رسم کنیم.



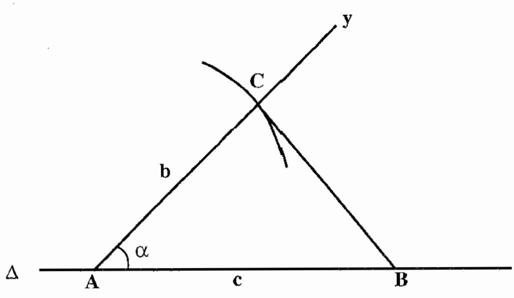
ترسیم: ۱. زاویهٔ $x\hat{A}y=\alpha$ را رسم می‌کنیم (بدین‌ترتیب که نخست نیمخط Ax را رسم می‌کنیم، سپس نیمخط Ay را طوری رسم می‌کنیم که با Ax زاویهٔ $x\hat{A}y=\alpha$ را بسازد).

۲. دایره‌ای به مرکز A و به شعاع AB=c رسم می‌کنیم تا نیمخط Ax را در نقطهٔ B قطع کند.

۳. دایره‌ای به مرکز A و به شعاع b رسم می‌کنیم تا نیمخط Ay را در نقطهٔ C قطع کند.

۴. از B به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

نکته. می‌توانیم نخست خط دلخواه Δ را رسم کنیم و روی آن پاره‌خط AB=c را مشخص سازیم. آن‌گاه از A نیمخط Ay را چنان رسم کنیم که با AB زاویهٔ $x\hat{A}y=\alpha$ را بسازد. روی Ay پاره‌خط AC=b را مشخص ساخته از C به B وصل کنیم، مثلث ABC به‌دست می‌آید. شرط امکان مسأله آن است که $x\hat{A}y=\alpha<180^\circ$ باشد.

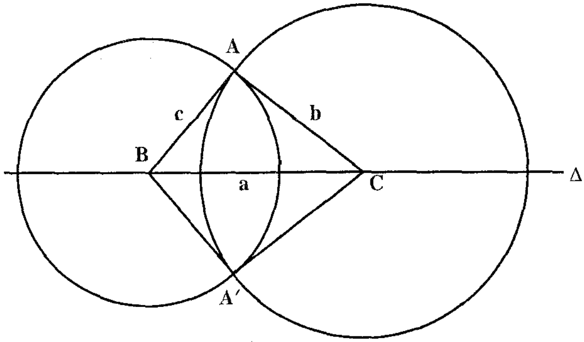


ترسیم ۱۲. ترسیم مثلث با معلوم بودن سه ضلع آن.

a، b و c اندازه‌های سه ضلع مثلث ABC داده شده‌اند. می‌خواهیم این مثلث را رسم کنیم.

ترسیم: ۱. خط دلخواه Δ را رسم کرده، روی آن پاره‌خط BC=a را جدا می‌کنیم.

۲. دایره‌ای به مرکز B و به شعاع c=AB رسم می‌کنیم.



۳. دایره‌ای به مرکز C و به شعاع b=AC رسم می‌کنیم.

۴. نقطه برخورد دو دایرهٔ بالا رأس A از مثلث ABC است. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث رسم می‌شود.

شرط امکان مسأله آن است که : $|b-c|<a<b+c$

نکته. دو دایرهٔ رسم شده، در دو نقطه A و ′A یکدیگر را قطع می‌کنند. مثلث A′BC نیز جواب مسأله است امّا این مثلث همنهشت مثلث ABC می‌باشد (به‌دلیل تساوی ضلعهای متناظر دو مثلث). پس مسأله یک جواب دارد.

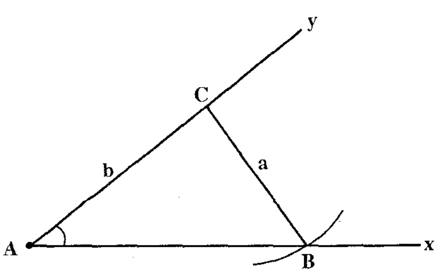
ترسیم ۱۳. ترسیم مثلث با معلوم بودن دو ضلع و زاویهٔ روبه‌رو به یکی از آن دو ضلع.

از مثلث ABC، ضلعهای BC=a و AC=b و زاویهٔ $\hat{A}=\alpha$ داده شده است. می‌خواهیم این مثلث را رسم کنیم.

ترسیم : ۱. زاویهٔ $x\hat{A}y=\alpha$ را رسم می‌کنیم.

۲. روی Ay پاره‌خط AC=b را جدا می‌کنیم.

۳. دایره‌ای به مرکز C و به شعاع a=BC رسم می‌کنیم تا نیمخط Ax را در نقطه B قطع کند. از B به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



بحث. شرط امکان و تعداد جوابهای مسأله، به این بستگی دارد که دایرهٔ به مرکز C و به شعاع a نیمخط Ax را قطع کند، با آن مماس باشد و یا آن را قطع نکند.

برحسب آن که زاویهٔ A، حاده، قائمه یا منفرجه باشد، سه حالت وجود دارد:

حالت اول. زاویهٔ A حاده است. عمود CH را بر Ax فرود می‌آوریم. برحسب آن که $a < CH$ ، $a = CH$ و یا $a > CH$ باشد، دایرهٔ به مرکز C و به شعاع a بترتیب نیمخط Ax را قطع نمی‌کند، بر آن مماس است یا در دو نقطه قطع می‌کند. با توجه به آن که، نقطهٔ B باید روی نیمخط Ax باشد (نیمخط سمت راست نقطهٔ A)، زیرا اگر در سمت چپ نقطهٔ A واقع شود، زاویه CAB برابر α نخواهد بود، بلکه مساوی مکمل این زاویه خواهد بود.

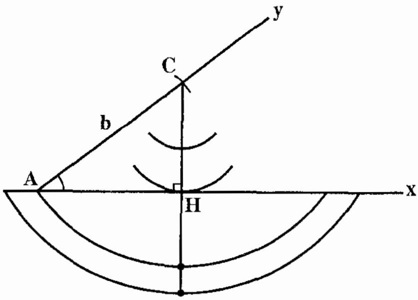
$a < CH$ ، مسأله جواب ندارد.

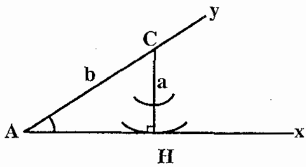
$a = CH$ ، مسأله یک جواب دارد که مثلث قائم‌الزاویه ACH است.

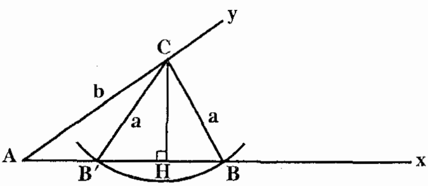
$CH < a < b$ ، مسأله دو جواب دارد (مثلثهای ABC و $AB'C$)

$a = b$ ، یک جواب، مثلث متساوی‌الساقین $AB''C$.

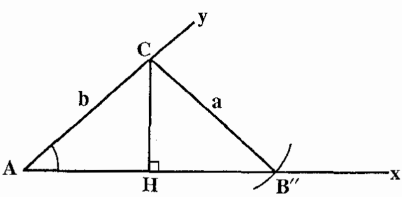
$a > b$ ، یک جواب، مثلث $AB'''C$.



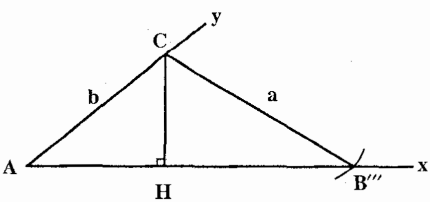




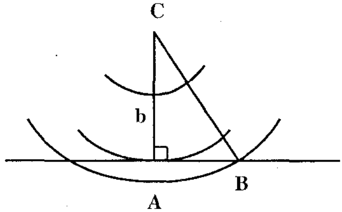
CH < a < b



a = b



a > b



حالت دوم. زاویهٔ $\hat{A} = 90^\circ$ است. در این حالت :

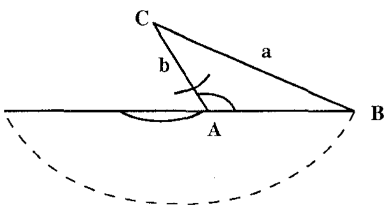
$a < b$ ، مسأله جواب ندارد.

$a=b$ مسأله جواب ندارد.

$a > b$ ، مسأله یک جواب دارد (مثلث ABC).

باید توجه داشت که در حالت $a > b$ دایرهٔ به مرکز C و شعاع a خط Ax را در دو نقطه B و B' (قرینه نسبت به نقطهٔ A) قطع می‌کند ولی چون دو مثلث قائم‌الزاویهٔ CAB و CAB' همنهشتند، لذا مسأله تنها یک جواب دارد.

حالت سوم. $\hat{A} > 90^\circ$ ، در این حالت نیز باید رأس B روی نیمخط Ax باشد و :



$a < b$ ، مسأله جواب ندارد.

$a = b$ ، مسأله جواب ندارد.

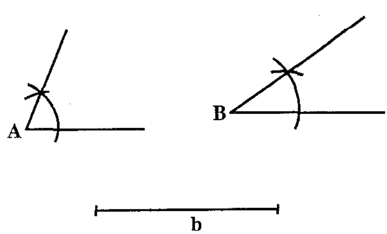
$a > b$ ، مسأله یک جواب دارد (مثلث ACB).

نکته. ضمن بحث در این مسأله دیدیم که ممکن است در دو مثلث، دو ضلع نظیر به نظیر متساوی باشند و زاویه‌های روبه‌رو به یکی از ضلعها در آن دو مثلث نیز متساوی باشند، ولی دو مثلث همنهشت نباشند. امّا در صورتی که $a > b$ باشد، همواره مسأله یک جواب دارد. بنابراین می‌توان نتیجه گرفت که :

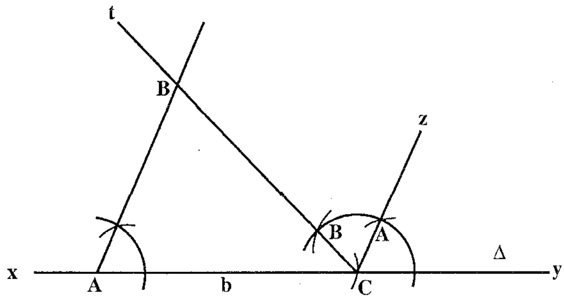
اگر در دو مثلث دو ضلع نظیر به نظیر متساوی و زاویه‌های روبه‌رو به بزرگترین ضلع آن دو نیز در دو مثلث متساوی باشند، دو مثلث همنهشتند.

ترسیم ۱۴. ترسیم مثلث با معلوم بودن دو زاویه و یکی از دو ضلعی که بین آن دو زاویه نیست. از مثلث ABC دو زاویه $\hat{A} = \alpha$ ، $\hat{B} = \beta$ و ضلع AC=b داده شده است. می‌خواهیم مثلث ABC را رسم کنیم.

ترسیم : ۱. روی خط اختیاری xy پاره‌خط AC=b را جدا می‌کنیم.



۲. از نقطهٔ C نیمخطی رسم می‌کنیم که با Cy زاویه‌ای مساوی با $\hat{A}+\hat{B}=\alpha+\beta$ بسازد.



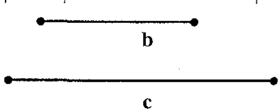
۳. از نقطهٔ A نیمخطی رسم می‌کنیم که با AC زاویهٔ $\hat{A}=\alpha$ را بسازد.
۴. نقطه برخورد دو نیمخط رسم شده از C و A، نقطهٔ B، رأس سوم مثلث است.

تبصره. برای رسم زاویه‌ای مساوی با $\hat{A}+\hat{B}=\alpha+\beta$ که یک ضلع آن نیمخط Cy باشد، چنین عمل می‌کنیم:

۱. نیمخط CZ را چنان رسم می‌کنیم که $Z\hat{C}y=\hat{A}$ باشد.

۲. نیمخط Ct را خارج زاویهٔ ZCy چنان رسم می‌کنیم که $t\hat{C}Z=\hat{B}$ باشد. در این‌صورت زاویه $t\hat{C}y=\hat{A}+\hat{B}$ خواهد بود.

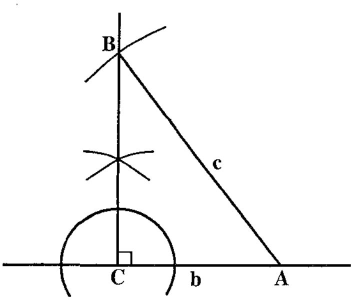
ترسیم ۱۵. ترسیم مثلث قائم‌الزاویه با معلوم بودن وتر و یک ضلع آن وتر c و ضلع b از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داده شده است. می‌خواهیم این مثلث را رسم کنیم.



ترسیم: ۱. روی خط Δ پاره‌خط CA=b را رسم می‌کنیم.

۲. از نقطهٔ C عمود Cx را بر خط AC اخراج می‌کنیم.

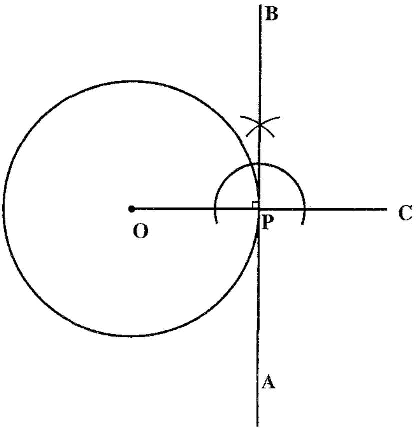
۳. به مرکز A و به شعاع c=AB دایره‌ای رسم می‌کنیم تا عمود Cx را در نقطهٔ B قطع کند. از B به A وصل می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ CAB جواب مسأله است.



نکته. مسأله دو جواب همنهشت دارد، که یک جواب محسوب می‌شود.

ترسیم ۱۶. ترسیم خط مماس بر یک دایره از نقطه‌ای واقع بر آن دایره.

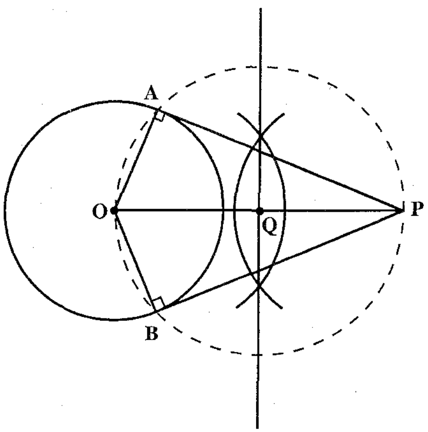
دایرهٔ O و نقطهٔ P روی این دایره داده شده است. می‌خواهیم خط مماس بر دایره در نقطهٔ P را رسم کنیم.



ترسیم : ۱. شعاع OP را رسم می‌کنیم.

۲. در نقطهٔ P خط AB را عمود بر OP رسم می‌کنیم. خط AB مماس خواسته شده است.

ترسیم ۱۷. ترسیم خط مماس بر یک دایره از نقطه‌ای واقع در برون آن دایره.



دایرهٔ O و نقطهٔ P خارج آن داده شده است. می‌خواهیم از نقطهٔ O خطی مماس بر دایره رسم کنیم.

ترسیم : ۱. از نقطهٔ P به نقطهٔ O مرکز دایره وصل می‌کنیم و یا دایره‌ای به قطر پاره‌خط OP رسم می‌کنیم.

۲. نقطهٔ برخورد دایرهٔ O و دایرهٔ به قطر OP را A و B می‌نامیم و از P به A و B وصل می‌کنیم.

PA و PB خطهای مماس رسم شده از نقطهٔ P بر دایرهٔ O می‌باشند. زیرا زاویه‌های OAP و OBP که زاویه‌های محاطی روبه‌رو به قطر در دایرهٔ به قطر OP هستند، قائمه‌اند.

ترسیم ۱۸. ترسیم مماس مشترک دو دایره.

دو دایرهٔ متمایز $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ داده شده‌اند. می‌خواهیم :

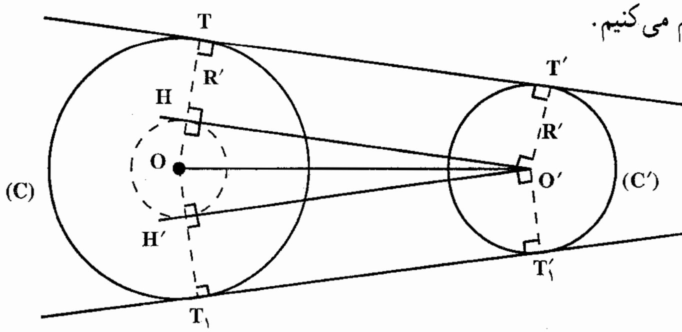
الف. مماس مشترک برونی این دو دایره

ب. مماس مشترک درونی این دو دایره را رسم کنیم.

ترسیم : الف. ترسیم مماس مشترک برونی دو دایره.

۱. با فرض $R > R'$ دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R - R'$ رسم می کنیم.

۲. به کمک ترسیم ۱۷ از نقطهٔ O' دو خط $O'H$ و $O'H'$ را بر دایرهٔ به شعاع $(R - R')$ مماس رسم می‌کنیم.



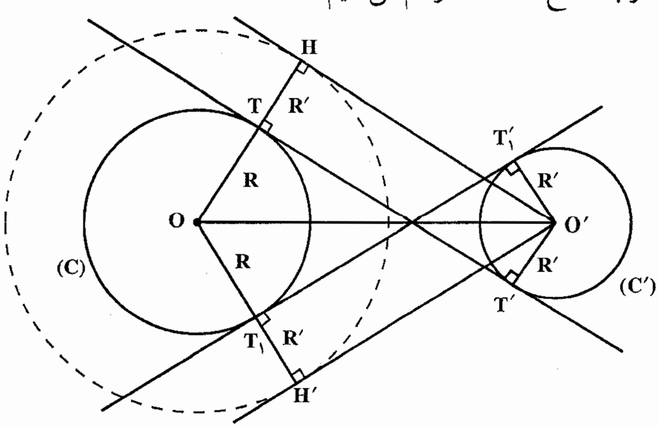
۳. از O به H و H' وصل می‌کنیم و نقطه‌های برخورد OH و OH' با دایرهٔ (C) را T و T_1 می‌نامیم.

۴. از نقطهٔ T خطی موازی $O'H$ و از نقطهٔ T_1 خطی موازی $O'H'$ رسم می‌کنیم. این دو خط در نقطه‌های T' و T'_1 بر دایرهٔ (C') مماسند. یعنی TT' و $T_1T'_1$ دو مماس مشترک برونی دایره‌های (C) و (C') می‌باشند. TT' در نقطهٔ T بر شعاع OT از دایرهٔ (C) عمود است. پس در همین نقطه بر این دایره مماس است، و چون فاصلهٔ مرکز دایرهٔ (C') از خط TT' مساوی شعاع آن است (زیرا چهارضلعی $HTT'O'$ مستطیل است)، پس خط TT' در نقطهٔ T' بر دایرهٔ (C') مماس است. بنابراین TT' یک مماس مشترک دو دایره است. به همین دلیل $T_1T'_1$ مماس مشترک دیگر دو دایره است.

ب. ترسیم مماس مشترک درونی دو دایره.

۱. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R + R'$ رسم می‌کنیم.

۲. به روش ترسیم ۱۷ از نقطهٔ O' مرکز دایرهٔ (C') دو خط $O'H$ و $O'H'$ را بر دایرهٔ به مرکز O و به شعاع $R + R'$، مماس رسم می‌کنیم.



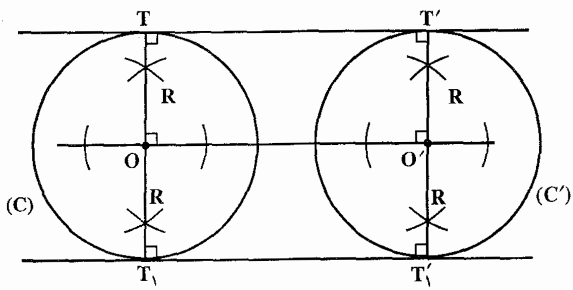
۳. از O به H و 'H وصل می‌کنیم و نقطه‌های برخورد OH و 'OH با دایرهٔ (C) را بترتیب T و T_1 می‌نامیم.

۴. از T خطی موازی O'H و از T_1 خطی موازی O'H' رسم می‌کنیم. این دو خط بترتیب در 'T و T'_1 بر دایرهٔ ('C) مماسند، یعنی 'TT و $T_1T'_1$ دو مماس مشترک درونی دو دایرهٔ (C) و ('C) می‌باشند؛ زیرا 'TT در نقطهٔ T واقع بر دایرهٔ (C)، بر شعاع OT از این دایره عمود است، پس در این نقطه مماس بر این دایره است؛ همچنین 'TT بر دایره ('C) در نقطهٔ 'T مماس می‌باشد؛ زیرا فاصلهٔ نقطهٔ 'O از این خط، مساوی شعاع این دایره است $O'T' = R'$، بنابراین خط 'TT یک مماس مشترک درونی دو دایرهٔ (C) و ('C) است. به‌دلیل مشابه، خط $T_1T'_1$ مماس مشترک درونی دیگر این دو دایره می‌باشد.

تبصره. اگر شعاعهای دو دایره مساوی باشند، دو مماس مشترک برونی آنها موازی خط‌المرکزینشان خواهند بود. یعنی برای رسم مماس مشترکهای برونی دو دایره، بترتیب زیر عمل می‌کنیم:

۱. خط‌المرکزین دو دایره یعنی 'OO را رسم می‌کنیم.

۲. در نقطه‌های O و 'O دو خط عمود بر 'OO رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این خطها با دایرهٔ (C) را T و T_1 و با دایرهٔ ('C)، 'T و T'_1 می‌نامیم.



۳. خطهای 'TT و $T_1T'_1$ را رسم می‌کنیم. این دو خط، مماس مشترکهای برونی دو دایره‌اند.

نکته. برای رسم مماس مشترک درونی دو دایره با شعاعهای برابر، از همان روش کلی می‌توان استفاده کرد.

یادآوری. ۱. دو دایرهٔ برون هم (متخارج) دو مماس مشترک برونی و دو مماس مشترک درونی دارند.

۲. دو دایرهٔ مماس برون، دو مماس مشترک برونی و یک مماس مشترک درونی دارند.

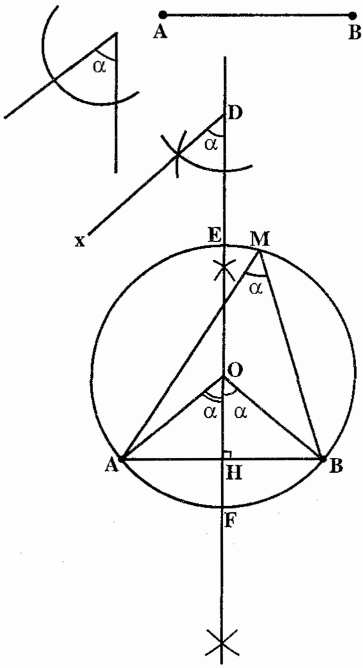
۳. دو دایرهٔ متقاطع، دو مماس مشترک برونی دارند.

۴. دو دایرهٔ مماس درون تنها یک مماس مشترک برونی دارند.

۵. دو دایرهٔ یکی درون دیگری (متداخل) و دو دایرهٔ هم‌مرکز هیچ‌گونه مماس مشترکی ندارند.

ترسیم ۱۹. ترسیم کمان درخور یک زاویه، روبه‌رو به یک پاره‌خط مفروض.

پاره‌خط AB و زاویهٔ α داده شده است. می‌خواهیم کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AB را رسم کنیم.



ترسیم : ۱. عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم.

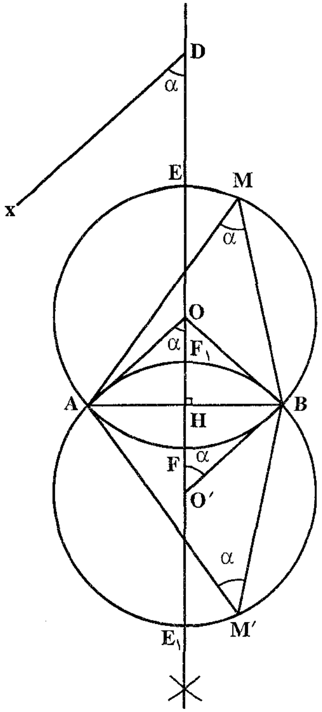
۲. از نقطهٔ اختیاری D واقع بر عمودمنصف پاره‌خط AB، نیمخط Dx را چنان رسم می‌کنیم که زاویهٔ $x\hat{D}H$ مساوی α باشد. (H وسط پاره‌خط AB است).

۳. از نقطهٔ A خطی موازی نیمخط Dx رسم می‌کنیم تا عمودمنصف پاره‌خط AB را در نقطهٔ O قطع کند.

۴. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA رسم می‌کنیم.

کمان $\overset{\frown}{AEB}$ از این دایره، کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AB است. زیرا $A\hat{O}F = \alpha$ ، درنتیجه $\overset{\frown}{AF} = \overset{\frown}{FB} = \alpha$ ، درنتیجه $\overset{\frown}{AFB} = ۲\alpha$ است. بنابراین از هر نقطهٔ M واقع بر کمان $\overset{\frown}{AEB}$ که به دو نقطهٔ A و B وصل کنیم، $A\hat{M}B = \frac{\overset{\frown}{AB}}{۲} = \frac{۲\alpha}{۲} = \alpha$ است. پس کمان $\overset{\frown}{AEB}$، کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AB است.

تبصره. اگر از نقطهٔ B خطی موازی نیمخط Dx رسم کنیم تا عمودمنصف پاره‌خط AB را در نقطهٔ O' قطع کند و سپس دایرهٔ به مرکز O' و به شعاع $O'A = O'B$ را رسم کنیم، بخشی از این دایره (کمان $\overset{\frown}{AE_1B}$) نیز، کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AB است. این دایره، با دایرهٔ (O,OA) مساوی است ؛ بنابراین می‌توان گفت :

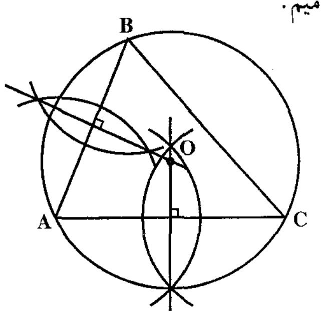


کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AB، بخشی از دو دایرهٔ مساوی است که بر دو نقطهٔ A و B می‌گذرند، و زاویهٔ مرکزی مقابل به وتر AB در این دو دایره، برابر ۲α است.

ترسیم ۲۰. ترسیم دایره‌ای محیط بر یک مثلث.

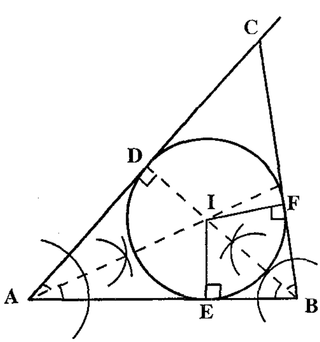
مثلث ABC داده شده است. می‌خواهیم دایرهٔ محیطی این مثلث را رسم کنیم.

ترسیم : ۱. عمودمنصفهای دو ضلع مثلث را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دو عمودمنصف مرکز دایرهٔ جواب است. این نقطه را O می‌نامیم.



۲. از O به A، B و C وصل می‌کنیم OA=OB=OC است. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA=OB=OC وصل می‌کنیم. این دایره که از سه رأس A ، B و C می‌گذرد، دایرهٔ محیطی مثلث ABC نامیده می‌شود.

ترسیم ۲۱. ترسیم دایرهٔ محاط در مثلث.



مثلث ABC داده شده است. می‌خواهیم دایرهٔ محاطی درونی این مثلث را رسم کنیم.

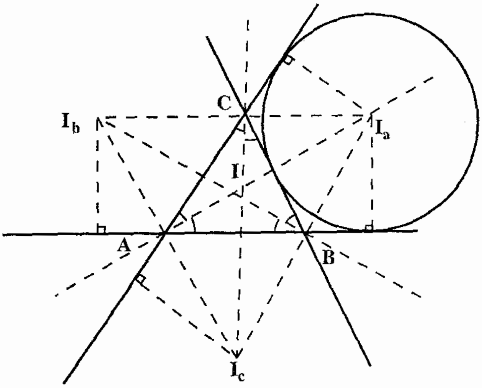
ترسیم : ۱. نیمساز زاویهٔ درونی A را رسم می‌کنیم.

۲. نیمساز زاویهٔ درونی B را رسم می‌کنیم.

این دو نیمساز یکدیگر را در نقطه‌ای مانند I قطع می‌کنند.

۳. از I عمودهای IF، IE و ID را بترتیب بر ضلعهای BC، AB و AC رسم می‌کنیم، ID=IE=IF است.

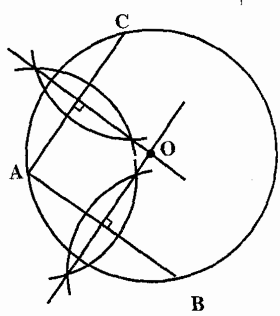
۴. دایره‌ای به مرکز I و به شعاع r=ID=IE=IF رسم می‌کنیم. این دایره که در نقطه‌های D، E و F بر ضلعهای مثلث مماس است، دایرهٔ محاطی درونی مثلث می‌باشد.



نکته. هر مثلث، سه دایرهٔ محاطی برونی دارد که هرکدام از آنها بر یکی از ضلعهای مثلث و بر امتداد دو ضلع دیگر مماسند. مرکز این دایره‌ها محل برخورد یک نیمساز زاویهٔ درونی و نیمسازهای دو زاویهٔ برونی دیگر مثلث است. مرکزهای این دایره‌ها را معمولاً به I_a، I_b و I_c نشان می‌دهند.

ترسیم ۲۲. تعیین مرکز یک دایره.

دایرهٔ (C) داده شده است. می‌خواهیم مرکز آن را تعیین کنیم.

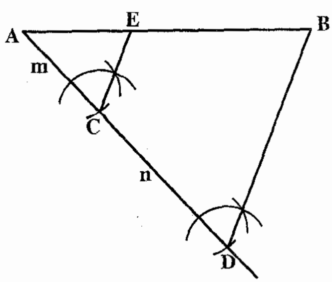


ترسیم: ۱. سه نقطهٔ دلخواه A، B و C را روی دایره اختیار می‌کنیم.

۲. عمودمنصفهای دو وتر AB و AC را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دو عمودمنصف که آن را O می‌نامیم، مرکز دایرهٔ داده شده است.

ترسیم ۲۳. تقسیم یک پاره‌خط به نسبتی معین.

پاره‌خط AB و دو عدد m و n داده شده است. می‌خواهیم پاره‌خط AB را به دو پاره‌خط چنان تقسیم کنیم که نسبت آنها مساوی $\frac{m}{n}$ باشد.



ترسیم: ۱. از نقطهٔ A نیمخط دلخواه Ax را رسم می‌کنیم.

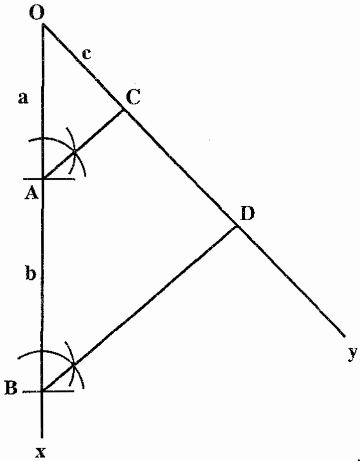
۲. طولهای AC=m و CD=n را به‌دنبال هم روی نیمخط Ax جدا می‌کنیم.

۳. از D به B وصل می‌کنیم و از نقطهٔ C خطی موازی DB رسم می‌کنیم تا پاره‌خط AB را در نقطهٔ E قطع کند. پاره‌خطهای AE و EB جواب مسأله‌اند، زیرا داریم:

$$\Delta ABD: CE \| DB \Rightarrow \frac{AE}{EB} = \frac{AC}{CD} = \frac{m}{n}$$

ترسیم ۲۴. ترسیم چهارمین جزء یک تناسب که سه جزء آن داده شده‌اند.

a، b و c سه جزء از تناسب $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ داده شده‌اند. می‌خواهیم پاره‌خط به طول x را رسم کنیم.



ترسیم: ۱. زاویهٔ دلخواه xOy را رسم می‌کنیم.

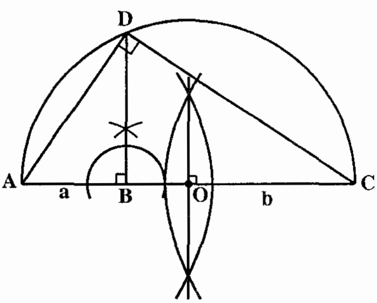
۲. روی Ox طولهای OA=a و AB=b و روی Oy، طول OC=c را جدا می‌کنیم.

۳. از A به C وصل می‌کنیم و از نقطهٔ B خطی موازی AC رسم می‌کنیم تا Oy را در نقطهٔ D قطع کند. پاره‌خط CD به طول x، جواب مسأله است، زیرا داریم:

$$AC \| BD \Rightarrow \frac{OA}{AB} = \frac{OC}{CD} \Rightarrow \frac{a}{b} = \frac{c}{CD} \Rightarrow CD = x$$

ترسیم ۲۵. ترسیم واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط.

پاره‌خطهایی به طولهای a و b داده شده‌اند. می‌خواهیم پاره‌خطی رسم کنیم که واسطهٔ هندسی بین این دو پاره‌خط باشد.



ترسیم: ۱. روی خط Δ پاره‌خطهای AB=a و BC=b را به‌دنبال هم جدا می‌کنیم.

۲. به قطر AC یک نیمدایره رسم می‌کنیم.

۳. از نقطهٔ B خطی عمود بر AC رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با نیمدایرهٔ به قطر AC را D می‌نامیم. پاره‌خط DB جواب مسأله است، یعنی واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط AB و BC است زیرا در مثلث قائم‌الزاویه ADC ($\hat{ADC} = ۹۰^\circ$) داریم:

$$DB^۲ = AB.BC \Rightarrow DB^۲ = a.b \Rightarrow DB = \sqrt{a.b}$$

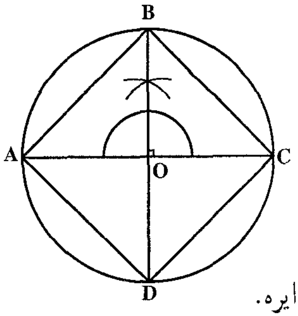
ترسیم ۲۶. ترسیم مربع محاط در یک دایره.

دایرهٔ (O) داده شده است. می‌خواهیم مربعی در این دایره محاط کنیم.

ترسیم: ۱. یک قطر از دایره را رسم می‌کنیم.

۲. قطر دیگری عمود بر این قطر رسم می‌کنیم.

۳. انتهای دو قطر رسم شده، را بترتیب به هم وصل می‌کنیم. مربع موردنظر رسم می‌شود.



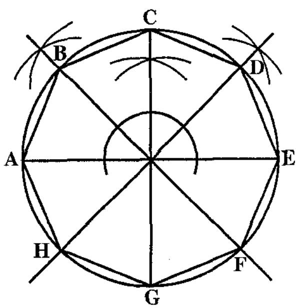
ترسیم ۲۷. ترسیم هشت ضلعی منتظم محاط در یک دایره.

دایرهٔ O داده شده است. می‌خواهیم هشت ضلعی منتظمی در این دایره محاط کنیم.

ترسیم: ۱. دو قطر عمود بر هم از دایره را رسم می‌کنیم.

۲. نیمسازهای زاویه‌های بین این دو قطر را رسم می‌کنیم.

۳. هشت نقطهٔ انتهای قطرهای رسم شده، رأسهای یک هشت ضلعی منتظم می‌باشند که به‌طور متوالی آنها را به هم وصل می‌کنیم تا هشت ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ O به‌دست آید.



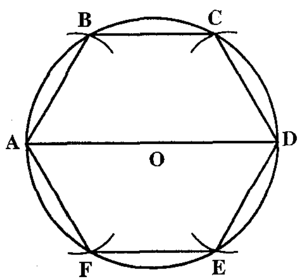
ترسیم ۲۸. ترسیم شش ضلعی منتظم محاط در یک دایره.

دایرهٔ O داده شده است. می‌خواهیم شش‌ضلعی منتظمی در آن محاط کنیم.

ترسیم: ۱. قطر AD از دایره را رسم می‌کنیم.

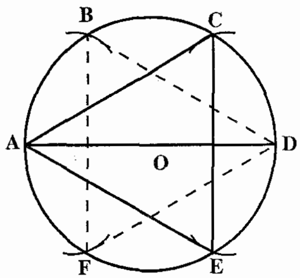
۲. به مرکزهای A و D و به شعاعی مساوی شعاع دایرهٔ O کمانهایی رسم می‌کنیم تا دایره را در چهار نقطه قطع کنند.

۳. شش نقطهٔ به‌دست آمده روی دایره را به‌ترتیب به هم وصل می‌کنیم. شش ضلعی منتظمی محاط در دایرهٔ O پدید می‌آید.



ترسیم ۲۹. ترسیم مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در یک دایره.

دایرهٔ O داده شده است. می‌خواهیم مثلث متساوی‌الاضلاعی در این دایره محاط کنیم.



ترسیم : ۱. مرحله‌های ۱ و ۲ ترسیم ۲۶ را انجام می‌دهیم تا شش نقطه روی دایره به‌دست آید (دایره به شش قسمت مساوی تقسیم شود).

۲. نقطه‌های به‌دست آمده را یک در میان به هم وصل می‌کنیم. دو مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره پدید می‌آید.

۱. ۵. روشهای حل مسأله‌های ترسیمهای هندسی

استفاده از ترسیمهای اساسی، به حل مسأله‌های پیچیده‌تری می‌انجامد. در این قسمت مهمترین روشهای حل مسأله‌های ترسیمی را مورد مطالعه قرار می‌دهیم.

۱.۵.۱. برخی از مسأله‌های ترسیمی

کاربرد مستقیم قضیه‌های معروفی هستند و راه‌حل آنها تقریباً واضح است. مانند رسم یک مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن اندازهٔ ضلع آن.

۲.۵.۱. روش سازنده

اگر حل مسأله‌ای پیچیده‌تر باشد، امّا راه‌حل را بدانید، این راه‌حل را می‌توان به این طریق ارائه کرد :

از یک عمل که می‌دانید چگونه انجام دهید، شروع کنید و به‌دنبال آن، رشته‌ای از این‌گونه عملها را انجام دهید تا به هدف برسید.

این شیوه، روش سازندهٔ حل مسأله نام دارد، و روشی است که در کتابها برای بیان حل مسأله‌ها به‌کار می‌رود.

۳.۵.۱. روش تحلیلی

اگر با مسأله‌ای روبه‌رو شوید که حل آن واضح نباشد، نمی‌توانید از روش سازنده استفاده کنید. زیرا هیچ سرنخی وجود ندارد که اولین گام، ممکن است چه باشد، و تعداد عملهایی که ممکن

است به‌عنوان اولین گام انتخاب شوند، آن قدر زیاد است که نمی‌توان آنها را به‌طور تصادفی آزمود.

از طرف دیگر، مشخصاً می‌دانیم که مسأله چیست؛ یعنی می‌دانیم که نهایتاً باید چه شکلی را به‌دست آوریم. بنابراین شروع از این شکل نهایی، که فرض می‌کنیم قبلاً رسم شده است، مفید است. با بررسی دقیق و سنجیدهٔ این شکل، ممکن است راهی را کشف کنیم، که به حل خواسته شده منجر شود. این شیوه را روش تحلیلی حل مسأله می‌نامند. این روش به‌طور خلاصه شامل گامهای زیر است:

تحلیل. فرض کنید مسأله حل شده است؛ شکلی رسم کنید که تقریباً شرایط بیان شده در مسأله را ارضاء کند. بررسی کنید که بین بخشهای داده شده و بخشهای نامعلوم در شکل چه ارتباطی وجود دارد، تا رابطه‌ای را کشف کنید که احتمالاً بتوان برای ترسیم شکل موردنظر به‌کار برد.

ترسیم. شکل خواسته شده را با استفاده از اطلاعات به‌دست آمده در تحلیل، رسم کنید.

اثبات. نشان دهید که شکل رسم شده تمامی شرایط را ارضاء می‌کند.

بحث. در مورد شرایط امکان ترسیم شکل خواسته شده، تعداد جوابها و غیره بحث کنید.

تبصرهٔ ۱. همان‌گونه که دیدیم، برای رسم هر شکل هندسی، نیازی به انجام تمام چهار مرحلهٔ بالا نیست. مانند رسم شکلهای هندسی مربوط به قضیه‌های معروف و یا رسم شکلهای هندسی با استفاده از روش سازنده.

تبصرهٔ ۲. بعضی از سؤالهای قابل پرسش در مراجعه به شکل تحلیلی عبارتند از:

۱. آیا هم‌اکنون قسمتی از شکل خواسته شده (مثلثی قائم‌الزاویه، یا مثلث معیّن دیگری)، از داده‌های مفروض، تعیین و مشخص شده است؟

۲. آیا تعیین رأس سوم مثلث خواسته شده، به‌صورت تقاطع دو مکان هندسی مفروض ممکن است؟

۳. آیا دو عضو داده شده، داده‌ای که عضو دیگری را به‌دست دهد، تشکیل می‌دهند؟

۴. آیا می‌توان شکل خواسته شده را با استفاده از شکل متشابه آن (همنوع آن) ترسیم کرد؟

۵. اگر داده‌های مفروض، شامل نقطه‌های خاصّی از هندسهٔ اقلیدسی پیشرفته (مانند مرکز دایرهٔ نه نقطه) باشند، چه چیزی در مورد جای آن نقطه، در رابطه با رأسهای مثلث خواسته شده، یا در رابطه با اعضای مفروض دیگر می‌دانیم؟

تبصرهٔ ۳. اگر تصویر تحلیلی شکل برای رسم آن شکل کافی نباشد، باید تغییرات مناسب لازم، در شکل ایجاد کنیم. به‌عنوان مثال:

۱. خطهای جدیدی به شکل اضافه کنیم تا جزء یا اجزاء جدید، یا مثلثهایی قابل رسم پدید آیند، که به کمک آنها بتوانیم، شکل خواسته شده را رسم کنیم.

۲. پاره‌خطهای شکل را به اندازه‌های معینی امتداد دهیم، تا مجموع یا تفاضلی که در مسأله داده شده، در شکل ظاهر شود.

۳. به اندازهٔ یک زاویه روی زاویهٔ دیگر جدا کنیم تا تفاضل دو زاویه به‌دست آید، یا دو زاویه را در مجاورت هم قرار دهیم تا مجموعشان مشخص گردد.

پیشنهاد. شکل لازم برای تحلیل را می‌توانید بدون استفاده از وسایل، امّا دقیق رسم کنید و اجزای مفروض را طوری ترتیب دهید که شکل، تصور درستی را از مسأله القاء کند و رابطه‌های بین اجزاء را نشان دهد.

ترسیم باید با پرگار و خط‌کش انجام شود. اندازه‌های مفروض، مثل پاره‌خطها و زاویه‌ها باید قبل از شروع ترسیم مشخص شوند و در ترسیم به‌کار روند. اگر مسأله شامل نقطه‌ها و خطهایی در مواضع معین باشد، باید قبل از شروع عملیات ترسیم، این داده‌ها را در شکل مشخص کرد.

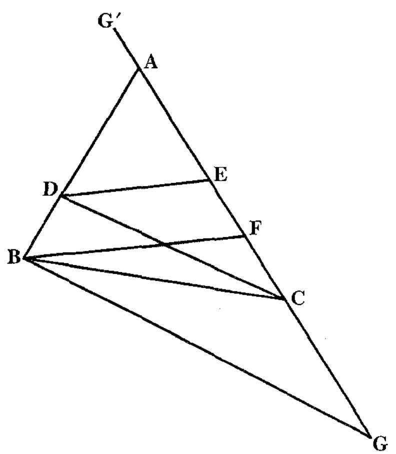
در هنگام بحث باید تعداد روشهای ممکن برای انجام هر گام، و تعداد خطها یا نقطه‌های برخورد حاصل از گام موردنظر بررسی شود.

جنبه‌های مختلفی که مسأله می‌تواند داشته باشد و در هنگام بحث مشخص می‌شود، باید با شکلهای مناسب، نشان داده شوند.

به‌عنوان قاعده‌ای کلی برای هر مسأله یا شکل، امکاناتی بیشتر از آنچه در وهلهٔ اول به‌نظر می‌رسد، وجود دارد. مطالعهٔ دقیق مسأله، معمولاً دیدگاههایی را روشن می‌سازد که در بررسی نادقیق، ممکن است از نظر دور بماند.

به مثالهای زیر که با روش تحلیلی حل شده‌اند، توجه کنید:

مثال ۱. بر روی ضلعهای AB و AC از مثلث ABC (یا امتداد آنها) دو نقطهٔ D و E را چنان تعیین کنید که AD=DE=EC باشد.



تحلیل. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و دو نقطهٔ D و E جواب مسأله باشند. از نقطهٔ B خطهایی بترتیب موازی با DE و DC رسم می‌کنیم تا AC را در نقطه‌های F و G قطع کنند. دو مثلث ADE و ABF متشابه‌اند؛ بنابراین داریم $\frac{AD}{AB}=\frac{AE}{AF}=\frac{DE}{BF}$، که چون AD=DE است، نتیجه می‌شود که BF=AB است. پس نقطهٔ F را بآسانی می‌توان تعیین کرد.

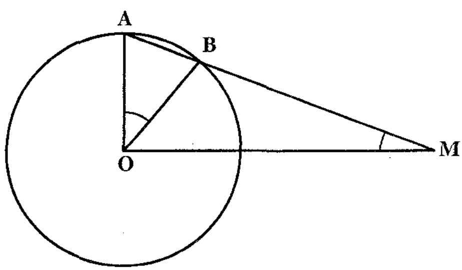
همچنین دو مثلث DEC و BFG متشابه‌اند و چون بنا به فرض، DE=EC است، داریم BF=FG و نقطهٔ G هم معلوم است.

ترسیم. دایره‌ای به مرکز B و به شعاع BA رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ F قطع کند. سپس دایره‌ای به مرکز F و به شعاع BA رسم می‌کنیم تا AC را در نقطهٔ G قطع کند. خطی که از C به موازات BG رسم می‌شود، خط AB را در نقطهٔ D که اولین نقطهٔ خواسته شده است، قطع می‌کند و خطی که از D به موازات BF رسم می‌شود، AC را در دومین نقطهٔ خواسته شده، یعنی E، قطع می‌کند.

اثبات. چون $DE \| BF$ است، داریم : $\frac{AD}{AB} = \frac{DE}{BF}$ امّا AB=BF می‌باشد، پس AD=DE (۱) است. همچنین دو مثلث DEC و BFG متشابه می‌باشند و داریم $\frac{DE}{BF} = \frac{EC}{BG}$ و BF=BG، بنابراین (۲) DE=EC است. از رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که AD=DE=EC است.

بحث. همیشه یک و تنها یک موضع برای F وجود دارد. پس از ترسیم F، برای G دو موضع می‌یابیم. پس دو جواب DE و $D'E'$ وجود دارد.

مثال ۲. از نقطه‌ای مفروض واقع در خارج یک دایره‌ای داده شده، قاطعی چنان رسم کنید، که زاویهٔ حادهٔ بین این قاطع و خطی که مرکز دایره را به نقطهٔ داده شده وصل می‌کند، با زاویه‌ای که وتر ایجاد شده در دایره توسط قاطع خواسته شده، از مرکز دایره رؤیت می‌شود، مساوی باشد.



تحلیل. فرض می‌کنیم MBA قاطع موردنظر باشد که از نقطهٔ داده شده M می‌گذرد و دایرهٔ مفروض به مرکز O را در نقطه‌های A و B قطع می‌کند. زاویهٔ A در دو مثلث AOB و AOM مشترک است و بنا به فرض $A\hat{O}B = A\hat{M}O$ است، پس زاویه‌های متناظر دو مثلث بالا مساوی‌اند. مثلث AOB متساوی‌الساقین است. پس مثلث AOM هم متساوی‌الساقین است و MA=MO است. امّا طول MO معلوم است، پس MA، یعنی فاصلهٔ نقطهٔ A از M معلوم است و می‌توان نقطهٔ A را تعیین و قاطع MA را رسم کرد.

ترسیم. دایرهٔ به مرکز M و به شعاع MO را رسم می‌کنیم. اگر A یکی از نقطه‌های برخورد این دایره با دایرهٔ (O) باشد خط MA شرایط مسأله را برآورده می‌کند.

اثبات. فرض کنید خط MA دایرهٔ مفروض را در نقطهٔ دیگر B قطع کند. مثلثهای AOB و AOM متساوی‌الساقینند. زیرا OA=OB و MA=MO است. زاویهٔ A در هر دو مثلث یکی از زاویه‌های قاعده است؛ پس زاویه‌های AOB و M که بترتیب روبه‌روی قاعدهٔ AB و قاعده AO در دو مثلث متساوی‌الساقین هستند، نیز برابرند، پس MA خط خواسته شده است.

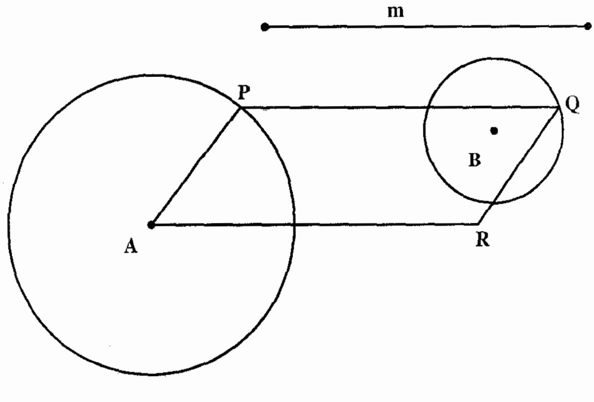
بحث. همیشه می‌توانیم دایرهٔ (M,MO) را که دایرهٔ مفروض را در نقطهٔ A و ′A قطع می‌کند، رسم کنیم. پس مسأله همیشه دو جواب دارد که نسبت به خط MO قرینهٔ مرکزی یکدیگرند. آیا می‌توانستیم خط MBA را طوری رسم کنیم که زاویهٔ AOB با زاویهٔ منفرجهٔ بین MBA و MO برابر باشد؟ اگر چنین کاری ممکن بود باید می‌دانستیم:

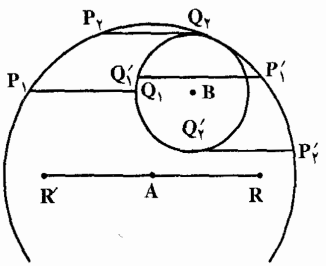
$A\hat{O}B + O\hat{M}A = 180^\circ$ که از آن‌جا: $O\hat{M}A = O\hat{A}B + O\hat{B}A$

ولی در مثلث OBM داریم $\hat{M} < O\hat{B}A$. پس به تناقض می‌رسیم. یعنی نمی‌توان خطی رسم کرد که شرایط خواسته شدهٔ اخیر را برآورده کند.

مثال ۳. بر روی دو دایرهٔ مفروض، دو نقطه تعیین کنید که فاصلهٔ معینی از هم داشته باشند و خطی که از آنها می‌گذرد، راستای مفروضی داشته باشد.

تحلیل. فرض می‌کنیم P و Q نقطه‌های خواسته شده بر روی دو دایرهٔ مفروض (A) و (B) باشند. از مرکز دایرهٔ (A) یعنی نقطهٔ A خطی موازی PQ رسم می‌کنیم و نقطهٔ R را روی آن چنان اختیار می‌کنیم که AR=PQ باشد. در متوازی‌الاضلاع APQR داریم RQ=AP؛ AP شعاع دایرهٔ مفروض است. پس طول RQ مشخص است. از طرف دیگر نقطهٔ R معلوم است زیرا هم‌راستا و هم طول AR مشخص است. پس نقطهٔ Q را می‌توان مشخص کرد. سپس بآسانی می‌توان نقطهٔ P را یافت.



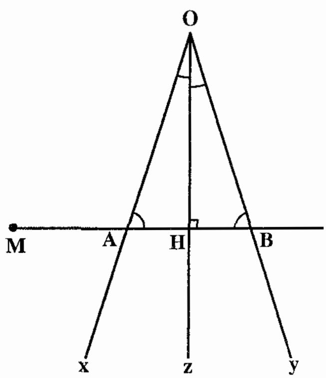


ترسیم. از نقطهٔ A مرکز یکی از دو دایرهٔ مفروض، خطی در راستای داده شده رسم می‌کنیم و AR را بر روی آن به اندازهٔ طول معلوم m تعیین می‌کنیم. دایرهٔ (A′) به مرکز R و شعاعی برابر شعاع دایرهٔ (A) رسم می‌کنیم تا دایرهٔ مفروض دوم را در Q قطع کند. از نقطهٔ Q خطی به موازات AR رسم، و QP را برابر AR روی آن جدا می‌کنیم، تا یک متوازی‌الاضلاع به ضلع AR درست شود. نقطه‌های P و Q شرایط مسأله را برآورده می‌کنند.

اثبات. در ترسیم بالا، طول پاره‌خط PQ همان طول مفروض و راستای آن نیز راستای مفروض است. نقطهٔ Q روی دایرهٔ (B) قرار دارد. برای این‌که ثابت کنیم نقطهٔ P روی دایرهٔ (A) واقع است، کافی است توجه کنیم که در متوازی‌الاضلاع ARQP داریم AP=RQ و RQ طوری رسم شده است که با شعاع (A) برابر باشد.

بحث. همیشه می‌توان از نقطه A خطی را در راستای مفروض رسم کرد. نقطهٔ R را می‌توان در هر یک از دو طرف A مشخص کرد؛ بنابراین برای R دو موضع، R و R′ می‌توان یافت. دایره‌ای که مرکزش یکی از این دو نقطه و شعاعش برابر شعاع دایرهٔ (A) باشد، ممکن است دایرهٔ (B) را در دو نقطه قطع کند، بر دایرهٔ (B) مماس باشد یا اصلاً دایرهٔ (B) را قطع نکند. بنابراین مسأله ممکن است چهار، سه، دو یا یک جواب داشته باشد، یا اصلاً جواب نداشته باشد. شکل (ب) حالتی را نشان می‌دهد که مسأله چهار جواب دارد.

مثال ۴. از نقطه‌ای مفروض خطی رسم کنید که با دو ضلع زاویه‌ای مفروض، زاویه‌های مساوی بسازد.



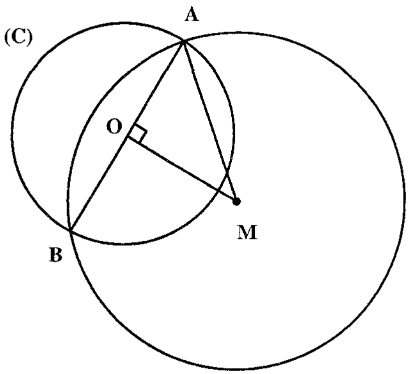
تحلیل. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و خط MAB با دو ضلع زاویهٔ xOy زاویه‌های مساوی $\hat{A}$ و $\hat{B}$ $(\hat{A}=\hat{B})$ را ساخته باشد. در این صورت مثلث OAB متساوی‌الساقین است. نیمساز زاویهٔ AOB را رسم می‌کنیم. این نیمساز که آن را OH می‌نامیم، عمودمنصف پاره‌خط AB است. بنابراین خط OAB بر نیمخط راست OH عمود است. بنابراین بسادگی رسم می‌شود.

ترسیم. نیمساز زاویهٔ xOy را رسم می‌کنیم و آن را O می‌نامیم. از نقطهٔ مفروض M خطی عمود بر Oz رسم می‌کنیم تا دو ضلع زاویه را در A و B و نیمساز Oz را در نقطهٔ H قطع کند. این خط (MAB) جواب مسأله است.

اثبات. در مثلث OAB، OH نیمساز زاویهٔ رأس و ارتفاع وارد بر قاعدهٔ AB است. پس این مثلث متساوی‌الساقین است و داریم $\hat{A}=\hat{B}$.

بحث. چون از هر نقطهٔ معلوم، همواره می‌توان یک خط، عمود بر خط مفروضی رسم نمود، پس مسأله همواره دارای یک جواب است.

مثال ۵. به مرکز نقطه‌ای مفروض، دایره‌ای رسم کنید که دایرهٔ مفروضی را نصف کند، یعنی وتر مشترک دو دایره، قطر دایرهٔ مفروض باشد.



تحلیل. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و دایرهٔ به مرکز M دایرهٔ مفروض C(O,R) را در وتر مشترک AB که قطر دایرهٔ (O) است، قطع کرده است. از M به A وصل می‌کنیم و خط‌المرکزین دو دایره را نیز رسم می‌نماییم. می‌دانیم که خط‌المرکزین دو دایره، عمودمنصف وتر مشترک آنهاست. پس MO عمودمنصف AB است. در مثلث قائم‌الزاویه MOA داریم $MA^2 = MO^2 + OA^2$. از آن‌جا نتیجه می‌شود $MA = \sqrt{OM^2 + R^2}$، که این مقدار شعاع دایرهٔ (M) است.

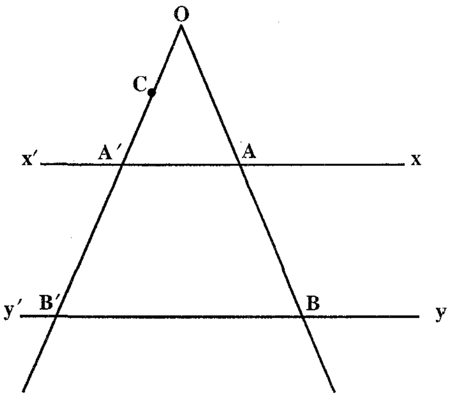
ترسیم. از M به O وصل می‌کنیم. طول پاره‌خط OM مقدار معلومی است. از نقطهٔ M عمودی بر OM اخراج می‌کنیم تا دایرهٔ مفروض (C) را در دو نقطهٔ A و B قطع کند. دایره‌ای به مرکز M و به شعاع MA=MB رسم می‌کنیم. این دایره جواب مسأله است.

نکته. می‌توان دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R' = \sqrt{OM^2 + R^2}$ رسم کرد.

اثبات. روش ترسیم مشخص می‌کند که وتر مشترک دو دایره، پاره‌خط AB قطر دایرهٔ (O) است. روش ترسیم دوم نیز نشان می‌دهد که مثلث OMA که در آن، A محل برخورد دایرهٔ (M) با دایرهٔ (C) است، در رأس O قائم‌الزاویه است. پس وتر مشترک دو دایره قطر دایرهٔ (C) است.

بحث. مسأله همواره دارای یک جواب است و این جواب، متمایز از دایرهٔ (C) است. درصورتی که M بر O مرکز دایرهٔ (C) منطبق شود، دایرهٔ جواب بر (C) منطبق می‌شود. بدیهی است اگر بخواهیم دایرهٔ مطلوب متمایز با دایرهٔ (C) باشد، در این حالت مسأله جواب ندارد.

مثال ۶. دو نقطهٔ A و B روی دو خط موازی $x'x$ و $y'y$ و نقطهٔ C غیرواقع بر این دو خط داده شده است. از نقطهٔ C خطی چنان رسم کنید که این دو خط موازی را در دو نقطهٔ A' و B' قطع کند، به قسمی که $\frac{AA'}{BB'} = k$ باشد.



تحلیل. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و خط $CA'B'$ جواب مسأله باشد. نقطهٔ برخورد دو خط AB و $A'B'$ را O می‌نامیم. دو مثلث OAA' و OBB' متشابه‌اند، زیرا $AA' \| BB'$ است. پس داریم: $\frac{AA'}{BB'} = \frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'}$ امّا $\frac{AA'}{BB'} = k$ است. پس $\frac{OA}{OB} = k$ یعنی نقطهٔ O پاره‌خط AB را به نسبت معلوم k تقسیم می‌کند. بنابراین می‌توانیم نقطهٔ O را رسم کنیم و خط OC خط مطلوب است.

ترسیم. روی خط B نقطهٔ O را چنان رسم می‌کنیم که $\frac{OA}{OB} = k$ باشد. از O به C وصل می‌کنیم. این خط جواب مسأله است.

اثبات. نقطه‌های برخورد OC با $x'x$ و $y'y$ نقطه‌های A' و B' است. در مثلث OBB'، $AA' \| BB'$ است. پس داریم $k = \frac{OA}{OB} = \frac{AA'}{BB'}$.

بحث. همواره دو نقطهٔ O و O' وجود دارد که پاره‌خط AB را به نسبت $k \neq 1$ تقسیم می‌کنند. بنابراین اگر دو خط OC و $O'C$ با خطهای $x'x$ و $y'y$ موازی نباشند، مسأله دو جواب دارد.

اگر $k = 1$ باشد، نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB است و نقطهٔ O'، نقطهٔ بینهایت دور امتداد AB است. پس مسأله تنها یک جواب دارد.

۴.۵.۱. ترسیمهای هندسی با استفاده از مکانهای هندسی

روش دو مکان هندسی. در موارد متعددی راه حل یک مسألهٔ هندسی، به یافتن نقطه‌ای که شرایط ویژه‌ای داشته باشد، بستگی دارد. به‌عنوان مثال، برای رسم دایره‌ای که بر سه ضلع یک مثلث مماس باشد، باید نقطه‌ای (مرکز دایره) را بیابیم که از سه ضلع مثلث به یک فاصله باشد.

مسألهٔ رسم خط مماس از یک نقطه بر یک دایره در صورتی حل می‌شود، که نقطهٔ تماس

خط با دایره، یعنی نقطه‌ای که از آن نقطه پاره‌خط واصل بین مرکز دایره و نقطهٔ داده شده به زاویهٔ قائمه رؤیت می‌شود را بیابیم.

در تعیین این نقطه‌ها، بیشتر، منظور به‌دست آوردن نقطه‌ای است که دارای دو شرط مفروض (p) و (q) باشد. در این صورت اگر شرط (q) را کنار بگذاریم و تنها شرط (p) را درنظر بگیریم، نقطهٔ مورد نظر به مکان هندسی نقطه‌هایی تعلق دارد که دارای شرط (p) هستند، و اگر شرط (p) را کنار بگذاریم و تنها شرط (q) را درنظر بگیریم، نقطهٔ مورد نظر به مکان هندسی نقطه‌هایی تعلق دارد که دارای شرط (q) می‌باشند. چون نقطهٔ خواسته شده باید هر دو شرط (p) و (q) را دارا باشد، بنابراین بر محل برخورد این دو مکان هندسی واقع است.

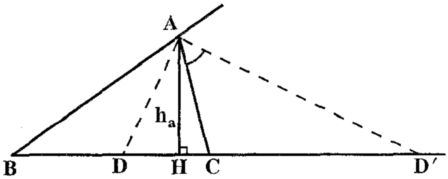
برای روشنتر شدن موضوع، مسألهٔ رسم دایره‌ای مماس بر سه ضلع مثلث را درنظر می‌گیریم. برای یافتن مرکز دایره‌ای که بر سه ضلع AB، AC و BC از مثلث ABC مماس است، یک ضلع به‌عنوان مثال BC را کنار می‌گذاریم و سعی می‌کنیم مرکز دایره‌ای را بیابیم که بر دو ضلع AB و AC مماس است. این مسأله جوابهای بسیاری دارد ؛ زیرا مکان هندسی مرکز دایره‌ای که بر دو ضلع AB و AC مماس است، نیمساز زاویهٔ بین این دو ضلع یعنی نیمساز زاویهٔ درونی A است. حال ضلع BC را اختیار می‌کنیم و ضلع AC را کنار می‌گذاریم. یعنی مرکز دایره‌ای را پیدا می‌کنیم که بر دو ضلع BC و AB مماس است. این مسأله نیز بی‌شمار جواب دارد، زیرا مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر دو ضلع BC و AB مماسند، نیمساز زاویهٔ بین این دو ضلع، یعنی نیمساز زاویهٔ درونی B است. بنابراین نقطهٔ مطلوب محل برخورد این دو مکان هندسی، یعنی نقطهٔ تقاطع نیمسازهای دو زاویهٔ A و B از مثلث ABC است. بدیهی است که نیمساز زاویهٔ درونی C نیز از این نقطه می‌گذرد (این نقطه مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث ABC است).

ماهیت مکانهای هندسی حاصل، به شرط حذف شده بستگی دارد. در هندسهٔ مقدماتی، این شرطها باید چنان باشد که مکانهای هندسی از خطها و دایره‌ها تشکیل شود. سادگی و سهولت راه‌حل مسأله، بستگی زیادی به انتخاب سنجیده مکانهای هندسی دارد.

شناخت مکانهای هندسی متعدد ما را قادر می‌سازد که به راحتی تشخیص دهیم که نقطهٔ مطلوب به کدام مکان هندسی تعلق دارد.

در صفحه بعد، مثالهایی از کاربرد مکانهای هندسی برای حل مسأله‌های ترسیمهای هندسی، نشان داده شده است :

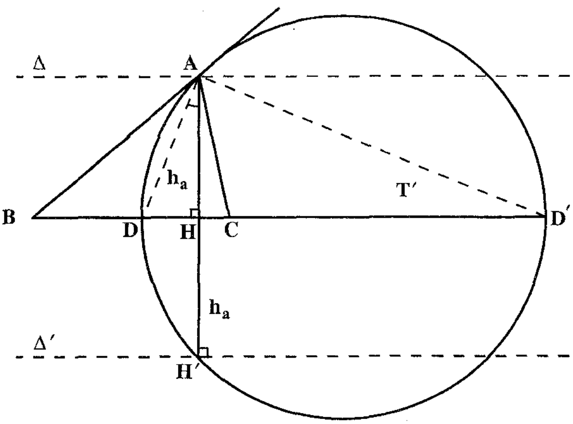
مثال ۱. مثلثی رسم کنید که از آن $b:c = k$ ، h_a و a معلوم است.



تحلیل. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مسأله باشد. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. چون اندازهٔ ارتفاع $AH = h_a$ معلوم است، یک مکان هندسی نقطهٔ A، دو خط موازی BC و به فاصلهٔ h_a از آن است.

از طرفی داریم $\frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} = k$.

بنابراین مکان هندسی دیگر رأس A دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط BC را به نسبت kتقسیم می‌کند (دایرهٔ آپولونیوس). بنابراین دو مکان هندسی برای نقطهٔ A داریم و می‌توانیم این نقطه را بیابیم.

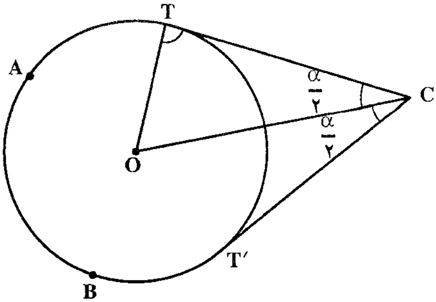


ترسیم. پاره‌خط BC به طول a را رسم می‌کنیم. آن‌گاه دو خط Δ و Δ′ را موازی BC و به فاصلهٔ h_a از آن رسم می‌کنیم. سپس دو نقطهٔ D و D′ را روی BC و در امتداد آن چنان تعیین می‌کنیم که پاره‌خط BC را به نسبت $\frac{b}{c} = k$ تقسیم کنند. دایرهٔ به قطر DD′ را رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دایره با خطهای Δ و Δ′ رأس A از مثلث ABC است. از A به B و C وصل می‌کنیم.

اثبات. در مثلث ABC که از ترسیم بالا به دست آمده، شرطهای داده شده را ارضاء می‌کند. یعنی داریم $AH = h_a$ و $\frac{AB}{AC} = \frac{b}{c} = k$.

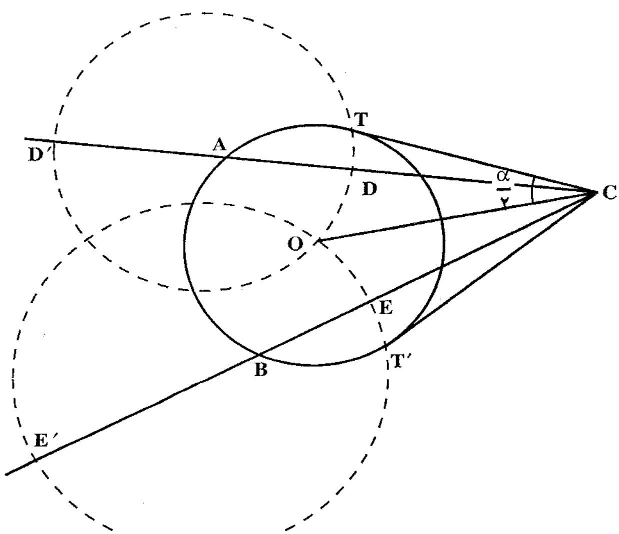
بحث. اگر خطهای Δ و Δ′ دایرهٔ به قطر DD′ را در ۴ نقطه قطع کنند، مسأله چهار جواب همنهشت دارد و اگر بر این دایره مماس باشند، دو جواب همنهشت وجود دارد و درصورتی که دایره را قطع نکنند، مسأله جواب ندارد.

مثال ۲. دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطهٔ داده شده بگذرد و از نقطهٔ داده شدهٔ سومی با زاویهٔ معلومی دیده شود.



تحلیل. فرض می‌کنیم دایرهٔ $C(O,R)$ که از دو نقطهٔ A و B گذشته و از نقطهٔ C تحت زاویهٔ α دیده می‌شود، جواب مسأله باشد. از نقطهٔ C مماسهای CT و CT' را بر دایره رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ OTC، زاویهٔ $O\hat{C}T = \frac{\alpha}{۲}$ معلوم است، پس نسبت $\frac{OT}{OC} = \sin\frac{\alpha}{۲}$، و از آن‌جا نسبتهای $\frac{OA}{OC}$ و $\frac{OB}{OC}$ نیز معلومند. پس دو مکان هندسی برای نقطهٔ O داریم و با رسم این دو مکان هندسی جای نقطهٔ O مشخص می‌شود.

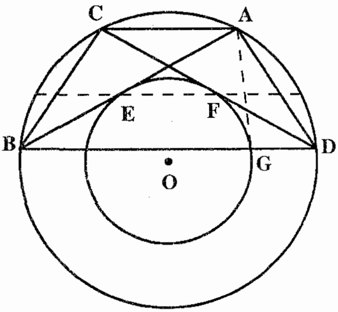
ترسیم. از C به دو نقطهٔ A و B وصل می‌کنیم. روی AC و در امتداد آن دو نقطهٔ D و D' را چنان اختیار می‌کنیم که پاره‌خط AC را به نسبت $k = \sin\frac{\alpha}{۲}$ تقسیم کنند. همچنین دو نقطهٔ E و E' را روی BC طوری اختیار می‌کنیم که این پاره‌خط را به نسبت k تقسیم کند. دو دایره به قطرهای DD' و EE' رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دو دایره نقطهٔ O مرکز دایرهٔ خواسته شده است. به مرکز O و به شعاع OA دایرهٔ مطلوب را رسم می‌کنیم.



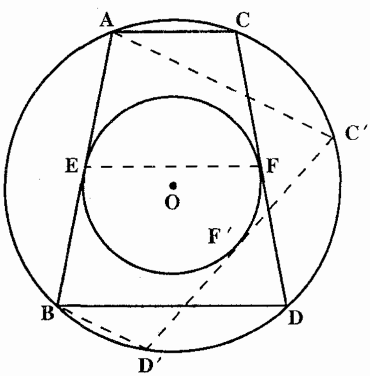
اثبات. از نقطهٔ C مماسهای CT و CT′ را بر دایرهٔ (O) رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویه OCT ($\hat{T}=۹۰^\circ$) داریم $\frac{OT}{OC}=k=\sin\frac{\alpha}{۲}$ زیرا $\frac{OT}{OC}=\frac{OA}{OC}=k$ است. بنابراین $O\hat{C}T=\frac{\alpha}{۲}$ و در نتیجه $T\hat{C}T'=\alpha$ است. دایره از دو نقطهٔ A و B نیز گذشته است، پس شرطهای داده شده در مسأله برقرار است.

بحث. به تعداد نقطه‌های برخورد دو دایرهٔ آپولونیوس به قطرهای DD′ و EE′ مسأله جواب دارد.

مثال ۳. از دو نقطهٔ داده شده بر روی یک دایره، دو وتر متوازی رسم کنید به طوری که مجموع طولهایشان مقدار معلومی باشد.



تحلیل. مسأله را حل شده می‌گیریم و فرض می‌کنیم A و B دو نقطهٔ داده شده روی دایرهٔ به مرکز O و AC و BD وترهای متوازی خواسته شده باشند. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABDC (شکل)، CD = AB و طول AB نیز معلوم است. پس وتر CD در نقطهٔ F، یعنی نقطهٔ وسط آن بر دایره‌ای به مرکز O و به شعاع معلوم مماس است. اگر E وسط AB باشد، داریم $۲EF = AC + BD$. پس نقطهٔ E و طول AC + BD معلوم است. بنابراین یک مکان هندسی دیگر برای نقطهٔ F داریم:



ترسیم. دایرهٔ (O,OE) را رسم می‌کنیم. اگر طول داده شده ۲s باشد، دایرهٔ (E,s) را رسم می‌کنیم، تا (O,OE) را در نقطهٔ F قطع کند. خط مماس بر (O,OE) در نقطهٔ F، دایرهٔ مفروض (O) را در C و D قطع می‌کند. خطهای AC و BD وترهای خواسته شده هستند.

اثبات. دو وتر AB و CD مساوی‌اند زیرا از O مرکز دایره مفروض (O) به یک فاصله‌اند. پس ABDC یک ذوزنقه متساوی‌الساقین است و در نتیجه $AC + BD = ۲EF$. چون هنگام ترسیم EF را مساوی s گرفتیم، AC + BD دارای طول خواسته شده است.

بحث. دایرهٔ (E,s) در صورتی که s از ۲OE بزرگتر باشد، دایرهٔ (O,OE) را قطع نمی‌کند.

اگر $s < 2OE$، دو نقطهٔ برخورد F و F′ را خواهیم داشت و مسأله دو جواب دارد.

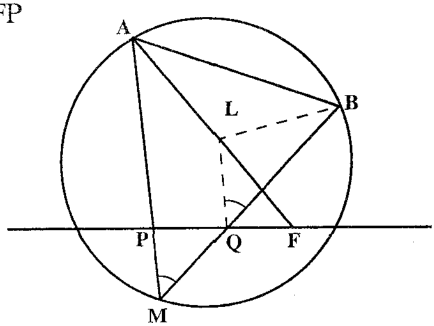
خط مماس بر دایرهٔ (O,OE) نقطهٔ F، دو نقطهٔ C و D را روی دایرهٔ (O) تعیین می‌کند. این دو نقطه و نقطه‌های داده شدهٔ A و B چهار خط را مشخص می‌کنند که دو ضلع و دو قطر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین هستند. شکل نشان می‌دهد که از این چهار خط کدام دو خط، خطهای مطلوب هستند. فرض کنید G نقطهٔ تماس مماس دومی باشد که از A بر دایرهٔ (O,OE) رسم می‌شود. اگر $s < EG$ مماس بر (O,OE) در F وتر AB را قطع می‌کند و خط AB یک قطر از ذوزنقهٔ حاصل خواهد بود. پاره‌خط EF با نصف تفاضل دو قاعده برابر است.

حالتی را در نظر بگیرید که تفاضل دو وتر مقدار معلومی باشد.

مثال ۴. روی یک دایرهٔ داده شده، نقطه‌ای تعیین کنید به طوری که خطهایی که این نقطه را به دو نقطهٔ معلوم واقع بر همین دایره وصل می‌کنند، خط مفروضی را در دو نقطه که نسبت فاصله‌هایشان از نقطهٔ معلوم دیگری واقع بر همین خط مقدار معلومی باشد، قطع کند.

تحلیل. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و خطهای AM و BM که نقطه‌های مفروض A و B واقع بر دایره را به نقطهٔ مطلوب M وصل می‌کنند، خط مفروض FPQ را در دو نقطهٔ P و Q قطع کنند (شکل). اگر F نقطهٔ ثابت مفروض باشد و خط QL که از نقطهٔ Q موازی با MA رسم می‌شود، خط FA را در L قطع کند، خواهیم داشت، $L\hat{Q}B = A\hat{M}B$، و چون وتر AB داده شده است، زاویهٔ AMB معلوم است. از طرف دیگر داریم :

$$FL:FA = FQ:FP$$



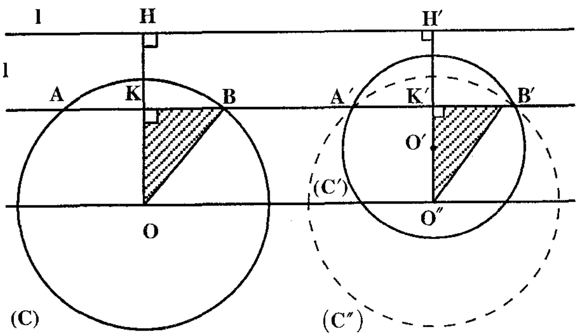
چون نسبت FQ:FP معلوم است، پس نقطهٔ L معلوم است. پس پاره‌خط معلوم LB از نقطهٔ Q با زاویهٔ مفروض دیده می‌شود. به این ترتیب یک مکان هندسی برای Q به‌دست می‌آید. نقطهٔ Q در محل برخورد این مکان هندسی و خط FPQ قرار دارد. خط BQ دایره را در نقطهٔ مطلوب M قطع می‌کند.

اثبات و بحث به عهده خواننده واگذار می‌شود.

۵.۵.۱. ترسیمهای هندسی به کمک تبدیلهای هندسی

در ترسیم بسیاری از شکلهای هندسی، از تبدیلهای هندسی مانند انتقال، دوران، بازتاب مرکزی، بازتاب محوری، تجانس انعکاس، قطب و قطبی و ... استفاده می‌شود. به مثالهای زیر توجه کنید:

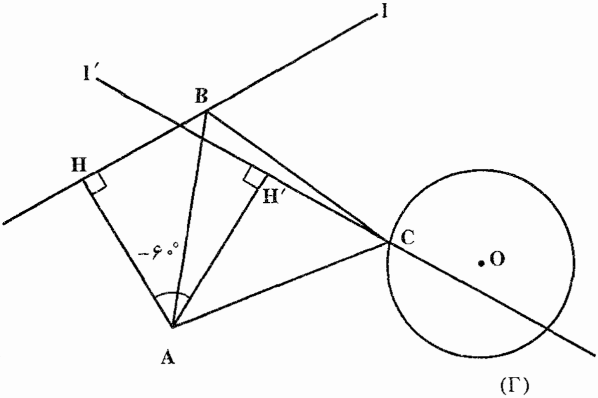
مثال ۱. دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ و خط l در یک صفحه داده شده‌اند. خطی موازی l رسم کنید که این دو دایره بر آن، دو وتر متساوی جدا کنند.



حل. فرض می‌کنیم مسأله حل شده، و خط l_1 موازی l، جواب مسأله دایره‌های (C) و (C') را بترتیب در وترهای AB و $A'B'$ چنان قطع کند که $AB = A'B'$ باشد. از O و O' مرکزهای دو دایره، عمودهایی بر خط l رسم می‌کنیم تا این خط را در H و H' و خط l_1 را در K و K' قطع کنند. چهارضلعی $HH'K'K$ مستطیل، و طول HH' مقدار ثابتی است. از نقطهٔ O خط l_2 را موازی خط l و از نقطهٔ B' خطی موازی OB رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ O'' یکدیگر را قطع کنند. چهارضلعی $OBB'O''$ متوازی‌الاضلاعی است که در آن $BB' = OO'' = KK' = HH'$ است؛ زیرا دو مثلث قائم‌الزاویه $O''K'B'$ و OKB همنهشتند ($\hat{K} = \hat{K}' = ۹۰^\circ$ ، $OK = O''K'$ ، $KB = \frac{AB}{۲} = \frac{A'B'}{۲} = K'B'$). بنابراین $KB = K'B'$ و از آن جا $HH' = KK' = BB' = OO''$ است. پس دو نقطهٔ O'' و B' انتقال یافته‌های دو نقطهٔ O و B به اندازهٔ بردار انتقال $\overrightarrow{HH'}$ می‌باشند. به بیان دیگر نقطهٔ B' روی دایره‌ای قرار دارد که از انتقال دایرهٔ (C) به اندازهٔ بردار انتقال $\overrightarrow{HH'}$ به دست می‌آید. پس برای حل مسأله چنین عمل می‌کنیم:

از دو نقطهٔ O و O' مرکزهای دو دایره، عمودهای OH و $O'H'$ را بر خط l فرود می‌آوریم، تا بردار ثابت $\overrightarrow{HH'}$ مشخص گردد، آن‌گاه دایرهٔ (C) را به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{HH'}$ انتقال می‌دهیم تا دایرهٔ (C'') به دست آید. این دایره، دایرهٔ (C') را در وتر $A'B'$ قطع می‌کند. $A'B'$ را رسم کرده امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ (C) را در A و B قطع کنند. این خط ($ABA'B'$ یا l_1) جواب مسأله است.

مثال ۲. نقطهٔ A، خط l و دایرهٔ (Γ) داده شده‌اند. مثلث متساوی‌الاضلاعی رسم کنید که یک رأسش نقطهٔ A و دو رأس دیگرش یکی روی خط l و دیگری روی دایرهٔ (Γ) قرار داشته باشد.



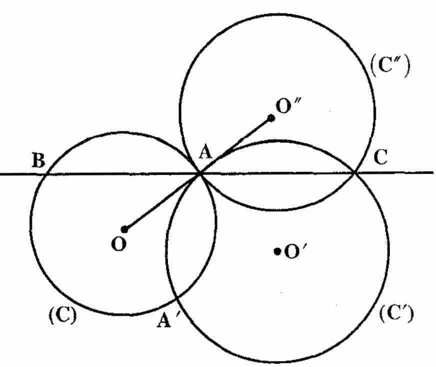
حل. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث متساوی‌الاضلاع ABC جواب مسأله باشد. چون $AB = AC$ و $B\hat{A}C = 60^\circ$ است، پس نقطهٔ C دوران یافتهٔ نقطهٔ B نسبت به مرکز دوران A و با زاویهٔ دوران ۶۰ درجه است. بنابراین برای حل مسأله، خط l را نسبت به مرکز دوران A و با زاویهٔ دوران 60° دوران می‌دهیم تا خط l′ به دست آید. نقطهٔ برخورد l′ با دایرهٔ (Γ) نقطهٔ C یک رأس مثلث خواسته شده است. از A به C وصل می‌کنیم و به مرکز A و به شعاع AC دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط l را در نقطه B قطع کند. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC جواب مسأله است.

نکته. می‌توان دایرهٔ (Γ) را نسبت به مرکز دوران A و با زاویهٔ دوران 60°، دوران داد تا تبدیل یافتهٔ آن خط l را در رأس B قطع کند و ...

بحث. به تعداد نقطه‌های برخورد خط l′ با دایرهٔ (Γ) مسأله دارای جواب است.

نکته. خط l را نسبت به مرکز دوران A با دو زاویهٔ دوران $+60^\circ$ و -60° می‌توان دوران داد که در حل مسأله، زاویهٔ دوران را -60° اختیار کرده‌ایم (با فرض این که جهت مثبت زاویه در صفحه را خلاف جهت حرکت عقربه‌ای ساعت در نظر بگیریم).

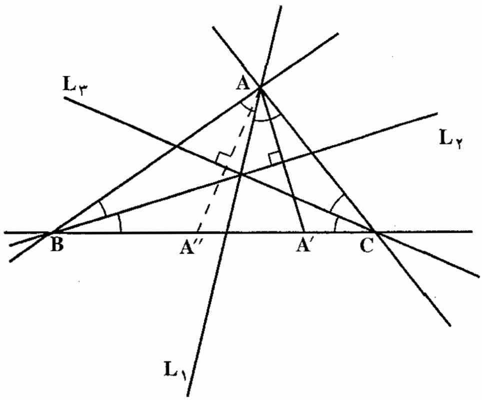
مثال ۳. دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ در دو نقطهٔ A و A′ متقاطعند. از یک نقطهٔ تقاطع، خطی رسم کنید که در دو دایره، دو وتر به طولهای مساوی ایجاد کند.



حل. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و خط ABC جواب مسأله باشد، یعنی $AB = AC$ باشد. چون نقطهٔ A ثابت است، پس نقطهٔ C بازتاب مرکزی (قرینهٔ مرکزی) نقطهٔ B نسبت به مرکز A می‌باشد. بنابراین برای حل مسأله بازتاب مرکزی (قرینهٔ مرکزی)، دایرهٔ (C) را نسبت به نقطهٔ A به دست می‌آوریم و دایرهٔ (C″) می‌نامیم. نقطهٔ برخورد این دایره با دایرهٔ (C″)

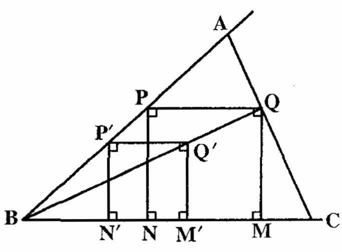
نقطهٔ C است. از C به A وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا دایرهٔ (C) را در B قطع کند. خط BAC جواب مسأله است.

مثال ۴. سه خط همرس L_1، L_2 و L_3 و نقطهٔ A واقع بر یکی از آنها داده شده است. مثلثی به رأس A رسم کنید که این سه خط نیمسازهای زاویه‌های درونی آن باشند.



حل. فرض می‌کنیم مثلث ABC رسم شده و L_2 نیمساز زاویهٔ B و L_3 نیمساز زاویهٔ C باشد. پس خطهای AB و BC نسبت به خط L_2 و خطهای AC و BC نسبت به خط L_3 قرینهٔ محوری (بازتاب محوری) یکدیگرند. پس نقطه‌های A′ و A″ قرینه‌های نقطهٔ A نسبت به خطهای L_2 و L_3 بر خط BC واقعند. بنابراین راه حل مسأله به صورت زیر به دست می‌آید: قرینه‌های محوری نقطهٔ A نسبت به دو خط L_2 و L_3 را به‌دست آورده، A′ و A″ می‌نامیم. نقطه‌های برخورد خط A′A″ با خطهای L_2 و L_3، رأسهای B و C می‌باشند. بدین ترتیب مثلث ABC رسم می‌شود.

مثال ۵. در مثلث مفروض ABC مربعی محاط کنید که دو رأس آن بر قاعدهٔ AB و دو رأس دیگرش بر ضلعهای AC و BC قرار گیرند.

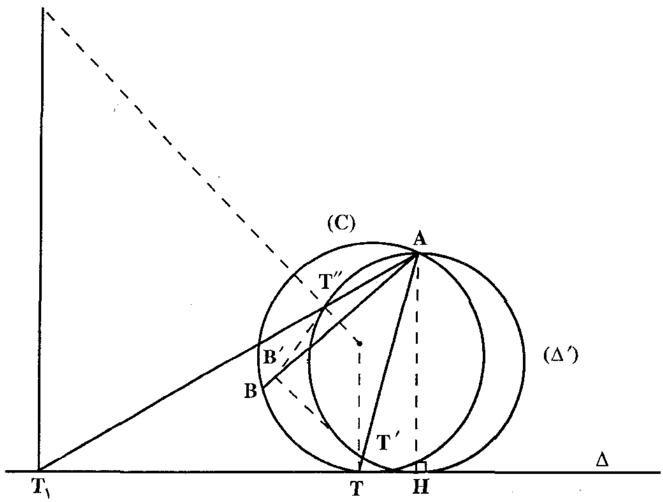


حل. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مربع MNPQ جواب مسأله باشد. از B به Q وصل می‌کنیم. از نقطهٔ اختیاری Q′ روی AQ خطی موازی PQ رسم می‌کنیم تا AB را در نقطهٔ P′ قطع کند. از P′ و Q′ عمودهای Q′M′ و P′N′ را بر BC رسم می‌کنیم. M′N′P′Q′ مربعی است که مجانس مربع MNPQ نسبت به مرکز تجانس B و نسبت تجانس $\frac{BQ'}{BQ}$ است؛ بنابراین برای حل مسأله چنین عمل می‌کنیم:

مربع دلخواه M′N′P′Q′ را چنان رسم می‌کنیم که M′N′ روی BC و P′ روی AB باشد. AQ′ را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با AC را Q می‌نامیم. مجانس مربع M′N′P′Q′، نسبت به مرکز تجانس B و نسبت تجانس $\frac{BQ}{BQ'}$ یعنی مربع MNPQ، جواب مسأله است.

مثال ۶. دایره‌ای رسم کنید که بر دو نقطهٔ داده شده A و B بگذرد و بر خط مفروض Δ مماس باشد (A و B در یک طرف خط Δ قرار دارند).

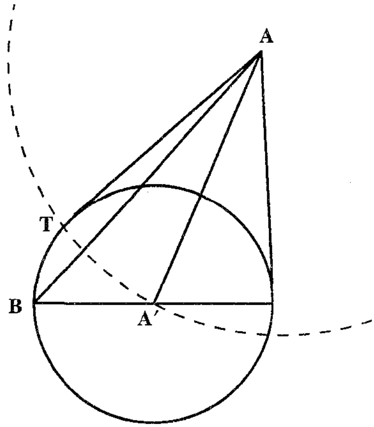
حل. اگر مسأله حل شده باشد و (C) دایرهٔ خواسته شده در نقطهٔ T بر خط Δ مماس باشد، در صورتی که شکل را به وسیلهٔ انعکاس تبدیل کنیم، منعکس (C) بر منعکس Δ در T' منعکس T مماس خواهد بود. امّا اگر قطب انعکاس را یکی از نقطه‌های دایرهٔ (C) بگیریم، منعکس (C) خطی مستقیم و منعکس Δ، دایره‌ای خواهد بود مماس بر آن خط مستقیم. پس مسأله را به این طریق حل می‌کنیم:



A را قطب انعکاس و مقداری دلخواه مانند AH^2 را قوت انعکاس فرض می‌کنیم. (AH عمودی است که از A بر خط Δ رسم کرده‌ایم.) منعکس خط Δ دایرهٔ (Δ') است که به قطر AH رسم می‌شود. حال B' منعکس B را به دست می‌آوریم و از B' بر دایرهٔ (Δ') مماس $B'T'$ را رسم می‌کنیم. از A به T' وصل کرده نقطهٔ برخورد AT' با Δ را T می‌نامیم. دایره‌ای که بر A، B و T می‌گذرد، دایرهٔ جواب مسأله است. در حالت کلی، مسأله دو جواب دارد.

مثال. مثلث ABC داده شده است. دایرهٔ (A) را به مرکز A چنان رسم کنید که B و C نسبت به آن مزدوج باشند.

حل. دو نقطه را نسبت به یک دایره مزدوج می‌نامند، هرگاه خط قطبی یکی نسبت به دایره، از دیگری بگذرد.

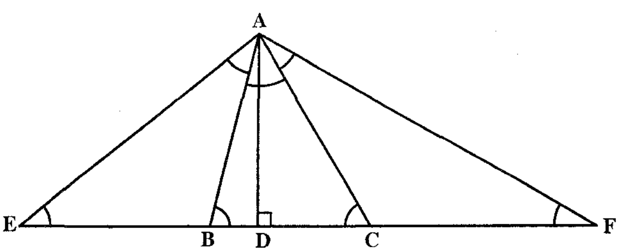


دایره‌ای به مرکز A که دو نقطهٔ B و C نسبت به آن مزدوج یکدیگر باشند، بر دایرهٔ به قطر BC عمود است. بنابراین دایرهٔ به قطر BC را رسم می‌کنیم. برای تعیین شعاع دایرهٔ (A) از نقطهٔ A مماس AT را بر دایرهٔ به قطر BC رسم می‌کنیم. آن‌گاه به مرکز A و به شعاع AT دایرهٔ جواب مسأله را رسم می‌کنیم. بسادگی ثابت می‌شود این دایره چنان است که قطبی نقطهٔ B نسبت به آن، از نقطهٔ C می‌گذرد و قطبی نقطهٔ C نسبت به آن، از نقطهٔ B می‌گذرد.

۶.۵.۱. ترسیمهای هندسی با استفاده از شکلهای کمکی

در میان شرطهایی که برای ترسیم یک شکل داده می‌شود، ممکن است شرطهایی وجود داشته باشد، که به طور مستقیم در شکل مورد بحث قرار نداشته باشند. به عنوان مثال ممکن است مجموع طولهای دو ضلع مثلث، یا تفاضل دو زاویه از مثلث، یا ...، داده شده باشند. برای یافتن راه حل این گونه مسأله‌ها، باید این اجزاء غیرمستقیم را در تحلیل مسأله وارد کنیم تا بتوانیم شکلی قابل رسم پیدا کنیم که به کمک آن بتوانیم شکل خواسته شده را رسم کنیم. این شکلها را شکلهای معین یا کمکی می‌نامند.

مثال ۱. مثلثی را رسم کنید که از آن، محیط، زاویهٔ روبه‌رو به یک ضلع، و ارتفاع وارد بر همان ضلع $(۲P, \hat{A}, h_a)$ داده شده است.



تحلیل. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مسأله باشد. BC را از دو طرف امتداد می‌دهیم و BE را مساوی BA و CF را مساوی CA جدا می‌کنیم. پس $EF = ۲P$ مقدار معلومی است.

مثلثهای EAB و CAF متساوی‌الساقیند. بنابراین :

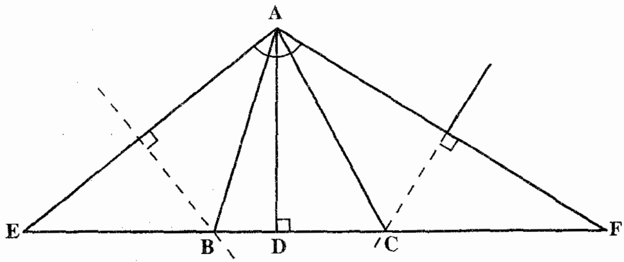
$$\hat{E} = E\hat{A}B = \frac{۱}{۲} A\hat{B}C\ ,\ \ \hat{F} = F\hat{A}C = \frac{۱}{۲} A\hat{C}B$$

در نتیجه داریم :

$$\text{مقدار معلوم} = \frac{\hat{A}}{۲} + ۹۰^\circ = \hat{A}\frac{۱}{۲} + (\hat{A}+\hat{B}+\hat{C})\frac{۱}{۲} = \hat{C}\frac{۱}{۲} + \hat{A} + \hat{B}\frac{۱}{۲} = E\hat{A}F$$

بنابراین زاویهٔ EAF معلوم است. ارتفاع AD از مثلث ABC ارتفاع مثلث AEF نیز هست. پس از مثلث AEF، قاعدهٔ $EF = ۲P$ ، زاویهٔ روبه‌روی آن $E\hat{A}F = ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲}$ و ارتفاع $AD = h_a$ معلوم است. بنابراین این مثلث را می‌توانیم رسم کنیم. رأس A از این مثلث، رأس مثلث مطلوب ABC نیز هست.

ترسیم. مثلث AEF را با معلوم بودن ضلع EF، زاویهٔ $E\hat{A}F$ و ارتفاع AD رسم می‌کنیم. عمودمنصفهای AE و AF را رسم می‌کنیم تا EF را در نقطه‌های B و C که دو رأس دیگر مثلث ABC می‌باشند، قطع کنند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



اثبات. چون $BE = BA$ ، $CF = CA$ است، بنابراین :

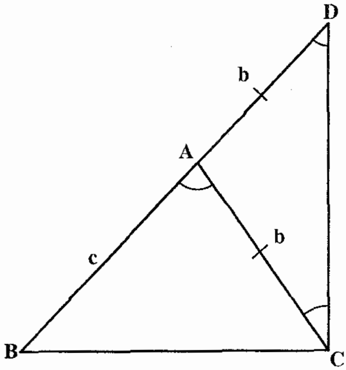
$$EF = EB + BC + CF = AB + BC + AC = ۲P$$

و از متساوی‌الساقین بودن مثلثهای ABE و ACF و اندازهٔ زاویهٔ $E\hat{A}F = ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲}$ نتیجه می‌شود که زاویهٔ $B\hat{A}C$ مساوی همان مقدار داده شده در مسأله است. از طرفی ارتفاع AD، $AD = h_a$ ارتفاع مثلث ABC نیز هست. پس مثلث ABC شرطهای داده شده را داراست.

بحث. در صورتی که مثلث AEF قابل رسم باشد، مثلث ABC نیز قابل رسم است.

مثلث معین. برای ترسیم مثلث مطلوب ABC، به عنوان یک گام میانی، مثلث دیگری یعنی مثلث AEF را رسم کردیم. استفاده از یک مثلث کمکی که به مثلث «معین» موسوم است، غالباً می‌تواند بسیار مفید باشد.

مثال ۲. از مثلثی یک ضلع، زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع، و مجموع دو ضلع دیگر $(b+c,\hat{A},a)$ معلوم است. مثلث را رسم کنید.



حل. مسأله را حل شده گرفته، فرض می‌کنیم مثلث ABC جواب مسأله باشد. ضلع BA را از طرف A به اندازه $BD = AC$ ادامه می‌دهیم و از D به C وصل می‌کنیم. داریم $BD = BA + AD = b + c$.

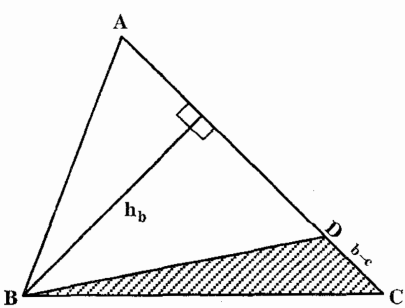
از طرفی در مثلث متساوی‌الساقین ACD داریم:

$$\text{مقدار معلوم} = A\hat{D}C = A\hat{C}D = \frac{۱}{۲}\hat{A}$$

بنابراین مثلث BDC با معلوم بودن ضلع $BC = a$، ضلع $BD = b + c$ و $B\hat{D}C = \frac{\hat{A}}{۲}$ قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم. آن‌گاه عمودمنصف ضلع DC را رسم می‌کنیم تا DB را در نقطهٔ A که رأس سوم مثلث ABC است، قطع کند.

بحث. حل این مسأله ممکن نیست، مگر این که داشته باشیم $a < b + c$. با فرض برقرار بودن این شرط، در مثلث BCD زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچکتر را داریم. بنابراین ممکن است بتوانیم دو یا یک مثلث با شرایط مفروض برای BCD رسم کنیم یا ممکن است چنین مثلثی قابل رسم نباشد. از هر مثلث کمکی یک و تنها یک مثلث مطلوب می‌توان به دست آورد. پس ممکن است مسأله دو جواب، یک جواب داشته باشد یا اصلاً جواب نداشته باشد.

مثال ۳. از مثلثی اندازهٔ یک ضلع، زاویهٔ روبه‌رو به آن ضلع، و تفاضل اندازه‌های دو ضلع دیگر $(b-c,\hat{A},a)$ معلوم است. مثلث را رسم کنید.



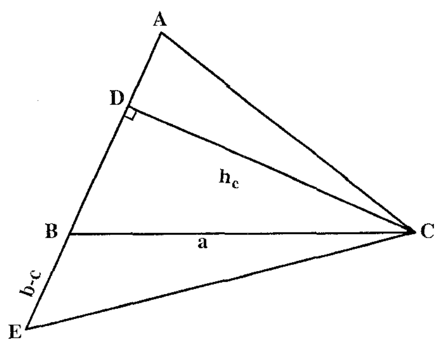
حل. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مسأله باشد. با فرض $b > c$ روی ضلع AC پاره‌خط $AD = AB$ را جدا می‌کنیم و از D به B وصل می‌کنیم. $DC = AC - AD = b - c$ طول معلومی دارد. از طرفی داریم:

$$\text{مقدار معلوم} = B\hat{D}C = ۱۸۰^\circ - B\hat{D}A = ۱۸۰^\circ - \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \hat{A}) = ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲}$$

پس مثلث BCD که از آن $BC = a$ ، $DC = b - c$ و $B\hat{D}C = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ معلوم است، قابل رسم است. دو رأس B و C از این مثلث، دو رأس B و C از مثلث خواسته شده می‌باشند. برای تعیین رأس A، عمودمنصف ضلع BD را رسم می‌کنیم، تا امتداد CD را در نقطهٔ A قطع کند. از A به B وصل می‌کنیم. مثلث ABC مشخص می‌شود.

شرط وجود جواب آن است که $a > b - c$ باشد. اگر این شرط برقرار نباشد، رسم مثلث ناممکن است. اگر این شرط برقرار باشد، زاویهٔ مفروض مثلث BCD روبه‌روی ضلع بزرگتر قرار دارد و رسم چنین مثلثی به یک و تنها یک طریق ممکن است. پس مسألهٔ مورد نظر یک جواب دارد.

مثال ۴. از مثلثی، یک ضلع، تفاضل دو ضلع دیگر و ارتفاع وارد بر یکی از این دو ضلع $(h_c, b - c, a)$ معلوم است. مثلث را رسم کنید.



تحلیل. فرض می‌کنیم ABC مثلث خواسته شده باشد. با فرض $b > c$ ، ضلع AB را امتداد می‌دهیم و روی آن $AE = AC$ را جدا می‌کنیم به طوری که $BE = b - c$ باشد. در مثلث BCE داریم: $BC = a$ ، $BE = b - c$ و ارتفاع وارد بر BE برابر h_c است. پس این مثلث را می‌توان رسم کرد و از این مثلث بسادگی می‌توان به مثلث مطلوب ABC رسید.

ترسیم. مثلث قائم‌الزاویه $CDB(\hat{D} = 90^\circ)$ را با معلوم بودن وتر $BC = a$ و ضلع $DC = h_c$ رسم می‌کنیم. ضلع DB را به اندازهٔ $BE = b - c$ امتداد می‌دهیم و از E به C وصل می‌کنیم. آن‌گاه عمودمنصف ضلع EC را رسم می‌کنیم تا امتداد DE را در نقطهٔ A رأس سوم مثلث ABC، قطع کند.

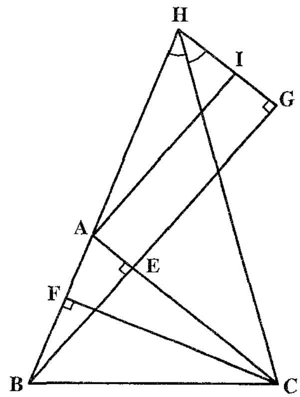
اثبات. مثلث BDC دو رأس B و C از مثلث خواسته شده را به دست می‌دهد و $BC = a$ است. همچنین $CD = h_c$ ارتفاع داده شده است. از طرفی مثلث AEC متساوی‌الساقین است. پس $BE = AC - AB = b - c$ است. بنابراین مثلث ABC شرایط داده شده را دارد.

بحث. شرط وجود جواب آن است که $a > h_c$ باشد.

مثال ۵. از مثلث ABC، اندازهٔ ضلع BC، زاویهٔ A و مجموع دو ارتفاع وارد بر دو ضلع AB و $(a, \hat{A}, h_b + h_c)AC$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

حل. فرض می‌کنیم مثلث ABC رسم شده باشد. یکی از دو ارتفاع وارد بر دو ضلع AB و AC به عنوان مثال ارتفاع BE را از طرف E به اندازهٔ $EG = CF$ امتداد می‌دهیم. از نقطه G خطی موازی ضلع AC رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطهٔ H قطع کند. پس داریم:

$$B\hat{H}G = B\hat{A}C = \hat{A}\ ,\ \ B\hat{G}H = B\hat{E}A = 90^\circ$$



بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ BGH، یک ضلع زاویهٔ قائمه، $BG = h_b + h_c$، و زاویهٔ حادهٔ $B\hat{H}G = \hat{A}$ معلوم است. پس می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم و طول BH را تعیین کنیم.

به آسانی می‌توان نشان داد که $BH = b + c$ است. زیرا اگر خط AI را موازی BG رسم کنیم تا HG را در I قطع کند، AIGE مستطیل است و بنابراین $AI = EG = h_c$ است. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ACF و AHI همنهشتند، زیرا:

$$AI = CF = h_c\ \ ,\ \ A\hat{H}I = C\hat{A}F = \hat{A}$$

بنابراین $AH = AC = b$ و در نتیجه $BH = BA + AH = b + c$ است. اکنون از مثلث خواسته شدهٔ ABC، a، $\hat{A}$ و $b + c$ را می‌دانیم که به مسأله‌ای می‌رسیم که حل کرده‌ایم.

ولی به طور مستقیم می توان از مثلث BGH به مثلث ABC رسید؛ زیرا در این مثلث رأس B یک رأس از مثلث ABC است. از طرفی می‌دانیم که:

$$AC = AH \Rightarrow A\hat{H}C = A\hat{C}H = \frac{1}{2}B\hat{A}C\ ,\ \ A\hat{H}G = B\hat{A}C$$

$$\Rightarrow A\hat{H}C = C\hat{H}G = \frac{1}{2}\hat{A}$$

یعنی HC نیمساز زاویهٔ BHD، یک مکان هندسی رأس C است. مکان هندسی دیگر این رأس، دایرهٔ (B,Q) است. پس از تعیین رأس C، عمودمنصف پاره‌خط CH را رسم می کنیم. این عمودمنصف BH را در نقطهٔ A رأس سوم مثلث ABC قطع می کند و به این ترتیب، مثلث ABC رسم می‌شود.

نکته. اگر زاویهٔ مفروض A منفرجه باشد، مثلث BGH به جای زاویهٔ $\hat{A}$ شامل مکمّل A خواهد بود و مسأله به همان ترتیب حل می‌شود.

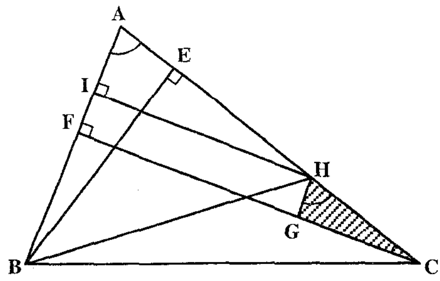
تعریف. مثلث قائم‌الزاویهٔ BGH شامل اجزای زیر است:

$$b+c, h_b+h_c, \hat{A}$$

بنابراین با داشتن هر دو جزء از این اجزاء، جزء سوم را می‌توان تعیین کرد. مجموعه‌ای از اجزای مثلث را که دارای این ویژگی باشند، داده‌های مثلث می‌نامند.

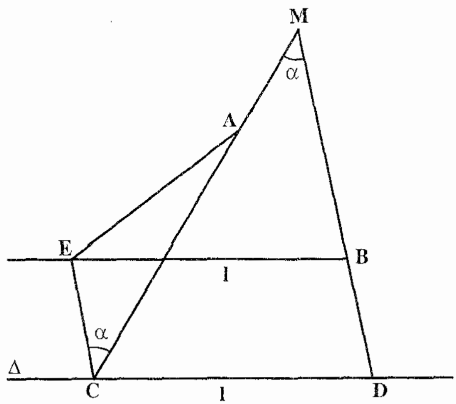
مثال ۶. از مثلث ABC اندازه‌های a، $\hat{A}$ و h_c-h_b داده شده است. مثلث را رسم کنید.

حل. فرض می کنیم ABC مثلث خواسته شده باشد. ارتفاعهای BE و CF را رسم می‌کنیم و روی CF از طرف F پاره‌خط FG را مساوی BE جدا می‌کنیم، بدیهی است که $CG=h_c-h_b$ است. GH را موازی با AB رسم می‌کنیم و از H خطی موازی CF رسم می‌کنیم تا AB را در نقطهٔ I قطع کند. چهارضلعی FGHI مستطیل است و در مثلث قائم‌الزاویهٔ CGH ($\hat{G}=۹۰°$)، $GC=h_c-h_b$ و $G\hat{H}C=\hat{A}$ معلومند. پس این مثلث را می‌توان رسم کرد. پس از رسم این مثلث ضلع CG را به اندازهٔ $GF=BE$ امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ F به‌دست آید. از F عمودی بر CF اخراج می کنیم تا امتداد CH را در نقطهٔ A قطع کند. برای تعیین رأس B خطی موازی AC و به فاصلهٔ BE از آن رسم می‌کنیم تا AF را در نقطهٔ B قطع کند. از B به C وصل می کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



مثال ۷. دو نقطهٔ A و B و خط Δ داده شده‌اند. نقطه‌ای مانند M چنان بیابید که زاویهٔ $\hat{AMB}=\alpha$ باشد و از تقاطع MA و MB با Δ پاره‌خط CD به طول l جدا شود.

تحلیل. مسأله را حل شده می‌گیریم و از نقطهٔ B خطی موازی Δ رسم می‌کنیم و پاره‌خط BE را مساوی l روی آن جدا می‌کنیم. از E که نقطهٔ ثابتی است، به C وصل می‌کنیم. چهارضلعی EBDC متوازی‌الاضلاع است. پس $CE \| BD$، یعنی $\hat{ECA}=\hat{AMB}=\alpha$. بنابراین نقطهٔ C روی کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط معلوم AE است. با معلوم بودن نقطهٔ C، نقطهٔ D براحتی تعیین می‌شود.



ترسیم. از B خطی موازی Δ رسم می‌کنیم و روی آن پاره‌خط $BE=l$ را جدا می‌کنیم. از E به A وصل می‌کنیم و کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AE را رسم می‌کنیم تا خط Δ را در نقطهٔ C قطع کند. به مرکز C و به شعاع $CD=l$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط Δ را در D قطع کند. این پاره‌خط جواب است.

اثبات و بحث را انجام دهید.

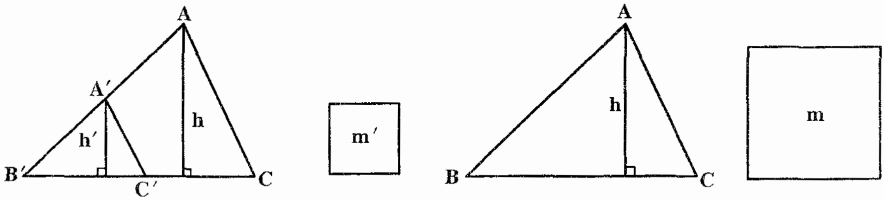
۷.۵.۱. ترسیمهای هندسی با استفاده از روش تشابه

با در نظر نگرفتن یکی از شرطهای مسأله، می‌توان شکلی شبیه شکل مطلوب رسم کرد. معمولاً می‌توان با توجه به شکل رسم شده و شرط حذف شده، جزیی را تعیین کرد که ما را قادر به حل مسأله کند. مثالهای زیر این روش را نشان می‌دهند.

مثال ۱. مثلثی را رسم کنید که با مثلث مفروضی متشابه باشد و اندازهٔ مساحت آن، مساوی مساحت یک مربع معلوم باشد.

حل. با چشم‌پوشی از مساحت، مثلث ABC را مشابه مثلث خواسته شدهٔ ABC رسم می‌کنیم. اگر $a' = B'C'$ و h' ارتفاع وارد بر این ضلع و m' ضلع مربعی باشد که مساحتش برابر مساحت مثلث $A'B'C'$ است، داریم:

$$m'^{۲} = a'.\frac{۱}{۲}h'$$

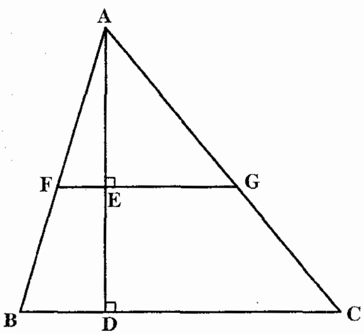


پس m' را می‌توان به عنوان جزء سوم یک تناسب رسم کرد.

اکنون می‌توان ضلع $a = BC$ را با توجه به تناسب $\frac{m}{m'} = \frac{a}{a'}$ تعیین کرد، که در آن m ضلع مربع مفروض است و مثلث مطلوب به آسانی رسم می‌شود. روی ضلع $B'C'$، $B'C$ را برابر a جدا می‌کنیم. از C خطی به موازات $A'C'$ رسم می‌کنیم تا ضلع $A'B'$ را در رأس سوم مثلث مطلوب $AB'C$ قطع کند.

مسأله یک و تنها یک جواب دارد.

مثال ۲. دو ضلع جانبی و نسبت قاعده به ارتفاع وارد بر قاعده از یک مثلث $(b, c, \frac{a}{h_a} = \frac{p}{q})$ معلوم است. مثلث را رسم کنید.



حل. فرض می‌کنیم ABC مثلث مطلوب باشد.

روی ارتفاع AD پاره‌خط AE را برابر q جدا می‌کنیم و از نقطهٔ E خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا دو ضلع AB و AC را در دو نقطهٔ F و G قطع کنند. دو مثلث AFG و ABC متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AF}{AG} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b}\ ,\ \frac{FG}{AE} = \frac{BC}{AD} = \frac{p}{q}$$

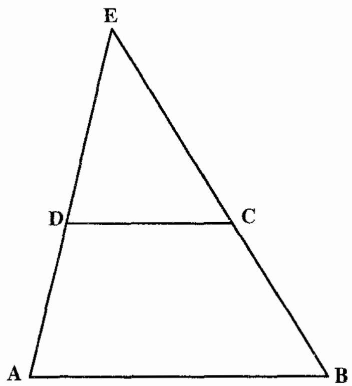
پس $FG = p$ است.

بنابراین از مثلث AFG که متشابه با مثلث ABC است، اندازهٔ ضلع $FG = p$، ارتفاع $AE = q$ و نسبت دو ضلع $\frac{AF}{AG} = \frac{c}{b}$ را می‌دانیم. پس می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم. پس

از رسم مثلث AFG روی AF پاره‌خط $AB = c$ را جدا کرده، از B خطی موازی FG رسم می‌کنیم تا AG را در نقطهٔ C قطع کند. ABC مثلث مطلوب است.

مسأله ممکن است دو یا چند جواب داشته باشد یا اصلاً جواب نداشته باشد.

مثال ۳. از ذوزنقهٔ ABCD، طول دو ساق AC و BD، اندازهٔ زاویهٔ بین دو ساق، و نسبت دو قاعده معلوم است. ذوزنقه را رسم کنید.



حل. فرض کنید ABCD ذوزنقهٔ خواسته شده و E نقطهٔ برخورد دو ساق AD و BC باشد. دو مثلث ABE و DCE متشابه‌اند. پس داریم:

$$\frac{EC}{EB} = \frac{ED}{EA} = \frac{CD}{BA} = \frac{p}{q} \text{ (نسبت داده شده)}$$

$$\Rightarrow \frac{EC}{EB - EC} = \frac{ED}{EA - ED} = \frac{p}{q - p}$$

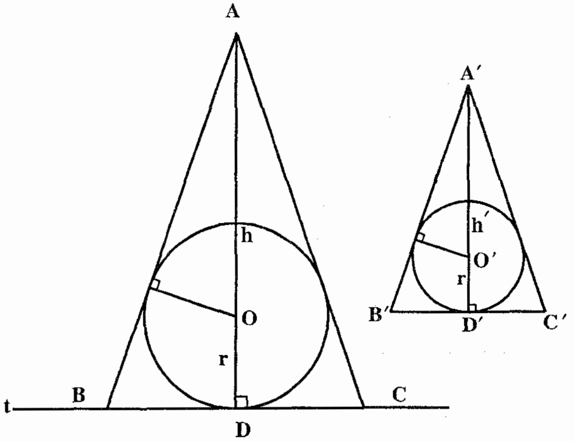
$$\Rightarrow \frac{EC}{CB} = \frac{ED}{DA} = \frac{p}{q - p}$$

بنابراین پاره‌خطهای EC و ED، و در نتیجه مثلث DCE را که دو ضلع و زاویهٔ بین آنها را داریم، می‌توان رسم کرد.

پس از رسم این مثلث، ED را امتداد می‌دهیم و طول مفروض DA را روی آن جدا می‌کنیم. خطی که از A به موازات CD رسم می‌شود. روی امتداد EC رأس چهارم B، از ذوزنقهٔ مطلوب ABCD، را تعیین می‌کند.

مثال ۴. بر یک دایرهٔ مفروض، مثلث متساوی‌الساقینی محیط کنید که نسبت ساق به قاعدهٔ آن مقدار معلوم می‌باشد.

حل. همهٔ مثلثهای متساوی‌الساقینی که نسبت ساق به قاعدهٔ آنها مقدار ثابتی است، متشابه‌اند زیرا ارتفاع وارد بر قاعدهٔ آنها را به مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متشابهی تقسیم می‌کند.

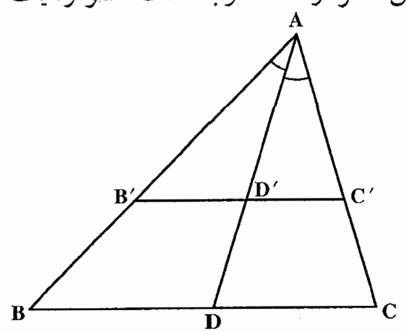


روی قاعدهٔ $B'C'$ که طول دلخواهی دارد، مثلث متساوی‌الساقین $A'B'C'$ را چنان رسم می‌کنیم که $\frac{p}{q} = \frac{A'B'}{B'C'}$ (نسبت مفروض) باشد. r' و h' را شعاع دایرهٔ محاطی درونی و ارتفاع نظیر قاعده از مثلث $A'B'C'$ و r و h را اجزاء متناظر آنها از مثلث ABC فرض می‌کنیم. داریم $\frac{r}{h} = \frac{r'}{h'}$.

از این تناسب سه جزء h'، r و r' معلومند، پس می‌توانیم h را رسم کنیم. از نقطهٔ دلخواه D بر روی دایرهٔ مفروض، مماس t را رسم و روی خطی که از D به مرکز دایره رسم می‌شود، DA را برابر h جدا می‌کنیم. مماسهایی که از A بر دایره رسم شوند و مماس t مثلث مطلوب ABC را تشکیل می‌دهند.

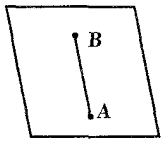
مثال ۵. از مثلث ABC اندازهٔ دو زاویه و نیمساز زاویهٔ سوم داده شده است. مثلث را رسم کنید.

حل. مسأله را حل شده می‌گیریم. با معلوم بودن اندازه دو زاویه، اندازهٔ زاویهٔ سوم مثلث نیز معلوم است. (اندازه‌های سه زاویهٔ مثلث یک داده تشکیل می‌دهند). در این صورت می‌توان، با استفاده از این اطلاعات، مثلث $AB'C'$ ی مشابه با مثلث مطلوب رسم کرد. این مفهوم با این عنوان که مثلث مربوطه در نوع مشخص شده، معروف است. در این صورت خانواده‌ای از مثلثها تعیین شده و مثلث مطلوب را می‌توان به‌عنوان عضو خاصی از این خانواده پیدا کرد. مثلث خواسته شده را با جدا کردن طول نیمساز داده شدهٔ AD در امتداد AD' برای مشخص شدن نقطهٔ D، و سپس رسم خطی به موازات $C'B'$ می‌توان رسم کرد. تا زمانی که مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ مفروض کمتر از ۱۸۰ درجه است، همواره یک جواب وجود دارد.

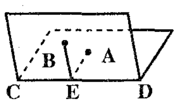


نکته. با شرطهای داده شده، دو مثلث ADC و ADB را می‌توان رسم کرد؛ زیرا طول ضلع AD از این مثلثها و اندازهٔ زاویه‌های این دو مثلث معلوم است. بنابراین مثلث ABC رسم می‌شود.

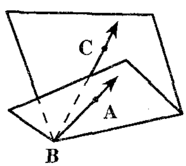
۱ . ۵ . ۸. ترسیمهای هندسی با تا کردن کاغذ



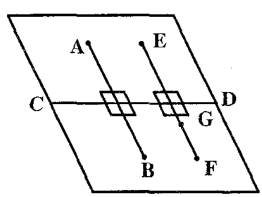
(الف)



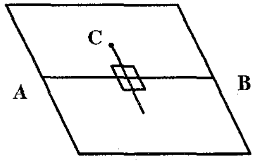
(ب)



(پ)



(ت)



(ث)

از زمان یونانیان باستان به بعد، علاوه بر استفاده از پرگار معمولی و خط کش نامدرج، روشهای دیگر انجام ترسیمات، توجه بسیاری از ریاضیدانها را جلب کرده است. به عنوان مثال، از وسایل گوناگون و معادله‌های منحنیها، برای حل مسأله‌هایی که در غیر این صورت حلشان ناممکن بود، استفاده شده است. دو روش دیگر انجام ترسیمات، بعضی از امکانات گوناگون این صحنهٔ افسون‌آمیز ریاضیات را نشان می‌دهند. یکی از روشهای انجام ترسیماتی که ممکن است مقدماتی به نظر آید، و با این همه، توجه ریاضیدانها را در سالهای اخیر به خود مشغول کرده، برخورد از طریق تا کردن کاغذ است. در تمرین عملی، معمولاً از کاغذ روغنی استفاده می‌شود که در این صورت، تاها، مرئی باقی می‌مانند. در این بخش تعداد کمی از ترسیمات اساسی را شرح داده‌ایم تا لُب این کار را بگیرید و به این ترتیب قادر به مقابلهٔ آن با سایر روشهای ترسیمی هندسهٔ اقلیدسی باشید. یکی از ترسیمهایی که به کمک تا کردن کاغذ انجام می‌گیرد، تا کردن کاغذ به خط مستقیمی که عمودمنصف قطعه خط مفروضی است، می‌باشد. فرض می‌کنیم پاره‌خط AB در شکل (الف) داده شده باشد. کاغذ را چنان تا می‌کنیم که نقطهٔ A بر نقطهٔ B قرار گیرد و آن را، چنان که در شکل (ب) تا می‌زنیم. CD خط مطلوب است.

ترسیم دیگر، تا کردن در امتداد نیمساز زاویهٔ معلوم است (شکل (پ)). برای این کار کاغذ را با تایی گذرنده از رأس زاویه با یک ضلع زاویه، بر ضلع دیگر تا می‌کنیم.

ترسیم سوم، تا کردن خطی گذرنده از نقطه‌ای مفروض به موازات خطی مفروض است. برای این کار ابتدا تایی برای خط CD عمود بر خط مفروض AB در نظر می‌گیریم (شکل ت)، سپس تایی از نقطهٔ مفروض G برای به دست آوردن خط EF عمود بر CD انجام می‌دهیم. این خط موازی AB و خط خواسته شده است.

ترسیم دیگر تا کردن عمودی از نقطه‌ای بر خطی است. برای این کار، عمودی گذرنده از نقطه بر خط، با قرار دادن قسمتی از خط AB بر خودش تا می‌کنیم (شکل ث).

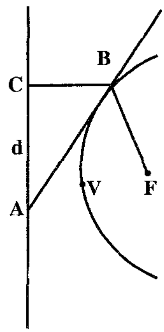
گرچه تا کردن کاغذ بسیار ساده به نظر می‌رسد، ریاضیدانها قادر به اثبات قضیهٔ نسبتاً شگفت‌انگیز زیر در مورد ترسیمات کاغذ تاکنی شده‌اند.

قضیه. جمیع ترسیمات هندسهٔ اقلیدسی‌ای که می‌توانند با خط‌کش نامدرج و پرگار انجام شوند، می‌توانند با تا کردن کاغذ نیز انجام گیرند.

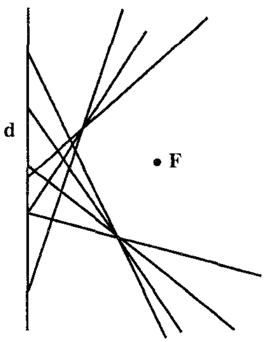
این قضیهٔ قابل توجه، بر مبنای چندین فرض که در مرجع عالی مربوط به تا کردن کاغذ زیر آمده، بنا شده است.

Paper Folding for the Mathematics Class, by Donovan A. Johnson

فرضهای مذکور، به طور مثال، شامل این فرض که کاغذ را می‌توان به چنان روشی تا کرد که یک خط بتواند بر خط دیگری واقع بر همان صفحهٔ کاغذ قرار گیرد و تای ساخته شده در واقع خطی راست باشد، است. نظریهٔ تا کردن کاغذ درست به همان اندازهٔ نظریهٔ ترسیمات با خط‌کش نامدرج و پرگار، ریاضی و دقیق است. اما روشهای این دو تفاوت بسیار دارند. از تا کردن کاغذ می‌توان در ترسیم، به گونهٔ متفاوتی که معمولاً در هندسهٔ متداول دبیرستانها بررسی نمی‌شوند، یعنی، رسم مماس بر سهمی، استفاده کرد. شکل (ج) توضیح می‌دهد که چگونه می‌توان یک رشته مماس بر یک سهمی را با تا کردن کانون F بر خط هادی d مشخص کرد. دلیل چگونگی عملکرد ترسیم مذکور را در شکل (چ) توضیح داده‌ایم. می‌توان ثابت کرد که مماس BA در نقطه‌ای واقع بر سهمی شکل، نیمساز زاویهٔ $F\hat{B}C$، F کانون و C پای عمود از B بر هادی است.



(ج)



(چ)

۱. ۵. ۹. ترسیم، تنها با یک وسیله

ترسیمات با خط‌کش نامدرج و پرگار (وسایل سنتی) و ترسیمات به کمک تا کردن کاغذ را دیدیم. اینک به بررسی ایدهٔ مهم دیگری از تاریخ ترسیمات، یعنی مساعی در انجام ترسیمات

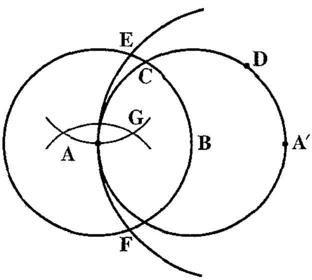
با استفاده از تنها یکی از دو وسیلهٔ خط‌کش نامدرج و پرگار، می‌پردازیم.

روش اول در این مورد محدود کردن وسیلهٔ ترسیمها به پرگار تنهاست. واضح است که رسم خط مستقیم با پرگار تنها، غیر ممکن است. لذا باید دانست که یک خط، در صورتی که دو نقطه از آن یافت شود، به طور کامل معین می‌شود. ترسیمات با پرگار تنها، به ترسیمهای مور ـ ماشرونی (Mohr- Mascheroni Constructions) موسومند. سی. مور اولین روایت شناخته شده از این ترسیمات را در سال ۱۶۷۲ به چاپ رساند، هر چند کتاب وی تا سال ۱۹۲۸، هنگامی که از نو کشف شد، توسط ریاضیدانها شناخته شده نبود و در همان دوران، ریاضیدان ایتالیایی به نام ماشرونی (حدود ۱۷۹۷) به طور مستقل قضیهٔ زیر را کشف کرد.

قضیه. جمیع ترسیمات ممکن با استفاده از خط‌کش نامدرج و پرگار، می‌توانند با استفاده از پرگار تنها نیز انجام شوند.

مثال زیر ترسیمی را که به طور کامل با پرگار انجام شده، توضیح می‌دهد.

مثال. وسط قطعه خط مفروضی را با استفاده از پرگار تنها به دست آورید.



(الف)

۱. پاره‌خط AB را، در نظر می‌گیریم. دایرهٔ به مرکز B و شعاع BA را رسم می‌کنیم.

۲. با AB به عنوان شعاع، سه کمان $\widehat{AC}$، $\widehat{CD}$ و $\widehat{DA'}$ را، با مشخص کردن A' چنان که AA' قطر دایرهٔ مذکور باشد، جدا می‌کنیم.

۳. دایرهٔ به مرکز A و شعاع AB را رسم می‌کنیم.

۴. دایره به مرکز A' و شعاع $A'A$ ی، متقاطع با دایرهٔ مرحلهٔ ۳ در نقطه‌های E و F را رسم می‌کنیم.

۵. دایره‌های به مرکزهای E و F و شعاع EA را رسم می‌کنیم. این دو دایره در A و نقطهٔ خواسته شدهٔ G تلاقی می‌کنند.

اثبات این که ترسیم نسبتاً استادانهٔ فوق به نقطهٔ صحیح منتج می‌شود، بر این واقعیت که A' و G نقطه‌های منعکس (Inverse points) نسبت به دایرهٔ به مرکز A و شعاع ABاند، استوار است. اما اثبات به کار رفته در این مرحله به دانش این مفهوم نیاز ندارد.

مثلثهای $A'EA$ و EGA مشابهند، بنابراین:

$$\frac{AA'}{AE}=\frac{AE}{AG} \quad \text{یا} \quad AA'.AG=(AE^{2})$$

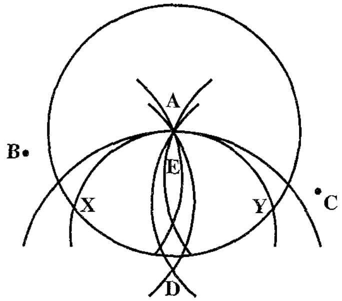
به علت این که :

داریم :

$$AA' = ۲AB = ۲AE$$
$$۲AE.AG = AE^۲$$
$$۲AG = AE = AB$$

پس G وسط پاره‌خط AB است.

اثبات قضیهٔ بالا شامل نمایاندن چگونگی یافتن نقطه‌های برخورد خط مستقیم و دایره و نقطه‌های برخورد دو خط مستقیم با پرگار تنها است، زیرا ترسیم دایره و یافتن نقطه‌های برخورد دو دایره با پرگار تنها، به طور واضح و به کفایت ساده است. روش ترسیم نقطه‌های تقاطع دایره و خط ناگذرنده از مرکز آن را در شکل (ب) نشان داده‌ایم. فرض می‌کنیم B و C نقطه‌های مفروض، با A مرکز دایرهٔ مفروض باشد. در این صورت :



(ب)

۱. دایره‌های به مرکزهای B و C، نقطه‌های مفروض واقع بر خط مورد بحث، گذرنده از A و بار دیگر متقاطع در D را رسم می‌کنیم.

۲. با پیروی از ترسیم قبلی، نقطهٔ E را چنان که $AD.AE = r^۲$ ، به ازای r شعاع دایرهٔ اصلی باشد، می‌یابیم (این ترسیم باید، در صورتی که D داخل دایرهٔ اصلی باشد، تعدیل شود).

۳. دایرهٔ به مرکز E و شعاع EA دایرهٔ اصلی را در نقطه‌های مطلوب x و y قطع می‌کند. اثبات این که x و y نقطه‌های برخورد خط و دایرهٔ مفروضند را به عهدهٔ خواننده واگذار کرده‌ایم.

جمیع ترسیمات اقلیدسی را نمی‌توان با خط‌کش نامدرج تنها انجام داد. در این مورد ابوالوفا، ریاضیدان مسلمان، استفاده از خط‌کش نامدرج و پرگار زنگین (Rusty Compasses) را مطرح کرده است. استفاده از پرگار با دهانهٔ ثابت معادل در دست داشتن دایره‌ای با مرکز آن است. نتیجهٔ اساسی این وسیله در آن چه که به عنوان قضیهٔ ترسیمی پونسله ـ اشتینر (Poncelet - Steiner) شناخته شده و در زیر آمده، به بیان آمده است.

قضیه. جمیع ترسیماتی که می‌توانند با خط‌کش نامدرج و پرگار انجام شوند، می‌توانند با خط‌کش نامدرج تنها، و دایره‌ای مفروض و مرکزش انجام گیرند.

خط‌کش نامدرج تنها برای انجام جمیع ترسیمات هندسهٔ تصویری، کفایت می‌کند. در این هندسه، نه دایره نه قطعه خط، بلکه خاصیت خط بودن لایتغیر است. با ترسیمات با خط‌کش نامدرج و پرگار در هندسهٔ انعکاسی مواجه خواهیم شد.

۱ . ۶. کاربردهایی از ترسیم شکلهای هندسی

۱ . ۶ . ۱. حلّ هندسی مسأله‌های جبری

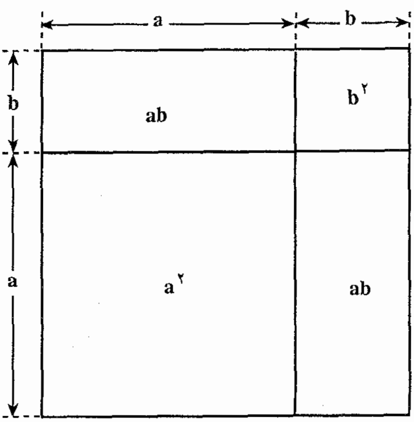
۱ . ۶ . ۱ . ۱. اثبات درستی اتحادهای جبری

پیش از پیدایش جبر به عنوان رشته‌ای مستقل از ریاضیات، عملهای جبری به روشهای هندسی انجام می‌شد. به عنوان مثال یونانیان باستان با الهام از نمایش عدد به وسیلهٔ طول، و بدون در اختیار داشتن هرگونه نمادگذاری جبری مناسب، روشهای هندسی هوشمندانه‌ای را برای انجام اعمال جبری ابداع کرده‌اند. قسمت عمدهٔ این جبر هندسی به فیثاغورسیان منسوب و در چندین مقالهٔ آغازین اصول اقلیدس پراکنده شده است. مثلاً مقالهٔ دوم اصول اقلیدس شامل تعدادی از قضیه‌هاست که در حقیقت اتحادهای جبری‌اند که در قالب اصطلاحات هندسی بیان شده‌اند. کاملاً قطعی به نظر می‌رسد که این قضیه‌ها توسط فیثاغورسیان اولیه، از طریق روش تقطیع بسط یافته‌اند. این روش را می‌توانیم با درنظر گرفتن چند قضیهٔ مقالهٔ دوم توضیح دهیم:

قضیهٔ ۴. مقالهٔ دوم اصول اقلیدس. به روش هندسی درستی اتحاد زیر را ثابت کنید.

$$(a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$

بیان اقلیدس از این قضیه چنین است: اگر پاره خط راستی به دو قسمت دلخواه تقسیم شود، مربع ساخته شده روی تمام پاره‌خط برابر است با مجموع مربعهای ساخته شده روی دو قسمت، به علاوه دو برابر مستطیلی که ضلعهای آن از این دو قسمت تشکیل می‌شود.



حل. مربعی به ضلع $a+b$ رسم می‌کنیم و از نقطه‌های تقسیم دو ضلع به دو قسمت a و b، خطهایی موازی ضلعهای مربع رسم می‌کنیم. یک مربع به ضلع a، یک مربع به ضلع b و دو مستطیل به ضلعهای a و b تشکیل می‌شود و داریم:

مساحت مربع به ضلع b+ مساحت مربع به ضلع a = مساحت مربع به ضلع (a+b)
+۲(مساحت مستطیل به ضلعهای a و b)

$$\Rightarrow (a+b)^۲ = a^۲ + b^۲ + ۲ab \text{ یا } (a+b)^۲ = a^۲ + ۲ab + b^۲$$

قضیهٔ ۵. مقالهٔ دوم اصول اقلیدس. درستی اتحادهای زیر را ثابت کنید.

$$4ab+(a-b)^2=(a+b)^2 \; ; \; (a+b)(a-b)=a^2-b^2$$

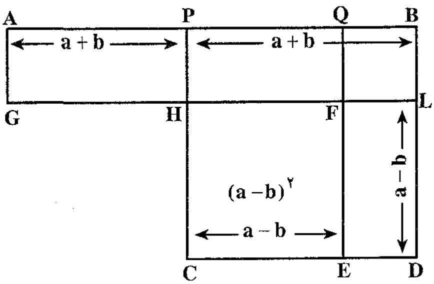
بیان اقلیدسی این قضیه چنین است: اگر خط راستی به طور مساوی، و نیز به طور نامساوی تقسیم شود، مستطیل تشکیل شده از قسمتهای نامساوی به علاوهٔ مربع روی خط واقع بین نقاط تقسیم، برابر است با مربع روی نیمهٔ خط. فرض کنید AB پاره‌خط راست مفروض باشد، و فرض کنید که این پاره‌خط در P به طور مساوی و در Q به طور نامساوی به دو قسمت تقسیم شود، در این صورت قضیهٔ بالا می‌گوید که:

$$(AQ).(QB)+(PQ)^2=(PB)^2$$

اگر قرار دهیم $AQ=2a$ و $QB=2b$، اتحاد جبری $4ab+(a-b)^2=(a+b)^2$ و اگر $AB=2a$ و $PQ=b$ باشد، اتحاد $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$ به دست می‌آید.

حل. روی خط راستی پاره‌خط $AQ=2a$ و به دنبال آن پاره‌خط $QB=2b$ را جدا می‌کنیم و وسط پاره‌خط AB را P می‌نامیم. داریم:

$$PA=PB=a+b \; , \; PQ=a-b \; , \; PB=a+b$$

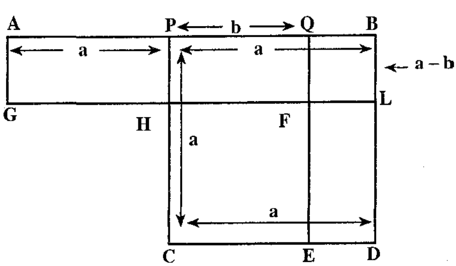


مربعهای PCDB و QFLB را روی پاره‌خطهای PB و QB می‌سازیم و مستطیل AQFG را بنا می‌کنیم. داریم:

$$AQ.QB+PQ^2=S_{AGFQ}+S_{HCEF}$$

$$=S_{AGHP}+S_{PHFQ}+S_{HCEF}=S_{PHLB}+S_{FEDL}+S_{HCEF}=PB^2$$

$$\Rightarrow 2a\times 2b+(a-b)^2=(a+b)^2 \Rightarrow 4ab+(a-b)^2=(a+b)^2$$



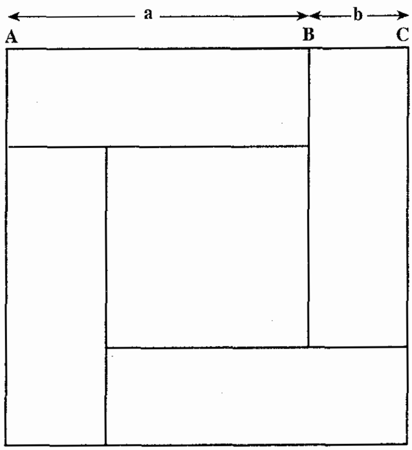
برای اثبات درستی اتحاد $(a+b)(a-b)=a^2-b^2$، روی خط Δ پاره‌خط $AB=2a$ را اختیار می‌کنیم. وسط پاره‌خط AB را P می‌نامیم، سپس پاره‌خط $PQ=b$ را روی PB جدا می‌کنیم و روی پاره‌خطهای PB و QB مربعهای PBDC و

QBLF را می‌سازیم، سپس مستطیل AQFG را بنا می‌کنیم. داریم:

$$AQ.QB + PQ^{2} = S_{AQFG} + S_{FHCE} = S_{APHG} + S_{PQFH} + S_{FHCE}$$
$$= S_{PBLH} + S_{FLDE} + S_{HFEC} = S_{PBDC} \Rightarrow$$
$$(a+b)(a-b) + b^{2} = a^{2} \Rightarrow (a+b)(a-b) = a^{2} - b^{2}$$

روش دیگر برای اثبات درستی اتحاد $4ab + (a-b)^{2} = (a+b)^{2}$. پاره‌خطهای $AB = a$ و $BC = b$ را روی یک خط راست رسم می‌کنیم و طبق شکل، دو مربع به ضلعهای $a+b$ و $a-b$ و چهار مستطیل به مساحتهای ab می‌سازیم. همچنان که شکل نشان می‌دهد، داریم:

$$4ab + (a-b)^{2} = (a+b)^{2}$$

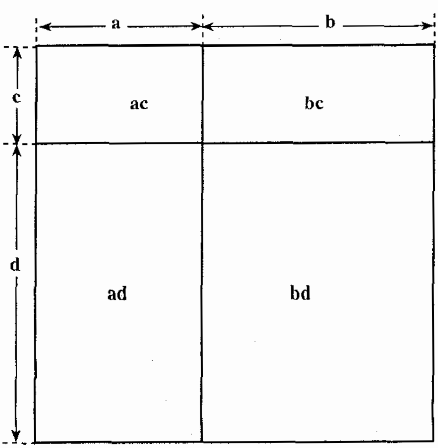


مثال. درستی اتحادهای زیر را به کمک رسم شکلهای هندسی ثابت کنید.

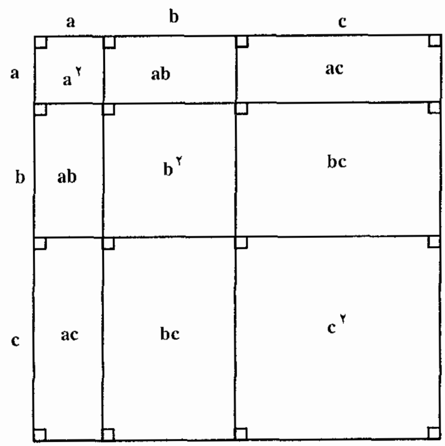
الف. $(a+b+c)^{2} = a^{2} + b^{2} + c^{2} + 2ab + 2ac + 2bc$

ب. $(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$

حل. شکل (الف) درستی اتحاد (الف)، و شکل (ب) درستی اتحاد (ب) را نشان می‌دهند.



(ب)



(الف)

۱.۶.۱.۲.حل هندسی معادله‌های جبری

یونانیان در جبر هندسی خود، دو روش اصلی را برای حل برخی معادله‌های سادهٔ جبری به کار بردند. روش تناسبها و روش اضافه کردن مساحتها (موضوع این روش، قرار دادن متوازی‌الاضلاعی بر کنار خطی است)، که ریاضیدانان دورهٔ اسلامی از آن به «اضافه کردن» متوازی‌الاضلاعی بر قطعه خط مفروض تعبیر کرده‌اند؛ که ما نیز همین اصطلاح را به کار خواهیم برد.

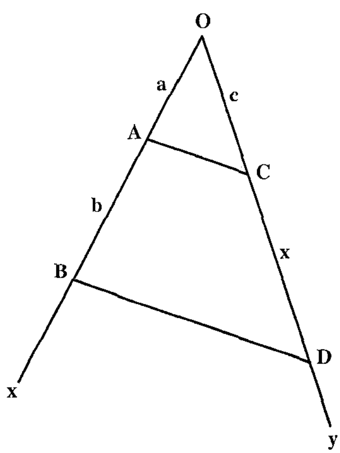
شواهدی در دست است که هر دوی این روشها از ابداعات فیثاغورسیان بوده است.

۱.۶.۱.۲.۱. روش تناسبها

روش تناسبها ترسیم پاره‌خطی به طول x را که با رابطهٔ $a:b = c:x$ و یا با رابطهٔ $a:x = x:b$ داده می‌شود و در آن a، b و c پاره‌خطهایی معلومند، امکان‌پذیر می‌سازد. یعنی روش تناسبها، راه حلهای هندسی برای معادله‌های $ax = bc$، $x = a^2$ و $x^2 = ab$ را فراهم می‌سازد. به مثالهای زیر توجه کنید:

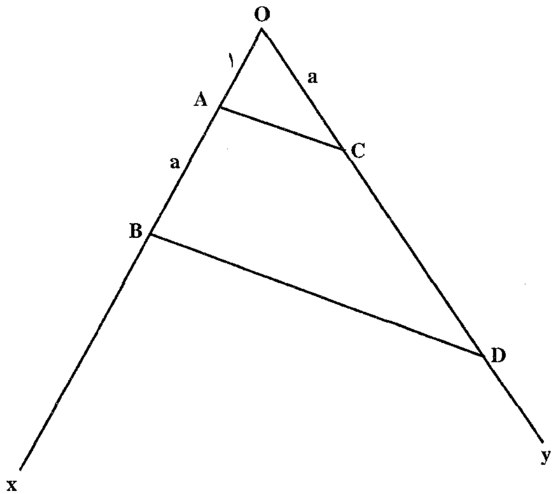
مثال ۱. پاره‌خطهایی به طولهای a، b و c داده شده‌اند. پاره‌خط به طول x را چنان رسم کنید که $ax = bc$ باشد.

حل. معادلهٔ $ax = bc$ را به صورت $\frac{a}{b} = \frac{c}{x}$ می‌توان نوشت. زاویهٔ دلخواه xOy را رسم می‌کنیم. روی Ox پاره‌خطهای $OA = a$ ، $AB = b$ و روی Oy پاره خط $OC = c$ را جدا می‌کنیم. از A به C وصل می‌کنیم و از B خطی موازی AC رسم می‌کنیم تا Oy را در نقطهٔ D قطع کند. پاره خط CD مساوی x است.

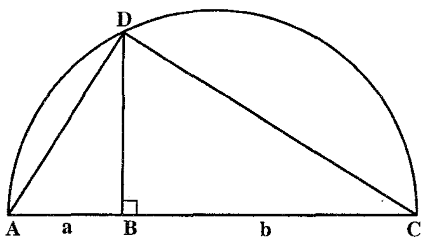


مثال ۲. پاره‌خطی به طول a داده شده است. پاره‌خطی به طول $x = a^{2}$ را رسم کنید.

حل. می‌توان نوشت $1 \times x = a \times a$ و یا $\frac{1}{a} = \frac{a}{x}$. حال با استفاده از زاویهٔ دلخواه xOy، روی ضلع Ox ، $OA = 1$ ، $AB = a$ و روی ضلع Oy، $OC = a$ جدا می‌کنیم. از A به C وصل کرده از نقطهٔ B خطی موازی AC وصل می‌کنیم تا Oy را در D قطع کند. پاره‌خط $CD = x$ است.



مثال ۳. دو پاره خط به طولهای a و b داده شده‌اند. پاره‌خط به طول x را رسم کنید در صورتی $x^{2} = ab$ (یا $\frac{a}{x} = \frac{x}{b}$) باشد.



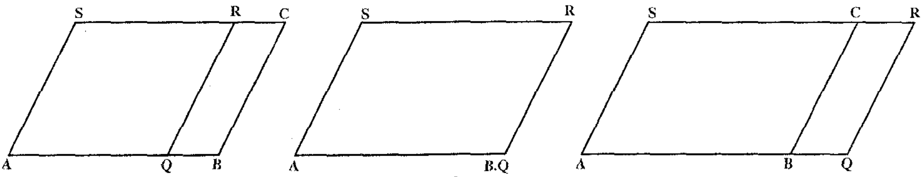
حل. روی خط راست Δ پاره‌خطهای $AB = a$ و $BC = b$ رابه دنبال هم رسم می‌کنیم. آن گاه نیمدایره‌ای به قطر AC رسم می‌نماییم و از نقطهٔ B عمودی بر AC اخراج می‌کنیم تا نیمدایره را در نقطهٔ D قطع کند. پاره‌خط BD جواب مسأله است ؛ زیرا اگر از D به A و C وصل کنیم، در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC داریم :

$$BD^{2} = AB.BC \Rightarrow BD^{2} = a.b \qquad x^{2} = a.b \Rightarrow BD = x$$

۱.۶.۱.۲.۲.روش اضافه کردن مساحتها

برای تشریح روش اضافه کردن مساحتها، پاره‌خط AB و متوازی‌الاضلاع AQRS را

که ضلع AQ از آن، در امتداد خط AB است، در نظر بگیرید (شکل). اگر Q در B نباشد، C را چنان اختیار کنید که QBCR یک متوازی‌الاضلاع باشد. وقتی Q بین A و B است، متوازی‌الاضلاع AQRS خوانده می‌شود، وقتی Q بر B منطبق شود، متوازی‌الاضلاع AQRS اضافه شده بر قطعه خط AB خوانده می‌شود. وقتی Q بر امتداد AB از طرف B واقع شود، متوازی‌الاضلاع AQRS اضافه شده بر قطعه خط AB، با زیادتی به مقدار متوازی‌الاضلاع QBCR خوانده می‌شود.



قضیهٔ ۴۴ مقالهٔ اول اصول اقلیدس، مسألهٔ ترسیمی زیر را حل می‌کند:

اضافه کردن متوازی‌الاضلاعی با مساحت مفروض و زاویه‌های مجاور به قاعدهٔ مفروض بر قطعه خط مفروض AB . حالت خاصی را در نظر بگیرید که در آن زاویه‌های مجاور به قاعده قائم هستند. به طوری که متوازی‌الاضلاع مضاف مستطیل باشد. طول AB را با a، ارتفاع مستطیل مضاف را با x، و ابعاد مستطیلی را که مساحتی برابر با مساحت مستطیل مضاف دارد، با b و c نشان دهید. در این صورت $ax = bc$ یا $x = \frac{bc}{a}$ است.

قضیهٔ ۲۸ مقالهٔ ششم اصول اقلیدس، حل مسألهٔ ترسیمی زیر است:

اضافه کردن یک متوازی‌الاضلاع AQRS بر قطعه خط مفروض.

AB که مساحت آن برابر باشد با شکل مستقیم‌الخط F، با نقصانی به اندازهٔ متوازی‌الاضلاع QBCR متشابه با متوازی‌الاضلاع مفروض، مساحت F نباید از مساحت متوازی‌الاضلاع رسم شده روی نیمهٔ خط AB و متشابه با نقصان QBCR تجاوز نماید. حالت خاصی را در نظر بگیرید که در آن متوازی‌الاضلاع مفروض، یک مربع است. طول AB را با a، قاعدهٔ متوازی‌الاضلاع اضافه شده، AQ را (که اکنون مستطیل است) با x و ضلع مربع F را که مساحت آن با مساحت مستطیل مضاف برابر است، با b نشان دهید. در این صورت:

$x(a-x) = b^2$ یا $x^2 - ax + b^2 = 0$ (۱)

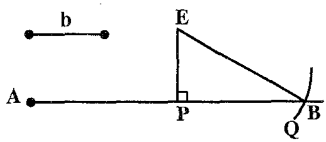
قضیهٔ ۲۹ مقالهٔ ششم اصول اقلیدس، مسألهٔ ترسیمی زیر را حل می‌کند:

اضافه نمودن متوازی‌الاضلاعی مانند AQRS بر پاره‌خط مفروض AB با مساحتی مساوی مساحت شکل مستقیم الخط F و با زیادتی به اندازهٔ متوازی‌الاضلاع QBCR متشابه با متوازی‌الاضلاع مفروض. حالت خاصی را در نظر بگیرید که در آن، متوازی‌الاضلاع مفروض

یک مربع باشد. طول AB را با a، قاعدهٔ AQ از متوازی‌الاضلاع مضاف را (که اکنون یک مستطیل است) با x و ضلع مربعی مانند F با مساحتی مساوی مساحت مستطیل مضاف را با b نشان دهید. در این صورت: $x^{2}-ax-b=0$ یا $x(x-a)=b^{2}$ (۲)

به آسانی می‌توان روشهای ترسیمی برای حالتهای خاص قضیه‌های ۲۸ و ۲۹ مقالهٔ ششم، ابداع کرد که به طور قابل ملاحظه‌ای ساده‌تر از ترسیمهای عمومی‌تر داده شده در اصول اقلیدس باشد. برای مثال، حالت خاص قضیه ۲۸ مقالهٔ ششم را در نظر بگیرید. در این جا می‌خواهیم بر پاره‌خط مفروضی، مستطیلی اضافه کنیم که به اندازهٔ یک مربع نقصان داشته باشد. از معادلهٔ اول (۱) ملاحظه می‌کنیم که قضیه را می‌توان به صورت زیر بیان کرد:

تقسیم پاره‌خط مفروضی بدان گونه که مستطیل تشکیل شده از قطعه‌های آن برابر با مربع مفروضی باشد در حالتی که این مربع از مربع بنا شده روی نیمهٔ پاره‌خط مفروض بزرگتر نباشد. برای روشنتر شدن مسأله، فرض کنید که AB و b دو پاره‌خط باشند که b از نصف AB بزرگتر نیست. باید AB را به وسیلهٔ نقطه‌ای مانند Q چنان تقسیم کنیم که $AQ.QB=b^{2}$ باشد، برای انجام این امر $PE=b$ را روی عمود رسم شده بر AB در نقطهٔ میانی آن، P ، جدا می‌کنیم و به مرکز E و شعاع PB کمانی رسم می‌کنیم که AB را، مثل شکل در نقطهٔ مطلوب Q قطع کند. اثبات درستی این روش در قضیهٔ ۵ مقالهٔ دوم آمده است؛ زیرا بنا بر آن قضیه:



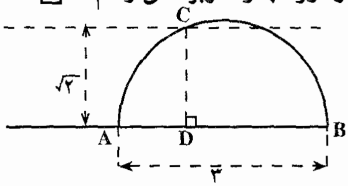
$$AQ.QB=PB^{2}-PQ^{2}=EQ^{2}-PQ^{2}=EP^{2}=b^{2}$$

با نشان دادن طول AB با a و طول AQ با x ، معادلهٔ درجهٔ دوم $x^{2}-ax+b^{2}=0$ را حل کرده‌ایم؛ ریشه‌ها با AQ و QB نمایش داده می‌شوند (زیرا اگر r و s ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^{2}-ax+b=0$ باشند، می‌دانیم که $r+s=a$ و $rs=b^{2}$ است. امّا AQ و QBاند که مجموعات AB یا a، و حاصلضربشان b^{2} است).

ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^{2}+ax+b^{2}=0$ توسط طولهای AQ و QB با علامت منفی نشان داده می‌شوند.

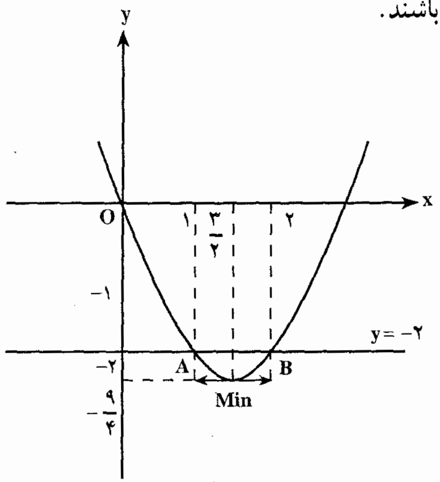
برای حالت خاص قضیهٔ ۲۹ مقالهٔ ششم، می‌خواهیم بر پاره‌خط مفروضی، مستطیلی را اضافه کنیم که به اندازهٔ یک مربع زیادتی دارد. از معادلهٔ اول (۲)، می‌بینیم که مسأله را می‌توان به این صورت دوباره بیان کرد:

امتداد دادن پاره‌خط مفروضی بدان گونه که مستطیل تشکیل شده از پاره‌خط امتداد داده شده، و قسمت امتداد داده شده، برابر با مربع مفروضی باشد.



مثال. معادلهٔ $x^2 - 3x + 2 = 0$ را به روش هندسی حل کنید.

راه حل اول. شکل روش حل را نشان می‌دهد. ریشه‌های معادله $AD = 1$ و $DB = 2$ می‌باشند.



راه حل دوم. معادله $x^2 - 3x + 2 = 0$ را به صورت $x^2 - 3x = -2$ می‌نویسیم. این معادله، معادلهٔ طولهای نقطه‌های برخورد منحنی به معادلهٔ $y = x^2 - 3x$ و خط $y = -2$ است. بنابراین این منحنی و خط را در یک دستگاه مختصات به دقت رسم می‌کنیم و طول نقطه‌های برخورد آنها را به دست می‌آوریم. داریم:

$$y = x^2 - 3x \Rightarrow y' = 2x - 3 \;,\; y' = 0 \Rightarrow$$
$$x = \frac{3}{2} \Rightarrow y = \frac{-9}{4}$$

x	y
$y' = 0 \left\{ \frac{3}{2} \right.$	$\frac{-9}{4}$
$0 \,,\, 3$	0
$\pm\infty$	$+\infty$

x	$-\infty$		0		$\frac{3}{2}$		3		$+\infty$
y'			$-$		0		$+$		
y	$+\infty$	$\searrow$	0	$\searrow$	$\frac{-9}{4}$	$\nearrow$	0	$\nearrow$	$+\infty$

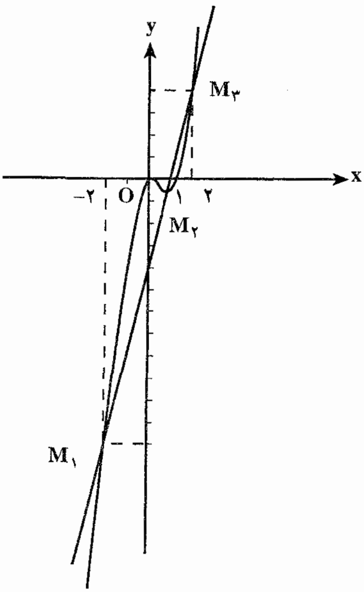
به طوری که در شکل دیده می‌شود، نمودار تابع $y = x^2 - 3x$ و خط $y = -2$ در دو نقطهٔ A و B به طولهای ۱ و ۲ متقاطعند. پس ریشه‌های معادلهٔ $x^2 - 3x + 2 = 0$ عبارتند از $x = 1$ و $x = 2$.

تبصره. برای تعیین ریشه‌های معادلهٔ $f(x) = 0$ به کمک رسم نمودار، دو منحنی به معادله‌های $y_1 = f_1(x)$ و $y_2 = f_2(x)$ را چنان در نظر می‌گیریم که معادلهٔ طولهای نقطه‌های برخورد آنها، معادله $f(x) = 0$ باشد. آن گاه نمودارهای دو تابع $y_1 = f_1(x)$ و $y_2 = f_2(x)$ را در یک دستگاه مختصات با دقت رسم می‌کنیم و طولهای نقطه‌های برخورد آنها را که ریشه‌های معادلهٔ

$f(x) = ۰$ می‌باشند، به دست می‌آوریم. بدیهی است به تعداد نقطه‌های برخورد دو منحنی، معادلهٔ داده شده دارای جواب است.

نکته. در صورتی که ریشه‌های معادله عددهای صحیح نباشند، مقدار تقریبی ریشه‌ها را به کمک رسم منحنی می‌توان به دست آورد.

مثال ۱. معادلهٔ $x^۳ - x^۲ - ۴x + ۴ = ۰$ را به کمک رسم نمودار حل کنید.



حل. می‌توان نوشت: $x^۳ - x^۲ = ۴x - ۴$ که این معادله، معادلهٔ طولهای نقطه‌های برخورد نمودار تابع $y = x^۳ - x^۲$ و خط به معادله $y = ۴x - ۴$ است. بنابراین نمودار تابع و خط را در یک دستگاه مختصات با دقت رسم می‌کنیم و طولهای نقطه‌های برخورد آنها را که ریشه‌های معادلهٔ داده شده هستند، به دست می‌آوریم. جدول تغییرات تابع $y = x^۳ - x^۲$ به صورت زیر است:

x	$-\infty$		۰		$\frac{۲}{۳}$		۱		$+\infty$
y'		+	۰	−	۰	+			
y	$-\infty$	$\nearrow$	۰	$\searrow$	$\frac{-۴}{۲۷}$	$\nearrow$	۰	$\nearrow$	$+\infty$

برای رسم خط $y = ۲x + ۲$ دو نقطه آن را مشخص می‌سازیم.

$$\begin{vmatrix} x = ۱ \\ y = ۰ \end{vmatrix} \qquad \begin{vmatrix} x = ۰ \\ y = -۴ \end{vmatrix}$$

به طوری که دیده می‌شود طولهای نقطه‌های برخورد یعنی ریشه‌های معادله داده شده $x_۱ = -۲$، $x_۲ = ۱$ و $x_۳ = ۲$ می‌باشند.

مثال ۲. معادلهٔ $ax^۳ + bx^۲ + cx + d = ۰$ را به کمک رسم نمودار حل کنید.

حل. این معادله را به صورت معادلهٔ تقاطع دو منحنی یا یک خط و یک منحنی می‌توان نوشت. به عنوان مثال می‌توان نوشت: $ax^۳ + bx^۲ = cx - d$ که این معادله، معادلهٔ طولهای نقطه‌های برخورد منحنی به معادلهٔ $y = ax^۳ + bx^۲$ با خط به معادلهٔ $y = -cx - d$ است، و برای تعیین جوابهای معادله، منحنی و خط اخیر را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم و طولهای نقطه‌های برخورد آنها را با دقت به دست می‌آوریم.

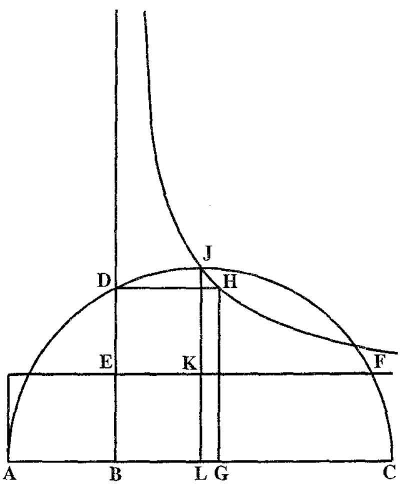
روش خیام برای حل هندسی معادله‌های درجهٔ سوم

الف. با پاره‌خطهای مفروض به طولهای a، b و n پاره‌خطی به طول $m = \frac{a^3}{bn}$ بسازید.

ب. یک ریشهٔ مثبت معادلهٔ $x^3 + b^2x + a^3 = cx^2$ را که در آن a، b، c و x طول پاره‌خطهایی در نظر گرفته می‌شوند (a، b و c طول پاره‌خطهای معلوم و x طول پاره‌خط مجهول یا خواسته شده است.) تعیین کنید.

این معادله را خیام چنین بیان کرده است «یک مکعب، چند ضلع و چند عدد، برابر با چند مربع هستند».

الف. پاره‌خطهایی به طول a^3 و bn را رسم می‌کنیم و از آن‌جا پاره‌خط به طول m را با استفاده از تناسب $\frac{bn}{a^3} = \frac{1}{m}$ رسم می‌نماییم.



ب. پاره‌خط $AB = \frac{a^3}{b^2}$ را با استفاده از قسمت (الف) $BC = c$ را رسم می‌کنیم. نیمدایره‌ای به قطر AC رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد عمود بر AC در نقطهٔ B با نیمدایره را D می‌نامیم. روی BD پاره‌خط BE=b را جدا می‌کنیم و از E ، EF را موازی AC رسم می‌کنیم. نقطهٔ G را بر BC چنان پیدا می‌کنیم که $BG.ED = BE.AB$ و مستطیل DBGH را کامل می‌کنیم. بر H یک هذلولی متساوی‌الساقین رسم می‌کنیم به قسمی که EF و ED مجانبهای آن باشند و فرض کنید که این هذلولی، نیمدایره را در J قطع کند. فرض کنید که خط موازی با DE گذرنده بر J، EF را در K و BC را در L قطع کند. متوالیاً داریم :

$$EK.KJ = BG.ED = BE.AB \quad (1)$$

$$BL.LJ = BE.AL \ (2)\ ,\ (LJ)^2 = AL.LC \ (3)$$

$$\frac{BE^2}{BL^2} = \frac{LJ^2}{AL^2} = \frac{LC}{AL} \ (4)\ ,\ BE^2.AL = BL^2.LC \ (5)$$

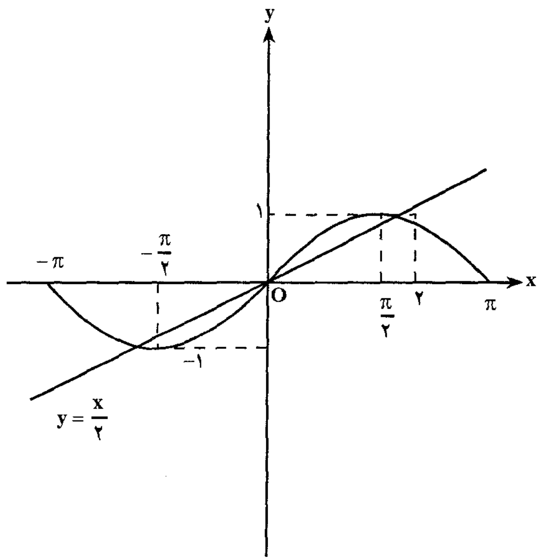
$$b^2(BL + \frac{a^3}{b^2}) = BL^2(c - BL) \ (6)$$

$$(BL)^3 + b^2(BL) + a^3 = c(BL)^2 \ (7)$$

رابطهٔ (۷) نشان می‌دهد که BL یک ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ سوم داده شده است.

مثال ۳. تعداد جوابهای معادلهٔ $\frac{x}{۲}-\sin x=۰$ را در بازهٔ $[-\pi,\pi]$ به کمک رسم نمودار تعیین کنید.

حل. می‌توان نوشت $\frac{x}{۲}=\sin x=۰$ این معادله، معادلهٔ تقاطع منحنی $y=\sin x$ و $y=\frac{x}{۲}$ است. پس این دو نمودار را در یک دستگاه محورهای مختصات رسم می‌کنیم و تعداد جوابهای آن را در فاصله $[-\pi,\pi]$ مشخص می‌سازیم.



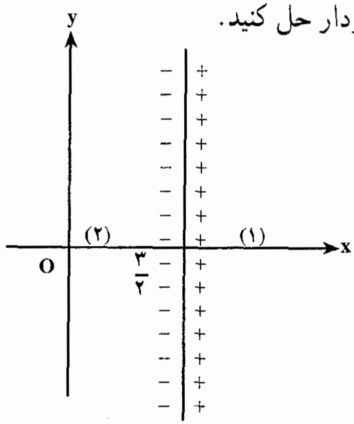
جدول تغییرات تابع $y=\sin x$ به‌صورت زیر است.

x	$-\pi$		$-\frac{\pi}{۲}$		۰		$\frac{\pi}{۲}$		π
y'		$-$	۰	$+$		$+$	۰	$-$	
y	۰	↘	-۱	↗	۰	↗	۱	↘	۰

به‌طوری که دیده می‌شود خط $y=\frac{x}{۲}$ نمودار تابع $y=\sin x$ را در فاصلهٔ $[-\pi,\pi]$ در سه نقطه قطع می‌کند که طول یک نقطه $x=۰$، طول یک نقطه منفی و طول نقطهٔ دیگر مثبت است. پس معادله $\frac{x}{۲}=-\sin x=۰$ در فاصلهٔ $[-\pi,+\pi]$ دارای سه ریشه است: یک ریشه منفی، یک ریشه صفر، یک ریشه مثبت.

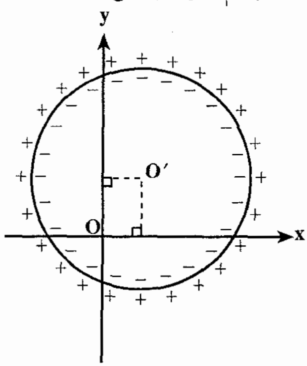
۳.۱.۶.۱. حل هندسی نامعادله‌های جبری

مثال ۱. نامعادلهٔ $2x-3>0$ را به کمک رسم نمودار حل کنید.



