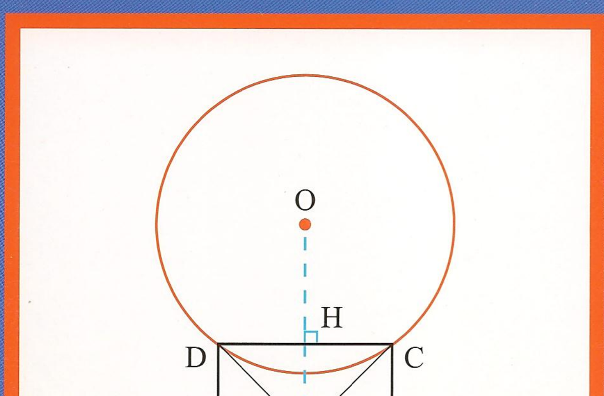
دایرة المعارف هندسه

۱۳

رسم شکلهای هندسی
در هندسهٔ مسطحه

(چند ضلعی ، دایره ، بیضی ، هذلولی و سهمی)



مؤلّف : محمدهاشم رستمی

بسم الله الرحمن الرحيم

دایرة المعارف هندسه

«جلد سیزدهم»

رسم شکلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه

(چندضلعی، دایره، بیضی، هذلولی و سهمی)

مؤلف: محمّد هاشم رستمی

فهرست

موضوع	صورت	حل
پیشگفتار	۱۴	
بخش ۱. رسم چندضلعی	۱۹ـ۶۶	۱۱۲ـ۲۸۵
۱.۱. رسم چهارضلعی	۳۰	۱۱۲
۱.۱.۱. رسم چهارضلعی در حالت کلی	۳۰	۱۱۲
۱.۱.۱.۱. رسم چهارضلعی با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ قطر؛ پاره‌خط، خط؛...	۳۰	۱۱۲
۱.۱.۱.۱.۱. نقطه	۳۰	۱۱۲
۲.۱.۱.۱.۱. ضلع	۳۰	۱۱۲
۳.۱.۱.۱.۱. نقطه، پاره‌خط	۳۰	۱۱۳
۴.۱.۱.۱.۱. ضلع، پاره‌خط	۳۰	۱۱۳
۵.۱.۱.۱.۱. ضلع، زاویه	۳۱	۱۱۵
۶.۱.۱.۱.۱. قطر، زاویه	۳۱	۱۱۷
۷.۱.۱.۱.۱. ضلع، قطر، پاره‌خط	۳۱	۱۱۹
۸.۱.۱.۱.۱. ضلع یا رابطهٔ بین ضلعها، قطر، زاویه	۳۲	۱۲۰
۹.۱.۱.۱.۱. نسبت ضلعها، زاویه، محیط	۳۲	۱۲۲
۱۰.۱.۱.۱.۱. مسأله‌های ترکیبی	۳۲	۱۲۳
۲.۱.۱.۱. رسم چهارضلعی با معلوم بودن دایره	۳۳	۱۲۷
۲.۱.۱. رسم چهارضلعیهای ویژه	۳۳	۱۲۸
۱.۲.۱.۱. رسم متوازی‌الاضلاع	۳۳	۱۲۸
۱.۱.۲.۱.۱. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ قطر، ارتفاع؛...	۳۳	۱۲۸
۱.۱.۱.۲.۱.۱. نقطه	۳۳	۱۲۸
۲.۱.۱.۲.۱.۱. قطر، ارتفاع	۳۴	۱۲۹
۳.۱.۱.۲.۱.۱. نقطه، خط	۳۴	۱۲۹
۴.۱.۱.۲.۱.۱. ضلع؛ قطر، ارتفاع	۳۴	۱۳۰
۱.۴.۱.۱.۲.۱.۱. ضلع، قطر	۳۴	۱۳۰
۲.۴.۱.۱.۲.۱.۱. ضلع، ارتفاع	۳۴	۱۳۱
۵.۱.۱.۲.۱.۱. ضلع، زاویه	۳۴	۱۳۲
۶.۱.۱.۲.۱.۱. نسبت ضلعها، مساحت	۳۵	۱۳۲
۷.۱.۱.۲.۱.۱. قطر، ارتفاع؛ زاویه	۳۵	۱۳۳
۱.۷.۱.۱.۲.۱.۱. قطر، زاویه	۳۵	۱۳۳
۲.۷.۱.۱.۲.۱.۱. ارتفاع، زاویه	۳۵	۱۳۳
۸.۱.۱.۲.۱.۱. پاره‌خط، خط؛ زاویه	۳۵	۱۳۳
۱.۸.۱.۱.۲.۱.۱. پاره‌خط، زاویه	۳۵	۱۳۳
۹.۱.۱.۲.۱.۱. ضلع؛ قطر، ارتفاع؛ زاویه	۳۵	۱۳۴
۱.۹.۱.۱.۲.۱.۱. ضلع، قطر، زاویه	۳۵	۱۳۴
۲.۹.۱.۱.۲.۱.۱. ضلع، ارتفاع، زاویه	۳۵	۱۳۴
۱۰.۱.۱.۲.۱.۱. قطر، زاویه، محیط	۳۶	۱۳۴
۲.۱.۲.۱.۱. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر	۳۶	۱۳۵
۱.۲.۱.۲.۱.۱. مثلث، نسبت ضلعها، زاویه	۳۶	۱۳۵
۲.۲.۱.۲.۱.۱. مثلث، زاویه	۳۶	۱۳۵
۳.۱.۲.۱.۱. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی و...	۳۶	۱۳۶
۱.۳.۱.۲.۱.۱. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن چهارضلعی	۳۶	۱۳۶
۴.۱.۲.۱.۱. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر	۳۶	۱۳۸
۲.۲.۱.۱. رسم مستطیل	۳۷	۱۳۹
۱.۲.۲.۱.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن: نقطه، ضلع؛ قطر،...	۳۷	۱۳۹
۱.۱.۲.۲.۱.۱. پاره‌خط	۳۷	۱۳۹

موضوع	صفحه	
	صورت	حل
۱.۱.۲.۲.۱.۲. نقطه، ضلع	۳۷	۱۴۰
۱.۱.۲.۲.۱.۳. قطر، ضلع یا رابطهٔ بین ضلعها	۳۷	۱۴۰
۱.۱.۲.۲.۱.۴. رابطهٔ بین ضلعها، زاویه	۳۷	۱۴۱
۱.۱.۲.۲.۱.۵. رابطهٔ بین ضلعها، مساحت	۳۷	۱۴۱
۱.۱.۲.۲.۱.۶. رابطهٔ بین ضلعها، محیط	۳۸	۱۴۲
۱.۱.۲.۲.۱.۷. قطر، پاره‌خط	۳۸	۱۴۲
۱.۱.۲.۲.۱.۸. قطر، محیط	۳۸	۱۴۳
۱.۱.۲.۲.۱.۹. محیط، زاویه	۳۸	۱۴۳
۱.۱.۲.۲.۱.۱۰. نقطه، ضلع، خط	۳۸	۱۴۳
۱.۱.۲.۲.۲. رسم مستطیل با معلوم بودن: مثلث، مثلث و...	۳۸	۱۴۶
۱.۱.۲.۲.۲.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن: مثلث در حالت کلی، مثلث در ...	۳۸	۱۴۶
۱.۱.۲.۲.۲.۱.۱. مثلث، رابطهٔ بین ضلعها	۳۸	۱۴۶
۱.۱.۲.۲.۲.۱.۲. مثلث، اندازهٔ قطر	۳۹	۱۴۷
۱.۱.۲.۲.۲.۱.۳. مثلث، خط	۳۹	۱۴۷
۱.۱.۲.۲.۲.۱.۴. مثلث، مساحت	۳۹	۱۴۸
۱.۱.۲.۲.۲.۱.۵. مثلث، محیط	۳۹	۱۵۱
۱.۱.۲.۲.۲.۱.۶. مثلث، مستطیل	۳۹	۱۵۲
۱.۱.۲.۲.۲.۲. رسم مستطیل با معلوم بودن: مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلث ...	۳۹	۱۵۲
۱.۱.۲.۲.۲.۲.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن: مثلث متساوی‌الاضلاع	۳۹	۱۵۲
۱.۱.۲.۲.۲.۳. رسم مستطیل با معلوم بودن: مثلث متساوی‌الساقین، مثلث ...	۳۹	۱۵۳
۱.۱.۲.۲.۲.۳.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن مثلث متساوی‌الساقین، محیط	۳۹	۱۵۳
۱.۱.۲.۲.۲.۴. رسم مستطیل با معلوم بودن: مثلث قائم‌الزاویه، مثلث قائم‌الزاویه و...	۴۰	۱۵۵
۱.۱.۲.۲.۲.۴.۱. مثلث قائم‌الزاویه، رأس	۴۰	۱۵۵
۱.۱.۲.۲.۳. رسم مستطیل با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی و...	۴۰	۱۵۵
۱.۱.۲.۲.۳.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن: چهارضلعی، چهارضلعی و...	۴۰	۱۵۵
۱.۱.۲.۲.۳.۱.۱. چهارضلعی، خط	۴۰	۱۵۵
۱.۱.۲.۲.۳.۲. رسم مستطیل با معلوم بودن: چهارضلعی‌های ویژه، ...	۴۰	۱۵۶
۱.۱.۲.۲.۳.۲.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن: متوازی‌الاضلاع، متوازی‌الاضلاع و...	۴۰	۱۵۶
۱.۱.۲.۲.۳.۲.۱.۱. متوازی‌الاضلاع، زاویه	۴۰	۱۵۶
۱.۱.۲.۲.۳.۲.۲. رسم مستطیل با معلوم بودن: مستطیل، مستطیل و...	۴۰	۱۵۶
۱.۱.۲.۲.۳.۲.۲.۱. مستطیل، نسبت ضلعها	۴۰	۱۵۶
۱.۱.۲.۲.۳.۲.۲.۲. مستطیل، محیط، مساحت	۴۰	۱۵۷
۱.۱.۲.۲.۳.۲.۳. رسم مستطیل با معلوم بودن: مربع، مربع و...	۴۱	۱۵۷
۱.۱.۲.۲.۳.۲.۳.۱. مربع، ضلع	۴۱	۱۵۷
۱.۱.۲.۲.۳.۲.۳.۲. مربع، قطر	۴۱	۱۵۸
۱.۱.۲.۲.۳.۲.۴. رسم مستطیل با معلوم بودن: لوزی، لوزی و...	۴۱	۱۵۸
۱.۱.۲.۲.۳.۲.۴.۱. لوزی، مساحت	۴۱	۱۵۸
۱.۱.۲.۲.۳.۳. رسم مستطیل با معلوم بودن: پنج‌ضلعی، پنج‌ضلعی و...	۴۱	۱۵۸
۱.۱.۲.۲.۴. رسم مستطیل با معلوم بودن: نیمدایره، دایره و...	۴۱	۱۵۸
۱.۱.۲.۲.۴.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن: نیمدایره، نیمدایره و...	۴۱	۱۵۸
۱.۱.۲.۲.۴.۱.۱. نیمدایره، مساحت	۴۱	۱۵۸
۱.۱.۲.۲.۴.۱.۲. نیمدایره، مستطیل	۴۱	۱۵۹
۱.۱.۲.۲.۴.۲. رسم مستطیل با معلوم بودن: دایره، دایره و...	۴۱	۱۵۹
۱.۱.۲.۲.۴.۲.۱. دایره، پاره‌خط	۴۱	۱۵۹
۱.۱.۲.۲.۴.۲.۲. دایره، مساحت	۴۲	۱۶۰
۱.۱.۲.۲.۴.۲.۳. دایره، رابطهٔ متری	۴۲	۱۶۰
۱.۱.۲.۲.۴.۲.۴. دایره، مستطیل	۴۲	۱۶۱
۱.۱.۲.۲.۴.۲.۵. سه دایره، مثلث، رأس	۴۲	۱۶۱
۱.۱.۲.۲.۴.۲.۶. چهار دایره، مستطیل	۴۲	۱۶۱

موضوع	صفحه	
	صورت	حل
۱.۱.۲.۲.۵. رسم مستطیل با معلوم بودن: مقطعهای مخروطی و منحنیهای دیگر	۴۲	۱۶۲
۱.۱.۲.۲.۵.۱. بیضی	۴۲	۱۶۲
۱.۱.۲.۲.۵.۲. سهمی	۴۲	۱۶۲
۱.۱.۲.۲.۶. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۴۲	۱۶۳
۱.۱.۲.۲.۷. مسأله‌های ترکیبی	۴۳	۱۶۴
۱.۱.۲.۳. رسم مربع	۴۳	۱۶۵
۱.۱.۲.۳.۱. رسم مربع با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ قطر؛ پاره‌خط، خط؛ زاویه؛...	۴۳	۱۶۵
۱.۱.۲.۳.۱.۱. نقطه	۴۳	۱۶۵
۱.۱.۲.۳.۱.۲. قطر	۴۳	۱۶۷
۱.۱.۲.۳.۱.۳. خط	۴۳	۱۶۷
۱.۱.۲.۳.۱.۴. نقطه، خط	۴۴	۱۶۸
۱.۱.۲.۳.۱.۵. ضلع، قطر	۴۴	۱۷۱
۱.۱.۲.۳.۱.۶. خط، زاویه	۴۴	۱۷۲
۱.۱.۲.۳.۱.۷. نقطه، خط، ضلع	۴۵	۱۷۲
۱.۱.۲.۳.۲. رسم مربع با معلوم بودن: مثلث، مثلث و...	۴۵	۱۷۳
۱.۱.۲.۳.۲.۱. مثلث در حالت کلی	۴۵	۱۷۳
۱.۱.۲.۳.۲.۱.۱. تنها مثلث	۴۵	۱۷۳
۱.۱.۲.۳.۲.۲. مثلث متساوی‌الاضلاع	۴۵	۱۷۵
۱.۱.۲.۳.۲.۳. مثلث متساوی‌الساقین	۴۵	۱۷۶
۱.۱.۲.۳.۲.۴. مثلث با زاویه‌های حاده	۴۵	۱۷۶
۱.۱.۲.۳.۳. رسم مربع با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی و...	۴۵	۱۷۶
۱.۱.۲.۳.۳.۱. رسم مربع با معلوم بودن: چهارضلعی، چهارضلعی و...	۴۵	۱۷۶
۱.۱.۲.۳.۳.۱.۱. رسم مربع با معلوم بودن چهارضلعی	۴۵	۱۷۶
۱.۱.۲.۳.۳.۲. رسم مربع با معلوم بودن: چهارضلعی‌های ویژه، ...	۴۶	۱۷۷
۱.۱.۲.۳.۳.۲.۱. رسم مربع با معلوم بودن: متوازی‌الاضلاع	۴۶	۱۷۷
۱.۱.۲.۳.۳.۲.۲. رسم مربع با معلوم بودن: مربع، مربع و...	۴۶	۱۷۸
۱.۱.۲.۳.۳.۲.۲.۱. مربع	۴۶	۱۷۸
۱.۱.۲.۳.۳.۲.۲.۲. مربع، رأس یا نقطه	۴۶	۱۸۶
۱.۱.۲.۳.۳.۲.۲.۳. مربع، طول ضلع	۴۶	۱۸۷
۱.۱.۲.۳.۳.۲.۲.۴. مربع، مساحت	۴۷	۱۸۸
۱.۱.۲.۳.۳.۲.۲.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۴۷	۱۸۸
۱.۱.۲.۳.۴. رسم مربع با معلوم بودن: نیمدایره، دایره و...	۴۷	۱۸۸
۱.۱.۲.۳.۴.۱. رسم مربع با معلوم بودن: نیمدایره، قطعه یا قطاع دایره	۴۷	۱۸۸
۱.۱.۲.۳.۴.۲. رسم مربع با معلوم بودن: دایره، دایره و...	۴۷	۱۸۹
۱.۱.۲.۳.۴.۲.۱. تنها یک دایره	۴۷	۱۸۹
۱.۱.۲.۳.۴.۲.۲. یک دایره، خط	۴۷	۱۹۲
۱.۱.۲.۳.۴.۲.۳. دو دایره	۴۸	۱۹۲
۱.۱.۲.۳.۴.۲.۴. دو دایره یا بیشتر، یک خط یا بیشتر	۴۸	۱۹۳
۱.۱.۲.۴. رسم لوزی	۴۸	۱۹۳
۱.۱.۲.۴.۱. رسم لوزی با معلوم بودن: نقطه، ضلع، قطر و...	۴۸	۱۹۳
۱.۱.۲.۴.۱.۱. نقطه	۴۸	۱۹۳
۱.۱.۲.۴.۱.۲. قطر	۴۸	۱۹۴
۱.۱.۲.۴.۱.۳. نقطه، خط	۴۸	۱۹۴
۱.۱.۲.۴.۱.۴. نقطه، زاویه	۴۸	۱۹۵
۱.۱.۲.۴.۱.۵. ضلع، قطر یا رابطهٔ بین قطرها	۴۹	۱۹۵
۱.۱.۲.۴.۱.۶. ضلع، پاره‌خط	۴۹	۱۹۶
۱.۱.۲.۴.۱.۷. قطر، پاره‌خط	۴۹	۱۹۶
۱.۱.۲.۴.۲. رسم لوزی با معلوم بودن: مثلث، مثلث و...	۴۹	۱۹۶
۱.۱.۲.۴.۲.۱. تنها مثلث	۴۹	۱۹۶

موضوع	صفحه صورت	صفحه حل
۱.۱.۲.۴.۳. رسم لوزی با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی و...	۴۹	۱۹۷
۱.۱.۲.۴.۳.۱. رسم لوزی با معلوم بودن چهارضلعی، چهارضلعی و...	۴۹	۱۹۷
۱.۱.۲.۴.۳.۱.۱. تنها یک چهارضلعی	۴۹	۱۹۷
۱.۱.۲.۴.۳.۱.۲. چهارضلعی، لوزی	۴۹	۱۹۷
۱.۱.۲.۴.۳.۲. رسم لوزی با معلوم بودن: چهارضلعی‌های ویژه، ...	۴۹	۱۹۸
۱.۱.۲.۴.۳.۲.۱. رسم لوزی با معلوم بودن: متوازی‌الاضلاع، متوازی‌الاضلاع و...	۴۹	۱۹۸
۱.۱.۲.۴.۳.۲.۱.۱. متوازی‌الاضلاع، قطر	۵۰	۱۹۸
۱.۱.۲.۴.۳.۲.۱.۲. متوازی‌الاضلاع، مساحت	۵۰	۱۹۹
۱.۱.۲.۴.۳.۲.۱.۳. متوازی‌الاضلاع، لوزی	۵۰	۱۹۹
۱.۱.۲.۴.۳.۲.۲. رسم لوزی با معلوم بودن: مستطیل، مستطیل و...	۵۰	۲۰۰
۱.۱.۲.۴.۳.۲.۲.۱. مستطیل، مساحت	۵۰	۲۰۰
۱.۱.۲.۴.۳.۳. رسم لوزی با معلوم بودن چندضلعی	۵۰	۲۰۰
۱.۱.۲.۴.۴. رسم لوزی با معلوم بودن دایره یا شعاع دایره و...	۵۰	۲۰۱
۱.۱.۲.۴.۴.۱. رسم لوزی با معلوم بودن دایره و...	۵۰	۲۰۱
۱.۱.۲.۴.۴.۱.۱. دو دایره، خط، طول ضلع	۵۰	۲۰۱
۱.۱.۲.۴.۴.۲. رسم لوزی با معلوم بودن شعاع دایره و...	۵۰	۲۰۱
۱.۱.۲.۴.۴.۲.۱. شعاع دایرهٔ محاطی، یک زاویه	۵۰	۲۰۱
۱.۱.۲.۴.۴.۲.۲. شعاع دایرهٔ محاطی، قطر	۵۰	۲۰۲
۱.۱.۲.۵. رسم ذوزنقه	۵۱	۲۰۲
۱.۱.۲.۵.۱. رسم ذوزنقه در حالت کلی	۵۱	۲۰۲
۱.۱.۲.۵.۱.۱. رسم ذوزنقه با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ قطر؛ ارتفاع؛...	۵۱	۲۰۲
۱.۱.۲.۵.۱.۱.۱. ضلع	۵۱	۲۰۲
۱.۱.۲.۵.۱.۱.۲. ضلع، قطر	۵۱	۲۰۳
۱.۱.۲.۵.۱.۱.۳. ضلع، ارتفاع	۵۱	۲۰۳
۱.۱.۲.۵.۱.۱.۴. ضلع، زاویه	۵۱	۲۰۳
۱.۱.۲.۵.۱.۱.۵. قطر، پاره‌خط	۵۱	۲۰۵
۱.۱.۲.۵.۱.۱.۶. قطر، زاویه	۵۱	۲۰۶
۱.۱.۲.۵.۱.۱.۷. ضلع، قطر، زاویه	۵۲	۲۰۶
۱.۱.۲.۵.۱.۱.۸. قطر، پاره‌خط، زاویه	۵۲	۲۰۸
۱.۱.۲.۵.۱.۲. رسم ذوزنقه با معلوم بودن: مثلث، مثلث و...	۵۲	۲۰۸
۱.۱.۲.۵.۱.۲.۱. مثلث، مساحت	۵۲	۲۰۸
۱.۱.۲.۵.۱.۳. رسم ذوزنقه با معلوم بودن چندضلعی	۵۲	۲۰۹
۱.۱.۲.۵.۱.۳.۱. رسم ذوزنقه با معلوم بودن چهارضلعی	۵۲	۲۰۹
۱.۱.۲.۵.۱.۴. رسم ذوزنقه با معلوم بودن: دایره، دایره و...	۵۲	۲۰۹
۱.۱.۲.۵.۱.۴.۱. دایره، ضلع	۵۲	۲۰۹
۱.۱.۲.۵.۱.۵. رسم ذوزنقه با معلوم بودن: مقطعهای مخروطی و...	۵۳	۲۱۰
۱.۱.۲.۵.۱.۵.۱. سهمی	۵۳	۲۱۰
۱.۱.۲.۵.۲. رسم ذوزنقه متساوی‌الساقین	۵۳	۲۱۱
۱.۱.۲.۵.۲.۱. رسم ذوزنقه متساوی‌الساقین با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛...	۵۳	۲۱۱
۱.۱.۲.۵.۲.۱.۱. ضلع، پاره‌خط	۵۳	۲۱۱
۱.۱.۲.۵.۲.۱.۲. ضلع، زاویه	۵۳	۲۱۱
۱.۱.۲.۵.۲.۱.۳. ضلع، قطر، زاویه	۵۳	۲۱۲
۱.۱.۲.۵.۲.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی	۵۳	۲۱۳
۱.۱.۲.۵.۲.۲. رسم ذوزنقه متساوی‌الساقین با معلوم بودن: مثلث، مثلث و...	۵۴	۲۱۴
۱.۱.۲.۵.۲.۲.۱. مثلث متساوی‌الساقین،...	۵۴	۲۱۴
۱.۱.۲.۵.۲.۲.۱.۱. مثلث متساوی‌الساقین، مساحت	۵۴	۲۱۴
۱.۱.۲.۵.۲.۳. رسم ذوزنقه متساوی‌الساقین با معلوم بودن چندضلعی	۵۴	۲۱۵
۱.۱.۲.۵.۲.۳.۱. رسم ذوزنقه متساوی‌الساقین با معلوم بودن چهارضلعی	۵۴	۲۱۵
۱.۱.۲.۵.۲.۴. رسم ذوزنقه متساوی‌الساقین با معلوم بودن: دایره، دایره و...	۵۴	۲۱۵

موضوع	صفحه	
	صورت	حل
۱.۱.۲.۵.۲.۴.۱. دایره، ضلع، ارتفاع	۵۴	۲۱۵
۳.۱.۱. رسم چهارضلعی محاطی	۵۴	۲۱۶
۱.۳.۱.۱. رسم چهارضلعی محاطی با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛...	۵۴	۲۱۶
۱.۱.۳.۱.۱. ضلع	۵۴	۲۱۶
۲.۱.۳.۱.۱. ضلع، زاویه	۵۴	۲۱۸
۳.۱.۳.۱.۱. قطر، زاویه	۵۴	۲۱۹
۴.۱.۳.۱.۱. ضلع، قطر، زاویه	۵۵	۲۲۰
۲.۳.۱.۱. رسم چهارضلعی محاطی با معلوم بودن: دایره یا شعاع دایره و...	۵۵	۲۲۰
۱.۲.۳.۱.۱. رسم چهارضلعی محاطی با معلوم بودن: دایره، دایره و...	۵۵	۲۲۰
۱.۱.۲.۳.۱.۱. دایره، نقطه	۵۵	۲۲۰
۲.۱.۲.۳.۱.۱. دایره، ضلع	۵۵	۲۲۰
۳.۱.۲.۳.۱.۱. دایره، قطر، زاویه	۵۵	۲۲۱
۴.۱.۲.۳.۱.۱. مسأله‌های ترکیبی	۵۵	۲۲۲
۲.۲.۳.۱.۱. شعاع دایرهٔ محیطی و...	۵۶	۲۲۳
۱.۲.۲.۳.۱.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، ضلع	۵۶	۲۲۳
۲.۲.۲.۳.۱.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، قطر، زاویه	۵۶	۲۲۴
۴.۱.۱. رسم چهارضلعی محیطی	۵۶	۲۲۵
۱.۴.۱.۱. رسم چهارضلعی محیطی با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛...	۵۶	۲۲۵
۱.۱.۴.۱.۱. ضلع، زاویه	۵۶	۲۲۵
۲.۴.۱.۱. رسم چهارضلعی محیطی با معلوم بودن چهارضلعی	۵۶	۲۲۵
۱.۲.۴.۱.۱. دو چهارضلعی	۵۶	۲۲۵
۳.۴.۱.۱. رسم چهارضلعی محیطی با معلوم بودن دایره یا شعاع دایره و...	۵۶	۲۲۶
۱.۳.۴.۱.۱. رسم چهارضلعی محیطی با معلوم بودن شعاع دایرهٔ محاطی و...	۵۶	۲۲۶
۱.۱.۳.۴.۱.۱. شعاع دایرهٔ محاطی، ضلع، زاویه	۵۶	۲۲۶
۲.۱.۳.۴.۱.۱. شعاع دایرهٔ محاطی، محیط، زاویه	۵۷	۲۲۷
۵.۱.۱. رسم چهارضلعی محاطی محیطی	۵۷	۲۲۸
۱.۵.۱.۱. رسم چهارضلعی محاطی محیطی با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛...	۵۷	۲۲۸
۱.۱.۵.۱.۱. نقطه	۵۷	۲۲۸
۲.۱. رسم پنج‌ضلعی	۵۷	۲۲۸
۱.۲.۱. رسم پنج‌ضلعی با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛...	۵۷	۲۲۸
۱.۱.۲.۱. نقطه	۵۷	۲۲۸
۲.۱.۲.۱. ضلع	۵۷	۲۲۹
۲.۲.۱. رسم پنج‌ضلعی با معلوم بودن: دایره، دایره و...	۵۸	۲۳۰
۱.۲.۲.۱. دایره، نقطه	۵۸	۲۳۰
۲.۲.۲.۱. دایره، خط	۵۸	۲۳۱
۳.۱. رسم شش‌ضلعی	۵۸	۲۳۲
۴.۱. رسم n ضلعی	۵۹	۲۳۲
۱.۴.۱. رسم n ضلعی با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛...	۵۹	۲۳۲
۱.۱.۴.۱. نقطه	۵۹	۲۳۲
۲.۱.۴.۱. نقطه، زاویه	۵۹	۲۳۴
۲.۴.۱. رسم n ضلعی با معلوم بودن چندضلعی، چندضلعی و...	۵۹	۲۳۶
۱.۲.۴.۱. چندضلعی، نقطه	۵۹	۲۳۶
۲.۲.۴.۱. چندضلعی، مربع یا چندضلعی دیگر	۶۰	۲۳۷
۳.۲.۴.۱. مسأله‌های ترکیبی	۶۰	۲۳۸
۳.۴.۱. رسم n ضلعی با معلوم بودن: دایره، دایره و...	۶۱	۲۴۱
۵.۱. رسم چندضلعی‌های منتظم	۶۱	۲۴۳
۱.۵.۱. رسم سه ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع)	۶۱	۲۴۳
۱.۱.۵.۱. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن اندازهٔ ضلع	۶۱	۲۴۳
۲.۱.۵.۱. رسم مثل متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ به شعاع R	۶۱	۲۴۳

موضوع	صفحه	
	صورت	حل
۳.۱.۵.۱. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر دایرهٔ به شعاع R	۶۱	۲۴۴
۲.۵.۱. رسم چهارضلعی منتظم (مربع)	۶۱	۲۴۴
۱.۲.۵.۱. رسم مربع با معلوم بودن اندازهٔ ضلع	۶۱	۲۴۴
۲.۲.۵.۱. رسم مربع با معلوم بودن مثلث	۶۲	۲۴۵
۱.۲.۲.۵.۱. رسم مربع با معلوم بودن مثلث متساوی‌الاضلاع	۶۲	۲۴۵
۲.۲.۲.۵.۱. رسم مربع با معلوم بودن مثلث در حالت کلی	۶۲	۲۴۵
۳.۲.۵.۱. رسم مربع با معلوم بودن چندضلعی منتظم	۶۲	۲۴۶
۱.۳.۲.۵.۱. رسم مربع با معلوم بودن پنج‌ضلعی منتظم	۶۲	۲۴۶
۲.۳.۲.۵.۱. رسم مربع با معلوم بودن هشت‌ضلعی منتظم	۶۲	۲۴۷
۴.۲.۵.۱. رسم مربع محاط در دایرهٔ به شعاع R	۶۲	۲۴۸
۵.۲.۵.۱. رسم مربع محیط بر دایرهٔ به شعاع R	۶۲	۲۵۰
۶.۲.۵.۱. رسم مربع با تا زدن یا گره زدن کاغذ	۶۲	۲۵۰
۱.۶.۲.۵.۱. رسم مربع با تا زدن کاغذ	۶۲	۲۵۰
۲.۶.۲.۵.۱. رسم مربع با گره زدن کاغذ	۶۲	۲۵۰
۳.۵.۱. رسم پنج‌ضلعی منتظم	۶۳	۲۵۱
۱.۳.۵.۱. رسم پنج‌ضلعی منتظم با معلوم بودن ضلع	۶۳	۲۵۱
۲.۳.۵.۱. رسم پنج‌ضلعی منتظم با معلوم بودن مربع	۶۳	۲۵۱
۳.۳.۵.۱. رسم پنج‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R	۶۳	۲۵۲
۴.۳.۵.۱. رسم پنج‌ضلعی منتظم با گره زدن کاغذ	۶۳	۲۵۷
۴.۵.۱. رسم شش‌ضلعی منتظم	۶۳	۲۵۸
۱.۴.۵.۱. رسم شش‌ضلعی منتظم با معلوم بودن اندازهٔ ضلع	۶۳	۳۵۸
۲.۴.۵.۱. رسم شش‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R	۶۳	۲۵۹
۳.۴.۵.۱. رسم شش‌ضلعی منتظم محیط بر دایرهٔ به شعاع R	۶۳	۲۵۹
۴.۴.۵.۱. رسم شش‌ضلعی منتظم با تا کردن یا گره زدن کاغذ	۶۳	۲۶۰
۱.۴.۴.۵.۱. رسم شش‌ضلعی منتظم با تا کردن کاغذ	۶۴	۲۶۰
۲.۴.۴.۵.۱. رسم شش‌ضلعی منتظم با گره زدن کاغذ	۶۴	۲۶۱
۵.۵.۱. رسم هفت‌ضلعی منتظم	۶۴	۲۶۱
۱.۵.۵.۱. رسم هفت‌ضلعی منتظم با معلوم بودن اندازهٔ ضلع	۶۴	۲۶۱
۲.۵.۵.۱. رسم هفت‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R	۶۴	۲۶۲
۳.۵.۵.۱. رسم هفت‌ضلعی منتظم با گره زدن کاغذ	۶۴	۲۶۵
۶.۵.۱. رسم هشت‌ضلعی منتظم	۶۴	۲۶۶
۱.۶.۵.۱. رسم هشت‌ضلعی منتظم با معلوم بودن اندازهٔ ضلع	۶۴	۲۶۶
۲.۶.۵.۱. رسم هشت‌ضلعی منتظم با معلوم بودن مربع	۶۴	۲۶۷
۳.۶.۵.۱. رسم هشت‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R	۶۴	۲۶۸
۴.۶.۵.۱. رسم هشت‌ضلعی منتظم محیط بر دایرهٔ به شعاع R	۶۵	۲۶۸
۵.۶.۵.۱. رسم هشت‌ضلعی منتظم با تا زدن یا گره زدن کاغذ	۶۵	۲۶۹
۱.۵.۶.۵.۱. رسم هشت‌ضلعی منتظم با تا زدن کاغذ	۶۵	۲۶۹
۲.۵.۶.۵.۱. رسم هشت‌ضلعی منتظم با گره زدن کاغذ	۶۵	۲۶۹
۷.۵.۱. رسم نه‌ضلعی منتظم	۶۵	۲۷۰
۱.۷.۵.۱. رسم نه‌ضلعی منتظم با معلوم بودن اندازهٔ ضلع	۶۵	۲۷۰
۲.۷.۵.۱. رسم نه‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R	۶۵	۲۷۱
۸.۵.۱. رسم ده‌ضلعی منتظم	۶۵	۲۷۲
۱.۸.۵.۱. رسم ده‌ضلعی منتظم با معلوم بودن اندازهٔ ضلع	۶۵	۲۷۲
۲.۸.۵.۱. رسم ده‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R	۶۵	۲۷۳
۹.۵.۱. رسم یازده‌ضلعی منتظم	۶۶	۲۷۶
۱۰.۵.۱. رسم دوازده‌ضلعی منتظم	۶۶	۲۷۶
۱.۱۰.۵.۱. رسم دوازده‌ضلعی منتظم با معلوم بودن شعاع دایرهٔ محیطی	۶۶	۲۷۶
۱۱.۵.۱. رسم سیزده‌ضلعی منتظم	۶۶	۲۷۷
۱۲.۵.۱. رسم پانزده‌ضلعی منتظم	۶۶	۲۷۸

موضوع	صفحه	
	صورت	حل
۱۳.۵.۱. رسم هفده‌ضلعی منتظم	۶۶	۲۷۹
۱۴.۵.۱. رسم چندضلعی منتظم	۶۶	۲۸۵
بخش ۲. رسم دایره	**۶۷ـ۹۰**	**۲۸۶ـ۳۷۶**
۱.۲. رسم دایره با معلوم بودن: نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط، خط؛...	۷۱	۲۸۶
۱.۱.۲. رسم یک دایره با معلوم بودن: نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط،خط؛زاویه؛...	۷۱	۲۸۶
۱.۱.۱.۲. نقطه	۷۱	۲۸۶
۱.۱.۱.۱.۲. دو نقطه	۷۱	۲۸۶
۲.۱.۱.۱.۲. سه نقطه	۷۱	۲۸۶
۳.۱.۱.۱.۲. چهار نقطه و بیشتر	۷۲	۲۹۱
۱.۳.۱.۱.۱.۲. چهار نقطه	۷۲	۲۹۱
۲.۳.۱.۱.۱.۲. شش نقطه	۷۲	۲۹۱
۲.۱.۱.۲. پاره‌خط، نیمخط، خط	۷۲	۲۹۱
۱.۲.۱.۱.۲. پاره‌خط	۷۲	۲۹۱
۲.۲.۱.۱.۲. نیمخط	۷۲	۲۹۱
۳.۲.۱.۱.۲. خط	۷۲	۲۹۲
۳.۱.۱.۲. زاویه	۷۳	۲۹۴
۴.۱.۱.۲. نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط، خط	۷۳	۲۹۴
۱.۴.۱.۱.۲. نقطه، خط	۷۳	۲۹۴
۱.۱.۴.۱.۱.۲. یک نقطه، دو یا چند خط	۷۳	۲۹۴
۱.۱.۱.۴.۱.۱.۲. یک نقطه، دو خط	۷۳	۲۹۴
۲.۱.۴.۱.۱.۲. دو نقطه، یک یا چند خط	۷۳	۲۹۸
۱.۲.۱.۴.۱.۱.۲. دو نقطه، یک خط	۷۳	۲۹۸
۳.۱.۴.۱.۱.۲. سه نقطه، یک یا چند خط	۷۴	۳۰۴
۱.۳.۱.۴.۱.۱.۲. سه نقطه، یک خط	۷۴	۳۰۴
۵.۱.۱.۲. نقطه، زاویه	۷۴	۳۰۴
۶.۱.۱.۲. نقطه، خط، زاویه	۷۴	۳۰۵
۷.۱.۱.۲. نقطه، دسته دایره	۷۵	۳۰۸
۸.۱.۱.۲. مسأله‌های ترکیبی	۷۵	۳۰۸
۲.۱.۲. رسم دو دایره با معلوم بودن: نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط، خط،...	۷۶	۳۰۹
۱.۲.۱.۲. نقطه، خط	۷۶	۳۰۹
۳.۱.۲. رسم سه دایره با معلوم بودن: نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط، خط؛ زاویه	۷۶	۳۱۰
۱.۳.۱.۲. نقطه	۷۶	۳۱۰
۱.۱.۳.۱.۲. سه نقطه	۷۶	۳۱۰
۲.۲. رسم دایره با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر	۷۷	۳۱۳
۱.۲.۲. رسم دایره با معلوم بودن مثلث	۷۷	۳۱۳
۱.۱.۲.۲. رسم یک دایره	۷۷	۳۱۳
۲.۱.۲.۲. رسم سه دایره	۷۷	۳۱۸
۳.۲. رسم دایره با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی و داده‌های دیگر	۷۸	۳۱۹
۱.۳.۲. رسم دایره با معلوم بودن چندضلعی	۷۸	۳۱۹
۱.۱.۳.۲. رسم دایره با معلوم بودن چهارضلعی‌های ویژه	۷۸	۳۱۹
۲.۱.۳.۲. مسأله‌های ترکیبی	۷۸	۳۱۹
۴.۲. رسم دایره با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر	۷۸	۳۲۱
۱.۴.۲. رسم دایره با معلوم بودن دایره	۷۸	۳۲۱
۱.۱.۴.۲. رسم یک دایره با معلوم بودن دایره	۷۸	۳۲۱
۱.۱.۱.۴.۲. یک دایره	۷۸	۳۲۱
۲.۱.۱.۴.۲. دو دایره	۷۹	۳۲۱
۳.۱.۱.۴.۲. سه دایره	۷۹	۳۲۳
۴.۱.۱.۴.۲. دسته دایره	۷۹	۳۲۶
۲.۱.۴.۲. رسم دو دایره با معلوم بودن دایره	۸۰	۳۲۸

موضوع	صفحه	
	صورت	حل
۱.۲.۱.۴.۲. رسم دو دایره با معلوم بودن یک دایره	۸۰	۳۲۸
۳.۱.۴.۲. رسم n دایره با معلوم بودن دایره	۸۰	۳۲۹
۴.۱.۴.۲. مسأله‌های ترکیبی	۸۰	۳۲۹
۲.۴.۲. رسم دایره با معلوم بودن دایره و داده‌های دیگر	۸۰	۳۳۰
۱.۲.۴.۲. رسم دایره با معلوم بودن: دایره؛ نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط، خط؛ زاویه	۸۰	۳۳۰
۱.۱.۲.۴.۲. رسم دایره با معلوم بودن دایره، نقطه	۸۰	۳۳۰
۱.۱.۱.۲.۴.۲. رسم یک دایره با معلوم بودن دایره، نقطه	۸۰	۳۳۰
۱.۱.۱.۱.۲.۴.۲. رسم یک دایره با معلوم بودن یک دایره، نقطه	۸۰	۳۳۰
۱.۱.۱.۱.۱.۲.۴.۲. یک دایره، یک نقطه	۸۰	۳۳۰
۲.۱.۱.۱.۱.۲.۴.۲. یک دایره، دو نقطه	۸۱	۳۳۴
۲.۱.۱.۱.۲.۴.۲. دو دایره، نقطه	۸۲	۳۳۹
۱.۲.۱.۱.۱.۲.۴.۲. دو دایره، یک نقطه	۸۲	۳۳۹
۲.۲.۱.۱.۱.۲.۴.۲. دو دایره، دو نقطه	۸۲	۳۴۵
۳.۱.۱.۱.۲.۴.۲. سه دایره، نقطه	۸۳	۳۴۵
۱.۳.۱.۱.۱.۲.۴.۲. سه دایره، یک نقطه	۸۳	۳۴۵
۴.۱.۱.۱.۲.۴.۲. دسته دایره، نقطه	۸۳	۳۴۵
۲.۱.۱.۲.۴.۲. رسم دو دایره با معلوم بودن دایره، نقطه	۸۳	۳۴۶
۲.۱.۲.۴.۲. دایره، پاره‌خط، نیمخط، خط	۸۳	۳۴۷
۱.۲.۱.۲.۴.۲. دایره، پاره‌خط	۸۳	۳۴۷
۲.۲.۱.۲.۴.۲. دایره، خط	۸۴	۳۴۷
۱.۲.۲.۱.۲.۴.۲. یک دایره، دو خط	۸۴	۳۴۷
۲.۲.۲.۱.۲.۴.۲. دو دایره، یک خط	۸۴	۳۵۱
۳.۲.۲.۱.۲.۴.۲. دسته دایره، یک خط	۸۴	۳۵۲
۳.۲.۱.۲.۴.۲. دایره، پاره‌خط، خط	۸۴	۳۵۲
۳.۱.۲.۴.۲. دایره، نقطه، خط	۸۴	۳۵۳
۴.۱.۲.۴.۲. مسأله‌های ترکیبی	۸۵	۳۶۰
۳.۴.۲. رسم دایره با معلوم بودن شعاع دایره و داده‌های دیگر	۸۶	۳۶۰
۱.۳.۴.۲. شعاع دایره؛ نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط، خط؛ زاویه؛ رابطهٔ متری	۸۶	۳۶۰
۱.۱.۳.۴.۲. شعاع دایره، نقطه	۸۶	۳۶۰
۱.۱.۱.۳.۴.۲. شعاع دایره، دو نقطه	۸۶	۳۶۰
۲.۱.۳.۴.۲. شعاع دایره، خط	۸۶	۳۶۱
۱.۲.۱.۳.۴.۲. شعاع دایره، دو خط	۸۶	۳۶۱
۳.۱.۳.۴.۲. شعاع دایره، زاویه	۸۶	۳۶۳
۴.۱.۳.۴.۲. شعاع دایره، رابطهٔ متری	۸۷	۳۶۴
۵.۱.۳.۴.۲. شعاع دایره، نقطه، خط	۸۷	۳۶۵
۶.۱.۳.۴.۲. مسأله‌های ترکیبی	۸۷	۳۶۷
۲.۳.۴.۲. شعاع دایره، دایره و داده‌های دیگر	۸۸	۳۶۸
۱.۲.۳.۴.۲. شعاع دایره، دایره، نقطه	۸۸	۳۶۸
۲.۲.۳.۴.۲. شعاع دایره، دایره، خط	۸۸	۳۷۰
۳.۲.۳.۴.۲. شعاع دایره، دو دایره	۸۸	۳۷۲
۴.۲.۳.۴.۲. شعاع دایره، دسته دایره	۸۹	۳۷۴
۵.۲.۳.۴.۲. رسم دو دایره	۸۹	۳۷۵
۶.۲.۳.۴.۲. مسأله‌های ترکیبی	۸۹	۳۷۵
۵.۲. رسم دایره با معلوم بودن مقطعهای مخروطی	۹۰	۳۷۵
۱.۵.۲. رسم دایره با معلوم بودن سهمی	۹۰	۳۷۵
بخش ۳. رسم بیضی، هذلولی و سهمی	**۱۱۰ـ۹۱**	**۴۲۷ـ۳۷۷**
۱.۳. رسم بیضی	۹۷	۳۷۷
۱.۱.۳. رسم بیضی با معلوم بودن: نقطه؛ خط؛ ۲a، ۲b، ۲c؛...	۹۷	۳۷۷
۱.۱.۱.۳. نقطه	۹۷	۳۷۷

موضوع	صفحه	
	صورت	حل
۳.۱.۱.۱.۱. سه نقطه	۹۷	۳۷۷
۳.۱.۱.۱.۱.۱. دو کانون، یک نقطه	۹۷	۳۷۷
۳.۱.۱.۱.۱.۲. دو رأس، یک نقطه	۹۷	۳۷۷
۳.۱.۱.۱.۱.۳. یک کانون، یک رأس، یک نقطه	۹۷	۳۷۸
۳.۱.۱.۱.۲. چهار نقطه	۹۷	۳۷۹
۳.۱.۱.۱.۲.۱. یک کانون، سه نقطه	۹۷	۳۷۹
۳.۱.۱.۲. خط	۹۸	۳۸۰
۳.۱.۱.۲.۱. دو محور، دو خط مماس	۹۸	۳۸۰
۳.۱.۱.۳. نقطه، خط	۹۸	۳۸۱
۳.۱.۱.۳.۱. یک نقطه، یک یا چند خط	۹۸	۳۸۱
۳.۱.۱.۳.۱.۱. یک نقطه، سه خط	۹۸	۳۸۱
۳.۱.۱.۳.۱.۱.۱. یک کانون، سه خط مماس	۹۸	۳۸۱
۳.۱.۱.۳.۲. دو نقطه، یک یا چند خط	۹۸	۳۸۱
۳.۱.۱.۳.۲.۱. دو نقطه، یک خط	۹۸	۳۸۱
۳.۱.۱.۳.۲.۱.۱. دو کانون، یک خط مماس	۹۸	۳۸۱
۳.۱.۱.۳.۲.۱.۲. دو رأس، یک خط مماس	۹۸	۳۸۲
۳.۱.۱.۳.۲.۱.۳. یک رأس، یک مماس، یک خط مماس	۹۸	۳۸۳
۳.۱.۱.۳.۲.۲. دو نقطه، دو خط	۹۸	۳۸۴
۳.۱.۱.۳.۲.۲.۱. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، دو خط مماس	۹۸	۳۸۴
۳.۱.۱.۳.۲.۲.۲. یک کانون، یک نقطه، دو خط مماس	۹۹	۳۸۴
۳.۱.۱.۳.۲.۲.۳. دو نقطه، دو محور	۹۹	۳۸۴
۳.۱.۱.۳.۲.۳. دو نقطه، سه خط	۹۹	۳۸۵
۳.۱.۱.۳.۲.۳.۱. دو نقطهٔ تماس، محور کانونی، دو خط مماس	۹۹	۳۸۵
۳.۱.۱.۳.۳. سه نقطه، یک یا چند خط	۹۹	۳۸۵
۳.۱.۱.۳.۳.۱. سه نقطه، یک خط	۹۹	۳۸۵
۳.۱.۱.۳.۳.۱.۱. یک کانون، دو نقطه، یک خط مماس	۹۹	۳۸۵
۳.۱.۱.۳.۳.۲. سه نقطه، دو خط	۹۹	۳۸۶
۳.۱.۱.۳.۳.۲.۱. مرکز، دو نقطه، دو محور	۹۹	۳۸۶
۳.۱.۱.۴. نقطه؛ ۲a، ۲b، ۲c؛...	۹۹	۳۸۷
۳.۱.۱.۴.۱. دو کانون، ۲b	۹۹	۳۸۷
۳.۱.۱.۴.۲. دو کانون، $\frac{b}{a}$	۱۰۰	۳۸۷
۳.۱.۱.۴.۳. یک کانون، یک نقطه، a و b	۱۰۰	۳۸۸
۳.۱.۱.۵. خط؛ ۲a، ۲b، ۲c؛...	۱۰۰	۳۸۹
۳.۱.۱.۵.۱. قطر بزرگ، یک خط مماس، ۲a	۱۰۰	۳۸۹
۳.۱.۱.۶. نقطه؛ خط؛ ۲a، ۲b، ۲c؛...	۱۰۰	۳۸۹
۳.۱.۱.۶.۱. یک کانون، یک مماس، ۲a و ۲b	۱۰۰	۳۸۹
۳.۱.۱.۶.۲. یک کانون، یک خط مماس، راستای محور کانونی، ۲a	۱۰۰	۳۸۹
۳.۱.۱.۶.۳. مرکز، دو خط مماس، ۲a	۱۰۰	۳۹۰
۳.۱.۱.۶.۴. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، یک خط مماس، ۲a	۱۰۰	۳۹۱
۳.۱.۱.۶.۵. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، یک خط مماس، ۲c	۱۰۱	۳۹۱
۳.۱.۲. رسم بیضی با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر	۱۰۱	۳۹۲
۳.۱.۲.۱. مثلث	۱۰۱	۳۹۲
۳.۱.۳. رسم بیضی با تا زدن کاغذ	۱۰۱	۳۹۳
۳.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۱۰۱	۳۹۳
۳.۲. رسم هذلولی	۱۰۱	۳۹۴
۳.۲.۱. رسم هذلولی با معلوم بودن: نقطه؛ خط؛ ۲a، ۲b، ۲c؛...	۱۰۱	۳۹۴
۳.۲.۱.۱. نقطه	۱۰۱	۳۹۴
۳.۲.۱.۱.۱. سه نقطه	۱۰۱	۳۹۴
۳.۲.۱.۱.۱.۱. دو کانون، یک نقطه	۱۰۱	۳۹۴

موضوع	صفحه	
	صورت	حل
۲.۱.۱.۱.۲.۳. یک کانون، یک رأس، یک نقطه	۱۰۲	۳۹۴
۳.۱.۱.۱.۲.۳. دو رأس، یک نقطه	۱۰۲	۳۹۵
۲.۱.۱.۲.۳. چهار نقطه	۱۰۲	۳۹۵
۱.۲.۱.۱.۲.۳. یک کانون، سه نقطه	۱۰۲	۳۹۵
۲.۱.۲.۳. خط	۱۰۲	۳۹۶
۱.۲.۱.۲.۳. یک مجانب، یک هادی، یک مماس	۱۰۲	۳۹۶
۳.۱.۲.۳. ۲a، ۲b، ۲c؛...	۱۰۲	۳۹۶
۱.۳.۱.۲.۳. ۲a، ۲b	۱۰۲	۳۹۶
۲.۳.۱.۲.۳. ۲a، $\frac{c}{a}$	۱۰۲	۳۹۶
۴.۱.۲.۳. نقطه، خط	۱۰۲	۳۹۶
۱.۴.۱.۲.۳. یک نقطه، یک یا چند خط	۱۰۲	۳۹۶
۱.۱.۴.۱.۲.۳. یک نقطه، دو خط	۱۰۳	۳۹۶
۱.۱.۱.۴.۱.۲.۳. یک کانون، یک مماس، یک مجانب	۱۰۳	۳۹۶
۲.۱.۱.۴.۱.۲.۳. یک کانون، یک هادی، یک مجانب	۱۰۳	۳۹۷
۳.۱.۱.۴.۱.۲.۳. یک نقطه، یک هادی، یک مجانب	۱۰۳	۳۹۷
۴.۱.۱.۴.۱.۲.۳. یک نقطه، دو مجانب	۱۰۳	۳۹۸
۲.۱.۴.۱.۲.۳. یک نقطه، سه خط	۱۰۳	۳۹۸
۱.۲.۱.۴.۱.۲.۳. یک کانون، سه مماس	۱۰۳	۳۹۸
۲.۲.۱.۴.۱.۲.۳. یک نقطه، دو هادی، یک مجانب	۱۰۳	۳۹۹
۲.۴.۱.۲.۳. دو نقطه، یک یا چند خط	۱۰۳	۳۹۹
۱.۲.۴.۱.۲.۳. دو نقطه، یک خط	۱۰۳	۳۹۹
۱.۱.۲.۴.۱.۲.۳. دو کانون، یک مماس	۱۰۳	۳۹۹
۲.۱.۲.۴.۱.۲.۳. دو کانون، یک مجانب	۱۰۳	۳۹۹
۳.۱.۲.۴.۱.۲.۳. یک کانون، مرکز، یک مجانب	۱۰۳	۳۹۹
۴.۱.۲.۴.۱.۲.۳. یک کانون، یک رأس، یک مماس	۱۰۳	۴۰۰
۵.۱.۲.۴.۱.۲.۳. یک کانون، یک نقطه، یک مجانب	۱۰۴	۴۰۰
۶.۱.۲.۴.۱.۲.۳. دو رأس، یک مماس	۱۰۴	۴۰۱
۲.۲.۴.۱.۲.۳. دو نقطه، دو خط	۱۰۴	۴۰۲
۱.۲.۲.۴.۱.۲.۳. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، دو مماس	۱۰۴	۴۰۲
۲.۲.۲.۴.۱.۲.۳. یک کانون، یک نقطه، دو مماس	۱۰۴	۴۰۲
۳.۲.۲.۴.۱.۲.۳. دو نقطه، یک هادی، یک مجانب	۱۰۴	۴۰۳
۳.۴.۱.۲.۳. سه نقطه، یک یا چند خط	۱۰۴	۴۰۳
۱.۳.۴.۱.۲.۳. سه نقطه، یک خط	۱۰۴	۴۰۳
۱.۱.۳.۴.۱.۲.۳. یک کانون، دو نقطه، یک مماس	۱۰۴	۴۰۳
۲.۱.۳.۴.۱.۲.۳. سه نقطه، یک مجانب	۱۰۴	۴۰۴
۳.۱.۳.۴.۱.۲.۳. سه نقطه، یک هادی	۱۰۴	۴۰۴
۵.۱.۲.۳. نقطه؛ ۲a، ۲b، ۲c؛...	۱۰۵	۴۰۵
۱.۵.۱.۲.۳. دو کانون، ۲b	۱۰۵	۴۰۵
۲.۵.۱.۲.۳. دو کانون، $\frac{b}{a}$	۱۰۵	۴۰۵
۶.۱.۲.۳. خط؛ ۲a، ۲b، ۲c؛...	۱۰۵	۴۰۶
۱.۶.۱.۲.۳. محور کانونی، یک مماس، ۲a	۱۰۵	۴۰۶
۲.۶.۱.۲.۳. دو خط مجانب، ۲c	۱۰۵	۴۰۷
۷.۱.۲.۳. نقطه؛ خط؛ ۲a، ۲b، ۲c؛...	۱۰۵	۴۰۷
۱.۷.۱.۲.۳. یک کانون، یک مجانب، ۲a	۱۰۵	۴۰۷
۲.۷.۱.۲.۳. یک کانون، یک مماس، ۲a، ۲b	۱۰۵	۴۰۷
۳.۷.۱.۲.۳. یک کانون، یک مماس، محور کانونی، ۲a	۱۰۵	۴۰۷
۴.۷.۱.۲.۳. مرکز، دو مماس، ۲a	۱۰۶	۴۰۸
۵.۷.۱.۲.۳. یک کانون، دو مجانب، ۲c	۱۰۶	۴۰۸
۶.۷.۱.۲.۳. یک کانون، یک هادی، $\frac{c}{a}$	۱۰۶	۴۰۹
۷.۷.۱.۲.۳. یک رأس، یک مجانب، $\frac{c}{a}$	۱۰۶	۴۰۹

موضوع	صورت	حل
۳.۲.۱.۷.۸. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، یک مماس، 2a	۱۰۶	۴۰۹
۳.۲.۱.۷.۹. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، یک مماس، 2c	۱۰۶	۴۱۰
۳.۲.۲. رسم هذلولی با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر	۱۰۶	۴۱۱
۳.۲.۲.۱. مثلث، یک کانون	۱۰۶	۴۱۱
۳.۲.۳. رسم هذلولی با تا زدن کاغذ	۱۰۷	۴۱۲
۳.۳. رسم سهمی	۱۰۷	۴۱۲
۳.۳.۱. رسم سهمی با معلوم بودن: نقطه؛ خط؛ پارامتر؛ تحت مماس،...	۱۰۷	۴۱۲
۳.۳.۱.۱. نقطه	۱۰۷	۴۱۲
۳.۳.۱.۱.۱. سه نقطه	۱۰۷	۴۱۲
۳.۳.۱.۱.۱.۱. کانون، دو نقطه	۱۰۷	۴۱۲
۳.۳.۱.۲. خط	۱۰۷	۴۱۳
۳.۳.۱.۲.۱. سه خط	۱۰۷	۴۱۳
۳.۳.۱.۲.۱.۱. هادی، دو مماس	۱۰۷	۴۱۳
۳.۳.۱.۲.۱.۲. سه مماس	۱۰۷	۴۱۳
۳.۳.۱.۲.۲. چهار خط	۱۰۸	۴۱۴
۳.۳.۱.۲.۲.۱. چهار مماس	۱۰۸	۴۱۴
۳.۳.۱.۳. پارامتر؛ تحت مماس، تحت قائم	۱۰۸	۴۱۵
۳.۳.۱.۴. نقطه، خط	۱۰۸	۴۱۶
۳.۳.۱.۴.۱. یک نقطه، یک یا چند خط	۱۰۸	۴۱۶
۳.۳.۱.۴.۱.۱. یک نقطه، دو خط	۱۰۸	۴۱۶
۳.۳.۱.۴.۱.۱.۱. کانون، دو مماس	۱۰۸	۴۱۶
۳.۳.۱.۴.۱.۱.۲. کانون، محور، یک مماس	۱۰۸	۴۱۶
۳.۳.۱.۴.۱.۱.۳. نقطهٔ تماس، محور، یک مماس	۱۰۸	۴۱۷
۳.۳.۱.۴.۱.۱.۴. نقطهٔ تماس، هادی، یک مماس	۱۰۸	۴۱۸
۳.۳.۱.۴.۱.۱.۵. یک نقطه، هادی، یک مماس	۱۰۸	۴۱۸
۳.۳.۱.۴.۱.۱.۶. یک نقطهٔ تماس، دو مماس	۱۰۸	۴۱۹
۳.۳.۱.۴.۱.۲. یک نقطه، سه خط	۱۰۹	۴۱۹
۳.۳.۱.۴.۱.۲.۱. یک نقطهٔ تماس، سه مماس	۱۰۹	۴۱۹
۳.۳.۱.۴.۲. دو نقطه، یک یا چند خط	۱۰۹	۴۲۰
۳.۳.۱.۴.۲.۱. دو نقطه، یک خط	۱۰۹	۴۲۰
۳.۳.۱.۴.۲.۱.۱. کانون، یک نقطه، یک مماس	۱۰۹	۴۲۰
۳.۳.۱.۴.۲.۱.۲. کانون، یک نقطهٔ تماس، یک مماس	۱۰۹	۴۲۰
۳.۳.۱.۴.۲.۱.۳. دو نقطه، هادی	۱۰۹	۴۲۱
۳.۳.۱.۴.۲.۱.۴. دو نقطه، محور	۱۰۹	۴۲۱
۳.۳.۱.۴.۲.۲. دو نقطه، دو خط	۱۰۹	۴۲۲
۳.۳.۱.۴.۲.۲.۱. دو نقطهٔ تماس، دو خط مماس	۱۰۹	۴۲۲
۳.۳.۱.۴.۳. سه نقطه، یک یا چند خط	۱۰۹	۴۲۳
۳.۳.۱.۴.۳.۱. سه نقطه، یک خط	۱۰۹	۴۲۳
۳.۳.۱.۴.۳.۱.۱. سه نقطه، محور	۱۰۹	۴۲۳
۳.۳.۱.۵. نقطه؛ پارامتر؛ تحت مماس	۱۱۰	۴۲۳
۳.۳.۱.۶. خط؛ پارامتر؛ تحت مماس، تحت قائم	۱۱۰	۴۲۴
۳.۳.۱.۶.۱. محور، خط قائم، پارامتر	۱۱۰	۴۲۴
۳.۳.۱.۷. نقطه؛ خط؛ پارامتر؛ تحت مماس، تحت قائم	۱۱۰	۴۲۵
۳.۳.۱.۷.۱. کانون، محور، پارامتر	۱۱۰	۴۲۵
۳.۳.۱.۷.۲. نقطه، محور، تحت مماس	۱۱۰	۴۲۵
۳.۳.۱.۷.۳. یک نقطهٔ تماس، یک مماس، تحت مماس	۱۱۰	۴۲۵
۳.۳.۲. رسم سهمی با تا زدن کاغذ	۱۱۰	۴۲۶
فهرست منابع		۴۳۱ـ۴۲۸

پیشگفتار

سپاس فراوان به درگاه پروردگار توانا که توفیق نگارش این مجموعه را عنایت فرمود. از سالها پیش نیاز به تألیف مجموعهٔ کاملی از هندسه، شامل تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه احساس می‌شد، تا علاقه‌مندان به این شاخه از ریاضی با دسترسی به تمام مطالب مربوط به هر مبحث و حل و بررسی آنها، نه تنها به احاطه‌ای کامل بر آن مبحث دست یابند، بلکه خود نیز قضیه‌ها و مسأله‌ها را تعمیم دهند و یا قضیه‌ها و مسأله‌های جدیدی در آن زمینه کشف کنند. به این جهت از حدود سی‌و نه سال پیش به جمع‌آوری تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسهٔ موجود در کتابهای ریاضی به زبان فارسی، ترجمه شده به زبان فارسی و کتابهای خارجی که در اختیار یا در دسترس بود، برای تألیف دایرةالمعارف هندسه، اقدام، و تمام این مطالب براساس موارد زیر دسته‌بندی گردید :

۱. ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی در هندسه مسطحه
۲. رابطه‌های متری در هندسه مسطحه
۳. مکانهای هندسی و ترسیمهای هندسی در هندسهٔ مسطحه
۴. تبدیلهای هندسی (انتقال، بازتاب، دوران،تجانس، انعکاس و ...)
۵. مقطعهای مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی و سهمی)
۶. هندسهٔ تحلیلی
۷. هندسهٔ فضایی
۸. هندسه نااقلیدسی
...

هریک از عنوانهای بالا با توجه به حجم مطالب، یک یا چند جلد از این دایرةالمعارف را دربر می‌گیرد. به‌عنوان مثال، رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه، شامل پنج جلد به شرح زیر است :

جلد ۳. نسبت پاره‌خطها در هندسهٔ مسطحه (نسبت و تناسب، قضیهٔ تالس و ...) ؛
جلد ۴. رابطه‌های متری در دایره ؛

جلد ۵. رابطه‌های متری در مثلث؛ مثلث و دایره‌های: محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر؛
جلد ۶. رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه (مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلث‌متساوی‌الساقین، مثلث قائم‌الزاویه، ...)؛ مثلثهای ویژه و دایره‌های: محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر؛
جلد ۷. رابطه‌های متری درچندضلعیها (چهارضلعی، چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای محاطی و محیطی، پنج‌ضلعی، شش‌ضلعی، ...).

برای استفادهٔ بهینه از این مجموعه ذکر چند نکته ضروری است:

● در این مجموعه، صورت قضیه‌ها و مسأله‌ها، همراه با شکل آنها داده شده است، تا دانشجویان علاقه‌مند، پیش از مراجعه به راهنمایی یا حل، خود به حل آنها بپردازند (به استثنای برخی مسأله‌ها که رسم شکل توسط دانشجو، جزء هدفهای مسأله است).

