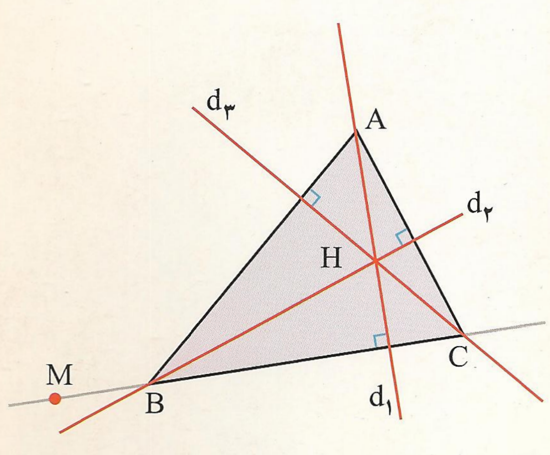
دایرة المعارف هندسه

۱۲

رسم شکلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه

(مثلث در حالت کلی، مثلث متساوی الاضلاع، مثلث متساوی الساقین، مثلث قائم الزاویه)



مؤلّف : محمدهاشم رستمی

بسم الله الرحمن الرحیم

دایرةالمعارف هندسه

«جلد دوازدهم»

رسم شکلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه

رسم مثلث

(مثلث در حالت کلی، مثلث متساوی الاضلاع، مثلث متساوی الساقین، مثلث قائم الزاویه)

مؤلف: محمّد هاشم رستمی

رستمی، محمدهاشم
دایرةالمعارف هندسه/ مؤلف محمدهاشم رستمی. ـ تهران : انتشارات مدرسه برهان، ۱۳۷۴ـ
ج. : مصور.
(ج. ۱۲) I.S.B.N:964-353-620-3
فهرستنویسی بر اساس اطلاعات فیپا (فهرستنویسی پیش از انتشار).
کتابنامه.
مندرجات : ج. ۱. خواص توصیفی اشکال هندسه... ج. ۱۲. رسم شکل‌های هندسی در هندسهٔ مسطحه، رسم مثلث.
۱. هندسه ـ مسائل، تمرینها و غیره. الف. انتشارات مدرسه برهان. ب.عنوان. ج. عنوان : دایرةالمعارف مسائل هندسه.
۲ د ۵ ر ۵ / ۵۰۱ QA ۵۱۶/۰۰۷۶

انتشارات مدرسه برهان
سازمان پژوهش و برنامه‌ریزی آموزشی
وزارت آموزش و پرورش

دایرةالمعارف هندسه
(جلد دوازدهم)
رسم شکلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه
مؤلف: محمدهاشم رستمی
یونیفرم جلد: گشتاسب فروزان
چاپ اول: ۱۳۸۱
تیراژ: ۵۰۰۰ نسخه
لیتوگرافی، چاپ و صحافی از: چاپخانه مدرسه برهان

شابک ۳-۶۲۰-۳۵۳-۹۶۴
ISBN 964-353-620-3

نشانی : تهران، خیابان سپهبد قرنی، پل کریمخان زند ، کوچه شهید محمود حقیقت‌طلب، شماره ۳۶
تلفن: ۹-۸۸۰۰۳۲۴ دورنویس (فاکس): ۸۹۰۳۸۰۹

فهرست

پیشگفتار

سپاس فراوان به درگاه پروردگار توانا که توفیق نگارش این مجموعه را عنایت فرمود. از سالها پیش نیاز به تألیف مجموعهٔ کاملی از هندسه، شامل تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه احساس می‌شد، تا علاقه‌مندان به این شاخه از ریاضی با دسترسی به تمام مطالب مربوط به هر مبحث و حل و بررسی آنها، نه تنها به احاطه‌ای کامل بر آن مبحث دست یابند، بلکه خود نیز قضیه‌ها و مسأله‌ها را تعمیم دهند و یا قضیه‌ها و مسأله‌های جدیدی در آن زمینه کشف کنند. به این جهت از حدود سی‌ونه سال پیش به جمع‌آوری تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسهٔ موجود در کتابهای ریاضی به زبان فارسی، ترجمه شده به فارسی و کتابهای خارجی که در اختیار یا در دسترس بود، برای تألیف دایرةالمعارف هندسه، اقدام، و تمام این مطالب براساس موارد زیر دسته‌بندی گردید :

۱. ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی در هندسه مسطحه.
۲. رابطه‌های متری در هندسه مسطحه.
۳. مکانهای هندسی و ترسیمهای هندسی در هندسهٔ مسطحه.
۴. تبدیلهای هندسی (انتقال، بازتاب، دوران،تجانس، انعکاس، ...)
۵. مقطعهای مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی و سهمی)
۶. هندسهٔ تحلیلی
۷. هندسهٔ فضایی
۸. هندسهٔ نااقلیدسی
...

هریک از عنوانهای بالا با توجه به حجم مطلب، یک یا چند جلد از این دایرةالمعارف را دربر می‌گیرد.
به‌عنوان مثال، رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه، شامل پنج جلد به شرح زیر است :

جلد ۳. نسبت پاره‌خطها در هندسهٔ مسطحه (نسبت و تناسب، قضیهٔ تالس و ...) ؛

جلد ۴. رابطه‌های متری در دایره ؛

جلد ۵. رابطه‌های متری در مثلث ؛ و دایره‌های محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر ؛

جلد ۶. رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه (مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلث‌متساوی‌الساقین، مثلث قائم‌الزاویه، ...) ؛ و دایره‌های محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر ؛

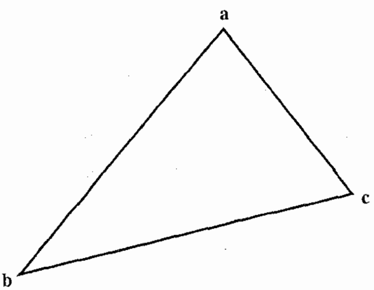
جلد ۷. رابطه‌های متری درچندضلعیها (چهارضلعی، چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای محاطی و محیطی، پنج‌ضلعی، شش‌ضلعی، ...) ؛

برای استفادهٔ بهینه از این مجموعه ذکر چند نکته ضروری است.

● در این مجموعه، صورت قضیه‌ها و مسأله‌ها، همراه با شکل آنها داده شده است، تا دانشجویان علاقه‌مند، پیش از مراجعه به راهنمایی یا حل، خود به حل آنها بپردازند (به استثنای برخی مسأله‌ها که رسم شکل توسط دانشجو، جزء هدفهای مسأله است).

● قضیه‌ها و مسأله‌های تاریخی هندسه، با ذکر تاریخچهٔ مختصری از زمان ارائه، و راه‌حلهای آنها در قسمت مربوط به خود آمده‌اند؛ و غیر از مواردی خاص، تنها یک یا دو راه حل از آنها مطرح شده است، زیرا برخی از این قضیه‌ها تاکنون به دهها و حتی به صدها راه، حل شده‌اند؛ مانند قضیهٔ فیثاغورس در مورد مثلث قائم‌الزاویه «در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع اندازهٔ وتر، برابر است با مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه، $a^۲ = b^۲ + c^۲$» که تنها به‌وسیلهٔ اقلیدوس از ۸ راه اثبات گردیده است.

● مسأله‌های المپیاد بین‌المللی ریاضی و المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، از جمله المپیادهای ریاضی ایران، و مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی کشورهای دیگر، به همان صورت ترجمه شده یا نوشته شده در متن اصلی، آورده شده است.



● علامتهای به‌کار گرفته شده در مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و کشورهای مختلف به همان صورت متن اصلی آنها آمده است. به‌عنوان مثال در المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، پاره‌خط AB به صورتهای $\overline{AB}$، $|AB|$، یا AB نشان داده شده است، و یا در المپیادهای ریاضی بلژیک از حروف کوچک مانند a، b و c برای نامگذاری رأسهای مثلث استفاده شده، مثلاً گفته شده «در مثلث abc به ضلعهای ab، bc و ...».

● در دیگر قضیه‌ها، مسأله‌ها، تعریفها و شکلها از حرفها و علامتهای یکسان استفاده شده است؛ به‌عنوان مثال، همه‌جا، نقطه‌ها با حرفهای بزرگ لاتین مانند نقطه‌های A، B و C و ...؛ و پاره‌خط AB به صورت AB و اندازهٔ زاویهٔ A به‌صورت $\hat{A}$ نشان داده شده است.

این جلد از دایرةالمعارف هندسه، رسم مثلث است که ۴ بخش دارد.

بخش ۱. رسم مثلث در حالت کلی

بخش ۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع

بخش ۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین

بخش ۴. رسم مثلث قائم‌الزاویه

هریک از بخشهای بالا به زیربخشهایی تقسیم شده است. به‌عنوان مثال بخش ۱. رسم مثلث در حالت کلی شامل زیربخشهای زیر است.

۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛ پاره‌خط، خط؛ زاویه؛ محیط،

مساحت، رابطهٔ متری.

۲.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : مثلث، مثلث و داده‌های دیگر.

۳.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : چندضلعی، چندضلعی و داده‌های دیگر.

۴.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : دایره، دایره و داده‌های دیگر.

هریک از زیربخشهای بالا، خود چند زیربخش دارد. به عنوان مثال زیربخش ۱.۱.رسم مثلث با معلوم بودن : نقطه ؛ ضلع ؛ ارتفاع، میانه، نیمساز ؛ پاره‌خط، خط ؛ زاویه ؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری، دارای ۴۵ زیربخش است که عبارتند از :

۱.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن نقطه

۲.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن ضلع

۳.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : ارتفاع، میانه، نیمساز

۴.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : پاره‌خط، خط

۵.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن زاویه

۶.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۷.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : نقطه، ضلع

۸.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : نقطه ؛ ارتفاع، میانه، نیمساز

۹.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : نقطه ؛ پاره‌خط، خط

۱۰.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : نقطه، زاویه

۱۱.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : نقطه ؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱۲.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : ضلع ؛ ارتفاع، میانه، نیمساز

۱۳.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : ضلع ؛ پاره‌خط، خط

۱۴.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : ضلع، زاویه

...

۲۲.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : نقطه ؛ ضلع ؛ ارتفاع، میانه، نیمساز

۲۳.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : نقطه ؛ ضلع ؛ پاره‌خط، خط

۲۴.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : نقطه ؛ ضلع ؛ زاویه

۲۵.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : نقطه ؛ ضلع ؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۲۶.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : ضلع ؛ ارتفاع، میانه، نیمساز ؛ پاره‌خط، خط

...

۴۲.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : نقطه ؛ ضلع ؛ ارتفاع، میانه، نیمساز ؛ پاره‌خط، خط

۴۳.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : نقطه ؛ ضلع ؛ ارتفاع، میانه، نیمساز ؛ زاویه

۴۴.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : نقطه ؛ ضلع ؛ پاره‌خط، خط ؛ زاویه

۱.۱.۴۵. رسم مثلث با معلوم بودن : نقطه ؛ ضلع ؛ زاویه ؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

هریک از زیربخشهای بالا خود شامل زیربخشهایی است. به‌عنوان مثال زیربخش

۱.۱.۱۲. رسم مثلث با معلوم بودن : ضلع ؛ ارتفاع، میانه، نیمساز، دارای ۶ زیربخش است :

۱.۱.۱۲.۱. رسم مثلث با معلوم بودن : ضلع، ارتفاع

۱.۱.۱۲.۲. رسم مثلث با معلوم بودن : ضلع، میانه

۱.۱.۱۲.۳. رسم مثلث با معلوم بودن : ضلع، نیمساز

۱.۱.۱۲.۴. رسم مثلث با معلوم بودن : ضلع، ارتفاع، میانه

۱.۱.۱۲.۵. رسم مثلث با معلوم بودن : ضلع، ارتفاع، نیمساز

۱.۱.۱۲.۶. رسم مثلث با معلوم بودن : ضلع، میانه، نیمساز

بیشتر زیربخشهای بالا، خود شامل زیربخشهای جدیدی هستند و در هر زیربخش، مسأله‌ها با نظم و ترتیب ویژه‌ای آمده‌اند.

قضیه‌ها و روشهای رسم شکلهای هندسی در بخش اول جلد ۱۱ دایرةالمعارف هندسه آمده است و در این جلد از تکرار آنها خودداری کرده‌ایم. برای کسب آگاهی بیشتر از روشها و ابزار رسم شکلهای هندسی، می‌توانید به جلد ۱۱ دایرةالمعارف هندسه مراجعه کنید.

مسأله‌های این جلد از دایرةالمعارف هندسه، براساس اجزای ثابت داده شده در صورت مسأله دسته‌بندی گردیده‌اند. به‌عنوان مثال، مثلثی رسم کنید که پای سه ارتفاع آن معلوم است ؛ در بخش ۱.۱.۱، رسم مثلث با معلوم بودن نقطه، آمده است و یا مسألهٔ : مثلثی رسم کنید که از آن ؛ اندازهٔ دو زاویهٔ B و C و مجموع دو ضلع $AB + AC = k$ معلوم است، در زیربخش ۱.۱.۱۴.۵. مجموع یا تفاضل دو ضلع، دو زاویه، آمده است و یا، مسألهٔ : مثلثی متشابه با یک مثلث مفروض رسم کنید به‌طوری که یک رأس آن در نقطه‌ای مفروض، رأس دیگر آن روی یک دایرهٔ مفروض، و رأس سوم آن روی یک خط مفروض قرار داشته باشد ؛ در زیربخش ۱.۴.۲.۱.۷. رسم مثلث با معلوم بودن : یک دایره، مثلث، نقطه، خط ؛ آمده است.

بنابراین دانش‌پژوهان با توجه به اجزای ثابت داده شده در صورت مسأله، براحتی می‌توانند مسأله موردنظر خود را پیدا کنند.

امید است این مجموعه مورد استفادهٔ دانش‌پژوهان ارجمند قرار گیرد و در شکوفایی استعدادهای آنان سهمی داشته باشد.

مؤلف مدعی نیست که این دایرةالمعارف کامل است. لیکن امیدوار است با همکاری ریاضیدانان محترم، استادان، دانشجویان، دانش‌آموزان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه، بتواند آن را کامل کند. لذا تقاضا دارد قضیه‌ها و مسأله‌هایی را که در این مجموعه وجود ندارد، همچنین نظرها و پیشنهادهای اصلاحی و ارشادی خود را برای رفع کاستیها، و تکمیل دایرةالمعارف، به نشانی ناشر یا مؤلف ارسال فرمایند. پیشاپیش از این همکاری ارزنده صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

مؤلف

رسم شکلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه

رسم مثلث

بخش ۱. رسم مثلث در حالت کلی
بخش ۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع
بخش ۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین
بخش ۴. رسم مثلث قائم‌الزاویه

بخش ۱

• رسم مثلث در حالت کلی

۱.۱.۲۱.۱. زاویه، محیط
۱.۱.۲۱.۲. زاویه، مساحت
۱.۱.۲۱.۳. زاویه، رابطه متری
۱.۱.۲۲. نقطه ؛ ضلع ؛ ارتفاع، میانه، نیمساز
۱.۱.۲۲.۱. نقطه، ضلع، ارتفاع
۱.۱.۲۲.۲. نقطه، ضلع، میانه
۱.۱.۲۲.۳. نقطه، ضلع، نیمساز
۱.۱.۲۳. نقطه ؛ ضلع ؛ پاره‌خط، خط
۱.۱.۲۳.۱. نقطه، ضلع، خط
۱.۱.۲۴. نقطه ؛ ضلع ؛ زاویه
۱.۱.۲۴.۱. یک نقطه، یک ضلع، یک زاویه
۱.۱.۲۵. نقطه ؛ ضلع ؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری
۱.۱.۲۵.۱. نقطه، ضلع، محیط
۱.۱.۲۶. نقطه ؛ ارتفاع، میانه، نیمساز ؛ پاره‌خط، خط
۱.۱.۲۶.۱. نقطه، ارتفاع، پاره‌خط
۱.۱.۲۶.۲. نقطه، ارتفاع، خط
۱.۱.۲۷. نقطه ؛ ارتفاع، میانه، نیمساز ؛ زاویه
۱.۱.۲۷.۱. نقطه، ارتفاع، زاویه
۱.۱.۲۸. نقطه ؛ ارتفاع، میانه، نیمساز ؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری
۱.۱.۲۸.۱. نقطه، ارتفاع، محیط
۱.۱.۲۹. نقطه ؛ پاره‌خط، خط ؛ زاویه
۱.۱.۲۹.۱. نقطه، پاره‌خط، زاویه
۱.۱.۳۰. نقطه ؛ پاره‌خط، خط ؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری
۱.۱.۳۰.۱. نقطه، پاره‌خط، محیط
۱.۱.۳۱. نقطه ؛ زاویه ؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری
۱.۱.۳۱.۱. نقطه، زاویه، محیط
۱.۱.۳۲. ضلع ؛ ارتفاع، میانه، نیمساز ؛ پاره‌خط، خط
۱.۱.۳۲.۱. ضلع، ارتفاع، پاره‌خط
۱.۱.۳۳. ضلع ؛ ارتفاع، میانه، نیمساز ؛ زاویه

۱.۴.۴.۱.۲.۴.۳. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، مجموع دو ضلع، مجموع دو ارتفاع
۱.۴.۴.۱.۲.۴.۴. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، تفاضل دو ضلع، یک ارتفاع
۱.۴.۴.۱.۲.۴.۵. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، تفاضل دو ضلع، تفاضل دو ارتفاع
۱.۴.۴.۱.۲.۵. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ضلع، پاره‌خط
۱.۴.۴.۱.۲.۶. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ضلع، زاویه
۱.۴.۴.۱.۲.۶.۱. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، یک ضلع، یک زاویه
۱.۴.۴.۱.۲.۶.۲. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، مجموع دو ضلع، زاویه
۱.۴.۴.۱.۲.۶.۳. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، تفاضل دو ضلع، زاویه
۱.۴.۴.۱.۲.۷. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ارتفاع ، زاویه
۱.۴.۴.۱.۲.۷.۱. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، یک ارتفاع، یک زاویه
۱.۴.۴.۱.۱.۷.۲. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، یک ارتفاع، تفاضل دو زاویه
۱.۴.۴.۱.۲.۸. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ارتفاع، محیط
۱.۴.۴.۱.۲.۹. شعاع دایرهٔ محاطی درونی ؛ زاویه ؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری
۱.۴.۴.۱.۲.۹.۱. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، زاویه، محیط
۱.۴.۴.۱.۲.۹.۲. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، زاویه، مساحت
۱.۴.۴.۲. رسم مثلث با معلوم بودن دایره‌های محاطی برونی یا شعاعهای آنها و داده‌های دیگر
۱.۴.۴.۲.۱. رسم مثلث با معلوم بودن دایره‌های محاطی برونی
۱.۴.۴.۲.۲. رسم مثلث با معلوم بودن شعاعهای دایره‌های محاطی برونی و داده‌های دیگر
۱.۴.۴.۲.۲.۱. شعاعهای دایره‌های محاطی برونی، ضلع
۱.۴.۴.۲.۲.۱.۱. دو شعاع دایرهٔ محاطی برونی، یک ضلع
۱.۴.۴.۲.۲.۱.۲. شعاع یک دایرهٔ محاطی برونی، یک ضلع ؛ مجموع دو ضلع دیگر

رسم مثلث

برای رسم مثلث در حالت کلی لازم است سه جزء از اجزای مثلث را بشناسیم، که لااقل یکی از این جزءها باید خطی (یک پاره‌خط) باشد.

پاره‌خط داده شده ممکن است یک ضلع، یک میانه، یک ارتفاع،... ؛ مجموع یا تفاضل دو تا از این عاملها ؛ شعاع دایره‌های محاطی یا شعاع دایرهٔ محیطی یا ...، باشد.

مسأله‌های مربوط به رسم مثلث بسیار زیاد و متنوع هستند و برای حل آنها قضیه‌های بسیاری از هندسه مورد استفاده قرار می‌گیرند. به همین دلیل نمی‌توان روشی کلی برای حل آنها بیان کرد. در این کتاب مسأله‌ها را بر اساس داده‌های آنها مرتب کرده‌ایم تا دانش‌پژوه، براحتی بتواند مسأله مورد نظر خود را پیدا کند.

نمادگذاری

برای نمادگذاری اجزای مثلث در این جلد از دایرة المعارف، عموماً از نمادهای زیر استفاده کرده‌ایم :

A، B و C برای نشان دادن رأسهای مثلث.

$\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ برای نشان دادن اندازهٔ زاویه‌های درونی مثلث.

a، b و c، بترتیب برای نشان دادن اندازهٔ ضلعهای روبه‌رو به رأسهای A، B و C.

$2p$، برای نشان دادن اندازهٔ محیط مثلث.

S، برای نشان دادن اندازهٔ مساحت مثلث.

h_a ، h_b و h_c ، بترتیب برای نشان دادن اندازهٔ ارتفاعهای نظیر ضلعهای a، b و c.

m_a ، m_b و m_c ، بترتیب برای نشان دادن اندازهٔ میانه‌های نظیر رأسهای A، B و C (یا ضلعهای a، b و c).

d_a ، d_b و d_c ، بترتیب برای نشان دادن اندازهٔ نیمسازهای زاویه‌های درونی رأسهای A، B و C.

d'_a ، d'_b و d'_c ، بترتیب برای نشان دادن اندازهٔ نیمسازهای زاویه‌های برونی رأسهای A، B و C.

r، برای نشان دادن اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث.

r_a، r_b و r_c بترتیب برای نشان دادن شعاع دایره‌های محاطی برونی مثلث مماس بر ضلعهای BC، AC و AB.

R، برای نشان دادن اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث.

(O, R)، برای نشان دادن دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R.

H، برای نشان دادن محل برخورد ارتفاعهای مثلث (مرکز ارتفاعی مثلث).

G، برای نشان دادن محل برخورد میانه‌های مثلث (مرکز ثقل مثلث).

O، برای نشان دادن مرکز دایرهٔ محیطی مثلث.

I، برای نشان دادن مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث.

I_a، I_b و I_c ،بترتیب برای نشان دادن مرکزهای دایره‌های محاطی برونی مماس بر ضلعهای BC، AC و AB.

در بعضی از کتابها برای نمادگذاری اجزای مثلث از علامتهای دیگری استفاده شده است. به عنوان مثال در المپیادهای ریاضی بلژیک، رأسهای مثلث با حروف کوچک مانند a، b و c نشان داده شده است و یا در برخی کتابها نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی مثلث را با t_a، t_b، t_c، t'_a، t'_b و t'_c نشان داده‌اند و یا محیط مثلث با ۲s نشان داده شده است. این گونه مسأله‌ها را با همان نمادهای داده شده در این مجموعه آورده‌ایم تا دانش‌پژوهان با صورتهای دیگر نمادگذاریها نیز آشنا شوند.

بخش ۱. رسم مثلث در حالت کلی

۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛ پاره‌خط، خط؛ زاویه؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن نقطه

۱.۱.۱.۱. دو رأس، یک نقطه

۱. از مثلثی، محل دو رأس و محل نقطهٔ لوموان مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۲. از مثلثی، محل مرکز ارتفاعی و محل دو رأس، داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۳. از مثلثی، دو رأس و مرکز ثقل داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۴. مثلثی رسم کنید که از آن، دو رأس و مرکز دایرهٔ نه نقطهٔ آن داده شده است.

۲.۱.۱.۱. یک رأس، دو نقطه

۵. از مثلث ABC، رأس A، نقطهٔ M وسط ضلع BC و H محل برخورد ارتفاعهای مثلث معلوم است. آن را رسم کنید.

۶. مثلثی رسم کنید که نقطهٔ A رأس، O مرکز دایرهٔ محیطی و H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای آن معلوم باشد.

۷. مثلثی رسم کنید که از آن، یک رأس، محل برخورد ارتفاعها، و مرکز دایرهٔ نه نقطه، معلوم باشد.

۸. مثلثی رسم کنید که از آن ؛ یک رأس، پای ارتفاع گذرنده از آن رأس و مرکز دایرهٔ نه نقطه داده شده است.

۹. مثلثی رسم کنید که از آن، مرکز دایرهٔ نه نقطه، یک رأس و پای ارتفاع نظیر یکی از دو ضلعی که از آن رأس می‌گذرند، داده شده است.

۱۰. از مثلثی، محل مرکز ارتفاعی، محل یک رأس و محل نقطهٔ برخورد ضلع مقابل آن رأس با ضلع متناظر مثلث ارتفاعی، مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۱۱. مثلثی را که محل نقطهٔ لوموان، محل مرکز دایرهٔ محیطی و محل یک رأس آن مفروض است (K,O ،A)، رسم کنید.

۱۲. از مثلثی، محل یک رأس، محل مرکز ثقل، و محل نقطهٔ لوموان داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱۳. مثلثی رسم کنید که از آن، یک رأس و نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی داخلی و خارجی نظیر ضلع روبه‌روی آن رأس با این ضلع، معلوم است (A, X, X_a) .

۱۴. از مثلثی، محل یک رأس و محل دو نقطهٔ تماس ضلع مقابل آن رأس با دایره‌های محاطی خارجی نسبت به دو ضلع دیگر، داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱.۳. سه نقطهٔ غیر رأس

۱.۱.۱.۳.۱. وسطهای سه ضلع

۱۵. نقطه‌های A' ، B' و C' وسطهای ضلعهای مثلث معلومند. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱.۳.۲. سه نقطهٔ اویلر

۱۶. از مثلثی سه نقطهٔ اویلر در دست است. مثلث را رسم کنید.

تعریف. نقطه‌های اویلر، وسطهای پاره‌خطهای واصل بین مرکز ارتفاعی و رأسهای مثلث می‌باشند.

۱.۱.۱.۳.۳.سه نقطهٔ دیگر

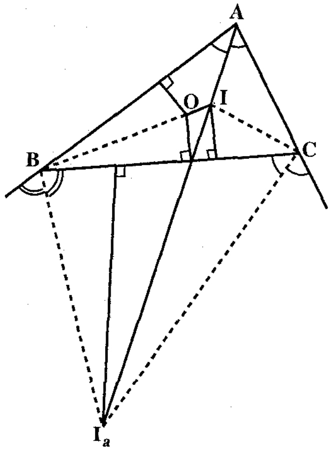
۱۷. مثلثی رسم کنید که از آن، مرکز دایرهٔ محیطی و مرکز ثقل و وسط یکی از ضلعهایش معلوم باشد $(O,G ، A')$.

۱۸. از مثلثی، محل دو نقطهٔ اویلر و محل مرکز ثقل داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱۹. از مثلثی، محل پای ارتفاع، محل پای میانهٔ وارد بر قاعده، و محل مرکز دایرهٔ محاطی داخلی آن $(I, A' ، D)$، مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۲۰. مرکز دایرهٔ محیطی O از مثلث ABC ، و محل مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای II_bI_c ،

II_cI_a مفروض است. مثلث ABC را رسم کنید.



۲۱. از مثلثی، مرکز دایرهٔ محیطی، مرکز دایرهٔ محاطی درونی و مرکز یکی از دایره‌های محاطی برونی داده شده است. مثلث را رسم کنید. (I_a، I، O)

۲۲. از مثلثی، مرکزهای سه دایرهٔ محاطی برونی داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۲۳. از مثلثی، مرکز دایرهٔ محاطی درونی و مرکزهای دو دایرهٔ محاطی برونی داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۲۴. از مثلث ABC، محل مرکز دایرهٔ نه نقطه و محل مرکزهای دایره‌های محیطی مثلثهای CAH و ABH که H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است، مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۲۵. مثلثی را رسم کنید که از آن، وسط یک ضلع و وسط یکی از کمانهایی که به وسیلهٔ این ضلع روی دایرهٔ محیطی آن پدید می‌آید و نقطهٔ اویلر مربوط به رأس مقابل به این ضلع در دست باشد.

۲۶. مثلثی را که محل تصویرهای نقطهٔ لوموان آن بر روی سه ضلع مفروض است، رسم کنید.

۲۷. مثلثی در صفحه، رسم کنید که از آن، جای رأسهای سوم سه مثلث متساوی‌الاضلاعی که بر ضلعهای مثلث مزبور و در خارج آن رسم می‌شوند، معلوم باشد.

۲۸. مثلثی رسم کنید که از آن، مرکزهای سه مربعی که بر ضلعها در خارج آن بنا می‌شوند در دست باشند.

۱.۱.۱.۴.n نقطه

۲۹. روی یک صفحه، n نقطه داده شده است؛ در ضمن، همهٔ آنها روی یک خط راست نیستند. ثابت کنید، دست کم، به تعداد $\frac{۱}{۲}(n-۱)(n-۲)$ مثلث می‌توان رسم کرد که رأسهای آنها روی این نقطه‌ها باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۸

۵.۱.۱.۱. مسأله‌های ترکیبی

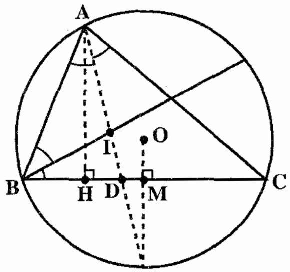
۳۰. الف. شش نقطه روی یک صفحه وجود دارد، به نحوی که هیچ سه نقطه‌ای از آن بر یک امتداد نیستند. ثابت کنید بین آنها سه نقطه وجود دارد که از وصل کردن آنها به یکدیگر مثلثی به دست می‌آید که زاویهٔ بزرگتر آن، کمتر از ۱۲۰ درجه نیست.

ب. اگر روی یک صفحهٔ کاغذ پنج نقطه وجود داشته باشد، با در نظر گرفتن هر سه نقطهٔ آن، روی هم می‌توان ۳۰ زاویه تشکیل داد. کوچکترین این زاویه‌ها را α می‌نامیم. این نقطه‌ها چگونه باشند که زاویهٔ α، بیشترین مقدار ممکن باشد؟

۳۱. اگر O و I بترتیب مرکزهای دایره‌های محیطی و محاطی داخلی مثلث ABC، و نقطه‌های M ،H و D بترتیب پای میانه و ارتفاع و نیمساز رأس A روی ضلع BC باشد، مثلث ABC را در هر یک از حالتهای زیر رسم کنید:

الف. نقطه‌های M،O و I معلوم باشند.

ب. نقطه‌های H،O و D معلوم باشند.



۳۲. پای ارتفاعهای یک مثلث داده شده‌اند.

۱. مثلث را رسم کنید.

۲. مثلث جواب را Y می‌نامیم. پای ارتفاعهای مثلث Y را به هم وصل می‌کنیم، مثلث X به دست می‌آید. طول ضلعهای مثلث Y را بر حسب طول ضلعهای مثلث X به دست آورید.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۸۹۶

۳۳. با مفروض بودن محل هر سه نقطه از پنج نقطهٔ زیر، آیا می‌توان مثلث در حالت کلی را رسم نمود؟ آیا می‌توان مثلث متساوی‌الساقین را رسم کرد؟

یک رأس، مرکزثقل، نقطهٔ لوموان، دو نقطهٔ بروکار.

این کار را برای همهٔ حالتها انجام دهید.

۲.۱.۱. ضلع

۱.۲.۱.۱. اندازهٔ سه ضلع

۳۴. مثلث ABC را چنان رسم کنید که $AB = ۶cm$ ، $BC = ۳cm$ و $AC = ۴cm$ باشد.

۲.۲.۱.۱. یک ضلع، نسبت دو ضلع دیگر، مجموع مربعهای دو ضلع دیگر

۳۵. از مثلثی؛ $b^۲ + c^۲$ ، $\frac{b}{c}$ و $BC = a$ در دست است، آن را رسم کنید.

۳.۲.۱.۱. یک ضلع، نسبت دو ضلع دیگر، تفاضل مربعهای دو ضلع دیگر

۳۶. از مثلثی؛ $b^۲ - c^۲$ و نسبت $\frac{b}{c}$ و ضلع $BC = a$ در دست است، آن را رسم کنید.

۴.۲.۱.۱. یک ضلع، مجموع و تفاضل مربعهای دو ضلع دیگر

۳۷. از مثلثی، یک ضلع، مجموع مربعها، و تفاضل مربعهای دو ضلع دیگر داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۳.۱.۱. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۳.۱.۱. ارتفاع

۱.۱.۳.۱.۱. اندازهٔ سه ارتفاع

۳۸. مثلثی رسم کنید که طول سه ارتفاع آن معلوم است.

۳۹. آیا می‌توان مثلثی ساخت که ارتفاعهایش $h_a = ۳$ ، $h_b = ۲$ و $h_c = ۴$ باشد؟

۴۰. حدود m را چنان بیابید که بتوانیم مثلثی با ارتفاعهای $h_a = \frac{۱}{۲}$ ، $h_b = \frac{۱}{m}$ و $h_c = \frac{۱}{۳}$ بسازیم.

۲.۳.۱.۱. میانه

۱.۲.۳.۱.۱. اندازهٔ سه میانه

۴۱. سه میانهٔ مثلث معلومند. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۳.۳. نیمساز

۱.۱.۳.۳.۱. اندازهٔ سه نیمساز

۴۲. آیا با دانستن طول نیمسازهای یک مثلث، می‌توان مثلث را ساخت؟

۱.۱.۳.۴. ارتفاع، میانه

۱.۱.۳.۴.۱. دو ارتفاع، یک میانه

۴۳. مثلث ABC را با معلوم بودن h_a و h_b (ارتفاعهای نظیر رأسهای A وB) و m_a (میانهٔ نظیر رأس A) رسم کنید.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۰

۴۴. از مثلثی ارتفاعهای نظیر دو ضلع b وc و میانهٔ نظیر ضلع a داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۳.۴.۲. یک ارتفاع، دو میانه یا شبه میانه

۴۵. مثلث ABC را با معلوم بودن h_b ، m_b و m_c رسم کنید.

۴۶. مثلث ABC را با معلوم بودن h_a ، m_b و m_c رسم کنید.

۴۷. از مثلث ABC، میانهٔ AM، شبه میانهٔ AS و ارتفاع AH داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۳.۵. ارتفاع، نیمساز

۱.۱.۳.۵.۱. دو ارتفاع، یک نیمساز

۴۸. مثلثی را با مفروض بودن h_b ، h_c و d_a رسم کنید.

۱.۱.۳.۶. ارتفاع، میانه، نیمساز

۴۹. از مثلثی ارتفاع، میانه و نیمساز رسم شده از یک رأس(h_a ، m_a ، t_a) داده شده‌اند. مثلث را رسم کنید.

۵۰. مثلثی رسم کنید که از آن، سه جزء از اجزای داده شدهٔ زیر معلومند:
ارتفاع، میانه، نیمساز و شبه میانهٔ نظیر یک رأس.

۴.۱.۱. پاره‌خط، خط

۱.۴.۱.۱. پاره‌خط

۵۱. n پاره‌خط راست داده شده است و می‌دانیم، از هر ۱ − n پاره‌خط راست دلخواه، می‌توان یک (۱ − n) ضلعی درست کرد. ثابت کنید، با سه تا از این پاره‌خطهای راست می‌توان یک مثلث رسم کرد.

۲.۴.۱.۱. خط

۱.۲.۴.۱.۱. خطهایی که سه میانه روی آنها هستند

۵۲. مثلثی را رسم کنید که میانه‌های آن روی سه خط همرس معلوم قرار گیرند. نشان دهید که یکی از رأسهای آن به دلخواه می‌تواند روی یکی از این خطها در نظر گرفته شود.

۲.۲.۴.۱.۱. خطهایی که نیمسازها روی آنها هستند

۵۳. مثلثی رسم کنید که خطهای مفروض X، Y و Z نیمسازهای زاویه‌های A، B و C آن باشند.

۳.۲.۴.۱.۱. سه عمودمنصف ضلعهای مثلث

۵۴. مثلثی رسم کنید که خطهای مفروض X، Y و Z عمودمنصفهای ضلعهای BC، BA و AB از آن باشند.

۵۵. سه خط همرس r، q و p معلوم هستند. مثلث ABC را رسم کنید که این سه خط، سه عمودمنصف ضلعهای آن باشند.

۳.۴.۱.۱. پاره‌خط ، خط

۵۶. طول نیمساز داخلی یک زاویهٔ مثلث و راستاهای هر سه نیمساز این مثلث مفروض است. مثلث را رسم کنید.

مسأله‌هایی مشابه، مشتمل بر نیمسازهای خارجی، یا هم نیمسازهای داخلی و هم نیمسازهای خارجی را بررسی کنید.

۵۷. **الف.** پاره‌خط AB و خط دلخواهی که آن را قطع کرده است، داده شده‌اند. مثلث ABC را چنان بسازید که این خط نیمساز زاویهٔ C از آن باشد.

ب. سه خط راست همرس در صفحه‌ای داده شده است. روی یکی از این خطها نقطه‌ای مشخص می‌کنیم. مثلثی بسازید که این نقطه یکی از رأسهای آن و سه خط همرس، سه نیمساز آن باشد.

۵.۱.۱. زاویه

۱.۵.۱.۱. زاویه‌های درونی مثلث

۵۸. اندازهٔ دو زاویه مثلثی داده شده است. چند مثلث می‌توان رسم کرد که این زاویه‌ها، زاویه‌های درونی آن باشند.

۲.۵.۱.۱. زاویهٔ درونی، زاویهٔ دیگر

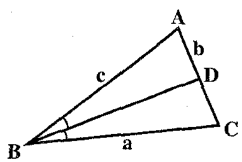
۵۹. قضیه. یک زاویهٔ مثلث و یکی از زاویه‌های بروکار آن، شکل مثلث را تعیین می‌کنند.

۶.۱.۱. رابطهٔ متری

۶۰. مثلث ABC را که AD، BE و CF ارتفاعهای آن هستند، با مفروض بودن حاصلضربهای BC . CD، CA . AE و AB . BF رسم کنید.

۷.۱.۱. نقطه، ضلع

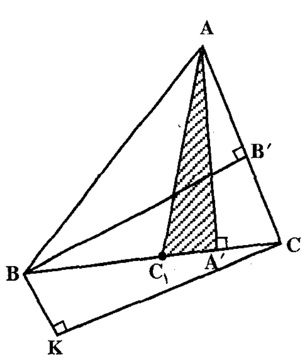
۱.۷.۱.۱. یک نقطه، دو ضلع



۶۱. از مثلث ABC، اندازه‌های دو ضلع $AC = b$ ، $AB = c$ ، و نقطهٔ D، پای نیمساز زاویهٔ درونی B روی ضلع AC داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۸.۱.۱. نقطه؛ ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۸.۱.۱. نقطه، ارتفاع



۶۲. از مثلث ABC، اندازه‌های دو ارتفاع AA' و BB' و نقطهٔ C_1 قرینهٔ رأس C نسبت به ارتفاع AA' معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۹. نقطه؛ پاره‌خط، خط

۱.۱.۹.۱. نقطه، پاره‌خط

۶۳. از مثلثی، محل نقطه‌های برخورد قاعده با ارتفاع، نیمساز داخلی و میانهٔ رسم شده از رأس مقابل، که آنها را بترتیب با D، U و A′ نشان می‌دهیم ، مفروض است ؛ همچنین، فاصلهٔ رأس در نظر گرفته شده از مرکز ارتفاعی، d مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۶۴. از مثلثی ، محل نقطه‌های O و A، و طولهای HA و GA داده شده‌اند. مثلث را رسم کنید.(O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث، A یک رأس مثلث، H مرکز ارتفاعی و G مرکز ثقل مثلث است.)

۱.۱.۹.۲. نقطه، خط

۱.۱.۹.۲.۱. یک نقطه، دو خط

۶۵. از مثلثی، راستای ضلعهای AB و AC و محل نقطهٔ لوموان مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۹.۲.۲. نقطه، سه خط

۱.۱.۹.۲.۲.۱. یک نقطه، سه ارتفاع

۶۶. سه خط همرس d_1، d_2 و d_3 و نقطهٔ A روی یکی از این سه خط داده شده‌اند. مثلثی رسم کنید که این سه خط ارتفاعهای آن و نقطهٔ A یک رأسش باشد.

۶۷. سه خط همرس d_1، d_2 و d_3 و نقطهٔ M غیر واقع بر آنها داده شده است. مثلثی رسم کنید که این سه خط ارتفاعهای آن و نقطهٔ M نقطه‌ای از یک ضلع آن باشد.

۱.۱.۹.۲.۲.۲. یک نقطه، خطهایی که میانه‌ها روی آنها هستند

۶۸. سه خط همرس d_1، d_2 و d_3 در نقطه O و نقطهٔ A روی یکی از این سه خط داده شده‌اند. مثلثی رسم کنید که نقطهٔ A پای یکی از میانه‌ها و این سه خط میانه‌های آن باشد.

۱.۱.۹.۲.۲.۳. یک رأس، خطهایی که سه نیمساز روی آن هستند

۶۹. از مثلثی، یک رأس و خطهای راستی که نیمسازهای مثلث روی آنها قرار دارند، معلوم است. مثلث را رسم کنید.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۱

۷۰. از مثلثی، سه نیمساز زاویه‌های داخلی و یک نقطه از یک ضلع معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۴.۲.۲.۹.۱.۱. یک نقطه، سه عمودمنصف

۷۱. سه خط همرس d_1، d_2 و d_3 و نقطهٔ A داده شده‌اند. مثلثی رسم کنید که نقطهٔ A پای یکی از سه عمودمنصف و این سه خط عمودمنصف ضلعهای آن باشند.

۷۲. از مثلثی، سه عمودمنصف ضلعها و یک نقطه از یک ضلع آن معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۳.۲.۹.۱.۱. دو نقطه، یک خط

۷۳. از مثلث ABC، رأسهای B و C بر خط D واقعند و M و N پای ارتفاعهای وارد از رأسهای B و C نیز معلومند. مثلث را رسم کنید.

۴.۲.۹.۱.۱. دو نقطه، دو خط

۷۴. یک رأس و محل برخورد سه میانهٔ مثلثی معلوم است. در صورتی که دو رأس دیگر بر دو خط Δ و Δ' واقع باشند، مثلث را رسم کنید.

۷۵. از مثلثی، محل مرکز ثقل، محل یک رأس و راستای دو ضلعی که از این رأس می‌گذرند، داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

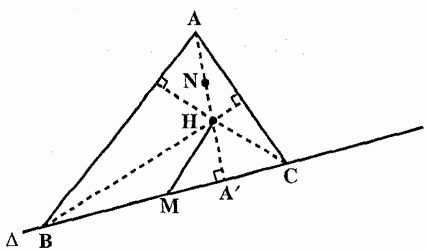
۷۶. از مثلثی، محل مرکز ارتفاعی و محل یک رأس، و راستای ضلعهایی که از آن رأس می‌گذرند، داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۷۷. از مثلثی، محل مرکز دایرهٔ نه نقطه و محل رأس A، و راستاهای نیمساز داخلی t و ارتفاع h که از رأس مفروض A می‌گذرند، داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۵.۲.۹.۱.۱. سه نقطه، یک خط

۷۸. از مثلثی، رأس A و Ax امتداد ضلع AB و M و M' نقطه‌های برخورد نیمسازهای رأس C با AB در دست است. رأس B را به دست آورید. آیا رأس C را هم می‌توان به دست آورد؟ چه شرطهایی برای این کار لازم است؟

۷۹. از مثلثی، مرکز ارتفاعی، محل نقطه‌ای روی دایرهٔ نه نقطه، محل نقطهٔ وسط قاعده، و محل خط بی‌نهایتی که قاعده روی آن قرار دارد، داده شده است؛ مثلث را رسم کنید.



۱.۱.۹.۲.۶. مسأله‌های ترکیبی

۸۰.**الف.** نقطهٔ M و دو خط l_1 و l_2 در صفحه داده شده‌اند. مثلث ABC را طوری رسم کنید که M ضلع AB را به نسبت مفروض $k = \frac{BM}{AM}$ تقسیم کند و l_1 و l_2 عمودمنصفهای BC و CA باشند.

ب. دو نقطهٔ M و N و خط l در صفحه داده شده‌اند. مثلث ABC را طوری رسم کنید که M و N ضلعهای AB و BC را به نسبتهای مفروض $\frac{BM}{MA} = k_1$ و $\frac{CN}{NB} = k_2$ تقسیم کنند و l عمودمنصف AC باشد.

۱.۱.۱۰. نقطه، زاویه

۱.۱.۱۰.۱. یک نقطه، یک زاویه

۸۱. زاویهٔ xOy و نقطهٔ A درون آن داده شده‌اند. مثلثی رسم کنید که یک رأس آن A و دو رأس دیگرش روی دو ضلع زاویه قرار داشته و محیطش کمترین مقدار ممکن باشد.

۱.۱.۱۰.۲. دو نقطه، یک زاویه

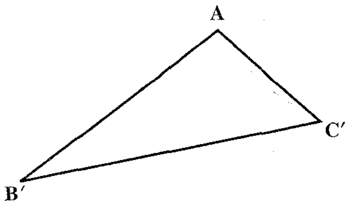
۸۲. مثلثی رسم کنید که از آن، مرکز دایرهٔ نه نقطه و اندازه و مکان یک زاویه معلوم باشد.

۱.۱.۱۰.۳. نقطه، تفاضل دو زاویه

۸۳. از مثلثی، تفاضل زاویه‌های قاعده، و محل نقطه‌های برخورد ارتفاع، میانه، و نیمساز رسم شده از رأس مقابل قاعده با قاعده، مفروض است؛ مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۱. نقطه؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱.۱۱.۱. نقطه، محیط



۸۴. در شکل داده شده، نقطهٔ A رأس و پاره‌خط $B'C'$ مساوی محیط مثلث ABC است. این مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۱.۲. نقطه، رابطهٔ متری

۸۵. سه نقطهٔ A_1 ، B_1 و C_1 داده شده‌اند. این نقطه‌ها را به عنوان نقطه‌های تقسیم ضلعهای مثلث ABC، طوری اختیار می‌کنیم که آنها را به نسبت ۱ :۲ تقسیم کنند. مثلث ABC را رسم کنید.

۱.۱.۱۲. ضلع؛ ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۱.۱۲.۱. ضلع، ارتفاع

۱.۱.۱۲.۱.۱. دوضلع، یک ارتفاع

۸۶. از مثلث ABC، اندازه ضلعهای $AB = c$ ، $AC = b$ و طول ارتفاع $AH = h_a$ معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۸۷. از مثلث ABC، اندازه‌های a، c و h_a معلوم‌اند. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۲.۱.۲. دو ضلع، مجموع یا تفاضل دو ارتفاع

۸۸. مثلث ABC را با داده‌های b، c و $h_b + h_c$ رسم کنید.

۸۹. مثلث ABC را با معلوم بودن دو ضلع b و c و تفاضل دو ارتفاع $h_b - h_c$ رسم کنید.

۱.۱.۱۲.۱.۳. یک ضلع، دو ارتفاع

۹۰. دو ارتفاع و یکی از دو ضلعی که ارتفاعشان داده شده است، معلوم‌اند. مثلث را رسم کنید.

۹۱. از مثلث ABC، یک ضلع و اندازهٔ ارتفاعهای وارد بر دو ضلع دیگر داده شده‌اند. مثلث

را رسم کنید.

۹۲. از مثلث ABC اندازه‌های h_a ، h_b و $\frac{a}{c}=k$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۲.۱.۴. یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر، ارتفاع

۹۳. مثلثی رسم کنید که ضلع a و ارتفاع h_a و مجموع دو ضلع دیگر یعنی $b+c$ از آن معلوم است.

۹۴. از مثلثی، قاعده، ارتفاع وارد بر قاعده و مجموع دو ضلع دیگر $(a ، h_a ، b+c)$ داده شده‌اند. با محاسبهٔ شعاع دایرهٔ محیطی، مثلث را رسم کنید.

۹۵. از مثلثی، یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر و ارتفاع وارد بر یکی از این دو ضلع داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۲.۱.۵. یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر، مجموع یا تفاضل دو ارتفاع

۹۶. از مثلثی، اندازه‌های یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر و مجموع ارتفاعهای نظیر این دو ضلع داده شده‌اند. $(h_b+h_c ، b+c ، a)$ مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۲.۱.۶. یک ضلع، تفاضل دو ضلع دیگر، ارتفاع

۹۷. مثلثی را رسم کنید که از آن، قاعده، تفاضل دو ضلع دیگر، و ارتفاع وارد بر یکی از این دو ضلع $(h_c ، b-c ، a)$ داده شده است.

۹۸. از مثلثی، یک ضلع، ارتفاع وارد بر این ضلع و تفاضل دو ضلع دیگر داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۲.۱.۷. یک ضلع، نسبت دو ضلع دیگر، ارتفاع

۹۹. از مثلثی، ضلع a و ارتفاع وارد بر آن و نسبت دو ضلع دیگر $\frac{b}{c}=\frac{m}{n}$ معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۲.۱.۸. یک ضلع، مجموع مربعهای دو ضلع دیگر، ارتفاع

۱۰۰. مثلثی رسم کنید که ضلع a و ارتفاع h_a و $b^2+c^2=k^2$ از آن، معلوم است.

۱.۱.۱۲.۱.۹. یک ضلع، تفاضل مربعهای دو ضلع دیگر، ارتفاع

۱۰۱. از مثلث ABC، a و h_a و تفاضل مربعهای دو ضلع دیگر در دست است. آن را رسم کنید.

۱.۱.۱۲.۲. ضلع، میانه

۱.۱.۱۲.۲.۱. دو ضلع، یک میانه

۱۰۲. از مثلث ABC، اندازه‌های $AB = c$ ، $AC = b$ و طول میانهٔ $AM = m_a$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱۰۳. مثلث ABC را با معلومات زیر رسم کنید:
دو ضلع و میانهٔ وارد بر یکی از آنها.

۱.۱.۱۲.۲.۲. یک ضلع، دو میانه

۱۰۴. از مثلثی، دو میانه و یکی از دو ضلعی که میانهٔ آنها داده شده است، مفروضند، مثلث را رسم کنید.

۱۰۵. مثلث ABC را با معلوم بودن اندازه‌های $BC = a$ و میانه‌های $BB' = m_b$ و $CC' = m_c$ رسم کنید.

۱.۱.۱۲.۲.۳. یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر، میانه

۱۰۶. مثلثی را که a، m_a و $b+c$ از آن داده شده است، رسم کنید.

۱.۱.۱۲.۲.۴. یک ضلع، تفاضل دو ضلع دیگر، میانه

۱۰۷. از مثلثی، قاعده، میانهٔ وارد بر قاعده، و تفاضل دو ضلع دیگر داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۲.۲.۵. یک ضلع، حاصلضرب دو ضلع دیگر، میانه

۱۰۸. مطلوب است رسم مثلثی که از آن AC. AB و میانه AM، و ضلع BC معلوم است.

۱.۱.۱۲.۲.۶. یک ضلع، نسبت دو ضلع دیگر، میانه

۱۰۹. مطلوب است ترسیم مثلث ABC که از آن ضلع $BC = a$ و نسبت دو ضلع $\frac{AB}{AC} = k$ و طول میانهٔ نظیر ضلع BC در دست است.

۱.۱.۱۲.۲.۷. یک ضلع، مجموع مربعهای دو ضلع دیگر، میانه

۱۱۰. مثلثی با داده‌های a، $b^2 + c^2 = k^2$ و m_b رسم کنید.

۱.۱.۱۲.۲.۸. یک ضلع، تفاضل مربعهای دو ضلع دیگر، نسبت میانه‌ها

۱۱۱. مثلثی رسم کنید که از آن یک ضلع و نسبت میانه‌های وارد بر دو ضلع دیگر و تفاضل مربعهای این دو ضلع معلوم باشد.

۱.۱.۱۲.۲.۹. نسبت ضلعها، مجموع میانه‌ها

۱۱۲. مثلثی را رسم کنید که از آن نسبتهای a:b و b:c و مجموع میانه‌های آن در دست است.

۱.۱.۱۲.۳. ضلع، نیمساز

۱.۱.۱۲.۳.۱. دو ضلع، یک نیمساز

۱۱۳. از مثلثی، دو ضلع AB و AC و نیمساز AD معلومند. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۲.۳.۲. مجموع دو ضلع، نیمساز

۱۱۴. مثلثی را رسم کنید که از آن، نیمسازهای داخلی و خارجی یک زاویه، و مجموع ضلعهای آن زاویه $(b+c, t'_a, t_a)$ داده شده است.

۱.۱.۱۲.۳.۳. یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر، نیمساز

۱۱۵. از مثلثی، قاعده، نیمساز داخلی زاویهٔ مقابل قاعده و مجموع دو ضلع جانبی $(a, t_a, b+c=s)$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۲.۳.۴. یک ضلع، تفاضل دو ضلع دیگر، نیمساز

۱۱۶. از مثلثی، قاعده، نیمساز زاویهٔ خارجی مقابل به قاعده و تفاضل دو ضلع دیگر $(a, t'_a, b-c)$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۲.۳.۵. یک ضلع، نسبت دو ضلع دیگر، نیمساز

۱۱۷. مطلوب است رسم مثلث ABC که از آن طول ضلع $BC=a$، نسبت دو ضلع $\frac{AB}{AC}=k$ و طول نیمساز داخلی (یا خارجی) زاویهٔ A در دست است.

۱.۱.۱۲.۳.۶. نسبت ضلعها، رابطهٔ بین نیمسازها

۱۱۸. از مثلثی، نسبت ضلعها $\frac{a}{b}$ و $\frac{b}{c}$ و رابطهٔ $d_a+d_b-d_c=l$ بین نیمسازهای زاویه‌های درونی داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۲.۴. ضلع، ارتفاع، میانه

۱.۱.۱۲.۴.۱. یک ضلع، یک ارتفاع، یک میانه

۱۱۹. از مثلث ABC، اندازهٔ ضلع BC، اندازهٔ ارتفاع AD و اندازهٔ میانهٔ AM داده شده است.

مثلث را رسم کنید.

۱۲۰. از مثلث ABC، ضلع BC، ارتفاع و میانهٔ رأس B معلومند. آن را رسم کنید.

۱۲۱. از مثلث ABC، ضلع BC، ارتفاع AH و میانهٔ BM معلومند. آن را رسم کنید.

۱۲۲. مثلثی رسم کنیدکه ضلع BC، میانهٔ رأس A و ارتفاع رأسB از آن معلوم است.

۱۲۳. از مثلث ABC، اندازه‌های c، h_b و m_a داده شده‌اند. مثلث را رسم کنید.

۲.۴.۱۲.۱.۱. یک ضلع، یک ارتفاع، مجموع دو میانه

۱۲۴. از مثلث ABC اندازه‌های a ، h_a و $m_b + m_c$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۳.۴.۱۲.۱.۱. یک ضلع، یک ارتفاع، نسبت دو میانه

۱۲۵. از مثلثی، یک ضلع، ارتفاع وارد بر آن ضلع و نسبت میانه‌های نظیر دو ضلع دیگر داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۴.۴.۱۲.۱.۱. مجموع دو ضلع، یک ارتفاع، یک میانه

۱۲۶. از مثلث ABC، ارتفاع و میانهٔ رأس A و مجموع دو ضلع $AB + AC = l$ در دست است. مثلث را رسم کنید.

۵.۴.۱۲.۱.۱. نسبت دو ضلع، ارتفاع، میانه

۱۲۷. مطلوب است ترسیم مثلث ABC که از آن، طول ارتفاع نظیر ضلع BC و طول میانهٔ نظیر ضلع BC و نسبت دو ضلع $\frac{AB}{AC} = k$ در دست است.

۱۲۸. مثلث ABC را با معلوم بودن h_a ، m_a و $\frac{b}{c} = k$ رسم کنید.

۵.۱۲.۱.۱. ضلع، ارتفاع، نیمساز

۱.۵.۱۲.۱.۱. یک ضلع، یک ارتفاع، یک نیمساز

۱۲۹. از مثلثی، قاعده، ارتفاع وارد بر قاعده و نیمساز زاویهٔ مقابل قاعده (a, h_a, t_a) داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱۳۰. از مثلث ABC اندازه‌های یک ضلع و ارتفاع و نیمساز نظیر یک ضلع دیگر داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۲.۵.۱۲.۱.۱. مجموع دو ضلع، ارتفاع، نیمساز

۱۳۱. مثلث ABC را با مفروض بودن h_a ، t_a و $b + c$ رسم کنید.

۱.۱.۱۲.۵.۳. حاصلضرب دو ضلع، ارتفاع، نیمساز

۱۳۲. مثلثی را با مفروض بودن h_a ، d_a و $bc = k^2$ رسم کنید.

۱۳۳. از مثلثی، نسبت دو ضلع، ارتفاع وارد بر ضلع سوم و نیمساز زاویهٔ درونی نظیر زاویهٔ روبه‌رو به ضلع سوم داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱۳۴. از مثلثی، نسبت دو ضلع، ارتفاع وارد بر ضلع سوم و اندازهٔ نیمساز زاویهٔ برونی روبه‌رو به ضلع سوم داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۲.۶. ضلع، میانه، نیمساز

۱.۱.۱۲.۶.۱. نسبت ضلعها، یک میانه، یک نیمساز

۱۳۵. از مثلث ABC، اندازه‌های $\frac{b}{c}$ ، m_b و d_a داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۳. ضلع، پاره‌خط، خط

۱.۱.۱۳.۱. ضلع، پاره‌خط

۱۳۶. از مثلث ABC، اندازه‌های دو ضلع a ، b ، و c' تصویر ضلع سوم روی ضلع دوم داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱۳۷. از مثلثی، دو ضلع و فاصلهٔ رأس مشترک این دو ضلع از مرکز دایرهٔ محاطی داخلی این مثلث (AI, c, b) داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۳.۲. یک ضلع، تفاضل دو ضلع دیگر، خط

۱۳۸. مثلثی رسم کنید که ضلع a، $b - c = l$ معلوم بوده و رأس C از آن بر خط مفروض D واقع شود.

۱۴.۱.۱. ضلع، زاویه

۱.۱۴.۱.۱. دو ضلع، یک زاویه

۱۳۹. مثلثی را با اطلاعات داده شده رسم کنید:

$c = ۶cm$ ، $b = ۴cm$ ، $\hat{A} = ۶۹^\circ$

۱۴۰. مثلثی را با معلوم بودن دو ضلع و زاویهٔ مقابل به یکی از آن دو ضلع رسم کنید$(a, b, \hat{A} = \alpha)$.

۱۴۱. دو ضلع از مثلثی داده شده‌اند و می‌دانیم میانه‌های وارد بر این دو ضلع در مثلث، بر هم عمودند. مثلث را رسم کنید.

المپیادهای ریاضی روسیه، ۱۹۶۲

۱۴۲. مثلث ABC را در صورتی که: $AC = b$ ، $AB = c$ و $A\hat{M}B = \omega$ که در آن M وسط پاره‌خط BC و $\omega < ۹۰^\circ$ است، رسم کنید. ثابت کنید که جواب، اگر و فقط اگر:

$$b\tan\frac{\omega}{۲} \le c < b$$

باشد، موجود است. تساوی در چه حالتی برقرار است؟

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۱

۲.۱۴.۱.۱. دو ضلع، تفاضل دو زاویه

۱۴۳. از مثلثی، ضلعهای AB و AC و اختلاف زاویه‌های B و C یعنی $\hat{B} - \hat{C} = \alpha$ در دست است. آن را رسم کنید.

۱۴۴. مثلث ABC را با معلوم بودن $\hat{A} - \hat{B} = \alpha$ ، $AB = c$ و $AC = b$ رسم کنید.

۳.۱۴.۱.۱. دو ضلع، رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱۴۵. از مثلثی، ضلعهای b و c در دست است و می‌دانیم که زاویهٔ Bی مثلث، دو برابر زاویهٔ C است. مثلث را رسم کنید $(B = ۲C)$.

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۱۴۶. طولهای دو ضلع مثلث، بترتیب، برابر با a و b $(b>a)$ و می‌دانیم، زاویهٔ روبه‌رو به یکی از این ضلعها، ۳ برابر زاویهٔ روبه‌رو به ضلع دیگر است. به کمک پرگار و خط‌کش، مثلث را رسم کنید.

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۴.۱۴.۱.۱. یک ضلع، دو زاویه

۱۴۷. مثلثی را با مفروض بودن $\hat{C}=۶۰^\circ$ ، $\hat{A}=۴۵^\circ$ و $b=۶cm$ رسم کنید.

۱۴۸. مثلثی را با مفروض بودن یک ضلع، یک زاویه، و زاویهٔ بروکار رسم کنید.

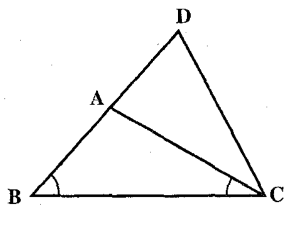
۱۴۹. مثلثی را رسم کنید که از آن، قاعده و زاویه‌هایی که میانهٔ وارد بر قاعده با دو ضلع دیگر می‌سازد، داده شده است.

۱۵۰. مثلثی را با مفروض بودن قاعدهٔ $BC=a$ ، زاویهٔ مجاور به قاعده $(\hat{B}=\beta)$ و زاویه‌ای که میانهٔ رسم شده از رأس این زاویه با ضلع روبه‌روی این زاویه می‌سازد $(B\hat{B'}C=\alpha)$ ، رسم کنید.

۱۵۱. از مثلثی زاویهٔ A و ضلع b و زاویهٔ $(m_a \hat{,} a)$ معلوم است. آن را رسم کنید.

۵.۱۴.۱.۱. مجموع یا تفاضل دو ضلع، دو زاویه

۱۵۲. مثلثی رسم کنید که زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ و مجموع دو ضلع $AB+AC=k$ از آن معلوم است.



۱۵۳. از مثلثی، اندازهٔ دو زاویه و تفاضل دو ضلع داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۶.۱۴.۱.۱. مجموع ضلعها یا تفاضل ضلعها، یک زاویه

۱۵۴. از مثلثی، زاویهٔ مقابل به قاعده، و مجموع قاعده با هر یک از دو ضلع دیگر، داده شده است. $(a+b\ ,\ a+c ، \hat{A})$. این مثلث را رسم کنید.

۱۵۵. مثلثی را رسم کنید که $a-b$ ،$\hat{A}$ و $a-c$ از آن داده شده است.

۱۵۶. مثلثی را رسم کنید که $a+b$ ،$\hat{A}$ و $a-c$ از آن داده شده است.

۱.۱.۱۴.۷. یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر، زاویه

۱۵۷. مثلثی را رسم کنید که از آن، قاعده، زاویهٔ روبه‌رو به قاعده و مجموع دو ضلع دیگر $(b+c\ ,\ \hat{A},a)$ داده شده است.

۱۵۸. مثلثی را رسم کنید که از آن $BC=a$ ،$\hat{B}=\beta$ و $AB+AC=I$ داده شده است.

۱.۱.۱۴.۸. یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر، تفاضل دو زاویه

۱۵۹. مثلثی را با معلومات زیر رسم کنید:

$$a\ ,\ b+c=l\quad ,\quad \left|\hat{B}-\hat{C}\right|=\alpha$$

۱۶۰. از مثلثی، اندازه‌های یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر و زاویه‌ای که میانهٔ نظیر ضلع اول با این ضلع می‌سازد، داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۴.۹. یک ضلع، تفاضل دو ضلع دیگر، زاویه

۱۶۱. مثلثی را رسم کنید که از آن، قاعده، زاویهٔ روبه‌روی قاعده،و تفاضل دو ضلع دیگر $(b-c، \hat{A}، a)$ داده شده است.

۱۶۲. مثلثی را رسم کنید که طول یک ضلع، تفاضل دو ضلع دیگر، و زاویهٔ بین ضلع اول و بزرگترین دو ضلع دیگر معلوم باشد.

۱۶۳. مثلثی با داده‌های زیر رسم کنید:

$$AB-AC=l\quad ,\quad \hat{B}=\beta\quad ,\quad BC=a$$

۱۶۴. از مثلثی، اندازه‌های یک ضلع، تفاضل دو ضلع دیگر و زاویه‌ای که میانه وارد بر ضلع اول با این ضلع می‌سازد، داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۴.۱۰. یک ضلع، تفاضل دو ضلع دیگر، تفاضل دو زاویه

۱۶۵. از مثلثی، اندازهٔ یک ضلع، تفاضل دو ضلع دیگر، و تفاضل زاویه‌های روبه‌رو به این دو ضلع داده شده‌اند. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۴.۱۱. یک ضلع، حاصلضرب دو ضلع دیگر، زاویه

۱۶۶. مثلثی را با مفروض بودن a ، $\hat{A}$ و bc رسم کنید.

۱.۱.۱۴.۱۲. یک ضلع، حاصلضرب دو ضلع دیگر، تفاضل دو زاویه

۱۶۷. از مثلث ABC، اندازهٔ یک ضلع، تفاضل زاویه‌های مجاور این ضلع و حاصلضرب دو ضلع دیگر داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱۶۸. از مثلثی، اندازهٔ زاویه $\hat{A}$ و حاصلضرب دو ضلع این زاویه داده شده است و می‌دانیم که طول قاعدهٔ آن باید کمترین مقدار ممکن را داشته باشد، این مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۴.۱۳. یک ضلع، نسبت دو ضلع دیگر، زاویه

۱۶۹. از مثلث ABC، اندازهٔ ضلع BC، نسبت دو ضلع $\frac{AB}{AC}$ و اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ معلوم است، مثلث را رسم کنید.

۱۷۰. مطلوب است رسم مثلث ABC که از آن طول $BC = a$ ، نسبت دو ضلع $\frac{AB}{AC} = k$ و اندازهٔ زاویهٔ B در دست است.

۱.۱.۱۴.۱۴. یک ضلع، رابطهٔ بین ضلعها، زاویه

۱۷۱. از مثلث ABC، ضلع c، زاویهٔ $\hat{A}$ و رابطهٔ $\frac{a+b}{c} = k$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱۷۲. از مثلث ABC، اندازه‌های ضلع $BC = a$ ، زاویهٔ $\hat{A}$ و نسبت $\frac{b+c}{b-c} = k$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۴.۱۵. یک ضلع، رابطهٔ بین ضلعها، رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱۷۳. از مثلثی، ضلع a، $a+b-c=d$ معلوم است و بعلاوه $\hat{C}=2\hat{B}$ است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۴.۱۶. یک ضلع، مجموع مربعهای دو ضلع دیگر، زاویه‌ها

۱۷۴. مثلث ABC را با معلوم بودن a، $\hat{A}$ و $b^2+c^2=d^2$ رسم کنید.

۱۷۵. از مثلث ABC، a ، $\hat{B}$ و مجموع مربعهای دو ضلع دیگر در دست است. آن را رسم کنید.

۱.۱.۱۴.۱۷. یک ضلع، تفاضل مربعهای دو ضلع دیگر، زاویه

۱۷۶. مثلثی را با معلومات زیر رسم کنید:

$$a\ ,\ \hat{A}\ , b^2-c^2=l^2$$

۱۷۷. از مثلثی، یک ضلع، یک زاویهٔ مجاور به این ضلع و تفاضل مربعهای دو ضلع دیگر داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۴.۱۸. تفاضل دو ضلع، نسبت دو ضلع، زاویه

۱۷۸. از مثلثی، $\hat{C}$ ، $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$ و $a-b=l$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۴.۱۹. رابطهٔ بین ضلعها، زاویه

۱۷۹. مثلثی رسم کنید که ضلعهای آن تشکیل یک تصاعد عددی می‌دهند، و اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ از آن نیز معلوم است.

۱۸۰. چند مثلث می‌توان رسم کرد که ضلعهای آن سه عدد طبیعی متوالی بوده و یک زاویهٔ آن دو برابر دیگری باشند؟

الف) ۱ ب) ۲ ج) ۳

د) ۴ هـ) هیچ

۱.۱.۱۴.۲۰. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۸۱. از مثلث ABC، اندازه‌های c، $b+c$ و $\hat{A}$ داده شده‌اند. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۴.۲۱. مسأله‌های ترکیبی

۱۸۲. اگر در مثلثی $\hat{B} = n\hat{C}$ باشد، به ازای $n = ۱$ با دانستن یک ضلع، مثلث همواره قابل ترسیم است. همچنین برای $n = ۲$ مثلث با دانستن دو ضلع همواره قابل ترسیم است. برای $n = ۳$ مثلث برای ضلعهای b و c قابل ترسیم است. برای $n = ۴$ مثلث با دانستن ضلعهای a و c قابل ترسیم است. برای $n = ۵$ مثلث با دانستن دو ضلع b و c قابل ترسیم است (زیرا در حالت $n = ۴$، ضلع b با معادلهٔ دو مجذوری و در حالت $n = ۵$، ضلع a، با معادلهٔ دو مجذوری مشخص می‌شوند). از $n = ۶$ به بعد، مثلث $\hat{B} = ۶\hat{C}$ قابل ترسیم هندسی نیست. حالتهای $n = ۴$ و $n = ۵$ را رسم و بحث کنید.

هندسهٔ دوایر. دکتر محسن هشترودی

۱.۱.۱۵. ضلع؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱.۱۵.۱. ضلع، محیط

۱.۱.۱۵.۱.۱. یک ضلع، محیط

۱۸۳. از مثلث ABC ، اندازهٔ محیط و ضلع a داده شده است. آیا می‌توان مثلث را رسم کرد؟ آیا شرط دیگری لازم است؟

۱.۱.۱۵.۱.۲. نسبت ضلعها، محیط

۱۸۴. محیط و نسبت مربعهای دو ضلع زاویهٔ قائمهٔ یک مثلث قائم‌الزاویه داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۵.۲. ضلع، مساحت

۱.۱.۱۵.۲.۱. یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر، مساحت

۱۸۵. مثلثی را با داده‌های روبه‌رو رسم کنید : $BC = a$, $b + c = l$, S مساحت آن

۳.۱۵.۱.۱. ضلع، رابطهٔ متری

۱۸۶. از مثلث ABC، اندازهٔ ضلعهای $AB = c$ ، $AC = b$ و نسبت $\frac{h_a}{a}$ داده شده است.
مثلث را رسم کنید.

۱۸۷. از مثلثی، دو ضلع b و c در دست است. و می‌دانیم که نسبت میانهٔ m_a به ضلع a برابر k است. مثلث را رسم کنید.

۴.۱۵.۱.۱. ضلع، محیط، مساحت

۱۸۸. از مثلثی، اندازه‌های یک ضلع، محیط و مساحت آن داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱۸۹. از مثلثی، دو ضلع b و c در دست است، و نسبت نیمساز V_a و ضلع a در دست است. آن را رسم کنید.

۵.۱۵.۱.۱. ضلع، رابطهٔ بین ضلعها، رابطهٔ متری

۱۹۰. از مثلثی، ضلع $BC = a$ و $S = \frac{m_a^۲}{۴}$ معلوم و رابطهٔ $b^۲ + c^۲ = ۲a^۲$ داده شده است.
مثلث را رسم کنید.

۱۶.۱.۱. ارتفاع، میانه، نیمساز؛ پاره‌خط، خط

۱.۱۶.۱.۱. ارتفاع، پاره‌خط

۱۹۱. از مثلث ABC، اندازهٔ ارتفاع AD، و دوپاره‌خط DC و AE داده شده‌اند. (E پای ارتفاع رأس B است)، مثلث را رسم کنید.

۲.۱۶.۱.۱. میانه، پاره‌خط

۱۹۲. از مثلث ABC، طول قطعه خطهای BH و CH (H پای ارتفاع ضلع BC) و طول میانهٔ BB' معلومند، مثلث را رسم کنید.

۱۹۳. از مثلث ABC، اندازهٔ میانهٔ AM، شبه میانهٔ AS و پاره‌خط حاصل از پای میانه و پای شبه میانه معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۱۷.۱.۱. ارتفاع، میانه، نیمساز؛ زاویه

۱.۱۷.۱.۱. ارتفاع، زاویه

۱.۱.۱۷.۱.۱. دو ارتفاع، یک زاویه

۱۹۴. مثلث ABC را با معلوم بودن زاویهٔ A و ارتفاعهای رأسهای B و C رسم کنید.

۱۹۵. از مثلث ABC، اندازهٔ دو ارتفاع AH و BK ، و اندازهٔ زاویهٔ $\hat{B}$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۲.۱.۱۷.۱.۱. یک ارتفاع، دو زاویه

۱۹۶. دو زاویه و ارتفاع وارد بر ضلع بین آن دو، داده شده‌اند. مثلث را رسم کنید.

۳.۱.۱۷.۱.۱. مجموع دو ارتفاع، دو زاویه

۱۹۷. از مثلثی ، دو زاویه و مجموع دو ارتفاع معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۴.۱.۱۷.۱.۱. مجموع سه ارتفاع، دو زاویه

۱۹۸. از مثلث ABC، اندازه‌های دو زاویهٔ $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و مجموع ارتفاعها، $h_a + h_b + h_c$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۵.۱.۱۷.۱.۱. تفاضل دو ارتفاع، دو زاویه

۱۹۹. از مثلثی، اندازه‌های دو زاویه و تفاضل دو ارتفاع داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۲.۱۷.۱.۱. میانه، زاویه

۱.۲.۱۷.۱.۱. دو میانه، یک زاویه

۲۰۰. از مثلثی، یک زاویه و میانه‌های وارد بر ضلعهای آن زاویه معلوم است. مثلث را رسم کنید($\hat{A}$ ، m_b و m_c معلوم است).

۲۰۱. از مثلثی یک زاویه و میانهٔ وارد بر ضلع مقابل آن و میانهٔ دیگر در دست است. آن را رسم کنید.

۲۰۲. از مثلث ABC، اندازه‌های دو میانهٔ m_b و m_c و زاویه‌ای که میانهٔ AM و ضلع BC می‌سازد، داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۲.۲.۱۷.۱.۱. یک میانه، دو زاویه

۲۰۳. از مثلث ABC، اندازهٔ زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ و میانهٔ $AM = m$ را داریم. مثلث را رسم کنید.

۲۰۴. از مثلث ABC، زاویهٔ $\hat{A}$ و میانهٔ m_b و زاویهٔ بین میانهٔ m_c و ضلع a معلوم است. آن را رسم کنید.

۲۰۵. مثلثی رسم کنید که از آن، میانهٔ AA' و زاویه‌های این میانه با AB و AC معلوم باشد.

۳.۱۷.۱.۱. نیمساز، زاویه

۱.۳.۱۷.۱.۱. یک نیمساز، دو زاویه

۲۰۶. از مثلثی، دو زاویه و یک نیمساز معلوم است. مثلث را رسم کنید $(\hat{A}, \hat{B}, d_a)$.

۴.۱۷.۱.۱. ارتفاع، میانه، زاویه

۲۰۷. از مثلثی، ارتفاع و میانهٔ رسم شده از یک رأس، و زاویهٔ آن رأس $(h_a, m_a, \hat{A})$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۲۰۸. مثلث ABC را با معلوم بودن اندازهٔ ارتفاع رأس C، میانهٔ رأس C و اندازهٔ زاویهٔ A رسم کنید.

۵.۱۷.۱.۱. ارتفاع، نیمساز، زاویه

۲۰۹. مثلث ABC را با داده‌های زیر رسم کنید:

$\hat{A} = \alpha$ ، ارتفاع $AH = h_a$ ، نیمساز $AD = d_a$

۶.۱۷.۱.۱. میانه، نیمساز، زاویه

۱.۶.۱۷.۱.۱. یک میانه، یک نیمساز، یک زاویه

۲۱۰. مثلثی با داده‌های زیر رسم کنید:
اندازه‌های میانه و نیمساز نظیر یک رأس، و زاویهٔ بین آن میانه و نیمساز

۱.۱.۱۷.۶.۲. میانه، نیمساز، تفاضل دو زاویه

۲۱۱. مثلثی را که m_a ، d_a و $\hat{B}-\hat{C}$ از آن مفروضند، رسم کنید.

۲۱۲. از مثلثی، میانهٔ m_a و نیمساز d_a زاویهٔ A و اختلاف زاویه‌های m_a با ضلعهای مجاور در دست است. آن را رسم کنید.

۱.۱.۱۸. ارتفاع، میانه، نیمساز؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱.۱۸.۱. ارتفاع، محیط

۲۱۳. اگر p_1 محیط مثلث ارتفاعیه و $h_a:h_b:h_c = m:n:p$ معلوم باشد، مثلث را رسم کنید. (m، n و p طولهای معلومی هستند.)

۱.۱.۱۸.۲. ارتفاع، مساحت

۲۱۴. از مثلث ABC، اندازه‌های دو ارتفاع $AH = h_a$ و $BH' = h_b$ و اندازهٔ مساحت مثلث داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۸.۳. ارتفاع، رابطهٔ متری

۲۱۵. از مثلث ABC ارتفاع AD و نسبتهای AE : EC و AF : FB ، که E و F پای دو ارتفاع دیگر مثلث هستند، مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۱۹. پاره‌خط، خط؛ زاویه

۱.۱.۱۹.۱. پاره‌خط، زاویه

۲۱۶. از مثلث ABC، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A} = \alpha$ و قطعه‌هایی که نیمساز داخلی AD روی ضلع BC پدید آورده است، معلومند. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۲۰. پاره‌خط، خط؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱.۲۰.۱. پاره‌خط، مساحت

۲۱۷. از مثلث ABC دو پاره‌خط جداشده به وسیلهٔ ارتفاع رأس A روی ضلع BC، و اندازهٔ مساحت مثلث معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۲۱. زاویه؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱.۲۱.۱. زاویه، محیط

۲۱۸. مثلثی را با معلوم بودن دو زاویه و اندازهٔ محیط آن رسم کنید.

۱.۱.۲۱.۲. زاویه، مساحت

۲۱۹. از مثلث ABC، اندازهٔ زاویه‌ها و مساحت آن داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۲۲۰. از یک مثلث، مساحت و زاویه‌هایی که یک میانه با دو ضلع واقع در دو طرف آن می‌سازد، داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۲۱.۳. زاویه، رابطهٔ متری

۲۲۱. مثلثی با داده‌های زیر رسم کنید:

دو زاویه و مجموع اندازه‌های ارتفاع و میانهٔ رسم شده از یک رأس $(m_a + h_a = l\ ,\hat{C}\text{،}\ \hat{B})$.

۱.۱.۲۲. نقطه؛ ضلع؛ ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۱.۲۲.۱. نقطه؛ ضلع؛ ارتفاع

۲۲۲. از مثلث ABC، اندازهٔ ضلع $BC = a$ و ارتفاع AA'، از نظر وضع و اندازه، و جای

نقطهٔ A''، تصویر نقطهٔ A' روی ضلع AB، داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۲۲.۲. نقطه، ضلع، میانه

۲۲۳. از مثلث ABC، اندازهٔ ضلع $BC = a$، m_b میانهٔ رأس B و نقطهٔ D پای نیمساز AD داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۲۲.۳. نقطه، ضلع، نیمساز

۲۲۴. از مثلثی ضلع AC و D محل تلاقی نیمساز زاویهٔ داخلی B با ضلع AC و طول نیمساز زاویهٔ ABC(BD) در دست است. مثلث را رسم کنید.

۲۲۵. **الف)** اگر دو نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC برابر باشند، و دایره‌ای به قطر BC دو ضلع AB و AC را بترتیب، در نقطه‌های P و Q قطع کند، نشان دهید که $CP = CQ$.

ب) مثلثی را با مفروض بودن یک ضلع و پای ارتفاع وارد بر این ضلع رسم کنید به‌طوری که دو نیمساز یکی از زاویه‌های مجاور این ضلع برابر باشند.

۱.۱.۲۳. نقطه؛ ضلع؛ پاره‌خط، خط

۱.۱.۲۳.۱. نقطه، ضلع، خط

۲۲۶. از مثلث ABC اندازهٔ ضلع BC و خطی که این ضلع بر آن قرار دارد، زاویهٔ مقابل به آن ضلع، همچنین دو نقطهٔ دیگر که دو ضلع دیگر از آنها می‌گذرند، داده شده‌اند، مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۲۴. نقطه؛ ضلع؛ زاویه

۱.۱.۲۴.۱. یک نقطه، یک ضلع، یک زاویه

۲۲۷. از مثلثی ضلع b و زاویهٔ $\hat{B}$ و نقطهٔ D، نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی درونی مثلث با ضلع AC معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۲۲۸. از یک مثلث ، قاعده، یک زاویهٔ مجاور به قاعده و نقطهٔ تقاطع قاعده و قطری از دایرهٔ محیطی مثلث که از رأس مقابل به قاعده می‌گذرد، داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۲۲۹. مثلثی را رسم کنید که از آن، قاعده، زاویهٔ روبه‌رو به قاعده، و نقطهٔ تقاطع نیمساز آن زاویه با قاعده داده شده است.

۱.۱.۲۵. نقطه؛ ضلع؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱.۲۵.۱. نقطه، ضلع، محیط

۲۳۰. از مثلث ABC، اندازهٔ محیط یعنی ۲p، اندازهٔ ضلع $BC = a$ از نظر وضع و اندازه و مرکز ارتفاعی مثلث داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۲۶. نقطه؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛ پاره‌خط، خط

۱.۱.۲۶.۱. نقطه، ارتفاع، پاره‌خط

۲۳۱. از مثلث ABC، مرکز ارتفاعی، ارتفاع AD و یک پاره‌خط ایجاد شده به وسیلهٔ ارتفاع روی ضلع BC داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۲۶.۲. نقطه، ارتفاع، خط

۲۳۲. مثلثی رسم کنید که از آن، N مرکز دایرهٔ نه نقطه و A یک رأس و امتداد t نیمساز داخلی گذرنده از A و ارتفاع h ، ارتفاع گذرنده از A معلوم است.

۱.۱.۲۷. نقطه؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛ زاویه

۱.۱.۲۷.۱. نقطه؛ ارتفاع، زاویه

۲۳۳. از مثلث ABC، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{B}$ و ارتفاع AA' از نظر وضع و اندازه، و N مرکز دایرهٔ نه‌نقطهٔ مثلث داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۲۸.۱.۱. نقطه؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۲۸.۱.۱. نقطه، ارتفاع، محیط

۲۳۴. از مثلث ABC، اندازهٔ محیط، طول و محل ارتفاع رأس A و قرینهٔ رأس A نسبت به نیمساز زاویهٔ خارجی B داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۲۹.۱.۱. نقطه؛ پاره‌خط، خط؛ زاویه

۱.۲۹.۱.۱. نقطه، پاره‌خط، زاویه

۲۳۵. از مثلث ABC، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{B}$، تصویر ضلع AB روی ضلع BC و موضع نقطهٔ H، مرکز ارتفاعی مثلث، نسبت به زاویهٔ $\hat{B}$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۳۰.۱.۱. نقطه؛ پاره‌خط، خط؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۳۰.۱.۱. نقطه، پاره‌خط، محیط

۲۳۶. از مثلث ABC، اندازهٔ محیط مثلث، خطی که ضلع BC روی آن است، نقطهٔ H پای ارتفاع رأس A و نقطهٔ C' وسط ضلع AB داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۳۱.۱.۱. نقطه؛ زاویه؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۳۱.۱.۱. نقطه، زاویه، محیط

۲۳۷. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{B} = \alpha$ از مثلث ABC، اندازهٔ محیط آن $2p$ و موضع رأس Aی مثلث نسبت به BC معلوم است. این مثلث را رسم کنید.

۲۳۸. نقطهٔ M در درون زاویهٔ منفرجه‌ای داده شده است. مثلث MAB را طوری رسم کنید که

رأسهای A و B آن روی ضلعهای زاویه واقع شده و محیط آن حداقل مقدار ممکنه را داشته باشد.

۱.۱.۳۲. ضلع؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛ پاره‌خط، خط

۱.۱.۳۲.۱. ضلع، ارتفاع، پاره‌خط

۲۳۹. از مثلث ABC، اندازهٔ ارتفاع $CD = h_c$ ، طول ضلع $AC = b$ و طول پاره‌خط CE تصویر ارتفاع CD روی BC معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۲۴۰. از مثلثی اندازهٔ یک ضلع، زاویهٔ مقابل به آن ضلع و ارتفاع وارد بر ضلع دیگر داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۳۳. ضلع؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛ زاویه

۱.۱.۳۳.۱. ضلع ،ارتفاع، زاویه

۱.۱.۳۳.۱.۱. یک ضلع، یک ارتفاع، یک زاویه

۲۴۱. مثلثی را با داده‌های ، ارتفاع $AH = h$ ، $BC = a$ و $\hat{A} = \alpha$ رسم کنید.

۲۴۲. از مثلثی، یک ضلع، ارتفاع وارد بر آن ضلع و یک زاویه مجاور به آن ضلع داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۲۴۳. می‌خواهیم مثلث ABC را با معلوم بودن ضلع a (مقابل زاویهٔ A) ، زاویهٔ B و ارتفاع h_c فرود آمده از رأس C رسم کنیم. تعداد جوابهای متمایز برابر است با :

الف)۱ ب)۲ ج)صفر د)نامتناهی هـ) صفر یا نامتناهی

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۶۷

۲۴۴. از مثلث ABC، اندازه‌های a، h_b و $\hat{B}$ داده شده‌اند. مثلث را رسم کنید.

۲۴۵. از مثلثی، اندازهٔ یک ضلع، ارتفاع وارد بر آن ضلع و زاویهٔ بین میانهٔ نظیر آن ضلع و آن ضلع ، داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۳۳.۱.۲. یک ضلع، یک ارتفاع، تفاضل دو زاویه

۲۴۶. از مثلثی a و h_a و تفاضل دو زاویه، $\hat{B}-\hat{C}=\alpha$ در دست است. آن را رسم کنید.

۱.۱.۳۳.۱.۳. یک ضلع، یک ارتفاع، رابطهٔ بین زاویه‌ها

۲۴۷. از مثلث ABC اندازهٔ ضلع BC و اندازهٔ ارتفاع AH معلوم است و می‌دانیم اندازهٔ زاویهٔ B دو برابر اندازهٔ زاویهٔ C است. مثلث را رسم کنید.

سومین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۶۵

۱.۱.۳۳.۱.۴. یک ضلع، مجموع دو ارتفاع، زاویه

۲۴۸. مثلثی را رسم کنید که از آن، قاعده، زاویهٔ روبه‌رو به قاعده و مجموع ارتفاعهای وارد بر دو ضلع دیگر $(h_b+h_c, \hat{A}, a)$ داده شده است.

۲۴۹. از مثلث ABC، اندازه‌های b، h_b+h_c و $\hat{A}$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۲۵۰. از مثلث ABC، اندازه‌های b، h_b+h_c و $\hat{C}$ داده شده است . مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۳۳.۱.۵. یک ضلع، تفاضل دو ارتفاع، زاویه

۲۵۱. مثلثی را رسم کنید که از آن، قاعده، زاویهٔ روبه‌رو به قاعده و تفاضل ارتفاعهای وارد بر دو ضلع دیگر $(h_c-h_b, \hat{A}, a)$ داده شده است.

۱.۱.۳۳.۱.۶. مجموع دو ضلع، ارتفاع، زاویه

۲۵۲. **مسألهٔ دولاهیر.** از مثلثی یک زاویه، مجموع دو ضلع این زاویه و ارتفاع وارد بر ضلع سوم $(\hat{A},\ b+c=2s,\ h_a)$، داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۲۵۳. مثلثی با داده‌های زیر رسم کنید :

h_c ، $\hat{A}=\alpha$ ، $b+c=l$

۲۵۴. مثلث ABC را با داده‌های $b+c=l$ ، h_c و $\hat{B}=\alpha$ رسم کنید.

۱.۱.۳۳.۱.۷. مجموع دو ضلع، ارتفاع، تفاضل دو زاویه

۲۵۵. در مثلثی $b+c=d$ و ارتفاع h_a و اختلاف زاویه‌های $\hat{B}-\hat{C}=\alpha$ در دست است. آن را رسم کنید.

۲۵۶. مثلث ABC را با داده‌های $b+c=l$ ، $\hat{B}-\hat{C}=\alpha$ و h_c رسم کنید.

۱.۱.۳۳.۱.۸. مجموع دو ضلع، مجموع دو ارتفاع، تفاضل دو زاویه

۲۵۷. مثلث ABC را با داده‌های $b+c$ و h_b+h_c و $\hat{B}-\hat{C}$ رسم کنید.

۱.۱.۳۳.۱.۹. مجموع دو ضلع، تفاضل دو ارتفاع، زاویه

۲۵۸. از مثلث ABC، $b+c=l$ ، $h_b-h_c=k$ و $\hat{A}=\alpha$ داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۳۳.۱.۱۰. تفاضل دو ضلع، ارتفاع، زاویه

۲۵۹. از مثلث ABC، $b-c=l$ ، h_b و $\hat{A}=\alpha$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۲۶۰. مثلث ABC را با داده‌های $b-c$ ، h_c و $\hat{A}$ رسم کنید.

۲۶۱. مثلث ABC را با داده‌های $b-c=l$ ، h_b و $\hat{C}=\alpha$ رسم کنید.

۱.۱.۳۳.۱.۱۱. تفاضل دو ضلع، ارتفاع، تفاضل دو زاویه

۲۶۲. مثلث ABC را با داده‌های $b-c=l$ ، h_b و $\hat{B}-\hat{C}=\alpha$ رسم کنید.

۲۶۳. مثلث ABC را با داده‌های $b-c=l$ ، h_c و $\hat{B}-\hat{C}=\alpha$ رسم کنید.

۱.۱.۳۳.۱.۱۲. تفاضل دو ضلع، مجموع دو ارتفاع، زاویه

۲۶۴. مثلث ABC را با داده‌های $b-c=l$ ، $h_b+h_c=k$ و $\hat{A}=\alpha$ رسم کنید.

۲۶۵. مثلث ABC را با مفروض بودن $a-b$ ، h_b+h_c و $\hat{A}$ رسم کنید.

۱.۱.۳۳.۱.۱۳. تفاضل دو ضلع، تفاضل دو ارتفاع، تفاضل دو زاویه

۲۶۶. مثلث ABC را با داده‌های $c-b=l$ ، $h_b-h_c=l'$ و $\hat{C}-\hat{B}=\alpha$ رسم کنید.

۱.۱.۳۳.۱.۱۴. نسبت دو ضلع، ارتفاع، زاویه

۲۶۷. از مثلث ABC ، $\frac{a}{c}$ ، h_c و $\hat{A}=\alpha$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۳۳.۱.۱۵. نسبت دو ضلع، ارتفاع، تفاضل دو زاویه

۲۶۸. از مثلث ABC اندازهٔ ارتفاع $AH=h_a$ ، تفاضل دو زاویه $\hat{B}-\hat{C}=\alpha$ و نسبت دو ضلع $\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۳۳.۱.۱۶. نسبت دو ضلع، مجموع دو ارتفاع، زاویه

۲۶۹. مثلثی با داده‌های $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$، $h_a+h_b=l$ و $\hat{C}=\alpha$ رسم کنید.

۱.۱.۳۳.۱.۱۷. نسبت دو ضلع، تفاضل دو ارتفاع، زاویه

۲۷۰. مثلثی با داده‌های $\frac{a}{b}=\frac{p}{q}$، $h_a-h_b=l$ و $\hat{C}=\alpha$ رسم کنید.

۱.۱.۳۳.۲.ضلع، میانه، زاویه

۱.۱.۳۳.۲.۱. یک ضلع، یک میانه، یک زاویه

۲۷۱. مثلثی با داده‌های a، m_a و $\hat{A}$ رسم کنید.

۲۷۲. مثلثی با داده‌های a، m_b و $\hat{A}$ رسم کنید.

۲۷۳. مثلثی با داده‌های $AC=b$ ، $CC'=m_c$ و $\hat{A}=\alpha$، رسم کنید.

۲۷۴. از مثلث ABC ، اندازه‌های a ، m_a و $\hat{B}=\alpha$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۲۷۵. از مثلثی، اندازهٔ یک ضلع، یک زاویهٔ مجاور آن و میانهٔ نظیر رأس این زاویه داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۳۳.۲.۲. ضلع، میانه، تفاضل دو زاویه

۲۷۶. از مثلثی قاعده، میانهٔ وارد بر قاعده و تفاضل زاویه‌های مجاور قاعده $(a, m_a, \hat{B}-\hat{C})$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۳۳.۲.۳. مجموع دو ضلع، میانه، زاویه

۲۷۷. از مثلثی یک زاویه، مجموع دو ضلع تشکیل دهندهٔ این زاویه و میانهٔ وارد بر یکی از ضلعها $(\hat{A}, b+c, m_c)$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۳۳.۲.۴. رابطهٔ بین ضلعها، مجموع دو میانهٔ تفاضل دو زاویه

۲۷۸. مثلثی با داده‌های $\frac{a}{b+c}$ ، m_a+m_b و $\hat{B}-\hat{C}$ رسم کنید.

۱.۱.۳۳.۳. ضلع، نیمساز، زاویه

۱.۱.۳۳.۳.۱. یک ضلع، یک نیمساز، یک زاویه

۲۷۹. از مثلث غیر مشخصی $\hat{A}$ ، a و d_a معلومند، مثلث را رسم کنید (مسأله پاپوس).

۲۸۰. از مثلث ABC، اندازه‌های ضلع a، زاویهٔ $\hat{A}$ و طول نیمساز زاویهٔ برونی $\hat{A}$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۲۸۱. از مثلث ABC، اندازه‌های b، d_a و $\hat{A}=\alpha$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۲۸۲. از مثلثی ضلع $BC=a$ ، نیمساز زاویهٔ درونی $A(d_a)$ و اندازهٔ زاویهٔ $\hat{B}(\hat{B}=\alpha)$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۳۳.۳.۲. ضلع، نیمساز، تفاضل دو زاویه

۲۸۳. از مثلثی $\hat{B}-\hat{C}$ ، a و d_a معلومند. مثلث را رسم کنید.

۲۸۴. از مثلث ABC، حاصلضرب دو ضلع، نیمساز زاویهٔ بین این دو ضلع و تفاضل زاویه‌های روبه‌رو به این دو ضلع داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۳۳.۳.۳. نسبت دو ضلع، نیمساز، زاویه

۲۸۵. از مثلث ABC، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ و نیمساز d_a و نسبت $\frac{b}{c}$ معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۲۸۶. از مثلث ABC، $\frac{b}{c}$ ، d_a و $\hat{B}-\hat{C}$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۲۸۷. از مثلث ABC، اندازه‌های $\frac{b}{c}$ ، d_a و $(AM \hat{,} AB)$ داده شده است. مثلث را رسم کنید (AM میانهٔ نظیر ضلع BC است).

۲۸۸. مثلث ABC را با داده‌های $\frac{b}{c}$ ، d'_a و $\hat{B}-\hat{C}$ رسم کنید.

۱.۱.۳۳.۳.۴. ضلع، تساوی دو نیمساز، زاویه

۲۸۹. مثلثی را با مفروض بودن قاعده و یک زاویهٔ مجاور قاعده رسم کنید به طوری که طول نیمسازهای داخلی و خارجی آن زاویه با هم برابر باشند.

۲۹۰. از مثلث ABC، مقدارهای $b+c-a$ ، d_a و $\hat{A}$ داده شده‌اند. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۳۴. ضلع؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛ محیط، مساحت، رابطه متری

۱.۱.۳۴.۱. ضلع، ارتفاع، رابطهٔ متری

۲۹۱. از مثلث ABC، ارتفاع $AH = h$ و ضلع $BC = a$ معلوم است و می‌دانیم که نیمساز AD واسطهٔ هندسی مابین قطعه خطهای BD و DC است. مثلث را رسم کنید.

۲۹۲. مثلثی با معلومات زیر رسم کنید:

$$a \text{ ، } h_a \text{ ، } \frac{b}{h_b} = \frac{m}{n}$$

۱.۱.۳۴.۲. ضلع، میانه، مساحت

۲۹۳. در مثلث ABC این معلومات داده شده‌اند. مثلث را بسازید: $m_a = ۷$ (میانه)، $S = ۲۴$ و $a = ۸$.

۱.۱.۳۵. ضلع؛ پاره‌خط، خط؛ زاویه

۱.۱.۳۵.۱. ضلع، خط، زاویه

۲۹۴. مثلثی رسم کنید که در آن قاعدهٔ AB و تفاضل دو زاویهٔ دیگر معلوم است و رأس C روی خط داده شدهٔ xy واقع شود (کمپانیون).

۱.۱.۳۶. ضلع؛ پاره‌خط، خط؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱.۳۶.۱. ضلع، پاره‌خط، مساحت

۲۹۵.از مثلث ABC، اندازهٔ ضلع BC، تصویر ضلع AB روی ضلع BC و اندازهٔ مساحت مثلث داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۳۷.ضلع؛ زاویه؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱.۳۷.۱. ضلع، زاویه، محیط

۲۹۶. مثلث ABC را با داده‌های $AC = b$ ، $\hat{B} = \alpha$ و محیط مثلث، یعنی $2P$ ، رسم کنید.

۱.۱.۳۷.۲. ضلع، زاویه، مساحت

۱.۱.۳۷.۲.۱. یک ضلع، یک زاویه، مساحت

۲۹۷. از مثلث ABC، $BC = 4$ و زاویهٔ $\hat{A} = 30^\circ$ و مساحتش ۸ است. مثلث را بسازید.

۱.۱.۳۷.۲.۲. یک ضلع، یک زاویه، نسبت مساحتها

۲۹۸. از مثلثی زاویهٔ رأس، یک ضلع مجاور این زاویه و نسبت مساحت آن به مساحت مثلثی که نیمسازهای زاویهٔ مفروض و ضلع مقابل آن زاویه می‌سازد، مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۳۷.۳. ضلع، زاویه، رابطهٔ متری

۲۹۹. از مثلثی قاعده، زاویهٔ مقابل قاعده و نسبت فاصله‌های نقطهٔ وسط قاعده از نقطه‌های برخورد ارتفاع و نیمساز زاویهٔ مقابل به قاعده، با قاعده، داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۳۰۰. از مثلثی قاعده، زاویهٔ مقابل قاعده و مجموع مربع فاصله‌های رأس این زاویه از وسط دو پاره‌خطی که توسط پای ارتفاع رسم شده از همین رأس روی قاعده جدا می‌شود، مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۳۰۱. از مثلث ABC، a، $\hat{A}$ و $\frac{h_a}{d_a}$ داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۳۰۲. مثلث ABC را با معلوم بودن زاویهٔ $\hat{A}$ و ضلع a رسم کنید. در صورتی که دو ضلع b و c در رابطهٔ زیر صدق کنند:

$$\frac{b}{m}+\frac{c}{n}=1$$

m و n مقدارهای معلومی می‌باشد.

۳۰۳. از مثلثی، قاعده، زاویهٔ روبه‌روی قاعده و نسبت مجموع دو ضلع دیگر مثلث به تفاضل آن دو ضلع مفروض است $\left((b+c):(b-c)p:q, \hat{A}, a\right)$. این مثلث را رسم کنید.

۳۰۴. از مثلث ABC، اندازه‌های a، $b(b+c)$ و $\hat{A}$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۳۰۵. از مثلث ABC، اندازه‌های b، $\hat{A}$ و $\frac{a}{m_a}$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۳۰۶. مثلث ABC را با داده‌های ضلع $AB = c$، زاویهٔ $\hat{A}$ و نسبت $\frac{a}{m_a}$ رسم کنید.

۳۰۷. از مثلث ABC، اندازه‌های b، $\hat{A} = \alpha$ و $\frac{d_a}{d'_a} = k$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۳۷.۴. رابطهٔ بین ضلعها، زاویه، مساحت

۳۰۸. از مثلث ABC، اندازه‌های $a + b - c$، زاویهٔ $\hat{C} = \alpha$ و مساحت مثلث داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۳۸. ارتفاع، میانه، نیمساز؛ پاره‌خط، خط؛ زاویه

۱.۱.۳۸.۱. ارتفاع، پاره‌خط، زاویه

۳۰۹. از مثلث ABC، اندازهٔ ارتفاع AH، پاره‌خط BH و اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A} = \alpha$ معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۳۹. ارتفاع، میانه، نیمساز؛ پاره‌خط، خط؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱.۳۹.۱. ارتفاع، پاره‌خط، مساحت

۳۱۰. از مثلث ABC، اندازهٔ ارتفاع AH، مساحت مثلث، S و تصویر میانهٔ رأس A روی ضلع BC$(MH=l)$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۳۱۱. از مثلث ABC، اندازهٔ میانهٔ $AM = m_a$ و $MH=l$ و تصویر میانهٔ AM روی BC و $\frac{b^2 - c^2}{MH}$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۴۰. ارتفاع، میانه، نیمساز؛ زاویه؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱.۴۰.۱. ارتفاع، زاویه، محیط

۳۱۲. مثلثی را رسم کنید که از آن، محیط، زاویهٔ روبه‌رو به قاعده و ارتفاع وارد بر قاعده $(2p, A, h_a)$ داده شده است.

۳۱۳. مثلث را با معلوم بودن محیط، ارتفاع و زاویهٔ مجاور به قاعده رسم کنید.

المپیادهای ریاضی لنینگراد،۱۹۶۴

۱.۱.۴۰.۲. ارتفاع، زاویه، مساحت

۳۱۴. از مثلث ABC، اندازهٔ ارتفاع $AH= h_a$، زاویهٔ $\hat{A} = \alpha$ و مساحت آن S معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۴۰.۳. ارتفاع، زاویه، رابطهٔ متری

۳۱۵. مثلثی را با معلوم بودن یک زاویه، ارتفاع رسم شده از رأس این زاویه و مجموع فاصله‌های پای این ارتفاع از دو ضلع دیگر، رسم کنید.

۱.۱.۴۰.۴. میانه، زاویه، محیط

۳۱۶. از مثلث ABC اندازهٔ محیط مثلث یعنی $2p$ ، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A} = \alpha$ و طول میانهٔ رأس A از مثلث ADE، $AM=l$ داده شده است (D و E در امتداد BC و AB=DB و AC=CE). مثلث ABC را رسم کنید.

۱.۱.۴۰.۵. میانه، زاویه، مساحت

۳۱۷. مثلثی با معلوم بودن $\hat{A} = \alpha$ ، m_a و S (مساحت آن) رسم کنید.

۱.۱.۴۰.۶. میانه، زاویه، رابطهٔ متری

۳۱۸. از مثلث ABC، اندازهٔ میانه $AM = m_a$، زاویهٔ $\hat{C} = \alpha$ و $\frac{b^۲ - c^۲}{۲a} = k$ داده شده‌اند. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۴۰.۷. نیمساز، زاویه، محیط

۳۱۹. از مثلثی محیط، یک زاویه و نیمساز داخلی آن زاویه $(t_a, \hat{A}, ۲P)$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۴۱. پاره خط، خط؛ محیط، مساحت، رابطه متری

۱.۱.۴۱.۱. پاره‌خط، زاویه، محیط

۳۲۰. از مثلثی، محیط، زاویهٔ رأس و طول خطی که از رأس این زاویه رسم می‌شود وقاعده را به نسبت مفروضی تقسیم می‌کند، داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۴۱.۲. پاره‌خط، زاویه، مساحت

۳۲۱. از مثلثی، مساحت، یک زاویه و طول پاره‌خطی که مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و مرکز دایرهٔ محاطی خارجی نسبت به رأس زاویهٔ داده شده را به هم وصل می‌کند، داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۱.۴۲. نقطه؛ ضلع؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛ پاره‌خط، خط

۱.۱.۴۲.۱. نقطه، ضلع، ارتفاع، پاره‌خط

۳۲۲. از مثلث ABC اندازهٔ ارتفاع AA' از نظر وضع و اندازه، نقطهٔ H مرکز ارتفاعی، ضلع $BC = a$ و پاره خط واصل بین مرکز ارتفاعی و وسط ضلع BC داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۴۳.۱.۱. نقطه؛ ضلع؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛ زاویه

۱.۴۳.۱.۱. نقطه، ضلع، نیمساز، زاویه

۳۲۳. از مثلثی یک ضلع، زاویهٔ روبه‌رو به این ضلع و نیمساز AM زاویهٔ $\hat{A}$ که M متعلق به دایرهٔ محیطی است، داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۴۴.۱.۱. نقطه؛ ضلع؛ پاره‌خط، خط؛ زاویه

۱.۴۴.۱.۱. نقطه، ضلع، پاره‌خط، زاویه

۳۲۴. از مثلث ABC، ضلع BC از نظر وضع و اندازه و نقطهٔ D روی BC با شرط $2DB=DC$، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}=\alpha$ و طول پاره‌خط واصل بین مرکز دایرهٔ محاطی درونی I و نقطهٔ D، یعنی $ID=l$، معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۲.۴۴.۱.۱. نقطه، ضلع، خط، زاویه

۳۲۵. مثلثی رسم کنید که از آن اندازهٔ زاویهٔ A و طول ضلع BC معلوم است و می دانیم که این ضلع برخط معلوم X واقع است بعلاوه ضلعهای AB و AC بترتیب از نقطه‌های ثابت M و N می‌گذرند.

۴۵.۱.۱. نقطه؛ ضلع؛ زاویه؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۴۵.۱.۱. نقطه، ضلع، زاویه، محیط

۳۲۶. می‌توان مثلثی (که سه رأس آن بر یک خط نباشند) به گونه‌ای رسم کرد که:

الف) ضلعهایش به اندازه‌های ۱ سانتیمتر و ۲ سانتیمتر و ۳ سانتیمتر باشند.

ب) مرکز ارتفاعی آن (= نقطهٔ تلاقی سه ارتفاع آن) در خارج مثلث واقع باشد.

ج) دو عدد از زاویه‌هایش منفرجه باشند.

د) محیط آن ۱۰ متر باشد.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۹

۲.۱. رسم مثلث با معلوم بودن: مثلث، مثلث وداده‌های دیگر

۱.۲.۱.رسم مثلث با معلوم بودن مثلث

۱.۱.۲.۱. رسم مثلث با معلوم بودن یک مثلث

۳۲۷. **قضیه**. مثلثی را با مفروض بودن محل مثلث اوّل بروکار آن رسم کنید.

۲.۲.۱. رسم مثلث با معلوم بودن یک مثلث و داده‌های دیگر

۱.۲.۲.۱. مثلث، نقطه

۳۲۸. مثلثی قابل انطباق با مثلث داده شده رسم کنید که ضلعهای آن (یا امتداد آنها) از سه نقطهٔ مفروض بگذرند.

۲.۲.۲.۱. مثلث، ضلع

۳۲۹. بر روی پاره‌خط $B'C'$ مثلثی متشابه با مثلث ABC بنا کنید.

۳.۲.۲.۱. مثلث، نیمخط

۳۳۰. بر مثلث abc مثلثی محیط کنید که رأسهای آن A، B و C بترتیب بر روی شعاعهای OX، OY و OZ واقع باشند.

۴.۲.۲.۱. مثلث، خط

۳۳۱. مثلثی متشابه با مثلث معلوم T بسازید که رأسهایش روی سه خط موازی داده شده باشد.

۳۳۲. سه خط و یک مثلث داده شده‌اند. مثلثی رسم کنید که رأسهای آن روی این سه خط

قرار داشته باشند و با مثلث داده شده متشابه باشد.

۳۳۳. در مثلث داده شده‌ای، مثلثی محاط کنید که ضلعهایش موازی با امتدادهای معینی باشد.

۳۳۴. در یک مثلث مفروض، مثلثی محاط کنید که ضلعهای آن با نیمسازهای داخلی مثلث مفروض موازی باشند. هردو جواب مسأله را بیابید.

۱.۲.۲.۵. مثلث، محیط

۳۳۵. مثلثی متشابه با مثلث ABC بسازید که طول محیطش، $2P'$، معلوم باشد.

۳۳۶. در مثلث مفروضی مثلثی به محیط ماکزیمم محاط کنید.

فانیانو

۳۳۷. مثلث ABC مفروض است، مثلثی در آن محاط کنید که محیطش مینیمم باشد.

سومین المپیادهای ریاضی ایران، ۱۳۶۵

۱.۲.۲.۶. مثلث، نقطه، خط

۳۳۸. مثلثی را رسم کنید که با مثلث داده شده‌ای متشابه باشد، یک رأس آن در نقطهٔ ثابت مفروضی باشد و دو رأس دیگر آن روی دو خط مفروض قرار داشته باشند.

۱.۲.۲.۷. مثلث، نقطه، خط، زاویه

۳۳۹. در مثلث ABC مثلث DEF را محاط کنید، بنابرآن که موضع رأس D بر ضلع BC و اندازهٔ زاویهٔ $F\hat{D}E = \gamma$ معلوم است و می‌دانیم که ضلع EF با خط معلوم X موازی است.

۳۴۰. در مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع واحد، مثلثی با زاویه‌های معلوم محاط کنید که حداکثر مساحت را داشته باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۴

۱.۲.۲.۸. مسأله‌های ترکیبی

۳۴۱. الف) در مثلث مفروض ABC مثلث دیگری محاط کنید که یک رأس آن بر نقطهٔ مفروض P از ضلع AB منطبق و اندازهٔ محیطش کمترین مقدار ممکن باشد.

ب) در مثلث مفروض ABC مثلثی محاط کنید که محیطش دارای کمترین مقدار ممکن باشد.

۳۴۲. مثلث PQR داده شده است.

الف. تصویرهای مجانسهای آن را با نسبت تجانس ۲ و به مرکزهای P، Q و R رسم کنید.

ب. در هر یک از قسمتهای بند (الف) نسبت مساحت مثلث تبدیل یافته به مثلث PQR را تعیین کنید.

۱.۲.۳. رسم مثلث با معلوم بودن دو مثلث

۳۴۳. در یک مثلث معلوم، مثلثی محاط کنید که با مثلث معلومی همنهشت باشد.

۳۴۴. در یک مثلث مفروض مثلثی محاط کنید که ضلعهای آن بر ضلعهای مثلث مفروض عمود باشد. هر دو جواب مسأله را بیابید.

۱.۲.۴. رسم مثلث با معلوم بودن دو مثلث و داده‌های دیگر

۱.۲.۴.۱. رسم مثلث با معلوم بودن دو مثلث، نقطه

۳۴۵. نقطه‌ای بر روی یک ضلع مثلث داده شده‌ای مشخص شده است. در این مثلث، مثلثی محاط کنید که یک رأس آن این نقطهٔ مفروض، و با مثلث مفروض دیگری متشابه باشد.

۳.۱. رسم مثلث با معلوم بودن: چند ضلعی، چند ضلعی و داده‌های دیگر

۱.۳.۱. رسم مثلث با معلوم بودن چهارضلعی، چهارضلعی و داده‌های دیگر

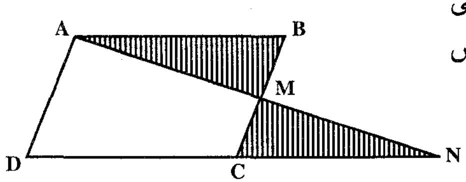
۱.۱.۳.۱. رسم مثلث با معلوم بودن چهار ضلعی در حالت کلی

۳۴۶. ثابت کنید که اگر یکی از دو قطر یک چهارضلعی را روی خط راستی که شامل آن می‌باشد، حرکت دهیم، مساحت چهارضلعی تغییر نخواهد کرد و از این رو مثلثی معادل با یک چهارضلعی مفروض بسازید.

۲.۳.۱. رسم مثلث با معلوم بودن چهارضلعیهای ویژه

۱.۲.۳.۱. رسم مثلث با معلوم بودن متوازی‌الاضلاع

۳۴۷. به کمک شکل روبه‌رو طرز ساختن مثلثی معادل با یک متوازی‌الاضلاع و برعکس را مشخص سازید.

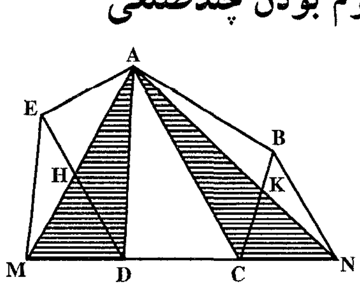


۲.۲.۳.۱. رسم مثلث با معلوم بودن مربع

۳۴۸. مثلثی رسم کنید که متشابه با مثلثی معلوم و معادل با مربعی معلوم باشد.

۳.۳.۱. رسم مثلث با معلوم بودن چندضلعی

۳۴۹. به کمک شکل روبه‌رو راهی برای تبدیل یک چندضلعی به مثلث معادل آن پیدا کنید.



۴.۱. رسم مثلث با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر

۱.۴.۱. رسم مثلث با معلوم بودن نیمدایره

۳۵۰. مثلثی را با حداکثر مساحت در نیمدایرهٔ مفروض، محاط کنید.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۲

۲.۴.۱. رسم مثلث با معلوم بودن دایره در حالت کلی و داده‌های دیگر

۱.۲.۴.۱. رسم مثلث با معلوم بودن یک دایره و داده‌های دیگر

۱.۱.۲.۴.۱. یک دایره، نقطه

۳۵۱. **قضیه.** در یک دایرهٔ داده شده می‌توان تعدادی نامتناهی مثلث محاط کرد، به‌طوری که مرکز ثقل همهٔ آنها نقطهٔ مفروضی درون دایره باشد.

۳۵۲. در دایرهٔ مفروض S مثلثی محاط کنید که رأس A و H نقطهٔ تلاقی سه ارتفاع آن داده شده باشد.

۳۵۳. سه نقطهٔ A، B و C و یک دایره داده شده است. مثلث DEF را در دایره چنان محاط کنید که ضلعهایش از نقطه‌های داده شده بگذرند.

کاستیلون

مسألهٔ بالا به‌وسیلهٔ کرامر ریاضی‌دان سوئیسی (۱۷۰۴ـ۱۷۵۲) طرح شد و به‌وسیلهٔ کاستیلون ریاضی‌دان ایتالیایی (۱۷۰۸ـ۱۷۹۰) در سال ۱۷۷۶ حل گردید. پاپوس ریاضی‌دان مشهور که در قرن چهارم میلادی در اسکندریه می‌زیسته است، حالت خاصی از مسألهٔ بالا را که A، B و C برروی یک خط قرار داشته باشند، حل کرده بود.

۲.۱.۲.۴.۱. یک دایره، خط

۳۵۴. مثلثی در دایرهٔ O محاط کنید که ضلعهایش با سه خط داده شده موازی باشد.

۳۵۵. دایرهٔ S و سه خط l، m و n همرس در مرکز دایره‌ای مفروضند. مثلث ABC را بر دایرهٔ S چنان محیط کنید که سه رأس آن بر سه خط داده شده واقع باشد.

۱.۴.۲.۱.۳. یک دایره، نقطه، خط

۳۵۶. مثلثی در یک دایره محاط کنید که دو ضلعش موازی دو خط مفروض باشد و ضلع سومش از نقطهٔ مفروض A بگذرد.

۱.۴.۲.۱.۴. یک دایره، نقطه، زاویه

۳۵۷. مثلث LMN را رسم کنید چنان که ضلعهایش از سه نقطهٔ ثابت A، B و C بگذرند و دو رأس M و N روی دایرهٔ ثابتی باشند که از A و B می‌گذرد و زاویهٔ $\hat{L}$ اندازهٔ معینی داشته باشد.

۳۵۸. مثلثی را رسم کنید که از آن، دایره نه نقطه و مرکز ثقل و تفاضل دو زاویه در دست است.

۱.۴.۲.۱.۵. یک دایره، ضلع، خط، زاویه

۳۵۹. دایره‌ای داده شده است. مثلثی بر این دایره محیط کنید که از آن، یک ضلع و یکی از زاویه‌های مجاور آن ضلع داده شده باشد و رأس این زاویه بر روی خط مفروضی قرار داشته باشد.

۱.۴.۲.۱.۶. یک دایره، مثلث

۳۶۰. در دایرهٔ داده شده، مثلثی محاط کنید که با مثلث داده شده متشابه باشد.

از اقلیدس، مسأله‌های تاریخی ریاضیات

۱.۴.۲.۱.۷. یک دایره، مثلث، نقطه، خط

۳۶۱. مثلثی متشابه با یک مثلث مفروض رسم کنید، به‌طوری که یک رأس آن در نقطه‌ای مفروض، رأس دیگر آن روی یک دایرهٔ مفروض و رأس سوم آن روی یک خط مفروض قرار داشته باشد.

۱.۴.۲.۲. رسم مثلث با معلوم بودن دو دایره و داده‌های دیگر

۱.۴.۲.۲.۱. دو دایره، زاویه

۳۶۲. دو دایرهٔ هم مرکز داده شده‌اند. مثلثی رسم کنید که اندازهٔ زاویه‌هایش معلوم است، یک رأس آن روی یک دایره و دو رأس دیگرش روی دایرهٔ دیگر واقع باشد.

۱.۴.۲.۲.۲. دو دایره، نقطه، نسبت ضلعها، خط

۳۶۳. یک خط l، نقطهٔ A بر آن و دو دایرهٔ S_1 و S_2 مفروضند. یک مثلث ABC رسم کنید که در آن، خط l نیمساز زاویهٔ A باشد، رأسهای B و C بترتیب بر دایره‌های S_1 و S_2 قرار

گیرند و نسبت ضلع AB به ضلع AC مقدار مفروض m:n باشد.

۱.۴.۲.۲.۳. دو دایره، مثلث، نقطه

۳۶۴. مثلثی متشابه با یک مثلث مفروض رسم کنید به‌طوری که یک رأس آن در نقطه‌ای مفروض و دو رأس دیگر آن روی دو دایرهٔ داده شده قرار داشته باشند.

۱.۴.۲.۳. رسم مثلث با معلوم بودن سه دایره یا بیشتر و داده‌های دیگر

۱.۴.۲.۳.۱. سه دایره، زاویه

۳۶۵. در یک دایرهٔ مفروض، مثلثی با زاویهٔ رأس مفروض را چنان محاط کنید که قاعده‌اش بر دایرهٔ مفروض دیگری مماس، و یک ضلع دیگرش نیز بر دایرهٔ مفروض سومی مماس باشد.

۳۶۶. مثلث ABC را محاط در دایره‌ای مفروض رسم کنید به قسمی که اندازهٔ زاویهٔ A از آن معلوم و دو ضلع AC و BC از آن به دو دایرهٔ معلوم مماس باشند.

۱.۴.۲.۳.۲. سه دایره، مثلث

۳۶۷. مثلثی متشابه با یک مثلث مفروض T رسم کنید به‌طوری که رأسهای آن روی سه دایرهٔ مفروض هم مرکز قرار داشته باشند.

۱.۴.۲.۳.۳. مسأله‌های ترکیبی

۳۶۸. مثلثی قابل انطباق با مثلث مفروضی رسم کنید که ضلعهایش

الف) از سه نقطهٔ مفروض بگذرند.

ب) بر سه دایرهٔ مفروض مماس باشند.

۱.۴.۳. رسم مثلث با معلوم بودن دایرهٔ محیطی یا شعاع دایرهٔ محیطی و داده‌های دیگر

۱.۴.۳.۱. رسم مثلث با معلوم بودن دایرهٔ محیطی و داده‌های دیگر

۱.۴.۳.۱.۱. دایرهٔ محیطی، نقطه

۳۶۹. مثلثی را رسم کنید که از آن محل برخورد امتداد ارتفاعها با دایرهٔ محیطی آن در دست است.

۳۷۰. از مثلثی محل نقطه‌های برخورد میانه‌ها با دایرهٔ محیطی مفروضند. مثلث را رسم کنید.

۳۷۱. از مثلثی محل سه نقطهٔ برخورد امتداد نیمسازهای داخلی با دایرهٔ محیطی مفروضند. مثلث را رسم کنید.

۳۷۲. از مثلثی نقطه‌های برخورد نیمسازهای زاویه‌های خارجی مثلث با دایرهٔ محیطی مفروضند. مثلث را رسم کنید.

۳۷۳. فرض کنید A' ، B' ، C' و A'' ، B'' ، C'' بترتیب، نقطه‌های برخورد نیمسازهای داخلی و خارجی مثلث ABC با دایرهٔ محیطی آن مثلث باشند. مثلث ABC را با مفروض بودن پاره‌خطهای (الف) $A''B$ ، $B''C$ و $C''A$ ؛ (ب) $A'B$ ، $B'C$ و $C'A$ رسم کنید.

۳۷۴. از مثلثی محل نقطه‌های برخورد ارتفاع، میانه و نیمساز رسم شده از یک رأس با دایرهٔ محیطی مفروض است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۳.۱.۲. دایرهٔ محیطی، رابطه‌ای بین مساحتها

۳۷۵. مثلث ABC را که دایرهٔ محیطی آن به مرکز O داده شده است، طوری رسم کنید که داشته باشیم:

(مساحت OBC) : (مساحت OCA) : (مساحت OAB) $= p:q:r$

که p، q و r طولهای سه پاره‌خط داده شده هستند.

۱.۴.۳.۱.۳. دایرهٔ محیطی، نقطه، ضلع یا رابطهٔ بین ضلعها

۳۷۶. دایرهٔ محیطی و نقطهٔ H محل تلاقی ارتفاعها و طول یک ضلع مثلثی معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۳.۱.۴. دایرهٔ محیطی، نقطه، خط

۳۷۷. در یک دایره، مثلثی محاط کنید که خط سمسون برای این مثلث در نقطه‌ای معلوم از دایرهٔ محیطی، خطی معلوم باشد، یکی از رأسهای آن ممکن است به دلخواه انتخاب شود.

۱.۴.۳.۱.۵. دایرهٔ محیطی، نقطه، زاویه

۳۷۸. از مثلثی محل دایرهٔ محیطی و محل مرکز ثقل و تفاضل دو زاویه داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۳.۱.۶. دایرهٔ محیطی، نقطه، رابطهٔ متری

۳۷۹. محل دایرهٔ محیطی یک مثلث، محل نقطهٔ برخورد نیمساز داخلی یک زاویهٔ مثلث با ضلع مقابل این زاویه و حاصلضرب دو ضلع دیگر مثلث مفروضند. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۳.۱.۷. دایرهٔ محیطی، مثلث، خط

۳۸۰. در مثلث مفروض ABC مثلثی محاط کنید که ضلعهایش بر شعاعهای OA، OB و OC از دایرهٔ محیطی عمود باشند. از این ترسیم راه حل دیگری برای رسم مثلثی محاط در یک مثلث با کمترین محیط ممکن، درمورد مثلثهای حادهالزوایا به دست آورید.

۱.۴.۳.۲. رسم مثلث با معلوم بودن شعاع دایرهٔ محیطی و دادههای دیگر

۱.۴.۳.۲.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، نقطه

۳۸۱. از مثلث ABC نقطههای H، P و M بترتیب پای ارتفاع و نیمساز و میانهٔ نظیر رأس A و شعاع دایرهٔ محیطی معلوم است. آن را رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۲. شعاع دایرهٔ محیطی، ضلع

۱.۴.۳.۲.۲.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، دو ضلع

۳۸۲. دو ضلع و شعاع دایرهٔ محیطی از مثلثی داده شده است. آن را رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۲.۲. شعاع دایرهٔ محیطی، یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر

۳۸۳. مثلثی با معلومات $b+c=l$ و R و a رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۲.۳. شعاع دایرهٔ محیطی، یک ضلع، رابطهٔ بین دو ضلع دیگر

۳۸۴. از مثلثی شعاع دایرهٔ محیطی، قاعده و حاصلضرب مجموع دو ضلع دیگر در یکی از آنها [$(b+c)b$، a، R] داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۲.۴. شعاع دایرهٔ محیطی، نسبت ضلعها

۳۸۵. از مثلث ABC، نسبت ضلعها، a:b:c و R شعاع دایرهٔ محیطی داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۳. شعاع دایرهٔ محیطی؛ ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۳.۲.۳.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، ارتفاع، میانه

۳۸۶. از مثلث ABC، اندازههای : شعاع دایرهٔ محیطی، ارتفاع و میانهٔ نظیر ضلع a داده شده است . این مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۳.۲. شعاع دایرهٔ محیطی، ارتفاع، نیمساز

۳۸۷. از مثلثی شعاع دایرهٔ محیطی، ارتفاع و نیمساز نظیر یک ضلع داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۴. شعاع دایرهٔ محیطی، زاویه

۳۸۸. مثلثی با معلومات زیر رسم کنید:

R، $\hat{C}$، $\hat{B}$ و $\hat{A}$.

۱.۴.۳.۲.۵. شعاع دایرهٔ محیطی، ضلع، ارتفاع

۱.۴.۳.۲.۵.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، یک ضلع، یک ارتفاع

۳۸۹. از مثلثی یک ضلع و ارتفاع وارد بر آن و شعاع دایرهٔ محیطی معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۳۹۰. از مثلث ABC، $BC = a$ و ارتفاع $BH = h_b$ و شعاع دایرهٔ محیطی برابر R است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۵.۲. شعاع دایرهٔ محیطی، مجموع دو ضلع، مجموع دو ارتفاع

۳۹۱. مثلث ABC را با داده‌های R، $b+c$ و $h_b + h_c$ رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۵.۳. شعاع دایرهٔ محیطی، تفاضل دو ضلع، تفاضل دو ارتفاع

۳۹۲. مثلث ABC را با داده‌های R، $b-c$ و $h_c - h_b$ رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۶. شعاع دایرهٔ محیطی، ضلع، میانه

۳۹۳. مثلث ABC را با داده‌های زیر رسم کنید:

$AC = b$، $BB' = m_b$ و شعاع دایرهٔ محیطی برابر R.

۱.۴.۳.۲.۷. شعاع دایرهٔ محیطی، ضلع، زاویه

۱.۴.۳.۲.۷.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، یک ضلع، یک زاویه

۳۹۴. از مثلثی یک ضلع و زاویهٔ مجاور به آن و شعاع دایرهٔ محیطی معلومند. مثلث را رسم کنید (a، $\hat{B}$، R).

۱.۴.۳.۲.۷.۲. شعاع دایرهٔ محیطی، یک ضلع، تفاضل دو زاویه

۳۹۵. از مثلث ABC، اندازهٔ ضلع $BC = a$، تفاضل دو زاویهٔ مجاور به این ضلع $\hat{B} - \hat{C} = \beta$ و شعاع دایرهٔ محیطی داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۳۹۶. مثلث ABC را با داده‌های R، b، $\hat{B}-\hat{C}=\alpha$ رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۷.۳. شعاع دایرهٔ محیطی، مجموع دو ضلع، تفاضل دو زاویه

۳۹۷. از مثلثی شعاع دایرهٔ محیطی، مجموع دو ضلع جانبی و تفاضل زاویه‌های قاعده (R، $b+c$، $\hat{B}-\hat{C}$) داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۷.۴. شعاع دایرهٔ محیطی، تفاضل دو ضلع، یک زاویه

۳۹۸. از مثلث ABC، اندازهٔ زاویهٔ A، تفاضل دو ضلع، $a-b$ و اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۷.۵. شعاع دایرهٔ محیطی، تفاضل دو ضلع، تفاضل دو زاویه

۳۹۹. مثلث ABC را با داده‌های $b-c=l$ ، $\hat{B}-\hat{C}=\alpha$ و R شعاع دایرهٔ محیطی آن، رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۷.۶. شعاع دایرهٔ محیطی، نسبت دو ضلع، زاویه

۴۰۰. از مثلثی شعاع دایرهٔ محیطی یک زاویه و نسبت دو ضلع نظیر این زاویه (R، $\frac{b}{c}$ ، $\hat{A}$) داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۷.۷. شعاع دایرهٔ محیطی، مجموع مربعهای دو ضلع، زاویه

۴۰۱. از مثلثی شعاع دایرهٔ محیطی، یک زاویه و مجموع مربعهای دو ضلع مجاور به این زاویه (R، $\hat{A}$ ، b^2+c^2) داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۸. شعاع دایرهٔ محیطی، ضلع، رابطهٔ متری

۴۰۲. مثلث ABC را با داده‌های : R، b و $\frac{a}{h_a}$ رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۹. شعاع دایرهٔ محیطی، میانه، پاره‌خط

۴۰۳. از مثلثی شعاع دایرهٔ محیطی، فاصلهٔ یک رأس از مرکز ارتفاعی و میانه‌ای که از آن رأس رسم می‌شود، داده شده است، مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۱۰. شعاع دایرهٔ محیطی؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛ زاویه

۱.۴.۳.۲.۱۰.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، ارتفاع، زاویه

۱.۴.۳.۲.۱۰.۱.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، یک ارتفاع، تفاضل دو زاویه

۴۰۴. از مثلثی، شعاع دایرهٔ محیطی، اندازهٔ یک ارتفاع و تفاضل دو زاویهٔ مجاور به ضلع نظیر این ارتفاع داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۱۰.۱.۲. شعاع دایرهٔ محیطی، مجموع دو ارتفاع، زاویه

۴۰۵. از مثلثی اندازهٔ یک زاویه، مجموع دو ارتفاع وارد بر ضلعهای این زاویه و شعاع دایرهٔ محیطی داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۱۰.۲. شعاع دایرهٔ محیطی، میانه، زاویه

۱.۴.۳.۲.۱۰.۲.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، یک میانه، یک زاویه

۴۰۶. از مثلثی شعاع دایرهٔ محیطی، میانهٔ نظیر ضلع AC و اندازهٔ زاویهٔ $\hat{C}$ داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۱۰.۲.۲. شعاع دایرهٔ محیطی، یک میانه، تفاضل دو زاویه

۴۰۷. از مثلث ABC، میانهٔ نظیر ضلع a، تفاضل دو زاویهٔ $\hat{B}$ و $\hat{C}$ و R شعاع دایرهٔ محیطی داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۱۰.۳. شعاع دایرهٔ محیطی، نیمساز، زاویه

۱.۴.۳.۲.۱۰.۳.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، دو نیمساز، زاویه

۴۰۸. از مثلثی R و طول نیمساز داخلی $AN = l_1$ و نیمساز خارجی $AP = l_2$ و زاویهٔ $\hat{A}$ معلوم است. مثلث را رسم کنید (P در امتداد ضلع BC است).

۴۰۹. از مثلثی R و نیمساز $AD = d_a$ و α زاویه‌ای که نیمساز AD با ضلع BC می‌سازد، معلوم است. این مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۱۰.۳.۲. شعاع دایرهٔ محیطی، نیمساز، تفاضل دو زاویه

۴۱۰. از مثلثی، شعاع دایرهٔ محیطی R، نیمساز زاویهٔ درونی A و تفاضل دو زاویهٔ B و C داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۱۱. شعاع دایرهٔ محیطی، زاویه، محیط

۴۱۱. از مثلث ABC، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ ، محیط مثلث $2p$ و شعاع دایرهٔ محیطی داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۱۲. شعاع دایرهٔ محیطی، نقطه، ضلع، خط

۴۱۲. مثلث ABC را که از آن، محل خطی که قاعدهٔ BC روی آن قرار دارد و محل نقطه‌ای واقع بر دایرهٔ محیطی مثلث و محل نقطه‌ای واقع بر ضلع AB و همچنین شعاع دایرهٔ محیطی و طول قاعدهٔ BC داده شده است، رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۱۳. شعاع دایرهٔ محیطی مثلثهای دیگر، ارتفاع

۴۱۳. مثلثی را رسم کنید که یک ارتفاع آن و شعاعهای دایره‌های محیطی دو مثلثی که این ارتفاع در مثلث خواسته شده جدا می‌کند، داده شده است.

۱.۴.۳.۲.۱۴. شعاعهای دایره‌های محیطی مثلثهای دیگر، میانه

۴۱۴. مثلثی را با مفروض بودن یک میانه و شعاعهای دایره‌های محیطی دو مثلثی که ازتقسیم مثلث توسط این میانه به‌دست می‌آیند، رسم کنید.

۱.۴.۳.۲.۱۵. مسأله‌های ترکیبی

۴۱۵. از مثلثی، میانهٔ m_a و حاصلضرب ضلعهای b و c ($bc = k^2$) معلوم است. مثلث را با یکی از معلومات زیر حل کنید:

اوّل زاویهٔ A، دوم ضلع a، سوم نیمساز V_a زاویهٔ A، چهارم ارتفاع h_a، پنجم شعاع دایرهٔ محیطی R، ششم اختلاف زاویه‌های $\hat{B} - \hat{C} = \alpha$، هفتم اختلاف زاویه‌های میانهٔ m_a با دو ضلع مجاور، هشتم زاویهٔ m_a با ضلع a.

۱.۴.۴. رسم مثلث با معلوم بودن دایره‌های محاطی یا شعاعهای آنها و داده‌های دیگر

۱.۴.۴.۱. رسم مثلث با معلوم بودن دایرهٔ محاطی درونی یا شعاع آن و داده‌های دیگر

۱.۴.۴.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن دایرهٔ محاطی درونی و داده‌های دیگر

۱.۴.۴.۱.۱.۱. دایرهٔ محاطی درونی، نقطه

۴۱۶. مثلثی را که دایرهٔ محاطی داخلی آن رسم شده است، و نقطهٔ وسط قاعده و یک نقطهٔ وسط قاعده و یک نقطه از نیمساز خارجی یکی از زاویه‌های قاعدهٔ آن داده شده‌اند، رسم کنید.

۴۱۷. دایرهٔ محاطی درونی مثلث ABC و N نقطهٔ ژرگون آن (یعنی نقطه‌ای که سه خط سوایی واصل بین رأسها و نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی درونی یکدیگر را قطع می‌کنند) داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۴۱۸. دایرهٔ محاطی درونی مثلث ABC و نقطهٔ ژرگون مثلث یعنی N و یک نقطهٔ تماس دایره با ضلع مثلث یعنی D داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۴.۱.۱.۲. دایرهٔ محاطی درونی، خط

۴۱۹. یک دایره و سه نقطه داده شده‌اند. مثلثی در این دایره محاط کنید که هر ضلعش از یک نقطه از نقطه‌های داده شده بگذرد.

۴۲۰. از شش نقطهٔ برخورد نیمسازهای داخلی یک مثلث با دایرهٔ محاطی داخلی آن، سه نقطه داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۴.۱.۲. رسم مثلث با معلوم بودن شعاع دایرهٔ محاطی درونی، نقطه، ضلع،...

۱.۴.۴.۱.۲.۱. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ضلع

۱.۴.۴.۱.۲.۱.۱. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، دو ضلع

۴۲۱. شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و دو ضلع از مثلثی مفروضند. نشان دهید که این مثلث را نمی‌توان تنها با خط‌کش و پرگار رسم کرد.

۱.۴.۴.۱.۲.۱.۲. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر

۴۲۲. از مثلثی، شعاع دایرهٔ محاطی درونی، یک ضلع و مجموع دو ضلع دیگر داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۴.۱.۲.۱.۳. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، یک ضلع، تفاضل دو ضلع دیگر

۴۲۳. از مثلثی a و $(b-c)$ و r معلوم است. آن را رسم کنید.

۱.۴.۴.۱.۲.۲. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، زاویه

۴۲۴. دو زاویه و شعاع دایرهٔ محاطی درونی از مثلثی داده شده‌اند. این مثلث را رسم کنید.