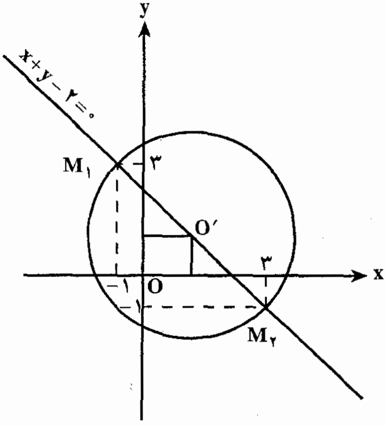
حل. نمودار معادلهٔ $2x-3=0$ را رسم می‌کنیم. این نمودار خط راستی موازی محور عرضهاست که صفحهٔ مختصات را به دو بخش تقسیم می‌کند. علامت هر بخش را مشخص می‌سازیم. جواب، ناحیهٔ (۱) است.

مثال ۲. نامعادلهٔ $x^2+y^2-2x-4y-4<0$ را به کمک رسم نمودار حل کنید.



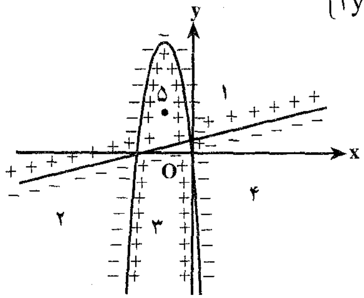
حل. نمودار معادلهٔ $x^2+y^2-2x-4y-4=0$ را که یک دایره به مرکز $O'=(1,2)$ و به شعاع $R=3$ است، رسم می‌کنیم. این دایره صفحهٔ مختصات را به سه بخش درون، برون و روی دایره افراز می‌کند. علامت هر ناحیه را مشخص می‌کنیم، آن‌گاه ناحیهٔ جواب نامعادله را (که در این مسأله درون دایره است) تعیین می‌کنیم.

مثال ۳. جواب دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی $\begin{cases} x^2+y^2-2x-2y-6=0 \\ x+y-2=0 \end{cases}$ را به کمک رسم نمودار به‌دست آورید.



حل. نمودار $x^2+y^2+2x-2y-6=0$ را که دایره‌ای به مرکز (۱ , ۱) و شعاع $2\sqrt{2}$ است و خط به معادله $x+y-2=0$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آنها را که جواب دستگاه است، به‌دست می‌آوریم. داریم: $\begin{vmatrix} x=-1 \\ y=3 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x=3 \\ y=-1 \end{vmatrix}$

مثال ۴. جواب دستگاه نامعادلهٔ $\begin{cases} y-x^{2}-2x>0 \\ 2y-x-2<0 \end{cases}$ را به کمک رسم نمودار تعیین کنید.

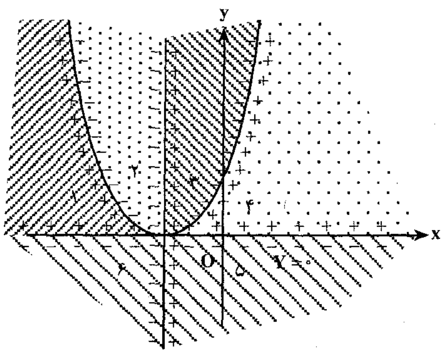


حل. نمودارهای دو معادلهٔ $y-x^{2}-2x=0$ و $2y-x-2=0$ را که اوّلی سهمی و دومی خط راست است، رسم می‌کنیم. پس از تعیین علامت ناحیه‌های به‌دست آمده، جواب دستگاه نامعادله، که ناحیهٔ ۳ می‌باشد، مشخص می‌شود.

مثال ۵. اگر (x,y) مختصات نقطهٔ M در دستگاه مختصات xOy باشد، برحسب جای نقطهٔ M در وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $z^{2}-2(x+1)z+y=0$ بحث کنید.

حل. برای بحث در وجود و علامت ریشه‌های یک معادلهٔ درجهٔ دوم باید علامت مبین معادله (Δ) و علامت حاصلضرب ریشه‌های معادلهٔ (P) و علامت مجموع ریشه‌های معادله (S) را تعیین کنیم. بنابراین Δ ، P و S معادله را به‌دست آورده، نمودار آنها را رسم و آنها را برحسب جای نقطهٔ $M(x,y)$ تعیین علامت می‌کنیم. داریم :

$$\Delta'=(x+1)^{2}-y \;,\; \Delta'=0 \Rightarrow y=(x+1)^{2} \;,\; P=\frac{c}{a}=y \;,\; S=\frac{-b}{a}=2(x+1)$$



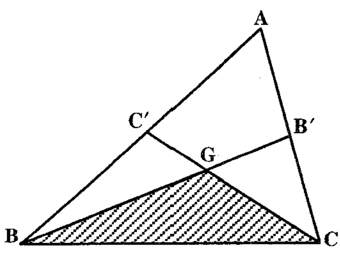
نمودارهای $y=(x+1)^{2}$ و $y=0$ و $2(x+1)=0$ یا $x=-1$ را در یک دستگاه مختصات رسم می‌کنیم و ناحیه‌های ایجاد شده به‌وسیلهٔ این نمودارها را مشخص می‌سازیم و علامت هر یک را در هر کدام از این ناحیه‌ها، در جدول زیر مشخص می‌سازیم و با استفاده از آن، در وجود و علامت ریشه‌های معادلهٔ داده شده بحث می‌کنیم.

ناحیه‌ها	۱	۲	۳	۴	۵	۶
$\Delta'=(x+1)^{2}-y$	+	−	−	+	+	+
$P=y$	+	+	+	+	−	−
$S=2(x+1)$	−	−	+	+	+	−
R	$z_1<z_2<0$			$0<z_1<z_2$	$z_1<0<z_2$	$z_1<0<z_2$
					$\|z_1\|<\|z_2\|$	$\|z_1\|>\|z_2\|$

۱.۶.۲. استفاده از رسم شکلهای هندسی برای اثبات قضیه‌ها

مثال ۱. مثلث ABC را با معلوم بودن اندازهٔ ضلع $BC=a$ و اندازه‌های دو میانه $BB'=m_b$ و $CC'=m_c$ رسم کنید.

حل. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مسأله باشد. میانه‌های BB' و CC' را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آنها را G می‌نامیم. بنا به خاصیت میانه‌ها داریم مقدار معلوم $=\frac{۲}{۳}m_b = GB$ و مقدار معلوم $=\frac{۲}{۳}m_c = GC$. پس مثلث GBC با معلوم بودن اندازهٔ سه ضلع آن قابل رسم است. پس برای حل مسأله بترتیب زیر عمل می‌کنیم: مثلث GBC را با معلوم بودن $BC=a$ ، $GB=\frac{۲}{۳}m_b$ و $GC=\frac{۲}{۳}m_c$ رسم می‌کنیم، آن‌گاه GB را از طرف G به‌اندازهٔ نصف خود ادامه می‌دهیم تا نقطهٔ B' وسط ضلع AC به‌دست آید. از C به B' وصل می‌کنیم و به‌اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا رأس A از مثلث ABC مشخص شود. از A به B وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است. چون تنها یک مثلث با معلوم بودن اندازهٔ $BC=a$ ، $GB=\frac{۲}{۳}m_b$ و $G=\frac{۲}{۳}m_c$ می‌توان رسم کرد. پس مثلث ABC نیز منحصر به‌فرد است. بنابراین قضیه زیر را می‌توان بیان کرد:



قضیه. هرگاه یک ضلع و دو میانه از یک مثلث با یک ضلع و دو میانه از مثلثی دیگر نظیر به نظیر مساوی باشند، آن دو مثلث همنهشتند.

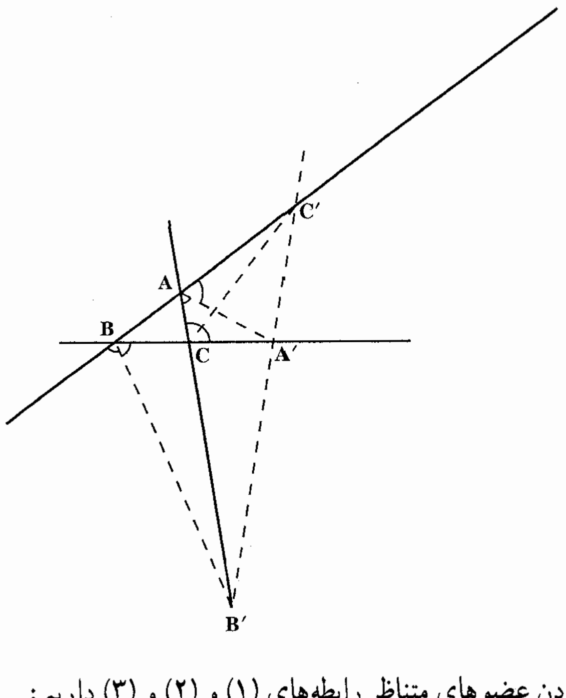
نکته. اگر یک ضلع و دو میانه که یکی از میانه‌ها نظیر همان ضلع باشد از یک مثلث، با همین اجزاء از مثلثی دیگر نظیر به نظیر مساوی باشند، دو مثلث همنهشتند.

۱.۶.۳. استفاده از رسم شکلهای هندسی برای پیدا کردن خاصیتهای جدید

مثال ۱. مثلث ABC داده شده است. نیمسازهای زاویه‌های برونی این مثلث را رسم کنید و ثابت کنید که پای این نیمسازها سه نقطه واقع بر یک خط راستند.

حل. پای نیمسازهای زاویه‌های برونی مثلث ABC را A' ، B' و C' می‌نامیم. این سه نقطه روی یک خط راست قرار دارند. زیرا بنا به ویژگی نیمسازهای زاویه‌های مثلث داریم :

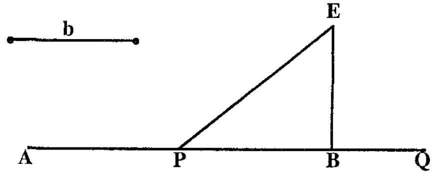
$$(1)\quad \frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}=\frac{AB}{AC} \quad ،\quad (2)\quad \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}=\frac{BC}{AB} \quad ،\quad (3)\quad \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=\frac{A_1C}{BC}$$



از ضرب کردن عضوهای متناظر رابطه‌های (۱) و (۲) و (۳) داریم :

$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}}\times\frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}}\times\frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}}=1$. بنابراین بنا به عکس قضیهٔ منولائوس، سه نقطهٔ A' ، B' و C' روی یک خط راست قرار دارند.

دوباره فرض کنید AB و b دو پاره‌خط باشند. باید AB را تا نقطهٔ Q چنان امتداد دهیم که $AQ.QB = b^2$. برای این منظور BE=b را روی عمود رسم شده بر AB در B جدا می‌کنیم،



و به مرکز P، نقطهٔ میانی AB، و به شعاع PE قوسی رسم می‌کنیم که امتداد AB را در نقطهٔ مطلوب Q قطع کند؛ مثل شکل.

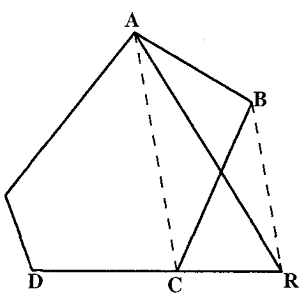
این دفعه اثبات به‌وسیلهٔ قضیهٔ ۶ مقالهٔ دوم عرضه شده، زیرا بنا بر آن قضیه:

$$AQ.QB = PQ^۲ - PB^۲ = PE^۲ - PB^۲ = BE^۲ = b^۲$$

مانند قبل ملاحظه می‌کنیم که AQ و BQ، که اولی را مثبت و دومی را منفی می‌گیریم، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم $x^۲ - ax - b^۲ = ۰$ هستند که در آن a طول پاره‌خط AB است. ریشه‌های معادله $x^۲ + ax - b^۲ = ۰$ همان ریشه‌های معادلهٔ $x^۲ - ax - b^۲ = ۰$ می‌باشند. بجز این که علامت آنها عوض شده است.

۴.۶.۱. تبدیل مساحتها

فیثاغورسیان، به تبدیل مساحت یک شکل مستقیم‌الخط به شکل مستقیم‌الخط دیگر، علاقه‌مند بودند. حل مسألهٔ اساسی ساختن مربعی، هم مساحت با چند ضلعی مفروض، به توسط آنها را می‌توان در قضیه‌های ۴۲، ۴۴ و ۴۵ از مقالهٔ اوّل و قضیهٔ ۱۴ از مقالهٔ دوم اصول اقلیدس پیدا کرد. راه‌حل ساده‌ای که احتمالاً بر فیثاغورسیان نیز معلوم بود، به قرار زیر است:



چند ضلعی دلخواه ... ABCD را در نظر بگیرید. BR را موازی AC رسم کنید تا DC را در R قطع کند. آن‌گاه، چون مثلثهای ABC و ARC دارای قاعدهٔ مشترک AC و ارتفاعهای برابر وارد بر این قاعدهٔ مشترکند، معادل یکدیگر می‌باشند. نتیجه می‌شود که چند ضلعیهای ... ABCD و ... ARD مساحتهای مساوی دارند. امّا چند ضلعی به‌دست آمده یک ضلع کمتر از چند ضلعی مفروض دارد. با تکرار این عمل سرانجام به مثلثی دست می‌یابیم که دارای مساحتی برابر مساحت چند ضلعی مفروض است. حال اگر b، ضلعی از این مثلث بوده و h ارتفاع وارد بر ضلع b باشد، ضلع یک مربع معادل آن $\sqrt{\frac{bh}{۲}}$، یعنی با واسطهٔ هندسی بین b و $\frac{h}{۲}$ داده می‌شود. چون این واسطهٔ هندسی با خط‌کش غیرمدرج و پرگار به‌آسانی قابل ساختن است، تمام مسأله را می‌توان به کمک این وسایل حل کرد.

بخش ۲

• تعیین نقطه (رسم نقطه)

۲.۱. تعیین نقطه با معلوم بودن: نقطه، پاره‌خط، نیمخط، خط، زاویه

۲.۱.۱. نقطه

۲.۱.۱.۱. دو نقطه

۲.۱.۱.۲. سه نقطه

۲.۱.۱.۲.۱. سه نقطه در هر حالت

۲.۱.۱.۲.۲. سه نقطهٔ همخط

۲.۱.۱.۳. چهار نقطه

۲.۱.۱.۳.۱. چهار نقطه درهر حالت

۲.۱.۱.۳.۲. چهار نقطهٔ همخط

۲.۱.۱.۴. n نقطه $(n\geq5)$

۲.۱.۲. پاره‌خط

۲.۱.۲.۱. یک پاره‌خط

۲.۱.۲.۲. دو پاره‌خط

۲.۱.۳. نیمخط

۲.۱.۳.۱. یک نیمخط

۲.۱.۳.۲. دو نیمخط

۲.۱.۴. خط

۲.۱.۴.۱. دو خط

۲.۱.۴.۱.۱. دو خط در هر حالت

بخش ۲. تعیین نقطه (رسم نقطه)

۱.۲. تعیین نقطه با معلوم بودن: نقطه، پاره‌خط، نیمخط، خط، زاویه

۱.۱.۲. نقطه

۱.۱.۱.۲. دو نقطه

۱. دو نقطهٔ A و B داده شده‌اند. نقطه‌ای تعیین کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ ۵ سانتیمتر و از نقطهٔ B به فاصلهٔ ۳ سانتیمتر باشد.

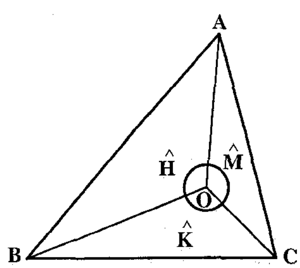
۲.۱.۱.۲. سه نقطه

۱.۲.۱.۱.۲. سه نقطه در هر حالت

۲. سه نقطه داده شده‌اند. نقطهٔ چهارمی را در صفحهٔ آن سه نقطه بیابید به‌طوری که، فاصله‌هایش از آن سه نقطهٔ داده شده، نسبتهای مفروضی را داشته باشند.

۳. سه نقطهٔ A، B و C داده شده‌اند. نقطه‌ای تعیین کنید که از آن نقطه، پاره‌خط AB تحت زاویهٔ r و پاره‌خط BC تحت زاویهٔ s دیده شوند.

۴. سه نقطهٔ A، B و C، و سه زاویهٔ $\hat{H}$ ، $\hat{K}$ و $\hat{M}$ روی یک صفحه داده شده‌اند. هر یک از زاویه‌ها کوچکتر از ۱۸۰ درجه و مجموع آنها مساوی ۳۶۰ درجه است. به کمک خط‌کش و نقاله، نقطهٔ O را چنان پیدا کنید که $A\hat{O}B = \hat{H}$ ، $B\hat{O}C = \hat{K}$ و $C\hat{O}A = \hat{M}$ باشد. (به کمک نقاله می‌توان زاویه را طوری جابه‌جا کرد که یک ضلع آن بر امتدادی که از قبل معلوم است، قرار گیرد).



۲.۲.۱.۱.۲. سه نقطهٔ همخط

۵. با معلوم بودن سه نقطهٔ همخط A، B و C مطلوب است تعیین نقطهٔ D مزدوج توافقی نقطهٔ C نسبت به A و B.

۳.۱.۱.۲. چهار نقطه

۱.۳.۱.۱.۲. چهار نقطه در هر حالت

۶. نقطهٔ O و نقطهٔ M' مجانس نقطهٔ M در تجانس H_O^k در صفحه مفروضند. نقطهٔ A را در این صفحه در نظر گرفته و مجانس آن را در تجانس H_O^{-k} رسم کنید.

۲.۳.۱.۱.۲. چهار نقطهٔ همخط

۷. چهار نقطهٔ A، B، C و D به همین ترتیب بر خط راست Δ طوری قرار دارند که $AB = a$ ، $BC = b$ و $CD = c$. مطلوب است تعیین نقطهٔ M به قسمی که $A\hat{M}B = B\hat{M}C = C\hat{M}D$ باشد.

۸. چهار نقطهٔ A، B، C و D روی یک خط راست واقعند. بر این خط دو نقطهٔ P و Q را چنان تعیین کنید که هم نسبت به A و B، و هم نسبت به C و D مزدوج توافقی یکدیگر باشند (بحث کنید).

مرحلهٔ اول دومین المپیاد ریاضی ایران، کرمانشاه، ۱۳۶۳

۴.۱.۱.۲. n نقطه $(n \geq 5)$

۹. n نقطه (n عددی است فرد، به عنوان مثال $n = 9$) داده شده‌اند. رأسهای یک n ضلعی را پیدا کنید که نقطه‌های داده شده وسط آنها باشند.

حالتی را که n زوج باشد، بررسی کنید.

۲.۱.۲. پاره‌خط

۱.۲.۱.۲. یک پاره‌خط

۱۰. پاره‌خط AB روی صفحه داده شده است. بدون استفاده از خط‌کش و تنها به کمک پرگار، وسط پاره‌خط راست AB را پیدا کنید.

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۱۱. پاره‌خطی به طول ۲ سانتیمتر را به نسبت $\sqrt{3}$ و $\sqrt{2}$ تقسیم کنید.

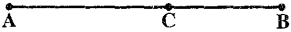
۱۲. پاره‌خط AB را به دو قسمت چنان تقسیم کنید که مجموع مربعاتشان k^2 باشد.

۱۳. پاره‌خط AB را به دو قسمت چنان تقسیم کنید که تفاضل مربعاتشان k^2 باشد.

تعریف نسبت ذات وسط و طرفین، یا نسبت طلایی. استاد ابوریحان بیرونی ریاضیدان ایرانی، در کتاب التفهیم، نسبت ذات وسط و طرفین را چنین تعریف می کند :

«هرگاه که خطی باشد به دو پاره‌خط کرده، چنانک نسبت خردترین قسمتی به بزرگترین همچنان باشد چون نسبت بزرگترین به جملهٔ هردوان یعنی همهٔ خط، این را نسبت ذات وسط و طرفین خوانند».

تقسیم یک پاره‌خط به نسبت ذات وسط و طرفین یا به نسبت طلایی، یعنی تقسیم آن پاره‌خط به دو پاره‌خط، به قسمی که پاره‌خط بزرگتر، واسطهٔ هندسی بین پاره‌خط کوچکتر و خود آن پاره‌خط باشد. با توجه به این تعریف، اگر نقطهٔ C پاره‌خط AB را به نسبت طلایی تقسیم کند، داریم :



$$AC^2 = AB.BC$$

و یا :

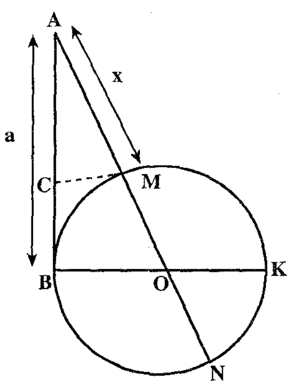
$$\frac{BC}{AC} = \frac{AC}{AB}$$

برای تقسیم یک پاره‌خط به نسبت طلایی، راههای مختلفی وجود دارد که در جلد سوم این دایرةالمعارف آمده است. در این جا به ذکر دو روش اکتفا می‌کنیم :

راه اول. نقطهٔ C را روی پاره‌خط AB چنان تعیین می‌کنیم که $AC^2 = AB.BC$ باشد. طول AB را a و طول AC را x می‌نامیم. در این صورت داریم :

$$CB = a - x \;,\; x < a$$

و رابطهٔ (۱) به‌صورت زیر به‌دست می‌آید :



$$x^2 = a(a-x)$$

$$x^2 = a^2 - ax$$

یا

$$x^2 + ax = a^2$$

و یا :

$$x(a+x) = a^2$$

از رابطهٔ اخیر معلوم می‌شود که پاره‌خطهای به طول $a+x$ و x تفاضلشان a و واسطهٔ هندسی آنها نیز a است و چون a معلوم است، می‌توانیم طولهای x و $a+x$ را به‌دست آوریم و به این ترتیب طول x یعنی فاصلهٔ نقطهٔ C از نقطهٔ A به‌دست می‌آید.

برای به‌دست آوردن طولهای x و $a+x$، از نقطهٔ B عمودی بر خط AB اخراج و روی آن قطعه خط BK را مساوی با $AB=a$ جدا می‌کنیم و دایره‌ای به قطر BK رسم می‌کنیم و مرکز آن را O می‌نامیم. خط راست AO دایره را در دو نقطهٔ M و N قطع می‌کند، و داریم:

$$AN - AM = MN - BK = a$$

$$AM \times AN = AB^{۲} = a^{۲}$$

یعنی تفاضل دو قطعه خط AN و AM مساوی است با a و واسطهٔ هندسی آنها نیز a می‌باشد.

پس: $AN = a + x \quad , \quad AM = x$

حال کافی است طول AM را به‌وسیلهٔ پرگار، روی قطعه خط AB انتقال دهیم تا نقطهٔ خواسته شده، یعنی C به‌دست آید.

راه دوم. اگر به‌جای آن که طول AC را مساوی با x اختیار کنیم، طول BC را x بنامیم، در این صورت داریم:

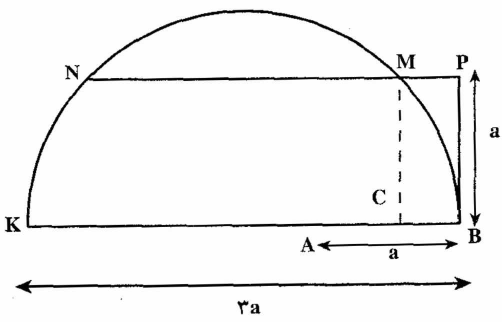
$$AC = a - x \quad , \quad BC = x \quad , \quad x < a$$

در این صورت رابطهٔ (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید:

$$a^{۲} - ۲ax + x^{۲} = ax \quad \text{یا} \quad (a-x)^{۲} = ax \quad \text{یا}$$

$$a^{۲} = ۳ax - x^{۲} \quad \text{یا} \quad a^{۲} = x(۳a - x)$$

از رابطهٔ اخیر معلوم می‌شود که پاره‌خطهای به طول x و $۳a - x$ مجموعشان $۳a$ و واسطهٔ هندسی آنها a است و چون a معلوم است، می‌توانیم طولهای x و $۳a - x$ را به‌دست آوریم. و به این ترتیب طول x، یعنی فاصلهٔ نقطهٔ C از نقطهٔ B به‌دست می‌آید. برای به‌دست آوردن طولهای x و $۳a - x$ قطعه خط BA را از طرف A به طول AK مساوی با $۲a$ امتداد می‌دهیم. به این ترتیب طول قطعه خط BK مساوی با $۳a$ می‌شود. سپس نیمدایره‌ای به قطر BK رسم می‌کنیم و روی مماس در نقطهٔ B بر این نیمدایره قطعه خط BP را



مساوی با a جدا می‌کنیم به‌طوری که نقطهٔ P و نیمدایره در یک طرف خط BK واقع شوند و از نقطهٔ P خطی به موازات BK رسم می‌کنیم تا نیمدایره را در دو نقطه قطع کند (چون شعاع نیمدایره $\frac{۳a}{۲}$ است، حتماً این خط نیمدایره را قطع می‌کند) و از این دو نقطه آن را که به نقطهٔ

P نزدیکتر است، M و دیگری را N می‌نامیم. در این صورت داریم :

$$PM \times PN = a^{2} \quad , \quad PN + PM = 3a$$

پس :

$$PN = 3a - x \quad , \quad PM = x$$

اگر از نقطهٔ M عمودی بر خط BK فرود آوریم، پای این عمود که آن را C می‌نامیم، قطعه خط AB را به دو قطعه خط AC و CB به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم می‌کند.

۱۴. فاصلهٔ دو دهکدهٔ A و B مساوی ۳ کیلومتر است. ۱۰۰ دانش‌آموز در دهکدهٔ A و ۵۰ دانش‌آموز در دهکدهٔ B وجود دارد. در چه فاصله‌ای از دهکدهٔ A، یک دبستان ساخته شود تا مجموع راهی که ۱۵۰ دانش‌آموز روی هم می‌پیمایند، کمترین مقدار ممکن باشد؟

۱۵. پاره‌خط AB داده شده است. روی این پاره‌خط و در امتداد آن دو نقطهٔ C و D را چنان تعیین کنید که $\frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k$ باشد.

۱۶. دو نقطهٔ C و D را چنان رسم کنید که قطعه خط AB را به نسبت توافقی تقسیم کند و AB=CD باشد.

۱۷. دو نقطهٔ A و B داده شده است. بر خط AB دو نقطهٔ C و D را چنان بیابید که پاره‌خط AB را به نسبت توافقی تقسیم کند و طول پاره‌خط CD مساوی مقدار معلوم l باشد.

۱۸. دو نقطهٔ B و C داده شده‌اند. نقطهٔ A را روی خط CB چنان تعیین کنید که $\frac{CA}{CB} = k$ باشد (یعنی نقطهٔ C پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم کند).

۱۹. پاره‌خطی به طول a را به نسبت ۳ و $4\frac{1}{3}$ و ۲ تقسیم کنید.

۲۰. پاره‌خط معلوم m را به سه قسمت a، b و c طوری تقسیم کنید که :

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \quad , \quad \frac{b}{c} = \frac{r}{s}$$

باشد (p، q، r و s پاره‌خطهای معلومند).

۲۱. پاره‌خطی را به n قسمت مساوی تقسیم کنید.

۲.۲.۱.۲. دو پاره‌خط

۲۲. دو پاره‌خط AB و CD داده شده‌اند. نقطه‌ای تعیین کنید که از آن نقطه، پاره‌خط AB تحت زاویهٔ α و پاره‌خط CD تحت زاویهٔ β دیده شود.

۲۳. دو پاره‌خط AB و CD داده شده‌اند. نقطه‌ای تعیین کنید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد و از آن نقطه، پاره‌خط CD به زاویهٔ α دیده شود.

۳.۱.۲. نیمخط

۱.۳.۱.۲. یک نیمخط

۲۴. نیمخط Ox داده شده است. روی این نیمخط نقطه‌ای بیابید که از نقطهٔ O به فاصلهٔ R باشد.

۲.۳.۱.۲. دو نیمخط

۲۵. دو نیمخط Ox و $O'x'$ داده شده‌اند. نقطه‌ای روی Ox تعیین کنید که از نقطهٔ O' به فاصلهٔ a باشد و نقطه‌ای روی $O'x'$ بیابید که از نقطهٔ O به‌فاصلهٔ b باشد.

۲۶. دو نیمخط Ox و $O'x'$ داده شده‌اند. نقطه‌هایی روی این دو نیمخط بیابید که از آن نقطه‌ها پاره‌خط OO' تحت زاویهٔ α دیده شود.

۴.۱.۲. خط

۱.۴.۱.۲. دو خط

۱.۱.۴.۱.۲. دو خط در هرحالت

۲۷. دو خط متمایز d و d' داده شده‌اند. نقطه‌ای پیدا کنید که از d به فاصلهٔ l و از d' به فاصلهٔ l' باشد.

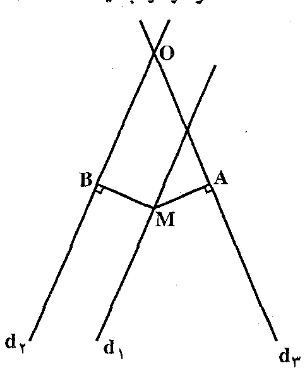
۲۸. نقطه‌ای تعیین کنید که از دو خط d و d' به فاصلهٔ l باشند.

۲.۴.۱.۲. سه خط

۱.۲.۴.۱.۲. سه خط در هر حالت

۲۹. روی خط دادهٔ شدهٔ D، نقطه‌ای معین کنید که از دو خط $x'x$ و $y'y$ به یک فاصله باشند.

۳۰. سه خط d_1، d_2 و d_3 داده شده‌اند. بر d_1 نقطه‌ای مانند M تعیین کنید که نسبت فاصله‌هایش از d_2 و d_3، مساوی k باشد.



۳۱. نقطه‌های M و M′ روی خطهای D و D′، پاره‌خطهای متناسب طی می‌کنند. M و M′ را روی آنها چنان تعیین کنید که MM′ موازی با خط داده شده بوده و یا به طول معینی باشد.

۲.۱.۵. زاویه

۲.۱.۵.۱. یک زاویه

۳۲. روی ضلع Ox از زاویهٔ xOy نقطه‌ای بیابید که از ضلع Oy به فاصلهٔ معلوم l باشد.

۳۳. زاویهٔ xOy داده شده است. نقطه‌ای مانند A روی ضلع Ox و نقطه‌ای مانند B روی ضلع Oy طوری اختیار کنید که $\frac{OA}{OB}=\frac{m}{n}$ و $AB = l$ باشد (m، n و l، طولهای معلومی هستند).

۲.۱.۶. پاره‌خط، نقطه

۲.۱.۶.۱. یک پاره‌خط، یک نقطه

۳۴. پاره‌خط AB و نقطهٔ C داده شده‌اند. نقطه‌ای تعیین کنید که از نقطهٔ C به فاصلهٔ R باشد و از آن نقطه، پاره‌خط AB به زاویهٔ قائمه دیده شود.

۲.۱.۷. نیمخط، نقطه

۲.۱.۷.۱. یک نیمخط، یک نقطه

۳۵. نیمخط Ox و نقطهٔ A غیرواقع بر آن داده شده‌اند. نقطه‌ای روی Ox تعیین کنید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ R باشد.

۳۶. نیمخط Ox و نقطهٔ A غیرواقع بر Ox داده شده‌اند. نقطه‌ای تعیین کنید که از Ox به فاصلهٔ l و از نقطهٔ A به فاصلهٔ R باشد.

۲.۱.۷.۲. یک نیمخط، دو نقطه

۳۷. نیمخط OA و دو نقطهٔ B و C غیرواقع بر OA داده شده‌اند. نقطه‌ای روی OA بیابید که نسبت فاصلهٔ آن از دو نقطهٔ B و C برابر k باشد.

۸.۱.۲. خط، نقطه

۱.۸.۱.۲. یک خط، یک نقطه

۳۸. خط $x'x$ و نقطهٔ A غیرواقع بر این خط داده شده است. نقطهٔ B را روی این خط چنان تعیین کنید که $A\hat{B}x = \alpha$ باشد.

۳۹. خط d و نقطهٔ A غیرواقع بر آن داده شده است. نقطه‌ای تعیین کنید که به فاصلهٔ معین l از خط d و به فاصلهٔ معلوم R از نقطهٔ A باشد.

۴۰. بر روی خط مفروض AB، نقطهٔ M را چنان پیدا کنید که مربع فاصلهٔ آن از نقطهٔ مفروض O مساوی MA.MB باشد.

۲.۸.۱.۲. یک خط، دو نقطه

۱.۲.۸.۱.۲. یک خط، دو نقطه در صفحه

۴۱. دو نقطهٔ A و B و خط d مفروضند. نقطه‌ای بر خط d بیابید که از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشند (بحث کنید).

۴۲. خط راست l و نقطه‌های A و B، در یک صفحه داده شده‌اند. نقطه‌ای مانند P واقع بر l طوری پیدا کنید که بزرگترین پاره‌خط از بین پاره‌خطهای AP و BP، کمترین مقدار ممکن باشد (در حالت $AP = BP$ ، هر دو پاره‌خط را می‌توان بزرگترین به حساب آورد).

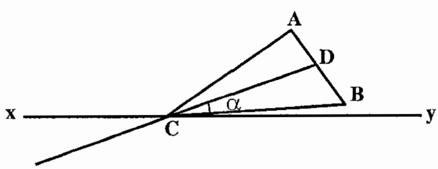
المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۲۸

۲.۲.۸.۱.۲. یک خط، دو نقطه خارج آن

۴۳. خط xy و دو نقطهٔ A و B در خارج آن داده شده‌اند. روی خط xy نقطهٔ M را چنان معین کنید که $MA^۲ + MB^۲$ کمترین مقدار ممکن را دارا باشد.

دومین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۶۳

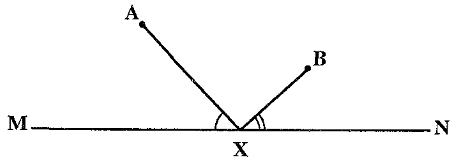
۴۴. یک خط و دو نقطه خارج آن داده شده‌اند. نقطه‌ای روی این خط بیابید که میانهٔ مثلث تشکیل شده از این نقطه و دو نقطهٔ داده شده، خط مفروض را تحت زاویهٔ معلومی قطع کند.



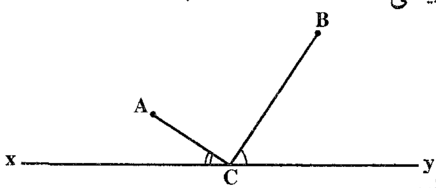
۲.۱.۸.۲.۳. یک خط، دو نقطه در یک طرف آن

۴۵. فرض می‌کنیم خط MN و دو نقطهٔ A و B در یک طرف آن، داده شده باشند. نقطهٔ X را بر خط MN چنان بیابید که پاره‌خطهای AX و BX با خط MN زاویه‌های مساوی درست کنند، یعنی چنان باشد که:

$$A\hat{X}M = B\hat{X}N$$



۴۶. فرض می‌کنیم خط MN و دو نقطهٔ A و B در یک طرف آن داده شده باشند. نقطهٔ X را بر خط MN چنان پیدا کنید که زاویهٔ MN با پاره‌خط XA مساوی دو برابر زاویهٔ MN با پاره‌خط XB باشد (یعنی، $A\hat{X}M = ۲B\hat{X}N$).



۴۷. خط xy و دو نقطهٔ A و B در یک طرف آن داده شده‌اند. نقطهٔ C را روی xy چنان بیابید که $A\hat{C}x + B\hat{C}y$ مقدار معلوم γ باشد. حداقل این مقدار را بیابید.

۴۸. خط l و دو نقطهٔ A و B در یک طرف آن مفروضند. نقطهٔ X را بر خط l چنان پیدا کنید که مجموع $AX + XB$ مساوی مقدار مفروض a باشد.

۴۹. دو نقطهٔ M و N در یک طرف خط Δ داده شده‌اند. بر روی Δ نقطه‌ای به دست آورید که مجموع فاصله‌هایشان از M و N کوچکترین مقدار ممکن باشد.

۵۰. خط l و دو نقطهٔ P و Q در یک طرف آن مفروض است. روی خط l نقطه‌ای مانند R چنان پیدا کنید که محیط مثلث PQR کمترین مقدار ممکن باشد.

۵۱. دو نقطهٔ A و B در یک طرف خط Δ به فاصلهٔ a و b از آن داده شده‌اند. نقطه‌ای مانند M روی پاره‌خط AB، آن‌طور اختیار کنید که اگر AB را حول خط Δ دوران دهیم، سطح حاصل از دوران دو پاره‌خط MA و MB مساوی باشند.

۲.۱.۸.۲.۴. یک خط، دو نقطه در دو طرف آن

۵۲. دو نقطهٔ A و B در دو طرف خط xy واقعند. نقطه‌ای روی xy بیابید که تفاضل فاصله‌اش از A و B بیشترین مقدار ممکن باشد.

۵۳. خط l و دو نقطهٔ A و B در دو طرف آن مفروضند. نقطهٔ X را بر خط l چنان بیابید که تفاضل $AX - XB$ مساوی مقدار مفروض a باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۴

۲.۱.۸.۳. دو خط، یک نقطه

۲.۱.۸.۳.۱. دو خط در هر حالت، یک نقطه

۵۴. دو خط d و ′d و نقطهٔ A غیرواقع بر این دو خط داده شده‌اند. نقطه‌ای بیابید که به فاصلهٔ a از نقطهٔ A و به یک فاصله از دو خط d و ′d باشد.

۲.۱.۸.۳.۲. دو خط موازی، یک نقطه

۵۵. دو خط موازی d و ′d و نقطهٔ A روی خط d داده شده است. نقطه‌ای روی خط ′d تعیین کنید که فاصله‌اش تا نقطهٔ A کمترین مقدار ممکن باشد.

۲.۱.۸.۳.۳. دو خط متقاطع، یک نقطه

۵۶. دو خط متقاطع Δ و Δ' و نقطهٔ A داده شده‌اند. نقطه‌ای تعیین کنید که نسبت فاصله‌اش از دو خط Δ و Δ' برابر k و فاصله‌اش از نقطهٔ A مساوی R باشد.

۲.۱.۸.۴. دو خط، دو نقطه یا بیشتر

۲.۱.۸.۴.۱. دو خط در هر حالت، دو نقطه یا بیشتر

۵۷. دو خط l_1 و l_2 و دو نقطهٔ A و B ناواقع بر آنها داده شده‌اند. نقطه‌ای مانند X بر l_1 چنان پیدا کنید که پاره‌خطی که بر l_2 به وسیلهٔ AX و BX مشخص می‌شود :

الف. دارای طول مفروض a باشد.

ب. نقطهٔ مفروض E واقع بر l_2 وسط آن باشد.

۵۸. دو خط D و ′D و روی یکی از آنها دو نقطهٔ A و B و روی دیگری دو نقطهٔ ′A و ′B داده شده‌اند. نقطهٔ M را روی D و نقطهٔ ′M را روی ′D چنان تعیین کنید که :

$$\frac{MA}{M'A'}=\alpha \quad , \quad \frac{MB}{M'B'}=\beta$$

و α و β مقدارهای معلومی می‌باشند.

۲.۱.۸.۴.۲. دو خط موازی، دو نقطه یا بیشتر

۵۹. دو خط موازی d و ′d و دو نقطهٔ A و B داده شده‌اند. مطلوب است تعیین نقطه‌ای که از دو نقطهٔ A و B، همچنین از دو خط d و ′d به یک فاصله باشد.

۶۰. خطهای موازی q_1 و q_2 و دو جفت نقطه یعنی A_1 ، A_2 و B_1 ، B_2 داده شده‌اند. روی خطهای داده شده، نقطه‌های C_1 و C_2 را طوری بیابید که $A_1C_1 \| A_2C_2$ و $B_1C_1 \| B_2C_2$ باشد.

۲.۱.۸.۴.۳. دو خط متقاطع، دو نقطه یا بیشتر

۶۱. دو خط متقاطع d و d' و دو نقطهٔ A و B داده شده‌اند. نقطه‌ای بیابید که از این دو خط، همچنین از دو نقطهٔ A و B به یک فاصله باشد.

۲.۱.۹. زاویه، نقطه

۲.۱.۹.۱. یک زاویه، یک نقطه

۲.۱.۹.۱.۱. یک زاویه، یک نقطه در صفحهٔ زاویه

۶۲. زاویهٔ xOy و نقطهٔ A داده شده است. نقطهٔ M را روی Oy چنان بیابید که مجموع فاصله‌اش از نقطهٔ A و از Ox کمترین مقدار ممکن باشد.

۲.۱.۹.۱.۲. یک زاویه، یک نقطه روی ضلع زاویه

۶۳. زاویهٔ xOy و نقطهٔ A روی Ox داده شده است. روی Oy نقطه‌ای چنان بیابید که $OM + MA = a$ باشد (a طول معلومی است).

۶۴. زاویهٔ xOy و نقطهٔ A روی Ox داده شده‌اند. نقطه‌ای روی Ox بیابید که از نقطهٔ A و از Oy به یک فاصله باشد.

۲.۱.۹.۱.۳. یک زاویه، یک نقطه درون زاویه

۶۵. نقطهٔ F در درون زاویهٔ حادهٔ AOB داده شده است. نقطهٔ M را، به کمک پرگار و خط‌کش روی ضلع OA طوری پیدا کنید که از نقطهٔ F و ضلع دیگر زاویه، OB، به یک فاصله باشد.

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۶۶. نقطهٔ A در درون زاویه‌ای با رأس O اختیار شده است. خط راست OA، با ضلعهای زاویه، زاویه‌های φ و ψ می‌سازد. روی ضلعهای زاویهٔ اولی، نقطه‌های M و N را طوری پیدا کنید که $\hat{MAN} = \beta$ $(\varphi + \psi + \beta < \pi)$ و مساحت چهارضلعی $OMAN$ ماکسیمال باشد.

۶۷. نقطهٔ A در درون زاویهٔ xOy داده شده است. نقطه‌های B و C را روی ضلعهای این زاویه چنان تعیین کنید که محیط مثلث ABC کمترین مقدار ممکن باشد.

۲.۹.۱.۲. یک زاویه، دو نقطه

۱.۲.۹.۱.۲. یک زاویه، دو نقطه روی ضلعهای زاویه

۶۸. نقطه‌های B و C به ترتیب روی ضلعهای Ox و Oy از زاویهٔ xOy داده شده‌اند. نقطه‌های M و N را به ترتیب بر Ox و Oy چنان پیدا کنید که:

$$BM = MC \quad , \quad BN = CN$$

۲.۲.۹.۱.۲. یک زاویه، دو نقطه درون زاویه

۶۹. زاویهٔ xOy و دو نقطهٔ B و A داخل آن مفروضند. نقطه‌های P و Q را بر دو ضلع Ox و Oy چنان تعیین کنید که $(AP+PQ+QB)$ کمترین مقدار ممکن را دارا باشد.

۷۰. فرض کنیم زاویهٔ MON و دو نقطهٔ A و B در داخل آن داده شده باشند. نقطهٔ X را بر ضلع OM چنان پیدا کنید که اگر Y و Z نقطه‌های تقاطع XA و XB با ON باشند، مثلث XYZ متساوی‌الساقین باشد، $XY = XZ$.

۱۰.۱.۲. زاویه، پاره‌خط

۱.۱۰.۱.۲. یک زاویه، یک پاره‌خط

۷۱. بر روی یک ضلع، زاویهٔ قائمه‌ای به طول $AB = a$ را جدا می‌کنیم. نقطه‌ای بر روی ضلع دیگر زاویهٔ قائمه پیدا کنید که طول AB تحت بزرگترین زاویه ممکن θ دیده شود.

۱۱.۱.۲. زاویه، خط

۱.۱۱.۱.۲. یک زاویه، یک خط

۷۲. بر خط راست مفروض، نقطهٔ M را طوری پیدا کنید که فاصلهٔ بین تصویرهای آن بر دو ضلع زاویهٔ مفروض، حداقل باشد.

۲.۱.۱۲. خط، پاره‌خط

۲.۱.۱۲.۱. یک خط، یک پاره‌خط

۷۳. خط راست l و پاره‌خط راست AB موازی با l داده شده‌اند. نقطهٔ M را روی خط راست l پیدا کنید به نحوی که $\frac{AM}{MB}$ کمترین یا بیشترین مقدار خود را داشته باشد.

۲.۲. تعیین نقطه با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۲.۲.۱. مثلث در حالت کلی

۲.۲.۱.۱. تنها یک مثلث

۲.۲.۱.۱.۱. تعیین نقطه در صفحهٔ مثلث

۷۴. مثلث ABC داده شده است. نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث بیابید که از آن نقطه ضلع AB تحت زاویهٔ α ، ضلع AC تحت زاویهٔ β و ضلع BC تحت زاویهٔ γ دیده شوند.

۷۵. نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث ABC تعیین کنید که فاصله‌های آن از سه رأس مثلث، متناسب با سه عدد داده شده باشد. وقتی مسأله امکان داشته باشد، عموماً دو جواب به دست می‌آید. ثابت کنید که دو نقطهٔ جواب، روی یک قطر دایرهٔ محیطی مثلث قرار دارند و این قطر را به توافق تقسیم می‌کنند.

۷۶. در سطح مثلثی (که هر یک از زاویه‌های آن از ۱۲۰° کمتر است)، نقطه‌ای تعیین کنید که مجموع فاصله‌های آن از سه رأس مثلث می‌نیمم باشد. تعیین این نقطه به وسیلهٔ ترسیم، قضیه‌ای به دست می‌دهد ؛ حکم آن را ذکر کنید.

۷۷. نقطه‌ای در سطح مثلث تعیین کنید که مجموع مربعهای فاصله‌های آن از سه رأس مثلث می‌نیمم باشد.

۷۸. نقطه‌ای در صفحهٔ مثلث پیدا کنید که نسبت فاصله‌های آن از سه ضلع مثلث، متناسب با اعداد p، q و r باشد.

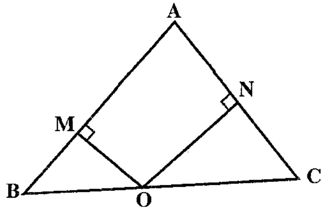
۷۹. نقطه‌ای در سطح مثلث ABC تعیین کنید که محیط مثلث پدر آن، می‌نیمم باشد.

۸۰. A، B و C رأسهای یک مثلث غیرمتساوی‌الساقین را تشکیل می‌دهند. نقطهٔ D را روی صفحهٔ مثلث به چند طریق می‌توان پیدا کرد، به نحوی که مجموعهٔ نقطه‌های (A، B، C، D) محور تقارن داشته باشد.

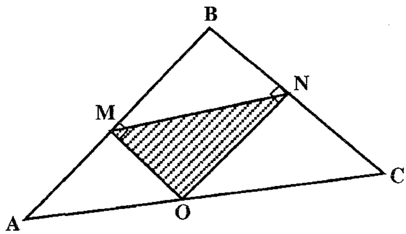
۲.۲.۱.۱.۲. تعیین نقطه روی ضلعهای مثلث

۲.۲.۱.۱.۲.۱. تعیین نقطه روی یک ضلع

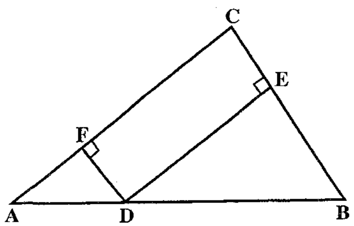
۸۱. نقطه‌ای روی یک ضلع مثلث ABC چنان پیدا کنید که، مجموع فاصله‌های آن از دو ضلع دیگر، می‌نیمم باشد.



۸۲. مثلث ABC داده شده است. روی ضلع BC نقطهٔ O را چنان تعیین کنید که OM.ON، یعنی حاصل ضرب فاصله‌های O از دو ضلع AB و AC، برابر مقدار ثابت k^2 باشد.



۸۳. از نقطهٔ اختیاری O، روی یک ضلع مثلث ABC، عمودهای OM و ON را بر دو ضلع دیگر این مثلث رسم می‌کنیم. جای نقطهٔ O را چنان بیابید که مساحت مثلث MON حداکثر مقدار ممکن باشد.



۸۴. نقطه‌ای روی ضلع AB از مثلث ABC بیابید که مجموع دو پاره‌خطی که از این نقطه موازی دو ضلع مثلث رسم می‌شوند و محدود به ضلعها هستند، برابر l باشد.

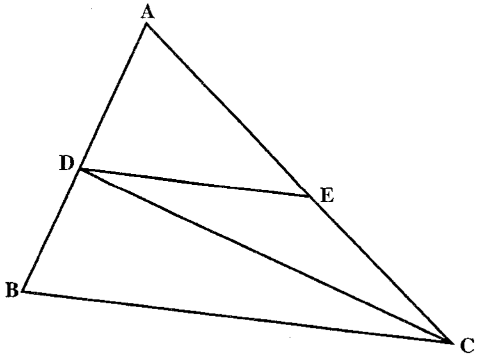
۸۵. در مثلث ABC، ثابت کنید که نقطهٔ Dیی بر ضلع AB چنان موجود است که CD واسطهٔ هندسی AD و DB است، اگر و فقط اگر :

$$\sin A \sin B \leq \sin^{۲} \frac{C}{۲}$$

باشد.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی

۸۶. نقطهٔ M روی ضلع BC از مثلث ABC قرار دارد ؛ به مرکز M دایره‌هایی رسم می‌کنیم که بترتیب از B و C بگذرند. این دایره‌ها بترتیب AC و AB را در N و P نیز قطع می‌کنند. مکان M باید کجا باشد تا خطهای AM، BP و CN همرس باشند؟



۸۷. مثلث ABC داده شده است. روی AB نقطه‌ای مانند D چنان اختیار کنید که اگر از D خطی به موازات BC رسم کنیم تا AC را در E قطع کند، DE برابر CE شود.

۸۸. مثلث ABC داده شده است. روی AB نقطهٔ D را چنان تعیین کنید که اگر DE را به موازات BC رسم کنیم، $\frac{BD}{DE}$ برابر $\frac{m}{n}$ شود.

۸۹. نقطهٔ P را بر ضلع AB از مثلث ABC چنان تعیین کنید که شعاع نور خارج شده از P پس از بازتاب روی ضلعهای BC و CA به نقطهٔ P برگردد و پس از بازتاب روی ضلع AB همان مسیر قبلی را بپیماید.

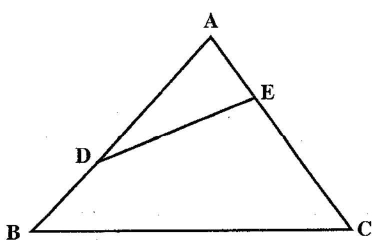
۹۰. مثلث ABC داده شده است. روی ضلع BC نقطه‌ای مانند D چنان تعیین کنید که AD واسطهٔ هندسی بین DB و DC باشد (بحث).

از مسأله‌های کنکور دانشکده فنی تهران

۹۱. در مثلث ABC نقطهٔ D را بر امتداد ضلع BC طوری بیابید که رابطهٔ $AD^2 = BD.DC$ برقرار باشد.

۲.۲.۱.۱.۲.۲. تعیین نقطه روی دو ضلع

۹۲. مثلث ABC داده شده است. نقطه‌های M و N را روی AB و AC چنان تعیین کنید که داشته باشیم: $BM = MN = NC$



۹۳. نقطه‌های D و E را روی ضلعهای AB و AC از مثلث ABC طوری مشخص کنید که:

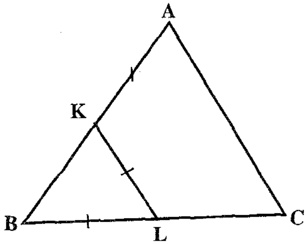
$AD:DE:EC = p:q:r$

باشد. p، q و r قطعه خطهای معلومند.

۹۴. در مثلث ABC نقطه‌های M و N را روی ضلعهای AB و AC چنان بیابید که $MN = BM + CN$ باشد.

۹۵. مثلث ABC داده شده است. روی ضلعهای AB و BC، نقطه‌های K و L را طوری پیدا کنید که:

$AK = KL = LB$

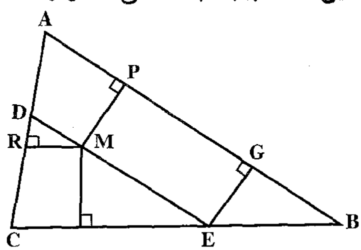


۹۶. روی ضلعهای AB و AC از مثلث ABC دو نقطهٔ D و E را چنان پیدا کنید که: $\frac{AD}{EC} = \frac{p}{q}$ و $DE = 1$ باشد.

۳.۱.۱.۲.۲. تعیین نقطه در درون مثلث

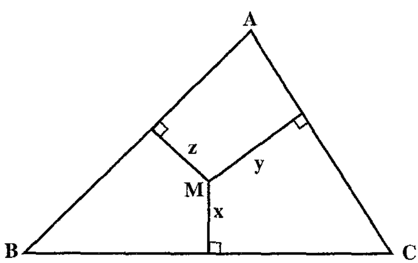
۹۷. نقطهٔ X را در داخل مثلث ABC طوری رسم کنید که از آن نقطه، سه ضلع مثلث به یک زاویه دیده شوند.

۹۸. مثلث ABC داده شده است. نقطه‌ای در درون این مثلث بیابید به قسمی که زاویه‌های OAB، OBC و OCA با هم برابر باشند.



۹۹. نقطه‌ای در داخل مثلث چنان بیابید که مجموع فاصله‌هایش از ضلعهای مثلث ماکزیمم شود.

۱۰۰. نقطه‌ای در داخل مثلث تعیین کنید که حاصل ضرب فاصله‌هایش از سه ضلع مثلث، ماکزیمم باشد.



۱۰۱. از نقطهٔ M واقع در درون مثلث ABC عمودهای MH_1، MH_2 و MH_3 را بر ضلعهای مثلث فرود می‌آوریم. برای این که حاصل ضرب $MH_1 . MH_2 . MH_3$ بیشترین مقدار خود را داشته باشد، نقطهٔ M در کدام است؟

الف. مرکز ارتفاعی ب. مرکز دایرهٔ محیطی

ج. مرکز دایرهٔ محاطی د. مرکز ثقل

هـ. نقطه‌ای که از آن، سه ضلع به یک زاویه دیده می‌شود.

۱۰۲. P نقطه‌ای واقع در داخل مثلث داده شدهٔ ABC است. D، E و F بترتیب پاهای عمودهای رسم شده از P به خطهای BC، CA و ABاند. تمام Pهایی را که به ازای آنها :

$$\frac{BC}{PD}+\frac{CA}{PE}+\frac{AB}{PF}$$

کمترین است، بیابید.

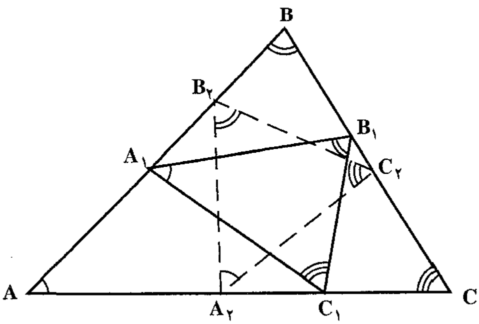
بیست و دومین المپیاد بین‌المللی ریاضی، ۱۹۸۱

۱۰۳. مثلث ABC داده شده است. نقطهٔ M را درون این مثلث چنان تعیین کنید که سه مثلث AMB، AMC و BMC معادل یکدیگر باشند.

۱۰۴. در مثلث ABC، نقطهٔ M را طوری تعیین کنید که اگر به سه رأس مثلث رسم شود، مساحت سه مثلث حاصل به نسبت m، n و p باشد.

۱۰۵. در درون مثلثی داده شده، نقطه‌ای بیابید که اگر از آن نقطه سه خط عمود بر ضلعهای مثلث رسم کنیم، آن مثلث به سه چهارضلعی که مساحت آنها متناسب با عددهای m، n و p باشد، تقسیم شود.

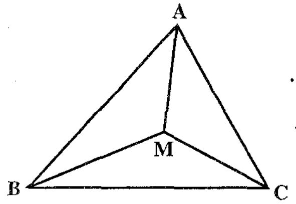
۱۰۶. نقطه‌های O_1 و O_2 مرکزهای دوران مثلث مفروض ABC را پیدا کنید.



تعریف. در مثلث مفروض ABC، مثلث دیگر $A_1B_1C_1$ را متشابه با ABC محاط کنید (ترتیب حروف نشانهٔ ضلعهای متناظر است)، چنان که رأس A_1 بر ضلع AB، رأس B_1 بر ضلع BC و رأس C_1 بر ضلع CA واقع باشد (شکل).

به تعداد بینهایت از این مثلثهای $A_1B_1C_1$ موجودند که در شرایط مذکور صدق می‌کنند. امتداد یکی از ضلعها یا وضعیت یکی از رأسهای مثلث $A_1B_1C_1$ را به روش دلخواهی می‌توان انتخاب کرد. همهٔ این مثلثهای $A_1B_1C_1$ را می‌توان نگاره‌های (تصویرهای) مثلث ABC بر اثر تجانسهای مارپیچی با یک مرکز دوران O_1 دانست. نقطهٔ O_1 **اولین مرکز دوران مثلث** نامیده می‌شود. منظور از O_2 دومین مرکز دوران مثلث ABC، همان مرکز دوران مشترک مثلث ABC و مثلثهای متشابه $A_2B_2C_2$ است که در این جا مثلث $A_2B_2C_2$ چنان در مثلث محاط شده است که A_2 بر ضلع CA، B_2 بر ضلع AB و C_2 بر ضلع BC قرار دارد.

۱۰۷. نقطهٔ M درون مثلث غیرمتساوی‌الساقین ABC داده شده است. کدام جملهٔ زیر در مورد مقدار $MA + MB + MC$ درست است؟



الف. همیشه از بزرگترین ضلع مثلث، کوچکتر است.

ب. همیشه از جمع دو ضلع بزرگتر مثلث، کوچکتر است.

ج. همیشه از جمع دو ضلع کوچکتر مثلث، بزرگتر است.

د. همیشه از ۳ برابر شعاع دایرهٔ محیطی، بزرگتر است.

هـ. از جمع دو ارتفاع بزرگتر، کوچکتر است.

مرحله اول هجدهمین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۸

۲.۲.۱.۲. یک مثلث، نقطه

۲.۲.۱.۲.۱. یک مثلث، یک نقطه

۱۰۸. مثلث ABC و نقطهٔ D داده شده است. نقطه‌ای روی ضلع BC یا امتداد آن، تعیین کنید که مجموع فاصله‌اش از D و A کمترین مقدار ممکن باشد.

۲.۲.۱.۲.۲. یک مثلث، دو نقطه

۱۰۹. مثلث ABC و دو نقطهٔ M و N داده شده‌اند. نقطه‌ای روی ضلعهای مثلث بیابید که از دو نقطهٔ M و N به یک فاصله باشند.

۲.۲.۱.۳. یک مثلث، پاره‌خط

۲.۲.۱.۳.۱. یک مثلث، یک پاره‌خط

۱۱۰. مثلث ABC و پاره‌خط DE داده شده‌اند. نقطه‌ای روی ضلعها یا امتداد ضلعهای مثلث تعیین کنید که از آن نقطه، پاره‌خط DE به زاویهٔ قائمه دیده شود.

۲.۲.۱.۴. یک مثلث، خط

۲.۲.۱.۴.۱. یک مثلث، یک خط

۲.۲.۱.۴.۱.۱. یک مثلث، ارتفاع

۱۱۱. روی ارتفاع AH از مثلث ABC نقطهٔ M را چنان اختیار کنید که $MB^2 + MC^2 = MA^2$ باشد.

۲.۲.۱.۴.۱.۲. یک مثلث، میانه

۱۱۲. نقطه‌ای بر میانهٔ AM از مثلث ABC پیدا کنید که مجموع مربعهای فاصله‌اش از سه رأس مثلث می‌نیمم باشد.

۱۱۳. با استفاده از خاصیت میانه‌های مثلث، پاره‌خطی را به سه قسمت متساوی تقسیم کنید.

۲.۲.۱.۴.۱.۳. یک مثلث، نیمساز

۱۱۴. روی خط نیمساز AZ زاویهٔ A از مثلث ABC، نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که تفاضل زاویه‌های $A\hat{M}B$ و $A\hat{M}C$ بیشترین مقدار ممکن را دارا باشد.

۲.۲.۱.۴.۱.۴. یک مثلث، یک خط سوایی

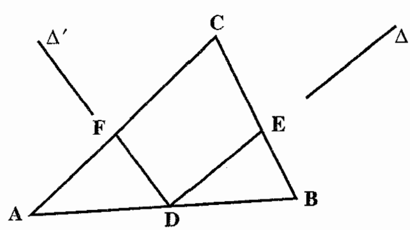
۱۱۵. روی یک خط سوایی AD از مثلث ABC، نقطه‌ای مانند O بیابید که از آن نقطه پاره‌خطهای BD و CD تحت یک زاویه دیده شوند.

۲.۲.۱.۴.۱.۵. یک مثلث، یک راستا

۱۱۶. روی ضلعهای AB و AC از مثلث ABC دو نقطهٔ P و Q را طوری تعیین کنید که خط PQ راستای مفروضی داشته باشد و $PQ:(BP+CQ)=k$ ، که k عدد (نسبت) مفروضی است.

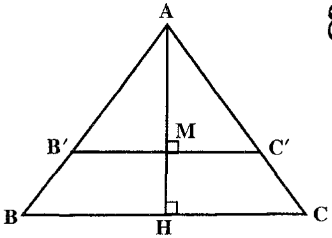
۲.۲.۱.۴.۲. یک مثلث، دو خط

۱۱۷. نقطه‌ای روی ضلع AB از مثلث ABC بیابید که اگر از این نقطه دو خط موازی در امتداد معلوم Δ و Δ' رسم کنیم، مجموع قطعه‌های محصور بین این نقطه و ضلعهای مثلث طولی برابر l داشته باشند.



۲.۲.۲. مثلث متساوی‌الاضلاع

۱.۲.۲.۲. مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع



۱۱۸. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC داده شده است. روی ارتفاع AH نقطه‌ای بیابید که اگر از نقطه خطی موازی ضلع BC رسم کنیم، مساحت مثلث به دو بخش هم‌ارز تقسیم می‌شود.

۳.۲.۲. مثلث متساوی‌الساقین

۱.۳.۲.۲. مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع

۱۱۹. روی ارتفاع مثلث متساوی‌الساقین نقطه‌ای بیابید که مثلث پودر نظیر آن کمترین محیط را داشته باشد (Soons).

۴.۲.۲. مثلث قائم‌الزاویه

۱.۴.۲.۲. تعیین نقطه روی ضلع

۱۲۰. بر روی یک ضلع زاویهٔ قائمه از یک مثلث قائم‌الزاویه، نقطه‌ای بیابید که از رأس قائمه و وتر مثلث هم فاصله باشد.

۲.۴.۲.۲. تعیین نقطه روی وتر

۱۲۱. بر وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ مفروض، نقطه‌ای پیدا کنید که فاصلهٔ بین تصویرهای آن بر دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ مثلث، حداقل مقدار ممکن باشد.

۱۲۲. روی وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای یا در امتداد آن نقطه‌ای را طوری پیدا کنید که خط واصل تصویرهای آن روی ضلعهای زاویهٔ قائمه، بر وتر عمود باشد.

۳.۴.۲.۲. تعیین نقطه در درون مثلث

۱۲۳. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داده شده است. نقطهٔ N را در درون مثلث طوری پیدا کنید که زاویه‌های NBC، NCA و NAB برابر باشند.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۸۹۵

۵.۲.۲. مثلث با زاویه‌های حاده یا با زاویهٔ منفرجه

۱.۵.۲.۲. مثلث با زاویه‌های حاده

۱۲۴. کدام نقطه در داخل مثلث حاده‌الزاویه مفروض، دارای این خاصیت است که حاصل‌ضرب فاصله‌هایش از سه ضلع مثلث ماکزیمم می‌باشد.

الف. مرکز ثقل مثلث ب. مرکز ارتفاعی مثلث

ج. مرکز دایرهٔ محاطی مثلث د. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث

هـ. نقطهٔ ناگل مثلث (یعنی نقطهٔ برخورد خطهایی که از هر رأس مثلث گذشته و محیط مثلث را به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنند).

۳.۲. تعیین نقطه با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی و داده‌های دیگر

۱.۳.۲. چهارضلعی

۱.۱.۳.۲. چهارضلعی در حالت کلی

۱۲۵. در چهارضلعی محدب ABCD، قطر AC منصّف قطر BD می‌باشد، روی ضلعهای BC و DC بترتیب نقطه‌های E و F را چنان بیابید که اگر M و N بترتیب محل برخورد AE و AF با قطر BD باشد، داشته باشیم:

$$S_{BEM} = S_{DNF} = \frac{۱}{۲} S_{ANM}$$

اولین المپیاد مقدماتی آزمایشی ایران

۱۲۶. در چهارضلعی ABCD روی محیط چهارضلعی نقطه‌ای بیابید که از آن نقطه دو ضلع روبه‌رو تحت یک زاویه دیده شوند.

۱۲۷. یک چهارضلعی محدب داده شده است. نقطه‌ای در داخل این چهارضلعی پیدا کنید که اگر از آن‌جا به وسط چهار ضلع وصل کنیم، چهارضلعی به چهار قسمت هم‌ارز تقسیم شود.

۱۲۸. نقطه‌ای پیدا کنید که مجموع فاصلهٔ آن از چهار رأس یک چهارضلعی محدب حداقل مقدار ممکن باشد.

۱۲۹. در یک چهارضلعی محدب کدام یک از نقطه‌های زیر دارای این خاصیت است که مجموع فاصله‌هایش از چهاررأس چهارضلعی، حداقل مقدار ممکن را دارد؟

الف. مرکز ثقل چهارضلعی ب. یکی از رأسهای چهارضلعی

ج. نقطه‌ای بیرون چهارضلعی د. محل برخورد قطرهای چهارضلعی

هـ. محل برخورد پاره‌خطهایی که وسطهای ضلعهای مقابل را به هم وصل می‌کند.

مرحلهٔ اول سیزدهمین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۴

۲.۳.۱.۲. چهارضلعیهای ویژه

۲.۳.۱.۲.۱. متوازی‌الاضلاع

۱۳۰. متوازی‌الاضلاع ABCD داده شده است. نقطهٔ M را روی AB چنان تعیین کنید که داشته باشیم:

$$\frac{AM}{DM}=\frac{BM}{CM}$$

۱۳۱. روی ضلع CD از متوازی‌الاضلاع ABCD، نقطهٔ P را طوری تعیین کنید که دو زاویهٔ BPA و BPC مساوی باشند.

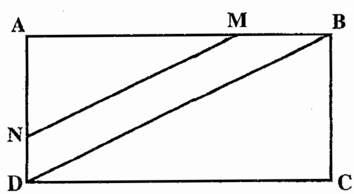
۱۳۲. در متوازی‌الاضلاع ABCD، روی قطر AC نقطه‌ای تعیین کنید که اگر آن را به A، B و D وصل کنیم، متساوی‌الاضلاع به سه قسمت معادل هم تقسیم شود.

۱۳۳. روی ضلعهای AB و CD از متوازی‌الاضلاع ABCD، نقطه‌های K و M را طوری پیدا کنید که مساحت چهارضلعی که از برخورد مثلثهای AMB و CKD به دست می‌آید، حداکثر مقدار ممکن باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۳

۲.۳.۱.۲.۲. مستطیل

۱۳۴. مستطیل ABCD داده شده است. دو نقطهٔ M و N را روی ضلعهای AB و AD چنان بیابید که MN موازی BD و مساحت مثلث AMN یک سوم مساحت مستطیل باشد.



۳.۲.۱.۳.۲. مربع

۱۳۵. ABCD و $A'B'C'D'$ نگاشتهای مربع از یک ناحیه‌اند که با مقیاسهای مختلف رسم شده و روی هم قرار گرفته‌اند. ثابت کنید، تنها یک نقطهٔ O از مربع کوچک وجود دارد که روی نقطهٔ O' از مربع بزرگ واقع است و هر دو نقطهٔ O و O'، معرف یک نقطه از ناحیه هستند. با روشهای اقلیدسی (یعنی به کمک پرگار و خط‌کش)، راهی برای تعیین نقطهٔ O پیدا کنید.

المپیادهای ریاضی امریکا، ۱۹۷۸

۴.۲.۱.۳.۲. لوزی

۱۳۶. لوزی ABCD داده شده است. نقطه‌ای در صفحهٔ این لوزی تعیین کنید که مجموع مربعهای فاصله‌اش از چهار رأس لوزی کمترین مقدار ممکن باشد.

۵.۲.۱.۳.۲. ذوزنقه

۱۳۷. در داخل یک ذوزنقهٔ غیرمشخص، نقطه‌ای پیدا کنید که مجموع فاصله‌های آن تا ضلعها (یا امتداد ضلعها)، حداقل مقدار ممکن باشد.

۲.۳.۲. پنج ضلعی

۱۳۸. در یک پنج ضلعی کوژ، طول همهٔ ضلعها، یکی است. روی قطر بزرگتر این پنج ضلعی، نقطه‌ای پیدا کنید که از آن‌جا، هر ضلع، به زاویه‌ای دیده می‌شود که از ۹۰ درجه بیشتر نباشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۹

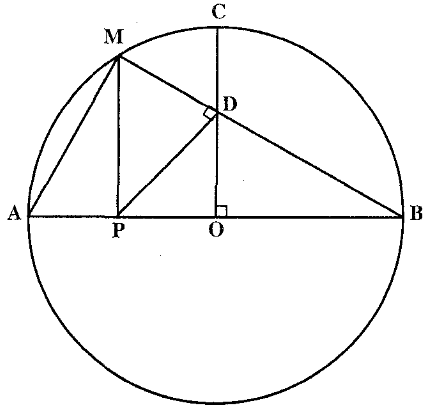
۴.۲. تعیین نقطه با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر

۱.۴.۲. ربع دایره

۱۳۹. ربع دایرهٔ AOB داده شده است. نقطهٔ M را طوری اختیار کنید که اگر مماس MA، شعاع OA را در نقطهٔ A و مماس MT، امتداد شعاع OB را در C قطع کند، داشته باشیم:

$$MA + MC = l$$

۲.۴.۲. نیمدایره

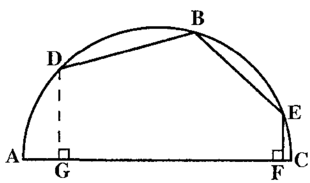


۱۴۰. در نیمدایرهٔ به قطر $AB = ۲R$ ، شعاع OC عمود بر AB را رسم می‌کنیم. روی نیمدایره، نقطهٔ M را چنان پیدا کنید که اگر P تصویر آن روی AB و D نقطهٔ برخورد MB و OC باشد، PD بر MB عمود باشد.

۱۴۱. روی محیط نیمدایره‌ای به قطر $AB = ۲R$، نقطهٔ C را چنان تعیین کنید که حاصلضرب اندازهٔ وتر AC در فاصلهٔ C تا قطر AB ، ماکزیمم شود.

$AC.CD = \max$

۱۴۲. بر امتداد قطر AB از نیمدایره‌ای به مرکز O ، نقطه‌ای مانند P به‌دست آورید که اگر از آن، مماس PC بر دایره رسم شود، $PC = ۲PA$ باشد.



۱۴۳. در نیمدایره‌ای، دو وتر $BD = BE = R$ را اختیار می‌کنیم. از D و E عمودهای DG و EF را روی قطر ثابت AC فرود می‌آوریم. جای نقطهٔ B را چنان بیابید که پنج ضلعی $GDBEF$ حداکثر مساحت ممکن را داشته باشد.

۳.۴.۲. یک دایره

۱.۳.۴.۲. تنها یک دایره

۱۴۴. قوسی از یک دایره معلوم است، مرکز آن را پیدا کنید.

۱۴۵. دایره‌ای را به بخشهایی تقسیم کنید که محیط برابر داشته باشند و از یک نیمدایره بیشتر نباشند.

۱. قسمتها هم‌ارز یکدیگر باشند.

۲. دایره به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده باشد.

۲.۴.۳.۲. یک دایره، نقطه

۲.۴.۳.۲.۱. یک دایره، یک نقطه

۱۴۶. بر روی دایرهٔ C نقطه‌ای را معین کنید که از نقطهٔ مفروض A به فاصلهٔ معین l باشد.

۱۴۷. دایرهٔ O به شعاع واحد و نقطهٔ A به فاصلهٔ ۲ = OA سانتیمتر داده شده است. مطلوب است تعیین مرکز دایره‌ای به شعاع ۲ که از A بگذرد و بر دایرهٔ O مماس شود.

۱۴۸. بر دایرهٔ (۴ سانتیمتر، O) C نقطه‌هایی تعیین کنید که از نقطهٔ A که به فاصلهٔ ۸ سانتیمتر از مرکز دایره واقع است، به فاصلهٔ ۴ سانتیمتر باشد.

۲.۴.۳.۲.۲. یک دایره، دو نقطه

۲.۴.۳.۲.۲.۱. یک دایره، دو نقطه در صفحهٔ دایره

۱۴۹. یک دایرهٔ S ، نقطه‌های A و B ، و یک زاویهٔ α داده شده‌اند. بر S دو نقطهٔ C و D را بیابید که $CA \| DB$ و $\overset{\frown}{CD} = \alpha$.

۱۵۰. روی دایره‌ای داده شده، نقطه‌ای تعیین کنید به‌طوری که خطهای رسم شده از آن نقطه، به دو نقطهٔ داده شده در صفحهٔ دایره، دایره را در دو سر وتری با طول معلوم قطع کند.

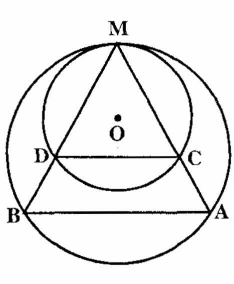
۱۵۱. روی دایره‌ای معلوم نقطه‌ای پیدا کنید که با دو نقطه‌ای که روی دایره از وصل کردن آن به دو نقطهٔ معلوم به‌وجود می‌آید، مثلثی با زاویهٔ معلوم بسازد. (دو حالت : زاویهٔ معلوم مساوی زاویه‌ای که ضلعهای گذرنده از دو نقطهٔ معلوم می‌سازند باشد یا نباشد).

۲.۴.۳.۲.۲.۲. یک دایره، دو نقطه خارج دایره

۱۵۲. دایرهٔ (C) و دو نقطهٔ A و B در خارج آن مفروضند. نقطهٔ M را روی محیط این دایره طوری انتخاب کنید که $MA^2 + MB^2$ کوچکترین مقدار ممکن را داشته باشد.

دومین المپیاد ریاضی ایران، آذربایجان شرقی، ۱۳۶۳

۱۵۳. دایرهٔ O و دو نقطهٔ A و B در خارج آن داده شده‌اند. روی دایره، نقطهٔ M را چنان معین کنید که اگر MA و MB بترتیب دایره را در نقطه‌هایی مانند C و D قطع کنند، CD موازی با AB باشد.



۲.۴.۳.۲.۲.۳. یک دایره، دو نقطه روی دایره

۱۵۴. روی دایره‌ای دو نقطهٔ A و B داده شده است. روی این دایره نقطهٔ C را طوری پیدا کنید که:

۱. حاصلضرب AC.BC دارای بیشترین مقدار ممکن باشد.

۲. حاصل‌جمع AC + BC به بیشترین مقدار ممکن برسد.

۱۵۵. دو نقطهٔ A و B روی دایرهٔ AOB داده شده‌اند. نقطهٔ C را روی این خم چنان بیابید که $AC + CB = l$ باشد (l طول معلومی است).

۱۵۶. دو نقطهٔ A و B روی دایرهٔ مفروض γ داده شده‌اند. روی محیط این دایره:

الف. نقطهٔ M را پیدا کنید، به‌نحوی که $MA^2 + MB^2$ حداقل مقدار ممکن باشد.

ب. نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که $MA^2 - MB^2$ کمترین مقدار ممکن باشد.

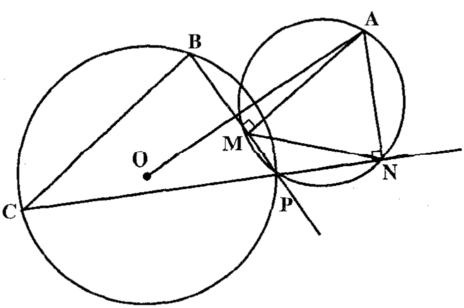
۱۵۷. یک دایره و دو نقطه روی آن داده شده‌اند. نقطه‌ای روی کمان خاص از این دو نقطه پیدا کنید به قسمی که نسبت وترهای نظیر دو کمان ایجاد شده برابر $\frac{m}{n}$ باشد.

۲.۴.۳.۲.۳. یک دایره، سه نقطه

۱۵۸. سه نقطهٔ A، B و C بر دایرهٔ K داده شده‌اند. نقطه چهارم D را بر دایرهٔ K (تنها با استفاده از خط‌کش «نامدرج» و پرگار) چنان بیابید که در چهار ضلعی‌ای که به این ترتیب به‌دست می‌آید، بتوانیم دایره‌ای محاط کنیم.

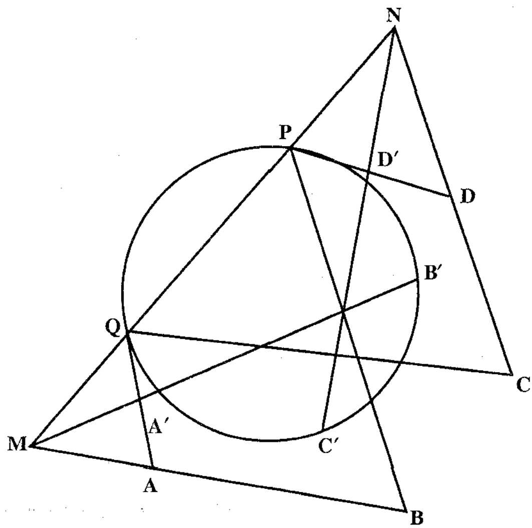
المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۲

۱۵۹. نقطهٔ A و دایرهٔ O و دو نقطهٔ B و C بر آن داده شده‌اند. اگر P نقطه‌ای اختیاری از دایره باشد، از A عمودهای AM و AN را بترتیب بر PB و PC فرودآوریم، نقطهٔ P را چنان معین کنید که $MN = l$ باشد.



۲.۴.۳.۲.۴. یک دایره، چهار نقطه

۱۶۰. دو جفت نقطه‌های (A,B) و (C,D) و دایرهٔ O داده شده است. روی دایره دو نقطهٔ P و Q را چنان معین کنید که دو چهارضلعی ABPQ و CDPQ محاطی باشند.



۱۶۱. وترهای AB و CD از یک دایره داده شده‌اند. بر این دایره نقطه‌ای مانند X بیابید به قسمی که AX و BX روی CD، یک پاره‌خط EF به‌طول معلوم a جدا کنند.

۱۶۲. دو وتر AB و CD در یک دایرهٔ C و یک نقطهٔ مفروض J روی وتر CD داده شده‌اند. نقطه‌ای مانند X بر محیط دایره بیابید به قسمی که وترهای AX و BX روی وتر CD ، پاره‌خط EF را جدا کنند که نقطهٔ J وسط EF باشد.

۲.۴.۳.۳. یک دایره، پاره‌خط

۲.۴.۳.۳.۱. یک دایره، یک پاره‌خط

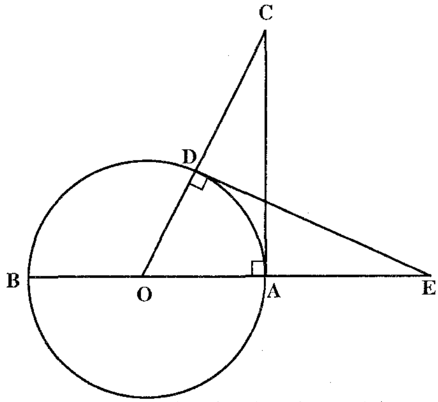
۱۶۳. قطعه خط DF و دایرهٔ (O) داده شده است. نقطهٔ C را روی دایره چنان اختیار کنید که خطهای CD و CF ، از دایره وتر AB را موازی DF جدا کنند. (بوردون)

۱۶۴. دایرهٔ (O) و پاره‌خط ثابت CD داده شده‌اند. نقطهٔ A را روی این دایره چنان بیابید که زاویهٔ CAD حداکثر مقدار، یا حداقل مقدار خود را داشته باشد.

۲.۴.۳.۴. یک دایره، خط

۲.۴.۳.۴.۱. یک دایره، یک خط

۲.۴.۳.۴.۱.۱. یک دایره، قطر



۱۶۵. نقطه‌ای بر امتداد قطر یک دایره چنان پیدا کنید که طول مماس رسم شده از آن نقطه بر دایره، مساوی قطر دایره باشد.

۱۶۶. روی امتداد قطری از یک دایرهٔ مفروض، نقطه‌ای چنان بیابید که طول مماسهای رسم شده از آن نقطه بر دایره، با شعاع دایره برابر باشد.

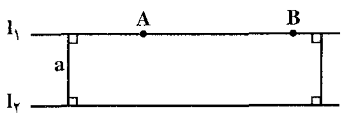
۱۶۷. دایره‌ای به شعاع ۱۶ سانتیمتر داده شده است. خط D از مرکز دایره می‌گذرد. مطلوب است مرکز دایره‌ای به شعاع ۴ سانتیمتر که به خط D و دایرهٔ مفروض مماس شود.

۲.۴.۳.۴.۱.۲. یک دایره، یک خط ناقطر

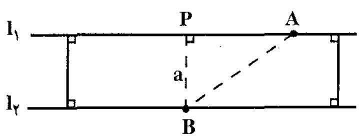
۱۶۸. روی خط AB نقطه‌ای پیدا کنید مانند P که اگر PT و PT′ دو مماس از این نقطه بر دایره‌ای معلوم باشد، داشته باشیم:

$$A\hat{P}T = B\hat{P}T'$$

۱۶۹. بر روی خط داده شده، نقطه‌ای به‌دست آورید که قوت آن نسبت به دایرهٔ مفروضی، مساوی مقدار معین P باشد.



(الف)



(ب)

۱۷۰. منظور از خط‌کش موازی، خط‌کشی است با دو لبهٔ موازی. چنین خط‌کشی را می‌توان برای رسم دو خط موازی l_1 و l_2 به‌کار برد که فاصلهٔ آنها a، پهنای خط‌کش باشد و l_1 از دو نقطهٔ A و B بگذرد (شکل الف)، یا این که l_1 از A و l_2 از B بگذرد (شکل ب). روشن است که حالت اخیر فقط زمانی صادق است که $AB \geq a$. نشان دهید که فقط با استفاده از یک خط‌کش موازی به پهنای a ممکن است نقطه‌های برخورد خط مفروض l را با دایره به مرکز مفروض A و شعاع a پیدا کرد، ولو اینکه دایره رسم نشده باشد.

خط‌کش موازی یک ابزار رسم بسیار متداول است، و می‌خواهیم تعیین کنیم که چه

ترسیمهایی را می‌توان با استفادهٔ تنها از چنین خط‌کشی انجام داد. روشن است که همهٔ ترسیمهایی را که می‌توان به وسیلهٔ یک ستاره انجام داد، با خط‌کش موازی نیز می‌توان انجام داد. ولی عکس آن صحیح نیست. به‌طور مثال چنانچه خواهیم دید، ممکن نیست از یک نقطهٔ M خطی موازی با خط مفروض l با استفاده از ستارهٔ تنها رسم کرد؛ در عین حال روشن است که ممکن است ترسیمهایی از این نوع را تنها با استفاده از خط‌کش موازی انجام داد.

به آسانی دیده می‌شود که همهٔ ترسیمهایی را که می‌توان با یک خط‌کش موازی انجام داد، با ستاره و پرگار نیز می‌توان انجام داد (زیرا با استفاده از این ابزارها می‌توان هردو ترسیمی را که در شکلهای (الف) و (ب) نشان داده شده‌اند، رسم کرد؛ رسم خطهای l_1 و l_2 در شکل (ب) بدل می‌شود، به تعیین رأس P از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABP، که وتر AB و ضلع $BP = a$ از آن داده شده است).

می‌توان نشان داد که بعکس، همهٔ ترسیمهایی را که می‌توان با ستاره و پرگار انجام داد، می‌توان با خط‌کش موازی تنها انجام داد. در این ارتباط ترسیم موضوع مسألهٔ داده شده نقش اساسی دارد.

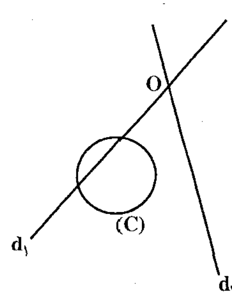
۱۷۱. بر روی دایرهٔ C نقطهٔ مفروضی را پیدا کنید، بطوری که از خط داده شدهٔ Δ به فاصلهٔ معلوم l باشد.

۱۷۲. دایره‌ای به مرکز O و شعاع ۳ و خط D به فاصلهٔ ۵ از مرکز دایره مفروضند. نقطه‌ای مانند A پیدا کنید که از خط D به فاصلهٔ ۲/۵ و از دایره به فاصلهٔ ۵ باشد. مسأله چند جواب دارد؟

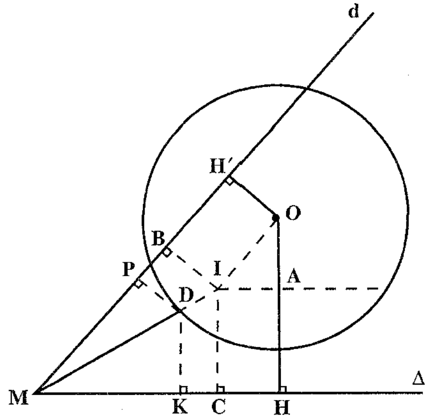
۱۷۳. قطب یک خط نسبت به یک دایره را به‌دست‌آورید.

۲.۴.۳.۴.۲. یک دایره، دو خط

۱۷۴. دایرهٔ (C) و دو خط متقاطع d_1 و d_2 داده شده‌اند. نقطه‌ای روی دایرهٔ (C) تعیین کنید که نسبت فاصله‌اش از دو خط d_1 و d_2 مساوی k باشد.



۱۷۵. بر روی دایرهٔ O نقطه‌ای پیدا کنید که فاصله‌اش از خط Δ دو برابر فاصله‌اش از خط d باشد.



۱۷۶. دریاچه‌ای بین دو جادهٔ مستقیم قرار دارد. در چه نقطه‌ای از کنار دریاچه، آسایشگاهی بسازیم، به‌نحوی که مجموع فاصله‌های آن از دو جاده حداقل باشد؟ حالتهایی را درنظر بگیرید که دریاچه :

الف. به شکل دایره باشد.　　　　ب. به شکل مستطیل باشد.

۲.۴.۳.۵. یک دایره، زاویه

۲.۴.۳.۵.۱. یک دایره، یک زاویه

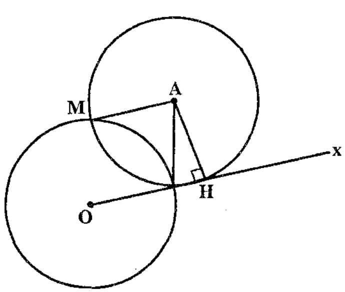
۱۷۷. دایرهٔ (C) و زاویهٔ xAy داده شده است. نقطه‌ای روی دایرهٔ (C) بیابید که نسبت فاصله‌اش از دو ضلع این زاویه، برابر k باشد.

۲.۴.۳.۶. یک دایره، نقطه، پاره‌خط

۱۷۸. دایرهٔ (O) ، پاره‌خط AB و نقطهٔ D داده شده‌اند. نقطه‌ای از دایرهٔ (O) را بیابید که از آن نقطه، پاره‌خط AB تحت زاویه $\hat{ACB}$ دیده شود.

۲.۴.۳.۷. یک دایره، نقطه، نیمخط

۱۷۹. دایرهٔ (O) ، نیمخط Ox و نقطهٔ A داده شده‌اند. نقطه‌ای روی دایره چنان بیابید که فاصله‌اش تا نقطهٔ A ، مساوی فاصلهٔ نقطهٔ A تا نیمخط Ox باشد.



۲.۴.۳.۸. یک دایره، خط، نقطه

۲.۴.۳.۸.۱. یک دایره، یک قطر، یک نقطه

۱۸۰. یک دایره، قطر AB از آن و نقطهٔ C واقع بر این قطر، داده شده‌اند. روی محیط دایره، دو نقطهٔ X و Y را، قرینهٔ هم نسبت به قطر AB ، طوری پیدا کنید که خط راست YC بر خط راست XA عمود باشد.

۲.۴.۳.۸.۲. یک دایره، یک خط ناقطر، یک نقطه

۱۸۱. خط Δ و نقطهٔ O و دایرهٔ C داده شده‌اند. بر خط Δ نقطه‌هایی به‌دست آورید که قرینه‌شان نسبت به O روی دایرهٔ C باشد.

۱۸۲. MN کمانی از یک دایرهٔ S و l خطی است که این کمان را در یک نقطه می‌برد. نقطهٔ برخورد دیگر l را با S ، با استفاده از ستارهٔ تنها، پیدا کنید.

۱۸۳. روی یک خط داده شده، دونقطه بیابید که از نقطهٔ مفروضی روی آن خط هم فاصله، و نسبت به دایرهٔ مفروضی مزدوج باشند.

۲.۴.۳.۸.۳. یک دایره، قطر، دونقطه

۱۸۴. دایره‌ای به مرکز O و قطر MN داده شده است و نقطه‌های A و B روی محیط ثابت هستند. نقطهٔ C را روی محیط طوری تعیین کنید که خطهای CA و CB پاره‌خطی به طول l روی قطر جدا کنند.

۱۸۵. در دایره‌ای به مرکز O و قطر MN ، نقطه‌های A و B بر روی محیط دایره ثابت هستند. نقطهٔ C را روی این دایره طوری تعیین کنید که خطهای CA و CB در طرفین مرکز، روی قطر، دو طول متساوی جدا کند.

۲.۴.۳.۸.۴. یک دایره، یک خط ناقطر، دو نقطه

۱۸۶. دایرهٔ O و خط Δ در خارج آن داده شده‌اند. روی محیط دایره دو نقطهٔ ثابت A و B قرار گرفته‌اند. نقطه‌ای مانند C را طوری تعیین کنید که، CA و CB از خط Δ پاره‌خطی به طول l جدا کند.

۱۸۷. دایرهٔ (O) ، نقطهٔ A و خط ثابت D که از این نقطه می‌گذرد داده شده است. روی این خط نقطه‌ای مانند B را بیابید که از نقطهٔ A و از دایرهٔ (O) به یک فاصله باشد.

۲.۴.۳.۸.۵. یک دایره، یک خط ناقطر، سه نقطه

۱۸۸. روی یک دایرهٔ معلوم نقطه‌ای پیدا کنید که اگر آن را به دو نقطهٔ معلوم از این دایره وصل کنیم، خطی معلوم را در دو نقطه قطع کند، به‌طوری که نسبت فاصله‌های این دو نقطه از یک نقطه معلوم، روی این خط معلوم باشد.

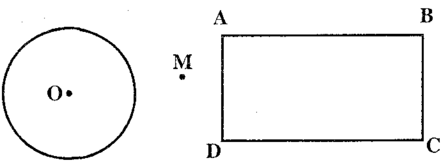
۱۸۹. دو نقطهٔ A و B روی یک دایره و نقطهٔ M روی خط l داده شده‌اند. روی دایره، نقطهٔ X را تعیین کنید، به‌قسمی که AX و BX خط l را در نقطه‌های هم‌فاصله از M قطع کنند.

۲.۴.۳.۹. یک دایره، یک خط، یک وتر

۱۹۰. دایرهٔ C ، وتر AB ، و خط Δ عمودمنصف AB است. نشان دهید خارج نقطهٔ B سه نقطه نظیر M یافت می‌شود، به‌طوری که اگر H تصویر M روی Δ باشد، داشته باشیم MA = ۲MH. در حالت مخصوص، نوع مثلث به‌وجود آمده از این نقطه چیست؟

۲.۴.۳.۱۰. یک دایره، مستطیل

۱۹۱. دایرهٔ O و مستطیل ABCD و نقطهٔ M (M خارج دایره و مستطیل) داده شده‌اند. بر روی مستطیل و دایره نقطه‌هایی به‌دست آورید که دوبه‌دو و با M در یک استقامت باشند و M وسط آنها باشد.



۲.۴.۴. دو دایره

۲.۴.۴.۱. تنها دو دایره

۲.۴.۴.۱.۱. دو دایره در حالت کلی

۱۹۲. نقطه‌ای مشخص کنید به‌طوری که از آن نقطه، دو دایرهٔ معلوم به زاویه‌های معلوم دیده شوند.

۱۹۳. فرض می‌کنیم دو دایرهٔ S_1 و S_2 داده شده باشند. یک ترسیم با ستارهٔ تنها برای تعیین مرکزهای آنها پیدا کنید، هرگاه دو دایره، (الف) متقاطع ؛ (ب) مماس ؛ (ج) هم‌مرکز باشند. اکنون می‌توانیم قضیهٔ مربوط به ترسیم خط‌کش موازی را ثابت کنیم. از آن‌جا که نقطه‌های برخورد یک خط l با یک دایرهٔ S را، که مرکزش A و شعاعش a معلومند، می‌توان با خط‌کش موازی تنها معین کرد. مطمئناً همهٔ مسایلی را که با ستاره و پرگار حل‌پذیرند، می‌توان با یک خط‌کش موازی نیز حل کرد، به‌شرطی که یک دایرهٔ کمکی به مرکز معلوم در صفحه داده شده باشد.

۱۹۴. دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ داده شده‌اند. روی دایرهٔ (C') نقطه‌ای بیابید که قوت آن نسبت به دایرهٔ (C) برابر مقدار معلوم P باشد.

۱۹۵. نقطه‌ای تعیین کنید که نسبت به دو دایرهٔ مفروض دارای یک‌قطبی باشد.

۲.۴.۴.۱.۲. دو دایرهٔ متخارج

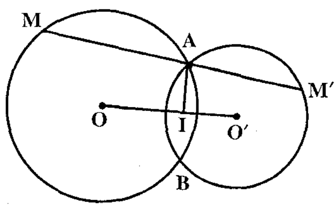
۱۹۶. نقطه‌ای پیدا کنید که مماس رسم شده از آن نقطه بر دو دایرهٔ متخارج به‌طول l باشد.

۲.۴.۴.۱.۳. دو دایره مماس برون

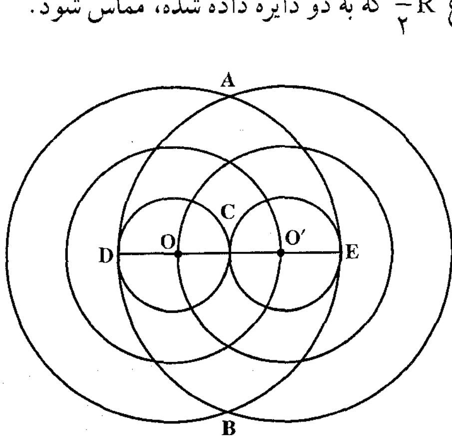
۱۹۷. دو دایرهٔ (O) و (O') در نقطهٔ A مماس برون هستند. نقطه‌هایی روی دو دایره بیابید که از نقطهٔ A به فاصلهٔ l باشند.

۲.۴.۴.۱.۴. دو دایرهٔ متقاطع

۱۹۸. دو دایره به مرکزهای O و O' در نقطه‌های A و B متقاطعند. از نقطهٔ A خطی رسم می‌کنیم که دو دایره را در نقطه‌های M و M' قطع کند. عمود بر MM' در نقطهٔ A، خط‌المرکزین دو دایره را درنقطهٔ I قطع می‌کند. محل نقطهٔ I را چنان بیابید که نقطهٔ A وسط MM' باشد.



۱۹۹. دو دایره به شعاع R که فاصلهٔ مرکزهایشان R است، داده شده‌اند. مطلوب است مرکز دایره‌ای به شعاع $\frac{1}{2}R$ که به دو دایرهٔ داده شده، مماس شود.



۲.۴.۴.۲. دو دایره، نقطه

۲.۴.۴.۲.۱. دو دایره، یک نقطه

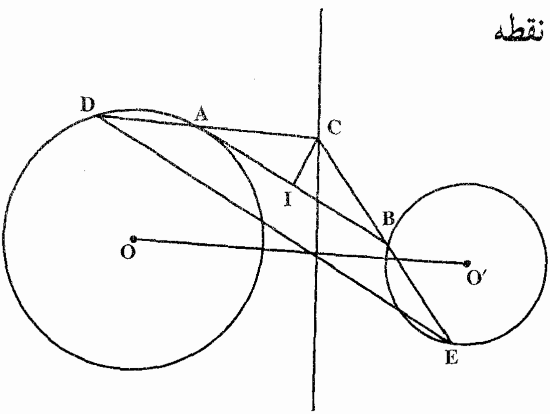
۲۰۰. دو دایرهٔ متمایز K_1 و K_2، واقع در یک صفحه، یکدیگر را در دو نقطهٔ A و B قطع کرده‌اند و می‌دانیم، AB قطری از دایرهٔ K_1 است. نقطهٔ P را روی محیط دایرهٔ K_2 و در درون دایرهٔ K_1 درنظر می‌گیریم. تنها با استفاده از وسیلهٔ T (که به کمک آن می‌توان خط راستی کشید که از دو نقطهٔ داده شده می‌گذرد و از نقطهٔ مفروض، عمودی بر خط راست مفروض رسم کرد)، دونقطهٔ C و D را روی محیط دایرهٔ K_1 طوری پیدا کنید که CD بر AB عمود، و اندازهٔ زاویهٔ CPD برابر ۹۰ درجه باشد.

المپیادهای ریاضی امریکا، ۱۹۸۶

۲۰۱. دو نقطه، هریک روی یکی از دو دایرهٔ مفروض، چنان بیابید که با نقطهٔ مفروضی همخط و از آن به یک فاصله باشند.

۲.۴.۴.۲.۲. دو دایره، دو نقطه

۲۰۲. دو دایرهٔ O و O′ و نقطهٔ A بر اولی و نقطهٔ B بر دومی داده شده است. روی محور اصلی دو دایره، نقطهٔ C را چنان اختیار کنید که اگر دو خط قاطع CAD و CBE را رسم کنیم، خط DE با AB موازی باشد.



۲۰۳. دو دایرهٔ (O) و (O′) و دو نقطهٔ A و A′ بترتیب واقع بر آنها داده شده‌اند. نقطهٔ S را روی محور اصلی این دو دایره چنان انتخاب کنید که اگر M و M′ نقطه‌های دیگر برخورد SA و SA′ با دو دایرهٔ (C) و (C′) باشند، MM′ بر محور اصلی دو دایره عمود باشد.

۲۰۴. C_1 و C_2 دو دایرهٔ هم‌مرکز در صفحه و A و B دو نقطهٔ مفروض روی C_1 هستند. نقطهٔ M روی C_2 را چنان بیابید که $|MA - MB|$ ماکزیمم باشد و مقدار ماکزیمم را حساب کنید.

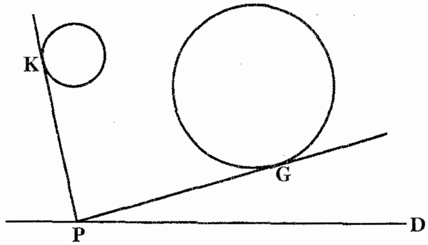
مرحلهٔ سوم یازدهمین دورهٔ المپیادهای ریاضی ایران، ۱۳۷۳

۲.۴.۴.۳. دو دایره، خط

۲.۴.۴.۳.۱. دو دایره، یک خط

۲۰۵. بر روی دو دایرهٔ مفروض، دو نقطه تعیین کنید که فاصلهٔ معینی از هم داشته باشند و خطی که از آنها می‌گذرد، راستای مفروضی داشته باشد.

۲۰۶. محل نقطهٔ P را بیابید. دو جزیرهٔ کوچک و بزرگ به فاصله‌های نامشخص از یکدیگر، و از ساحل، در یک اقیانوس قرار دارند. هر دو جزیره به شکل دایره‌ای کامل هستند. خطی که خشکی را از اقیانوس جدا می‌کند، در این منطقه مستقیم است (به شکل توجه کنید). یک



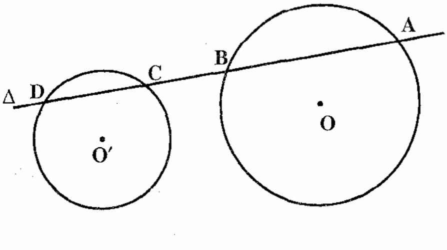
مؤسسهٔ کشتیرانی در نقطهٔ P ، واقع در مرز خشکی و اقیانوس، داده شده است، که فقط یک کشتی دارد. این کشتی از جزیرهٔ کوچک به ساحل، و از ساحل به جزیرهٔ بزرگ می‌رود. سپس عکس این مسیر را می‌پیماید و هریک از دو قسمت مسیر به جزیرهٔ مربوطه‌اش مماس است. ما نقطه‌های تماس را در شکل با K و G نشان داده‌ایم. هزینهٔ مسافرت از جزیرهٔ کوچک به جزیرهٔ بزرگ، و بعکس، از رابطهٔ $(PK^2 + PG^2)$ محاسبه می‌شود. معما عبارت از این است : نقطهٔ P را در چه نقطه‌ای از این خط مستقیم باید انتخاب کرد، تا هزینهٔ مسافرت از یک جزیره به جزیرهٔ دیگر می‌نیمم شود.

۲۰۷. خط MN و دو دایرهٔ S_1 و S_2 در یک طرف آن داده شده‌اند. نقطهٔ X را بر خط MN چنان پیدا کنید که یکی از مماسهای رسم شده از این نقطه بر دایرهٔ اولی و یکی از مماسهای رسم شده از همین نقطه بر دایرهٔ دومی، زاویه‌های مساوی با خط MN بسازند.

۲۰۸. روی خط معلوم Δ نقطه‌ای تعیین کنید که چون از آن نقطه دو مماس بر دو دایرهٔ معلوم C و C' (که با Δ روی یک صفحه قرار دارند) رسم کنیم، Δ زاویهٔ بین دو مماس را نصف کند.

۲۰۹. خط Δ و دو دایرهٔ C و C' داده شده‌اند. روی خط Δ نقطه‌ای به‌دست آورید که بتوان از آن، دو مماس متساوی بر دو دایره رسم کرد.

۲۱۰. خطی دو دایره را در چهار نقطه قطع می‌کند. روی این خط دو نقطه بیابید، به‌طوری که هرکدام نقطهٔ برخورد دو خط قطبی نقطهٔ دیگر نسبت به دو دایرهٔ مفروض باشد.



۲.۴.۵. سه دایره

۲.۴.۵.۱. تنها سه دایره

۲۱۱. سه دایرهٔ مساوی داده شده‌اند. نقطه‌ای تعیین کنید که از آن نقطه، این سه دایره تحت یک زاویه دیده شوند.

۲۱۲. سه دایره داده شده‌اند. نقطه‌ای بر صفحه پیدا کنید که مماسهای رسم شده از آن، بر دایره‌ها یکی با دیگری زاویه‌های برابر بسازند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۵

۲.۵. تعیین نقطه با معلوم بودن: مقطعهای مخروطی، مقطعهای مخروطی و داده‌های دیگر

۲.۵.۱. بیضی

۲۱۳. روی بیضی به کانونهای F و F′ ، نقطهٔ M را چنان تعیین کنید که داشته باشیم :

$M\hat{F}F' = ۲ M\hat{F'}F$

۲۱۴. بیضی (E) داده شده است. مطلوب است تعیین نقطهٔ M ، به‌طوری که اگر P و Q محل برخورد مماسهای رسم شده از M بر بیضی باشند، نقطهٔ G مرکز ثقل مثلث MPQ روی بیضی (E) باشد.

۲۱۵. بر روی بیضی، نقطه‌ای مانند M ، طوری پیدا کنید که قائم در این نقطه بر بیضی، با OM (O مرکز بیضی) زاویهٔ معلوم θ بسازد.

۲۱۶. Δ خط هادی و F کانون وابسته به آن و A یک رأس بیضی است. کانون و رأس دیگر را به‌دست آورید.

۲۱۷. رأس A و کانون F ، و خط Δ مماس بر بیضی داده شده‌اند :

۱. کانون دیگر بیضی را به‌دست آورید.

۲. فاصلهٔ کانون دیگر را از خط مماس تعیین کنید.

۲۱۸. دایرهٔ اصلی یک بیضی و یک نقطهٔ M از آن معلوم است. دو کانون بیضی را به‌دست آورید.

۲.۵.۲. هذلولی

۲۱۹. مطلوب است، مرکز یک هذلولی با معلوم بودن یک کانون و یک رأس و یک مماس (بحث شود).

۳.۵.۲. سهمی

۲۲۰. مطلوب است تعیین کانون یک سهمی که هادی آن خط مفروض D بوده و از دو نقطهٔ معلوم A و M می‌گذرد. فرض می‌کنیم نقطهٔ A ثابت باشد، درچه ناحیه‌ای نقطهٔ M باید قرار گیرد تا مسأله ممکن باشد؟

۲۲۱. می‌دانیم که در سهمی، خط هادی مکان هندسی... است. اگر (Δ) خط هادی یک سهمی و Px و Py دو مماس متعامد بر آن باشند، کانون سهمی را پیدا کنید.

۲۲۲. PT و PT' دو مماس بر سهمی و F کانون آن معلوم است. رأس سهمی را به دست آورید. از کدام خواص استفاده می‌کنید؟

۴.۵.۲. مقطع مخروطی

۲۲۳. در یک مقطع مخروطی با معلوم بودن مرکز O و یک مماس T و یک هادی D ، مطلوب است تعیین کانون F نظیر این خط هادی.

۲۲۴. در یک مقطع مخروطی، کانون F ، و D هادی مربوطه و T یک مماس از آن معلومند :

۱. کانون دوم F' را رسم کنید.

۲. به فرض این که D' قرینهٔ D نسبت به T باشد، ثابت کنید که جنس مقطع مخروطی بسته به وضع قرار گرفتن F در مناطق جدا شده به وسیلهٔ D ، D' می‌باشد.

۲۲۵. مطلوب است تعیین کانونهای یک مقطع مخروطی با معلوم بودن مرکز و یک خط هادی و یک نقطه.

۲۲۶. از یک مقطع مخروطی یک خط هادی، یک مماس با نقطهٔ تماس و خروج از مرکز را داده‌اند، کانون آن را به‌دست آورید.

۶.۲. تعیین نقطه با معلوم بودن منحنیهای دیگر

۲۲۷. خم بسته‌ای بدون هیچ نقطهٔ برخورد و به‌طول 21 واقع در یک صفحه داده شده است. نقطه‌ای چنان بیابید که فاصلهٔ آن از هر نقطهٔ خم، کمتر از l و یا مساوی آن باشد.

۲۲۸. نقطه‌ای درون یک شکل دلخواه داده شده است. خطی از این نقطه چنان رسم کنید که این شکل را به دو بخش معادل هم، یا به دو بخش که مساحتهای آنها به نسبت معینی است، تقسیم کنید.

بخش ۳

• رسم پاره‌خط، نیمخط، خط، زاویه

۳.۱.رسم پاره‌خط

۳.۱.۱. رسم پاره‌خط با معلوم بودن: نقطه، پاره‌خط، نیمخط، خط، زاویه

۳.۱.۱.۱.نقطه

۳.۱.۱.۱.۱. دو نقطه

۳.۱.۱.۱.۲. سه نقطه

۳.۱.۱.۱.۲.۱. سه نقطه در هرحالت

۳.۱.۱.۱.۳. چهار نقطه

۳.۱.۱.۱.۳.۱. چهار نقطه در هرحالت

۳.۱.۱.۱.۴. n نقطه $(n \geq ۵)$

۳.۱.۱.۱.۴.۱. n نقطه در هرحالت

۳.۱.۱.۱.۴.۲. n نقطهٔ ناهمخط

۳.۱.۱.۲. پاره‌خط

۳.۱.۱.۲.۱. یک پاره‌خط

۳.۱.۱.۲.۲. دو پاره‌خط

۳.۱.۱.۲.۳. سه پاره‌خط

۳.۱.۱.۲.۴. چهار پاره‌خط

۳.۱.۱.۲.۵. پنج پاره‌خط

۳.۱.۱.۲.۶. n پاره‌خط $(n \geq ۶)$

۳.۱.۱.۳. نیمخط

۳.۱.۱.۳.۱. یک نیمخط

۳.۳. ۱. ۴. خط

۳.۳.۱.۴.۱. یک خط

۳.۳.۱.۴.۲. دو خط

۳.۳.۱.۴.۳. سه خط

۳.۳.۱.۴.۳.۱. سه خط در هر حالت

۳.۳.۱.۴.۳.۲. سه خط همرس

۳.۳.۱.۴.۴. چهار خط

۳.۳.۱.۴.۴.۱. چهار خط در هر حالت

۳.۳. ۱. ۵. زاویه

۳.۳.۱.۵.۱. یک زاویه

۳.۳. ۱. ۶. پاره‌خط، نقطه

۳.۳.۱.۶.۱. یک پاره‌خط، یک نقطه

۳.۳.۱.۷. نیمخط، نقطه

۳.۳.۱.۷.۱. دو نیمخط، یک نقطه

۳.۳. ۱. ۸. خط، نقطه

۳.۳.۱.۸.۱. یک خط، یک نقطه

۳.۳.۱.۸.۲. یک خط، دو نقطه

۳.۳.۱.۸.۳. یک خط، سه نقطه

۳.۳.۱.۸.۴. دو خط، یک نقطه

۳.۳.۱.۸.۴.۱. دو خط در هر حالت، یک نقطه

۳.۳.۱.۸.۴.۲. دو خط موازی، یک نقطه

۳.۳.۱.۸.۴.۳. دو خط متقاطع، یک نقطه

۳.۳.۱.۸.۵. دو خط، دو نقطه

۳.۳.۱.۸.۵.۱. دو خط در هر حالت، دو نقطه

۳.۳.۱.۸.۵.۲. دو خط موازی، دو نقطه

۳.۳.۴.۴.۱.۵. دو دایرهٔ مماس داخل

۳.۳.۴.۴.۱.۶. دو دایره یکی درون دیگری (متداخل)

۳.۳.۴.۴.۱.۷. دو دایرهٔ هم‌مرکز

۳.۳.۴.۴.۲. دو دایره، نقطه

۳.۳.۴.۴.۲.۱. دو دایره، یک نقطه

۳.۳.۴.۴.۳. دو دایره، خط

۳.۳.۴.۴.۳.۱. دو دایره، یک خط یا یک راستا

۳.۳.۴.۵. سه دایره

۳.۳.۴.۶. چهار دایره و بیشتر

۳.۳.۵. رسم خط با معلوم بودن: مقطعهای مخروطی، مقطعهای مخروطی و داده‌های دیگر

۳.۳.۵.۱. بیضی

۳.۳.۵.۱.۱. یک بیضی

۳.۳.۵.۱.۲. دو بیضی

۳.۳.۵.۱.۳. یک بیضی، یک دایره

۳.۳.۵.۲. هذلولی

۳.۳.۵.۳. سهمی

۳.۳.۵.۳.۱. یک سهمی

۳.۳.۵.۳.۲. دو سهمی

۳.۳.۵.۴. مقطع مخروطی

۳.۳.۶. رسم خط با معلوم بودن شکلهای دیگر

۳.۴. رسم زاویه

بخش ۳. رسم پاره‌خط، نیمخط، خط، زاویه

۱.۳.رسم پاره‌خط

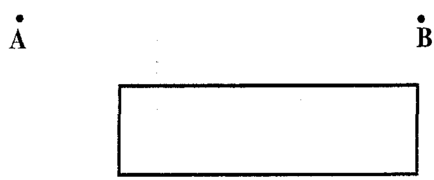
۱.۱.۳. رسم پاره‌خط با معلوم بودن: نقطه، پاره‌خط، نیمخط، خط، زاویه

۱.۱.۱.۳.نقطه

۱.۱.۱.۱.۳. دو نقطه

۲۲۹. دو نقطهٔ A و B را در یک صفحه درنظر می‌گیریم. چگونه می‌توانیم آنها را با یک خط به‌هم وصل کنیم، در صورتی که فقط یک ستاره کوتاهتر از فاصلهٔ AB ، در دست داشته باشیم (شکل)؟

در حل مسأله‌های ترسیمی معمولاً فرض می‌کنند که هر دو نقطه را می‌توان با یک خط به‌هم وصل کرد. یعنی کسی که مسأله را حل می‌کند، ستاره‌ای به طول بینهایت در اختیار دارد. البته خط‌کشهای واقعی کاملاً کوتاهند. اهمیت حل این مسأله در این است که نشان می‌دهد همهٔ ترسیمهایی که می‌توانند با یک ستارهٔ نامتناهی انجام گیرند، می‌توانند با یک ستاره با طول متناهی (در واقع با یک ستارهٔ دلخواه کوتاه) نیز صورت پذیرند.



همچنین، ملاحظه می‌کنیم که فرجهٔ محدود پرگار، موجب تقلیل ردهٔ ترسیمهای ممکن نمی‌شود ؛ یعنی می‌توان ثابت کرد، هر ترسیمی را که بتوان با ستاره و پرگار رسم کرد، با ستاره و پرگار با فرجهٔ ثابت نیز می‌توان انجام داد (و بعلاوه پرگار می‌تواند حداکثر یک بار به‌کار برده شود).

۲.۱.۱.۱.۳. سه نقطه

۱.۲.۱.۱.۱.۳. سه نقطه در هرحالت

۲۳۰. سه نقطهٔ A ، B و C داده شده‌اند. به مبدأ C برداری برابر با $\overrightarrow{AB}$ رسم کنید.

۳.۱.۱.۱.۳. چهار نقطه

۱.۳.۱.۱.۱.۳. چهار نقطه در هرحالت

۲۳۱. نقطه‌های A ، B ، C و D را بر صفحهٔ کاغذ اختیار کنید و با کمک گونیا و خط‌کش تبدیل‌یافتهٔ پاره‌خط CD را در انتقال با بردار $\overrightarrow{AB}$ رسم کنید.

۴.۱.۱.۱.۳. n نقطه $(n \geq 5)$

۱.۴.۱.۱.۱.۳. n نقطه در هرحالت

۲۳۲. 2n نقطه، روی یک صفحه داده شده‌اند. ثابت کنید، می‌توان آنها را به یاری خط شکستهٔ بسته‌ای چنان به‌هم وصل کرد که هیچ دو پاره‌خط راستی (از ضلعهای این خط شکستهٔ بسته) یکدیگر را قطع نکرده باشند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۱

۲۳۳. n نقطه روی صفحه داده شده است. بعضی از آنها را به وسیلهٔ پاره‌خطهای راستی به‌هم وصل کرده‌ایم، به‌نحوی که، از هر نقطه به هر نقطهٔ دیگر، بتوان تنها به یک طریق رسید. ثابت کنید، برای این منظور تعداد n^{n-2} روش برای وصل نقطه‌ها به یکدیگر وجود دارد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۶

۲.۴.۱.۱.۱.۳. n نقطه ناهمخط

۲۳۴. روی صفحه‌ای، n نقطه که بر یک خط راست واقع نیستند، داده شده است. ثابت کنید، می‌توان خط شکستهٔ بسته‌ای رسم کرد که از همهٔ این نقطه‌ها بگذرد، بدون این که خودش را قطع کند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۲

۲.۱.۱.۳. پاره‌خط

۱.۲.۱.۱.۳. یک پاره‌خط

۲۳۵. پاره‌خطی به طول واحد داده شده است. به روش هندسی، پاره‌خطهایی به‌طول $\sqrt{2}$ ، $\sqrt{3}$ ، $\sqrt{5}$ ، $\sqrt{2}+\sqrt{3}$ و $\frac{2\sqrt{2}}{3}$ بسازید.

۲۳۶. پاره‌خطی به طول l داده شده است. پاره‌خطهایی به طول $l\sqrt{2}$ ، $l\sqrt{3}$ و $l\sqrt{5}$ رسم کنید.

۲۳۷. پاره‌خطی به طول واحد داده شده است. پاره‌خطهایی به طول $\frac{۱+\sqrt{۵}}{۲}$ و $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ رسم کنید.

۲۳۸. پاره‌خط راستی به طول واحد، روی صفحه داده شده است. به کمک پرگار و خط‌کش، پاره‌خط راستی به طول $\sqrt{۱+\sqrt{۲}}$ بسازید.

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۲۳۹. پاره‌خطی به طول a معلوم است. پاره‌خطی رسم کنید که طولش مساوی عکس طول این پاره‌خط باشد.

۲۴۰. پاره‌خطی به طول a معلوم است:

۱. تساوی $x = a^۲$ را به یک تناسب تبدیل کنید.

۲. پاره‌خط x را رسم کنید.

۲۴۱. قطعه خطی به طول a و عدد صحیح مثبتی مانند k معلوم است. می‌خواهیم قطعه خطی به طول $x = a\sqrt{k}$ رسم کنیم.

۳.۱.۱.۲.۲.دو پاره‌خط

۲۴۲. دو پاره‌خط به طولهای a و b داده شده‌اند $(a > b)$. پاره‌خطی رسم کنید که اندازه‌اش:

الف. $a + b$ ب. $a - b$

پ. $a.b$ ت. $\frac{a}{b}$، باشد.

۲۴۳. واسطهٔ هندسی مابین دو پاره‌خط به طولهای a و b را رسم کنید.

۲۴۴. پاره‌خطی به طول m ، واسطهٔ هندسی بین دو قطعه خط a و b ، و a یکی از قطعه‌ها در دست است. پاره‌خطی به طول b را به دست آورید.

۲۴۵. واسطهٔ عددی طولهای دو پاره‌خط a و b برابر ۵ سانتیمتر و واسطهٔ هندسی آنها برابر ۴ سانتیمتر است. طولهای این دو پاره‌خط را به وسیلهٔ ترسیم تعیین کنید.

۲۴۶. ترسیم دو قطعه خط که مجموع آنها a و واسطهٔ هندسی آنها b در دست است.

۲۴۷. ترسیم دو قطعه خط که تفاضل آنها a و واسطهٔ هندسی آنها b در دست است.

۲۴۸. دو پاره‌خط یکی به طول a و دیگری به طول واحد داده شده است. پاره‌خطهایی به طولهای زیر رسم کنید:

الف. $\sqrt{a}$ ب. $\sqrt[۴]{a}$ پ. $\sqrt[۸]{a}$ ت. $a^۳$

ث. $a^۴$ ج. $\frac{۱}{a^۲}$ چ. $\frac{۱}{a^۳}$

۲۴۹. فرض می‌کنیم a و b دو طول معلوم باشند. می‌خواهیم قطعه خطی به طول x و قطعه خطی به طول y به‌دست آوریم، به‌طوری که داشته باشیم:

$$y=\sqrt{a^2-b^2} \quad , \quad x=\sqrt{a^2+b^2}$$

۲۵۰. دو پاره‌خط را با مفروض بودن حاصلضربشان (t^2) و مجموع یا تفاضلشان (a) رسم کنید.

۳.۲.۱.۱.۳. سه پاره‌خط

۲۵۱. سه پاره‌خط به طولهای a ، b و c مفروضند، پاره‌خط x را از راه رسم پیدا کنید، در صورتی که:

الف. $x=\frac{ac}{a+b}$

ب. $x=\frac{ac}{a-b}$

۲۵۲. سه پاره‌خط به طولهای a ، p و q در دست است. قطعه خط x را طوری رسم کنید که داشته باشیم:

$$x^2 \div a^2 = p \div q$$

۲۵۳. سه پاره‌خط a ، b و c داده شده‌اند. پاره‌خطی رسم کنید، به قسمی که $\frac{x}{a}=\frac{b^2}{c^2}$ باشد.

۲۵۴. پاره‌خطهای a ، b و c داده شده‌اند. پاره‌خط به طول x را با شرطهای زیر پیدا کنید.

الف. $x=\sqrt{a^2+b^2-c^2}$

ب. $ax=b-c^2$

پ. $ax^2=bc$

ت. $x=\sqrt{ab-c^2}$

ث. $x=\frac{3ab}{2c}$

۲۵۵. الف) شکلی از سه پاره‌خط راست، روی صفحه رسم کنید که دارای شش محور تقارن باشد.

ب) آیا ممکن است در اجتماع سه پاره‌خط راست در صفحه، بیش از شش محور تقارن داشته باشیم؟

۳.۱.۱.۲.۴.چهار پاره‌خط

۲۵۶. اگر a ، b ، c، و d طولهای معلومی باشند، مطلوب است رسم پاره‌خطی به طول x ، درصورتی که داشته باشیم :

الف. $x = a.c.b.d$

ب. $x = \frac{ab}{cd}$

پ. $x = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2}$

ت. $x = \frac{a^2 - b^2}{a^2 + b^2}$

۳.۱.۱.۲.۵. پنج پاره‌خط

۲۵۷. a ، b ، c ، d و e پاره‌خطهای راست داده شده‌اند. به کمک پرگار و خط‌کش، این پاره‌خطهای راست را بسازید :

۱. $\sqrt{ab + bc + cd + ea}$

۲. $\frac{abc}{de}$

۳.۱.۱.۲.۶. n پاره‌خط $(n \geq 6)$

۲۵۸. شکلی شامل ۱۶ پاره‌خط راست داده شده است. ثابت کنید نمی‌توان خط شکسته‌ای رسم کرد که هرکدام از این پاره‌خطهای راست را درست یک‌بار قطع کند (خط شکسته می‌تواند باز باشد و خودش را قطع کند، ولی رأسهای آن نباید بر پاره‌خطهای راست واقع باشند، همچنین ضلعهای آن از رأسهای شکل نباید عبور کنند).

۲۵۹. روی صفحه، چند پاره‌خط راست غیرمتقاطع داده شده است، به‌نحوی که هیچ دو پاره‌خط راستی بر یک امتداد نیستند. می‌خواهیم چند پاره‌خط راست دیگر رسم کنیم که هرکدام از آنها، از وصل نقطه‌های انتهایی پاره‌خطهای راست قبلی به دست آمده باشند و روی هم، همهٔ پاره‌خطهای راست، یک خط شکسته تشکیل دهند که خودش را قطع نکند. آیا همیشه، این کار ممکن است؟

۳.۱.۱.۳. نیمخط

۳.۱.۱.۳.۱. یک نیمخط

۲۶۰. نیمخط Ox و دو عدد a و b $(a>b)$ داده شده است. پاره‌خط AB را روی این نیمخط چنان تعیین کنید که رابطهٔ زیر برقرار باشد:

$$AB = OA - OB = a - b$$

۳.۱.۱.۳.۲. دو نیمخط

۲۶۱. دو نیمخط موازی Ox و $O'x'$ به فاصلهٔ d از یکدیگر داده شده‌اند. پاره‌خطی به طول l متکی بر این دو خط رسم کنید. مسأله چند جواب دارد؟

۳.۱.۱.۴. خط

۳.۱.۱.۴.۱. دو خط

۳.۱.۱.۴.۱.۱. دو خط در هرحالت

۲۶۲. دو خط d و d' داده شده‌اند. پاره‌خط AB به طول l را بر این دو خط چنان متکی کنید که با خط d' زاویهٔ α بسازد.

۳.۱.۱.۴.۲. سه خط

۳.۱.۱.۴.۲.۱. دو خط، یک راستا

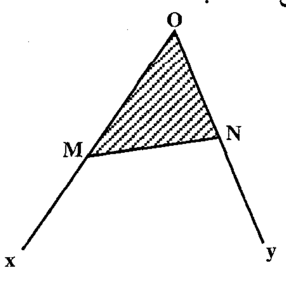
۲۶۳. پاره‌خط به طول و امتداد معلوم را بر دو خط مفروض متکی کنید.

۳.۱.۱.۵. زاویه

۳.۱.۱.۵.۱. تنها یک زاویه

۲۶۴. زاویهٔ قائمه‌ای داده شده است. پاره‌خطی به طول معلوم l به دو ضلع این زاویه چنان متکی کنید که مثلث قائم‌الزاویهٔ حاصل، مساحت معینی داشته باشد.

۲۶۵. زاویهٔ xOy داده شده است. پاره‌خط MN به طول معلوم l را بر دو ضلع این زاویه چنان متکی کنید که مثلث OMN مساحت معلوم k را داشته باشد.



۳.۱.۱.۶. نقطه، پاره‌خط

۳.۱.۱.۶.۱. یک پاره‌خط، یک نقطه

۲۶۶. پاره‌خط AB و نقطهٔ C غیرواقع بر این پاره‌خط داده شده است. پاره‌خط CD به طول l را چنان رسم کنید که نقطهٔ D روی پاره‌خط AB باشد.

۳.۱.۱.۷. نیمخط، نقطه

۳.۱.۱.۷.۱. یک نیمخط، یک نقطه

۲۶۷. نیمخط Ox و نقطهٔ A غیرواقع بر آن داده شده‌اند. پاره‌خطهایی به طول l رسم کنید که یک سر آنها نقطهٔ A و سر دیگرشان روی نیمخط Ox باشد.

۳.۱.۱.۸. خط، نقطه

۳.۱.۱.۸.۱. یک خط، یک نقطه

۲۶۸. خط Δ و نقطهٔ A غیرواقع بر آن داده شده است. پاره‌خط AB به طول l را موازی خط Δ رسم کنید.

۳.۱.۱.۸.۲. یک خط، دو نقطه

۲۶۹. خط X و دو نقطهٔ A و B در یک طرف آن داده شده‌اند. قطعه خط CD به طول معین a را بر خط X چنان جای دهید که خط شکستهٔ ACDB کمترین طول ممکن را داشته باشد.

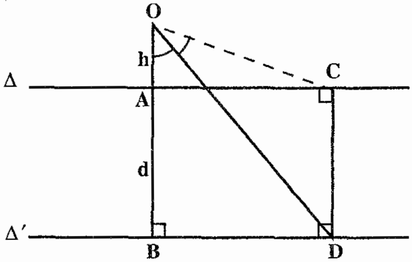
۳.۱.۱.۸.۳. دو خط، یک نقطه

۳.۱.۱.۸.۳.۱. دو خط در هر حالت، یک نقطه

۲۷۰. نقطه‌های M و M′ روی دو خط داده شدهٔ D و D′، قطعه‌های متناسب طی می‌کنند. قطعه خط MM′ را که دو نقطهٔ متناظر به‌هم وصل می‌کند، چنان رسم کنید که از نقطهٔ P بگذرد.

۳.۱.۱.۸.۳.۲. دو خط موازی، یک نقطه

۲۷۱. دو خط متوازی x و y، و نقطهٔ P درخارج آنها داده شده است. پاره‌خط AB را بر دو خط داده شده، چنان عمود کنید که $\frac{PA}{PB}=\frac{m}{n}$ باشد.



۲۷۲. دو خط موازی Δ و Δ′ به فاصلهٔ d از یکدیگر و نقطهٔ O به فاصلهٔ h از خط اولی داده شده است. از O عمود OAB را بر این دو خط رسم می‌کنیم. پاره‌خط CD را موازی AB چنان براین دو خط متکی کنید، که زاویهٔ COD بیشترین مقدار ممکن را داشته باشد.

۳.۱.۱.۸.۴. دو خط، دو نقطه

۳.۱.۱.۸.۴.۱. دو خط موازی، دو نقطه

۲۷۳. یک رودخانه در مسیر مستقیم حرکت می‌کند. دو شهر A و B در دو طرف این رودخانه و به فاصله‌های متفاوت از ساحل آن قرار دارند. می‌خواهیم پلی بر روی عرض رودخانه و عمود بر طول رودخانه بسازیم و محل نصب این پل را به قسمی تعیین کنیم که فاصلهٔ دوشهر A و B از این پل با هم برابر باشند. به بیان دیگر می‌توان گفت: دو خط موازی و دو نقطهٔ A و B در دوطرف این دو خط به فاصله‌های نابرابر از آنها قرار دارند. پاره‌خط MN را عمود بر این دو خط موازی چنان متکی کنید که AM = BN باشد.

۲۷۴. دو خط راست موازی و دو نقطهٔ A و B روی یکی از آنها داده شده است. پاره‌خط راست AB را، تنها به کمک خط‌کش، به سه بخش برابر تقسیم کنید.

۲۷۵. دو خط راست موازی، و روی یکی از آنها، دو نقطهٔ A و B داده شده است. به کمک خط‌کش، پاره‌خط راستی بسازید که طول آن، دو برابر طول پاره‌خط راست AB باشد.

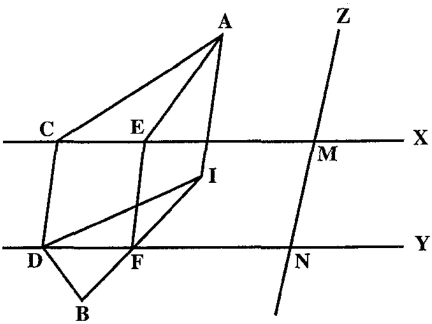
۳.۱.۱.۸.۴.۲. دو خط متقاطع، دو نقطه

۲۷۶. دو متحرک ازنقطه‌های A و B، واقع روی دو خطی که در نقطهٔ O متقاطعند، با یک سرعت حرکت کردند.

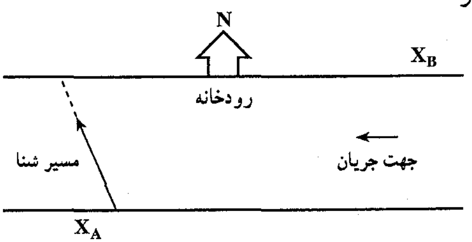
پاره‌خطی رسم کنید که مساوی کوتاهترین فاصلهٔ بین دو متحرک باشد، به شرطی که زاویهٔ AOB مساوی و OB = b و سرعت متحرکها مساوی V باشد. پس از چه مدتی از زمان شروع حرکت، این دو متحرک به حداقل فاصله از یکدیگر می‌رسند؟

۳.۱.۱.۸.۵. سه خط، دو نقطه

۳.۱.۱.۸.۵.۱. دو خط موازی، یک راستا، دونقطه



۲۷۷. دو خط متوازی X و Y و راستای Z ، و دو نقطهٔ A و B در دوطرف دو خط متوازی داده شده‌اند. مطلوب است تعیین خط شکسته‌ای مانند AEFB که دوسرش A و B بوده، و دو رأس آن E و F بترتیب روی X و Y واقع باشد به‌طوری که EF با راستای Z موازی و طول AEFB کمترین مقدار ممکن را دارا باشد.



۲۷۸. کوتاهترین راه از A به B دو نقطهٔ A و B در دوطرف رودخانه قرار دارند. یک نفر می‌خواهد از نقطهٔ A به نقطهٔ B برود. برای این کار او باید قسمتی از مسیر را در دوطرف رودخانه پیاده طی کند، ولی مجبور است رودخانه را شناکنان بپیماید. اما جهت جریان رودخانه از راست به چپ است، و بنا به شرط معما، مسیر شنا همه‌جا باید موازی و همجهت با خطی باشد که درشکل و در داخل رودخانه نشان داده شده است. کوتاهترین مسیر را، جهت رفتن از A به B برای ما نشان دهید.

۳.۱.۱.۹. زاویه، نقطه

۳.۱.۱.۹.۱. یک زاویه، یک نقطه

۲۷۹. زاویهٔ xOy و نقطهٔ A روی ضلع Ox داده شده‌اند. دو پاره‌خط موازی چنان رسم کنید که هردو به دو ضلع زاویه محدود باشند و ابتدای یکی، بر نقطهٔ A واقع باشد و اندازهٔ یکی، دو برابر دیگری باشد. مسأله چند جواب دارد؟

۳.۱.۱.۱۰. زاویه، پاره‌خط

۳.۱.۱.۱۰.۱. یک زاویه، یک پاره‌خط

۲۸۰. زاویهٔ xOy و پاره‌خط MN در صفحه مفروضند. پاره‌خطی موازی و مساوی MN رسم کنید که دوسر آن بر ضلعهای زاویه واقع باشد.

۳.۱.۱.۱۱. خط، پاره‌خط، نقطه

۳.۱.۱.۱۱.۱. یک خط، یک پاره‌خط، یک نقطه

۲۸۱. یک خط، یک پاره‌خط و نقطهٔ O داده شده‌اند. پاره‌خطی چنان رسم کنید که دو سر آن متعلق به خط و پاره‌خط داده شده، و نقطهٔ O وسط آن باشد.

۳.۱.۱.۱۱.۲. یک خط، یک پاره‌خط، دو نقطه

۲۸۲. یک خط l ، دو نقطهٔ A و B در یک طرف آن و یک پاره‌خط به طول a داده شده‌اند. پاره‌خط XY به طول a را بر خط l چنان پیدا کنید که طول راه AXYB کوتاهترین راه ممکن باشد.

۳.۱.۱.۱۱.۳. چهار خط، دو پاره‌خط، دو نقطه

۲۸۳. روی دو رودخانه که بین دو شهر A و B واقعند، می‌خواهند پلی بزنند. به فرض آن که ساحل دو رودخانه خطهای موازی و پلها بر ساحل رودخانه عمود باشند، ولی مسیر رودخانه‌ها موازی نباشند، مطلوب است تعیین کوتاهترین راه بین دو شهر A و B .

۳.۱.۲. رسم پاره‌خط با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۳.۱.۲.۱. مثلث در حالت کلی

۳.۱.۲.۱.۱. تنها یک مثلث

۲۸۴. مثلث ABC داده شده است. قطعه خط DE را به طول a چنان رسم کنید که AB را در D و AC را در E قطع کند، به‌طوری که داشته باشیم $AD = CE$.

۲۸۵. مثلث ABC داده شده است. پاره‌خطی به موازات ضلع BC طوری رسم کنید که یک سرش روی خط AB و یک سرش روی خط AC ، و طولش مساوی با l باشد (l طول معلومی است).

۳.۱.۲.۱.۲. یک مثلث، نقطه

۳.۱.۲.۱.۲.۱. یک مثلث، یک نقطه

۲۸۶. مثلث ABC و نقطهٔ D در صفحهٔ این مثلث داده شده است. پاره‌خط DE به طول l را چنان رسم کنید که نقطهٔ E روی ضلعها (یا امتداد ضلعهای) مثلث باشد.

۳.۱.۲.۱.۲.۲. یک مثلث، دو نقطه

۲۸۷. مثلث ABC و دو نقطهٔ M و N داده شده‌اند. پاره‌خطی متکی بر دو ضلع AB و AC از این مثلث رسم کنید، به قسمی که این پاره‌خط موازی و مساوی پاره‌خط MN باشد.

۳.۱.۲.۱.۲.۳. یک مثلث، n نقطه ($n \geq 3$)

۲۸۸. A ، B و C سه نقطه‌اند که روی یک خط راست نیستند. در درون مثلث ABC، ۹ نقطهٔ دیگر انتخاب کرده‌ایم. برخی از این ۱۲ نقطه را به وسیلهٔ پاره‌خطهای راست طوری به‌هم وصل کنید که این پاره‌خطهای راست یکدیگر را قطع نکنند، مثلث ABC به مثلثهای کوچکتری تقسیم شود، و هریک از ۱۲ نقطه، درست به پنج نقطهٔ دیگر وصل شده باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۱

۳.۱.۲.۱.۳. یک مثلث، پاره‌خط

۳.۱.۲.۱.۳.۱. یک مثلث، یک پاره‌خط

۲۸۹. مثلث ABC و پاره‌خط MN به طول a داده شده است. در مثلث، پاره‌خطی چنان محاط کنید که با پاره‌خط MN مساوی و هم‌امتداد باشد.

۳.۱.۲.۲. مثلث متساوی‌الاضلاع

۳.۱.۲.۲.۱. یک مثلث، متساوی‌الاضلاع

۲۹۰. مثلث متساوی‌الاضلاعی را با رسم پاره‌خطهایی با حداقل تقسیمها به یک مربع تبدیل کنید.

۳.۱.۳. رسم پاره‌خط با معلوم بودن: چندضلعی، چند ضلعی و داده‌های دیگر

۳.۱.۳.۱. چهارضلعی

۳.۱.۳.۱.۱. چهارضلعی در حالت کلی

۲۹۱. چهارضلعی ABCD داده شده است. این چهارضلعی را به‌وسیلهٔ رسم کوچکترین پاره‌خط ممکن که دو سرش روی دو ضلع این چهارضلعی است، به دو بخش معادل هم تقسیم کنید.

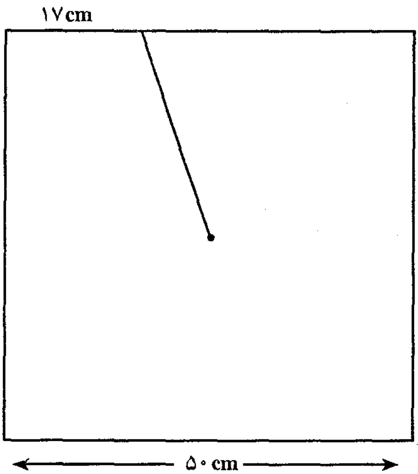
۲۹۲. چهارضلعی ABCD داده شده است. می‌خواهیم این چهارضلعی را به چهار قسمت چنان تقسیم کنیم که بتوانیم از آنها چهارضلعی KLMN را هم‌ارز چهارضلعی ABCD با معلوم بودن دو جزء آن (مثلاً دو ضلع، یا دو زاویه، یا یک ضلع و یک زاویه) بسازیم. روش این تقسیم کردن را تعیین کنید.

از ارشمیدس

۲۹۳. نقطهٔ P روی محیط چهارضلعی ABCD داده شده است. کوتاهترین مسیری را تعیین کنید که از این نقطه شروع می‌شود، از سه نقطهٔ روی ضلعهای دیگر چهارضلعی می‌گذرد و به همین نقطه برمی‌گردد.

۳.۱.۳.۱.۲. چهارضلعیهای ویژه

۳.۱.۳.۱.۲.۱. مربع



۲۹۴. یک کیک بزرگ مربعی به ضلع ۵۰ سانتیمتر و به ضخامت یکنواخت را ۵ نفر می‌خواهند بین هم به‌طور مساوی تقسیم کنند. یکی از آنها، نقطه‌ای از ضلع مربع را به فاصلهٔ ۱۷ سانتیمتر از یک رأس آن با برش مستقیم یک کارد به مرکز مربع وصل کرده است، با رسم ۴ خط مستقیم دیگر که هر کدام مرکز مربع را به ضلعهای آن مربوط می‌کند، این کیک مربعی را دقیقاً به پنج قسمت مساوی تقسیم کنید و محل برخورد هر یک از این پاره‌خطها با محیط را مشخص سازید.

۲۹۵. **تقسیم فرش.** یک فرش مربع شکل به سه خواهر به ارث رسید. نگه داشتن این یادگار خانوادگی برای همهٔ آنها اهمیت داشت. به همین مناسبت، تصمیم گرفتند آن را طوری تقسیم کنند که هر کدام یک فرش مربع شکل داشته باشند. چگونه توانستند این کار را انجام دهند.

۲۹۶. مربعی را با رسم پاره‌خطهایی به ۱۴ قسمت چنان تقسیم کنید که هر یک از آنها را بتوان با کسرهایی که مخرج مشترک ۴۸ دارند، بیان کرد.

از ارشمیدس

۳.۱.۳.۲. پنج ضلعی

۲۹۷. با رسم پاره‌خطهایی، یک پنج ضلعی منتظم را به مربع تبدیل کنید.

۳.۳.۱.۳. شش ضلعی

۲۹۸. شش ضلعی منتظمی را با رسم پاره‌خطهایی به مربع تبدیل کنید.

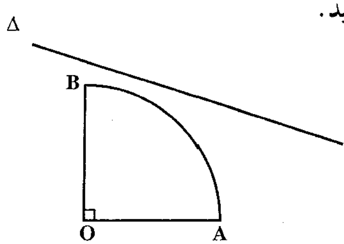
۴.۳.۱.۳. چندضلعی

۲۹۹. چندضلعی مفروضی را به مثلثهای متساوی‌الساقین تقسیم کنید.

۴.۱.۳. رسم پاره‌خط با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر

۱.۴.۱.۳. ربع دایره

۳۰۰. ربع دایرهٔ AOB و راستای Δ داده شده است. وتری به طول l موازی راستای Δ در این ربع دایره محاط کنید.

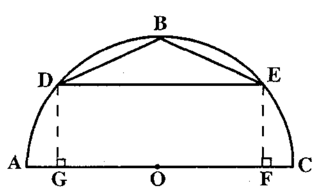


۲.۴.۱.۳. نیمدایره

۱.۲.۴.۱.۳. تنها یک نیمدایره

۳۰۱. یک نیمدایره داده شده است. وتری در این نیمدایره چنان رسم کنید که مساحت چهارضلعی که این وتر و قطر نیمدایره دو ضلع روبه‌روی آن باشند، حداکثر مساحت را داشته باشد.

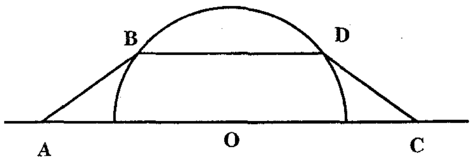
۳۰۲. وتر DE را موازی قطر AC از نیمدایرهٔ ABC چنان رسم کنید که اگر B وسط نیمدایرهٔ AC و G و F تصویرهای D و E روی قطر AC باشند، مساحت پنج ضلعی GDBEF بیشترین مساحت ممکن را داشته باشد.



۳۰۳. نیمدایره‌ای به قطر BC داده شده است. از نقطهٔ A، وتر BA را در این نیمدایره چنان رسم کنید که بین آن و BD تصویرش روی قطر BC رابطهٔ معینی برقرار باشد.

۲.۲.۴.۱.۳. نیمدایره، نقطه

۱.۲.۲.۴.۱.۳. یک نیمدایره، دو نقطه

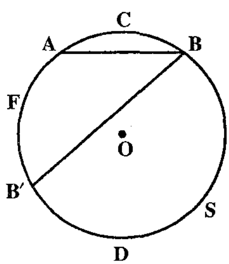


۳۰۴. دو نقطهٔ A و C روی قطر AOC از یک نیمدایره به یک فاصله از مرکز دایره داده شده است. وتر BD را موازی AC چنان رسم کنید که ذوزنقهٔ ACDB بیشترین مساحت را داشته باشد.

۳.۴.۱.۳. یک دایره

۱.۳.۴.۱.۳. تنها یک دایره

۳۰۵. دایرهٔ C(O,R) داده شده است. وتری به طول l در این دایره رسم کنید. مسأله چند جواب دارد؟



۳۰۶. روی یک دایره، وتری چنان رسم کنید که تفاضل دو کمان روبه‌روی آن، مساوی با کمان مفروضی از همان دایره باشد.

۲.۳.۴.۱.۳. یک دایره، نقطه

۱.۲.۳.۴.۱.۳. یک دایره، یک نقطه

۱.۱.۲.۳.۴.۱.۳. یک دایره، یک نقطه در صفحهٔ دایره

۳۰۷. در یک دایرهٔ داده شده، قطری رسم کنید به‌طوری که از نقطه‌ای مفروض با زاویهٔ مفروضی دیده شود.

۳۰۸. نقطهٔ A و دایرهٔ (C) به مرکز O داده شده‌اند. از نقطهٔ A، قاطعی رسم کنید که دایره را در وتری به طول l قطع کند.

۳.۱.۴.۳.۲.۱.۲. یک دایره، یک نقطه خارج دایره

۳۰۹. دایرهٔ $C(O,R)$ و نقطهٔ A خارج این دایره رسم شده است. روی AO پاره‌خطی رسم کنید که یک سر آن نقطهٔ A و طولش مساوی جذر قوت نقطه نسبت به دایره باشد.

۳.۱.۴.۳.۲.۱.۳. یک دایره، یک نقطه روی دایره

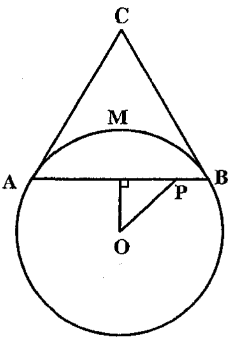
۳۱۰. از یک نقطهٔ معلوم روی یک دایره، وتری رسم کنید که طول آن دو برابر فاصلهٔ این وتر از مرکز دایره باشد.

۳.۱.۴.۳.۲.۱.۴. یک دایره، یک نقطه درون دایره

۳۱۱. دایرهٔ (C) و نقطهٔ A درون این دایره داده شده است. از نقطهٔ A وتری رسم کنید که مجموع یا تفاضل دو قطعهٔ آن وتر، برابر مقدار معلوم l باشد.

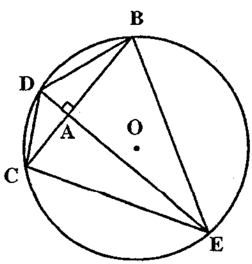
۳۱۲. از نقطهٔ A واقع در درون دایرهٔ (O)، وتری رسم کنید که در نقطهٔ A نصف شود.

۳۱۳. از نقطهٔ M واقع در درون دایرهٔ (O)، وتری چنان رسم کنید که نسبت دو قطعه وتر ایجاد شده برابر k باشد.



۳۱۴. از نقطهٔ P واقع در داخل یک دایره وتر AB را چنان رسم کنید که زاویهٔ ACB که مماسهای در نقطه‌های A و B بر دایره تشکیل می‌دهند، بزرگترین مقدار را داشته باشد.

۳۱۵. از نقطهٔ A واقع در درون دایرهٔ (O)، وتر MN را چنان رسم کنید که قطاع نظیر این وتر $\frac{5}{12}$ دایره داده شده باشد.

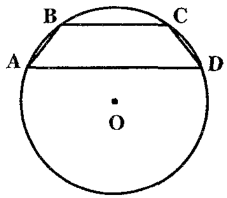


۳۱۶. دایرهٔ (O) و نقطهٔ A درون این دایره داده شده است. از نقطهٔ A دو وتر عمود بر هم BAC و DAE را چنان رسم کنید که چهارضلعی محاطی BDCE بیشترین مساحت را داشته باشد.

۳۱۷. نقطهٔ A را داخل دایره‌ای انتخاب کرده‌ایم (غیر از مرکز). آیا همیشه می‌توان از نقطهٔ A شعاع نور را طوری فرستاد که بعد از چند بازتاب در محیط دایره، دوباره به نقطهٔ A برگردد؟ (در بازتاب نور، همیشه زاویهٔ تابش با زاویهٔ بازتاب برابر است.)

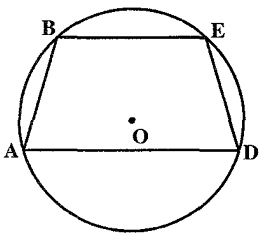
۳.۱.۴.۳.۲.۲. یک دایره، دو نقطه

۳.۱.۴.۳.۲.۲.۱. یک دایره، دو نقطه روی دایره



۳۱۸. از دو نقطهٔ A و B واقع بر محیط دایرهٔ (O) دو وتر متوازی چنان رسم کنید که مساحت ذوزنقهٔ ایجاد شده، معادل یک مربع به ضلع k باشد.

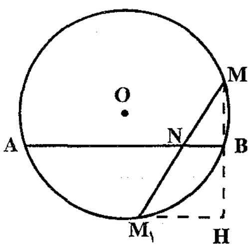
۳۱۹. از دو نقطهٔ مفروض بر روی یک دایره دو وتر موازی رسم کنید به‌طوری که مجموع طولهایشان مقدار مفروضی باشد.



۳۲۰. یک دایره و دو نقطهٔ A و B روی آن داده شده‌اند. دو وتر متوازی AD و BE از این دایره را رسم کنید به قسمی که AD+BE=l باشد (l طول معلومی است).

۳.۱.۴.۳.۲.۳. یک دایره، سه نقطه

۳.۱.۴.۳.۲.۳.۱. یک دایره، سه نقطه روی دایره

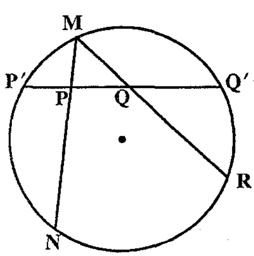


۳۲۱. وتر AB در دایرهٔ (O) داده شده است. از نقطهٔ M روی دایره، وتری رسم کنید که به‌وسیلهٔ وتر AB نصف شود.

۳۲۲. نقطهٔ A بر محیط دایره‌ای و وتر BC در آن دایره داده شده است. وتر AD را چنان رسم کنید که BC را در E قطع کند و داشته باشیم : $\frac{AE}{ED}=k$

۳۲۳. در دایره‌ای دو وتر MN و MR از نقطهٔ M رسم شده‌اند. وتری رسم کنید که MN و MR را بترتیب در P و Q و دایره را در P′ و Q′ قطع کنند، به‌طوری که داشته باشیم :

$$MN - MR = MP - MQ = PP' - QQ'$$



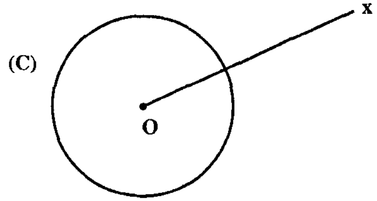
۳.۱.۴.۳.۳. یک دایره، پاره‌خط

۳.۱.۴.۳.۳.۱. یک دایره، یک پاره‌خط

۳۲۴. دایرهٔ (C) و پاره‌خط AB داده شده است. وتری در این دایره رسم کنید که مساوی و موازی با پاره‌خط AB باشد.

۳.۱.۴.۳.۴. یک دایره، نیمخط

۳.۱.۴.۳.۴.۱. یک دایره، یک نیمخط



۳۲۵. دایرهٔ (O) و نیمخط Ox داده شده است. پاره‌خطی به طول l چنان رسم کنید که یک سرش روی Ox و سر دیگرش روی دایره باشد و با Ox زاویهٔ α بسازد.

۳.۱.۴.۳.۴.۲. یک دایره، دو نیمخط

۳۲۶. در دایرهٔ (O) دو شعاع OA و OB رسم شده است. وتری چنان رسم کنید که به وسیلهٔ شعاعهای ذکر شده به سه قسمت متساوی تقسیم شود.

۳.۱.۴.۳.۵. یک دایره، خط

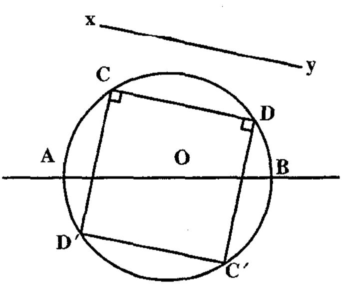
۳.۱.۴.۳.۵.۱. یک دایره، یک خط

۳۲۷. دایرهٔ (O) داده شده است. مطلوب است رسم وتری که طول آن برابر l باشد و وسط آن بر روی دایرهٔ داده شده یا خط Δ باشد.

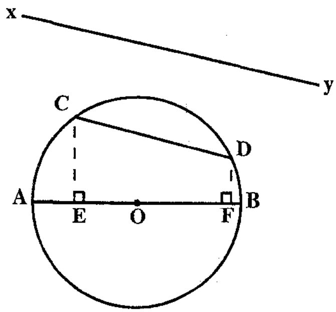
۳۲۸. در دایرهٔ (O) وتری به طول l و موازی با خط داده شدهٔ d رسم کنید.

۳.۱.۴.۳.۵.۲. یک دایره، دو خط

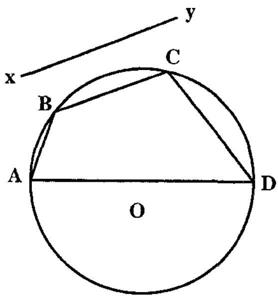
۳۲۹. در دایره‌ای وتر DC را به موازات خط معلوم X چنان رسم کنید که تصویر آن روی قطر معلومی به طول معین l باشد.



۳۳۰. دایرهٔ (O) قطر ثابت AB از آن و خط xy داده شده است. وتر CD را موازی xy چنان رسم کنید که اگر ′D و ′C نقطه‌های برخورد عمودهای اخراج شده بر CD در D و C با دایره باشند، چهارضلعی CDC′D′ بیشترین مساحت را داشته باشد.



۳۳۱. دایرهٔ (O)، قطر ثابت AB از آن و امتداد xy داده شده است. وتر CD را در این دایره چنان رسم کنید که اگر E و F تصویرهای دو نقطهٔ C و D روی قطر AB باشند، ذوزنقهٔ CEFD بیشترین مساحت ممکن را داشته باشد.



۳۳۲. دایرهٔ (O) و خط xy و قطر AD از این دایره داده شده است. وتر BC را موازی xy در این دایره رسم کنید به قسمی که چهارضلعی ABCD کمترین مساحت را داشته باشد.

۳۳۳. بر دایرهٔ داده شده‌ای که بین دو خط موازی قرار دارد، مماسی رسم کنید به‌طوری که پاره‌خط جدا شده بر روی آن توسط دو خط موازی مفروض، طول مفروضی داشته باشد.

۳.۱.۴.۳.۶. یک دایره، زاویه

۳.۱.۴.۳.۶.۱. یک دایره، یک زاویه

۳۳۴. وتر AB از دایرهٔ C(O,R) و نقطهٔ M بر آن دایره مفروضند. وتری از این دایره را رسم کنید که یک سر آن نقطهٔ M باشد و به‌وسیلهٔ وتر AB به دو پاره‌خط به نسبت ۱ و ۲ تقسیم شود. شرط جواب مسأله چیست؟ مسأله چند جواب دارد؟

۳.۱.۴.۳.۷. یک دایره، نقطه، خط

۳.۱.۴.۳.۷.۱. یک دایره، قطر، یک نقطه

۳۳۵. روی قطر AC از دایره‌ای، نقطهٔ E داده شده است. از نقطهٔ E، وتر BD را طوری رسم کنید که مساحت چهارضلعی ABCD، حداکثر مقدار ممکن باشد.

۳۳۶. دایره‌ای به قطر $AB = ۲R$ و نقطهٔ P بر قطر AB به فاصلهٔ $a = OP$ داده شده است. وتر MN را به موازات قطر AB رسم می‌کنیم. مطلوب است تعیین این وتر به قسمی که زاویهٔ MPN مقدار معلوم θ گردد (رسم هندسی).
سطح مثلث MNP را از روی زاویهٔ θ به‌دست آورید و ماکزیمم یا می‌نیمم این سطح را پیدا کنید. بیان هندسی جواب ماکزیمم چیست؟

۳۳۷. دایرهٔ (O) قطر AC و نقطهٔ B روی این قطر داده شده‌اند. از نقطهٔ B وتر DBE را چنان رسم کنید که $\widehat{CE} = ۳\widehat{AD}$ باشد.

۳.۱.۴.۳.۷.۲. یک دایره، یک خط ناقطر، یک نقطه

۳۳۸. دایرهٔ (O)، نقطهٔ A روی این دایره و خط xy داده شده‌اند. از نقطهٔ A وتری در این دایره رسم کنید که تصویرش روی xy کمترین مقدار ممکن باشد (بحث کنید).

۳۳۹. از نقطهٔ A واقع در درون دایرهٔ (O) وتری چنان رسم کنید که مجموع یا تفاضل تصویرهای دو قطعهٔ آن روی خط مفروض xy مقدار معلومی باشد.

۳.۱.۴.۳.۷.۳. یک دایره، قطر، دو نقطه

۳۴۰. از دو نقطهٔ M و N واقع بر قطر AB از دایرهٔ (O) و در طرفین مرکز دو وتر متساوی‌الطول چنان رسم کنید که در روی محیط دایره متقاطع باشند.

۳.۱.۴.۳.۸. یک دایره، مربع، خط

۳۴۱. دایرهٔ (O)، مربع K و خط راست L، داده شده‌اند. پاره‌خط راستی به طول معلوم، طوری رسم کنید که با خط راست L موازی باشد و در ضمن، دو انتهای آن، بترتیب روی محیط دایرهٔ (O) و محیط مربع K قرار گیرد.

۳.۱.۴.۴. دو دایره

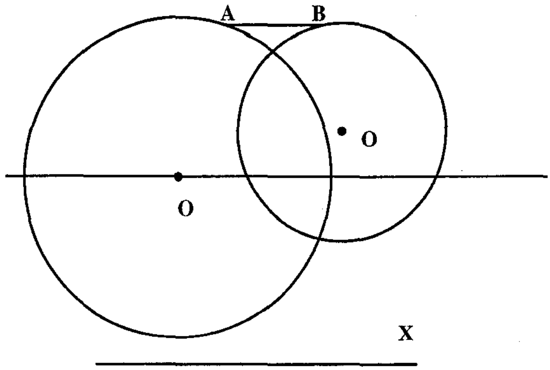
۳.۱.۴.۴.۱. تنها دو دایره

۳.۱.۴.۴.۱.۱. دو دایره در حالت کلی

۳۴۲. دو دایرهٔ (O) و (O′) و به شعاعهای R و R′ و خط XY داده شده‌اند. پاره‌خطی متکی بر دو دایره و عمود بر XY چنان رسم کنید که به‌وسیلهٔ XY به دو قسمت مساوی تقسیم شود.

۳۴۳. روی دو دایرهٔ (O) و (O′) دو نقطهٔ ثابت A و A′ داده شده‌اند. روی این دو دایره، دو قوس متغیر $\widehat{AM}$ و $\widehat{A'M'}$ را که مستقیماً متشابه‌اند، جدا می‌کنیم. قطعه خط MM′ را چنان تعیین کنید که موازی با امتداد داده شده بوده و یا به طول معینی باشد.

۳۴۴. قطعه خطی مانند AB به طول معین l را که با خط راست معلوم X موازی است مابین دو دایرهٔ معین O و O′ جا دهید.



۳.۱.۴.۴.۱.۲. دو دایرهٔ متقاطع

۳۴۵. از نقطهٔ تقاطع دو دایره، وتری رسم کنید که کوچکترین وتر رسم شده در دو دایره باشد.

۳۴۶. از یکی از دو نقطهٔ برخورد دو دایرهٔ مساوی در هر دایره یک وتر رسم کنید به‌طوری که دو وتر مساوی باشند و زاویهٔ α را تشکیل دهند.

۳.۱.۴.۴.۲. دو دایره، نقطه

۳.۱.۴.۴.۲.۱. دو دایره، یک نقطه

۳۴۷. دو دایرهٔ مساوی (A) و (B) و نقطهٔ C روی یکی از این دو دایره داده شده‌اند. پاره‌خط MN را موازی و مساوی AB چنان رسم کنید، به قسمی که از نقطهٔ C تحت یک زاویهٔ معلوم دیده شود.

۳.۱.۵. رسم پاره‌خط با معلوم بودن: مقطعهای مخروطی، مقطعهای مخروطی و داده‌های دیگر

۳.۱.۵.۱. سهمی

۳۴۸. در یک سهمی مفروض، وتر کانونی به طول l رسم کنید.

۲.۳. رسم نیمخط

۱.۲.۳. رسم نیمخط بامعلوم بودن: نیمخط، زاویه، چند ضلعی، شکلهای دیگر

۱.۱.۲.۳. نیمخط

۱.۱.۱.۲.۳. یک نیمخط

۳۴۹. نیمخط Ox داده شده است. نیمخطی مانند Oy رسم کنید که با Ox زاویهٔ 60° (یا 30°) تشکیل دهد.

۲.۱.۲.۳. زاویه

۱.۲.۱.۲.۳. یک زاویه

۳۵۰. زاویهٔ xOy داده شده است. نیمساز این زاویه را رسم کنید.

۳۵۱. نیمساز زاویه‌ای را رسم کنید که رأس آن در خارج حدود شکل واقع می‌شود.

۳۵۲. زاویهٔ قائمه‌ای را به سه قسمت برابر بخش کنید.

۳۵۳. الف. به کمک پرگار و خط‌کش زاویهٔ ۵۴ درجه را به سه قسمت مساوی تقسیم کنید.

ب. به کمک پرگار و خط‌کش زاویهٔ ۱۹ درجه را به ۱۹ قسمت برابر تقسیم کنید.

۳۵۴. مسألهٔ تثلیث زاویه. می‌خواهیم زاویهٔ مفروضی را به سه قسمت برابر تقسیم کنیم.

۳۵۵. روی صفحه، زاویه‌ای به اندازهٔ $\frac{180}{n}$ درجه رسم کرده‌ایم که در آن، $n \in \mathbb{N}$، بر ۳ بخش‌پذیر نیست. ثابت کنید، به کمک پرگار و خط‌کش، می‌توان این زاویه را به سه بخش برابر تقسیم کرد.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، امریکا، ۱۹۸۱

۲.۲.۱.۲.۳. دو زاویه

۳۵۶. یک دستگاه توافقی را با معلوم بودن زاویه‌های اشعه مزدوج رسم کنید.

۳.۲.۱.۳. چندضلعی

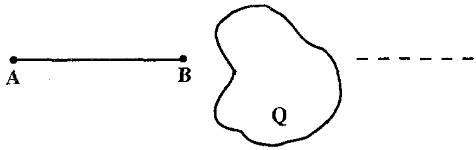
۳.۲.۱.۳.۱. شش ضلعی

۳۵۷. شش ضلعی محدب و منتظم H داده شده و a یک رأس آن است. از a دو نیمخط چنان رسم کنید که شش ضلعی را به سه ناحیه با مساحتهای برابر تقسیم کند.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

۳.۲.۱.۴. شکلهای دیگر

۳۵۸. پاره‌خط AB و یک ناحیهٔ Q همصفحه با آن را در نظر می‌گیریم (شکل). با استفاده از ستارهٔ تنها چگونه می‌توانیم پاره‌خط AB را به سمت راست ناحیهٔ Q امتداد دهیم بی‌آن که، خطی در درون Q رسم کنیم؟ (تعبیر این مسأله چنین است : خطی را بر روی زمین به سوی دیگر جنگل، مثلاً به سمتی که از این‌جا امتداد مفروض نمی‌تواند دیده شود، امتداد دهید).



۳.۳. رسم خط

۳.۳.۱. رسم خط با معلوم بودن: نقطه، پاره‌خط، نیمخط، خط، زاویه

۳.۳.۱.۱. نقطه

۳.۳.۱.۱.۱. دو نقطه

۳۵۹. دو نقطهٔ A و B مفروضند. خطی رسم کنید که این دو نقطه از آن به یک فاصله باشند. مسأله چند جواب دارد؟

۳۶۰. قطبی نقطهٔ P را نسبت به نقطهٔ C (دایرهٔ به شعاع صفر) رسم کنید.

۲.۱.۱.۳.۳. سه نقطه

۳۶۱. سه نقطهٔ A، B و C داده شده‌اند. مطلوب است رسم خطی که این سه نقطه از آن به یک فاصله باشند.

۳۶۲. معمّایی از هندسه.
سه نقطهٔ A، B و C داریم، که در امتداد هم نیستند. خطی مانند D طوری رسم کنید که از نقطهٔ A بگذرد و از B و C به یک فاصله باشد. معمّا دارای چند پاسخ است؟

۳۶۳. از نقطه‌ای مفروض خطی رسم کنید به‌طوری که مجموع (یا تفاضل) فاصله‌هایش از دو نقطهٔ داده شده برابر با طول مفروضی باشد. در مورد این دو حالت بحث کنید:
۱. وقتی قرار باشد دو نقطهٔ داده شده در یک طرف خط خواسته شده واقع باشند.
۲. وقتی قرار باشد دو نقطهٔ داده شده در دو طرف خط خواسته شده واقع باشند.

۳۶۴. از نقطهٔ P خطی چنان رسم کنید که نسبت فاصله‌های دو نقطهٔ مفروض A و B از آن خط، برابر $\frac{m}{n}$ باشد.

۳۶۵. سه نقطهٔ A، B و K داده شده است. می‌خواهیم از نقطهٔ K خط راستی عبور دهیم که مجموع فاصله‌های دو نقطهٔ A و B از آن:
الف. حداقل باشد. ب. حداکثر باشد.

۳۶۶. سه نقطهٔ A، B و C و عددهای m، n و t داده شده‌اند. خطی مانند d چنان رسم کنید که AA'، BB' و CC'، فاصلهٔ این نقطه‌ها از آن خط در رابطه‌های زیر صدق کنند:

$$\frac{BB'}{CC'}=\frac{n}{r} \quad , \quad \frac{AA'}{BB'}=\frac{m}{n}$$

۳.۱.۱.۳.۳. چهار نقطه

۳۶۷. چهار نقطهٔ A، B، C و D داده شده‌اند. چهار خط موازی a، b، c و d را بترتیب چنان از این نقطه‌ها رسم کنید که فاصلهٔ بین خطهای a و b با فاصلهٔ بین خطهای c و d برابرباشند.

۲.۱.۳.۳. پاره‌خط

۱.۲.۱.۳.۳. یک پاره‌خط

۳۶۸. پاره‌خط AB داده شده است. با استفاده از پرگار و خط‌کش و تنها با رسم ۶ خط (خط راست و دایره)، این پاره‌خط راست را به چهار بخش برابر تقسیم کنید.

۳.۱.۳.۳. نیمخط

۱.۳.۱.۳.۳. یک نیمخط

۳۶۹. نیمخط Ox داده شده است. خطی رسم کنید که در نقطهٔ O بر Ox عمود باشد.

۴.۱.۳.۳. خط

۱.۴.۱.۳.۳. یک خط

۳۷۰. خط‌کشی داریم که روی آن، تقسیمهای یک سانتیمتری وجود دارد. تنها به کمک همین خط‌کش، خط راستی رسم کنید که بر خط راست داده شده عمود باشد.

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۲.۴.۱.۳.۳. دو خط

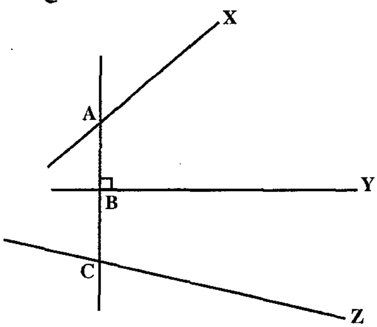
۳۷۱. دو خط Δ و Δ' داده شده‌اند. خطی رسم کنید که این دو خط را در نقطه‌های A و B قطع کند، به قسمی که با خط Δ زاویهٔ α بسازد و AB=l باشد.

۳.۴.۱.۳.۳. سه خط

۱.۳.۴.۱.۳.۳. سه خط در هر حالت

۳۷۲. خطی رسم کنید که سه خط داده شدهٔ d_1 ، d_2 و d_3 را در M، N و P قطع کند و MN=NP باشد.

۳۷۳. سه خط X، Y و Z داده شده‌اند. خط ABC عمود بر Y را چنان رسم کنید که پاره‌خطی از آن که مابین X و Z محصور است، در نقطهٔ تقاطع با Y نصف شود.



۳۷۴. سه خط Δ_1 ، Δ_2 و Δ_3 مفروضند. خط AMB را بر Δ_2 طوری عمود کنید که MA+MB=l باشد.

۳۷۵. سه خط Δ_1 ، Δ_2 و Δ_3 داده شده‌اند. خط AMB را بر Δ_2 طوری عمود کنید که $MB - MA = l$ باشد.