● قضیه‌ها و مسأله‌های تاریخی هندسه، با ذکر تاریخچهٔ مختصری از زمان ارائه، و راه‌حلهای آنها در قسمت مربوط به خود آمده‌اند، و غیر از مواردی خاص، تنها یک یا دو راه حل از آنها مطرح شده است، زیرا برخی از این قضیه‌ها تاکنون به دهها و حتی به صدها راه، حل شده‌اند؛ مانند قضیهٔ فیثاغورس در مورد مثلث قائم‌الزاویه «در هر مثلث قائم‌الزاویه، مربع اندازهٔ وتر، برابر است با مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه، $a^2 = b^2 + c^2$» که تنها به‌وسیلهٔ اقلیدس از ۸ راه اثبات گردیده است.

● مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، از جمله المپیادهای ریاضی ایران، و مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی کشورهای مختلف، به همان صورت ترجمه شده یا نوشته شده در متن اصلی، آورده شده است.

● علامتهای به‌کار گرفته شده در مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و کشورهای مختلف به همان صورت متن اصلی آنها آمده است.

به عنوان مثال در المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف پاره‌خط AB به صورتهای $\overline{AB}$، $|AB|$ یا AB نشان داده شده است، و یا در المپیادهای ریاضی بلژیک از حروف کوچک مانند a، b و c برای نامگذاری رأسهای مثلث استفاده شده، به طور مثال گفته شده «در مثلث abc ضلعهای ab، bc و ac، ...».

● در دیگر قضیه‌ها، مسأله‌ها، تعریفها و شکلها از حرفها و علامتهای یکسان استفاده شده است. به‌عنوان مثال، همه‌جا، نقطه‌ها با حرفهای بزرگ لاتین مانند نقطه‌های A، B، C و ...؛ و پاره‌خط AB به صورت AB و اندازهٔ زاویهٔ A به‌صورت $\hat{A}$ نشان داده شده است.

این جلد از دایرة‌المعارف هندسه، رسم چندضلعی، دایره و مقطعهای مخروطی است که سه بخش دارد:

بخش ۱. رسم چندضلعی

بخش ۲. رسم دایره

بخش ۳. رسم بیضی، هذلولی و سهمی

هریک از بخشهای بالا به چند زیربخش تقسیم شده است. به‌عنوان مثال بخش ۱. رسم چندضلعی، پنج زیربخش دارد که عبارتند از :

۱.۱. رسم چهارضلعی

۱.۲. رسم پنج‌ضلعی

۱.۳. رسم شش‌ضلعی

۱.۴. رسم n ضلعی

۱.۵. رسم n ضلعیهای منتظم

زیر بخشهای بالا، خود شامل چند زیربخشهای جدیدی هستند. به عنوان مثال زیربخش ۱.۱. رسم چهارضلعی، دارای پنج زیربخش است که عبارتند از :

۱.۱.۱. رسم چهارضلعی در حالت کلی

۱.۱.۲. رسم چهارضلعیهای ویژه

۱.۱.۳. رسم چهارضلعی محاطی

۱.۱.۴. رسم چهارضلعی محیطی

۱.۱.۵. رسم چهارضلعی محاطی و محیطی

هریک از زیربخشهای بالا خود به زیربخشهای جدیدی تقسیم شده‌اند. به عنوان مثال زیربخش :

۱.۱.۲. رسم چهارضلعیهای ویژه، شامل زیربخشهای زیر است :

۱.۱.۲.۱. رسم متوازی‌الاضلاع

۱.۱.۲.۲. رسم مستطیل

۱.۱.۲.۳. رسم مربع

۱.۱.۲.۴. رسم لوزی

۱.۱.۲.۵. رسم ذوزنقه

زیربخشهای بالا نیز هر کدام به زیربخشهای جدیدی تقسیم شده‌اند. به عنوان مثال :

زیربخش ۱.۱.۲.۱. رسم متوازی‌الاضلاع، چهار زیربخش دارد که عبارتند از :

۱.۱.۲.۱.۱. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن : نقطه، ضلع، قطر، ارتفاع، پاره‌خط، خط، زاویه، محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱.۲.۱.۲. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۱.۱.۲.۱.۳. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی و داده‌های دیگر

۱.۱.۲.۱.۴. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر

این زیربخشها خود دارای زیربخشهای جدیدی هستند. به عنوان مثال:

زیربخش۱.۱.۲.۱.۱. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن: نقطه، ضلع، قطر، ارتفاع، پاره‌خط، ... و خود شامل زیربخشهای زیر هستند:

۱.۱.۲.۱.۱.۱. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن نقطه

۱.۱.۲.۱.۱.۲. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن قطر، ارتفاع

۱.۱.۲.۱.۱.۳. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن نقطه، خط

۱.۱.۲.۱.۱.۴. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن ضلع،قطر، ارتفاع

۱.۱.۲.۱.۱.۵. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن ضلع، زاویه

۱.۱.۲.۱.۱.۶. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن نسبت ضلعها، مساحت

۱.۱.۲.۱.۱.۷. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن قطر، ارتفاع، زاویه

۱.۱.۲.۱.۱.۸. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن پاره‌خط، خط، زاویه

۱.۱.۲.۱.۱.۹. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن ضلع، قطر، ارتفاع، زاویه

۱.۱.۲.۱.۱.۱۰. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن قطر، زاویه، محیط

برخی از زیربخشهای بالا نیز به زیربخشهای جدیدی تقسیم شده و در هر قسمت مسأله‌ها با نظم و ترتیب ویژه‌ای ارائه گردیده‌اند.

امید است این مجموعه، مورد استفادهٔ دانش‌پژوهان ارجمند قرار گیرد و در شکوفایی استعدادهای آنان سهمی داشته باشد.

مؤلف، مدعی کامل بودن این دایرةالمعارف نیست، ولی، امیدوار است که با همکاری ریاضیدانان محترم، استادان، دانشجویان، دانش‌آموزان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه بتواند آن را کامل کند. بنابراین تقاضا دارد، قضیه‌ها و مسأله‌هایی را که در این مجموعه وجود ندارد، همچنین نظرات و پیشنهادهای اصلاحی و ارشادی خود را برای رفع کاستیها و تکمیل دایرةالمعارف، به نشانی ناشر یا مؤلف ارسال فرمایند، که پیشاپیش از این همکاری ارزنده، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

مؤلف

رسم شکلهای هندسی در هندسهٔ مسطحه
(چندضلعی، دایره، بیضی، هذلولی و سهمی)

بخش ۱. رسم چندضلعی
بخش ۲. رسم دایره
بخش ۳. رسم بیضی، هذلولی و سهمی

بخش ۱

• رسم چند ضلعی

۱.۱.رسم چهارضلعی

۱ . ۱ . ۱. رسم چهارضلعی در حالت کلی

۱ . ۱ . ۱ . ۱. رسم چهارضلعی با معلوم بودن : نقطه ؛ ضلع ؛ قطر ؛ پاره‌خط، خط ؛ زاویه ؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱ . ۱ . ۱ . ۱ . ۱. نقطه

۱ . ۱ . ۱ . ۱ . ۲. ضلع

۱ . ۱ . ۱ . ۱ . ۳. نقطه، پاره‌خط

۱ . ۱ . ۱ . ۱ . ۴. ضلع، پاره‌خط

۱ . ۱ . ۱ . ۱ . ۵. ضلع،زاویه

۱ . ۱ . ۱ . ۱ . ۶. قطر، زاویه

۱ . ۱ . ۱ . ۱ . ۷. ضلع، قطر، پاره‌خط

۱ . ۱ . ۱ . ۱ . ۸. ضلع یا رابطهٔ بین ضلعها، قطر، زاویه

۱ . ۱ . ۱ . ۱ . ۹. نسبت ضلعها، زاویه، محیط

۱ . ۱ . ۱ . ۱ . ۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۱ . ۱ . ۱ . ۲. رسم چهارضلعی با معلوم بودن دایره

۱ . ۱ . ۲. رسم چهارضلعیهای ویژه

۱ . ۱ . ۲ . ۱. رسم متوازی‌الاضلاع

۱ . ۱ . ۲ . ۱ . ۱. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن : نقطه ؛ ضلع ؛ قطر، ارتفاع ؛ پاره‌خط، خط ؛ زاویه ؛ محیط، مساحت، رابطهٔ متری

۱.۱.۲.۱.۱.۱. نقطه
۱.۱.۲.۱.۱.۲. قطر، ارتفاع
۱.۱.۲.۱.۱.۳. نقطه، خط
۱.۱.۲.۱.۱.۴. ضلع ؛ قطر، ارتفاع
۱.۱.۲.۱.۱.۴.۱. ضلع، قطر
۱.۱.۲.۱.۱.۴.۲. ضلع، ارتفاع
۱.۱.۲.۱.۱.۵. ضلع، زاویه
۱.۱.۲.۱.۱.۶. نسبت ضلعها، مساحت
۱.۱.۲.۱.۱.۷. قطر، ارتفاع ؛ زاویه
۱.۱.۲.۱.۱.۷.۱. قطر، زاویه
۱.۱.۲.۱.۱.۷.۲. ارتفاع، زاویه
۱.۱.۲.۱.۱.۸. پاره‌خط، خط ؛ زاویه
۱.۱.۲.۱.۱.۸.۱. پاره‌خط، زاویه
۱.۱.۲.۱.۱.۹.ضلع ؛ قطر، ارتفاع ؛ زاویه
۱.۱.۲.۱.۱.۹.۱. ضلع، قطر، زاویه
۱.۱.۲.۱.۱.۹.۲. ضلع، ارتفاع، زاویه
۱.۱.۲.۱.۱.۱۰. قطر، زاویه، محیط
۱.۱.۲.۱.۲. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن : مثلث، مثلث و داده‌های دیگر
۱.۱.۲.۱.۲.۱. مثلث، نسبت ضلعها، زاویه
۱.۱.۲.۱.۲.۲. مثلث، زاویه
۱.۱.۲.۱.۳. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن : چندضلعی، چندضلعی و داده‌های دیگر
۱.۱.۲.۱.۳.۱. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن چهارضلعی
۱.۱.۲.۱.۴.رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن : دایره، دایره و داده‌های دیگر
۱.۱.۲.۲.رسم مستطیل
۱.۱.۲.۲.۱.رسم مستطیل با معلوم بودن : نقطه، ضلع ؛ قطر،...
۱.۱.۲.۲.۱.۱. پاره‌خط
۱.۱.۲.۲.۱.۲. نقطه، ضلع

۱.۱.۲.۲.۱.۳. قطر، ضلع یا رابطهٔ بین ضلعها
۱.۱.۲.۲.۱.۴. رابطهٔ بین ضلعها، زاویه
۱.۱.۲.۲.۱.۵. رابطهٔ بین ضلعها، مساحت
۱.۱.۲.۲.۱.۶. رابطهٔ بین ضلعها، محیط
۱.۱.۲.۲.۱.۷. قطر، پاره‌خط
۱.۱.۲.۲.۱.۸. قطر، محیط
۱.۱.۲.۲.۱.۹. محیط، زاویه
۱.۱.۲.۲.۱.۱۰. نقطه، ضلع، خط
۱.۱.۲.۲.۲. رسم مستطیل با معلوم بودن : مثلث، مثلث و...
۱.۱.۲.۲.۲.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن : مثلث در حالت کلی، مثلث در حالت کلی و...
۱.۱.۲.۲.۲.۱.۱. مثلث، رابطهٔ بین‌ضلعها
۱.۱.۲.۲.۲.۱.۲. مثلث، اندازهٔ قطر
۱.۱.۲.۲.۲.۱.۳. مثلث، خط
۱.۱.۲.۲.۲.۱.۴. مثلث، مساحت
۱.۱.۲.۲.۲.۱.۵. مثلث، محیط
۱.۱.۲.۲.۲.۱.۶. مثلث، مستطیل
۱.۱.۲.۲.۲.۲. رسم مستطیل با معلوم بودن : مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلث متساوی‌الاضلاع و...
۱.۱.۲.۲.۲.۲.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن مثلث متساوی‌الاضلاع
۱.۱.۲.۲.۲.۳. رسم مستطیل با معلوم بودن :مثلث متساوی‌الساقین، مثلث متساوی‌الساقین و...
۱.۱.۲.۲.۲.۳.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن مثلث متساوی‌الساقین، محیط
۱.۱.۲.۲.۲.۴. رسم مستطیل با معلوم بودن : مثلث قائم‌الزاویه، مثلث قائم‌الزاویه و...
۱.۱.۲.۲.۲.۴.۱. مثلث قائم‌الزاویه، رأس
۱.۱.۲.۲.۳. رسم مستطیل با معلوم بودن : چندضلعی، چندضلعی و...
۱.۱.۲.۲.۳.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن : چهارضلعی، چهارضلعی و...

۱.۱.۲.۲.۳.۱.۱. چهارضلعی، خط

۱.۱.۲.۲.۳.۲. رسم مستطیل با معلوم بودن: چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای ویژه و...

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن: متوازی‌الاضلاع، متوازی‌الاضلاع و...

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۱.۱. متوازی‌الاضلاع، زاویه

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۲. رسم مستطیل با معلوم بودن: مستطیل، مستطیل و...

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۲.۱. مستطیل، نسبت ضلعها

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۲.۲. مستطیل، محیط، مساحت

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۳. رسم مستطیل با معلوم بودن: مربع، مربع و...

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۳.۱. مربع، ضلع

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۳.۲. مربع، قطر

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۴. رسم مستطیل با معلوم بودن: لوزی،لوزی و ...

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۴.۱. لوزی، مساحت

۱.۱.۲.۲.۳.۳. رسم مستطیل با معلوم بودن: پنج ضلعی، پنج ضلعی و...

۱.۱.۲.۲.۴. رسم مستطیل با معلوم بودن: نیمدایره، دایره و ...

۱.۱.۲.۲.۴.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن: نیمدایره، نیمدایره و ...

۱.۱.۲.۲.۴.۱.۱. نیمدایره، مساحت

۱.۱.۲.۲.۴.۱.۲. نیمدایره، مستطیل

۱.۱.۲.۲.۴.۲. رسم مستطیل با معلوم بودن: دایره، دایره و ...

۱.۱.۲.۲.۴.۲.۱. دایره، پاره‌خط

۱.۱.۲.۲.۴.۲.۲. دایره، مساحت

۱.۱.۲.۲.۴.۲.۳. دایره، رابطهٔ متری

۱.۱.۲.۲.۴.۲.۴. دایره، مستطیل

۱.۱.۲.۲.۴.۲.۵. سه دایره، مثلث، رأس

۱.۱.۲.۲.۴.۲.۶. چهار دایره، مستطیل

۱.۱.۲.۲.۵. رسم مستطیل با معلوم بودن: مقطعهای مخروطی و منحنیهای دیگر

۱.۱.۲.۲.۵.۱. بیضی

۱.۱.۲.۲.۵.۲. سهمی

۱.۱.۲.۲.۶ .سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۱.۱.۲.۲.۷. مسأله‌های ترکیبی
۱.۱.۲.۳. رسم مربع
۱.۱.۲.۳.۱ .رسم مربع با معلوم بودن : نقطه ؛ ضلع ؛ قطر ؛ پاره‌خط، خط ؛ زاویه ؛...
۱.۱.۲.۳.۱.۱. نقطه
۱.۱.۲.۳.۱.۲. قطر
۱.۱.۲.۳.۱.۳. خط
۱.۱.۲.۳.۱.۴. نقطه، خط
۱.۱.۲.۳.۱.۵. ضلع، قطر
۱.۱.۲.۳.۱.۶. خط، زاویه
۱.۱.۲.۳.۱.۷. نقطه، خط، ضلع
۱.۱.۲.۳.۲. رسم مربع با معلوم بودن : مثلث، مثلث و ...
۱.۱.۲.۳.۲.۱. مثلث در حالت کلی
۱.۱.۲.۳.۲.۱.۱. تنها مثلث
۱.۱.۲.۳.۲.۲. مثلث متساوی‌الاضلاع
۱.۱.۲.۳.۲.۳. مثلث متساوی‌الساقین
۱.۱.۲.۳.۲.۴. مثلث با زاویه‌های حاده
۱.۱.۲.۳.۳. رسم مربع با معلوم بودن : چندضلعی، چندضلعی و...
۱.۱.۲.۳.۳.۱. رسم مربع با معلوم بودن : چهارضلعی، چهارضلعی و ...
۱.۱.۲.۳.۳.۱.۱. رسم مربع با معلوم بودن چهارضلعی
۱.۱.۲.۳.۳.۲. رسم مربع با معلوم بودن : چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای ویژه و...
۱.۱.۲.۳.۳.۲.۱. رسم مربع با معلوم بودن متوازی‌الاضلاع
۱.۱.۲.۳.۳.۲.۲. رسم مربع با معلوم بودن : مربع، مربع و ...
۱.۱.۲.۳.۳.۲.۲.۱. مربع
۱.۱.۲.۳.۳.۲.۲.۲. مربع، رأس یا نقطه
۱.۱.۲.۳.۳.۲.۲.۳. مربع، طول ضلع
۱.۱.۲.۳.۳.۲.۲.۴. مربع، مساحت
۱.۱.۲.۳.۳.۲.۲.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱.۱.۲.۳.۴. رسم مربع با معلوم بودن : نیمدایره، دایره و ...
۱.۱.۲.۳.۴.۱. رسم مربع با معلوم بودن : نیمدایره، قطعه یا قطاع دایره
۱.۱.۲.۳.۴.۲. رسم مربع با معلوم بودن : دایره، دایره و ...
۱.۱.۲.۳.۴.۲.۱. تنها یک دایره
۱.۱.۲.۳.۴.۲.۲. یک دایره، خط
۱.۱.۲.۳.۴.۲.۳. دو دایره
۱.۱.۲.۳.۴.۲.۴. دو دایره یا بیشتر، یک خط یا بیشتر
۱.۱.۲.۴. رسم لوزی
۱.۱.۲.۴.۱. رسم لوزی با معلوم بودن : نقطه، ضلع، قطر، ...
۱.۱.۲.۴.۱.۱. نقطه
۱.۱.۲.۴.۱.۲. قطر
۱.۱.۲.۴.۱.۳. نقطه، خط
۱.۱.۲.۴.۱.۴. نقطه، زاویه
۱.۱.۲.۴.۱.۵. ضلع، قطر یا رابطهٔ بین قطرها
۱.۱.۲.۴.۱.۶. ضلع، پاره‌خط
۱.۱.۲.۴.۱.۷. قطر، پاره‌خط
۱.۱.۲.۴.۲. رسم لوزی با معلوم بودن : مثلث، مثلث و ...
۱.۱.۲.۴.۲.۱. تنها مثلث
۱.۱.۲.۴.۳. رسم لوزی با معلوم بودن : چند ضلعی، چند ضلعی و...
۱.۱.۲.۴.۳.۱.رسم لوزی با معلوم بودن چهارضلعی، چهارضلعی و ...
۱.۱.۲.۴.۳.۱.۱. تنها یک چهارضلعی
۱.۱.۲.۴.۳.۱.۲. چهارضلعی، لوزی
۱.۱.۲.۴.۳.۲. رسم لوزی با معلوم بودن : چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای ویژه و...
۱.۱.۲.۴.۳.۲.۱. رسم لوزی با معلوم بودن : متوازی‌الاضلاع، متوازی‌الاضلاع و...
۱.۱.۲.۴.۳.۲.۱.۱. متوازی‌الاضلاع، قطر
۱.۱.۲.۴.۳.۲.۱.۲. متوازی‌الاضلاع، مساحت
۱.۱.۲.۴.۳.۲.۱.۳. متوازی‌الاضلاع، لوزی

۱.۱.۲.۴.۳.۲.۲. رسم لوزی با معلوم بودن : مستطیل، مستطیل و ...
۱.۱.۲.۴.۳.۲.۲.۱. مستطیل ، مساحت
۱.۱.۲.۴.۳.۳. رسم لوزی با معلوم بودن چندضلعی
۱.۱.۲.۴.۴. رسم لوزی با معلوم بودن دایره یا شعاع دایره و ...
۱.۱.۲.۴.۴.۱. رسم لوزی با معلوم بودن دایره و...
۱.۱.۲.۴.۴.۱.۱. دو دایره، خط، طول ضلع
۱.۱.۲.۴.۴.۲. رسم لوزی با معلوم بودن شعاع دایره و ...
۱.۱.۲.۴.۴.۲.۱. شعاع دایرهٔ محاطی، یک زاویه
۱.۱.۲.۴.۴.۲.۲. شعاع دایره محاطی، قطر
۱.۱.۲.۵. رسم ذوزنقه
۱.۱.۲.۵.۱. رسم ذوزنقه در حالت کلی
۱.۱.۲.۵.۱.۱. رسم ذوزنقه با معلوم بودن : نقطه ؛ ضلع ؛ قطر ؛ ارتفاع ؛ ...
۱.۱.۲.۵.۱.۱.۱. ضلع
۱.۱.۲.۵.۱.۱.۲. ضلع، قطر
۱.۱.۲.۵.۱.۱.۳. ضلع، ارتفاع
۱.۱.۲.۵.۱.۱.۴. ضلع، زاویه
۱.۱.۲.۵.۱.۱.۵. قطر، پاره‌خط
۱.۱.۲.۵.۱.۱.۶. قطر، زاویه
۱.۱.۲.۵.۱.۱.۷. ضلع، قطر، زاویه
۱.۱.۲.۵.۱.۱.۸. قطر، پاره‌خط، زاویه
۱.۱.۲.۵.۱.۲. رسم ذوزنقه با معلوم بودن : مثلث، مثلث و ...
۱.۱.۲.۵.۱.۲.۱. مثلث، مساحت
۱.۱.۲.۵.۱.۳. رسم ذوزنقه با معلوم بودن چندضلعی
۱.۱.۲.۵.۱.۳.۱. رسم ذوزنقه با معلوم بودن چهارضلعی
۱.۱.۲.۵.۱.۴. رسم ذوزنقه با معلوم بودن : دایره، دایره و ...
۱.۱.۲.۵.۱.۴.۱. دایره، ضلع
۱.۱.۲.۵.۱.۵. رسم ذوزنقه با معلوم بودن : مقطعهای مخروطی و منحنیهای دیگر
۱.۱.۲.۵.۱.۵.۱. سهمی
۱.۱.۲.۵.۲. رسم ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین

۱.۱.۲.۵.۲.۱. رسم ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با معلوم بودن : نقطه ؛ ضلع ؛ ...
۱.۱.۲.۵.۲.۱.۱. ضلع، پاره‌خط
۱.۱.۲.۵.۲.۱.۲. ضلع، زاویه
۱.۱.۲.۵.۲.۱.۳. ضلع، قطر، زاویه
۱.۱.۲.۵.۲.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی
۱.۱.۲.۵.۲.۲. رسم ذوزنقه متساوی‌الساقین با معلوم بودن : مثلث، مثلث و...
۱.۱.۲.۵.۲.۲.۱. مثلث متساوی‌الساقین، . . .
۱.۱.۲.۵.۲.۲.۱.۱. مثلث متساوی‌الساقین، مساحت
۱.۱.۲.۵.۲.۳. رسم ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با معلوم بودن چندضلعی
۱.۱.۲.۵.۲.۳.۱. رسم ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با معلوم بودن چهارضلعی
۱.۱.۲.۵.۲.۴. رسم ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با معلوم بودن : دایره، دایره و ...
۱.۱.۲.۵.۲.۴.۱. دایره، ضلع، ارتفاع
۱.۱.۳. رسم چهارضلعی محاطی
۱.۱.۳.۱. رسم چهارضلعی محاطی با معلوم بودن : نقطه ؛ ضلع ؛ ...
۱.۱.۳.۱.۱. ضلع
۱.۱.۳.۱.۲. ضلع، زاویه
۱.۱.۳.۱.۳. قطر، زاویه
۱.۱.۳.۱.۴. ضلع، قطر، زاویه
۱.۱.۳.۲. رسم چهارضلعی محاطی با معلوم بودن : دایره یا شعاع دایره و ...
۱.۱.۳.۲.۱. رسم چهارضلعی محاطی با معلوم بودن : دایره، دایره و ...
۱.۱.۳.۲.۱.۱. دایره، نقطه
۱.۱.۳.۲.۱.۲. دایره، ضلع
۱.۱.۳.۲.۱.۳. دایره، قطر، زاویه
۱.۱.۳.۲.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی
۱.۱.۳.۲.۲. شعاع دایرهٔ محیطی و ...
۱.۱.۳.۲.۲.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، ضلع
۱.۱.۳.۲.۲.۲. شعاع دایرهٔ محیطی، قطر، زاویه
۱.۱.۴. رسم چهارضلعی محیطی

۱.۱.۴.۱. رسم چهارضلعی محیطی با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛...
۱.۱.۱.۴.۱.۱. ضلع، زاویه
۱.۱.۴.۲. رسم چهارضلعی محیطی با معلوم بودن چهارضلعی
۱.۱.۲.۴.۱.۱. دو چهارضلعی
۱.۱.۴.۳. رسم چهارضلعی محیطی با معلوم بودن دایره یا شعاع دایره و ...
۱.۱.۳.۴.۱.۱. رسم چهارضلعی محیطی با معلوم بودن شعاع دایرهٔ محاطی و ...
۱.۱.۱.۳.۴.۱.۱. شعاع دایرهٔ محاطی، ضلع، زاویه
۲.۱.۳.۴.۱.۱. شعاع دایرهٔ محاطی، محیط، زاویه
۱.۱.۵. رسم چهارضلعی محاطی محیطی
۱.۱.۵.۱. رسم چهارضلعی محاطی محیطی با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛...
۱.۱.۱.۵.۱.۱. نقطه

۲.۱. رسم پنج‌ضلعی

۱.۲.۱. رسم پنج‌ضلعی با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛...
۱.۱.۲.۱. نقطه
۲.۱.۲.۱. ضلع
۲.۲.۱. رسم پنج‌ضلعی با معلوم بودن: دایره، دایره و ...
۱.۲.۲.۱. دایره، نقطه
۲.۲.۲.۱. دایره، خط

۳.۱. رسم شش‌ضلعی

۴.۱.رسم n ضلعی

۱.۴.۱. رسم n ضلعی با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛...
۱.۱.۴.۱. نقطه
۲.۱.۴.۱. نقطه، زاویه
۲.۴.۱. رسم n ضلعی با معلوم بودن چندضلعی، چندضلعی و ...
۱.۲.۴.۱. چندضلعی، نقطه
۲.۲.۴.۱. چندضلعی، مربع یا چندضلعی دیگر

۱.۴.۲.۳. مسأله‌های ترکیبی
۱.۴.۳. رسم n ضلعی با معلوم بودن : دایره، دایره و ...

۱.۵. رسم چندضلعیهای منتظم

۱.۵.۱. رسم سه ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع)
۱.۵.۱.۱. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن اندازهٔ ضلع
۱.۵.۱.۲. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ به شعاع R
۱.۵.۱.۳. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر دایرهٔ به شعاع R
۱.۵.۲. رسم چهارضلعی منتظم (مربع)
۱.۵.۲.۱. رسم مربع با معلوم بودن اندازهٔ ضلع
۱.۵.۲.۲. رسم مربع با معلوم بودن مثلث
۱.۵.۲.۲.۱. رسم مربع با معلوم بودن مثلث متساوی‌الاضلاع
۱.۵.۲.۲.۲. رسم مربع با معلوم بودن مثلث در حالت کلی
۱.۵.۲.۳. رسم مربع با معلوم بودن چندضلعی منتظم
۱.۵.۲.۳.۱. رسم مربع با معلوم بودن پنج‌ضلعی منتظم
۱.۵.۲.۳.۲. رسم مربع با معلوم بودن هشت ضلعی منتظم
۱.۵.۲.۴. رسم مربع محاط در دایرهٔ به شعاع R
۱.۵.۲.۵. رسم مربع محیط بر دایرهٔ به شعاع R
۱.۵.۲.۶. رسم مربع با تازدن یا گره‌زدن کاغذ
۱.۵.۲.۶.۱. رسم مربع با تازدن کاغذ
۱.۵.۲.۶.۲. رسم مربع با گره‌زدن کاغذ
۱.۵.۳. رسم پنج ضلعی منتظم
۱.۵.۳.۱. رسم پنج ضلعی منتظم با معلوم بودن ضلع
۱.۵.۳.۲. رسم پنج ضلعی منتظم با معلوم بودن مربع
۱.۵.۳.۳. رسم پنج ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R
۱.۵.۳.۴. رسم پنج ضلعی منتظم با گره‌زدن کاغذ
۱.۵.۴. رسم شش ضلعی منتظم
۱.۵.۴.۱. رسم شش ضلعی منتظم با معلوم بودن اندازهٔ ضلع
۱.۵.۴.۲. رسم شش ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R

۱.۵.۴.۳. رسم شش ضلعی منتظم محیط بر دایرهٔ به شعاع R
۱.۵.۴.۴. رسم شش ضلعی منتظم با تاکردن یا گره‌زدن کاغذ
۱.۵.۴.۴.۱. رسم شش ضلعی منتظم با تاکردن کاغذ
۱.۵.۴.۴.۲. رسم شش ضلعی منتظم با گره‌زدن کاغذ
۱.۵.۵. رسم هفت ضلعی منتظم
۱.۵.۵.۱. رسم هفت ضلعی منتظم با معلوم بودن اندازهٔ ضلع
۱.۵.۵.۲. رسم هفت ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R
۱.۵.۵.۳. رسم هفت ضلعی منتظم با گره‌زدن کاغذ
۱.۵.۶. رسم هشت ضلعی منتظم
۱.۵.۶.۱. رسم هشت ضلعی منتظم با معلوم بودن اندازهٔ ضلع
۱.۵.۶.۲. رسم هشت ضلعی منتظم با معلوم بودن مربع
۱.۵.۶.۳. رسم هشت ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R
۱.۵.۶.۴. رسم هشت ضلعی منتظم محیط بر دایرهٔ به شعاع R
۱.۵.۶.۵. رسم هشت ضلعی منتظم با تازدن یا گره‌زدن کاغذ
۱.۵.۶.۵.۱. رسم هشت ضلعی منتظم با تازدن کاغذ
۱.۵.۶.۵.۲. رسم هشت ضلعی منتظم با گره‌زدن کاغذ
۱.۵.۷. رسم نه ضلعی منتظم
۱.۵.۷.۱. رسم نه ضلعی منتظم با معلوم بودن اندازهٔ ضلع
۱.۵.۷.۲. رسم نه ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R
۱.۵.۸. رسم ده ضلعی منتظم
۱.۵.۸.۱. رسم ده ضلعی منتظم با معلوم بودن اندازهٔ ضلع
۱.۵.۸.۲. رسم ده ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R
۱.۵.۹. رسم یازده ضلعی منتظم
۱.۵.۱۰. رسم دوازده ضلعی منتظم
۱.۵.۱۰.۱. رسم دوازده ضلعی منتظم با معلوم بودن شعاع دایرهٔ محیطی
۱.۵.۱۱. رسم سیزده ضلعی منتظم
۱.۵.۱۲. رسم پانزده ضلعی منتظم
۱.۵.۱۳. رسم هفده ضلعی منتظم
۱.۵.۱۴. رسم چندضلعی منتظم

بخش ۱. رسم چندضلعی

۱.۱. رسم چهارضلعی

۱.۱.۱. رسم چهارضلعی در حالت کلی

۱.۱.۱.۱. رسم چهارضلعی با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ قطر؛...

۱.۱.۱.۱.۱. نقطه

۱. چهارضلعی را با معلوم بودن نقطه‌های وسط سه ضلع آن، رسم کنید، به شرطی که بدانیم، این سه ضلع چهارضلعی (که نقطه‌های وسط آنها داده شده است)، طولی برابر دارند. در ضمن، از بین سه نقطهٔ مفروض، می‌دانیم کدام نقطه، مربوط به ضلعی است که بین دو ضلع دیگر قرار دارد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۸

۲. یک چهارضلعی بسازید که تصویرهای محل برخورد قطرهایش، روی چهارضلعش مشخص باشد.

۲.۱.۱.۱.۱. ضلع

۳. از یک چهارضلعی اندازهٔ طول هر یک از چهار ضلع داده شده است، و بعلاوه یکی از قطرها، نیمساز یک زاویهٔ رأس مربوط به آن است. چهارضلعی را رسم کنید.

۳.۱.۱.۱.۱. نقطه، پاره‌خط

۴. وسطهای سه ضلع یک چهارضلعی، و پاره‌خطی به طول m موازی و مساوی ضلع چهارم آن داده شده است. این چهارضلعی را رسم کنید.

۴.۱.۱.۱.۱. ضلع، پاره‌خط

۵. چهارضلعی ABCD را رسم کنید که طول ضلعها و نیز طول پاره‌خط MN از آن معلوم است. این پاره‌خط میانگاههای ضلعهای AB و DC را به هم وصل می‌کند.

۶. اگر از یک چهارضلعی، طول ضلعها و فاصلهٔ بین دو نقطهٔ وسط قطرها معلوم باشد، آن را رسم کنید.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۱

۱.۱.۱.۱.۵. ضلع، زاویه

۷. از چهارضلعی ABCD، چهار ضلع و زاویهٔ بین دو ضلع AB و CD معلوم است. آن را رسم کنید.

۸. یک چهارضلعی محدب بسازید که از آن، چهار ضلع و مجموع دو زاویهٔ روبه‌رو در دست است.

۹. از چهارضلعی ABCD، ضلعهای CD،BC ،AB و دو زاویهٔ $\hat{B}$ و $\hat{D}$ معلومند. این چهارضلعی را رسم کنید.

۱۰. از چهارضلعی محدب ABCD، زاویه‌های $\hat{A}$ ، $\hat{B}$ ،$\hat{C}$ و دو ضلع AB و AD داده شده است. آن را رسم کنید.

۱۱. چهارضلعی ABCD را با معلوم بودن چهار زاویه و دو ضلع مقابل AB و CD رسم کنید.

۱۲. از چهارضلعی غیر مشخصی،دو ضلع متقابل و زاویهٔ بین دو قطر معلوم است. آن را رسم کنید.

۱.۱.۱.۱.۶. قطر، زاویه

۱۳. مطلوب است رسم یک چهارضلعی که از آن دو زاویهٔ روبه‌رو و طول قطرها، و زاویهٔ بین قطرها در دست باشد.

۱۴. از چهارضلعی ABCD اندازه‌های دوقطر و زاویهٔ بین آنها θ و اندازه‌های دو زاویهٔ مجاور $\hat{A}$ و $\hat{B}$ معلوم است. آن را رسم کنید.

۱۵. قطرها و زاویه‌های یک چهارضلعی معلومند. آن را رسم کنید.

۱۶. چهارضلعی ABCD را رسم کنید که در آن ؛ قطر AC و زاویه‌های $A\hat{B}C$ ، $A\hat{D}C$ ، $B\hat{A}C$ و $D\hat{A}C$ معلوم باشد.

۱.۱.۱.۱.۷. ضلع، قطر، پاره‌خط

۱۷. از چهارضلعی ABCD، اندازه‌های دو قطر AC و BD، و نسبت دو ضلع AB و AD و اندازهٔ پاره‌خط TN که وسطهای دو ضلع مقابل AD و BC را به هم وصل می‌کند، و زاویهٔ

$\hat{C} = \alpha$ معلوم است. چهارضلعی را رسم کنید.

۱.۱.۱.۱.۸. ضلع یا رابطهٔ بین ضلعها، قطر، زاویه

۱۸. از چهارضلعی ABCD، اندازه‌های دو ضلع مقابل AD و BC ، و زاویهٔ بین این دو ضلع و اندازه‌های دو قطر معلوم است. چهارضلعی را رسم کنید.

۱۹. از چهارضلعی، قطرها و دو ضلع روبه‌رو و زاویهٔ دو ضلع دیگر در دست است. چهارضلعی را رسم کنید.

۲۰. از چهارضلعی ABCD، اندازهٔ دو قطر و زاویهٔ بین آنها، و اندازهٔ زاویهٔ $\hat{A}$ و طول ضلع CD داده شده است. این چهارضلعی را رسم کنید.

۲۱. از چهارضلعی ABCD، اندازه‌های قطر $AC = d$، زاویهٔ $\hat{D}$ ، ضلع $AB = a$ و زاویهٔ بین دو قطر(θ) داده شده است. این چهارضلعی را رسم کنید.

۲۲. چهارضلعی ABCD را چنان رسم کنید که از آن ضلعهای AB و BC، و قطر CA و زاویه‌های $A\hat{D}B$ و $B\hat{D}C$ معلوم باشد.

۲۳. چهارضلعی ABCD که در آن، اندازه‌های دو قطر و زاویهٔ بین آنها، و نسبت دو ضلع AB و BC و مجموع مربعهای دو ضلع AB و AD معلوم است را رسم کنید.

۲۴. از چهارضلعی ABCD، طول قطر BD و تفاضل مربعهای AD و AB، اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{C}D$ و نسبت $\frac{AI}{IC} = k$ معلوم است. این چهارضلعی را رسم کنید (I نقطهٔ برخورد دو قطر چهارضلعی است).

۱.۱.۱.۱.۹. نسبت ضلعها، زاویه، محیط

۲۵. چهارضلعی ABCD را چنان رسم کنید که از آن اندازه‌های سه زاویه و محیط و نسبت دو ضلع $\frac{AB}{AD} = k$ معلوم است.

۱.۱.۱.۱.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

۲۶. چهارضلعی ABCD را با داده‌های زیر رسم کنید:

۱. قطر AC، ضلع AB و زاویه‌های چهارضلعی

۲. اندازهٔ زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{C}$ ، ضلع AB و طول قطرها

۲۷. چهارضلعی ABCD را که AC قطر آن، زاویهٔ A را نصف می‌کند، با داده‌های زیر رسم کنید:

الف. ضلعهای AB و AD، قطرAC، و تفاضل زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{D}$ ؛

ب. ضلعهای BC و CD، نسبت ضلعهای AB و AD و تفاضل زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{D}$ ؛

ج. ضلعهای AB و AD، قطر AC و نسبت ضلعهای BC و CD.

۲۸. **الف.** روی یک صفحه، پنج نقطه داده شده، به نحوی که هیچ سه نقطه‌ای از آن، روی یک خط راست نیستند. ثابت کنید که می‌توان از بین آنها چهار نقطه انتخاب کرد که رأسهای یک چهارضلعی محدب را تشکیل دهند.

ب. روی یک صفحه ۴۰۰۰ نقطه داده شده است، به نحوی که هیچ سه نقطه‌ای از آنها روی یک خط راست نیستند. ثابت کنید که می‌توان ۱۰۰۰ چهارضلعی ساخت که رأسهای آنها از بین این نقطه‌ها انتخاب شده باشد و هیچکدام از آنها یکدیگر را قطع نکرده باشند.

۲۹. یک چهارضلعی را با معلومات زیر بسازید:

الف. چهارضلع و زاویهٔ بین دو ضلع مقابل؛

ب. دو قطر و زاویهٔ بین آنها و دو زاویهٔ متقابل؛

ج. سه ضلع و زاویه‌های مجاور به ضلع چهارم.

۱.۱.۱.۲. رسم چهارضلعی با معلوم بودن دایره

۳۰. مرکزهای چهار دایرهٔ برابر، رأسهای یک مربعند. یک چهارضلعی با محیط حداکثر ممکن، به طوری بسازید که رأسهای آن، روی محیط این دایره‌ها باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد،۱۹۶۹

۱.۱.۲. رسم چهارضلعیهای ویژه

۱.۱.۲.۱. رسم متوازی‌الاضلاع

۱.۱.۲.۱.۱. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ قطر، ارتفاع؛...

۱.۱.۲.۱.۱.۱. نقطه

۳۱. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که نقطه‌های وسط سه ضلع آن، داده شده باشند.

۳۲. از متوازی‌الاضلاعی که رأسهای آن a، b، c و d نامیده می‌شوند، فقط چهارنقطهٔ :

a' : مرکز دایرهٔ محیطی مثلث bcd ؛

b' : مرکز دایرهٔ محیطی مثلث cda ؛

c' : مرکز دایرهٔ محیطی مثلث dab ؛

d' : مرکز دایرهٔ محیطی مثلث abc،

معلوم هستند. چهار رأس متوازی‌الاضلاع را به دست آورید و بر حسب وضعیتهای نسبی چهار نقطهٔ a' ، b' ، c' و d' ، در وجود و تعداد جوابها بحث کنید.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۰

۲.۱.۱.۲.۱.۱. قطر، ارتفاع

۳۳. از متوازی‌الاضلاعی ، یک ارتفاع و دو قطر داده شده است. آن را رسم کنید.

۳۴. از متوازی‌الاضلاعی اندازه‌های دو ارتفاع و یک قطر داده شده است. آن را رسم کنید.

۳.۱.۱.۲.۱.۱. نقطه، خط

۳۵. دو خط Δ و Δ' و دو نقطه A و B غیر واقع بر Δ و Δ' داده شده‌اند. متوازی‌الاضلاعی چنان بسازید که دو رأس متوالی آن A و B و دو رأس دیگرش بر Δ و Δ' واقع باشند.

۴.۱.۱.۲.۱.۱. ضلع؛ قطر، ارتفاع

۱.۴.۱.۱.۲.۱.۱. ضلع، قطر

۳۶. از متوازی‌الاضلاعی اندازه‌های دو ضلع و یک قطر داده شده است. آن را رسم کنید.

۳۷. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که قطرهایش ۱۲ و ۶ سانتیمتر و یک ضلع آن ۵ سانتیمتر باشد.

۳۸. از متوازی‌الاضلاعی دو قطر و یک ضلع در دست است. اگرضلع $AB=a$ باشد، آن را رسم کنید.

۲.۴.۱.۱.۲.۱.۱. ضلع، ارتفاع

۳۹. از متوازی‌الاضلاعی دو ضلع و ارتفاع آن معلوم است. متوازی‌الاضلاع را رسم کنید.

۵.۱.۱.۲.۱.۱. ضلع، زاویه

۴۰. از متوازی‌الاضلاعی اندازه‌های دو ضلع و یک زاویه داده شده است. آن را رسم کنید.

۴۱. متوازی‌الاضلاعی با معلوم بودن: دو ضلع و زاویهٔ بین یک ضلع و یک قطر رسم کنید.

۴۲. از متوازی‌الاضلاع ABCD اندازه‌های دو ضلع AB و AD ، و اندازهٔ زاویهٔ بین دو قطر داده شده است. متوازی‌الاضلاع را رسم کنید.

۱.۱.۲.۱.۱.۶. نسبت ضلعها، مساحت

۴۳. متوازی‌الاضلاعی را با مفروض بودن نسبتهای یک ضلع به دو قطر و مساحت آن رسم کنید.

۱.۱.۲.۱.۱.۷. قطر، ارتفاع؛ زاویه

۱.۱.۲.۱.۱.۷.۱. قطر، زاویه

۴۴. متوازی‌الاضلاعی با داده‌های زیر رسم کنید:

دوقطر و زاویهٔ بین دوقطر.

۱.۱.۲.۱.۱.۷.۲. ارتفاع، زاویه

۴۵. متوازی‌الاضلاعی را با معلوم بودن اندازهٔ دو ارتفاع و یک زاویه رسم کنید.

۱.۱.۲.۱.۱.۸. پاره‌خط، خط، زاویه

۱.۱.۲.۱.۱.۸.۱. پاره‌خط، زاویه

۴۶. از یک متوازی‌الاضلاع، یک زاویهٔ حاده $(\hat{A} = \alpha)$ و فاصلهٔ محل برخورد قطرها از دو ضلع مجاور داده شده است (p, m). متوازی‌الاضلاع را رسم کنید.

۱.۱.۲.۱.۱.۹. ضلع؛ قطر، ارتفاع؛ زاویه

۱.۱.۲.۱.۱.۹.۱. ضلع، قطر، زاویه

۴۷. از متوازی‌الاضلاعی اندازه‌های یک ضلع، یک زاویه، و یک قطر داده شده است. آن را رسم کنید.

۱.۱.۲.۱.۱.۹.۲. ضلع، ارتفاع، زاویه

۴۸. از متوازی‌الاضلاعی اندازه‌های یک ضلع، ارتفاع متناظر با آن ضلع، و زاویهٔ بین دو قطر داده شده است. آن را رسم کنید.

۱.۱.۲.۱.۱.۱۰. قطر، زاویه، محیط

۴۹. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که محیط، طول یک قطر، و زاویه‌ای که این قطر با یک ضلع می‌سازد، معلوم است.

۱.۱.۲.۱.۲. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۱.۱.۲.۱.۲.۱. مثلث، نسبت ضلعها، زاویه

۵۰. در یک مثلث مفروض، متوازی‌الاضلاعی محاط کنیدکه یک زاویهٔ مفروض داشته باشد و دو ضلع مجاورش دارای نسبت مفروضی باشند.

۱.۱.۲.۱.۲.۲. مثلث، زاویه

۵۱. متوازی‌الاضلاعی بسازید که زاویهٔ بین دو ضلع آن معلوم، و مساحت آن، برابر با مساحت مثلث مفروضی باشد.

از مسأله‌های تاریخی ریاضیات. از اقلیدس

۱.۱.۲.۱.۳. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی‌و داده‌های دیگر

۱.۱.۲.۱.۳.۱. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن چهارضلعی

۵۲. در چهارضلعی غیرمشخص ABCD، متوازی‌الاضلاعی محاط کنید، به طوری که مرکزش معلوم باشد.

۵۳. ۱. هر متوازی‌الاضلاعی که در متوازی‌الاضلاعی دیگر محاط باشد مرکزش بر مرکز دومی منطبق است.

۲. در متوازی‌الاضلاعی، متوازی‌الاضلاعی محاط کنید که با متوازی‌الاضلاع دیگری متشابه باشد.

۱.۱.۲.۱.۴. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر

۵۴. دو نقطهٔ A و B و دایرهٔ (O) داده شده است. متوازی‌الاضلاعی رسم کنید که دو رأس مقابلش A و B، و دو رأس دیگرش روی محیط دایرهٔ (O) باشد.

۵۵. دو نقطهٔ A و B و دو دایرهٔ C و ′C داده شده‌اند. متوازی‌الاضلاعی بسازید که دو رأسش A و B، و دو رأس دیگرش روی دو دایره باشد.

۵۶. دو دایره یکدیگر را در A و ′A قطع می‌کنند. مطلوب است رسم متوازی‌الاضلاع ABCD، به قسمی که یک رأس آن A باشد و ضلع BC آن از ′A بگذرد و دو رأس دیگر روی دو دایرهٔ مزبور واقع باشند.

۵۷. در یک چهارضلعی، متوازی‌الاضلاعی را طوری محاط کنید که دو رأس آن ثابت و به (الف) ضلعهای مقابل ، و(ب) ضلعهای مجاور چهارضلعی متعلق باشد.

۱.۱.۲.۲. رسم مستطیل

۱.۱.۲.۲.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ قطر؛ ...

۱.۱.۲.۲.۱.۱. پاره‌خط

۵۸. اگر از مستطیلی فاصلهٔ یک رأس تا وسطهای دو ضلع مقابل معلوم باشد، مستطیل را رسم کنید.

۱.۱.۲.۲.۱.۲. نقطه، ضلع

۵۹. مستطیلی رسم کنید که طول یک ضلع آن معلوم باشد و هر یک از ضلعهایش از ۴ نقطهٔ معلوم E، F، G و H بگذرد.

۱.۱.۲.۲.۱.۳. قطر، ضلع یا رابطهٔ بین ضلعها

۶۰. مستطیلی رسم کنید که قطر آن ۴ سانتیمتر و یک ضلعش ۳ سانتیمتر باشد.

۶۱. از مستطیلی اندازهٔ قطر و نسبت دو ضلع آن داده شده است. مستطیل را رسم کنید.

۱.۱.۲.۲.۱.۴. رابطهٔ بین ضلعها، زاویه

۶۲. مستطیلی رسم کنید که از آن اندازهٔ زاویهٔ بین دو قطر و تفاضل دو ضلع مجاورش داده شده‌اند.

۱.۱.۲.۲.۱.۵. رابطهٔ بین ضلعها، مساحت

۶۳. مستطیلی رسم کنید که از آن، تفاضل اندازه‌های دو ضلع مجاور و اندازهٔ مساحت آن

معلوم باشد.

۶۴. مستطیلی رسم کنید که تفاضل مربعهای دو ضلع مجاورش مقدار ثابت k^2 باشد.

۱.۱.۲.۲.۱.۶. رابطهٔ بین ضلعها، محیط

۶۵. از مستطیل ABCD، محیط و $\frac{AB^2}{AC^2}=k^2$ داده شده است. آن را رسم کنید.

۱.۱.۲.۲.۱.۷. قطر، پاره‌خط

۶۶. طول یک قطر و فاصلهٔ یک رأس تا قطر از مستطیلی داده شده است. مستطیل را رسم کنید.

۱.۱.۲.۲.۱.۸. قطر، محیط

۶۷. مستطیلی رسم کنید که از آن، اندازهٔ محیط و طول قطر آن معلوم باشند.

۱.۱.۲.۲.۱.۹. محیط، زاویه

۶۸. مستطیلی رسم کنید که اندازهٔ محیط و زاویهٔ بین دو قطر آن معلوم باشند.

۱.۱.۲.۲.۱.۱۰. نقطه، ضلع، خط

۶۹. ABCD را یک مستطیل می‌گیریم و نقطه‌های برخورد خط راست e را، با ضلعهای AB، BC وAD، CD و یا امتداد آنها، بترتیب M، N،P و Q می‌نامیم. اگر نقطه‌های M، N، P و Q و ، همچنین، مقدارp، طول ضلع AB مفروض باشند، مستطیل را رسم کنید. با چه شرطهایی مسأله جواب دارد؟ مسأله چند جواب دارد؟

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۸۹۷

۱.۱.۲.۲.۲. رسم مستطیل با معلوم بودن: مثلث، مثلث و ...

۱.۱.۲.۲.۲.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن: مثلث در حالت کلی، مثلث در حالت‌کلی و...

۱.۱.۲.۲.۲.۱.۱. مثلث، رابطهٔ بین ضلعها

تعریف. مستطیل یا مربعی را که یک ضلع آن بر یکی از ضلعهای مثلثی منطبق باشد و دو رأس دیگرش بر دو ضلع دیگر مثلث واقع باشند، محاط در مثلث می‌گیریم. در حقیقت چهار رأس هر چهارضلعی محاط در یک مثلث بر ضلعهای مثلث واقع هستند و اما در هر حال دو رأس آن بر یک ضلع واقع خواهند بود.

۷۰. در مثلث مفروض مستطیلی محاط کنید که اندازهٔ یک ضلع آن دو برابر اندازهٔ ضلع دیگرش باشد.

۱.۱.۲.۲.۲.۱.۲. مثلث، اندازهٔ قطر

۷۱. در مثلثی مفروض، مستطیلی محاط کنید که اندازهٔ قطر آن مساوی l باشد. کمترین مقدار طول قطر چه قدر است؟

۱.۱.۲.۲.۲.۱.۳. مثلث، خط

۷۲. در مثلث ABC، مستطیلی محاط کنید که یک قطرش موازی خط معلوم Cx باشد.

۱.۱.۲.۲.۲.۱.۴. مثلث، مساحت

۷۳. در مثلث ABC مستطیلی به مساحتδ محاط کنید که دو رأس آن بر ضلع AB واقع باشند و دو رأس دیگر بر ضلعهای CA و CB.

۷۴. در مثلثی مفروض، مستطیلی به مساحت ماکزیمم محاط کنید.

۱.۱.۲.۲.۲.۱.۵. مثلث، محیط

۷۵. در یک مثلث، مستطیلی به محیط 2l محاط کنید.

۱.۱.۲.۲.۲.۱.۶. مثلث، مستطیل

۷۶. در مثلث مفروض ABC، مستطیلی مشابه با مستطیل مفروض چنان محاط کنید که یک ضلعش بر BC و دو رأس دیگرش بترتیب بر AC و AB واقع باشد.

۱.۱.۲.۲.۲.۲. رسم مستطیل با معلوم بودن: مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلث متساوی‌الاضلاع و ...

۱.۱.۲.۲.۲.۲.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن مثلث متساوی‌الاضلاع

۷۷. دریک مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، مربعی محاط کنید.

۱.۱.۲.۲.۲.۳. رسم مستطیل با معلوم بودن: مثلث متساوی‌الساقین، مثلث متساوی‌الساقین و ...

۱.۱.۲.۲.۲.۳.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن مثلث متساوی‌الساقین، محیط

۷۸. در یک مثلث متساوی‌الساقین، مستطیلی محاط کنید که اندازهٔ محیطش دو برابر اندازهٔ محیط مثلث متساوی‌الساقینی باشد که در بالای مستطیل تشکیل می‌شود.

۷۹. در یک مثلث متساوی‌الساقین، مستطیلی چنان محاط کنید که محیط مثلث تشکیل شده در بالای مستطیل، $\frac{۲}{۳}$ محیط مستطیل باشد.

۸۰. در یک مثلث متساوی‌الساقین، مستطیلی محاط کنید که مجموع محیط مثلث تشکیل شده در بالای مستطیل و محیط مستطیل خواسته شده، مقدار معلوم S باشد.

۱.۱.۲.۲.۲.۴. رسم مستطیل با معلوم بودن: مثلث قائم‌الزاویه، مثلث قائم‌الزاویه و...

۱.۱.۲.۲.۲.۴.۱. مثلث قائم‌الزاویه، رأس

۸۱. در یک مثلث قائم‌الزاویه، مستطیلی محاط کنید که یک رأس آن با رأس قائمهٔ مثلث مشترک بوده و قطر آن حداقل باشد.

۱.۱.۲.۲.۳. رسم مستطیل با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی و ...

۱.۱.۲.۲.۳.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن: چهارضلعی، چهارضلعی و ...

۱.۱.۲.۲.۳.۱.۱. چهارضلعی، خط

۸۲. در داخل چهارضلعی غیر مشخصی، مستطیلی محاط کنید که یک ضلع آن موازی خط مفروض Δ باشد.

۱.۱.۲.۲.۳.۲. رسم مستطیل با معلوم بودن: چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای ویژه و...

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن: متوازی‌الاضلاع، متوازی‌الاضلاع و ...

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۱.۱. متوازی‌الاضلاع، زاویه

۸۳. در متوازی‌الاضلاع ABCD، مستطیل MNST را چنان محاط کنید که زاویهٔ بین دو قطر آن برابر مقدار معلوم α باشد.

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۲. رسم مستطیل با معلوم بودن: مستطیل، مستطیل و ...

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۲.۱. مستطیل، نسبت ضلعها

۸۴. در مستطیل مفروض، مستطیلی محاط کنید که نسبت ضلعهای آن مثل p:q باشد.

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۲.۲. مستطیل، محیط، مساحت

۸۵. مستطیلی رسم کنید که اندازهٔ محیطش معلوم باشد و هم ارز مستطیل داده شده‌ای نیز باشد.

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۳. رسم مستطیل با معلوم بودن: مربع، مربع و ...

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۳.۱. مربع، ضلع

۸۶. مربعی به ضلع a داده شده است. مستطیلی رسم کنید که طول یک ضلع آن l و با مربع داده شده‌ای معادل باشد.

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۳.۲. مربع، قطر

۸۷. در مربع به ضلع a، مستطیلی محاط کنید که طول قطر آن مساوی l باشد.

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۴. رسم مستطیل با معلوم بودن: لوزی، لوزی و ...

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۴.۱. لوزی، مساحت

۸۸. در یک لوزی داده شده، مستطیلی محاط کنید که مساحتش معلوم باشد و ضلعهایش موازی قطرهای لوزی باشند.

۱.۱.۲.۲.۳.۳. رسم مستطیل با معلوم بودن: پنج ضلعی، پنج ضلعی و ...

۸۹. در پنج ضلعی ABCDE، رأسهای A،B و E قائمه بوده و $AB = a$، $BC = b$ و $DE = m$ است. اگر:

الف. $a = ۷cm$، $b = ۹cm$ ، $c = ۳cm$ و $m = ۵cm$ ؛

ب. $a = ۷cm$ ، $b = ۹cm$، $c = ۳cm$ و $m = ۴cm$ ؛

باشد، آن‌گاه در پنج‌ضلعی مفروض، مستطیلی محاط کنید که بیشترین مساحت را داشته باشد.

۱.۱.۲.۲.۴. رسم مستطیل با معلوم بودن: نیمدایره، دایره و ...

۱.۱.۲.۲.۴.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن: نیمدایره، نیمدایره و ...

۱.۱.۲.۲.۴.۱.۱. نیمدایره، مساحت

۹۰. در یک نیمدایره، مستطیلی به مساحت $۲k^۲$ محاط کنید.

۱.۱.۲.۲.۴.۱.۲. نیمدایره، مستطیل

۹۱. در یک نیمدایره، مستطیلی محاط کنید که مشابه مستطیل معلوم باشد.

۱.۱.۲.۲.۴.۲. رسم مستطیل با معلوم بودن: دایره، دایره و ...

۱.۱.۲.۲.۴.۲.۱. دایره، پاره‌خط

۹۲. در دایرهٔ داده شده، مستطیلی چنان محاط کنید که ضلع آن با پاره‌خط مفروض a برابر و هم‌امتداد باشد.

۱.۱.۲.۲.۴.۲.۲. دایره، مساحت

۹۳. در دایره‌ای، مستطیلی محاط کنید که مساحت آن a^2 باشد.

۱.۱.۲.۲.۴.۲.۳. دایره، رابطهٔ متری

۹۴. در یک دایرهٔ داده شده، مستطیل ABCD را چنان محاط کنید که $AB^2 - AD^2 = k^2$ باشد.

۱.۱.۲.۲.۴.۲.۴. دایره، مستطیل

۹۵. در دایره‌ای یک مستطیل محاط کنید که با مستطیل مفروضی متشابه باشد.

۱.۱.۲.۲.۴.۲.۵. سه دایره، مثلث، رأس

۹۶. مستطیلی رسم کنید که یک رأس آن بر یکی از رأسهای مثلث مفروضی منطبق باشد و سه رأس دیگر آن بر روی سه دایره به قطرهای ضلعهای این مثلث واقع باشند.

۱.۱.۲.۲.۴.۲.۶. چهار دایره، مستطیل

۹۷. مستطیلی رسم کنید که مشابه مستطیلی معلوم باشد و چهارضلعش بترتیب بر چهار دایرهٔ معلوم مماس باشد.

۱.۱.۲.۲.۵. رسم مستطیل با معلوم بودن: مقطعهای مخروطی و منحنیهای دیگر

۱.۱.۲.۲.۵.۱. بیضی

۹۸. بزرگترین مستطیلی را که در یک بیضی مفروض می‌توان محاط کرد، مشخص کنید.

۹۹. بزرگترین و کوچکترین مستطیل محیط بر یک بیضی داده شده، کدام است؟

۱.۱.۲.۲.۵.۲. سهمی

۱۰۰. در یک قطعهٔ سهمی شکل، مستطیلی به مساحت حداکثر محاط کنید که دو رأس مستطیل روی سهمی و دو رأس دیگرش روی وتر قطعه باشد.

۱.۱.۲.۲.۶. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۰۱. مستطیلی رسم کنید و قرینهٔ آن را نسبت به یکی از قطرهایش پیدا کنید.

۱۰۲. روی صفحهٔ مختصاتی، نیم موج سینوسوئید رسم شده است ($y = \sin x$ ، $0 \le x \le \pi$).

به کمک پرگار و خط کش، مستطیلی با محیط مفروض p را طوری رسم کنید که دو رأس آن روی سینوسوئید و دو رأس دیگرش روی محور Ox باشد.

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۱۰۳. مجانسهای مستقیم و معکوس یک مستطیل را با نسبتهای ۱، $\frac{۱}{۲}$ و ۲ اولاً نسبت به مرکز یکی از رأسها و ثانیاً به مرکز محل برخورد قطرهای آن رسم کنید.

۱.۱.۲.۲.۷. مسأله‌های ترکیبی

۱۰۴. در یک دایره، مستطیلی محاط کنید که:

۱. محیطش به طول معلوم l باشد.

۲. اختلاف دو ضلع مجاورش d باشد.

۱.۱.۲.۳. رسم مربع

۱.۱.۲.۳.۱. رسم مربع با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ قطر؛...

۱.۱.۲.۳.۱.۱. نقطه

۱۰۵. نقطه‌های ′A ، ′B، ′C و ′D مفروضند. مربعی رسم کنید که این نقطه‌ها روی ضلعهای آن واقع باشند.

۱۰۶. مربعی رسم کنید که هر ضلع، یا امتداد هر ضلع آن از نقطهٔ مفروضی بگذرد.

۱.۱.۲.۳.۱.۲. قطر

۱۰۷. قطر مربعی معلوم است. آن را رسم کنید.

۱.۱.۲.۳.۱.۳. خط

۱۰۸. سه خط دوبه‌دو متقاطع داده شده‌اند. مربعی رسم کنید که دو رأس آن روی یکی از این خطها و دو رأس دیگرش، هر کدام روی یکی از دو خط دیگر واقع باشند.

۱۰۹. مربعی رسم کنید که سه رأس آن روی سه خط متوازی قرار گیرد.

۱۱۰. مربعی رسم کنید که هر رأسش روی یکی از ۴ خط موازی باشد.

۴.۱.۳.۲.۱.۱. نقطه، خط

۱۱۱. A، B، C و D را، چهار نقطهٔ واقع بر یک خط راست l می‌گیریم. مربعی رسم کنید که دو ضلع موازی آن (و یا امتدادهای آنها) از نقطه‌های A و B و دو ضلع دیگر آن (یا امتدادهای آنها) از نقطه‌های C و D بگذرند.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۸۹۸

۱۱۲. از مربعی مرکزش، نقطهٔ O، و دو نقطهٔ E و F واقع بر خطهای متوازی AB و AD معلوم است. آن را رسم کنید.

۱۱۳. از مربع ABCD، مرکز O و دو نقطهٔ M و N واقع بر خطهای راست BC و CD داده شده است. مربع را رسم کنید.

۱۱۴. اگر از مربع رأس A و دو رأس مقابل دیگر، بر روی دو خط موازی قرار داشته باشند، آن مربع را رسم کنید.

۱۱۵. از مربعی یک رأس آن معلوم است و دو رأس مقابل دیگر، بر روی دو خط Δ و Δ' قرار دارند. این مربع را رسم کنید.

۵.۱.۳.۲.۱.۱. ضلع، قطر

۱۱۶. **روش تشابه.** با در نظر نگرفتن یکی از شرطهای مسأله می‌توان شکلی شبیه شکل خواسته شده رسم کرد. معمولاً می‌توان با توجه به شکل رسم شده و شرط حذف شده، جزیی را تعیین کرد که ما را قادر به حل مسأله کند. مثال زیر این روش را نشان می‌دهد:
مربعی را رسم کنید که مجموع ضلع و قطرش مفروض باشد.

۱۱۷. از مربعی تفاضل یک قطر و یک ضلع معلوم است. آن را رسم کنید.