۴۲۵. از مثلث ABC زاویهٔ $\hat{A}$ و شعاعهای دایره‌های محاطی داخلی دو مثلث ABI و ACI که I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC است مفروضند. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۴.۱.۲.۳. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ارتفاع، نیمساز

۴۲۶. از مثلث ABC، ارتفاع AH و نیمساز داخلی AO و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی معلومند، مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۴.۱.۲.۴. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ضلع، ارتفاع

۱.۴.۴.۱.۲.۴.۱. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، یک ضلع، یک ارتفاع

۴۲۷. از مثلثی ضلع a، ارتفاع $AH = h_a$ و r شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۴۲۸. از مثلث ABC، ضلع a، ارتفاع h_b و r شعاع دایرهٔ محاطی درونی داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۴۲۹. از مثلثی قاعده و ارتفاع وارد بر قاعده مفروضند. این مثلث را طوری رسم کنید که قطر دایرهٔ محاطی داخلی آن با ضلع مربعی که در این مثلث محاط می‌شود و دو رأس آن روی قاعده است، برابر باشد.

۱.۴.۴.۱.۲.۴.۲. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، مجموع دو ضلع، یک ارتفاع

۴۳۰. از مثلثی شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ارتفاع نظیر یک ضلع و مجموع دو ضلع دیگر داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۴.۱.۲.۴.۳. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، مجموع دو ضلع، مجموع دو ارتفاع

۴۳۱. از مثلث ABC، $b+c$ ، $h_b + h_c$ و r داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۴.۱.۲.۴.۴. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، تفاضل دو ضلع، یک ارتفاع

۴۳۲. **الف.** فرض می‌کنیم D نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC، (دایرهٔ S)، با ضلع BC، و E نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی خارجی نظیر ضلع BC با ضلع BC باشد. ثابت کنید که D_1 ، محل برخورد AE و S، نسبت به D متقاطر است (D_1 و D دو سر یک قطرند).

ب. مثلث ABC را با داشتن شعاع دایرهٔ محاطی r، $h = AP$ ارتفاع وارد بر ضلع BC، و $b-c$ ، تفاضل دو ضلع دیگر، رسم کنید.

۴۳۳. مثلثی را که تفاضل دو ضلع، ارتفاع وارد بر یکی از این ضلعها و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن ($b-c$, h_b و r) مفروضند، رسم کنید.

۱.۴.۴.۱.۲.۴.۵. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، تفاضل دو ضلع، تفاضل دو ارتفاع

۴۳۴. از مثلث ABC، $b-c$ ، $h_c - h_b$ و r شعاع دایرهٔ محاطی درونی داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۴.۱.۲.۵. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ضلع، پاره‌خط

۴۳۵. مثلثی را رسم کنید که از آن قاعده و فاصلهٔ رأس مقابل به قاعده از محل تلاقی ارتفاعها، و شعاع دایرهٔ محاطی درونی، معلوم است.

۱.۴.۴.۱.۲.۶. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ضلع، زاویه

۱.۴.۴.۱.۲.۶.۱. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، یک ضلع، یک زاویه

۴۳۶. مثلثی با داده‌های: شعاع دایرهٔ محاطی داخلی r، $\hat{A}=\alpha$ و $BC=a$ رسم کنید.

۴۳۷. مثلثی با داده‌های: $(a\ ,\ \hat{B}=\alpha\ ,\ r)$ رسم کنید.

۱.۴.۴.۱.۲.۶.۲. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، مجموع دو ضلع، زاویه

۴۳۸. مثلث ABC را با معلومات $\hat{A}$ و $b+c=l$ و r رسم کنید.

۴۳۹. مثلثی را که یک زاویهٔ قاعده، مجموع دو ضلع جانبی و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی از آن ($\hat{B}$ و $b+c$,r) مفروضند، رسم کنید.

۱.۴.۴.۱.۲.۶.۳. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، تفاضل دو ضلع، زاویه

۴۴۰. از مثلثی، r شعاع دایرهٔ محاطی درونی، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ و تفاضل دو ضلع، $a-b$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۴۴۱. مثلثی رسم کنید که از آن تفاضل دو ضلع و یکی از زاویه‌های مجاور به این دو ضلع و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی آن معلوم است. ($b-c$ و $\hat{B}$,r)

۱.۴.۴.۱.۲.۷. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ارتفاع، زاویه

۱.۴.۴.۱.۲.۷.۱. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، یک ارتفاع، یک زاویه

۴۴۲. مثلثی با داده‌های: r، h_a و $\hat{A}=\alpha$ رسم کنید.

۱.۴.۴.۱.۲.۷.۲. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، یک ارتفاع، تفاضل دو زاویه

۴۴۳. از مثلث ABC، اندازهٔ ارتفاع نظیر رأس A، تفاضل دو زاویه $\hat{B}-\hat{C}=\alpha$ و r شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۴.۲.۸. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ارتفاع، محیط

۴۴۴. مثلثی با داده‌های زیر رسم کنید:

r، h_a، ۲P

۱.۴.۴.۱.۲.۹. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، زاویه، محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۴.۴.۱.۲.۹.۱. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، زاویه، محیط

۴۴۵. از مثلث ABC، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$، اندازهٔ محیط و شعاع دایرهٔ محاطی درونی ($\hat{A}=\alpha$،۲P،r) داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۴.۱.۲.۹.۲. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، زاویه، مساحت

۴۴۶. مثلث ABC را با داده‌های : r، $\hat{A}$ و S رسم کنید.

۱.۴.۴.۲. رسم مثلث با معلوم بودن دایره‌های محاطی برونی یا شعاعهای آنها و داده‌های دیگر

۱.۴.۴.۲.۱. رسم مثلث با معلوم بودن دایره‌های محاطی برونی

۴۴۷. از مثلثی دو دایره از دایره‌های محاطی برونی در دست است، آن را رسم کنید.

۱.۴.۴.۲.۲. رسم مثلث با معلوم بودن شعاعهای دایره‌های محاطی برونی و داده‌های دیگر

۱.۴.۴.۲.۲.۱. شعاعهای دایره‌های محاطی برونی، ضلع

۱.۴.۴.۲.۲.۱.۱. دو شعاع دایرهٔ محاطی برونی، یک ضلع

۴۴۸. از مثلثی ضلع a و شعاعهای دو دایرهٔ محاطی برونی r_b و r_c داده شده‌اند. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۴.۲.۲.۱.۲. شعاع یک دایرهٔ محاطی برونی، یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر

۴۴۹. از مثلثی ضلع a و مجموع دو ضلع، $b+c$ و شعاع دایرهٔ محاطی خارجی واقع در زاویهٔ $\hat{A}$ معلوم است. آن را رسم کنید.

۱.۴.۴.۲.۲.۱.۳. شعاعهای دو دایرهٔ محاطی برونی، مجموع دو ضلع

۴۵۰. مثلث ABC را با معلومات r_b و r_a و $a+c$ رسم کنید.

۱.۴.۴.۲.۲.۱.۴. شعاع دایره‌های محاطی برونی، تفاضل دو ضلع

۴۵۱. از مثلثی r_a و $b-c=l$ و $\frac{r_b}{r_c}$ معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۴.۲.۲.۲. شعاع دو دایرهٔ محاطی برونی، زاویه

۴۵۲. از مثلثی اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ و شعاعهای دو دایرهٔ محاطی برونی r_b و r_c داده شده‌اند. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۴.۲.۲.۳. مجموع یا تفاضل شعاع دو دایرهٔ محاطی برونی، مجموع دو ضلع، زاویه

۴۵۳. مثلثی با داده‌های $b+c$ ، $\hat{A}$ ، r_b-r_c رسم کنید.

۱.۴.۴.۲.۲.۲.۴. مجموع شعاع دو دایرهٔ محاطی، مجموع دو ضلع، تفاضل دو زاویه

۴۵۴. مثلثی با داده‌های $b+c=l$ و $\hat{B}-\hat{C}=\alpha$ و r_b+r_c رسم کنید.

۱.۴.۴.۲.۲.۲.۵. شعاع دایرهٔ محاطی برونی، ضلع، محیط

۴۵۵. از مثلثی ۲P و ضلع a و r_a معلومند، مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۴.۲.۲.۲.۶. شعاع دایرهٔ محاطی برونی، ارتفاع، محیط

۴۵۶. از مثلث ABC، اندازهٔ ارتفاع رأس A، شعاع دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع a و محیط مثلث داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۴.۲.۲.۲.۷. تفاضل شعاعهای دایره‌های محاطی برونی، زاویه، محیط

۴۵۷. از مثلث ABC اندازه‌های زاویهٔ $\hat{A}$، محیط مثلث یعنی ۲P و r_a-r_b داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۴.۳. رسم مثلث با معلوم بودن دایره‌های محاطی درونی و برونی یا شعاعهای آنها و داده‌های دیگر

۱.۴.۴.۳.۱. رسم مثلث با معلوم بودن دایره‌های محاطی درونی و برونی

۴۵۸. مثلثی رسم کنید که دایرهٔ محاطی داخلی و یکی از دایره‌های محاطی خارجی آن معلوم باشد.

۱.۴.۴.۳.۲. رسم مثلث با معلوم بودن شعاعهای دایره‌های محاطی درونی و برونی و داده‌های دیگر

۱.۴.۴.۳.۲.۱. شعاعهای دو دایرهٔ محاطی درونی و برونی، ضلع

۱.۴.۴.۳.۲.۱.۱. شعاعهای دو دایرهٔ محاطی درونی و برونی، یک ضلع

۴۵۹. مثلثی را با معلوم بودن c (طول ضلع AB)، r (شعاع دایرهٔ محاطی داخلی) و r_c (شعاع دایره محاطی خارجی مماس بر ضلع AB و امتدادهای BC و AC)، رسم کنید.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۰۰

۱.۴.۴.۳.۲.۱.۲. شعاعهای دو دایرهٔ محاطی درونی و برونی، تفاضل دو ضلع

۴۶۰. مثلث ABC را با معلومهای $b-c=l$ و r و r_a رسم کنید.

۱.۴.۴.۳.۲.۲. شعاعهای دو دایرهٔ محاطی درونی و برونی، پاره‌خط

۴۶۱. از مثلث ABC اندازه‌های شعاع دو دایرهٔ محاطی درونی و دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع BC و پاره‌خط DD' که دو سر آن نقطه‌های تماس دو دایره با ضلع BC است، مشخص است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۴.۳.۲.۳. شعاعهای دو دایرهٔ محاطی درونی و برونی، میانه

۴۶۲. مثلثی رسم کنید که از آن، شعاع دایرهٔ محاطی داخلی و شعاع دایرهٔ محاطی خارجی و میانهٔ ضلعی که بر این دایره مماس است، معلوم است. (r, r_a, m_a)

۱.۴.۴.۳.۲.۴. شعاعهای دو دایرهٔ محاطی درونی و برونی، زاویه

۴۶۳. از مثلث ABC، اندازه‌های زاویهٔ $\hat{A}$ و شعاع دایرهٔ محاطی درونی و شعاع دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع a داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۴.۳.۲.۵. شعاعهای دو دایرهٔ محاطی درونی و برونی، محیط

۴۶۴. از مثلثی r، r_a و ۲P داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۴.۳.۲.۶. نسبت شعاعهای دو دایرهٔ محاطی درونی و برونی، نقطه، ارتفاع

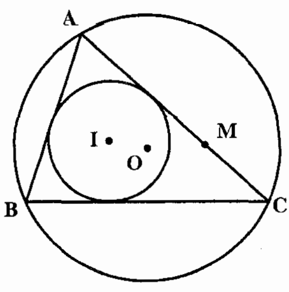
۴۶۵. از مثلثی محل نقطه‌های I و I_a، و طول ارتفاع h_a و نسبت $r_a : r$ داده شده‌اند. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۵. رسم مثلث با معلوم بودن دایره‌های محیطی و محاطی یا شعاعهای آنها و داده‌های دیگر

۱.۴.۵.۱. رسم مثلث با معلوم بودن دایره‌های محیطی و محاطی و داده‌های دیگر

۱.۴.۵.۱.۱. دایره‌های محیطی و محاطی، یک نقطه

۴۶۶. دایره‌های محیطی و محاطی مثلث ABC و نقطهٔ M از ضلع AC از مثلث ABC داده شده است. مثلث را رسم کنید.



۱.۴.۵.۲. رسم مثلث با معلوم بودن شعاعهای دایره‌های محیطی و محاطی و داده‌های دیگر

۱.۴.۵.۲.۱. شعاعهای دو دایرهٔ محیطی و محاطی درونی، ضلع

۴۶۷. از مثلثی یک ضلع، شعاع دایرهٔ محیطی و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی (a, R, r) داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۵.۲.۲. شعاعهای دو دایرهٔ محیطی و محاطی درونی، خط

۴۶۸. از مثلثی، محل مرکز دایرهٔ محاطی خارجی، I_a و محل خط نامحدود S که ضلع BC متناظر با I_a روی آن واقع است، و طول شعاع دایرهٔ محاطی داخلی، r، و طول شعاع دایرهٔ محیطی، R، داده شده‌اند. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۵.۲.۳. شعاع دایرهٔ محیطی، مجموع شعاعهای دو دایرهٔ محاطی درونی و برونی، پاره‌خط

۴۶۹. از مثلثی شعاع دایرهٔ محیطی، مجموع شعاع یک دایرهٔ محاطی خارجی و شعاع دایرهٔ محاطی داخلی، و طول خط‌المرکزین این دو دایره (R، $r_a + r$، $II_a = 2d$) داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۱.۴.۵.۲.۴. شعاعهای دو دایرهٔ محیطی و محاطی درونی، تفاضل دو زاویه

۴۷۰. از مثلثی شعاع دایرهٔ محاطی داخلی، شعاع دایرهٔ محیطی و تفاضل دو زاویهٔ آن (r، R، $\hat{B} - \hat{C}$) داده شده است؛ مثلث را رسم کنید.

۴۷۱. مثلث غیرمشخص ABC را رسم کنید و قرینهٔ آن را نسبت به ضلع BC و ارتفاع AH و مرکزهای دایره‌های محیطی و محاطی پیدا کنید.

بخش ۲

• رسم مثلث متساوی‌الاضلاع

۲.۱. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛ پاره‌خط، خط؛ زاویه؛ محیط، مساحت، رابطۀ متری

۲.۱.۱. نقطه
۲.۱.۲. ضلع
۲.۱.۳. ارتفاع، میانه، نیمساز
۲.۱.۳.۱. ارتفاع
۲.۱.۴. پاره‌خط، خط
۲.۱.۴.۱. خط
۲.۱.۵. زاویه
۲.۱.۶. محیط، مساحت، رابطۀ متری
۲.۱.۶.۱. محیط
۲.۱.۷. نقطه، خط
۲.۱.۸. نقطه، زاویه
۲.۱.۹. ضلع، خط

۲.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۲.۲.۱. مثلث، نقطه
۲.۲.۲. مثلث، ضلع
۲.۲.۳. مثلث، خط

۲.۳. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن: چند ضلعی، چندضلعی و داده‌های دیگر

۲.۴. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن: دایره،دایره و داده‌های دیگر

بخش ۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع

۱.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛...

۱.۱.۲. نقطه

۴۷۲. همهٔ مقدارهای طبیعی $n > 2$ را پیدا کنید که، برای آنها، بتوان در صفحه، n نقطه را طوری انتخاب کرد که، هر دو نقطه از آنها، رأسهای مثلث متساوی‌الاضلاعی باشند که، رأس سوم آن هم، یکی از $(n - 2)$ نقطهٔ دیگر باشد.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، یوگسلاوی سابق، ۱۹۷۶

۴۷۳. مثلث متساوی‌الاضلاعی چنان رسم کنید که نقطهٔ داده شده در داخل آن واقع شده و از رأسهای آن به فاصله‌های ۲، ۳ و ۴ باشد.

۲.۱.۲. ضلع

۴۷۴. به کمک پرگار ثابت (پرگاری که به اندازهٔ معینی باز شده است و قابل تغییر نیست) و خط‌کش، مثلث متساوی‌الاضلاعی روی پاره‌خط داده شدهٔ AB رسم کنید (شعاع پرگار، برابر طول پاره‌خط AB نیست).

مسأله‌های تاریخی اروپایی، از تارتاگلیا

تارتاگلیا

این مسأله را، برای نخستین‌بار، نیکلا تارتاگلیا (حدود ۱۴۹۹ـ۱۵۵۷) ریاضیدان برجستهٔ ایتالیایی طرح کرد. تارتاگلیا، ریاضیات را پیش خود آموخت. او زبانهای یونانی و لاتینی را هم، پیش خود یاد گرفت. در ریاضیات، روش حل معادلهٔ درجهٔ سوم به‌صورت $x^3 + px = q$ را کشف کرد (p و q، عددهایی ثابتند).

۲.۱.۳. ارتفاع، میانه، نیمساز

۲.۱.۳.۱. ارتفاع

۴۷۵. ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاعی معلوم است. آن را رسم کنید.

۲.۱.۴. پاره‌خط، خط

۲.۱.۴.۱. خط

۴۷۶. مثلث متساوی‌الاضلاعی بیابید که رأسهای آن بر سه خط موازی مفروض واقع باشد.

۲.۱.۵. زاویه

۴۷۷. چند مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد که موضع یک زاویهٔ آن داده شده باشد.

۲.۱.۶. محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۲.۱.۶.۱. محیط

۴۷۸. یک مثلث متساوی‌الاضلاع رسم کنید که محیط آن برابر با طول یک پاره‌خط مفروض باشد.

۲.۱.۷. نقطه، خط

۴۷۹. دو خط D و Δ و نقطهٔ متمایز A داده شده‌اند. مثلث متساوی‌الاضلاعی به رأس A چنان رسم کنید که دو رأس دیگرش بر خطهای D و Δ واقع باشد.

۸.۱.۲. نقطه، زاویه

۴۸۰. زاویه‌های $x\hat{O}y$ و نقطهٔ A داخل این زاویه داده شده است. مطلوب است رسم مثلث متساوی‌الاضلاعی که یک رأس آن A و دو رأس دیگرش روی Ox و Oy باشند.

۹.۱.۲. ضلع، خط

۴۸۱. دو خط موازی p و q را خط سوم s قطع کرده است. مثلث متساوی‌الاضلاع با طول ضلع معین را طوری رسم کنید که رأسهای آن به خطهای p، q و s متعلق باشد.

۲.۲ . رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۱.۲.۲. مثلث، نقطه

۴۸۲. در یک مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلث متساوی‌الاضلاعی که یکی از رأسهای آن معلوم باشد، محاط کنید.

۲.۲.۲. مثلث، ضلع

۴۸۳. در مثلث ABC بزرگترین مثلث متساوی‌الاضلاع ممکن را محاط کنید.

۳.۲.۲. مثلث، خط

۴۸۴. در داخل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، مثلث متساوی‌الاضلاع دیگری چنان رسم کنید که ضلعهای دو مثلث، نظیر به نظیر بر هم عمود باشند.

۴.۲.۲. مثلث، زاویه

۴۸۵. در تمرینهای زیر، شکلی رسم کنید که مثلث متساوی‌الاضلاع قضیهٔ مورلی را نشان دهد، در صورتی که اندازه‌های دو زاویهٔ مثلث اصلی عبارت باشند از :

الف. 90° و 40° ب. 60° و 20°

پ. 30° و 80° ت. 25° و 75°

۵.۲.۲. مثلث، مساحت

۴۸۶. مثلث متساوی‌الاضلاعی رسم کنید که هم ارز با مثلثی معلوم باشد.

۴۸۷. در مثلث حاده‌الزاویهٔ ABC، مثلثی متساوی‌الاضلاع با کمترین مساحت، محاط کنید.

مرحلهٔ سوم دوازدهمین المپیاد ریاضی ایران، ۱۳۷۳

۶.۲.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۸۸. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را به طور متوالی با بردارهای $k.\overrightarrow{AB}$ ، $k.\overrightarrow{BC}$ و $k.\overrightarrow{CA}$ انتقال می‌دهیم که k عدد صحیح نسبی است. قسمتی از شکل حاصل را رسم کنید.

۷.۲.۲. مسأله‌های ترکیبی

۴۸۹. مثلث ABC داده شده است.

الف. ثابت کنید عده بیشماری مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد به‌طوری که مثلث ABC در آنها محاط باشد (یعنی هریک از رأسهای A ، B و C روی یکی از ضلعهای مثلث ساخته شده قرار گیرد).

ب. از میان مثلثهای متساوی‌الاضلاع ساخته شده، مثلثی را تعیین کنید که محیط و مساحت آن ماکزیمم باشد.

پنجمین دوره مسابقات ریاضی استانی کشور، بهمن ۱۳۶۶

۴۹۰. **الف.** بر مثلث دادهٔ شدهٔ ABC مثلث متساوی‌الاضلاعی محیط کنید که عمودهای رسم

شده از نقطه‌های A، B و C بر ضلعهای آن در یک نقطه همرس باشند.
ب. در مثلث داده شدهٔ ABC مثلث متساوی‌الاضلاعی محاط کنید که عمودهای رسم شده از نقطه‌های A، B و C بر ضلعهای آن در یک نقطه همرس باشند.

۳.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن: چند ضلعی، چند ضلعی و داده‌های دیگر

۱.۳.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن چندضلعی

۱.۱.۳.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن مربع

۴۹۱. در مربعی، مثلث متساوی‌الاضلاعی محاط کنید که در یک رأس مشترک باشند.

۴.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر

۱.۴.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن دایره در حالت کلی و داده‌های دیگر

۱.۱.۴.۲. یک دایره، رأس، خط

۴۹۲. رأس A از یک مثلث متساوی‌الاضلاع معلوم است و می‌دانیم که رأسهای B و C بترتیب بر خط معلوم D و دایرهٔ معین (O) واقعند. مثلث را رسم کنید.

۲.۱.۴.۲.۱. دو دایره، نقطه

۴۹۳. دو دایره و نقطهٔ A داده شده است. مثلث متساوی‌الاضلاعی بسازید که یک رأسش A و دو رأس دیگرش برروی دو دایره باشد.

۴۹۴. از یک مثلث متساوی‌الاضلاع، موضع رأس A در دست است و می‌دانیم که رأسهای B و C از آن روی دو دایرهٔ هم مرکز معلوم قرار دارند. مثلث را رسم کنید.

۴۹۵. دو دایرهٔ ω_1 و ω_2 و خط مستقیم l داده شده است. یک مثلث متساوی‌الاضلاع را طوری رسم کنید که دو رأس آن روی دو دایره و رأس سوم آن نیز متعلق به خط داده شده باشد.

۲.۴.۱.۳. سه دایره

۴۹۶. مثلث متساوی‌الاضلاعی رسم کنید که سه رأس آن روی سه دایرهٔ متحدالمرکز قرار گیرند.

۲.۴.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۹۷. مثلث متساوی‌الاضلاعی رسم کنید که ضلعهای آن بترتیب از سه نقطهٔ واقع بر یک استقامت بگذرد و دایرهٔ محیطی آن نیز از یک نقطهٔ ثابت بگذرد.

۲.۴.۱.۵. مسأله‌های ترکیبی

۴۹۸. **الف**. فرض می‌کنیم سه خط همرس l_1، l_2، و l_3 و نقطهٔ A بر یکی از این خطها داده شده باشند. یک مثلث ABC بسازید که خطهای l_1، l_2، و l_3 نیمسازهای آن باشند.

ب. فرض می‌کنیم یک دایرهٔ s، و سه خط l_1، l_2، و l_3 گذرنده بر مرکز آن داده شده باشند. یک مثلث ABC بیابید که رأسهای آن بر این خطها باشند، و دایرهٔ s دایرهٔ محاطی آن باشد.

ج. فرض کنیم سه خط همرس l_1، l_2، و l_3 و نقطهٔ A_1 بریکی از آنها داده شده باشد. یک مثلث ABC پیدا کنید که در آن، نقطهٔ A_1 وسط ضلع BC باشد و خطهای l_1، l_2، و l_3 عمود منصفهای اضلاع آن باشند.

اگر بخواهیم مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، مسأله به چه صورتی درمی‌آید؟

۲.۴.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن دایرهٔ محیطی یا شعاع دایرهٔ محیطی و داده‌های دیگر

۱.۲.۴.۲. رسم مثلث با معلوم بودن دایرهٔ محیطی

۴۹۹. دایرهٔ محیطی یک مثلث متساوی‌الاضلاع داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۲.۲.۴.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن شعاع دایرهٔ محیطی

۵۰۰. شعاع دایرهٔ محیطی یک مثلث متساوی‌الاضلاع داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۳.۴.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن دایره‌های محاطی یا شعاع دایره‌های محاطی

۱.۳.۴.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن دایره‌های محاطی

۵۰۱. دایرهٔ محاطی درونی یک مثلث متساوی‌الاضلاع داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۵۰۲. یک دایرهٔ محاطی برونی مثلثی متساوی‌الاضلاع داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۲.۳.۴.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن شعاع دایره‌های محاطی

۵۰۳. شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلثی متساوی‌الاضلاع داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۵۰۴. شعاع یک دایرهٔ محاطی برونی مثلثی متساوی‌الاضلاع داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۳.۳.۴.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۰۵. از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی درونی به اضافهٔ ارتفاع این مثلث داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

بخش ۳

● رسم مثلث متساوی‌الساقین

۱.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛...

۱.۱.۳. نقطه
۲.۱.۳. ضلع
۳.۱.۳. ارتفاع، میانه، نیمساز
۱.۳.۱.۳. ارتفاع
۲.۳.۱.۳. میانه
۳.۳.۱.۳. نیمساز
۴.۳.۱.۳. ارتفاع، میانه
۴.۱.۳. ضلع ؛ ارتفاع، میانه، نیمساز
۱.۴.۱.۳. ضلع، ارتفاع
۵.۱.۳. ضلع، زاویه
۱.۵.۱.۳. یک ضلع، یک زاویه
۲.۵.۱.۳. مجموع دو ضلع، یک زاویه
۳.۵.۱.۳. تفاضل دو ضلع، یک زاویه
۶.۱.۳. ارتفاع، میانه، نیمساز ؛ زاویه
۱.۶.۱.۳. ارتفاع، زاویه
۷.۱.۳. ارتفاع، محیط
۸.۱.۳. زاویه ؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۳.۱.۸.۱. زاویه؛ محیط
۳.۱.۸.۲. زاویه، رابطهٔ متری
۳.۱.۹. نقطه، خط، زاویه
۳.۱.۱۰. نقطه، زاویه، محیط

۳.۲. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۳.۲.۱. مثلث، نقطه، زاویه

۳.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن: چند ضلعی، چندضلعی و داده‌های دیگر

۳.۳.۱. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن چندضلعی
۳.۳.۱.۱. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن مستطیل

۳.۴. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر

۳.۴.۱. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن دایره در حالت کلی و داده‌های دیگر
۳.۴.۱.۱. دایره، نقطه
۳.۴.۱.۲. دایره، رابطهٔ متری
۳.۴.۲. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن دایرهٔ محیطی یا شعاع آن و داده‌های دیگر
۳.۴.۲.۱. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن دایرهٔ محیطی و داده‌های‌دیگر
۳.۴.۲.۱.۱. دایرهٔ محیطی، نقطه
۳.۴.۲.۱.۲. دایرهٔ محیطی، رابطهٔ متری

بخش ۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین

۱.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ارتفاع، میانه، نیمساز؛...

۱.۱.۳. نقطه

۵۰۶. از مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$، دو رأس A و B و نقطهٔ وسط ارتفاع AH داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۲.۱.۳. ضلع

۵۰۷. دو پاره‌خط داده شده است و می‌دانیم یکی از آنها قاعده و دیگری یکی از ساقهای مثلث متساوی‌الساقین است. ولی نمی‌دانیم کدامیک قاعده و کدامیک ساق است. آیا با همین مفروضات می‌توان مثلث متساوی‌الساقین را ساخت؟

۳.۱.۳. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۳.۱.۳. ارتفاع

۵۰۸. مثلث متساوی‌الساقینی را با معلوم بودن ارتفاع وارد برقاعده و ارتفاع وارد بر ساق آن رسم کنید.

۳.۱.۳.۲. میانه

۵۰۹. از مثلث متساوی‌الساقین ABC اندازهٔ دو میانه داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۳.۱.۳.۳. نیمساز

۵۱۰. از مثلث متساوی‌الساقین ABC اندازهٔ سه نیمساز داده شده‌اند. مثلث را رسم کنید.

۳.۱.۳.۴. ارتفاع، میانه

۵۱۱. مثلث متساوی‌الساقینی را رسم کنید که میانه و ارتفاع وارد بر یکی از ساقهایش معلوم باشد.

۳.۱.۴. ضلع؛ ارتفاع، میانه،نیمساز

۳.۱.۴.۱. ضلع، ارتفاع

۵۱۲. از مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ اندازهٔ قاعده و ارتفاع وارد بر قاعده داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۵۱۳. از مثلث متساوی‌الساقینی طول قاعده و ارتفاع وارد بر یکی از ساقها معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۵۱۴. از یک مثلث متساوی‌الساقین اندازهٔ یک ساق و ارتفاع وارد بر قاعده داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۵۱۵. از مثلث متساوی‌الساقین ABC اندازهٔ یک ساق و ارتفاع وارد بر آن داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۳.۱.۵. ضلع، زاویه

۳.۱.۵.۱. یک ضلع، یک زاویه

۵۱۶. از مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$، اندازهٔ قاعدهٔ BC و اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$

داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۵۱۷. از مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$، اندازهٔ قاعدهٔ $BC = a$ و اندازهٔ زاویهٔ $\hat{B} = \alpha$ داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۵۱۸. از یک مثلث متساوی‌الساقین، اندازه یک ساق و زاویهٔ رأس داده شده است $(\hat{A} = \alpha, AC = b)$. مثلث را رسم کنید.

۵۱۹. از یک مثلث متساوی‌الساقین، اندازهٔ یک ساق و زاویهٔ مجاور به قاعده داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۲.۵.۱.۳. مجموع دو ضلع، یک زاویه

۵۲۰. از مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$، اندازهٔ یک زاویه و مجموع یک ساق و یک قاعده داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۳.۵.۱.۳. تفاضل دو ضلع، یک زاویه

۵۲۱. از مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$، اندازهٔ یک زاویه و قدرمطلق تفاضل یک ساق و قاعده داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۶.۱.۳. ارتفاع، میانه، نیمساز؛ زاویه

۱.۶.۱.۳. ارتفاع، زاویه

۵۲۲. اندازهٔ ارتفاع وارد بر قاعده از یک مثلث متساوی‌الساقین و اندازهٔ زاویهٔ مجاور به قاعده داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۷.۱.۳. ارتفاع، محیط

۵۲۳. مثلث متساوی‌الساقینی رسم کنید که محیط و ارتفاعش معلوم است.

۳.۱.۸. زاویه؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۳.۱.۸.۱. زاویه، محیط

۵۲۴. از مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ ، اندازهٔ محیط و یک زاویه داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۳.۱.۸.۲. زاویه، رابطهٔ متری

۵۲۵. مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ را با داده‌های : اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ و مجموع قاعده و ارتفاع نظیر آن، رسم کنید.

۵۲۶. مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ را با داده‌های زیر رسم کنید :

یک زاویه، $b + h_a$

۵۲۷. از مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ ، اندازهٔ یک زاویه و $|b - h_a|$ داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۳.۱.۹. نقطه، خط، زاویه

۵۲۸. نقطهٔ P و دو خط متوازی D و D' مفروضند. مثلث متساوی‌الساقینی به رأس P رسم کنید که زاویهٔ رأس آن α و دو رأس دیگرش روی خطهای D و D' واقع باشند.

۵۲۹. دو خط D و Δ و نقطهٔ A داده شده است. مثلثی متساوی‌الساقین با زاویه‌های معین بسازید که یک رأسش A و دو رأس دیگرش بر D و Δ واقع باشد.

۳.۱.۱۰. نقطه، زاویه، محیط

۵۳۰. زاویه‌ای و نقطهٔ M روی نیمساز آن داده شده است. مثلث متساوی‌الساقین MAB را طوری رسم کنید که محیطش ۲۱ باشد. $OA = OB = x$ را مجهول اختیار کرده و مسأله را به طریق هندسی بیان کنید.

۲.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۱.۲.۳. مثلث، نقطه، زاویه

۵۳۱. در مثلث ABC مثلث متساوی‌الساقینی محاط کنید، که زاویه رأس آن و موضع این رأس بر ضلع BC معلوم باشد.

۳.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن: چند ضلعی، چند ضلعی و داده‌های دیگر

۱.۳.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن چندضلعی

۱.۱.۳.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن مستطیل

۵۳۲. مستطیل ABCD داده شده است. مثلث متساوی‌الساقینی به زاویهٔ رأس α در این مستطیل محاط کنید به قسمی که یک رأس آن بر یک رأس مستطیل منطبق باشد و دو رأس دیگرش روی دو ضلع دیگر مستطیل باشد.

۴.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر

۱.۴.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن دایره در حالت کلی و داده‌های دیگر

۱.۱.۴.۳. دایره، نقطه

۵۳۳. در یک دایره، مثلث متساوی‌الساقینی محاط کنید که از آن، رأس A و اندازهٔ ارتفاع رأس A معلوم است.

۲.۱.۴.۳. دایره، رابطهٔ متری

۵۳۴. دایره به مرکز O داده شده است. مثلث متساوی‌الساقینی در این دایره طوری محاط کنید که مجموع طولهای قاعده و ارتفاع نظیر قاعدهٔ آن، برابر l باشد.

۵۳۵. در یک دایرهٔ داده شده به شعاع r، مثلث متساوی‌الساقینی محاط کنید که تفاضل قاعده و ارتفاع وارد بر آن برابر l باشد. l می‌تواند از ۲r تا صفر تغییر کند.

۵۳۶. بر یک دایرهٔ داده شده مثلث متساوی‌الساقینی محیط کنید که نسبت ساق به قاعدهٔ آن مقدار مفروضی باشد.

۲.۴.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن دایرهٔ محیطی یا شعاع آن و داده‌های دیگر

۱.۲.۴.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن دایرهٔ محیطی و داده‌های دیگر

۱.۱.۲.۴.۳. دایرهٔ محیطی، نقطه

۵۳۷. دایرهٔ محیطی یک مثلث متساوی‌الساقین و نقطهٔ وسط قاعدهٔ آن معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۵۳۸. وضع دایرهٔ محیطی یک مثلث متساوی‌الساقین و نقطه وسط یک ساق آن معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۲.۱.۲.۴.۳. دایرهٔ محیطی، رابطهٔ متری

۵۳۹. مثلث متساوی‌الساقین ABC(AB = AC) را با معلوم بودن دایرهٔ محیطی و مجموع ضلع BC و ارتفاع نظیر آن، رسم کنید.

۵۴۰. دایرهٔ محیطی و مجموع یک ساق و ارتفاع وارد بر آن ساق از یک مثلث متساوی‌الساقین داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۳.۱.۲.۴.۳. دایرهٔ محیطی، نقطه، خط

۵۴۱. دایرهٔ محیطی یک مثلث متساوی‌الساقین معلوم است و می‌دانیم که وسط قاعدهٔ آن روی خط xy واقع است و محل رأس A نیز معلوم است. مثلث را رسم کنید.

۲.۲.۴.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن شعاع دایرهٔ محیطی و داده‌های دیگر

۱.۲.۲.۴.۳. شعاع دایرهٔ محیطی، ضلع

۵۴۲. شعاع دایرهٔ محیطی یک مثلث متساوی‌الساقین و اندازهٔ قاعدهٔ آن مثلث داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۳.۴.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن دایره‌های محاطی یا شعاع آنها و داده‌های دیگر

۱.۳.۴.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن دایره‌های محاطی و داده‌های دیگر

۵۴۳. دو دایرهٔ محاطی درونی و بیرونی مماس بر ضلع BC از مثلث ABC داده شده‌اند. این مثلث را رسم کنید.

۲.۳.۴.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن شعاع دایره‌های محاطی و داده‌های دیگر

۱.۲.۳.۴.۳. شعاع دایره‌های محاطی، ضلع

۱.۱.۲.۳.۴.۳. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ضلع

۵۴۴. شعاع دایرهٔ محاطی داخلی مساوی r، $BC = a$ و می‌دانیم که $AB = AC$ است. مثلث ABC را رسم کنید.

۲.۲.۲.۳.۴.۳. شعاع دایرهٔ محاطی برونی و داده‌های دیگر

۱.۲.۲.۳.۴.۳. شعاع دایرهٔ محاطی برونی، ضلع

۵۴۵. مثلث متساوی‌الساقین $(AB = AC)ABC$ را با معلوم بودن شعاع دایرهٔ محاطی درونی (r) و ارتفاع وارد بر قاعده (h_a) رسم کنید.

۲.۲.۲.۲.۳.۴.۳. شعاع دایرهٔ محاطی برونی، زاویه

۵۴۶. از مثلث متساوی‌الساقین $(AB = AC)ABC$، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{B} = \beta$ و اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع AC، یعنی r_b داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۵۴۷. از مثلث متساوی‌الساقین $(AB = AC)ABC$ اندازهٔ زاویهٔ $\hat{B} = \beta$ و شعاع دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع BC یعنی r_a داده شده است. مثلث را رسم کنید.

بخش ۴

• رسم مثلث قائم‌الزاویه

۱.۴. رسم مثلث قائم‌الزاویه با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛...

۱.۱.۴. نقطه
۲.۱.۴. ضلع
۱.۲.۱.۴. وتر، یک ضلع
۲.۲.۱.۴. دو ضلع زاویهٔ قائمه
۳.۲.۱.۴. وتر، مجموع دو ضلع دیگر
۴.۲.۱.۴. وتر، تفاضل دو ضلع دیگر
۵.۲.۱.۴. یک ضلع، مجموع وتر و یک ضلع
۶.۲.۱.۴. یک ضلع، تفاضل دو ضلع دیگر
۷.۲.۱.۴. وتر، تفاضل مربعهای دو ضلع دیگر
۸.۲.۱.۴. وتر، نسبت مربعهای دو ضلع دیگر
۹.۲.۱.۴. رابطهٔ بین ضلعها
۳.۱.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز
۱.۳.۱.۴. ارتفاع، میانه
۴.۱.۴. محیط، مساحت، رابطهٔ متری
۱.۴.۱.۴. محیط، رابطهٔ متری
۵.۱.۴. نقطه، وتر
۶.۱.۴. نقطه، خط، وتر
۷.۱.۴. ضلع ؛ ارتفاع، میانه، نیمساز

۴.۲. رسم مثلث قائم‌الزاویه با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های‌دیگر

۴.۳. رسم مثلث قائم‌الزاویه با معلوم بودن: چند ضلعی، چندضلعی و داده‌های دیگر

۴.۴. رسم مثلث قائم‌الزاویه با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های‌دیگر

۴.۵. رسم مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین

بخش ۴. رسم مثلث قائم‌الزاویه

۱.۴. رسم مثلث قائم‌الزاویه با معلوم بودن: نقطه، ضلع، ارتفاع، میانه، نیمساز،...

۱.۱.۴. نقطه

۵۴۸. وسطهای سه ضلع مثلثی قائم‌الزاویه داده شده‌اند. این مثلث را رسم کنید.

۲.۱.۴. ضلع

۱.۲.۱.۴. وتر، یک ضلع

۵۴۹. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ وتر و یک ضلع زاویهٔ قائمه داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۲.۲.۱.۴. دو ضلع زاویهٔ قائمه

۵۵۰. با استفاده از خط‌کش، مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که طول ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ آن ۸ سانتیمتر و ۱۵ سانتیمتر باشد.

۳.۲.۱.۴. وتر، مجموع دو ضلع دیگر

۵۵۱. از مثلث قائم‌الزاویه $ABC(\hat{A}=90^\circ)$، وتر $BC=a$ و مجموع دو ضلع یعنی $AB+AC$ داده شده‌اند. این مثلث را رسم کنید.

۴.۲.۱.۴. وتر، تفاضل دو ضلع دیگر

۵۵۲. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، اندازهٔ وتر و تفاضل دو ضلع زاویهٔ قائمه داده شده‌اند. مثلث را رسم کنید.

۵.۲.۱.۴. یک ضلع، مجموع وتر و ضلع دیگر

۵۵۳. از مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، اندازهٔ یک ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه و مجموع اندازه‌های وتر و ضلع دیگر داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۶.۲.۱.۴. یک ضلع، تفاضل وتر و ضلع دیگر

۵۵۴. از مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A} = ۹۰^\circ)$، اندازهٔ یک ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه و تفاضل اندازه‌های وتر و ضلع دیگر داده شده‌اند. مثلث را رسم کنید.

۷.۲.۱.۴. وتر، تفاضل مربعهای دو ضلع دیگر

۵۵۵. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، اندازهٔ وتر و تفاضل مربعهای دو ضلع زاویهٔ قائمه داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۸.۲.۱.۴. وتر، نسبت مربعهای دو ضلع دیگر

۵۵۶. مثلث قائم‌الزاویه‌ای را رسم کنید که وتر و نسبت مربعهای دو ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن داده شده است.

۹.۲.۱.۴. رابطهٔ بین ضلعها

۵۵۷. مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ را با شرط $b = ۲c$ رسم کنید.

۳.۱.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۳.۱.۴. ارتفاع، میانه

۵۵۸. مثلث قائم‌الزاویه‌ای را با معلوم بودن اندازهٔ ارتفاع و میانهٔ وارد بر وتر رسم کنید.

۵۵۹. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر و میانهٔ نظیر یک ضلع زاویهٔ قائمه داده

شده است. این مثلث را رسم کنید.

۴.۱.۴. محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۴.۱.۴. محیط، رابطهٔ متری

۵۶۰. از مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A}=90^\circ)$ اندازهٔ محیط مثلث یعنی $2p$ و نسبت $\frac{HB}{HC}=k$ (H پای ارتفاع رأس A است) داده شده است، این مثلث را رسم کنید.

۵.۱.۴. نقطه، وتر

۵۶۱. مثلث قائم‌الزاویه را با مفروض بودن ارتفاع وارد بر وتر، و یک نقطه روی هر یک از دو ضلع زاویهٔ قائمهٔ آن رسم کنید.

۶.۱.۴. نقطه، خط، وتر

۵۶۲. دو خط عمود بر هم $x'Ox$ و $y'Oy$ و نقطهٔ A غیرواقع بر هیچ یک از آنها داده شده‌اند. مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A}=90^\circ)$ را چنان رسم کنید که B روی xx' و C روی yy' واقع بوده و BC به طول معلوم a باشد (A در صفحه xOy واقع است).

۷.۱.۴. ضلع؛ ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۷.۱.۴. ضلع، ارتفاع

۱.۱.۷.۱.۴. وتر، ارتفاع

۵۶۳. مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که وتر و ارتفاع وارد بر وتر آن معلوم است.

۲.۱.۷.۱.۴. ضلع زاویهٔ قائمه، ارتفاع

۵۶۴. یک ضلع و ارتفاع وارد بر وتر (h_a و c یا h_a و b) داده شده‌اند، مثلث را رسم کنید.

۴.۱.۷.۱.۳. مربع نسبت ضلعها، ارتفاع

۵۶۵. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای نسبت مربعهای دو ضلع زاویهٔ قائمه و اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۴.۱.۷.۲. ضلع، میانه

۴.۱.۷.۲.۱. وتر، میانه

۵۶۶. مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که وتر و میانهٔ وارد بر یکی از ضلعهایش معلوم است.

۴.۱.۷.۲.۲. ضلع زاویهٔ قائمه، میانه

۵۶۷. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ یک ضلع زاویهٔ قائمه و اندازهٔ میانهٔ نظیر وتر داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۴.۱.۷.۳. ضلع، نیمساز

۴.۱.۷.۳.۱. وتر، نیمساز

۵۶۸. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، وتر و نیمساز یکی از زاویه‌های حاده معلومند، مثلث را رسم کنید.

۴.۱.۷.۳.۲. ضلع زاویهٔ قائمه، نیمساز

۵۶۹. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ یک ضلع زاویهٔ قائمه و اندازهٔ نیمساز زاویهٔ قائمه داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۵۷۰. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ یک ضلع زاویهٔ قائمه و اندازهٔ نیمساز زاویهٔ درونی روبه‌روی این ضلع داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۴.۱.۸. ضلع، پاره‌خط، خط

۴.۱.۸.۱. وتر، پاره‌خط

۵۷۱. مثلث قائم‌الزاویه‌ای را رسم کنید که وتر و فاصلهٔ نقطهٔ وسط وتر تا یکی از دو ضلع زاویهٔ قائمه از آن، داده شده است.

۲.۸.۱.۴. تفاضل مربعهای دو ضلع، خط

۵۷۲. از مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A}=90^\circ)$ اندازهٔ $b^2-c^2=k^2$ معلوم است و می‌دانیم که سه رأس این مثلث روی سه خط موازی مفروض واقعند. این مثلث را رسم کنید.

۹.۱.۴. ضلع، زاویه

۱.۹.۱.۴. وتر، زاویهٔ حاده

۵۷۳. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ وتر و یک زاویهٔ حاده داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۵۷۴. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ وتر و زاویهٔ بین وتر و میانهٔ نظیر یک ضلع زاویهٔ قائمه داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۲.۹.۱.۴. ضلع زاویهٔ قائمه، زاویهٔ حاده

۵۷۵. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ یک ضلع زاویهٔ قائمه و زاویهٔ حادهٔ رو به روی آن داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۵۷۶. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ یک ضلع زاویهٔ قائمه و زاویهٔ حادهٔ مجاور آن داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۳.۹.۱.۴. مجموع دو ضلع زاویهٔ قائمه، زاویهٔ حاده

۵۷۷. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ یک زاویهٔ حاده و مجموع دو ضلع زاویهٔ قائمه معلومند. آن را رسم کنید.

۴.۹.۱.۴. مجموع وتر و یک ضلع، یک زاویهٔ حاده

۵۷۸. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ یک زاویهٔ حاده و مجموع دو ضلع دو طرف همین زاویه معلومند. آن مثلث را رسم کنید.

۵.۹.۱.۴. تفاضل دو ضلع زاویهٔ قائمه، یک زاویهٔ حاده

۵۷۹. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ یک زاویهٔ حاده و تفاضل دو ضلع زاویهٔ قائمه معلومند، آن را رسم کنید.

۶.۹.۱.۴. تفاضل وتر و یک ضلع، یک زاویهٔ حاده

۵۸۰. مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که از آن یک زاویهٔ حاده و تفاضل دو ضلع این زاویه معلوم است.

۷.۹.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۸۱. دست کم یک مثلث قائم‌الزاویه پیدا کنید، به نحوی که طول هر ضلع آن عددی درست باشد و، درضمن، بتوان هر یک از زاویه‌های آن را به کمک پرگار و خط‌کش به سه‌بخش برابر تقسیم کرد.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، امریکا، ۱۹۷۶

۱۰.۱.۴. ضلع؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱۰.۱.۴. ضلع، محیط

۵۸۲. از مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A}=۹۰^\circ)$، اندازهٔ ضلع $AB=۳$ و اندازهٔ محیط آن $۲p=۱۲$ داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۲.۱۰.۱.۴. وتر، مساحت

۵۸۳. پاره‌خط [ab] به درازای ۷ سانتیمتر در یک صفحه داده شده است. مقصود رسم مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که مساحت آن ۱۰ سانتیمتر مربع و یکی از سه ضلع آن [ab] باشد. چند تا مثلث، از این‌گونه را می‌توان رسم کرد؟

الف) ۲ ب) ۴ ج) ۶ د) ۸ هـ) به تعداد نامتناهی

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

۳.۱۰.۱.۴. وتر، رابطهٔ متری

۵۸۴. از مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A}=۹۰^\circ)$ اندازهٔ وتر BC به‌طول a و $AH+HB=l$ (H پای ارتفاع رأس A) داده شده است، مثلث را رسم کنید.

۵۸۵. مثلث قائم‌الزاویه‌ای را با معلوم بودن وتر c چنان رسم کنید که میانهٔ نظیر وتر آن، واسطهٔ

هندسی دو ضلع زاویهٔ قائمهٔ مثلث باشد.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۵۹

۵۸۶. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای وتر BC و مجموع $AD + BD = 1$ (D پای ارتفاع وارد بر وتر است) معلوم است، آن را رسم کنید.

۴.۱.۱۱. ارتفاع، میانه، نیمساز؛ پاره‌خط، خط

۴.۱.۱۱.۱. ارتفاع، پاره‌خط

۵۸۷. مثلث قائم‌الزاویه‌ای را با مفروض بودن ارتفاع وارد بر وتر، و فاصلهٔ رأس زاویهٔ قائمه از محل برخورد نیمساز داخلی یک زاویهٔ حاده با ضلع مقابلش، رسم کنید.

۴.۱.۱۲. ارتفاع، میانه، نیمساز؛ زاویه

۴.۱.۱۲.۱. ارتفاع، زاویه

۵۸۸. از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC($\hat{A} = 90^\circ$) اندازهٔ یک زاویهٔ حاده و ارتفاع وارد بر وتر داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۴.۱.۱۲.۲. میانه، زاویهٔ حاده

۵۸۹. مثلثی قائم‌الزاویه را با معلوم بودن اندازهٔ یک زاویهٔ حاده و اندازهٔ میانهٔ نظیر وتر رسم کنید.

۴.۱.۱۲.۳. نیمساز، زاویهٔ حاده

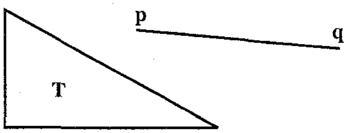
۵۹۰. مثلثی قائم‌الزاویه را با داشتن یک زاویهٔ حاده و اندازهٔ نیمساز زاویهٔ قائمه رسم کنید (به‌عنوان مثال $\hat{B} = \alpha$ و d_a).

۵۹۱. از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC($\hat{A} = 90^\circ$) اندازهٔ یک زاویهٔ حاده و نیمساز نظیر آن داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۲.۴. رسم مثلث قائم‌الزاویه با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۱.۲.۴. مثلث، زاویه

۵۹۲. در یک صفحه، مثلث قائم‌الزاویهٔ T و پاره‌خط [pq] داده شده است. چند مثلث می‌توان رسم کرد که یک ضلع آن به اندازهٔ [pq] و زاویه‌های آن با زاویه‌های T برابر باشند؟



الف) هیچ ب) ۲ مثلث ج) ۴ مثلث د) ۶ مثلث هـ) ۱۲ مثلث

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

۲.۲.۴. مثلث، مساحت

۵۹۳. مثلث قائم‌الزاویه‌ای را، هم ارز با مثلث داده شده‌ای رسم کنید.

۳.۴. رسم مثلث قائم‌الزاویه با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی و داده‌های دیگر

۱.۳.۴. رسم مثلث قائم‌الزاویه با معلوم بودن چندضلعی

۱.۱.۳.۴. رسم مثلث قائم‌الزاویه با معلوم بودن چهارضلعی

۱.۱.۱.۳.۴. رسم مثلث قائم‌الزاویه با معلوم بودن مربع

۵۹۴. در مربعی به ضلع ۴۰ سانتیمتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای محاط کنید که یک رأس آن بر یک رأس مربع منطبق است و اندازهٔ وتر آن برابر ۵ سانتیمتر باشد.

۵۹۵. سیم نیمدایره شکلی را که به شعاع ۷ متر است، به شکل مربعی درآورده‌ایم. مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که وترش دو برابر قطر مربع و یک ضلعش برابر شعاع نیمدایره باشد.

۴.۴. رسم مثلث قائم‌الزاویه با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر

۱.۴.۴. رسم مثلث قائم‌الزاویه با معلوم بودن دایره در حالت کلی و داده‌های دیگر

۱.۱.۴.۴. دایره، نقطه

۵۹۶. دایرهٔ K به مرکز O و دو نقطهٔ P و Q داده شده‌اند. مثلث قائم‌الزاویه‌ای در دایره محاط کنید که دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن، بترتیب، از نقطه‌های P و Q بگذرند. در چه موقعیتی از P و Q، مسأله جواب ندارد؟

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۸۹۴

۲.۱.۴.۴. دایره، خط، زاویه

۵۹۷. دو خط عمود بر هم l_1 و l_2 و دایرهٔ S مفروضند. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را با معلوم بودن یک زاویه حاده آن α چنان رسم کنید که رأسهای A و B بر l_1 و l_2 واقع باشند و رأس قائمهٔ C بر S واقع باشد.

۲.۴.۴. دایرهٔ محیطی یا شعاع آن و داده‌های دیگر

۱.۲.۴.۴. دایرهٔ محیطی و داده‌های دیگر

۱.۱.۲.۴.۴. دایرهٔ محیطی، نقطه، زاویه

۵۹۸. دایرهٔ محیطی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داده شده است. مثلث ABC را رسم کنید، درصورتی که زاویهٔ حادهٔ $\hat{B}$ و نقطهٔ I یکی از نقطه‌های ضلع AB داده شده باشد.

۴.۴.۳. دایره‌های محاطی یا شعاع آنها و داده‌های دیگر

۴.۴.۳.۱. دایره‌های محاطی و داده‌های دیگر

۵۹۹. از مثلث قائم‌الزاویه $ABC(\hat{A}=۹۰^\circ)$، موضع دایرهٔ محاطی برونی مماس بر وتر داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۴.۴.۳.۲. شعاع دایره‌های محاطی و داده‌های دیگر

۴.۴.۳.۲.۱. شعاع دایرهٔ محاطی درونی و داده‌های دیگر

۴.۴.۳.۲.۱.۱. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، یک ضلع

۶۰۰. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، اندازهٔ یک ضلع زاویهٔ قائمه و شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۴.۴.۳.۲.۱.۲. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، مجموع دو ضلع

۶۰۱. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، اندازهٔ مجموع دو ضلع زاویهٔ قائمه و شعاع دایرهٔ محاطی درونی آن داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۴.۴.۳.۲.۱.۳. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ارتفاع

۶۰۲. مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم کنید که ارتفاع وارد بر وتر و شعاع دایرهٔ محاطی آن معلوم است.

۴.۴.۳.۲.۱.۴. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، زاویه

۶۰۳. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی درونی و اندازهٔ یک زاویهٔ حاده داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۴.۴.۳.۲.۲. شعاع دایرهٔ محاطی برونی و داده‌های دیگر

۴.۴.۳.۲.۲.۱. شعاع دایرهٔ محاطی برونی، ضلع

۶۰۴. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ یک ضلع زاویهٔ قائمه و اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی برونی

مماس بر وتر داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۶۰۵. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ یک ضلع زاویهٔ قائمه و شعاع دایرهٔ محاطی برونی مماس بر آن ضلع داده شده است. مثلث را رسم کنید.

۶۰۶. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، اندازهٔ یک ضلع زاویهٔ قائمه و شعاع دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع دیگر داده شده است، مثلث را رسم کنید.

۴.۴.۳.۲.۲.۲. شعاع دایرهٔ محاطی برونی، ارتفاع

۶۰۷. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، اندازهٔ ارتفاع وارد بر وتر و اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی برونی مماس بر وتر داده شده است، این مثلث را رسم کنید.

۴.۴.۳.۲.۲.۳. شعاع دایرهٔ محاطی برونی، زاویه

۶۰۸. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای اندازهٔ یک زاویهٔ حاده و شعاع دایرهٔ محاطی برونی مثلث مماس بر وتر، داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۶۰۹. مثلثی قائم‌الزاویه را با معلوم بودن اندازهٔ یک زاویهٔ حاده و شعاع دایرهٔ محاطی برونی مماس بر آن ضلع، رسم کنید.

۴.۴.۴. دایره‌های محیطی و محاطی یا شعاع آنها و داده‌های دیگر

۴.۴.۴.۱. دایرهٔ محیطی، شعاع دایرهٔ محاطی، نقطه

۶۱۰. در یک دایرهٔ داده شده، مثلث قائم‌الزاویه‌ای محاط کنید که شعاع دایرهٔ محاطی آن داده شده است، به‌طوری که یک ضلع زاویهٔ قائمه‌اش از نقطهٔ داده شده‌ای بگذرد.

۴.۴.۴.۲. شعاع دایرهٔ محیطی، شعاع دایرهٔ محاطی

۶۱۱. از مثلث قائم‌الزاویه‌ای، اندازه‌های شعاع دایرهٔ محیطی و شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۵.۴. رسم مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین

۶۱۲. از مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی اندازهٔ وتر آن داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۶۱۳. از مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی اندازهٔ یک ساق داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

۶۱۴. از مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی ارتفاع وارد بر وتر معلوم است، مثلث را رسم کنید.

۶۱۵. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقینی بسازید که فاصلهٔ بین نقطهٔ تقاطع میانه‌ها و نیمسازهای داخلی، برابر طول معلوم m باشد.

۶۱۶. مثلث قائم الزاویهٔ متساوی‌الساقینی رسم کنید که رأسهایش روی سه خط موازی داده شده باشد.

۶۱۷. از مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی الساقینی تفاضل وتر و ارتفاع وارد بر وتر داده شده است. این مثلث را رسم کنید.

راهنمایی و حل

از آن‌جا که به گفتهٔ جورج پولیا J.Polya استاد بزرگ آموزش ریاضی، «دانشجو می‌تواند برای حل مسأله‌ها از کار مستقل و شخصی خود تا جایی که ممکن است، استفاده نماید؛ ولی در صورتی که او را با مسأله‌ای که باید حل کند تنها بگذارند و به او کمک نکنند، یا این کمک به‌اندازهٔ کافی نباشد، ممکن است اصلاً نتواند پیشرفت کند؛ و اگر بیش از اندازه به او یاری شود، دیگر کاری باقی نمی‌ماند که او انجام دهد.» در این مجموعه، برخی از مسأله‌ها حل شده‌اند، تعدادی راهنمایی برای حل دارند و حل برخی دیگر از مسأله‌ها به عهدهٔ دانش‌پژوهان واگذار شده است، تا این مجلد از دایرة‌المعارف بتواند نقش و سهمی در تقویت قوهٔ تفکر و خلاقیت ذهنی آنان داشته باشد.

بدیهی است که راه‌حلها و راهنماییهای ارائه شده در این مجموعه، بهترین و یا ساده‌ترین راه‌حل، یا راهنمایی نمی‌باشند؛ و به‌طور یقین، دانشجویان با دقت نظر و بهره‌گیری از ذهن خلاق خویش، به راه‌حلهایی ساده‌تر و یا جالبتر از راه‌حلهای موجود در این مجموعه دست خواهند یافت.

هر چند سعی فراوان شده است تا مطالب این مجموعه خالی از اشتباه باشند، اما ممکن است باز هم اشکالها و نادرستیهایی وجود داشته باشند، بدین‌جهت از دانش‌آموزان، دانشجویان، استادان، ریاضیدانان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه درخواست می‌شود نظرهای ارشادی و اصلاحی خود، همچنین راه‌حلهای جالبتر یا ساده‌تر برای مسأله‌های حل شده، و راه‌حلهای مناسب و جالب برای مسأله‌های حل نشده را به نشانی مؤلف یا ناشر ارسال فرمایند تا برای هرچه پربارتر کردن محتوای این مجموعه و رفع کاستیهای آن مورد استفاده قرار گیرد؛ ضمن سپاسگزاری از این لطف و همکاری، برای ارج نهادن به تلاشهایی که در این راه انجام خواهد شد، بهترین و جالبترین راه‌حل برای هر مسأله، همچنین تعمیم قضیه‌ها یا مسأله‌ها به نام فرستندهٔ آن، در چاپهای بعدی دایرة‌المعارف درج خواهد شد.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۱
رسم مثلث در حالت کلی

۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛ پاره‌خط، خط، زاویه؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن نقطه

۱.۱.۱.۱. دو رأس، یک نقطه

۱. **راه اول.** فرض کنید X تصویر نقطهٔ لوموان K (شکل) بر ضلع واصل بین دو رأس مفروض B و C باشد. A' نقطهٔ وسط BC، و X' متقارن X نسبت به K، روی میانه‌ای از مثلث مطلوب ABC قرار دارند که از رأس A می‌گذرد.

خطی که از تصویرهای K روی AC و AB، یعنی نقطه‌های Y و Z، می‌گذرد بر $AX'A'$ عمود است و از نقطهٔ وسط KK'، یعنی نقطهٔ I، می‌گذرد. پس نقطهٔ Z را می‌توان نقطهٔ برخورد عمودی که از I بر $A'X'$ رسم می‌شود و دایره‌ای که KB قطر آن است، درنظر گرفت. خطهای $A'X'$ و BZ رأس سوم A را تعیین می‌کنند. مسأله ممکن است دو یا یک جواب داشته باشد، یا اصلاً جواب نداشته باشد.

راه دوم. فرض کنید B و C رأسهای مفروض باشند، K نقطهٔ لوموان مثلث مطلوب ABC و G مرکز ثقل آن مثلث باشد. اگر خطهایی که از A به موازات BG و CG رسم می‌شوند BC را در D و E قطع کنند، و A' وسط BC باشد، داریم:

$$A'B:BD = A'G:GA = A'C:CE = ۱ : ۲$$

پس :

$$BD = CE = BC = a$$

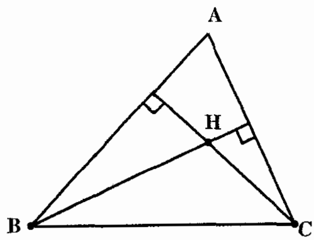
و نقطه‌های D و E را می‌توان رسم کرد.
از طرف دیگر، داریم :

$$D\hat{A}B = G\hat{B}A = K\hat{B}A' \quad \text{و}$$

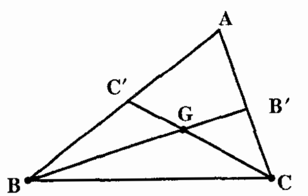
$$C\hat{A}E = G\hat{C}A = K\hat{C}A'$$

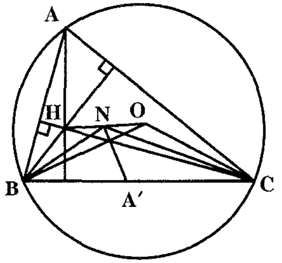
پس پاره‌خطهای معلوم BD و CE از رأس A با دو زاویهٔ معلوم دیده می‌شوند ؛ پس A روی دو کمان معلوم (مکان هندسی) قرار دارد. مسأله ممکن است دو یا یک جواب داشته، یا اصلاً جواب نداشته باشد.

۲. اگر B و C دو رأس و H مرکز ارتفاعی داده شده از مثلث ABC باشد، برای تعیین رأس A، از H به B و C وصل می‌کنیم. سپس از B خطی عمود بر CH و از C خطی عمود بر BH رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دو خط، رأس A، و مثلث ABC جواب مسأله است.



۳. فرض می‌کنیم از مثلث ABC، دو رأس B و C، و نقطهٔ G مرکز ثقل آن داده شده است. در این صورت مثلث BCG مشخص است. برای رسم مثلث ABC، از B و C به G وصل می‌کنیم و پاره‌خطهای BG و CG را به‌اندازهٔ نصف خود امتداد می‌دهیم تا نقطه‌های B' و C' وسط ضلعهای AC و AB به‌دست آیند. CB' و BC' را وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا در نقطهٔ A یکدیگر را قطع کنند. مثلث ABC جواب مسأله است.



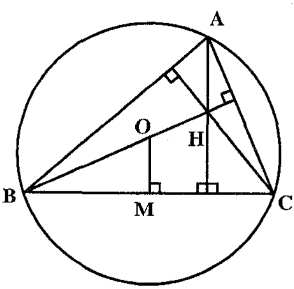


۴. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. دو رأس معلوم را B و C، مرکز دایرهٔ نه نقطه را N، مرکز ارتفاعی مثلث را H و مرکز دایرهٔ محیطی مثلث را O می‌نامیم. می‌دانیم که N وسط پاره‌خط OH است، و اگر A′ وسط ضلع BC باشد، NA′ شعاع دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث، مساوی نصف شعاع دایرهٔ محیطی مثلث است، یعنی $R = ۲NA'$. از طرفی مثلث NBC قابل رسم است. بنابراین برای رسم مثلث ABC چنین عمل می‌کنیم:

نخست مثلث NBC را رسم می‌کنیم و وسط BC را A′ می‌نامیم. $NA' = \frac{R}{۲}$ به مرکزهای B و C، و به شعاع R دو کمان رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث یکدیگر را قطع کنند. به مرکز O و به شعاع R دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می‌کنیم. از O به N وصل کرده، ON را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ H امتداد می‌دهیم، تا مرکز ارتفاعی مثلث به‌دست آید. از H عمودی بر BC فرود می‌آوریم تا دایرهٔ محیطی را در A قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

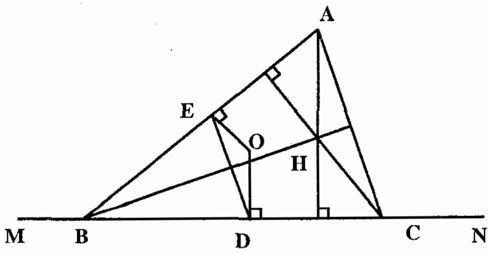
نکته. دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث، دایره‌ای است که بر نه نقطهٔ زیر می‌گذرد:
وسطهای سه ضلع، پای سه ارتفاع، و وسطهای پاره‌خطهای واصل بین مرکز ارتفاعی و رأسهای مثلث.

۱.۱.۱.۲. یک رأس، دو نقطه



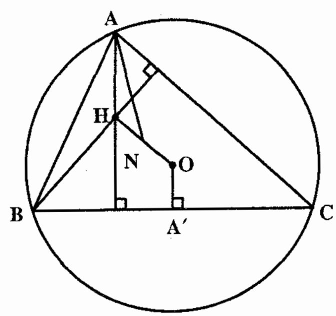
۵. اگر O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث باشد، $AH = ۲OM$ و $OM \parallel AH$ است. با معلوم بودن A، H و M، جای نقطهٔ O مشخص می‌شود.
به مرکز O و به شعاع OA دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. از M خطی عمود بر OM رسم می‌کنیم تا دایره را در دو نقطهٔ B و C قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۶. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم (شکل). از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی، عمودهای OD و OE را بر BC و AB فرود می‌آوریم. چون مثلثهای ODE و HCA متشابه‌اند، (به‌علت موازی بودن ضلعها)، پس، $DE = \frac{AC}{۲}$ و $OD = \frac{AH}{۲}$. اکنون از نقطهٔ O همجهت با

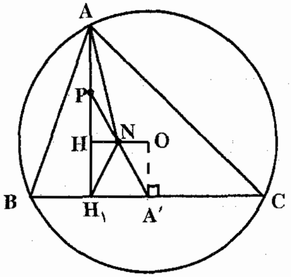


AH طول OD را رسم می‌کنیم ($OD = \frac{AH}{۲}$)، و از نقطهٔ D، خط MN را عمود بر AH می‌کشیم. چنانچه به مرکز A و به شعاع OA دایره‌ای رسم کنیم، محل برخورد این دایره با MN، نقطه‌های B و C را معین می‌کند. مسأله وقتی جواب دارد که $OA > OD$ و یا $OA > \frac{AH}{۲}$ باشد.

۷. رأس داده شدهٔ مثلث را A، مرکز ارتفاعی را H و مرکز دایرهٔ نه نقطه را N می‌نامیم. مثلث ANH مشخص است. با توجه به این که نقطهٔ N وسط OH است، HN را از طرف N به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث به‌دست آید. با مشخص شدن O، $OA = R$ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث به‌دست می‌آید که این دایره را رسم می‌کنیم. از O خطی موازی AH رسم کرده، روی آن پاره‌خط $OA' = \frac{AH}{۲}$ را جدا می‌کنیم. A' وسط ضلع BC است. از نقطهٔ A' خطی عمودبر OA رسم می‌کنیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در B و C قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



۸. رأس معلوم را A، پای ارتفاع رسم شده از آن رأس را $H_۱$، مرکز دایرهٔ نه نقطه را N، مرکز ارتفاعی را H و مرکز دایرهٔ محیطی را O می‌نامیم. مثلث $ANH_۱$ قابل رسم است. با توجه به این که $NH_۱ = NA' = NP$ (P وسط AH) است، پس شعاع دایرهٔ محیطی مثلث معلوم است. از طرفی اگر به مرکز N و به شعاع NA' دایره‌ای رسم کنیم، از نقطهٔ A' وسط ضلع BC می‌گذرد و $AH_۱$ را در P قطع می‌کند. از آن‌جا با توجه به این که $OA' \| AP$ و



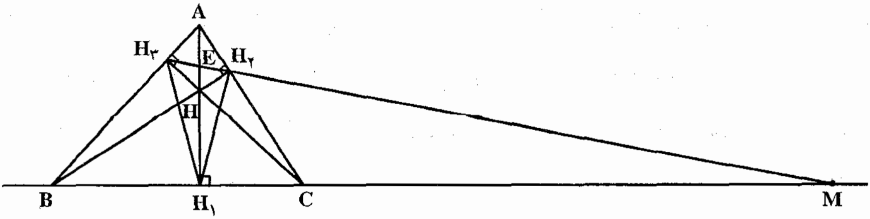
$OA' = AP$ است، نقطهٔ O مشخص می‌گردد. پس برای رسم مثلث ABC، نخست مثلث ANH_1 را رسم می‌کنیم، سپس از نقطهٔ H_1، عمودی بر AH_1 رسم می‌کنیم. به مرکز N و به شعاع NH_1 دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط عمود را در A' و AH_1 را در P قطع کند. از A' عمودی به اندازهٔ AP جدا می‌کنیم. نقطهٔ O به‌دست می‌آید. به مرکز O و به شعاع $R = 2NH_1$ دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می‌کنیم تا دو رأس B و C به‌دست آید. از A به B و C وصل می‌کنیم، مثلث ABC جواب مسأله است.

۹. رأس معلوم را A، پای ارتفاع داده شده را H_1، مرکز دایرهٔ نه نقطه را N، H را مرکز ارتفاعی، O را مرکز دایرهٔ محیطی و C' را وسط ضلع AB می‌نامیم. با توجه به داده‌های مسأله و ویژگیهای دایرهٔ نه نقطهٔ رسم مثلث ABC چنین است.

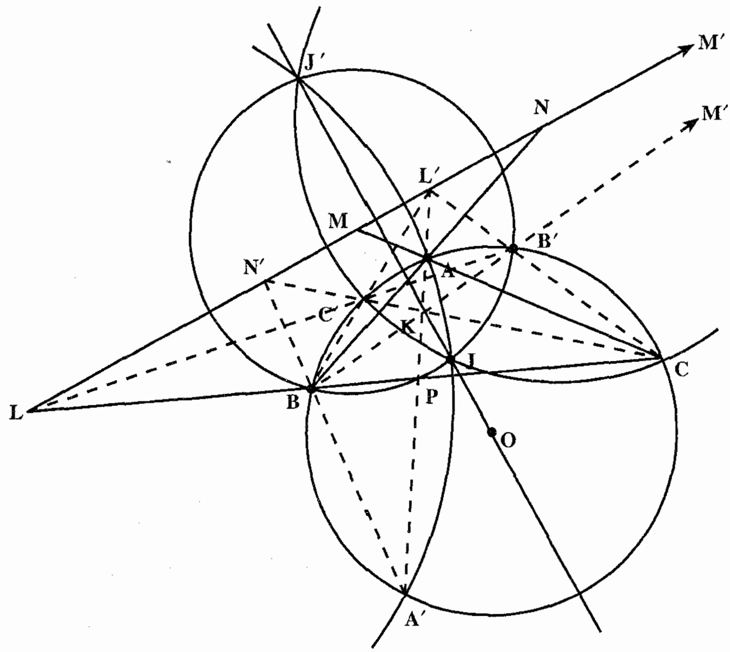
مثلث ANH_1 را رسم می‌کنیم، از H_1 عمودی بر AH_1 اخراج می‌کنیم، به مرکز N و به شعاع NH_1 دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث را رسم می‌کنیم. نقطهٔ C' وسط AB، و از آن‌جا رأس B، و نقطهٔ E وسط HC مشخص می‌شوند و با توجه به برابری $OC' = EC$ رأس C به‌دست می‌آید.

بنابراین مثلث ABC با مشخص بودن سه رأسش، مشخص است.

۱۰. مسأله را حل شده می‌گیریم. رأس داده شده را A، مرکز ارتفاعی را H و نقطهٔ برخورد ضلع BC از مثلث ABC با ضلع H_2H_3 از مثلث ارتفاعی را M می‌نامیم. می‌دانیم که ارتفاعهای مثلث ABC نیمسازهای زاویه‌های مثلث ارتفاعی می‌باشند. بعلاوه خط HH_1 قطبی نقطهٔ M نسبت به دو ضلع AB و AC است، یعنی (MEH_1H_2) و (MH_1BC) تقسیم توافقی هستند. از آن‌جا...

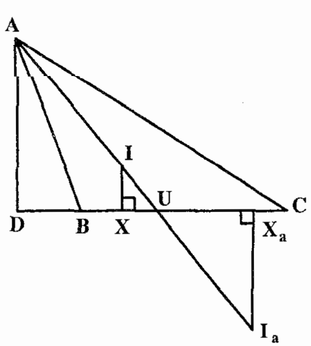


۱۱. فرض کنید خط AK دایرهٔ (O,OA) را در A' نیز قطع کند (شکل). اگر L' مزدوج همساز K نسبت به A و A'، و P مزدوج همساز L' نسبت به K و A' باشد، خطی که P را به L، قطب AK نسبت به دایرهٔ (O,OA)، وصل می‌کند، این دایره را در دو رأس دیگر مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند. با فرض این که K داخل دایرهٔ (O,OA) قرار داشته باشد، مسأله یک، و تنها یک جواب دارد.



۱۲. نقطهٔ لوموان یک مثلث، نقطهٔ همرسی شبه میانه‌های آن مثلث (میانه‌های متقارن مثلث) است.

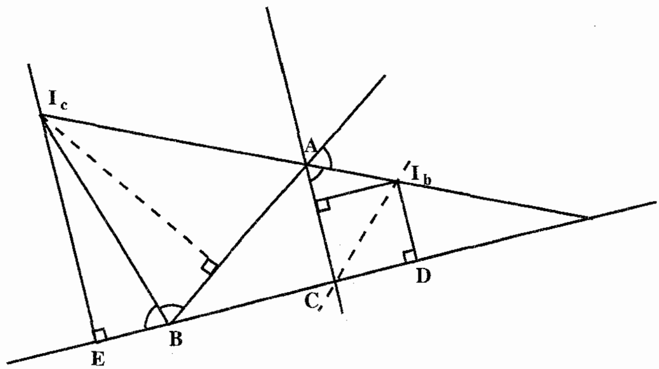
۱۳. فرض می‌کنیم ABC مثلث خواسته شده باشد:



I و I_a مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی و خارجی نظیر ضلع a، مزدوج توافقی نسبت به A و U هستند (U پای نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$). درنتیجه D پای ارتفاع نظیر رأس A مزدوج توافقی U نسبت به X_a و X می‌باشد، و چون D، X و X_a معلومند، نقطهٔ U بسادگی به‌دست می‌آید. اگر عمودهایی که از X و X_a بر XX_a اخراج

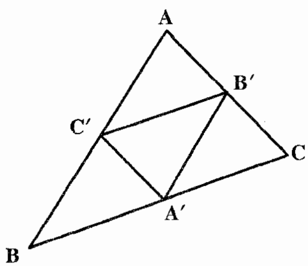
می‌شود، با ضلع AU در نقطه‌های I و I_a متقاطع باشند، مماسهای مشترک خارجی دو دایره به مرکز I و شعاع IX و به مرکز I_a و شعاع $I_a X_a$ از A عبور می‌کند و با XX_a مثلث خواسته شده را به‌وجود می‌آورند.

۱۴. رأس داده شده را A و نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی برونی (I_b) و (I_c) با ضلع BC را D و E می‌نامیم. با معلوم بودن این سه نقطه می‌خواهیم مثلث ABC را رسم کنیم. می‌دانیم که $DE = b + c$ است و اندازه ارتفاع AH نیز مشخص است، از آن‌جا...



۳.۱.۱.۱. سه نقطهٔ غیر رأس

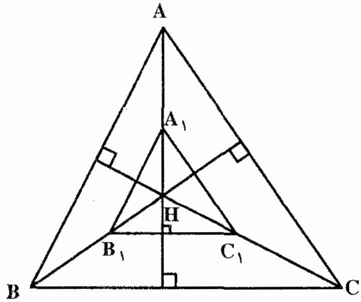
۱.۳.۱.۱.۱. وسطهای سه ضلع



۱۵. این سه نقطه را به هم وصل می‌کنیم و از هریک، خطی موازی ضلع روبه‌روی آن رسم می‌کنیم تا این خطها یکدیگر را در نقطه‌های A، B و C قطع کنند. مثلث ABC مثلث خواسته شده است.

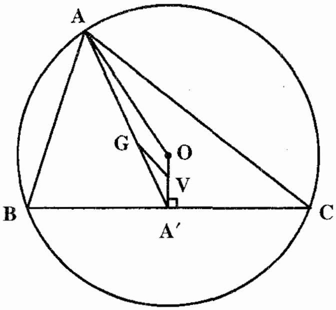
۲.۳.۱.۱.۱. سه نقطهٔ اویلر

۱۶. مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. H را مرکز ارتفاعی مثلث و وسطهای HA، HB و HC را بترتیب A_1، B_1 و C_1 می‌نامیم. ضلعهای مثلث $A_1B_1C_1$ موازی ضلعهای مثلث ABC است. بنابراین ارتفاعهای مثلث ABC، ارتفاعهای مثلث $A_1B_1C_1$ می‌باشند. پس برای رسم مثلث ABC، سه نقطهٔ A_1، B_1 و C_1 را به‌هم وصل می‌کنیم سپس

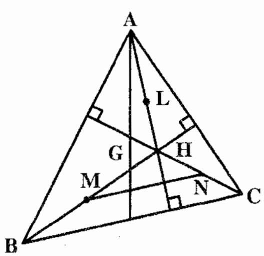


ارتفاعهای مثلث $A_1B_1C_1$ را رسم می‌کنیم. نقطهٔ همرسی آنها H مرکز ارتفاعی مثلث است، HA_1، HB_1 و HC_1 را هر کدام به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا رأسهای A، B و C از مثلث ABC به‌دست آیند. این سه نقطه را به هم وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

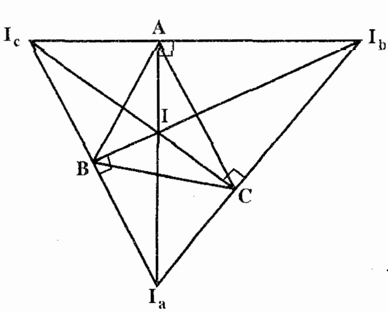
۱.۱.۱.۳.۳. سه نقطهٔ دیگر



۱۷. نقطه‌های داده شده، مثلث OGA' را مشخص می‌کنند. روی OA' نقطهٔ V را چنان مشخص می‌کنیم که $A'V = \frac{1}{3}A'O$ باشد و از O خطی موازی GV رسم می‌کنیم که امتداد $A'G$ را در A قطع کند. به مرکز O و شعاع $OA = R$ دایره‌ای رسم می‌کنیم که همان دایرهٔ محیطی مثلث است. از A' عمودی بر OA' رسم می‌نماییم تا دایره را در دو نقطهٔ B و C قطع کند، ABC مثلث خواسته شده است.



۱۸. نقطه‌های اویلر هر مثلث، وسط پاره‌خطهایی هستند که مرکز ارتفاعی مثلث را به رأسهای مثلث وصل می‌کنند؛ یعنی اگر در مثلث ABC، نقطهٔ H مرکز ارتفاعی باشد، L، M و N وسط پاره‌خطهای HA، HB و HC، نقطه‌های اویلر مثلث می‌باشند. فرض می‌کنیم M و N دو نقطهٔ اویلر داده شده از مثلث ABC و G مرکز ثقل آن باشد. MN موازی ضلع BC است و...

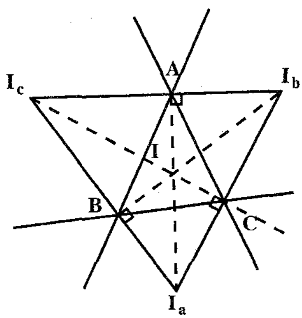


۲۲. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مسأله باشد. اگر I_a، I_b و I_c را مرکزهای دایره‌های محاطی برونی مثلث بنامیم، که بترتیب بر ضلعهای BC، AC و AB عمودند، می‌دانیم که

خطهای I_aA ، I_bB ، I_cC ارتفاعهای مثلث $I_aI_bI_c$ می‌باشند، بنابراین برای رسم مثلث ABC چنین عمل می‌کنیم:

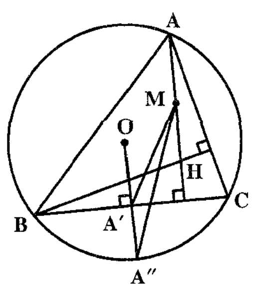
سه نقطهٔ I_a ، I_b و I_c را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث $I_aI_bI_c$ به‌دست آید. ارتفاعهای این مثلث را رسم می‌کنیم. پای این ارتفاعها، نقطه‌های A، B و C رأسهای مثلث ABC می‌باشند. این سه نقطه را به هم وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

نکته. AI_a نیمساز زاویهٔ درونی A و AI_b نیمساز زاویهٔ برونی A است که بر هم عمودند، یعنی $I_a\hat{A}I_b = 90^\circ$ است.



۲۳. مرکزهای دایره‌های محاطی برونی مثلث ABC را I_a ، I_b و I_c و مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث را I می‌نامیم. می‌دانیم که AI_a ، BI_b و CI_c ارتفاعهای مثلث $I_aI_bI_c$ می‌باشند که در نقطهٔ I همرسند. بنابراین با معلوم بودن دو رأس I_a و I_b و نقطهٔ برخورد ارتفاعها مثلث $I_aI_bI_c$ را می‌توان رسم کرد. بدین منظور از I_b عمودی بر II_a و از I_a عمودی‌بر II_b فرود می‌آوریم تا یکدیگر را در I_c قطع کنند. پای عمودهای رسم شده، دو رأس A و B از مثلثABC است. I_cI را رسم کرده، امتداد می‌دهیم تا I_aI_b را در نقطهٔ C رأس سوم مثلث ABC قطع کند. سه نقطهٔ A، B و C را به هم وصل می‌کنیم، مثلث ABC رسم می‌شود.

۲۵. مسأله را حل شده گرفته، مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. A' وسط ضلع BC، A'' وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ و M یک نقطهٔ اویلر، وسط پاره‌خط AH است، که H مرکز ارتفاعی مثلث ABC است. می‌دانیم که $A'A''$ عمودمنصف BC است و AMH موازی $OA'A''$ است. از آن‌جا...



۲۶. نقطهٔ لوموان هر مثلث محل برخورد شبه میانه‌های آن مثلث است.

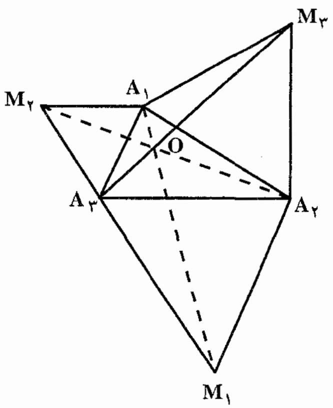
۲۷. مسألهٔ اول را می‌توان با اثبات این مطلب که سه خط A_1M_1 ، A_2M_2 و A_3M_3 (شکل)، همگی در یک نقطهٔ O متقاطعند و با یکدیگر زاویه‌های مساوی می‌سازند، حل کرد (این روش به‌ما امکان می‌دهد که نقطهٔ O را با توجه به نقطه‌های M_1 ، M_2 و M_3 پیدا کنیم ؛ زیرا :

$$(M_1\hat{O}M_2 = M_1\hat{O}M_3 = M_2\hat{O}M_3 = 120^\circ$$

حال می‌توان ثابت کرد که :

$$OA_1 + OA_2 = OM_3 ، OA_2 + OA_3 = OM_1 ، OA_3 + OA_1 = OM_2$$

(به کمک این روش می‌توانیم نقطه‌های A_1 ، A_2 ، و A_3 را پیدا کنیم. زیرا، مثلاً، $.(OA_1 = \frac{1}{2}(OM_2 + OM_3 - OM_1)$



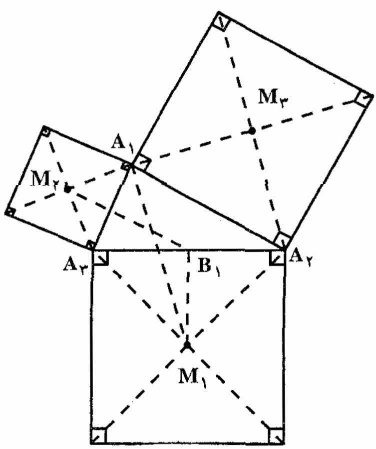
۲۸. با توجه به شکل، مسأله را می‌توان با نشان دادن این مطلب که :

$M_2B_1 \perp M_3B_1$ و $M_2B_1 = M_3B_1$

که در آن نقطهٔ B_1 وسط ضلع A_2A_3 از مثلث $A_1A_2A_3$ است، یا این مطلب که

$A_1M_1 \perp M_2M_3$ و $A_1M_1 = M_2M_3$

حل کرد.



۱.۱.۱.۴. n نقطه

۲۹. می‌توان مسأله را، با استقرای روی n به نتیجه رساند، ولی ساده‌ترین روش حل، چنین است : کمترین تعداد مثلثها، وقتی به‌دست می‌آید که از n نقطه، $n-۱$ نقطه روی یک خط راست باشند ؛ زیرا در چنین حالتی، کافی است تنها نقطهٔ n ام را به عنوان رأس و هر دو نقطهٔ دیگر (از $n-۱$ نقطهٔ واقع بر یک خط راست) را، قاعدهٔ مثلث بگیریم (هر مثلث دیگری، بر یکی از این مثلثها منطبق است) و از $n-۱$ نقطه (که هر دو تای آنها باید قاعدهٔ یکی از مثلثها را بسازد)، می‌توان به تعداد

$$C_{n-۱}^{۲}=\frac{(n-۱)!}{(n-۲)!۲!}=\frac{۱}{۲}(n-۱)(n-۲)$$

قاعدهٔ مختلف، برای مثلثها، جدا کرد.

۱.۱.۱.۵. مسأله‌های ترکیبی

۳۰. **الف.** فرض کنید که نقطه‌های مفروض، رأسهای یک شش ضلعی محدب باشند. در چنین حالتی، جواب بسادگی به‌دست می‌آید، زیرا مجموع زاویه‌های داخلی یک شش ضلعی محدب، مساوی ۷۲۰ درجه است و بنابراین لااقل یکی از آنها از ۱۲۰ درجه بیشتر است. حالتی می‌ماند که ۵، ۴ یا ۳ نقطه از این شش نقطه بر رأسهای یک چند ضلعی محدب واقع باشند و بقیهٔ این نقطه‌ها در داخل این چند ضلعی واقع شده باشند. قطرهایی را که از یک رأس این چند ضلعی می‌گذرد، رسم می‌کنیم. این قطرها، چندضلعی را به مثلثهایی تبدیل می‌کنند. در داخل یکی از این مثلثها، لااقل یکی از نقطه‌های مفروض قرار دارد. این نقطه را به رأسهای مثلث وصل می‌کنیم، سه زاویه به‌دست می‌آید که مجموع آنها مساوی ۳۶۰ درجه است. بنابراین لااقل یکی از آنها کمتر از ۱۲۰ درجه نیست.

ب. دو حالت درنظر می‌گیریم :

I. فرض می‌کنیم $A_۱$ ، $A_۲$ ، $A_۳$ ، $A_۴$ و $A_۵$ رأسهای یک پنج‌ضلعی محدب باشند. کوچکترین زاویهٔ داخلی این پنج ضلعی از ۱۰۸ درجه تجاوز نمی‌کند. برای سهولت کار فرض می‌کنیم که این زاویه در رأس $A_۱$ باشد، قطرهای $A_۱A_۳$ و $A_۱A_۴$ ، این زاویه را به سه قسمت تقسیم می‌کنند، که کوچکترین آنها نمی‌تواند از ۳۶ درجه تجاوز کند. بنابراین در این حالت $\alpha \leq ۳۶^\circ$. تساوی $\alpha = ۳۶^\circ$ وقتی پیش می‌آید که پنج ضلعی منتظم باشد.

II. فرض می‌کنیم که A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 و A_5 رأسهای یک پنج ضلعی محدب نباشند. ابتدا ثابت کنید که در این حالت یکی از این پنج نقطه داخل مثلثی است که از سه نقطهٔ دیگر درست شده است. مثلاً فرض کنید، نقطهٔ A_4 داخل مثلث $A_1A_2A_3$ واقع باشد. A_4 را به A_1 ، A_2 و A_3 وصل می‌کنیم، هریک از زاویه‌های مثلث به دو قسمت تقسیم می‌شود که کوچکترین آنها نمی‌تواند از $۱۸۰ \div ۶ = ۳۰^\circ$ تجاوز کند. بنابراین در این حالت $\alpha \le ۳۰^\circ$. به این ترتیب ماکزیمم مقدار α ، همان $\alpha = ۳۶^\circ$ است.

۳۱. مسأله را حل شده بگیرید و از ویژگیهای داده شده استفاده کنید.

۳۲. حل مسأله، در حالتی که هر سه زاویهٔ مثلث Y، حاده باشند :

تعریف. مثلث X را که از وصل پای ارتفاعهای مثلث y به‌دست آمده است، مثلث ارتفاعیهٔ مثلث Y گویند.

الف. قضیه. اگر مثلث ABC، سه زاویهٔ حاده داشته باشد، ارتفاعهای آن، نیمساز زاویه‌های مثلث ارتفاعیهٔ آن هستند.

اثبات. نقطهٔ برخورد ارتفاعهای AA_1 و BB_1 را M می‌نامیم. دو مثلث A_1MC و CMB_1 قائم‌الزاویه‌اند و CM وتر مشترک آنهاست (شکل الف)، بنابراین A_1 و B_1 روی محیط دایرهٔ K_C به قطر CM قرار دارند. علاوه‌بر این، اگر زاویه‌های مثلث ABC را α ، β و γ بنامیم، داریم :

$$M\hat{C}B_1 = ۹۰^\circ - \alpha \quad و \quad C\hat{M}B_1 = \alpha = B\hat{M}C_1 \quad و \quad M\hat{B}C_1 = ۹۰^\circ - \alpha$$

زاویه‌های MA_1B_1 و MCB_1 (دو زاویهٔ محاطی در دایرهٔ K_C و رو به رو به کمان MB_1)، برابرند.

$$M\hat{A_1}B_1 = M\hat{C}B_1 = ۹۰^\circ - \alpha \Rightarrow A\hat{A_1}B_1 = ۹۰^\circ - \alpha$$

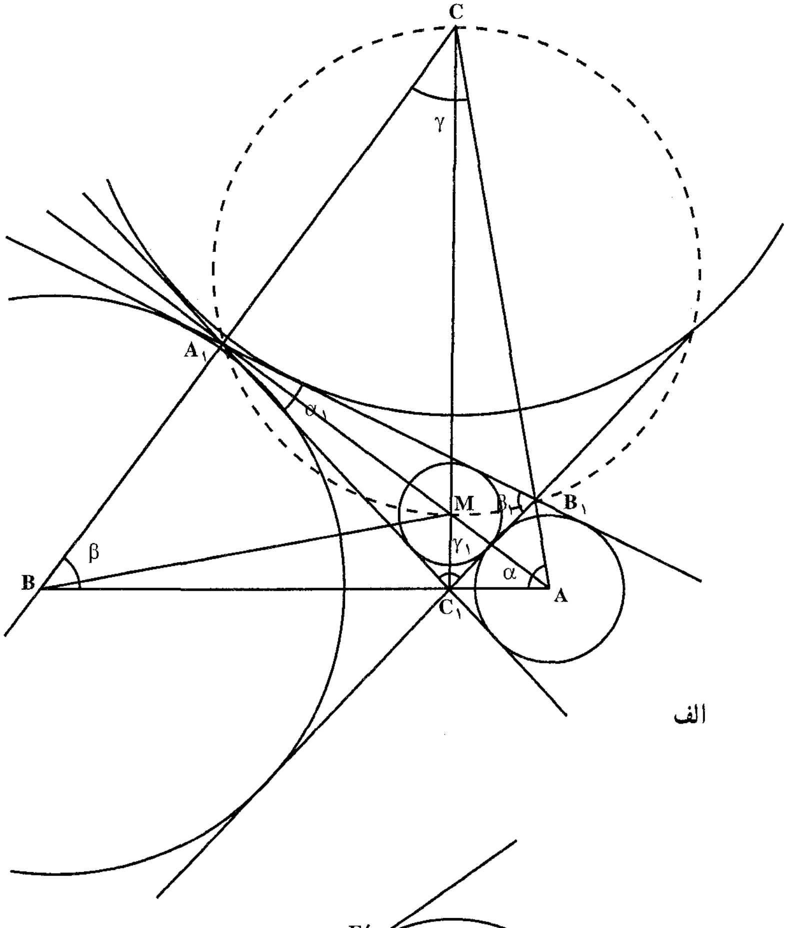
به‌همین ترتیب، با درنظر گرفتن دایرهٔ K_B به قطر BM، روشن می‌شود که :

$$M\hat{A_1}C_1 = M\hat{B}C_1 = ۹۰^\circ - \alpha \Rightarrow A\hat{A_1}C_1 = ۹۰^\circ - \alpha$$

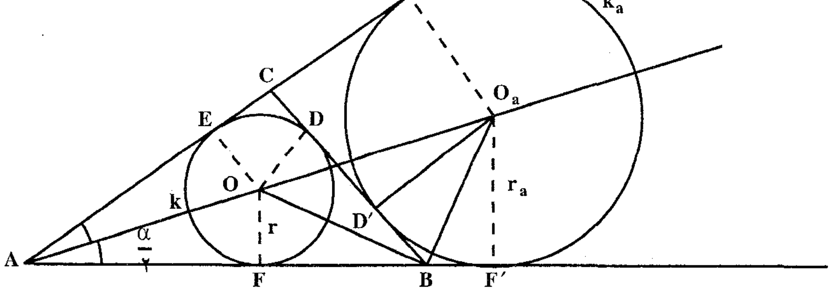
بنابراین، AA_1 ، نیمساز زاویهٔ A_1 از مثلث ارتفاعیهٔ $A_1B_1C_1$ است. با روش مشابهی می‌توان به‌همین نتیجه، برای زاویه‌های دیگر مثلث ارتفاعیه رسید. درضمن، اگر زاویه‌های مثلث ارتفاعیهٔ $A_1B_1C_1$ را با α_1 ، β_1 و γ_1 نشان دهیم، داریم :

$$\frac{\alpha_1}{۲} = ۹۰^\circ - \alpha \ ، \ \frac{\beta_1}{۲} = ۹۰^\circ - \beta \ ، \ \frac{\gamma_1}{۲} = ۹۰^\circ - \gamma$$

به این ترتیب، نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC (که به آن، مرکز ارتفاعی مثلث گویند)، مرکز دایرهٔ محاطی مثلث $A_1B_1C_1$ است.



الف



ب

ب. روش رسم. نقطه‌های A_1 ، B_1 و C_1 (پای ارتفاعهای مثلث مطلوب) را به هم وصل می‌کنیم. اگر نیمسازهای زاویه‌های برونی این مثلث را رسم کنیم، از برخورد آنها، مثلث موردنظر ABC به‌دست می‌آید. به زبان دیگر، رأسهای مثلث ABC، عبارتند از مرکزهای سه دایرهٔ محاطی بیرونی در مثلث $A_1B_1C_1$.

پ. توجیه رسم. در هر رأس مثلث، دو نیمساز داخلی و خارجی بر هم عمودند. درضمن، هر دو نیمساز خارجی، با نیمساز داخلی رأس سوم، در یک نقطه به هم می‌رسند. بنابراین، مثلث ABC که از برخورد نیمسازهای خارجی مثلث $A_1B_1C_1$ به‌دست می‌آید، همان مثلث مطلوب است، زیرا مثلاً AA_1 نیمساز داخلی زاویهٔ A_1 از مثلث $A_1B_1C_1$ ، و در ضمن، بر B_1C_1 عمود است ؛ یعنی AA_1 ، BB_1 و CC_1 ، ارتفاعهای مثلث ABC هستند.

ت. محاسبه. در (الف) دیدیم : $\frac{\alpha_1}{2} = 90^\circ - \alpha$ بنابراین :

$$\cos\alpha = \sin(90^\circ - \alpha) = \sin\frac{\alpha_1}{2} = \sqrt{\frac{(p_1 - b)(p_1 - c)}{b_1c_1}}$$

که در آن $p_1 = \frac{1}{2}(a_1 + b_1 + c_1)$. علاوه‌بر این، دو مثلث C_1AB_1 و CAB، در زاویهٔ α مشترکند، و درضمن :

$$C_1\hat{B}_1A = 90^\circ - \frac{\beta_1}{2} = \beta = C\hat{B}A$$

بنابراین، این دو مثلث متشابه‌اند و داریم :

$$\frac{B_1C_1}{BC} = \frac{AC_1}{AC} = \cos\alpha \Rightarrow \cos\alpha = \frac{a_1}{a}$$

درنتیجه، با توجه به رابطه‌ای که در بالا برای $\cos\alpha$ نوشتیم :

$$a = \frac{a_1}{\cos\alpha} = a_1\sqrt{\frac{b_1c_1}{(p_1 - b_1)(p_1 - c_1)}}$$

و به‌همین ترتیب :

$$b = \frac{b_1}{\cos\beta} = b_1\sqrt{\frac{a_1c_1}{(p_1 - a_1)(p_1 - c_1)}}$$

$$c = \frac{c_1}{\cos\gamma} = c_1\sqrt{\frac{a_1b_1}{(p_1 - a_1)(p_1 - b_1)}}$$

یادداشت ۱. مثلث ارتفاعیه در مثلث با زاویهٔ منفرجه.

در مثلثی که یک زاویهٔ منفرجه داشته باشد، ارتفاع وارد از رأس زاویهٔ منفرجه (مثل حالت مثلث با زاویه‌های حاده)، نیمساز داخلی زاویهٔ مثلث ارتفاعیه است. ولی دو ارتفاع دیگر، نیمسازهای زاویه‌های خارجی را در مثلث ارتفاعیه تشکیل می‌دهند. بنابراین، اگر مثلث مطلوب، بتواند با زاویهٔ منفرجه هم باشد، علاوه‌بر مثلث ABC، مثلثهای BCM، CAM و ABM هم جوابهایی از مسأله‌اند. ارتفاعهای مربوط به این مثلثها، بترتیب، در نقطه‌های A، B و C به‌هم می‌رسند. به زبان دیگر، مرکزهای ارتفاعی مثلثهای BCM، CAM، ABM و (ABC)، بترتیب، عبارتند از نقطه‌های A، B، C و (M). برای هر چهار جواب مسأله، این ویژگی وجود دارد:

رأسها و مرکزهای ارتفاعی هریک از مثلثهای جواب، مرکزهای دایره‌هایی هستند که بر ضلعهای مثلث $A_1B_1C_1$ (و یا امتداد آنها) مماسند.

یادداشت ۲. الف. دایره‌های مماس بر ضلعهای مثلث. O را مرکز و r را شعاع دایرهٔ k می‌گیریم که بر ضلعهای مثلث ABC، در داخل، مماس است. D، E و F را، بترتیب، نقطه‌های تماس دایره با ضلعهای BC، CA و AB فرض می‌کنیم (شکل). O_a و r_a را مرکز و شعاع دایرهٔ k_a می‌گیریم که در نقطهٔ D' بر ضلع BC و در نقطه‌های E' و F' بر امتداد ضلعهای AC و AB مماس است. ضلعهای AB، BC و AC را با c، a و b نشان می‌دهیم و فرض می‌کنیم $p = \frac{۱}{۲}(a+b+c)$.

چون طول دو مماسی که از یک نقطه، بر دایره‌ای رسم شوند، با هم برابرند، بنابراین:

$$AE = AF, BC = BD, CD = CE$$

و درنتیجه:

$$۲p = AB + AC + BC = ۲(AE + BF + CD)$$

و یا:

$$p = AE + BF + CD$$

از این‌جا، به‌دست می‌آید:

$$CD = p - (AE + BF) = p - (AF + BF) = p - c \qquad (۱)$$

و به‌همین ترتیب:

$$BE = p - b \ , \ \ AE = p - a$$

برای دایرهٔ k_a داریم:

$$۲AE' = AE' + AF' = AC + CE' + AB + BF' = AB + AC + (CD' + BD')$$

$$= AB + AC + BC = ۲p$$

و بنابراین :

$$AE' = AF' = p \qquad (۲)$$

و به‌همین ترتیب :

$$CE' = AE' - AC = p - b \ , \ BF' = p - c \qquad (۳)$$

اگر مساحت مثلث ABC را با S_{ABC} نشان دهیم، داریم :

$$S_{ABC} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COA} = \frac{۱}{۲} r(a+b+c);$$

$$S_{ABC} = r.p \qquad (۴)$$

از طرف دیگر :

$$S_{ABC} = S_{AO_aB} + S_{AO_aC} - S_{BO_aC} = \frac{۱}{۲} r_a(b+c-a);$$

$$S_{ABC} = r_a(p-a) \qquad (۵)$$

و به‌همین ترتیب :

$$S_{ABC} = r_b(p-b) \qquad (۶)$$

$$S_{ABC} = r_c(p-c) \qquad (۷)$$

r_b و r_c شعاعهای دایره‌های k_b و k_c هستند که بترتیب، بر ضلعهای b و c و امتداد دو ضلع دیگر مماسند.

ب. رابطه‌هایی بین زاویه‌ها و ضلعهای مثلث. مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث، نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های مثلث است و، بنابراین، به‌عنوان مثال $O\hat{A}F = \frac{۱}{۲}\alpha$ با استفاده از رابطهٔ (۴) و دستور هرون برای محاسبهٔ مساحت مثلث، داریم :

$$\tan\frac{\alpha}{۲} = \frac{OF}{AF} = \frac{r}{p-a} = \frac{S_{ABC}}{p(p-a)} = \frac{\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}}{p(p-a)}$$

$$= \sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{p(p-a)}} \qquad (۸)$$

و به همین ترتیب :

$$\tan\frac{\beta}{۲} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{p(p-b)}} \qquad (۹)$$

$$\tan\frac{\gamma}{۲} = \sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{p(p-c)}} \qquad (۱۰)$$

از طرف دیگر :

$$S_{ABC}=\frac{1}{2}bc\sin\alpha=bc\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}=bc\tan\frac{\alpha}{2}\cos^2\frac{\alpha}{2};$$

$$bc\cos^2\frac{\alpha}{2}=\frac{S_{ABC}}{\tan\frac{\alpha}{2}}=p(p-a)$$

و بنابراین، برای زاویه‌های مثلث خواهیم داشت :

$$\cos\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{p(p-a)}{bc}}\ ,\ \cos\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{p(p-b)}{ac}}\ ,$$

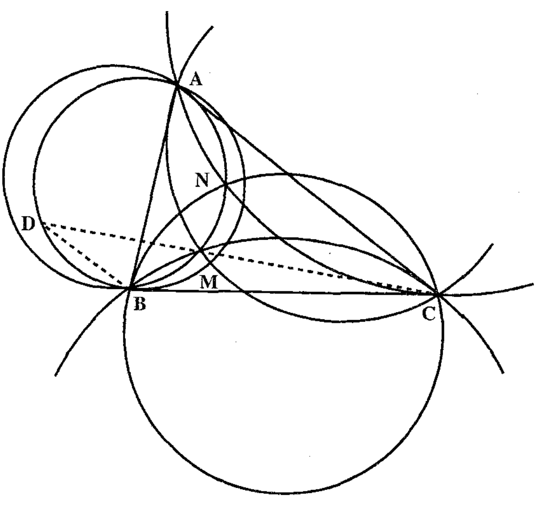
$$\cos\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{p(p-c)}{ab}} \qquad (11)$$

و چون $\sin\frac{\alpha}{2}=\tan\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ ، بنابراین :

$$\sin\frac{\alpha}{2}=\sqrt{\frac{(p-b)(p-c)}{bc}}\ ,\ \sin\frac{\beta}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-c)}{ac}}\ ,$$

$$\sin\frac{\gamma}{2}=\sqrt{\frac{(p-a)(p-b)}{ab}} \qquad (12)$$

۳۳. نقطهٔ لوموان یک مثلث، نقطهٔ همرسی شبه میانه‌های یک مثلث است و نقطه‌های بروکار مثلث، نقطه‌های همرسی سه دایرهٔ گروه مستقیم دایره‌های الحاقی و سه دایرهٔ گروه غیرمستقیم دایره‌های الحاقی می‌باشند.



اگر مثلث ABC را درنظر بگیریم، دایره‌ای را که بر دو نقطهٔ A و B می‌گذرد و در B بر ضلع BC مماس است، دایرهٔ (AB) ؛ دایره‌ای را که بر دو نقطهٔ B و C می‌گذرد و در نقطهٔ C بر ضلع AC مماس است، دایرهٔ (CB) ؛ و دایره‌ای را که بر دو نقطهٔ A و C می‌گذرد و در نقطهٔ A بر AB مماس است، دایرهٔ (CA) بنامیم،

این سه دایره را، گروه مستقیم دایره‌های الحاقی می‌نامیم. این سه دایره در یک نقطه مانند M همرسند که آن را یک نقطهٔ بروکار مثلث می‌نامند.

حال اگر رأسهایA ، B و C را دو تا دو تا در جایگشت دایره‌ای BAC درنظر بگیریم، گروه غیرمستقیم دایره‌های الحاقی (BA)، (AC)، و (CB) را به‌دست می‌آوریم. دایرهٔ (BA) دایره‌ای است که از A و B می‌گذرد و در A بر ضلع AC مماس است. برای دو دایرهٔ دیگر نیز تعریف مشابهی وجود دارد.

سه دایرهٔ الحاقی گروه غیرمستقیم در یک نقطه مانند N یکدیگر را قطع می‌کنند که آن را نقطهٔ دوم بروکار مثلث می‌نامند. برای نقطهٔ M داریم :

$$M\hat{A}B = M\hat{B}C = M\hat{C}A$$

و برای نقطهٔ N داریم :

$$N\hat{A}C = N\hat{C}B = N\hat{B}A$$

نقطه‌های بروکار، دو نقطهٔ همزاویهٔ مثلث می‌باشند، یعنی داریم :

$$M\hat{A}B = N\hat{A}C$$

با توجه به اطلاعات بالا مسأله را حل کنید.

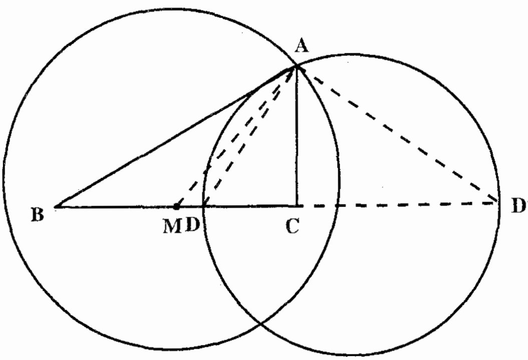
۱.۱.۲. ضلع

۱.۱.۲.۱. اندازهٔ سه ضلع

۳۴. چون $۴+۳>۶>|۳-۴|$ و یا $۷>۶>۱$ یعنی $|AC-BC|<AB<AC+BC$ است، پس این مثلث قابل رسم است. برای رسم این مثلث، پاره‌خط $AB=۶cm$ را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز A و به شعاع $AC=۴cm$ یک دایره، و آن‌گاه به مرکز B و به شعاع $BC=۳cm$ دایرهٔ دیگری رسم می‌کنیم. محل برخورد این دو دایره رأس C است. از C به A و B وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۱.۱.۲.۳. یک ضلع، نسبت دو ضلع دیگر، مجموع مربعهای دو ضلع دیگر

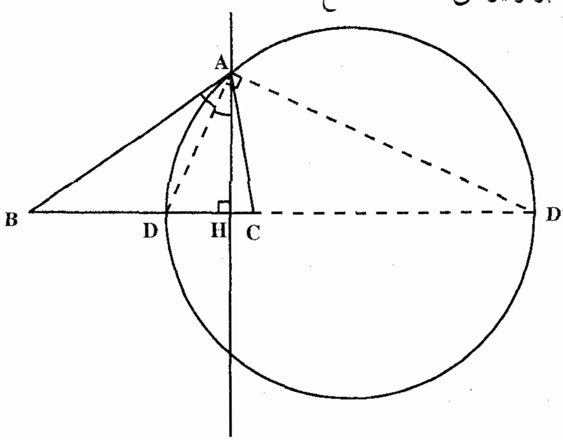
۳۵. از رابطهٔ $b^۲+c^۲=۲m_a^۲+\frac{a^۲}{۲}$ اندازهٔ میانهٔ m_a محاسبه می‌شود. از طرفی $\frac{b}{c}$ نسبتی



است که نیمسازهای درونی و برونی زاویهٔ A ضلع BC را به آن نسبت تقسیم می‌کنند. بنابراین برای رسم مثلث، پاره‌خط BC به طول a را رسم می‌کنیم. سپس دو نقطهٔ D و D′ را روی BC و امتداد آن، طوری پیدا می‌کنیم که پاره‌خط BC را به نسبت $\frac{b}{c}$ تقسیم کنند. به قطر DD′ یک دایره و به مرکز M وسط BC، و به شعاع m_a دایرهٔ دیگری رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دو دایره رأس A است. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC رسم می‌شود.

۳.۲.۱.۱. یک ضلع، نسبت دو ضلع دیگر، تفاضل مربعهای دو ضلع دیگر

۳۶. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم چون $b^۲ - c^۲ = k$ مقدار ثابتی است، پس مکان هندسی رأس A خط راستی عمود بر BC، در نقطه‌ای مانند H است، به قسمی که اگر I وسط BC باشد، $IH = \frac{k}{۲a}$ است. از طرفی چون $\frac{AC}{AB} = \frac{b}{c} = k'$ مقدار معلومی است، پس مکان هندسی دیگر رأس A، دایرهٔ آپولونیوسی است که ضلع BC را به نسبت $\frac{b}{c} = k'$ تقسیم می‌کند. بنابراین برای حل مسأله، نخست پاره‌خط $BC = a$ را رسم می‌کنیم. سپس دو مکان هندسی بالا را رسم می‌کنیم، نقطهٔ برخورد آنها رأس A است. از A به B و C وصل



می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۱.۱.۲.۴. یک ضلع، مجموع و تفاضل مربعهای دو ضلع دیگر

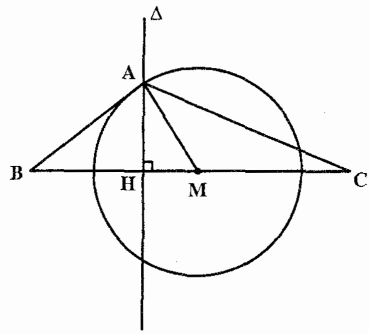
۳۷. راه اول. با فرض $b^2+c^2=k^2$ و $b^2-c^2=l^2$، اندازهٔ ضلعهای b و c به‌دست می‌آید. درنتیجه با معلوم بودن سه ضلع مثلث، می‌توان آن را رسم کرد.

راه دوم. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مسأله است اگر:

$$AC^2+AB^2=b^2+c^2=k^2$$

و

$$AC^2-AB^2=b^2-c^2=l^2$$



($AC>AB$ فرض شده است)، دو مکان هندسی برای رأس A وجود دارد. زیرا اگر M وسط ضلع BC باشد، با توجه به ثابت بودن این ضلع، دو مکان هندسی برای رأس A وجود دارد، زیرا داریم:

$$AB^2+AC^2=2BC^2+\frac{AM^2}{2}\Rightarrow b^2+c^2=2a^2+\frac{m_a^2}{2}$$

$$m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2(b^2+c^2)-a^2}=\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-a^2}=\text{مقدار ثابت}$$

یعنی یک مکان هندسی رأس A دایره‌ای به مرکز نقطهٔ ثابت و به شعاع مقدار ثابت بالاست.

از طرفی داریم:

$$AC^2-AB^2=2BC.MH\Rightarrow b^2-c^2=2a.MH\Rightarrow l=2a.MH$$

$$\Rightarrow MH=\frac{l}{2a}=\text{مقدار ثابت}$$

یعنی مکان هندسی دیگر رأس A، خط راستی مانند Δ است که از نقطهٔ ثابت H بر ضلع BC عمود می‌شود.

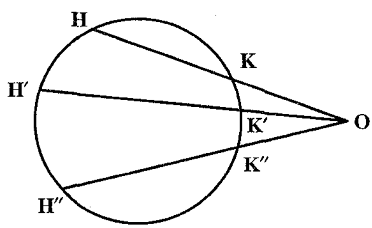
بنابراین برای رسم مثلث ABC، نخست پاره‌خط $BC=a$ را رسم می‌کنیم، سپس یک

دایره به مرکز O و به شعاع $m_a = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2}$ رسم می‌کنیم. آن‌گاه در نقطهٔ H که برای آن $MH = \frac{1}{2a}$ است، خطی عمودبر BC رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دو مکان هندسی رأس A از مثلث ABC است. از A به B و C وصل می‌کنیم.

۳.۱.۱. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۳.۱.۱. ارتفاع

۱.۱.۳.۱.۱. اندازهٔ سه ارتفاع



۳۸. راه اول. هرگاه h، h′ و h″ سه ارتفاع مثلث باشند، و ضلعهای مثلث را a، b و c فرض کنیم، داریم:

$$ah = bh' = ch'' \qquad (1)$$

از نقطهٔ اختیاری O سه قطعه خط $OH = h$ و $OH' = h'$ و $OH'' = h''$ را رسم کرده و دایره‌ای بر سه نقطهٔ H، H′ و H″ مرور می‌دهیم. هرگاه K، K′ و K″ دومین نقطه‌های تقاطع OH، OH′ و OH″ با این دایره باشند، داریم:

$$OK \times h = OK' \times h' = OK'' \times h''$$

از مقایسهٔ این رابطه با رابطهٔ (۱) معلوم می‌شود که:

$$\frac{a}{OK} = \frac{b}{OK'} = \frac{c}{OK''}$$

یعنی مثلثی که سه ضلع آن OK، OK′ و OK″ باشند، با مثلث ABC متشابه است. بنابراین هرگاه مثلثی با ضلعهای OK، OK′ و OK″ رسم کنیم، زاویه‌های مثلث ABC به‌دست می‌آیند و مسأله منجر می‌شود به ترسیم مثلثی که اندازهٔ زاویه‌ها و ارتفاعهای آن معلوم است و راه‌حل این مسأله را می‌دانیم.

راه دوم. داریم :

$$ah_a = bh_b = ch_c = ۲s$$

با تقسیم بر $h_a h_b$ به‌دست می‌آوریم :

$$a : h_b = b : h_a = c : m$$

که در آن $m = h_a h_b : h_c$ و بنابراین، می‌توان آن را به‌عنوان جزء چهارم تناسب بین ارتفاعهای مفروض رسم کرد.

پس مثلث مطلوب با مثلث DEF، که در آن $EF = h_b$ ، $FD = h_a$ و $DE = m$ ، متشابه است.

روی ارتفاع DK از این مثلث، DL را برابر h_a جدا می‌کنیم. خطی که از L به‌موازات EF رسم می‌شود، DE و DF را بترتیب در رأسهای B و C از مثلث خواستهٔ ABC قطع می‌کند، و رأس سوم این مثلث، یعنی A، بر D منطبق است.

راه حل این مسأله به رسم مثلث DEF بستگی دارد، پس باید داشته باشیم :

$$h_a + h_b > m > h_a - h_b$$

یا با قرار دادن مقدار m به‌جای آن و تقسیم بر $h_a h_b$:

$$(\frac{۱}{h_b} + \frac{۱}{h_a}) > \frac{۱}{h_c} > (\frac{۱}{h_b} - \frac{۱}{h_a})$$

۳۹. داریم :

$$a:b:c = \frac{۱}{h_a}:\frac{۱}{h_b}:\frac{۱}{h_c} \Rightarrow a:b:c = \frac{۱}{۳}:\frac{۱}{۲}:\frac{۱}{۴} = ۴:۶:۳$$

از آن‌جا، چون $۴+۳ > ۶ > |۳-۴|$ است، پس چنین مثلثی را می‌توان رسم کرد.

۴۰. داریم :

$$a:b:c = \frac{۱}{h_a}:\frac{۱}{h_b}:\frac{۱}{h_c} \Rightarrow a:b:c = \frac{۱}{\frac{۱}{۲}}:\frac{۱}{\frac{۱}{m}}:\frac{۱}{\frac{۱}{۳}} \Rightarrow$$

$$a:b:c = ۲:m:۳ \Rightarrow |۳-۲| < m < ۳+۲$$

$$\Rightarrow ۱ < m < ۵$$

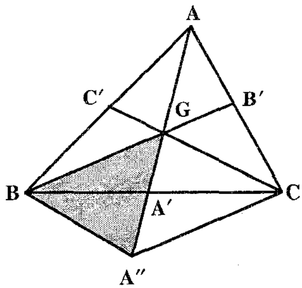
بنابراین m در بازه] ۵, ۱ [باید واقع باشد. به‌عنوان مثال برای $m = ۴$ داریم :

$$h_a = \frac{۱}{۲} \text{ ، } h_b = \frac{۱}{۴}, h_c = \frac{۱}{۳} \Rightarrow \frac{۱}{h_a} = ۲ \text{ ، } \frac{۱}{h_b} = ۴, \frac{۱}{h_c} = ۳$$

رسم مثلث با ضلعهای ۲، ۴ و ۳ امکان‌پذیر است، زیرا ۲ + ۳ > ۴ > ۲ − ۳ است. بنابراین این مثلث را رسم می‌کنیم و با استفاده از ارتفاع $h_a = \frac{1}{2}$، مثلث موردنظر را رسم می‌نماییم.

۱.۱.۳.۲. میانه

۱.۱.۳.۲.۱. اندازهٔ سه میانه



۴۱. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مسأله باشد.
اگر G محل برخورد سه میانهٔ مثلث باشد (شکل)، ′GA را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ ″A امتداد می‌دهیم. شکل GBA″C متوازی‌الاضلاع است. (چرا؟)

$$BC = \frac{2}{3}BB' \text{ ، } A''G = \frac{2}{3}AA' \text{ ، } BA'' = CG = \frac{2}{3}CC'$$

بنابراین ابتدا مثلث ″GBA را با معلوم بودن سه ضلع که هر ضلعش $\frac{2}{3}$ میانه‌های مثلث است رسم می‌کنیم، B را به وسط ″GA وصل کرده و به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم، رأس C به‌دست می‌آید و ″GA را نیز به‌اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم، رأس A از مثلث معلوم خواهد شد.

۱.۱.۳.۳. نیمساز

۱.۱.۳.۳.۱. اندازهٔ سه نیمساز

۴۲. فرض کنید سه عدد مثبت m، n و p داده شده‌اند. آیا مثلثی با نیمسازهای به‌طول m، n و p وجود دارد؟
جواب این سؤال مثبت است. اگر طولهای میانه‌ها m، n و p باشند، باید در رابطهٔ $m < n + p$ صدق کنند (دو نامساوی دیگر به‌صورت دوری حاصل می‌شود). طولهای ارتفاعها نیز باید در نامساوی $\frac{1}{m} \leq \frac{1}{n} + \frac{1}{p}$ بنابراین طولهای m، n و p در این حالتها کاملاً هم دلخواه نیستند.

بحث روی این مسأله دارای تاریخچهٔ طولانی است. بروکارد (Brocard) در سال ۱۸۷۵ میلادی در کتاب «Nouvelle Correspondance Mathématique» مسألهٔ ساختن چنین مثلثی را پیشنهاد کرد، همچنین در سال ۱۸۸۹ شخصی به نام «وان دن برگ» (Van Den Berg) این مسأله را به حل معادله‌ای از درجهٔ ۱۶ ربط داده است. در سال ۱۸۹۶ باربارین (P.Barbarin) در Mathesis نشان داد که معادله از درجهٔ ۱۴ می‌تواند انتخاب شود و در حالت کلی این معادله تفکیک ناپذیر است. او همچنین نشان داد که وقتی طول دو نیمساز با هم مساوی باشند، معادله تبدیل به یک معادلهٔ مکعب تحویل ناپذیر می‌شود، و این عدم احتمالی از یک ساختار اقلیدسی برای مثلث را نشان می‌دهد. حال نتایج ذکر شده را اثبات می‌کنیم:

در مرحلهٔ اول بعضی از فرمولهای ضروری را به‌دست می‌آوریم. اگر a، b و c طولهای ضلعها و m، n و p طول نیمسازهای زاویه‌ها، و s نصف محیط یک مثلث باشند، خواهیم داشت:

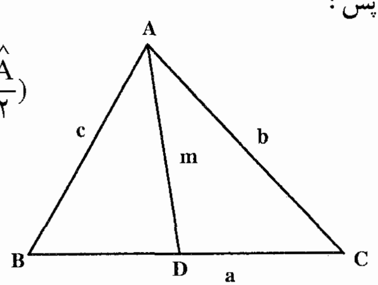
$$m=\frac{۲}{b+c}\sqrt{bcs(s-a)} \qquad (۱)$$

و نظیر آن فرمولهای مشابهی برای n و p. با بحث مساحت، (۱) را ثابت می‌کنیم: (شکل را ببینید) اگر S (MNP) نمایش مساحت مثلث MNP باشد، آن‌گاه:

$$۲S(ABC)=۲S(ABD)+۲S(ACD)$$

پس:

$$bc\ \sin\hat{A}=bm\ \sin(\frac{\hat{A}}{۲})+cm\ \sin(\frac{\hat{A}}{۲})$$



در این صورت:

$$m=\frac{bc}{b+c}\times\frac{\sin\hat{A}}{\sin\frac{\hat{A}}{۲}}=\frac{۲bc}{b+c}\cos\frac{\hat{A}}{۲}=\frac{۲bc}{b+c}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$$

یعنی $m=\frac{۲bc}{b+c}\sqrt{\frac{s(s-a)}{bc}}$ که از این رابطه، رابطهٔ (۱) به‌دست می‌آید.

بسادگی داریم:

$$\left[b+c\pm\frac{a(b-c)}{b+c}\right]^{۲}=۴m^{۲}[a\pm(b-c)]^{۲} \qquad (۲)$$

و از (۲) به‌دست می‌آید:

$$b+c=\sqrt{m^{۲}+(s-b)^{۲}}+\sqrt{m^{۲}+(s-c)^{۲}} \qquad (۳)$$

به‌همین ترتیب دو تساوی دیگر برای $c+a$ و $a+b$ به‌دست می‌آوریم و با جانشین ساختن: $z=s-c$ و $y=s-b$ و $x=s-a$ (۴)

رابطهٔ (۳) به‌صورت زیر نوشته می‌شود:

$$x=\left[\sqrt{m^{۲}+y^{۲}}-y\right]\Big/۲+\left[\sqrt{m^{۲}+z^{۲}}-z\right]\Big/۲=f(y,m)+f(z,m) \qquad (۵)$$

که در آن: $f(a,v)=\left[\sqrt{u^{۲}+v^{۲}}-v\right]\Big/۲$

برای اعداد مثبت و دلخواه m، n و p فرض کنید:

$$F:[۰,\infty)^{۳}\to[۰,\infty)^{۳}$$

با ضابطهٔ زیر تعریف شده باشد:

$$F(x,y,z)=\big(f(y,m)+f(z,m),f(z,n)+f(x,n),f(x,p)+f(y,p)\big)$$

حال با توجه به رابطهٔ (۵) داریم:

$$F(x,y,z)=(x,y,z) \qquad (۶)$$

جایی که x، y و z از رابطهٔ (۴) در مثلثی با طول نیمسازهای m، n و p به‌دست آمده‌اند و برعکس اگر رابطهٔ (۶) برقرار باشد، در مثلثی با طولهای $y+z$ ، $z+x$ و $x+y$ تساوی (۳) برقرار است، و لذا m باید توسط رابطهٔ (۱) داده شده باشد و در این‌صورت مسألهٔ مذکور معادل با وجود و یکتایی نقطهٔ ثابت برای F است.

وجود: چون $f(u,v)\in[۰,\frac{v}{۲}]$ برای u و vهای نامنفی؛ لذا $F(k)\subseteq K$ که $k=[۰,m]\times[۰,n]\times[۰,p]$.

البته توجه داریم که (۰ , ۰ , ۰) نقطهٔ ثابت F نیست. چون K یک مجموعهٔ محدب فشرده در $R^{۳}$ و F پیوسته است، لذا بخش وجودی مسأله بنا به قضیهٔ نقطهٔ ثابت براور به‌دست می‌آید.

یکتایی : برای $u \neq t$ و $v \neq 0$ ، $p = \sqrt{u^2+v^2} + \sqrt{t^2+v^2}$ و داریم :

$$2|f(u,v)-f(t,v)| = |u-t|\left[1-\frac{(u+t)}{p}\right] < |u-t| \qquad (7)$$

چون $(x,y,z) \neq (x',y',z')$ ، رابطهٔ (۷) نشان می‌دهد که :

$$|F(x,y,z)-F(x',y',z')| < \frac{1}{2}\sqrt{\Sigma(|y-y'|+|z-z'|)^2}$$

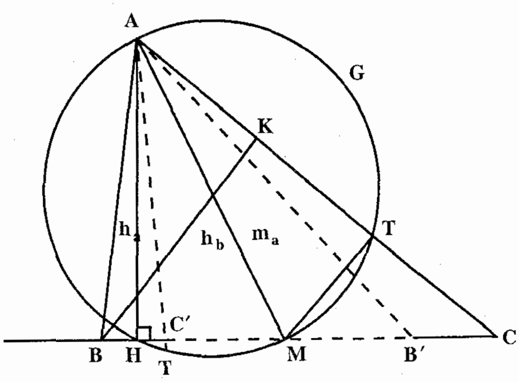
$$\leq \|(x,y,z)-(x',y',z')\| \qquad (8)$$

جایی که Σ جمع دوری و $\| \ \|$ نمایش نرم اقلیدسی در R^3 است. حال یکتایی فوراً از (۸) نتیجه می‌شود.

۱.۱.۳.۴. ارتفاع، میانه

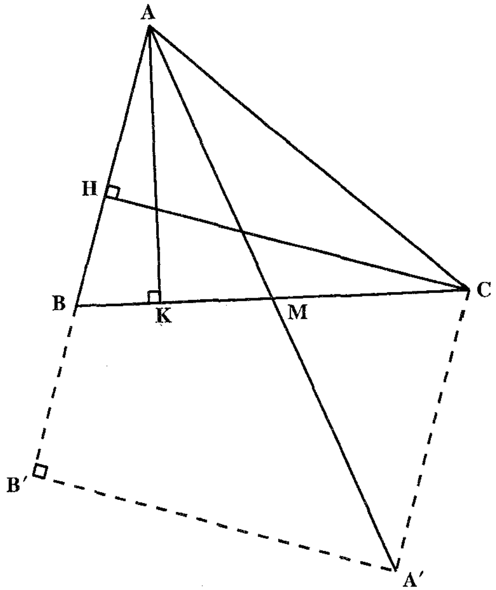
۱.۱.۳.۴.۱. دو ارتفاع، یک میانه

۴۳. راه اول. مثلث قائم‌الزاویهٔ HAM را با m_a به عنوان وتر و h_a به‌عنوان یک ضلع زاویهٔ قائمه (به‌طور مثال با استفاده از $AM = m_a$ به‌عنوان قطر دایرهٔ G و یافتن نقطهٔ H با رسم کمانی از دایرهٔ به مرکز A و شعاع h_a ، شکل را ملاحظه کنید) رسم می‌کنیم. اکنون اگر M وسط ضلع BC از مثلث خواسته شده و BK ارتفاع معلوم h_b باشد، در این صورت MT، عمود بر ضلع AC، موازی BK و نصف طول آن است. درنتیجه T

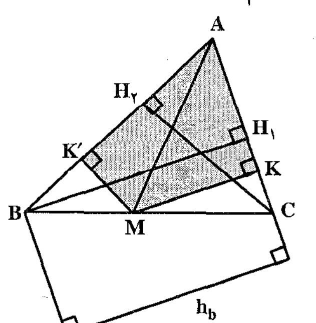


نقطهٔ تقاطع دایرهٔ G و کمانی از دایرهٔ به مرکز M و شعاع $\frac{1}{2}h_b$ است. در این صورت HM و AT را امتداد می‌دهیم ؛ نقطهٔ برخوردشان C است ؛ B را با قرار دادن فاصلهٔ $MB = MC$ در امتداد HM پیدا می‌کنیم.

راه دوم. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. میانهٔ AM را به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا A' به‌دست آید. از A' بر امتداد AB عمود می‌کنیم تا نقطهٔ B' به‌دست آید. چون چهارضلعی $B'A'CH$ متوازی‌الاضلاع است، پس: $CH = A'B'$ ؛ یعنی مثلث $AA'B'$ به حالت وتر و یک ضلع قابل رسم است. پس از رسم مثلث قائم‌الزاویه، نقطهٔ M را وسط AA' مشخص کرده، و مثلث قائم‌الزاویهٔ AKM را نیز روی همان شکل می‌سازیم. KM را امتداد می‌دهیم تا AB' را در B قطع کند و MB را از طرف M به‌اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ C به‌دست آید. A را به B و C وصل می‌کنیم.



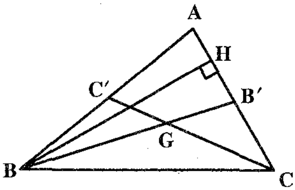
۴۴. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مسأله باشد. از نقطهٔ M خطی موازی ارتفاع BH_1 رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ K قطع کند. در مثلث BCH_1 اندازهٔ $MK = \frac{BH_1}{2} = \frac{h_b}{2}$ و $MK \perp AC$ است و چون AM نیز مشخص است، پس مثلث قائم‌الزاویهٔ AMK با معلوم بودن وتر AM و ضلع MK قابل رسم است. به‌همین ترتیب اگر از M خطی موازی ارتفاع CH_2 رسم کنیم، $MK' = \frac{CH_2}{2} = \frac{h_c}{2}$. پس مثلث قائم‌الزاویهٔ AMK' نیز قابل رسم است. بنابراین برای رسم مثلث ABC دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AMK و AMK' را در مجاورت هم رسم می‌کنیم، آن‌گاه از نقطه‌ای دلخواه روی AK عمودی به اندازهٔ h_b اخراج می‌کنیم و از انتهای آن خطی موازی AK رسم می‌کنیم تا AK' را در نقطهٔ B قطع کند. از B به M وصل



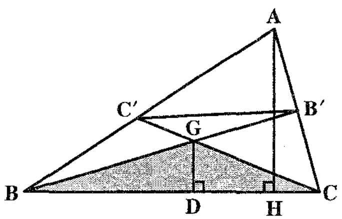
کرده، امتداد می‌دهیم تا AK را در نقطهٔ C قطع کند. مثلث ABC جواب مسأله است.

۱.۱.۳.۴.۲. یک ارتفاع، دو میانه یا شبه میانه

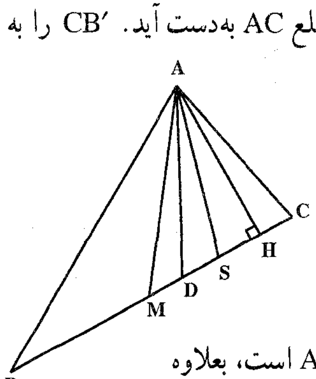
۴۵. مسأله را حل شده می‌گیریم. میانه‌های BB' و CC' و ارتفاع BH را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد دو میانه را G می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ BHB' با معلوم بودن اندازه‌های وتر و یک ضلع قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم. سپس نقطهٔ G را روی BB' چنان اختیار می‌کنیم که $GB = ۲GB'$ باشد. به مرکز G و به شعاع $\frac{۲}{۳}m_c$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا امتداد $B'H$ را در نقطهٔ C، رأس دیگر مثلث قطع کند. CB' را به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا رأس A به دست آید. از A به B وصل می‌کنیم. مثلث ABC رسم می‌شود.



۴۶. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. میانه‌های BB'، CC' و ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد میانه‌ها را G می‌نامیم. از نقطهٔ G عمود GD را بر ضلع BC فرود می‌آوریم. $GD = \frac{۱}{۳}AH$ طول معلومی دارد. بنابراین مثلث GBC را با معلوم بودن دو ضلع $GB = \frac{۲}{۳}m_b$ و $GC = \frac{۲}{۳}m_c$ و $GD = \frac{۱}{۳}h_a$ می‌توان رسم کرد. پس از رسم این مثلث، BG را به اندازهٔ نصف خود امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ B' وسط ضلع AC به‌دست آید. CB' را به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا رأس A به‌دست آید. از A به B وصل می‌کنیم. مثلث ABC رسم می‌شود.



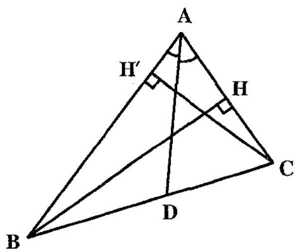
۴۷. مثلث ABC را رسم شده فرض می‌کنیم. ارتفاع AH، میانه AM و شبه میانهٔ AS را رسم می‌کنیم. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AHM و AHS با معلوم بودن اندازه‌های وتر و یک ضلع قابل رسم می‌باشند. از طرفی می‌دانیم که نیمساز زاویهٔ MAS، نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC است، بعلاوه نقطهٔ برخورد عمودمنصف BC و نیمساز زاویهٔ درونی A، روی دایرهٔ محیطی مثلث واقع



است، بنابراین روش رسم مثلث ABC به‌صورت زیر است:
مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH را با معلوم بودن وتر $AM = m_a$ و ضلع $AH = h_a$ رسم می‌کنیم. به مرکز A و به شعاع شبه میانهٔ AS کمانی می‌زنیم تا MH را در نقطهٔ S قطع کند. AS را رسم کرده، نیمساز زاویهٔ MAS را رسم می‌نماییم، و از M عمودی بر MH اخراج می‌کنیم تا نیمساز رسم شده را در نقطهٔ E روی دایرهٔ محیطی مثلث قطع کند. عمودمنصف AE را رسم می‌کنیم تا EM را در نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC قطع کند. به مرکز O و به شعاع $OE = R$ دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد امتداد MS با دایرهٔ محیطی، دو رأس B و C است. از B و C به A وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۱.۱.۳.۵. ارتفاع، نیمساز

۱.۱.۳.۵.۱. دو ارتفاع، یک نیمساز



۴۸. روش جبری. با توجه به این که:

$$h_c = \frac{۲}{c}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

$$h_b = \frac{۲}{b}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)}$$

و $d_a = \frac{۲}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}$ است، با حل دستگاهی سه معادلهٔ سه مجهولی، اندازهٔ سه ضلع مثلث، یعنی a، b و c محاسبه می‌شود، و آن‌گاه مثلث قابل رسم است.