۳۷۶. نقطهٔ برخورد دو خط d' و d در خارج حدود شکل واقع است. خطی موازی امتداد معین Δ رسم کنید که از محل تلاقی d و d' بگذرد.

۲.۳.۴.۱.۳.۳. سه خط همرس

۳۷۷. سه خط همرس داده شده‌اند. شعاع مزدوج یکی از آنها را نسبت به دو خط دیگر رسم کنید.

۴.۴.۱.۳.۳. چهار خط

۱.۴.۴.۱.۳.۳. چهار خط در هر حالت

۳۷۸. چهار خط l_1 ، l_2 ، l_3 و l_4 داده شده‌اند. خطی مانند l رسم کنید که نسبت سه پاره‌خطی که چهار خط مفروض بر آن جدا می‌کنند، برابر مقدار مفروضی باشد.

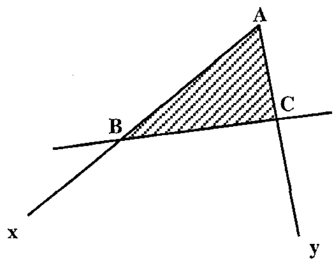
۳۷۹. چهار خط d_1 ، d_2 ، d_3 و d_4 داده شده‌اند. خطی موازی با d_4 رسم کنید که سه خط دیگر را قطع کند و به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم شود.

۳۸۰. سه خط همرس و یک خط دیگر داده شده‌اند. قاطعی رسم کنید به‌طوری که سه پاره‌خط جدا شده روی آن، توسط این چهار خط دارای نسبتهای داده شده‌ای باشند.

۵.۱.۳.۳. زاویه

۱.۵.۱.۳.۳. یک زاویه

۳۸۱. زاویهٔ xAy داده شده است. ضلعهای این زاویه را با خطی چنان قطع کنید که اگر B و C نقطه‌های تقاطع باشند، مثلث ABC مساحت معین k^2 و پاره‌خط BC کمترین طول را داشته باشد.



۶.۱.۳.۳. پاره‌خط، نقطه

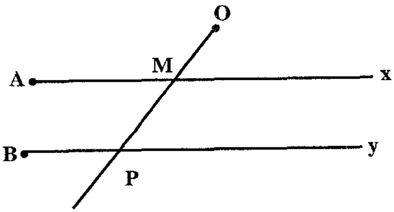
۱.۶.۱.۳.۳. یک پاره‌خط، یک نقطه

۳۸۲. وسط پاره‌خط راست مفروضی، علامت گذاشته شده است. تنها به کمک خط‌کش، خط راستی رسم کنید که از نقطهٔ مفروضی بگذرد و با این پاره‌خط راست، موازی باشد.

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۷.۱.۳.۳. نیمخط، نقطه

۱.۷.۱.۳.۳. دو نیمخط، یک نقطه



۳۸۳. دو نیمخط راست متوازی Ax و By و نقطهٔ O که روی دو نیمخط مزبور واقع می‌باشند، داده شده است. از نقطهٔ O خطی رسم کنید که دو نیمخط داده شده را بترتیب در نقطه‌های M و P قطع کنند، به‌طوری که داشته باشیم : $AM = k \times BP$ (k عددی است جبری).

۸.۱.۳.۳. خط، نقطه

۱.۸.۱.۳.۳. یک خط، یک نقطه

۳۸۴. ابزاری برای رسم شکلها بر صفحه در اختیار داریم که به‌کمک آن می‌توان :
الف. از دو نقطهٔ داده‌شده، خط راستی عبور داد ؛
ب. از یک نقطهٔ داده شدهٔ واقع بر یک خط راست، عمودی بر خط راست اخراج کرد.
اکنون، اگر نقطه‌ای در بیرون خط راست باشد، چگونه می‌توان با این وسیله، عمودی از این نقطه بر خط راست فرود آورد؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۷

۳۸۵. نقطهٔ A و خط d داده شده‌اند. خطی از نقطهٔ A به موازات خط d رسم کنید.

۳۸۶. نقطهٔ A و خط BC داده شده‌اند. از A خطی رسم کنید که با خط BC زاویه‌ای برابر مقدار معلوم m بسازد.

۳۸۷. قطبی نقطهٔ P را نسبت به خط Δ (دایرهٔ به شعاع بینهایت) رسم کنید.

۳۸۸. الف. ازنقطهٔ مفروض P خطی به موازات یک خط مفروض l رسم کنید.
ب. ازنقطهٔ مفروض M پاره‌خط MN را چنان رسم کنید که با پاره‌خط مفروض AB مساوی و موازی باشد.
ج. از نقطهٔ مفروض P عمودی بر خط مفروض l وارد کنید.

۲.۸.۱.۳.۳. یک خط، دو نقطه

۳۸۹. از دو نقطهٔ داده شدهٔ A و B دو خط AP و BQ را رسم کنید که خط داده شده، PQ را در نقطه‌های P و Q قطع کنند، به‌طوری که $AP = BQ$ و BQ و AP زاویه‌ای به اندازهٔ معلوم تشکیل دهند.

۳۹۰. خط d و دو نقطهٔ A و B در دو طرف آن داده شده‌اند. از این دو نقطه دو خط رسم کنید که نسبت به خط d متقارن باشند.

۳۹۱. خط d و دو نقطهٔ A و B داده شده‌اند. خطی موازی d رسم کنید که دو نقطهٔ A و B از آن به یک فاصله باشند.

۳.۳.۱.۸.۳. یک خط، سه نقطه

۳۹۲. سه نقطهٔ A، B و C داده شده‌اند. خطی از نقطهٔ A رسم کنید که دو نقطهٔ B و C از آن به یک فاصله باشند.

۳.۳.۱.۸.۴. دو خط، یک نقطه

۳.۳.۱.۸.۴.۱. دو خط در هر حالت، یک نقطه

۳۹۳. از نقطهٔ معینی خطی را طوری رسم کنید که دو خط مفروض را با زاویه‌های مساوی قطع کند.

۳۹۴. دو خط Δ و D و نقطهٔ متمایز A داده شده‌اند. از A خطی رسم کنید که خطهای Δ و D را بترتیب در نقطه‌های C و B قطع کرده و داشته باشیم : $AB = AC$.

۳۹۵. دو خط Δ و D و نقطهٔ متمایز A داده شده‌اند. از A خطی رسم کنید که خطهای Δ وD را به‌ترتیب در نقطه‌های C و B قطع کند و داشته باشیم :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{m}{n} = k$$

۳۹۶. دو خط l_1 و l_2 و نقطهٔ P ناواقع بر آنها داده شده‌اند. از نقطهٔ P دو خط چنان رسم کنید که پاره خطهای $X_1Y_1 = a_1$ و $X_2Y_2 = a_2$ را بر l_1 و l_2 جدا کنند (a_1 و a_2 طولهای معلومی هستند).

۳۹۷. دو خط l_1 و l_2 و نقطهٔ A مفروضند. بر A خطی مانند l رسم کنید به‌قسمی که پاره‌خط BC که l_1 و l_2 بر l جدا می‌کنند، چنان باشد که $\frac{AB}{AC} = \frac{m}{n}$ باشد.

۳۹۸. قطبی یک نقطه نسبت به دو خط را رسم کنید (بحث کنید).

۳.۳.۱.۸.۴.۲. دو خط موازی، یک نقطه

۳۹۹. دو خط متوازی و نقطهٔ A داده شده‌اند. ازنقطهٔ A خطی چنان رسم کنید که قسمت محصور بین دو خط برابر l باشد.

۴۰۰. از نقطهٔ P واقع درخارج دو خط متوازی X و Y قاطع PAB را چنان رسم کنید که $PA + PB = a$ باشد.

۳.۴.۸.۱.۳.۳. دو خط متقاطع، یک نقطه

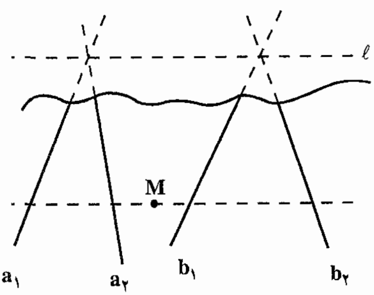
۴۰۱. دو خط متقاطع Ox و Oy و نقطهٔ M داده شده‌اند. از نقطهٔ M دو خط MAB و MDC را چنان رسم کنید که زاویهٔ بینشان برابر مقدار معلوم X و چهارضلعی ABCD محاطی باشد.

۴۰۲. نقطهٔ برخورد دو خط در خارج از حدود شکل است؛ بر نقطهٔ داده‌شدهٔ M خطی بگذرانید که بر محل برخورد آنها بگذرد. راه حل را برای حالتی که دو خط موازی باشند، تفسیر کنید.

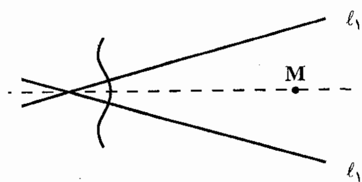
۴۰۳. نقطهٔ O محل برخورد دو خط Δ و Δ' خارج از صفحهٔ کاغذ است. با استفاده از تبدیل قطب و قطبی از نقطهٔ مفروض P خطی رسم کنید که از نقطهٔ O بگذرد.

۴۰۴. الف. نقطهٔ مفروض M را به نقطهٔ تلاقی «خارج از دسترس» دو خط مفروض l_1 و l_2 (یا خط مفروض l و دایرهٔ S، یا دو دایرهٔ مفروض S_1 و S_2) وصل کنید (شکل الف).

ب. از نقطهٔ مفروض M خطی موازی با خط «خارج از دسترس» l که دو نقطه‌اش توسط نقطه‌های برخورد دو جفت خط a_1، a_2 و b_1، b_2 مشخص می‌شود، رسم کنید (شکل ب).

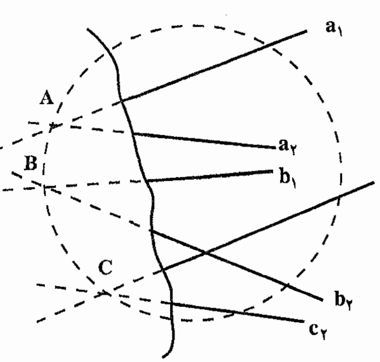


(ب)



(الف)

ج. دایره‌ای از سه نقطهٔ «خارج از دسترس» A، B و C که بر یک راستا نیستند و بترتیب توسط سه جفت خط a_1، a_2 و b_1، b_2 و c_1، c_2 مشخص می‌شوند، بگذرانید (شکل ج). البته در این مسأله تنها می‌خواهیم بخشی از دایره را که در ناحیهٔ قابل دسترس صفحه قرار دارد، رسم کنیم یا مرکز و شعاع آن را مشخص کنیم.



(ج)

۴۰۵. دو خط متقاطع xy و x′y′ و نقطهٔ M غیر واقع بر این دو خط داده شده‌اند. از M خطی رسم کنید که اگر xy را در A و x′y′ را در B قطع کند، نسبت $\frac{MA}{MB}$ برابر ۳، $\frac{۱}{۳}$ یا $\frac{p}{q}$ باشد.

۳.۳.۱.۸.۵. دو خط ، دو نقطه

۳.۳.۱.۸.۵.۱. دو خط در هر حالت، دو نقطه

۴۰۶. گیریم دو خط l_1 و l_2 و یک نقطهٔ A بر خط l_1 و یک نقطهٔ B بر خط l_2 داده شده باشند. یک خط m که خطوط l_1 و l_2 را در نقطه های X و Y با شرط $AX = BY$ قطع کند، چنان رسم کنید که :

الف. خط m موازی خط مفروض n باشد.

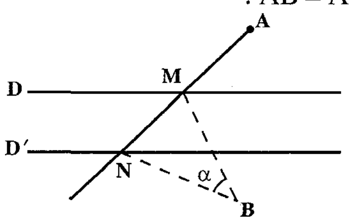
ب. خط m از نقطهٔ مفروض M بگذرد.

ج. پاره‌خط XY دارای طول مفروض a باشد.

د. پاره‌خط XY توسط خط مفروض r نصف شود.

۳.۳.۱.۸.۵.۲. دو خط موازی، دو نقطه

۴۰۷. دو امتداد موازی xx′ و yy′ ونقطهٔ M در خارج این دو خط داده شده‌اند. اگر نقطهٔ A روی امتداد xx′ در نظر گرفته شود، مطلوب است رسم خطی که از M گذشته و xx′ را در B و yy′ را در C قطع کند، به‌طوری که $AB = AC$.



۴۰۸. از یک نقطهٔ داده شده، خطی رسم کنید، به‌طوری که پاره‌خط جدا شده روی این خط توسط دو خط موازی مفروض از نقطهٔ مفروض دیگری با زاویهٔ مفروضی دیده شود.

۴۰۹. دو خط موازی L و L′ و نقطهٔ A خارج آنها و نقطهٔ B بر روی L داده شده‌اند. دو خط موازی از A و B رسم کنید که با L و L′ لوزی تشکیل دهند.

۴۱۰. دو خط متوازی xx′ و yy′ و دو نقطهٔ A و B داده شده‌اند. از این دو نقطه، دو خط موازی هم رسم کنید به‌قسمی که با دو خط متوازی داده شده، متوازی‌الاضلاعی به مساحت k^2 ایجاد کنند.

۴۱۱. فرض می‌کنیم l و l_1 دو خط موازی در یک صفحه باشند.

الف. تنها با استفاده از ستاره، پاره‌خط AB واقع بر l را به دو قطعهٔ مساوی تقسیم کنید.

ب. با استفاده از ستارهٔ تنها، از نقطهٔ مفروض M خطی به موازات l و l_1 رسم کنید.

۳.۳.۱.۸.۶. دو خط ، سه نقطه

۳.۳.۱.۸.۶.۱. دو خط در هر حالت، سه نقطه

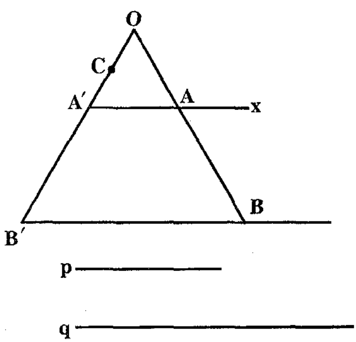
۴۱۲. دو محور D و D' و نقطه‌های A و A' روی آنها داده شده‌اند. از نقطهٔ مفروض P خطی چنان رسم کنید که محورها را در M و M' قطع کند، به‌قسمی که مجموع AM و $A'M'$ مقدار معلوم l باشد.

۴۱۳. دو خط l_1 و l_2 و یک نقطهٔ A بر l_1 و یک نقطهٔ B بر l_2 و یک نقطهٔ P ناواقع بر l_1 و l_2 داده شده‌اند. از P خطی رسم کنید که l_1 و l_2 را در نقطه‌های X و Y قطع کند به‌طوری که :

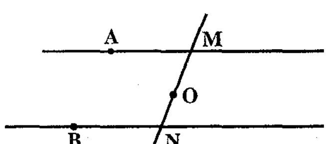
الف. $\frac{AX}{BY}=\frac{m}{n}$ باشد.

ب. $AX.BY=k^2$ باشد.

۳.۳.۱.۸.۶.۲. دو خط موازی، سه نقطه



۴۱۴. دو نقطهٔ A و B روی دو خط موازی دادهٔ شدهٔ x و y مشخص شده‌اند. از نقطهٔ داده‌شدهٔ C که روی هیچ کدام از این خطها قرارندارد، قاطع $CA'B'$ را طوری رسم کنید که خطهای x و y را در نقطه‌های A' و B' قطع کند و پاره خطهای AA' و BB' با دو پاره‌خط مفروض p و q متناسب باشند.



۴۱۵. روی یکی از دو خط موازی، نقطهٔ A و روی دیگری نقطهٔ B داده شده است. از نقطهٔ داده‌شدهٔ O بین این دو خط موازی خطی چنان رسم کنید که دو خط موازی را در M و N قطع کند، به‌طریقی که $BN+AM=l$ باشد.

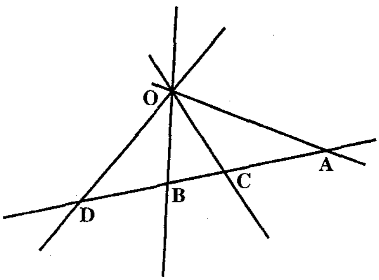
۳.۳.۱.۸.۷. سه خط، یک یا چند نقطه

۳.۳.۱.۸.۷.۱. سه خط در هر حالت، یک یا چند نقطه

۴۱۶. دو خط متقاطع x و y و نقطهٔ P و امتداد Δ داده شده‌اند. خطی به موازات Δ چنان رسم کنید که x را در A و y را در B قطع کند و $PA=PB$ باشد.

۴۱۷. خط (l)، دو خط (m) و (n) را بترتیب در نقطه‌های A و B قطع می‌کند. از نقطهٔ P واقع بر (l) خطی رسم کنید که (m) و (n) را بترتیب در نقطه‌های A' و B' قطع کند، به‌طوری که: $\frac{AA'}{BB'} = k$ (بحث).

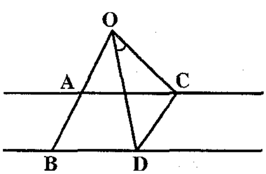
آزمون مرحله اوّل نهمین دورهٔ مسابقات ریاضی ایران



۴۱۸. از یک نقطهٔ داده شده، موربّی رسم کنید که سه نقطهٔ برخورد آن با سه خط داده شده (چه همرس باشند، چه نباشند) با نقطهٔ داده شده، یک گسترهٔ همساز (تقسیم توافقی) به‌وجود آورند.

۴۱۹. سه خط l_1، l_2 و l_3 و یک نقطهٔ P در یک صفحه داده شده‌اند. از P خطی رسم کنید که آن سه خط را بترتیب در نقطه‌های X، Z و Y ببرد، به‌طوری که $XZ = ZY$.

۴۲۰. سه خط l_1، l_2 و l_3 و سه نقطهٔ A، B و C بترتیب روی l_1، l_2 و l_3 داده شده‌اند. خطی مانند m رسم کنید به قسمی که خطهای l_1، l_2 و l_3 را بترتیب در X، Y و Z قطع کند و داشته باشیم: $AX = BY = CZ$.



۴۲۱. دو خط موازی و یک نقطهٔ ثابت O و امتداد AB داده شده‌اند. قاطع CD را موازی خط AB چنان رسم کنید که زاویهٔ COD حداکثر مقدار ممکن را داشته باشد.

۲.۷.۸.۱.۳.۳. سه خط همرس، یک یا چند نقطه

۴۲۲. سه خط همرس d_1، d_2 و d_3 در یک صفحه داده شده‌اند. ازنقطهٔ مفروض P واقع بر این صفحه خطی رسم کنید که خطهای مزبور را در نقطه‌های A، B و C قطع کند و $AB = BC$ باشد.

۴۲۳. سه خط همرس d_1، d_2 و d_3 داده شده‌اند. از نقطهٔ داده شدهٔ M خطی مرور دهید که اگر d_1، d_2 و d_3 را بترتیب در A، B و C قطع کند، $\frac{AB}{CB} = \frac{m}{n}$ شود.

۳.۳.۱.۸.۸. سه خط و یک راستا، یا چهار خط

۴۲۴. سه خط $d_۱$ ، $d_۲$ و $d_۳$ در صفحه‌ای داده شده‌اند. خطی موازی امتداد معین δ در این صفحه رسم کنید که سه خط مزبور را در نقطه‌های $A_۱$ ، $A_۲$ و $A_۳$ قطع کند و $A_۱A_۲ = A_۲A_۳$ باشد.

۳.۳.۱.۹. نقطه، زاویه

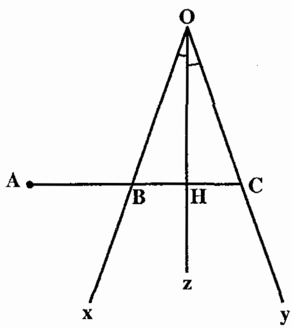
۳.۳.۱.۹.۱. یک زاویه، یک نقطه

۳.۳.۱.۹.۱.۱. یک زاویه، یک نقطه در صفحهٔ زاویه

۴۲۵. از نقطهٔ مفروض خطی رسم کنید به‌طوری که پاره‌خطی که دو ضلع زاویهٔ مفروضی روی آن جدا می‌کنند، توسط آن نقطه، به نسبتی مفروض تقسیم شود.

۴۲۶. بر نقطهٔ مفروض A خطی رسم کنید که ضلعهای زاویهٔ مفروض α را در P و Q قطع کند و داشته باشیم : $AP \times AQ = a^۲$.

۴۲۷. زاویهٔ O و نقطهٔ A داده شده است. از نقطهٔ A قاطعی چنان رسم کنید که بر ضلعهای زاویه، دو طول مساوی جدا کند.

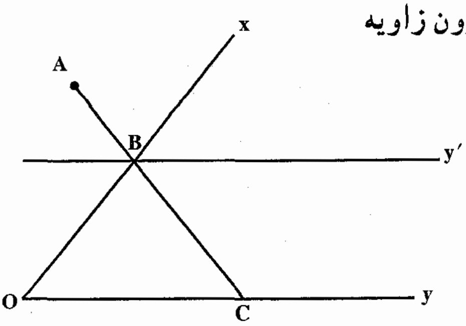


۴۲۸. از یک نقطهٔ داده شده، خطی رسم کنید که با ضلعهای زاویه‌ای مفروض، مثلثی با محیط مفروض تشکیل دهد.

۴۲۹. از نقطه‌ای مفروض خطی رسم کنید که با دو ضلع زاویه‌ای مفروض، زاویه‌ای مساوی بسازد.

۳.۳.۱.۹.۱.۲. یک زاویه، یک نقطه برون زاویه

۴۳۰. از نقطهٔ A واقع در خارج زاویه xOy قاطعABC را چنان مرور دهید که دو ضلع زاویه را در B و C قطع کند و $BC = ۲AB$ باشد.



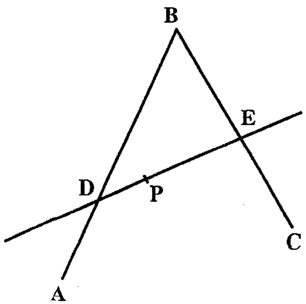
۴۳۱. زاویهٔ xOy و نقطهٔ P واقع در خارج آن داده شده است. از P خطی چنان رسم کنید که Oy را در A و Ox را در B قطع کرده و داشته باشیم :

$$b.OB - a.OA = l$$

(a و b ضریبهای ثابت هستند).

۳.۳.۱.۹.۱.۳. یک زاویه، یک نقطه درون زاویه

۴۳۲. زاویهٔ xOy داده شده است. نقطهٔ A نیز داخل این زاویه داده شده است. خطی رسم کنید که از A گذشته و دو ضلع زاویه را در B و C قطع کند، به قسمی که AB = AC باشد.



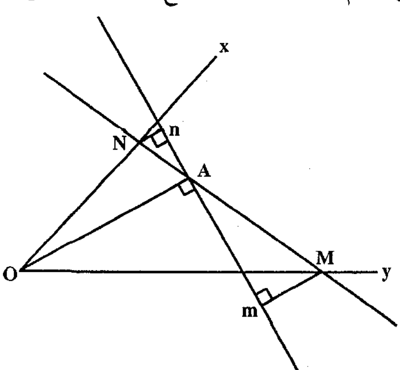
۴۳۳. زاویهٔ ABC و نقطهٔ P داخل این زاویه داده شده است. از نقطهٔ P خطی رسم کنید که دو ضلع AB و BC از زاویه را در نقطه‌های D و E قطع کند، به قسمی که $\frac{PD}{PE} = \frac{۱}{۲}$ باشد.

۴۳۴. زاویهٔ xAy و نقطهٔ P درون آن داده شده است. از این نقطه خطی چنان رسم کنید که مجموع دو ضلع مثلث ایجاد شده با این خط و ضلعهای زاویه (دو ضلعی که روی ضلعهای زاویه هستند)، کمترین مقدار ممکن باشد.

۴۳۵. زاویهٔ xAy و نقطهٔ P درون آن داده شده است. از این نقطه خطی رسم کنید که با دو ضلع زاویه، مثلثی با محیط می‌نیمم ایجاد کند.

۴۳۶. از نقطهٔ P در درون زاویهٔ xOy، خطی رسم کنید که با ضلعهای زاویه، مثلثی به سطح معلوم $k^۲$ ایجاد کند.

۴۳۷. از نقطهٔ D واقع در درون زاویهٔ xOy، خطی رسم کنید که با دو ضلع زاویه، مثلثی به مساحت می‌نیمم ایجاد کند.



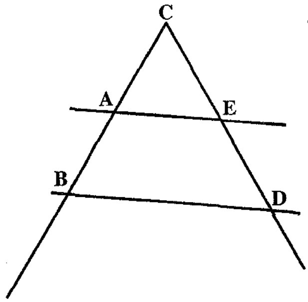
۴۳۸. زاویهٔ xOy و نقطهٔ A درون این زاویه داده شده است. از نقطهٔ A قاطع MAN را رسم کنید به قسمی که mAn تصویر MAN روی خطی عمود بر OA، طول معلوم l داشته باشد.

۴۳۹. زاویه‌ای را روی صفحه رسم و نقطهٔ O را درون آن، علامت می‌گذاریم. از نقطهٔ O، پاره‌خط راست BC را طوری رسم کنید که، دو انتهای آن بر ضلعهای زاویه قرارگیرند و در ضمن، مقدار $\frac{1}{BO}+\frac{1}{CO}$ حداکثر مقدار ممکن باشد.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، امریکا، ۱۹۷۹

۲.۹.۱.۳.۳. یک زاویه، دو نقطه

۴۴۰. زاویه‌ای به رأس C و دو نقطهٔ A و B روی یک ضلع این زاویه داده شده است. از A و B دو خط موازی رسم کنید که ضلع دیگر زاویه را در دو نقطهٔ D و E قطع کنند و AE + BD طول معلوم l داشته باشد.



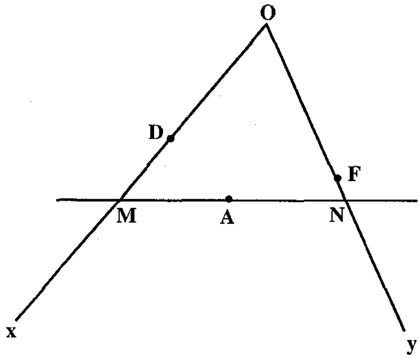
۴۴۱. زاویهٔ xOy و روی یک ضلع آن دو نقطهٔ A و B داده شده است. از این دو نقطه، دو خط متوازی چنان رسم کنید که مساحت ذوزنقهٔ ایجاد شده برابر k^2 باشد.

۴۴۲. زاویه‌ای با رأس A و دو نقطهٔ M و N در درون این زاویه، داده شده‌اند. از M، یک خط راست که ضلعهای زاویه را در نقطه‌های B و C قطع می‌کند، رسم می‌شود. ثابت کنید، برای این که مساحت چهارضلعی ABNC می‌نیمم باشد، لازم و کافی است که خط راست BC، AN را در نقطه‌ای مانند P طوری قطع کند که BP = MC . روش ترسیم این خط را بیان کنید.

۴۴۳. زاویهٔ xOy، نقطهٔ A واقع در داخل آن و نقطهٔ P واقع در خارج آن داده شده است. از P خطی چنان رسم کنید که اگر Ox را در B و Oy را در C قطع کند، خط OA نیمساز زاویهٔ BAC باشد.

۳.۹.۱.۳.۳. یک زاویه، سه نقطه

۴۴۴. بر دو ضلع زاویهٔ xOy دو نقطهٔ A و B ثابتند. از نقطهٔ P در سطح زاویه قاطعی چنان مرور دهید که چون دو ضلع زاویهٔ xOy را در نقطه‌های C و D قطع کند، نسبت $\frac{AC}{BD}$ برابر عدد معلوم k باشد.



۴۴۵. زاویهٔ xOy و دو نقطهٔ ثابت D و F روی ضلعهای Ox و Oy و نقطهٔ A داده شده است. از نقطهٔ A خطی رسم کنید که Ox و Oy را بترتیب در M و N قطع کند، به‌قسمی که $\frac{DM}{FN} = k$ باشد (از آپولونیوس).

۱۰.۱.۳.۳. زاویه، نیمخط

۱.۱۰.۱.۳.۳. یک زاویه، نیمساز زاویه

۴۴۶. زاویهٔ $x\hat{O}y = 60°$ و نیمساز آن Oz داده شده است. خطی رسم کنید که دو ضلع زاویه و نیمساز آن روی آن، دو پاره‌خط مساوی ایجاد کنند و محیط مثلث حاصل بین دو ضلع زاویه و خط رسم‌شده، مساوی ۱۲ باشد.

۱۱.۱.۳.۳. زاویه، نیمخط، نقطه

۱.۱۱.۱.۳.۳. زاویه، نیمساز، نقطه

۴۴۷. از پاپوس اسکندرانی (در رسالهٔ «مجموعهٔ ریاضیات»).
نقطهٔ P بر نیمساز زاویه‌ای داده شده است. از این نقطه، خط راستی چنان رسم کنید که پاره‌خطی از آن، که محدود به دو ضلع زاویه است، برابر طول داده شده باشد.
پاپوس اسکندرانی، هندسه‌دان یونان قدیم، در نیمهٔ دوم سدهٔ سوم میلادی می‌زیست. پاپوس، مؤلف اثر مشهور «مجموعهٔ ریاضیات» در ۸ کتاب است ؛ که از آنها، ۶ کتاب آخر و قسمتی از کتاب دوم به ما رسیده است.
در «مجموعهٔ ریاضیات» مجموعهٔ جالب و بکری از کشفهای ریاضیدان یونان باستان، دربارهٔ هندسه و حساب گرد آمده است. در این اثر، از بسیاری رساله‌های ریاضیدانان یونان باستان نام برده شده است که اصل آنها، به ما نرسیده است.

۴۴۸. از یک نقطه واقع بر نیمساز زاویهٔ xOy خطی چنان رسم کنید که مجموع مربعهای دو قطعهٔ ایجادشده بین آن نقطه و ضلعهای زاویه مقدار معلومی باشد.

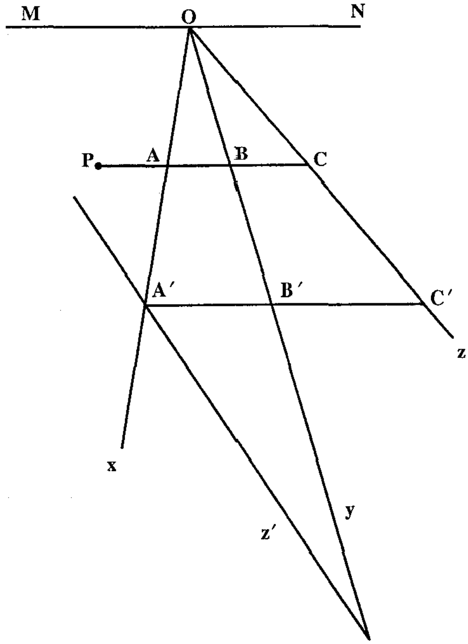
۴۴۹. روی نیمساز یک زاویه، نقطه‌ای مانند P اختیار کرده‌ایم. از این نقطه خطی رسم کرده‌ایم تا روی دو ضلع زاویه قطعه‌هایی مساوی a و b جدا کند. ثابت کنید که مقدار $\frac{1}{a}+\frac{1}{b}$ به انتخاب خطی که از P می‌گذرد، مربوط نیست.

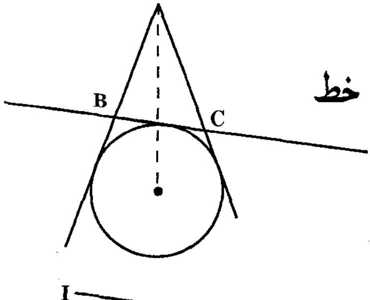
۳.۳.۱.۱۱.۲. زاویه، نیمخط دلخواه، نقطه

۴۵۰. زاویهٔ xOy داده شده است. نیمخط دلخواه Oz در این زاویه رسم شده از نقطهٔ K بر روی Oz، دو خط چنان رسم کنید که Ox و Oy را در C و D قطع کند و زاویهٔ CKD مساوی 90° و زاویهٔ KCD مساوی α باشد.

۴۵۱. زاویهٔ محدب xOy و نیمخط Oz در داخل آن داده شده است. از نقطهٔ معلوم P خطی چنان رسم کنید که Ox، Oy و Oz را بترتیب در نقطه‌های A، B و C قطع کند و C وسط پاره‌خط AB باشد.

۴۵۲. نقطهٔ P زاویهٔ xOy و نیمخط Oz داده شده‌اند. از نقطهٔ P قاطعی چنان مرور دهید که Ox، Oy و Oz را بترتیب در A، B و C قطع کند، به‌قسمی که $\frac{AB}{BC}=\frac{2}{3}$ باشد.





۳.۳.۱.۱۲. زاویه، خط

۳.۳.۱.۱۲.۱. یک زاویه، یک خط

۴۵۳. خطی موازی خط معلوم IJ رسم کنید که دو ضلع زاویهٔ A را در B و C قطع کند و مثلث ABC، محیط معلوم 2P را داشته باشد.

۴۵۴. خطی موازی خط معلوم IJ رسم کنید که دو ضلع زاویهٔ A را در B و C قطع کند و برای مثلث ABC داشته باشیم $AB + AC - BC = ۲P$ باشد.

۱۳.۱.۳.۳. زاویه، خط، نقطه

۱.۱۳.۱.۳.۳. یک زاویه، دو خط، یک نقطه

۴۵۵. زاویهٔ xOy و نقطهٔ ثابت A و امتداد MN داده شده است. خطی موازی امتداد MN رسم کنید که دو ضلع زاویه را در B و C قطع کند، به قسمی که مثلث ABC بیشترین مساحت را داشته باشد.

۴۵۶. از یک نقطهٔ معلوم، خطی رسم کنید که قطعه‌ای که روی آن به‌وسیلهٔ دو خط متوازی معلوم جدا می‌شود، زاویهٔ معلوم را در نقطهٔ معلوم دیگری قطع کند.

۲.۳.۳. رسم خط با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

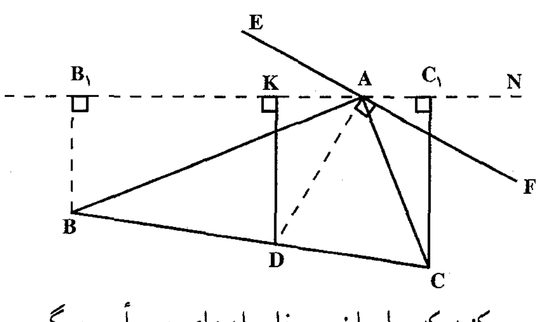
۱.۲.۳.۳. مثلث در حالت کلی

۱.۱.۲.۳.۳. تنها یک مثلث

۱.۱.۱.۲.۳.۳. رسم خط از رأسهای مثلث

۴۵۷. مثلث ABC داده شده است. از رأس A خطی چنان رسم کنید که اگر از B و C عمودهای BB' و CC' را بر آن فرود آوریم، $B'C'$ برابر l شود.

۴۵۸. از رأس A مثلث ABC خطی چنان رسم کنید که مجموع فاصله‌های رأسهای B و C از آن ماکزیمم شود.



۴۵۹. از رأس یک مثلث، خطی چنان رسم کنید که حاصلضرب فاصله‌های دو رأس دیگر مثلث از آن برابر مقدار معلوم $k^۲$ باشد.

۴۶۰. از رأس Aی مثلث، در درون مثلث دو خط چنان رسم کنید که سطح مثلث ABC را به نسبت ۲، ۳ و ۵ بخش کند.

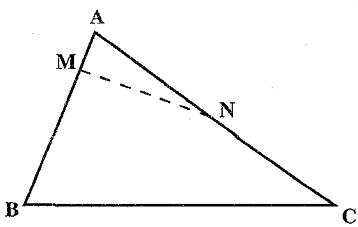
۴۶۱. مثلث غیرمشخص ABC داده شده است. از نقطهٔ A خطی چنان رسم کنید که اگر از نقطه‌های B و C عمودهای BB' و CC' را بر آن خط فرود آوریم، مساحت چهارضلعی حاصل k^2 گردد.

۴۶۲. آیا می‌توان با دو خط راست که از دو رأس مثلث می‌گذرند، مثلث را به چهار بخش چنان تقسیم کرد که سه بخش از آنها مثلثهایی هم‌ارز باشند؟

المپیادهای ریاضی ایران، ۱۳۷۲

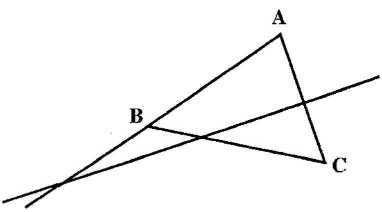
۴۶۳. در صفحهٔ یک مثلث دو راستا به‌دست آورید، به‌طوری که اگر از هر رأس مثلث دو خط بترتیب، موازی با این دو راستا رسم شوند تا ضلع مقابل را در دو نقطه قطع کنند، شش نقطهٔ همدایره به دست آید.

۳.۳.۲.۱.۱.۲. رسم خط متقاطع با ضلعهای مثلث

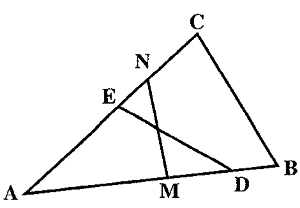


۴۶۴. در مثلث ABC، خط MN را طوری رسم کنید که ضلعهای AB و AC را در M و N بترتیب قطع کرده و $BN = CN = MN$ باشد.

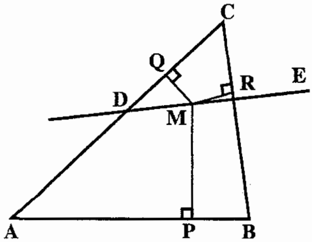
۴۶۵. در مثلث ABC، خط MN را طوری رسم کنید که: $\frac{NC}{l} = \frac{MN}{2l} = \frac{BM}{3l}$



۴۶۶. در مثلث ABC، قاطعی رسم کنید که طول تمام آن قسمتی که بین دو ضلع مثلث قرار می‌گیرد، برابر l باشد و به‌وسیلهٔ ضلع سوم نصف شود. تعداد جوابهای مسأله را بحث کنید.

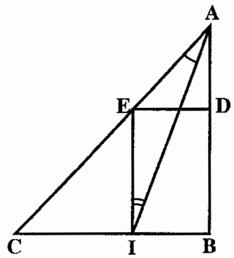


۴۶۷. مثلث ABC را با رسم خطی که کوچکترین پاره‌خط ممکن محدود به ضلعهای مثلث را داشته باشد، به دو قسمت هم‌ارز تبدیل کنید، به بیان دیگر، پاره‌خطی بر دو ضلع مثلث متکی کنید که طولش کمترین مقدار ممکن باشد و مثلث را به دو قسمت هم‌ارز تقسیم کند.

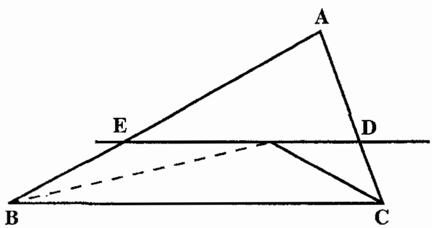


۴۶۸. مثلث ABC داده شده است. خط DE را چنان رسم کنید که مجموع فاصلهٔ هر نقطهٔ آن از سه ضلع مثلث، مقدار ثابتی باشد.

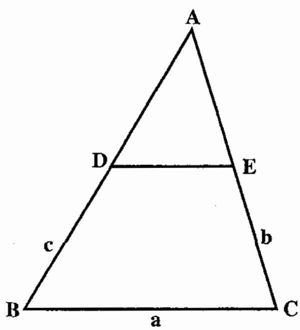
۳.۱.۱.۲.۳.۳. رسم خط موازی ضلعهای مثلث



۴۶۹. خط DE را موازی با ضلع BC از مثلث ABC رسم کنید، چنان که دو ضلع AC و AB را بترتیب در E و D قطع کند و داشته باشیم : $BD = AE$.



۴۷۰. در مثلث ABC، خطی موازی BC چنان رسم کنید که دو ضلع مثلث را در نقطه‌های D و E قطع کند به طوری که $ED = BE + CD$ باشد.



۴۷۱. خطی موازی ضلع BC از مثلث ABC چنان رسم کنید که ذوزنقه‌ای با محیط مساوی ۲P به‌دست آید.

۴۷۲. مثلثی را با خطی موازی یکی از ضلعها به دو قسمت هم ارز تقسیم کنید.

۴۷۳. مثلث ABC داده شده است. خطی موازی یک ضلع مثلث رسم کنید که سطحی معادل این مثلث به آن اضافه شود.

۴۷۴. در مثلث ABC خط $A_1B_1 \| AB$ را چنان رسم کنید که مساحت مستطیل $A_1B_1C_1D_1$ ماکزیمم باشد (C_1 و D_1 تصویرهای A_1 و B_1 روی ضلع AB هستند).

۴۷۵. مثلث ABC داده شده است. خطی موازی ضلع AB رسم کنید که دو ضلع AC و BC را در M و N قطع کند و در مستطیل MNPQ محاط در این مثلث (M' و N' تصویرهای M و N روی ضلع BC می‌باشند)، مجموع مربعهای دو ضلع مجاور مقدار ثابت k^2 باشد، یعنی: $MN^2 + MP^2 = r^2$.

۴۷۶. قاطعی مانند XY موازی قاعدهٔ BC از مثلث ABC طوری رسم کنید که بین YC، XB و XY رابطه‌ای متجانس برقرار شود (نظیر $XY^2 = XB^2 + YC^2$ و $XY^2 = XB.YC$).

۴۷۷. مثلث ABC داده شده است. خطهایی موازی ضلع BC رسم کنید که این مثلث را به سه بخش معادل تقسیم کنند.

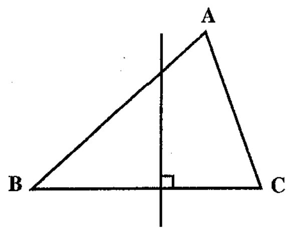
مسأله‌ای از ابوالوفاء بوزجانی

۴۷۸. مثلث ABC داده شده است. به‌وسیلهٔ رسم خطهایی موازی یکی از ضلعهای مثلث، مثلث را به سه بخش چنان تقسیم کنید که مساحت آنها به نسبت عددهای m، n و p باشد.

۳.۳.۲.۱.۱.۴. رسم خط عمود بر ضلعهای مثلث

۴۷۹. مثلثی را به دو قسمت معادل هم به وسیلهٔ خطی عمود بر یک ضلع تقسیم کنید.

۴۸۰. خطی عمود بر قاعدهٔ مثلث داده شده‌ای رسم کنید، به‌طوری که مساحت مثلث به نسبت دادهٔ شدهٔ p:q تقسیم شود.



۳.۳.۲.۱.۲. یک مثلث،نقطه

۳.۳.۲.۱.۲.۱. یک مثلث، یک نقطه

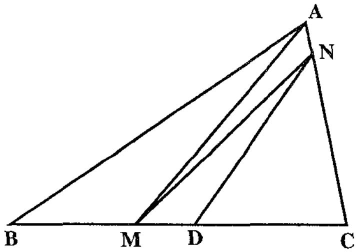
۳.۳.۲.۱.۲.۱.۱. یک مثلث، یک نقطه در صفحهٔ مثلث

۴۸۱. از یک نقطهٔ معلوم، قاطعی رسم کنید که با ضلعهای مثلثی معلوم، مثلثی به‌وجود آورد که محیطش در دست است.

۴۸۲. از یک نقطهٔ مشخص، خطی رسم کنید که سطح یک مثلث معلوم را نصف کند.

۴۸۳. از نقطهٔ M که روی ضلعهای مثلث ABC قرار ندارد، خطی رسم کنید که مثلث را قطع کند و مثلثی با حداقل مساحت ممکن پدید آورد.

۲.۱.۲.۱.۲.۳.۳. یک مثلث، یک نقطه روی ضلع مثلث

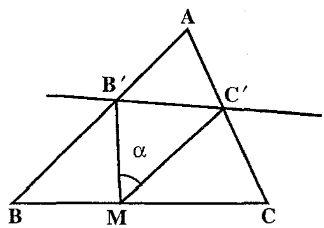


۴۸۴. از نقطهٔ M واقع بر BC خطی چنان رسم کنید که مثلث را به دو شکل معادل هم تقسیم کند.

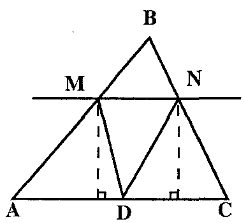
۴۸۵. تقسیم مثلث به چهار قسمت هم‌ارز: مثلث ABC و نقطهٔ D روی ضلعBC داده شده است. از نقطهٔ D خطهایی رسم کنید که مثلث به چهار بخش هم‌ارز تقسیم شود.

از ابوالوفاء بوزجانی

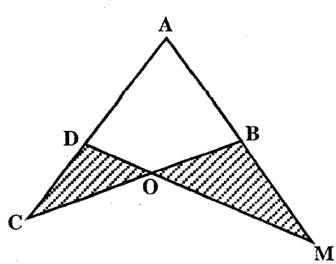
۴۸۶. خطی به موازات قاعدهٔ یک مثلث داده شده رسم کنید، به‌طوری که پاره‌خطی که توسطَ دو ضلع دیگر مثلث روی آن جدا می‌شود، از نقطهٔ مفروضی روی قاعده با زاویهٔ مفروضی دیده شود.



۴۸۷. مثلث ABC داده شده است. خط MN را موازی قاعدهٔ AC رسم کنید به قسمی که اگر D نقطه‌ای ثابت روی قاعدهٔ AC باشد، مثلث DMN مساحت معینی داشته باشد.



۴۸۸. مثلث ABC داده شده است. از نقطهٔ O وسط ضلع BC خط MOD را چنان رسم کنید که AC را در D و AB را در M قطع کند و نسبت مساحتهای دو مثلث OBM و OCM برابر مقدار معلوم k^2 باشد (شکل).



۳.۲.۳.۲.۱.۲.۱.۳. یک مثلث، یک نقطه درون مثلث

۴۸۹. الف. جفت عدد (n_1, n_2) را $(n_1 \le n_2)$، قابل اجرا می‌نامیم، به‌شرطی که بتوان مثلث را، به‌وسیلهٔ خط راستی که از نقطهٔ درونی آن می‌گذرد، به n_1 ضلعی و n_2 ضلعی تقسیم کرد. چند جفت عدد قابل اجرا وجود دارد؟

ب. چهار عدد (n_1, n_2, n_3, n_4) را $(n_1 \le n_2 \le n_3 \le n_4)$، قابل اجرا می‌نامیم، وقتی که مثلث را بتوان با رسم دو خط راستی که از نقطهٔ درونی آن می‌گذرند، به n_1 ضلعی، n_2 ضلعی، n_3 ضلعی و n_4 ضلعی تقسیم کرد. چند گروه چهار عددی قابل اجرا وجود دارد؟

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

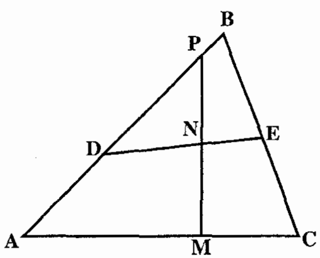
۴۹۰. وابسته‌های همساز مرکز ثقل مثلث را رسم کنید. آیا مرکز ثقل، قطبی سه خطی دارد؟

۳.۲.۳.۲.۱.۲.۲. یک مثلث، دو نقطه

۴۹۱. مثلث ABC و دو نقطهٔ روی محیط این مثلث داده شده‌اند. از این دو نقطه، دو خط چنان رسم کنید که مثلث را به سه بخش معادل هم تبدیل کنند.

۳.۲.۳.۲.۱.۳. یک مثلث، پاره‌خط

۴۹۲. مسألهٔ هویگنس (Huygens).



یک پاره‌خط DE، مثلث ABC را به دو بخش تقسیم کرده است. خط MNP را چنان رسم کنید که هر یک از قسمتهای DBE و ADEC، به دو قسمت هم‌ارز (معادل) تقسیم شوند.

۳.۲.۳.۲.۱.۴. یک مثلث، خط

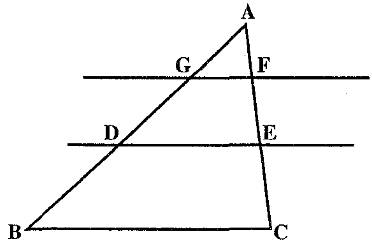
۳.۲.۳.۲.۱.۴.۱. یک مثلث، یک خط یا یک راستا

۳.۲.۳.۲.۱.۴.۱.۱. یک مثلث، یک خط در هر حالت

۴۹۳. خطی با راستای مفروض رسم کنید، که دو ضلع AB و AC از مثلث داده شدهٔ ABC را در نقطه‌های B' و C' قطع کند، به‌طوری که: $BB' = CC'$.

۴۹۴. مثلث ABC و خط xy در یک صفحه داده شده‌اند. خطی موازی ضلع AC از این مثلث رسم کنید به‌قسمی که اگر BC و AB را بترتیب در M و N قطع کند و از M و N خطهایی موازی xy رسم کنیم تا AC را بترتیب در P و Q قطع نمایند، محیط متوازی‌الاضلاع MNPQ مساوی مقدار معلوم ۲P گردد.

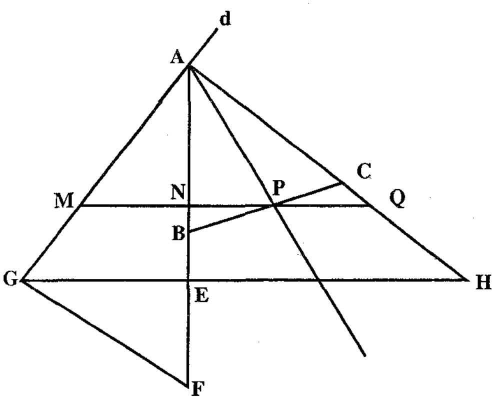
۴۹۵. در مثلث ABC، خط DE دو ضلع زاویهٔ ABC را قطع کرده است. خطی عمود بر DE چنان رسم کنید که به‌وسیلهٔ خطهای BC،AB و DE، دو پاره‌خط متساوی روی آن ایجاد شود.



۴۹۶. در مثلث ABC، خط DE موازی BC رسم شده است. در مثلث ADE خط FG را به موازات DE چنان رسم کنید که ذوزنقهٔ DEFG با ذوزنقهٔ BCED معادل شود.

۴۹۷. مثلث ABC را به‌وسیلهٔ رسم خطی موازی یک امتداد معلوم به دو بخش معادل هم تقسیم کنید.

۴۹۸. d خطی است که از رأس A و در خارج مثلث ABC رسم شده است. خطی رسم کنید که d و سه ضلع (یا امتداد سه ضلع) مثلث را بترتیب در نقطه‌های P ،N،M و Q قطع کند و $MN = NP = PQ$ باشد.



۳.۳.۲.۱.۴.۲. یک مثلث، دو راستا

۴۹۹. دو خط در راستاهای مفروض رسم کنید، به‌طوری که دو مورب معکوس برای مثلث مفروضی باشند.

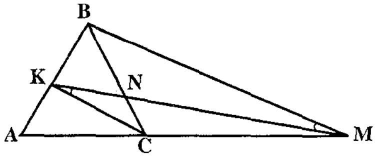
۳.۳.۲.۱.۵. یک مثلث، خط، نقطه

۳.۳.۲.۱.۵.۱. یک مثلث، یک میانه، نقطه

۵۰۰. از نقطهٔ O واقع بر یک میانه از مثلث ABC خطی غیر از این میانه رسم کنید که مثلث را به دو بخش معادل هم تقسیم کند.

۲.۲.۳.۳. مثلث متساوی‌الاضلاع

۱.۲.۲.۳.۳. تنها یک مثلث متساوی‌الاضلاع



۵۰۱. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به ضلع a داده شده است. خطی چنان رسم کنید که ضلعهای AB و AC را در نقطه‌های K و N و امتداد ضلع AC را در نقطهٔ M قطع کند و مثلث KNB، مثلث NCM و چهارضلعی AKNC هم‌ارز باشند.

۳.۲.۳.۳. مثلث متساوی‌الساقین

۱.۳.۲.۳.۳. تنها یک مثلث متساوی‌الساقین

۵۰۲. در مثلث متساوی الساقین ABC به قاعدهٔ ۲a و محیط ۲p خطی به موازات قاعده چنان رسم کنید که محیط ذوزنقهٔ به‌دست‌آمده، مساوی ′۲p باشد.

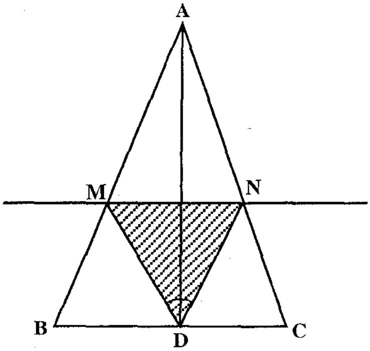
۲.۳.۲.۳.۳. یک مثلث متساوی‌الساقین، یک ارتفاع

۵۰۳. در مثلث متساوی‌الساقین ABC(AB = AC) ارتفاع AD را رسم می‌کنیم. خطی موازی قاعده چنان رسم کنید که به‌وسیلهٔ آن خط و ارتفاع AD، مثلث به چهار قسمت معادل تقسیم شود.

۳.۳.۲.۳.۳. یک مثلث متساوی‌الساقین، یک ارتفاع، یک نقطه

۵۰۴. از نقطهٔ O واقع بر ارتفاع CD از مثلث متساوی‌الساقین ABC(CA = CB) خطی غیراز ارتفاع چنان رسم کنید که مثلث را به دو بخش معادل هم تقسیم کند.

۵۰۵. از نقطهٔ D پای ارتفاع وارد بر قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین ABC(AB = BC)، دو خط DM و DN را چنان رسم کنید که با ارتفاع BD زاویه‌های مساوی بسازند و مثلث DMN کمترین مساحت ممکن را داشته باشد.



۳.۳.۲.۴. مثلث قائم‌الزاویه

۳.۳.۲.۴.۱. مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع

۵۰۶. ارتفاع مثلث حاده‌الزاویه‌ای مساوی ۲۵ سانتیمتر است. در چه فاصله‌ای از رأس باید خطی عمود بر این ارتفاع رسم کرد تا مساحت مثلث را به دو قسمت مساوی تقسیم کرد.

۳.۳.۲.۴.۲. مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع، یک نقطه

۵۰۷. یک مثلث قائم‌الزاویه و نقطه‌ای واقع بر امتداد ارتفاع وارد بر وتر آن داده شده‌اند. خطی رسم کنید که از این نقطه بگذرد و نقطهٔ وسط پاره‌خطی که توسط دو ضلع زاویهٔ قائمه روی آن جدا می‌شود، روی وتر باشد.

۳.۳.۳. رسم خط با معلوم بودن: چندضلعی، چند ضلعی و داده‌های دیگر

۳.۳.۳.۱. چهارضلعی

۳.۳.۳.۱.۱. چهارضلعی در حالت کلی

۵۰۸. خطی از یکی از رأسهای چهارضلعی چنان رسم کنید، که آن‌را به دو قسمت معادل هم تقسیم کند.

۵۰۹. خطی رسم کنید که محیط و مساحت یک چهارضلعی داده شده را نصف کند.

۵۱۰. خطی رسم کنید که از چهارضلعی ABCD سطحی معادل $\frac{1}{3}$ آن جدا کند.

۵۱۱. چهارضلعی ABCD و نقطهٔ M روی ضلع AB از این چهارضلعی داده شده است. خطی از نقطهٔ M رسم کنید که چهارضلعی به دو بخش معادل هم (هم‌ارز) تقسیم شود.

۵۱۲. چهارضلعی ABCD و یک نقطه روی یک ضلع آن داده شده است، خطی از این نقطه رسم کنید که مساحت چهارضلعی را به دو قسمت به نسبت معلومی، تقسیم کند.

۵۱۳. ضلعهای BC و AD از چهارضلعی ABCD به‌وسیلهٔ نقطه‌های B_1 ، B_2 و A_1 ، A_2 به قسمتهای مساوی تقسیم شده‌اند. آیا همیشه می‌توان خط مستقیمی را طوری رسم کرد که قطعهٔ محصور از آن به‌وسیلهٔ ضلعهای AB و CD به‌وسیلهٔ خطهای A_1B_1 و A_2B_2 به دو قسمت مساوی تقسیم شوند؟

۵۱۴. آیا هر چهارضلعی محدب را می‌توان با یک خط شکسته، به دو بخش چنان تقسیم کرد که قطر هر کدام از آنها، کوچکتر از قطر چهارضلعی اصلی باشد؟

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، آلمان، ۱۹۸۲

۳.۳.۳.۱.۲. چهارضلعیهای ویژه

۳.۳.۳.۱.۲.۱. متوازی‌الاضلاع

۳.۳.۳.۱.۲.۱.۱. تنها یک متوازی‌الاضلاع

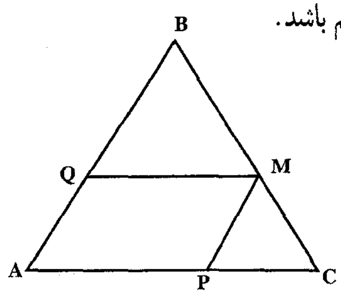
۵۱۵. متوازی‌الاضلاع ABCD مفروض است. خطی رسم کنید که این متوازی‌الاضلاع را به دو ذوزنقهٔ همنهشت تبدیل کند. مسأله چند جواب دارد؟

۵۱۶. خطی رسم کنید که از متوازی‌الاضلاع $\frac{1}{3}$ مساحت آن را جدا کند.

مسأله‌ای از ابوالوفاء بوزجانی

۳.۳.۳.۱.۲.۱.۲. یک متوازی‌الاضلاع، یک نقطه

۵۱۷. متوازی‌الاضلاع APMQ داده شده است. از رأس M خط BMC را چنان رسم کنید که مثلث BAC می‌نیمم باشد.



۵۱۸. متوازی‌الاضلاعی را با رسم خطی از یک نقطه واقع بر یک ضلع، به دو بخش معادل تقسیم کنید.

۵۱۹. متوازی‌الاضلاع ABCD و نقطهٔ O خارج آن داده شده است. از O خطی رسم کنید که این متوازی‌الاضلاع را به دو بخش معادل تقسیم کند.

۳.۳.۳.۱.۲.۱.۳. یک متوازی‌الاضلاع، یک خط

۵۲۰. متوازی‌الاضلاعی را با خطی به موازات خط داده شدهٔ Δ به دو قسمت معادل هم تقسیم کنید.

۳.۳.۳.۱.۲.۱.۴. دو متوازی‌الاضلاع

۵۲۱. دو متوازی‌الاضلاع دلخواه در یک صفحه داده شده‌اند. چگونه می‌توان یک خط رسم کرد، به نحوی که، هر متوازی‌الاضلاع را به دو ناحیه با مساحتهای مساوی تقسیم کند.

۳.۳.۳.۱.۲.۲. مستطیل

۵۲۲. مستطیل 60×24 را با رسم خطهای راست موازی با ضلعها به مربعهایی به ضلع واحد بخش کرده‌ایم. خط راست دیگری رسم کنید که پس از آن، تعداد بخشهای مستطیل، حداکثر مقدار ممکن شود.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۵

۳.۳.۳.۱.۲.۳. مربع

۵۲۳. مربع را به پنج‌ضلعیهای کوژ تقسیم کنید.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۰

۳.۳.۳.۱.۲.۴. لوزی

۵۲۴. لوزی ABCD داده شده است. خطی از یک رأس آن چنان رسم کنید که مساحت لوزی را به نسبت $\frac{1}{3}$ تقسیم کند. مسأله چند جواب دارد؟

۳.۳.۳.۱.۲.۵. ذوزنقه

۳.۳.۳.۱.۲.۵.۱. ذوزنقه در حالت کلی

۳.۳.۳.۱.۲.۵.۱.۱. تنها یک ذوزنقه

۵۲۵. ثابت کنیدکه ضلعهای غیرمتوازی و قطرهای هر ذوزنقه روی هر خط که با دو قاعده موازی باشند، سه قطعه خط متوالی جدا می‌کنند که دو قطعهٔ دو طرف آنها مساوی‌اند. مطلوب است، رسم این خط به‌قسمی که این هر سه قطعه خط مساوی باشند.

۵۲۶. خطی موازی قاعده‌های یک ذوزنقه داده شده رسم کنید که پاره‌خط محدود به دو قطر ذوزنقه به طول معلوم l باشد.

۵۲۷. ذوزنقه‌ای را با رسم خطی موازی قاعده‌ها به دو بخش معادل تقسیم کنید.

از ابوالوفاء بوزجانی

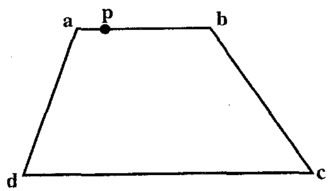
۵۲۸. خطی موازی قاعده‌های یک ذوزنقه رسم کنید که آن را به دو بخش متناسب با عدد داده شده تقسیم کند، مثلاً $\frac{2}{5}$.

۵۲۹. خطی موازی دو قاعدهٔ ذوزنقه چنان رسم کنید که مساحت آن را به دو قسمت متناسب با m و n تقسیم کند.

۵۳۰. ذوزنقه‌ای را با خط مستقیم چنان قطع کنید که دو چهارضلعی متشابه به‌دست آید.
۵۳۱. ذوزنقه‌ای را به وسیلهٔ رسم خطی متقاطع با دو قاعده، به دو بخش معادل هم تقسیم کنید.
۵۳۲. ذوزنقه‌ای را به‌وسیلهٔ خطهایی که با دو قاعده متقاطع باشند، به سه قسمت معادل هم تقسیم کنید.
۵۳۳. ذوزنقهٔ ABCD داده شده است. به‌وسیلهٔ رسم خطهایی موازی دو ضلع ناموازی ذوزنقه (ساقها)، آن‌را به سه بخش معادل هم تقسیم کنید.

۲.۱.۵.۲.۱.۳.۳.۲. یک ذوزنقه، یک نقطه

۵۳۴. از نقطهٔ مفروض P خطی چنان رسم کنید که دو قاعدهٔ ذوزنقهٔ مفروضی را قطع نموده، آن‌را به دو قسمت هم‌ارز تقسیم کند.
۵۳۵. از نقطهٔ O واقع در خارج ذوزنقهٔ ABCD خطی رسم کنید که مساحت این ذوزنقه را به نسبت k تقسیم کند.
۵۳۶. ذوزنقهٔ abcd به قاعده‌های [ab] و [cd] و نقطهٔ p واقع بر [ab] داده شده است. از p خطی چنان رسم کنید که ذوزنقه را به دو بخش با مساحتهای برابر تقسیم کند.



المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

۵۳۷. از نقطهٔ E واقع بر قاعدهٔ AB از ذوزنقهٔ ABCD خطی رسم کنید که مساحت ذوزنقه را به نسبت $\frac{۱}{۳}$ تقسیم کند.

۲.۳.۳.۳. چندضلعی و داده‌های دیگر

۱.۲.۳.۳.۳. چندضلعی، نقطه

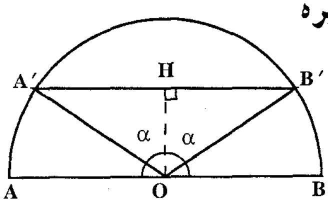
۵۳۸. چندضلعی مفروضی را به وسیلهٔ رسم خطی از یک نقطه واقع بر محیط آن، به دو بخش معادل هم یا به دو بخش که مساحت آنها به نسبت معلومی است، تقسیم کنید.
۵۳۹. با رسم خطهایی از نقطهٔ O واقع در درون یک چندضلعی داده شده، آن را به بخشهایی متناسب با عددهای داده‌شده‌ای تقسیم کنید.

۴.۳.۳. رسم خط با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر

۱.۴.۳.۳. ربع دایره

۵۴۰. ربع دایرهٔ AOB داده شده است. از نقطهٔ O خطی چنان رسم کنید که نسبت مساحت دو قطاع ایجاد شده در ربع دایره، مساوی ۳ باشد.

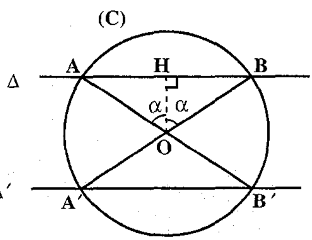
۲.۴.۳.۳. نیمدایره



۵۴۱. نیمدایرهٔ AOB داده شده است. خطی موازی قطر AB از این نیمدایره چنان رسم کنید که در نیمدایره، قطعه‌ای به مساحت $\frac{۱}{۲}$ مساحت نیمدایره ایجاد کند.

۳.۴.۳.۳. یک دایره

۱.۳.۴.۳.۳. تنها یک دایره



۵۴۲. دایرهٔ C(O,R) داده شده است. دو خط موازی یکدیگر و به یک فاصله از مرکز دایره، چنان رسم کنید که مساحت سطح ایجاد شده بین دایره و وترهای ایجادکننده به‌وسیلهٔ این دو خط روی دایره مساوی $R^۲$ باشد.

۲.۳.۴.۳.۳. یک دایره، نقطه

۱.۲.۳.۴.۳.۳. یک دایره، یک نقطه

۱.۱.۲.۳.۴.۳.۳. یک دایره، یک نقطه در صفحهٔ دایره

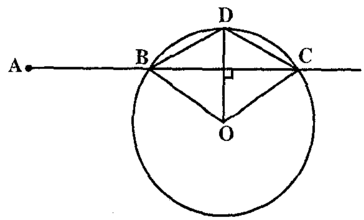
۵۴۳. نقطهٔ M و دایرهٔ (C) غیرگذرنده بر نقطهٔ M داده شده‌اند. از M قاطعی بر دایره چنان رسم کنید تا دایره را در نقطه‌های A و B قطع کرده و داشته باشیم:

$$\frac{MA}{MB} = k$$

۵۴۴. از یک نقطهٔ مفروض، خطی رسم کنید که ازمرکز دور از دسترس دایره‌ای مفروض بگذرد.

۵۴۵. از نقطهٔ داده شده، خطی رسم کنید که با دایرهٔ داده شده، زاویهٔ α تشکیل دهد.

۵۴۶. دایرهٔ O و نقطهٔ A داده شده است. از نقطهٔ A قاطع ABC را چنان رسم کنید که چهارضلعی حاصل از وصل کردن B و C به دو سر شعاع OD که بر خط ABC عمود است، بیشترین مساحت را داشته باشد (چهارضلعی BDCO در شکل) بحث کنید.



۲.۱.۲.۳.۴.۳.۳. یک دایره، یک نقطه برون دایره

۵۴۷. گیریم A نقطه‌ای در بیرون دایرهٔ S باشد. با استفاده از یک ستارهٔ تنها، از A مماسهایی بر دایرهٔ S رسم کنید.

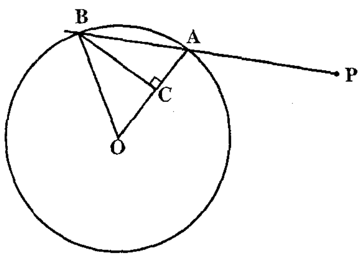
۵۴۸. از نقطهٔ M، واقع در بیرون دایره، قاطعی نسبت به دایره چنان رسم کنید که به‌وسیلهٔ دایره، به دو قسمت برابر تقسیم شود.

از کاتالان

۵۴۹. از نقطه‌ای خارج دایره، قاطعی چنان رسم کنید که طول کمان جدا شده روی دایره مقدار معلومی باشد.

۵۵۰. از نقطهٔ P خارج یک دایره، قاطع PAB را بر دایره‌ای چنان رسم کنید که وتر جداشدهٔ AB واسطهٔ هندسی مابین PA و PB باشد.

۵۵۱. از نقطهٔ P واقع در خارج دایره‌ای به مرکز O قاطع PAB را چنان رسم کنید که مساحت مثلث AOB بزرگترین مقدار ممکن را دارا باشد.



۳.۳.۴.۳.۲.۱.۳. یک دایره، نقطه روی دایره

۵۵۲. گیریم A نقطه‌ای بر یک دایره باشد. با استفاده از ستارهٔ تنها مماسی بر این دایره در نقطهٔ A رسم کنید.

۳.۳.۴.۳.۲.۲.۲. یک دایره، دو نقطه

۵۵۳. دایرهٔ O و دو نقطهٔ A و B داده شده‌اند. از نقطهٔ A خطی چنان رسم کنید که نقطه‌های برخوردش با دایره، از B به یک فاصله باشند.

۵۵۴. از نقطهٔ مفروض A خطی رسم کنید که به یک فاصله ازنقطهٔ معلوم B و دایرهٔ معلوم به مرکز C باشد.

۳. ۳. ۴. ۳. ۲. ۳. یک دایره، سه نقطه

۵۵۵. از نقطهٔ E وسط کمان $\overset{\frown}{BEC}$ از یک دایره، قاطعی رسم کنید که وتر BC را در U و دایره را دوباره در A قطع کند به‌طوری که AU برابر طول معلوم t باشد.

۵۵۶. از نقطهٔ وسط یک کمان از یک دایره، خطی رسم کنید چنان‌که پاره‌خط ایجادشده بین وتر آن کمان و قسمت دیگر دایره، طول معینی داشته باشد.

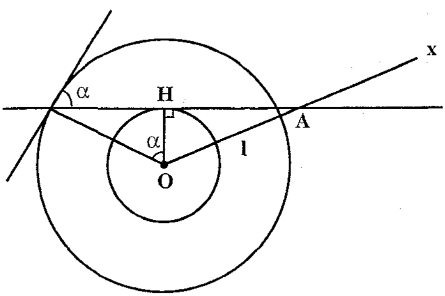
۳. ۳. ۴. ۳. ۳. یک دایره، پاره‌خط

۳. ۳. ۴. ۳. ۳. ۱. یک دایره، یک پاره‌خط

۵۵۷. دایرهٔ $C(O, R)$ و پاره‌خط AB داده شده است. خطی رسم کنید که از وسط این پاره‌خط بگذرد و با دایره، زاویهٔ α بسازد.

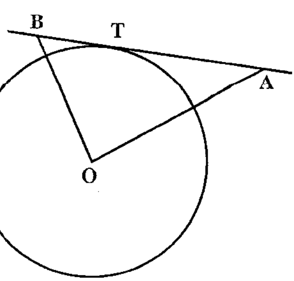
۳. ۳. ۴. ۳. ۴. یک دایره، نیمخط

۳. ۳. ۴. ۳. ۴. ۱. یک دایره، یک نیمخط



۵۵۸. دایرهٔ $C(O, R)$ و نیمخط Ox داده شده است. خطی چنان رسم کنید که با دایره زاویهٔ α بسازد و روی نیمخط Ox پاره‌خط $OA = l$ را جدا کند.

۳. ۳. ۴. ۳. ۴. ۲. یک دایره، دو نیمخط



۵۵۹. در دایره‌ای معلوم دو شعاع رسم کرده‌ایم. مماسی رسم کنید که محدود به دو شعاع شود و نقطهٔ تماس، قطعه خط حاصل را به نسبت معینی تقسیم کند.

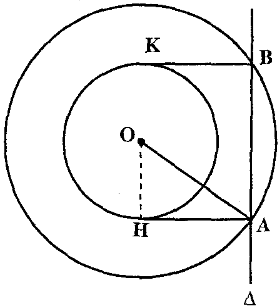
۳. ۳. ۴. ۳. ۵. یک دایره، خط

۳. ۳. ۴. ۳. ۵. ۱. یک دایره، یک راستا یا یک خط

۵۶۰. بر دایرهٔ داده شده، مماسی به موازات امتداد مفروض رسم کنید.

۵۶۱. قاطعی چنان رسم کنید که در دایره مفروضی، وتری به طول l جدا کند و اولاً، بر خط مفروضی عمود باشد. ثانیاً، با خط مفروضی زاویهٔ α بسازد.

۵۶۲. بر دایره‌ای معلوم مماسی رسم کنید که طول قطعهٔ محصور بین نقطهٔ تماس و خط معلوم Δ، مقداری معین باشد.



۳. ۳. ۴. ۳. ۵. ۲. یک دایره، دو خط

۵۶۳. یک دایره و دو خط مماس بر آن داده شده است. مماس سومی بر این دایره چنان رسم کنید که طول قطعه‌ای از آن که محصور بین دو خط مماس داده شده است، مقدار معلوم l باشد.

۳. ۳. ۴. ۳. ۶. یک دایره، زاویه

۵۶۴. یک دایره به ضلعهای زاویهٔ I مماس است. دو خط موازی، مماس براین دایره چنان رسم کنید که مساحت ذوزنقهٔ حاصل مساوی k^2 باشد.

۳. ۳. ۴. ۳. ۷. یک دایره، پاره‌خط، نقطه

۵۶۵. دایرهٔ C(O,R)، پاره‌خط AB و نقطهٔ M داده شده‌اند. خطی چنان رسم کنید که از نقطهٔ M بگذرد و در دایره وتری به طول AB ایجاد کند.

۳. ۳. ۴. ۳. ۸. یک دایره، نیمخط، نقطه

۵۶۶. دایرهٔ C(O,R)، نیمخط Ox و نقطهٔ M داده شده‌اند. خطی رسم کنید که اگر نیمخط Ox را در نقطهٔ A قطع کند، مثلث OMA متساوی‌الساقین باشد.

۳.۳.۴.۳.۹. یک دایره، خط، نقطه

۳.۳.۴.۳.۹.۱. یک دایره، یک قطر، یک نقطه

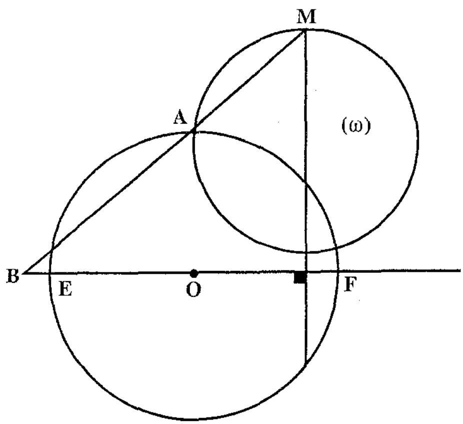
۵۶۷. می‌خواهیم از نقطهٔ M، عمودی بر خط راست AB رسم کنیم، به‌شرطی که نقطهٔ M بر خط راست AB واقع نباشد و پاره‌خط راست AB، قطری از یک دایرهٔ ثابت باشد.

از اشتینر، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

۵۶۸. دایرهٔ (O)، قطر AC از این دایره و نقطهٔ B واقع بر امتداد قطر AC داده شده است. از نقطهٔ B خط DBE را چنان رسم کنید که $\overset{\frown}{CE} = ۳\overset{\frown}{AD}$ باشد.

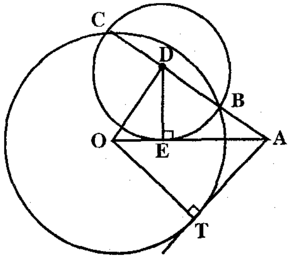
۵۶۹. از نقطه‌ای مفروض در خارج دایره‌ای مفروض، قاطعی رسم کنید به طوری که زاویهٔ حادهٔ بین این قاطع و خطی که مرکز دایره را به نقطهٔ مفروض وصل می‌کند، برابر باشد با زاویه‌ای که وتر ایجادشده در دایره توسط قاطع خواسته شده، از مرکز دایره به آن زاویه دیده می‌شود.

۵۷۰. دایره‌ای و قطری از آن و نقطه‌ای مانند M مفروض است. بر M خطی بگذرانید که دایره و قطرش را در A و B قطع کند و حاصلضرب دو قطعه MA و MB مساوی $a^۲$ باشد.



۵۷۱. از یک نقطهٔ مفروض خارج از دایره‌ای مفروض، قاطعی رسم کنید به‌طوری که حاصلضرب فاصلهٔ نقطه‌های برخورد آن با دایره از قطری که از نقطهٔ مفروض می‌گذرد، مقدار معلومی باشد.

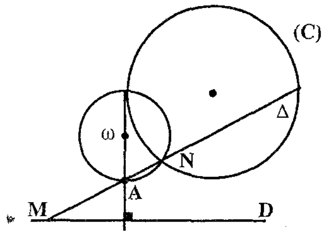
۵۷۲. دایره‌ای به مرکز O و نقطهٔ A خارج آن داده شده‌اند. از نقطهٔ A قاطع ABC را چنان مرور دهید که دایرهٔ به قطر BC بر خط AO مماس باشد.



۳.۳.۴.۳.۹.۲. یک دایره، یک خط ناقطر، یک نقطه

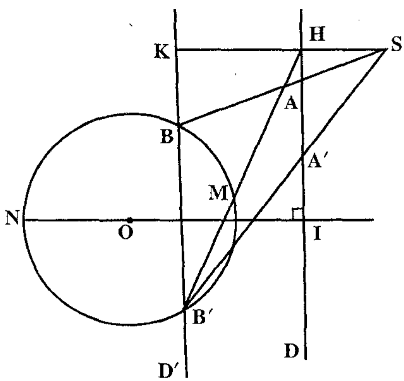
۵۷۳. از نقطهٔ A واقع در خارج دایره داده شده، قاطعی رسم کنید به‌طوری که اگر دایره را در B و C قطع کند، مجموع فاصله‌های نقطه‌های B و C از خط داده شده Δ برابر با مقدار معلوم l باشد.

۵۷۴. نقطهٔ A و خط D و دایره (C) داده شده است. بر A خطی بگذرانید که خط D و دایرهٔ (C) را بترتیب در M و N قطع کند و داشته باشیم $AM.AN = L$.

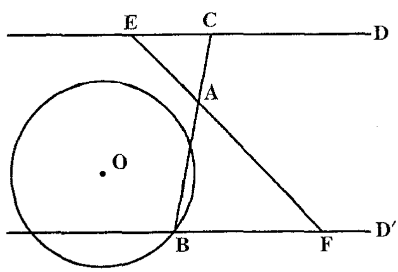


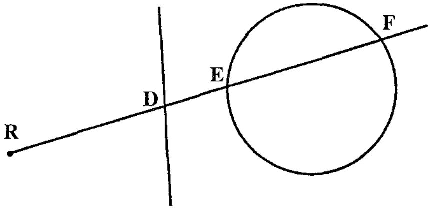
۵۷۵. از نقطهٔ مفروض A خطی بگذرانید که خط مفروض l را در نقطهٔ P، و دایرهٔ مفروض S را در نقطهٔ P' قطع کند و A وسط PP' باشد.

۵۷۶. یک دایره و خط D خارج آن و یک نقطهٔ S مفروض است. از نقطهٔ S قاطعی چنان رسم کنید که خط D را در A و دایره را در B قطع کند و $\frac{SA}{SB} = \frac{۲}{۵}$ باشد.

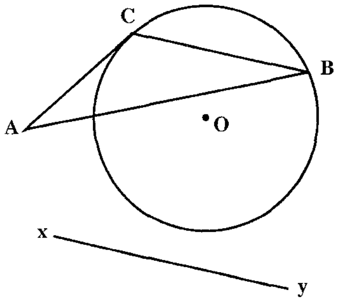


۵۷۷. خط D و دایرهٔ (O) و نقطهٔ متمایز A داده شده است. بر نقطهٔ A خطی مرور دهید که خط و دایره را قطع کرده و نسبت قطعه‌هایی از آن که بین نقطه و خط و دایره محدود می‌شود، مساوی k باشد.





۵۷۸. از نقطهٔ داده شدهٔ R خطی رسم کنید که خط مفروضی را در D و یک دایرهٔ مفروض را در E و F قطع کند، به‌طوری که RD = EF .



۵۷۹. دایرهٔ (O)، نقطهٔ A و خط xy داده شده‌اند. وتر BC را در این دایره به موازات xy چنان رسم کنید که مثلث ABC بیشترین مساحت را داشته باشد. برحسب جای نقطهٔ A بحث کنید.

۳ . ۳ . ۴ . ۳ . ۱۰ . یک دایره، زاویه، خط

۳ . ۳ . ۴ . ۳ . ۱۰ . ۱ . یک دایره، یک زاویه، یک راستا

۵۸۰. خطی موازی امتداد معین Δ چنان رسم کنید که دایرهٔ معلوم O را در A و B و ضلعهای زاویهٔ معلوم S را در C و D قطع کرده، نسبت قطعه خط AB بر قطعه خط CD برابر مقدار معین k باشد.

۳ . ۳ . ۴ . ۴ . دو دایره

۳ . ۳ . ۴ . ۴ . ۱ . تنها دو دایره

۳ . ۳ . ۴ . ۴ . ۱ . ۱ . دو دایره در حالت کلی

۵۸۱. مماس مشترک دو دایرهٔ مفروض را رسم کنید.

از کاردان، از مسأله‌های تاریخی ریاضیات

۵۸۲. خطی رسم کنید که دو دایرهٔ داده شده را به زاویه‌های α و β قطع کند.

۵۸۳. دو دایرهٔ O و O′ داده شده‌اند. قاطعی چنان رسم کنید که در دو دایره دو وتر به طول l و l′ جدا کند.

۵۸۴. قطبیهای مرکز تجانس دو دایره را نسبت به این دو دایره پیدا کنید.

۳. ۳. ۴. ۴. ۱. ۲. دو دایرهٔ برون هم (متخارج)

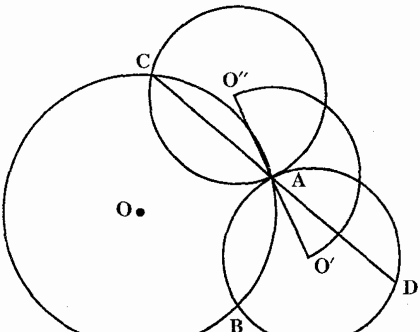
۵۸۵. دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ برون هم هستند. خطی چنان رسم کنید که دایرهٔ (C) را به زاویهٔ α قطع کند و از دایره وتری به طول l جدا کنید.

۳. ۳. ۴. ۴. ۱. ۳. دو دایرهٔ مماس خارج

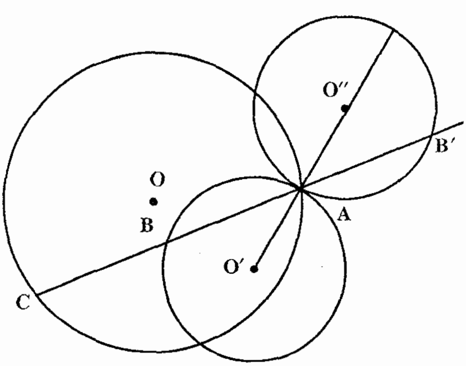
۵۸۶. دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ در نقطهٔ A مماس برون هستند. خطی چنان رسم کنید که از نقطهٔ تماس دو دایره بگذرد و دایرهٔ (O) را به زاویهٔ α قطع کند. این خط دایرهٔ O' را به چه زاویه‌ای قطع می‌کند؟

۳. ۳. ۴. ۴. ۱. ۴. دو دایرهٔ متقاطع

۵۸۷. بر محل برخورد دو دایره خطی رسم کنید به‌طوری که وترهایی که در دو دایره به‌وجود می‌آیند، برابر باشند.



۵۸۸. از نقطهٔ A محل برخورد دو دایره قاطع ABC را چنان مرور دهید که $AB + AC = l$ باشد و دو دایره را در یک طرف نقطهٔ A قطع نماید.



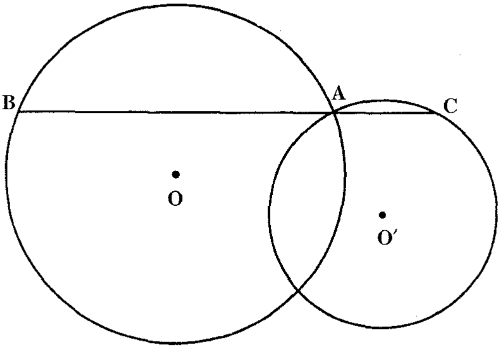
۵۸۹. بر محل برخورد دو دایره خطی به قسمی رسم کنید که دو دایرهٔ داده شده را قطع کند و مجموع وترهایی که در آنها ایجاد می‌کند، مساوی با l باشد.

۵۹۰. برمحل برخورد دو دایره خطی رسم کنید که تفاضل وترهایی که در دو دایره جدا می‌کند، مساوی $2d$ باشد.

۵۹۱. دو دایره در نقطه‌های P و Q متقاطعند. چگونه می‌توان پاره‌خط راست AB را رسم کرد، به نحوی که از نقطهٔ P بگذرد، دو دایره را در نقطه‌های A و B قطع کند و حاصلضرب PA.PB، حداکثر مقدار ممکن باشد؟

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف امریکا، ۱۹۷۵

۵۹۲. بر نقطه تقاطع دو دایره، قاطعی رسم کنید که حاصلضرب قطعه‌های آن که در دو دایره محصورند، مساوی I^2 می‌شود.



۵۹۳. از نقطه تقاطع دو دایره خطی چنان رسم کنید که وترهایی که به وسیله دو دایره به‌وجود می‌آیند، به نسبتی معین باشند.

۵۹۴. از یک نقطهٔ برخورد دو دایرهٔ مفروض، خطی چنان رسم کنید که زاویه‌های مرکزی متناظر با دو وتری که دایره‌ها روی این خط جدا می‌کنند، برابر باشند.

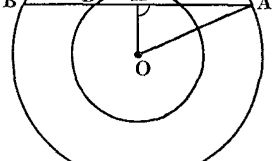
۳ . ۳ . ۴ . ۴ . ۱ . ۵. دو دایرهٔ مماس داخل

۵۹۵. دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ در نقطهٔ A مماس درونی هستند. خطی چنان رسم کنید که دایرهٔ (C) را به زاویهٔ α قطع کند و از نقطهٔ تماس دو دایره به فاصلهٔ l باشد.

۳ . ۳ . ۴ . ۴ . ۱ . ۶. دو دایره یکی درون دیگری (متداخل)

۵۹۶. دو دایرهٔ یکی درون دیگری (متداخل) مفروضند. خطی بر دایرهٔ کوچکتر مماس کنید به قسمی که طول وتر ایجاد شده در دایرهٔ بزرگتر برابر مقدار معلوم l باشد. حداکثر و حداقل طول این وتر را تعیین کنید.

۳ . ۳ . ۴ . ۴ . ۱ . ۷. دو دایرهٔ هم‌مرکز



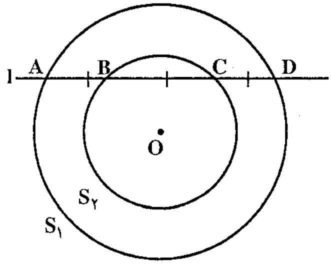
۵۹۷. در دو دایره متحدالمرکز، خطی چنان رسم کنید که طول وتر دایره بیرونی، دو برابر طول وتر دایرهٔ داخلی باشد.

۵۹۸. خطی رسم کنید که روی دو دایرهٔ متحدالمرکز، دو وتر که نسبتشان معلوم باشد به‌وجود آورد.

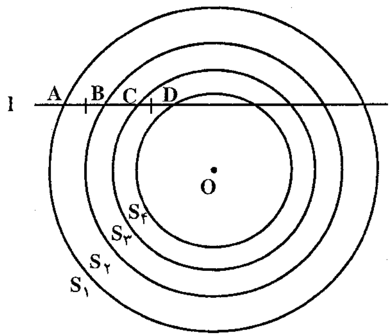
۵۹۹. الف. دو دایرهٔ هم‌مرکز S_1 و S_2 مفروضند. خطی مانند l رسم کنید که دو دایره را در نقطه‌های متوالی A، B، C و D چنان قطع کند که $AB = BC = CD$ (شکل الف).

ب. سه دایرهٔ هم‌مرکز S_1، S_2 و S_3 مفروضند. خطی مانند l رسم کنید که سه دایره را در نقطه‌های متوالی A، B و C چنان قطع کند که $AB = BC$ (شکل ب).

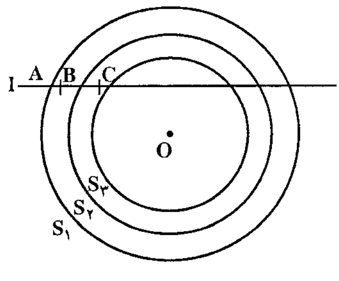
ج. چهار دایرهٔ هم‌مرکز S_1، S_2، S_3 و S_4 مفروضند. خطی مانند l رسم کنید که S_1، S_2، S_3 و S_4 را بترتیب در نقطه‌های A، B، C و D قطع کند به‌طوری که $AB = CD$ (شکل ج).



(الف)



(ج)

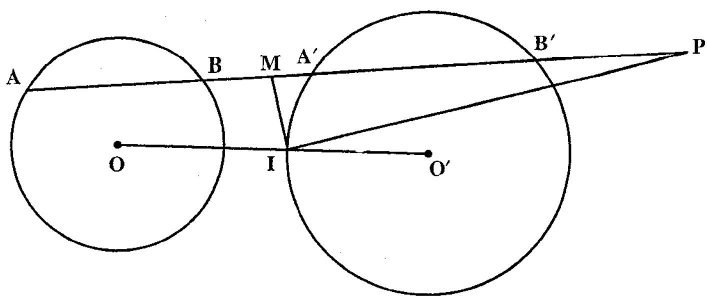


(ب)

۳ . ۳ . ۴ . ۴ . ۲ . دو دایره ، نقطه

۳ . ۳ . ۴ . ۴ . ۲ . ۱ . دو دایره، یک نقطه

۶۰۰. دو دایرهٔ O و ′O و نقطهٔ P داده شده‌اند. از P قاطعی نسبت به دو دایره چنان رسم کنید که وترهای AB و ′A′B برابر باشند.

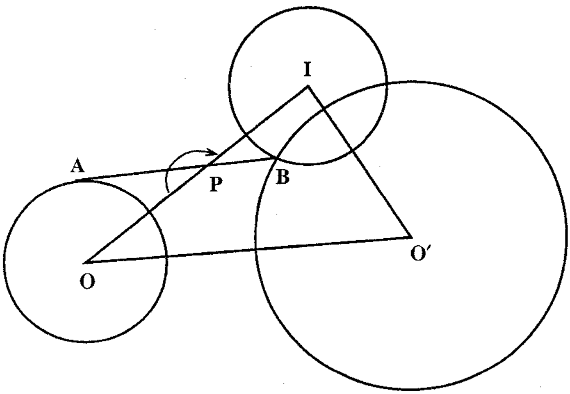


۶۰۱. از یک نقطهٔ داده شده، خطی رسم کنید که نسبت دو پاره‌خطی که دو دایرهٔ داده شده روی آن جدا می‌کنند، با نسبت شعاعهای دو دایره برابر باشد.

۶۰۲. نقطهٔ M و دو دایرهٔ C(O,R) و C′(O′,R′) در صفحهٔ P داده شده‌اند. خطی بر نقطهٔ M مرور دهید که دو دایره را در A و A′ قطع کند، به قسمی که $MA' = ۳MA$ باشد. مسأله در چه‌صورت جواب دارد؟

۶۰۳. از یک نقطهٔ داده شده در صفحه قاطعی رسم کنید، به‌طوری که وترهای جداشده روی آن توسط دو دایرهٔ مفروض همساز باشند.

۶۰۴. از نقطهٔ معلوم P خطی مرور دهید که دو دایرهٔ معلوم را در A و B قطع کند به قسمی که داشته باشیم $PA = PB$.



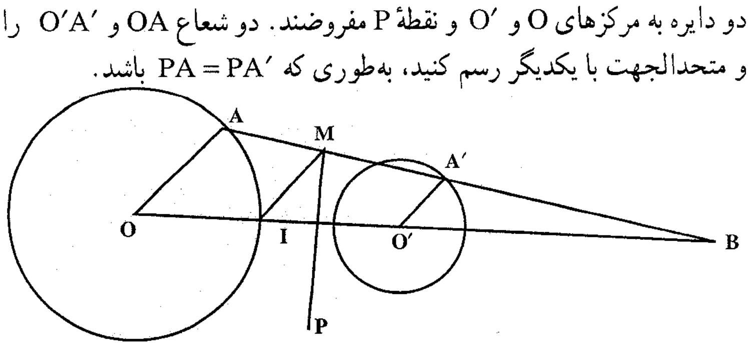
۶۰۵. از نقطهٔ معلوم، خطی رسم کنید که وترهایی که روی دو دایرهٔ معلوم به شعاعهای مساوی به‌وجود می‌آورد، برابر باشند.

۶۰۶. ازنقطهٔ مفروض A، خطی رسم کنید که از دو دایرهٔ (C) و (C′) به یک فاصله باشد.

۶۰۷. دو دایرهٔ S_1 و S_2، یک نقطهٔ A و یک زاویهٔ α مفروضند. از A دو خط l_1 و l_2 به زاویهٔ α رسم کنید که دایره‌های S_1 و S_2 وترهای مساوی بر این دو خط جدا کنند.

۶۰۸. دو دایره و نقطهٔ C در خارج آنها مفروض است. دو شعاع موازی OA و O′B را در دو دایره طوری رسم کنید که داشته باشیم: $O\hat{C}A = O'\hat{C}B$.

۶۰۹. دو دایره به مرکزهای O و O′ و نقطهٔ P مفروضند. دو شعاع OA و O′A′ را موازی و متحدالجهت با یکدیگر رسم کنید، به‌طوری که $PA = PA'$ باشد.

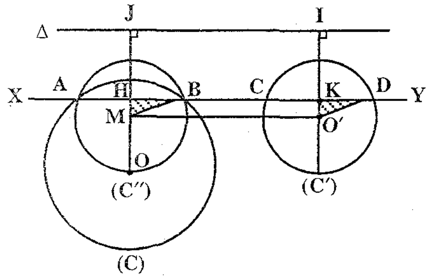


۶۱۰. دو دایرهٔ (C) و (C′) و نقطهٔ M داده شده‌اند. دو خط مماس متوازی بر این دو دایره چنان رسم کنید که نسبت فاصله‌های آنها از نقطهٔ M، مقدار معین k باشد.

۳. ۳. ۴. ۴. ۳. دو دایره، خط

۳. ۳. ۴. ۴. ۳. ۱. دو دایره، یک خط یا یک راستا

۶۱۱. خطی موازی امتداد معین رسم کنید که دو دایرهٔ داده شده را قطع کند و وترهایی که در آنها ایجاد می‌کنند، با هم مساوی باشند.



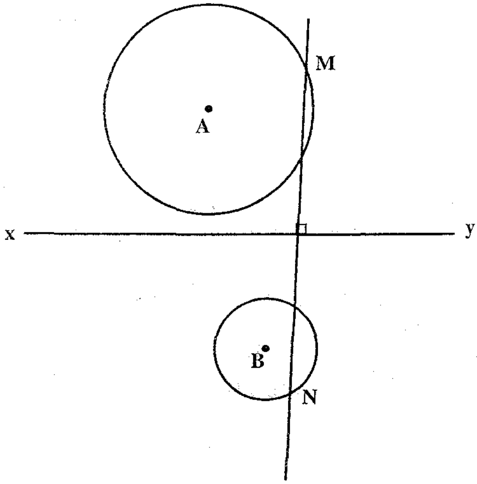
۶۱۲. خطی موازی امتداد معینی چنان رسم کنید که دو دایرهٔ مفروض را قطع کرده و مجموع یا تفاضل وترهایی که در آنها به‌وجود می‌آورد، مساوی مقدار معین l باشد.

۶۱۳. خطی رسم کنید که با امتداد معینی موازی باشد و دو دایرهٔ داده شده را قطع کند و مجموع یا تفاضل وترهایی که در آنها به‌وجود می‌آورد، مساوی مقدار معین l باشد.

۶۱۴. دو دایرهٔ S_1 و S_2 و یک خط l داده شده‌اند. خطی به موازات l متکی بر S_1 و S_2 رسم کنید که طول قسمتی از آن که بین دو دایره محصور است، مساوی مقدار مفروض a باشد.

۶۱۵. خطی به موازات یک خط داده شده رسم کنید، به‌طوری که دو دایرهٔ داده شده را در دو جفت نقطهٔ همساز قطع کند.

۶۱۶. دو دایره و یک خط داده شده‌اند. خطی عمود بر این خط رسم کنید که دو دایره را در پاره‌خطی قطع کند که وسطش روی خط داده شده باشد.



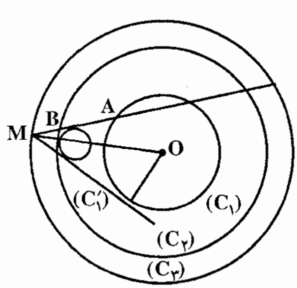
۳ . ۳ . ۴ . ۵. سه دایره

۶۱۷. خطی رسم کنید که از سه دایرهٔ داده شده، به یک فاصله باشد.

۶۱۸. از نقطهٔ مشترک O بین سه دایرهٔ (P)، (Q) و (R) قاطعی رسم کنید که دایره‌ها را در نقطه‌های A، B و C قطع کند و نسبت $AB:AC$ مقدار مفروضی باشد.

۶۱۹. سه دایرهٔ هم‌مرکز داده شده‌اند ؛ قاطعی رسم کنید به‌طوری که پاره‌خط بین دایرهٔ اوّل و دایرهٔ دوم با پاره‌خط بین دایرهٔ دوم و دایرهٔ سوم هم‌اندازه باشد.

۶۲۰. سه دایرهٔ C_1 ، C_2 و C_3 به یک مرکزند. خط $\overline{AMB}$ را چنان رسم کنید که A و B بترتیب بر محیط C_1 و C_2 ، و M بر محیط C_3 باشد و داشته باشیم $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = m$.



۳ . ۳ . ۴ . ۶. چهار دایره و بیشتر

۶۲۱. در دایرهٔ به شعاع برابر ۳، چند دایره به دلخواه جا داده‌ایم. مجموع طولهای شعاعهای این دایره‌ها، برابر است با ۲۵. ثابت کنید، خط راستی پیدا می‌شود که، دست‌کم ۹ دایرهٔ داخلی را قطع می‌کند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۸

۳ . ۳ . ۵. رسم خط با معلوم بودن: مقطعهای مخروطی، مقطعهای مخروطی و داده‌های دیگر

۳ . ۳ . ۵ . ۱. بیضی

۳ . ۳ . ۵ . ۱ . ۱. یک بیضی

۶۲۲. بیضی (E) به کانونهای F و 'F و نقطهٔ M از آن داده شده است. خطی مماس بر بیضی در نقطهٔ M رسم کنید.

۶۲۳. بر بیضی مفروضی، مماسی رسم کنید که به فاصله معلوم d از مرکز آن قرار داشته باشد (بحث).

۶۲۴. از یک نقطه واقع بر یکی از محورهای بیضی مفروض، قائمی بر آن رسم کنید.

۳ . ۳ . ۵ . ۱ . ۲ . دو بیضی

۶۲۵. مطلوب است رسم مماسهای مشترک دو بیضی که دارای یک کانون مشترک باشند.

۳ . ۳ . ۵ . ۱ . ۳ . یک بیضی، یک دایره

۶۲۶. کانونهای بیضی بر روی دایره‌ای معلوم قرار دارد. مماس مشترک این دو منحنی را تعیین کنید.

۶۲۷. خط Δ محمل محور اطول بیضی است (یعنی خطی است که قطر بزرگ بیضی روی آن است). خط D در نقطهٔ M بر بیضی مماس است و دایرهٔ اصلی بیضی خط D را در E قطع می‌کند. کانونها و محورهای بیضی را به‌دست آورید.

۳ . ۳ . ۵ . ۲ . هذلولی

۶۲۸. از یک نقطه واقع بر روی یکی از محورهای یک هذلولی، خط قائمی بر هذلولی رسم کنید.

۳ . ۳ . ۵ . ۳ . سهمی

۳ . ۳ . ۵ . ۳ . ۱ . یک سهمی

۶۲۹. یک سهمی با دو مماس PA و PA' مفروض است. مطلوب است رسم مماسی بر این سهمی به قسمی که طول جداشده از آن به وسیلهٔ PA و PA'، برابر مقدار معلوم l باشد.

۶۳۰. خطهای D° و D_A واقع در یک صفحه همدیگر را در نقطهٔ l قطع می‌کنند. خط D° مماس بر رأس سهمی (P) و خط D_A مماس بر همین سهمی در نقطهٔ معلوم A است (A نقطه‌ای از خط D_A غیر از L است). مطلوب است : ۱. تعیین کانون F و هادی D از این سهمی. آیا F و D می‌توانند مواضع مختلف بگیرند؟ ۲. اگر D° و نقطهٔ A ثابت بمانند و D_A در حول A بچرخد، ولی همواره با D° متقاطع باشد، ثابت کنید که نقطهٔ T محل تقاطع D_A و محور سهمی (P)، بر روی خط D' موازی D حرکت خواهد کرد.

۳. ۳. ۵. ۳. ۲. دو سهمی

۶۳۱. مطلوب است، رسم سومین مماس مشترک دو سهمی، درصورتی که دو مماس مشترک آنها در دست باشد.

۶۳۲. دو سهمی که دارای هادی مشترک می‌باشند، مفروضند. مطلوب است :
۱. رسم مماس مشترک آنها
۲. نقطه‌های مشترک آنها.

۶۳۳. دو سهمی متساوی P و P′ که در رأس O مشترک بوده و محورهای Ox و Oy آنها بر یکدیگر عمود می‌باشند، مفروضند. نقطه‌های برخورد و مماس مشترک این دو سهمی را رسم کنید.

۶۳۴. دو سهمی که دارای کانون مشترکی می‌باشند، مفروضند. مطلوب است :
۱. رسم مماس مشترک آنها
۲. نقطه‌های مشترک آنها.

۶۳۵. دو سهمی دارای محورهای موازی می‌باشند، مطلوب است رسم مماس مشترک آنها.

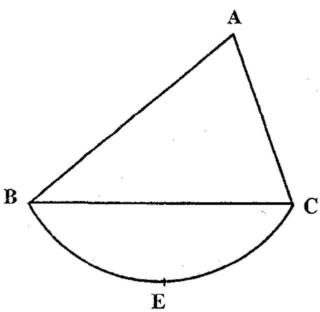
۳. ۳. ۵. ۴. مقطع مخروطی

۶۳۶. از نقطهٔ A مماسهایی بر یک مقطع مخروطی که با کانون F، هادی نظیر آن Δ و خروج از مرکز e مشخص شده است، رسم کنید.

۶۳۷. مماسهایی موازی با خط مفروض Δ بر یک مقطع مخروطی که با کانون F، هادی نظیر Δ و خروج از مرکز e مشخص شده است، رسم کنید.

۳. ۳. ۶. رسم خط با معلوم بودن شکلهای دیگر

۶۳۸. سطح ABEC را به وسیلهٔ رسم خطی که از وسط کمان مستدیر $\overset{\frown}{BC}$ می‌گذرد، به دو نیم کنید.



۳. ۴. رسم زاویه

۶۳۹. زاویه‌های °۹۰، °۴۵ و °۱۳۵ را بدون استفاده از نقاله رسم کنید.

۶۴۰. به وسیلهٔ پرگار و خط‌کش زاویه‌های °۳۰ و °۱۵ را رسم کنید.

۶۴۱. بدون استفاده از نقاله، زاویهٔ ′۲۲°,۳۰ ، ′۶۷°,۳۰ ، ′۱۱۲°,۳۰ را رسم کنید.

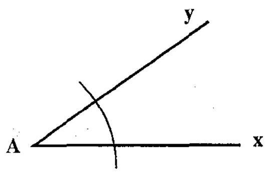
۶۴۲. به کمک ویژگی رسم زاویه‌ها، نشان دهید که تفاضل مکمل و متمم یک زاویهٔ حاده، مساوی یک زاویهٔ قائمه است.

۶۴۳. بدون استفاده از نقاله، زاویه‌های °۶۰، °۱۲۰، °۳۰ ، °۱۵۰، °۱۰۵ و °۷۵ را رسم کنید.

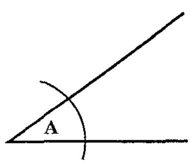
۶۴۴. با استفاده از رسم مثلث، زاویهٔ ۴۵درجه رسم کنید.

۶۴۵. زاویه‌ای حاده داده شده است.

الف. مکمل، ب. متمم، پ. نصف مکمل، ت. نصف متمم این زاویه را رسم کنید.



۶۴۶. زاویهٔ A داده شده است. زاویهٔ برابر $\hat{A}+90^\circ$ را رسم کنید.



۶۴۷. دو زاویهٔ A و B داده شده‌اند. زاویه‌های زیر را رسم کنید.

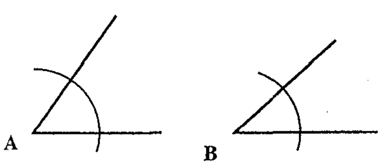
الف. $\hat{A}+\hat{B}$

ب. $\hat{A}-\hat{B}$

پ. $2\hat{B}-\hat{A}$

ت. $2\hat{A}-\hat{B}$

ث. $2(\hat{A}-\hat{B})$



۶۴۸. سه زاویهٔ A، B و C داده شده‌اند. زاویه‌های زیر را رسم کنید.

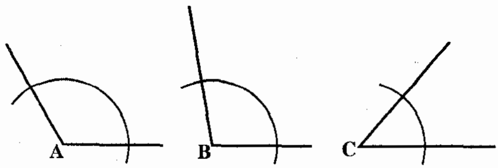
الف. $\hat{A}+\hat{C}$

ب. $\hat{C}+\hat{B}-\hat{A}$

پ. $۲\hat{C}$

ت. $\hat{B}-\hat{C}$

ث. $۲(\hat{A}-\hat{B})$

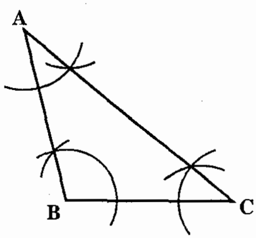


۶۴۹. مثلث ABC داده شده است. زاویه‌های زیر را رسم کنید.

الف. $۲\hat{A}$

ب. $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}$

پ. $\hat{B}-\hat{A}$

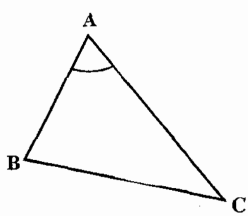


۶۵۰. مثلث ABC با زاویه‌های حاده داده شده است.

الف. مکمل زاویهٔ A را رسم کنید.

ب. متمم زاویهٔ B را رسم کنید.

پ. متمم نصف زاویهٔ C$(\frac{۱}{۲}<\hat{C})$ را رسم کنید.



راهنمایی و حل

از آن‌جا که به گفتهٔ جورج پولیا، j. Polya استاد بزرگ آموزش ریاضی، «دانشجو می‌تواند برای حل مسأله‌ها از کار مستقل و شخصی خود تا جایی که ممکن است، استفاده نماید ؛ ولی در صورتی که او را با مسأله‌ای که باید حل کند، تنها بگذارند و به او کمک نکنند، یا این کمک به اندازهٔ کافی نباشد، ممکن است اصلاً نتواند پیشرفت کند ؛ و اگر بیش از اندازه به او یاری شود، دیگر کاری باقی نمی‌ماند که او انجام دهد». در این مجموعه، برخی از مسأله‌ها حل شده‌اند، تعدادی راهنمایی برای حل دارند و حل برخی دیگر از مسأله‌ها به عهده دانش‌پژوهان واگذار شده است تا این جلد از دایرةالمعارف بتواند نقش و سهمی در تقویت قوه تفکر و خلاقیت ذهنی آنان داشته باشد.

بدیهی است که راه‌حلها و راهنماییهای ارائه شده در این مجموعه، بهترین و یا ساده‌ترین راه‌حل یا راهنمایی نمی‌باشند ؛ و به طور یقین، دانشجویان با دقت نظر و بهره‌گیری از ذهن خلاق خویش، به راه‌حلهایی ساده‌تر و یا جالبتر از راه‌حلهای موجود در این مجموعه دست خواهند یافت.

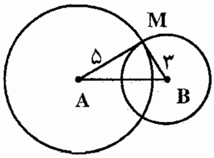
هرچند سعی فراوان شده است تا مطالب این مجموعه خالی از اشتباه باشند، امّا ممکن است باز هم اشکالها و نادرستیهایی وجود داشته باشند، بدین جهت از دانش‌آموزان، دانشجویان، استادان، ریاضیدانان و دیگر علاقمندان به هندسه درخواست می‌شود نظرهای ارشادی و اصلاحی خود، همچنین راه‌حلهای جالبتر یا ساده‌تر برای مسأله‌های حل شده، و راه‌حلهای مناسب و جالب برای مسأله‌های حل نشده را به نشانی مؤلف یا ناشر ارسال فرمایند تا برای هرچه پربارتر کردن محتوای این مجموعه و رفع کاستیهای آن مورد استفاده قرارگیرد ؛ ضمن سپاسگزاری از این لطف و همکاری، برای ارج نهادن به تلاشهایی که در این راه انجام خواهد شد ؛ بهترین و جالبترین راه‌حل برای هر مسأله، همچنین تعمیم قضیه‌ها یا مسأله‌ها به نام فرستنده آن، در چاپهای بعدی دایرةالمعارف درج خواهد شد.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۲
تعیین نقطه (رسم نقطه)

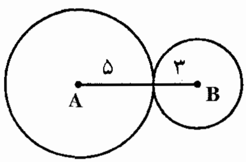
۱.۲. تعیین نقطه با معلوم بودن: نقطه، پاره‌خط، نیمخط، خط، زاویه

۱.۱.۲. نقطه

۱.۱.۱.۲. دو نقطه

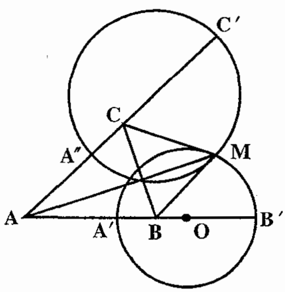


۱. دایره‌ای به مرکز A و به شعاع ۵ سانتیمتر و دایره‌ای به مرکز B و به شعاع ۳ سانتیمتر رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دو دایره جواب مسأله‌اند.
اگر فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B کمتر از ۸ = ۳ + ۵ سانتیمتر باشد، مسأله ۲ جواب دارد. و اگر فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B برابر ۸ سانتیمتر باشد، مسأله یک جواب دارد و در صورتی که فاصلهٔ بین دو نقطهٔ A و B از ۸ سانتیمتر بیشتر باشد، مسأله جواب ندارد.



۲.۱.۱.۲. سه نقطه

۱.۲.۱.۱.۲. سه نقطه در هر حالت



۲. سه نقطهٔ داده شده را A، B و C، و نسبتهای مفروض را m، n و p، و نقطهٔ جواب مسأله را M می‌نامیم.
داریم:

$$\frac{MA}{m}=\frac{MB}{n}=\frac{MC}{p} \quad (۱)$$

از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود:

$$\frac{MA}{MB}=\frac{m}{n} \quad (۲) \quad , \quad \frac{MA}{MC}=\frac{m}{p} \quad (۳)$$

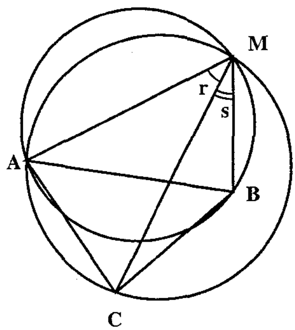
رابطه‌های (۲) و (۳) نشان می‌دهند که نقطهٔ M محل برخورد دو دایرهٔ آپولونیوس است که یکی پاره‌خط AB را به نسبت $\frac{m}{n}$ و دیگری پاره‌خط AC را به نسبت $\frac{m}{p}$ تقسیم می‌کند.

نکتهٔ ۱. سه نقطهٔ A، B و C می‌توانند روی یک خط راست نیز باشند.

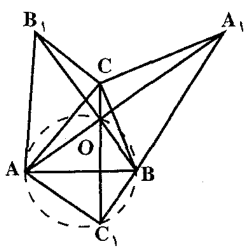
نکتهٔ ۲. در صورتی که دو دایرهٔ آپولونیوس یکدیگر را قطع نکنند، مسأله جواب ندارد.

۳. کمان درخور زاویهٔ r روبه‌رو به پاره‌خط AB، و کمان درخور زاویهٔ S روبه‌رو به پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم. نقطهٔ M محل برخورد این دو کمان درخور جواب مسأله است.

نکته. سه نقطهٔ A، B و C، همخط نیز می‌توانند باشند.

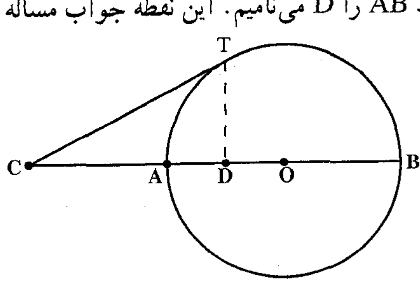


۴. روی ضلعهای مثلث ABC، مثلثهای متشابه ABC_1، BCA_1 و CAB_1 را با زاویه‌های $180^\circ - \hat{K}$، $180^\circ - \hat{H}$ و $180^\circ - \hat{M}$ رسم می‌کنیم (شکل). ثابت کنید که نقطهٔ O بر محل برخورد خطهای CC_1 و BB_1 قرار دارد. برای این منظور، تحقیق کنید که نقطهٔ O بر دایره‌های محیطی مثلثهای ABC_1 و AB_1C قرار دارد.



۲.۲.۱.۱.۲. سه نقطهٔ همخط

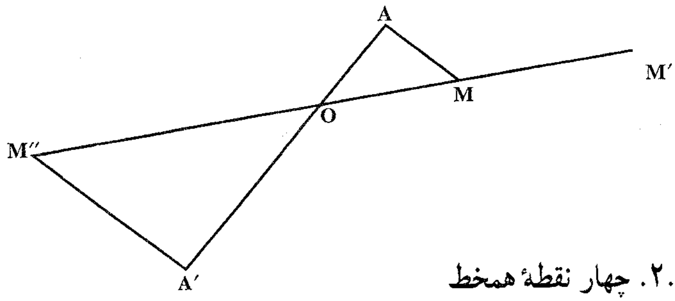
۵. راه‌حلهای مختلفی برای این مسأله وجود دارد. در این‌جا راه‌حل زیر را می‌آوریم:
دایرهٔ به قطر AB را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ C مماس CT را بر آن رسم می‌نماییم. تصویر قائم نقطهٔ T روی خط AB را D می‌نامیم. این نقطه جواب مسأله است.



۲.۱.۱.۳. چهار نقطه

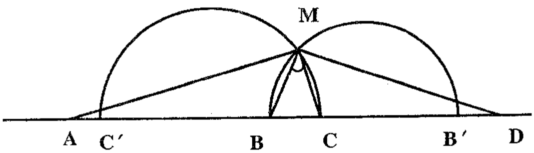
۲.۱.۱.۳.۱. چهارنقطه در هر حالت

۶. نقطهٔ M''، قرینهٔ نقطهٔ M' نسبت به نقطهٔ O را به‌دست می‌آوریم. از A به O وصل می‌کنیم و از نقطهٔ M'' خطی موازی AM رسم می‌کنیم تا امتداد OA را در نقطهٔ A' قطع کند. نقطهٔ A' مجانس نقطهٔ A در تجانس H_o^{-k} است.



۲.۱.۱.۳.۲. چهار نقطهٔ همخط

۷. اگر M نقطهٔ مطلوب باشد، به نحوی که $\hat{AMB} = \hat{BMC} = \hat{CMD}$ است، در این صورت MB و MC بترتیب نیمسازهای زاویه‌های $\hat{AMC}$ و $\hat{BMD}$ می‌باشند، و بنا به خاصیت نیمسازها داریم:



$$\frac{MA}{MC} = \frac{AB}{BC} = \frac{a}{b} = k \qquad (۱)$$

$$\frac{MB}{MD} = \frac{CB}{CD} = \frac{b}{c} = k \qquad (۲)$$

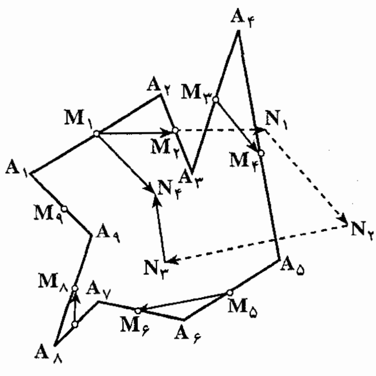
از این دو رابطه نتیجه می‌شود که اولاً، مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای است که قطری از آن که بر AC می‌گذرد، پاره‌خط AC را به نسبت توافقی k تقسیم نموده است و ثانیاً، مکان هندسی نقطهٔ M دایره‌ای است که قطری از آن که بر BD می‌گذرد، پاره‌خط BD را به نسبت توافقی k' تقسیم می‌نماید. از آن جا حل مسأله چنین است: C' مزدوج C نسبت به AB و نقطهٔ B' مزدوج B نسبت به CD را تعیین می‌نماییم. نقطهٔ برخورد دایره‌هایی به قطرهای CC' و BB' جواب مسأله است.

۸. فرض می‌کنیم E و F دو نقطهٔ خواسته شده باشند. هر دایرهٔ گذرنده بر E و F، بر دایره‌های به قطرهای AB و CD عمود است و بعکس. بنابراین نقطه‌های E و F، نقطه‌های اساسی دایره‌های به قطرهای AB و CD می‌باشند؛ یعنی نقطه‌های حد دستگاه دایره‌ای که از این

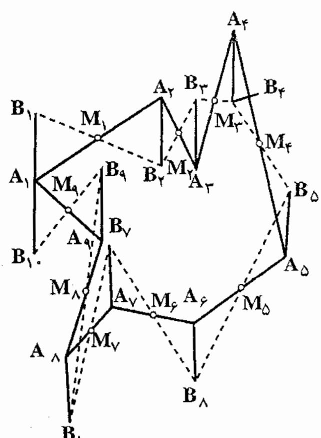
دو دایره تشکیل شده است، می‌باشند.
برای این که نقطه‌های E و F موجود باشند، لازم و کافی است که AB و CA از هم نگذرند.

۴.۱.۱.۲. n نقطه $(n \geq 5)$

۹. **راه‌حل اول.** فرض کنید مسأله حل شده است و $A_1A_2...A_9$ نه ضلعی خواسته شده، و نقطه‌های M_1 ، M_2 ، ...، M_9 وسطهای ضلعهای آن باشند((شکل الف) در این‌جا $n = 9$ گرفته شده است). گیریم B_1 نقطه‌ای از صفحه و B_2 نقطهٔ حاصل از یک نیمدور آن حول M_1 باشد، و B_3 از یک نیمدور B_2 حول M_2 به دست آمده باشد. این عمل را به همین نحو ادامه می‌دهیم تا بالاخره B_{10} از یک نیمدور B_9 حول M_9 به‌دست آید. چون هریک از پاره‌خطهای A_2B_2 ، A_3B_3 ، ...، A_1B_{10} از یک نیمدور پاره‌خط قبل از خود به دست می‌آید، پس همگی موازی، و دارای یک طول هستند و هر کدام جهتی مخالف جهت پاره‌خط قبل از خود را دارند. بنابراین A_1B_1 و A_1B_{10} مساوی، موازی و مختلف‌الجهت هستند، که تعبیر آن این است که نقطهٔ A_1 وسط پاره‌خط B_1B_{10} است. چون، با شروع از یک نقطهٔ دلخواه B_1 می‌توانیم B_{10} را بیابیم، پس A_1 را نیز می‌توانیم مشخص کنیم. سپس رأسهای باقیماندهٔ A_2 ، A_3 ، ...، A_9 از نیمدورهای متوالی حول M_1 ، M_2 ، ...، M_9 پیدا می‌شوند. مسأله همیشه یک جواب یکتا دارد ؛ اما به محدب بودن نه‌ضلعی حاصل نیازی نیست و می‌تواند خودش را قطع کند. اگر n زوج باشد و اگر همان استدلال قبلی را تکرار، یعنی، فرض کنیم مسأله حل شده است، می‌بینیم که A_1B_{n+1} و A_1B_1 مساوی، موازی و در یک جهت هستند، یعنی بر هم منطبق می‌شوند. پس اگر B_{n+1} بر B_1 منطبق



(ب)



(الف)

نشود، مسأله جواب ندارد. اگر B_{n+1} بر B_1 منطبق شود، نقطهٔ A_1 هر طور انتخاب شده باشد، A_1B_1 بر AB_{n+1} منطبق خواهد شد. در این حالت بینهایت جواب وجود دارد؛ هر نقطهٔ صفحه می‌تواند رأس A_1 اختیار شود.

راه حل دوم. رأس A_1 از n ضلعی مطلوب توسط مجموع نیمدورهایی حول نقطه‌های M_1، M_2، ...، M_n روی خودش برده می‌شود، یعنی A_1 یک نقطهٔ ثابت مجموع این n نیمدور است ((شکل ب)، که در آن، حالت $n=9$ نشان داده شده است). اگر n زوج بود، مجموع n نیمدور یک انتقال می‌شد. چون انتقال نقطهٔ ثابت ندارد، نتیجه می‌شود که به ازای n زوج، مسأله در حالت کلی جواب ندارد. تنها استثنا، حالتی است که n نیمدور، یک تبدیل همانی (یک انتقال با طول صفر) باشد، یعنی تمام نقطه‌های صفحه را ثابت نگه دارد؛ مسأله، در این حالت بینهایت جواب دارد؛ در این حالت هر نقطهٔ صفحه می‌تواند رأس A_1 باشد. اگر n فرد (مثلاً $n=9$) باشد، مجموع n نیمدور، یک نیمدور خواهد بود. چون یک نیمدور دقیقاً یک نقطهٔ ثابت به نام مرکز تقارن دارد، از این‌جا نتیجه می‌شود که رأس A_1 از نه ضلعی خواسته شده، باید بر مرکز تقارن منطبق باشد، در این حالت مسأله تنها یک جواب دارد.

اکنون نشان می‌دهیم که چگونه باید مرکز تقارن مجموع نه نیمدور حول نقطه‌های M_1، M_2، ...، M_9 را پیدا کنیم. مجموع دو نیمدور حول M_1 و M_2 انتقالی است در راستای $\overrightarrow{M_1M_2}$ با طولی برابر $2\overrightarrow{M_1M_2}$؛ مجموع دو نیمدور حول M_3 و M_4 انتقالی است در راستای $\overrightarrow{M_3M_4}$ به طولی برابر $2\overrightarrow{M_3M_4}$؛ و همین‌طور الی آخر. بنابراین مجموع هشت نیمدور اول، بترتیب مساوی مجموع چهار انتقال در راستای $\overrightarrow{M_1M_2}$ (یا $\overrightarrow{M_1N_1}$)، $\overrightarrow{M_3M_4}(\parallel \overrightarrow{N_1N_2})$، $\overrightarrow{M_5M_6}(\parallel \overrightarrow{N_2N_3})$، و $\overrightarrow{M_7M_8}(\parallel \overrightarrow{N_3N_4})$ و بترتیب با طولهایی برابر $2\overrightarrow{M_1M_2}(=\overrightarrow{M_1N_1})$، $2\overrightarrow{M_3M_4}(=\overrightarrow{N_1N_2})$، $2\overrightarrow{M_5M_6}(=\overrightarrow{N_2N_3})$، و $2\overrightarrow{M_7M_8}(=\overrightarrow{N_3N_4})$ خواهد بود (شکل ب) که انتقالی است در راستای $\overrightarrow{M_1N_4}$ و به طولی برابر $\overrightarrow{M_1N_4}$. نقطهٔ A_1 مرکز تقارن نیمدوری است که مجموع یک انتقال در راستای $\overrightarrow{M_1N_4}$ و به طولی برابر $\overrightarrow{M_1N_4}$ است با نیمدوری حول نقطهٔ M_9. برای یافتن A_1 کافی است یک پاره‌خط $\overrightarrow{M_9A_1}$ را با شروع از M_9، موازی $\overrightarrow{N_4M_1}$ و به طول $\frac{\overrightarrow{M_1N_4}}{2}$ رسم کنیم. با یافتن A_1، دیگر مشکلی برای یافتن بقیهٔ رأسهای نه ضلعی نداریم.

۲.۱.۲. پاره‌خط

۱.۲.۱.۲. یک پاره‌خط

۱۰. ابتدا پاره‌خط راست AB را دو برابر می‌کنیم، یعنی نقطهٔ C را روی خط راست AB طوری پیدا می‌کنیم که داشته باشیم:

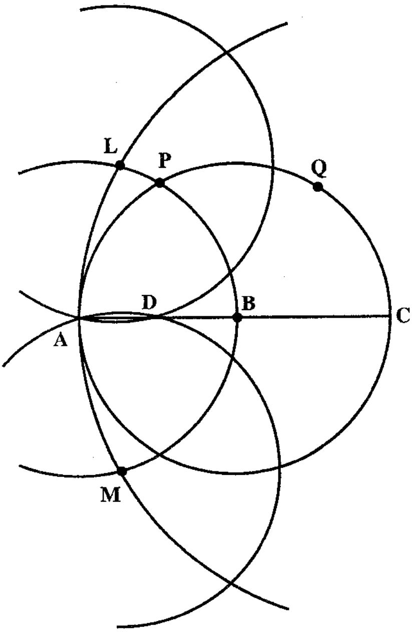
$AB = BC$

برای این منظور، دایره‌ای به مرکز B و شعاع $r = BA$ رسم می‌کنیم. سپس با آغاز از نقطهٔ A، روی محیط این دایره، پشت سر هم، نقطه‌های P، Q و C را طوری علامت می‌گذاریم که داشته باشیم (شکل الف):

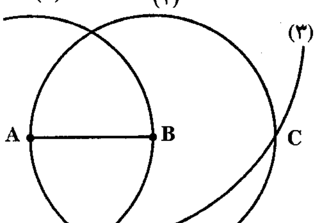
$AP = PQ = QC = r$

مثلثهای ABP، PBQ و QBC متساوی‌الاضلاعند و بنابراین، زاویهٔ ABC برابر ۱۸۰ درجه می‌شود. به این ترتیب، نقطهٔ C روی خط راست AB واقع است و داریم: $AB = BC$.

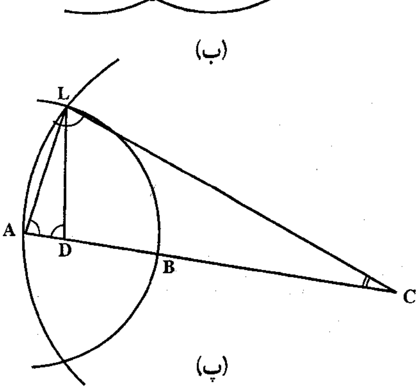
اکنون با توجه به نقطه‌های A، B و C، وسط پاره‌خط راست AB را پیدا می‌کنیم. دایره‌ای به مرکز نقطهٔ C و به شعاع $CA = ۲r$ رسم می‌کنیم (شکل الف را ببینید). L و M، نقطه‌های برخورد این دایره را با دایرهٔ به مرکز A و شعاع $AB = r$ علامت می‌گذاریم. سپس، دو دایره به مرکزهای L و M، و شعاع $r = AB$ رسم می‌کنیم. این دو دایره، در نقطهٔ A و همچنین



(الف)



(ب)



(پ)

در نقطهٔ دیگر D یکدیگر را قطع می‌کنند. ثابت می‌کنیم، نقطهٔ D، وسط پاره‌خط راست AB است.

در واقع، نقطه‌های L و M، نسبت به خط راست AC قرینهٔ یکدیگرند، در ضمن، نقطهٔ D از دو نقطهٔ L و M به یک فاصله است، یعنی روی خط راست AC قرار دارد. اکنون، دو مثلث متساوی‌الساقین ALD و CAL را در نظر می‌گیریم. این دو مثلث با هم متشابه‌اند، زیرا در زاویهٔ مجاور به قاعده، یعنی A، مشترکند. بنابراین:

$$AD : AL = AL : CA \Rightarrow AD : r = r : ۲r$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$۲AD = AB = r$$

یادداشت. در آغاز حل مسأله، با رسم چهار دایره، پاره‌خط راست AB را دو برابر کردیم (و نقطهٔ C را به دست آوردیم). این ساختمان را، می‌توان اقتصادی‌تر و تنها با رسم سه دایره انجام داد (شکل ب را ببینید).

مسأله را می‌توان تعمیم داد: روشی پیدا کنید که، به کمک آن، بتوان پاره‌خط راست مفروض را به n بخش برابر تقسیم کرد.

به همان ترتیب، پاره‌خط راست $AC = nAB$ را می‌سازیم. پس، باز هم به همان ترتیب، به وسیلهٔ نقطه‌های A، B و C، نقطهٔ D را پیدا می‌کنیم (شکل پ). از تشابه مثلثهای متساوی‌الساقین ALD و ACL به‌دست می‌آید:

$$DA . CA = r^۲$$

(در این حالت $CA = nr$ و $DA = \frac{r}{n}$).

این ساختمان، به تبدیلی از صفحه مربوط می‌شود که انعکاس، نسبت به دایرهٔ به مرکز A و شعاع $r = AB$ نام دارد. مبدل نقطهٔ P، در این تبدیل، عبارت است از نقطهٔ P′ واقع بر نیمخط راست AP، به نحوی که برای آن داشته باشیم:

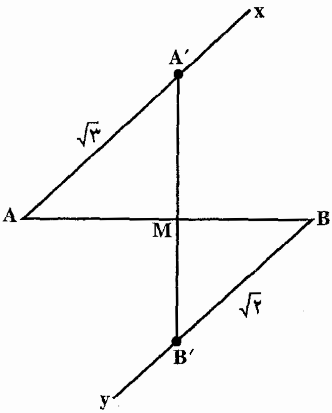
$$AP' . AP = r^۲$$

در مسأله، در واقع، نقطهٔ D را به عنوان مبدل نقطهٔ C، ضمن یک انعکاس، به‌دست آورده‌ایم.

تبدیل به کمک انعکاس، ویژگی جالبی دارد: در این تبدیل، خط راست به دایره و دوباره، دایره به خط راست تبدیل می‌شود.

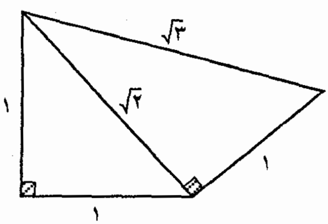
با استفاده از انعکاس، می‌توان ثابت کرد که، پیدا کردن نقطه‌های برخورد دو خط راست و خط راست با دایره را می‌توان تنها با یک پرگار انجام داد. از اینجا می‌توان نتیجه گرفت:

هر مسأله ساختمانی را که بتوان به کمک یک پرگار و خط‌کش حل کرد، می‌توان تنها به کمک یک پرگار هم حل کرد (قضیهٔ ماسکه رونی). در ضمن باید توجه کرد که، عمل I را (یعنی رسم خط راستی که از دو نقطه می‌گذرد) نمی‌توان تنها به کمک پرگار انجام داد. درواقع، باید شرط کرد که، اگر دو نقطه از خط راستی معلوم باشد، خود خط راست معین است.

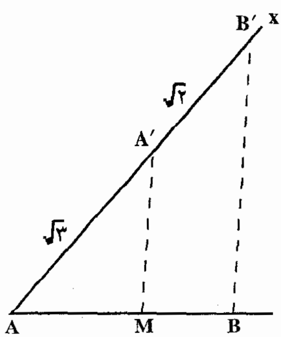


۱۱. راه اول. نخست پاره‌خطهایی به طول $\sqrt{۳}$ سانتیمتر و $\sqrt{۲}$ سانتیمتر رسم می‌کنیم. آن‌گاه پاره‌خط AB به طول ۲ سانتیمتر را رسم می‌کنیم و از A و B دو نیمخط مختلف‌الجهت Ax و By را رسم می‌نماییم. روی Ax پاره‌خط $AA' = \sqrt{۳}$ و روی By پاره‌خط $BB' = \sqrt{۲}cm$ را جدا می‌کنیم. از A' به B' وصل می‌کنیم تا AB را در نقطهٔ M قطع کند. این نقطه جواب مسأله است ؛ زیرا داریم :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$$



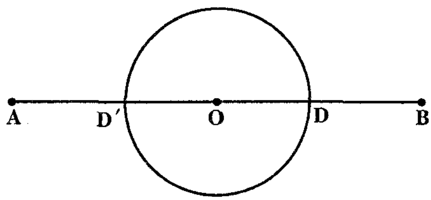
راه دوم. پاره‌خطهایی به طول $\sqrt{۳}$ سانتیمتر و $\sqrt{۲}$ سانتیمتر رسم کرده، سپس پاره‌خط AB را به طول ۲ سانتیمتر رسم می‌کنیم. از نقطهٔ A نیمخط دلخواه Ax را رسم می‌کنیم :

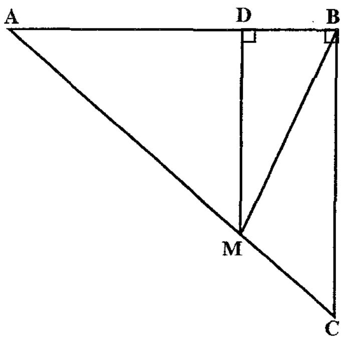


روی Ax پاره‌خطهای $AA' = \sqrt{۳}$ و $A'B' = \sqrt{۲}$ را جدا کرده، از B' به B وصل می‌کنیم و از A' خطی موازی BB' رسم می‌نماییم تا AB را در نقطهٔ M قطع کند. این نقطه، پاره‌خط AB را به نسبت k تقسیم کرده است. زیرا داریم :

$$\frac{MA}{MB} = \frac{AA'}{A'B'} = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$$

۱۲. راه اول. اگر D جواب مسأله باشد، $DA^{2} + DB^{2} = k^{2}$ است. اما می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که مجموع مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ A و B برابر مقدار ثابت k^{2} است، دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2k^{2} - AB^{2}}$ است. این دایره را رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد آن با پاره‌خط AB جواب مسأله‌اند که برحسب طول پاره‌خط AB و اندازهٔ k، مسأله دو جواب دارد یا بدون جواب است.





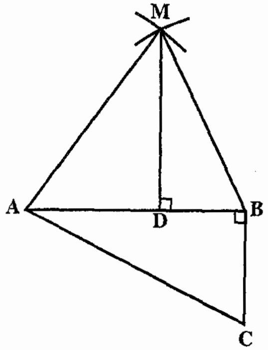
راه دوم. روی پاره‌خط AB، مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویهٔ ABC را می‌سازیم. به مرکز B و به شعاع k دایره‌ای رسم می‌کنیم تا AC را در نقطهٔ M قطع کند. از M عمود MD را بر AB فرود می‌آوریم. D نقطهٔ خواسته شده است؛ زیرا:

$$AD^{2} + DB^{2} = DM^{2} + DB^{2} = BM^{2} = k^{2}$$

قرینهٔ نقطهٔ D نسبت به وسط پاره‌خط AB نیز جواب است. مسأله دو جواب دارد یا جواب ندارد.

۱۳. راه اول. اگر D جواب مسأله باشد، $DA^{2} - DB^{2} = k^{2}$ است. اما می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت A و B مقدار ثابت k^{2} است، خطی است عمود بر خط AB در نقطه‌ای مانند D، به قسمی که اگر O وسط AB باشد، $OH = \frac{2k}{AB}$ است. این خط را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد آن با پاره‌خط AB جواب مسأله است.

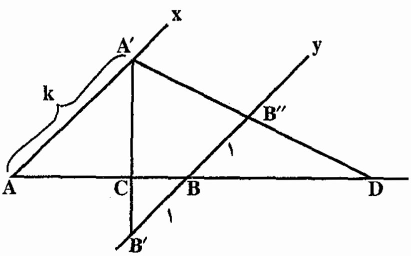
نکته. اگر $DB^{2} - DA^{2} = k^{2}$ باشد، نقطهٔ D′ قرینهٔ D نسبت به نقطهٔ O، وسط AB جواب مسأله است.



راه دوم. از B عمود BC را بر AB اخراج می‌کنیم و طول $BC = k$ را اختیار می‌کنیم. به مرکز A و به شعاع AC، و به مرکز B و شعاع BA قوس دیگری رسم می‌کنیم تا در M متقاطع شوند. M را روی AB تصویر می‌کنیم. D نقطهٔ خواسته شده است. زیرا داریم :

$$DA^2 = AM^2 - MD^2 = AC^2 - DM^2 \ ,$$
$$DB^2 = BM^2 - DM^2 = AB^2 - DM^2 \Rightarrow$$
$$DA^2 - DB^2 = AC^2 - AB^2 = BC^2 = k^2$$

۱۴. باید دبستان را در دهکدهٔ A ساخت.



۱۵. از نقطه‌های A و B دو خط موازی دلخواه Ax و By را رسم می‌کنیم، روی Ax پاره‌خط $AA' = k$ و روی By، در دو طرف نقطهٔ B، پاره‌خطهای $BB' = BB'' = 1$ را جدا می‌کنیم. از A′ به B′ و از A′ به B″ وصل می‌کنیم.

نقطه‌های C و D محل برخورد این دو خط با خط AB، جوابهای مسأله‌اند ؛ زیرا داریم :

$$AA' \| BB' \Rightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{AA'}{BB'} = \frac{k}{1} = k \Rightarrow \frac{CA}{CB} = k$$

$$AA' \| BB'' \Rightarrow \frac{DA}{DB} = \frac{AA'}{BB''} = \frac{k}{1} = k \Rightarrow \frac{DA}{DB} = k$$

$$\Rightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{DA}{DB} = k$$

دو نقطهٔ C و D منحصر به فردند ؛ زیرا داریم :

$$\frac{CA}{CB} = k \Rightarrow \frac{CA}{CA+CB} = \frac{k}{k+1} \Rightarrow \frac{CA}{AB} = \frac{k}{k+1}$$

$$\Rightarrow CA = \frac{k.AB}{k+1} = \text{مقدار ثابت}$$

و چون A نقطهٔ ثابتی است، پس C نقطهٔ ثابتی می‌باشد. همچنین داریم :

$$\frac{DA}{DB} = \frac{k}{1} \Rightarrow \frac{DA}{DA-DB} = \frac{k}{k-1} \Rightarrow \frac{DA}{AB} = \frac{k}{k-1}$$

$$\Rightarrow DA = \frac{k.AB}{k-1} = \text{مقدار ثابت}$$

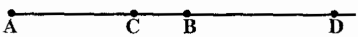
که چون A نقطهٔ ثابتی است، پس D نیز نقطهٔ ثابتی می‌باشد.

اگر $k > ۱$ باشد، نقطه‌های C و D به نقطهٔ B نزدیکترند.

اگر $k < ۱$ باشد، نقطه‌های C و D به نقطهٔ A نزدیکترند.

اگر $k = ۱$ باشد، نقطهٔ C′ وسط پاره‌خط AB است و نقطهٔ D، نقطهٔ بینهایت و در امتداد AB می‌باشد.

نکتهٔ ۱. بنا به تعریف، چهار نقطهٔ A، B، C و D که روی یک خط راست قرار دارند و رابطهٔ $\frac{DA}{DB} = \frac{CA}{CB}$ بین آنها برقرار است، تشکیل یک تقسیم توافقی (نسبت همساز) می‌دهند که آن را به صورت (ABCD) نشان می‌دهند. C و D را دو نقطهٔ مزدوج نسبت به دو نقطهٔ A و B می‌نامند.



نکتهٔ ۲. در برخی کتابها گفته شده است که نقطهٔ C پاره‌خط AB را به نسبت اضافی تقسیم کرده است (یعنی $CA + CB = AB$ است) و نقطهٔ D پاره‌خط AB را به نسبت نقصانی تقسیم می‌نماید (یعنی $DA - DB = AB$ است).

۱۶. اگر مسأله را حل شده فرض کنیم و O وسط CD باشد، طبق رابطهٔ توافقی داریم:

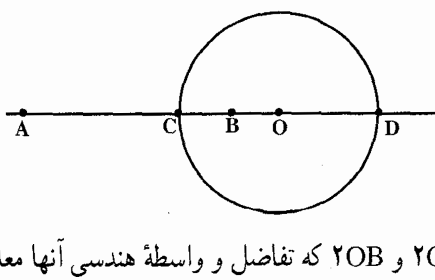
$$OA.OB = OC^۲ \quad \text{یا} \quad OA.OB = \frac{AB^۲}{۴}$$

و یا:

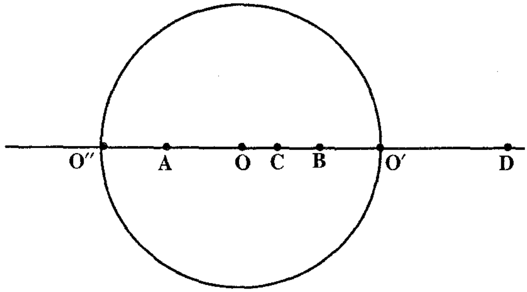
$$AB = \sqrt{۲OB.۲OA}$$

همچنین داریم:

$$۲OA - ۲OB = ۲AB \quad \text{و یا} \quad OA - OB = AB$$



اما دو پاره‌خط ۲OA و ۲OB که تفاضل و واسطهٔ هندسی آنها معلوم است، به آسانی از طریق ترسیم به‌دست می‌آیند و OA و OB معلوم می‌شوند و با معلوم شدن نقطهٔ O به مرکز آن و شعاع $\frac{AB}{۲}$، دایره‌ای رسم می‌کنیم تا AB را در C و D قطع کند.



۱۷. می‌دانیم که اگر (ABCD) یک تقسیم توافقی و نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB و نقطهٔ O′ وسط پاره‌خط CD باشد، داریم:

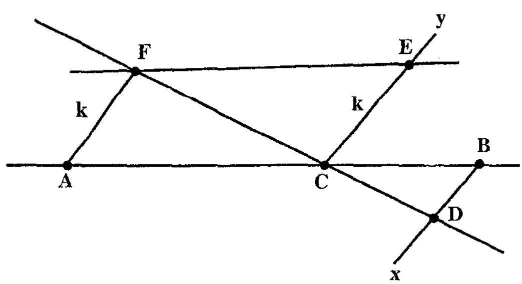
$$OO'^{2} = (\frac{AB}{2})^{2} + (\frac{CD}{2})^{2}$$

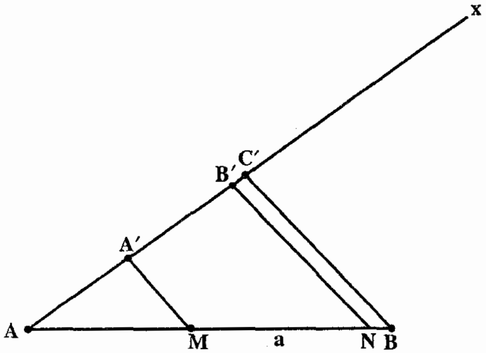
با توجه به این که طول AB = a و طول CD = l معلوم است، اندازهٔ پاره‌خط OO′ مقدار ثابتی است و چون نقطهٔ O وسط پاره‌خط AB نیز مشخص است، پس نقطهٔ O′ مشخص می‌شود (به مرکز O و به شعاع $OO' = \frac{1}{2}\sqrt{a^{2}+l^{2}}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا AB را در دو نقطهٔ O′ و O'_1 قطع کند). با مشخص کردن نقطهٔ O′، به اندازهٔ $\frac{1}{2}$ در دو طرف نقطهٔ O′ جدا می‌کنیم. نقطه‌های C و D به‌دست می‌آیند.

اگر در دو طرف نقطهٔ O'_1 نیز به اندازهٔ $\frac{1}{2}$ جدا کنیم، دو نقطهٔ C′ و D′ به‌دست می‌آید که (ABC′D′) نیز یک تقسیم توافقی است.

۱۸. از B و C دو نیمخط Bx و Cy را موازی و در دو جهت مختلف رسم می‌کنیم. روی Bx پاره‌خط BD = ۱ و روی Cy پاره‌خط CE = k را جدا می‌کنیم. از E خطی موازی CB رسم می‌کنیم تا خط BC را در نقطهٔ F قطع کند. از F خطی موازی Bx رسم می‌نماییم تا CB را در نقطهٔ A قطع نماید. این نقطه جواب مسأله است؛ زیرا با توجه به متوازی‌الاضلاع بودن FACE داریم:

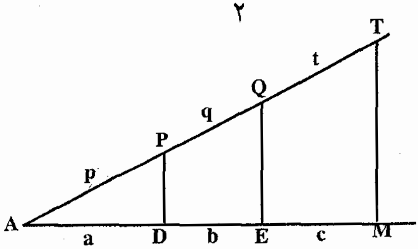
$$FA = CE = k \ , \ FA \| BD \Rightarrow \frac{CA}{CB} = \frac{AF}{BD} = \frac{k}{1} = k$$





۱۹. پاره‌خط $AB = a$ و نیمخط دلخواه Ax را رسم می‌کنیم. روی Ax پاره‌خطهای $AA' = ۳$ ، $A'B' = ۴$ و $B'C' = \frac{۱}{۲}$ را جدا می‌کنیم. از C' به B وصل می‌کنیم و از B' به A' خطهایی موازی $C'B$ رسم می‌کنیم تا پاره‌خط AB را بترتیب در N و M قطع کنند. نقطه‌های M و N پاره‌خط AB را به نسبتهای خواسته شده تقسیم کرده‌اند، یعنی :

$$\frac{AM}{۳} = \frac{MN}{۴} = \frac{NB}{\frac{۱}{۲}}$$



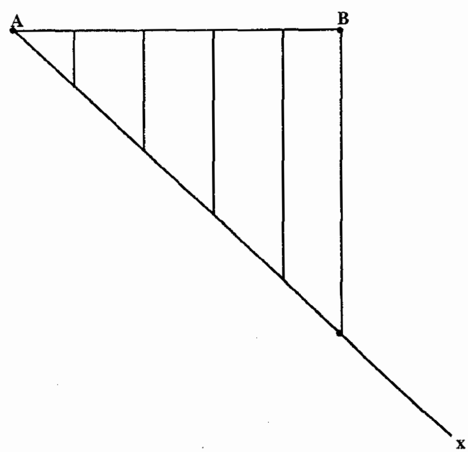
۲۰. اگر t را به وسیلهٔ تناسب زیر :

$$\frac{q}{t} = \frac{r}{s}$$

تعریف کنیم، داریم :

$$a:b:c = p:q:t$$

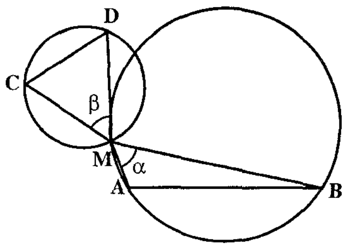
روی یک ضلع زاویهٔ دلخواه $\hat{A}$ ، AM را مساوی m جدا می‌کنیم و روی ضلع دیگر $AP = p$ ، $PQ = q$ و $QT = t$ را جدا می‌کنیم. دو موازی که از P و Q به موازات MT رسم می‌شوند، AM را در نقطه‌های D و E قطع می‌کنند. $AD = a$ ، $DE = b$ و $EM = c$ خواهد بود.



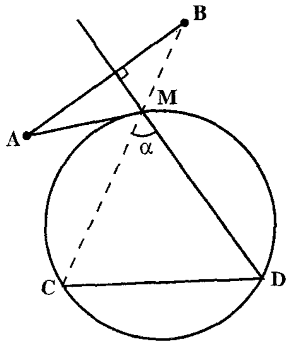
۲۱. پاره‌خط AB را در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ A نیمخط دلخواه Ax را رسم می‌کنیم و روی این نیمخط از نقطهٔ A، n پاره‌خط مساوی را پشت سرهم جدا می‌کنیم. (در شکل، ۵ پاره‌خط مساوی جدا کرده‌ایم.) از آخرین نقطهٔ تقسیم به B وصل می‌کنیم و از سایر نقطه‌های تقسیم خطهایی موازی خط اخیر رسم

می‌کنیم تا پاره‌خط AB نیز به n قسمت متساوی تقسیم شود (در شکل، پاره‌خط AB به ۵ قسمت متساوی تقسیم شده است).

۲.۱.۲.۲. دو پاره‌خط



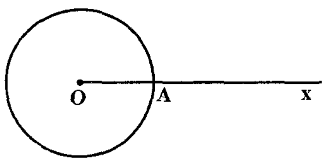
۲۲. کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AB، و کمان درخور زاویهٔ β روبه‌رو به پاره‌خط CD را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دو کمان درخور، جواب مسأله است و به تعداد نقطه‌های برخورد، مسأله جواب دارد.



۲۳. کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط CD و عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد آنها جواب مسأله است.

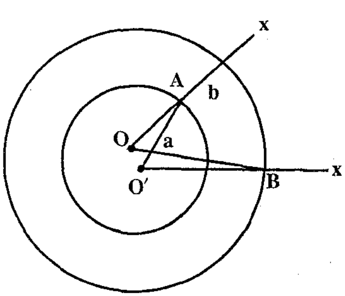
۳.۱.۲. نیمخط

۱.۳.۱.۲. یک نیمخط

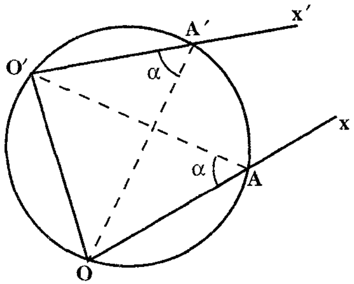


۲۴. نقطهٔ برخورد دایره به مرکز O و به شعاع R، با نیمخط Ox جواب مسأله است.

۲.۳.۱.۲. دو نیمخط



۲۵. به مرکز O′ و به شعاع a یک دایره، و به مرکز O و به شعاع b دایره‌ای دیگر رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد دایرهٔ اولی با Ox (نقطهٔ A) و نقطهٔ برخورد دایرهٔ دومی با O′x′ (نقطهٔ B) جواب مسأله‌اند.

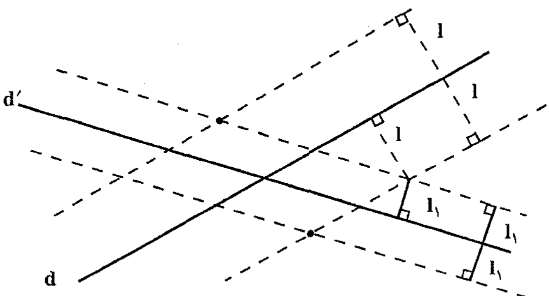


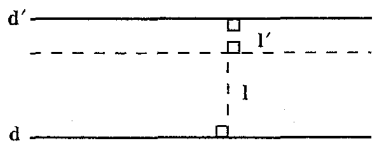
۲۶. کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط ′OO را رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این کمان درخور با دو نیمخط Ox و ′O′x جوابهای مسأله‌اند و به تعداد نقطه‌های برخورد، مسأله جواب دارد.

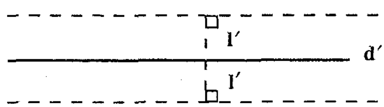
۴.۱.۲. خط

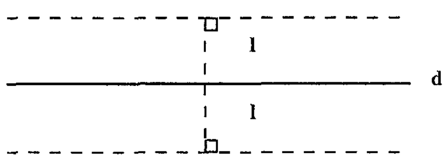
۱.۴.۱.۲. دو خط

۱.۱.۴.۱.۲. دو خط در هر حالت



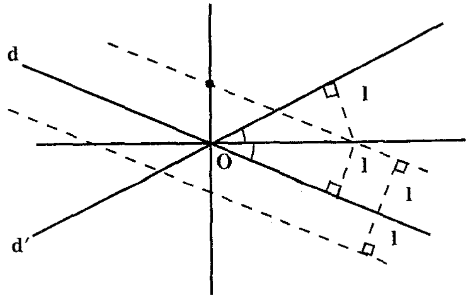






۲۷. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که از خط D به فاصلهٔ l قرار دارد، دو خط موازی خط d، در دو طرف آن و به فاصلهٔ l از آن است؛ همچنین مکان هندسی نقطه‌ای که از خط ′d به فاصلهٔ معلوم ′l واقع است، دو خط موازی ′d، به فاصلهٔ ′l از آن، و در دو طرف آن می‌باشد. این چهار خط را رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد آنها (در صورت وجود) جواب مسأله‌اند.

نکته. اگر دو خط d و ′d متقاطع باشند، مسأله ۴ جواب دارد و در صورتی که d و ′d متوازی باشند، بستگی به فاصلهٔ این دو خط از یکدیگر و دو عدد l و ′l مسأله ممکن است بیشمار جواب داشته باشد، یا هیچ جوابی نداشته باشد.

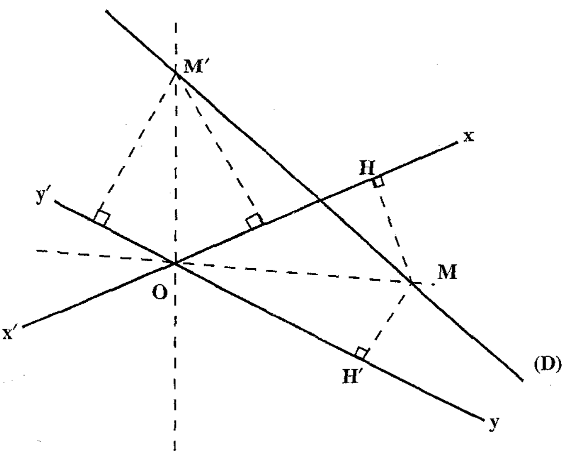


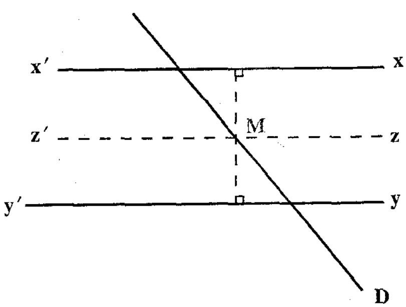
۲۸. این مسأله شبیه مسأله قبل حل می‌شود، با این تفاوت که $l = l'$ است. اما می‌دانیم، مکان هندسی نقطه‌ای که از دو خط متقاطع به یک فاصله باشد، نیمسازهای زاویه‌های بین آن دو خط می‌باشند. پس برای حل این مسأله می‌توانیم نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط را رسم کنیم و نقطه‌های برخورد آنها با دو خط موازی خط d (یا d′) و به فاصلهٔ l از آن را تعیین نمود.

نکته. اگر دو خط d و d′ موازی باشند، مسأله ممکن است هیچ جوابی نداشته باشد و یا بیشمار جواب داشته باشد.

۲.۴.۱.۲. سه خط

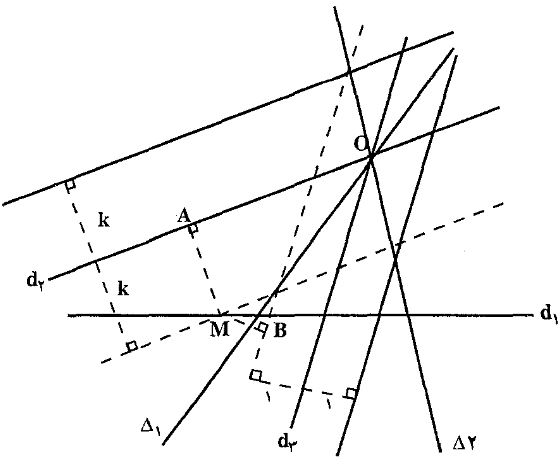
۱.۲.۴.۱.۲. سه خط در هر حالت





۲۹. اگر xx′ و yy′ متقاطع باشند، نقطه‌های برخورد نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط xx′ و yy′، با خط D، جوابهای مسأله‌اند و به تعداد نقطه‌های برخورد، مسأله جواب دارد. در صورتی که x′x و y′y موازی باشند، خط z′z را که موازی این دو خط و به یک فاصله از آنهاست، رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این خط با خط D (در صورت وجود) جواب مسأله است.

۳۰. اگر نقطهٔ M جواب مسأله باشد، داریم: $\frac{MA}{MB} = k$

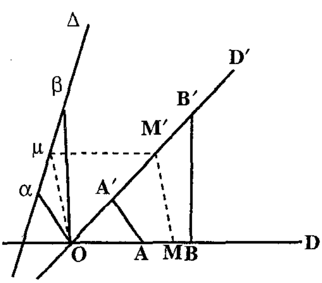


(شکل). اما می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو خط مفروض مقدار ثابتی است، دو خط راست است که بر نقطهٔ برخورد آن، دو خط می‌گذرند و با آن دو خط یک دستگاه توافقی می‌سازند. پس برای حل مسأله کافی است این دو خط را رسم کنیم و نقطه‌های برخورد آنها با خط d_1 را به‌دست آوریم.

برای رسم این دو خط، دو خط موازی d_2 به فاصلهٔ k از آن و دو خط موازی d_3 و به فاصلهٔ ۱ از آن رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این خطها را به نقطهٔ O، محل برخورد دو خط d_2 و d_3 وصل می‌کنیم. خطهای Δ_1 و Δ_2 مکان هندسی نقطه‌هایی هستند که نسبت فاصله‌شان از دو خط d_2 و d_3 برابر k است. نقطه‌های برخورد Δ_1 و Δ_2 با خط d_1 جواب مسأله است.

نکته. فرض کرده‌ایم که d_2 و d_3 موازی نباشند و خط d_1 با خطهای Δ_1 و Δ_2 متقاطع باشد. در صورت موازی بودن خطها، مسأله قابل بحث است.

۳۱. فرض کنیم تقسیمات متناسب با دو زوج نقطه‌های $(A \text{ ، } A')$ و $(B \text{ ، } B')$ که متناظرند، داده شده‌اند. از نقطهٔ O محل برخورد D و D'، خطهای $O\alpha$ و $O\beta$ را همسنگ با AA' و BB' رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم Δ خطی است که α را به β وصل می‌کند. می‌دانیم که Δ مکان μ، انتهای بردار $O\mu$، که همسنگ با MM' است، می‌باشد. M و M' دو نقطهٔ متناظر غیرمشخص در تقسیم است (شکل).



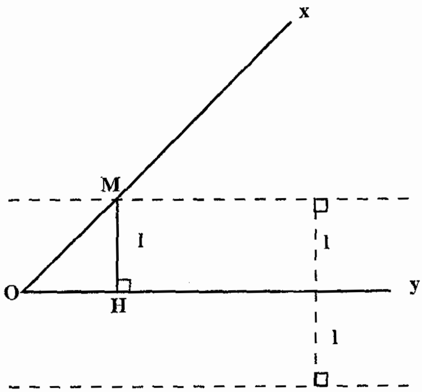
برای این که MM' موازی با امتداد داده شده‌ای و یا به طول معینی باشد، باید μ را روی

Δ چنان اختیار کرد که $O\mu$ موازی با یک خط مفروض و یا به طول معینی باشد و این هم به سهولت امکان‌پذیر است.

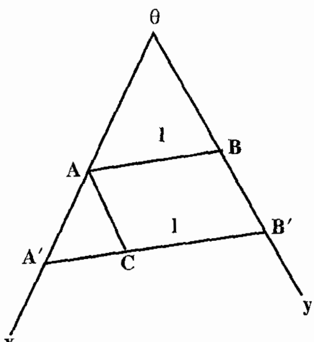
پس از تعیین μ با رسم $\mu'M$ موازی با D، MM' موازی با $O\mu$ به‌دست می‌آید.

۲.۱.۵. زاویه

۲.۱.۵.۱. یک زاویه



۳۲. مکان هندسی نقطه‌ای که از ضلع Oy به فاصلهٔ l است، دو خط موازی Oy، در دو طرف آن، و به فاصلهٔ l از آن است. این دو خط را رسم می‌کنیم. نقطهٔ M محل برخورد یکی از این دو خط با Oy، جواب مسأله است.



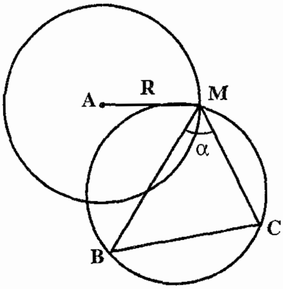
۳۳. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم و $OA' = m$ و $OB' = n$ را روی Ox و Oy جدا می‌سازیم و AC را موازی Oy رسم می‌کنیم، داریم:

$$\frac{OA}{OB} = \frac{OA'}{OB'} \Rightarrow AB \| A'B' \Rightarrow B'C = BA = l$$

پس برای حل مسأله طولهای $OA' = m$ و $OB' = n$ را روی Ox و Oy جدا کرده، از A' به B' وصل می‌کنیم. سپس بر $B'A'$ پاره‌خط $B'C = l$ را جدا ساخته، از نقطهٔ C خطی موازی Oy رسم می‌کنیم تا Ox را در نقطهٔ A قطع کند و از A خطی موازی $A'B'$ رسم می‌کنیم تا Oy را در B قطع کند. دو نقطهٔ A و B جواب مسأله‌اند.

۶.۱.۲. پاره‌خط، نقطه

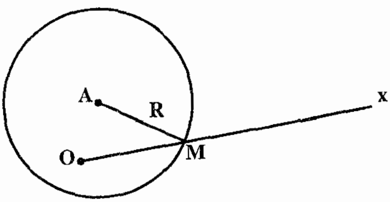
۱.۶.۱.۲. یک پاره‌خط، یک نقطه



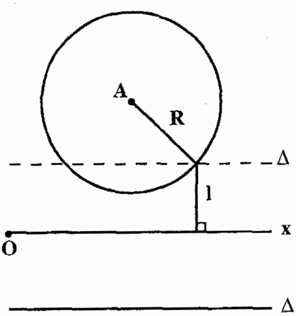
۳۴. دایره‌ای به قطر AB و دایره‌ای به مرکز A و به شعاع R رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دو دایره جواب مسأله است.

۷.۱.۲. نیمخط، نقطه

۱.۷.۱.۲. یک نیمخط، یک نقطه

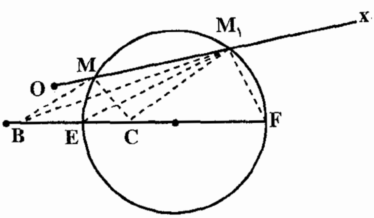


۳۵. دایره‌ای به مرکز A و به شعاع R رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دایره با نیمخط Ox جواب مسأله است. به تعداد نقطه‌های برخورد، مسأله جواب دارد.



۳۶. دو خط Δ و ′Δ موازی Ox و به فاصلهٔ l از آن و در دو طرف آن، و یک دایره به مرکز A و به شعاع R رسم می‌کنیم. نقطه یا نقطه‌های برخورد این دایره با دو خط Δ و ′Δ جواب مسأله‌اند.

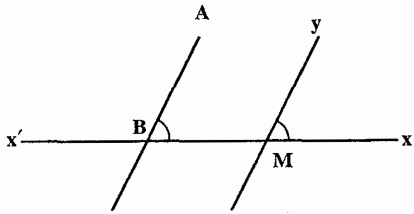
۲.۷.۱.۲. یک نیمخط، دو نقطه



۳۷. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ B و C برابر k است، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط BC را به نسبت k تقسیم می‌کند (دایرهٔ آپولونیوس). این دایره را رسم می‌کنیم. نقطه یا نقطه‌های برخورد این دایره با نیمخط Ox (در صورت وجود) جواب مسأله‌اند.

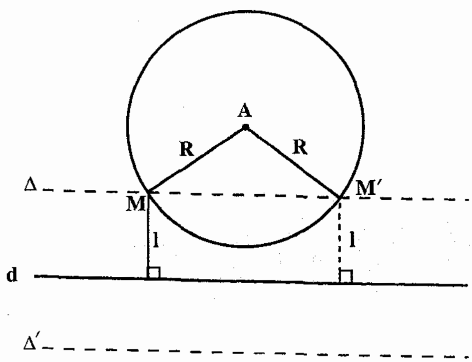
۸.۱.۲. خط، نقطه

۱.۸.۱.۲. یک خط، یک نقطه



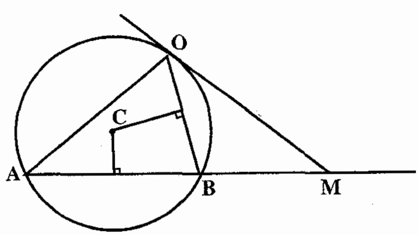
۳۸. نقطه‌ای دلخواه مانند M روی خط xx' اختیار می‌کنیم و از این نقطه خطی مانند My رسم می‌کنیم که با xx' زاویهٔ α بسازد. از نقطهٔ A خطی موازی My رسم می‌کنیم تا خط xx' را در نقطهٔ B قطع کند. این نقطه جواب مسأله است.

نکته. اگر زاویهٔ α جهت‌دار باشد، مسأله یک جواب دارد و در غیر این صورت، دو جواب خواهد داشت.



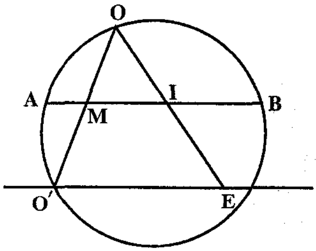
۳۹. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که به فاصلهٔ l از خط d قرار دارد، دو خط Δ و Δ' موازی d، در دو طرف آن و به فاصلهٔ l از آن می‌باشد. این دو خط را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که از نقطهٔ A به فاصلهٔ R واقع است، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع R است. این دایره را نیز رسم می‌کنیم. نقطه یا نقطه‌های برخورد این دایره با دو خط Δ و Δ' جواب مسأله است.

۴۰. الف. نقطهٔ O خارج خط AB است :



راه اول. اگر M نقطهٔ خواسته شده باشد، باید داشته باشیم $MO^2 = MA.MB$ که در این صورت بر نقطه‌های A، B و O دایره‌ای می‌گذرد که در نقطهٔ O بر MO مماس است ؛ زیرا مربع طول مماس مساوی حاصلضرب طولهای دو پاره‌خط قاطع است، و از آن‌جا حل مسأله چنین است :

دایرهٔ محیطی مثلث OAB را رسم نموده و از O بر این دایره مماسی رسم می‌نماییم. نقطهٔ تقاطع این مماس با امتداد AB، نقطهٔ M است.



راه دوم. چنانچه M نقطهٔ خواسته شده واقع بر AB باشد، باید داشته باشیم $MO^۲ = MA.MB$. در صورتی که O′ قرینهٔ O نسبت به M را تعیین نماییم، می‌توان نوشت :

$$MO.MO' = MA.MB$$

و از این رابطه معلوم می‌شود که O′ قرینهٔ O نسبت به M، بر دایرهٔ محیطی مثلث OAB واقع است و از آن‌جا حل مسأله چنین است :

ابتدا دایرهٔ محیطی مثلث OAB را رسم نموده، از O به نقطهٔ دلخواه I واقع بر AB وصل کرده، آن را تا نقطهٔ E چنان امتداد می‌دهیم که OI = IE باشد و از E موازی AB رسم می‌کنیم تا دایرهٔ فوق را در O′ قطع کند. نقطهٔ تقاطع OO′ با دایره نقطهٔ M است ؛ زیرا :

$$\frac{OM}{MO'} = \frac{OI}{IE} = ۱ \quad \text{یا} \quad OM = MO'$$

و در نتیجه :

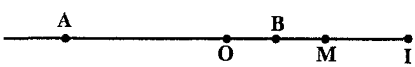
$$OM^۲ = MA.MB \quad \text{یا} \quad OM.O'M = MA.MB$$

بحث. اگر خطی که از E موازی AB رسم می‌شود، دایره را قطع کند، مسأله جواب دارد.