۶.۱.۳.۲.۱.۱. خط، زاویه

۱۱۸. دو خط AB و CD در نقطهٔ O بر یکدیگر عمودند. خط ثابت EF که با خط AB زاویهٔ $\alpha < 45^\circ$ ساخته، OB را در M و OD را در N قطع می‌کند. مطلوب است رسم تمام مربعهای ممکن که یک رأس آنها بر EF واقع بوده و یک زاویهٔ آنها بر یکی از زاویه‌های قائمه حول نقطهٔ O منطبق باشد.

۱.۱.۲.۳.۱.۷. نقطه، خط، ضلع

۱۱۹. نقطهٔ A و خط Δ مفروض است. مربعی به ضلع a رسم کنید که یک رأسش A و مرکزش بر روی(Δ) باشد.

۱.۱.۲.۳.۲. رسم مربع با معلوم بودن: مثلث، مثلث و ...

۱.۱.۲.۳.۲.۱. مثلث در حالت کلی

۱.۱.۲.۳.۲.۱.۱. تنها مثلث

۱۲۰. در مثلث مفروضی، مربعی چنان محاط کنید که دو رأسش بر یک ضلع مثلث و هر یک از دو رأس دیگرش بر یکی از دو ضلع دیگر واقع باشد.

۱۲۱. مربعی معادل مثلث مفروض رسم کنید.

۱.۱.۲.۳.۲.۲. مثلث متساوی‌الاضلاع

۱۲۲. در مثلث متساوی‌الاضلاعی، مربعی محاط کنید که یک ضلع مربع بر.روی یک ضلع مثلث باشد و دو رأس دیگر مربع، روی دو ضلع دیگر مثلث قرار گرفته باشد.

۱.۱.۲.۳.۲.۳. مثلث متساوی‌الساقین

۱۲۳. در یک مثلث متساوی‌الساقین که طول هر ساق آن برابر ۱۰ و طول قاعدهٔ آن برابر ۱۲ می‌باشد، یک مربع محاط کنید.

۱.۱.۲.۳.۲.۴. مثلث با زاویه‌های حاده

۱۲۴. مثلث ABC با زاویه‌های حاده داده شده است. مربعی چنان رسم کنید که یک ضلعش روی BC و دو رأس دیگرش بر AB و AC واقع باشند.

۱.۱.۲.۳.۳. رسم مربع با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی و...

۱.۱.۲.۳.۳.۱. رسم مربع با معلوم بودن: چهارضلعی، چهارضلعی و ...

۱.۱.۲.۳.۳.۱.۱. رسم مربع با معلوم بودن چهارضلعی

۱۲۵. مربعی بر چهارضلعی مفروض محیط کنید.

۱۲۶. مربعی در یک چهارضلعی مفروض محاط کنید.

۱.۱.۲.۳.۳.۲. رسم مربع با معلوم بودن: چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای ویژه و...

۱.۱.۲.۳.۳.۲.۱. رسم مربع با معلوم بودن متوازی‌الاضلاع

۱۲۷. در متوازی‌الاضلاع مفروضی مربعی محاط کنید.

۱.۱.۲.۳.۳.۲.۲. رسم مربع با معلوم بودن: مربع، مربع و...

۱.۱.۲.۳.۳.۲.۲.۱. مربع

۱۲۸. می‌خواهیم از چند مربع همنهشت که تعداد آنها عددی مربع است، مربعی بسازیم. به عنوان مثال از شانزده مربع همنهشت مربعی بسازیم.

۱۲۹. می‌خواهیم از هشت مربع همنهشت مربعی بسازیم.

۱۳۰. می‌خواهیم از ده مربع همنهشت مربعی بسازیم.

۱۳۱. می‌خواهیم از بیست مربع همنهشت مربعی بسازیم.

۱۳۲. از تعداد نه مربع داده شده، با این شرط که عدد نه از ترکیب دو عدد مربع به دست آید، مربعی بسازید.

۱۳۳. از تعدادی مربع داده شده که تعداد آنها برابر مجموع دو عدد مربع باشد، مربعی رسم کنید.

۱۳۴. ثابت کنید، نمی‌توان ۱۰ مربع برابر را طوری روی صفحه رسم کرد که حتی یکی از آنها به درون دیگری رخنه نکرده باشد، ولی یکی از آنها، با همهٔ دیگران، تماس داشته باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۳

۱۳۵. ثابت کنید هر مربع را می‌توان به صورت ۱۹۷۳ مربع برید.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۳

۱.۱.۲.۳.۳.۲.۲.۲. مربع، رأس یا نقطه

۱۳۶. در یک مربع مفروض، مربع دیگری را که یکی از رأسهای آن مفروض است، محاط کنید.

۱۳۷. در مربع مفروض، مربعی محاط کنید که یک ضلع آن از نقطهٔ معلوم A بگذرد.

۱.۱.۲.۳.۳.۲.۲.۳. مربع، طول ضلع

۱۳۸. در مربعی مفروض، مربعی محاط کنید که طول ضلع آن مساوی l باشد. حدود تغییرات l را تعیین کنید.

۱.۱.۲.۳.۳.۲.۲.۲.۴. مربع، مساحت

۱۳۹. در مربعی به ضلع a، مربع دیگری به مساحت b^2 محاط کنید.

۱۴۰. مربعی رسم کنید که مساحت آن دو برابر مساحت مربع مفروضی باشد.

۱.۱.۲.۳.۳.۲.۲.۲.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۴۱. مربع مستطیل، ذوزنقه، و چند ضلعی مفروض را به مربع تبدیل کنید.

۱.۱.۲.۳.۴. رسم مربع با معلوم بودن: نیمدایره، دایره و...

۱.۱.۲.۳.۴.۱. رسم مربع با معلوم بودن: نیمدایره، قطعه یا قطاع دایره

۱۴۲. در نیمدایرهٔ مفروض به قطر BC، مربعی چنان محاط کنید که دو رأسش بر قطر BC واقع بوده و دو رأس دیگرش بر محیط نیمدایره واقع باشد.

۱۴۳. به کمک پرگار و خط کش، در قطعهٔ دایرهٔ مفروض، مربعی محاط کنید.

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۱۴۴. در یک قطاع، مربعی محاط کنید که:

۱. یک رأس آن؛

۲. دو رأس آن، روی کمان قطاع باشد.

۱.۱.۲.۳.۴.۲. رسم مربع با معلوم بودن: دایره، دایره و ...

۱.۱.۲.۳.۴.۲.۱. تنها یک دایره

۱۴۵. **مسألهٔ تربیع دایره.** مربعی رسم کنید که مساحت آن، برابر با مساحت دایره‌ای مفروض باشد.

از مسأله‌های تاریخی ریاضیات

۱۴۶. دو پاره‌خط با طولهای ۱ و π داده شده‌اند. به کمک پرگار و خط کش، مربعی رسم کنید که با دایرهٔ مفروضی هم ارز باشد.

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۱.۱.۲.۳.۴.۲.۲. یک دایره، خط

۱۴۷. مربع ABCD را رسم کنید. بنابر آن که می‌دانیم، دو رأس C و A بر خط معلوم X و رأس B بر خط معلوم Y و رأس D بر دایرهٔ معلوم O واقع است.

۱۴۸. مربعی رسم کنید که دو رأس آن روی یک خط مفروض و دو رأس دیگر آن روی یک

دایرهٔ مفروض باشند.

۱.۱.۲.۳.۴.۲.۳. دو دایره

۱۴۹. دو دایرهٔ متساوی متقاطع داده شده‌اند. مربعی در قسمت مشترک این دو دایره محاط کنید.

۱.۱.۲.۳.۴.۲.۴. دو دایره یا بیشتر، یک خط یا بیشتر

۱۵۰. مربعی رسم کنید که دو رأس روبه روی آن، روی خط l و دو رأس متقابل دیگر آن، روی دو دایرهٔ مفروض باشد.

۱۵۱. ثابت کنید، نمی‌توان مربعی رسم کرد که چهار رأس آن، بترتیب، بر محیط چهار دایرهٔ هم‌مرکزی قرار داشته باشند که شعاعهای آنها، به تصاعد حسابی هستند.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، رومانی، ۱۹۷۸

۱.۱.۲.۴. رسم لوزی

۱.۱.۲.۴.۱. رسم لوزی با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ قطر؛ ...

۱.۱.۲.۴.۱.۱. نقطه

۱۵۲. وسطهای سه ضلع از یک لوزی داده شده‌اند. لوزی را رسم کنید.

۱.۱.۲.۴.۱.۲. قطر

۱۵۳. از یک لوزی، طول یک قطر و نسبت بین اندازه‌های دو قطر داده شده است. لوزی را رسم کنید.

۱.۱.۲.۴.۱.۳. نقطه، خط

۱۵۴. لوزی ABCD را بسازید، بنابر آن که دو ضلع آن روی دو خط متوازی X و Y واقعند و دو ضلع دیگر، از دو نقطهٔ مفروض M و N می‌گذرند.

۱.۱.۲.۴.۱.۴. نقطه، زاویه

۱۵۵. یک زاویه از لوزی ABCD معلوم است و می‌دانیم که یک رأس آن نقطهٔ A است و دو ضلع آن که از A نمی‌گذرند، از دو نقطهٔ معلوم M و N مرور می‌نمایند. لوزی را رسم کنید.

۱.۱.۲.۴.۱.۵. ضلع، قطر یا رابطهٔ بین قطرها

۱۵۶. لوزی رسم کنید که هر ضلعش ۴ سانتیمتر و یکی از قطرهایش ۳ سانتیمتر باشد.

۱۵۷. لوزی رسم کنید که طول ضلع و اندازهٔ یک قطرش معلوم است.

۱۵۸. از یک لوزی اندازهٔ ضلع و تفاضل یا مجموع دو قطر داده شده است. آن را رسم کنید.

۱.۱.۲.۴.۱.۶. ضلع، پاره‌خط

۱۵۹. از یک لوزی، یک ضلع و فاصلهٔ مرکز تا یک ضلع داده شده است. لوزی را رسم کنید.

۱.۱.۲.۴.۱.۷. قطر، پاره‌خط

۱۶۰. از یک لوزی، اندازهٔ یک قطر و فاصلهٔ مرکز لوزی تا یک ضلع داده شده است. لوزی را رسم کنید.

۱.۱.۲.۴.۲. رسم لوزی با معلوم بودن: مثلث، مثلث و ...

۱.۱.۲.۴.۲.۱. تنها مثلث

۱۶۱. یک لوزی که زاویه‌های آن معین است، در مثلث مفروض ABC چنان محاط کنید که دو رأس آن بر AB و دو رأس دیگرش بر ضلعهای AC و BC واقع شوند.

۱.۱.۲.۴.۳. رسم لوزی با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی و...

۱.۱.۲.۴.۳.۱. رسم لوزی با معلوم بودن: چهارضلعی، چهارضلعی و ...

۱.۱.۲.۴.۳.۱.۱. تنها یک چهارضلعی

۱۶۲. در چهارضلعی مفروضی، یک لوزی چنان محاط کنید که ضلعهای آن موازی با قطرهای چهارضلعی باشند.

۱.۱.۲.۴.۳.۱.۲. چهارضلعی، لوزی

۱۶۳. بر یک چهارضلعی، یک لوزی متشابه با لوزی معلوم ، محیط کنید.

۱.۱.۲.۴.۳.۲. رسم لوزی با معلوم بودن: چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای ویژه و...

۱.۱.۲.۴.۳.۲.۱. رسم لوزی با معلوم بودن: متوازی‌الاضلاع، متوازی‌الاضلاع و ...

۱.۱.۲.۴.۳.۲.۱.۱. متوازی‌الاضلاع، قطر

۱۶۴. متوازی‌الاضلاع ABCD داده شده است. در این متوازی‌الاضلاع، لوزی MNST را چنان محاط کنید که نسبت قطرهای آن به نسبت معین $\frac{m}{n}$ باشد.

۲.۱.۲.۴.۳.۲.۱.۱. متوازی‌الاضلاع، مساحت

۱۶۵. در یک متوازی‌الاضلاع، یک لوزی به مساحت $2k^2$ محاط کنید.

۳.۱.۲.۴.۳.۲.۱.۱. متوازی‌الاضلاع، لوزی

۱۶۶. در متوازی‌الاضلاعی، یک لوزی مشابه با لوزی معلومی محاط کنید.

۲.۲.۴.۳.۲.۱.۱. رسم لوزی با معلوم بودن: **مستطیل، مستطیل** و ...

۱.۲.۲.۴.۳.۲.۱.۱. مستطیل، مساحت

۱۶۷. در مستطیل مفروض، یک لوزی به مساحت معلوم S محاط کنید.

۱۶۸. از مستطیل مفروض، یک لوزی با حداکثر مساحت ممکن جدا کنید.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۶

۳.۳.۴.۲.۱.۱. رسم لوزی با معلوم بودن چندضلعی

۱۶۹. آیا هر $2n$ ضلعی منتظم را، می‌توان به لوزیها تقسیم کرد؟

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، هیأت داوران، بلژیک، ۱۹۷۹

۴.۴.۲.۱.۱. رسم لوزی با معلوم بودن دایره یا شعاع دایره و...

۱.۴.۴.۲.۱.۱. رسم لوزی با معلوم بودن دایره و...

۱.۱.۴.۴.۲.۱.۱. دو دایره، خط، طول ضلع

۱۷۰. لوزی ABCD به ضلع معین l را چنان رسم کنید که دو رأس B و D از آن روی خط معلوم Δ و دو رأس A و C روی دو دایرهٔ معلوم (O) و (O') واقع باشند.

۲.۴.۴.۲.۱.۱. رسم لوزی با معلوم بودن شعاع دایره و...

۱.۲.۴.۴.۲.۱.۱. شعاع دایرهٔ محاطی، یک زاویه

۱۷۱. مطلوب است رسم یک لوزی، که شعاع دایرهٔ محاطی و یک زاویهٔ آن معلوم است.

۲.۲.۴.۴.۲.۱.۱. شعاع دایرهٔ محاطی، قطر

۱۷۲. مطلوب است رسم یک لوزی، که طول یک قطر و شعاع دایرهٔ محاطی آن معلومند.

۱.۱.۲.۵. رسم ذوزنقه

۱.۱.۲.۵.۱. رسم ذوزنقه در حالت کلی

۱.۱.۲.۵.۱.۱. رسم ذوزنقه با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ قطر؛ ارتفاع؛ ...

۱.۱.۲.۵.۱.۱.۱. ضلع

۱۷۳. ذوزنقه را با معلوم بودن اندازهٔ چهارضلع آن رسم کنید.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۷

۱.۱.۲.۵.۱.۱.۲. ضلع، قطر

۱۷۴. از ذوزنقه‌ای دو قاعده و دو قطر در دست است، آن را رسم کنید.

۱.۱.۲.۵.۱.۱.۳. ضلع، ارتفاع

۱۷۵. از ذوزنقه‌ای طولهای یک قاعده، ساقها و ارتفاع داده شده است. آن را رسم کنید و در تعداد جوابها بحث کنید.

۱.۱.۲.۵.۱.۱.۴. ضلع، زاویه

۱۷۶. مطلوب است رسم ذوزنقه‌ای به قاعده‌های $AB = 6cm$ و $CD = 8cm$ و ساق $BC = 4cm$ و $B\hat{C}D = 60^\circ$. سپس مساحت ذوزنقه را حساب کنید.

۱۷۷. از ذوزنقه‌ای دو قاعده و زاویه‌های مجاور به یک قاعده معلوم است. آن را رسم کنید.

۱۷۸. از ذوزنقهٔ ABCD اندازه‌های زاویه‌ها، قاعدهٔ $AB=a$ و ساق $AD=d$ داده شده است. آن را رسم کنید.

۱۷۹. ذوزنقه‌ای رسم کنید که در آن دو ضلع غیرموازی و زاویهٔ بین آنها و نسبت دو ضلع موازی آن در دست باشد.

۱.۱.۲.۵.۱.۱.۵. قطر، پاره‌خط

۱۸۰. ذوزنقه‌ای با داده‌های زیر رسم کنید:

اندازه‌های دو قطر، طول قطعه خطی که وسطهای دو قطر را به هم وصل می‌کند و طول پاره‌خطی که وسطهای دو ساق را به هم وصل می‌کند.

۱.۱.۲.۵.۱.۱.۶. قطر، زاویه

۱۸۱. مطلوب است رسم ذوزنقه‌ای که زاویه‌ها و قطرهایش معلوم است.

لژاندر

۱.۱.۲.۵.۱.۱.۷. ضلع، قطر، زاویه

۱۸۲. از ذوزنقه‌ای طول دو قطر و یک قاعده و یک زاویهٔ مجاور به همان قاعده معلوم است. آن را رسم کنید.

۱۸۳. از ذوزنقهٔ ABCD، اندازه‌های:

قاعدهٔ AB، زاویهٔ $\hat{B}$، قطر AC و ضلع AD داده شده است. آن را رسم کنید.

۱۸۴. از ذوزنقهٔ ABCD، اندازهٔ زاویه‌ها، قاعدهٔ AB و قطر AC داده شده است. آن را رسم کنید.

۱۸۵. ذوزنقه‌ای را با داشتن دو قطر و زاویه بین دو قطر و یک ضلع بسازید.

۱۸۶. ذوزنقه‌ای رسم کنید که طولهای دو قطر، زاویهٔ بین دو قطر و مجموع قاعده و یک ساق از آن معلوم است.

۱.۱.۲.۵.۱.۱.۸. قطر، پاره‌خط، زاویه

۱۸۷. از ذوزنقه‌ای دو قطر و یک زاویه و طول قطعه خطی که وسطهای دو ساق را به هم وصل می‌کند معلوم است. آن را رسم کنید.

۱.۱.۲.۵.۱.۲. رسم ذوزنقه با معلوم بودن مثلث، مثلث و ...

۱.۱.۲.۵.۱.۲.۱. مثلث، مساحت

۱۸۸. در مثلث ABC، ذوزنقه‌ای محاط کنید که یک قاعدهٔ آن ضلع BC و مساحتش مقدار معلوم S' باشد.

۱.۱.۲.۵.۱.۳. رسم ذوزنقه با معلوم بودن چندضلعی

۱.۱.۲.۵.۱.۳.۱. رسم ذوزنقه با معلوم بودن چهارضلعی

۱۸۹. ثابت کنید با ضلعهای یک چهارضلعی دلخواه، می‌توان یک ذوزنقه ساخت.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۲

۱.۱.۲.۵.۱.۴. رسم ذوزنقه با معلوم بودن: دایره، دایره و ...

۱.۱.۲.۵.۱.۴.۱. دایره، ضلع

۱۹۰. از ذوزنقه‌ای اندازه‌های یک قاعده، یک ساق و شعاع دایرهٔ محاطی داده شده است. آن

را رسم کنید.

۱۹۱. از ذوزنقه‌ای اندازه‌های دو ساق و شعاع دایرهٔ محاطی آن داده شده است. ذوزنقه را رسم کنید.

۱.۱.۲.۵.۱.۵. رسم ذوزنقه با معلوم بودن: مقطعهای مخروطی و منحنیهای دیگر

۱.۱.۲.۵.۱.۵.۱. سهمی

۱۹۲. در یک قطعهٔ سهمی شکل محدود شده به وتر BC، ذوزنقهٔ BCDE را چنان محاط کنید که BC قاعدهٔ بزرگ آن و مساحتش حداکثر مقدار ممکن باشد.

۱.۱.۲.۵.۲. رسم ذوزنقه متساوی‌الساقین

۱.۱.۲.۵.۲.۱. رسم ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ ...

۱.۱.۲.۵.۲.۱.۱. ضلع، پاره‌خط

۱۹۳. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD، طول پاره‌خطی که وسطهای دو قاعده را به هم وصل می‌کند، برابر ۹ و نصف اندازه‌های دو قاعده ۸ و ۴ است. ذوزنقه را رسم کنید.

۱.۱.۲.۵.۲.۱.۲. ضلع، زاویه

۱۹۴. ذوزنقه‌ای رسم کنید که قاعدهٔ بزرگ آن ۵cm و هر یک از دو ساقش ۴cm و هر زاویهٔ مجاور به قاعدهٔ بزرگ ۶۰ درجه باشد.

۱۹۵. از ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی طول هر یک از دو قاعده و اندازهٔ تفاضل دو زاویهٔ غیر مساوی در دست است، ذوزنقه را رسم کنید.

۱.۱.۲.۵.۲.۱.۳. ضلع، قطر، زاویه

۱۹۶. از ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD، قطر $BD = ۵/۵$ ، زاویهٔ $A\hat{D}B$ (بین قطر و یک ساق)مساوی ۳۰° و قاعدهٔ $AB = ۳$ است. ذوزنقه را بسازید.

۱.۱.۲.۵.۲.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی

۱۹۷. الف. سه نقطهٔ A، B و C مفروض است. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی رسم کنید که این سه نقطه، سه رأس آن باشند.

ب. سه نقطهٔ D_1 ، D_2 و D_3 مفروض است. سه ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین بسازید که در سه رأس A، B و C (که پیدا خواهید کرد) مشترک باشند و D_1، D_2 و D_3 بترتیب رأس چهارم آنها باشد.

۱.۱.۲.۵.۲.۲. رسم ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با معلوم بودن: مثلث، مثلث و...

۱.۱.۲.۵.۲.۲.۱. مثلث متساوی‌الساقین،...

۱.۱.۲.۵.۲.۲.۱.۱. مثلث متساوی‌الساقین، مساحت

۱۹۸. در مثلث متساوی‌الساقین به قاعدهٔ a و ساقهای b، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی به مساحت S محاط کنید.

۱.۱.۲.۵.۲.۳. رسم ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با معلوم بودن چندضلعی

۱.۱.۲.۵.۲.۳.۱. رسم ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با معلوم بودن چهارضلعی

۱۹۹. در یک چهارضلعی، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی چنان محاط کنید که دو قاعدهٔ آن با یکی از قطرهای چهارضلعی موازی باشند و موضع یک رأس ذوزنقه بر یکی از ضلعهای چهارضلعی معلوم باشد.

۱.۱.۲.۵.۲.۴. رسم ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با معلوم بودن: دایره، دایره و ...

۱.۱.۲.۵.۲.۴.۱. دایره، ضلع، ارتفاع

۲۰۰. در دایرهٔ مفروض (O , R) ذوزنقه‌ای محاط کنید که اندازهٔ ارتفاع و تفاضل دو قاعدهٔ آن معلوم است.

۱.۱.۳. رسم چهارضلعی محاطی

۱.۱.۳.۱.رسم چهارضلعی محاطی با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ ...

۱.۱.۳.۱.۱. ضلع

۲۰۱. چهار ضلع یک چهارضلعی محاطی معلوم است. آن را رسم کنید.

۱.۱.۳.۱.۲. ضلع، زاویه

۲۰۲. از یک چهارضلعی محاطی دو زاویهٔ مجاور و دو ضلع مقابل داده شده‌اند. چهارضلعی را بسازید.

۱.۱.۳.۱.۳. قطر، زاویه

۲۰۳. از یک چهارضلعی محاطی ABCD، اندازهٔ زاویه‌ها، قطر AC و اندازهٔ زاویهٔ بین دو قطر داده شده است. آن را رسم کنید.

۱.۱.۳.۱.۴. ضلع، قطر، زاویه
۲۰۴. از یک چهارضلعی محاطی دو ضلع و زاویهٔ بین آنها و قطر مربوط به رأس این زاویه معلوم است. آن را رسم کنید.

۱.۱.۳.۲. رسم چهارضلعی محاطی با معلوم بودن: دایره یا شعاع دایره و ...

۱.۱.۳.۲.۱. رسم چهارضلعی محاطی با معلوم بودن: دایره، دایره و ...

۱.۱.۳.۲.۱.۱. دایره، نقطه
۲۰۵. در دایرهٔ مفروض، یک چهارضلعی محاط کنید که نقطهٔ تلاقی دو ضلع مقابل و یک نقطه از هر یک از دو ضلع دیگر داده شده باشد.

۲۰۶. در دایرهٔ مفروض یک چهارضلعی محاط کنید که نقطهٔ تلاقی دو قطر آن و دو نقطه از یک ضلعش، داده شده باشد.

۱.۱.۳.۲.۱.۲. دایره، ضلع
۲۰۷. در یک دایره، چهارضلعی ABCD را محاط نمایید، بنابر آن که طول دو ضلع و مجموع طولهای دو ضلع دیگر معلوم است.

۱.۱.۳.۲.۱.۳. دایره، قطر، زاویه
۲۰۸. در یک دایرهٔ مفروض، یک چهارضلعی محاط کنید که قطرها و زاویهٔ بین آنها از آن مفروض باشند.

۱.۱.۳.۲.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی
۲۰۹. **الف.** یک چهارضلعی ABCD قابل محاط در یک دایره رسم کنید که طولهای ضلعهایش معلوم باشند : $AB=a$، $BC=b$ ، $CD=c$ و $DA=d$.

ب. یک چهارضلعی ABCD رسم کنید که در آن مجموع دو زاویهٔ روبه‌رو، $\hat{B}$ و $\hat{D}$ ، معلوم باشد و طولهای ضلعهایش نیز داده شده باشند : $AB=a$، $BC=b$، $CD=c$ و $DA=d$.

۱.۱.۳.۲.۲. شعاع دایرهٔ محیطی و ...

۱.۱.۳.۲.۲.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، ضلع

۲۱۰. یک چهارضلعی را که در آن سه ضلع و شعاع دایرهٔ محیطی آن معلوم است، رسم کنید (بحث کنید).

۱.۱.۳.۲.۲.۲. شعاع دایرهٔ محیطی، قطر، زاویه

۲۱۱. از چهارضلعی محاطی، شعاع دایرهٔ محیطی و طول قطرهای آن و زاویهٔ بین دو قطر معلوم است. چهارضلعی را رسم کنید.

۱.۱.۴. رسم چهارضلعی محیطی

۱.۱.۴.۱. رسم چهارضلعی محیطی با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ ...

۱.۱.۴.۱.۱. ضلع، زاویه

۲۱۲. از یک چهارضلعی محیطی ABCD طولهای AB=b و AD=d و زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{D}$ معلوم است. آن را رسم کنید.

۱.۱.۴.۲. رسم چهارضلعی محیطی با معلوم بودن چهارضلعی

۱.۱.۴.۲.۱. دو چهارضلعی

۲۱۳. بر چهارضلعی مفروضی یک چهارضلعی محیط کنید که با یک چهارضلعی دیگر متشابه باشد.

۱.۱.۴.۳. رسم چهارضلعی محیطی با معلوم بودن: دایره یا شعاع دایره و...

۱.۱.۴.۳.۱. رسم چهارضلعی محیطی با معلوم بودن: شعاع دایرهٔ محاطی و...

۱.۱.۴.۳.۱.۱. شعاع دایرهٔ محاطی، ضلع، زاویه

۲۱۴. از یک چهارضلعی محیطی چهارضلع و دو زاویهٔ مجاور $\hat{A}$ و $\hat{B}$ و شعاع دایرهٔ محاطی معلومند. چهارضلعی را رسم کنید.

۲۱۵. از یک چهارضلعی محیطی اندازهٔ ضلعهای AB و AD و زاویهٔ $D\hat{A}B$ و شعاع دایرهٔ محاطی آن معلوم است. آن را رسم کنید.

۱.۱.۴.۳.۱.۲. شعاع دایرهٔ محاطی، محیط، زاویه

۲۱۶. از یک چهارضلعی محیطی طول محیط و دو زاویهٔ مجاور و شعاع دایرهٔ محاطی آن معلوم است. آن را رسم کنید.

۱.۱.۵. رسم چهارضلعی محاطی محیطی

۱.۱.۵.۱. رسم چهارضلعی محاطی محیطی با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛...

۱.۱.۵.۱.۱. نقطه

۲۱۷. از یک چهارضلعی که هم محاطی و هم محیطی است موضع سه رأس A، B و C را می‌دانیم. آن را رسم کنید.

۱.۲. رسم پنج‌ضلعی

۱.۲.۱. رسم پنج‌ضلعی با معلوم بودن: نقطه، ضلع، ...

۱.۲.۱.۱. نقطه

۲۱۸. پنج نقطهٔ A، B، C، D و E روی یک صفحه مفروضند. پنج ضلعی XYZUV را چنان رسم کنید که نقطه‌های مفروض، وسط ضلعهای آن باشند.

۱.۲.۱.۲. ضلع

۲۱۹. چرخ دور پنج‌ضلعی

الف. پنج‌ضلعی ABCDE را با مشخصات زیر رسم کنید، و چگونگی رسم آن را توضیح دهید: $AB = 5cm$ و $BC = 4cm$، $CD = 3cm$، $DE = 3cm$، $EA = 5cm$.

ب. یک چرخ کوچک به شعاع ۱ سانتیمتر را در نظر بگیرید، که دور پنج‌ضلعی ABCDE از طرف خارج حرکت می‌کند و همواره بر ضلعهای پنج‌ضلعی مماس است. اگر این چرخ یکبار پنج‌ضلعی را به طور کامل دور بزند، مرکز چرخ چه مسیری را طی می‌کند، و طول این مسیر چند سانتیمتر است؟

المپیادهای ریاضی فرانسه

۱.۲.۲. رسم پنج‌ضلعی با معلوم بودن: دایره، دایره و ...

۱.۲.۲.۱. دایره، نقطه

۲۲۰. در دایره‌ای پنج‌ضلعی ABCDE را محاط کنید بنابر آن که P، Q، R،S و T وسطهای کمانهایی که به وسیله ضلعها جدا می‌شوند، معلوم باشند.

۲۲۱. از یک پنج‌ضلعی نقطه‌های O_1 ، O_2 ، O_3 ، O_4 و O_5 وسطهای پنج‌ضلعی معلومند. پنج‌ضلعی را رسم کنید.

۱.۲.۲.۲. دایره، خط

۲۲۲. در دایرهٔ مفروض، یک پنج‌ضلعی محاط کنید که ضلعهای آن با پنج خط داده شده، موازی باشند.

۱.۳. رسم شش‌ضلعی

۲۲۳. شش ضلعی و مستطیل از دایره!

از این دایره سه قسمت باریک را می‌بریم. از سه قسمت باقیمانده می‌خواهیم، اولاً یک شش‌ضلعی منتظم، ثانیاً یک مستطیل بسازیم. در هر مورد دست‌کم با چند برش این کار ممکن است؟ محل برشها را نیز تعیین کنید.

المپیادهای ریاضی فرانسه

۲۲۴. شش‌ضلعی رسم کنید که با شش ضلعی مفروضی متشابه و ضلعهایش نصف ضلعهای آن باشد.

۴.۱. رسم n ضلعی

۱.۴.۱. رسم n ضلعی با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ ...

۱.۱.۴.۱. نقطه

۲۲۵. فرض می‌کنیم n عددی فرد است (مثلاً $n=9$)، و n نقطه در صفحه داده شده است. رأسهای یک n ضلعی را پیدا کنید که نقطه‌های داده شده، وسطهای ضلعهای آن باشند. حالتی را که n زوج باشد بررسی کنید.

۲.۱.۴.۱. نقطه، زاویه

۲۲۶. یک n ضلعی رسم کنید که از آن، n رأس مثلثهای متساوی‌الساقینی که بر ضلعهای این n ضلعی و در بیرون آن ساخته می‌شوند و نیز α_1، α_2، ...، α_n زاویه‌های این رأسها در دست باشند.

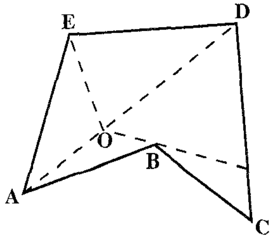
۲.۴.۱. رسم n ضلعی با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی‌و...

۱.۲.۴.۱. چندضلعی، نقطه

۲۲۷. چندضلعی ...ABCD مفروض است. چندضلعی ...A′B′C′D′ را طوری رسم کنید که با چندضلعی اوّل متجانس باشد و نسبت تجانس، مقدار مفروض k و مرکز تجانس نقطهٔ مفروض S باشد.

۲۲۸. از نقطهٔ O واقع در داخل چندضلعی ABCDE تمامی ضلعهای DE،AB و EA و فقط قسمتی از ضلع CD دیده می‌شود (شکل). یک چندضلعی رسم کنید که از نقطهٔ O واقع در داخل آن، هیچ یک از ضلعها به طور کامل دیده نشود. یک چند ضلعی رسم کنید که

از نقطه O واقع در خارج آن، هیچ یک از ضلعها به طورکامل دیده نشود.



۲.۲.۴.۱. چندضلعی، مربع یا چندضلعی دیگر

۲۲۹. یک چندضلعی رسم کنید که متشابه با چندضلعی مفروضی و معادل با مربع مفروضی باشد.

۲۳۰. n ضلعی ...ABCD داده شده است. چندضلعی دیگری رسم کنید که $n-1$ ضلع داشته و معادل چندضلعی داده شده باشد.

۲۳۱. می‌خواهیم کثیرالاضلاعی متشابه با کثیرالاضلاع مفروض رسم کنیم که معادل باشد با کثیرالاضلاع مفروض دیگر.

۲۳۲. کثیرالاضلاعی مشابه با چند کثیرالاضلاع متشابه طوری رسم کنید که مساحتش برابر مجموع مساحتهای آنها باشد.

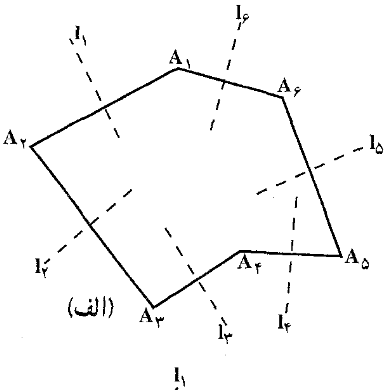
۳.۲.۴.۱. مسأله‌های ترکیبی

۲۳۳. n خط l_1، l_2، ....، l_n در صفحه داده شده‌اند. یک n ضلعی $A_1 A_2 \dots A_n$ بسازید که این خطها:

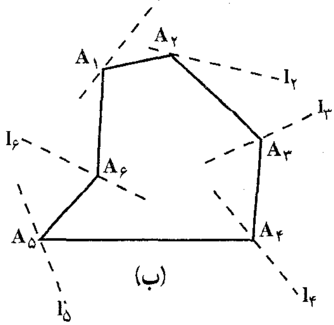
الف. عمودمنصفهای ضلعهای آن باشند (شکل الف).

ب. نیمسازهای خارجی یا داخلی زاویه‌های رأسهای آن باشند (شکل ب).

حالتهای n زوج و n فرد را جداگانه بررسی کنید. در کدام حالت مسأله جواب ندارد، یا جواب منحصر به فرد ندارد.



(الف)



(ب)

۳.۴.۱. رسم n ضلعی با معلوم بودن: دایره، دایره و ...

۲۳۴. در یک دایرهٔ مفروض، یک n ضلعی چنان محاط کنید که :
الف. ضلعهای آن موازی n خط داده شده در صفحه باشند.
ب. ضلع A_1A_n از یک نقطهٔ مفروض بگذرد، و بقیهٔ ضلعها موازی با $n-1$ خط داده شده باشند.

۵.۱. رسم چندضلعیهای منتظم

۱.۵.۱. رسم سه ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع)

۱.۱.۵.۱. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن اندازهٔ ضلع

رسم مثلث متساوی‌الاضلاع را قبلاً دیدیم. در این قسمت نیز به منظور کامل بودن رسم چندضلعیهای منتظم، روش رسم مثلث متساوی‌الاضلاع را با روشی که ابوالوفاء بوزجانی ریاضیدان ایرانی از کتاب هندسهٔ ایرانی بیان کرده است می‌آوریم.

۲۳۵. مثلث متساوی‌الاضلاعی به ضلع پاره‌خط معلوم AB رسم کنید.

۲.۱.۵.۱. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ به شعاع R

۲۳۶. در دایرهٔ به شعاع R ، مثلث متساوی‌الاضلاعی محاط کنید.

۳.۱.۵.۱. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر دایرهٔ به شعاع R

۲۳۷. بر دایرهٔ (O, R) مثلث متساوی‌الاضلاعی محیط کنید.

۲.۵.۱. رسم چهارضلعی منتظم (مربع)

۱.۲.۵.۱. رسم مربع با معلوم بودن اندازهٔ ضلع

۲۳۸. مربعی به ضلع معلوم $AB=a$ رسم کنید.

۱.۵.۲.۲. رسم مربع با معلوم بودن مثلث

۱.۵.۲.۲.۱. رسم مربع با معلوم بودن مثلث متساوی‌الاضلاع

۲۳۹. بر مثلث متساوی‌الاضلاع ABC مربعی محیط کنید.

۱.۵.۲.۲.۲. رسم مربع با معلوم بودن مثلث در حالت کلی

۲۴۰. بر مثلث مختلف‌الاضلاع ABC مربعی محیط کنید.

۱.۵.۲.۳. رسم مربع با معلوم بودن چندضلعی منتظم

۱.۵.۲.۳.۱. رسم مربع با معلوم بودن پنج‌ضلعی منتظم

۲۴۱. در پنج‌ضلعی منتظمی، یک مربع محاط کنید.

۲۴۲. بر پنج‌ضلعی منتظمی، یک مربع محیط کنید.

۱.۵.۲.۳.۲. رسم مربع با معلوم بودن هشت‌ضلعی منتظم

۲۴۳. بر هشت‌ضلعی منتظمی، یک مربع محیط کنید.

۱.۵.۲.۴. رسم مربع محاط در دایرهٔ به شعاع R

۲۴۴. در دایرهٔ (O , R)، مربعی محاط کنید.

۱.۵.۲.۵. رسم مربع محیط بر دایرهٔ به شعاع R

۲۴۵. بر دایرهٔ مفروض (O , R) ، مربعی محیط کنید.

۱.۵.۲.۶. رسم مربع با تازدن یا گره زدن کاغذ

۱.۵.۲.۶.۱. رسم مربع با تازدن کاغذ

۲۴۶. مربعی را با تازدن کاغذ رسم کنید.

۱.۵.۲.۶.۲. رسم مربع با گره زدن کاغذ

۲۴۷. مربع را با گره زدن کاغذ رسم کنید.

۱.۵.۳. رسم پنج‌ضلعی منتظم

۱.۵.۳.۱. رسم پنج‌ضلعی منتظم با معلوم بودن ضلع
۲۴۸. بر پاره‌خط داده شدهٔ AB یک پنج‌ضلعی منتظم بنا کنید (پنج‌ضلعی منتظمی رسم کنید که اندازهٔ ضلع آن پاره‌خط معلوم AB باشد).

۱.۵.۳.۲. رسم پنج‌ضلعی منتظم با معلوم بودن مربع
۲۴۹. در مربع مفروضی، یک پنج‌ضلعی منتظم محاط کنید.

۱.۵.۳.۳. رسم پنج‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R
۲۵۰. در دایرهٔ مفروض (O , R)، پنج‌ضلعی منتظمی محاط کنید.

۱.۵.۳.۴. رسم پنج‌ضلعی منتظم با گره زدن کاغذ
۲۵۱. پنج‌ضلعی منتظم را با گره زدن کاغذ رسم کنید.

۱.۵.۴. رسم شش‌ضلعی منتظم

۱.۵.۴.۱. رسم شش‌ضلعی منتظم با معلوم بودن اندازهٔ ضلع
۲۵۲. شش‌ضلعی منتظمی رسم کنید که اندازهٔ هر ضلع آن مساوی پاره‌خط داده شدهٔ AB باشد.

۱.۵.۴.۲. رسم شش‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R
۲۵۳. در دایرهٔ به شعاع R، شش‌ضلعی منتظمی محاط کنید.

۱.۵.۴.۳. رسم شش‌ضلعی منتظم محیط بر دایرهٔ به شعاع R
۲۵۴. بر دایرهٔ به شعاع R یک شش‌ضلعی منتظم محیط کنید.

۱.۵.۴.۴. رسم شش‌ضلعی منتظم با تاکردن یا گره زدن کاغذ

۱.۴.۴.۵.۱. رسم شش‌ضلعی منتظم با تاکردن کاغذ

۲۵۵. شش‌ضلعی منتظم را با تا کردن کاغذ رسم کنید.

۲.۴.۴.۵.۱. رسم شش‌ضلعی با گره زدن کاغذ

۲۵۶. شش‌ضلعی منتظم را با گره زدن کاغذ رسم کنید.

۵.۵.۱. رسم هفت‌ضلعی منتظم

۱.۵.۵.۱. رسم هفت‌ضلعی منتظم با معلوم بودن اندازهٔ ضلع

۲۵۷. هفت‌ضلعی منتظمی به ضلع پاره‌خط معلوم AB رسم کنید.

۲.۵.۵.۱. رسم هفت‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R

۲۵۸. به کمک خط کش و پرگار، یک هفت‌ضلعی منتظم را، به تقریب، رسم کنید.

۳.۵.۵.۱. رسم هفت‌ضلعی منتظم با گره زدن کاغذ

۲۵۹. هفت‌ضلعی منتظم را با گره‌زدن کاغذ رسم کنید.

۶.۵.۱. رسم هشت‌ضلعی منتظم

۱.۶.۵.۱. رسم هشت‌ضلعی منتظم با معلوم بودن اندازهٔ ضلع

۲۶۰. هشت‌ضلعی منتظمی به ضلع پاره‌خط معلوم AB رسم کنید.

۲.۶.۵.۱. رسم هشت‌ضلعی منتظم با معلوم بودن مربع

۲۶۱. در مربع مفروضی یک هشت‌ضلعی منتظم محاط کنید.

۳.۶.۵.۱. رسم هشت‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R

۲۶۲. در دایره‌ای به شعاع R، هشت‌ضلعی منتظمی محاط کنید.

۱.۵.۶.۴. رسم هشت‌ضلعی منتظم محیط بر دایرهٔ به شعاع R

۲۶۳. بر دایره‌ای به شعاع R یک هشت‌ضلعی منتظم محیط کنید.

۱.۵.۶.۵. رسم هشت‌ضلعی منتظم با تازدن یا گره زدن کاغذ

۱.۵.۶.۵.۱. رسم هشت‌ضلعی منتظم با تازدن کاغذ

۲۶۴. هشت‌ضلعی منتظم را با تا کردن کاغذ رسم کنید.

۱.۵.۶.۵.۲. رسم هشت‌ضلعی منتظم با گره زدن کاغذ

۲۶۵. هشت‌ضلعی منتظم را با گره زدن کاغذ رسم کنید.

۱.۵.۷. رسم نه‌ضلعی منتظم

۱.۵.۷.۱. رسم نه‌ضلعی منتظم با معلوم بودن اندازهٔ ضلع

۲۶۶. نه‌ضلعی منتظمی به ضلع پاره‌خط معلوم AB رسم کنید.

۱.۵.۷.۲. رسم نه‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R

۲۶۷. در دایره‌ای به شعاع R، یک نه‌ضلعی منتظم محاط کنید.

۱.۵.۸. رسم ده‌ضلعی منتظم

۱.۵.۸.۱. رسم ده‌ضلعی منتظم با معلوم بودن اندازهٔ ضلع

۲۶۸. ده‌ضلعی منتظمی رسم کنید که طول هر ضلع آن مساوی پاره‌خط معلوم AB باشد.

۱.۵.۸.۲. رسم ده‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R

۲۶۹. یک ده‌ضلعی منتظم، به کمک پرگار و خط‌کش رسم کنید.

۱.۵.۹. رسم یازده‌ضلعی منتظم

۲۷۰. در یک دایره، یازده‌ضلعی منتظمی محاط کنید.

از کتاب هندسهٔ ایرانی

۱.۵.۱۰. رسم دوازده‌ضلعی منتظم

۱.۵.۱۰.۱. رسم دوازده‌ضلعی منتظم با معلوم بودن شعاع دایرهٔ محیطی

۲۷۱. در دایره‌ای به شعاع R، دوازده‌ضلعی منتظمی محاط کنید.

۱.۵.۱۱. رسم سیزده‌ضلعی منتظم

۲۷۲. در یک دایرهٔ داده شده ، سیزده‌ضلعی منتظمی محاط کنید.

۱.۵.۱۲. رسم پانزده‌ضلعی منتظم

۲۷۳. در دایره‌ای به شعاع R، پانزده‌ضلعی منتظمی محاط کنید.

۱.۵.۱۳. رسم هفده‌ضلعی منتظم

۲۷۴. یک هفده‌ضلعی منتظم، به کمک خط‌کش و پرگار، رسم کنید.

۱.۵.۱۴. رسم چندضلعی منتظم

۲۷۵. یک چندضلعی منتظم را بر یک چندضلعی منتظم مفروض، محیط کنید.

بخش ۲

• رسم دایره

۲.۱. رسم دایره با معلوم بودن: نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط، خط؛ زاویه؛ رابطهٔ متری

۲.۱.۱. رسم یک دایره با معلوم بودن : نقطه ؛ پاره‌خط، نیمخط، خط ؛ زاویه ؛ رابطهٔ متری

۲.۱.۱.۱. نقطه

۲.۱.۱.۱.۱. دو نقطه

۲.۱.۱.۱.۲. سه نقطه

۲.۱.۱.۱.۳. چهارنقطه و بیشتر

۲.۱.۱.۱.۳.۱. چهارنقطه

۲.۱.۱.۱.۳.۲. شش‌نقطه

۲.۱.۱.۲. پاره‌خط، نیمخط، خط

۲.۱.۱.۲.۱. پاره‌خط

۲.۱.۱.۲.۲. نیمخط

۲.۱.۱.۲.۳. خط

۲.۱.۱.۳. زاویه

۲.۱.۱.۴. نقطه ؛ پاره‌خط، نیمخط، خط

۲.۱.۱.۴.۱. نقطه، خط

۲.۱.۱.۴.۱.۱. یک نقطه، دو یا چند خط

۲.۱.۱.۴.۱.۱.۱. یک نقطه، دوخط

۲.۱.۱.۴.۱.۲. دو نقطه، یک یا چند خط
۱.۲.۱.۴.۱.۱.۲. دو نقطه، یک‌خط
۳.۱.۴.۱.۱.۲. سه نقطه، یک یا چند خط
۱.۳.۱.۴.۱.۱.۲. سه نقطه، یک‌خط
۵.۱.۱.۲. نقطه، زاویه
۶.۱.۱.۲. نقطه، خط، زاویه
۷.۱.۱.۲. نقطه، دسته دایره
۸.۱.۱.۲. مسأله‌های ترکیبی
۲.۱.۲. رسم دو دایره با معلوم بودن: نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط، خط،...
۱.۲.۱.۲. نقطه، خط
۳.۱.۲. رسم سه دایره با معلوم بودن: نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط، خط؛ زاویه
۱.۳.۱.۲. نقطه
۱.۱.۳.۱.۲. سه نقطه

۲.۲. رسم دایره با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۱.۲.۲. رسم دایره با معلوم بودن مثلث
۱.۱.۲.۲. رسم یک دایره
۲.۱.۲.۲. رسم سه دایره

۳.۲. رسم دایره با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی و داده‌های دیگر

۱.۳.۲. رسم دایره با معلوم بودن چندضلعی
۱.۱.۳.۲. رسم دایره با معلوم بودن چهارضلعیهای ویژه
۲.۱.۳.۲. مسأله‌های ترکیبی

۴.۲. رسم دایره با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر

۱.۴.۲. رسم دایره با معلوم بودن دایره
۱.۱.۴.۲. رسم یک دایره با معلوم بودن دایره

۱.۱.۱.۴.۲. یک دایره
۲.۱.۱.۴.۲. دو دایره
۳.۱.۱.۴.۲. سه دایره
۴.۱.۱.۴.۲. دسته دایره
۲.۱.۴.۲. رسم دو دایره با معلوم بودن دایره
۱.۲.۱.۴.۲. رسم دو دایره با معلوم بودن یک دایره
۳.۱.۴.۲. رسم n دایره با معلوم بودن دایره
۴.۱.۴.۲. مسأله‌های ترکیبی
۲.۴.۲. رسم دایره با معلوم بودن دایره و داده‌های دیگر
۱.۲.۴.۲. رسم دایره با معلوم بودن :دایره ؛ نقطه ؛ پاره‌خط، نیمخط، خط ؛ زاویه
۱.۱.۲.۴.۲. رسم دایره با معلوم بودن دایره، نقطه
۱.۱.۱.۲.۴.۲. رسم یک دایره با معلوم بودن دایره، نقطه
۱.۱.۱.۱.۲.۴.۲. رسم یک دایره با معلوم بودن یک دایره، نقطه
۱.۱.۱.۱.۱.۲.۴.۲. یک دایره، یک نقطه
۲.۱.۱.۱.۱.۲.۴.۲. یک دایره، دو نقطه
۲.۱.۱.۱.۲.۴.۲. دو دایره، نقطه
۱.۲.۱.۱.۱.۲.۴.۲. دو دایره، یک نقطه
۲.۲.۱.۱.۱.۲.۴.۲. دو دایره، دو نقطه
۳.۱.۱.۱.۲.۴.۲. سه دایره، نقطه
۱.۳.۱.۱.۱.۲.۴.۲. سه دایره، یک نقطه
۴.۱.۱.۱.۲.۴.۲. دسته دایره، نقطه
۲.۱.۱.۲.۴.۲. رسم دو دایره با معلوم بودن دایره، نقطه
۲.۱.۲.۴.۲. دایره، پاره‌خط، نیمخط، خط
۱.۲.۱.۲.۴.۲. دایره، پاره‌خط
۲.۲.۱.۲.۴.۲. دایره، خط
۱.۲.۲.۱.۲.۴.۲. یک دایره، دو خط
۲.۲.۲.۱.۲.۴.۲. دو دایره، یک خط
۳.۲.۲.۱.۲.۴.۲. دسته دایره، یک خط
۳.۲.۱.۲.۴.۲. دایره، پاره‌خط، خط

۲.۴.۲.۱.۳. دایره، نقطه، خط
۲.۴.۲.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی
۲.۴.۳. رسم دایره با معلوم بودن شعاع دایره و داده‌های دیگر
۲.۴.۳.۱. شعاع دایره ؛ نقطه ؛ پاره‌خط، نیمخط، خط ؛ زاویه ؛ رابطهٔ متری
۲.۴.۳.۱.۱. شعاع دایره، نقطه
۲.۴.۳.۱.۱.۱. شعاع دایره، دو نقطه
۲.۴.۳.۱.۲. شعاع دایره، خط
۲.۴.۳.۱.۲.۱. شعاع دایره، دو خط
۲.۴.۳.۱.۳. شعاع دایره، زاویه
۲.۴.۳.۱.۴. شعاع دایره، رابطهٔ متری
۲.۴.۳.۱.۵. شعاع دایره، نقطه، خط
۲.۴.۳.۱.۶. مسأله‌های ترکیبی
۲.۴.۳.۲. شعاع دایره، دایره و داده‌های دیگر
۲.۴.۳.۲.۱. شعاع دایره، دایره، نقطه
۲.۴.۳.۲.۲. شعاع دایره،دایره، خط
۲.۴.۳.۲.۳. شعاع دایره، دو دایره
۲.۴.۳.۲.۴. شعاع دایره، دسته دایره
۲.۴.۳.۲.۵. رسم دو دایره
۲.۴.۳.۲.۶. مسأله‌های ترکیبی

۲.۵. رسم دایره با معلوم بودن مقطعهای مخروطی

۲.۵.۱. رسم دایره با معلوم بودن سهمی

بخش ۲. رسم دایره

۱.۲. رسم دایره با معلوم بودن: نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط، خط؛ زاویه؛ رابطهٔ متری

۱.۱.۲. رسم یک دایره با معلوم بودن: نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط، خط؛ زاویه؛ رابطهٔ متری

۱.۱.۱.۲. نقطه

۱.۱.۱.۱.۲. دو نقطه

۲۷۶. دو نقطهٔ A و B داده شده‌اند. دایره‌ای رسم کنید که بر این دو نقطه بگذرد. مسأله چند جواب دارد؟

۲.۱.۱.۱.۲. سه نقطه

۲۷۷. دایره‌ای رسم کنید که از سه نقطهٔ مفروض بگذرد.

۲۷۸. نقطه‌های A،B و C داده شده‌اند. بر B و C دایره‌ای چنان بگذرانید که اگر از A مماس AT را بر آن رسم کنیم AT=l باشد.

۲۷۹. سه نقطهٔ M،N و P داده شده‌اند. دایره‌ای چنان رسم کنید که اگر از M،N و P سه مماس MM′، NN′ و PP′ را بر آن رسم کنیم، طولهای آنها بترتیب مساوی m،n و p شود.

۲۸۰. سه نقطهٔ A،B و C داده شده‌اند. دایره‌ای به مرکز A رسم کنید به قسمی که مماسهای رسم شده از B و C بر این دایره، با هم زاویهٔ معلوم α بسازند.

۲۸۱. دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطهٔ مفروض بگذرد و از نقطهٔ مفروض سومی با زاویهٔ مفروضی دیده شود.

۲۸۲. نقطه‌های A،B و C داده شده‌اند. دایره‌ای رسم کنید که بر دو نقطهٔ B و C بگذرد و قوت نقطهٔ A نسبت به آن، مقدار معلوم b^2 باشد (بحث).

۲۸۳. بر نقطهٔ P دایره‌ای مرور دهید که دو نقطهٔ A و B نسبت به آن تصویرهای یکدیگر باشند.

(دو نقطه را نسبت به دایره تصویر یکدیگر می‌نامند اگر بر روی امتداد یک قطر واقع بوده و نسبت به دایره مزدوج یکدیگر باشند.)

۲.۱.۱.۱.۳. چهار نقطه و بیشتر

۲.۱.۱.۱.۳.۱. چهار نقطه

۲۸۴. چهار نقطهٔ A، B، C وD داده شده‌اند. از A و B دایره‌ای مرور دهید که اگر از C وD دو مماس بر آن رسم کنیم، مماسها برابر باشند.

۲۸۵. بر دو نقطهٔ P وQ دایره‌ای مرور دهید که دو نقطهٔ معلوم A وB نسبت به دایره، مزدوج هم باشند (در این صورت دو نقطهٔ A وB بر روی یک قطر واقعند).

۲.۱.۱.۱.۳.۲. شش نقطه

۲۸۶. دایره‌ای تعیین کنید که نقطه‌های (B , A) و (D , C) و (F , E) نسبت به آن هر زوج مزدوج هم باشند.

۲.۱.۱.۲. پاره‌خط، نیمخط، خط

۲.۱.۱.۲.۱. پاره‌خط

۲۸۷. دو پاره‌خط AB و CD داده شده‌اند. دایره‌ای رسم کنید که از دو سر پاره‌خط AB بگذرد و پاره‌خط CD را به نسبت اضافی $\frac{۲}{۳}$ قطع کند.

۲.۱.۱.۲.۲. نیمخط

۲۸۸. سه نیمخط Ox، Oy وOz از یک نقطه رسم شده‌اند. دایره‌ای رسم کنید که بر Ox مماس باشد و مرکزش بر Oy واقع باشد. روی Oz وتری به طول معلوم a جدا می‌کند.

۲.۱.۱.۲.۳. خط

۲۸۹. دایره‌ای رسم کنید که بر سه خط مفروض مماس باشد. حالتی را در نظر بگیرید که دو خط، یا هر سه خط، موازی باشند.

۲۹۰. دایره‌ای رسم کنید که با سه خط دوبه‌دو متقاطع، زاویهٔ معلوم α بسازد.

۳.۱.۱.۲. زاویه

۲۹۱. زاویهٔ xOy داده شده است. دایره‌ای رسم کنید که بر دو ضلع این زاویه مماس باشد. مسأله چند جواب دارد؟

۴.۱.۱.۲. نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط، خط

۱.۴.۱.۱.۲. نقطه، خط

۱.۱.۴.۱.۱.۲. یک نقطه، دو یا چند خط

۱.۱.۱.۴.۱.۱.۲. یک نقطه، دو خط

۲۹۲. دایره‌ای رسم کنید که بر دو خط متقاطع مماس باشد و از یک نقطهٔ مفروض بگذرد.

۲۹۳. دو خط متوازی x و y و نقطهٔ A بین آنها مفروض است. دایره‌ای رسم کنید که از نقطهٔA بگذرد و با دو خط مفروض مماس باشد.

۲۹۴. دایره‌ای به مرکز O چنان رسم کنید که دو خط مفروض A وB نسبت به آن مزدوج باشند.

۲۹۵. خطهای D و Δ و نقطهٔ A داده شده‌اند. دایره‌ای چنان رسم کنید که بر خط D مماس بوده و خط Δ قطبی A نسبت به آن دایره باشد.

۲۹۶. دو خط X و Y و نقطهٔ O داده شده‌اند. دایره‌ای به مرکز O چنان رسم کنید که مجموع وترهایی که روی دو خط X و Y جدا می‌کند، مساوی طول معلوم a باشد.

۲۹۷. به مرکز نقطه‌ای معلوم دایره‌ای چنان رسم کنید که دو خط موازی را در دو وتر که مجموعشان برابر طول معلوم l است، قطع کند.

۲۹۸. دایره‌ای به مرکز نقطهٔ معلوم O رسم کنید که دو خط موازی داده شده را چنان قطع کند که ذوزنقهٔ ایجاد شده، مساحتی مساوی مقدار معلوم k^2 داشته باشد.

۲۹۹. دو خط Δ و Δ' و نقطهٔ A داده شده‌اند. دایره‌ای رسم کنید که مرکزش بر Δ جا داشته و از A گذشته و بر Δ' مماس باشد.

۲.۱.۴.۱.۱.۲. دو نقطه، یک یا چند خط

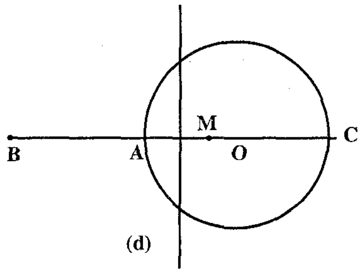
۱.۲.۱.۴.۱.۱.۲. دو نقطه، یک خط

۳۰۰. خط راست D و دو نقطهٔ AوB در یک طرف آن و به یک فاصله از آن قرار دارند. دایره‌ای رسم کنید که از نقطه‌های A وB بگذرد و با خط D مماس باشد.

۳۰۱. دایره‌ای رسم کنید که بر دو نقطهٔ داده شده A وB بگذرد و بر خط مفروض Δ مماس

باشد. واضح است که A و B باید در یک طرف Δ باشند.

۳۰۲. دایره‌ای بر نقطه مفروض A بگذرانید که قطبی نقطه معین B نسبت به آن، خط مفروض d باشد.



۳۰۳. دایره‌ای چنان رسم کنید که از دو نقطهٔ مفروض A وB گذشته و خط مفروض D را در نقطه‌های M وN چنان قطع کند که $\overline{MN} = L$ باشد.

۳۰۴. بر دو نقطهٔ مفروض A وB دایره‌ای بگذرانید که خط مفروض D را به زاویهٔ α قطع کند.

۳۰۵. خط XY و دو نقطهٔ A وB در دو طرف این خط داده شده‌اند. دایره‌ای رسم کنید که بر این دو نقطه بگذرد و روی خط XY کوچکترین پاره‌خط ممکن را ایجاد کند.

۳۰۶. دو دایره رسم کنید که در دو نقطهٔ A وB بر خط AB مماس باشند و بر هم نیز مماس باشند، به قسمی که مجموع مساحت این دو دایره، مقدار معلوم k^2 باشد.

۲.۱.۱.۴.۱.۳. سه نقطه، یک یا چند خط

۲.۱.۱.۴.۱.۳.۱. سه نقطه، یک خط

۳۰۷. سه نقطهٔ A،B و C و خطی که از نقطهٔ A گذشته مفروض است. دایره‌ای رسم کنید که از A وB بگذرد و خط را در نقطهٔ D قطع کند به طریقی که DC مماس بر دایره شود.

۲.۱.۱.۵. نقطه، زاویه

۳۰۸. زاویه $x\hat{O}y = \alpha$ و نقطهٔ A در درون آن داده شده است. دایره‌ای رسم کنید که از نقطهٔ A بگذرد و بر ضلعهای زاویه مماس باشد.

۲.۱.۱.۶. نقطه، خط، زاویه

۳۰۹. به مرکز نقطهٔ داده شده C، دایره‌ای رسم کنید که ضلعهای زاویهٔ معلوم xOy آن را در نقطه‌های A وB قطع کنند و وتر AB موازی با راستای معلوم z باشد.

۳۱۰. دایره‌ای به مرکز نقطهٔ O واقع بر نیمساز یک زاویهٔ معلوم چنان رسم کنید که ذوزنقهٔ ایجاد شده، مساحتی مساوی k^2 داشته باشد.

۳۱۱. دایره‌ای مماس بر دو ضلع یک زاویهٔ معلوم رسم کنید به قسمی که مماسهای عمود بر نیمساز این زاویه بر دایره، با دو ضلع زاویه، ذوزنقه‌ای به مساحت معلوم ایجاد کند.

۳۱۲. دو خط l_1 و l_2 ، یک نقطهٔ A، و یک زاویهٔ α مفروضند. دایره‌ای به مرکز A بیابید که دو خط l_1 و l_2 بر آن، کمانی به اندازهٔ α جدا کنند.

۲.۱.۱.۷. نقطه، دسته دایره

۳۱۳. دایره‌ای رسم کنید که متعلق به دستگاه مفروضی بوده و از نقطه معینی بگذرد.

۲.۱.۱.۸. مسأله‌های ترکیبی

۳۱۴. خط Δ داده شده است. روی خط عمود بر Δ در نقطهٔ H، نقطهٔ A ؛ و روی Δ نقطهٔ T متمایز با نقطهٔ H را اختیار می‌کنیم.

۱. دایره‌ای رسم کنید که از نقطهٔ A بگذرد و بر خط Δ در نقطهٔ T مماس باشد.

۲. خط عمود در نقطهٔ T بر AT، خط AH را در نقطهٔ B و دایره را در نقطهٔ C قطع می‌کند. ثابت کنید که مثلث ABC متساوی‌الساقین است.

۳. اندازهٔ R شعاع دایره را بر حسب $HA=h$ و $HT=x$ تعیین کنید.

۴. خط مماس بر دایره در نقطهٔ A و خط AC، خط Δ را بترتیب در نقطه‌های E و D قطع می‌کنند. مقدار x را چنان بیابید که نقطهٔ T وسط پاره‌خط ED باشد. اندازهٔ R شعاع دایره در این صورت چه قدر است؟

۳۱۵. ۱. دو دایره به مرکزهای O و O' را با این معلومات رسم کنید:

خط‌المرکزین دو دایره بترتیب این دو دایره را در A و B ؛ و A' و B' و MN وتر مشترک آنها را در نقطهٔ H قطع می‌کنند.

نقطه‌های A و A' در یک طرف نقطهٔ H واقعند و می‌دانیم که:

$$A'H = ۴۵mm\ ,\ MN = ۴۵mm,\ AH = ۷۲mm$$

۲. اندازهٔ HB، HB'، R، و R' شعاعهای دو دایرهٔ (O) و (O') را به دست آورید.

۳. اندازهٔ HO، HO' و OO' را تعیین کنید.

۴. نشان دهید که دو مثلث HOM و $HO'M$ متشابه‌اند و مجموع اندازه‌های دو زاویهٔ

$\hat{HOM}$ و $\hat{HO'M}$ را به دست آورید.

۲.۱.۲. رسم دو دایره با معلوم بودن: نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط، خط؛...