۱.۱.۳.۶. ارتفاع، میانه، نیمساز

۴۹. دو مثلث قائم‌الزاویه‌ای را که ضلع مشترک زاویهٔ قائمهٔ آنها $AD = h_a$ است، و وترهایشان $AA' = m_a$ و $AU = t_a$ هستند، می‌توان رسم کرد. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث مطلوب ABC، یعنی O، روی عمودی که در نقطهٔ A' بر DA' رسم می‌شود، و همچنین روی خطی که با AU زاویه‌ای برابر $D\hat{A}U$ می‌سازد قرار دارد؛ سپس O را می‌توان تعیین کرد. دایرهٔ (O , OA) خط DA' را در دو رأس B و C از مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند.

۵۰. اگر A رأس مشترک، و h، i، m و s چهار پاره‌خط داده شده باشند، چهار حالت وجود دارد:

h، i، m ؛ h، i، s ؛ h، m، s ؛ i، m، s

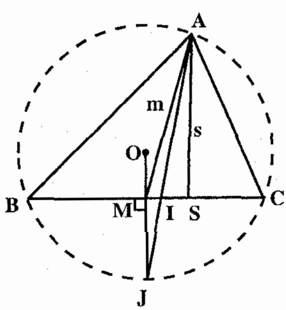
حالت اول. داده‌ها h، i و m، یعنی ارتفاع، نیمساز و میانهٔ رأس A است که قبلاً روش رسم آن را دیدیم.

حالت دوم. داده‌ها h، i، s، یعنی ارتفاع، نیمساز و شبه میانهٔ رأس A است. که چون میانهٔ مثلث قرینهٔ شبه میانهٔ آن است، پس اگر مسأله را حل شده بگیریم، اندازهٔ میانهٔ مثلث نیز معلوم است و مسأله به‌حالت اول برمی‌گردد.

حالت سوم. داده‌ها h، m و s، یعنی ارتفاع، میانه و شبه میانهٔ رأس A است. روشن است که اگر مسأله را حل شده بگیریم، نیمساز رأس A، که نیمساز زاویهٔ بین میانه و شبه میانه است مشخص است و مسأله به حالتهای قبل تبدیل می‌شود.

حالت چهارم. i، m و s، یعنی نیمساز، میانهٔ و شبه میانهٔ رأس A معلوم است. در این حالت برای رسیدن به حالت اول، باید مثلث MAS را چنان رسم کنیم که $AI = i$، نیمساز زاویهٔ MAS باشد. به‌عبارت دیگر مثلثی را رسم کنیم که دو ضلع و اندازهٔ نیمساز زاویهٔ بین این دو ضلع معلوم است.

نخست AI را رسم می‌کنیم. سپس دو دایرهٔ هم مرکز به مرکز A و به شعاعهای m و s رسم می‌نماییم. مسأله منجر می‌شود به این که از نقطهٔ I خط MIS را چنان رسم کنیم که $\frac{MI}{SI} = \frac{MA}{SA} = \frac{m}{s}$ باشد.



برای این کار از تعیین مجانس یک دایره نسبت به مرکز I و به نسبت $\frac{m}{s}$ استفاده می‌کنیم.

تبصره. می‌توان به جای نیمساز زاویهٔ داخلی i، نیمساز زاویهٔ خارجی آن e را جایگزین کرد.

دو نیمساز زاویه‌های داخلی و خارجی یک رأس، ضلعهای مثلث قائم‌الزاویهٔ IAE هستند که AH ارتفاع آن است. از آن‌جا نتیجه می‌شود که داده‌های e، h، i دو شرط را بیشتر نشان نمی‌دهند و می‌توان به‌جای h، i در حالتهای ۱ و ۲ مقادیر e و i را گذاشت.

۴.۱.۱. پاره‌خط، خط

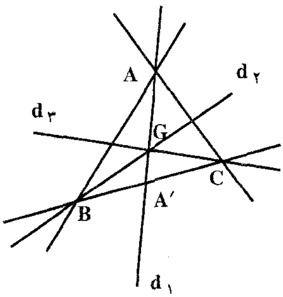
۱.۴.۱.۱. پاره‌خط

۵۱. شرط آن که بتوانیم با سه پاره‌خط مثلثی بسازیم، باید نامساوی مثلثی بین آن سه پاره‌خط برقرار باشد.

۲.۴.۱.۱. خط

۱.۲.۴.۱.۱. خطهایی که سه میانه روی آنها هستند

۵۲. مسأله را حل شده می‌گیریم و فرض می‌کنیم سه خط همرس d_1، d_2 و d_3 خطهایی باشند که میانه‌های مثلث روی آنها است. روشن است که نقطهٔ G، نقطهٔ همرسی این سه خط مرکز ثقل مثلث است. یک رأس مثلث به‌عنوان مثال، رأس A را روی خط d_1 اختیار می‌کنیم. آن‌گاه در امتداد AG، GA' را به اندازهٔ نصف AG جدا می‌کنیم تا نقطهٔ A' به‌دست آید. از A' خطی رسم می‌کنیم که به‌وسیلهٔ دو خط d_2 و d_3 نصف شود، دو رأس B و C به‌دست می‌آید (مجانس خط d_2 نسبت به مرکز A' و نسبت ۱− را به‌دست می‌آوریم).



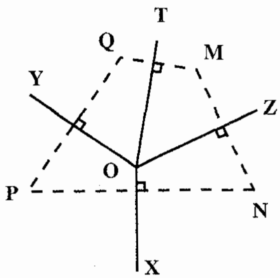
۲.۲.۴.۱.۱. خطهایی که نیمسازها روی آنها هستند

۵۳. اگر یک ضلع مثلاً AB معین باشد، دو ضلع دیگر قرینه‌های AB نسبت به x و y می‌باشند. پس AB را از تبدیلی که منتجهٔ سه تقارن متوالی نسبت به x، y و z باشد بنا می‌کنیم. AB خطی است که بر متناظرش منطبق می‌شود. پس یک خط مضاعف است. اما این تبدیل منتجه یک تساوی معکوس است که معادل است با یک تقارن (S) و یک انتقال (T) موازی با محور تقارن و خط مضاعف محور تقارن (S) است. برای تعیین آن، قطعه خط دلخواه MN را درنظر گرفته، $M'N'$ متناظرش را تعیین می‌کنیم. خط مطلوب، وسطهای MN و $M'N'$ را به هم وصل می‌کند. چنانچه x، y و z همرس باشند، انتقال T صفر خواهد شد و تبدیل منتجه به تقارن (S) منجر می‌شود. پس محور مطلوب عمودمنصف MN' است و از نقطهٔ O، محل برخورد x، y و z می‌گذرد. در این تقارن خطهای مضاعف، محور، و خطهای عمود بر محور می‌باشند. این محور را می‌توان AB اختیار

نمود. زیرا به این ترتیب به‌جای ضلعهای مثلث، سه خط همرس در O به‌دست می‌آید. چنانچه AB را بر خطی عمود بر محور اختیار کنیم، در آن‌صورت بینهایت مثلث خواهیم داشت که ضلعهایشان با هم موازی است.

۱.۱.۴.۲.۳. سه عمودمنصف ضلعهای مثلث

۵۴. اگر رأس A معین شود، دو رأس B و C به‌سهولت به‌دست می‌آیند. A نقطه‌ای است که متناظرش پس از سه تقارن نسبت به X، Y و Z برخودش منطبق است. به‌عبارت دیگر A نقطهٔ مضاعف تبدیل منتجه این تقارن است. برای این که این نقطهٔ مضاعف موجود باشد، باید X، Y و Z همرس باشند. پس تبدیل منتجه یک تقارن است و A نقطه‌ای از محور تقارن می‌باشد. برای رسم این محور، نقطهٔ غیرمشخص M را درنظر گرفته، فرض می‌کنیم که Q، نقطهٔ متناظر آن بعد از سه تقارن متوالی باشد. محور تقارن منتجه خط T، عمودمنصف MQ است، که از نقطهٔ O، محل برخورد سه محور می‌گذرد (شکل).



۵۵. ترکیب تقارنهای محوری $S_r \circ S_q \circ S_p$ تقارنی با محور l بوده و $S_r \circ S_q \circ S_p(A) = A$ است. درنتیجه $S_l(A) = A$ بوده و A به l متعلق خواهد بود. خط l را رسم کرده، و $(\hat{p,q}) = (\hat{l,r})$ را منظور کنید. هر نقطهٔ خط l می‌تواند نقش A را ایفا کند.

۱.۱.۴.۳. پاره‌خط و خط

۵۶. مسأله را حل شده بگیرید، و از ویژگی نیمسازهای زاویه‌های مثلث استفاده کنید.

۵۷. **الف.** چون دو ضلع یک زاویه نسبت به نیمساز آن قرینهٔ یکدیگر هستند، اگر قرینهٔ B را نسبت به خطی که پاره‌خط AB را قطع کرده است، پیدا کنیم، یکی از نقطه‌های ضلع AC به‌دست می‌آید.

ب. اگر قرینهٔ رأس مفروض را نسبت به دو نیمساز دیگر پیدا کنیم، دو نقطه از ضلع روبه‌روی به این رأس به‌دست می‌آید و دیگر رسم مثلث مشکل نخواهد بود.
بحث دربارهٔ امکان وجود مثلث را به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

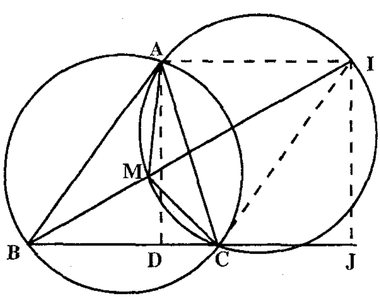
۱.۱.۵.زاویه

۱.۱.۵.۱. زاویه‌های درونی مثلث

۵۸. با معلوم بودن اندازهٔ دو زاویهٔ مثلث، اندازهٔ زاویهٔ سومی نیز مشخص است. بیشمار مثلث می‌توان رسم کرد که اندازهٔ زاویه‌های آن مساوی زاویه‌های داده شده باشند. این مثلثها همه با هم متشابه‌اند.

۱.۱.۵.۲. زاویهٔ درونی، زاویهٔ دیگر

۵۹. ترسیم. مثلث ABC (شکل) و یک دایرهٔ گروه مستقیم دایره‌های الحاقی، مثلاً (CA)، داده شده‌اند. نقطهٔ بروکار M و زاویهٔ بروکار را می‌توان به‌صورت زیر ترسیم کرد : از نقطهٔ تماس A در دایرهٔ (CA) خطی موازی با ضلع BC رسم می‌کنیم، تا (CA) را در I قطع کند. خط BI که از I به رأس سوم مثلث، یعنی B وصل می‌شود، دایرهٔ (CA) را در نقطهٔ خواستهٔ شدهٔ M قطع می‌کند، و $I\hat{B}C$ زاویهٔ بروکار مثلث است.



درواقع داریم :

$$M\hat{A}B = M\hat{C}A = M\hat{I}A = M\hat{B}C$$

نقطهٔ بروکار دوم نیز به‌طور مشابه رسم می‌شود.

تبصرهٔ ۱. در مثلثهای ACI و ACB (شکل)، داریم :

$$I\hat{A}C = A\hat{C}B \ , \ \ A\hat{I}C = B\hat{A}C$$

پس $A\hat{C}I = A\hat{B}C$ ؛ یعنی خط CI بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC، یعنی دایرهٔ (O)، مماس است ؛ پس برای تعیین نقطهٔ I می‌توان AI را موازی با BC، و CI را مماس بر دایرهٔ محیطی (O) در C رسم کرد. پس نقطهٔ بروکار را می‌توان بدون استفاده از دایرهٔ الحاقی تعیین کرد ؛ با دو بار تکرار این ترسیم نقطهٔ بروکار تعیین می‌شود.

تبصرهٔ ۲. فرض کنید D و J پای ارتفاعهایی باشند که از A و I بر BC رسم می‌شود (شکل)، داریم :

$$\frac{BJ}{IJ} = \frac{BD}{IJ} + \frac{DC}{IJ} + \frac{CJ}{IJ} = \frac{CJ}{IJ} + \frac{BD}{AD} + \frac{DC}{AD}$$

یا : $\cot\hat{\omega} = \cot\hat{A} + \cot\hat{B} + \cot\hat{C}$

۶.۱.۱. رابطهٔ متری

۶۰. از ویژگیهای چهارضلعیهای محاطی و قوت نقطه استفاده کنید.

۷.۱.۱. نقطه، ضلع

۱.۷.۱.۱. یک نقطه، دو ضلع

۶۱. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مسأله باشد، با معلوم بودن اندازهٔ ضلع AC و جای نقطهٔ D، دو پاره‌خط DB و DC معلومند، بنا به ویژگی نیمساز زاویهٔ درونی مثلث داریم : $\frac{DA}{DC} = \frac{c}{a}$ که چون DA، DC و c معلومند، پس اندازهٔ ضلع $BC = a$ معلوم است. بنابراین سه ضلع مثلث ABC معلوم است ؛ و این مثلث را با معلوم بودن اندازهٔ سه ضلع آن می‌توان رسم کرد.

۸.۱.۱. نقطه؛ ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۸.۱.۱. نقطه، ارتفاع

۶۲. مسأله را حل شده می‌گیریم. مثلث قائم‌الزاویهٔ AC_1A' با معلوم بودن اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم و سپس قرینهٔ رأس C_1 نسبت به AA' را که رأس C است تعیین می‌کنیم. از C عمود CK را به‌طول $BB' = h_b$ بر AC اخراج می‌کنیم و از K خطی موازی AC رسم می‌کنیم تا CA' را در رأس B قطع کند. از B به A وصل می‌کنیم، مثلث ABC جواب مسأله است.

۹.۱.۱. نقطه؛ پاره‌خط، خط

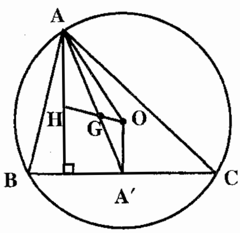
۱.۹.۱.۱. نقطه، پاره‌خط

۶۳. در نقطهٔ A' عمودی بر DUA' رسم، و روی آن $A'O = \frac{1}{2}d$ را جدا کنید، O مرکز

دایرهٔ محیطی مثلث مطلوب ABC است. نقطهٔ A روی خطی قرار دارد که در D بر DUA' عمود می‌شود. اما نیمساز زاویهٔ A، نیمساز زاویهٔ DAO هم هست؛ پس نقطهٔ A روی مماسی قرار دارد که از O بر دایرهٔ (U, UD) رسم می‌شود. پس A را می‌توان تعیین کرد.

دایرهٔ (O, OA) خط DUA' را در دو رأس B و C از مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند.

۶۴. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. اگر A' وسط ضلع BC باشد،



$OA' = \frac{1}{2}AH$ است و $OA' \perp BC$ می‌باشد. همچنین G ،O و H روی یک خط واقعند و $GH = 2GO$ است.

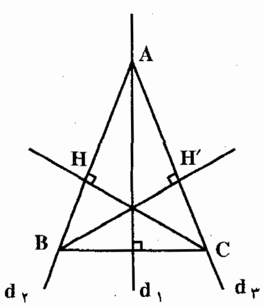
از طرفی با معلوم بودن O و A، شعاع دایرهٔ محیطی مثلث معلوم است؛ بنابراین برای رسم مثلث ABC به مرکز O و به شعاع OA دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می‌کنیم.

سپس دو دایره به مرکز A و به شعاعهای AG و AH رسم می‌نماییم. حال از نقطهٔ O خطی رسم می‌کنیم که این دو دایره را قطع کند، به قسمی که بین وترهای ایجاد شده در دو دایره، رابطهٔ $GH = 2GO$ برقرار باشد. بدین ترتیب نقطه‌های G و H مشخص می‌شوند. AG را به اندازهٔ نصف خود امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ A' وسط ضلع BC به‌دست آید. از A' خطی عمودبر OA' (یا عمود بر AH) رسم می‌کنیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در B و C قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۱.۱.۹.۲. نقطه، خط

۱.۱.۹.۲.۱. یک نقطه، دو خط

۶۵. نقطهٔ لوموان یک مثلث، محل برخورد شبه میانه‌های آن مثلث است.



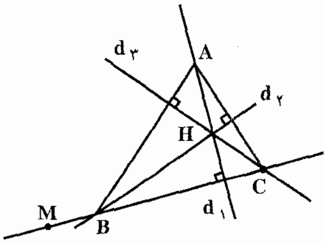
۱.۱.۹.۲.۲. نقطه، سه خط

۱.۱.۹.۲.۲.۱. یک نقطه، سه ارتفاع

۶۶. از A عمودهای AH و AH' را بر خطهای d_2 و d_3 فرود می‌آوریم.

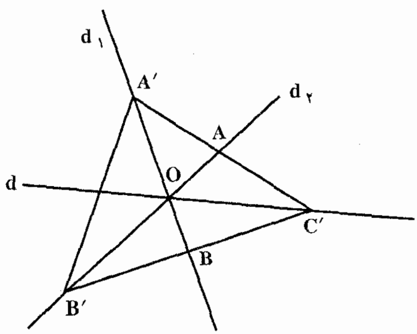
رأسهای B و C، و از آن‌جا مثلث ABC به دست می‌آید.

۶۷. اگر نقطهٔ M نقطه‌ای از ضلع BC باشد، از M خطی عمود بر خط d_1 رسم می‌کنیم تا دوخط d_2 و d_3 را در B و C قطع کند. از B عمودی بر d_3 رسم می‌کنیم تا d_1 را در A قطع کند. از A به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



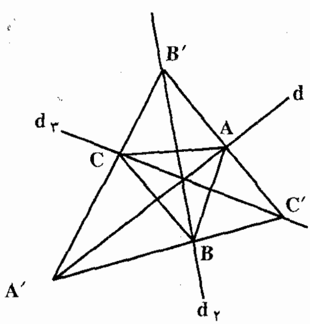
۱.۱.۹.۲.۲.۲. یک نقطه، خطهایی که میانه‌ها روی آنها هستند

۶۸. حل این مسأله برمی‌گردد به این که از نقطهٔ A واقع بر d_2 خطی بگذرانیم که اگر دو ضلع زاویه حاصل از d و d_1 را در C' و A' قطع کند، $AA' = AC'$ باشد. بنابراین باید مجانس خط d را نسبت به مرکز تجانس A و نسبت ۱− پیدا کنیم. نقطهٔ برخورد این خط مجانس با d_1، نقطهٔ A' است. AA' را رسم می‌کنیم تا d را در C' قطع کند. سپس از A به O وصل می‌کنیم، به اندازهٔ دو برابر خودش تا B' ادامه می‌دهیم، از A' به B' و از B' به C' وصل می‌کنیم. مثلث $A'B'C'$ مثلث خواسته شده است.



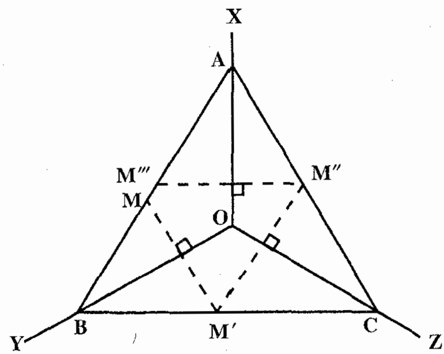
۱.۱.۹.۲.۲.۳. یک رأس، خطهایی که سه نیمساز روی آن هستند

۶۹. سه خط d_1، d_2 و d_3 همرس در نقطهٔ O و نقطهٔ A واقع بر d_1 را درنظر می‌گیریم. می‌دانیم که ارتفاعهای یک مثلث، نیمسازهای زاویه‌های مثلث ارتفاعیه می‌باشند. با توجه به این ویژگی، از A خطی عمودبر d_1 رسم می‌کنیم تا d_2 و d_3 را در نقطه‌های C' و B' قطع کند. از B' خطی عمود بر d_3 رسم می‌کنیم تا d_1 را در نقطهٔ A' و d_3 را در نقطهٔ C قطع نماید. A' را به C' وصل می‌کنیم تا d_2 را در B قطع کند. خطهای d_1، d_2 و d_3 ارتفاعهای مثلث $A'B'C'$ می‌باشند



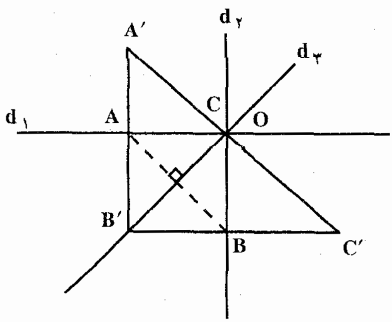
که پای این ارتفاعها، نقطه‌های A، B و C است. بنابراین سه نقطهٔ A، B و C را به هم وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است. یعنی مثلثی است که سه خط d_1، d_2 و d_3 نیمسازهای زاویه‌های آن و A یک رأس آن است.

۷۰. اگر M نقطهٔ مفروض واقع بر ضلع AB از مثلث ABC و OX، OY و OZ، نیمسازهای زاویه‌های A، B و C باشند، بنا به خاصیت نیمسازها (نیمساز هر زاویه محور تقارن آن است)، اگر M بر AB واقع باشد، نقطهٔ M' قرینهٔ M نسبت به OY بر BC و M'' قرینهٔ M' نسبت به OZ بر AC واقع است و M''' و M'' نیز نسبت به OX قرینه‌اند و نقطه‌های M''' و M بر AB قرار خواهند داشت. درنتیجه برای رسم مثلث، ابتدا M' قرینهٔ M نسبت به OY و M'' قرینهٔ M' نسبت به OZ و M''' قرینهٔ M'' نسبت به OX را تعیین نموده و سپس MM''' را وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا OX و OY را به‌ترتیب در A و B قطع نماید و اگر BM' را امتداد دهیم، OZ را در C قطع نموده، و ABC مثلث مطلوب است.



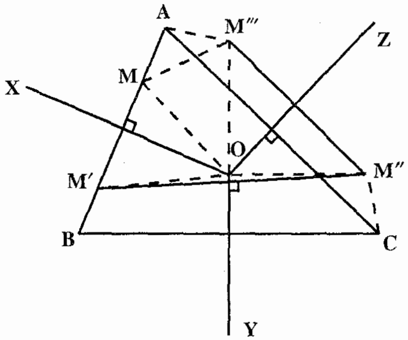
۴.۲.۲.۹.۱.۱. یک نقطه، سه عمودمنصف

۷۱. مثلث را $A'B'C'$ و وسط ضلعها را A، B و C می‌گیریم. فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد. اگر از A به B وصل کنیم، چون $AB \parallel C'A'$ است، پس AB نیز بر d_3 عمود است. پس برای حل مسأله از A عمودی بر d_3 فرود می‌آوریم، جایی که d_2 را قطع کند، نقطهٔ B وسط ضلع دیگر است. در A بر d_1 و در B بر d_2 خطهایی عمود می‌کنیم.



نقطهٔ برخورد آنها، نقطهٔ B' رأس دیگر مثلث است. قرینهٔ B' را نسبت به B به دست می‌آوریم، رأس C' به‌دست می‌آید. از C' به A' وصل می‌کنیم مثلث $A'B'C'$ جواب مسأله است.

۷۲. اگر M نقطهٔ داده شده واقع بر ضلع AB از مثلث ABC، و OX ، OY و OZ امتداد عمودمنصف ضلعها باشند، نقطهٔ M' قرینهٔ M نسبت به OX، بر AB واقع است و چنانچه M'' قرینهٔ M' نسبت به OY و M''' نسبت به OZ باشد، داریم:



$$OM = OM' = OM'' = OM'''$$

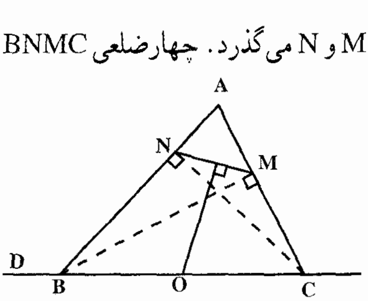
مثلث OMM''' متساوی‌الساقین است و عمودمنصف MM''' از نقطهٔ (O)، محل برخورد عمودمنصفها می‌گذرد و همچنین چون رأسهای مثلث و نقطه‌های M و M'، و M'' و M''' دو به دو نسبت به‌عمودمنصفها قرینه‌اند، پس: $AM''' = CM'' = AM = BM'$

و مثلث AMM''' نیز متساوی‌الساقین است و عمودمنصف MM''' از O و A می‌گذرد و از آن جا حل مسأله چنین است:

نقطهٔ M' قرینهٔ M نسبت به OX، و M'' قرینهٔ M' نسبت به OY و M''' قرینهٔ M'' نسبت به OZ تعیین کرده، عمودمنصف MM''' را رسم می‌کنیم، نقطهٔ برخورد این عمودمنصف با امتداد MM' نقطهٔ A یک رأس مثلث و B قرینهٔ A نسبت به OX رأس دیگر بوده و رأس سوم را نیز معلوم می‌کنیم.

۱.۱.۹.۲.۳. دو نقطه، یک خط

۷۳. اگر ABC مثلث مطلوب باشد، دایره به قطر BC بر M و N می‌گذرد. چهارضلعی $BNMC$ محاطی است و مرکز دایرهٔ محیطی آن بر محل برخورد عمودمنصف MN با خط D واقع است. بنابراین راه حل زیر به‌دست می‌آید:

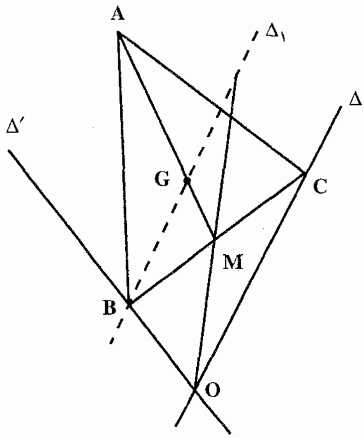


عمودمنصف پاره‌خط MN را رسم کرده، تا D

را در نقطهٔ O قطع کند. به مرکز O و به شعاع OM (یا ON) دایره‌ای رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دایره با خط D، رأسهای B و C می‌باشند. CM و BN را امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ A قطع کند. A رأس سوم مثلث است (شکل).

۴.۲.۹.۱.۱. دو نقطه، دو خط

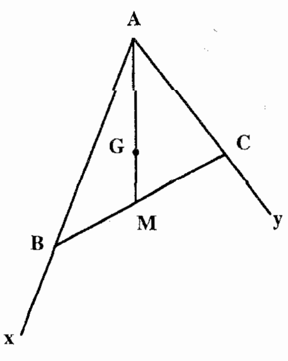
۷۴. اگر A و G بترتیب رأس و محل برخورد میانه‌ها و، Δ و Δ' مکان رأسهای دیگر B و C باشند، چنانچه AG را به اندازهٔ نصف خود تا نقطهٔ M امتداد دهیم، $(AG = ۲GM)$، نقطهٔ M یک نقطه از ضلع BC و وسط آن است و درنتیجه B قرینهٔ C نسبت به M می‌باشد و از آن‌جا حل مسأله چنین است:

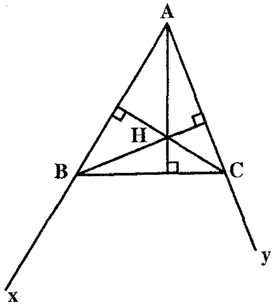


خط Δ_1 قرینهٔ Δ را نسبت به نقطهٔ M رسم می‌نماییم، محل تلاقی Δ_1 با خط Δ'، نقطهٔ B بوده و اگر B را به M وصل کرده، امتداد دهیم تا Δ را قطع کند، رأس C به‌دست می‌آید و ABC مثلث مطلوب است.

بحث. اگر Δ_1 با Δ' متقاطع باشد، مسأله دارای جواب است و چنانچه موازی باشد، جواب ندارد و درصورتی که برهم منطبق باشند، مسأله دارای بینهایت جواب است.

۷۵. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. پاره‌خط $AG = ۲GM$ است؛ بنابراین نقطهٔ M مشخص است. پس برای رسم مثلث، پس از تعیین نقطهٔ M، مجانس Ax را نسبت به مرکز تجانس M و با نسبت ۱- به‌دست می‌آوریم تا Ay را در نقطهٔ C قطع کند. از C به M وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا Ax را در B قطع کند. مثلث ABC جواب مسأله است.



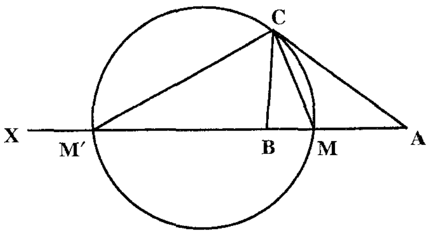


۷۶. رأس معلوم را A و راستای دو ضلع را Ax و Ay و مرکز ارتفاعی را H می‌نامیم. از H عمودهایی بر Ax و Ay رسم می‌کنیم تا Ay و Ax را در C و B قطع کنند. از B به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۷۷. مرکز دایرهٔ محیطی O روی خط d که متقارن h نسبت به t است، و همچنین روی خط ′h که متقارن خط h نسبت به نقطهٔ N، مرکز دایرهٔ نه نقطه است، قرار دارد؛ پس O و همچنین H، روی خط h، مشخص می‌شوند. اگر ′D نقطهٔ برخورد دوم AH و دایرهٔ (O, OA) باشد، عمودمنصف ′HD این دایره را در دو رأس دیگر B و C از مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند.

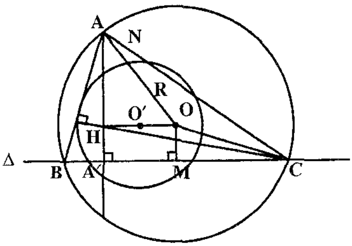
۱.۱.۹.۲.۵. سه نقطه، یک خط

۷۸. مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. می‌دانیم که (′ABMM) یک تقسیم توافقی است که چون سه نقطهٔ A، M و ′M از آن معلوم است، پس نقطهٔ B مزدوج توافقی A نسبت به M و ′M را می‌توان به‌دست آورد. از طرفی دایرهٔ به قطر ′MM از رأس C می‌گذرد، یعنی یک مکان هندسی برای رأس C مشخص است.



برای مشخص شدن رأس C، لازم است یک شرط دیگر داده شود. مانند: طول نیمساز درونی یا طول نیمساز برونی زاویهٔ C یا اندازهٔ ضلع a = BC و یا....

۷۹. اگر مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله بگیریم، با فرض این که N یک نقطه از دایرهٔ نه نقطه و M وسط ضلع BC، و Δ خطی باشد که BC روی آن است، و H مرکز ارتفاعی مثلث باشد، یک مکان هندسی رأس A خطی است که از نقطهٔ H بر خط Δ (یا BC) عمود می‌شود.

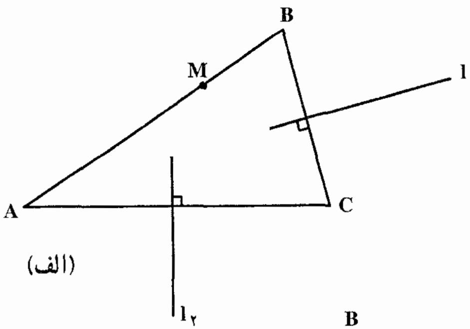


پای این عمود را اگر نقطهٔ ′A بنامیم؛ ′A نیز یک نقطه از دایرهٔ نه نقطه است و چون نقطهٔ M

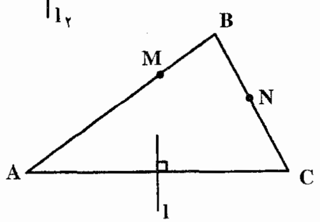
نیز به دایرهٔ نه نقطه تعلق دارد، پس با معلوم بودن سه نقطه از این دایره، یعنی نقطه‌های M، A' و N، این دایره را می‌توان رسم کرد. مرکز این دایره را O_1 می‌نامیم. می‌دانیم که این نقطه وسط پاره‌خط OH است که O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است. بنابراین مرکز دایرهٔ محیطی مثلث نیز مشخص است. برای تعیین شعاع آن می‌دانیم که $OM = \frac{1}{2}AH$ است. بنابراین نقطهٔ A به‌دست می‌آید و $OA = R$ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC است. پس برای رسم مثلث ABC با توجه به نکته‌های بالا، به مرکز O و به شعاع $OA = R$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط Δ را در دو نقطهٔ B و C، و خط HA' رادر A قطع کند. ازA بهB و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۶.۲.۹.۱.۱. مسأله‌های ترکیبی

۸۰. **الف.** فرض می‌کنیم ΔABC رسم شده است (شکل الف). تبدیلهای زیر را پشت سرهم انجام می‌دهیم: تجانسی به مرکز M و نسبت $-k$ و دو قرینه‌یابی‌محوری یکی نسبت به خط l_1 و دیگری نسبت به خط l_2؛ ابتدا نقطهٔ A به B برده می‌شود، سپس B به C و سرانجام C به A. پس A یک نقطهٔ ثابت این تجانس و دو قرینه‌یابی نسبت به خطهای ذکر شده است. این حاصلضرب تبدیلی است



(الف)



(ب)

که هر شکل F را به شکل F'، مشابه مستقیم با F، بدل می‌کند که یک تجانس مارپیچی است. تعیین محل نقطهٔ O مرکز این تجانس مارپیچی دشوار نیست؛ برای این کار کافی است پاره‌خط $P'Q'$، نگارهٔ پاره‌خط دلخواه PQ از صفحه بر اثر حاصلضرب این سه تبدیل را رسم کنیم و سپس مرکز دوران این دو پاره‌خط را بیابیم.
رأس A باید بر نقطهٔ O منطبق باشد (زیرا تنها نقطهٔ ثابت تجانس مارپیچی مرکز آن است)؛ از این پس به‌راحتی می‌توان دو رأس دیگر B و C از مثلث مطلوب را یافت. اگر $k = 1$ و $l_1 \perp l_2$، مسأله یا ناممکن و یا نامعین است؛ در همهٔ حالتهای دیگر تنها یک جواب

وجود دارد.

ب. فرض می‌کنیم که مثلث ABC ترسیم شده است (شکل ب). تبدیلهای زیر را به طور متوالی انجام می‌دهیم:

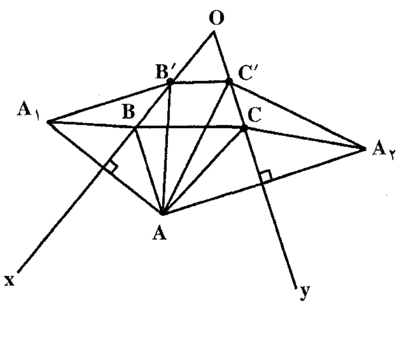
دو تجانس به مرکز M و N و با نسبت $-k_1$ و $-k_2$ و یک قرینه‌یابی نسبت به خط l. حاصلضرب این تبدیلها نقطهٔ A را به خودش بدل می‌کند و بنابراین A یک نقطهٔ ثابت این حاصلضرب است. این حاصلضرب مسلماً هر شکل F را به شکل F' که معکوساً متشابه F است بدل می‌کند و بنابراین یک قرینه‌یابی تجانسی است. اکنون به‌راحتی می‌توان محور و نقطهٔ O مرکز این تبدیل را یافت. برای این کار باید پاره‌خط $P'Q'$، نگارهٔ پاره‌خط دلخواه PQ در صفحه بر اثر این تبدیل را بیابیم. در این صورت داریم $A = O$. با ترسیم A به‌راحتی می‌توان دو رأس دیگر B و C از مثلث مطلوب را پیدا کرد.

اگر $k_1k_2 = 1$، حاصلضرب تبدیلهای مذکور یک قرینه‌یابی لغزه‌ای (یا صرفاً قرینه‌یابی نسبت به یک خط) است؛ در این حالت مسأله یا جواب ندارد و یا نامعین است. در همهٔ حالتهای دیگر مسأله جوابی یکتا دارد.

۱.۱.۱۰. نقطه، زاویه

۱.۱.۱۰.۱.۱. یک نقطه، یک زاویه

۸۱. قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به Ox را A_1، و قرینهٔ آن نسبت به Oy را A_2 می‌نامیم. خط A_1A_2 را رسم می‌کنیم تا دو ضلع Ox و Oy را بترتیب در B و C قطع کنند. مثلث ABC جواب مسأله است؛ یعنی مثلثی است که یک رأسش A و دو رأس دیگرش روی دو ضلع زاویه است و کمترین محیط را دارد. برای اثبات این مطلب، مثلث دلخواه $AB'C'$ را که دو رأس B' و C' از آن روی Ox و Oy است، درنظر می‌گیریم و



ثابت می‌کنیم که محیطش از محیط مثلث ABC بیشتر است. برای اثبات از این ویژگی استفاده می‌کنیم که طول پاره‌خط A_1A_2 از خط شکستهٔ $A_1B'C'A_2$ کوچکتر است،

یعنی داریم :

$$A_۱A_۲ < A_۱B'C'A_۲ \Rightarrow A_۱B + BC + CA_۲ < A_۱B' + B'C' + C'A_۲$$

اما $A_۱B = AB$ ، $A_۲C = AC$ ، $A_۱B' = AB'$ و $A_۲C' = AC'$ است، پس داریم :

$$AB + BC + AC < AB' + B'C' + AC'$$

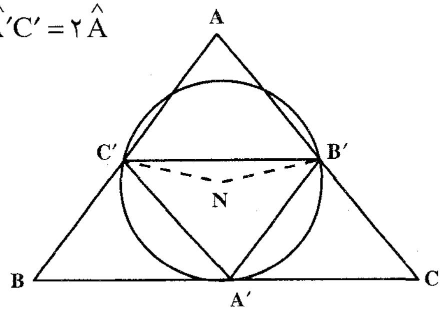
$$\Rightarrow \text{محیط مثلث } ABC < \text{محیط مثلث } AB'C'$$

بنابراین مثلث ABC کمترین محیط بین مثلثهای موردنظر است.

۱.۱.۱۰.۲. دو نقطه، یک زاویه

۸۲. اگر ABC مثلث خواسته شده باشد که زاویهٔ $\hat{A}$ از آن داده شده است، داریم :

$$B'\hat{N}C' = ۲B'\hat{A'}C' = ۲\hat{A}$$



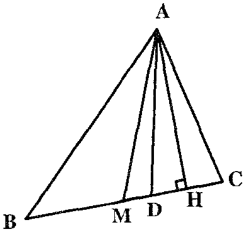
درنتیجه مثلث متساوی‌الساقین $NB'C'$ زاویه‌های معلوم دارد.
بنابراین اگر رأس معلوم N از این مثلث ثابت نگه داشته شود، و رأس B' ، خط ثابت و معلوم AC را رسم نماید، چون مثلث با خودش متشابه باقی می‌ماند، نقطهٔ C' نیز یک خط مستقیم رسم می‌کند که روی خط AB نقطهٔ C' را مشخص خواهد کرد. اکنون چهارضلعی $AC'NB'$ را طوری رسم می‌کنیم که :

$$C'\hat{N}B' = ۲\hat{A}$$

باشد و حل مسأله بسادگی کامل می‌شود.
تعریف. اگر H محل برخورد ارتفاعهای مثلث ABC باشد، هریک از چهار نقطهٔ A، B، C و H محل برخورد ارتفاعهای مثلثی است که از سه نقطهٔ دیگر تشکیل می‌شود (شکل).

۱.۱.۱۰.۳. نقطه، تفاضل دو زاویه

۸۳. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. ارتفاع AH، نیمساز AD و



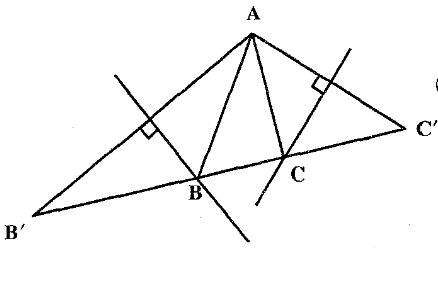
میانهٔ AM را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که در هر مثلث، زاویهٔ بین ارتفاع و نیمساز یک رأس، مساوی نصف تفاضل دو زاویهٔ دیگر مثلث است. یعنی $D\hat{A}H=\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}$، پس این زاویه اندازهٔ معلومی دارد.

بنابراین یک مکان رأس A کمان درخور زاویهٔ $\frac{\alpha}{۲}=\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}$ روبه‌رو به پاره‌خط DH است. حال کافی است یک مکان هندسی دیگر برای رأس A مشخص شود.

۱۱.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن: نقطه، محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱۱.۱.۱. نقطه، محیط

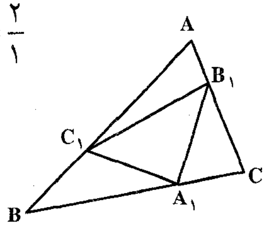
۸۴. عمودمنصفهای پاره‌خطهای AB' و AC' را رسم می‌کنیم تا $B'C'$ را در B و C قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم.



۲.۱۱.۱.۱. نقطه، رابطهٔ متری

۸۵. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. داریم :

$$\frac{A_۱B}{A_۱C}=\frac{B_۱C}{B_۱A}=\frac{C_۱A}{C_۱B}=\frac{۲}{۱}$$

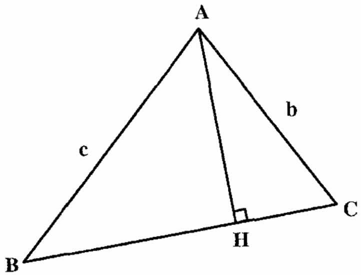


از این رابطه کافی است دو مکان هندسی برای یکی از رأسها تعیین کنیم.

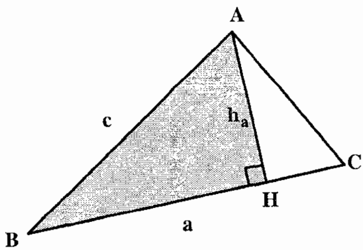
۱.۱.۱۲. ضلع؛ ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۱۲.۱.۱. ضلع، ارتفاع

۱.۱.۱۲.۱.۱. دو ضلع، یک ارتفاع

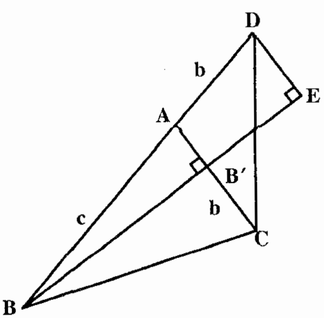


۸۶. مسأله را حل شده فرض کرده، مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم و ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و ACH، هر یک با معلوم بودن اندازهٔ وتر و یک ضلع قابل رسم می‌باشند. بنابراین با رسم این دو مثلث در مجاورت هم، مثلث ABC رسم می‌شود، یا می‌توانیم یک مثلث، به‌عنوان مثال، مثلث ABH را رسم نموده، آن‌گاه به مرکز A و به شعاع $AC = b$ دایره‌ای رسم کنیم که خط BH را در نقطهٔ C رأس دیگر مثلث قطع کند، و از A به C وصل کنیم.



۸۷. مثلث را رسم شده فرض می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH به‌دلیل معلوم بودن زاویهٔ $\hat{H} = ۹۰$، $AH = h_a$، و $AB = c$ قابل رسم است ؛ پس برای رسم مثلث ABC، مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH را رسم می‌کنیم، سپس روی BH پاره‌خط $BC = a$ را جدا کرده، از C به A وصل می‌کنیم. مثلث ABC رسم می‌شود.

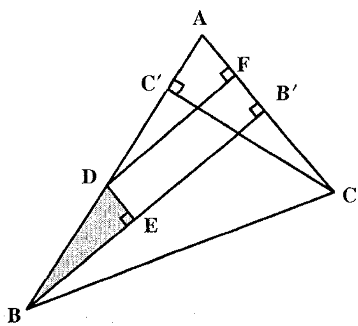
۲.۱.۱۲.۱.۱. دو ضلع، مجموع یا تفاضل دو ارتفاع



۸۸. ارتفاع BB' را به اندازهٔ $B'E = h_c = CC'$ امتداد می‌دهیم، و از E عمودی اخراج می‌کنیم تا امتداد AB را در نقطهٔ D قطع کند. می‌دانیم که $AD = AC = b$ است. بنابراین مثلث قائم‌الزاویهٔ BDE با معلوم بودن وتر $BD = b + c$ و ضلع

$BE = h_b + h_c$ قابل رسم است. همچنین مثلث ADC متساوی‌الساقین و $DE \| AC$ است. بنابراین برای رسم مثلث ABC چنین عمل می‌کنیم :
مثلث قائم‌الزاویهٔ BDE را با معلومهای وتر $BD = b + c$ و ضلع $BE = h_b + h_c$ رسم می‌کنیم. روی ضلع DB پاره‌خط $DA = b$ را جدا کرده، از A خطی موازی DE رسم کرده، روی آن $AC = b$ را جدا می‌کنیم و از C به B وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۸۹. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. به اندازهٔ ارتفاع CC' روی ارتفاع BB' پاره‌خط $B'E = CC'$ را جدا می‌کنیم و از E عمودی بر BB' اخراج می‌کنیم تا ضلع AB را در نقطهٔ D قطع کند. $AD = AC = b$ است (زیرا اگر از D عمود DF را بر AC فرود آوریم، چهارضلعی $DFB'E$ مستطیل است. بنابراین $DF = B'E = CC'$ می‌باشد و چون دو مثلث AFD و ACC' در زاویهٔ A نیز مشترکند،

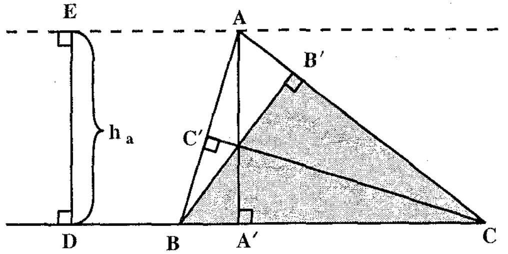


پس همنهشتند. درنتیجه $AD = AC = b$ است). بنابراین $DB = c - b$ طول معلومی دارد و $BE = BB' - EB' = BB' - CC' = h_b - h_c$ نیز معلوم می‌باشد. پس مثلث قائم‌الزاویهٔ BED$(\hat{E} = ۹۰^\circ)$ را با داشتن وتر و یک ضلع می‌توان رسم کرد. پس از رسم این مثلث، BD را به‌اندازهٔ $DA = b$ امتداد می‌دهیم تا رأس A به‌دست آید. از A خطی موازی DE رسم می‌کنیم و روی آن $AC = b$ را جدا می‌کنیم. رأس C تعیین می‌شود. از C به B وصل می‌کنیم، مثلث ABC به‌دست می‌آید.

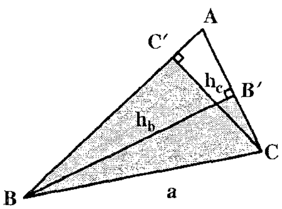
۳.۱.۱۲.۱.۱. یک ضلع، دو ارتفاع

۹۰. مثلث قائم‌الزاویهٔ $BB'C$ را رسم می‌کنیم، سپس در امتداد BC، عمود $OE = h_a$ را

رسم کرده، از E خطی به‌موازات BC رسم می‌کنیم. هرجا که ادامهٔ B′C را قطع کرد، نقطهٔ A است. از A به B وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



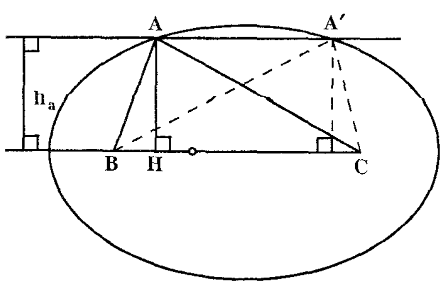
۹۱. مثلث را رسم شده می‌گیریم. اگر a ضلع معلوم و BB′ و CC′ دو ارتفاع معلوم مثلث باشند، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BCB′ و BCC′ به حالت وتر و یک ضلع قابل رسمند. پس برای رسم مثلث ABC، پاره‌خط $BC = a$ را رسم کرده، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BCB′ و BCC′ را رسم می‌کنیم، BC′ و CB′ را امتداد می‌دهیم تا در نقطهٔ A، رأس سوم مثلث، یکدیگر را قطع کنند.



۹۲. از $\frac{h_a}{h_b} = \frac{b}{a}$ استفاده کنید.

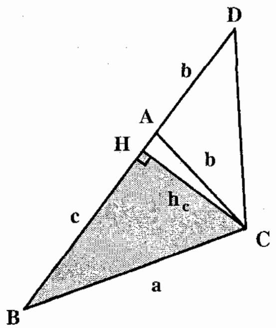
۴.۱.۱۲.۱.۱. یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر، ارتفاع

۹۳. یک مکان هندسی رأس A خطی موازی BC و به فاصلهٔ h_a از آن است (دو خط موازی در دو طرف BC) و مکان هندسی دیگر رأس A بیضی به کانونهای B و C، و عدد ثابت $b + c$ است، زیرا $AB + AC = b + c = l$ است. بنابراین برای رسم مثلث ABC، ابتدا BC را به طول a رسم می‌کنیم. خط Δ را به‌موازات BC و به فاصلهٔ h_a از آن رسم می‌کنیم. رأس A در محل تقاطع خط Δ و بیضی به کانونهای B و C، و مقدار ثابت l می‌باشد (فصل مشترک خط و بیضی).



۹۴. رابطهٔ $ah_a = (a+b+c)r$، r را به‌عنوان جزء چهارم تناسب تعیین می‌کند، و با معلوم بودن h_a و r می‌توان r_a را تعیین کرد. همچنین a و $r_a - r$ قطر دایرهٔ محیطی را تعیین می‌کنند. اکنون به آسانی می‌توان مثلث را رسم کرد. زیرا a، h_a و R را می‌دانیم.

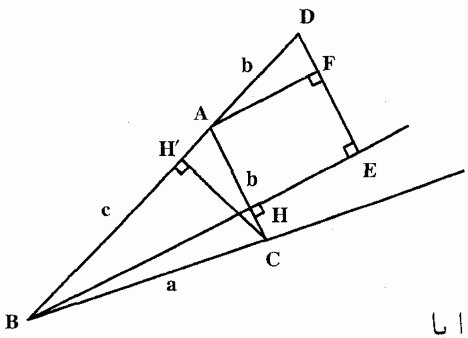
۹۵. فرض می‌کنیم مثلث رسم شده و ضلع $BC = a$ مجموع دو ضلع دیگر $AB + AC = b + c$ و اندازهٔ ارتفاع $CH = h_c$ معلوم باشند. مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC با معلوم بودن اندازه‌های وتر و یک ضلع قابل رسم است و اگر AB را به اندازهٔ $AD = AC$ ادامه دهیم، $BD = b + c$ و مثلث ADC متساوی‌الساقین است ؛ بنابراین برای رسم مثلث ABC چنین عمل می‌کنیم :



مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را با داده‌های وتر $BC = a$ و ضلع $CH = h_c$ رسم می‌کنیم. روی BH پاره‌خط $BD = b + c$ را جدا کرده، از D به C وصل می‌کنیم. عمودمنصف DC را رسم می‌کنیم تا DB را در نقطهٔ A قطع کند. از A به C وصل می‌کنیم، مثلث ABC جواب مسأله است.

۵.۱.۱۲.۱.۱. یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر، مجموع یا تفاضل دو ارتفاع

۹۶. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. ضلع AB را از طرف A به اندازهٔ $AD = AC$ امتداد می‌دهیم و از D عمود DE را بر ارتفاع BH فرود می‌آوریم. $HE = CH'$ است ؛ زیرا اگر از A خط AF را عمود بر DE رسم کنیم، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ADF و CAH' به‌دلیل تساوی وتر و یک زاویهٔ حاده همنهشتند، زیرا $AC = AD$ و $C\hat{A}H' = A\hat{D}F$ است. بنابراین $AF = CH'$ و چون AFEH مستطیل است، $AF = HE$ است. درنتیجه $BE = h_b + h_c$ و مثلث قائم‌الزاویهٔ BDE قابل رسم است. بنابراین برای رسم مثلث ABC بترتیب زیر عمل می‌کنیم :

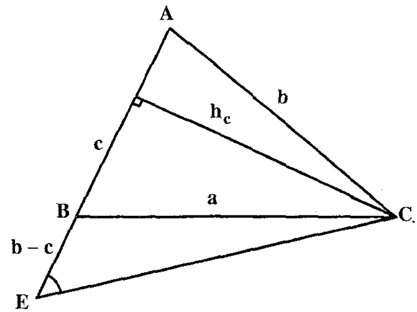


مثلث قائم‌الزاویهٔ BDE$(\hat{E} = ۹۰^\circ)$ را با

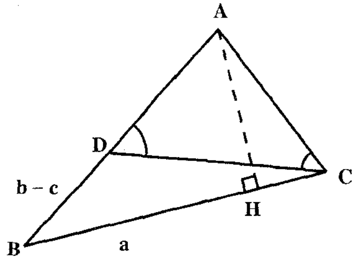
معلوم بودن ضلع $BE = h_b + h_c$ و وتر $BD = b + c$ رسم می‌کنیم. سپس از A خطی موازی خط DE رسم می‌کنیم (یک مکان هندسی رأس C) و دایره‌ای به مرکز B و به شعاع $BC = a$ رسم می‌کنیم (مکان دیگری برای رأس C) تا خط رسم شده از A به‌موازات خط DE را در نقطهٔ C رأس سوم مثلث ABC قطع کند. مثلث ABC جواب مسأله است.

۶.۱.۱۲.۱.۱. یک ضلع، تفاضل دو ضلع دیگر، ارتفاع

۹۷. فرض کنید ABC (شکل) مثلث مطلوب باشد. AB را امتداد دهید و روی آن AE را برابر با AC جدا کنید، به طوری که $BE = b - c$ باشد. در مثلث BCE داریم: $BC = a$ ، $BE = b - c$ و ارتفاع وارد بر BE برابر h_c است؛ پس این مثلث را می‌توان رسم کرد و از این مثلث به‌آسانی می‌توان به مثلث مطلوب ABC رسید.

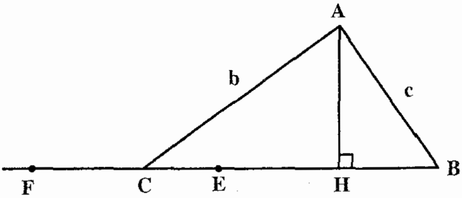


۹۸. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. ضلع $BC = a$ و ارتفاع $AH = h_a$ و $AB - AC = c - b = l$ را داده‌های مسأله فرض می‌کنیم. روی ضلع AB پاره‌خط $AD = AC$ را جدا می‌کنیم، و از D به C وصل می‌کنیم. مثلث ADC متساوی‌الساقین و $BD = c - b$ است. با معلوم بودن a و $b - c$ اندازه‌های $a + b - c$ و $a + c - b$ نیز معلوم است. از آن‌جا مثلث را رسم می‌کنیم.



۱.۱.۲.۱۲.۱.۷. یک ضلع، نسبت دو ضلع دیگر، ارتفاع

۹۹. ابتدا ضلع BC را برابر a رسم می‌کنیم (شکل)، و مکان هندسی نقطه‌هایی را که نسبت فاصله‌های آنها از دو نقطهٔ B و C برابر $\frac{m}{n}$ باشد می‌کشیم، به‌این ترتیب که نقطه‌های E و F را در بین نقطه‌های B و C و در خارج آنها چنان تعیین می‌کنیم که $\frac{EC}{EB}=\frac{FC}{FB}=\frac{m}{n}$. دایره‌ای به قطر EF، مکان ذکر شده است.



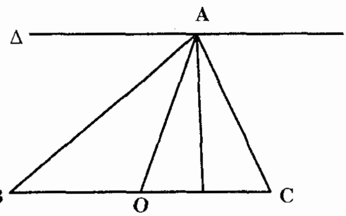
سپس خطی به فاصلهٔ h ارتفاع مثلث، و به موازات BC رسم می‌کنیم، تا دایرهٔ مکان را در A قطع کند و مثلث ABC را رسم می‌کنیم. این مسأله یا دو جواب و یا یک جواب دارد و یا دارای جواب نخواهد بود.

۱.۱.۲.۱۲.۱.۸. یک ضلع، مجموع مربعهای دو ضلع دیگر، ارتفاع

۱۰۰. اگر O وسط BC باشد (شکل)، می‌توان نوشت :

$$b^۲+c^۲=۲OA^۲+\frac{۱}{۲}a^۲$$

$$OA^۲=\frac{۱}{۴}(۲b^۲+۲c^۲-a^۲)= \text{مقدار معلوم}$$

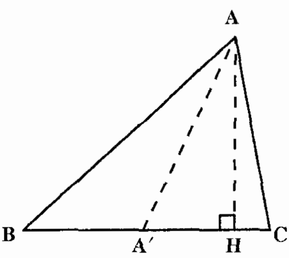


پس راه حل مسأله چنین است : BC را به‌طول a جدا می‌کنیم و به مرکز O، دایره‌ای به شعاع $\frac{۱}{۲}\sqrt{۲b^۲+۲c^۲-a^۲}$ رسم می‌کنیم و خط Δ را به موازات BC به فاصله h می‌کشیم. محل برخورد Δ و دایره، رأس A از مثلث است.

۱.۱.۲.۱۲.۱.۹. یک ضلع، تفاضل مربعهای دو ضلع دیگر، ارتفاع

۱۰۱. میانه و ارتفاع نظیر رأس A را رسم می‌کنیم. طبق قضیهٔ دوم میانه‌ها با فرض $(c>b)$ داریم :

$$c^۲-b^۲=۲a\overline{A'H}$$

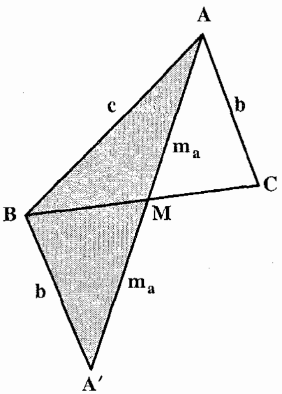


روش رسم. پاره‌خط $BC = a$ را رسم کرده و از وسط آن نقطهٔ A' و در جهت BC طولی مساوی $A'H$ جدا می‌کنیم و از H عمودی بر BC اخراج می‌نماییم و روی این عمود از H به اندازهٔ h_a جدا می‌کنیم تا A به‌دست آید.

بحث. چون رسم عمود HA همیشه امکان دارد، پس مسأله همواره یک جواب خواهد داشت.

۱.۱.۱۲.۲. ضلع، میانه

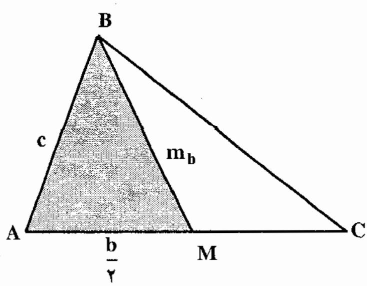
۱.۱.۱۲.۲.۱. دو ضلع، یک میانه



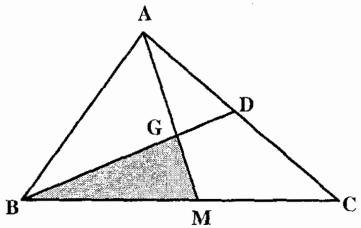
۱۰۲. مثلث را رسم شده فرض می‌کنیم. میانهٔ AM را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ A' امتداد می‌دهیم و از A' به B وصل می‌کنیم. چهارضلعی $ABA'C$ متوازی‌الاضلاع است (زیرا قطرهایش یکدیگر را نصف کرده‌اند). بنابراین $BA' = b$ است و چون $AA' = ۲m_a$ می‌باشد، پس مثلث $AB'A$ با معلوم بودن اندازه‌های سه ضلعش قابل رسم است.

پس برای رسم مثلث ABC، مثلث ABA' را با در دست داشتن اندازهٔ سه ضلع آن رسم می‌کنیم. سپس میانهٔ BM از آن را رسم کرده، به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ C به‌دست آید. از C به A وصل می‌کنیم، مثلث ABC جواب مسأله است.

۱۰۳. مثلث ABM را می‌توان رسم کرد، زیرا $AM = \frac{b}{۲}$ ، $AB = c$ و $BM = m_b$ معلوم است. بعد از رسم این مثلث، AM را به اندازهٔ خود تا C ادامه می‌دهیم و از C به B وصل می‌کنیم.



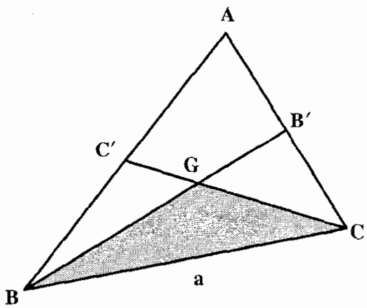
۱.۱.۱۲.۲.۲. یک ضلع، دو میانه



۱۰۴. مثلث را رسم شده گرفته، نقطهٔ برخورد دو میانهٔ AM و BD را G می‌نامیم. مثلث GBM قابل رسم است، زیرا $GM = \frac{۱}{۳}m_a$، $GB = \frac{۲}{۳}m_b$ و $BM = \frac{a}{۲}$ معلوم است.

بنابراین برای رسم مثلث ABC این مثلث را رسم می‌کنیم. سپس BM را به اندازهٔ خود ادامه می‌دهیم تا رأس C به‌دست آید. MG را نیز به اندازهٔ دو برابر خود امتداد می‌دهیم تا رأس A حاصل شود. از A به B و C وصل می‌کنیم.

۱۰۵. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. میانه‌های BB' و CC' را رسم می‌کنیم و نقطهٔ تقاطع آنها را G می‌نامیم. مثلث GBC با معلوم بودن اندازهٔ سه ضلعش قابل رسم است. زیرا $GB = \frac{۲}{۳}m_b$، $GC = \frac{۲}{۳}m_c$ و $BC = a$ معلومند. پس برای رسم مثلث ABC، مثلث GBC را با داده‌های بالا رسم می‌کنیم. سپس BC' را به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا رأس A به‌دست آید.



۱.۱.۱۲.۲.۳. یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر، میانه

۱۰۶. داریم:

$$b^۲ + c^۲ = ۲m_a^۲ + \frac{a^۲}{۲} \qquad (۱)$$

از آن‌جا می‌توان نوشت:

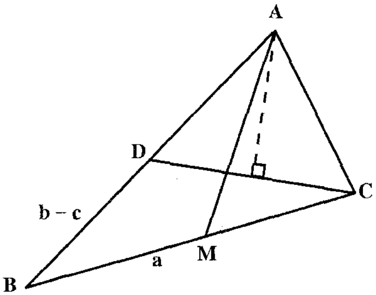
$$(b+c)^۲ - ۲bc = ۲m_a^۲ + \frac{a^۲}{۲} \qquad (۲)$$

چون $b+c$، m_a و a معلومند، پس bc یعنی حاصلضرب دو ضلع AB و AC مقدار معلومی است که چون مجموع آنها نیز معلوم است، $b+c=l$ ؛ بنابراین دو ضلع AB و

AC که مجموع و حاصلضربشان (یعنی واسطهٔ هندسی آنها) معلوم است، قابل رسم می‌باشند، و از آن‌جا مثلث ABC با معلوم بودن سه ضلع قابل رسم است.

۱.۱.۱۲.۲.۴. یک ضلع، تفاضل دو ضلع دیگر، میانه

۱۰۷. بنا به رابطهٔ اول میانه‌ها در مثلث داریم:



$$b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \qquad (1)$$

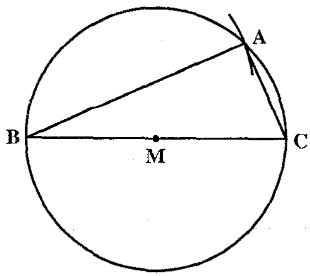
این رابطه را چنین می‌توان نوشت:

$$(b-c)^2 + 2bc = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2} \qquad (2)$$

از رابطهٔ (۲) اندازه‌های $b-c$ ، m_a و a معلوم است پس اندازهٔ bc، یعنی حاصلضرب دو ضلع AB و AC معلوم است و چون تفاضل این دو ضلع نیز معلوم می‌باشد، پس اندازهٔ این دو ضلع را به روش ترسیم (یا روش جبری) می‌توان به‌دست آورد.
با معلوم بودن اندازهٔ سه ضلع مثلث ABC، این مثلث قابل رسم است.

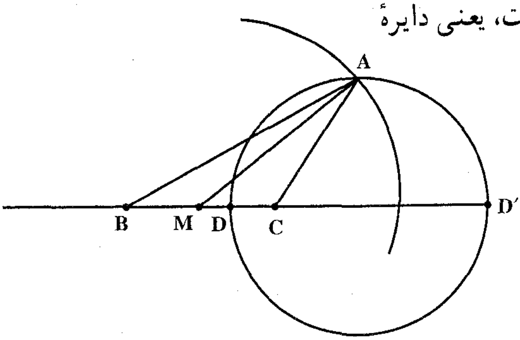
۱.۱.۱۲.۲.۵. یک ضلع، حاصلضرب دو ضلع دیگر، میانه

۱۰۸. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. وسط ضلع BC را M می‌نامیم $MA = m_a$ است. پس یک مکان هندسی رأس A دایره‌ای به مرکز M و به شعاع m_a است که این مکان هندسی را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌ای که حاصلضرب فاصله‌اش از دو نقطهٔ B و C مقدار معلومی است یک منحنی (مقطع غیرمخروطی) است که این مکان هندسی را می‌توان مشخص کرد. نقطهٔ برخورد این دو مکان هندسی رأس A است. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



۱.۱.۱۲.۲.۶. یک ضلع، نسبت به دو ضلع دیگر، میانه

۱۰۹. پاره‌خط BC به طول a را رسم می‌کنیم به مرکز نقطهٔ M وسط ضلع BC و به شعاع $AA' = m_a$ یک دایره رسم می‌کنیم. از طرفی، مکان هندسی نقطه‌ای که نسبت فاصله‌اش از دو نقطهٔ B و C برابر k است، یعنی دایرهٔ آپولونیوسی را که پاره‌خط BC را به نسبت k تقسیم می‌کند، رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دو مکان هندسی رأس A است. از A به B و C وصل می‌کنیم.

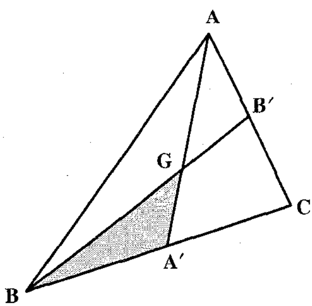


۱.۱.۱۲.۲.۷. یک ضلع، مجموع مربعهای دو ضلع دیگر، میانه

۱۱۰. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مسأله باشد، میانه‌های AA' و BB' را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آنها را G می‌نامیم. بنا به رابطهٔ اول میانه‌ها در مثلث، داریم: $b^2 + c^2 = 2m_a^2 + \frac{a^2}{2}$

چون $b^2 + c^2$ و a معلومند، پس اندازهٔ $AA' = m_a$ معلوم است. بنابراین مثلث $GA'B$ با معلوم بودن سه ضلع آن قابل رسم است، زیرا

$$GA' = \frac{1}{3}m_a \text{ ،} \quad GB = \frac{2}{3}m_b \quad \text{و} \quad BA' = \frac{a}{2}$$



است. بنابراین برای رسم مثلث ABC، نخست مثلث BGA' را رسم می‌کنیم، سپس BA' را به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا رأس C به‌دست آید و GA' را به اندازهٔ دو برابر خود امتداد می‌دهیم تا رأس A به‌دست آید. از A به B و C وصل می‌کنیم.

۱.۱.۱۲.۲.۸. یک ضلع، تفاضل مربعهای دو ضلع دیگر، نسبت میانه‌ها

۱۱۱. اگر G محل برخورد میانه‌های مثلث ABC باشد، فاصلهٔ G تا رأسهای B و C هریک $\frac{2}{3}$ میانهٔ نظیر آن رأس است، پس:

$$GB:GC = \frac{۲}{۳}m_b:\frac{۲}{۳}m_c = m_b:m_c$$

پس $BC = a$ را رسم کرده. مکان G را روی آن مشخص می‌کنیم (مکان هندسی نقطه‌هایی که نسبت فاصله‌هایشان از دو سر پاره‌خطی، اندازه‌ای معلوم باشد، دایره‌ای است به قطر DD'، که D و D' نقطه‌هایی هستند که پاره‌خط را به آن نسبت معلوم تقسیم می‌کنند).

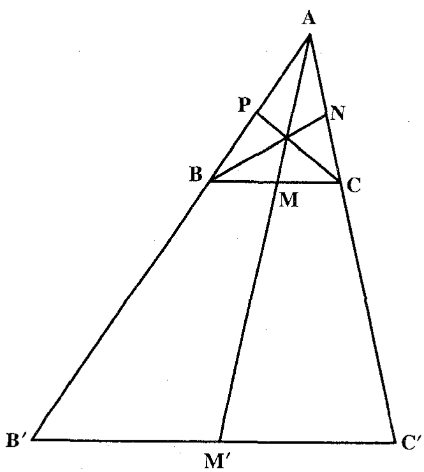
و چون $\frac{\overline{A'A}}{\overline{A'G}} = ۳$ است (A' پای میانهٔ رأس A است) پس A مجانس G نسبت به مرکز تجانس A' وسط BC و نسبت تجانس ۳ می‌باشد و درنتیجه یک مکان هندسی برای A داریم. از طرفی مکان هندسی نقطه‌هایی که تفاضل مربعهایشان از دو سر یک پاره‌خط، مقداری معلوم است. خطی است عمود بر آن پاره‌خط که به فاصلهٔ:

$$A'Z = \frac{b^۲ - c^۲}{۲a}$$

از وسط پاره‌خط، بر آن عمود می‌شود، این دو مکان هندسی یکدیگر را در نقطه‌ای مانند A قطع می‌کنند که رأس سوم مثلث است.

۱.۱.۱۲.۲.۹. نسبت ضلعها، مجموع میانه‌ها

۱۱۲. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. میانه‌های AM، BN و CP را رسم می‌کنیم. مجموع طول میانه‌ها یعنی $m_a + m_b + m_c$ و نسبت ضلعهای مثلث یعنی $a:b$ و $b:c$ را داریم که در آن صورت $\frac{a}{c}$ را نیز داریم، میانهٔ AM را به اندازهٔ دو میانه دیگر امتداد می‌دهیم تا $AM' = m_a + m_b + m_c$ به‌دست آید. از M' خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا امتداد AB و AC را در B' و C' قطع کند. مثلث $AB'C'$ با مثلث ABC متشابه است و داریم:



$$\frac{B'C'}{BC}=\frac{AB'}{AB}\Rightarrow\frac{B'C'}{B'A}=\frac{BC}{AB}\Rightarrow\frac{۲B'M'}{B'A}=\frac{a}{c}\Rightarrow\frac{B'M'}{B'A}=\frac{a}{۲c}$$

پس یک مکان هندسی رأس B' دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AM' را به نسبت معلوم $\frac{a}{۲c}$ تقسیم کند.

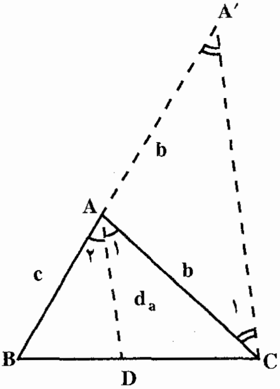
همچنین داریم:

$$\frac{B'C'}{BC}=\frac{AC'}{AC}\Rightarrow\frac{۲M'C'}{BC}=\frac{AC'}{AC}\Rightarrow\frac{C'M'}{C'A}=\frac{BC}{۲AC}=\frac{a}{۲b}= \text{مقدار معلوم}$$

پس مکان هندسی رأس C دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط AM' را به نسبت $\frac{a}{۲b}$ تقسیم می‌کند. بنابراین برای رسم مثلث ABC، پاره‌خط $M'A$ به طول $m_a+m_b+m_c$ را رسم می‌کنیم، سپس دایره‌های آپولونیوسی را که پاره‌خط AM' را به نسبت $\frac{a}{۲c}$ و $\frac{a}{۲b}$ تقسیم می‌کنند رسم می‌کنیم. یک نقطهٔ برخورد آنها M' است. حال از M' قاطعی نسبت به دو دایره رسم می‌کنیم که وترهای ایجاد شده در دو دایره مساوی باشند، یعنی $MB'=MC'$ (به‌کمک تقارن مرکزی یا دوران). به این‌ترتیب مثلث $AB'C'$ رسم می‌شود. حال مثلث ABC را متشابه با مثلث $AB'C'$ چنان رسم می‌کنیم که نسبت ضلعهای آن مساوی نسبتهای داده شده باشد.

۱.۱.۱۲.۳. ضلع، نیمساز

۱.۱.۱۲.۳.۱. دو ضلع، یک نیمساز



۱۱۳. از C خطی به موازات نیمساز AD رسم می‌کنیم تا امتداد AB را در A' قطع کند. داریم:

$$\hat{A}'=\hat{A}_۲$$

و

$$\hat{A}_۱=\hat{C}_۱$$

$$\text{داریم}\Rightarrow\hat{A}_۱=\hat{A}_۲$$

بنابراین: $\hat{A}'=\hat{C}_۱$

مثلث $AA'C$ متساوی‌الساقین است. $AA' = AC = b$

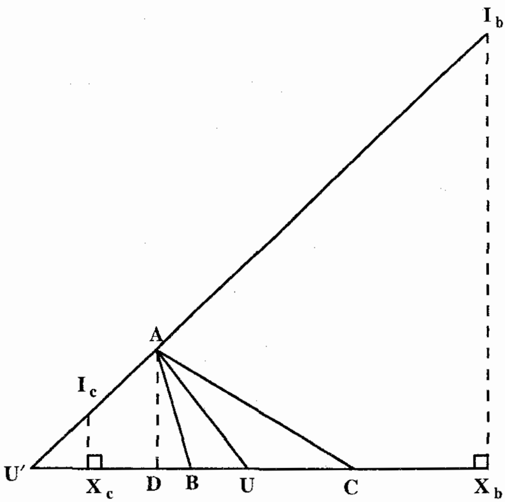
چون $A'C \| AD$ بنابراین $\Delta ABD \sim \Delta AA'C$ و نسبت ضلعها را می‌نویسیم:

$$\frac{c}{b+c} = \frac{d_a}{A'C} \Rightarrow A'C = \frac{d_a(b+c)}{c}$$

از مثلث $AA'C$ سه ضلع را داریم. مثلث را رسم می‌کنیم، سپس AA' را به اندازهٔ $AB = c$ امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ B به‌دست آید. آن‌گاه B را به C وصل می‌کنیم.

۲.۳.۱۲.۱.۱. مجموع دو ضلع، نیمساز

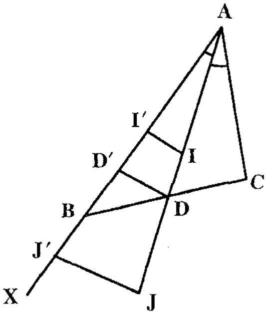
۱۱۴. فرض کنید ABC (شکل) مثلث خواسته شده باشد. مثلث قائم‌الزاویهٔ AUU' را می‌توان رسم کرد. ارتفاع AD از مثلث ABC، ارتفاع مثلث AUU' نیز هست. مرکزهای I_b و I_c توسط نقطه‌های A و U' به‌صورت همساز از هم جدا می‌شوند، پس نقطه‌های X_b و X_c نیز توسط نقطه‌های D و U' به‌طور همساز از هم جدا می‌شوند. ولی $X_bX_c = b+c$؛ پس نقطه‌های X_b و X_c را می‌توان با قرار دادن پاره‌خط مفروض $b+c$ روی خط UDU'، به‌طوری که با پاره‌خط DU' مزدوج همساز باشد، به‌دست آورد.



I_b و I_c را نقطه‌های برخورد خط AU' با عمودهایی که در X_b و X_c بر UU' رسم می‌شوند، فرض کنید. دایره‌های (I_b, I_bX_b) و (I_c, I_cX_c) را رسم کنید. مماسهای مشترک داخلی این دو دایره از نقطهٔ A می‌گذرند و نقطه‌های برخورد آنها با UU' دو رأس دیگر مثلث مطلوب ABC را به‌دست می‌دهند.

۱.۱.۱۲.۳.۳. یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر، نیمساز

۱۱۵. راه اول. دو پاره‌خط s و a مفروضند، پس نسبت s:a معلوم است. پاره‌خط مفروض $AU = t_a$ را به‌طور داخلی و خارجی به نسبت معلوم s:a تقسیم کنید تا نقطه‌های I و I_a به‌دست آید؛ در دایرهٔ (II_a) که II_a قطر آن است، وتر BC را به طول مفروض a رسم کنید، به‌طوری که از نقطهٔ U بگذرد. ABC مثلث مطلوب است. مسأله دو جواب دارد.



راه دوم. فرض کنیم مسأله حل شده و ABC مثلث مطلوب باشد که در آن $BC = a$ ، $AB + AC = l$ و نیمساز AD برابر α باشد. فرض می‌کنیم I مرکز دایرهٔ محاطی داخلی و J مرکز دایرهٔ محاطی خارجی مربوط به زاویهٔ A باشد. I' ، J' و D' تصویرهای نقطه‌های I، J و D روی AB می‌باشند (شکل) و داریم:

$$AJ' = P = \frac{l+a}{۲} \text{ و } ; AI' = p - a = \frac{l-a}{۲}$$

اما مرکزهای تجانس A و D دو دایره نسبت به IJ مزدوجند؛ پس D' مزدوج A نسبت به $I'J'$ است. بنابراین ساختمان زیر برای رسم مثلث به‌دست می‌آید: روی نیمخط AX، طولهای $AI' = \frac{l-a}{۲}$ و $AJ' = \frac{l+a}{۲}$ را جدا کرده، D' مزدوج A را نسبت به $I'J'$ به‌دست می‌آوریم. از D' عمودی بر AX اخراج می‌کنیم تا دایرهٔ به مرکز A و به شعاع α را در D قطع کند. از I' عمودی بر AX اخراج می‌کنیم تا AD را در I قطع کند. به مرکز I و به شعاع II' دایرهٔ محاطی مثلث را می‌کشیم و از D مماسی بر این دایره رسم می‌کنیم. بسهولت B و C نیز به‌دست می‌آیند.

۱.۱.۱۲.۳.۴. یک ضلع، تفاضل دو ضلع دیگر، نیمساز

۱۱۶. می‌دانیم که:

$$d'_a = \frac{۲}{|b-c|}\sqrt{bc(p-b)(p-c)} \qquad (۱)$$

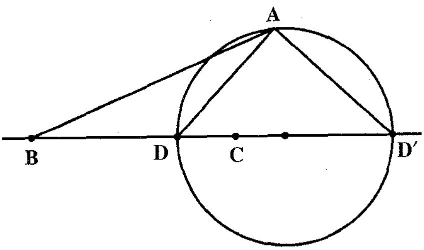
است، با معلوم بودن a و $b - c$ ، اندازه‌های $p - b$ و $p - c$ نیز معلوم است. بنابراین چون d'_a نیز اندازهٔ معلومی دارد، پس از رابطهٔ (۱) حاصلضرب دو ضلع AB و AC، یعنی

bc به‌دست می‌آید. با معلوم بودن $b-c$ و bc اندازهٔ دو پاره‌خط $AB=c$ و $AC=b$ قابل رسم است. در این صورت سه ضلع از مثلث ABC معلوم و این مثلث قابل رسم‌است.

تبصره. اگر مسأله را حل شده بگیریم و $AE=AC$ را روی ضلع AB جدا کنیم، پاره‌خط EC موازی AD'، نیمساز زاویهٔ خارجی A از مثلث ABC است.

۵.۳.۱۲.۱.۱. یک ضلع، نسبت دو ضلع دیگر، نیمساز

۱۱۷. مسأله را حل شده گرفته، مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. نیمساز AD را رسم می‌کنیم. چون $\frac{AB}{AC}=k$ معلوم است، پس دو نقطهٔ D و D' پای نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی A روی ضلع BC معلوم است و یک مکان هندسی رأس A دایرهٔ به قطر DD' است. از طرفی $AD=d_a$ معلوم است، پس مکان هندسی دیگر رأس A دایره‌ای به مرکز A و به شعاع d_a است. بنابراین برای رسم مثلث ABC، پاره‌خط BC به طول a را رسم می‌کنیم، سپس دو نقطهٔ D و D' را روی BC چنان تعیین می‌کنیم که $\frac{DB}{DC}=\frac{D'B}{D'C}=\frac{b}{c}$ باشد. دایره به قطر DD' را رسم می‌کنیم و سپس به مرکز D و به شعاع d_a دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایره به قطر DD' را در نقطهٔ A رأس سوم مثلث قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم.



۶.۳.۱۲.۱.۱. نسبت ضلعها، رابطهٔ بین نیمسازها

۱۱۸. روش جبری. با فرض $\frac{a}{b}=k$ و $\frac{b}{c}=k'$ با حل دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی روبه‌رو :

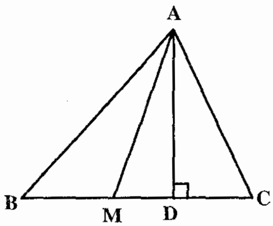
$$\begin{cases} \frac{a}{b}=k \\ \frac{b}{c}=k' \\ d_a+d_b-d_c=l \end{cases}$$

ضلعهای مثلث محاسبه می‌شود و از آن‌جا مثلث را می‌توان رسم کرد.

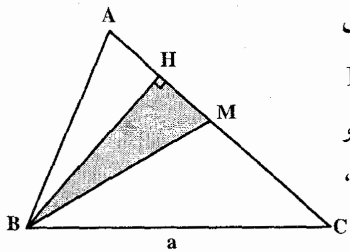
۴.۱۲.۱.۱. ضلع، ارتفاع، میانه

۱.۴.۱۲.۱.۱. یک ضلع، یک ارتفاع، یک میانه

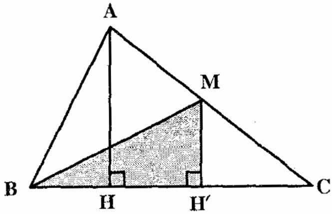
۱۱۹. ارتفاع AD و میانهٔ AM و ضلع BC از مثلث ABC معلوم است (شکل). برای رسم مثلث، ابتدا مثلث قائم‌الزاویهٔ ADM را با معلوم بودن وتر و یک ضلع رسم می‌کنیم، سپس MB و MC را برابر $\frac{BC}{2}$ جدا می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



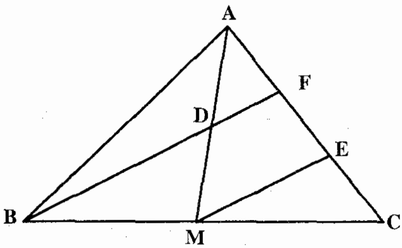
۱۲۰. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. از مثلث قائم‌الزاویهٔ BHM وتر و یک ضلع معلومند، آن مثلث را رسم می‌کنیم، و MH را از هر دو طرف امتداد می‌دهیم، بعد به مرکز B و به شعاع $BC = a$ کمانی می‌زنیم تا امتداد MH را در C قطع کند و در طرف دیگر AM را مساوی MC جدا می‌کنیم، از A به B وصل می‌کنیم.



۱۲۱. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم: از نقطهٔ M عمودی بر BC فرود می‌آوریم و پای عمود را H' می‌نامیم. $MH' = \frac{AH}{2}$ و طول معلومی دارد؛ بنابراین، مثلث قائم‌الزاویهٔ BMH' را به حالت وتر و یک ضلع رسم می‌کنیم. BH' را امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ C به‌دست آید. از C به M وصل می‌کنیم و به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ A به‌دست آید. از A به B وصل می‌کنیم.

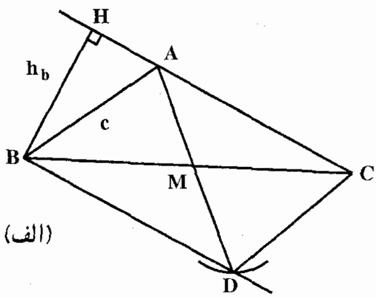


۱۲۲. از مثلث ABC ارتفاع BF و میانهٔ AM و ضلع BC معلوم است (شکل). اگر از M خط ME را به موازات BF رسم کنیم، ME برابر $\frac{BF}{2}$ خواهد بود و زاویهٔ E نیز قائمه می‌باشد. پس ابتدا مثلث قائم‌الزاویهٔ MEC را با



معلوم بودن MC (که برابر $\frac{BC}{۲}$ است) و ME رسم می‌کنیم سپس به مرکز M و به شعاع MA دایره‌ای می‌کشیم که امتداد EC را در A قطع کند و MC را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ B امتداد می‌دهیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۱۲۳. اگر مسأله حل شده فرض شود و ABC مثلث مطلوب باشد. مثلث قائم‌الزاویه ABH را با معلوم بودن اندازه وتر c و ضلع $BH = h_b$ رسم می‌کنیم. از نقطهٔ B خطی موازی AH رسم کرده، دایره‌ای به مرکز A و شعاع $R = ۲m_a$ می‌کشیم تا خط رسم شده از نقطهٔ B و موازی AH را قطع کند، نقطهٔ D به‌دست می‌آید، از نقطهٔ D خطی موازی AB رسم می‌کنیم تا AH را در نقطهٔ C قطع کند. C رأس سوم مثلث است.



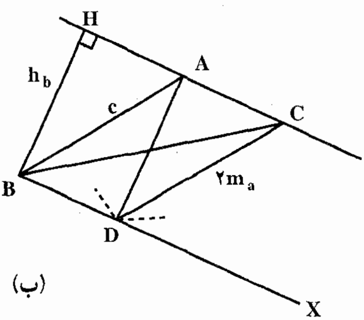
(الف)

بحث. اولاً لازم است که $h_b \leqslant c$ باشد.

I. با فرض این که $h_b < c$ باشد.

الف. اگر $۲m_a = h_b$ باشد، مسأله تنها یک جواب دارد (شکل الف).

«دایرهٔ به مرکز A و شعاع $۲m_a$ بر خط BX در نقطهٔ D مماس است.»

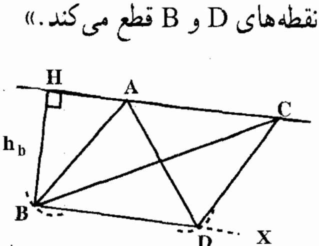


(ب)

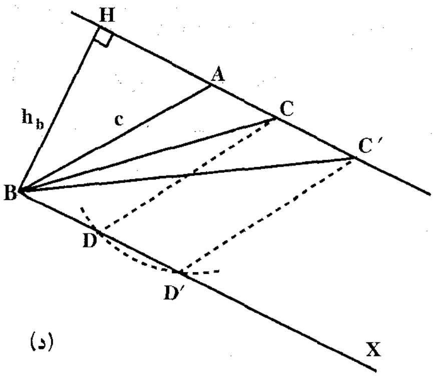
ب. اگر $۲m_a = c$ باشد ($۲m_a = c \geq h_b$) مسأله تنها یک جواب دارد (شکل ب).

«دایره به مرکز A و شعاع $۲m_a$ خط XB را در نقطه‌های D و B قطع می‌کند.»

ج. اگر $۲m_a < h_b$ باشد، مسأله جواب ندارد.



(ج)

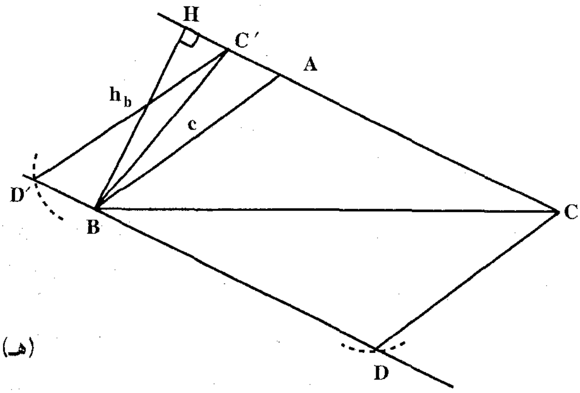


(د)

د. اگر $۲m_a > h_b$ باشد، «چون $c > h_b$ است حالتی است که $۲m_a = c > h_b$ می‌باشد، قبلاً بحث شده و در این حالت $۲m_a \neq c$ فرض می‌شود» مسأله دو جواب متمایز دارد.

«دایرهٔ به مرکز A و شعاع $۲m_a$ خط BX را در دو نقطه D و D′ قطع می‌کند.»

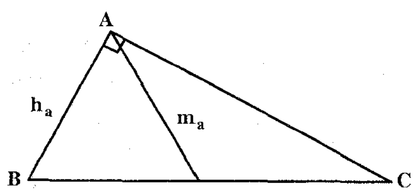
در شکل (ج)، $h_b < ۲m_a < c$ فرض شده است.



(هـ)

در شکل (د)، $h_b < c < ۲m_a$ می‌باشد.

II. با فرض این که $h_b = c$ باشد. در این حالت مثلث ABC در رأس A قائمه است و در این صورت باید $۲m_a = a$ باشد (میانهٔ وارد بر وتر در مثلث قائم‌الزاویه) و مسأله فقط یک جواب دارد.

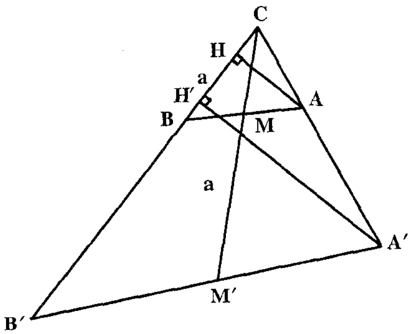


(و)

۱.۱.۱۲.۴.۲. یک ضلع، یک ارتفاع، مجموع دو میانه

۱۲۴. روش جبری. با معلوم بودن ضلع a، کافی است اندازهٔ دو ضلع b و c را به‌دست آوریم. با استفاده از دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر برحسب b و c، اندازهٔ این دو ضلع را می‌توان محاسبه کرد.

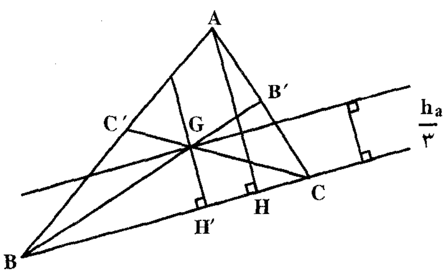
$$\begin{cases} h_a = \frac{۲}{a}\sqrt{p(p-a)(p-b)(p-c)} \\ m_b + m_c = l \Rightarrow \frac{۱}{۲}\sqrt{۲(a^۲+c^۲)-b^۲} + \frac{۱}{۲}\sqrt{۲(a^۲+b^۲)-c^۲} = l \end{cases}$$



روش هندسی. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله فرض می‌کنیم. میانهٔ CM و ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. میانهٔ CM را به اندازهٔ $MM' = m_b$ امتداد می‌دهیم و از نقطهٔ M′ ضلع AB را رسم می‌کنیم تا امتداد دو ضلع CB و CA را در B′ و A′ قطع کند. دو مثلث CAB و CA′B′ متشابه‌اند. ارتفاع C′H′ از مثلث CA′B′ را رسم می‌کنیم، داریم، ...

۱.۱.۱۲.۴.۳. یک ضلع، یک ارتفاع، نسبت دو میانه

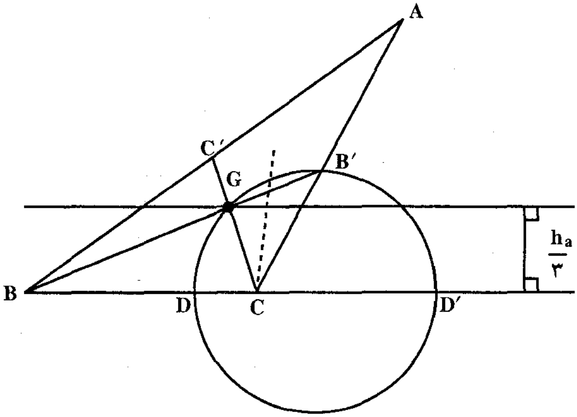
۱۲۵. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. نقطه‌های برخورد میانه‌های BB′ و CC′ را G می‌نامیم. از G عمود GH′ را موازی ارتفاع AH رسم



می‌کنیم. $GH' = \frac{1}{3}AH = \frac{1}{3}h_a$ مقدار معلومی است. از طرفی داریم :

$$\frac{GC}{GB} = \frac{\frac{2}{3}m_b}{\frac{2}{3}m_c} = \frac{m_b}{m_c} =$$ مقدار معلوم

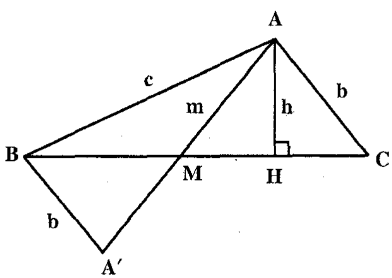
پس یک مکان هندسی نقطهٔ G دایرهٔ آپولونیوسی است که قطرش پاره‌خط BC را به نسبت $\frac{m_b}{m_c}$ تقسیم می‌کند، و مکان هندسی دیگر نقطهٔ G دو خط موازی BC و به فاصلهٔ $\frac{1}{3}h_a$ از آن است.



بنابراین برای رسم مثلث ABC، مثلث GBC را با استفاده از دو مکان هندسی ذکر شده رسم می‌کنیم. سپس ′GA را به دست می‌آوریم (′A وسط BC است) و با تعیین رأس A، از A به B و C وصل می‌کنیم.

۱.۱.۱۲.۴.۴. مجموع دو ضلع، یک ارتفاع، یک میانه

۱۲۶. اگر ABC مثلث مطلوب باشد، از مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM وتر و یک ضلع آن AH در دست است. اگر AM را تا نقطهٔ ′A ادامه دهیم، به طوری که $AM = MA'$ باشد، ′BA برابر AC خواهد بود. بنابراین رأسهای B و C مکان هندسی نقطه‌هایی است که مجموع فاصله‌های آنها از دو نقطهٔ ثابت A و ′A مساوی با مقدار معلوم l می‌باشد، یعنی یک بیضی که کانونهای آن A و ′A است. بنابراین راه حل صفحه بعد

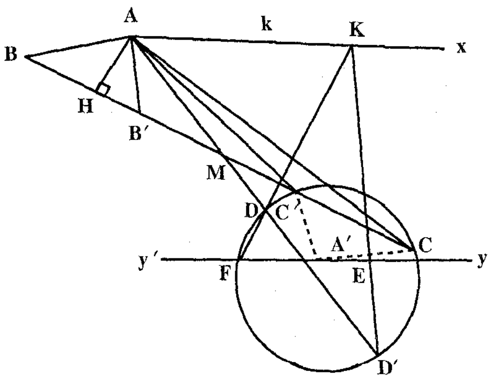


به‌دست می‌آید.
ابتدا مثلث AHM را با معلوم بودن وتر و یک ضلع رسم کرده و AM را به طول 'MA مساوی خود امتداد می‌دهیم و با دو کانون A و 'A و مقدار ثابت l (مجموع دو شعاع حامل بیضی) یک بیضی رسم کرده، محل برخورد این بیضی با امتداد MH رأسهای B و C می‌باشد. (شکل)

۵.۴.۱۲.۱.۱. نسبت دو ضلع، ارتفاع، میانه

۱۲۷. مسأله را حل شده می‌گیریم. یک مکان هندسی رأس A دایرهٔ آپولونیوسی است که ضلع BC را به نسبت k تقسیم می‌کند. مکان هندسی دیگر رأس A دایره‌ای به مرکز M وسط ضلع BC و به شعاع $AM = m_a$ است. پس برای رسم مثلث ABC، پاره‌خط BC به طول a را رسم می‌کنیم. سپس دو نقطهٔ D و 'D را روی BC و امتداد آن چنان پیدا می‌کنیم که $\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC} = R$ باشد. دایره‌ای به قطر 'DD رسم می‌کنیم. سپس به مرکز M، وسط ضلع BC و به شعاع $AM = m_a$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ به قطر 'DD را در نقطهٔ A، رأس سوم مثلث، قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۱۲۸. مسأله را حل شده فرض کرده از A به M وصل می‌نماییم، AM را به اندازهٔ $A'M = AM$ امتداد می‌دهیم و نقطهٔ C را به 'A وصل می‌کنیم، دو مثلث AMB و 'A'CM متساوی‌اند (در حالت دو ضلع و زاویهٔ بین آنها) پس:



$AB = A'C = c$

حال برای رسم مثلث لازم است مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM را با معلوم بودن وتر و یک ضلع رسم نماییم و AM را به اندازهٔ خود تا 'A امتداد می‌دهیم. در خارج 'AA و امتداد HM، نقطهٔ C را باید چنان معین نماییم که: $\frac{CA}{CA'} = k$ باشد. می‌دانیم‌مکان

هندسی نقطه‌هایی مانند C که نسبت فاصله‌هایشان از دو سر پاره‌خط AA' مساوی k باشد $(k \neq 1)$ دایره‌ای می‌باشد و برای به دست آوردن این دایره، نقطه‌هایی مانند D و D' بر خط راست AA' چنان معین می‌نماییم که : $\frac{DA}{DA'} = \frac{D'A}{D'A'} = k$ باشد. دایره به قطر DD' مکان مطلوب می‌باشد.

پس دایره‌ای به قطر DD' رسم می‌کنیم تا امتداد HM را در نقطه‌های C و C' قطع کند. پاره‌خطهای CM و $C'M$ را به اندازهٔ خود تا نقطه‌های B و B' امتداد می‌دهیم، مثلثهای CAB و $CA'B'$ جواب مسأله‌اند. اگر HM بر دایرهٔ به قطر DD' مماس و یا آن را قطع ننماید، مسأله دارای یک جواب و یا دارای جواب نمی‌باشد.

۱.۱.۱۲.۵. ضلع؛ ارتفاع، نیمساز

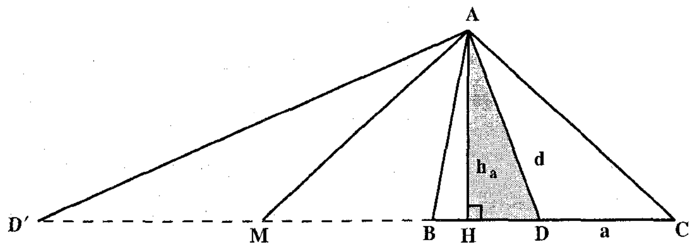
۱.۱.۱۲.۵.۱. یک ضلع، یک ارتفاع، یک نیمساز

۱۲۹. راه اول. فرض کنید مثلث ABC، مثلث مطلوب باشد و فرض کنید $AD = h_a$ و $AU = t_a$. اگر F نقطهٔ متقارن B نسبت به D باشد، داریم :

$$F\hat{A}C = A\hat{F}D - \hat{C} = \hat{B} - \hat{C}$$

و این زاویه را می‌توان با توجه به مثلث قائم‌الزاویهٔ ADU تعیین کرد.

فرض کنید خطی که در B بر BC عمود می‌شود، AF را در G قطع کند. مثلث قائم‌الزاویهٔ GBC را می‌توان رسم کرد، زیرا BC مفروض است و $GB = 2h_a$. پس برای رأس A دو مکان هندسی داریم : کمانی از یک دایره که پاره‌خط GC از هر نقطه روی آن کمان با زاویهٔ $180° - (\hat{B} - \hat{C})$ دیده می‌شود، و عمودمنصف BG.



راه دوم. نیمساز خارجی زاویهٔ A را رسم می‌کنیم تا امتداد BC را در D' قطع کند. طول DD' در دست است. بنابراین M را وسط DD' می‌گیریم و رابطهٔ نیوتن را

می‌نویسیم :

$$MB.MC = MD^2$$

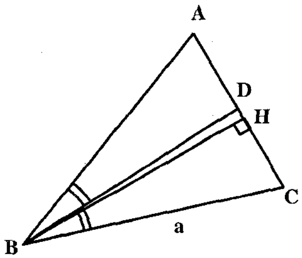
چون DD' را داریم، پس مجذور نصف آن را هم داریم و همینطور تفاضل دو پاره‌خط را نیز داریم :

$$MC - MB = BC = a$$

پس آن دو پاره‌خط را می‌توان رسم کرد.

سپس مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD را رسم می‌کنیم، خطی عمود بر AD در نقطهٔ A اخراج می‌کنیم تا امتداد DH را در D' قطع کند. وسط $D'D$ را M می‌نامیم، و چون MB و MC در دست است، به مرکز M و شعاع MB و MC، دو کمان می‌زنیم تا BC را در C و B قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم.

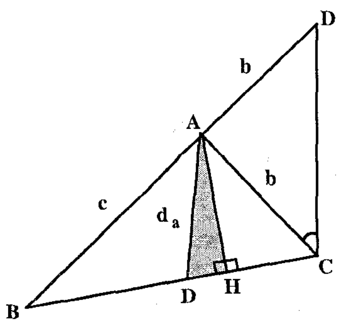
۱۳۰. مسأله را حل شده می‌گیریم. ارتفاع BH و نیمساز BD را رسم می‌کنیم. با معلوم بودن ضلع $BC = a$ ، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC و BHD را با داشتن اندازهٔ وتر و یک ضلع می‌توان رسم کرد. بنابراین برای رسم مثلث ABC، این دو مثلث قائم‌الزاویه را رسم می‌کنیم، سپس زاویهٔ ABD را مساوی زاویهٔ $D\hat{B}C$ رسم می‌کنیم تا رأس A به‌دست آید و مثلث ABC رسم شود.



۱.۱.۱۲.۵.۲. مجموع دو ضلع، ارتفاع، نیمساز

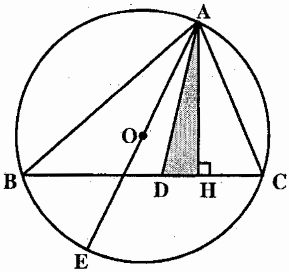
۱۳۱. مسأله را حل شده می‌گیریم. نیمساز AD و ارتفاع AH از مثلث را رسم می‌کنیم. ضلع AB را از طرف A، به اندازهٔ $AD = AC$ امتداد می‌دهیم و از D به C وصل می‌کنیم.

$BD = b + c$ است و مثلث ADC متساوی‌الساقین، و خط DC موازی AD می‌باشد. مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH با معلوم بودن اندازهٔ وتر و یک ضلع قابل رسم است ؛ از آن‌جا مثلث ABC نیز قابل رسم می‌باشد.



۳.۵.۱۲.۱.۱. حاصلضرب دو ضلع، ارتفاع، نیمساز

۱۳۲. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD را با معلوم بودن اندازهٔ وتر AD و ضلع AH رسم می‌کنیم. می‌دانیم که AH نیمساز زاویهٔ بین AC و قطری از دایرهٔ محیطی مثلث ABC است، که از رأس A می‌گذرد،

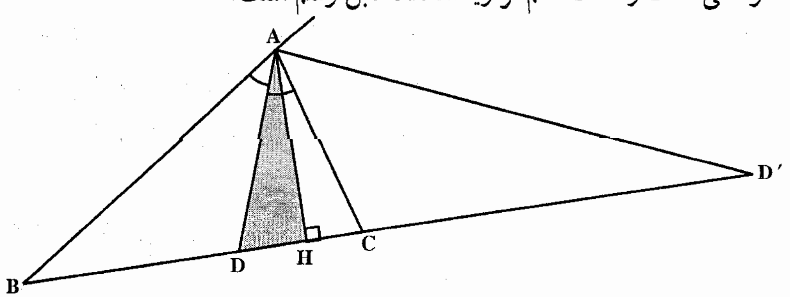


پس قرینهٔ AC نسبت به AH را رسم می‌کنیم، تا قطر AOE مشخص شود. از طرفی اندازهٔ شعاع دایرهٔ محیطی مثلث معلوم است، زیرا داریم $bc = 2R.h_a$ ، و از آن‌جا $R = \frac{bc}{2h_a} = \frac{k^2}{2h_a}$.

بنابراین روش رسم مثلث مشخص می‌گردد، به این ترتیب که:

مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD را با معلوم بودن ضلع $AH = h_a$ و وتر $AD = d_a$ رسم می‌کنیم. سپس قرینهٔ AH نسبت به AD را رسم کرده، روی آن $AO = R$ که، $R = \frac{k^2}{2h_a}$ است را جدا می‌کنیم. به مرکز O و به شعاع R دایره‌ای رسم می‌کنیم (دایرهٔ محیطی مثلث). نقطه‌های برخورد HD با این دایره، دو رأس B و C از مثلث ABC است. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث رسم می‌شود.

۱۳۳. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. ارتفاع AH و نیمسازهای AD و AD' را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که $D\hat{A}D' = 90°$ است. $(DD'BC)$ تقسیم توافقی است و مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH قابل رسم است.



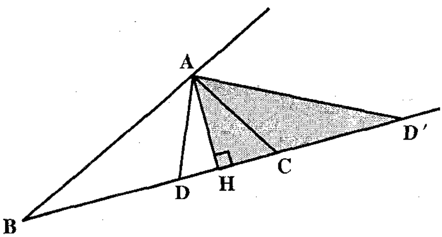
بنابراین برای رسم مثلث ABC، نخست مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH را با معلوم بودن $AD = d_a$ و $AH = h_a$ رسم می‌کنیم. سپس از A عمودی بر AD اخراج می‌کنیم تا

امتداد DH را در نقطهٔ D' قطع کند. چون دو نقطهٔ D و D' پاره‌خط BC را به نسبت $k=\frac{b}{c}$ تقسیم می‌کنند، پس دو نقطهٔ B و C هم پاره‌خط DD' را به نسبت $\left|\frac{k+1}{k-1}\right|$ تقسیم می‌نمایند. یعنی داریم:

$$\frac{BD'}{BD}=\frac{CD'}{CD}=\frac{k+1}{k-1}$$

بنابراین دو نقطهٔ B و C را به‌دست می‌آوریم و از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC رسم می‌شود.

۱۳۴. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب آن می‌گیریم. ارتفاع AH و نیمسازهای AD و AD' را رسم می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD' با معلوم بودن اندازهٔ وتر $AD'=d'_a$ و ضلع $AH=h_a$ قابل رسم است،



و $D\hat{A}D'=90^\circ$ و $(BCDD')$ تقسیم توافقی است. بنابراین برای رسم مثلث ABC، نخست مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD' را رسم می‌کنیم، سپس از رأس A عمودی بر AD' اخراج می‌کنیم تا امتداد $D'H$ را در نقطهٔ D قطع کند. چون:

$$\frac{DB}{DC}=\frac{D'B}{D'C}=\frac{b}{c}$$

پس:

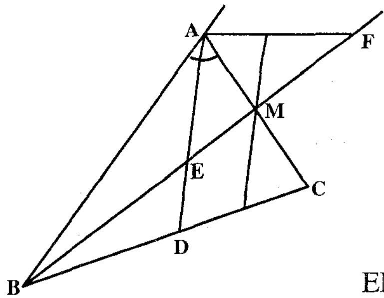
$$\frac{BD}{BD'}=\frac{CD}{CD'}=\frac{k-1}{k+1}=k'$$

می‌باشد. یعنی دو نقطهٔ B و C هم پاره‌خط DD' را به نسبت k' تقسیم می‌کنند. بنابراین با معلوم بودن پاره‌خط DD' و نسبت k'، دو نقطهٔ B و C را به‌دست می‌آوریم. از A به B و C وصل می‌کنیم، مثلث ABC جواب مسأله است.

۱.۱.۱۲.۶. ضلع، میانه، نیمساز

۱.۱.۱۲.۶.۱. نسبت ضلعها، یک میانه، یک نیمساز

۱۳۵. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. نیمسازهای زاویه‌های



درونی و برونی A را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد این نیمسازها با میانهٔ BM را E و F می‌نامیم. دستگاه (A ـ BMEF) دستگاه توافقی است، پس (BMEF) یک تقسیم توافقی می‌باشد و داریم:

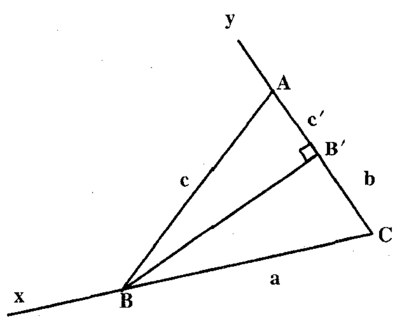
$$\text{مقدار معلوم} = \frac{EM}{EB} = \frac{FM}{FB} = \frac{AM}{AB} = \frac{\frac{b}{۲}}{c} = \frac{b}{۲c}$$

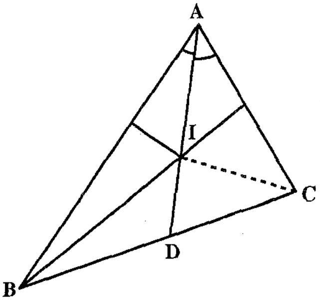
چون پاره‌خط BM طول معینی دارد، پس دو نقطهٔ E و F را می‌توان به‌دست آورد. بنابراین یک مکان هندسی رأس A دایره‌ای به قطر EF است. حال کافی است با استفاده از اندازهٔ نیمساز AD، یک مکان برای رأس A به‌دست آوریم.

۱۳.۱.۱. ضلع؛ پاره‌خط، خط

۱.۱۳.۱.۱. ضلع، پاره‌خط

۱۳۶. مسأله را حل شده و مثلث ABC را که از آن اندازه‌های دو ضلع $BC = a$ ، $AC = b$ و $AB' = c'$ تصویر ضلع AB روی ضلع AC معلوم است، جواب مسأله می‌گیریم. مثلث قائم‌الزاویهٔ $BB'C$ قابل رسم است؛ زیرا $\hat{B} = ۹۰^\circ$ ، $B'C = b - c'$ و $BC = a$ معلومند. پس برای رسم مثلث ABC، مثلث قائم‌الزاویهٔ $BB'C$ را رسم می‌کنیم و روی CB' پاره‌خط $CA = b$ را جدا می‌کنیم تا رأس A به‌دست آید. از A به B وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

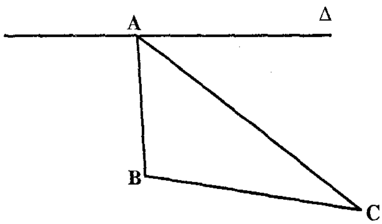




۱۳۷. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. می‌دانیم که $AI' = \sqrt{\frac{bc(p-a)}{p}}$ ؛ پس با معلوم بودن AI، b و c، اندازهٔ ضلع a محاسبه می‌شود و از آن‌جا با معلوم بودن سه ضلع، مثلث قابل رسم است.

۲.۱۳.۱.۱. یک ضلع، تفاضل دو ضلع دیگر، خط

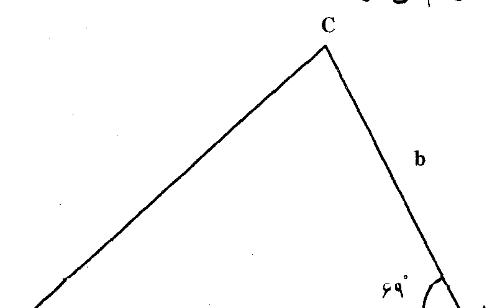
۱۳۸. BC را برابر a رسم می‌کنیم (شکل). چون $b-c=l$ است، پس رأس A روی یک هذلولی است که کانونهای آن B و C و مقدار ثابت آن l می‌باشد و برای تعیین A کافی است که فصل مشترک Δ و هذلولی را تعیین کنیم.



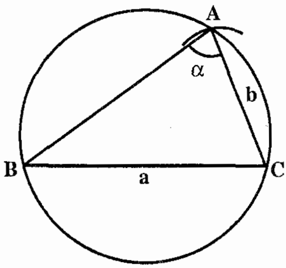
۱.۱۴.۱.۱. ضلع، زاویه

۱.۱.۱۴.۱.۱. دو ضلع، یک زاویه

۱۳۹. یک زاویهٔ °۶۹ رسم می‌کنیم. سپس روی یک ضلع آن به اندازهٔ ۶ سانتیمتر و روی ضلع دیگر آن به اندازهٔ ۴ سانتیمتر جدا می‌کنیم. نقطه‌های به‌دست آمده را به هم وصل می‌کنیم. مثلث خواسته شده رسم می‌شود.



۱۴۰. پاره‌خط BC را به طول a رسم می‌کنیم. سپس کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}=\alpha$ روبه‌رو به ضلع BC را رسم می‌کنیم. آن‌گاه به مرکز C و به شعاع b دایره‌ای رسم می‌کنیم تا کمان



درخور زاویهٔ A را در نقطهٔ A که رأس سوم مثلث ABC است، قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است. به تعداد نقطه‌های برخورد کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}$ با دایره به مرکز C و به شعاع b، مسأله دارای جواب است.

۱۴۱. **راه اول.** a و b را طول ضلعهای BC و AC از مثلث ABC می‌گیریم و فرض می‌کنیم، میانه‌های AD و BE تحت زاویهٔ قائمه، یکدیگر را قطع کرده باشند. پاره‌خط راست AC به طول b را درنظر می‌گیریم و نقطهٔ F را روی آن طوری انتخاب می‌کنیم که داشته باشیم: $AF:FC = ۳$ در این صورت FD با BE موازی و زاویهٔ ADF برابر ۹۰ درجه می‌شود. به این ترتیب، می‌توان نقطهٔ D را پیدا کرد:
این نقطه، اولاً روی محیط دایره‌ای به قطر AF و ثانیاً روی محیط دایره‌ای به مرکز C و شعاع $\frac{۱}{۲}a$ قرار دارد. با به‌دست آوردن نقطهٔ D، نقطهٔ B هم بسادگی پیدا می‌شود. مسأله وقتی جواب دارد که داشته باشیم: $\frac{۱}{۲} < \frac{b}{a} < ۲$ و درضمن، مسأله تنها یک جواب دارد.

∇ بسادگی می‌توان ثابت کرد که، در چنین مثلثی، برای ضلع سوم به طول c داریم:

$$c^۲ = \frac{۱}{۵}(a^۲ + b^۲)$$

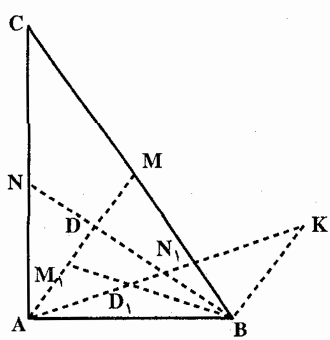
و از آن‌جا، راه دیگری برای رسم مثلث به‌دست آورد.

راه دوم. اگر $AM = m_a$ و $BN = m_b$ و $AM \perp BN$ فرض شوند (شکل) و نقطهٔ D را نقطهٔ تلاقی میانه‌ها و $M_۱$ و $N_۱$ را وسطهای AD و BD بگیریم، خواهیم داشت:

$$AM_۱ = M_۱D = DN$$

و

$$BN_۱ = N_۱D = DN$$



در مثلثهای متساوی‌الساقین ANN_1 و BMM_1 خواهیم داشت:

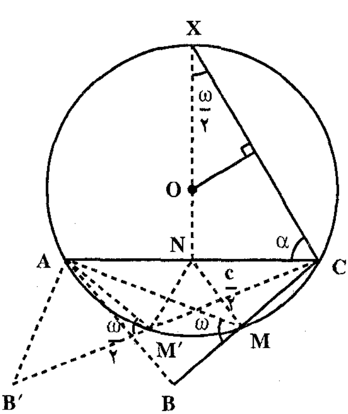
$$AN_1 = AN = \frac{b}{۲} \text{ و } BN_1 = BM = \frac{a}{۲}$$

در این صورت اگر نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث قائم‌الزاویهٔ ADB را نقطهٔ D_1 بگیریم، خواهیم داشت:

$$D_1N_1 = \frac{۱}{۳}AN_1 = \frac{b}{۶} \text{ و } D_1B = \frac{۲}{۳}BM_1 = \frac{a}{۳}$$

AN_1 را به اندازهٔ $N_1K = AN_1$ تا K امتداد می‌دهیم و KB را رسم می‌کنیم. از تساوی مثلثهای ADN و N_1KB نتیجه می‌شود که: $N_1\hat{B}K = ۹۰^\circ$ است. از آن‌جا طرز رسم معلوم می‌شود. روی خط N_1A طول $N_1D_1 = \frac{b}{۶} = \frac{۱}{۳}AN_1$ را جدا می‌کنیم و به مرکز D_1 و به شعاع $\frac{a}{۳}$ دایره‌ای می‌زنیم تا نقطهٔ B به‌دست آید. از نقطهٔ A عمود AD را بر BN_1 فرود می‌آوریم و بر امتداد AD و BD، طولهای $ND = \frac{DB}{۲}$ و $MD = \frac{AD}{۲}$ را جدا می‌کنیم. اگر AN و BM را امتداد بدهیم، نقطهٔ C مشخص می‌شود.

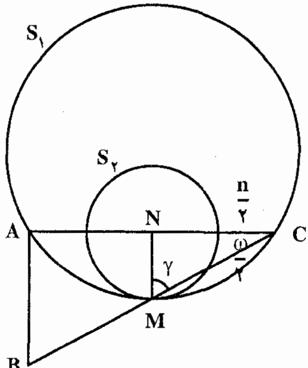
۱۴۲. نقشه‌مان استفاده از ضلع AC به‌عنوان وتر دایره‌ای است که کمان بزرگتر آن مکان هندسی نقطه‌هایی چون X، به‌طوری که $A\hat{X}C = \omega$، و کمان کوچکتر آن مکان هندسی نقطه‌هایی چون Y، با $A\hat{Y}C = \pi - \omega$ باشد. بعد این حقیقت، که قطعه خط واصل وسطهای دو ضلع یک مثلث نصف ضلع سوم است، را برای مشخص کردن M وسط BC، که به فاصلهٔ $\frac{c}{۲}$ واحد از N وسط AC و واقع بر کمان کوچکتر این دایره است، به‌کار می‌بریم. سرانجام برای مشخص کردن B، CM را به طوری که $CM = MB$ باشد، امتداد می‌دهیم. در



(الف)

این‌جا به شرح و تفصیل طریق فوق می‌پردازیم. پاره‌خط AC را به طول b رسم می‌کنیم؛ وسط آن را با N نمایش می‌دهیم، و عمودمنصف AC را رسم می‌کنیم (شکل الف).

زاویهٔ $N\hat{C}X = \frac{\pi - \omega}{۲}$ را با رأس C و ضلع CN رسم می‌کنیم، X نقطه‌ای است که در آن، ضلع دیگر این زاویه با عمودمنصف AC برخورد می‌کند. اکنون عمودمنصف CX را رسم، و فرض می‌کنیم O نقطهٔ برخورد آن با NX باشد. دایرهٔ $S_۱$ را به مرکز O و شعاع OC رسم می‌کنیم. به مرکز N و شعاع $\frac{c}{۲}$ دایرهٔ $S_۲$ را رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم $S_۲$ در نقطهٔ M، $S_۱$ را قطع کند. بعد CM را تا B به‌طوری که:



$\gamma = \frac{\pi - \omega}{۲}$ (ب)

MB = MC باشد، امتداد می‌دهیم. مثلث ABC جواب مسأله است. آنچه که باقیمانده، تعیین شرطهایی است که تحت آنها $S_۱$ و $S_۲$، عملاً متقاطع می‌شوند. اگر شعاع $\frac{c}{۲}$ بسیار کوچک باشد، $S_۲$ به‌طور کامل داخل $S_۱$ قرار می‌گیرد. همین طور که $\frac{c}{۲}$ افزایش می‌یابد، لحظه‌ای می‌رسد که $S_۲$، آن‌گونه که در شکل (ب) نشان داده شده است. بر $S_۱$ مماس می‌شود. در این صورت: $N\hat{M}C = \frac{(\pi - \omega)}{۲}$. بنابراین $N\hat{C}M = \frac{\omega}{۲}$ می‌شود، و داریم:

$$\tan\frac{\omega}{۲} = \frac{\frac{c}{۲}}{\frac{b}{۲}} = \frac{c}{b} \qquad \text{یا} \qquad c = b\tan\frac{\omega}{۲}$$

در این حالت ΔABC مثلثی قائم‌الزاویه به ضلعهای زاویهٔ قائمهٔ b و c است.

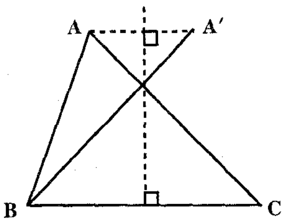
اگر $c > b\tan\frac{۱}{۲}\omega$، $S_۱$ و $S_۲$ در دو نقطهٔ M و M' متقاطع می‌شوند؛ و این دو جواب، ΔABD و $\Delta AB'C$ که در آنها $B\hat{A}C$ حاده و $B'\hat{A}C$ منفرجه است، را

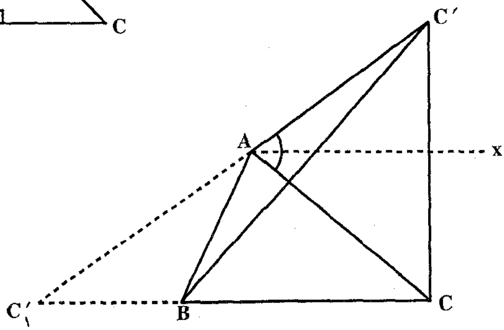
به‌دست می‌دهند (شکل الف).

۲.۱۴.۱.۱. دو ضلع، تفاضل دو زاویه

۱۴۳. این مسأله را به دو طریق می‌توان حل کرد:

راه اول. اگر A' قرینهٔ A را نسبت به عمودمنصف ضلع BC تعیین کنیم و نقطهٔ A' را به B وصل کنیم، مشاهده می‌شود که در مثلث $AA'B$ زاویهٔ B رأس برابر α و دو ضلع AB و $A'B$ در دست است؛ پس می‌توان آن را رسم کرد و تعیین ABC دیگر اشکالی ندارد.





راه دوم. اگر قرینهٔ C' نقطهٔ C را نسبت به خطی که از رأس A به موازات قاعدهٔ BC رسم کرده‌ایم تعیین کنیم و از آن به B و A وصل کنیم مشاهده می‌شود که زاویهٔ $C'AB$ معلوم است؛ زیرا زاویهٔ

$$X\hat{A}C = C'\hat{A}X = \hat{C}$$

ولی
$$C'\hat{A}B = C'\hat{A}X + X\hat{A}B$$

(زاویه‌هایی که با حروف تنها نموده می‌شوند به مثلث ABC متعلق می‌باشند).

ولی
$$X\hat{A}B = X\hat{A}C + \hat{A} = \hat{C} + \hat{A} = \pi - \hat{B}$$

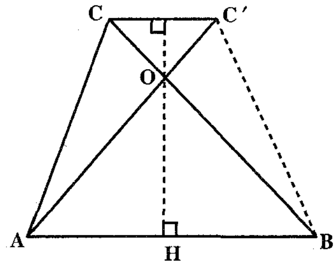
پس
$$C'\hat{A}B = \pi - \hat{B} + \hat{C} \quad \text{و یا} \quad C'\hat{A}B = \pi - \alpha$$

پس مثلث $C'AB$ قابل رسم است؛ زیرا دو ضلع AC' و AB آن با زاویهٔ بین آنها در دست است و می‌شود آن را رسم کرد. عبور به ABC از این شکل دیگر اشکالی ندارد،

زیرا اگر $C'A$ را به‌قدر AC_1' مساوی AC' امتداد دهیم، خط $C_1'B$ موازی AX (خط مجهولی که رسم آن مطلوب است) خواهد بود و مثلث ABC ترسیم می‌شود.

۱۴۴. فرض می کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC مثلث مطلوب باشد. حال عمودمنصف ضلع AB را رسم می کنیم. قرینه‌های نقطه‌های A و C را نسبت به آن، بترتیب نقطه‌های B و C' می‌نامیم. چهارضلعی $CC'BA$ ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. پس :

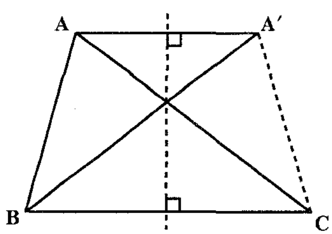
$AC = BC'$ و $H\hat{B}C' = \hat{A}$



بنابراین $\hat{B}_1 = \hat{A} - \hat{B}$. مثلث BCC' با معلوم بودن $BC' = AC$ و $\hat{B}_1$ و BC قابل رسم می‌باشد. برای حل مسأله کافی است این مثلث را رسم کرده، سپس عمودمنصف CC' را رسم نموده، و از نقطهٔ B عمودی بر این عمودمنصف فرود آورده و آن را به‌اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ A به‌دست آید، $BH = HA$ و مثلث ABC جواب مسأله می‌باشد.

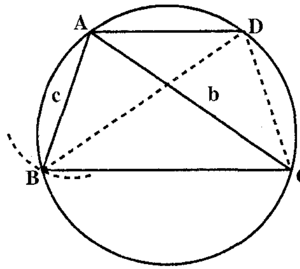
۳.۱۴.۱.۱. دو ضلع، رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱۴۵. راه اول. مشاهده می‌شود که قرینهٔ A' نقطه A نسبت به عمودمنصف BC، مثلث متساوی‌الساقین $AA'C$ را ایجاد می‌کند. چون زاویهٔ $AA'B$ برابر زاویهٔ $A'BC$ می‌باشد (به ترسیم) و چون $\hat{B} = 2\hat{C}$ است، پس $A\hat{B}A' = \hat{C}$ خواهد بود و مثلث $AA'B$ متساوی‌الساقین است و در آن ضلعهای $A'B$ که برابر AC (ضلع b مثلث ABC) و ضلع AB یعنی c مثلث ABC در دست است، پس مثلث متساوی‌الساقین $AA'B$ با قاعدهٔ $A'B$ برابر b و دو ساق AA' و AB برابر c قابل رسم است و استنتاج



ABC از آن اشکالی ندارد.

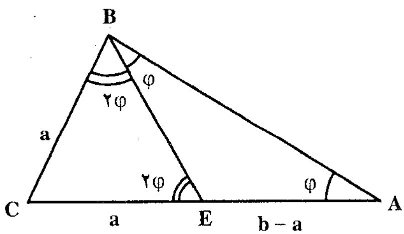
راه دوم. اگر B را به D، وسط $\overset{\frown}{AC}$ وصل کنیم، $\overset{\frown}{BA} = \overset{\frown}{AD} = \overset{\frown}{DC}$ می‌شود و درنتیجه وترهای $BA = AD = DC$ برابر و مساوی c می‌باشند.



بنابراین می‌توان مثلث ADC را با در دست داشتن سه ضلع رسم نمود. سپس دایرهٔ محیطی این مثلث را می‌کشیم. از نقطهٔ A کمانی به شعاع $AB = c$ می‌زنیم تا دایره را در نقطهٔ B قطع کند. ABC مثلث مطلوب است.

۱۴۶. فرض می‌کنیم مثلث ABC، با فرض $\hat{B} = ۳\hat{A}$ رسم شده باشد (شکل). از نقطهٔ B، پاره‌خط راست BE را تا خط راست AC طوری رسم می‌کنیم که داشته باشیم:

$$A\hat{B}E = B\hat{A}C$$



مثلث ABE متساوی‌الساقین است و $AE = BE$ مثلث BCE هم متساوی‌الساقین می‌شود، زیرا در آن، دو زاویهٔ BEC و CBE برابرند (هرکدام دو برابر زاویهٔ BAC)؛ بنابراین:

$$BC = CE = a \Rightarrow AE = EB = b - a$$

در مثلث BCE، طول هر سه ضلع معلوم است. بنابراین، می‌توان آن را به کمک پرگار و خط‌کش رسم کرد. بعد پاره‌خط راست CE را به اندازهٔ EA (که برابر $b - a$ است) ادامه می‌دهیم، مثلث ABC به‌دست می‌آید.

درواقع، درچنین مثلثی، روشن است که $BC = a$ و $AC = b$. ثابت می‌کنیم زاویهٔ $A\hat{B}C$، سه‌برابر زاویهٔ $B\hat{A}C$ است. مثلث BAE، متساوی‌الساقین است:

$$AE = EB = b - a$$

بنابراین، دو زاویهٔ $B\hat{A}E$ و $A\hat{B}E$ برابرند. سپس، زاویهٔ BEC، به‌عنوان زاویهٔ خارجی مثلث AEB، دو برابر زاویهٔ BAC می‌شود. چون مثلث BCE متساوی‌الساقین است $(BC = CE)$ زاویهٔ $C\hat{B}E$ هم دو برابر زاویهٔ $B\hat{A}C$ خواهد شد، و درنتیجه $A\hat{B}C = ۳B\hat{A}C$.

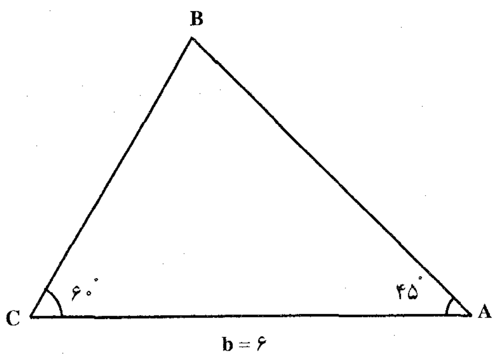
مسأله وقتی جواب دارد که بتوان به‌کمک پاره‌خطهای راست a، a و $b-a$ یک مثلث ساخت؛ یعنی وقتی که $a < b < ۳a$. با این شرط، مسأله جوابی منحصر به‌فرد دارد.

تبصره. حل مسأله، که در این‌جا آوردیم، شامل چهاربخش است که می‌توان آنها را این‌طور نامگذاری کرد:

۱) تجزیه و تحلیل، ۲) ساختمان، ۳) اثبات، ۴) بحث و بررسی که معمولاً همهٔ مسأله‌های ساختمانی هندسه، دارای همین چهار مرحله‌اند.

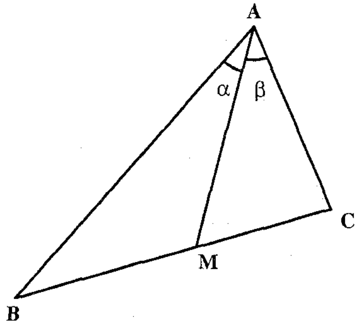
۴.۱۴.۱.۱. یک ضلع، دو زاویه

۱۴۷. ضلع $AC = b = ۶cm$ را رسم می‌کنیم. از A نیمخطی رسم می‌کنیم که با AC زاویهٔ ۴۵ درجه بسازد و از رأس C نیمخطی رسم می‌کنیم که با AC زاویهٔ ۶۰ درجه بسازد. نقطهٔ برخورد این دو نیمخط، رأس B است.



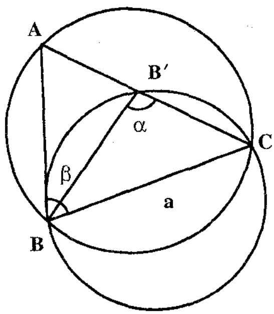
۱۴۸. دو زاویهٔ مفروض، مثلثی متشابه با مثلث مطلوب را تعیین می‌کنند؛ سپس بسادگی می‌توان مثلث مطلوب را کامل کرد.

۱۴۹. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. میانهٔ AM را



رسم می‌کنیم. دو زاویهٔ $M\hat{A}B = \alpha$ و $M\hat{A}C = \beta$ معلومند. پس مکان هندسی رأس A نقطهٔ برخورد دو مکان هندسی زیر است: کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط $MB = \frac{BC}{۲}$ و کمان درخور زاویهٔ β روبه‌رو به پاره‌خط $MC = \frac{BC}{۲}$. بنابراین برای رسم مثلث ABC، پاره‌خط BC به طول a را رسم می‌کنیم، و وسط آن را M می‌نامیم. آن‌گاه دو کمان درخور زاویه‌های α و β روبه‌رو به پاره‌خطهای MB و MC را رسم می‌کنیم تا نقطهٔ برخورد آنها، یعنی رأس A، مشخص شود. از A به B و C وصل می‌کنیم.

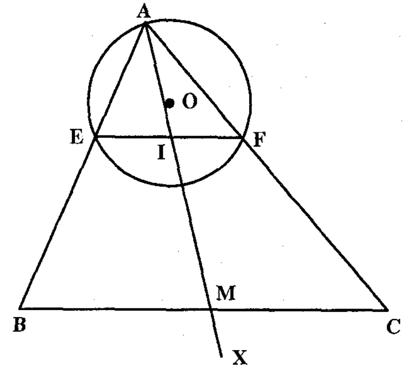
۱۵۰. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله فرض می‌کنیم. میانهٔ BB' را رسم می‌کنیم. بنا به فرض $B\hat{B'}C = \alpha$ است.



بنابراین نقطهٔ B' روی کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به ضلع BC قرار دارد. حال اگر دایرهٔ محیطی مثلث را رسم کنیم، چون $\frac{CA}{CB'} = \frac{۲}{۱}$ است، پس این دایره مجانس دایرهٔ محیطی مثلث $BB'C$ است. بنابراین روش حل مسأله چنین است:

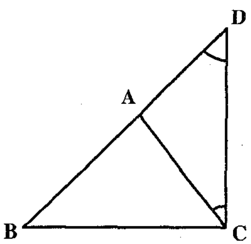
پاره‌خط BC به طول a را رسم می‌کنیم. کمان درخور زاویهٔ $B\hat{B'}C = \alpha$ مقابل به BC را نیز رسم می‌کنیم. سپس مجانس این دایره نسبت به مرکز تجانس C و با نسبت تجانس ۲ را به‌دست می‌آوریم، تا دایرهٔ محیطی مثلث ABC به دست آید. از B خطی رسم می‌کنیم که با BC زاویه‌ای به اندازهٔ زاویهٔ $\hat{B} = \beta$ بسازد. نقطهٔ برخورد این خط با دایرهٔ محیطی مثلث، رأس A از مثلث ABC است. از A به C وصل می‌کنیم. مثلث رسم می‌شود.

۱۵۱. اگر ABC مثلث خواسته شده باشد، هر خط مانند EF که موازی BC رسم شود، اولاً $(A\hat{I}, IF) = (\hat{m_a}, a)$ است.