ب. نقطهٔ O روی AB واقع است :

اگر M نقطهٔ خواسته شده باشد، یعنی داشته باشیم $OM^۲ = MA.MB$ ، در این صورت چنانچه I قرینهٔ M نسبت به O باشد، (ABOI) تقسیم توافقی است و از آن‌جا حل مسأله چنین است :

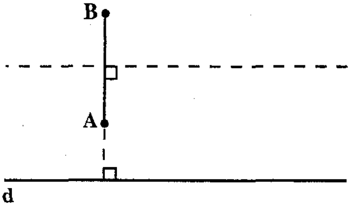
I مزدوج توافقی O نسبت به AB را به‌دست می‌آوریم. M وسط OI، نقطهٔ خواسته شده است.



۲.۱.۸.۲. یک خط، دو نقطه

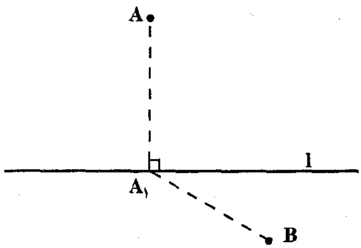
۲.۱.۸.۲.۱. یک خط، دو نقطه در صفحه

۴۱. عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. اگر این عمودمنصف خط d را در نقطهٔ M قطع کند، این نقطه جواب مسأله است.



بحث. ۱. اگر امتداد پاره‌خط AB عمود بر خط d باشد، مسأله جواب ندارد، یا می‌توان گفت جواب مسأله نقطهٔ بی‌نهایت دور امتداد AB است.
۲. اگر امتداد پاره‌خط AB عمود بر خط d نباشد، مسأله همواره یک جواب دارد.

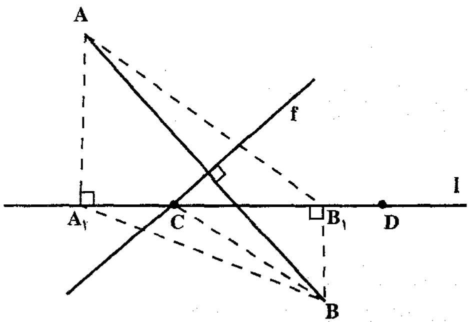
۴۲. فرض کنید فاصلهٔ A تا l، کمتر از فاصلهٔ B تا l نباشد. تصویر A بر l را A_1 می‌نامیم.



(الف)

(شکل الف). اگر داشته باشیم: $AA_1 > A_1B$، آن‌وقت A_1 همان نقطهٔ مطلوب است. AA_1 پاره‌خط بزرگتر است و در ضمن، برای هر نقطهٔ Q واقع بر l، داریم $AQ > AA_1$.

اکنون فرض می‌کنیم $AA_1 < A_1B$. f، عمود منصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم و پای عمود وارد از B بر l را B_1 می‌نامیم (شکل ب).

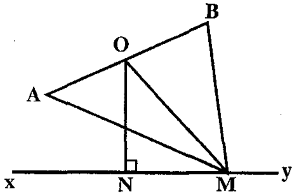


(ب)

همهٔ نقطه‌هایی از صفحه که فاصلهٔ آنها تا A کمتر از فاصلهٔ آنها تا B باشد، در همان طرف B نسبت به f قرار دارند. پس A_1 و A در یک طرف f اند، زیرا $A_1A < AB$. علاوه بر آن، B_1 و B هم در یک طرف f واقعند، زیرا $B_1B < A_1A$ (طبق فرض در این حالت، که نزدیکتر از B به l است) و $A_1A < B_1A$ (A_1 پای عمود وارد از A بر l است).

بنابراین $B_1B < BA$. به این ترتیب، خط راست f، پاره‌خط A_1B_1 را در نقطه‌ای مثل C قطع می‌کند. C، همان نقطهٔ مطلوب است، زیرا داریم $AC = BC$، درحالی که برای هر نقطهٔ دیگری از l مثل Q یا AQ و یا BQ از AC بزرگتر است. مثلاً نقطهٔ D را بر خط راست l درنظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم D و B_1 در یک طرف f باشند. در این‌صورت $DC > AC$، زیرا AD، ضلع روبه‌رو به زاویهٔ منفرجه در مثلث ACD است. بنابراین، بزرگترین پاره‌خط از دو پاره‌خط AD و BD به‌طور مستقیم، از AC بزرگترمی‌شود. شبیه این استدلال را می‌توان برای نقطهٔ D' از خط راست l و در طرف دیگر f، انجام داد.

۲. ۱. ۸. ۲. ۲. یک خط، دو نقطه خارج آن

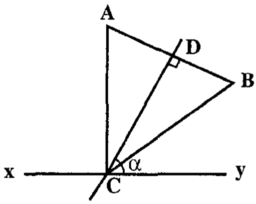


۴۳. فرض کنیم M یک نقطهٔ اختیاری از xy و O وسط AB باشد. هرگاه حکم قضیهٔ میانه‌ها را در مثلث AMB بنویسیم، حاصل می‌شود:

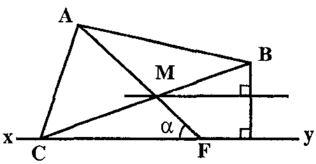
$$MA^2 + MB^2 = 2AO^2 + 2MO^2$$

و چون AO مقدار ثابتی است، $MA^2 + MB^2$ وقتی کمترین مقدار خود را داراست که MO کمترین مقدار خود را دارا باشد و بنابراین باید M بر نقطهٔ N، پای عمود وارد از O بر خط xy، منطبق باشد.

۴۴. مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. خط xy و دو نقطهٔ A و B و زاویهٔ α داده‌های مسأله‌اند.

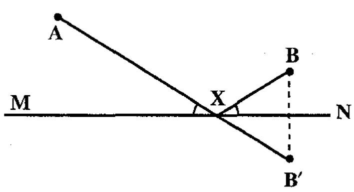


۱. برای رسم میانهٔ DC کافی است از نقطهٔ D وسط ضلع AB، خطی چنان رسم کنیم که با خط xy زاویه‌ای مساوی زاویهٔ داده‌شده بسازد.



۲. اگر بخواهیم که میانه، ازیکی از دو رأس داده شده A یا B به‌عنوان مثال از رأس A رسم شود، از A خطی رسم می‌کنیم که با xy زاویهٔ داده شده را بسازد. از طرفی باید ضلع BC به وسیلهٔ میانهٔ AF به دو قسمت مساوی تقسیم شود. سپس خط GM را متساوی‌الفاصله از نقطهٔ B و خط xy رسم می‌کنیم تا AF را در نقطهٔ M قطع کند. از B به M وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا xy را در C قطع کند. مثلث ABC شرایط خواسته شده را دارد.

۲. ۱. ۸. ۲. ۳. یک خط، دو نقطه در یک طرف آن



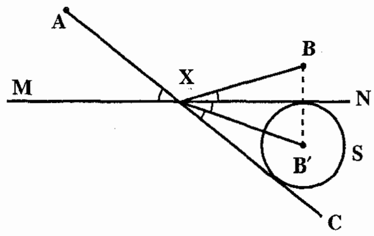
۴۵. فرض می‌کنیم نقطهٔ X پیدا شده است. یعنی:

$$A\hat{X}M = B\hat{X}N$$

(شکل). گیریم B' قرینهٔ B نسبت به خط MN باشد؛ پس:

$$B'\hat{X}N = B\hat{X}N = A\hat{X}M$$

یعنی نقطه‌های A، X و B' بر یک امتدادند. از این جا نتیجه می‌شود که X نقطهٔ برخورد خطهای MN و AB' است.



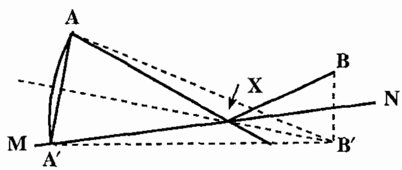
(الف)

۴۶. **راه حل اول.** فرض می‌کنیم X، پیدا شده است. گیریم B' قرینهٔ B نسبت به MN باشد و XC امتداد پاره‌خط AX که بر X می‌گذرد (شکل الف).

پس: $C\hat{X}N = ۲B\hat{X}N = ۲B'\hat{X}N$

و بنابراین خط XB' زاویهٔ NXC را نصف می‌کند. پس خط AXC بر دایرهٔ S به مرکز B'، که بر MN مماس است، مماس می‌شود؛ در نتیجه نقطهٔ X محل برخورد خط MN و مماس رسم شده از A بر دایرهٔ S است.

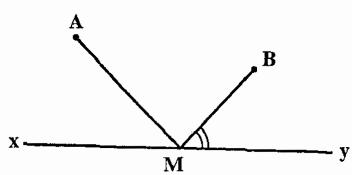
راه حل دوم. باز فرض می‌کنیم X پیدا شده است. گیریم A' قرینهٔ A نسبت به خط $B'X$ باشد (همان قراردادهای راه حل اول را به‌کار می‌بریم). $B'X$ زاویهٔ AXM را نصف می‌کند؛ پس A' بر خط XM واقع است و $B'A = B'A'$ (شکل (ب)). بنابراین A' می‌تواند ازتقاطع خط MN با دایرهٔ به مرکز B' و شعاع $B'A$ مشخص شود. پس نقطهٔ X محل برخورد خط MN با عمود رسم شده از B' بر AA' است.

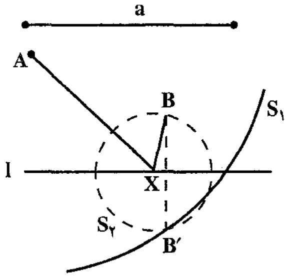


(ب)

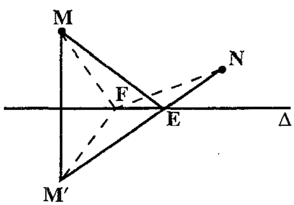
۴۷. مجموع دو زاویه را m می‌گیریم و کمان درخور زاویهٔ $n - m$ مقابل به پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم.

کمترین مقدار ممکن برای مجموع دو زاویه، نظیر ماکزیمم مقدار زاویهٔ مکمل m است. اما ماکزیمم زاویهٔ ACB به وسیلهٔ کمان مماس بر xy مشخص می‌شود. دو مقدار ماکزیمم برای این زاویهٔ متمم وجود دارد. اما باید بدانیم که دایرهٔ گذرنده بر دو نقطهٔ A و B و مماس بر خط xy را رسم کنیم.





۴۸. فرض کنیم مسأله حل شده است. دایرهٔ S_1 به مرکز A و شعاع a، و دایرهٔ S_2 به مرکز X و شعاع XB را رسم می‌کنیم (شکل الف). واضح است که این دو دایره در نقطه‌ای واقع بر خط AX برهم مماسند. چون S_2 ازنقطهٔ B می‌گذرد، باید از نقطهٔ B'، قرینهٔ B نسبت به l نیز بگذرد، پس مسأله به رسم یک دایرهٔ S_2 که از دو نقطهٔ مفروض B و B' بگذرد و بر دایرهٔ مفروض S_1 مماس باشد، بدل می‌شود. X، مرکز دایرهٔ S_2، نقطهٔ مطلوب است. این مسأله حداکثر دوجواب دارد؛ ممکن است یک جواب داشته باشد یا اصلاً جوابی نداشته باشد.



۴۹. قرینهٔ نقطهٔ M را نسبت به خط Δ به‌دست آورده، M' می‌نامیم. از M' به N وصل می‌کنیم تا Δ را در نقطهٔ E قطع کند. این نقطه جواب مسأله است. یعنی $EM + EN$ کمترین مقدار ممکن است؛ زیرا اگر نقطهٔ دلخواه F را روی Δ انتخاب و به M و N و M' وصل کنیم، در مثلث $FM'N$ داریم:

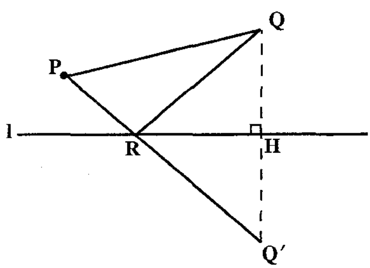
$$FM' + FN > M'N$$

اما $F'M = FM \quad , \quad M'N = M'E + EN = EM + EN$

است. پس خواهیم داشت: $FM + FN > EM + EN$

۵۰. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. محیط مثلث PQR برابر است با:

$$PQ + QR + RP$$

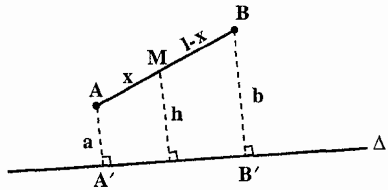


اما PQ مقدار ثابتی است. پس باید نقطهٔ R را چنان بیابیم که $RQ + RP$ کمترین مقدار ممکن را دارا باشد. بنابراین برای تعیین این نقطه، قرینهٔ نقطهٔ O نسبت به خط l را به‌دست آورده، Q' می‌نامیم و از Q' به P وصل می‌کنیم تا خط l را در نقطهٔ R قطع کند.

نقطه‌های R، P و Q را به‌هم وصل می‌کنیم.

نکته. برای تعیین نقطهٔ R می‌توان نقطهٔ P'، قرینهٔ نقطهٔ P را نسبت به خط l به‌دست آورد و از P' به Q وصل کرد تا l را در R قطع کند.

۵۱. نقطهٔ M را روی پاره‌خط AB اختیار می‌کنیم و فرض می‌کنیم $AB = l$ و $AM = x$ باشد، در این‌صورت $MB = l - x$ خواهد بود. از دوران نیمخطهای MA و MB حول خط Δ دو مخروط ناقص ایجاد می‌شود که بنا به فرض مسأله، مساحتهای جانبی برابر دارند. فاصلهٔ نقطهٔ M از خط Δ را h می‌گیریم. داریم :



$$S_۱ = \frac{۱}{۲}(۲\pi a + ۲\pi h)x = S_۲ = \frac{۱}{۲}(۲\pi b + ۲\pi h)(l - x)$$
$$\Rightarrow x(۲\pi a + ۲\pi h + ۲\pi b + ۲\pi h) = l(۲\pi b + ۲\pi h)$$
$$\Rightarrow x = \frac{۲\pi l(b+h)}{۲\pi(a+b+۲h)} = \frac{l(b+h)}{a+b+۲h}$$

باید توجه داشت که h بر حسب a، b و x مشخص می‌شود. پس x و از آن‌جا محل نقطهٔ M به‌دست می‌آید.

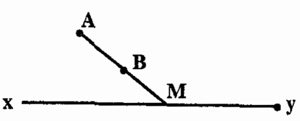
۲. ۱. ۸. ۲. ۴. یک خط، دو نقطه در دو طرف آن

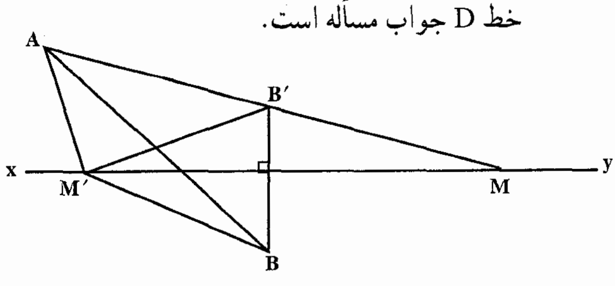
۵۲. قرینهٔ نقطهٔ B را نسبت به محور xy، ′B می‌نامیم، ′AB خط xy را در نقطهٔ M قطع می‌کند. نقطهٔ M جواب مسأله است؛ زیرا اگر نقطه‌ای دیگر مانند ′M روی خط D درنظر بگیریم، با توجه به این‌که $M'B = M'B'$ است، در مثلث $M'AB'$ داریم :

$$M'A - M'B' < AB'$$

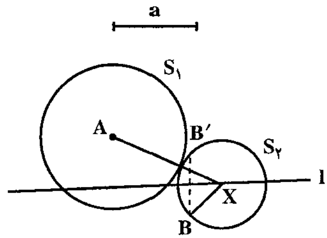
$$M'A - M'B < MA - MB' \Rightarrow M'A - M'B < MA - MB$$

نکته. اگر دو نقطهٔ A و B در یک‌طرف خط xy باشند، M نقطهٔ برخورد امتداد AB با خط D جواب مسأله است.





۵۳. فرض کنید مسأله حل شده است، و S_1 دایرهٔ به مرکز A و شعاع a باشد و S_2 دایرهٔ به مرکز X و شعاع BX (شکل). دایره‌های S_1 و S_2 در نقطه‌ای واقع بر خط AX برهم مماسند. بعلاوه S_2 از نقطهٔ 'B و قرینهٔ B نسبت به خط l، می‌گذرد. پس مسأله نیز به این مسأله تبدیل می‌شود که، مثلثی همنهشت با مثلث مفروضی رسم کنید که ضلعهایش بر سه دایرهٔ مفروض مماس باشند. مسأله، حداکثر دو جواب دارد.

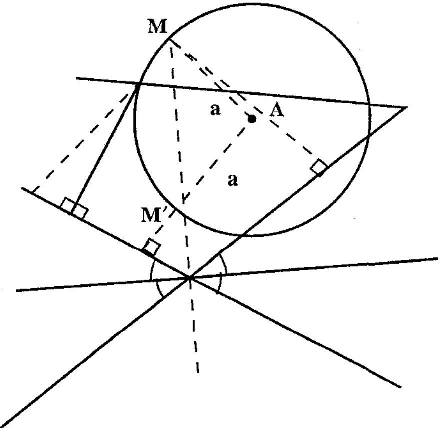


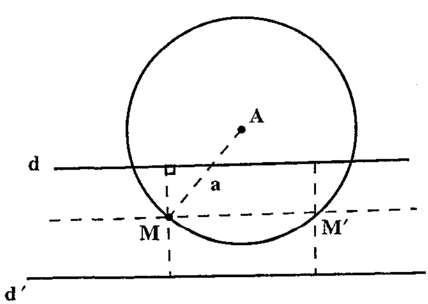
۲. ۱. ۸. ۳. دو خط، یک نقطه

۲. ۱. ۸. ۳. ۱. دو خط درهر حالت، یک نقطه

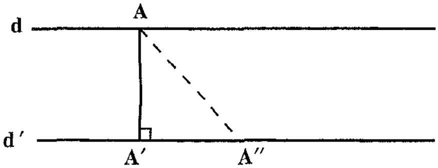
۵۴. نقطهٔ برخورد مکان هندسی نقطه‌های متساوی‌الفاصله از دو خط d و 'd، با دایره به مرکز A و به شعاع a، جواب مسأله است.

نکته. اگر دوخط d و 'd متقاطع باشند، مکان هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله از آنها، نیمسازهای زاویه‌های بین d و 'd می باشند و اگر دو خط d و 'd موازی باشند، مکان هندسی نقطهٔ متساوی‌الفاصله از آن دو، خطی موازی آنها و بین آنهاست.



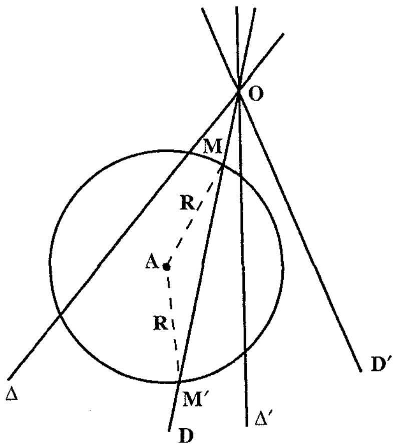


۲. ۱. ۸. ۳. ۲. دو خط موازی، یک نقطه



۵۵. از نقطهٔ A خطی عمود بر d′ رسم می‌کنیم و پای عمود را A′ می‌نامیم. این نقطه جواب مسأله است. زیرا هر نقطهٔ دیگری مانند A″ روی خط d′ اختیار کنیم، $AA'' > AA'$ خواهد بود.

۲. ۱. ۸. ۳. ۳. دو خط متقاطع، یک نقطه

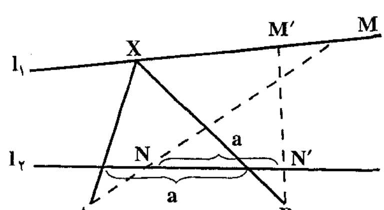


۵۶. مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو خط متقاطع Δ و Δ′ مقدار ثابت k است، دو خط D و D′ است که بر نقطهٔ برخورد Δ و Δ′ می‌گذرد و (ΔΔ′DD′) یک دستگاه توافقی می‌سازد. این دو خط (D و D′) را رسم می‌کنیم و همچنین دایره‌ای به مرکز A و به شعاع R رسم می‌نماییم. نقطهٔ برخورد این دایره با خطهای D و D′ جواب مسأله‌اند.

۲. ۱. ۸. ۴. دو خط، دو نقطه یا بیشتر

۲. ۱. ۸. ۴. ۱. دوخط درهر حالت، دونقطه یا بیشتر

۵۷. الف. تبدیل تصویری خط l_1 به شرح زیر را درنظر می‌گیریم: تصویر یک نقطهٔ M واقع بر آن از نقطهٔ A برخط l_2، سپس انتقال نقطهٔ حاصل، یعنی N، به اندازهٔ $NN' = a$ در طول l_2، و سرانجام تصویر نقطهٔ N′ بر خط l_1 از نقطهٔ B و تعیین نقطهٔ M′، پای تصویر (شکل). نقطهٔ مطلوب X، نقطهٔ ثابت این تبدیل تصویری است و بدین عنوان می‌تواند معین شود. مسأله ممکن است دارای دو یا یک جواب باشد و یا جوابی نداشته باشد.



ب. تفاوت راه‌حل این قسمت با راه‌حل قسمت (الف)، فقط دراین است که به‌جای انتقال به اندازهٔ a در طول l_2، یک نیمدور خط l_2 در حول نقطهٔ E را می‌گذاریم.

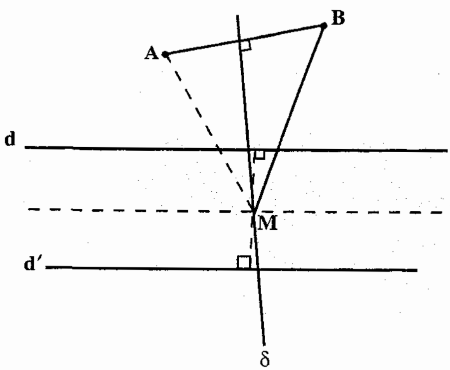
۵۸. فرض کنیم M و M′ روی D و D′ به قسمی قرار گرفته باشند که :

$$\frac{MB}{M'B'}=\beta\ ,\ \frac{MA}{M'A'}=\alpha$$

و دایرهٔ (MM′O) دایرهٔ (AA′O) را در نقطهٔ Δ غیر از O قطع می‌کند که قطب مضاعف همسانی تعریف شده با نقطه‌های متناظر A و A′ و نسبت α دو قطعه متناظر است.
به همین ترتیب دایرهٔ (M′MO) دایرهٔ (BB′O) را در نقطهٔ Δ به غیر از O قطع می‌کند. این نقطه نیز برای همسانی که به وسیلهٔ نقطه‌های متناظر B و B′، و با نسبت β برای دو قطعه خط متناظر مشخص می‌شوند، قطب مضاعف است. بنابراین M و M′ محل برخورد D و D′ با دایرهٔ گذرنده بر O و Δ، Δ_1 می‌باشد.

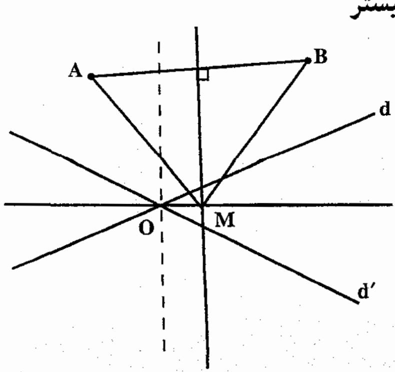
۲. ۱. ۸. ۴. ۲. دو خط موازی، دو نقطه یا بیشتر

۵۹. نقطهٔ برخورد عمودمنصف پاره‌خط AB با خطی که موازی دو خط d و d′ و به یک فاصله از آنهاست، جواب مسأله است.



۲. ۱. ۸. ۴. ۳. دو خط متقاطع، دو نقطه یا بیشتر

۶۱. مکان هندسی نقطه‌های متساوی‌الفاصله از دو خط d و d′، یعنی نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط d و d′، همچنین مکان هندسی نقطه‌های متساوی‌الفاصله از A و B، یعنی عمود منصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دو مکان هندسی جواب مسأله است.



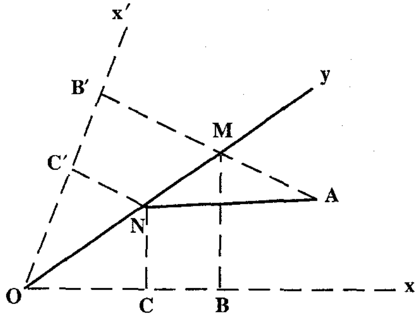
۲ . ۱ . ۹ . زاویه، نقطه

۲ . ۱ . ۹ . ۱ . یک زاویه، یک نقطه

۲ . ۱ . ۹ . ۱ . ۱ . یک زاویه، یک نقطه در صفحهٔ زاویه

۶۲. نیمخط Ox' را (قرینهٔ Ox) نسبت به Oy رسم می‌کنیم و از A عمود AB' را بر Ox' فرود می‌آوریم تا Oy را در M قطع کند. این نقطه جواب مسأله است. زیرا برای هر نقطهٔ N از Oy داریم :

$$MA + MB < NA + NC$$

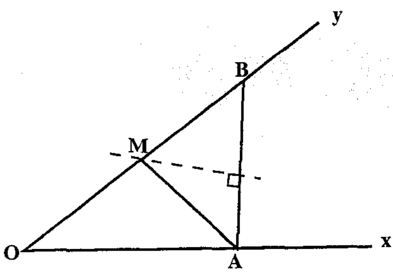


۲ . ۱ . ۹ . ۱ . ۲ . یک زاویه، یک نقطه روی ضلع زاویه

۶۳. اگر M نقطهٔ خواسته‌شده باشد، $MA = MB$ را روی Oy جدا می‌کنیم. نقطهٔ M بین O و B است.

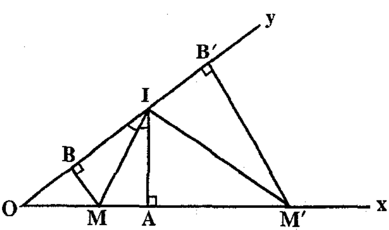
$$OB = OM + MB = a$$

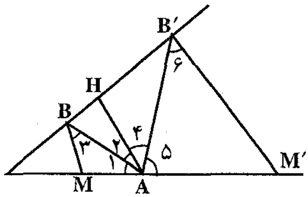
پس جای نقطهٔ B روی Oy مشخص می‌شود. نقطهٔ M به یک فاصله از A و B است. بنابراین ترسیم زیر را داریم :



پاره‌خط $OB = a$ را روی Oy جدا می‌کنیم. عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم تا Oy را در نقطهٔ M جواب مسأله قطع کند. مسأله یک جواب دارد مگر آن‌که $OA > a$ باشد.

۶۴. راه اول. اگر M نقطهٔ خواسته شده باشد $(MA = MB)$، از نقطهٔ A عمود AI را بر Ox اخراج می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ IAM و IBM همنهشتند زیرا وترهای مساوی (IM) و یک ضلع زاویهٔ قائمه مساوی $(MA = MB)$ دارند. پس IM نیمساز زاویهٔ AIO است.





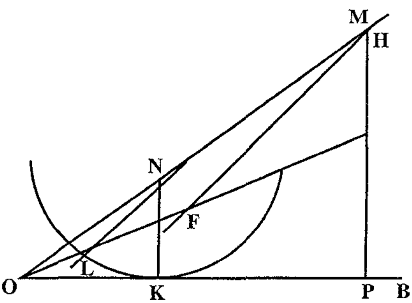
ترسیم. عمود AI را بر Ox اخراج می‌کنیم. IM نیمساز زاویهٔ AIO را رسم می‌کنیم. مسأله جواب دیگری نیز دارد که I′M′ نیمساز زاویهٔ AIy است. اگر xOy زاویه‌ای منفرجه باشد، Oy را امتداد می‌دهیم و ادامهٔ آن را Oy′ می‌نامیم و مثل بالا عمل می‌کنیم.

راه دوم. از A عمود AH را بر Oy فرود می‌آوریم. آن‌گاه AB و AB′ نیمسازهای دو زاویهٔ OAH و HAx و سپس دو خط BM و B′M′ را موازی AH رسم می‌کنیم. داریم:

$$\hat{۱} = \hat{۲} \;،\; \hat{۲} = \hat{۳} \Rightarrow \hat{۱} = \hat{۳}$$

پس مثلث MAB متساوی‌الساقین است و MA = MB است. به روش مشابه دیده می‌شود که M′B′ = M′A است.

۲. ۱. ۹. ۱. ۳. یک زاویه، یک نقطه درون زاویه



۶۵. خط راست OF را رسم می‌کنیم و نقطه‌ای مانند N را روی نیمخط راست OA علامت می‌گذاریم. از نقطهٔ N، عمود NK را بر خط راست OB فرود می‌آوریم. دایره‌ای به مرکز N و به شعاع NK رسم می‌کنیم. L را یکی از نقطه‌های برخورد محیط این دایره با نیمخط راست OF می‌گیریم. از نقطهٔ F، خط راستی موازی با NL رسم می‌کنیم.

نقطهٔ M، محل برخورد این خط راست با نیمخط راست OA، همان نقطهٔ مورد نظر است (شکل). درواقع، تجانس به مرکز O، که نقطهٔ L را به نقطهٔ F تبدیل می‌کند، با توجه به موازی بودن خطهای راست متناظر، نقطهٔ N را به نقطهٔ M، و نقطهٔ K را به نقطهٔ P تبدیل خواهد کرد. (P، پای عمودی است که از M بر OB رسم کرده‌ایم). بنابراین، از برابری NK = NL، برابری MF = MP نتیجه می‌شود.

مسأله دو جواب دارد (دایره به مرکز N و به شعاع NK، خط OF را، در دو نقطه قطع می‌کند).

یادداشت. مسألهٔ را با روش تشابه حل کردیم. این روش را، می‌توان به این صورت توضیح داد: ابتدا شکلی می‌سازیم که با شکل موردنظر متشابه باشد، سپس، آن را به نسبت لازم، بزرگ (یا کوچک) می‌کنیم.

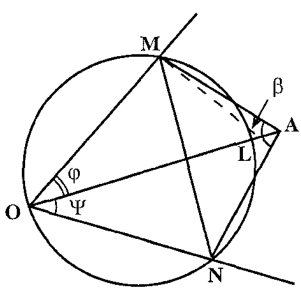
در مسألهٔ بالا، ابتدا خط شکستهٔ KNL را ساختیم (که برای آن، شرط مسأله برقرار بود) و سپس، خط شکستهٔ PMF را متشابه با آن، طوری پیدا کردیم که از نقطهٔ F بگذرد.

روش مکانهای هندسی را برای حل مسأله آزمایش می‌کنیم. معلوم می‌شود، مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه، که از یک نقطه و یک خط راست، به یک فاصله باشند، عبارت است از یک سهمی.

برای این‌که در این مورد قانع شویم، از روش مختصاتی استفاده می‌کنیم. فاصله از نقطهٔ F تا خط راست OB را h می‌گیریم. دستگاه مختصات Oxy را طوری انتخاب می‌کنیم که محور Ox بر OB واقع باشد و محور Oy از F بگذرد. در این صورت، نقطهٔ (x,y)، که از نقطهٔ F و خط راست OB به یک فاصله است، باید در معادلهٔ $|y|=\sqrt{x^۲+(y-h)^۲}$ صدق کند. با مجذورکردن دو طرف برابری، به معادلهٔ سهمی $y=\frac{۱}{۲h}x^۲+\frac{۱}{۲}h$ می‌رسیم.

بنابراین، نقطهٔ موردنظر مسأله، در نقطهٔ برخورد سهمی با خط راست OA قرار دارد. البته، ما نمی‌توانیم سهمی را به کمک پرگار و خط‌کش رسم کنیم، ولی نقطه‌های برخورد آن را با یک خط راست، می‌توانیم با توجه به حل مسأله، به‌دست آوریم.

۶۶. باید معلوم کنیم که تحت چه شرایطی می‌توانیم روی ضلعهای زاویه، نقطه‌های M و N را طوری پیدا کنیم که $M\hat{A}N=\beta$ و $MA=AN$. دایره‌ای بر مثلث MON محیط کنید (شکل). از آن‌جا که $\varphi+\Psi+\beta<۱۸۰^\circ$، نقطهٔ A در بیرون این دایره قرار دارد. اگر L نقطهٔ برخورد خط راست OA و دایره باشد، آن وقت نابرابریهای زیر برقرارند:



$$A\hat{M}N=۹۰^\circ-\frac{\beta}{۲}>L\hat{M}N=L\hat{O}N$$

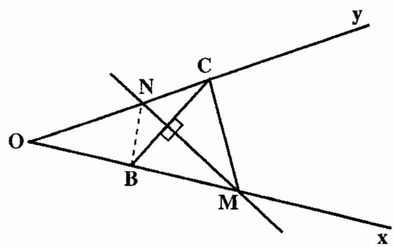
$$A\hat{N}M=۹۰^\circ-\frac{\beta}{۲}>L\hat{O}M$$

به این ترتیب، اگر $\varphi < 90^\circ - \frac{\beta}{2}$ و $\Psi < 90^\circ - \frac{\beta}{2}$، آن وقت می‌توان نقطه‌های M و N را طوری پیدا کرد که $MA = AN$ و $M\hat{A}N = \beta$. اگر این شرطها برقرار نباشند، آن‌وقت چنین نقطه‌هایی وجود ندارند. در این حالت، چهارضلعی با مساحت ماکسیمال، به یک مثلث تبدیل می‌شود (M یا N بر O منطبق می‌شود).

۲. ۱. ۹. ۲. یک زاویه، دو نقطه

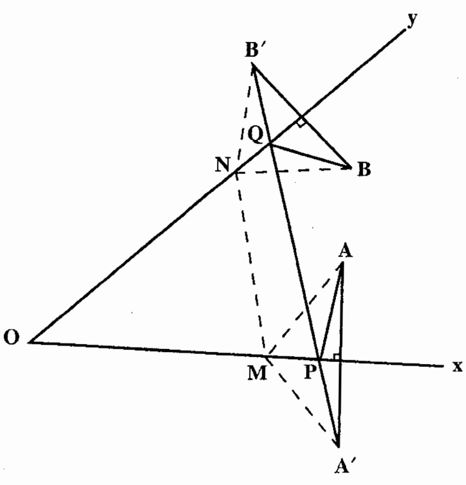
۲. ۱. ۹. ۲. ۱. یک زاویه، دو نقطه روی ضلعهای زاویه

۶۸. نقطه‌های برخورد عمودمنصف پاره‌خط BC با ضلعهای زاویهٔ xOy جواب مسأله‌اند.



۲. ۱. ۹. ۲. ۲. یک زاویه، دو نقطه درون زاویه

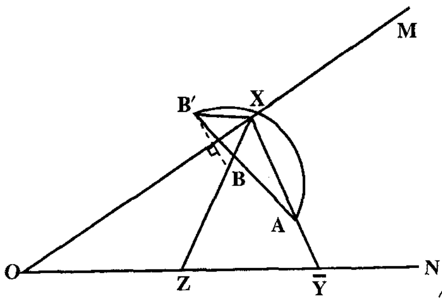
۶۹. قرینهٔ نقطه‌های A و B را بترتیب نسبت به Ox و Oy نقطه‌های A' و B' می‌نامیم. پاره‌خط $A'B'$ را وصل می‌کنیم تا Ox را در P و Oy را در Q قطع کند. P و Q نقطه‌های جواب مسأله‌اند؛ زیرا اولاً $QB = QB'$ و $PA = PA'$؛ پس $BQ + PQ + AP = A'B'$. حال هر دو نقطه‌ای که بر ضلعهای Ox و Oy بگیریم، مانند نقطه‌های M و N، باید ثابت کرد که $AM + MN + BN > A'B'$. نقطه‌های M و N را بترتیب بر A و A'، و بر B و B' وصل می‌کنیم. داریم $MA = MA'$ و $NB = NB'$. پس:



$$BN + MN + AM = B'N + MN + A'M$$

در چهارضلعی $B'NMA'$، می‌توان نوشت: $A'B' < A'M + MN + NB'$

پس حکم محقق است.



۷۰. فرض کنید مسأله حل شده است و B' قرینهٔ B نسبت به OM است (شکل).

داریم:

$$B'\hat{X}A = B'\hat{X}B + Y\hat{Z}X$$

اما:

$$B'\hat{X}B = ۲O\hat{X}Z = ۲(X\hat{Z}Y - M\hat{O}N)$$

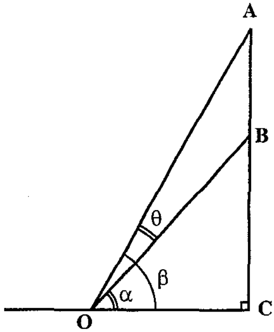
(زیرا زاویهٔ XZY زاویهٔ خارجی مثلث XOZ است). درنتیجه:

$$\begin{aligned} B'\hat{X}A &= ۲X\hat{Z}Y - ۲M\hat{O}N + Y\hat{X}Z \\ &= X\hat{Z}Y + X\hat{Y}Z + Y\hat{X}Z - ۲M\hat{O}N \\ &= ۱۸۰^\circ - ۲M\hat{O}N \end{aligned}$$

پس زاویهٔ $B'\hat{X}A$ معلوم است. در نتیجه X می‌تواند از برخورد خط OM با کمان درخور زاویهٔ $۱۸۰^\circ - ۲M\hat{O}N$ رسم شده بر وتر AB' مشخص شود. مسأله یک جواب یکتا دارد.

۲. ۱. ۱۰. زاویه، پاره‌خط

۲. ۱. ۱۰. ۱. یک زاویه، یک پاره‌خط



۷۱. اگر O نقطهٔ خواسته شده باشد، ضلعهای OB و OA را a و b و زاویه‌های AOC و BOC را نیز β و α و $OC = x$ فرض می‌کنیم. می‌دانیم:

$$\tan\alpha = \frac{a}{x} \quad , \quad \tan\beta = \frac{b}{x} \quad , \quad \theta = \beta - \alpha$$

$$\Rightarrow \tan\theta = \frac{\tan\beta - \tan\alpha}{۱ + \tan\beta\tan\alpha} = \frac{b-a}{x + \frac{ab}{x}}$$

برای ماکزیمم بودن θ باید $\tan\theta$ ماکزیمم و در نتیجه $x+\frac{ab}{x}$ می‌نیمم باشد،($a-b$ ثابت است)؛ چون حاصلضرب ثابت است. پس وقتی $x+\frac{ab}{x}$ می‌نیمم است که $x+\frac{ab}{x}$ یا $x=\sqrt{ab}$ باشد، یا $OC=\sqrt{CB.CA}$.

۲ . ۱ . ۱۱. زاویه، خط

۲ . ۱ . ۱۱ . ۱. یک زاویه، یک خط

۷۲. ثابت کنید، اگر دو انتهای پاره‌خط راست KL، که طول ثابتی دارد، روی دو ضلع زاویهٔ مفروض A بلغزد، آن وقت نقطهٔ M، نقطهٔ برخورد عمودهایی که از نقطه‌های K و L، بر ضلعهای KA و LA رسم شده‌اند، روی محیط دایره‌ای به مرکز A حرکت می‌کند.

۲ . ۱ . ۱۲. خط، پاره‌خط

۲ . ۱ . ۱۲ . ۱. یک خط، یک پاره‌خط

۷۳. از این نتیجه استفاده کنید که : منحنیهای تراز تابع $f(M)=\frac{|AM|}{|MB|}$، بر دایره‌هایی که از A و B می‌گذرند، عمودند.

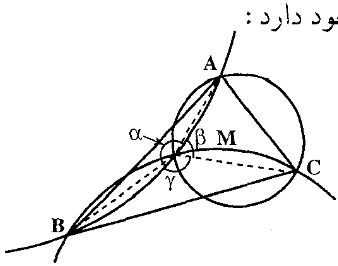
۲ . ۲. تعیین نقطه با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۲ . ۲ . ۱. مثلث در حالت کلی

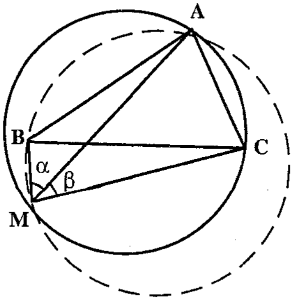
۲ . ۲ . ۱ . ۱. تنها یک مثلث

۲ . ۲ . ۱ . ۱ . ۱. تعیین نقطه در صفحهٔ مثلث

۷۴. اگر نقطهٔ جواب مسأله را M بنامیم، دو حالت وجود دارد :



۱. اگر نقطهٔ M درون مثلث باشد، باید $\alpha+\beta+\gamma=360^\circ$ باشد. کمان درخور زاویهٔ α



روبه‌رو به پاره‌خط AB و کمان درخور زاویهٔ β روبه‌رو به پاره‌خط AC را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد آنها M است. بدیهی است از این نقطه ضلع BC تحت زاویهٔ $\gamma = ۳۶۰^\circ - (\alpha+\beta)$ دیده می‌شود.

۲. اگر نقطهٔ M خارج مثلث باشد، باید جمع دو تا از این زاویه‌ها برابر سومی باشد. به عنوان مثال $\alpha+\beta=\gamma$. روش تعیین نقطهٔ M مشابه قسمت اول است.

۷۵. مثلث ABC و نقطهٔ M را چنان در نظر می‌گیریم که:

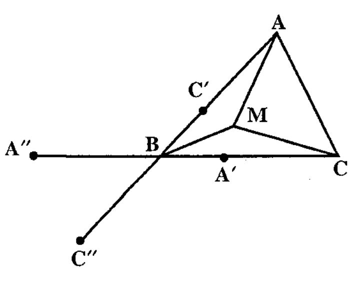
$$\frac{MA}{\alpha}=\frac{MB}{\beta}=\frac{MC}{\gamma}$$

α، β و γ مقدارهای داده‌شده می‌باشند. از رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود:

$$\frac{MA}{MB}=\frac{\alpha}{\beta}\ ,\ \frac{MB}{MC}=\frac{\beta}{\gamma}\ ,\ \frac{MA}{MC}=\frac{\alpha}{\gamma}$$

اما مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ ثابت مقدار ثابتی باشد، دایره‌ای است که قطرش آن پاره‌خط ثابت را به همان نسبت ثابت تقسیم می‌کند. (دایرهٔ آپولونیوس).

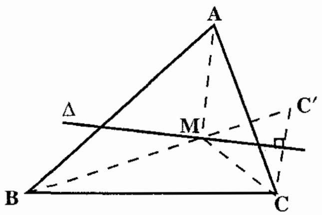
پس مکان هندسی نقطهٔ M، سه دایره است که ضلعهای مثلث را به نسبتهای $\frac{\alpha}{\beta}$، $\frac{\beta}{\gamma}$، $\frac{\alpha}{\gamma}$ تقسیم می‌کنند. برای رسم دو دایره از این دایره‌ها، بر روی AB، نقطه‌های C' و C'' را با شرط $\frac{C'A}{C'B}=\frac{C''A}{C''B}=\frac{\alpha}{\beta}$ و روی AC نقطه‌های A' و A'' را با شرط $\frac{A'B}{A'C}=\frac{A''B}{A''C}=\frac{\beta}{\gamma}$ به‌دست می‌آوریم.



نقطهٔ M محل برخورد دو دایره به قطرهای $C'C''$ و $A'A''$ خواهد بود. دایرهٔ سوم مکان هندسی نقطهٔ M، که برای آن رابطهٔ $\frac{MA}{MC}=\frac{\alpha}{\gamma}$ برقرار است نیز از محل تلاقی دو دایره به قطرهای $C'C''$ و $A'A''$ می‌گذرد (شکل).

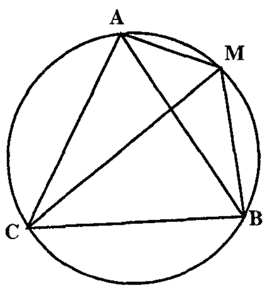
بر حسب وضع دو دایره، مسأله ممکن است دو جواب یا یک جواب داشته باشد و یا اصلاً جواب نداشته باشد. دایرهٔ محیطی مثلث ABC در نقطه‌های A و B، دایرهٔ (C′C″) به قطر C′C″ را به توافق تقسیم می‌کند و بر آن عمود است و به همین ترتیب دایرهٔ (ABC) بر دایرهٔ (A′A″) نیز عمود می‌باشد. پس نقطهٔ O مرکز دایرهٔ (ABC) بر خط، MM_1 محور اصلی دو دایرهٔ (C′C″) و (A′A″) قراردارد. پس O، M و M_1 بر یک خط راست واقعند و ضمناً دایرهٔ (C′C″) که بر دایرهٔ (ABC) عمود است، قطری از این دایره را که از M و M_1 می‌گذرد، به توافق تقسیم می‌کند.

۷۶. راه اول. اگر فرض کنیم که نقطهٔ M جواب مسأله باشد، بدیهی است که نقطه در درون مثلث است؛ زیرا نقطه‌های بیرون مثلث دارای مجموعی هستند که از مجموع سه ضلع بیشتر است و نقطه‌های درون مثلث چنانند که مجموع فاصله‌های آنها از سه رأس



مثلث از مجموع دو ضلع بزرگتر، کمتر است. پس فرض کنیم که طول MA مقدار لازم را برای احراز می‌نیمم پذیرفته است ولی فاصله‌های MA و MC چنان نباشند. در این صورت نقطهٔ M بر روی دایره‌ای به شعاع AM و به مرکز A متغیر است. نقطهٔ M را بر روی دایره باید چنان اختیار کرد که مجموع فاصله‌اش از دو نقطهٔ B و C می‌نیمم باشد. پس مسأله به تعیین بیضی به کانونهای B و C منجر می‌شود که بر دایرهٔ به مرکز A و به شعاع AM مماس باشد. (این مسأله حل هندسی ندارد) چه اگر M نقطهٔ تماس این بیضی و دایره باشد، چون جمیع نقطه‌های دایره بالای خط مماس Δ قرار دارند، مجموع فاصله‌هایشان از MA + MB بیشتراست و برای نقطه‌های خط نیز، فقط نقطهٔ M دارای خاصیت می‌نیمم است؛ زیرا خط مماس بر بیضی، نیمساز زاویه خارجی دو شعاع حامل است. پس C′ قرینهٔ C نسبت به مماس Δ را اگر به نقطهٔ B وصل کنیم، این خط بر نقطهٔ M می‌گذرد و مجموع فاصله‌های MB + MC به خط مستقیم BC′ بدل می‌شود، درحالی که برای سایر نقطه‌های خط Δ این مجموع، خط شکسته باقی می‌ماند. اکنون اگر معلوم بودن شرط فاصلهٔ می‌نیمم نسبت به رأسهای B و C، مرتباً درنظر گرفته شود، معلوم می‌شود که نقطهٔ M وقتی مجموع فاصله هایش از سه رأس مثلث می‌نیمم خواهد بود، که

قرینهٔ هریک از رأسها نسبت به عمودی که بر یکی از عمودهای MA یا MB و یا MC از سومین نقطه مرور کند، یعنی قرینهٔ C نسبت به عمود بر MB، بر A مرور کند و قرینهٔ A نسبت به عمود بر MB، بر C مرور کند و همچنین برای فرض سوم که قبلاً ذکر شد به آسانی می‌شود دید که دراین صورت نقطهٔ M هریک از ضلعها را تحت زاویهٔ °۱۲۰ رؤیت می‌کند ؛ یعنی زاویه‌های حول نقطهٔ M، هریک °۱۲۰ می‌باشند (اگر یکی از زاویه‌های مثلث °۱۲۰ یا بیشتر شد، همین رأس جواب مسأله می‌باشد). تعیین نقطهٔ M به رسم دو کمان درخور °۱۲۰ بر روی دو ضلع مثلث منجر می‌شود که با تقاطع، نقطهٔ M را به‌دست می‌دهند.



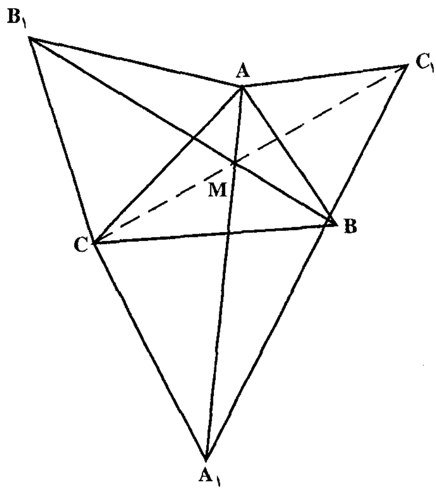
اگر اکنون به این مسأله توجه کنیم که هرنقطه از دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع دارای این خاصیت است که مجموع فاصله‌های آن از دو رأس برابر فاصلهٔ آن از رأس سوم است (رأسی که نظیر به قوس مقابل است) مثلاً در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC اگرنقطهٔ M بر قوس AB انتخاب شود،

$$MA + MB = MC$$

می‌باشد (چندین طریقهٔ اثبات برای این امر وجود دارد. ازهمه ساده‌تر به کاربستن قضیهٔ بطلمیوس در چهارضلعی AMBC می‌باشد :

$$MC \times AB = MA \times BC + MB \times AC$$

و چون $AB = AC = BC$ ، پس $(MC = MA + MB)$.



در مثلث داده شده و دلخواه ABC (با زاویه‌های کوچکتر از °۱۲۰) بر روی هر ضلع و به سمت بیرون سه مثلث متساوی‌الاضلاع بنا می‌کنیم. اگر رأسهای سوم این مثلثها را نظیر به نظیر به رأسهای مقابل مثلث ABC وصل کنیم :

اولاً، این سه خط هریک بریک نقطه می‌گذرند و ثانیاً، طول این سه قطعه خط باهم برابر است. نقطهٔ تقاطع این خطها همان نقطهٔ M است که مجموع فاصله‌هایش از سه رأس می‌نیمم می‌باشد. چون چهارضلعی $AMBC_1$ محاطی است، پس زاویهٔ AMB برابر °۱۲۰ است؛ زیرا زاویهٔ C_1 برابر °۶۰ می‌باشد و به همین قرار برای سایر چهارضلعیها، و چون نقطهٔ M بر دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC_1 قرار دارد، پس:

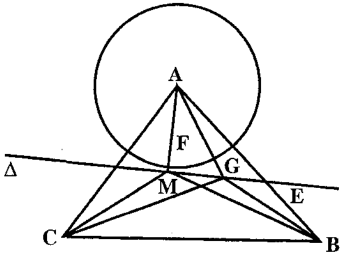
$$MC + MC_1 = MA + MB + MC \Rightarrow MC_1 = MA + MB$$

و همچنین برای: $MA + MA_1$ و $MB + MB_1$

که همگی برابرند با: $MA + MB + MC$

می‌نیمم مذکور در مسأله.

در اثبات اول باید توجه شود که دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC_1 در قسمت داخل مثلث همان کمان درخور °۱۲۰ بر روی AB می‌باشد؛ پس دایرهٔ محیطی مثلثهای متساوی‌الاضلاع رسم شده، همگی بر نقطهٔ M که در مسألهٔ می‌نیمم گفته شد می‌گذرند، ثانیاً با ملاحظهٔ قضیه‌ای که راجع به دایره محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع ذکر شد، اثبات مذکور روشن می‌شود.

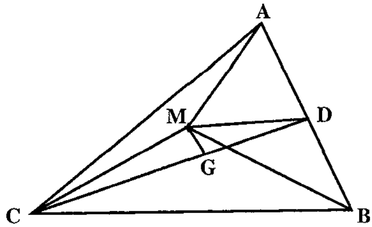


راه دوم. اگر M نقطهٔ خواسته‌شده باشد، فرض کنیم AM ثابت بماند، مجموع $MB + MC$ وقتی می‌نیمم است که $C\hat{M}A = B\hat{M}A$ باشد. مماس در نقطهٔ M را بر دایرهٔ به مرکزA و به شعاع MA رسم می‌کنیم. اگر F نقطهٔ دیگری از دایره باشد، نامساویهای زیر محقق است:

$$CF + BF > CG + BG > BM + CM$$

و به همین ترتیب، اگر BM ثابت بماند، $AM + CM$ وقتی می‌نیمم است که $C\hat{M}B = A\hat{M}B$ باشد. بنابراین $MA + MB + MC$ وقتی می‌نیمم است که $A\hat{M}B = C\hat{M}B = C\hat{M}A = ۱۲۰°$ باشد. برای تعیین M کافی است کمان درخورهای ۱۲۰ درجه را روی CB و AB بسازیم که یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند.

۷۷. بدیهی است که این نقطه نیز در داخل مثلث است. باید عبارت $MA^2 + MB^2 + MC^2$ می‌نیمم شود. چون ملاحظه می‌کنیم که :



$MA^2 + MB^2 = 2MD^2 + \frac{AB^2}{2}$ ، پس خواهیم داشت :

$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 2MD^2 + MC^2 + \frac{AB^2}{2}$$

اگر نقطهٔ G بر ثلث میانهٔ CD از سمت D باشد (مرکز ثقل مثلث)، برای نقطه‌های M، D، G و C که سه نقطهٔ اخیر بر خطی مستقیم واقعند، رابطهٔ استوارت را می‌نویسیم. خواهیم داشت :

$$MC^2.GD + MD^2.CG = MG^2.CD + CG.GD.CD$$

چون طرفین رابطه را بر GD تقسیم کنیم و ملاحظه کنیم که :

$$CD = 3GD \text{ و } CG = 2GD$$

نتیجه می‌شود که :
$$MC^2 + 2MD^2 = 3MG^2 + \frac{2}{3}CD^2$$

بنابراین :
$$MA^2 + MB^2 + MC^2 = 3MG^2 + \frac{AB^2}{2} + \frac{2}{3}CD^2$$

طرف دوم جز جملهٔ اول، مقداری است ثابت و جملهٔ اول همواره مثبت است (مجذور کامل) ؛ پس می‌نیمم آن صفر است و نقطهٔ M بایستی در G مرکز ثقل مثلث قرار گیرد که مجموع مربعهای فاصله‌های آن از سه رأس، می‌نیمم شود.

با ملاحظهٔ این که $CB^2 + CA^2 = 2CD^2 + \frac{AB^2}{2}$ ، بنابراین مقدار می‌نیمم عبارت است از :

$$\frac{2}{3}CD^2 + \frac{AB^2}{2} = \frac{AB^2 + AC^2 + BC^2}{3}$$

اگر توجه کنیم که مرکز ثقل سطح مثلث درعین حال مرکز ثقل سه جرم وزین است که در نقطه‌های A ، B و C قرار گرفته باشند (با اجرام متساوی) مسأله را می‌شود تعمیم داد : نقطه‌ای که مجموع مربعهای فاصله‌های آن از n نقطه می‌نیمم است، مرکز ثقل این نقطه‌هاست، اگر جرمهای آنها را برابر فرض کنیم. (دراین‌صورت می‌دانیم که مرکز ثقل این جرمها، مرکزثقل nضلعی حاصل نیست). برای اثبات از تعریف مرکز ثقل با رابطه‌های برداری استفاده می‌کنیم :

اگر G مرکز ثقل نقطه‌های A_1 ، A_2 ، A_3 ، ...، A_n که جرم آنها برابر واحد است، باشد، می‌دانیم که :

$$n\overrightarrow{OG} = \sum \overrightarrow{OA_i}$$

و نقطهٔ O هر نقطهٔ دلخواهی در صفحه باشد. اگر بخصوص نقطهٔ O را بر G منطبق بگیریم، حاصل می‌شود : $\sum \overrightarrow{GA_i} = \circ$ مجموع مربعهای فاصله‌های نقطهٔ M از نقطه‌های A_1 ، A_2 ، ...، A_n عبارت است از $\sum \overrightarrow{MA_i}^{\text{۲}}$. اگر ملاحظه کنیم که :

$$\overrightarrow{MA_i} = \overrightarrow{MG} + \overrightarrow{GA_i}$$

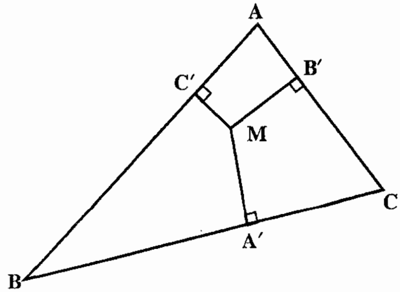
(رابطهٔ شال) بنابراین :

$$\overrightarrow{MA_i}^{\text{۲}} = \overrightarrow{MG}^{\text{۲}} + \text{۲}\overrightarrow{MG}.\overrightarrow{GA_i} + \overrightarrow{GA_i}^{\text{۲}}$$

نقطهٔ A_i یکی ازنقطه‌های A_1 ، A_2 ، ... و A_n می‌باشد. چون کلیهٔ این رابطه‌ها را جمع کنیم، خواهیم داشت :

$$\sum \overrightarrow{MA_i}^{\text{۲}} = n\overrightarrow{MG}^{\text{۲}} + \sum \overrightarrow{GA_i}^{\text{۲}}$$

زیرا $\sum \overrightarrow{GA_i} = \circ$ می‌باشد. در طرف دوم تمام جمله‌ها جز جمله اول مقدارهای ثابتی هستند و جملهٔ اول همواره مثبت است (مجذور کامل). پس می‌نیمم آن صفر است ؛ یعنی $\overrightarrow{MG} = \circ$. پس نقطهٔ M بایستی بر مرکز ثقل G نقطه‌های A_1 ، A_2 ، ... و A_n منطبق باشد، تا مجموع مربعهای فاصله‌های آن از نقطه‌های A_1 ، A_2 ، ... و A_n می‌نیمم باشد.

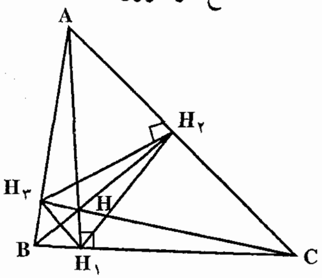


۷۸. داریم :

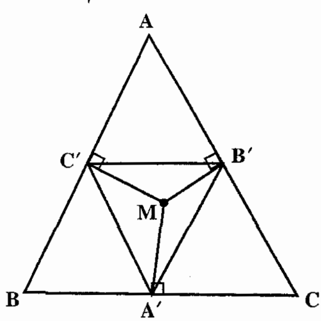
$$\frac{MA'}{p}=\frac{MB'}{q}=\frac{MC'}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{MA'}{MB'}=\frac{p}{q}$$

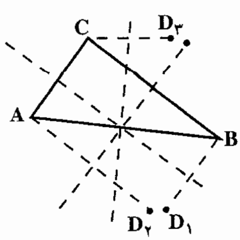
پس، مکان هندسی نقطهٔ M دو خط راست است که از رأس C می‌گذرد و این دو خط با دو ضلع زاویهٔ C، تشکیل یک دستگاه توافقی می‌دهند. همچنین داریم $\frac{MA'}{MC'}=\frac{p}{r}$. پس، مکان هندسی دیگر نقطهٔ M دو خط راست است که از رأس B می‌گذرند و با دو ضلع زاویهٔ C دستگاه توافقی تشکیل می‌دهند. نقطهٔ تقاطع این خطها جواب مسأله‌اند که یک نقطهٔ تقاطع در درون مثلث ABC است. مسأله چند جواب دارد؟



۷۹. این نقطه محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC است. یعنی اگر H_1 ، H_2 و H_3 پای ارتفاعها و H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشند، محیط مثلث $H_1H_2H_3$ کمترین مقدار بین مثلثهای پدر ایجاد شده در مثلث ABC دارند. این مثلث بین تمام مثلثهای محاط در مثلث ABC کمترین محیط را دارد.

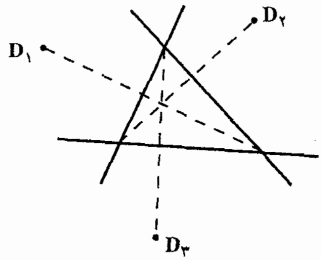


مثلث پدر یک نقطه در مثلث. اگر از نقطهٔ M واقع در درون مثلث ABC سه عمود MA' ، MB' و MC' را بر ضلعهای مثلث فرود آوریم، مثلث $A'B'C'$ را مثلث پدر نظیر نقطهٔ M در مثلث ABC می‌نامند.



(الف)

۸۰. اگر مثلث قائم‌الزاویه نباشد، به ۶ طریق ؛ و اگر قائم‌الزاویه باشد، به ۵ طریق. فرض کنید، مجموعهٔ نقطه‌های $\{A,B,C,D\}$ دارای محور تقارن باشد. در بیرون محور تقارن، باید تعداد زوجی از نقطه‌ها واقع باشند، در غیر این صورت، نمی‌توان آنها را، دو به دو قرینهٔ هم قرار داد. از آن‌جا که هر چهار



(ب)

نقطهٔ A، B، C و D را نمی‌توان روی محور تقارن در نظر گرفت (سه نقطهٔ A، B و C روی یک خط راست نیستند)، بنابراین باید دو حالت را مورد مطالعه قرار داد.

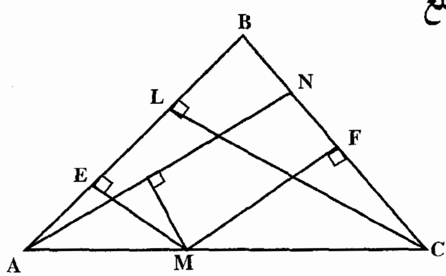
۱. روی محور تقارن، هیچ‌کدام از نقطه‌های ما واقع نیستند. در این صورت، محور تقارن، عمودمنصف یکی از ضلعهای مثلث ABC و نقطهٔ D قرینهٔ رأس سوم نسبت به این محور است. به این ترتیب، در این حالت، برای D سه موضع به‌دست می‌آید : D_1 ، D_2 و D_3 روی شکل (الف). وقتی زاویهٔ C برابر ۹۰ درجه باشد، با رسم عمودمنصفهای AC و BC، تنها یک نقطه برای D به‌دست می‌آید : $D_1 = D_2$ ، زیرا این دو عمودمنصف، محورهای تقارن مستطیل ABCD می‌شوند.

۲. دو تا از نقطه‌ها روی محور تقارنند. در این حالت، محور تقارن، از دو نقطه از بین سه نقطهٔ A، B و C می‌گذرد و نقطهٔ D قرینهٔ نقطهٔ سوم نسبت به محور تقارن می‌شود. به این ترتیب، سه موضع دیگر برای D به‌دست می‌آید (شکل (ب)).

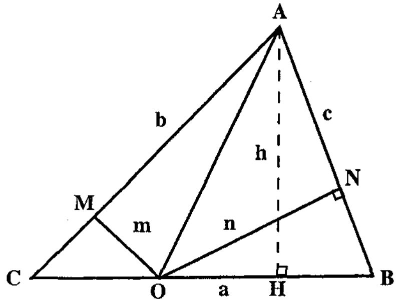
این شش موضع برای D، جز در حالتی که در مورد مثلث قائم‌الزاویه گفتیم، برای مثلث غیرمتساوی‌الساقین در هیچ حالتی بر هم منطبق نمی‌شوند.

۲.۲.۱.۱.۲. تعیین نقطه روی ضلعهای مثلث

۲.۲.۱.۱.۲.۱. تعیین نقطه روی یک ضلع



۸۱. اگر نقطهٔ M را بین A و C اختیار کنیم، چنانچه زاویهٔ A بزرگتر از زاویهٔ C فرض شود، در این صورت فاصلهٔ نقطهٔ A از BC یعنی AN کوچکتر از CL خواهد شد. اگر از M عمودهای ME و MF را بر ضلعهای AB و BC فرود آوریم و KM را نیز بر AN عمود کنیم، واضح است که $KN = MF$ ، یعنی $AK < ME$ است. پس در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AKM و AEM که در وتر مشترکند، چون $E\hat{A}M > K\hat{M}A$ (یعنی BCA) است، پس داریم $AK + KN < MF + ME$ یا $AN < MF + ME$ یعنی رأس A که بزرگترین زاویه را با AC می‌سازد، نقطهٔ مطلوب است.



۸۲. عمود AH را بر BC فرود می‌آوریم و AO را رسم می‌کنیم. دو برابر مساحت مثلث ABC به دو روش قابل محاسبه است:

پس داریم:

$$bm + cn = ah \quad (۱)$$

$$mn = k^{۲} \quad (۲)$$

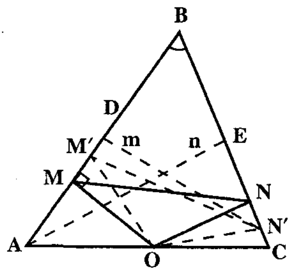
با استفاده از این دو تساوی، m و n به‌دست می‌آیند.

$$n = \frac{ah - bm}{c}\ ,\ \ mn = m.\frac{ah - bm}{c} = k^{۲}$$

همچنین

$$m.\frac{ah}{b} - m^{۲} = \frac{ck^{۲}}{b}\ ,\ \ mah - bm^{۲} = ck^{۲}$$

که این مقدار بسادگی رسم می‌شود.



۸۳. ۱. هنگامی که نقطهٔ متحرک منطبق بر نقطهٔ A یا نقطهٔ C است، مثلث وجود ندارد. از آن‌جا یک ماکزیمم برای حالتی که نقطهٔ متحرک بین A و C می‌باشد، وجود دارد.

۲. زاویهٔ MON ثابت است، زیرا مکمل زاویهٔ B است. اما در مثلثهایی که یک زاویهٔ رأس برابر دارند، حاصلضربهای مجاور به آن زاویه با هم مساوی است. بنابراین کافی است تغییرات حاصلضرب OM.ON را بررسی کنیم.

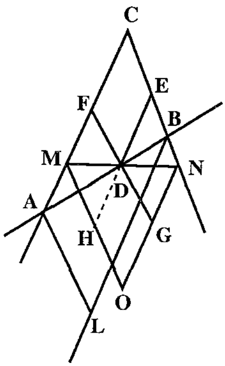
۳. پاره‌خطهای OM و ON را برحسب پاره‌خطهای معلوم، و فاصله‌های AO و CO محاسبه می‌کنیم.

داریم:

$$\frac{OM}{m} = \frac{AO}{b}\ ;\ \ OM = \frac{m}{b}.AO\ ,\ \ \frac{ON}{h} = \frac{CO}{b}\ ;\ \ ON = \frac{n}{b}.CO$$

$$\Rightarrow OM.ON = \frac{mn}{b^{۲}}.AO.CO$$

تغییرات حاصلضرب OM.ON از AO.CO جدا نمی‌شود. ماکزیمم در صورتی ایجاد می‌شود که AO=CO باشد.



۸۴. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و $DE + DF = l$ باشد.

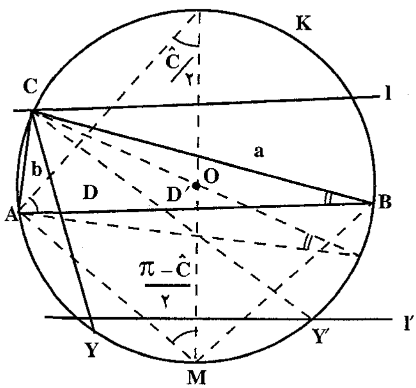
از نقطهٔ D خطی چنان رسم می‌کنیم که با AC و BC مثلث متساوی‌الساقین $CMN(CM = CN)$ را بسازد. کلیهٔ نقطه‌های واقع بر MN جواب مسأله‌اند، بعلاوه $CM = CN = l$ است.

رسم لوزی CMON بدیهی بودن رابطهٔ زیر را مسلم می‌سازد؛ زیرا:

$$DF + DE = FG = HE = MG$$

بنابراین برای حل مسأله $CM = CN = l$ را اختیار می‌کنیم. خط MN جواب مسأله را مشخص می‌کند.

هنگامی که نقطهٔ D بر نقطهٔ B منطبق باشد، l کمترین مقدار را خواهد داشت. زیرا برابر BC خواهد بود، و وقتی نقطهٔ D به طرف نقطهٔ A حرکت کند، مقدار l افزایش می‌یابد تا D بر A منطبق شود که در این صورت حداکثر مقدار l برابر AC خواهد بود.



۸۵. l را از C موازی AB رسم می‌کنیم؛ l' را نیز موازی AB، و چنان رسم می‌کنیم که AB به یک فاصله از l و l' باشد. K دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم (شکل). ادعا می‌کنیم که نقطهٔ Dی خواسته شده موجود است اگر و فقط اگر l' دایرهٔ K را قطع کند (یا بر آن مماس باشد)؛ زیرا اگر Y نقطهٔ مشترک l' و K باشد، در این صورت وتر CY وتر AB را در نقطهٔ Dای قطع می‌کند، و $CD.DY = AD.DB$ است. از آن‌جا که C و Y بر l و l' واقعند، در حالی که D بر AB قرار دارد، داریم: $DY=CD$، و بنابراین:

$$CD^{۲} = AD.DB$$

اگر l' دایرهٔ K را قطع نکند، نقطهٔ چون Y وجود ندارد.

وسط کمان AB را شامل C را با M نمایش می‌دهیم. واضح است که l' دایرهٔ K را قطع می‌کند یا بر آن مماس است اگر و فقط اگر فاصلهٔ M از AB بزرگتر از، یا مساوی با فاصلهٔ C از AB باشد، یعنی:

$$\Delta ABC \text{ مساحت } \geq \Delta ABM \text{ مساحت}$$

یا :
$$\frac{۱}{۲}AM.BM\sin(\pi-\hat{C}) \geq \frac{۱}{۲}ab\sin\hat{C} \qquad (۱)$$

که در آن a و b طولهای BC و AC را نمایش می‌دهند، برقرار باشد. از آن‌جا که :

AM=BM است، $\sin(\pi-\hat{C})=\sin\hat{C}$ است، (۱) به : $\quad AM^۲ \geq ab \;(۲)$

تبدیل می‌شود. فرض می‌کنیم r شعاع K باشد و ملاحظه می‌کنیم که :

$$AM = ۲r\sin\frac{\hat{C}}{۲} \;،\; a = ۲r\sin\hat{A} \;،\; b = ۲r\sin\hat{B}$$

در این صورت، با قرار دادن این رابطه‌ها در (۲) و تقسیم بر $۴r^۲$ ، شرط خواسته شده را به‌دست می‌آوریم :

$$\sin^۲\frac{\hat{C}}{۲} \geq \sin\hat{A}\sin\hat{B}$$

توجه داشته باشید که تساوی برقرار است اگر و فقط اگر l' مماس بر K باشد. در این حالت تنها یک نقطهٔ D بر AB به‌طوری که : $\quad AD.DB = CD^۲$

باشد، موجود است.

تبصره. لزوم و کفایت نامساوی : $\quad \sin A\sin B \leq \sin^۲(\frac{\hat{C}}{۲})$

به سادگی از کاربرد مختصری از حساب جامع و فاضل در مورد تابع :

$$f(\gamma_۱) = \sin\gamma_۱\sin\gamma_۲ = \sin\gamma_۱\sin(\hat{C}-\gamma_۱)$$

که در فاصلهٔ : $۰ \leq \gamma \leq \frac{C}{۲}$ مشتق‌پذیر است، نیز نتیجه می‌شود. مشتق این تابع عبارت است از :

$$f'(\gamma_۱) = \cos\gamma_۱\sin(\hat{C}-\gamma_۱) - \sin\gamma_۱\cos(\hat{C}-\gamma_۱)$$
$$= \sin(\hat{C}-\gamma_۱-\gamma_۱) = \sin+(\hat{C}-۲\gamma_۱)$$

$f'(\gamma_۱)$ به‌ازای $۰ \leq \gamma_۱ < \frac{C}{۲}$ مثبت است و تمام مقادیر بین $f(۰)=۰$ و $f(\frac{C}{۲}) = \sin^۲(\frac{C}{۲})$ را می‌پذیرد. در حالت خاص، نقطهٔ $\gamma_۱$ ای موجود است که به‌ازای

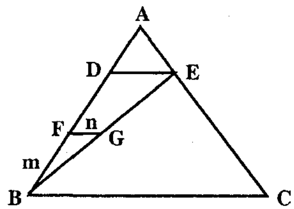
آن : $f(\gamma_1) = \sin A \sin B$

اگر و فقط اگر : $0 \le \sin A \sin B \le \sin^2\left(\frac{C}{2}\right)$ باشد.

۸۶. محل برخورد BC با میانه‌های وارد بر AB و AC را در نظر بگیرید.

۸۷. نقطهٔ D پای نیمساز زاویهٔ درونی C است.

۸۸. روی ضلع AB (شکل) قطعه خط BF را برابر m جدا می‌کنیم و از F خطی به موازات BC می‌کشیم و روی این خط FG را برابر n جدا می‌کنیم. BG ضلع AC را در E قطع می‌کند، از E خط ED را به موازات BC می‌کشیم و خواهیم داشت :

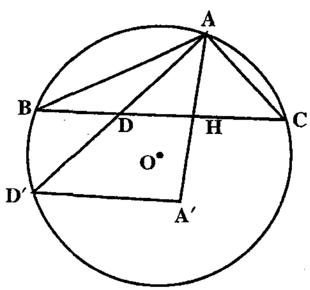


$$\frac{BD}{DE} = \frac{BF}{FG} = \frac{m}{n}$$

۸۹. نقطهٔ P پای ارتفاع رأس C از مثلث ABC است.

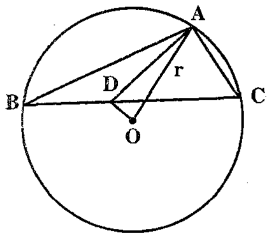
۹۰. **راه اول.** دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم نقطهٔ D جواب مسأله باشد. AD را امتداد می‌دهیم تا در نقطهٔ D' دایره را قطع کند. می‌دانیم :

$AD.DD' = DB.DC$



پس، $AD.DD' = AD^2$ و از آن‌جا $DD' = AD$ ، یعنی D وسط AD' است. اگر A' قرینهٔ A نسبت به BC باشد، $D'A'$ موازی BC خواهد بود. پس راه‌حل مسأله چنین است : A' قرینهٔ A را نسبت به BC به‌دست آورده، از A' خطی به موازات BC می‌کشیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در D' قطع کند. محل برخورد AD' با BC نقطهٔ D می‌باشد. چون $A'D'$ در نقطهٔ دیگری نیز دایره را قطع می‌کند، پس مسأله عموماً دو جواب دارد.

بحث. در حالتی که زاویهٔ A منفرجه باشد، A' در داخل دایره واقع می‌شود، مسأله دو جواب دارد. اگر A قائمه باشد، A' روی دایره واقع می‌شود و باز مسأله دو جواب خواهد داشت. اگر A حاده باشد، A' در خارج دایره واقع می‌شود و مسأله دارای جواب نیست و چنانچه مثلث ABC متساوی‌الساقین در A قائمه باشد، مسأله یک جواب دارد.

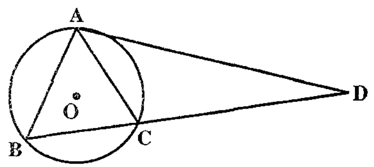


راه دوم. دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم و فرض می‌کنیم O مرکز این دایره و D یک نقطه روی BC باشد، به‌طوری که داشته باشیم : $AD^2 = BD.DC$.
برای تعیین D ملاحظه می‌کنیم که :

$$BD.DC = r^2 - d^2 = OA^2 - OD^2$$

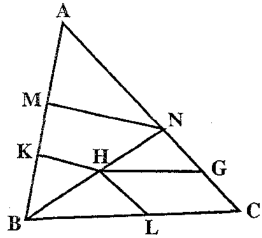
بنابراین : $AD^2 = OA^2 - OD^2$ و یا $AD^2 + OD^2 = OA^2$

از این رابطه معلوم می‌شود که مثلث ODA در رأس D قائم‌الزاویه است و یا D روی دایره‌ای به قطر OA واقع است. بنابراین برای حل مسأله A و O را به هم وصل کرده، دایره‌ای به قطر OA رسم می‌کنیم تا ضلع BC را در D و ′D قطع کند که همان نقطه‌های مطلوبند. برحسب این که دایرهٔ مفروض BC را در دو یا یک نقطه قطع کند، مسأله دو یا یک جواب دارد و یا اگر خط و دایره یکدیگر را قطع نکنند، مسأله دارای جواب نیست.



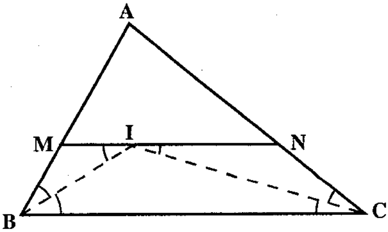
۹۱. دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم و مماس بر دایره در نقطهٔ A را رسم می‌نماییم تا امتداد ضلع BC را در نقطهٔ D که جواب مسأله است قطع کند. شرط امکان مسأله آن است که مماس در نقطهٔ A بر دایره، موازی ضلع BC نباشد و این در صورتی است که مثلث در رأس A متساوی‌الساقین نباشد.

۲.۲.۱.۱.۲.۲. تعیین نقطه روی دو ضلع



۹۲. اگر نقطه‌های M و N جواب مسأله باشند، BK را به دلخواه روی AB جدا نموده و KH را به موازات MN و برابر BK رسم می‌کنیم و HL را به موازات AC می‌کشیم. چهارضلعی BKHL با چهارضلعی BMNC مجانس است. پس BK=KH=HL. اگر HG را به موازات BC رسم کنیم، شکل HLCG متوازی‌الاضلاع است، پس BK=KH=HL=CG می‌باشد و از آن‌جا راه‌حل مسأله به‌دست می‌آید :

دو طول مساوی BK و CG را روی BA و CA جدا می‌کنیم. از G خطی به موازات BC می‌کشیم و به مرکز K و به شعاع KB قوسی رسم می‌کنیم تا آن را در H قطع کند امتداد BH ضلع AC را در N قطع می‌کند. از N خطی به‌موازات HK می‌کشیم تا نقطهٔ M به‌دست آید.



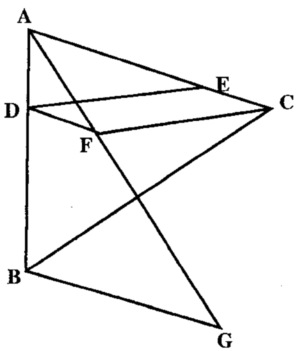
۹۴. محل برخورد نیمسازهای زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ را نقطهٔ I می‌نامیم و از نقطهٔ I خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا AB و AC را بترتیب در نقطه‌های M و N قطع کنند. MN خط مطلوب است. زیرا مثلثهای IMB و INC متساوی‌الساقین هستند ؛ چون :

$$N\hat{I}C = \frac{\hat{C}}{۲}$$

و همچنین

$$M\hat{I}B = \frac{\hat{B}}{۲}$$

است (نسبت به دو موازی BC و MN و قاطعهای IC و IB).



۹۶. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و دو نقطهٔ D و E جواب مسأله باشند. پس

$$DE = l \quad , \quad \frac{AD}{EC} = \frac{p}{q} \quad (۱)$$

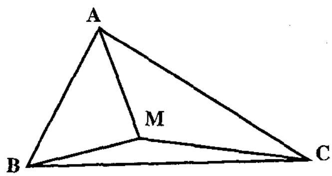
است. از نقطه‌های C و D دو خط، بترتیب به موازات DE و AC رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ F قطع کنند. چهارضلعی DECF متوازی‌الاضلاع است. پس رابطهٔ (۱) به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$\frac{AD}{DF} = \frac{p}{q} \quad (۲)$$

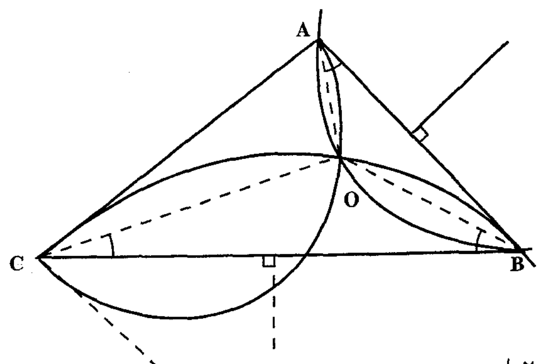
حال نقطهٔ A را به نقطهٔ F وصل کرده و از نقطهٔ B خطی به موازات DF رسم می‌کنیم تا امتداد AF را در نقطهٔ G قطع کند. در مثلث ABG می‌توان نوشت $\frac{AD}{AB} = \frac{DF}{BG}$ و یا $\frac{AD}{DF} = \frac{AB}{BG}$. با توجه به رابطهٔ (۲) می‌توان نوشت : $\frac{AB}{BF} = \frac{p}{q}$. از این رابطه طول BG از طریق ترسیم به‌دست می‌آید (چهارمین جزء تناسب). پس راه‌حل بدین ترتیب به‌دست می‌آید : اول از نقطهٔ B خطی به موازات AC رسم کرده و روی این خط به اندازهٔ طول

معین BG جدا می‌کنیم تا نقطهٔ G بدست آید. سپس نقطهٔ G را به نقطهٔ A وصل کرده، به مرکز C و به شعاع l دایره‌ای رسم می‌کنیم تا AG را در نقطه F قطع کند (برحسب آن که دایره به مرکز C و به شعاع l بر AG مماس و یا AG را در دو نقطه قطع کند و یا قطع نکند، مسأله دارای یک جواب و یا دو جواب و یا جواب نخواهد داشت). سپس از F به موازات BG رسم می‌کنیم تا AB را در نقطهٔ D قطع کند. از نقطهٔ D به موازات CF رسم می‌کنیم تا AC را در E قطع کند. نقطه‌های E و D جواب مسأله‌اند.

۳.۱.۱.۲.۲. تعیین نقطه در درون مثلث



۹۷. اگر مسأله را حل شده فرض کنیم، در این صورت $A\hat{M}C = A\hat{M}B = B\hat{M}C = ۱۲۰^\circ$ پس برای حل مسأله کمان درخور زاویهٔ ۱۲۰° را نسبت به سه ضلع BC، AC و AB رسم می‌کنیم، محل تلاقی این سه کمان درخور، نقطهٔ M است.



۹۸. باید کمان درخورهای زاویه‌های $\pi - \hat{C}$ ، $\pi - \hat{A}$ و $\pi - \hat{B}$ مقابل به ضلعهای BC، AC و AB از مثلث ABC را رسم کنیم:

۱. سه کمان درخور در یک نقطه یکدیگر را قطع می‌کنند؛ زیرا مجموع سه زاویه برابر ۲π است.

۲. $O\hat{A}B = O\hat{B}C$ است؛ زیرا اندازه‌ای مساوی نصف کمان $\overset{\frown}{OB}$ دارند. کمان درخور AOB یا $\pi - B$ مماس بر BC است؛ همچنین $O\hat{B}C = O\hat{C}A$، زیرا هر دو مساوی نصف کمان $\overset{\frown}{OC}$ می‌باشند.

تبصره. مسأله یک جواب دیگر نیز دارد. این نقطهٔ O' است که نقطهٔ برخورد کمان درخورهای زیر است.

۱. کمان درخور $A\hat{O'}B$ مماس بر b، $B\hat{O'}C$ مماس بر c، $C\hat{O'}A$ مماس بر ضلع a.

۲. دایره‌هایی که بر دو رأس مثلث می‌گذرند و در یکی از این نقطه‌ها بر ضلع مجاور به آن رأس مماسند، دایره‌های وابسته، الحاقی یا معاون Adjointes نامیده می‌شوند.
۳. دو نقطهٔ O و ´O که جواب مسأله‌اند، نقطه‌های بروکارد Brocard نامیده می‌شوند.

۹۹. فرض می‌کنیم $\hat{C} \geq \hat{B} \geq \hat{A}$ باشد. از نقطهٔ M خط DE را موازی BC رسم می‌کنیم و عمودهای MP، MQ و MR را بر ضلعهای مثلث رسم می‌نماییم. در مثلث DCE داریم:

$EH < MQ + MR$ (۱)

اگر عمودهای MP و EG را که بر AB رسم شده‌اند در نظر بگیریم، خواهیم داشت:

$EH + EG < MQ + MR + MP$ (۲)

در مثلث ABC طبق مسأله‌های قبل داریم:

$CK < EG + EH$ (۳)

از نامساویهای (۲) و (۳) نتیجه می‌شود: $CK < MQ + MR + MP$

یعنی عمود CK رسم شده از رأس بزرگترین زاویه، کمترین مقدار $MP + MQ + MR$ می‌باشد.

۱۰۰. ضلعهای مثلث را $BC = a$، $AC = b$ و $AB = c$ و فاصلهٔ M از این ضلعها را بترتیب x، y و z می‌نامیم. داریم:

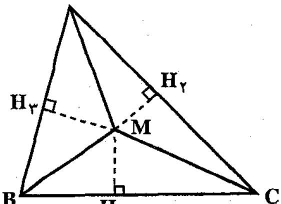
$$S = \frac{1}{2}(ax + by + cz) \Rightarrow ax + by + cz = 2S$$

چون مجموع عاملهای بالا ثابت است، پس وقتی این مجموع ماکزیمم است که این عاملها با هم برابر باشند، یعنی داشته باشیم $ax = by = cz = \frac{2S}{3}$ و از آن جا:

$$z = \frac{2S}{3c} = \frac{1}{3}h_c \ , \ y = \frac{2S}{3b} = \frac{1}{3}h_b \ , \ x = \frac{2S}{3a} = \frac{1}{3}h_a$$

یعنی نقطهٔ M محل برخورد میانه‌های مثلث باشد.

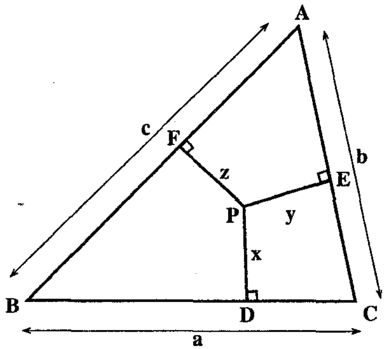
۱۰۱. اگر قرار دهیم $a = BC$، $b = AC$ و $c = AB$ داریم:



$$S_{MBC} \cdot S_{MAB} \cdot S_{MAC} = \frac{1}{8} abc . MH_1 . MH_2 . MH_3$$

و چون c، b و a ثابت است، پس حاصلضرب $MH_1 . MH_2 . MH_3$ وقتی ماکزیمم است که $S_{MBC} \cdot S_{MAB} \cdot S_{MAC}$ ماکزیمم باشد، اما چون جمع این سه مقدار $S_{MAB} + S_{MBC} + S_{MAC} = S_{ABC}$

مقداری ثابت است، پس حاصل‌ضربهای آنها وقتی ماکزیمم است که $S_{MAB} = S_{MAC} = S_{MBC} = \frac{S}{3}$ ؛ پس M باید مرکز ثقل مثلث باشد. لذا گزینهٔ (د) صحیح است.



۱۰۲. طول ضلعهای مقابل به A، B و C را بترتیب با a، b و c و از آن پاره‌خطهای PD، PE و PF را با x، y و z نمایش می‌دهیم (شکل). k مساحت مثلث در :

$$2k = ax + by + cz \qquad (1)$$

صدق می‌کند. می‌خواهیم کمترین مقدار :

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} \qquad (2)$$

را تحت قید (۱) به‌دست آوریم. این کار را به چندین طریق می‌توانیم انجام دهیم. ساده‌ترین راه احتمالاً استفاده از نامساوی کوشی :

$$(u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3)^2 \le (u_1^2 + u_2^2 + u_3^2)(v_1^2 + v_2^2 + v_3^2)$$

با : $\sqrt{ax}$ ، $\sqrt{by}$ و $\sqrt{cz}$ به‌جای uها و $\sqrt{\frac{a}{x}}$، $\sqrt{\frac{b}{y}}$ و $\sqrt{\frac{c}{z}}$ به‌جای vهاست. بنابراین :

$$(a+b+c)^2 \le (ax+by+cz)\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right) = 2k\left(\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z}\right) \qquad (3)$$

یا :

$$\frac{a}{x}+\frac{b}{y}+\frac{c}{z} \ge \frac{(a+b+c)^2}{2k}$$

تساوی اگر و فقط اگر سه‌تاییهای (ax, by, cz) و $(\frac{a}{x},\frac{b}{y},\frac{c}{z})$ متناسب باشند، یعنی اگر و فقط اگر $x = y = z$ باشد، برقرار است. بنابراین کمترین مقدار (۲) وقتی رخ می‌دهد که P در مرکز دایرهٔ محاطی داخلی ΔABC باشد.

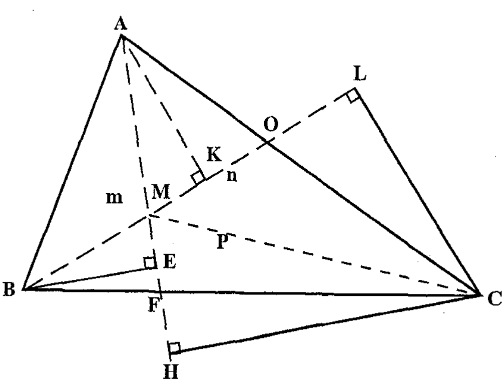
نتیجهٔ فوق را می‌توان به چند طریق به فضای سه بعدی برای چهار وجهیها، و فضای اقلیدسی n بعدی برای سیمپلکس‌ها (مثلثهای n بعدی) تعمیم داد. این تعمیم در مسألهٔ اکسترمم بعدی آمده است :

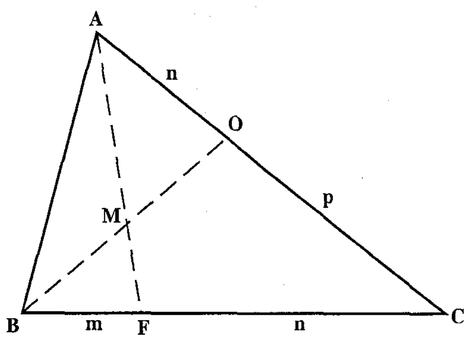
مقادیر اکسترمم : $S = \sum a_i x_i^p$ را با معلوم بودن $\sum x_i = ۱$ معین کنید. در این‌جا مجموعها از : $i = ۱,۲,...,n$ می‌باشند ؛ $x_i \geq ۰$ است، و a_i و p اعدادی معلوم با $a_i > ۰$ است.
در این مورد یکی از روشهای ساده استفاده از نامساوی هولدر «Holder» که تعمیم نامساوی کوشی می‌باشد، است.
خوانندگان آشنا با حساب جامع و فاضل می‌توانند در این مورد از روش لاگرانژ در بهینه‌سازی تابع f (x ،y ،z) تحت قید : ثابت = g (x ،y ،z) استفاده کنند. اما، در این راه‌حل باید ثابت شود که ماکزیمم یا می‌نیمم عملاً حاصل می‌شود، و این عمل در حالت سه متغیر مسألهٔ داده شده، مشکل نیست. اما در حالت n متغیر، مشخص باید تمام «وجوه» به ابعاد کمتر شرطهای جبری را مورد امتحان قرار داد و این کاری دشوار است. در حالی که روش حساب جامع و فاضل ذکر شده، روشی بسیار عمومی است، راه‌حلی که به کمک این نامساوی معروف مناسب انجام گیرد، ساده‌تر است.

۱۰۳. اگر مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، روشن است که نقطهٔ مطلوب M، باید از ضلعهای ΔABC به یک فاصله باشد ؛ یعنی M مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC، یا به‌گونهٔ دیگر، نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC باشد.
از آن جا نتیجه می‌شود که در یک مثلث دلخواه ABC، نقطهٔ مطلوب M باید بر نقطهٔ برخورد میانه‌های آن منطبق باشد.

۱۰۴. داریم :

$$\frac{S_{AMB}}{m} = \frac{S_{AMC}}{n} = \frac{S_{BMC}}{p}$$





و

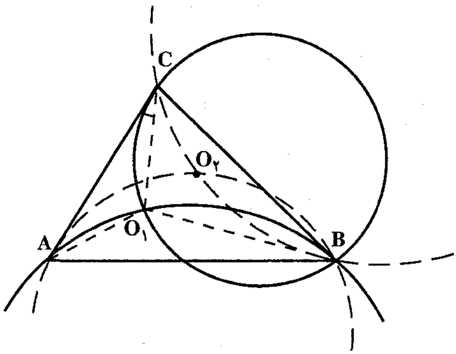
$$\frac{S_{AMB}}{S_{AMC}} = \frac{BE}{DC}$$

$(E = D = 90^\circ \text{ ، } F_1 = F_2)CDF \sim DEF$ پس داریم :

$$\frac{BE}{DC} = \frac{BF}{CF} \Rightarrow \frac{S_{AMB}}{S_{AMC}} = \frac{BF}{CF} = \frac{m}{n}$$

BC را به نسبت m و n تقسیم می‌کنیم و AC را به نسبت n و p. O را به B و F را به A وصل می‌کنیم تا یکدیگر را در M قطع کنند.

۱۰۵. نقطهٔ خواسته شده، محل برخورد دو هذلولی است.



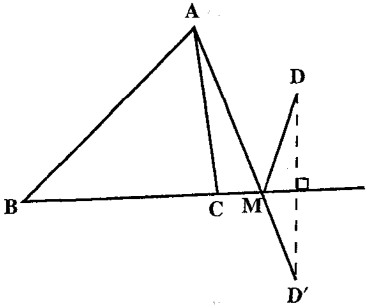
۱۰۶. برای آن که O_1 اولین مرکز دوران ΔABC باشد، لازم و کافی است که :

$$O_1\hat{A}B = O_1\hat{B}C = O_1\hat{C}A$$

فرض می‌کنیم که اولین مرکز دوران، یافته شده است. بر پاره‌خط AB دایره‌ای مرور می‌دهیم که از O_1 بگذرد (شکل).

چون $O_1\hat{A}B = O_1\hat{B}C$ ، نتیجه می‌شود که $O_1\hat{B}C$ با نصف اندازهٔ $\overset{\frown}{BO_1}$ از دایره مساوی است ؛ بنابراین خط BC بر دایرهٔ BO_1A مماس است. به همین روش می‌توان نشان داد که ضلعهای CA و AB از مثلث، بترتیب بر دایره‌ای که از نقطه‌های B، C و O_1 می‌گذرد و دایره‌ای که از نقطه‌های C، A و O_1 می‌گذرد، مماسند. سپس نقطهٔ O_1 ، اولین مرکز دوران مثلث ABC را، می‌توان از برخورد دو دایره به‌دست آورد : یکی دایره‌ای که از A و B می‌گذرد و بر ضلع BC مماس است و دیگری دایره‌ای که از B و C می‌گذرد و بر CA مماس است. دومین مرکز دوران را هم به روش مشابهی می‌توان پیدا کرد.

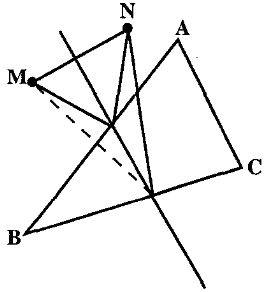
۱۰۷. گزینهٔ (ب) درست است.



۲.۱.۲.۲. یک مثلث، نقطه

۱.۲.۱.۲.۲. یک مثلث، یک نقطه

۱۰۸. قرینهٔ نقطهٔ D نسبت به خط BC را D′ می‌نامیم. AD′ را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این خط با خط BC جواب مسأله است.

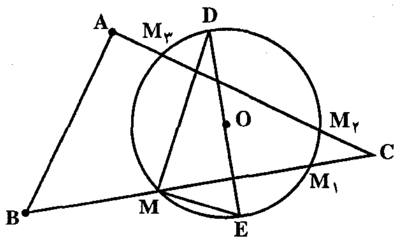


۲.۲.۱.۲.۲. یک مثلث، دو نقطه

۱۰۹. عمودمنصف پاره‌خط MN را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این عمودمنصف با ضلعهای مثلث جواب مسأله است. مسأله حداکثر دو جواب دارد.

۳.۱.۲.۲. یک مثلث، پاره‌خط

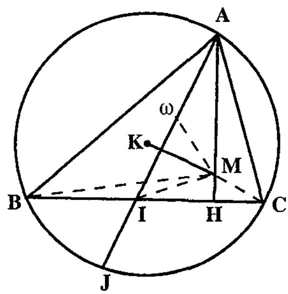
۱.۳.۱.۲.۲. یک مثلث، یک پاره‌خط



۱۱۰. دایره به قطر DE را رسم می‌کنیم. نقطه یا نقطه‌های برخورد این دایره با ضلعها یا امتدادهای ضلعهای مثلث جواب مسأله‌اند و به تعداد نقطه‌های برخورد، مسأله جواب دارد.

۴.۱.۲.۲. یک مثلث، خط

۱.۴.۱.۲.۲. یک مثلث، یک خط



۱.۱.۴.۱.۲.۲. یک مثلث، ارتفاع

۱۱۱. فرض کنیم نقطهٔ I وسط BC و J فصل مشترک میانهٔ AI با دایرهٔ محیطی مثلث و ω وسط AI باشد. در مثلث MBC با مراعات فرض مسأله، قضیهٔ میانه‌ها را می‌نویسیم :

$$MB^2 + MC^2 = 2MI^2 + 2BI^2 = 2MA^2$$

پس

$$MA^2 - MI^2 = BI^2 = BI \times CI = AI.IJ$$

حال اگر تصویر M را روی AI نقطهٔ K نامیده، حکم دوم قضیهٔ میانه‌ها را در مورد مثلث AMI بنویسیم، حاصل می‌شود :

$$MA^2 - MI^2 = AI.2\omega K$$

پس :

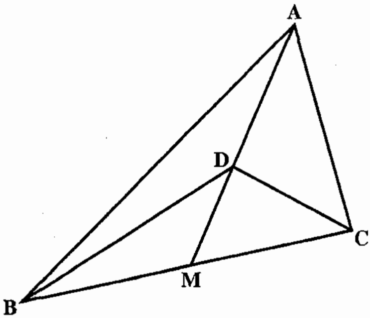
$$AI.2\omega K = AI.IJ \quad \text{و یا} \quad \omega K = \frac{IJ}{2}$$

و بنابراین :

$$AK = A\omega + \omega K = \frac{AI + IJ}{2} = \frac{AJ}{2}$$

و بنابراین ساختمان زیر نتیجه می‌شود :
دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم کرده، میانهٔ AI را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی را در J قطع کند. هرگاه عمودمنصف AJ را رسم کنیم، ارتفاع AH را در نقطهٔ خواسته شدهٔ M قطع خواهد کرد.

۲.۲.۱.۴.۱.۲. یک مثلث، میانه



۱۱۲. نقطهٔ خواسته شده را D می‌نامیم. فرض می‌کنیم :

$$DB^۲ + DC^۲ + DA^۲ = y$$

$$\Rightarrow y = DA^۲ + ۲DM^۲ + \frac{BC^۲}{۲}$$

با فرض $DA = x$ خواهیم داشت :

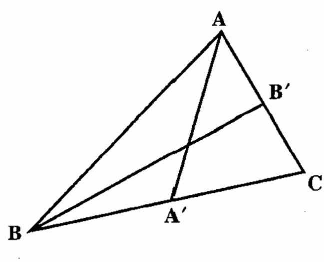
$$y = x^۲ + ۲(m_a - x)^۲ + \frac{a^۲}{۲}$$

$$\Rightarrow y' = ۲x - ۴(m_a - x)$$

$$\Rightarrow y' = ۰ \Rightarrow x = \frac{۲}{۳} m_a$$

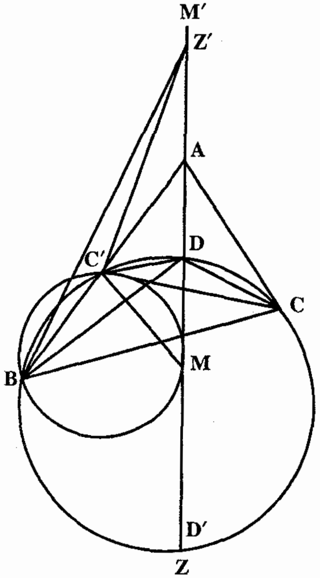
۱۱۳. پاره‌خط داده شده را AA' می‌نامیم. مثلث ABC را چنان رسم می‌کنیم که AA' میانهٔ آن باشد. میانهٔ BB' را نیز رسم می‌کنیم تا AA' را در نقطهٔ G قطع کند، می‌دانیم که $AG = ۲GA'$ است. حال پاره‌خط AG را باید به دو قسمت مساوی تقسیم کنیم. با استفاده از رسم عمودمنصف نقطهٔ D وسط پاره‌خط AG را به‌دست می‌آوریم. در این صورت خواهیم داشت :

$$AD = DG = GA'$$



پس پاره‌خط AA' به سه قسمت مساوی تقسیم شده است.

۲.۲.۱.۴.۱.۳. یک مثلث، نیمساز



۱۱۴. چون نیمساز یک زاویه محور تقارن آن زاویه است؛ هرگاه قرینهٔ C نسبت به نیمساز را C' بنامیم، C' روی AB است و $AC' = AC$. حال اگر نقطهٔ اختیاری D را روی AZ فرض کنیم، $A\hat{D}C = A\hat{D}C'$ و اگر $AB > AC$ باشد، $A\hat{D}B > A\hat{D}C$. پس:

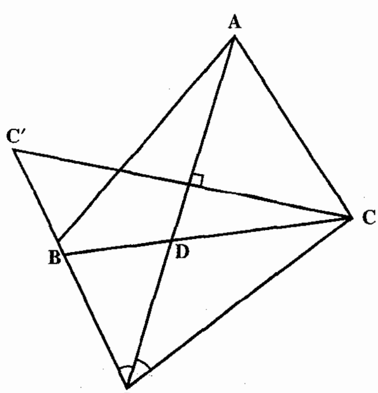
$$A\hat{D}B - A\hat{D}C = A\hat{D}B - A\hat{D}C' = B\hat{D}C'$$

حال باید حداکثر مقدار $B\hat{D}C'$ را پیدا کنیم. برای این کار دایره‌ای از D، C' و B می‌گذرانیم. اگر این دایره نیمساز AZ را در نقطهٔ دیگری مانند D' قطع کند، از هر نقطه از وتر DD' پاره‌خط BC' به زاویه‌ای بزرگتر از $B\hat{D}C'$ دیده می‌شود و Min زاویهٔ $B\hat{D}C'$ نظیر است با نقطه تماس خط DD' با دایره‌ای که از B و C' گذشته بر AZ مماس باشد. این نقطه را که M می‌نامیم، به قسمی است که:

$$AM^{۲} = AC'.AB = AC.AB$$

بر امتداد AZ نقطهٔ دیگری مانند M' وجود دارد به قسمی که $AM = AM'$ و این نقطه عبارت است از نقطهٔ تماس دایره دیگری که از B و C' گذشته بر AZ مماس باشد و نقطهٔ نظیر بزرگترین مقدار تفاضل خواسته شده را روی AZ' به‌دست می‌دهد. به‌سهولت می‌توان تحقیق کرد که از دو نقطهٔ حاصل، زاویهٔ نظیر نقطهٔ M بزرگتر می‌باشد.

۲.۲.۱.۴.۱.۴. یک مثلث، یک خط سوایی



۱۱۵. نقطهٔ C' قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به خط سوایی AD را به‌دست می‌آوریم. سپس BC' را رسم می‌کنیم، تا AD را در نقطهٔ O قطع کند.

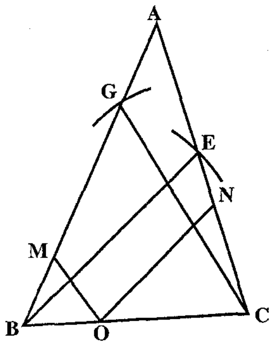
$B\hat{O}D = C\hat{O}D$ است.

نکته. خط سوایی به هر خطی گفته می‌شود که از یک رأس مثلث می‌گذرد و ضلع مقابل به آن رأس را قطع می‌کند.

۲.۲.۱.۴.۱.۵. یک مثلث، یک راستا

۱۱۶. مسأله را حل شده فرض کنید با توجه به این که PQ موازی امتداد ثابتی مانند δ است.

۲.۲.۱.۴.۲. یک مثلث، دو خط



۱۱۷. نقطه‌های E و G را روی AC و AB چنان اختیار می‌کنیم که $BE = CG = l$ باشد. آن‌گاه از O خطهای OM و ON را به ترتیب موازی CG و BE رسم می‌کنیم $OM + ON = l$ خواهد بود؛ زیرا با استفاده از مثلثهای متشابه CON و CBE، همچنین، BMO و BCG داریم:

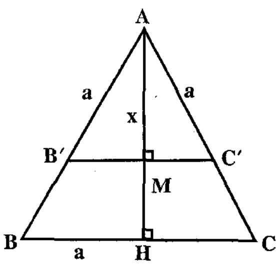
$$\frac{ON}{l} = \frac{OC}{BC} \Rightarrow ON = l.\frac{OC}{BC}$$

$$\frac{OM}{l} = \frac{OB}{BC} \Rightarrow OM = l.\frac{OB}{BC}$$

$$\Rightarrow OM + ON = l \times \frac{OB + OC}{BC} = l$$

۲ . ۲ . ۲. مثلث متساوی‌الاضلاع

۲ . ۲ . ۲ . ۱. مثلث متساوی‌الاضلاع، ارتفاع



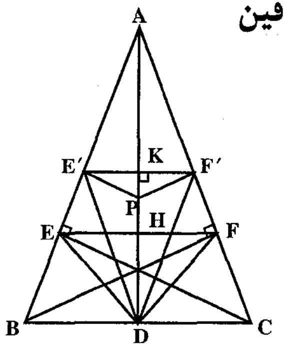
۱۱۸. فرض می‌کنیم $AM = x$ باشد. اگر ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع را a بنامیم، $AH = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است. از آن‌جا داریم:

$$\frac{S_{AB'C'}}{S_{ABC}} = \frac{۱}{۲} = \left(\frac{AM}{AH}\right)^{۲} \Rightarrow \frac{۱}{۲} = \frac{x^{۲}}{\left(\frac{a\sqrt{۳}}{۲}\right)^{۲}} = \frac{x^{۲}}{۳\frac{a^{۲}}{۴}}$$

$$\Rightarrow x^{۲} = \frac{۳a^{۲}}{۸} \Rightarrow x^{۲} = \frac{۶a^{۲}}{۱۶} \Rightarrow x = \frac{a\sqrt{۶}}{۴}$$

پس نقطهٔ M باید به فاصلهٔ $\frac{a\sqrt{۶}}{۴}$ از رأس A روی ارتفاع AH اختیار شود.

۲ . ۲ . ۳. مثلث متساوی‌الساقین

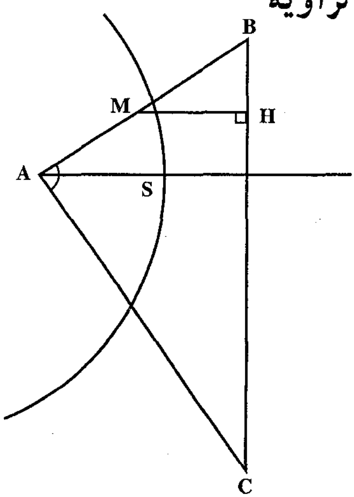


۲ . ۲ . ۳ .۱. مثلث متساوی‌الساقین، ارتفاع

۱۱۹. مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ را که زاویهٔ رأسش حاده است، درنظر می‌گیریم. ارتفاعهای مثلث را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آنها را H می نامیم. این نقطه جواب مسأله است؛ یعنی نقطه‌ای است که مثلث پودر آن کمترین محیط را دارد. زیرا اگر P را نقطه‌ای واقع بر ارتفاع AD اختیار کنیم و مثلث پودر آن را $DE'F'$ بنامیم، محیط این مثلث مساوی $۲(E'K + E'D)$ است، و این محیط وقتی می‌نیمم است که $EK + ED$ می‌نیمم باشد. اما ثابت می‌شود این مقدار وقتی می‌نیمم است که نقطهٔ E پای ارتفاع رأس C باشد که در این‌صورت نقطهٔ P بر نقطهٔ H مرکز ارتفاعی مثلث منطبق خواهد بود.

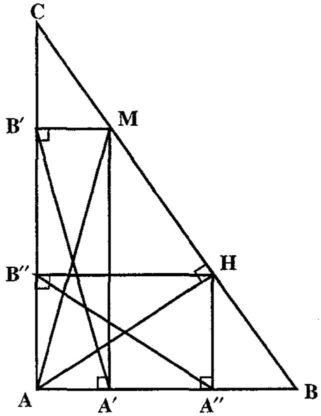
تبصره. اگر زاویهٔ A از مثلث متساوی‌الساقین ABC قائمه یا منفرجه باشد، همان رأس A جواب مسأله است و محیط می‌نیمم مثلث پودر مساوی دو برابر ارتفاع وارد از رأس A بر BC است.

۲ . ۲ . ۴. مثلث قائم‌الزاویه



۲ . ۲ . ۴ . ۱ . تعیین نقطه روی ضلع

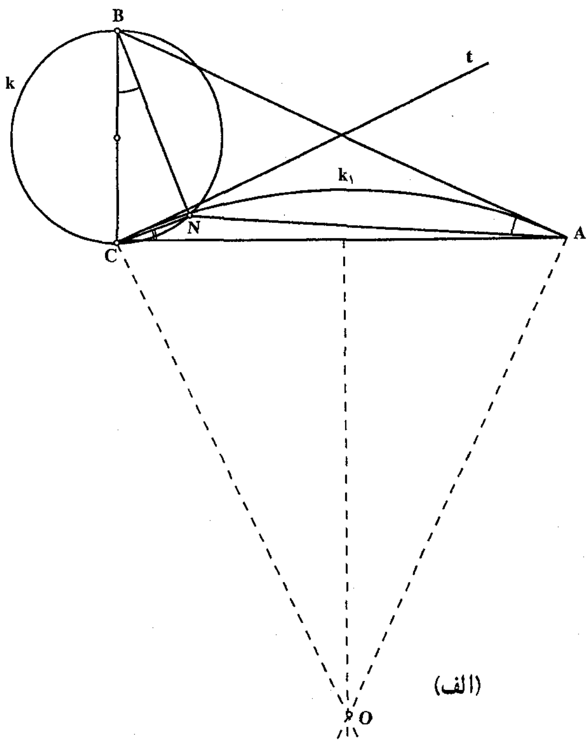
۱۲۰. مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ را درنظر می‌گیریم. مکان هندسی نقطه‌ای که به یک فاصله از نقطهٔ A و وتر BC باشد، یک سهمی است به کانون A و خط هادی BC. این سهمی را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد آن با ضلع AB(یا AC) جواب مسأله است.



۲. ۲. ۴. ۲. تعیین نقطه روی وتر

۱۲۱. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) را درنظر می‌گیریم و تصویر نقطهٔ دلخواه M از وتر BC، روی ضلعهای AB و AC را به‌ترتیب ′A و ′B می‌نامیم. از ′A به ′B وصل می‌کنیم. با توجه به این که چهارضلعی ′MA′AB مستطیل است، داریم $A'B' = AM$. بنابراین ′A′B هنگامی کمترین طول ممکن را دارد که AM کمترین طول ممکن را داشته باشد؛ امّا کمترین طول پاره‌خط AM هنگامی است که نقطهٔ M بر H پای ارتفاع وارد از رأس A بر وتر BC، منطبق باشد، پس کمترین طول پاره‌خط ′A′B مساوی ارتفاع AH است.

۲. ۲. ۴. ۳. تعیین نقطه در درون مثلث



(الف)

۱۲۳. ۱. راه حل اول. زاویه‌های مثلث ABC را α، β و γ می‌نامیم که در آن، $\gamma = 90^\circ$ (شکل الف). اگر N نقطه‌ای در داخل مثلث ABC باشد و داشته باشیم:

$$N\hat{B}C = N\hat{C}A = N\hat{A}B$$

می‌توانیم بنویسیم :

$$B\hat{N}C = 180^\circ - (B\hat{C}N + N\hat{B}C) = 180^\circ - (B\hat{C}N + N\hat{C}A) = 180^\circ - \gamma$$

و به همین ترتیب :

$$A\hat{N}B = 180^\circ - \beta \text{ و } A\hat{N}C = 180^\circ - \alpha$$

۲. جست و جوی نقطهٔ N. دایرهٔ به قطر BC را k می‌نامیم. از A عمودی بر AB اخراج می‌کنیم ؛ از این عمود، نیمخطی را درنظر می‌گیریم که با نقطهٔ C در یک طرف AB باشند. این نیمخط، با ضلع CA، زاویه‌ای برابر $90^\circ - \alpha$ می‌سازد. از نقطهٔ C، نیمخط راستی رسم می‌کنیم که با ضلع CA، زاویه‌ای برابر $90^\circ - \alpha$ بسازد و نیمخط راست عمود بر AB را در O قطع کند. به مرکز O و به شعاع OC کمانی رسم می‌کنیم که وتر آن AC باشد ؛ این کمان را k_1 می‌نامیم. نقطهٔ برخورد دایرهٔ k با کمان k_1 ، نقطهٔ N است.

۳. اثبات. چون داریم : $B\hat{N}C = 180^\circ - \gamma = 90^\circ$ ، بنابراین نقطهٔ N بر محیط دایرهٔ k قرار دارد. درضمن، برای هر نقطهٔ P که بر کمان k_1 واقع باشد، داریم : $A\hat{P}C = 180^\circ - \alpha$ (یادداشت پایان حل را ببینید).

تنها این می‌ماند که ثابت کنیم، دو دایرهٔ k و k_1 ، در نقطه‌ای واقع در درون مثلث، یکدیگر را قطع می‌کنند. دو دایرهٔ k و k_1 از نقطهٔ C گذشته‌اند، ولی این دو دایره نمی‌توانند در نقطهٔ C برهم مماس باشند و حتماً نقطهٔ برخورد دیگری هم دارند،زیرا به‌روشنی دیده می‌شود که CA بر دایرهٔ k مماس است، درحالی که وتری از دایرهٔ k_1 را تشکیل می‌دهد. بنابراین، برای دو دایرهٔ k و k_1 ،به‌جز C، نقطهٔ برخورد دیگری مثل N وجود دارد. چون دایرهٔ k، همراه با نقطهٔ B، در یک طرف AC قرار دارند، بنابراین، نقطهٔ N، هم باید در همان طرف AC واقع باشد. و این، به معنای آن است که N روی کمان k_1 است.

اکنون، اگر بتوانیم ثابت کنیم،تمامی کمان k_1 در درون مثلث ABC قرار دارد، درواقع ثابت کرده‌ایم که نقطهٔ N، در درون مثلث ABC است. AB در نقطهٔ A، بر شعاع OA از دایرهٔ k_1 عمود است، یعنی AB برکمان k_1 در نقطهٔ A مماس است. بنابراین، اگر مماس t را از نقطهٔ C بر دایرهٔ k_1 رسم کنیم، زاویهٔ بین مماس t با ضلع AC، برابر با زاویهٔ مماس AB با ضلع AC، یعنی برابر α می‌شود. ولی α از 90° کوچکتر است و این، به معنای آن است که تمامی کمان k_1 ، در درون مثلث ABC قرار دارد. زاویه‌های NBC و

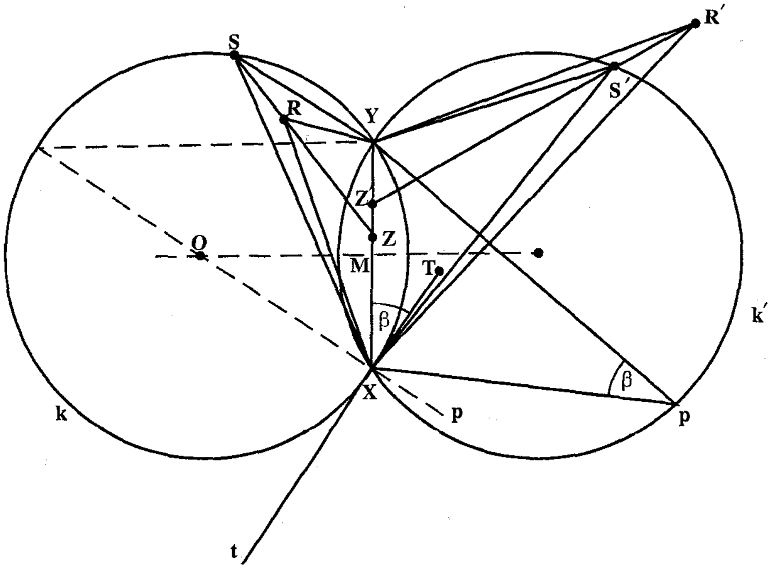
NCA، روبه‌رو به کمان CN از دایرهٔ k، و زاویه‌های NCA و NAB رو به‌رو به کمان $\widehat{NA}$ از دایرهٔ k_1 هستند و بنابراین :

$$N\hat{B}C = N\hat{C}A = N\hat{A}B$$

یادداشت. مطلوب است مکان هندسی نقطهٔ P، وقتی، از آن‌جا، پاره‌خط راست مفروض XY به زاویهٔ معلوم دیده می‌شود.

۱. β را زاویه‌ای مفروض می‌گیریم ($0^\circ < \beta < 180^\circ$) و فرض می‌کنیم، P نقطه‌ای باشد که برای آن، داشته باشیم: $X\hat{P}Y = \beta$. اگر از سه نقطهٔ X ، P و Y دایره‌ای بگذرانیم (دایرهٔ محیطی مثلث XPY)، همهٔ نقطه‌های واقع بر کمان $\widehat{XPY}$ (که آن را، کمان k' می‌نامیم)، به مکان هندسی مطلوب تعلق دارند. تنها دو نقطهٔ انتهائی این کمان، یعنی X و Y ، جزو کمان نیستند، زیرا برای این نقطه‌ها، نمی‌توان مثلثی مثل XPY رامشخص کرد. اگر نقطهٔ دیگری، مثل Q، روی کمان $\widehat{XPY}$ انتخاب کنیم، روشن است که دو زاویهٔ محاطی XPY و XQY با هم برابر می‌شوند.

واضح است که نقطه‌های واقع بر کمان k، قرینهٔ k' نسبت به پاره‌خط XY، نیز متعلق به مکان مطلوب‌اند (شکل ب).



(ب)

اکنون، ثابت می‌کنیم که مکان هندسی مطلوب، منحصر به دو کمان k' و k است. نقطه‌های واقع بر خود پاره‌خط XY به مکان مطلوب تعلق ندارند، بنابراین، با توجه به تقارن، کافی است تنها نقطه‌هایی را مورد تحقیق قرار دهیم که در یک طرف خط راست XY واقع باشند. نقطه‌ای مانند R را در درون دایرهٔ شامل کمان k درنظر می‌گیریم (شکل الف). نقطهٔ Z را روی پاره‌خط XY انتخاب و از Z به R وصل می‌کنیم تا مکان k را در نقطهٔ S قطع کند. زاویه‌های XRZ و ZRY، بترتیب، زاویه‌های خارجی برای مثلثهای XRS و YRS هستند. بنابراین، این دو زاویه، از زاویه‌های داخلی نظیر به رأس S، بزرگترند، درضمن، این دو زاویه، روی هم،زاویهٔ XRY را می‌سازند، در نتیجه :

$$X\hat{R}Y = X\hat{R}Z + Z\hat{R}Y > X\hat{S}Z + Z\hat{S}Y = X\hat{S}Y = \beta$$

یعنی، R متعلق به مکان هندسی مطلوب نیست. به همین ترتیب،اگر مثل R' را در خارج دایره درنظر بگیریم، خط راست $R'Z'$، دایرهٔ k' را در نقطهٔ S' قطع می‌کند و بنابراین :

$$X\hat{R}'Y = X\hat{R}'Z + Z'\hat{R}'Y < X\hat{S}'Z' + Z'\hat{S}'Y = X\hat{S}'Y = \beta$$

یعنی R'، متعلق به مکان نیست.

به این ترتیب، روشن شد که مکان هندسی مطلوب، شامل دو کمان است که نسبت به پاره‌خط XY قرینهٔ یکدیگرند و دو انتهای هر دو کمان بر X و Y واقعند ؛ در ضمن،خود نقطه‌های X و Y متعلق به مکان نیستند. درحالتی که β برابر با ۹۰درجه باشد، مکان هندسی مطلوب،دایره‌ای است به قطر XY.

۲. رسم این مکان دشوار نیست. مثلاً ، می‌توان از تقارن نسبت به خط راست XY، عمود منصف XY و این نکته استفاده کرد که مماس بر دایرهٔ k در نقطهٔ X ، زاویه‌ای به اندازهٔ β با XY می‌سازد. به این ترتیب، نیمخط راستی مانند t به مبدأ X، به نحوی رسم می‌کنیم که داشته باشیم : $Y\hat{X}T = \beta$ (T ، نقطه‌ای از خط راست t است) ؛ سپس خط راست P، عمود بر t در نقطهٔ X، و عمودمنصف پاره‌خط XY را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ O قطع کنند. دایرهٔ به مرکز O و به شعاع OX، کمان k و قرینهٔ آن نسبت به XY، کمان k' رابه ما می‌دهد.

۳. در پایان، کوشش می‌کنیم، طول شعاع OX را پیدا کنیم. اگر وسط پاره‌خط XY را

M بنامیم، طول OX را می‌توانیم از مثلث قائم‌الزاویهٔ MOX به‌دست آوریم :

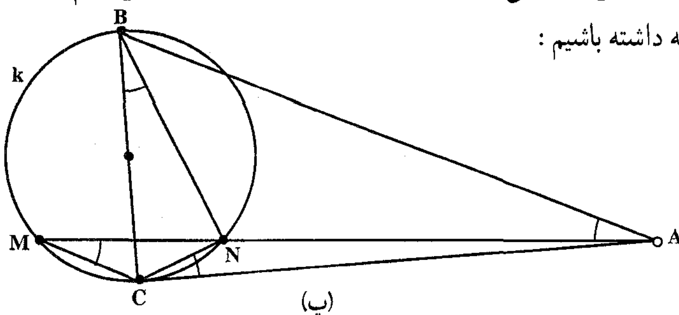
$$\frac{XM}{OX} = \frac{XY}{۲OX} = \sin(M\hat{O}X);$$

و از آن‌جا : $OX = \frac{XY}{۲\sin(MOX)}$. زاویهٔ مرکزی متقابل به k، برای حالت $\beta > ۹۰^\circ$، برابر است با ۲β، و در حالت $\beta < ۹۰^\circ$، برابر $۳۶۰^\circ - ۲\beta$. بنابراین، در هرحال

$$\sin(M\hat{O}X) = \sin(\frac{۱}{۲}X\hat{O}Y) = \sin\beta$$

و در نتیجه : $OX = \frac{XY}{۲\sin\beta}$.

راه حل دوم. دوباره توجه می‌کنیم که نقطهٔ N، بر دایرهٔ به‌قطر BC قرار دارد. برای تعیین جای دقیق N، کافی است امتداد خط راست AN را مشخص کنیم، با توجه به این شرط که داشته باشیم :



(پ)

$$N\hat{B}C = N\hat{A}B \qquad (۱)$$

(شکل پ را ببینید.)

هر خط راستی که ازنقطهٔ A در درون زاویهٔ BAC از مثلث ABC رسم شود، دایرهٔ k را در دو نقطهٔ N و M قطع می‌کند. زاویه‌های NBC و AMC برابرند، زیرا زاویه‌هایی محاطی و روبه‌رو به کمان $\overset{\frown}{CN}$ هستند. از این‌رو، با توجه به (۱)، به‌دست می‌آید :

$$A\hat{M}C = N\hat{A}B = M\hat{A}B$$

و این، به معنای آن است که AB با MC موازی است. بنابراین، N را می‌توان به این‌ترتیب پیدا کرد :

خط راستی رسم می‌کنیم که از C بگذرد و با AB موازی باشد. این خط راست، دایرهٔ k را در نقطهٔ دیگری غیر از C، قطع می‌کند. این نقطه را M می‌نامیم. خط راست MA،

دایرهٔ k را در نقطهٔ موردنظر N قطع خواهد کرد. با این رسم، M در خارج مثلث ABC و N در درون آن قرار می‌گیرد و بنابراین، N همان نقطهٔ موردنظر است.

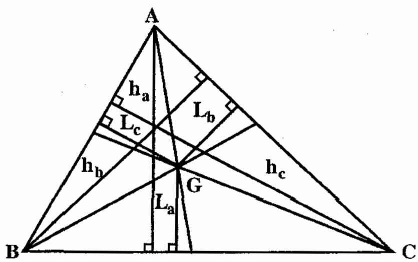
یادداشت. نقطه‌های بروکارد (Brocard). در یک مثلث دلخواه ABC هم می‌توان، با روشی مشابه، نقطه‌های $N_۱$ و $N_۲$ را طوری پیدا کرد (در درون مثلث)، که داشته باشیم:

$$N_۱\hat{B}C = N_۱\hat{C}A = N_۱\hat{A}B \text{ و } N_۲\hat{C}B = N_۲\hat{A}C = N_۲\hat{B}A$$

$N_۱$ و $N_۲$ را، نقطه‌های بروکارد در مثلث ABC گویند.

۲ . ۲ . ۵. مثلث با زاویه‌های حاده یا منفرجه

۲ . ۲ . ۵ . ۱. مثلث با زاویه‌های حاده



۱۲۴. گزینهٔ (الف) درست است. لم زیر را بدون اثبات بیان می‌کنیم: هرگاه نقطهٔ M را در داخل مثلث ABC از ضلعهای AB، AC و BC به فاصله‌های l_c، l_b و l_a باشد و ارتفاعهای نظیر ضلعها نیز h_c، h_b و h_a باشند، داریم:

$$\frac{l_a}{h_a}+\frac{l_b}{h_b}+\frac{l_c}{h_c}=۱$$

اثبات لم را به خواننده واگذار می‌کنیم. برای اثبات بنویسید:

$h_a=\frac{۲S}{a}$ ، $h_b=\frac{۲S}{b}$ و $h_c=\frac{۲S}{c}$ و ... اکنون فرض می‌کنیم برای نقطهٔ متغیر M، $Z=l_a.l_b.l_c$ ، هدف ماکزیمم کردن Z می‌باشد. می‌توان نوشت:

$$Z=l_a.l_b.l_c=\left(\frac{l_a}{h_a}\cdot\frac{l_b}{h_b}\cdot\frac{l_c}{h_c}\right)\times h_a h_b h_c$$

چون h_a ، h_b و h_c ثابتند، پس کافی است عبارت داخل پرانتز ماکزیمم باشد. اما این عبارت ازحاصلضرب سه عبارت به‌دست آمده است که مجموع آنها مقدار ثابت ۱ است. پس با توجه به این قضیه که اگر مجموع چند متغیر ثابت باشد، حاصلضرب وقتی ماکزیمم است که این عوامل باهم مساوی باشند، می‌توان نوشت:

$$\frac{l_a}{h_a}=\frac{l_b}{h_b}=\frac{l_c}{h_c}=\frac{۱}{۳}$$

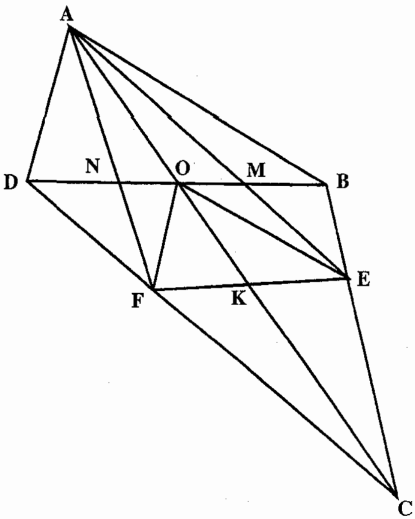
و این خاصیت تنها درمورد مرکز ثقل مثلث برقرار است. با توجه به این‌که میانه‌ها همدیگر را در نقطه‌ای قطع می‌کنند که این نقطه آنها را به نسبت ۱:۲ تقسیم می‌کند، و با نگاه به شکل، مسأله روشن‌تر می‌گردد.

$$\frac{l_a}{h_a}=\frac{l_b}{h_b}=\frac{l_c}{h_c}=\frac{۱}{۳}$$

۲ . ۳. تعیین نقطه با معلوم بودن: چند ضلعی، چند ضلعی و داده‌های دیگر

۲ . ۳ . ۱. چهارضلعی

۲ . ۳ . ۱ . ۱. چهارضلعی درحالت کلی



۱۲۵. از نقطهٔ O خطهایی به موازات AD و AB رسم می‌کنیم تا DC و BC را بترتیب در نقطه‌های E و F قطع کنند. چهارضلعیهای ADFO و ABEO ذوزنقه خواهند بود. پس مثلثهای AON و DNF با هم و مثلثهای AOM و BEM هم با هم معادل خواهند بود. همچنین خواهیم داشت:

$$OF\|AD\Rightarrow\frac{AO}{OC}=\frac{DF}{FC}$$

$$\Rightarrow\frac{DF}{FC}=\frac{BE}{EC}\Rightarrow FE\|BI$$

$$OE\|AB\Rightarrow\frac{AO}{OC}=\frac{BE}{EC}$$

و طبق قضیهٔ خطهای همرس:

$$\frac{KE}{KF}=\frac{OB}{OD}\Rightarrow KE=KF$$

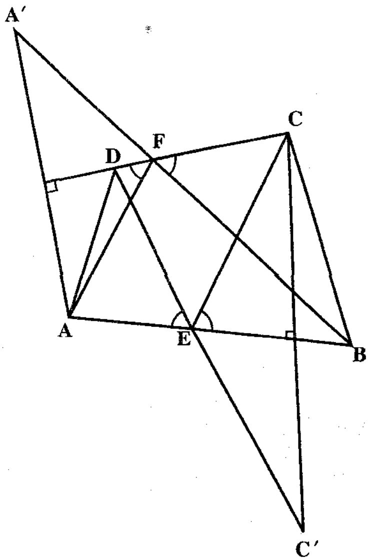
و همچنین :

$$\frac{ON}{OM}=\frac{FK}{KE}\Rightarrow ON=OM\Rightarrow DN=MB\Rightarrow S_{NOA}=S_{MOA}$$

پس چهار مثلث DNF و ANO، AMO و BEM معادل یکدیگرند.

$$\Rightarrow S_{BEM}=S_{DNF}=\frac{۱}{۲}S_{ANM}$$

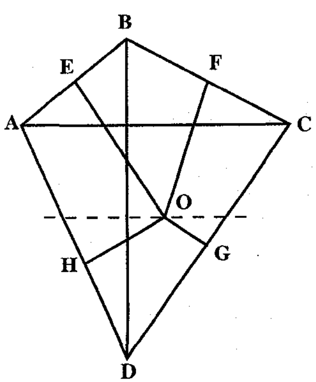
بدیهی است که نقطه‌های E و F منحصربه فردند ؛ زیرا اگر F به سمت D نزدیک شود، مساحت مثلث DNF از مساحت مثلث ANO کمتر خواهد شد.



۱۲۶. برای این‌که از نقطه‌ای روی AB، ضلعهای AD و BC تحت یک زاویه دیده شوند، قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به AB را به‌دست می‌آوریم و C′ می‌نامیم. از C′ به D وصل می‌کنیم تا AB را در نقطهٔ E قطع کند. از E به C وصل می‌کنیم. دو زاویهٔ AED و CEB مساوی‌اند، یعنی E یک نقطهٔ جواب مسأله است. به همین ترتیب قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به ضلع CD را A′ می‌نامیم. از A′ به B وصل می‌کنیم تا CD را در F قطع کند. نقطهٔ F جواب دیگر مسأله است. زیرا داریم :

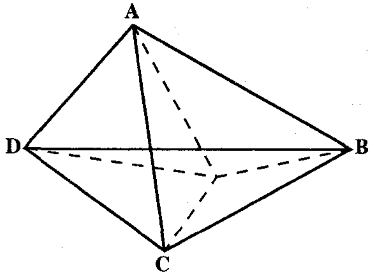
$$D\hat{F}A=C\hat{F}B$$

به همین روش می‌توان نقطه‌هایی روی AD و BC پیدا کرد که از آن نقطه‌ها ضلعهای AB و CD تحت یک زاویه دیده شوند.



۱۲۷. ثابت کنید، خطی که از وسط قطر BD، موازی قطر AC رسم شود (شکل)، عبارت است از مکان هندسی نقطهٔ O، که برای آن، مساحت هریک از چهارضلعیهای HOGD و EOFB برابر است با یک چهارم مساحت چهارضلعی اصلی.

۱۲۸. نقطهٔ برخورد قطرهای آن.



۱۲۹. پاسخ صحیح گزینهٔ (د) می‌باشد. محل برخورد قطرهای چهارضلعی، نقطه‌ای است که مجموع فاصله‌های آن از چهار رأس حداقل مقدار ممکن باشد.

برهان. چهارضلعی ABCD داده شده است. فرض کنید H محل برخورد قطرهای آن باشد و M' هر نقطهٔ دلخواه درون یا بیرونِ چهارضلعی باشد.

$$\Delta AM'C: M'A + M'C > AC \Rightarrow M'A + M'C > AM + MC$$

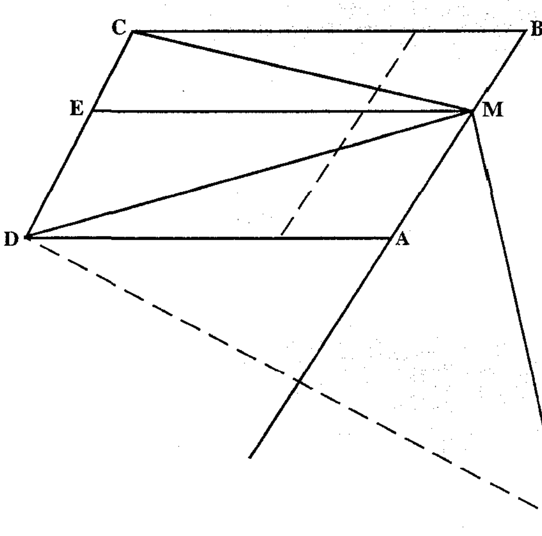
$$\Delta BM'D: M'B + M'D > AB \Rightarrow M'B + M'D > BM + MD$$

$$\Rightarrow M'A + M'B + M'C + M'D > MA + MB + MC + MD$$

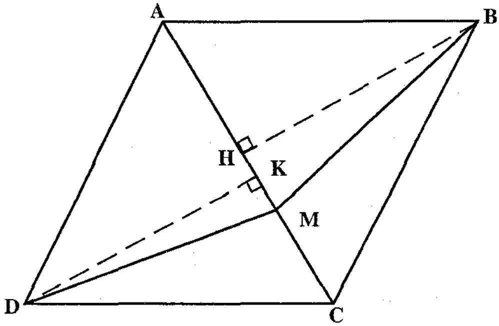
بنابراین مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ دلخواه از چهار رأس چهارضلعی، کمتر از مجموع فاصله‌های نقطهٔ محل برخورد قطرها از چهار رأس چهارضلعی است.

۲. ۳. ۱. ۲. چهارضلعیهای ویژه

۲. ۳. ۱. ۲. ۱. متوازی‌الاضلاع



۱۳۰. اگر از M خطی به موازات AD رسم کنیم تا DC را در F قطع کند، ME نیمساز زاویهٔ DMC است و اگر D' قرینهٔ D نسبت به خط AB باشد، زاویهٔ $D'MC$ دو برابر زاویهٔ ABC است.



۱۳۲. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم:

$$S_{ABM} = S_{ADM} = S_{BCDM}$$

از B و D دو عمود بر قطر AC فرود می‌آوریم. ADK و BMC درحالت وتر و یک زاویه برابرند. نتیجه این‌که ABM و ADM معادل هستند و چون ارتفاع و قاعدهٔ دو مثلث BMC و DMC متساوی هستند و چون ارتفاعها برابرند پس باید قاعدهٔ AM دو برابر قاعدهٔ MC باشد. بنابراین قطر AC را به سه قسمت تقسیم می‌کنیم. قسمت اول از طرف C نقطهٔ M است.

۱۳۳. نقطه‌های K و M را می‌توان به دلخواه چنان انتخاب کرد که داشته باشیم:

$$AK = DM$$

۲. ۳. ۱. ۲. ۲. مستطیل

۱۳۴. داریم:

$$S_{AMN} = \frac{۱}{۳} S_{ABCD} \text{ و } S_{ABD} = \frac{۱}{۲} S_{ABCD}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABD}} = \frac{\frac{۱}{۳}}{\frac{۱}{۲}} = \frac{۲}{۳} \text{ و } \Delta AMN \sim \Delta ABD$$

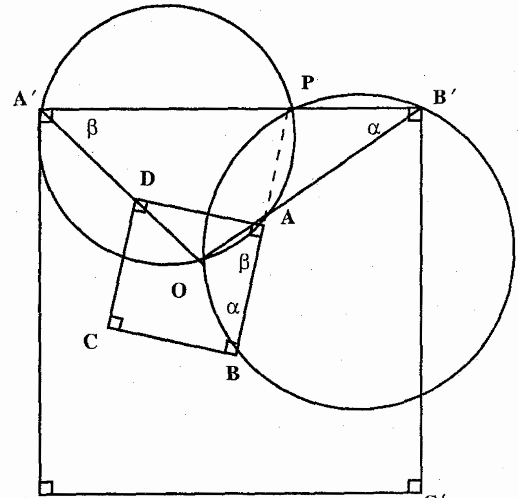
$$\Rightarrow \frac{AM^۲}{AB^۲} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow \frac{AM}{AB} = \sqrt{\frac{۲}{۳}} = \frac{\sqrt{۶}}{۳}$$

پس نقطهٔ M را روی AB چنان اختیار می‌کنیم که $\frac{AM}{AB} = \frac{\sqrt{۶}}{۳}$ باشد. سپس از M خط MN را موازی BD رسم می‌کنیم.

۲.۳.۱.۲.۳. مربع

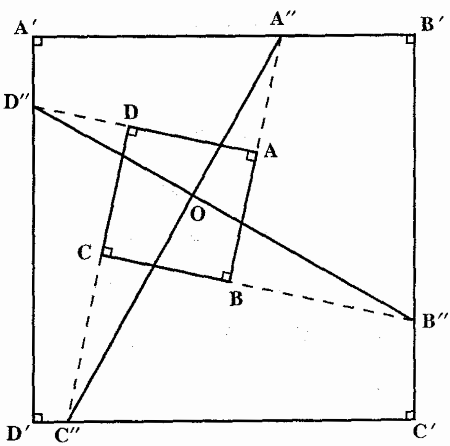
۱۳۵. مسأله را با استفاده از این قضیه حل می‌کنیم که:

نگاشت منقبض مربع بسته، یک نقطهٔ ثابت منحصربه‌فرد دارد. [این قضیه، حالت خاصی از قضیهٔ نقطهٔ ثابت بروئر (Brouwer) است، ولی می‌توان آن را به‌طور مستقیم هم، ثابت کرد.]



(الف)

در مسألهٔ ما، می‌توان از دنبالهٔ مربعهای جهت‌دار مشابهی استفاده کرد که مرتباً کوچکتر می‌شوند و در درون مجموعهٔ مربعهای قبلی قرار دارند. به این ترتیب، به مجموعه‌ای از ناحیه‌های تودرتو می‌رسیم که قطر آنها به سمت صفر میل می‌کند. نقطهٔ حدی یا نقطهٔ اشتراک این مجموعهٔ ناحیه‌های تودرتو همان نقطهٔ ثابت منحصربه‌فرد است.



(ب)

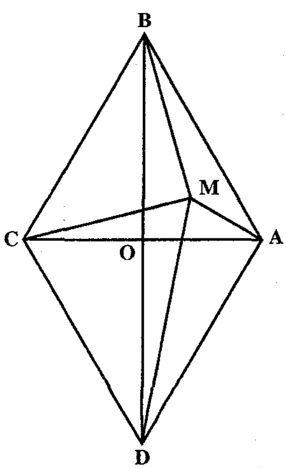
در این‌جا، دو روش برای پیدا کردن نقطهٔ ثابت می‌آوریم. در روش اول از دایره‌ها، و در روش دوم، تنها از خط‌کش استفاده شده است.

نقطهٔ برخورد AB و $A'B'$ را P می‌نامیم (شکل الف). دو دایره رسم می‌کنیم که یکی از نقطه‌های A'، P و A و دیگری از نقطه‌های B'، P و B گذشته باشند. این دو دایره، یکدیگر را در نقطهٔ مطلوب O $(O \neq P)$ قطع می‌کنند.

دو زاویه‌ای که در شکل (الف) با α نشان داده‌ایم، با هم برابرند (زاویه‌های محاطی روبه‌رو به کمان PO). همچنین، دو زاویه‌ای هم که با β نشان داده‌ایم، باهم برابرند (هریک از آنها مکمل زاویهٔ PAO است). از این‌جا دو مثلث OAB و $OA'B'$ با هم متشابه می‌شوند ؛ بنابراین، دوران دور نقطهٔ O به اندازهٔ زاویهٔ AOA'، مربع ABCD را به‌صورتی درمی‌آورد که ضلعهایی موازی با ضلعهای مربع $A'B'C'D'$ داشته باشد و با بزرگ‌کردن به نسبت $\frac{A'B'}{AB}$، بر مربع بزرگتر منطبق شود.

برای پیدا کردن نقطهٔ O، به کمک خط‌کش، نقطه‌های برخورد AB و $A'B'$، BC و $B'C'$، CD و $C'D'$، DA و $D'A'$ را به‌دست می‌آوریم و آنها را، بترتیب A''، B''، C'' و D'' می‌نامیم. نقطهٔ ثابت O، محل برخورد $A''C''$ و $B''D''$ خواهد بود. در واقع، شکل شامل نقطهٔ O و دو خط راست AB و CD، با شکل شامل O، و دو خط راست $A'B'$ و $C'D'$ متشابه است. بنابراین انبساط از نقطهٔ O، که خط راست AB را به CD برساند، خط راست $A'B'$ را به خط راست $C'D'$ و همچنین، نقطهٔ A'' را به نقطهٔ C'' می‌رساند. در نتیجه O، با A'' و C'' و همچنین، با B'' و D''، هم‌راستا است.

۲. ۳. ۱. ۲. ۴. لوزی



۱۳۶. نقطهٔ برخورد قطرهای لوزی را O می‌نامیم. نقطهٔ M را در صفحهٔ لوزی اختیار کرده، از M به A، B، C، D و O وصل می‌کنیم. می‌خواهیم $MA^2+MB^2+MC^2+MD^2$ کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. در مثلثهای AMC و BMD داریم :

$$MA^2+MC^2=2MO^2+\frac{AC^2}{2} \qquad (1)$$

$$MB^2+MD^2=2MO^2+\frac{BD^2}{2} \qquad (2)$$

از جمع رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود :

$$MA^2+MB^2+MC^2+MD^2=4MO^2+\frac{AC^2}{2}+\frac{BD^2}{2} \qquad (3)$$

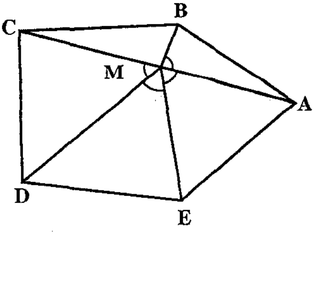
چون AC و BD، قطرهای لوزی، ثابت می‌باشند، پس طرف دوم رابطهٔ (۳) وقتی کمترین مقدار ممکن را داراست که $MO = ۰$. یعنی نقطهٔ M بر نقطهٔ O، محل برخورد قطرهای لوزی منطبق باشد. بنابراین نقطه‌ای که مجموع مربعهای فاصله‌اش از چهار رأس لوزی کمترین مقدار است، محل برخورد قطرهای آن است.

۲. ۳. ۱. ۲. ۵. ذوزنقه

۱۳۷. محل برخورد دو ساق AB و CD از ذوزنقه را E می‌نامیم. نقطهٔ موردنظر یکی از دو رأس قاعدهٔ بالا (BC) است، که به E نزدیکتر است.
برای اثبات، از این مطلب استفاده کنید که : مکان هندسی نقطه‌هایی از داخل زاویهٔ A که مجموع فاصله‌های آنها از دو ضلع زاویه، مقداری ثابت باشد، عبارت است از پاره‌خطی عمود بر نیمساز زاویه. در حالتی که ذوزنقه متساوی‌الساقین باشد، مسأله دو جواب دارد و هرکدام از رأسهای قاعدهٔ بالا را می‌توان به‌عنوان جواب، درنظر گرفت.

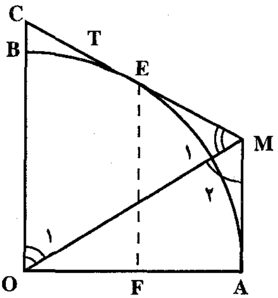
۲. ۳. ۲. پنج‌ضلعی

۱۳۸. پنج‌ضلعی غیرمنتظم ABCDE را که در آن $AB = BC = CD = DE = EA$ است، درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم بزرگترین قطر آن AC باشد، اگر نقطهٔ M را روی این قطر به‌عنوان جواب مسأله اختیار کنیم باید زاویه‌های $A\hat{M}B$ و $B\hat{M}C$ از ۹۰° بیشتر نباشند که چون مجموع این دو زاویه ۱۸۰° است، پس نقطهٔ M پای ارتفاع رأس B از مثلث ABC است. بدیهی است زاویه‌های $A\hat{M}E$ ، $E\hat{M}D$ و $D\hat{M}C$ نیز از ۹۰° کوچکترند.



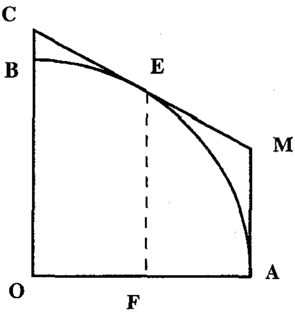
۲ . ۴ . تعیین نقطه با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر

۲ . ۴ . ۱ . ربع دایره



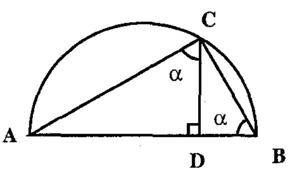
۱۳۹. M را به O وصل می‌کنیم. MO نیمساز زاویهٔ $T\hat{M}A$ می‌باشد. $\hat{M}_۱ = \hat{M}_۲$. اما چون OB موازی MA می‌باشد پس $M_۲ = O_۱$ و در نتیجه $M_۱ = O_۱$. بنابراین $OC = MC$ و در رابطه قرار می‌دهیم، بجای MC، مساویش، OC را، $MA + OC = 1$ چون می‌خواهیم مجموع دو قاعدهٔ ذوزنقه AMCO مساوی 1 باشد، پس طول میانهٔ EF باید $\frac{1}{۲}$ باشد.

راه‌حل مسأله چنین است :



ربع دایرهٔ AOB را رسم می‌کنیم. عمودمنصف OA را به طول $\frac{1}{۲}$ رسم می‌نماییم تا نقطهٔ E به‌دست آید. از E مماسی بر دایره رسم می‌کنیم تا امتداد OB را در C و امتداد مماس در نقطهٔ A را در M قطع کند.

۲ . ۴ . ۲ . نیمدایره



۱۴۰. از چهارضلعی محاطی MAOD و مثلث قائم MPB، مقدار PB را حساب کنید و مساوی هم قرار دهید و نتیجه بگیرید $PB = R\sqrt{۲}$.

۱۴۱. با فرض $A\hat{B}C = \alpha$ در مثلثهای ABC و ADC داریم :

$$AC = ۲R\sin\alpha \quad و \quad CD = ۲R\sin\alpha\cos\alpha$$

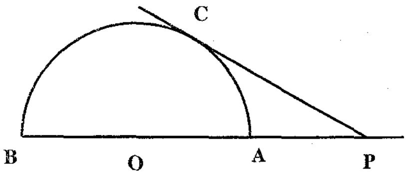
$$\Rightarrow AC.CD = ۴R^۲\sin^۲\alpha\cos\alpha$$

اگر $y = \sin^۲\alpha\cos\alpha$ فرض شود، حداکثر مقدار y، حداکثر مقدار AC.CD است. داریم :

$$y^۲ = \sin^۴\alpha\cos^۲\alpha = ۴\times\frac{\sin^۲\alpha}{۲}\cdot\frac{\sin^۲\alpha}{۲}(۱-\sin^۲\alpha)$$

چون مجموع عاملهای این ضرب ثابت است، پس حاصلضرب وقتی ماکزیمم است که داشته باشیم :
$$\frac{\sin^{۲}\alpha}{۲}=۱-\sin^{۲}\alpha$$
یا $\sin^{۲}\alpha=\frac{۲}{۳}$ و $AD=AC\sin\alpha=۲R\sin^{۲}\alpha=\frac{۴R}{۳}$. پس از تعیین نقطهٔ D، به سادگی نقطهٔ C روی محیط نیمدایره مشخص می‌شود.

۱۴۲.



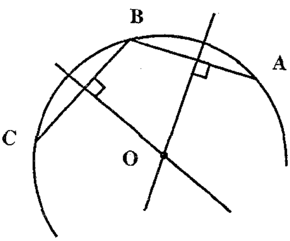
$$PC^{۲}=AP.BP$$
$$\Rightarrow (۲AP)^{۲}=AP.BP$$
$$\Rightarrow ۴AP^{۲}=AP.BP$$
$$\Rightarrow ۳AP=BP \text{ و } ۳AP=(AB+AP)\Rightarrow AP=\frac{۲R}{۳}$$

قطر را به اندازهٔ $\frac{۱}{۳}$ خود امتداد می‌دهیم، P به‌دست می‌آید.

۱۴۳. درصورتی ماکزیمم است که نقطهٔ B وسط نیمدایره باشد. زیرا در این‌صورت پنج‌ضلعی CDBEF نصف شش‌ضلعی منتظم محاط در دایره است.

۲. ۴. ۳. یک دایره

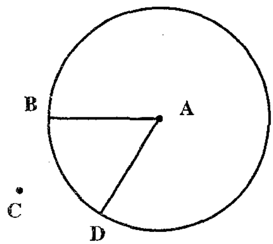
۲. ۴. ۳. ۱. تنها یک دایره



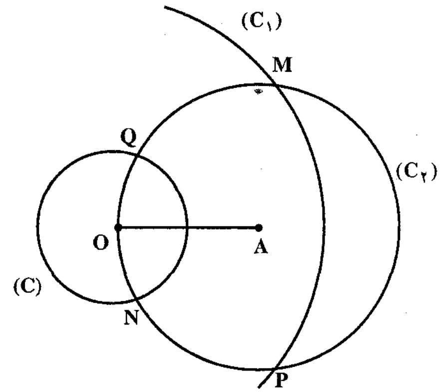
۱۴۴. دو وتر دلخواه را در قوس داده شده رسم می‌کنیم نقطهٔ برخورد عمودمنصفهای این دو وتر مرکز قوس داده شده است زیرا عمودمنصف هر وتری از یک دایره از مرکز آن دایره می‌گذرد.

۲. ۴. ۳. ۲. یک دایره، نقطه

۲. ۴. ۳. ۲. ۱. یک دایره، یک نقطه



۱۴۶. به مرکز A و شعاع معلوم l دایره‌ای رسم می‌کنیم. هرجا که دایرهٔ C را قطع کرد، نقطهٔ مفروض است. چون $AB=AD=l$.

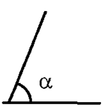


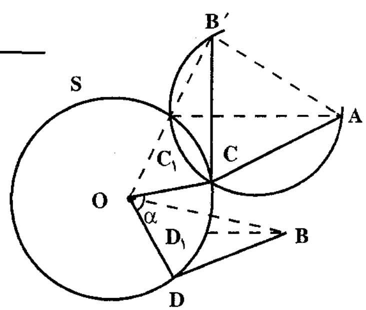
۱۴۷. اگر دایرهٔ جواب نسبت به دایرهٔ مفروض (C) مماس خارج شود، باید مرکزش روی (C_1) که به شعاع ۳ رسم و متحدالمرکز با C می باشد قرار گیرد، (شکل) از طرف دیگر، روی دایرهٔ (C_2) واقع شود که مرکزش A و شعاعش ۲ است. پس مرکز دایرهٔ خواسته شده در محل برخورد آنها، یعنی نقطه‌های P و M می‌باشند. و اگر دایرهٔ جواب نسبت به دایرهٔ مفروض (C) مماس داخل باشد، باید مرکزش روی دایرهٔ (C) قرار گیرد و ضمناً روی دایرهٔ (C_2) واقع شود. پس در محل برخورد آنها، یعنی نقطه‌های Q و N می‌باشد. و مسأله دارای چهار جواب است.

۱۴۸. به مرکز A و به شعاع ۶ سانتیمتر دایره‌ای رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دایره با دایرهٔ C(O,۴) جواب مسأله‌اند.

۲.۴.۳.۲.۲. یک دایره، دو نقطه

۲.۴.۳.۲.۲.۱. یک دایره، دو نقطه در صفحهٔ دایره





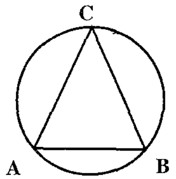
۱۴۹. فرض می‌کنیم کمان CD پیدا شده باشد (شکل). پاره‌خط BD را حول نقطهٔ O ، مرکز دایرهٔ S ، به زاویهٔ α دوران می‌دهیم. این پاره‌خط، به پاره‌خط جدید B′C بدل خواهد شد که با پاره‌خط AC زاویهٔ ACB′ = α می‌سازد. پس ترسیم زیر به‌دست می‌آید. نقطهٔ B را حول O به زاویهٔ α دوران می‌دهیم تا به وضع جدید B′ درآید. بر نقطه‌های A و B′ کمان درخور زاویهٔ α را رسم می‌کنیم (یعنی اگر C نقطه‌ای بر کمان مذکور باشد، آن‌گاه ACB′ = α). از برخورد این کمان با دایرهٔ S نقطهٔ C مشخص می‌شود.

مسأله می‌تواند تا چهار جواب داشته باشد (این کمان ممکن است دایره را در دو نقطه قطع کند، و نقطهٔ B می‌تواند حول نقطهٔ O در دو جهت دوران کند).

۲.۴.۳.۲.۲.۲. یک دایره، دو نقطه خارج دایره

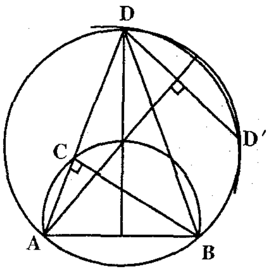
۱۵۲. اگر O وسط پاره‌خط AB و $MA^{2} + MB^{2} = l^{2}$ باشد، $MO = \frac{1}{2}\sqrt{2l^{2} - AB^{2}}$ است.

۱۵۳. مسأله را حل‌شده می‌گیریم. دو مثلث MCD و MAB نسبت به M مجانس یکدیگرند. پس باید دایره‌ای رسم کنیم که از دو نقطهٔ A و B گذشته، بر دایرهٔ معلوم O مماس باشد.



۲.۴.۳.۲.۲.۳. یک دایره، دو نقطه روی دایره

۱۵۴. (۱) و (۲). $AC = BC$.

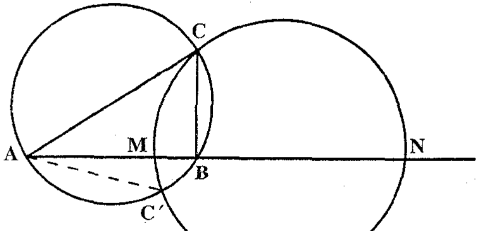


۱۵۵. اگر C نقطهٔ خواسته شده باشد، به قسمی که $CA + CB = l$ باشد، در امتداد AC پاره‌خط $CD = CB$ را اختیار می‌کنیم. مثلث CDB متساوی الساقین است و زاویهٔ D از آن، نصف زاویهٔ ACB است. از آن‌جا برای حل مسأله، کمان درخور زاویهٔ $\frac{1}{2}A\hat{C}B$ ، مقابل به پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز A و به شعاع l ، کمانی رسم می‌کنیم تا کمان درخور رسم شده را در D و D′ قطع کند. DA و CB را رسم می‌کنیم. نقطهٔ C مشخص می‌شود.

تبصره. ۱. نقطهٔ O مرکز کمان $\overset{\frown}{ADD'B}$ است. زیرا زاویهٔ محاطی D نصف زاویهٔ مرکزی AOB است.

۲. حداکثر مقدار l مساوی قطر AOL است که دو برابر AO ، ضلع مثلث متساوی‌الساقین محاط در دایره است.

۳. این مسأله به رسم مثلثی منجر می‌شود که از آن قاعدهٔ AB ، زاویهٔ روبه‌روی آن C ، و مجموع دو ضلع آن $AC + CB$ معلوم است.

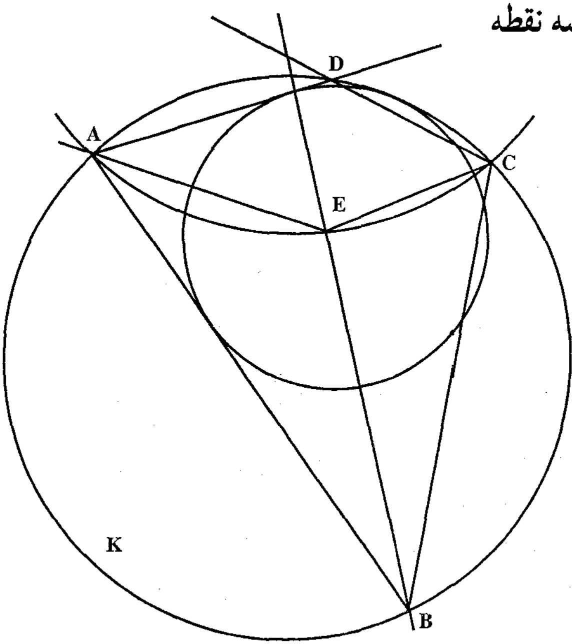


۱۵۷. از رابطهٔ $\frac{MA}{MB} = \frac{m}{n}$ ، نتیجه می‌شود که نقطهٔ M پاره‌خط AB را به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم کرده است.
اگر نقطهٔ N را چنان پیدا کنیم که $\frac{NA}{NB} = \frac{m}{n}$ باشد، در این‌صورت

$\frac{MA}{MB}=\frac{NA}{NB}=\frac{m}{n}$ و (ABMN) یک تقسیم توافقی است. بنابراین دایره به قطر MN بر دایرهٔ داده شده عمود است. این دایره را رسم می‌کنیم تا دایرهٔ داده شده را در دو نقطهٔ C و C′ قطع کند. این دو نقطه جواب مسأله‌اند، زیرا داریم:

$$\frac{CA}{CB}=\frac{C'A}{C'B}=\frac{m}{n}$$

۲.۴.۳.۲.۳. یک دایره، سه نقطه



۱۵۸. ابتدا E مرکز دایرهٔ محاط در چهارضلعی مطلوب ABCD را با ملاحظهٔ این که E بر نیمسازهای زاویه‌های A، B و C قرار دارد، و این که زاویه‌های متقابل (C,A) از یک چهارضلعی محاطی به مجموع °۱۸۰اند، مشخص می‌کنیم. نیمساز $\hat{B}$ را رسم می‌کنیم (شکل).

ملاحظه می‌کنیم که $A\hat{E}C$ مجموع زاویه‌های خارجی رأس E مثلثهای EAB و ECB است. در این صورت از آن‌جا که زاویهٔ خارجی مثلث برابر مجموع دو زاویهٔ داخلی مقابل آن درمثلث است، درمی‌یابیم که:

$$A\hat{E}C=E\hat{A}B+E\hat{C}B+A\hat{B}C=\frac{۱}{۲}(D\hat{A}B+D\hat{C}B)+A\hat{B}C=۹۰^\circ+A\hat{B}C$$

مجموعهٔ نقطه‌های P چنان که $C\hat{P}A=۹۰^\circ+A\hat{B}C$، و چنان که B خارج این زاویه باشد، کمانی از یک دایره، و رسم آن آسان است. تقاطع این کمان با نیمساز زاویهٔ $\hat{B}$ نقطهٔ E است. اکنون $\hat{A}=۲E\hat{A}B$ را رسم می‌کنیم. یکی از ضلعهای $\hat{A}$، AB است، دیگری دایرهٔ K را در نقطهٔ مطلوب D قطع می‌کند.

تبصره. گرچه از ما خواسته نشده که ثابت کنیم که نقطهٔ خواسته شدهٔ D ، به ازای هر سه نقطه دادهٔ شدهٔ A ، B و C واقع بر K موجود است، اما نمی‌توان راه حل را بدون توجه به این سؤال کامل دانست. در واقع، کاملاً آسان است که ثابت کنیم که ABCD سه نیمساز متقارب دارد، و زاویه‌های مقابلش مکملند (و این موضوع وجود دایره‌های محاطی و محیطی آن را تضمین می‌کند) به شرطی که نقطهٔ D ای که با ترسیممان معلوم شده، چنان باشد که ABCD یک چهارضلعی ساده (یعنی نامتقاطع با خود) باشد.

در هندسهٔ غیرتحلیلی، سؤالاتی از این دست که با موقع نسبی نقطه‌ها سروکار دارند، تا اندازه‌ای ناجورند. تنها در حدود یک قرن پیش بود که به‌طور کامل دانسته شد که اثباتهای اقلیدسی به فرضهای غیرصریحی، در رابطه با این مطلب که کدام نقطه‌ها بین کدام نقطه‌ها قرار دارند، وابسته‌اند. برای پرکردن این نوع رخنه‌های منطق اقلیدسی، بایستی آکسیومها و استدلالهای اضافی نیز معرفی می‌شدند. بررسی این مسأله از قبیل توضیح واضحها نیست؛ در این مورد اثباتهایی که طبق آنها تمام مثلثها متساوی‌الساقینند، و مطالب بیهوده دیگری که بر فرضهای ناصحیح در ارتباط با مواقع نسبی نقطه‌های معین، بنا شده‌اند موجودند، و درنظر اول به هیچ طریقی واضح نیست که خطا در کجا قرار دارد.

به هر تقدیر، استدلال زیر راه حلمان را در مورد مسألهٔ داده شده، تکمیل می‌کند. فرض می‌کنیم P نقطهٔ دلخواهی واقع بر کمان AC از دایرهٔ ABC باشد. چهارضلعی محدب ABCP دارای دایرهٔ محاطی است اگر و فقط اگر:

$$AB + PC = AP + BC \qquad (1)$$

باشد. [این مطلب از تساوی قطعه‌های مماس رسم شده از یک رأس بر دایرهٔ محاطی نتیجه می‌شود.] فرض می‌کنیم P در امتداد کمان $\widehat{AC}$ از A به C حرکت کند. وقتی P = A باشد، طرف چپ (۱) بنا به نامساوی مثلث از طرف راست آن بزرگتر می‌شود، و چون P = C نامساوی مثلث مقرر می‌کند که طرف چپ کوچکتر از طرف راست است. از آن جا که هردو طرف رابطهٔ (۱)، با P تغییر می‌کنند، موقعیت میانی‌ای وجود دارد که در آن تساوی برقرار است. همین موقع P است که رأس D از مسأله‌مان را مشخص می‌کند.

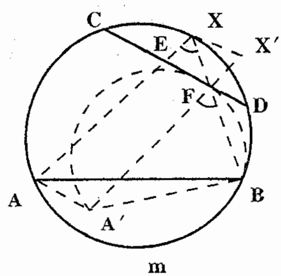
۱۵۹. چهار ضلعی AMPN محاطی و قطر دایرهٔ محیطی آن AP است و $M\hat{A}N$ مساوی با زاویهٔ ثابت $B\hat{P}C$ است. پس کمان درخور زاویهٔ $B\hat{P}C$ نظیر قطعه خط به‌طول معلوم l را رسم کرده، به مرکز A و به شعاعی مساوی با قطر دایره‌ای که کمان مزبور روی آن قرار دارد، دایره‌ای رسم می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع آن با دایرهٔ مفروض، نقطهٔ P است.

۲.۴.۳.۲.۴. یک دایره، چهار نقطه

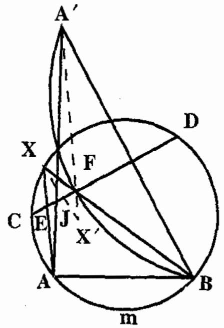
۱۶۰. اگر M نقطهٔ برخورد AB و PQ باشد و قاطع اختیاری $MA'B'$ را نسبت به دایرهٔ O رسم کنیم، رابطهٔ $MA.MB = MA'.MB'$ به سهولت ثابت شده، نشان می‌دهد که A'،A،B و B' روی یک دایره‌اند و به این طریق نقطهٔ M مشخص می‌شود. نقطهٔ N محل برخورد CD با PQ نیز به همین ترتیب به‌دست می‌آید، و خط MN دایرهٔ O را در P و Q قطع می‌کند.

۱۶۱. فرض کنید مسأله حل شده است. پاره‌خط AX را در راستای خط CD و به طول $EF = a$ انتقال می‌دهیم و فرض می‌کنیم $A'X'$ وضع جدید آن باشد (شکل). واضح است که $A'X'$ از نقطهٔ F می‌گذرد. بعلاوه چون $A'\hat{F}B = A\hat{X}B = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AmB}$، پس می‌توانیم زاویهٔ $A'FB$ را معلوم بگیریم. بنابراین ترسیم زیر را داریم:
نقطهٔ A را در راستای وتر CD و به طول a انتقال داده، موقعیت جدیدش را A' می‌نامیم.
با استفاده از پاره خط $A'B$ به عنوان یک وتر، کمان درخور زاویهٔ AXB را بر روی آن رسم می‌کنیم (یعنی، اگر Y نقطه‌ای روی این کمان باشد، آن‌گاه $A\hat{Y}B = A\hat{X}B = \frac{۱}{۲}\overset{\frown}{AmB}$).

اگر این کمان وتر CD را در دو نقطه قطع کند، یکی از آن دو نقطه می‌تواند نقطهٔ F



اختیار شود، و X می‌تواند از برخورد دایرهٔ اولی با خط BF به دست آید. در این حالت مسأله دو جواب دارد.
اگر این کمان بر CD مماس باشد، نقطهٔ F باید نقطهٔ تماس گرفته شود و مسأله در این حالت فقط یک جواب دارد. اگر کمان اصلاً CD را قطع نکند، مسأله جواب ندارد.
اگر فرض کنیم که CD امتدادهای وترهای AX و BX را قطع کند (نقطه‌های E و F در خارج دایره بر امتداد وتر CD واقع باشند)، مسأله می‌تواند تا چهار جواب داشته باشد (این امر ناشی از یک واقعیت است که A می‌تواند در هر دو جهت انتقال یابد).