۱.۲.۱.۲. نقطه، خط

۳۱۶. از دو دایره عمود بر هم، محور اصلی و مرکزهایشان معلومند. آنها را رسم کنید.

۳۱۷. دو دایره رسم کنید که محور اصلی و مرکزهای تجانس مستقیم و معکوس و طول خط‌المرکزین آنها معلوم باشد.

۳۱۸. از دو دایره، دو مرکز تشابه، طول یک مماس مشترک و راستای مماس مشترک دیگر مفروضند. دو دایره را رسم کنید.

۳.۱.۲. رسم سه دایره با معلوم بودن: نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط، خط؛ زاویه

۱.۳.۱.۲. نقطه

۱.۱.۳.۱.۲. سه نقطه

۳۱۹. سه نقطهٔ A،B و C روی یک صفحه داده شده‌اند. سه دایرهٔ k_1، k_2 و k_3 را طوری رسم کنید که k_2 و k_3 در نقطهٔ A، k_1 و k_3 در نقطهٔ B و k_1 و k_2 در نقطهٔ C، مماس مشترک داشته باشند.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۲۴

۳۲۰. به مرکزهای O،O' و O'' سه دایره رسم کنید که دوبه‌دو بر هم عمود باشند.

۳۲۱. سه دایرهٔ دوبه‌دو متقاطع رسم کنید که در شرطهای زیر صدق کنند :

۱. نقطه‌های برخورد یکی از آنها با دو دایرهٔ دیگر دو نقطهٔ معلوم باشند.

۲. دو دایرهٔ اخیر یک خط معلوم را قطع کنند.

۲.۲. رسم دایره با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۱.۲.۲. رسم دایره با معلوم بودن مثلث

۱.۱.۲.۲. رسم یک دایره

۳۲۲. دایره‌های محیطی مثلثهای زیر را رسم کنید:

الف. مثلث با زاویه‌های حاده

ب. مثلث با زاویهٔ منفرجه

پ. مثلث قائم‌الزاویه

ت. مثلث متساوی‌الساقین

ث. مثلث متساوی‌الاضلاع

۳۲۳. مثلثی داده شده است. دایره‌ای رسم کنید که مماسهای رسم شده از سه رأس مثلث بر آن، با هم مساوی و به طول معین l باشند.

۳۲۴. مثلث ABC مفروض است. دایره‌ای چنان رسم کنید که مماسهای رسم شده از B،A و C بر این دایره به ترتیب به طولهای CA،BC وAB باشند.

۳۲۵. دایره‌ای رسم کنید که ضلعهای یک مثلث مفروض را تحت زاویهٔ معلوم m قطع کند.

۳۲۶. مثلث ABC مفروض است. دایره‌ای رسم کنید که ضلعهای روبه‌روی B،A وC را به زاویه‌های β،α ، و γ قطع کند.

۳۲۷. مثلث ABC داده شده است. دایره‌ای رسم کنید که از سه رأس B،A وC بترتیب تحت زاویه‌های β،α و γ رؤیت شود.

۳۲۸. مثلثی مفروض است. دایره‌ای رسم کنید که مثلث نسبت به آن قطبی باشد.

۳۲۹. ۱. مثلث ABC مفروض است. دایرهٔ (A) را به مرکز A چنان رسم کنید که B و C نسبت به آن، مزدوج باشند.

۲. اگر (B) و (C) دایره‌های شبیه دایرهٔ (A) باشند،سه دایره (A) ، (B) و (C) دوبه‌دو بر هم عمودند.

۲.۱.۲.۲. رسم سه دایره

۳۳۰. در مثلث ABC سه دایره چنان محاط کنید که هریک بر دو ضلع مثلث و بر دو دایرهٔ دیگر مماس شود.

مالفاتی

۳۳۱. نشان دهید می‌توان سه دایره رسم کرد که مرکزهایشان رأسهای یک مثلث مفروض باشند، به طوری که پاهای سه خط سوایی مفروض، مرکزهای تشابه دوبه‌دوی آن سه دایره باشند.

۳.۲. رسم دایره با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی و داده‌های دیگر

۱.۳.۲. رسم دایره با معلوم بودن چندضلعی

۱.۱.۳.۲. رسم دایره با معلوم بودن چهارضلعیهای ویژه

۳۳۲. یک مربع داده شده است. دایرهٔ محیطی این مربع را رسم کنید.

۳۳۳. مستطیل ABCD داده شده است. دایرهٔ محیطی آن را رسم کنید.

۲.۱.۳.۲. مسأله‌های ترکیبی

۳۳۴. مربع ABCD به ضلع a مفروض است. نیمدایره‌ای به قطر BC را در داخل مربع رسم کرده و مرکز آن را O می‌نامیم:

۱. مطلوب است رسم دایره‌ای که مماس بر نیمدایرهٔ مزبور و مماس بر خط AD در نقطهٔ D باشد.

۲. طول شعاع این دایره را بر حسب a حساب کنید.

۴.۲. رسم دایره با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر

۱.۴.۲. رسم دایره با معلوم بودن دایره

۱.۱.۴.۲. رسم یک دایره با معلوم بودن دایره

۱.۱.۱.۴.۲. یک دایره

۳۳۵. در یک قطاع از دایره‌ای مفروض، یک دایره محاط کنید.

۲.۴.۱.۱.۲. دو دایره

۳۳۶. دو دایره به شعاعهای ۱ و به طول خط‌المرکزین $2(1+\sqrt{3})$ داده شده است. دایرهٔ دیگری به شعاع ۱ چنان رسم کنید که سطح بین آنها را به تساوی بخش کند. آیا این دایره انحراف انعکاسی بین دو دایرهٔ مفروض را نیز نصف می‌کند؟ و آیا این دایره، دایرهٔ نیمساز آنها است؟

۳۳۷. دو دایرهٔ غیر متقاطع داده شده است. دایرهٔ نیمساز آنها را رسم کنید.

۳۳۸. دو دایره داده شده‌اند. دایره‌ای رسم کنید که این دو دایره را تحت قطر قطع کند. مسأله چند جواب دارد؟

۲.۴.۱.۱.۳. سه دایره

۳۳۹. دایره‌ای رسم کنید که بر سه دایرهٔ مفروض مماس باشد.

مسأله‌های تاریخی ریاضیات، از آپولونیوس

۳۴۰. دایره‌ای رسم کنید ، به طوری که وترهایی که از برخورد آن با سه دایرهٔ مفروض تعیین می‌شوند، طولهای مفروضی داشته باشند.

۳۴۱. دایره‌ای چنان رسم کنید که سه دایرهٔ مفروض را تحت قطر قطع کند.

۳۴۲. دایره‌ای رسم کنید که با سه دایره که مرکزهایشان همخط نیستند متعامد باشد.

۳۴۳. دایره‌ای رسم کنید که بر دو دایرهٔ مفروض (A) و (B) عمود باشد و دایرهٔ مفروض (C) را نصف کند.

۳۴۴. دایره‌ای رسم کنید که بر دایرهٔ (A) عمود باشد و دو دایرهٔ (B) و (C) را تحت قطر قطع کند.

۲.۴.۱.۱.۴. دسته دایره

۳۴۵. دایره‌ای رسم کنید که جزء دایره‌های دستگاه (Δ , O) بوده و بر دایره‌ای مفروض، مماس باشد.

۳۴۶. دایره‌ای رسم کنید که جزء دایره‌های دستگاه (Δ , O) بوده و بر دایرهٔ مفروض C عمود باشد.

۳۴۷. چند دایرهٔ مساوی می‌توان بیرون دایره‌ای به همان شعاع رسم کرد به طوری که هر یک از آنها بر این دایره و دو دایرهٔ مجاور خود مماس باشد؟

۲.۴.۱.۲. رسم دو دایره با معلوم بودن دایره

۲.۴.۱.۲.۱. رسم دو دایره با معلوم بودن یک دایره

۳۴۸. دایرهٔ O مفروض است. دو دایرهٔ متحدالمرکز با آن رسم کنید که مساحت دایرهٔ O را به نسبت اعداد m، n و p تقسیم کند.

۲.۴.۱.۳. رسم n دایره با معلوم بودن دایره

۳۴۹. ثابت کنید، می‌توان چند دایره را روی صفحه چنان رسم کرد که نقطهٔ برخورد درونی نداشته باشند و هر یک از آنها، درست بر پنج دایرهٔ دیگر مماس باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۶

۲.۴.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی

۳۵۰. ۱. سه دایرهٔ متساوی رسم کنید که برهم مماس باشند.

۲. سه دایرهٔ دیگر با همان ویژگی را چنان رسم کنید که هر کدام از آنها بر دو دایره از مجموعهٔ اوّل نیز مماس باشند. انحرافهای انعکاسی بین این شش دایره را تعیین کنید.

۲.۴.۲. رسم دایره با معلوم بودن دایره و داده‌های دیگر

۲.۴.۲.۱. رسم دایره با معلوم بودن: دایره؛ نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط، خط؛ زاویه

۲.۴.۲.۱.۱. رسم دایره با معلوم بودن دایره، نقطه

۲.۴.۲.۱.۱.۱. رسم یک دایره با معلوم بودن دایره، نقطه

۲.۴.۲.۱.۱.۱.۱. رسم یک دایره با معلوم بودن دایره، نقطه

۲.۴.۲.۱.۱.۱.۱.۱. یک دایره، یک نقطه

۳۵۱. دایره‌ای رسم کنید که بر نقطهٔ داده شدهٔ A گذشته و بر دایرهٔ داده شدهٔ (C) عمود باشد. در تعداد جوابها بحث کنید. با چه شرطی عدهٔ جوابها محدود خواهد شد.

۳۵۲. به مرکز نقطه‌ای معلوم، دایره‌ای رسم کنید که بر دایرهٔ داده شده‌ای عمود باشد. یا به بیان دیگر: به مرکز نقطهٔ معلوم A دایره‌ای چنان رسم کنید که مماس رسم شده از نقطهٔ معلوم B بر آن طولی برابر l داشته باشد.

۳۵۳. نقطهٔ A و دایرهٔ (B) داده شده‌اند. دایره‌ای به مرکز A رسم کنید که دایرهٔ (B) را تحت زاویهٔ m قطع کند.

۳۵۴. منعکس دایرهٔ (C) را با قطب انعکاس P و قوت انعکاس a رسم کنید.

۳۵۵. به مرکز نقطه‌ای مفروض، دایره‌ای رسم کنید که دایرهٔ مفروضی را نصف کند، یعنی وتر مشترک دو دایره قطر دایرهٔ مفروض باشد.

۳۵۶. دایره‌ای به مرکز A و به شعاع معلوم، داده شده است. دایره‌ای به مرکز نقطهٔ معلوم B رسم کنید که مماس مشترک آن با دایرهٔ (A) به طول l باشد.

۳۵۷. دایره‌ای به مرکز A داده شده است. دایره‌ای به مرکز نقطهٔ معلوم B چنان رسم کنید که زاویهٔ بین دو مماس مشترک دایره‌های (A) و (B) مساوی ۲m باشد.

۳۵۸. مساحت دایرهٔ داده شده را، به‌وسیلهٔ رسم دایره‌ای به همان مرکز، به دو قسمت متساوی یا به دو قسمت که نسبت مساحتهای آنها مساوی عدد مفروض k باشند، تقسیم کنید.
حالت ویژه. دایرهٔ خواسته شده را چنان رسم کنید که سطح دایرهٔ داده شده را به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم کند.

۳۵۹. محیط دایرهٔ داده شده‌ای را که جای مرکز آن معلوم است، به کمک یک پرگار و بدون استفاده از خط‌کش، به چهار قسمت برابر تقسیم کنید.

مسأله‌های تاریخی ریاضیات، از ناپلئون

۲.۴.۲.۱.۱.۱.۱.۲. یک دایره، دو نقطه

۳۶۰. دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطهٔ مفروض A و B بگذرد و از دایرهٔ مفروضی وتری به طول l جدا کند.

۳۶۱. دایره‌ای رسم کنید که بر دو نقطهٔ A و B گذشته و بر دایرهٔ مفروض (O) مماس باشد.

۳۶۲. دایره‌ای به مرکز (O) و نقطهٔ A روی آن و B در خارج آن مفروضند. دایره‌ای رسم کنید که از B گذشته و در A بر دایرهٔ به مرکز (O) مماس باشد.

۳۶۳. ثابت کنید که بر دو نقطهٔ واقع در داخل یک دایره بیش از دو دایره نمی‌توان رسم کرد که بر دایرهٔ مفروض مماس باشند.

۳۶۴. بر دو نقطهٔ مفروض A و B دایره‌ای بگذرانید که دایرهٔ مفروضی را به زاویهٔ α قطع کند.

۳۶۵. بر دو نقطهٔ مفروض A و B دایره‌ای چنان بگذرانید که بر دایرهٔ مفروض (O) عمود باشد.

۳۶۶. از دو نقطهٔ معلوم A و B دایره‌ای بگذرانید که دایرهٔ مفروض (C) را نصف کند.

۳۶۷. دایره‌ای چنان رسم کنید که از نقطهٔ مفروض A گذشته و مجانس دایرهٔ مفروض (C) به مرکز تجانس S باشد.

۲.۴.۲.۱.۱.۱.۲. دو دایره، نقطه

۲.۴.۲.۱.۱.۱.۲.۱. دو دایره، یک نقطه

۳۶۸. دایره‌ای رسم کنید که از نقطهٔ مفروض A گذشته و بر دو دایرهٔ مفروض (O) و (O′) مماس باشد.

۳۶۹. دایره‌ای رسم کنید که بر دایرهٔ (E) مماس باشد و دایرهٔ معلوم (F) را در نقطهٔ A به زاویهٔ α قطع کند.

۳۷۰. دایره‌ای رسم کنید که از نقطهٔ A بگذرد و دو دایرهٔ مفروض (C) و (C′) را به زاویه‌های α و α' قطع کند.

۳۷۱. دو دایرهٔ (O) و (O′) و نقطهٔ A مفروضند. دایره‌ای چنان رسم کنید که از نقطهٔ A گذشته و بر دایره‌های (O) و (O′) عمود باشد.

۳۷۲. از نقطهٔ معلوم C دایره‌ای بگذرانید که دو دایرهٔ معلوم (A) و (B) را نصف کند.

۳۷۳. در صفحهٔ P دو دایرهٔ متخارج (B) و (C) و نقطهٔ A مفروضند. دایره‌ای چنان رسم کنید که از A بگذرد و دایرهٔ (C) را نصف کند و بر دایرهٔ (B) عمود باشد.

المپیادهای ریاضی ایران

۳۷۴. دو دایرهٔ (O) و (O′) و نقطهٔ A مفروضند. دایره‌ای چنان رسم کنید که از نقطهٔ A گذشته، بر دایرهٔ (O) عمود و بر دایرهٔ (O′) مماس باشد.

۳۷۵. دایره‌ای با مرکز معلوم طوری رسم کنید که دو نقطهٔ تقاطع آن با دو دایرهٔ هم مرکز، با مرکز این دو دایره بر یک استقامت باشند.

۳۷۶. دایره‌ای رسم کنید که از نقطه‌ای معلوم بگذرد و به دو دایرهٔ هم مرکز مماس باشد.

۳۷۷. دایره‌های (O) و (C) و نقطهٔ S مفروضند. دایرهٔ (O′) را مماس بر دایرهٔ (C) چنان رسم کنید که S یکی از مرکزهای تجانس آن با دایرهٔ (O) باشد.

۲.۴.۲.۱.۱.۱.۲.۲. دو دایره، دو نقطه

۳۷۸. دو دایره به مرکزهای (C) و (C′) و روی آنها نقطه‌های A و A′ مفروضند. از A و A′ دایره‌ای بگذرانید که دو دایره را در M و M′ قطع کند، به قسمی که قوسهای $\overset{\frown}{AM}$ و $\overset{\frown}{A'M'}$ مستقیماً متشابه باشند.

۲.۴.۲.۱.۱.۱.۳. سه دایره، نقطه

۲.۴.۲.۱.۱.۱.۳.۱. سه دایره، یک نقطه

۳۷۹. دایره‌ای رسم کنید که به دایره‌های O، O' و O'' که از نقطهٔ مفروض P می‌گذرند، مماس شود.

۲.۴.۲.۱.۱.۱.۴. دسته دایره، نقطه

۳۸۰. دایره‌ای رسم کنید که جزء دایره‌های دستگاهی بوده، و از نقطهٔ مفروضی بگذرد.

۳۸۱. دایره‌ای رسم کنید که از یک نقطهٔ مفروض بگذرد و با دایره‌های یک دسته دایرهٔ هم‌محور، متعامد باشد.

۲.۴.۲.۱.۱.۲. رسم دو دایره با معلوم بودن دایره، نقطه

۳۸۲. دو دایرهٔ مفروض را طوری نسبت به هم قرار دهید که مماسهای مشترک داخلی (یا خارجی) آنها زاویه‌ای به‌اندازهٔ مفروض تشکیل دهند.

۳۸۳. دو نقطهٔ A و B را، روی صفحه، طوری انتخاب کرده‌ایم که فاصلهٔ بین آنها، برابر عدد درست n باشد. همهٔ دایره‌های به مرکزهای A و B را، که شعاع آنها عددی درست است، رسم کرده‌ایم. روی شبکهٔ حاصل، دنباله‌ای از گره‌ها (نقطه‌های برخورد دایره‌ها) را علامت می‌گذاریم، به نحوی که هر دو گرهٔ مجاور، رأس مقابل چهارضلعی منحنی‌الخط باشند:

الف. شکل را با انتخاب واحد ۰/۵ سانتیمتری و $n=۱۲$ رسم کنید.

ب. ثابت کنید، نقطه‌های این دنباله، یا روی محیط یک بیضی واقعند و یا روی یک هذلولی.

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۳۸۴. به مرکز دو نقطهٔ معلوم، دو دایرهٔ مساوی طوری رسم کنید که یکی از مماسهای مشترکشان:

۱. از یک نقطهٔ معلوم عبور کند.

۲. به یک دایرهٔ معلوم مماس باشد.

۲.۴.۲.۱.۲. دایره، پاره‌خط، نیمخط، خط

۲.۴.۲.۱.۲.۱. دایره، پاره‌خط

۳۸۵. دایرهٔ (C) و بردار $\overrightarrow{AB}$ داده شده‌اند. انتقال یافتهٔ دایرهٔ (C) را به اندازهٔ بردار انتقال $\overrightarrow{AB}$ رسم کنید.

۲.۲.۱.۲.۴.۲. دایره، خط

۱.۲.۲.۱.۲.۴.۲. یک دایره، دو خط

۳۸۶. به کمک پرگار و خط‌کش، دایره‌ای رسم کنید که بر دو خط موازی مفروض l و m و بر دایرهٔ مفروض به شعاع r، واقع در بین l و m، مماس باشد.

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۳۸۷. دایره‌ای رسم کنید که بر دو خط OA و OB و بر دایرهٔ داده شدهٔ (C) مماس باشد.

۳۸۸. دایره‌ای رسم کنید که بر دایرهٔ مفروض (C) به شعاع R و بر دو خط Δ و Δ' مماس باشد.

۳۸۹. با استفاده از قضیهٔ سه مرکز تجانس راه حل تازه‌ای برای رسم دایره‌ای مماس بر دو خط معلوم l_1 و l_2 و دایرهٔ مفروض $\bar{S}$، پیدا کنید.

۳۹۰. دایرهٔ S را مماس بر دو خط مفروض l_1 و l_2 طوری رسم کنید که دایرهٔ مفروض $\bar{S}$ را به زاویهٔ مفروض α قطع کند [منظور از زاویهٔ بین دو دایره، زاویهٔ بین خطهای مماس بر آنها در نقطهٔ برخورد است. زاویهٔ بین دایره‌های مماس بر هم صفر است؛ دایره‌هایی که متقاطع نباشند، با هم زاویه‌ای نمی‌سازند].

۲.۲.۲.۱.۲.۴.۲. دو دایره، یک خط

۳۹۱. دایره‌ای رسم کنید که بر دو دایرهٔ (O) و (O') و بر خط Δ مماس شود.

۳.۲.۲.۱.۲.۴.۲. دسته دایره، یک خط

۳۹۲. دایره‌ای رسم کنید که جزء دایره‌های دستگاهی بوده و بر خط مفروض D مماس باشد.

۳.۲.۱.۲.۴.۲. دایره، پاره‌خط، خط

۳۹۳. از قطعه خط AB دایره‌ای چنان مرور دهید که دایرهٔ مفروضی را در وتری موازی با امتداد مفروض Δ قطع کند.

۳.۱.۲.۴.۲. دایره، نقطه، خط

۳۹۴. خط Δ که بر نقطهٔ مفروض A می‌گذرد و دایرهٔ C داده شده است. بر A دایره‌ای بگذرانید که مرکزش روی Δ و خودش بر C مماس باشد.

۳۹۵. دایره‌ای رسم کنید که از یک نقطهٔ مفروض بگذرد و بر یک خط و یک دایرهٔ مفروض مماس باشد.

۳۹۶. دایرهٔ (C) و خط T که در نقطهٔ A با آن مماس می‌باشد، مفروض است. روی این خط مماس، نقطهٔ A' را اختیار می‌کنیم. دایره‌ای رسم کنید که با دایرهٔ (C) و خط T مماس بوده، نقطهٔ تماس آن با خط T نقطهٔ A' باشد.

۳۹۷. نقطهٔ A خارج دایرهٔ (O) مفروض است. دایره‌ای رسم کنید که بر دایرهٔ (O) و خط OA مماس و مرکزش روی خط مماس از A بر (O) باشد.

۳۹۸. دایره‌ای رسم کنید که بر خط CD مماس باشد و دایرهٔ مفروضی را در نقطهٔ معلوم A به زاویهٔ معلوم α قطع کند.

۳۹۹. خط D و دایرهٔ (O) و نقطهٔ متمایز A مفروضند. دایره‌ای چنان رسم کنید که از A گذشته بر خط D مماس و بر دایرهٔ (O) عمود باشد.

۴۰۰. دایره‌ای رسم کنید که از نقطهٔ معلوم A واقع بر خط معلوم X گذشته، مرکزش روی این خط واقع باشد و دایرهٔ معلومی را به زاویهٔ قائمه قطع کند.

۴۰۱. دایرهٔ (O) و نقطهٔ S و خط D عمود بر OS مفروضند. دایرهٔ (O') را به قسمی رسم کنید که S مرکز تجانس دایره‌های (O) و (O') بوده و D محور اصلی آنها باشد.

۴۰۲. از نقطهٔ معلوم دایره‌ای رسم کنید که وتر مشترک آن با یک دایرهٔ معلوم، موازی خطی معلوم باشد.

۴۰۳. دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطهٔ مفروض بگذرد و وتر مشترک آن با دایره‌ای مفروض، موازی خطی مفروض باشد.

۴۰۴. دایره‌ای به شعاع معلوم r رسم کنید که از نقطهٔ معلوم A بگذرد و مماس رسم شده از نقطهٔ معلوم B بر آن به طول معلوم l باشد.

۴۰۵. دایره‌ای به شعاع معلوم R رسم کنید که طول مماس رسم شده از A، به طول k و طول مماس رسم شده از B به طول معین l باشد.

۴.۱.۲.۴.۲. مسأله‌های ترکیبی

۴۰۶. دایرهٔ به مرکز O و مماس AT در یکی از نقطه‌های آن A مفروض است.

۱. دایرهٔ (C) را عمود بر دایرهٔ (O) و مماس بر AT روی نقطهٔ دیگر M رسم کنید.

۲. OM دایرهٔ (C) را در نقطهٔ دیگر M' قطع می‌کند. مکان نقطهٔ M' را وقتی که M رویAT تغییر کند، پیدا کنید و ثابت کنید که (C) همواره بر این مکان مماس است.

۲.۴.۳. رسم دایره با معلوم بودن شعاع دایره و داده‌های دیگر

۲.۴.۳.۱. شعاع دایره؛ نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط، خط؛ زاویه؛ رابطهٔ متری

۲.۴.۳.۱.۱. شعاع دایره، نقطه

۲.۴.۳.۱.۱.۱. شعاع دایره، دو نقطه

۴۰۷. بر دو نقطهٔ A و B دایره‌ای به شعاع R بگذرانید. برای هریک مقدار R، چند دایره می‌توان رسم کرد؟

۴۰۸. دو نقطهٔ A و B داده شده است. دایره‌ای به شعاع معلوم r رسم کنید که مماسهای رسم شده بر دایره از این دو نقطه، با هم، زاویهٔ معلوم ۲m بسازند و تفاضل طول دو مماس مقدار معلوم l باشد.

۲.۴.۳.۱.۲. شعاع دایره، خط

۲.۴.۳.۱.۲.۱. شعاع دایره، دو خط

۴۰۹. دو خط d و ′d در یک صفحه مفروضند. دایره‌ای به شعاع R رسم کنید که بر هر دو خط مزبور مماس باشد.

۴۱۰. دایره‌ای به شعاع معلوم R رسم کنید که دو خط راست معلوم را قطع کند و وترهای حاصل به طولهای معلوم l و ′l باشند.

۴۱۱. دایره‌ای به شعاع معلوم چنان رسم کنید که دو خط داده شده را تحت دو زاویهٔ معلوم m و n قطع کند.

۴۱۲. دو خط داده شده‌اند. دایره‌ای به شعاع معلوم رسم کنید که مرکزش روی یکی از این خطها باشد و خط دیگر را به زاویهٔ معلوم α قطع کند.

۲.۴.۳.۱.۳. شعاع دایره، زاویه

۴۱۳. یک زاویه مفروض است. دایره‌ای به شعاع مفروض رسم کنید که مرکزش روی یک ضلع این زاویه باشد و ضلع دیگر زاویه، وتری با طول مفروض در آن جدا کند.

۴۱۴. به شعاع معلوم r دایره‌ای رسم کنید که ضلعهای یک زاویهٔ داده شده را چنان قطع کند که یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین داشته باشیم که نسبت قاعده‌هایش مقدار معلومی باشد.

۲.۴.۳.۱.۴. شعاع دایره، رابطهٔ متری

۴۱۵. مساحت دایره‌ای به شعاع R را با رسم دایرهٔ دیگری متحدالمرکز با آن، به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم کنید.

۲.۴.۳.۱.۵. شعاع دایره، نقطه، خط

۴۱۶. دایره‌ای به شعاع R رسم کنید که نقطهٔ مفروض A و خط مفروض (a) نسبت به آن، قطب و قطبی باشند.

۴۱۷. دایره‌ای به شعاع معلوم R رسم کنید که از نقطهٔ معلوم A بگذرد و با خط راست معلوم D مماس باشد.

۴۱۸. مطلوب است رسم دایره‌ای به شعاع معلوم که از نقطهٔ مفروضی بگذرد و روی خط مفروضی وتری به طول معلوم l جدا کند.

۴۱۹. خط D و نقطهٔ A در خارج آن مفروض است. دایره‌ای به شعاع معلوم R رسم کنید که با خط D در یکی از نقطه‌های تقاطع آن، زاویهٔ معلوم α ساخته و قوت نقطهٔ A نسبت به این دایره مقدار ثابت k باشد ($\alpha \leq ۹۰^\circ$).

۲.۴.۳.۱.۶. مسأله‌های ترکیبی

۴۲۰. روی خط Δ سه نقطهٔ A، B و C (B بین A و C) چنان انتخاب شده است که $AB = ۲BC = ۲a$ می‌باشد.

۱. اگر R طول معلومی باشد. دو دایره به شعاعهای R و به مرکزهای O و O' چنان رسم کنید که اوّلی بر A و B و دومی بر B و C بگذرد و O و O' هر دو در یک طرف Δ واقع باشند. برحسب مقادیر مختلف R بحث کنید و مکان هندسی نقطه‌های O و O' را وقتی که R تغییر می‌کند، معلوم کنید.

۲. دو دایرهٔ O و O' غیر از B در یک نقطهٔ دیگر D متلاقی می‌شوند. مکان هندسی نقطهٔ D را وقتی که R تغییر می‌کند، تعیین کنید.

۳. اگر J و I بترتیب، نقطه‌های تلاقی OO' با AD و BD باشند، طول BJ را برحسب

a و BD حساب کرده، وقتی R تغییر می‌کند، مکان I را معلوم کنید.

۲.۴.۳.۲. شعاع دایره، دایره و داده‌های دیگر

۲.۴.۳.۲.۱. شعاع دایره، دایره، نقطه

۴۲۱. دایره‌ای رسم کنید که شعاع آن برابر R بوده و از نقطهٔ مفروض A بگذرد و بر دایره‌ای مفروض مماس باشد.

۴۲۲. دایره‌ای رسم کنید که از نقطهٔ A گذشته و به شعاع l بوده و بر دایرهٔ مفروض (O) عمود شود.

۴۲۳. دایره‌ای به شعاع معلوم R چنان رسم کنید که از نقطهٔ معلوم A بگذرد و دایرهٔ معلوم (B,r) را تحت زاویهٔ α قطع کند.

۴۲۴. دایره‌ای به شعاع R' و مجانس با دایرهٔ مفروض (C) به مرکز تجانس S رسم کنید.

۲.۴.۳.۲.۲. شعاع دایره، دایره، خط

۴۲۵. به کمک پرگار و خط‌کش، دایره‌ای به شعاع مفروض، چنان رسم کنید که بر خط‌راست مفروض و دایرهٔ مفروضی مماس باشد.

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۴۲۶. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع ۱۶ میلیمتر و خط D که از مرکز آن می‌گذرد، مفروض است. مطلوب است تعیین دایره‌ای به شعاع ۴ میلیمتر که با دایرهٔ (O) و خط D مماس باشد.

۴۲۷. با شعاعی معلوم، دایره‌ای رسم کنید که به دایره‌ای معلوم مماس باشد و مرکزش روی خطی مشخص باشد.

۴۲۸. دایرهٔ (B,r) و خط DE داده شده‌اند. دایره‌ای به شعاع معلوم R رسم کنید که دایرهٔ (B) را به زاویهٔ m و خط DE را به زاویهٔ n قطع کند.

۲.۴.۳.۲.۳. شعاع دایره، دو دایره

۴۲۹. دایره‌ای به شعاع R رسم کنید که به دو دایرهٔ معلوم مماس باشد.

۴۳۰. دایره‌ای به شعاع L رسم کنید که بر دو دایرهٔ مفروض عمود باشد.

۴۳۱. دو دایرهٔ (A,R_1) و (B,R_2) داده شده‌اند. دایره‌ای به شعاع معلوم R چنان رسم کنید

که دایرهٔ (A) را تحت زاویهٔ m و دایرهٔ (B) را تحت زاویهٔ n قطع کند.

۴۳۲. به شعاع معلوم r دایره‌ای رسم کنید که مماس بر دایره‌ای به مرکز A باشد و دایرهٔ به مرکز B را به زاویهٔ قائمه قطع کند.

۴.۲.۳.۴.۲. شعاع دایره، دسته دایره

۴۳۳. دایره‌ای رسم کنید که جزء دایره‌های دستگاهی بوده و شعاعش L باشد.

۵.۲.۳.۴.۲. رسم دو دایره

۴۳۴. دو دایره رسم کنید که بر هم مماس باشند و بر دایرهٔ داده شده‌ای بترتیب در دو نقطهٔ A و B مماس باشند و شعاعهای x و y آنها در شرطهای زیر صدق کنند:

۱. $x + y = l$

۲. $x - y = d$

۳. $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$

۴. $x^2 + y^2 = k^2$

۵. $x^2 - y^2 = k^2$

۶.۲.۳.۴.۲. مسأله‌های ترکیبی

۴۳۵. دو دایره رسم کنید که بر هم و بر خط AB در دو نقطهٔ A و B مماس باشند، به قسمی که: مجموع یا تفاضل یا نسبت شعاعهای آن دو، مقدار معلومی باشد.

۴۳۶. دو نیمخط OM و ON را به‌وسیلهٔ دو کمان مماس بر هم با داده‌های زیر به هم متصل کنید:

۱. نقطهٔ تماس، شعاع a و زاویهٔ $A\hat{D}B$.

۲. دو نقطهٔ تماس و یک خط مماس بر منحنی اتصال.

۳. نقطهٔ اتصال H و شعاع دو دایره.

۴۳۷. دو دایرهٔ (C) و (C′) به مرکزهای O و O′ و به شعاعهای R و R′ $(R > R')$ در A مماس خارج می‌باشند و M نقطهٔ مفروضی واقع بر مماس مشترک داخلی آنها است.

۱. ثابت کنید دو دایرهٔ T_1 و T_2 وجود دارد که هر دو از M گذشته بر دایره‌های (C) و (C′) مماس می‌باشند، یک راه ترسیم این دو دایره را معلوم کنید.

۲. R و R′ به چه نسبت باشند تا دو دایرهٔ T_1 و T_2 الف) یکدیگر را به زاویهٔ ۶۰ درجه قطع کنند. ب) بر هم عمود باشند.

۵.۲. رسم دایره با معلوم بودن مقطعهای مخروطی

۱.۵.۲. رسم دایره با معلوم بودن سهمی

۴۳۸. دایره‌ای چنان رسم کنید که بر سهمی و محورش در کانون مماس باشد.

بخش ۳

• رسم بیضی، هذلولی و سهمی

۱.۳. رسم بیضی

۱.۱.۳. رسم بیضی با معلوم بودن : نقطه ؛ خط ؛ ۲a، ۲b، ۲c ؛...

۱.۱.۱.۳. نقطه

۱.۱.۱.۱.۳. سه نقطه

۱.۱.۱.۱.۱.۳. دو کانون، یک نقطه

۲.۱.۱.۱.۱.۳. دو رأس، یک نقطه

۳.۱.۱.۱.۱.۳. یک کانون، یک رأس، یک نقطه

۲.۱.۱.۱.۳. چهار نقطه

۱.۲.۱.۱.۱.۳. یک کانون، سه نقطه

۲.۱.۱.۳. خط

۱.۲.۱.۱.۳. دو محور، دو خط مماس

۳.۱.۱.۳. نقطه، خط

۱.۳.۱.۱.۳. یک نقطه، یک یا چند خط

۱.۱.۳.۱.۱.۳. یک نقطه، سه خط

۱.۱.۱.۳.۱.۱.۳. یک کانون، سه خط مماس

۲.۳.۱.۱.۳. دو نقطه، یک یا چند خط

۱.۲.۳.۱.۱.۳. دو نقطه، یک خط

۱.۱.۲.۳.۱.۱.۳. دو کانون، یک خط مماس

۲.۱.۲.۳.۱.۱.۳. دو رأس، یک خط مماس

۳.۱.۱.۳.۲.۱.۳. یک کانون، یک رأس، یک خط مماس
۳.۱.۱.۳.۲.۲. دو نقطه، دو خط
۳.۱.۱.۳.۲.۲.۱. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، دو خط مماس
۳.۱.۱.۳.۲.۲.۲. یک کانون، یک نقطه، دو خط مماس
۳.۱.۱.۳.۲.۲.۳. دو نقطه، دو محور
۳.۱.۱.۳.۲.۳. دو نقطه، سه خط
۳.۱.۱.۳.۲.۳.۱. دو نقطهٔ تماس، محور کانونی، دو خط مماس
۳.۱.۱.۳.۳. سه نقطه، یک یا چند خط
۳.۱.۱.۳.۳.۱. سه نقطه، یک خط
۳.۱.۱.۳.۳.۱.۱. یک کانون، دو نقطه، یک خط مماس
۳.۱.۱.۳.۳.۲. سه نقطه، دو خط
۳.۱.۱.۳.۳.۲.۱. مرکز، دو نقطه، دو محور
۳.۱.۱.۴. نقطه ؛ ۲a، ۲b، ۲c ؛...
۳.۱.۱.۴.۱. دو کانون، ۲b
۳.۱.۱.۴.۲. دو کانون، $\frac{b}{a}$
۳.۱.۱.۴.۳. یک کانون، یک نقطه، a و b
۳.۱.۱.۵. خط ؛ ۲a، ۲b، ۲c ؛ ...
۳.۱.۱.۵.۱. قطر بزرگ، یک خط مماس، ۲a
۳.۱.۱.۶. نقطه ؛ خط ؛ ۲a، ۲b، ۲c ؛...
۳.۱.۱.۶.۱. یک کانون، یک مماس، ۲a و ۲b
۳.۱.۱.۶.۲. یک کانون، یک خط مماس، راستای محور کانونی، ۲a
۳.۱.۱.۶.۳. مرکز، دو خط مماس، ۲a
۳.۱.۱.۶.۴. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، یک خط مماس، ۲a
۳.۱.۱.۶.۵. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، یک خط مماس، ۲c
۳.۱.۲. رسم بیضی با معلوم بودن : مثلث، مثلث و داده‌های دیگر
۳.۱.۲.۱. مثلث
۳.۱.۳. رسم بیضی با تا زدن کاغذ
۳.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۲.۳. رسم هذلولی

۱.۲.۳. رسم هذلولی با معلوم بودن: نقطه؛ خط؛ ۲a، ۲b، ۲c؛...

۱.۱.۲.۳. نقطه

۱.۱.۱.۲.۳. سه نقطه

۱. ۱.۱.۱.۲.۳. دو کانون، یک نقطه

۲. ۱.۱.۱.۲.۳. یک کانون، یک رأس، یک نقطه

۳. ۱.۱.۱.۲.۳. دو رأس، یک نقطه

۲.۱.۱.۲.۳. چهار نقطه

۱. ۲.۱.۱.۲.۳. یک کانون، سه نقطه

۲.۱.۲.۳. خط

۱.۲.۱.۲.۳. یک مجانب، یک هادی، یک مماس

۳.۱.۲.۳. ۲a، ۲b، ۲c؛...

۱.۳.۱.۲.۳. ۲a، ۲b

۲.۳.۱.۲.۳. ۲a، $\frac{c}{a}$

۴.۱.۲.۳. نقطه، خط

۱.۴.۱.۲.۳. یک نقطه، یک یا چند خط

۱. ۱.۴.۱.۲.۳. یک نقطه، دو خط

۱.۱. ۱.۴.۱.۲.۳. یک کانون، یک مماس، یک مجانب

۲.۱. ۱.۴.۱.۲.۳. یک کانون، یک هادی، یک مجانب

۳.۱. ۱.۴.۱.۲.۳. یک نقطه، یک هادی، یک مجانب

۴.۱. ۱.۴.۱.۲.۳. یک نقطه، دو مجانب

۲. ۱.۴.۱.۲.۳. یک نقطه، سه خط

۱.۲. ۱.۴.۱.۲.۳. یک کانون، سه مماس

۲.۲. ۱.۴.۱.۲.۳. یک نقطه، دو هادی، یک مجانب

۲. ۴.۱.۲.۳. دو نقطه، یک یا چند خط

۱. ۲.۴.۱.۲.۳. دو نقطه، یک خط

۱.۱. ۲.۴.۱.۲.۳. دو کانون، یک مماس

۲.۱. ۲.۴.۱.۲.۳. دو کانون، یک مجانب

۳.۲.۱.۴.۲. ۱.۳. یک کانون، مرکز، یک مجانب

۳.۲.۱.۴.۲. ۱.۴. یک کانون، یک رأس، یک مماس

۳.۲.۱.۴.۲. ۱.۵. یک کانون، یک نقطه، یک مجانب

۳.۲.۱.۴.۲. ۱.۶. دو رأس، یک مماس

۳.۲.۱.۴.۲. ۲. دو نقطه، دو خط

۳.۲.۱.۴.۲. ۲.۱. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، دو مماس

۳.۲.۱.۴.۲. ۲.۲. یک کانون، یک نقطه، دو مماس

۳.۲.۱.۴.۲. ۲.۳. دو نقطه، یک هادی، یک مجانب

۳.۲.۱.۴.۳. سه نقطه، یک یا چند خط

۳.۲.۱.۴.۳.۱. سه نقطه، یک خط

۳.۲.۱.۴.۳. ۱.۱. یک کانون، دو نقطه، یک مماس

۳.۲.۱.۴.۳. ۱.۲. سه نقطه، یک مجانب

۳.۲.۱.۴.۳. ۱.۳. سه نقطه، یک هادی

۳.۲.۱.۵. نقطه ؛ ۲a، ۲b، ۲c ؛...

۳.۲.۱.۵.۱. دو کانون، ۲b

۳.۲.۱.۵.۲. دو کانون، $\frac{b}{a}$

۳.۲.۱.۶. خط ؛ ۲a، ۲b، ۲c ؛...

۳.۲.۱.۶.۱. محور کانونی، یک مماس، ۲a

۳.۲.۱.۶.۲. دو خط مجانب، ۲c

۳.۲.۱.۷. نقطه ؛ خط ؛ ۲a، ۲b، ۲c ؛...

۳.۲.۱.۷.۱. یک کانون، یک مجانب، ۲a

۳.۲.۱.۷.۲. یک کانون، یک مماس، ۲a، ۲b

۳.۲.۱.۷.۳. یک کانون، یک مماس، محور کانونی، ۲a

۳.۲.۱.۷.۴. مرکز، دو مماس، ۲a

۳.۲.۱.۷.۵. یک کانون، یک مجانب، ۲c

۳.۲.۱.۷.۶. یک کانون، یک هادی، $\frac{c}{a}$

۳.۲.۱.۷.۷. یک رأس، یک مجانب، $\frac{c}{a}$

۳.۲.۱.۷.۸. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، یک مماس، ۲a

۳.۲.۱.۷.۹. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، یک مماس، ۲c

۳.۲.۲. رسم هذلولی با معلوم بودن : مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۳.۲.۲.۱. مثلث، یک کانون

۳.۲.۳. رسم هذلولی با تازدن کاغذ

۳.۳. رسم سهمی

۳.۳.۱. رسم سهمی با معلوم بودن : نقطه ؛ خط ؛ پارامتر ؛ تحت مماس، تحت قائم ؛...

۳.۳.۱.۱. نقطه

۳.۳.۱.۱.۱. سه نقطه

۳.۳.۱.۱.۱.۱. کانون، دو نقطه

۳.۳.۱.۲. خط

۳.۳.۱.۲.۱. سه خط

۳.۳.۱.۲.۱.۱. هادی، دو مماس

۳.۳.۱.۲.۱.۲. سه مماس

۳.۳.۱.۲.۲. چهار خط

۳.۳.۱.۲.۲.۱. چهار مماس

۳.۳.۱.۳. پارامتر ؛ تحت مماس، تحت قائم

۳.۳.۱.۴. نقطه، خط

۳.۳.۱.۴.۱. یک نقطه، یک یا چند خط

۳.۳.۱.۴.۱.۱. یک نقطه، دو خط

۳.۳.۱.۴.۱.۱.۱. کانون، دو مماس

۳.۳.۱.۴.۱.۱.۲. کانون، محور، یک مماس

۳.۳.۱.۴.۱.۱.۳. نقطهٔ تماس، محور، یک مماس

۳.۳.۱.۴.۱.۱.۴. نقطهٔ تماس، هادی، یک مماس

۳.۳.۱.۴.۱.۱.۵. یک نقطه، هادی، یک مماس

۳.۳.۱.۴.۱.۱.۶. یک نقطهٔ تماس، دو نقطه

۳.۳.۱.۴.۱.۲. یک نقطه، سه خط

۳.۳.۱.۴.۱.۲.۱. یک نقطهٔ تماس، سه مماس

۳.۳.۱.۴.۲. دو نقطه، یک یا چند خط
۳.۳.۱.۴.۲.۱. دو نقطه، یک خط
۳.۳.۱.۴.۲.۱.۱. کانون، یک نقطه، یک مماس
۳.۳.۱.۴.۲.۱.۲. کانون، یک نقطهٔ تماس، یک مماس
۳.۳.۱.۴.۲.۱.۳. دو نقطه، هادی
۳.۳.۱.۴.۲.۱.۴. دو نقطه، محور
۳.۳.۱.۴.۲.۲. دو نقطه، دو خط
۳.۳.۱.۴.۲.۲.۱. دو نقطهٔ تماس، دو خط مماس
۳.۳.۱.۴.۳. سه نقطه، یک یا چند خط
۳.۳.۱.۴.۳.۱. سه نقطه، یک خط
۳.۳.۱.۴.۳.۱.۱. سه نقطه، محور
۳.۳.۱.۵. نقطه ؛ پارامتر ؛ تحت مماس
۳.۳.۱.۶. خط ؛ پارامتر ؛ تحت مماس، تحت قائم
۳.۳.۱.۶.۱. محور، خط قائم، پارامتر
۳.۳.۱.۷. نقطه ؛ خط ؛ پارامتر ؛ تحت مماس، تحت قائم
۳.۳.۱.۷.۱. کانون، محور، پارامتر
۳.۳.۱.۷.۲. نقطه، محور، تحت مماس
۳.۳.۱.۷.۳. یک نقطهٔ تماس، یک مماس، تحت مماس
۳.۳.۲. رسم سهمی با تازدن کاغذ

بخش ۳. رسم بیضی، هذلولی و سهمی

۱.۳. رسم بیضی

۱.۱.۳. رسم بیضی با معلوم بودن: نقطه؛ خط؛ ۲a، ۲b، ۲c؛...

۱.۱.۱.۳. نقطه

۱.۱.۱.۱.۳. سه نقطه

۱.۱.۱.۱.۱.۳. دو کانون، یک نقطه

۴۳۹. دو کانون و یک نقطه از یک بیضی داده شده است. آن را رسم کنید.

۲.۱.۱.۱.۱.۳. دو رأس، یک نقطه

۴۴۰. رأسهای یک محور و یک نقطه از بیضی داده شده است. آن را رسم کنید.

۳.۱.۱.۱.۱.۳. یک کانون، یک رأس، یک نقطه

۴۴۱. یک کانون، یک رأس محور کانونی و یک نقطه از یک بیضی داده شده است. آن را رسم کنید.

۴۴۲. از یک بیضی یک رأس نظیر قطر کوچکتر (B)، یک نقطهٔ M و یک کانون F در دست است. آن را رسم کنید (کانون دیگر را به‌دست آورید).

۲.۱.۱.۱.۳. چهار نقطه

۱.۲.۱.۱.۱.۳. یک کانون، سه نقطه

۴۴۳. یک بیضی با داده‌های زیر بسازید:
یک کانون و سه نقطه

۳.۱.۱.۲. خط

۳.۱.۱.۲.۱. دو محور، دو خط مماس

۴۴۴. بیضی را با معلوم بودن امتداد محورهایش و دو مماس بسازید.

۳.۱.۱.۳. نقطه، خط

۳.۱.۱.۳.۱. یک نقطه، خط

۳.۱.۱.۳.۱.۱. یک نقطه، سه خط

۳.۱.۱.۳.۱.۱.۱. یک کانون، سه مماس

۴۴۵. یک کانون و سه خط مماس از یک بیضی داده شده است. بیضی را رسم کنید.

۳.۱.۱.۳.۲. دو نقطه، یک یا چند خط

۳.۱.۱.۳.۲.۱. دو نقطه، یک خط

۳.۱.۱.۳.۲.۱.۱. دو کانون، یک خط مماس

۴۴۶. یک بیضی با داده‌های زیر بسازید : دو کانون و یک خط مماس

۳.۱.۱.۳.۲.۱.۲. دو رأس، یک خط مماس

۴۴۷. دو رأس از یک محور و یک خط مماس بر یک بیضی داده شده است. بیضی را رسم کنید.

۳.۱.۱.۳.۲.۱.۳. یک رأس، یک کانون، یک خط مماس

۴۴۸. یک رأس کانونی و یک خط مماس از یک بیضی داده شده است. بیضی را رسم کنید.

۴۴۹. یک رأس از قطر کوچک، یک کانون و یک خط مماس بر بیضی داده شده است. آن را رسم کنید.

۳.۱.۱.۳.۲.۲. دو نقطه، دو خط

۳.۱.۱.۳.۲.۲.۱. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، دو خط مماس

۴۵۰. یک کانون، دو خط مماس و یک نقطهٔ تماس از یک بیضی داده شده است. آن را رسم کنید.

۴۵۱. F یک کانون و M یک نقطه از بیضی هستند. Δ بر بیضی در نقطهٔ M مماس است. کانون دیگر روی خط D است. بیضی را مشخص کنید.

۳.۱.۱.۳.۲.۲.۲. یک کانون، یک نقطه، دو خط مماس

۴۵۲. یک کانون، دو خط مماس و یک نقطه از یک بیضی داده شده است. آن را رسم کنید.

۳.۱.۱.۳.۲.۲.۳. دو نقطه، دو محور

۴۵۳. بیضی را با معلوم بودن امتداد محورهایش و دو نقطه، رسم کنید.

۳.۱.۱.۳.۲.۳. دو نقطه، سه خط

۳.۱.۱.۳.۲.۳.۱. دو نقطهٔ تماس، محور کانونی، دو خط مماس

۴۵۴. یک بیضی با داده‌های زیر رسم کنید:

دو خط مماس بر بیضی، نقطه‌های تماس آنها و خطی که قطر بزرگ بیضی روی آن است.

۳.۱.۱.۳.۳. سه نقطه، یک یا چند خط

۳.۱.۱.۳.۳.۱. سه نقطه، یک خط

۳.۱.۱.۳.۳.۱.۱. یک کانون، دو نقطه، یک خط مماس

۴۵۵. یک کانون، یک خط مماس و دو نقطه از یک بیضی داده شده است. آن را رسم کنید.

۳.۱.۱.۳.۳.۲. سه نقطه، دو خط

۳.۱.۱.۳.۳.۲.۱. مرکز، دو نقطه، دو محور

۴۵۶. دو نقطهٔ M و M′ از بیضی، مرکز و امتداد محورهای آن معلوم است. بیضی را رسم کنید.

۳.۱.۱.۴. نقطه؛ ۲a، ۲b، ۲c؛...

۳.۱.۱.۴.۱. دو کانون، ۲b

۴۵۷. از یک بیضی دو کانون و طول قطر کوچک آن (۲b) داده شده است. بیضی را رسم کنید.

۳.۱.۱.۴.۲. دو کانون، $\frac{b}{a}$

۴۵۸. دو کانون یک بیضی و نسبت قطرهای آن یعنی $\frac{b}{a}$ داده شده است. بیضی را رسم کنید.

۳.۱.۱.۴.۳. یک کانون، یک نقطه، a و b

۴۵۹. از یک بیضی، یک کانون و یک نقطه و همچنین a و b معلومند (a و b نصف قطرهای بیضی). بیضی را رسم کنید.

۳.۱.۱.۵. خط؛ ۲a، ۲b، ۲c؛...

۳.۱.۱.۵.۱. قطر بزرگ، یک خط مماس، ۲a

۴۶۰. از یک بیضی، قطر بزرگ (از نظر وضع و اندازه) و یک خط مماس داده شده است. آن را رسم کنید.

۳.۱.۱.۶. نقطه؛ خط؛ ۲a، ۲b، ۲c؛...

۳.۱.۱.۶.۱. یک کانون، یک مماس، ۲a و ۲b

۴۶۱. یک کانون، یک خط مماس، ۲a و ۲b از یک بیضی داده شده است. بیضی را رسم کنید.

۳.۱.۱.۶.۲. یک کانون، یک خط مماس، راستای محور کانونی، ۲a

۴۶۲. یک کانون، یک خط مماس، راستای محور کانونی یک بیضی و ۲a طول قطر بزرگ آن داده شده است. بیضی را رسم کنید.

۳.۱.۱.۶.۳. مرکز، دو خط مماس، ۲a

۴۶۳. مرکز، دو خط مماس و ۲a از یک بیضی داده شده است. آن را رسم کنید.

۳.۱.۱.۶.۴. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، یک خط مماس، ۲a

۴۶۴. یک کانون، یک خط مماس و نقطهٔ تماس آن و طول قطر بزرگ یعنی ۲a از یک بیضی داده شده است. بیضی را رسم کنید.

۳.۱.۱.۶.۵. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، یک خط مماس، ۲c

۴۶۵. یک بیضی با داده‌های زیر رسم کنید :
یک کانون، یک خط مماس و نقطهٔ تماس آن و اندازهٔ ۲c (فاصلهٔ کانونی).

۳.۱.۲. رسم بیضی با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۳.۱.۲.۱. مثلث

۴۶۶. در مثلثی مفروض، یک بیضی با حداکثر مساحت محاط کنید.

۳.۱.۳. رسم بیضی با تازدن کاغذ

۴۶۷. بیضی را با تازدن کاغذ رسم کنید.

۳.۱.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۶۸. بیضی را می‌توان به وسیلهٔ نقطه‌هایی که دو قطر مزدوج و زاویهٔ بین آنها را مشخص می‌کند، رسم کرد.

۳.۲. رسم هذلولی

۳.۲.۱. رسم هذلولی با معلوم بودن: نقطه؛ خط؛ ۲a، ۲b،۲c؛...

۳.۲.۱.۱. نقطه

۳.۲.۱.۱.۱. سه نقطه

۳.۲.۱.۱.۱.۱. دو کانون، یک نقطه

۴۶۹. دو کانون و یک نقطه از یک هذلولی داده شده است. هذلولی را رسم کنید.

۳.۲.۱.۱.۱.۲. یک کانون، یک رأس، یک نقطه

۴۷۰. یک کانون، یک رأس مجاور آن و یک نقطه از یک هذلولی داده شده است. آن را رسم کنید.

۳.۲.۱.۱.۱.۳. دو رأس، یک نقطه

۴۷۱. هذلولی را با معلوم بودن رأسهای A و ′A و یک نقطهٔ M از آن، رسم کنید.

۳.۲.۱.۱.۲. چهار نقطه

۳.۲.۱.۱.۲.۱. یک کانون، سه نقطه

۴۷۲. کانون و سه نقطه از یک هذلولی داده شده است. آن را رسم کنید.

۳.۲.۱.۲. خط

۳.۲.۱.۲.۱. یک مجانب، یک هادی، یک مماس

۴۷۳. یک مجانب، یک هادی و یک مماس از یک هذلولی داده شده است. آن را رسم کنید.

۳.۲.۱.۳. ۲a، ۲b، ۲c؛...

۳.۲.۱.۳.۱. ۲a، ۲b

۴۷۴. هذلولی را با معلوم بودن ۲a و ۲b رسم کنید.

۳.۲.۱.۳.۲. ۲a، $\frac{c}{a}$

۴۷۵. از یک هذلولی ۲a و خروج از مرکز $e = \frac{c}{a}$ معلوم است. آن را رسم کنید.

۳.۲.۱.۴. نقطه، خط

۳.۲.۱.۴.۱. یک نقطه، یک یا چند خط

۳.۲.۱.۴.۱.۱. یک نقطه، دو خط

۳.۲.۱.۴.۱.۱.۱. یک کانون، یک مماس، یک مجانب

۴۷۶. هذلولی را با معلوم بودن یک کانون، یک مماس و یک مجانب رسم کنید.

۳.۲.۱.۴.۱.۱.۲. یک کانون، یک هادی، یک مجانب

۴۷۷. یک کانون، هادی آن و امتداد یک مجانب از یک هذلولی داده شده است. آن را رسم کنید.

۳.۲.۱.۴.۱.۱.۳. یک نقطه، یک هادی، یک مجانب

۴۷۸. مطلوب است رسم یک هذلولی با معلوم بودن هادی D و یک مجانب X و یک نقطهٔ M.

۳.۲.۱.۴.۱.۱.۴. یک نقطه، دو مجانب

۴۷۹. مطلوب است رسم یک هذلولی با معلوم بودن یک نقطه و مجانبهایش.

۳.۲.۱.۴.۱.۲. یک نقطه، سه خط

۳.۲.۱.۴.۱.۲.۱. یک کانون، سه مماس

۴۸۰. یک کانون و سه مماس از یک هذلولی داده شده است. هذلولی را رسم کنید.

۳.۲.۱.۴.۱.۲.۲. یک نقطه، دو هادی، یک مجانب

۴۸۱. مطلوب است رسم یک هذلولی، با معلوم بودن دو هادی D و D′ و یک امتداد مجانب X و یک نقطهٔ M.

۳.۲.۱.۴.۲. دو نقطه، یک یا چند خط

۳.۲.۱.۴.۲.۱. دو نقطه، یک خط

۳.۲.۱.۴.۲.۱.۱. دو کانون، یک مماس

۴۸۲. از یک هذلولی، دو کانون و یک خط مماس داده شده است. هذلولی را رسم کنید.

۳.۲.۱.۴.۲.۱.۲. دو کانون، یک مجانب

۴۸۳. دو کانون و امتداد یک خط مجانب از یک هذلولی داده شده است. آن را رسم کنید.

۳.۲.۱.۴.۲.۱.۳. یک کانون، مرکز، یک مجانب

۴۸۴. O مرکز، F یک کانون و Δ یک مجانب هذلولی است. هذلولی را مشخص کنید.

۳.۲.۱.۴.۲.۱.۴. یک کانون، یک رأس، یک مماس

۴۸۵. یک رأس، یک کانون و یک خط مماس از یک هذلولی داده شده است. آن را رسم کنید.

۳.۲.۱.۴.۲.۱.۵. یک کانون، یک نقطه، یک مجانب

۴۸۶. مطلوب است رسم یک هذلولی با معلوم بودن یک کانون F، یک مجانب X و یک نقطهٔ M.

۳.۲.۱.۴.۲.۱.۶. دو رأس، یک مماس

۴۸۷. هذلولی را با معلوم بودن رأسها و یک خط مماس رسم کنید.

۳.۲.۱.۴.۲.۲. دو نقطه، دو خط

۳.۲.۱.۴.۲.۲.۱. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، دو مماس

۴۸۸. یک کانون، دو مماس و یک نقطهٔ تماس از یک هذلولی داده شده است. آن را رسم کنید.

۳.۲.۱.۴.۲.۲.۲. یک کانون، یک نقطه، دو مماس

۴۸۹. یک کانون، دو مماس و یک نقطه از یک هذلولی داده شده است. آن را رسم کنید.

۳.۲.۱.۴.۲.۲.۳. دو نقطه، یک هادی، یک مجانب

۴۹۰. مطلوب است رسم یک هذلولی با معلوم بودن یک هادی D، یک امتداد مجانب X و دو نقطهٔ A و B.

۳.۲.۱.۴.۳. سه نقطه، یک یا چند خط

۳.۲.۱.۴.۳.۱. سه نقطه، یک خط

۳.۲.۱.۴.۳.۱.۱. یک کانون، دو نقطه، یک خط مماس

۴۹۱. یک کانون، یک خط مماس و دو نقطه از یک هذلولی داده شده است. هذلولی را رسم کنید.

۳.۲.۱.۴.۳.۱.۲. سه نقطه، یک مجانب

۴۹۲. هذلولی را با معلوم بودن یک مجانب X و سه نقطهٔ A، B و C رسم کنید.

۳.۲.۱.۴.۳.۱.۳. سه نقطه، یک هادی

۴۹۳. مطلوب است رسم یک بیضی و یا یک هذلولی، با معلوم بودن یک خط هادی D و سه نقطهٔ A، B و C.

۳.۲.۱.۵. نقطه؛ ۲a، ۲b، ۲c؛...

۳.۲.۱.۵.۱. دو کانون، ۲b

۴۹۴. از یک هذلولی، دو کانون و طول قطر ناکانونی داده شده است. آن را رسم کنید.

۳.۲.۱.۵.۲. دو کانون، $\frac{b}{a}$

۴۹۵. یک هذلولی با داده‌های زیر رسم کنید:

دو کانون و نسبت $\frac{b}{a}$.

۳.۲.۱.۶. خط؛ ۲a، ۲b، ۲c؛...

۳.۲.۱.۶.۱. محور کانونی، یک مماس، ۲a

۴۹۶. یک هذلولی با داده‌های زیر رسم کنید:

قطر کانونی (AA') از نظر وضع و اندازه و یک خط مماس بر هذلولی.

۳.۲.۱.۶.۲. دو خط مجانب، ۲c

۴۹۷. از یک هذلولی فاصلهٔ کانونی و دو خط مجانب داده شده است. هذلولی را رسم کنید.

۳.۲.۱.۷. نقطه؛ خط؛ ۲a، ۲b، ۲c؛...

۳.۲.۱.۷.۱. یک کانون، یک مجانب، ۲a

۴۹۸. از یک هذلولی، یک مجانب، یک کانون و ۲a داده شده است. آن را رسم کنید.

۳.۲.۱.۷.۲. یک کانون، یک مماس، ۲a، ۲b

۴۹۹. هذلولی را با معلومات زیر بسازید:

یک کانون، یک مماس، ۲a و ۲b.

۳.۲.۱.۷.۳. یک کانون، یک مماس، محور کانونی، ۲a

۵۰۰. یک هذلولی با داده‌های زیر رسم کنید:

یک کانون، یک خط مماس، محور کانونی و اندازهٔ قطر بزرگ آن یعنی ۲a.

۴.۷.۱.۲.۳. مرکز، دو مماس، ۲a

۵۰۱. مرکز، دو مماس و ۲a از یک هذلولی داده شده است. هذلولی را رسم کنید.

۵.۷.۱.۲.۳. یک کانون، یک مجانب، ۲c

۵۰۲. از یک هذلولی یک کانون، فاصلهٔ کانونی و یک خط مجانب داده شده است. هذلولی را رسم کنید.

۶.۷.۱.۲.۳. یک کانون، یک خط هادی، $\frac{c}{a}$

۵۰۳. از یک هذلولی یک کانون، خط هادی نظیر این کانون و خروج از مرکز داده شده است. آن را رسم کنید.

۷.۷.۱.۲.۳. یک رأس، یک مجانب، $\frac{c}{a}$

۵۰۴. نسبت $\frac{c}{a}$، یک رأس و یک خط مجانب از هذلولی مفروضند. آن را مشخص کنید.

۸.۷.۱.۲.۳. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، یک مماس، ۲a

۵۰۵. یک هذلولی با داده‌های زیر رسم کنید:
یک کانون، یک خط مماس و نقطهٔ تماس آن و اندازهٔ ۲a.

۹.۷.۱.۲.۳. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، یک مماس، ۲c

۵۰۶. یک هذلولی با داده‌های زیر رسم کنید:
یک کانون، یک خط مماس، نقطهٔ تماس آن و ۲c فاصلهٔ کانونی.

۲.۲.۲.۳. رسم هذلولی با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۱.۲.۲.۲.۳. مثلث، یک کانون

۵۰۷. مطلوب است رسم یک هذلولی و یا یک بیضی که بر ضلعهای مثلث ABC مماس بوده

و کانون F نیز معلوم است. برحسب وضع نقطهٔ F دربارهٔ شکل مقطع مخروطی بحث کنید.

۳.۲.۳. رسم هذلولی با تازدن کاغذ

۵۰۸. یک هذلولی با تازدن کاغذ رسم کنید.

۳.۳. رسم سهمی

۱.۳.۳. رسم سهمی با معلوم بودن: نقطه؛ خط؛ پارامتر؛ تحت مماس، تحت قائم؛...

۱.۱.۳.۳. نقطه

۱.۱.۱.۳.۳. سه نقطه

۱.۱.۱.۱.۳.۳. کانون، دو نقطه

۵۰۹. یک سهمی را با معلوم بودن دو نقطه و کانون رسم کنید.

۲.۱.۳.۳. خط

۱.۲.۱.۳.۳. سه خط

۱.۱.۲.۱.۳.۳. هادی، دو مماس

۵۱۰. هادی و دو مماس از یک سهمی داده شده است. سهمی را رسم کنید.