ثانیاً. مثلث AEF مجانس مثلث ABC در تجانس $(A, k = \frac{AF}{b})$ است. و از آن‌جا حل مسأله چنین است:
پاره‌خط دلخواه EF را رسم کرده و از I وسط آن خط IX را چنان رسم می‌کنیم که $X\hat{I}F = (\hat{m_a}, a)$ باشد و سپس کمان درخور زاویهٔ A گذرنده بر EF را رسم می‌نماییم. محل برخورد این کمان با خط IX رأس A است. AF را وصل کرده، و بر آن نقطهٔ C را چنان تعیین می‌کنیم که $AC = b$ باشد. خطی که از C موازی EF رسم شود، AE را در B قطع می‌نماید و مثلث ABC مثلث خواسته شده است.

۵.۱۴.۱.۱. مجموع یا تفاضل دو ضلع، دو زاویه

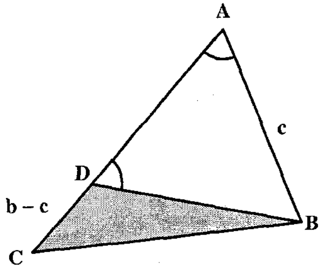


۱۵۲. فرض کنیم مسأله حل شده است (شکل)، AB را تا نقطهٔ D به اندازهٔ AC امتداد می‌دهیم. مثلث ACD متساوی‌الساقین است.

$$\hat{D} = \frac{۱}{۲}(\pi - \hat{B} - \hat{C}) \text{ یا } \hat{D} = \frac{۱}{۲}\hat{A} \Rightarrow \hat{A} = ۲\hat{D}$$

و $BD = k$. بنابراین راه حل مسأله چنین است: BD را برابر k رسم می‌کنیم و از نقطه‌های B و D، زاویه‌های $\hat{B}$ و $\frac{۱}{۲}(\pi - \hat{B} - \hat{C})$ را می‌سازیم. محل برخورد ضلعهای دیگر این زاویه‌ها رأس C است.

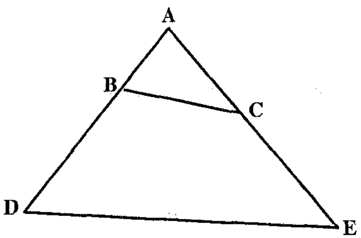
۱۵۳. مسأله را حل شده می‌گیریم. با معلوم بودن اندازهٔ دو زاویهٔ مثلث، زاویهٔ سومی نیز مشخص است. با فرض $AC > AB$ روی ضلع AC، پاره‌خط $AD = AB$ را جدا می‌کنیم و از D به B وصل می‌کنیم. $DC = b - c$ است. زاویه‌های مثلث DBC نیز معلومند، زیرا با معلوم بودن زاویهٔ A، زاویه‌های مثلث متساوی‌الساقین



ADB و از آن‌جا زاویهٔ $\hat{CDB}$ مقدار معلومی است. بنابراین برای رسم مثلث ABC، مثلث DBC را با داده‌های بالا رسم می‌کنیم. سپس عمودمنصف ضلع BD را رسم می‌کنیم تا امتداد CD را در رأس A قطع کند. از A به B وصل می‌کنیم.

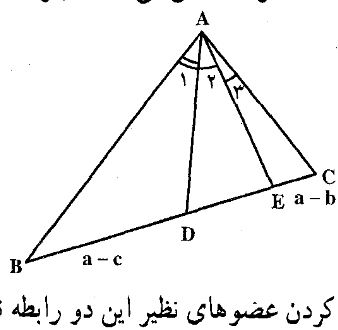
۶.۱۴.۱.۱. مجموع ضلعها یا تفاضل ضلعها، یک زاویه

۱۵۴. فرض کنید ABC (شکل) مثلث خواسته شده باشد. AB و AC را امتداد می‌دهیم. BD را برابر BC و CE را برابر BC جدا می‌کنیم؛ پس $AD = a + c$ ، $AE = a + b$ و مثلث DAE را می‌توان رسم کرد، زیرا دو ضلع و زاویهٔ بین آنها از این مثلث معلوم است. برای رسیدن از این مثلث به مثلث خواسته شدهٔ ABC، باید خط BC را طوری رسم کنیم که داشته باشیم $DB = BC = CE$ از آن‌جا...



۱۵۵. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. روی ضلع BC پاره‌خطهای $BE = AB$ و $CD = AC$ را جدا می‌کنیم و از D و E به A وصل می‌کنیم. $BD = a - c$ و $CE = a - b$ طولهای معلومی دارند. از طرفی زاویهٔ A معلوم است و زاویهٔ $\hat{DAE}$ نیز مشخص می‌باشد. زیرا با توجه به شکل داریم:

$$\begin{cases} \hat{A}_۲ + \hat{A}_۱ = \hat{E} = \hat{C} + \hat{A}_۳ \\ \hat{A}_۲ + \hat{A}_۳ = \hat{D} = \hat{B} + \hat{A}_۱ \end{cases}$$

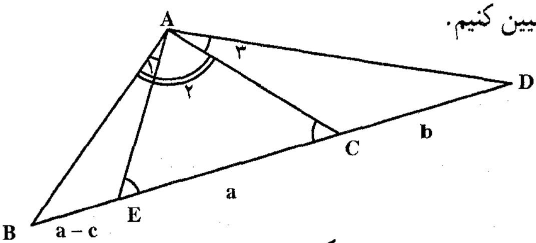


از جمع کردن عضوهای نظیر این دو رابطه نتیجه می‌شود که:

$$۲\hat{A}_۲ = \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ - \hat{A} \Rightarrow \hat{A}_۲ = \hat{DAE} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$$

از آن‌جا...

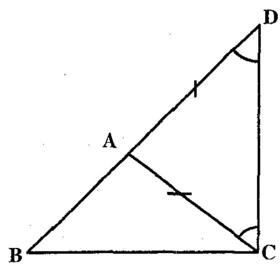
۱۵۶. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. ضلع BC را از طرف C به اندازهٔ $CD = AC$ امتداد می‌دهیم و از D به A وصل می‌کنیم. مثلث ACD متساوی‌الساقین و $BD = a + b$ است. همچنین روی ضلع BC پاره‌خط $CE = AC$ را از طرف C جدا می‌کنیم و از E به A وصل می‌کنیم. مثلث ACE متساوی‌الساقین و $BE = a - c$ است. در صورتی که بتوانیم اندازهٔ زاویه‌های $\hat{A}_1$ و $\hat{A}_3$ را به‌دست آوریم، رأس A را می‌توانیم تعیین کنیم.



۷.۱۴.۱.۱. یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر، زاویه

۱۵۷. فرض کنید ABC (شکل) مثلث خواسته شده باشد. BA را امتداد دهید و روی آن AD را برابر AC جدا کنید. در مثلث متساوی‌الساقین ACD داریم:

$$\hat{D} = A\hat{C}D = \frac{1}{2}B\hat{A}C$$



پس، از مثلث BCD قاعدهٔ $BC = a$، یک ضلع، $BD = b + c$ و زاویهٔ $\hat{D} = \frac{1}{2}\hat{A}$ معلوم است؛ بنابراین می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم. رأسهای B و C رأسهای مثلث مطلوب نیز هستند، و رأس سوم A، محل برخورد BD و عمودمنصف پاره‌خط CD است.

بحث. حل این مسأله ممکن نیست مگر این که داشته باشیم $a < (b + c)$. با فرض برقرار بودن این شرط، در مثلث کمکی BCD زاویهٔ روبه‌رو به ضلع کوچکتر را داریم، بنابراین ممکن است بتوانیم دو یا یک مثلث با شرطهای داده شده برای BCD رسم کنیم، یا ممکن است چنین مثلثی قابل ترسیم نباشد. از هر مثلث کمکی یک و تنها یک مثلث مطلوب به‌دست می‌آید؛ پس ممکن است مسأله دو جواب داشته باشد یا یک جواب

داشته باشد یا جواب نداشته باشد.

نکته. در مثلث کمکی BCD داریم :

$$\hat{D}=\frac{۱}{۲}\hat{A}\,,\ \ \hat{B}=\hat{B}$$

$$B\hat{C}D=B\hat{C}A+A\hat{C}D=\hat{C}+\frac{۱}{۲}\hat{A}$$

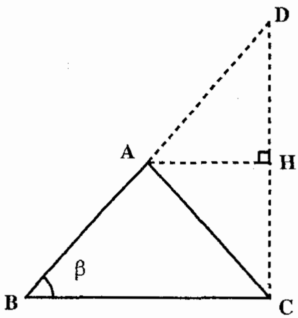
$$=\frac{۱}{۲}\hat{C}+\frac{۱}{۲}\hat{C}+\frac{۱}{۲}\hat{A}+\frac{۱}{۲}\hat{B}-\frac{۱}{۲}\hat{B}$$

$$=\frac{۱}{۲}(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C})-\frac{۱}{۲}(\hat{B}-\hat{C})=۹۰^\circ-\frac{۱}{۲}(\hat{B}-\hat{C})$$

در مثلث BCD ارتفاع BD، ارتفاع h_c از مثلث ABC نیز هست.

گاهی به‌جای امتداد دادن ضلع AB بهتر است ضلع AC را امتداد دهیم.

۱۵۸. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. ضلع AB را از طرف A به اندازهٔ $AD=AC$ امتداد می‌دهیم و از D به C وصل می‌کنیم. مثلث DBC قابل رسم است ؛ زیرا از این مثلث ضلع $BC=a$، ضلع $BD=l$، و زاویهٔ $\hat{B}=\beta$ معلوم است. بنابراین برای رسم مثلث ABC، این مثلث را رسم می‌کنیم. سپس عمود منصف DC را رسم می‌کنیم تا DB را در رأس A قطع کند. از A به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

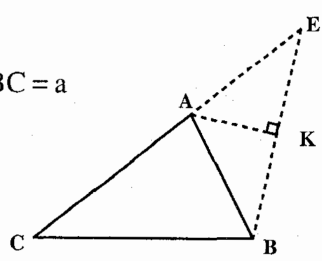


۸.۱۴.۱.۱. یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر، تفاضل دو زاویه

۱۵۹. فرض می‌کنیم $b+c=m$ و $\hat{B}-\hat{C}=\alpha$ و مثلث ABC جواب مسأله باشد (شکل).

داریم :

$$AC+AB=b+c=m \text{ و } BC=a$$



و $\hat{B}-\hat{C}=\alpha$. اگر AC را به اندازهٔ AB امتداد دهیم، پس $AE=m$ و $A\hat{B}E=\frac{۱}{۲}B\hat{A}C$.

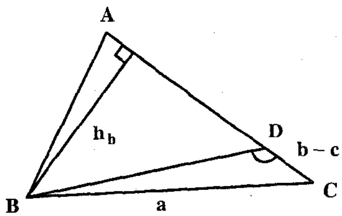
$$C\hat{B}E=C\hat{B}A+\frac{B\hat{A}C}{۲}=C\hat{B}A+۹۰^\circ-\frac{C\hat{B}A+B\hat{C}A}{۲}$$

$$=۹۰^\circ+\frac{C\hat{B}A-B\hat{C}A}{۲}=۹۰^\circ+\frac{\alpha}{۲}$$

اکنون مثلث CBE را با معلوم بودن $BC=a$ و $EC=m$ و $C\hat{B}E$ می‌توان رسم کرد، و از تقاطع عمودمنصف EB با ضلع CE، نقطهٔ A به دست می‌آید.

۱.۱.۱۴.۹. یک ضلع، تفاضل دو ضلع دیگر، زاویه

۱۶۱. فرض کنید ABC (شکل) مثلث خواسته شده باشد. روی AC، AD را برابر AB جدا کنید، به‌طوری که $CD=b-c$.
در مثلث متساوی‌الساقین ADB داریم :



$$A\hat{D}B=A\hat{B}D=\frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ-\hat{A})=۹۰^\circ-\frac{۱}{۲}\hat{A}$$

پس :

$$B\hat{D}C=۹۰^\circ+\frac{۱}{۲}\hat{A}$$

یعنی در مثلث BCD قاعدهٔ $BC=a$ ، زاویهٔ مقابل آن، $B\hat{D}C=۹۰^\circ+\frac{۱}{۲}\hat{A}$ و ضلع $CD=b-c$ را می‌دانیم، پس می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم. دو رأس B و C از این مثلث رأسهای مثلث مطلوب ABC هستند ؛ رأس سوم این مثلث، یعنی A، روی امتداد ضلع CD و عمودمنصف BD قرار دارد.
اگر شرط $a>b-c$ برقرار نباشد، رسم مثلث نامکن است. اگر این شرط برقرار باشد، زاویهٔ مفروض مثلث BCD روبه‌روی ضلع بزرگتر قرار دارد، و رسم چنین مثلثی به یک، و تنها یک طریق ممکن است. پس مسألهٔ موردنظر، یک جواب دارد.

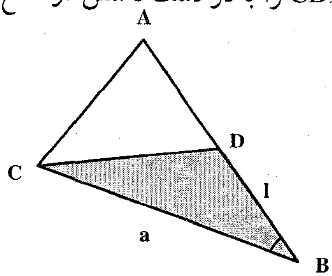
نکته. زاویهٔ BCD از مثلث کمکی BCD برابر است با زاویهٔ $\hat{C}$ از مثلث ABC، و $B\hat{D}C = ۹۰^\circ + \frac{۱}{۲}\hat{A}$ و

$$C\hat{B}D = A\hat{B}C - A\hat{B}D = \hat{B} - (۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}\hat{A})$$
$$= \hat{B} + \frac{۱}{۲}\hat{A} + \frac{۱}{۲}\hat{C} - \frac{۱}{۲}\hat{C} - ۹۰^\circ$$
$$= \frac{۱}{۲}(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}) + \frac{۱}{۲}(\hat{B}-\hat{C}) - ۹۰^\circ = \frac{۱}{۲}(\hat{B}-\hat{C})$$

همچنین ارتفاع وارد بر CD همان ارتفاع HB از مثلث ABC است. با استفاده از این رابطه‌ها می‌توان مسأله‌های زیادی را حل کرد.

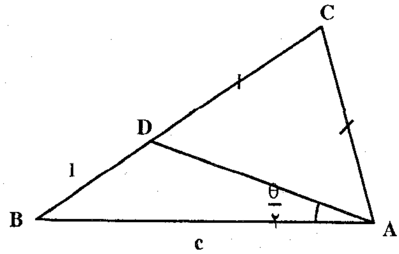
۱۶۲. از تقارن نسبت به نیمساز زاویهٔ مقابل به ضلع معین استفاده کنید.

۱۶۳. به اندازهٔ $BD = l$ روی AB جدا می‌کنیم. مثلث CDB را با در دست داشتن دو ضلع و زاویهٔ بین، می‌توان رسم نمود. بعد از رسم، BD را امتداد می‌دهیم و به اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{D}C$ روی DC جدا می‌کنیم، تا امتدادش BD را در نقطهٔ A قطع کند. مثلث ABC مثلث خواسته شده است.



۱.۱.۱۴.۱۰. یک ضلع، تفاضل دو ضلع دیگر، تفاضل دو زاویه

۱۶۵. مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم و فرض می‌کنیم که اندازهٔ ضلع $AB = c$، $\hat{A} - \hat{B} = \theta$ و $a - b = l$ معلوم باشند.

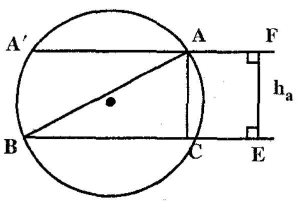


روی ضلع CB و از طرف C پاره‌خط $CD = CA$ را جدا می‌کنیم و از D به A وصل می‌کنیم. مثلث DAC متساوی‌الساقین است. از طرفی $B\hat{A}D = \frac{\hat{A}-\hat{B}}{۲} = \frac{\theta}{۲}$ است. بنابراین مثلث ABD با معلوم بودن اندازه‌های دو ضلع و یک زاویه قابل رسم است ($AB = c$ ، $BD = l$ و $B\hat{A}D = \frac{\theta}{۲}$). پس برای رسم مثلث ABC چنین عمل می‌کنیم :

مثلث ABD را با معلوم بودن اندازه‌های دو ضلع AB و BD و اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{A}D = \frac{\theta}{۲}$ رسم می‌کنیم، آن‌گاه عمودمنصف ضلع AD را رسم می‌کنیم تا امتداد BD را در نقطهٔ C قطع کند. از C به A وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله‌است.

۱.۱.۱۴.۱۱. یک ضلع، حاصلضرب دو ضلع دیگر، زاویه

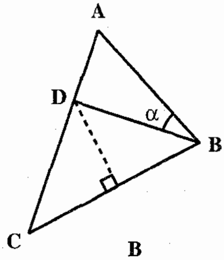
۱۶۶. اوّلاً، رأس A روی کمان درخور زاویهٔ A روبه‌رو به ضلع BC است، که بخشی از دایرهٔ محیطی است ؛ بنابراین شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC یعنی R معلوم است.



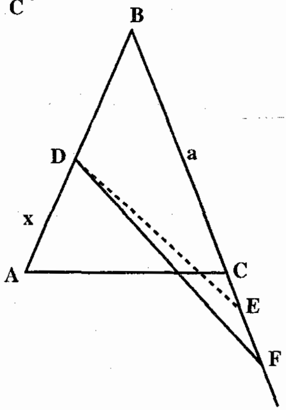
اما می‌دانیم که در هر مثلث $bc = ۲R.h_a$ است. درنتیجه اندازهٔ ارتفاع AH مقدار معلومی است $h_a = \frac{bc}{۲R}$. پس برای رسم مثلث ABC، پاره‌خط $BC = a$ را رسم کرده و کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}$ مقابل به این پاره‌خط را رسم می‌کنیم. آن‌گاه از نقطهٔ E واقع بر امتداد BC عمود EF را به اندازهٔ h_a اخراج کرده، از F خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا کمان درخور زاویهٔ A را در نقطهٔ A' قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم. این مثلث جواب مسأله است.

۱.۱.۱۴.۱۲. یک ضلع، حاصلضرب دو ضلع دیگر، تفاضل دو زاویه

۱۶۷. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله فرض می‌کنیم. عمودمنصف ضلع BC را رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ D قطع کند. از D به B وصل می‌کنیم. زاویهٔ $A\hat{B}D = \hat{B} - \hat{C} = \alpha$ معلوم است و ضلع $BC = a$ معلوم است. همچنین حاصلضرب



دو ضلع AB و AC یعنی $bc = 1$ را فرض می‌کنیم....



۱۶۸. یک مثلث متساوی‌الساقین ABC، $(AB = BC)$ و یک مثلث دلخواه DBF را رسم می‌کنیم، به قسمی که داشته باشیم:

$$AB.BC = DB.BF$$

اگر $AB = BC = a$ باشد، دو پاره‌خط $AD = CE = x$ را اختیار می‌کنیم. داریم:

$$AB.BC = a^۲$$

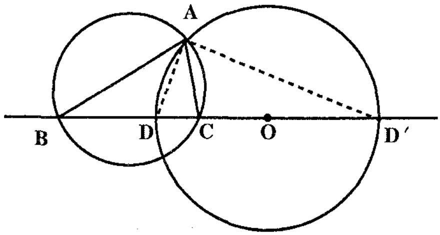
$$DB.BE = (a - x)(a + x) = a^۲ - x^۲$$

و هرچه‌قدر که x کوچک باشد، این حاصلضرب از $a^۲$ کمتر است.

امّا برای آن که حاصلضرب $DB:BF = a^۲$ باشد، لازم است که CF خیلی بزرگتر از CE باشد. از آن‌جا $DF > DE$. اما می‌دانیم که $AC < DE$ است. درنتیجه مثلث متساوی‌الساقین، مثلثی‌است که قاعده‌اش کمترین مقدار ممکن را داراست.

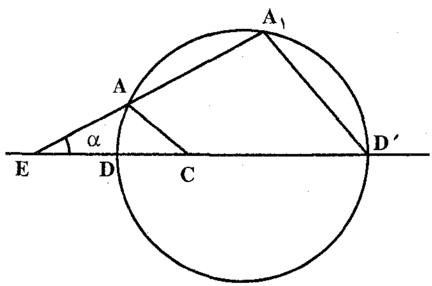
۱۳.۱۴.۱.۱. یک ضلع، نسبت دو ضلع دیگر، زاویه

۱۶۹. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مسأله باشد. چون $\frac{AB}{AC} = k$ مقدار معلومی است. پس یک مکان هندسی نقطهٔ A، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط BC را به نسبت k تقسیم می‌کند (دایرهٔ آپولونیوس) از طرفی چون اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ و طول پاره‌خط BC معلوم است، مکان هندسی دیگر نقطهٔ A، کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}$، روبه‌رو



به پاره‌خط BC است. بنابراین برای رسم مثلث ABC چنین عمل می‌کنیم :
پاره‌خط $BC = a$ را رسم می‌کنیم و دو نقطهٔ D و ′D را روی BC و در امتداد آن طوری به‌دست می‌آوریم که $\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC}$ باشد (این دو نقطه پای نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی رأس A می‌باشند). آن‌گاه دایره‌ای به قطر ′DD رسم می‌کنیم (دایرهٔ آپولونیوس) ؛ سپس کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}$ روبه‌رو به پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دو مکان هندسی رأس A از مثلث ABC است. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC رسم می‌شود.

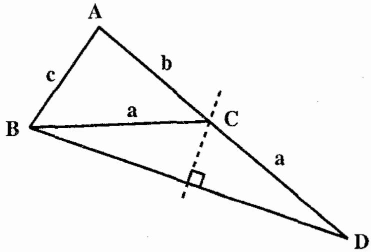
۱۷۰. مسأله را حل شده انگاشته، مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. چون $\frac{AB}{AC} = k$ است، پس یک مکان هندسی رأس A، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط BC را به نسبت k تقسیم می‌کند (دایرهٔ آپولونیوس). از طرفی اندازهٔ زاویهٔ B معلوم است. پس رأس A روی ضلع دیگر زاویهٔ B قرار دارد.



بنابراین برای رسم مثلث ABC زاویهٔ B را به اندازهٔ داده شده رسم می‌کنیم. سپس روی یک ضلع آن پاره‌خط $BC = a$ را جدا می‌کنیم و دو نقطهٔ D و ′D را روی آن طوری پیدا می‌کنیم که $\frac{DB}{DC} = \frac{D'B}{D'C} = \frac{AB}{AC} = k$ باشد. دایره به قطر ′DD را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دایره با ضلع دیگر زاویهٔ B، رأس A است. از A به C وصل می‌کنیم مثلث ABC جواب مسأله است.

۱۴.۱۴.۱.۱. یک ضلع، رابطهٔ بین ضلعها، زاویه

۱۷۱. اگر ABC مثلث مطلوب باشد، هرگاه ضلع AC را تا نقطهٔ D به اندازهٔ a امتداد دهیم،

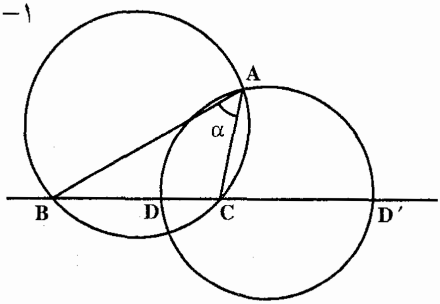


مثلث ABD را با معلومات زاویهٔ $\hat{A}$ و $AB = c$ و $AD = c.k$ می‌توان رسم کرد. عمودمنصف BD رأس C را مشخص می‌کند (شکل).
شرط امکان مسأله آن است که $a + b > c$ باشد، یعنی $k > ۱$ باشد.

۱۷۲. از رابطهٔ $\frac{b+c}{b-c} = \frac{k}{۱}$ نتیجه می‌شود:

$$\frac{b+c}{b-c} = \frac{k}{۱} \Rightarrow \frac{(b+c)+(b+c)}{(b+c)-(b-c)} = \frac{k+۱}{k-۱}$$

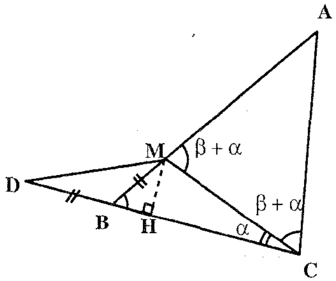
$$\Rightarrow \frac{۲b}{۲c} = \frac{k+۱}{k-۱} \Rightarrow \frac{b}{c} = \frac{k+۱}{k-۱} = k'$$



با توجه به این که ضلع BC معلوم است، یک مکان هندسی رأس A، دایره‌ای است که قطرش پاره‌خط BC را به نسبت k تقسیم می‌کند. از طرفی چون زاویهٔ $\hat{A}$ معلوم است، پس مکان هندسی دیگر رأس A کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}$ روبه‌رو به ضلع BC است. این دو مکان هندسی را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد آنها، رأس A از مثلث ABC است. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۱.۱.۱۴.۱۵. یک ضلع، رابطهٔ بین ضلعها، رابطهٔ بین زاویه‌ها

۱۷۳. اگر ABC مثلث مطلوب باشد، چون از ضلع AB طول AM را مساوی AC جدا کنیم، قطعهٔ BM مساوی با $c - b$ می‌شود و همچنین اگر ضلع a را به طول $BD = BM$ امتداد دهیم، مثلث BMD متساوی‌الساقین و از آن‌جا زاویهٔ $D\hat{M}B = \frac{\beta}{۲}$ می‌شود و چون مثلث AMC نیز متساوی‌الساقین است و زاویهٔ $A\hat{M}C$ زاویهٔ خارجی مثلث MBC



است، پس اگر زاویهٔ MCB را مساوی α بگیریم:

$A\hat{M}C = A\hat{C}M = \beta + \alpha$ و چون $\beta + \alpha + \alpha = ۲\beta$، پس $\alpha = \frac{\beta}{۲}$.

پس مثلث MDC نیز متساوی‌الساقین است و بنابراین راه حل زیر به‌دست می‌آید: ضلع $BC = a$ را به‌طول $BD = c - b$، $(a + b - c = d \Rightarrow c - b = a - d)$ امتداد داده و به مرکز B و شعاع $c - b$ کمانی رسم می‌کنیم تا عمودمنصف DC را در نقطهٔ M قطع کند، از M به B وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا ضلع زاویهٔ $B\hat{C}X = ۲\hat{\beta}$ را در نقطهٔ A قطع کند، ABC مثلث مطلوب است (شکل).

شرط امکان مسأله آن است که $BH < BM$ باشد:

$$BH = DH - DB = \frac{DC}{۲} - DB = \frac{a + c - b}{۲} - (c - b) = \frac{a - c + b}{۲}$$

$$BM = BD = c - b$$

$$\frac{a - c + b}{۲} < c - b \Rightarrow a < ۳(c - b)$$

۱۶.۱۴.۱.۱. یک ضلع، مجموع مربعهای دو ضلع دیگر، زاویه

۱۷۴. فرض می‌کنیم از مثلث ABC، طول ضلع $BC = a$ و $\hat{A} = \alpha$ و $b^۲ + c^۲ = k^۲$ معلوم باشد. ابتدا $BC = a$ را رسم می‌کنیم. رأس A از یک طرف روی قوس دایره‌ای است که از A و B گذشته و حاوی زاویهٔ α باشد و از طرف دیگر روی دایره‌ای است که مکان نقطه‌هایی را که مجموع مربعهای فاصله‌هایشان از B و C مساوی $k^۲$ باشد، تشکیل می‌دهد. با رسم این دو مکان، نقطهٔ تلاقی آنها یعنی A به‌دست می‌آید.

توضیح. مکان نقطه‌هایی که مجموع فاصله‌هایشان از دو نقطهٔ ثابت B و C مساوی $k^۲$ باشد، دایره‌ای است که مرکز آن وسط BC است؛ زیرا اگر A را یکی از نقطه‌های مکان و O را وسط BC فرض کنیم، بنا بر قضیهٔ میانه‌ها داریم:

$$AB^2 + AC^2 = 2OA^2 + \frac{1}{2}BC^2$$

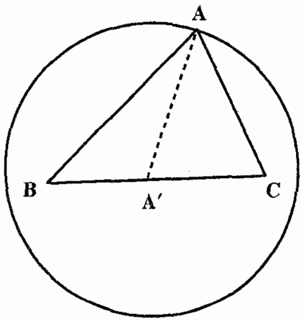
و یا اگر طول $BC = a$ باشد، خواهیم داشت :

$$OA^2 = \frac{1}{4}(2k^2 - a^2) \text{ و یا } OA = \frac{1}{2}\sqrt{2k^2 - a^2}$$

می‌بینیم که طول OA ثابت است، و بنابراین A روی دایره‌ای به مرکز O قرار دارد.

۱۷۵. میانهٔ BC را رسم می‌کنیم. طبق رابطهٔ میانه‌ها داریم :

$$m_a = \sqrt{\frac{b^2 + c^2}{2} - \frac{a^2}{4}}$$



پس m_a معلوم است. a را رسم کرده، $(BC = a)$ به مرکز وسط آن و شعاع m_a دایره‌ای رسم می‌کنیم. از نقطهٔ B زاویه‌ای برابر B رسم می‌کنیم تا دایره را در A قطع کند. ABC جواب مسأله است.

بحث. اگر $\frac{a}{2} < m_a$ یعنی $a^2 < b^2 + c^2$ باشد، B داخل دایره است و ضلع آن حتماً دایره را قطع می‌کند و در این صورت همیشه یک جواب خواهیم داشت. (برای نقطهٔ دیگر برخورد، زاویهٔ مثلث حاصل مکمل B است و درنتیجه جواب نیست). ولی اگر $a^2 > b^2 + c^2$ یعنی B خارج دایره باشد، بسته به این که ضلع زاویهٔ B متقاطع یا مماس با دایره باشد، و یا اصلاً آن را قطع نکند، دو یا یک جواب خواهیم داشت، و یا جواب نداریم.

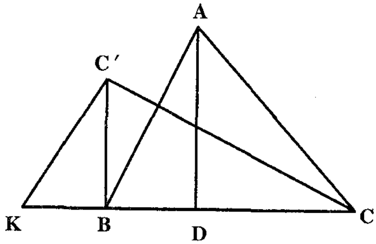
البته در هر دو حالت باید $a^2 < 2(b^2 + c^2)$ باشد که در حالت اول شرط $a^2 < b^2 + c^2$ شامل این شرط نیز هست.

۱.۱.۱۴.۱۷. یک ضلع، تفاضل مربعهای دو ضلع دیگر، زاویه

۱۷۶. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC مثلث مطلوب باشد. پس رابطهٔ :

$$b^2 - c^2 = l^2 \qquad (1)$$

برقرار است. حال ارتفاع AD را رسم می‌کنیم. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ADC و ADB



بترتیب رابطه‌های زیر برقرار است :

$$AC^۲ = b^۲ = AD^۲ + DC^۲ \qquad (۲)$$

$$AB^۲ = c^۲ = AD^۲ + DB^۲ \qquad (۳)$$

چون رابطهٔ (۳) را از رابطهٔ (۲) کم کنیم، با توجه به رابطهٔ (۱) داریم :

$$DC^۲ - DB^۲ = b^۲ - c^۲ = l^۲ \quad \Rightarrow$$

و

$$(DC + DB)(DC - DB) = l^۲$$

چون

$$DC + DB = a$$

پس داریم :

$$DC - DB = \frac{l^۲}{a} \qquad (۴)$$

اگر از نقطهٔ B عمودی بر BC اخراج نماییم و در روی این عمود $BC' = l$ را معین کنیم و سپس C' را به نقطهٔ C وصل کنیم و از نقطهٔ C' عمودی‌بر CC' اخراج نماییم تا امتداد BC را در K قطع کند، خواهیم داشت :

$$BK = DC - DB \qquad (۵)$$

(زیرا در مثلث قائم‌الزاویهٔ $KC'C$ می‌توان نوشت :

$$C'B^۲ = KB.BC$$

ویا

$$l^۲ = KB.a$$

ویا

$$KB = \frac{l^۲}{a}$$

با توجه به رابطهٔ (۴) :

$$BK = DC - DB$$

خواهد بود) از طرفی با توجه به رابطهٔ (۵) و به شکل داریم :

$$DC = \frac{KC}{۲} = \frac{BC + KB}{۲} = \frac{a + KB}{۲}$$

ویا

$$DC = \frac{a + \frac{l^۲}{a}}{۲}$$

پس برای حل مسأله کافی است اول پاره‌خط BC را مساوی a رسم نموده و در روی آن

نقطهٔ D را طوری اختیار کنیم که :
$$DC = \frac{a + KB}{۲}$$
باشد و سپس کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}$ را روی ضلع BC بسازیم و عمودی که از D بر BC اخراج می‌شود، قوس حاوی BC را در نقطه‌های A و A' قطع می‌کند. مثلثهای ABC و $A'BC$ جوابهای مسأله‌اند. (برای پیدا کردن اندازهٔ $DC = \frac{a}{۲} + \frac{l^۲}{۲a}$ لازم است $\frac{a}{۲}$ و $\frac{l^۲}{۲a}$ را ساخته و آنها را با هم جمع کنیم تا DC ساخته شود. اما برای ساختن $\frac{l^۲}{۲a}$ چنین عمل می‌کنیم :
$$\frac{l^۲}{۲a} = x \quad \text{یا} \quad \frac{۲a}{l} = \frac{l}{x}$$
جزء چهارم این تناسب، یعنی x، به آسانی ترسیم می‌گردد) تمام ترسیمات را بر عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

۱۷۷. مسأله را حل شده می‌گیریم و وسط ضلع BC را O و پای ارتفاع رأس A را H می‌نامیم. می‌دانیم که :
$$b^۲ - c^۲ = ۲a.OH \Rightarrow OH = \frac{b^۲ - c^۲}{۲a} = \text{مقدار معلوم}$$
پس یک مکان هندسی رأس A خط راستی عمود بر BC در نقطهٔ H است، به قسمی که اگر O وسط BC باشد، $OH = \frac{b^۲ - c^۲}{۲a}$ است. از طرفی چون a و $\hat{A}$ معلومند، پس مکان هندسی دیگر رأس A کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}$ روبه‌رو به پاره‌خط BC است. بنابراین برای رسم مثلث ABC، پاره‌خط $BC = a$ را رسم می‌کنیم، سپس دو مکان هندسی ذکر شده در بالا را رسم می‌نماییم. نقطهٔ برخورد آنها رأس A است. از A به B و C وصل می‌کنیم.

۱۸.۱۴.۱.۱. تفاضل دو ضلع، نسبت دو ضلع، زاویه

۱۷۸. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مسأله باشد. پس رابطه‌های :
$$a - b = l \qquad (۱)$$

$$\frac{a}{b}=\frac{p}{q} \qquad (۲) \qquad و$$

برقرار است. رابطهٔ (۲) را می‌توان چنین نوشت:

$$\frac{l}{b}=\frac{p-q}{q}$$

از این رابطه‌ها اندازهٔ b از طریق ترسیم محاسبه می‌شود (چهارمین جزء تناسب).

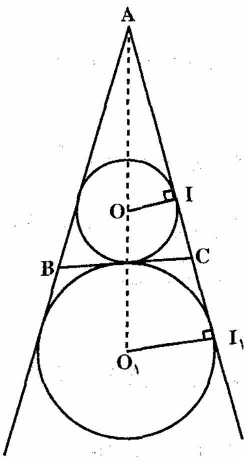
با توجه به رابطهٔ (۱) اندازهٔ ضلع a به‌دست می‌آید. بعد از معلوم شدن a و b، چون $\hat{C}$ هم معلوم است، پس مثلث قابل ترسیم است (ترسیم را بر عهدهٔ خواننده می‌گذاریم).

۱.۱.۱۴.۱۹. رابطهٔ بین ضلعها، زاویه

۱۷۹. این مسأله حالت خاصی از مسألهٔ زیر است:

از مثلثی محیط و یک ضلع و زاویهٔ مقابل به این ضلع داده شده است. مثلث را رسم کنید.

اگر ABC، مثلث مطلوب باشد،

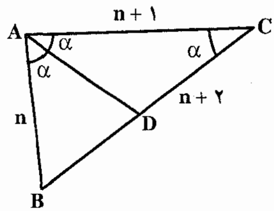


$$AI = p-a=\frac{۳a}{۲}-a=\frac{a}{۲}$$

$$AI_1 = p = \frac{۳a}{۲}$$

برای رسم مثلث، ابتدا زاویهٔ $\hat{A}$ را رسم کرده، $AI=\frac{a}{۲}$ و $AI_1=\frac{۳a}{۲}$ را از نقطهٔ A برروی یک ضلع آن نقل می‌کنیم. نیمساز زاویهٔ A را رسم کرده و از نقطه‌های I و I_1، عمودهایی بر AI_1 اخراج می‌کنیم تا نیمساز را در O و O_1، مرکزهای دایره‌های محاطی داخلی و محاطی خارجی نظیر ضلع a قطع کند. BC مماس مشترک دو دایرهٔ O و O_1 است. با رسم این مماس مشترک، مثلث مشخص می‌شود (شکل). شرط امکان مسأله آن است که دایره‌های O و O_1 متخارج و یا مماس خارج باشد.

۱۸۰. گزینهٔ (الف) درست است. با توجه به شکل نتیجه می‌شود که طول نیمساز زاویهٔ A با طول CD برابر است. اما براساس دو قضیه که هر دو راجع به نیمساز در مثلث



می‌باشند، طول نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC از دستور $d_a = \frac{۲}{b+c}\sqrt{bcp(p-a)}$ محاسبه می‌شود و نیز طول قطعه‌های CD و BD از دستورهای $BD = \frac{ac}{b+c}$ و $CD = \frac{ab}{b+c}$ محاسبه می‌شوند که در دستور اول P نصف محیط مثلث می‌باشد، بنابراین می‌توان نوشت:

$$AD = CD$$

$$\Rightarrow \frac{۲}{۲n+۱}\sqrt{۳n(n)(\frac{n+۱}{۲})(\frac{n-۱}{۲})} = \frac{(n+۲)(n+۱)}{۲n+۱}$$

$$\Rightarrow n+۲ = \sqrt{۳n(n-۱)}$$

$\Rightarrow n = ۴ \Rightarrow ۴,۵,۶$ ضلعهای مثلث

و تنها مثلث با ویژگی فوق همین مثلث می‌باشد و مسأله یک جواب منحصر به فرد دارد.

۱.۱.۱۴.۲۰. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۸۱. با معلوم بودن c و b + c اندازهٔ ضلع b معلوم است، و چون اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ نیز معلوم است، پس مثلث با معلوم بودن دو ضلع و زاویهٔ بین آنها رسم می‌شود.

۱.۱.۱۴.۲۱. مسأله‌های ترکیبی

۱۸۲. در حالت $n = ۱$، داریم $\hat{B} = \hat{C}$، یعنی مثلث متساوی‌الساقین و همهٔ زاویه‌های آن معلوم است، بنابراین با دانستن اندازهٔ یک ضلع، مثلث را می‌توان رسم کرد. در حالت $n = ۲$ داریم، $\hat{B} = ۲\hat{C}$ که با داشتن دو ضلع، مثلث قابل رسم است. برای $n = ۳$ داریم، $\hat{B} = ۳\hat{C}$ که با داشتن دو ضلع b و c می‌توان مثلث را رسم کرد. زیرا داریم:

$$\frac{b}{\sin\hat{B}} = \frac{c}{\sin\hat{C}} \Rightarrow \frac{b}{\sin ۳\hat{C}} = \frac{c}{\sin\hat{C}}$$

$$\Rightarrow \frac{b}{3\sin\hat{C}-4\sin^3\hat{C}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}\Rightarrow \frac{b}{\sin\hat{C}(3-4\sin^2\hat{C})}=\frac{c}{\sin\hat{C}}$$

$$\Rightarrow 3-4\sin^2\hat{C}=\frac{b}{c}\Rightarrow 3-\frac{b}{c}=4\sin^2\hat{C}$$

$$\Rightarrow \sin^2\hat{C}=\frac{3c-b}{4c}$$

از آن‌جا اندازهٔ زاویهٔ $\hat{C}$ به‌دست می‌آید. درنتیجه زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{A}$، و همچنین ضلع a مشخص می‌شود.

در حالت $n=4$ داریم، $\hat{B}=4\hat{C}$، از آن‌جا می‌توان نوشت:

$$\frac{b}{\sin 4\hat{C}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}\Rightarrow \frac{b}{2\sin 2\hat{C}\cos 2\hat{C}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}\Rightarrow$$

$$\frac{b}{4\sin\hat{C}\cos\hat{C}\cos^2\hat{C}}=\frac{c}{\sin\hat{C}}\Rightarrow$$

$$4\cos\hat{C}(2\cos^2\hat{C}-1)=\frac{b}{c}\Rightarrow$$

$$8\cos^3\hat{C}-4\cos\hat{C}-\frac{b}{c}=0$$

زاویهٔ $\hat{C}$ محاسبه می‌شود، که با داشتن اندازهٔ زاویهٔ $\hat{C}$، زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{A}$ از مثلث و درنتیجه ضلع a نیز مشخص است.

حال اگر همین حالت، یعنی $n=4$ را با استفاده از رابطهٔ کسینوسها حل کنیم، داریم:

$$n=4\Rightarrow \hat{B}=4\hat{C} \quad \text{و}$$

$$\begin{cases} b^2=a^2+c^2-2ac\cos\hat{B} \\ c^2=a^2+b^2-2ab\cos\hat{C} \end{cases}$$

$$\Rightarrow \cos\hat{C}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\ ,\ \cos\hat{B}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\Rightarrow \cos 4\hat{C}=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}\Rightarrow 2\cos^2 2\hat{C}-1=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\Rightarrow 2(2\cos^2\hat{C}-1)^2-1=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\Rightarrow 2(4\cos^4\hat{C}+1-4\cos^2\hat{C})=\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}$$

$$\Rightarrow 8\cos^4\hat{C}-8\cos^2\hat{C}+2-\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=0 \quad \text{و} \quad \cos\hat{C}=\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}$$

$$\Rightarrow 8\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^4-8\left(\frac{a^2+b^2-c^2}{2ab}\right)^2+2-\frac{a^2+c^2-b^2}{2ac}=0$$

$$\Rightarrow \cdots$$

۱.۱.۱۵. ضلع؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱.۱۵.۱.۱. ضلع، محیط

۱.۱.۱۵.۱.۱.۱. یک ضلع، محیط

۱۸۳. با داشتن $a+b+c=2p$ و اندازهٔ a، اندازهٔ مجموع دو ضلع دیگر، یعنی $b+c$ مشخص است. بنابراین اگر ضلع AB را به اندازهٔ $AD=AC$ امتداد دهیم، و از D به C وصل کنیم، از مثلث BDC اندازهٔ دو ضلع $BC=a$ و $BD=b+c$ معلوم است. بنابراین نمی‌توان این مثلث و درنتیجه مثلث ABC را رسم کرد.
برای این که مثلث ABC قابل رسم باشد، لازم است یک جزء دیگر از مثلث که می‌تواند زاویه یا ضلع باشد، داده شود. به‌عنوان مثال با معلوم بودن اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ یا $\hat{B}$، یا ارتفاع h_a، مثلث قابل رسم است.

۲.۱.۱۵.۱.۱.۱. نسبت ضلعها، محیط

۱۸۴. مثلث قائم‌الزاویهٔ $ABC(\hat{A}=90^\circ)$ را درنظر می‌گیریم، داریم:

$$a+b+c=2p \qquad (1)$$

$$a^2=b^2+c^2 \qquad (2)$$

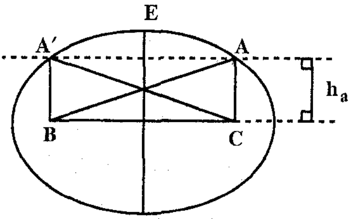
$$\frac{b^2}{c^2}=k^2 \qquad (3)$$

از حل دستگاه سه معادلهٔ بالا، اندازه‌های a، b و c مشخص می‌شود. درنتیجه مثلث قابل رسم است.

۱.۱.۱۵.۲. ضلع، مساحت

۱.۱.۱۵.۲.۱. یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر، مساحت

۱۸۵. از رابطهٔ $S=\frac{۱}{۲}a.h_a$، ارتفاع وارد بر ضلع a، یعنی $h_a=\frac{۲S}{a}$ به‌دست می‌آید و چون ضلع a معلوم است، پس دو رأس B و C از مثلث مشخص می‌شود و رأس A از طرفی بر خطی واقع است که موازی BC بوده، و به فاصلهٔ h_a از آن واقع است. از طرف دیگر چون مجموع $b+c=l$ است، یعنی رأس A بر محیط یک بیضی قرار دارد که قطر بزرگتر آن مساوی l و به کانونهای B و C می‌باشد. محل برخورد بیضی با خط ذکر شده، رأس دیگر مثلث است. (شکل).



شرط امکان مسأله آن است که $h_a \le OE$ (OE نصف قطر کوتاهتر بیضی است).

$$b^۲=OE^۲=BE^۲-BO^۲=\frac{l^۲}{۴}-\frac{a^۲}{۴}=\frac{l^۲-a^۲}{۴}$$

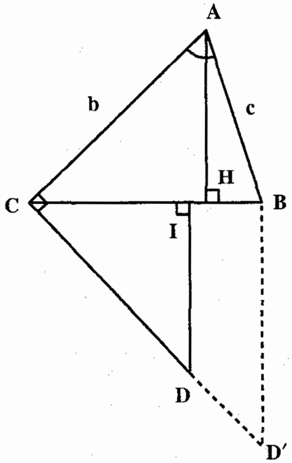
پس:
$$S\le\frac{a}{۴}\sqrt{l^۲-a^۲}$$

و یا
$$\frac{a}{۲}h_a\le\frac{a}{۴}\sqrt{l^۲-a^۲}$$

و یا
$$h_a\le\sqrt{\frac{l^۲-a^۲}{۴}}\Rightarrow h_a\le\frac{۱}{۲}\sqrt{l^۲-a^۲}$$

۱.۱.۱۵.۳. ضلع، رابطهٔ متری

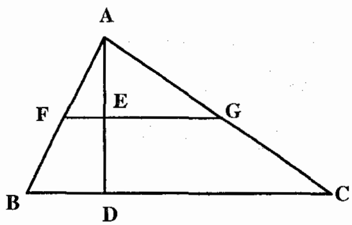
۱۸۶. **راه اول.** چون فرض کنیم که مثلث ABC، چنان باشد که $\frac{AH}{BC}=k$ باشد، چون از نقطهٔ C عمود CD را بر ضلع b برابر b اخراج کنیم و از D عمودی بر CB فرود



می‌آوریم. بدیهی است که دو مثلث ACH و CDI برابر خواهند بود؛ زیرا در وتر و در زاویه‌های $H\hat{C}D$ و $C\hat{A}H$ برابرند، پس CI برابر ارتفاع AH خواهد بود. اگر آن را به نسبت k تغییر دهیم، نقطهٔ I بر نقطهٔ B منطبق می‌شود و متجانس (یا متشابه) مثلث AID، مثلث ABD′ می‌شود که در آن:

$$CB = \frac{۱}{k} AH \ , \ \ CD' = \frac{۱}{k} CD$$

است. پس برای ترسیم مثلث بر ضلع b عمودی برابر $\frac{b}{k}$ اخراج می‌کنیم و دایرهٔ به قطر آن رسم می‌کنیم. دایره‌ای که به مرکز A و به شعاع C رسم شود، آن را در نقطهٔ B قطع می‌کند و مثلث ABC به‌دست می‌آید.



راه دوم. فرض کنید ABC مثلث خواسته شده باشد (شکل). روی ارتفاع AD، پاره‌خط AE را برابر q جدا می‌کنیم و از نقطهٔ E، خط FEG را به موازات BC رسم می‌کنیم. با توجه به مثلثهای متشابه AFG و ABC داریم:

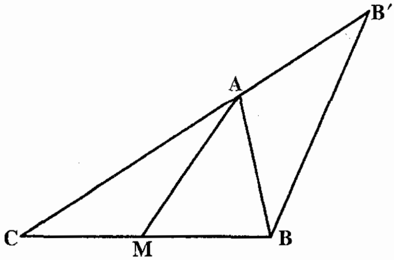
$$\frac{AF}{AG} = \frac{AB}{AC} = \frac{c}{b} \ , \ \ \frac{FG}{AE} = \frac{BC}{AD} = \frac{p}{q}$$

پس $FG = p$.

پس در مثلث AFG که با مثلث خواسته شده متشابه است، قاعدهٔ $FG = p$، ارتفاع $AE = q$ و نسبت دو ضلع $AF : AG = c : b$ را می‌دانیم؛ پس می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم. پس از رسم مثلث AFG، روی AF، پاره‌خط AB را برابر c جدا می‌کنیم. خطی که از B به‌موازات FG رسم می‌شود، امتداد AG را در C، یعنی رأس سوم مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند.

مسأله ممکن است دو یا یک جواب داشته باشد، یا اصلاً جواب نداشته باشد.

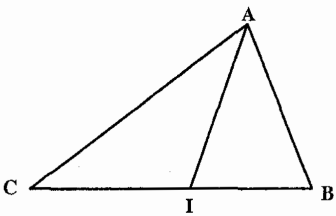
۱۸۷. چون ضلع AC را به‌قدر $AB' = AB$ امتداد دهیم، بدیهی است که $B'B = ۲m_a$ خواهد بود. پس $\frac{BB'}{BC} = ۲k$ خواهد بود و چون $CB' = b + c$ معلوم است، مکان B



دایره‌ای است معلوم (نسبت فاصله‌های نقطه‌های آن از دو نقطهٔ B' و C در دست است). پس از رسم این دایره چون آن را با دایرهٔ به شعاع c و به مرکز A قطع کنیم، رأس B، سپس مثلث ABC به‌دست می‌آید.

۴.۱۵.۱.۱. ضلع، محیط، مساحت

۱۸۸. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. با داشتن $2p$ و a، اندازهٔ $a+c$ مشخص می‌شود. از طرفی $a.h_a = 2S$ است، بنابراین با معلوم بودن a، و S اندازهٔ h_a به‌دست می‌آید. با در دست داشتن a، $b+c$ و h_a، مثلث قابل رسم است.



۱۸۹. چون ملاحظه کنیم که:

$$\frac{IB}{IC}=\frac{c}{b}$$

پس:

$$\frac{IC}{BC}=\frac{b}{b+c}$$

و چون $\frac{IA}{BC}=k$، پس:

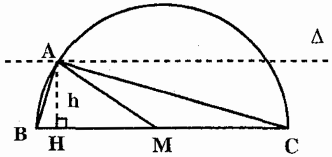
$$\frac{IA}{IC}=\frac{k(b+c)}{b}$$

معلوم است و مکان I دایرهٔ معلوم است (نسبت فاصله‌های نقطه‌های دایره از دو نقطه در دست است). اکنون چون ملاحظه کنیم که:

$$\frac{CI}{CB}=\frac{b}{b+c}$$

تجانسی به مرکز C و به نسبت فوق، مکان B را بر روی دایرهٔ متجانس دایرهٔ قبل به‌دست می‌دهد. اکنون اگر به مرکز A و به شعاع c این دایره را قطع کنیم نقطهٔ B، سپس مثلث ABC به‌دست می‌آید.

۵.۱۵.۱.۱. ضلع، رابطهٔ بین ضلعها، رابطهٔ متری



۱۹۰. چون $h_a=\frac{m_a}{2}$ پس، $s=\frac{1}{2}a.h_a=\frac{m_a^2}{4}$ به‌دست می‌آید. از طرف دیگر:

$$m_a = AM = \frac{۱}{۲}\sqrt{۲(b^۲+c^۲)-a^۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{۴a^۲-a^۲} = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

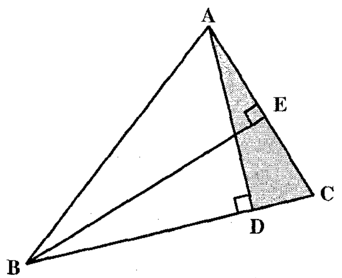
اندازهٔ میانهٔ AM به‌دست می‌آید. رأس A بر خط Δ موازی BC و به فاصلهٔ h از آن واقع است و همچنین رأس A بر محیط دایره‌ای به مرکز M (وسط BC) و شعاع AM قرار دارد. نقطهٔ برخورد دایره و خط Δ، رأس A را نشان می‌دهد (شکل). شرط امکان مسأله آن است که خط Δ محیط دایره را قطع کند، یعنی:

$$h < AM \Rightarrow \frac{m_a}{۲} \le \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

و یا $m \le \sqrt{۳}$ باشد.

۱.۱.۱۶. ارتفاع، میانه، نیمساز؛ پاره‌خط، خط

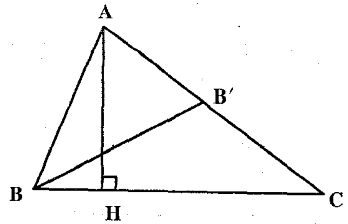
۱.۱۶.۱.۱. ارتفاع، پاره‌خط



۱۹۱. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب آن می‌گیریم. ارتفاعهای AD و BE را رسم می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC با معلوم بودن اندازهٔ دو ضلع زاویهٔ قائمه رسم می‌شود. سپس روی AC پاره‌خط AE را به اندازهٔ داده شده جدا می‌کنیم تا امتداد CD را درB، رأس دیگر مثلث قطع کند. از A به B وصل می‌کنیم.

۲.۱۶.۱.۱. میانه، پاره‌خط

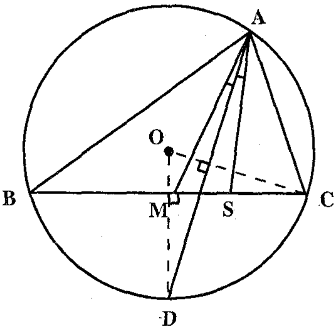
۱۹۲. ابتدا پاره‌خط BC را به طول $BC = HB + HC = a$ رسم می‌کنیم، آن‌گاه از نقطهٔ H روی آن عمودی بر BC اخراج می‌کنیم. داریم:



$\frac{CB'}{CA} = \frac{۱}{۲}$، یعنی A مجانس نقطهٔ B' است. نسبت به مرکز ثابت C، و با نسبت ۲، بنابراین، چون مکان B' دایره‌ای است به شعاع BB' و

مرکز B، مکان A نیز مجانس این دایره نسبت به مرکز C، و با نسبت ۲ می‌شود، این دایره را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد آن با عمود بر BC در نقطهٔ H، نقطهٔ A است، از A به B و C وصل می‌کنیم.

۱۹۳. مثلث را رسم شده فرض می‌کنیم. میانهٔ AM و شبه میانهٔ AS را رسم می‌کنیم. مثلث MAS با معلوم بودن سه ضلع قابل رسم است، بعلاوه نیمساز زاویهٔ MAS، نیمساز زاویهٔ A از مثلث ABC است. این نیمساز را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ M عمودی بر MS اخراج می‌کنیم تا نیمساز زاویهٔ A را در نقطهٔ D که روی دایرهٔ محیطی مثلث ABC است، قطع کند. بدیهی است که عمودمنصف وتر AD از نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC می‌گذرد. بنابراین مرکز دایرهٔ محیطی مثلث و شعاع آن نیز مشخص است. پس برای رسم مثلث ABC، با توجه به داده‌های مسأله چنین عمل می‌کنیم.

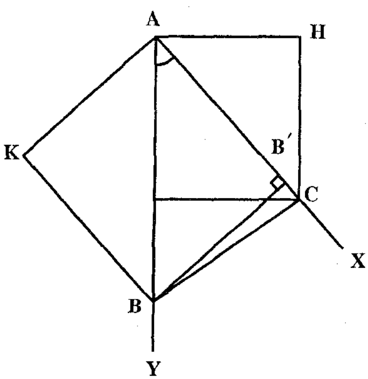


مثلث MAS را رسم کرده، سپس نیمساز زاویهٔ MAS را رسم می‌کنیم و از M عمودی بر MS اخراج می‌کنیم تا نیمساز رسم شده را در D قطع کند. عمودمنصف AD را رسم می‌کنیم تا امتداد DM را در O قطع کند. به مرکز O و به شعاع OD دایره‌ای رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد MS با این دایره، دو رأس B و C است. از B و C به A وصل می‌کنیم. مثلث ABC به‌دست می‌آید.

۱.۱.۱۷. ارتفاع، میانه، نیمساز؛ زاویه

۱.۱.۱.۱۷. ارتفاع، زاویه

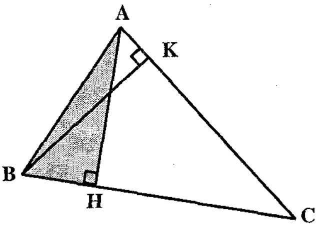
۱.۱.۱.۱.۱۷. دو ارتفاع، یک زاویه



۱۹۴. زاویهٔ $Y\hat{A}X$ را برابر $\hat{A}$ رسم می‌کنیم (شکل) و از A عمودهای AK و AH را بر AX و AY به‌اندازهٔ ارتفاعهای داده شده اخراج می‌کنیم. از K و H دو خط به موازات

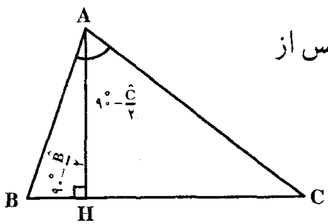
AX و AY می‌کشیم تا AY را در B و AX را در C قطع کند، مثلث ABC جواب مسأله است.

۱۹۵. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مسأله باشد. ارتفاعهای AH و BK را رسم می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH با معلوم بودن یک ضلع و یک زاویهٔ حاده قابل رسم است و ضلع AC بر دایره‌ای به مرکز B و به شعاع BK مماس است. پس برای حل مسأله مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH را با معلوم بودن $AH = h_a$ ، $\hat{B}$ و $\hat{H} = ۹۰°$ رسم می‌کنیم. آن‌گاه به مرکز B و به شعاع BK دایره‌ای رسم می‌کنیم و از نقطهٔ A مماسی بر این دایره رسم می‌کنیم تا BHC را در نقطهٔ C قطع کند. مثلث ABC جواب مسأله است.



۲.۱.۱۷.۱.۱. یک ارتفاع، دو زاویه

۱۹۶. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. مثلث ABC را در حالت دو زاویه و ضلع بین رسم می‌کنیم : $\hat{H} = ۹۰°$ ، $AH = h$ و $\hat{A} = ۹۰ - \frac{\hat{B}}{۲}$ سپس از A خطی رسم می‌کنیم که با AH زاویه‌ای برابر $۹۰ - \frac{\hat{C}}{۲}$ تشکیل دهد و BH را در C قطع کند.



۳.۱.۱۷.۱.۱. مجموع دو ارتفاع، دو زاویه

۱۹۷. ارتفاع BB' را به اندازهٔ ارتفاع CC' امتداد می‌دهیم. از نقطهٔ D عمودی بر امتداد BB' فرود می‌آوریم تا امتداد AB را در E قطع کند :

$$\frac{AB}{AC} = \frac{BB'}{CC'}$$

$$\Rightarrow AC.BB' = AB.CC' = ۲S$$

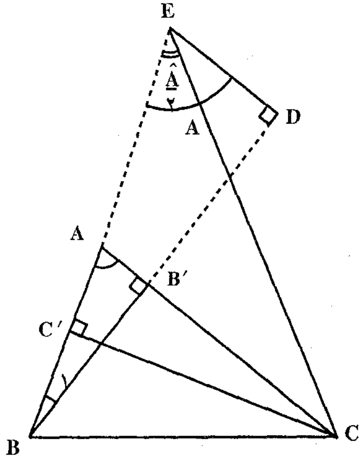
اما $B'D = CC'$ ، پس در مثلث BED داریم :

$$\frac{AB}{AE} = \frac{BB'}{CC'}$$

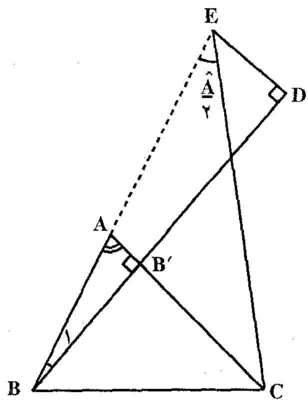
و از مقایسهٔ دو تناسب نتیجه می‌شود که :

$$AE = AC$$

پس مثلث AEC متساوی‌الساقین است و $\hat{E} = \frac{\hat{A}}{۲}$ ، مثلث قائم‌الزاویهٔ BED را می‌توانیم رسم کنیم ؛ زیرا $\hat{D} = ۹۰^\circ$ و مقدار معلوم $= BB' + B'D$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABB' ، معلوم $= \hat{A}$ و $\hat{B'} = ۹۰^\circ$ ، پس $\hat{B}_۱$ معلوم است.

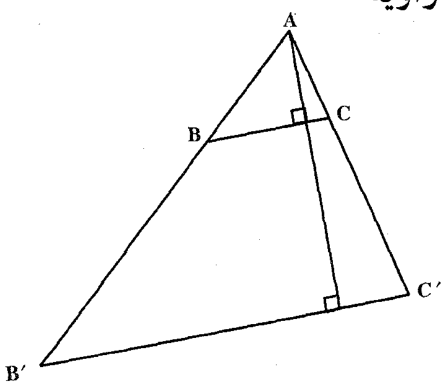


مثلث را در حالت وتر و یک زاویهٔ حاده رسم می‌کنیم ؛ داریم $\hat{D} = ۹۰^\circ$ و معلوم $= \hat{B}$ و مجموع دو ارتفاع $= BD$. سپس از E خطی رسم می‌کنیم که با EB زاویهٔ $\frac{\hat{A}}{۲}$ تشکیل دهد. آن‌گاه از نقطهٔ D خطی رسم می‌کنیم که با BE زاویهٔ $\hat{B}$ را تشکیل دهد و خط مفروض را در C قطع کند. سپس عمودمنصف EC را رسم می‌کنیم تا BE را در A قطع کند. مثلث ABC مثلث مفروض می‌باشد.



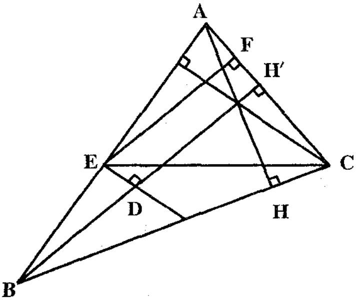
۴.۱.۱۷.۱.۱. مجموع سه ارتفاع، دو زاویه

۱۹۸. با معلوم بودن دو زاویه از مثلث، زاویهٔ سوم آن معلوم است. بنابراین می‌توانیم مثلث $A'B'C'$ را متشابه با مثلث ABC رسم کنیم. حال باید از بین این مثلثها، مثلثی را بیابیم که مجموع سه ارتفاع آن $h_a + h_b + h_c$ باشد.



۱.۱.۱۷.۱.۵. تفاضل دو ارتفاع، دو زاویه

۱۹۹. مسأله را حل شده می‌گیریم. اگر دو زاویهٔ $\hat{B}$ و $\hat{C}$ از مثلث ABC معلوم باشند، اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ نیز معلوم است. دو ارتفاع CH و BH′ را رسم می‌کنیم. روی ارتفاع BH′ از نقطهٔ H′ به اندازهٔ $H'D = CH$ جدا می‌کنیم و از D عمودی بر BH′ اخراج می‌کنیم تا ضلع AB را در E قطع کند. می‌دانیم که $AE = AC$ یعنی مثلث AEC متساوی‌الساقین است، که چون اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ معلوم است، پس اندازهٔ زاویه‌های این مثلث نیز معلوم می‌باشد. از طرفی مثلث قائم‌الزاویهٔ BDE با معلوم بودن $BD = h_c - h_b$ و زاویه‌های حاده‌اش $\hat{E} = \hat{A}$، قابل رسم است. پس برای رسم مثلث ABC، نخست مثلث قائم‌الزاویهٔ BDE را با داده‌های بالا رسم می‌کنیم. سپس از B خطی رسم می‌کنیم که با BE زاویه‌ای مساوی $90 - \frac{\hat{A}}{2}$ بسازد. این خط ضلع دیگر زاویهٔ B را در رأس C قطع می‌کند. از C خطی رسم می‌کنیم که با BC زاویه‌ای مساوی $\hat{C}$ بسازد. نقطهٔ برخورد آن با BE، رأس A است.

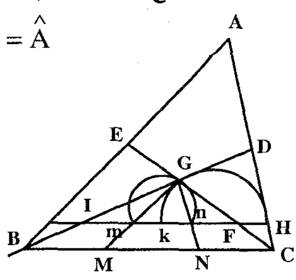


۱.۱.۱۷.۲. میانه، زاویه

۱.۱.۱۷.۲.۱. دو میانه، یک زاویه

۲۰۰. اگر ABC مثلث مطلوب باشد که در آن G مرکز ثقل مثلث و $BD = m_b = L$ و $CE = m_c = L'$ است. چنانچه از G دو خط موازی AB و AC رسم کنیم تا BC را بترتیب در M و N قطع کنند، داریم:

$$BM = MN = NC \text{ و } M\hat{G}N = B\hat{A}C = \hat{A}$$

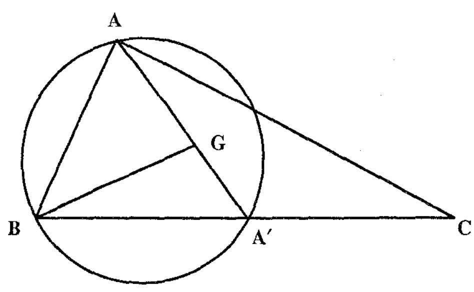


و از طرفی می‌دانیم هر خط که موازی BC رسم شود، به وسیلهٔ خطهای GB، GM، GN و GC به سه قسمت مساوی تقسیم می‌شود و مثلث GIF متجانس GBC است :
$(Im = mn = nF)$ و همچنین مثلث Gmn متجانس مثلث ABC می‌باشد، یعنی $m\hat{G}n = \hat{A}$ است، و می‌توان نوشت :

$$\frac{GB}{GC} = \frac{GI}{GF} = \frac{\frac{۲}{۳}L}{\frac{۲}{۳}L'} = \frac{L}{L'} = k$$

یعنی مکان G از یک طرف کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}$ ، گذرنده بر mn، و از طرف دیگر دایره‌ای است که قطری از آن که بر IF می‌گذرد، پاره‌خط IF را به نسبت توافقی تقسیم می‌کند و از آن‌جا حل مسأله چنین است :
پاره‌خط mn را به دلخواه رسم نموده و بر آن نقطه‌های I و F را چنان درنظر می‌گیریم که $Im = mn = nF$ باشد. کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}$ ، گذرنده بر mn را رسم می‌کنیم، و همچنین بر IF، نقطه‌های K و H را چنان تعیین می‌کنیم که پاره‌خط IF را به نسبت توافقی $\frac{L}{L'}$ تقسیم کند، و دایره به قطر KH را رسم می‌نماییم. محل برخورد این دو دایره، نقطهٔ G است. GI و GF را چنان امتداد می‌دهیم که $GB = \frac{۲}{۳}L$ و $GC = \frac{۲}{۳}L'$ و $GD = \frac{۱}{۲}GB$ و $GE = \frac{۱}{۲}GC$ باشد. B و C دو رأس مثلث، و E و D، بترتیب وسطهای ضلعهای AB و AC بوده، و سپس مثلث را کامل می‌کنیم.

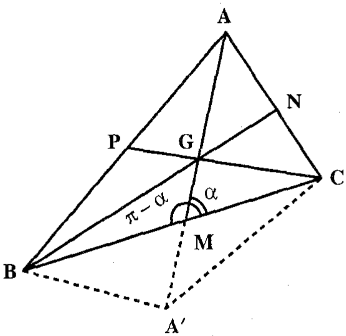
۲۰۱. واضح است که مکانی برای B، روی پاره‌خط $AA' = m_a$ داریم (کمان درخور $\hat{B}$ روی این پاره‌خط). اگر G محل برخورد میانه‌ها باشد، AA' را به نسبت $\frac{۱}{۲}$ تقسیم می‌کند ؛ پس مکان دیگر B، دایره‌ای به مرکز G و شعاع $GB = \frac{۲}{۳}m_b$ است. پس از پیدا کردن B، BA' را به اندازهٔ خودش از A' ادامه می‌دهیم تا C به‌دست آید و ABC



مثلث مطلوب است.

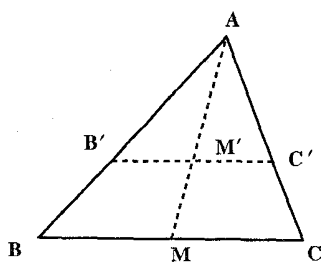
مسأله دو یا یک جواب دارد، و یا جواب ندارد.

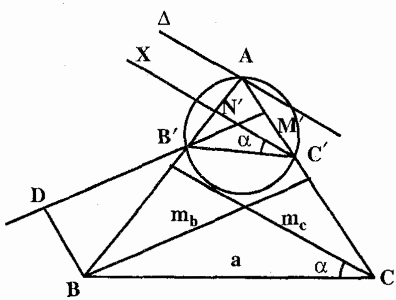
۲۰۲. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم و سه میانهٔ AM، BN و CP را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد میانه‌ها را G می‌نامیم. GM را به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ A' به‌دست آید. چهارضلعی $BGCA'$ متوازی‌الاضلاعی است که اندازهٔ چهارضلع آن و زاویه‌های بین دو قطر آن معلومند. زیرا $GB = MC = \frac{۲}{۳}m_b$، $GC = BM = \frac{۲}{۳}m_c$ و $A\hat{M}C = \alpha$، $A\hat{M}B = \pi - \alpha$ است. این متوازی‌الاضلاع را رسم می‌کنیم. به این ترتیب که پاره‌خط به طول $BG = \frac{۲}{۳}m_b$ را رسم می‌کنیم، سپس دو دایره به مرکزهای G و B، و به شعاع $\frac{۲}{۳}m_c$ رسم می‌کنیم. آن‌گاه پاره‌خطی به طول $MC = BG$ و موازی BG بر این دو دایره متکی می‌کنیم. پس از رسم متوازی‌الاضلاع، قطرهای آن را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آنها را G می‌نامیم، و MG را به اندازهٔ دو برابر خود امتداد می‌دهیم تا رأس A به‌دست آید. از A به B و C وصل می‌کنیم.



۲.۲.۱۷.۱.۱. یک میانه، دو زاویه

۲۰۳. مثلث متشابه با مثلث ABC را با در دست داشتن دو زاویه رسم می‌کنیم. سپس میانهٔ AM' را رسم می‌کنیم و به‌اندازهٔ طول AM امتداد می‌دهیم. در نقطهٔ M خطی موازی $B'C'$ رسم می‌کنیم تا امتداد AB' و AC' را در نقطه‌های B و C قطع کند.





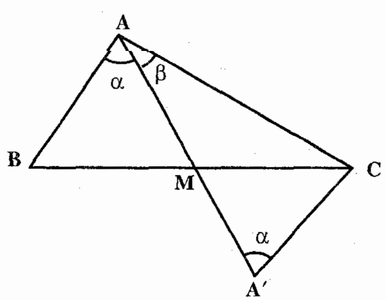
۲۰۴. اگر مثلث ABC، مثلث مطلوب باشد، چنانچه خط دلخواهی موازی BC رسم کنیم تا ضلعهای AB و AC را بترتیب در ′B و ′C قطع نماید، مثلث ABC مجانس مثلث ′AB′C با مرکز تجانس A و نسبت تجانس $k = \frac{AC}{AC'} = \frac{AB}{AB'}$ بوده و چنانچه ′B′M و ′C′N میانه‌های مثلث ′AB′C باشند، داریم:

$$\frac{m_c}{C'N'} = \frac{m_b}{B'M'} = \frac{AB}{AB'} = k$$

از ملاحظهٔ این رابطه نتیجه می‌گیریم که $m_c \| C'N'$ و $m_b \| B'M'$ و $(a, \hat{m}_c) = B'\hat{C}'N' = \alpha$، و درنتیجه حل مسأله چنین است.

پاره‌خط دلخواه ′B′C را رسم نموده، کمان درخور زاویهٔ A، گذرنده بر ′B′C را رسم می‌نماییم و از ′C نیمخط ′C′X را چنان رسم می‌کنیم که $B'\hat{C}'X = \alpha$ باشد، حال چنانچه خط Δ مجانس C′X با مرکز تجانس ′B و نسبت تجانس $k = ۲$ رسم نماییم، محل برخوردش با دایره، نقطهٔ A، یک رأس از مثلث است. مثلث ′AB′C را رسم نموده و میانهٔ ′B′M را تا نقطهٔ D چنان امتداد می‌دهیم که $M'D = m_b$ باشد. درصورتی که از D موازی ′AC رسم کنیم، نقطهٔ تقاطعش با ′AB رأس B، و چنانچه از B موازی ′C′B رسم کنیم، ′AC را در C قطع نموده، و مثلث ABC مثلث خواسته شده است.

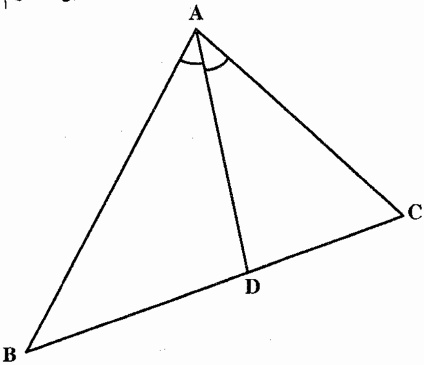
۲۰۵. در مثلث ABC، اگر ′A قرینهٔ A نسبت به نقطهٔ M (وسط BC) باشد، مثلث AA′C را با معلومات دو زاویهٔ α و β، و $AA' = ۲m_a$ می‌توان رسم کرد. پس از رسم این مثلث، B که قرینهٔ C نسبت به M است، به‌دست می‌آید. مثلث ABC، مثلث مطلوب است (شکل).



۳.۱۷.۱.۱. نیمساز، زاویه

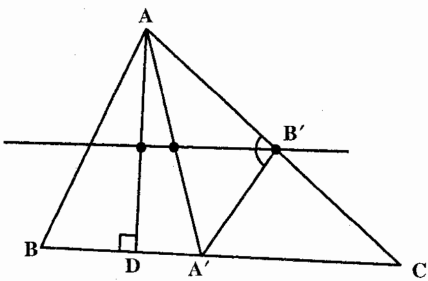
۱.۳.۱۷.۱.۱. یک نیمساز، دو زاویه

۲۰۶. مسأله را حل شده می‌گیریم. اگر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ دو زاویهٔ داده شده باشند، زاویهٔ $\hat{C}$ نیز معلوم است، زیرا $\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=180^\circ$ است.

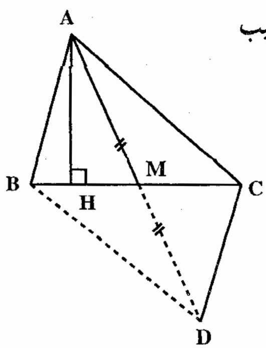


از آن‌جا زاویه‌های $B\hat{A}D=\frac{\hat{A}}{2}$ و $A\hat{D}B$ و $A\hat{D}C$ مشخص می‌باشند، بنابراین با داشتن اندازهٔ نیمساز $AD=d_a$ ، دو مثلث ADB و ADC را با استفاده از معلوم بودن اندازهٔ دو زاویه و ضلع بین آنها، می‌توان رسم کرد. درنتیجه مثلث ABC رسم می‌شود.

۴.۱۷.۱.۱. ارتفاع، میانه؛ نیمساز

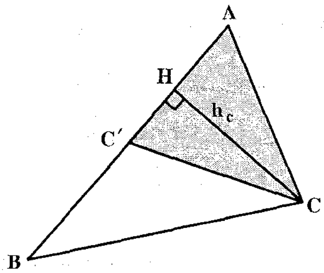


۲۰۷. **راه اول.** A' و B' را نقطه‌های میانی ضلعهای BC و AC از مثلث مطلوب ABC و AD را ارتفاع آن فرض کنید. مثلث قائم‌الزاویهٔ ADA' را می‌توان رسم کرد. میانهٔ AA' از نقطهٔ B' با زاویهٔ معلوم $180^\circ-\hat{A}$ دیده می‌شود و بنابراین، یک مکان هندسی برای B' داریم. از طرف دیگر، B' روی خطی قرار دارد که وسطهای AA' و AD را به هم وصل می‌کند. به این ترتیب نقطهٔ B' مشخص می‌شود و مثلث ABC را به آسانی می‌توان تکمیل کرد.



راه دوم. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. میانه را AM و ارتفاع را AH می‌نامیم. اگر میانهٔ AM را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ D امتداد دهیم، چهارضلعی

ABDC متوازی‌الاضلاع است. پس $\hat{ACD} = 180° - \hat{BAC}$ مقدار معلومی است؛ بنابراین برای رسم مثلث، ابتدا مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM را رسم می‌کنیم؛ AM را به اندازهٔ خود تا D ادامه می‌دهیم، سپس کمان درخور زاویهٔ $180° - \alpha$ نسبت به پاره‌خط AO را می‌کشیم. این کمان درخور هرجا ادامهٔ MH را قطع کند، رأس C است. CM را به اندازهٔ خود تا B ادامه می‌دهیم، از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC مثلث خواسته شده است.

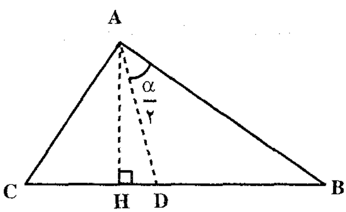


۲۰۸. مثلث را رسم شده و ABC را جواب مسأله می‌گیریم. ارتفاع CH و میانهٔ CC′ را رسم می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH و C′CH قابل رسمند. این دو مثلث را رسم می‌کنیم و AC′ را به اندازهٔ خود تا B امتداد می‌دهیم. از B به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۵.۱۷.۱.۱. ارتفاع، نیمساز؛ زاویه

۲۰۹. مسأله را حل شده می‌گیریم. ارتفاع AH و نیمساز AD را رسم می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD با معلوم بودن اندازهٔ وتر و یک ضلع، قابل رسم است.

پس برای رسم مثلث ABC، این مثلث را رسم می‌کنیم؛ سپس از A دو خط رسم

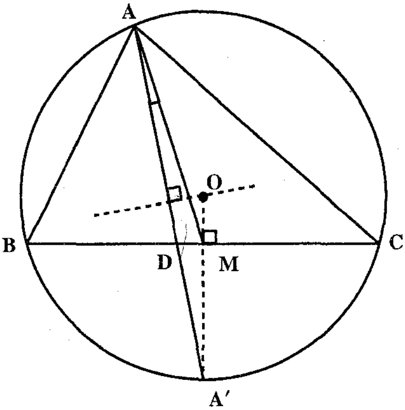


می‌نماییم که با AD زاویه‌های مساوی $\frac{\hat{A}}{2}$ بسازند. نقطه‌های برخورد این دو خط با HD، دو رأس B و C از مثلث ABC که جواب مسأله است می‌باشند.

۶.۱۷.۱.۱. میانه، نیمساز؛ زاویه

۱.۶.۱۷.۱.۱. یک میانه، یک نیمساز، یک زاویه

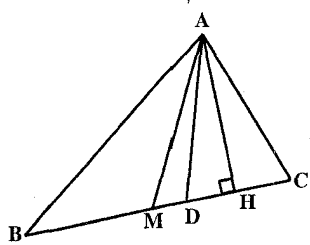
۲۱۰. فرض کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب مسأله باشد. دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می‌کنیم و AD را امتداد می‌دهیم تا دایره را در A′ قطع کند. نقطهٔ A′ وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ است. اگر از نقطهٔ M به A′ وصل کنیم، خط حاصل بر BC عمود بوده و از مرکز دایره



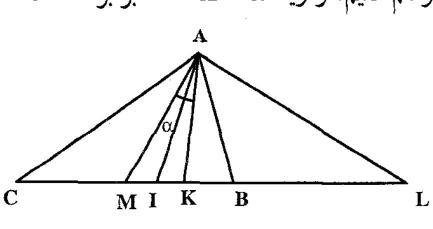
می‌گذرد. پس برای حل مسأله کافی است که مثلث ADM را با معلوم بودن ضلعهای AD و AM و زاویهٔ $D\hat{A}M$ رسم کرده و از نقطهٔ M عمودی بر DM اخراج می‌کنیم تا امتداد AD را در A′ قطع کند. عمودمنصف AA′ را رسم کرده تا عمود A′M را در O قطع کند. O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث می‌باشد. به مرکز O و به شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم. DM را از دو طرف امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطه‌های B و C قطع کند. مثلث ABC جواب مسأله است.

۱.۱.۱۷.۶.۲. میانه، نیمساز؛ تفاضل دو زاویه

۲۱۱. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. نیمساز AD، میانهٔ AM و ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که $D\hat{A}H=\dfrac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}$ است. بنابراین مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH با معلوم بودن اندازهٔ وتر و یک زاویهٔ حاده قابل رسم است. همچنین مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH قابل رسم می‌باشد. بنابراین مثلث ABC را با داشتن اندازهٔ ارتفاع، میانه و نیمساز نظیر یک ضلع (m_a, d_a, h_a) می‌توان رسم کرد.



۲۱۲. چون زاویهٔ BAK را برابر زاویهٔ MAC رسم کنیم، زاویهٔ $M\hat{A}K=\alpha$ برابر اختلاف معلوم زاویه‌های میانه با دو ضلع مجاور خواهد بود. بعلاوه نیمساز آن، همان نیمساز زاویهٔ A می‌باشد. پس از نقطهٔ اختیاری A، طول AM برابر میانه را



رسم می‌کنیم و زاویهٔ MAK را برابر زاویهٔ معلوم α (اختلاف زاویه‌های میانه با دو ضلع مجاور) رسم کرده و نیمساز آن را به طول معلوم d_a بنا می‌کنیم. مثلثهای AMI و AIK در مجاورت هم بنا می‌شوند. اکنون اگر از A عمودی بر AI اخراج کنیم، این خط نیمساز زاویهٔ برونی A از مثلث ABC خواهد بود. اگر L نقطهٔ تقاطع آن با امتداد ضلع BC باشد، نقطه‌های K و M نسبت به I و L مزدوج خواهند بود. و همچنین I و L نسبت به B و C نیز مزدوج توافقی خواهند بود و چون M وسط BC است، پس $MC^2 = MB^2 = MI.ML$ می‌باشد.

پس برای تعیین MB کافی است که دایرهٔ دلخواه بر I و L مرور دهیم، چون از M مماسی بر این دایره رسم کنیم، طول این مماس برابر MB خواهد بود. پس اگر به مرکز M و به این طول نیمدایره‌ای رسم کنیم تا امتداد BC را قطع کند، نقطه‌های B و C تعیین خواهند شد.

۱.۱.۱۸. ارتفاع، میانه، نیمساز؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱.۱.۱۸. ارتفاع، محیط

۲۱۳. می‌دانیم $a:b = h_b:h_c = n:m$، و $b:c = p:n = m : \frac{mn}{p}$. از آن‌جا:

$$a:b:c = n:m:\frac{mn}{p}$$

یعنی ضلعهای مثلث خواسته شده با خطهای n، m و $\frac{mn}{p}$ متناسبند. درنتیجه این دو مثلث متشابه‌اند. پس محیط دو مثلث ارتفاعیه متناسبند:

$$\frac{p}{p_1} = \frac{a}{n} \quad \text{و} \quad a = \frac{pn}{p_1} \qquad (1)$$

اکنون اگر مثلث $A_1B_1C_1$ را با ضلعهای n، m و $\frac{mn}{p}$ بسازیم و ارتفاعها را رسم کنیم، و p_1 طول محیط مثلث ارتفاعیه را به‌دست آوریم، طبق رابطهٔ (۱) می‌توان a را به‌دست آورد و به کمک ضلع a و زاویه‌های $\hat{B} = \hat{B_1}$ و $\hat{C} = \hat{C_1}$، مثلث ABC رسم می‌شود.

توضیح آن که مثلث وقتی رسم می‌شود که بتوان با خطهای n، m و $\frac{mn}{p}$ ، مثلث $A_1B_1C_1$ را رسم کرد.

۲.۱۸.۱.۱. ارتفاع، مساحت

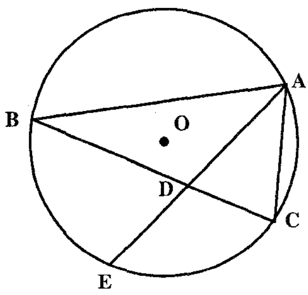
۲۱۴. می‌دانیم که $a.h_a = b.h_b = 2S$ است. از آن‌جا با معلوم بودن h_a ، h_b و S، اندازهٔ دو ضلع a و b نیز معلوم است. بنابراین بسادگی مثلث ABC قابل رسم است.

۳.۱۸.۱.۱. ارتفاع، رابطهٔ متری

۲۱۵. مسأله را حل شده بگیرید و از ویژگی ارتفاعها و رابطه‌های داده شده استفاده کنید.

۱۹.۱.۱. پاره‌خط، خط؛ زاویه

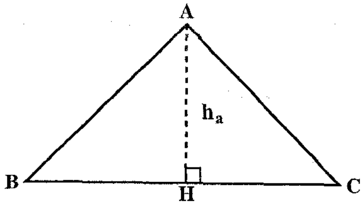
۱.۱۹.۱.۱. پاره‌خط، زاویه



۲۱۶. کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}$ روبه‌رو به پاره‌خط BC را رسم کرده و روی وتر BC قطعه‌های نیمساز را جدا می‌کنیم. نقطهٔ D را به E، وسط کمان $\overset{\frown}{BDC}$ وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ A قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC رسم می‌شود.

۲۰.۱.۱. پاره‌خط، خط؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۲۰.۱.۱. پاره‌خط، مساحت



۲۱۷. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. دو قطعهٔ BH و CH معلومند، بنابراین ضلع BC =a معلوم است. از طرفی داریم :

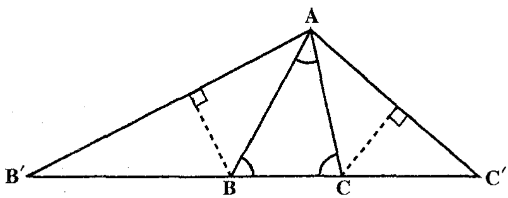
$2S = a.h_a$ ، پس با معلوم بودن مساحت مثلث و قاعدهٔ a اندازهٔ ارتفاع AH مشخص است. بنابراین مثلثهای ABH و ACH و در نتیجه مثلث ABC قابل رسم است.

۱.۱.۲۱. زاویه؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱.۱.۲۱. زاویه، محیط

۲۱۸. مثلث را رسم شده فرض می‌کنیم. ضلع BC را از طرف B به اندازهٔ $BB' = BA$ و از طرف C به اندازهٔ $CC' = CA$ امتداد می‌دهیم و از A به B' و C' وصل می‌کنیم. در مثلث $AB'C'$ ، $\hat{B'} = \frac{\hat{B}}{2}$ و $\hat{C'} = \frac{\hat{C}}{2}$ معلومند و $B'C' = 2p$ است، پس این مثلث قابل رسم است. بنابراین برای رسم مثلث ABC چنین عمل می‌کنیم :

مثلث $AB'C'$ را با معلوم بودن $B'C' = 2p$ ، $\hat{B'} = \frac{\hat{B}}{2}$ و $\hat{C'} = \frac{\hat{C}}{2}$ رسم می‌کنیم. آن‌گاه عمودمنصفهای AB' و AC' را رسم می‌کنیم تا $B'C'$ را در نقطه‌های B و C قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



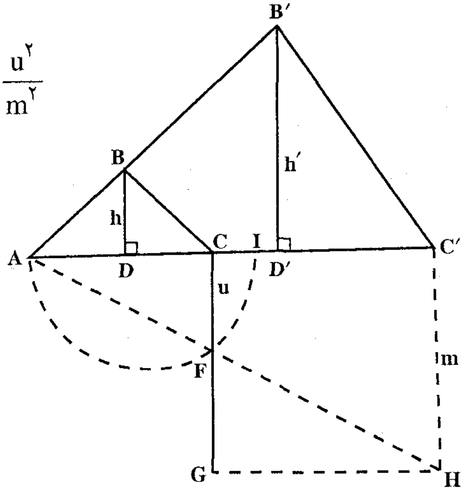
۲.۱.۱.۲۱.زاویه، مساحت

۲۱۹. با داشتن اندازه‌های زاویه‌های مثلث خواسته شده می‌توان مثلثی متشابه با آن رسم نمود. ضلع AC را به اندازهٔ نصف ارتفاع BD =h امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ I به دست آید $(CI = \frac{h}{2})$. روی AI نیمدایرهٔ AFI را رسم می‌کنیم. طول عمود CF اخراج شده از C بر AC ، یعنی u ، ضلع مربع هم ارز مثلث ABC است، CF=u یعنی داریم : $S_{ABC} = u^2$. زیرا داریم : $u^2 = AC.CI$. روی CF، پاره‌خط m=CG را جدا می‌کنیم و AFH را

رسم می‌کنیم. سپس GH را موازی AC، HC را عمود بر AC و بالاخره $C'B'$ را موازی BC رسم می‌کنیم.

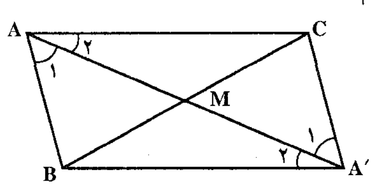
$A'B'C'$ مثلث خواسته شده است. در نتیجه دو مثلث ABC و $AB'C'$ متشابه‌اند. همچنین دو مثلث ACF و AGH متشابه‌اند. از آن جا داریم:

$$\frac{S_{ABC}}{S_{AB'C'}} = \frac{AC^۲}{AC'^۲} = \frac{CF^۲}{C'H^۲} = \frac{u^۲}{m^۲}$$



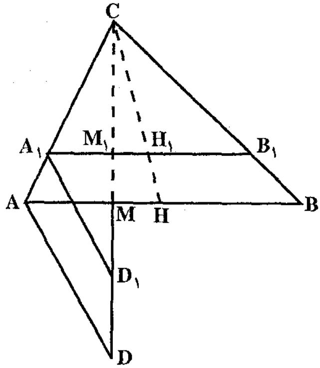
با مقایسهٔ نسبتها دیده می‌شود که صورتها هم‌ارزند، همچنین مخرجها هم‌ارز می‌باشند.

۲۲۰. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. میانهٔ AM را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ A' امتداد می‌دهیم و از A' به B و C وصل می‌کنیم. $\hat{A}_۱ = \hat{A}'_۱$ و $\hat{A}_۲ = \hat{A}'_۲$ است، یعنی زاویه‌های دو مثلث ACA' و ABA' مقدار معلومی دارند. حال با توجه به این که مساحت مثلث ABC نیز معلوم است....



۱.۱.۱.۲۱.۳. زاویه، رابطهٔ متری

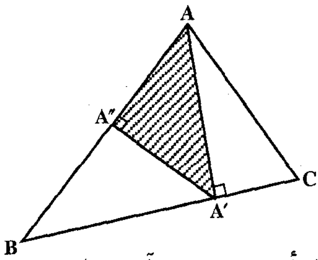
۲۲۱. با معلوم بودن دو زاویه از مثلث، زاویهٔ سوم آن نیز در دست است. بنابراین برای رسم مثلث ABC، مثلث $A_۱CB_۱$ را با معلوم بودن سه زاویه رسم می‌کنیم. ارتفاع $CH_۱$ و میانهٔ $CM_۱$ را می‌کشیم. روی خط $CM_۱$، پاره خطهای $CD = l$ و



$CD_1 = CH_1 + CM_1$ را جدا می‌کنیم. D_1A_1 را رسم کرده و از D خط DA را موازی D_1A_1 رسم می‌کنیم. رأس A به دست می‌آید. از A خطی موازی A_1B_1 رسم می‌کنیم تا AB_1 را در B قطع کند. مثلث ABC جواب مسأله است.

۲۲.۱.۱. نقطه؛ ضلع؛ ارتفاع، میانه، نیمساز

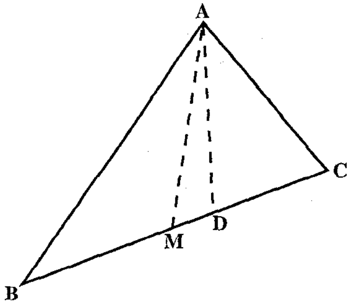
۱.۲۲.۱.۱. نقطه، ضلع، ارتفاع



۲۲۲. مسأله را حل شده می‌گیریم. مثلث قائم‌الزاویهٔ $AA'A''$ با معلوم بودن ارتفاع AH و طول ضلع $A'A''$ قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم. سپس از نقطهٔ A' عمودی بر AA' اخراج می‌کنیم تا خط AA'' را در نقطهٔ B قطع کند. روی BA' پاره‌خط $BC = a$ را جدا می‌کنیم تا رأس C به دست آید. مثلث ABC جواب مسأله است.

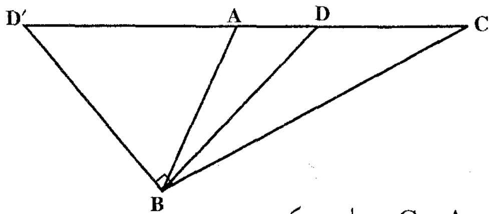
۲.۲۲.۱.۱. نقطه، ضلع، میانه

۲۲۳. مسأله را حل شده می‌گیریم. مزدوج توافقی نقطهٔ D نسبت به دو نقطهٔ B و C را D' می‌نامیم. دایرهٔ به قطر DD' از رأس A می‌گذرد. همچنین رأس A روی دایره‌ای به مرکز M و به شعاع m_a قرار دارد، پس برای رسم مثلث ABC، پس از تعیین دو نقطهٔ D' و M دو مکان هندسی رأس A را رسم می‌کنیم، تا نقطهٔ A به دست آید. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC رسم می‌شود.



۱.۱.۲۲.۳. نقطه، ضلع، نیمساز

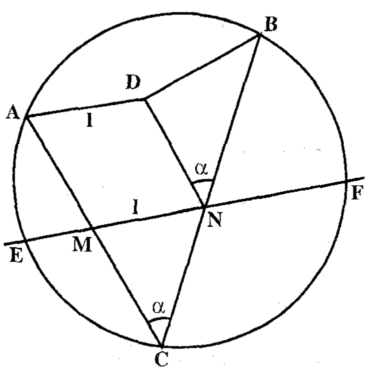
۲۲۴. مسأله را حل شده فرض کرده و نقطهٔ D' مزدوج توافقی نقطهٔ D نسبت به دو نقطهٔ B و C را به دست می‌آوریم. زاویهٔ $D\hat{B}D'$ قائمه است، بنابراین یک مکان هندسی نقطهٔ B، دایره‌ای به قطر DD' است و چون طول BD معلوم است، مکان هندسی دیگر رأس B، دایره‌ای به مرکز B و به شعاع BD است، بنابراین برای رسم مثلث ABC دو مکان هندسی بالا را رسم می‌کنیم. محل برخورد آنها رأس B است. از B به A و C وصل می‌کنیم.



۱.۱.۲۳. نقطه؛ ضلع؛ پاره‌خط، خط

۱.۱.۲۳.۱. نقطه، ضلع، خط

۲۲۶. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث CMN جواب مسأله باشد. زاویهٔ $M\hat{C}N = \alpha$ و ضلعهای CM و CN از دو نقطهٔ ثابت A و B می‌گذرند و MN به طول معلوم l روی خط ثابت EF قرار دارد. اگر از A پاره‌خط AD را موازی و مساوی MN رسم کنیم، چهارضلعی MNDA متوازی‌الاضلاع است و $D\hat{N}B = \alpha$ است، پس نقطهٔ D روی کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره خط DB واقع است، بنابراین راه حل مسأله به صورت زیر است: کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. رأس C روی این کمان درخور است. از نقطهٔ A خطی موازی خط ثابت EF رسم می‌کنیم و روی آن پاره‌خط $AD = l$ را جدا می‌کنیم. از D به B وصل کرده کمان درخور زاویهٔ α روبه رو به پاره‌خط BD را رسم می‌نماییم. نقطهٔ برخورد این کمان درخور با خط EF نقطهٔ N



یک رأس مثلث خواسته شده است. از B به N وصل می‌کنیم و ادامه می‌دهیم تا کمان درخور زاویهٔ $\hat{C}$ روبه‌رو به پاره‌خط AB را در نقطهٔ C قطع کند. از C به A وصل می‌کنیم تا EF را در M قطع نماید، مثلث CMN جواب مسأله است.

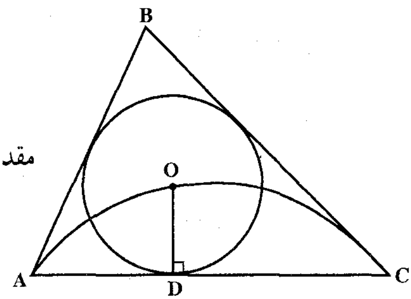
۱.۱.۲۴. نقطه؛ ضلع؛ زاویه

۱.۱.۲۴.۱. یک نقطه، یک ضلع، یک زاویه

۲۲۷. اگر O مرکز دایرهٔ محاطی داخلی فرض شود (شکل) داریم:

$$O\hat{A}D = \frac{\hat{A}}{۲} \quad و \quad O\hat{C}D = \frac{\hat{C}}{۲}$$

$$A\hat{O}C = \pi - \frac{\hat{A}+\hat{C}}{۲} = \frac{\pi}{۲} + \frac{B}{۲} = \text{مقدار ثابت}$$

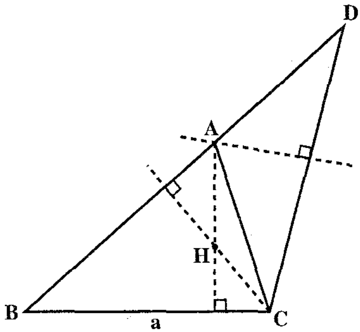


اکنون اگر کمان درخور زاویهٔ $A\hat{O}C$ روبه‌رو به پاره‌خط AC را رسم کنیم و از D عمودی اخراج کنیم تا این کمان درخور را در O قطع کند. O مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث است. دایرهٔ به مرکز O و به شعاع OD =r را رسم می‌کنیم، سپس از A و C مماسهایی بر این دایره رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ B یکدیگر را قطع کند. مثلث ABC جواب مسأله است.

۲۲۹. مسأله را حل شده فرض می کنیم و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. مزدوج توافقی نقطهٔ D نسبت به دو نقطهٔ B و C را D' می‌نامیم. دایرهٔ به قطر DD' از رأس A می‌گذرد. از طرفی رأس A روی کمان درخور زاویهٔ A روبه‌رو به پاره‌خط BC است، پس برای رسم مثلث ABC، بعد از رسم BC و تعیین نقطهٔ D' دو مکان ذکر شده در بالا را رسم می‌کنیم تا رأس A به دست آید. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۲۵.۱.۱. نقطه؛ ضلع؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۲۵.۱.۱. نقطه، ضلع، محیط



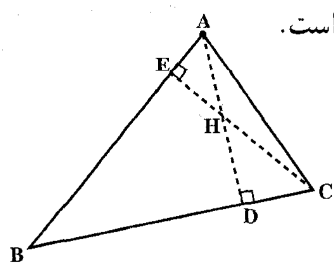
۲۳۰. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. ضلع AB را به اندازهٔ AD = AC امتداد می‌دهیم و از D به C وصل می‌کنیم. DB = b+c است که پاره خطی معلوم است، زیرا با معلوم بودن ۲p و a اندازهٔ b+c مشخص می‌باشد. از آن جا برای رسم مثلث چنین عمل می‌کنیم.

از نقطهٔ H عمودی بر ضلع BC فرود می‌آوریم. این خط یک مکان هندسی برای رأس A است. سپس از C به H وصل می‌کنیم و از B خطی عمود بر CH رسم می‌کنیم و روی آن پاره‌خط BD = b+c را جدا می‌کنیم. از D به C وصل می‌کنیم و عمودمنصف DC یعنی مکان هندسی دیگر رأس A را رسم می‌کنیم نقطهٔ برخورد این خط با BD، رأس A است. از A به C وصل می‌کنیم مثلث ABC رسم می‌شود.

۲۶.۱.۱. نقطه، ارتفاع، میانه، نیمساز؛ پاره‌خط، خط

۱.۲۶.۱.۱. نقطه، ارتفاع، پاره‌خط

۲۳۱. مسأله را حل شده در نظر می‌گیریم. مثلث قائم‌الزاویهٔ ADB با معلوم بودن دو ضلع زاویهٔ قائمهٔ AD و BD قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم، سپس از نقطهٔ مرکز ارتفاعی عمودی بر ضلع AB فرود می‌آوریم. نقطهٔ برخورد این خط عمود یا خط BD رأس C مثلث ABC است.



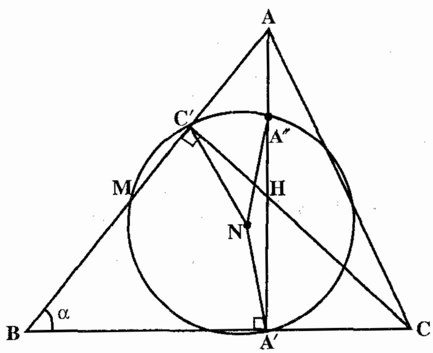
۱.۱.۲۶.۲. نقطه، ارتفاع، خط

۲۳۲. O مرکز دایرهٔ محیطی روی خط d قرینهٔ h نسبت به t قرار می‌گیرد. همچنین روی h' قرینهٔ h نسبت به N؛ در نتیجه O مشخص می‌شود. همچنین H روی خط h. اگر D' دومین نقطهٔ تقاطع AH با دایرهٔ (O , OA) باشد، عمودمنصف HD' این دایره را در دو نقطهٔ B و C که دو رأس دیگر مثلث خواسته شده‌اند، قطع می‌کند.

۱.۱.۲۷. نقطه؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛ زاویه

۱.۱.۲۷.۱. نقطه، ارتفاع، زاویه

۲۳۳. مسأله را حل شده فرض می کنیم و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. ارتفاع AA' را رسم می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ $AA'B$ به دلیل معلوم بودن یک زاویهٔ حاده و یک ضلع قابل رسم است. از N به A' وصل می‌کنیم. NA' شعاع دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث است. دایره‌ای به مرکز N و به شعاع NA' را رسم می‌کنیم. این دایره ضلع AB را در دو نقطهٔ C' پای ارتفاع رأس C و M وسط ضلع AB و ارتفاع AA' را در نقطهٔ A'' وسط پاره‌خط AH که H مرکز ارتفاعی مثلث



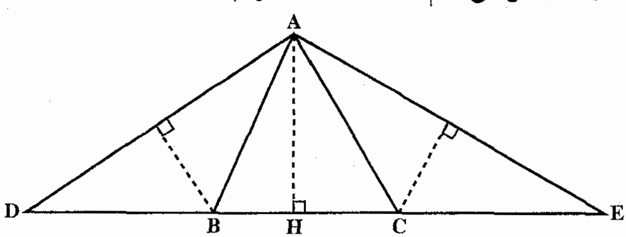
است، قطع کند. خط $C'H$، از رأس C می‌گذرد؛ زیرا C' پای ارتفاع رأس C و H نقطهٔ برخورد ارتفاعهای مثلث ABC است. بنابراین روش رسم مثلث ABC مشخص می‌شود. بدین ترتیب که مثلث قائم‌الزاویهٔ ABA' را با معلوم بودن $AA' = h_a$ از نظر وضع و اندازه، و زاویهٔ $\hat{B} = \alpha$، رسم می‌کنیم. سپس به مرکز N و به شعاع NA' دایره‌ای رسم می‌کنیم تا AA' را در A'' و AB را در M و C' (پای ارتفاع رأس C) قطع کند. روی AA' پاره‌خط $A''N$ را مساوی پاره‌خط AA'' جدا می‌کنیم تا نقطهٔ H مرکز ارتفاعی مثلث ABC به دست آید. از C' به H وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم

تا امتداد BA' را در نقطهٔ C رأس سوم مثلث قطع کند. از C به A وصل می کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۲۸.۱.۱. نقطه؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۲۸.۱.۱. نقطه، ارتفاع، محیط

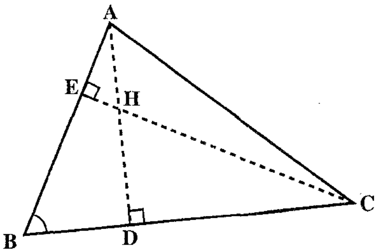
۲۳۴. مسأله را حل شده فرض می کنیم. ارتفاع AH را رسم می کنیم. ضلع BC را از طرف B به اندازهٔ $BD = AB$ و از طرف C به اندازهٔ $CE = AC$ امتداد می‌دهیم و از A به D و E وصل می کنیم. می‌دانیم که $DE = 2p$ برابر محیط مثلث و نقطهٔ D قرینهٔ رأس A نسبت به نیمساز زاویهٔ خارجی B است؛ زیرا مثلث ABD متساوی‌الساقین است و عمودمنصف AD از رأس B می‌گذرد و نیمساز خارجی زاویهٔ B است. بنابراین مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH با معلوم بودن طول پاره‌خط DH و اندازهٔ ارتفاع AH قابل رسم است. این مثلث را رسم می کنیم و روی DH پاره‌خط $DE = 2p$ را جدا می کنیم از D و E به A وصل می کنیم. عمودمنصفهای AD و AE را رسم می کنیم تا DE را در B و C قطع کند. از A به B و C وصل می کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



۲۹.۱.۱. نقطه؛ پاره‌خط، خط؛ زاویه

۱.۲۹.۱.۱. نقطه، پاره‌خط، زاویه

۲۳۵. مسأله را حل شده فرض کرده، ارتفاع AD را رسم می کنیم. BD تصویر ضلع AB روی

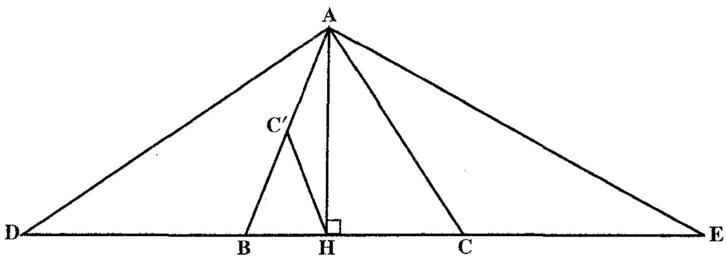


ضلع BC است که طول مشخصی دارد و اندازهٔ زاویهٔ $\hat{B}$ نیز معلوم است، پس مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD قابل رسم است. از طرفی موضع نقطهٔ H نیز مشخص است، که روی ارتفاع AD قرار دارد. از H عمود HE را بر ضلع AB فرود می‌آوریم. نقطهٔ برخورد خط HE با امتداد BD رأس C از مثلث ABC است. از C به A وصل می‌کنیم. مثلث ABC رسم می شود.

۱.۱.۳۰. نقطه؛ پاره‌خط، خط؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

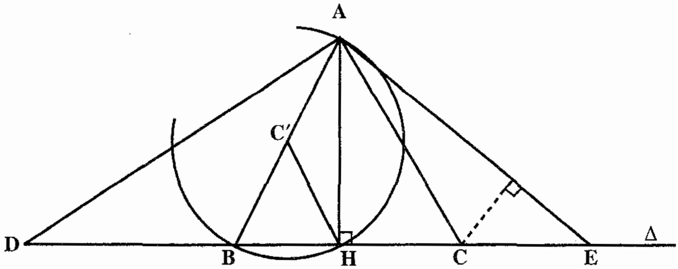
۱.۱.۳۰.۱. نقطه، پاره‌خط، محیط

۲۳۶. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله فرض می‌کنیم. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. ضلع BC را از طرف B به اندازهٔ DB = AB و از طرف C به اندازهٔ CE = AC امتداد می‌دهیم و از A به D و E وصل می‌کنیم. DE = ۲p است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ



AHB، HC′ میانهٔ وارد بر وتر و مساوی نصف وتر است، پس AB = ۲HC′ ، طول معلومی دارد ؛ در نتیجه مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH قابل رسم است، بنابراین برای رسم مثلث ABC از H واقع بر خط Δ که BC روی آن است، عمودی اخراج می‌کنیم. به مرکز C′ و به شعاع C′H دایره‌ای رسم می کنیم تا Δ را در نقطهٔ B و خط عمود را در نقطهٔ A قطع کند. به اندازهٔ AB روی Δ و در امتداد DB، پاره‌خط BD = AB را جدا می‌کنیم. از D روی Δ پاره‌خط DE = ۲p محیط مثلث را جدا می‌نماییم. از E به A

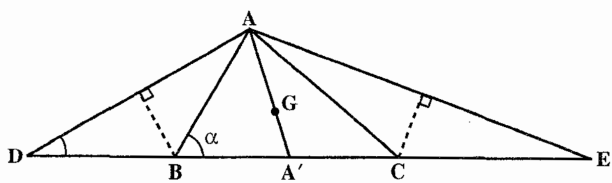
وصل کرده، عمودمنصف AE را رسم می‌کنیم تا DE را در نقطهٔ C رأس سوم مثلث قطع کند. از A به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



۱.۱.۳۱. نقطه؛ زاویه؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱.۳۱.۱. نقطه، زاویه، محیط

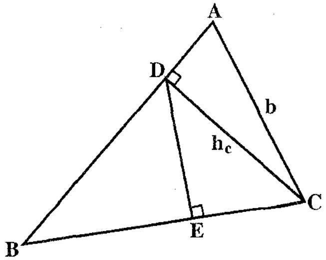
۲۳۷. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. میانهٔ ′AA را که از نقطهٔ G می‌گذرد، رسم می‌کنیم. پاره‌خطهای DB =AB و CE =AC را در دو طرف BC جدا می‌کنیم و از A به D و E وصل می‌کنیم. DE = ۲p محیط مثلث است. از طرفی مثلث ABD متساوی‌الساقین است، پس $\hat{D} = \frac{\hat{B}}{۲} = \frac{\alpha}{۲}$، اندازهٔ معلومی دارد.



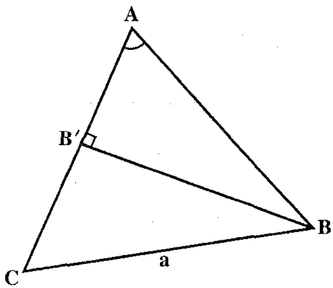
۱.۱.۳۲. ضلع؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛ پاره‌خط، خط

۱.۱.۳۲.۱. ضلع، ارتفاع، پاره‌خط

۲۳۹. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. ارتفاع CD را رسم کرده ، تصویر D روی BC را E می‌نامیم. پاره‌خط CE = l است. پس برای رسم مثلث ABC نخست مثلث



قائم‌الزاویهٔ ADC را با معلوم بودن اندازهٔ وتر $AC = b$ و ضلع $CD = h_c$ رسم می‌کنیم، سپس دایره‌ای به قطر CD رسم می‌نماییم. به مرکز C و به شعاع $CE = l$ دایره‌ای می‌زنیم، تا دایرهٔ رسم شده را در نقطهٔ E قطع کند. CE را رسم کرده، امتداد می‌دهیم تا امتداد AD را در نقطهٔ B قطع کند. مثلث ABC جواب مسأله است.



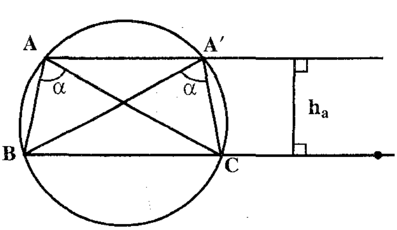
۲۴۰. مثلث قائم‌الزاویهٔ $BB'C$ $(\hat{B'} = 90^\circ)$ را با معلوم بودن اندازهٔ وتر $BC = a$ و ضلع $BB' = h_b$ رسم می‌کنیم، سپس از B خطی رسم می‌کنیم که با BB' زاویهٔ متمم زاویهٔ $\hat{A}$ را بسازد. نقطهٔ برخورد این خط با امتداد CB' رأس A است.

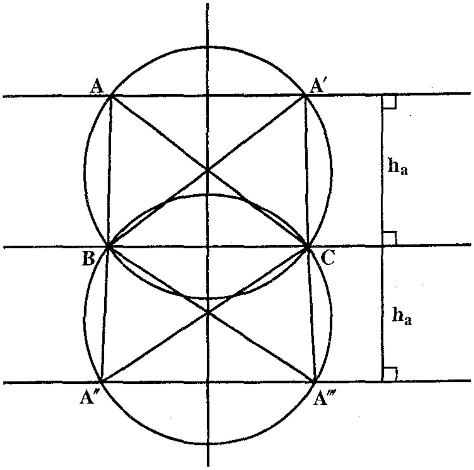
۳۳.۱.۱. ضلع؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛ زاویه

۱.۳۳.۱.۱. ضلع، ارتفاع، زاویه

۱.۱.۳۳.۱.۱. یک ضلع، یک ارتفاع، یک زاویه

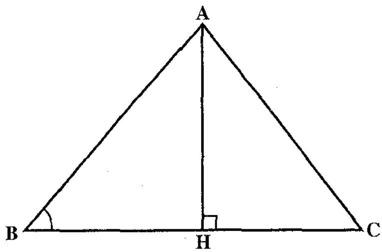
۲۴۱. ضلع $BC = a$ را رسم می‌کنیم. کمان درخور زاویهٔ $\hat{A} = \alpha$ روبه‌رو به پاره‌خط BC را نیز رسم می‌نماییم. آن‌گاه دو خط موازی BC و به فاصلهٔ h_a از آن رسم می‌کنیم تا کمان درخور زاویهٔ α را در نقطه‌های A و A' که رأس سوم مثلث ABC می‌باشند، قطع کنند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است. نخست به تعداد نقطه‌های برخورد دو خط موازی BC و کمان درخور مسأله جوابهای همنهشت دارند.





نکته. در شکل، کمان درخور دیگر زاویهٔ α و خط دوم موازی BC رسم نشده است. در صورتی که این بخش نیز رسم شود و هر یک از دو خط موازی BC کمان درخورها را در ۲ نقطه قطع کنند، شکل به صورت روبه‌رو است و مسأله چهار جواب همنهشت ABC، A′BC، A″BC و A‴BC دارد.

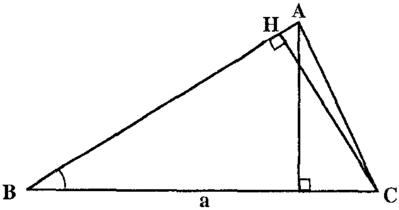
۲۴۲. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH را با معلوم بودن اندازهٔ ضلع $AH = h_a$ و زاویهٔ حادهٔ $\hat{B}$ رسم می‌کنیم. سپس $BC = a$ را روی خط BH جدا می‌کنیم و از C به A وصل می‌کنیم.

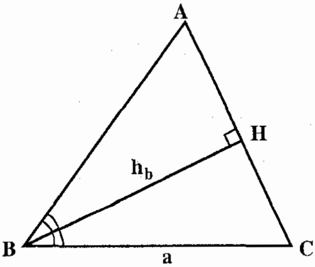


۲۴۳. گزینهٔ (هـ) صحیح است. رسم را با ضلع داده شدهٔ a شروع می‌کنیم و دو سر آن را با B و C نشان می‌دهیم. در نقطهٔ B خط l را طوری رسم می‌کنیم که با ضلع a زاویهٔ مفروض B را بسازد. حال یا:

۱) فاصلهٔ نقطهٔ C از خط l برابر h_c است، در این حالت رأس A از مثلث ABC می‌تواند هر کجای خط l قرار گیرد (تعداد جوابها نامتناهی) یا

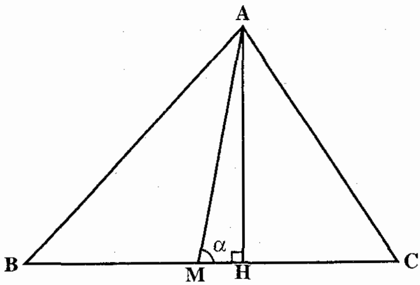
۲) فاصلهٔ C تا l برابر h_c نیست، در این حالت هیچ مثلثی در شرطهای مفروض صدق نمی‌کند (بدون جواب).





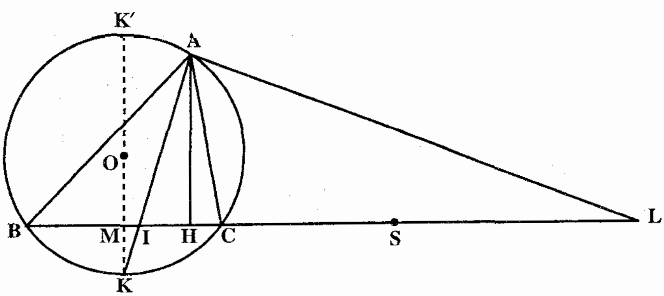
۲۴۴. مثلث را رسم شده می‌گیریم. مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC به دلیل معلوم بودن $\hat{H}=۹۰^\circ$ ، $BC=a$ و $BH=h_b$ قابل رسم است. پس برای رسم مثلث ABC، مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC را رسم می‌کنیم، سپس از B خطی رسم می‌کنیم که با BC زاویه‌ای مساوی زاویهٔ داده شدهٔ $\hat{B}$ بسازد. نقطهٔ برخورد این ضلع زاویه با خط CH رأس A از مثلث ABC است.

۲۴۵. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. ارتفاع AH و میانهٔ AM را رسم می‌کنیم با معلوم بودن $AH=h_a$ و $A\hat{M}C=\alpha$ مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM $(\hat{H}=۹۰^\circ)$ قابل رسم است. پس برای رسم مثلث ABC، نخست مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH را با داده‌های بالا رسم می‌کنیم سپس پاره‌خطهای $MB=MC=\frac{a}{۲}$ را روی MH و در دو طرف M جدا می‌کنیم تا دو رأس B و C به دست آیند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC رسم می‌شود.



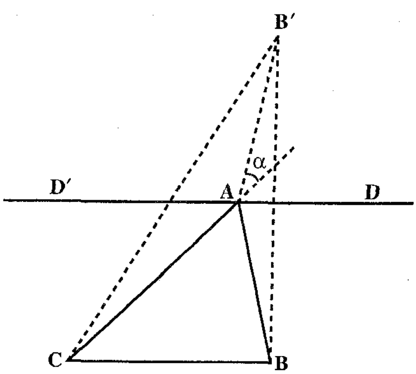
۱.۱.۳۳.۱.۲. یک ضلع، یک ارتفاع، تفاضل دو زاویه

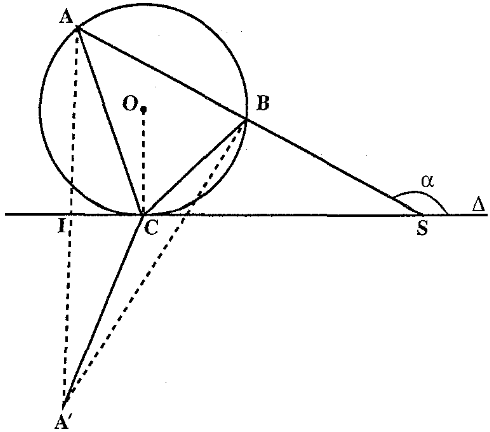
۲۴۶. با ملاحظهٔ این که زاویهٔ بین ارتفاع و نیمساز زاویهٔ A نصف $(\hat{B}-\hat{C})$ یعنی $\frac{\alpha}{۲}$ است،



مثلث قائم‌الزاویهٔ به ضلع h_a و زاویهٔ مجاور $\frac{\alpha}{۲}$ نیمساز را به دست می‌دهد. اکنون اگر I پای نیمساز باشد و M وسط ضلع BC، روشن است که $KI \ . \ KA = KM \ . \ KK'$ و چون مثلث قائم‌الزاویهٔ AIH ساخته شده، با رسم نیمساز زاویهٔ خارجی A (عمودی که از A بر AI اخراج می‌شود)، آن را که برابر AL است، می‌توان به دست آورد. به علّت رابطهٔ تقسیم توافقی بین نقطه‌های P، L، B و C رابطهٔ: $MI = ML = \frac{BC^۲}{۴} = MC^۲$ مسلم است و چون ضلع a معلوم است، پس کافی است دایره‌ای به قطر IL رسم کرد و مماسی بر آن به طول $\frac{a}{۲}$ از نقطه‌ای دلخواه ترسیم نمود. چون به مرکز وسط IL و به شعاع برابر فاصلهٔ این مرکز تا منتهی‌الیه مماس مذکور قوسی رسم کرد تا IL را در نقطهٔ M، وسط BC قطع کند، چون از طرفین M طولهای $\frac{a}{۲}$ را جدا کنیم، رسم مسأله تکمیل می شود. ممکن است اگر S وسط IL باشد، از رابطهٔ $SB.SC = SI^۲$ و $SB - SC = a$، استفاده کرده و رسم مسأله را از این راه ادامه داد، یعنی حاصلضرب دو قطعه خط و تفاوت آنها معلوم است، این قطعه‌ها را ترسیم کرد که کلاسیک است.

مسأله راه حل دیگری دارد که نسبت به راه حل قبل بسیار بدیع است. اگر ضلع a را در محل خویش قرار دهیم، نقطهٔ A بر روی خطی به موازات این قطعه خط (یعنی ضلع BC) و به فاصلهٔ h_a قرار دارد. چون قرینهٔ B را نسبت به این خط معلوم کنیم، نقطهٔ B′ به دست می‌آید و زاویهٔ: $B\hat{A}D = B'\hat{A}D$ می‌باشد. اختلاف زاویه‌های B و C مثلث برابر است با اختلاف زاویه‌های $D\hat{A}B$ و $C\hat{A}D'$ و در شکل این زاویه با امتداد دادن CA به دست می‌آید، پس زاویهٔ B′AC مکمل α می‌باشد و حل مسأله منجر می‌شود به رسم کمان درخور $\pi - \alpha$ بر روی وتر CB′ (که B′ قرینهٔ B نسبت به خط موازی ضلعa به فاصلهٔ ارتفاع می‌باشد).





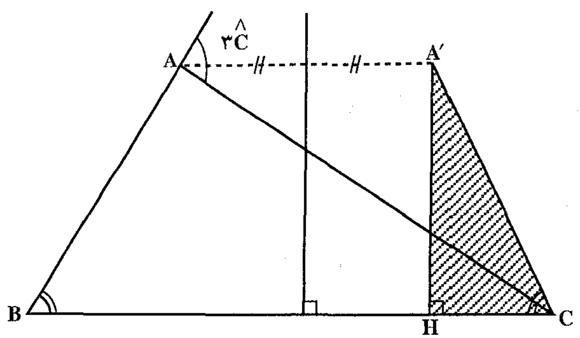
گاهی در بعضی مسائل هندسه این تقلیل مقاله میسر است ؛ مثلاً ترسیم دایره‌ای که بر دو نقطهٔ A و B گذشته و بر خط معلوم Δ مماس باشد. معمولاً در کتب هندسه با استفاده از واسطهٔ هندسی دو قطعه خط حاصل می‌شود. اینک در این‌جا حلی با رسم کمان درخور ارائه می‌شود که به تناسب قطعه خطها احتیاجی ندارد.

اگر نقطهٔ C، نقطهٔ تماس دایرهٔ خواسته شده با خط Δ باشد، قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به Δ تعیین کرده و از نقطه‌های B و C به آن وصل می‌کنیم. چون زاویهٔ ACΔ با A′CΔ برابر است و چون زاویهٔ BCA′ برابر است با A′CΔ + BCΔ ، از ملاحظهٔ این که زاویهٔ BCΔ (که مقیاس آن نصف قوس CB است) با زاویهٔ A مثلث مساوی است، معلوم می‌شود که زاویهٔ A′CB برابر است با زاویهٔ خارجی مثلث ACS، یعنی زاویهٔ خط AB با خط Δ ، پس برای تعیین نقطهٔ تماس C کافی است که بر روی وتر A′B کمان درخور زاویهٔ α را رسم کرد تا نقطهٔ C و سپس دایره‌های خواسته شدهٔ O به دست آید.

۳.۱.۳۳.۱.۱. یک ضلع، یک ارتفاع، رابطهٔ بین زاویه‌ها

۲۴۷. راه اول. فرض کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC جواب خواسته شده باشد.

اگر قرینهٔ A را نسبت به عمودمنصف BC، A′ بنامیم، مثلث AA′C متساوی‌الساقین است. زیرا، AA′CB ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است، از آن جا $AB = AA' = A'C$.



حال اگر از نقطهٔ A' عمود $A'H$ را بر BC رسم کنیم، مثلث قائم الزاویهٔ $A'HC$ قابل رسم است. زیرا اگر $A'C = x$ فرض شود، داریم $A'H = h$ و $BC = a$ (a و h معلومند) پس $HC = \frac{a-x}{۲}$ و در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A'HC$ می‌توان نوشت :

$$x^۲ = h^۲ + \frac{(a-x)^۲}{۴}$$

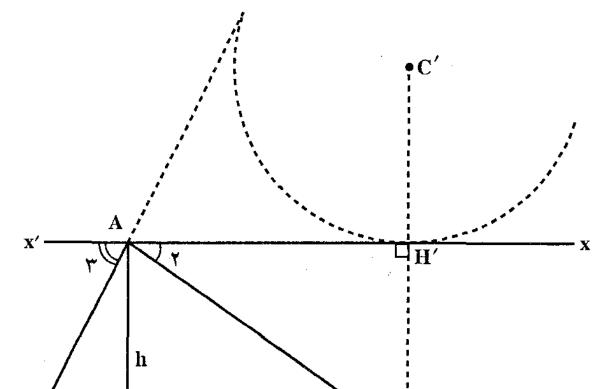
یا

$$۳x^۲ + ۲ax - ۴h^۲ - a^۲ = ۰$$

چون طولهای a و h معلومند ؛ $a^۲$ و $h^۲$ قابل رسمند. از آن‌جا ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم قابل ترسیمند (مجموع و حاصلضرب آنها معلومند) ؛

با تعیین x و رسم مثلث $A'HC$ ؛ CH را به اندازهٔ a امتداد می‌دهیم، به مرکز B و شعاع $A'C$ دایره‌ای رسم می‌کنیم، محل تلاقی خط موازی از A' با CB نقطهٔ A را به دست می‌دهد (برای تعداد جوابها می‌توان بحث کرد).

راه دوم. اگر از نقطهٔ A خط $x'x$ را به موازات BC رسم کنیم، بنابر خاصیت توازی زاویه $x'\hat{A}B$ دو برابر زاویه $x\hat{A}C$ است (زیرا ؛$\hat{B} = ۲\hat{C}$).

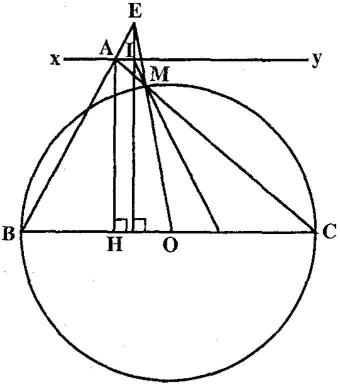


چون ارتفاع AH معلوم است، پس خط $x'x$ معلوم است، مسأله به مسأله زیر تبدیل می‌شود :

دو نقطهٔ C و B و خط $x'x$ مفروض است. نقطهٔ A را بر خط $x'x$ چنان بیابید به طوری که $\hat{A}_۳ = ۲\hat{A}_۲$ (یا$x'\hat{A}B = ۲x\hat{A}C$). برای حل مسألهٔ اخیر، قرینهٔ نقطهٔ C

نسبت به خط $x'x$ را C' می‌نامیم.

به مرکز C' و شعاع CH' دایره‌ای رسم می‌کنیم، سپس از نقطهٔ B مماسی بر این دایره رسم می‌کنیم. محل تلاقی خط مماس با خط $x'x$ نقطهٔ A است.

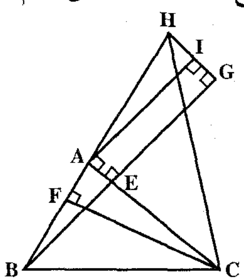


نکته. روش دوم ارجحیت دارد. هرچند که هر دو روش درستند.

راه سوم. دایرهٔ به قطر BC، ضلع AC را در M قطع می‌کند و اگر O وسط BC باشد، از تقاطع OM و AB نقطهٔ E به دست می‌آید و مثلث EBO متساوی‌الساقین است. ارتفاع نظیر رأس E از این مثلث، خط xy را که از A به موازات BC رسم می‌شود، در I قطع می‌کند و IM از وسط OC می‌گذرد.

۴.۱.۳۳.۱.۱. یک ضلع، مجموع دو ارتفاع، زاویه

۲۴۸. فرض می‌کنیم ABC (شکل) مثلث خواسته شده باشد. ارتفاع BE را امتداد می‌دهیم و EG را برابر با ارتفاع CF روی آن جدا می‌کنیم. از نقطهٔ G خط GH را موازی AC رسم می‌کنیم تا امتداد BA را در H قطع کند، پس

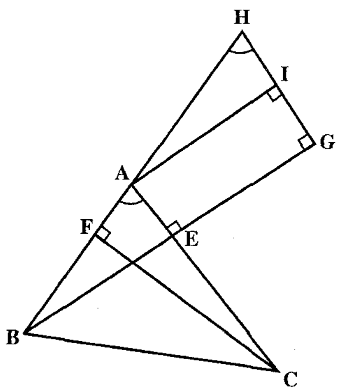


$$B\hat{H}G = B\hat{A}C = \hat{A} \quad \text{و} \quad B\hat{G}H = B\hat{E}A = 90^\circ$$

پس در مثلث قائم الزاویهٔ BGH، یک ضلع زاویهٔ قائمه، $BG = h_b + h_c$ و زاویهٔ حادهٔ $B\hat{H}G = \hat{A}$ را می‌دانیم؛ پس می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم و طول BH را تعیین کنیم. به آسانی می‌توان نشان داد که $BH = b + c$. خط AI را موازی BG رسم می‌کنیم تا HG را در I قطع کند. AIGE مستطیل است و بنابراین $AI = EG = h_c$. حال در مثلث‌های قائم الزاویهٔ ACF و AHI، $A\hat{H}I = A\hat{C}F = \hat{A}$ ، $AI = CF = h_c$، پس دو مثلث همنهشتند و $AH = AC = b$، بنابراین $BH = BA + AH = b+c$. اکنون از مثلث خواسته شدهٔ ABC، a، $\hat{A}$ و b+c

را می‌دانیم و به مسأله‌ای می‌رسیم که حل آن را می‌دانیم، ولی می‌توان به طور مستقیم از مثلث کمکی BGH در شکل به مثلث خواسته شدهٔ ABC رسید. رأس B از مثلث BGH رأس مثلث ABC هم هست. برای یافتن C ملاحظه می‌کنیم که در مثلث متساوی‌الساقین AHC داریم: $A\hat{H}C = A\hat{C}H = \frac{۱}{۲}\hat{A}$ و چون $A\hat{H}G = \hat{A}$، خط HC نیمساز زاویهٔ H است و این خط مکان هندسی نقطهٔ C را تشکیل می‌دهد. دایرهٔ (B, a) مکان هندسی دیگری برای C است، پس رأس A بر روی ضلع BH از مثلث BGH و همچنین روی عمودمنصف CH قرار دارد. اگر زاویهٔ داده شدهٔ A منفرجه‌باشد، مثلث BGH به جای A، شامل مکمل A خواهد بود و مسأله به همان ترتیب حل می‌شود.

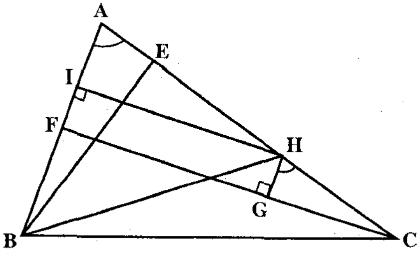
۲۴۹. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. ضلع AB را به اندازهٔ AH = AC امتداد می‌دهیم و از H عمود HG را بر امتداد ارتفاع BE فرود می‌آوریم و از A خطی موازی BG رسم می‌کنیم تا HG را در نقطهٔ I قطع کند. همان طور که می‌دانیم $A\hat{H}I = B\hat{A}C = \alpha$ و $AH = AC = b$ است، پس مثلث AHI قابل رسم است. از طرفی مثلث قائم‌الزاویهٔ BHG نیز با معلوم بودن اندازهٔ زاویهٔ $B\hat{H}G = \alpha$ و طول پاره‌خط $BG = h_b + h_c$ قابل رسم است و مثلث



متساوی‌الساقین AHC با معلوم بودن $AH = AC = b$ و زاویهٔ $C\hat{A}H = ۱۸۰^\circ - \alpha$ قابل رسم است. با رسم این مثلثها، مثلث ABC به دست می‌آید.

۱.۱.۳۳.۱.۵. یک ضلع، تفاضل دو ارتفاع، زاویه

۲۵۱. فرض کنید ABC (شکل) مثلث خواسته شده باشد. ارتفاعهای BE و CF را رسم کنید و FG را برابر BE روی CF جدا کنید، به طوری که $CG = h_c - h_b$.



GH را موازی با AB رسم کنید.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ CGH قاعدهٔ $CG = h_c - h_b$ و $C\hat{H}G = \hat{A}$ را می‌دانیم و بنابراین، می‌توانیم آن را رسم و طول CH را تعیین کنیم.

اکنون نشان می‌دهیم که $CH = b\text{-}c$ ؛ HI را از H بر AB عمود می‌کنیم. داریم : $HI = FG = BE$ ، پس دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABE و AHI همنهشتند، زیرا زاویهٔ A در آنها مشترک است و $BE = HI$، بنابراین :

$$CH = CA - AH = CA - AB = b - c \quad \text{و} \quad AH = AB$$

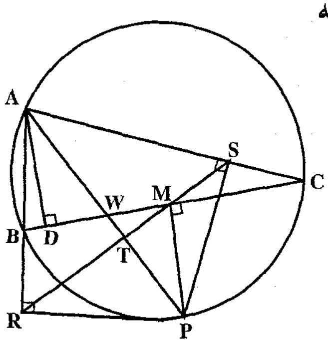
ولی مثلث خواسته شده را می توان مستقیماً از مثلث CHG در شکل به دست آورد. رأس C از مثلث CHG رأس مثلث خواسته شده نیز هست. از مثلث متساوی الساقین ABH داریم : $A\hat{H}B = \frac{1}{2}(180^\circ - \hat{A})$ امّا $A\hat{H}G = 180^\circ - G\hat{H}C = 180^\circ - \hat{A}$ ،

پس BH نیمساز زاویهٔ AHG است و یک مکان هندسی برای رأس B از مثلث ABC به دست می‌آید ؛ مکان هندسی دیگر، دایرهٔ (a و C) است. اکنون رأس A را می‌توان از محل برخورد عمودمنصف BH و امتداد CH به دست آورد.

اگر زاویهٔ مفروض A منفرجه باشد، مثلث CGH به جای زاویهٔ A، شامل مکمل A خواهد بود و مسأله را می‌توان به همان روش حل کرد.