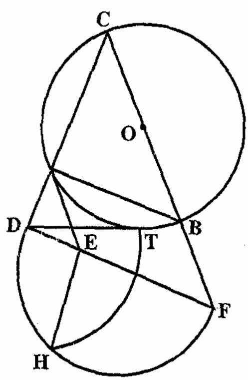


۱۶۲. فرض کنید مسأله حل شده است (شکل)، و $A'X'$ پاره‌خط حاصل از یک نیمدور AX حول نقطهٔ J باشد. چون AX از E می‌گذرد، $A'X'$ از F خواهد گذشت. چون $X'A' \| AX$، می‌بینیم که $X'\hat{F}B = A\hat{X}B = \frac{1}{2}\overset{\frown}{AmB}$ بنابراین، $A'\hat{F}B = 180° - X'\hat{F}B$ و در نتیجه می‌توانیم $A'\hat{F}B = 180° - \frac{1}{2}\overset{\frown}{AmB}$ را معلوم بگیریم.

پس ترسیم زیر به‌دست می‌آید: گیریم A' نقطهٔ حاصل از یک نیمدور A حول J باشد. بر پاره‌خط $A'B$ کمان درخور زاویهٔ $180° - \frac{1}{2}\overset{\frown}{AmB}$ رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این کمان با وتر CD، نقطهٔ F و نقطهٔ برخورد دیگر خط BF با دایره، نقطهٔ مطلوب X است. مسأله یک جواب یکتا دارد؛ اما اگر فرض کنیم که CD امتدادهای وترهای AX و BX را قطع می‌کند، در این صورت مسأله ممکن است دو جواب داشته باشد.

۲.۴.۳.۳. یک دایره، پاره‌خط

۲.۴.۳.۳.۱. یک دایره، یک پاره‌خط



$DT^2 = DA.DC$

۱۶۳. فرض کنیم مسأله حل شده و AB جواب مسأله باشد، مماس نقطهٔ A را رسم کرده، آن را امتداد می‌دهیم تا DF را در E قطع کند. دو مثلث CDF و ADE با هم متشابه‌اند و زاویهٔ D در آنها مشترک است. زاویهٔ ظلی A برابر است با $\frac{AC}{2}$:

$$\hat{F} = \hat{B} = \frac{\overset{\frown}{AC}}{2}$$

پس $\hat{A} = \hat{F}$ است؛ $\frac{DE}{DC} = \frac{DA}{DF}$ و $DE = \frac{DC.DA}{DF}$

مماس DT به دایرهٔ (O) رسم می‌کنیم، داریم:

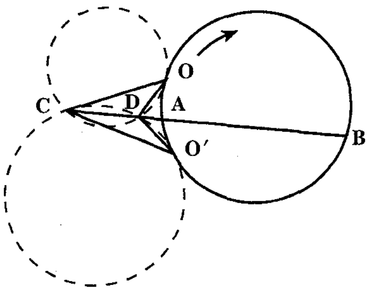
پس $DE = \frac{DT^2}{DF}$. بنابراین ED مقداری است معلوم و از آن‌جا، راه حل مسأله به دست می‌آید.

به قطر DF نیمدایره‌ای رسم می‌کنیم و مماس DT بر دایرهٔ (O) می‌کشیم و به مرکز D و به شعاع DT قوسی رسم می‌کنیم که نیمدایره را در H قطع کند. تصویر H روی DF نقطهٔ E است. زیرا :

$$DT^2 = DH^2 = DE.DF$$

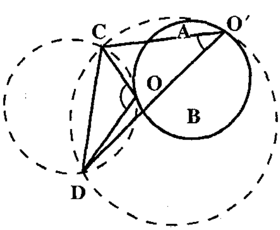
از E مماس EA را به دایرهٔ (O) رسم می‌کنیم. محل برخورد DA با دایره، نقطهٔ C است. مسأله دو جواب دارد.

۱۶۴. برای این که زاویهٔ CAD را با اندازهٔ معین α داشته باشیم، باید کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط CD را رسم کنیم. با تغییر شعاع دایره، اندازهٔ زاویه تغییر می‌کند. در حالتهایی که بتوانیم، بر C و D دایره‌هایی می‌گذرانیم که بر دایرهٔ داده شده در نقطه‌های O و O′ مماس باشند. مسأله حالتهای زیر را خواهد داشت :



(الف)

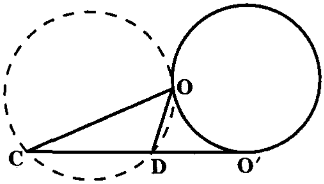
۱. پاره‌خط CD خارج دایره است و امتداد آن دایرهٔ داده شده را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند (شکل الف). در این حالت وقتی رأس زاویه در نقطهٔ A است، اندازهٔ زاویهٔ CAD برابر صفر است. هنگامی که رأس زاویه روی دایره از نقطهٔ A شروع به حرکت می‌کند، اندازهٔ زاویهٔ CAD شروع به زیاد شدن می‌کند و وقتی رأس A بر نقطهٔ O منطبق شود اندازهٔ زاویهٔ CAD ماکزیمم خواهد بود. با عبور از نقطهٔ O اندازهٔ زاویه CAD شروع به کم شدن می‌کند تا هنگامی که به نقطهٔ B برسد. وقتی رأس زاویه در نقطهٔ B باشد، اندازهٔ زاویه مساوی صفر می‌شود و با عبور از B بتدریج اندازهٔ زاویهٔ CAD زیاد می‌شود تا در O′ بار دیگر ماکزیمم دومی داشته باشد. با عبور از O′ به سمت نقطهٔ A زاویه کم می‌شود تا در نقطه A برابر صفر شود.



(ب)

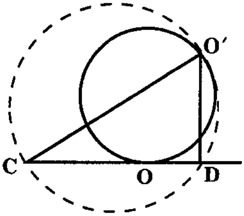
۲. اگر امتداد پاره‌خط CD دایره را قطع نکند، ماکزیمم مقدار زاویه وقتی است که نقطهٔ A بر نقطهٔ O منطبق شود و کمترین مقدار آن هنگامی است که رأس A بر O′ منطبق گردد (شکل ب).

۳. در صورتی که امتداد پاره‌خط CD بر دایرهٔ داده شده مماس باشد، نقطهٔ تماس زاویهٔ صفر را می‌دهد، سپس زاویه زیاد می‌شود تا در نقطه O ماکزیمم شود و با حرکت نقطه، زاویه کم می‌شود تا دوباره در نقطهٔ تماس برابر صفر گردد (شکل پ).



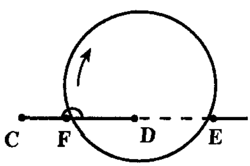
(پ)

۴. وقتی نقطهٔ تماس پاره‌خط CD با دایره بین دو نقطهٔ C و D باشد، اندازهٔ زاویه در O برابر ۲ قائمه است و در O′ اندازهٔ زاویه می‌نیمم است (شکل ت).



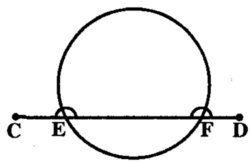
(ت)

۵. وقتی دایرهٔ داده شده پاره‌خط CD را قطع می‌کند (بین C و D) اندازهٔ زاویه وقتی رأس A روی نقطهٔ برخورد امتداد CD با زاویهٔ داده شده است برابر صفر است و با حرکت A از این نقطه اندازهٔ زاویه زیاد می‌شود، تا در نقطهٔ برخورد CD با دایره، اندازهٔ زاویه ۲ قائمه می شود و سپس بتدریج کم می‌شود تا به صفر برسد (شکل ث).



(ث)

۶. بالاخره هنگامی که دایرهٔ داده شده پاره‌خط CD را در دو نقطه بین C و D قطع می‌کند، نقطه‌های تقاطع، دو زاویهٔ $180°$ می‌دهند و در این حالت دو زاویه با اندازهٔ می‌نیمم وجود دارد (شکل ج).



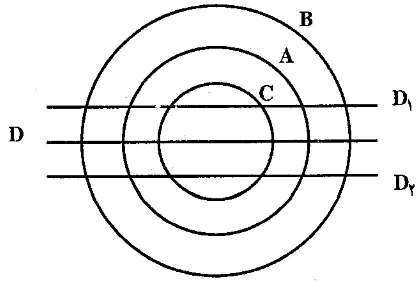
(ج)

۲.۴.۳.۴. یک دایره، خط

۲.۴.۳.۴.۱. یک دایره، یک خط

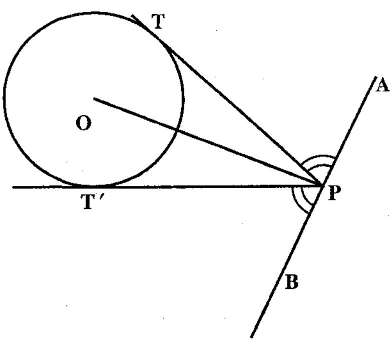
۲.۴.۳.۴.۱.۱. یک دایره، قطر

۱۶۵. اگر AB قطر دایرهٔ O ، و AC = AB مماس رسم شده بر دایره در نقطهٔ A باشد (شکل)، خط DC دایره را در D قطع می‌کند و مماس رسم شده بر دایره در نقطهٔ D ، امتداد AB را در E قطع می‌کند. از تساوی دو مثلث ODE و CAO نتیجه می‌شود ED = AC ، و چون AC = AB است، پس AB = ED می‌باشد.



۱۶۷. فرض کنیم A دایرهٔ به شعاع ۱۶ سانتیمتر باشد (شکل). ابتدا دو خط D_1 و D_2 را به فاصلهٔ ۴ سانتیمتر به موازات خط D رسم می‌کنیم. اگر دایرهٔ جواب، نسبت به دایرهٔ A مماس خارج باشد، باید مرکزش روی دایرهٔ B که به شعاع ۲۰ سانتیمتر و متحدالمرکز با A رسم شود قرار گیرد، و همچنین روی D_1 و D_2 نیز واقع شود. از برخورد D_1 و D_2 با دایرهٔ B چهار جواب به‌دست می‌آید. و اگر دایرهٔ جواب نسبت به دایرهٔ A مماس داخل باشد، باید مرکزش روی C که به شعاع ۱۲ سانتیمتر و متحدالمرکز با A رسم شود، قرار گیرد و همچنین روی D_1 و D_2 واقع شود که از برخورد D_1 و D_2 با دایرهٔ C ، چهار جواب دیگر به‌دست می‌آید، و بدین‌ترتیب مسأله دارای ۸ جواب است.

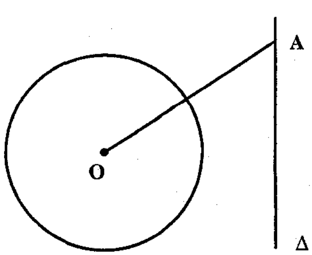
۲.۴.۳.۴.۱.۲. یک دایره، یک خط ناقطر



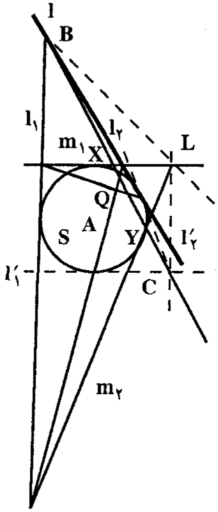
۱۶۸. مسأله را حل شده می‌گیریم. از نقطهٔ O مرکز دایره به نقطهٔ P وصل می‌کنیم. $O\hat{P}T = O\hat{P}T'$ است. پس با توجه به برابری $A\hat{P}T = B\hat{P}T'$ داریم:

$$O\hat{P}A = O\hat{P}B = ۹۰^\circ$$

در نتیجه OP عمود بر AB است پس برای حل مسأله، از نقطهٔ O مرکز دایره، عمود OP را بر AB فرود می‌آوریم. نقطهٔ P جواب مسأله است.

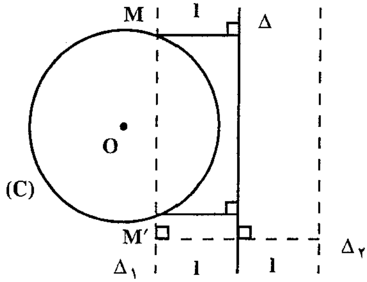


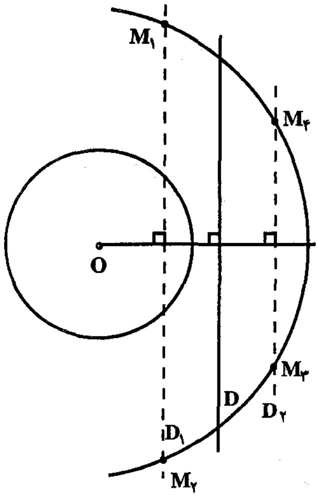
۱۶۹. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و A نقطهٔ خواسته شده باشد. اگر شعاع دایره R باشد، قوت نقطهٔ A نسبت به دایره $P = OA^2 - R^2$ است، و یا $OA = \sqrt{P + R^2}$. برای یافتن نقطهٔ A، دایرهٔ به مرکز O و به شعاع $\sqrt{P + R^2}$ را رسم می‌کنیم تا Δ را در A قطع کند.



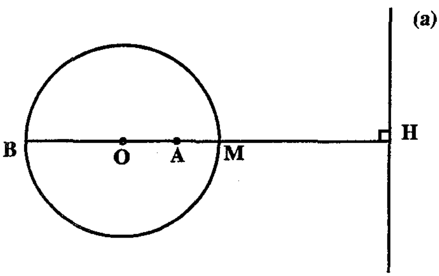
۱۷۰. در شکل، خط l_2 مماسی است که از B بر دایرهٔ S به مرکز A و شعاع a رسم و مماس شده است. بنابراین می‌توانیم به وسیلهٔ یک خط‌کش موازی از یک نقطه اختیاری B، دو مماس l_1 و l_2 را بدون رسم S، بر S رسم کنیم (شکل). طبیعی است که باید B خارج S باشد. حال فرض می‌کنیم B نقطه‌ای از l باشد، L قطب l نسبت به S و m_1 و m_2 مماسهای رسم شده از L بر S باشند. Q، نقطهٔ برخورد قطرهای چهارضلعی حاصل از خطهای l_1 و l_2، و m_1 و m_2، بر l واقع است. از این‌جا نتیجه می‌شود که BQ (یعنی l) قطبی L است نسبت به خطهای l_1 و l_2، و BL قطبی Q است نسبت به l_1 و l_2. پس BL قطبی هر نقطهٔ l است نسبت به l_1 و l_2، چون l داده شده است و l_1 و l_2 را می‌توان رسم کرد، خط BL را می‌توان به وسیلهٔ ستارهٔ تنها رسم نمود.
به روشی مشابه می‌توانیم خط CL را پیدا کنیم، که C نقطهٔ دیگری است از l در خارج S. پس L نقطهٔ برخورد BL و CL است. مماسهای m_1 و m_2 رسم شده از L بر S، که می‌توانند به‌وسیلهٔ یک خط‌کش موازی رسم شوند، l را در نقطه‌های مطلوب X و Y می‌برند.
نکته. اگر l دایرهٔ S را نبرد، آن گاه L در داخل S واقع است، و نمی‌توان مماسی از L بر S رسم کرد.

۱۷۱. دو خط Δ_1 و Δ_2 را موازی خط Δ در دوطرف آن و به فاصلهٔ l از آن رسم می‌کنیم (مکان هندسی نقطه‌ای که از خط Δ به فاصلهٔ l قرار دارد)، نقطه‌های برخورد این دو خط با دایرهٔ (C) جواب مسأله‌اند و به تعداد نقطه‌های برخورد، مسأله جواب دارد.



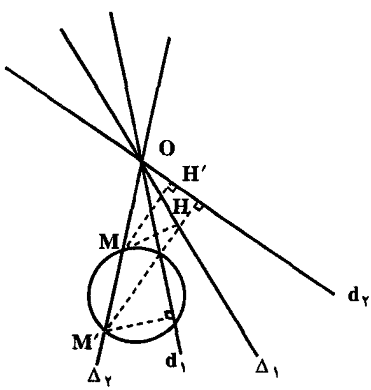


۱۷۲. مکان هندسی نقطه‌ای که از خط D به فاصلهٔ ۲/۵ قرار دارد، دو خط موازی D به فاصلهٔ ۲/۵ از آن و در دوطرف آن است. این دو خط را رسم می‌کنیم و D_1 و D_2 می‌نامیم. مکان هندسی نقطه‌ای که از دایره به فاصلهٔ ۵ است، دایره به مرکز O و به شعاع $R' = ۵ + ۳ = ۸$ است. این دایره را نیز رسم می‌کنیم. نقطه یا نقطه‌های برخورد D_1 و D_2 با دایرهٔ (O,۸) جواب مسأله است. مسأله ۴ جواب دارد.



۱۷۳. از مرکز دایره به خط مفروض عمود می‌کنیم و مزدوج توافقی پای عمود نسبت به دوسر قطر ایجاد شده به وسیلهٔ خط عمود را به‌دست می‌آوریم. این نقطه قطبی خط داده شده است.

۲.۴.۳.۴.۲. یک دایره، دو خط



۱۷۴. مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو خط d_1 و d_2 برابر عدد ثابت k است، دو خط راست Δ_1 و Δ_2 است که بر نقطهٔ O ، نقطهٔ برخورد d_1 و d_2 می‌گذرند. این دو خط را رسم می‌کنیم. نقطه یا نقطه‌های برخورد این دو خط با دایرهٔ (C) جواب مسأله‌اند. مسأله حداکثر ۴ جواب دارد.

۱۷۵. از نقطهٔ O عمودهای OH و OH′ را بر Δ و d فرود می‌آوریم. در روی عمود OH طول HA را مساوی دو برابر OH′ جدا می‌نماییم. از A خطی به موازات Δ و از O خطی به موازات d رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در I قطع کنند. MI را رسم کرده تا دایره

را در نقطهٔ D قطع نماید. نقطهٔ D جواب مسأله است. زیرا :

$$\frac{DK}{IC}=\frac{MD}{MI}=\frac{DP}{IB}\Rightarrow\frac{DP}{DK}=\frac{IB}{IC} \quad (۱)$$

و چون $IB=OH'$

و $IC=AH$

و $AH=۲OH'$

می‌باشد، پس رابطهٔ (۱) به‌صورت :

$$\frac{DP}{DK}=\frac{OH'}{AH}$$

یا

$$\frac{DP}{DK}=\frac{۱}{۲}$$

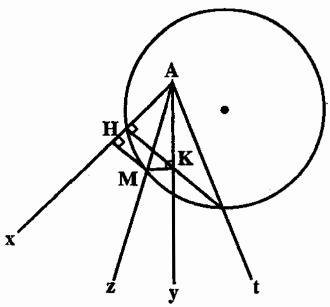
یا

$$DK=۲DP$$

برحسب آن که IM دایره را در دو نقطه و یا بر دایره مماس و یا آن را قطع نکند، مسأله دارای دو جواب و یا یک جواب و یا جواب نخواهد داشت.

۲.۴.۳.۵. یک دایره، زاویه

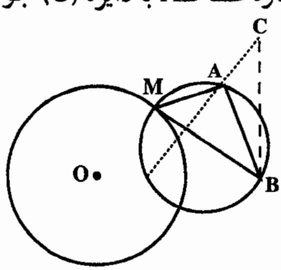
۲.۴.۳.۵.۱. یک دایره، یک زاویه



۱۷۷. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو ضلع یک زاویه برابر k است، دو نیمخط است که بر رأس آن زاویه می‌گذرند و دستگاه حاصل توافقی است. این دو خط (At , Az) را رسم می‌کنیم. نقطه یا نقطه‌های برخورد این دو خط با دایره جواب مسأله‌اند.

۲.۴.۳.۶. یک دایره، نقطه، پاره‌خط

۱۷۸. نقطهٔ برخورد کمان درخور زاویهٔ ACB رو به رو به پاره‌خط AB با دایرهٔ (O) جواب مسأله است (در صورت وجود).



۷.۳.۴.۲. یک دایره، نقطه، نیمخط

۱۷۹. عمود AH را بر Ox فرود می‌آوریم. به مرکز A و به شعاع AH دایره‌ای رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دایره با دایرهٔ (O) جواب مسأله است. به تعداد نقطه‌های برخورد، مسأله جواب دارد.

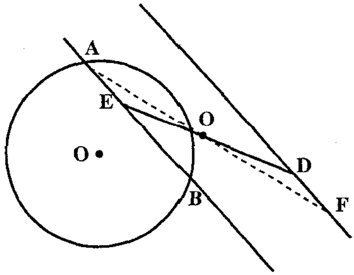
۸.۳.۴.۲. یک دایره، خط، نقطه

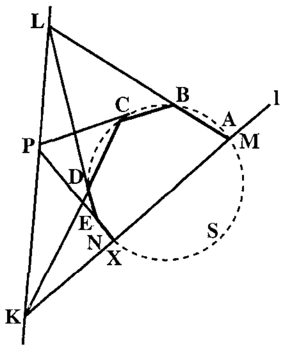
۱.۸.۳.۴.۲. یک دایره، یک قطر، یک نقطه

۱۸۰. فرض می‌کنیم مسأله حل شده است. چون خط راست CY بر خط راست AX عمود است، بنابراین $CY \| BX$. K را نقطهٔ برخورد پاره‌خطهای راست AB و XY می‌گیریم. روشن است که دو مثلث KBX و CKY برابرند؛ درنتیجه $CK = KB$.
برای رسم، کافی است از وسط پاره‌خط راست CB، عمودی بر خط راست AB رسم کنیم تا محیط دایره را در دو نقطهٔ X و Y قطع کند.

۲.۸.۳.۴.۲. یک دایره، یک خط ناقطر، یک نقطه

۱۸۱. نقطه‌ای مانند D روی Δ اختیار می‌کنیم، از D به O وصل کرده، به اندازهٔ خودش تا E ادامه می‌دهیم، از E خطی به موازات Δ رسم می‌کنیم، هرکجا که دایرهٔ C را قطع کرد، نقطه‌های A و B می‌نامیم. این دو نقطه جواب مسأله‌اند؛ چون اگر از A به O وصل کنیم، و ادامه دهیم تا Δ را در F قطع کند، $OA = OF$. چون $A\hat{E}O = O\hat{D}F$، زاویهٔ A مقابل به رأس و $OE = OD$. پس دو مثلث ODF و OAE با یکدیگر برابرند و $OA = OF$.





۱۸۲. شش ضلعی ABCDEX محاط در دایرهٔ S را، که A و X نقطه‌های تلاقی خط l با S، و B، C، D و E نقطه‌های اختیاری از کمان MN (شکل) هستند، در نظر می‌گیریم. به موجب قضیهٔ پاسکال، K، L و P، نقطه‌های تلاقی خطهای AX (یعنی، خط l) و CD، AB و DE، BC و EX، همخطند. بنابراین با استفاده از ستارهٔ تنها، می‌توانیم اول P را (به‌صورت نقطهٔ برخورد BC و KL)، و سپس X را (به‌صورت نقطهٔ برخورد PE و l) پیدا کنیم.

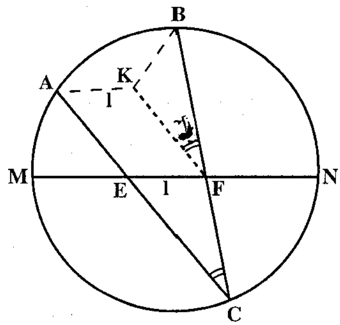
۱۸۳. از این ویژگی استفاده کنید که اگر مربع فاصلهٔ بین دو نقطه، با مجموع قوتهای این دو نقطه نسبت به دایرهٔ مفروض مساوی باشد، آن‌گاه آن دو نقطه نسبت به دایره، مزدوج یکدیگرند.

۳.۸.۳.۴.۲. یک دایره، قطر، دو نقطه

۱۸۴. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. از A پاره‌خطی به موازات قطر MN و به طول l رسم می‌کنیم تا نقطهٔ K به‌دست آید. K را به A وصل می‌کنیم.

چهارضلعی AKFE متوازی‌الاضلاع است. پس AE‖FK است. بنابراین:

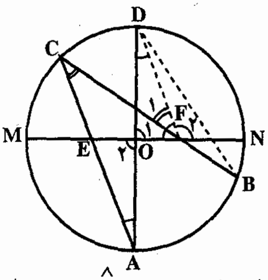
$\hat{F}_1 = \hat{C} =$ مقدار ثابت



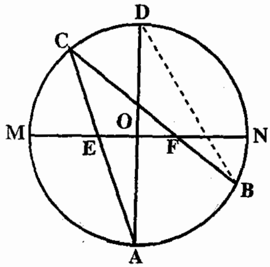
پس نقطهٔ F روی کمان درخور زاویهٔ $\hat{F}_1$ نظیر به پاره‌خط BK می‌باشد، بنابراین راه‌حل مسأله چنین است:

از نقطهٔ A پاره‌خطی به موازات قطر MN به طول l رسم می‌کنیم. تا نقطهٔ K به‌دست آید. از K به B وصل کرده، کمان درخور زاویهٔ $\hat{F}_1$ نظیر به BK را رسم می‌کنیم تا قطر دایره را در نقطهٔ F قطع کند. B را به F وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا دایره را در C قطع کند. سپس A را به C وصل می‌کنیم تا قطر را در E قطع کند. $EF = l$ است.

اگر کمان درخور زاویهٔ F نظیر به BK قطر را در دو نقطه قطع کرد، مسأله دو جواب دارد.



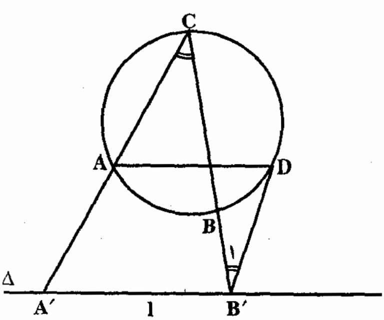
۱۸۵. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. A را به O وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند. از F به D وصل می‌کنیم، $\Delta AOE = \Delta OFD$. زیرا $\hat{O}_1 = \hat{O}_2$ و $AO = DO = R$ و $OF = OE$ است. درنتیجه $\hat{A} = \hat{O}$ ؛ یعنی $AC \| FD$. پس $\hat{F}_2 = \hat{C}$ است. بنابراین $\hat{F}_2$ مقداری است ثابت. درنتیجه مکمل آن هم ثابت است یعنی $\hat{F}_3$ نیز مقداری است ثابت. بنابراین مکان هندسی نقطهٔ F روی کمان درخور زاویهٔ F_3 نظیر به پاره‌خط BD می‌باشد.



A را به O وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند. B را به D وصل کرده، و کمان درخور زاویهٔ F_3 نظیر به BD را رسم می‌کنیم تا قطر MN را در F قطع کند.

B را به F وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا دایره را در C قطع کند. از A به C وصل می‌کنیم تا قطر را در E قطع کند. داریم $OE = OF$. نقطهٔ C نقطهٔ مفروض مسأله است.

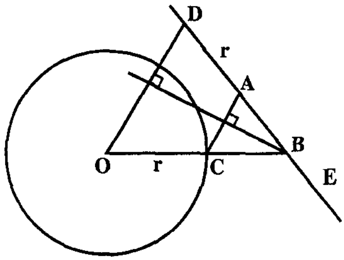
۴.۸.۳.۴.۲. یک دایره، یک خط ناقطر، دو نقطه



۱۸۶. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. از A خطی به موازات Δ رسم می‌کنیم و روی آن $AD = l$ را جدا می‌کنیم. چهارضلعی $ADB'A'$ متوازی‌الاضلاع است و داریم $A'C \| B'D$. بنابراین:

$$\hat{B}'_1 = \hat{C} = \text{مقدار ثابت}$$

پس برای حل مسأله، کمان درخور زاویهٔ B'_1 نظیر به پاره‌خط BD را رسم می‌کنیم تا خط Δ را در نقطهٔ B' قطع کند. سپس B را به B' وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ C قطع نماید. آن‌گاه C را به A وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا Δ را در A' قطع کند. پس $A'B' = l$ است.



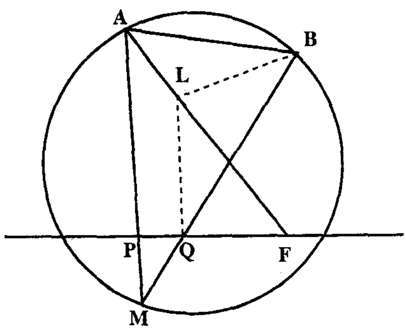
۱۸۷. نقطهٔ B را جواب مسأله، یعنی نقطه‌ای می‌گیریم که $BA = BC$ باشد. مثلث ABC متساوی‌الساقین است. از نقطهٔ O خط OD را موازی AC رسم می‌کنیم. مثلث BOD نیز متساوی‌الساقین است، زیــرا $DA = OC = r$ و $BA = BC$ اســت.

درنتیجه $BA + AD = BC + CO$ یا $BD = OB$ است. درنتیجه عمودمنصف OD از نقطهٔ B می‌گذرد. پس برای حل مسأله به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:

روی خط داده شده از نقطهٔ A پاره‌خط $AD = r$ را جدا می‌کنیم. از D به O وصل می‌کنیم و عمودمنصف پاره‌خط OD را رسم می‌کنیم. این عمودمنصف خط داده شده را در نقطهٔ B قطع می‌کند. از B به O وصل می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ C قطع کند. $BA = BC$ است. پس نقطهٔ B جواب مسأله است.

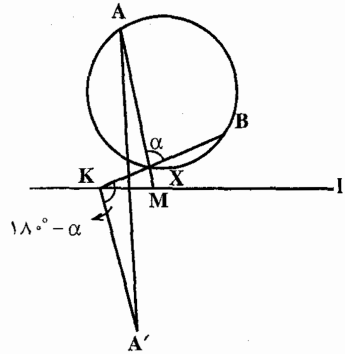
تبصره. در حالت کلّی مسأله دو جواب دارد، زیرا می‌توانیم پاره‌خط $AE = r$ را در جهت مخالف AD روی خط داده شده جدا کنیم و از E به O وصل کنیم و... .

۲.۴.۳.۸.۵. یک دایره، یک خط، ۳ نقطه



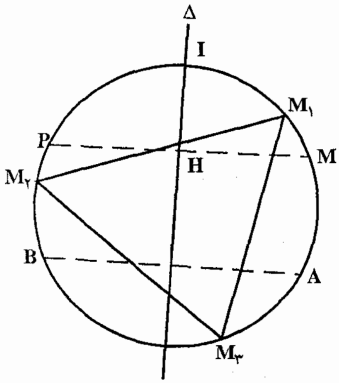
۱۸۸. اگر خطهای AM و BM که دو نقطهٔ A و B از دایره را به نقطهٔ مطلوب M وصل می‌کنند با خط FPQ در نقطه‌های P و Q متقاطع باشند (شکل) و F نقطهٔ ثابت روی خط باشد و QL را موازی MA از نقطهٔ Qرسم کنیم تا با خط FA در L متقاطع باشد و زاویهٔ $L\hat{Q}B$ مساوی زاویهٔ $A\hat{M}B$ خواهد شد. درنتیجه چون کمان $\widehat{AM}$ معلوم است، این دو زاویه معلوم خواهد شد. از طرف دیگر خواهیم داشت: $FL:FA = FQ:FP$

نسبت دوم معلوم است درنتیجه نقطهٔ L معلوم می‌شود. بنابراین پاره‌خط LB از نقطهٔ Q به زاویهٔ معلوم دیده می‌شود (کمان درخور زاویه را روی LB به‌دست می‌آوریم) محل برخورد این کمان با خط معلوم FPQ نقطهٔ Q می‌باشد و BQ دایره را در نقطهٔ Mکه جواب مسأله است قطع می‌کند. دلیل و بحث به عهدهٔ خواننده واگذار می‌شود.



۱۸۹. فرض کنید که نقطهٔ A' متقارن نقطهٔ A نسبت به نقطهٔ M باشد (شکل). آن‌گاه زاویهٔ $BK'A$ معلوم بوده (K نقطهٔ برخورد خطهای BX و I است) و مقدار آن برابر $180° - \alpha$ خواهد بود. این مسأله دارای دو جواب است.

۹.۳.۴.۲. یک دایره، یک خط، یک وتر



۱۹۰. A را روی دایرهٔ مثلثاتی مبدأ کمانها، تصویر M را روی Δ، نقطه H و قرینهٔ M را نسبت به Δ، نقطهٔ P می‌نامیم. داریم $2MH = MP$. شرط لازم و کافی برای وجود M آن است که $MA = MP$. یعنی:

$$\widehat{AM} = \pm\widehat{MP} \pmod{2\pi}$$

حالت اول: $\widehat{AM} = -\widehat{MP} \pmod{2\pi}$

این رابطه را می‌توان چنین نوشت:

$$\pmod{2\pi}\ \widehat{AM} + \widehat{MP} = 0$$

این رابطه را می‌توان چنین نوشت:

$\widehat{AM} + \widehat{MP} = 0 \pmod{\pi}$ و یا $\widehat{AP} = 0 \pmod{2\pi}$

این رابطه نشان می‌دهد که نقطهٔ P روی نقطهٔ A است و نقطهٔ M روی B است.

حالت‌دوم: $AM = MP \pmod{2\pi}$

محل برخورد Δ را با دایره I می‌نامیم. Δ هم عمودمنصف AB و هم عمودمنصف PM است، پس I وسط کمان $\widehat{MP}$ است.

از آن‌جا: $\widehat{AI} = \widehat{AM} + \widehat{AP} \pmod{2\pi}$

با فرض مقایسه می‌کنیم. داریم:

$$\widehat{AP} = \widehat{PM} + \widehat{AM} = 2\widehat{AM} \pmod{2\pi}$$

بنابراین: $2\widehat{AI} = 2\widehat{AM} + \widehat{AM} = 3\widehat{AM} \pmod{\pi}$

نتیجه می‌شود: $3\widehat{AM} = 2\widehat{AI} + 2K\pi$

و یا :
$$\widehat{AM}=\frac{۲\widehat{AI}}{۳}+\frac{۲K\pi}{۳}$$

از رابطهٔ اخیر برای M سه مقدار به‌دست می‌آید :
$$\widehat{AM}_۱=\frac{۲\widehat{AI}}{۳} \quad و \quad \widehat{AM}_۲=\frac{۲\widehat{AI}}{۳}+\frac{۲\pi}{۳} \quad و \quad \widehat{AM}_۳=\frac{۲\widehat{AI}}{۳}+\frac{۴\pi}{۳}$$

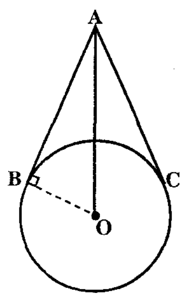
۲.۴.۳.۱۰. یک دایره، مستطیل

۱۹۱. قرینهٔ ضلعهای مستطیل ABCD نسبت به دایرهٔ (O) را رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این قرینه‌ها با دایره (درصورت وجود) را به M وصل می‌کنیم تا ضلعهای متناظر مستطیل را قطع کنند. نقطه‌های جواب مسأله به‌دست می‌آیند.

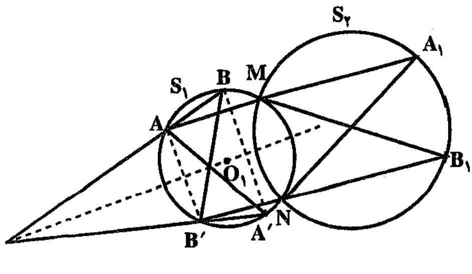
۲.۴.۴. دو دایره

۲.۴.۴.۱. تنها دو دایره

۲.۴.۴.۱.۱. دو دایره در حالت کلی

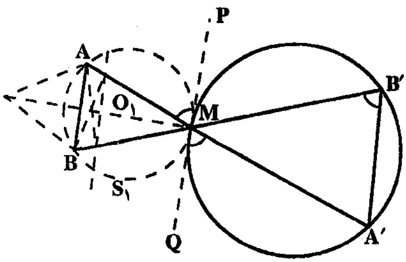


۱۹۲. اگر A نقطه‌ای باشد که از آن نقطهٔ دایرهٔ O به زاویهٔ معلوم α دیده می‌شود، یعنی $B\hat{A}C=\alpha$ باشد و از H به O وصل کنیم، $B\hat{A}O=\frac{\alpha}{۲}$ است. با وصل کردن O به B مثلث قائم‌الزاویه‌ای به وجود می‌آید که در آن یک ضلع OB و یک زاویهٔ حادهٔ BAO ثابتند. پس BAO مقداری ثابت است. یعنی A نقطه‌ای است که از آن مماسهای مساوی می‌توان بر یک دایرهٔ معلوم رسم کرد و مکان آن همان‌طور که می‌دانیم دایره‌ای است به مرکز O و شعاع OA]OA وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که یک ضلع و یک زاویهٔ حاده‌اش معلوم است].
همین‌طور برای دایرهٔ دیگر استدلال می‌کنیم و مکان نقطه‌هایی را که از آن دایرهٔ دوم به زاویهٔ معلوم B دیده می‌شود، به‌دست می‌آوریم، این دو مکان یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند که جواب مسأله است. اگر دو دایرهٔ مکان بر هم مماس باشند، یک جواب دارد و اگر یکدیگر را قطع نکنند، مسأله دارای جواب نیست.



(الف)

۱۹۳. الف) فرض می‌کنیم M و N نقطه‌های برخورد دایره‌های S_1 و S_2 باشند (شکل الف). دو نقطهٔ A و B از دایرهٔ S_1 از M بر S_2 تصویر می‌کنیم، سپس نقطه‌های حاصل، A_1 و B_1، را از N بر S_1 تصویر می‌کنیم و نقطه‌های A' و B' را بر S_1 به‌دست می‌آوریم. داریم $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{A'B'}$ (زیرا $A\hat{M}B = A'\hat{N}B'$ و این زاویه‌ها با زاویه‌های A_1MB_1 و A_1NB_1 محاط در کمان $\overset{\frown}{A_1B_1}$ از S_2، مساویند). از آن‌جا نتیجه می‌شود که $A'B \| BA'$، و بنابراین خط واصل بین نقطه‌های برخورد AB و $A'B'$، AA' و BB' قطری است از S_1 (این مطلب با توجه به تقارن روشن است؛ و نیز می‌توانیم چنین استدلال کنیم که خط موردنظر قطبی نقطهٔ بینهایتی است که خطهای AB' و BA' بر آن تلاقی می‌کنند). به‌همین طریق می‌توانیم قطر دیگر S_1 را پیدا کنیم. پس مرکز S_1 نقطهٔ تقاطع این دو قطر است.

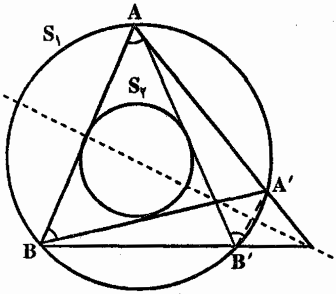


(ب)

ب) فرض می‌کنیم M نقطهٔ تماس S_1 و S_2 باشد (شکل ب). دو نقطهٔ A و B از دایرهٔ S_1 را از M بر S_2 تصویر می‌کنیم تا دو نقطهٔ A' و B' را به‌دست آوریم. وترهای AB و $A'B'$ موازیند (اگر PQ مماس مشترک S_1 و S_2 باشد، آن‌گاه $A\hat{B}M = A\hat{M}P$، زیرا اندازهٔ مشترک آنها نصف $\overset{\frown}{AM}$ است. همچنین $A'\hat{B'}M = A'\hat{M}Q$ و لذا $A\hat{B}M = A'\hat{B'}M$). اما با استفاده از ستارهٔ تنها می‌توانیم وتری از S_1 را موازی با AB رسم کنیم و بدین ترتیب یک قطر از S_1 را پیدا کنیم. (راه حل قسمت (الف)). یک ترسیم مشابه قطر دیگر را به‌دست می‌دهد، و تقاطع این دو خط مرکز مطلوب S_1 است.

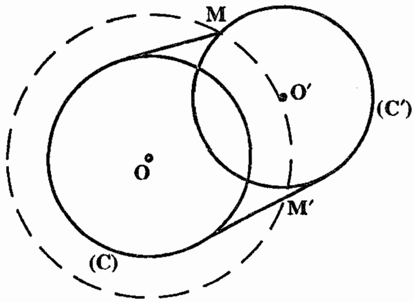
ج) از یک نقطهٔ A از دایرهٔ S_1 مماسهای AB و AB' را بر دایرهٔ دوم S_2 رسم می‌کنیم، و از B، نقطهٔ برخورد مماس اول با S_1، مماس دوم BA' را بر S_2 می‌کشیم (شکل ج). روشن است که $B\hat{A}B' = A\hat{B}A'$ (به علت تقارن)، $A\hat{B}A' = A'\hat{B'}A$ (مقابل به

یک کمان). از آن‌جا نتیجه می‌شود که $B\hat{A}B' = A'\hat{B}'A$ بنابراین $AB \| A'B'$. پس در این صورت نقطه‌های برخورد AA' و BB'، AB' و BA'، بر یک قطر S_1 قرار دارند (راه حل قسمت (الف)). به طریق مشابه می‌توانیم قطر دیگر S_1 و لذا مرکز آن را تعیین کنیم.

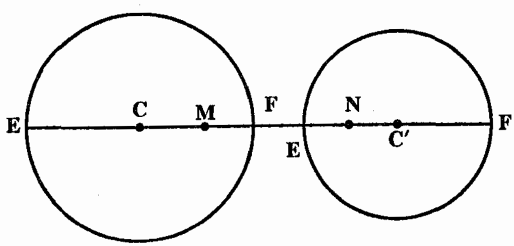


(ج)

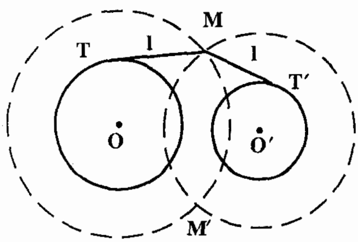
۱۹۴. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که قوتش نسبت به دایرهٔ $C(O,R)$ برابر P است، دایره‌ای مانند C'' به مرکز O و به شعاع $\sqrt{P+R^2}$ است. این دایره را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد آن با دایرهٔ (C') جواب مسأله است.



۱۹۵. فرض می‌کنیم M نقطه‌ای است که نسبت به دو دایرهٔ C و C'، دارای یک خط قطبی است. خطهای CM و $C'M$ باید بر این خط عمود باشند و چون از نقطهٔ M می‌گذرند، درنتیجه باید برهم منطبق شوند. از آن‌جا M باید روی خط‌المرکزین دو دایره باشد. درنتیجه باید روی CC' نقطه‌ای به‌دست آورد که نسبت به EF و $E'F'$ قطرهای دو دایره دارای یک نقطهٔ مزدوج باشد. اگر M چنین نقطه‌ای باشد و N مزدوج آن نسبت به EF و $E'F'$، می‌دانیم هر دایره‌ای که بر M و N بگذرد، بر دایرهٔ C و C' عمود است. از آن‌جا نقطهٔ M به دست می‌آید که نقطهٔ برخورد CC' با دایرهٔ عمود بر C و C' می‌باشد. مسأله در حالت کلی دارای دو جواب است.

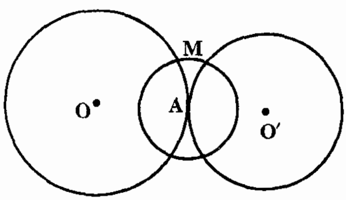


۲.۴.۴.۱.۲. دو دایرهٔ متخارج



۱۹۶. دو دایره را $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ می‌نامیم.
می‌دانیم که مکان هندسی نقطه‌ای که از آن نقطه مماسی به طول l بر دایرهٔ $C(O,R)$ می‌توان رسم کرد، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\sqrt{l^2+R^2}$ است. و مکان هندسی نقطه‌ای که از آن نقطه مماسی به طول l بر دایرهٔ $C'(O',R')$ می‌توان رسم کرد، دایره‌ای به مرکز O' و به شعاع $\sqrt{l^2+R'^2}$ است.
این دو دایرهٔ مکان هندسی را رسم می‌کنیم. نقطه یا نقطه‌های برخورد آنها (درصورت وجود) جواب مسأله‌اند.
نکته. می‌توان محور اصلی دو دایرهٔ (C) و (C′) را رسم کرد و نقطهٔ برخورد آن با یکی از دو دایره با مکان هندسی، به‌عنوان مثال با دایره به مرکز O و به شعاع $\sqrt{l^2+R^2}$ را به‌دست آورد. این نقطه یا نقطه‌ها جواب مسأله‌اند.

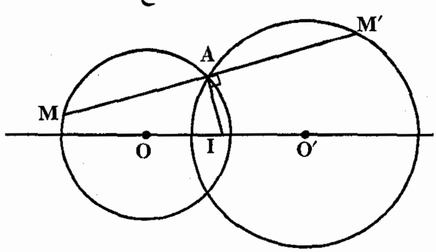
۲.۴.۴.۱.۳. دو دایرهٔ مماس برون



۱۹۷. نقطه‌های برخورد دایره به مرکز A و به شعاع R با دایره‌های (O) و (O′) جواب مسأله‌اند. مسأله حداکثر ۴ جواب دارد.

۲.۴.۴.۱.۴. دو دایرهٔ متقاطع

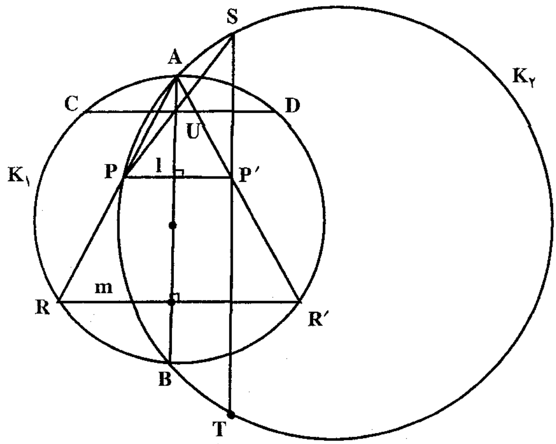
۱۹۸. از نقطهٔ A خطی رسم می‌کنیم که در دو دایره دو وتر به طولهای متساوی $(AM = AM')$ محیط کند (به‌کمک تجانس یا تقارن مرکزی). سپس از A عمودی بر MM' اخراج می‌کنیم تا OO' را در نقطهٔ I، جواب مسأله قطع کند.



۱۹۹. اگر O'' مرکز دایرهٔ جواب مسأله باشد، باید $OO''=\frac{R}{۲}$ یا $\frac{۳R}{۲}$ و $O'O''$ نیز مساوی $\frac{R}{۲}$ یا $\frac{۳R}{۲}$ باشد (مماس داخل یا مماس خارج). پس نقطهٔ O''، نقطهٔ برخورد دایره‌های به مرکزهای O و O' و به شعاع $\frac{R}{۲}$ یا $\frac{۳R}{۲}$ است. این دایره‌ها در نقطه‌های A و B متقاطعند و در C، D و E برهم مماسند.

۲.۴.۴.۲. دو دایره، نقطه

۲.۴.۴.۲.۱. دو دایره، یک نقطه



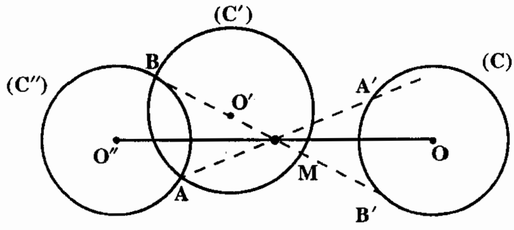
۲۰۰. ابتدا نقطهٔ P'، قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به خط راست AB را پیدا می‌کنیم (شکل) و خط راست AP را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد دیگر آن با محیط دایرهٔ $K_۱$ را با R نشان می‌دهیم، سپس از نقطه‌های P و R، بترتیب، عمودهای l و m را بر خط راست AB رسم می‌کنیم:

خط راست m، محیط دایرهٔ $K_۱$ را در نقطهٔ دیگر R' قطع می‌کند. P' محل برخورد دو خط راست AR' و l است.

اکنون از نقطهٔ P' خط راستی عمودبر l رسم می‌کنیم تا دایرهٔ $K_۲$ را در نقطه‌های S و T قطع کند، SP را وصل می‌کنیم تا AB را در U قطع کند. اگر از نقطهٔ U، عمودی بر AB اخراج کنیم، وتر مطلوب CD به‌دست می‌آید (می‌توانستیم خط راست TP را رسم کنیم، تا AB را در U' قطع کند؛ در این صورت وتر دیگر $C'D'$ به‌دست می‌آید که باز هم با شرطهای مسأله سازگار است).

اثبات. بنا به قضیهٔ قوت نقطه نسبت به دایره داریم $SU.UP = AU.UB = CU.UD$

چون AB پاره‌خط راست PP' را نصف می‌کند، پاره‌خط راست SP را هم نصف خواهد کرد. بنابراین، $SU = UP$ ؛ همچنین $CU = UD$. از این‌جا نتیجه می‌شود $SU = CU$. به این ترتیب، U مرکز دایره‌ای است که از نقطه‌های C، P و D می‌گذرد و $C\hat{P}D$ زاویه‌ای قائمه است.



۲۰۱. دو دایـــــره را $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ و نقطهٔ داده شده را M می‌نامیم. قرینهٔ یکی از دو دایرهٔ داده شده، به‌عنوان مثال قرینهٔ دایرهٔ $C(O,R)$ را نسبت به نقطهٔ M به‌دست می‌آوریم و نقطه‌های برخورد آن با دایرهٔ (C') را A و B می‌نامیم. از A و B به M وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ (C) را در A' و B' قطع کنند. نقطه‌های A، A' و B، B' جواب مسأله‌اند.

۲.۲.۲.۴.۴.۲. دو دایره، دو نقطه

۲۰۲. فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد. نقطهٔ C روی محور اصلی دو دایره است؛ پس $CA.CD = CB.CE$ و چون $AB \| DE$ است، پس $\frac{CA}{CD} = \frac{CB}{CE}$. از ضرب کردن این دو رابطه نتیجه می‌شود $CA^2 = CB^2$ یا $CA = CB$. پس نقطهٔ C محل برخورد محور اصلی دایره با عمودمنصف پاره‌خط AB است، و مسأله عموماً یک جواب دارد.

۲۰۳. اگر D را محـــور اصـــلی دو دایـــره و S یـک نـقـطـه از آن بـاشـد، داریـم: $SA.SM = SA'.SM' = P_{S(O)} = P_{S(O')}$ چنانچه S را قطب و $P_{S(O)} = P_{S(O')} = K$ قوت انعکاس فرض کنیم، منعکسهای دایره‌های (O) و (O′) و خط D بر خودشان منطبق است و خط MM' منعکس دایرهٔ SAA' می‌باشد، برای این که MM' بر خط D، محور اصلی دو دایره عمود باشد، لازم است منعکسهای آنها برهم عمود باشد. وقتی خط D بر دایرهٔ SAA' عمود است، از مرکز آن می‌گذرد؛ یعنی مرکز دایرهٔ SAA' بایستی بر D واقع باشد و درنتیجه، عمودمنصف AA' را رسم می‌کنیم تا خط D را در (ω) قطع کند. محل برخورد دایره به مرکز (ω) و به شعاع $\omega A = \omega S'$ با خط D، نقطهٔ

S است که اگر SA و SA' را امتداد دهیم، تا دایره‌های (O) و (O') را در نقطه‌های M و M' قطع کند، MM' بر D عمود خواهد بود.

۲۰۴. شعاع C_1 و C_2 را بترتیب R و r قرار می‌دهیم. بنابر نامساوی بطلمیوس در چهارضلعی OMAB، $(R > r)$:

$$OA.MB \le MA.OB + AB.OM$$

$$\Rightarrow R(MB - MA) \le AB.r$$

$$\Rightarrow MB - MA \le \frac{AB.r}{R}$$

پس ماکزیمم مقدار $|MB - MA|$ برابر $\frac{AB.r}{R}$ و حالتی است که O، A، B و M روی یک دایره باشند. در حالتی که دایرهٔ OAB دایرهٔ C_2 را قطع نکند، A و B روی دایرهٔ کوچکتر قرار دارند. در این حالت AB را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ بزرگتر را در نقطه‌های M و M' قطع کند،

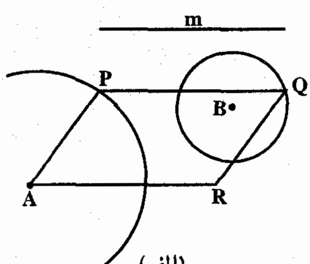
$$MB - MA = AB \quad ,$$

$$\forall m \in C_2 \text{ ، } MA - MB < AB$$

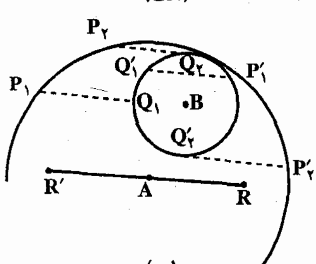
پس ماکزیمم برابر طول AB خواهد بود.

۲.۴.۴.۳. دو دایره، خط

۲.۴.۴.۳.۱. دو دایره، یک خط



(الف)



(ب)

۲۰۵. فرض کنید P و Q نقطه‌های خواسته شده برروی دو دایرهٔ مفروض (A) و (B) باشند. از مرکز دایرهٔ (A) یعنی نقطهٔ A (شکل الف) خطی به موازات PQ رسم کنید و نقطهٔ R را بر روی آن طوری مشخص کنید که $AR = PQ$. در متوازی‌الاضلاع APQR داریم $AP.RQ = AP$، شعاع دایرهٔ مفروض است. پس طول RQ مشخص است. از طرف دیگر نقطهٔ R معلوم است؛ زیرا هم راستا و هم طول AR مشخص است. پس نقطهٔ Q را می‌توان مشخص کرد. سپس به آسانی می‌توان نقطهٔ P را یافت.

ترسیم. از A، مرکز یکی از دو دایرهٔ مفروض، (A) خطی در راستای مفروض رسم کنید و AR را بر روی آن به اندازهٔ طول معلوم، m، تعیین کنید. دایرهٔ (A') را به مرکز R و شعاعی برابر شعاع دایرهٔ (A) رسم کنید تا دایرهٔ مفروض دوم را در Q قطع کند. از نقطهٔ Q خطی به موازات AR رسم و QP را برابر AR روی آن جدا کنید، تا یک متوازی‌الاضلاع به ضلع AR (نه به قطر AR) درست شود. نقطه‌های P و Q شرطهای مسأله را برآورده می‌کنند.

اثبات. در ترسیم فوق، طول پاره‌خط PQ همان طول مفروض و راستای آن نیز راستای مفروض است. نقطهٔ Q روی دایرهٔ (B) قرار دارد. برای این که نشان دهیم نقطهٔ P روی دایرهٔ (A) قرار دارد، کافی است متذکر شویم که در متوازی‌الاضلاع ARQP داریم:
$AP = RQ$ و RQ طوری رسم شده است که با شعاع (A) برابر باشد.

بحث. همیشه می‌توان از نقطهٔ A خطی را در راستای داده شده رسم کرد. نقطهٔ R را می‌توان در هر یک از دو طرف A مشخص کرد؛ بنابراین برای R دو موضع، R و R' می‌توان یافت.

دایره‌ای که مرکزش یکی از این دو نقطه و شعاعش برابر شعاع (A) باشد، ممکن است (B) را در دو نقطه قطع کند، بر (B) مماس باشد یا اصلاً (B) را قطع نکند. بنابراین مسأله ممکن است چهار، سه، دو یا یک جواب داشته باشد، یا اصلاً جواب نداشته باشد. شکل (ب) حالتی را نشان می‌دهد که مسأله چهار جواب دارد.

۲۰۶. محل نقطهٔ P را بیابید.

خط مستقیم بین ساحل و دریا را با D، و مرکز دو جزیره را با A و B نشان می‌دهیم، و شعاع آنها را به همان ترتیب با a و b مشخص می‌کنیم (شکل را ببینید).

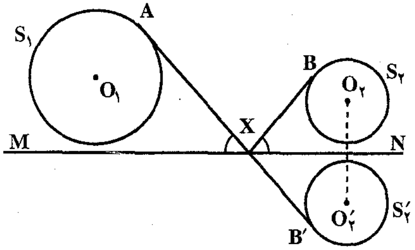
طبق رابطهٔ فیثاغورس خواهیم داشت:

$$PK^۲ + PG^۲ = PA^۲ + PB^۲ - (a^۲ + b^۲)$$

مجموع $PK^۲$ و $PG^۲$ وقتی می‌نیمم می‌شود که $PA^۲ + PB^۲$ می‌نیمم شود. می‌دانیم که:

$$PA^۲ + PB^۲ = ۲PI^۲ + \frac{۱}{۲}AB^۲$$

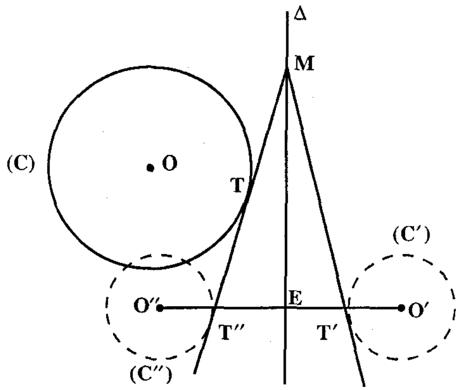
و در آن I وسط AB است. از آن‌جا نتیجه می‌گیریم، که PI باید می‌نیمم شود. در این صورت P باید بر M منطبق شود.



۲۰۷. فرض می‌کنیم نقطهٔ X پیدا شده و S'_2 قرینهٔ دایرهٔ S_2 نسبت به خط MN باشد (شکل). اگر XA، XB، و XB' مماسهای رسم شده از نقطهٔ X بر دایره‌های S_1 ، S_2 و S'_2 باشند، آن‌گاه :

$$B'\hat{X}N = B\hat{X}N = A\hat{X}M$$

یعنی، نقطه‌های A، X و B' بر یک امتدادند. پس X نقطهٔ برخورد خط MN با AB' ، مماس مشترک دو دایرهٔ S_1 و S'_2 ، است. مسأله ممکن است حداکثر چهار جواب داشته باشد (دو دایره حداکثر چهار مماس مشترک دارند).



۲۰۸. اگر M نقطهٔ خواسته شده از خط Δ باشد، به‌طوری که اگر MT و MT' مماسهای رسم شده از M، بترتیب بر دایره‌های O و O' باشند، و $T\hat{M}E = T'\hat{M}E$ باشد، درصورتی که صفحهٔ شکل را حول Δ تا کنیم، MT' بر MT منطبق شده و دایرهٔ (O') به‌صورت (O'') قرینهٔ (O') نسبت به Δ درآمده و MT مماس مشترک دایره‌های O و O'' خواهد بود و در نتیجه حل مسأله چنین است.

دایرهٔ (O'') قرینهٔ (O') را نسبت به Δ رسم کرده، مماس مشترک دایره‌های O و O'' را رسم می‌نماییم، نقطهٔ برخورد مماس مشترک (O'') و (O) با خط Δ نقطهٔ M، جواب مسأله است.

بحث. درصورتی که دایره‌های (O) و (O'') دارای یک یا دو یا سه و یا چهار مماس مشترک باشند، مسأله دارای یک یا دو، یا سه و یا چهار جواب می‌باشد و چنانچه دایرهٔ (O'') داخل دایرهٔ (O) باشد، مماس مشترک وجود نداشته و مسأله جواب ندارد.

۲۰۹. نقطهٔ برخورد محور اصلی دو دایرهٔ (C) و (C') با خط Δ جواب مسأله است.

۲.۴.۵. سه دایره

۲.۴.۵.۱. تنها سه دایره

۲۱۱. این نقطه، مرکز دایره‌ای است که بر مرکزهای این سه دایره می‌گذرد.

تبصره. اگر سه دایره شعاع برابر نداشته باشند، بازهم مسأله قابل حل است. بدین ترتیب که نقطه یا نقطه‌های برخورد مکان‌هندسی نقطه‌هایی که از آن نقطه‌ها دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ تحت یک زاویه دیده می‌شوند، با مکان هندسی نقطه‌ای که از آن نقطه دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C''(O'',R'')$ تحت یک زاویه دیده می‌شوند را به‌دست می‌آوریم.

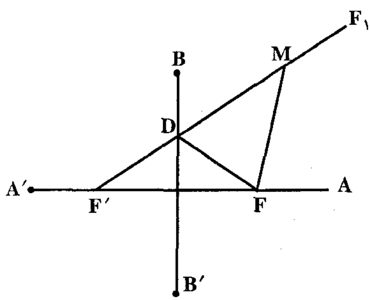
۲.۵. تعیین نقطه با معلوم بودن: مقطعهای مخروطی، مقطعهای مخروطی و داده‌های دیگر

۲.۵.۱. بیضی

۲۱۳. فرض کنیم M جواب مسأله باشد. MF' محور کوچکتر را در D قطع می‌کند. اگر:

$MF = z$ و $DM = y$ و $D'F = DF = x$

باشد،از تشابه دو مثلث MFF' و MFD نتیجه می‌شود:



$$\frac{x}{2c} = \frac{y}{z} = \frac{z}{x+y}$$

یا:

$$\frac{x}{2c} = \frac{x+y+z}{2c+x+y+z} = \frac{y+z}{x+y+z}$$

$$\frac{x}{2c} = \frac{2a}{2c+2a} = \frac{y+z}{2a}$$

x از رابطهٔ اول به‌دست می‌آید:

$$x = \frac{2ac}{a+c}$$

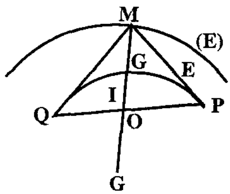
اگر MF_1 را به اندازهٔ MF امتداد دهیم، F_1 قرینهٔ F نسبت به خط مماس خواهد بود

یعنی $F'F_1$ برابر $2a$ است. پس رابطهٔ دوم را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{F'F_1}{c+a}=\frac{DF_1}{a} \quad \text{و یا} \quad \frac{F'F_1}{F'A}=\frac{DF_1}{OA}$$

یعنی، AF_1 با OD موازی است. بنابراین راه حل مسأله چنین است:

دایرهٔ هادی کانون F' را رسم می‌کنیم. مماس در نقطهٔ A آن را در F_1 قطع می‌کند. عمودمنصف خط FF_1، $F'F_1$ را در M قطع می‌کند، و این نقطه جواب مسأله است.



۲۱۴. فرض می‌کنیم O مرکز بیضی و P و Q محل برخورد مماسهای رسم شده از M بر بیضی باشند. وسط PQ را I می‌نامیم. خط OM بر I گذشته و بیضی (E) را در G و G' (G بین M و I) که نسبت به I و M مزدوج توافقی هستند، قطع می‌کند. بنابراین می‌توان نوشت:

$$OI.OM=OG^2 \quad (1)$$

نقطهٔ G وقتی مرکز ثقل مثلث MPQ است که داشته باشیم: $\quad IM=3IG$

و یا $\quad OM-OI=3(OG-OI)$

$$2OI=3\overrightarrow{OG}-\overrightarrow{OM}$$

به‌جای OI مقدارش را در رابطهٔ (۱) قرار می‌دهیم:

$$(3OG-OM)OM=2OG^2$$

و یا $\quad (OM-OG)(OM-2OG)=0$

از آن‌جا $\quad OM=OG \quad (3)$

و $\quad OM=2OG \quad (4)$

رابطهٔ (۳) نشان می‌دهد که M روی بیضی (E) است. رابطهٔ (۴) نشان می‌دهد که M متعلق به بیضی (E') که مجانس بیضی (E) در تجانس (O , ۲) است، پس مکانهای مطلوب متعلق به بیضی (E) و (E') هستند.

۲۱۵. داریم $O\hat{M}N=O\hat{H}E$؛ بنابراین باید نقطهٔ H را چنان تعیین کنیم که $O\hat{H}E=\theta$ باشد. این نقطهٔ H فصل مشترک خط AC و کمان حاوی θ نسبت به پاره‌خط OE می‌باشد. شعاع این دایره عبارت است از $R=\frac{OE}{2\sin\theta}$ یا $R=\frac{C^2}{2a\sin\theta}$. با توجه به

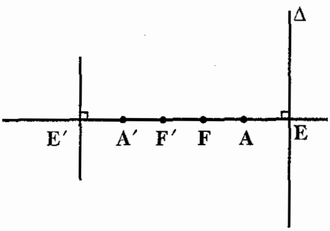
این که فاصلهٔ AC از مرکز دایره مساوی است با $\frac{1}{2}(AE+OA)$ و یا مساوی است با $\frac{a^2+b^2}{2a}=\frac{1}{2}(\frac{b^2}{a}+a)$، برای این که دایره را قطع کند، لازم است که $\frac{c^2}{2a\sin\theta}\leq\frac{a^2+b^2}{2a}$ و یا $\sin\theta\leq\frac{c^2}{a^2+b^2}$ باشد. درنتیجه ماکزیمم $\sin\theta$ مساوی $\frac{c^2}{a^2+b^2}$ می‌باشد، و آن وقتی است که قطاع بر AC مماس باشد.

فرض می‌کنیم H نقطهٔ تماس باشد، داریم:

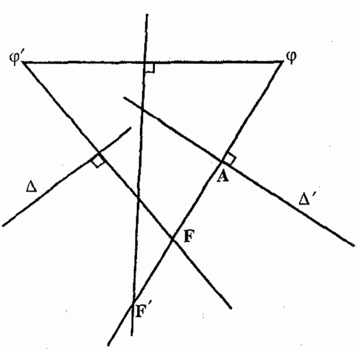
$$AH^2=AE\times AO=\frac{b^2}{a}\times a=b^2\Rightarrow AH=b$$

و بنابراین H بر C منطبق است. پس ماکزیمم θ زاویهٔ $O\hat{C}E$ است.

با معلوم بودن H، نقطهٔ M بسادگی معلوم می‌شود و ملاحظه می‌کنیم، نقطه‌هایی از منحنی، که قائم در این نقطه‌ها بزرگترین زاویه را با قطرهای گذرنده بر این نقطه‌ها می‌سازد، فصل مشترکهای قطرهای مستطیل حاصل از رسم مماس در رأسها با بیضی می‌باشد.



۲۱۶. اگر F کانون و ′A رأس دیگر بیضی باشد، می‌دانیم که (′FEAA) یک تقسیم توافقی است. پس مزدوج توافقی نقطهٔ A را نسبت به دو نقطهٔ F و E به‌دست می‌آوریم. نقطهٔ ′A رأس دیگر بیضی مشخص می‌شود. نقطهٔ O وسط پاره‌خط ′AA، مرکز بیضی است. اکنون $OF'=OF$ را جدا می‌کنیم. کانون ′F به‌دست می‌آید.



۱.۲۱۷. فرض می‌کنیم رأس A، کانون F و خط مماس Δ بر بیضی، داده شده باشند. F را به A وصل می‌کنیم. می‌دانیم که خط مماس در نقطهٔ A بر بیضی، بر FA عمود است. این خط را رسم می‌کنیم (′Δ). قرینهٔ کانون F نسبت به دو خط Δ و ′Δ را نقطه‌های φ و ′φ می‌نامیم. این

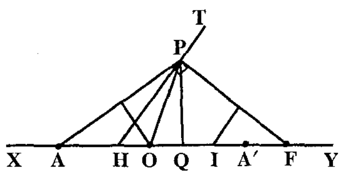
نقطه‌ها روی دایرهٔ هادی کانون دیگر قرار دارند. عمودمنصف $\varphi\varphi'$ را رسم می‌کنیم تا امتداد FA را در F' قطع کند. این نقطه، کانون دیگر بیضی است.

۲. با معلوم بودن یک رأس و دو کانون، a، b و c مشخص است. فاصلهٔ F از خط مماس Δ با استفاده از این ویژگی به‌دست می‌آید که حاصلضرب فاصله‌های دو کانون بیضی از هر خط مماس بر آن برابر مقدار ثابت b^2 است.

۲۱۸. با استفاده از این ویژگی که نسبت عرض هر نقطه از بیضی به عرض نقطهٔ همطولش از دایرهٔ اصلی برابر $\frac{b}{a}$ است، b و از آن‌جا c نصف فاصلهٔ کانونی و درنتیجه جای کانونهای بیضی مشخص می‌شود.

۲.۵.۲. هذلولی

۲۱۹. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و O مرکز هذلولی به کانون F، رأس A و یک مماس T باشد. P تصویر F روی T و نقطهٔ A متعلق به دایرهٔ اصلی می‌باشند. بنابراین O مرکز این دایره، فصل مشترک عمودمنصف AP و خط AF می‌باشد. از این‌جا هذلولی معین می‌شود.

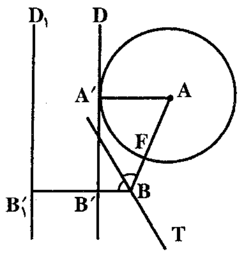


بحث. فرض می‌کنیم T و F ثابت و A روی خط XY، گذرنده بر F تغییر کند. برای اینکه مسأله ممکن باشد، باید O وجود داشته باشد، یعنی AP بر XY عمود نباشد و یا اینکه A بر Q، تصویر P روی XY منطبق نشود. از طرف دیگر اگر O وجود داشت، برای اینکه یک مقطع مخروطی هذلولی باشد، باید $OP < OF$ یا این که اگر I فصل مشترک XY و عمودمنصف FP باشد، نقطهٔ O متعلق به نیمخط IX باشد.

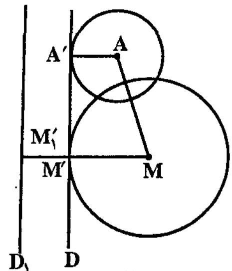
با ملاحظهٔ آنکه I مرکز دایرهٔ محیطی مثلث FPH است، وقتی O نیمخط IX را طی کند، دو انتهای A و A' قطر AA' دایرهٔ اصلی HX و قطعهٔ FQ را طی خواهند کرد. پس برای اینکه A یک رأس هذلولی فرض شود، لازم است که آن متعلق به نیمخط IX و یا قطعهٔ FQ باشد.

۳.۵.۲. سهمی

۲۲۰. نقطهٔ A متساوی‌الفاصله از کانون F و هادی D می‌باشد. یعنی F متعلق به دایره به مرکز A و مماس بر D است و به‌همین طریق متعلق به دایره به مرکز M و مماس بر D است؛ درنتیجه F فصل مشترک این دایره‌ها می‌باشد. دیده می‌شود که مسأله دارای دو یا یک جواب و یا غیرممکن است.



(ب)



(الف)

برای این که مسأله ممکن باشد، لازم است:

$$|MM' - AA'| \le AM \le MM' + AA' \ ,$$

$$MM' \le AM + AA' ,\dots \quad (۱)$$

$$AA' \le AM + MM' ,\dots \quad (۲)$$

یا

$$AM \le MM' + AA' ,\dots \quad (۳)$$

نامساوی (۱) همواره برقرار است، چون $MM' \le MA'$ و $MA' \le MA + AA'$ و با یک دلیل مشابه نامساوی (۲) همواره برقرار است؛ پس فقط (۳) باقی می‌ماند که آن را باید نمایش دهیم. D_1 را موازی با D به فاصلهٔ AA' و در طرفی که A نیست رسم می‌کنیم (شکل الف)؛ (۳) به‌صورت $MA \le MM' + M'M'_1$ و یا $MA \le MM'_1$ درمی‌آید و از این نامساوی نتیجه می‌شود که نقطهٔ M بایستی در ناحیهٔ داخل سهمی (P) قرار گیرد که کانون آن A و هادی آن D_1 می‌باشد؛ و یا روی آن باشد. در حالت اخیر مسأله دارای یک جواب است. در خاتمه اثبات می‌کنیم که تمام سهمیهای به هادی D و گذرنده بر A، دارای یک نقطهٔ مشترک با سهمی (P) می‌باشند و در آن نقطه بر هم مماسند. اگر F کانون اولی و B یک نقطهٔ مشترک باشد (شکل ب):

باید

$$BA = BB'_1 \ , \ BF = BB'$$

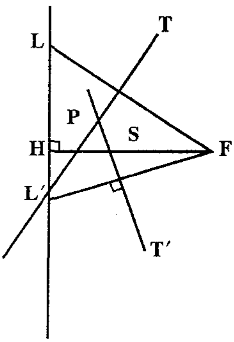
و

$$BA - BF = BB'_1 - BB'$$

تساوی اخیر به‌صورت $BA - BF = AA' = AF$ نوشته می‌شود که ثابت می‌کند A، F و B واقع بریک استقامتند. پس B فصل مشترک نیمخط AF با سهمی (P) می‌باشد که فقط یک نقطه حاصل می‌شود. دو سهمی در B بر هم مماسند، چون هر دوی آنها بر نیمساز زاویهٔ $A\hat{B}B'$ در این نقطه مماسند.

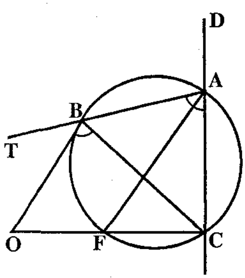
۲۲۱. خط هادی سهمی، مکان‌هندسی نقطه‌هایی است که از آن نقطه‌ها، دو مماس عمودبرهم بر سهمی می‌توان رسم کرد ؛ بنابراین نقطهٔ P روی خط هادی سهمی قرار دارد. از طرفی خط هادی هر سهمی قرینه‌های کانون سهمی نسبت به خطهای مماس بر سهمی می‌باشند. پس...

۲۲۲. می‌دانیم که قرینهٔ کانون سهمی نسبت به هر خط مماس بر سهمی روی خط هادی آن است، بنابراین قرینه‌های کانون F را نسبت به مماسهای PT و PT′ به‌دست می‌آوریم و L و L′ می‌نامیم. LL′ خط هادی سهمی است. از F عمود FH را بر خط هادی رسم می‌کنیم. وسط پاره‌خط FH ، نقطهٔ S رأس سهمی است.

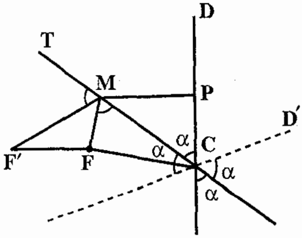


۴.۵.۲. مقطع مخروطی

۲۲۳. فرض کنیم F کانون نظیر به خط هادی D باشد. نقطهٔ F روی عمود OC که بر خط هادی D فرود آید قرار دارد. دایرهٔ به قطر AF را رسم می‌کنیم. این دایره خط AT را در نقطهٔ B قطع می‌کند. می‌دانیم که OB مماس بر این دایره است، پس : $B\hat{A}C = O\hat{B}C$ و B معلوم است و نقطهٔ برخورد AT و قوس حاوی زاویهٔ $B\hat{A}C$ که بر روی OC ساخته شود، می‌باشد. پس از تعیین B دایرهٔ BAC را رسم می‌کنیم که OC را در F قطع کند (شکل).

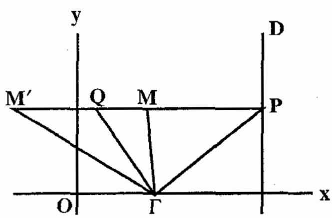


تبصره. می‌دانیم وقتی که شعاع دایرهٔ گذرنده بر A و C تغییر می‌کند، پوش مماس در نقطهٔ B بر این دایره (B فصل مشترک دایره و AT) یک سهمی است. می‌توان نقطهٔ مطلوب را با رسم مماس از نقطهٔ O بر این سهمی به‌دست آورد.



۱.۲۲۴. فرض کنیم نقطهٔ C فصل مشترک هادی D و مماس T باشد. CF را رسم می‌کنیم عمودبر CF از نقطهٔ F خط T را در نقطهٔ تماس M قطع می‌کند. کانون دوم F′ فصل مشترک قرینهٔ MF نسبت به T و خطی است عمود بر D از نقطهٔ F.

۲. فرض کنیم MP عمودبر خط هادی باشد. خروج از مرکز مقطع مخروطی برابر است با $\frac{MF}{MP}$. بنابراین این مقطع مخروطی بیضی‌ای است اگر $MF < MP$ بوده و یا زاویهٔ $F\hat{C}M < \alpha$ باشد. به عبارت دیگر اگر زاویهٔ CF با خط T، کوچکتر باشد از زاویهٔ خط Dبا این مماس. بنابراین لازم است که نقطهٔ F در آن منطقهٔ جدا شده از خط D و D′ قرار گیرد که شامل مماس T است. وقتی که نقطهٔ F در منطقه‌های دیگری واقع شود، مقطع مخروطی هذلولی خواهد بود. درواقع اگر F روی D′ قرار گیرد، مقطع مخروطی سهمی است (شکل).



۲۲۵. فرض کنیم بخواهیم کانونهای یک مقطع مخروطی که مرکزش O و یک خط هادی آن D و یک نقطه‌اش، M، معین باشد پیدا کنیم. عمود Ox بر D محور کانونی است و خط Oy موازی خط D، محور دوم تقارن آن می‌باشد. پس مقطع مخروطی از M′ قرینه M نسبت به Oy می‌گذرد. و اگر F کانون نظیر خط D باشد، دو نسبت $\frac{MF}{MP}$ و $\frac{M'F}{M'P}$ متساوی بوده، زیرا با خروج از مرکز مقطع مخروطی متساویند و داریم:

$$\frac{MF}{M'F}=\frac{MP}{M'P}$$

از این تساوی نتیجه می‌شود که FP یکی از نیمسازهای زاویهٔ F از مثلث FMM′ است و چون Q مزدوج توافقی P نسبت به MM′ می‌باشد، FQ نیمساز دیگر بوده و $P\hat{F}Q=\frac{\pi}{۲}$، بنابراین F فصل مشترک Ox و دایرهٔ به قطر PQ می‌باشد (شکل).

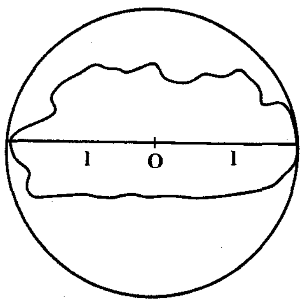
بعکس اگر F نقطه‌ای باشد که به این ترتیب به‌دست آمده است، در دستگاه توافقی (F.PQMM′) شعاعهای FP و FQ که برهم عمودند، نیمسازهای دو شعاع دیگر

می‌باشند و خواهیم داشت :
$$\frac{MF}{MP}=\frac{M'F}{M'P}$$
و این ثابت می‌کند که مقطع مخروطی به کانون F دارای خط هادی نظیر D بوده و از M می‌گذرد و همچنین از نقطهٔ M′ گذشته و مرکزش نقطهٔ O خواهد بود. با معلوم بودن کانون F ، کانون دیگر F′ قرینهٔ F نسبت به O خواهد بود.

نقطهٔ F از برخورد یک خط و یک دایره به‌دست آمده است و مسأله دارای دو جواب یا یک جواب خواهد بود و یا جواب ندارد.

۶.۲. تعیین نقطه با معلوم بودن منحنیهای دیگر

۲۲۷. مجموعهٔ نقطه‌هایی که فاصلهٔ آنها از نقطهٔ ثابتی مانند O کمتر از l یا مساوی l باشد، درون یا روی دایره‌ای به مرکز O و به شعاع l است. بنابراین...



راهنمایی و حلّ قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۳
رسم پاره‌خط، نیمخط، خط، زاویه

۱.۳. رسم پاره‌خط

۱.۱.۳. رسم پاره‌خط با معلوم بودن: نقطه، پاره‌خط، نیمخط، خط و زاویه

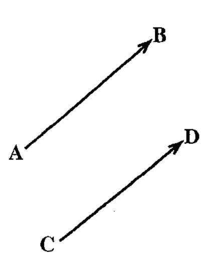
۱.۱.۱.۳. نقطه

۱.۱.۱.۱.۳. دو نقطه

۲۲۹. یک راه حل ممکن: از نقطهٔ A دو خط l_1 و l_2 را رسم می‌کنیم که با هم زاویهٔ کوچکی بسازند که B درون آن واقع شود. باید توجه داشت که کوتاهی ستاره مانع از این نیست که یک قطعه از یک خط را امتداد بدهیم. بعد، دو خط از B می‌گذرانیم که l_1 و l_2 را در نقطه‌های K_1 و K_2، L_1 و L_2 قطع کنند. فرض می‌کنیم P نقطهٔ تلاقی K_1L_1 و K_2L_2 باشد. حال از P تعدادی خط رسم می‌کنیم که l_1 و l_2 را در نقطه‌های K_3 و K_4 و ... و K_n، L_3 و L_4 و ... و L_n قطع کنند (شکل). بنابراین نقطه‌های تقاطع K_2L_3، K_3L_2، K_3L_4 و K_4L_3 و ... بر خط AB واقعند. بدین طریق می‌توان نقطه‌های نزدیک دلخواهی از خط AB را پیدا کرد که بتوانند با یک ستارهٔ کوتاه به‌هم وصل شوند.

۲.۱.۱.۱.۳. سه نقطه

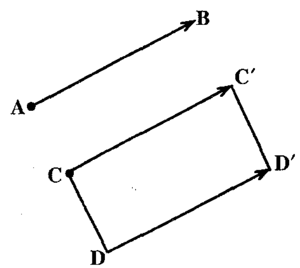
۱.۲.۱.۱.۱.۳. سه نقطه در هر حالت



۲۳۰. از C بردار $\overrightarrow{CD}$ را موازی، مساوی و هم‌جهت با بردار $\overrightarrow{AB}$ رسم می‌کنیم (هم ارز یا هم سنگ با $\overrightarrow{AB}$).

۳.۱.۱.۱.۳. چهار نقطه
۱.۳.۱.۱.۱.۳. چهار نقطه در هر حالت

۲۳۱. به کمک گونیا و خط‌کش از نقطه‌های C و D دو بردار هم سنگ (هم‌ارز) بردار $\overrightarrow{AB}$ رسم می‌کنیم و انتهای آنها را C' و D' می‌نامیم. از C' به D' وصل می‌کنیم. پاره‌خط $C'D'$ جواب مسأله است.



۴.۱.۱.۱.۳. n نقطه $(n \geq ۵)$
۱.۴.۱.۱.۱.۳. n نقطه در هر حالت

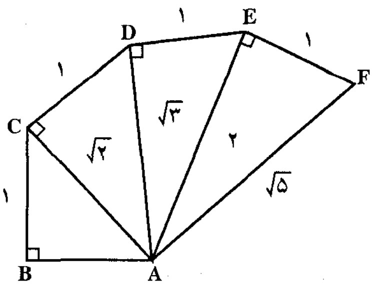
۲۳۲. همهٔ حالتهای ممکن وصل نقطه‌ها را به‌وسیلهٔ n پاره‌خط راست درنظر می‌گیریم و از بین آنها، آن را انتخاب می‌کنیم که، مجموع طولهای پاره‌خطهای راست در آن، کمترین مقدار باشد. اگر در میان آنها، دو پاره‌خط راست AB و OC متقاطع باشند، به‌جای آنها دو پاره‌خط راست AC و BD را درنظر می‌گیریم که، در این صورت، به انتخابی از پاره‌خطهای راست می‌رسیم که، مجموع طولهای آنها، کمتر از مجموع طولهای پاره‌خطهای راست قبلی است. تناقضی که به‌دست می‌آید، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

۲.۴.۱.۱.۱.۳. n نقطهٔ ناهمخط

۲۳۴. همهٔ حالتهای ممکن وصل نقطه‌ها را به‌وسیلهٔ n پاره‌خط راست، درنظر می‌گیریم و، از بین آنها، آن را انتخاب می‌کنیم که، مجموع طولهای پاره‌خطهای راست در آن، کمترین مقدار باشد. اگر در میان آنها، دو پاره‌خط راست AB و OCمتقاطع باشند، به‌جای آنها دو پاره‌خط راست AC و BD را درنظر می‌گیریم که، در این صورت، به انتخابی از پاره‌خطهای راست می‌رسیم که، مجموع طولهای آنها کمتر از مجموع طولهای پاره‌خطهای راست قبلی است. تناقضی که به‌دست می‌آید، درستی حکم مسأله را اثبات می‌کند.

۳.۱.۱.۲. پاره‌خط

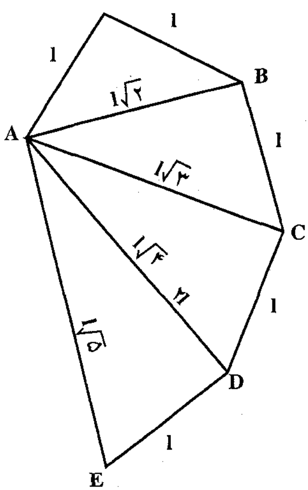
۳.۱.۱.۲.۱. یک پاره‌خط



۲۳۵. پاره‌خط AB به طول ۱ را رسم می‌کنیم. از B عمود BC به طول ۱ را بر AB اخراج می‌کنیم و از C به A وصل می‌کنیم. $AC=\sqrt{۲}$ است، زیرا :

$$AB=BC=۱ \Rightarrow AC^{۲}=\sqrt{AB^{۲}+BC^{۲}}=\sqrt{۱+۱}=\sqrt{۲}$$

حال از C عمود CD به طول ۱ را بر AC اخراج می‌کنیم و از D به A وصل می‌کنیم. به‌همین ترتیب طولهای ۲ و $\sqrt{۵}$ را می‌توان ساخت. با معلوم بودن پاره‌خطهای به طول $\sqrt{۲}$ و $\sqrt{۳}$ پاره‌خط به طول $\sqrt{۳}+\sqrt{۲}$ و همچنین پاره‌خطی به طول $\frac{۱}{۳}(۲\sqrt{۲})=\frac{۲\sqrt{۲}}{۳}$ را می‌توان ساخت.



۲۳۶. مثلث متساوی‌الساقین قائم‌الزاویه‌ای به ساق l رسم می‌کنیم. وتر مثلث $l\sqrt{۲}$ می‌باشد :

$$AB^{۲}=l^{۲}+l^{۲}=۲l^{۲} \quad , \quad AB=l\sqrt{۲}$$

سپس خطی عمود به طول l بر B در AB اخراج می‌کنیم. وتر مثلث $l\sqrt{۳}$ می‌باشد :

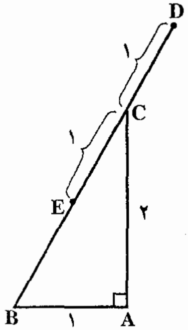
$$AC^{۲}=۲l^{۲}+l^{۲}=۳l^{۲} \quad , \quad AC=l\sqrt{۳}$$

سپس خطی عمود به طول l بر C در AC اخراج می‌کنیم. وتر مثلث $l\sqrt{۴}$ یا ۲l می‌باشد.

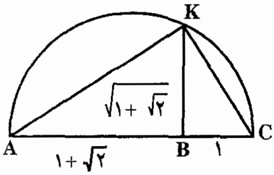
$$AD^{۲}=۳l^{۲}+l^{۲}=۴l^{۲} \quad , \quad AD=۲l$$

سپس خطی عمود به طول l بر D در AD اخراج می‌کنیم. وتر مثلث $l\sqrt{۵}$ است :

$$AE^{۲}=۴l^{۲}+l^{۲}=۵l^{۲} \quad , \quad AE=l\sqrt{۵}$$



۲۳۷. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را به ضلعهای قائم ۲ و ۱ واحد رسم می‌کنیم. اندازهٔ وتر BC از این مثلث برابر $\sqrt{5}$ است. با امتداد دادن BC به اندازهٔ یک واحد پاره‌خط $BD = 1 + \sqrt{5}$ به‌دست می‌آید و با جدا کردن یک واحد روی BC پاره‌خط $BE = \sqrt{5} - 1$ ساخته می‌شود.



۲۳۸. ۱. اگر زاویهٔ قائمه‌ای رسم و روی ضلعهای آن، از نقطهٔ رأس، پاره‌خطهای راستی به طول واحد جدا کنیم، با وصل انتهای این دو پاره‌خط راست به هم، پاره‌خط راستی به طول $\sqrt{2}$ به‌دست می‌آید.

۲. روی خط راستی، پاره‌خط راست AB را به طول $1+\sqrt{2}$ و، سپس، در امتداد آن، پاره‌خط راست BC را به طول واحد، جدا می‌کنیم (شکل).

۳. دایره‌ای به قطر پاره‌خط راست AC رسم می‌کنیم.

۴. از نقطهٔ B، عمودی بر قطر AC رسم می‌کنیم. اگر K، یکی از نقطه‌های برخورد این عمود با محیط دایره باشد، طول پاره‌خط راست BK برابر $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ خواهد شد. درواقع، مثلث AKC، قائم‌الزاویه است، زیرا زاویهٔ AKC، زاویه‌ای محاطی و روبه‌روی نیمدایره است؛ و در هر مثلث قائم‌الزاویه، طول ارتفاع وارد بر وتر، واسطهٔ هندسی است بین دو قطعه‌ای که روی وتر جدا می‌کند (طولهای این دو قطعه، بترتیب، برابر $1+\sqrt{2}$ و ۱ است).

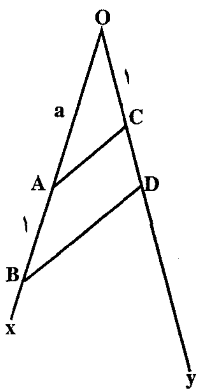
∇ در این مسأله نشان دادیم که، چگونه می‌توان با در دست داشتن پاره‌خطهای راست a و b، پاره‌خطهای راست $\sqrt{a^2+b^2}$ و $\sqrt{ab}$ را ساخت. با استفاده از قضیهٔ مربوط به خطهای راست موازی (وقتی که ضلعهای زاویه را قطع کرده باشند)، می‌توان با در دست داشتن پاره‌خطهای راست a و b و c، پاره‌خط راست $\frac{ab}{c}$ را هم ساخت.

با ترکیب این ساختمانها، بسیاری از پاره‌خطهای راست دیگر هم ساخته می‌شوند. به‌طور مثال پاره‌خط راست به طول $\sqrt{ab+cd}$ را می‌توان به این ترتیب به‌دست آورد: ابتدا پاره‌خطهای راست با طولهای $m = \sqrt{ab}$ و $n = \sqrt{cd}$ را می‌سازیم و، سپس، پاره‌خط

راست به طول $\sqrt{m^۲+n^۲}$ را به‌دست می‌آوریم.

ثابت می‌شود که : با در دست داشتن پاره‌خط راست به طول واحد، تنها می‌توان پاره‌خطهای راستی را ساخت که، طول آنها، به کمک انجام عملهای حسابی و چندبار جذر، قابل محاسبه باشند.

برای علاقمندان. طولهای همهٔ این‌گونه پاره‌خطهای راست، یک میدان را تشکیل می‌دهند. مسأله، به این مناسبت قابل حل بود که عدد $\sqrt{۱+\sqrt{۲}}$ ، متعلق به این میدان است. غیرقابل حل بودن مسألهٔ مربوط به تضعیف مکعب، از این‌جا ناشی می‌شود که عدد $\sqrt[۳]{۲}$ ، به این میدان تعلق ندارد.



۲۳۹. راه اول. فرض می‌کنیم $x=\frac{۱}{a}$ باشد. می‌توان نوشت :

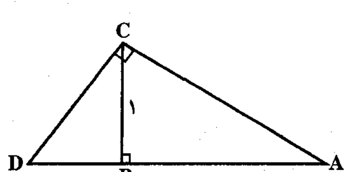
$$\frac{۱}{a}=x=\frac{x}{۱}$$

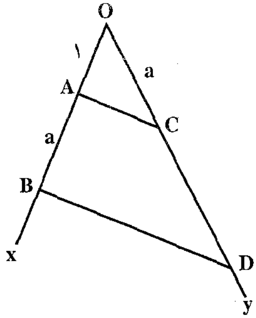
زاویهٔ xOy را رسم می‌کنیم. روی Ox، طولهای $OA=a$ ، $AB=۱$ و روی Oy طول $OC=۱$ را جدا می‌کنیم. از B خطی موازی AC رسم می‌کنیم تا Oy را در نقطهٔ D قطع کند، $CD=x$ است. زیرا داریم :

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}\Rightarrow\frac{a}{۱}=\frac{۱}{CD}\Rightarrow CD=x$$

راه دوم. پاره‌خط AB به طول a را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ B عمود BC را به اندازهٔ ۱ واحد بر AB اخراج می‌کنیم ؛ سپس از C به A وصل می‌کنیم و از C عمودی بر AC اخراج می‌کنیم تا امتداد AB را در D قطع کند. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACD داریم :

$$BC^۲=BD.AB\Rightarrow ۱^۲=BD.a\Rightarrow BD=\frac{۱}{a}$$





۲۴۰. ۱.داریم :

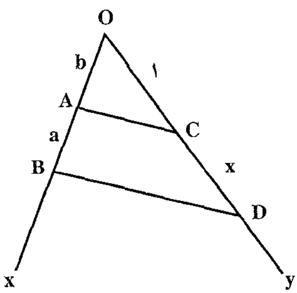
$$1\times x=a\times a \Rightarrow \frac{x}{a}=\frac{a}{1}\Rightarrow \frac{1}{a}=\frac{a}{x}$$

۲. زاویه‌ای دلخواه رسم می‌کنیم. روی یک ضلع زاویه، طولهای $OA=1$ و $AB=a$ را جدا کرده، روی ضلع دیگر، طول $OC=a$ را جدا می‌کنیم. از A به C وصل کرده، از B خطی به موازات AC رسم می‌کنیم $CD=x=a^2$ است ؛ زیرا بنا به قضیهٔ تالس داریم :

$$\frac{OA}{AB}=\frac{OC}{CD}\Rightarrow \frac{1}{a}=\frac{a}{CD}\Rightarrow CD=a^2=x$$

۲۴۱. داریم $x^2=a=ka$. بنابراین x واسطهٔ هندسی است مابین قطعه‌های به طول a و ka، که با استفاده از روش تعیین واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط، می‌توان آن را رسم کرد.

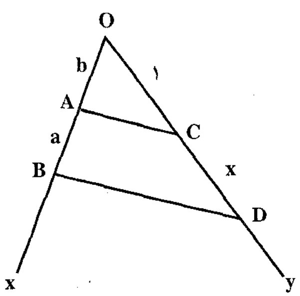
۲.۲.۱.۱.۳. دو پاره‌خط



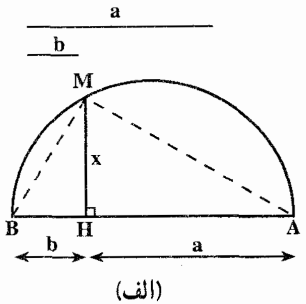
۲۴۲. با معلوم بودن دو پاره‌خط به طولهای a و b، پاره‌خطهای به طول $a+b$ و $a-b$ به‌راحتی رسم می‌شود.

برای رسم پاره‌خط به طول ab فرض می‌کنیم $x=ab$ باشد. می‌توان نوشت $x\times 1=a\times b$.

از آن‌جا $\frac{1}{a}=\frac{b}{x}$. حال روی ضلع Ox از زاویهٔ دلخواه xOy طولهای $OA=1$ ، $AB=a$ و روی ضلع Oy طول $OC=b$ را جدا می‌کنیم و از نقطهٔ B خطی موازی AC رسم می‌کنیم تا Oy را در نقطهٔ D قطع کند. پاره‌خط $CD=x$ جواب مسأله است.



برای رسم پاره‌خط به طول $\frac{a}{b}$ فرض می‌کنیم $x=\frac{a}{b}$ باشد. می‌توان نوشت : $\frac{b}{a}=\frac{1}{x}$. حال به روش مشابه قبلی، با استفاده از زاویهٔ xOy، پاره‌خط به طول x را رسم می‌کنیم. (در شکل $OA=b$ ، $AB=a$ ، $OC=1$ و $BD\parallel AC$ است.)

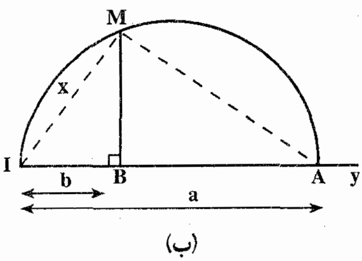


(الف)

۲۴۳. باید قطعه خطی به طول x به‌دست آوریم، به‌طوری که داشته باشیم:

$$x = \sqrt{ab}$$

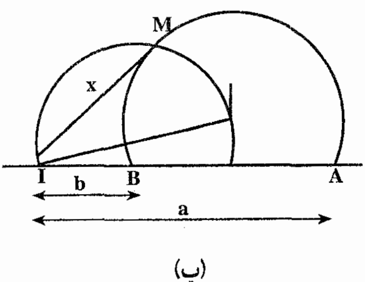
راه‌حل اول. روی یک خط راست قطعه‌های HA و HB را بترتیب به طولهای a و b جدا می‌کنیم به‌طوری که نقطهٔ H بین نقطه‌های A و B واقع شود (شکل الف) و نیمدایره‌ای به قطر AB رسم می‌کنیم تا عمودی را که از نقطهٔ H برخط AB اخراج می‌شود در نقطهٔ M قطع کند، مثلث AMB قائم‌الزاویه است و داریم:



(ب)

$$MH^2 = HA.HB = ab \Rightarrow MH = \sqrt{ab} = x$$

راه حل دوم. روی نیمخط IZ دو قطعه خط IA و IB را بترتیب به طولهای a و b جدا می‌کنیم (شکل ب) و به فرض آن که a بزرگتر از b باشد، نیمدایره‌ای به قطر IA رسم می‌کنیم تا عمودی را که از نقطهٔ B بر IA اخراج می‌شود در نقطهٔ M قطع کند. مثلث IMA قائم‌الزاویه است و داریم:



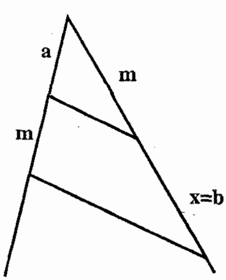
(پ)

$$IM^2 = IA.IB = ab \Rightarrow IM = \sqrt{ab} = x$$

راه حل سوم. روی نیمخط IZ دو قطعه خط IA و IB را بترتیب به طولهای a و b جدا (شکل پ) و دایرهٔ دلخواهی رسم می‌کنیم که از نقطه‌های A و B بگذرد و از نقطهٔ I مماس IM را بر این دایره رسم می‌کنیم، داریم:

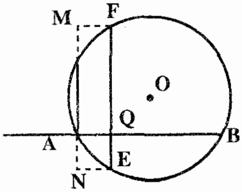
$$IM^2 = IA.IB = ab \Rightarrow IM = \sqrt{ab} = x$$

۲۴۴. داریم:

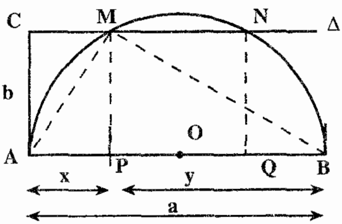


$$m = \sqrt{ab} \Rightarrow m^2 = ab$$

$$\Rightarrow \frac{m}{a} = \frac{b}{m} \;,\; \frac{a}{m} = \frac{m}{b}$$



۲۴۵. ابتدا طول $AB = \frac{5}{2}$ را جدا می‌کنیم و سپس در A عمود $AM = 4$ و $AN = 1$ را جدا کرده، عمود منصفهای AB و MN را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در O قطع کنند، سپس به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم و از M و N دو خط موازی AB رسم می‌نماییم. هرجا دایره را قطع کردند، نقطه‌های F و E می‌نامیم. FE، AB را در Q قطع می‌کند. QB و QA قطعه خطهای خواسته شده می‌باشند.



۲۴۶. اگر طول یکی از دو قطعه خط مطلوب x و طول دیگری را y بنامیم، داریم:

$$xy = b^2 \ , \ x + y = a$$

نیمدایره‌ای به قطر $AB = a$ رسم و روی مماس در نقطهٔ A بر این نیمدایره قطعه خط AC را مساوی با b جدا می‌کنیم، به‌طوری که نقطهٔ C و نیمدایره در یک طرف خط AB واقع شوند (شکل) و از نقطهٔ C خط Δ را به موازات AB رسم می‌کنیم تا نیمدایره را در نقطه‌های M و N قطع کند.

مثلثهای AMB و ANB قائم‌الزاویه‌اند و اگر از نقطه‌های M و N عمودهای MP و NQ را بر AB رسم کنیم، داریم:

$$\begin{cases} AP + PB = a \\ AP \times PB = MP^2 = b^2 \end{cases}$$

و همچنین:

$$\begin{cases} AQ + QB = a \\ AQ \times QB = NQ^2 = b^2 \end{cases}$$

اما

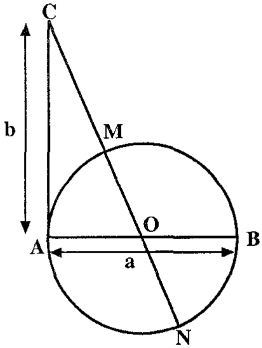
$$AQ = PB \ , \ AP = QB$$

پس قطعه خطهای AP و BP (یا AQ و BQ) جواب مسأله‌اند:

$$PB = y \ , \ AP = x$$

حتی لازم نیست که عمود MP را بر AB رسم کنیم زیرا قطعه خطهای CM و CN که بترتیب مساوی با AP و PB می‌باشند، جواب مسأله هستند.

بحث. مسأله درصورتی جواب دارد که خط Δ نیمدایره را قطع کند. پس باید داشته باشیم، $b \leq \frac{a}{2}$ (اگر $b = \frac{a}{2}$ باشد، Δ با نیمدایره مماس است و x و y متساوی هستند).



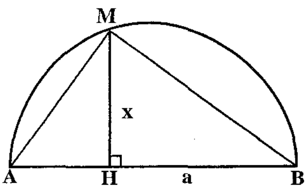
۲۴۷. اگر طول قطعه خطهای خواسته شده را x و y بنامیم، به فرض $x > y$ داریم:

$$x - y = a \ , \ xy = b^2$$

دایره‌ای به مرکز O و به قطر $AB = a$ رسم و روی مماس در نقطهٔ A بر این دایره، قطعه خط AC را به طول b جدا می‌کنیم (شکل) و خط OC را رسم می‌کنیم تا دایرهٔ مزبور را در نقطه‌های M و N قطع کند. قطعه خطهای CM و CN جواب مسأله‌اند. زیرا:

$$CM.CN = CA^2 = b^2 \ , \ CN - CM = MN = AB = a$$

پس $CM = y$ و $CN = x$. مسأله همواره جواب دارد.



۲۴۸. الف. فرض می‌کنیم $x = \sqrt{a}$ باشد، داریم $x^2 = a$ یا $x^2 = 1 \times a$. پس پاره‌خط به طول x، واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط به طولهای ۱ و a است که آن را رسم می‌کنیم.

ب. با فرض $x = \sqrt[4]{a}$ داریم $x^4 = a$ یا $x^4 = 1 \times a$. با فرض $x^2 = y$ داریم $y^2 = 1 \times a$، y واسطهٔ هندسی بین ۱ و a است پس پاره‌خط به طول y را می‌توان رسم کرد. پس از آن، با توجه به $x^2 = y$ یا $x^2 = 1 \times y$ پاره‌خط به طول x رسم می‌شود.

پ. فرض می‌کنیم $x = \sqrt[8]{a}$ باشد، داریم $x^8 = a$. با فرض $x^4 = y$ داریم $y^2 = a \times 1$. از آن‌جا پاره‌خط به طول y را می‌توان رسم کرد. با معلوم شدن y، مسأله به حالت (ب) منجر می‌شود.

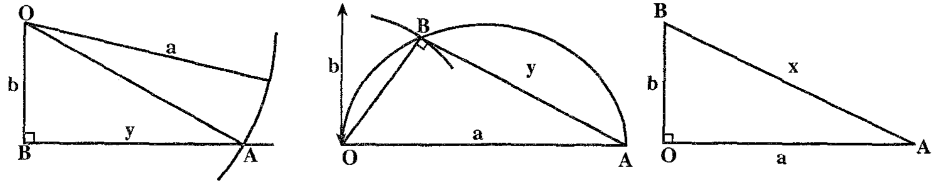
ت. فرض می‌کنیم $x = a^3$ باشد. می‌توان گفت $x = a \times a^2$. نخست پاره‌خط به طول a^2 را با استفاده از رابطهٔ $y = a^2 = a \times a$ یا $\frac{1}{a} = \frac{a}{y}$ رسم می‌کنیم. آن‌گاه پاره‌خط x را به کمک $\frac{1}{a} = \frac{a^2}{x}$ می‌توان رسم کرد.

ث. $x = a^4$ و $a^2 = y$ را اختیار می‌کنیم.

ج. با معلوم بودن پاره‌خط به طول a^2 رسم پاره‌خط $\frac{1}{a^2}$ ساده است.

د. با معلوم بودن پاره‌خط به طول a^3 پاره‌خط به طول $\frac{1}{a^3}$ به‌راحتی رسم می‌شود.

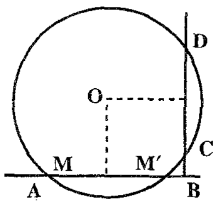
۲۴۹. طول x، طول وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است مانند OAB که ضلعهای زاویهٔ قائمه‌اش $OA = a$ و $OB = b$ باشند (شکل الف). طول y عبارت است از طول ضلع AB از مثلث قائم‌الزاویهٔ OBA ($\hat{B} = 90^\circ$) که طول وترش $OA = a$ و طول ضلع دیگرش $OB = b$ باشد (شکل (ب) و (پ)).



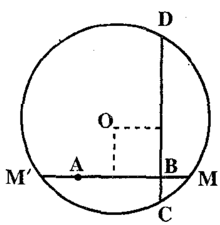
(پ) (ب) (الف)

تبصره. به کمک این مسأله می‌توان طولهایی از قبیل $\sqrt{a^2 \pm b^2 \pm c^2 \pm \cdots}$ را رسم کرد.

۲۵۰. دو پاره‌خط u و v را که t واسطهٔ هندسی آنها باشد رسم می‌کنیم. روی عمودی که در یک انتهای پاره‌خط $AB = a$، مثلاً B رسم کرده‌ایم، پاره‌خطهای $BC = u$ و $BD = v$ را در یک طرف AB (شکل الف) جدا می‌کنیم. محل برخورد عمودمنصفهای پاره‌خطهای AB و CD را O می‌نامیم. به مرکز O و به شعاع $OC = OD$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا AB را در دو نقطهٔ M و M′ قطع کند. MA و MB (یا M′A و M′B) پاره‌خطهای مطلوبند. درواقع داریم:



(الف)



(ب)

$$MA.MB = BM'.BM = BC.BD = uv = t^2$$

ترسیم بالا یک راه حل ترسیمی برای معادله‌های درجه دوم زیر است:

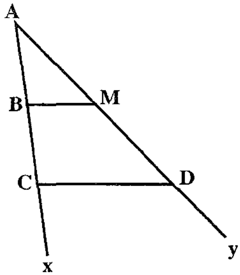
$$x^2 - ax + t^2 = 0 \ , \ x^2 - ax - t^2 = 0$$

ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم: $x^2 + ax + t^2 = 0 \ , \ x^2 + ax - t^2 = 0$

تنها از نظر علامت، ریشه‌های دو معادلهٔ قبل تفاوت دارند؛ بنابراین، ریشه‌های این معادله‌ها را نیز می‌توان با این ترسیم به‌دست آورد. پس این ترسیم راهی برای حل ترسیمی معادلهٔ درجه دومی است که ضریب x^2 در آن یک باشد.

۳.۲.۱.۱.۳. سه‌پاره‌خط

۲۵۱. رابطهٔ مسأله را به صورت $\frac{x}{c}=\frac{a}{a+b}$ می‌نویسیم.



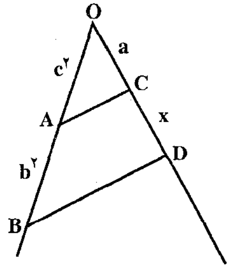
از نقطهٔ A دو نیمخط AX و AY را رسم می‌کنیم، $AB=a$ و $AC=b$ را روی AX و $AD=c$ را روی AY جدا کرده، نقطهٔ C را به نقطهٔ D وصل می‌کنیم و از نقطهٔ B خطی به موازات CD رسم می‌نماییم تا AY را در نقطهٔ M قطع کند، $AM=x$ می‌باشد. زیرا از تشابه دو مثلث ABM و ACD نتیجه می‌شود:

$$\frac{AB}{AC}=\frac{AM}{AD}\ ,\ \frac{a}{a+b}=\frac{AM}{c}$$

۲۵۲. پاره‌خط به طول a^2 را با معلوم بودن پاره‌خط به طول a رسم می کنیم. سپس $x^2=y$ را فرض کرده، پاره‌خط به طول y را با استفاده از تناسب $\frac{q}{a^2}=\frac{p}{y}$ به‌دست می‌آوریم، آن‌گاه با استفاده از $y=x^2$ پاره‌خط به طول x را رسم می‌کنیم $(1\times y=x\times x)$.

۲۵۳. می‌توان تناسب را به این شکل نوشت: $\frac{c^2}{b^2}=\frac{a}{x}$.

c^2 و b^2 را مانند مسألهٔ پیش به‌دست آورده، سپس روی Oy، $OA=c^2$ و $AB=b^2$ را جدا کرده، روی Ox، $Oc=a$ را جدا می‌کنیم. از A به C وصل کرده، سپس از B خطی به موازات AC رسم می‌کنیم $CD=x$



۲۵۴. با معلوم بودن پاره‌خطهای به طولهای a، b و c پاره‌خطهای به طولهای a^2، b^2، c^2، $a^2+b^2=c^2$، b^2-c^2 و bc، و از آن‌جا پاره‌خط به طول x به‌راحتی امکان‌پذیر است.

۴.۲.۱.۱.۳. چهار پاره‌خط

۲۵۶. الف. پاره‌خطهای به طول ab و cd را رسم می‌کنیم و با استفاده از این دو پاره‌خط، پاره‌خط x را با توجه به رابطهٔ $x \times 1 = (a-b)-(c-d)$ رسم می‌نماییم.

$$y = ab \Rightarrow 1 \times y = a \times b \Rightarrow \frac{1}{a} = \frac{b}{y} \Rightarrow y$$

$$z = cd \Rightarrow 1 \times z = c \times d \Rightarrow \frac{1}{c} = \frac{d}{z} \Rightarrow z$$

$$x = yz \Rightarrow 1 \times x = y \times z \Rightarrow \frac{1}{y} = \frac{z}{x} \Rightarrow x$$

ب. داریم : $\frac{y}{z} = \frac{ab}{cd} = x$ ، پس $\frac{1}{y} = \frac{z}{x}$ و از آن‌جا x رسم می‌شود.

پ. پاره‌خطهای به طول a^2 ، b^2 ، c^2 و d^2 و از آن‌جا پاره‌خط به طول $a^2+b^2+c^2+d^2$ ، و سپس پاره‌خط به طول $x = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ رسم می‌شود.

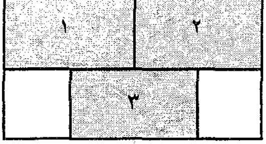
ت. با در دست داشتن پاره‌خطهای به طول a^2 و b^2 ، پاره‌خطهای به طول $a^2 - b^2$ و $a^2 + b^2$ ، و از آن‌جا پاره‌خط به طول $x = \frac{a^2-b^2}{a^2+b^2}$ رسم می‌شود.

۵.۲.۱.۱.۳. پنج پاره‌خط

۲۵۷. ۱. با معلوم بودن پاره‌خطهای به طول a، b، c، d و e، پاره‌خطهای به طول ab، bc، cd و ea، و از آن‌جا پاره‌خط به طول $ab+bc+cd+ea$ و از روی آن، پاره‌خط به طول $x = \sqrt{ab+bc+cd+ea}$ قابل رسم است.

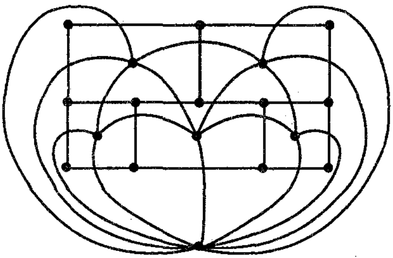
۲. پاره‌خطهای به طول $y = abc$ و $z = de$ ، و از آن‌جا پاره‌خط به طول $x = \frac{y}{z}$ رسم می‌شود.

۶.۲.۱.۱.۳. n پاره‌خط $(n \geq 6)$



(الف)

۲۵۸. فرض می‌کنیم، بتوانیم این خط شکسته را رسم کنیم. چون دورهٔ هریک از بخشهای ۱، ۲ و ۳، که در شکل (الف) هاشور خورده‌اند، شامل پنج پاره‌خط راست است و خط شکسته باید هرکدام از این پاره‌خطهای راست را،

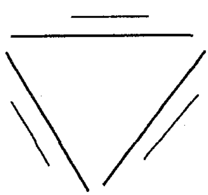


(ب)

درست یک بار قطع کند، بنابراین، هریک از این سه بخش، باید شامل یکی از دو انتهای خط شکسته باشد (اگر در یکی از این بخشها، انتهایی از خط شکسته نباشد، آن وقت، خط شکسته باید به تعداد مرتبه‌هایی که به آن وارد شده است، به‌همان تعداد هم از آن خارج شده باشد، یعنی باید پاره‌خطهای راست مرزی را، به تعداد زوج قطع کرده باشد). ولی خط شکسته، تنها دو انتها دارد. تناقض حاصل، درستی حکم مسأله را ثابت می‌کند.

▽ همین راه حل را می‌توان، به‌صورت دیگری بیان کرد. شکل ما، صفحه را به ۶ حوزه تقسیم کرده است. در هر یک از این حوزه‌ها، نقطه‌ای انتخاب می‌کنیم و، آن را، «پای تخت» حوزه می‌نامیم ؛ و برای هریک از ۱۶ پاره‌خط راست، «جاده»ای درنظر می‌گیریم که این پاره‌خط راست را قطع و پای تختهای دو حوزهٔ مجاور آن را به هم وصل کرده باشد (شکل ب). از این شبکهٔ جاده‌ها نمی‌توان به نحوی عبور کرد که، از هر جاده، تنها یک‌بار گذشته باشیم : زیرا ۴ پای تخت وجود دارد که، از هرکدام آنها، به تعداد فردی جاده می‌گذرد. و برای این که بتوان برای مسیر خود در روی جاده‌ها، راهی پیدا کرد که، از هر جاده تنها یک بار عبور کنیم، لازم است (و بسادگی می‌توان ثابت کرد که، کافی است) که، تعداد «پای‌تختهای فرد»، برابر ۰ یا ۲ باشد.

۲۵۹. نه همیشه. روی شکل، نمونه‌ای از ۶ پاره‌خط راست داده شده است (۳ پاره‌خط کوتاه و ۳ پاره‌خط بلند) که نمی‌توان آنها را به‌صورت خط شکسته‌ای (حتی غیربسته) درآورد که خودش را قطع نکند. درواقع، یکی از پاره‌خطهای راست، پاره‌خط مرزی در خط شکسته نیست، ولی دو انتهای آن را تنها می‌توان به دو انتهای پاره‌خط راست بلند نزدیک به آن وصل کرد.

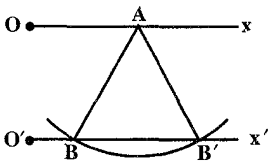


۳.۱.۱.۳. نیمخط

۱.۳.۱.۱.۳. یک نیمخط

۲۶۰. به مرکز O و به شعاعهای a و b دو دایره رسم می‌کنیم تا نیمخط Ox را در A و B قطع کنند. پاره‌خط AB جواب مسأله است.

۲.۳.۱.۱.۳. دو نیمخط



۲۶۱. به مرکز نقطهٔ دلخواه A از نیمخط Ox یا O′x′ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا نیمخط O′x′ (یا Ox) را در نقطه‌های B و B′ قطع کند. (اگر $l > d$ باشد)، پاره‌خطهای AB و AB′ جواب مسأله‌اند. مسأله بیشمار جواب دارد که یک دسته موازی AB و دستهٔ دیگری موازی AB′ است.

اگر $l = d$ باشد، مسأله یک دسته جواب دارد که عمود مشترک دو خط موازی هستند و اگر $l < d$ باشد، مسأله جواب ندارد.

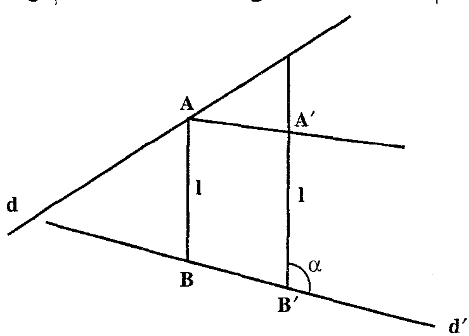
۴.۱.۱.۳. خط

۱.۴.۱.۱.۳. دو خط

۱.۱.۴.۱.۱.۳. دو خط در هر حالت

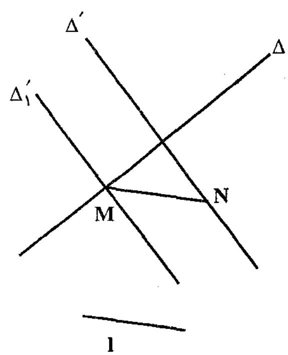
۲۶۲. از نقطهٔ دلخواه B′ روی خط d′، خطی رسم می‌کنیم که با d′ زاویهٔ α بسازد. روی این خط طول $B'A' = l$ را جدا می‌کنیم و از نقطهٔ A′ خطی موازی خط d′ رسم می‌کنیم تا خط d را در نقطهٔ A قطع کند.

از A خطی موازی A′B′ رسم می‌کنیم تا خط d′ را در نقطهٔ B قطع کند. پاره‌خط AB جواب مسأله است.



۳.۱.۱.۴.۲. سه‌خط

۳.۱.۱.۴.۲.۱. دو خط، یک راستا

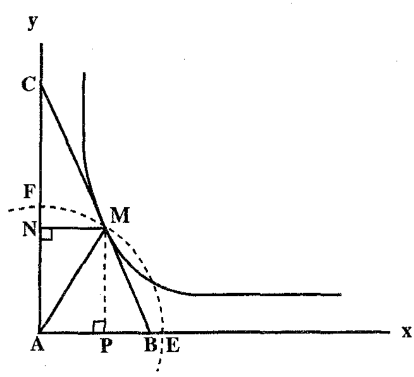


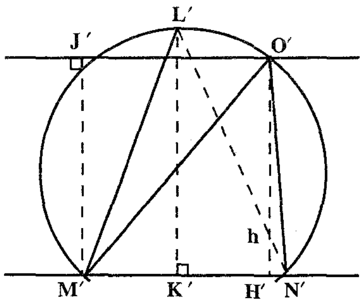
۲۶۳. دو خط Δ و Δ' مفروضند. می‌خواهیم بر آنها قطعه خطی به طول l که موازی با امتداد مفروضی است، متکی کنیم. Δ' را به اندازهٔ بردار l انتقال می‌دهیم تا Δ'_1 به دست آید. از نقطهٔ M محل برخورد Δ و Δ'_1 خط MN را به موازات l رسم می‌کنیم. اگر جهت بردار l معین باشد، مسأله دارای یک جواب و در غیر این صورت دارای دو جواب خواهد بود.

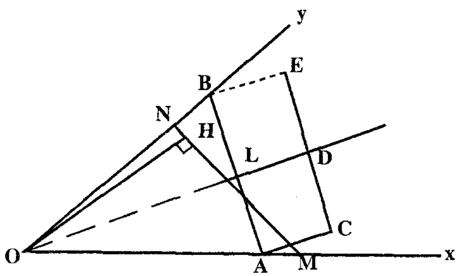
۳.۱.۱.۵. زاویه

۳.۱.۱.۵.۱. تنها یک زاویه

۲۶۴. فرض می‌کنیم مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC به مساحت $۲k^۲$ و طول ضلع $BC = ۲l$ باشد. از نقطهٔ M وسط وتر BC، خطهایی موازی AB و AC رسم می‌کنیم تا مستطیل APMN به‌وجود آید. این مستطیل نصف مساحت مثلث را دارد، یعنی مساحتش برابر $k^۲$ است و $AM = \frac{۱}{۲}BC = l$ می‌باشد. بنابراین نقطهٔ M روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع l قرار دارد، در این دایره، مستطیل APMN را چنان رسم می‌کنیم که مساحتش برابر $k^۲$ باشد. بالاخره باید $PB = AP$ اختیار شود و BMC را رسم می‌کنیم.







۲۶۵. استفاده از مسألهٔ عکس، ما را به راه حلی زیبا و ساده راهنمایی می‌کند.

۱. روی $M'N' = l$ کمان درخور زاویهٔ داده شدهٔ xOy را رسم می‌کنیم. h مقدار معلومی است، زیرا : $lh = ۲k^۲$، از آن‌جا، $h = \frac{۲k^۲}{l}$ است. از M' خطی عمود بر $M'N'$ و به طول h اخراج می‌کنیم تا نقطهٔ J' به‌دست آید.

از J' خطی موازی $M'N'$ رسم می‌کنیم تا کمان درخور را در O' قطع کند و مثلث $M'O'N'$ که همنهشت با مثلث جواب مسأله است، به‌دست آید.

۲. $OM = O'M'$ و $ON = O'N'$ را اختیار می کنیم.

۳. حداکثر مقدار $k^۲$ برای پاره‌خط داده شده به طول l. برای یک پاره‌خط داده شده، بزرگترین مثلثی که می‌توانیم داشته باشیم، مثلث متساوی‌الساقین $M'L'N'$ است. از آن‌جا برای قاعدهٔ به طول l و زاویهٔ xOy، باید داشته باشیم :

$$k^۲ = \frac{M'N'.L'K'}{۲} = \frac{l.L'K'}{۲}$$

از آن‌جا برای طول معلوم l، مثلث متساوی‌الساقین AOB ماکزیمم است.

۴. کمترین مقدار l برای یک مقدار داده شدهٔ $k^۲$ قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقینی است که مساحتش $k^۲$ باشد.

تبصره. مسأله به روشهای جبری نیز قابل حل است.

۳.۱.۱.۶. نقطه، پاره‌خط

۳.۱.۱.۶.۱. یک نقطه، یک پاره‌خط

۲۶۶. نقطهٔ برخورد دایره به مرکز C و به شعاع l با پاره‌خط AB (درصورت وجود) جواب مسأله است.

۷.۱.۱.۳. نیمخط، نقطه

۱.۷.۱.۱.۳. یک نیمخط، یک نقطه

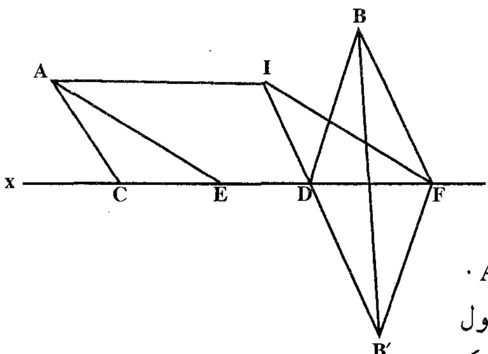
۲۶۷. نقطهٔ برخورد دایره به مرکز A و به شعاع l با نیمخط Ox (در صورت وجود) جواب مسأله است.

۸.۱.۱.۳. خط، نقطه

۱.۸.۱.۱.۳. یک نقطه، یک خط

۲۶۸. از نقطهٔ A خط Δ' را موازی خط Δ رسم می‌کنیم. سپس به مرکز A و به شعاع l دایره‌ای رسم می‌کنیم تا Δ' را در دو نقطهٔ B و B' قطع کند. پاره‌خطهای AB و AB' جواب مسأله‌اند.

۲.۸.۱.۱.۳. یک خط، دو نقطه



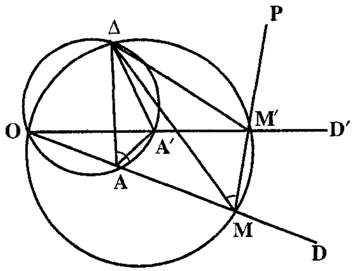
۲۶۹. خط شکستهٔ AEFB را چنان رسم می‌کنیم که $EF = a$ باشد و EF را به وضع AI انتقال می‌دهیم، داریم : $AE = IF$ و $AE + EF + FB = IF + EF + FB$، و چون EF مقدار ثابتی است، طول این خط شکسته وقتی می‌نیمم است که $IF + FB$ کمترین مقدار ممکن را دارا باشد. امّا اگر B' قرینهٔ B نسبت به x باشد، $IF + FB = IF + F'B$ و کمترین مقداری که این مجموع می تواند اختیار کند، IB' است و از آن‌جا ساختمان زیر نتیجه می‌شود : قطعه خط AI را موازی با x و مساوی با a رسم می‌کنیم، FB' را وصل می‌کنیم تا x را در D قطع کند، سپس DC را مساوی با a جدا می‌نماییم. ACDB مسیر مطلوب است.

۳.۱.۱.۸.۳. دو خط، یک نقطه

۳.۱.۱.۸.۳.۱. دو خط در هر حالت، یک نقطه

۲۷۰. فرض کنیم A و A′، M و M′ دو زوج نقطه‌های متناظر باشند. نقطهٔ مضاعف این همسانی نقطهٔ Δ است که نقطهٔ برخورد دیگر دو دایرهٔ (AA′O) و (MM′O) است (شکل). وقتی که M و M′ روی D و D′ تغییر می‌کنند، مثلث ΔMM′ با مثلث ΔAA′ مستقیماً متشابه می‌ماند، پس:

$$(\Delta M, MP) = (\Delta A, AA') \quad (۱)$$

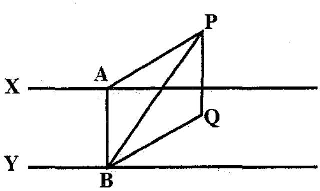


پس M محل برخورد خط D با مکان M که از رابطهٔ (۱) مشخص می‌شود، می‌باشد. M را به P وصل می‌کنیم تا خط مطلوب به‌دست آید. این مسأله دو جواب یا یک جواب دارد و یا ممکن است جواب نداشته باشد.

۳.۱.۱.۸.۳.۲. دو خط موازی، یک نقطه

۲۷۱. فرض کنیم مسأله حل شده است: از P خط PQ را هم‌سنگ AB رسم می‌کنیم (شکل). چهارضلعی PABQ متوازی‌الاضلاع است.

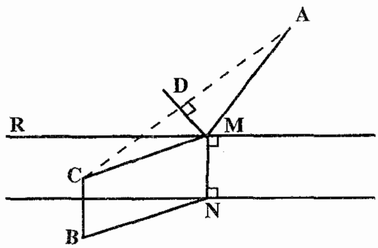
به فرض $\frac{PA}{PB} = \frac{m}{n}$ داریم: $\frac{QB}{PB} = \frac{m}{n}$ و از این‌جا راه حل مسأله به‌دست می‌آید. از P خط PQ را بر دو خط متوازی عمود می‌کنیم و طول آن را برابر با فاصلهٔ آن دو خط اختیار می‌نماییم و مکان نقطه‌هایی را که نسبت فاصله‌شان از دو نقطهٔ P و Q برابر $\frac{m}{n}$ باشد (یک دایره است، کدام دایره؟) رسم می‌کنیم تا خط y را در B قطع کند. از این نقطه AB را عمود بر خطهای متوازی رسم می‌کنیم.



۳.۱.۱.۸.۴. دو خط، دو نقطه

۳.۱.۱.۸.۴.۱. دو خط موازی، دو نقطه

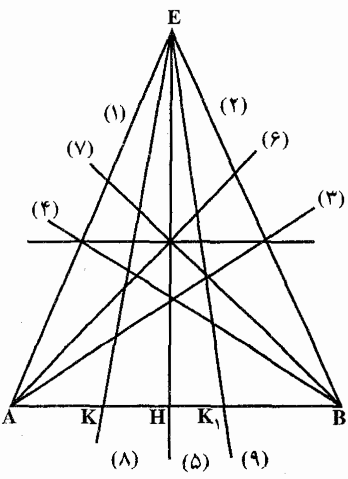
۲۷۳. فرض کنیم AMNB خط شکستهٔ جواب مسأله باشد، به قسمی که MN عمود بر RM و $AM = BN$ باشد. از نقطهٔ B پاره‌خط BC را موازی و مساوی MN رسم می‌کنیم و از C به M و A وصل می‌نماییم. چهارضلعی MNBC متوازی‌الاضلاع است. پس، $CM = BN = AM$ ، یعنی مثلث ACM در رأس M متساوی‌الساقین است. بنابراین عمودمنصف پاره‌خط AC از M می‌گذرد. حال برای حل مسأله به‌ترتیب زیر عمل می‌کنیم:



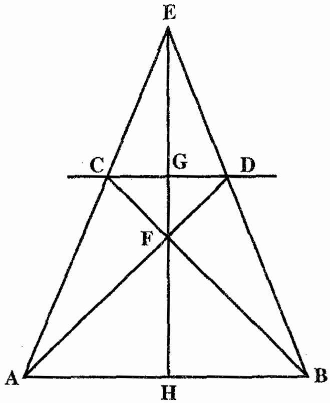
از نقطهٔ B خطی عمود بر طول رودخانه رسم می‌کنیم و روی آن پاره‌خط BC را برابر عرض رودخانه اختیار می‌کنیم (نقطهٔ B را به اندازهٔ عرض رودخانه در امتداد عمود بر طول رودخانه انتقال می‌دهیم) از C به A وصل می‌کنیم و عمودمنصف پاره‌خط AC را می‌کشیم. نقطهٔ برخورد این عمودمنصف با ساحل R رودخانه، نقطهٔ M است. از M عمودخط MN را عمود بر رودخانه رسم می‌کنیم. این‌پاره‌خط نشانگر پل موردنظر است.

۲۷۴. کافی است (بدون درنظر گرفتن دو خط راست مفروض)، ۹ خط راست رسم کنیم (روی شکل (الف)، خطهای راست را، بترتیب رسم آنها، شماره‌گذاری کرده‌ایم). ثابت می‌کنیم، روی این شکل: $AH = BH = \frac{1}{2}AB$.

پاره‌خط راست CD را می‌توان از AB با تجانس به مرکز E و به مرکز F به‌دست آورد؛ در هریک از این تجانسها، نقطهٔ H به نقطهٔ G تبدیل می‌شود



(الف)



(ب)

(شکل (ب)). بنابراین :

$$\frac{CG}{AH}=\frac{EC}{EA}=\frac{CD}{AB}=\frac{FC}{FB}=\frac{CG}{BH}$$

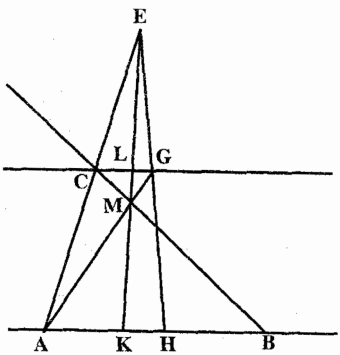
از آن‌جا $AH = BH$.

پاره‌خط راست CG را می‌توان از پاره‌خط راست AH در تجانس به مرکز E و یا از پاره‌خط راست AB در تجانس به مرکز M به‌دست آورد (شکل (ج)).

در هریک از این دو تجانس، نقطهٔ L به نقطهٔ K تبدیل می‌شود. چون $۲AH = AB$، پس :

$$\frac{CL}{AK}=\frac{EC}{EA}=\frac{CG}{AH}=\frac{۲CG}{AB}=\frac{۲CM}{MB}=\frac{۲CL}{BK}$$

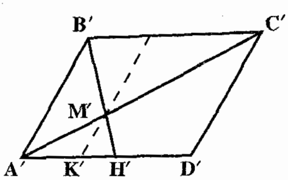
آن‌جا $۲AK = BK$، یعنی $AK=\frac{۱}{۳}AB$.



(ج)

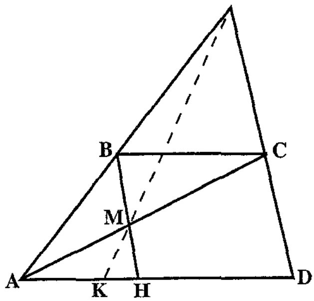
به‌همین ترتیب، ثابت می‌شود که، روی شکل (الف) $BK_۱ = \frac{۱}{۳}AB$، یعنی $AK = KK_۱ = K_۱B$.

∇ با ادامهٔ عملهایی از این‌گونه (رسم خط راست AL و، سپس، از نقطهٔ N محل برخورد آن با BC، رسم خط راست EN که AB و CD را قطع می‌کند و غیره) می‌توان $\frac{۱}{۴}$ پاره‌خط راست AB، سپس $\frac{۱}{۵}$ آن و، به طور کلی، $\frac{۱}{n}$ آن را جدا کرد ($n \in |N$). بین این مسأله که در آن صحبت بر سر نسبت پاره‌خطهای راست در ذوزنقه است، با مسألهٔ قبل که در آن، نسبت پاره‌خطهای راست در متوازی‌الاضلاع مورد بررسی قرار گرفت، خویشاوندی نزدیکی وجود دارد (شکل (د.۱)). خط راستی که از رأس B' از متوازی‌الاضلاع



(د.۱)

$A'B'C'D'$ به نقطهٔ H'، وسط ضلع $A'D'$ وصل شود، از قطر $A'C'$، یک سوم آن را جدا می‌کند: $A'M' = \frac{1}{3}A'C'$. خط راستی هم که از نقطهٔ M' موازی $A'B'$ رسم شود، از ضلعهای $B'C'$ و $A'D'$، یک سوم آنها را جدا می‌کند. همان‌طور که می‌بینیم شکلهای (د.۱) و (د.۲) خیلی شبیه یکدیگرند.

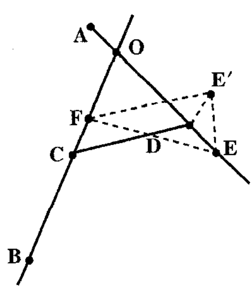


(د.۲)

۳.۱.۱.۸.۴.۲. دو خط متقاطع، دو نقطه

۲۷۶. ثابت می‌کنیم نزدیکترین موضع دو متحرک، نسبت به هم، وقتی است که در نقطه‌های C و D، که به یک فاصله از O قرار دارند، واقع باشند (شکل). فرض کنید دو متحرک در نقطه‌های دیگری مثل E و F واقع باشند، پاره‌خط DE'، قرینهٔ DE نسبت به CD را، می‌سازیم. می‌بینیم که: $EF > FE' = CD$ (زیرا EF، وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ $FE'E$ است).

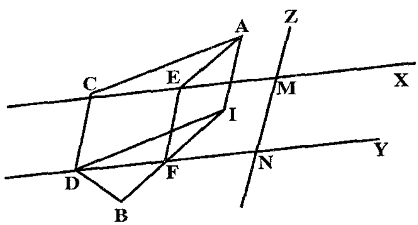
اگر $A\hat{O}B = 90°$، $AD = a$، $BO = b$ و $a > b$ باشد، حداقل فاصلهٔ بین دو متحرک بعد از $\frac{a+b}{2v}$ واحد زمان بعد از شروع حرکت، به‌دست می‌آید و این فاصله برابر است با $\frac{a-b}{\sqrt{2}}$.



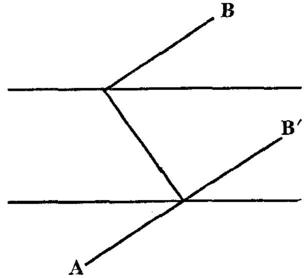
۳.۱.۱.۸.۵. سه خط، دو نقطه

۳.۱.۱.۸.۵.۱. دو خط موازی، یک راستا، دو نقطه

۲۷۷. خط شکسته دلخواه ACDB را درنظر می‌گیریم که CD∥Z باشد. A را به اندازهٔ $\overrightarrow{CD}$ انتقال می‌دهیم و از I به B وصل می‌کنیم. I ثابت است پس وقتی $AC + CD + DB = AI + ID + DB$، می‌نیمم است که $ID + DB$ می‌نیمم باشد، و این کمترین مقدار ممکن همان IB است. بنابراین برای حل مسأله AI را مساوی و موازی با MN رسم می‌کنیم و IB را وصل می‌کنیم تا y را در F قطع کند و FE را موازی با Z رسم می‌نماییم. خط شکستهٔ AEFB خط شکستهٔ خواسته شده است.



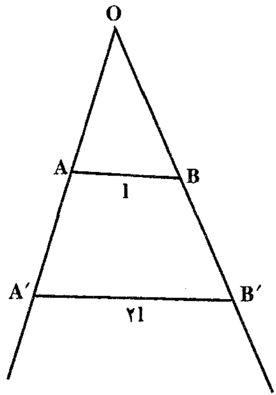
۲۷۸. کوتاهترین راه از A به B. از B خطی به موازات مسیر شنا، و مساوی با آن، رسم می‌کنیم. (این خط در شکل نشان داده شده است)، تا نقطهٔ B′ به‌دست آید. از A به B′ وصل می‌کنیم. اگر B′ نقطهٔ واقعی و مطلوب ما بود، با همین راه کوتاه می‌توانستیم، از A به آن برسیم، ولی چون این نقطه غیرواقعی است، بنابراین از نقطه‌ای که از خط مستقیم با رودخانه برخورد کرده است، به موازات مسیر شنا رسم می‌کنیم، تا لبهٔ رودخانه را در طرف دیگر نیز قطع کند. از نقطهٔ تقاطع اخیر به B وصل می‌کنیم. به این ترتیب کوتاهترین مسیر جهت رفتن از A به B حاصل می‌شود.



۳.۱.۱.۹. زاویه، نقطه

۳.۱.۱.۹.۱. یک زاویه، یک نقطه

۲۷۹. نقطهٔ A' را روی Ox چنان تعیین می‌کنیم که $OA' = ۲OA$ باشد. از A و A' دو خط موازی دلخواه رسم می‌کنیم تا ضلع Oy را در دو نقطهٔ B و B' قطع کنند. $A'B' = ۲AB$ است.



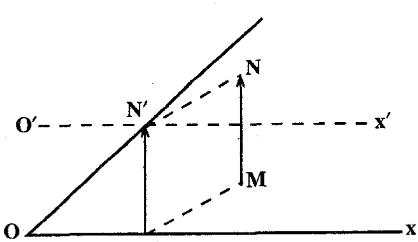
نکتهٔ ۱. می‌توان نقطهٔ A'' را روی Ox چنان اختیار کرد که $OA = ۲OA''$ باشد. سپس از A و A'' دو خط موازی دلخواه رسم کرد.

نکتهٔ ۲. با استفاده از تجانس نیز مسأله قابل حل است.

۳.۱.۱.۱۰. زاویه، پاره‌خط

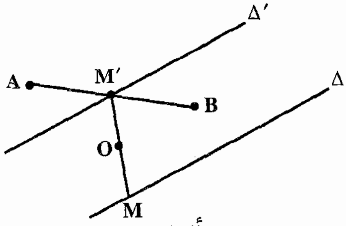
۳.۱.۱.۱۰.۱. یک زاویه، یک پاره‌خط

۲۸۰. اگر $M'N'$ پاره‌خط موردنظر باشد، چهارضلعی $MM'N'N$ متوازی‌الاضلاع است، پس $M'N'$ موازی و مساوی MN است، یعنی $N' = T_{\overrightarrow{MN}}(M')$. بنابراین برای حل مسأله ضلع Ox را به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{MN}$ انتقال می‌دهیم تا ضلع Oy را در N' قطع کند. از N' موازی MN رسم می‌کنیم. M' به‌دست می‌آید، و از آن‌جا پاره‌خط $M'N'$ جواب مسأله است.



۳.۱.۱.۱۱. خط، پاره‌خط، نقطه

۳.۱.۱.۱.۱۱.۱. یک خط، یک پاره‌خط، یک نقطه

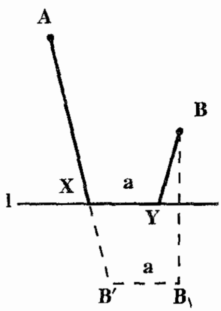


۲۸۱. خط Δ ، پاره‌خط AB و نقطهٔ O را درنظر می‌گیریم.

قرینهٔ مرکزی خط Δ را نسبت به نقطهٔ O به دست آورده، Δ' می‌نامیم. نقطهٔ برخورد Δ' با پاره‌خط AB (در صورت وجود) را M' می‌نامیم.

$M'O$ خط Δ را در M قطع می‌کند. پاره‌خط MM' جواب مسأله است.

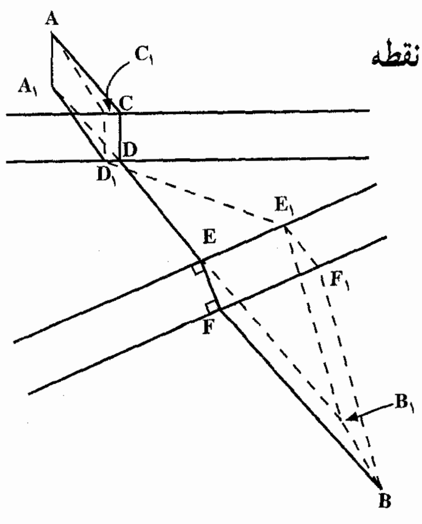
۳.۱.۱.۱.۱۱.۲. یک خط، یک پاره‌خط،دو نقطه



۲۸۲. چون طول پاره‌خط XY برابر a است، می‌بایست می‌نیمم مجموع $AX+BY$ را به‌دست آوریم. فرض کنیم که پاره‌خط XY پیدا شده است. یک لغزه در راستای محور l به طول a، B را به نقطهٔ جدید B' می‌برد، و Y را به X (شکل)، پس $BY = B'X$ و بنابراین:

$$AX+BY=AX+B'X$$

پس باید طول مسیر AXB' می‌نیمم باشد. از این‌جا نتیجه می‌شود که X باید محل تقاطع خط l با AB' باشد.



۳.۱.۱.۱.۱۱.۳. چهارخط، دو پاره‌خط، دو نقطه

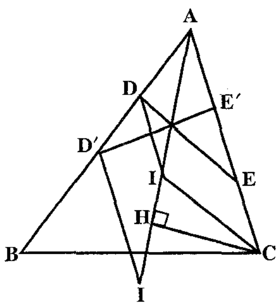
۲۸۳. مسیر بین دو شهر A و B از پنج پاره‌خط تشکیل می‌شود که دو پاره‌خط از آنها برابر درازای پل یا عرض رودخانه است. اگر از عرض رودخانه که طولهای ثابتی هستند صرفنظر کنیم، طول سه پاره‌خط دیگر باید می‌نیمم شود، چنانچه از نقطهٔ A به اندازهٔ AA_1 برابر عرض رودخانهٔ اولی، به ساحل رودخانه نزدیک شویم و همچنین BB_1 را برابر عرض رودخانهٔ دیگر جدا کرده و به

ساحل نزدیک شویم، A_1B_1 باید مساوی سه قطعه خط دیگر شود. این خط سواحل دو رودخانه را طبق شکل در نقطه‌های D و E قطع می‌کند. مسیر مطلوب ACDEFB خواهد شد، زیرا $CD = AA_1$ و $EF = BB_1$، طولهای ثابتی هستند و مجموع $AC + DE + FB$ هم طبق شکل برابر خط مستقیم $ADEB_1 = AD + DE + EB_1$ است که کوتاهترین فاصله خواهد شد.

۲.۱.۳. رسم پاره‌خط با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

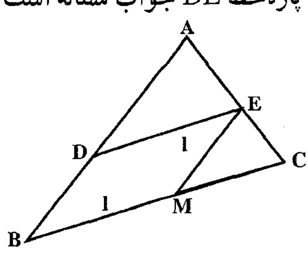
۱.۲.۱.۳. مثلث در حالت کلی

۱.۱.۲.۱.۳. تنها یک مثلث



۲۸۴. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم و DE را به موازات خود انتقال می‌دهیم تا به وضع CI درآید. داریم: $AD = CE = ID$ اما زاویهٔ $B\hat{D}I = B\hat{A}C$، زاویهٔ خارجی مثلث متساوی‌الساقین ADI است. بنابراین AI نیمساز زاویهٔ A می‌باشد. بنابراین نیمساز زاویهٔ A را رسم کرده، به مرکز C و به شعاع a دایره‌ای رسم می‌کنیم تا نیمساز مزبور را در I قطع کند و ID را موازی CA رسم می‌کنیم و از D خطی موازی CI رسم می‌کنیم تا AC را در E قطع کند و این جواب مسأله است. اگر عمود CH را بر نیمساز رسم کنیم، شرط امکان مسأله آن است که $CH \le a$ باشد و مسأله عموماً دو جواب دارد.

۲۸۵. روی ضلع BC پاره خط BM را به طول l جدا می‌کنیم و از M خطی موازی ضلع AB رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ E قطع کند. از E موازی BC رسم می‌کنیم تا AB را در نقطهٔ D قطع کند. پاره‌خط DE جواب مسأله است.



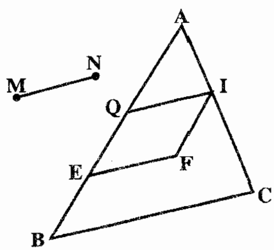
۳.۱.۲.۱.۲. یک مثلث، نقطه

۳.۱.۲.۱.۲.۱. یک مثلث، یک نقطه

۲۸۶. دایره‌ای به مرکز D و به شعاع l رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دایره با ضلعهای مثلث، نقطهٔ E است و به تعداد نقطه‌های برخورد، مسأله جواب دارد.

۳.۱.۲.۱.۲.۲. یک مثلث، دو نقطه

۲۸۷. از M به N وصل می‌کنیم. از نقطه‌ای دلخواه مانند E روی ضلع AB پاره‌خط EF را موازی و مساوی MN رسم می‌کنیم. از F خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ P قطع کند. از T موازی MN رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در نقطهٔ Q قطع کند. پاره‌خط PQ جواب مسأله است.



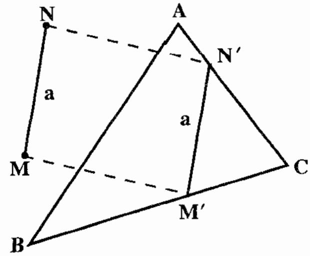
۳.۱.۲.۱.۲.۳. یک مثلث، n نقطه $(n \geq ۳)$

۲۸۸. مسأله را حل شده فرض کنید و از ویژگیهای داده شده، استفاده کنید.

۳.۱.۲.۱.۳. یک مثلث، پاره‌خط

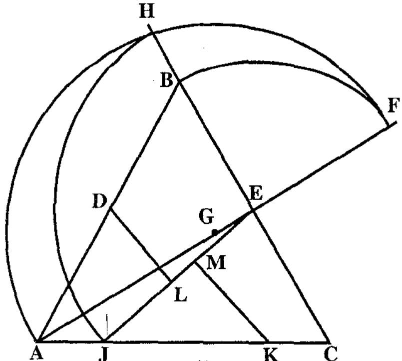
۳.۱.۲.۱.۳.۱. یک مثلث، یک پاره‌خط

۲۸۹. پاره‌خط $MN = a$ را به صورت یک بردار درنظر می‌گیریم و مثلث ABC را به بردار a یک بار درجهت مثبت، و بار دیگر درجهت منفی انتقال می‌دهیم تا مثلثهای $A'B'C'$ و $A''B''C''$ به‌دست آیند. آن‌گاه نقطهٔ برخورد AB و $A''C''$ را به نقطهٔ برخورد AC و $A'B'$ وصل کنید.



۳.۱.۲.۲. مثلث متساوی‌الاضلاع

۳.۱.۲.۲.۱. یک مثلث متساوی‌الاضلاع



(الف)

۲۹۰. راه حل در شکل (الف) نشان داده شده است، که با وجود ساده نبودن آن، راه حل قشنگی است. دربارهٔ شکل باید توضیح کمی داد : AB و BC را نصف می‌کنیم و نقطه‌های D و E را به‌دست می‌آوریم. میانهٔ AE را امتداد می‌دهیم و روی آن EF = EB را جدا می‌کنیم. به مرکز نقطهٔ G وسط AF، نیمدایرهٔ AHF را رسم می‌کنیم. CB را تا H امتداد می‌دهیم. به مرکز E و شعاع EH، قوس HJ را می‌کشیم. JK = BE را جدا می‌کنیم، دنبالهٔ کار به اندازهٔ کافی روشن است. طرح کنندهٔ معما با خوشحالی این مسأله را طرح کرد که یک قطعه مثلثی با سه برش به چهار قسمت چنان تقسیم شود که از آنها بتوان یک مربع درست کرد (شکل (ب)).

برای شکل قبل (شکل الف)، این علامتها را درنظر می‌گیریم :

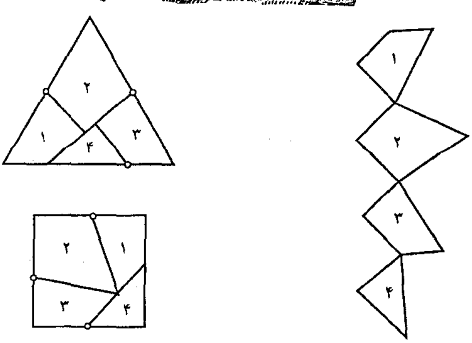
چهارضلعی JADL : شکل (۱)

چهارضلعی DBEL : شکل (۲)

چهارضلعی ECKM : شکل (۳)

مثلث KJM : شکل (۴)

اگر تختهٔ مثلثی کمی کلفت باشد، می‌توان در نقطه‌های D، E و K لوله‌های کوچکی قرار داد، یک رشته شامل چهار شکل نامنظم به‌دست می‌آید که از آن می‌توان یک مربع یا یک مثلث متساوی‌الاضلاع درست کرد. (شکل (پ)).

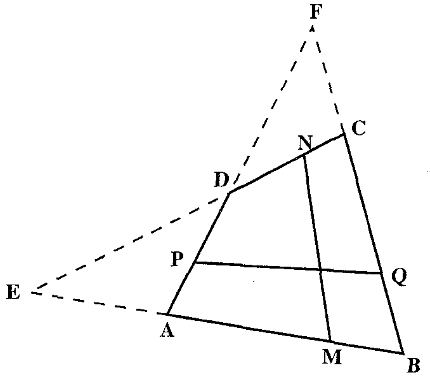


(ب)

۳.۱.۳. رسم پاره‌خط با معلوم‌بودن: چند ضلعی، چندضلعی و داده‌های دیگر

۱.۳.۱.۳. چهارضلعی

۱.۱.۳.۱.۳. چهارضلعی در حالت کلی



۲۹۱. مساحت چهارضلعی را مساوی $2a^2$ فرض می‌کنیم. نقطهٔ برخورد AB و CD را E و نقطهٔ برخورد دو ضلع AD و BC را F می‌نامیم. مورب MN را باید چنان رسم کنیم که با AB و CD زاویه‌های مساوی بسازد و داشته باشیم:

$$S_{MNE} = S_{ADE} + a^2$$

به همین روش مورب PQ را رسم می‌کنیم. سپس PQ را با MN مقایسه می‌کنیم.

۲۹۲. می‌دانیم که چهارضلعی را با معلوم بودن پنج جزء آن می‌توان مشخص کرد. در حالت مفروض، تنها سه جزء چهارضلعی KLMN معلوم است: مساحت و دو جزء دیگر. به همین مناسبت، در این مورد به اصطلاح، دو درجه آزادی داریم و همین آزادی به ما امکان می‌دهد که بتوانیم چهارضلعی KLMN را از چهار قطعه‌ای که چهارضلعی ABCD را تشکیل می‌دهند، بسازیم. از حالتهای مختلفی که برای مفروض بودن دو جزء چهارضلعی KLMN می‌توان در نظر گرفت، تنها یک حالت را مورد بررسی قرار می‌دهیم: فرض می‌کنیم که ضلع MN و زاویهٔ K معلوم باشد. E، F، G و H را وسط ضلعهای چهارضلعی مفروض ABCD می‌گیریم. به مرکز H و شعاع مساوی $\frac{MN}{2}$ قوسی می‌زنیم، سپس روی پاره‌خط FG، قوسی در خور زاویهٔ مفروض K رسم می‌کنیم (دایره‌ای که از F و G بگذرد، به نحوی که از هر نقطهٔ قوس FG به F و G وصل کنیم، زاویه‌ای مساوی K به‌دست آید).

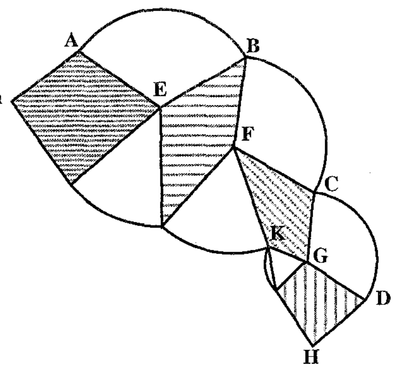
O، نقطهٔ برخورد دو قوسی را که رسم کرده‌ایم به نقطه‌های E، F، G و H وصل می‌کنیم، چهار پاره‌خط OE، OF، OG و OH چهارضلعی مفروض ABCD را به چهار قسمت تقسیم می‌کند، به نحوی که از آنها می‌توان چهارضلعی مطلوب KLMN

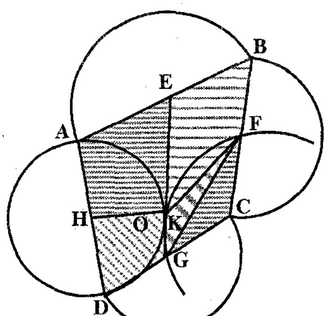
را ساخت. فرض می‌کنیم در نقطه‌های E، F، G و H لولاهایی وجود داشته باشد. چهارضلعی EBFO را در جای خود نگه می‌داریم و سایر چهارضلعیها را به نحوی که در شکل دیده می‌شود، جابجا می‌کنیم. به این نکته‌ها هم توجه کنید :

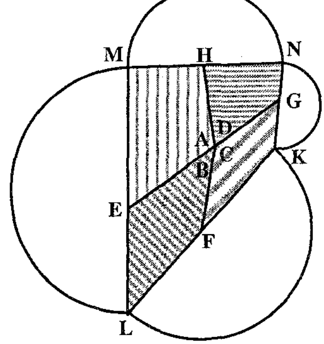
۱. دو قسمت از چهارضلعی تنها منتقل می‌شود (یکی از آنها ضمن راه به اندازهٔ ۳۶۰ درجه دوران می‌کند) و دو قسمت دیگر به اندازهٔ ۱۸۰ درجه دوران می‌کند.

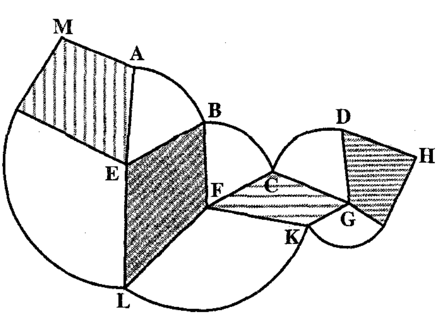
۲. جوابی که پیدا کردیم، تنها جواب ممکن نیست. در حقیقت مرکز دایره‌ای را که به شعاع $\frac{MN}{۲}$ رسم کردیم، می‌توان به جای H، یکی از نقطه‌های E، F یا G گرفت. همچنین زاویهٔ K را به جای پاره‌خط FG، می‌توان روی پاره‌خط EF ساخت. علاوه بر اینها دو دایره، در حالت کلی، یکدیگر را در دو نقطه قطع می‌کنند. بنابراین در حالت کلی، ۲×۲×۴ ، یعنی ۱۶ حالت مختلف وجود دارد.

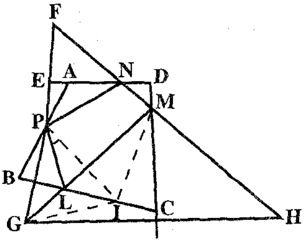
۳. ما از لولای نقطهٔ H استفاده نکردیم ؛ ولی می‌توان از لولای H هم استفاده کرد و در عوض یکی از لولاهای دیگر را بدون استفاده گذاشت.











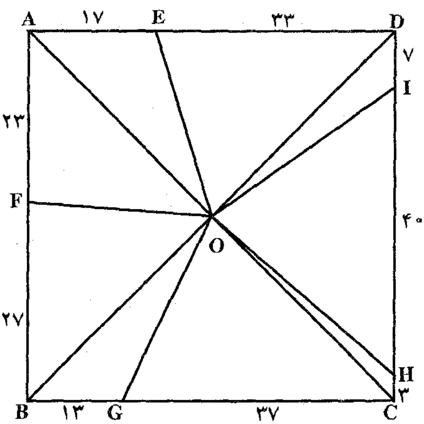
۲۹۳. قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به خط AD را به‌دست آورده و F می‌نامیم؛ همچنین قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به BC را G می‌نامیم. سپس قرینهٔ نقطهٔ G نسبت به CD را تعیین کرده، H می‌نامیم و آن‌گاه FH، NP، MG و LP را رسم می‌کنیم. چهارضلعی PLMNP به محیط می‌نیمم است که مساوی FH می‌باشد. در نتیجه برای هر نقطهٔ دلخواه مانند I داریم: $PI + IM > PL + LM$

تبصره. ۱. در مسأله داده شده، نقطه شروع، ممکن است با نقطهٔ پایان یکی نباشد. و هر یک از این دو نقطه می‌توانند درون چهارضلعی باشند.

۲. اگر قرینهٔ نقطهٔ P نسبت به AD را P_1، قرینهٔ P_1 نسبت به CD را P_3 و قرینهٔ P_2 نسبت به ... بنامیم؛ می‌توانیم مسأله را برای یک چندضلعی با تعداد ضلعهای دلخواه حل کنیم.

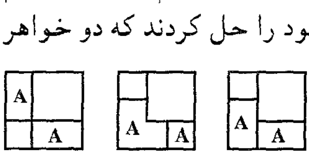
۳.۱.۳.۱.۲. چهارضلعیهای ویژه

۳.۱.۳.۱.۲.۱. مربع

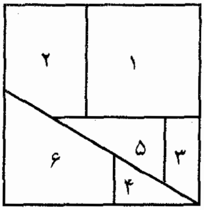


۲۹۴. شکل، روش انجام برشها را نشان می‌دهد. با توجه به این که همهٔ مثلثهایی که رأس آنها در مرکز مربع است، ارتفاعی برابر $\frac{50}{2} = 25\text{cm}$ دارند؛ پس سهم هر نفر از محیط مربع $\frac{4\times 50}{5} = 40\text{cm}$ است.

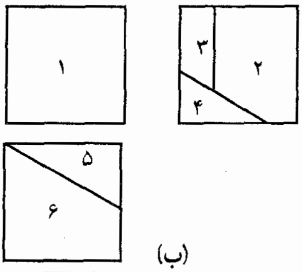
۲۹۵. خواهرها با هم بحث کردند و چون راه‌حلی مناسب پیدا نکردند، تصمیم گرفتند از تقسیم کردن مساوی صرفنظر کنند و به این ترتیب مشکل خود را حل کردند که دو خواهر بزرگتر (که دوقلو بودند) هر کدام $\frac{4}{9}$ فرش را بردارند و خواهر کوچکتر سومی $\frac{1}{9}$ آن را. برای این منظور هم سه راه‌حل پیدا کردند (شکل الف):



(الف)



یکی مربع بزرگتر را گرفت، دومی مربعی به همان اندازه از دو قسمت A و A برداشت و سومی مربع کوچکتر را انتخاب کرد. ولی یک ریاضیدان ماهر، دخترهای غمگین را تسلی داد و گفت که می‌تواند فرش را به شش قسمت چنان تقسیم کند که از آنها بتوان سه مربع مساوی درست کرد.

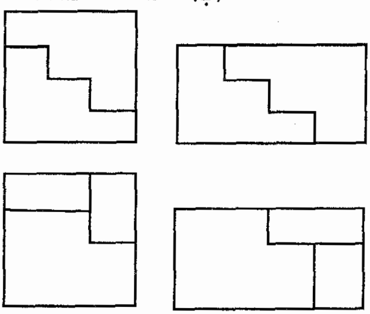


(ب)

راه حل این ریاضیدان در شکل (ب) مشخص شده است، در این شکل یکی از زاویه‌های حادهٔ مثلث قائم‌الزاویهٔ ۴، مساوی ۳۰ درجه است و ارتفاع ذوزنقهٔ ۶، برابر است با ضلع هر یک از سه مربع کوچک فرش.

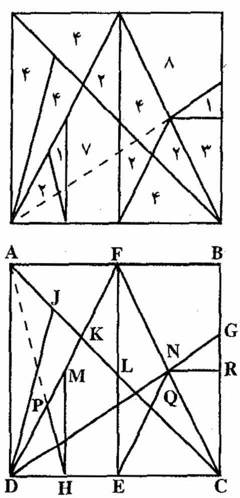
یکی از خواهرها سهم خود را به صورت یک قطعهٔ کامل، ولی دو خواهر دیگر به صورت چند قطعه تحویل گرفتند.

ولی آن که فرش یک تکه گرفته بود، خواست آن را به صورت مستطیلی درآورد که نسبت طول و عرض آن مثل ۹ :۱۶ باشد. این مشکل را هم ریاضیدان حل کرد و دو راه‌حل مختلف برای آن ارائه داد، شکل (ج).



(ج)

۲۹۶. در مربع سمت چپ شکل روش این تقسیم، و در مربع سمت راست، مقدار صورت این کسرها داده شده است. اگر مربع ABCD را واحد بگیریم، به‌دست می‌آید:



مثلث AJD $= \frac{۴}{۴۸}$

مثلث PMH $= \frac{۱}{۴۸}$

چهارضلعی FBGN $= \frac{۸}{۴۸}$

و غیره.

معمای جالبی خواهد بود که اگر بخواهیم قسمتهای این مربع را (بدون تغییر جای آنها) طوری گروه‌بندی کنند که :

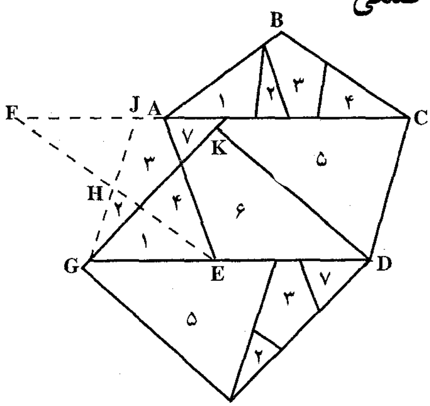
۱. مربع به سه قسمت مساوی تقسیم شود، هر قسمت مساوی $\frac{۱۹}{۴۸}$.

۲. مربع به شش قسمت مساوی و هر قسمت مساوی $\frac{۸}{۴۸}$ تقسیم شود.

۳. مربع به سه قسمت طوری تقسیم شود که صورت کسرهای آنها سه عدد متوالی باشد، یعنی $\frac{۱۵}{۴۸}$، $\frac{۱۶}{۴۸}$ و $\frac{۱۷}{۴۸}$.

۴. مربع به نه قسمت طوری تقسیم شود که صورت کسرهای متناظر آنها عددهای طبیعی از ۱ تا ۸ و عدد ۱۲ باشد.

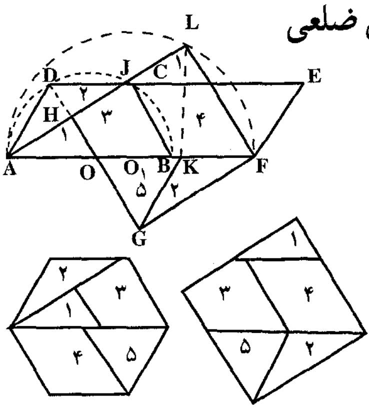
۲.۳.۱.۳. پنج ضلعی



۲۹۷. قطر CA را امتداد می‌دهیم و AF = AB را جدا می‌کنیم (شکل) ؛ نقطه‌های F و E را به هم وصل می‌کنیم. ذوزنقهٔ FEDC هم‌ارز پنج‌ضلعی ABCDE می‌شود. از نقطهٔ H وسط FE خط GJ را موازی CD رسم می‌کنیم.

متوازی‌الاضلاع JGDC هم‌ارز پنج ضلعی اوّلیه می‌شود. بنابراین از این‌جا به بعد باید مثل مسألهٔ بعد عمل کرد.

۳.۳.۱.۳. شش ضلعی



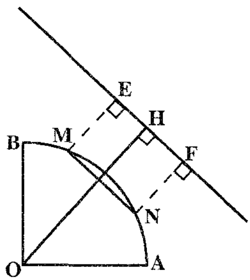
۲۹۸. قبل از همه باید از دو نیمهٔ شش ضلعی، یعنی ABCD و BCEF متوازی‌الاضلاع AFED را ساخت (شکل). به قطر پاره‌خط AF نیمدایره‌ای می‌کشیم ؛ به مرکز F و شعاع مساوی واسطهٔ هندسی AF و ارتفاع متوازی‌الاضلاع، قوسی رسم می‌کنیم تا نیمدایره را در L قطع کند. ادامهٔ کار روشن است.

۴.۳.۱.۳. چندضلعی

۲۹۹. چهارضلعی ABCD را در نظر بگیرید و برای آن مسأله را حل کنید. سپس آن را تعمیم دهید (برای n ضلعی، آن را ثابت کنید).

۴.۱.۳. رسم پاره‌خط با معلوم‌بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر

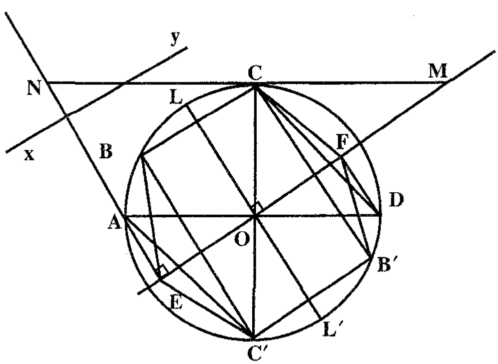
۱.۴.۱.۳. ربع دایره



۳۰۰. از نقطهٔ O عمودی بر راستای Δ فرود می‌آوریم و پای عمود را H می‌نامیم. در دو طرف H پاره‌خطهای $HE = HF = l$ را جدا می‌کنیم، سپس از E و F دو خط موازی OH را رسم می‌کنیم تا ربع دایره را در دو نقطهٔ M و N قطع نماید. پاره‌خط MN جواب مسأله است.

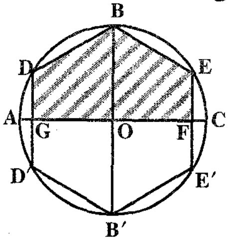
۲.۴.۱.۳. نیمدایره

۱.۲.۴.۱.۳. تنها یک نیمدایره

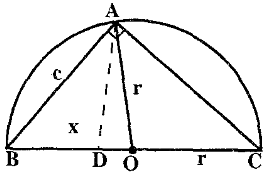


۳۰۱. مسأله را حل شده می‌گیریم و قطری از دایره را که موازی xy است، رسم می‌کنیم. تصویرهای رأسهای A و D را روی قطری که موازی xy رسم شده است، به موازات قطر ′LOL عمود بر xy، به‌دست می‌آوریم، و E و F می‌نامیم. خواهیم داشت $OE = OF$. همچنین قطرهای ′BOB و ′COC را رسم می‌کنیم. وترهای ′BC و ′CB با AE و DF موازی‌اند. در نتیجه شکل ABCDB′C′A معادل شکل EBCFB′C′E است؛ زیرا مثلثهای ′CFB و ′CDB معادلند.