۲.۱.۲.۱.۳.۳. سه مماس

۵۱۱. خط مماس بر رأس و دو خط مماس بر یک سهمی داده شده است. سهمی را رسم کنید.

۳.۳.۱.۲.۲. چهار خط

۳.۳.۱.۲.۲.۱. چهار مماس

۵۱۲. یک سهمی چنان رسم کنید، که بر چهار خط مفروض مماس باشد.

۳.۳.۱.۳. پارامتر؛ تحت مماس، تحت قائم

۵۱۳. اندازهٔ تحت مماس و تحت قائم نظیر یک نقطه از سهمی و پارامتر سهمی معلوم است، آن را رسم کنید.

۳.۳.۱.۴. نقطه، خط

۳.۳.۱.۴.۱. یک نقطه، یک یا چند خط

۳.۳.۱.۴.۱.۱. یک نقطه، دو خط

۳.۳.۱.۴.۱.۱.۱. کانون، دو مماس

۵۱۴. کانون و دو مماس از یک سهمی داده شده است. سهمی را رسم کنید.

۳.۳.۱.۴.۱.۱.۲. کانون، محور، یک مماس

۵۱۵. یک سهمی با داده‌های زیر رسم کنید:

کانون، محور سهمی و یک خط مماس.

۳.۳.۱.۴.۱.۱.۳. نقطهٔ تماس، محور، یک مماس

۵۱۶. یک سهمی با داده‌های زیر رسم کنید:

محور سهمی، یک خط مماس و نقطهٔ تماس آن.

۳.۳.۱.۴.۱.۱.۴. نقطهٔ تماس، هادی، یک مماس

۵۱۷. خط هادی، یک خط مماس و یک نقطهٔ تماس از یک سهمی داده شده است. سهمی را رسم کنید.

۳.۳.۱.۴.۱.۱.۵. یک نقطه، هادی، یک مماس

۵۱۸. سهمی را با معلوم بودن یک نقطه، خط هادی و یک خط مماس رسم کنید.

۳.۳.۱.۴.۱.۱.۶. یک نقطهٔ تماس، دو مماس

۵۱۹. مماس بر رأس و یک مماس دیگر با نقطهٔ تماس از یک سهمی داده شده است. سهمی

را رسم کنید.

۳.۳.۱.۴.۱.۲. یک نقطه، سه خط

۳.۳.۱.۴.۱.۲.۱. یک نقطهٔ تماس، سه مماس

۵۲۰. مطلوب است رسم یک سهمی در صورتی که سه خط مماس و نقطهٔ تماس یکی از آنها معلوم باشد.

۳.۳.۱.۴.۲. دو نقطه، یک یا چند خط

۳.۳.۱.۴.۲.۱. دو نقطه، یک خط

۳.۳.۱.۴.۲.۱.۱. کانون، یک نقطه، یک مماس

۵۲۱. سهمی را با معلوم بودن یک نقطه و کانون و یک مماس، رسم کنید.

۳.۳.۱.۴.۲.۱.۲. کانون، یک نقطهٔ تماس، یک مماس

۵۲۲. کانون و یک مماس و نقطهٔ تماس از یک سهمی داده شده است. آن را رسم کنید.

۳.۳.۱.۴.۲.۱.۳. دو نقطه، هادی

۵۲۳. هادی و دو نقطه از یک سهمی داده شده است. آن را رسم کنید.

۳.۳.۱.۴.۲.۱.۴. دو نقطه، محور

۵۲۴. سهمی را با معلوم بودن محور و دو نقطهٔ A و B رسم کنید.

۳.۳.۱.۴.۲.۲. دو نقطه، دو خط

۳.۳.۱.۴.۲.۲.۱. دو نقطهٔ تماس، دو خط مماس

۵۲۵. مطلوب است رسم یک سهمی، درصورتی که دو خط مماس و نقطهٔ تماس آنها معلوم باشد.

۳.۳.۱.۴.۳. سه نقطه، یک یا چند خط

۳.۳.۱.۴.۳.۱. سه نقطه، یک خط

۳.۳.۱.۴.۳.۱.۱. سه نقطه، محور

۵۲۶. سهمی را با معلوم بودن سه نقطهٔ A، B، C، و D امتداد محور رسم کنید.

۵.۱.۳.۳. نقطه؛ پارامتر؛ تحت مماس

۵۲۷. تصویر یک نقطه از سهمی روی محور سهمی، اندازهٔ تحت مماس نظیر آن نقطه و پارامتر سهمی داده شده است. سهمی را رسم کنید.

۶.۱.۳.۳. خط؛ پارامتر؛ تحت مماس، تحت قائم

۱.۶.۱.۳.۳. محور، خط قائم، پارامتر

۵۲۸. یک سهمی با داده‌های زیر رسم کنید:

محور سهمی، یک خط قائم بر سهمی و پارامتر سهمی.

۷.۱.۳.۳. نقطه؛ خط؛ پارامتر؛ تحت مماس، تحت قائم

۱.۷.۱.۳.۳. کانون، محور، پارامتر

۵۲۹. کانون، پارامتر و محور سهمی داده شده است. آن را رسم کنید.

۲.۷.۱.۳.۳. نقطه، محور، تحت مماس

۵۳۰. سهمی را با داده‌های زیر رسم کنید:

محور سهمی، یک نقطه از سهمی و اندازهٔ تحت مماس سهمی نظیر آن نقطه.

۳.۷.۱.۳.۳. یک نقطهٔ تماس، یک مماس، تحت مماس

۵۳۱. یک سهمی با داده‌های زیر رسم کنید:

یک خط مماس و نقطهٔ تماس آن، اندازهٔ تحت مماس نظیر نقطهٔ داده شده و پارامتر سهمی.

۲.۳.۳. رسم سهمی با تازدن کاغذ

۵۳۲. سهمی را با تازدن کاغذ رسم کنید.

راهنمایی و حل

از آن‌جا که به گفتهٔ جورج‌پولیا، j.Polya استاد بزرگ آموزش ریاضی، «دانشجو می‌تواند برای حل مسأله‌ها از کار مستقل و شخصی خود تا جایی که ممکن است، استفاده نماید ؛ ولی درصورتی که او را با مسأله‌ای که باید حل کند، تنها بگذارند و به او کمک نکنند، یا این کمک به اندازهٔ کافی نباشد، ممکن است اصلاً نتواند پیشرفت کند ؛ و اگر بیش از اندازه به او یاری شود، دیگر کاری باقی نمی‌ماند که او انجام دهد». در این مجموعه، برخی از مسأله‌ها حل شده‌اند، تعدادی راهنمایی برای حل دارند و حل برخی دیگر از مسأله‌ها به عهده دانش‌پژوهان واگذار شده است تا این جلد از دایرةالمعارف بتواند نقش و سهمی در تقویت قوه تفکر و خلاقیت ذهنی آنان داشته باشد.

بدیهی است که راه‌حلها و راهنماییهای ارائه شده در این مجموعه، بهترین و یا ساده‌ترین راه‌حل یا راهنمایی نمی‌باشند ؛ و به‌طور یقین، دانشجویان با دقت‌نظر و بهره‌گیری از ذهن خلاق خویش، به راه‌حلهایی ساده‌تر و یا جالبتر از راه‌حلهای موجود در این مجموعه دست خواهند یافت.

هر چند سعی فراوان شده است تا مطالب این مجموعه خالی از اشتباه باشند، امّا ممکن است باز هم اشکالها و نادرستیهایی وجود داشته باشند، بدین جهت از دانش‌آموزان، دانشجویان، استادان، ریاضیدانان و دیگر علاقمندان به هندسه درخواست می‌شود نظرهای ارشادی و اصلاحی خود، همچنین راه‌حلهای جالبتر یا ساده‌تر برای مسأله‌های حل شده، و راه‌حلهای مناسب و جالب برای مسأله‌های حل نشده را به نشانی مؤلف یا ناشر ارسال فرمایند تا برای هرچه پربارتر کردن محتوای این مجموعه و رفع کاستیهای آن مورد استفاده قرار گیرد ؛ ضمن سپاسگزاری از این لطف و همکاری، برای ارج نهادن به تلاشهایی که در این راه انجام خواهد شد ؛ بهترین و جالبترین راه‌حل برای هر مسأله، همچنین تعمیم قضیه‌ها یا مسأله‌ها به نام فرستنده آن، در چاپهای بعدی دایرةالمعارف درج خواهد شد.

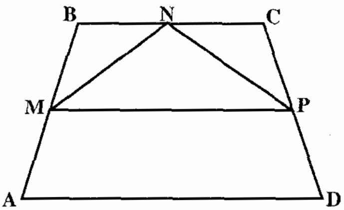
راهنمایی و حل مسأله‌های بخش ۱. رسم چندضلعی

۱.۱. رسم چهارضلعی

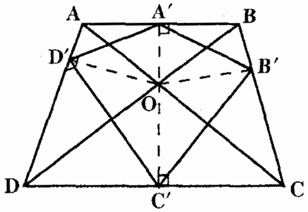
۱.۱.۱. رسم چهارضلعی در حالت کلی

۱.۱.۱.۱. رسم چهارضلعی با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ قطر؛...

۱.۱.۱.۱.۱. نقطه

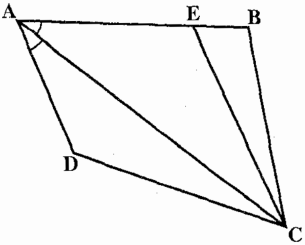


۱. مسأله را حل شده، و چهارضلعی ABCD را که در آن AB = BC = CD است جواب مسأله و نقطه‌های وسط ضلعهای AB ، BC و CD را بترتیب M ، N و P می‌نامیم و این سه نقطه را به‌هم وصل می‌کنیم. مثلثهای BMN و CNP متساوی‌الساقین می‌باشند ؛ بنابراین عمودمنصفهای MN و NP بترتیب از B و C می‌گذرند. بعلاوه ...



۲. مسأله را حل شده و چهارضلعی ABCD را جواب مسأله می‌گیریم و تصویر نقطهٔ O ، محل برخورد قطرهای آن روی ضلعهای AB ، BC، CD و DA را بترتیب A′ ، B′ ، C′ و D′ می‌نامیم. چهارضلعی A′B′C′D′ معلوم است و ...

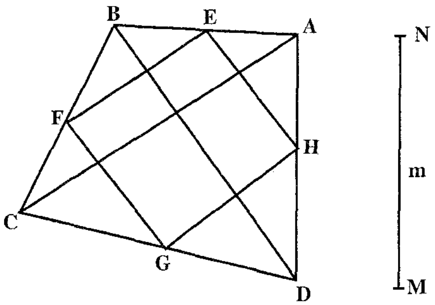
۲.۱.۱.۱.۱. ضلع



۳. اگر ABCD چهارضلعی خواسته شده باشد و قطر AC نیمساز زاویهٔ A فرض شود، چون بر روی AB پاره‌خط AE را به اندازهٔ AD جدا کنیم (یا اگر AD بزرگتر از AB باشد، AB را به اندازهٔ AD

امتداد داده و $AE = AD$ می‌گیریم)، دو مثلث ADC و AEC متساوی‌اند (دو ضلع و زاویهٔ بین آنها) و در نتیجه $CD = CE$ است. مثلث EBC را با معلوم بودن سه ضلع می‌توان رسم کرد. بنابراین راه حل زیر به دست می‌آید:
ابتدا مثلث BEC را با در دست داشتن اندازهٔ سه ضلع آن، BC ، $EC = DC$ و $EB = AB - AD$ رسم کرده و ضلع BE را از نقطهٔ E تا نقطهٔ A به اندازهٔ AB (ضلع داده شدهٔ چهارضلعی) امتداد می‌دهیم. A را به نقطهٔ C وصل می‌کنیم و مثلث ADC را که دو ضلع دیگر آن یعنی AD و DC معلوم است، رسم می‌کنیم. با تعیین نقطهٔ D ، چهارضلعی رسم شده است.

۱.۱.۱.۱.۳. نقطه، پاره‌خط



۴. چهارضلعی جواب مسأله را ABCD و وسطهای ضلعهای آن را E ، F ، G و H می‌نامیم (شکل). چهارضلعی EFGH یک متوازی‌الاضلاع است که ضلعهایش با قطرهای چهارضلعی داده شده موازی است، در ضمن ضلع AD با پاره‌خط MN به‌طول m مساوی و با آن موازی است. بنابراین برای رسم چهارضلعی، متوازی‌الاضلاع EFGH را رسم می‌کنیم. از نقطهٔ H که وسط ضلع AD است، خطی موازی پاره‌خط MN رسم می‌کنیم و در دوطرف آن $HA = HD = \frac{m}{۲}$ را جدا می‌کنیم. A و D دو رأس چهارضلعی هستند. از A به E وصل می‌کنیم و به اندازهٔ خود ادامه می‌دهیم تا رأس B به‌دست آید. همچنین از نقطهٔ B به نقطهٔ G وصل می‌کنیم و پاره‌خط DG را به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا رأس C به‌دست آید. از C به B وصل می‌کنیم. ABCD چهارضلعی خواسته شده است.

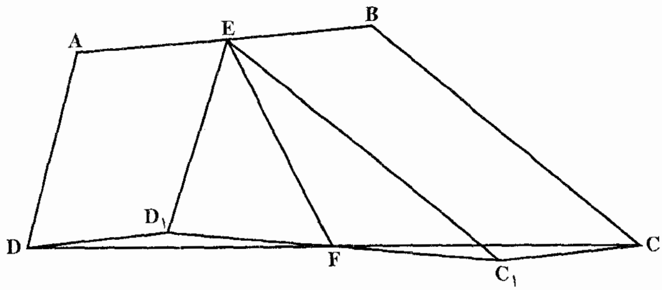
۱.۱.۱.۱.۴. ضلع، پاره‌خط

۵. **راه اول.** فرض کنید که چهارضلعی خواسته شده ABCD باشد (شکل). انتقال $T_{\overrightarrow{DN}}$ را روی ضلع DA و انتقال $T_{\overrightarrow{DN}}$ را روی ضلع CB انجام می‌دهیم. در این حالت از نقطه N

سه پاره‌خط NA_1 ، NM و NB_1 ناشی می‌شود که طول آنها معلوم است. به آسانی می‌توان نشان داد که M میانگاه پاره‌خط A_1B_1 است. در حقیقت طول پاره‌خطهای AA_1 و BB_1 برابر $\frac{1}{2}DC$ بوده و این پاره‌خطها موازی DC هستند. بدین ترتیب چهارضلعی A_1AB_1B متوازی‌الاضلاع خواهد بود. نقطهٔ M میانگاه قطر AB بوده و از این‌رو M به قطر A_1B_1 متعلق بوده و میانگاه آن محسوب می‌شود. بدین ترتیب در مثلث NA_1B_1 ضلعهای NA_1 و NB_1 و میانهٔ محصور بین آنها معلوم هستند. برای رسم این مثلث نقطهٔ N_1 را که متقارن N نسبت به مرکز تقارن M است، مشخص می‌کنیم. بدیهی است که $A_1N_1 = NB_1$ است. مثلث NN_1A_1 را می‌توان با سه ضلع معلوم، یعنی $A_1N_1 = NB_1 = CB$ ، $NA_1 = DA$ و $NN_1 = 2NM$ رسم کرد. حال چهارضلعی خواسته شده را رسم می‌کنیم.

پاره‌خط NN_1 را به وسیلهٔ نقطهٔ M به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. با مرکز تقارن M، نقطهٔ B_1 را متقارن نقطهٔ A_1 رسم می‌کنیم. مثلثهای A_1MA و B_1MB را به‌وسیلهٔ سه ضلع معلوم رسم می‌کنیم. با انتقال پاره‌خط AA_1 به‌وسیلهٔ $T_{\overrightarrow{A_1N}}$ و پاره‌خط BB_1 به‌وسیلهٔ $T_{\overrightarrow{B_1N}}$ ، چهار رأس چهارضلعی خواسته شدهٔ ABCD مشخص می‌شود. جواب منحصر به فرد است.

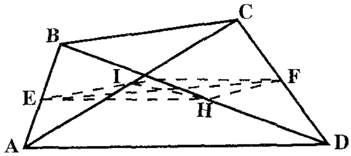
راه دوم. چهارضلعی ABCD را درنظر گرفته و فرض می‌کنیم نقطه‌های E و F بترتیب وسطهای ضلعهای AB و DC باشد. از E خطهای EC_1 و ED_1 را بترتیب موازی و مساوی BC و AD رسم می‌کنیم. چهارضلعیهای BEC_1C و $EADD_1$ متوازی‌الاضلاع می‌شوند، و در نتیجه $DD_1 = AE$ و $CC_1 = EB$ ؛ ولی چون E وسط ضلع AB می‌باشد، پس $DD_1 = CC_1$ خواهد شد. از طرف دیگر DD_1 و CC_1 هر دو موازی AB هستند. بنابراین $DD_1 \| CC_1$ خواهد شد. اکنون اگر از C_1 و D_1 به F وصل کنیم دو مثلث CC_1F و DD_1F به‌دست می‌آید که باهم برابرند، زیرا $DD_1 = CC_1$ ، $FC = FD$ و $F\hat{C}C_1 = F\hat{D}D_1$



(نسبت به دو موازی CC_1 و DD_1 و قاطع CD). بنابراین $D\hat{F}C_1 = D\hat{F}D_1$ ، یعنی D_1FC_1 خطی است مستقیم.

اکنون می‌توانیم روش رسم چهارضلعی را بیان کنیم.

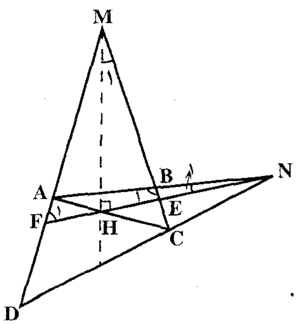
ابتدا مثلث ED_1C_1 را می‌سازیم (ضلعهای C_1E ، ED_1 و میانهٔ EF از این مثلث معلومند)، سپس روی ضلع FD_1 مثلث FD_1D و روی ضلع FC_1 مثلث FC_1C را می‌سازیم. بدین ترتیب رأسهای D و C و نقطهٔ F وسط ضلع AB از چهارضلعی به‌دست می‌آید. اگر به مرکز E و به شعاع $\frac{AB}{2}$ ، و به مرکز C و به شعاع BC قوسهایی رسم کنیم، محل برخورد آنها نقطهٔ B و به همین ترتیب A به دست می‌آید.



۶. اگر ABCD چهارضلعی خواسته شده باشد، I وسط قطر AC و H وسط قطر BD و E وسط AB و F وسط CD باشد، در چهارضلعی EHFI ، $HF \parallel = \frac{BC}{2}$ و $EI \parallel = \frac{BC}{2}$ و بنابراین چهارضلعی EHFI متوازی‌الاضلاع است. مثلث IEH را با داشتن اندازه‌های سه ضلع ($EH = \frac{AD}{2}$ ، $EI = \frac{BC}{2}$ و IH که در معلومهای مسأله داده شده است) می‌توان رسم کرد. از روی مثلث IEH متوازی‌الاضلاع EHFI رسم می‌شود. با رسم متوازی‌الاضلاع طول قطر EF به‌دست می‌آید. در این‌صورت از چهارضلعی ABCD ، اندازه‌های چهار ضلع و اندازهٔ پاره‌خطی که وسطهای دو ضلع را به هم وصل می‌کند، معلوم می‌باشد (شکل).

۱.۱.۱.۱.۵. ضلع، زاویه

۷. **راه اول.** از نقطهٔ C ، پاره‌خط CF را مساوی و موازی AB رسم کنید و مثلث CFD را مورد مطالعه قرار دهید.



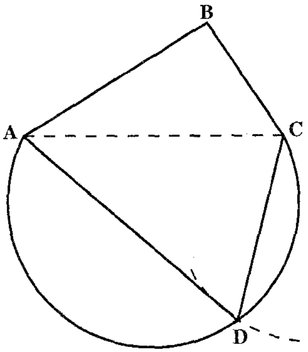
راه دوم. می‌دانیم که نیمسازهای دو زاویهٔ M و N برهم عمودند، چون $\hat{B}_1 = \frac{\hat{N}}{2} + \hat{E}_1$ و $\hat{B}_1 = \hat{D}$ پس $\hat{B}_1 = \hat{D} + \frac{\hat{N}}{2}$ و $\hat{F}_1 = \frac{\hat{N}}{2} + \hat{D}$. در نتیجه MH ، چون نیمساز است، ارتفاع هم هست.

در مثلث متساوی‌الساقین FME ، چون $\hat{M}$ در دست است، پس $\hat{F}=\hat{E}=\frac{۱۸۰^\circ-\hat{M}}{۲}$

و چون $\hat{M}_۱=\frac{\hat{M}}{۲}$ و $\hat{M}_۱+\hat{N}_۱=۹۰^\circ$ ، $\hat{N}_۱$ نیز در دست است ؛ زیرا $\hat{E}_۱$ را داریم و $\hat{E}_۱=\hat{D}+\hat{N}_۱$ و $\hat{N}_۱$ نیز در دست است، پس بدین ترتیب $\hat{D}$ نیز به‌دست می‌آید، پس $\hat{B}$ نیز در دست است ؛ زیرا $\hat{B}=۱۸۰^\circ-\hat{D}$.

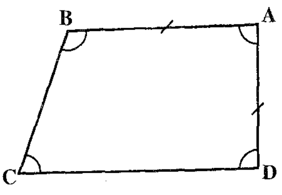
بنابراین برای رسم چهارضلعی، ابتدا مثلث ABC را با در دست داشتن BC ، AB و $\hat{B}$ می‌سازیم. سپس کمان درخور $\hat{D}$ را روبه‌رو به AC می‌کشیم. به مرکز A و شعاع AD کمانی می‌زنیم. هرکجا که کمان درخور را قطع کرد، نقطهٔ D است.
ازD به C وصل می‌کنیم. چهارضلعی ABCD، چهارضلعی خواسته شده است.

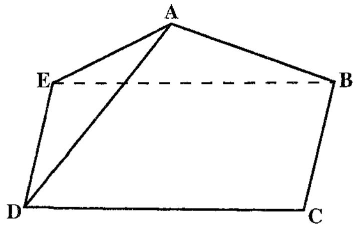
۹. اگر ABCD، چهارضلعی مطلوب باشد، ملاحظه می‌شود که از مثلث ABC ، ضلع AB و ضلع BC و زاویهٔ B (زاویهٔ بین دو ضلع) در دست است. بنابراین، این مثلث را می‌توان رسم کرد. رأس D از طرفی بر کمان درخور زاویهٔ D نظیر به وتر AC واقع بوده و ازطرف دیگر بر محیط دایره‌ای به مرکز C و شعاع CD قرار دارد. بنابراین :



ابتدا مثلث ABC را با معلوم بودن دو ضلع و زاویهٔ بین آنها رسم می‌کنیم. بر وتر AC کمان درخور زاویهٔ معلوم D را طرح می‌نماییم. به مرکز C و شعاع CD کمانی می‌زنیم تا کمان درخور را قطع کند. نقطهٔ برخورد این دو کمان نقطهٔ D می‌باشد (شکل).
(از دو کمان درخور مرورکننده بر A و C فقط باید آن را رسم کرد، که با به‌دست آوردن نقطهٔ D ،ترتیب رأسهای ABCD رعایت شود.) شرط امکان مسأله آن است که کمان درخور دایره متقاطع باشند.

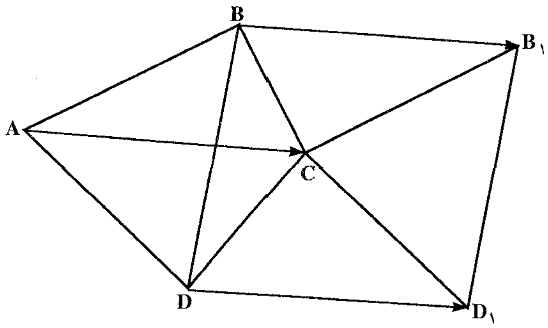
۱۰. با معلوم بودن سه زاویه از چهارضلعی محدب ABCD ، زاویهٔ چهارم آن نیز معلوم است. بنابراین از چهارضلعی ABCD دو ضلع AB و AD و چهار زاویه داده شده است و آن را به راحتی می‌توان رسم کرد.





۱۱. اگر ABCD چهارضلعی مطلوب باشد، چون CD را انتقال دهیم تا C بر B و D به وضع E درآید، با توجه به معلوم بودن زاویه‌های C و B ، زاویه $A\hat{B}E$ مشخص می‌شود. بنابراین مثلث ABE را با داشتن ضلعهای AB و BE ، و زاویهٔ بین آنها می‌توان رسم کرد. حال با توجه به معلوم بودن زاویه‌های $\hat{A}$ و $\hat{B}$ ، از این‌دو نقطه خطهای AD و BC را طوری رسم می‌کنیم. که با AB زاویه‌هایی برابر با A و B تشکیل دهند، سپس بین AD و BC قطعه خطی موازی و مساوی با BE محصور می‌کنیم. رأسهای C و D به‌دست می‌آید (شکل).

۱۲. فرض می‌کنیم ABCD چهارضلعی خواسته شده باشد، AB و AC ، ضلعهای معلوم آن باشند. قطر DB را به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{AC}$ انتقال داده، وضع جدید آن را B_1D_1 می‌نامیم. ضلعهای متوازی‌الاضلاع BDD_1B_1 برابر قطرهای چهارضلعی و زاویه‌های آن مساوی زاویه‌های بین دو قطر است ؛ پس این متوازی‌الاضلاع ساخته می‌شود. چون CB_1 وضع جدید AB پس از انتقال می‌باشد، پس $CB_1 = AB$ لذا فاصله‌های C از نقطه‌های B_1 و D معلوم است. (CD , AB) پس نقطهٔ C به آسانی معین و از روی آن نقطهٔ A با انتقالی که حامل آن $\overrightarrow{B_1B}$ است، به‌دست می‌آید.

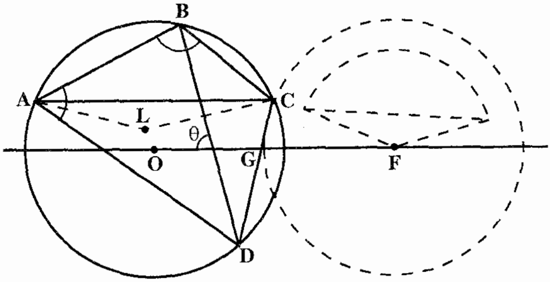


۶.۱.۱.۱.۱. قطر، زاویه

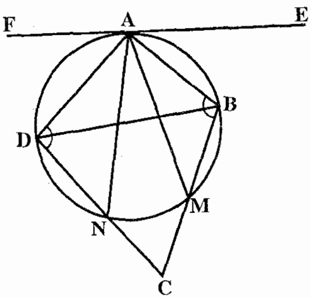
۱۳. روی قطر AC از چهارضلعی خواستهٔ شدهٔ ABCD ، و در دوطرف آن کمان درخور زاویه‌های $\hat{B}$ و $\hat{D}$ را رسم می‌نماییم.

از قطر دوم، اندازه و امتدادش معلوم است (به علت معلوم بودن زاویهٔ بین دو قطر) و مسأله به این مسأله برمی‌گردد که خطی را که طول و امتدادش معلوم است طوری رسم کنید که دو انتهایش روی محیط دو دایره باشد.

۱۴. روی قطر BD کمان درخور زاویهٔ معلوم $B\hat{A}D$ را رسم می‌کنیم. دایرهٔ محیطی چهارضلعی نیز مشخص می‌شود. از نقطهٔ O مرکز این دایره، خطی رسم می‌کنیم که با قطر BD زاویه‌ای مساوی زاویهٔ بین دو قطر (θ) بسازد. سپس روی این خط، پاره‌خط OF را مساوی قطر AC درنظر می‌گیریم. به مرکز F دایره‌ای مساوی دایرهٔ محیطی چهارضلعی رسم می‌کنیم. تمام پاره‌خطهای AC که با خط‌المرکزین این دو دایره موازی و مساوی باشند، طول معلوم داده شده را دارند. اکنون کافی است این پاره‌خط را چنان رسم کنیم که زاویهٔ $A\hat{B}C$ اندازهٔ داده شده را داشته باشد. به این ترتیب چهارضلعی رسم می‌شود.

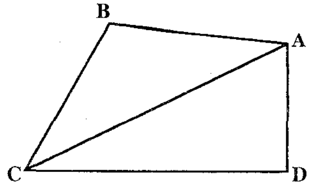


۱۵. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. کمان درخور زاویهٔ A ، روبه‌رو به قطر BD را رسم می‌کنیم، داریم: $N\hat{A}E = \hat{D}$ و $F\hat{A}M = \hat{B}$. پس برای رسم چهارضلعی، پاره‌خطی به طول BD رسم می‌کنیم سپس کمان درخور $\hat{A}$ را نسبت به آن رسم می‌کنیم آن‌گاه نقطهٔ A را روی آن گرفته، خط EAF را مماس بر دایره رسم کرده، سپس AM و AN را چنان رسم می‌کنیم که $N\hat{A}E = \hat{D}$ و $F\hat{A}M = \hat{B}$ باشد.



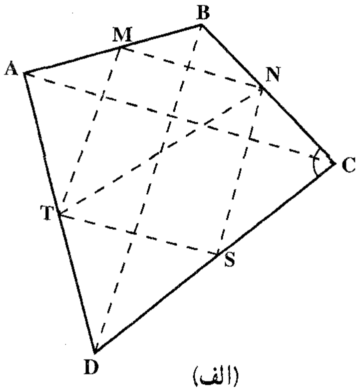
حال کمان درخور زاویهٔ $\hat{C}$ نسبت به MN را می‌کشیم. سپس به مرکز A و شعاع (قطر معلوم) AC دایره‌ای می‌زنیم. این کمان هرجا که کمان درخور را قطع کرد، نقطهٔ C است.

CM و CN را ادامه می‌دهیم. هرکجا که کمان درخور $\hat{A}$ را قطع کرد، نقطه‌های D و B است. از A نیز به B و D وصل می‌کنیم. چهارضلعی ABCD چهارضلعی مطلوب است.

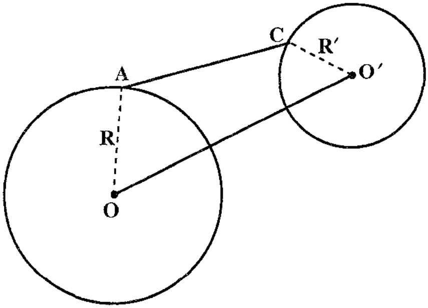


۱۶. با توجه به زاویه‌های داده شده، زاویه‌های $A\hat{C}B$ و $A\hat{C}D$ نیز معلومند. پس دو مثلث ABC و ACD به دلیل معلوم بودن دو زاویه و ضلع بین، قابل رسمند و از آن‌جا، چهارضلعی را می‌توان رسم کرد.

۱.۱.۱.۱.۷. ضلع، قطر، پاره‌خط



(الف)



(ب)

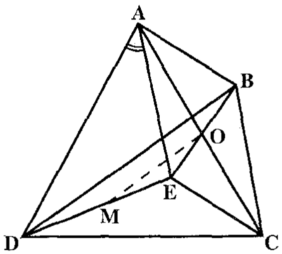
۱۷. اگر ABCD چهارضلعی خواسته شده فرض شود، M وسط AM و S وسط DC اختیار شود، چهارضلعی MNST متوازی‌الاضلاع است (MN و TS موازی و مساوی با نصف AC می‌باشند). هر ضلع متوازی‌الاضلاع نصف قطر نظیر از چهارضلعی می‌باشد و چون TN داده شده است، پس متوازی‌الاضلاع MNST با داشتن ضلعها و قطر آن (از مثلث NST سه ضلع در دست است) رسم می‌شود و از $\frac{AB}{AD}=\frac{AM}{AT}=k$ نتیجه می‌شود که A بر مکان هندسی نقطه‌هایی واقع است که نسبت فاصله‌های آنها از M و T مقدار معین k می‌باشد (این مکان دایره‌ای است که مرکز آن بر MT واقع است و قطرش بر دو نقطهٔ M' و T' که مزدوجهای توافقی M و T با نسبت k می‌باشند می‌گذرد). نقطهٔ C بر کمان درخور زاویهٔ معین α که ضلعهای آن از دونقطهٔ N و S می‌گذرند قرار دارد. اکنون باید قطعه خطی به طول معین AC و امتداد

ثابت را بین دو دایره محصور کرد تا AC مشخص شود. یعنی مسأله به حل مسألهٔ زیر منجر می‌شود (شکل):

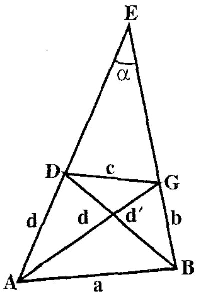
قطعه خط AC به طول معین و به امتداد معلوم را محصور بین دو دایرهٔ مفروض C و C′ رسم کنید.

اگر AC پاره‌خط مطلوب باشد، مسأله به چهارضلعی OACO′ می رسد که از آن چهار ضلع، AC، R و R′، OO′ و زاویهٔ بین AC و OO′ داده شده است.

۱.۱.۱.۱.۸. ضلع یا رابطهٔ بین ضلعها، قطر، زاویه

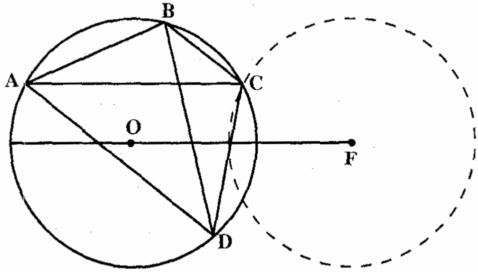


۱۸. اگر ABCD چهارضلعی مطلوب باشد، هرگاه BC را انتقال دهیم تا B بر A واقع شود، و C به وضع E درآید، مثلث AED با معلوم بودن اندازه‌های دو ضلع و زاویهٔ بین آنها رسم می شود. اگر M وسط DE باشد، نقطهٔ O مرکز متوازی الاضلاع ABCE از یک طرف بر دایرهٔ به مرکز A و شعاع $\frac{AC}{۲}$، و از طرف دیگر بر دایرهٔ به مرکز M و شعاع $\frac{BD}{۲}$ قرار دارد. نقطهٔ O محل برخورد این دو دایره است. پس از تعیین نقطهٔ O ، از E به O وصل کرده، و $OB = OE$ را امتداد می‌دهیم و از A به O وصل کرده، $AO = OC$ را جدا می کنیم. چهارضلعی مشخص می‌شود (شکل).



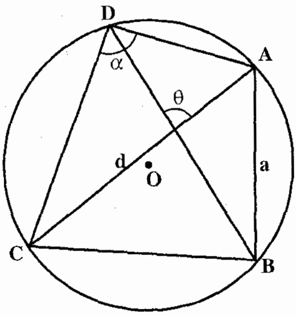
۱۹. چهارضلعی ABCD را جواب مسأله می گیریم. فرض می کنیم $AB = a$ ، $BC = b$ ، $CD = c$ ، $DA = d$ ، $AC = l$ ، $BD = l'$ و $(AD \hat{,} BC) = \alpha$ معلوم باشند. نقطهٔ E روی کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خطهای AB و CD واقع است. برای رسم چهارضلعی، پاره‌خط AB به طول a را رسم می کنیم. سپس به مرکز A و به شعاع l، یک دایره و به مرکز B و شعاع l′ ، دایرهٔ دیگری رسم می کنیم. حال باید پاره‌خط CD را بر این دو دایره چنان متکی کنیم که $CD = c$ و $D\hat{E}C = A\hat{E}B = \alpha$ باشد.

۲۰. پاره‌خط BD را مساوی قطر داده شدهٔ چهارضلعی رسم می کنیم. سپس کمان درخور

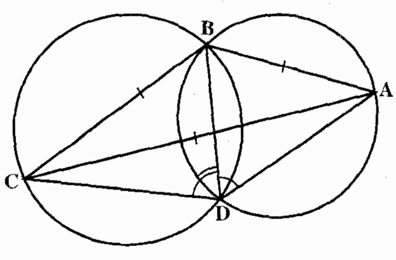


زاویهٔ معلوم $\hat{A}$، روبه‌رو به پاره‌خط BD را رسم می‌کنیم. دایرهٔ محیطی چهارضلعی نیز مشخص می‌شود. از مرکز این دایره، خطی رسم می‌کنیم که با قطر BD زاویه‌ای مساوی θ (زاویهٔ بین دو قطر) بسازد و روی آن پاره‌خط $OF = AC$ را جدا می‌کنیم. به مرکز F دایره‌ای مساوی دایرهٔ محیطی چهارضلعی رسم می‌نماییم. حال به مرکز D و به شعاع ضلع معلوم CD دایره‌ای رسم می‌کنیم تا مکان هندسی به مرکز F را در نقطهٔ C قطع کند. به این ترتیب وضع قطر دوم چهارضلعی مشخص می‌شود، و از آن جا چهارضلعی مشخص است.

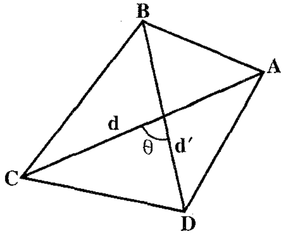
۲۱. پاره‌خط $AC = d$ را رسم می‌کنیم. سپس کمان درخور زاویهٔ $\hat{D} = \alpha$ روبه‌رو به پاره‌خط AC را رسم می‌نماییم. دایرهٔ محیطی چهارضلعی نیز مشخص می‌شود. به مرکز A و به شعاع $AB = a$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ محیطی چهارضلعی را درنقطهٔ B، رأس سوم چهارضلعی، قطع کند. از B به A و C وصل می‌کنیم. حال از B خطی رسم می‌کنیم که با قطر AC زاویهٔ معلوم θ (زاویهٔ بین دو قطر) را بسازد. نقطهٔ برخورد این خط با دایرهٔ محیطی چهارضلعی، رأس D از چهارضلعی خواسته شده است. از D به A و C وصل می‌کنیم. چهارضلعی رسم می‌شود.



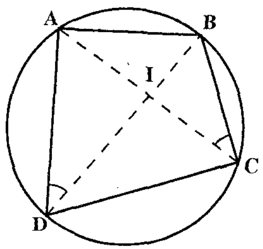
۲۲. مثلث ABC را با معلوم بودن اندازهٔ سه ضلع آن رسم می‌کنیم. آن‌گاه کمان درخور زاویهٔ معلوم $A\hat{D}B$ روبه‌رو به پاره‌خط AB و کمان درخور زاویهٔ معلوم $B\hat{D}C$، روبه‌رو به پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد آنها، رأس D است. از D به A و



C وصل می‌کنیم. چهارضلعی رسم می‌شود.



۲۳. مسأله را حل شده و چهارضلعی ABCD را جواب مسأله می‌گیریم. با فرض $AC = d$ ، $BD = d'$ ، $\frac{AB}{BC} = k$ و $AB^2 + AD^2 = k'^2$ ، اگر وسط BD را O بنامیم، یک مکان هندسی رأس B ، دایرهٔ آپولونیوسی است که دوسر قطرش پاره‌خط AC را به نسبت k تقسیم می‌کند و یک مکان هندسی رأس A نیز دایره‌ای به مرکز O ، وسط قطر BD و به شعاع $\frac{1}{2}\sqrt{2k'^2 - BD^2}$ است. از آن‌جا ....

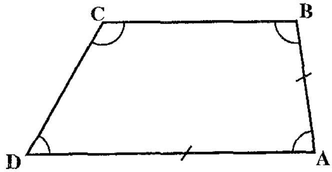


۲۴. اگر مسأله حل شده و ABCD چهارضلعی داده شده باشد، رأس A بر ضلع زاویه‌ای واقع است که با BD زاویه‌ای برابر زاویهٔ معلوم $A\hat{C}B$ می‌سازد و از طرف دیگر، A بر خطی عمود بر BD واقع است، به‌طوری که $AD^2 - AB^2 = 1$. دایرهٔ محیطی مثلث ABD همان دایرهٔ محیطی چهارضلعی ABCD است و یک مکان نقطهٔ C روی این دایره می‌باشد. مکان دیگر نقطهٔ C، بر خطی واقع است که مجانس قطر BD در تجانس به مرکز A و نسبت تجانس $\frac{AC}{AI} = \frac{k+1}{k}$ است. بنابراین با رسم BD و تعیین رأس A و رسم دایرهٔ محیطی مثلث ABD و تعیین مجانس BD ، رأس C، و در نتیجه چهارضلعی ABCD مشخص می شود. (شکل)

شرط امکان مسأله آن است که مجانس BD در تجانس به مرکز A و نسبت $\frac{k+1}{k}$ ، دایره را قطع کند یا بر آن مماس باشد.

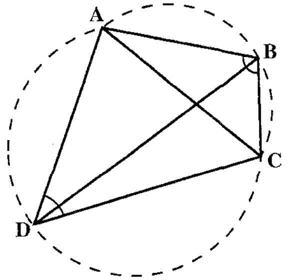
مسأله ممکن است دارای دوجواب یا یک جواب باشد، یا جواب نداشته باشد.

۱.۱.۱.۱.۹. نسبت ضلعها، زاویه، محیط

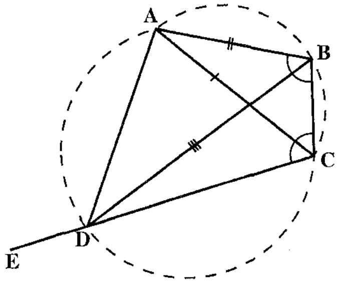


۲۵. با معلوم بودن اندازهٔ سه زاویه از چهارضلعی، اندازهٔ زاویهٔ چهارم آن نیز معلوم است. از آن‌جا ....

۱.۱.۱.۱.۱۰. مسأله‌های ترکیبی

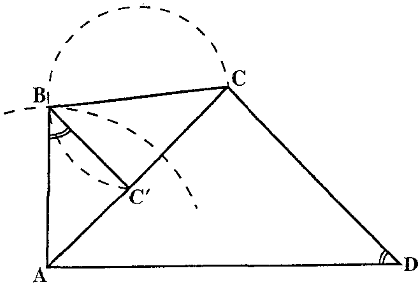


۲۶. ۱. روی قطر AC کمان درخور زاویهٔ $\hat{B}$، همچنین کمان درخور زاویهٔ $\hat{D}$ را رسم می‌کنیم. به مرکز A و به شعاع AB ، کمانی رسم می‌کنیم که دایرهٔ محیطی چهارضلعی را در نقطهٔ B قطع کند. از B به C وصل می‌کنیم و زاویهٔ داده شدهٔ $B\hat{C}D$ را می‌سازیم تا رأس D به دست آید.



۲. مثلث ABC قابل رسم است ؛ زیرا دو ضلع AB و AC و اندازهٔ زاویهٔ $\hat{B}$ از آن معلوم است.

این مثلث را رسم می‌کنیم. سپس زاویهٔ $B\hat{C}E$ را به اندازهٔ داده شده رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد ضلع CE از این زاویه با دایرهٔ به مرکز B و به شعاع قطر معلوم BD، یعنی نقطهٔ D را به‌دست می‌آوریم. از D به A وصل می‌کنیم. چهارضلعی ABCD رسم می‌شود.



۲۷. فرض کنید که چهارضلعی ABCD رسم شده است. قرینه‌یابی تجانسی به مرکز A، محور AC و نسبت تجانس $\frac{AB}{AD}$ مثلث ADC را به مثلث ABC′ بدل می‌کند (شکل).

الف. AC و $AC' = AC(AB / AD)$ معلومند ؛ در نتیجه می‌توانیم این پاره‌خطها را روی خطی جدا کنیم. بعلاوه $A\hat{B}C' = A\hat{D}C$ ؛ بنابراین :

$$C'\hat{B}C = A\hat{B}C - A\hat{D}C = \hat{B} - \hat{D}$$

معلوم است ؛ بنابراین B را می‌توان از برخورد دایرهٔ کمان درخور زاویهٔ $\hat{B} - \hat{D}$ مرسوم بر وتر CC′ ، با دایرهٔ به مرکز A و به شعاع AB به‌دست آورد.

اکنون به راحتی می‌توان رأس D را به‌دست آورد. مسأله حداکثر یک جواب دارد.
ب. چون ضلعهای BC و $BC' = DC(AB / AD)$ و زاویهٔ :

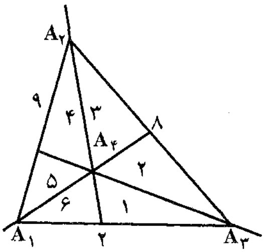
$$C'\hat{B}C = \hat{B} - \hat{D}$$

از مثلث CBC' معلومند، این مثلث را می‌توان رسم کرد. رأس A را می‌توان به عنوان نقطه‌ای واقع بر خط CC' یافت که به ازای آن $AC' / AC = AB / AD$. مسأله دارای جوابی یکتاست.
ج. در این حالت نسبتهای زیر را داریم :

$$\frac{BC}{BC'} = \frac{BC}{CD.(AB / AD)} = \frac{BC}{CD}.\frac{AD}{AB}$$

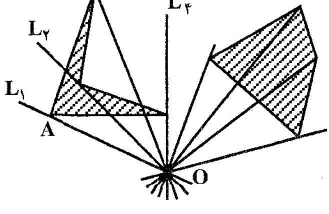
نقطهٔ B را می‌توان از برخورد مکان هندسی نقطه‌هایی که نسبت فاصله‌هایشان از C و C' مقدار معلوم $(BC / CD)(AD / AB)$ است، با دایره‌ای به مرکز A و شعاع AB ، به‌دست آورد. مسأله حداکثر می‌تواند یک جواب داشته باشد.

۲۸. **الف.** چهار نقطهٔ دلخواه از پنج نقطه انتخاب کنید :
یا این چهار نقطه یک چهارضلعی محدب می‌سازند و یا یکی از نقطه‌ها داخل مثلثی قرار می‌گیرد که از سه نقطهٔ دیگر به‌وجود آمده است (ثابت کنید). در حالت اخیر، نقطهٔ پنجم می‌تواند در یکی از نه منطقه‌ای که در شکل (الف) نشان داده شده است، قرار گیرد. تحقیق کنید که برای هریک از این نه حالت ممکن، می‌توان چهارضلعی موردنظر را ساخت.



(الف)

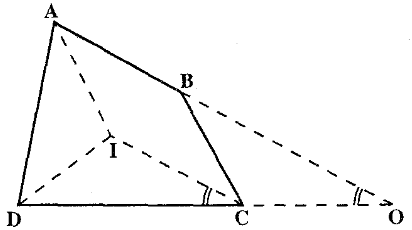
ب. از هر دو نقطهٔ دلخواه از این چهارهزار نقطه، می‌توان خط راستی عبور داد. همهٔ این خطهای ممکن را رسم می‌کنیم و سپس نقطهٔ O را روی صفحهٔ نقطه‌ها طوری انتخاب می‌کنیم که روی هیچ یک از این خطها قرار نگیرد. از نقطهٔ O نیمخطهایی رسم می‌کنیم که هرکدام از آنها از یکی از ۴۰۰۰ نقطه عبور کند. نقطهٔ O را طوری اختیار می‌کنیم که هیچ دو نیمخطی از این نوع برهم منطبق نباشند. نیمخطها را، به‌طور مثال با شروع از OA، و در جهت حرکت عقربه‌های ساعت بترتیب L_1 ، L_2 ، L_3 ، ... ، L_{4000} نام‌گذاری می‌کنیم (شکل (ب)).



(ب)

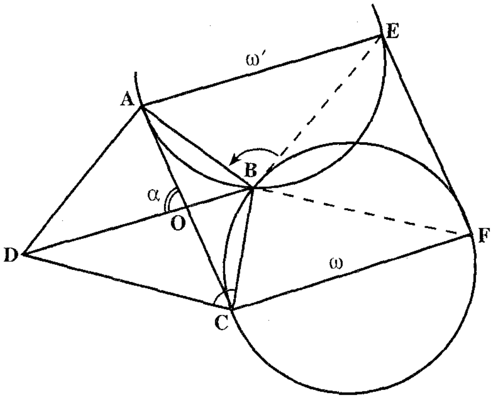
حال نیمخطها را به گروههای چهارتایی تقسیم می‌کنیم:

در گروه اول، نیمخطهای L_1، L_2، L_3، L_4؛ در گروه دوم L_5، L_6، L_7 و L_8 و غیره. بسادگی معلوم می‌شود که هر چهارضلعی که رأسهای آن بر نیمخطهای یکی از این گروهها واقع باشد، هر چهارضلعی دیگری را که رأسهایش بر نیمخطهای گروه دیگری قرار دارد، قطع نمی‌کند.



۲۹. راه اول. الف. اگر ABCD چهارضلعی مطلوب باشد، چنانچه AB و DC را امتداد دهیم تا یکدیگر را در O قطع کنند، $(A\hat{B},DC) = A\hat{O}D$ و چنانچه از C و A بترتیب موازی و مساوی AB و BC رسم نماییم تا یکدیگر را در I قطع کنند، در این صورت $IC = AB$ و $A\hat{O}D = I\hat{C}D$ بوده و در نتیجه حل مسأله چنین است:

ابتدا مثلث DCI را به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین آنها رسم نموده و سپس با معلوم بودن $AI = BC$ و AD مثلث AID را رسم می‌کنیم تا نقطهٔ A به‌دست آید. چنانچه از A و C بترتیب موازی IC و AI رسم نماییم، نقطهٔ B، و در نتیجه چهارضلعی ABCD رسم می‌شود.



ب. اگر ABCD چهارضلعی خواسته شده باشد، که در آن زاویه‌های $\hat{A}$ و $\hat{C}$ و قطرهای DB و AC و زاویهٔ بین دو قطر $(AC\hat{,}DB) = \alpha$ معلوم است. چنانچه از A و C پاره‌خطهای AE و CF را موازی و مساوی قطر DB رسم نماییم و از E و F به B وصل کنیم، چهارضلعی AEFC متوازی‌الاضلاعی است که در آن:

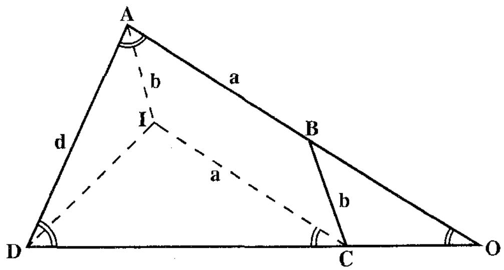
$$AE = CF = DB,\ AE \parallel CF \parallel DB,\ EF = AC,\ EF \parallel AC$$

و همچنین:

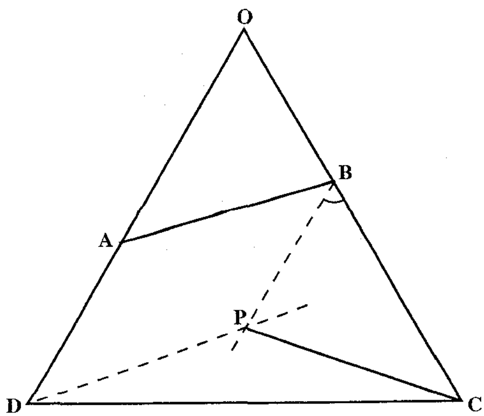
$$A\hat{B}E = \hat{A}\ ,\quad C\hat{B}F = \hat{C}\ ,\quad A\hat{E}F = \alpha$$

است، و در نتیجه متوازی‌الاضلاع AEFC قابل رسم بوده و از آن‌جا حل مسأله چنین است : ابتدا متوازی‌الاضلاع AEFC را با چهار ضلع و زاویه‌های معلوم رسم می‌نماییم. سپس کمان درخور زاویهٔ $\hat{A}$ ، گذرنده بر AE و کمان درخور زاویهٔ $\hat{C}$ ، گذرنده بر CF را رسم می‌نماییم تا یکدیگر را در B قطع کنند، و آن‌گاه از B موازی و مساوی $DB = AE$ رسم می‌نماییم تا نقطهٔ D ، و در نتیجه چهارضلعی ABCD رسم شود.

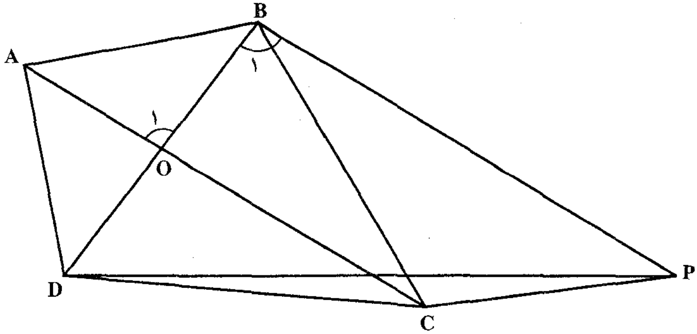
بحث. در صورتی که دو دایرهٔ صفحهٔ قبل در یک یا دو نقطه متقاطع باشند، مسأله دارای یک یا دو جواب است و اگر متقاطع نباشند، مسأله جواب ندارد.



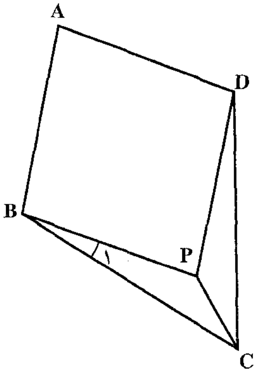
ج . اگر $a = AB$ و $b = BC$ و $CD = c$ و $\hat{D}$ و $\hat{A}$ ضلعها و زاویه‌های معلوم چهارضلعی باشند، چنانچه AB و CD موازی نباشند، متقاطع بوده و اگر (O) نقطهٔ تقاطعشان باشد، در مثلث AOD ، چون $\hat{A}$ و $\hat{D}$ معلوم است، $\hat{O}$ نیز معلوم خواهد بود و در صورتی که از C و A بترتیب موازی AB و BC رسم کنیم، یکدیگر را در I قطع کرده و داریم $AI = BC = b$ و $IC = AB = a$ و $I\hat{C}D = \hat{O}$ ، و در نتیجه مثلث IDC به حالت دو ضلع و زاویهٔ بین آنها قابل رسم است. آن را رسم نموده و با معلوم شدن DI و معلوم بودن $\hat{D}$ و $AI = b$ ، نقطهٔ A را تعیین و سپس از A موازی و مساوی $IC = a$ رسم می‌نماییم تا رأس B و در نتیجه چهارضلعی ABCD رسم شود.



راه دوم. الف . فرض می‌کنیم مسأله حل شده و ABCD چهارضلعی مطلوب باشد. از نقطه‌های B و D ، خطهایی به موازات AD و AB رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در P قطع کنند. P را به C وصل می‌کنیم. $\hat{B} = \hat{O}$ ، پس مثلث PBC قابل رسم است. درنتیجه PC محاسبه می‌شود و نیز



مثلث PDC با معلومهای سه ضلع قابل رسم است. پس از رسم این‌دو مثلث، از B به موازات DP و از D به موازات PB رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در A قطع کنند.

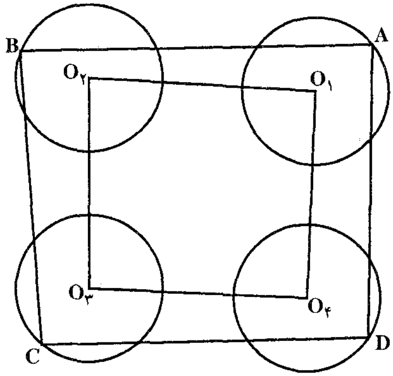


ب . فرض می‌کنیم مسأله حل شده و چهارضلعی ABCD چهارضلعی مطلوب باشد. از نقطهٔ B خطی به موازات AC رسم می‌کنیم و در روی آن به اندازهٔ AC جدا می‌کنیم تا P به‌دست آید. $\hat{B}_1 = \hat{O}_1$. پس مثلث DBP قابل ترسیم است. پس از رسم این مثلث، کمان‌درخور زاویه‌های $\hat{C}$ و $\hat{A}$ را روی ضلع BD رسم می‌کنیم. برای یافتن نقطه‌های A و C، بر این دو دایره وتری به‌طول AC به موازات BP متکی می‌کنیم.

ج . فرض می‌کنیم مسأله حل شده، از D و B دو خط به موازات AB و AD رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در P قطع کنند. چهارضلعی AOPB متوازی‌الاضلاع است. پس چون $\hat{A}$ معلوم است، زاویه‌های این چهارضلعی معلوم می‌شوند، پس $\hat{B}$ معلوم می‌شود. مثلث PBC قابل ترسیم است، پس از رسم این مثلث، به مرکز C و به شعاع CD دایره‌ای می‌زنیم. از B خطی رسم می‌کنیم تا با BC زاویهٔ $\hat{B}$ بسازد. از P به موازات این خط رسم می‌کنیم تا دایرهٔ فوق را در D قطع کند. از D به موازات PB رسم می‌کنیم تا خط فوق را در A قطع کند.

۲.۱.۱.۱. رسم چهارضلعی با معلوم بودن دایره

۳۰. مسأله را حل شده و چهارضلعی ABCD را که رأسهای A ، B ، C و D از آن بترتیب



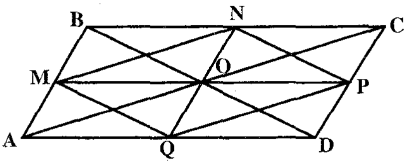
برچهار دایرهٔ برابر O_1، O_2، O_3 و O_4 قرار دارند، جواب مسأله می‌گیریم. می‌خواهیم این چهارضلعی را چنان بسازیم که $AB + BC + CD + DA$ حداکثر مقدار خود را داشته باشد. برای این کار به این نکته باید توجه کنیم که بزرگترین پاره‌خط متکی بر دو دایره، برابر کدام است؟

۱.۱.۲. رسم چهارضلعیهای ویژه

۱.۱.۲.۱. رسم متوازی‌الاضلاع

۱.۱.۲.۱.۱. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن: نقطه؛ ضلع؛ قطر، ارتفاع؛...

۱.۱.۲.۱.۱.۱. نقطه

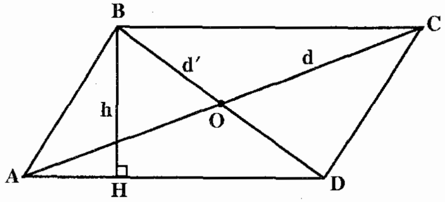


۳۱. مسأله را حل‌شده و متوازی‌الاضلاع ABCD را جواب مسأله می‌گیریم. وسط ضلعهای AB، BC، CD و DA را بترتیب M، N، P و Q می‌نامیم. چهارضلعی MNPQ متوازی‌الاضلاعی است که ضلعهای آن موازی قطرهای AC و BD از چهارضلعی ABCD و مساوی نصف آنها هستند، و مرکز این دو متوازی‌الاضلاع بر هم منطبق است. با معلوم بودن سه رأس M، N و P از متوازی‌الاضلاع MNPQ این متوازی الاضلاع را می‌توان رسم کرد، سپس از O، نقطهٔ برخورد قطرهای آن، خطی موازی MN رسم می‌کنیم و در دوطرف آن $OA = OC = MN$ را جدا می‌کنیم. آن‌گاه از A و C به M، N، P و Q وصل می‌کنیم تا رأسهای B و D به‌دست آیند.

۳۲. از این ویژگی استفاده کنید که مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث، نقطهٔ برخورد عمودمنصفهای ضلعهای آن مثلث است.

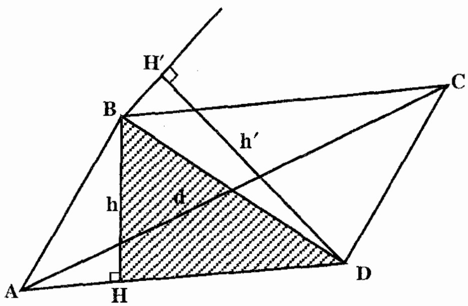
۱.۱.۲.۱.۱.۲. قطر، ارتفاع

۳۳. مسأله را حل شده و متوازی الاضلاع ABCD را جواب مسأله می‌گیریم. ارتفاع BH را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد دو قطر را O می‌نامیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ BHD با معلوم بودن اندازهٔ وتر $BD = d'$ و ضلع قائم $BH = h$ قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم و از B خط Bx را موازی DH رسم می‌کنیم. آن‌گاه از O، وسط ضلع BD، خطی رسم می‌کنیم که دو خط موازی Bx و DH را در دو نقطهٔ C و A، چنان قطع کند که $OA = OC = \frac{d}{۲}$ باشد (برای این کار به مرکز O و به شعاع $\frac{d}{۲}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دو خط موازی Bx و DH را در C و A قطع کند).



چهارضلعی ABCD جواب مسأله است.

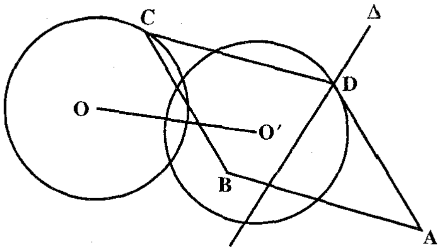
۳۴. مسأله را حل شده و متوازی‌الاضلاع ABCD را جواب مسأله می‌گیریم. قطر $BD = d$ و ارتفاعهای $BH = h$ و $DH' = h'$ را قطر و ارتفاع معلوم می‌گیریم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BDH و BDH′ به حالت معلوم بودن اندازه‌های وتر و یک ضلع قابل رسم می‌باشند. بنابراین برای رسم متوازی‌الاضلاع ABCD، دو مثلث قائم‌الزاویه BHD و BDH′ را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد BH′ و DH، رأس A است. از آن‌جا بسادگی می‌توان رأس C را مشخص کرد.

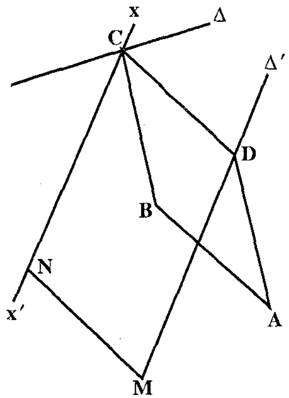


۱.۱.۲.۱.۱.۳. نقطه، خط

۳۵. اگر مسأله را حل‌شده فرض کنیم و ABCD متوازی‌الاضلاع خواسته شده باشد، از C خط XX′ را موازی Δ′ رسم می‌کنیم. تمام خطهای متکی بر Δ′ و XX′ و موازی

AB، با آن مساوی می‌باشند. درنتیجه حل مسأله چنین می‌شود :





از نقطهٔ دلخواه M واقع بر Δ'، بردار $\overrightarrow{MN}$ را همسنگ $\overrightarrow{AB}$ رسم می‌نماییم و از N خط XX' را موازی Δ' رسم می‌کنیم تا Δ را در C قطع کند. خطی که از C موازی MN یا AB رسم شود، Δ' را در D قطع می‌کند و ABCD متوازی‌الاضلاع خواسته شده است ؛ زیرار $MN = AB = CD$ و $MN \| AB \| CD$ (یا به عبارت دیگر Δ' را به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{AB}$ انتقال می‌دهیم تا Δ را در C قطع کند).