نکته. بحث بالا نشان می‌دهد که اجزای (A، $h_c - h_b$ ، b-c) یک دسته از معلومات مثلث را تشکیل می‌دهند.

۶.۱.۳۳.۱.۱. مجموع دو ضلع، ارتفاع، زاویه



۲۵۲. راه اول. فرض کنید ABC (شکل) مثلث خواسته شده، W و P بترتیب نقطه‌های برخورد AW، نیمساز داخلی زاویهٔ A، با BC و دایرهٔ محیطی ABC و R و S تصویر P بترتیب بر AB و AC باشند. داریم :

$$AR+AS = (AB+BR) + (AC-SC) = (AB+AC) + (BR - SC) \qquad (1)$$

ولی PC = PB و PR = PS ؛ پس با توجه به مثلثهای قائم‌الزاویهٔ همنهشت PAR و PAS و مثلثهای قائم‌الزاویهٔ همنهشت PRB و PSC، داریم AR =AS و BR = CS .
پس با توجه به رابطهٔ (۱)،

$$AR = AS=\frac{۱}{۲}\,(AB+AC)=S$$

پس، از چهارضلعی ASPR زاویهٔ SAR را که برابر زاویهٔ A است، و دو ضلع AR و AS را می‌دانیم و زاویه‌های ARP و ASP قائمه‌اند ؛ پس می‌توان این چهارضلعی را رسم کرد، و AP عمودمنصف RS است. خط RS خط سیمسون P برای ABC است ؛ پس RS از M ، پای عمود PM که از P بر BC رسم می‌شود، می‌گذرد. فرض کنید T نقطهٔ برخورد RS و AWP باشد. با توجه به مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متشابه PMT و ADW داریم :

$$PT : AD = PM : AW = PM : (AP-PW) \quad (۲)$$

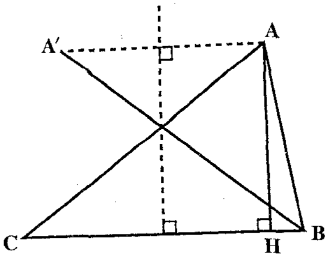
و در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ PMW و APS داریم :

$$PM^{۲} = PT.PW \text{ و } PS^{۲} = PT.PA \quad (۳)$$

پس با توجه به رابطه‌های (۲) و (۳)،

$$PM^{۲} + AD.PM - PS^{۲} = ۰ \quad (۴)$$

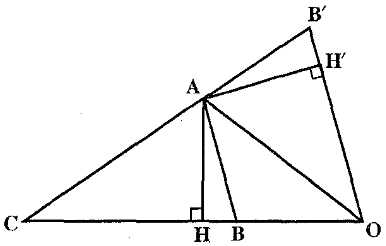
پاره‌خط $AD = h_a$ مفروض است، و PS را می‌توان از چهارضلعی ASPR که در بالا رسم شد، به دست آورد ؛ پس PM را می‌توان رسم کرد.
دایرهٔ (P , PM) را رسم کنید تا RS را در M قطع کند. عمودی که در M بر PM رسم می‌شود، دو ضلع AR و AS از چهارضلعی ASPR را در دو رأس B و C از مثلث خواسته شدهٔ ABC قطع می‌کند.
راه دوم. مسأله را ممکن است به مسألهٔ پاپوس منجر کرد و این امر به دو طریق مختلف میسر است :



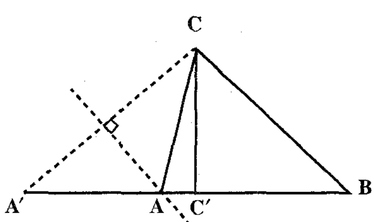
اوّل، اگر قرینهٔ ′A رأس A را نسبت به عمودمنصف ضلع BC تعیین کنیم، در مثلث ′BAA زاویهٔ $A'\hat{B}A$ که برابر اختلاف زاویه‌های

B و C مثلث ABC است (اگر در مثلث ABC این اختلاف معلوم باشد)، در دست است و ارتفاع مثلث ABA' همان ارتفاع مثلث ABC می‌باشد، پس اگر در مثلث ABC، اختلاف زاویه‌های B و C و ارتفاع h_a و مجموع ضلعهای AB+AC در دست باشد، در مثلث $A'BA$ زاویهٔ $A\hat{B}A'$ و ارتفاع نظیر آن و مجموع دو ضلع $A'B$ و AB در دست است، یعنی مثلث $A'BA$ مثلث این مسأله است، پس حل مثلث $A'BA$ را می‌توان به حل مسألهٔ پاپوس منجر کرد.

روش دوم، روش مستقیم است، یعنی اگر فرض کنیم در مثلث ABC جزءهای ذکر شده، در صورت مسأله معلوم باشند، ضلع AB را حول نقطهٔ A به قدر مکمل زاویهٔ A دوران می‌دهیم تا AB در وضع AB' در استقامت AC قرار گیرد. در این دوران ارتفاع AH نیز به وضع AH' در می‌آید و خط $B'H'$ که بر AH' عمودمنصف است، امتداد BC را در نقطهٔ O قطع می‌کند. روشن است که زاویهٔ $H'AH$ مکمل زاویهٔ O می‌باشد و چون: $H'\hat{A}H = B\hat{A}B' = \pi - \hat{A}$ می‌باشد، پس زاویهٔ O برابر زاویهٔ معلوم $\hat{A}$ خواهد بود و مثلث قائم‌الزاویهٔ AHO که در آن ارتفاع AH و زاویهٔ AOH برابر نصف $\hat{A}$ معلوم است، طول OA را مشخص می‌سازد. پس در مثلث $B'CO$ زاویهٔ $\hat{O} = \hat{A}$ و ضلع مقابل آن $CB' = AB + AC$ و نیمساز زاویهٔ O برابر OA معلوم است، یعنی از مثلث، یک زاویه و نیمساز آن با ضلع مقابل در دست است و مسألهٔ پاپوس حاصل می‌شود.

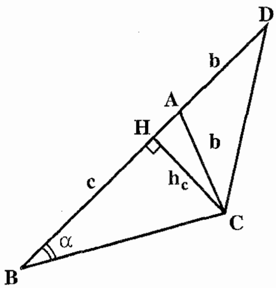


۲۵۳. فرض می‌کنیم مسأله حل شده، AB را به اندازهٔ AC از طرف A امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ A' به دست آید. نقطهٔ A' را به نقطهٔ C وصل می‌کنیم. مثلث $A'AC$ متساوی‌الساقین است، پس $\hat{A}' = \frac{\hat{A}}{2}$. بنابراین مثلث قائم‌الزاویهٔ $CC'A'$ قابل



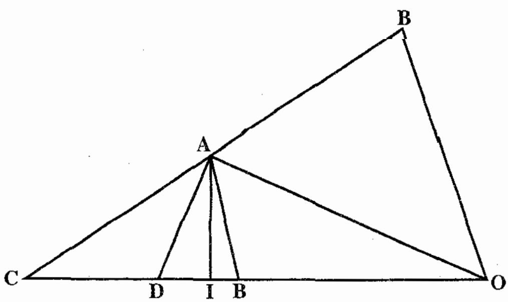
ترسیم است (با معلوم بودن $\frac{\hat{A}}{2} = \hat{A}'$ و $h_c = CC'$)، پس از رسم این مثلث، $A'C'$ را از طرف C' تا نقطهٔ B امتداد می‌دهیم به طوری که $A'B = l$ گردد. نقطهٔ B را به نقطهٔ C وصل می‌کنیم. سپس عمودمنصف CA' را رسم می‌کنیم تا $A'B$ را در A قطع کند. مثلث ABC جواب مسأله است.

۲۵۴. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. ضلع AB را به اندازهٔ AD=AC امتداد می‌دهیم و از D به C وصل می‌کنیم BD=b+c، و مثلث ADC متساوی‌الساقین است. ارتفاع CH را رسم می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ BCH با معلوم بودن : $\hat{H} = 90°$ ، $\hat{B} = \alpha$ و $CH = h_c$ قابل رسم است. این مثلث رارسم می‌کنیم و روی ضلع BH، پاره خط $BD = b+c = l$ را جدا کرده، از D به C وصل می‌کنیم، سپس عمودمنصف پاره‌خط DC را رسم می‌کنیم تا DB را در رأس A قطع کند. از A به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



۱.۱.۳۳.۱.۷. مجموع دو ضلع، ارتفاع، تفاضل دو زاویه

۲۵۵. چون نیمساز خارجی زاویهٔ A و طول AB' را برابر AB در امتداد AC رسم کنیم (خط AO نیمساز خارجی A است)، زاویهٔ BOB' برابر α خواهد بود. O نقطهٔ تلاقی نیمساز خارجی زاویهٔ O با امتداد ضلع BC است. مثلثهای ABO و $AB'O$ برابرند، زیرا ضلع AO در هر دو مشترک است و $AB = AB'$ بنابر رسم، و زاویه‌های $B'AO$ و BAO، چون AO نیمساز است، برابرند، یعنی دو مثلث در دو ضلع و زاویهٔ بین آنها برابرند، پس چون در مثلث ABO زاویهٔ ABC خارجی است، پس زاویهٔ :



$A\hat{O}B = A\hat{B}C - \frac{\pi - \hat{A}}{۲}$ یعنی ، $A\hat{B}C = B\hat{A}O + A\hat{O}B$

پس : $A\hat{O}B = \hat{B} - \frac{\pi - \hat{A}}{۲}$ (هرگاه زاویهٔ با یک حرف تنها نموده شود به مثلث ABC متعلق است) و یا :

$$A\hat{O}B = \frac{۲\hat{B} + \hat{A} - \pi}{۲}$$

ولی $۲\hat{B} + \hat{A} - \pi = ۲\hat{B} + \hat{A} - (\hat{A} + \hat{B} + \hat{C})$

پس $A\hat{O}B = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{۲}$

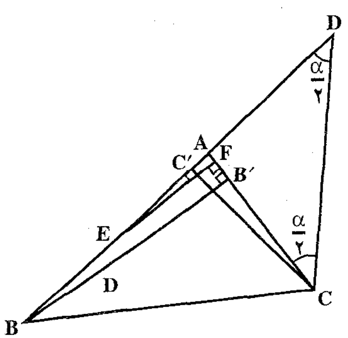
پس زاویهٔ $\hat{O} = \alpha$ می‌باشد، در مثلث B′OC ضلع $B'C = d$ و زاویهٔ $\hat{O} = \alpha$ و طول نیمساز زاویهٔ O، یعنی OA معلوم است (معلوم بودن ارتفاع AI و زاویهٔ $A\hat{O}I = \frac{\alpha}{۲}$ ، مثلث قائم‌الزاویهٔ AIO و بنابراین وتر AD آن را مشخص می‌سازد) یعنی از مثلثی یک زاویه و ضلع مقابل و نیمساز این زاویه معلوم است. رسم این مثلث در کتابهای کلاسیک داده شده است و به نام مسألهٔ پاپوس (Pappus) چندین راه حل دارد که از ذکر آن صرفنظر می‌کنیم.

۱.۱.۳۳.۱.۸. مجموع دو ضلع، مجموع دو ارتفاع، تفاضل دو زاویه

۲۵۷. مثلث BGH زاویهٔ A را به دست می‌دهد و بنابراین $\hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ - \hat{A}$ نیز معلوم است ؛ پس می‌توان زاویه‌های B و C را رسم کرد.

۱.۱.۳۳.۱.۹. مجموع دو ضلع، تفاضل دو ارتفاع، زاویه

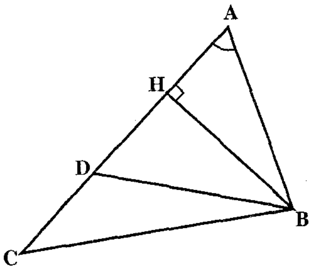
۲۵۸. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم و ارتفاعهای ′BB و ′CC را رسم می‌کنیم. روی ارتفاع ′BB پاره‌خط B′D را مساوی ارتفاع ′CC جدا می‌کنیم و از D عمودی بر ′BB اخراج می‌کنیم تا AB را در E قطع کند. مثلث قائم‌الزاویهٔ BED با معلوم بودن ضلع $BD = h_b - h_c$ و زاویهٔ



$\hat{E}$ قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم. وتر BE از این مثلث مساوی $c - b = l$ است. با معلوم بودن $b+c$ و $b-c$ اندازهٔ b و c محاسبه می‌شود و از آن جا مثلث ABC قابل رسم است.

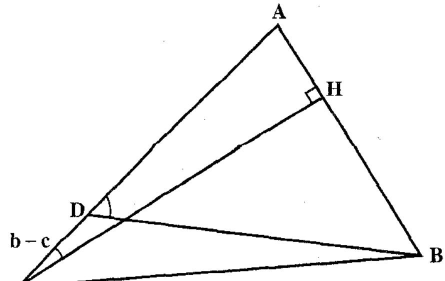
۱.۱.۳۳.۱.۱۰. تفاضل دو ضلع، ارتفاع، زاویه

۲۵۹. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. ارتفاع BH را رسم می‌کنیم و روی ضلع AC پاره‌خط $AD = AB$ را جدا کرده، از D به B وصل می‌کنیم؛ $DC = AC - AB = b - c$ است. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH با معلوم بودن اندازهٔ $\hat{A}$ و ارتفاع BH قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم، سپس پاره‌خط AD را به اندازهٔ AB روی خط AH



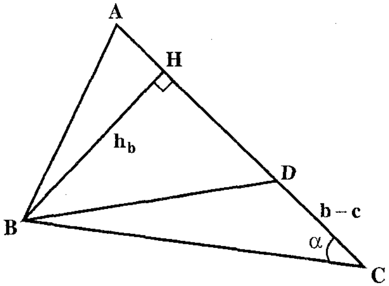
و در طرف نقطهٔ H و به دنبال آن پاره‌خط $DC = b-c$ را در ادامهٔ AD جدا می‌کنیم. رأس C به دست می‌آید. از C به B وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۲۶۰. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. پاره‌خط $AD = AB$ را روی ضلع AC جدا می‌کنیم. $CD = b-c$ و مثلث ADB متساوی‌الساقین است. چون زاویهٔ $\hat{A}$ معلوم است، پس زاویه‌های $A\hat{D}B$ ، $A\hat{B}D$ و $B\hat{D}C$ همچنین زاویهٔ $A\hat{C}H$ از مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH معلومند. بنابراین برای رسم مثلث ABC نخست مثلث قائم‌الزاویهٔ ACH را با معلوم بودن $CH = h_c$ و $\hat{A}$ رسم می‌کنیم. سپس پاره‌خط $CD = b - c$ را روی CA جدا کرده، از D خطی رسم می‌کنیم که با ضلع AC زاویهٔ $A\hat{D}B = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲}$ را بسازد. نقطهٔ برخورد این خط با خط AH رأس B است. از B به C وصل می‌کنیم



مثلث ABC جواب مسأله است.

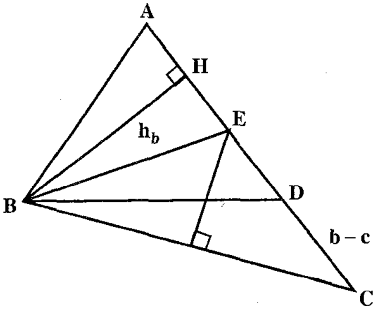
۲۶۱. اگر مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله فرض کنیم، با رسم ارتفاع BH مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC قابل رسم است. از طرفی اگر $AD=AB=c$ را روی AC جدا کنیم $DC = b-c$، و مثلث ABD متساوی‌الساقین است. بنابراین برای رسم مثلث ABC چنین عمل می‌کنیم:



مثلث قائم‌الزاویهٔ BHCرا رسم می‌کنیم($\hat{H}=90^\circ$ ، $\hat{C}=\alpha$ و $BH=h_b$). سپس پاره‌خط $CD = b-c$ را روی CH جدا می‌کنیم و از D به B وصل می‌کنیم. عمودمنصف پاره‌خط BD، امتداد CH را در نقطهٔ A قطع می‌کند. از A به B وصل می‌کنیم.

۱.۱.۳۳.۱.۱۱. تفاضل دو ضلع، ارتفاع، تفاضل دو زاویه

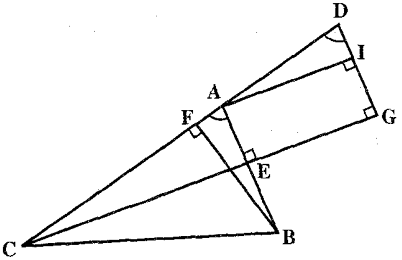
۲۶۲. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. روی ضلع AC پاره‌خط $AD = AB$ را جدا می‌کنیم. $DC = b-c = l$ است. ارتفاع $BH = h_b$ را نیز رسم می‌کنیم و حال برای تعیین زاویهٔ $\hat{B}-\hat{C}$ عمودمنصف ضلع BC را رسم می‌کنیم تا AC را در E قطع کند. از E به B وصل می‌کنیم.



زاویهٔ $A\hat{B}E = \hat{B}-\hat{C} = \alpha$ است. با توجه به نکته‌های بالا می‌توان مثلث ABC را رسم کرد.

۱.۱.۳۳.۱.۱۲. تفاضل دو ضلع،مجموع دو ارتفاع، زاویه

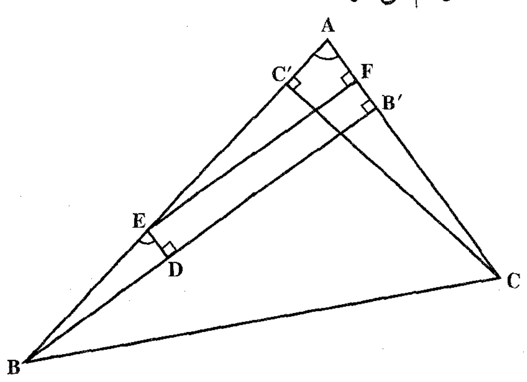
۲۶۴. اگر مسأله را حل شده فرض کنیم و ضلع AB را به اندازهٔ $AD = AC$ امتداد دهیم و از



D عمود DG را بر ارتفاع CE فرود آوریم، $EG = h_b$ است (شکل). در نتیجه $CG = h_b + h_c$ است و چون $A\hat{D}G = \hat{A} = \alpha$، مقدار معلومی است، پس مثلث قائم‌الزاویهٔ CDG با معلوم بودن یک ضلع زاویهٔ قائمه و یک زاویهٔ حاده قابل رسم است. از رسم این مثلث $CD = b + c$ به دست می‌آید و چون $b - c = l$ نیز معلوم است، بنابراین b و c مشخص می‌شوند و از آن جا مثلث ABC با معلوم بودن دو ضلع b و c و زاویهٔ $\hat{A}$ رسم می‌شود.

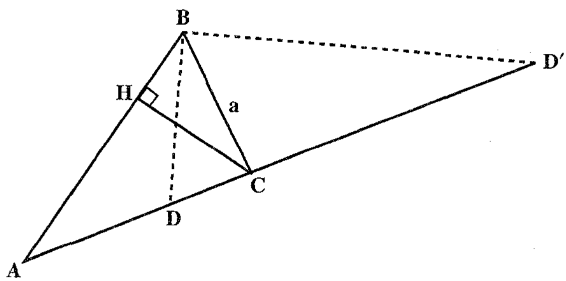
۱.۱.۳۳.۱.۱۳. تفاضل دو ضلع،تفاضل دو ارتفاع، تفاضل دو زاویه

۲۶۶. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب آن می‌گیریم. روی ارتفاع BB' پاره‌خط $B'D = CC'$ را جدا می‌کنیم و از D عمودی بر BB' اخراج می‌کنیم تا AB را در E قطع کند. $BD = h_b - h_c$ و $BE = c - b$ است (شکل). بنابراین مثلث قائم‌الزاویهٔ BDE با معلوم بودن ضلع $BD = h_b - h_c = l$ و وتر $BE = c - b = l$ قابل رسم است. از رسم این مثلث اندازهٔ زاویهٔ $\hat{E} = \hat{A}$ مشخص می‌شود، بنابراین $\hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ - \hat{A}$ مشخص می‌گردد و چون $\hat{C} - \hat{B} = \alpha$ نیز معلوم است، اندازهٔ دو زاویهٔ $\hat{B}$ و $\hat{C}$ نیز به دست می‌آید. با معلوم بودن زاویه‌ها و $b - c$ مثلث ABC رسم می‌شود.



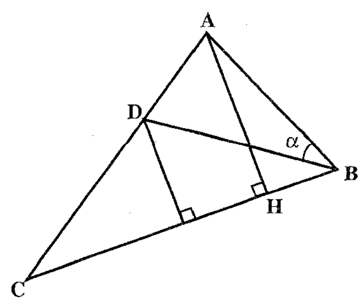
۱.۱.۳۳.۱.۱۴. نسبت دو ضلع، ارتفاع، زاویه

۲۶۷. مسأله را حل شده می‌گیریم. ارتفاع CH و نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی رأس B را رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در D و D' قطع کنند. $D\hat{B}D' = 90^\circ$ است. مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC با معلوم بودن اندازهٔ یک ضلع زاویهٔ قائمه و یک زاویهٔ حاده قابل رسم است ($\hat{H} = 90^\circ$، $\hat{A} = \alpha$ و $CH = h_c$). این مثلث را رسم می‌کنیم. ضلع AC مشخص می‌شود. حال دو نقطهٔ D و D' را روی این ضلع و در امتداد آن چنان تعیین می‌کنیم که $\frac{DC}{DA} = \frac{D'C}{D'A} = \frac{a}{c}$ باشد. دایرهٔ به قطر DD' از رأس B می‌گذرد. این دایره را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد آن با خط AH رأس B از مثلث ABC است. از B به C وصل می‌کنیم.

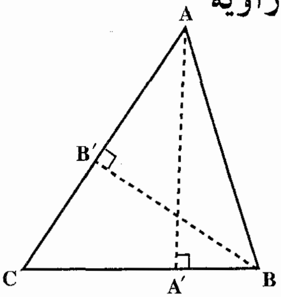


۱.۱.۳۳.۱.۱۵. نسبت دو ضلع، ارتفاع، تفاضل دو زاویه

۲۶۸. مسأله را حل شده می‌گیریم. عمودمنصف ضلع BC را رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ D قطع کند. $A\hat{B}D = \hat{B} - \hat{C} = \alpha$ است. ارتفاع AH را نیز رسم می‌کنیم....



۱.۱.۳۳.۱.۱۶. نسبت دو ضلع، مجموع دو ارتفاع، زاویه



۲۶۹. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC، مثلث خواسته شده باشد؛ پس رابطه‌های

$$h_a + h_b = l \qquad (1)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \qquad (2)$$

برقرار است. در هر مثلث داریم:

$$a \times h_a = b \times h_b$$

و یا

$$\frac{a}{b} = \frac{h_b}{h_a}$$

و یا

$$\frac{h_b}{h_a} = \frac{p}{q} \qquad (3)$$

و یا

$$\frac{h_b + h_a}{h_a} = \frac{p+q}{q}$$

از این رابطه اندازهٔ h_a از طریق ترسیم به دست می‌آید (چهارمین جزء تناسب) و از طرفی رابطهٔ (۳) را می‌توان چنین نوشت:

و یا

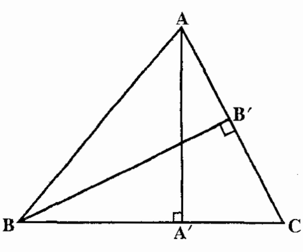
$$\frac{h_b}{h_a + h_b} = \frac{p}{p+q}$$

و یا

$$\frac{h_b}{l} = \frac{p}{p+q}$$

از این رابطه، اندازهٔ h_b به دست می‌آید (چهارمین جزء تناسب). حال گوییم مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ABB' و ABA' قابل ترسیم هستند (با معلومات وتر $AB = c$ و ضلعهای $AA' = h_a$ و $BB' = h_b$). با رسم این مثلثها، زاویه‌های $\hat{A}$ و $\hat{B}$ معین می‌شوند.

۱.۱.۳۳.۱.۱۷. نسبت دو ضلع، تفاضل دو ارتفاع، زاویه



۲۷۰. فرض می‌کنیم، مسأله حل شده و ABC مثلث خواسته شده باشد، پس رابطه‌های

$$h_a - h_b = l \quad (۱)$$

$$\frac{a}{b} = \frac{p}{q} \quad (۲)$$

برقرار است. با درنظر گرفتن:

$$\begin{cases} ۲S = ah_a \\ ۲S = bh_b \end{cases}$$

داریم:

$$ah_a = bh_b$$

یا

$$\frac{h_b}{h_a} = \frac{a}{b}$$

با توجه به رابطهٔ (۲) داریم:

$$\frac{h_b}{h_a} = \frac{a}{b}$$

یا

$$\frac{h_b}{h_a - h_b} = \frac{p}{q-p}$$

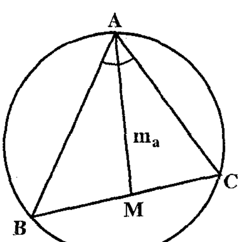
یا

$$\frac{h_b}{l} = \frac{p}{q-p}$$

از رابطهٔ (۳) اندازهٔ h_b را از طریق ترسیم به دست می‌آوریم (چهارمین جزء تناسب) و از $\frac{h_b}{h_a} = \frac{p}{q}$، اندازهٔ h_a معلوم می‌گردد (از طریق ترسیم). حال باید مثلثی رسم کرد که از آن c، h_a و h_b در دست است.

۱.۱.۳۳.۲. ضلع، میانه، زاویه

۱.۱.۳۳.۲.۱. یک ضلع، یک میانه، یک زاویه

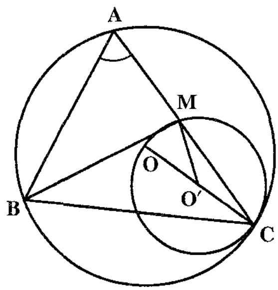


۲۷۱. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. میانهٔ AM را رسم می‌کنیم. با توجه به معلوم بودن اندازهٔ ضلع $BC = a$ و میانهٔ $AM = m_a$ و $\hat{A} = \alpha$، برای رسم مثلث ABC چنین عمل می‌کنیم:

پاره‌خط $BC = a$ را رسم می‌کنیم، سپس کمان درخور

زاویهٔ $\hat{A}=\alpha$ روبه‌رو به پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم. آن‌گاه به مرکز نقطهٔ M وسط ضلع BC و به شعاع m_a دایره‌ای رسم می‌کنیم تا کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}$ را در نقطهٔ A رأس سوم مثلث ABC قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم. شرط جواب مسأله آن است که کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}$ روبه‌رو به ضلع BC ، دایرهٔ $(M\ ,\ m_a)$ را قطع کند.

۲۷۲. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. ملاحظه می‌کنیم که رأس A روی کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}$ روبه‌رو به، پاره‌خط BC قرار دارد. مرکز دایره‌ای که این کمان درخور بخشی از آن است را O می‌نامیم.



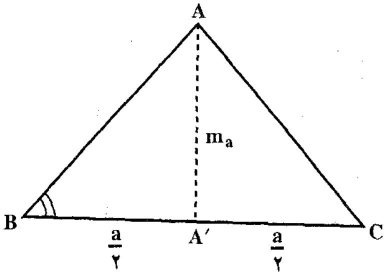
برای رسم مثلث کافی است نقطهٔ M وسط ضلع AC را تعیین کنیم. امّا می‌دانیم که $\frac{CM}{CA}=\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین نقطهٔ M مجانس نقطهٔ A نسبت به مرکز تجانس C و نسبت تجانس $\frac{۱}{۲}$ است. بنابراین مرکز این دایره نیز مجانس نقطهٔ O با نسبت تجانس $\frac{۱}{۲}$ و مرکز تجانس C است. پس برای رسم مثلث ABC، پاره‌خط $BC=a$ را رسم کرده، کمان درخور زاویهٔ A روبه‌رو به BC را رسم می‌کنیم و مرکز آن را O می‌نامیم. مجانس نقطهٔ O نسبت به مرکز تجانس C و با نسبت $\frac{۱}{۲}$ را به دست آورده، O' می‌نامیم. به مرکز O' و به شعاع نصف شعاع دایرهٔ O، دایرهٔ O' را رسم می‌کنیم. به مرکز B و به شعاع m_b نیز یک دایره رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ M (وسط ضلع AC) یکدیگر را قطع کنند. CM را رسم کرده، امتداد می‌دهیم تا کمان درخور زاویهٔ A را در نقطهٔ A، رأس سوم مثلث قطع کند. از A به B وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

بحث. شرط امکان مسأله آن است که دایرهٔ O' و دایرهٔ (B,m_b) یکدیگر را قطع کنند.

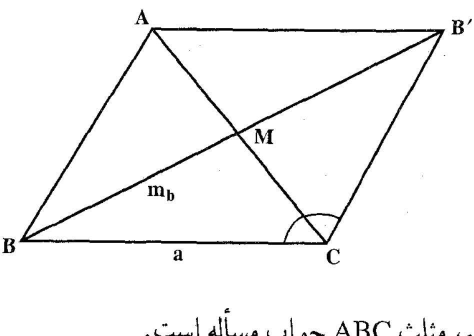
۲۷۳. اگر مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله فرض کنیم، مثلث ACC' با معلوم بودن $AC=b$ ، $CC'=m_b$ و $\hat{A}=\alpha$ قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم،

سپس AC' را به اندازهٔ خود تا B امتداد می‌دهیم. از B به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC به دست می‌آید.

۲۷۴. مثلث را رسم شده فرض می‌کنیم. اگر میانهٔ AA' را رسم کنیم، مثلث ABA' با معلوم بودن دو ضلع و یک زاویه ($BA'=\frac{a}{۲}$ ، $AA'=m_a$ ، $\hat{B}=\alpha$) قابل رسم است، پس برای رسم مثلث ABC، مثلث ABA' را با داده‌های بالا رسم می‌کنیم. سپس BA' را به اندازهٔ $A'C=\frac{a}{۲}$ امتداد می‌دهیم تا رأس C به دست آید. از C به A وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



۲۷۵. مسأله را حل شده می‌گیریم. میانهٔ BM را به اندازهٔ خود تا نقطهٔ B' $(BM=MB')$ امتداد می‌دهیم. از B' به C و A وصل می‌کنیم. چهارضلعی $ABCB'$ متوازی‌الاضلاع است ؛ بنابراین $B\hat{C}B'=۱۸۰^\circ-\hat{B}$ مقدار معلومی است و $BB'=۲m_b$ و $BC=a$ است ؛ پس مثلث$BB'C$ با معلوم بودن اندازهٔ دو ضلع و یک زاویه، قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم، سپس میانهٔ CM از آن را رسم کرده، به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا رأس A به دست آید. از A به B وصل می‌کنیم، مثلث ABC جواب مسأله است.



۱.۱.۳۳.۲.۲. ضلع، میانه، تفاضل دو زاویه

۲۷۶. راه اول. فرض کنید ABC مثلث خواسته شده باشد. $A'\hat{O}K=D\hat{A}O=\hat{B}-\hat{C}$ پس $A\hat{O}A'=۱۸۰^\circ-(\hat{B}-\hat{C})$.

فرض کنید امتداد AA' دایرهٔ محیطی را درJ قطع کند، در این صورت

داریم:

$$A'A.A'J = A'B.A'C$$

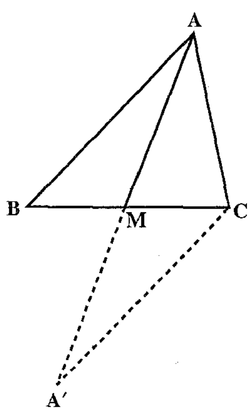
پس $A'J = a^2 : 4m_a$. پس پاره‌خط $A'J$ را می‌توان به عنوان جزء سوم تناسب با پاره‌خطهای a و $4m_a$ رسم کرد و مرکز دایرهٔ محیطی O روی عمودمنصف AJ قرار دارد. پس ترسیم به صورت زیر انجام می‌شود:

$AA' = m_a$ را رسم می‌کنیم و سپس کمانی از یک دایره را رسم می‌کنیم که AA' از نقطه‌های روی آن کمان با زاویهٔ $180^\circ - (\hat{B} - \hat{C})$ دیده شود. AA' را به اندازهٔ $A'J = a^2 : 4m_a$ امتداد می‌دهیم. عمودمنصف AJ کمان را در مرکز دایرهٔ محیطی مثلث خواسته شده قطع می‌کند. دایرهٔ (O, OA) عمودی را که در A' بر OA' رسم می‌شود در دو رأس B و C از مثلث خواسته شدهٔ ABC قطع می‌کند.

اگر نقطه‌های A و O در دو طرف BC قرار داشته باشند، یا به عبارت دیگر A زاویه‌ای منفرجه باشد، زاویه‌ای که پاره‌خط AA' از نقطهٔ O با آن زاویه دیده می‌شود برابر با $\hat{B} - \hat{C}$ خواهد بود.

راه دوم. چون میانه را به قدر خود از سمت M امتداد دهیم تا نقطهٔ A' قرینهٔ A نسبت به M به دست آید، در مثلث ACA' ضلع $AA' = 2m_a$ و میانهٔ $MC = \frac{a}{2}$ و اختلاف زاویه‌های میانهٔ MC با دو ضلع مجاور AC و $A'C$ معلوم است (زیرا این دو زاویه همان زاویه‌های B و C مثلث ABC می‌باشند). پس حل مسأله منجر می شود به:

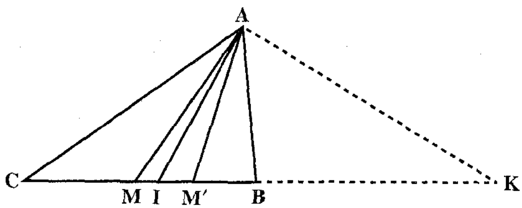
از مثلثی ضلع a و میانهٔ m_a و اختلاف زاویه‌های میانه با دو ضلع مجاور برابر α در



دست است، آن را رسم کنید.

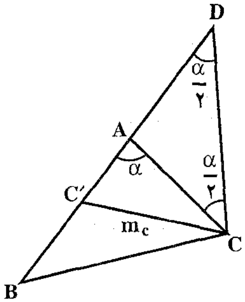
در مثلث ABC خط AM میانه است، چون زاویهٔ M′AB را برابر MAC رسم کنیم، زاویهٔ $M\hat{A}M' = \alpha$ خواهد بود و بعلاوه نیمساز آن همان نیمساز زاویهٔ A مثلث می‌باشد، پس اگر AI این نیمساز باشد، خطی که از A بر آن عمود اخراج می شود، نیمساز خارجی زاویهٔ A خواهد بود و اگر این نیمساز امتداد BC را قطع کند، نقطه‌های I و K نسبت به B و C مزدوج می‌باشند، پس:

$$MI \times MK = MB^{۲} = \frac{a^{۲}}{۴}$$



می‌باشد. حال اگر با انعکاسی به قطب M و قوت $\frac{a^{۲}}{۴}$ خط AK را منعکس کنیم؛ منعکس دایره‌ای است که باید بر نقطهٔ I مرور کند، چون منعکس نقطهٔ K، نقطهٔ I می‌باشد، پس اگر منعکس خط AK را نسبت به قطب O و قوت $\frac{a^{۲}}{۴}$ رسم کنیم (رسم آن معلوم است زیرا مرکز دایرهٔ منعکس بر روی عمود وارد از M بر AK واقع است و بقسمی است که اگر پایهٔ عمود، نقطهٔ N باشد، $MN \times MN' = \frac{a^{۲}}{۴}$ باشد، M′N قطر دایرهٔ منعکس است). این دایره خط AI را در نقطهٔ I قطع می‌کند و امتداد ضلع BC به دست می‌آید. حال چون از طرفین M دو طول MB و MC را برابر $\frac{a}{۲}$ رسم کنیم، مثلث ABC تکمیل می‌شود، برگشت از این مسأله به مسألهٔ قبل روشن است و کافی است عمل ترسیم برعکس ترسیم مذکور صورت پذیرد.

۱.۱.۳۳.۲.۳. مجموع دو ضلع، میانه، زاویه



۲۷۷. مثلث ABC را جواب مسأله فرض می‌کنیم. ضلع AB را به اندازهٔ $AD = AC$ امتداد می‌دهیم و از D به C وصل می‌کنیم $BD = b+c$ است. با فرض $\hat{A} = \alpha$، $A\hat{D}C = A\hat{C}D = \frac{\alpha}{۲}$ است. میانهٔ معلوم CC' را نیز رسم می‌نماییم؛...

۱.۱.۳۳.۲.۴. رابطهٔ بین ضلعها، مجموع دو میانه، تفاضل دو زاویه

۲۷۸. مسأله را حل شده بگیرید و با انتقال از داده‌های مسأله، مثلثی قابل رسم به دست آورید.

۱.۱.۳۳.۳. ضلع، نیمساز، زاویه

۱.۱.۳۳.۳.۱. یک ضلع، یک نیمساز، یک زاویه

۲۷۹. فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد، نیمساز زاویهٔ A از وسط کمان BC می‌گذرد. دو مثلث ABD' و BDD' متشابه‌اند؛ زیرا زاویهٔ D' در هر دو مشترک و $\overset{\frown}{BD'} = \overset{\frown}{D'C}$.

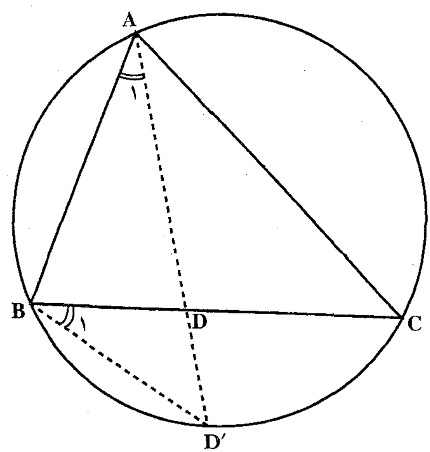
در نتیجه $\hat{A}_۱ = \hat{B}_۱$، پس:

$$\frac{BD'}{AD'} = \frac{DD'}{BD'}$$

و یا

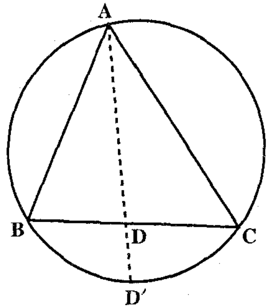
$$DD'.AD' = BD'^{۲}$$

$$AD' = DD' = AD$$



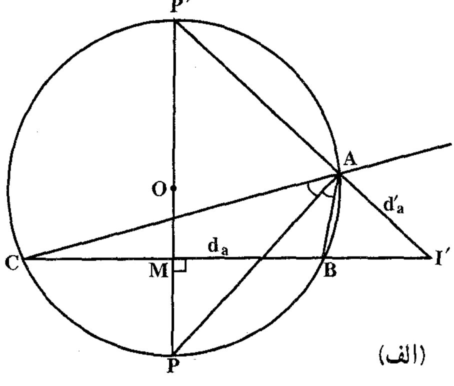
تفاضل و واسطهٔ هندسی دو پاره‌خط DD' و AD' را داریم. پس می‌توانیم آن دو پاره‌خط را رسم کنیم.

ترسیم. $BC=a$ را رسم می‌کنیم. آن‌گاه کمان درخور زاویهٔ A روبه‌رو به پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم، سپس از D' وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$، کمانی به شعاع AD' رسم می‌کنیم تا دایره کمان درخور را در A قطع کند. A را به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



۲۸۰. اگر مثلث ABC، مثلث خواسته شده باشد، امتداد d_a از وسط کمانی حاوی زاویهٔ A با وتر BC می‌گذرد و چون زاویه‌های $P\hat{M}B$ و $P\hat{A}I'$ هر دو قائمه‌اند، لذا بر چهار نقطهٔ A، I'، M و P یک دایره می‌گذرد و می‌توان نوشت (شکل):

$$P'A.P'I'=P'P.P'M$$

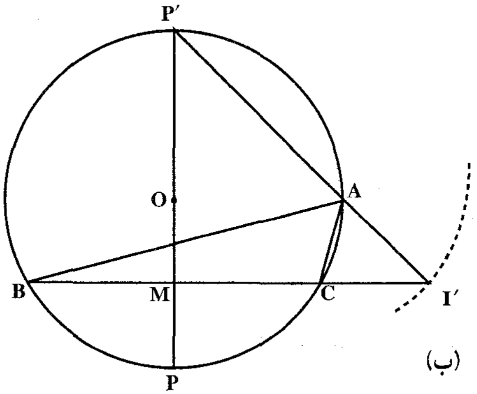


(الف)

و چون $P'I'-P'A=d'_a$ معلوم است. لذا حل مسأله منجر به تعیین طولهای $P'A$ و $P'I'$ می‌شود که تفاضل و حاصلضرب آنها معلوم می باشد و می‌توان آنها را رسم کرد.

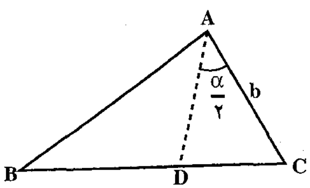
بنابراین طریق زیر برای رسم مثلث به دست می‌آید :

ابتدا دایرهٔ حاوی زاویهٔ A نظیر به وتر $BC = a$ را رسم کرده و از نقطهٔ P وسط کمان BC عمود PM را بر BC فرود می‌آوریم. اندازه‌های PP' و PM مشخص می‌شود. حال دو قطعه خط که تفاضلشان d و حاصلضرب آنها $P'P.P'M$ می‌باشد، رسم می‌کنیم. با به دست آوردن اندازه‌های این دو پاره‌خط به مرکز P' و شعاع $P'I'$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. نقطهٔ تلاقی این دایره با امتداد BC، نقطهٔ I' (محل تلاقی نیمساز خارجی با ضلع BC) است. $P'I'$ محیط دایرهٔ O را در A قطع می‌کند. ABC مثلث خواسته شده است.



(ب)

۲۸۱. مثلث ABC را جواب مسأله فرض می‌کنیم. نیمساز AD را رسم می‌کنیم. مثلث ADC با معلوم بودن دو ضلع $AC = b$، $AD = d_a$ و زاویهٔ $D\hat{A}C = \frac{\hat{A}}{۲} = \frac{\alpha}{۲}$ قابل رسم است. پس برای رسم مثلث ABC، نخست مثلث ADC را رسم می‌کنیم، سپس از A خطی رسم می‌کنیم که با AC زاویه‌ای برابر با $\hat{A}$ بسازد. نقطهٔ برخورد این خط با امتداد CD رأس B است.

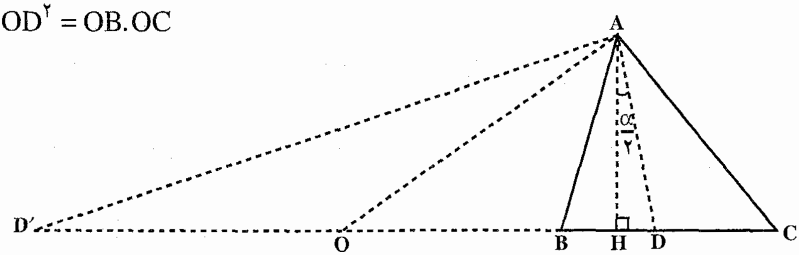


۱.۱.۳۳.۳.۲. ضلع، نیمساز، تفاضل دو زاویه

۲۸۳. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. زاویهٔ بین ارتفاع و نیمساز مساوی است با $\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}$ و AD نیمساز می باشد ؛ پس مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD قابل رسم است، پس از رسم مثلث از نقطهٔ A بر AD عمود می‌کنیم، تا امتداد BC را در D' قطع

کند، چون پای نیمسازهای داخلی و خارجی و رأسهای B و C تقسیم توافقی به وجود می‌آورند، پس اگر وسط DD' را O بنامیم، داریم :

$OD^{۲} = OB.OC$



در مثلث قائم‌الزاویهٔ ADD' :

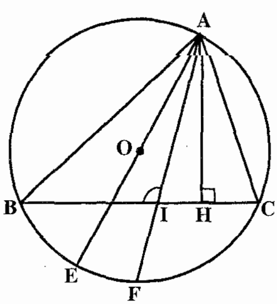
$$\frac{DD'}{۲} = DO = D'O = AO$$

پس داریم : $\overline{AO}^{۲} = \overline{OC}.\overline{OB}$

از طرفی $\overline{BC} = \overline{OC} - \overline{OB}$

چون حاصلضرب و تفاضل دو پاره‌خط در دست است، پس آن دو پاره‌خط قابل رسم می‌باشند. بنابراین برای حل مسأله مثلث ADH را رسم می‌کنیم. AD' را عمود بر AD رسم می‌کنیم که D' محل تقاطع این عمود با امتداد DH می‌باشد، سپس وسط DD' را O می‌نامیم و به مرکز O و شعاع OB و OC دو کمان می‌زنیم تا نقطه‌های B و C به دست آیند، A را به B و C وصل می‌کنیم.

۲۸۴. تفاضل دو زاویهٔ مجاورا، مساوی $\left|\hat{B} - \hat{C}\right| = \delta$ است. از آن جا می‌توان مثلث AIH را با معلوم بودن وتر AI و زاویهٔ حادهٔ $A\hat{I}H = \delta$ رسم نمود. از رسم این مثلث قائم‌الزاویه، اندازهٔ AH به دست می‌آید و چون $bc = ۲R.h_a$ است، سپس اندازهٔ R شعاع دایرهٔ محیطی مثلث ABC محاسبه می‌شود، زیرا $R = \frac{bc}{۲h_a}$ است. از طرفی نیمساز AI، نیمساز زاویهٔ بین AH و AOE قطر دایرهٔ محیطی مثلث است. بنابراین دایرهٔ محیطی مثلث مشخص است و از آن جا راه حل مسأله به دست



می‌آید. بدین ترتیب که نخست مثلث قائم‌الزاویهٔ AHI را با داده‌های مسأله رسم می‌کنیم، سپس AO را که قرینهٔ AH نسبت به AI است رسم کرده، نقطهٔ O را مشخص می‌سازیم. به مرکز O و به شعاع R دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم تا امتداد IH را در B و C که دو رأس دیگر مثلث ABC هستند، قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم.

نکته. تفاضل دو زاویهٔ $A\hat{I}B$ و $A\hat{I}C$ مساوی $\left|\hat{B}-\hat{C}\right|$ است ؛ زیرا اگر نقطهٔ برخورد AI با دایرهٔ محیطی مثلث را F بنامیم، $\overset{\frown}{BF}=\overset{\frown}{FC}$ است بعلاوه داریم :

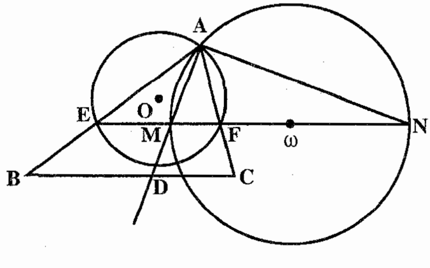
$$A\hat{I}B=\frac{\overset{\frown}{AB}+\overset{\frown}{FC}}{۲}$$

$$A\hat{I}C=\frac{\overset{\frown}{AC}+\overset{\frown}{FB}}{۲}$$

$$A\hat{I}B-A\hat{I}C=\frac{\overset{\frown}{AB}-\overset{\frown}{AC}}{۲}=\frac{\overset{\frown}{AB}}{۲}-\frac{\overset{\frown}{AC}}{۲}=\frac{\hat{C}}{۲}-\frac{\hat{B}}{۲}=\frac{۱}{۲}\left|\hat{C}-\hat{B}\right|$$

۳.۳.۳۳.۱.۱. نسبت دو ضلع،نیمساز، زاویه

۲۸۵. اگر ABC، مثلث خواسته شده باشد، هر خط مانند EF که موازی ضلع BC ضلعهای AB و AC را قطع کند، مثلثی متجانس با مثلث ABC با مرکز تجانس A و نسبت تجانس $\frac{AF}{AC}=\frac{AC}{AB}=\frac{b}{c}=k$ به وجود می‌آورد، که در آن رأس A از یک طرف بر کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}$ گذرنده بر EF واقع است و از طرف دیگر مکان A محیط دایره‌ای است که قطری از آن که بر EF منطبق است پاره‌خط EF را به نسبت توافقی $\frac{AF}{AE}=\frac{b}{c}=k$

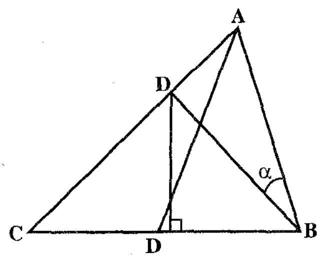


تقسیم می‌کند و از آن جا، حل مسأله چنین است:

ابتدا پاره‌خط دلخواه EF را رسم می‌نماییم و سپس کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}$ گذرنده بر EF را رسم می‌نماییم. آن‌گاه بر EF نقطه‌های N و M را چنان تعیین می‌کنیم که EF را به نسبت توافقی $\frac{b}{c}=k$ تقسیم نماید و دایره به قطر MN را رسم می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع این دو دایره رأس A است. AE ، AF و AM را وصل کرده، امتداد می‌دهیم و بر AM نقطهٔ D را به نحوی انتخاب می‌کنیم که $AD=d_a$ باشد. خطی که از D موازی EF رسم می‌شود، امتداد ضلعهای AE و AF را بترتیب در B و C قطع کرده، ABC مثلث خواسته شده است.

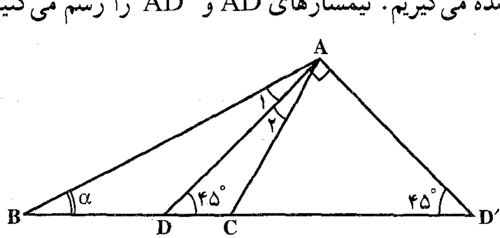
بحث. اگر دو دایره یکدیگر را در یک یا دو نقطه قطع کنند، مسأله دارای یک یا دو جواب است و اگر قطع نکنند جواب ندارد و چون M بین وتر EF و N خارج آن است، دو دایره پیوسته متقاطع و مسأله دارای جواب است.

۲۸۶. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. عمودمنصف ضلع BC را رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در نقطهٔ D قطع کند. از D به B وصل می‌کنیم $A\hat{B}D=\hat{B}-\hat{C}=\alpha$ است. نیمساز AD را نیز رسم می‌کنیم. ...



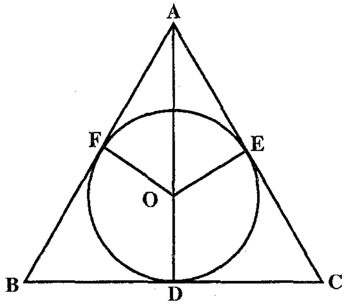
۱.۱.۳۳.۳.۴. ضلع، تساوی دو نیمساز، زاویه

۲۸۹. مسأله را حل شده می‌گیریم. نیمسازهای AD و AD' را رسم می‌کنیم. مثلث ADD'



قائم‌الزاویهٔ متساوی الساقین است، بنابراین $A\hat{D}D' = A\hat{D'}D = 45^\circ$ است. چون زاویهٔ $\hat{D} = 45^\circ$ زاویهٔ خارجی مثلث ABD است، پس $\hat{D} = \hat{B} + \hat{A}_1$ یا $45^\circ = \alpha + \frac{\hat{A}}{2}$ است. بنابراین زاویهٔ $\hat{A}_1 = \frac{\hat{A}}{2}$ و از آن جا زاویهٔ A از مثلث ABC معلوم است. بنابراین مثلث ABC با داشتن اندازه‌های یک ضلع و دو زاویه قابل رسم است ($BC = a$، $\hat{B} = \alpha$ و $\hat{A} = 2\hat{A}_1$).

۲۹۰. اگر ABC، مثلث خواسته شده باشد، می‌توان نوشت:



$$AE = AF = p - a$$

از طرفی $(b+c) - a = l \Rightarrow 2(p-a) = l$

بنابراین برای رسم مثلث به طریق زیر عمل می‌کنیم:

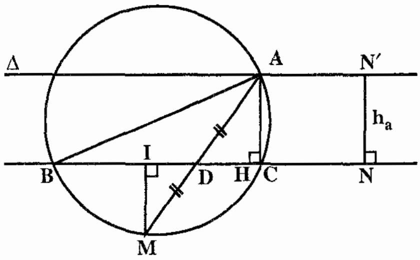
ابتدا زاویهٔ A را رسم کرده و بر دو ضلع آن از نقطهٔ A دو قطعهٔ AE و AF را مساوی $\frac{l}{2}$ جدا می‌کنیم. نقطه‌های E و F محل تماس دایرهٔ محاطی داخلی مثلث با دو ضلع AC و AB است. نیمساز AD را رسم کرده و از نقطهٔ D خطی مماس بر دایرهٔ محاطی می‌کشیم دو رأس دیگر مثلث تعیین می‌شود (شکل).

۱.۱.۳۴. ضلع؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

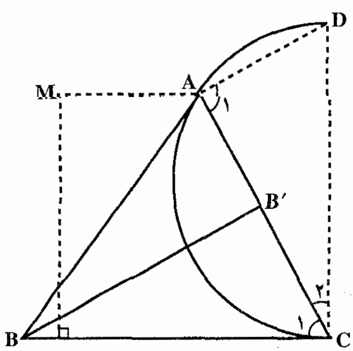
۱.۱.۱.۳۴. ضلع، ارتفاع، رابطهٔ متری

۲۹۱. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم کرده و AD را ادامه می‌دهیم تا دایره را در M قطع کند. داریم: $BD.DC = AD.DM$، و در فرض مسأله نیز داریم: $AD^2 = DB.DC$، پس $AD = DM$. بنابراین اگر عمود MI را بر BC فرود آوریم، چون دو مثلث DIM و DAH همنهشتند پس $IM = AH$ است. پس برای

حل مسأله، ابتدا BC را رسم می‌کنیم، آن‌گاه از I وسط BC عمود $IM = AH$ را بر آن اخراج کرده، و دایرهٔ محیطی مثلث BCM را می‌کشیم. سپس در امتداد BC پاره‌خط $NN' = h_a$ عمود بر BC رسم کرده و از N' خطی به موازات BC می‌کشیم تا دایره را در نقطهٔ A، رأس سوم مثلث ABC قطع کند، از A به B و C وصل می‌کنیم.



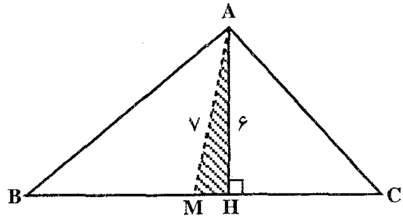
۲۹۲. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و ABC مثلث خواسته شده باشد. از نقطه‌های A و C عمودهایی بترتیب بر ضلعهای AC و BC اخراج می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ D قطع کنند. مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC با مثلث قائم‌الزاویهٔ $BB'C$ متشابه است؛ زیرا: $\hat{C}_1 + \hat{C}_2 = 90^\circ$ و $\hat{C}_2 + \hat{D} = 90^\circ$ پس $\hat{C}_1 = \hat{D}$، بنابراین $\frac{BC}{CD} = \frac{BB'}{AC}$ و یا $\frac{m}{n} = \frac{h_b}{b} = \frac{a}{CD}$. از روی این رابطه CD از طریق ترسیم محاسبه می‌شود (چهارمین جزء تناسب). چون زاویهٔ A_1 قائمه است، پس دایرهٔ به قطر CD از نقطهٔ A می‌گذرد، پس برای حل مسأله کافی است: اوّل پاره‌خط BC را به طول a رسم کرده و از نقطهٔ C عمودی بر آن اخراج نموده و به اندازهٔ طول معلوم CD بر آن جدا می‌کنیم تا نقطهٔ D به دست آید، سپس دایره‌ای به قطر CD رسم می‌کنیم، آن‌گاه از نقطهٔ اختیاری واقع بر BC عمودی بر آن اخراج و به اندازهٔ طول h_a بر آن جدا می‌کنیم تا نقطهٔ M به دست آید.



۱.۱.۳۴.۲. ضلع، میانه، مساحت

۲۹۳. می‌دانیم که $S=\frac{۱}{۲}a.h_a$ است.

بنابراین داریم :



$\frac{۱}{۲}\times ۸\times h_a=۲۴$

از آن جا $h_a=۶$ ؛ بنابراین از مثلث ABC اندازهٔ ارتفاع AH، میانهٔ AM و ضلع BC داده شده است ؛ پس برای رسم مثلث ABC، مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH را با داشتن اندازهٔ وتر $AM=۷$ و ضلع زاویهٔ قائمه $AH=۶$ رسم می‌کنیم. سپس $MB=MC=۴$ را در دو طرف M روی خط MH جدا می‌کنیم تا دو رأس B و C به دست آید، از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC به دست می‌آید.

۱.۱.۳۵. ضلع؛ پاره‌خط، خط؛ زاویه

۱.۱.۳۵.۱. ضلع، خط، زاویه

۲۹۴. فرض کنیم مسأله حل شده است و F قرینهٔ B نسبت به xy باشد. CD را روی CA برابر CB جدا می‌کنیم. داریم :

$$۲C\hat{B}E+\hat{C}=۱۸۰^\circ$$

و

$$\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}=۱۸۰^\circ$$

پس

$$C\hat{B}E=\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}$$

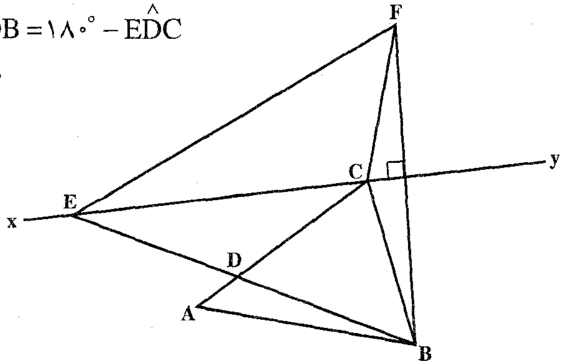
و

$$A\hat{B}E=\hat{B}-C\hat{B}E=\hat{B}-\frac{\hat{A}+\hat{B}}{۲}=\frac{\hat{B}-\hat{A}}{۲}$$

چون $\hat{B}-\hat{A}$ مقداری است معلوم، پس خط BE را می‌توان رسم کرد ؛ زیرا :

$$E\hat{F}C = C\hat{B}D = C\hat{D}B = ۱۸۰^\circ - E\hat{D}C$$

$$E\hat{F}C + E\hat{D}C = ۱۸۰^\circ$$



بنابراین زاویهٔ $A\hat{C}F$ با زاویهٔ $F\hat{E}B$ که مقداری است معلوم، مکمل است. از آن جا راه حل مسأله چنین است:

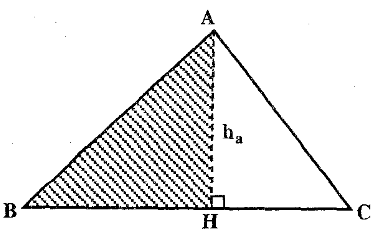
قاعدهٔ AB را رسم کرده، زاویهٔ $A\hat{B}E$ را برابر $\frac{\hat{B}-\hat{A}}{۲}$ می‌سازیم و F قرینهٔ B را نسبت به xy پیدا می‌کنیم و بر قطعه خط AF کمان درخور زاویهٔ $۱۸۰^\circ - B\hat{E}F$ را رسم می‌کنیم تا xy را در C قطع کند.

مسألهٔ بالا را کمپانیون استاد ریاضی مدرسه استافیلاس فرانسه طرح و حل نموده است. این دانشمند معاصر کتاب جالبی در هندسه به نام questions yropasee´s de ge´ometric تألیف نموده است.

۱.۱.۳۶. ضلع؛ پاره‌خط، خط؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱.۱.۳۶. ضلع، پاره‌خط، مساحت

۲۹۵. می‌دانیم که $a.h_a = ۲S$ است. با معلوم بودن a و S اندازهٔ h_a به دست می‌آید. پس اگر مثلث ABC جواب مسأله باشد و ارتفاع AH را رسم کنیم، از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH ($\hat{H} = ۹۰^\circ$) اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه $AH = h_a$ و BH تصویر ضلع AB روی BC معلوم است. پس این مثلث

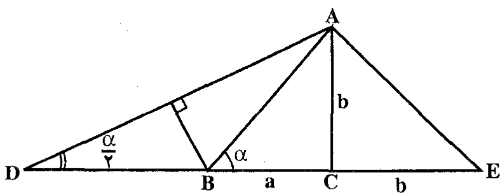


را می‌توان رسم کرد. پس از رسم این مثلث روی BH پاره‌خط $BC = a$ را جدا می‌کنیم و از C به A وصل می‌کنیم. مثلث ABC رسم می شود.

نکته. در حقیقت وقتی ارتفاع AH مشخص شد، چون $BC = a$ و BH معلوم است، پس $HC = a - BH$ نیز معلوم است، و دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و ACH قابل رسم می‌باشند.

۱.۱.۳۷. ضلع؛ زاویه؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱.۳۷.۱. ضلع، زاویه، محیط



۲۹۶. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. ضلع BC را از دو طرف به اندازه‌های $BD = AB$ و $CE = AC$ امتداد می‌دهیم. $DE = 2P$ است. از طرفی $\hat{D} = \frac{\alpha}{2}$ است. بنابراین برای رسم مثلث ABC چنین عمل می‌کنیم :

پاره‌خط $DE = 2p$ را رسم می‌کنیم. از D خطی رسم می‌کنیم که با DE زاویهٔ $\frac{\alpha}{2}$ بسازد. آن‌گاه پاره‌خط $EC = b$ را جدا می‌کنیم تا رأس C به دست آید، پس به مرکز C و به شعاع b کمانی رسم می‌کنیم تا ضلع دیگر زاویهٔ D را در A، رأس دوم مثلث ABC قطع کند. عمودمنصف پاره‌خط AD، پاره‌خط DE را در نقطهٔ B ،رأس سوم مثلث قطع خواهد کرد.

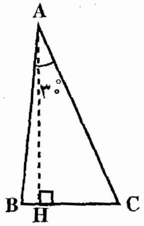
۲.۱.۱.۳۷. ضلع، زاویه، مساحت

۱.۲.۱.۱.۳۷. یک ضلع، یک زاویه، مساحت

۲۹۷. می‌دانیم که $S = \frac{1}{2} a . h_a$ است.

بنابراین داریم :
$$8 = \frac{1}{2} \times 4 \times h_a \Rightarrow h_a = 4$$

چون $BC = ۴$ و $B\hat{A}C = ۳۰^\circ$ معلوم است، به روش زیر مثلث ABC رسم می‌شود:

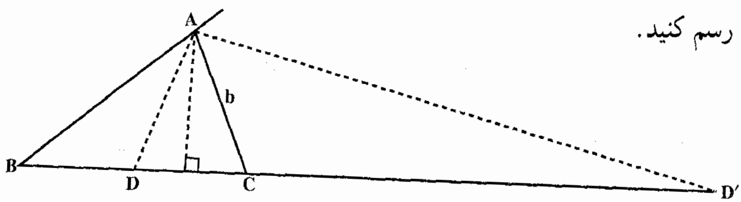


پاره‌خط BC به طول ۴ را رسم می‌کنیم و کمان درخور زاویهٔ ۳۰° روبه‌رو به BC را رسم می‌کنیم. خطی موازی BC و به فاصلهٔ $h_a = ۴$ از آن رسم می‌نماییم. نقطهٔ تقاطع آن با کمان درخور، رأس A از مثلث ABC است. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

بحث. شرط امکان مسأله آن است که خط موازی BC، کمان درخور، نقطهٔ تقاطع داشته باشند.

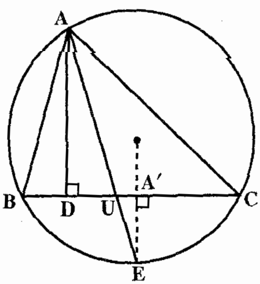
۱.۱.۳۷.۲.۲. یک ضلع، یک زاویه، نسبت مساحتها

۲۹۸. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. نیمسازهای زاویه‌های برونی و درونی رأس A را رسم می‌کنیم. دو مثلث ABC و ADD′ در ارتفاع رأس A مشترکند. بنابراین نسبت مساحت این دو مثلث به نسبت قاعده‌های نظیر ارتفاع مشترک است، یعنی $k = \frac{BC}{DD'} = \frac{S}{S'}$ است. با توجه به دیگر داده‌های مسأله، مثلث را رسم کنید.



۱.۱.۳۷.۳. ضلع، زاویه، رابطهٔ متری

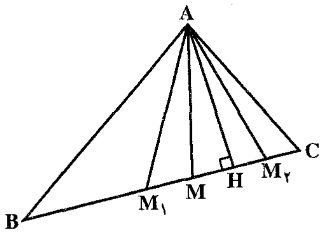
۲۹۹. فرض کنید ABC (شکل)، مثلث خواسته شده باشد. A′ را وسط BC و D و U را نقطه‌های برخورد BC با ارتفاع AD و نیمساز AU فرض کنید. امتداد نیمساز AU و امتداد عمودمنصف BC هر دو کمان BC را، در نقطه‌ای مانند E نصف می‌کنند. با توجه به مثلثهای متشابه ADU و EA′U داریم:



$$A'U : UD = A'E : AD$$

چون قاعدهٔ BC و زاویهٔ A مفروضند، دایرهٔ محیطی ABC مشخص می‌شود ؛ بنابراین پاره‌خط $A'E$ معلوم است. همچنین نسبت اوّل در تناسب بالا معلوم است ؛ پس ارتفاع AD را می‌توان رسم کرد. حال به آسانی می‌توان ترسیم خواسته شده را کامل کرد.

۳۰۰. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. ضلع $BC = a$ را قاعدهٔ معلوم و زاویهٔ $\hat{A} = \alpha$ را زاویهٔ معلوم می‌گیریم. یک مکان هندسی رأس A کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}$ روبه‌رو به پاره‌خط BC است، بنابراین کافی است یک مکان دیگر برای رأس A پیدا کنیم.



M_1 و M_2 را وسطهای دوپاره‌خط HB و HC می‌گیریم. $AM_1^2 + AM_2^2 = k^2$ نیز معلوم است. AM_1 میانهٔ مثلث ABH و AM_2 میانهٔ مثلث AHC است. بنابراین داریم :

$$\begin{cases} AB^2 + AH^2 = 2AM_1^2 + \dfrac{BH^2}{2} \\ AC^2 + AH^2 = 2AM_2^2 + \dfrac{CH^2}{2} \end{cases} \Rightarrow$$

$$AB^2 + AC^2 + 2AH^2 = 2(AM_1^2 + AM_2^2) + \frac{1}{2}(BH^2 + CH^2) \Rightarrow$$

$$AB^2 + AC^2 + 2AH^2 = 2k^2 + \frac{1}{2}(AB^2 - AH^2 + AC^2 - AH^2) \Rightarrow$$

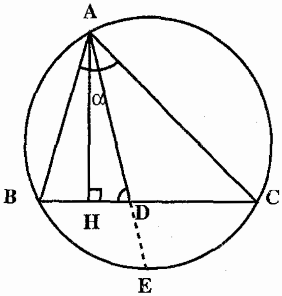
$$\frac{1}{2}(AB^2 + AC^2) + 3AH^2 = 2k^2 \Rightarrow AB^2 + AC^2 = -6AH^2 + 4k^2 \qquad (1)$$

$$AB^2 + AC^2 = 2AM^2 + \frac{BC^2}{2} \qquad (2)$$

$$(1) \text{ و } (2) \Rightarrow 2AM^2 + \frac{BC^2}{2} = 4k^2 - 6AH^2$$

$$\Rightarrow \cdots$$

۳۰۱. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. با معلوم بودن اندازهٔ ضلع a و اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ دایرهٔ محیطی مثلث ABC مشخص است. از طرفی مثلث



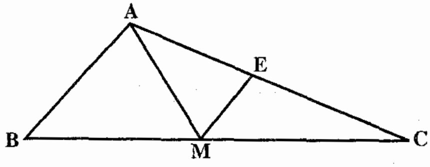
قائم‌الزاویهٔ AHD قابل رسم است ؛ پس زاویهٔ HDA مشخص است. همچنین می‌دانیم که AD از نقطهٔ E وسط کمان BC می‌گذرد. پس برای رسم مثلث ABC، پاره‌خط BC=a را رسم کرده کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}$ روبه‌رو به آن را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ E وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ خطی را رسم می‌کنیم که با ضلع BC زاویهٔ معلوم $H\hat{D}A$ را بسازد نقطه برخورد این خط با کمان درخور، رأس A است. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC رسم می‌شود.

۳۰۲. زاویهٔ $Y\hat{A}Z$ را برابر با زاویهٔ داده شدهٔ $\hat{A}$ رسم می‌کنیم. دو نقطهٔ B و C روی AY و AZ بقسمی تغییر می‌کنند که $\frac{AB}{n}+\frac{AC}{m}=۱$ روی خطهای مزبور تقسیمهای متناسب جدا می‌کنند ؛ زیرا اگر B' و C' دو وضع دیگر نقطه‌های بالا باشند، داریم : $\frac{AB'}{n}+\frac{AC'}{m}=۱$ و با استخراج از این تساویها خواهیم داشت : $\frac{B'B}{n}+\frac{CC'}{m}$.
بنابراین، کافی است که BC را چنان تعیین کنیم که خط واصل بین دو نقطهٔ متناظر، به طول معین a باشد ؛ که این کار به سهولت انجام پذیر است.

۳۰۳. فرض کنید ABC (شکل)، مثلث خواسته شده باشد. AE و AD را برابر AC جدا می‌کنیم. داریم :

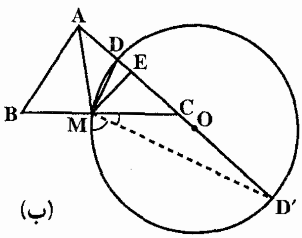
$$B\hat{E}C=۹۰^\circ-\frac{۱}{۲}\hat{A} \quad \text{و} \quad B\hat{D}C=\frac{۱}{۲}\hat{A}$$

پس برای هر کدام از نقطه‌های E و D یک مکان هندسی مشخص می شود، ولی دونقطهٔ متغیر E و D با نقطهٔ ثابت B همخطند و نسبت BD:DE مفروض است ؛ پس این دو نقطه، دو نقطهٔ متناظر در تجانس (B, −p:q) هستند. پس با توجه به مکان هندسی مربوط به E می‌توانیم یک مکان هندسی برای D به دست آوریم و این مکان هندسی به همراه مکان هندسی دیگری که قبلاً برای D تعیین کردیم، موضع نقطهٔ D را تعیین می‌کند. عمودمنصف DC خط DBE را در رأس سوم مثلث خواسته شدهٔ ABC قطع می‌کند. به عنوان تمرین، شکل کاملی برای این مسأله رسم کنید.



(الف)

۳۰۵. اگر ABC، مثلث خواسته شده باشد و نقطهٔ M وسط BC اختیار گردد. بنا به فرض $\frac{BC}{AM}=k$ یا $\frac{۲MC}{AM}=k$ و یا $\frac{k}{۲}=\frac{MC}{AM}$. از این رابطه معلوم می‌شود که M بر مکان هندسی نقطه‌هایی واقع است که نسبت فاصله‌های آن نقطه‌ها از دو نقطهٔ ثابت A و C برابر مقدار معین $\frac{k}{۲}$ می‌باشد و این مکان دایره‌ای است به قطر DD' به طوری که دو نقطهٔ D و D' مزدوجهای توافقی A و C با نسبت $\frac{k}{۲}$ می‌باشند. حال اگر از نقطهٔ E وسط AC، خطی موازی AB رسم کنیم، این خط برنقطهٔ M وسط BC می‌گذرد، بنابراین راه حل زیر به دست می‌آید:

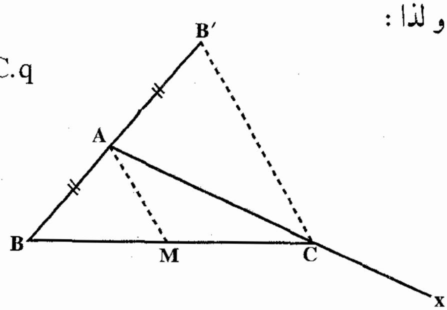


(ب)

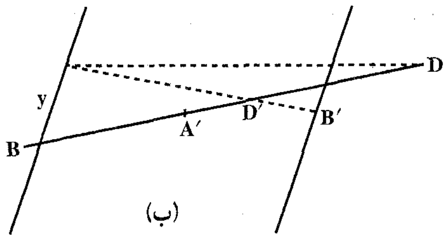
زاویه‌ای برابر زاویهٔ $\hat{A}$ ساخته و بر روی ضلع آن، $AC=b$ را نقل می‌کنیم. بر روی AC و امتداد آن دو نقطهٔ D و D' مزدوجهای توافقی C و A را با نسبت توافقی $\frac{k}{۲}$ تعیین می‌کنیم. به قطر DD' دایره‌ای رسم کرده و از نقطهٔ E وسط AC خطی موازی ضلع دیگر زاویهٔ A رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ M قطع کند، M را به C وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا ضلع زاویهٔ A را در B قطع کند. ABC مثلث خواسته شده است (شکل).

۳۰۶. اگر ABC، مثلث خواسته شده باشد، قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به رأس A نقطهٔ B' است و $B'C=۲AM$ و لذا:

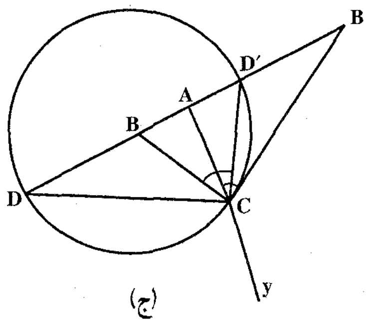
$$a=۲AM.q=B'C.q$$



(الف)

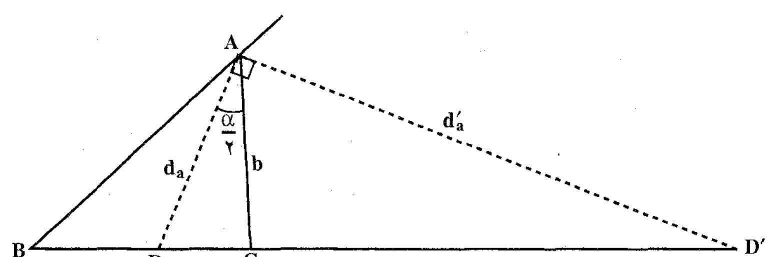


بنابراین برای رسم مثلث ابتدا پاره‌خط BB' را مساوی $2c$ رسم کرده و از نقطهٔ وسط آن Ax را چنان رسم می‌کنیم که زاویهٔ $B\hat{A}X = \hat{A}$ باشد. رأس C از مثلث خواسته شده محل تلاقی Ax با مکان هندسی دایره‌ای است به قطر DD' به قسمی که دو نقطهٔ D و D' خط BB' را به نسبت q تقسیم کرده‌اند (شکل).

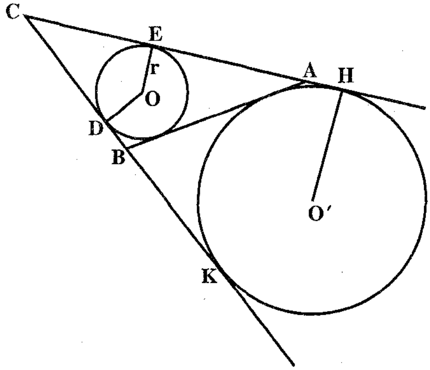


$\frac{CB}{CB'} = \frac{DB}{DB'} = \frac{D'B}{D'B'} = q$ (شکل) با تعیین D و D' بر AB، دایرهٔ به قطر DD' مشخص می‌شود و لذا رأس C به دست می‌آید.

۳۰۷. راه اوّل. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. نیمسازهای AD و AD' را رسم می‌کنیم. مثلث ADD' قائم‌الزاویه است و نسبت دو ضلع آن معلوم است. پس می‌توان مثلثهایی متشابه با آن ساخت، که در این صورت، اندازهٔ زاویه‌های حادهٔ این مثلث (DAD') مشخص می‌شود. بنابراین زاویه‌های دو مثلث ADC و $AD'C$ معلوم می‌باشند و چون $AC = b$ نیز معلوم است، پس این دو مثلث و از جمله مثلث ADC را می‌توان رسم کرد. پس از رسم این مثلث با رسم زاویهٔ $C\hat{A}B = \hat{A} = \alpha$، رأس B به دست می‌آید.



۴.۳۷.۱.۱. رابطهٔ بین ضلعها، زاویه، مساحت

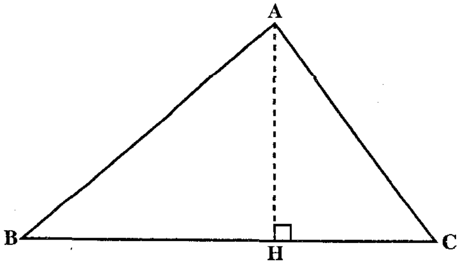


۳۰۸. از رابطهٔ $a+b-c=k$ نتیجه می‌شود $2p=k+2c$ و یا $\frac{k}{2}=p-c$. اگر ABC، مثلث خواسته شده باشد، $CE=CD=p-c=\frac{k}{2}$ نقطه‌های D و E، نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی می‌باشند، لذا دایرهٔ محاطی داخلی را می‌توان رسم کرد و بدین ترتیب r به دست می‌آید. از رابطهٔ $p=\frac{S}{r}$، می‌توان p را به دست آورد. حال قطعهٔ $CK=CH=p$ را بر ضلعهای زاویهٔ C نقل می‌کنیم. نقطه‌های H و K نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی خارجی ضلع c با ضلعهای زاویهٔ C می‌باشد. مماس مشترک داخلی دو دایره رأسهای A و B را می‌دهد (شکل). شرط امکان مسأله آن است که دو دایرهٔ رسم شدهٔ متخارج یا مماس خارج باشند، $OO'\geq r+r_1$. مسأله ممکن است دارای دو جواب (وقتی که دو دایرهٔ متخارج باشند، دارای دو مماس مشترک داخلی هستند) و یا یک جواب (دو دایرهٔ مماس خارج) باشد، یا جواب نداشته باشد (دو دایرهٔ متقاطع).

۳۸.۱.۱. ارتفاع، میانه، نیمساز؛ پاره‌خط، خط؛ زاویه

۱.۳۸.۱.۱. ارتفاع، پاره‌خط، زاویه

۳۰۹. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH با معلوم بودن اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه، یعنی AH و BH قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم، سپس از A خطی رسم می‌کنیم که با AB زاویه‌ای مساوی $\hat{A}=\alpha$ بسازد. نقطهٔ برخورد این خط با BH رأس C از مثلث ABC است.

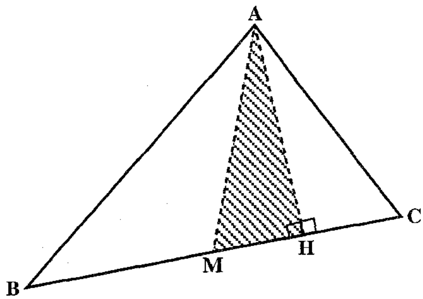


۱.۱.۳۹. ارتفاع، میانه، نیمساز؛ پاره‌خط، خط؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱.۳۹.۱. ارتفاع، پاره‌خط، مساحت

۳۱۰. مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH با معلوم بودن اندازهٔ $AH = h_a$ و $MH = l$ قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم، از طرفی داریم:

$$S = \frac{1}{۲}a.h_a \Rightarrow a = \frac{۲S}{h_a} = \text{مقدار معلوم} = BC$$



یعنی طول ضلع BC نیز معلوم است. بنابراین به مرکز M و به شعاع $\frac{a}{۲}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط MH را در دو نقطهٔ B و C قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم.

۳۱۱. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. ارتفاع AH و میانهٔ AM را رسم می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH با معلوم بودن $AM = m_a$ و $MH = l$ قابل رسم است. از طرفی می‌دانیم که $b^۲ - c^۲ = ۲a.MH$ و یا $a = \frac{b^۲ - c^۲}{۲L} = \frac{b^۲ - c^۲}{۲MH}$ است. بنابراین اندازهٔ ضلع a نیز مشخص است. بنابراین برای رسم مثلث ABC نخست مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH را با داده‌های بالا رسم می‌کنیم، سپس به مرکز M و به شعاع $\frac{a}{۲}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم که خط MH را در دو نقطهٔ B و C قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC، جواب مسأله است.

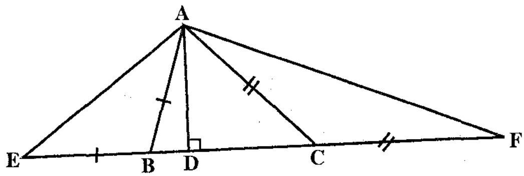
۱.۱.۴۰. ارتفاع، میانه، نیمساز؛ زاویه؛ محیط، مساحت، رابطهٔ‌متری

۱.۱.۴۰.۱.۱. ارتفاع، زاویه، محیط

۳۱۲. فرض کنید ABC (شکل)، مثلث خواسته شده باشد. BC را از دو طرف امتداد دهید و BE را برابر BA و CF را برابر CA روی آن جدا کنید، پس $EF = ۲p$. مثلثهای EAB و FCA متساوی‌الساقیند، پس

$$\hat{E} = E\hat{A}B = \frac{۱}{۲}A\hat{B}C\,,\ \ \hat{F} = F\hat{A}C = \frac{۱}{۲}A\hat{C}B$$

پس
$$E\hat{A}F = \frac{۱}{۲}\hat{B} + \hat{A} + \frac{۱}{۲}\hat{C} = \frac{۱}{۲}(\hat{A}+\hat{B}+\hat{C}) + \frac{۱}{۲}\hat{A} = ۹۰^\circ + \frac{۱}{۲}\hat{A}$$



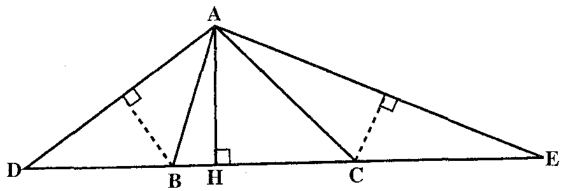
و بنابراین زاویهٔ EAF معلوم است. ارتفاع AD از مثلث ABC ارتفاع مثلث AEF هم هست. پس از مثلث AEF، قاعده، $EF = ۲p$ ، زاویهٔ روبه‌روی آن، $E\hat{A}F = ۹۰^\circ + \frac{۱}{۲}\hat{A}$ و ارتفاع، $AD = h_a$ معلوم است ؛ بنابراین می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم. رأس A از این مثلث رأس مثلث خواسته شدهٔ ABC نیز هست. چون $BA = BE$ و $CA = CF$ رأسهای B و C نقطه‌های برخورد عمودمنصفهای AE و AF با EF هستند.

مسأله ممکن است دو جواب متقارن نسبت به عمودمنصف EF یا یک جواب داشته باشد، یا اصلاً جوابی نداشته باشد.

نکته. برای ترسیم مثلث خواسته شدهٔ ABC، به‌عنوان یک گام میانی مثلث دیگری، یعنی مثلث AEF را رسم کردیم. استفاده از یک مثلث کمکی غالباً می‌تواند بسیار مفید باشد.

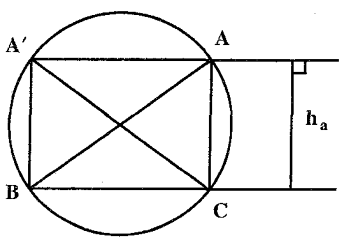
نکته. زاویه‌های مثلث AEF بسادگی برحسب زاویه‌های ABC بیان شدند و یکی از ارتفاعهای AEF ارتفاع ABC نیز هست.

۳۱۳. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم، در امتداد BC و یک طرف آن طول BD برابر با BA و در طرف دیگر $CE = AC$ را جدا می‌کنیم. مثلث ABD متساوی‌الساقین است، پس $\hat{D} = \frac{\hat{B}}{۲}$ ، درنتیجه می‌توان مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD را رسم کرد، سپس DH را به اندازهٔ ۲p تا E ادامه می‌دهیم. از E به A وصل می‌کنیم. چون مثلثهای ADB و ACE متساوی‌الساقین می‌باشند، پس عمودمنصف AD از B و عمودمنصف AC از C می‌گذرد. بنابراین با رسم این عمودمنصفها نقطه‌های B و C به‌دست می‌آیند. از B به A و از C نیز به A وصل می‌کنیم. مثلث ABC، جواب مسأله است.



۱.۱.۴۰.۲. ارتفاع، زاویه، مساحت

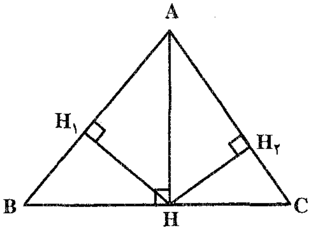
۳۱۴. از رابطهٔ $۲S = a.h_a$ با معلوم بودن h_a و S اندازهٔ ضلع $BC = a$ محاسبه می‌شود. حال برای رسم مثلث ABC، پاره‌خط $BC = a$ را رسم می‌کنیم، سپس کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}$ روبه‌رو به BC را رسم می‌نماییم. آن‌گاه خطی موازی BC و به فاصلهٔ h_a از آن رسم می‌کنیم. تا کمان درخور را در نقطهٔ A، رأس سوم مثلث قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC رسم می‌شود.



نکته. با رسم هر دو بخش کمان درخور زاویهٔ A روبه‌رو به BC و رسم دو خط موازی BC و به فاصلهٔ h_a از آن مسأله حداکثر ۴ جواب همنهشت دارد.

۱.۱.۴۰.۳. ارتفاع، زاویه، رابطهٔ متری

۳۱۵. مسأله را حل شده فرض کرده، مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. زاویهٔ معلوم را



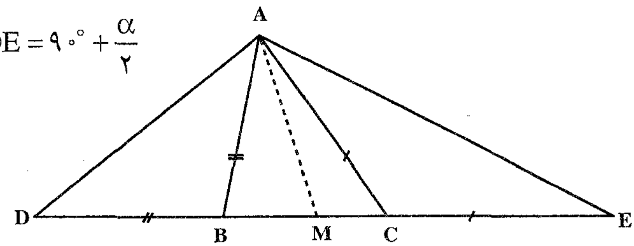
$\hat{A} = \alpha$ و ارتفاع داده شده را $AH = h_a$ و فاصلهٔ H از دو ضلع زاویهٔ A را $HH_1 + HH_2 = l$ می‌گیریم. ...

۱.۱.۴۰.۴. میانه، زاویه، محیط

۳۱۶. با شرط داده شده، $DE = AB + BC + AC = 2p$ است. از طرفی زاویهٔ $D\hat{A}E = 90° + \frac{\alpha}{2}$ است که مقدار معلومی است؛ زیرا:

$$D\hat{A}E = D\hat{A}B + B\hat{A}C + C\hat{A}E = \frac{\hat{B}}{2} + \alpha + \frac{\hat{C}}{2} = \alpha + \frac{(180° - \alpha)}{2}$$

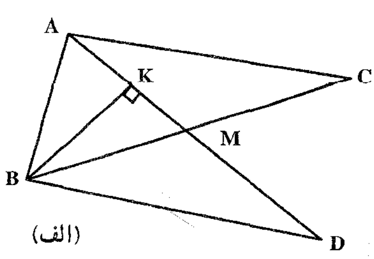
$$\Rightarrow A\hat{D}E = 90° + \frac{\alpha}{2}$$



بنابراین یک مکان هندسی رأس A کمان درخور زاویهٔ $\frac{\alpha}{2} + 90°$ روبه‌رو به پاره‌خط DE است و مکان هندسی دیگر آن دایره‌ای به مرکز M، وسط DE و به شعاع $AM = l$ است، پس برای رسم مثلث ABC این دو مکان هندسی را رسم می‌کنیم تا رأس A به‌دست آید. آن‌گاه عمودمنصفهای AD و AE را رسم می‌کنیم تا DE را در B و C قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۱.۱.۴۰.۵. میانه، زاویه، مساحت

۳۱۷. در مثلث ABC اگر میانهٔ AM را تا نقطهٔ D طوری امتداد دهیم که $AM = MD$ باشد، با توجه به تساوی بودن دو مثلث AMC و

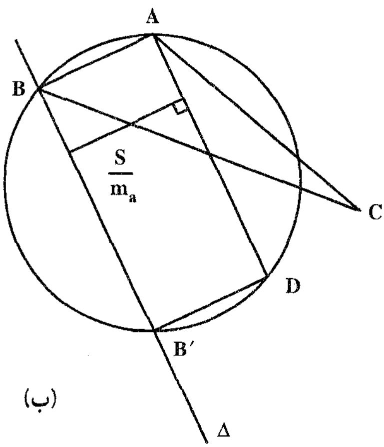


(الف)

BMD نتیجه می‌شود که مساحت دو مثلث ABC و ABD برابرند (دو مثلث معادل یا هم‌ارز) بنابراین در مثلث ABD ضلع $AD = ۲m_a$ و S معلوم است، لذا می‌توان اندازهٔ ارتفاع وارد بر AD را تعیین کرد.

$$S = \frac{۱}{۲} AD.BK \Rightarrow BK = \frac{۲S}{۲m_a} = \frac{S}{m_a}$$

زاویهٔ $A\hat{B}D$ مکمل زاویهٔ A است، درنتیجه $A\hat{B}D = ۱۸۰° - \hat{A}$ معلوم می‌شود. حال با معلومات AD و BK و زاویهٔ $A\hat{B}D$ می‌توان مثلث ABD را رسم کرده و سپس با وصل کردن نقطهٔ B به نقطهٔ M وسط AD و امتداد دادن $BM = MC$ رأس C را به‌دست آورد.



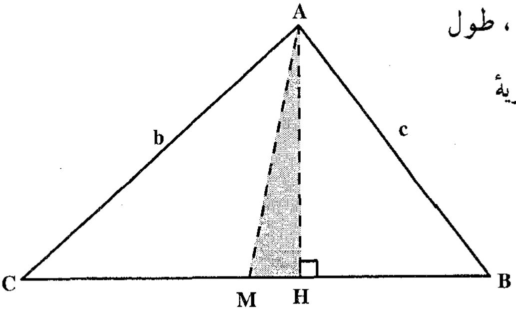
(ب)

رسم مثلث ABD :

دایرهٔ حاوی زاویهٔ $۱۸۰° - \hat{A}$ را بر وتر AD طرح کرده و چون رأس B به فاصلهٔ $BK = \frac{S}{m_a}$ از این وتر قرار دارد، خطی موازی این وتر و به فاصلهٔ $\frac{S}{m_a}$ از آن رسم می‌کنیم. نقطهٔ تلاقی این وتر با دایره، رأس B را نشان می‌دهد. از B به M وصل کرده و MC را به اندازهٔ BM می‌گیریم. مثلث ABC به‌دست می‌آید. خط Δ محیط دایره را در دو نقطهٔ B و B′ قطع می‌کند، دو مثلثی که به این ترتیب به دست می‌آیند، از حیث جزءها متساوی‌اند. لذا مسأله دارای یک جواب است (شکل).

۱.۱.۴۰.۶. میانه، زاویه، رابطهٔ متری

۳۱۸. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. میانهٔ AM و ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که بنا به رابطهٔ دوم میانه‌ها در مثلث، $b^۲ - c^۲ = ۲a.MH$ است.



از آن‌جا $MH = \frac{b^2 - c^2}{2a} = k$ ، طول معلومی دارد، پس مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH با معلوم بودن اندازهٔ وتر $AM = m_a$ و ضلع $MH = k$ قابل رسم است. از طرفی رأس C روی کمان درخور زاویهٔ $\hat{C} = \alpha$ روبه‌رو به پاره‌خط AM قرار دارد. بنابراین برای رسم مثلث ABC، نخست مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH را رسم می‌کنیم، سپس کمان درخور زاویهٔ $\hat{C} = \alpha$ روبه‌رو به پاره‌خط AM را رسم می‌نماییم، تا خط HM را در رأس C قطع کند، سپس پاره‌خط $MB = MC$ را روی MH جدا می‌کنیم تا رأس B به‌دست می‌آید. از آن‌جا مثلث ABC رسم می‌شود.

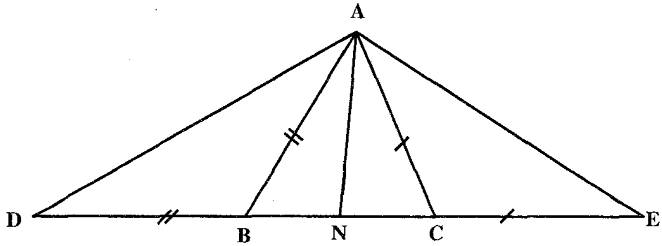
۱.۱.۰۴.۷. نیمساز، زاویه، محیط

۳۱۹. مثلث AI_aZ_a (شکل) را می‌توان رسم کرد. روی AI_a پاره‌خط AU را برابر t_a جدا کنید و دایرهٔ (I_a, I_aZ_a) را رسم کنید. خط AZ_a ، مماس دومی که از A بر این دایره رسم می‌شود و مماسی که از نقطهٔ U بر این دایره رسم می‌شود. سه ضلع مثلث خواسته شده هستند. مسأله ممکن است دو یا یک جواب داشته باشد، یا جواب نداشته باشد.

۱.۱.۴۱. پاره‌خط، خط؛ زاویه؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱.۴۱.۱. پاره‌خط، زاویه، محیط

۳۲۰. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله فرض می کنیم. ضلع BC را از طرف B به اندازهٔ $BD = AB$ و از طرف C به اندازهٔ $CE = AC$ امتداد می‌دهیم و از A به D و E وصل می کنیم. پاره‌خط $DE = 2p$ یعنی محیط مثلث و مثلثهای ABD و ACE متساوی‌الساقین هستند. زاویهٔ $\hat{A} = \alpha$ معلوم است و خط AN که ضلع BC را به نسبت $\frac{NB}{NC} = k$ تقسیم کرده



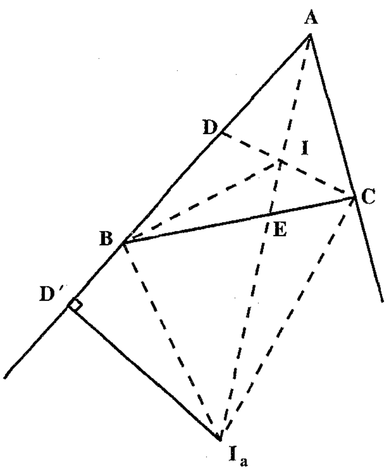
است، نیز معلوم می‌باشد. با معلوم بودن زاویهٔ $\hat{A} = \alpha$ ، اندازهٔ زاویهٔ DAE نیز مشخص است ؛ زیرا داریم :

$$D\hat{A}E = D\hat{A}B + B\hat{A}C + C\hat{A}E = \frac{\hat{B}}{۲} + \alpha + \frac{\hat{C}}{۲} = \alpha + \frac{۱}{۲}(۱۸۰^\circ - \alpha) = ۹۰^\circ + \frac{\alpha}{۲}$$

پس یک مکان هندسی رأس A، کمان درخور زاویهٔ $۹۰^\circ + \frac{\alpha}{۲}$ روبه‌رو به پاره‌خط $DE = ۲p$ است. با استفاده از معلوم بودن طول پاره‌خط AN و این ویژگی که $\frac{NB}{NC} = k$ است، یک مکان هندسی دیگر برای رأس A پیدا کنید. نقطهٔ اشتراک این دو مکان هندسی رأس A است و از آن‌جا، مثلث رسم می‌شود.

۱.۱.۴۱.۲. پاره‌خط، زاویه، مساحت

۳۲۱. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. فرض می‌کنیم زاویهٔ $\hat{A} = \alpha$ و مساحت مثلث S و پاره‌خط II_a که مرکزهای دو دایرهٔ محاطی درونی و برونی نظیر رأس A را به هم وصل می‌کند، معلوم باشند. مثلث BII_a در رأس B قائم‌الزاویه است که وتر آن II_a طول معلومی دارد، همچنین مثلث CII_a در رأس C قائم‌الزاویه است و وتر آن II_a معلوم



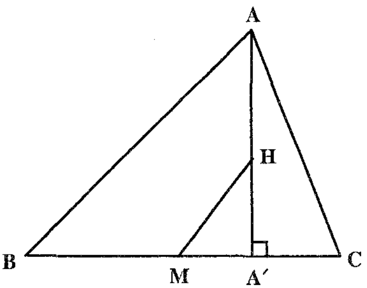
است، بعلاوه $B\hat{I}C = ۹۰^\circ + \frac{\hat{A}}{۲} = ۹۰^\circ + \frac{\alpha}{۲}$ و $B\hat{I_a}C = ۹۰^\circ - \frac{\hat{A}}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{\alpha}{۲}$ است.

اگر از I و I_a خطهای ID و I_aD' را بر AB فرود آوریم، $ID = r$ ، $I_aD' = r_a$ ، $AD = p - a$ و $AD' = p$ است. درضمن $(AEII_a)$ تقسیم توافقی است. با توجه به داده‌های بالا مثلث را می‌توان رسم کرد.

۴۲.۱.۱. نقطه؛ ضلع؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛ پاره‌خط، خط

۱.۴۲.۱.۱. نقطه، ضلع، ارتفاع، پاره‌خط

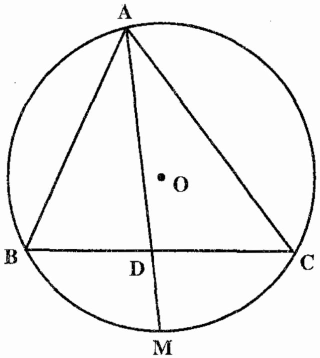
۳۲۲. مسأله را حل شده، مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. ارتفاع AA' و نقطهٔ H مرکز ارتفاعی روی آن و نقطهٔ M وسط BC را درنظر می‌گیریم. مثلث قائم‌الزاویهٔ MHA' با معلوم بودن اندازهٔ ضلعهایش، قابل رسم است. پس از رسم این مثلث به اندازهٔ $MB = MC = \frac{a}{۲}$ در دو طرف M روی MA' جدا می‌کنیم تا دو رأس B و C به دست آید. روی $A'H$ پاره‌خط $AA' = h_a$ را جدا می‌کنیم و از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



۴۳.۱.۱. نقطه؛ ضلع؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛ زاویه

۱.۴۳.۱.۱. نقطه، ضلع، نیمساز، زاویه

۳۲۳. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC، مثلث خواسته شده باشد. دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌نماییم. نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ را امتداد می‌دهیم تا کمان BC را در M قطع کند، M وسط کمان BC می‌باشد، بنابراین برای حل مسأله کافی است کمان‌درخور

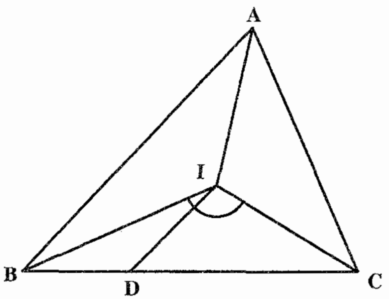


زاویهٔ $\hat{A}$ را روی BC ساخته به مرکز M وسط $\overset{\frown}{BC}$ و با شعاع AM دایره‌ای رسم می‌نماییم تا دایرهٔ بالا را در نقطهٔ A قطع کند. مثلث ABC جواب مسأله است. اگر دایرهٔ به مرکز M دایرهٔ بالا را در دو نقطه قطع کند، مسأله دارای دو جواب است. اگر در یک نقطه قطع کند، مسأله دارای یک جواب است و اگر قطع نکند، مسأله دارای جواب نیست.

۱.۱.۴۴. نقطه؛ ضلع؛ پاره‌خط، خط؛ زاویه

۱.۱.۴۴.۱. نقطه، ضلع، پاره‌خط، زاویه

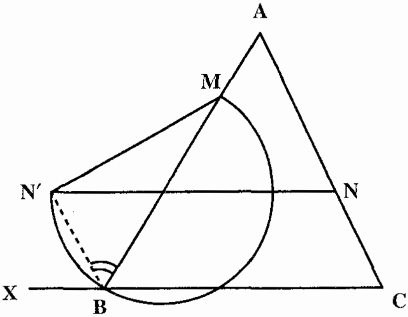
۳۲۴. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم، از I مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث به B و C وصل می‌کنیم.



می‌دانیم که $B\hat{I}C = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ است، پس یک مکان هندسی نقطهٔ I کمان درخور زاویهٔ $90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ روبه‌رو به ضلع BC است. از طرفی $DI = l$ طول معلومی دارد، پس مکان هندسی دیگر نقطهٔ I دایره‌ای به مرکز D و به شعاع l است. بنابراین برای رسم مثلث ABC چنین عمل می‌کنیم:

ضلع BC و نقطهٔ D روی آن را درنظر می‌گیریم. کمان درخور زاویهٔ $90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ روبه‌رو به ضلع BC را رسم می‌کنیم، سپس دایره‌ای به مرکز D و به شعاع $DI = l$ رسم می‌کنیم تا کمان درخور را در نقطهٔ I قطع کند. از I به B و C وصل می‌کنیم؛ سپس از B و C دو خط چنان رسم می‌کنیم که IB و IC نیمسازهای زاویه‌های آنها با BC باشند. نقطهٔ برخورد این دو خط، رأس A است.

۲.۴۴.۱.۱. نقطه، ضلع، خط، زاویه



۳۲۵. مسأله را حل شده انگاشته، ضلع CB را به موازات خود انتقال می‌دهیم تا رأس C از N بگذرد و رأس B به وضع N′ درآید. ضلع N′B با AC موازی است و بنابراین زاویهٔ N′BM مساوی زاویهٔ A می‌باشد. پس برای حل مسأله از نقطهٔ N، پاره‌خط NN′ را موازی خط X و مساوی طول ضلع معلوم BC رسم کرده، بر پاره‌خط MN′ کمان‌درخور زاویهٔ $\hat{A}$ را رسم می‌کنیم. اگر این کمان درخور خط X را قطع کند، نقطهٔ تقاطع یکی از رأسهای مثلث، مثلاً رأس B است. طول BC را مساوی مقدار داده شده بر خط X جدا می‌کنیم و NC و BM را رسم می‌نماییم تا یکدیگر را در A، رأس سوم مثلث قطع نمایند. مسأله می‌تواند حداکثر دو جواب داشته باشد.

۴۵.۱.۱. نقطه؛ ضلع؛ زاویه؛ محیط، مساحت، رابطه متری

۱.۴۵.۱.۱. نقطه، ضلع، زاویه، محیط

۳۲۶. گزینه‌های (ب) و (د) درست هستند.

۲.۱. رسم مثلث با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۱.۲.۱. رسم مثلث با معلوم بودن مثلث

۱.۱.۲.۱. رسم مثلث با معلوم بودن یک مثلث

۳۲۷. مثلث خواسته شدهٔ ABC و مثلث اوّل بروکار $A_1B_1C_1$ متشابه معکوس هستند و مثلث اوّل بروکار مثلث $A_1B_1C_1$ که آن را مثلث $A'B'C'$ می‌نامیم، متشابه معکوس این مثلث است. پس دو مثلث ABC و $A'B'C'$ مستقیماً متشابه‌اند. بعلاوه، زاویه‌های

$(B_1C_1, \hat{B'C'})$ و $(B_1C_1, \hat{BC})$ برابرند ؛ پس خطهای BC و B'C' موازی‌اند ؛ یعنی مثلثهای ABC و A'B'C' متجانسند.

مثلثهای ABC و $A_1B_1C_1$ مرکز ثقل یکسانی دارند، همین‌طور مثلثهای $A_1B_1C_1$ و A'B'C' ؛ پس مرکز ثقل G در دو مثلث ABC و A'B'C' یکسان است و بنابراین، مرکز تجانس آنها نیز هست. بعلاوه داریم :

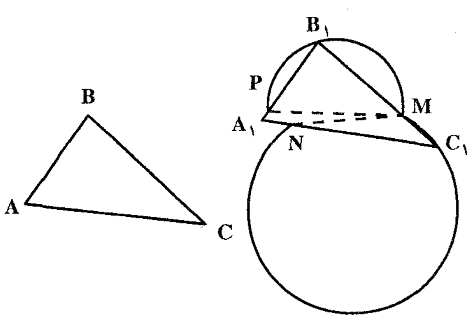
$GA':GA_1 = GA_1:GA$ پس پاره‌خط GA را می‌توان رسم و نقطهٔ A را روی خط GA' مشخص کرد. نقطه‌های B و C را می‌توان به عنوان نقطه‌های متناظر B' و C' در تجانس (G.GA:GA') تعیین کرد.

۱.۲.۲. رسم مثلث با معلوم بودن یک مثلث و داده‌های دیگر

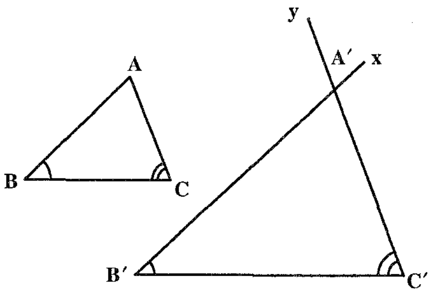
۱.۲.۲.۱. مثلث، نقطه

۳۲۸. فرض می‌کنیم M، N و P سه نقطهٔ داده شده و ABC مثلث مفروض باشد (شکل). بر پاره‌خطهای MN و MP بترتیب کمان درخور زاویه‌های $A\hat{C}B$ و $A\hat{B}C$ را رسم می‌کنیم. اکنون مسألهٔ زیر را پیش رو داریم :

خط B_1C_1 را از نقطهٔ M چنان رسم کنیم که پاره‌خط محصور بین این دو کمان دارای طول BC باشد مسأله ممکن است دو جواب، یا یک جواب داشته باشد و یا اصلاً جواب نداشته باشد (بسته به این که کدام یک از ضلعهای مثلث می‌بایست از هر یک از این سه نقطهٔ مفروض بگذرد).



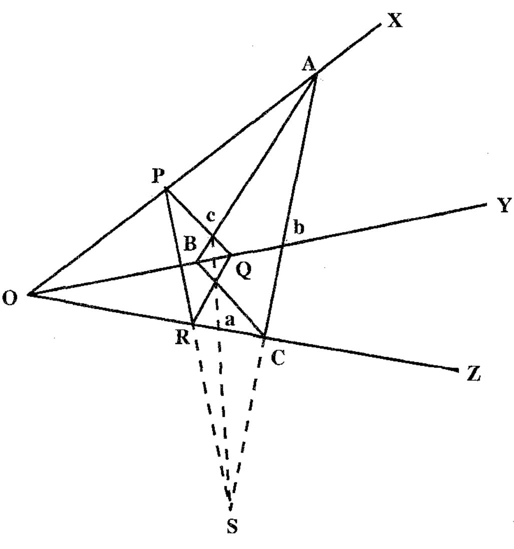
۱.۲.۲.۲. مثلث، ضلع



۳۲۹. فرض می‌کنیم $B'C'$ متناظر با ضلع BC مثلث ABC باشد. از B' خط $B'x$ را چنان رسم می‌کنیم که با $B'C'$ زاویه‌ای مساوی زاویهٔ B بسازد و از C' نیز خط $C'y$ را چنان رسم می‌کنیم که با $C'B'$ زاویه‌ای برابر زاویهٔ $\hat{C}$ بسازد. نقطهٔ برخورد دو خط اخیر رأس A' از مثلث $A'B'C'$ است که متشابه با مثلث داده شدهٔ ABC است.

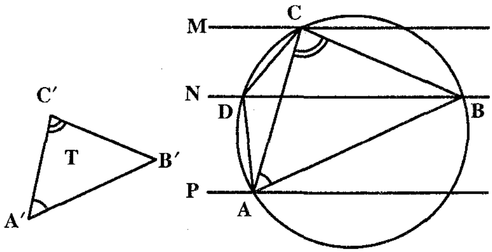
۱.۲.۲.۳. مثلث، نیمخط

۳۳۰. اگر ABC مثلث خواسته شده باشد، با هر مثلث دیگری از همین نوع صاحب خاصیت مثلثهای همولوژیک است، یعنی محل تلاقی ضلعهای نظیر سه نقطهٔ بر یک استقامت و رأسهای متناظر بر سه خط گذرنده بر یک نقطه واقع می‌باشند، پس اگر PQR مثلثی باشد که ضلعهای PQ و QR آن مرتباً بر c و a گذشته باشند، نقطه تلاقی AC (ضلع مثلث خواسته شده) و PR با a و c بر یک استقامتند، پس نقطهٔ S به این ترتیب به‌دست می‌آید. از وصل کردن S به b، امتداد ضلع ACی مثلث خواسته شده به‌دست می‌آید و تکمیل آن دیگر مانعی ندارد.



۱.۲.۲.۴. مثلث، خط

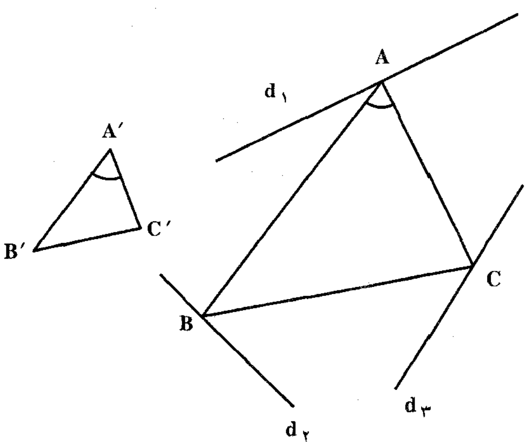
۳۳۱. فرض می‌کنیم مثلث ABC متشابه با مثلث مفروض T باشد که رأسهای C، B و A از آن روی سه خط مفروض M، N و P قرار دارند. دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم و پاره‌خطهای CD و AD را رسم می‌نماییم. زاویه‌های محاطی $B\hat{D}C = B\hat{A}C$ مساوی زاویهٔ $\hat{A}'$ هستند که زاویه‌ای معلوم است. همچنین زاویه‌های



محاطی $B\hat{D}A = B\hat{C}A = \hat{C}'$ که داده شده است. از آن‌جا می‌توان نقطهٔ D را به‌دلخواه روی خط میانی N گرفت، زاویهٔ A' را بالای خط پایینی (A' روی خط P) و زاویهٔ C' را زیر خط M (C' روی خط M) بسازیم و دایرهٔ محیطی مثلث ADC را رسم می‌کنیم. این دایره خط N را در نقطهٔ B قطع می‌کند. مثلث ABC جواب مسأله است. باید توجه داشت دو زاویه‌ای که باید در دو طرف خط N بسازیم، رأسهایشان روی دو خط دیگر، یعنی M و P قرار دارند (بنا بر اندازهٔ بزرگی ضلعهای مثلثهایی که داریم).

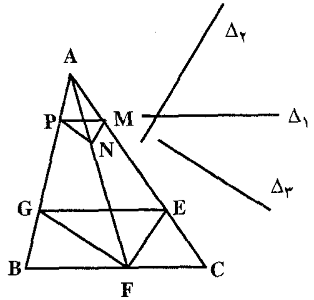
تبصره. می‌توان ۶ جواب مختلف داشت.

۳۳۲. در این مسأله سه خط داده شده، متوازی نیستند. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC متشابه با مثلث داده شدهٔ $A'B'C'$، جواب مسأله باشد، که رأسهای A، B و C از آن بترتیب روی سه خط d_1، d_2 و d_3 باشند. ضلعهای این دو مثلث لزوماً متوازی نیستند، امّا لازم



است یکی از حالتهای تشابه بین دو مثلث برقرار باشد. به‌عنوان مثال سه ضلعشان متناسب باشد یا دو زاویهٔ متناظر متساوی داشته باشند و یا دو ضلع متناسب و زاویهٔ بین

آن دو ضلع مساوی باشند....



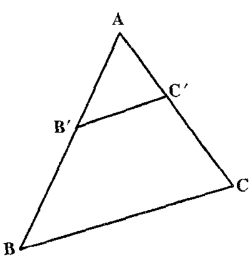
۳۳۳. اگر EFG مثلث خواسته شده و محاط در مثلث داده شدهٔ ABC باشد که هر یک از ضلعهای آن موازی یکی از امتدادهای معلوم Δ_1، Δ_2 و Δ_3 می‌باشد. در این صورت اگر از نقطهٔ دلخواه M واقع بر AC موازی EG رسم نماییم تا AB را در P قطع کند، چنانچه از M و P بترتیب موازی EF و GE رسم نماییم تا یکدیگر را در N قطع نمایند، اولاً. هریک از ضلعهای مثلث MNP با امتدادهای معلوم Δ_1، Δ_2 و Δ_3 موازی است.

ثانیاً. مثلث MNP با مثلث EFG متجانس است و از آن جا حل مسأله چنین است:

از نقطهٔ دلخواه M واقع بر AC موازی Δ_1 رسم می‌نماییم تا ضلع AB را در P قطع نماید و از M و P بترتیب موازی Δ_2 و Δ_3 رسم نموده تا یکدیگر را در N قطع کنند. نقطهٔ A را به N وصل نموده، امتداد می‌دهیم تا ضلع BC را در F قطع نماید. چنانچه از F بترتیب موازی NM و NP رسم کنیم تا ضلعهای AC و AB را بترتیب در E و G قطع کنند. GE موازی PM و درنتیجه ضلعهای مثلث EFG موازی امتدادهای داده شده بوده و مثلث خواسته شده است.

۳۳۴. حل این مسأله مشابه مسألهٔ قبلی است. با این تفاوت که امتدادهای Δ_1، Δ_2 و Δ_3 نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث داده شدهٔ $A'B'C'$ می‌باشند.

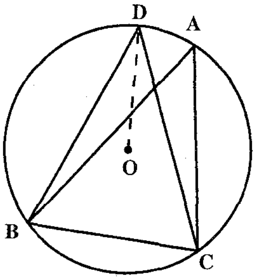
۱.۲.۲.۵. مثلث، محیط



۳۳۵. فرض می‌کنیم مسأله حل شده، $A'B'C'$ مثلث خواسته شده باشد. این مثلث را طوری روی مثلث ABC قرار می‌دهیم که زاویهٔ A' روی زاویهٔ A قرار گیرد و مثلث $A'B'C'$ به‌صورت $AB'C'$ درآید. بدیهی است که $B'C'$ موازی BC است؛ زیرا $\hat{B}=\hat{B'}$ و $\hat{C}=\hat{C'}$ است. بنا به قضیهٔ تالس داریم:

$$\frac{AB'}{AB}=\frac{AC'}{AC}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{AB'+AC'+B'C'}{AB+AC+BC}=\frac{۲p'}{۲p}\Rightarrow\frac{AB'}{AB}=\frac{p'}{p}$$

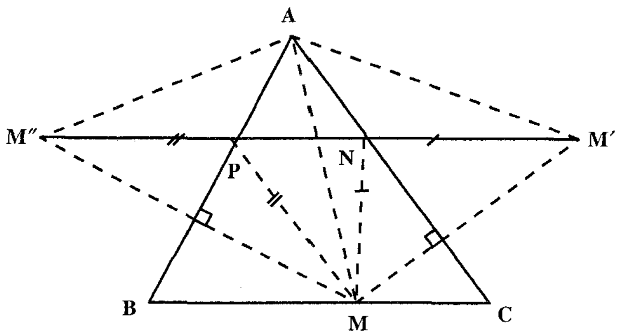
بنابراین برای تعیین AB' کافی است، جزء چهارم تناسب بین AB، P' و P را تعیین کنیم. با مشخص شدن AB' ، AC' و درنتیجه مثلث $AB'C'$ یا $A'B'C'$ مشخص می‌شود.



۳۳۶. فرض کنیم مثلث ABC در دایرهٔ (O) محاط باشد. اگر BC را ثابت فرض کنیم، وقتی محیط مثلث ماکزیمم خواهد بود که مثلث متساوی‌الساقین باشد، یعنی $AB = BC$ و اگر AC ثابت بماند، باید $AC = BC$ باشد، پس آن مثلثی دارای محیط ماکزیمم است که متساوی‌الاضلاع باشد.

۳۳۷. اگر نقطهٔ دلخواه M را روی BC انتخاب کنیم، از بین مثلثهایی به رأس M که دو رأس دیگر آن روی دو ضلع دیگر مثلث باشند، محیط مثلثی مینیمم است که به شرح زیر حاصل شود :

قرینه‌های نقطهٔ M را نسبت به ضلعهای AC و AB بترتیب M' و M'' می‌نامیم. خط $M'M''$ دو ضلع AC و AB را بترتیب در نقطه‌های N و P قطع می‌کند. مثلث MNP، با محیط $M'M''$ ، جواب این قسمت از مسأله است. امّا مثلث $AM'M''$ متساوی‌الساقین به زاویهٔ رأس $M'\hat{A}M'' = ۲\hat{A}$ است.



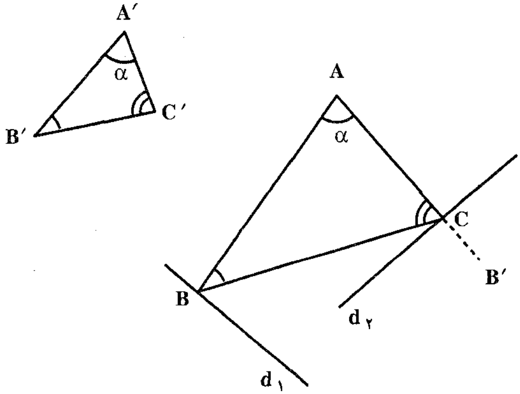
حال مسأله به تعیین نقطهٔ M به‌طوری که قاعدهٔ مثلث حاصل $(M'M'')$ مینیمم شود، تبدیل می‌شود.

چون مثلثهای حاصل $(AM'M'')$ متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس $۲\hat{A}$ می‌باشند، پس قاعدهٔ $M'M''$ در مثلثی مینیمم است که ساق آن مینیمم باشد. چرا؟ و این در حالتی است که $AM = AM' = AM''$ می‌نیمم باشد، یعنی M پای ارتفاع از رأس A باشد با

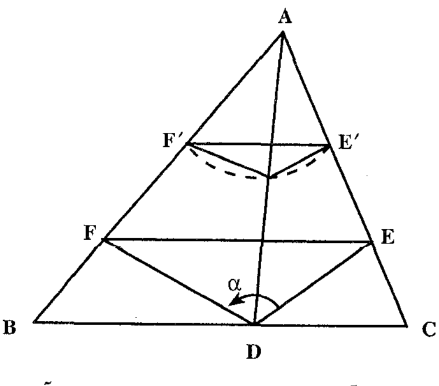
تعویض M با نقطه‌هایی روی ضلعهای AC و AB، مثلث موردنظر مثلث ارتفاعیه محاط در مثلث ABC خواهد بود.

۱.۲.۲.۶. مثلث، نقطه، خط

۳۳۸. مسأله را حل شده می‌گیریم. مثلث $A'B'C'$ را مثلث داده شده، مثلث ABC را جواب مسأله که رأس A از آن ثابت است و دو رأس B و C از آن روی دو خط d_1 و d_2 قرار دارند. چون $B\hat{A}C = \alpha$ و A نقطهٔ ثابتی است، پس دورانی به مرکز A و به اندازهٔ زاویهٔ دوران $\hat{A}' = \alpha$، خط AB را به خط AC تبدیل می‌کند و ضلع AB در امتداد AC به وضع AB' درمی‌آید. بنابراین برای رسم مثلث ABC ...



۱.۲.۲.۷. مثلث، نقطه، خط، زاویه

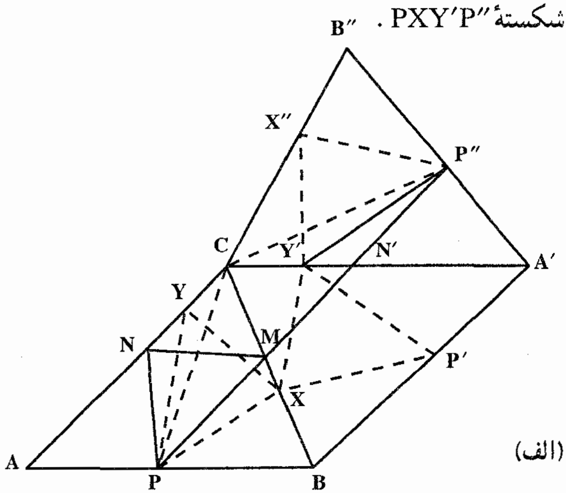


۳۳۹. مسأله را حل شده انگاشته $E'F'$ را به اختیار موازی X رسم می‌نماییم و از E' و F' بترتیب دو خط به موازات DE و DF رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ D' قطع کنند. دو مثلث $D'E'F'$ و DEF نسبت به نقطهٔ A متجانسند، پس D' روی خط معلوم AD واقع است، بعلاوه از D' قطعه خط $E'F'$ به زاویهٔ معلوم α دیده می‌شود و از آن‌جا ساختمان زیر به‌دست می‌آید:

$E'F'$ را به اختیار موازی X رسم کرده و بر آن کمان درخور زاویهٔ α را رسم می‌کنیم تا AD را در D' قطع کند و از نقطهٔ D دو خط DE و DF را بترتیب به‌موازات $D'E'$ و $D'F'$ رسم می‌کنیم تا مثلث خواسته شدهٔ DEF حاصل شود.

۸.۲.۲.۱. مسأله‌های ترکیبی

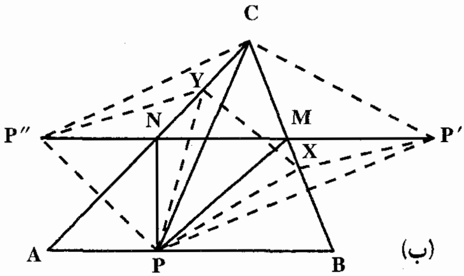
۳۴۱. **الف. راه حل اوّل.** فرض کنید PXY مثلث دلخواهی محاط در مثلث ABC باشد. چنان که P یکی از رأسهای آن باشد. قرینهٔ مثلث ABC را همراه با مثلث PXY نسبت به خط BC می‌یابیم. قرینهٔ مثلث $A'BC$ را که به این طریق حاصل می‌شود، همراه با $P'XY'$ که در آن محاط است نسبت به خط CA' پیدا می‌کنیم (شکل الف). چون با علایم شکل (الف) داریم $XY = XY'$ و $YP = YP''$، محیط مثلث PXY برابر است با طول خط شکستهٔ $PXY'P''$.



(الف)

اکنون دو حالت امکان‌پذیر است. اگر پاره‌خط PP'' خط BC را بین نقطه‌های B و C (و بنابراین خط CA' را بین نقطه‌های C و A') قطع کند، در این صورت از هر خط شکستهٔ $PXY'P''$ دیگری کوتاهتر خواهد بود و مثلث خواسته شده به‌دست آمده است (مثلث PMN در شکل (الف)، که در آن M نقطهٔ برخورد PP'' با BC و N قرینهٔ نقطهٔ N' نسبت به خط BC و N' نقطهٔ برخورد PP'' با CA' است). اگر پاره‌خط PP'' خط BC را در خارج پاره‌خط BC قطع کند، آن‌گاه، کوتاهترین خط شکستهٔ $PXY'P''$ خط شکسته‌ای است که به‌ازای آن X و Y' بر C منطبق باشند. در این صورت مثلث خواسته شده به پاره‌خط PC که دوبار پیموده شود، بدل می‌شود.

اکنون مانده است مشخص کنیم که هریک از این حالتها چه موقع پیش می‌آید. برای این کار توجه می‌کنیم که مثلث $A'B''C$ از مثلث ABC بر اثر دورانی حول C به اندازهٔ زاویه‌ای دو برابر زاویهٔ $\hat{C}$ به‌دست می‌آید (زیرا $A'B''C$ از ABC بر اثر دو قرینه‌یابی متوالی نسبت به خطهای BC و CA' که با هم زاویهٔ $\hat{C}$ می‌سازند، به‌دست می‌آید؛ بنابراین $P\hat{C}P'' = ۲\hat{C}$. از این‌جا بلافاصله نتیجه می‌شود که اگر $\hat{C} < ۹۰^\circ$، آن‌گاه خط PP'' ضلع BC ی مثلث را قطع می‌کند، ولی اگر $\hat{C} \geq ۹۰^\circ$، PP'' خط BC را در C یا در نقطه‌ای واقع بر امتداد BC از طرف C قطع می‌کند.

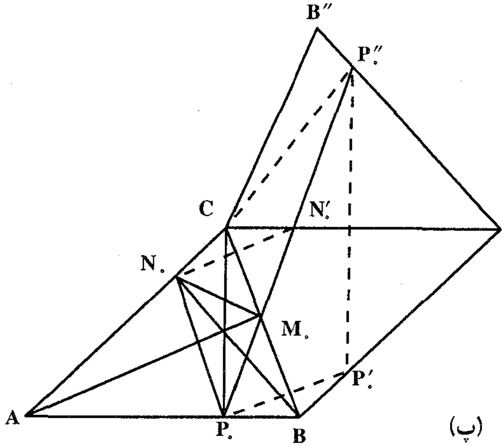


(ب)

راه حل دوم. بار دیگر PXY را مثلث دلخواهی محاط در مثلث ABC می‌گیریم. قرینه‌های P نسبت به BC و CA را P' و P'' می‌نامیم (شکل ب). چون $PX = P'X$ و $PY = P''Y$، محیط مثلث PXY برابر است با طول خط شکستهٔ $PXYP''$. پس اگر PP'' دو ضلع AC و BC از مثلث ABC را در نقطه‌های M و N قطع کند، مثلث PMN مثلث خواسته شده است. اگر $P'P''$ پاره‌خطهای AC و BC را قطع نکند، مثلث خواسته شده به پاره‌خط PC که دوبار پیموده شود، بدل می‌شود. به طریقی مشابه آنچه در راه حل اول آمد، می‌توان نشان داد که حالت اوّل وقتی پیش می‌آید که زاویهٔ $\hat{C}$ از مثلث کمتر از ۹۰° باشد و حالت دوم وقتی پیش می‌آید که داشته باشیم $\hat{C} \geq ۹۰^\circ$.

توجه دارید که راه حل دوم اساساً تفاوت زیادی با راه حل اوّل ندارد (شکلهای الف و ب).

ب. راه حل اوّل. فرض می‌کنیم که زاویهٔ رأس C در مثلث مفروض حاده است. P را نقطهٔ دلخواهی بر ضلع AB می‌گیریم. با استفاده از راه حل اوّل قسمت (الف) مثلث PMN را با کمترین محیط ممکن، برابر با طول پاره‌خط PP'' در مثلث ABC محاط می‌کنیم (شکل الف). اکنون کافی است، نقطهٔ P را چنان انتخاب کنیم که پاره‌خط PP'' کوچکترین مقدار ممکن را داشته باشد. یادآوری می‌کنیم که $P\hat{C}P'' = ۲\hat{C}$، یعنی این زاویه به انتخاب نقطهٔ P بستگی ندارد؛ بنابراین قاعدهٔ PP'' در مثلث متساوی‌الساقین PCP'' با زاویهٔ رأس معلوم $۲\hat{C}$ وقتی کمترین اندازه را دارد که ضلع CP کمترین



(پ)

مقدار ممکن را داشته باشد. در این‌جا باید دو حالت جداگانه را درنظر گرفت.

حالت اوّل. زاویه‌های رأسهای A و B از مثلث ABC هر دو حاده‌اند (مثلث حاده‌الزوایاست). در این حالت وقتی پاره‌خط CP کوچکترین طول ممکن را داراست که نقطهٔ P همان $P_\circ$ یعنی پای ارتفاع $CP_\circ$ در مثلث ABC باشد (شکل ب). بسادگی می‌توان نشان داد که رأسهای $M_\circ$ و $N_\circ$ از مثلث $P_\circ M_\circ N_\circ$ حاصل از این انتخاب $P_\circ$ نیز پاهای ارتفاعهای مثلث ABC هستند. درواقع از شکل (پ) نتیجه می‌شود که :

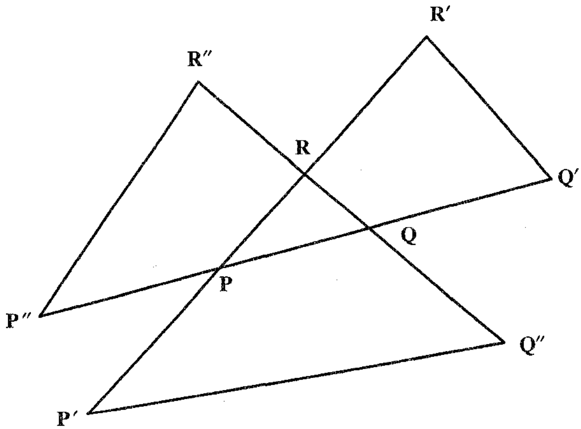
$$N_\circ\hat{P}_\circ A = C\hat{P}_\circ A - C\hat{P}_\circ N_\circ = ۹۰^\circ - CP''_\circ N'_\circ = ۹۰^\circ - \frac{۱۸۰^\circ - ۲\hat{C}}{۲}$$

یعنی می‌توان دایره‌ای بر چهارضلعی $BCN_\circ P_\circ$ محیط کرد و $B\hat{N}_\circ C = C\hat{P}_\circ B = ۹۰^\circ$.
به‌همین طریق می‌توان نشان داد که $AM_\circ \perp BC$.

حالت دوم. اگر مثلاً، A زاویهٔ قائمه یا منفرجه باشد، آن‌گاه پاره‌خط CP وقتی حداقل است که P بر رأس A منطبق باشد. در این حالت مثلث خواسته شده به ارتفاع $AM_\circ$ که دوبار پیموده شود، تبدیل می‌شود.

راه حل دوم. در حل قسمت (ب) می‌توان از راه حل قسمت (الف) نیز آغاز کرد. چون محیط مثلث MNP (شکل پ) برابر با $P'P''$ است و $CP' = CP'' = CP$ و $P'CP'' = ۲\hat{C}$ ، مسأله تبدیل می‌شود به یافتن نقطهٔ P چنان که CP کمترین مقدار ممکن را داشته باشد. بقیهٔ این راه حل مثل راه حل اوّل است.

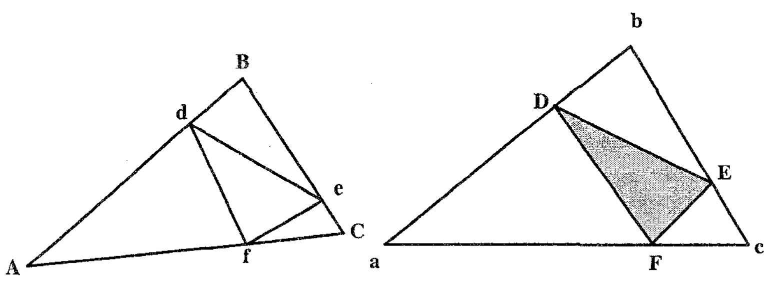
۳۴۲. **الف.** مجانس مثلث PQR را نسبت به مرکز تجانس P و نسبت تجانس ۲ به‌دست می‌آوریم. مجانس نقطهٔ P برخودش منطبق است. مجانس نقطهٔ Q نقطهٔ Q' روی PQ است. به قسمی که $PQ' = 2PQ$ است. مجانس نقطهٔ R، نقطهٔ R' روی PR است به قسمی که $PR' = 2PR$ است، پس مثلث $PQ'R'$ مجانس مثلث PQR نسبت به مرکز تجانس P و نسبت تجانس ۲ است. به روش مشابه مجانسهای مثلث PQR را نسبت به مرکزهای تجانس Q و R می‌توان به‌دست آورد.



ب. نسبت مساحت مثلث $PQ'R'$ به مساحت مثلث PQR برابر مجذور نسبت تجانس، یعنی $۴ = ۲^۲$ است. برای مثلثهای $QP'R'$ و $RP'Q'$ نیز همین مطلب درست است.

۳.۲.۱. رسم مثلث با معلوم بودن دو مثلث

۳۴۳. به کمک مسألهٔ عکس این مسأله، مسألهٔ زیر را خواهیم داشت:
از سه نقطهٔ داده شده، سه خط رسم کنید که مثلثی همنهشت با مثلثی معلوم، بسازد. به‌عبارت دیگر بر مثلث DEF مثلثی محیط کنیم که با مثلث ABC همنهشت باشد. برای این کار، کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}$ روبه‌رو به DF و کمان درخور زاویهٔ $\hat{B}$ روبه‌رو به DE را رسم می‌کنیم، سپس از نقطهٔ D، وتر ab را چنان رسم می‌کنیم که طولش مساوی AB

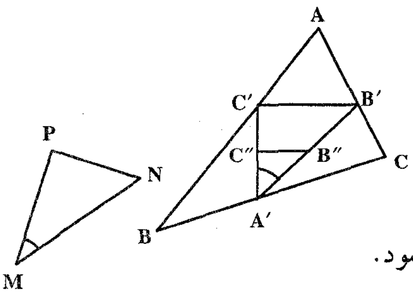


باشد. نقطهٔ برخورد aE و bF، رأس C است. مثلث abc، همنهشت مثلث ABC است؛ زیرا یک ضلع مساوی دارند و دو زاویهٔ مجاور به این ضلع در دو مثلث نیز برابر است. حال روی ضلع BA از مثلث ABC، پاره‌خط Bd = bD و روی ضلع AC، پاره‌خط Af = aF و روی ضلع BC پاره‌خط Be = bE را جدا می‌کنیم. مثلث def جواب مسأله است.

۱.۲.۴. رسم مثلث با معلوم بودن دو مثلث و داده‌های دیگر

۱.۲.۴.۱. رسم مثلث با معلوم بودن دو مثلث، نقطه

۳۴۵. مثلث جواب مسأله را $A'B'C'$ فرض می‌کنیم که رأس A' از آن معلوم و روی ضلع BC قرار دارد و با مثلث داده شدهٔ MNP متشابه است. مثلث MNP را در صفحه می‌توان چنان درنظر گرفت که ضلعهای متناظر دو مثلث $A'B'C'$ و MNP موازی باشند. اگر $B''C''$ را موازی BC رسم کنیم. مثلث $A'B''C''$ نیز با مثلث MNP متشابه است و از آن‌جا روش رسم مثلث $A'B'C'$ مشخص می‌شود.