بنابراین ماکزیمم مساحت ABCD هنگامی است که ذوزنقهٔ معادل آن EBCF ماکزیمم باشد؛ امّا ماکزیمم مساحت EBCF هنگامی است که مماس MCN را چنان رسم کنیم که $MC = CN$ باشد.



۳۰۲. هنگامی که $BD = BE = R$ باشد، در این حالت مساحت پنج ضلعی نصف مساحت شش ضلعی منتظم محاط در دایره است.

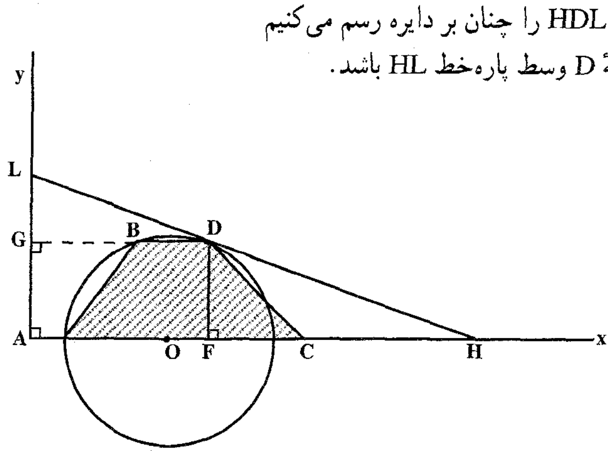


۳۰۳. شعاع نیمدایره را r، طول وتر را C و تصویر آن را x فرض می‌کنیم. رابطهٔ (۱) $C^۲ = ۲rx$ را داریم. علاوه بر این رابطه وقتی که مجموع یا تفاضل وتر و تصویرش داده شود، معادله‌ای درجهٔ دوم خواهیم داشت. همچنین است وقتی مجموع یا تفاضل مربعات طول یک وتر و تصویرش داده شده باشد. با استفاده از معلومهای بالا می‌توان طول وتر و طول تصویرش را به‌دست آورد و آن را ساخت. اگر ماکزیمم مجموع طول دو پاره‌خط مساوی ۴r و ماکزیمم تفاضل طول آنها $\frac{r}{۲}$ باشد، در این صورت طول وتر مساوی r است. این مقدار طول ضلع شش ضلعی منتظم محاط در دایره می‌باشد. هنگامی که نسبت طول وتر به تصویرش داده می‌شود، معادله‌ای درجهٔ اول خواهیم داشت و درصورتی که حاصلضرب طول وتر و تصویرش داده شده باشد، معادله‌ای درجهٔ سوم خواهیم داشت که به همین علت، نمی‌توان ریشهٔ آن‌را با خط‌کش غیرمدرج و پرگار رسم کرد.

۳.۱.۴.۲.۲. نیمدایره، نقطه

۳.۱.۴.۲.۲.۱. یک نیمدایره، دو نقطه

۳۰۴. مماس HDL را چنان بر دایره رسم می‌کنیم که نقطهٔ D وسط پاره‌خط HL باشد.



۳.۴.۱.۳. یک دایره

۱.۳.۴.۱.۳. تنها یک دایره

۳۰۵. از نقطهٔ اختیاری A روی دایره، دایره‌ای به شعاع l رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ B قطع کند. وتر $AB = l$ است. مسأله بیشمار جواب دارد.

۳۰۶. اگر مسأله را حل شده فرض کرده، AB را وتر خواسته شده بدانیم، تفاضل $\overset{\frown}{ADB} - \overset{\frown}{ACB}$ برابر کمان داده شدهٔ $\overset{\frown}{BSB'}$ است، لذا اگر از کمان $\overset{\frown}{ADB}$ کمان داده شده یعنی $\overset{\frown}{BSB'}$ را جدا کنیم، باقیمانده یعنی کمان $\overset{\frown}{AFB'}$ با کمان $\overset{\frown}{ACB}$ برابر است، پس راه‌حل چنین است:

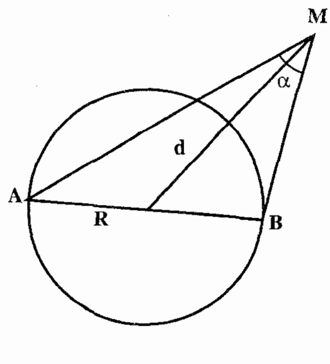
از نقطهٔ اختیاری B واقع بر دایره کمان $\overset{\frown}{BSB'}$ را به مقدار داده شده جدا می‌کنیم و سپس کمان باقیمانده یعنی $\overset{\frown}{BFB'}$ را نصف می‌کنیم. اگر A وسط کمان اخیر باشد، وتر AB جواب مسأله است.

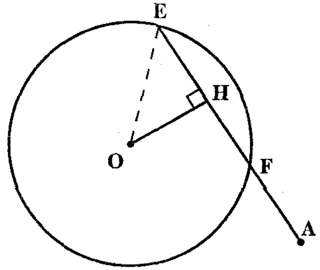
۲.۳.۴.۱.۳. یک دایره، نقطه

۱.۲.۳.۴.۱.۳. یک دایره، یک نقطه

۱.۱.۲.۳.۴.۱.۳. یک دایره، یک نقطه در صفحهٔ دایره

۳۰۷. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. اگر M نقطهٔ داده شده و AB قطری از دایره باشد که از نقطهٔ M تحت زاویهٔ α دیده شود، یعنی $A\hat{M}B = \alpha$ باشد، مثلث MAB با معلوم بودن $AB = 2R$ ، $MO = d$ میانه و $A\hat{M}B = \alpha$ قابل رسم است. پس MA و MB مقدارهای معلومی دارند، بنابراین برای حل مسأله به مرکز M و به شعاع MA از مثلث معلوم MAB دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ داده شده را در A قطع کند، قطر AB را که جواب مسأله است، رسم می‌کنیم.

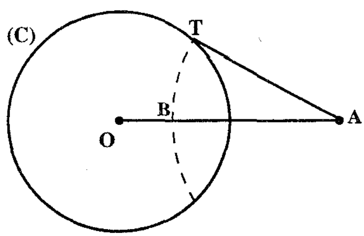




۳۰۸. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. از O عمود OH را بر وتر EF فرود می‌آوریم. OH طول معلومی است؛ زیـرا داریـم: $HE = \frac{l}{۲} \Rightarrow OH = \sqrt{R^۲ - \frac{l^۲}{۴}}$ و OE = R پس برای رسم این وتر دایره‌ای به مرکز O و به شعاع معلوم OH رسم می‌کنیم و از A مماسی بر آن رسم می‌کنیم، وتر ایجاد شده در دایره برابر l است.

بحث. در صورتی که نقطهٔ A خارج دایرهٔ (O,OH) قرار داشته باشد، مسأله دو جواب دارد. اگر روی این دایره، واقع شود، مسأله یک جواب دارد و اگر درون این دایره باشد، مسأله جواب ندارد.

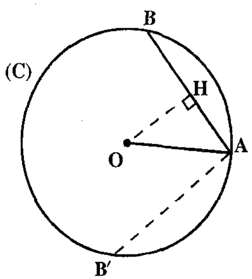
۳.۱.۴.۳.۲.۱.۲. یک دایره، یک نقطه خارج دایره



۳۰۹. از نقطهٔ A مماس AT را بر دایره رسم می‌کنیم. به مرکز A و به شعاع AT دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط AO را در نقطهٔ B قطع کند. پاره‌خط AB جواب مسأله است.

۳.۱.۴.۳.۲.۱.۳. یک دایره، یک نقطه روی دایره

۳۱۰. طول وتر را ۲l فرض می‌کنیم. فاصلهٔ مرکز دایره از آن برابر l خواهد بود. حال اگر شعاع دایره را R فرض کنیم، خواهیم داشت:



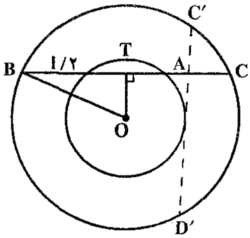
$$R^۲ = l^۲ + l^۲ = ۲l^۲ \Rightarrow l^۲ = \frac{R^۲}{۲} \Rightarrow l = \frac{R\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{طول وتر} = ۲l = R\sqrt{۲}$$

پس برای رسم وتر خواسته شده به مرکز A، نقطهٔ داده شده و به شعاع $R\sqrt{۲}$ قوسی رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های B و B′ قطع کند. وتر AB (یا AB′) جواب مسأله است.

نکته. در حقیقت وتر خواسته شده ضلع مربع محاط در این دایره است.

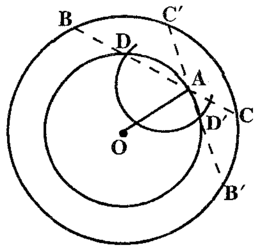
۴.۱.۲.۳.۴.۱.۳. یک دایره، یک نقطه درون دایره



۳۱۱. ۱. مکان هندسی وسط وترهایی به طول l در دایرهٔ C(O,R) دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R'=\sqrt{R^{2}-\frac{l^{2}}{4}}$ است.

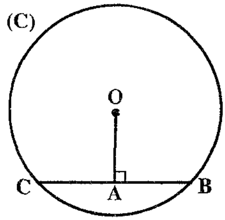
این دایره را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ A مماسهایی بر این دایره رسم می‌کنیم تا دایرهٔ داده شده را در دو وتر به طولهای l قطع کنند.

۲. برای حالتی که تفاضل دو قطعهٔ وتر برابر مقدار معلوم l باشد، فرض می‌کنیم مسأله حل شده و وتر BAC جواب مسأله باشد به قسمی که داشته باشیم: $AB-AC=l$. پاره‌خط $BD=AC$ را روی BA جدا می‌کنیم. پاره‌خط $AD=l$ خواهد بود. بنابراین نقطهٔ D روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع l قرار دارد. از طرفی دو نقطهٔ A و D روی دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA واقعند، بنابراین راه‌حل مسأله چنین است:

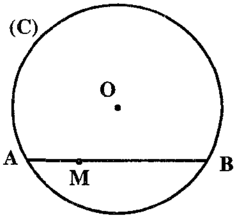


نخست دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OA رسم می‌کنیم، سپس دایره‌ای به مرکز A و به شعاع l رسم می‌نماییم. نقطهٔ برخورد این دو دایره، نقطه‌های D و D′ است. از A به D و D′ وصل می‌کنیم تا دایرهٔ O را در B و C، و B′ و C′ قطع کند، این وترها جواب مسأله‌اند.

۳۱۲. از A به O وصل می‌کنیم و از نقطهٔ A وتر BC را عمود بر OA رسم می‌کنیم. این وتر جواب مسأله است.

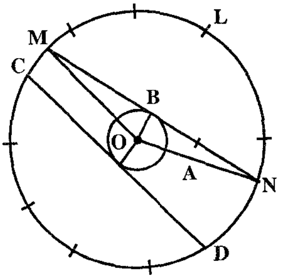


۳۱۳. مسأله را حل شده می‌گیریم. اگر AB وتر جواب مسأله و $\frac{MA}{MB}=k$ باشد، نقطهٔ A مجانس نقطهٔ B نسبت به مرکز تجانس M و با نسبت تجانس k است. امّا نقطهٔ B روی دایرهٔ (O) واقع است. بنابراین برای حل مسأله، مجانس دایرهٔ (O) را نسبت به مرکز تجانس M و با نسبت تجانس k به‌دست می‌آوریم. نقطهٔ برخورد این مجانس، با دایرهٔ (O)،

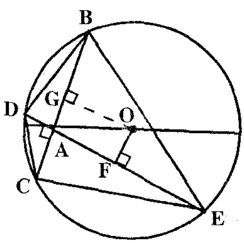


نقطهٔ A است. از A به M وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در B قطع کند. وتر AB جواب مسأله است.

۳۱۴. در مثلث ABC زاویه‌های ظلی A و B که اندازهٔ آنها $\frac{\overset{\frown}{AMB}}{۲}$ است، متساوی‌اند، پس $\hat{C} = $ قائمه ۲ − $۲\hat{A}$. بنابراین $\hat{C}$ وقتی بیشترین مقدار را داراست که $\hat{A}$ کمترین مقدار خود را داشته باشد و برای این منظور کافی است کمان $\overset{\frown}{AMB}$ و یا وتر آن AB کمترین مقدار را داشته باشد و کوچکترین وتر باید بر OP عمود باشد.

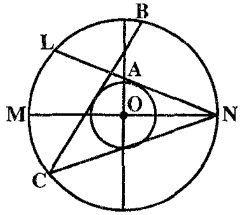


۳۱۵. هنگامی که قطاع MONL مساوی $\frac{۵}{۱۲}$ تمام دایره باشد، کمان $\overset{\frown}{MLN} = ۲\alpha$ نیز $\frac{۵}{۱۲}$ تمام دایره خواهد بود. محیط دایره را به ۱۲ قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و کمان $\overset{\frown}{CD}$ را که شامل ۵ قسمت از این ۱۲ قسمت است، اختیار می‌کنیم. دایره‌ای به مرکز O و مماس بر CD رسم می‌کنیم. آن‌گاه از نقطهٔ A مماسی بر این دایره رسم می‌کنیم تا دایره را در دو نقطهٔ M و N قطع کند. قطاع MONL مساوی $\frac{۵}{۱۲}$ دایره است.



۳۱۶. مسأله را حل شده می‌گیریم. مساحت چهارضلعی داده شده برابر است با $\frac{BC \times DE}{۲}$ یا $۲BG \times FE$. ماکزیمم این مساحت به ماکزیمم حاصلضرب دو کمیت متغیر BG و EF بستگی دارد. پس کافی است ماکزیمم حاصلضرب $GB^۲ \times FE^۲$، یا $(r^۲ - OG^۲)(r^۲ - OF^۲)$ را تعیین کنیم. دو عامل این حاصلضرب، مجموع ثابتی مساوی $۲r^۲ - a^۲$ دارند. زیرا $OG^۲ + OF^۲ = a^۲$ است. از آن‌جا ماکزیمم $GB^۲.FE^۲$ وقتی وجود دارد که دو عامل ضرب با هم برابر باشند، یعنی $OG^۲ = OF^۲ = \frac{a^۲}{۲}$ باشد. وترها در دو دایره با AO زاویهٔ مساوی می‌سازند. برای به‌دست آوردن مساحت r داریم: $BG^۲ = EF^۲ = r^۲ - \frac{a^۲}{۲}$.

امّا در این حالت اندازهٔ مساحت $۲BG.FE$، به $۲BG^۲ = ۲r^۲ - a^۲$ تبدیل می‌شود.



۳۱۷. اگر طول محیط دایره را واحد بگیریم، هیچ تغییری در کلی بودن مسأله نخواهد کرد. ابتدا ثابت می‌کنیم که همیشه می‌توان از نقطهٔ A وتری رسم کرد که طول قوس آن مساوی عدد گویای $\frac{p}{q}$ باشد. برای این منظور (شکل) قطر MN را عمود بر پاره‌خط OA رسم می‌کنیم. سپس از نقطهٔ N، قوس NL را مساوی طول گویای $\frac{p}{q}$ جدا می‌کنیم. $\frac{p}{q}$ را مقداری نزدیک به $\frac{1}{2}$، به نحوی انتخاب می‌کنیم که وتر NL از بین دو نقطهٔ O و A عبور کند. حالا دایره‌ای به مرکز O و مماس بر NL رسم می‌کنیم و وتر CB را مماس بر این دایره، طوری می‌کشیم که از A بگذرد، در این صورت قوس CB هم طولی مساوی مقدار گویای $\frac{p}{q}$ خواهد داشت، زیرا با قوس NL برابر است. اگر از نقطهٔ A، شعاع نوری در جهت BC حرکت کند، بعد از هر بازتاب، قوسی مساوی $\frac{p}{q}$ از محیط دایره جدا می‌کند، و بنابراین بعد از q مرتبه (و ممکن است زودتر)، به نقطهٔ مبدأ خود برگردد (این مطلب را امتحان کنید و شکل مربوطه را رسم کنید). به این ترتیب مسأله همیشه قابل حل است و بی‌نهایت جواب مختلف دارد.

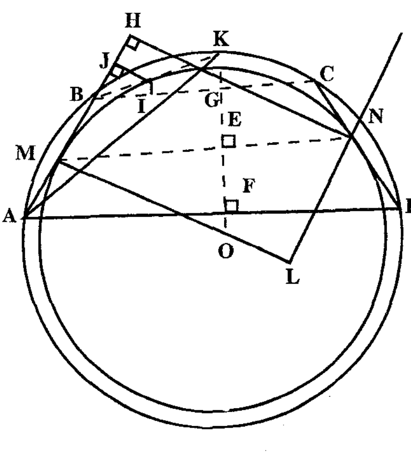
۳.۱.۴.۳.۲.۲. یک دایره، دو نقطه

۳.۱.۴.۳.۲.۲.۱. یک دایره، دو نقطه روی دایره

۳۱۸. ABCD را ذوزنقهٔ خواسته شده می‌گیریم. مساحت این ذوزنقه برابر است با حاصلضرب ساق AB در NH فاصلهٔ وسط ساق CD از ساق AB، یعنی:

$$S_{ABCD} = AB.NH \Rightarrow AB.NH = k^۲$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود: $\Rightarrow NH = \frac{k^۲}{AB}$



جزء چهارم این تناسب، بسادگی رسم می‌شود. پاره‌خط به‌دست آمده را از M به L انتقال می‌دهیم، موازی LN را رسم

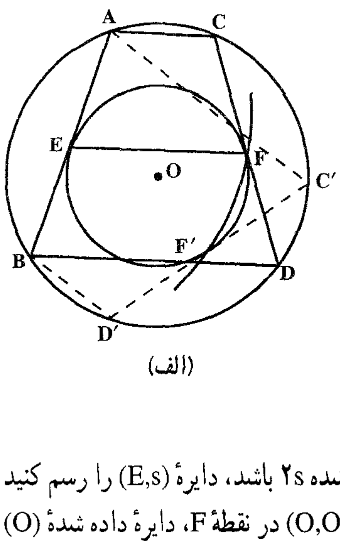
می‌کنیم تا دایرهٔ به مرکز O و به شعاع OM را قطع کند.
بحث. ۱. مسأله عموماً دو جواب دارد، زیرا خط رسم شده دایرهٔ OM را در دو نقطه قطع می‌کند.

۲. ماکزیمم هنگامی است که $ML = \frac{k^۲}{AB} = ۲MO$ باشد. از آن‌جا $k^۲ = ۲MO.AB$ که این ماکزیمم $k^۲$ است.

۳. در صورتی که چهارمین جزء اثبات مساوی IJ باشد، ذوزنقه به مثلث ABK تبدیل می‌شود.

۴. برای حالتی که $k^۲ > AB.IJ$ باشد، وتر AB بزرگتر از یکی از ساقهای ذوزنقه نیست. امّا هنگامی که C بر A یا B منطبق شود، AB یک قطر ذوزنقه خواهد بود. هنگامی که AB قطر ذوزنقه باشد، ذوزنقه آن‌قدر کوچک می‌شود که مساحت آن به سمت صفر میل می‌کند.

۳۱۹. فرض کنید A و B دو نقطهٔ داده شده بر روی دایره‌ای به مرکز O و AC و BD وترهای خواسته شده باشند.



(الف)

در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD (شکل الف) CD = AB و طول AB معلوم است ؛ پس CD در F، یعنی نقطهٔ وسط آن، بر دایرهٔ معلومی به مرکز O مماس است.
اگر E وسط AB باشد، داریم :

$$۲EF = AC + BD$$

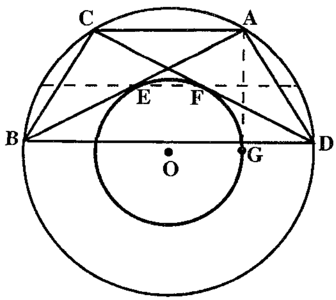
پس نقطهٔ E و طول AC + BD معلوم است ؛ پس یک مکان هندسی دیگر برای F داریم.

ترسیم. دایرهٔ (O,OE) را رسم کنید. اگر طول داده شده ۲s باشد، دایرهٔ (E,s) را رسم کنید تا (O,OE) را در نقطهٔ F قطع کند. خط مماس بر (O,OE) در نقطهٔ F، دایرهٔ داده شدهٔ (O) را در C و D قطع می‌کند. خطهای AC و BD وترهای خواسته شده هستند.
اثبات. دو وتر AB و CD برابرند، زیرا از O، یعنی مرکز دایرهٔ داده شدهٔ (O) به یک فاصله‌اند. پس ABCD یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است و در نتیجه :

$$AC + BD = ۲EF$$

چون در هنگام ترسیم، EF را برابر s گرفتیم، AC + BD دارای طول مطلوب است.
بحث. دایرهٔ (E,s) در صورتی که s از ۲OE بزرگتر باشد، دایرهٔ (O,OE) را قطع نمی‌کند.

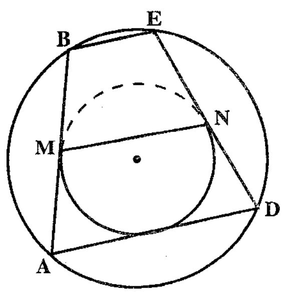
اگر $s < ۲OE$ ، دو نقطهٔ تلاقی F و F′ را خواهیم داشت و مسأله دو جواب دارد. خط مماس بر دایرهٔ (O,OE) در نقطهٔ F، دو نقطهٔ C و D را روی دایرهٔ (O) تعیین می‌کند. این دو نقطه و نقطه‌های داده شدهٔ A و B چهار خط را مشخص می‌کنند که دو ضلع و دو قطر ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین هستند. شکل نشان می‌دهد که از این چهار خط کدام دو خط، خطهای خواسته شده هستند.



(ب)

فرض کنید G (شکل ب) نقطهٔ تماس مماس دومی باشد که از A بر دایرهٔ (O,OE) رسم می‌شود. اگر $s < EG$ ، مماس بر (O,OE) در F وتر AB را قطع می‌کند و خط AB یک قطر از ذوزنقهٔ حاصل خواهد بود. خط EF با نصف تفاضل دو قاعده برابر است. حالتی را در نظر بگیرید که تفاضل دو وتر مقدار مفروضی باشد.

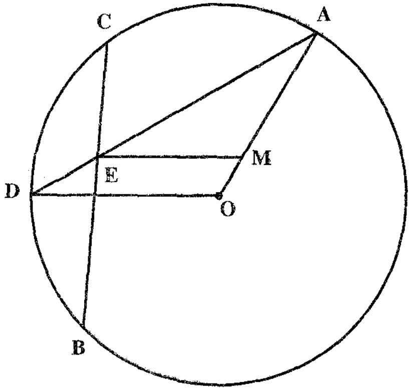
۳۲۰. وسط پاره‌خط AB را M می‌نامیم. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع OM رسم می‌کنیم. در این دایره وتر MN را به طول l رسم می‌کنیم. از M به N وصل کرده از A و B دو وتر موازی MN رسم می‌کنیم. $AD + BE = ۲l$ است.



۳.۲.۲.۳.۴.۱.۳. یک دایره، سه نقطه

۱.۳.۲.۲.۳.۴.۱.۳. یک دایره، سه نقطه روی دایره

۳۲۱. قرینهٔ نقطهٔ M نسبت به خط AB را H می‌نامیم. از H خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ M′ قطع کند. از M′ به M وصل می‌کنیم. وتر MM′ که در نقطهٔ H به وسیلهٔ وتر AB نصف می‌شود، جواب مسأله است.



۳۲۲. راه اول. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و AD وتر خواسته شده باشد، داریم :

$$\frac{EA}{ED} = k$$

از نقطهٔ E خطی به موازات OD رسم می‌کنیم تا OA را در M قطع کند. در مثلث AOD می‌توان نوشت :

$$\frac{EA}{ED} = \frac{AM}{MO} = k \Rightarrow \frac{AM}{AM + MO} = \frac{k}{k+۱}$$

پس :

$$\Rightarrow \frac{AM}{R} = \frac{k}{k+۱}$$

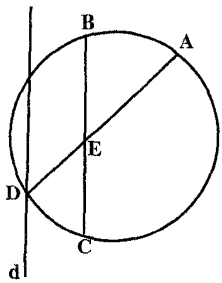
در نتیجه :

$$\Rightarrow AM = \frac{kR}{k+۱}$$

در مثلث ADO می‌توان نوشت :

$$\frac{AM}{AO} = \frac{ME}{OD} \Rightarrow AM = ME$$

پس برای حل مسأله روی OA نقطهٔ M را طوری می‌گیریم که $\frac{MA}{MO} = k$ باشد. به مرکز M و به شعاع $ME = MA$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا وتر BC را در E قطع کند. A را به E وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در D قطع کند. وتر AD جواب مسأله است (بحث کنید).



راه دوم. خط d، مجانس وتر BC نسبت به مرکز تجانس A و نسبت تجانس k را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با دایره را D می‌نامیم. از D به A وصل می‌کنیم. وتر AED جواب مسأله است.

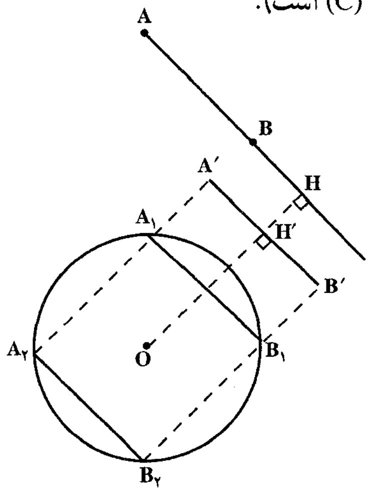
بحث. اگر خط d دایرهٔ (O) را در یک یا دو نقطه قطع کند، مسأله دارای یک یا دو جواب است و اگر قطع نکند، مسأله جواب ندارد.

۳۲۳. از ویژگیهای خطهای قاطع رسم شده از یک نقطه نسبت به یک دایره، استفاده کنید.

۳.۳.۴.۱.۳. یک دایره، پاره‌خط

۱.۳.۳.۴.۱.۳. یک دایره، یک پاره‌خط

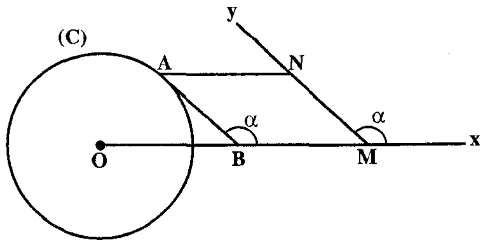
۳۲۴. از O عمود OH را بر خط AB فرود می‌آوریم و از نقطهٔ اختیاری H' واقع بر OH عمودی بر OH اخراج کرده، در دو طرف آن $H'A' = H'B' = \frac{AB}{۲}$ جدا می‌کنیم. از A' و B' دو خط موازی OH رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های $A_۱$ ، $B_۱$ و $A_۲$ ، $B_۲$ قطع کند. وترهای $A_۱B_۱$ و $A_۲B_۲$ جواب مسأله است. شرط وجود جواب آن است که $AB \leq ۲R$ باشد (R شعاع دایرهٔ (C) است).

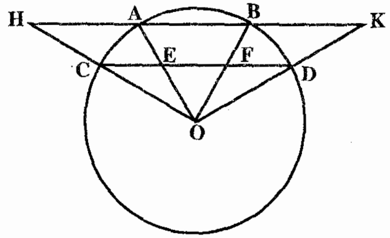


۴.۳.۴.۱.۳. یک دایره، نیمخط

۱.۴.۳.۴.۱.۳. یک دایره، یک نیمخط

۳۲۵. از نقطهٔ دلخواه M واقع بر Ox خط My را چنان رسم می‌کنیم که $y\hat{M}x = \alpha$ باشد. روی My پاره‌خط $MN = l$ را جدا می‌کنیم و از N خطی موازی Ox رسم می‌کنیم تا دایره را در A قطع کند. از A موازی MN رسم می‌کنیم تا Ox را در B قطع کند. پاره‌خط AB جواب مسأله است.



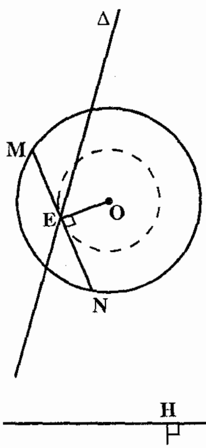


۳.۱.۴.۳.۴.۲. یک دایره، دو نیمخط

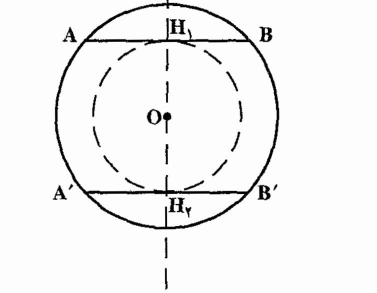
۳۲۶. A را به B وصل می‌کنیم (شکل) و AH و BK را به اندازهٔ AB جدا می‌کنیم. نقطه‌های K و H را به O مرکز دایره وصل می‌کنیم تا دایره را در D و C قطع کند. CD وتری است که در نقطه‌های E و F به وسیلهٔ OA و OB به سه قسمت متساوی تقسیم می‌شود، زیرا دو مثلث OBK و OAH در حالت دو ضلع و زاویهٔ بین با هم برابرند (چرا؟). پس $OK = OH$ و دو مثلث متساوی‌الساقین OHK و OCD که در زاویهٔ رأس مشترکند، متشابه‌اند و چون $AH = AB = BK$، پس $CE = EF = FD$.

۳.۱.۴.۳.۵. یک دایره، خط

۳.۱.۴.۳.۵.۱. یک دایره، یک خط

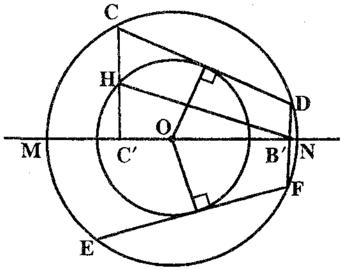


۳۲۷. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع فاصلهٔ مرکز دایره، از وتر به طول l رسم می‌کنیم. این دایره هرجا که Δ را قطع کرد، E می‌نامیم. از E بر دایرهٔ کوچکتر مماسی رسم می‌کنیم، این مماس وتر خواسته شده است؛ زیرا طول آن برابر با l و وسطش روی Δ است.

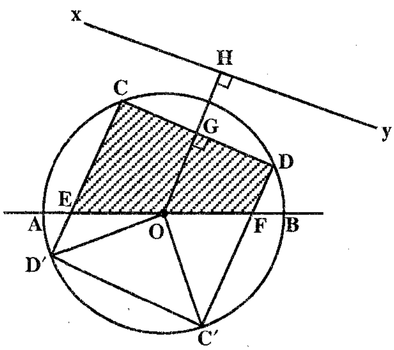


۳۲۸. می‌دانیم مکان هندسی وسط وترهای به طول l در دایرهٔ (O,R)، دایره‌ای است که مرکزش نقطهٔ O و شعاعش مساوی $R' = \sqrt{R^2 - \frac{l^2}{4}}$ است. این دایره را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ O عمود OH را بر خط d فرود می‌آوریم تا دایرهٔ به شعاع R' را در H_1 و H_2 قطع کند. وترهایی که در این دو نقطه مماس بر دایرهٔ مکان هندسی (یا عمود بر OH) رسم شوند، جواب مسأله‌اند. مسأله همواره دو جواب دارد.

۳.۱.۴.۳.۵.۲. یک دایره، دو خط



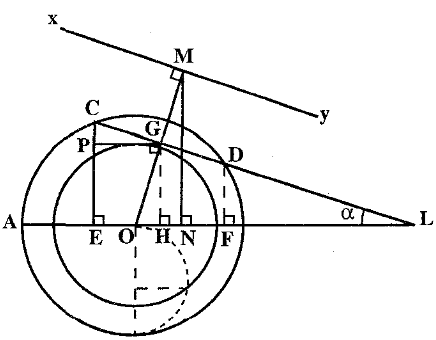
۳۲۹. قطر دایره را MN و تصویر وتر روی MN را $C'D'$ می‌نامیم. $C'D' = l$ است. CD را به موازات خود انتقال می‌دهیم تا D بر تصویر خود D' قرار گیرد. مثلث $B'HC'$ و از آن‌جا $B'H$ و CD رسم می‌شود.



۳۳۰. **راه اول.** ECDF را ذوزنقهٔ به مساحت ماکزیمم می‌گیریم. با ادامه دادن CE و DF، مستطیلی به‌دست می‌آید که مساحت آن دو برابر مساحت ذوزنقه است. مساحت این مستطیل در صورتی ماکزیمم است که مربع باشد، یعنی $CD = r\sqrt{2}$ و $OG = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

راه دوم. مساحت ذوزنقهٔ ECDF برابر است با $2CG \times OG$. ماکزیمم مساحت وقتی است که دو عامل متغیر CG و OG با هم مساوی باشند. زیرا مجموع آنها مقدار ثابت OC^2 است. از آن‌جا $OG = CG = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

ترسیم. روی عمود OH باید OG را مساوی با $\frac{r}{\sqrt{2}}$ اختیار کنیم.



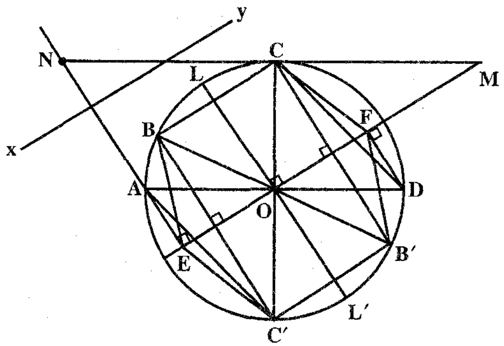
۳۳۱. مسأله را حل شده و CD را خط موازی خواسته شده می‌گیریم. از O عمود OM را بر xy فرود می‌آوریم. این عمود از نقطهٔ G وسط CD می‌گذرد. از G عمود GH را بر AB رسم می‌کنیم. داریم: $GH = \frac{CE + DF}{2}$.

اکنون GP را موازی AB رسم می‌کنیم.

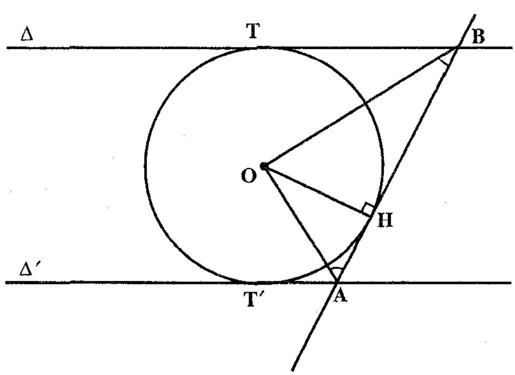
پاره‌خط GP برابر است با: $GP = EH = \frac{EF}{2}$. نصف مساحت ذوزنقه مساوی $GP \times GH$ است. اما مثلثهای OGH و CGP متشابه‌اند. و داریم: $\frac{GH}{GP} = \frac{GO}{CG}$.

بنابراین ماکزیمم حاصلضرب GP.GH وقتی است که $GC \times GO$ ماکزیمم باشد. امّا وتر مثلث قائم‌الزاویه OGC مساوی شعاع دایره و ثابت است، پس حاصلضرب دو ضلع زاویهٔ قائمه وقتی ماکزیمم است که با هم مساوی باشند، یعنی داشته باشیم : $OG = CG = \frac{r}{\sqrt{2}}$.

بنابراین کافی است روی OM طول OG را مساوی با $\frac{r}{\sqrt{2}}$ جدا کنیم.



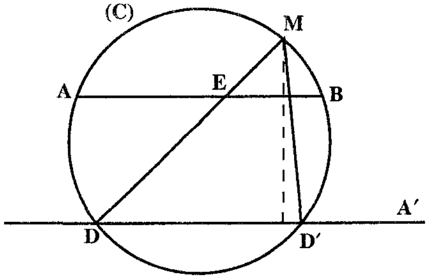
۳۳۲. مسأله را حل شده می‌گیریم و قطر EF موازی خط داده شدهٔ xy را رسم می‌کنیم. نقطه‌های A و D را به موازات قطر LOL′ که عمود بر قطر EF است روی E و F تصویر می‌کنیم. از آن‌جا OE = OF خواهد بود. همچنین قطرهای BOB′ و COC′ را رسم می‌کنیم. وترهای BC′ و CB′ با خطهای AE و DF موازی‌اند. از آن‌جا شکل ABCDB′C′A معادل با شکل EBCFB′C′E است ؛ زیرا مثلثهایی مانند CFB′ و CDB′ معادل هم هستند. بنابراین ماکزیمم مساحت چهارضلعی ABCD وقتی است که مساحت ذوزنقهٔ معادل آن یعنی مساحت EBCF ماکزیمم باشد. اما ماکزیمم مساحت ذوزنقهٔ EBCF هنگامی است که مماس MCN چنان رسم شود که MC = CN باشد.



۳۳۳. اگر AB وتر مورد نظر باشد و از O به H نقطهٔ تماس AB با دایره وصل کنیم، مثلث OAB در رأس O قائم‌الزاویه است و از این وتر اندازهٔ وتر AB = a و ارتفاع وارد بر وتر OH = R معلوم است، پس این مثلث قابل رسم است. از رسم آن BH، یعنی TB به‌دست می‌آید با مشخص شدن نقطهٔ B پاره‌خط AB رسم می‌شود (T′A = AH نیز مشخص است).

۳.۱.۴.۳.۶. یک دایره، زاویه

۳.۱.۴.۳.۶.۱. یک دایره، یک زاویه



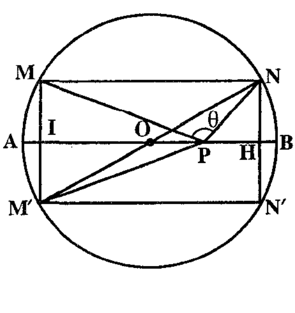
۳۳۴. مسأله را حل شده می‌گیریم و فرض می‌کنیم وتر MED جواب مسأله باشد و داشته باشیم $\frac{ED}{EM}=\frac{۲}{۱}$. در این صورت داریم $\frac{MD}{ME}=\frac{۳}{۱}$. این رابطه نشان می‌دهد که نقطهٔ D مجانس نقطهٔ E نسبت به مرکز تجانس M و نسبت تجانس ۳ است. اما نقطهٔ E روی وتر AB است. پس برای حل مسأله، مجانس خط AB نسبت به مرکز تجانس M و با نسبت تجانس ۳ را به‌دست می‌آوریم و Δ' می‌نامیم. نقطهٔ برخورد Δ' با دایرهٔ (C) نقطهٔ D است. وتر MD یک جواب مسأله است.
به تعداد نقطه‌های برخورد Δ' با دایرهٔ (C) مسأله دارای جواب است.

۳.۱.۴.۳.۷. یک دایره، نقطه، خط

۳.۱.۴.۳.۷.۱. یک دایره، قطر، یک نقطه

۳۳۵. مرکز دایرهٔ داده شده را O، شعاع آن را R می‌گیریم و فرض می‌کنیم: $OE=a$. اگر $a\geq\frac{R}{\sqrt{۲}}$، آن وقت وتر BD باید بر دایرهٔ به مرکز O و شعاع $\frac{R}{\sqrt{۲}}$ مماس باشد. اگر $a<\frac{R}{\sqrt{۲}}$، وتر مجهول BD بر قطر AC عمود است.

کافی است توجه کنیم $S_{ABCD}=\frac{۲R}{a}S_{BOD}$ و $S_{BOD}=\frac{۱}{۲}R^{۲}\sin\varphi$، که در آن، φ را مقدار زاویهٔ BOD گرفته‌ایم و سپس حداکثر مقدار $\sin\varphi$ را در رابطه با موقعیت نقطهٔ E پیدا کنیم.



۳۳۶. اگر قرینهٔ M' نقطهٔ M را نسبت به قطر AB تعیین کرده و به نقطهٔ N وصل کنیم، در مثلث NPM' ضلع $M'N=۲R$ و میانهٔ $OP=a$ و اختلاف زاویه‌های میانهٔ OP با دو ضلع مجاور PN و PM' در دست است که همان زاویهٔ θ است. حل هندسی مسأله قبلاً دیده شده است.

مسأله‌ای که از تبدیل مسألهٔ : از مثلثی ضلع a و میانهٔ m_a و اختلاف زاویه‌های B و C معلوم است، آن را رسم کنید، به‌دست آید.

از تکرار حل مسأله خودداری می‌شود. کافی است به آن مسأله مراجعه شود. اگر این مسأله را با جبر بخواهند حل کنند، معمولاً معادله‌ای از درجهٔ چهارم به‌دست می‌آید و انتخاب مجهول مسأله بسیار مهم است که معادلهٔ حاصل به فوریت قابل تبدیل به درجهٔ دوم باشد والا ممکن است با شتاب‌زدگی نتیجه گرفت که مسأله حل هندسی ندارد در صورتی که حل هندسی آن قبلاً ذکر شده است.

مثلاً اگر مجهول مسأله : $OI = x$ انتخاب شود (صرفنظر از علامت) معادلهٔ مسأله چنین می‌شود :

$$\tan\theta = \frac{-2x\sqrt{R^2 - x^2}}{2x^2 - a^2 - R^2}$$

که دو مجذوری است و به زودی به معادلهٔ درجهٔ دوم منجر می‌شود :

$$(2x^2 - a^2 - R^2)^2 \tan^2\theta = 4x^2(R^2 - x^2)$$

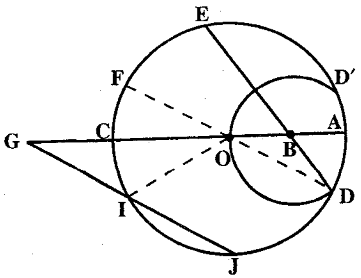
مجذور سطح مثلث PMN از روی θ تابعی به صورت :

$$\frac{(R^2 - a^2\sin^2\theta + \sqrt{R^4\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta})(R^2 + a^2\sin^2\theta - \sqrt{R^4\cos^2\theta - a^2\sin^2\theta})}{2}$$

خواهد بود و ماکزیمم آن بر حسب θ به مقدار a بستگی دارد. تعبیر هندسی این مطلب به سهولت نتیجه را نشان می‌دهد زیرا سطح مثلث MNP نصف مستطیل MNHI یا مربع مستطیل $MNN'M'$ خواهد بود.

این مستطیل اخیر وقتی ماکزیمم است که مربع گردد یعنی در این صورت $MN = R\sqrt{2}$ می‌گردد و مقدار θ بر حسب این که a تغییر کند، تغییر خواهد پذیرفت.

۳۳۷. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم و قطر DOF را رسم می‌کنیم. داریم :



$$\widehat{CF} = \widehat{AD} = \frac{1}{3}\widehat{CE} = \frac{1}{3}\widehat{FE}$$

امّا $F\hat{D}E = \frac{1}{2}\widehat{FE}$ و $B\hat{O}D = C\hat{O}F = \widehat{CF} = \frac{1}{2}\widehat{FE}$. پس $B\hat{O}D = B\hat{D}O$. بنابراین

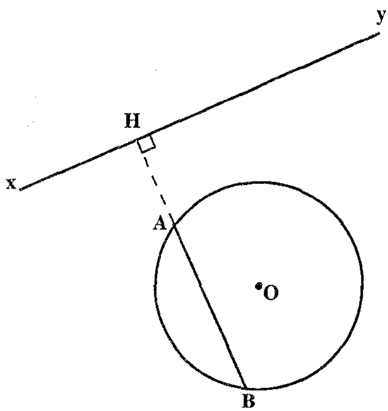
مثلث BOD متساوی‌الساقین است.

پس برای تعیین نقطهٔ D به مرکز B و به شعاع BO دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (O) را در نقطهٔ D قطع کند، آن‌گاه DBE را رسم می‌کنیم.

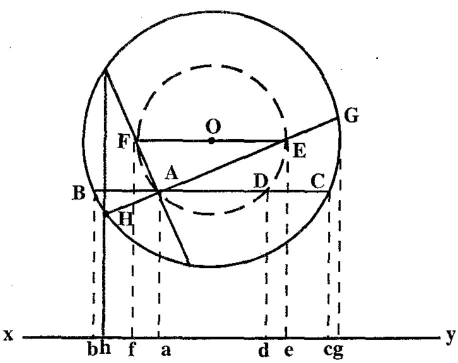
تبصره. باید $OB > AB$ باشد. نقطهٔ D' جواب دیگر مسأله را می‌دهد.

۲.۷.۳.۴.۱.۳. یک دایره، یک خط ناقطر، یک نقطه

۳۳۸. از A عمود AH را بر xy رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در B قطع کند. وتر AB جواب مسأله است، زیرا تصویر آن روی خط xy برابر صفر است.



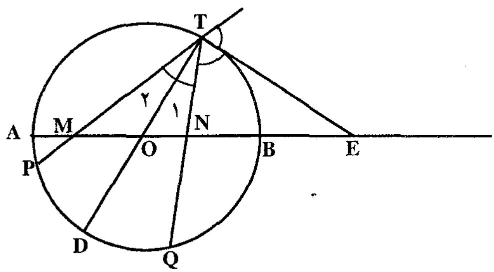
۳۳۹. برای یک وتر دلخواه BAC، تفاضل تصویرها مساوی $ac - ab$ است و اگر $CD = AB$ اختیار شود، تفاضل تصویرها مساوی ad خواهد بود. امّا اکنون نقطه‌ای مانند D روی دایره‌ای هم مرکز با دایرهٔ اوّلی پیدا می‌شود، به قسمی که ad تصویر وتر AD از دایرهٔ AO روی خط xy است. از آن‌جا ماکزیمم ae به وسیلهٔ وتر AE ایجاد می‌شود : $ag - ah = ae$.



AF یک ماکزیمم دیگر را می‌دهد، در صورتی که قدر مطلق را در نظر بگیریم در واقع می‌نیمم را می‌دهد، در صورتی که ab و ah را با اندازه‌های منفی در نظر بگیریم.

۳.۷.۳.۴.۱.۳. یک دایره، قطر، دو نقطه

۳۴۰. اگر TP و TQ دو وتر متساوی رسم شده از M و N باشند، در این صورت چنانچه T را به (O) مرکز دایره وصل کرده امتداد دهیم تا اگر از T مماس TE را بر دایره رسم کنیم چون مماس TE بر شعاع OT عمود است، پس TE نیمساز خارجی زاویهٔ $P\hat{T}Q$ بوده و نقطه‌های (MNOE) یک تقسیم توافقی تشکیل می‌دهند و در نتیجه حل مسأله چنین است. نقطهٔ E مزدوج توافقی O نسبت به MN را تعیین نموده و از E مماس ET را بر دایره رسم می‌نماییم، خطی که از T به M و N وصل شود، وترهای مطلوبند.



بحث. مسأله وقتی دارای جواب است که E مزدوج (O) نسبت به M و N خارج دایرهٔ (O) باشد تا بتوان از آن‌جا مماسی بر دایره رسم کرده و چون (MNOE) یک تقسیم توافقی می‌باشند، داریم: $\frac{۲}{OE}=\frac{۱}{OM}+\frac{۱}{ON}>\frac{۲}{R}$. در صورتی که E خارج دایره باشد، مسأله دارای دو جواب است و اگر E روی دایره باشد، مسأله دارای یک جواب است و وترهای متساوی قطر دایره می‌باشند و چنانچه E داخل دایره باشد، مسأله جواب ندارد.

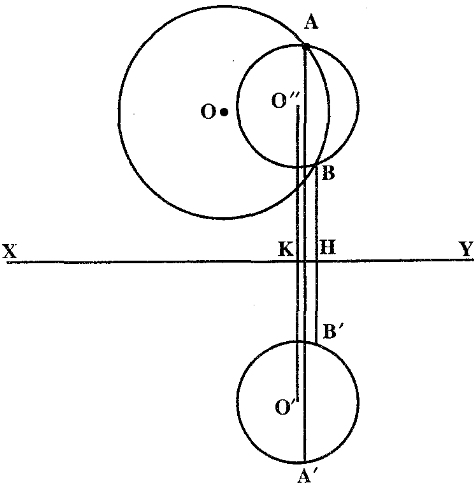
۸.۳.۴.۱.۳. یک دایره، مربع، خط

۳۴۱. دایرهٔ O را موازی با خط راست L، به اندازهٔ فاصلهٔ داده شده، انتقال می‌دهیم. این عمل، همیشه، به کمک خط‌کش و پرگار ممکن است. دایرهٔ جدید ′O، مربع K را قطع می‌کند. هریک از نقطه‌های برخورد M، یکی از دو انتهای پاره‌خط راست مورد نظر است.

۴.۴.۱.۳. دو دایره

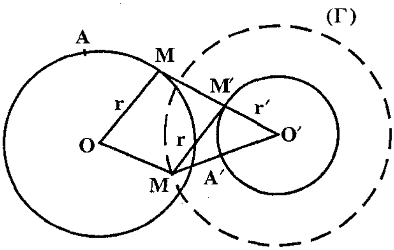
۱.۴.۴.۱.۳. تنها دو دایره

۱.۱.۴.۴.۱.۳. دو دایره در حالت کلی



۳۴۲. اگر $\overline{BB'}$ پاره‌خط خواسته شده و عمود بر XY و متکی بر دایره‌های O و O′ باشد، در این صورت B قرینهٔ B′ نسبت به XY خواهد بود و چون نقطهٔ B′ از دایرهٔ (O′) معلوم نیست، لذا دایرهٔ (O″)، قرینهٔ (O′) را نسبت به XY رسم می‌نماییم. اگر A و B نقطه‌های برخورد دایره‌های (O) و (O″) باشند، چنانچه از A و B بر XY عمود نماییم، دایرهٔ (O′) را بترتیب در A′ و B′ قطع نموده و $\overline{AA'}$ و $\overline{BB'}$ جواب مسأله است.

بحث. اگر O″ و O′ دارای یک یا دو نقطهٔ برخورد باشد، مسأله دارای یک یا دو جواب است و چنانچه دایرهٔ (O″) قرینهٔ (O′) نسبت به XY دایرهٔ (O) را قطع نکند، مسأله جواب ندارد.

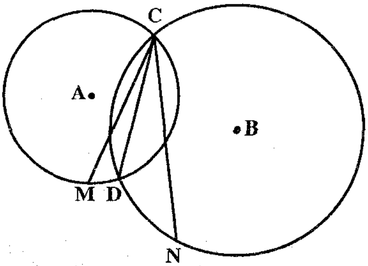


۳۴۳. فرض کنیم μ رأس چهارم متوازی‌الاضلاع ساخته شده روی OM، MM′ باشد (شکل). O′μ را رسم می‌کنیم. زاویهٔ (OM,O′M′) مقداری است ثابت و برابر است با (OA,O′A′)، مثلث O′M′μ وقتی M′ دایرهٔ (O′) را طی کند با یک مثلث داده شده مساوی می‌ماند؛ زیرا دارای یک زاویهٔ ثابت واقع بین ضلع ثابت به طول r و r′ است؛ پس ضلع O′μ مقداری است ثابت. در نتیجه مکان μ دایرهٔ (Γ) به مرکز O′ است؛ زیرا وقتی M′ دایرهٔ (O′) را طی کند، μ تمام دایرهٔ (Γ) را طی خواهد کرد، بنابراین برای تعیین قطعهٔ MM′ موازی با یک خط داده شده، کافی است از O خطی موازی با این خط رسم نمود، چون μ محل برخورد این خط با (Γ) است و از آن‌جا M′ و سپس M به‌دست می‌آید و اگر

بخواهیم $MM' = l$ شود، در آن صورت μ محل برخورد (Γ) و دایرهٔ به مرکز O به شعاع l خواهد بود. در هر یک از دو حالت بالا مسأله دارای دو جواب یا یک جواب و یا غیرممکن خواهد بود.

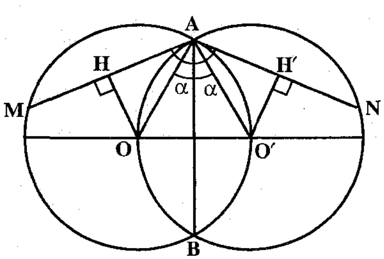
۳۴۴. هرگاه AB جواب مسأله باشد، اگر نقطهٔ A را به موازات X و در جهت مناسب، به‌قدر l انتقال دهیم، بر B منطبق می‌شود و اگر دایرهٔ O را به همین قرار منتقل سازیم، از نقطهٔ B می‌گذرد، بنابراین بر خطی که از O به موازات X رسم می‌نماییم، طول $OI = l$ را جدا کرده، دایره‌ای به مرکز I و مساوی با دایرهٔ O رسم می‌کنیم. محل برخورد این دایره با دایرهٔ O'، نقطهٔ B است و می‌توان BA را موازی با X رسم کرد، چون انتقال دایرهٔ O در دو جهت OI و OI' ممکن است. مسأله حداکثر دارای چهار جواب می‌باشد.

۲.۱.۴.۴.۱.۳. دو دایرهٔ متقاطع



۳۴۵. این وتر، وتر مشترک دو دایره است، یعنی پاره‌خط CD جواب مسأله است. زیرا هر وتر دیگری مانند CM و CN از دو دایره به مرکز دایره نزدیکتر است. پس طولشان بیشتر است.

تغییرات طول وتر CD. اگر نقطهٔ D روی دایرهٔ A حرکت کند تا به وضع CM درآید، طول وتر مشترک دو دایره افزایش پیدا می‌کند تا هنگامی که این وتر موازی خط‌المرکزین دو دایره شود، که در این حالت حداکثر مقدار خود را داراست. در ادامهٔ حرکت از C به سمت D، طول وتر مشترک بتدریج کم می‌شود تا هنگامی که بر نقطهٔ تقاطع D منطبق شود که در این حالت کمترین طول را دارد.

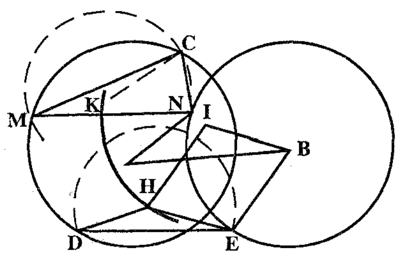


۳۴۶. دو دایرهٔ مساوی $C(O,R)$ و $C'(O',R)$ متقاطع در نقطه‌های A و B را در نظر می‌گیریم. وتر مشترک AB نیمساز زاویهٔ OAO' است، یعنی داریم: $O\hat{A}B = B\hat{A}O'$. از طرفی وترهای مساوی در دو دایرهٔ مساوی از مرکز دایره به یک

فاصله‌اند، پس اگر AM و AN دو وتر جواب مسأله باشند، به دلیل برابریهای $OH = O'H'$ و $AH = AH'$ ، دو مثلث $A'O'H'$ و AOH همنهشت خواهند بود، پس $M\hat{A}O = M'\hat{A}O'$ خواهد بود، یعنی AB نیمساز زاویهٔ MAN نیز هست. با توجه به این مطلب با معلوم بودن اندازهٔ زاویهٔ $M\hat{A}N = \alpha$ ، رسم وترهای AM و AN بسادگی قابل انجام است، به این ترتیب که AB وتر مشترک دو دایره را رسم می‌کنیم و از یک سر آن به عنوان مثال نقطهٔ A، دو وتر AM و AN را چنان رسم می‌کنیم که $M\hat{A}B = N\hat{A}B = \frac{\alpha}{۲}$ باشد.

۳.۱.۴.۴.۲. دو دایره، نقطه

۳.۱.۴.۴.۲.۱. دو دایره، یک نقطه



۳۴۷. مسأله را حل شده و زاویهٔ MCN را زاویهٔ خواسته شده در نظر می‌گیریم. از آن‌جا روش ترسیم زیر نتیجه می‌شود :

پاره‌خط DE را موازی AB و مساوی آن متکی بر دو دایره رسم می‌کنیم. آن‌گاه DOE، کمان درخور زاویهٔ داده شده روبه‌رو به این پاره‌خط را رسم می‌کنیم.

این کمان درخور باید با شرایط ذکر شده بین دو دایره حرکت کند تا آن که از نقطهٔ C بگذرد. برای تعیین وضع وتر MN چنین عمل می‌کنیم :

مثلث AIB را همنهشت مثلث DEH می‌سازیم. چهارضلعی HIBE متوازی‌الاضلاع است. به مرکز I و با شعاعی مساوی IH کمانی رسم می‌کنیم که دایرهٔ به مرکز C و به شعاع DH را در نقطهٔ K قطع کند. نقطهٔ K مرکز کمان درخور زاویهٔ داده شده و وتر MN موازی و مساوی با پاره‌خط AB و در نتیجه جواب مسأله است.

۳.۱.۵. رسم پاره‌خط با معلوم بودن: مقطعهای مخروطی، مقطعهای مخروطی و داده‌های دیگر

۳.۱.۵.۱. سهمی

۳۴۸. در یک سهمی مفروض وتر کانونی به طول l رسم کنید.

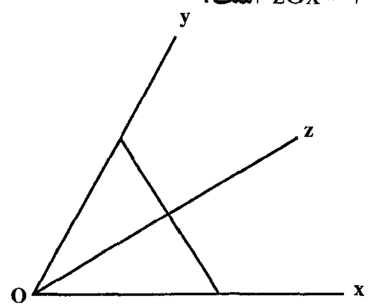
۲.۳. رسم نیمخط

۱.۲.۳. رسم نیمخط با معلوم بودن: نیمخط، زاویه، چندضلعی

۱.۱.۲.۳. نیمخط

۱.۱.۱.۲.۳. یک نیمخط

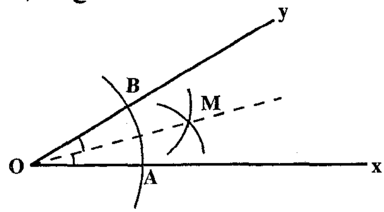
۳۴۹. روی Ox نقطهٔ A را اختیار می‌کنیم و مثلث متساوی‌الاضلاع OAB را روی OA می‌سازیم. زاویهٔ $B\hat{O}A = ۶۰^\circ$ است. OB بر نیمخط Oy که خواستهٔ مسأله است قرار دارد. برای ساختن زاویهٔ ۳۰ درجه نیمساز زاویهٔ xOy را رسم می‌کنیم. اگر این نیمساز را Oz بنامیم، زاویهٔ $z\hat{O}x = ۳۰^\circ$ است.



۲.۱.۲.۳. زاویه

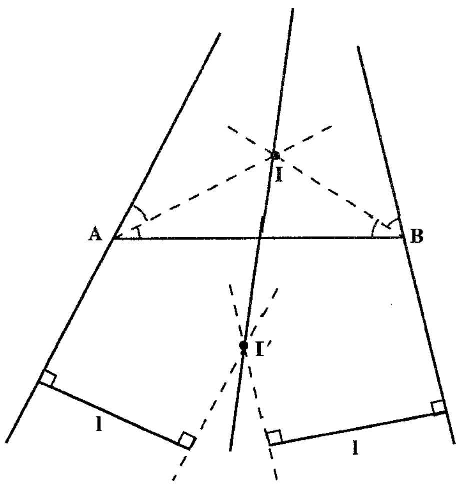
۱.۲.۱.۲.۳. یک زاویه

۳۵۰. به مرکز O و به شعاع دلخواهی، دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دو ضلع زاویه را در A و B قطع کند، سپس به مرکزهای A و B و به یک شعاع، دو قوس رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند. از M به O وصل می‌کنیم. نیمخط OM نیمساز زاویهٔ xOy است؛ زیرا دو مثلث MOA و MOB به دلیل تساوی سه ضلع با هم برابرند، پس $M\hat{O}x = M\hat{O}y$ است.

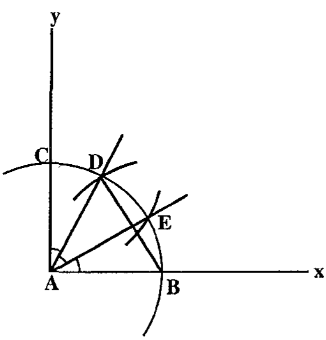


۳۵۱. دو خط Δ و Δ' را که نقطهٔ برخورد آنها خارج صفحهٔ کاغذ است، در نظر می گیریم. دو نقطهٔ اختیاری A و B را روی دو خط Δ و Δ' در نظر می‌گیریم و نیمسازهای دو زاویهٔ A و B را رسم می‌کنیم. I نقطهٔ برخورد این دو نیمساز یک نقطه از نیمساز زاویهٔ بین دو خط Δ و Δ' است. پس کافی است یک نقطهٔ دیگر از آن را به‌دست آوریم. برای این کار دو خط موازی Δ و Δ' و به فاصلهٔ معلوم l بین دو خط Δ و Δ' رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آنها را I' می‌نامیم. II' نیمساز زاویهٔ بین دو خط Δ و Δ' است.

نکته. به جای رسم دو خط موازی Δ و Δ' و به فاصلهٔ l از آن، می‌توان دو نقطهٔ دیگر مانند A' و B' روی دو خط Δ و Δ' اختیار و نیمسازهای دو زاویهٔ A' و B' را رسم کرد تا یک نقطه از نیمساز زاویهٔ بین دو خط Δ و Δ' به‌دست آید.



۳۵۲. زاویهٔ قائمهٔ xAy را در نظر می‌گیریم. به مرکز A و به شعاعی دلخواه مانند r دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دو ضلع زاویه را در نقطه‌های B و C قطع کند. آن‌گاه به مرکزهای B و C و به همان شعاع r دو دایره رسم می‌کنیم تا ربع دایرهٔ BC را در نقطه‌های D و E قطع کنند. مثلث DAB متساوی‌الاضلاع است $(AB = BD = AD)$. پس زاویهٔ $B\hat{A}D = ۶۰^\circ$ است. از آن‌جا زاویهٔ $C\hat{A}D = ۳۰^\circ$ می‌باشد. به دلیل مشابه $B\hat{A}E = ۳۰^\circ$ و در نتیجه $B\hat{A}E = E\hat{A}D = D\hat{A}C = ۳۰^\circ$. بنابراین زاویهٔ قائمه به سه قسمت برابر تقسیم شده است.



۳۵۳. الف. زاویه را تا زاویهٔ قائمه کامل کنید.
ب. زاویهٔ ۱۹ درجه را ۱۹ برابر کنید، زاویه‌ای مساوی ۳۶۱ درجه به‌دست می‌آید که از آن‌جا می‌توانید زاویه‌ای مساوی ۱ درجه بسازید.

۳۵۴. دانشمندان یونان باستان؛ بدون هیچ اشکالی می‌توانستند، به کمک وسیله‌های خاصی، هر زاویهٔ دلخواه را به سه قسمت برابر تقسیم کنند ولی این مسأله، همیشه در برابر آنها قرار داشت که چرا تثلیث زاویه که این‌طور به آسانی و به یاری مکانیسمهای خاص قابل اجراست، به کمک خط‌کش و پرگار تن به حل نمی‌دهد. آیا در واقع، می‌توان این مسأله را به کمک این ابزارهای رسمی ساختمانهای هندسی، در حالت کلی حل کرد؟ برای این که به این پرسش پاسخ بدهیم، ذکر بعضی مطلبها لازم است.

زاویه‌ای را که می‌خواهیم به سه قسمت برابر تقسیم کنیم، با 3α نشان می‌دهیم و $\cos 3\alpha$ را بررسی می‌کنیم. با توجه به رابطه‌های مثلثاتی، معلوم است که:

$$\cos 3\alpha = 4\cos^3 \alpha - 3\cos\alpha$$

دو طرف این رابطه را در ۲ ضرب می‌کنیم:

$$2\cos 3\alpha = 8\cos^3 \alpha - 6\cos\alpha$$

اگر $2\cos 3\alpha = a$ و $2\cos\alpha = X$ بگیریم، خواهیم داشت:

$$a = X^3 - 3X$$

یا

$$X^3 - 3X - a = 0 \qquad (1)$$

برای این که ثابت کنیم، مسألهٔ تثلیث زاویه، به کمک خط‌کش و پرگار، در حالت کلی قابل حل نیست، کافی است نشان دهیم که، دست کم، یک زاویه وجود دارد که نمی‌شود آن را به کمک خط‌کش و پرگار، به سه قسمت برابر تقسیم کرد. با استدلال ساده‌ای می‌توان نتیجه گرفت که زاویهٔ ۶۰ درجه، در چنین وضعی است. در واقع اگر فرض کنیم: $3\alpha = 60^\circ$، به‌دست می‌آید: $\cos 3\alpha = \frac{1}{2}$ و معادلهٔ (۱) چنین می‌شود:

$$X^3 - 3X - 1 = 0 \qquad (2)$$

در جبر ثابت می‌شود که چنین معادله‌ای یا ریشهٔ گویا ندارد و یا اگر ریشهٔ گویایی داشته باشد، تنها می‌تواند ۱+ یا ۱− باشد، ولی هیچ‌کدام از این دو عدد، در معادلهٔ (۲) صدق نمی‌کنند، یعنی معادلهٔ (۲)، ریشهٔ گویا ندارد. بنابراین، طبق «قضیهٔ غیرقابل حل» نمی‌توان زاویهٔ ۶۰ درجه را به کمک خط‌کش و پرگار، به سه قسمت برابر تقسیم کرد. از این

مطلب که زاویهٔ ۶۰ درجه را نمی‌توان به کمک خط‌کش و پرگار به سه قسمت برابر تقسیم کرد، نتیجه می‌شود که، زاویهٔ ۲۰ درجه و زاویهٔ ۴۰ درجه، هیچ‌کدام، به کمک خط‌کش و پرگار، قابل رسم نیستند. از این‌جا، نتیجهٔ مهمی حاصل می‌شود : ۹ ضلعی منتظم، ۱۸ ضلعی منتظم و غیره را نمی‌توان به کمک خط‌کش و پرگار رسم کرد.

برای زاویهٔ α از معادلهٔ (۱)، می‌توان بی‌نهایت مقدار پیدا کرد که به ازای هر کدام از آنها، معادلهٔ (۱) در محدودهٔ رادیکالهای با فرجهٔ ۲، قابل حل نباشند و بنابراین، مجموعه‌ای نامتناهی از زاویه‌ها وجود دارد که ثلث کردن آنها، به کمک خط‌کش و پرگار، ممکن نیست. به این ترتیب، اگر بخواهیم تنها از خط‌کش و پرگار استفاده کنیم، مسألهٔ تثلیث زاویه قابل حل نیست.

دانشمندان باستانی می‌توانستند، زاویهٔ قائمه را به کمک خط‌کش و پرگار، به سه قسمت برابر تقسیم کنند. این امکان را می‌توان به صورت نظری ثابت کرد. وقتی که داشته باشیم $۳\alpha = ۹۰^\circ$ ، به‌دست می‌آید : $a = ۰$ و معادلهٔ (۱) چنین می‌شود :

$$X^۳ - ۳X = ۰ \qquad (۳)$$

ریشه‌های معادلهٔ (۳)، عبارتند از ۰، $\sqrt{۳}$ و $-\sqrt{۳}$. به این ترتیب، ریشه‌های غیرصفر این معادله، با ریشهٔ دوم بیان می‌شود. این نتیجه‌گیری، به معنای آن است که زاویهٔ ۹۰ درجه را می‌توان به کمک پرگار و خط‌کش، به سه قسمت برابر تقسیم کرد. با استدلال مشابهی، می‌توان ثابت کرد که زاویهٔ ۴۵ درجه هم، به کمک خط‌کش و پرگار، قابل تقسیم به سه بخش برابر است.

باید یادآوری کنیم که تثلیث زاویه، به کمک خط‌کش و پرگار، برای مجموعه‌ای نامتناهی از زاویه‌ها، ممکن است. مثلاً همهٔ زاویه‌های به صورت $\frac{\pi}{۲^n}$ (n، عددی است درست و مثبت) را می‌توان با همین وسیله‌ها به سه قسمت برابر تقسیم کرد (خودتان، این حکم را ثابت کنید).

نامکن بودن تثلیث زاویه، تضعیف مکعب و تربیع دایره با خط‌کش و پرگار اقلیدسی

مسأله‌های رسم‌پذیری به مسأله‌هایی گفته می‌شود که امکان یا عدم امکان رسم بعضی از شکلهای هندسی به کمک دو وسیلهٔ پرگار و خط‌کش اقلیدسی مورد بحث قرار می‌گیرند. این‌گونه مسأله‌ها ازجمله مسأله‌هایی بودند که از ابتدای کشف هندسهٔ برهانی مورد توجه ریاضیدانان یونان باستان قرار گرفتند. کوششهای ایشان در پاسخ به برخی از مسأله‌ها به نتیجه رسید و درجواب به بعضی مسأله‌ها بی‌نتیجه بود.

به کمک این دو وسیله ریاضیدانان یونانی در نصف کردن هر زاویهٔ مفروض توفیق حاصل کردند، در حالی که در «تثلیث زاویه» ناکام ماندند. همچنین در ترسیم مربعی که از حیث مساحت دو برابر مساحت یک مربع مفروض باشد، توانایی خود را نشان دادند، ولی در «تضعیف مکعب» عاجز ماندند. آنان توانستند مربعی ترسیم کنند که از حیث مساحت، مساوی مساحت یک چندضلعی مفروض باشد، در حالی که در «تربیع دایره» توفیق نیافتند. همچنین به کمک خط‌کش و پرگار به رسم چندضلعیهای منتظم ۳، ۴، ۵، ۶، ۸، و ۱۰ ضلعی نایل آمدند، در صورتی که از عهدهٔ ترسیم ۷ و ۹ ضلعی برنیامدند.

قبل از پایان قرن ۱۹، ریاضیدانان، پاسخ این مسأله‌های باستانی را یافتند و با گذشت نزدیک به ۲۰۰۰ سال با تلاشی پربار امتناع آنها را ثابت کردند. کشفهایی که در پرتو حل این سه مسأله مشهور هندسی حاصل شد، پرثمر، و از مباحثی قدیمی چون مقاطع مخروطی شروع و به تئوریهای پیشرفتهٔ کنونی چون نظریهٔ گروهها و میدانها ختم شد.

توضیح این که اثبات امتناع این مسأله‌ها بی‌توسل به مفاهیمی از جبر و آنالیز (چون تئوری میدانهای مربعی، تئوری معادلات، و تئوری اعداد متعالی) ممکن نیست و معلوماتی مقدماتی از این مبحث را می‌طلبد.

توضیح آخر این که این مسائل از حیث بیان و درک ساده و لاجرم اغواکننده‌اند. به‌طور مثال ازبین این مسأله‌ها تثلیث زاویه، صورتی قابل فهم‌تر دارد و به داوری مبتدیان و نوآشنایان احتمالاً جوابی سهلتر! زیرا، به قیاس نصف کردن زاویه با تقسیم یک قطعه خط مفروض به n قسمت متساوی که بسادگی (با خط‌کش و پرگار اقلیدسی) قابل رسمند، پاسخ به این مسأله نیز دشوار نمی‌نماید. بدین دلیل است که هر مبتدی در مواجهه با این مسأله خود را می‌آزماید و چون توجهی به دامنهٔ عمل محدود خط‌کش و پرگار ندارد، چنانچه موفق شود، در اثر استفادهٔ غیرمجاز از این دو وسیله است (تثلیث زاویه به کمک خط‌کش مدرج مقدور است).

به همین دلیل است که مسؤولین مجله‌های ریاضی، حتی درکشورهایی که ازنظر علمی پیشرفته‌اند، از دریافت مقاله‌ها و مراسلاتی از جانب مبتدیان مبنی بر توفیق در تثلیث زاویه، شکوه می‌کنند.

اینک مسأله‌های رسم‌پذیری زیر را مطرح می‌کنیم :

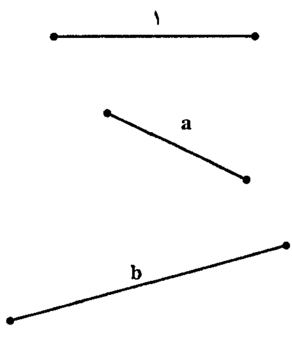
مسأله اول. آیا می‌توان زاویهٔ مفروضی را به سه قسمت متساوی تقسیم کرد (تثلیث زاویه)؟

مسأله دوم. قطعه خط $\overline{AB}$ مفروض است. آیا می‌توان قطعه خطی مانند $\overline{CD}$ رسم کرد به‌طوری که حجم مکعبی با یال $\overline{CD}$ دو برابر حجم مکعبی با یال $\overline{AB}$ باشد (تضعیف مکعب)؟

مسأله سوم. آیا می‌توان مربعی رسم کرد که مساحتش برابر مساحت دایرهٔ مفروض باشد (تربیع دایره)؟

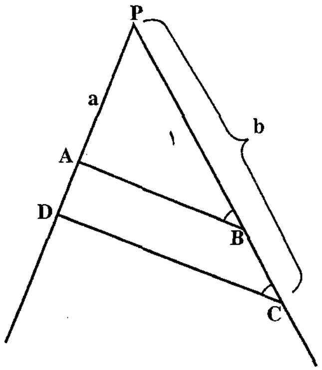
این سه مسأله مشهور مسأله‌های رسم‌پذیری است که پس از گذشت نزدیک به ۲۰۰۰ سال امتناع آنها ثابت شد. یعنی ثابت شد که به وسیلهٔ خط کش و پرگار نمی‌توان آنها را عملی کرد.

۱. جبر رسم‌پذیرها. فرض کنیم که قطعه خطی به‌طول واحد و قطعه خطهایی به طولهای a و b مفروض باشند، چنانچه خواهیم دید، می‌توان حاصل اعمال مقدماتی جبر را در مورد a و b با خط کش و پرگار رسم کرد. یعنی با خط کش و پرگار می‌توان قطعه خطهایی که طول آنها برابر هریک از عددهای $\sqrt{a}$ ، $\frac{b}{a}$ ، ab ، $\frac{1}{a}$ و $a + b$ باشد، رسم کرد :

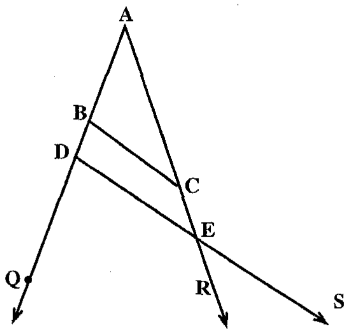


(۱). از بین اینها، اولی بسادگی رسم می‌شود. روی خط دلخواه l ، ابتدا قطعه خط PQ را به طول a و سپس قطعه خط QR را به طول b جدا می‌کنیم. در این صورت قطعه خط PR دارای طول $a + b$ است.

(۲). برای رسم دومی، با زاویهٔ دلخواه QAR شروع می‌کنیم. روی نیمخط AQ ، قطعه خط AB را به طول a و قطعه خط AD را به طول ۱ جدا می‌کنیم. روی نیمخط AR قطعه خط AC را به طول ۱ در نظر می‌گیریم. اینک نیمخط DS را چنان رسم می‌کنیم که $A\hat{D}S = A\hat{B}C$. از تشابه دو مثلث ΔADE و ΔABC معلوم می‌شود که : $\frac{AD}{AB} = \frac{AE}{AC}$ یا $\frac{AE}{۱} = \frac{۱}{a}$ ، یعنی $AE = \frac{۱}{a}$ (شکل الف).



(ب)



(الف)

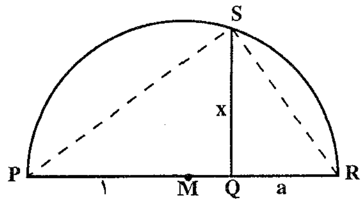
(۳). برای رسم ab، شکل روبه‌رو را درنظر می‌گیریم (شکل ب). داریم $P\hat{B}A = P\hat{C}D$ ؛ بنابراین دو مثلث ΔPAB و ΔPDC متشابهند. پس : $\frac{PD}{a} = \frac{b}{۱}$ از این‌جا، $PD = ab$.

(۴). برای رسم $\frac{b}{a}$ ، کافی است، ابتدا $\frac{۱}{a}$ را رسم کرده و سپس مطابق (۳)، $b.\frac{۱}{a}$ را رسم کنیم.

(۵). بالاخره، برای رسم قطعه خطی به طول $\sqrt{a}$ ، ابتدا قطعه خطهای PQ و QR را چنان رسم می‌کنیم که $PQ = ۱$ و $QR = a$. سپس این قطعه خط را نصف کرده تا نقطهٔ M به دست آید. به مرکز M و به شعاع $MP = MR = \frac{۱+a}{۲}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. اینک عمودی بر PR در Q استخراج می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌ای مانند S قطع کند (یکی از دو نقطهٔ تقاطع را اختیار می‌کنیم). دو مثلث ΔPQS و ΔSQR متشابهند و داریم :

$$\frac{QS}{PQ} = \frac{QR}{SQ} \quad \text{یا} \quad \frac{x}{۱} = \frac{a}{x}$$

از این‌جا $x=\sqrt{a}$ ، و قطعه خط QS جواب مسأله است (شکل پ).



(پ)

بعد از این، هرجا می‌گوییم که عدد I رسم‌پذیر است، منظور این است که می‌توان قطعه خطی به طول I را (با مفروض بودن طولهای معینی) رسم کرد. به عنوان مثال ملاحظه شد که هرگاه قطعه خطهایی به طولهای ۱، a و b مفروض باشند، می‌توان هریک از عددهای $a+b$ ، $\frac{1}{a}$ ، ab ، $\frac{b}{a}$ و $\sqrt{a}$ را رسم کرد. از این‌جا مثلاً می‌توان $\frac{b}{a}+\sqrt{a}$ ، یا $\sqrt{\frac{1}{a}+ab}$ ، یا $\frac{1}{a}+\sqrt{ab}+b$ را رسم کرد. همان‌طور که دیده می‌شود با رسم عددهایی نظیر عددهای بالا و با به کار بردن مجدد هریک از احکام جبر رسم‌پذیرها، می‌توان عددهای نسبتاً پیچیدهٔ دیگری را رسم کرد. به‌عنوان مثال، می‌توان عدد $\sqrt{a+\sqrt{b+\sqrt{a+\sqrt{b+\cdots+\sqrt{a}}}}}$ را نیز رسم کرد. در زیر پس از آوردن مقدمات لازم، شرط لازم و کافی را برای عددهایی که (فقط با معلوم بودن واحد) رسم‌پذیرند، بیان خواهیم کرد. برای اینکه بحث آتیه کلی باشد، وقتی می‌گوییم عدد منفی a رسم‌پذیر است، مقصودمان این است که $-a$ رسم‌پذیر است.

۲. میدان اعداد رسم‌پذیر. عدد x را یک عدد جذری (Surd numbers) خوانیم، درصورتی که بتوان x را به‌وسیلهٔ اعمال جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، و استخراج ریشهٔ دوم (جذر)، هریک به دفعات متناهی، بر اعداد ۰ و ۱ به‌دست آورد. به‌عنوان مثال، ۲ یک عدد جذری است؛ زیرا ۱+۱=۲. اینک اگر عدد طبیعی n یک عدد جذری باشد، $n+1$ نیز چنین است. بنابراین، به استقراء، همهٔ اعداد طبیعی جذری‌اند. با عمل تفریق می‌توان بسادگی ثابت کرد که هر عدد صحیح نیز یک عدد جذری است. با تقسیم، قضیهٔ زیر را خواهیم داشت:

قضیهٔ ۱. هر عدد منطق یک عدد جذری است، همچنین به سهولت ثابت می‌شود که:

قضیهٔ ۲. مجموعهٔ همهٔ عددهای جذری تشکیل یک میدان (مرتب اقلیدسی) می‌دهند.

برهان. برای اثبات، مجموعهٔ همه اعداد جذری را S می‌گیریم. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که قانونهای شرکت‌پذیری، تعویض پذیری، و توزیع‌پذیری در مورد عددهای جذری برقرار است، زیرا $S \subseteq R$ (Rمجموعهٔ عددهای حقیقی است). با استدلال مشابهی، اصول موضوعهٔ ترتیب نیز برقرار است. اینک گوییم چون در تشکیل اعداد جذری از اعداد جذری دیگر، مجازیم که اعمال جمع، ضرب، تفریق و تقسیم را به‌کار بریم، معلوم می‌شود که مجموعهٔ عددهای جذری شامل حاصلجمعها، حاصلضربها، قرینه‌ها و معکوسهای همهٔ اعضای خود است (البته به جز صفر که معکوس ندارد) بنابراین، S تشکیل یک زیرمیدان از S می‌دهد.

برای متصور ساختن عضوهای S در ذهن، توسل به مثالهای خاص مناسب نیست. زیرا بنا بر تعریفی که برای S آوردیم، اعضای آن دارای شکلهای متنوع نسبتاً پیچیده‌ای هستند. در مبحث آتیه که توسیع مربعی میدانها را گفتیم، ساختمان این اعضاء تا حدودی معلوم خواهد شد ؛ ولی در همین مرحله نیز تا اندازه‌ای می‌توان تصور کرد که اعضای S چگونه‌اند. ناچار، به‌طور مثال، عدد $\sqrt{\frac{۲}{۳}+\sqrt{۲+\sqrt{\frac{۴}{۵}+\sqrt{\frac{۳}{۴}+۲\sqrt{۵}}}}}$ را به‌عنوان نمونه ذکر می‌کنیم. در حالی که $\sqrt[۳]{۲}$ در S نیست (اثبات این فعلاً مقدور نیست).

اینک برگردیم به مسألهٔ رسم‌پذیری و حکم مهم زیر را که مبنای مبحث رسم‌پذیرهاست، با توجه به آنچه درمبحث گذشته ذکر شد، می‌آوریم :

بنابر آن که واحدی مفروض باشد، شرط لازم و کافی برای آن که عدد 1 رسم‌پذیر باشد، آن است که $1 \in S$.

درواقع، این حکم بیان می‌کند که با مفروض بودن قطعه خطی به طول واحد، فقط و فقط آن اعداد رسم‌پذیرند که حاصل اعمال جمع، تفریق، ضرب و تقسیم و استخراج ریشهٔ دوم (جذر)، هریک به دفعات متناهی، بر اعداد ۰ و ۱ باشند.

با به‌کارگیری حکم اخیر عدم امکان رسم‌پذیری سه مسأله مشهور هندسهٔ اقلیدسی را (با خط‌کش و پرگار) ثابت خواهیم کرد. ولی به مقدماتی از توسیع مربعی میدانها نیاز است که ابتدا آنها و نتایج ضروریشان را ذکر می‌کنیم.

۳. توسیعهای مربعی میدانها. مزدوجها در یک میدان توسیع مربعی. فرض کنیم که F زیر میدانی از میدان اعداد حقیقی، و k عدد مثبتی متعلق به F باشد، به‌طوری که $\sqrt{k} \notin F$. فرض می‌کنیم که $F(k)=\left\{x+y\sqrt{k} \middle| x, y \in E\right\}$ در این‌صورت F(k) را یک توسیع مربعی F می‌نامند.

به‌عنوان مثال، اگر F همان Q (میدان اعداد منطق) باشد، آن‌گاه $۲ \in F$ و $\sqrt{۲} \notin F$. بنابراین می‌توانیم توسیع مربعی را تشکیل دهیم:

$$F(k) = Q(۲) = \{x + y\sqrt{۲} | x, y \in Q\}$$

به‌عنوان تمرین ساده‌ای، به عهدهٔ خواننده است که ثابت کند F(k) یک میدان است. همواره چنین است. یعنی:

قضیهٔ ۳. هر توسیع مربعی یک میدان، یک میدان تشکیل می‌دهد.

برهان. فرض کنیم F زیرمیدانی از میدان اعداد حقیقی باشد، و F(k) توسیع مربعی F.

قوانین شرکت‌پذیری، تعویض‌پذیری، و توزیع‌پذیری، بالبداهه، در F(k) برقرارند. زیرا این قانونها به ازای همهٔ اعداد حقیقی برقرارند. همچنین بسادگی دیده می‌شود که اعداد به‌صورت $x + y\sqrt{k}$ (که در آن $x, y \in F$) تحت اعمال جمع و ضرب بسته‌اند. بعلاوه ۰ عددی است از این نوع $(۰ = ۰ + ۰\sqrt{k})$، و عدد $-(x + y\sqrt{k})$ نیز دارای همین صورت است. باقی می‌ماند تحقیق این که اگر $x + y\sqrt{k} \neq ۰$، آن‌گاه $\frac{۱}{x + y\sqrt{k}} \in F(k)$. از فرض $x + y\sqrt{k} \neq ۰$ معلوم می‌شود که $x - y\sqrt{k} \neq ۰$ (چرا؟) اینک ملاحظه می‌کنیم که:

$$\frac{۱}{x + y\sqrt{k}} = \frac{۱}{x + y\sqrt{k}} \cdot \frac{x - y\sqrt{k}}{x - y\sqrt{k}} = \frac{x - y\sqrt{k}}{x^۲ - ky^۲} = \frac{x}{x^۲ - ky^۲} + \frac{-y}{x^۲ - ky^۲}\sqrt{k}$$

که به F(k) تعلق دارد.

اگر $\omega = x + y\sqrt{k}$ عضوی از F(k) باشد، آن‌گاه مزدوج ω که با $\overline{\omega}$ نشان داده می‌شود، چنین تعریف می‌شود:

$$\overline{\omega} = x - y\sqrt{k}$$

عمل مزدوج‌گیری درمیدانهای مربعی، چنان که درزیر ملاحظه خواهد شد، نظیر عمل متناظرش در اعداد مختلط است.

قضیهٔ ۴. در F(k)، مزدوج حاصل جمع برابر حاصلجمع مزدوجهاست، یعنی به ازای هر دو عدد مانند $\omega_۱$ و $\omega_۲$ از F(k):

$$\overline{\omega_۱ + \omega_۲} = \overline{\omega_۱} + \overline{\omega_۲}$$

برهان. برهان ساده و به عهدهٔ خواننده است.

قضیهٔ ۵. در F(k)، مزدوج حاصلضرب برابر حاصلضرب مزدوجهاست؛ یعنی به ازای هر دو عضو $\omega_۱$ و $\omega_۲$ از F(k):

$$\overline{\omega_۱\omega_۲} = \overline{\omega_۱} \cdot \overline{\omega_۲}$$

برهان. برهان ساده و به عهدهٔ خواننده است.

ضمناً دو حکم سادهٔ زیر را داریم:

الف. به ازای هر ω از $F(k)$، $\overline{\omega^n}=\overline{\omega}^n$ (n عددی است طبیعی).

ب. اگر $a\in F$، آن‌گاه $\bar{a}=a$.

قضیهٔ ۶. اگر $F(\omega)$ یک بسجمله [= چندجمله‌ای] با ضریبهای در F باشد، آن‌گاه به‌ازای هر ω از $F(k)$، $F(\overline{\omega})=\overline{F(\omega)}$.

برهان. فرض کنیم $F(\omega)=a_n\omega^n+a_{n-1}\omega^{n-1}+\cdots+a_1\omega+a_0$ که در آن ضریبها یعنی a_i ها $(0\le i\le n)$ جملگی در F اند. دراین‌صورت:

$$
\begin{aligned}
F(\overline{\omega}) &= a\overline{\omega}^n+a_{n-1}\overline{\omega}^{n-1}+\cdots+a_1\overline{\omega}+a_0\\
&=\bar{a}_n\overline{\omega}^n+\bar{a}_{n-1}\overline{\omega}^{n-1}+\cdots+\bar{a}_1\overline{\omega}+\bar{a}_0\\
&=\bar{a}_n\overline{\omega^n}+\bar{a}_{n-1}\overline{\omega^{n-1}}+\bar{a}_1\overline{\omega}+\bar{a}_0\\
&=\overline{a_n\omega}+\overline{a_{n-1}\omega^{n-1}}+\cdots+\overline{a_1\omega}+\bar{a}_0=\overline{F(\omega)}
\end{aligned}
$$

قضیهٔ ۷. اگر $F(\omega)$ یک بسجمله با ضریبهای در F باشد و $F(\omega_0)=0$ که در آن $\omega\in F(k)$، آن‌گاه، $F(\overline{\omega_0})=0$ به عبارت دیگر، اگر ω_0 ریشه‌ای از معادلهٔ $F(\omega)=0$ باشد، آن‌گاه $\overline{\omega_0}$ هم ریشه‌ای از این معادله است.

برهان. نتیجهٔ مستقیم قضیهٔ ۶ است.

به‌عنوان مثال، فرض کنیم که $F=Q$ (مجموعهٔ اعداد منطق) و $F(\omega)=a\omega^2+b\omega+c$، که در آن a، b و c عددهایی منطقند، به‌طوری که $\Delta=b^2-4ac>0$. در این‌صورت معادلهٔ $F(\omega)=0$ دارای ریشه‌های زیر است:

$$\omega_1=\frac{-b}{2a}+\frac{1}{2a}\sqrt{\Delta}\qquad \text{و}$$

$$\omega_2=\frac{-b}{2a}-\frac{1}{2a}\sqrt{\Delta}$$

همانگونه که ملاحظه می‌شود، ω_2 مزدوج ω_1 است (در میدان مربعی $Q(\sqrt{\Delta})$، البته با فرض این که $\sqrt{\Delta}\notin Q$).

۴. توسیعهای مربعی میدان اعداد منطق و میدان اعداد رسم‌پذیر. اینک میدان اعداد منطق Q را درنظر گرفته و آن را F_0 می نامیم، یک توسیع مربعی از Q را تشکیل داده، آن را F_1 می‌نامیم. به‌همین ترتیب یک توسیع مربعی از F_1 را درنظر گرفته، توسیع مربعی

حاصل را $F_۲$ می‌نامیم. اگر این فرآیند را (به استقراء) ادامه دهیم، یک رشتهٔ صعودی از میدانها مانند $F_۰ \subset F_۱ \subset F_۲ \subset \cdots \subset F_n$ به‌دست خواهیم آورد، که در آن $F_۰ = Q$ و به ازای هر i که $۰ \le i \le n-۱$ ، $F_{i+۱} = F_i(k_{i+۱})$ که $k_{i+۱}$ در F_i هست ولی جذر آن، یعنی $\sqrt{k_{i+۱}}$ ، در آن نیست.

معلوم است، با انتخاب k_i های مختلف و مناسب، میدانهای متعددی که هریک توسیع مربعی میدان قبل از خود هستند، به‌دست خواهد آمد. مجموعهٔ چنین میدانها را F می‌نامیم. بسادگی معلوم می‌شود که:

قضیهٔ ۸.

$$S = \bigcup_{F \in f} F$$

که در آن، S مجموعهٔ اعداد جذری است. به عبارت دیگر، هر عضو F ها یک عدد جذری‌اند و بعکس هر عدد جذری در یکی از این توسیعها است. به‌عنوان مثال عدد جذری:

$$\sqrt{\frac{۲}{۳} + ۷\sqrt{۲ + ۶\sqrt{\frac{۴}{۵} + ۴\sqrt{\frac{۳}{۴} + ۲\sqrt{۵}}}}}$$

را درنظر می‌گیریم، معلوم است که

$$\frac{۳}{۴} + ۲\sqrt{۵} \in Q(۵) = F_۱ \ ,$$

$$\frac{۴}{۵} + ۴\sqrt{\frac{۳}{۴} + ۲\sqrt{۵}} \in F_۱(\frac{۳}{۴} + ۲\sqrt{۵}) = F_۲ \ ,$$

$$۲ + ۶\sqrt{\frac{۴}{۵} + ۴\sqrt{\frac{۳}{۴} + ۲\sqrt{۵}}} \in F_۲(\frac{۴}{۵} + ۴\sqrt{\frac{۳}{۴} + ۲\sqrt{۵}}) = F_۳ \ ,$$

$$۷\sqrt{۲ + ۶\sqrt{\frac{۴}{۵} + ۳\sqrt{\frac{۳}{۴} + ۲\sqrt{۵}}}} = F_۴ \ ,$$

$$\sqrt{\frac{۲}{۳} + ۷\sqrt{۲ + ۶}\sqrt{\frac{۴}{۵} + ۳\sqrt{\frac{۳}{۴} + ۲\sqrt{۵}}}} \in F_۴(\frac{۲}{۳})$$

برای سادگی و اختصار، هریک ازاعضای F را یک توسیع مربعی Q خواهیم نامید. در زیر پس از ذکر یک لم، به اثبات این قضیهٔ مهم، که قضیهٔ اساسی در اثبات امتناع سه مسألهٔ مشهور فوق‌الذکر است، مبادرت خواهیم کرد:

اگر معادلهٔ درجهٔ سوم با ضریبهای منطق در یک توسیع مربعی Q دارای یک ریشه باشد، آن‌گاه دارای یک ریشهٔ منطق است.

۵. موارد استعمال توسیعهای Q در معادلات درجهٔ سوم با ضریبهای منطق. اینک می‌پردازیم به اثبات قضیهٔ اساسی ذکر شده در پایان مبحث گذشته، ابتدا لم زیر را می‌آوریم :

لم. معادلهٔ درجهٔ سوم

$$(*)f(\omega)=\omega^3+a_2\omega^2+a_1\omega+a_0=0$$

با ضریبهایی در میدان F مفروض است. اگر این معادله دارای ریشه‌ای در یک توسیع مربعی F باشد، آن‌گاه معادله دارای ریشه‌ای در خود F است.

برهان. فرض کنیم که ω_1 ریشه‌ای از معادلهٔ $F(\omega)=0$ باشد که در یک توسیع مربعی F مانند $F(k)$ باشد. آن‌گاه بر طبق قضیهٔ ۷، $\omega_2(=\overline{\omega_1})$ هم یک ریشهٔ $F(\omega)=0$ است. بنابراین با فرض این که ω_0 ریشهٔ سوم این معادله باشد :

$$F(\omega)=(\omega-\omega_1)(\omega-\omega_2)(\omega-\omega_0)$$
$$=\omega^3-(\omega_1+\omega_2+\omega_3)\omega^2+(\omega_1\omega_2+\omega_2\omega_0+\omega_0\omega_1)\omega-\omega_1\omega_2\omega_0$$

از این‌جا، به موجب (*) $\qquad$ و $\qquad \omega_1+\omega_2+\omega_0=-a_2$

یا $\qquad \omega_0=-a_2-(\omega_1+\omega_2)$

چون $\omega_2=\overline{\omega_1}$، بنابراین $\omega_1+\omega_2\in F$، پس $\omega_0\in F$.

قضیهٔ ۹. اگر معادلهٔ درجهٔ سوم با ضریبهای منطق زیر :

$$(*)\omega^3+a_2\omega^2+a_1\omega+a_0=0$$

دارای ریشه‌ای در یک توسیع مربعی Q باشد، آن‌گاه دارای ریشه‌ای منطق است.

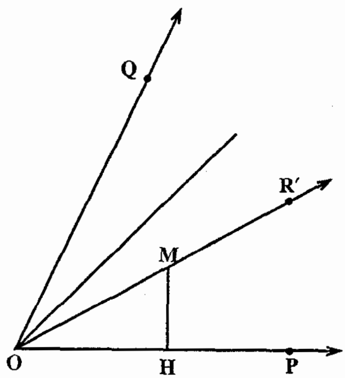
برهان. فرض کنیم ω_1 ریشه‌ای از معادلهٔ بالا باشد که متعلق به یک توسیع مربعی Q مانند F_n است. در این صورت رشته‌ای (صعودی) مانند F_n، ...، F_2 ، F_1 ، F_0 از توسیعهای مربعی Q موجودند، که در آن $F_0=Q$ و به ازای هر i که $0\le i\le n-1$، F_{i+1} یک توسیع مربعی F_i است. چون $\omega_1\in F_n$ و F_n یک توسیع مربعی F_{n-1} است به موجب لم، با توجه به این که ω_1 ریشهٔ معادلهٔ (*) است، معلوم می‌شود که این معادله دارای ریشه‌ای در F_{n-1} است. این ریشه را ω_2 می‌نامیم و می‌گوییم چون $\omega_2\in F_{n-1}$ و F_{n-1} یک توسیع مربعی F_{n-2} است، به موجب لم نتیجه می‌شود که معادلهٔ (*) دارای ریشه‌ای در F_{n-2} است. با ادامهٔ همین استدلال، معلوم می‌شود که معادلهٔ (*) دارای ریشه‌ای در F_0، یعنی Q، است و این خواستهٔ ماست. اینک بی‌مناسبت نیست که این نتیجهٔ مهم را به‌صورت دیگری که از قضیهٔ ۸

استنتاج می‌شود، بیان کنیم. این نتیجه را در مبحث آتیه (امتناع رسم‌پذیری سه مسألهٔ مشهور هندسه) به‌کار خواهیم بست:

نتیجه. فرض کنیم ریشه‌ای از معادلهٔ درجهٔ سوم با ضریبهای منطق $F(\omega)=0$ یک عدد جذری باشد، یعنی حاصل عملهای جمع، تفریق، ضرب، تقسیم، و استخراج ریشهٔ دوم (جذر)، هریک به دفعه‌های متناهی، بر اعداد ۰ و ۱ باشد، در این صورت معادلهٔ $F(\omega)=0$ دارای یک ریشهٔ منطق است.

۶. امتناع تثلیث زاویه، تضعیف مکعب و تربیع دایره.

الف. امتناع تثلیث زاویه. ابتدا ملاحظه کنیم مراد از این که عموماً تثلیث زاویه به کمک خط‌کش و پرگار ممکن نیست، چیست؟



(ت)

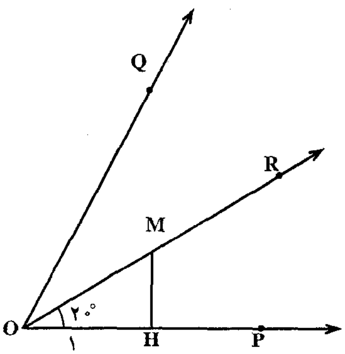
در شکل (ت)، فرض می‌کنیم که زاویهٔ QOP به کمک خط‌کش و پرگار به سه قسمت متساوی تقسیم شده است. بنابراین، نقطه‌ای مانند R به کمک خط‌کش و پرگار معین می‌شود به‌طوری که $R\hat{O}P=\frac{1}{3}P\hat{O}K$.

فرض کنیم که $OH=1$. از H عمودی بر نیمخط OP اخراج می‌کنیم تا نیمخط OR را در M قطع کند. بنابراین نقطهٔ M به کمک خط‌کش و پرگار رسم‌پذیر است. از این‌جا نتیجه می‌شود که طول قطعه خط OM عددی جذری است (بعد از قضیهٔ ۲). بعکس اگر طول قطعه خط OM عددی جذری باشد، آن‌گاه می‌توان مثلث ΔOMH را به کمک خط‌کش و پرگار ساخت. (ملاحظه کنید که در این حالت $MH=\sqrt{OM^2-1}$ نیز یک عدد جذری است). بدین طریق زاویه تثلیث می‌شود. بنابراین:

شرط لازم و کافی برای آن که زاویهٔ مفروض POQ به کمک خط‌کش و پرگار تثلیث شود، آن است که طول قطعه خط OM عددی جذری باشد. (واحد مفروض است.)

با توجه به نکتهٔ اخیر معلوم می‌شود که می‌توان بعضی از زاویه‌ها را به سه قسمت متساوی تقسیم کرد. به‌طور مثال زاویهٔ $67/5°$ را می‌توان (به کمک خط‌کش و پرگار) تثلیث کرد. زیرا، در مورد این زاویه داریم $OM=\dfrac{1}{\dfrac{\sqrt{2+\sqrt{2}}}{2}}$ که عددی جذری است و در این‌جا، $MH=\sqrt{\dfrac{2-\sqrt{2}}{2+\sqrt{2}}}$. اینک برای تثلیث زاویه $67/5°$ به‌طریق هندسی، ابتدا روی نیمخط OP

نقطهٔ H را چنان اختیار می‌کنیم که $OH = 1$. سپس عمودی در H بر نیمخط OP اخراج کرده و طول MH (که عددی رسم‌پذیر است) روی آن (به طرف داخل زاویه) جدا می‌کنیم تا نقطهٔ M به‌دست آید. ولی خواهیم دید که زاویهٔ 60° را نمی‌توان به‌کمک خط‌کش و پرگار به‌سه قسمت متساوی تقسیم کرد و از این‌جا معلوم خواهد شد که: عموماً تثلیث زاویه به کمک خط‌کش و پرگار ممکن نیست. به موجب تذکرات بالا، اگر بتوان زاویهٔ 60° را به کمک خط‌کش و پرگار تثلیث کرد، آن‌گاه باید طول OM عددی جذری باشد. ثابت می‌کنیم چنین نیست.



(ث)

بر طبق شکل (ث) داریم $OM = \frac{1}{\cos 20^\circ}$. با توجه به آنچه که در مبحث ۵ گذشت، خواهیم دید که این عدد یک عدد جذری نیست. برای این منظور کافی است ثابت کنیم که $\cos 20^\circ$ یک عدد جذری نیست.

فرض کنیم که $\cos 20^\circ$ یک عدد جذری باشد (فرض خلف). برای استخراج تناقض به روش زیر در دو مرحله اقدام می‌کنیم:

(۱) $\cos 20^\circ$ ریشهٔ یک معادلهٔ درجهٔ سوم با ضریبهای منطق است. زیرا می‌دانیم که:

$$\cos 60^\circ = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ$$

از این جا:

$$\frac{1}{2} = 4\cos^3 20^\circ - 3\cos 20^\circ$$

یا با فرض $\omega = \cos 20^\circ$ ، معلوم می‌شود که ω. به ریشهٔ معادلهٔ

$$8\omega^3 - 6\omega - 1 = 0 \qquad (*)$$

است. چون فرض شده است که ω. یک عدد جذری است. بر طبق نتیجهٔ ذکر شده در پایان مبحث ۵، معادلهٔ (*) دارای یک ریشهٔ منطق است.

(۲) معادلهٔ (*) ریشهٔ منطق ندارد.

فرض کنیم $\frac{r}{t}$ ریشهٔ منطق (*) باشد (فرض خلف) که در آن r طبیعی و t صحیح است، به طوری که $(r,t) = 1$. پس:

$$8\frac{r^3}{t^3} - 6\frac{r}{t} - 1 = 0$$

یا :

$$(**) 8r^3 - 6rt^2 - t^3 = 0$$

اینک گوییم اگر $r = 1$ ، آن‌گاه $8 - 6t^2 - t^3 = 0$. از این‌جا، ۲ باید t^3 و در نتیجه t را عاد کند. فرض کنیم که $t = 2s$ ، که در آن s یک عدد صحیح است. با این فرض داریم،

$$8 - 6(2S)^2 - (2S)^3 = 0$$

یا $s^2(3+s) = 1$ که ممکن نیست (چرا؟) اگر $r \neq 1$ ، آن‌گاه r عامل اولی مانند p دارد. بر طبق $(**)$، p باید t^3 و در نتیجه t را عاد کند و این متناقض است با تباین r و t .

ب. امتناع تضعیف مکعب. فرض کنیم قطعه خط AB (به طول واحد) مفروض باشد. می‌خواهیم امتناع رسم قطعه خطی مانند CD را که $CD^3 = 2AB^3 = 2$ ، ثابت کنیم. فرض کنیم CD رسم‌پذیر باشد. در این‌صورت عدد $\sqrt[3]{2}$ یک عدد رسم‌پذیر، و لذا عددی جذری، خواهد بود. ثابت می‌کنیم این عدد جذری نیست. فرض کنیم عدد اخیر جذری باشد (فرض خلف) با فرض $\omega_0 = \sqrt[3]{2}$ ، معلوم می‌شود که ω_0 ریشهٔ معادلهٔ درجهٔ سوم با ضریبهای منطق $\omega^3 - 2 = 0$ است. چون فرض شده است که ω_0 یک عدد جذری باشد، برطبق نتیجهٔ مذکور در زیر مبحث (۵) ، معادلهٔ فوق یک ریشهٔ منطق دارد. در صورتی که این معادله فاقد ریشهٔ منطق است (چرا؟).

ج. امتناع تربیع دایره. فرض کنیم دایره‌ای به شعاع واحد مفروض باشد. می‌خواهیم امتناع رسم مربعی را که مساحتش برابر این دایره، یعنی π ، باشد ثابت کنیم اگر رسم این مربع (به وسیلهٔ خط‌کش و پرگار) مقدور باشد، باید x طول ضلع آن عددی رسم‌پذیر، و بنابراین عددی جذری باشد. در صورتی که $x = \sqrt{\pi}$ عددی جذری نیست. اثبات این موضوع به متعالی بودن π برمی‌گردد که در ۱۸۸۲ به وسیلهٔ لیندمان Lindemann ثابت شد. عددی را متعالی گویند، در صورتی که ریشهٔ معادله‌ای به‌صورت :

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

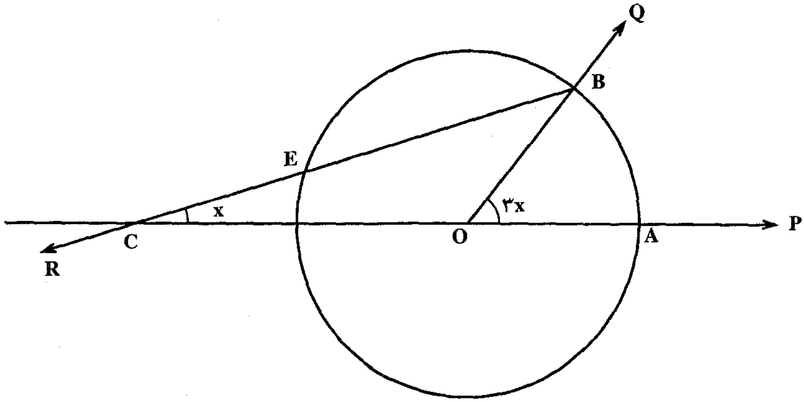
با ضریبهای منطق نباشد. اثبات متعالی بودن π متضمن داشتن معلوماتی بیشتر از آنچه که در این‌جا آمده است، می‌باشد.

تثلیث زاویه با خط‌کش و پرگار غیراقلیدسی

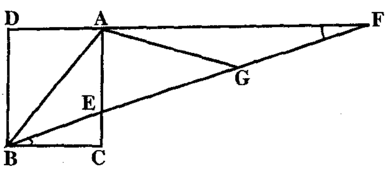
تثلیث زاویه با خط‌کش غیرمدرج و پرگار ممکن نیست امّا با خط‌کش مدرج و پرگار امکان‌پذیر است. روش جالب زیر را در تثلیث یک زاویهٔ دلخواه، به ارشمیدس نسبت می‌دهند : زاویهٔ POQ مفروض است. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع دلخواه رسم می‌کنیم تا نیمخطهای

OP و OQ را بترتیب در A و B قطع کند. از B نیمخطی مانند BR رسم می‌کنیم که امتداد خط OA را در C و دایره را در E قطع کند، چنان که $CE = OA$. در این‌صورت : $B\hat{C}O = \frac{1}{3}B\hat{O}A$ (ثابت کنید).

تبصره. به عهدهٔ خواننده است که به تحقیق در عدم امکان رسم نیمخط BR (ذکر شده در بالا) به وسیلهٔ خط کش و پرگار اقلیدسی، بپردازد.



روشهای دیگر تثلیث زاویه با استفاده از خط‌کش مدرج و پرگار



در مطالعهٔ مسألهٔ تثلیث زاویه به نظر می‌رسد که یونانیان، ابتدا آن را به آنچه مسألهٔ میل کردن نامیدند، تحویل کردند. هر زاویهٔ حادهٔ ABC (شکل) را می‌توان به‌صورت زاویهٔ بین یک قطر BA و یک ضلع BC از یک مستطیل BCAD اختیار کرد.

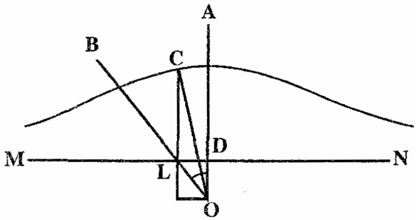
خطی گذرنده از B که CA را در E و امتداد DA را در F قطع می‌کند، به‌طوری که $EF = 2BA$ ، درنظر بگیرید. فرض کنید G نقطهٔ میانی EF باشد. در این‌صورت $EG = GF = GA = BA$ که در نتیجه :

$$A\hat{B}G = A\hat{G}B = G\hat{A}F + G\hat{F}A = 2\,G\hat{F}A = 2\,G\hat{B}C$$

و BEF زاویهٔ ABC را ثلث می‌کند. بنابراین مسأله به ترسیم پاره‌خط راستی مانند EF به طول معلوم ۲BA بین AC و امتداد DA بازمی‌گردد به‌طوری که FE متمایل به نقطهٔ B باشد.

اگر برخلاف فرضهای اقلیدسی، خود را مجاز بدانیم که، بر روی خط کش خود قطعه خط $E'F' = 2BA$ را جدا کنیم و سپس خط کش را چنان میزان کنیم که از نقطهٔ B بگذرد و نقطه‌های مشخص شده E' و F' بر AC و امتداد DA قرار گیرند، زاویهٔ ABC تثلیث خواهد شد.

کونکوئید نیکومدس. منحنیهای مسطحهٔ مختلفی کشف شده‌اند که مسألهٔ میل کردن را، که مسألهٔ تثلیث زاویه تحویل به آن است، حل می‌کنند. یکی از قدیمی‌ترین آنها کونکوئید است که توسط نیکومدس (حوالی ۲۴۰ ق.م) ابداع شد.



فرض کنید که C خطی مستقیم و O نقطهٔ دلخواهی باشد که بر C واقع نیست. بر امتداد OP، که P نقطهٔ دلخواهی روی C است، PQ را برابر طول ثابت مفروض k جدا کنید. در این‌صورت، مکان هندسی نقطهٔ Q ، وقتی P روی C حرکت می‌کند، (یکی از شاخه‌های) کونکوئید C به قطب O و ثابت k است.

طرح دستگاهی که کونکوئیدها را رسم کند، دشوار نیست و با چنان دستگاهی به‌آسانی می‌توان زاویه‌ها را تثلیث کرد. به‌عنوان مثال فرض کنید که AOB زاویهٔ حاده مفروض باشد. خطی مانند MN عمود بر OA رسم کنید تا OA و OB را همچنان که در شکل نشان داده شده، در D و L قطع نماید. حال کونکوئید MN را به قطب O و ثابت ۲OL رسم کنید. در L خطی به موازات OA رسم کنید تا کونکوئید را در C قطع کند. در این‌صورت OC زاویهٔ AOB را ثلث می‌کند.

تعریف. یک کونکوئید کلی را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد :

فرض کنید C یک منحنی مفروض و O نقطهٔ ثابتی باشد. بر بردار شعاعی OP از O تا نقطه‌ای مانند P بر C ، طول $PQ = \pm k$ را، که در آن k مقداری ثابت است، جدا کنید. در این‌صورت مکان هندسی Q کونکوئید C به قطب O و مقدار ثابت k نامیده می‌شود. منحنی کامل متشکل از دو شاخه است. یکی متناظر با $PQ = +k$ و دیگری با $PQ = -k$. اگر C مستقیم و O نقطهٔ دلخواهی غیرواقع بر C باشد، کونکوئید نیکومدس به‌دست می‌آید.

تثلیث زاویه به وسیلهٔ مقطعهای مخروطی

هر زاویهٔ کلی را می‌توان به‌کمک یک مقطع مخروطی تثلیث نمود. یونانیان قدیم برای انجام این کار به اندازهٔ کافی با مقطعهای مخروطی آشنا نبودند و اولین اثبات از این نوع به‌وسیلهٔ پاپوس (حدود ۳۰۰ ب.م) داده شده است، که از خواص کانون و هادی مقطعهای مخروطی استفاده می‌کند. ساختمانهایی از این قبیل را که در زیر می‌آیند، ثابت کنید.

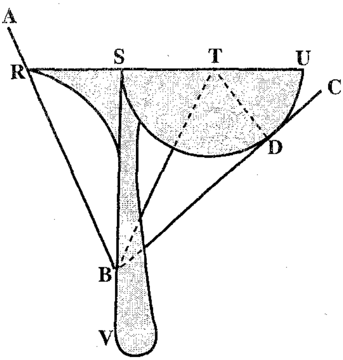
الف. فرض کنید که زاویهٔ مفروض AOB باشد. شاخه‌ای از هذلولی متساوی‌الساقینی را که O مرکز و OA یک مجانب آن است، رسم کنید به‌طوری که OB را در P قطع کند. به مرکز P و به شعاع ۲ PO دایره‌ای رسم کنید تا هذلولی را در R قطع کند. PM را موازی OA و RM

را عمود بر OA رسم کنید تا یکدیگر را در M قطع کنند، در این‌صورت $A\hat{O}M = \frac{1}{3} A\hat{O}B$.

پ. فرض کنید که AOB زاویهٔ مرکزی یک دایره و OC نیمساز زاویهٔ $A\hat{O}B$ باشد، شاخه‌ای از هذلولی با خروج از مرکز ۲ را که A یک کانون و OC هادی نظیر آن باشد، رسم و فرض کنید که این شاخه، قوس $\widehat{AB}$ را در P قطع کند ؛ در این‌صورت $A\hat{O}P = \frac{1}{3} A\hat{O}B$ است.

تثلیث زاویه با تبرزین

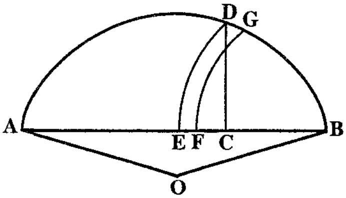
طی سالها، وسایل مکانیکی، دستگاههای مفصلی، و پرگارهای مرکب متعددی برای حل مسأله تثلیث ابداع شده‌اند. یک وسیلهٔ جالب و ابتدایی از این قبیل، به اصطلاح تبرزین است. مخترع تبرزین معلوم نیست، اما این وسیله در کتابی متعلق به سال ۱۸۳۵ توصیف شده است. برای ساختن یک تبرزین، از پاره‌خطی مانند RU که در S و T تثلیث شده (نگاه کنید به شکل)، شروع کنید. نیمدایره‌ای به قطر SU رسم کنید و SV را بر RU عمود رسم نمایید. وسیله را همچنان که در شکل مزبور نشان داده شده، کامل کنید. برای تثلیث زاویه‌ای مانند ABC به‌وسیلهٔ تبرزین، ابزار را روی زاویه طوری قرار دهید که R روی BA قرار گیرد، SV از نقطهٔ B بگذرد، و نیمدایره بر BC ، مثلاً در D ، مماس باشد.



آن‌گاه چون می‌توان نشان داد که مثلثهای RSB ، TSB و TDB همه مساوی‌اند، BS و BT زاویهٔ مفروض را تثلیث می‌کنند. تبرزین را می‌توان بر کاغذ کالک با خط‌کش و پرگار ساخته و سپس بر روی زاویهٔ مفروض تنظیم کرد. با این تدبیر می‌توانیم یک زاویه را با خط‌کش و پرگار ثلث کنیم (با دو تبرزین می‌توان یک زاویه را به پنج قسمت مساوی تقسیم کرد).

تثلیث زاویه توسط آلبرشت دورر

اگرچه یک زاویهٔ دلخواه را نمی‌توان با ابزارهای اقلیدسی دقیقاً تثلیث نمود، ترسیمهایی با استفاده از این ابزارها وجود دارند که تثلیثهای تقریبی بسیار خوبی را به دست می‌دهند. یک مثال عالی، ترسیمی است که در سال ۱۵۲۵ به وسیلهٔ حکاک و نقاش معروف آلبرشت دورر (Albrecht Dürer) داده شده است. زاویهٔ مفروض AOB را به‌عنوان زاویهٔ مرکزی یک دایره اختیار کنید (نگاه کنید به شکل). فرض کنید که C آن نقطه تثلیث وترAB باشد که به B نزدیکتر است. در C عمود بر AB را خارج کنید تا دایره را در D قطع کند. به مرکز B و شعاع BD



قوسی رسم کنید تا AB را در E قطع کند. فرض کنید که F آن نقطهٔ تثلیث EC باشد که به E نزدیکتر است. دوباره به مرکز B و به شعاع BF، قوسی رسم کنید که دایره را در G قطع کند. آن‌گاه OG یک خط تثلیث کنندهٔ تقریبی AOB است. می‌توان نشان داد که اشتباه درتثلیث با اندازه زاویهٔ AOB افزایش می‌یابد، ولی برای زاویه $A\hat{O}B = ۶۰^\circ$ تنها حدود ″۱ و برای زاویه $A\hat{O}B = ۹۰^\circ$ حدود ″۱۸ است.

ساختمانهای اقلیدسی مجانبی

ساختمانی که از ابزارهای اقلیدسی استفاده می‌کند امّا نیاز به تعداد بینهایتی عمل دارد، ساختمان اقلیدسی مجانبی نامیده می‌شود. با این روش می‌توان یک تثلیث تقریبی را تا هرمقدار موردنظر، به تثلیث واقعی نزدیک کرد. صحت دو ساختمان زیر از این گونه را برای حل مسأله تثلیث و تربیع بررسی کنید.

الف. فرض کنید که $OT_۱$ نیمساز زاویهٔ AOB ، $OT_۲$ نیمساز زاویهٔ $AOT_۱$ ، $OT_۳$ نیمساز زاویهٔ $T_۲OT_۱$ ، $OT_۴$ نیمساز زاویهٔ $T_۳OT_۲$ ، $OT_۵$ نیمساز زاویهٔ $T_۴OT_۳$ و به همین نحو، الی آخر باشد؛ در این‌صورت $\lim\limits_{i\to\infty} OT_i = OT$ ، یکی از خطهایی است که زاویهٔ AOB را ثلث می‌کنند (این ساختمان به‌وسیلهٔ فیالکوفسکی Fialkowski در سال ۱۸۶۰ داده شده است).

ب. پاره‌خطهای $B_۱B_۲ = AB_۱$ ، $B_۲B_۳ = ۲(B_۱B_۲)$ ، $B_۳B_۴ = ۲(B_۲B_۳)$ و الی آخر را بر امتداد پاره‌خط $AB_۱$ جدا کنید. به مراکز $B_۱$ ، $B_۲$ ، $B_۳$ ، ....، دایره‌های $B_۱(A)$ ، $B_۲(A)$ ، $B_۳(A)$ ، .... را رسم و فرض کنید که $M_۱$ وسط نیمدایرهٔ $AB_۲$ باشد. $B_۲M_۱$ را رسم کنید تا دایرهٔ $B_۲(A)$ را در $M_۲$ قطع کند، $B_۳M_۲$ را رسم کنید تا دایرهٔ $B_۳(A)$ را در $M_۳$ قطع کند، و الی آخر. فرض کنید که N_i تصویر M_i بر مماس مشترک دایره‌ها در A باشد. در این‌صورت $\lim\limits_{i\to\infty} AN_i =$ (ربع دایرهٔ $B_۱(A)$).

تثلیث زاویه و تربیع دایره

در حدود ۱۸۰۰ ق.م مصریان باستان، مسأله تربیع دایره را با برابر گرفتن یک ضلع مربع با ۸/۹ قطر دایره مفروض، حل کردند. از آن زمان به بعد بی‌اغراق هزاران نفر روی این مسأله کار

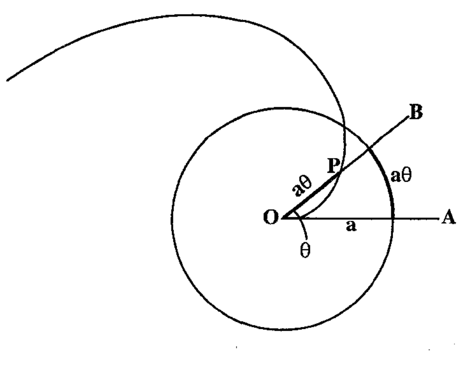
کرده‌اند، و علیرغم آن که امروز ثابت می‌شود که این ترسیم را نمی‌توان با ابزارهای اقلیدسی انجام داد، هرساله تعداد زیادی «دایره مربع کننده» پیدا می‌شود.

اولین فرد یونانی که ارتباطش با مسأله معلوم است، آناکساگوراس (حدود ۴۹۹ ـ حدود ۴۲۷ ق.م) می‌باشد، ولی از میزان سهم او در حل این مسأله چیزی نمی‌دانیم. بقراط خیوسی، که معاصر آناکساگوراس بود، در تربیع نوع خاصی از هلالها یا اشکال ماه شکلی که به‌وسیله دو قوس دایره‌ای محدود می‌شوند، احتمالاً به این امید که تحقیقات وی ممکن است منجر به راه‌حلی برای مسأله تربیع شود، توفیق حاصل کرد. چند سالی بعد هیپپیاس الیسی (حدود ۴۲۵ ق.م) منحنیی را که به *مربع‌ساز* شهرت یافت، ابداع کرد. این منحنی، هم مسأله تثلیث و هم مسأله تربیع را حل می‌کند، اما روایات در مورد این که اولین‌بار چه کسی آن را در نقش تربیع به‌کار برد، متفاوت است. شاید چنین باشد که هیپپیاس آن را برای تثلیث زاویه‌ها به‌کار برده، و این که دینوستراتوس (حدود ۳۵۰ ق.م)، یا هندسه‌دان متأخر دیگری به‌کاربرد آن در مسأله تربیع پی برده است.

با منحنی *حلزونی ارشمیدس* می‌توان به‌راه‌حل زیبایی از مسأله تربیع دست یافت، و گفته شده که ارشمیدس (حدود ۲۲۵ ق.م) عملاً حلزونی خود را بدین منظور به کاربرد. حلزونی را، در قالب اصطلاحات دینامیک، می‌توان به‌عنوان مکان هندسی نقطه‌ای مانند P تعریف کرد که به‌طور یکنواخت در امتداد شعاعی، که به نوبهٔ خود در صفحه‌ای حول مبدأ خود دوران می‌کند، در حرکت است. اگر وضعیت OA از شعاع دوار را وقتی که P بر O، مبدأ شعاع، منطبق است به‌عنوان دستگاه مختصات قطبی اختیار کنیم، داریم که OP با زاویهٔ AOP متناسب است، و معادلهٔ قطبی حلزونی $r = a\theta$ است که a ثابت تناسب می‌باشد.

دایرهٔ به مرکز O و شعاع a را رسم می‌کنیم. آن‌گاه OP و قوسی از این دایره بین خطهای OA و OP برابرند، زیرا هریک با $a\theta$ داده می‌شوند (نگاه کنید به شکل). نتیجه می‌شود که اگر OP را عمود بر OA اختیار کنیم، آن‌گاه OP طولی برابر با یک چهارم محیط دایره خواهد داشت. چون K ، مساحت دایره برابر با نصف شعاع آن ضرب‌در محیط آن است، داریم :

$$K = (\frac{a}{۲})(۴OP) = (۲a)(OP)$$



بدین ترتیب ضلع مربع خواسته شده، واسطهٔ هندسی بین ۲a و OP ، یا بین قطر دایره و طول آن بردار شعاعی حلزونی است که بر OA عمود می‌باشد.

می‌توانیم زاویه‌ای مانند AOB را با حلزونی ارشمیدس تثلیث (یا کلی‌تر از آن به

چند قسمت)کنیم. فرض کنید که OB حلزونی را در P تلاقی کند و قطعه خط OP را به وسیلهٔ نقاط P_1 و P_2 تثلیث کند. اگر دوایر به مرکز O و به شعاعهای OP_1 و OP_2 حلزونی را در T_1 و T_2 قطع کنند، آن‌گاه OT_1 و OT_2 زاویهٔ AOB را تثلیث می‌کنند.

مربع‌ساز یا کوادراتریکس. Quadratrix

مربع‌ساز. هیپیاس (حدود ۴۲۵ ق.م) یک منحنی متعالی، به نام مربع‌ساز ابداع کرد که به‌وسیلهٔ آن می‌توان زاویه‌ها را چند قسمت، و دایره را تربیع کرد. مربع‌ساز را می‌توان به‌صورت زیر تعریف کرد. فرض کنید که شعاع OX دایره‌ای به‌طور یکنواخت حول مرکز O دوران کند و از وضع OC به وضع OA ، که با OC زاویهٔ قائمه می‌سازد، درآید. همچنین فرض کنید که همزمان با آن خطی مانند MN که موازی با OA است به‌طور یکنواخت به موازات خود از C به‌سوی OA حرکت کند. مکان هندسی نقطهٔ P ، نقطهٔ تقاطع OX و MN ، منحنی مربع‌ساز است.

اصل درج و کاربردهای آن برای تثلیث زاویه و تضعیف مکعب

فرض کنید که دو منحنی m و n و یک نقطه مانند O مفروض باشند. فرض کنید که خود را مجاز بدانیم که، بر یک خط‌کش، پاره‌خطی مانند MN جدا کرده سپس خط‌کش را چنان میزان کنیم که از نقطهٔ O گذشته و منحنیهای m و n را بترتیب در نقطه‌های M و N قطع کند. در این‌صورت گفته می‌شود که خط رسم‌شده در امتداد خط‌کش بنابر اصل درج رسم شده است. مسأله‌های خارج از حیطهٔ ابزارهای اقلیدسی را اغلب می‌توان با این ابزارها حل کرد، در صورتی که به خود اجازه دهیم که از اصل درج نیز استفاده کنیم.

الف. فرض کنید که AOB زاویهٔ مرکزی دلخواهی در دایرهٔ مفروضی باشد. از B خطی مانند BCD رسم کنید که دایره را مجدداً در C و امتداد AO را در D قطع کند. به‌طوری که $CD = OA$ ، که در آن OA شعاع دایره است. در این صورت، $A\hat{D}B = \frac{1}{3} A\hat{O}B$. این مسألهٔ تثلیث، از قضیه‌ای که توسط ارشمیدس داده شده، نتیجه می‌شود.

ب. فرض کنید که AB پاره‌خط مفروضی باشد. زاویهٔ $A\hat{B}M = 90^\circ$ و زاویهٔ $A\hat{B}N = 120^\circ$ را رسم کنید. حال ACD را رسم کنید تا BM را در C و BN را در D قطع نماید به‌طوری که $CD = AB$ باشد. در این‌صورت $(AC)^3 = 2(AB)^3$. این ترسیم در اساس، در آثار انتشار یافته ویت (۱۶۴۶) و نیوتن (۱۷۲۸) داده شده بود.

حل. الف. CO را رسم و از این حقیقت استفاده کنید که زاویهٔ خارجی یک مثلث برابر با مجموع دو زاویهٔ داخلی غیرمجاور آن است.

ب. فرض کنید $AB = a$ ، $AC = b$ ، $BC = c$ و $A\hat{D}B = \theta$ باشد. در این‌صورت بنابه دستور سینوسها که ابتدا در مثلث BCD و سپس در مثلث ABD به‌کار برده می‌شود، $\frac{a}{c} = \frac{\sin ۳۰^\circ}{\sin\theta}$ ، $\frac{\sin\theta}{\sin ۱۲۰^\circ} = \frac{a}{b+a}$. در نتیجه $\frac{a^۲}{c(b+a)} = \tan ۳۰^\circ = \frac{۱}{\sqrt{۳}}$. از مجذور کردن دو طرف و یادآوری این که $c^۲ = b^۲ - a^۲$ است، داریم $۲a^۳(۲a+b) = b^۳(۲a+b)$ یا $b^۳ = ۲a^۳$.

هرچه راه حلهای بیشتر و تازه‌تری، برای مسألهٔ تثلیث زاویه پیدا می‌شد، بیشتر روشن می‌شد که، این مسأله، به‌طور جدی به مسأله‌های جبر و مثلثات بستگی دارد. مثلاً غیاث‌الدین جمشید کاشانی، در سدهٔ پانزدهم، از تثلیث زاویه، برای تنظیم جدولهای مثلثاتی بسیار دقیق که برای محاسبه‌های ریاضی و اخترشناسی لازم بود، استفاده کرد. او با استفاده از روش تقریبی حل عددی معادلهٔ درجهٔ سوم، با معلوم بودن $\sin ۳^\circ$ ، توانست $\sin ۱^\circ$ را به‌دست آورد. سپس، ویت، ریاضیدان فرانسوی، در سدهٔ شانزدهم، براساس تثلیث زاویه، توانست راه حل مثلثاتی معادلهٔ درجهٔ سوم را پیدا کند.

دکارت، نیوتن، کلرو، شال و بسیاری از دانشمندان دیگر هم، راه حلهای تازه و بکری، برای تثلیث زاویه داده‌اند، که البته، نسبت به راه حل ارشمیدس، بغرنج‌ترند. همهٔ این راه حلها، معمولاً براساس جست‌وجوی نقطه‌های برخورد یک مقطع مخروطی با دایره قرار دارند. تلاش برای پیدا کردن راه حلهای تازه‌ای در مورد مسألهٔ تثلیث زاویه، حتی در زمان ما هم ادامه دارد (مثلاً به‌کمک مونوگرافی).

۳۵۵. اگر $n = ۳k + ۱ \ (k \in Z^+)$ ، آن وقت به‌کمک پرگار و خط‌کش زاویهٔ

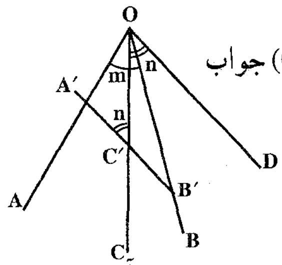
$$۶۰^\circ - k \times \frac{۱۸۰^\circ}{n} = \frac{(۳k+۱)\times ۱۸۰^\circ - ۳k \times ۱۸۰^\circ}{۳n} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

را می‌سازیم و اگر $n = ۳k - ۱ \ (k \in \mathbb{N})$ ، این زاویه را

$$k \cdot \frac{۱۸۰^\circ}{n} - ۶۰^\circ = \frac{۳k \times ۱۸۰^\circ - (۳k-۱)\times ۱۸۰^\circ}{۳n} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱۸۰^\circ}{n}$$

در هر دو حالت، $\frac{۱}{۳}$ زاویهٔ داده شده، ساخته می‌شود.

۲.۲.۲.۱.۲.۳. دو زاویه



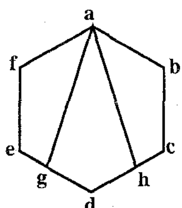
۳۵۶. فرض کنیم مسأله حل شده و دستگاه توافقی$(O, ABCD)$ جواب مسأله باشد، به قسمی که :

$$\hat{AOB} = m \ , \ \hat{COD} = n$$

$A'C'B'$ را به موازات OD رسم می‌کنیم. می‌دانیم C' وسط $A'B'$ و $\hat{OC'A'} = n$ است و از ساختمان زیر به‌دست می‌آید :
قطعه خطی مانند $A'B'$ رسم می‌کنیم. از C' وسط آن خطی می‌کشیم که با $A'B'$ زاویهٔ n تشکیل دهد و کمان درخور زاویهٔ m را روی $A'B'$ می‌سازیم، تا خط مزبور را در O قطع کند. OA' ، OB' ، و OC' را رسم می‌کنیم. از O خط OD را به موازات $A'B'$ می‌کشیم تا چهارمین شعاع دستگاه به‌دست آید (شکل).

۳.۱.۲.۳ .چندضلعی

۱.۳.۱.۲.۳ .شش ضلعی

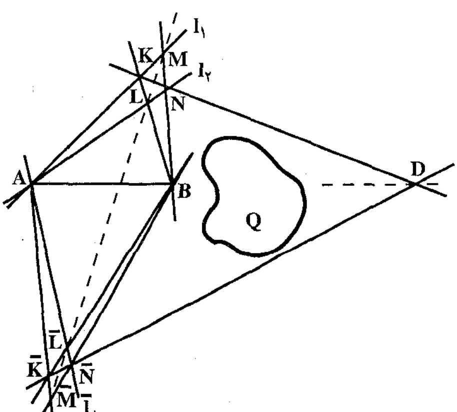


۳۵۷. مسأله را حل شده بگیرید. اگر ag و ah خطهای جواب مسأله باشند، داریم :

$$S_{abcg} = S_{agdh} = S_{ahef} = \frac{۱}{۳} S_{abcdef}$$

بنابراین کافی است یکی از این دو خط را مشخص کنیم. برای این کار ...

۴.۱.۲.۳ .شکلهای دیگر



۳۵۸. یک راه رسم ممکن : از A دو خط $l_۱$ و $l_۲$ را که از ناحیهٔ Q نگذرد و از B دو خط که $l_۱$ و $l_۲$ را در نقطه‌های K و L ، M و N ببرند، رسم می‌کنیم. خط ML را با l نشان می‌دهیم (شکل). بعد از A دو خط دیگر $\bar{l}_۱$ و $\bar{l}_۲$ مرور می دهیم که l را درنقطه‌های $\bar{M}$ و $\bar{L}$ ببرند. فرض می‌کنیم $B\bar{L}$ و $B\bar{M}$ خطهای $\bar{l}_۱$ و $\bar{l}_۲$ را در نقطه‌های $\bar{K}$ و $\bar{N}$ ببرند. می‌دانیم که D ، نقطهٔ

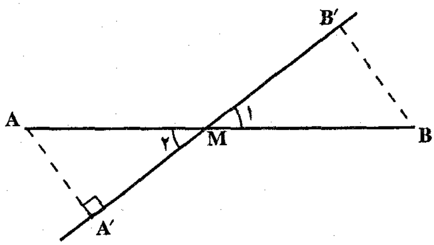
برخورد خطهای KN و $\overline{KN}$، بر خط AB قرار دارد. با تکرار این روش نقطهٔ دیگری از خطْ AB در طرف راست ناحیهٔ Q پیدا می‌کنیم. با داشتن این دو نقطه امکان امتداد دادن AB را فراتر از ناحیهٔ Q به‌دست می‌آوریم.

۳.۳.رسم خط

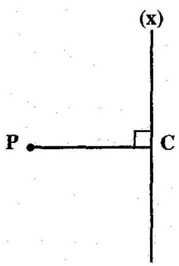
۱.۳.۳. رسم خط با معلوم بودن: نقطه، پاره‌خط، نیمخط، خط، زاویه

۱.۱.۳.۳. نقطه

۱.۱.۱.۱.۳.۳. دو نقطه

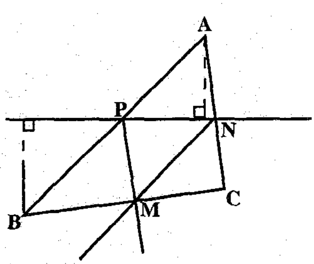


۳۵۹. وسط پاره‌خط AB را M می‌نامیم. هر خطی که از نقطهٔ M بگذرد، جواب مسأله است. به‌عنوان مثال اگر خط Δ از نقطهٔ M گذشته باشد و از A و B عمودهای ′AA و ′BB را بر آن رسم کنیم، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ′MAA و ′MBB به دلیل برابری وتر و یک زاویهٔ حاده همنهشتند، پس $AA' = BB'$ است. مسأله بی‌شمار جواب دارد.



۳۶۰. قطبی نقطهٔ P نسبت به نقطهٔ C خطی است که از نقطهٔ C بر PC عمود می‌شود.

۲.۱.۱.۱.۳.۳. سه نقطه

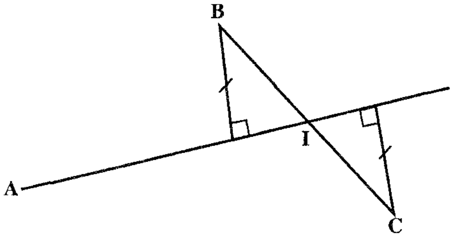


۳۶۱. اگر سه نقطهٔ A، B و C همخط نباشند، این سه نقطه را به‌هم وصل می‌کنیم، تا مثلث ABC به‌دست آید. وسط ضلعهای این مثلث را N، M و P می‌نامیم. خطهای MN، NP و MP جواب مسأله‌اند.

نکته. اگر سه نقطه همخط باشند، هر خط موازی ABC جواب مسأله است.

۳۶۲. معمّایی از هندسه.

معما را این‌طور مطرح می‌کنیم : یک خط راست مانند D داریم که دو نقطهٔ B و C از آن به یک فاصله‌اند. چند امکان برای این کار وجود دارد؟

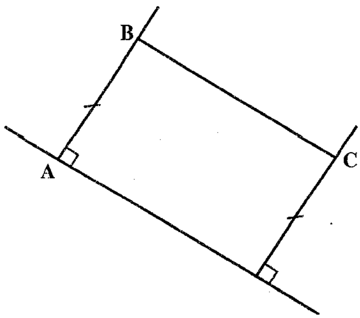


الف. B و C روی خط D قرار دارند.

ب. B و C در دوطرف D قرار دارند.

ج. B و C در یک طرف D قرار دارند.

حالت اول برخلاف فرض است، زیرا A ، B و C در یک امتداد نیستند. در حالت دوم خطی را که از نقطهٔ A می‌گذرد و از B و C به یک فاصله است، خط AI می‌نامیم که در آن I وسط پاره‌خط BC است.

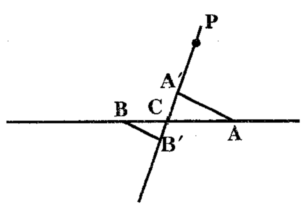


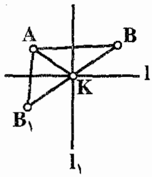
در حالت سوم، خطی که از A می‌گذرد و از B و C به یک فاصله است، موازی با خط BC خواهد بود.

۳۶۴. فرض کنیم مسأله حل شده است و PC جواب مسأله باشد (شکل). از A و B عمودهای AA' و BB' را بر آن رسم می‌کنیم. به فرض $\frac{AA'}{BB'}=\frac{m}{n}$ ، داریم : $\frac{CA}{CB}=\frac{m}{n}$.

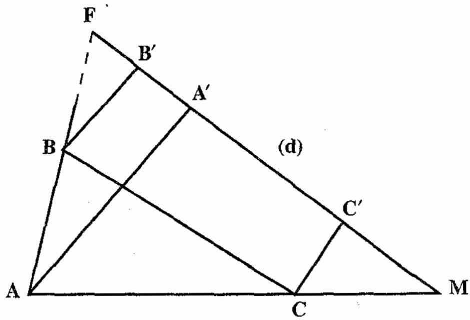
بنابراین راه حل مسأله چنین است :

A را به B وصل نموده و نقطهٔ C را روی آن چنان اختیار کنیم که $\frac{CA}{CB}=\frac{m}{n}$ و C را به P وصل کنیم.





۳۶۵. B_1 را قرینهٔ B نسبت به K می‌گیریم و دو خط l و l_1 را عمود برهم از نقطهٔ K می‌گذرانیم (شکل). ثابت کنید مجموع فاصله‌های دو نقطهٔ A و B از خط l برابر است با تصویر AB یا AB_1 بر l_1 (هرکدام که خط l_1 را قطع می‌کنند). حالا بسادگی معلوم می‌شود که اگر خط l را عمود بر خط AB یا AB_1 (هرکدام که بزرگتر است)، رسم می‌کنیم، مجموع فاصله‌های A و B از آن حداکثر خواهد شد.
همچنین اگر خط l را از یکی از ضلعهای AK یا BK از مثلث ABK (آن که ارتفاع وارد بر آن کوچکتر است)، بگذرانیم، مجموع فاصله‌های A و B از آن، حداقل می‌شود.



۳۶۶. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و d خط خواسته شده باشد، پس رابطه‌های $\frac{AA'}{BB'}=\frac{m}{n}$ و $\frac{BB'}{CC'}=\frac{n}{r}$ برقرار است. از ضرب کردن عضوهای متناظر این دو رابطه نتیجه می‌شود $\frac{AA'}{CC'}=\frac{m}{r}$. خطهای AC و AB را امتداد می‌دهیم تا بترتیب d را در M و F قطع کنند. در مثلثهای MAA' و FAA' بترتیب داریم:

$$\frac{AA'}{CC'}=\frac{MA}{CM}=\frac{m}{r} \quad (1) \quad , \quad \frac{AA'}{BB'}=\frac{AF}{BF} \quad (2)$$

رابطه‌های (۱) و (۲) نشان می‌دهند که برای حل مسأله کافی است در امتداد AC و AB بترتیب نقطه‌های M و F را چنان پیدا کنیم که رابطه‌های $\frac{AF}{BF}=\frac{m}{n}$، $\frac{AM}{CM}=\frac{m}{r}$ برقرار باشد.

رابطه‌های $\frac{AF}{BF}=\frac{m}{n}$ و $\frac{AM}{CM}=\frac{m}{r}$ را می‌توان به‌صورت $\frac{AB}{BF}=\frac{m-n}{n}$ و $\frac{AC}{CM}=\frac{m-r}{r}$ نوشت. ازاین رابطه‌ها اندازه‌های BF و CM قابل رسم‌است و از آن‌جا نقطه‌های M و F مشخص می‌شوند. MF خط خواسته شده (d) است.

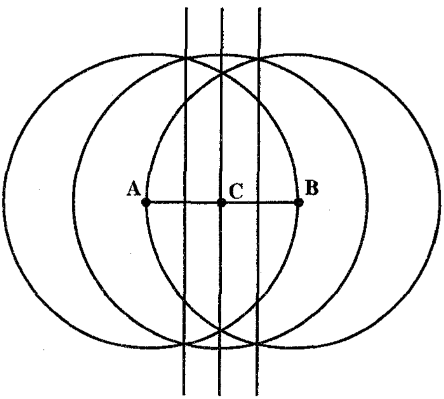
۳.۲.۱.۱.۳. چهار نقطه

۳۶۷. فرض کنید که $T_{\overrightarrow{CD}}(B)=B'$ و E میانگاه پاره‌خط AB' است. از نقطه‌های A ، B، C و D خطهایی به موازات BE رسم کنید.

۳.۲.۱.۲. پاره‌خط

۳.۲.۱.۲.۱. یک پاره‌خط

۳۶۸. دو دایره به شعاع AB و به مرکزهای A و B رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دو دایره را، با خط راستی به‌هم وصل می‌کنیم تا پاره‌خط راست AB را در C قطع کند.



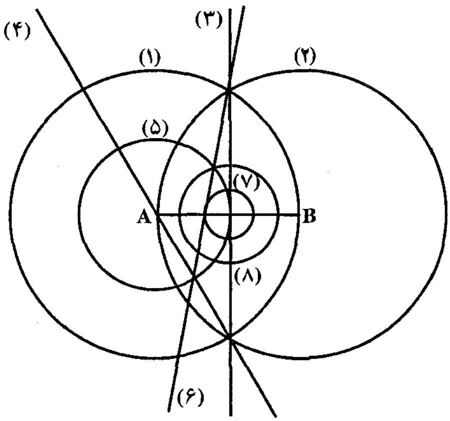
(الف)

اکنون دایره‌ای به مرکز C و شعاع AB رسم می‌کنیم. این دایره، هریک از دو دایرهٔ قبلی را در دونقطه قطع می‌کند. اگر دو نقطهٔ برخورد با هر دایره را با خط راستی به‌هم وصل کنیم، پاره‌خط راست AB به چهار بخش برابر تقسیم می‌شود (شکل الف).

به این ترتیب، ۶ خط رسم شده است : سه دایره و سه خط راست. ثابت می‌کنیم این سه‌خط راست، پاره‌خط راست AB را به چهار بخش برابر تقسیم می‌کنند. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌هایی از صفحه که از دو انتهای پاره‌خط راست به یک فاصله باشند، عبارت است از خط راست عمودمنصف AB . دو نقطهٔ برخورد دو دایرهٔ اوّل، از دو انتهای پاره‌خط راست AB به یک فاصله‌اند (به فاصلهٔ برابر طول AB) و بنابراین، خط راستی که از این دو نقطه می‌گذرد بر AB عمود است و آن را در نقطهٔ C نصف می‌کند. به‌همین ترتیب، نقطه‌های برخورد دایرهٔ سوم با یکی از دو دایرهٔ قبلی، از نقطهٔ C و یکی از دو انتهای AB به یک فاصله‌اند و بنابراین، خط راستی که از این دو نقطه بگذرد، نصف پاره‌خط راست AB را به دو بخش برابر تقسیم می‌کند.

انجام یک ساختمان هندسی، به کمک پرگار و خط‌کش، به این معناست که حل مسأله را

به انجام متوالی برخی از عملهای زیر منجر کنیم :
۱. خط راستی از دو نقطهٔ مفروض بگذرانیم.
۲. دایره‌ای با مرکز و شعاع مفروض رسم کنیم.
۳. نقطه‌های برخورد : الف) دو خط راست، ب) خط راست و دایره، ج) دو دایره را به‌دست آوریم.

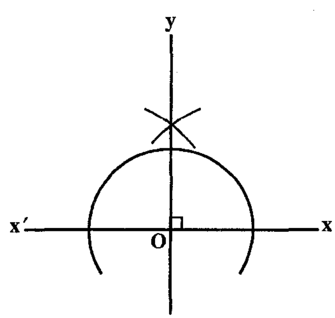


در مسألهٔ ما، دنبالهٔ این عملها به این ترتیب است :
۱، ۲ و ۳ ج)، ۱ و ۳ الف)، ۲ و ۳ ج)، ۳ ج) ۱، ۱ و ۳ الف)، ۳ الف).
درضمن، شرط مسأله برقرار است : تعداد عملهای ۱ و ۲ برابر است با شش.
دربارهٔ این مسأله فکر کنید که برای تقسیم یک پاره‌خط راست به ۳ یا ۵ بخش برابر، به کمترین تعداد از عملهای ۱ و ۲ نیاز باشد. در شکل (ب)، روش تقسیم پاره‌خط راست، به ۶ بخش برابر نشان داده شده است ؛ در این روش، تعداد عملهای ۱ و ۲ برابر است با ۸.

۳.۱.۳.۳. نیمخط

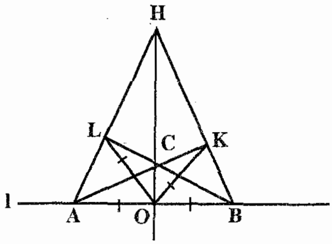
۳.۱.۳.۳.۱. یک نیمخط

۳۶۹. امتداد نیمخط Ox را رسم می‌کنیم و Ox' می‌نامیم. بر خط $x'x$ از نقطهٔ O واقع بر آن، عمودی اخراج می‌کنیم. این خط جواب مسأله است. شکل، روش ترسیم را نشان می‌دهد.



۳. ۳. ۱. ۴. خط

۳. ۳. ۱. ۴. ۱. یک خط



۳۷۰. روی خط راست داده شده l ، پاره‌خطهای OA و OB را به طول ۱ سانتیمتر جدا می‌کنیم، سپس، از همین نقطهٔ O، دو پاره‌خط راست دیگر OK و OL را به طول ۱ سانتیمتر رسم می‌کنیم (دو نقطهٔ K و L در یک طرف خط راست l قرار دارند ؛ شکل را ببینید). C را نقطهٔ برخورد خطهای راست AK و BL و H را نقطهٔ برخورد خطهای راست AL و BK می‌گیریم. در این صورت، خط راست CH ، بر خط راست l، عمود خواهد شد. برای اثبات درستی رسم، باید از این دو قضیه استفاده کرد :

۱. اگر در مثلثی، طول میانهٔ وارد بر قاعده، برابر نصف طول قاعده باشد، آن وقت، زاویهٔ رأس این مثلث، قائمه است ؛

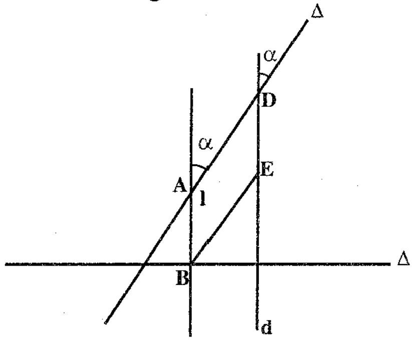
۲. در هر مثلث، سه ارتفاع، در یک نقطه به هم می‌رسند.

در این مسأله، صحبت بر سر ساختمانی است که باید با انتخاب ابزاری غیرعادی، یک خط‌کش و واحد طول انجام گیرد. می‌توان ثابت کرد که به کمک این ابزار، بسیاری از مسأله‌های عادی ساختمانی قابل حل‌اند : رسم خط راستی موازی یا عمود بر خط راست داده شده به نحوی که از نقطهٔ مفروضی بگذرد، جدا کردن پاره‌خط راست مفروض روی خط راست داده شده، جدا کردن زاویهٔ مفروض در هر طرف نیمخط راست داده شده.

با وجود این، به کمک خط‌کش و واحد طول، نمی‌توان هر مسأله‌ای را که با پرگار و خط‌کش حل می‌شود، حل کرد. مثلاً، با در دست داشتن پاره‌خط راست به طول واحد، نمی‌توان پاره‌خط راست به طول $\sqrt{1+\sqrt{2}}$ را رسم کرد ؛ حتی در حالت کلی، نمی‌توان مثلث قائم‌الزاویه‌ای را ساخت که طول وتر و ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن معلوم باشد. معلوم شده است که با آغاز از پاره‌خط راستِ به طول واحد، تنها می‌توان پاره‌خطهای راستی را ساخت که طول آنها، با عملهای حسابی و همچنین جذر گرفتن از مجموع مجذورهای طولهای پاره‌خطهای داده شده، قابل بیان باشد (به زبان دیگر، بیان طول این پاره‌خط راست، باید به ازای همهٔ تغییر علامتهای ممکن در جلو همهٔ رادیکالها، مقداری حقیقی باشد).

۳.۳.۱.۴.۲. دو خط

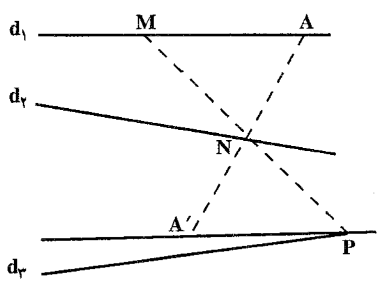
۳۷۱. خط دلخواهی مانند d را چنان رسم می‌کنیم که با خط Δ زاویهٔ α بسازد. اگر نقطهٔ برخورد Δ و d را D بنامیم، روی خط d پاره خط $DE = l$ را جدا می‌کنیم. از E خطی موازی Δ رسم می‌کنیم تا خط Δ' را در نقطهٔ B قطع کند. از نقطهٔ B خط δ را موازی خط d رسم می‌کنیم تا Δ را در A قطع کند. خط δ جواب مسأله است.



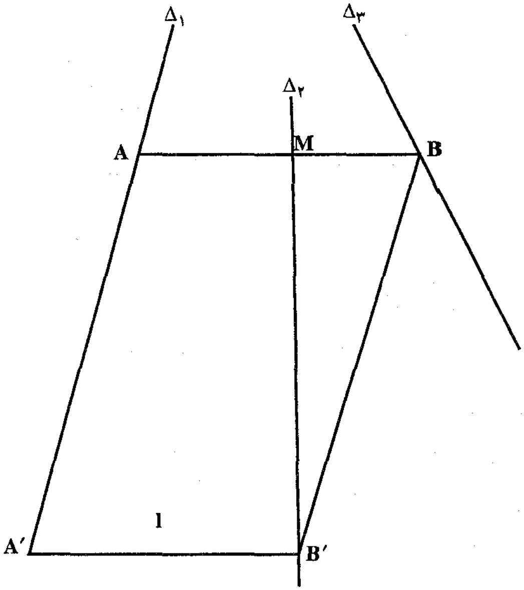
۳.۳.۱.۴.۳. سه خط

۳.۳.۱.۴.۳.۱. سه خط در هر حالت

۳۷۲. از نقطهٔ A روی خط d_1 به نقطه‌ای مانند N روی خط d_2 وصل کرده و امتداد می‌دهیم به اندازهٔ خود، تا نقطهٔ A' به دست آید. از A' خطی به موازات d_1 رسم می‌کنیم تا d_3 را در P قطع کند، حالا اگر از P به N وصل کنیم و امتداد بدهیم $MN = NP$ است؛ زیرا دو خط موازی و قرینه هستند.

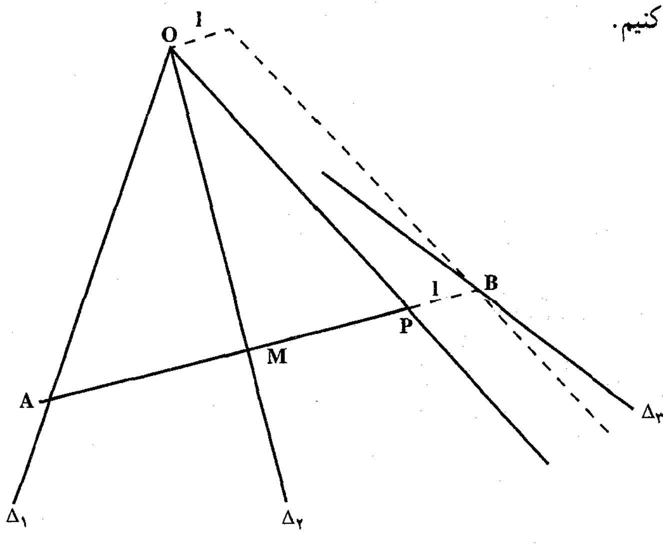


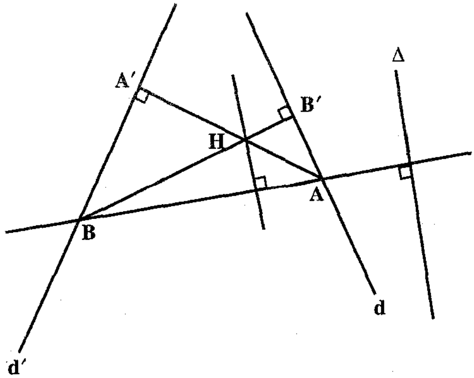
۳۷۳. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. چون $AB = BC$ است، پس A و C نسبت به خط Y قرینه‌اند. بنابراین برای حل مسأله، X' قرینهٔ خط X را نسبت به Y رسم می‌کنیم. X' خط Z را در نقطهٔ C قطع خواهد کرد و CBA را عمود بر Y رسم می‌کنیم. مسأله عموماً یک جواب دارد.



۳۷۴. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. $AB = l$، از B خطی به موازات Δ_1 رسم می‌کنیم تا Δ_2 را در B' قطع کند. از B' خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا Δ_1 را در A' قطع کند، $A'B' = l$. بنابراین از یک نقطهٔ اختیاری مانند A' روی Δ_1 خطی به طول l بر Δ_1 عمود می‌کنیم، تا نقطهٔ B' به دست آید. از نقطهٔ B' به موازات Δ_1 رسم می‌کنیم تا Δ_3 را در B قطع کند. از B خطی عمود بر Δ_1 رسم می‌کنیم، $AB = l$.

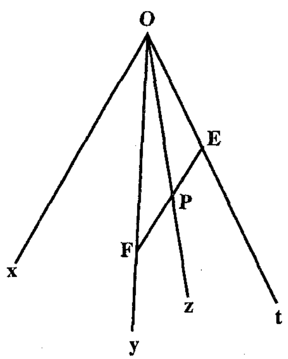
۳۷۵. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. روی MB طول $MP = MA$ را جدا می‌کنیم؛ بنابراین $PB = l$، پس P و A نسبت به Δ_2 قرینهٔ یکدیگر هستند. پس نقطهٔ A را روی Δ_1 در نظر می‌گیریم. قرینهٔ آن را نسبت به Δ_2 تعیین می‌کنیم و P می‌نامیم، سپس از O خطی به موازات AB و به طول l رسم می‌کنیم، آن گاه از نقطهٔ به دست آمده به موازات OP رسم می‌کنیم تا Δ_3 را در B قطع کند، سپس از B خطی به موازات AP رسم می‌کنیم.





۳۷۶. خطی عمود بر خط Δ رسم می‌کنیم تا d و d' را در A و B قطع کند. اگر H نقطهٔ برخورد عمودهایی باشد که از A بر d' و از B بر d رسم شده‌اند، خطی که از H بر AB عمود می‌شود، خط خواسته شده است؛ زیرا اگر نقطهٔ برخورد دو خط را O بنامیم، AA' و BB' دو ارتفاع مثلث OAB هستند و H محل برخورد ارتفاعات این مثلث است. سپس خطی که از H بر AB عمود شود (موازی Δ رسم شود) ارتفاع سوم مثلث است، پس از نقطهٔ O می‌گذرد.

۳.۲.۱.۴.۳.۲. سه خط همرس



۳۷۷. سه خط همرس Ox، Oz و Ot را در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ اختیاری P واقع بر Oz خطی به موازات Ox رسم می‌کنیم تا Ot را در E قطع کند. PF را برابر PE جدا می‌کنیم. OF جواب مسأله است.

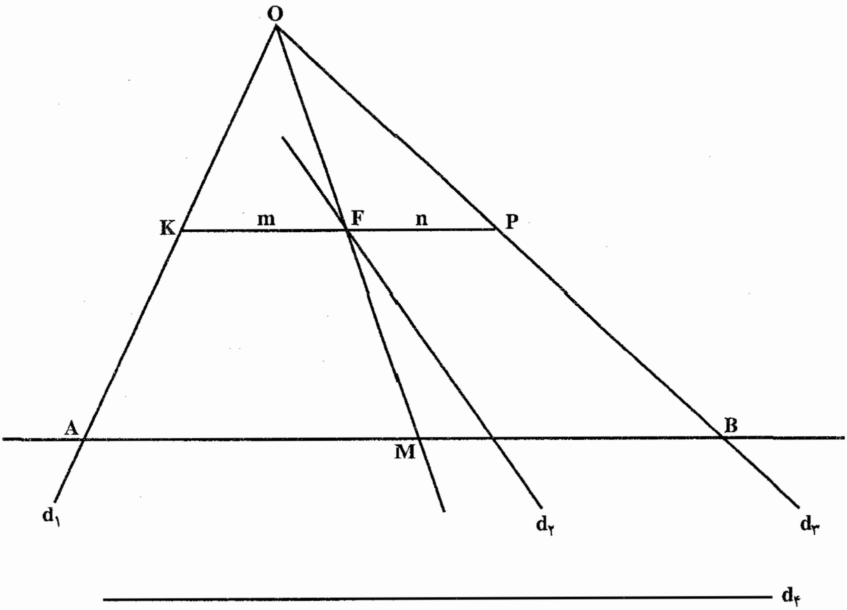
۳.۲.۱.۴.۴. چهار خط

۳.۲.۱.۴.۴.۱. چهار خط در هر حالت

۳۷۸. همهٔ خطهای $\overline{T}$ را در نظر می‌گیریم که نسبت پاره‌خطهای $\overline{AB}$ و $\overline{BC}$ که خطهای l_1، l_2 و l_3 بر آن جدا می‌کنند، برابر مقدار مفروضی باشد؛ با انتخاب یک نقطهٔ دلخواه A بر خط l_1 می‌توانیم $\overline{T}$ را رسم کنیم. نقطه‌های $\overline{D}$ بر خطهای $\overline{T}$ چنان که پاره‌خطهای $\overline{AB}$، $\overline{BC}$ و $\overline{CD}$ به نسبتهای مفروضی باشند، بر یک خط m واقعند؛ این خط m را می‌توان با یافتن دو موضع از $\overline{D}$ بسادگی رسم کرد. نقطهٔ برخورد m و l_4 بر خط مطلوب $\overline{T}$ واقع است؛ اکنون ترسیم بسادگی انجام می‌شود. اگر $m \| l_4$ باشد، مسأله جوابی ندارد. اگر m بر l_4 منطبق باشد، جواب نامعین است.

۳۷۹. d_1 و d_3 را امتداد می‌دهیم، تا یکدیگر را در O قطع کنند. از یک نقطهٔ اختیاری خطی به موازات d_4 رسم می‌کنیم و نقطهٔ M را روی آن طوری انتخاب می‌کنیم که $\frac{AM}{BM}=\frac{m}{n}$ باشد. سپس از O به M وصل کرده و d_2 را امتداد می‌دهیم تا OM را در F قطع کند. از F خطی موازی d_4 رسم می‌کنیم تا d_1 و d_3 را در K و P قطع کند. خط KP، خط داده شده است. شرط جواب امکان مسأله این است که d_2 با OM موازی نباشد و آن را قطع کند:

$$\frac{AM}{BM}=\frac{KF}{PF}=\frac{m}{n}$$



۳.۳.۱.۵.زاویه

۳.۳.۱.۵.۱. یک زاویه

۳۸۱. مثلث BAC باید متساوی‌الساقین باشد. در این صورت قاعدهٔ BC از آن کمترین مقدار ممکن (Min) است. اگر مثلث دیگری مانند MAN همین مساحت K^2 را داشته باشد، اما ضلعهای AM و AN از آن با هم مساوی نباشند، خواهیم داشت:

$$BC^2=b^2+c^2+2bc\cos\hat{A} \qquad (1)$$

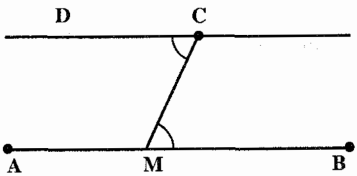
$$MN^2=m^2+n^2-2mn\cos\hat{A} \qquad (2)$$

اما هنگامی که مثلثها هم ارز هستند، $bc=mn$ است؛ زیرا این مثلثها زاویهٔ رأسشان

M با هم برابر است. پس نسبت مساحتشان به نسبت حاصلضرب دو ضلع مجاور به زاویهٔ M در آنهاست. همچنین BC^2 و MN^2 نمی‌توانند مغایر مجموع مربعهای b^2+c^2 و m^2+n^2 باشند. بنابراین مجموع اولی کمتر از دومی است، در نتیجه $BC<MN$.

۳.۳.۱.۶. پاره‌خط، نقطه

۳.۳.۱.۶.۱. یک نقطه، یک پاره‌خط



۳۸۲. مسأله را حل شده فرض کنید. پاره‌خط داده شده را AB، وسط آن را نقطهٔ M، و نقطهٔ داده شده را C بنامید. اگر CD خطی باشد که از C موازی AB رسم شده است، دو زاویهٔ BMC و MCD با هم برابرند. اما زاویهٔ BMC معلوم است. پس راه حل مسأله مشخص می‌شود، به این ترتیب که از A خطی رسم کنیم که با AM زاویه‌ای مساوی $A\hat{M}B$ بسازد.

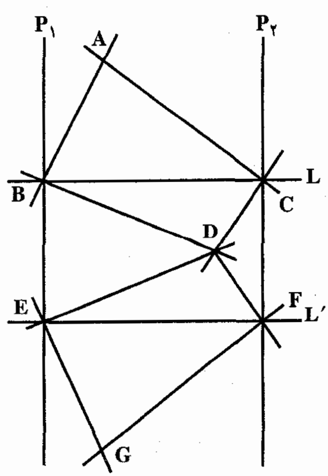
۳.۳.۱.۷. نیمخط، نقطه

۳.۳.۱.۷.۱. دو نیمخط، یک نقطه

۳۸۳. از O به A و B وصل کنید.

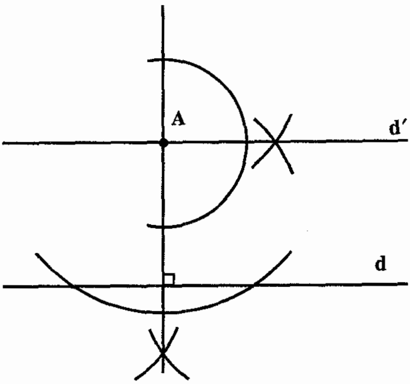
۳.۳.۱.۸. خط، نقطه

۳.۳.۱.۸.۱. یک خط، یک نقطه

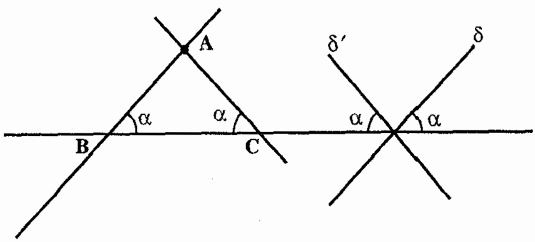


۳۸۴. نقطهٔ A و خط راست L را در نظر می‌گیریم (شکل را ببینید). از نقطهٔ A، خط راست دلخواهی رسم می‌کنیم که خط راست L را قطع کند، بعد از A عمودی بر این خط راست اخراج می‌کنیم. این دو خط راست عمود بر هم، خط راست L را، بترتیب، در نقطه‌های B و C قطع می‌کنند. از نقطه‌های B و C عمودهایی، بترتیب، بر AB و AC اخراج می‌کنیم، عمودهای اخیر، یکدیگر را در نقطهٔ D قطع می‌کنند؛ در ضمن بسادگی روشن

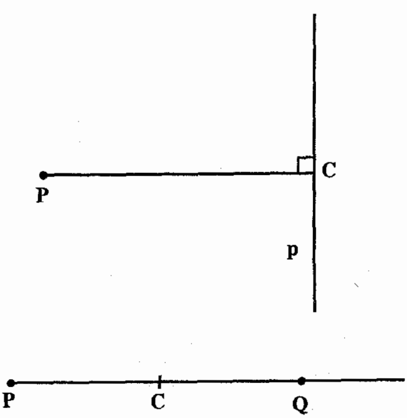
می‌شود که، تصویرهای A و D بر L، نسبت به وسط پاره‌خط راست BC ، قرینهٔ یکدیگرند. اکنون باید همین عمل را دربارهٔ نقطهٔ A و خط راست ′L ، که با L موازی است، انجام داد و به نقطهٔ G رسید. روشن است که خط راست AG بر خط راست L عمود خواهد بود.



۳۸۵. خط ′AA را از نقطهٔ A، عمود بر خط d رسم می‌کنیم ؛ سپس از نقطه A خط ′d را عمود بر خط ′AA رسم می‌نماییم. این خط، خطی است که از نقطهٔ A به موازات خط d رسم می‌شود. زیرا دو خط عمود بر یک خط با هم موازی‌اند.

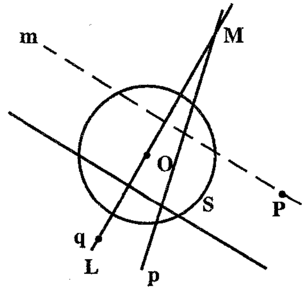


۳۸۶. خط دلخواه δ را که با BC زاویهٔ α می‌سازد، رسم می‌کنیم و از A خطی موازی خط δ رسم می‌نماییم. اگر جهت زاویه مورد نظر نباشد، مسأله دو جواب دارد.



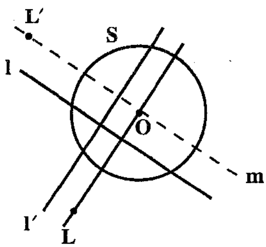
۳۸۷. ۱. قطبی نقطهٔ P نسبت به نقطهٔ C (دایرهٔ به شعاع صفر) خطی است که از C بر PCعمود شود.

۲. قطبی نقطهٔ P نسبت به خط Δ (دایرهٔ به شعاع بینهایت)، خطی است موازی Δ و مکان قرینه‌های P نسبت به نقطه‌های مختلف Δ ، زیرا اگر در یک تقسیم توافقی (PQCD)، یکی از نقطه‌ها مثلاً D در بینهایت واقع شود، نقطهٔ C وسط AB واقع خواهد شد.