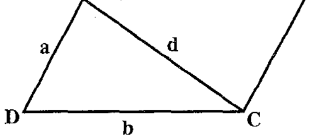
بحث. چنانچه XX' خط Δ را قطع کند، مسأله دارای جواب است و چنانچه آن را قطع نکند، جواب ندارد و اگر برآن منطبق باشد، مسأله دارای بی‌نهایت جواب است.

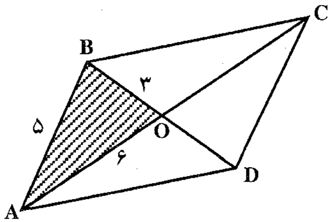
یادآوری. ممکن است به‌جای دو خط، دو دایره، یا یک خط و یک دایره، مفروض باشد در این حالت خط یا دایره را به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{AB}$ انتقال می‌دهیم.

۴.۱.۱.۱.۲.۱.۱. ضلع، قطر، ارتفاع

۱.۴.۱.۱.۱.۲.۱.۱. ضلع، قطر

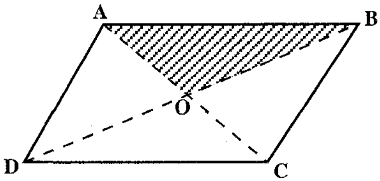
۳۶. اگر AC قطر معلوم باشد، مثلث ABC را با معلوم بودن سه ضلع رسم می‌کنیم. سپس از A خطی به موازات BC، و از C خطی به موازات AB رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در D قطع کنند.





۳۷. متوازی‌الاضلاع ABCD را جواب مسأله فرض می‌کنیم و نقطهٔ برخورد قطرهای آن را O می‌نامیم. با فرض معلوم بودن ضلع $AB = ۵\ cm$ ، مثلث ABO، قابل رسم است ؛ زیرا $OA = \frac{۱۲}{۲} = ۶cm$ و $OB = \frac{۶}{۲} = ۳cm$ معلوم است. بنابراین برای رسم متوازی‌الاضلاع ABCD ، نخست مثلث OAB را رسم می‌کنیم ؛ سپس OA و OB را به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا رأسهای C و D به‌دست آیند و متوازی‌الاضلاع مشخص شود.

نکته. چون $۳ + ۶ > ۵ > ۳ - ۶$ است، پس مثلث AOB وجود دارد و می‌توان آن را رسم کرد.

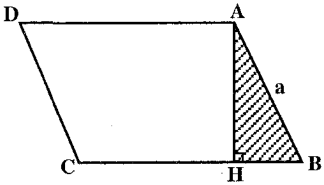


۳۸. مثلث ABO را با در دست داشتن سه ضلع می‌توان رسم کرد ؛ زیرا $AO = \frac{d}{۲}$ و $BO = \frac{d'}{۲}$ است، پس با فرض

$$\left|\frac{d}{۲} - \frac{d'}{۲}\right| < a < \frac{d}{۲} + \frac{d'}{۲}$$

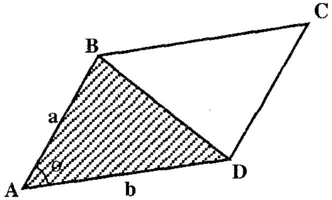
این مثلث رسم می‌شود. سپس BO و AO را از طرف O به اندازهٔ خودشان امتداد می‌دهیم تا دو رأس C و D به‌دست آیند. از آن‌جا متوازی‌الاضلاع مشخص می‌شود.

۱.۱.۲.۱.۱.۴. ضلع، ارتفاع

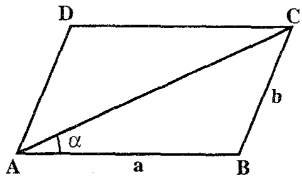


۳۹. متوازی‌الاضلاع ABCD را جواب مسأله می‌گیریم و ارتفاع معلوم $AH = h$ را رسم می‌کنیم. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH با معلوم بودن اندازهٔ وتر $AB = a$ و ضلع $AH = h$ قابل رسم است. بنابراین برای رسم متوازی الاضلاع، نخست مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH را رسم می‌کنیم ؛ آن‌گاه BH را به اندازهٔ معلوم $BC = b$ امتداد می‌دهیم و از A ، پاره‌خط $AD = b$ را موازی BC رسم می‌کنیم و از D به C وصل می‌نماییم. متوازی‌الاضلاع ABCD جواب مسأله است.

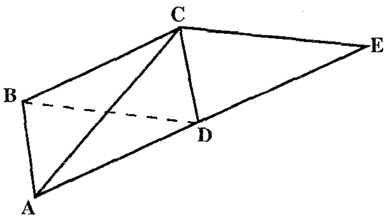
۱.۱.۲.۱.۱.۵. ضلع، زاویه



۴۰. متوازی‌الاضلاع ABCD را جواب مسأله می‌گیریم. اگر $a = AB$ و $AD = b$، دو ضلع مجاور و $B\hat{A}D = \alpha$ معلوم باشند، مثلث ABD قابل رسم است. پس از رسم این مثلث، از B و D دو خط موازی AD و AB رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ C، رأس چهارم متوازی‌الاضلاع یکدیگر را قطع کنند.



۴۱. مثلث ABC با معلوم بودن دو ضلع و زاویهٔ α، قابل رسم است. با رسم این مثلث، رسم متوازی‌الاضلاع بسهولت انجام می‌گیرد.



۴۲. اگر ABCD متوازی‌الاضلاع خواسته شده باشد، قطر BD را در امتداد BC انتقال می‌دهیم تا B بر C منطبق شود (بردار انتقال $\overrightarrow{BC}$ است). D به وضع E، در امتداد AD درمی‌آید. چهارضلعی BDEC متوازی‌الاضلاع است و زاویهٔ ACE همان زاویهٔ بین دو قطر است و $AE = ۲AD$ است. مثلث ACE را با معلومهای AE و میانهٔ CD، و زاویهٔ ACE رسم می‌کنیم. پس از رسم مثلث، CB را موازی و مساوی و هم‌جهت با DA رسم می‌کنیم. رأس B به دست می‌آید (شکل).

۱.۱.۲.۱.۱.۶. نسبت ضلعها، مساحت

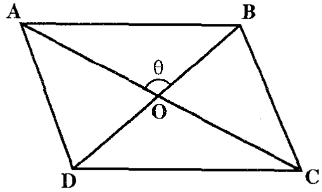
۴۳. مسأله را حل‌شده و متوازی‌الاضلاع ABCD را جواب مسأله می‌گیریم. داده‌های مسأله را $\frac{a}{d} = k$ و $\frac{a}{b} = k'$ و S فرض می‌کنیم. در این صورت نسبت دو قطر نیز مشخص است. زیرا داریم:

$$\frac{a}{d}:\frac{a}{d'} = \frac{k}{k'} \Rightarrow \frac{d'}{d} = \frac{k}{k'} = k''$$

از آن‌جا ...

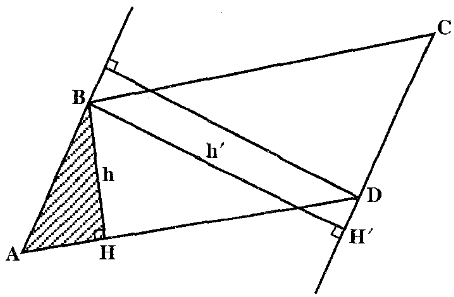
۱.۱.۲.۱.۱.۷. قطر، ارتفاع؛ زاویه

۱.۱.۲.۱.۱.۷.۱. قطر، زاویه



۴۴. اگر O را نقطهٔ برخورد دو قطر متوازی‌الاضلاع فرض کنیم، مثلث AOB با معلوم بودن دو ضلع $OA = \frac{d}{۲}$ ، $OB = \frac{d'}{۲}$ و $A\hat{O}B = \theta$ قابل رسم است. پس از رسم این مثلث، AO و BO را به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا رأسهای C و D به‌دست آیند. در نتیجه متوازی‌الاضلاع مشخص می‌شود.

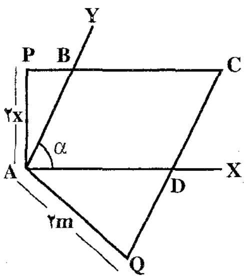
۱.۱.۲.۱.۱.۷.۲. ارتفاع، زاویه



۴۵. با معلوم بودن یک زاویه از متوازی‌الاضلاع تمام زاویه‌های آن مشخص است. بنابراین اگر متوازی‌الاضلاع ABCD جواب مسأله باشد، با فرض $\hat{A} = \hat{C} = \alpha$ ، $\hat{B} = \hat{D} = ۱۸۰^\circ - \alpha$ خواهد بود. دو ارتفاع $BH = h$ و $BH' = h'$ را رسم می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ ABH و BCH' قابل رسم می‌باشند و زاویهٔ $H\hat{B}H'$ نیز مشخص می‌شود. با رسم این دو مثلث و با توجه به معلوم بودن زاویهٔ HBH' ، متوازی‌الاضلاع رسم می‌شود.

۱.۱.۲.۱.۱.۸. پاره‌خط، خط؛ زاویه

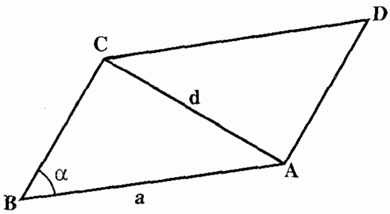
۱.۱.۲.۱.۱.۸.۱. پاره‌خط، زاویه



۴۶. زاویهٔ XAY را مساوی α رسم کرده عمود p $AP = ۲$ را بر AX و $AQ = ۲\ m$ را بر AY اخراج می‌کنیم، اگر از P موازی AX و از Q موازی AY رسم کنیم، رأسهای B و D از متوازی‌الاضلاع به دست خواهد آمد (شکل).

۱.۱.۲.۱.۱.۹. ضلع؛ قطر، ارتفاع؛ زاویه

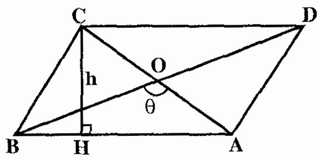
۱.۱.۲.۱.۱.۹.۱. ضلع، قطر، زاویه



۴۷. مسأله را حل شده و متوازی‌الاضلاع ABCD را جواب مسأله می‌گیریم.

$AB = a$، $AC = d$ و $\hat{B} = \alpha$ را داده‌های مسأله می‌گیریم. بدیهی است که تمام زاویه‌های متوازی‌الاضلاع معلوم می‌باشند. مثلث ABC با معلوم بودن اندازهٔ دو ضلع $AB = a$ ، $AC = d$ و $\hat{B} = \alpha$ قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم و از C ضلع CD را موازی و مساوی BA رسم می‌کنیم. از D به A وصل می‌کنیم. متوازی الاضلاع رسم می‌شود.

۱.۱.۲.۱.۱.۹.۲. ضلع، ارتفاع، زاویه

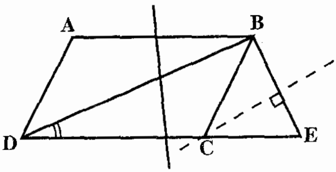


۴۸. مسأله را حل شده و متوازی‌الاضلاع ABCD را جواب مسأله می‌گیریم. داده‌های مسأله را ضلع $AB = a$ ، ارتفاع $CH = h$ و $A\hat{O}B = \theta$ فرض می‌کنیم. با توجه به این که :

$S = AB.CH = d.d'\sin\theta$

است، اندازهٔ مساحت متوازی‌الاضلاع، و از آن جا dd' مشخص است. از آن‌جا ...

۱.۱.۲.۱.۱.۱۰. قطر، زاویه، محیط



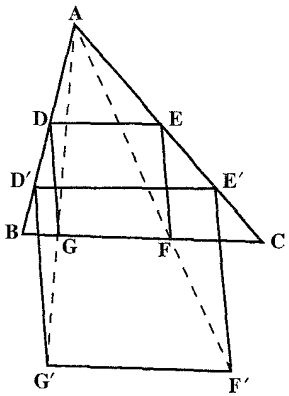
۴۹. اگر ABCD متوازی الاضلاع خواسته شده باشد، چون DC را امتداد داده و در روی آن $CE = CB$ را جدا کنیم، مثلث BDE به‌دست‌می‌آید که BD قطر متوازی الاضلاع و DE برابر با نصف محیط و زاویهٔ $B\hat{D}E$ ، زاویه بین قطر و ضلع متوازی الاضلاع است.

عمودمنصف BE از نقطهٔ C می‌گذرد. بنابراین : مثلث BDE را با معلومهای اندازهٔ یک قطر و اندازهٔ نصف محیط متوازی‌الاضلاع و زاویهٔ بین قطر و ضلع رسم کرده،

عمود منصف ضلع BE را می‌کشیم تا در نقطهٔ C ، ضلع DE را قطع کند. از B به C وصل می‌کنیم و از C به وسط BD وصل کرده و آن را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ A به دست آید. ABCD متوازی‌الاضلاع خواسته شده است.

۱.۱.۲.۱.۲. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۱.۱.۲.۱.۲.۱. مثلث، نسبت ضلعها، زاویه



۵۰. فرض کنید DEFG (شکل) متوازی‌الاضلاع خواسته شده باشد که در مثلث مفروض ABC محاط شده است. خط دلخواه D′E′ را به موازات DE رسم کنید تا ضلعهای AB و AC را بترتیب در D′ و E′ قطع کند. از D′ خطی به موازات DG رسم کنید و روی آن D′G′ را طوری جدا کنید که داشته باشیم:

$D'E':D'G' = DE:DG = k$ (نسبت مفروض)

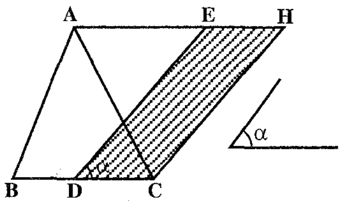
از E′ و G′ بترتیب خطهایی به موازات EF و GF رسم کنید.

متوازی‌الاضلاعهای DEFG و D′E′F′G′ متجانسند و نقطهٔ $A = (DD', EE')$ مرکز تجانس آنهاست؛ پس هر یک از جفت نقطه‌های F، F′ و G، G′ با نقطهٔ A همخطند. اکنون به آسانی می‌توان متوازی‌الاضلاع D′E′F′G′ را رسم کرد؛ خطهای AF′ و AG′ ضلع BC را در دو رأس F و G از متوازی‌الاضلاع خواستهٔ شدهٔ DEFG قطع می‌کنند و بآسانی می‌توان ترسیم DEFG را کامل کرد.

برای سادگی، می‌توان ضلع D′E′ از متوازی‌الاضلاع D′E′F′G′ را روی قاعدهٔ BC از مثلث ABC در نظر گرفت.

۱.۱.۲.۱.۲.۲. مثلث، زاویه

۵۱. ABC را مثلث خواسته شده و α را زاویهٔ مفروض می‌گیریم. از نقطهٔ D وسط ضلع BC، خط راستی می‌گذرانیم که با ضلع BC، زاویه‌ای برابر α بسازد (شکل). بعد از



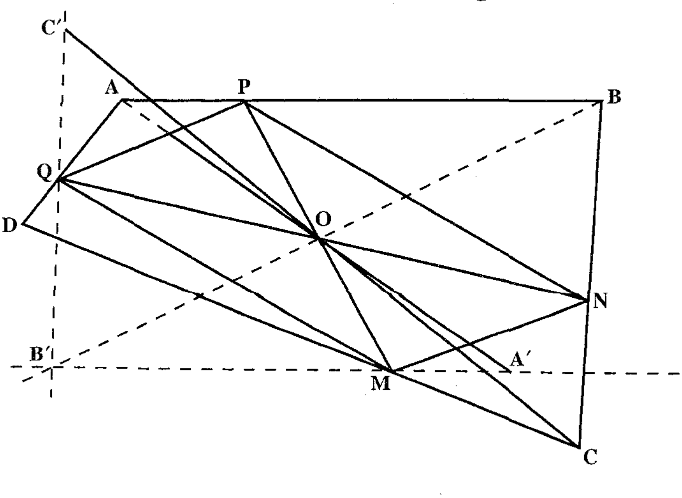
نقطهٔ C، خط راستی موازی DE و از نقطهٔ A، خط راستی موازی BC رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ H قطع کنند. چهارضلعی DEHC، که به این ترتیب به دست می‌آید، متوازی‌الاضلاع مورد نظر است (ثابت کنید).

۱.۱.۲.۱.۳. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی و داده‌های دیگر

۱.۱.۲.۱.۳.۱. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن چهارضلعی

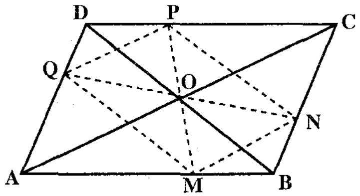
۵۲. اگر ABCD چهارضلعی غیر مشخص مفروض و MNPQ متوازی‌الاضلاع محاط در آن و نقطهٔ O مرکز متوازی‌الاضلاع باشد، چون (O) مرکز متوازی‌الاضلاع، مرکز تقارن آن است، پس M و Q بترتیب قرینه‌های P و N نسبت به O خواهند بود و از آن جا حل مسأله چنین است :

A′B′ و B′C′ قرینه‌های مرکزی AB و CB را نسبت به (O) تعیین می‌نماییم. نقطه‌های برخورد A′B′ با CD، نقطهٔ M و محل برخورد C′B′ با AD نقطهٔ Q است و Q و M را به نقطهٔ O وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا AB و BC را به ترتیب در P و M قطع نمایند و MNPQ متوازی‌الاضلاع مطلوب است.



بحث. اگر $A'B'$ و $C'B'$ بترتیب با CD و AD موازی و یا نقطه‌های تقاطعشان در خارج حدود ضلعهای چهارضلعی باشند، مسأله جواب ندارد و چنانچه $A'B'$ و $C'B'$ بر CD و AB منطبق باشند، مسأله دارای بینهایت جواب است. (در حالت اخیر ABCD متوازی‌الاضلاع بوده و O مرکز آن است.)

۱.۵۳. فرض کنیم متوازی‌الاضلاع MNPQ در متوازی‌الاضلاع ABCD محاط است. وسط قطر MP به یک فاصله از AB و CDاست. پس روی خطی است که وسطهای AD و BC را به هم وصل می‌کند. به همین ترتیب این نقطه چون وسط NQ است، روی خطی است که وسطهای AB و CD را به هم وصل می‌کند یعنی بر O، محل برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاع منطبق است (شکل).



۲. فرض کنیم MNPQ که در متوازی‌الاضلاع محاط است، با یک متوازی‌الاضلاع مفروض متشابه باشد، یعنی به‌طوری که :

$$(OM\hat{,}ON)=\theta \quad \text{و} \quad \frac{ON}{OM}=k$$ (θ و k مقدارهای معلومی می‌باشند).

اگر N معلوم باشد، متوازی‌الاضلاع معلوم خواهد بود. این رأس را جستجو می‌کنیم. وقتی M ضلع AB را طی کند، OMN با مثلث مفروض مستقیماً متشابه خواهد ماند و مکان N خطی است مانند Δ که از AB با تجانس به مرکز O و با نسبت k و دورانی به مرکز O و به زاویهٔ θ به دست می‌آید. پس N محل برخورد Δ با BC است. پس از تعیین N، نقطهٔ M از تساوی $(OM\hat{,}ON)=\theta$ به دست می‌آید.

مسأله فقط دارای یک جواب است، وقتی که Δ با BC متقاطع باشد، یعنی اگر :

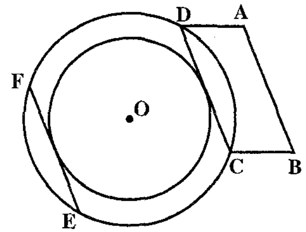
$$(\Delta\hat{,}AB)+(AB\hat{,}BC)\neq 0 \quad \text{یا} \quad (\Delta\hat{,}BC)\neq 0 \;;$$

یا

$$(AB\hat{,}BC)\neq\theta$$

اگر $(AB\hat{,}BC)=\theta$ باشد، مسأله غیر ممکن و یا مبهم است. بر حسب آن که نسبت فاصله‌های O از BC و AB مخالف k یا مساوی آن باشد.

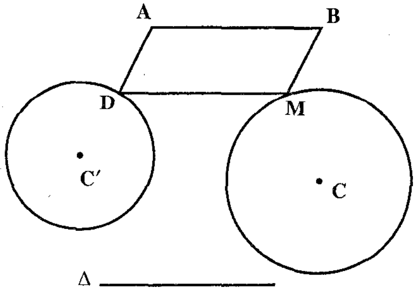
۴.۱.۲.۱.۱. رسم متوازی‌الاضلاع با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر



۵۴. اولاً. اگر A و B دو رأس مجاور باشند، در دایرهٔ (O) وتر EF را برابر AB جدا می‌کنیم. به مرکز O دایرهٔ دیگری مماس بر EF رسم می‌کنیم و بر این دایره مماس CD را به موازات AB می‌کشیم. متوازی‌الاضلاع ABCD جواب مسأله است.

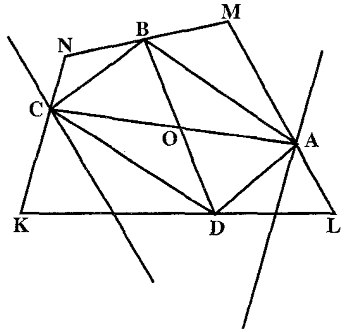
ثانیاً. اگر A و B دو رأس متقابل باشند، AB را وصل می‌کنیم و از O مرکز دایره، به M وسط AB وصل می‌کنیم. اگر از M عمودی بر OM اخراج کنیم تا دایره را در C و D قطع کند، ABCD متوازی الاضلاع خواسته شده است.

بحث. در حالت اول مسأله وقتی جواب دارد که طول قطعه خط AB کوچکتر از قطر دایره باشد و در حالت دوم بایستی M در داخل دایره قرار گیرد تا مسأله جواب داشته باشد.



۵۵. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و متوازی‌الاضلاع ABMD جواب مسأله باشد، پس $AB = DM$. برای حل مسأله کافی است که خطی به موازات AB، به طول AB بر این دو دایره متکی کنیم.

۵۶. وتر ′AA با CD، و در نتیجه با AB برابر است.



۵۷. فرض کنید ABCD متوازی‌الاضلاع خواسته شدهٔ محاط در چهارضلعی LMNK، O مرکز تقارن متوازی‌الاضلاع و نقطه‌های B و D، بترتیب به MN و KL متعلق باشند (شکل).

الف. نقطهٔ O وسط BD مرکز متوازی‌الاضلاع است. حال قرینهٔ ضلع

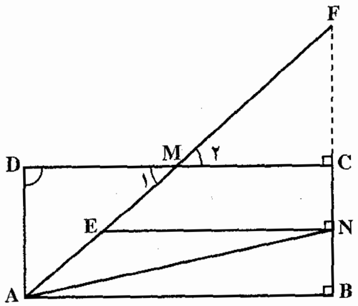
ML را نسبت به O به دست می‌آوریم رأس C به دست می‌آید. از C به O وصل کرده امتداد می‌دهیم تا رأس A به دست آید.

ب. به دلیل $T_{\overrightarrow{AB}}(A)=B$ و $T_{\overrightarrow{AB}}(D)=C$ نقطهٔ C محل تلاقی NK و تصویر KL (انتقال یافته KL به اندازهٔ $\overrightarrow{AB}$) است.

۱.۱.۲.۲. رسم مستطیل

۱.۱.۲.۲.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن: نقطه، ضلع، قطر؛...

۱.۱.۲.۲.۱.۱. پاره‌خط

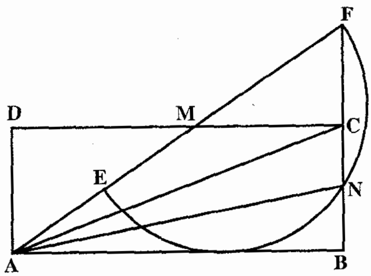


۵۸. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. AM را امتداد می‌دهیم تا امتداد BC را در F قطع کند. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ MFC و MDA با هم برابرند.

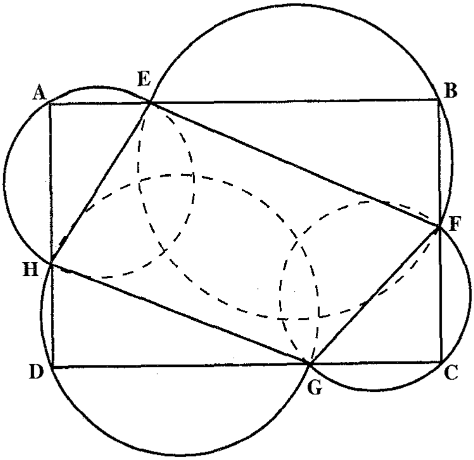
$(DM=MC$ و $\hat{D}=\hat{C}=90^\circ$ ، $\hat{M}_1=\hat{M}_2)$.

پس $AM=FM$. سپس از N به موازات DC رسم می‌کنیم. این خط AM را در وسط آن، یعنی نقطهٔ E قطع می‌کند. پس مکان نقطهٔ N، روی دایره‌ای است به مرکز A و شعاع AN و از طرفی مکان N روی نیمدایره‌ای به قطر EF است.

روش رسم. AM را به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم و دایره‌ای به قطر EF و دایرهٔ دیگری به مرکز A و به شعاع AN رسم می‌کنیم که این دو دایره یکدیگر را در N قطع می‌کنند. N را به F وصل می‌کنیم. از M بر NF عمود می‌کنیم تا نقطهٔ C به دست آید. CN را به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا B به دست آید. B را به A وصل می‌کنیم. از A خطی به موازات CB رسم می‌کنیم و از C بر آن عمود می‌کنیم تا رأس D و از آن‌جا متوازی‌الاضلاع مشخص شود.



۱.۱.۲.۲.۱.۲. نقطه، ضلع

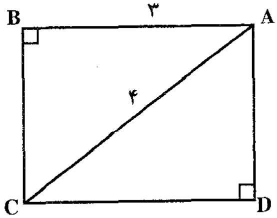


۵۹. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مستطیل ABCD جواب مسأله باشد که $AB = l$ است. حال چهار نقطهٔ E، F، G و H را به هم وصل می‌کنیم. نقطهٔ B روی دایره به قطر EF واقع است و نقطه‌های A ، D و C بترتیب روی دایره‌های به قطر EH، GH و GF قرار دارند. پس راه‌حل مسأله به این ترتیب به دست می‌آید:

چهار نقطه را دو به دو به هم وصل می‌کنیم و دایره‌هایی به قطرهای EF، FG، GH و HE رسم می‌کنیم. از نقطهٔ E قاطعی به طول l (طول مستطیل) رسم می‌کنیم تا دایره‌های به قطرهای EF و EH را در نقطه‌های A و B قطع کند.

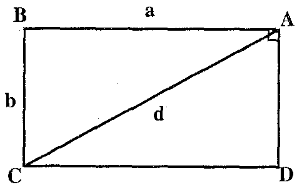
نقطهٔ B را به نقطهٔ F وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ به قطر FG را در نقطهٔ C قطع کند و نقطهٔ A را به نقطهٔ H وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ به قطر HG را در D قطع کند. نقطهٔ C را به نقطهٔ D وصل می‌کنیم. مستطیل ABCD جواب مسأله است.

۱.۱.۲.۲.۱.۳. قطر، ضلع یا رابطهٔ بین ضلعها



۶۰. مستطیل ABCD را جواب مسأله می‌گیریم. اگر قطر $AC = ۴cm$ و ضلع $AB = ۳cm$ باشد، مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با معلوم بودن اندازهٔ وتر و یک ضلع، قابل رسم است و از آن‌جا رأس D براحتی به دست می‌آید.

نکته. مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC نیز قابل رسم است.

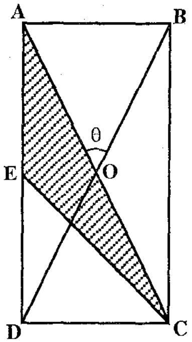


۶۱. مستطیل ABCD به ضلعهای a و b، و طول قطر d را جواب مسأله می‌گیریم. با فرض $\frac{a}{b}=k$، داریم:

$$\begin{cases} a^2+b^2=d^2 \\ \frac{a}{b}=k \end{cases}$$

با حل دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی بالا، اندازهٔ a و b به دست می‌آیند. با معلوم بودن a و b مستطیل رسم می‌شود.

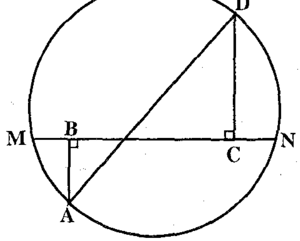
۱.۱.۲.۲.۱.۴. رابطهٔ بین ضلعها، زاویه



۶۲. مستطیل جواب مسأله را ABCD، زاویهٔ بین دو قطر را θ و تفاضل دو ضلع مستطیل را AE می‌گیریم ($DC = DE$ است).

مثلث AEC با معلوم بودن $AE = AD - AB$ ، $E\hat{A}C = \frac{\theta}{2}$ و $A\hat{E}C = 135^\circ$ قابل رسم است (مثلث DEC قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است). پس از رسم این مثلث، از C خطی رسم می‌کنیم که با AC زاویهٔ $90^\circ - \frac{\theta}{2}$ بسازد. نقطهٔ برخورد این خط با امتداد AE، رأس D است. از آن‌جا مستطیل رسم می‌شود.

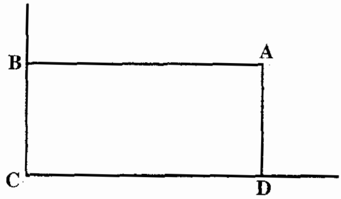
۱.۱.۲.۲.۱.۵. رابطهٔ بین ضلعها، مساحت



۶۳. باید ریشه‌های معادلهٔ $x(x-p) = mn$ را به وسیلهٔ رسم منحنی تعیین کنیم (mn مساحت و ۲p محیط مستطیل موردنظر است).

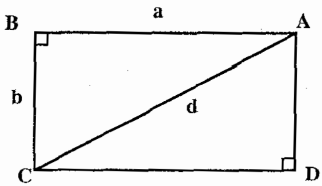
پاره خط BC به طول p را رسم می‌کنیم. از نقطه‌های B و C دو خط عمود بر BC و در دو طرف آن رسم می‌کنیم و روی آنها پاره‌خط‌های $AB = m$ و $CD = n$ را جدا می‌کنیم. آن‌گاه دایره‌ای به قطر AD رسم می‌کنیم تا امتداد BC را در M و N قطع کند.

می‌دانیم که:
$$BM.CM = AB.CD = mn$$
بنابراین BM و CM جوابهای مسأله‌اند.



۶۴. مسأله را حل شده و مستطیل ABCD را که برای آن $AB^2 - AD^2 = k^2$ است، جواب مسأله می‌گیریم. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که تفاضل مربعهای فاصله‌اش از دو خط عمود بر هم، مقدار ثابتی است، یک هذلولی متساوی‌الساقین است که آن دو خط، مجانبهای آن می‌باشند.

۶.۱.۲.۲.۱.۱. رابطهٔ بین ضلعها، محیط

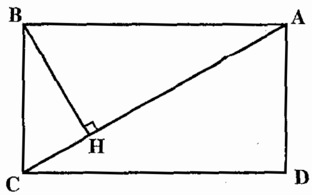


۶۵. مسأله را حل شده و مستطیل ABCD را جواب مسأله می‌گیریم. از $\frac{AB^2}{AC^2} = k^2$ نتیجه می‌شود $\frac{AB}{AC} = k$، و یا $\frac{a}{d} = k$ و یا

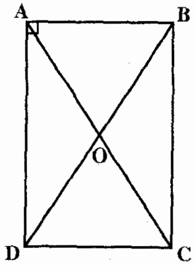
$$\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = k \ (1)$$

و چون محیط مستطیل $2(a+b) = 2p$ معلوم است. پس: $a + b = p \ (2)$ مشخص است. از رابطه‌های (۱) و (۲) اندازهٔ دو ضلع AB و BC، یعنی a و b به دست می‌آیند. و از آن‌جا مستطیل را می‌توان رسم کرد.

۷.۱.۲.۲.۱.۱. قطر، پاره خط

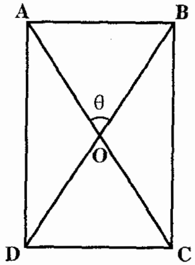


۶۶. قطر AC و فاصلهٔ رأس B تا این قطر یعنی BH را معلوم می‌گیریم. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC با معلوم بودن اندازهٔ وتر AC و ارتفاع وارد بر آن، BH، قابل رسم است. با رسم این مثلث، رأس D را هم بآسانی می‌توان به دست آورد.



۱.۱.۱.۲.۲.۱.۸. قطر، محیط

۶۷. اگر مستطیل ABCD جواب مسأله باشد، مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD با معلوم بودن اندازهٔ وتر آن، AC و مجموع دو ضلع، نصف محیط مستطیل $= AB + AD$ قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم و از آن‌جا مستطیل بسادگی رسم می‌شود.



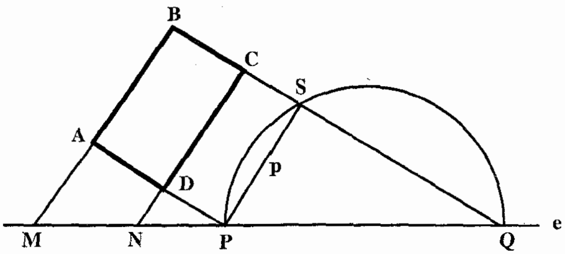
۱.۱.۱.۲.۲.۱.۹. محیط، زاویه

۶۸. مسأله را حل شده و مستطیل ABCD را جواب مسأله می‌گیریم. قطرهای AC و BD را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آنها را O می‌نامیم. اندازهٔ زاویهٔ $\hat{AOB} = \theta$ معلوم است. بنابراین زاویه‌های بین قطر و ضلع مستطیل معلوم می‌باشند. به عنوان مثال زاویه‌های $\hat{ABD}$ و $\hat{ADB}$ معلومند. بنابراین مثلث قائم‌الزاویهٔ $\hat{ABD}$ با معلوم بودن اندازهٔ زاویه‌های حاده و مجموع دو ضلع، نصف محیط مستطیل $= AB + AD$ قابل رسم است. با رسم این مثلث، مستطیل رسم می‌شود.

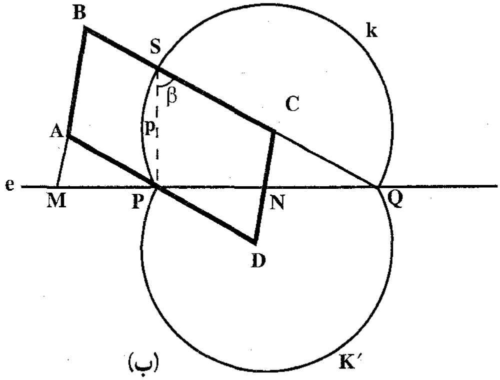
۱.۱.۱.۲.۲.۱.۱۰. نقطه، ضلع، خط

۶۹. **راه‌حل اول.** مثلث قائم‌الزاویهٔ PSQ، با معلوم بودن وتر PQ و با در دست داشتن $PS = p$، قابل رسم است (شکل الف). اکنون، اگر از M و N دو خط راست، موازی PS رسم کنیم و از P و Q، عمودهایی بر PS فرود آوریم، از چهار خط راست حاصل، مستطیلی به دست می‌آید که با شرطهای مسأله سازگار است.

مسأله وقتی جواب دارد که، مثلث PSQ قابل رسم باشد، یعنی وقتی که داشته باشیم: $p < PQ$. با این شرط، مثلث PSQ را می‌توان در هر طرف خط راست e رسم کرد.



(الف)



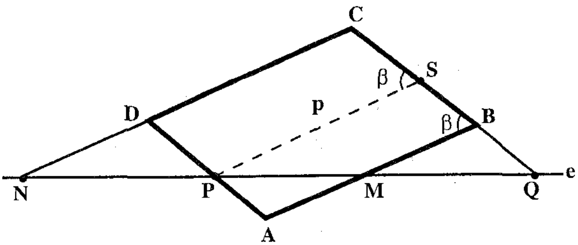
بنابراین، دو جواب برای مسأله به‌دست می‌آید که، نسبت به خط راست e، قرینهٔ یکدیگرند.

راه‌حل دوم. مسأله را می‌توان به صورت زیر تعمیم داد: ضلعهای AB، CD، AD و BC از متوازی‌الاضلاع ABCD، و یا امتداد آنها، خط راست e را در نقطه‌های M، N، P و Q قطع کرده‌اند (شکل ب).

اگر نقطه‌های M، N، P و Q و طول p از ضلع AB و اندازهٔ زاویه‌های متوازی‌الاضلاع معلوم باشند، متوازی‌الاضلاع را رسم کنید.

ابتدا، نقطهٔ S، محل برخورد ضلع BC با خط راستی را که از P موازی AB رسم می‌شود، پیدا می‌کنیم. با پیدا شدن نقطهٔ S، رسم متوازی‌الاضلاع دشوار نیست.

برای پیدا کردن S، از دو شرط مسأله استفاده می‌کنیم: ABSP متوازی‌الاضلاع است و، بنابراین، $PS = AB = p$؛ یعنی، نقطهٔ S، بر دایره‌ای به مرکز P و به شعاع p قرار دارد. علاوه بر این، PS با AB موازی است، یعنی زاویهٔ PSQ با زاویهٔ β، رأس B برابر و یا مکمل آن است: اگر پاره‌خطهای MN و PQ در یک جهت باشند، (یعنی، وقتی که N در سمت راست M و Q در سمت راست P، و یا وقتی که N در سمت چپ M و Q در سمت چپ P باشند)، داریم: $P\hat{S}Q = \beta$؛ و اگر MN و PQدر دو جهت مخالف باشند (شکل‌ج)، داریم: $P\hat{S}Q = ۱۸۰^\circ - \beta$. در هر دو حالت، مکان نقطهٔ S، عبارت است از دو کمان k و k′ که یکی در بالای PQ و دیگری در زیر PQ قرار دارد. شعاع دایره‌هایی که k و k′



(ج)

کمانهایی از آنها هستند، برابر است با $\frac{PQ}{2\sin\beta}$ بنابراین، نقطهٔ S ، در محل برخورد دایرهٔ به مرکز P و به شعاع p با کمان k یا کمان k' قرار دارد.

به بررسی تعداد جوابها می‌پردازیم. هر متوازی‌الاضلاعی که جواب مسأله باشد، به خودی خود، جواب دومی را به ما می‌دهد که قرینهٔ آن نسبت به خط راست e است. بنابراین، برای پیدا کردن تعداد جوابها، کافی است تعداد نقطه‌های برخورد دایرهٔ به مرکز P را با کمان k پیدا کنیم، نقطه‌های برخورد با کمان k' ، از راه قرینه‌سازی به دست می‌آیند.

برای $\beta < 90°$ ، این حالتها پیش می‌آید :

۱) $p > d$ ($d = \frac{PQ}{\sin\beta}$ ، یعنی دو برابر شعاع دایره‌ای که، کمان k، روی آن است). در این حالت، دایره به مرکز P و شعاع p، کمان k را قطع نمی‌کند و مسأله جواب ندارد.

۲) $p = d = \frac{PQ}{\sin\beta}$. در این حالت دایرهٔ به مرکز P و به شعاع p، بر کمان k مماس است. مسأله یک جواب دارد (و البته، یک جواب هم به صورت قرینهٔ آن).

۳) $PQ < p < d = \frac{PQ}{\sin\beta}$. در این حالت، دایرهٔ به مرکز P و به شعاع p، کمان k را در دو نقطه قطع می‌کند ؛ مسأله دارای دو جواب است (و دو جواب هم، قرینهٔ آنها نسبت به خط راست e).

۴) $p < PQ$. در این حالت، دایرهٔ به مرکز P و به شعاع p، k را در یک نقطه قطع می‌کند و مسأله یک جواب دارد (و قرینهٔ آن نسبت به خط راست e). در شکل (ب)، همین حالت نشان داده شده است.

برای $\beta \geq 90°$ تنها دو امکان وجود دارد :

۱) $p \geq PQ$. مسأله جواب ندارد.

۲) $p < PQ$. مسأله یک جواب دارد (و در ضمن، قرینهٔ آن).

در حالت خاص $\beta = 90°$ ، متوازی‌الاضلاع ABCD، به صورت مستطیل در می‌آید و کمانهای k و k' ، نیمدایره‌هایی به قطر PQ هستند.

بعد از مشخص شدن نقطهٔ S، می‌توانیم متوازی‌الاضلاع را، به این ترتیب، رسم کنیم :
ضلع BC بر خط راستی قرار دارد که از دو نقطهٔ Q و S می‌گذرد.
ضلع AD بر خط راستی واقع است که از P، موازی QS رسم شود، سرانجام، از

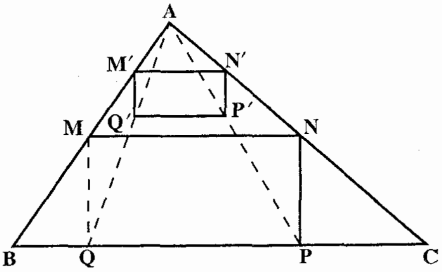
نقطه‌های M و N، خطهای راستی موازی PS رسم می‌کنیم که، همراه با خطهای راست قبلی، متوازی‌الاضلاع را می‌سازند.

۱.۱.۲.۲.۲. رسم مستطیل با معلوم بودن: مثلث، مثلث و ...

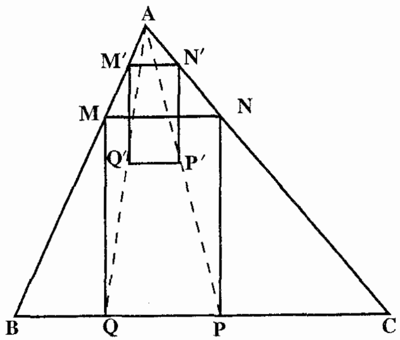
۱.۱.۲.۲.۲.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن: مثلث در حالت کلی، مثلث در حالت کلی و ...

۱.۱.۲.۲.۲.۱.۱. مثلث، رابطهٔ بین ضلعها

۷۰. فرض می‌کنیم مستطیل MNPQ در مثلث ABC محاط باشد (شکل الف). در این صورت پاره‌خطهای AP و AQ را وصل می‌کنیم و بر پاره خط دلخواهی مانند $M'N'$ که موازی BC رسم می‌شود و دو سر آن بر ضلعهای AB و AC واقعند، مستطیل $M'N'P'Q'$ را بنا می‌کنیم که رأس P' آن بر پاره خط AP واقع بوده و در نتیجه رأس Q' آن بر پاره‌خط AQ واقع شود (چرا؟) این مستطیل مجانس مستطیل MNPQ در تجانس به مرکز A است (چرا؟) ؛ و در این صورت :



(الف)



(ب)

$$\frac{M'N'}{MN}=\frac{AN'}{AN}=\frac{N'P'}{NP}\Rightarrow\frac{M'N'}{N'P'}=\frac{MN}{NP}\Rightarrow N'P'=\frac{1}{2}M'N'$$

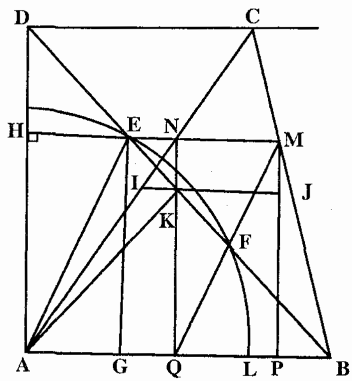
است. از این جا راه حل مسأله به طریق زیر مشخص می‌شود.

خطی موازی BC از مثلث رسم می‌کنیم تا دو ضلع AB و AC را در نقطه‌های M' و N' قطع کند. در این دو نقطه عمود بر $M'N'$ رسم می‌کنیم و بر آنها دو پاره خط $N'P'$

و $M'Q'$ را چنان جدا می‌کنیم که : $N'P' = M'Q' = \frac{1}{2}M'N'$

(شکل الف). پاره خطهای AP' و AQ' را رسم می‌کنیم تا BC را در نقطه‌های P و Q قطع کنند. این دو نقطه دو رأس از مستطیل خواسته شده هستند.
اگر بر عمودهای رسم شده بر $M'N'$ دو پاره خط به اندازه‌هایی مساوی $2M'N'$ جدا کنیم، به همان ترتیب مستطیل دیگری محاط در مثلث می‌توان رسم کرد که اندازهٔ یکی از ضلعهای آن، دو برابر اندازهٔ ضلع دیگر است (شکل ب).

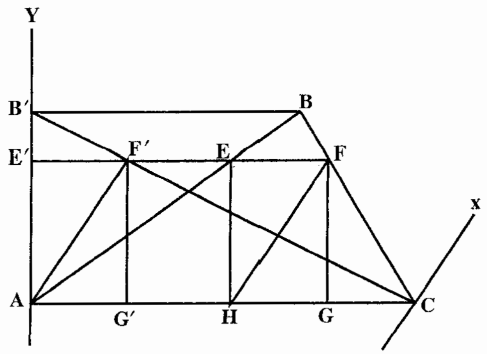
۱.۱.۲.۲.۲.۱.۲. مثلث، اندازهٔ قطر



۷۱. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD ($B\hat{A}D = 90°$) را چنان رسم می‌کنیم که ضلع AD مساوی ارتفاع رأس C از مثلث ABC باشد.
به مرکز نقطهٔ A و به شعاع معلوم AL کمانی می‌زنیم که وتر مثلث قائم‌الزاویه را در دو نقطهٔ E و F قطع کند. این نقطه‌های برخورد، جواب مسأله را می‌دهند، یعنی داریم : $QM = AE = l$. عمود AK مستطیل محاط در مثلث با کمترین قطر ممکن را مشخص می‌کند.
IJ قاعدهٔ بالایی این مستطیل است.

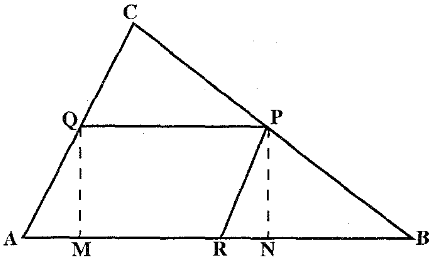
۱.۱.۲.۲.۲.۱.۳. مثلث، خط

۷۲. از A خطی عمود بر AC رسم می‌کنیم. و از B عمود BB' را بر آن فرود می‌آوریم. مثلث قائم‌الزاویهٔ CAB' معادل مثلث ABC است و اگر AF' را موازی Cx رسم کنیم، مستطیل $E'F'G'A$ مستطیل همنهشت با مستطیل EFGH است.

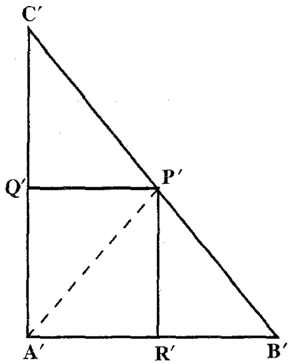


۱.۱.۲.۲.۲.۱.۴. مثلث، مساحت

۷۳. راه اول. مسأله ما با مسألهٔ زیر هم ارز است : متوازی‌الاضلاع ARPQ به مساحت معین σ ، را در مثلث مفروض ABC محاط کنید، به طوری که هر دو شکل در یک رأس A مشترک باشند و رأسهای دیگر متوازی‌الاضلاع بر ضلعهای AC، BC و AB از مثلث قرار داشته باشند. این مسأله بلافاصله از شکل (الف) نتیجه می‌شود که در آن متوازی‌الاضلاع ARPQ و مستطیل MNPQ دیده می‌شوند که مساحتهای مساوی دارند (زیرا هر دو در قاعدهٔ PQ و ارتفاع MQ مشترکند). به عبارت دیگر اگر بتوانیم متوازی‌الاضلاع ARPQ را رسم کنیم، آن‌گاه می‌توانیم مستطیل MNPQ را نیز بسازیم.



(الف)



(ب)

اگر یک تصویر موازی، مثلث ABC از صفحهٔ π را بر یک مثلث $A'B'C'$ از صفحهٔ π' بنگارد، آن گاه متوازی‌الاضلاع ARPQ محاط در مثلث ABC بر یک متوازی الاضلاع $A'R'P'Q'$ محاط در یک مثلث $A'B'C'$ نگاشته می‌شود [به همین دلیل است که ما رسم مستطیل MNPQ را با رسم متوازی‌الاضلاع ARPQ معاوضه کردیم : یک تصویر موازی، در حالت کلی، یک مستطیل را بر یک مستطیل نمی‌نگارد، و این امر، استفاده از یک تصویر موازی را برای حل مسألهٔ اصلی دشوار می‌سازد]. فرض می‌کنیم که متوازی‌الاضلاع ARPQ محاط شده باشد. مثلث ABC را بر اثر یک تصویر موازی مناسب بر یک مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین $A'B'C'$ می‌نگاریم (شکل ب). می‌توانیم فرض کنیم که مثلثهای ABC و $A'B'C'$ یک مساحت دارند (این کار را همواره می‌توان با استفاده از یک تشابه مناسب برای نگارهٔ مثلث ABC انجام داد) ؛ پس متوازی‌الاضلاع ARPQ و $A'R'P'Q'$ (که البته، چهار ضلعی دومی یک مستطیل

است) یک مساحت σ دارند. اگر S مساحت مثلث ABC باشد، آن‌گاه مساحت مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین $B'R'P'$ و $C'P'Q'$ برابر است با $S-\sigma$ چون :

$$S_{C'P'Q'} = \frac{1}{2}Q'P'^2 \quad , \quad S_{B'R'P'} = \frac{1}{2}R'P'^2$$

پس خواهیم داشت :

$$R'P'^2 + Q'P'^2 = 2(S-\sigma)$$

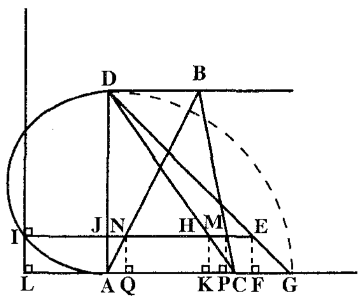
یا چون $R'P'^2 + Q'P'^2$ برابر مربع قطر $A'P'$ از مستطیل $A'R'P'Q'$ است، خواهیم داشت :

$$A'P' = \sqrt{2(S-\sigma)}$$

این تحلیل، ترسیم زیر را از مستطیل MNPQ به ذهن متبادر می‌سازد : مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین $A'B'C'$ با مساحت S، مساوی مساحت مثلث مفروض ABC را رسم می‌کنیم (ضلع $A'B'$ در این مثلث برابر واسطهٔ هندسی قاعده و ارتفاع مثلث ABC است). سپس، بر وتر $B'C'$، نقطهٔ P' را چنان انتخاب می‌کنیم که $A'P' = \sqrt{2(S-\sigma)}$. بالاخره ضلع BC از مثلث مفروض ABC را به نسبت $\frac{BP}{PC} = \frac{B'P'}{P'C'}$ تقسیم می‌کنیم (ویژگی (ج) از تصویر موازی). مستطیل MNPQ (با رأس Q بر ضلع AC و رأسهای M و N بر ضلع AB) مستطیل مطلوب است.

مسأله ممکن است یک یا دو جواب داشته باشد، یا اصلاً جوابی نداشته باشد.

راه دوم. در این راه حل، مساحت مستطیل را k^2 می‌گیریم و می‌خواهیم دو رأس مستطیل روی ضلع AC و دو رأس دیگرش روی AB و BC باشند. می‌توانیم به جای مثلث ABC، مثلث قائم‌الزاویهٔ ADC را که دارای همان قاعده و ارتفاع است، جایگزین کنیم. فرض می‌کنیم $S_{AJHK} = S_{NMPQ} = k^2$ باشد. با فرض $AG = AD = k$، داریم :



$$\frac{S_{AJEF}}{S_{AJHK}} = \frac{JE}{JH} \Rightarrow \frac{JE}{JH} = \frac{AG}{AC} = \frac{h}{b}$$

$$\Rightarrow \frac{S_{AJEF}}{k^2} = \frac{h}{b} \Rightarrow S_{AJEF} = k^2 . \frac{h}{b}$$

ما می‌توانیم مربع l^2 را که با مربع k^2 به نسبت $\frac{h}{b}$ است، پیدا کنیم، سپس ضلع به دست آمدهٔ l را از A به L منتقل کنیم. خط LI را موازی AD رسم می‌کنیم و عمود IJNM را نیز رسم می‌نماییم. از آن‌جا خواهیم داشت:

$$AJ.JE = AJ.JD = l^2 = k^2.\frac{h}{b}$$

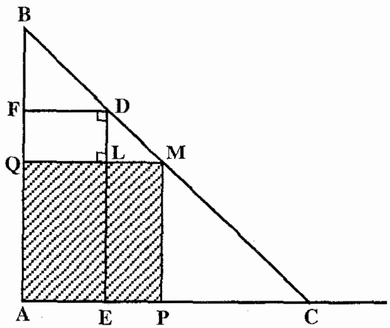
امّا:

$$\frac{S_{AJHK}}{S_{AJEF}} = \frac{AC}{AG} = \frac{h}{b} \Rightarrow S_{AJHK} = S_{AJEF}.\frac{h}{b}$$

اگر S_{AJEF} یا $AJ.JD$ را با $k^2.\frac{h}{b}$ جایگزین کنیم، خواهیم داشت:

$$S_{AJHK} = k^2.\frac{h}{b}.\frac{b}{h} = k^2$$

۷۴. مثلث متساوی‌الساقین ABC $(AB = AC)$ را در نظر می‌گیریم.



۱. می‌دانیم که مجموع فاصله‌های هر نقطه از قاعدهٔ مثلث متساوی‌الساقین، از دو ضلع آن، مقدار ثابتی است. از آن‌جا:

$$MP + MQ = DE + DF$$

از آن‌جا مستطیل MPAQ وقتی ماکزیمم است که ضلعهای MP و MQ مساوی باشند. در نتیجه مستطیل به مساحت ماکزیمم، مربعی است که یک رأس آن، نقطه M وسط وتر BC است (شکل).

هنوز می‌توان گفت: مستطیلهای MPAQ و DEAF یک قسمت مشترک دارند. پس کافی است MPEL و DLQF را با هم مقایسه کنیم:

اما ارتفاعهای ML و DL با هم مساوی‌اند، پس: MP یا $MQ > LQ$

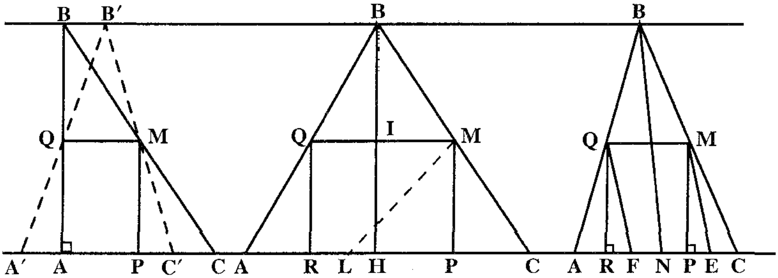
از آن جا $S_{MPEL} > S_{DLQF}$

بنابراین مربع MPAQ، مستطیل به مساحت ماکزیمم موردنظر است.

۲. برای یک مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC $(\hat{A} = 90^\circ)$ که در آن ضلعهای AB و AC می‌توانند برابر نباشند، مستطیل به مساحت ماکزیمم به وسیلهٔ نقطهٔ M، وسط وتر BC مشخص می‌شود (شکل الف) و اندازهٔ این مساحت $S_{APMQ} = \frac{1}{2}S_{ABC}$ است.

۳. در مثلث مختلف‌الاضلاع ABC، متوازی‌الاضلاع به مساحت ماکزیمم، رأسش نقطهٔ M، وسط ضلع BC است. از طرفی مستطیل MPRQ با این متوازی‌الاضلاع معادل است؛ بنابراین مستطیل به مساحت ماکزیمم نیز یک رأسش نقطهٔ M، وسط ضلع BC و مساحتش نصف مساحت مثلث ABC است.

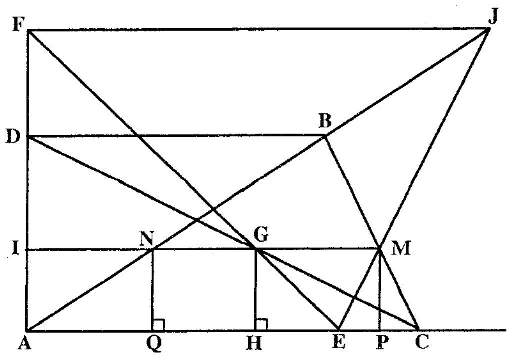
تبصره. مطلب بالا را می‌توان به این طریق ثابت کرد:
میانهٔ BN از مثلث ABC را رسم می‌کنیم و از M و Q دو خط موازی BN رسم می‌کنیم تا ضلع AC را در E و F قطع کنند. متوازی‌الاضلاع MQFE با مستطیل MQRP هم‌ارز است. پس مساحت این مستطیل حداکثر مقدار را داراست.



(الف) (ب) (پ)

۱.۱.۲.۲.۲.۱.۵. مثلث، محیط

۷۵. مسأله را حل شده و مستطیل MNPQ محاط در مثلث ABC را جواب مسأله می‌گیریم. در این صورت $MN + MP = l$ است. می‌دانیم که مسأله تبدیل می‌شود به رسم مستطیل GHAI محاط در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACD که در قاعدهٔ AC شریک و ارتفاع نظیر ضلع AC از آن دو با هم برابرند. پس کافی است $AE = AF = l$ را جدا کرده، EF را رسم

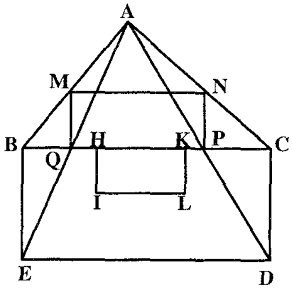


کنیم تا CD را در G قطع کند. خواهیم داشت : $GH + GI = l$

همچنین داریم : $MP + MN = l$

از آن جا ...

۱.۱.۲.۲.۲.۱.۶.مثلث، مستطیل



۷۶. در صورتی که MNPQ مستطیل خواسته شده محاط در مثلث ABC و متشابه با مستطیل مفروض HKLI باشد، چنانچه AQ را وصل کرده، امتداد دهیم تا عمود در نقطهٔ B بر BC را در E قطع کند، داریم :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MQ}{BE} \qquad (۱)$$

و همچنین اگر D نقطهٔ برخورد AP با عمود در نقطهٔ C بر BC باشد، می‌توان نوشت :

$$\frac{AN}{AC} = \frac{NP}{CD} \qquad (۲)$$

و از طرفی در مثلث ABC، $MN \| BC$ است، پس :

$$\frac{AM}{AB} = \frac{MN}{BC} \qquad (۳)$$

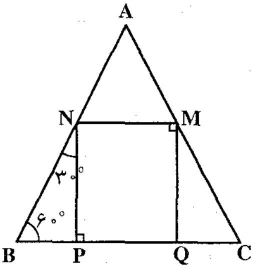
از ملاحظهٔ رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که $BE \| CD$ و $BE = CD$ است، یعنی چهارضلعی BCDE مستطیل مشابه با MNPQ و در نتیجه HKLI است، و از آن‌جا حل مسأله چنین است :

ابتدا مستطیل BCDE متشابه با مستطیل مفروض HKLI را رسم نموده، AD و AE را وصل می‌کنیم تا ضلعهای BC را در P و Q قطع نمایند. از P و Q عمودهایی بر BC اخراج می‌کنیم تا ضلع AC و AB را بترتیب در N و M قطع نماید. MNPQ مستطیل خواسته شده است.

۱.۱.۲.۲.۲.۲.رسم مستطیل با معلوم بودن: مثلث متساوی‌الاضلاع، مثلث متساوی‌الاضلاع و ...

۱.۱.۲.۲.۲.۲.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن مثلث متساوی‌الاضلاع

۷۷. مسأله را حل شده و مربع MNPQ محاط در مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را جواب مسأله می‌گیریم.



اگر ضلع مربع را x فرض کنیم، مثلث AMN متساوی‌الاضلاع به ضلع x است ؛ زیرا :

$AM = AN = MN = x$

است. از آن جا :

$NB = a - x$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ NBP ($\hat{P} = ۹۰°$)، $\hat{N} = ۳۰°$ است.

پس :

$$BP = \frac{a-x}{۲}\ ,\ NB^۲ = BP^۲ + NP^۲ \Rightarrow$$

$$(a-x)^۲ = (\frac{a-x}{۲})^۲ + x^۲ \Rightarrow$$

$$a^۲ + x^۲ - ۲ax = \frac{a^۲}{۲} + \frac{x^۲}{۲} - ax + x^۲ \Rightarrow$$

$$\frac{x^۲}{۲} + ax - \frac{a^۲}{۲} = ۰ \Rightarrow$$

$$x^۲ + ۲ax - a^۲ = ۰ \Rightarrow x = \frac{-a \pm \sqrt{a^۲ + \frac{a^۲}{۲}}}{۱} = -a \pm \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\Rightarrow x = a(\frac{\sqrt{۳}}{۲} - ۱)$$

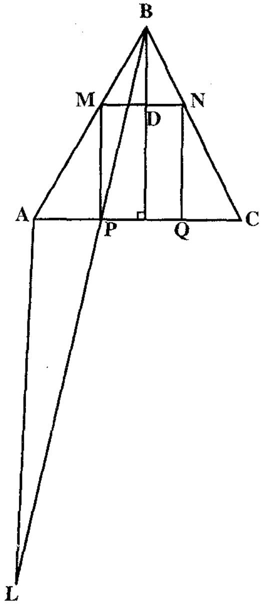
با معلوم بودن ضلع مربع، مربع رسم می‌شود.

روش دیگر. اگر از A به P وصل کنیم، ثابت می‌شود که زاویهٔ $B\hat{A}P = ۱۵°$ است. با توجه به این نکته، مربع براحتی رسم می‌شود.

۱.۱.۲.۲.۲.۳. رسم مستطیل با معلوم بودن: مثلث متساوی‌الساقین، مثلث متساوی‌الساقین و ...

۱.۱.۲.۲.۲.۳.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن مثلث متساوی الساقین، محیط

۷۸. مسأله را حل شده می‌گیریم و مستطیل MNQP محاط در مثلث متساوی‌الساقین ABC($BA = BC$) را جواب مسأله می‌گیریم. ارتفاع BH را رسم می‌کنیم تا MN را در



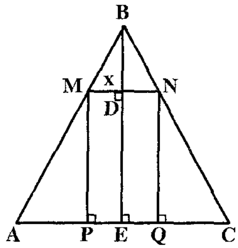
D قطع کند. بنا به فرض داریم (شکل):

$$۲(MP + MN) = ۲(MN + ۲BM)$$

مسأله منجر می‌شود به یافتن نقطه‌ای مانند M به قسمی که ارتفاع MP مساوی دو برابر BM باشد.

کافی است از شکلهای متشابه استفاده کنیم و عمود ALرا به اندازهٔ ۲AB اخراج کنیم. نقطهٔ برخورد AL با AB، نقطهٔ P، یک رأس مستطیل خواسته شده است.