۱.۳. رسم مثلث با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی و داده‌های دیگر

۱.۳.۱. رسم مثلث با معلوم بودن چهارضلعی، چهارضلعی و داده‌های دیگر

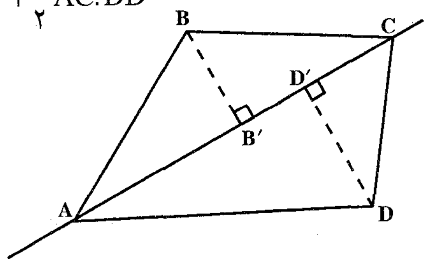
۱.۳.۱.۱. رسم مثلث با معلوم بودن چهارضلعی در حالت کلی

۳۴۶. چهارضلعی ABCD را درنظر می‌گیریم. از B و D دو رأس مقابل، عمودهای BB' و

DD' را بر AC فرود می‌آوریم. مساحت چهارضلعی $ABCD$ برابر است با :

$$S_{ABCD} = S_{ABC} + S_{ACD} = \frac{۱}{۲}AC.BB' + \frac{۱}{۲}AC.DD'$$

$$\Rightarrow S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}AC(BB' + DD')$$

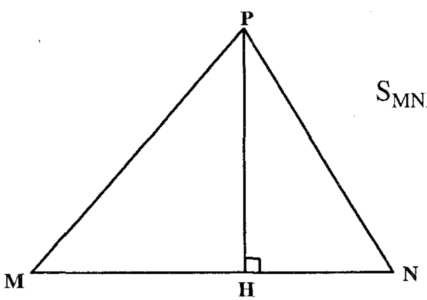


اگر چهارضلعی چنان تغییر مکان دهد که قطر AC روی خط xy با طول ثابت حرکت کند، چون $BB' + DD'$ ثابت می‌ماند، پس مساحت چهارضلعی تغییر نمی‌کند. برای رسم مثلثی معادل این چهارضلعی با توجه به این که داریم :

$$S_{ABCD} = \frac{۱}{۲}AC(BB' + DD')$$

مثلثی رسم می‌کنیم که قاعدهٔ آن برابر AC و ارتفاع نظیر آن قاعده مساوی $BB' + DD'$ باشد. بنابراین مثلث MNP را چنان می‌سازیم که $MN = AC$ و $PH = BB' + DD'$ باشد. در این صورت داریم :

$$S_{MNP} = \frac{۱}{۲}MN.PH = \frac{۱}{۲}AC(BB' + DD')$$



۱.۳.۲. رسم مثلث با معلوم بودن چهارضلعیهای ویژه

۱.۳.۲.۱. رسم مثلث با معلوم بودن متوازی‌الاضلاع

۳۴۷. به‌طوری که دیده می‌شود از رأس A به نقطهٔ M وسط ضلع BC وصل کرده‌ایم و امتداد داده‌ایم تا DC را در N قطع کند. به‌دلیل همنهشت بودن دو مثلث ABM و MCN متوازی‌الاضلاع $ABCD$ با مثلث ADN هم‌ارز است. بنابراین به روش بالا می‌توانیم مثلثی معادل متوازی‌الاضلاع مفروضی بسازیم.

۱.۳.۲.۲. رسم مثلث با معلوم بودن مربع

۳۴۸. مساحت را کنار می‌گذاریم و مثلث $A'B'C'$ را متشابه با مثلث خواسته شدهٔ ABC رسم می‌کنیم. اگر $B'C' = a'$ و h' ارتفاع این ضلع باشد و m' ضلع مربعی که معادل $A'B'C'$ است، داریم:

$$m'^{2} = a' \times \frac{1}{2} h'$$

بنابراین m' بسادگی بـه‌دست مـی‌آیـد و ضلع $BC = a$ از نسبت زیـر مشخص مـی‌شود:

$$\frac{a}{a'} = \frac{m}{m'}$$

که m ضلع مربع داده شده است و مثلث خواسته شده بسادگی رسم می‌شود. روی ضلع $B'C'$، $BC = a$ را جدا می‌کنیم و از C موازی $A'C'$ رسم می‌کنیم تا $A'B'$ را در رأس سوم مثلث خواستهٔ شدهٔ $AB'C$ قطع کند. مسأله فقط یک جواب دارد.

۱.۳.۳. رسم مثلث با معلوم بودن چندضلعی

۳۴۹. از نقطه‌های B و E بترتیب به موازات AC و AD رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع CD را در نقطه‌های N و M قطع کنند؛ آن‌گاه ثابت می‌کنیم که مثلثهای ABC و ACN، همچنین دو مثلث AHE و DHM معادل یکدیگرند، و از آن‌جا ثابت می‌شود که مثلث AMN معادل پنج‌ضلعی ABCDE است.

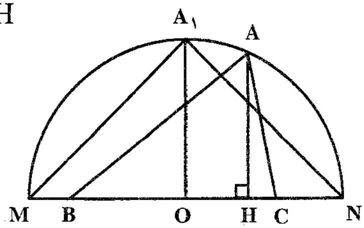
۱.۴. رسم مثلث با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر

۱.۴.۱. رسم مثلث با معلوم بودن نیمدایره

۳۵۰. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم و مثلث ABC محاط در نیمدایرهٔ به قطر $MN = 2R$ را جواب مسأله می‌گیریم. ضلع BC روی قطر MN واقع است. ارتفاع AH را رسم

می‌کنیم. مساحت مثلث ABC برابر است با:

$$S_{ABC}=\frac{۱}{۲}BC.AH$$



وقتی این مساحت حداکثر مقدار خود را داراست که BC و AH حداکثر مقدار خود را داشته باشند. حداکثر مقدار BC مساوی قطر MN و حداکثر مقدار AH مساوی شعاع دایره، یعنی وقتی است که H بر O، مرکز نیمدایره منطبق باشد یا به‌عبارت دیگر A وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ باشد. در این صورت حداکثر مساحت مثلث مساوی است با:

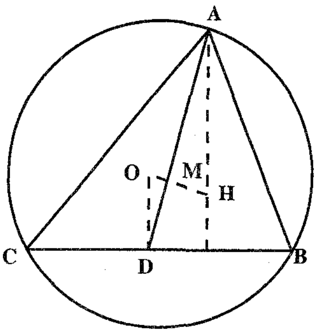
$$\frac{۱}{۲}\times ۲R\times R=R^۲$$

۲.۴.۱. رسم مثلث با معلوم بودن دایره در حالت کلی

۱.۲.۴.۱. رسم مثلث با معلوم بودن یک دایره و داده‌های دیگر

۱.۱.۲.۴.۱. یک دایره، نقطه

۳۵۱. نقطهٔ دلخواه A را روی دایرهٔ داده شدهٔ (O) برگزینید و آن را به مرکز ثقل مفروض G وصل کنید. روی امتداد AG، پاره‌خط $G'A$ را برابر $\frac{۱}{۲}GA$ جدا کنید. و A' را به O، مرکز دایرهٔ (O) وصل کنید. خطی که در A' بر OA' عمود می‌شود، دایرهٔ محیطی (O) را در دو رأس دیگر مثلث ABC قطع می‌کند. درصورتی که A' درون دایرهٔ (O) قرار گیرد، A یک جواب مسأله است. مکان هندسی A' دایرهٔ (N) است که متجانس دایرهٔ (O)، در تجانس $(G,-\frac{۱}{۲})$ است. پس اگر (N) کاملاً درون (O) قرار گیرد، هر نقطه‌ای از (O) یک جواب به‌دست می‌دهد. در غیر این صورت (O) کمانی خواهد داشت که نقطه‌های روی آن را نمی‌توان به‌عنوان نقطهٔ A برگزید.



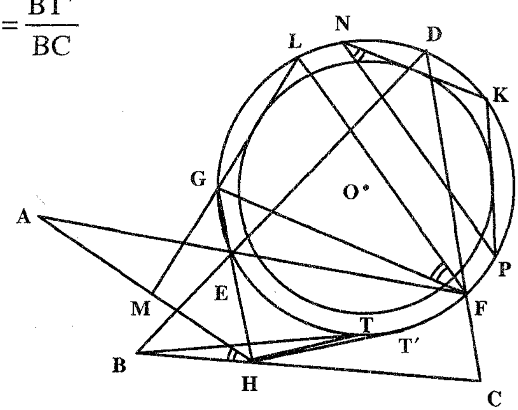
۳۵۲. فرض کنید O مرکز S، دایرهٔ محیطی مثلث خواسته شدهٔ ABC، باشد (شکل). نقطهٔ M مرکز هندسی این مثلث بر پاره‌خط OH واقع است و این پاره‌خط را به نسبت $OM:MH = ۱:۲$ تقسیم می‌کند؛ لذا می‌توانیم M را به دست آوریم. بعد، نقطهٔ M، میانهٔ AD از مثلث ABC را به نسبت $AM:MD = ۲:۱$ تقسیم می‌کند؛ پس می‌توانیم، نقطهٔ D وسط ضلع BC را پیدا کنیم. این نقطهٔ D را به O، مرکز دایرهٔ S، وصل می‌کنیم؛ چون OD وتر خواسته شدهٔ BC از دایرهٔ S به مرکز O را نصف می‌کند. از این‌جا، نتیجه می‌شود که $OD \perp BC$ بنابراین می‌توانیم وتر BC را عمود بر OD رسم و ترسیم مثلث ABC را کامل کنیم.

۳۵۳. راه اول. فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد. و مثلث DEF جواب مسأله باشد. FG را به‌موازات BC رسم می‌کنیم و خط GEH را می‌کشیم. دو مثلث BHE و BDC متشابه‌اند؛ زیرا زاویهٔ B در آنها مشترک است و $\hat{H} = \hat{G} = \hat{D}$ است. پس:

$$\frac{BH}{BD} = \frac{BE}{BC}\ ,\ BH = \frac{BD.BE}{BC}$$

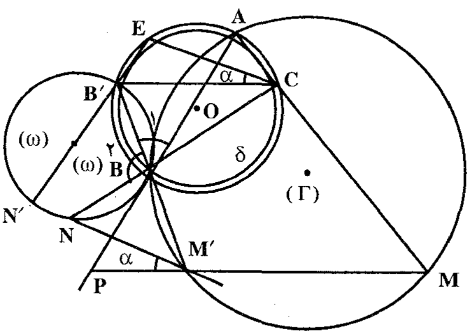
و یا

$$BH = \frac{BT^۲}{BC}$$



از آن‌جا نتیجه می‌گیریم که H نقطهٔ معلومی است؛ زیرا BT و BC مقدارهای معلومی می‌باشند. خط AH را رسم کرده، خط FL را به موازات HA می‌کشیم. LG خط AH را در M قطع می‌کند. دو مثلث MGH و AEH با هم متشابه‌اند؛ زیرا زاویهٔ H در آنها

مشترک است و $\hat{M}=\hat{E}$ است، چون زاویهٔ $\hat{L}$ مکمل آنها است. پس : $\frac{HM}{HE}=\frac{HG}{HA}$ و یا $HM=\frac{HG\times HE}{HA}$ و چون $HG.HE=HT'^{۲}$، پس $HM=\frac{HT'^{۲}}{HA}$. بنابراین M نقطه‌ای است معلوم، زیرا $HT'^{۲}$ و HA مقدارهای معلومی می‌باشند. $L\hat{F}G=A\hat{H}B$ است، چون زاویهٔ $A\hat{H}B$ مقدار معلومی است، پس حل مسأله منجر می‌شود به رسم قاطعی از نقطهٔ معلوم M در دایرهٔ (O)، به قسمی که زاویهٔ $L\hat{F}G$ برابر مقدار معلوم $A\hat{H}B$ شود. برای رسم این قاطع کافی است، زاویه‌ای به اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{H}B$ در دایرهٔ (O) محاط کنیم، مانند زاویهٔ KNP و دایره‌ای متحدالمرکز با دایرهٔ (O) و مماس به وتر KP رسم نموده و از M مماسی بر دایرهٔ دوم بکشیم تا قاطع MGL رسم شود. از G خط FG را به‌موازات BC رسم می‌کنیم تا رأس F از مثلث خواسته شده به‌دست آید. F را به A و C وصل می‌کنیم از برخورد AF و FC با دایره، دو رأس E و D به‌دست می‌آید.



راه دوم. اگر ABC، مثلث خواسته شده محاط در دایرهٔ داده شدهٔ (O) باشد، به نحوی که ضلعهایش از نقطه‌های M، N و P گذشته باشد. ابتدا M′ منعکس نقطهٔ M با قطب P و قوت نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ (O) تعیین می‌کنیم، در این صورت داریم : $PB.PA=PM.PM'$. آن‌گاه BM′ را وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ دیگر B′ قطع کند. چنانچه N′ را منعکس N با قطب M′ و قوتِ نقطهٔ M′ نسبت به دایرهٔ (O) تعیین نماییم. در این حالت چهارضلعیهای ABM′M و NN′BB′ بترتیب در دایره‌های (Γ) و (ω) محاط می‌باشند و داریم :

$$\hat{M}+M\hat{B}'A=۱۸۰^{\circ}\ ,\ M\hat{B}'A+\hat{B}_{۱}=۱۸۰^{\circ}\ ,\ A\hat{C}B'=\hat{B}_{۱}=\frac{\overset{\frown}{B'EA}}{۲}$$

از مقایسهٔ این رابطه‌ها نتیجه می‌شود که : $\hat{M}=A\hat{C}B'$ و از این رابطه نتیجه می‌گیریم

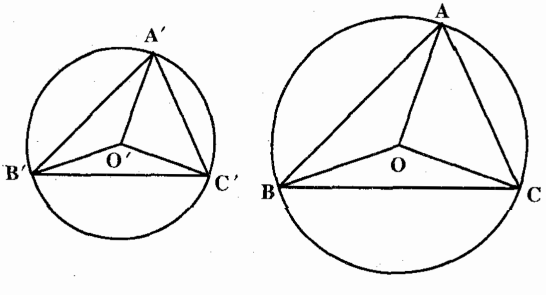
که $PM \| BC$ (۱) و همچنین چون چهارضلعی $EB'BC$ محاطی است، داریم :

$$\hat{E}+B'\hat{B}C=180^\circ, B'\hat{B}C=\hat{B}_2+180^\circ, N\hat{N'}B'=\hat{B}_2=\frac{\overset{\frown}{NB'}}{2}$$

از مقایسهٔ این رابطه‌ها نیز نتیجه می‌شود که $EC \| NM'$ (۲). از ملاحظهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود که $P\hat{M'}N = B'\hat{C}E = \alpha$ (۳) و از آن‌جا حل مسأله چنین است : ابتدا M' منعکس M را با قطب P و قوت، قوت نقطهٔ P نسبت به دایرهٔ (O) تعیین نموده و $M'N$ را وصل کرده، سپس N' منعکس N را با قطب M' و قوت، قوت نقطهٔ M' نسبت به دایرهٔ (O) تعیین می‌کنیم، تا زاویهٔ $N\hat{M'}P = \alpha$ به‌دست آید و از نقطهٔ دلخواه I واقع بر دایرهٔ (O) زاویهٔ $F\hat{I}F' = \alpha$ را رسم نموده و دایرهٔ (δ) متحدالمرکز با دایرهٔ (O) و مماس بر FF' رسم می‌کنیم، سپس از N' مماسی بر دایرهٔ (δ) رسم می‌نماییم تا دایرهٔ (O) را در نقطه‌های B' و E قطع نماید. حال چنانچه از B' موازی MP رسم کنیم، دایره را در نقطهٔ C قطع می‌نماید و محل تلاقی MC با دایرهٔ (O)، نقطهٔ A بوده و اگر A را به P وصل کنیم، نقطهٔ تقاطعش با دایره، نقطهٔ B بوده که بنا به خاصیت بالا BC از نقطهٔ N گذشته و ABC مثلث خواسته شده است.

۱.۴.۲.۱.۲. یک دایره، خط

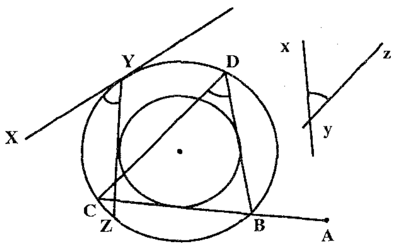
۳۵۴. مثلث $A'B'C'$ را چنان می‌سازیم که هر ضلعش موازی یکی از امتدادهای مفروض باشد. دایرهٔ محیطی آن را رسم می‌کنیم. سپس از O مرکز دایرهٔ مفروض OA، OB و OC را موازی $O'A'$، $O'B'$ و $O'C'$ رسم می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



۱.۴.۲.۱.۳. یک دایره، نقطه، خط

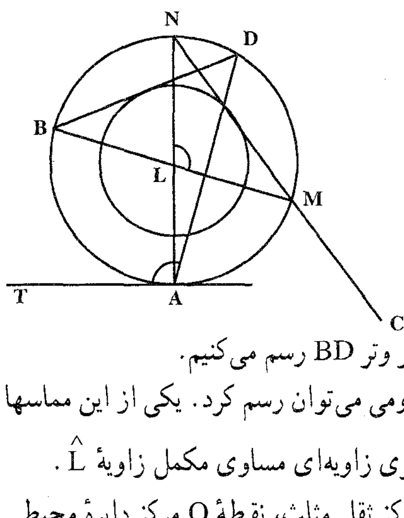
۳۵۶. دو خط داده شده را xy و yz اختیار می‌کنیم. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث

DBC جواب مسأله است. زاویهٔ D مساوی زاویهٔ y است، پس قطاع و وتر آن در دایره مشخص است. برای رسم مثلث، از نقطهٔ اختیاری Y روی دایره دو خط موازی xy و yz رسم می‌کنیم. سپس از A قاطعی نسبت به دایره رسم می‌کنیم که وتر BC را مساوی وتر YZ ایجاد کند. از C خطی موازی yz رسم می‌کنیم تا دایره را در D قطع کند. از D به B وصل می‌کنیم. مثلث BCD جواب مسأله است.



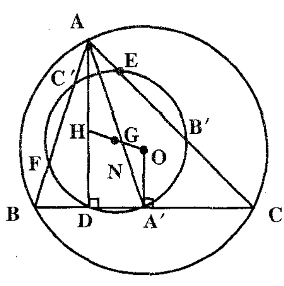
۴.۱.۲.۴.۱. یک دایره، نقطه، زاویه

۳۵۷. مسأله را حل شده و مثلث LMN را جواب مسأله می‌گیریم. زاویهٔ $\hat{L}$ مساوی نصف مجموع کمانهای $\widehat{MN} = \widehat{AB}$ است. از آن‌جا، وتر و کمان MN طول معلومی دارند. حال اگر زاویهٔ ظلّی $T\hat{A}D$ را مساوی زاویهٔ داده شده، یعنی $\hat{L}$ رسم کنیم، $\widehat{BD} = \widehat{MN}$ خواهد شد. از آن‌جا، از نقطهٔ C خط CMN را مماس بر دایرهٔ هم‌مرکز با دایرهٔ داده شده و مماس بر وتر BD رسم می‌کنیم.



تبصره. از نقطهٔ C دو خط مماس بر دایرهٔ دومی می‌توان رسم کرد. یکی از این مماسها زاویه‌ای مساوی زاویهٔ $\hat{L}$ را می‌دهد و دیگری زاویه‌ای مساوی مکمل زاویهٔ $\hat{L}$.

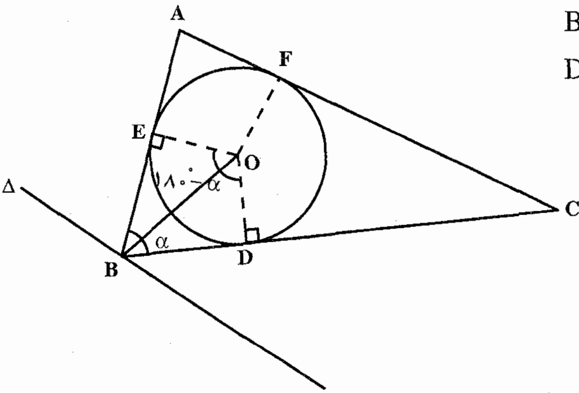
۳۵۸. با معلوم بودن N مرکز دایرهٔ نه نقطه و G مرکز ثقل مثلث، نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث و H مرکز ارتفاعی مثلث را می‌توان به‌دست آورد؛ زیرا N وسط OH است و $GH = ۲GO$ می‌باشد و (HNGO) یک تقسیم توافقی است و داریم: $\frac{GN}{GO} = \frac{HN}{HO} = \frac{۱}{۲}$. از طرفی دایرهٔ محیطی، مثلث مجانس دایرهٔ نه نقطهٔ مثلث با مرکز تجانس H و نسبت تجانس ۱ :۲ است. بنابراین با داشتن دایره‌های محیطی و نه



نقطه، و نقطه‌های G، N، O و H و $\hat{B}-\hat{C}=\alpha$ مثلث ABC را می‌توان رسم کرد.

۱.۴.۲.۱.۵. یک دایره، ضلع، خط، زاویه

۳۵۹. مسأله را حل شده و مثلث ABC را که از آن اندازهٔ ضلع $BC=a$ و اندازهٔ زاویهٔ $\hat{B}=\alpha$ معلوم است و رأس این زاویه روی خط Δ قرار دارد، جواب مسأله می‌گیریم. اگر نقطه‌های تماس دایره با مثلث را D، E و F بنامیم، چهارضلعی ODBE محاطی و مشخص و قابل رسم است. در این چهارضلعی $D\hat{O}E = ۱۸۰^\circ - \alpha$ و $OD = OE = R$ و OB نیمساز زاویه‌های B و O، و عمودمنصف DE است. از آن‌جا...



۱.۴.۲.۱.۶. یک دایره، مثلث

۳۶۰. از نقطهٔ دلخواه A_1 واقع بر محیط دایرهٔ داده شده، مماس DE را بر آن رسم می‌کنیم (شکل). بعد، زاویهٔ EA_1C_1 را برابر زاویهٔ β و زاویهٔ DA_1B_1 را برابر زاویهٔ γ رسم می‌کنیم. اگر B_1 و C_1 را به هم وصل کنیم، مثلث $A_1B_1C_1$، که همان مثلث موردنظر است، به‌دست می‌آید.

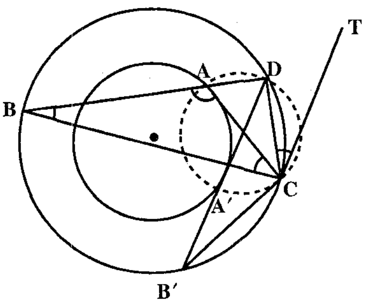
۱.۴.۲.۱.۷. یک دایره، مثلث، نقطه، خط

۳۶۱. دایرهٔ (O)، خط Δ و نقطهٔ ثابت A و مثلث داده شدهٔ T را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم مثلث ABC جواب مسأله باشد که این مثلث متشابه با مثلث T است، رأس A از آن ثابت است و رأس C از آن روی دایرهٔ (O) قرار دارد. در این صورت زاویه‌های مثلث ABC با زاویه‌های متناظر مثلث T که آنها را α، β و γ می‌نامیم برابرند، از آن‌جا...

۱.۴.۲.۲. رسم مثلث با معلوم بودن دو دایره و داده‌های دیگر

۱.۴.۲.۲.۱. دو دایره، زاویه

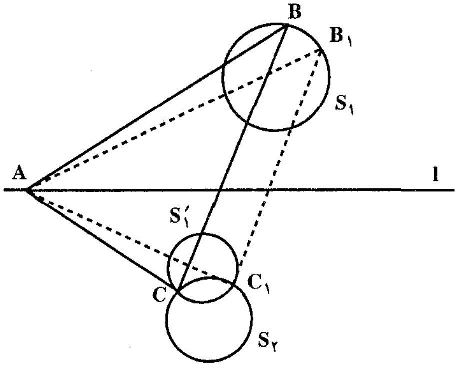
۳۶۲. فرض می‌کنیم مثلث ABC که اندازه‌های زاویه‌هایش $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ و $\hat{C}$ معلوم است و رأس A از آن روی دایرهٔ (C') و دو رأس B و C از آن روی دایرهٔ (C) است، جواب مسأله باشد. BA را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ (C) را در نقطهٔ D قطع کند. از D به C وصل می‌کنیم. چون زاویهٔ محاطی $C\hat{B}D$ اندازهٔ معلومی دارد، پس کمان CD و پاره‌خط CD طول معینی دارند، درنتیجه کافی است با رسم مماس CT بر دایرهٔ (C) زاویهٔ ظلّی $T\hat{C}D$ را مساوی زاویهٔ B رسم کنیم، آن‌گاه کمان درخور زاویهٔ $180° - \hat{A}$ را روی پاره‌خط CD رسم نماییم. نقطهٔ برخورد آن با دایرهٔ (C') رأس A از مثلث ABC است. DA را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ (C) را در B قطع کند. از B به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



تبصره. با انتخاب نقطهٔ دلخواه C برای رأس مثلث دو نقطهٔ A و A′ به‌عنوان رأس دوم مثلث و درنتیجه دو مثلث CAB و CA′B′ جواب مسأله به‌دست می‌آید. بعلاوه هریک از سه رأس مثلث می‌تواند روی دایرهٔ درونی نباشند. پس مسأله دارای شش جواب است، هنگامی که تنها یک رأس مثلث روی دایرهٔ AA′ باشد، به‌طور موازی شش جواب برای مسأله وجود دارد، با این شرط که باید تنها یک رأس مثلث روی دایرهٔ خارجی باشد.

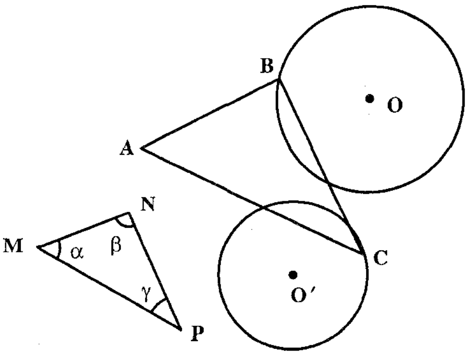
۱.۴.۲.۲.۲. دو دایره، نقطه، نسبت ضلعها، خط

۳۶۳. فرض می‌کنیم که مثلث ABC رسم شده است (شکل). نقطهٔ B بر اثر قرینه‌یابی تجانسی به مرکز A، محور I و نسبت تجانس n/m ، به نقطهٔ C بدل می‌شود. بنابراین C هم روی دایرهٔ S_2 و هم روی دایرهٔ S_1' حاصل از S_1 بر اثر این قرینه‌یابی تجانسی قرار دارد (شکل). مسأله می‌تواند دارای دو جواب، یک جواب یا بی‌جواب باشد.



۱.۴.۲.۲.۳. دو دایره، مثلث، نقطه

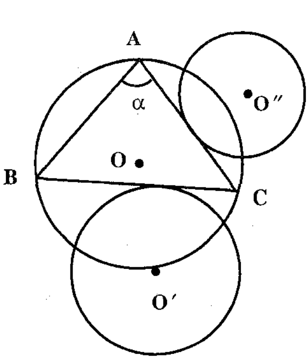
۳۶۴. مسأله را حل شده، مثلث ABC را که با مثلث MNP متشابه، یک رأس آن نقطهٔ ثابت A و دو رأس B و C از آن بترتیب روی دو دایرهٔ ثابت (O) و (O′) قرار دارد، جواب مسأله می‌گیریم. زاویه‌های متناظر دو مثلث ABC و MNP با هم برابرند ؛...



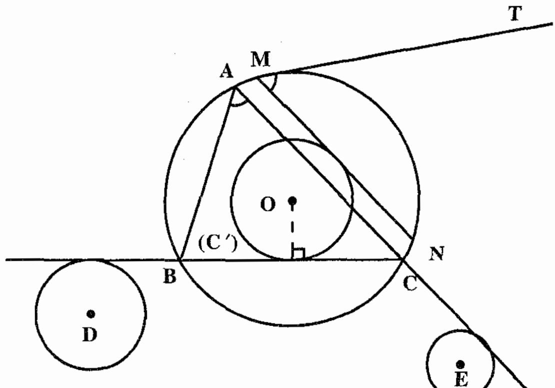
۱.۴.۲.۳. رسم مثلث با معلوم بودن سه دایره یا بیشتر و داده‌های دیگر

۱.۴.۲.۳.۱. سه دایره، زاویه

۳۶۵. مسأله را حل شده و مثلث ABC را که محاط در دایرهٔ دادهٔ شدهٔ (O) است، زاویهٔ رأس A از آن معلوم است، BC قاعده‌اش مماس بر دایرهٔ (O′) و ضلع AC از آن مماس بر دایرهٔ (O″) است، جواب مسأله می‌گیریم. از آن‌جا...

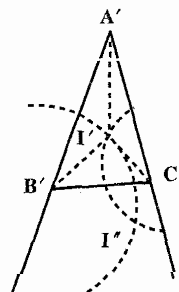


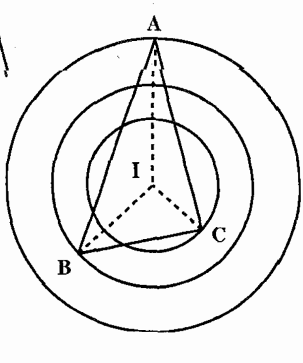
۳۶۶. مرکزهای دایره‌های داده شده را O، D و E می‌نامیم. چون اندازهٔ زاویهٔ A معلوم است، پس طول وتر و کمان $\overset{\frown}{BC}$ در دایرهٔ (O) معلوم می‌باشند. از نقطهٔ دلخواه M واقع بر دایرهٔ (O) زاویهٔ ظلی $T\hat{M}N$ را مساوی زاویهٔ A رسم می‌کنیم و دایرهٔ به مرکز O و مماس بر MN رسم می‌نماییم و دایرهٔ (C′) می‌نامیم. این دایره مکان هندسی وسط وترهای به‌طول BC در دایرهٔ (O) است. از طرفی ضلع BC بر دایرهٔ D و ضلع AC بر دایرهٔ E مماسند. پس مماس مشترک دو دایرهٔ (C′) و D را رسم می‌کنیم تا دایرهٔ O را در وتر BC قطع کند. از C مماسی بر دایرهٔ E رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (O) را در نقطهٔ A، رأس سوم مثلث قطع کند. از A به B وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



۱.۴.۲.۳.۲. سه دایره، مثلث

۳۶۷. ABC را مثلثی متشابه با مثلث T اختیار می‌کنیم. از نقطهٔ اختیاری I سه دایرهٔ هم مرکز به شعاعهای IA، IB و IC رسم می‌کنیم. روی ضلع A′B′ مثلث A′B′I′ را متشابه با مثلث ABI می‌سازیم. نقطهٔ I′ متناظر نقطهٔ I است. پاره‌خطهای I′A′ و I′B′ به‌نسبت $\frac{r}{r'}$ می‌باشند، یعنی داریم: $\frac{I'A'}{I'B'} = \frac{r}{r'}$. بنابراین نقطهٔ





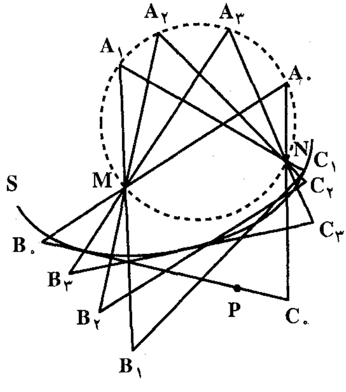
I' به دایرهٔ آپولونیوس تعلق دارد که پاره‌خط $A'B'$ را به‌نسبت $\frac{r}{r'}$ تقسیم می‌کند. همچنین پاره‌خطهای $I'A'$ و $I'C'$ به‌نسبت $\frac{r}{r''}$ می‌باشند. بنابراین مکان هندسی دیگر I' دایرهٔ آپولونیوسی است که قطرش پاره‌خط $A'C'$ را به نسبت $\frac{r}{r''}$ تقسیم می‌کند.
روش ترسیم زیر برای رسم مثلثی متشابه با مثلث T که رأسهایش روی سه دایرهٔ هم مرکز به شعاعهای r، r' و r'' قرار دارد، نتیجه می‌شود.

مکان هندسی نقطه‌ای را که نسبت فاصله‌هایش از A' و B' مساوی $\frac{r}{r'}$ است، همچنین مکان هندسی نقطه‌ای را که نسبت فاصله‌هایش از A' و C' برابر $\frac{r}{r''}$ است (دو دایرهٔ آپولونیوس)، رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دو مکان هندسی نقطهٔ I' است. از I' به سه نقطهٔ A' ، B' و C' رأسهای مثلث T وصل می‌کنیم.
IA را به دلخواه رسم کنید، سپس مثلثهای AIB و AIC را متشابه با مثلثهای $A'I'B'$ و $A'I'C'$ بسازید و مثلث ABC را رسم کنید.

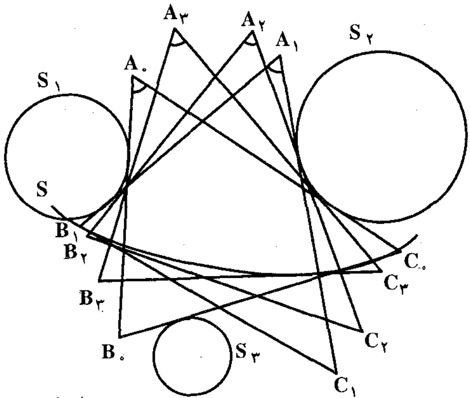
تبصره. می‌توان نقطهٔ متناظر I را نقطهٔ I'' که دیگر نقطهٔ برخورد دو دایرهٔ آپولونیوس متقاطع در I' است، درنظر گرفت. در این صورت مسأله یک جواب دیگر خواهد داشت. بالاخره می‌توان برای دایرهٔ خارجی یکی از سه رأس A، B و C را درنظر گرفت و به این ترتیب می‌توان ۱۲ جواب مختلف داشت. درصورتی که مکان هندسیها نقطهٔ برخورد نداشته باشند، مسأله جواب ندارد.

۳.۳.۲.۴.۱. مسأله‌های ترکیبی

۳۶۸. الف. مثلثهای زیادی مانند $A_1B_1C_1$ می‌توان رسم کرد که با مثلث مفروض ABC قابل انطباق و چنان باشند که ضلعهای A_1B_1 و A_1C_1 از دو نقطهٔ مفروض M و N بگذرند. ضلع B_1C_1 از هر مثلثی از این قبیل باید بر یک دایرهٔ ثابت S مماس باشد که سه مثلث $A_1B_1C_1$ ، $A_2B_2C_2$ و $A_3B_3C_3$ از این گونه می‌توان رسم کرد (شکل الف). پس از این رسم کافی است از نقطهٔ مفروض P مماسی بر S رسم کنیم : ضلع B_0C_0 از مثلث خواسته شدهٔ $A_0B_0C_0$ روی این مماس واقع خواهد شد. مسأله می‌تواند دارای دو جواب یا یک جواب یا بی‌جواب باشد.



(الف)



(ب)

ب. این مسأله خیلی شبیه قسمت (الف) است. مثلثهای زیادی نظیر $A_1B_1C_1$ ، می‌توان رسم کرد که با مثلث مفروض ABC قابل انطباق و چنان باشند که A_1B_1 بر دایرهٔ مفروض S_1 و A_1C_1 بر دایرهٔ مفروض S_2 مماس باشد. ضلع سوم همهٔ این مثلثها بر یک دایرهٔ S مماس خواهد بود. این دایره را می‌توان با ترسیم سه تا از این مثلثها، یعنی $A_1B_1C_1$ ، $A_2B_2C_2$ و $A_3B_3C_3$ به‌راحتی به‌دست آورد (شکل ب). از این پس تنها کافی است مماس مشترک دایرهٔ S و دایرهٔ مفروض S_3 را رسم کنیم ؛ ضلع B_0C_0 از مثلث خواسته شدهٔ $A_0B_0C_0$ بر این خط واقع خواهد شد. دایره‌های S و S_3 در حالت کلی چهار مماس مشترک خواهند داشت. بعلاوه مثلث $A_1B_1C_1$ (و بنابراین $A_2B_2C_2$ و $A_3B_3C_3$) را می‌توان به چهار روش اساساً متمایز زیر ترسیم کرد :

۱. دایرهٔ S_1 و نقطهٔ C_1 در دو طرف خط A_1B_1 ، دایرهٔ S_2 و نقطهٔ B_1 در دو طرف A_1C_1 واقعند (شکل ب).

۲. دایرهٔ S_1 و نقطهٔ C_1 در دو طرف A_1B_1 ؛ S_2 و B_1 در یک طرف A_1C_1 قرار دارند.

۳. S_1 و C_1 در یک طرف A_1B_1 واقعند ؛ S_2 و B_1 در دو طرف متقابل از A_1C_1 .

۴. S_1 و C_1 در یک طرف A_1B_1 واقعند ؛ S_2 و B_1 در یک طرف A_1C_1 .

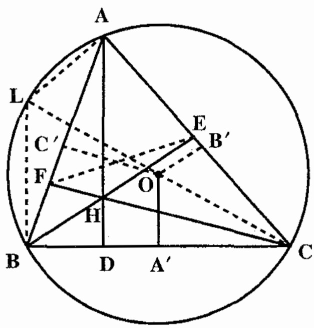
پس مسأله می‌تواند حداکثر تا شانزده جواب داشته باشد.

۳.۴.۱. رسم مثلث با معلوم بودن دایرهٔ محیطی با شعاع دایرهٔ محیطی و داده‌های دیگر

۱.۳.۴.۱. رسم مثلث با معلوم بودن دایرهٔ محیطی و داده‌های دیگر

۱.۱.۳.۴.۱. دایرهٔ محیطی، نقطه

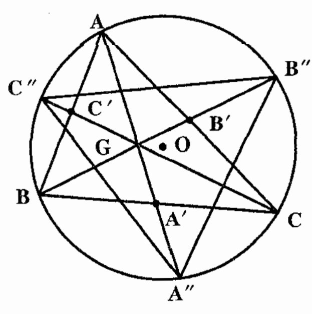
۳۶۹. اگر P، Q و R این سه نقطه باشند، دایرهٔ محیطی مثلث را مشخص می‌کنند و چون رأس A وسط RQ و B وسط RP و C وسط PQ است، سه رأس مثلث بسادگی به‌دست می‌آیند.

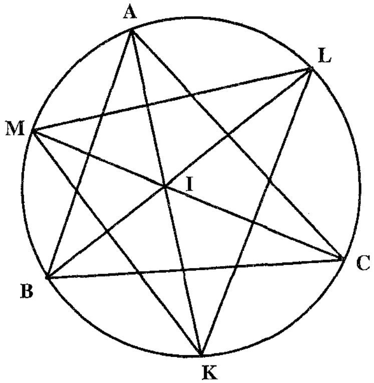


تبصره. فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی مثلث از هر ضلع، نصف فاصلهٔ رأس مقابل به آن ضلع از محل برخورد ارتفاعهای مثلث است.

اگر از C به O مرکز دایرهٔ محیطی وصل کرده، ادامه دهیم تا دایره را در L قطع کند، داریم: $OA' = \frac{1}{2}BL$. از طرف دیگر ضلعهای چهارضلعی AHBL دوبه‌دو بر BC و AC عمودند، پس چهارضلعی متوازی‌الاضلاع است، یعنی: $BL = HA$، پس $OA' = \frac{1}{2}HA$.

۳۷۰. مسأله را حل شده و مثلث ABC محاط در دایرهٔ (O) را جواب مسأله می‌گیریم. نقطه‌های برخورد میانه‌های AA'، BB' و CC' با دایرهٔ (O) را بترتیب A''، B'' و C'' می‌نامیم و مثلث $A''B''C''$ را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث ABC را نیز G می‌نامیم.





۳۷۱. سه نقطهٔ مفروض K، L و M (شکل) دایرهٔ محیطی (O) از مثلث خواسته شدهٔ ABC را تعیین می‌کنند و نقطه‌های وسط کمانهایی هستند که ضلعهای مثلث ABC روی دایرهٔ (O) ایجاد می‌کنند. نقطه‌های L و M مرکزهای دو دایره‌ای هستند که از نقطهٔ A و مرکز داخلی I از مثلث ABC می‌گذرند؛ پس AIK بر LM عمود است، یعنی A دومین نقطهٔ برخورد دایرهٔ (O) با خطی است که از نقطهٔ مفروض K بر خط معلوم LM عمود می‌شود. خطهایی که از L و M بترتیب بر MK و KL عمود می‌شوند، دو رأس دیگر B و C از مثلث خواسته شدهٔ ABC را روی دایرهٔ (O) تعیین می‌کنند.

نتیجهٔ ۱. در هریک از دسته‌های زیر اگر دو پاره‌خط مفروض باشند، می‌توان پاره‌خط سوم آن دسته را رسم کرد.

$$r, r_a, h_a; r, r_b, h_b; r, r_c, h_c$$

زیرا درصورتی که سه نقطه از چهارنقطهٔ همساز A، P، D و Q مفروض باشند، نقطهٔ چهارم را می‌توان تعیین کرد.

نتیجهٔ ۲. واضح است که نقطهٔ D، پاره‌خط QP را به‌طور داخلی به نسبت $QD:DP = r_a:r$ تقسیم می‌کند، پس:

$$h_a = ۲(r_a + r)r_a r : (r_a^۲ - r^۲) = ۲rr_a : (r_a - r)$$

برای h_b و h_c نیز رابطه‌های مشابهی وجود دارد.

روش دیگر. داریم:

$$۲S = ah_a = ۲pr \ , \ ۲S = ah_a = ۲(p-a)r_a$$

پس، $$a(h_a - r) = (b+c)r \, , a(h_a + r_a) = (b+c)r_a$$

یا $$(h_a - r):(h_a + r_a) = r : r_a$$

این رابطه‌ها هم برای h_a همان مقداری را به‌دست می‌دهد که در بالا به‌دست آوردیم.

نکته. نقطه‌های P و Q ارتفاع AD را به‌طور داخلی و خارجی به نسبت زیر تقسیم می‌کنند:

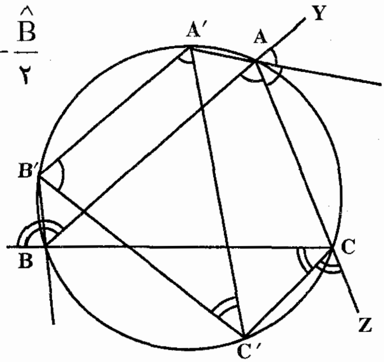
$$(r_a - r):(r_a + r)$$

۳۷۲. مسأله را حل شده و مثلث ABC محاط در دایرهٔ (O) را جواب مسأله می‌گیریم. نیمسازهای زاویه‌های خارجی مثلث را رسم می‌کنیم تا دایره را در A' ، B' و C' قطع کنند و این سه نقطه را به هم وصل می‌کنیم. در مثلث $A'B'C'$ داریم :

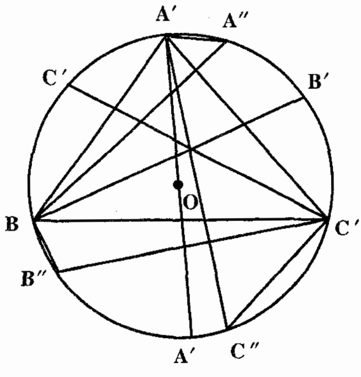
$$\hat{A}' = \frac{\overset{\frown}{B'BC'}}{۲} = \frac{B'\hat{B}Y}{۲} = ۹۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲}$$

$$\hat{B}' = \frac{\overset{\frown}{C'CA}}{۲} = \frac{C'\hat{C}Z}{۲}$$

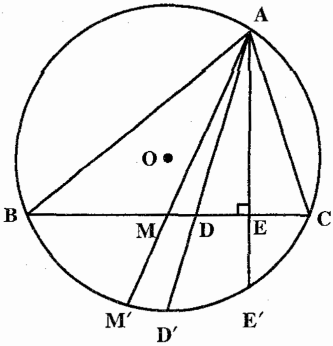
$$\hat{C}' = \cdots$$



۳۷۳. مسأله را حل شده و مثلث ABC محاط در دایرهٔ (O) را جواب مسأله می‌گیریم. نقطه‌های برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث با دایره را A' ، B' و C' و نقطه‌های برخورد نیمسازهای زاویه‌های خارجی مثلث با دایره را A'' ، B'' و C'' می‌نامیم. پاره‌خطهای $A''B$ ، $B''C$ و $C''A$ را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که $A'A''$ ، $B'B''$ و $C'C''$ قطرهای دایرهٔ (O) هستند. با استفاده از ویژگیهای بالا مسأله را حل کنید.

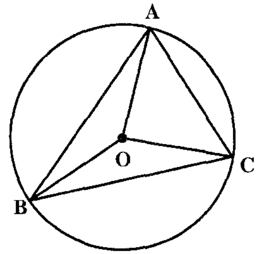


۳۷۴. مسأله را حل شده و مثلث ABC را که در دایرهٔ (O) محاط است، جواب مسأله می‌گیریم. نقطه‌های برخورد ارتفاع AE، نیمساز AD و میانهٔ AM با دایرهٔ محیطی مثلث را بترتیب E' ، D' و M' می‌نامیم. با معلوم بودن این سه نقطه روی دایرهٔ محیطی مثلث به مرکز O می‌خواهیم مثلث را رسم کنیم.



۱.۴.۳.۱.۲. دایرهٔ محیطی، رابطه‌ای بین مساحتها

۳۷۵. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. داریم:



$$S_{OBC}:S_{OCA}:S_{OAB}=p:q:r$$

$$\Rightarrow \frac{S_{OBC}}{S_{OCA}}=\frac{p}{q}\ ,\ \frac{S_{OBC}}{S_{OAB}}=\frac{p}{r}$$

$$\Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}OB.OC.\sin B\hat{O}C}{\frac{۱}{۲}OA.OC.\sin A\hat{O}C}=\frac{p}{q}$$

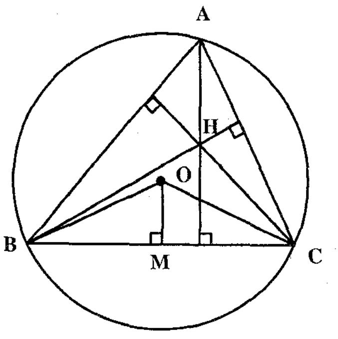
$$\Rightarrow \frac{\frac{۱}{۲}R^{۲}\sin B\hat{O}C}{\frac{۱}{۲}R^{۲}\sin A\hat{O}C}=\frac{p}{q}$$

$$\Rightarrow \frac{\sin B\hat{O}C}{\sin A\hat{O}C}=\frac{p}{q}$$

و به طور مشابه $\frac{\sin B\hat{O}C}{\sin A\hat{O}B}=\frac{p}{r}$.

با توجه به این که $A\hat{O}B+A\hat{O}C+B\hat{O}C=۳۶۰^\circ$ است، اندازه‌های زاویه‌های $A\hat{O}B$، $B\hat{O}C$ و $C\hat{O}A$ محاسبه می‌شوند و از آن جا مثلث ABC رسم می‌شود.

۱.۴.۳.۱.۳. دایرهٔ محیطی، نقطه، ضلع یا رابطهٔ بین ضلعها



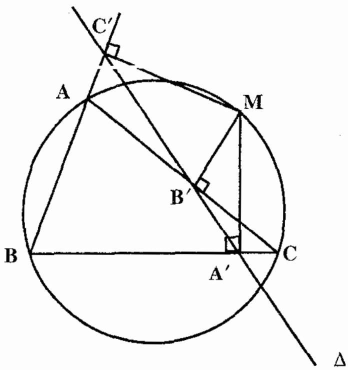
۳۷۶. می‌دانیم که فاصلهٔ محل برخورد ارتفاعهای تا هر رأس، دو برابر فاصلهٔ مرکز دایرهٔ محیطی تا ضلع مقابل آن است، بنابراین: اگر از O عمود OM را بر BC فرود آوریم، داریم:

$$OM=\frac{AH}{۲}$$

چون O و BC در دست است، پس برای رسم

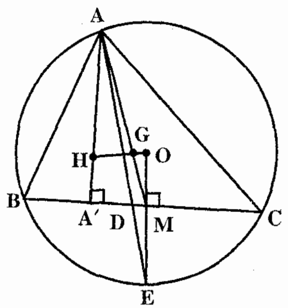
مثلث ABC در دایرهٔ O، ضلع BC به طول معلوم را رسم می‌کنیم، آن‌گاه عمود OM را بر آن فرود می‌آوریم، سپس به مرکز H و به شعاع ۲OM کمانی می‌زنیم، این کمان هرجا که دایرهٔ محیطی را قطع کند، نقطهٔ A می‌باشد. از A به B و C وصل می‌کنیم، مثلث ABC، مثلث خواسته شده است.

۱.۴.۳.۱.۴. دایرهٔ محیطی، نقطه، خط



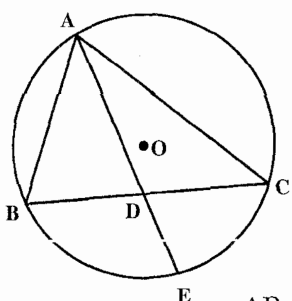
۳۷۷. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. می‌دانیم که خط سمسون برای هر نقطه از دایرهٔ محیطی، خطی است که پای تصویرهای آن نقطه، روی سه ضلع مثلث یا امتداد ضلعهای مثلث را به هم وصل می‌کند. خط Δ را خط سمسون نقطهٔ M برای مثلث ABC می‌گیریم. برای رسم مثلث...

۱.۴.۳.۱.۵. دایرهٔ محیطی، نقطه، زاویه



۳۷۸. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. O را مرکز دایرهٔ محیطی و G را مرکز ثقل مثلث می‌نامیم و فرض می‌کنیم $\hat{B}-\hat{C}=\alpha$ از مثلث ABC معلوم باشد، ...

۱.۴.۳.۱.۶. دایرهٔ محیطی، نقطه، رابطهٔ متری



۳۷۹. مسأله را حل شده می‌گیریم و فرض می‌کنیم مثلث ABC جواب مسأله باشد. نیمساز AD را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با دایرهٔ محیطی مثلث را E می‌نامیم. می‌دانیم که :

$$AB.AC = AD^2 + DB.DC \Rightarrow AD^2 + DB.DC = bc$$

از طرفی بنا به رابطهٔ طولی در دایره داریم :

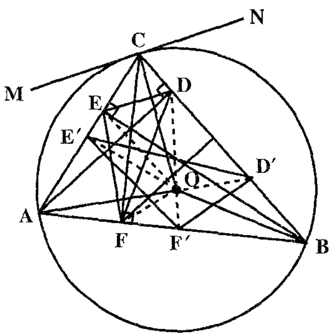
$$DB.DC = AD.DE$$

از آن‌جا...

۱.۴.۳.۱.۷. دایرهٔ محیطی، مثلث، خط

۳۸۰. اگر D، E و F پاهای ارتفاعهای مثلث ABC باشند، آن‌گاه $\Delta ABC \sim \Delta BCE$ (شکل) ؛

بنابراین $CE/CD = CB/CA$. درنتیجه $\Delta ABC \sim \Delta DEC$ و $C\hat{E}D = C\hat{B}A$. فرض می‌کنیم MN بر دایرهٔ محیطی در نقطهٔ C مماس باشد. بدیهی است که $M\hat{C}A = C\hat{B}A(=\overset{\frown}{AC}/۲)$. پس $M\hat{C}E = C\hat{E}D$. یعنی $ED \| MN \perp OC$. به‌همین طریق می‌توان نشان داد که $EF \perp OA$ و $DF \perp OB$ یعنی مثلث DEF، مثلث خواسته شده است [بسادگی می‌توان دید که هیچ مثلث دیگری محاط در مثلث ABC جوابگوی مسأله نیست، زیرا هیچ مثلث محاطی دیگری نیست که ضلعهایش با ضلعهای مثلث DEF موازی باشد].



اگر مثلث ABC حادةالزوایا باشد، نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی درون آن واقع است (شکل) ؛ بنابراین :

مساحت OFBD + مساحت OEAF + مساحت ODCE = مساحت مثلث ABC

ولی قطرهای هریک از این سه چهارضلعی اخیر برهم عمودند، پس مساحت آنها برابر است با نصف حاصلضرب قطرهایشان. بنابراین :

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \frac{۱}{۲}OC.DE + \frac{۱}{۲}OA.EF + \frac{۱}{۲}OB.FD$$

$$= \frac{۱}{۲}R(DE + EF + FD) \quad (۱)$$

که در آن، R شعاع دایرهٔ محیطی است.

اگر $F'D'E'$ مثلث دلخواهی محاط در ABC باشد، آن‌گاه :

$$\text{مساحت مثلث } ABC = \text{مساحت } OD'CE' + \text{مساحت } OE'AF' + \text{مساحت } OF'BD'$$

$$= \frac{۱}{۲}OC.D'E'\sin\gamma + \frac{۱}{۲}OA.E'F'\sin\alpha + \frac{۱}{۲}OB.F'D'\sin\beta$$

که در آن γ ، α و β بترتیب زاویه‌های بین قطرهای چهار ضلعیهای $OD'CE'$ ، $OE'AF'$ و $OF'BD'$ هستند ؛ بنابراین :

$$ABC \text{ مساحت مثلث } \leq \frac{1}{2}R(D'E' + E'F' + F'D')$$

از مقایسهٔ این معادله با معادلهٔ (۱) در بالا، معلوم می‌شود که :

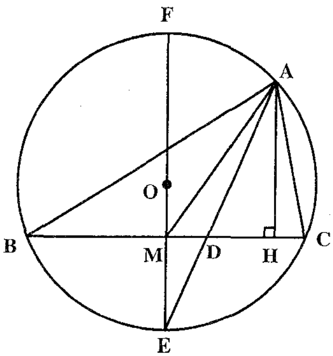
$$DE + EF + FD \leq D'E' + E'F' + F'D'$$

پس بین همهٔ مثلثهای محاط در مثلث حادةالزوایای مفروض، آن که کمترین محیط را داراست، همان است که رأسهایش پاهای ارتفاعهای مثلث مفروض باشند.

۱.۴.۳.۲. رسم مثلث با معلوم بودن شعاع دایرهٔ محیطی و داده‌های دیگر

۱.۴.۳.۲.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، نقطه

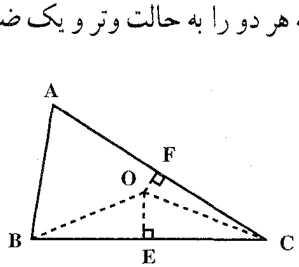
۳۸۱. از M قطر EMF دایرهٔ محیطی را رسم می‌کنیم. AD از E می‌گذرد، پس بعد از رسم دایره‌ای به قطر معلوم EF، خط AHA' را به فاصلهٔ معلوم MH از آن رسم می‌کنیم و AE را وصل می‌کنیم و روی آن نقطهٔ D را که به فاصلهٔ معلوم MD از EF واقع است، معین می‌کنیم. عمود رسم شده از D بر EF، دایره را در نقطه‌های B و C قطع می‌کند.

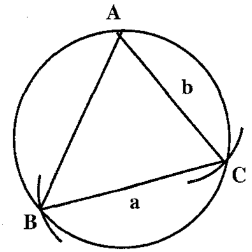


۱.۴.۳.۲.۲. شعاع دایرهٔ محیطی، ضلع

۱.۴.۳.۲.۲.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، دو ضلع

۳۸۲. راه اول. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. (مثلث) چهارضلعی FOEC را می‌توان رسم کرد، زیرا تشکیل شده از دو مثلث قائم‌الزاویه که هر دو را به حالت وتر و یک ضلع می‌توان رسم کرد، سپس CF را از طرف F به اندازهٔ خود و CE را از طرف E به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم، نقطه‌های A و B به‌وجود می‌آیند که به یکدیگر وصل می‌کنیم.

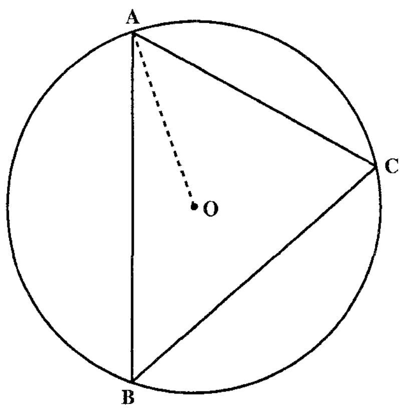




راه دوم. دایره‌ای به شعاع R رسم می‌کنیم. از نقطهٔ دلخواه A واقع بر این دایره، کمانی به مرکز A و به شعاع $AC = b$ رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ C قطع کند، سپس به مرکز C و به شعاع $CB = a$ دایره‌ای می‌زنیم تا دایرهٔ محیطی را در نقطهٔ B قطع کند. سه نقطهٔ A، B و C را به هم وصل می‌کنیم. مثلث ABC رسم می‌شود.

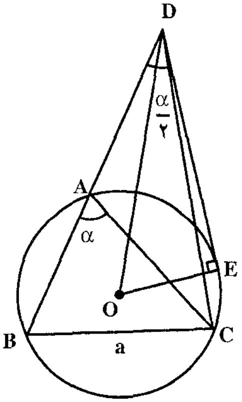
۱.۴.۳.۲.۲.۲. شعاع دایرهٔ محیطی، یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر

۳۸۳. فرض می‌کنیم مثلث ABC، مثلث خواسته شده باشد، چون $AB + AC = l$ است، یعنی مجموع فاصله‌های نقطهٔ A از دو نقطهٔ B و C مقداری است ثابت، پس نقطهٔ A روی یک بیضی واقع است که B و C دو کانون آن بوده و طول محور بلندتر آن l می‌باشد، از طرف دیگر نقطهٔ A روی دایره‌ای به شعاع $OA = R$ که BC وتری از آن می‌باشد واقع است درنتیجه در محل تلاقی دایره با بیضی واقع است. برای حل مسألهٔ اوّل دایرهٔ به شعاع R رسم می‌کنیم، سپس وتری به طول BC در این دایره می‌کشیم. آن‌گاه یک بیضی که طول محور بلندتر آن l و دو کانون آن B و C می‌باشند، رسم می‌نماییم. محل تلاقی این بیضی با دایره، نقطهٔ A است.



۱.۴.۳.۲.۲.۳. شعاع دایرهٔ محیطی، یک ضلع، رابطهٔ بین دو ضلع دیگر

۳۸۴. فرض کنید ABC مثلث خواسته شده باشد که در دایرهٔ داده شده به مرکز O، محاط شده است (شکل). BA را امتداد می‌دهیم و روی آن AD را برابر AC جدا می‌کنیم. حال



داریم :

$$B\hat{D}C = \frac{1}{2} B\hat{A}C$$

و $B\hat{A}C$ با معلوم بودن R و a مشخص می‌شود، پس اگر ضلع $BC = a$ را در دایرهٔ داده شده به شعاع R قرار دهیم، یک مکان هندسی برای D خواهیم داشت. فرض کنید DE مماسی باشد که از D بر دایره رسم می‌شود. داریم :

$$DE^2 = DA.DB = b(b+c)$$

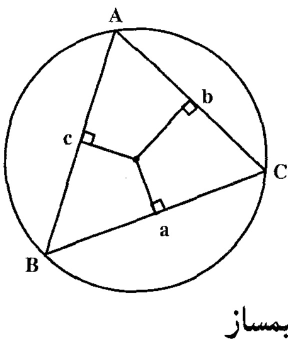
یعنی طول مماسی را که از D بر دایرهٔ (O) رسم می‌شود می‌دانیم ؛ پس یک مکان هندسی دیگر برای D داریم که دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\sqrt{DE^2 + R^2}$ است و مثلث کمکی DBC را می‌توانیم رسم کنیم. عمودمنصف CD خط BD را در رأس سوم مثلث خواسته شدهٔ ABC، یعنی A، قطع کند.

۱.۴.۳.۲.۲.۴. شعاع دایرهٔ محیطی، نسبت ضلعها

۳۸۵. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. فرض می‌کنیم :

$$a:b:c = p:q:r$$

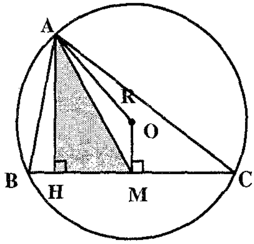
باشد. در این صورت $\frac{a}{b} = \frac{p}{q}$ و $\frac{a}{c} = \frac{p}{r}$ و $\frac{b}{c} = \frac{q}{r}$ است. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث نیز معلوم است. حال یک نقطهٔ دلخواه روی دایره را به‌عنوان رأس A اختیار می‌کنیم و دو وتر AB و AC را چنان رسم می‌کنیم که $\frac{AC}{AB} = \frac{q}{r}$ باشد. از آن‌جا مثلث ABC رسم می‌شود.



۱.۴.۳.۲.۳. شعاع دایرهٔ محیطی؛ ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۴.۳.۲.۳.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، ارتفاع، میانه

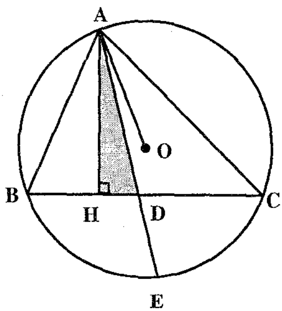
۳۸۶. مسأله را حل شده، مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم، که در دایرهٔ (O, R) محاط است. ارتفاع AH و میانهٔ AM را رسم می‌کنیم و از O به M وصل می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM با معلوم بودن وتر AM و ارتفاع AH قابل رسم است، پس از رسم



این مثلث از M عمودی بر HM اخراج می‌کنیم. سپس به مرکز A و به شعاع R قوسی می‌زنیم تا خط عمود در M را در نقطهٔ O قطع کند. به مرکز O و به شعاع دایرهٔ محیطی مثلث یعنی R دایره‌ای رسم می‌کنیم تا امتداد HM را در B و C قطع کند. مثلث ABC جواب مسأله است.

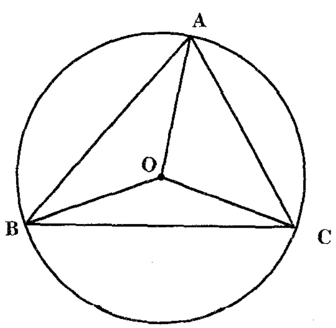
۱.۴.۳.۲.۳.۲. شعاع دایرهٔ محیطی، ارتفاع، نیمساز

۳۸۷. مسأله را حل شده گرفته، مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم، که در دایرهٔ (O, R) محاط است. ارتفاع AH و نیمساز AD را رسم می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD به حالت وتر و یک ضلع قابل رسم است. از طرفی می‌دانیم که نیمساز زاویهٔ A، نیمساز زاویهٔ بین ارتفاع و قطر دایرهٔ محیطی مثلث است. بنابراین پس از رسم مثلث قائم‌الزاویه AHD ، از A خطی رسم می‌کنیم که با AD زاویه‌ای مساوی زاویهٔ HAD بسازد. روی این خط $AO = R$ را جدا می‌کنیم. مرکز دایرهٔ (O) به‌دست می‌آید. به مرکز O و به شعاع R دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می‌کنیم تا امتداد HD را در B و C قطع کند. مثلث ABC جواب مسأله است.



۱.۴.۳.۲.۴. شعاع دایرهٔ محیطی، زاویه

۳۸۸. راه اوّل. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R رسم می‌کنیم. اگر مثلث ABC جواب مسأله باشد، $B\hat{O}C = ۲\hat{A}$ و $A\hat{O}C = ۲\hat{B}$ است، پس ابتدا زاویه‌های BOC و AOC را مساوی $۲\hat{A}$ و $۲\hat{B}$ رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد ضلعهای آنها با دایره، رأسهای مثلث ABC است.



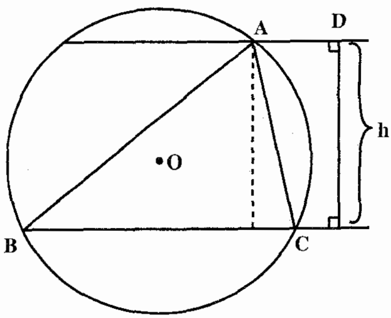
راه دوم. مثلث $A'B'C'$ را با زاویه‌های A' ، B' و C' می‌سازیم و دایرهٔ محیطی آن را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز O' و به شعاع R دایره‌ای رسم می‌کنیم و نقطه‌های

برخورد OA' ، OB' و OC' با دایرهٔ به شعاع R را A، B و C می‌نامیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۱.۴.۳.۲.۵. شعاع دایرهٔ محیطی، ضلع، ارتفاع

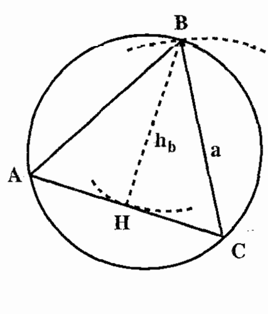
۱.۴.۳.۲.۵.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، یک ضلع، یک ارتفاع

۳۸۹. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R رسم می‌کنیم. بعد نقطه‌ای مانند B روی این دایره درنظر گرفته و به مرکز B و با شعاع a دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (O, R) را در نقطهٔ C قطع کند (این دایره، دایرهٔ اوّلی را علاوه‌بر C در نقطهٔ C' نیز قطع می‌کند) بعد عمودی از نقطهٔ اختیاری در روی BC یا امتداد آن اخراج کرده و به اندازهٔ h روی این عمود جدا می‌کنیم تا نقطهٔ D به‌دست آید و از نقطهٔ D خطی به موازات BC رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ A قطع کند. مثلث ABC، جواب مسأله است.



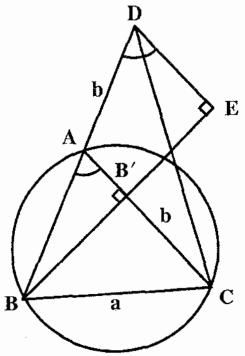
بحث. خطی که از D به موازات BC رسم می‌شود، اگر دایره را در دو نقطه قطع کند، مسأله دارای دو جواب است و اگر بر دایره مماس باشد، مسأله دارای یک جواب است و اگر قطع نکند، مسأله دارای جواب نیست.

۳۹۰. ابتدا دایره‌ای به شعاع R می‌زنیم و وتر اختیاری $a = BC$ را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ B کمانی به شعاع h_b می‌زنیم و از نقطهٔ C مماسی به این کمان رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ A قطع کند. ABC مثلث خواسته شده است.



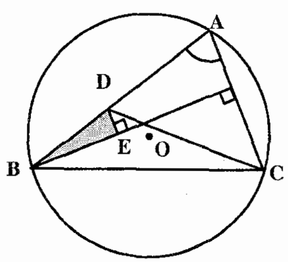
۱.۴.۳.۲.۵.۲. شعاع دایرهٔ محیطی، مجموع دو ضلع، مجموع دو ارتفاع

۳۹۱. مسأله را حل شده و مثلث ABC، محاط در دایرهٔ به شعاع R را جواب مسأله می‌گیریم. ضلع AB را به اندازهٔ $AD = AB$ امتداد می‌دهیم و از D عمود DE را بر امتداد ارتفاع BB' رسم می‌کنیم. می‌دانیم که $BE = h_b + h_c$ و $BD = b + c$ است. از آن‌جا مثلث قائم‌الزاویهٔ DBE زاویهٔ A را مشخص می‌کند؛ زیرا $B\hat{D}E = \hat{A}$ است. با مشخص شدن زاویهٔ A و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث اندازهٔ ضلع $BC = a$ معلوم است و درنتیجه مثلث ABC بسادگی رسم می‌شود.



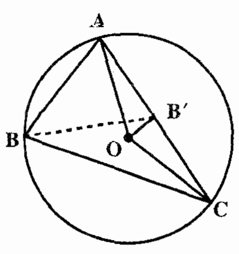
۱.۴.۳.۲.۵.۳. شعاع دایرهٔ محیطی، تفاضل دو ضلع، تفاضل دو ارتفاع

۳۹۲. مسأله را حل شده و مثلث ABC را محاط در دایرهٔ (O) به شعاع R درنظر می‌گیریم. روی ضلع AB پاره‌خط $AD = AC$ را جدا می‌کنیم و از D عمود DE را بر ارتفاع BB' از مثلث ABC رسم می‌کنیم. می‌دانیم که $BE = h_b - h_c$ است. از طرفی $BD = c - b$ می‌باشد. از آن‌جا مثلث قائم‌الزاویهٔ BDE زاویهٔ A از مثلث ABC را مشخص می‌کند؛ زیرا $B\hat{D}E = \hat{A}$ است. با معلوم بودن $\hat{A}$ و R اندازهٔ ضلع $BC = a$ مشخص می‌شود. درنتیجه مثلث ABC با اجزای مشخص شده بسادگی رسم می‌شود.



۱.۴.۳.۲.۶. شعاع دایرهٔ محیطی، ضلع، میانه

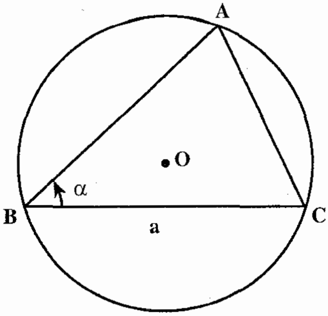
۳۹۳. مثلث AOC را می‌توانیم با معلوم بودن سه ضلع رسم کنیم. (O) مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است؛ سپس B' وسط AC را پیدا کرده، به مرکز B' و شعاع معلوم BB'، دایره‌ای می‌زنیم. هرجا که دایرهٔ محیطی مثلث را قطع کند، نقطهٔ B است. از B به A و C وصل می‌کنیم.



۱.۴.۳.۲.۷. شعاع دایرهٔ محیطی، ضلع، زاویه

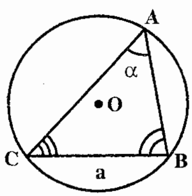
۱.۴.۳.۲.۷.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، یک ضلع، یک زاویه

۳۹۴. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R رسم می‌کنیم. نقطهٔ دلخواه B را روی این دایره اختیار کرده، به مرکز B و به شعاع a قوسی می‌زنیم تا دایرهٔ (O) را در نقطهٔ C قطع کند. از B به C وصل می‌کنیم، سپس از B خطی رسم می‌کنیم که با BC زاویه‌ای مساوی زاویهٔ $\hat{B} = \alpha$ بسازد. نقطهٔ برخورد این خط با دایرهٔ محیطی مثلث رأس A است. از A به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC رسم می‌شود.



۱.۴.۳.۲.۷.۲. شعاع دایرهٔ محیطی، یک ضلع، تفاضل دو زاویه

۳۹۵. مسأله را حل شده و مثلث ABC محاط در دایرهٔ به شعاع R را جواب مسأله می‌گیریم.



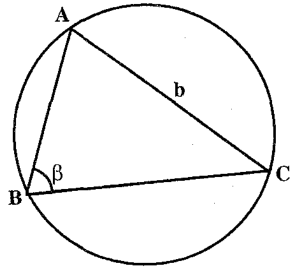
a را ضلع معلوم و $\hat{B} - \hat{C} = \beta$ اختیار می‌کنیم. چون وتر $BC = a$ در دایرهٔ به شعاع R معلوم است، سپس اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{BC}$ و از آن‌جا اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ معلوم می‌باشد که آن را α می‌نامیم؛ $\hat{A} = \alpha$، درنتیجه $\hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ - \alpha$ است. از طرفی بنا به فرض $\hat{B} - \hat{C} = \beta$ می‌باشد. بنابراین داریم:

$$\begin{cases} \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰^\circ - \alpha \\ \hat{B} - \hat{C} = \beta \end{cases} \Rightarrow ۲\hat{B} = ۱۸۰^\circ + \beta - \alpha$$

$$\Rightarrow \hat{B} = ۹۰^\circ + \frac{\beta - \alpha}{۲}$$

و
$$\hat{C} = ۹۰^\circ - \frac{\alpha + \beta}{۲}$$

با معلوم بودن اندازهٔ زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ و ضلع a و R شعاع دایرهٔ محیطی، مثلث ABC قابل رسم است.

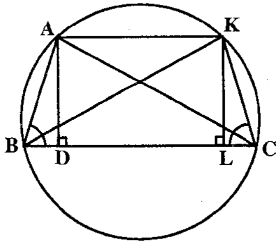


۳۹۶. مسأله را حل شده و مثلث ABC، محاط در دایرهٔ به شعاع R را جواب مسأله می‌گیریم. با معلوم بودن وتر b اندازهٔ کمان $\overset{\frown}{AC}$ و درنتیجه اندازهٔ زاویهٔ $\hat{B}$ نیز مشخص است که آن را β می‌نامیم و چون $\hat{B}-\hat{C}=\alpha$ را داریم، پس اندازهٔ زاویهٔ $\hat{C}$، از آن‌جا اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ از مثلث مشخص می‌شود. با معلوم بودن ضلع b و اندازهٔ سه زاویهٔ مثلث ABC و شعاع دایرهٔ محیطی آن، مثلث ABC بسادگی رسم می‌شود.

۳.۷.۲.۳.۴.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، مجموع دو ضلع، تفاضل دو زاویه

۳۹۷. ABC را مثلث خواسته شده فرض کنید (شکل). فرض کنید خطی که از A به موازات BC رسم می‌شود دایرهٔ محیطی ABC را در K قطع کند. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCK داریم:

$$A\hat{B}K=A\hat{B}C-K\hat{B}C=\hat{B}-B\hat{K}A=\hat{B}-B\hat{C}A=\hat{B}-\hat{C}$$



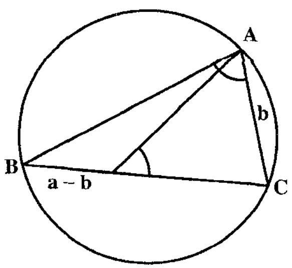
شعاع مفروض R و زاویهٔ معلوم $A\hat{B}K=\hat{B}-\hat{C}$، پاره‌خط AK را تعیین می‌کنند. پس در مثلث ABK قاعدهٔ AK، زاویهٔ مقابل به قاعده، یعنی $\hat{B}-\hat{C}$ و مجموع ضلعهای جانبی، یعنی:

$$AB+BK=AB+AC=b+c$$

را می‌دانیم، پس می‌توانیم این مثلث را رسم کنیم. خطی که از B به موازات AK رسم می‌شود، دایرهٔ محیطی ABK را در رأس سوم مثلث خواسته شدهٔ ABC، یعنی C، قطع کند.

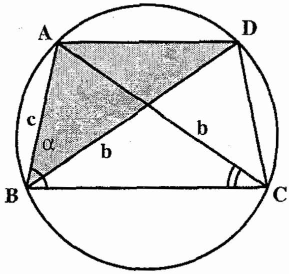
۴.۷.۲.۳.۴.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، تفاضل دو ضلع، یک زاویه

۳۹۸. مسأله را حل شده و مثلث ABC محاط در دایرهٔ به شعاع R را جواب مسأله می‌گیریم.



چون زاویهٔ $\hat{A}$ معلوم است، پس اندازهٔ وتر آن $BC=a$ نیز مشخص می‌باشد و با داشتن $a-b$ اندازهٔ b نیز به‌دست می‌آید. بنابراین با معلوم بودن a، b و R بسادگی مثلث ABC را می‌توان رسم کرد.

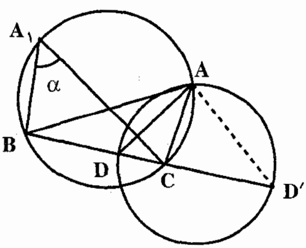
۱.۴.۳.۲.۷.۵. شعاع دایرهٔ محیطی، تفاضل دو ضلع، تفاضل دو زاویه



۳۹۹. مسأله را حل شده و مثلث ABC محاط در دایرهٔ به شعاع R را جواب مسأله می‌گیریم. از A خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ D قطع کند. از D به C و B وصل می‌کنیم. چهارضلعی ABCD ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. بنابراین $BD = AC = b$ و $\overset{\frown}{AB} = \overset{\frown}{DC}$ و $A\hat{B}D = A\hat{B}C - D\hat{B}C = A\hat{B}C - A\hat{C}B = \hat{B} - \hat{C} = \alpha$ است و همچنین $AB + BD = AB + AC = c + b$ می‌باشد.

با معلوم بودن دایرهٔ محیطی مثلث و زاویهٔ $\hat{B} - \hat{C} = \alpha$ می‌توان زاویهٔ $A\hat{B}D = \hat{B} - \hat{C} = \alpha$، یعنی مثلث ABD را رسم کرد، در این صورت مجموع دو ضلع b و c یعنی $AB + BD = c + b$ نیز معلوم خواهد شد و چون $b - c$ نیز معلوم است، پس اندازهٔ دو ضلع b و c به‌دست می‌آید و از آن‌جا با داشتن R، b و c مثلث ABC قابل رسم است.

۱.۴.۳.۲.۷.۶. شعاع دایرهٔ محیطی، نسبت دو ضلع، زاویه

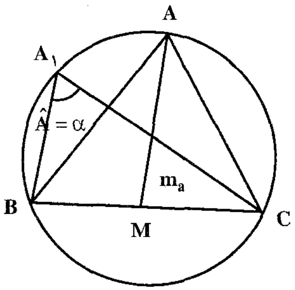


۴۰۰. مسأله را حل شده و مثلث ABC محاط در دایرهٔ (O) را جواب مسأله می‌گیریم. با معلوم بودن اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A} = \alpha$ و شعاع دایرهٔ محیطی مثلث، اندازهٔ ضلع $BC = a$ معلوم است و چون $\frac{b}{c} = k$ نیز معلوم می‌باشد، پس دو نقطهٔ D و D′ پای نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی A معلوم است ؛ زیرا داریم : $\frac{DC}{DB} = \frac{D'C}{D'B} = \frac{b}{c}$ بنابراین مکان هندسی دیگر رأس A دایره‌ای به قطر DD′ است. پس برای رسم مثلث ABC، زاویه‌ای مساوی $\hat{A}$ در دایرهٔ به شعاع R رسم می‌کنیم. وتر نظیر این زاویه را BC می‌نامیم. روی BC و در امتداد آن دو نقطهٔ D و D′ را طوری پیدا می‌کنیم که پاره‌خط BC را به نسبت $\frac{b}{c} = k$ تقسیم کنند. به قطر DD′ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ به شعاع R را در نقطهٔ

A قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم.

۷.۷.۲.۳.۴.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، مجموع مربعهای دو ضلع، زاویه

۴۰۱. مسأله را حل شده و مثلث ABC محاط در دایرهٔ به شعاع R را جواب مسأله می‌گیریم. میانهٔ AM را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که:

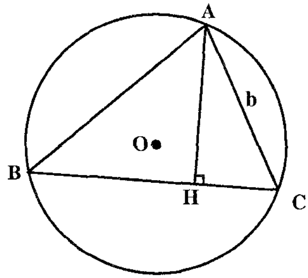


$$b^2+c^2=2m_a^2+\frac{a^2}{2} \qquad (1)$$

چون اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ در دایرهٔ به شعاع R معلوم است، پس طول وتر $BC=a$ معلوم می‌باشد، از طرفی $b^2+c^2=k^2$ مقدار معلومی است. پس از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود که $AM=m_a$ طول معلومی دارد. بنابراین برای رسم مثلث ABC، دایره‌ای به شعاع R رسم می‌کنیم. زاویه‌ای محاطی به اندازهٔ زاویهٔ A رسم می‌کنیم. وتر این زاویه را ضلع $BC=a$ از مثلث ABC می‌گیریم. به مرکز M وسط BC و به شعاع $m_a=\frac{1}{2}\sqrt{2k^2-a^2}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ به شعاع R (بخش کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}$) را در نقطهٔ A، رأس سوم مثلث ABC قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC، رسم می‌شود.

۸.۲.۳.۴.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، ضلع، رابطهٔ متری

۴۰۲. مسأله را حل شده و مثلث ABC محاط در دایرهٔ به شعاع R را جواب مسأله می‌گیریم. می‌دانیم که $bc=2R.h_a$ است. از آن‌جا $\frac{c}{h_a}=\frac{2R}{b}=k'$.



از طرفی بنا به فرض $k=\frac{a}{h_a}$ نیز معلوم است، پس $\frac{a}{h_a}:\frac{c}{h_a}=\frac{a}{c}=\frac{k}{k'}$ مقدار معلومی است. بنابراین پای نیمسازهای زاویه‌های درونی و برونی B روی ضلع AC مشخص است. پس برای رسم مثلث ABC، دایرهٔ به شعاع R را رسم می‌کنیم، وتر AC به طول b را در آن رسم می‌کنیم، سپس دو نقطهٔ D و D' را

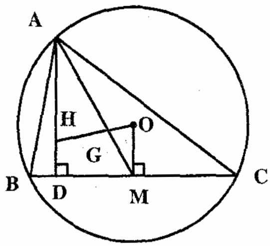
روی AC و در امتداد آن طوری تعیین می‌کنیم که :

$$\frac{DC}{DA} = \frac{D'C}{D'A} = \frac{a}{c} = \frac{k}{k'}$$

باشد، به قطر DD' دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ به شعاع R را در رأس B قطع کند. از B به A و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۱.۴.۳.۲.۹. شعاع دایرهٔ محیطی، میانه، پاره‌خط

۴۰۳. مثلث ABC را که در دایرهٔ به شعاع R و مرکز O محاط است، جواب مسأله می‌گیریم.



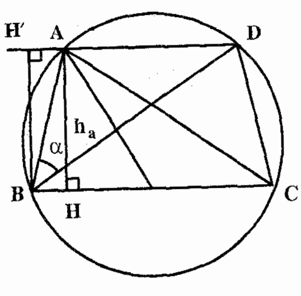
میانهٔ AM و ارتفاع AD را رسم می‌کنیم. H را مرکز ارتفاعی مثلث می‌گیریم. می‌دانیم که $OM = \frac{۱}{۲} AH$ است، پس OM یعنی فاصلهٔ مرکز دایره از وتر BC، طول معلومی دارد. بنابراین برای رسم مثلث ABC چنین عمل می‌کنیم :

دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R می‌زنیم. سپس دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $OM = \frac{AH}{۲}$ رسم می‌نماییم. وتری مماس بر دایرهٔ اخیر رسم می‌کنیم. این وتر، ضلع BC از مثلث ABC است. به مرکز نقطهٔ M و به شعاع $AM = m_a$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ به شعاع R را در نقطهٔ A رأس سوم مثلث قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم تا مثلث ABC رسم شود.

۱.۴.۳.۲.۱۰. شعاع دایرهٔ محیطی؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛ زاویه

۱.۴.۳.۲.۱۰.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، ارتفاع، زاویه

۱.۴.۳.۲.۱۰.۱.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، یک ارتفاع، تفاضل دو زاویه

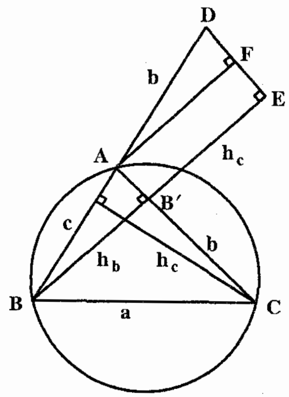


۴۰۴. مسأله را حل شده و مثلث ABC محاط در دایرهٔ به شعاع R را جواب مسأله می‌گیریم. از رأس A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ D قطع

کند. از D به A و C وصل می‌کنیم. چهارضلعی ABCD ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. ارتفاع AH از مثلث ABC را که ارتفاع ذوزنقه نیز می‌باشد، رسم می‌کنیم. زاویهٔ $A\hat{B}D = \hat{B} - \hat{C} = \alpha$ مقدار معلومی است. بنابراین از مثلث ABD اندازهٔ ضلع AD، زاویهٔ $A\hat{B}D = \alpha$ و ارتفاع $BH' = AH = h_a$ معلوم است. بنابراین می‌توان آن را رسم کرد. با رسم این مثلث، مثلث ABC بسادگی رسم می‌شود.

۱.۴.۳.۲.۱۰.۱.۲. شعاع دایرهٔ محیطی، مجموع دو ارتفاع، زاویه

۴۰۵. مسأله را حل شده و مثلث ABC، محاط در دایرهٔ به شعاع R را جواب مسأله می‌گیریم.

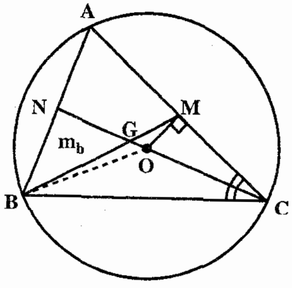


با معلوم بودن اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$، طول ضلع BC از مثلث ABC نیز مشخص است. از آن‌جا با معلوم بودن a، $h_b + h_c$ و $\hat{A}$ مثلث ABC را می‌توان رسم کرد (در مسأله‌های قبل روش این ترسیم را دیده‌ایم و شکل نیز این مطلب را نشان می‌دهد).

۱.۴.۳.۲.۱۰.۲. شعاع دایرهٔ محیطی، میانه، زاویه

۱.۴.۳.۲.۱۰.۲.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، یک میانه، یک زاویه

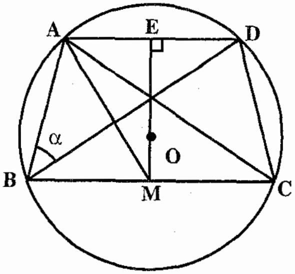
۴۰۶. مسأله را حل شده و مثلث ABC، محاط در دایرهٔ به شعاع R را جواب مسأله می‌گیریم.



میانهٔ BM را رسم می‌کنیم. چون اندازهٔ زاویهٔ $\hat{C}$ از مثلث ABC معلوم است، پس طول ضلع $AB = c$ و همچنین اندازهٔ میانهٔ رأس C یعنی m_c، مقدار معلومی است. بنابراین اگر G نقطهٔ برخورد میانه‌ها باشد، مثلث GBN با معلومهای $GB = \frac{۲}{۳} m_b$ و $GN = \frac{۱}{۳} m_c$ و $BN = \frac{c}{۲}$ قابل رسم است. با رسم این مثلث، مثلث ABC بسادگی رسم می‌شود.

۱.۴.۳.۲.۱۰.۲.۲. شعاع دایرهٔ محیطی، یک میانه، تفاضل دو زاویه

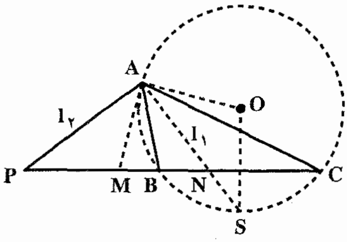
۴۰۷. مثلث ABC محاط در دایرهٔ به شعاع R و مرکز O را جواب مسأله می‌گیریم. میانهٔ AM را رسم می‌کنیم و از A خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ D قطع کند. چهارضلعی ABCD ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین است. بنابراین MO عمودمنصف BC از نقطهٔ E وسط AD می‌گذرد و بر آن عمود است، یعنی OE عمودمنصف AD است. چون زاویهٔ $A\hat{B}D = \alpha$ در دایرهٔ به شعاع R معلوم است، پس اندازهٔ وتر آن یعنی AD طول معلومی دارد. از طرفی AM نیز در دست است، پس مثلث قائم‌الزاویهٔ AEM به‌حالت وتر و یک ضلع قابل رسم است. از رسم این مثلث اندازهٔ ME به‌دست می‌آید که چون OE معلوم است، پس اندازهٔ OM، یعنی فاصلهٔ وتر BC از مرکز دایره مشخص می‌شود. با معلوم بودن OM و میانهٔ AM، مثلث ABC بسادگی رسم می‌شود.



۱.۴.۳.۲.۱۰.۳. شعاع دایرهٔ محیطی، نیمساز، زاویه

۱.۴.۳.۲.۱۰.۳.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، دو نیمساز، زاویه

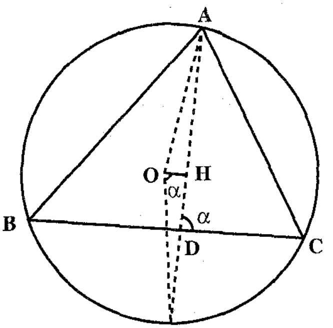
۴۰۸. اگر مثلث ABC، جواب مسأله باشد (شکل)، O مرکز دایرهٔ محیطی و $AN = l_1$ و $AP = l_2$ و AM میانهٔ مثلث ANP باشد، چون $AN \perp AP$ است، پس $AM = MP$ و $P\hat{A}M = A\hat{P}M$ است، نیمساز AN را امتداد می‌دهیم تا کمان $\overset{\frown}{BC}$ را در S قطع کند، پس $OS \perp BC$ و همچنین S وسط کمان $\overset{\frown}{BSC}$ می‌باشد. چون ضلعهای زاویه‌های OSA و APC برهم عمودند، پس $O\hat{A}S = O\hat{S}A = A\hat{P}M = P\hat{A}M$، یعنی $O\hat{A}M = ۹۰^\circ$ است، یعنی AM در نقطهٔ A بر دایرهٔ (O) مماس است.



اکنون مثلث قائم‌الزاویهٔ NAP را با معلوم بودن $AN = l_1$ و $AP = l_2$ رسم می‌کنیم، پس از رسم میانهٔ AM، از نقطهٔ A عمود $OA = R$ را بر AM اخراج می‌کنیم. چنانچه به مرکز O و به شعاع OA دایره‌ای بکشیم تا NP را در B و C قطع کند، مثلث ABC،

جواب مسأله است.

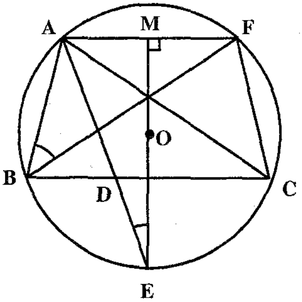
۴۰۹. فرض می‌کنیم که مسأله حل شده و O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث باشد (شکل). اگر S نقطهٔ تلاقی امتداد نیمساز با دایرهٔ محیطی فرض شود و OH ارتفاع مثلث AOS، واضح است که کمانهای $\overset{\frown}{BS}$ و $\overset{\frown}{CS}$ متساوی‌اند، از آن‌جا OS عمود بر BC می‌شود و $OA = OS = R$ از شکل دیده می‌شود.



$S\hat{O}H = A\hat{D}C = \alpha$ یا $A\hat{O}S = ۲\alpha$ است، پس اگر مثلث AOS را با مفروضات $AO = OS = R$ و $A\hat{O}S = ۲\alpha$ بسازیم و از AS طول $AD = l$ را جدا کنیم، پس از رسم زاویهٔ $A\hat{D}C = \alpha$ و دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R چنانچه نقطهٔ تقاطع این دایره را با DC نقطه‌های C و B بگیریم، مثلث رسم خواهد شد. چنانچه $AD = l < AS$ باشد، مسأله دارای جواب است.

۲.۳.۱۰.۲.۳.۴.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، نیمساز، تفاضل دو زاویه

۴۱۰. **راه اوّل.** مسأله را حل شده و مثلث ABC محاط در دایرهٔ به شعاع R را جواب مسأله می‌گیریم. نیمساز AD را رسم کرده، نقطهٔ برخورد آن با دایره را E می‌نامیم. E وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ است. از A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا دایره را در F قطع کند. از F به B و C وصل می‌کنیم.

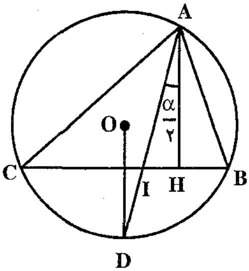


$A\hat{B}F = \hat{B} - \hat{C} = \alpha$ باشد، پس وتر AF طول معلومی دارد. بعلاوه عمودمنصف AF از نقطهٔ E وسط کمان BC می‌گذرد و زاویهٔ

$$A\hat{E}M = \frac{\overset{\frown}{AF}}{۲} = \frac{\hat{B} - \hat{C}}{۲} =$$ مقدار معلومی است

بنابراین مثلث قائم‌الزاویهٔ AME را با داشتن ضلع AM و زاویهٔ حادهٔ $\hat{E}$ می‌توان رسم کرد. از رسم این مثلث طول پاره‌خط AE به‌دست می‌آید و از آن‌جا مثلث ABC را می‌توان رسم کرد.

راه دوم. اگر ABC، مثلث خواسته شده باشد، زاویهٔ بین نیمساز و ارتفاع وارد از یک رأس مساوی با نصف تفاضل دو زاویهٔ دیگر است، یعنی :

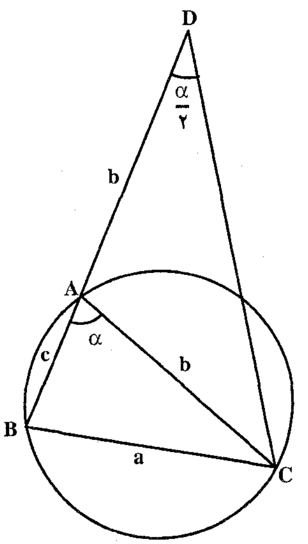


$H\hat{A}I = \frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲} = \frac{\alpha}{۲}$. نقطهٔ D وسط کمان BC می‌باشد و $O\hat{D}I = H\hat{A}I$ ، (O مرکز دایره و AH ارتفاع وAI نیمساز است). بنابراین راه حل زیر به‌دست می‌آید :

دایره‌ای به شعاع R رسم کرده و یک شعاع اختیاری مانند OD می‌کشیم بر ضلع OD زاویهٔ $O\hat{D}A = \frac{\alpha}{۲}$ را طرح می‌کنیم. محل تلاقی این ضلع با دایره، رأس A می‌باشد. طول $AI = d$ را از نقطهٔ A بر AD نقل کرده و از نقطهٔ I عمودی بر OD فرود می‌آوریم، امتداد این عمود دایره را در دو نقطهٔ B و C قطع کند، ABC، مثلث خواسته شده است (شکل).

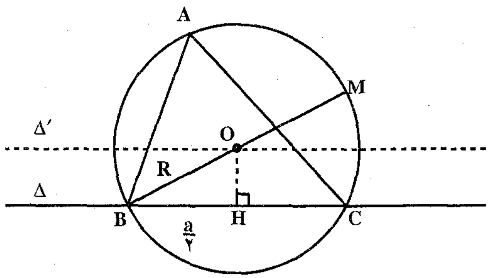
۱۱.۲.۳.۴.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، زاویه، محیط

۴۱۱. مسأله را حل شده و مثلث ABC، محاط در دایرهٔ به شعاع R را جواب مسأله می‌گیریم. چون زاویهٔ $\hat{A}$ معلوم است، پس اندازهٔ ضلع $BC = a$ مقدار معلومی می‌باشد. از طرفی محیط مثلث یعنی ۲p را داریم. در نتیجه $b+c$ مقدار معلومی است. با داشتن a، $b+c$ و $\hat{A}$ مثلث ABC بسادگی قابل رسم است (شکل).



۱۲.۲.۳.۴.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، نقطه، ضلع، خط

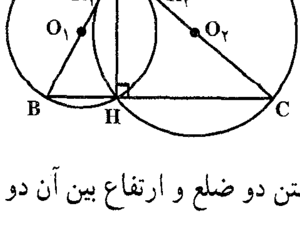
۴۱۲. مسأله را حل شده و مثلث ABC، محاط در دایرهٔ به شعاع R را جواب مسأله و نقطهٔ ثابت روی دایره را M و نقطهٔ ثابت روی ضلع AB را N می‌نامیم. با معلوم بودن R، شعاع دایرهٔ محیطی، و طول ضلع $BC = a$، فاصلهٔ O مرکز دایره از خط Δ که ضلع BC روی آن است، O معلوم می‌باشد، بنابراین یک مکان هندسی نقطهٔ O خط Δ'



موازی Δ و به فاصلهٔ $OH = \sqrt{R^2 - \frac{a^2}{4}}$ از آن است. از طرفی M نقطهٔ ثابت داده شده از دایرهٔ محیطی مثلث است. به مرکز M و به شعاع R دایره‌ای می‌زنیم تا خط Δ'، موازی Δ را در O قطع کند. دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R، یعنی دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دایره با خط Δ، دو رأس B و C است. از B به N نقطهٔ ثابت واقع بر ضلع AB وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ (O, R) را در A قطع کند. از A به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC، مثلث خواسته شده است.

۱۳.۲.۳.۴.۱. شعاع دایرهٔ محیطی مثلثهای دیگر، ارتفاع

۴۱۳. مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. دایرهٔ محیطی مثلثهای ABH و ACH دایره‌هایی به قطرهای AB و AC می‌باشند. بنابراین با معلوم بودن اندازهٔ شعاعهای دایره‌های محیطی این دو مثلث درواقع اندازهٔ ضلعهای AB و AC معلومند $(AC = 2R_2\ ,\ AB = 2R_1)$ و چون $AH = h_a$ نیز معلوم است، پس مثلث ABC را با داشتن دو ضلع و ارتفاع بین آن دو ضلع بسادگی می‌توان رسم کرد.



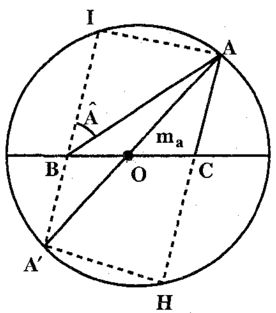
۱۴.۲.۳.۴.۱. شعاعهای دایره‌های محیطی مثلثهای دیگر، میانه

۴۱۴. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. میانهٔ AM را رسم می‌کنیم. شعاعهای دایره‌های محیطی مثلثهای AMB و AMC را بترتیب R_1 و R_2 می‌نامیم. BMC قاطعی است که از نقطهٔ M می‌گذرد و در این دو دایره دو وتر به طولهای مساوی $MB = MC$ ایجاد می‌کند. بنابراین...

۱۵.۲.۳.۴.۱. مسأله‌های ترکیبی

۴۱۵. اوّل. چون دایره‌ای به مرکز O و به شعاع m_a رسم کنیم و مثلاً مثلث ABC در درون دایره در دست باشد. به‌علت تقارن نسبت به مرکز O، بدیهی است که $CH = BI$ می‌باشد و بنابراین زاویهٔ AIB قائمه می‌باشد (شکل $AIA'H$ مستطیل است)، و چون $BI = CH$، پس به‌علت توازی BI و AC، بدیهی است که زاویهٔ $I\hat{B}A$ برابر زاویهٔ $\hat{A}$ است.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABI با ملاحظهٔ این که $AC \times CH$ (قوت نقطهٔ C نسبت به دایره) برابر $BI \times BA'$ می‌باشد (نقطه‌های B و C به‌علت تقارن نسبت به O دارای یک قوت نسبت به دایرهٔ O می‌باشند)، در مثلث ABA' ضلع $AA' = ۲m_c$ و حاصلضرب ضلعهای $BA \times BA'$ (چون $BA' = AC = b$) و زاویهٔ $A\hat{B}A'$ (مکمل زاویهٔ A از مثلث ABC) در دست می‌باشد. ولی چون $BI = BA\cos\hat{A}$ می‌باشد (البته با



ترسیم این امر با یک تجانس، تقریب همواره میسر است)، پس $BA' \times BI$ معلوم می‌شود (کافی است که مثلث قائم‌الزاویه به وتر $k^۲$ و زاویهٔ مجاور A رسم کرد، این مقدار را به دست می‌دهد). قوت نقطهٔ B که معلوم باشد، تعیین آن دیگر اشکالی ندارد، یعنی درواقع ضلع a معلوم می‌شود، چون OB نصف ضلع a می‌باشد، ولی

$$BA' \times BI = OB^۲ - m_a^۲$$

پس

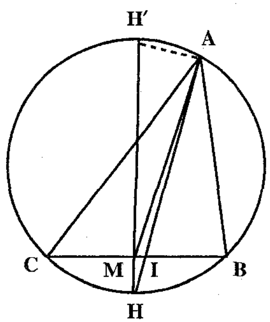
$$a^۲ = ۴m_a^۲ - ۴k^۲\cos\hat{A}\,,\ \ OB^۲ = m_a^۲ - k^۲\cos\hat{A}$$

و مسأله به ترسیم مثلثی با ضلع a و میانهٔ m_a و زاویهٔ A منجر می‌گردد که رسم آن معلوم

است. کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}$ را بر روی ضلع a رسم کرده و به مرکز وسط ضلع a و شعاع m_c دایره‌ای رسم می‌کنیم که کمان درخور ذکر شده را قطع کند، مثلث به‌دست می‌آید.

دوم. ضلع a در دست است. این درواقع همان مسألهٔ قبل است؛ زیرا اگر به شکل قبل مراجعه شود، ملاحظه می‌شود که $BI \times BA' = OB^2 - m_c^2$، در دست است. چون OB نصف ضلع معلوم است، قوت نقطهٔ B به دست می‌آید. از طرف دیگر $BA \times BA' = k^2$ پس از تقسیم این دو رابطه به یکدیگر معلوم می‌شود که $\frac{BI}{BA} = \frac{OB^2 - m_c^2}{k^2}$ معلوم می‌باشد. مثلث قائم‌الزاویهٔ BIA قابل ترسیم است؛ زیرا چون نسبت دو ضلع (یا یک ضلع به‌وتر) در مثلث قائم‌الزاویه معلوم باشد، شکل مثلث (با یک تقریب تجانس) معلوم است، پس زاویه‌های مثلث معلوم می‌شوند و مسأله به مسألهٔ قبل منجر می‌شود (معلوم بودن ضلع a و زاویهٔ $\hat{A}$ و میانهٔ m_a).

سوم. نیمساز V_α در دست است. فرض کنیم که دایرهٔ محیطی مثلث رسم شده باشد.

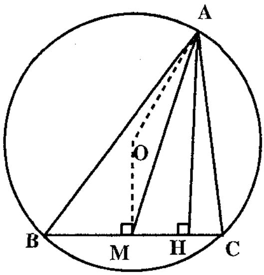


با رسم چهارم قطعهٔ تناسب $bc = AI.AH$ (که در آن AI نیمساز و H میانهٔ قوس BC می‌باشد)، می‌توان AH را به‌دست آورد، $bc = V_\alpha.AH$. اکنون درواقع ارتفاع h_a مثلث به‌دست آمده است و با رسم تناسب $bc = 2h_aR$، قطر دایرهٔ محیطی تعیین می‌شود. در ترسیم حاجتی به رسم تناسب نیست. نیمدایرهٔ به قطر IH رسم می‌کنیم و به مرکز A و به شعاع میانه آن را در نقطهٔ M قطع می‌کنیم. نقطهٔ M وسط ضلع a به‌دست می‌آید. اکنون اگر از نقطهٔ A عمود AH اخراج کنیم تا امتداد MH را قطع کند، HH′ قطر دایرهٔ محیطی است. رسم دایرهٔ محیطی نقطه‌های B و C، پس مثلث ABC را به‌دست می‌دهد.

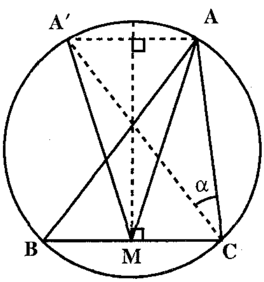
چهارم. ارتفاع h_a در دست است. با رسم تناسب $k^2 = bc = 2h_aR$، شعاع دایرهٔ محیطی تعیین می‌شود، پس مثلث AMH را به وتر برابر AM میانهٔ m_a و ضلع $AH = h_a$ رسم می‌کنیم. عمودمنصف MO ضلع BC در دست است (از نقطهٔ M عمودی بر MH

اخراج می‌کنیم) به مرکز A و به شعاع R دایرهٔ محیطی آن را قطع می‌کنیم مرکز دایرهٔ محیطی به دست می‌آید. رسم دایرهٔ محیطی مثلث را تکمیل می‌کند و به‌دست می‌دهد (شکل).

پنجم. شعاع دایرهٔ محیطی در دست است. عکس مسألهٔ قبل است. ارتفاع را می‌شود تعیین کرد و مسأله معادل مسأله قبل است. رسم آن اشکالی ندارد.



ششم. اختلاف زاویه‌های $\hat{B}-\hat{C}=\alpha$ در دست است. چون دایرهٔ محیطی را رسم کنیم و A' قرینهٔ A نسبت به عمودمنصف ضلع a باشد، بدیهی است که $A'C=AB$ خواهد بود و زاویهٔ $A'\hat{C}A=\alpha$ می‌شود. در مثلث $A'CA$ چون حاصلضرب دو ضلع AC و $A'C$ (برابر $bc=k^2$) معلوم است و زاویهٔ بین این دو ضلع برابر α در دست است، سطح این مثلث معلوم است (رسم یک تناسب آن را به‌دست می‌دهد) و چون سطح مثلث MAA' (M پایهٔ میانه بر ضلع BC یعنی وسط ضلع a است) معادل سطح مثلث ACA' می‌باشد، پس رسم این مثلث که متساوی‌الساقین و با ساقهای معلوم m_c می‌باشد، اشکالی ندارد، چون سطح آن معلوم است. رسم این مثلث مسأله را حل می‌کند، چون پس از رسم مثلث قطعهٔ AA' به‌دست می‌آید.

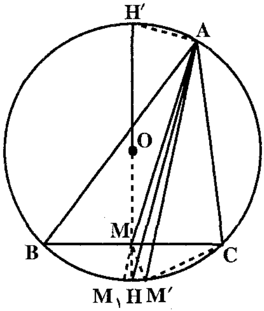


اگر کمان درخور زاویهٔ α را بر روی AA' رسم کنیم، نقطه‌های تقاطع آن با دایرهٔ محیطی، نقطه‌های B و C خواهند بود و مثلث ABC به‌دست می‌آید.

هفتم. اختلاف زاویه‌های میانه با دو ضلع مجاور در دست است. چون زاویهٔ $M'AC$ را برابر زاویهٔ BAM رسم کنیم، خط AM' دایرهٔ محیطی را در نقطهٔ M' قطع می‌کند و زاویهٔ $M\hat{A}M'=\alpha$ (اختلاف زاویه‌های میانه با دو ضلع مجاور) خواهد بود که معلوم است، پس رسم امتداد نیمساز زاویهٔ $\hat{A}$ اشکالی ندارد و همین نیمساز زاویهٔ $M\hat{A}M'=\alpha$ می‌باشد. نقطهٔ تقاطع این نیمساز با دایرهٔ محیطی یعنی نقطهٔ H بر روی عمودمنصف MH ضلع BC قرار دارد.

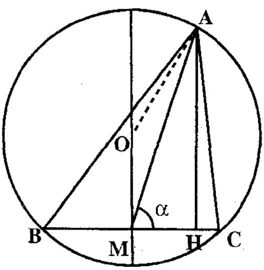
اکنون ملاحظه می‌کنیم که مثلث $AM'C$ با مثلث AMB متشابه است؛ زیرا زاویهٔ $M\hat{A}C = B\hat{A}M$ (به‌عمل ترسیم) و زاویهٔ $\hat{B} = A\hat{M}C$؛ زیرا کمان مقابل هر دو زاویه قوس AC می‌باشد. از تشابه این دو مثلث لازم می‌آید که: $\frac{AC}{AM} = \frac{AM'}{AB}$ باشد، یعنی:

$AM \times AM' = AC \times AB = bc = k^2$ پس AM'



به‌علت معلوم بودن میانهٔ AM یعنی m_a معلوم است (ترسیم چهارم جزء تناسب) بنابراین مثلث AMM' با دو ضلع $AM = m_a$ و $AM' = \frac{k^2}{m_a}$ و زاویهٔ $M\hat{A}M' = \alpha$ معلوم و قابل رسم است. چون نیمساز α همان نیمساز A می‌باشد، پس نقطهٔ تلاقی آن با دایرهٔ محیطی یعنی نقطهٔ H، وسط قوس BC می‌باشد و اگر AM را امتداد دهیم تا دایرهٔ محیطی را قطع کند، نقطهٔ M_1 قرینهٔ M' نسبت به عمودمنصف ضلع BC خواهد بود (چون نقطهٔ H ناچار وسط قوس M_1M' نیز می‌باشد) پس MH امتداد نیمساز خارج زاویهٔ M مثلث AMM' می‌باشد و امتداد نیمساز داخل زاویهٔ AMM' همان امتداد ضلع BC می‌باشد، از طرف دیگر اگر بر نیمساز AH از نقطهٔ A عمودی اخراج کنیم تا امتداد MH را در نقطهٔ H' قطع کند، HH' قطر دایرهٔ محیطی خواهد بود. رسم این دایره مثلث ABC را تکمیل می‌کند و به‌دست می‌دهد.

هشتم. زاویهٔ α میانهٔ m_a با ضلع a معلوم است. در حقیقت ارتفاع در دست است، زیرا رسم مثلث قائم‌الزاویهٔ AMH با وتر $AM = m_a$ و زاویهٔ $A\hat{M}H = \alpha$ ارتفاع را به‌دست می‌دهد. رسم چهارم جزء تناسب $bc = k^2 = 2Rh_a$، شعاع دایرهٔ محیطی را معلوم می‌کند، پس با تقاطع دایرهٔ به مرکز A و به شعاع R با امتداد عمودمنصف ضلع a، که همان عمودی است که از



M بر MH اخراج می‌شود، مرکز دایرهٔ محیطی را به‌دست می‌دهد. رسم دایرهٔ محیطی مثلث ABC را معلوم می‌کند.

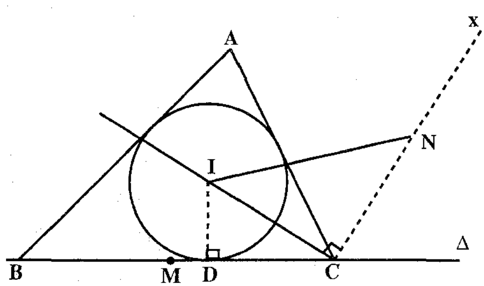
۱.۴.۴. رسم مثلث با معلوم بودن دایره‌های محاطی یا شعاعهای آنها و داده‌های دیگر

۱.۴.۴.۱. رسم مثلث با معلوم بودن دایرهٔ محاطی درونی یا شعاع آن و داده‌های دیگر

۱.۴.۴.۱.۱. رسم مثلث با معلوم‌بودن دایرهٔ محاطی درونی و داده‌های دیگر

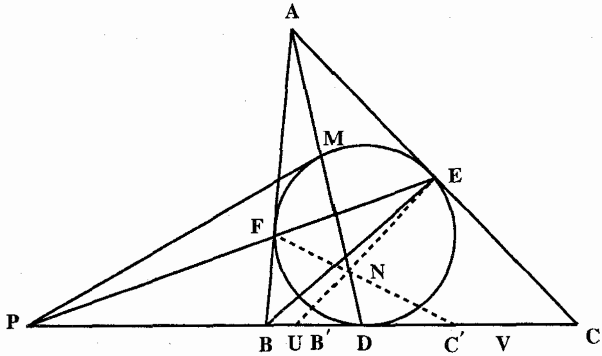
۱.۴.۴.۱.۱.۱. دایرهٔ محاطی درونی، نقطه

۴۱۶. مسأله را حل شده و مثلث ABC محیط بر دایرهٔ (I , r) را جواب مسأله می‌گیریم. نقطهٔ M را وسط قاعدهٔ BC و N را نقطهٔ ثابت واقع بر نیمساز زاویهٔ خارجی C در نظر می‌گیریم. از N به I وصل می‌کنیم. مثلث NCI در رأس C قائم‌الزاویه است. بنابراین برای رسم مثلث ABC چنین عمل می‌کنیم : از نقطهٔ معلوم M خط Δ را بر دایرهٔ (I , r) مماس رسم می‌کنیم. از N به I وصل می‌کنیم و به قطر IN دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خط Δ را در نقطهٔ C قطع کند. به اندازهٔ MC در طرف دیگر نقطهٔ M پاره‌خط MB = MC را جدا می‌کنیم. از نقطه‌های B و C دو مماس بر دایرهٔ (I , r) رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ A یکدیگر را قطع کنند. مثلث ABC جواب مسأله است.



۴۱۷. نقطهٔ اختیاری D را به عنوان نقطهٔ تماس ضلع BC با دایرهٔ محاطی داخلی در نظر می‌گیریم. از آن جا راستای ضلع BC و خط سوایی DNA مشخص می‌شود. امّا باید سه رأس

مثلث را مشخص کرد. برای این کار از ویژگی قطب و قطبی نسبت به دایره استفاده می‌کنیم. بدین ترتیب که قطب خط DNA نسبت به دایره را به دست می‌آوریم و P می‌نامیم. حال، مسأله، به مسأله زیر تبدیل می‌شود.

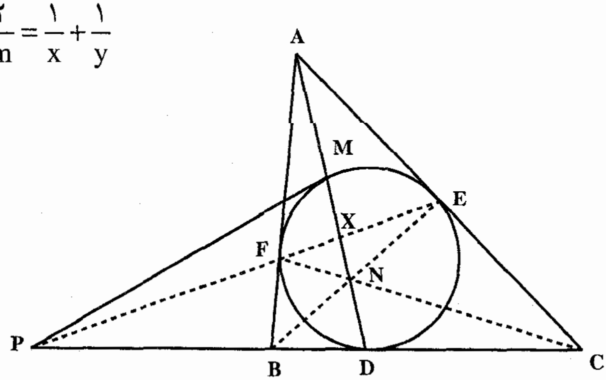


مثلثی رسم کنید که از آن دایرهٔ محاطی درونی، یکی از نقطه‌های تماس ضلع مثلث با آن و نقطهٔ ژرگون N داده شده است. حل این مسأله را در شمارهٔ ۴۱۸ آورده‌ایم.

۴۱۸. **راه جبری.** نقطه‌های D و N، خط DM و از آن جا قطب آن یعنی نقطهٔ P را مشخص می‌کنند. بنابراین مسأله منجر می‌شود به این که قاطع PFXE را چنان رسم کنیم که قطرهایش یعنی BE و CF در نقطهٔ N یکدیگر را قطع کنند. به این معنی که DX به وسیلهٔ N و A به نسبت توافقی تقسیم شود. همچنین پاره‌خط DM به وسیلهٔ X و A به نسبت توافقی تقسیم شود.

فرض می‌کنیم $DM = m$، $DN = n$، $DX = x$ و $DA = y$ باشد. رابطه‌های $(DXNA) = -1$ و $(DMXA) = -1$ را می‌توان به صورتهای زیر نوشت:

$$\frac{2}{x} = \frac{1}{n} + \frac{1}{y} \quad \text{و} \quad \frac{2}{m} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$$

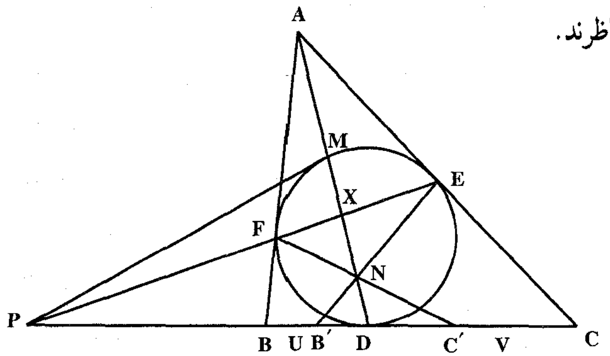


از آن‌جا نتیجه می‌شود :

$$y=\frac{3mn}{4n-m} \text{ و } x=\frac{3mn}{2n+m}$$

اکنون می‌توان نقطهٔ X را با استفاده از تناسب $\frac{x}{m}=\frac{3n}{2n+m}$ تعیین نمود.

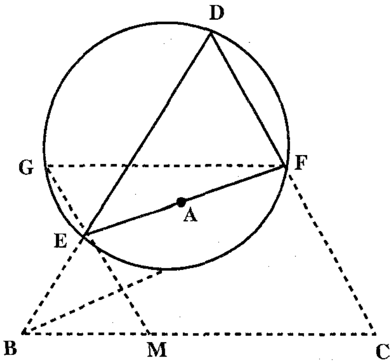
راه هندسی. نقطه‌های D ، N، M و P را داریم. از نقطهٔ P که قطب خط DNA نسبت به دایره است، قاطع PFXE را رسم می‌کنیم. مماسهای در نقطه‌های E و F بر دایره، مماس ثابت PD را در نقطه‌های B و C قطع می‌کند. EN و FN را رسم می‌کنیم که PD را در ′B و ′C قطع می‌کنند. با توجه به چهار ضلعی AENF نقطه‌های B، ′B و C، ′C در یک Involution متناظر یکدیگرند که در آن، نقطه‌های ثابت P و D نیز دو نقطهٔ متناظرند.



باید قاطع PX را چنان اختیار کنیم که نقطه‌های B و ′B ، همچنین C و ′C بر هم منطبق شوند. مسأله بر می‌گردد به یافتن نقطه‌های مضاعف U و V از Involution مشخص شده به وسیلهٔ سه زوج نقطه‌های متناظر B، ′B ؛ C، ′C ؛ و P، D. یعنی نقطه‌هایی که ′BB و ′CC را به نسبت توافقی تقسیم می‌کنند و همچنین پاره‌خط PD را. کاری بیشتر از آن نخواهد ماند که مماسهایی بر دایره در نقطه‌های U و V رسم شود. از آن جا مثلثی خواهیم داشت که دایرهٔ داده شده دایرهٔ محاطی درونی آن است یا دایرهٔ محاطی خارجی آن.

۱.۴.۴.۱.۱.۲. دایرهٔ محاطی درونی، خط

۴۱۹. مسأله را حل شده و مثلث DEF را جواب مسأله می‌گیریم. کافی است که یکی از رأسهای مثلث را مشخص کنیم. برای یافتن رابطه‌های بین داده‌ها و مجهولهای مسأله،

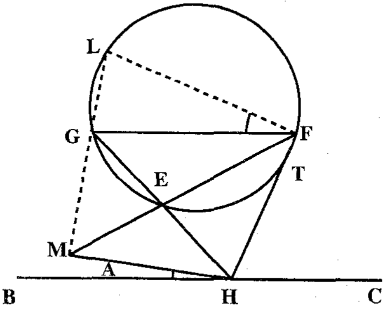


FG را موازی BC رسم می‌کنیم و GEH را می‌کشیم.
زاویه‌های محاطی D و G با هم برابرند. از آن‌جا، $E\hat{H}B = \hat{D}$ ؛ مثلثهای BHE و BDC متشابه‌اند، زیرا در زاویهٔ B مشترکند و $\hat{H} = \hat{D}$ است. در نتیجه داریم :

$$\frac{BH}{BD} = \frac{BE}{BC} \Rightarrow BH = \frac{BD.BE}{BC}$$

پاره‌خطهای BD و BE معلوم نیستند امّا داریم : $BD.BE = BT^{2}$. پس خواهیم داشت :

$BH = \frac{BT^{2}}{BC}$ پس نقطهٔ H مشخص است و در صورتی مسأله حل می‌شود که نقطه‌ای مانند E پیدا کنیم، به قسمی که اگر به A و H وصل کنیم، وتر GF موازی BC شود.
از آن جا به مسأله زیر می‌رسیم :



مسأله. دو نقطهٔ A، H و یک دایره و یک خط راست BC داده شده است. روی این دایره نقطه‌ای مانند E تعیین کنید چنان که اگر آن را به دو نقطهٔ A و H وصل کنیم، EA و EH دایره را در دو نقطهٔ F و G قطع کنند به قسمی که وتر FG موازی خط BC باشد.

حل. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و وتر FG موازی BC باشد. FL را موازی AH رسم می‌کنیم و سپس خط LGM را رسم می‌کنیم تا وضع نقطهٔ M مشخص گردد.
مثلثهای MGH و EAH متشابه‌اند. زیرا در زاویهٔ H مشترکند و $\hat{M} = \hat{E}$ زیرا هر دو مکمل زاویهٔ $\hat{L}$ هستند. بنابراین داریم :

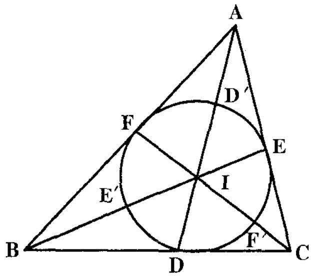
$$\frac{HM}{HE} = \frac{HG}{HA}$$

که از آن نتیجه می‌شود :

$$HM = \frac{HE.HG}{AH} = \frac{HT^{2}}{AH}$$

همچنین جای نقطهٔ M مشخص است. بعلاوه $L\hat{F}G = A\hat{H}B$ است. از آن‌جا کافی است از نقطهٔ M قاطع MGL را رسم کنیم به قسمی که زاویهٔ متناظر LFG با زاویهٔ تشکیل شده بین خطهای داده شدهٔ AH و BC، مساوی باشد.

۴۲۰. مسأله را حل شده، مثلث ABC محیط بر دایرهٔ (I) را جواب مسأله فرض می‌کنیم.

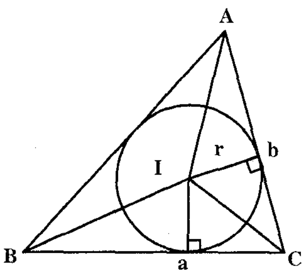


نیمسازهای زاویه‌های درونی A، B و C را رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آن با دایرهٔ محاطی درونی را D، ′D، E، ′E، F و ′F می‌نامیم. با معلوم بودن سه نقطه از این شش نقطه، دایرهٔ محاطی درونی مثلث را می‌توان رسم کرد. پس از رسم این دایره، نقطه‌های معلوم را به مرکز دایره وصل می‌کنیم، سه خط همرس ایجاد می‌شود که نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث می‌باشند. با معلوم بودن این سه خط نیمساز و دایرهٔ محاطی درونی، مثلث ABC رسم می‌شود.

۱.۴.۴.۱.۲. رسم مثلث با معلوم بودن شعاع دایرهٔ محاطی درونی، و داده‌های دیگر

۱.۴.۴.۱.۲.۱. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ضلع

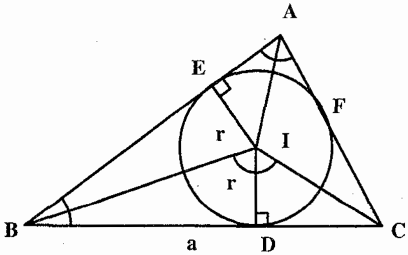
۱.۴.۴.۱.۲.۱.۱. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، دو ضلع



۴۲۱. مسأله را حل شده و مثلث ABC محیط بر دایرهٔ (I,r) را جواب مسأله می‌گیریم و دو ضلع معلوم را a و b اختیار می‌کنیم. از مثلثهای BIC و AIC هر کدام اندازهٔ یک ضلع و ارتفاع وارد بر آنها معلوم است. امّا...

۱.۴.۴.۱.۲.۱.۲. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر

۴۲۲. مسأله را حل شده و مثلث ABC محیط بر دایرهٔ (I,r) را جواب مسأله می‌گیریم. نقطه‌های تماس ضلعهای BC و AB با دایره را D و E می‌نامیم. با معلوم بودن a و

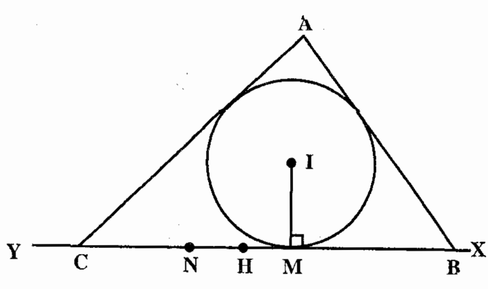


$b+c$، اندازهٔ محیط مثلث یعنی $2p = a+b+c$ معلوم است. بنابراین $p-a$ و از آن‌جا $AE = AF = p-a$ طول معین دارد. در نتیجه مثلث قائم‌الزاویهٔ AEI با معلوم بودن دو ضلع زاویهٔ قائمه ($AE = p-a$ و $EI = r$) قابل رسم است. از رسم این مثلث اندازهٔ زاویهٔ $E\hat{A}I = \frac{\hat{A}}{2}$ به دست می‌آید. امّا $B\hat{I}C = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ است. پس این زاویه نیز اندازه‌اش معین می‌باشد. بنابراین مثلث BIC با معلوم بودن اندازهٔ ضلع $BC = a$، ارتفاع وارد بر آن $ID = r$ و زاویهٔ $B\hat{I}C = 90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ قابل رسم است. پس برای رسم مثلث ABC چنین عمل می‌کنیم:

پاره‌خط $BC = a$ را رسم می‌کنیم. کمان درخور زاویهٔ $90^\circ + \frac{\hat{A}}{2}$ روبه‌رو به پاره‌خط BC را رسم می‌نماییم. خطی موازی BC و به فاصلهٔ r از آن رسم می‌کنیم تا کمان درخور رسم شده را در نقطهٔ I قطع کند. I مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث ABC است. به مرکز I و به شعاع r دایرهٔ محاطی درونی مثلث را رسم می‌کنیم و از B و C دو خط مماس بر آن رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ A رأس سوم مثلث یکدیگر را قطع کنند. مثلث ABC جواب مسأله است.

۱.۴.۴.۱.۲.۱. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، یک ضلع، تفاضل دو ضلع دیگر

۴۲۳. به مرکز نقطهٔ دلخواه (I) و به شعاع r دایره‌ای رسم نموده و از نقطهٔ دلخواه M واقع بر



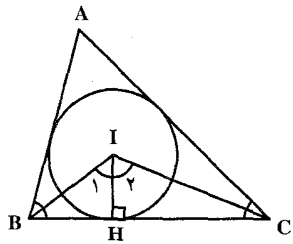
دایره، مماس XY بر آن رسم می‌نماییم، و بر آن نقطهٔ N را چنان تعیین می‌کنیم که $MN = b - c$ باشد. نقطهٔ H وسط MN وسط BC نیز می‌باشد. پس بر XY نقطه‌های B و C را در طرفین H چنان تعیین می‌کنیم که $HB = HC = \frac{a}{۲}$ باشد. مماسهای بر دایره (I) از نقطه‌های B و C یکدیگر را در A قطع می‌نمایند، ABC مثلث خواسته شده است.

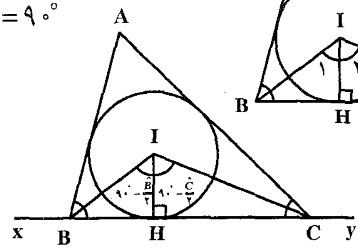
۱.۴.۴.۱.۲.۲. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، زاویه

۴۲۴. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم و مثلث ABC را جواب مسأله، زاویه‌های معلوم را $\hat{B}$ و $\hat{C}$ و مرکز دایره را I می‌نامیم. از I به B و C وصل می‌کنیم. داریم :

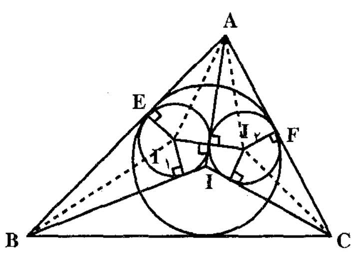
$$\hat{I}_۱ = ۹۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲} \quad و \quad \hat{I}_۲ = ۹۰^\circ - \frac{\hat{C}}{۲} \quad و$$

$$IH = r \quad و \quad \hat{H}_۱ = \hat{H}_۲ = ۹۰^\circ$$





بنابراین برای رسم این مثلث خطی مانند xy رسم می‌کنیم و از نقطهٔ H واقع بر آن، پاره‌خط HI را به اندازهٔ r بر آن عمود می‌کنیم. از I خطی چنان رسم می‌کنیم که با IH زاویهٔ $۹۰^\circ - \frac{\hat{B}}{۲}$ و در طرف دیگر خط دیگری رسم می‌کنیم که با IH زاویه‌ای برابر $۹۰^\circ - \frac{\hat{C}}{۲}$ تشکیل دهند. این دو خط، خط xy را در B و C قطع می‌کنند. از B و C دو مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا در A یکدیگر را قطع کنند. مثلث ABC جواب مسأله است.

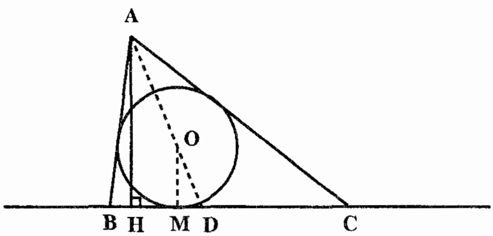


۴۲۵. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث ABC را I و مرکزهای دایره‌های محاطی درونی

دو مثلث AIB و AIC را بترتیب I_1 و I_2 می‌نامیم و از I_1 عمود I_1E را بر ضلع AB و از I_2 عمود I_2F را بر ضلع AC فرود می‌آوریم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AI_1E $(\hat{E}=90^\circ)$ و AI_2F $(\hat{F}=90^\circ)$ هرکدام، با معلوم بودن یک ضلع زاویهٔ قائمه $I_1E=r_1$ و $I_2F=r_2$ و $E\hat{A}I_1=F\hat{A}I_2=\frac{\hat{A}}{4}$ قابل رسم می‌باشند.

۱.۴.۴.۱.۲.۳. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ارتفاع، نیمساز

۴۲۶. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم.



اگر عمود OM را بر BC اخراج کنیم، در مثلث AHD، چون $OM \parallel AH$ است داریم که، $\frac{DO}{DA}=\frac{OM}{AH}$ و یا $\frac{DO}{DA}=\frac{r}{h_a}$،

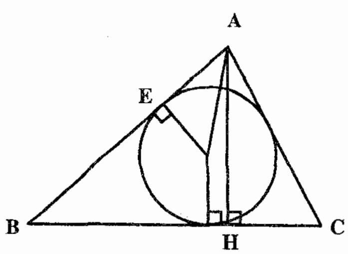
بنابراین O پاره‌خط AD را به نسبت $\frac{DO}{DA}$ قطع می‌کند. برای رسم مثلث، ابتدا مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH را با معلوم بودن AD و AH رسم می‌کنیم. سپس روی AD، نقطهٔ O را طوری پیدا می‌کنیم که: $\frac{OD}{DA}=\frac{r}{h_a}$.

پس از پیدا کردن O، دایره‌ای به مرکز O و شعاع r رسم می‌کنیم، آن‌گاه از A دو مماس بر آن رسم می‌کنیم، این دو مماس ادامهٔ DH را هر جا قطع کنند، نقطه‌های B و C است.

۱.۴.۴.۱.۲.۴. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ضلع، ارتفاع یا رابطهٔ بین ارتفاعها

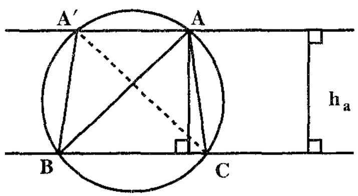
۱.۴.۴.۱.۲.۴.۱. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، یک ضلع، یک ارتفاع

۴۲۷. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله فرض می‌کنیم. شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث را r می‌نامیم. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. با معلوم بودن a و h_a اندازهٔ مساحت مثلث به دست می‌آید زیرا داریم $S=\frac{1}{2}a.h_a$

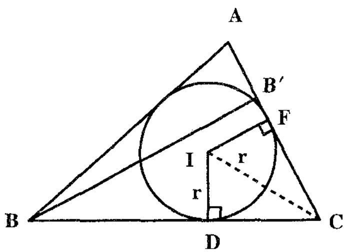


از طرفی $r = \frac{S}{P}$ است، بنابراین P و از آن جا ۲P محیط مثلث به دست می‌آید در نتیجه $p - a$ مشخص است. بنابراین اگر E نقطهٔ تماس ضلع AB با دایرهٔ محاطی باشد، $AE = p - a$ معلوم است و چون $EI = r$ نیز داده شده است، بنابراین مثلث قائم‌الزاویهٔ AEI قابل رسم است. از رسم این مثلث زاویهٔ $E\hat{A}I = \frac{\hat{A}}{۲}$ و از آن جا زاویهٔ $\hat{A}$ به دست می‌آید. با معلوم بودن a و h_a و $\hat{A}$ مثلث ABC به راحتی رسم می‌شود.

بدین ترتیب که پاره‌خط $BC = a$ را رسم می‌کنیم. سپس کمان در خور زاویهٔ $\hat{A}$ روبه‌رو به BC را رسم می‌کنیم. آن‌گاه خطی موازی BC رسم می‌کنیم که کمان درخور را در نقطهٔ A رأس سوم مثلث قطع کند از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC به دست می‌آید.



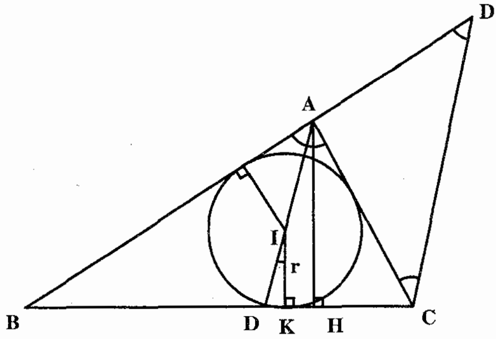
۴۲۸. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. ارتفاع BB′ را رسم می‌کنیم و مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث ABC را I می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ BB′C ($\hat{B'} = ۹۰^\circ$) با معلوم بودن وتر $BC = a$ وضلع $BB' = h_b$ قابل رسم است. بعلاوه نقطهٔ I به فاصلهٔ r از دو ضلع BC و B′C واقع است. بنابراین این نقطه را که روی نیمساز زاویهٔ C نیز هست، می‌توان تعیین کرد و به مرکز I و به شعاع r دایرهٔ محاطی درونی مثلث را رسم نمود. خط مماس رسم شده از رأس B بر این دایره امتداد CB′ را در رأس A قطع می‌کند.



۱.۴.۴.۱.۲.۴.۲. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، مجموع دو ضلع، یک ارتفاع

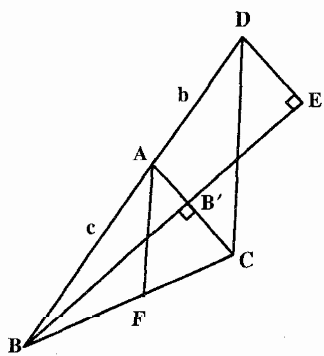
۴۳۰. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. ضلع AB را به اندازهٔ $AD = AC$ امتداد می‌دهیم و از D به C وصل می‌کنیم $DB = b + c$ است. ارتفاع AH را نیز رسم می‌کنیم. مثلث ADC متساوی‌الساقین و $A\hat{C}D = \hat{D} = \frac{\hat{A}}{۲}$ است. نقطهٔ

تماس دایرهٔ محاطی درونی با ضلع BC را K می‌نامیم و نیمساز AD را که از I مرکز دایرهٔ محاطی درونی می‌گذرد رسم می‌کنیم...



۱.۴.۴.۱.۲.۴.۳. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، مجموع دو ضلع، مجموع دو ارتفاع

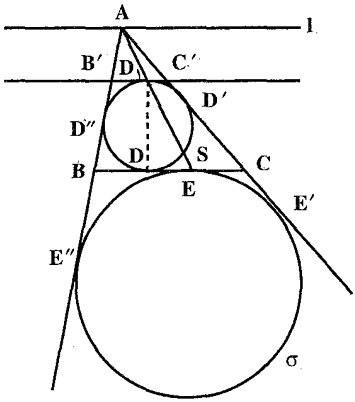
۴۳۱. $b+c$ و h_b+h_c زاویهٔ $\hat{A}$ را تعیین می‌کنند (شکل). زیرا مثلث قائم‌الزاویهٔ BDE که در آن $BD=b+c$ و $BE=h_b+h_c$ و $\hat{E}=۹۰^\circ$، به حالت وتر و یک ضلع قابل رسم است و زاویهٔ $\hat{D}$ از این مثلث مساوی زاویهٔ $\hat{A}$ از مثلث ABC است. با معلوم بودن r، $b+c$ و $\hat{A}=\alpha$ مثلث ABC قابل رسم است.