(الف)

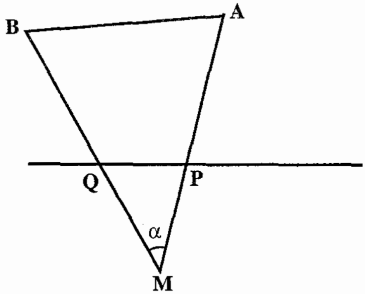
۳۸۸. الف. وضع خط مطلوب m (شکل الف) به وسیلهٔ P و نقطهٔ بینهایت l معین می‌شود. از این جا نتیجه می‌شود که M، قطب l نسبت به دایرهٔ مفروض S، نقطهٔ برخورد p و q است که اوّلی قطبی p و دومی قطبی نقطهٔ بینهایت خط l است. رسم p با ستارهٔ تنها آسان است. خط q بایستی از قطب خط مفروض l ، یعنی L که می‌تواند به وسیلهٔ ستارهٔ تنها به دست آید و از قطب خط بینهایت یعنی از O، مرکز دایرهٔ S، بگذرد. این نشان می‌دهد که M می‌تواند با ستارهٔ تنها معین شود. وقتی M معلوم باشد، قطبش m نسبت به S می‌تواند با ستارهٔ تنها رسم شود.
روشن است که وقتی l از O بگذرد، این ترسیم ممکن نیست. ولی در این حال از برخورد l و S قطعه‌ای معین می‌شود که وسط آن نقطهٔ O معلوم است و خطی از P به موازات l می‌تواند رسم شود. ترسیم ما باز هم ممکن نیست، وقتی P بر O منطبق باشد، در این صورت به ترتیب زیر عمل می‌کنیم :



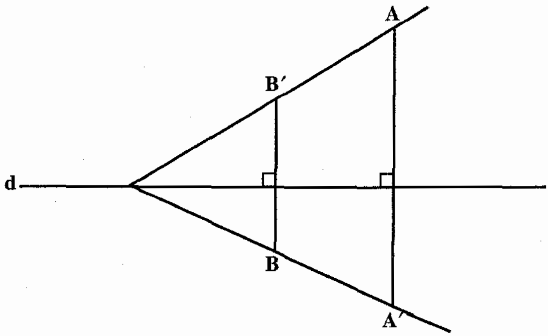
(ب)

L قطب خط مفروض l نسبت به S، را پیدا می‌کنیم ؛ خط OL بر l عمود است. بعد یک خط l' موازی با OL رسم می‌کنیم و L' ، قطب l' نسبت به S را به دست می‌آوریم. پس OL' خط مطلوب است، زیرا بر L' عمود است و بنابراین با l موازی است (شکل ب).
ب. از M خطی به موازات AB می‌کشیم و از B خطی به موازات AM. فرض می‌کنیم N نقطهٔ برخورد این خطها باشد. روشن است که MN پاره‌خط مطلوب است.
ج. فرض می‌کنیم که L قطب l نسبت به S باشد. OL بر l عمود است. برای پیدا کردن خط مطلوب، کافی است از P خطی موازی OL رسم کنیم. اگر l از O ، مرکز S، بگذرد، این ترسیم ممکن نیست ؛ ولی در آن صورت می‌توانیم یک خط l' موازی با l رسم کنیم و عمودی از P بر l' فرود آوریم.

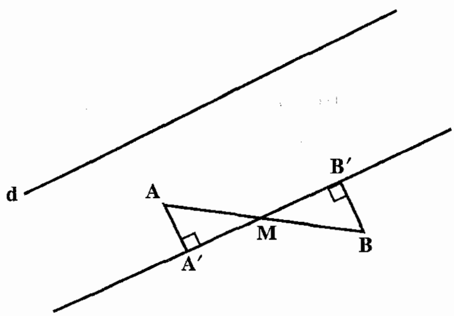
۲.۸.۱.۳.۳. یک خط، دو نقطه



۳۸۹. مسأله را حل شده می‌گیریم. نقطهٔ برخورد AP و BQ را M می‌نامیم. بنا به فرض، $A\hat{M}B = \alpha$ است. پس یک مکان هندسی نقطهٔ M کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AB است، ...



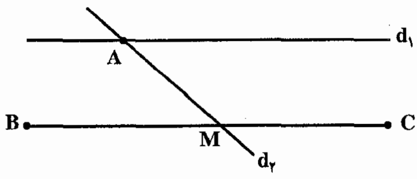
۳۹۰. قرینه‌های دو نقطهٔ A و B نسبت به خط d را به ترتیب، ′A و ′B می‌نامیم. خطهای ′AB و ′BA جواب مسأله‌اند، بدیهی است که نقطهٔ برخورد این دو خط روی محور تقارن d است.



۳۹۱. خطی که از نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB موازی خط d رسم شود، جواب مسأله است.

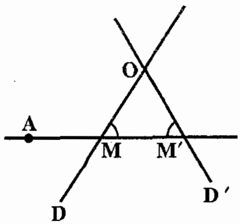
۳.۸.۱.۳.۳. یک خط، سه نقطه

۳۹۲. خطی که از نقطهٔ A موازی خط BC رسم شود، یک جواب مسأله است و جواب دیگر مسأله، خطی است که نقطهٔ A را به نقطهٔ M وسط پاره‌خط BC وصل می‌کند.

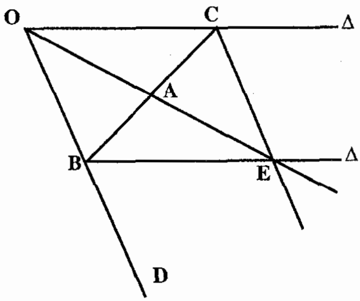


۴.۸.۱.۳.۲. دو خط، یک نقطه

۱.۴.۸.۱.۳.۲. دو خط در هر حالت، یک نقطه

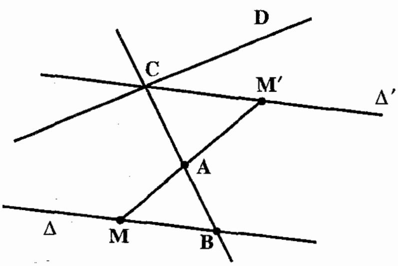


۳۹۳. از محور تقارن استفاده کرده و خطی را به خط دیگر انتقال دهید.



۳۹۴. اگر $\overline{CAB}$ خط خواسته شده باشد، که در آن $\overline{AB}=\overline{AC}$ است، می‌توان نوشت $\frac{AB}{AC}=۱$. از این رابطه معلوم می شود که C مجانس B است با مرکز تجانس A و نسبت تجانس $k=۱$ و از آن جا حل مسأله چنین است :

خط ′Δ مجانس خط Δ را با مرکز تجانس A و نسبت تجانس $k=۱$ رسم می‌نماییم تا خط D را در B قطع نماید. سپس BA را وصل کرده امتداد می‌دهیم تا Δ را در C قطع کند، ABC خط خواسته شده است.



۳۹۵. در این حالت ′Δ مجانس Δ را با مرکز تجانس A و نسبت تجانس $k=\frac{m}{n}$ رسم می‌نماییم تا خط D را در نقطهٔ C قطع کند. خط AC که Δ را در نقطهٔ B قطع می کند، جواب مسأله است.

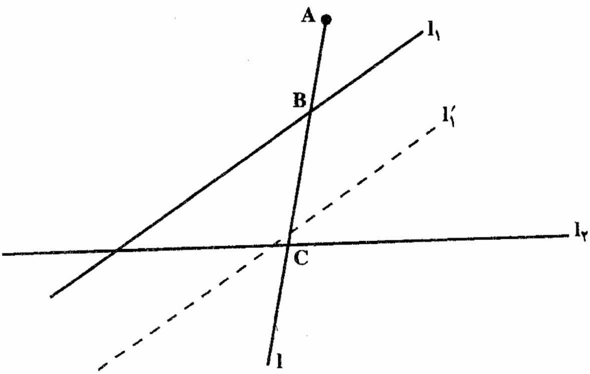
نکته. رابطهٔ $\frac{m}{n}=\frac{AB}{AC}$ نشان می‌دهد که نقطهٔ B مجانس نقطهٔ C نسبت به مرکز تجانس A و نسبت تجانس $k=\frac{m}{n}$ است.

۳۹۶. تبدیل تصویری خط l_1 به شرح زیر را در نظر می گیریم :

l_1 را بر l_2 از P تصویر می‌کنیم، سپس l_2 را به موازات خود به اندازهٔ a_2 انتقال می‌دهیم. بعد l_2 را بر l_1 از P تصویر می کنیم و بعد l_1 را به موازات خود به فاصلهٔ a_1 انتقال می‌دهیم. روشن است که نقطهٔ مطلوب X_1 یک نقطهٔ ثابت این تبدیل است.

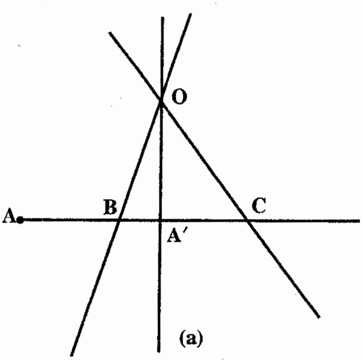
$X_1 \to X_2 \to Y_2 \to Y_1 \to X_1$، (شکل) و بنابراین می‌تواند پیدا شود. چون انتقال بر روی یک خط ممکن است در دو جهت صورت گیرد، مسأله ممکن است تا چهار جواب داشته باشد. در حالت استثنایی که تبدیل بالا به تبدیل همانی بدل می‌شود، مسأله ممکن است نامعین باشد (این حالت زمانی پیش می‌آید که خطهای l_1 و l_2 بر اثر تجانس به مرکز P و نسبت $\pm a_1 / a_2$ متناظر شوند).

۳۹۷. فرض کنید که خط l رسم شده است (شکل). بنا به فرض نقطهٔ C مجانس نقطهٔ B به مرکز تشابه A و نسبت تجانس n/m است. بنابراین بر خط l'_1، مجانس l_1 به مرکز A و نسبت n/m قرار می‌گیرد و می‌توان آن را از نقطهٔ برخورد خطهای l_2 و l'_1 به دست آورد. اگر l_1 با l_2 موازی نباشد، مسأله جوابی منحصر به فرد دارد، اگر $l_1 \| l_2$ آن گاه l'_1 یا با l_2 موازی و یا بر آن منطبق است و در نتیجه یا مسأله جوابی ندارد و یا جواب آن نامعین است.

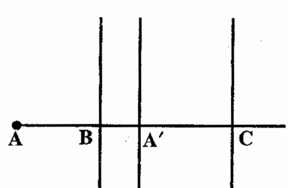


۳۹۸. نقطهٔ A و دو خط d و d′ را در نظر می‌گیریم. از A خطی رسم می‌کنیم که d و d′ را در نقطه‌های B و C قطع کند. مزدوج توافقی نقطهٔ A را نسبت به دو نقطهٔ B و C به دست می‌آوریم و A′ می‌نامیم. از A′ به نقطهٔ O محل برخورد دو خط d و d′ وصل می‌کنیم. خط OA′ قطبی نقطهٔ A نسبت به دو خط d و d′ است.

نکته. اگر d‖d′ باشد، خطی که از A′ موازی d و d′ رسم شود، جواب مسأله است.



(a)

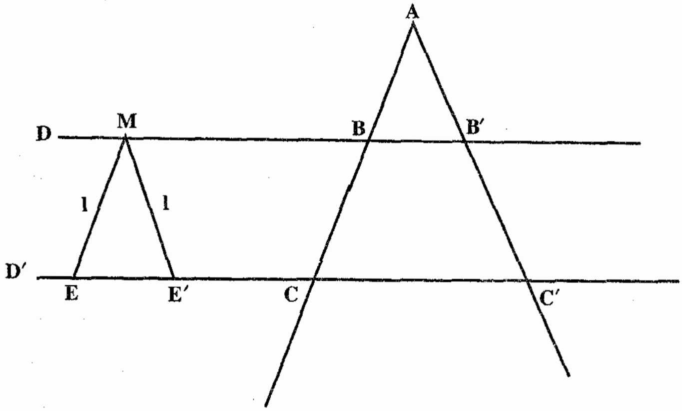


(a)

۲.۴.۸.۱.۳.۳. دو خط موازی، یک نقطه

۳۹۹. به مرکز E (نقطهٔ دلخواه واقع بر روی CD) دایره‌ای به شعاع a رسم می‌کنیم تا خط AB را در نقطه‌های L و F قطع کنند.

دو خط MKN و MK_1N_1 موازی EL و EF رسم می‌کنیم. خطهای MN و MN_1 جواب مسأله است، زیرا $a = NK = EL$ و $K_1N_1 = EF = a$ می‌باشد.

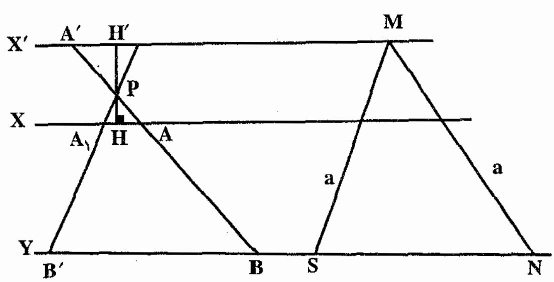


اگر a بزرگتر از فاصله دو خط متوازی باشد، مسأله دارای دو جواب است و چنانچه a مساوی با فاصلهٔ دو خط متوازی باشد، مسأله دارای یک جواب است و در غیر این صورت جواب ندارد.

۴۰۰. مسأله را حل شده می‌گیریم. خط X را حول نقطهٔ P به زاویهٔ °۱۸۰ دوران می‌دهیم تا به وضع X′ درآید و PA وضع PA′ را اختیار کند که بر امتداد PB واقع است. داریم:

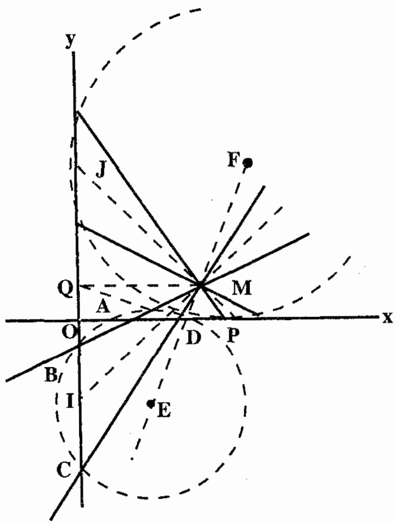
$$PA + PB = PA' + PB = A'B$$

می‌دانیم که تمام قطعه خطهای به طول a محصور بین دو خط موازی با دو راستای MS و MN موازی‌اند. لذا کافی است از نقطهٔ P دو خط متوازی با این دو راستا رسم کنیم تا جوابهای مسأله به دست آیند.



۳.۳.۱.۸.۴.۳. دو خط متقاطع، یک نقطه

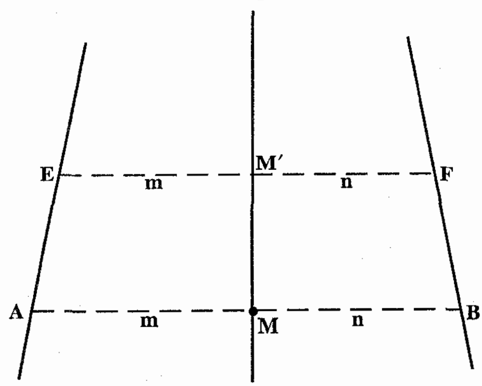
۴۰۱. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. چون چهارضلعی محاطی است، پس $\hat{B}+\hat{D}=180^\circ$ است. از آن جا زاویه‌های حادهٔ ABO و D همنهشتند. همچنین خطهای MB و MD خطهای xO و yy′ را تحت زاویه‌های مساوی قطع می‌کنند. بنابراین کافی است MI را موازی نیمساز زاویهٔ xOy رسم کنیم. سپس زاویه‌های IMA و IMC را مساوی با نصف زاویهٔ داده شدهٔ V رسم می‌نماییم.

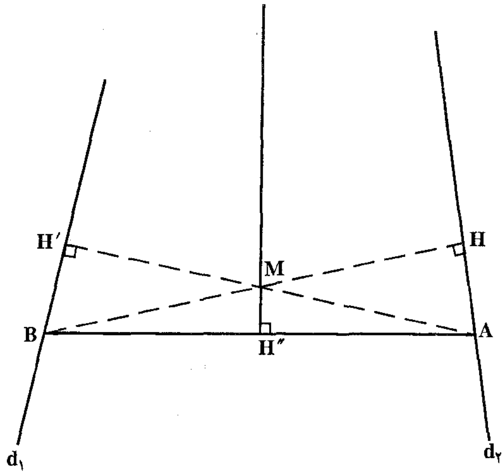


تبصره. خط MJ که موازی نیمساز زاویهٔ xOy′ رسم شود، جواب دیگر مسأله را می‌دهد. برای قسمت اول این مسأله محورهای Ox و Oy می‌توانند دلخواه باشند.

۴۰۲. **راه اول.** از نقطهٔ M خطی می‌گذرانیم مانند AB به طوری که $\frac{MA}{MB}=\frac{m}{n}$ باشد و خط دیگری هم موازی با آن رسم می‌کنیم مانند EF و نقطهٔ M′ را روی آن طوری جدا می‌کنیم که $\frac{M'E}{M'F}=\frac{m}{n}$ باشد و حالا اگر M را به M′ وصل کنیم و امتداد بدهیم، طبق عکس خطهای متقارب که اگر $\frac{MA}{MB}=\frac{M'E}{M'F}=\frac{m}{n}$ باشد.

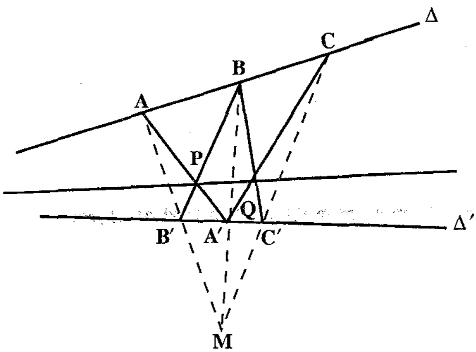
این سه خط یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند و امتداد MM′ جواب مسأله است.



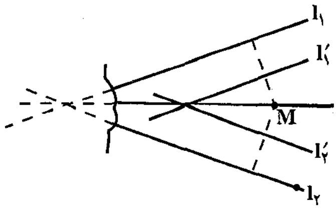


نکته. اگردو خط موازی باشند، خط MM' نیز با آنها موازی خواهد بود.

راه دوم. از M دو عمود بر دو خط داده شدهٔ d_1 و d_2 خارج می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دو خط داده شده را در A و B قطع کند. سپس A را به B وصل کرده و از M عمودی بر AB فرود می‌آوریم. امتداد MH'' جواب مسأله است. زیرا نقطهٔ M محل برخورد ارتفاعات است، بنابراین MH'' حتماً از نقطهٔ برخورد دو خط داده شدهٔ d_1 و d_2 می‌گذرد.



۴۰۳. از نقطهٔ P دو خط اختیاری رسم می‌کنیم تا Δ را در A و B و Δ' را در A' و B' قطع کنند. محل برخورد $A'B$ و AB' را M می‌نامیم. قطبی نقطهٔ M نسبت به زاویهٔ $\Delta\hat{O}\Delta'$ بر نقطه‌های P و O می‌گذرد. برای پیدا کردن نقطهٔ دیگر بر نقطهٔ M خط اختیاری مرور می‌دهیم تا Δ و Δ' را در C و C' قطع کند. محل برخورد BC' و $A'C$، نقطهٔ Q روی قطبی M واقع است در نتیجه خط PQ جواب مسأله است.

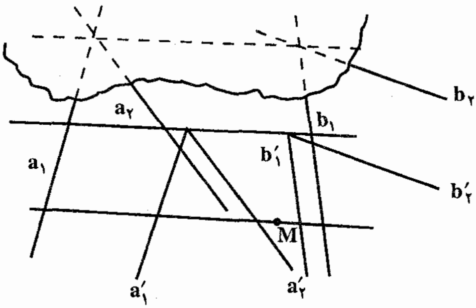


(الف)

۴۰۴. الف. ابتدا یک تجانس به مرکز M و نسبت تجانسی به اندازهٔ کافی کوچک (k) انجام می‌دهیم تا خطهای l'_1 و l'_2، حاصل از عمل تجانس بر l_1 و l_2، در محدودهٔ شکل موجود یکدیگر را قطع کنند (شکل الف). خطی که نقطهٔ M را به محل برخورد l'_1 و l'_2 وصل می‌کند، خط مطلوب است.

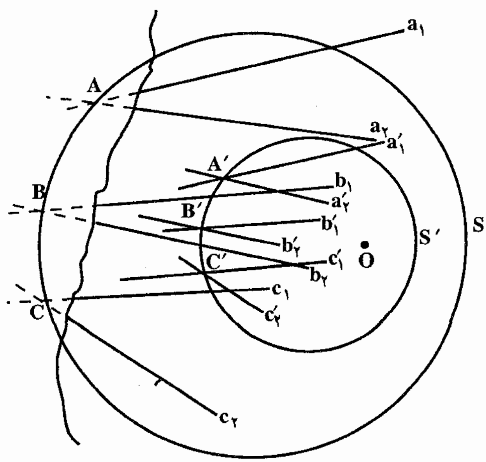
در حالی که نقطهٔ دسترسی‌ناپذیر نه از برخورد دو خط بلکه از برخورد یک خط و یک دایره یا از برخورد دو دایره (که خارج از تصویر، یکدیگر را قطع می‌کنند) حاصل شده باشد نیز مسأله عیناً به همین طریق حل می‌شود.

ب. یک تجانس به مرکز M و نسبت k ی به قدر کافی کوچک انجام می‌دهیم تا خطهای a_1، a_2 و b_1، b_2 به خطهای a'_1، a'_2 و b'_1، b'_2 بدل شوند به طوری که خط واصل بین نقطه‌های برخورد a'_1، a'_2 و b'_1، b'_2 در محدودهٔ شکل واقع شوند (شکل ب). خطی که از M به موازات این خط رسم شود، همان خط مطلوب است.



(ب)

ج. یک تجانس به مرکز نقطهٔ دلخواه O که در دسترس ما است و با نسبت k که به قدر کافی کوچک است، انجام می‌دهیم تا نقطه‌های A ، B و C به نقطه‌های A' ، B' و C' که در محدودهٔ تصویر ما واقعند، بدل شوند (شکل ج). دایرهٔ محیطی مثلث $A'B'C'$ را S' می‌نامیم. دایرهٔ مطلوب S مجانس S' است با مرکز تجانس O و نسبت $\frac{1}{k}$ ؛ بدین ترتیب می‌توانیم مرکز و شعاع آن را پیدا کنیم.



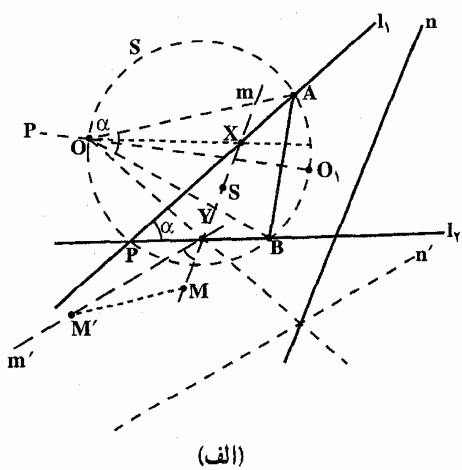
(ج)

۴۰۵. نسبت را به طور کلی $\frac{p}{q}$ فرض می‌کنیم، به قسمی که : $\frac{MA}{MB}=\frac{p}{q}$ باشد ؛ پس A و B به مرکز M و به نسبت $\frac{p}{q}$ مجانس یکدیگرند، بنابراین کافی است، مجانس $x'y'$ را به نسبت $\frac{p}{q}$ و به مرکز M پیدا کنیم تا xy را در A قطع کند و برای این کار نقطهٔ دلخواه C را روی $x'y'$ اختیار می‌کنیم و C' را روی MC چنان تعیین می‌کنیم که $\frac{MC'}{MC}=\frac{p}{q}$ باشد. از C' خط $x''y''$ را به موازات $x'y'$ رسم می‌کنیم تا xy را درA تلاقی کند. خط AMB جواب مسأله است.

۳.۱.۸.۶. دو خط، دو نقطه

۳.۱.۸.۶.۱. دو خط در هر حالت، دو نقطه

۴۰۶. **راه حل اول.** نخست فرض می‌کنیم، خطهای l_1 و l_2 موازی نیستند (شکل الف). فرض کنید مسأله حل شده است. پاره‌خط AX می‌تواند با یک دوران به پاره خط BY قابل انطباق با خودش، بدل شود، پس A به B بدل می‌شود و X به Y (چون l_1 و l_2 موازی نیستند، AX نمی‌تواند با انتقال به BY بدل شود). α، زاویهٔ دوران، مساوی زاویهٔ بین l_1 و l_2 است ؛ پس نقطهٔ O، مرکز دوران، می‌تواند نقطهٔ تقاطع خط p، عمود منصف پاره‌خط AB، کمان درخور زاویهٔ α مرسوم بر وتر AB باشد (این کمان روی S، دایرهٔ محیطی مثلث ABP، واقع است و P نقطهٔ تقاطع l_1 و l_2 است). دایرهٔ S و عمود منصف p در دو نقطهٔ O و O_1 متقاطعند.



(الف)

این دو نقطه به حالتهایی که X و Y در یک طرف یا در دو طرف خط AB واقع باشند، مربوط می‌شوند. فرض می‌کنیم این دوران خط مورد نظر m را به خط m′ بدل کند و از Y نیز بگذرد. حال قسمتهای (الف)، (ب)،(ج) و (د) مسأله را جداگانه بررسی می‌کنیم.

الف. خط n را حول مرکز O، که در بالا پیدا کردیم، به زاویهٔ α

دوران می‌دهیم ؛ خط حاصل را n' می‌نامیم. خط OY زاویه‌های بین m و m' و نیز n و n' را نصف خواهد کرد ؛ از این رو Y می‌تواند از تقاطع l_2 با خط واصل از O به نقطهٔ تقاطع n و n' به دست آید. مسأله می‌تواند دو جواب داشته باشد.

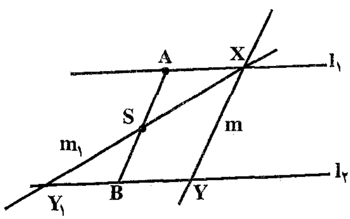
ب. m' از نقطهٔ M' یعنی نگارهٔ M بر اثر دوران به زاویهٔ α حول نقطهٔ O می‌گذرد ؛ زاویهٔ بین m و m' مساوی α است. بدین جهت Y می‌تواند نقطهٔ برخورد خط l_2 با کمان درخور زاویهٔ α که بر MM' بنا می‌شود، باشد. مسأله می‌تواند دو جواب داشته باشد.

ج. در مثلث متساوی‌الساقین OXY می‌دانیم که زاویهٔ رأس α، و قاعدهٔ XY مساوی a است. از این رو می‌توانیم فاصله OX را از نقطهٔ O تا نقطهٔ مجهول X پیدا کنیم. مسأله می‌تواند تا چهار جواب داشته باشد.

د. گیریم نقطهٔ S وسط XY باشد. چون زاویه‌های مثلث متساوی‌الساقین OXY معلومند و نسبتهای زیر را نیز داریم :

$$\text{زاویه } XOS=\frac{1}{2}\alpha\ ,\ \ \frac{OS}{OX}=k$$

بنابراین نقطهٔ S از X به کمک یک تجانس مارپیچی به دست می‌آید. نقطهٔ S از برخورد خط r و خط l_1' که از l_1 بر اثر تجانس مارپیچی به دست آمده است، پیدا می‌شود. خط مطلوب m عمود بر OS است. مسأله در حالت کلی دو جواب دارد ؛ اگر l_1' بر r منطبق باشد، جواب نامعین است.



(ب)

اگر $l_1 \| l_2$، خط مطلوب m یا از نقطهٔ S وسط پاره خط AB می‌گذرد، یا با AB موازی است (شکل ب). در این حالتها مسأله ساده‌تر می‌شود. ما فقط تعداد جوابها را مشخص می‌کنیم :

الف. اگر n با l_1 یا AB موازی نباشد، یک جواب دارد، اگر $n\|l_1\|l_2$ جوابی ندارد، اگر $n\|AB$ بینهایت جواب دارد.

ب. اگر M بر خط AB یا بر خط l_0، که به یک فاصله از l_1 و l_2 و موازی با آنها است، نباشد دو جواب دارد. اگر M بر AB یا بر l_0 واقع باشد اما بر S واقع نباشد، یک جواب دارد، اگر M بر S واقع باشد، بینهایت جواب دارد.

ج. اگر $a \neq AB$ ، و $a>d$ (d فاصلهٔ بین l_1 و l_2 است) دو جواب دارد ؛ اگر $a=d$ اما $d \neq AB$ یک جواب دارد ؛ اگر $a<d$ جواب ندارد ؛ اگر $a=AB(\geq d)$ ، بینهایت جواب دارد.

د. اگر r موازی $l_1 \| l_2$ نباشد و از S نگذرد یک جواب دارد؛ اگر $r \| l_1$، اما از S نگذرد، جوابی ندارد، اگر r از S بگذرد بینهایت جواب دارد.

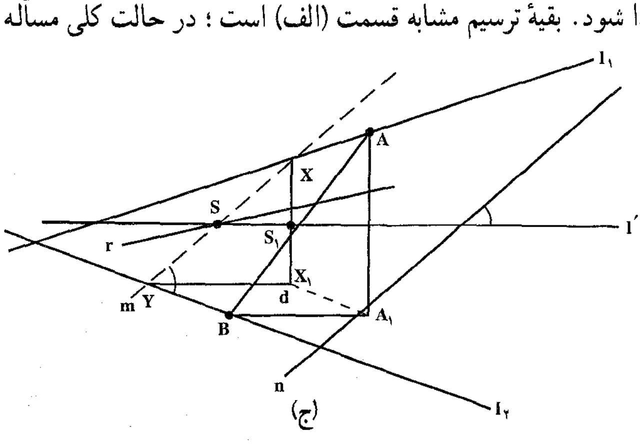
راه حل دوم. قسمتهای (الف)، (ج) و (د). پاره‌خط AX می‌تواند با تقارن لغزه‌ای (یا قرینهٔ معمولی نسبت به یک خط که می‌تواند حالت خاص لغزه در نظر گرفته شود) به پاره‌خط قابل انطباق با BY بدل شود چنان که A به B برود و X به Y. همچنین محور لغزه، l، موازی نیمساز زاویهٔ بین l_1 و l_2 است و از وسط پاره خط AB می‌گذرد. چون زاویه‌های حاصل از تقاطع l_1 و l_2 دو نیمساز دارند، لغزه‌ای که AX را به BY بدل می‌کند، می‌تواند به دو روش مختلف پیدا شود (بسته به حالتهایی که X و Y در یک طرف یا در دو طرف خط AB باشند. اگر $l_1 \| l_2$، آن گاه محور یکی از این لغزه‌ها موازی l_1 و l_2 است. در حالی که محور دیگر عمود بر آنهاست. این حالت بیانگر نقش خاصی است که حالت توازی l_1 و l_2 در راه حل قسمتهای (الف)، (ج) و (د) بازی می‌کند). طول انتقال، d، مساوی A_1B است که A_1 قرینهٔ A نسبت به l است (شکل ج). همچنین، گیریم X_1 قرینهٔ X نسبت به l باشد، در این حالت

$$X_1Y = d \ , \ X_1Y \| l$$

حال سه حالت (الف)، (ج) و (د) را جداگانه بررسی می‌کنیم:

الف. در مثلث XX_1Y ضلع $X_1Y = d$ و نیز XYX_1 (که مساوی زاویهٔ بین m و l است) معلومند، از این رو طول ضلع XX_1 را می‌توان پیدا کرد. اما X می‌تواند نقطهٔ تقاطع خط l_1 و خط l' موازی با l به فاصلهٔ $XX_1/2$، باشد. در حالت کلی وقتی l_1 موازی l_2 نیست، مسأله دو جواب دارد.

ج. در مثلث XX_1Y، وتر $XY = a$ و ضلع $X_1Y = d$ معلومند. از این رو ضلع دیگر XX_1 می‌تواند پیدا شود. بقیهٔ ترسیم مشابه قسمت (الف) است؛ در حالت کلی مسأله دو جواب دارد.



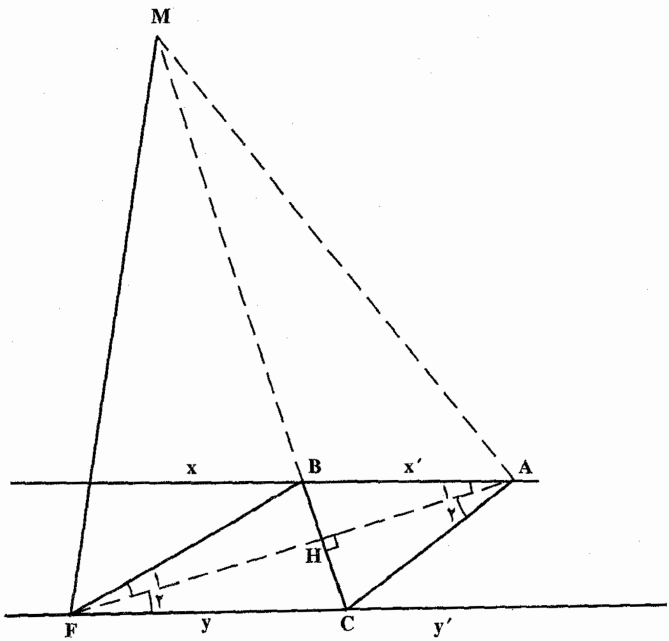
(ج)

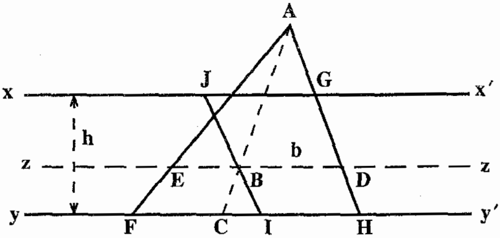
د. نقطهٔ S، وسط پاره‌خط XY، باید بر خط l ، میانخط مثلث XX_1Y ، واقع باشد. از این رو S نقطهٔ تقاطع l و r است. X اکنون می‌تواند از تقاطع l_1 با خط r ، عمود بر l در نقطهٔ S_1 (که در آن $SS_1 = d/2$) به دست آید. در حالت کلی مسأله دو جواب دارد.

۲.۶.۸.۱.۳.۳. دو خط موازی، دو نقطه

۴۰۷. اگر نیمساز زاویهٔ A را رسم کنیم و آن را ادامه دهیم تا yy' را در F قطع کند، از F به B وصل می‌کنیم. چون $xx' \| yy'$ ، پس $\hat{C}_2 = \hat{A}_1$ و درنتیجه $\hat{C}_2 = \hat{A}_2$ پس مثلث FCA متساوی‌الساقین است و CH عمودمنصف AF است و چون BC از M می‌گذرد، پس M روی عمودمنصف AF است و درنتیجه مثلث MFA متساوی الساقین است.

برای رسم مثلث، دایره‌ای به مرکز M و شعاع MA می‌زنیم، هر کجا که yy' را قطع کرد، نقطهٔ F است. از F به A وصل کرده، عمودمنصف FA را می‌کشیم، هر کجا که xx' و yy' را قطع کرد، نقطه‌های B و C است.





۴۱۰. ضلع مجهول متوازی‌الاضلاع خواسته شده را b می‌نامیم. خواهیم داشت:

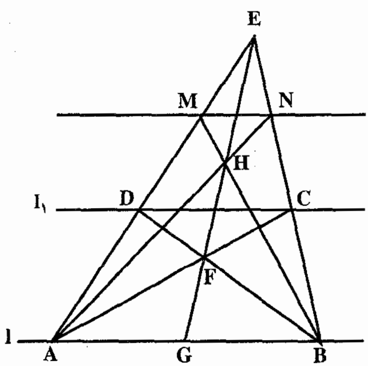
$$bh = k^2 \Rightarrow b = \frac{k^2}{h}$$

پاره‌خط به طول b بسادگی قابل رسم است. حال از نقطهٔ B خطی موازی xx' رسم می‌کنیم و روی آن $BD = BE = b$ را اختیار می‌کنیم و خطهای ADH و AEF را رسم می‌کنیم. متوازی‌الاضلاع GHIJ جواب مسأله است. خط AEF جواب دیگر مسأله است.

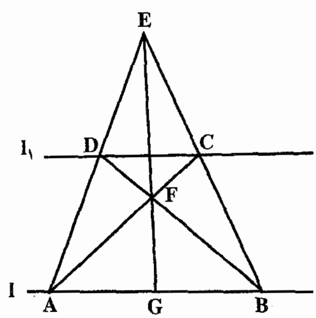
تبصره. مساحت k^2 می‌تواند از صفر تا بینهایت تغییر کند.

۴۱۱. الف. در صفحه یک نقطهٔ E را ناواقع بر l یا l_1 می‌گیریم و آن‌را به نقطه‌های A و B واقع بر l وصل می‌کنیم. گیریم C و D نقطه‌های برخورد خطهای EA و EB با خط l_1 باشند و F نقطهٔ برخورد خطهای AC و BD (شکل الف). خط EF پاره‌خط AB را نصف می‌کند.

ب. دو نقطهٔ A و B را بر l انتخاب و نقطهٔ G وسط پاره‌خط AB را پیدا می‌کنیم. گیریم E نقطه‌ای بر خط AM باشد، H نقطهٔ برخورد خطهای EG و BM و N نقطهٔ برخورد خطهای AH و BE (شکل ب) باشند. خط MN موازی مطلوب با l است. (ترسیم بالا، مناسب است که برای پیدا کردن وسط AB و رسم خط موازی با l، از همان مثلث ABE استفاده شود.)



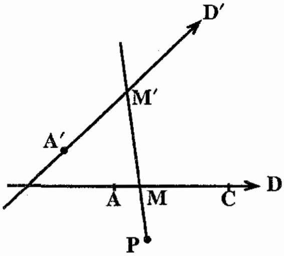
(ب)



(الف)

۳.۳.۱.۸.۷. دو خط، سه نقطه

۳.۳.۱.۸.۷.۱. دو خط در هر حالت، سه نقطه

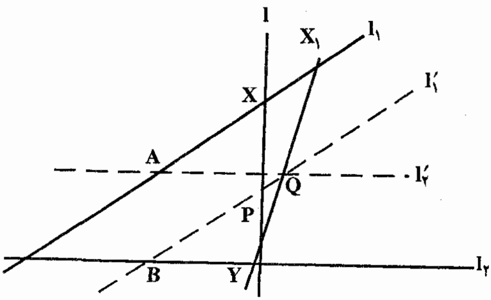


۴۱۲. روی D طول $AC = l$ (شکل) را جدا می‌کنیم. فرض کنیم M و M′ محل برخورد خطهای D و D′ با قاطع غیرمشخص که از P می‌گذرد، باشد. داریم :

$$AM + MC = l$$

و برای این که $AM + A'M' = l$ باشد، باید $A'M' = MC$ شود.

۴۱۳. الف. فرض می‌کنیم X و Y معرف نقطه‌های برخورد خط مطلوب با l_1 و l_2 باشند (شکل الف). l_1 را از P بر l_2 تصویر می‌کنیم. سپس l_2 را بر l_1 منطبق می‌کنیم، به طوری که به‌ویژه، B بر A منطبق شود و سرانجام l_2 را تحت تأثیر یک تجانس به مرکز A و نسبت m/n قرار می‌دهیم. تبدیل نتیجهٔ l_1 تبدیلی است تصویری ؛ زیرا حاصلضرب یک تصویر و یک تجانس است. X یک نقطهٔ ثابت این تبدیل است (داریم : $X \to Y \to X$)، پس می‌تواند تعیین شود. چون تجانس می‌تواند به نسبت $-m/n$ نیز باشد، مسأله تا چهار جواب دارد. در حالت خاصی که تبدیل تصویری بالا به همانی بدل شود، مسأله نامعین است (این حالت زمانی روی می‌دهد که خطهای l_1 و l_2 و نقطه‌های A و B براثر تجانس به مرکز P و نسبت $\pm m/n$ متناظر یکدیگر شوند).



(الف)

ب. فرض می‌کنیم که $l_1 \neq l_2$ و l را بر l_2 از P تصویر می‌کنیم. نقطهٔ مطلوب X بر l_1 به یک نقطهٔ Y بر l_2 بدل می‌شود، بعد l_2 را دوباره بر l_1 از نقطهٔ Q، نقطهٔ تقاطع خطهای $l_1 \| l'_1$ و $l_2 \| l'_2$ که از دو نقطهٔ A و B می‌گذرند، تصویر می‌کنیم (شکل الف). گیریم این تصویر نقطهٔ Y از l_2 را به یک نقطهٔ X_1 از l_1 بدل کند. از تشابه مثلثهای AQX_1 و BYQ داریم :

$$AX_1/AQ = BQ/BY$$

یعنی :

$$AX_1 . BY = AQ . BQ = p^2$$

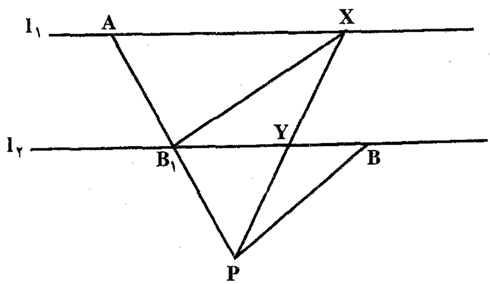
که p می‌تواند تعیین شود، حال اگر تجانس به مرکز A و نسبت k^2/p^2 را برای l_1 به‌کار بریم، نقطهٔ X_1 به یک نقطهٔ X' بدل می‌شود، به‌طوری‌که:

$$AX' = k^2/p^2 . AX_1 = k^2/p^2 . p^2/BY = k^2/BY = AX$$

یعنی X' بر X منطبق می‌شود، این نشان می‌دهد که X نقطهٔ ثابتی از تبدیل تصویری l_1 است، پس می‌تواند معین شود، چون تجانس می تواند دارای نسبت $-k^2/p^2$ نیز باشد، مسأله می‌تواند تا چهار جواب داشته باشد (تبدیل تصویری ما نمی‌تواند به تبدیل همانی بدل شود). اگر $l_1 \| l_2$ و B_1 نقطهٔ برخورد PA و l_2 باشد، آن‌گاه:

$$B_1Y = \frac{PB_1}{PA}.AX$$

بنابراین شرط $AX.BY = k^2$ با شرط $BY.B_1Y = \frac{PB_1}{PA}.k^2$ (شکل ب) هم‌ارز است. چون علاوه‌بر حاصلضرب پاره‌خطهای BY و B_1Y، $BY.B_1Y$، مجموع (یا تفاضل) آنها، BB_1، نیز داده شده است، این پاره‌خطها را بلافاصله می‌توانیم رسم کنیم.



(ب)

یادداشت. به جای این که قید کنیم که خط مطلوب از نقطهٔ مفروض P می‌گذرد، می‌توانستیم قید کنیم که امتدادش معین است. در این صورت در راه حل ما، کافی است به جای تصویر مرکزی به مرکز P، تصویر موازی بگذاریم.

۲.۷.۸.۱.۳.۳. دو خط موازی، سه نقطه

۴۱۴. فرض کنید $CA'B'$ خط خواسته شده به‌طوری که (با توجه به شکل):

$$AA':BB' = p:q$$

فرض کنید $O = (AB, A'B')$. دو مثلث OAA' و OBB' متشابه‌اند، پس

$$AO:BO = AA':BB'$$

نسبت دوم معلوم است؛ پس نقطهٔ O پاره خط معلوم AB را به نسبت مفروض p:q تقسیم می‌کند. پس می‌توانیم O را رسم کنیم و OC خط خواسته شده است.

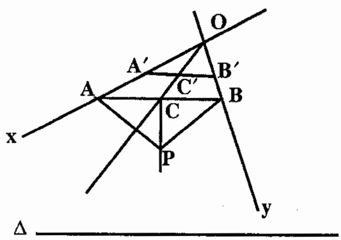
ترسیم. نقطهٔ O را طوری رسم می‌کنیم که $AO:BO = p:q$، نقطه‌های O و C خط مطلوب را تعیین می‌کنند.

اثبات. به خواننده واگذار می‌شود.

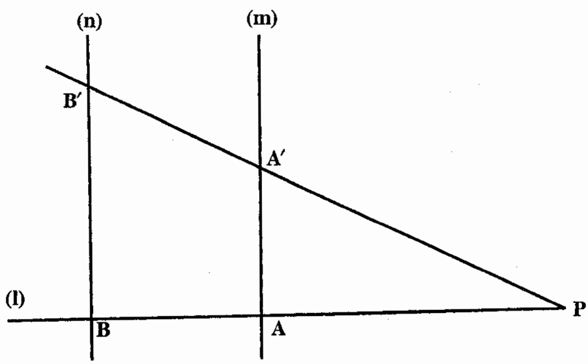
بحث. دو نقطه، O و 'O، وجود دارد که پاره‌خط AB را به نسبت p:q تقسیم کند، یکی داخلی و یکی خارجی و همیشه می‌توانیم این دو نقطه را رسم کنیم؛ بنابراین اگر هیچ کدام از خطهای CO و 'CO با خطهای مفروض x و y موازی نباشد، مسأله دو جواب دارد. حالتی را که $p = q$ در نظر بگیرید.

۳.۳.۱.۸.۸. سه خط، یک یا چند نقطه

۳.۳.۱.۸.۸.۱. سه خط در هر حالت، یک یا چند نقطه



۴۱۶. فرض کنیم مسأله حل‌شده است (شکل). AB موازی Δ بوده و $PA = PB$ باشد، اگر C وسط AB باشد، PC بر AB و Δ عمود خواهد بود. بنابراین راه‌حل مسأله چنین است: $A'B'$ را به موازات Δ رسم می‌کنیم و نقطهٔ O محل برخورد خطهای x و y را به 'C وسط $A'B'$ وصل می کنیم، از P عمودی به Δ رسم می‌کنیم تا 'OC را در C قطع کند. از C خط AB را به موازات Δ می‌کشیم که جواب مسأله است.

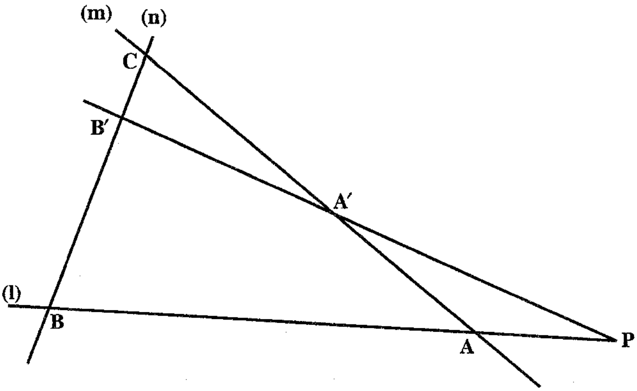


۴۱۷. واضح است، اگر (n)‖(m) باشد، آن‌گاه مسأله وقتی دارای جواب است که $k = \frac{PA}{PB}$. در این حالت هر خطی که از P بگذرد و (m) و (n) را قطع کند، جواب مسأله است. در حالتی که $k \neq \frac{PA}{PB}$ مسأله جواب ندارد. حال فرض می‌کنیم که (m) و (n) متقاطع باشند $(m) \cap (n) = \{C\}$. در مثلث ABC بنا به قضیهٔ منلائوس داریم:

$$\frac{A'A}{A'C} \times \frac{B'C}{B'B} \times \frac{PB}{PA} = ۱$$

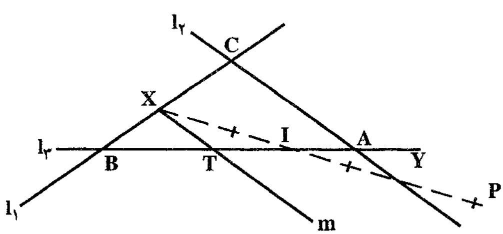
و یا :

$$\frac{B'C}{A'C} = \frac{PA}{PB} \times \frac{1}{k} = k'$$



پس کافی است نقطه‌های B'' و A'' را بترتیب روی CB و CA به‌گونه‌ای انتخاب کنیم که $\frac{B'C}{A''C} = k'$ باشد و آن‌گاه از P خطی به موازات $A''B''$ رسم کنیم و در این حالت مسأله یک جواب دارد.

۴۱۹. گیریم l_1، l_2 و l_3 دو به دو یکدیگر را در نقطه‌های A، B و C ببرند، و X، Y و Z نقطه‌های برخورد خط مطلوب l با l_1، l_2 و l_3 باشند. بنا بر فرض $XZ = ZY$ (شکل). فرض می‌کنیم که T نقطهٔ برخورد l_3 با خط m باشد که از X موازی l_2 رسم شده است. روشن است که $XT = AY$. از تشابه مثلثهای XTB و CAB داریم : $XB/XT = CB/CA$. اما $BX/YA = CB/CA$ و طرف راست تساوی معلوم است، پس مسأله برمی‌گردد به مسألهٔ رسم خطی ازیک نقطهٔ P که دو خط مفروض l_1 و l_2 را در نقطه‌های X و Y ببرد به‌طوری که نسبت BX/YA مقدار معلومی باشد. بررسی حالاتی را که دوخط از سه خط l_1، l_2 و l_3 موازی باشند و یا هر سه موازی باشند به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.



۴۲۰. فرض می‌کنیم که همهٔ خطهای l_1، l_2 و l_3 با هم موازی نیستند، مثلاً l_3 موازی l_1 یا l_2 نیست. فرض می‌کنیم مسأله حل شده است (شکل). دورانی وجود دارد که AX را بهCZ بدل می‌کند و دورانی وجود دارد که BY را به CZ بدل می‌کند، زاویه‌های دوران α_1 وα_2، بترتیب مساوی زاویه‌های بین l_1 و l_3 و بین l_2 وl_3 هستند. مرکزهای

دوران، O_1 و O_2 دقیقاً می‌توانند پیدا شوند. از مثلثهای متساوی الساقین O_1XZ و O_2YZ که زاویه‌های O_1 و O_2 در آنها بترتیب مساوی α_1 و α_2 هستند، نتیجه می‌شود:

$$O_1\hat{Z}X = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha_1$$

$$O_2\hat{Z}Y = 90^\circ - \frac{1}{2}\alpha_2$$

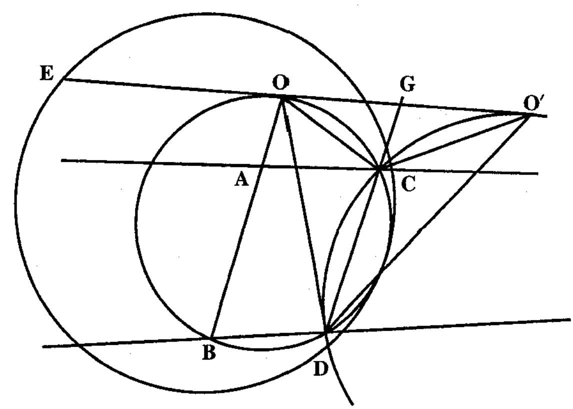
۴۲۱. مسألهٔ عکس را در نظر بگیریم:

خطی موازی AC به فاصلهٔ $CG = AO$ رسم می‌کنیم. برای یک وضعیت معلوم CD نقطهٔ O را برای آن که زاویهٔ COD ماکزیمم باشد، به‌دست می‌آوریم. از دو نقطهٔ C و D دایره‌ای مماس بر OG رسم می‌کنیم. دو جواب O و O' وجود دارد.

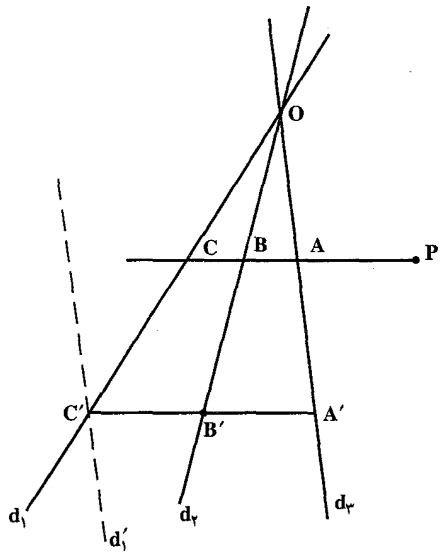
وقتی که نقطهٔ متحرک (O) از نقطهٔ E (نقطهٔ برخورد OG با دایره کمان درخور در انتهای سمت چپ) به طرف نقطهٔ O برود، شعاع دایره‌ای که CD وتری از آن است، به‌طور مداوم کم می‌شود تا نقطهٔ O. سپس شعاع دایره زیاد می‌شود؛ از آن جا زاویه زیاد می‌شود. در نقطهٔ O حداکثر مقدار برای زاویه ایجاد می‌شود. سپس زاویه کم می‌شود تا در نقطهٔ G، زاویه برابر صفر است. به دنبال آن زاویه زیاد می‌شود تا نقطهٔ O'، که در این نقطه یک ماکزیمم جدید دارد. بلافاصله بعد از آن زاویه کم می‌شود.

همواره رابطهٔ $OG^2 = CG.DG$ برقرار است.

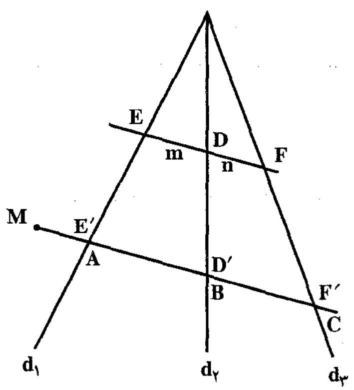
برای محاسبهٔ زاویهٔ COD، از مثلثهای OGC و OGD که از آنها دو ضلع و زاویهٔ G معلوم است و سپس ازمثلث COD که اینک هر سه ضلع آن معلوم است، استفاده می‌کنیم.



۳.۲.۱.۸.۸.۲. سه خط همرس، یک یا چند نقطه



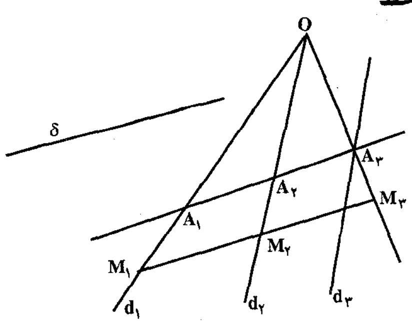
۴۲۲. سه نقطهٔ ′A، ′B و ′C را روی این سه خط چنان اختیار می کنیم که $A'B' = B'C'$ باشد (مجانس $d_۳$ را نسبت به نقطهٔ دلخواه ′B از خط $d_۲$ با نسبت تجانس ۱ـ بهدست میآوریم. هرجا این مجانس خط $d_۱$ را قطع کند نقطهٔ ′C است. از ′C به ′B وصل میکنیم تا $d_۳$ را در ′A قطع کند). آنگاه از نقطهٔ P خطی موازی $A'B'C'$ رسم می کنیم. این خط جواب مسأله است.



۴۲۳. میتوانیم خط دلخواهEF را رسم کنیم که به وسیلهٔ سه خط همرس به نسبت $\frac{m}{n}$ تقسیم شود. سپس از M خطی به موازات این خط رسم میکنیم. این خط جواب مسأله است زیرا طبق خاصیت خطهای همرس داریم:

$$\frac{ED}{FD} = \frac{E'D'}{F'D'} = \frac{m}{n}$$

۳.۲.۱.۸.۹. سه خط و یک راستا، یا چهار خط



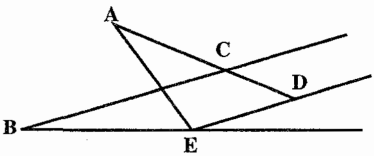
۴۲۴. از نقطهٔ دلخواه$M_۱$ واقع بر$d_۱$ خطی موازیδ رسم میکنیم تا $d_۲$ را در نقطهٔ $M_۲$ قطع کند. $M_۱M_۲$ را بهاندازهٔ خود تا نقطهٔ $M_۳$ امتداد میدهیم $(M_۱M_۲ = M_۲M_۳)$. از نقطهٔ $M_۳$ به نقطهٔ O محل برخورد دو خط $d_۱$ و$d_۲$

وصل می‌کنیم تا d_3 را در نقطهٔ A_3 قطع کند. خطی که از A_3 موازی δ رسم می‌شود، d_1 و d_2 را در A_1 و A_2 قطع می‌کند به‌قسمی که $A_1A_2 = A_2A_3$ است.

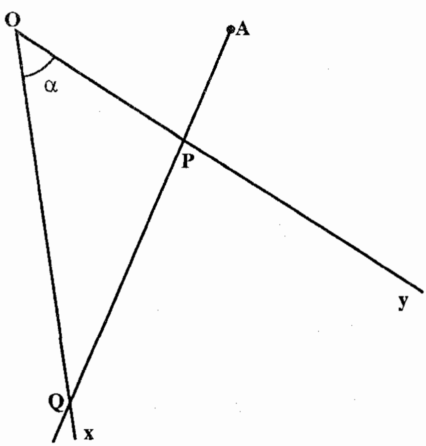
۳.۳.۱.۹. نقطه، زاویه

۳.۳.۱.۹.۱. یک زاویه، یک نقطه

۳.۳.۱.۹.۱.۱. یک زاویه، یک نقطه در صفحهٔ دایره



۴۲۵. روی خط AC (شکل) که نقطهٔ مفروض A را به نقطهٔ دلخواه C روی ضلع BC از زاویهٔ مفروض CBE وصل می‌کند، پاره‌خط AD را طوری جدا می‌کنیم که نسبت AC:AD برابر نسبت مفروض p:q باشد، پس نقطه‌های C و D در تجانس (A ,p:q) متناظر با یکدیگرند. بنابراین، وقتی نقطهٔ C خط مفروض BC را می‌پیماید، نقطهٔ D خطی موازی BC را می‌پیماید. اگر نقطهٔ برخورد این خط موازی با ضلع دیگر زاویهٔ مفروض را E بنامیم، AE خط خواسته شده خواهد بود.



۴۲۶. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و APQ قاطع خواسته شده باشد. می‌توان نوشت $AP \times AQ = a^2$ ؛ یعنی Q منعکس P است در انعکاسی که مرکزش A و قوتش a^2 است. از آن جا راه حل مسأله چنین می‌شود :

منعکس خط Ox را در انعکاسی که مرکزش A و قوتش a^2 است، به‌دست می‌آوریم (منعکس Ox دایره‌ای است که بر A می‌گذرد و مرکزش روی عمودی است که از A بر Ox رسم شود). محل برخورد دایرهٔ اخیر با Oy نقطهٔ P است (بحث کنید). مسأله در حالت کلی دارای دو جواب است.

۴۲۷. مسأله را حل شده انگاشته، قاطع ABC را جواب فرض می‌کنیم. در این صورت مثلث OBC متساوی‌الساقین می‌باشد و نیمساز Oz زاویهٔ مفروض بر قاعدهٔ BC عمود است، پس برای حل مسأله کافی است نیمخط Oz، نیمساز زاویهٔ مفروض، را رسم کرده و از نقطهٔ A خط AH را که همان قاطع مطلوب است بر Oz عمود کنیم.

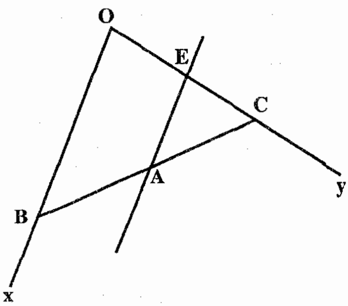
۲.۱.۹.۱.۳.۲. یک زاویه، یک نقطه برون زاویه

۴۳۰. بنا به فرض داریم:

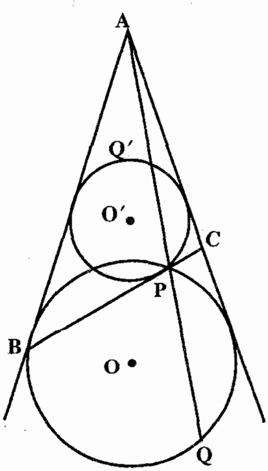
$$\frac{AB}{AC}=\frac{۱}{۳} \quad \text{پس} \quad \frac{AB}{BC}=\frac{۱}{۲}$$

بنابراین هرگاه برای حل مسأله بخواهیم نقطهٔ B را معین کنیم، B از طرفی روی Ox و از طرف دیگر روی خط y' مجانس خط Oy نسبت به مرکز A و با نسبت $\frac{۱}{۳}$ قرار دارد. این خط متجانس را رسم کرده، امتداد می‌دهیم تا Ox را در B قطع کند. نقطهٔ B همیشه موجود است و مسأله در همه حال یک جواب دارد. در حالی که دو خط x و y متوازی باشند، مسأله ممتنع یا مبهم است.

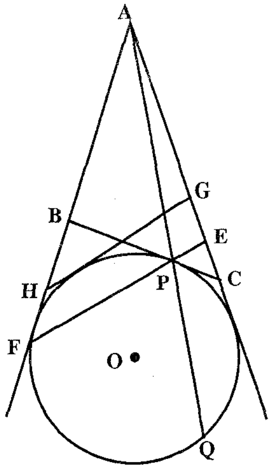
۳.۱.۹.۱.۳.۲. یک زاویه، یک نقطه درون زاویه



۴۳۲. از A خطی به موازات BO رسم می کنیم تا Oy را در E قطع کند. دایره‌ای به مرکز E و شعاع EO می‌زنیم، هرجا که Oy را قطع کرد، C می‌نامیم. از C به A وصل کرده، ادامه می‌دهیم تا Ox را در B قطع کند. ثابت می‌کنیم که BC خط خواسته شده است. چون E وسط OC است و $BO \| EA$، پس A نیز باید وسط BC باشد.



۴۳۴. نقطهٔ P درون زاویهٔ A را در نظر می‌گیریم. بر نقطهٔ P دایره‌ای می‌گذرانیم که هر دو ضلع زاویه مماس باشد (دو جواب وجود دارد). خط AP را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تقاطع آن با دایره‌ها را Q و Q' می‌نامیم. دایره‌ای را باید انتخاب کنیم که $AQ' < AP$ باشد (دایرهٔ O'). مماس بر این دایره در نقطهٔ P را رسم می‌کنیم تا دو ضلع زاویه را در B و C قطع کند. مثلث ABC مثلث جواب مسأله است، یعنی برای آن $AB+AC-BC$ کمترین مقدار ممکن است. با رسم خطی دلخواه از P و ایجاد مثلث AMN به راحتی مطلب ثابت می‌شود.

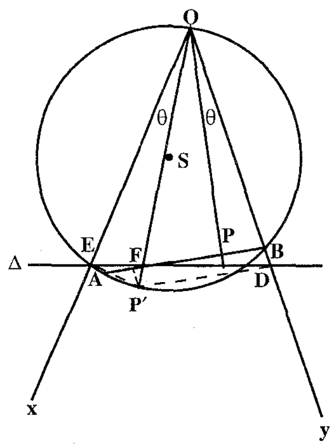


۴۳۵. زاویهٔ A و نقطهٔ P را درون این زاویه در نظر می‌گیریم. قضیه مربوط به مثلث با محیط ثابت L را به ترسیم زیر راهنمایی می‌کند:

دایره‌ای رسم می‌کنیم که از نقطهٔ P بگذرد و بر دو ضلع زاویهٔ A مماس باشد، آن گاه مماس BPC را بر این دایره رسم می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

کافی است ثابت کنیم که محیط مثلث ABC از محیط مثلث AEF کمتر است (EF از نقطهٔ P رسم شده است). امّا BC مماس بر دایره و EF قاطع نسبت به دایره است. مماس GH را به موازات EF بر دایره رسم می‌کنیم. امّا محیط مثلث AEF از محیط مثلث AGH خیلی بیشتر است. بنابراین ازمحیط مثلث ABC نیز بیشتر می‌باشد.

تبصره. دو دایره وجود دارد که بر نقطهٔ P می‌گذرد و بر ضلعهای زاویهٔ A مماسند. دایره‌ای را در نظر می‌گیریم که اگر قاطع APQ را رسم کنیم، نقطهٔ P به رأس A نزدیکتر باشد تا نقطهٔ Q.



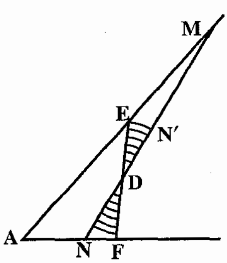
۴۳۶. فرض کنیم که AB خط خواسته شده باشد. چون قرینهٔ OP را نسبت به نیمساز زاویهٔ O رسم کنیم، خط OP′ به‌دست می‌آید که دایرهٔ محیطی مثلث AOB آن را در نقطهٔ P′ قطع می‌کند. چون با رسم این قرینه زاویهٔ POB برابر زاویهٔ P′OC می‌گردد، پس مثلثهای OPB و OAP′ متشابه می‌گردند، زیرا زاویه‌های PAB و AOP′ بنابر رسم مساوی‌اند و زاویهٔ ABP و زاویهٔ OP′A در قوس مقابل OA مشترکند.

تشابه این دو مثلث معلوم می‌کند که $OP \times OP' = OA \times OB$ ، چون سطح مثلث OAB یعنی عبارت:

$$\frac{1}{2} OA \times OB \sin x\hat{O}y \quad \text{و یا} \quad \frac{1}{2} OA \times OB \sin \alpha$$

(زیرا $x\hat{O}y = \alpha$ زاویهٔ معینی است) معلوم است، پس با رسم تناسب مقدار $OP \times OP'$ و از آن‌جا به‌علت معلوم‌بودن OP طول OP' به‌دست می‌آید، پس مسأله به تعیین نقطهٔ دیگری از خط AB (جز نقطهٔ P) منجر می‌گردد. اکنون اگر ملاحظه کنیم که تصویرهای نقطهٔ P' (متعلق به دایرهٔ محیطی مثلث OAB) بر روی ضلعهای OA، OB و AB بر یک استقامتند، پس مکان تصویر نقطهٔ P' بر روی AB معلوم است. زیرا همان خط، خط ED است که تصویر E نقطهٔ P را بر Oy به تصویر D همین نقطه بر روی Ox حاصل می‌کند، پس اگر دایره‌ای به قطر PP' رسم کنیم، تا این خط ED را قطع کند، نقطهٔ F تصویر P' بر روی AB به‌دست می‌آید و وصل‌کردن نقطه‌های P و F جواب مسأله را به‌دست می‌دهد. مسأله معمولاً دو جواب دارد. پیداست، مثلثهایی که به سطح معلوم با رسم‌کردن قطعه خطی محصور بین Ox و Oy از نقطهٔ P به دست می‌آیند، دارای می‌نیمم می‌باشند، زیرا اگر این قطعه خط موازی Ox یا Oy شود، سطح مثلثها بینهایت می‌گردد و بین دو بینهایت می‌نیمم وجود دارد. این می‌نیمم وقتی حاصل می‌شود که دو جواب ترسیمی مسألهٔ بالا برای مقدارمعلوم سطح یعنی k^2 بر هم منطبق شوند، در این صورت k^2 می‌نیمم است. در این صورت دایرهٔ به قطر PP' باید بر خط DE مماس شود. دایره‌هایی که بر P می‌گذرند و با DE مماس می‌شوند، دارای مرکزهایی هستند که مکان آنها سهمی به کانون P و خط هادی DE می‌باشد و این سهمی معلوم است باید نقطه‌ای روی این سهمی (مرکز دایره) چنان تعیین کرد که قرینهٔ P نسبت به آن بر روی خط معلوم OP' قرار گیرد.

چون شکل را به مرکز P و با تجانس دو برابر بزرگ کنیم، مرکز دایره‌ای که بر P گذشته و با خط DE مماس می‌شود به نقطهٔ P' بدل می‌شود و سهمی مکان P به سهمی مکان P' به کانون P و خط هادی Δ که موازی ED با فاصلهٔ از P دو برابر فاصلهٔ P از ED رسم شده است، بدل می‌شود. مسأله منجر می‌شود به تقاطع سهمی اخیر با خط OP' که معلوم است. در این صورت این نقطهٔ تقاطع باید منحصر بفرد باشد، یعنی OP' باید بر این سهمی مماس باشد. در این صورت OP ازنقطهٔ P قطعهٔ AB را نصف می‌کند و مثلث ماکزیمم وقتی است که OP میانه باشد.



۴۳۷. ثابت می‌کنیم، خط راست مجهول، همان خط راست EF است، یعنی خط راست مجهول، باید پاره‌خط راستی در درون زاویه به‌وجود آورد که در نقطهٔ D، نصف شده باشد. خط راست دیگری غیر از خط راستِ EF رسم می‌کنیم که

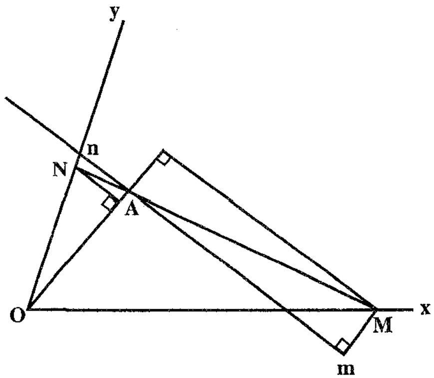
از نقطهٔ D بگذرد و آن را MN می نامیم. ثابت می کنیم :

$$S_{MAN} > S_{EAF} \qquad (۱)$$

M و E را روی ضلع AB می گیریم. فرض می کنیم، فاصلهٔ M تا A، بیشتر از فاصلهٔ E تا A باشد ؛ در حالتی که M به A نزدیکتر باشد، آن وقت فاصلهٔ NA از FA بزرگتر می‌شود و می‌توان با عوض کردن نقش ضلع AB با ضلع AC، همین استدلال را دنبال کرد. کافی است ثابت کنیم :

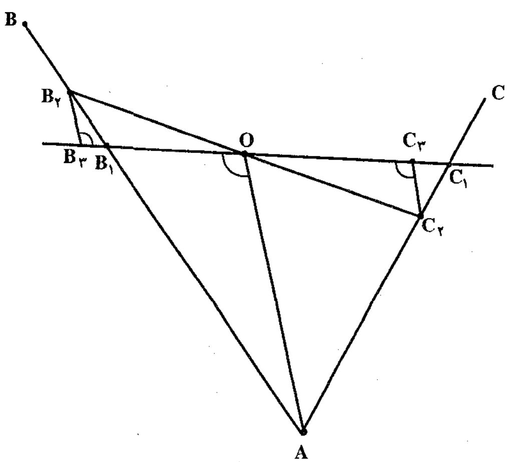
$$S_{EDM} > S_{FDN} \qquad (۲)$$

زیرا نابرابری (۱)، بسادگی از نابرابری (۲) نتیجه می‌شود، ولی نابرابری (۲) همیشه برقرار است، زیرا مثلث EDM شامل مثلث EDN' ، قرینهٔ مثلث FDN نسبت به D' است.



۴۳۸. فرض می کنیم مسأله حل‌شده و $mAn = 1$ باشد. مساحت مثلث MON ثابت است و دو برابر این مساحت برابر است با : $AO.Am + AO.An = AO.1$.

ازآن‌جا $۲k^۲ = AO.1$ و مساحت مثلث MON، مشخص می‌شود. بنابراین مسأله به این مسأله تبدیل می‌شود که، ازنقطهٔ A خطی رسم کنیم که با دو ضلع زاویه مثلثی به مساحت معلوم بسازد.



۴۳۹. راه اول. پاره‌خطهای راست $B_۱C_۱$ و $B_۲C_۲$ را از نقطهٔ O طوری می گذرانیم که در آنها، دو انتهای $B_۱$ و $B_۲$ روی ضلع AB و دو انتهای $C_۱$ و $C_۲$ روی ضلع AC از زاویهٔ مفروض BAC باشند. ثابت می کنیم، اگر داشته باشیم :

$$A\hat{O}B_۲ > A\hat{O}B_۱ \geq ۹۰^\circ$$

(شکل)، آن وقت داریم :

$$\frac{۱}{B_۱O} + \frac{۱}{C_۱O} > \frac{۱}{B_۲O} + \frac{۱}{C_۲O}$$

از نقطه‌های $B_۲$ و $C_۲$ ، خطهای راستی موازی AO رسم می کنیم تا بترتیب، $B_۱C_۱$ را در

نقطه‌های B_3 و C_3 قطع کنند. چون

$$B_2\hat{B}_3O = A\hat{O}B_3 \geq 90°$$

بنابراین $OB_2 > OB_3$ و

$$\frac{1}{B_1O} - \frac{1}{B_2O} = \frac{B_2O - B_1O}{B_1O.B_2O} > \frac{B_3O - B_1O}{B_1O.B_2O} = \frac{B_1B_3}{B_1O.B_2O} = \frac{B_2B_3}{AO.B_2O}$$

(زیرا دو مثلث $B_1B_3B_2$ و B_1OA متشابه‌اند). به همین ترتیب :

$$\frac{1}{C_1O} - \frac{1}{C_2O} > -\frac{C_2C_3}{AO.C_2O}$$

اگر این دو نابرابری را با هم جمع کنیم، با توجه به تشابه مثلثهای B_2B_3O و C_2C_3O، به دست می‌آید :

$$\frac{1}{B_1O} + \frac{1}{C_1O} - (\frac{1}{B_2O} + \frac{1}{C_2O}) > \frac{B_2B_3}{AO.B_2O} - \frac{C_2C_3}{AO.C_2O}$$

$$= \frac{1}{AO}(\frac{B_2B_3}{B_2O} - \frac{C_2C_3}{C_2O}) = 0$$

اگر خط راستی که از O می‌گذرد، بر خط راست AO عمود باشد و نیمخطهای راست AB و AC را، بترتیب، در نقطه‌های B_1 و C_1 قطع کند، آن‌وقت، B_1C_1، همان پاره‌خط مجهول است. در واقع، برای هر پاره‌خط راست دیگر B_2C_2 که از نقطهٔ O گذشته است، یکی از دو نابرابری زیر را داریم :

$$A\hat{O}B_2 > 90° \quad \text{یا} \quad A\hat{O}C_2 > 90°$$

برای مشخص‌بودن وضع، می‌توان نقطه‌های B_2 و C_2 را، بترتیب، بر نیمخطهای راست AB و AC گرفت و مثلاً، نابرابری اوّل را در نظر گرفت. در این صورت، نابرابری که در بالا ثابت کردیم، برقرارمی‌شود.

اگر خط راست عمود بر AO در نقطهٔ O، یکی از ضلعهای زاویهٔ BAC و مثلاً AC را قطع نکند، آن‌وقت پاره‌خط مجهول را نمی‌توان ساخت. فرض می‌کنیم، پاره‌خط راست مجهول، B_2C_2 باشد که دو انتهای B_2 و C_2 آن، بترتیب، بر نیمخطهای AB و AC قرار گرفته باشند. در این صورت :

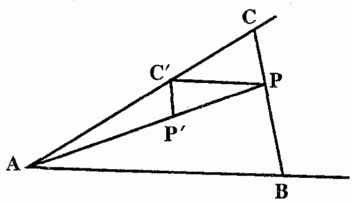
$$A\hat{O}B_2 > 90°$$

یعنی، اگر نقطهٔ C_1 را در امتداد پاره خط AC_2، از طرف نقطهٔ C_2 در نظر بگیریم و

خط راست C_1B_1 را ازنقطهٔ O بگذرانیم، دوباره

$$۹۰^\circ < A\hat{O}B_1 < A\hat{O}B_2$$

و با توجه به نابرابری که در بالا ثابت کردیم، B_2C_2 با شرط مسأله نمی‌سازد.



راه دوم. PC' را موازی AB و $C'P'$ را موازی BC رسم می‌کنیم (شکل). دو مثلث $AP'C'$ و APC و همچنین، دو مثلث $PC'P'$ و ABP متشابه‌اند، داریم :

$$\frac{P'C'}{PC}=\frac{AP'}{AP} \quad \text{و} \quad \frac{P'C'}{BP}=\frac{P'P}{AP}$$

از مجموع این دو برابری، به‌دست می‌آید :

$$\frac{P'C'}{BP}+\frac{P'C'}{PC}=\frac{AP'+P'P}{AP}=۱$$

و از آن‌جا :

$$\frac{۱}{BP}+\frac{۱}{PC}=\frac{۱}{P'C'}$$

و حداکثر این مقدار وقتی به‌دست می‌آید که مقدار $P'C'$، حداقل باشد و $P'C'$ وقتی می‌نیمم است که بر AP عمود باشد. بنابراین، باید BC را عمود بر AP رسم کرد.

یادداشت. این مسأله، حالت خاصی از مسألهٔ کلی پیداکردن ماکزیمم و می‌نیمم برای تابع F (AB, AC, BP, PC) است که در آن، زاویهٔ A و تابع F، داده شده‌اند. برخی از این‌گونه مسأله‌ها را می‌آوریم :

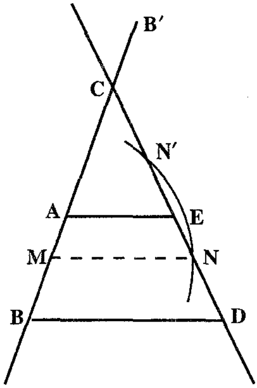
۱) نقطهٔ P در درون زاویهٔ A داده شده است. از P، خط راستی طوری رسم کنید که دو ضلع زاویه را در B و C قطع کند و BP.PC می‌نیمم باشد (برای پیداکردن جواب، باید مثلث ABC، متساوی الساقین باشد).

۲) با همان شرطها، می‌خواهیم مساحت مثلث ABC می‌نیمم باشد (خط راست APA' را طوری رسم کنید که داشته باشیم : $PA' = PA$. سپس، متوازی‌الاضلاع به قطر AA' و ضلعهای موازی با AB و AC را رسم کنید).

۳) با همان شرطها، محیط مثلث ABC می‌نیمم باشد.

۴) با همان شرطها، طول پاره خط راست BC می‌نیمم باشد.

۲.۹.۱.۳.۳. یک زاویه، دو نقطه



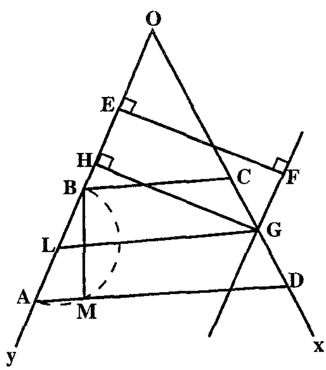
۴۴۰. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و $AE + BD = 2l$ باشد. طول میانه یا قاعدهٔ متوسط ذوزنقه AEDB برابر l است؛ یعنی $MN = l$. بنابراین برای حل مسأله به مرکز نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB دایره‌ای به شعاع l رسم می‌کنیم تا ضلع دیگر زاویهٔ C را در نقطهٔ N قطع کند. دو خط AE و BD که از A و B موازی MN رسم شوند، جواب مسأله‌اند.

بحث. ۱. اگر دایرهٔ به مرکز M و به شعاع l ضلع دیگر زاویهٔ C را در دو نقطهٔ N و N′ قطع کند، مسأله دو جواب دارد (خطهایی که A و B موازی MN′ رسم شوند، نیز جواب مسأله‌اند).

۲. اگر دایرهٔ (M,l) بر ضلع دیگر زاویهٔ C مماس شود، مسأله یک جواب دارد.

۳. اگر دایرهٔ (M,l) ضلع دیگر زاویهٔ C را قطع نکند، مسأله جواب ندارد.

نکته. اگر دو نقطهٔ B و A روی یک ضلع زاویهٔ C و در دو طرف نقطهٔ C باشند، تفاضل پاره‌خطهای رسم‌شده برابر 2l خواهد بود؛ یعنی $BD - AE = 2l$.



۴۴۱. می‌دانیم که مساحت ذوزنقه، برابر است با حاصلضرب طول یک ساق، در فاصلهٔ وسط ساق دیگر از آن ساق. بنابراین راه حل زیر را داریم: از نقطهٔ E، روی ضلع Oy عمود EF را چنان بر Oy اخراج می‌کنیم که $EF = \frac{k^2}{AB}$ باشد. از F خطی موازی Oy رسم می‌کنیم تا Ox را در G قطع کند. نقطهٔ G وسط ساق CD می‌باشد. نقطهٔ G را به نقطهٔ L وسط AB وصل می‌کنیم و AD و BC را موازی LG رسم می‌نماییم.

۴۴۲. فرض کنید خط راست BC در شرط $|BP| = |MC|$ صدق کند (ترتیب نقطه‌ها، B، P، M و C است):

می‌خواهیم ثابت کنیم که مساحت چهارضلعی ABNC کمترین مقدار است. خط راست دیگری رسم می‌کنیم که ضلعهای زاویه را در نقطه‌های B_1 و C_1 قطع می‌کند. فرض کنید نقطهٔ B بین نقطه‌های A و B_1 قرار گیرد، در این صورت، نقطهٔ C_1 بین A و C واقع است. باید ثابت کنیم که $S_{BB_1N} > S_{CC_1N}$. این نابرابری، با نابرابری $S_{BB_1P} > S_{CC_1P}$

هم‌ارز است، زیرا $\frac{S_{BB_1P}}{S_{BB_1N}} = \frac{S_{CC_1P}}{S_{CC_1N}} = \frac{|AP|}{|AN|}$. با اضافه‌کردن S_{BPC_1} به دو طرف نابرابری اخیر، برای سمت چپ به‌دست می‌آوریم :

$$S_{BB_1P} + S_{BPC_1} = S_{BB_1PC_1} = S_{C_1CB_1}$$

(که از برابری $|BP| = |MC|$ نتیجه می‌شود) و برای سمت راست :

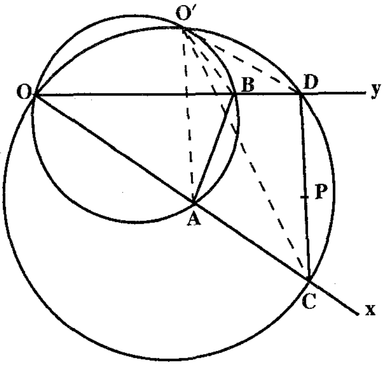
$$S_{CC_1P} + S_{BPC_1} = S_{C_1CB}$$

اما به‌روشنی، $S_{C_1CB_1} > S_{C_1CB}$. حالتی که B_1 بین A و B قرار گیرد، به‌روش مشابه بررسی می‌شود.

ترسیم. کافی است خط راستی رسم کنیم تا ضلعهای زاویهٔ داده‌شده و خطهای راست AN و AM را، بترتیب، در نقطه‌های B_0، P_0، M_0 و C_0 طوری قطع کند که $|B_0P_0| = |M_0C_0|$ و سپس از M، خط راستی به موازات B_0C_0 رسم کنیم. متوازی‌الاضلاع AB_0DC_0 را در نظر بگیرید ؛ فرض کنید K و L نقطه‌های برخورد خطهای راست AP_0 و AM_0، بترتیب، با B_0D و C_0D باشند. از برابری $|B_0P_0| = |M_0C_0|$، نتیجه می‌شود که $S_{AB_0K} = S_{AC_0L}$. مسأله منجر به رسم‌کردن دو مثلث با مساحتهای برابر AB_0K و AC_0L با معلوم‌بودن همهٔ زاویه هایشان می‌شود. B_0 را به دلخواه اختیار و مثلث AB_0K را رسم می‌کنیم. سپس، روی AB_0، نقطهٔ E را به نحوی اختیار می‌کنیم که $B_0\hat{K}E = A\hat{L}C_0$ و پاره‌خط AC_1 را برابر با $\sqrt{|B_0E||B_0A|}$ رسم می‌کنیم. B_1C_1 خط راست خواسته شده است.

تبصره. مسألهٔ زیر را در نظر بگیرید. از نقطهٔ M، واقع در درون زاویه‌ای داده شده، خط راستی متقاطع با ضلعهای زاویه در نقطه‌های B و C، طوری رسم کنید که طول پاره‌خط BC کمترین مقدار باشد. از مسألهٔ بالا نتیجه می‌شود که BC کوتاهترین پاره‌خط است، به شرط آن‌که $|BP| = |MC|$، که در آن، P تصویر رأس داده شده، روی BC است (حتی، حکم کلی‌تری به‌دست می‌آید، یعنی، اگر پاره‌خط BC واجد ویژگی مطلوب باشد، آن وقت به‌ازای هر خط راست دیگری که ازM می‌گذرد و ضلعهای زاویه را در نقطه‌های B_1 و C_1 قطع می‌کند، طول تصویر B_1C_1 روی پاره‌خط BC، از $|BC|$ بزرگتر است). با این حال، همیشه نمی‌توان چنین پاره‌خطی را به‌کمک یک جفت پرگار و خط‌کش رسم کرد.

۳.۹.۱.۳.۳. یک زاویه، سه نقطه



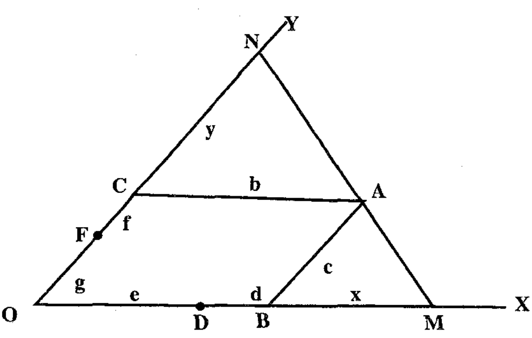
۴۴۴. اگر فرض کنیم که قاطع مطلوب CD معلوم باشد، دایره‌های محیطی OAB و OCD در نقطهٔ O′ متقاطع می‌شوند. روشن است که دو مثلث O′AB و O′CD متشابه‌اند، چون اولاً زاویه های AO′B (مساوی AOB) و CO′D (مساوی COD) برابرند و نسبت O′B و O′A با O′D و O′C برابر است، زیرا O′ مرکز تشابه (ترکیب تجانس و دوران) شکل داده شده است (می‌توان از تساوی زاویه‌های دیگر این مثلثها نیز مطلب را محقق کرد، زیرا زاویه‌های $O'\hat{D}O = O'\hat{C}O$ و $O'\hat{A}O = O'\hat{B}O$ پس مثلثهای O′BD و O′AC در دو زاویه متساوی‌اند، پس متشابه‌اند، پس دو مثلث OBA و ODC را می‌شود ثابت کرد که متشابه‌اند).
پس از تشابه دو مثلث O′BD و O′AC نتیجه می‌شود که:

$$\frac{O'B}{O'A}=\frac{O'D}{O'C}=\frac{BD}{AC}=\frac{۱}{k}$$

پس نقطهٔ O′ را می‌توان تعیین کرد، زیرا از $\frac{O'A}{O'B}=k$ نتیجه می‌شود که مکان هندسی نقطهٔ O′ دایره‌ای است که رسم آن در کتابهای کلاسیک مذکور است. با رسم این دایره و تقاطع آن با دایرهٔ محیطی OAB نقطهٔ O′ مشخص می‌شود. اکنون اگر بر روی O′P کمان درخور زاویهٔ O′CP = O′AB را رسم کنیم، نقطهٔ C به‌دست می‌آید و مسأله حل می‌شود.

۴۴۵. فرض می‌کنیم BM = x و CN = y باشد. رابطهٔ زیر را خواهیم داشت:

$xy = bc$ (۱)



$\frac{DM}{FN}=\frac{d+x}{f+y}=\frac{m}{n}$ است.

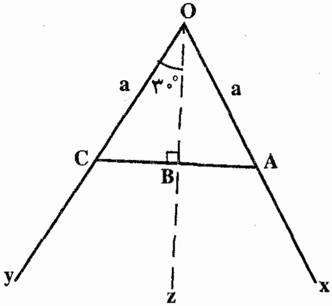
از این رابطه داریم:

$nd + nx = mf + my$ (۲)

از حل معادله‌های (۱) و (۲)، x و y مشخص می‌شود.

۳.۳.۱.۱۰. زاویه، نیمخط

۳.۳.۱.۱۰.۱. زاویه، نیمساز



۴۴۶. خطی عمود بر نیمساز Oz رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آن با ضلعهای زاویه و نیمساز آن‌را A، C و B می‌نامیم. $AB = BC$ است؛ زیرا مثلث OAC متساوی‌الساقین است ($OA = OC$). برای آن‌که محیط مثلث ABC برابر ۱۲ باشد، فرض می‌کنیم $OA = OC = a$ باشد. داریم:

$$AB = a\sin ۳۰^\circ = \frac{a}{۲} = BC$$

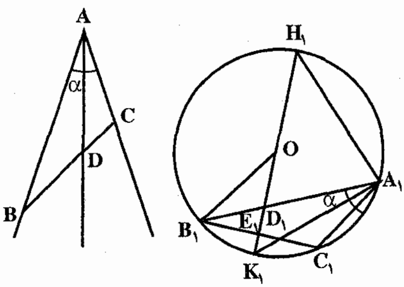
$$\Rightarrow \text{محیط مثلث} = OA + AC + OC$$

$$\Rightarrow ۱۲ = a + ۲(\frac{a}{۲}) + a = ۳a \Rightarrow a = ۴$$

پس روی ضلع Ox پاره خط $OA = ۴$ را جدا می‌کنیم و از نقطهٔ A خطی عمود بر Oz رسم می‌کنیم تا Oy را در C قطع کند. محیط مثلث متساوی‌الساقین OAC مساوی ۱۲ است.

۳.۳.۱.۱۱. زاویه، نیمخط، نقطه

۳.۳.۱.۱۱.۱. زاویه، نیمساز، نقطه



۴۴۷. **راه اول.** بنا بر فرض مسأله، یک زاویه، نیمساز آن و نقطه‌ای واقع بر این نیمساز داده شده است. باید پاره‌خط BC را طوری رسم کنیم (شکل) که طولی به‌اندازهٔ مقدار داده‌شده داشته باشد. برای این منظور، ابتدا مثلث ABC را می‌سازیم، به‌نحوی که زاویهٔ A، قاعدهٔ BC و نیمساز AD از آن، بترتیب، برابر زاویه و طولهای داده شده باشند. برای این منظور، پاره‌خط $B_۱C_۱$ را برابر با پاره‌خط BC رسم می‌کنیم. سپس، از دو نقطهٔ $B_۱$ و $C_۱$ دایره‌ای می‌گذرانیم که کمان $B_۱C_۱$ آن، کمان درخور α (برابر زاویهٔ A) باشد. اگر از نقطهٔ $E_۱$ وسط وتر $B_۱C_۱$، عمودی بر این وتر اخراج کنیم، قطر $K_۱H_۱$ از دایره به‌دست

می‌آید. مسأله، به این جا منجر می‌شود که بتوانیم وتر K_1A_1 را (که ضمناً نیمساز زاویهٔ A_1 می‌شود) طوری رسم کنیم که D_1A_1 برابر با DA بشود. دو مثلث $E_1K_1D_1$ و $A_1K_1H_1$ را در نظر می‌گیریم. بسادگی معلوم می‌شود که این دو مثلث متشابه‌اند و بنابراین داریم:

$$\frac{K_1D_1}{H_1K_1}=\frac{K_1E_1}{K_1A_1}$$

یا

$$K_1D_1.K_1A_1=H_1K_1.E_1K_1$$

که اگر به برابری $K_1A_1=K_1D_1+D_1A_1$ توجه کنیم، به‌دست می‌آید:

$$(K_1D_1)^2+K_1D_1.D_1A_1=H_1K_1.E_1K_1$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ $H_1C_1K_1$ می‌توان نوشت:

$$H_1K_1.E_1K_1=(C_1K_1)^2$$

بنابراین، به‌دست می‌آید:

$$(K_1D_1)^2+K_1D_1.D_1A_1=(C_1K_1)^2$$

که اگر فرض کنیم: $K_1D_1=x$ ، $A_1D_1=p$ و $C_1K_1=q$ ، خواهیم داشت:

$$x^2+px=q^2$$

اگر x را از روی این معادله بسازیم؛ مثلث $A_1B_1C_1$ ، بدون هیچ زحمتی، با همان نیمساز خود، A_1D_1 به‌دست می‌آید، در واقع، به‌کمک پرگاری که به‌اندازهٔ $K_1D_1=x$ باز شده باشد، نقطهٔ D_1 را به‌دست می‌آوریم. آن وقت، K_1D_1 را وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا دایره را درنقطهٔ A_1 قطع کند. به این ترتیب، مثلث $A_1B_1C_1$ به‌دست می‌آید. اکنون کافی است، روی ضلع زاویهٔ داده شدهٔ A، طول AB را برابر A_1B_1 جدا و BD را وصل کنیم.

راه دوم. فرض می کنیم: $OA=x$ ، $OB=y$ و $OM=a$

داریم:

$$x^2+y^2=l^2$$

$$S_{OMA}+S_{OMB}=S_{OAB}$$

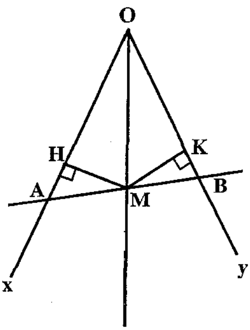
$$MK=MH=\frac{a\sqrt{2}}{2}\Rightarrow ax+ay=\sqrt{2}xy$$

$$\begin{cases}x^2+y^2=l^2\\ x+y=\dfrac{\sqrt{2}}{a}xy\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}(x+y)^2-2xy=l^2\\ x+y=\dfrac{\sqrt{2}}{a}xy\end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x+y=\frac{\sqrt{۲}}{۲}(a+\sqrt{a^۲+۲l^۲}) \\ xy=\frac{a}{۲}(a+\sqrt{a^۲+۲l^۲}) \end{cases} \Rightarrow Z^۲-SZ+P=۰$$

$\frac{c}{a}$ و $\frac{-b}{a}$ مثبت است و مسأله وقتی جواب دارد که $\Delta \geq ۰$ یعنی $l \geq ۲a$ باشد.

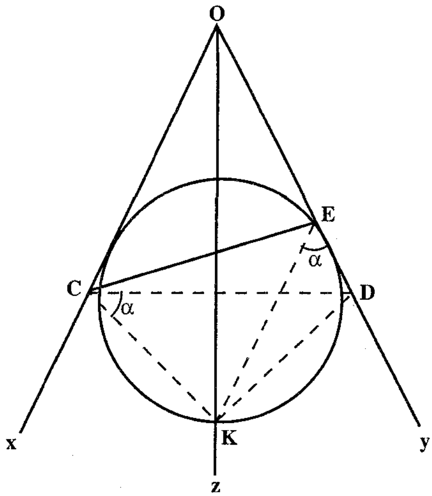
۴۴۸. زاویه را xOy، نیمساز آن را Oz و نقطهٔ داده‌شده واقع بر نیمساز را M می‌نامیم. فرض می‌کنیم مسأله حل‌شده و خط AMB چنان رسم شده باشد که $MA^۲+MB^۲=k^۲$ باشد. از نقطهٔ M دو عمود MH و MK را بر دو ضلع زاویه فرود می‌آوریم. $MH=MK$ است. در مثلثهای قائم الزاویهٔ MAH و MBK داریم : ...



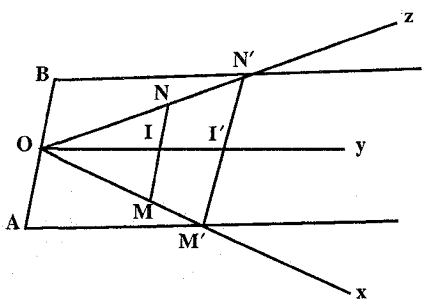
۴۴۹. از نقطهٔ P، خطی موازی یکی از ضلعهای زاویه رسم کنید تا ضلع دیگر را در نقطهٔ Q قطع کند و به‌کمک مثلثهای متشابه، ثابت کنید که مجموع $\frac{۱}{b}+\frac{۱}{a}$ برابر است با $\frac{۱}{PQ}$. با استفاده از این حکم می‌توان رابطهٔ ساده‌ای برای محاسبهٔ β_C، نیمساز زاویهٔ C از مثلث ABC به ضلعهای $AC=b$ و $BC=a$ به‌دست آورد :

$$\beta_C=\frac{۲ab\cos\frac{\hat{C}}{۲}}{a+b}$$

۲.۱۱.۱.۳.۳. زاویه، نیمخط دلخواه، نقطه



۴۵۰. از K خطی رسم می‌کنیم که با Oy زاویه‌ای برابر α جدا کند بنابراین $K\hat{E}D = \alpha$. پس چهارضلعی KDEC محاطی است زیرا دو زاویهٔ برابر نظیر به یک هستند $(\overset{\frown}{KD})$ و چون $\hat{K} = ۹۰°$ پس $C\hat{E}D = ۹۰°$ و از این‌جا مسأله را حل می‌کنیم : از K خطی رسم می‌کنیم که با Oy زاویه‌ای برابر α جدا کند و Oy را در E قطع کند. از E عمودی بر Oy خارج می‌کنیم تا Ox را در C قطع کند. از C به K وصل کرده و سپس خطی عمود بر KC رسم می‌کنیم تا Oy را در D قطع کند.



۴۵۱. از نقطهٔ O خط دلخواهی رسم می‌کنیم و روی آن در دو طرف نقطهٔ O طولهای $OA = OB$ را اختیار می‌کنیم (A در طرفی از Oy است که نیمخط Ox قرار دارد). آن‌گاه از A و B دو خط موازی Oy رسم می‌کنیم که Oz را در نقطه‌های M' و N' قطع کنند. داریم :

$$\frac{I'M'}{I'N'} = \frac{OA}{OB} = \rho \Rightarrow I'M' = I'N'$$

از نقطهٔ I خطی موازی $N'M'$ رسم می‌کنیم تا Ox و Oz را در M و N قطع کند. این قاطع جواب مسأله است ؛ زیرا داریم $\frac{NI}{N'I'} = \frac{IM}{I'M'}$ که از آن نتیجه می‌شود : $MI = NI$.

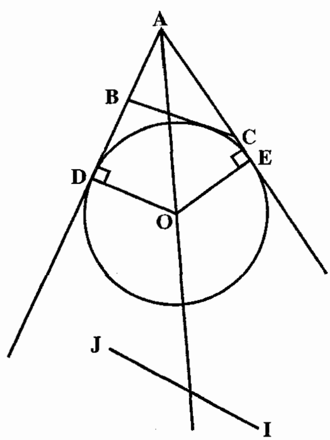
۴۵۲. فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد و قاطع PABC جواب مسأله باشد ؛ سپس قاطع $A'B'C'$ را موازی ABC رسم می‌کنیم. داریم : $\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{AB}{BC} = \frac{۲}{۳}$ ؛ بنابراین $\frac{\overline{B'A'}}{\overline{B'C'}} = -\frac{۲}{۳}$. پس نقطهٔ اختیاری B' را بر Oy اختیار کرده، مجانس خط Oz را با

نسبت $-\frac{۲}{۳}$ می‌سازیم تا خط z' به‌دست آید. نقطهٔ A' در محل تقاطع خط z' با Ox واقع است و $A'B'C'$ به‌آسانی رسم می‌شود. سپس از A خطی موازی $A'B'C'$ را رسم می‌کنیم. شرط امکان مسأله آن است که $x\hat{O}y + y\hat{O}z < ۱۸۰^\circ$ باشد و با وجود این شرط باید نقطهٔ P در زیر خط MON که از O موازی $A'B'C'$ رسم می‌شود، باشد.

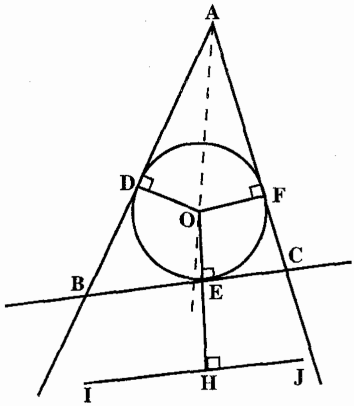
۳.۳.۱.۱۲. خط، زاویه

۳.۳.۱.۱۲.۱. یک زاویه، یک خط

۴۵۳. محیط مثلث را $۲P$ می‌گیریم. روی دو ضلع زاویهٔ A طولهای $AD = AE = P$ را اختیار کرده، دو عمود در نقطه‌های D و E بر ضلع زاویهٔ A اخراج می‌کنیم تا در نقطهٔ O یکدیگر را قطع کند. به مرکز O و به شعاع $OD = OE$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. آن‌گاه خطی موازی امتداد داده شدهٔ IJ بر دایره مماس رسم می‌کنیم تا دو ضلع زاویه را در B و C قطع کنند. مثلث ABC جواب مسأله است، یعنی مثلثی است که محیطش $۲P$ است و ضلع BC از آن موازی IJ است.



نکته. برای رسم خط مماس بر دایره به موازات امتداد IJ از O مرکز دایرهٔ خطی عمود بر IJ رسم می‌کنیم تا دایره را در دو نقطه قطع کند. خطهایی که از این دو نقطه مماس بر دایره رسم شوند، موازی IJ می‌باشند. یکی از این دو خط جواب است.



۴۵۴. مسأله را حل شده، و قاطع BC را جواب مسأله می‌گیریم. دایرهٔ محاطی درونی مثلث ABC را رسم می‌کنیم و نقطه‌های تماس آن با ضلعهای AB، BC و AC را بترتیب D، E و F می‌نامیم. داریم :

$$AB + AC - BC = AD + DB - BE - CE + CF + AF = ۲p$$

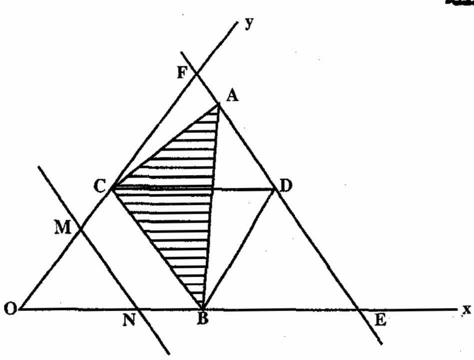
با توجه به تساویهای $AD = AF$ ، $BD = BE$ و $CE = CF$ از رابطهٔ بالا نتیجه می‌شود :

$$۲AD = ۲AF = ۲p \Rightarrow AD = AF = p$$

بنابراین نقطه‌های D و E مشخص می‌باشند و راه‌حل مسأله چنین است :
روی ضلعهای زاویهٔ A دو پاره‌خط $AD = AF = p$ را جدا می‌کنیم. و در دو نقطهٔ D و F عمودهایی بر ضلعهای AB و AC اخراج می‌کنیم تا یکدیگر را در O قطع کنند. به مرکز O و به شعاع $OD = OF$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. آن‌گاه خطی به موازات امتداد داده شدهٔ IJ بر این دایره مماس می‌کنیم. برای این‌کار از O عمود OH را بر IJ رسم می‌کنیم. اگر نقطهٔ برخورد OH با دایره را E بنامیم در E خطی مماس بر دایره رسم می‌کنیم. این خط که دو ضلع زاویهٔ A را در B و C قطع می‌کند، جواب مسأله است.

۱۳.۱.۳.۳. زاویه، خط، نقطه

۱۳.۱.۳.۳. یک زاویه، دو خط، یک نقطه



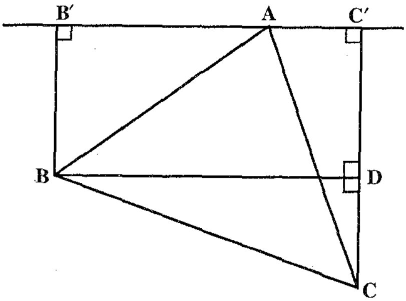
۴۵۵. مثلث ABC را مثلث جواب مسأله می‌گیریم. از رأس A خطی موازی MN رسم می‌کنیم تا دو ضلع زاویه را در E و F قطع کند. مثلثهایی که قاعده‌شان BC و رأس دیگرشان روی EF قرار داشته باشد، هم‌ارزند. حالا، متوازی‌الاضلاع

محاطی DBOC به مساحت ماکزیمم چنین به‌دست می‌آید که از نقطهٔ D وسط EF دو خط موازی Ox و Oy رسم می‌کنیم. امّا مساحت مثلث CDB یا مثلث معادل آن ABC، نصف مساحت متوازی‌الاضلاع OBDC است، بنابراین از نقطهٔ A باید خطی موازی MN رسم کرد و رأس داده شده را به B و C، وسطهای OE و OF وصل کرد.

۲.۳.۳. رسم خط با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۱.۲.۳.۳. مثلث در حالت کلی

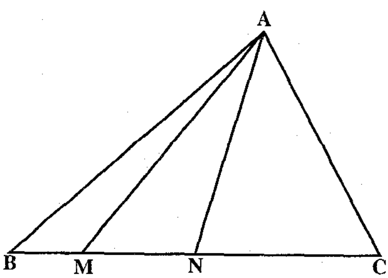
۱.۱.۲.۳.۳. تنها یک مثلث



۱.۱.۱.۱.۲.۳.۳. رسم خط از رأسهای مثلث

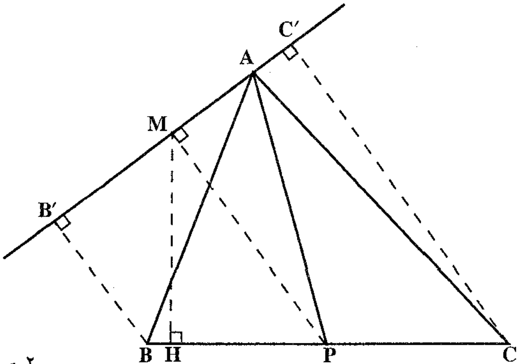
۴۵۷. فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد. BD را موازی $B'C'$ رسم می‌کنیم، $BD=l$ است و $B\hat{D}C=90^\circ$. پس برای حل مسأله به قطر BC یک دایره و به مرکز B و به شعاع l دایره‌ای دیگر رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ D یکدیگر را قطع کنند. از B به D وصل می‌کنیم و از نقطهٔ A خط جواب مسأله را موازی BD رسم می‌نماییم.

۴۵۸. خط دلخواه AMN را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که $BB'+CC'=2DK$ است (D وسط ضلع BC است). پس وقتی DK ماکزیمم باشد، $BB'+CC'$ ماکزیمم است. اما DK هنگامی ماکزیمم است که بر میانهٔ مثلث ABC منطبق باشد. پس خط خواسته شده باید بر میانه AD عمود باشد (EF).



۴۶۰. نقطه‌های M و N را روی ضلع BC چنان به‌دست می‌آوریم که $\frac{BM}{2}=\frac{MN}{3}=\frac{NC}{5}$ باشد. آن‌گاه از M و N به A وصل می‌کنیم. مثلث به سه بخش که مساحت آنها متناسب با ۲، ۳ و ۵ است تقسیم می‌شود.

نکته. مثلثهای ABM، AMN و ANC در ارتفاع رأس A مشترکند.



۴۶۱. میانهٔ AP را رسم می‌کنیم. از P به موازات قاعده‌های ذوزنقه رسم می‌کنیم $\hat{M} = 90°$ سپس از M بر BC عمود می‌کنیم.

$S_{BCC'B'} = BC.MH = k^2$

$MH = \frac{k^2}{BC}$

مکان نقطهٔ M روی دایره‌ای است به قطر AP و از طرفی مکان نقطهٔ M روی خطی است عمود بر BC به طول $\frac{k^2}{BC}$.
چون دایره‌ای به قطر AP خط داده شده را در دو نقطه قطع کند مسأله دو جواب دارد. A را به آن نقطه‌ها وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم.

۴۶۲. نه، نمی‌توان، برای این‌که داشته باشیم:

$S_{AOB} = S_{BOD} = S_{AOE}$

باید داشته باشیم (شکل):

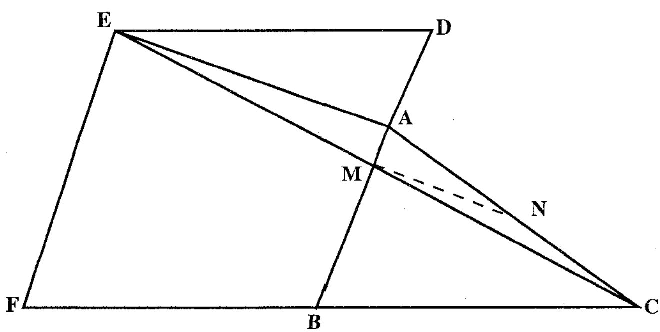
$AO = DO$ و $BO = DE$

ولی این سه معنای آن است که، نقطهٔ O، باید نقطهٔ وسط دو پاره‌خط راست AD و BE باشد که ممکن نیست.

۳.۳.۲.۱.۱.۲. رسم خط متقاطع با ضلعهای مثلث

۴۶۴. **راه اول.** AB را امتداد می‌دهیم به‌طوری که $BD = AC$ و BC را به اندازهٔ AC امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ F به‌دست آید. روی BD و BF یک لوزی رسم می‌کنیم، داریم:

$AE = DE = EF = BF = BD = AC$



به مرکز A و شعاع AC کمانی می‌زنیم تا DE را در E قطع کند. در مثلث CEF و CAE چون $MN \| AE$ و $BM \| EF$ پس:

$$\frac{CN}{CA}=\frac{MN}{EA}=\frac{CM}{CE}=\frac{BM}{FE}$$

$$\frac{CN}{CA}=\frac{MN}{CA}=\frac{CM}{CA}=\frac{BM}{CA}$$

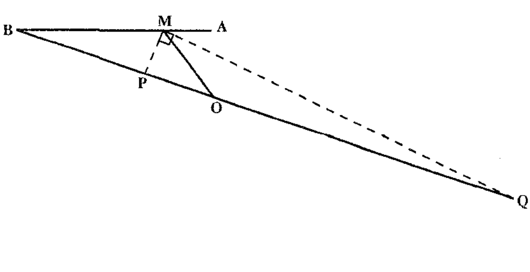
چون مخرجها برابرند بنابراین صورتها با هم برابرند:

$$MN = CN = BM$$

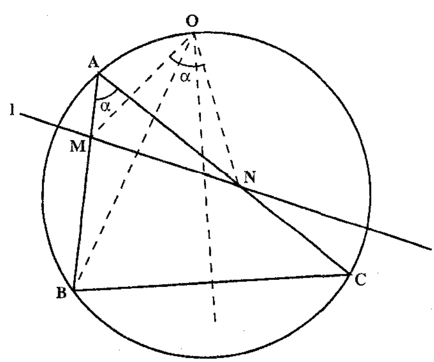
راه دوم. فرض کنید مسأله حل شده است (شکل الف). دورانی وجود دارد که BM را به CN بدل می‌کند، زاویهٔ α مساوی زاویهٔ بین AB و AC است، و نقطهٔ O، مرکز دوران، به راحتی پیدا می‌شود. چون در مثلث متساوی‌الساقین OMN زاویهٔ رأس O، یعنی α، معلوم است، پس نسبت $\frac{OM}{MN}=k$ نیز برای ما معلوم است. اما بنا بر شرط مسأله، $MN = BM$، بنابراین:

$$\frac{OM}{BM}=k$$

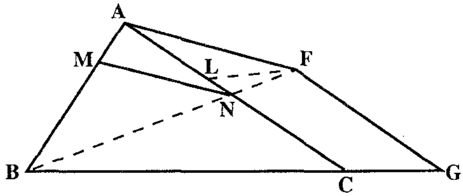
که با توجه به آن می‌توانیم M را از تقاطع ضلع AB با دایره‌ای پیدا کنیم که مکان نقطه‌هایی است که نسبت فاصله‌هاشان از O و B مساوی k است. این مکان هندسی، همان‌طور که دیده می‌شود یک دایره است، زیرا، مثلاً معلوم است که نیمسازهای زاویه‌های درونی و بیرونی زاویهٔ M از مثلث OMB (شکل ب، که در آن M نقطه‌ای است که برای آن $OM/BM = k$)قاعدهٔ OB را در نقطه‌های ثابت (مستقل از M) P و Q با شرایط $\frac{OP}{PB}=\frac{OQ}{BQ}=k=\frac{OM}{BM}$ قطع می‌کنند، چرا که دو نیمساز بر هم عمودند و M بر دایرهٔ به قطر PQ قرار دارد.



(ب)

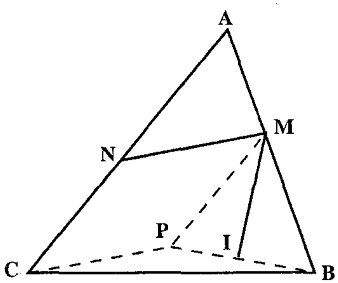


(الف)

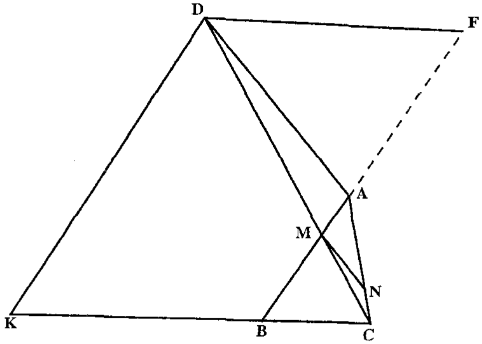


راه سوم. فرض کنید ABCMN (شکل) شکل خواسته شده باشد. اگر خطی که از نقطهٔ A به موازات MN رسم می‌شود، خط BN را در نقطهٔ F قطع کند، و خطی که از F به موازات AC رسم می‌شود، BC را در G قطع کند، روشن است که چهارضلعیهای BMNC و BAFG متجانسند و B مرکز تجانس آنهاست؛ پس $BA = AF = FG$. حال می‌توان چهارضلعی BAFG را به روش زیر رسم کرد. روی CA پاره‌خط CL را برابر با AB جدا می‌کنیم و اگر خطی که از L به موازات BC رسم می‌شود دایرهٔ (A,AB) را در F قطع کند، خطی که از F به موازات AC رسم می‌شود BC را در G که رأس چهارم از چهارضلعی خواسته شده است قطع می‌کند.

خطی که از نقطهٔ $N = (AC, BF)$ به موازات AF رسم می‌شود، قاطع خواسته شده است.



راه چهارم. چون لوزی MPCN را تکمیل کنیم مشاهده می‌شود که MP چون موازی AN است پس زاویهٔ PMB مساوی زاویهٔ A مثلث است و MI نیمساز زاویهٔ PMB موازی نیمساز زاویهٔ A می‌باشد. پس نقطهٔ P بر روی خطی است که از B بر این نیمساز عمود شود. از طرف دیگر چون $PB = PM \sin \frac{A}{۲}$ است پس نسبت $\frac{PB}{PC} = \sin \frac{A}{۲}$ معلوم است و نقطهٔ P بر روی دایره‌ای است که نسبت فاصله‌های نقطه‌های آن از دو نقطهٔ B و C در دست است. رسم این دایره نقطهٔ P سپس قاطع MN را تعیین می‌کند.



۴۶۵. پاره‌خط AB را امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ F به‌دست آید، به‌طوری که $BF = ۳AC$ باشد. از نقطهٔ F خطی به موازات BC رسم می‌کنیم. به مرکز A و شعاع ۲AC دایره‌ای می‌زنیم تا خط موازی را در D قطع کند. AD و DC را وصل می‌کنیم تا CD پاره‌خط AB را در M قطع کنند. از M به موازات

$\hat{A}D$ رسم می‌کنیم تا AC را در N قطع کند، MN خط خواسته شده است. داریم:

$$\frac{CN}{CA}=\frac{MN}{AD}=\frac{CM}{CD}=\frac{BM}{BF}$$

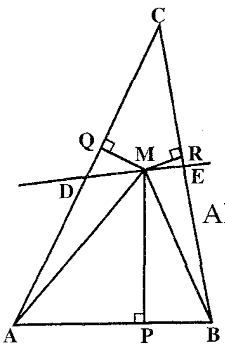
$$BF=۳AC$$

$$AD=۲AC$$

$$\frac{CN}{CA}=\frac{MN}{۲AC}=\frac{BM}{۳AC}$$

۴۶۷. برای نقطهٔ O وسط قاعدهٔ مثلث.

۴۶۸. اگر AB کوچکترین ضلع مثلث ABC باشد، $AD=BE=AB$ را جدا می‌کنیم. پاره‌خط DE جواب مسأله است. درنتیجه دو برابر مساحت چهارضلعی DABE برابر است با:



$$AB.MP+AD.MQ+BE.MR=$$

$$AB.MP+AD.MQ+BE.MR=AB(MP+MQ+MR)$$

از آن‌جا $MP+MQ+MR=\frac{۲S_{DABE}}{AB}$ مقدار ثابتی است.

۳.۱.۱.۲.۳.۳. رسم خط موازی ضلعهای مثلث

۴۶۹. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم و DE را به وضع BI انتقال می‌دهیم. از I به A وصل می‌کنیم. AI نیمساز زاویهٔ A است. پس برای حل مسأله نیمساز زاویهٔ درونی A یعنی AI را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ I خطی موازی ضلع AB رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ E قطع کند. از E خط ED را موازی BC رسم می‌کنیم.

۴۷۰. خطی که از نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های مثلث و موازی BC رسم شود، جواب است.

۴۷۱. اگر $AE=x$ اختیار کنیم، داریم:

$$\frac{x}{b}=\frac{AD}{c}=\frac{DE}{a}$$

پس

$$DE=\frac{ax}{b}\ ,\ AD=\frac{cx}{b}$$

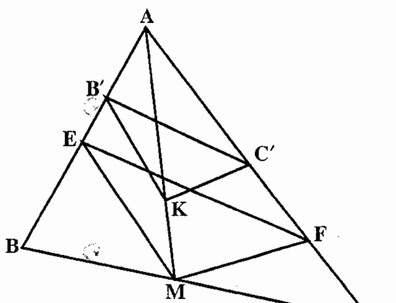
در نتیجه خواهیم داشت :

$$CE = b - x \text{ و } BD = c - \frac{cx}{b} = \frac{c(b-x)}{b}$$

$$\Rightarrow b - x + \frac{ax}{b} + \frac{c(b-x)}{b} + a = ۲p$$

$$\Rightarrow x = \frac{b(p_۱ - p)}{p}$$

که $۲p_۱ = a + b + c$ و $p_۱ - a > ۰$ است. با مشخص شدن x خط AE را می‌توان رسم کرد.



۴۷۲. راه اوّل. فرض می‌کنیم EF مثلث ABC را به دو قسمت معادل تقسیم کرده باشد ؛ یعنی $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \frac{۱}{۲}$. و چون EF∥BC است پس $\frac{S_{AEF}}{S_{ABC}} = \frac{AE^۲}{AB^۲}$. پس $\frac{AE^۲}{AB^۲} = \frac{۱}{۲}$ یا $\frac{AE}{AB} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$ است و $AE = \frac{\sqrt{۲}}{۲}AB$ است.

بنابراین راه‌حل مسأله چنین است : از M وسط AB عمود MK را بر AB اخراج می‌کنیم به قسمی که $MK = \frac{AB}{۲}$ باشد. در مثلث AKM داریم :

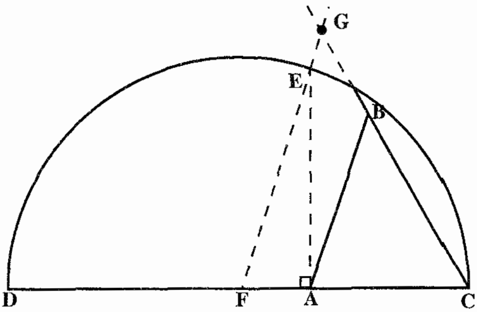
$$AK^۲ = AM^۲ + MK^۲ = ۲AM^۲ \text{ یا } AK^۲ = ۲ \times \frac{AB^۲}{۴}$$

و یا

$$AK = \frac{\sqrt{۲}}{۲}AB$$

حال AE را برابر AK جدا می‌کنیم و از E خطی موازی BC رسم می‌کنیم.

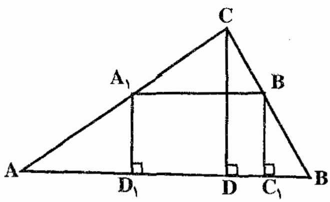
راه‌حل دوم از ابوالوفاء بوزجانی. ضلع AB را به اندازهٔ $AD = \frac{AB}{۲}$ امتداد می‌دهیم و به قطر BD دایره‌ای رسم می‌کنیم. سپس از نقطهٔ A عمودی بر BD اخراج می‌کنیم تا این دایره را در نقطهٔ E قطع کند. به مرکز A و به شعاع AE دایره‌ای می‌زنیم تا AC را در N قطع کند. خط MN جواب مسأله است.



۴۷۳. ضلع AC را از طرف A به اندازهٔ دو برابر خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ D به‌دست آید. به قطر DC نیمدایره‌ای رسم می‌کنیم و از نقطهٔ A عمودی بر AC اخراج می‌کنیم تا نیمدایره را در نقطه E قطع کند. آن‌گاه پاره‌خط CF را مساوی AE جدا کرده از F خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا امتداد BC را در نقطهٔ G قطع کند. مساحت مثلث FCG دو برابر مساحت مثلث ABC است.

نکته. به روش مشابه می‌توان خطی موازی یک ضلع مثلث رسم کرد که دو برابر یا سه برابر یا n برابر مساحت مثلث به آن اضافه شود.

۴۷۴. داریم :



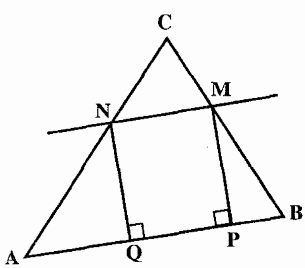
$$A_1B_1 = x \ , \ B_1C_1 = y \ , \ AB = c$$

$CD = h$ و مستطیل موردنظر $S = x.y$

$$\Delta ABC \sim \Delta A_1B_1C \Rightarrow \frac{x}{a} = \frac{h-y}{h}$$

$$\Rightarrow x = \frac{c(h-y)}{h} \Rightarrow S = \frac{c}{h}(h-y)y$$

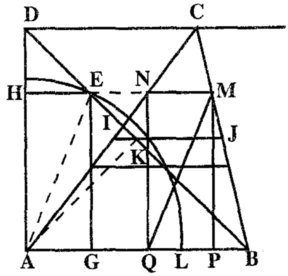
و ماکزیمم آن وقتی است که داشته باشیم : $h-y=y \Rightarrow y=\frac{h}{۲}$ و جواب $S=\frac{۱}{۴}c.h$ است.



۴۷۵. مسأله را حل شده می‌گیریم و نقطهٔ C را به نقطهٔ D چنان انتقال می‌دهیم که مثلث قائم‌الزاویه ABD $(\hat{BAD}=۹۰°)$ را داشته باشیم. نقطهٔ برخورد MN با DB و DA را بترتیب E و H می‌نامیم و از E عمود EG را بر AB فرود می‌آوریم، داریم :

$$EH = MN \text{ و } EG = MP \Rightarrow EG^۲ + EH^۲ = r^۲ \Rightarrow AE = r$$

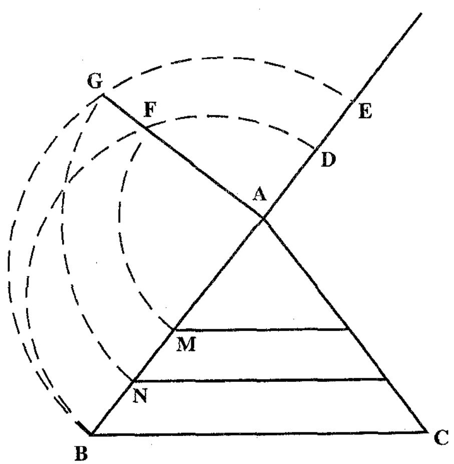
پس نقطهٔ E روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع r واقع است. این دایره BD را در نقطهٔ F نیز قطع می‌کند. بنابراین برای حل مسأله، مثلث قائم‌الزاویه ABD را می‌سازیم. به مرکز A



و به شعاع r دایره‌ای رسم می‌کنیم تا BD را در E قطع کند. از E موازی ضلع AB رسم می‌کنیم تا ضلعهای مثلث ACB را در M و N قطع نماید. این خط جواب مسأله است.

نکته. کمترین مقدار مجموع مربعهای دو ضلع مجاور برابر AK^2 است که AK عمود رسم شده از A بر BD است.

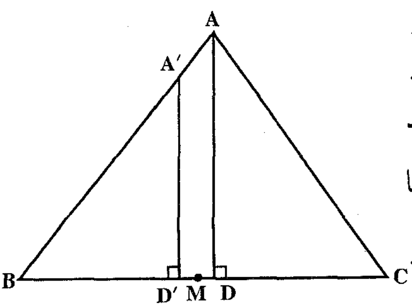
۴۷۷. در امتداد ضلع AB پاره‌خطهای $AD = DE = \frac{AB}{3}$ را جدا می‌کنیم. به قطرهای BD و BE دو نیمدایره رسم می‌کنیم و از A عمودی بر AB اخراج می‌کنیم تا این دو نیمدایره را در دو نقطهٔ F و G قطع کند، به مرکز A و به شعاعهای AG و AF دو قوس می‌زنیم تا ضلع AB را در نقطه‌های M و N قطع کنند. از M و N دو خط موازی ضلع BC رسم می‌کنیم. این دو خط مثلث را به چهار بخش معادل تقسیم می‌کنند.



نکته. برای تقسیم یک مثلث به چند بخش معادل با رسم خطهایی موازی یک ضلع از روش بالا می‌توان استفاده کرد.

۴.۱.۱.۲.۳.۳. رسم خط عمود بر ضلعهای مثلث

۴۷۹. فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد و خط $A'D'$ جواب مسأله باشد. ارتفاع AD را رسم می‌کنیم. M نیز وسط BC است. باید $S_{BD'A'} = \frac{1}{2} S_{ABC}$ یا



$$\frac{BD'.D'A'}{2} = \frac{1}{2}.\frac{BC.DA}{2} = \frac{1}{2}BM.DA$$

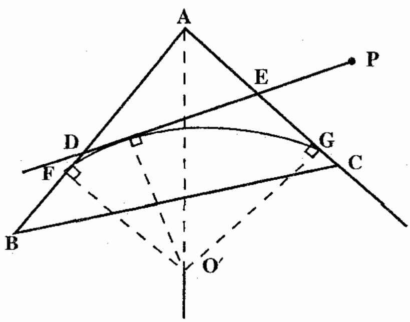
پس $\frac{DA}{D'A'} = \frac{BD'}{BM}$ امّا $\frac{DA}{D'A'} = \frac{BD}{BD'}$ است. از آن‌جا $\frac{BD}{BD'} = \frac{BD'}{BM}$ ، یا

$BD'^{2} = BM.BD$ است. پس راه‌حل مسأله چنین است:
ارتفاع AD را رسم می‌کنیم و M وسط BC را مشخص می‌سازیم و بین BD و BM واسطه هندسی تعیین می‌کنیم تا BD' مشخص شود. از D' عمودی بر BC اخراج می‌کنیم. خط $A'D'$ جواب است.

۳.۳.۲.۱.۲. یک مثلث، نقطه

۳.۳.۲.۱.۲.۱. یک مثلث، یک نقطه

۳.۳.۲.۱.۲.۱.۱. یک مثلث، یک نقطه در صفحهٔ مثلث



۴۸۱. مسأله را حل شده می‌گیریم و خط PED را که با دو ضلع AB و AC مثلث ADE به محیط $۲p'$ را می‌سازد در نظر می‌گیریم. دایرهٔ محاطی برونی مثلث ADE را رسم می‌کنیم. اگر F و G نقطه‌های تماس این دایره با ضلعهای AB و AC باشند، $AF = AG = p'$ است. از طرفی مرکز این دایره روی نیمساز زاویهٔ A واقع است، پس برای حل مسأله، نیمساز زاویهٔ A را رسم می‌کنیم و روی دو ضلع AB و AC طولهای $AF = AG = p'$ را جدا می‌کنیم. از F عمودی بر AB اخراج می‌کنیم تا نیمساز زاویهٔ A را در نقطهٔ O' قطع کند. به مرکز O' و به شعاع $O'F$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. آن‌گاه از نقطهٔ P خطی بر این دایره مماس می‌کنیم تا ضلعهای مثلث ABC را در D و E قطع کند. محیط مثلث ADE برابر $۲p'$ است.

۴۸۳. خط مطلوب m از نقطه‌هایی عبور می‌کند که نسبت به نقطهٔ M متقارن بوده و به ضلعهای زاویهٔ ABC تعلق دارند. برای اثبات این گزاره نشان دهید که مساحت مثلث ایجاد شده در اثر برش خط l که محتوی نقطهٔ M است و با خط m متفاوت است از مساحت مثلث حاصل به‌وسیلهٔ خط m بزرگتر است.

۳.۳.۲.۱.۲.۱.۲. یک مثلث، یک نقطه روی ضلع مثلث

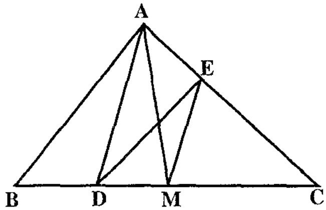
۴۸۴. اگر MN جواب مسأله باشد، خواهیم داشت:

$$S_{MNC}:S_{ABC} = (MC.CN):(BC.AC) = \frac{۱}{۲}$$

اگر D وسط BC فرض شود خواهیم داشت :

$$(\mathrm{MC.CN}):(۲\mathrm{DC.AC}) = \frac{۱}{۲} \text{ یا } \frac{\mathrm{MC}}{\mathrm{DC}} = \frac{\mathrm{AC}}{\mathrm{CN}}$$

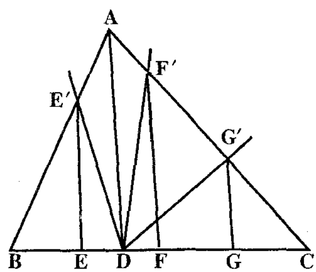
برای آن‌که CN را بسازیم کافی است MA و DN را موازی رسم کنیم. با معلوم بودن N خط MN به‌دست می‌آید.



راه‌حل از ابوالوفاء بوزجانی. از D به A وصل کرده، میانهٔ AM را رسم می‌کنیم و از M خطی موازی AD رسم می‌نماییم تا ضلع AC را در نقطهٔ E قطع کند. خط DE جواب مسأله است. یعنی خطی است که مثلث را به دو بخش معادل تقسیم می‌کند.

۴۸۵. از A به D وصل می‌کنیم. سپس ضلع BC را به چهار قسمت مساوی BE = EF = FG = GC تقسیم می‌کنیم. از نقطه‌های E، F و G خطهایی موازی AD رسم می‌کنیم تا ضلعهای AB و AC را بترتیب در ′E ، ′F و ′G قطع کنند. از D به ′E ، ′F و ′G وصل می‌کنیم. خطهای ′DE ، ′DF و ′DG جواب مسأله‌اند.

نکته. برای تقسیم مثلث به رسم چند خط از یک نقطه واقع بر یک ضلع، از روش بالا می‌توان استفاده کرد.



۴۸۷. MDN هم‌ارز با نصف مستطیل محاط در مثلث داده شده است.

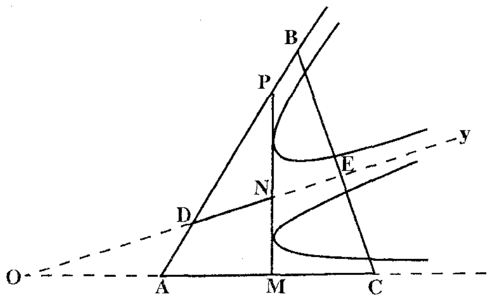
۴۸۸. برای تقسیم یک مستطیل به چهار بخش مساوی، به‌وسیلهٔ دو خط عمود بر هم، از مرکز مستطیل بترتیب دو خط عمود بر ضلعهای آن رسم کنید.

۳.۱.۲.۱.۲.۳.۳. یک مثلث، یک نقطه درون مثلث

۴۸۹. مسأله را حل شده فرض کنید و از ویژگیهای داده شده استفاده کنید.

۳.۳.۲.۱.۲.۲. یک مثلث، دو نقطه

۴۹۱. مسأله را در حالتهایی بررسی کنید که دو نقطهٔ داده شده روی یک ضلع باشند، یا روی دو ضلع مثلث قرار داشته باشند.



۳.۳.۲.۱.۳. یک مثلث، پاره‌خط

۴۹۲. مماس مشترک رسم شده بر دو هذلولی جواب مسأله است. در حالت کلی رسم مماس مشترک دو هذلولی به معادله‌ای درجهٔ چهار منجر می‌شود. امّا در حالتی که دو هذلولی یک خط مجانب Oy دارند، معادله‌ای درجهٔ دوم حاصل می‌شود. بنابراین می‌توان خط مماس را به‌وسیلهٔ خط‌کش و پرگار رسم کرد.

نکته. با فرض $AB = a$ ، $BC = b$ ، $AC = c$ ، $BD = d$ ، $BE = e$ و $AM = x$ ، داریم :

$$\frac{a}{۲} - \frac{de}{۲b} = g \ , \ ۴d - ۲a - \frac{d^۲}{a} - \frac{de}{b} = f$$

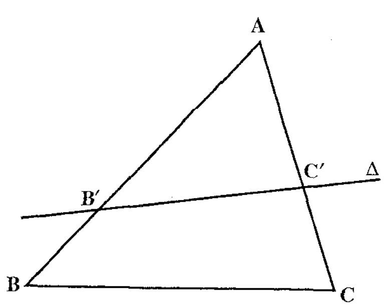
در این‌صورت معادلهٔ $fx^۲ + ۲(a-d)cx - c^۲g = ۰$ به‌دست می‌آید.

۳.۳.۲.۱.۴. یک مثلث، خط

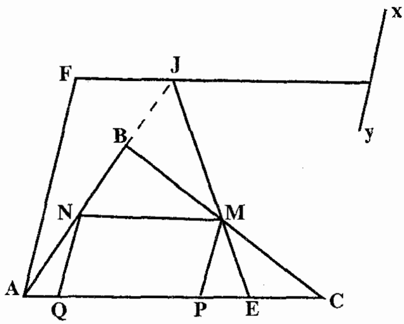
۳.۳.۲.۱.۴.۱. یک مثلث، یک خط یا یک راستا

۳.۳.۲.۱.۴.۱.۱. یک مثلث، یک خط در هر حالت

۴۹۳. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و خط Δ جواب مسأله باشد یعنی داشته باشیم $BB' = CC'$. آن‌گاه...

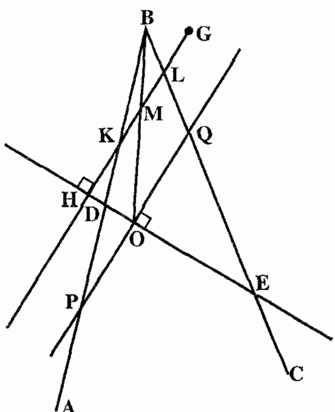


۴۹۴. از رأس A خطی موازی xy رسم می‌کنیم و پاره‌خطهای $AE = AF = P$ را اختیار می‌کنیم (شکل). از F خطی موازی AC رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در J قطع کند. نقطهٔ برخورد EJ با BC نقطهٔ M یک رأس متوازی‌الاضلاع خواسته شده است. با داشتن M متوازی‌الاضلاع MNQP را رسم می‌کنیم. و داریم:



$$MN + MP = r$$

۴۹۵. خط دلخواه GH را عمود بر DE رسم می‌کنیم تا ضلعهای BA و BC را در K و L قطع کند. نقطهٔ B را به نقطهٔ M وسط KL وصل کرده امتداد می‌دهیم تا DE را در O قطع کند. چنانچه از O خطی به موازات GH رسم کنیم، این خط جواب است زیرا در مثلث PBQ چون $KL \| PQ$ پس $\frac{OP}{OQ} = \frac{MK}{ML}$ یا $OP = OQ$ است.

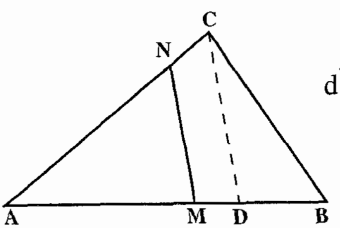


۴۹۶. برای این‌که ذوزنقهٔ DEFG با BCDF متشابه شود، کافی است که داشته باشیم: $\frac{FG}{ED} = \frac{ED}{BC}$. یعنی FG مجانس ED نسبت به A است با نسبت $\frac{ED}{BC}$ که مقداری است معلوم، پس مجانس ED را نسبت به A با نسبت $\frac{ED}{BC}$ رسم می‌کنیم تا خط FG به‌دست آید و چون زاویه‌های دو ذوزنقه نیز با هم برابرند، پس دو شکل متشابه خواهند بود.

۴۹۷. امتداد داده شده را CD و مساحت مثلث ABC را $2a^2$ می‌نامیم.

مساحت مثلث ACD را مشخص می‌کنیم. داریم:

$$d^2 = \frac{2a^2.AD}{AB} = \frac{AM^2}{AD^2} = \frac{a^2}{d^2} \Rightarrow AM^2 = \frac{a^2.AD^2}{d^2}$$



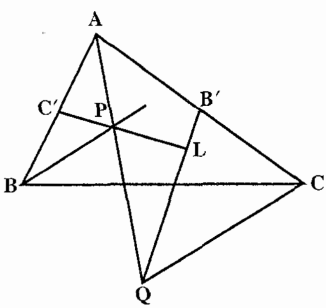
۴۹۸. داریم $NQ = ۲MN$ ، پس امتداد خطهایی را پیدا می‌کنیم که به‌وسیلهٔ AC و AB و d به دو قسمت که یکی دو برابر دیگری باشد تقسیم می‌شود. برای این‌کار روی AB سه قسمت مساوی از A به‌وسیلهٔ پرگار جدا می‌کنیم. قسمت دوم را E و قسمت سوم را F می‌نامیم. از F موازی AC رسم می‌کنیم تا D را در G قطع کند. GF خط AC را در H قطع می‌کند و GH جواب مسأله است (نظر به تشابه دو مثلث EAH و EGF) و $EH = ۲GE$ و هر خط که موازی آن و محدود به سه خط d و AB و AC شود دارای این خاصیت است. منصف EH منصف همه خطهای موازی با آن و متکی به AB و AC می‌باشد (نظر به خطهای موازی) پس میانهٔ EH را رسم می‌کنیم تا BC را در P قطع کند.
اگر از P موازی EH رسم کنیم تا نقطه‌های M و N و Q به‌دست آیند این نقطه‌ها جواب مسأله‌اند، زیرا :

$$NQ = ۲MN \ , \ PN = PQ$$

پس :

$$MN = NP = PQ$$

۲.۴.۱.۲.۳.۳. یک مثلث، دو راستا



۴۹۹. فرض کنید ABC (شکل) مثلث داده شده باشد، و خطی که از A، در راستای d رسم می‌شود، دو خطی را که از نقطه‌های B و C در راستای مفروض ′d رسم می‌شوند در نقطه‌های P و Q قطع کند. اگر ′B وسط AC و ′C وسط AB باشد، نقطهٔ $L = (PC', QB')$ نقطهٔ مشترک دو مورب خواسته شده است. چون نقطهٔ L با Q و ′B همخط است، خطهایی که از L به موازات QA و QC رسم می‌شوند، ضلع AC را در دو نقطهٔ همنوا و ضلع AB را در دو نقطهٔ همنوا قطع می‌کنند.

۵.۱.۲.۳.۳. یک مثلث، خط، نقطه

۱.۵.۱.۲.۳.۳. یک مثلث، یک میانه، نقطه

۵۰۰. از این ویژگی استفاده کنید که هر میانهٔ مثلث، مثلث را به دو بخش هم‌ارز تقسیم می‌کند.

۳.۲.۲.۳. مثلث متساوی‌الاضلاع

۳.۲.۲.۳.۱. تنها یک مثلث متساوی‌الاضلاع

۵۰۱. فرض می‌کنیم $BK = x$ ، $BN = y$ و $CM = z$ باشد و مساحت $S = ABC$ و مساحت $S_1 = KNB$ باشد. طبق شرط داریم:

$$\frac{S_1}{S} = \frac{1}{2} \qquad (1)$$

و ضمناً

$$\frac{S_1}{S} = \frac{xy}{a^2} \qquad (2)$$ (دو مثلث در زاویهٔ B مشترکند)

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow x.y = \frac{a^2}{2} \qquad (3)$$

دو مثلث KBC و KMC هم‌ارزند و چون در قاعدهٔ KC مشترکند پس ارتفاعهایی که از رأس B و M براین قاعده رسم شوند برابرند و BM‖KC می‌شود پس داریم:

$$\frac{AC}{CM} = \frac{AK}{BK} \Rightarrow \frac{a}{z} = \frac{a-x}{x} \qquad (4)$$

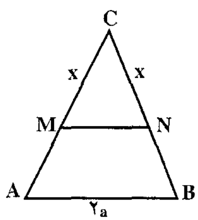
و

$$\frac{BN}{CN} = \frac{BM}{KC} = \frac{AB}{AK} \Rightarrow \frac{y}{a-y} = \frac{a}{a-x} \qquad (5)$$

$$(3) \text{ و } (4) \text{ و } (5) \Rightarrow x = \frac{2}{3}a \ , \ y = \frac{3}{4}a \ , \ z = 2a$$

۳.۲.۳. مثلث متساوی‌الساقین

۳.۲.۳.۱. تنها یک مثلث متساوی‌الساقین



۵۰۲. هریک از ساقهای مثلث متساوی‌الساقین برابر $p-a$ خواهد بود. فرض می‌کنیم $CM = CN = x$ باشد، محیط ذوزنقه AMNB بدین‌ترتیب محاسبه می‌شود که قطعات $CM + CN = 2x$ را از $2p$ کم کرده و تفاضل MN را بیفزاییم. از تشابه دو مثلث ABC و MNC داریم:

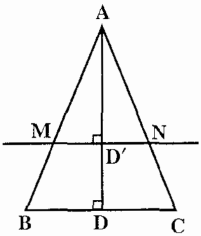
$$MN = \frac{AB.MC}{AC} = \frac{2ax}{p-a}$$

$$\Rightarrow 2p - 2x + \frac{2ax}{p-a} = 2p' \Rightarrow x = \frac{(p-a)(p-p')}{p-2a}$$

جواب نشان می‌دهد که باید $p' < p$ و $2a < p$ (که در این‌صورت مسلماً $a \le p$ خواهد بود)، تا برای x جوابی به‌دست آید.

۳. ۳. ۲. ۳. ۲. یک مثلث متساوی‌الساقین، یک ارتفاع

۵۰۳. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و MN خط خواسته‌شده باشد.



نقطهٔ برخورد MN با ارتفاع AD را D' می‌نامیم. مثلث AMD' با مثلث ABD متشابه و بنا به فرض مساحت آن، $\frac{1}{4}$ مساحت مثلث ABC و $\frac{1}{2}$ مساحت مثلث ABD است؛ زیرا دو مثلث ABD و ACD معادل یکدیگرند. بنابراین داریم:

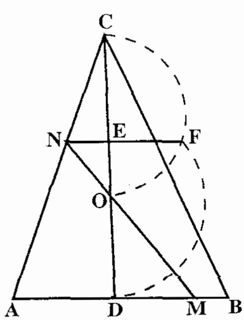
$$\frac{S_{AMD'}}{S_{ABD}} = \frac{1}{2} = \left(\frac{AD'}{AD}\right)^2 \Rightarrow \frac{AD'}{AD} = \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\Rightarrow AD' = \frac{\sqrt{2}}{2}\ ,\ AD = \frac{\sqrt{2}}{2} h_a = \text{مقدار معلوم}$$

پس D' نقطهٔ مشخصی است. بنابراین برای حل مسأله، روی ارتفاع AD، نقطهٔ D' را چنان اختیار می‌کنیم که $AD' = \frac{\sqrt{2}}{2} AD$ باشد، آن‌گاه از نقطهٔ D' خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا AB و AC را در M و N قطع کند. این خط، جواب مسأله است.

۳. ۳. ۲. ۳. ۳. یک مثلث متساوی‌الساقین، یک ارتفاع، یک نقطه

۵۰۴. MON را قاطع خواسته شده می‌گیریم. دو سطح هم‌ارز CBD و CBMN در قسمت COMB مشترک می‌باشند. بنابراین باید دو مثلث DOM و ONC هم‌ارز باشند. از آن‌جا:



$$OC.NE = OD.DM \qquad (1)$$

امّا $\frac{OD}{OE} = \frac{DM}{NE}$ است، پس

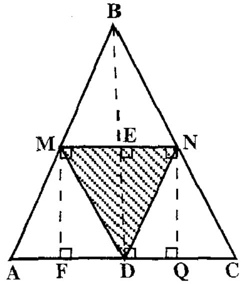
$$DM.OE = NE.OD \qquad (2)$$

از ضرب‌کردن عضوهای متناظر رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود: $OC.OE = OD^2$.

از این رابطه OE بسادگی قابل رسم است.

۵۰۵. مثلث MDN هم‌ارز (معادل) مستطیل DENQ است. بنابراین مسأله به‌صورت زیر درمی‌آید :

در مثلث معلوم مستطیلی با مساحت معلوم محیط کنید. ماکزیمم مساحت مثلث MDN وقتی است که نقطه‌های M و N وسط ساقهای مثلث ABC باشند.



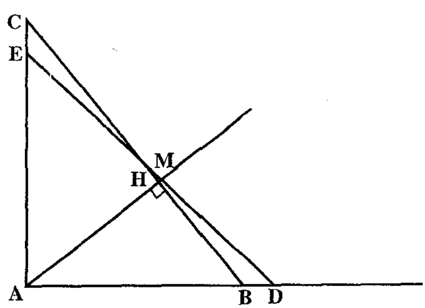
۳ . ۳ . ۲ . ۴. مثلث قائم‌الزاویه

۳ . ۳ . ۲ . ۴ . ۱. مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع

۵۰۶. جواب : $x = \frac{۲۵\sqrt{۲}}{۲} \text{cm}$

۳ . ۳ . ۲ . ۴ . ۲. مثلث قائم‌الزاویه، ارتفاع، یک نقطه

۵۰۷. فرض می‌کنیم مسأله حل‌شده و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC$(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، جواب مسأله باشد. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و نقطه داده‌شده روی امتداد AH را M می‌نامیم. قاطع رسم شده از M به ضلعهای AB و AC را در D و E و وتر BC را در N چنان قطع می‌کند که ND = NE است...

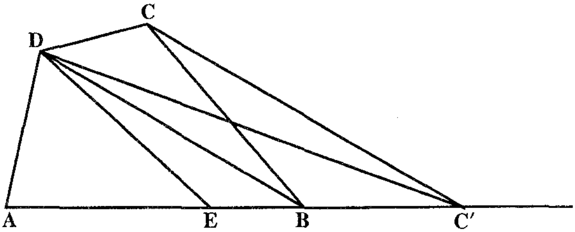


۳.۳.۳. رسم خط با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی و داده‌های دیگر

۳.۳.۳.۱. چهارضلعی

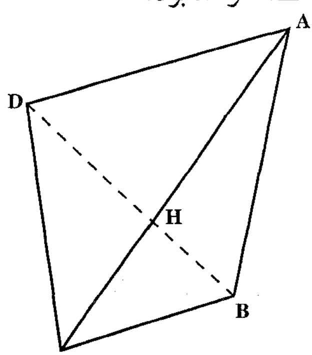
۳.۳.۳.۱.۱. چهارضلعی در حالت کلی

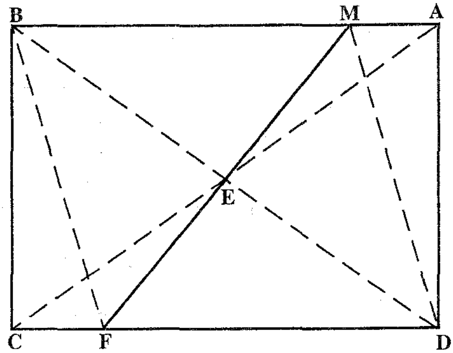
۵۰۸. راه‌حل ابوالوفاء بوزجانی. می‌خواهیم از D خطی چنان رسم کنیم که چهارضلعی به دو قسمت معادل تقسیم شود. اگر مساحت DBC با DBA برابر باشد، DB خط خواسته شده است. اگر $S_{DBC} < S_{DBA}$ باشد، DE خط خواسته شده است که AB را در E قطع می‌کند. برای تعیین E از C خط CC' را موازی خط DB رسم می‌کنیم تا AB را در C' قطع کند. دو مثلث DCB و $DC'B$ معادلند (چرا؟) پس مثلث $DC'E$ با چهارضلعی EBCD معادل است و چون این چهارضلعی هم باید با مثلث EDA معادل باشد، پس مثلث DEC' باید با مثلث EDA معادل شود. چون این دو مثلث در ارتفاع مشترکند باید قاعده‌هایشان برابر باشد یعنی نقطهٔ E وسط AC' است.



۵۱۰. راه‌حل از ابوالوفاء بوزجانی. می‌خواهیم از چهارضلعی ABCD معادل $\frac{1}{3}$ آن جدا کنیم:

ابتدا دو قطر AC و BD را می‌کشیم. اگر BH ثلث BD باشد، $\frac{1}{3}$ مساحت چهارضلعی ABCD سطح مثلث ABC خواهد بود.



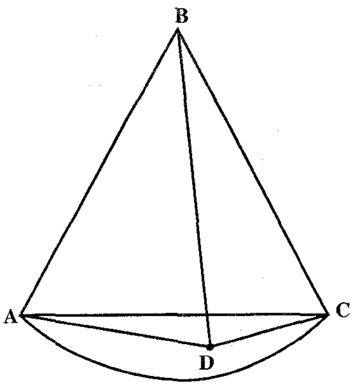


۵۱۱. راه‌حل از ابوالوفاء بوزجانی. می‌خواهیم سطح چهارضلعی ABCD را با خطی که از نقطهٔ معینی روی یک ضلع مانند نقطهٔ M روی ضلع AB بگذرد به دو نیمهٔ مساوی تقسیم کنیم. همان‌طور که گفته شد ابتدا سطح چهارضلعی را با خطی که از یک رأس مثلاً رأس B می‌گذرد به دو نیمهٔ مساوی تقسیم می‌نماییم. سپس خط ME را رسم می‌کنیم. اگر ME موازی BF باشد، شکل با خط ME به دو نیمه تقسیم می‌شود.

۵۱۲. راه‌حل از ابوالوفاء بوزجانی. مسأله را برای حالتی که خط رسم شده مساحت چهارضلعی را به نسبت ۱ و ۲ تقسیم کند حل می‌کنیم.

۵۱۴. پاسخ به پرسش مسأله، منفی است. چهارضلعی محدب ABCD را درنظر می‌گیریم که، در آن، داشته باشیم:

$AB = AC = BC = d$ و $BD < d$



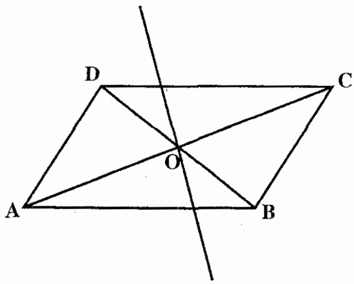
(شکل) قطر آن، برابر d است. ازطرف دیگر، دست‌کم دو رأس از سه رأس A، B و C در یکی از دو بخشی قرار می‌گیرند که از تقسیم چهارضلعی به وسیلهٔ خط‌شکسته به‌دست آمده است. در این‌صورت، قطر این بخش، برابر d می‌شود.

یادداشت. می‌توان ثابت کرد، اگر بین رأسهای چهارضلعی محدب داده شده، نتوان سه رأس را طوری انتخاب کرد که، فاصلهٔ دوبه‌دوی آنها، برابر قطر آن باشند، آن‌وقت، تقسیم موردنظر مسأله را می‌توان انجام داد؛ درضمن، به‌جای خط شکسته می‌توان از خط راست استفاده کرد.

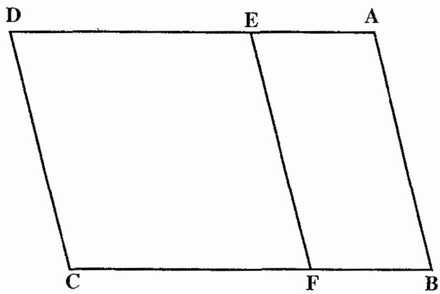
۳. ۳. ۳. ۱. ۲. چهارضلعیهای ویژه

۳. ۳. ۳. ۱. ۲. ۱. متوازی‌الاضلاع

۳. ۳. ۳. ۱. ۲. ۱. ۱. تنها یک متوازی‌الاضلاع



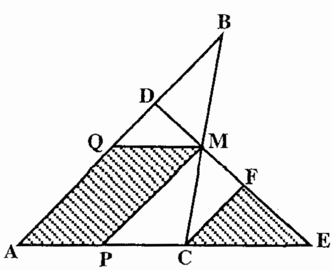
۵۱۵. محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع را که مرکز تقارن آن است O می‌نامیم، هر خطی (غیراز قطرهای آن) که از نقطهٔ O بگذرد، جواب مسأله است و مسأله بیشمار جواب دارد.

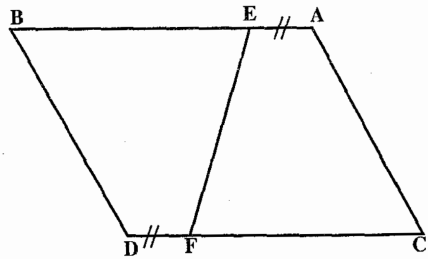


۵۱۶. اگر بخواهیم از سطح متوازی‌الاضلاعی مانند ABCD مقدار معینی مثلاً $\frac{1}{3}$ آن به وسیلهٔ خطی که از نقطهٔ مانند E بر روی ضلع AD می‌گذرد جدا نماییم، اوّل از نقطهٔ E خط EF را موازی ضلع AB رسم می‌کنیم، حال اگر AE $\frac{1}{3}$ ضلع AD باشد، سطح AEFB نیز $\frac{1}{3}$ سطح متوازی‌الاضلاع می‌باشد.

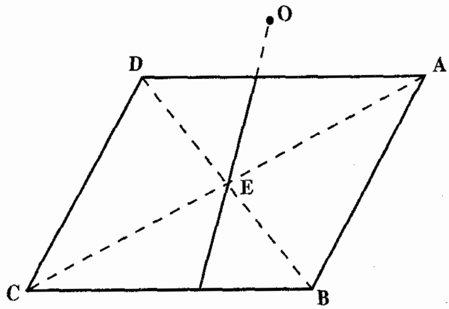
۳. ۳. ۳. ۱. ۲. ۱. ۲. یک متوازی‌الاضلاع، یک نقطه

۵۱۷. از نقطهٔ M دو قاطع رسم می‌کنیم. یکی قاطع دلخواه DME و دیگری قاطع BMC که در آن، نقطهٔ M وسط پاره‌خط BC است. قاطع اخیر مثلث ABC با کمترین مساحت را ایجاد می‌کند زیرا اگر CF راموازی BD رسم کنیم، به دلیل برابری $BM = MC$ مثلثهای MBD و MCF همنهشتند. در نتیجه مثلث ABC معادل با چهارضلعی ADFC است. از آن‌جا $S_{ABC} < S_{ADE}$.

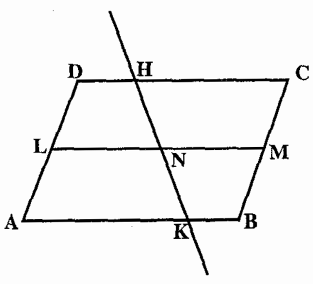




۵۱۸. اگر بخواهیم سطح متوازی‌الاضلاعی مانند ABCD را با خطی که از یک نقطه روی یک ضلع، مانند نقطهٔ E روی ضلع AB بگذرد به دو نیمه تقسیم کنیم، ابتدا روی ضلع DC قطعهٔ DF را مساوی AE جدا می‌کنیم و سپس خط EF را می‌کشیم. سطح ABCD به وسیلهٔ این خط به دو نیمهٔ مساوی تقسیم می‌شود.



۵۱۹. اگر بخواهیم سطح متوازی‌الاضلاع ABCD را با خطی که از نقطهٔ مفروضی در خارج سطح مانند نقطهٔ O گذشته باشد به دو نیمه تقسیم کنیم، اول دو قطر متوازی‌الاضلاع را می‌کشیم تا یکدیگر را در نقطهٔ E که وسط آنهاست قطع نمایند و یا یک قطر مانند AC را رسم و در نقطهٔ E آن را نصف می‌کنیم. سپس از نقطهٔ O به نقطهٔ E وصل می‌نماییم و آن را امتداد می‌دهیم تا متوازی‌الاضلاع را ببرد. خط OE سطح متوازی‌الاضلاع ABCD را به دو نیمه تقسیم می‌کند.



۳.۳.۳.۱.۲.۱.۳. یک متوازی‌الاضلاع، یک خط

۵۲۰. اگر خطی متوازی‌الاضلاعی را به دو قسمت معادل تقسیم کند باید دو ضلع مقابل را قطع کند (چرا؟) مانند HK. اگر وسطهای BC و AD را به هم وصل کنیم خط LM از وسط HK خواهد گذشت (چرا؟) و چون دو ذوزنقه AKHD و KBCH باید معادل شوند و این دو ذوزنقه در ارتفاع مشترکند، نتیجه می‌شود که LN باید مساوی با MN شود. پس ابتدا LM را رسم می‌کنیم و از وسط آن N خط HK را به موازات امتداد داده شده رسم می‌کنیم.

۳. ۳. ۳. ۱. ۲. ۱. ۴. دو متوازی‌الاضلاع

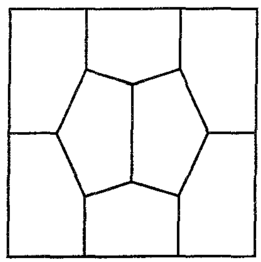
۵۲۱. هر خطی که از مرکز تقارن یک متوازی‌الاضلاع می‌گذرد، آن متوازی‌الاضلاع را به دو بخش هم‌ارز تقسیم می‌کند. بنابراین خطی که مرکزهای دو متوازی‌الاضلاع را به هم وصل می‌کنند رسم می‌کنیم. این خط جواب مسأله است.

۳. ۳. ۳. ۱. ۲. ۲. مستطیل

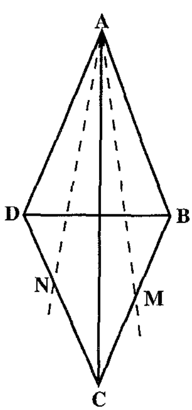
۵۲۲. قطر این مستطیل ۸۳ = ۱− ۲۴۰ + ۶۰ خانه را قطع می‌کند. بنابراین ...

۳. ۳. ۳. ۱. ۲. ۳. مربع

۵۲۳. نمونهٔ این تقسیم، در شکل داده شده است.



۳. ۳. ۳. ۱. ۲. ۴. لوزی



۵۲۴. قطرهای AC و BD را رسم می‌کنیم. هریک از این دو قطر لوزی را به دو بخش معادل هم تقسیم می‌کنند. خطی که یک رأس را به وسط ضلعهای مقابلش وصل می‌کند، هریک از این مثلثها را به دو مثلث هم‌ارز تبدیل می‌کند. به‌عنوان مثال خط AM (M وسط ضلع BC) مثلث ABC را به دو مثلث هم‌ارز ABM و ACM تبدیل می‌کند. پس مساحت مثلث ABM، یک چهارم مساحت لوزی است. بنابراین نسبت مساحت مثلث ABM به مساحت بقیهٔ لوزی، برابر $\frac{1}{3}$ می‌باشد.

۳. ۳. ۳. ۱. ۲. ۵. ذوزنقه

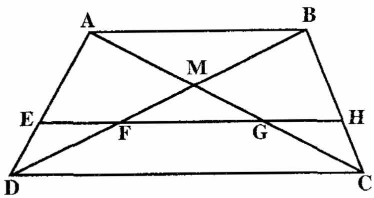
۳. ۳. ۳. ۱. ۲. ۵. ۱. ذوزنقه در حالت کلی

۳. ۳. ۳. ۱. ۲. ۵. ۱. ۱. تنها یک ذوزنقه

۵۲۵. ۱. داریم :

$$A\overset{\Delta}{B}D \Rightarrow \frac{EF}{AB} = \frac{DE}{AD}$$

$$A\overset{\Delta}{B}C \Rightarrow \frac{GH}{AB} = \frac{CH}{BC}$$



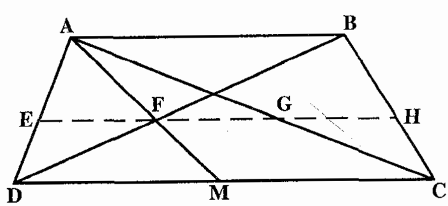
چون $EH \| AB$ است، پس : $\frac{ED}{AE} = \frac{CH}{BH} \Rightarrow \frac{ED}{AD} = \frac{CH}{BC}$

بنابراین $\frac{EF}{AB} = \frac{GH}{AB} \Rightarrow EF = GH$

۲. برای رسم این خط میانهٔ AM از مثلث ADC را رسم می‌کنیم. این میانه هرجا که EG را قطع کرد، F نامیده از F به موازات دو قاعده رسم می‌کنیم. این خط همان خط مطلوب است چون AC ، AM و AD همرسند در نتیجه $\frac{EF}{DM} = \frac{FG}{MC}$.

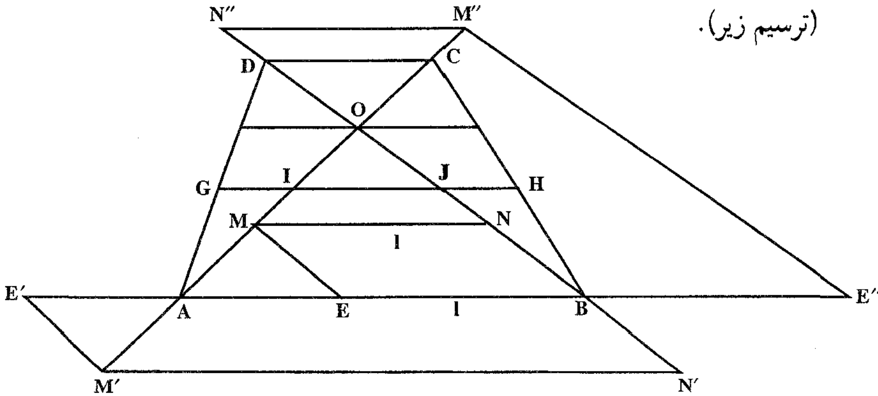
چون $MC = MD$ پس $EF = FG$ و از قبل هم می‌دانیم، $EF = GH$. پس :

$EF = FG = GH$



۵۲۶. ترسیم. روی قاعدهٔ BA پاره‌خط BE به طول l را جدا می‌کنیم. از E خطی موازی قطر BD رسم می‌کنیم تا قطر AC را در نقطهٔ M قطع کند. خطی که از M موازی AB رسم شود تا قطر BD را در نقطهٔ N قطع کند جواب مسأله است، یعنی پاره‌خط MN متکی بر دو قطر موازی دو قاعدهٔ ذوزنقه و طول آن برابر l است؛ زیرا چهارضلعی BEMN متوازی‌الاضلاع است، بنابراین $MN \| AB$ و $MN = BE = l$ می‌باشد.

بحث. ۱. اگر $l < AB$ باشد، دو نقطهٔ M و N روی قطرهای AC و BD قرار دارند (ترسیم زیر).



۲. اگر $l > AB$ باشد، پاره‌خط $BE' = l$ را اختیار کرده از E' خطی موازی BD رسم می‌کنیم تا قطر AC را در نقطهٔ M' قطع کند. از M' خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا قطر BD را در نقطهٔ N' قطع کند. پاره‌خط $M'N' = l$ متکی بر امتداد قطرهای ذوزنقه است.

۳. اگر $AB = l$ باشد، خود ضلع AB جواب مسأله است.

۴. اگر $\frac{AB - CD}{۲} = l$ باشد، خط میانهٔ ذوزنقه (خطی که وسطهای دو ساق ذوزنقه را به‌هم وصل می‌کند) جواب مسأله است؛ زیرا داریم:

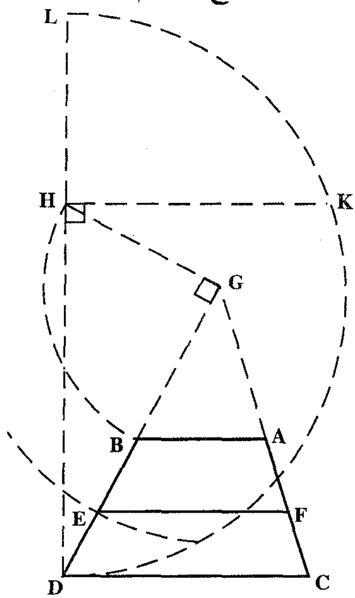
$$IH = \frac{AB}{۲}\ ,\ JH = \frac{CD}{۲} \Rightarrow IJ = \frac{AB - CD}{۲} = l$$

۵. اگر $l = ۰$ باشد، تنها نقطهٔ O محل برخورد دو قطر ذوزنقه جواب مسأله است.

۶. اگر l عددی منفی باشد، از B پاره‌خط BE'' را در امتداد BA به اندازهٔ l جدا می‌کنیم و از آن‌جا $M''N'' = l$ به‌دست می‌آید که اگر برای راستای AB جهت مثبتی درنظر بگیریم، دو بردار $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{M''N''}$ موازی، هم‌اندازه ولی مختلف‌الجهتند.

مختصر. مسأله همواره یک جواب و تنها یک جواب دارد. l می‌تواند از $+\infty$ تا ۰ و از ۰ تا $-\infty$ تغییر کند. اگر برای $\overrightarrow{MN}$ جهتی قائل نشویم و نقطهٔ M روی AC باشد، طول l فقط مقدارهای مثبت را اختیار می‌کند و در این‌صورت مسأله دو جواب دارد، یکی داخل زاویه AOB و دیگری داخل زاویهٔ COD.

۵۲۷. اگر بخواهیم منحرفی (ذوزنقه) مانند ذوزنقهٔ ABCD را با خطی موازی CD به دو نیمه تقسیم کنیم، ابتدا دو ضلع AC و BD را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ G تلاقی نمایند. سپس از نقطهٔ G عمود GH را بر GB و به اندازهٔ GB اخراج می‌کنیم. بعد خط HD را رسم می‌نماییم و به اندازهٔ نصف خودش تا نقطهٔ l امتداد می‌دهیم. سپس بر خط LD نیمدایره‌ای رسم می‌کنیم و از نقطهٔ H خط عمود HK را می‌کشیم تا نیمدایره را قطع نماید. حال از نقطهٔ G روی خط GD به اندازهٔ HK جدا می‌کنیم تا نقطهٔ F به‌دست آید. خطی که از این نقطه موازی DC بکشیم، ذوزنقهٔ ABCD را به دو نیمه تقسیم می‌نماید.