۷۹. طول قاعدهٔ AC را با ۲b، ارتفاع BH را با h، AB را با l و BD را با x نشان می‌دهیم. داریم:

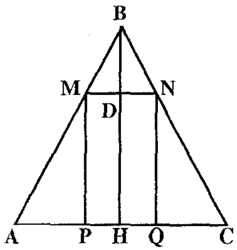


$$BM + MD = \frac{۲}{۳}(MP + ۲MD) \Rightarrow$$

$$\frac{lx}{h} + \frac{bx}{h} = \frac{۲}{۳}\left(h - x + \frac{۲bx}{h}\right)$$

$$\Rightarrow x = \frac{۲b^{۲}}{۳l + ۲h - b}$$

x را به وسیلهٔ ترسیم می‌توان به دست آورد. از آن‌جا BD مشخص گردیده و مستطیل رسم می‌شود.



۸۰. مستطیل MNQP محاط در مثلث متساوی‌الساقین ABC ($BA = BC$) را جواب مسأله می‌گیریم. ارتفاع BH را رسم می‌کنیم تا MN را در D قطع کند. با فرض $AC = ۲b$، $BH = h$، $AB = l$ و $BD = x$ خواهیم داشت:

$$\frac{lx}{h} + \frac{bx}{h} + h - x + \frac{۲bx}{h} = s$$

$$\Rightarrow x = \frac{h(s - h)}{l + ۳b - h}$$

۱.۱.۲.۲.۲.۴. رسم مستطیل با معلوم بودن: مثلث قائم‌الزاویه، مثلث قائم‌الزاویه و ...

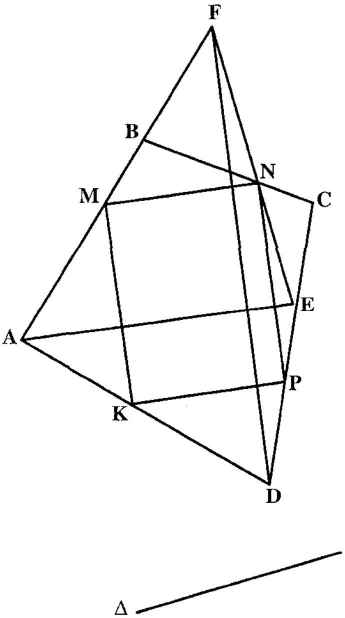
۱.۱.۲.۲.۲.۴.۱. مثلث قائم‌الزاویه، رأس

۸۱. قطر مستطیل ارتفاع مثلث است.

۱.۱.۲.۲.۳. رسم مستطیل با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی و ...

۱.۱.۲.۲.۳.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن: چهارضلعی، چهارضلعی و ...

۱.۱.۲.۲.۳.۱.۱. چهارضلعی، خط



۸۲. از A به موازات Δ رسم می‌کنیم تا CD را در E قطع کند. از D بر این خط عمود می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا امتداد AB را در F قطع کند. از F به E وصل می‌کنیم تا BC را در N قطع کند. از N به موازات AE رسم می‌کنیم. سپس از M بر AE عمود می‌کنیم، بعد از K خطی به موازات MN رسم می‌کنیم. در مثلث AED داریم :

$$\frac{DP}{EP}=\frac{DK}{AK}$$

در مثلث AFD داریم :

$$\frac{DK}{AK}=\frac{FM}{AM}$$

در مثلث FAE داریم :

$$\frac{FM}{AM}=\frac{FN}{EN}$$

از رابطه‌های بالا نتیجه می‌گردد که :

$$\frac{DP}{PE}=\frac{DK}{AK}=\frac{FM}{AM}=\frac{FN}{EN}$$

در مثلث FED :

$$\frac{DP}{EP}=\frac{FN}{EN}$$

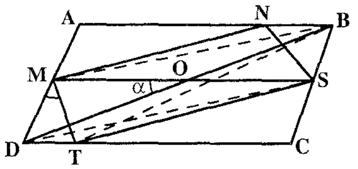
چون نسبت بالا برقرار است، پس در مثلث FED، NP∥FD ، پس : $\hat{N}=\hat{P}=90^\circ$ و مستطیل موردنظر، MNPK می‌باشد.

۱.۱.۲.۲.۳.۲. رسم مستطیل با معلوم بودن: چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای ویژه و...

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن: متوازی‌الاضلاع، متوازی‌الاضلاع و ...

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۱.۱. متوازی‌الاضلاع، زاویه

۸۳. اگر مسأله حل شده فرض شود، از تساوی زاویه‌های $\hat{M}_1$ و $\hat{S}_1$، و همچنین $\hat{T}_1$ و $\hat{N}_1$ و پاره‌خطهای MT و NS تساوی دو مثلث DMT و BSN نتیجه می‌شود و از آن‌جا تساوی $BS = MD$ به دست می‌آید.



چهارضلعی MDSB متوازی‌الاضلاع است و NT از O گذشته (O مرکز متوازی‌الاضلاع) و در آن نصف می‌شود و لذا مرکز متوازی‌الاضلاع بر مرکز مستطیل منطبق است. و O مرکز مستطیل معلوم است و مسأله منجر به این می‌شود که مثلث متساوی‌الساقین OMT به زاویهٔ رأس α را چنان رسم کنیم که رأس O از آن بر مرکز متوازی‌الاضلاع و رأسهای M و T از آن بر ضلعهای AD و DC واقع باشند، بنابراین می‌توان چنین عمل کرد:

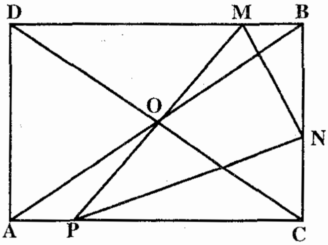
رأس M از مثلث متساوی‌الساقین MOT بر ضلع AD از متوازی‌الاضلاع ABCD واقع بوده، و مکان دیگر آن از دوران T (واقع بر DC) حول نقطهٔ O (مرکز متوازی‌الاضلاع) و به زاویهٔ α به دست می‌آید. بنابراین DC را در حول نقطهٔ O و به زاویهٔ α دوران می‌دهیم. نقطهٔ برخورد مبدل CD با AD نقطهٔ M می‌باشد. با تعیین M، دایره‌ای به مرکز O و شعاع OM رسم می‌کنیم. از برخورد دایره با ضلعهای DC، BC و AB ، سه رأس دیگر مستطیل به دست می‌آید (شکل).

شرط امکان مسأله آن است که مبدل CD (دوران یافتهٔ CD حول مرکز O و به زاویهٔ α) ضلع AD را در نقطه‌ای بین A و D قطع کند. دایره به مرکز O و شعاع OM هر ضلع را در دو نقطه قطع می‌کند که یکی از آنها قابل قبول نمی‌باشد.

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۲. رسم مستطیل با معلوم بودن: مستطیل، مستطیل و ...

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۲.۱. مستطیل، نسبت ضلعها

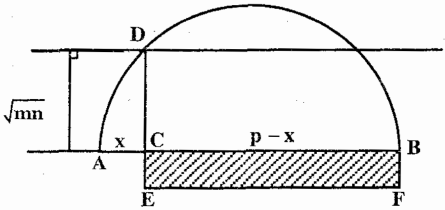
۸۴. فرض کنیم مسأله حل شده باشد و مثلث قائم‌الزاویهٔ MNP نصف مستطیلی باشد که در مستطیل ABCD محاط شده است. قطر MP از O می‌گذرد، زیرا می‌دانیم متوازی‌الاضلاعی که در متوازی‌الاضلاع دیگر محاط شود، محل برخورد قطرهایشان بر هم منطبق است.



چون مثلث ONP متساوی‌الساقین است، زاویهٔ $M\hat{O}N$ دو برابر زاویهٔ $M\hat{P}N$ است. و $\tan M\hat{P}N = \frac{MN}{PN} = \frac{p}{q}$. پس راه حل مسأله چنین است:

ابتدا زاویه‌ای خارج مستطیل می‌سازیم که تانژانت آن $\frac{p}{q}$ باشد و ضلع DB از مستطیل مفروض را حول نقطهٔ O به اندازهٔ دو برابر این زاویه دوران می‌دهیم تا BC را در N تلاقی کند، به مرکز O و به شعاع ON دایره‌ای رسم می‌کنیم تا ضلعهای دیگر مستطیل مفروض را قطع کند. نقطه‌های برخورد، رأسهای مستطیل خواسته شده است (شکل).

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۲.۲. مستطیل، محیط، مساحت



۸۵. فرض می‌کنیم محیط مستطیل داده شده، مساوی $2p$ و مساحت آن مساوی mn باشد. مسأله بر می‌گردد به تعیین ریشه‌های معادلهٔ $x(p-x) = mn$ با استفاده از رسم نمودار.

برای حل این معادله، پاره‌خط AB=p را رسم می‌کنیم و به قطر AB، نیمدایره‌ای رسم می‌نماییم. سپس خطی موازی AB و به فاصلهٔ $\sqrt{mn}$ از آن رسم می‌کنیم تا نیمدایره را در نقطهٔ D قطع کند. از D عمود DC را بر AB فرود می‌آوریم و از D به A و B وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ DAB داریم:

$$AC.CB = CD^2 \Rightarrow AC.CB = mn$$

بنابراین AC و CB ریشه‌های معادلهٔ مورد نظر می‌باشند.

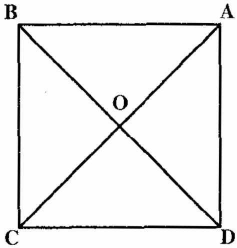
۱.۱.۲.۲.۳.۲.۳. رسم مستطیل با معلوم بودن: مربع، مربع و...

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۳.۱. مربع، ضلع

۸۶. اگر ضلع مربع را a فرض کنیم، مساحت مربع مساوی a^2 می‌شود و اگر عرض مستطیل را x فرض کنیم، رابطهٔ $a^2 = lx$ برقرار است. این رابطه را به صورت $\frac{x}{a} = \frac{a}{l}$ نوشته و از این تناسب، پاره‌خط x را به طریق ترسیم (چهارمین جزء تناسب) به دست می‌آوریم. با معلوم

بودن طول و عرض، مستطیل قابل ترسیم خواهد بود.

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۳.۲. مربع، قطر



۸۷. فرض می‌کنیم مستطیل MNPQ در مربع ABCD به ضلع a محاط باشد، به قسمی که رأسهای مستطیل روی ضلعهای مربع باشند. می‌دانیم که مرکز مستطیل بر مرکز مربع منطبق است. پس اگر طول قطرهای مستطیل برابر l باشد، برای تعیین رأسهای آن، کافی است به مرکز O و به شعاع $\frac{l}{۲}$ دایره‌ای رسم کنیم تا ضلعهای مربع را در M، N،P و Q قطع کند. MNPQ مستطیل خواسته شده است.

۱.۱.۲.۲.۳.۲.۴. رسم مستطیل با معلوم بودن: لوزی، لوزی و ...

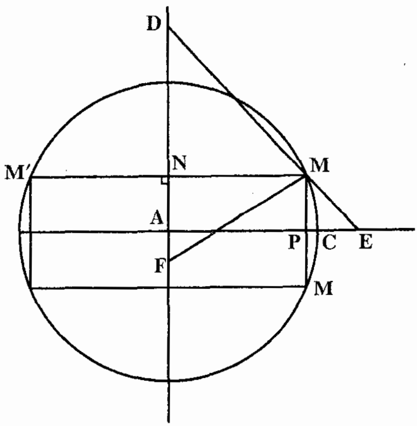
۱.۱.۲.۲.۳.۲.۴.۱. لوزی، مساحت

۸۸. با در نظر گرفتن $\frac{۱}{۴}$ شکل، مسأله برمی‌گردد به رسم مستطیلی محاط در یک مثلث که مساحت آن داده شده است.

۱.۱.۲.۲.۳.۳. رسم مستطیل با معلوم بودن: پنج‌ضلعی، پنج‌ضلعی و ...

۸۹. الف) $۴۵cm^۲$ ، ب) $۳۶/۱۲۵cm^۲$

۱.۱.۲.۲.۴. رسم مستطیل با معلوم بودن: نیمدایره، دایره و ...



۱.۱.۲.۲.۴.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن: نیمدایره، نیمدایره و ...

۱.۱.۲.۲.۴.۱.۱. نیمدایره، مساحت

۹۰. مستطیل به مساحت $۴k^۲$ ، محاط در دایرهٔ O را در نظر می‌گیریم (شکل). در این صورت مساحت مستطیل APMN برابر است با :

$$AP.PM = k^۲$$

از طرف دیگر داریم :

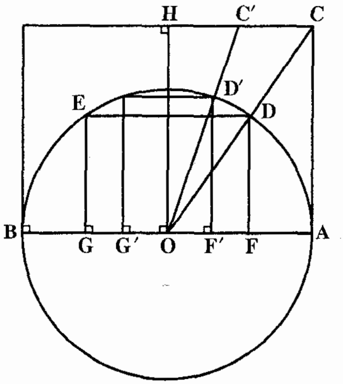
$$AP^{2}+MP^{2}=AM^{2}=r^{2}\Rightarrow AP^{2}+2AP.MP+MP^{2}=(AP+PM)^{2}=r^{2}+2k^{2}$$

اکنون ما مجموع دو ضلع مجاور و حاصلضرب آنها را داریم. پس می‌توانیم آنها را مشخص کنیم. برای این کار فرض می‌کنیم $AG^{2}=2k^{2}$ باشد. اگر طول AG را از A به I انتقال دهیم و عمودهای IL و CL را رسم کنیم، خواهیم داشت :

$$AL^{2}=r^{2}+2k^{2}\Rightarrow AL=AP+MP$$

سپس AL را از A به E و به D انتقال دهیم و DE را رسم کنیم، در این صورت مستطیل محاط در نیمدایره مساحتی برابر $2k^{2}$ خواهد داشت.

۱.۱.۲.۲.۴.۱.۲. نیمدایره، مستطیل



۱.۹۱. فرض می‌کنیم AB و AC دو ضلع مجاور مستطیل داده شده و $\frac{AC}{AB}=\frac{m}{n}$ باشد. CO را رسم می‌کنیم تا نیمدایره را در D قطع کند. مستطیل DFGE را می‌سازیم. خواهیم داشت :

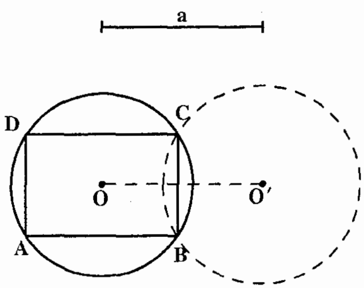
$$\frac{DF}{FG}=\frac{GA}{AB}=\frac{m}{n}$$

۲. اگر ضلع کوچک مستطیل روی قطر نیمدایره باشد، می‌توان HC′ را چنان اختیار کرد که :

$$\frac{OH}{2HC'}=\frac{m}{n}\Rightarrow\frac{F'G'}{D'F'}=\frac{m}{n}$$

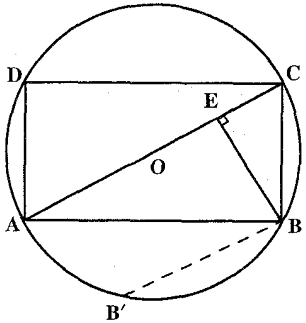
۱.۱.۲.۲.۴.۲. رسم مستطیل با معلوم بودن: دایره، دایره و ...

۱.۱.۲.۲.۴.۲.۱. دایره، پاره‌خط



۹۲. این راه‌حل به این ترتیب است که دایرهٔ داده شدهٔ O را به بردار $\vec{a}$ انتقال می‌دهیم تا به دایرهٔ O′ تبدیل شود. هرگاه C و B نقطه‌های برخورد دو دایره باشد، از این نقطه‌ها موازی با a رسم می‌کنیم تا دایرهٔ داده شده را در D و A قطع کنند.

۱.۱.۲.۲.۴.۲.۲. دایره، مساحت



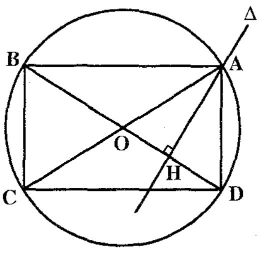
۹۳. مسأله را حل شده انگاشته، فرض می‌کنیم ABCD مستطیلی به مساحت a^2 باشد که در دایره‌ای به مرکز O و به شعاع r محاط است. قطرهای این مستطیل قطرهای دایره‌اند و مساحت آن دوبرابر مساحت مثلث ABC است. پس $2r \times BE = a^2$ و یا $BE = \frac{a^2}{2r}$.

بنابراین قطعه خط AB را به طول $\frac{a^2}{2r}$ می‌سازیم و قطر AC را در دایره رسم کرده، خطی موازی با AC و به فاصلهٔ $\frac{a^2}{2r}$ از آن رسم می‌کنیم تا دایره را در دو نقطهٔ B و B′ قطع کند. چون این نقطه‌ها مشخص شدند، مستطیل کاملاً معلوم می‌شود. باید در نظر داشت که دو مستطیل جواب مسأله متساوی‌اند، زیرا ضلعهای آنها برابرند: $B'C = AB$ و $AB' = CB$.

برای آنکه خط موازی با AC دایره را قطع کند، باید $\frac{a^2}{2r} < r$، و یا $a < r\sqrt{2}$ باشد.

به ازای $a = r\sqrt{2}$ خط موازی با AC بر دایره مماس شده، مستطیل خواسته شده مربع می‌شود.

۱.۱.۲.۲.۴.۲.۳. دایره، رابطهٔ متری



۹۴. مسأله را حل شده و مستطیل ABCD محاط در دایرهٔ (O) را جواب مسأله می‌گیریم. می‌دانیم که قطرهای مستطیل، دو قطر از دایره‌اند. بعلاوه چون $AB^2 - AD^2 = k^2$ است، پس یک مکان هندسی رأس A، خطی مانند Δ است، عمود بر قطر BD، به قسمی که اگر H پای عمود رسم شده از A بر BD باشد، $OH = \frac{k^2}{2BD} = \frac{k^2}{2R}$ است.

بنابراین برای حل مسأله قطر دلخواه BD از دایره را رسم می‌کنیم. سپس مکان هندسی نقطه‌ای را که برای آن، رابطهٔ $AB^2 - AD^2 = k^2$ برقرار است، یعنی خط Δ را رسم

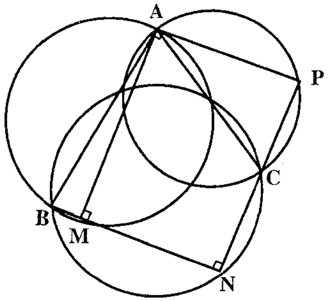
می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این خط با دایره، رأس A است. امتداد AO دایره را در رأس C قطع می‌کند و مستطیل ABCD جواب مسأله است.

۱.۱.۲.۲.۴.۲.۴. دایره، مستطیل

۹۵. می‌دانیم هرگاه در دو مستطیل $A'B'C'D'$ و ABCD زاویه‌های قطرهای نظیر به نظیر متساوی باشند، آن دو مستطیل متشابه‌اند. از طرفی می‌دانیم که اگر $A'B'C'D'$ در دایره‌ای محاط باشد، هر قطر آن یکی از قطرهای دایره می‌باشد. بنابراین برای حل مسأله کافی است در دایرهٔ مفروض دو قطر رسم کنیم که زاویهٔ آنها مساوی زاویهٔ قطرهای مستطیل ABCD باشد. به این طریق مستطیل $A'B'C'D'$ محاط در دایره به دست می‌آید.

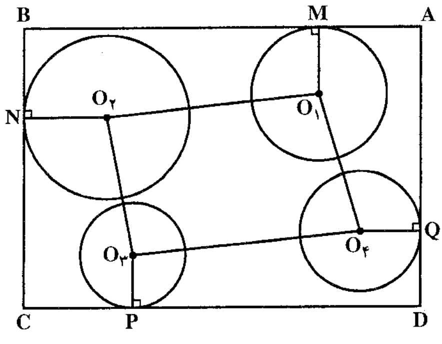
۱.۱.۲.۲.۴.۲.۵. سه دایره، مثلث، رأس

۹۶. مسأله را حل شده و مستطیل AMNP را که رأس A از آن بر رأس A از مثلث ABC و سه رأس N ،M و P روی سه دایره به قطرهای BC،AB وAC قرار دارند، جواب مسأله می‌گیریم. از آن‌جا...



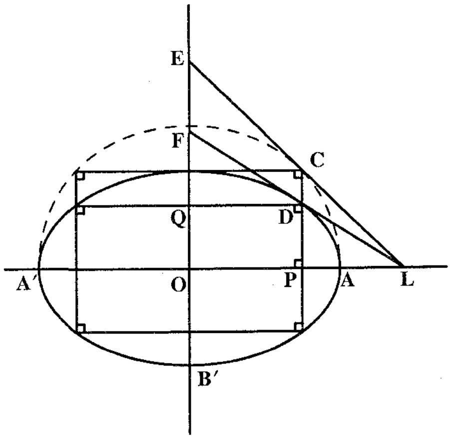
۱.۱.۲.۲.۴.۲.۶. چهار دایره، مستطیل

۹۷. مسأله را حل شده و مستطیل ABCD را که در نقطه‌های P،N ،M وQ بر دایره‌های (O_1)، (O_2)، (O_3) و (O_4) مماسند و این مستطیل با مستطیل مفروض $A'B'C'D'$ متشابه است، در نظر می‌گیریم. چهارضلعی $O_1O_2O_3O_4$ مشخص است. و نسبت ضلعهای $\frac{AB}{BC} = k$ مقدار معلومی است. از آن‌جا...



۵.۲.۲.۱.۱. رسم مستطیل با معلوم بودن: مقطعهای مخروطی و منحنیهای دیگر

۱.۵.۲.۲.۱.۱. بیضی



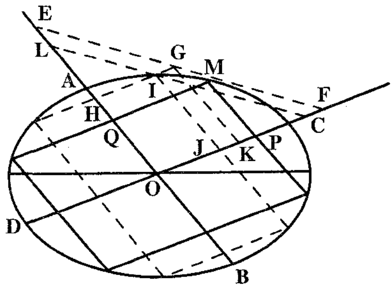
۹۸. با توجه به دایرهٔ اصلی بیضی، دیده می‌شود که مستطیل ماکزیمم دارای دو قطر مزدوج مساوی است.

برای این کار، کافی است مماس FDL را چنان رسم کنیم که DF=DL باشد و برای این ترسیم می‌توان از دایرهٔ اصلی نیز استفاده کرد. بعلاوه:

$$OL = a\sqrt{۲} \overset{\text{زیرا}}{\Rightarrow} CL = CE = OC = a$$

و از آن‌جا:

$$OF = b\sqrt{۲}$$



۹۹. می‌دانیم که ضلعهای یک مستطیل محاط در یک بیضی موازی دو قطر مزدوج آن بیضی می‌باشند. لذا DC مزدوج قطر داده شدهٔ AB را رسم می‌کنیم و خط مماس EMF را که یک مثلث متساوی‌الساقین ایجاد می‌کند، رسم می‌کنیم.

نقطهٔ M رأس خواسته شده است.

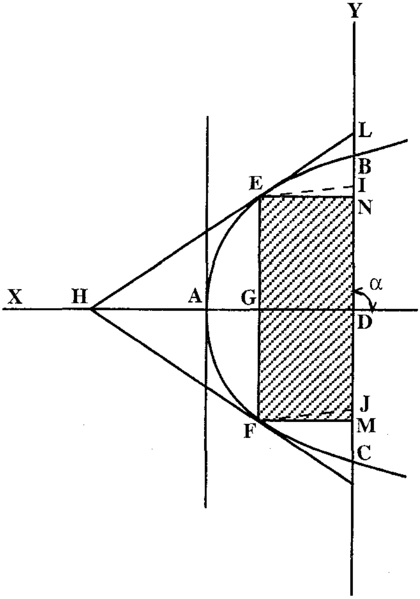
در نتیجه بنابر یک ویژگی مثلث متساوی‌الساقین داریم:

$$MQ + MP = GH + GK \Rightarrow$$

$$MP + MQ > IJ + IH$$ و...

۲.۵.۲.۲.۱.۱. سهمی

۱۰۰. قطعهٔ داده شدهٔ ABC از سهمی را در نظر می‌گیریم. خط مماسی که موازی وتر BC رسم می‌شود، انتهای A از قطر AD را که از وسط وتر، رسم شده نشان می‌دهد، بعلاوه



کافی است خط دلخواه EF را موازی BC رسم کنیم و نقطه‌های وسط D و G را به هم وصل کنیم. برای رسم متوازی‌الاضلاع، ماکزیمم FEIJ و در نتیجه رسم مستطیل ماکزیمم EFMN باید مماس HEL را چنان رسم کنیم که EH=EI باشد.

می‌دانیم که AH=AG است، بعلاوه GH=GD، زیرا EH=EL. از آن‌جا $AG=\frac{۱}{۲}AD$. در نتیجه برای این که مستطیل ماکزیمم را داشته باشیم، کافی است وتر EF را موازی BC رسم کنیم و نقطهٔ G را روی $\frac{۱}{۲}AD$ اختیار نماییم.

تبصره. داریم :

$$S_{BAC}=\frac{۲}{۳}AD.BC\sin\alpha \ ; \quad AG=\frac{AD}{۳}$$

از آن‌جا :

$$EG^{۲}=ID^{۲}=\frac{DB^{۲}}{۳}\Rightarrow IJ=\frac{BC}{\sqrt{۳}}$$

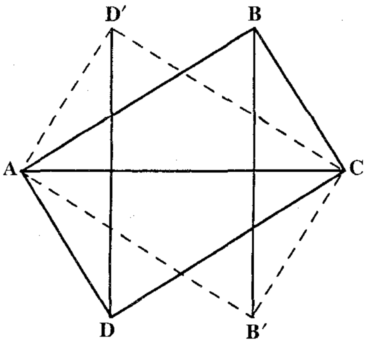
مستطیل یا متوازی‌الاضلاع ماکزیمم مساوی‌اند، از آن‌جا :

$$\frac{۲}{۳}AD\times\frac{BC}{\sqrt{۳}}\sin\alpha=\frac{۲}{۳\sqrt{۲}}AD.BC\sin\alpha$$

همچنین

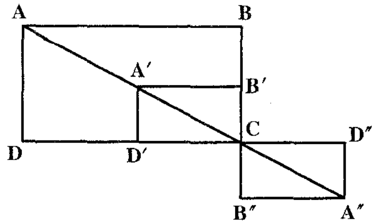
$$S_{EFIJ}=\frac{S_{ABC}}{\sqrt{۳}}$$

۱.۱.۲.۲.۶. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



۱۰۱. قرینهٔ مستطیل ABCD را نسبت به قطر AC پیدا می‌کنیم. قرینهٔ نقطه‌های A و C برخودشان منطبق است. برای پیدا کردن قرینه‌های نقطه‌های B و D، از این نقطه‌ها عمودهایی بر AC فرود آورده

و به اندازهٔ خودشان امتداد می‌دهیم. مستطیل $AB'CD'$ قرینهٔ مستطیل ABCD نسبت به قطر AC است.



۱۰۳. مجانس مستقیم مستطیل ABCD با نسبت $\frac{۱}{۲}$ و به مرکز رأس C، مستطیل $A'B'C'D'$ است، به قسمی که داشته باشیم:

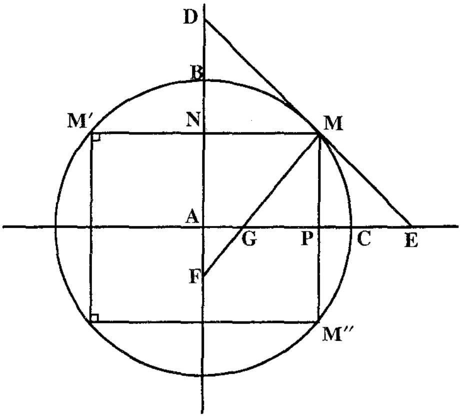
$$\frac{CB'}{CB} = \frac{CA'}{CA} = \frac{CD'}{CD} = \frac{۱}{۲}$$

و مجانس معکوس مستطیل ABCD با نسبت $\frac{۱}{۲}$ و به مرکز رأس C، مستطیل $A''B''C''D''$ می‌باشد، به قسمی که:

$$\frac{CB''}{CB} = \frac{CA''}{CA} = \frac{CD''}{CD} = \frac{۱}{۲}$$

و به همین ترتیب با نسبت ۱ و ۲ می‌توان مجانس مستطیل را پیدا کرد.

۱.۱.۲.۲.۷. مسأله‌های ترکیبی



۱۰۴. ۱. مستطیل $MM'N'M''$ محاط در دایرهٔ به مرکز A را جواب مسأله می‌گیریم و دو قطر عمود بر هم AC و AB از دایره را رسم می‌کنیم تا MM' و MM'' را در N و P قطع کند. داریم:

$$MP + MN = \frac{1}{۴}$$

نقطهٔ M روی کمان $\overset{\frown}{BMC}$ از دایره واقع است، همچنین روی مکان هندسی نقطه‌ای است که مجموع فاصله‌اش از دو خط AB و AC مساوی مقدار ثابت $\frac{1}{۴}$ باشد، قرار دارد. بنابراین برای رسم مستطیل، دوقطر عمود بر هم AB وAC از دایره را رسم می‌کنیم. سپس مکان هندسی نقطه‌ای را که مجموع فاصله‌اش از دو خط AB وAC برابر $\frac{1}{۴}$ است به دست می‌آوریم. نقطهٔ برخورد این مکان هندسی با دایره، نقطهٔ M

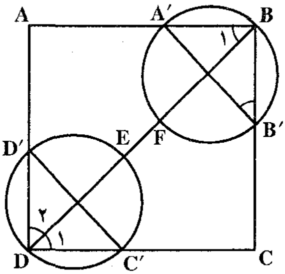
است. قرینهٔ نقطهٔ M نسبت به AC،AB و مرکز دایره، یعنی نقطهٔ A، رأسهای دیگر مستطیل جواب مسأله را مشخص می‌کنند.

۲. تفاضل دو ضلع مجاور مستطیل برابر d است. $AF = AG = \frac{d}{۲}$ و FGM را رسم می‌کنیم. $MN - MP = \frac{d}{۲}$ خواهد بود. از آن‌جا $MM' - MM'' = d$ و مستطیل خواسته شده را رسم می‌کنیم.

۳.۲.۱.۱. رسم مربع

۱.۳.۲.۱.۱. رسم مربع با معلوم بودن: نقطه، ضلع، قطر، ...

۱.۱.۳.۲.۱.۱. نقطه

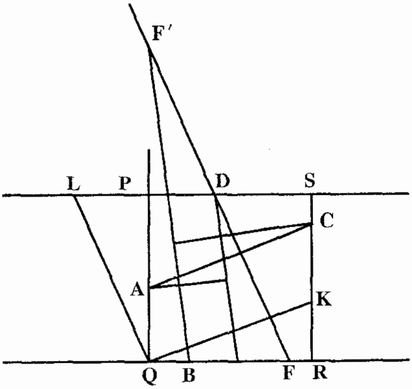


۱۰۵. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. اگر قطر BD را رسم کنیم، $\hat{B} = \hat{B}'$ و $\hat{D} = \hat{D}'$. پس اگر دایرهٔ محیطی دو مثلث $A'BB'$ و $DC'D'$ را رسم کنیم، E وسط کمان $\overset{\frown}{D'C'}$ و F وسط کمان $\overset{\frown}{A'B'}$ است.

پس برای حل مسأله، ابتدا از A' به B' و از C' به D' وصل می‌کنیم. به قطر $A'B'$ و $C'D'$ دو دایره رسم می‌کنیم و F وسط کمان $\overset{\frown}{A'B'}$ را به E وسط کمان $\overset{\frown}{C'D'}$ وصل می‌کنیم. هر کجا که ادامهٔ EF دو دایره را قطع کند، نقطه‌های B و D هستند. از B به A' و B' وصل می‌کنیم، هر کجا که ادامهٔ DD' و DC' را قطع کرد، نقطه‌های A و C هستند.

تبصره. حالتی که چهار نقطهٔ وسط ضلعهای مربع معلوم باشند، حالت ویژه‌ای از مسألهٔ بالاست، اما مسأله راه‌حل ساده‌تری دارد. شکل، راه‌حل را نشان می‌دهد.

۱۰۶. اگر خطی که از D بر AC عمود می‌شود خط OR را در F قطع کند، آن گاه DF = AC.
در واقع اگر خط DF را ثابت نگاه‌داریم و مربع، و به همراه آن خط AC را حول مرکزش به اندازهٔ °۹۰ بچرخانیم به طوری که ضلعهای QR،PQ، RS و SP بترتیب در وضعیت



فعلی ضلعهای SP، RS، QR و PQ قرار گیرند، خط AC با DF موازی می‌شود؛ پس AC = DF . برابری DF و AC را از راه دیگری هم می‌توان نشان داد. فرض کنید خطهایی که از Q به موازات AC و DF رسم می‌شوند، RS و SP را بترتیب در نقطه‌های K و L قطع کنند. در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ PQL و QRK داریم:

$$P\hat{Q}L = L\hat{Q}R - P\hat{Q}R = L\hat{Q}R - L\hat{Q}K = K\hat{Q}R$$

پس زاویه‌های دو مثلث دوبه‌دو برابرند و چون بنابر فرض PQ=QR، دو مثلث همنهشتند؛ پس QL=QK . ولی QL=DF و QK=AC ؛ پس AC=DF.

برابری این دوپاره‌خط راه حل زیر را برای مسأله به ذهن می‌رساند:

ترسیم. از نقطهٔ مفروض D خط DF را بر خط معلوم AC عمود کنید و روی آن پاره‌خط DF را برابر AC جدا کنید. F را به نقطهٔ چهارم مفروض، یعنی B وصل و خطی از D به موازات BF رسم کنید. این دو خط موازی و خطهایی که از A و C بر آنها عمود می‌شوند، مربع مطلوب PQRS را تشکیل می‌دهند.

اثبات. از روش بیان شده در ترسیم بآسانی نتیجه می‌شود که PQRS مستطیلی است که ضلعهای آن از نقطه‌های مفروض A، B، C و D می‌گذرند.

برای این که نشان دهیم این مستطیل مربع است، باز هم مثلثهای PQL و QRK را در نظر می‌گیریم، و مانند آنچه در تحلیل انجام دادیم نشان می‌دهیم که زاویه‌های این دو مثلث دوبه‌دو برابرند. حال همان‌طور که در ترسیم گفته شد، DF=AC ؛ پس QL=QK، پس مثلثها همنهشتند و QP=QR.

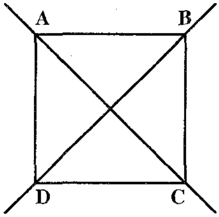
بحث. اگر نقطهٔ ′F را قرینهٔ F نسبت به D در نظر بگیریم، و نقش F را به آن بدهیم، برای مسأله جواب دومی به دست خواهیم آورد.

به علاوه می‌توانیم از نقطهٔ D بر هر یک از دو ضلع دیگر مثلث ABC، یعنی AB و BC نیز عمود وارد کنیم، و به این ترتیب، دو جفت جواب دیگر به دست می‌آوریم. پس در حالت کلی مسأله ۶ جواب متفاوت دارد البته تفاوتی ندارد که کدام یک از چهارنقطهٔ مفروض را نقطهٔ D فرض کنیم.

اگر نقطهٔ F بر نقطهٔ Bمنطبق شود، راستای BF نامعین خواهد بود، یعنی هر خطی را که از B می‌گذرد می‌توان ضلع مربع مطلوب در نظر گرفت وشکل را با این انتخاب تکمیل کرد. پس اگر پاره‌خطی که دو نقطه از چهار نقطهٔ مفروض را به هم وصل می‌کند، بر پاره‌خطی که دو نقطهٔ دیگر را به هم وصل می‌کند عمود و با آن برابر باشد، مسأله بینهایت جواب دارد.

شکل حالتی را نشان می‌دهد که مسأله شش جواب دارد.

۲.۱.۳.۲.۱.۱. قطر



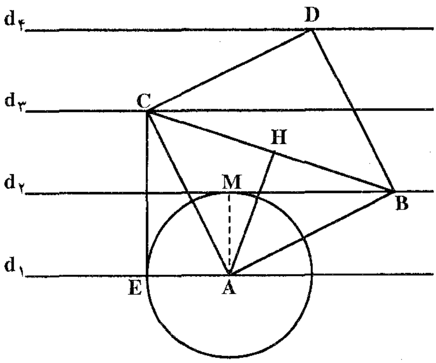
۱۰۷. عمودمنصف قطر مربع را رسم می‌کنیم و آن را در دو طرف قطر به اندازهٔ نصف قطر امتداد می‌دهیم تا دو رأس دیگر معلوم شود (شکل).

۳.۱.۳.۲.۱.۱. خط

۱۰۸. معمولاً ۶ مربع برای جواب مسأله وجود دارد.

۱۰۹. اگر مسأله را حل شده فرض کنیم، مربع را می‌توان در امتداد خطهای داده شده انتقال داد، بدون آن که شکل آن تغییر کند. بنابراین یکی از رأسها را می‌توان به اختیار روی یکی از سه خط داده شده انتخاب کرد. اگر A این رأس باشد، با دوران ($\frac{\pi}{۲}$ و A)، نصف مربع را می‌توان ساخت و بعد آن را تکمیل کرد.

۱۱۰. مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین ABC را طوری رسم می‌کنیم که هر یک از رأسهای آن روی یکی از خطهای متوازی $d_۳$، $d_۲$، $d_۱$ قرار گیرند. وسط BC را نقطهٔ H می‌نامیم. نقطهٔ A را به نقطهٔ H وصل کرده، و AH را به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ D به دست آید، چنان که D روی $d_۴$ قرار گیرد، مربع ABCD جواب مسأله است.



شرط امکان مسأله آن است که چهار خط متساوی‌الفاصله باشند.

۴.۱.۳.۲.۱.۱. نقطه، خط

۱۱۱. مسأله را حل شده و PQRS را، مربع جواب می‌گیریم (شکل الف).

اگر مربع PQRS را به اندازهٔ ۹۰ درجه حول مرکز خودش دوران دهیم (روی شکل الف در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت)، CD به صورت $C'D'$ در می‌آید، به نحوی که $C'D' \perp CD$ و $C'D' = CD$. بی‌شک نقطه‌ای مانند B' وجود دارد، به نحوی که BB' بر خط راست e (که از C و D می‌گذرد) عمود و طولی برابر CD داشته باشد. B' بر ضلع PS واقع است. بنابراین، رسم مربع، به صورت زیر انجام می‌گیرد:

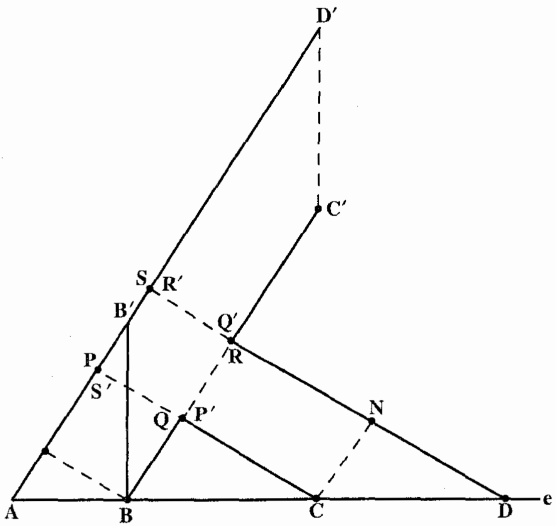
از نقطهٔ B عمودی بر خط راست e رسم و روی آن $BB' = CD$ را جدا می‌کنیم.

ضلعهای مربع PQRS، بر این چهار خط راست واقعند:

۱) خط راست AB'،

۲) خط راستی که از B موازی AB' رسم شود،

۳) و ۴) خطهای راستی که عمود بر AB' از C و D رسم شده‌اند.



(الف)

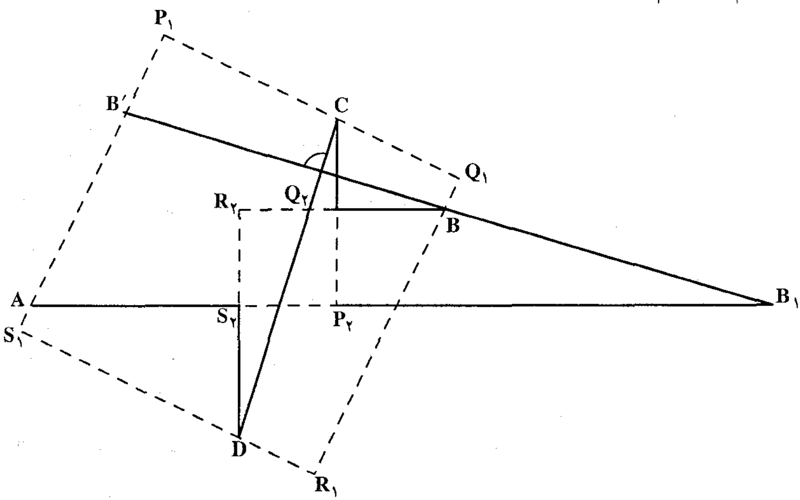
چون BB' را در هریک از دو طرف خط راست e می‌توان رسم کرد، مسأله دو جواب دارد، که نسبت به خط راست e، قرینهٔ یکدیگرند. (در شکل (الف)، تنها یکی از جوابها داده شده است).

بررسی درستی جواب. از نقطهٔ B، پاره‌خط BL را عمود بر AB' و از نقطهٔ C،

پاره‌خط CN را عمود بر DS رسم می‌کنیم. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ BLB' و CND داریم :

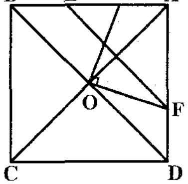
$$L\hat{B}B' = N\hat{C}D \quad , \quad BB' = DC$$

(برابری دو زاویه، از این جا نتیجه می‌شود که ضلعهای آنها، دوبه‌دو، بر هم عمودند.) بنابراین، دو مثلث برابرند و داریم : BL=CN، یعنی دو ضلع مجاور، در مستطیلی که رسم کرده‌ایم، برابرند.



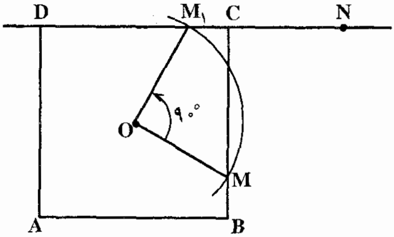
(ب)

یادداشت. اگر چهار نقطهٔ مفروض C ،B ،A و D نه بر یک خط راست، بلکه در موقعیتهای دلخواهی، بر یک صفحه واقع باشند، باز هم تمامی بحث بالا، واژه به واژه، درست است (شکل ب).



۱۱۲. از O عمودی بر OF رسم می‌کنیم تا AB را در F' قطع کند. دو مثلث ODF و OAF' متساوی‌اند و $OF = OF'$.

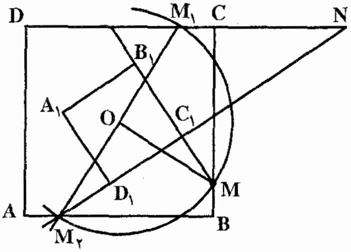
۱۱۳. فرض کنیم، مربع ABCD ساخته شده باشد (شکل الف). اگر صفحه را دور نقطهٔ O و به اندازهٔ ۹۰+ درجه دوران دهیم، مربع ABCD به خودش تبدیل می‌شود ؛ در ضمن خط راست BC بر خط CD منطبق می‌شود و $M \to M_1$. در این صورت M_1 و N،



(الف)

خط راست CD را مشخص می‌کنند. اگر از نقطهٔ M عمودی بر خط راست CD رسم کنیم، خط راست BC به دست می‌آید: $(CD)\cap(BC)=C$ پیدا کردن رأسهای A، B و D روشن است.

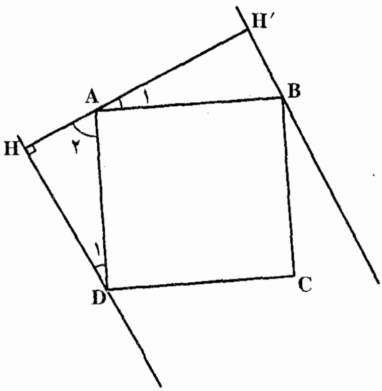
مسأله دو جواب دارد (شکل ب)، زیرا جهت حرکت روی محیط مربع مشخص نشده است، بنابراین، دوران را می‌توان در جهت حرکت عقربه‌های ساعت انجام داد. (که در آن صورت $M\to M_{۲}$) و یا در خلاف جهت حرکت عقربه‌های ساعت (یعنی $M\to M_{۱}$).



(ب)

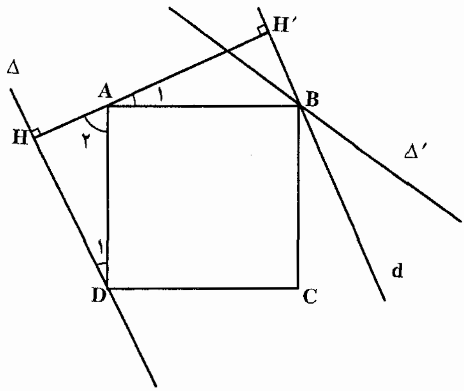
اگر $OM=ON$، و $M\hat{O}N=۹۰^\circ$، مسأله دارای بی‌نهایت جواب است: محل برخورد هر دو خط راستی که از نقطه‌های M و N عمود بر هم رسم شوند، می‌توان به عنوان رأس C در نظر گرفت. اگر $OM\neq ON$، ولی $M\hat{O}N=۹۰^\circ$، آن وقت مسأله جواب ندارد.

۱۱۴. دو مثلث AHD و AH′B همنهشتند؛



زیرا $AD=AB$، $\hat{A}_{۱}+\hat{A}_{۲}=۹۰^\circ$ و $\hat{A}_{۲}+\hat{D}_{۱}=۹۰^\circ$. در نتیجه $\hat{A}_{۱}=\hat{D}_{۱}$. پس $AH=BH'$ و $DH=AH'$ است.

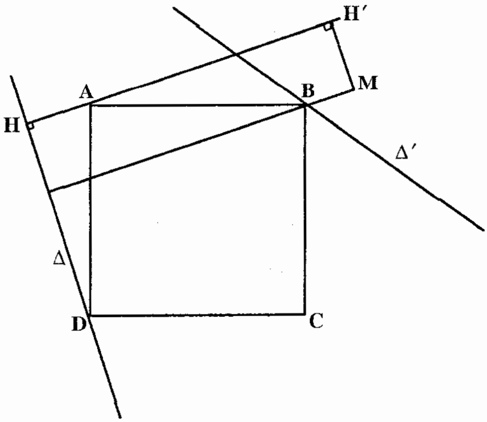
پس برای رسم مربع، دو خط موازی را در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ A بر دو خط موازی عمود می‌کنیم تا دو خط را در H و H′ قطع کند. BH′ را به اندازهٔ AH جدا می‌کنیم و از A به B وصل می‌کنیم و HD را به اندازهٔ AH′ جدا می‌کنیم. از A به D وصل می‌کنیم و می‌توانیم این مربع را رسم کنیم.



۱۱۵. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. از نقطهٔ B خطی به موازات Δ رسم می‌کنیم و از نقطهٔ A خطی بر Δ عمود می‌کنیم و آن را امتداد می‌دهیم تا بر خط d عمود شود و بترتیب Δ و d را در H و H' قطع کند. دو مثلث AHD و $AH'B$ با هم برابرند؛ زیرا AB=AD و (در حالت وتر و یک زاویهٔ حاده)

$$\hat{A}_1 + \hat{A}_2 = 90^\circ \ , \quad \hat{A}_2 + \hat{D}_1 = 90^\circ \Rightarrow \hat{A}_1 = \hat{D}_1$$

بنابراین نتیجه می‌گیریم که $AH = BH'$ و $AH' = DH$.



پس برای رسم مربع، از نقطهٔ A عمود AH را بر Δ رسم می‌کنیم. آن‌گاه از نقطهٔ H' واقع بر AH، عمود MH' را به اندازهٔ AH بر HH' اخراج می‌کنیم. سپس از نقطهٔ M خطی به موازات HH' رسم می‌کنیم تا Δ' را در B قطع کند. از A به B وصل می‌کنیم. حال از مربعی، یک ضلع آن را داریم و می‌توانیم آن را رسم کنیم.

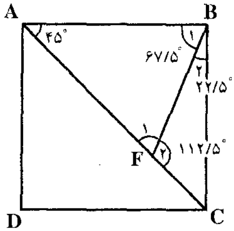
۱.۱.۲.۳.۱.۵. ضلع، قطر

۱۱۶. چون همهٔ مربعها مشابه‌اند، از رسم یک مربع دلخواه شروع می‌کنیم. فرض کنید a' و d' بترتیب، ضلع و قطر این مربع باشند و a و d را اجزای متناظر از مربع مطلوب در نظر بگیرید. با توجه به تشابه دو شکل داریم:

$$\frac{a+d}{a'+d'} = \frac{a}{a'} \quad \text{یا} \quad \frac{a}{a'} = \frac{d}{d'}$$

سه جزء از تناسب اخیر را می‌دانیم، زیرا a+d مفروض است؛ بنابراین پاره‌خط a را می‌توان به عنوان چهارمین جزء تناسب رسم کرد و مسأله به رسم مربعی با ضلع مفروض تبدیل می‌شود.

۱۱۷. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. به اندازهٔ AB روی AC جدا می‌کنیم و F می‌نامیم.

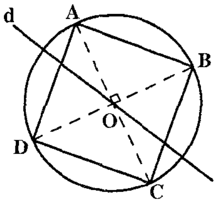


$\hat{A} = ۴۵^\circ$ است، پس $\hat{B}_۱ = \hat{F}_۱ = ۶۷,۳۰'$، پس $\hat{F}_۲ = ۱۱۲,۳۰'$ و $\hat{B}_۲ = ۲۲,۳۰'$، پس $\hat{C} = ۴۵^\circ$. از مثلث FBC طول FC=l و دو زاویهٔ $\hat{C}$ و $\hat{F}_۲$ را داریم، پس این مثلث را رسم می‌کنیم. سپس از نقطهٔ B عمودی بر BC اخراج می‌کنیم تا امتداد FC را در A قطع کند. از A به موازات BC، و از C به موازات AB رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در D قطع کنند.

۱.۱.۲.۳.۱.۶. خط، زاویه

۱۱۸. مسأله را حل شده بگیرید و از ویژگیهای به دست آمده استفاده کنید.

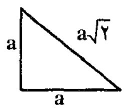
۱.۱.۲.۳.۱.۷. نقطه، خط، ضلع



(الف)

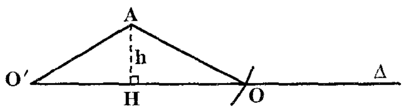
۱۱۹. اگر مسأله را حل شده فرض کنیم وABCD مربع خواسته شده باشد، مثلث AOB قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین است و:

$$OA = OB = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$



(ب)

می‌باشد. پس حل مسأله به طریق زیر است: مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقین به ضلع a را رسم می‌کنیم. وتر این مثلث $a\sqrt{۲}$ می‌باشد. به مرکزA و شعاع $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ کمانی می‌زنیم تا خط Δ را در نقطهٔ O قطع کند.



(ج)

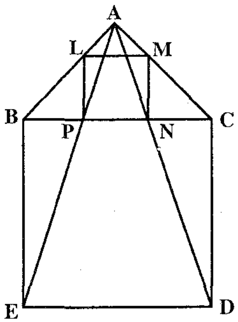
به مرکز O و شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم و خط OA را امتداد می‌دهیم تا محیط دایره را در نقطهٔ C قطع کند. قطر BOD را بر قطر AOC عمود رسم می‌کنیم. ABCD مربع مطلوب است (شکل). شرط امکان مسأله آن است که دایرهٔ به مرکزA و شعاع OA خط (Δ) راقطع کند یا بر آن مماس باشد.

اگر فاصلهٔ نقطهٔ A از خط Δ برابر h باشد، شرط امکان مسأله به صورت $h \leq \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ درمی‌آید. باید توجه داشت که در حالت $h < \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ دایرهٔ به مرکزA و شعاع $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$، خط Δ را در دو نقطهٔ O و O' (قرینه نسبت به نقطهٔ H) قطع می‌کند. دو مربع حاصل از لحاظ اندازهٔ ضلع، برابر و فقط مرکزهای دو مربع در دو نقطهٔ متمایز بر روی خط Δ واقع است و عموماً یک جواب برای مسأله منظور می‌شود.

۱.۱.۲.۳.۲. رسم مربع با معلوم بودن: مثلث، مثلث و ...

۱.۱.۲.۳.۲.۱. مثلث در حالت کلی

۱.۱.۲.۳.۲.۱.۱. تنها مثلث



۱۲۰. اگر ABC مثلث داده شده و MNPL مربع خواسته شده و محاط در مثلث ABC باشد، چنانچه AP را وصل کرده، امتداد دهیم تا عمود در نقطهٔ B بر BC را در E قطع کند، دو مثلث ALP و ABE متجانسند (A مرکز تجانس) و درنتیجه می‌توان نوشت :

$$\frac{AL}{AB}=\frac{AP}{AF}=\frac{LP}{BE}=\frac{LM}{BE} \qquad (۱)$$

و چون LM‖BC است، پس مثلثهای ALM وABC متجانس بوده و می‌توان نوشت :

$$\frac{AL}{AB}=\frac{LM}{BC} \qquad (۲)$$

از ملاحظهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌گیریم که :

$$\frac{LM}{BC}=\frac{LM}{BE}$$

و از ملاحظهٔ این رابطه نتیجه می‌گیریم که :

$$BC = BE \qquad (۳)$$

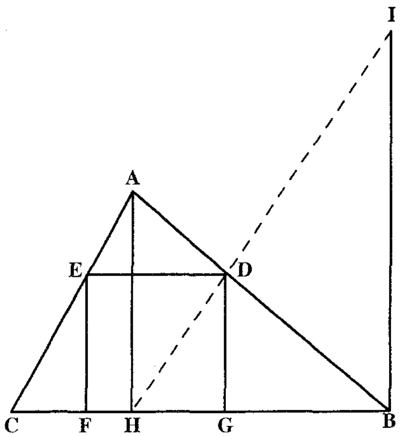
چنانچه AN را وصل کرده و امتداد دهیم تا عمود در نقطهٔ C بر BC را نیز در D قطع کند، به دلیل بالا نتیجه می‌شود که :

$$CD = BC \quad (۴)$$

از ملاحظهٔ رابطه‌های (۳) و (۴) نتیجه می‌شود که چهارضلعی BCDE مربعی متشابه با مربع MNPL است (تمام مربعها با هم متشابه‌اند) و از آن‌جا حل مسأله چنین است : بر ضلع BC مربع BCDE را در خارج مثلث ABC می‌سازیم. محل برخورد AE وAD با ضلع BC، نقطه‌های P وN دو رأس مربع است. چنانچه از این دو نقطه عمودهایی برBC اخراج نماییم، AC وAB را بترتیب درM وL قطع کرده وMNPL مربع خواسته شده است.

بحث. چون ساختن مربع بر BC ممکن بوده وAE وAD در هر حال BC را قطع می‌نمایند، پس مسأله پیوسته دارای جواب است.

روش ابوالوفاء بوزجانی



اگر بخواهیم در مثلثی مختلف‌الاضلاع مانند مثلث ABC مربعی رسم نماییم، ابتدا از نقطهٔ B عمود BI را بر ضلعBC و مساوی آن در جهت نقطهٔ A اخراج می‌کنیم، سپس از نقطهٔ A عمود AH را بر ضلع BC رسم می‌نماییم. سپس خط IH را می‌کشیم تا ضلع AB را در نقطهٔ D قطع کند. حال از نقطهٔ D خط DG را عمود بر ضلع BC و خط DE را موازی ضلع BC رسم می‌نماییم و بعد، از نقطهٔ E عمود EF را بر ضلع BC فرود می‌آوریم تا مربع DEFG به دست آید (شکل).

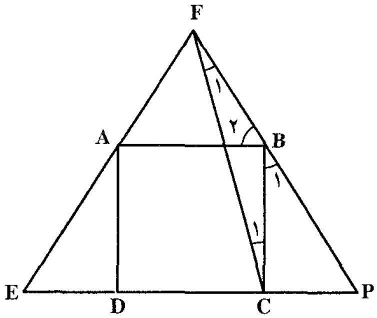
۱۲۱. اگر a قاعدهٔ مثلث وh ارتفاع نظیر آن و x ضلع مربع باشد، باید داشته باشیم :

$$x^۲ = \frac{a}{۲}.h$$

بنابراین برای تعیین x باید بین $\frac{a}{۲}$ و h واسطهٔ هندسی پیدا کنیم.

۱.۱.۲.۳.۲.۲. مثلث متساوی‌الاضلاع

۱۲۲. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم.

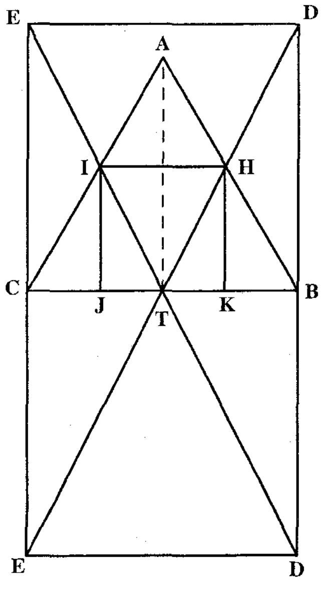


از F به C وصل می‌کنیم. در مثلث BCP داریم:

$\hat{C}=90^\circ$ ، $\hat{P}=60^\circ$ ، پس: $\hat{B}_1=30^\circ$.

مثلث AFB متساوی‌الاضلاع است، زیرا $\hat{A}=\hat{F}=\hat{B}=60^\circ$. بنابراین AB=BC=FB یعنی مثلث FBC متساوی‌الساقین است و زاویهٔ $\hat{B}_1$ زاویهٔ خارجی است، بنابراین $\hat{F}_1=\hat{C}_1=15^\circ$. از نقطهٔ F خطی رسم می‌کنیم که با FP زاویهٔ 15° می‌سازد و ضلع EP را در C قطع کند. از C عمودی بر EP اخراج می‌کنیم تا FP را در B قطع کند. از B خطی به موازات EP رسم می‌کنیم تا EF را در A قطع کند، و از A عمودی بر EP فرود می‌آوریم تا نقطهٔ D به دست آید.

روش ابوالوفاء بوزجانی



روش ترسیم مربع در مثلث متساوی‌الاضلاع: اگر بخواهیم در مثلث ABC، مربعی محاط نماییم، اول بر ضلع BC مربع BDEC را رسم می‌کنیم. (این مربع می‌تواند در جهت رأس مثلث باشد یا در خلاف آن) سپس ضلع BC را در نقطهٔ T نصف می‌نماییم و خطهای DT وET را رسم می‌کنیم تا ضلعهای AB را در نقطهٔ H وAC را در نقطهٔ I قطع نمایند. حال خط HI را می‌کشیم و دو عمود HK وIJ را بر ضلع BC فرود می‌آوریم تا مربع HIJK به دست آید (شکل).

۱.۱.۲.۳.۲.۳. مثلث متساوی‌الساقین

۱۲۳. ابتدا طول ارتفاع مثلث مفروض ABC را پیدا می‌کنیم:

$$BK = \sqrt{۱۰۰ - ۳۶} = ۸$$

سپس، از تشابه دو مثلث ABC و DBE به دست می‌آید:

$$\frac{x}{۸ - x} = \frac{۱۲}{۸}$$

که در آن، x عبارت است از طول ضلع مربع مورد نظر. از این معادله به دست می‌آید:

$$x = ۴\frac{۴}{۵}$$

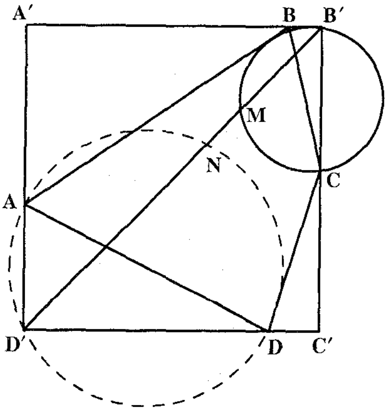
۱.۱.۲.۳.۲.۴. مثلث با زاویه‌های حاده

۱۲۴. روی ضلع BC از مثلث و در خارج آن مربع CBED را می‌سازیم. نقطه‌های برخورد خطهای AD و AE با ضلع BC دو رأس مربع مطلوب می‌باشند.

۱.۱.۲.۳.۳. رسم مربع با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی و...

۱.۱.۲.۳.۳.۱. رسم مربع با معلوم بودن: چهارضلعی، چهارضلعی و ...

۱.۱.۲.۳.۳.۱.۱. رسم مربع با معلوم بودن چهارضلعی



۱۲۵. فرض می‌کنیم مربع A′B′C′D′ همان مربع محیط بر چهارضلعی ABCD باشد، داریم:

$$\hat{D}' = \hat{B}' = ۹۰^\circ$$

بنابراین دایرهٔ به قطر AD از رأس D′ و دایرهٔ به قطر BC از رأس B′ خواهد گذشت. محل برخورد B′D′ را با دو دایره، نقطه‌های N و M می‌نامیم. نقطهٔ M وسط کمان $\overset{\frown}{BMC}$ و نقطهٔ N وسط کمان $\overset{\frown}{AND}$ می‌باشد (قطر B′D′ نیمساز زاویه‌های $\hat{B}'$ و $\hat{D}'$ بوده، پس:

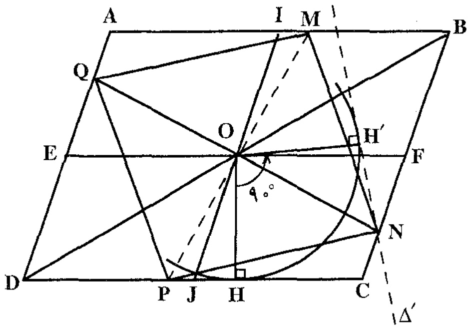
$$\overset{\frown}{CM} = \overset{\frown}{BM} \quad و \quad \overset{\frown}{AN} = \overset{\frown}{ND}$$

می‌باشد) و از آن‌جا ساختمان زیر نتیجه می‌شود :
دایره‌ای به قطر BC و دایرهٔ دیگری به قطر AD رسم کرده، وسطهای دو کمان $\overset{\frown}{BC}$ و $\overset{\frown}{AD}$ را به هم وصل می‌کنیم (M وسط $\overset{\frown}{BC}$ و N وسط $\overset{\frown}{AD}$ می‌باشد). امتداد MN دو دایره را در نقطه‌های B' و D' قطع می‌کند. از نقطهٔ B' دو خط و از نقطهٔ D' دو خط دیگر چنان رسم می‌کنیم که با $B'D'$ زاویه‌های ۴۵° بسازند. این خطها در نقطه‌های A' و C' متقاطع خواهند بود و مربع $A'B'C'D'$ همان مربع خواسته شده است.

۱.۱.۲.۳.۳.۲. رسم مربع با معلوم بودن: چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای ویژه و...