۱.۴.۴.۱.۲.۴.۴. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، تفاضل دو ضلع، یک ارتفاع

۴۳۲. الف. فرض می‌کنیم r شعاع دایرهٔ محاطی داخلی s در مثلث ABC، و ρ شعاع دایرهٔ محاطی بیرونی آن σ باشد (شکل). تجانس به مرکز A و نسبت r/ρ دایرهٔ σ را به s بدل می‌کند و خط BC مماس بر σ در E را به خط B′C′ مماس در D_1 بر s. چون D_1 از

E بر اثر یک تجانس به مرکز A به دست می‌آید، خط ED_1 از A می‌گذرد. چون دو خط مماس BC و $B'C'$ بر s با یکدیگر موازی‌اند، نقطه‌های تماس آنها D و D_1 با s باید دو سر یک قطر باشند، که حکم مسأله را ثابت می‌کند.



ب. فرض می‌کنیم ضلعهای BC، CA و AB از مثلث ABC بترتیب در نقطه‌های D، D' و D'' بر دایرهٔ محاطی داخلی s مماس باشند و نقطه‌های تماس دایرهٔ محاطی بیرونی σ با این ضلعها (یا امتدادشان) بترتیب نقطه‌های E، E' و E'' باشند (در این جا صحبت از دایرهٔ محاطی بیرونی مماس بر ضلع BC و امتداد دو ضلع دیگر است که اصطلاحاً دایرهٔ محاطی بیرونی روبه‌رو به زاویهٔ A می‌گوییم شکل). ضلعهای مثلث ABC را با $BC = a$، $CA = b$ و $AB = c$ نشان می‌دهیم. دو پاره‌خط مماس بر یک دایره، رسم شده از نقطه‌ای واقع در خارج آن، طولهای متساوی دارند. بنابراین:

$$CD + CD' = (a - BD) + (b - AD') = a - BD'' + b - AD''$$

$$= a + b - AB = a + b - c$$

چون $CD = CD'$ ، داریم:

$$CD = \frac{1}{2}(a + b - c)$$

به همین ترتیب داریم:

$$AE' + AE'' = (b + CE') + (c + EE'') = b + CE + c + BE$$

$$= b + c + BC = a + b + c$$

و چون $AE' = AE''$

$$AE' = \frac{1}{2}(a + b + c)$$

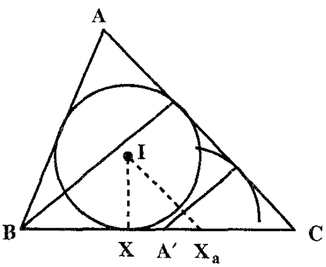
همچنین

$$CE = CE' = AE' - AC = \frac{۱}{۲}(a+b+c) - b = \frac{۱}{۲}(a-b+c)$$

از این جا نتیجه می‌شود که

$$ED = CD - CE = \frac{۱}{۲}(a+b-c) - \frac{۱}{۲}(a-b+c) = b-c$$

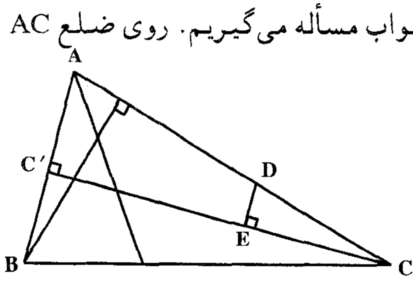
برای ترسیم مثلث ABC با داشتن کمیتهای r، h و $b-c$ ابتدا مثلث قائم‌الزاویهٔ $EDD_۱$ را با معلوم بودن دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه $ED = b-c$ و $DD_۱ = ۲r$ رسم می‌کنیم (شکل). سپس دایرهٔ s را به قطر $DD_۱$ رسم می‌کنیم. خط l را به فاصلهٔ h از خط ED به موازات آن می‌کشیم. خط $ED_۱$ خط l را در رأس A از مثلث مطلوب قطع می‌کند. دو رأس دیگر B و C از برخورد خط ED با مماسهای AD'' و AD' رسم شده از A بر دایرهٔ s، به دست می‌آیند.



۴۳۳. مثلث IXX_a (شکل) را می‌توان رسم کرد. چون نقطهٔ A'، وسط XX_a، نقطهٔ وسط BC نیز هست، خطی که از A' بر AC عمود می‌شود برابر $\frac{۱}{۲}h_b$ است. دایره‌های (I, r) و $(A', \frac{۱}{۲}h_b)$ را رسم کنید. یک مماس مشترک خارجی این دو دایره، $XA'X_a$ را در رأس C از مثلث خواسته شده قطع می‌کند، و نقطهٔ متقارن C نسبت به A' رأس B از مثلث خواسته شده است؛ رأس سوم A محل برخورد مماس مشترک بیان شده در بالا و مماسی است که از B بر (I, r) رسم می‌شود.

۱.۴.۴.۱.۲.۴.۵. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، تفاضل دو ضلع، تفاضل دو ارتفاع

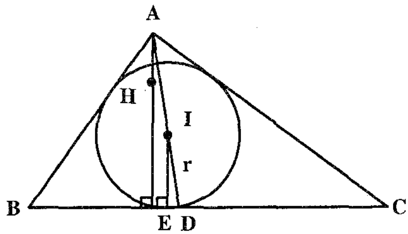
۴۳۴. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. روی ضلع AC پاره‌خط $AD = AB = c$ را جدا می‌کنیم. از D خط DE را بر ارتفاع CC' عمود می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ DEC، $EC = h_c - h_b$ و



$DC = b - c$ است. پس این مثلث قابل رسم است. زاویهٔ D از این مثلث با زاویهٔA از مثلث ABC برابر است. بنابراین زاویهٔ A از مثلث ABC نیز مشخص است. با معلوم بودن $\hat{A}$ و r مثلث AIE را می‌توان رسم کرد که در آن $E\hat{A}I = \frac{\hat{A}}{۲}$ ، $IE = r$ و $\hat{E} = ۹۰^\circ$ است. از آن جا $AE = p - a$ محاسبه می‌شود. با معلوم بودن $p - a$ و $b - c = l$ می‌توان مثلث ABC را رسم کرد.

۱.۴.۴.۱.۲.۵. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ضلع، پاره‌خط

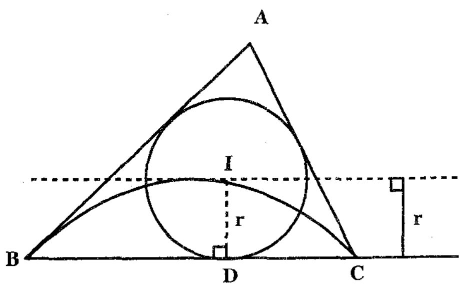
۴۳۵. مسأله را حل شده و مثلث ABC را که در آن r شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث و H مرکز ارتفاعی آن است، در نظر می‌گیریم. نیمساز زاویهٔ A را رسم می‌کنیم و مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث را I می‌نامیم. ...



۱.۴.۴.۱.۲.۶. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ضلع، زاویه

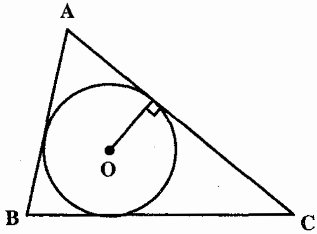
۱.۴.۴.۱.۲.۶.۱. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، یک ضلع، یک زاویه

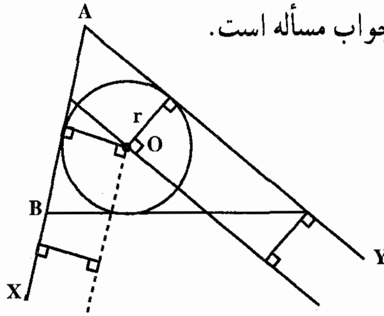
۴۳۶. مسأله را حل شده، مثلث ABC را جواب مسأله فرض می‌کنیم. اگر I مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث باشد، زاویهٔ $B\hat{I}C = ۹۰^\circ + \frac{\alpha}{۲}$ است و مثلث BIC با معلوم بودن اندازهٔ ضلع $BC = a$، زاویهٔ $B\hat{I}C$ و ارتفاع ID قابل رسم است. پس برای رسم مثلث ABC، پس از رسم مثلث BIC، به مرکز I و به شعاع r دایره‌ای رسم می‌کنیم و از B و C دو خط بر آن مماس می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ A رأس سوم مثلث قطع کنند.



۴۳۷. زاویه $x\hat{A}y = \hat{A}$ را رسم کرده، روی نیمساز xAy نقطهٔ O را چنان معلوم می‌نماییم که

فاصلهٔ آن از دو ضلع زاویه به اندازه شعاع دایره محاطی باشد. به مرکز O و به شعاع r دایره‌ای رسم می‌کنیم. روی مماس رسم شده از A به اندازهٔ AB جدا کرده و از B مماسی بر دایره رسم می‌کنیم تا مماس دیگری که از A رسم شده در C قطع کند. ABC جواب مسأله است.





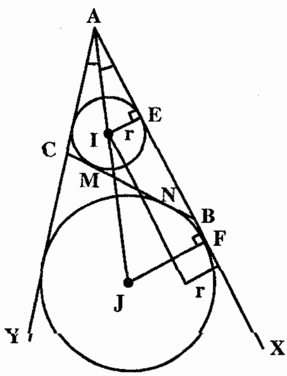
۱.۴.۴.۱.۲.۶.۲. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، مجموع دو ضلع، زاویه

۴۳۸. اگر ABC مثلث مطلوب باشد، داریم :

$$\begin{cases} AE = p - a \\ AF = p \end{cases} \quad \text{و یا} \quad AE = \frac{a+b+c}{۲} - a = \frac{b+c-a}{۲} = \frac{l-a}{۲}$$

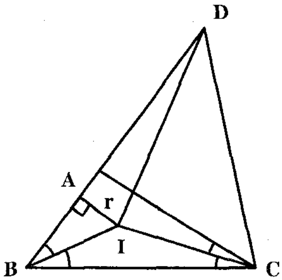
و یا :

$۲AE = l - a$ یا $a = l - ۲AE$ و در نتیجه $AF = l - AE$، و از آن جا حل مسأله چنین است :



زاویهٔ $X\hat{A}Y = \hat{A}$ را رسم کرده خطی به فاصلهٔ r و موازی AX رسم می‌کنیم تا نیمساز $X\hat{A}Y$ را در I قطع کند. دایرهٔ به مرکز I و شعاع r در نقطهٔ E بر AX مماس است. سپس بر AX نقطهٔ F را چنان تعیین می‌کنیم که $AF = l - AE$ باشد و از F عمودی بر AX اخراج می‌کنیم تا نیمساز زاویهٔ XAY را در J قطع کند. دایرهٔ به مرکز J و شعاع JF دایرهٔ محاطی خارجی مثلث ABC است. مماس مشترک داخلی دایره‌های I و J ضلعهای AX و AY را در B و C قطع می‌نماید و ABC مثلث خواسته شده است.

۴۳۹. BA (شکل) را امتداد دهید و روی آن AD را برابر AC جدا کنید. مثلث BID را



می‌توان رسم کرد، زیرا قاعده، $BD = b+c$، زاویهٔ $I\hat{B}D = \frac{۱}{۲}\hat{B}$ و ارتفاع $BD = r$ معلومند. حال،

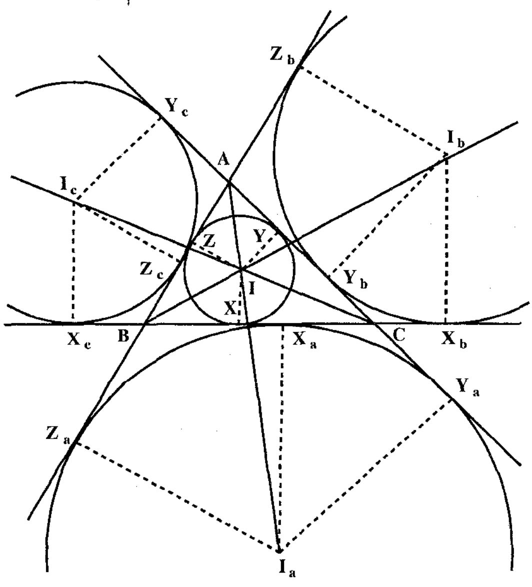
$$D\hat{C}I = D\hat{C}A + A\hat{C}I = \frac{۱}{۲}\hat{A} + \frac{۱}{۲}\hat{C} = ۹۰^\circ - \frac{۱}{۲}\hat{B}$$

پس C روی دایره‌ای که DI یک وتر آن است قرار دارد. از نقطهٔ B علاوه بر BD مماس دیگری نیز می‌توان بر دایرهٔ (I,r) رسم کرد؛ این مماس دایره را در رأس C از مثلث مطلوب ABC قطع می‌کند. رأس سوم A از مثلث ABC نقطهٔ برخورد BD و مماس دومی است که از C بر دایرهٔ محاطی (I , r) رسم می‌شود.

۳.۶.۲.۱.۴.۴.۱. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، تفاضل دو ضلع، زاویه

۴۴۰. از مثلث AIZ، $AZ = \frac{۱}{۲}(b+c-a)$ را می‌دانیم که همراه با $a-b$، ضلع c را تعیین می‌کنند.

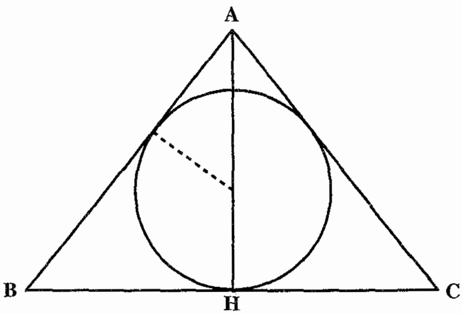
۴۴۱. مثلث BIX قابل رسم است (شکل). اگر BX را به اندازهٔ $\frac{۱}{۲}(b-c)$ از X امتداد دهیم، نقطهٔ A' وسط BC به دست می‌آید؛ (زیرا $BA' = BX + \frac{b-c}{۲} = p-b+\frac{b-c}{۲} = \frac{a}{۲}$) و در نتیجه رأس C معلوم می‌شود. دو مماسی که از B و C بر دایره‌ای به مرکز I و شعاع r رسم می‌شود یکدیگر را در A که همان رأس سوم مثلث است قطع می‌کنند.



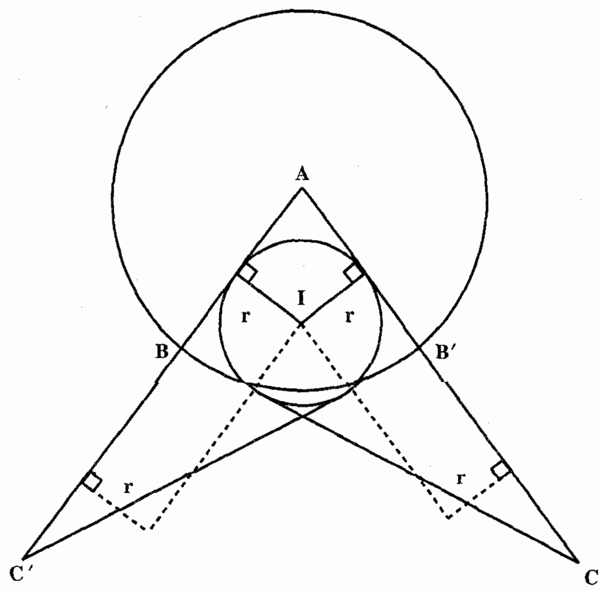
۱.۴.۴.۱.۲.۷. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ارتفاع، زاویه

۱.۴.۴.۱.۲.۷.۱. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، یک ارتفاع، یک زاویه

۴۴۲. مسأله را حل شده می‌گیریم. دایرهٔ به قطر AH، دایرهٔ محاطی درونی مثلث را قطع می‌کند و مماس مشترک آن خط BC می‌باشد. پس برای حل مسأله زاویهٔ A را رسم می‌کنیم و بر دو ضلع زاویه دو عمود به اندازهٔ r اخراج می‌کنیم و از نقطه‌های به دست آمده خطهای موازی ضلعهای زاویه رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در I قطع کند. دایرهٔ به مرکز I و به شعاع r را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز A و به شعاع AH یک دایره می‌زنیم که دایرهٔ محاطی را قطع کند.

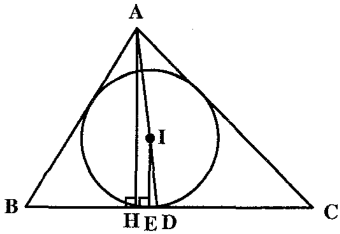


مماس مشترک این دو دایره را رسم می‌کنیم. دو ضلع زاویه را در C و B قطع می‌کند، مسأله دو جواب دارد.



۱.۴.۴.۱.۲.۷.۲. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، یک ارتفاع، تفاضل دو زاویه

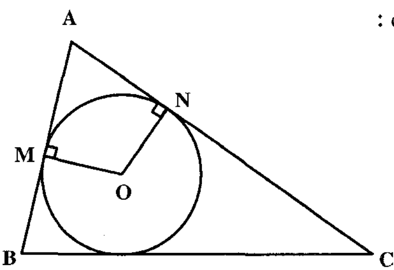
۴۴۳. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. ارتفاع AH و نیمساز AD را رسم می‌کنیم و از I مرکز دایرهٔ محاطی درونی عمود IE را بر BC فرود می‌آوریم. می‌دانیم که زاویهٔ بین ارتفاع و نیمساز زاویهٔ A مساوی $\frac{\hat{B}-\hat{C}}{۲}$ است و چون AH∥IE می‌باشد، پس



$H\hat{A}D = E\hat{I}D = \frac{\alpha}{۲}$ است، در نتیجه مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AHD و IED با معلوم بودن اندازهٔ یک ضلع و یک زاویهٔ حاده قابل رسمند. بنابراین برای رسم مثلث ABC، دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AHD و IED را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز I و به شعاع r دایره‌ای رسم می‌کنیم و از A دو مماس بر آن رسم می‌کنیم تا امتداد HD را در B و C قطع کنند. مثلث ABC جواب مسأله است.

۱.۴.۴.۱.۲.۸. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ارتفاع، محیط

۴۴۴. اگر S مساحت مثلث ABC (شکل) فرض شود و نقطه‌های تماس AB و AC را با دایره محاطی داخلی M و N بنامیم، خواهیم داشت:



$$۲S = ۲pr = a.h \quad \text{یا} \quad a = \frac{۲pr}{h} \qquad (۱)$$

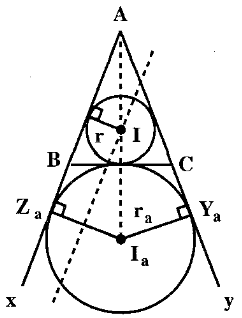
$$AM = AN = p - a \qquad (۲)$$

برای رسم BC کافی است چهارمین جزء تناسب (۱) را پیدا کنیم و برای رسم زاویهٔ A کافی است طبق رابطهٔ (۲) دو مماس به طولهای مساوی $MA = p - a$ بر دایره رسم کنیم. اکنون مثلث ABC را با مفروضات a و h و $\hat{A}$ می‌توان رسم کرد یعنی پس از رسم کمان درخور ضلع $BC = a$ و به زاویهٔ A خطی موازی BC به فاصلهٔ h رسم می‌کنیم. محل تلاقی این خط با کمان رسم شده نقطهٔ A را مشخص می‌سازد. چنانچه این خط، کمان را در دو نقطه قطع کند یا مماس شود یا قطع نکند مسأله دارای دو جواب یا یک جواب است یا جواب ندارد.

۱.۴.۴.۱.۲.۹. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، زاویه؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

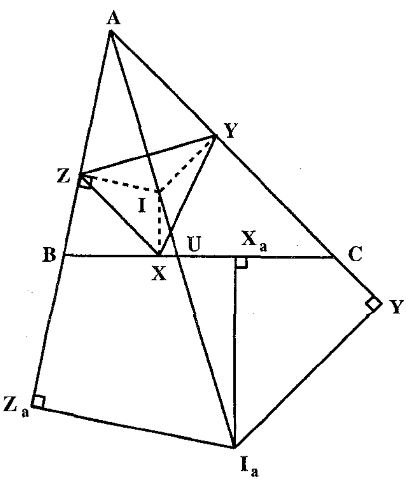
۱.۴.۴.۱.۲.۹.۱. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، زاویه، محیط

۴۴۵. زاویهٔ $x\hat{A}y = \alpha$ را رسم می‌کنیم. نیمساز این زاویه را رسم می‌کنیم. آن‌گاه خطی موازی Ax و به فاصلهٔ r از آن رسم می‌کنیم تا نیمساز را در نقطهٔ I قطع کند. به مرکز I و به شعاع r دایرهٔ محاطی درونی مثلث را رسم می‌کنیم. روی Ax پاره‌خط $AZ_a = P$ را رسم می‌کنیم و از Z_a عمودی بر Ax اخراج می‌کنیم تا نیمساز زاویهٔ A را در نقطهٔ I_a قطع کند. به مرکز I_a و به شعاع $Z_aI_a = r_a$ دایره‌ای رسم می‌کنیم (دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع a). مماس مشترک داخلی این دو دایره ضلع BC را مشخص می‌کند.



۱.۴.۴.۱.۲.۹.۲. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، زاویه، مساحت

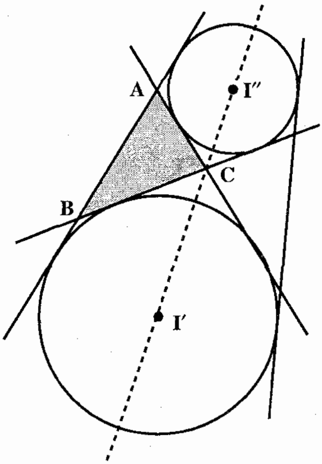
۴۴۶. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. با معلوم بودن S و r اندازهٔ p محاسبه می‌شود زیرا $r = \frac{S}{p}$ یا $p = \frac{S}{r}$ است. در نتیجه مثلث AI_aZ_a قابل رسم است. زیرا $Z_a\hat{A}I_a = \frac{\hat{A}}{۲}$ و $\hat{Z}_a = ۹۰°$ و $AZ_a = p$ است. از آن جا r_a و در نتیجه $p-a$ (چون $r_a = \frac{S}{p-a}$ است) و از آن‌جا مثلث AZI قابل رسم است، همچنین نقطهٔ I را که به فاصلهٔ r از خط AZ_a قرار دارد می‌توان تعیین کرد. دو دایرهٔ (I,r) و (I_a, r_a) را رسم می‌کنیم. مماس مشترک درونی آنها، دو ضلع زاویهٔ A را در B و C قطع می‌کند و مثلث ABC جواب است.



۱.۴.۴.۲. رسم مثلث با معلوم بودن دایره‌های محاطی برونی یا شعاعهای آنها و داده‌های دیگر

۱.۴.۴.۲.۱. رسم مثلث با معلوم بودن دایره‌های محاطی برونی

۴۴۷. فرض کنیم I' و I'' مرکزهای دو دایره از دایره‌های محاطی خارجی باشند. در این صورت ضلعهای AC و BC واقع بر مماسهای مشترک داخلی این دو دایره هستند و ضلع AB بر یک مماس مشترک خارجی دو دایره قرار دارد. از تقاطع این مماسها مثلث ABC به وجود می‌آید. چون رسم دو مماس مشترک خارجی بر دایره ممکن است مسأله ظاهراً دارای دو جواب است؛ ولی بسهولت می‌توان ثابت کرد که این دو جواب متساوی‌اند. شرط لازم و کافی برای امکان مسأله آن است که دو دایرهٔ مفروض خارج یکدیگر باشند.



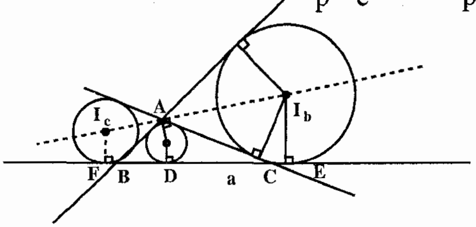
۱.۴.۴.۲.۲. رسم مثلث با معلوم بودن شعاعهای دایره‌های محاطی برونی و داده‌های دیگر

۱.۴.۴.۲.۲.۱. شعاعهای دایره‌های محاطی برونی، ضلع

۱.۴.۴.۲.۲.۱.۱. دو شعاع دایرهٔ محاطی برونی، یک ضلع

۴۴۸. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله در نظر می‌گیریم. I_b و I_c را مرکزهای دو دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلعهای AC و AB و نقطه‌های تماس این دو دایره با امتداد ضلع BC را E و F می‌نامیم. نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی درونی مثلث با ضلع BC را D می‌نامیم. از طرفی داریم: $r_b = \dfrac{S}{p-b}$ و $r_c = \dfrac{S}{p-c}$. از آن‌جا خواهیم داشت:

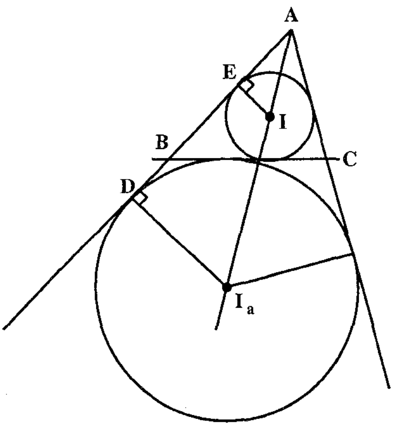
$$\frac{r_b}{r_c} = \frac{p-c}{p-b} = \frac{DC}{DB}$$



بنابراین نقطهٔ D را روی ضلع BC می‌توان مشخص کرد یعنی $p-b$ و $p-c$ مشخص می‌شود. امّا $BF = p-c$ و $CE = p-b$ است. بنابراین نقطه‌های E و F مشخص و از آن‌جا دایره‌های I_b و I_c را می‌توان رسم کرد. آن‌گاه از B و C دو مماس بر این دایره‌ها رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ A رأس سوم مثلث ABC یکدیگر را قطع کنند.

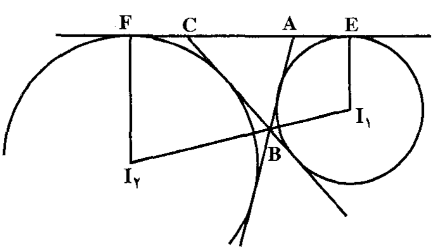
۱.۴.۴.۲.۲.۱.۲. شعاع یک دایرهٔ محاطی برونی، یک ضلع، مجموع دو ضلع دیگر

۴۴۹. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله در نظر می‌گیریم. دایرهٔ محاطی درونی و دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع a را رسم می‌کنیم. اگر D نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی برونی با AB و E نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی درونی با AB باشد، $۲AD = a+b+c$، $AD = p$ و $۲AE = b+c-a$ یا $AE = p-a$ (p نصف محیط مثلث) است. بنابراین برای رسم مثلث زاویهٔ معلوم $\hat{A}$ را رسم می‌کنیم. نیمساز این زاویه را نیز رسم می‌نماییم. روی یک ضلع این زاویه پاره‌خطهای $AE = p-a$ و $AD = p$ را جدا می‌کنیم و از نقطه‌های E و D عمودهایی بر ضلع زاویه اخراج می‌کنیم تا نیمساز زاویهٔ A را در I و I_a مرکزهای دو دایرهٔ محاطی درونی و برونی مماس بر ضلع a قطع کنند. دایره‌های (I,r) و (I_a , r_a) را رسم می‌کنیم و مماس مشترک درونی آنها را می‌کشیم تا دو ضلع زاویهٔ A را در B و C قطع کنند. مثلث ABC جواب مسأله است.



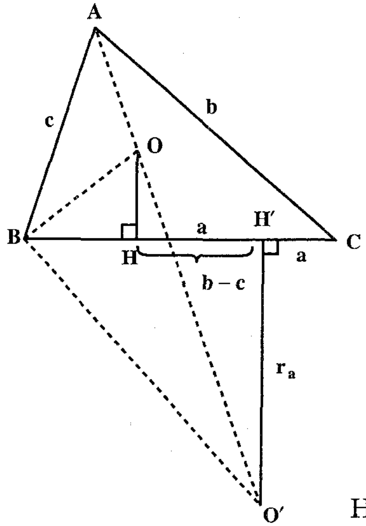
۱.۴.۴.۲.۲.۱.۳. شعاعهای دو دایرهٔ محاطی برونی، مجموع دو ضلع

۴۵۰. پاره‌خط $EF = a+c$ را رسم نموده و در نقطه‌های E و F عمودهایی به طولهای r_a و r_b بر EF اخراج می‌نماییم. مماس مشترکهای داخلی دایره‌های $(I_۱)$ و $(I_۲)$ که بترتیب به



شعاعهای r_b و r_a می‌باشند، پاره‌خط EF را در A و C و یکدیگر را در B قطع می‌نمایند. ABC مثلث خواسته شده است.

۱.۴.۴.۲.۲.۱.۴. شعاع دایره‌های محاطی، تفاضل دو ضلع



۴۵۱. داریم: $r_b = \dfrac{S}{p-c}$ ، $r_c = \dfrac{S}{p-c}$

$$\Rightarrow \frac{r_b}{r_c} = \frac{p-c}{p-b} = \frac{\frac{a+b+c}{۲}-c}{\frac{a+b+c}{۲}-b}$$

$$\Rightarrow \frac{r_b}{r_c} = \frac{a+b+c}{a-b+c} = \frac{a+l}{a-l}$$

بنابراین از این تناسب a محاسبه می‌شود.

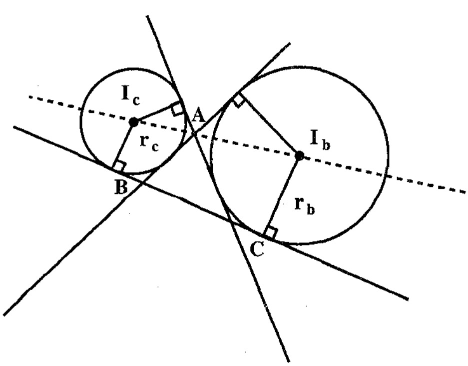
از طرفی داریم:

$$HH' = b-c \ , \ BH' = p-b+b-c = p-c$$

$$\Rightarrow BH' = a+b-c \ \Rightarrow BH' = a+l = \text{طول معلوم}$$

ترسیم. دایره‌ای به شعاع r_a رسم می‌کنیم، خطی بر آن مماس کرده و شعاع عمود بر مماس $O'H'$ را رسم می‌کنیم، BH' را روی آن جدا می‌کنیم و از طرف دیگر امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ C به دست آید، به طوری که $BC = a$ باشد، سپس از B و C دو مماس بر دایرهٔ رسم شده رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در A قطع کنند.

۱.۴.۴.۲.۲.۲. شعاع دو دایرهٔ محاطی برونی، زاویه



۴۵۲. دو خط موازی ضلعهای زاویهٔ A و به فاصلهٔ r_b و r_c از آنها رسم می‌کنیم تا نیمساز زاویهٔ خارجی A را در I_b و I_c قطع کنند. به مرکزهای I_b و I_c و به شعاعهای r_b و r_c دو دایره رسم می‌کنیم. سپس مماس مشترک برونی آن دو

را رسم می‌کنیم تا ضلعهای زاویه را در B و C قطع کنند. مثلث ABC جواب مسأله است.

۱.۴.۴.۲.۲.۳. مجموع یا تفاضل شعاع دو دایرهٔ برونی، مجموع دو ضلع، زاویه

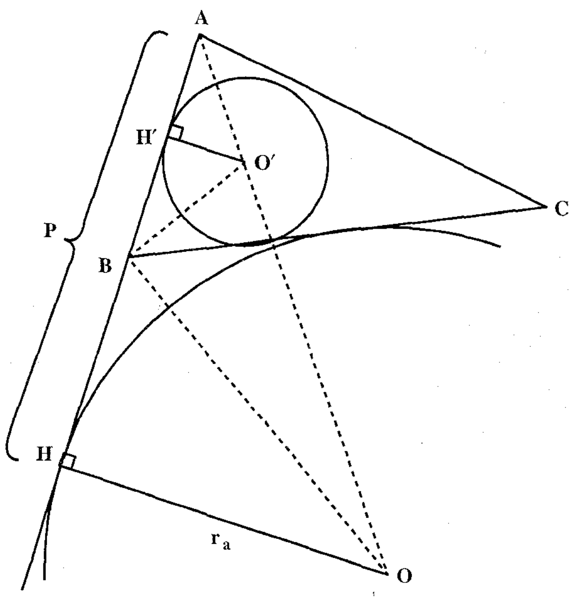
۴۵۳. مسأله را حل شده بگیرید و از داده‌های مسأله برای یافتن مثلثی قابل رسم استفاده کنید.

۱.۴.۴.۲.۲.۴. مجموع شعاع دو دایرهٔ محاطی برونی، مجموع دوضلع، تفاضل دو زاویه

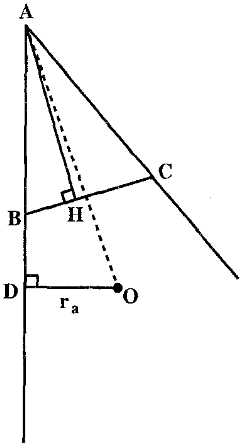
۴۵۴. با استفاده از داده‌های مسأله، مثلثی قابل رسم پیدا کنید.

۱.۴.۴.۲.۲.۵. شعاع دایرهٔ محاطی برونی، ضلع، محیط

۴۵۵. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم : مثلث قائم‌الزاویهٔ AHO را می‌توان رسم کرد، زیرا $\hat{H} = 90^\circ$ ، $AH = p$ و $OH = r_a$ است. همچنین مثلث $AO'H'$ قابل رسم است چون $AH' = p - a$ طول معینی دارد و $H'O'$ عمود بر AB است، بنابراین برای رسم مثلث ABC نخست مثلث AHO را رسم می‌کنیم سپس $AH' = p - a$ را روی AH جدا می‌کنیم و عمودی در H' بر آن اخراج می‌کنیم تا AO را در O' قطع کند. سپس دو دایره به مرکزهای O و O' و به شعاع r_a و r رسم می‌کنیم. آن‌گاه مماس مشترکهای آنها را رسم می‌کنیم تا مثلث ABC به دست آید.

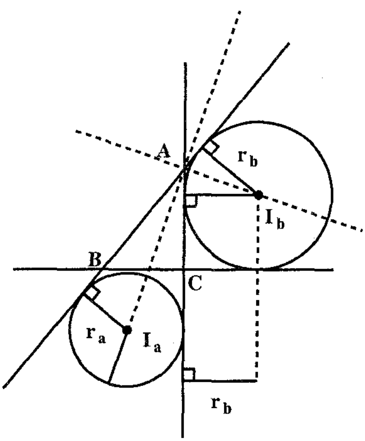


۱.۴.۴.۲.۲.۶. شعاع دایرهٔ محاطی برونی، ارتفاع، محیط



۴۵۶. مثلث قائم‌الزاویهٔ AOD را می‌توان به حالت دو ضلع زاویهٔ قائمه رسم کرد. زیرا $AO = p$ ، $DO = r_a$ و $\hat{D} = ۹۰^\circ$ است. چون BC هم بر دایرهٔ O مماس است و هم بر دایره به مرکز A و به شعاع AH، پس برای رسم مثلث ابتدا مثلث AOD را رسم می‌کنیم، سپس به مرکز O و به شعاع r_a یک دایره و بعد به مرکز A و به شعاع AH نیز دایرهٔ دیگری می‌زنیم، مماس مشترک این دو دایره هر کجا که قرینهٔ AD نسبت به AO و خود AD را قطع کرد، نقطهٔ B و نقطهٔ C خواهد بود.

۱.۴.۴.۲.۲.۷. تفاضل شعاعهای دایره‌های محاطی برونی، زاویه، محیط

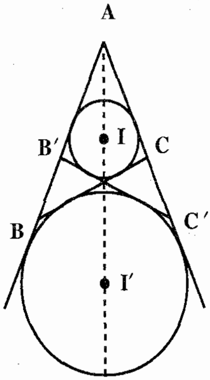


۴۵۷. نیمساز زاویهٔ A را رسم می‌کنیم. سپس روی یک ضلع این زاویه پاره‌خط $AF = p$ را جدا می‌کنیم و از F عمودی بر ضلع زاویه اخراج می‌کنیم تا نیمساز زاویهٔ A را در I_a قطع کند. به مرکز I_a و به شعاع r_a دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع BC را رسم می‌کنیم. با مشخص شدن r_a چون $r_a - r_b$ معلوم است، اندازهٔ r_b مشخص خواهد بود. بنابراین می‌توان دایرهٔ به مرکز I_b و r_b را رسم کرد. سپس مماس مشترک دو دایره را رسم می‌کنیم تا ضلع BC مشخص شود.

۱.۴.۴.۳. رسم مثلث با معلوم بودن دایره‌های محاطی درونی و برونی یا شعاعهای آنها و داده‌های دیگر

۱.۴.۴.۳.۱. رسم مثلث با معلوم بودن دایره‌های محاطی درونی و برونی

۴۵۸. فرض کنیم I و I' مرکزهای دایره‌های محاطی و محاطی خارجی مثلث ABC (محاط در



زاویهٔ A) باشند. دو ضلع AB و AC واقع بر مماسهای مشترک خارجی این دو دایره هستند و BC یک مماس مشترک داخلی است. بنابراین برای حل مسأله کافی است دو مماس مشترک خارجی دو دایره و یک مماس مشترک داخلی آنها را رسم کنیم تا از تقاطع آنها مثلث ABC به‌وجود آید و چون دو مماس مشترک داخلی می‌توان رسم کرد مسأله ظاهراً دارای دو جواب است ولی بسهولت می‌توان ثابت کرد که این دو جواب متساوی‌اند.

شرط امکان مسأله آن است که اوّلاً دو دایره در خارج یکدیگر واقع بوده یا مماس خارج باشند تا بتوانند لااقل سه مماس مشترک داشته باشند. ثانیاً شعاع دایرهٔ ′I از شعاع دایرهٔ I بزرگتر باشد زیرا دو نقطهٔ A و I باید در یک طرف BC واقع باشند.

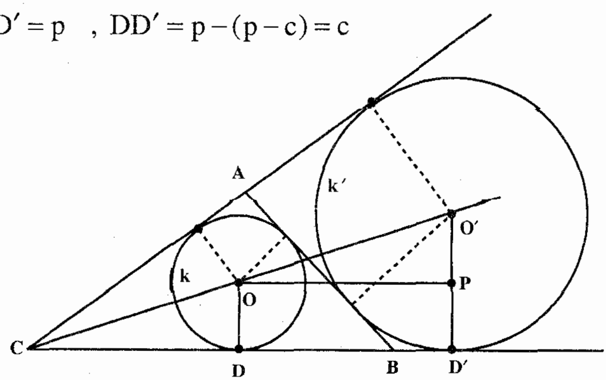
۱.۴.۴.۳.۲. رسم مثلث با معلوم بودن شعاعهای دایره‌های محاطی درونی و برونی و داده‌های دیگر

۱.۴.۴.۳.۲.۱. شعاعهای دو دایرهٔ محاطی درونی و برونی، ضلع

۱.۴.۴.۳.۲.۱.۱. شعاعهای دو دایرهٔ محاطی درونی و برونی، یک ضلع

۴۵۹. الف) D را نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی داخلی k، با ضلع BC و ′D را نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی خارجی ′k ، با امتداد ضلع BC می‌گیریم (شکل). می‌دانیم که اگر a، b و c طول ضلعها و p نصف محیط مثلث باشند :

$$CD = p - c \quad , \quad CD' = p \quad , \quad DD' = p - (p - c) = c$$



ب) با توجه به این که دایره‌های k و k' (به مرکزهای O و O')متقاطع نیستند، سعی می‌کنیم رابطه‌ای بین r، r_c و c پیدا کنیم. از نقطهٔ O، خط راستی موازیBC رسم می‌کنیم تا $O'D'$ را در P قطع کند. مثلث OPO' ، با ضلعهای $OP = DD' = c$ و $O'P = r_c - r$ و وتر $OO' \geq r_c + r$ ، یک مثلث قائم‌الزاویه است و، با توجه به قضیهٔ فیثاغورس، داریم :

$$OO'^2 = c^2 + (r_c - r)^2 \geq (r_c + r)^2$$

که از آن‌جا، بعد از ساده کردن، به دست می‌آید :

$$\frac{c^2}{2} \geq r.r_c \qquad (1)$$

ج) به این ترتیب، اگر برای داده‌های c، r و r_c داشته باشیم :

$$\frac{c^2}{2} \geq r.r_c \ \ , \ \ r_c > r$$

آن وقت، می‌توانیم مثلث ABC را به ترتیب زیر، رسم کنیم :

پاره‌خط DD' را به طول c و سپس پاره‌خطهای OD و $O'D'$ را به طولهای r و r_c عمود بر DD' ، رسم می‌کنیم.

اکنون، دایرهٔ k به مرکز O و به شعاع r، و دایرهٔ k' به مرکز O' و شعاع r_c قابل رسمند. چون $r_c > r$ ، بنابراین خط راست $O'O$ ، خط راست DD' را قطع می‌کند. نقطهٔ برخورد این دو خط راست رأس C از مثلث ABC را به ما می‌دهد. C تنها نقطه‌ای واقع بر OO' است که از آن‌جا می‌توان دو مماس مشترک بیرونی را بر دو دایره رسم کرد.

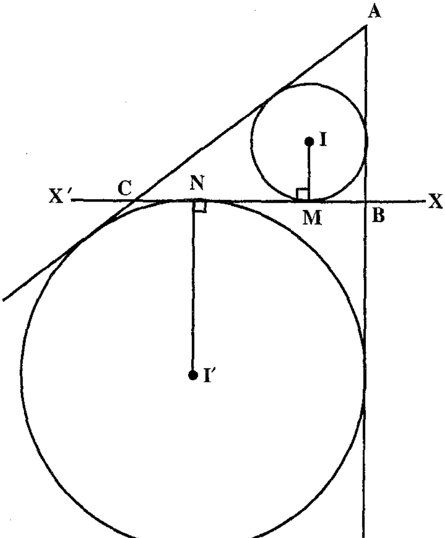
دو دایرهٔ k و k' یکدیگر را قطع نمی‌کنند، زیرا بنابر (۱) داریم :

$$OO'^2 = c^2 + (r_c - r)^2 = (r_c + r)^2 + c^2 - 4r.r_c \geq (r_c + r)^2$$

اکنون، اگر یکی از دو مماس مشترک درونی دایره‌های k و k' را رسم کنیم، در نقطه‌های A و B (دو رأس دیگر مثلث)، مماسهای مشترک بیرونی را قطع می‌کند. با رسم مماس مشترک درونی دوم، جواب دیگری به دست می‌آید که با جواب اوّل قابل انطباق است. در حالتی که دایره‌های k و k' بر هم مماس باشند، تنها یک جواب به دست می‌آید.

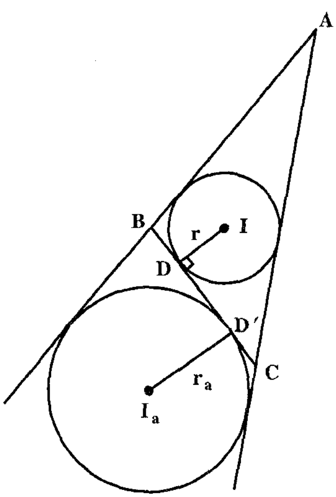
۱.۴.۴.۳.۲.۱.۲. شعاعهای دو دایرهٔ محاطی درونی و برونی، تفاضل دو ضلع

۴۶۰. بر خط داده شده XX' نقطه‌های M و N را چنان تعیین می‌کنیم که $MN = b - c$ باشد و از نقطه‌های M و N در طرفین XX' عمودهایی به طول r و r_a اخراج می‌نماییم. ($MI = r$ و $NI' = r_a$) به مرکزهای I و I' و شعاعهای r و r_a دو دایره رسم می‌کنیم. این دو دایره در نقطه‌های M و N بر XX' مماس هستند. مماس مشترکهای خارجی، دایره‌های (I) و (I')، یکدیگر را در A و XX' را در B و C قطع می‌نماید. مثلث ABC، مثلث خواسته شده است.



۱.۴.۴.۳.۲.۲. شعاعهای دو دایرهٔ محاطی درونی و برونی، پاره‌خط

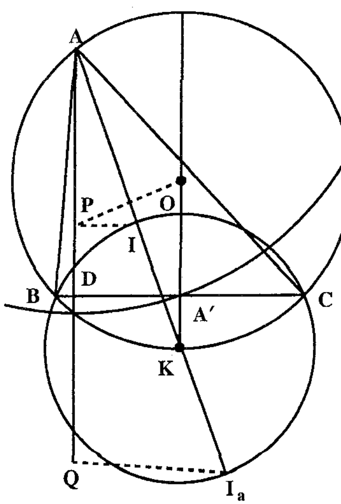
۴۶۱. فرض می‌کنیم مثلث رسم شده و نقطه‌های D و D' نقطه‌های تماس دایره‌های محاطی درونی و برونی مماس بر ضلع BC با این ضلع باشند. اگر از I به D و از I_a به D' وصل کنیم می‌دانیم که $ID = r$ و $I_aD' = r_a$ است. از طرفی پاره‌خط $DD'=l$ طول معلومی دارد. بنابراین برای رسم مثلث ABC چنین عمل می‌کنیم: پاره‌خط DD' را به طول l



رسم می‌کنیم. در نقطه‌های D و D' دو عمود بر DD' و در دو طرف آن اخراج می‌کنیم. روی عمود اخراج شده از D پاره‌خط $ID = r$ و روی پاره‌خط اخراج شده از D' پاره‌خط $DI_a = r_a$ را جدا می‌کنیم. به مرکز I و به شعاع r و به مرکز I_a و به شعاع r_a، دو دایره رسم می‌کنیم. مماس مشترکهای این دو دایره را رسم می‌کنیم تا در نقطه‌های A، B و C که رأسهای مثلث ABC می‌باشند، یکدیگر را قطع کنند. مثلث ABC جواب مسأله است.

۱.۴.۴.۳.۲.۳. شعاعهای دو دایرهٔ محاطی درونی و برونی، میانه

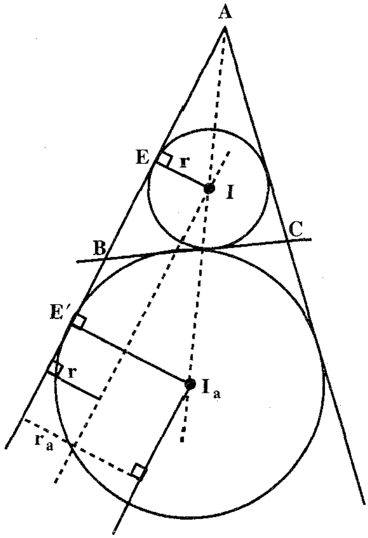
۴۶۲. روی یک خط از نقطهٔ D و در دو طرف آن $DP = r$ و $DQ = r_a$ را جدا می‌کنیم و نقطهٔ A مزدوج توافقی D را نسبت به P و Q به دست می‌آوریم. AD ارتفاع ضلع BC از مثلث ABC است. دایره‌ای به مرکز A و شعاع m_a عمود بر AD را در D در نقطهٔ A' قطع می‌کند. از A' خطی عمود بر DA' رسم می‌کنیم و روی این عمود از A' در جهت DQ، $A'K$ را مساوی $\frac{1}{2}(r_a - r)$ جدا می‌کنیم. عمودمنصف AK امتداد KA' را در نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC قطع می‌کند. دایره‌ای به مرکز O و شعاع OA رسم می‌کنیم. نقطه‌های تقاطع آن با DA' رأسهای B و C از مثلث ABC است.



۱.۴.۴.۳.۲.۴. شعاعهای دو دایرهٔ محاطی درونی و برونی، زاویه

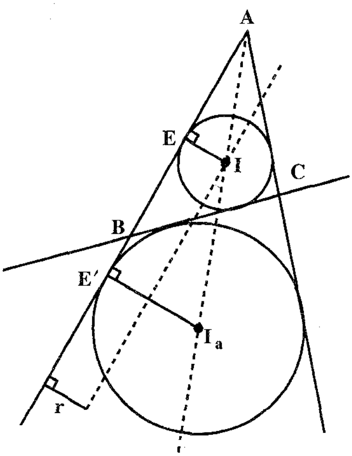
۴۶۳. نیمساز زاویهٔ A را رسم می‌کنیم. سپس دو خط موازی یک ضلع این زاویه و به فاصلهٔ

r و r_a از آن رسم می‌کنیم تا نیمساز را در I و I_a قطع کنند. به مرکزهای I و I_a و به شعاعهای r و r_a دو دایره رسم می‌کنیم. مماس مشترک درونی این دو دایره، دو ضلع زاویه را در B و C قطع می‌کند و مثلث ABC جواب مسأله است.



۱.۴.۴.۳.۲.۵. شعاعهای دو دایرهٔ محاطی درونی و برونی، محیط

۴۶۴. مسأله را حل شده و مثلث ABC را جواب مسأله فرض می‌کنیم. مرکز دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع a را I_a و مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث را I می‌نامیم. نقطه‌های تماس این دو دایره با ضلع AB را بترتیب E' و E می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ $AE'I_a$ با معلوم بودن دو ضلع زاویهٔ قائمه یعنی $AE' = p$ و $E'I_a = r_a$ قابل رسم است. بنابراین برای رسم مثلث ABC، نخست مثلث $AE'I_a$ را رسم می‌کنیم و به مرکز I_a و به شعاع r_a یک دایره رسم می‌کنیم و از



A مماس دیگری بر این دایره رسم می‌نماییم. سپس خطی موازی AE' و به فاصلهٔ r از آن رسم می‌کنیم تا AI_a را در I مرکز دایرهٔ محاطی درونی قطع کند. به مرکز I و به شعاع

r دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می‌کنیم. به مرکز I و به شعاع r دایرهٔ محاطی را رسم می‌کنیم. آن گاه مماس مشترک درونی دو دایرهٔ (I) و (I_a) را رسم می‌کنیم تا دو رأس B و C به دست آید.

۱.۴.۴.۳.۲.۵. نسبت شعاعهای دو دایرهٔ محاطی درونی و برونی، نقطه، ارتفاع

۴۶۵. واضح است که نقطه‌هایی که پاره‌خط II_a را به طور داخلی و خارجی به نسبت مفروض تقسیم می‌کنند، رأس A و نقطهٔ برخورد ضلع BC و نیمساز AI، یعنی نقطهٔ U، هستند. مماسی که از U بر دایرهٔ (A, h_a) رسم می‌شود، دایره‌ای را که II_a قطر آن است در دو رأس دیگر مثلث خواسته شده ABC قطع می‌کند. مسأله ممکن است دو یا یک جواب داشته باشد، یا جواب نداشته باشد.

۱.۴.۵. رسم مثلث با معلوم بودن دایره‌های محیطی و محاطی یا شعاعهای آنها و داده‌های دیگر

۱.۴.۵.۱. رسم مثلث با معلوم بودن دایره‌های محیطی و محاطی و داده‌های دیگر

۱.۴.۵.۱.۱. دایره‌های محیطی و محاطی، یک نقطه

۴۶۶. از نقطهٔ M مماسی بر دایرهٔ محاطی درونی مثلث رسم می‌کنیم تا دایرهٔ محیطی مثلث را در A و C قطع کند. سپس از A و C دو مماس بر دایرهٔ (I) رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ B روی دایرهٔ (O) متقاطع شوند.

شرط جواب آن است که نقطهٔ برخورد دو مماس رسم شده از A و C بر دایرهٔ (I) روی دایرهٔ O متقاطع شوند.

۱.۴.۵.۲. رسم مثلث با معلوم بودن شعاعهای دایره‌های محیطی و محاطی و داده‌های دیگر

۱.۴.۵.۲.۱. شعاعهای دو دایرهٔ محیطی و محاطی درونی، ضلع

۴۶۷. در دایره‌ای به شعاع R وتر $BC = a$ را رسم کنید. اکنون زاویهٔ A مشخص می‌شود، و

از نقطهٔ I ضلع BC با زاویهٔ $\frac{۱}{۲}\hat{A} + ۹۰°$ دیده می‌شود ؛ پس یک مکان هندسی برای I داریم. خطی به موازات BC و به فاصلهٔ r از آن مکان هندسی دومی برای I است. مسأله ممکن است دو جواب داشته باشد.

۱.۴.۵.۲.۲. شعاعهای دو دایرهٔ محیطی و محاطی درونی، خط

۴۶۸. فاصلهٔ I_a تا s با r_a برابر است ؛ پس II_a معلوم است، و نقطهٔ وسط II_a به فاصلهٔ $\frac{۱}{۲}(r_a - r)$ از s قرار دارد.

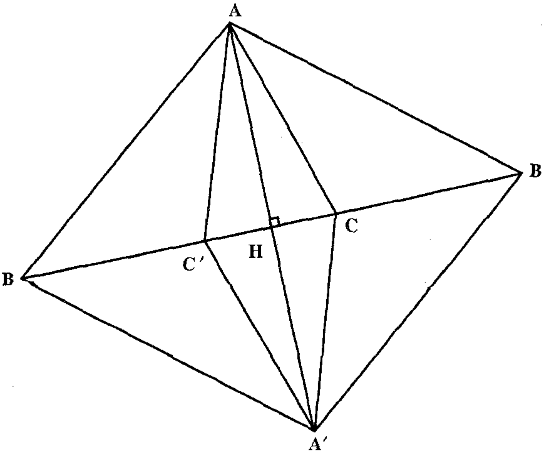
۱.۴.۵.۲.۳. شعاع دایرهٔ محیطی، مجموع شعاعهای دو دایرهٔ محاطی درونی و برونی، پاره‌خط

۴۶۹. فاصلهٔ هر نقطهٔ K روی دایرهٔ محیطی (O) از وتر مشترک (O) و دایرهٔ (K, d) برابر است با $\frac{۱}{۲}(r_a - r)$ ؛ پس r و r_a را می‌توان یافت.

۱.۴.۵.۲.۴. شعاعهای دو دایرهٔ محیطی و محاطی درونی، تفاضل دو زاویه

۴۷۰. اگر I مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث و O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث باشد، مثلث AIO را در نظر بگیرید.

۴۷۱. مثلث ABC را به دلخواه رسم می‌کنیم. سپس قرینهٔ محوری آن نسبت به ضلع BC را به دست می‌آوریم، بدین ترتیب که قرینهٔ رأس A را نسبت به BC به دست آورده ′A می‌نامیم و از ′A به B و C وصل می‌کنیم. قرینهٔ مثلث نسبت به



ارتفاع AH نیز به این ترتیب به دست می‌آید که قرینه‌های دو نقطهٔ B و C را نسبت به آن به دست آورده، B' و C' بنامیم و از A به B' و C' وصل کنیم.

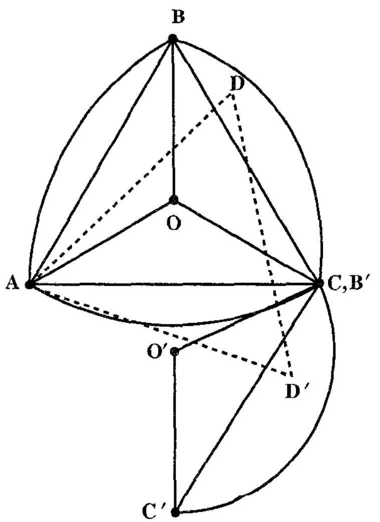
برای تعیین قرینهٔ مثلث نسبت به مرکز دایرهٔ محیطی از سه رأس مثلث به O مرکز دایرهٔ محیطی وصل می‌کنیم و به اندازهٔ خود ادامه می‌دهیم تا A' ، B' و C' به دست آیند، مثلث $A'B'C'$ قرینهٔ مرکزی مثلث ABC نسبت به نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث است. رأسهای این مثلث روی دایرهٔ محیطی مثلث قرار دارند.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۲
رسم مثلث متساوی‌الاضلاع

۱.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛...

۱.۱.۲. نقطه

۴۷۲. ثابت می‌کنیم، شرط مسأله، تنها برای $n = 3$ برقرار است (که در مورد آن کافی است، این نقطه‌ها، رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع را تشکیل داده باشند).



فرض کنید، مجموعهٔ مورد نظر مسأله، دارای $n \geq 4$ نقطه باشد. دو نقطهٔ A و B را طوری انتخاب می‌کنیم که، فاصلهٔ بین آنها ، حداکثر باشد و، سپس، نقطهٔ C را در نظر می‌گیریم که با دو نقطهٔ A و B ، رأسهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع را تشکیل داده‌اند. در این صورت، همهٔ نقطه‌های دیگر، در داخل شکل M قرار می‌گیرند که از اشتراک سطح سه دایرهٔ به شعاع AB و به مرکزهای A، B و C (شکل) به دست آمده است. اگر نقطهٔ O، مرکز مثلث ABC باشد ؛ پاره‌خطهای راست AO، BO و CO مجموعهٔ M را به سه بخش برابر تقسیم می‌کنند که، در هیچ کدام از آنها نمی‌تواند نقطه‌ای از n نقطه، به جز آن چه نام برده‌ایم، واقع

باشد. در واقع اگر مثلاً در بخش M_{BC} ، که از مثلث BOC و قطعهٔ دایرهٔ به مرکز A و کمان BC تشکیل شده است، نقطه‌ای مثل D وجود داشته باشد، آن وقت، نقطهٔ D' هم وجود دارد که، برای آن، مثلث ADD' متساوی‌الاضلاع است، بنابراین، اگر نقطهٔ D را دور نقطهٔ A به اندازهٔ ۶۰ درجه (در جهت معینی) دوران دهیم، باید تبدیل آن، نقطهٔ D' ، در عین حال، هم در بخش M'_{BC} ، تبدیل M_{BC} ، قرار گیرد و هم در مجموعهٔ M. ولی چون زاویهٔ BAC برابر ۶۰ درجه است، یا $C' = B$ و یا $B' = C$. برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم $B' = C$. در این صورت، مجموعه‌های M'_{BC} و M، نسبت به خط راست $B'O'$ ، در دو نیمصفحهٔ مختلف قرار می‌گیرند، زیرا

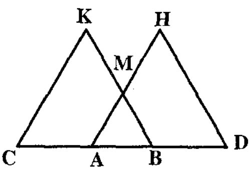
$$B\hat{B'}O' = B\hat{C}A + A\hat{B'}O' = ۶۰^\circ + ۳۰^\circ = ۹۰^\circ$$

یعنی، خط راست $B'O'$ ، بر کمان AC مماس است. در نتیجه، M'_{BC} و M ، تنها در نقطهٔ B' مشترکند، از آن جا $D' = B'$ و $D = B$، که با نوع انتخاب نقطهٔ D متناقض است.

۴۷۳. یک رأس مثلث را تعیین کنید و دوران حول این رأس به زاویهٔ ۶۰° را انجام دهید.

۲.۱.۲. ضلع

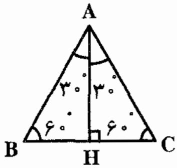
۴۷۴. به مرکز نقطهٔ A و به شعاع مفروض پرگار ثابت، کمانی رسم می‌کنیم تا نقطهٔ D به دست آید (شکل). سپس، به مرکز نقطهٔ B و با همین شعاع، روی خط راست AB، نقطهٔ C را پیدا می‌کنیم. بعد روی پاره‌خط CB، مثلث متساوی‌الاضلاع CKB و روی پاره‌خط AD، مثلث متساوی‌الاضلاع ADH را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد ضلعهای BK و AH را M می‌نامیم. مثلث AMB مثلث موردنظر است.



۳.۱.۲. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۳.۱.۲. ارتفاع

۴۷۵. ارتفاع معلوم را AH فرض می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و ACH را که زاویه‌های

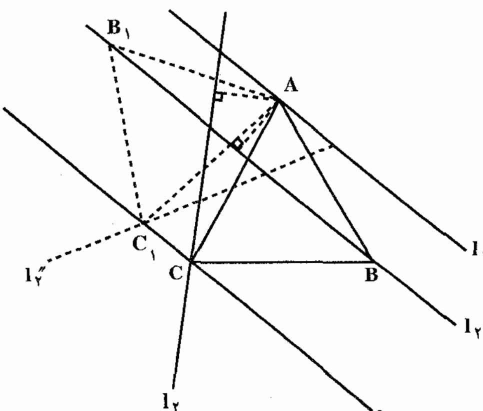


حادهٔ آنها $B\hat{A}H = C\hat{A}H = ۳۰^\circ$ و $\hat{B} = \hat{C} = ۶۰^\circ$ می‌باشند و در دو طرف AH قرار دارند رسم می‌کنیم. مثلث ABC مثلث متساوی‌الاضلاع خواسته شده است.

۴.۱.۲. پاره‌خط، خط

۱.۴.۱.۲. خط

۴۷۶. فرض کنید مسأله حل شده است و ABC مثلث مطلوب است که رأسهایش بر خطهای مفروض l_1 ، l_2 و l_3 هستند (شکل). خط l_2 را حول نقطهٔ A به زاویهٔ ۶۰° درجه در جهت از B به C دوران می‌دهیم ؛ این دوران، نقطهٔ B را به نقطهٔ C می‌برد.

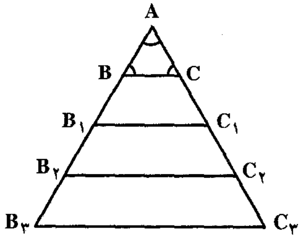


پس ترسیم زیر را به دست می‌آوریم : نقطهٔ دلخواه A را بر خط l_1 انتخاب کرده l_2 را حول A به اندازهٔ ۶۰° دوران می‌دهیم. نقطهٔ تقاطع خط جدید l'_2 با l_3 رأس C ی مثلث مطلوب است. مسأله دو جواب دارد، زیرا l_2 می‌تواند به زاویهٔ ۶۰° در دو جهت دوران کند ؛ ولی این دو جواب با هم قابل انطباقند. مسأله ترسیم مثلث متساوی‌الاضلاعی که رأسهایش بر سه دایرهٔ متحدالمرکز واقع باشند به روش مشابه حل می‌شود.

تذکر. اگر به جای A نقطهٔ دیگر A' را بر خط l_1 انتخاب کرده بودیم، مثلث جدیدی از شکل بر اثر یک طولپایی (یا دقیقتر، بر اثر انتقالی در امتداد l_1 و به طول AA') به دست می‌آمد. اما در هندسه بین این گونه شکلها تفاوتی قائل نمی‌شویم. به این دلیل حل مسأله به جای نقطهٔ A در روی l_1 بستگی ندارد، اگر سه خط l_1 ، l_2 و l_3 موازی نبودند، باز مسأله عیناً به همین روش حل می‌شد ؛ اما این بار بر حسب راههای مختلف انتخاب نقطهٔ

A بر l_1، جوابهای مختلف بسیار زیادی پیدا می‌کردیم (زیرا مثلثهای به دست آمده دیگر با هم قابل انطباق نبودند).

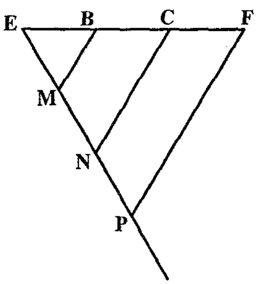
۵.۱.۲. زاویه



۴۷۷. بی‌شمار مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان رسم کرد. بدیهی است همهٔ این مثلثها متشابه‌اند.

۶.۱.۲. محیط، مساحت، رابطهٔ متری

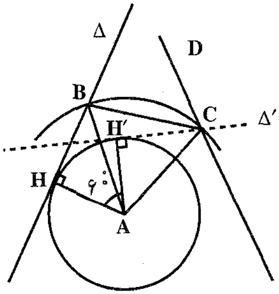
۱.۶.۱.۲. محیط



۴۷۸. پاره‌خط مفروض را EF می‌نامیم. کافی است این پاره‌خط را به سه قسمت متساوی تقسیم کنیم. برای این کار از E خط دلخواه Ex را رسم می‌کنیم و روی آن سه پاره‌خط مساوی متوالی $EM = MN = NP$ را جدا می‌کنیم. از P به F وصل می‌کنیم و از M و N خطهایی موازی PF رسم می‌کنیم تا EF را در B و C قطع کنند. سه پاره‌خط متساوی $EB = BC = CF$ به وجود می‌آیند که ضلعهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع می‌باشند.

۷.۱.۲. نقطه، خط

۴۷۹. اگر ABC مثلث متساوی‌الاضلاع خواسته شده باشد، چنانچه AB را حول نقطهٔ A به اندازهٔ $\alpha = \hat{A} = ۶۰°$ دوران دهیم، نقطهٔ B بر C منطبق می‌شود و چون برای رسم مثلث یکی از دو رأس دیگر آن کافی است معلوم باشد و از طرف دیگر چون نقطهٔ B یا C معلوم



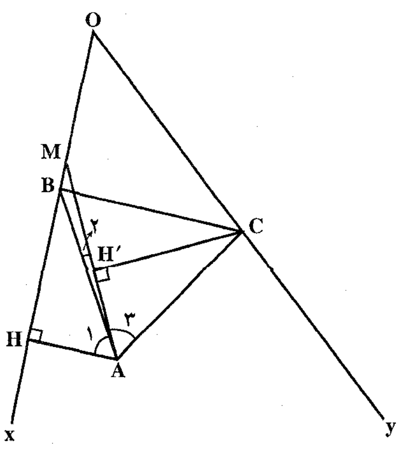
نمی‌باشد، لذا برای حل مسأله، خط Δ را حول نقطهٔ A به اندازهٔ ۶۰° دوران می‌دهیم. اگر Δ' وضع جدید Δ در دوران $(A, \alpha = ۶۰^\circ)$ باشد محل برخورد Δ' و D نقطهٔ C یک رأس مثلث ABC است. چنانچه C را در جهت عکس، دورانی $(A, \alpha = ۶۰^\circ)$ داده شود B رأس سوم مثلث به دست می‌آید (یا به عبارت دیگر به مرکز A و شعاع AC قوسی رسم می‌کنیم تا Δ را در B قطع کند). ABC مثلث خواسته شده است.

بحث. چنانچه Δ' با خط D متقاطع باشد، مسأله دارای جواب است. و چنانچه $\Delta' \parallel D$ باشد مسأله جواب ندارد و در صورتی که Δ' بر D منطبق باشد مسأله دارای بینهایت جواب است.

یادآوری. ۱. در صورتی که مثلث متساوی‌الساقین باشد بایستی زاویهٔ رأس A معلوم باشد و در این صورت خط Δ را به اندازهٔ زاویهٔ رأس A دوران می‌دهیم.

۲. ممکن است به جای دو خط Δ و D دو دایره و یا یک خط و یک دایره باشد. در این حالت نیز مجدداً یکی از دو دایره و یا خط و یا دایره را دوران می‌دهیم و مسأله را مانند بالا حل می‌کنیم.

۸.۱.۲. نقطه، زاویه

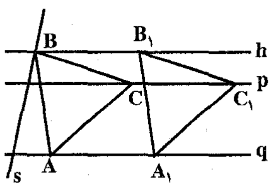


۴۸۰. از A بر Ox عمود می‌کنیم، زاویهٔ $\hat{\alpha} = ۶۰^\circ$ را به ضلع AH و رأس A می‌سازیم تا Ox را در M قطع کند، روی AM طول $AH' = AM$ را جدا می‌کنیم، در H' بر AM عمود می‌کنیم تا Oy را در C قطع کند، به مرکز A و شعاع AC دایره‌ای می‌زنیم. هرجا که Ox را قطع کرد نقطهٔ B است، از A به B و C وصل می‌کنیم، مثلث ABC مثلث

خواسته شده است چون دو مثلث قائم‌الزاویهٔ $AH'C$ و AHB برابرند، درنتیجه $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ پس، $\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = \hat{A}_2 + \hat{A}_3$ درنتیجه $B\hat{A}C = 60^\circ$ ، مثلث متساوی‌الساقینی که یک زاویهٔ آن 60° باشد متساوی‌الاضلاع است پس ABC نیز متساوی‌الاضلاع می‌باشد.
به‌طور خلاصه می‌توان گفت: ضلع Ox را نسبت به مرکز دوران A و با زاویهٔ دوران 60° دوران می‌دهیم تا این دوران یافته، Oy را در رأس C از مثلث ABC قطع کند. دایرهٔ به مرکز A و به شعاع AC ضلع Oy را در B قطع خواهد کرد.

۲.۱.۹. ضلع، خط

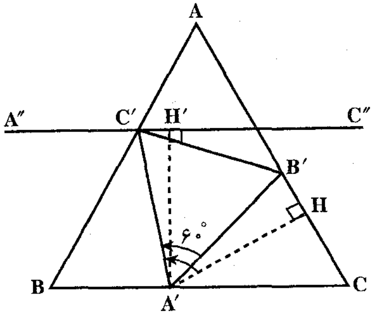
۴۸۱. از نقطهٔ اختیاری A_1 روی خط q دایره‌ای به شعاع برابر با طول ضلع مثلث رسم می‌کنیم. این دایره خط p را در نقطهٔ C_1 قطع می‌کند. مثلث متساوی‌الاضلاع $A_1B_1C_1$ را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ B_1 خط مستقیم h را به موازات p رسم می‌کنیم. نقطهٔ تقاطع خطهای h و s را با B نشان می‌دهیم. آن‌گاه مثلث $A_1B_1C_1$ را به اندازهٔ $\vec{V}$ که $\vec{V} = \overrightarrow{B_1B}$ است انتقال می‌دهیم. مسأله می‌تواند دارای دو جواب، یک جواب و یا فاقد جواب باشد.



۲.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

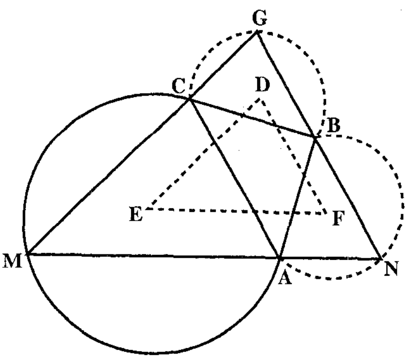
۲.۲.۱. مثلث، نقطه

۴۸۲. مسأله را حل شده و مثلث $A'B'C'$ را، مثلث جواب مسأله، که در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC محاط است، درنظر می‌گیریم. A' را رأس معلوم این مثلث فرض می‌کنیم. چون $A'B' = A'C'$ و $C'\hat{A}'B' = 60^\circ$ است، دورانی به مرکز A' و با زاویهٔ ۶۰ درجه رأس B' را به رأس C' تبدیل می‌کند، امّا B' روی ضلع AC از مثلث ABC و C' روی



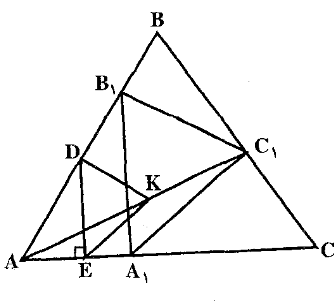
ضلع AB قرار دارد. پس برای رسم مثلث A′B′C′، ضلع AC از مثلث ABC را حول مرکز دوران A′ با زاویهٔ دوران °۶۰+ دوران می‌دهیم تا به وضع A″C″ درآید. نقطهٔ برخورد A″C″ با ضلع AB نقطهٔ C′ یک رأس دیگر مثلث A′B′C′ است. دوران ضلع A′C′ نسبت به مرکز دوران A′ و زاویهٔ °۶۰− رأس B′ را مشخص می‌کند و درنتیجه مثلث A′B′C′ رسم می‌شود.

۲.۲.۲. مثلث، ضلع



۴۸۳. روی ضلعهای AB، BC و CA کمان درخورهای زاویهٔ ۶۰ درجه را می‌سازیم و مرکزهای این کمان درخورها (D، E و F مرکزهای دایره‌هایی که این کمان درخورها بخشی از آنها هستند) را به هم وصل می‌کنیم تا مثلث DEF به‌دست آید. آن‌گاه از رأسهای A، B و C خطهایی موازی ضلعهای مثلث DEF رسم می‌کنیم تا مثلث MNG که جواب مسأله است، به‌دست آید.

۳.۲.۲. مثلث، خط



۴۸۴. راه اول. از نقطهٔ اختیاری D واقع بر AB عمود DE را بر AC رسم می‌کنیم (شکل). بر روی DE مثلث متساوی‌الاضلاع DKE را می‌سازیم. اگر A را مرکز تجانس بگیریم و AK را امتداد دهیم تا ضلع BC را در C_1

قطع کند و از این نقطه، چنانچه دو خط به موازات DK و KE رسم کنیم، مثلث $A_1B_1C_1$ جواب مسأله است.

راه دوم. فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد و $A_1B_1C_1$ مثلث خواسته شده باشد. در این صورت AB_1A_1 و BB_1C_1 متساوی‌اند. از آن‌جا $B_1A_1 = B_1C_1$ و $AB_1 = BC_1$. چنانچه $BB_1 = x$ فرض شود، $BC_1 = ۲x$ و چون $B\hat{C_1}B_1 = ۳۰^\circ$ است، پس $AB_1 = ۲x$ و $AB = AB_1 + B_1B = ۳x$، $AA_1 = BB_1 = CC_1 = \frac{AB}{۳}$. اکنون می‌توان مثلث را رسم کرد، زیرا $AA_1 = \frac{AC}{۳}$، $BB_1 = \frac{AB}{۳}$ و $CC_1 = \frac{BC}{۳}$ معلومند.

۴.۲.۲. مثلث، زاویه

۴۸۵. الف. زاویهٔ سوم مثلث $۱۸۰^\circ - (۴۰^\circ + ۹۰^\circ) = ۵۰^\circ$ است. برای رسم مثلث مورلی هر یک از زاویه‌های این مثلث را به سه‌بخش برابر تقسیم می‌کنیم. از برخورد خطهای ثلث‌ساز رسم شده، مثلث مورلی به‌دست می‌آید.
حالتهای ب، پ و ت به‌روش مشابه حل می‌شوند.

۵.۲.۲. مثلث، مساحت

۴۸۶. می‌دانیم که مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a مساوی $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ است. پس اگر این مثلث با مثلثی به مساحت S هم‌ارز باشد، داریم $S = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ و از آن‌جا $a^۲ = \frac{۴S}{\sqrt{۳}} = \frac{۴\sqrt{۳}S}{۳}$ و یا $a = ۲\sqrt{\frac{\sqrt{۳}S}{۳}}$ است. پس باید مثلثی متساوی‌الاضلاع به ضلع a رسم کنیم.

۴۸۷. مثلث ABC با مساحت S مفروض است. فرض می‌کنیم دو مثلث دیگر یکی بر ΔABC محیط و دیگری در آن محاط شده باشد و بترتیب مساحتهای S_1 و $S_۲$ داشته باشند و ضمناً ضلعهای نظیر به‌نظیر آنها موازی باشند. آن‌گاه $S^۲ = S_1S_۲$.

اثبات. دو مثلث را $M_1M_۲M_۳$ و $M'_1M'_۲M'_۳$ می‌گیریم. روشن است که این دو مثلث

متشابه هستند. فرض کنید O مرکز تجانس آنها باشد و K، L و P را بترتیب محلهای تقاطع ضلعهای مثلث داخلی با OA، OB و OC بگیرید.

$$\frac{S_{OKM_2}}{S_{OAM_2}}=\frac{OK}{OA}=\frac{OM_2}{OM'_2}=\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}$$

پس

$$S_{OKM_2}=\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}S_{OAM_2}$$

به‌همین ترتیب

$$S_{OKM_3}=\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}S_{OAM_3}\ ,\ S_{OLM_3}=\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}S_{OBM_3}$$

$$S_{OLM_1}=\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}S_{OBM_1}\ ,\ S_{OPM_1}=\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}S_{OCM_1}$$

$$S_{OPM_2}=\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}S_{OCM_2}\ ,\ S_{M_1M_2M_3}=\sqrt{\frac{S_1}{S_2}}S_{ABC}$$

پس $S=\sqrt{S_1S_2}\Rightarrow S^2=S_1S_2$

حال با توجه به این لم کافی است مثلثی بیابیم که بر مثلث ABC محیط باشد و بیشترین مساحت را داشته باشد.

ضمناً رأسهای این مثلث متساوی‌الاضلاع روی کمان حاوی ۶۰ درجه برای ضلعهای AC، BC و BA هستند.

یعنی مسأله منجر به این می‌شود که بزرگترین مقدار M_1A+M_2A را بیابیم.

از آن‌جا که $O_1O_2\geq H_1H_2=\frac{M_1M_2}{2}$

پس موقعی این مقدار بیشترین مقدار ممکن است که موازی خط‌المرکزین باشد.

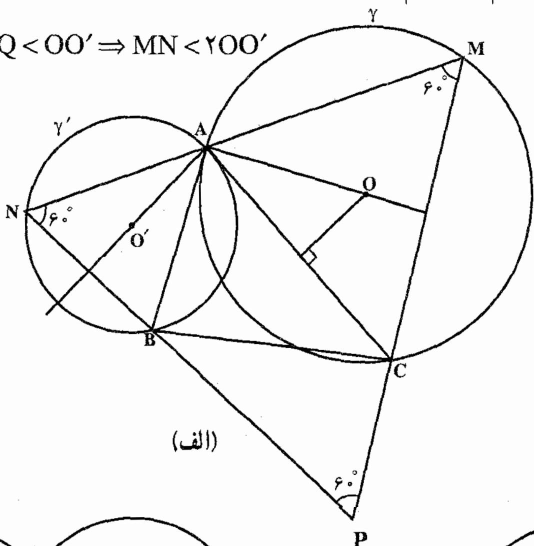
۶.۲.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۸۸. شکل سنگفرش از آجرهای به شکل مثلث متساوی‌الاضلاع به‌دست می‌آید؛ که در هر رأس آن، شش مثلث در کنار هم قرار گرفته‌اند.

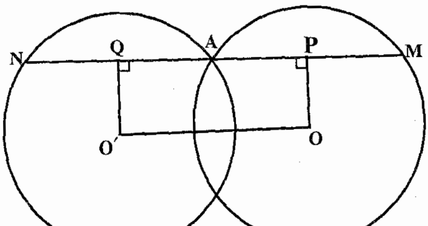
۷.۲.۲. مسأله‌های ترکیبی

۴۸۹. کمان درخورهای ۶۰° را بر AC و AB رسم کرده و آنها را دوایر γ و γ' می‌نامیم. هر خطی که از A رسم شود تا γ و γ' را در M و N قطع کند، آن‌گاه خطهای MC و NB همدیگر را در نقطه‌ای مانند P قطع می‌کنند. مثلث MNP متساوی‌الاضلاع است (شکل الف). درنتیجه بی‌نهایت مثلث متساوی‌الاضلاع می‌توان بر ABC محیط کرد. حال برای این که مساحت یا محیط یک مثلث متساوی‌الاضلاع، ماکزیمم شود کافی است ضلع آن ماکزیمم شود. پس برای حل این قسمت کافی است از نقطهٔ A خطی رسم کنیم تا MN ماکزیمم شود. ثابت می‌کنیم هرگاه از A خطی به موازات OO' (خط‌المرکزین در دایرهٔ γ و γ') رسم کنیم این خاصیت را خواهد داشت. اگر MN موازی OO' باشد، آن‌گاه واضح است که $MN = ۲OO'$ (شکل ب). ولی اگر MN موازی OO' نباشد، $MN < OO'$ (شکل ج). زیرا اگر از O و O' به MN عمود کنیم و پاهای عمود را P و Q بنامیم، خواهیم داشت:

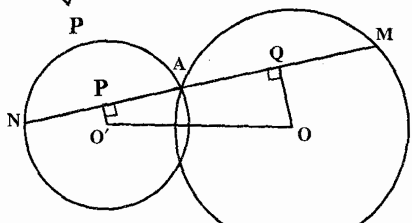
$$\frac{MN}{۲} = PQ < OO' \Rightarrow MN < ۲OO'$$



(الف)

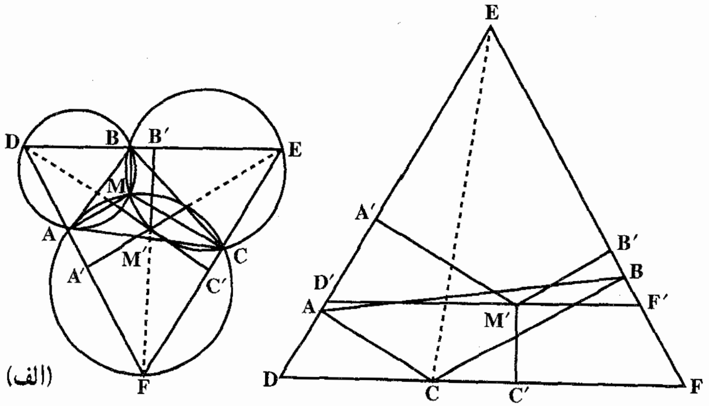


(ب)



(ج)

۴۹۰. الف. اگر DEF مثلث متساوی‌الاضلاعی محیط بر مثلث ABC باشد و AM، BM و CM بر ضلعهای مثلث DEF عمود باشند، بدیهی است که داریم $A\hat{M}B = B\hat{M}C = C\hat{M}A = ۱۲۰°$ (شکل الف). از این‌جا نتیجه می‌شود که M نقطهٔ برخورد کمانهای مستدیر حاوی °۱۲۰، رسم شده بر ضلعهای مثلث ABC است. با یافتن M می‌توانیم مثلث DEF را به‌راحتی رسم کنیم. نقطهٔ M داخل مثلث ABC خواهد بود اگر هیچ یک از زاویه‌های مثلث ABC بیش از °۱۲۰ نباشد؛ اگر مثلاً $\hat{C} = ۱۲۰°$، آن‌گاه $M = C$؛ اگر $\hat{C} > ۱۲۰°$، آن‌گاه M در بیرون مثلث ABC واقع می‌شود.



(الف) (ب)

حالت اول را درنظر می‌گیریم. فرض کنید M′ نقطهٔ دلخواهی درون مثلث ABC باشد و M′A′، M′B′ و M′C′ عمودهای وارد از M′ بر ضلعهای مثلث DEF باشند. داریم:

مساحت (مثلث FDM′) + مساحت (مثلث EFM′) + مساحت (مثلث DEM′) = مساحت (مثلث DEF)

یا، اگر a و h بترتیب ضلع و ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع DEF باشند، داریم:

$$\frac{۱}{۲}ah = \frac{۱}{۲}a.M'A' + \frac{۱}{۲}a.M'B' + \frac{۱}{۲}a.M'C'$$

یعنی

$$M'A' + M'B' + M'C' = h$$

امّا $M'A \geq M'A'$، $M'B \geq M'B'$ و $M'C \geq M'C'$ (زیرا فاصلهٔ عمودی کوتاهترین فاصله است)؛ بنابراین

$$M'A + M'B + M'C \geq h$$

و تساوی تنها وقتی برقرار است که M' بر M منطبق باشد. پس M همان نقطهٔ مطلوب است.

اگر $M = C$، آن‌گاه C نقطهٔ مطلوب است. سرانجام، اگر $\hat{C} > ۱۲۰^\circ$ آن‌گاه باز هم مجموع فاصله‌های رأس C از رأسهای دیگر مثلث کمتر از مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ دیگر تا رأسهای مثلث خواهد بود. برای اثبات این امر یک مثلث متساوی‌الساقین DEF بر مثلث ABC طوری محیط می‌کنیم که $CA \perp DE$، $CB \perp EF$ (شکل ب). M' را نقطهٔ دلخواهی درون مثلث ABC می‌گیریم و پاهای عمودهای وارد از M' بر ضلعهای مثلث DEF را A'، B' و C' می‌نامیم؛ فرض می‌کنیم مثلث $D'EF'$ مثلثی متشابه با DEF باشد که قاعدهٔ $D'F'$ آن از M' بگذرد. پس داریم:

مساحت (مثلث CEF) + مساحت (مثلث CDE) = مساحت (مثلث DEF)

و بنابراین

$$CA + CB = h$$

که در آن h ارتفاع مثلث DEF وارد بر یکی از ضلعهای متساوی آن است. به طریق مشابهی نتیجه می‌گیریم:

$$M'A' + M'B' = h'$$

که در آن $h' = kh$ ارتفاع مثلث $D'EF'$ است (k نسبت تشابه است، $k < ۱$).
ارتفاعهای مثلثهای DEF و $D'EF'$ وارد بر قاعده‌های متناظر آنها را به H و $H' = kH$ نشان می‌دهیم. چون $\hat{E} = ۱۸۰^\circ - \hat{C} < ۶۰^\circ$، داریم $DF < DE$، $H > h$.
بنابراین:

$$\begin{aligned} M'A' + M'B' + M'C' &= h' + (H - H') = H - (H' - h') \\ &= H - k(H - h) > H - (H - h) \\ &= h = CA + CB \end{aligned}$$

روشن است که داریم:

$$M'A' + M'B' + M'C' \le M'A + M'B + M'C$$

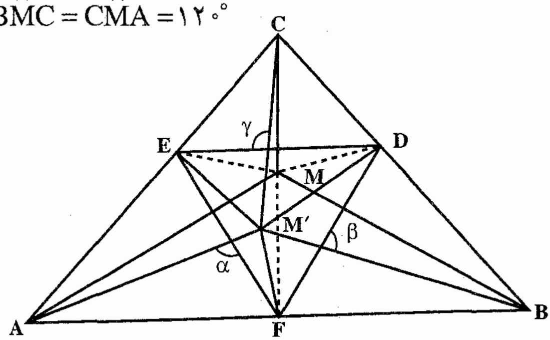
و بنابراین

$$M'A + M'B + M'C > CA + CB$$

که همان حکمی است که باید ثابت می‌شد.

ب. اگر AM، BM و CM بر ضلعهای مثلث متساوی‌الاضلاع DEF محاط در مثلث ABC عمود باشند، روشن است که

$$A\hat{M}B = B\hat{M}C = C\hat{M}A = ۱۲۰^\circ$$



(شکل). پس برای حل مسأله باید یک نقطهٔ M بیابیم که از آن همهٔ ضلعهای مثلث به زاویه‌های ۱۲۰° دیده شوند، و سپس در مثلث ABC یک مثلث DEF محاط کنیم که اضلاعش بر AM، BM و CM عمود باشند. در عین حال، اگر همهٔ زاویه‌های مثلث ABC کمتر از ۱۲۰° باشند، رأسهای مثلث DEF بر ضلعهای مثلث ABC واقع خواهند بود و نه بر امتداد آنها.

فرض کنید که حالت اخیر برقرار است. در این صورت:

مساحت (MEAF) + مساحت (MDCE) = مساحت (مثلث ABC)

+ مساحت (MFBD)

$$= \frac{۱}{۲}DE.MC + \frac{۱}{۲}EF.MA + \frac{۱}{۲}FD.MB$$

$$= \frac{۱}{۲}DE(MA + MB + MC)$$

اکنون ′M را نقطهٔ دلخواهی درون مثلث ABC می‌گیریم و زاویه‌های خطهای M′A، M′B و M′C را با ضلعهای متناظر در مثلث DEF بترتیب α، β و γ می‌نامیم. در این صورت:

مساحت (M′EAF) + مساحت (M′DCE) = مساحت (مثلث ABC)

+(M′FBD) مساحت

$$= \frac{۱}{۲}DE.M'C\sin\gamma + \frac{۱}{۲}EF.M'A\sin\alpha + \frac{۱}{۲}FD.M'B\sin\beta$$

$$\le \frac{1}{2} DE(M'A + M'B + M'C)$$

از این‌جا خواهیم داشت :

$$MA + MB + MC \le M'A + M'B + M'C$$

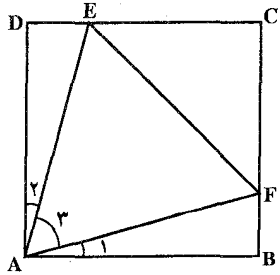
یعنی همان حکمی که باید ثابت می‌شد.

۳.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی و داده‌های دیگر

۱.۳.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن چندضلعی

۱.۱.۳.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن مربع

۴۹۱. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم و مربع ABCD و مثلث متساوی‌الاضلاع AEF داده شده است. دو مثلث AFB و ADF با هم برابرند؛ زیرا $AF = AE$ و $AB = AD$. پس بنابراین $\hat{A}_1 = \hat{A}_2$ و چون $\hat{A}_3 = 60°$ می‌باشد، پس، $\hat{A}_1 = \hat{A}_2 = 15°$ است.
مربع ABCD را رسم می‌کنیم و سپس خطهای AE و AF را طوری رسم می‌کنیم که بترتیب با AD و AB یک زاویهٔ ۱۵ درجه رسم شود. از E به F وصل می‌کنیم. دو مثلث ADE و AFB در حالت دو زاویه و ضلع بین با هم برابرند، پس $AE = AF$ و چون $\hat{A}_3 = 60°$ است، پس $AE = AF = EF$ است.



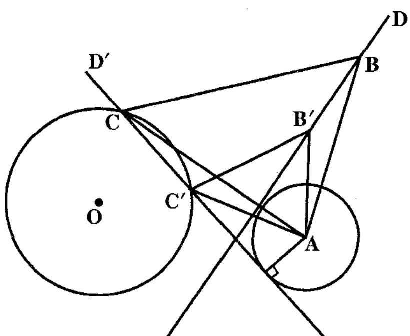
۴.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر

۱.۴.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن دایره در حالت کلی و داده‌های دیگر

۱.۱.۴.۲. یک دایره، رأس، خط

۴۹۲. مسأله را حل شده انگاشته ملاحظه می‌کنیم که هرگاه رأس B را حول A به زاویهٔ ۶۰ درجه در جهت مناسب دوران دهیم بر C منطبق می‌شود، بنابراین هرگاه خط D را حول نقطهٔ A به زاویهٔ °۶۰ دوران دهیم خط D به وضع ′D درمی‌آید و نقطهٔ B که همراه ′D دوران کرده و باید بر C منطبق شود. در محل تقاطع دایرهٔ (O) با خط ′D واقع خواهد بود.

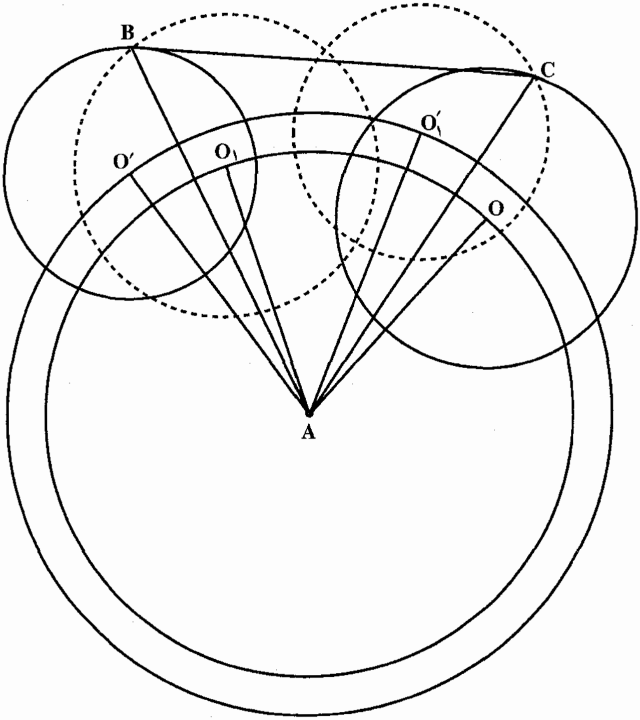
شرط امکان مسأله آن است که خط ′D دایرهٔ (O) را قطع نماید. چون عمل دوران را می‌توان در دو جهت انجام داد، مسأله حداکثر چهار جواب دارد.



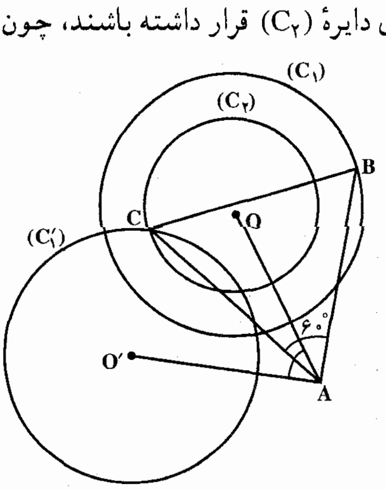
۱.۲.۱.۴.۲. دو دایره، نقطه

۴۹۳. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث متساوی‌الاضلاع ABC جواب مسأله باشد. دایرهٔ O را به اندازهٔ °۶۰ حول نقطهٔ A دوران می‌دهیم تا دایرهٔ ′O را در B قطع کند و دایرهٔ

O' را به اندازهٔ $60°$ حول نقطهٔ A دوران می‌دهیم تا دایرهٔ O را در C قطع کند (بحث) مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به‌دست می‌آید.

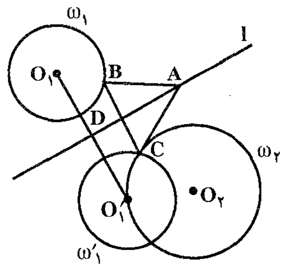


۴۹۴. نقطهٔ ثابت A و دو دایرهٔ هم مرکز (C) و (C′) به مرکز مشترک O را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم B روی دایرهٔ (C_1) و C روی دایرهٔ (C_2) قرار داشته باشند، چون $B\hat{A}C = 60°$ و $BA = CA$ است. پس دورانی به مرکز A و به زاویهٔ $60°$ رأس B را به رأس C تبدیل می‌کند. امّا رأس B روی دایرهٔ (C_1) و رأس C روی دایرهٔ (C_2) است. بنابراین دایرهٔ (C_1) را نسبت به مرکز دوران A و با زاویهٔ دوران $+60°$ دوران می‌دهیم تا دایرهٔ (C'_1) به‌دست آید. نقطهٔ برخورد دایرهٔ (C'_1) با دایرهٔ (C) رأس C



است. به مرکز A و به شعاع AC دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ(C_1) را در رأس B قطع کند. مثلث ABC جواب مسأله است.

۴۹۵. فرض کنید که مثلث ABC، مثلث خواسته شده باشد. از آن‌جا که ارتفاع AD از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به خط l تعلق دارد، از این‌رو نقطه‌های B و C نسبت به این خط متقارن بوده و روی دایره‌های داده شدهٔ ω_1 و ω_2 واقع خواهند بود.

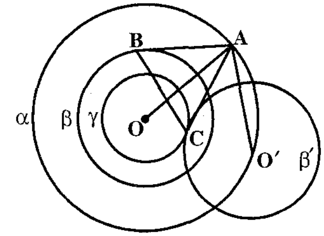


از آن‌جا که نقطهٔ C به دایرهٔ ω_2 متعلق بوده و نسبت به خط l متقارن نقطهٔ B از دایرهٔ ω_1 است، از این‌رو نقطهٔ C نیز به تصویر متقارن دایرهٔ ω_1 نسبت به خط l متعلق خواهد بود. درنتیجه، C نقطهٔ مشترک دایرهٔ ω_2 و تصویر دایرهٔ ω_1 نسبت به محور S_l خواهد بود. بدین ترتیب با رسم دایرهٔ ω'_1 که متقارن دایرهٔ ω_1 نسبت به محور l است، نقطهٔ C به‌دست می‌آید. نقطهٔ B تصویر متقارن نقطهٔ C نسبت به محور تقارن l بوده و تصویر نقطهٔ A نسبت به این محور نیز برروی خود منطبق می‌شود. بنابراین برای رسم مثلث خواسته شده به‌ترتیب زیر باید عمل کنید: الف. تصویر دایرهٔ ω_1 را نسبت به محور تقارن S_l پیدا کنید؛ ب. نقطه‌های تقاطع دایره‌های ω'_1 و ω_2 را بیابید؛ پ. روی دایره ω_1 تصویرهای نقطه‌های تلاقی دایره‌های ω'_1 و ω_2 را به‌دست آورید؛ ت. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را رسم کنید که رأس A آن نیز به خط S_l متعلق است.

اگر دایره‌های ω'_1 و ω_2 متقاطع باشند در آن صورت مسأله چهار جواب خواهد داشت. اگر دایره‌های ω'_1 و ω_2 بر هم مماس باشند مسأله دو جواب پیدا می‌کند. درصورت انطباق دایرهٔ ω'_1 بر دایره ω_2 مسأله دارای بینهایت جواب خواهد شد. درصورت فقدان نقطهٔ تقاطع برای دایره‌های ω'_1 و ω_2 مسأله فاقد جواب می‌شود.

۳.۱.۴.۲. سه دایره

۴۹۶. یکی از رأسها مثلاً A را روی محیط یکی از سه دایره به اختیار انتخاب می کنیم (شکل). اگر مسأله را حل شده فرض کنیم نقطهٔ C متناظر B در دوران $(A,60^\circ)$ است. بنابراین از نقطهٔ C دو مکان در دست است یکی دایرهٔ (γ) و دیگری دایرهٔ (β') که از دوران (β) در دوران بالا به‌دست می‌آید. پس از تعیین C مثلث را تکمیل می‌کنیم، از دوران



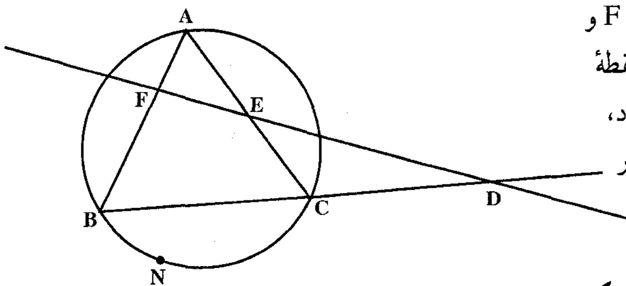
$(A,-۶۰^\circ)$ دو جواب دیگر به‌دست می‌آید که قرینهٔ اوّلی نسبت به A و O می‌باشند.

اگر R و ′R و ″R شعاعهای سه دایره باشند، شرط این که مسأله دارای جواب باشد، این است که:

$$R' - R'' \leq R < R' + R''$$

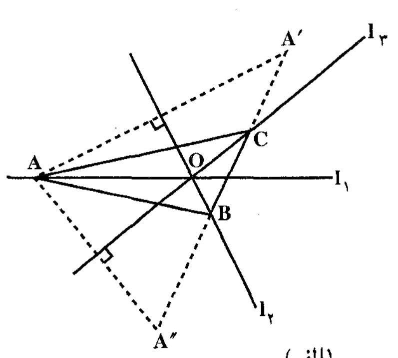
۴.۱.۴.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۹۷. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث متساوی‌الاضلاع ABC که ضلعهای آن از سه نقطهٔ همخط D، E و F و دایرهٔ محیطی آن از نقطهٔ ثابت N می‌گذرد، جواب مسأله باشد، در این صورت، ...

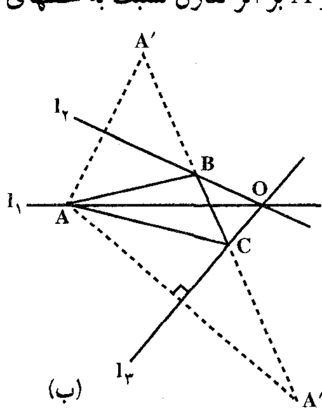


۵.۱.۴.۲. مسأله‌های ترکیبی

۴۹۸. الف. فرض می‌کنیم مثلث ABC رسم شده، و l_2 زاویهٔ B، و l_3 زاویهٔ C را نصف کرده‌اند (شکل الف). پس خطهای BA و BC قرینه‌های یکدیگر نسبت به l_2، و خطهای BC و AC قرینه‌های یکدیگر نسبت به l_3 هستند، و بنابراین نقطه‌های ′A و ″A، که از A بر اثر تقارن نسبت به خطهای l_2 و l_3 به‌دست آمده‌اند، بر خط BC واقعند.



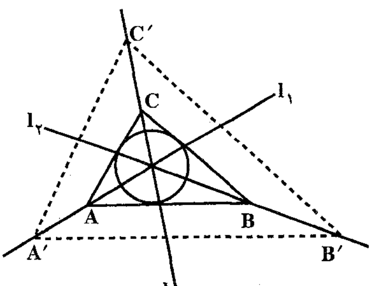
(الف)



(ب)

پس ترسیم زیر به‌دست می‌آید: قرینه‌های نقطهٔ A را نسبت به خطهای l_2 و l_3 پیدا می‌کنیم تا نقطه‌های A' و A'' به‌دست آیند، نقطه‌های برخورد خط $A'A''$ با خطهای l_2 و l_3، رأسهای B و C هستند.

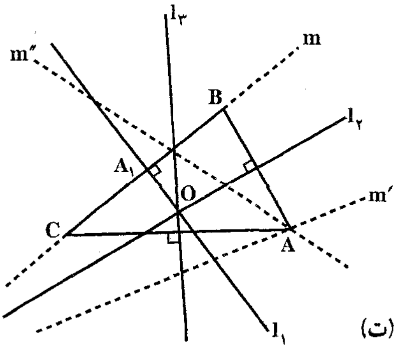
اگر l_2 و l_3 متعامد باشند، خط $A'A''$ از نقطهٔ برخورد سه خط مفروض می‌گذرد و مسأله جوابی ندارد؛ اگر l_1 بر یکی از خطهای l_2 و l_3 عمود باشد، $A'A''$ با خط دیگر موازی خواهد شد و در این حالت نیز مسأله جواب ندارد. در حالتی که هیچ دو خطی از سه خط مفروض متعامد نباشند مسأله جوابی یکتا دارد. درصورتی که هریک از سه خط مفروض در داخل زاویهٔ منفرجهٔ متشکل از دو خط دیگر باشد، سه خط زاویه‌های درونی مثلث ABC را نصف خواهند کرد؛ ولی اگر، مثلاً l_1 در داخل زاویهٔ حادهٔ حاصل از l_2 و l_3 باشد، این دو خط اخیر زاویه‌های خارجی مثلث را نصف می‌کنند (شکل ب). اثبات این حکم را به خواننده واگذار می‌کنیم.



(پ)

ب. نقطهٔ دلخواه A' را بر یکی از خطها انتخاب و مثلث $A'B'C'$ را که در آن سه خط l_1، l_2 و l_3 نیمسازهای زاویه‌های درونی آن هستند، رسم می‌کنیم (قسمت الف). بر S مماسهایی به موازات ضلعهای مثلث $A'B'C'$ رسم می‌کنیم (شکل پ). مثلثی که به‌دست می‌آید جواب مسأله است.

اگر هریک از سه خط l_1، l_2 و l_3 در زاویهٔ منفرجه متشکل از دوتای دیگر واقع شده باشد، دایرهٔ مفروض دایرهٔ محاطی خارجی مثلث خواهد شد.



(ت)

ج. فرض کنیم مثلث ABC پیدا شده است (شکل ت). چون نقطهٔ A قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به خط l_2 است، پس باید بر قرینهٔ BC نسبت به l_2 واقع باشد؛ و چون A قرینهٔ C نسبت به l_3 است، باید بر قرینهٔ BC نسبت به l_3 نیز واقع باشد.

پس راه ترسیم زیر به‌دست می‌آید: خط m را بر A_1 و عمود بر l_1 می‌گذرانیم، سپس خطهای m' و m'' را از قرینه‌های m نسبت به خطهای l_2 و l_3 به‌دست می‌آوریم. نقطهٔ برخورد m' و m'' رأس A ی مثلث مطلوب خواهد بود؛ رأسهای B و C قرینه‌های این رأس نسبت به خطهای l_2 و l_3 هستند (شکل ت).

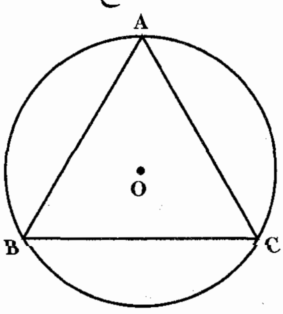
اگر خطهای l_2 و l_3 متعامد باشند، آن‌گاه یا خطهای m' و m'' که از قرینه‌های m نسبت به l_2 و l_3 به‌دست می‌آیند، موازی هستند (به شرطی که نقطهٔ A_1 بر O، محل برخورد سه خط l_1، l_2 و l_3، منطبق نباشد) یا بر هم منطبقند (اگر A_1 بر O منطبق باشد). در حالت اوّل مسأله جواب ندارد، درصورتی که در حالت دوم جواب به‌طور یکتا تعیین نمی‌شود. در کلیهٔ حالات دیگر جواب یکتا است.

اگر بخواهیم مثلث ABC متساوی‌الاضلاع باشد، باید زاویهٔ بین خطهای d_1، d_2 و d_3، دوبه‌دو، مساوی 120° باشد.

۲.۴.۲. رسم مثلث با معلوم بودن دایرهٔ محیطی یا شعاع دایرهٔ محیطی و داده‌های دیگر

۱.۲.۴.۲. رسم مثلث با معلوم بودن دایرهٔ محیطی

۴۹۹. شعاع دایرهٔ داده شده را R می‌گیریم. می‌دانیم که ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ به شعاع R مساوی $R\sqrt{3}$ است. بنابراین باید پاره‌خطی به طول $R\sqrt{3}$ رسم کنیم (روش رسم در شکل مشخص است). آن‌گاه نقطهٔ دلخواه A را روی دایره درنظر گرفته به مرکز A و به شعاع $R\sqrt{3}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ O را در B و C قطع کند. از B به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

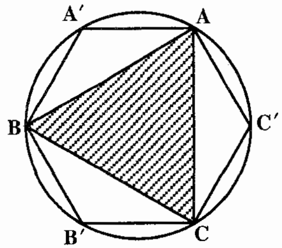


تبصره. می‌توانیم دایره را به شش کمان مساوی تقسیم کنیم و نقطه‌های تقسیم را یک درمیان به هم وصل کنیم.

نکته. در دایره‌ای به شعاع R وتری که طولش R باشد؛ ضلع شش ضلعی منتظم محاط در آن دایره است.

۲.۲.۴.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن شعاع دایرهٔ محیطی

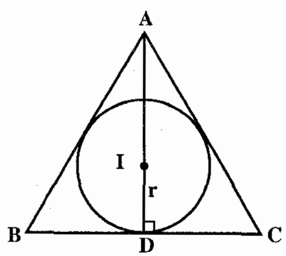
۵۰۰. شعاع دایرهٔ محیطی مثلث متساوی‌الاضلاع را R فرض می‌کنیم و این دایره را رسم می‌کنیم. سپس دایرهٔ رسم شده را به شش قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم به این ترتیب که وترهایی به طول R به‌طور متوالی روی دایره پیدا می‌کنیم. سپس شش نقطهٔ به‌دست آمده را یک درمیان به هم وصل می‌کنیم. مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره‌ای به شعاع R به‌دست می‌آید.



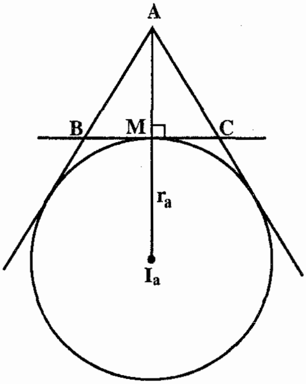
۳.۴.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن دایره‌های محاطی یا شعاع دایره‌های محاطی

۱.۳.۴.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن دایره‌های محاطی

۵۰۱. دایرهٔ I را دایرهٔ محاطی درونی مثلث متساوی‌الاضلاع ABC می‌گیریم. می‌دانیم که مرکز ثقل، مرکز ارتفاعی مثلث متساوی‌الاضلاع بر هم منطبق می‌باشند. پس I مرکز ثقل مثلث متساوی‌الاضلاع ABC نیز هست. پس، شعاع دلخواه DO از دایرهٔ (I) را رسم کرده آن را از طرف I به اندازهٔ دو برابر خود امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ A به‌دست آید. DA ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع موردنظر است. در D مماسی بر دایرهٔ (I) رسم می‌کنیم و از A دو خط مماس بر این دایره رسم می‌نماییم تا مماس رسم شده در D بر دایره را در B و C قطع کنند. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC جواب مسأله است.



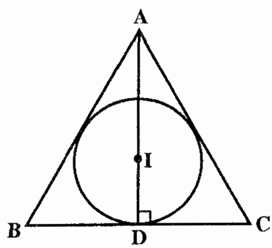
۵۰۲. مسأله را حل شده و دایرهٔ (I_a) را دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع BC از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC فرض می‌کنیم. می‌دانیم که این دایره در نقطهٔ M وسط ضلع BC بر این ضلع مماس است و شعاع آن $r_a = h_a = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است. بنابراین برای رسم



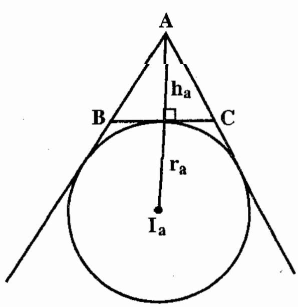
مثلث ABC، از I_a به M وصل می‌کنیم و I_aM را از طرف M به اندازهٔ $MA = r_a$، یعنی ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a رسم می‌کنیم. سپس از A دو مماس بر دایرهٔ (I_a) رسم می‌نماییم تا مماس رسم شده در M بر این دایره را در B و C قطع کنند. مثلث متساوی‌الاضلاع ABC جواب مسأله است.

۲.۳.۴.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن شعاع دایره‌های محاطی

۵۰۳. به مرکز نقطه‌ای دلخواه مانند I دایره‌ای به شعاع r رسم می‌کنیم. سپس همان‌طوری که قبلاً دیدیم مثلث متساوی‌الاضلاع را بر آن محیط می‌کنیم.



۵۰۴. به مرکز نقطه‌ای اختیاری مانند I_a دایرهٔ محاطی برونی مثلث متساوی‌الاضلاع را رسم می‌کنیم و آن‌گاه مثلث متساوی‌الاضلاع موردنظر را همان طوری که قبلاً دیدیم رسم می‌کنیم.



۳.۳.۴.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

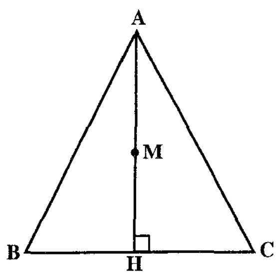
۵۰۵. ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع جواب مسأله را a فرض می‌کنیم. اندازهٔ شعاع دایرهٔ محاطی درونی این مثلث $r=\frac{a\sqrt{۳}}{۶}$ و اندازهٔ ارتفاع آن $h_a=\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است. از آن‌جا $r+h_a=\frac{a\sqrt{۳}}{۶}+\frac{a\sqrt{۳}}{۲}=a(\frac{\sqrt{۳}}{۶}+\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ (۱) است. بنابراین با داشتن پاره‌خطی به‌طول $l=a(\frac{\sqrt{۳}}{۶}+\frac{\sqrt{۳}}{۲})$ باید اندازهٔ پاره‌خط به طول a را به‌دست آوریم. برای این کار رابطهٔ (۱) را به‌صورت $\frac{۱}{a}=\frac{\frac{\sqrt{۳}}{۶}+\frac{\sqrt{۳}}{۲}}{l}$ می‌نویسیم و چهارمین جزء این تناسب یعنی a را به روش ترسیم به‌دست می‌آوریم. با مشخص شدن اندازهٔ ضلع این مثلث رسم آن بسادگی انجام می‌شود.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۳
رسم مثلث متساوی‌الساقین

۱.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ ارتفاع، میانه، نیمساز؛...

۱.۱.۳. نقطه

۵۰۶. از A به M وصل می‌کنیم و از B خطی عمود بر AM رسم می‌کنیم تا آن را در نقطهٔ H قطع کند. BH را به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ C به‌دست آید. از A به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC رسم می‌شود.



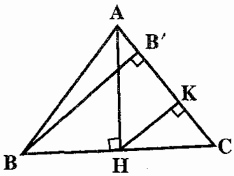
۲.۱.۳. ضلع

۵۰۷. چون دو ساق مثلث متساوی‌الساقین مساوی‌اند، پس در حقیقت سه ضلع مثلث معلوم است و با معلوم بودن سه ضلع، مثلث را می‌توان رسم کرد.

۳.۱.۳. ارتفاع، میانه، نیمساز

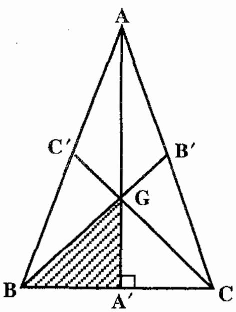
۱.۳.۱.۳. ارتفاع

۵۰۸. از مثلث متساوی‌الساقین ABC ارتفاع AH و ارتفاع BB' معلومند (شکل). اگر از نقطهٔ H خط HK را به موازات BB' رسم کنیم، HK برابر $\frac{BB'}{۲}$ خواهد بود. پس راه حل مسأله چنین است که ابتدا مثلث قائم‌الزاویهٔ AHK را با معلوم بودن وتر AH و ضلع HK رسم می‌کنیم و امتداد خطی را که در H بر AH عمود می‌شود در نقطهٔ C AH قطع می‌کند. رأس B بسهولت پیدا می‌شود.



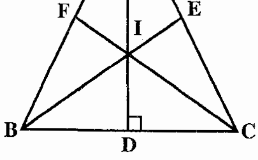
۲.۳.۱.۳. میانه

۵۰۹. مسأله را حل شده و مثلث متساوی‌الساقین ABC، $AB = AC$ را جواب مسأله می‌گیریم. میانه‌های معلوم را AA' و CC' می‌گیریم. بدیهی است که BB' نیز با CC' برابر است. اگر G نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث باشد، مثلث قائم‌الزاویهٔ GBA' به حالت معلوم بودن وتر و یک ضلع ($BG = \frac{۲}{۳}m_b$ ، $GA' = \frac{۱}{۳}m_a$ و $\hat{A'} = ۹۰°$) قابل رسم است. پس از رسم این مثلث قرینهٔ B نسبت به A' رأس C است و اگر GA' را به اندازهٔ دو برابر خود امتداد دهیم رأس A به‌دست می‌آید. از A به B و C وصل می‌کنیم.



۳.۳.۱.۳. نیمساز

۵۱۰. مسأله را حل شده و مثلث متساوی‌الساقین $(AB = AC)ABC$ را جواب مسأله می‌گیریم. نیمسازهای AD، BE و CF را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که نیمساز AD عمودمنصف BC و دو نیمساز BE و CF با



هم برابرند، یعنی $BE = CF$ است. داریم:

$$d_a = \frac{۲}{b+c}\sqrt{pbc(p-a)}\ ,\ \ b = c \Rightarrow d_a = \sqrt{(b+\frac{a}{۲})(b-\frac{a}{۲})}$$

$$\Rightarrow d_a = \sqrt{b^۲ - \frac{a^۲}{۴}} \qquad (۱)$$

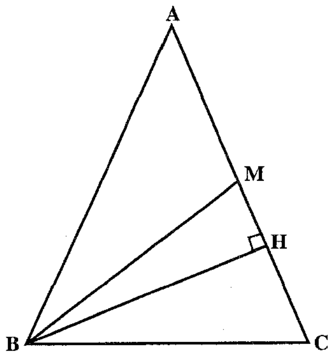
$$d_b = \frac{۲}{a+b}\sqrt{ab(b+\frac{a}{۲})(\frac{a}{۲})}$$

$$\Rightarrow d_b = \frac{۲a}{a+b}\sqrt{\frac{b}{۲}(b+\frac{a}{۲})} \qquad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) اندازهٔ a و b محاسبه می‌شود و از آن‌جا با معلوم بودن اندازه‌های یک ساق و یک قاعدهٔ مثلث رسم می‌شود.

۴.۳.۱.۳. ارتفاع، میانه

۵۱۱. مسأله را حل شده و مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ را جواب مسأله می‌گیریم. میانهٔ BM و ارتفاع BH را رسم می‌کنیم....

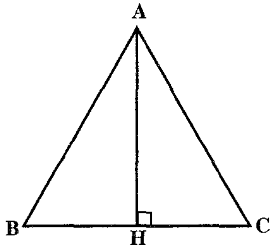


۴.۱.۳. ضلع، ارتفاع، میانه، نیمساز

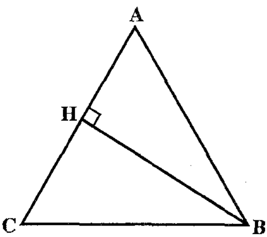
۱.۴.۱.۳. ضلع، ارتفاع

۵۱۲. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم، ارتفاع AH از مثلث متساوی‌الساقین

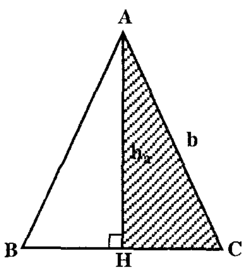
$ABC(AB = AC)$ را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که AH عمودمنصف BC است. بنابراین برای رسم مثلث بترتیب زیر عمل می‌کنیم. پاره‌خط BC را به طول a رسم می‌کنیم. عمودمنصف این پاره‌خط را رسم می‌نماییم و نقطهٔ وسط BC را H می‌نامیم. پاره‌خط HA را روی عمودمنصف به اندازهٔ ارتفاع h_a جدا می‌کنیم و از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC رسم می‌شود.



نکته. می‌توانیم از قابل رسم بودن دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB و AHC به‌دلیل معلوم بودن دو ضلع زاویهٔ قائمه برای رسم مثلث ABC استفاده کنیم.

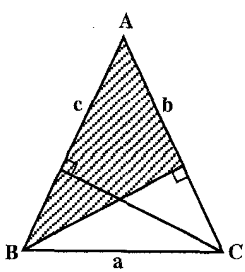


۵۱۳. مثلث قائم‌الزاویهٔ BHC را با معلوم بودن BC و BH رسم می‌کنیم و از نقطهٔ B زاویهٔ $C\hat{B}A$ را برابر $B\hat{C}A$ می‌سازیم.



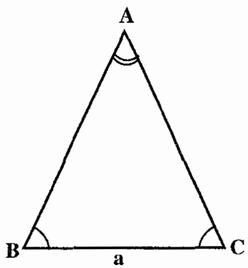
۵۱۴. مثلث قائم‌الزاویهٔ $AHC(\hat{H} = 90°)$ را با معلوم بودن اندازهٔ وتر $AC = b$ و ضلع $AH = h_a$ رسم می‌کنیم. سپس قرینهٔ رأس C را نسبت به ارتفاع AH به‌دست می‌آوریم تا رأس B به‌دست آید. از A به B وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۵۱۵. مسأله را حل شده و مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ را جواب مسأله می‌گیریم. با معلوم بودن ساق $AC = b$، ساق $AB = c$ نیز معلوم است، زیرا $AB = AC = b$ است. بنابراین مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH را با معلوم بودن اندازهٔ یک ضلع زاویهٔ قائمه (BH) و اندازهٔ وتر AB می‌توان رسم کرد. پس از رسم این مثلث روی AH، $AB = AC = b$ را جدا می‌کنیم و از C به B وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

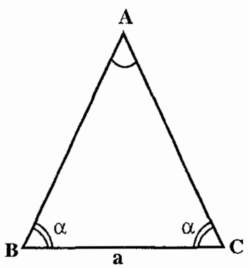


۵.۱.۳. ضلع، زاویه

۱.۵.۱.۳. یک ضلع، یک زاویه

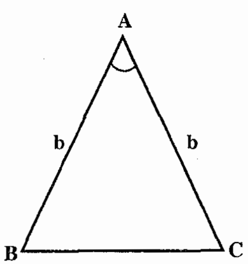


۵۱۶. با معلوم بودن یک زاویه از مثلثی متساوی‌الساقین اندازهٔ زاویه‌های دیگر آن نیز مشخص است. بنابراین اندازهٔ دو زاویهٔ $\hat{B}$ و $\hat{C}$ از مثلث متساوی‌الساقین ABC معلوم است و بنابراین، این مثلث را با در دست داشتن یک ضلع و دو زاویهٔ مجاورش می‌توان رسم کرد (حالت کلاسیک رسم مثلث).

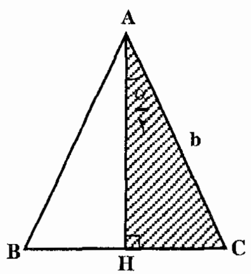


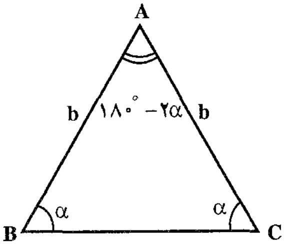
۵۱۷. با معلوم بودن اندازهٔ یک زاویه از مثلثی متساوی‌الساقین اندازهٔ دو زاویهٔ دیگرش نیز معلوم است. بنابراین اندازهٔ زاویه‌های $\hat{C}$ و $\hat{A}$ نیز مشخص است و این مثلث را با معلوم بودن یک ضلع و دو زاویه (حالت کلاسیک) می‌توان رسم کرد.

۵۱۸. **راه اوّل.** مثلث متساوی‌الساقین $ABC(AB = AC)$ را جواب مسأله می‌گیریم. با معلوم بودن $AC = b$ اندازهٔ $AB = c$ نیز معلوم است؛ زیرا $AB = AC$ است. بنابراین برای رسم مثلث ABC زاویه‌ای به اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A} = \alpha$ رسم می‌کنیم و روی دو ضلع آن دو پاره‌خط $AB = AC = b$ را جدا می‌کنیم، سپس از B به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC رسم می‌شود.



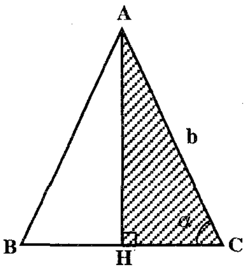
راه دوم. اگر ارتفاع AH را رسم کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ $AHC(\hat{H} = ۹۰^\circ)$ با معلوم بودن $H\hat{A}C = \frac{\hat{A}}{۲} = \frac{\alpha}{۲}$ و وتر $AC = b$ قابل رسم است. پس از رسم این مثلث، قرینهٔ C نسبت به AH را به‌دست می‌آوریم تا رأس B حاصل شود. از B به A وصل می‌کنیم. مثلث ABC رسم می‌شود.





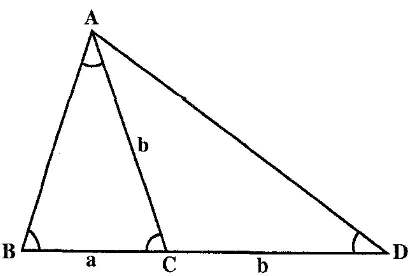
۵۱۹. راه اوّل. مثلث متساوی‌الساقین ABC(AB = AC) را درنظر می‌گیریم. AC = b را ساق و $\hat{B} = \alpha$ را زاویهٔ داده شده درنظر می‌گیریم. چون مثلث متساوی‌الساقین است، پس AB = AC = b نیز معلوم است. همچنین دو زاویهٔ $\hat{C}$ و $\hat{A}$ نیز معلوم می‌باشند زیرا $\hat{C} = \alpha$ و $\hat{A} = ۱۸۰° - ۲\alpha$ است.
بنابراین مثلث ABC را به معلوم بودن اندازهٔ دو ضلع و زاویهٔ بین آنها (AB = AC = b و $B\hat{A}C = ۱۸۰° = ۲\alpha$) می‌توان رسم کرد.

راه دوم. مسأله را حل شده می‌گیریم و مثلث متساوی‌الساقین ABC(AB = AC) را که از آن ساق AC = b و زاویهٔ $\hat{B} = \alpha$ معلوم است جواب مسأله می‌گیریم. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. چون مثلث متساوی‌الساقین است، پس، $\hat{C} = \hat{B} = \alpha$ است و درنتیجه مثلث قائم‌الزاویهٔ AHC قابل رسم است (وتر AC = b ، $\hat{C} = \alpha$ و $\hat{H} = ۹۰°$). این مثلث را رسم می‌کنیم و قرینهٔ رأس C نسبت به خط AH را به‌دست آورده B می‌نامیم. از B به A وصل می‌کنیم تا مثلث ABC رسم شود.



۲.۵.۱.۳. مجموع دو ضلع، یک زاویه

۵۲۰. مسأله را حل شده و مثلث متساوی‌الساقین ABC(AB = AC) را جواب مسأله می‌گیریم. زاویهٔ $\hat{A} = \alpha$ و BC + AC = a + b = l داده شده است. چون $\hat{B} = \hat{C}$ و $\hat{A} + \hat{B} + \hat{C} = ۱۸۰°$ است، پس $\hat{B} = \hat{C} = ۹۰° - \frac{\alpha}{۲}$ است. یعنی اندازهٔ هر سه زاویهٔ مثلث ABC معلوم می‌باشند. حال قاعدهٔ BC را از طرف C به اندازهٔ CD = CA امتداد می‌دهیم

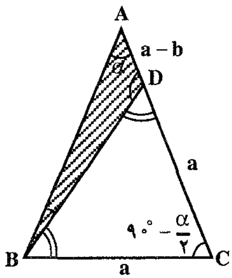


و از D به A وصل می‌کنیم $BD = a + b = l$ و مثلث ACD متساوی‌الساقین است.

درنتیجه $\hat{D} = \frac{\hat{C}}{۲} = ۴۵^\circ - \frac{\alpha}{۴}$ است. بنابراین مثلث BCD با معلوم بودن دو زاویهٔ $\hat{D}$ و $\hat{B}$ و ضلع $BD = a + b$ قابل رسم است. پس برای رسم مثلث ABC نخست مثلث BCD را با داده‌های بالا رسم می‌کنیم سپس عمودمنصف ضلع AD را رسم می‌کنیم تا BD را در نقطهٔ C قطع کند. از C به A وصل می‌کنیم تا مثلث ABC پدید آید.

۳.۵.۱.۳. تفاضل دو ضلع، یک زاویه

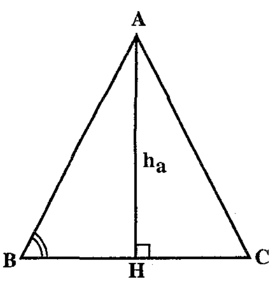
۵۲۱. می‌دانیم که با معلوم بودن اندازهٔ یک زاویه از مثلثی متساوی‌الساقین دیگر زاویه‌های آن نیز معلوم است. فرض می‌کنیم مثلث متساوی‌الساقین $(AB = AC)ABC$ جواب مسأله باشد و $\hat{A} = \alpha$ و تفاضل یک ساق و قاعده، به‌عنوان مثال با فرض $b > a$ ، $b - a$ معلوم باشد. به‌اندازهٔ قاعدهٔ BC روی ساق CA از طرف C پاره‌خط $CD = a$ را جدا می‌کنیم و از D به B وصل می‌کنیم. مثلث ABD قابل رسم است، زیرا $AD = a - b$ و $\hat{A} = \alpha$ و $A\hat{D}B = ۹۰^\circ + \frac{\alpha}{۲}$ است. این مثلث را رسم می‌کنیم. سپس عمودمنصف BD را رسم می‌کنیم تا امتداد AD را در نقطهٔ C قطع کند. از C به B وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



۶.۱.۳. ارتفاع، میانه، نیمساز، زاویه

۱.۶.۱.۳. ارتفاع، زاویه

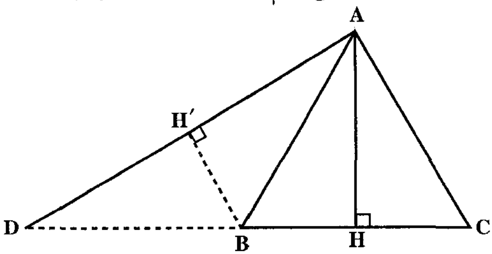
۵۲۲. مثلث را رسم شده فرض می‌کنیم و ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ AHB به‌دلیل معلوم بودن یک ضلع $(AH = h_a)$ و اندازهٔ زاویهٔ حادهٔ روبه‌روی آن $(\hat{B})$ قابل رسم است. پس برای رسم مثلث ABC، این مثلث را



رسم می‌کنیم و قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به نقطهٔ H را به‌دست می‌آوریم و C می‌نامیم. از C به A وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۷.۱.۳. ارتفاع، محیط

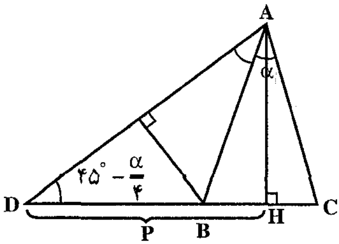
۵۲۳. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. اگر ارتفاع AH را رسم کنیم،داریم که $AB + BH = p$ ، حال اگر BH را به اندازهٔ AB از طرف B تا D ادامه دهیم، طول $DH = p$ است، بنابراین مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH را بنا به حالت دو ضلع زاویهٔ قائمه می‌توان رسم کرده سپس عمودمنصف AD را رسم می‌کنیم تا DH را در B قطع کند، از A به B وصل می‌کنیم، آن‌گاه دایره‌ای به مرکز A و به شعاع AB را رسم می‌کنیم تا امتداد DH را در C قطع کند. از A به C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



۸.۱.۳. زاویه، محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۸.۱.۳. زاویه، محیط

۵۲۴. مسأله را حل شده و مثلث ABC$(AB = AC)$ را جواب مسأله می‌گیریم. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و HB را از طرف B به اندازهٔ $BD = BA$ امتداد می‌دهیم و از D به A وصل می‌کنیم. $DH = p$ یعنی مساوی نصف محیط مثلث است. از طرفی با فرض $\hat{A} = \alpha$ ، زاویهٔ



$$B\hat{D}A = B\hat{A}D = ۴۵^\circ - \frac{\alpha}{۴} \quad \text{و} \quad \hat{B} = ۹۰^\circ - \frac{\alpha}{۲}$$

است. از آن‌جا مثلث قائم‌الزاویهٔ ADH با معلوم بودن اندازهٔ ضلع $DH = p$ و

$\hat{D} = 45° - \frac{\alpha}{4}$ قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم. عمودمنصف AB را می‌کشیم تا DH را در B قطع کند. به مرکز A و به شعاع AB دایره‌ای می‌زنیم تا امتداد DH را در C قطع کند. از C به A وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

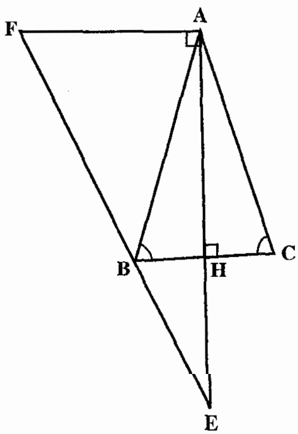
۲.۸.۱.۳. زاویه، رابطهٔ متری

۵۲۵. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. ارتفاع AH را به اندازهٔ $HE = BC$ ادامه می‌دهیم. از A عمودی بر AE اخراج می‌کنیم تا ادامه BE را در F قطع کند. $BH = \frac{HE}{2}$، چون $2BH = 2HC = HE$ همچنین داریم:

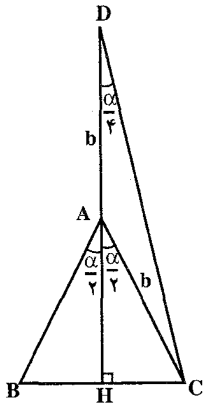
$$\Delta BME \sim \Delta AFE \Rightarrow \frac{BH}{AF} = \frac{EH}{AE} \Rightarrow \frac{AE}{AF} = \frac{EH}{BH} = 2 \Rightarrow AE = 2AF$$

ولی $AE = l$ مقدار معینی است، پس $AF = \frac{l}{2}$ است.

پس برای حل مسأله، ابتدا مثلث قائم‌الزاویهٔ AFE را با معلوم بودن AF و AE رسم می‌کنیم. سپس از A خطی رسم می‌کنیم تا با AE زاویه‌ای برابر با $\frac{\hat{A}}{2} = \frac{\alpha}{2}$ بسازد. نقطهٔ برخورد این خط با EF، رأس B است. از B عمود BH بر AE فرود می‌آوریم و BH را به اندازهٔ خود، تا C امتداد می‌دهیم $(BH = HC)$. از C به A وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

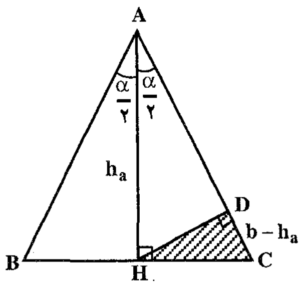


۵۲۶. مسأله را حل شده و مثلث متساوی‌الساقین $(AB = AC)ABC$ را جواب مسأله می‌گیریم. فرض می‌کنیم زاویهٔ $\hat{A} = \alpha$ و $AC + AH = b + h_a = l$ باشد. ارتفاع HA را از طرف A به اندازهٔ $AD = AC$ امتداد می‌دهیم $HD = b + h_a = l$ و مثلث ACD متساوی‌الساقین است. از طرفی $\hat{D} = \frac{\alpha}{4}$، مقدار معلومی است. پس مثلث



قائم‌الزاویهٔ HCD قابل رسم است. بنابراین، این مثلث را با داده‌های بالا رسم می‌کنیم ($\hat{H}=90^\circ$، $\hat{D}=\frac{\alpha}{4}$، $HD=b+h_a=l$). آن‌گاه عمودمنصف DC را رسم می‌کنیم تا DH را در A قطع کند. از A به C وصل می‌کنیم و قرینهٔ C نسبت به AH را به‌دست می‌آوریم تا رأس B به‌دست آید. از B به A وصل می‌کنیم. مثلث ABD جواب مسأله است.

۵۲۷. مسأله را حل شده و مثلث متساوی‌الساقین ABC$(AB=AC)$ را جواب مسأله درنظر می‌گیریم.

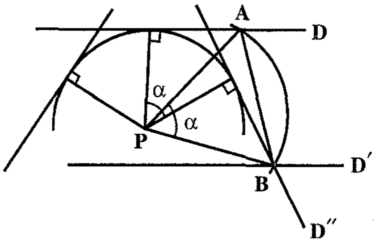


زاویهٔ معلوم را $\hat{A}=\alpha$ و تفاضل یک ساق و ارتفاع وارد بر قاعده را $AC-AH=b-h_a=l$ فرض می‌کنیم. ارتفاع AH را رسم کرده، روی ساق AC پاره‌خط $AD=AH$ را جدا می‌کنیم و از D به H وصل می‌کنیم. $DC=b-h_a=l$ است. مثلث DHB با معلوم بودن اندازهٔ DC و دو زاویهٔ $\hat{C}=90^\circ-\frac{\alpha}{2}$ و $C\hat{D}H=90^\circ+\frac{\alpha}{4}$ قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم. سپس از H خطی رسم می‌کنیم که با CD زاویه‌ای برابر $\frac{\alpha}{2}$ بسازد. نقطهٔ برخورد این دو خط رأس A است. به مرکز A و به شعاع AC کمانی رسم می‌کنیم تا امتداد HC را در B قطع کند. از A به B وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۹.۱.۳. نقطه، خط، زاویه

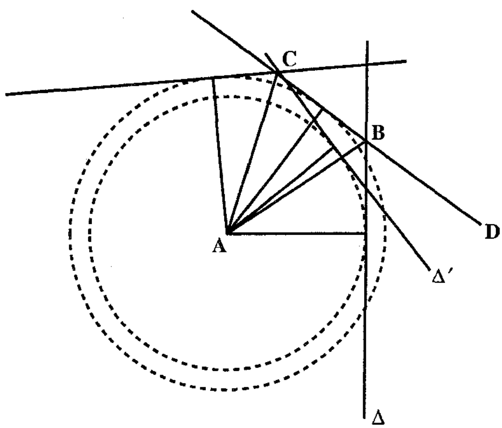
۵۲۸. اگر PAB مثلث خواسته شده باشد (شکل)، نقطهٔ B متناظر نقطهٔ A در دوران (P,α) است. دو مکان از نقطهٔ B معلوم است:

اولاً. خط D'



ثانیاً. خط ″D که از دوران D در دوران (P,α) به‌دست می‌آید و بعد ترسیم مثلث را تکمیل می‌کنیم. اگر دوران را در جهت دیگری انجام دهیم، جواب دیگری به‌دست می‌آید.