۵۲۹. فرض می‌کنیم EF جواب باشد، داریم :

$$(1)\frac{S_{OAB}-S_{OEF}}{m}=\frac{S_{OEF}-S_{ODC}}{n}$$

و چون مثلثهای OAB ، OEF و ODC متشابه‌اند، پس :

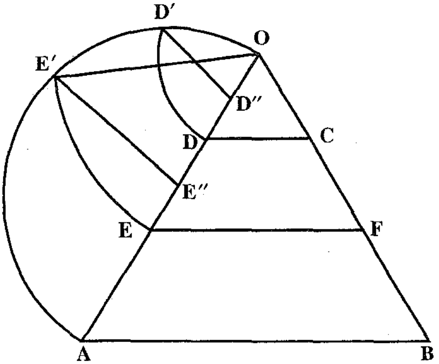
$$(2)\frac{S_{OAB}}{OA^2}=\frac{S_{OEF}}{OE^2}=\frac{S_{ODC}}{OD^2}=k$$

$$(1) \text{ و } (2)\Rightarrow kOA^2=S_{OAB}$$

$$kOE^2=S_{OEF}\ ,\ kOD^2=S_{ODC}$$

$$(1)\Rightarrow\frac{OA^2-OE^2}{m}=\frac{OE^2-OD^2}{n}$$

نیمدایره‌ای به قطر AO رسم می‌کنیم و به مرکز



O قوسهای $\overset{\frown}{DD'}$ و $\overset{\frown}{EE'}$ را می‌کشیم و $D'D''$ و $E'E''$ را به OA عمود می‌کنیم. می‌توان نوشت:

$$OD^2 = OD'^2 = OD''.OA \ , \ OE^2 = OE'^2 = OA.OE''$$

$$(2) \Rightarrow \frac{OA - OE''}{m} = \frac{OE'' - OD''}{n}$$

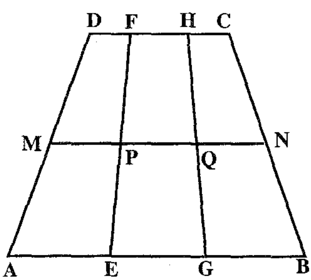
یا

$$\frac{AE''}{E''D''} = \frac{m}{n}$$

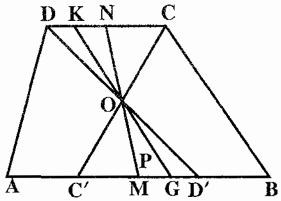
پس راه‌حل چنین است: نیمدایره‌ای به قطر AO می‌زنیم به مرکز O و به شعاع OD قوس DD' را رسم می‌کنیم تا نیمدایره را در D' قطع کند. از D' عمود $D'D''$ را بر OA فرود می‌آوریم و بین D'' و A نقطهٔ E'' را چنان اختیار می‌کنیم که $\frac{AE''}{E''D''} = \frac{m}{n}$ باشد. از E'' عمودی بر OA اخراج می‌کنیم تا نیمدایره را در E' قطع کند. به مرکز O و به شعاع OE' قوسی می‌زنیم که OA را در E قطع کند. از E خط EF را موازی BC می‌کشیم که جواب است.

۵۳۰. یکی از جوابها را می‌توان به این طریق به‌دست آورد که پاره‌خطی موازی دو قاعده و محدود به دو ساق طوری رسم کنیم، که طول آن واسطهٔ هندسی بین دو قاعدهٔ ذوزنقهٔ اصلی باشد.

۵۳۲. فرض می‌کنیم ABCD ذوزنقهٔ داده‌شده و EF و GH دو خطی باشند که در داخل ذوزنقه متقاطع نیستند. MN خط واصل ساقها را می‌کشیم. می‌دانیم که مساحت ذوزنقه مساوی حاصلضرب ارتفاع ذوزنقه در پاره‌خط واصل میان ساقهاست. پس سه ذوزنقه ایجادشده که ارتفاع برابر دارند،



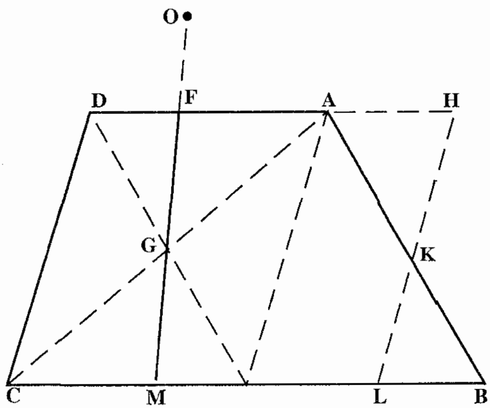
اگر بخواهند مساحت برابر داشته باشند باید داشته باشیم $MP = PQ = QN$. برای این‌کار باید MN را به سه قسمت برابر تقسیم کرده و از P و Q خطهایی بکشیم که در داخل ذوزنقه همدیگر را قطع نکنند. اگر بخواهیم ذوزنقه به m ذوزنقهٔ معادل تقسیم شود می‌توان MN را به m قسمت مساوی تقسیم کرد.



۳. ۳. ۳. ۱. ۲. ۱. ۵. ۱. ۲. یک ذوزنقه، یک نقطه

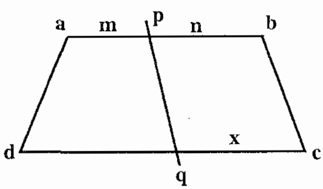
۵۳۴. در ذوزنقهٔ ABCD خط MN که وسطهای دو قاعده را وصل می‌کند، آن را به دو قسمت معادل تقسیم می‌کند. اگر O وسط MN باشد، خطهای COC' و DOD' را رسم می‌کنیم. اگر نقطهٔ P در داخل زاویهٔ $C\hat{O}D$ و یا متقابل به رأس آن واقع باشد، مسأله دارای جواب است و کافی است P را به O وصل کنیم تا خط GK جواب مسأله به‌دست آید. زیرا دو مثلث ONK و OMG باهم برابرند و در نتیجه ذوزنقهٔ DNAM با DKAG معادل است.

۵۳۵. راه‌حل از ابوالوفاء بوزجانی.



می‌خواهیم از ذوزنقهٔ ABCD با خطی که از نقطهٔ معینی در خارج آن مانند نقطهٔ O می‌گذرد، مقدار معینی جدا کنیم:

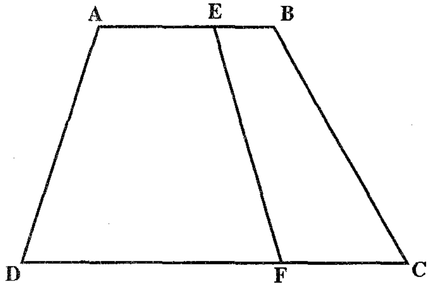
اوّل ضلع AB را در نقطهٔ K به دو نیمه تقسیم می‌نماییم و خط HKL را موازی ضلع CD می‌کشیم تا ذوزنقهٔ ABCD تبدیل به متوازی‌الاضلاع HLCD شود. سپس خط OFM را به نحوی رسم می‌کنیم تا جزوی از آن را جدا نماید. این خط همان مقدار را از ذوزنقهٔ ABCD نیز جدا کرده است.



۵۳۶. اگر خط pq جواب مسأله باشد، دو ذوزنقه ایجاد می‌شود که ارتفاع مشترک دارند. پس باید مجموع قاعده‌های آنها با هم برابر باشد تا معادل یکدیگر باشند. یعنی داشته باشیم $ap + qd = pb + qc$. پس نقطهٔ q را باید روی cd چنان اختیار کنیم که شرط بالا برقرار باشد. برای این کار فرض می‌کنیم $qc = x$ باشد. با فرض $ap = m$ ، $pb = n$ و $cd = r$ که m، n و r مقدارهای معلومند. خواهیم داشت:

$$ap + dq = pb + qc \Rightarrow m + r - x = n + x \Rightarrow x = \frac{m + r - n}{۲}$$

با مشخص‌شدن x، نقطهٔ q و از آن‌جا خط pq رسم می‌شود.

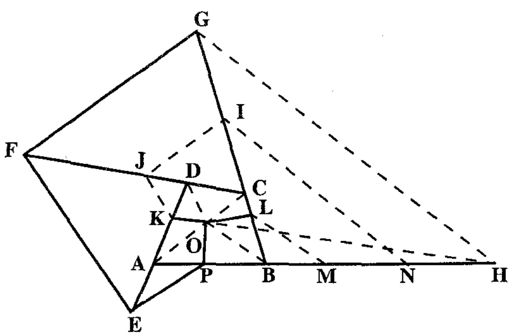


۵۳۷. می‌خواهیم از نقطه‌ای مانند E واقع بر قاعدهٔ بالایی ذوزنقهٔ ABCD سطحی معادل $\frac{1}{3}$ سطح آن جدا نماییم، ابتدا قاعدهٔ CD را در نقطهٔ F به $\frac{1}{3}$ تقسیم می‌کنیم، سپس خط EF را می‌کشیم. اگر قطعهٔ BE $\frac{1}{3}$ قاعدهٔ AB باشد، سطح BEFC جدا شده از سطح ABCD، ثلث آن است.

۳. ۳. ۳. ۲. چندضلعی و داده‌های دیگر

۳. ۳. ۳. ۲. ۱. چندضلعی، نقطه

۵۳۸. مسأله را حل شده می‌گیریم.



۵۳۹. چهارضلعی ABCD را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم این چهارضلعی را به سه قسمت متناسب با عددهای معلوم m، n و l تقسیم کنیم.

۱. ضلعها را در یک جهت امتداد می‌دهیم. از نقطهٔ P خط PE را موازی AO رسم می‌کنیم. سپس EF را موازی OD رسم می‌کنیم و FG را موازی OC و GH را موازی OB.

مثلث POH هم‌ارز با چندضلعی داده شده است. در نتیجه، مثلث OAE هم‌ارز مثلث OAP ؛ مثلث EOD باید با یک مثلث معادل FOD جایگزین شود. FOC معادل GOC است. GOB معادل HOB است. از آن‌جا HOP معادل چندضلعی داده شده است.

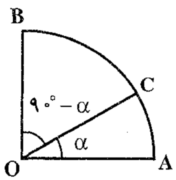
۲. پاره‌خط PH را به سه قطعه PM، MN و NH متناسب با عددهای m، n و l تقسیم

می‌کنیم. از نقطهٔ N، خط NI را موازی با GH رسم می‌کنیم. سپس IJ و JK را رسم می‌کنیم.

در مثال داده شده، خط موازی ML ضلع BC را قطع می‌کند. باید دید که سه قسمت چندضلعی هم‌ارز با مثلثهای OPM، OMN و ONH هستند. اما مثلث OBL هم‌ارز مثلث OBM است. از آن‌جا : $S_{OPBL} = S_{OPM}$. همچنین مثلثهای :$OBN = OBT$ ، $ODJ = ODK$. از آن‌جا مثلث OPN معادل OPBCDKO است. با همین روش، تعداد قسمتها می‌تواند چند تا باشد.

۳. ۳. ۴. رسم‌خط با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر

۳. ۳. ۴. ۱. ربع دایره



۵۴۰. فرض می‌کنیم خط AC جواب مسأله باشد، زاویه این خط با OA را مساوی α می‌گیریم، $C\hat{O}A = \alpha$. در این‌صورت $B\hat{O}C = ۹۰^\circ - \alpha$ است. با استفاده از دستور مساحت قطاع دایره، داریم :

$$S_{\text{قطاع } COB} = \frac{۱}{۲}R^۲(\frac{\pi}{۲} - \alpha) \text{ ، } S_{\text{قطاع } AOC} = \frac{۱}{۲}R^۲\alpha$$

با توجه به فرض مسأله می‌توان نوشت :

$$\frac{۱}{۲}R^۲(\frac{\pi}{۲} - \alpha) = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲}R^۲\alpha \Rightarrow \frac{۳\pi}{۲} - ۳\alpha = \alpha \Rightarrow \alpha = \frac{۳\pi}{۸} = ۶۷^\circ \text{ , } ۳۰'$$

پس از نقطهٔ O خط OC را چنان باید رسم کنیم که با OA زاویهٔ $۳۰'$, ۶۷° یا $\frac{۳\pi}{۸}$ بسازد.

نکته. با توجه به این‌که مساحت قطاع α رادیان در یک دایره مساوی $\frac{۱}{۲}R^۲\alpha$ است. بنابراین در این مسأله می‌توان زاویهٔ $\frac{\pi}{۲}$ را به نسبت $\frac{۱}{۳}$ تقسیم نمود که همان نتیجهٔ بالا حاصل می‌شود.

۳ . ۴ . ۳ . ۲ . نیمدایره

۵۴۱. فرض می‌کنیم خط Δ موازی قطر AB، نیمدایره را در دو نقطهٔ B' و A' قطع کند و زاویهٔ $A'\hat{O}B' = ۲\alpha$ باشد. شعاع نیمدایره را $OA = OB = R$ می‌گیریم. داریم:

$$S = R^۲\alpha - \frac{R^۲}{۲}\sin ۲\alpha \text{ قطعهٔ } ۲\alpha \text{ و } S = \frac{۱}{۲}\pi R^۲ \text{ نیمدایره}$$

$$\Rightarrow \frac{۱}{۲}\pi R^۲ = ۲(R^۲\alpha - \frac{R^۲}{۲}\sin ۲\alpha) \Rightarrow \frac{۱}{۲}\pi = ۲\alpha - \sin ۲\alpha$$

از حل معادلهٔ بالا مقدار α محاسبه می‌شود.

۳ . ۴ . ۳ . ۳ . یک دایره

۳ . ۴ . ۳ . ۳ . ۱ . تنها یک دایره

۵۴۲. مسأله را حل‌شده می‌گیریم و فرض می‌کنیم دو خط موازی Δ و Δ' دایره را در نقطه‌های A، B، A' و B' چنان قطع کرده باشند که مساحت بین دایره و AB و $A'B'$ مساوی $R^۲$ باشد، اگر زاویهٔ $A\hat{O}B = ۲\alpha$ اختیار شود، داریم:

$$S = R^۲(۲\alpha - \sin ۲\alpha) \Rightarrow R^۲ = R^۲(۲\alpha - \sin ۲\alpha) \text{ موردنظر}$$

$$\Rightarrow ۲\alpha - \sin ۲\alpha = ۱$$

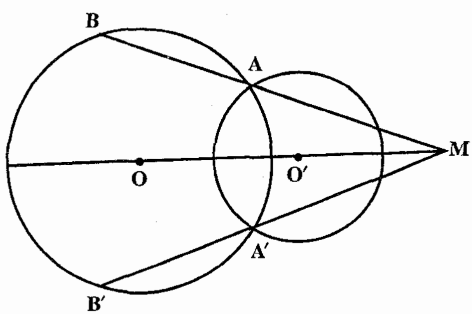
با حل معادلهٔ به‌دست آمده، مقدار α و از روی آن فاصلهٔ هریک از دو خط موازی Δ و Δ' از مرکز دایره به‌دست می‌آید.

۳ . ۴ . ۳ . ۳ . ۲ . یک دایره، نقطه

۳ . ۴ . ۳ . ۳ . ۲ . ۱ . یک دایره، یک نقطه

۳ . ۴ . ۳ . ۳ . ۲ . ۱ . ۱ . یک دایره، یک نقطه در صفحهٔ دایره

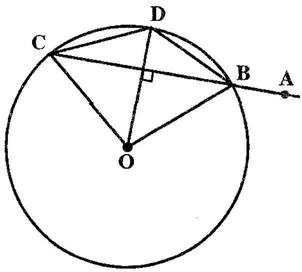
۵۴۳. اگر $\overline{MAB}$ قاطع خواسته شده باشد که در آن $\frac{MA}{MB} = k$ است. در این‌صورت نقطهٔ A مجانس B در تجانس (M , k) است و چون مکان B دایرهٔ (O) است پس مکان A دایرهٔ (O') مجانس دایرهٔ (O) در تجانس (M , k) می‌باشد و در



نتیجه حل مسأله چنین است: دایرهٔ (O') مجانس دایره (O) با مرکز تجانس M و نسبت تجانس k رسم می‌نماییم. نقطهٔ تقاطع دو دایرهٔ (O) و (O') نقطهٔ A و اگر MA را وصل کرده و امتداد دهیم تا دایرهٔ (O) را در B قطع کند $\overline{MAB}$ قاطع خواسته شده است.

بحث. اگر دایره‌های (O) و (O') در یک یا دو نقطه متقاطع باشند مسأله دارای یک یا دو جواب است و چنانچه متقاطع نباشند مسأله جواب ندارد.

۵۴۵. دایرهٔ $C(O,R)$ و نقطهٔ A را در صفحه آن درنظر می‌گیریم. می‌دانیم همه دایرهٔ به‌مرکز O و به شعاع $R\cos\alpha$ را رسم خطهایی که با دایرهٔ $C(O,R)$ زاویهٔ α می‌سازند بر دایره‌ای به شعاع $R\cos\alpha$ مماسند. پس این دایره را رسم کرده از نقطهٔ A مماسهای AT و AT' را بر آن رسم می‌کنیم. این دو خط جواب مسأله‌اند.

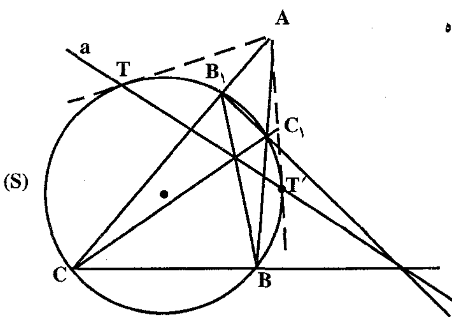


۵۴۶. اگر BC وتر ایجاد شده به وسیلهٔ قاطع ABC و OD شعاع عمود بر آن باشد:

$$\text{مساحت چهارضلعی} = \frac{OD.BC}{۲} = \frac{r.BC}{۲}$$

بنابراین مساحت وقتی ماکزیمم خواهد شد که وتر BC ماکزیمم باشد. در این‌صورت باید یک قطر را رسم کنیم؛ یعنی باید BC قطر دایره باشد. در این صورت چهارضلعی به مثلثی تبدیل می‌شود که مساحت آن برابر $r^۲$ است.

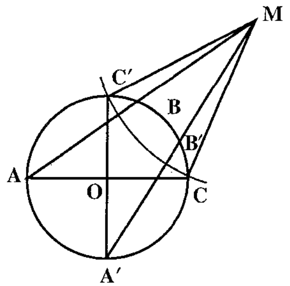
۳.۳.۴.۳.۲.۱.۲. یک دایره، یک نقطه برون دایره



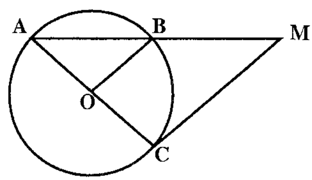
۵۴۷. نقطه‌های تماس دو مماس رسم شده از A بر دایرهٔ S، با خط واصل بین نقطه‌های تلاقی S با a، قطبی A، برهم منطبقند. حال a می‌تواند به‌آسانی با استفاده از ستاره تنها رسم شود. برای رسم مماسها، A را به نقطه‌های تلاقی a و S وصل می‌کنیم.

نکته. شکل، روش دیگری را برای تعیین نقطه‌های تماس T و T' نشان می‌دهد.

۵۴۸. مسأله را حل‌شده فرض می‌کنیم. AM را قاطع موردنظر (شکل الف) و A و B را نقطه‌های برخورد آن با دایره می‌گیریم. طبق شرط داریم: $AB = BM$ ؛ A را به مرکز O وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا محیط دایره را در C قطع کند. نقطهٔ B را به O و نقطهٔ M را به C وصل می‌کنیم.



(ب)

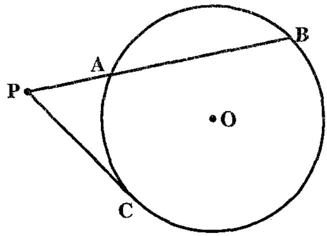


(الف)

به این ترتیب، مثلث ACM به‌دست می‌آید که پاره‌خط OB، وسط دوضلع آن را به هم وصل می‌کند ولی می‌دانیم، چنین پاره‌خطی، همیشه موازی با قاعده و برابر با نصف آن است، یعنی $OB \| CM$ و $OB = \frac{۱}{۲} CM$ یا $CM = ۲OB = ۲R$ که در آن، R عبارت است از شعاع دایرهٔ داده‌شده. اکنون دیگر، با استفاده از این تجزیه و تحلیل، می‌توان قاطع موردنظر را به‌سادگی رسم کرد. M را مرکز قرار می‌دهیم و به شعاع قطر دایرهٔ داده شده، دایره‌ای رسم می‌کنیم (شکل ب) تا دایرهٔ داده شده را در نقطه‌های C و C′ قطع کند. هریک از این نقطه‌ها را به O وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا دایرهٔ مفروض را در A و A′ قطع کنند. قاطعهای MA و MA′ همان قاطعهای موردنظرند. از خود راه‌حل معلوم می‌شود که مسأله دو جواب دارد.

این مسأله را از کتاب «قضیه‌ها و مسأله‌های مقدماتی» تألیف اژن کاتالان (۱۸۱۴ـ۱۸۹۱)، ریاضیدان بلژیکی برداشته‌ایم. این ریاضیدان نوشته‌های زیادی در زمینهٔ ریاضیات مقدماتی و عالی دارد.

۵۴۹. فرض می‌کنیم کمان خواسته‌شده مقابل زاویه BCD باشد. دایره‌ای به مرکز O مماس بر BD رسم می‌کنیم. اگر از نقطهٔ A خط AMN را بر این دایره مماس کنیم کمان $\overset{\frown}{BD}$ و $\overset{\frown}{MN}$ برابرند زیرا وترهای BD و MN برابرند.



۵۵۰. فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد و قاطع PAB جواب مسأله باشد. از نقطهٔ P مماس PC را بر دایره رسم می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\overline{PC}^2 = \overline{PA}.\overline{PB} \qquad (1)$$

امّا بنا به فرض

$$AB^2 = PA \times PB \qquad (2)$$

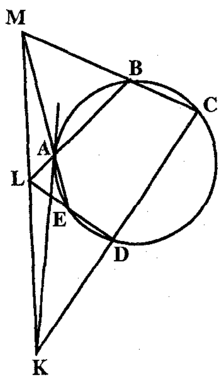
از مقایسه رابطه‌های (۱) و (۲) داریم: $AB = PC$ است پس وتر AB طول مشخص PC را دارد. بنابراین برای حل مسأله از نقطهٔ P مماس PC را بر دایره رسم نموده آن‌گاه وتر $A''B''$ به‌طول PC را در دایره رسم نموده و از O مرکز دایره عمود OH را بر $A''B''$ رسم نموده آن‌گاه به مرکز O و به شعاع OH دایره‌ای رسم می‌کنیم. سپس از P بر دایره اخیر مماسهایی رسم می‌کنیم. این دو مماس PAB و $PA'B'$ جوابهای مسأله‌اند و مسأله همواره دو جواب دارد.

۵۵۱. داریم:

$$S_{O\hat{A}B} = \frac{OA \times BC}{2}$$

S_{OAB} وقتی ماکزیمم است که BC حداکثر مقدار خود را دارا باشد و این وقتی است که BC بر OB منطبق شود و در این صورت $\hat{O} = 90^\circ$ یعنی $AB = C_4$ خواهد بود. پس مسأله منجر می‌شود به رسم وتری به طول معین C_4 در دایره.

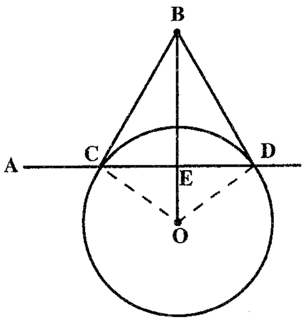
۳. ۲. ۴. ۳. ۲. ۱. ۳. یک دایره، نقطه روی دایره



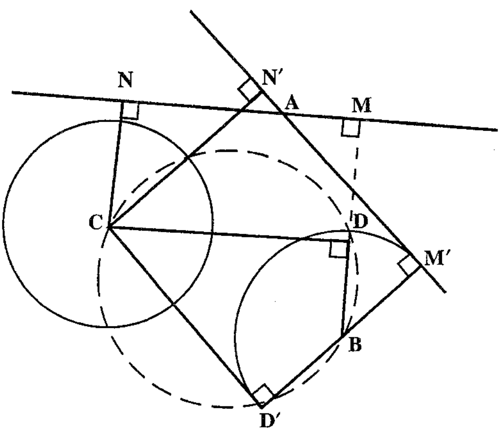
۵۵۲. پنج ضلعی ABCDE محاط در دایرهٔ مفروض S را درنظر می‌گیریم (B، C، D و E نقطه‌هایی هستند دلخواه بر دایره). از قضیهٔ پاسکال نتیجه می‌شود که K، نقطهٔ تقاطع مماس بر S در A با ضلع CD، بر خط واصل بین L و M، قرار دارد که بترتیب نقطه‌های تقاطع AB و DE، AE و BC هستند. بنابراین K می‌تواند با ستارهٔ تنها مشخص شود (زیرا که نقطهٔ تقاطع CD و LM است). خط واصل بین A و K مماس مطلوب است.

یادآوری. یادآور می‌شویم که این ترسیم را ممکن است به رسم قوس کوچک دلخواهی که شامل A است محدود کرد (نقطه‌های C، D، E و F را می‌توان بر آن کمان اختیار کرد). این امر در آنچه که بعداً خواهد آمد مورد استفاده قرار خواهد گرفت.

۳.۳.۴.۳.۲.۲.۳. یک دایره، دو نقطه



۵۵۳. مسأله را حل شده می‌گیریم و اگر وتر ACD جواب مسأله باشد چون $BC = BD$ و $OC = OD$ پس OB عمود منصف CD است و برعکس هر وتر ACD که بر OB عمود باشد آن را در نقطه‌ای مانند E قطع می‌کند به‌طوری که $CE = ED$ و $BC = BD$ پس برای حل، خط OB را وصل و از A بر OB فرود می‌آوریم.



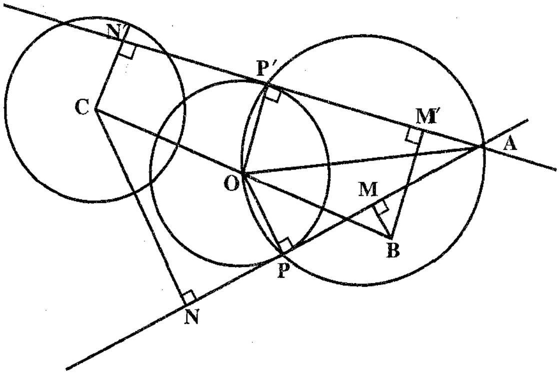
۵۵۴. راه اول. شعاع دایرهٔ داده شده را r می‌گیریم. از نقطهٔ A باید خطی چنان رسم کنیم که تفاضل فاصله‌هایشان از دو نقطهٔ B و C برابر مقدار ثابت r باشد.

برای این کار دایره‌ای به قطر BC رسم می‌کنیم. آن‌گاه به مرکز B و به شعاع r دایره‌ای می‌زنیم تا دایرهٔ به قطر BC را در دو نقطه D و D′ قطع کند. از D و D′ به C وصل می‌کنیم و از A خطی موازی DC رسم می‌کنیم. این خط جواب مسأله است. زیرا داریم:

$$BM - CN = BM - MD = BD = l$$

نکته. اگر از A خطی موازی CD′ رسم کنیم، تفاضل فاصله‌های C و B از این خط نیز برابر r می‌باشد.

$$CN' - BM' = r$$



راه دوم. از B به C وصل می‌کنیم. وسط پاره‌خط BC را O می‌نامیم. به قطر AO یک دایره رسم می‌کنیم. سپس به مرکز O و به شعاع $\frac{r}{۲}$ دایره دیگری رسم می‌کنیم تا دایرهٔ به‌قطر AO را در دو نقطهٔ P و P′ قطع کند. از A به P و P′ وصل می‌کنیم . خط AP جواب مسأله است. زیرا داریم :

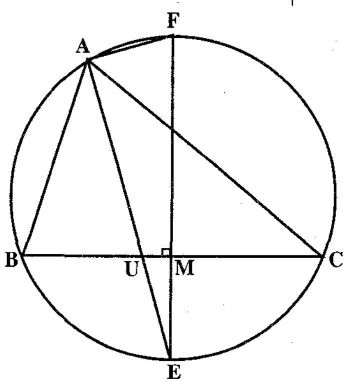
$$CN - BM = |BM - CN| = ۲OP = ۲ \times \frac{r}{۲} = r$$

نکته. برای خط AP′ داریم : $BM' + CN' = l = r$

۳. ۳. ۴. ۳. ۲. ۳. یک دایره، سه نقطه

۵۵۵. عمود منصف BC رارسم می‌کنیم تا دایره را بار دیگر در F و BC را در M قطع کند.
نظر به تساوی زاویه‌های دو مثلث EUM و EFA داریم :

$$EF:EU = EA:EM$$



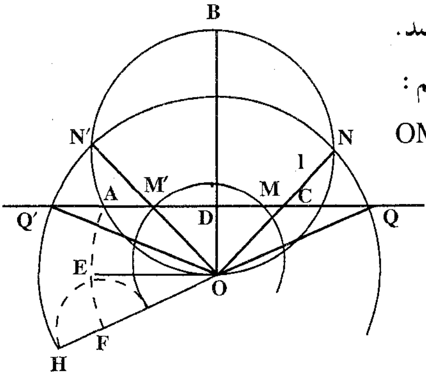
و چون قرار دهیم :

$EF = ۲R$ و $EM = m$ و $EU = x$ و $EA = x + t$

تناسب به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$۲Rm = x(x + t)$$

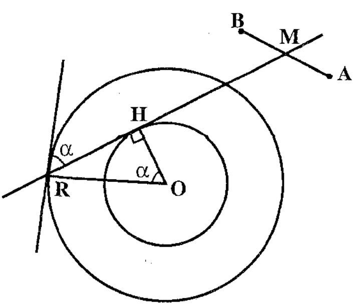
و x با استفاده از رسم ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم بالا به‌دست می‌آید.



۵۵۶. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و $MN = l$ باشد. $OM = x$ و $OA = a$ فرض می‌شود. داریم: $OM.ON = OD.OB = a^2 \Rightarrow x(x+l) = a^2$ مجهول x را می‌توانیم با استفاده از مستطیلی که تفاضل طول دو ضلع آن l و مساحت آن (یا حاصلضرب دو ضلع) a^2، معلوم است، به دست آورد. همچنین می‌توان معادله را بر حسب x حل کرد. نتیجه خواهد شد $x = -\frac{1}{2} \pm \sqrt{\frac{l^2}{4} + a^2}$ با معلوم بودن پاره‌خطهای به طول l و a پاره‌خط به طول $-\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{l^2}{4} + a^2}$ رسم می‌شود. برای این کار، روی خطی موازی AC پاره‌خطهای $OE = OA = a$ را اختیار و عمود EF را مساوی $\frac{1}{2}$ اخراج می‌کنیم. در این‌صورت $OF = \sqrt{\frac{l^2}{4} + a^2}$ خواهد بود. سپس $\frac{1}{2}$ را از F به C و H منتقل می‌سازیم. پاره‌خط OG اولین ریشه و OH دومی را نشان می‌دهد. اما چهار پاره‌خط جواب مسأله وجود دارد؛ زیرا PQ همانند MN جواب مسأله است. علاوه بر این $M'N'$ و $P'Q'$ جواب مسأله می‌باشند.

۳. ۳. ۴. ۳. ۳. یک دایره، پاره‌خط

۳. ۳. ۴. ۳. ۳. ۱. یک دایره، یک پاره‌خط



۵۵۷. می‌دانیم کلیهٔ خطهایی که با دایرهٔ $C(O,R)$ زاویه α می‌سازند بر دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R\cos\alpha$ مماسند. این دایره را رسم می‌کنیم. آن‌گاه از نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB دو خط مماس بر این دایره رسم می‌کنیم. این دو خط جواب مسأله‌اند. تعداد جوابهای مسأله بستگی به جای نقطهٔ M وسط پاره‌خط AB دارد.

۳. ۳. ۴. ۳. ۳. ۴. یک دایره، نیمخط

۳. ۳. ۴. ۳. ۳. ۴. ۱. یک دایره، یک نیمخط

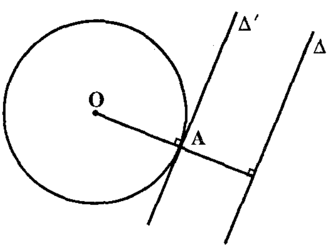
۵۵۸. می‌دانیم کلیهٔ خطهایی که با دایرهٔ $C(O,R)$ زاویهٔ α می‌سازند بر دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R\cos\alpha$ مماسند. این دایره را رسم می‌کنیم. سپس نقطهٔ A به فاصلهٔ l را از O به‌دست می‌آوریم و از A مماسی بر دایرهٔ $(O,R\cos\alpha)$ رسم می‌کنیم. این خط جواب مسأله است. به تعداد خطهایی که بتوانیم از A بر این دایره مماس رسم کنیم مسأله دارای جواب است.

۳. ۳. ۴. ۳. ۳. ۴. ۲. یک دایره، دو نیمخط

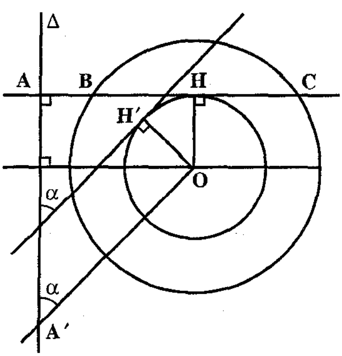
۵۵۹. اگر خط مماس درنقطهٔ T بر دایرهٔ به مرکز O، دو شعاع مفروض را در A و B قطع کند $\frac{TA}{TB}=k$ (k نسبت معلومی است)، و زاویهٔ AOB نیز مقدار ثابتی است. ازطرفی OT ارتفاع وارد بر ضلع AB طول معینی مساوی R شعاع دایره دارد. با توجه به داده‌های بالا مسأله را حل کنید.

۳. ۳. ۴. ۳. ۳. ۵. یک دایره، خط

۳. ۳. ۴. ۳. ۳. ۵. ۱. یک دایره، یک راستا یا یک خط



۵۶۰. از مرکز دایره خطی بر امتداد مزبور فرود می‌آوریم تا دایره را درنقطهٔ A قطع کند. از نقطهٔ A خط Δ' را بر OA عمود می‌کنیم. Δ' مماس مطلوب است.



۵۶۱. می‌دانیم مکان هندسی وسط وترهای به طول l در دایرهٔ $C(O,R)$ دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R'=\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}$ است. این دایره را رسم می‌کنیم. برای رسم وتری به طول l که برخط Δ عمود باشد، از نقطهٔ O مرکز دایره خطی موازی Δ رسم می‌کنیم تا دایره (O,R') را در نقطهٔ H

قطع کند. در H مماسی بر این دایره رسم می‌کنیم. این خط جواب مسأله است. مسأله عموماً دو جواب دارد. برای رسم وتری که با Δ زاویهٔ معلوم α بسازد از O خط OA' را چنان رسم می‌کنیم که با Δ زاویهٔ α بسازد. از نقطهٔ O عمودی بر این خط اخراج می‌کنیم تا دایرهٔ $C'(O,R')$ را در نقطهٔ H' قطع کند. خطی که در H' بر این دایره رسم کنیم، جواب مسأله است.

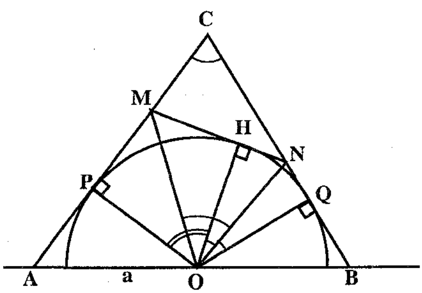
۵۶۲. مقدار معلوم را l و مرکز دایرهٔ معلوم را O می‌نامیم. اگر HA جواب مسأله باشد دایره‌ای به شعاع OA مکان هندسی نقطه‌هایی است که از آنها مماسهایی مساوی بر یک دایرهٔ O می‌توان رسم کرد.

پس حل مسأله به این ترتیب است که دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA (OA وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که دو ضلعش R و l باشد) رسم می‌کنیم.

این دایره درحالت کلی خط Δ را در دو نقطهٔ A و B قطع می‌کند. از A و B دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم. این مماسها جواب مسأله‌اند.

اگر این دایره به Δ مماس باشد یک جواب داریم و اگر آن را قطع نکند مسأله دارای جواب نیست، و این بسته به آن است که فاصلهٔ O از Δ کوچکتراز OA باشد یا مساوی با آن و یا بزرگتر از آن.

۳. ۳. ۴. ۳. ۳. ۵. ۲. یک دایره، دو خط



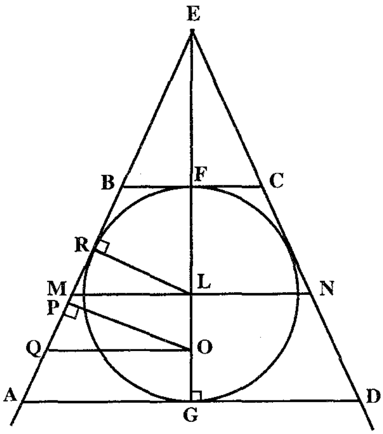
۵۶۳. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم و خط مماس سومی را Δ و نقطه‌های برخورد آن با دو مماس اولیه را M و N و نقطهٔ تماس آن با دایره را H می‌نامیم. از O به M و N و H وصل می‌کنیم. زاویهٔ MON اندازهٔ معلومی دارد. زیرا $M\hat{O}N=\frac{۱}{۲}P\hat{O}Q$ و $P\hat{O}Q=۱۸۰-\hat{C}$ است. از طرفی OH=r ارتفاع مثلث MON مقدار معلومی است. بنابراین مثلث OMN با معلوم بودن اندازهٔ یک ضلع، زاویهٔ رو به رو به آن و ارتفاع نظیر آن ضلع ($MN=l$ ، $M\hat{O}N=\frac{۱}{۲}(P\hat{O}Q)=۹۰^\circ-\frac{\hat{C}}{۲}$ و $OH=r$)

قابل رسم است. با رسم این مثلث پاره‌خطهای MH، MH=MP و HN=NQ مشخص می‌شود. بدین ترتیب برای رسم خط خواسته شده پاره‌خط PM را به اندازهٔ MH جدا کرده و از M خطی مماس بر دایره رسم می‌کنیم.

۶.۳.۴.۳.۳. یک دایره، زاویه

۵۶۴. مسأله را حل شده می‌گیریم. باید داشته باشیم:

$MN.FG = ۴LM.LR = k^۲$



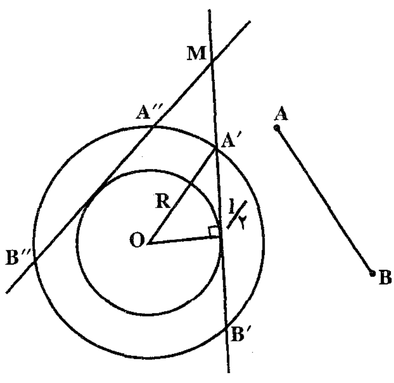
امّا اگر از نقطهٔ اختیاری O واقع بر نیمساز EG از مثلث EAD خطهای OP و OQ را بترتیب عمود بر AB و EO رسم کنیم، خواهیم داشت:

$$\frac{LR^۲}{OP^۲}=\frac{LM.LR}{OP.OQ}\Rightarrow\frac{LR^۲}{OP^۲}=\frac{k^۲}{۴OP.OQ}$$

از این رابطه، اندازه LR شعاع دایره محاسبه می‌شود.

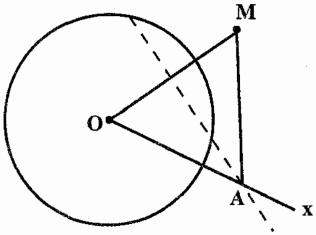
۷.۳.۴.۳.۳. یک دایره، پاره‌خط، نقطه

۵۶۵. طول پاره‌خط AB را l فرض می‌کنیم.



می‌دانیم، مکان هندسی وسط وترهایی به طول l در دایرهٔ C(O,R)، دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R'=\sqrt{R^۲-\frac{l^۲}{۴}}$ است. این دایره را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ M خطهایی مماس بر آن رسم می‌کنیم. این دو خط جواب مسأله‌اند. به تعداد خطهایی که بتوانیم از نقطهٔ M مماس بر دایرهٔ (O,R′) رسم کنیم مسأله دارای جواب است.

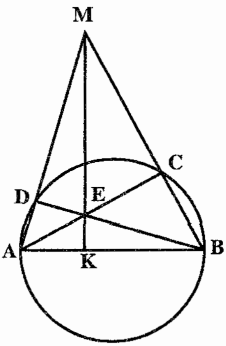
۸.۳.۴.۳.۳. یک دایره، نیمخط، نقطه



۵۶۶. از O به M وصل می‌کنیم و عمودمنصف پاره‌خط OM را رسم می‌کنیم. این خط جواب مسأله است؛ زیرا اگر نقطهٔ برخورد این خط با نیمخط Ox را A بنامیم، مثلث OMA متساوی‌الساقین است.

۹.۳.۴.۳.۳. یک دایره، خط، نقطه

۱.۹.۳.۴.۳.۳. یک دایره، یک قطر، یک نقطه

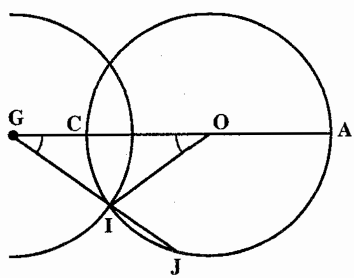


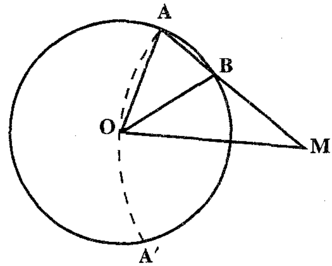
۵۶۷. دو انتهای قطر AB را به نقطهٔ M وصل می‌کنیم (شکل) و نقطه‌های برخورد AM و BM را با دایره، بترتیب، C و D می‌نامیم. E را نقطهٔ برخورد خطهای راست AC و BD می‌گیریم. در این صورت، خط راست ME، خط راست AB را در نقطه‌ای مثل K قطع می‌کند و بر آن عمود است (چرا؟ خودتان دلیل آن را پیدا کنید).

۵۶۸. هنگامی که نقطهٔ G برون دایرهٔ داده شده قرار دارد، دایره را با کمانی به مرکز G و به شعاع OC قطع می‌کنیم تا آن را در I قطع کند. خط GI دایرهٔ (O) را در J قطع می‌کند.

$\hat{G} = G\hat{O}I$ است؛ زیرا مثلث GIO متساوی‌الساقین است. (GI=OI) اندازهٔ زاویهٔ G برابر است با $\hat{G} = G\hat{O}I = \widehat{CI}$. از طرفی اندازهٔ زاویهٔ G برابر است با $\dfrac{\widehat{AJ} - \widehat{CI}}{۲}$.

از آن‌جا خواهیم داشت:
$$\widehat{CI} = \frac{\widehat{AJ} - \widehat{CI}}{۲} \Rightarrow \widehat{AJ} = ۳\widehat{CI}$$





۵۶۹. **تحلیل.** فرض کنید MBA قاطع موردنظر باشد (شکل) که از نقطهٔ داده شدهٔ M می‌گذرد و دایرهٔ مفروض به مرکز O را در A و B قطع می‌کند. زاویهٔ A در دو مثلث AOB و AOM مشترک است و بنابر فرض $A\hat{O}B = A\hat{M}O$ ؛ پس زاویه‌های این دو مثلث دوبه‌دو مساوی‌اند. مثلث AOB متساوی‌الساقین است، پس مثلث AOM هم متساوی‌الساقین است و MA=MO. اما طول MO معلوم است ؛ پس MA، یعنی فاصلهٔ نقطهٔ A از M معلوم است و می‌توان نقطهٔ A را تعیین و قاطع MA را رسم کرد.

ترسیم. دایرهٔ (M , MO) را رسم کنید. اگر A یکی از نقطه‌های برخورد دو دایره باشد، خط MA شرطهای مسأله را برآورده می‌کند.

اثبات. فرض کنید خط MA دایرهٔ داده شده را در نقطهٔ دیگر B قطع کند. مثلثهای AOB و AOM متساوی‌الساقینند. زیرا OA و OB شعاعهای یک دایره، و MA و MO نیز شعاعهای دایرهٔ دیگرند. نتیجه، OA = OB و MA = MO . زاویهٔ A در هر دو مثلث یکی از زاویه‌های قاعده است ؛ پس زاویه‌های AOB و M که بترتیب روبه‌روی قاعدهٔ AB و قاعدهٔ AO در دو مثلث متساوی‌الساقین هستند نیز برابرند، پس MA خط خواسته شده است.

بحث. همیشه می‌توانیم دایرهٔ (M , MO) را که دایرهٔ داده شده را در دو نقطهٔ A و ′A قطع می‌کند رسم کنیم ؛ پس مسأله همیشه دو جواب دارد که نسبت به خط MO متقارنند. آیا می‌توانستیم خط MBA را طوری رسم کنیم که زاویهٔ AOB با زاویهٔ منفرجهٔ بین MBA و MO برابر باشد؟ اگر چنین کاری ممکن بود باید می‌داشتیم :

$$A\hat{O}B + O\hat{M}A = ۱۸۰^\circ$$

که از آن جا،

$$O\hat{M}A = O\hat{A}B + O\hat{B}A$$

ولی در مثلث OBM داریم :

$$\hat{M} < O\hat{B}A$$

پس به تناقض می‌رسیم ؛ یعنی نمی‌توان خطی رسم کرد که شرطهای خواسته شده مسأله را در حالتی که M درون دایرهٔ داده شده یا بر روی آن باشد بررسی کنید.

۵۷۰. اگر MAB خط مطلوب گذرنده بر M و متقاطع با دایرهٔ (O) و قطر EF، بترتیب در نقطه‌های A و B باشد و داشته باشیم $MA.MB = a^۲$ در این صورت B منعکس A با قطب M و قوت $a^۲$ می‌باشد و در نتیجه حل مسأله به‌صورت زیر است: دایرهٔ (ω) منعکس قطر EF از دایرهٔ (O) را با قطب M و قوت $a^۲$ تعیین می‌نماییم. محل برخورد دایره‌های (ω) و (O) نقطهٔ A و نقطهٔ قاطع خط AM با قطر EF نقطهٔ B بوده و داریم $MA.MB = a^۲$ است.

بحث. اگر دایره‌های (ω) و (O) در یک یا دو نقطهٔ متقاطع باشند مسأله دارای یک یا دو جواب است و چنانچه متقاطع نباشند مسأله جواب ندارد.

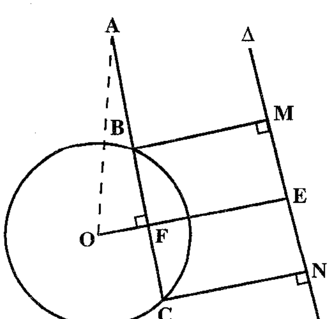
۵۷۲. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. اگر E نقطهٔ تماس دایرهٔ به قطر BC با OA باشد و از A مماس AT را بر دایره O رسم کنیم، داریم:

$$AE^۲ = AB.AC \ , \ AT^۲ = AB.AC \Rightarrow AE = AT$$

پس نقطهٔ E بدین طریق به‌دست می‌آید که بر AO طول AE را مساوی AT جدا کنیم (E داخل دایره و در داخل قطعه خط AO خواهد بود. زیرا $AT < AO$). برای تعیین D مرکز دایره از E عمودی خارج می‌کنیم بر AO تا دایره به قطر AO را در D قطع کند. مسأله دارای دو جواب است.

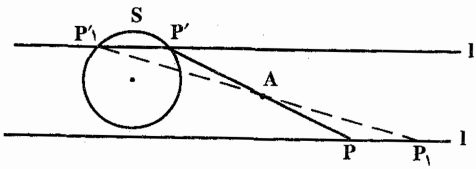
۲.۹.۳.۴.۳.۳. یک دایره، یک خط ناقطر، یک نقطه

۵۷۳. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. اگر E وسط MN و F وسط BC را به‌هم وصل کنیم $EF = \frac{l}{۲}$. حال اگر از O به F وسط BC و از A به O وصل کنیم، $\widehat{OFA} = ۹۰^\circ$ پس برای رسم مسأله، ابتدا خطی به طول $\frac{l}{۲}$ بر Δ عمود می‌کنیم و از ابتدای آن خطی به موازات Δ رسم می‌کنیم، سپس به قطر OA دایره‌ای می‌زنیم تا خط موازی Δ را در F قطع کند، خطی در F بر OF عمود می‌کنیم هر کجای دایره را قطع کرد نقطه‌های B و C جوابهای مسأله است.



۵۷۴. اگر Δ خط مفروض گذرنده بر نقطهٔ A و متقاطع با دایرهٔ (C) و خط D بترتیب در نقطه‌های N و M باشد به‌نحوی که AM.AN=L در این صورت M منعکس N خواهد بود با قطب A و قوت L. یعنی N منعکس یک نقطه از خط D می‌باشد و از آن‌جا حل مسأله چنین است: دایره (ω) منعکس خط D با قطب A و قوت L را رسم می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع این دایره با دایرهٔ (C) نقطهٔ N است. خطی که نقطهٔ N را به A وصل می‌کند خط D را در M قطع کرده و این خط مطلوب است که داریم AM.AN=L.

بحث. اگر دایره (ω) منعکس خط D با دایرهٔ (ω) دارای یک یا دو نقطهٔ تقاطع باشد مسأله دارای یک یا دو جواب است و اگر متقاطع نباشد مسأله جواب ندارد.



۵۷۵. خط l' را که از یک نیمدور خط l حول نقطهٔ A به‌دست آمده، رسم می‌کنیم (شکل). گیریم P' یکی از نقطه‌های تقاطع این خط با دایرهٔ S باشد. پس خط $P'A$ یک جواب مسأله است، زیرا P، نقطهٔ تقاطع این خط با خط l، از یک نیمدور P' حول A به‌دست می‌آید، و بنابراین $P'A = AP$. این مسأله حداکثر دو جواب دارد.

۵۷۶. فرض می‌کنیم نقطهٔ S و دایره در طرفین خط D باشند. از رابطهٔ $\frac{SA}{SB}=\frac{۲}{۵}$ معلوم می‌شود که نقطهٔ B مجانس A است. در تجانسی که مرکزش نقطهٔ S و نسبتش $\frac{۵}{۲}$ است. بنابراین هرگاه خط D' مجانس خط D را با نسبت $\frac{۵}{۲}$ و به مرکز S رسم کنیم یکی از نقطه‌های تقاطع این خط با دایرهٔ نقطهٔ B می‌باشد. شرط امکان مسأله آن است که خط D' دایره را قطع کند و برای این کار باید فاصلهٔ خطهای D و D' محصور بین طولهای IM و IN باشد $IM < IE \le IN$. امّا اگر از S عمود SHK را بر D و D' فرود آوریم داریم $\frac{SK}{SH}=\frac{۵}{۲}$، پس $\frac{HK}{SH}=\frac{۳}{۲}$ و پس $IE = HK = \frac{۳}{۲}SH$ و شرط فوق چنین می‌شود:

$$\frac{۲}{۳}IM \le SH \le \frac{۲}{۳}IN \quad \text{یا} \quad IM \le \frac{۳}{۲}SH \le IN$$

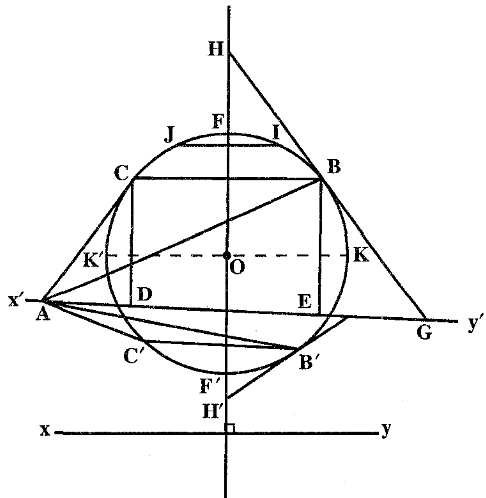
۵۷۷. چنانچه $\overline{BAC}$ خط خواسته شده باشد به نحوی که داشته باشیم $\frac{\overline{AB}}{\overline{AC}}=K$ در این صورت C مجانس B است با مرکز تجانس A و نسبت تجانس K و در نتیجه حل مسأله

چنین است. خط D' را مجانس خط D با مرکز تجانس نسبت تجانس K رسم می‌نماییم. محل برخورد خط D' با دایره (O) نقطهٔ B می‌باشد. چنانچه $\overline{AB}$ را رسم کرده و امتداد دهیم تا D را در C قطع کند $\overline{BAC}$ جواب خط خواسته شده است.

یادآوری. می‌توان مجانس دایرهٔ (O) را با مرکز تجانس (A) و نسبت تجانس K تعیین کرده نقطهٔ تقاطعش با خط D تعیین نموده آن را به A وصل کرده امتداد دهیم تا دایره را قطع کند.

بحث. اگر D' مجانس خط D، دایره (O) را در یک یا دو نقطه قطع کند مسأله دارای یک یا دو جواب است و چنانچه قطع نکند مسأله جواب ندارد.

۵۷۹. از نقطهٔ A خطی موازی xy رسم می‌کنیم. مساحت مثلث ABC نصف مساحت چهارضلعی BCDE است. بنابراین مسأله تبدیل می‌شود به رسم مستطیلی با مساحت ماکزیمم که دو رأسش روی دایره و قاعده‌اش روی خط $x'y'$ است.



خط مماس GBH را چنان رسم می‌کنیم که B وسط GH باشد. مثلث ABC، جواب مسأله است.

بحث. الف. وقتی که $x'y'$ از مرکز دایره بگذرد، دو نیمدایره ایجاد می‌شود که در هر یک از آنها یک ماکزیمم وجود دارد که معادل نصف مربع محاط دو دایره است.

ب. اگر $x'y'$ از مرکز دایره نگذرد، شعاع OF' را قطع می‌کند. در این صورت دو قطعه در دایره ایجاد می‌شود که در هر یک از آنها یک ماکزیمم وجود دارد. این‌جاست که مساحت مثلث تغییراتی برحسب وتر BC می‌پذیرد :

۱. در نقطهٔ F قاعده صفر است ؛ مساحت مثلث صفر است.

۲. هنگام آمدن به IJ، مثلث بزرگ می‌شود تا به ماکزیمم داده شده به‌وسیلهٔ BC برسد.

۳. آن طرفتر تا KL مساحت مثلث کوچک می‌شود.

۴. مساحت صفر است وقتی وتر روی $x'y'$ است.

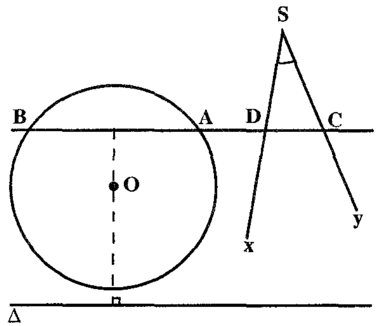
۵. در این‌جا مساحت زیاد می‌شود تا یک ماکزیمم جدید $AB'C'$

۶. بعد کوچک می‌شود.
۷. در F' برابر صفر است.
پ. وقتی $x'y'$ مماس بر دایره در F' است، تنها ماکزیمم جواب مسأله مثلث متساوی‌الساقین $F'BC$ است.
ت. از F' تا xy، یک جواب بیشتر ندارد. اگر OI را با a و شعاع دایره را با r نشان دهیم، داریم:
$$OH' = \frac{a + \sqrt{a^2 + 8r^2}}{2}$$

۳.۲.۳.۴.۱۰. یک دایره، زاویه، خط

۳.۲.۳.۴.۱۰.۱. یک دایره، یک زاویه، یک راستا

۵۸۰. مسأله را حل شده در نظر بگیرید و با توجه به ثابت بودن دایره (O)، خط Δ و زاویه xOy و ثابت بودن نسبت $\frac{AB}{CD} = k$ مسأله را حل کنید.

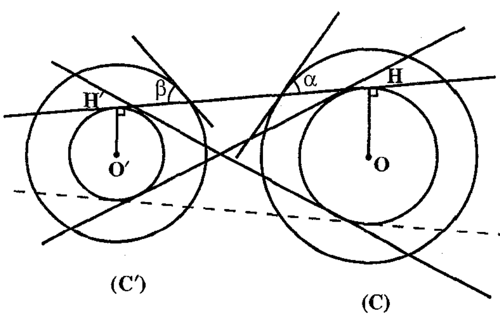


۳.۲.۳.۴.۴. دو دایره

۳.۲.۳.۴.۴.۱. تنها دو دایره

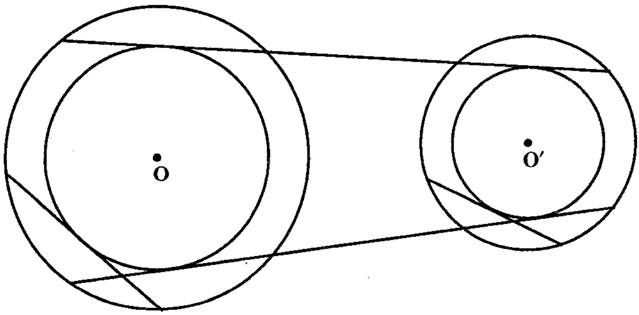
۳.۲.۳.۴.۴.۱.۱. دو دایره در حالت کلی

۵۸۱. این مسأله در بخش ۱ حل شده است. پیر کاردان ریاضیدان فرانسوی برای نخستین‌بار این مسأله را ارائه داد.
دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را در نظر می‌گیریم. خطهایی که دایرهٔ $C(O,R)$ را به زاویهٔ α قطع می‌کنند بر دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R\cos\alpha$ مماسند و تمام خطهایی که دایرهٔ $C'(O',R')$ را به زاویهٔ β قطع می‌کنند، بر دایره‌ای به مرکز



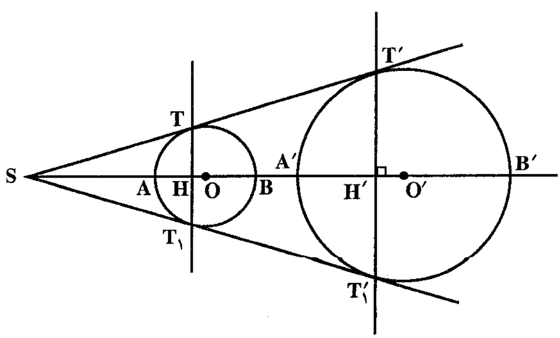
O' و به شعاع $R'\cos\beta$ مماسند. این دو دایره را رسم می‌کنیم. مماس مشترکهای آنها جواب مسأله‌اند و به تعداد این مماس مشترکها، مسأله جواب دارد.

۵۸۳. در دایرهٔ O وتر DE را به طول l و در دایرهٔ O' وتر $D'E'$ را به طول l' رسم می‌کنیم. دو دایره به مرکزهای O و O' بر DE و $D'E'$ مماس می‌کنیم. مماس مشترک این دو دایره خط $ABA'B'$ جواب مسأله است. اگر شعاع دایره‌های مفروض را R و R' بنامیم. مسأله وقتی جواب دارد که $2R \leq l$ و $2R' \leq l'$ باشد.

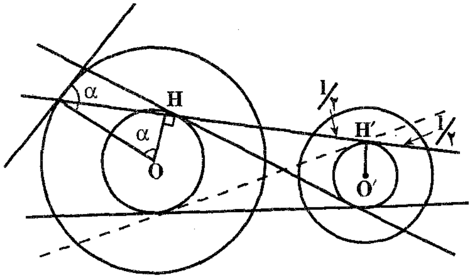


۵۸۴. دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را در نظر می‌گیریم. نقطه‌های برخورد خط‌المرکزین OO' با دایرهٔ (C) را A و B و با دایرهٔ (C') را A' و B' می‌نامیم. اگر S مرکز تجانس مستقیم دو دایره باشد، مزدوجهای توافقی این نقطه نسبت به A و B را H و نسبت به A' و B' را H' می‌نامیم. عمودهایی که در نقطه‌های H و H' بر OO' رسم می‌شوند، قطبیهای نقطهٔ S نسبت به دو دایرهٔ (C) و (C') می‌باشند.

با همین روش می‌توان قطبیهای مرکز تجانس معکوس دو دایره را نسبت به آن دو دایره پیدا کرد.



نکته. اگر دایره‌ها مماس مشترک داشته باشند، خطهایی که نقطه‌های تماس در هر دایره را به هم وصل می‌کنند، جواب مسأله‌اند.

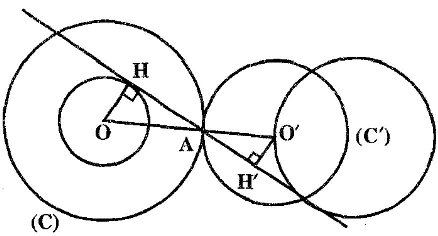


۲.۱.۴.۴.۳.۳. دو دایره برون هم (متخارج)

۵۸۵. کلیهٔ خطهایی که دایرهٔ C(O,R) را به زاویهٔ α قطع می‌کنند بر دایره‌ای به مرکزO و به شعاع $OH = R\cos\alpha$ مماسند و تمام خطهایی که دایرهٔ (C') را در وتری به طول l قطع می‌کنند بر دایره‌ای به مرکز O' و به شعاع $O'H' = \sqrt{R'^{۲} - \frac{l^{۲}}{۴}}$ مماسند.

این دو دایره را رسم می‌کنیم. مماس مشترکهای این دو دایره جواب مسأله‌اند. مسأله همواره چهار جواب دارد.

۳.۱.۴.۴.۳.۳. دو دایرهٔ مماس خارج



۵۸۶. خطهایی که دایرهٔ (C) را به زاویهٔ α قطع می‌کنند، بر دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R\cos\alpha$ مماس است. این دایره را رسم می‌کنیم و از A، نقطهٔ تماس دو دایره خطی مماس بر این دایره رسم می‌کنیم. این خط جواب مسأله است.

از نقطهٔ O' عمود $O'H'$ را بر این خط رسم می‌کنیم. دو مثلث OAH و $O'AH'$ متشابه‌اند و داریم $\frac{O'H'}{OH} = \frac{O'A}{OA}$. از این رابطه نتیجه می‌شود $\frac{O'H'}{R\cos\alpha} = \frac{R'}{R}$.

از آن‌جا داریم:

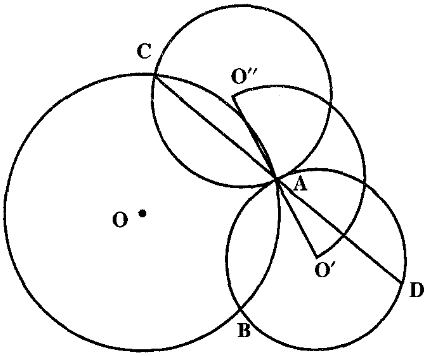
$$O'H' = R\cos\alpha \times \frac{R'}{R} = R'\cos\alpha$$

بنابراین خط رسم شده دایرهٔ (C') را نیز به زاویهٔ α قطع می‌کند.

مسأله دو جواب دارد زیرا از نقطهٔ A دو مماس بر دایره $(O, R\cos\alpha)$ می‌توان رسم کرد.

نکته. دو دایره (C) و (C') نسبت به مرکز A مجانس یکدیگرند. این مطلب مشخص می‌کند که خط Δ هر دو دایره را به یک زاویه قطع می‌کند.

۴.۱.۴.۴.۳.۳. دو دایرهٔ متقاطع

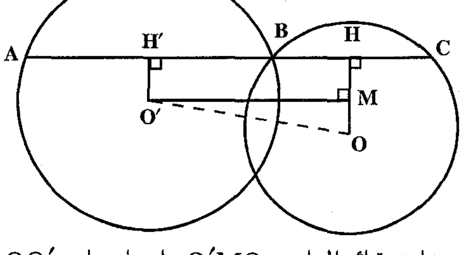


۵۸۷. اگر CAD وتر خواسته شده باشد که در آن CA = AD است چنانچه نقطهٔ D را حول نقطهٔ A دورانی برابر $\alpha = ۱۸۰^\circ$ داده شود D بر C منطبق می‌شود و چون نقطهٔ D معلوم نیست پس باید دایرهٔ (O') حول نقطهٔ A دوران داده شود و از آن‌جا حل مسأله چنین است. دایره (O') حول نقطهٔ A به اندازهٔ $\alpha = ۱۸۰^\circ$ دوران می‌دهیم تا به‌صورت دایرهٔ (O'') درآید نقطهٔ برخورد دایرهٔ (O'') با دایرهٔ (O) نقطهٔ C و خطی که C را به A وصل می‌کند دایرهٔ (O') را در D قطع می‌نماید، CAD وتر خواسته شده است.

۵۸۸. هرگاه دایرهٔ OO' را حول A به اندازهٔ ۱۸۰° دوران می‌دهیم به وضع O'' درمی‌آید که با دایرهٔ O' مساوی و بر آن مماس است. در این حال AB به وضع AB' واقع بر امتداد AB درمی‌آید و داریم:

$$AB + AC = AB' + AC = B'C = l$$

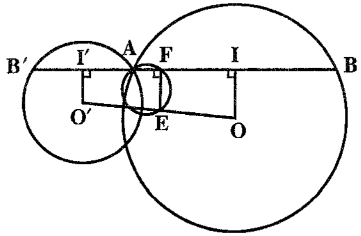
پس مسأله منجر می‌شود به رسم خطی از نقطهٔ تقاطع دو دایرهٔ O و O'' که مجموع وترهای ایجاد شده به‌وسیلهٔ آن در این دو دایره که در دو طرف نقطهٔ تقاطع A قرار دارند، مساوی مقدار معلوم l باشد.



۵۸۹. فرض می‌کنیم مسأله حل شده قاطع ABC جواب مسأله باشد. داریم:

$$AB + BC = l$$

از مرکز دو دایره عمودهای OH و $O'H'$ را بر این قاطع رسم می‌کنیم. از O' خطی به موازات AC رسم می‌کنیم تا OH را در M قطع کند. مثلث قائم‌الزاویه $O'MO$ با معلومات OO' و $O'M = H'H = \frac{l}{۲}$ قابل رسم است پس برای حل مسأله مثلث داده شده را رسم کرده و OM را امتداد می‌دهیم و از نقطهٔ B عمودی بر این خط رسم می‌کنیم تا دو دایره را در C و A قطع کند. قاطع ABC جواب مسأله است.



۵۹۰. **راه اوّل.** اگر مسأله را حل شده فرض کنیم و BB' قاطع خواسته شده گذرنده بر A باشد که در آن $AB - AB' = ۲d$ است، در این صورت چنانچه از مرکزهای دو دایره عمودهای OI و OI' بر BB' فرود آوریم $II' = \frac{BB'}{۲}$ یا $AI - AI' = d$ و در صورتی که از E وسط OO' بر BB' عمود کنیم F پای عمود وسط II' بوده و می‌توان نوشت:

$$AF = AI - FI = AI - FI' = AI - (AI' + AF)$$

یا

$$AF = AI - AI' - AF$$

یا

$$۲AF = AI - AI' = d$$

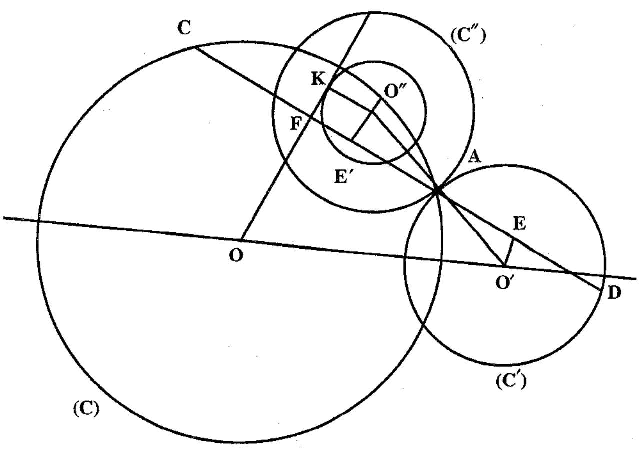
و یا

$$AF = \frac{d}{۲}$$

و چون مثلث EAF در رأس F قائمه است و دایره به قطر AE از F می‌گذرد در نتیجه حل مسأله چنین است.

OO' را وصل کرده از E وسط OO' به A وصل می‌نماییم و دایره‌ای به قطر AE رسم کرده به مرکز A و شعاع $\frac{d}{۲}$ قوسی رسم می‌کنیم تا دایره به قطر AE را در F قطع کند. خطی که A را به F وصل می‌کند جواب مسأله است.

راه دوم. اگر مسأله را حل شده فرض کنیم و $\overline{CAD}$ وتر خواسته شده باشد به‌طوری که $\overline{CA} - \overline{AD} = ۲d$ است و اگر F و E پای عمودهای وارد از مرکزهای دایره‌ها بر وتر CD باشد $\overline{AF} - \overline{AE} = d$ است و چنانچه دایرهٔ (O') حول نقطهٔ A به اندازهٔ ۱۸۰° دوران دهیم E به E' تبدیل می‌شود و داریم $FE' = AF - AE' = d$ و اگر از O'' بر OF عمود کنیم چهارضلعی



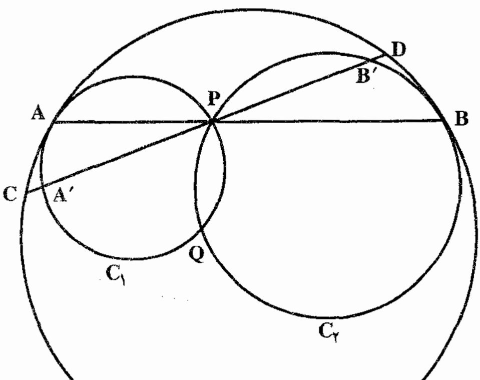
$FE'O''K$ مستطیل بوده و دایره به مرکز O'' و شعاع $R'' = O''K$ بر امتداد $\overline{OF}$ در K مماس است و $O''K = E'F = AF - AE' = d$ می‌باشد و در نتیجه راه‌حل مسأله چنین است. دایرهٔ (C'') قرینهٔ (C') را نسبت به A محل برخورد دو دایره تعیین می‌کنیم (یا به عبارت دیگر دایرهٔ (C') را حول نقطه به‌اندازهٔ 180° دوران می‌دهیم)، دایرهٔ (ω) را به مرکز (O'') و شعاع $R'' = d$ رسم نموده و از (O) مماسی بر آن رسم می‌نماییم. اگر K نقطهٔ تماس باشد خطی که از A موازی $O''K$ رسم شود جواب مسأله است.

بحث. چنانچه از (O) بتوان یک یا دو مماس بر دایره (ω) رسم کرد مسأله دارای یک یا دو جواب است و چنانچه نتوانیم مماسی رسم کنیم مسأله جواب ندارد.

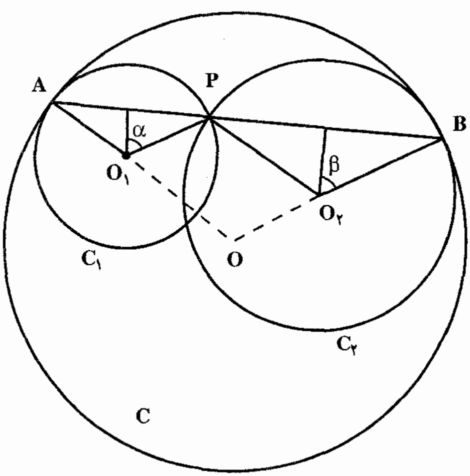
۵۹۱. راه اول. C_1 و C_2 را دو دایرهٔ داده شده می‌گیریم. ابتدا ثابت می‌کنیم، اگر APB جواب مسأله باشد، دایره‌ای مانند C وجود دارد که بر دایره‌های C_1 و C_2، در نقطه‌های A و B مماس است. سپس روش پیدا کردن نقطه‌های A و B را نشان می‌دهیم.
$A'P$ و PB' را دو وتر دیگر از دایره‌های C_1 و C_2 می‌گیریم که بر یک امتداد باشند و فرض می‌کنیم، امتداد این وترها، دایرهٔ C را در نقطه‌های C و D قطع کنند. داریم: $CP.PD = AP.PB$ و بنابراین (شکل الف)

$$AP.PB > A'P.PB'$$

و این همان چیزی است که می‌خواستیم.
در شکل ب، دایرهٔ C، مماس بر C_1 در نقطهٔ A و مماس بر C_2 در نقطهٔ



(الف)



(ب)

B است. این دایره وقتی وجود دارد که داشته باشیم : $\alpha = \beta$ که، در آن، α و β بترتیب، نصف زاویه‌های مرکزی روبه‌رو به کمانهای AP و BP هستند.

روش ساختمان. O را رأس چهارم متوازی‌الاضلاعی می‌گیریم که، سه رأس آن، O_1 و O_2 و P باشند. A نقطهٔ برخورد OO_1 با C_1 و B نقطهٔ برخورد OO_2 با C_2 است. می‌بینیم که، در این صورت، دایرهٔ C، به مرکز نقطهٔ O و به شعاع برابر مجموع شعاعهای دو دایرهٔ C_1 و C_2 است. بر یک استقامت بودن نقطه‌های A، P و B، نتیجه‌ای از تشابه مثلثهای AO_1P و AOB است.

راه دوم. چون $AP = ۲\sin\alpha$ و $BP = ۲\sin\beta$، در واقع باید ماکزیمم $\sin\alpha\sin\beta$ را پیدا کنیم. از آن‌جا که $O_1\hat{P}O_2$، زاویه‌ای ثابت است، مجموع $\alpha+\beta$ مقداری ثابت می‌شود. از طرف دیگر داریم :

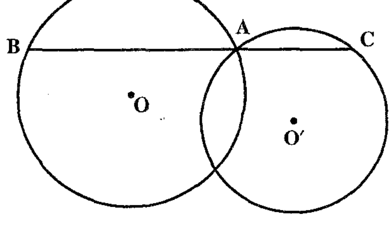
$$۲\sin\alpha\sin\beta = \cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)$$

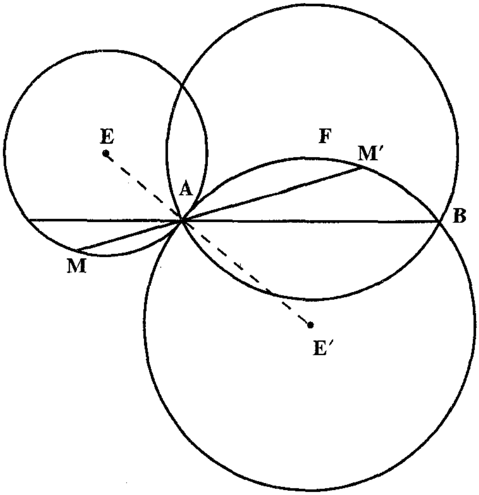
و چون کسینوس، تابعی نزولی است، حداکثر $\cos(\alpha-\beta)$ وقتی به‌دست می‌آید که داشته باشیم : $\alpha = \beta$. از این‌جا نتیجه می‌شود :

$$AO_1 \| PO_2 \quad , \quad BO_2 \| PO_1$$

دنباله کار، شبیه راه‌حل اوّل است.

۵۹۲. فرض می‌کنیم مسأله حل شده پس $AB \times AC = l^2$ یعنی B منعکس C است در انعکاسی که مرکزش A و قوتش l^2 است. از آن‌جا راه حل مسأله چنین می‌شود منعکس دایرهٔ O را در انعکاسی که مرکزش A و قوتش l^2 است به‌دست می‌آوریم (خطی است عمود بر قطری از دایرهٔ O که از A می‌گذرد) محل برخورد خط اخیر با دایرهٔ O' نقطهٔ C است. C را به A وصل می‌کنیم، و امتداد می‌دهیم، تا دایره O را در A قطع کند (بحث کنید). مسأله در حالت کلی دارای دو جواب است.





۵۹۳. A نقطهٔ مشترک دایره‌های E و F و M نقطه‌ای روی دایرهٔ E می‌باشد. روی AM نقطهٔ M' را طوری پیدا می‌کنیم که:

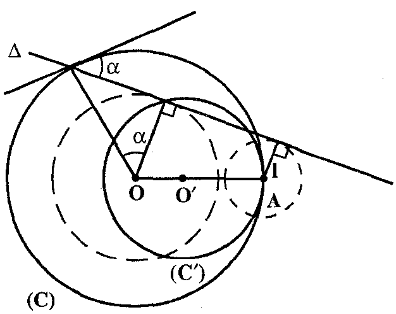
$$\frac{\overline{AM'}}{\overline{AM}} = -k$$

(k نسبت معلوم است) وقتی M روی دایرهٔ E باشد M' روی دایره‌ای است متجانس با E به نسبت تجانس $-k$ و مرکز تجانس A که آن را E' می‌نامیم. اگر B نقطهٔ دوم تقاطع دو دایرهٔ E' و F باشد خط AB خط خواسته شده است.

دو دایرهٔ E' و F در نقطهٔ A مشترکند و مماس نیز نمی‌توانند باشند در نتیجه متقاطعند و نقطهٔ B همیشه وجود دارد.

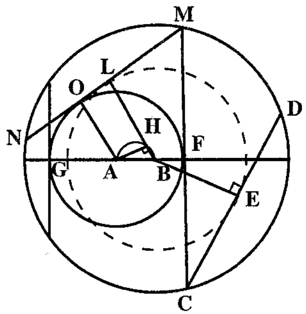
اگر علامت k معلوم نباشد M و M' یک بار در یک طرف و یک بار در دو طرف A قرار می‌گیرند و در نتیجه مسأله دو جواب دارد. و اگر مشخص نباشد که برای نوشتن صورت کسر نسبت از وتر کدام دایره باید شروع کنیم، مسأله چهار جواب خواهد داشت.

۵.۱.۴.۴.۳.۳. دو دایرهٔ مماس داخل



۵۹۵. تمام خطهایی که دایرهٔ C(O,R) را به زاویهٔ α قطع می‌کنند بر دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R\cos\alpha$ مماسند. این دایره را رسم می‌کنیم. از طرفی تمام خطهایی که به فاصلهٔ معلوم l از نقطهٔ A واقعند بر دایره‌ای به مرکز A و به شعاع l مماسند. این دایره را نیز رسم می‌کنیم. مماس مشترکهای دو دایرهٔ $(O, R\cos\alpha)$ و (A,l) جواب مسأله‌اند و به تعداد آنها، مسأله جواب دارد. در شکل یکی از جوابها رسم شده است.

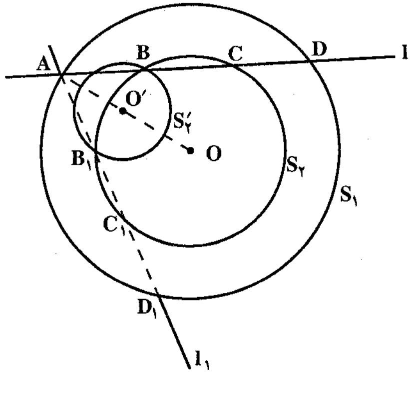
۶.۱.۴.۴.۳.۳. دو دایره یکی درون دیگری (متداخل)



۵۹۶. نقطه‌های A و B را مرکزهای دو دایرهٔ داده شده و l را طول وتر ایجاد شده در دایرهٔ بزرگتر (به‌وسیلهٔ خط مماس بر دایرهٔ کوچکتر) در نظر می‌گیریم.
۱. تمام وترهای مساوی از مرکز دایره به یک فاصله‌اند. بنابراین باید وتر CD=l را رسم کنیم و از O عمود OE را بر CD فرود آوریم. به مرکز O و به شعاع OE یک دایره رسم کنیم. آن‌گاه مماس مشترک دایرهٔ اخیر و دایرهٔ A را رسم کنیم. این مماس مشترک جواب مسأله است. (شکل) عمود اخراج شده از G بر AB کوچکترین وتر و عمود اخراج شده از F بر AB بزرگترین وتر را در دایرهٔ B ایجاد می‌کند. هنگامی که نقطهٔ B درون دایرهٔA نیست، بزرگترین وتر، قطر مماس رسم شده از نقطهٔ B بر دایرهٔ A است.

۷.۱.۴.۴.۳.۳. دو دایرهٔ هم مرکز

۵۹۷. OA را وصل می‌کنیم و به قطر $O'A = \frac{OA}{۲}$ دایره می‌زنیم.



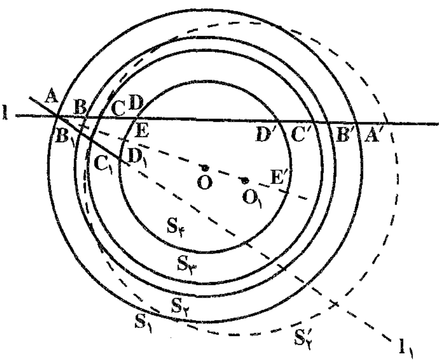
(الف)

۵۹۹. الف) فرض کنید که خط مطلوب l رسم شده است، به‌طوری که $AB / AC = ۱/۲$ (شکل الف). در این صورت به راه‌حل زیر هدایت می‌شویم. دایرهٔ $S'_۲$ را مجانس مرکزی با $S_۲$ به مرکز تجانس نقطهٔ دلخواه A از دایرهٔ $S_۱$ و با نسبت تجانس ۲ رسم می‌کنیم. نقطهٔ A و یکی از نقطه‌های برخورد دایره‌های $S_۲$ و $S'_۲$ خط مطلوب را مشخص می‌کنند. (با توجه به انتخاب A ممکن است با این شرایط دو خط، یا دقیقاً یک خط موجود باشد و یا اصلاً خطی موجود نباشد.)

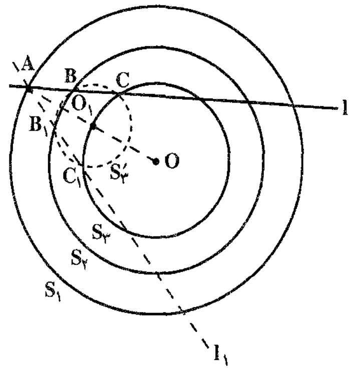
ب) دایرهٔ S'_3 را مجانس با S_3 به مرکز تجانس نقطهٔ دلخواه A از دایرهٔ S_1 و با نسبت تجانس ۱/۲ رسم می‌کنیم. نقطهٔ A و یکی از نقطه‌های برخورد دایره‌های S_2 و S'_3 خط مطلوب را مشخص می‌کنند. (با توجه به انتخاب A ممکن است با این شرایط دو خط یا یک خط موجود باشد یا اصلاً هیچ خطی موجود نباشد.)

ج) فرض می‌کنیم که خط l را پیدا کرده باشیم و چهار نقطهٔ برخورد آن را با دایره‌های S_1 ، S_2 ، S_3 و S_4 بترتیب A' ، B' ، C' و D' می‌نامیم (شکل ج). روشن است که $AB = D'C'$. بنابراین

$$AD' = AB + BC' - C'D' = BC$$



(ج)



(ب)

و از این‌جا داریم :
$$\frac{AD}{BC} = \frac{AD.AD'}{BC.BC'}$$

کمیت $AD.AD'$ به وضع D و D' نقطه‌های برخورد خطی که از A می‌گذرد با دایرهٔ S_4 ، بستگی ندارد و برابر است با $AE.AE'$ که در آن E و E' نقطه‌های برخورد خط AO است (O مرکز هر چهار دایره) با دایرهٔ S_4 ، یعنی برابر است با $(r_1 - r_4).(r_1 + r_4)$ که در آن r_1 و r_4 شعاعهای S_1 و S_4 هستند. با استدلالی مشابه داریم $BC.BC' = (r_2 - r_3).(r_2 + r_3)$ که در آن r_2 و r_3 شعاعهای S_2 و S_3 هستند.

پس :

$$\frac{AD}{BC} = \frac{r_1^2 - r_4^2}{r_2^2 - r_3^2}$$

بعلاوه
$$AD = AB + BC + CD = 2AB + BC$$

در نتیجه،
$$\frac{AD}{BC} = 2\frac{AB}{BC} + 1$$

و از آن‌جا
$$\frac{AB}{BC}=\frac{۱}{۲}\left(\frac{r_۱^۲-r_۴^۲}{r_۲^۲-r_۳^۲}-۱\right)=\frac{r_۱^۲-r_۲^۲+r_۳^۲-r_۴^۲}{۲(r_۲^۲-r_۳)^۲}$$

و بالاخره
$$\frac{AC}{AB}=\frac{AB+BC}{AB}=۱+\frac{BC}{AB}=۱+\frac{۱}{AB/BC}=\frac{r_۱^۲+r_۲^۲-r_۳^۲-r_۴^۲}{r_۱^۲-r_۲^۲+r_۳^۲-r_۴^۲}$$

که به این ترتیب کمیت AC/AB را می‌توان معلوم به‌شمار آورد.

بر این اساس، ترسیم زیر به‌دست می‌آید. یک تجانس به مرکز A، نقطهٔ دلخواهی از دایرهٔ $S_۱$، و با نسبت k تشکیل می‌دهیم که در آن

$$k=\frac{r_۱^۲+r_۲^۲-r_۳^۲-r_۴^۲}{r_۱^۲-r_۲^۲+r_۳^۲-r_۴^۲}$$

با این تبدیل، دایرهٔ $S_۴$ را به دایرهٔ $S'_۴$ بدل می‌کنیم. نقطهٔ A و یکی از نقطه‌های برخورد دایره‌های $S'_۴$ و $S_۳$ خط مطلوب را مشخص می‌کنند (با انتخاب A ممکن است با این شرایط دو خط یا یک خط موجود باشد یا هیچ خطی موجود نباشد).

۳.۳.۴.۴.۲. دو دایره، نقطه

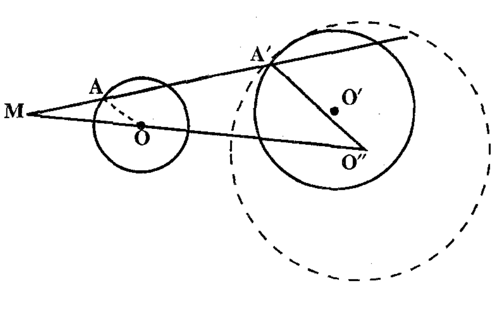
۳.۳.۴.۴.۲.۱. دو دایره، یک نقطه

۶۰۰. فرض کنیم $BA=B'A'$ و I وسط OO' باشد. تصویر I روی PA نقطه M است پس M وسط $A'B$ و همچنین وسط AB' است. بنابراین :

$$MB.MA=MA'.MB'$$

پس، M روی محور اصلی دو دایرهٔ O و O' و همچنین روی محیط دایره به قطر IP است، در نتیجه در محل تقاطع آنها است. با تعیین نقطهٔ M، قاطع مطلوب رسم می‌شود. مسأله دو یا یک یا صفر جواب دارد.

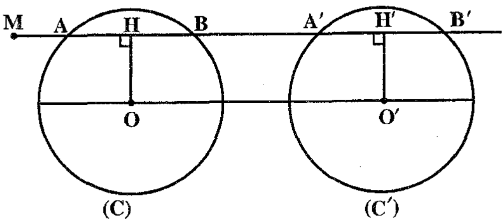
۶۰۲. این رابطه را به‌صورت $\frac{MA'}{MA}=۳$ می‌توان نوشت. از این رابطه نتیجه می‌شود که نقطهٔ A' مجانس نقطهٔ A نسبت به مرکز تجانس M و با نسبت تجانس ۳ است. امّا نقطهٔ A به دایرهٔ



(O) تعلق دارد. پس راه‌حل مسأله چنین است :
مجانس دایرهٔ O را نسبت به مرکز تجانس M و با نسبت تجانس ۳ رسم می‌کنیم و دایرهٔ O'' می‌نامیم. نقطهٔ برخورد این دایره با دایرهٔ O' ، نقطهٔ A' است. از A' به M وصل می‌کنیم تا دایرهٔ O را در نقطهٔ A قطع کند. این خط جواب مسأله است. مسأله به تعداد نقطه‌های برخورد دایرهٔ O'' و دایرهٔ O' دارای جواب است.

۶۰۴. دایرهٔ O را حول نقطهٔ P، °۱۸۰ دوران می‌دهیم. نقطهٔ A بر B منطبق می‌شود. دوران یافتهٔ دایرهٔ O، دایرهٔ O' را در B قطع می‌کند.

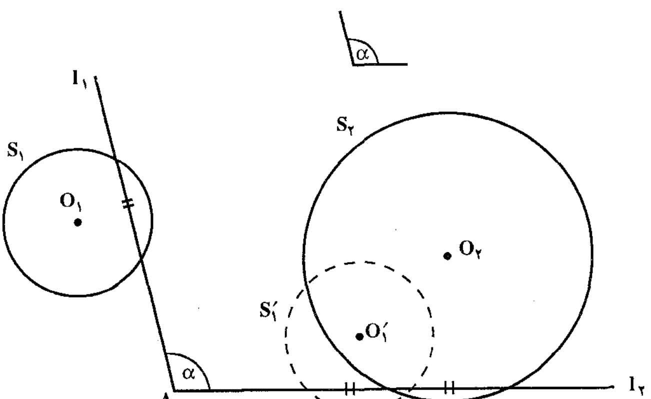
۶۰۵. هرگاه دو دایره مساوی باشند، هر خط قاطعی که موازی خط‌المرکزین دو دایره رسم شود در دو دایره وترهای متساوی به‌وجود می‌آورد. بنابراین برای حل مسأله، از نقطهٔ داده شده



خطی موازی خط‌المرکزین دو دایره رسم می‌کنیم. این خط در صورتی که دو دایره را قطع کند جواب مسأله است یعنی وترهای ایجاد شده با هم مساوی خواهند بود.

۶۰۶. نقطه‌های B و C را مرکزها و r و s را شعاعهای دو دایرهٔ داده شده می‌گیریم. از نقطهٔ A باید خطی چنان رسم کنیم که تفاضل فاصله‌های B و C از آن مساوی مقدار ثابت $r-s$ باشد.

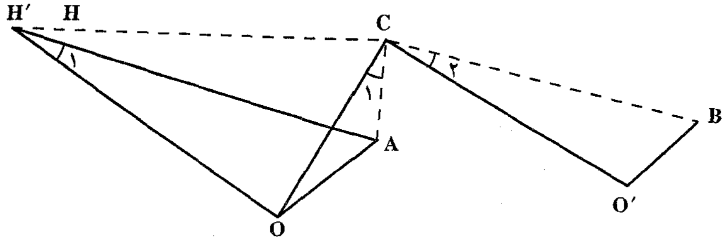
۶۰۷. فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد. دایرهٔ S_1 را حول نقطهٔ A به زاویهٔ α دوران می‌دهیم تا به S'_1 تبدیل شود (شکل). دایره‌های S_2 و S'_1 روی خط l_2



وترهای مساوی جدا می‌کنند. به عبارت دیگر، باید بر نقطهٔ A خطی مانند l_2 چنان مرور دهیم که S'_1 و S_2 بر روی آن وترهای مساوی جدا کنند. سپس l_1 می‌تواند از دوران l_2 حول A به زاویهٔ α به‌دست آید، و S_1 پاره‌خط مطلوب را روی l_1 جدا می‌کند.

مسأله می‌تواند تا چهار جواب داشته باشد (چون S_1 می‌تواند حول A در دو جهت دوران کند).

۶۰۸. از A خطی به موازات BC و از O خطی به موازات $O'C$ رسم می‌کنیم، تا یکدیگر را در H قطع کنند. $\hat{H}_1 = \hat{C}_1$. پس چهارضلعی HOAC محاطی است. بنابراین اگر بتوانیم H را به‌دست آوریم، A نیز به‌دست می‌آید.



دو مثلث HOA و $O'CB$ متشابه‌اند، پس $\frac{OH}{O'C} = \frac{R}{R'}$ ، از آن‌جا $OH = O'C.\frac{R}{R'}$ بنابراین OH طول و امتداد معینی دارد ؛ پس نقطه H به سادگی مشخص می‌شود. پس از تعیین نقطهٔ H، دایرهٔ محیطی مثلث OCH را رسم می‌کنیم هر کجا که دایرهٔ O را قطع کند نقطهٔ A است. سپس از A به O وصل می‌کنیم، و از O' به موازات آن می‌کشیم تا دایرهٔ O' را در B قطع کند.($O'B$ و OA دو وتر دلخواه هستند.)

۶۰۹. مسأله را حل شده می‌گیریم یعنی OA و $O'A'$ اشعهٔ موازی و متحدالجهت باشند به‌طوری که $PA = PA'$ باشد. اگر M وسط AA' و I وسط OO' و ... داریم $\frac{BO}{BO'} = \frac{r}{r'}$ پس نقطهٔ B برای تمام شعاعهای موازی و متحدالجهت ثابت است و چون در مثلث متساوی‌الساقین PAA' میانه PM ارتفاع نیز هست M بر دایره به قطر PB واقع است. از طرف دیگر در ذوزنقه $OO'A'A$ داریم $IM = \frac{r + r'}{۲}$ پس M بر دایره‌ای به مرکز I و شعاع $\frac{r + r'}{۲}$ نیز قرار دارد. پس نقطهٔ M محل برخورد دو دایره اخیر است. وقتی M معلوم شده IM را می‌توان رسم کرد و شعاعهای OA و $O'A'$ را موازی آن رسم می‌کنیم.

۶۱۰. از مجانس دایرهٔ (C) در تجانس به مرکز M و نسبت k، و سپس از تقارن به مرکز M استفاده کنید.

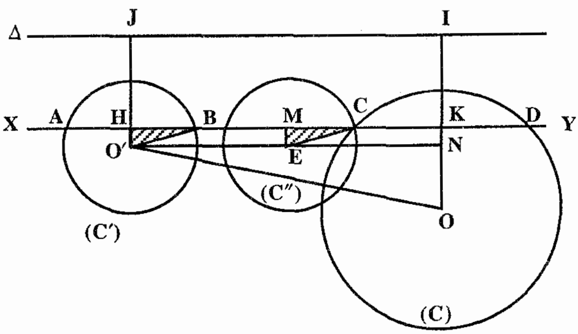
۳.۲.۴.۴.۳. دو دایره، خط

۳.۲.۴.۴.۳.۱. دو دایره، یک خط یا یک راستا

۶۱۱. اگر XY خط خواسته شده، موازی Δ باشد که در آن $AB = CD$ است. چنانچه از مرکزهای دو دایره C و C' بر Δ عمود کنیم بر موازیش XY عمود بوده و داریم $AH = HB = CK = KD$ و اگر $O'M$ را موازی XY رسم کنیم $MH = O'K$ خواهد بود و مثلثهای قائم‌الزاویهٔ $O'KD$ و MHB به حالت دو ضلع برابرند و در نتیجه $MB = O'D = R'$ بوده و از آن‌جا حل مسأله چنین است :

ابتدا از مرکز دو دایره عمودهایی بر امتداد Δ فرود می‌آوریم و سپس از O' موازی Δ رسم می‌نماییم تا OJ را در M قطع کند : دایرهٔ C' را به‌اندازهٔ بردار $\overrightarrow{IJ} = \overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{V}$ انتقال می‌دهیم تا به‌صورت دایرهٔ C'' درآید. اگر A و B نقطه‌های تقاطع دایره C'' با دایرهٔ C باشد خطی که AB را به هم وصل می‌کند خط مطلوب است و نقطه‌های تقاطعش با دایرهٔ C' نقطه‌های C و D بوده که در آن AB=CD است زیرا $MH = O'K$ و $MB = O'D' = R'$ بوده و درنتیجه HB=KD یا AB=CD می‌باشد.

بحث. اگر C'' دایره حاصل از انتقال دایرهٔ (C') به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{V}$ دایرهٔ (C) را قطع کند مسأله دارای جواب است و در صورتی که متقاطع نباشد مسأله جواب ندارد.



۶۱۲. الف) مجموع وترها برابر l

اگر XY خطی باشد که به موازات امتداد داده شده Δ رسم شده و دایره‌های داده شده (C') و (C) را بترتیب در وترهای $\overline{AB}$ و $\overline{CD}$ قطع کرده باشد و داشته باشیم $\overline{AB}+\overline{CD}=l$: در این صورت اگر از مرکزهای دو دایره عمودهای OI و $O'J$ را بر Δ فرود آورده باشیم ۱. طول IJ ثابت و معلوم است. ۲. وترها را نصف کرده و داریم: $\overline{HA} = \overline{HB}$ و $\overline{KC} = \overline{KD}$ و $\overline{HB}+\overline{CK}=\frac{l}{2}$ در صورتی که بر XY نقطهٔ M چنان تعیین کنیم که $\overline{MC} = \overline{HB}$ باشد

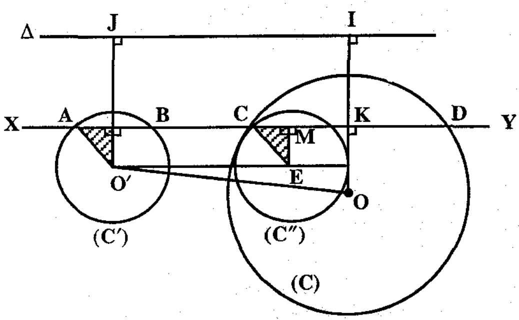
داریم $\overline{MK} = \overline{EN} = \frac{1}{2}$ و در نتیجه مثلثهای قائم‌الزاویه MEC و O′HB با هم برابر بوده و $O'E = JI - EN = JI - \frac{1}{2}$ می‌باشد و از آن‌جا حل مسأله چنین است.

از نقطه‌های O و ′O مرکزهای دایره‌های C و ′C عمودهای OI و O′J را بر Δ فرود می‌آوریم و از ′O خطی موازی Δ رسم نموده تا $\overline{OI}$ را در N قطع نماید آن‌گاه دایرهٔ (′C) به اندازه بردار $\overrightarrow{V} = \overrightarrow{O'E}$ به طول $JI - \frac{1}{2}$ انتقال می‌دهیم تا به‌صورت دایرهٔ (″C) درآید. خطی که از نقطهٔ برخورد دایرهٔ ″C با دایره C موازی Δ رسم شود جواب مسأله است.

بحث. اگر دایرهٔ ″C حاصل از انتقال دایرهٔ (′C) به اندازه بردار $\overrightarrow{O'E} = \overrightarrow{V}$ به قدر مطلق $JI - \frac{1}{2}$ دایرهٔ (C) را در یک یا دو نقطه قطع کند مسأله دارای یک یا دو جواب است و اگر قطع نکند مسأله جواب ندارد.

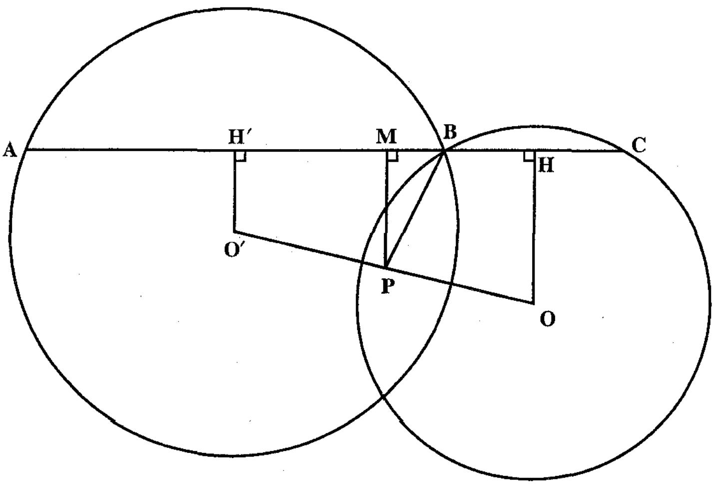
ب) تفاضل وترها مساوی L است : در این حالت از ′O موازی Δ رسم می‌کنیم و دایرهٔ (′C) را به اندازه بردار $\overline{HM} = E'O = JI - \frac{1}{2}$ انتقال می‌دهیم تا به‌صورت دایره ″C درآید. از نقطهٔ برخورد دایرهٔ ″C با دایره C خطی موازی Δ رسم می‌کنیم تا دایره‌های C و ′C را قطع کند این خط جواب مسأله است.

بحث. مانند قسمت الف است.



۶۱۳. راه اوّل. فرض می‌کنیم مسأله حل شده ABC خط خواسته شده باشد. با فرض $BC = ۲x$ و $AB = ۲y$ از مرکز دو دایره عمودهای OH و O′H′ را بر این قاطع رسم می‌کنیم داریم:

$$HH' = x + y$$



اگر P وسط OO′ باشد از P عمودی بر H′H رسم می‌کنیم داریم:

$$MH' = MH = \frac{x+y}{۲}$$

نقطهٔ P را به نقطهٔ B وصل می‌کنیم. حال MB را محاسبه می‌نماییم:

$$MB = HH' - MH' - BH$$

و یا

$$MB = x + y - \frac{x+y}{۲} - x = \frac{y-x}{۲}$$

ولی با توجه به فرض مسأله داریم:

$$AB - BC = ۲y - ۲x = ۲(y-x) = 1$$

و یا

$$y - x = \frac{1}{۲}$$

پس

$$MB = \frac{1}{۴}$$

مثلث قائم‌الزاویهٔ PMB قابل ترسیم است (با معلومات PB و $MB = \frac{1}{۴}$) برای حل مسأله این مثلث را رسم کرده و PM را به‌دست می‌آوریم. مماسی که از B بر دایره به مرکز P و به شعاع PM رسم شود جواب مسأله است.

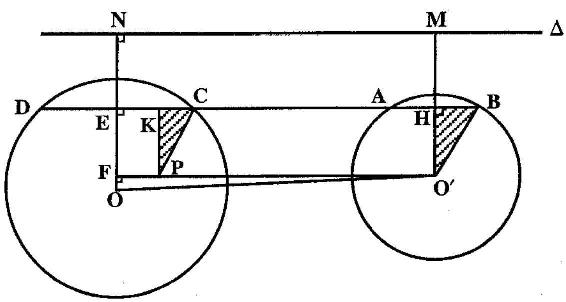
راه دوم. ۱. فرض می‌کنیم مسأله حل شده DCAB جواب مسأله باشد. از O و O' دو عمود بر Δ رسم می‌کنیم MN معلوم است شکل MNEH مستطیل است و داریم:

$$EC + AH = \frac{1}{۲}$$

از آن‌جا:

$$AC = MN - \frac{1}{۲}$$

پس کافی است خطی به طول معلوم $AC = MN - \frac{1}{۲}$ به موازات Δ بر دو دایره O و O' متکی کنیم.



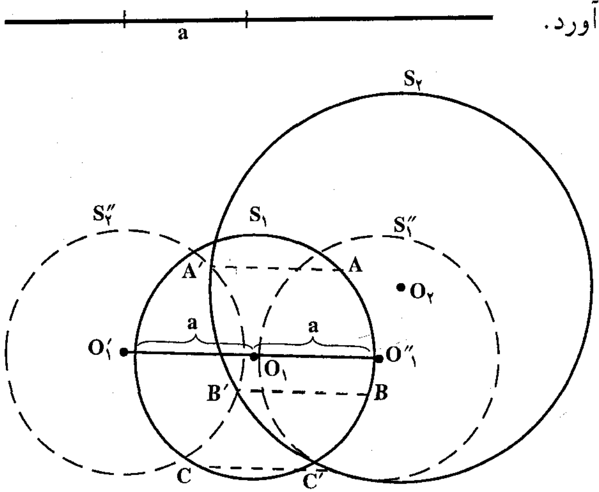
۲. از O' به موازات Δ رسم می‌کنیم تا ON را در F قطع کند. O' را به B وصل می‌کنیم از C به موازات $O'B$ رسم می‌کنیم. شکل $CBO'P$ متوازی‌الاضلاع است پس $PC = O'B$ دو مثلث قائم‌الزاویه PKC و $O'BH$ متساوی‌اند پس KC=HB.

از آن‌جا:

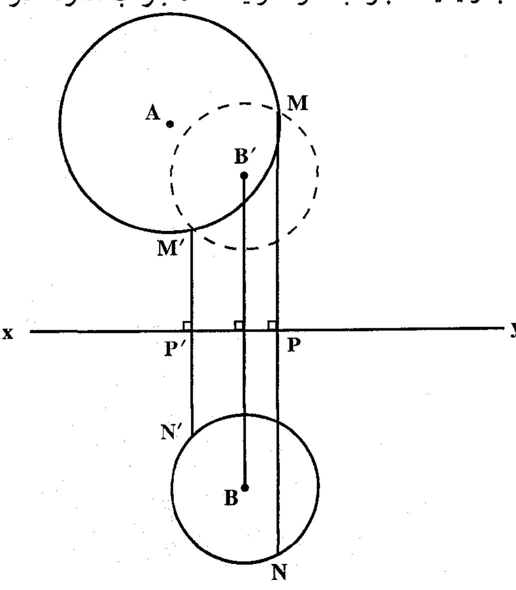
$$FP = EK = \frac{1}{۲}$$

از این‌جا نتیجه می‌شود برای حل مسأله از O' به موازات Δ رسم می‌کنیم و از O عمودی بر Δ عمود می‌کنیم تا همدیگر را در F قطع کنند. از F به اندازهٔ $FP = \frac{1}{۲}$ جدا می‌کنیم به مرکز P و به شعاع $O'B = R$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ O را در C قطع کند. خطی که از C به موازات Δ رسم شود جواب مسأله است.

۶۱۴. دایرهٔ S_1 را به طول a در امتداد l انتقال دهید، و فرض کنید S'_1 وضع جدید آن باشد؛ گیریم A' و B' نقطه‌های تقاطع S'_1 با دایرهٔ S_2 باشند (شکل). دو خط موازی با l، که یکی از نقطهٔ A' بگذرد و دیگری از نقطهٔ B'، جوابهای مسأله هستند (پاره‌خطهای AA' و BB' در شکل هر یک مساوی فاصلهٔ انتقال، یعنی a است). می‌توان دو جواب دیگر را با انتقال S_1 در جهت مخالف و موازی l و به فاصلهٔ a به مکان جدید S''_1 به‌دست آورد.

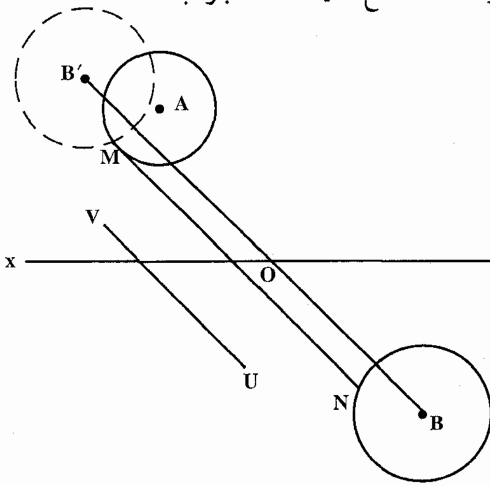


با توجه به تعداد نقطه‌های تقاطع S'_1 و S''_1 با S_2، دیده می‌شود که مسأله بینهایت جواب، چهار جواب، سه جواب، دو جواب و یا یک جواب دارد، و یا اصلاً جواب ندارد. در شکل مسأله سه جواب دارد.



۶۱۶. دایرهٔ (B') قرینهٔ دایرهٔ (B) را نسبت به خط xy رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (A) را در دو نقطهٔ M و M' قطع کند. خطهای MN و $M'N'$ جواب مسأله‌اند. زیرا عمود بر xy می‌باشند و داریم $MP=PN$ و $M'P'=P'N'$.

تبصره. مسأله را می‌توان برای حالتی که خط MN موازی امتدادی غیر عمود بر xy به‌عنوان مثال موازی امتداد UV باشد حل کرد. برای حل مسأله در این حالت از نقطهٔ ′B خطی موازی UV رسم می‌کنیم تا خط xy را در نقطهٔ O قطع کند. BO را به اندازه خود تا ′B ادامه می‌دهیم (′BO = OB) . به مرکز ′B و به شعاع دایرهٔ (B) دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ A را در نقطهٔ M قطع کند. از M خطی موازی UV رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (B) را در نقطهٔ N قطع نماید. MN جواب مسأله است.



۳.۳.۴.۵.سه دایره

۶۱۷. هر دستهٔ دوتایی از دایره‌ها، چهار مماس مشترک دارند. بنابراین دوازده مماس مشترک وجود دارد. به ازاء هر خط مماس دو خط موازی وجود دارد که جواب مسأله‌اند. بنابراین بیست‌و چهار خط متساوی‌الفاصله از سه دایره وجود دارد.

تبصره. تعمیم این مسأله جالب است؛ امّا هیچ زحمتی ندارد.

۶۲۰. اگر $\overline{MBA}$ خط خواسته شده باشد که در آن $\dfrac{\overline{MA}}{\overline{MB}} = m$ است. در این صورت نقطهٔ B مجانس A به مرکز تجانس M و نسبت تجانس m است و در نتیجه حل مسأله چنین است: دایرهٔ (C'_1) مجانس دایرهٔ (C_1) را در تجانس (M,m) رسم می‌نماییم. نقطهٔ تقاطع دایرهٔ (C'_1) با دایرهٔ (C_2) نقطهٔ B است و خطی که M را به B وصل می‌کند دایره (C_1) را در A قطع می‌کند. $\overline{MBA}$ خط مطلوب است.

بحث. اگر دایرهٔ (C'_1) دایره (C_2) را در یک یا دو نقطه قطع کند مسأله دارای یک یا دو جواب و اگر متقاطع نباشند مسأله جواب ندارد.

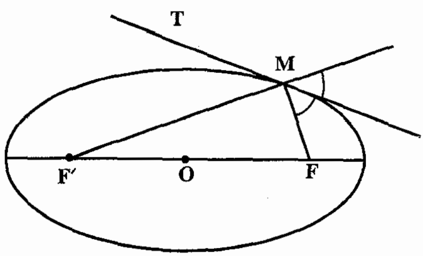
۳.۳. ۴. ۶. چهار دایره و بیشتر

۶۲۱. همه دایره‌ها را روی قطری از دایرهٔ بزرگتر تصویر می‌کنیم. روشن است که مجموع پاره‌خطهای تصویر، برابر است با مجموع قطرهای دایره‌ها، یعنی ۵۰. چون قطر دایرهٔ بزرگ برابر است با ۶، پس، اگر هر نقطهٔ آن به‌وسیلهٔ حداکثر هشت تصویر پوشیده شده باشد، مجموع طولهای آنها، از ۸×۶ ، یعنی ۴۸ تجاوز نمی‌کند (۵۰ > ۴۸) . بنابراین نقطه‌ای پیدا می‌شود که دست‌کم، به‌وسیلهٔ ۹ تصویر پوشیده است. خط راستی که از این نقطهٔ عمود بر قطر رسم شود، خط راست مورد نظر است.

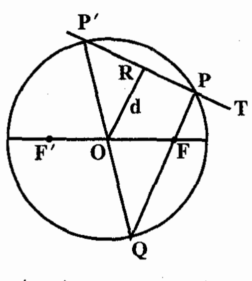
۳.۳. ۵. رسم خط با معلوم‌بودن: مقطعهای مخروطی، مقطعهای مخروطی و داده‌های دیگر

۳.۳. ۵. ۱. بیضی

۳.۳.۵.۱.۱. یک بیضی



۶۲۲. می‌دانیم که خط مماس بر بیضی در هر نقطه از آن، نیمساز زاویهٔ برونی بین شعاع حاملهای آن نقطه است. بنابراین از M به F و F′ وصل می‌کنیم و نیمساز زاویهٔ برونی F′MF را رسم می‌کنیم. این خط مماس بر بیضی است.

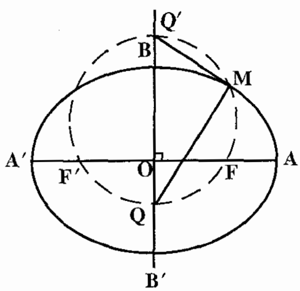


۶۲۳. مسأله را حل‌شده انگاشته و فرض می‌کنیم T مماسی است که به فاصله $OR = d$ از مرکز قرار گرفته باشد. T دایره اصلی را در نقطه‌های P و P′ تصویرهای کانونها روی این مماس قطع می‌کند، اگر Q نقطه دوم تقاطع PF با دایره باشد (شکل) QP′ یک قطر از دایره است (چون زاویه QPP′ قائمه است) و در مثلث QPP′ داریم : $QP = ۲OR = ۲d$
و از آن‌جا برای رسم این مماس ساختمان زیر نتیجه می‌شود : از F وتر PQ را به‌طول معلوم ۲d رسم می‌کنیم (چطور). با معلوم بودن نقطهٔ P مماس مطلوب به‌دست می‌آید.
برای این که مسأله ممکن باشد، لازم است $۲d \le ۲a$ و یا $d \le a$ و $OF \ge \sqrt{a^۲ - d^۲}$ و یا $d \ge b$ باشد. در حالتهای خصوصی $d = a$ یا $d = b$ ، T بر بیضی در یکی از رأسهای

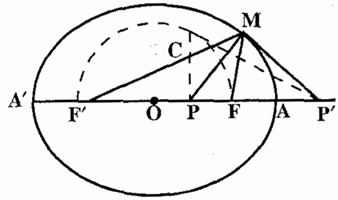
محور بزرگتر و یا کوچکتر مماس است. از بحث فوق نتیجه می‌گیریم که فاصله‌های یکی از این مماسها تا مرکز بیضی همه مقادیر بیشتر و یا مساوی b و کمتر و یا مساوی a را می‌تواند اختیار کند.

۶۲۴. فرض می‌کنیم نقطهٔ مفروض P روی محور کانونی AA' و PM یک قائم بر بیضی و $P'M$ مماس بر بیضی در M باشد (شکل الف). PM و $P'M$ نیمسازهای زاویه M مثلث FMF' می‌باشد؛ بنابراین P و P' مزدوجهای توافقی نسبت به FF' می‌باشند و $OP \times OP' = c^2$. در نتیجه اگر در P عمودی بر AA' رسم کنیم تا دایره به قطر FF' را در C قطع کند مماس بر این دایره در C از P' می‌گذرد. از این‌جا نقطهٔ M به دست می‌آید. و از P' مماسهایی بر بیضی رسم می‌کنیم.

برای این که ممکن باشد، باید $OP' \geq a$ یا $OP \leq \frac{c^2}{a}$. بنابراین نقطه P باید متعلق به قطعه خط DD' (که در شکل رسم نشده) که تصویرهای نقطه‌های تماس مماسهای رسم‌شده از A و A' بر دایره به قطر FF' روی AA' باشد.



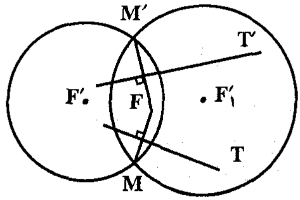
(ب)



(الف)

اکنون فرض می‌کنیم نقطه مفروض Q روی محور کوچکتر باشد. مماس MQ' را رسم نموده؛ می‌دانیم دایره محیطی مثلث QMQ' (شکل ب) از کانونها می‌گذرد. بنابراین نقطهٔ Q' با رسم دایره محیطی مثلث FQF' معلوم می‌شود و از Q' مماسهایی بر بیضی رسم می‌کنیم. برای این که مسأله ممکن باشد، باید $OQ' \geq b$ ولی $\overline{OQ} \times \overline{OQ'} = -c^2$

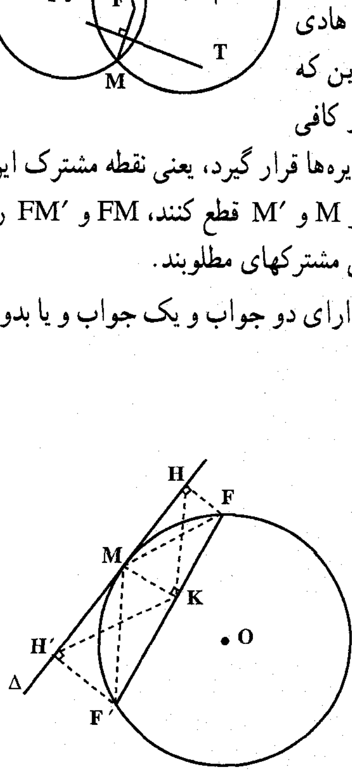
بنابراین $OQ \leq \frac{c^2}{b}$ در نتیجه اگر BF و BF' و سپس از F عمودهایی بر این خطها رسم کنیم تا آنها را در E و E' محور کوچکتر را قطع کنند (در شکل رسم نشده)، باید Q متعلق به قطعه خط EE' باشد.



۲.۱.۵.۳.۲. دو بیضی

۶۲۵. فرض می‌کنیم F کانون مشترک دو بیضی باشد، کانونهای دیگر را به F′ و F'_1 نمایش می‌دهیم و دایره‌های هادی به مرکزهای F′ و F'_1 را رسم می‌کنیم. برای این که یک خط، مماس مشترک دو بیضی باشد، لازم و کافی است که نسبت به این خط روی هریک از این دایره‌ها قرار گیرد، یعنی نقطه مشترک این دایره‌ها باشد. در نتیجه اگر دایره‌ها یکدیگر را در M و M′ قطع کنند، FM و FM′ را رسم می‌کنیم. عمودمنصفهای این قطعه‌ها مماس مشترکهای مطلوبند.

برحسب موقعیتهای نسبی (F′) و (F'_1) مسأله دارای دو جواب و یک جواب و یا بدون جواب خواهد بود (شکل).



۳.۱.۵.۳.۲. یک بیضی، یک دایره

۶۲۶. اگر F و F′ کانونهای بیضی باشند که قطر کوچکتر آن b باشد و بر روی دایرهٔ O قرار گرفته باشند می‌دانیم که :

$$FH \times F'H' = b^2$$

می‌باشد. به فرض این که خط Δ مماس مشترک دو منحنی باشد.

از نقطهٔ تماس M با دایره عمودی بر قطر کانونی بیضی فرود می‌آوریم تا قطعه خط MK به‌دست آید، در این‌صورت چهارضلعیهای MKFH و MKF′H′ محاطی می‌باشند. در این‌صورت زاویهٔ MFK مساوی زاویهٔ MHK و زاویهٔ MF′K مساوی زاویهٔ KH′M می‌باشند. دو مثلث MFH و MF′K متشابه‌اند. زیرا هر دو مثلث قائم‌الزاویه می‌باشند و زاویهٔ HMF با زاویهٔ MF′K برابر است (مقیاس هر دو، نصف قوس MF است) پس : $\frac{MF'}{MF} = \frac{MK}{FH}$ می‌باشد. همچنین دو مثلث MF′H′ و MKF متشابه‌اند (هردو قائم‌الزاویه و زاویه‌های H′MF′ و MFK با مقیاس مشترک نصف قوس MF′ برابرند) پس :

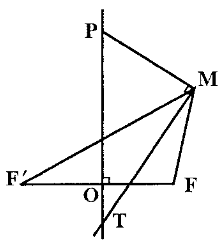
$$\frac{MK}{F'H'} = \frac{MF}{MF'}$$

از ضرب این دو رابطه حاصل می‌شود $\overline{MK}^2 = FH \times F'H' = b^2$. پس $MK = b$ قطر کوچکتر بیضی است.

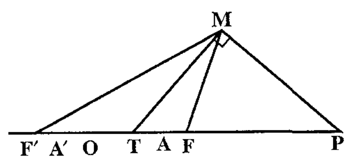
بنابراین برای ترسیم مماس مشترک بیضی و دایره‌ای که کانونهای منحنی اوّل بر دوم قرار دارند کافی است مماسی بر دایره رسم کرد به قسمی که فاصلهٔ نقطهٔ تماس آن از قطر بزرگ بیضی برابر قطر کوچک باشد (مماسهای بر رأسهای کوچک بیضی دایره را در دو نقطه معمولاً قطع می‌کنند. اگر از این نقطه‌ها مماسهایی بر دایره رسم شوند این مماسها بر بیضی نیز مماس خواهند بود). مسأله معمولاً دو جواب دارد.

۲.۵.۳.۳. هذلولی

۶۲۸. ابتدا فرض می‌کنیم نقطهٔ P روی محور کانونی باشد. خطهای PA و PA′ نرمالهای در رأسند. فرض می‌کنیم نرمال دیگر PM وجود داشته باشد. عمود MT را بر PM رسم می‌کنیم (شکل الف). این خط مماس بر منحنی است و چون MP و MT نیمسازهای زاویهٔ M در مثلث MFF′ می‌باشند بنابراین T مزدوج توافقی P نسبت به FF′ می‌باشد و T نقطهٔ معلومی است و با رسم مماس از این نقطه بر منحنی پای قائم رسم شده از P به‌دست می‌آید. برای این که این مماس وجود داشته باشد، باید $OT \leq a$ و یا چون $OT \times OP = c^2$ است $OP \geq \frac{c^2}{a}$ باشد. حال فرض می‌کنیم نقطهٔ P روی محور غیرقاطع



(ب)

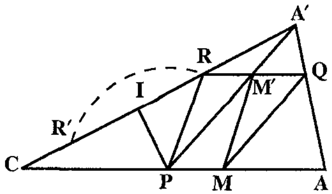


(الف)

و PM یک قائم و T فصل مشترک مماس در M با محور غیرقاطع باشد (شکل ب) ثابت کردیم که نقطه‌های T ، F و M، F′ روی محیط یک دایره‌اند و این دایره به قطر TP ، در نتیجه از نقطهٔ P معلوم دایره (PFF′) را رسم می‌کنیم تا محور غیرقاطع را در نقطهٔ دوم T قطع کند و از T مماسی بر هذلولی رسم می‌کنیم تا پای قائم رسم شده از P به‌دست آید. محور غیرقاطع کاملاً در ناحیهٔ خارج هذلولی قرار دارد و مسأله همواره ممکن است و نقطهٔ P هرکجا که روی محور باشد از این نقطه دو قائم می‌توان بر هذلولی رسم کرد.

۳.۵.۳.۳. سهمی

۱.۳.۵.۳.۳. یک سهمی



۶۲۹. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مماس MM' طوری باشد که $MM' = l$. چهارمین رأس (Q) متوازی‌الاضلاع بنا شده روی PM و PM' روی وتر تماسی AA' قرار دارد.

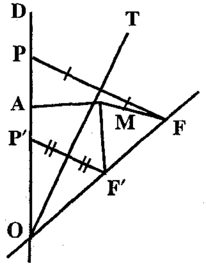
QM' را به اندازهٔ خود تا $M'R$ امتداد می‌دهیم و PR را رسم می‌کنیم ؛ $PMM'R$ یک متوازی‌الاضلاع است و $PR = MM' = l$ و از طرف دیگر وقتی Q خط AA' را بپیماید نقطهٔ R خط $A'C$ را خواهد پیمود. C را چنین به‌دست می‌آوریم که AP را به اندازهٔ خود تا PC امتداد می‌دهیم، نقطهٔ R پس فصل مشترک خط $A'C$ و دایرهٔ به مرکز P و به شعاع l می‌باشد با معلوم شدن R. خط RM' را رسم نموده و سپس MM' را موازی RP رسم می‌کنیم.

PI را عمود بر $A'C$ رسم می‌کنیم ؛ مسأله دارای دو جواب است اگر $PI < l$ و یک جواب $PI = l$ و غیرممکن است اگر $l < PI$ باشد.

PI پس می‌نیمم طول یک قطعه مماس بر سهمی و محدود به مماسهای ثابت PA و PA' می‌باشد (شکل).

۲.۳.۵.۳.۳. دو سهمی

۶۳۱. با فرض این که F و F' کانونهای دو سهمی مفروض باشند و فرض کنیم T_1 و T_2 دو مماس مشترک معلوم باشند، برای این که T_3 سومین مماس بر هریک از این دو سهمی باشد لازم و کافی است F و F' روی دایره محیطی مثلث حاصل از سه خط T_1 ، T_2 و T_3 باشد. ولی این دایره معلوم است و شامل F ، F' و P نقطهٔ تقاطع T_1 و T_2 می‌باشد، پس این دایره را رسم می‌کنیم و خطی که این دو نقطه را به هم وصل می‌کند جواب مسأله است. مسأله وقتی P ، F و F' واقع بر یک استقامت باشند دارای جواب نیست.



۱.۶۳۲. دو سهمی به کانونهای F و F' و هادی مشترک D را درنظر می‌گیریم ؛ فرض کنیم T مماس مشترک آنها باشد (شکل)، پس باید P و P' قرینه‌های F و F' نسبت به T روی D واقع شوند ؛ به‌علاوه دو خط FP و $P'F'$ موازی‌اند پس خطهای FF' ، T و D متقاربند. از طرف دیگر T نیمساز یکی از زاویه‌های حاصل از D و FF' می‌باشد بنابراین FF' را رسم می‌کنیم تا D را در O

قطع کند و سپس نیمسازهای زاویه‌های این دو خط را رسم می‌کنیم این نیمسازها مماس مشترکهای مطلوبند. چون قرینه‌های F و F′ نسبت به هریک از این خطها روی D واقع است، بنابراین مسأله دارای دو جواب است، اگر D و FF′ متقاطع باشند. اگر FF′ و D موازی باشند مسأله دارای یک جواب و در این حالت دو سهمی مساوی و مماس در رأسهایشان تنها مماس مشترکشان می‌باشد.

۲. فرض کنیم M یک نقطه باشد؛ AM را عمود بر D رسم می‌کنیم برای این که M نقطه مشترک این دو سهمی باشد لازم و کافی است که $MF = MA$ و $MA = MF'$ باشد. پس M مرکز دایره‌ای است گذرنده بر F و F′ و مماس بر D (که به سهولت قابل رسم است).
همچنین می‌توان گفت که M فصل مشترک عمودمنصف FF′ و یک سهمی می‌باشد. برای این که دو سهمی متقاطع باشند، لازم است که F و F′ در یک طرف D واقع باشند. وقتی که FF′ موازی با D باشد سهمیها نقطه مشترک ندارند.

۶۳۲. معادلات این دو سهمی عبارتند از:

$$y^۲ = ۲px \; ; \cdots \quad (۱) \qquad \text{و} \qquad x^۲ = ۲py \; ; \cdots \quad (۲)$$

نقطه‌های مشترک این دو سهمی جوابهای دستگاه زیر می‌باشند:

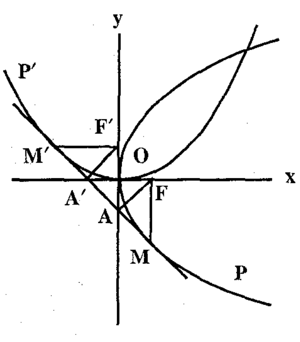
$$\begin{cases} x = \dfrac{y^۲}{۲p} \; ; & (۳) \\ x^۲ = ۲py \; ; \end{cases}$$

از حذف x بین معادلات دستگاه فوق داریم:

$$y^۴ = ۸p^۳y \; ; \Rightarrow y' = ۰ \quad , \quad y'' = ۲p$$

و با قرار دادن این مقادیر در معادلهٔ (۳) برای x مقادیر $x' = ۰$ و $x'' = ۲p$ به‌دست می‌آید. بنابراین این دو سهمی در مبدأ و نقطهٔ به مختصات $x'' = y'' = ۲p$ متقاطعند.

فرض کنیم MM′ مماس مشترک این دو سهمی باشد (شکل). A تصویر F روی MM′ بر روی yy′ (مماس در رأس) نیز قرار دارد؛ همین A′ تصویر F′ روی MM′ متعلق به xx′ می‌باشد. برعکس اگر یک خط A′A طوری باشد که در این دو شرط صدق کند، مماس مشترک این دو سهمی است. ولی برای این که خط MM′ مماس مشترک این دو سهمی باشد لازم و کافی است که:



$$\overline{AO}^۲ = -\overline{OA'} \times \overline{OF} = -\overline{OA'} . \frac{p}{۲} \; ;$$

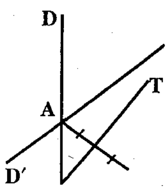
و

$$\overline{OA'}^{۲} = -\overline{OA}.\frac{p}{۲}$$

از این دو رابطه نتیجه می‌شود :

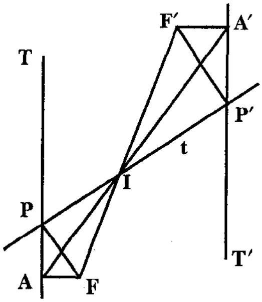
$$(\frac{OA}{OA'})^{۳} = ۱ \text{ و یا } OA = OA'$$

چون $OA' = -\frac{p}{۲}$ است ؛ پس $OA = OA' = -\frac{p}{۲}$ و چون تحت مماس مساوی دو برابر طول نقطهٔ تماس است پس نقطه‌های F و F′ تصویرهای M و M′ روی Ox و Oy می‌باشند. بنابراین اگر F و F′ دو عمود MF و M′F′ را بر Ox و Oy فرود آوریم تا سهمیها را در M و M′ قطع کند خط MM′ مماس مشترک این دو سهمی است.



۶۳۴. ۱. دو سهمی به کانون F و هادیهای D و D′ را درنظر می‌گیریم. اگر T مماس مشترک آنها باشد قرینهٔ F نسبت به T روی D و D′ در نتیجه روی فصل مشترک آنها یعنی A (شکل) قرار دارد. پس T عمودمنصف FA است. در نتیجه اگر D و D′ موازی باشند سهمیهای مفروض مماس مشترک نخواهند داشت.

۲. برای این که M نقطهٔ مشترک دو سهمی باشد، لازم و کافی است که مرکز دایرهٔ گذرنده بر F و مماس بر D و D′ باشد. پس کافی است دایره‌ای رسم کنیم که از یک نقطه گذشته و بر دو خط مماس باشد. (برای رسم قرینه نقطه را نسبت به نیمساز زاویه حاصل از دوخط به‌دست می‌آوریم حال باید دایره‌ای رسم کنیم که از این دو نقطه گذشته و بر یکی از خطها مماس باشد. مسأله را می‌توان به دو طریق حل کرد.) این مسأله دارای دو جواب است.



۶۳۵. فرض کنیم سهمیهای مفروض به کانونهای F ، F′ و T ، T′ مماسهای رأسهای A و A′ آنها باشد (شکل). برای این که خط t مماس مشترک این دو سهمی باشد ؛ لازم و کافی است که تصویرهای روی t ، F و F′ بترتیب متعلق به T و T′ باشند.

دو مثلث قائم‌الزاویهٔ FAP و F′A′P′ که ضلعهایشان نظیر به نظیر موازی‌اند بین متجانسند.

پس t از I فصل مشترک AA′ و FF′ می‌گذرد.

برعکس. اگر از I یک مماس t را بر یکی از این سهمیها رسم کنیم، این خط بر سهمی دیگر نیز مماس است. زیرا اگر P′ نقطهٔ تقاطع t و T′ باشد داریم :

$$\frac{IP'}{IP}=\frac{IA'}{IA}=\frac{IF'}{IF}$$

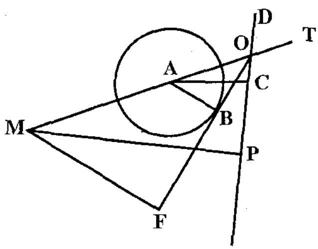
از این تساویها نتیجه می‌شود که F′P′ و FP موازی‌اند و یا این که F′P′ بر t عمود است.

این مماس مشترکها از رسم مماس بر یکی از این سهمیها از نقطهٔ I به دست می‌آیند. مسأله به موجب موقعیت نقطهٔ I دارای دوجواب و یک جواب و یا غیرممکن است.

۴.۵.۳.۳. مقطع مخروطی

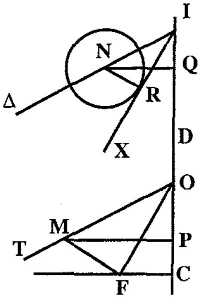
۶۳۶. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و T مماس رسم شده از A باشد، نقطهٔ تماسش M فصل مشترک T و عمود بر OF در نقطهٔ F می‌باشد. AB و AC را عمود بر OF و D اخراج می‌کنیم، داریم :

$$\frac{AB}{AC}=e \text{ یا } AB=AC\times e$$



و از آن‌جا ساختمان زیر نتیجه می‌شود : دایره به مرکز A و به شعاع $AC\times e$ را رسم می‌کنیم و سپس یک مماس FB را بر این دایره رسم نموده و فصل مشترک FB و خط D را به‌دست می‌آوریم از O به A وصل می‌کنیم تا یکی از مماسهای مطلوب به‌دست آید ؛ نقطهٔ تماسش M فصل مشترک OA و عمود وارده بر OF در F می‌باشد (شکل).

مسأله دارای دو جواب است اگر $\frac{AF}{AC}>e$ یا $FA>AC\times e$ یعنی اگر A خارج مقطع مخروطی باشد و فقط دارای یک جواب اگر $\frac{AF}{AC}=e$ یعنی A روی مقطع مخروطی باشد.



۶۳۷. فرض کنیم T مماسی موازی با امتداد Δ و نقطهٔ M نقطهٔ تماس باشد. می‌دانیم که $\widehat{OFM} = 90°$ و $\frac{MF}{MP} = e$ از نقطهٔ تقاطع دو خط Δ و D که آن را I می‌نامیم خط IX را به موازات OF و همچنین از نقطهٔ N که روی Δ به‌طور غیرمشخص اختیار شده خطهای NR و NQ را عمود بر IX و D رسم می‌کنیم. مثلثهای IRN، OFM، IQN و OPM متشابه‌اند و خواهیم داشت:

$$\frac{NR}{MF} = \frac{NI}{MO} = \frac{NO}{MP} \ ;$$

از آن‌جا:

$$\frac{NR}{NQ} = \frac{MF}{MP} = e \ ;$$

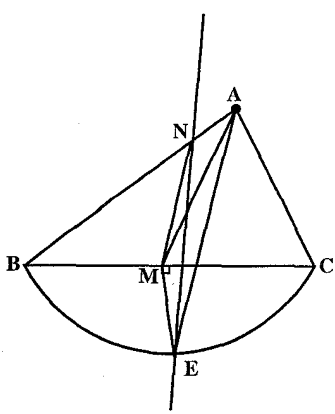
و در نتیجه:

$$NR = NQ \times e$$

به این ترتیب ترسیم زیر را می‌توان نتیجه گرفت:

از نقطهٔ N که به‌طور غیرمشخص روی Δ اختیار می‌کنیم دایره به این مرکز و به شعاع $NQ \times e$ رسم می‌کنیم از نقطهٔ I مماسهای IX و IX′ را بر این دایره می‌کشیم (IX′ در شکل موجود نیست) سپس FO و FO′ را به موازات این مماسها رسم نموده و OT و O′T′ را به موازات Δ می‌کشیم. این خطها مماسهای مطلوبند. نقطه‌های تماس به این ترتیب به دست می‌آیند که FM و FM′ را بر خطهای FO و FO′ عمود کنیم. بحث مسأله نیز به سهولت انجام می‌گیرد (شکل).

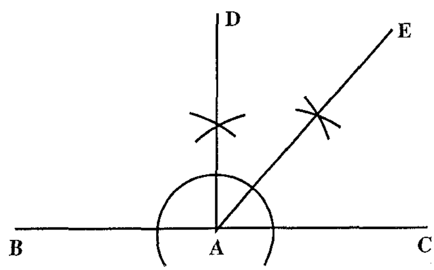
۶.۳.۳. رسم خط با معلوم بودن شکلهای دیگر



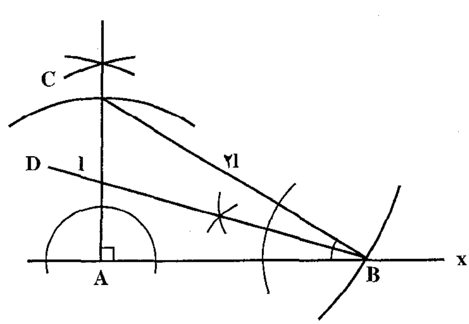
۶۳۸. فرض کنید نقطهٔ M وسط پاره‌خط BC باشد. خط شکسته EMA مساحت را به‌دو نیم مساوی تقسیم می‌کند. از M، MN را به موازات AE رسم کنید تا ضلعی از مثلث ABC را در N قطع کند. در این‌صورت EN خط خواسته شده است.

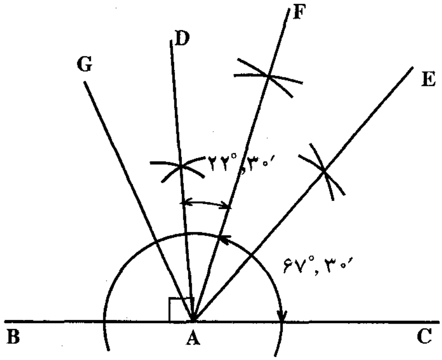
۴.۳. رسم زاویه

۶۳۹. خط راست BC را درنظر می‌گیریم. از نقطهٔ A واقع بر این خط عمود AD را بر آن اخراج می‌کنیم. هریک از زاویه‌های $B\hat{A}D$ و $C\hat{A}D$ مساوی $۹۰°$ است. نیمساز یکی از این دو زاویه به عنوان مثال نیمساز زاویه CAD را رسم می‌کنیم و آن را AE می‌نامیم. زاویهٔ $C\hat{A}E = ۴۵°$ و $B\hat{A}E = ۱۳۵°$ است.

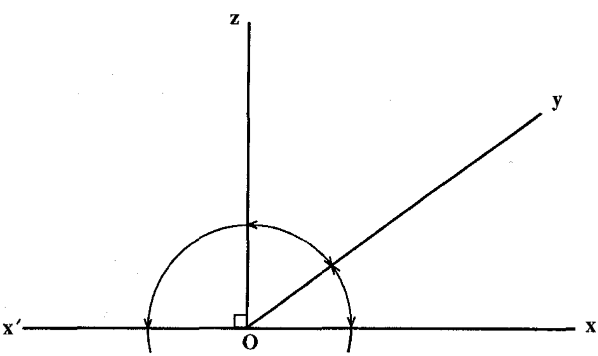


۶۴۰. برای رسم زاویهٔ $۳۰°$ ، مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰°)$ را چنان رسم می‌کنیم که وتر BC دو برابر ضلع AC باشد. برای این کار نخست زاویهٔ $x\hat{A}y = ۹۰°$ را رسم می‌کنیم. پاره‌خط AC را به‌طول دلخواه مثلاً l ، روی Ay جدا می‌کنیم. به مرکز C و به شعاع دو برابر AC (۲l) کمانی رسم می‌کنیم که Ax را در نقطهٔ B قطع کند. از B به C وصل می‌کنیم. زاویه $A\hat{B}C = ۳۰°$ است. چون در مثلث قائم‌الزاویه ABC ضلع مقابل به آن نصف وتر است، برای رسم زاویهٔ $۱۵°$، نیمساز زاویهٔ ABC را رسم می‌کنیم. هریک از زاویه‌های DBA و DBC برابر $۱۵°$ می‌باشند.

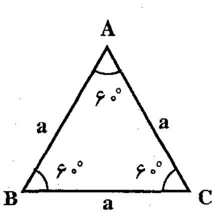




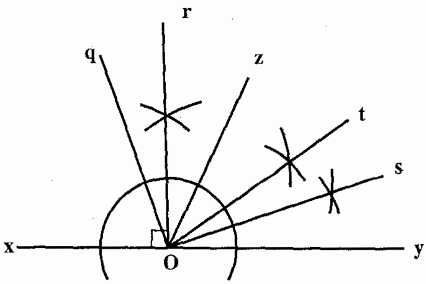
۶۴۱. خط اختیاری BC را رسم می‌کنیم. نقطهٔ A را روی آن خط در نظر می‌گیریم و از این نقطه خط AD را عمود بر آن رسم می‌کنیم. نیمساز زاویهٔ CAD را رسم می‌کنیم و AE می‌نامیم. زاویه‌های CAE و DAE هریک °۴۵ می‌باشند. حال نیمساز یکی از این دو زاویه به‌عنوان مثال نیمساز زاویهٔ DAE را رسم می‌کنیم و AF می‌نامیم. هریک از دو زاویهٔ DAF و EAF برابر ′۲۲°,۳۰ و زاویهٔ CAF مساوی ′۶۷°,۳۰ است. برای رسم زاویهٔ ′۱۱۲°,۳۰ زاویهٔ $B\hat{A}G = ۲۲°,۳۰'$ را مجاور زاویهٔ $D\hat{A}C = ۹۰°$ رسم می‌کنیم. زاویه $G\hat{A}C = ۱۱۲°,۳۰'$ است.



۶۴۲. زاویهٔ حاده xOy را درنظر می‌گیریم. ضلع ′Ox را امتداد می‌دهیم زاویهٔ $x'Ox = ۱۸۰°$ است. از نقطهٔ O عمود Oz را بر x′x اخراج می‌کنیم یعنی $x\hat{O}z = z\hat{O}x' = ۹۰°$ است. زاویهٔ ′yOx مکمل زاویهٔ xOy و زاویهٔ yOz متمم این زاویه است. تفاضل این دو زاویه، زاویهٔ x′Oz است که °۹۰ است. پس حکم مسأله برقرار است.

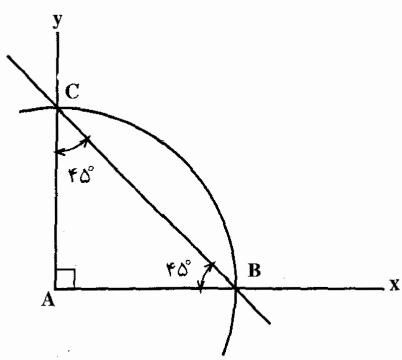


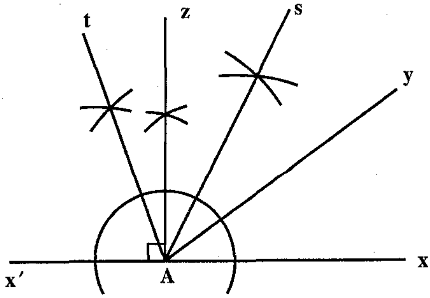
۶۴۳. پاره‌خط BC به‌طول دلخواه a را رسم می‌کنیم و روی آن مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را بنا می‌کنیم. برای این کار به مرکز B و به شعاع a ، سپس به مرکز C و به شعاع 1 دایره‌ای رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ A یکدیگر را قطع کنند. از A به B و C وصل می‌کنیم.



هریک از زاویه‌های این مثلث $A\hat{B}C = A\hat{C}B = B\hat{A}C = ۶۰^\circ$ است. با در دست داشتن زاویهٔ ۶۰° زاویه‌های خواسته شده را رسم می‌کنیم. برای رسم زاویهٔ ۱۲۰° خط راست دلخواه xy را رسم می‌کنیم. نقطهٔ اختیاری O را روی آن درنظر می‌گیریم. زاویه نیمخط Oz را چنان رسم می‌کنیم که $z\hat{O}y = ۶۰^\circ$ باشد. در این صورت $z\hat{O}x = ۱۲۰^\circ$ است. نیمخط Ot نیمساز زاویهٔ zOy را رسم می‌کنیم. زاویهٔ $t\hat{O}y = ۳۰^\circ$ و زاویهٔ $t\hat{O}x = ۱۵۰^\circ$ است. اکنون Os نیمساز زاویهٔ $t\hat{O}y$ را رسم می‌کنیم. زاویهٔ $s\hat{O}y = ۱۵^\circ$ است. از O عمود Or را بر xy اخراج می‌کنیم زاویهٔ $r\hat{O}s = ۷۵^\circ$ است. زاویهٔ $q\hat{O}r = ۱۵^\circ$ را مجاور زاویهٔ $r\hat{O}y = ۹۰^\circ$ رسم می‌کنیم زاویهٔ $q\hat{O}y = ۱۰۵^\circ$ است.

۶۴۴. مثلثی قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین رسم می‌کنیم. هریک از زاویه‌های حادهٔ آن برابر ۴۵° می‌باشند. برای این کار نخست زاویهٔ قائمه xAy را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز A و به شعاع دلخواه دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دو ضلع زاویه را در دو نقطهٔ B و C قطع کند. خط BC را رسم می‌کنیم. زاویه‌های ABC و ACB هرکدام مساوی ۴۵° می‌باشند.





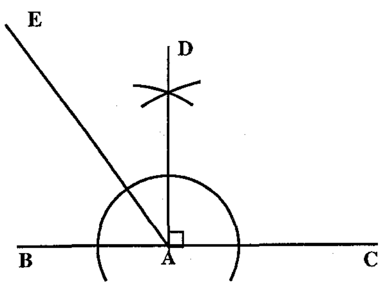
۶۴۵. زاویهٔ حادهٔ داده شده xAy را درنظر می‌گیریم.

الف. یکی از دو ضلع این زاویه به‌عنوان مثال نیمخط Ox را امتداد می‌دهیم و Ox′ می‌نامیم. زاویهٔ yOx′ مکمل زاویهٔ A است.

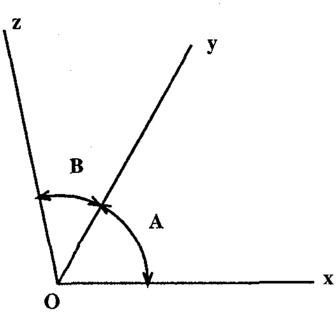
ب. از نقطهٔ O عمود Oz را بر xx′ اخراج می‌کنیم. زاویهٔ zAy متمم زاویهٔ A است.

پ. نیمساز زاویهٔ yAx′ را رسم می‌کنیم هریک از دو زاویهٔ tAx′ و tAy نصف مکمل زاویهٔ A هستند.

ت. نیمساز زاویهٔ zOy را رسم می‌کنیم. هریک از دو زاویهٔ zAs و sAy نصف متمم زاویهٔ A می‌باشند.



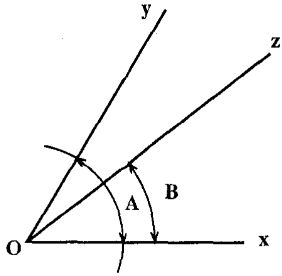
۶۴۶. خط اختیاری BC را رسم می‌کنیم. از یک نقطه مانند A روی BC، عمودی بر آن اخراج می‌کنیم. هریک از زاویه‌های BAD و CAD برابر $90°$ است. حال زاویهٔ A را مجاور یکی از دو زاویه به‌عنوان مثال مجاور با زاویهٔ CAD رسم می‌کنیم. زاویهٔ $C\hat{A}E = 90° + \hat{A}$ است.



۶۴۷. الف. $\hat{A}+\hat{B}$

$$x\hat{O}y = \hat{A}\ ,\ \ y\hat{O}z = \hat{B} \Rightarrow x\hat{O}z = \hat{A}+\hat{B}$$

ب. $\hat{A}-\hat{B}$

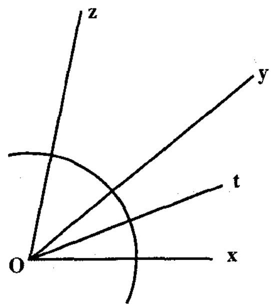


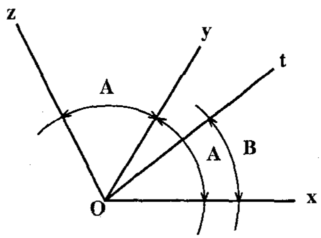
$$x\hat{O}y = \hat{A}$$

$$x\hat{O}z = \hat{B}$$

$$y\hat{O}z = \hat{A}-\hat{B}$$

پ. $۲\hat{B}-\hat{A}$





ت. $۲\hat{A}-\hat{B}$

$$x\hat{O}y = y\hat{O}z = \hat{A}\ ,\ \ x\hat{O}z = ۲\hat{A}$$

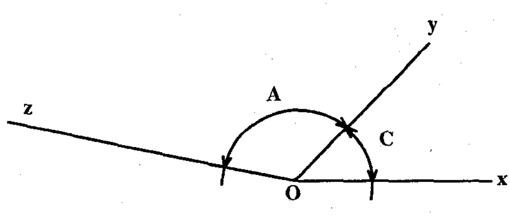
$$x\hat{O}t = \hat{B} \Rightarrow t\hat{O}z = ۲\hat{A}-\hat{B}$$

ث. زاویهٔ yOz در قسمت (ب) را دو برابر می‌کشیم.

۶۴۸. الف. $\hat{A}+\hat{C}$

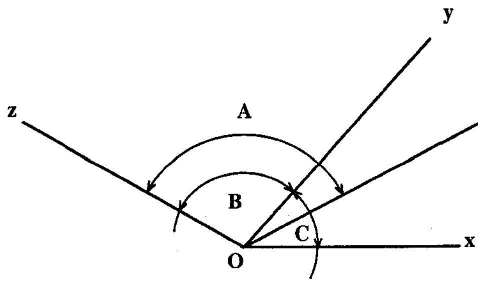
$$x\hat{O}y = \hat{C}$$

$$y\hat{O}z = \hat{A} \Rightarrow x\hat{O}z = \hat{A}+\hat{C}$$



(الف)

ب. $\hat{B}+\hat{C}-\hat{A}$

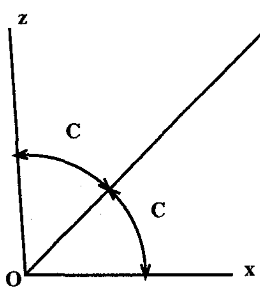


(ب)

$x\hat{O}y=\hat{C}\ ,\ \ y\hat{O}z=\hat{B}\Rightarrow x\hat{O}z=\hat{C}+\hat{B}$

$t\hat{O}z=\hat{A}\Rightarrow x\hat{O}t=\hat{C}+\hat{B}-\hat{A}$

پ. $۲\hat{C}$

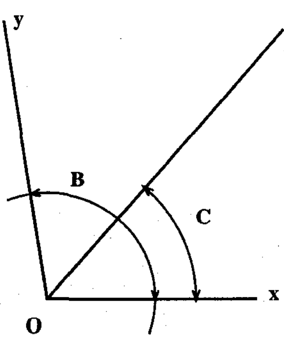


$x\hat{O}y=\hat{C}\ ,\ \ y\hat{O}z=\hat{C}$

$\Rightarrow z\hat{O}x=۲\hat{C}$

(پ)

ت. $\hat{B}-\hat{C}$

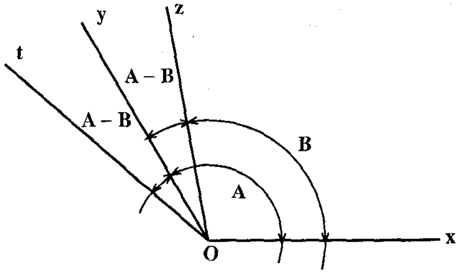


$x\hat{O}y=\hat{B}\ ,\ \ x\hat{O}z=\hat{C}$

$z\hat{O}y=x\hat{O}y-x\hat{O}z=\hat{B}-\hat{C}$

(ت)

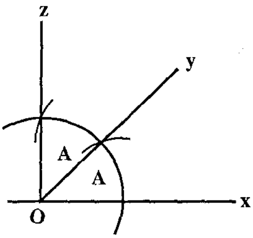
ث. $۲(\hat{A}-\hat{B})$



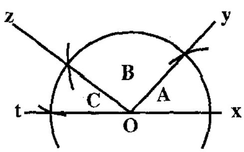
(ث)

$$x\hat{O}y=\hat{A},\ \ x\hat{O}z=\hat{B},$$
$$y\hat{O}z=x\hat{O}y-x\hat{O}z=\hat{A}-\hat{B},$$
$$y\hat{O}t=\hat{A}-\hat{B}\Rightarrow z\hat{O}t=۲(\hat{A}-\hat{B})$$

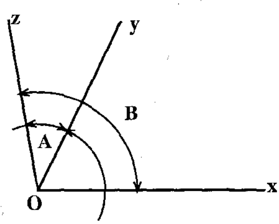
۶۴۹. الف. زاویهٔ xOy را همنهشت با زاویهٔ A می‌سازیم. سپس آن را دو برابر می‌کنیم.



ب. نخست زاویهٔ xOy را مساوی زاویهٔ A رسم می‌کنیم. سپس زاویهٔ $y\hat{O}z=\hat{B}$ را مجاور با زاویهٔ xOy رسم می‌کنیم و آن‌گاه زاویهٔ $z\hat{O}t=\hat{C}$ را مجاور زاویهٔ yOz رسم می‌کنیم. زاویهٔ tOx که یک زاویهٔ نیمصفحه است، برابر $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}$ است.



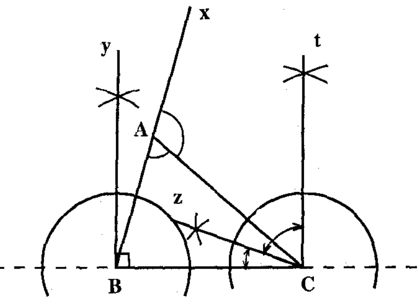
پ. زاویهٔ $x\hat{O}y$ را همنهشت با زاویهٔ B رسم می‌کنیم. سپس زاویهٔ yOz را همنهشت با زاویهٔ $\hat{A}$ چنان رسم می‌کنیم که در ضلع Oy با Ox مشترک باشند و Oz داخل زاویهٔ xOy واقع شود. زاویهٔ $x\hat{O}z=\hat{B}-\hat{A}$ است.



۶۵۰. الف. امتداد یکی از ضلعهای زاویهٔ A را رسم می‌کنیم. به‌عنوان مثال، نیمخط Ax در امتداد BA را رسم می‌کنیم، زاویهٔ $C\hat{A}x=۱۸۰^\circ-\hat{A}$، مکمل زاویهٔ A است.

ب. از نقطهٔ B عمود By بر ضلع BC اخراج می‌کنیم زاویهٔ yBA متمم زاویهٔ B است.

پ. نخست نیمخط Cz نیمساز زاویهٔ C را رسم می‌کنیم و سپس از C عمود Ct را بر CB اخراج می‌کنیم. زاویه $t\hat{C}z$ متمم زاویهٔ $\frac{۱}{۲}\hat{C}$ است.



فهرست منابع

۱. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد اول. هاورد. و. ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۲. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد دوم. هاورد. و. ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۳. آمادگی برای المپیادهای ریاضی. واسیلیف ـ گوتن ماخر ـ رابرت توم. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۴. آمادگی برای شرکت در المپیاد ریاضی ایران. هوشنگ شرقی. نشر علوم پایه.
۵. از اِردوش تا کی‌یفْ. راس هانسبرگر. ترجمهٔ علی ساوجی. انتشارات فاطمی.
۶. المپیادهای بین‌المللی ریاضی. جلد اول. ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ناس. نشر نام.
۷. المپیادهای بین‌المللی ریاضی. جلد دوم. مورای. اس. کلامکین. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ناس. نشر نام.
۸. المپیادهای ریاضی ایران. دکتر عبادا.. محمودیان. انتشارات دانشگاه شریف.
۹. المپیادهای ریاضی بلژیک. انجمن استادان ریاضی بلژیک. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات فاطمی.
۱۰. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد اول. ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۱۱. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد دوم. مورای.اس. کلامکین. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۱۲. المپیادهای ریاضی لنینگراد. د. فومین. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات انیشتن.
۱۳. المپیادهای ریاضی مجارستان. گردآوری یوزف کورشاک. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات مشعل دانشجو.
۱۴. بازآموزی و بازشناخت هندسه. هـ. س.م. کوکس تیر ـ س.ل. گریتزر. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات مدرسه.
۱۵. برگزیدهٔ مسائل هندسه. گروهی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ عادل ارشقی. مؤسسهٔ خدمات فرهنگی رسام.
۱۶. پانصد مسألهٔ ریاضی پیکارجو. ادوارد ج. باربو ـ ماری س. کلامکین ـ ویلیام اُ. ج. موزر. ترجمهٔ مهران اخباریفر. انتشارات فاطمی.
۱۷. تاریخ ریاضیات. جلد اول. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۸. تاریخ ریاضیات. جلد دوم. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۹. تاریخ هندسه. پی‌یر مارشال. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری، مؤسسهٔ مطبوعاتی علمی.
۲۰. تبدیلهای هندسی. جلد اول. ای. م. یاگلم. ترجمهٔ اسدا . . . کارشناس ـ عمید رسولیان. مرکز نشر دانشگاهی.
۲۱. تبدیلهای هندسی. جلد دوم. ای.م. یاگلم. ترجمهٔ محمد باقری. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۲۲. تبدیلهای هندسی. جلد سوم. ای.م. یاگلم. ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۲۳. ترسیمهای هندسی. تألیف احمد فیروزنیا. نشر گزاره.
۲۴. تئوری مقدماتی اعداد. جلدهای اول و دوم. دکتر غلامحسین مصاحب. انتشارات دهخدا.
۲۵. چگونه مسأله حل کنیم؟ جورج پولیا. ترجمهٔ احمد آرام. مؤسسهٔ مطبوعاتی کیهان.
۲۶. چند قضیهٔ هندسه. نگارش دکتر احمد شرف‌الدین.
۲۷. ۴۵۰ مسألهٔ ریاضی با حل. محمدحسین پرتوی ـ حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۸. حل‌المسائل هندسهٔ جدید. حسن ملایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۹. حل‌المسائل هندسه و مخروطات جدید. محمدحسین پرتوی ـ محدعلی پرتوی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۳۰. حل مسائل ریاضیات. محمدعلی واعظیان. ناشر محمدحسن علمی.

۳۱. حل مسائل متمم هندسه. دکتر کارونه. ترجمهٔ محمدباقر ازگمی ـ احسان‌ا... قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۳۲. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان چهارم ریاضی. دکتر حسینعلی شاهورانی. انتشارات کاویان.
۳۳. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان ششم ریاضی و داوطلبان متفرقه. عباس ذوالقدر.
۳۴. حل مسائل هندسه برای سال چهارم دبیرستان. محمدباقر ازگمی ـ غلامرضا بهنیا ـ باقر امامی ـ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۳۵. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی. داریوش شاهین. انتشارات جاویدان.
۳۶. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی و کنکور دانشکده‌ها. غلامعلی ریاضی ـ علی حسن‌زاده ـ محمدحسین پرتوی ـ محمدعابدی. مؤسسهٔ مطبوعاتی شرقی.
۳۷. حل مسائل هندسه و مخروطات برای سال ششم ریاضی و داوطلبان کنکور. محمدباقر ازگمی ـ پرویز شهریاری ـ غلامرضا بهنیا ـ باقر امامی ـ علی‌اصغر شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۳۸. حل مسأله از طریق مسأله. لورن سی. لارسن. ترجمهٔ علی ساوجی. انتشارات فاطمی.
۳۹. خلاصهٔ زندگینامهٔ علمی دانشمندان. بنیاد دانشنامهٔ بزرگ فارسی. انتشارات علمی و فرهنگی.
۴۰. خلاقیت ریاضی. جورج پولیا. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۴۱. خطهای راست و منحنی‌ها. ن. ب. واسی‌لی‌یو ـ و. ل. گوتن‌ماخر. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات تهران.
۴۲. دایره‌ها. دَن پِدو. ترجمهٔ مهدی مدغم. انتشارات فاطمی.
۴۳. دربی فیثاغورس. شه‌پان النسکی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات امیرکبیر.
۴۴. دورهٔ حل‌المسائل هندسه برای دبیرستان. جلدهای اول و دوم. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری. شرکت سهامی چاپ و انتشارات کتب ایران.
۴۵. دورهٔ کامل خودآموز هندسهٔ علوم تجربی. محمدهاشم رستمی. نشر گزاره.
۴۶. دورهٔ ماهنامهٔ ریاضیات. دکتر یحیی تابش.
۴۷. دورهٔ مجلهٔ ریاضی آشتی با ریاضیات و آشنایی با ریاضیات. پرویز شهریاری.
۴۸. دورهٔ مجلهٔ ریاضی برهان. انتشارات مدرسه.

۴۹. دورهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. وزارت آموزش و پرورش.
۵۰. دورهٔ مجلهٔ ریاضی یکان. عبدالحسین مصحفی.
۵۱. روش حل مسائل هندسه. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری. بنگاه مطبوعاتی فریدون علمی.
۵۲. ریاضیات زنده. ی. پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر میترا.
۵۳. ریاضیدانان نامی. دکتر اریک تمپل بل. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری. انتشارات امیرکبیر.
۵۴. سرگرمیهای هندسه. ی پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات خوارزمی.
۵۵. فنون مسأله حل کردن. استیون ج. کرانتس. ترجمهٔ مهران اخباریفر. انتشارات فاطمی.
۵۶. قضایا و مسائل هندسه. غلامرضا یاسی‌پور.
۵۷. گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی. جی. ال. برگرن. ترجمهٔ دکترمحمدقاسم وحیدی اصل ـ دکتر علیرضا جمالی. انتشارات فاطمی.
۵۸. مباحث و مسائل المپیاد ریاضی. فرشید الموتی ـ مازیار رامین راد ـ ... انتشارات پیشدانشگاهیان.
۵۹. محاسبه‌های برداری. پرویز شهریاری.
۶۰. مجموعهٔ مقالات و مسائل ریاضی. غلامرضا یاسی‌پور.
۶۱. مسأله‌های المپیادهای ریاضی امریکا. موری.اس. کلامکین. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. نشر بردار.
۶۲. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در شوروی سابق. واسیلیف ـ یه‌گوروف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر توسعه.
۶۳. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف. جمعی از ریاضیدانان شوروی سابق. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۶۴. مسأله‌های تاریخی ریاضیات. و. د. چیستیاکوف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر نی.
۶۵. مسأله‌های ریاضی آسان ولی .... گروهی از ریاضیدانان شوروی سابق. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر گستره.
۶۶. مسأله‌های دشوار ریاضی. کنستانتین شاختو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.

۶۷. مسائل ریاضیات مقدماتی. ای. خ. لیواشینسکی. ترجمهٔ غلامرضا بهنیا. انتشارات احمدعلمی.
۶۸. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد اول. چارلز.ت. سالکیند. ترجمهٔ سیدحسین جوادپور ـ محمد قزل ایاغ. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۶۹. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد دوم. چارلز. ت. سالکیند. ترجمهٔ علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۰. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد سوم. چارلز.ت. سالکیند. ارل. ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۱. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد چهارم. آرتینو گاگلیون ـ شل. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۲. مسائل مسابقات ریاضی (کنکورهای ریاضی شوروی سابق). و. س. کوشچنگو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۷۳. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ دکتر سعید فارابی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۴. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ محمدمهدی ابراهیمی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۵. مسائل و تمرینات لگاریتم و ریاضیات. احسانا... قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۷۶. مسائل هندسه و حل آنها برای داوطلبان کنکور دانشکده‌ها. محمدباقر ازگمی ـ پرویز شهریاری. مؤسسه مطبوعاتی احمد علمی.
۷۷. مسأله‌هایی در هندسهٔ مسطحه. ای.ف. شاریگین. ترجمهٔ ارشک حمیدی. انتشارات مبتکران.
۷۸. مکانهای هندسی. جلد اول. محمدهاشم رستمی. انتشارات مدرسه.
۷۹. مهمترین مسأله‌ها و قضیه‌های ریاضی. شکلیارسکی. چنتسوف یاگلوم. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات مجید. انتشارات فردوس.
۸۰. نابرابریها. پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۸۱. نابرابریهای هندسی. نیکولاس د. کازارینوف. ترجمهٔ دکتر محمدحسن بیژن زاده. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۸۲. نخستین گامها در المپیادهای ریاضی. جلدهای ۱، ۲، ۳و۴. ترجمه و تدوین ابراهیم دارابی. انتشارات پیشروان. انتشارات مبتکران.
۸۳. نه مقالهٔ هندسه. ابوالقاسم قربانی. دکترحسن صفاری.
۸۴. هندسهٔ ایرانی. ابوالوفا محمدبن محمد البوزجانی. ترجمهٔ سیدعلیرضا جذبی. انتشارات سروش.
۸۵. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی. ماروین جی. گرینبرگ. ترجمهٔ م. هـ.شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۸۶. هندسه برای سال ششم دبیرستانها (مجموعهٔ علوم). محمدباقر ازگمی. باقر امامی. غلامرضا بهنیا ـ پرویز شهریاری ـ علی اصغر شیح رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۸۷. هندسه تحلیلی. حسین غیور. محسن غیور. انتشارات صفی علیشاه.
۸۸. هندسه‌های جدید. جیمز. ار. اسمارت. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. انتشارات مدرسه.
۸۹. هندسه در گذشته و حال. ترجمه و تألیف پرویز شهریاری. از مجموعهٔ کتابهای سیمرغ.
۹۰. هندسهٔ دلپذیر. دکتر احمد شرف‌الدین. انتشارات مدرسه.
۹۱. هندسهٔ دوایر. دکتر محسن هشترودی. انتشارات مجلهٔ ریاضی یکان.
۹۲. هندسهٔ دورهٔ کاردانی تربیت معلم رشتهٔ علوم ریاضی. صفر باهمت شیروانه ده ـ حسین غیور ـ حسین دوستی. شرکت چاپ و نشر ایران.
۹۳. هندسهٔ ۱ و ۲ نظام جدید آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
۹۴. هندسهٔ سال چهارم دبیرستان. ابوالقاسم قربانی. دکترحسن صفاری.
۹۵. هندسهٔ سالهای اول، دوم، سوم و چهارم دبیرستان نظام قدیم آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
۹۶. هندسهٔ مسطحه. مقدمه‌ای بر هندسهٔ نوین مثلث و دایره. ناتان آلتشینرکورت. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۹۷. هندسهٔ مقدماتی از دیدگاه پیشرفته. ادوین. ا. موئیز. ترجمهٔ دکتر امیر خسروی ـ محمود نصیری. انتشارات مبتکران.
۹۸. هندسهٔ موئیز ـ دانز. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۹۹. هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستان. وزارت آموزش و پرورش.

100. EXERCICES DE GEOMETRIE PAR.F.G.M.

101. EXERCICES DE GEOMETRIE PAR.TH. CARONNET.

102. EXERCICES DE GEOMETRIE MODERNE (TRANSVERSALES) . PAR.G.PAPELIER.

103. EXERCICES DE GEOMETRIE MODERNE (POLES, POLAIRES, PLANS POLAI RES). PAR.G.PAPELIER.

104. GEOMETRIE A HIGHSCHOOL COURSE. SERGELAN GE. GENE MURROW.

105. GIANT COLOR BOOK OF MATHEMATICS. BY IRVING ADLER.

106. GUIDES PRATIQUES BORDAS.
II. GEOMETRIE PAR ROBERT ARDRE´.

107. JACOBS HAROLD. R. GEOMETRY.

108. LES NOMBRES ET LEURS MYSTERES PAR ANDRE´ WARUSFEL.

109. MATHEMATICS AROUND US.

110. MEMENTO DE MATHEMATIQUES USUELLES PAR.A.PONT.

111.PLANE GEOMETRY. WITH SPACE CONCEPTS. A.M. WELCHONS.W.R.KRICKENBERGER, HEIEN.R.PEARSON.

112. PRECIS DE GEOMETRIE PAR ANDRE´ VIEILLEFOND. P.TURMEL.

113. PRENTICE HALL GEOMETRY BY ROBERT KALINE, MARY KAY CORBITT.

114. PRINCIPLES AND PROBLEMS OF PLANE GEOMETRY BY BARNETT RICH.

115. RESOLUTION DES PROBLEMES ELEMENTAIRES DE GEOMETRIE PAR.E.J.HONNET.

116. THE COLLEGE BOARDS EXAMINATION BY. MARTIN MC. DONOUGH. ALVIN .J. HANSEN.