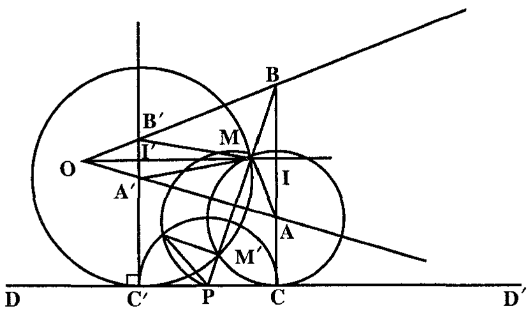
۵۲۹. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث ABC مثلث خواسته شده باشد، خط Δ را حول نقطهٔ A به اندازهٔ زاویهٔ معین $\hat{A}$ (زاویه رأس مثلث متساوی‌الساقین) دوران می‌دهیم تا D را در C قطع کند و خط D را حول نقطهٔ A به اندازهٔ زاویهٔ معین $\hat{A}$ دوران می‌دهیم تا Δ را در B قطع کند، مثلث ABC جواب مسأله است.



۳.۱.۱۰. نقطه، زاویه، محیط

۵۳۰. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و MAB مثلث متساوی‌الساقین باشد. به طوری که MA+AI=l. در امتداد IA ، AC را مساوی با AM در نظر می‌گیریم، پس IC = l از نقطهٔ C خط ′DD را به موازات OI رسم می‌کنیم. بنابراین نقطهٔ A از خط ′DD و نقطهٔ M به یک فاصله است. بنابراین دایره‌ای به مرکز A از M گذشته و بر ′DD مماس می‌شود. این دایره بر نقطهٔ ′M قرینهٔ M نسبت به OA نیز می‌گذرد و مرکزش

روی OA است. بنابراین برای حل مسأله در امتداد MM' نقطهٔ P را طوری می‌گیریم که PI واسطه هندسی بین PM و PM' باشد. PC و PC' را وصل می‌کنیم. C و C' محل تلاقی دو دایرهٔ مماس بر DD' بوده و بر M و M' می‌گذرند. دو مثلث MAB و $MA'B'$ جواب مسأله‌اند. برای این که مسأله ممکن باشد باید M' بین P و M باشد یعنی $PM \geq MM'$. اگر $A\hat{O}M = \alpha$ باشد، داریم: $\frac{۱}{\cos\alpha} \geq ۲a\sin\alpha$

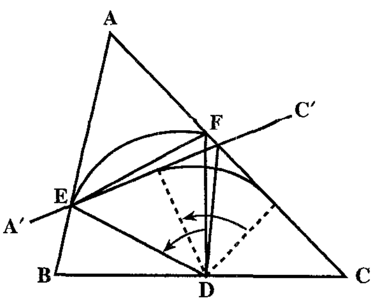


و یا $a\sin ۲\alpha \leq 1$ اگر $a\sin ۲\alpha = 1$ باشد، دو دایره به یک دایره تبدیل شده مسأله فقط دارای یک جواب است.

۲.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۱.۲.۳. مثلث، نقطه، زاویه

۵۳۱. مسأله را حل شده انگاشته فرض می‌کنیم DEF مثلث مطلوب $(DE = DF)$ باشد. موضع رأس D و زاویهٔ $E\hat{D}F = \alpha$ معلوم است. هرگاه نقطهٔ F را حول D به زاویهٔ α و در جهت مناسب دوران دهیم بر E منطبق می‌شود. بنابراین برای حل مسأله کافی است ضلع AC را حول نقطهٔ D به زاویهٔ α دوران دهیم تا به



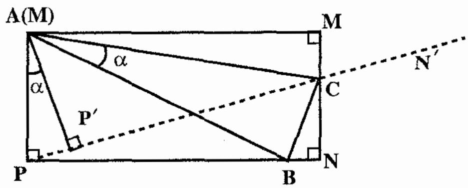
وضع $A'C'$ در آید. نقطهٔ F نیز همراه AC دوران می‌کند و چون باید بر E منطبق شود پس E در محل تقاطع خط $A'C'$ با AB قرار دارد. دایرهٔ به مرکز D و به شعاع DE ضلع AC را در F قطع می‌کند.

۳.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن: چند ضلعی، چندضلعی و داده‌های دیگر

۱.۳.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن چندضلعی

۱.۱.۳.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن مستطیل

۵۳۲. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث متساوی‌الساقین ABC به زاویهٔ رأس $\hat{A} = \alpha$ محاط در مستطیل MNPQ جواب مسأله باشد به قسمی که رأس A روی رأس M و دو رأس دیگرش B و C روی PN و NM باشند. چون $AB = AC$ و $B\hat{A}C = \alpha$ است،



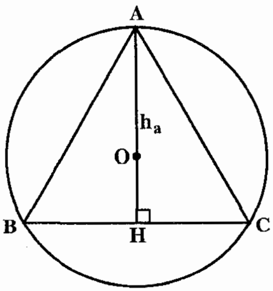
پس دورانی به مرکز A و به زاویهٔ دوران α، رأس B را بر رأس C منطبق می‌کند. امّا B روی ضلع PN و C روی ضلع NM قرار دارد. بنابراین برای رسم مثلث ABC، ضلع PN از مستطیل را حول مرکز دوران A و با زاویهٔ دوران α دوران می‌دهیم تا به وضع $P'N'$ درآید. اگر $P'N'$ ضلع NM از مستطیل را قطع کند، نقطهٔ تقاطع رأس C از مثلث ABC است. سپس، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع AC رسم می‌کنیم تا ضلع PN را در نقطهٔ B رأس دیگر مثلث قطع کند. سه نقطهٔ A، B و C را به هم وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

بحث. شرط جواب مسأله آن است که $P'N'$ دوران یافتهٔ PN حول رأس A و با زاویهٔ دوران α، ضلع NM را قطع کند.

۳.۴. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر

۳.۴.۱. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن دایره در حالت کلی و داده‌های دیگر

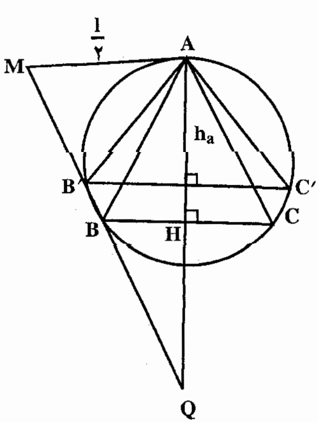
۳.۴.۱.۱. دایره، نقطه



۵۳۳. مسأله را حل شده می‌گیریم. ارتفاع رأس A از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ داده شده می‌گذرد و طول پاره‌خط $AH = h_a$ نیز در دست است. بنابراین برای حل مسأله از A رأس داده شده به O وصل می‌کنیم و روی AO پاره‌خط $AH = h_a$ را جدا می‌کنیم. سپس از نقطهٔ H خطی عمود بر AH رسم می‌کنیم تا دایره را در دو نقطهٔ B و C قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۳.۴.۱.۲. دایره، رابطهٔ متری

۵۳۴. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم، AH را به اندازهٔ BC ادامه می‌دهیم تا Q به دست آید، از Q به B وصل کرده امتداد می‌دهیم تا مماس در A بر دایره را در M قطع کند. $HQ = ۲BH$ است و از تشابه دو مثلث BHQ و AMQ داریم:

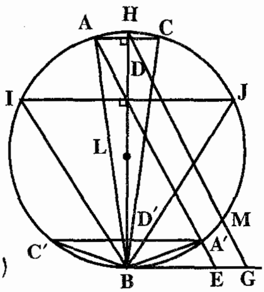


$$\frac{BH}{AM} = \frac{QH}{AQ} \Rightarrow \frac{BH}{QH} = \frac{AM}{AQ} = \frac{۱}{۲} \Rightarrow AM = \frac{l}{۲}$$

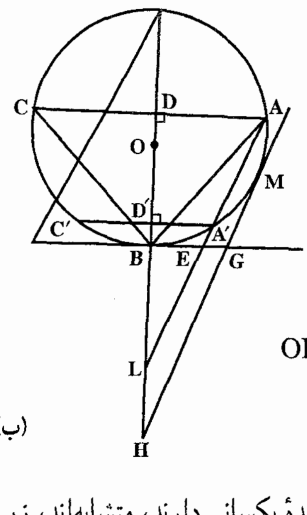
پس برای حل مسأله، ابتدا نقطهٔ دلخواه A را روی دایره گرفته، مماس $AM = \frac{l}{۲}$ را رسم می‌کنیم، سپس از M نیز به Q انتهای عمود $AQ = l$ در نقطهٔ A

وصل می‌کنیم. هر جا که دایره را قطع کند نقطهٔ B است. از B بر AQ عمود می‌کنیم، هر جا که دایره را قطع کند، نقطهٔ C است، از A به B و C وصل می‌کنیم. بنابر آن که MQ دایره را در دو نقطه قطع کند، بر آن مماس باشد و یا قطع نکند، مسأله بترتیب دارای دو جواب، یک جواب و یا بدون جواب (غیرممکن) است.

۵۳۵. اگر $l = 0$ باشد، حالت مجموع قاعده و ارتفاع، جواب یک نقطه است و در مورد تفاضل یعنی $a - h_a = 0$ مثلثی متساوی‌الساقین به دست می‌آید که طول قاعدهٔ آن با طول ارتفاع وارد بر آن مساوی است مثلث BIJ در شکل (الف). اگر $l > 0$ باشد، به این معنی که L روی BH مانند شکل (ب) باشد، $BE = \frac{1}{2}l$ و $BL = l$ اختیار می‌کنیم؛ همچنین $A'C' = DL$. ازآن‌جا $AC' - BD' = BL = l$ و همچنین $AC - BD = BL = l$ است. عموماً دو جواب وجود دارد که پاسخگوی سؤال زیرند: در یک دایره مثلث متساوی‌الساقینی محاط کنید که تفاضل ارتفاع و قاعده‌اش برابر l باشند.



(الف)



(ب)

ماکزیمم تفاضل l. ماکزیمم BH اندازهٔ مماس MH است. امّا $OB = r\,, OH = r\sqrt{5} \Rightarrow BH = r(\sqrt{5} - 1)$

۵۳۶. همهٔ مثلثهای متساوی‌الساقینی که نسبت ساق به قاعدهٔ یکسانی دارند، متشابه‌اند، زیرا ارتفاع وارد بر قاعده آنها را به مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متشابهی تقسیم می‌کند. روی قاعدهٔ $B'C'$، که طول دلخواهی دارد، مثلث متساوی‌الساقین $A'B'C'$ را طوری رسم کنید که

$$\frac{A'B'}{B'C'} = \frac{p}{q} \text{ (نسبت داده شده)}$$

فرض کنید r' و h' شعاع دایرهٔ محاطی و ارتفاع وارد بر قاعدهٔ این مثلث باشند و فرض

کنید که r و h اجزای متناظر از مثلث مطلوب ABC باشند. با توجه به تشابه دو مثلث داریم:

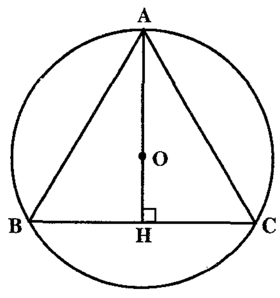
$$\frac{h}{h'}=\frac{r}{r'}$$

از این تناسب، سه جزء h' ، r و r' معلومند، پس می‌توانیم h را رسم کنیم.
از نقطهٔ دلخواه D بر روی دایرهٔ مفروض، مماس t را رسم، و روی خطی که از D به مرکز دایره رسم می‌شود، DA را برابر h جدا کنید. مماسهایی که از A بر دایره رسم می‌شوند و مماس t مثلث مطلوب ABC را تشکیل می‌دهند.

۲.۴.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن دایرهٔ محیطی یا شعاع آن و داده‌های دیگر

۱.۲.۴.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن دایرهٔ محیطی و داده‌های دیگر

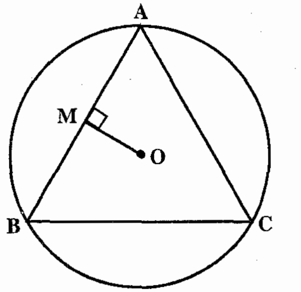
۱.۱.۲.۴.۳. دایرهٔ محیطی، نقطه



۵۳۷. مثلث جواب مسأله را مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB = AC) و نقطهٔ وسط قاعده BC را H و مرکز دایرهٔ محیطی آن را O می‌نامیم. می‌دانیم که ارتفاع AH عمودمنصف BC است. پس AH از نقطهٔ O می‌گذرد. در حقیقت AH و یا OH عمودمنصف BC است. بنابراین برای رسم مثلث خواسته شده نقطهٔH را به O مرکز دایره وصل می‌کنیم. در نقطهٔ H خطی عمود بر OH رسم می‌کنیم تا دایره را در B و C قطع کند. امتداد HO دایره را در نقطهٔ A قطع می‌کند و مثلث ABC جواب مسأله است.

۵۳۸. از نقطهٔ M وسط ساق AB از مثلث متساوی‌الساقین ABC(AB = AC) به نقطهٔ O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث وصل می‌کنیم و در نقطهٔ M عمودی بر OM اخراج می‌کنیم تا دایره را در A و B قطع کند به مرکز A و به شعاع AB دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ

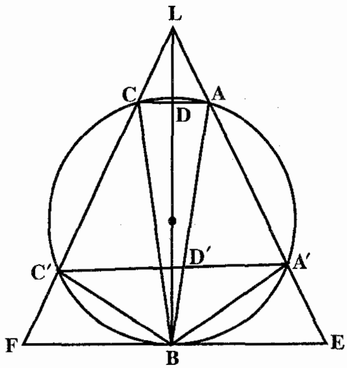
محیطی را در نقطهٔ C قطع کند. از C بـه A و B وصل مـی‌کنیم. مثلث ABC رسم می شود.



۳.۴.۲.۱.۲. دایرهٔ محیطی، رابطهٔ متری

۵۳۹. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = BC)$ جواب مسأله باشد به قسمی که داشته باشیم $AC + BD = l$.

ارتفاع BD را به اندازهٔ $DL = AC$ امتداد می‌دهیم. بنابراین داریم $BL = l$. برای تمام مثلثهای متشابه با LAC، ارتفاع با قاعده برابر است. از آن‌جا اگر LA و LC را ادامه دهیم، تا خط مماس در رأس B بر دایره را در نقطه‌های E و F قطع کنند، خواهیم داشت:



$$FE = BL \quad \text{یا} \quad BE = \frac{l}{۲}$$

از آن‌جا راه حل زیر نتیجه می‌شود:

روی یک خط مماس رسم شده بر دایره در نقطهٔ B، پاره خط $BE = \frac{l}{۲}$ و سپس روی قطر گذرنده از B پاره‌خط $BL = l$ را جدا می‌کنیم و از E به L وصل می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ A قطع کند. A یک رأس مثلث متساوی‌الساقین خواسته شده است. قرینهٔ رأس A نسبت به LB رأس مثلث را خواهد داد، داریم:

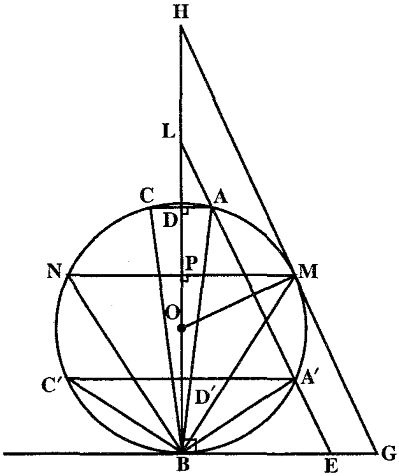
$$AD = \frac{۱}{۲}DL \Rightarrow AC = DL \Rightarrow AC + BD = l$$

عموماً مسأله یک جواب دیگر $A'BC'$ نیز دارد.

تبصره. به روش مشابه می‌توان مثلثی متساوی‌الساقین را که از آن مجموع قاعده و ارتفاع وارد بر آن معلوم باشد، در یک چند ضلعی منتظم دلخواه و یا به طور کلی در شکلی

که دارای حداقل یک محور تقارن باشد، محاط کرد، به شرطی که رأس مثلث، نقطه‌ای باشد که محور تقارن شکل محیط آن را قطع می‌کند.

الف. ترسیم. می‌دانیم که باید $BE = \frac{1}{۲}$ و $BL = l$ را اختیار و EL را وصل کنیم تا دایره را در A (و 'A) قطع کند و از آن جا با تعیین رأس C مثلثهای ABC و 'A'BC به دست می‌آیند. برای حل مسأله، کافی است خطهایی موازی EL رسم کنیم به قسمی که $BE = \frac{۱}{۲}BL$ باشد.



ب. ماکزیمم l. ماکزیمم l به وسیلهٔ مماس GH مشخص شده است. مثلثهای POM و BGH متشابه‌اند، همچنین $OP = \frac{۱}{۲}PM$.

از آن جا :

$$PM^۲ + \frac{PM^۲}{۴} = OM^۲ = r^۲ \text{ و } PM^۲ = \frac{۴r^۲}{۵} \Rightarrow PM = \frac{۲r}{\sqrt{۵}} \quad \text{و} \quad OP = \frac{r}{\sqrt{۵}}$$

امّا

$$OH = \frac{OM^۲}{OP} = r^۲ : \frac{r}{\sqrt{۵}} = r\sqrt{۵}$$

از آن جا :

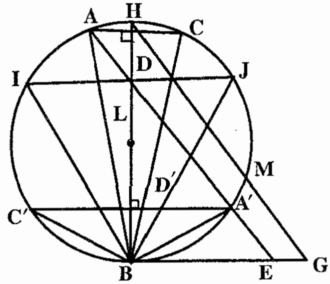
$$BH \text{ یا } \quad l = OH + OB = r(\sqrt{۵} + ۱)$$

پ. $۲r = l$. یک جواب به وسیلهٔ نقطهٔ M مشخص می‌شود.

دیگری که به وسیلهٔ نقطهٔ H مشخص می‌شود به یک خط راست منجر می‌شود.

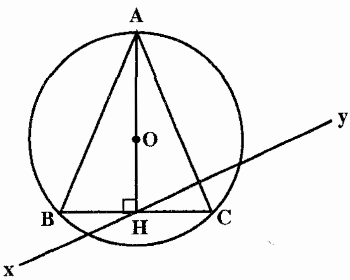
ت. $l > ۲r$. اگر $BL = l$ باشد، 'A یک جواب می‌دهد به قسمی که $A'C' + BD' = l$. A در حقیقت جواب BD − DL یا $BD - AC = l$ را می‌دهد. همچنین وقتی که خط EL قطر را قطع می‌کند (و نه امتداد بالای آن را)، به این معنی که وقتی $۲r > l$ امّا $l > ۰$ است یکی از جوابها متناظر با مسأله داده شده است و جواب دیگر به مسأله صفحهٔ بعد مربوط است :

در دایره‌ای مفروض مثلث متساوی‌الساقینی محاط کنید که تفاضل قاعده و ارتفاع نظیر آن معلوم باشد.



۳.۱.۲.۴.۳. دایرهٔ محیطی، نقطه، خط

۵۴۱. حالت اول. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم و مثلث متساوی‌الساقین ABC را که نقطهٔ H وسط قاعدهٔ BC از آن، روی خط xy و رأس مقابل به قاعدهٔ آن A و دایرهٔ محیطی‌اش دایرهٔ (O , R) است، جواب مسأله می‌گیریم. با توجه به این که AH، عمودمنصف پاره‌خط BC است و BC وتری از دایرهٔ (O , R) می‌باشد، برای رسم مثلث ABC چنین عمل می‌کنیم.



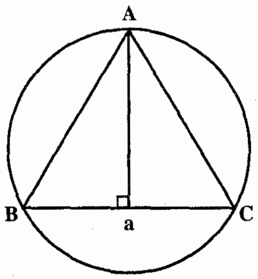
از A به O وصل می‌کنیم. نقطهٔ برخورد آن با xy نقطهٔ H است. در نقطهٔ H عمودی بر AH اخراج می‌کنیم تا دایره را در دو نقطهٔ B و C قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

حالت دوم. اگر A یک رأس از قاعده باشد، از A به O وصل می‌کنیم و به قطر AO یک دایره رسم می‌کنیم. این دایره مکان هندسی وسط وترهایی از دایرهٔ O است که از نقطهٔ A می‌گذرند. نقطهٔ برخورد این دایره با خط xy نقطهٔ H وسط قاعدهٔ AC است. وتر AHC را رسم می‌کنیم. همچنین قطر HOB را رسم می‌نماییم. از B به A و C وصل می‌کنیم. مثلث متساوی‌الساقین ABC (BA = BC) جواب مسأله است.

۲.۲.۴.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن شعاع دایرهٔ محیطی و داده‌های دیگر

۱.۲.۲.۴.۳. شعاع دایرهٔ محیطی، ضلع

۵۴۲. دایره‌ای به شعاع R رسم می‌کنیم. روی این دایره نقطهٔ B را اختیار کرده به مرکز B و به شعاع a = BC دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایره را بار دیگر در نقطهٔ C قطع کند. از B به C وصل کرده، عمودمنصف پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ A قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB = AC) جواب مسأله است.

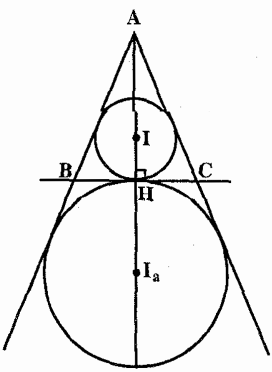


شرط جواب مسأله آن است که دایرهٔ به مرکز B و به شعاع a دایرهٔ به شعاع R را قطع کند و این در صورتی است که $a \leq ۲R$ باشد.

۳.۴.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن دایره‌های محاطی یا شعاع آنها و داده‌های دیگر

۱.۳.۴.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن دایره‌های محاطی و داده‌های دیگر

۵۴۳. مسأله را حل شده و مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB = AC) را جواب مسأله می‌گیریم. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. دایرهٔ محاطی درونی مثلث و دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع BC در نقطهٔ H بر هم مماسند. بنابراین برای رسم مثلث متساوی‌الساقین ABC مماسهای مشترک دو دایره را رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد آنها A، B و C رأسهای مثلث متساوی‌الساقین خواسته شده است.

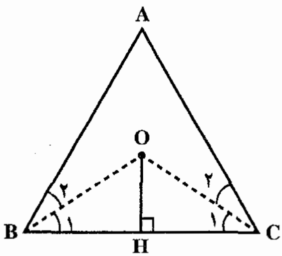


۲.۳.۴.۳. رسم مثلث متساوی‌الساقین با معلوم بودن شعاع دایره‌های محاطی و داده‌های دیگر

۱.۲.۳.۴.۳. شعاع دایره‌های محاطی، ضلع

۱.۱.۲.۳.۴.۳. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ضلع

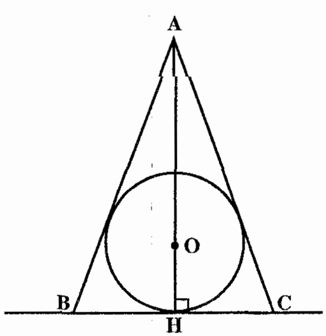
۵۴۴. چون مثلث ABC متساوی‌الساقین است، نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث، روی ارتفاع وارد بر BC است، پس OH هم عمود بر BC است و هم از وسط BC می‌گذرد، بنابراین مثلث OHB را می‌توان بنا به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین رسم کرد، چون $OH = r$ ، $HB = \frac{a}{۲}$ و $O\hat{H}B = ۹۰^\circ$ است. پس از رسم این مثلث قرینهٔ B نسبت به H را رسم می‌کنیم، تا C به دست آید. $\hat{C}_۲$ و $\hat{B}_۲$ را بترتیب برابر $\hat{C}_۱$ و $\hat{B}_۱$ رسم می‌کنیم هر جا که یکدیگر را قطع کنند، نقطهٔ A است و مثلث ABC مثلث خواسته شده است.



۲.۲.۳.۴.۳. شعاع دایرهٔ محاطی برونی و داده‌های دیگر

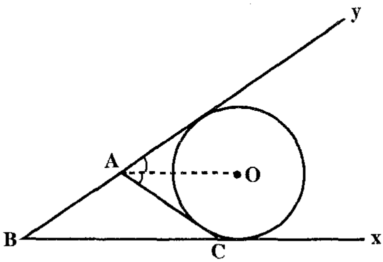
۱.۲.۲.۳.۴.۳. شعاع دایرهٔ محاطی برونی، ضلع

۵۴۵. پاره‌خط $AH = h_a$ را رسم می‌کنیم. چون AH نیمساز، میانه و ارتفاع رأس A است، روی آن از طرف H پاره‌خط $HO = r$ را جدا می‌کنیم و دایرهٔ به شعاع r را رسم می‌کنیم. سپس از نقطهٔ A دو مماس بر آن رسم می‌کنیم تا عمودی را که بر AH در نقطهٔ H رسم شده است را در نقطه‌های B و C قطع کند. مثلث ABC جواب مسأله است.

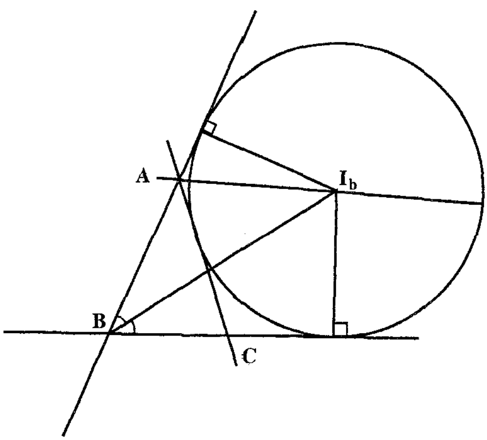


۲.۲.۲.۲.۳.۴.۳. شعاع دایرهٔ محاطی برونی، زاویه

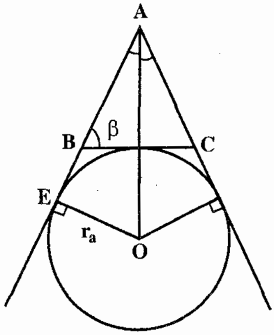
۵۴۶. زاویهٔ $x\hat{B}y = \beta$ را رسم می‌کنیم. سپس دایره‌ای به شعاع r_b مماس بر دو ضلع این زاویه رسم می‌کنیم و مرکز آن را I_b می‌نامیم. از I_b خطی موازی یک ضلع زاویهٔ $\hat{B}$ رسم می‌کنیم تا ضلع دیگر را در نقطهٔ A رأس مثلث خواسته شده قطع کند. از A خطی مماس بر این دایره رسم می‌کنیم تا ضلع دیگر زاویهٔ B را در نقطهٔ C قطع کند. مثلث ABC جواب مسأله است.



نکته. نیمساز زاویهٔ برونی رأس A از مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB = AC) با قاعدهٔ BC موازی است. به همین دلیل خطی که از I_b موازی ضلع BC از مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB = AC) رسم شود، از رأس A می‌گذرد.



۵۴۷. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث متساوی‌الساقین ABC (AB = AC) جواب مسأله باشد. دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع BC را رسم می‌کنیم و مرکز آن را O می‌نامیم. AO را وصل می‌کنیم و از O عمود OE را بر خط AB رسم می‌کنیم چون AO نیمساز زاویهٔ رأس است، پس عمودمنصف قاعدهٔ BC نیز می‌باشد. از طرفی با معلوم



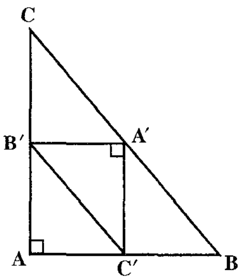
بودن اندازهٔ زاویهٔ $\hat{B} = \beta$ اندازهٔ زاویهٔ EAO مساوی $۹۰^\circ - \beta$ است. پس مثلث قائم‌الزاویهٔ AOE با معلوم بودن اندازه یک ضلع زاویهٔ قائمه ($OE = r_a$) و یک زاویهٔ حاده ($E\hat{A}O = ۹۰^\circ - \beta$) قابل رسم است. بنابراین برای رسم مثلث متساوی‌الساقین ABC، نخست مثلث قائم‌الزاویهٔ AOE را با داده‌های ذکر شده رسم می‌کنیم. سپس دایرهٔ به شعاع $OE = r_a$ را رسم می‌کنیم. در نقطهٔ برخورد AO با این دایره که نقطهٔ H است خطی مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا AE را در نقطهٔ B قطع کند. قرینهٔ نقطهٔ B نسبت به نقطهٔ H رأس C است. از A به C وصل می‌کنیم. مثلث متساوی‌الساقین ABC رسم می‌شود.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش۴
رسم مثلث قائم‌الزاویه

۴.۱. رسم مثلث قائم‌الزاویه با معلوم بودن: نقطه، ضلع، ارتفاع، میانه، نیمساز،...

۴.۱.۱. نقطه

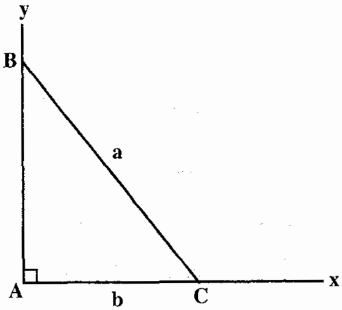
۵۴۸. مسأله را حل شده و سه نقطهٔ A'، B' و C' را وسطهای ضلعهای BC، AC و AB از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90°$) می‌گیریم. این سه نقطه را به هم وصل می‌کنیم. می‌دانیم که $A'B' \| AB$، $A'C' \| AC$ و $B'C' \| BC$ است. بنابراین با داشتن سه نقطهٔ A'، B' و C' برای رسم مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، این سه نقطه را به هم وصل می‌کنیم. سپس از هر رأس آن خطی موازی ضلع روبه‌رویش رسم می‌کنیم. سه خط رسم شده یکدیگر را در A،B و C رأسهای مثلث قائم‌الزاویه ABC قطع می‌کنند.



۴.۱.۲. ضلع

۴.۱.۲.۱. وتر، یک ضلع

۵۴۹. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90°$) را جواب مسأله در نظر می‌گیریم. اندازهٔ وتر $BC = a$ و اندازهٔ ضلع AC از آن معلوم است. بنابراین برای رسم این مثلث زاویهٔ

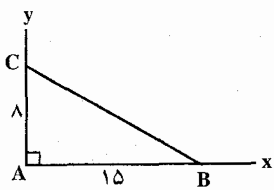


$x\hat{A}y = ۹۰^\circ$ را رسم می‌کنیم. روی یک ضلع آن پاره‌خط $AC = b$ را جدا می‌کنیم. سپس به مرکز C و به شعاع a دایره‌ای رسم می‌کنیم تا ضلع دیگر زاویهٔ A را در نقطهٔ B قطع کند. از C به B وصل می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC رسم می‌شود.

تبصره. به روش دیگر مثلث خواسته شده را می‌توان رسم کرد. بدین ترتیب که پاره‌خط $BC = a$ را رسم کنیم. سپس دایره‌ای به قطر $BC = a$ رسم نماییم. سپس به مرکز C و به شعاع b کمانی رسم کنیم تا دایرهٔ به قطر BC را در نقطهٔ A قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۲.۲.۱.۴. دو ضلع زاویهٔ قائمه

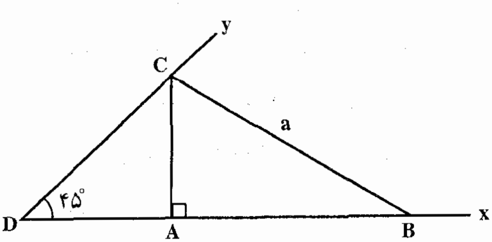
۵۵۰. مثلث قائم‌الزاویهٔ جواب مسأله را ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ می‌نامیم. $AB = ۱۵cm$ و $AC = ۸cm$ است. برای رسم این مثلث زاویهٔ‌قائمه‌ای رسم می‌کنیم. سپس روی دو ضلع این زاویه با خط‌کش ضلعهای $AB = ۱۵cm$ و $AC = ۸cm$ را جدا می‌کنیم و از B به C وصل می‌کنیم.



۳.۲.۱.۴. وتر، مجموع دو ضلع دیگر

۵۵۱. مسأله بر می‌گردد به تعیین یک نقطه روی یک نیمدایره به قسمی که مجموع فاصله‌اش از دو سر قطر آن نیمدایره برابر مقدار معلومی باشد. مسأله به روش زیر نیز قابل حل است:

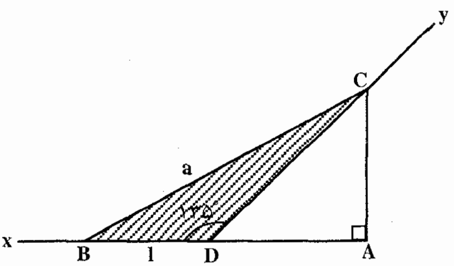
مسأله را حل شده وفرض می‌کنیم $AB + AC = l$ باشد. AD را به اندازهٔ AC در امتداد AB جدا می‌کنیم. $DB = l$ و مثلث ADC مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین



است. پس $\hat{D} = ۴۵°$ است. پس مثلث DBC با معلوم بودن دو ضلع و یک زاویه قابل رسم است. بنابراین برای رسم مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰°$)، نخست مثلث BCD را رسم می‌کنیم. برای این کار زاویهٔ $x\hat{D}y = ۴۵°$ را رسم می‌کنیم و روی Dx طول BD را به اندازهٔ l جدا می‌کنیم. سپس به مرکز B و به شعاع $BC = a$ کمانی می‌زنیم تا Dy را در نقطهٔ C قطع کند. از C عمودی بر BD فرود می‌آوریم تا BD را در A قطع کند و از B به C وصل می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب مسأله است.

۴.۲.۱.۴. وتر، تفاضل دو ضلع دیگر

۵۵۲. مسأله برمی‌گردد به تعیین یک نقطه روی یک نیمدایره، به قسمی که تفاضل فاصله‌های آن نقطه از دو سر قطر آن نیمدایره، مقدار معلوم باشد. همچنین مسأله را به روش زیر نیز می‌توان حل کرد:

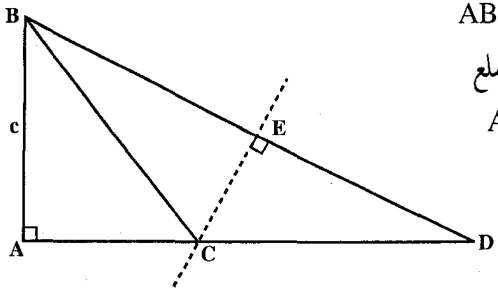


فرض می‌کنیم مسأله حل شده و $AB - AC = l$ باشد. روی ضلع AB و از طرف A پاره‌خط $AD = AC$ را جدا می‌کنیم تا نقطهٔ D به دست آید. $BD = AB - AC = l$، و مثلث ADC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است. پس $A\hat{D}C = ۴۵°$ و $B\hat{D}C = ۱۳۵°$ است؛ در نتیجه مثلث BDC با معلوم بودن اندازهٔ دو ضلع و یک زاویه قابل رسم است. بنابراین راه حل زیر برای رسم مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC به دست می‌آید:

زاویهٔ $x\hat{D}y = ۱۳۵°$ را رسم می‌کنیم. روی یک ضلع آن پاره‌خط $BD = l$ را جدا می‌کنیم. به مرکز B و به شعاع $BC = a$ کمانی رسم می‌کنیم تا ضلع دیگر زاویهٔ D را در نقطهٔ C قطع کند. از C عمودی بر BD فرود می‌آوریم تا رأس A به دست آید و از C به B وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

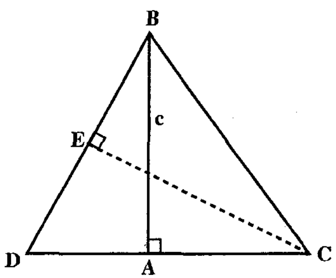
بحث. به تعداد نقطه‌های برخورد دایرهٔ (B , a) با ضلع دیگر زاویهٔ D، مسأله دارای جواب است.

۴.۱.۲.۵. یک ضلع، مجموع وتر و ضلع دیگر



۵۵۳. فرض می‌کنیم مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب مسأله باشد که از آن اندازهٔ ضلع $AB = c$ و مجموع وتر و ضلع AC یعنی $BC + AC = l$ معلوم است. ضلع AC را از طرف C به اندازهٔ وتر BC امتداد می‌دهیم و از D به B وصل می‌کنیم. مثلث BCD متساوی‌الساقین و پاره‌خط $AD = AC + CD = AC + BC = l$ است. پس مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD که دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن معلومند، قابل رسم است. بنابراین برای رسم مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، نخست مثلث قائم‌الزاویه ABD را با معلوم بودن اندازهٔ دو ضلع $AB = c$ و $AD = l$ رسم می‌کنیم، آن گاه عمودمنصف پاره خط BD را رسم می‌کنیم تا AD را در نقطهٔ C قطع کند. از C به B وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۴.۱.۲.۶. یک ضلع، تفاضل وتر و ضلع دیگر



۵۵۴. مسأله را حل شده و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90°$) را جواب مسأله در نظر می‌گیریم. ضلع $AB = c$ و $BC - AC = l$ معلوم است. ضلع CA را از طرف A به اندازهٔ وتر CB امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ D به دست آید. پاره‌خط DA طول معینی دارد. زیرا:

$$DA = DC - AC = BC - AC = l$$

از طرفی مثلث BCD متساوی‌الساقین است، زیرا $CD = BC$ است. بنابراین برای رسم مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90°$) چنین عمل می‌کنیم:

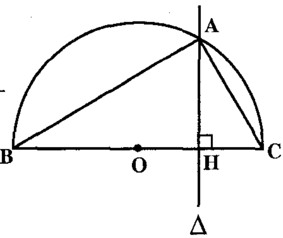
مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD را با معلوم بودن دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه یعنی $DA = l$ و $AB = c$ رسم می‌کنیم. سپس عمودمنصف ضلع BD را رسم می‌کنیم تا امتداد ضلع

DA را در نقطهٔ C قطع کند. از C به B وصل می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب مسأله است.

۷.۲.۱.۴. وتر، تفاضل مربعهای دو ضلع دیگر

۵۵۵. مسأله را حل شده و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰°$) را جواب مسأله می‌گیریم. طول وتر $BC = a$ و تفاضل مربعهای دو ضلع زاویهٔ قائمه یعنی $b^۲ - c^۲ = m^۲$ معلوم است. چون $b^۲ + c^۲ = a^۲$ است، پس داریم:

$$\begin{cases} b^۲ + c^۲ = a^۲ \\ \\ b^۲ - c^۲ = m^۲ \end{cases} \Rightarrow b^۲ = \frac{a^۲ + m^۲}{۲} \ , \ c^۲ = \frac{a^۲ - m^۲}{۲}$$

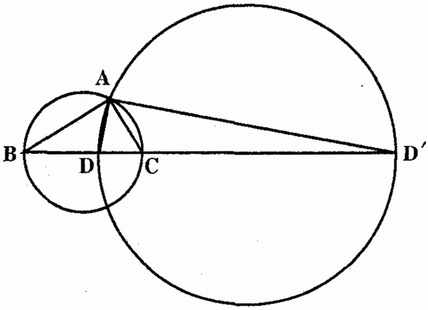


در نتیجه b و c معلوم است. بنابراین مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با معلوم بودن سه ضلع قابل رسم است.

برای رسم هندسی روی وتر داده شدهٔ BC نیمدایره‌ای رسم می‌کنیم. آن‌گاه مکان هندسی نقطه‌ای را که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از B و C برابر $m^۴$ است، رسم می‌کنیم. می‌دانیم که این مکان هندسی خط راستی عمود بر BC است، به قسمی که اگر D وسط BC باشد و H پای عمود باشد $OH = \frac{m^۲}{۲a}$ است. نقطهٔ برخورد این مکان هندسی با نیمدایرهٔ به قطر BC رأس A از مثلث ABC است. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث خواسته شده رسم می‌شود.

۸.۲.۱.۴. وتر، نسبت مربعهای دو ضلع دیگر

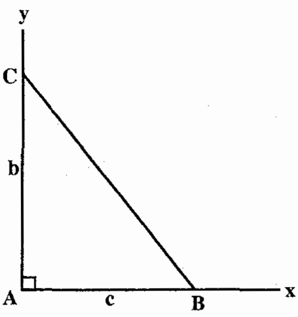
۵۵۶. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰°$) را که از آن $BC = a$ و $\frac{b^۲}{c^۲} = k^۲$ داده شده است جواب مسأله می‌گیریم. بنابراین $\frac{b}{c} = k$ معلوم است و یک مکان هندسی رأس A دایرهٔ



آپولونیوسی است که ضلع BC را به نسبت $\frac{b}{c}=k$ تقسیم می‌کند. مکان هندسی دیگر رأس A دایره‌ای به قطر BC است. بنابراین برای رسم مثلث قائم‌الزاویهٔ خواسته شده، پاره خط $BC=a$ را رسم می‌کنیم. دایره‌ای به قطر BC رسم می‌نماییم. روی BC و در امتداد آن دو نقطهٔ D و D′ را چنان تعیین می‌کنیم که $\frac{DB}{DC}=\frac{D'B}{D'C}=\frac{b}{c}$ باشد. به قطر DD′ یک دایره رسم می‌کنیم (دایرهٔ آپولونیوس). نقطهٔ برخورد این دایره با دایرهٔ به قطر BC رأس A از مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC است. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب مسأله است.

۹.۲.۱.۴. رابطهٔ بین ضلعها

۵۵۷. مسأله بیشمار جواب دارد که با هم متشابه‌اند؛ زیرا



اگر زاویهٔ قائمه $x\hat{A}y=۹۰^\circ$ را رسم کنیم. سپس روی یک ضلع پاره‌خط دلخواه $AB=c$ و روی ضلع دیگر آن پاره‌خط $AC=۲c$ را جدا کنیم و از B به C وصل کنیم، مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$) یک جواب مسأله است. با تغییر مقدار c مثلثهای دیگری متشابه با مثلث ABC به دست می‌آیند که همگی جواب مسأله‌اند.

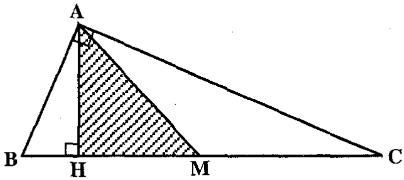
نکته. چون $a^۲=b^۲+c^۲$ و $b=۲c$ است، پس داریم:

$$a^۲=۴c^۲+c^۲=۵c^۲ \Rightarrow a=c\sqrt{۵} \Rightarrow c=\frac{a}{\sqrt{۵}} \Rightarrow b=۲c=\frac{۲a}{\sqrt{۵}}$$

بنابراین ضلعهای این مثلث قائم‌الزاویه a، $\frac{a}{\sqrt{۵}}$ و $\frac{۲a}{\sqrt{۵}}$ می‌باشند که متناسب با $\sqrt{۵}$، ۱ و ۲ می‌باشند.

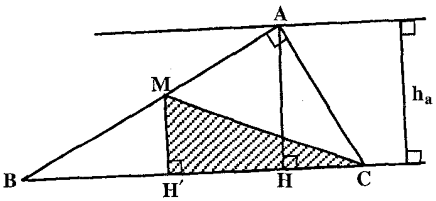
۳.۱.۴. ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۳.۱.۴. ارتفاع، میانه



۵۵۸. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. ارتفاع AH و میانهٔ AM را رسم می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ AHM را به حالت وتر و یک ضلع می‌توان رسم کرد. سپس MH را از هر دو طرف امتداد می‌دهیم به طوری که $MB = MC = MA$ باشد. نقطه‌های به دست آمده را به A وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۵۵۹. مسأله را حل شده و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$ را جواب مسأله می‌گیریم.



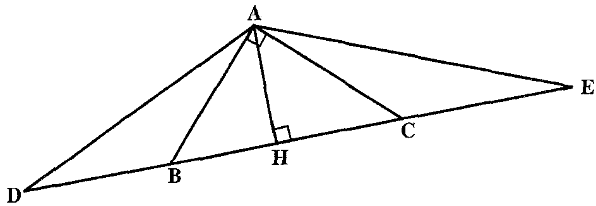
ارتفاع AH و میانهٔ CM را رسم می‌کنیم. از M خطی موازی ارتفاع AH رسم می‌کنیم تا وتر BC را در نقطهٔ H′ قطع کند، $MH' = \frac{AH}{2}$ است.

بنابراین مثلث قائم‌الزاویهٔ MCH′ با معلوم بودن اندازهٔ وتر MC و یک ضلع زاویهٔ قائمه MH′ قابل رسم است. بنابراین برای رسم مثلث ABC نخست مثلث قائم‌الزاویهٔ MCH′ را رسم می‌کنیم. سپس خطی موازی CH′ و به فاصلهٔ $AH = h_a$ از آن رسم می‌کنیم تا دایرهٔ به قطر MC را در نقطهٔ A قطع کند. از A به M و C وصل می‌کنیم. امتداد AMامتداد CH′ را در رأس B قطع می‌کند. مثلث ABC جواب مسأله است.

۴.۱.۴. محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۴.۱.۴. محیط، رابطهٔ متری

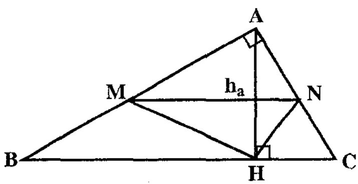
۵۶۰. مسأله را حل شده و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$ را جواب مسأله می‌گیریم. ضلع BC را از طرف B بـه انـدازهٔ $BD = AB$ و از طرف C بـه انـدازهٔ $CE = AC$



جدا می‌کنیم و از A به D و C وصل می‌کنیم $DE = AB + AC + BC = ۲p$ محیط مثلث است و مثلثهای ABD و ACE متساوی‌الساقین می‌باشند. ارتفاع AH را نیز رسم می‌کنیم. بنا به فرض داریم $\frac{HB}{HC} = k$ معلوم است. از آن‌جا...

۵.۱.۴. نقطه، وتر

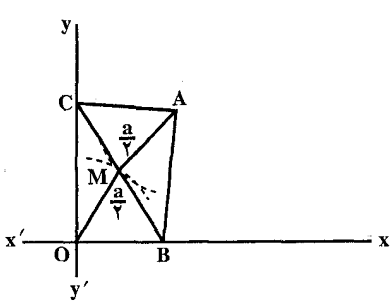
۵۶۱. مسأله را حل شده و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰°$) را جواب مسأله می‌گیریم.



ارتفاع AH و دو نقطهٔ M و N را روی ضلعهای AB و AC در نظر می‌گیریم. در صورتی که AH از نظر وضع و اندازه و جای دو نقطهٔ M و N مشخص باشد، از نقطهٔ H پای ارتفاع AH عمودی بر آن اخراج می‌کنیم. سپس دایره‌ای به قطر MN رسم می‌کنیم.

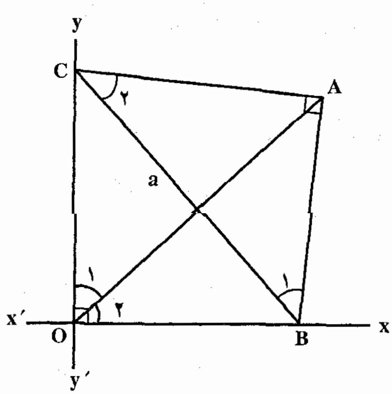
۶.۱.۴. نقطه، خط، وتر

۵۶۲. راه اول. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰°$) جواب مسأله باشد. وسط ضلع BC را M می‌نامیم و از M به A و O وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC، میانهٔ AM نصف وتر BC است. یعنی $AM = \frac{a}{۲}$ می‌باشد که چون A نقطهٔ ثابتی است، پس یک مکان هندسی نقطهٔ



M دایره‌ای به مرکز A و به شعاع $\frac{a}{۲}$ است. از طرفی OM میانهٔ وارد بر وتر از مثلث قائم‌الزاویهٔ OBC است، بنابراین $OM = \frac{BC}{۲} = \frac{a}{۲}$ است، یعنی مکان هندسی دیگر نقطهٔ M دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\frac{a}{۲}$ است. در نتیجه برای رسم مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC یک دایره به مرکز A و به شعاع $\frac{a}{۲}$ و دایرهٔ دیگر به مرکز O و به شعاع $\frac{a}{۲}$ رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند. به مرکز M و شعاع $\frac{a}{۲}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دوضلع Ox و Oy را در B و C قطع کنند. $BC = a$ و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب مسأله است.

راه دوم. مسأله را حل شده و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ را جواب مسأله می‌گیریم. OA را وصل می‌کنیم. چهارضلعی OBAC محاطی است. زیرا $B\hat{O}C + B\hat{A}C = ۱۸۰^\circ$ است. بنابراین زاویه‌های $A\hat{B}C = \hat{O}_۱ = \alpha$ و $A\hat{C}B = \hat{O}_۲ = \beta$ ثابت و معلوم می‌باشند. پس مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با معلوم بودن اندازهٔ وتر $BC = a$ و زاویه‌های حاده قابل رسم است. از رسم این مثلث AB و AC به دست می‌آید. با مشخص شدن AB و AC به مرکز A و به شعاع AB و AC دو دایره رسم می‌کنیم تا Ox و Oy را در B و C قطع کنند. مثلث ABC جواب مسأله است.

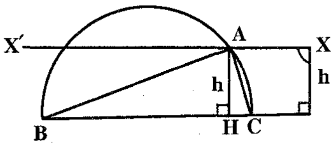


۷.۱.۴. ضلع، ارتفاع، میانه، نیمساز

۱.۷.۱.۴. ضلع، ارتفاع

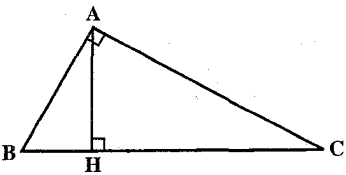
۱.۱.۷.۱.۴. وتر، ارتفاع

۵۶۳. وتر BC را به طول a رسم می‌کنیم. به قطر BC نیمدایره‌ای می‌کشیم (شکل) و خط XX' را به موازات BC و به فاصلهٔ h ارتفاع مثلث رسم می‌کنیم. محل برخورد XX' و نیمدایره، رأس A از مثلث است. اگر $h > \frac{a}{۲}$ باشد، مسأله دو جواب دارد و اگر $h = a$ باشد، مسأله یک جواب دارد و اگر $h > \frac{a}{۲}$ باشد، مسأله دارای جواب نیست.



۲.۱.۷.۱.۴. ضلع زاویهٔ قائمه، ارتفاع

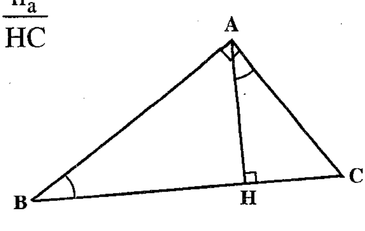
۵۶۴. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. ضلع AB و ارتفاع AH وارد بر وتر BC معلوم است. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH $(\hat{H} = ۹۰^\circ)$ به حالت وتر و یک ضلع قابل رسم است. پس از رسم این مثلث، از A خطی رسم می‌کنیم که بر AB عمود باشد و امتداد BH را در C قطع کند. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب مسأله است.



۳.۱.۷.۱.۴. مربع نسبت ضلعها، ارتفاع

۵۶۵. مسأله را حل شده و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ را جواب مسأله می‌گیریم و ارتفاع AH را رسم می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و ACH متشابه‌اند و داریم:

$$\frac{AB}{AC} = \frac{AH}{HC} \Rightarrow \frac{c}{b} = \frac{h_a}{HC}$$

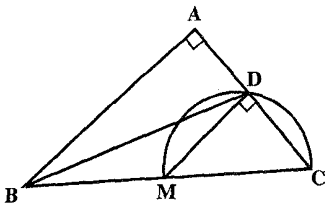


چون $\frac{b^۲}{c^۲}=k^۲$ معلوم است، $\frac{b}{c}=k$ معلوم می‌باشد و چون h_a نیز داده شده است، پس پاره‌خط HC جزء چهارم تناسب بالا قابل رسم است. با مشخص شدن HC مثلث AHC و از آن‌جا مثلث ABC را می‌توان رسم کرد.

۲.۷.۱.۴. ضلع، میانه

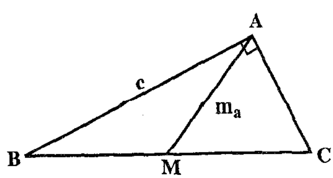
۱.۲.۷.۱.۴. وتر، میانه

۵۶۶. فرض کنیم مسأله حل شده است (شکل). از M وسط BC خطی به موازات AB می‌کشیم MD بر AC عمود است و D وسط AC می‌باشد و چون میانهٔ BD معلوم است، بنابراین راه حل مسأله چنین است: ابتدا BC را رسم می‌کنیم و به قطر MC نیمدایره‌ای می‌کشیم و به مرکز B و به شعاع BD برابر طول میانه، قوسی رسم می‌کنیم که نیمدایره را در D قطع کند، از B خطی به موازات BD می‌کشیم تا امتداد CD را در A قطع کند. مسأله وقتی جواب دارد که میانه از وتر کوچکتر و از نصف آن بیشتر باشد.



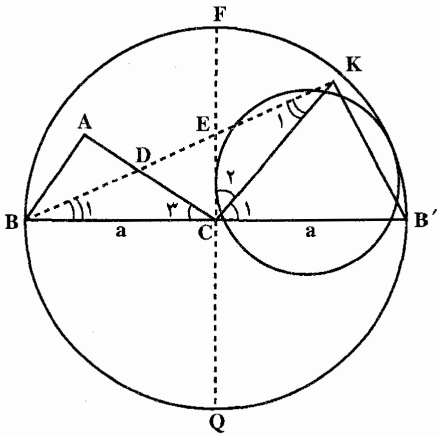
۲.۲.۷.۱.۴. ضلع زاویهٔ قائمه، میانه

۵۶۷. مسأله را حل شده و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=۹۰^\circ$) را جواب مسأله می‌گیریم. میانه AM و ضلع $AB=c$ را داده‌های مسأله فرض می‌کنیم. می‌دانیم که میانهٔ وارد بر وتر نصف وتر است. بنابراین اندازهٔ وتر مشخص است. یعنی $BC=۲m_a$ است. با معلوم بودن وتر و یک ضلع، مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC قابل رسم است.

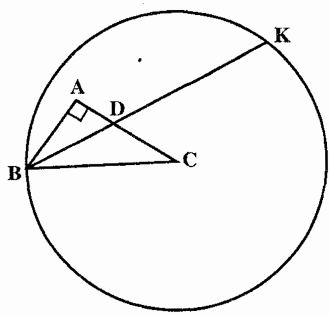


۳.۷.۱.۴. ضلع، نیمساز

۱.۳.۷.۱.۴. وتر، نیمساز



۵۶۸. فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ جواب مسأله باشد. وتر $BC=a$ و $d_b=BD$ را معلوم می‌گیریم. به مرکز C و به شعاع BC دایره‌ای می‌زنیم و از C قطر FQ را عمود بر قطر BB' رسم می‌کنیم. نیمساز BD را رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا قطر FQ را در E و دایره را در K قطع کند. دو مثلث ECK و BDC همنهشتند؛ زیرا زاویه‌های متناظر برابر دارند و $BC=CK$ است. و در نتیجه مثلث BCK متساوی‌الساقین و $\hat{B}_1=\hat{K}_1$ است.



حال کافی است ثابت کنیم $\hat{C}_2=\hat{C}_3$؛ امّا $\hat{C}_1=\hat{B}$ است. پس $\hat{C}_2=\hat{C}_3$. از تساوی دو مثلث داریم:

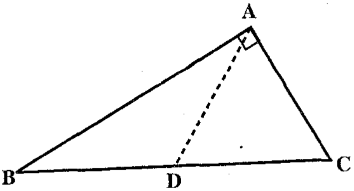
$$BK\times BE=2a^2 \quad , \quad BK-BE=d_b$$

از دو پاره‌خط BK و BE تفاضل و واسطهٔ هندسی آنها معلوم است، در نتیجه BK و BE را می‌توان به دست آورد.

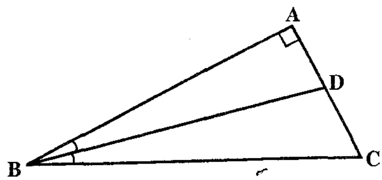
بنابراین برای رسم مثلث خواسته شده پاره‌خط $BC=a$ را رسم می‌کنیم و دایره‌ای به مرکز C و به شعاع a رسم می‌کنیم. سپس به مرکز B و شعاع BK قوسی می‌زنیم تا دایره را در K قطع کند، $d_b=BD$ را روی BK جدا کرده و DC را رسم می‌کنیم و امتداد می‌دهیم و از B عمود AB را بر امتداد CD رسم می‌کنیم تا نقطهٔ A به دست آید. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب مسأله است.

۴.۱.۷.۳.۲. ضلع زاویهٔ قائمه، نیمساز

۵۶۹. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) را جواب مسأله می‌گیریم. ضلع $AC = b$ و نیمساز $AD = l$ معلوم است. می‌دانیم که زاویهٔ $D\hat{A}C = 45^\circ$ است. بنابراین مثلث DAC با معلوم بودن اندازهٔ دو ضلع و زاویهٔ بین آن دو ضلع قابل رسم است. بنابراین برای رسم مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) مثلث ADC را با معلوم بودن $AC = b$، $AD = l$ و $D\hat{A}C = 45^\circ$ رسم می‌کنیم. سپس از A خطی رسم می‌کنیم که با AD زاویه‌ای مساوی 45° بسازد. نقطهٔ برخورد این خط با امتداد CD رأس B از مثلث خواسته شده است.



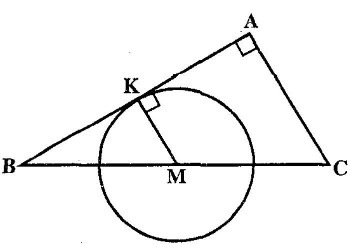
۵۷۰. مسأله را حل شده و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) را جواب مسأله می‌گیریم. BD نیمساز زاویهٔ درونی B را رسم می‌کنیم. اندازهٔ $BD = d_c$ و اندازهٔ ضلع $AC = b$ معلوم است.



۴.۱.۸. ضلع، پاره‌خط، خط

۴.۱.۸.۱. وتر، پاره‌خط

۵۷۱. مسأله را حل شده و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) را جواب مسأله می‌گیریم. وسط وتر BC را M و فاصلهٔ نقطهٔ M از ضلع AB را $MK = l$ می‌گیریم. چون $MK \perp AB$ است.



دایرهٔ به مرکز M و به شعاع MK بر ضلع AB عمود است. پس برای رسم مثلث خواسته شده، پاره‌خط $BC = a$ را رسم می‌کنیم. به مرکز M و به شعاع MK دایره‌ای رسم می‌کنیم و از B خطی مماس بر این دایره رسم می‌کنیم. آن‌گاه از نقطهٔ C خطی عمود بر امتداد BK رسم می‌کنیم تا آن را در A قطع کند. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب مسأله است.

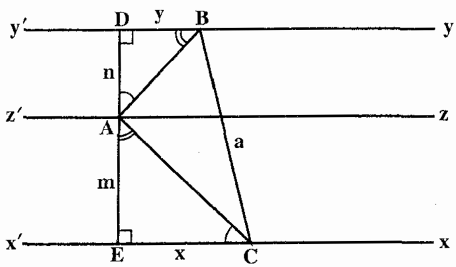
۲.۸.۱.۴. تفاضل مربعهای دو ضلع، خط

۵۷۲. ABC را مثلث خواسته شده در نظر می‌گیریم. m و n را فاصلهٔ بین خطهای موازی و $b^2 - c^2 = k^2$ اختیار می‌کنیم.

رأس A را می‌توانیم به دلخواه روی یکی از خطها اختیار کنیم. مثلث در صورتی مشخص خواهد شد که پاره‌خط BD مشخص شود (شکل). فرض می‌کنیم EC=x و BD = y باشد، رابطه‌های زیر را داریم:

$$b^2 = m^2 + x^2,\ c^2 = n^2 + y^2,\ b^2 - c^2 = k^2 = m^2 + x^2 - n^2 - y^2,$$

$$x^2 - y^2 = k^2 + n^2 - m^2 \qquad (1)$$



از طرفی مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AEC و ABD متشابه‌اند، زیرا $\hat{ACE} = \hat{BAD}$.

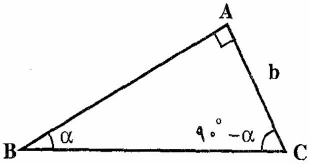
از آن‌جا:

$$\frac{x}{m} = \frac{n}{y} \Rightarrow xy = mn \qquad (2)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) اندازهٔ x و y محاسبه می‌شود و با مشخص شدن آنها مثلث ABC رسم می‌شود.

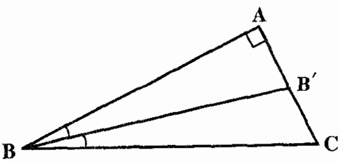
۹.۱.۴. ضلع، زاویه

۱.۹.۱.۴. وتر، زاویهٔ حاده



۵۷۳. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ را جواب مسأله می‌گیریم. $\hat{B}=\alpha$ و وتر $BC=a$ است. چون $\hat{B}+\hat{C}=90^\circ$ است؛ پس $\hat{C}=90^\circ-\alpha$ مقدار معلومی است. بنابراین مثلث قائم‌الزاویهٔ خواسته شده با معلوم بودن اندازهٔ یک ضلع و زاویه‌های آن قابل رسم است.

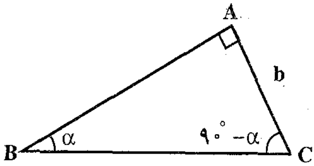
۵۷۴. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ را جواب مسأله می‌گیریم. وتر $BC=a$ و زاویهٔ میانهٔ BB' با ضلع BC را α $(C\hat{B}B'=\alpha)$ می‌نامیم. چون $\frac{CB'}{CA}=\frac{1}{2}$ است، پس مکان هندسی نقطهٔ B' مجانس مکان هندسی نقطهٔ A نسبت به مرکز تجانس C و نسبت تجانس $\frac{1}{2}$ است.



از طرفی B' روی خطی قرار دارد که از رأس B می‌گذرد و با BC زاویهٔ α می‌سازد. پس برای رسم مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC؛ پاره‌خط $BC=a$ را رسم می‌کنیم و دایرهٔ به قطر BC را رسم می‌نماییم. سپس مجانس دایرهٔ رسم شده را نسبت به مرکز تجانس C و با نسبت تجانس $\frac{1}{2}$ به دست می‌آوریم. آن‌گاه از B خطی رسم می‌کنیم که با BC زاویه‌ای برابر α بسازد. نقطهٔ برخورد این خط با دایرهٔ دومی نقطهٔ B' وسط ضلع AC است. از C به B' وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ به قطر BC را در A قطع کند. از A به B وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

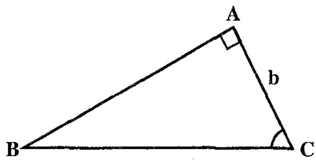
۲.۹.۱.۴. ضلع زاویهٔ قائمه، زاویهٔ حاده

۵۷۵. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ را جواب مسأله می‌گیریم. ضلع $AC=b$ و $\hat{B}=\alpha$



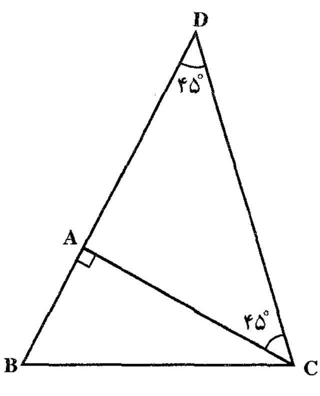
را داده‌های معلوم مسأله می‌گیریم. در این صورت $\hat{C} = ۹۰° - \alpha$ مقدار معلومی است. پس مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با معلوم بودن یک ضلع و زاویه‌هایش قابل رسم است.

۵۷۶. اگر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰°$) جواب مسأله و ضلع $AC = b$ و زاویهٔ $\hat{C} = \alpha$ معلوم باشند. این مثلث با معلوم بودن یک ضلع و دو زاویهٔ مجاورش قابل رسم است.



۳.۹.۱.۴. مجموع دو ضلع زاویهٔ قائمه، زاویهٔ حاده

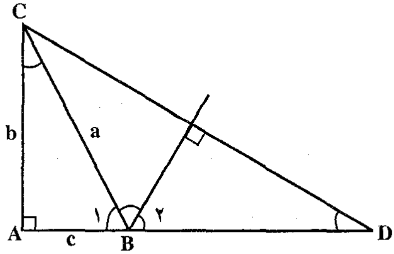
۵۷۷. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. اگر $\hat{B} = \alpha$ و $b + c = l$ باشد، در امتداد AB طول AD را مساوی AC رسم می‌کنیم. از نقطهٔ D به C وصل می‌نماییم. $\hat{D} = ۴۵°$ است. پس برای رسم مثلث ABC، یک زاویهٔ $۴۵°$ رسم می‌کنیم که یک ضلع آن $BD = AB + AC = l$ باشد. سپس از نقطهٔ B زاویه‌ای مساوی زاویهٔ $\hat{B}$ رسم می‌کنیم تا ضلع دیگر زاویه را در C قطع کند. از C عمودی بر BD رسم می‌کنیم تا آن را در نقطهٔ A رأس قائم مثلث قطع کند.



۴.۹.۱.۴. مجموع وتر و یک ضلع، یک زاویهٔ حاده

۵۷۸. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = ۹۰°$) را جواب مسأله می‌گیریم $AB + BC = a + c = l$ و $\hat{B} = \alpha$ معلوم است که در این صورت زاویهٔ $\hat{C}$ نیز

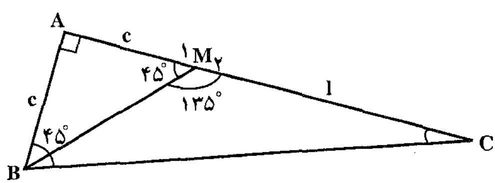
مساوی $۹۰^\circ - \alpha$ معلوم می‌باشد. BD را به اندازهٔ BC در امتداد AB رسم می‌کنیم. از D به C وصل می‌کنیم. مثلث BCD متساوی‌الساقین است. پس $\hat{D} = \frac{\hat{B}}{۲} = \frac{\alpha}{۲}$ و عمودمنصف DC از B می‌گذرد. بنابراین برای رسم مثلث ABC پاره‌خط AD را به اندازهٔ l، مجموع دو ضلع رسم می‌کنیم. از



A خطی بر AD عمود می‌کنیم و از D زاویه‌ای رسم می‌کنیم، به اندازهٔ $\hat{D} = \frac{\hat{C}}{۲} = \frac{\alpha}{۲}$ تا خط عمود را در C قطع کند، عمودمنصف CD را رسم می‌کنیم تا AD را در B قطع نماید. مثلث ABC جواب مسأله است.

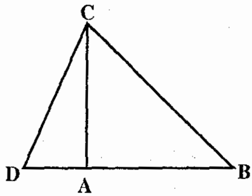
۵.۹.۱.۴. تفاضل دو ضلع زاویهٔ قائمه، یک زاویهٔ حاده

۵۷۹. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. زاویهٔ $\hat{B}$ و $b - c$ معلومند. روی AC، AM را به طول AB جدا می‌کنیم و از B به M وصل می‌کنیم. $MC = b - c = l$ است. زاویهٔ $\hat{M}_۱ = ۴۵^\circ$، پس $\hat{M}_۲ = ۱۳۵^\circ$ است. چون زاویهٔ $\hat{B}$ معلوم است پس زاویهٔ $\hat{C}$ نیز معلوم می‌باشد. بنابراین مثلث MBC قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم، سپس CM را امتداد می‌دهیم و از B عمودی بر آن فرود می‌آوریم تا نقطهٔ A به دست آید. مثلث ABC جواب مسأله است.



۶.۹.۱.۴. تفاضل وتر و یک ضلع، یک زاویهٔ حاده

۵۸۰. فرض می‌کنیم مسأله حل شده است (شکل). BA را تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم به قسمی که $BD = BC$ شود. DA تفاضل BC و BA می‌باشد که مقداری است معلوم و مثلث



BCD متساوی‌الساقین است. پس $\hat{D}+\hat{B}=180^\circ$ یا $\hat{D}=90^\circ-\frac{\hat{B}}{2}$. بنابراین برای رسم مثلث ABC ابتدا مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC را با معلوم بودن DA و اندازهٔ زاویهٔ $\hat{D}$ رسم می‌کنیم و $D\hat{C}B$ را برابر زاویهٔ $\hat{D}$ می‌سازیم. رأس B به دست می‌آید.

۷.۹.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵۸۱. زاویهٔ α را طوری انتخاب می‌کنیم که، برای آن، داشته باشیم: $6\alpha<90^\circ$ و $tg\alpha\in Q$ (مثلاً، مناسب است $tg\alpha=\frac{1}{4}$ بگیریم). در این صورت، هریک از عددهای

$$tg2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1-tg2\alpha} \text{ و } tg3\alpha=\frac{tg2\alpha+tg\alpha}{1-tg2\alpha tg\alpha} \text{ و}$$

$$\cos2\alpha=\frac{1-tg^2\alpha}{1+tg^2\alpha} \text{ و } \sin2\alpha=\frac{2tg\alpha}{1+tg^2\alpha} \text{ و}$$

$$\cos6\alpha=\frac{1-tg^2 3\alpha}{1+tg^2 3\alpha} \text{ و } \sin6\alpha=\frac{2tg3\alpha}{1+tg^2 3\alpha}$$

عددهایی گویا هستند. بنابراین، اگر مثلث قائم‌الزاویهٔ $A_1B_1C_1$ را با فرضهای $\hat{C}_1=90^\circ$ و $\hat{A}_1=6\alpha$ و $A_1B_1=1$ و $A_1C_1=\cos6\alpha$ و $B_1C_1=\sin6\alpha$ بسازیم، طول ضلعهای آن، عددهایی گویا می‌شود و، در نتیجه، مثلث ABC، متشابه با $A_1B_1C_1$ وجود دارد که طول ضلعهای آن، عددهایی درست باشند (به طور مثال، برای $tg\alpha=\frac{1}{4}$، ضلعهای مثلث ABC را می‌توان $AB=4913$، $AC=495$ و $BC=4888$ گرفت). از طرف دیگر، در مثلث $A_2B_2C_2$ هم که، برای آن، داشته باشیم:

$$\hat{C}_2=90^\circ \text{ و } \hat{A}_2=2\alpha \text{ و } A_2B_2=1 \text{ و } A_2C_2=\cos2\alpha \text{ و } B_2C_2=\sin2\alpha$$

طول همهٔ ضلعها، عددهایی گویا هستند. بنابراین، می‌توان به کمک پرگار و خط‌کش، زاویهٔ $2\alpha=\frac{1}{3}\hat{A}_1$ را ساخت، یعنی زاویهٔ A از مثلث ABC را به سه بخش برابر تقسیم

کرد. از آن‌جا که، زاویهٔ ۳۰ درجه را، می‌توان ساخت، در نتیجه:

$$\frac{۱}{۳}\hat{B} = \frac{۱}{۳}(\hat{C} - \hat{A}) = ۳۰^\circ - ۲\alpha$$

را هم می‌توان به کمک پرگار و خط‌کش رسم کرد. به این ترتیب، هر یک از زاویه‌های مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC را می‌توان، به کمک پرگار و خط‌کش، به سه بخش برابر تقسیم کرد. مثلث ABC، جوابی برای مسأله است.

۴.۱.۱۰. ضلع؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۴.۱.۱۰.۱. ضلع، محیط

۵۸۲. چون $a + b + c = ۲p$ است، پس داریم $a + b + ۳ = ۱۲$، از آن‌جا $a + b = ۹$ است، در نتیجه با استفاده از رابطه $a^۲ = b^۲ + c^۲$ و یا $a^۲ = b^۲ + ۹$، اندازهٔ a و b محاسبه می‌شود و مثلث قابل رسم است.

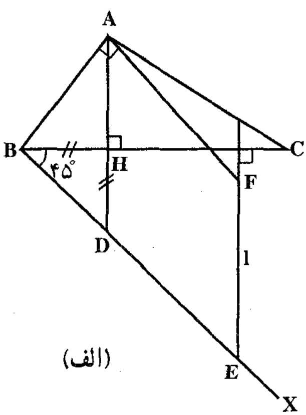
نکته. با معلوم بودن اندازهٔ یک ضلع و مجموع اندازه‌های وتر و ضلع دیگر، به روش هندسی نیز مثلث قابل رسم است.

۴.۱.۱۰.۲. وتر، مساحت

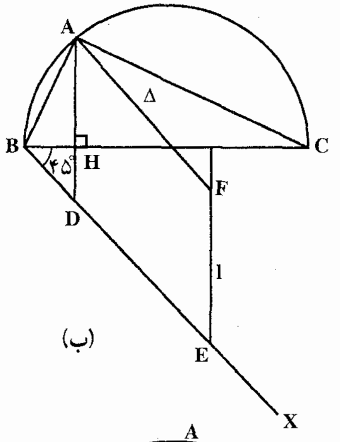
۵۸۳. گزینهٔ (د) درست است.

۴.۱.۱۰.۲. وتر، رابطهٔ متری

۵۸۴. اگر مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC مثلث خواسته شده باشد، اگر AH را تا نقطهٔ D طوری امتداد دهیم که $HD = BH$ شود، مثلث قائم‌الزاویهٔ BHD متساوی‌الساقین و زاویهٔ HBD مساوی با ۴۵° و AD مساوی با l است. اگر از نقطهٔ E عمودی بر BC فرود آورده و در روی آن طول $EF = l$ را جدا کنیم، چهار ضلعی ADEF متوازی‌الاضلاع است. بنابراین راه حل صفحهٔ بعد به دست می‌آید.



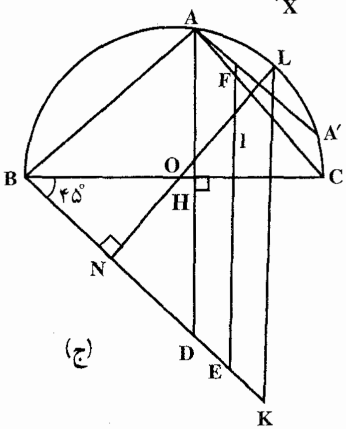
(الف)



(ب)

به قطر $BC = a$ نیمدایره‌ای رسم کرده و از نقطهٔ B خطی چنان رسم می‌کنیم که با BC زاویهٔ ۴۵° تشکیل دهد. از نقطهٔ دلخواه E واقع بر BX عمودی بر BC فرود آورده و بر روی آن از نقطهٔ E طول $EF=l$ را جدا می‌کنیم. از F خط Δ را موازی BX رسم می‌کنیم تا نیمدایره را در نقطهٔ A قطع کند. A رأس زاویهٔ قائمه از مثلث ABC است. شرط امکان مسأله آن است که Δ نیمدایره را قطع کند (شکل) ؛ یعنی :

$$l = AH + HD < BC \Rightarrow l < a$$



(ج)

با شرط $l < a$ ، Δ نیمدایره را در یک نقطه قطع می‌کند و مسأله یک جواب دارد.

اگر $l = a$ باشد، نقطهٔ A بر وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ واقع است و مثلث متساوی‌الساقین ABC جواب مسأله است.

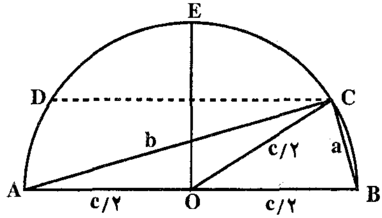
اگر Δ نیمدایره را در دو نقطه قطع کند، مسأله دو جواب دارد. در این حالت $EF = l > a$ و $EF < LK$ است. اگر از O مرکز دایره عمودی بر BE فرود آورده و محل تلاقی آن را با نیمدایره نقطهٔ L بگیریم، LK وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ LKN می‌باشد و ملاحظه می‌شود که اگر $LK = l$ باشد، چون LN بر BN عمود است، لذا خط Δ که از نقطهٔ L موازی BE رسم می‌شود بر دایره مماس و نقطهٔ A بر L منطبق است. LK وتر مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین LNK می‌باشد و برای محاسبهٔ آن ابتدا LN را حساب می‌کنیم.

$$ON = \frac{a}{۲} \times \frac{\sqrt{۲}}{۲} \quad \text{و} \quad OL = \frac{a}{۲} \quad \text{امّا} \quad LN = OL + ON$$

بنابراین

$$LK = \frac{a}{۲}(۱ + \sqrt{۲}) \quad \text{و یا} \quad LK = \frac{\frac{a}{۲} + \frac{a\sqrt{۲}}{۲}}{\frac{\sqrt{۲}}{۲}} \quad \text{و} \quad LN = \frac{a}{۲} + \frac{a\sqrt{۲}}{۴}$$

و لذا در این حالت باید $a < l < \frac{a}{۲}(۱ + \sqrt{۲})$ باشد.



۵۸۵. راه اول. فرض می‌کنیم وتر معلوم قطر AB از نیمدایرهٔ شکل باشد. هر مثلث ACB ی محاط در این نیمدایره دارای زاویهٔ قائمه‌ای در C و میانهٔ COای به طول $\frac{c}{۲}$ است. بنابراین کارمان مشخص کردن نقطهٔ C به طریقی است که CO واسطهٔ هندسی بین $BC = a$ و $AC = b$ باشد، یعنی :

$$\frac{a}{\frac{c}{۲}} = \frac{\frac{c}{۲}}{b} \quad \text{یا} \quad ۴ab = c^۲ \qquad (۱)$$

این کار را با معین کردن h ارتفاع نظیر رأس C از مثلث خواسته شده انجام می‌دهیم. در این مورد، از یک طرف، مساحت این مثلث $\frac{ab}{۲}$ نیز $\frac{ch}{۲}$ است ؛ در نتیجه $ab = ch$. از طرف دیگر، باید معادلهٔ (۱) برقرار باشد. بنابراین : $ch = ab = \frac{c^۲}{۴}$ که از آن $h = \frac{c}{۴}$ به دست می‌آید.

در این صورت خطی موازی قطر AB به فاصلهٔ $\frac{c}{۴}$ بالای آن رسم می‌کنیم. این خط نیمدایره را در دو نقطهٔ C، D، که رأسهای مثلثهای قائم‌الزاویهٔ صادق در شرطهای مسأله‌اند، قطع می‌کند.

راه دوم. بنا به قانون کسینوسها، چون در مورد مثلث COB با $C\hat{O}B = \theta$ به کار رود :

$$a^۲ = \frac{c^۲}{۴} + \frac{c^۲}{۴} - ۲\frac{c^۲}{۴}\cos\theta = c^۲(\frac{۱-\cos\theta}{۲})$$

و چون در مورد مثلث AOC، که در آن $A\hat{O}C = \pi - \theta$ ، به کار رود :

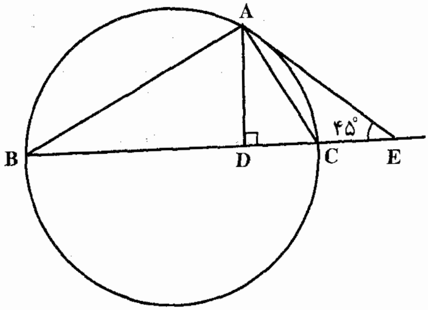
$$b^۲ = \frac{c^۲}{۴} + \frac{c^۲}{۴} + ۲\frac{c^۲}{۴}\cos\theta = c^۲(\frac{۱+\cos\theta}{۲})$$

در نتیجه :

$$a^۲b^۲ = c^۴ \ \frac{۱-\cos^۲\theta}{۴} = \frac{c^۴}{۴}\sin^۲\theta$$

بنابراین :
$$ab = \frac{c^2}{2}\sin\theta$$

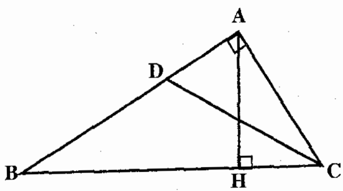
اما شرایط مسأله متضمن این است که $ab = \frac{c^2}{4}$. بنابراین : $\sin\theta = 1/2$ ، $\theta = \pi/6$ یا $\theta = 5\pi/6$.



۵۸۶. رأس A بر دایره‌ای به قطر BC واقع است و اگر از B بر وتر طول $BE = l$ را جدا کنیم، A بر خطی که از E گذشته و با BC زاویهٔ °۴۵ بسازد نیز واقع است.

۴.۱.۱۱. ارتفاع؛ میانه، نیمساز؛ پاره‌خط، خط

۴.۱.۱۱.۱. ارتفاع، پاره‌خط

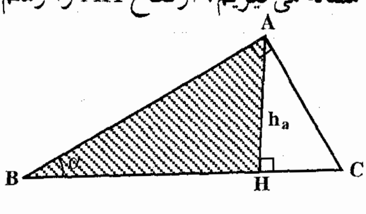


۵۸۷. مسأله را حل شده و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90°$) را جواب مسأله می‌گیریم. ارتفاع AH و نیمساز زاویهٔ درونی C یعنی CD را رسم می‌کنیم. $AH = h_a$ و $AD = l$ معلومند.

۴.۱.۱۲. ارتفاع، میانه، نیمساز؛ زاویه

۴.۱.۱۲.۱. ارتفاع، زاویهٔ حاده

۵۸۸. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90°$) را جواب مسأله می‌گیریم. ارتفاع AH را رسم

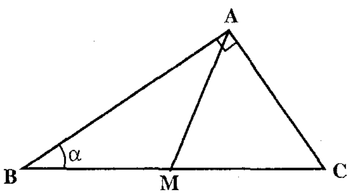


می‌کنیم. $AH = h_a$ و $\hat{B} = \alpha$ است، مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH با معلوم بودن یک ضلع زاویهٔ قائمه و یک زاویه حاده قابل رسم است. این

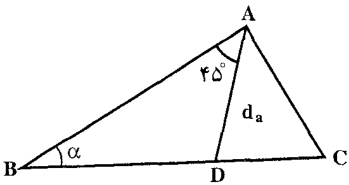
مثلث را رسم می‌کنیم و از A عمودی بر AB اخراج می‌کنیم تا خط BH را در نقطهٔ C رأس سوم مثلث قطع کند. مثلث ABC جواب مسأله است.

۲.۱۲.۱.۴. میانه، زاویهٔ حاده

۵۸۹. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ را جواب مسأله می‌گیریم. با معلوم بودن طول میانه AM، اندازهٔ وتر BC نیز معلوم است. بنابراین مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ را با معلوم بودن وتر $BC=2m_a$ و $\hat{B}=\alpha$ می‌توان رسم کرد.

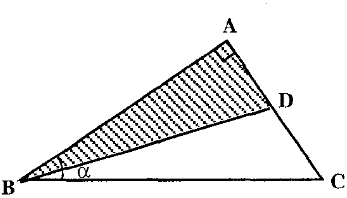


۳.۱۲.۱.۴. نیمساز، زاویهٔ حاده



۵۹۰. مسأله را حل شده و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ را جواب مسأله می‌گیریم. نیمساز AD را رسم می‌کنیم، $B\hat{A}D=45^\circ$ است و چون $\hat{B}=\alpha$ از مثلث ABD معلوم است. پس اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{D}B=180^\circ-(\alpha+45^\circ)$ نیز مقدار معلوم است. در نتیجه مثلث ABD با معلوم بودن یک ضلع و زاویه‌هایش قابل رسم است. بنابراین برای رسم مثلث ABC نخست مثلث ABD را با داده‌های بالا رسم می‌کنیم. سپس از A عمودی بر AB اخراج می‌کنیم تا امتداد BD را در نقطهٔ C رأس سوم مثلث ABC که جواب مسأله است، قطع کند.

۵۹۱. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=90^\circ)$ را جواب مسأله می‌گیریم. نیمساز BD را رسم می‌کنیم. با فرض $\hat{B}=\alpha$، اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{B}D=\frac{\alpha}{2}$ است. پس مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD را با داشتن اندازهٔ وتر آن $BD=l$ و یک زاویهٔ حاده $A\hat{B}D=\frac{\alpha}{2}$ می‌توان رسم کرد. بنابراین برای رسم مثلث ABC، مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD



را رسم می‌کنیم. سپس از B خطی رسم می‌کنیم که BD، زاویه‌ای برابر $\frac{\alpha}{۲}$ (یا با AB زاویه‌ای مساوی α بسازد) نقطهٔ برخورد این خط با امتداد AD جواب مسأله است.

۲.۴. رسم مثلث قائم‌الزاویه با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۱.۲.۴. مثلث، زاویه

۵۹۲. گزینهٔ (هـ) درست است.

۲.۲.۴. مثلث، مساحت

۵۹۳. مساحت مثلث داده شده را S می‌نامیم. اگر مثلث قائم‌الزاویهٔ هم‌ارز آن را به ضلع a و b و وتر c اختیار کنیم، داریم: $S=\frac{۱}{۲}bc=\frac{۱}{۲}a.h_a$. بنابراین با انتخاب مقدار دلخواهی برای b و داشتن S، می‌توان c را به دست آورد. همچنین با در نظر گرفتن مقدار دلخواهی برای a، اندازهٔ h_a به دست می‌آید.

پس بیشمار مثلث قائم‌الزاویه هم‌ارز با مثلث داده شده‌ای می‌توان رسم کرد. برای محدود شدن تعداد جوابها لازم است شرط دیگری نیز داده شود.

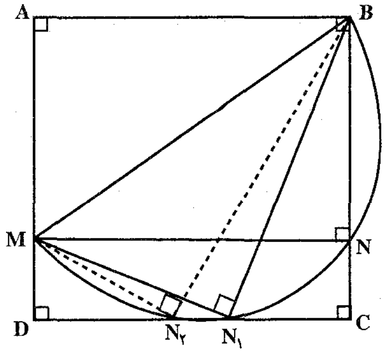
۳.۴. رسم مثلث قائم‌الزاویه با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی و داده‌های دیگر

۱.۳.۴. رسم مثلث قائم‌الزاویه با معلوم بودن چندضلعی

۱.۱.۳.۴. رسم مثلث قائم‌الزاویه با معلوم بودن چهارضلعی

۱.۱.۱.۳.۴. رسم مثلث قائم‌الزاویه با معلوم بودن مربع

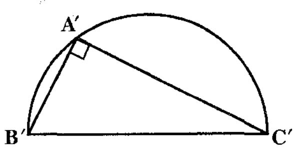
۵۹۴. مربع ABCD را در نظر می‌گیریم. رأس مشترک مثلث و مربع را B فرض می‌کنیم. به مرکز B و به شعاع ۵ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا ضلع AD را در نقطهٔ E قطع کند. از B به E وصل می‌کنیم و به قطر BE یک دایره می‌زنیم. فصل مشترک این دایره با ضلع BC یا CD رأس قائم مثلث قائم‌الزاویهٔ جواب مسأله است. از این نقطه به B و E وصل می‌کنیم.



۵۹۵. محیط نیمدایره و مربع با هم برابرند و محیط نیمدایره برابر است با $\frac{۲۲}{۷} \times ۷ = ۲۲$

پس ضلع AB از مربع عبارت است از $AB = \frac{۲۲}{۴} = ۵/۵$

برای رسم مثلث قائم‌الزاویه اوّل مربع ABCD را به ضلع $AB = ۵/۵$ رسم نموده به شعاع AC قطر مربع نیمدایره‌ای رسم نموده و به شعاع $A'B' = ۷$ قوسی رسم می‌کنیم تا دایره را در A' قطع کند. نقطه‌های C' و A' را به B' وصل می‌کنیم، مثلث $A'B'C'$ مطلوب است.



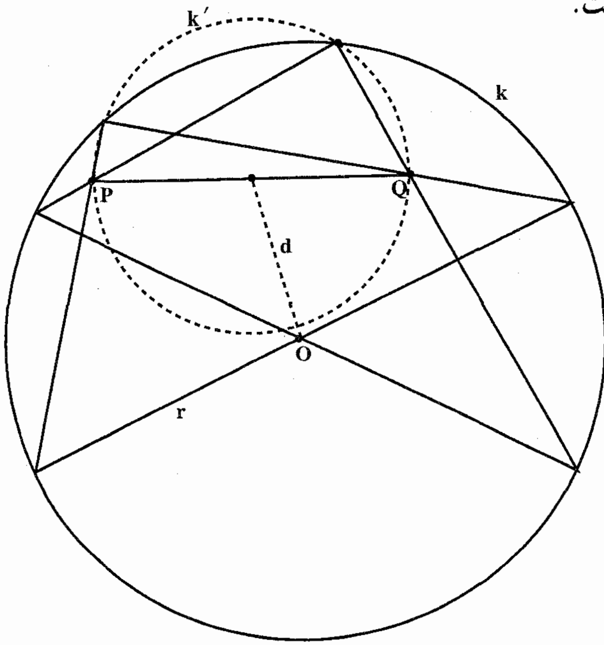
۴.۴. رسم مثلث قائم‌الزاویه با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر

۱.۴.۴. رسم مثلث قائم‌الزاویه با معلوم بودن دایره در حالت کلی و داده‌های دیگر

۱.۱.۴.۴. دایره، نقطه

۵۹۶. راه اول. اگر P' نقطه‌ای باشد که، برای آن، داشته باشیم: $P\hat{P'}Q = ۹۰°$، آن وقت،

P' بر دایره‌ای مثل k' به قطر PQ قرار دارد (شکل). نقطه‌های برخورد این دایره با دایرهٔ k، رأسهای زاویه‌های قائمه‌ای را تشکیل می‌دهند که در دایرهٔ k محاط شده‌اند و ضلعهای آنها، از نقطه‌های P و Q می‌گذرند. تکمیل مثلثهای قائم‌الزاویهٔ خواسته شده، دشوار نیست.



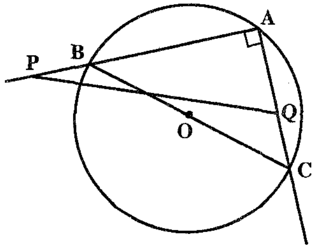
اگر بخواهیم دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه از مثلث (و نه امتداد آنها)، از نقطه‌های P و Q بگذرند، باید P و Q در داخل دایرهٔ k واقع باشند. ولی این شرط برای وجود جواب، کافی نیست. مسأله وقتی جواب دارد که دو دایرهٔ k و k' یکدیگر را قطع کنند (و تعداد جوابها، برابر است با تعداد نقطه‌های برخورد دو دایره).

اگر r را شعاع دایرهٔ k و d را فاصلهٔ بین مرکز دایرهٔ k تا وسط پاره‌خط PQ بگیریم :

I. با شرط $\frac{1}{2}PQ > r-d$، مسأله دو جواب دارد.

II. با شرط $\frac{1}{2}PQ < r-d$، مسأله جواب ندارد.

III. و بالاخره با شرط $\frac{1}{2}PQ = r-d$، مسأله یک جواب دارد. زیرا کوتاهترین فاصلهٔ بین k و k' برابر است با $r-d$.

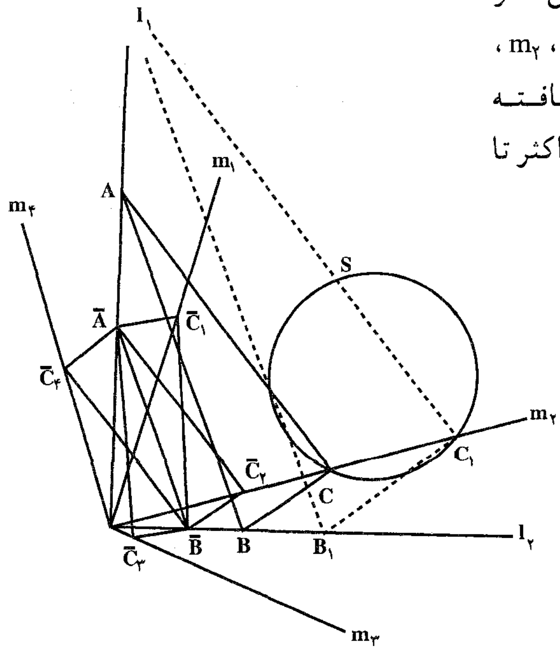


راه دوم. مسأله را حل شده می‌گیریم. دایرهٔ به قطر PQ نیز از نقطهٔ A خواهد گذشت.

روش رسم. دایرهٔ به قطر PQ را رسم می‌کنیم تا دایرهٔ مفروض را در A و ′A قطع کند. AP و AQ را رسم می‌کنیم تا دایره را در B و C قطع کنند. مثلث ABC جواب مسأله است (مثلث A′B′C′ دیگر جواب مسأله است).

۲.۱.۴.۴. دایره، خط، زاویه

۵۹۷. فرض می‌کنیم مثلث ABC رسم شده است و $\Delta\overline{A}\overline{B}\overline{C}$ را با طول ثابت وتر آن $\overline{A}\overline{B} = \alpha$ و مجانس با مثلث ABC با مرکز تجانس O، محل برخورد خطهای l_1 و l_2 در نظر می‌گیریم. رأس $\overline{C}$ بر یکی از خطهای m_1 ، m_2 ، m_3 و m_4 که بسادگی قابل ترسیمند واقع است. (برای ترسیم این خطها کافی است مثلثهای قائم‌الزاویهٔ $\overline{A}\overline{B}\overline{C}_1$ و $\overline{A}\overline{B}\overline{C}_2$ ، $\overline{A}\overline{B}\overline{C}_3$ و $\overline{A}\overline{B}\overline{C}_4$ را با زاویهٔ حادهٔ مفروض α طوری رسم کنیم که رأسهای زاویه‌های حاده نقطه‌های دلخواهی از خطهای l_1 و l_2 باشند). مسلماً C نیز روی همین خط واقع خواهد شد. پس C از برخورد یکی از خطهای m_1 ، m_2 ، m_3 و m_4 با دایرهٔ S یافته می‌شود. مسأله می‌تواند حداکثر تا هشت جواب داشته باشد.

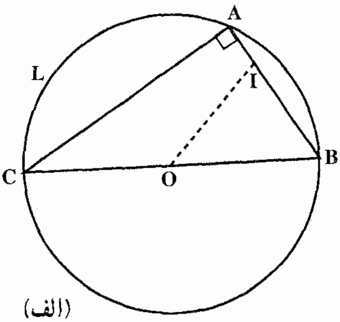


۲.۴.۴. دایرهٔ محیطی یا شعاع آن و داده‌های دیگر

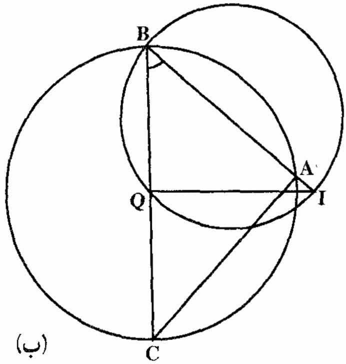
۱.۲.۴.۴. دایرهٔ محیطی و داده‌های دیگر

۱.۱.۲.۴.۴. دایرهٔ محیطی، نقطه، زاویه

۵۹۸. اگر ABC مثلث خواسته شده باشد، رأس B از این مثلث بر دایره مفروض (L) و بر کمان درخور زاویهٔ B نظیر به وتر OI واقع است. بنابراین دایرهٔ شامل کمان درخور زاویهٔ B نظیر وتر OI را رسم کرده و به مرکز O و شعاع R دایره‌ای رسم می‌کنیم، محل تلاقی این دایره و کمان درخور، رأس B را نشان می‌دهد. BI را امتداد می‌دهیم تا دایره را در نقطهٔ A قطع کند و OB دایره را در نقطهٔ C قطع می‌کند. ABC مثلث خواسته شده است. شرط امکان مسأله آن است که دایرهٔ محیطی مثلث با کمان درخور متقاطع یا مماس باشد. اگر هر دو نقطه تقاطع بر روی کمان $\overset{\frown}{OBI}$ از دایرهٔ شامل کمان درخور باشد، مسأله دو جواب دارد. (شکل)



(الف)

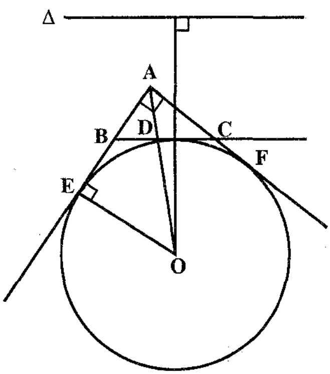


(ب)

۳.۴.۴.دایره‌های محاطی یا شعاع آنها و داده‌های دیگر

۱.۳.۴.۴. دایره‌های محاطی و داده‌های دیگر

۵۹۹. مسأله را حل شده و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$ را جواب مسأله می‌گیریم. نقطهٔ تماس دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع a، با ضلع AB را E و مرکز این دایره را O می‌نامیم. می‌دانیم که AO نیمساز زاویهٔ BAC است، پس $E\hat{A}O = 45^\circ$ است و چون $EO = r_a$ معلوم است، مثلث قائم‌الزاویهٔ AEO قابل رسم می‌باشد. پس برای رسم مثلث



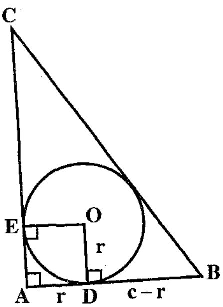
ABC، نخست مثلث قائم‌الزاویهٔ AEO را رسم می‌کنیم. سپس از رأس A مماس AF را بر این دایره رسم می‌نماییم. برای تعیین ضلع BC از نقطهٔ O مرکز دایره عمودی بر خط Δ فرود می‌آوریم، D نقطهٔ تقاطع این خط با دایره، نقطهٔ تماس ضلع BC با دایره است. در این نقطه مماسی بر دایره رسم می‌کنیم تا دو ضلع زاویهٔ A را در B و C که دو رأس دیگر مثلث ABC می‌باشند، قطع کنند.

۴.۴.۳.۲. شعاع دایره‌های محاطی و داده‌های دیگر

۴.۴.۳.۲.۱. شعاع دایرهٔ محاطی درونی و داده‌های دیگر

۴.۴.۳.۲.۱.۱. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، یک ضلع

۶۰۰. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC

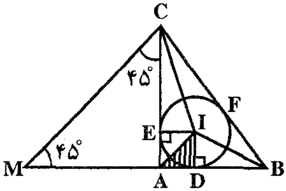


($\hat{A} = 90^\circ$) که از آن ضلع $AB = c$ و شعاع دایرهٔ محاطی درونی r معلوم است، جواب مسأله باشد. نقطه‌های تماس ضلعهای AB و AC با دایرهٔ محاطی درونی مثلث را D و E و مرکز دایره را O می‌نامیم. چهارضلعی ADOE مربع است. بنابراین $AD = AE = r$ می‌باشند. پس با توجه به این که ضلع $AB = c$ است، دو قطعه AD و DB از آن معلوم است. در نتیجه مثلث AOB با معلوم بودن $AD = r$، $DB = c - r$ و ارتفاع $OD = r$ قابل رسم است. پس روش رسم مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC چنین است:

پاره‌خط $BD = c$ را رسم می‌کنیم و روی آن پاره‌خط $AD = r$ را جدا می‌کنیم. از D عمودی به اندازهٔ $DO = r$ اخراج می‌نماییم، به مرکز O و به شعاع r دایره‌ای رسم می‌کنیم و از دو نقطهٔ B و A مماسهایی بر این دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ C، رأس سوم مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) قطع کنند. بدین ترتیب مثلث موردنظر به دست می‌آید.

۲.۱.۲.۳.۴.۴. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، مجموع دو ضلع

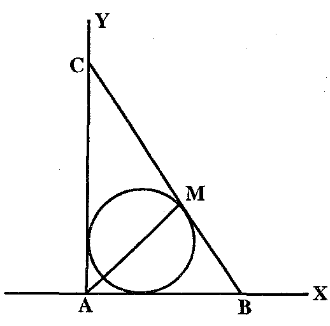
۶۰۱. مسأله را حل شده و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90°$) را که از آن $AB + AC = b + c = l$ و r شعاع دایرهٔ محاطی درونی داده شده است، جواب مسأله می‌گیریم. I را مرکز دایرهٔ محاطی درونی مثلث و نقطهٔ تماس این دایره با ضلعهای AB و AC را D و E می‌نامیم. می‌دانیم که:



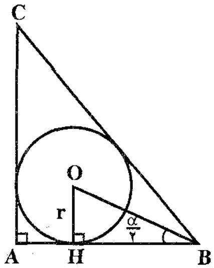
$ID = IE = r$ و $I\hat{A}D = I\hat{A}E = 45°$ است. پس مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ADI با معلوم بودن اندازهٔ یک ضلع زاویهٔ قائمه $ID = r$ و زاویهٔ حادهٔ $I\hat{A}D = 45°$ قابل رسم است. از طرفی $AD = p - a$ است؛ یعنی $AD = \frac{a+b+c}{2} - a$ و یا $AD = \frac{b+c-a}{2}$ است، که چون $b + c = l$ معلوم است، بنابراین a اندازهٔ وتر این مثلث مقدار مشخصی است ($a = l - 2AD$). حال ضلع AB را از طرف A به اندازهٔ $AM = AC$ امتداد می‌دهیم و از M به C وصل می‌کنیم، $BM = AB + AC = l$ و مثلث AMC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین و $A\hat{M}C = A\hat{C}M = 45°$ است. در نتیجه، مثلث BCM، با معلوم بودن اندازهٔ ضلع $BC = a$ ، $BM = l$ و $B\hat{M}C = 45°$ قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم و سپس عمودمنصف MC را رسم می‌نماییم تا MB را در نقطهٔ A قطع کنند. از A به C وصل می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب مسأله است.

۳.۱.۲.۳.۴.۴. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، ارتفاع

۶۰۲. دایرهٔ محاطی درونی مثلث را رسم می‌کنیم (شکل) و دو مماس عمود برهم AX و AY را بر آن می‌کشیم. به این ترتیب رأس A به دست می‌آید. به مرکز A و به شعاع AH برابر h ارتفاع مثلث دایره‌ای رسم می‌کنیم. مماس مشترک این دایره و دایرهٔ محاطی درونی، AX را در B و AY را در C قطع می‌کند. مثلث ABC جواب مسأله است.



۴.۴.۳.۲.۱.۴. شعاع دایرهٔ محاطی درونی، زاویه



۶۰۳. مسأله را حل شده می‌گیریم. اگر $\hat{B} = \alpha$ و $OH = r$ شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) باشد، مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH با معلوم بودن: $\hat{H} = 90^\circ$ ، $OH = r$ و $O\hat{B}H = \frac{\alpha}{2}$ قابل رسم است. بنابراین برای رسم مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) چنین عمل می‌کنیم:

مثلث قائم‌الزاویهٔ OBH را با معلومهای $\hat{H} = 90^\circ$ ، $OH = r$ و $O\hat{B}H = \frac{\alpha}{2}$ رسم می‌کنیم.

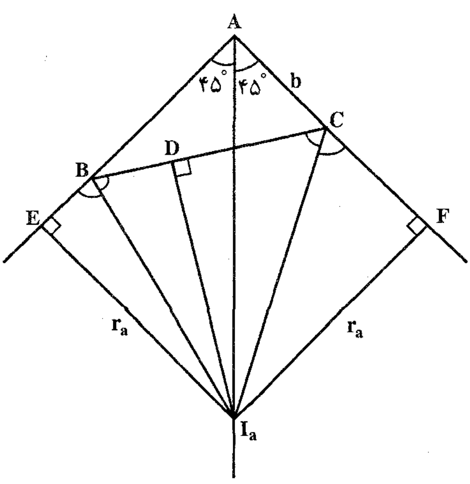
به مرکز O و به شعاع r یک دایره رسم می‌کنیم، سپس از B مماسی بر این دایره رسم می‌کنیم و BH را به اندازهٔ $HA = r$ امتداد می‌دهیم تا رأس A به دست آید. از A مماس دیگری بر دایره رسم می‌کنیم تا امتداد مماس رسم شده از B را در نقطهٔ C قطع کند. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) جواب مسأله است.

در صورتی که $\hat{B} = \alpha < 90^\circ$ و $r > 0$ باشد، مسأله همواره جواب دارد.

۴.۴.۳.۲.۲. شعاع دایرهٔ محاطی برونی و داده‌های دیگر

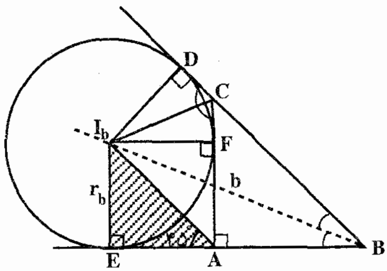
۴.۴.۳.۲.۲.۱. شعاع دایرهٔ محاطی برونی، ضلع

۶۰۴. مسأله را حل شده و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A} = 90^\circ$) را جواب مسأله می‌گیریم. مرکز دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع a را I_a و نقطهٔ تماس این دایره با ضلع AC را F می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ FAI_a با معلوم بودن یک ضلع، زاویهٔ قائمه، و یک زاویهٔ حاده قابل رسم است زیرا $I_aF = r_a$ و



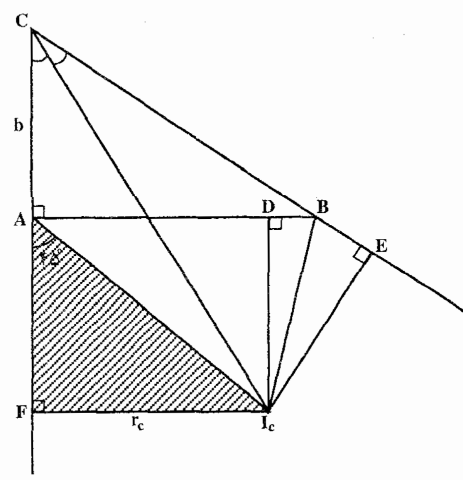
$I_a\hat{A}F = ۴۵^\circ$ است. این مثلث را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز F و به شعاع r_a دایره‌ای رسم می‌کنیم و روی AF از طرف A، پاره‌خط $AC = b$ را جدا می‌نماییم. از C مماسی بر این دایره رسم می‌کنیم تا مماس دیگری را که از نقطهٔ A بر این دایره رسم شده در نقطهٔ B قطع کند. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب مسأله است.

۶۰۵. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ را جواب مسأله می‌گیریم. مرکز دایرهٔ محاطی برونی مماس بر ضلع AC را I_b و نقطهٔ تماس این دایره با AB را E می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ AEI_b با معلوم بودن ضلع زاویهٔ قائمه $EI_b = r_b$ و زاویهٔ حاده $E\hat{A}I_b = ۴۵^\circ$ قابل رسم است.



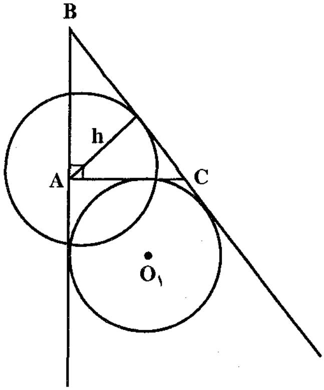
این مثلث را رسم می‌کنیم. سپس دایرهٔ به مرکز I_b و به شعاع r_b را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ A مماس دیگری بر این دایره رسم کرده روی آن پاره‌خط $AC = b$ را جدا می‌کنیم. از نقطهٔ C خط دیگری مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا امتداد EA را در نقطهٔ B رأس سوم مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC قطع کند.

۶۰۶. مرکز دایرهٔ محاطی برونی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = ۹۰^\circ)$ مماس بر ضلع AB را I_c و نقطهٔ تماس ضلع AC با این دایره را F می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ $AFI_c(\hat{F} = ۹۰^\circ)$، با معلوم بودن $FI_c = r_c$ و $F\hat{A}I_c = ۴۵^\circ$ قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم. سپس به مرکز I_c و به شعاع r_c دایره‌ای رسم می‌کنیم و در امتداد FA پاره‌خط $AC = b$ را جدا می‌کنیم. از A و C دو خط مماس بر این دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ B قطع کنند. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب مسأله است.



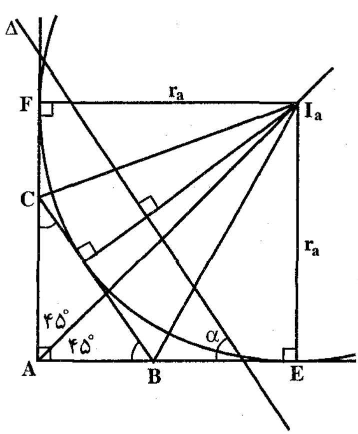
۴.۴.۳.۲.۲.۲. شعاع دایرهٔ محاطی برونی، ارتفاع

۶۰۷. اگر ABC مثلث مطلوب باشد وتر BC بر دایره به مرکز A و شعاع h (h اندازه ارتفاع وارد بر وتر) و همچنین بر دایرهٔ محاطی برونی نظیر رأس B مماس است بنابراین مماس مشترک این دو دایره، وتر مثلث است. زاویهٔ قائمهٔ A را رسم کرده و به مرکز A و شعاع h دایره‌ای رسم می‌کنیم و در زاویه مجاور A دایره‌ای به شعاع معلوم r_1 محاط می‌کنیم. مماس مشترک این دو دایره امتداد وتر و در نتیجه وتر مثلث را مشخص می‌کند و مثلث به دست می‌آید. (شکل)

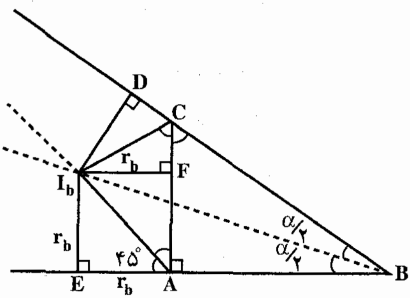


۴.۴.۳.۲.۲.۳. شعاع دایرهٔ محاطی برونی، زاویه

۶۰۸. با معلوم بودن اندازهٔ یک زاویهٔ حاده از مثلثی قائم‌الزاویه، زاویهٔ حاده دیگر آن نیز معلوم است. بنابراین اگر $\hat{B} = \alpha$ باشد، $\hat{C} = ۹۰^\circ - \alpha$ است. نقطهٔ I_a را مرکز دایرهٔ محاطی برونی مثلث مماس بر وتر BC می‌گیریم و نقطهٔ تماس این دایره با ضلع AB را E می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ AEI_a $(\hat{E} = ۹۰^\circ)$ با معلوم بودن $EI_a = r_a$ و $E\hat{A}I_a = ۴۵^\circ$ قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم. سپس دایره‌ای به مرکز I_a و به شعاع r_a رسم می‌نماییم و از نقطهٔ A مماس دیگری بر آن رسم می‌کنیم. حال خطی مانند Δ رسم می‌کنیم که با AB زاویه‌ای برابر α بسازد. از I_a عمودی بر این خط رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (I_a) را در نقطهٔ D قطع کند. در نقطهٔ D مماسی بر این دایره رسم می‌کنیم تا خط AE را در B و مماس رسم شده از A بر دایره را در C قطع کند. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب مسأله است.



۶۰۹. مسأله را حل شده و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$) را جواب مسأله می‌گیریم. I_b را مرکز دایرهٔ محاطی برونی مثلث، مماس بر ضلع b و نقطه‌های تماس این دایره با AB و AC را E و F می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ BEI_b ($\hat{E}=90^\circ$) با معلوم بودن $EI_b=r_b$ و $E\hat{B}I_b=\frac{\hat{B}}{2}=\frac{\alpha}{2}$



قابل رسم است. از طرفی چهار ضلعی I_bEAF مربع است. پس $AE=AF=r_b$ است.
بنابراین برای رسم مثلث ABC چنین عمل می‌کنیم:

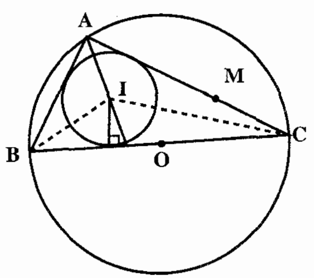
زاویهٔ $\hat{B}=\alpha$ و نیمساز آن را رسم می‌کنیم. سپس پاره‌خط $EA=r_b$ را روی EB جدا می‌کنیم و از A مماسی بر دایرهٔ (I_b) رسم می‌کنیم تا ضلع دیگر زاویهٔ B را در C رأس سوم مثلث قطع کند. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC جواب مسأله است.

۴.۴.۴. دایره‌های محیطی و محاطی یا شعاع آنها و داده‌های دیگر

۱.۴.۴.۴. دایرهٔ محیطی، شعاع دایرهٔ محاطی، نقطه

۶۱۰. مسأله را حل شده و مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC ($\hat{A}=90^\circ$) را که در دایرهٔ (O,R) محاط است، جواب مسأله می‌گیریم.

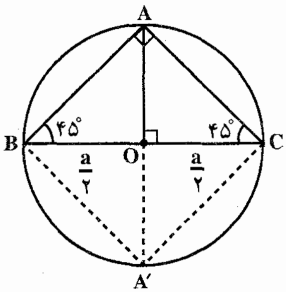
وتر این مثلث قائم‌الزاویه، مساوی قطر دایرهٔ داده شده یعنی BC=۲R، مقدار معلومی است. نقطهٔ داده شده روی ضلع AC را نیز M می‌نامیم. از طرفی شعاع دایرهٔ محاطی مثلث نیز داده شده است، پس مجموع دو ضلع زاویهٔ قائمه یعنی $AB+AC=2R+2r$ نیز معلوم است. از آن‌جا...



۲.۴.۴.۴. شعاع دایرهٔ محیطی، شعاع دایرهٔ محاطی

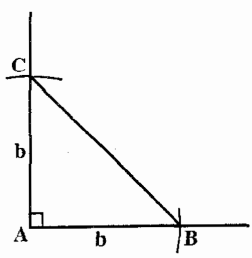
۶۱۱. اگر R شعاع دایرهٔ محیطی و r شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ باشد، اندازه وتر این مثلث $BC=۲R$ و مجموع دو ضلع زاویهٔ قائمه آن $AB+AC=۲R+۲r$ است؛ یعنی اندازهٔ وتر و مجموع دو ضلع زاویه قائمه مثلث قائم‌الزاویه معلوم است که روش رسم آن در مسأله‌های قبل آمده است.

۵.۴. رسم مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین

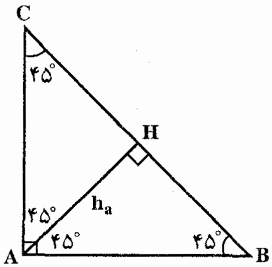


۶۱۲. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC $(\hat{A}=۹۰^\circ)$ و $AB=AC$ را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $BC=a$ وتر این مثلث معلوم باشد دایرهٔ به قطر BC از رأس A می‌گذرد و AO عمودمنصف BC است (O وسط BC است). بنابراین برای رسم این مثلث پاره‌خط $BC=a$ را رسم می‌کنیم. سپس به قطر BC دایره‌ای رسم می‌کنیم و مرکز آن را O می‌نامیم. قطر عمود بر BC را رسم می‌کنیم تا دایره را در A قطع کند. از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC جواب مسأله است.
نکته. قطری که از O عمود بر BC رسم می‌شود دایره را در نقطهٔ دیگر A′ نیز قطع می‌کند و مثلث A′BC همنهشت با مثلث ABC جواب دیگر مسأله است.

۶۱۳. زاویهٔ قائمهٔ $x\hat{A}y=۹۰^\circ$ را رسم می‌کنیم. به مرکز A و به شعاع b دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دو ضلع Ax و Ay را در نقطه‌های B و C قطع کند. از B به C وصل می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC جواب مسأله است و به شرط $b>۰$ مسأله همواره جواب دارد.

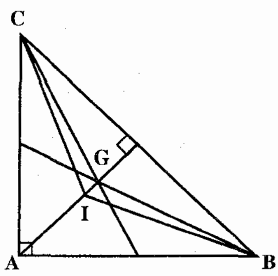


۶۱۴. مسأله را حل شده و مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC ($\hat{A} = 90°$) و $AB = AC$ را جواب مسأله می‌گیریم. ارتفاع AH وارد بر وتر را رسم می‌کنیم. مثلثهای AHB و AHC نیز هر دو قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین می‌باشند بنابراین $AH = HB = HC$ و از آن جا $BC = 2AH = 2h_a$ است. بنابراین برای رسم مثلث ABC پاره‌خط $BC = 2h_a$ را رسم می‌کنیم و به قطر آن دایره‌ای رسم می‌کنیم سپس به مرکز H وسط BC و به شعاع h_a کمانی می‌زنیم تا دایرهٔ به قطر BC را در نقطهٔ A قطع کند (بر آن مماس شود). از A به B و C وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.



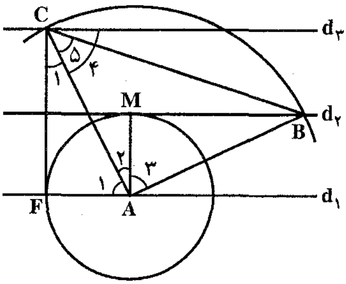
نکته. در مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC، ارتفاع AH، عمودمنصف قاعده است بنابراین $BC = 2AH = 2h_a$ است، و برای رسم مثلث ABC پس از رسم پاره‌خط $BC = 2h_a$ از B و C به نقطهٔ A وسط کمان $\overset{\frown}{BC}$ وصل می‌کنیم. مثلث ABC جواب مسأله است.

۶۱۵. مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقینی رسم می‌کنیم که طول ساق آن a باشد و فاصلهٔ بین نقطهٔ برخورد میانه‌ها و نیمسازهای این مثلث را b می‌گیریم. اگر طول ساق مثلث قائم‌الزاویهٔ خواسته شده را x فرض کنیم. چون همگی مثلثهای قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین متشابه‌اند و در دو مثلث متشابه اگر نسبتهای متناظر را بنویسیم، خواهیم داشت $\frac{m}{b} = \frac{x}{a}$ یا $x = \frac{am}{b}$. چون سه جزء از این تناسب معلوم است، جزء چهارم به سهولت معین می‌شود. این مسأله را می‌توان تعمیم داد و در حالتی که مثلث متساوی‌الساقین با زاویهٔ رأس ثابت باشد، نیز می‌توان به همین ترتیب ساق مثلث را به دست آورد.



۶۱۶. نقطه‌ای مانند A روی d_1 در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ A عمودی بر d_2 فرود می‌آوریم تا آن را در M قطع کند. به مرکز A و به شعاع AM دایره‌ای رسم می‌نماییم تا d_1 را در F قطع

کند از F مماسی بر این دایره رسم کرده امتداد می‌دهیم تا d_3 را در C قطع کند. نقطهٔ C را به A وصل کرده به مرکز A و به شعاع AC دایره‌ای رسم می‌کنیم تا d_2 را در B قطع کند. مثلث ABC قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است.



می‌دانیم :

$$\hat{C}_1+\hat{A}_1=90^\circ \qquad (1)$$

$$\hat{A}_2=\hat{C}_1 \qquad (2)$$

(نسبت به دو موازی AM و FC و قاطع AC) دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AMB و ACF با هم برابرند در حالت وتر و یک ضلع. از تساوی این دو مثلث نتیجه می‌شود که

$(AC=AB, AM=AF)$

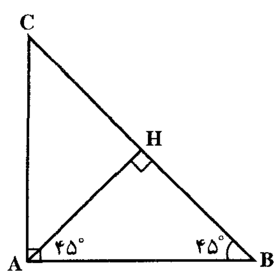
$$\hat{A}_3=\hat{A}_1 \qquad (3)$$

با توجه به رابطه‌های ۱، ۲و ۳ داریم :

$$\hat{A}_2+\hat{A}_3=90^\circ$$

یعنی مثلث ABC قائم‌الزاویه است. چون AB=AC است پس مثلث قائم‌الزاویه متساوی‌الساقین است.

۶۱۷. مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین ABC $(AB=AC, \hat{A}=90^\circ)$ را در نظر می‌گیریم. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم $AH=HB=HC$ است. بنابراین $BC-AH=BC-CH=BH$ است یعنی $|a-h_a|=BH=l$ می‌باشد از آن‌جا $BC=2l$ و $AH=l$ است و با معلوم بودن اندازهٔ وتر و ارتفاع وارد بر وتر این مثلث قائم‌الزاویه می‌توان آن را رسم کرد.



فهرست منابع

۱. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد اول. هاورد. و. ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۲. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد دوم. هاورد. و. ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۳. آمادگی برای المپیادهای ریاضی. واسیلیف ـ گوتن ماخر ـ رابرت توم. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۴. آمادگی برای شرکت در المپیاد ریاضی ایران. هوشنگ شرقی. نشر علوم پایه.
۵. از اِردوش تا کی‌یفْ. راس هانسبرگر. ترجمهٔ علی ساوجی. انتشارات فاطمی.
۶. المپیادهای بین‌المِللی ریاضی. جلد اول. ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ناس.، نشرنام.
۷. المپیادهای بین‌المللی ریاضی. جلد دوم. موری. اس. کلامکین. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ناس. نشر نام.
۸. المپیادهای ریاضی ایران. دکتر عبادا.. محمودیان. انتشارات دانشگاه شریف.
۹. المپیادهای ریاضی بلژیک. انجمن استادان ریاضی بلژیک. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات فاطمی.
۱۰. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد اول. ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۱۱. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد دوم. موری.اس. کلامکین. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۱۲. المپیادهای ریاضی لنینگراد. د. فومین. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات انیشتن.
۱۳. المپیادهای ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات مشعل دانشجو.
۱۴. بازآموزی و بازشناخت هندسه. هـ. س.م. کوکس تیر ـ س.ل. گریتزر. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات مدرسه.
۱۵. برگزیدهٔ مسائل هندسه. گروهی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ عادل ارشقی. مؤسسهٔ خدمات فرهنگی رسام.
۱۶. پانصد مسألهٔ ریاضی پیکارجو. ادوارد ج. باربو ـ ماری س. کلامکین ـ ویلیام اُ. ج. موزر. ترجمهٔ مهران اخباریفر. انتشارات فاطمی.
۱۷. تاریخ ریاضیات. جلد اول. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۸. تاریخ ریاضیات. جلد دوم. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۹. تاریخ هندسه. پی‌یر مارشال. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری، مؤسسهٔ مطبوعاتی علمی.
۲۰. تبدیلهای هندسی. جلد اول. ای. م. یاگلم. ترجمهٔ اسدا... کارشناس ـ عمید رسولیان. مرکز نشر دانشگاهی.
۲۱. تبدیلهای هندسی. جلد دوم. ای.م.یاگلم. ترجمهٔ محمد باقری. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۲۲. تبدیلهای هندسی. جلد سوم. ای.م.یاگلم. ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۲۳. ترسیمهای هندسی. تألیف احمد فیروزنیا. نشر گزاره.
۲۴. تئوری مقدماتی اعداد. جلدهای اول و دوم. دکتر غلامحسین مصاحب. انتشارات دهخدا.
۲۵. چگونه مسأله حل کنیم؟ جورج پولیا. ترجمهٔ احمد آرام. مؤسسهٔ مطبوعاتی کیهان.
۲۶. چند قضیهٔ هندسه. نگارش دکتر احمد شرف‌الدین.
۲۷. ۴۵۰ مسألهٔ ریاضی با حل. محمدحسین پرتوی ـ حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.

۲۸. حل‌المسائل هندسهٔ جدید. حسن ملایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۹. حل‌المسائل هندسه و مخروطات جدید. محمدحسین پرتوی ـ محدعلی پرتوی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۳۰. حل مسائل ریاضیات. محمدعلی واعظیان. ناشر محمدحسن علمی.
۳۱. حل مسائل متمم هندسه. دکتر کارونه. ترجمهٔ محمدباقر ازگمی ـ احسانا ... قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۳۲. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان چهارم ریاضی. دکتر حسینعلی شاهورانی. انتشارات کاویان.
۳۳. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان ششم ریاضی و داوطلبان متفرقه. عباس ذوالقدر.
۳۴. حل مسائل هندسه برای سال چهارم دبیرستان. محمدباقر ازگمی ـ غلامرضا بهنیا ـ باقر امامی ـ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۳۵. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی. داریوش شاهین. انتشارات جاویدان.
۳۶. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی و کنکور دانشکده‌ها. غلامعلی ریاضی ـ علی حسن‌زاده ـ محمدحسین پرتوی ـ محمدعابدی. مؤسسهٔ مطبوعاتی شرقی.
۳۷. حل مسائل هندسه و مخروطات برای سال ششم ریاضی و داوطلبان کنکور. محمدباقر ازگمی ـ پرویز شهریاری ـ غلامرضا بهنیا ـ باقر امامی ـ علی‌اصغر شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۳۸. حل مسأله از طریق مسأله. لورن سی. لارسن. ترجمهٔ علی ساوجی. انتشارات فاطمی.
۳۹. خلاصهٔ زندگینامهٔ علمی دانشمندان. بنیاد دانشنامهٔ بزرگ فارسی. انتشارات علمی و فرهنگی.
۴۰. خلاقیت ریاضی. جورج پولیا. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۴۱. خطهای راست و منحنی‌ها. ن. ب. واسی‌لی‌یو ـ و. ل. گوتن‌ماخر. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات تهران.
۴۲. دایره‌ها. دَن پِدو. ترجمهٔ مهدی مدغم. انتشارات فاطمی.
۴۳. دربی فیثاغورس. شه‌پان النسکی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات امیرکبیر.
۴۴. دورهٔ حل‌المسائل هندسه برای دبیرستان. جلدهای اول و دوم. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری. شرکت سهامی چاپ و انتشارات کتب ایران.
۴۵. دورهٔ کامل خودآموز هندسهٔ علوم تجربی. محمدهاشم رستمی. نشر گزاره.
۴۶. دورهٔ ماهنامهٔ ریاضیات. دکتر یحیی تابش.
۴۷. دورهٔ مجلهٔ ریاضی آشتی با ریاضیات و آشنایی با ریاضیات. پرویز شهریاری.
۴۸. دورهٔ مجلهٔ ریاضی برهان. انتشارات مدرسه.
۴۹. دورهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. وزارت آموزش و پرورش.
۵۰. دورهٔ مجلهٔ ریاضی یکان. عبدالحسین مصحفی.
۵۱. روش حل مسائل هندسه. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری. بنگاه مطبوعاتی فریدون علمی.
۵۲. ریاضیات زنده. ی. پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر میترا.
۵۳. ریاضیدانان نامی. دکتر اریک تمپل بل. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری. انتشارات امیرکبیر.
۵۴. سرگرمیهای هندسه. ی پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات خوارزمی.
۵۵. فنون مسأله حل کردن. استیون ج. کرانتس. ترجمهٔ مهران اخباریفر. انتشارات فاطمی.
۵۶. قضایا و مسائل هندسه. غلامرضا یاسی‌پور.
۵۷. گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی. جی. ال. برگرن. ترجمهٔ دکترمحمدقاسم وحیدی اصل ـ دکتر علیرضا جمالی. انتشارات فاطمی.
۵۸. مباحث و مسائل المپیاد ریاضی. فرشید الموتی ـ مازیار رامین راد ـ ... انتشارات پیشدانشگاهیان.

۵۹. محاسبه‌های برداری. پرویز شهریاری.
۶۰. مجموعهٔ مقالات و مسائل ریاضی. غلامرضا یاسی‌پور.
۶۱. مسأله‌های المپیادهای ریاضی امریکا. مورای.اس. کلامکین. ترجمهٔ پرویز شهریاری- ابراهیم عادل. نشربردار.
۶۲. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در شوروی سابق. واسیلیف - یه‌گوروف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشرتوسعه.
۶۳. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف. جمعی از ریاضیدانان شوروی سابق. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۶۴. مسأله‌های تاریخی ریاضیات. و. د. چیستیاکوف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر نی.
۶۵. مسأله‌های ریاضی آسان ولی .... گروهی از ریاضیدانان شوروی سابق. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر گستره.
۶۶. مسأله‌های دشوار ریاضی. کنستانتین شاختو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۶۷. مسائل ریاضیات مقدماتی. ای. خ. لیواشینسکی. ترجمهٔ غلامرضا بهنیا. انتشارات احمدعلمی.
۶۸. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد اول. چارلز.ت. سالکیند. ترجمهٔ سیدحسین جوادپور- محمد قزل ایاغ. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۶۹. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد دوم. چارلز. ت. سالکیند. ترجمهٔ علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۰. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد سوم. چارلز.ت. سالکیند. ارل. ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۱. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد چهارم. آرتینو گاگلیون - شل. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۲. مسائل مسابقات ریاضی (کنکورهای ریاضی شوروی سابق). و. س. کوشچنگو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۷۳. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ دکتر سعید فارابی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۴. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ محمدمهدی ابراهیمی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۵. مسائل و تمرینات لگاریتم و ریاضیات. احسانا... قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۷۶. مسائل هندسه و حل آنها برای داوطلبان کنکور دانشکده‌ها. محمدباقر ازگمی - پرویز شهریاری. مؤسسه مطبوعاتی احمد علمی.
۷۷. مسأله‌هایی در هندسهٔ مسطحه. ای.ف . شاریگین. ترجمهٔ ارشک حمیدی. انتشارات مبتکران.
۷۸. مکانهای هندسی. جلد اول. محمدهاشم رستمی. انتشارات مدرسه.
۷۹. مهمترین مسأله‌ها و قضیه‌های ریاضی. شکلیارسکی. چنتسوف یاگلوم. ترجمهٔ پرویز شهریاری - ابراهیم عادل. انتشارات مجید. انتشارات فردوس.
۸۰. نابرابریها. پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۸۱. نابرابریهای هندسی. نیکولاس د. کازارینوف. ترجمهٔ دکتر محمدحسن بیژن زاده. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۸۲. نخستین گامها در المپیادهای ریاضی. جلدهای ۱،۲،۳و۴. ترجمه و تدوین ابراهیم دارابی. انتشارات پیشروان. انتشارات مبتکران.
۸۳. نه مقالهٔ هندسه. ابوالقاسم قربانی. دکترحسن صفاری.
۸۴. هندسهٔ ایرانی. ابوالوفا محمدبن محمد البوزجانی. ترجمهٔ سیدعلیرضا جذبی. انتشارات سروش.

۸۵. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی. ماروین جی. گرینبرگ. ترجمهٔ م. هـ. شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۸۶. هندسه برای سال ششم دبیرستانها (مجموعهٔ علوم). محمدباقر ازگمی. باقر امامی. غلامرضا بهنیا ـ پرویز شهریاری ـ علی اصغر شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۸۷. هندسه تحلیلی. حسین غیور. محسن غیور. انتشارات صفی علیشاه.
۸۸. هندسه‌های جدید. جیمز. ار. اسمارت. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. انتشارات مدرسه.
۸۹. هندسه در گذشته و حال. ترجمه و تألیف پرویز شهریاری. از مجموعهٔ کتابهای سیمرغ.
۹۰. هندسهٔ دلپذیر. دکتر احمد شرف‌الدین. انتشارات مدرسه.
۹۱. هندسهٔ دوایر. دکتر محسن هشترودی. انتشارات مجلهٔ ریاضی یکان.
۹۲. هندسهٔ دورهٔ کاردانی تربیت معلم رشتهٔ علوم ریاضی. صفر باهمت شیروانه ده ـ حسین غیور ـ حسین‌دوستی. شرکت چاپ و نشر ایران.
۹۳. هندسهٔ ۱ و ۲ نظام جدید آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
۹۴. هندسهٔ سال چهارم دبیرستان. ابوالقاسم قربانی. دکترحسن صفاری.
۹۵. هندسهٔ سالهای اول، دوم، سوم و چهارم دبیرستان نظام قدیم آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
۹۶. هندسهٔ مسطحه. مقدمه‌ای بر هندسهٔ نوین مثلث و دایره. ناتان آلتشینرکورت. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۹۷. هندسهٔ مقدماتی از دیدگاه پیشرفته. ادوین. ا. موئیز. ترجمهٔ دکتر امیر خسروی ـ محمود نصیری. انتشارات مبتکران.
۹۸. هندسهٔ موئیز ـ دانز. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۹۹. هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستان. وزارت آموزش و پرورش.

100. EXERCICES DE GEOMETRIE PAR.F.G.M.
101. EXERCICES DE GEOMETRIE PAR.TH. CARONNET.
102. EXERCICES DE GEOMETRIE MODERNE (TRANSVERSALES) . PAR.G.PAPELIER.
103. EXERCICES DE GEOMETRIE MODERNE (POLES, POLAIRES, PLANS POLATERES). PAR.G.PAPELIER.
104. GEOMETRIE A HIGHSCHOOL COURSE. SERGELAN GE. GENE MURROW.
105. GIANT COLOR BOOK OF MATHEMATICS. BY IRVING ADLER.
106. GUIDES PRATIQUES BORDAS.
II. GEOMETRIE PAR ROBERT ARDRE´.
107. JACOBS HAROLD. R. GEOMETRY.
108. LES NOMBRES ET LEURS MYSTERES PAR ANDRE´ WARUSFEL.
109. MATHEMATICS AROUND US.
110. MEMENTO DE MATHEMATIQUES USUELLES PAR.A.PONT.
111.PLANE GEOMETRY. WITH SPACE CONCEPTS. A.M. WELCHONS.W.R. KRICKENBERGER, HEIEN.R.PEARSON.
112. PRECIS DE GEOMETRIE PAR ANDRE´ VIEILLEFOND. P.TURMEL.
113. PRENTICE HALL GEOMETRY BY ROBERT KALINE, MARY KAY CORBITT.
114. PRINCIPLES AND PROBLEMS OF PLANE GEOMETRY BY BARNETT RICH.
115. RESOLUTION DES PROBLEMES ELEMENTAIRES DE GEOMETRIE PAR.E.J.HONNET.
116. THE COLLEGE BOARDS EXAMINATION BY. MARTIN MC. DONOUGH. ALVIN .J. HANSEN.