۱.۱.۲.۳.۳.۲.۱. رسم مربع با معلوم بودن متوازی‌الاضلاع

۱۲۷. راه اول. اگر MNPQ مربع محاط در متوازی‌الاضلاع ABCD باشد، وسط قطر MP که دو نقطه از دو ضلع مقابل را به هم وصل می‌کند، روی خط EF، خط واصل بین

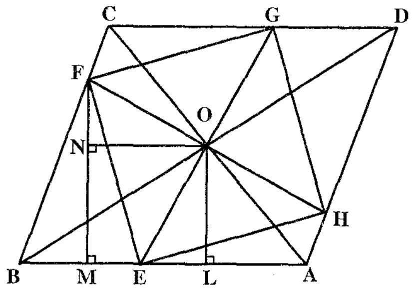


وسطهای AD و BC واقع است، و به همین دلیل وسط قطر NQ بر خط IJ، خط واصل بین وسطهای AB و DC واقع است. درنتیجه محل برخورد دو قطر مربع، بر محل برخورد EF و IJ واقع است، یا به‌عبارت دیگر مرکز مربع بر مرکز متوازی‌الاضلاع واقع است و چون $OP = ON$ و $P\hat{O}N = ۹۰^\circ$ است، لذا اگر نقطهٔ P را حول (O) به اندازهٔ ۹۰° دوران دهیم، بر N منطبق می‌شود و از آن‌جا حل مسأله چنین است :
ضلع DC را حول (O) به اندازهٔ ۹۰° دوران می‌دهیم تا به‌صورت Δ' درآید. محل برخورد Δ' با BC نقطهٔ N، یک رأس مربع است و محل برخورد NO با AD، نقطهٔ Q و عمودمنصف NQ ضلعهای AB و DC را بترتیب در M و P قطع می‌کند و MNPQ

مربع مطلوب است.

بحث. درصورتی که Δ' ضلع BC را قطع کند، مسأله دارای جواب است. چنان‌که Δ' با BC موازی و یا آن را در امتداد BC قطع نماید، مسأله جواب ندارد.

راه دوم. مرکز مربع بر مرکز متوازی‌الاضلاع منطبق است. از O عمود OL را بر AB و از F عمود FM را بر AB و از O عمود ON را بر FM رسم می‌کنیم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ OFN و OLE برابرند، پس:



$OL = ON, FN = LE$

پس راه حل مسأله چنین است: از O عمود OL را بر AB فرود می‌آوریم. روی AB قطعه خط LM را برابر OL جدا می‌کنیم. از M عمودی بر AB اخراج می‌کنیم تا BC را در F قطع کند. از O عمودی بر FM فرود می‌آوریم. پای عمود نقطهٔ N است. LE را به اندازهٔ FN جدا می‌کنیم. FO و EO را امتداد می‌دهیم تا AD را در H و CD را در G قطع کند.

۱.۱.۲.۳.۳.۲.۲. رسم مربع با معلوم بودن: مربع، مربع و...

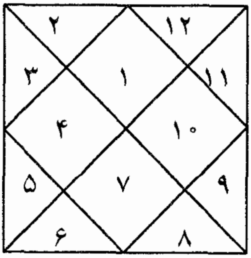
۱.۱.۲.۳.۳.۲.۲.۱. مربع

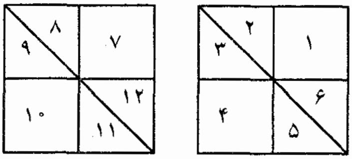
۱۲۸. می‌خواهیم از چند مربع مساوی که تعداد آنها عددی مربع است، مربعی بسازیم. به‌طور مثال می‌خواهیم از شانزده مربع مساوی مربعی بسازیم:

اول خطی مساوی جمع ضلع آن مربعها می‌کشیم، یعنی چهار ضلع آنها و اگر مساوی باشند، چهار برابر ضلع یکی از آنها و سپس بر آن خط، مربعی چهار در چهار می‌سازیم که شانزده مربع به‌دست آید (شکل).

۱	۲	۳	۴
۵	۶	۷	۸
۹	۱۰	۱۱	۱۲
۱۳	۱۴	۱۵	۱۶

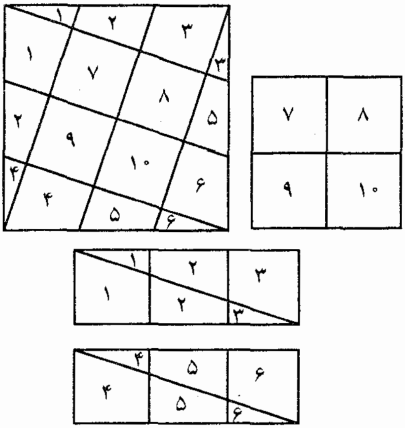
به‌عبارت دیگر می‌خواهیم با شانزده خشت، مربعی درست کنیم. چهار خشت را در یک ردیف و باقی را در پهلوی آنها قرار می‌دهیم تا مربع تمام شود.



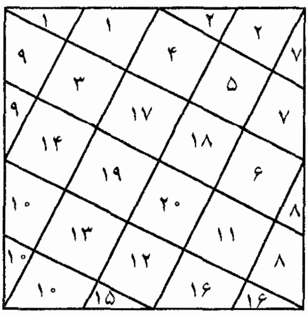


۱۲۹. می‌خواهیم از هشت مربع، یک مربع بسازیم: می‌دانیم عدد هشت جمع دو عدد مربع چهار می‌باشد. پس اول دو مربع می‌سازیم که ضلع هریک، دو، یعنی هرکدام از چهار مربع تشکیل شود، بعد، آن را بر قطر تقسیم می‌کنیم تا چهار مثلث متساوی به‌دست آید و از آن چهار مثلث مربعی می‌سازیم. درنتیجه مربع به‌دست می‌آید (شکل).

۱۳۰. روش ابوالوفاء بوزجانی



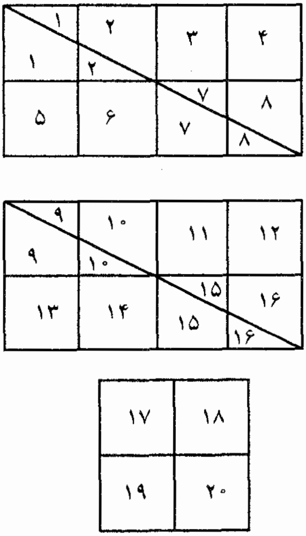
می‌خواهیم از ده خشت متساوی مربعی بسازیم: ابتدا نگاه می‌کنیم که عدد ده عبارت از دو عدد مربع نه و یک می‌باشد که ضلع اولی سه و ضلع دومی یک است. پس اول دو مستطیل به ابعاد یک و سه ترکیب می‌کنیم که جمعاً شش خشت را شامل می‌شود، چهار خشت باقی که خود مربع و ضلعش دو است باقی می‌ماند که در وسط قرار می‌گیرد و بعد دو مستطیل را با قطر به چهار مثلث تقسیم می‌نماییم و در اطراف مربع وسط قرار می‌دهیم و بدین صورت مربعی حاصل می‌شود که ضلعش مساوی قطر این مستطیلها می‌باشد (شکل).



۱۳۱. روش ابوالوفاء بوزجانی

می‌خواهیم از بیست مربع متساوی مربعی بسازیم: نگاه می‌کنیم که عدد بیست مرکب از دو عدد مربع شانزده و چهار است که ضلع اولی چهار و ضلع دومی دو است. پس اول دو مستطیل به‌طول ۴ و ۲ ترکیب می‌نماییم که

جمعاً شانزده مربع را دربر می‌گیرد و چهار مربع باقی می‌ماند که خود مربعی است با ضلع دو که آن را در وسط قرار می‌دهیم و دو مستطیل را به قطر به چهار مثلث تقسیم می‌کنیم و در اطراف آن قرار می‌دهیم تا مربع منظور شود. البته همان‌طور که دیده می‌شود تفاضل دو ضلع هر مثلث عدد دو است و ضلع مربع وسط نیز مساوی آنها می‌باشد، یعنی ضلع بزرگتر هر مثلث، مساوی است با طول ضلع کوچکتر به‌اضافهٔ ضلع مربع و بدین ترتیب است که گوشه‌ها درست بر یکدیگر قرار دارند (شکل).



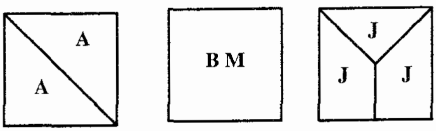
۱۳۲. روش ابوالوفاء بوزجانی

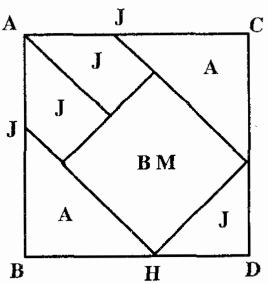
می‌خواهیم از تعدادی مربع که تعداد آنها نه عدد مربع بوده و نه از ترکیب دو عدد مربع به دست آید، مربعی بسازیم : چون ساختن این مربع کمی مشکل است، لاجرم جمعی از مهندسان و اهل صنعت در این‌جا اشتباه کرده‌اند، زیرا مهندسان به جهت آن که در عمل ممارستی ندارند و هنرمندان و پیشه‌وران به‌واسطهٔ آن که برهان ندانند و علت آن است که چون مهندس در عمل چندان کار نکرده، برای او دشوار است که آنچه را به برهان به‌دست آورده است بنمایاند، ولی صنعتگر آن را بداند، زیرا آنچه برای هنرمند لازم است، دسترسی آسان به شکل موردنظر است و درستی آن را در حس و مشاهده باور دارد و دیگر کاری به برهان ندارد، در حالی‌که آنچه موردنظر مهندس است، صحیح بودن برهان و دلیل است، خواه در مشاهده صحیح باشد یا نباشد. درصورتی که معلوم است که هرچه هنرمند و صنعتگر بدان عمل می‌کنند و درست باشد، از هندسه گرفته‌اند و اول مهندس آن را تصور کرده و برهان بر صحت آن آورده است و بعد از این، صانع و مسّاح مورد استفاده قرار داده است و خلاصه آن که آن را از او فراگرفته است، بدون آن‌که در وجه صحت و راه برهان آن فکری کند و بدین جهت است که در عمل ایشان، امکان خطا بسیار باشد، ولی مهندس از خطا دور است، چون پایه بر قواعد هندسی نهد، با وجود آن‌که به‌عمل آوردن آنچه به برهان به‌دست آورده است برای او دشوار است، زیرا در کارهای دستی مهارتی را که اهل صناعت دارا باشند، به‌دست نیاورده است و بدین

صورت است که اگر از بسیاری از مهندسان سؤالی در کیفیت تقسیم کردن شکل و یا ضرب خطی در خطی شود، برای جواب احتیاج به فکر کردن را دارند و راه‌حلی دور یا نزدیک به یقین در خاطر آورند و بدین ترتیب عمل نمایند. حکیم کامل مکمل ابوالوفاء بوزجانی گوید : در مجلسی حاضر شدم. در آن‌جا جماعتی از هنرمندان و مهندسان بودند و این سؤال مورد مذاکره بود که از سه مربع مساوی چگونه یک مربع ساخته می‌شود؟ آنان که سخن از هندسه می‌گفتند خطی به آسانی به‌دست آوردند که مربع آن خط هر سه مربع را شامل می‌گردید ـ که این برهان در برهان عروس آسان است و گفته می‌شود ـ ولی هیچ‌یک از صاحبان صنعت و هنرمندان آن را نپسندیدند و بدان قانع نگردیدند. چه برای ایشان لازم است که مربعها را قسمت کنند به‌نحوی که چون آنها را با یکدیگر جمع نمایند و در کنار یکدیگر قرار دهند، مربعی به‌دست آید. پس صنعتگران چند راه‌حل پیشنهاد کردند که درستی بعضی از آنها به برهان معلوم شد و اشتباه بعضی دیگر به روشنی معلوم شد، با وجود آن‌که در نظر اول صحیح می‌نمود و هر که در آنها نگاه می‌کرد، خیال می‌نمود صحیح است. حال ما کلیهٔ آن راه‌حلها را در زیر می‌آوریم تا آن‌که راه‌حلهای صحیح از فاسد تشخیص داده شود و برای کسی که در این اشکال نگاه می‌کند، غلط را درست و فاسد را صحیح قبول نکند.

ـ می‌خواهیم از سه مربع مساوی یک مربع بسازیم.

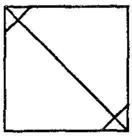
راه حل اول. بعضی از هنرمندان یک مربع را در وسط قرار می‌دهند و دومی را با قطر دو قسمت می‌کنند و در دوطرف آن می‌گذارند به‌طوری که قطر هر مثلث بر ضلع مربع قرار گیرد و مربع سوم را با دو نصف قطر که از دو طرف یک ضلع رسم نموده‌اند و از رأس مثلث به‌دست آمده باخطی که از وسط ضلع مقابل می‌کشند به سه قسمت تقسیم می‌نمایند و بعد مثلث حاصل را در زیر مربع اولیه قرار می‌دهند و چهار ضلعیها را بر بالای آن، به‌طوری که ضلعهای درازتر آنها بر یکدیگر منطبق شوند و از مجموع، مربعی به‌دست آورند (شکل).



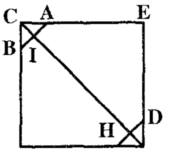


صورت این عمل در تصور کسی که در صنعت ماهر نباشد و از هندسه نیز اطلاعی نداشته باشد درست است، درصورتی که به‌خوبی ثابت می‌شود که درست نیست. اما این‌که درست به‌نظر می‌رسد، آن است که زاویه‌ها صحیح است و هر ضلع مساوی دیگر ضلعها است، زیرا سه زاویهٔ ABC زاویه‌های قائمه بوده‌اند و زاویهٔ چهارم نیز مرکب از دو زاویهٔ نیمه‌قائمه می‌باشد و ضلعها نیز هریک با یک ضلع مربع و نصف از قطر مربع دیگر متساوی می‌باشند و چون زاویه‌های محل برخورد این خطها نیز هرکدام جمعاً دو قائمه می‌باشند، این قطعه‌ها در امتداد یکدیگر قرار دارند و با این دلیلها مربع به‌دست آمده صحیح به‌نظر می‌رسد و محل اشتباه دیده نمی‌شود. اما اشتباهها: اگر ضلع هریک از مربعها را ده فرض کنیم، جمع آنها عدد سیصد خواهد بود و ضلع مربع هفده و یک‌سوم خواهد بود، درصورتی که مطابق شکل هر ضلع مربع مساوی است با ضلع یک مربع به‌اضافهٔ نصف قطر از مربع سوم و آن تقریباً مساوی هفده و هفت دوم است که دیده می‌شود با یکدیگرتفاوت دارند، ازطرفی دیگر در مربعی که با قطر نصف شد، طول قطر عددی است اصم، درصورتی که طول جمع ضلع مربع وسط با ضلع چهارضلعی مجاور آن که عبارت است از نصف طول مربع سوم عددی است صحیح و این دو با یکدیگر قابل‌تطبیق نمی‌باشند. به‌عبارت دیگر قطر مربع اول تقریباً مساوی چهارده و نه دهم است، درحالی که جمع طول مربع وسط و چهارضلعی مجاور آن، عدد پانزده خواهد بود و بدین ترتیب روشن است که این تقسیم و ترکیب اشتباه است.

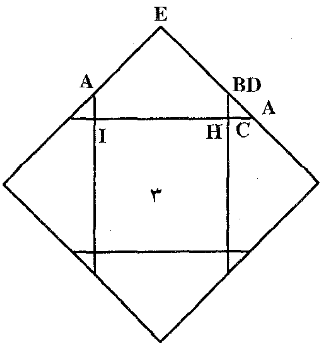
راه حل دوم. بعضی دیگر، این مربعها را به‌نوعی دیگر قسمت کرده‌اند که اشتباه آن آشکارتر از نوع اول بوده است، یعنی بدین‌ترتیب که قطر دو مربع را می‌کشند و بر روی آنها در قسمت وسط قطعه‌ای مساوی ضلع مربع جدا می‌کنند و بعد از دو طرف باقی مانده، چهار مثلث برمی‌دارند و باقی‌مانده را با قطر به چهار، پنج‌ضلعی تقسیم می‌نمایند، سپس هرکدام از این پنج‌ضلعیها را که یک ضلع آن مساوی با ضلع مربع است، پهلوی مربع سوم و چهار مثلث را در حدفاصل آنها قرار می‌دهند و مربع مطلوب را به‌دست می‌آورند (شکل).



۱

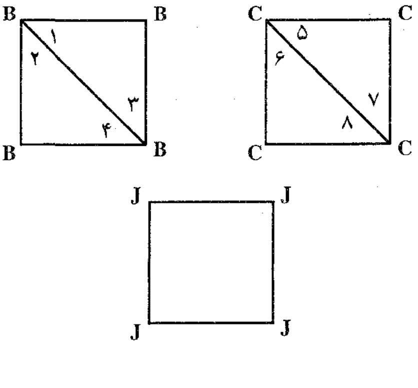


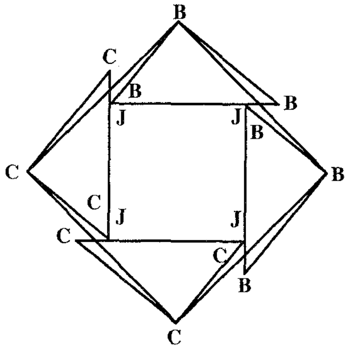
۲



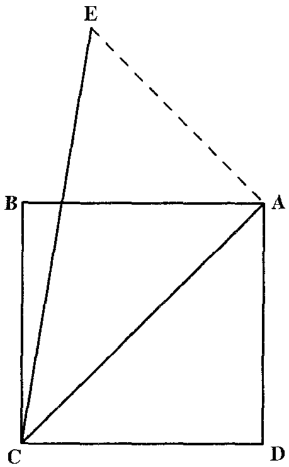
این ترکیب را هم کسی درست پندارد که در هندسه و برهان ماهر نباشد، ولی چون مطالعه و دقت گردد، دیده می‌شود که صحیح نیست، زیرا اندازهٔ مثلثهای کوچک به‌دست آمده از گوشه‌های دو مربع اول و دوم از اندازهٔ مثلثهای باقی‌مانده در مربع خواسته شده بزرگتر می‌باشد. چون مثلثهای باقیمانده در مربع حاصل، هر ضلعش مساوی ضلع کوچک پنج‌ضلعیها می‌باشد و قطرش باید برابر ماندهٔ ضلع مربع حاصل باشد، در حالی که مثلثهای جدا شده هر ضلعش باقیمانده از ضلع دو مربع و قطرش دوبرابر ضلع پنج‌ضلعی بوده و بزرگتر خواهد بود. چه در غیراین صورت لازم است که در مثلث قائم‌الزاویه، وتر مساوی یک ضلع مثلث باشد. به‌طور مثال، مثلث ABC یا پنج‌ضلعی AEDHI را درنظر می گیریم، که چون ضلع HI از پنج‌ضلعی را برضلع مربع می گذاریم و نقطهٔ C از مثلث را بر محل H قرار دهیم، ضلع BC از مثلث روی DH از پنج‌ضلعی قرار می‌گیرد، ولی ضلع DH از پنج‌ضلعی، چنان‌که در شکل مربع اول دیده می‌شود، مساوی قطعهٔ AI، یعنی نصف وتر مثلث قائم‌الزاویه می‌باشد و هیچ وقت ضلع مثلث قائم‌الزاویه مساوی نصف وتر او نخواهد شد. و چون این مثلث متساوی‌الاضلاع است، لازم است که مجموع دو ضلع آن مساوی با وتر آن گردد که این محال است. همچنین دیده می‌شود که ضلع EJ از مربع بزرگ، مساوی است با دو برابر ضلع مربع کوچک به‌اضافهٔ ریشهٔ دوم باقیماندهٔ آن ضلع مربع، درصورتی که می‌دانیم که ضلع مربع حاصل از سه مربع بسیار کمتر از این مقدار است که این خود اشتباه بودن راه‌حل را نشان می‌دهد.

راه‌حل صحیح. اما قسمت کردن مربعها به راه‌حل صحیح و براساس برهان درست، و آن عبارت است از این که دو مربع را با قطر نصف می کنیم و هریک را بر ضلع مربع سوم قرار می‌دهیم، به‌نحوی که یک گوشهٔ هر مثلث بر یک گوشهٔ مربع منطبق باشد، بدین ترتیب زاویهٔ نیم قائمهٔ هر مثلث در مجاورت زاویهٔ قائمهٔ مربع سوم و قطر آن بر ضلع مربع قرار می‌گیرد، پس قسمت اضافی هر مثلث از طرف دیگر ضلع مربع پیشرزدگی پیدا می کند. سپس رأسهای مثلثهای چهارگانه را با خط مستقیم به یکدیگر اتصال می‌دهیم، این خطها ضلعهای مربع بزرگ می‌باشند.



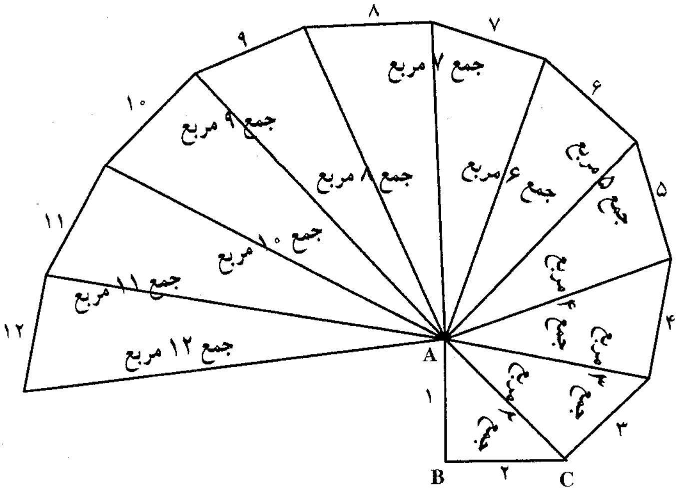


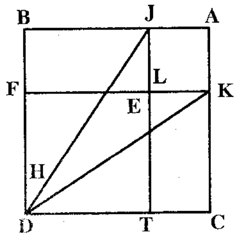
زیرا دو مثلث کوچک که به وسیلهٔ این خط از دو مثلث قائم‌الزاویه جدا می‌شوند، با یکدیگر مساوی بوده‌اند و در نتیجه مقدار کم و زیاد شده به زاویهٔ قائمه، چون مساوی هستند، زاویهٔ قائمه ثابت می‌ماند و چهار ضلع نیز به همین ترتیب با یکدیگر مساوی خواهند بود و مربع موردنظر به‌دست می‌آید که راه‌حلی درست است و از راه‌حلهای دیگر درست‌تر است (شکل).

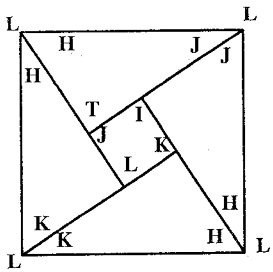


ـ اگر از مهندسی سؤال کنند که می‌خواهیم مربعی از چند مربع دیگر بسازیم، او خطی به‌دست آورد، که مربع آن مساوی مربع جمع مربعهای داده شده باشد و دیگر کاری به‌طرز تقسیم مربعها ندارد تا از آن تقسیمها مربع خواسته شده را ترکیب نماید. بدین ترتیب که اول قطر یک مربع را می‌کشد و این خط مطابق قضیهٔ عروس مساوی مجموع دو مربع است و بار دیگر براین قطر خطی مساوی ضلع مربع سوم عمود می‌کند و ضلع سوم این مثلث قائم‌الزاویه، بدون شک مساوی با مربع هرسه مربع داده شده است و به‌همین ترتیب می‌توان ضلع مربعهای ترکیب شده از چند مربع را به‌دست آورد. به‌طور مثال می‌خواهیم مربعی از سه مربع، که هر سه مساوی ABCD است بکشیم. قطر این مربع را رسم می‌نماییم و از نقطهٔ A، خط عمود AE را مساوی AD می‌کشیم و خط EC را رسم می‌کنیم تا ضلع مربع جمع به‌دست آید که هرسه براساس قضیهٔ عروس ثابت شود و مهندس با به‌دست آوردن این خط، مربع را می‌سازد که سطح آن مساوی جمع سطح سه مربع داده شده می‌باشد و دیگر کاری به طرز تقسیم و جمع آن سه مربع ندارد.

ـ و به همین ترتیب است، اگر تعداد مربعها بیش از سه باشد. ولی این روش برای صاحبان صنعت مفید نیست.





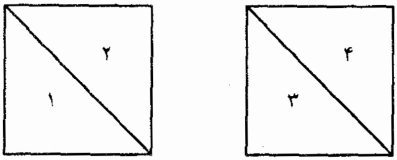


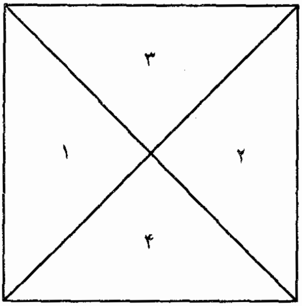
ـ می‌خواهیم از چند مربع نامساوی مربعی بسازیم : چون راه و روش ساختن مربع موردنظر در تمام تعداد مربعها یکی است، پس اول ترکیب دو مربع نامساوی را می‌گوییم و تعداد بقیه را با همین راه‌حل ادامه می‌دهیم.

می خواهیم از دو مربع نامساوی مربعی دیگر بسازیم : اول دو مربع را بر یکدیگر به‌نحوی قرار می‌دهیم که یک رأس مربع کوچکتر روی یک رأس مربع بزرگتر و دو ضلع آن بر روی دو ضلع مربع بزرگتر قرار گیرد. سپس قسمت اضافی از مربع بزرگتر را از آن جدا می‌کنیم. بعد از یک طرف این قسمت مستطیل‌شکل با ضلع کوچکتر، مربع کوچکتری جدا می‌کنیم و بقیهٔ آن که یک طولش مساوی ضلع مربع کوچک اولیه است، با آن مربع ترکیب می‌نماییم. در نتیجه دو مربع مستطیل که یک طول آن مساوی ضلع مربع کوچک و طول دیگرش مساوی ضلع مربع بزرگ است، به‌اضافهٔ یک مربع کوچکتر که هر ضلعش مساوی تفاضل ضلعهای دو مربع است به‌دست آید. حال مربع کوچک به‌دست آمده را وسط قرار می‌دهیم و دو مربع مستطیل را بر قطر تقسیم می‌کنیم و آنها را در اطراف آن می گذاریم، به‌طوری که زاویهٔ قائمه هر کدام بر یک

زاویهٔ قائمهٔ مربع کوچک وسط قرار گیرد، بدین ترتیب مربعی به‌دست می‌آید که ضلع آن مساوی قطر مستطیلها می‌باشد و این مربع خواسته شده است (شکل).

۱۳۳. می‌خواهیم که از تعدادی مربع، که تعداد آنها برابر مجموع دو عدد مربع باشد، مربعی بسازیم : نگاه می‌کنیم اگر آن دو مربع مساوی باشند، هریک از آن دو را با قطر به دو نیمه تقسیم می‌کنیم تا چهار مثلث متساوی به‌دست آید. قطر این مثلثها مساوی ضلع مربعی است که می‌خواهیم از مجموع آنها به‌دست آید. حال چنانچه زاویه‌های قائمهٔ این مثلثها را پهلوی یکدیگر در یک نقطه جمع کنیم، از مجموع آنها یک مربع حاصل می‌شود. به‌طورمثال اگر بخواهیم از دو خشت، مربعی بسازیم، هر خشت را با قطر به دو نیمه کنیم، و چنانچه زاویه‌های قائمهٔ مثلثهای به‌دست آمده را پهلوی یکدیگر قرار دهیم، مربعی به‌دست می‌آید که ضلعش مساوی قطر مربعهای اول می‌باشد (شکل).





۱۳۵. هر مربع را می‌توان به چهار و شش مربع کوچکتر تقسیم کرد.

۲.۲.۲.۳.۳.۲.۱.۱. مربع، رأس یا نقطه

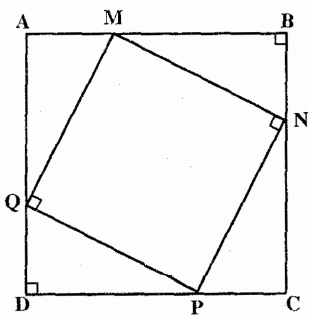
۱۳۶. مسأله را حل شده و مربع MNPQ محاط در مربع ABCD را جواب مسأله می‌گیریم. از تساوی مثلثها نتیجه می‌شود که :

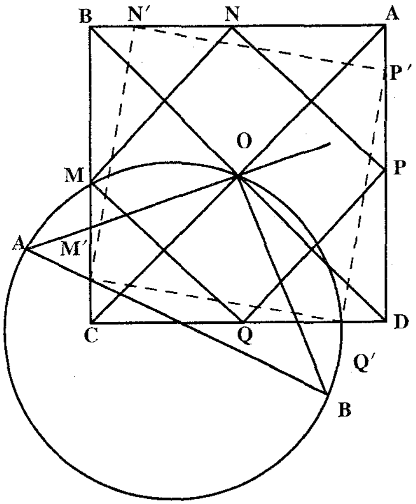
$$AM = BN = CP = DQ$$

است. بنابراین اگر M رأس معلوم مربع خواسته شدهٔ MNPQ باشد، کافی است نقطه‌های N، P و Q را روی ضلعهای BC، CD و DA چنان اختیار کنیم که :

$$AM = BN = CP = DQ$$

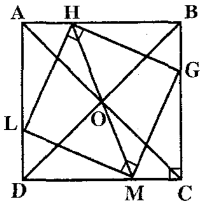
باشد. در این صورت مربع MNPQ مشخص می‌شود.

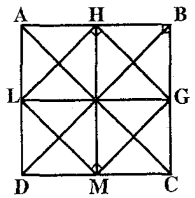




۱۳۷. نقطهٔ داده شدهٔ A را به نقطهٔ O مرکز مربع وصل می‌کنیم. یک زاویهٔ قائمه رسم می‌کنیم و $OB = OA$ را اختیار می‌کنیم. به‌قطر AB مربعی رسم می‌کنیم. این دایره مربع اول یا امتداد ضلعهای آن را در دو نقطه قطع خواهد کرد، یا بر آن مماس خواهد بود و یا آن را قطع نخواهد کرد. اگر دایرهٔ به قطر AB در دو نقطه ضلع مربع یا امتداد آن را قطع کند، مسأله دو جواب دارد. اگر مماس بر ضلع مربع باشد، مسأله یک جواب دارد که مربع به ضلع مینیمم جواب مسأله است، و اگر نقطهٔ تقاطع وجود نداشته باشد، مسأله جواب ندارد.

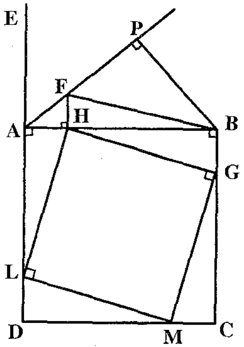
۱.۱.۲.۳.۱.۲.۲.۳. مربع، طول ضلع





۱۳۸. راه اول. ضلع مربع داده شده را a می‌گیریم. به مرکز مربع داده شده و به شعاع $\frac{l}{\sqrt{2}}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دایره با ضلعهای مربع داده شده، رأسهای مربع خواسته شده است. کمترین مقدار l مساوی $\frac{a}{2}$ است که در این صورت وسطهای ضلعهای مربع داده شده، رأسهای مربع جواب مسأله است و بیشترین مقدار l هنگامی است که $\frac{a\sqrt{2}}{2} = \frac{l}{\sqrt{2}}$، یعنی $l = a$ باشد که در این‌صورت رأسهای مربع جواب مسأله بر رأسهای مربع داده شده منطبق است.

راه دوم. نیمساز زاویهٔ قائمهٔ BAF را رسم می‌کنیم. به مرکز B و به شعاع l دایره‌ای رسم می‌کنیم تا نیمساز را در نقطهٔ F قطع کند. از F عمود FH را بر ضلع AB فرود می‌آوریم. F یک رأس مربع خواسته شده است. از H خطی موازی BF رسم می‌کنیم



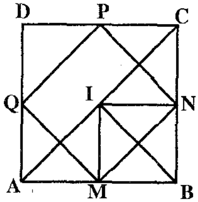
تا ضلع BC را در نقطهٔ G قطع کند. از H و F دو عمود بر GH اخراج می‌کنیم تا دو ضلع دیگر مربع را در M و L قطع کند. مربع MGHL جواب مسأله است (مثلثهای قائم الزاویهٔ AHL، HBG، MGC و DLM همنهشتند؛ زیرا $\hat{A}=\hat{B}=\hat{C}=\hat{D}=90^\circ$ و

$AH = HF = BG = MC = DL$ و

$HL = HG = GM = ML$ است).

بحث. تغییرات l از $AB = a$ تا $BP = \frac{AB}{\sqrt{2}} = \frac{a}{\sqrt{2}}$ است.

۱.۱.۲.۳.۳.۱.۲.۲.۴. مربع، مساحت



۱۳۹. در مربع ABCD (شکل) به ضلع a، می‌خواهیم مربعی محاط کنیم که مساحتش b^2 باشد. ضلع این مربع b است. به مرکز یکی از رأسهای مربع مفروض مانند B، قوسی به شعاع b رسم می‌کنیم تا قطر AC را در I قطع کند. از I عمودهای IM و IN را بر ضلعهای AB و BC فرود می‌آوریم. شکل IMBN مستطیل است. پس $MN = b$ و MN یک ضلع از مربع مطلوب است. PC و DQ را روی CD و DA به اندازهٔ BN جدا می‌کنیم. مربع PQMN جواب مسأله است.

۱۴۰. اگر ضلع مربع مفروض a و ضلع مربع مطلوب x باشد، باید $x^2 = 2a^2$ باشد، پس x وتر مثلث قائم‌الزاویه و متساوی‌الساقینی است که هر ساق آن مساوی a است.

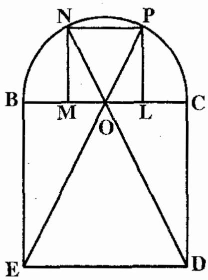
۱.۱.۲.۳.۳.۲.۲.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۴۱. اگر مساحت شکل داده شده S و ضلع مربع خواسته شده x باشد، $x = \sqrt{S}$ است.

۱.۱.۲.۳.۴. رسم مربع با معلوم بودن: نیمدایره، دایره و ...

۱.۱.۲.۳.۴.۱. رسم مربع با معلوم بودن نیمدایره، قطعه یا قطاع دایره

۱۴۲. چنانچه MNPL مربع محاط در نیمدایرهٔ به مرکز (O) و به قطر BC باشد، چون ML بر



BC واقع است، لذا NP موازی BC بوده و اگر از (O) مرکز دایره بر NP عمود کنیم، منصف NP می‌باشد که در نتیجه، عمودمنصف ML خواهد بود، یعنی L و N نسبت به (O) قرینه‌اند. درصورتی که PO را وصل کرده، امتداد دهیم تا عمود بر BC در نقطهٔ B را در E قطع نماید، دو مثلث OPL و OBE متجانسند. (O مرکز تجانس است) و داریم :

$$\frac{PL}{BE} = \frac{OP}{OE} = \frac{NP}{OE} \qquad (۱)$$

و همچنین اگر NO را وصل کرده، امتداد دهیم تا عمود در C بر BC را در D قطع نماید، می‌توان نوشت :

$$\frac{NO}{OD} = \frac{NP}{ED} \qquad (۲)$$

$$\frac{NP}{ED} = \frac{NP}{BE} \qquad (۳)$$

از ملاحظهٔ رابطه‌های (۱)، (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که $ED = CD = BC = BE$ ، یعنی چهارضلعی BCDE مربع است و چون (O) وسط BC و ML بوده و $ED \| NP$ است، نقطهٔ (O) مرکز تجانس دو مربع BCDE و MNPL است و از آن‌جا حل مسأله چنین است :

بر روی ضلع BC و در خارج نیمدایره، مربع BCDE را بنا می‌کنیم. درصورتی که EO و DO محیط دایره را در P و N قطع نماید، NP یک ضلع مربع و چنانچه از N و P بر BC عمود کنیم، MNPL مربع مطلوب است.

۱.۱.۲.۳.۴.۲. رسم مربع با معلوم بودن: دایره، دایره و ...

۱.۱.۲.۳.۴.۲.۱. تنها یک دایره

۱۴۵. تلاش دانشمندان یونان باستان، برای حل مسألهٔ تربیع دایره، از راه رسم خط راست و دایره، مثل دو مسألهٔ قبل، با عدم موفقیت روبه‌رو شد. درواقع مسألهٔ تربیع دایره هم، همچون مسأله‌های تضعیف مکعب و تثلیث زاویه، به‌کمک خط‌کش و پرگار، قابل حل نیست.

حتی در سال ۱۷۵۵، فرهنگستان علوم پاریس، به‌خاطر تلاش بیهوده‌ای که ریاضیدانان، و بسیاری از ناآشنایان به ریاضیات، در راه‌حل مسألهٔ تربیع دایره به‌کار می‌بردند، تصمیم گرفت که دیگر، هیچ اثری را که مربوط به بررسی تربیع دایره (و همچنین، تضعیف مکعب

و تثلیث زاویه) باشد، قبول نکند و این، تا حدی، حرارت «تربیع کنندگان دایره» را فرو نشاند.

در نیمهٔ دوم سدهٔ نوزدهم بود که، سرانجام، ف.لیندمان، ریاضیدان آلمانی، ثابت کرد که مسألهٔ تربیع دایره، به‌کمک خط‌کش و پرگار، غیرقابل حل است. اثبات لیندمان دشوار است و از محدودهٔ درسهای دبیرستانی ریاضیات، بیرون می رود. با توجه به استدلالهای لیندمان، به‌یادآوریهای کوتاه زیر قناعت می‌کنیم.

دایره‌ای با شعاع R درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم مربعی بسازیم که هم‌ارز با این دایره باشد (یعنی مساحتی برابر مساحت دایره داشته باشد). ضلع مربع موردنظر را x می‌گیریم، دراین‌صورت، باید داشته باشیم:

$$x^۲ = \pi R^۲$$

و از آن‌جا

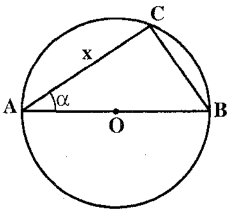
$$x = R\sqrt{\pi}$$

به‌این ترتیب، مسألهٔ ساختن مربعی هم‌ارز دایرهٔ مفروض، منجر به رسم پاره‌خطی می‌شود که برابر با حاصلضرب پاره‌خط مفروض R در عدد مفروض $\sqrt{\pi}$ باشد. ضمناً، این ترسیم را باید به‌کمک خط‌کش و پرگار انجام داد، یعنی از راه رسم تعداد محدودی خط راست و دایره.

به کمک خط‌کش و پرگار، همیشه می‌توان حاصلضرب پاره‌خط مفروض R را، در عدد مفروض گویا (درست یا کسری) رسم کرد. ولی، همیشه نمی‌توان، به‌کمک این وسیله‌ها، حاصلضرب پاره‌خط مفروض را در عددی گنگ، رسم کرد. این امکان، در بعضی حالتها، مثلاً وقتی که عدد گنگ برابر $\sqrt{۲}$ یا $\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$ باشد، میسّر است. $R\sqrt{۲}$ را می‌توان، به‌عنوان ضلع مربع محاط در دایره به شعاع R و $R\sqrt{۲-\sqrt{۲}}$ را، به‌عنوان ضلع دوازده ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R، درنظر گرفت، ضمناً می‌دانیم که، دوازده ضلعی منتظم را می‌توان، به‌صورتی کاملاً دقیق، و به کمک شش‌ضلعی منتظم محاطی، رسم کرد.

در نظریهٔ ساختمانهای هندسی ثابت شده است که پاره‌خط مفروض R را وقتی می‌توان، به‌کمک خط‌کش و پرگار، در یک عدد حقیقی ضرب کرد که این عدد حقیقی بتواند ریشهٔ یک معادلهٔ جبری با ضریبهای درست و قابل‌حل به‌کمک رادیکالهای با فرجهٔ ۲ باشد. عددی که نتواند ریشهٔ یک معادلهٔ جبری با ضریبهای درست باشد، عدد غیرجبری (ترانساندان) نامیده می‌شود. بنابراین، به‌کمک خط‌کش و پرگار، نمی‌توان حاصلضرب پاره‌خط مفروض R را در یک عدد غیرجبری رسم کرد.

بنابراین، برای اثبات قابل‌حل نبودن مسألهٔ تربیع دایره، به‌کمک خط‌کش و پرگار، باید عدم امکان رسم حاصلضرب پاره‌خط مفروض R در عدد $\sqrt{\pi}$ را، به کمک این وسیله‌ها، ثابت کرد و برای این منظور، باید ثابت کرد که $\sqrt{\pi}$ یا π، عددی است غیرجبری.
خدمت لیندمان هم همین بود که، برای نخستین بار در جهان دانش، ثابت کرد که π، عددی است غیرجبری و از این راه، به‌طور قطع، نتیجه گرفت که حل مسألهٔ تربیع دایره، به‌کمک خط‌کش و پرگار، ممکن نیست. به این جهت است که لیندمان را «فاتح عدد π» نامیده‌اند.
به این ترتیب، ثابت می‌شود که مسألهٔ تربیع دایره، تنها به‌یاری خط‌کش و پرگار، قابل حل نیست. با وجود این، این مسأله را می‌توان با استفاده از ابزارهای اضافی و با استفاده از بعضی منحنیهای خاص (مثل کوادراتریس) با دقت حل کرد. با استفاده از خط‌کش و پرگار، مسألهٔ تربیع دایره را، تنها به‌تقریب می‌توان حل کرد.
در این جا، یکی از راه‌حلهای تقریبی مسألهٔ تربیع دایره را، براساس استفاده از مثلث بینک، می‌آوریم. این روش را، بینک، یک مهندس روسی در سال ۱۸۳۶ پیشنهاد کرد که، برای استفاده در موارد عملی، روش بسیار ساده‌ای است.



مثلث ABC را در دایره‌ای که باید تربیع کنیم، چنان محاط می‌کنیم که ضلع بزرگتر آن، منطبق بر قطر دایره باشد (شکل). زاویهٔ CAB را α و وتر AC را x می‌نامیم. زاویهٔ α را طوری انتخاب می‌کنیم که پاره‌خط x، برابر ضلع مربع، هم‌ارز دایرهٔ مفروض باشد. برای این منظور، از رابطهٔ زیر استفاده می‌کنیم:

$$\cos\alpha = \frac{AC}{AB} = \frac{x}{۲R}$$

که در آن، R برابر با شعاع دایره است.
چون مساحت مربع به ضلع x، باید با مساحت دایره برابر باشد، داریم:

$$x^{۲} = \pi R^{۲} \Rightarrow ۴R^{۲}\cos^{۲}\alpha = \pi R^{۲} \Rightarrow \cos^{۲}\alpha = \frac{\pi}{۴}$$

که درنتیجه، به‌دست می‌آید:

$$\cos\alpha = \frac{۱}{۲}\sqrt{\pi} \approx ۰/۸۸۶$$

و از روی جدول معلوم می‌شود که:

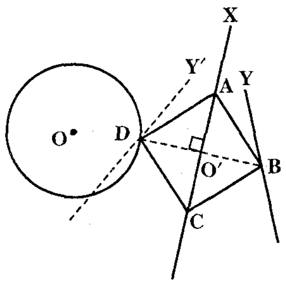
$$\alpha = ۲۷^{\circ}\ ,\ ۳۶'$$

بنابراین، با رسم وتری در دایره که با قطر آن، زاویه‌ای برابر ۲۷ درجه و ۳۶ دقیقه بسازد،

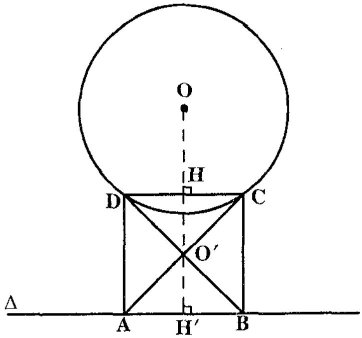
ضلع مجهول مربع موردنظر به‌دست می‌آید، یعنی مربعی که هم‌ارز با دایره است. مثلث ABC همان مثلث بینک است.

۱.۱.۲.۳.۴.۲.۲. یک دایره، خط

۱۴۷. مسأله را حل شده می انگاریم. دو رأس B و D نسبت به خط X قرینهٔ یکدیگرند، بنابراین هرگاه قرینهٔ خط Y را نسبت به خط X یافته، آن را ′Y بنامیم، رأس D در محل برخورد ′Y با دایرهٔ O واقع است و عمودی که از D بر X رسم شود، خط Y را در B و خط X را در ′O، مرکز مربع مطلوب قطع می کند. هرگاه روی خط X و در دو طرف ′O، طولهایی مساوی نصف قطر BD جدا کنیم، نقطه‌های A و C به‌دست می‌آیند. مسأله حداکثر دو جواب دارد.

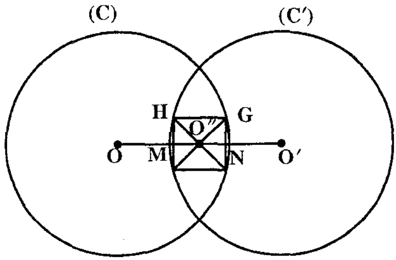


۱۴۸. مسأله را حل شده، و مربع ABCD را که دو رأس A و B از آن، روی خط Δ و دو رأس C و D از آن، روی دایرهٔ (O) است، جواب مسأله می‌گیریم. عمودی که از O بر خط Δ رسم می‌شود، عمودمنصف ضلعهای AB و CD است وخط ثابتی است. پس ...

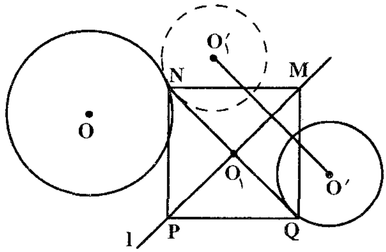


۱.۱.۲.۳.۴.۲.۳ . دو دایره

۱۴۹. دو دایرهٔ متساوی C(O,R) و C′(O′,R) را در نظر می‌گیریم. نقطهٔ برخورد خط‌المرکزین دو دایره با دایره‌ها را M و N می‌نامیم. از نقطهٔ ″O وسط MN دو خط رسم می‌کنیم که با MN زاویهٔ °۴۵ بسازند. این دو خط قطرهای مربع جواب مسأله است. رأسهای این مربع، نقطه‌های برخورد این خطها با قوسهای دو دایره مربوط به بخش مشترک آنهاست.



۴.۲.۴.۳.۲.۱.۱ . دو دایره یا بیشتر، یک خط یا بیشتر



۱۵۰. مسأله را حل شده و مربع MNPQ را که دو رأس روبه‌روی M و N از آن بر خط l و رأس N روی دایرهٔO و رأسQ روی دایرهٔ O' واقع است، جواب مسأله می‌گیریم. دو قطر MP و NQ عمودمنصف یکدیگرند، به عبارت دیگر می‌توان گفت نقطهٔ N قرینهٔ محوری نقطهٔ Q نسبت به خط l است. بنابراین روش حل مسأله چنین است :

قرینهٔ دایرهٔ (O') را نسبت به خط l به دست می‌آوریم، و دایرهٔ O'_1 می‌نامیم. نقطهٔ برخورد این دایره با دایرهٔ (O) رأس N از مربع است. از N عمود بر l را فرود می‌آوریم تا دایرهٔ O' را در نقطهٔ Q قطع کند. آن‌گاه روی l دو پاره‌خط

$$O_1M = O_1P = O_1N = O_1Q$$

را جدا می‌کنیم و از N و Q به M و P وصل می‌کنیم. مربع MNPQ رسم می‌شود.

۱۵۱. اگر رأسهای مربعی بر محیطهای چهار دایرهٔ هم مرکز به شعاعهای a، $a+d$ ، $a+۲d$ و $a+۳d$ قرار داشته باشند، آن وقت، باید یکی از برابریهای زیر برقرار باشد :

$$a^۲+(a+d)^۲=(a+۲d)^۲+(a+۳d)^۲$$ و

$$a^۲+(a+۲d)^۲=(a+d)^۲+(a+۳d)^۲$$ و

$$(a+d)^۲+(a+۲d)^۲=a^۲+(a+۳d)^۲$$

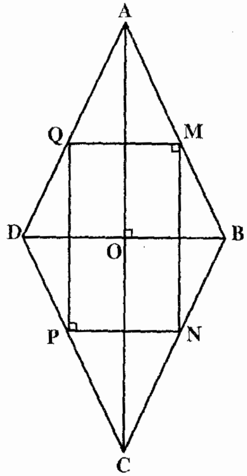
درحالی که، در هر سه حالت، بخش سمت چپ برابری، به‌ازای $a,d>۰$ ، از بخش سمت راست آن کوچکتر است.

۴.۲.۱.۱. رسم لوزی

۱.۴.۲.۱.۱. رسم لوزی با معلوم‌بودن: نقطه؛ ضلع؛ قطر، ...

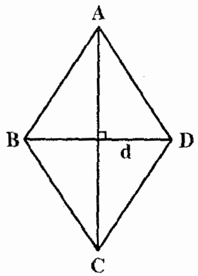
۱.۱.۴.۲.۱.۱. نقطه

۱۵۲. مسأله را حل‌شده و نقطه‌های M، N، P و Q را وسط ضلعهای AB، BC، CD و DA



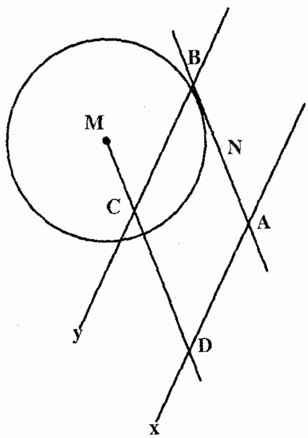
از لوزی ABCD می‌گیریم. می‌دانیم که چهارضلعی MNPQ مستطیل است که هریک از دو ضلع مجاورش نصف یک قطر لوزی است. بنابراین با معلوم‌بودن سه رأس این مستطیل، رأس چهارم آن نیز معلوم است. بعلاوه مرکز مستطیل و مرکز لوزی بر هم منطبق می‌باشند. با توجه به نکته‌های بالا، پس از رسم مستطیل، از مرکز آن خطهایی موازی ضلعهای مستطیل رسم می‌کنیم و روی آنها در دو طرف مرکز به اندازهٔ طول ضلعهای متناظر موازی آنها، جدا می‌کنیم. چهار رأس لوزی به دست می‌آید.

۲.۱.۴.۲.۱.۱. قطر



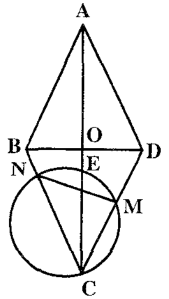
۱۵۳. مسأله را حل شده و لوزی ABCD را جواب مسأله می‌گیریم. اگر $AC = d$ و $\frac{AC}{BD} = k$ معلوم باشد، اندازهٔ قطر BD مشخص خواهد بود. بنابراین لوزی با معلوم‌بودن اندازهٔ دو قطر قابل رسم است.

۳.۱.۴.۲.۱.۱. نقطه، خط



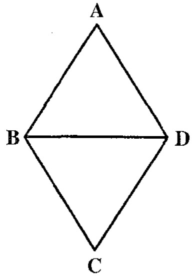
۱۵۴. چون ارتفاعهای لوزی با هم مساوی و برابر فاصلهٔ دو خط متوازی‌اند، دایرهٔ به مرکز M که شعاعش مساوی ارتفاع لوزی باشد، بر ضلعی که از N می‌گذرد، مماس است.

۱.۱.۲.۴.۱.۴. نقطه، زاویه

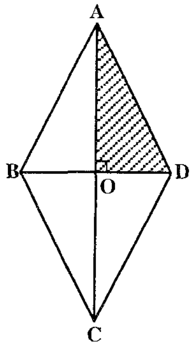


۱۵۵. اگر زاویهٔ معلوم، زاویهٔ C باشد، رأس C بر کمان درخور زاویهٔ معلوم نظیر قطعه خط MN و بر خط AE که A را به وسط کمان $\widehat{MN}$ وصل می کند واقع است. رأسهای B و D بر عمودمنصف AC و بر خطهای CM و CN قرار دارند.

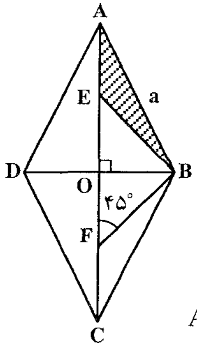
۱.۱.۲.۴.۱.۵. ضلع، قطر یا رابطهٔ بین قطرها



۱۵۶. از لوزی ABCD طول ضلع و قطر BD معین است. بنابراین مثلث متساوی الساقین ABD را با معلوم‌بودن قاعدهٔ BD و ساق AB می‌توان رسم کرد. قرینهٔ رأس A نسبت به BD رأس چهارم لوزی است (شکل).



۱۵۷. فرض می‌کنیم طول ضلع و اندازهٔ قطر AC از لوزی ABCD معلوم باشد. اگر نقطهٔ برخورد قطرهای آن را O بنامیم، $AO = \frac{AC}{۲}$ طول معلومی دارد و با توجه به این که دو قطر، عمودمنصف یکدیگرند، مثلث قائم‌الزاویهٔ AOD قابل رسم می‌باشد. با رسم این مثلث، لوزی بسادگی رسم می‌شود.



۱۵۸. لوزی ABCD به ضلع a را جواب مسأله می گیریم. نقطهٔ برخورد دو قطر را O می‌نامیم و روی OA پاره‌خط OE = OB را جدا می کنیم :

مقدار معلوم $= AE = AO - OB$

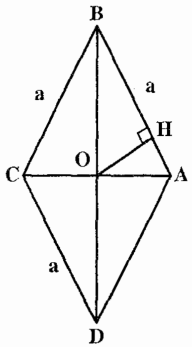
است. بنابراین مثلث ABE قابل رسم است، زیرا :

$$AE = AO - OB = \frac{AC}{۲} - \frac{BD}{۲} \quad , \quad AB = a \quad , \quad \hat{AEB} = ۱۳۰^\circ$$

معلوم می باشند. پس از رسم این مثلث لوزی بسادگی رسم می‌شود.

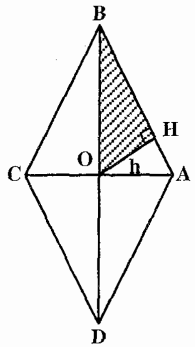
اگر مجموع دو قطر معلوم باشد، پاره‌خط $OF = OB$ را در امتداد AO جدا می‌کنیم و از F به B وصل می‌کنیم. مثلث ABF با معلوم‌بودن دو ضلع و یک زاویه ($AF = \frac{AC+BD}{۲}$ ، $A\hat{F}B = ۴۵^\circ$ و $AB = a$) قابل رسم است. پس از رسم این مثلث، لوزی بسادگی رسم می‌شود.

۶.۱.۴.۲.۱.۱. ضلع، پاره‌خط



۱۵۹. مسأله را حل شده می‌گیریم. اگر O محل برخورد قطرهای لوزی $ABCD$ و OH، فاصلهٔ O از AB باشد، مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB با معلوم‌بودن اندازهٔ وتر و ارتفاع وارد بر وتر ($AB = a$ ، $OH = h$ و $A\hat{O}B = ۹۰^\circ$)، قابل رسم است. پس برای رسم لوزی، این مثلث را رسم می‌کنیم و قرینه‌های A و B نسبت به نقطهٔ O را C و D می‌نامیم. لوزی $ABCD$ جواب مسأله است.

۷.۱.۴.۲.۱.۱. قطر، پاره‌خط

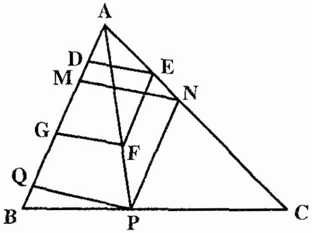


۱۶۰. مسأله را حل شده و لوزی $ABCD$ را جواب مسأله می‌گیریم. اگر O نقطهٔ برخورد قطرهای لوزی و $OH = h$ فاصلهٔ مرکز لوزی از ضلع آن و قطر $BD = l$ باشد، مثلث قائم‌الزاویهٔ BOH ($\hat{H} = ۹۰^\circ$)، با معلوم‌بودن اندازهٔ ضلع $AO = \frac{BD}{۲} = \frac{l}{۲}$ و $OH = h$ قابل رسم است. پس برای رسم لوزی، این مثلث را رسم می‌کنیم و از O عمودی بر OB اخراج می‌کنیم تا امتداد BH را در A قطع کند. قرینه‌های A و B نسبت به نقطهٔ O، رأسهای C و D را مشخص می‌سازند.

۲.۴.۲.۱.۱. رسم لوزی با معلوم‌بودن: مثلث، مثلث و ...

۱.۲.۴.۲.۱.۱. تنها مثلث

۱۶۱. لوزی $DEFG$ را طوری رسم می‌کنیم که زاویه‌های آن با زاویه‌های لوزی مفروض برابر

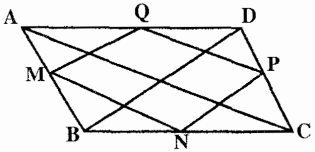


باشد. AF را امتداد می‌دهیم تا BC را در P قطع کند. لوزی PQMN را متشابه با لوزی DEFG رسم می‌کنیم که جواب مسأله است.

۱.۱.۲.۴.۳. رسم لوزی با معلوم بودن: چندضلعی، چندضلعی و داده‌های دیگر

۱.۱.۲.۴.۳.۱. رسم لوزی با معلوم بودن: چهارضلعی، چهارضلعی و ...

۱.۱.۲.۴.۳.۱.۱. تنها یک چهارضلعی



۱۶۲. مسأله را حل‌شده فرض کرده و MNPQ را لوزی مطلوب می انگاریم که در چهارضلعی ABCD محاط می‌باشد و ضلعهای آن با قطرهای AC و BD موازی می‌باشند.

در مثلثهای DQP و DAC داریم :

$$\frac{QP}{AC}=\frac{DQ}{DA}$$

پس $QP=\frac{DQ\times AC}{DA}$ ، به همین ترتیب از مثلثهای MAQ و BAD حاصل می‌شود :

$$\frac{QM}{BD}=\frac{AQ}{DA} \quad \text{و یا} \quad QM=\frac{AQ\times BD}{DA}$$

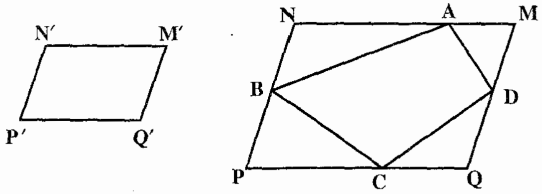
و چون $QM=QP$ است، پس :

$$\frac{DQ\times AC}{DA}=\frac{AQ\times BD}{DA}$$

یعنی $\frac{QA}{QD}=\frac{AC}{BD}$.چون نسبت قطرها معلوم است، از این تناسب نقطهٔ Q روی AD مشخص می‌شود و پس از تعیین Q لوزی را می‌توان بآسانی رسم کرد.

۱.۱.۲.۴.۳.۱.۲. چهارضلعی، لوزی

۱۶۳. مسأله را حل شده و لوزی MNPQ را محیط بر چهارضلعی ABCD و متشابه با لوزی داده شدهٔ $M'N'P'Q'$ جواب مسأله می‌گیریم. در این صورت اندازهٔ زاویه‌های $\hat{M}=\alpha$ ،

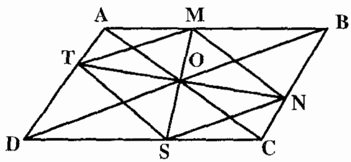


$\hat{N}=\beta$ ، $\hat{P}=\gamma$ و $\hat{Q}=\delta$ مشخص می‌باشند. بنابراین نقطهٔ M روی کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط AD، نقطهٔ N روی کمان درخور زاویهٔ β روبه‌رو به پاره‌خط AB، نقطهٔ P روی کمان درخور زاویهٔ γ روبه رو به پاره‌خط BC، و نقطهٔ Q روی کمان درخور زاویهٔ δ روبه‌رو به پاره‌خط CD قرار دارد. حال باید از A و C دو خط موازی و مساوی متکی بر کمان درخورهای α ، β ،γ و δ رسم کنیم.

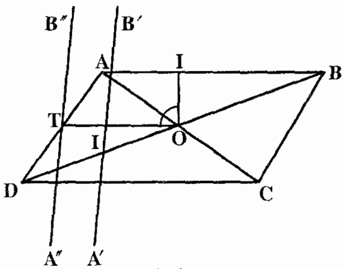
۱.۱.۲.۴.۳.۲. رسم لوزی با معلوم‌بودن: چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای ویژه و داده‌های دیگر

۱.۱.۲.۴.۳.۲.۱. رسم لوزی با معلوم بودن: متوازی‌الاضلاع، متوازی‌الاضلاع و ...

۱.۱.۲.۴.۳.۲.۱.۱. متوازی‌الاضلاع، قطر



(الف)

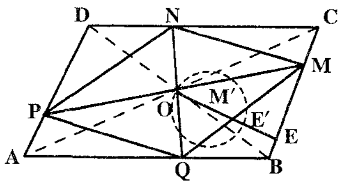


(ب)

۱۶۴. اگر MNST لوزی مطلوب باشد، مرکز لوزی بر مرکز متوازی‌الاضلاع منطبق می‌باشد. به این ترتیب ملاحظه می‌شود که چون مرکز لوزی مشخص و مکان رأسهای آن بر روی ضلعهای متوازی الاضلاع است، بنابراین با تعیین یک رأس لوزی، آن را می‌توان رسم کرد و مکان رأس T بر روی AD و مکان دیگر آن به این ترتیب به‌دست می‌آید که اگر ضلع AB، 90° دوران کند و در تجانس به مرکز O و نسبت $\frac{m}{n}$ مجانس وضع جدید A′B′ (A′B′ مبدل AB است که 90° در حول نقطهٔ O دوران کرده است) در تلاقی با AD نقطهٔ T را می‌دهد. بنابراین: ابتدا AB را به اندازهٔ 90° در حول نقطهٔ O دوران داده و سپس مجانس A′B′ را در

تجانس به مرکز O و نسبت $\frac{m}{n}$ به دست می آوریم. نقطهٔ برخورد این مجانس با AD نقطهٔ T می‌باشد. از T به O وصل کرده و امتداد می‌دهیم تا BC را در نقطهٔ N قطع کند. نقطه‌های تلاقی عمودی که از O بر MN رسم شود با دو ضلع مقابل متوازی‌الاضلاع، رأسهای M و S از لوزی است (شکل).

۱.۱.۲.۴.۳.۲.۱.۲. متوازی‌الاضلاع، مساحت



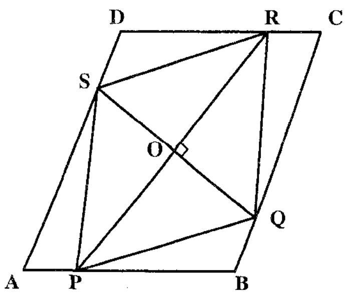
۱۶۵. فرض کنیم لوزی MNPQ (شکل) در متوازی‌الاضلاع ABCD محاط است. مرکز لوزی بر مرکز متوازی‌الاضلاع منطبق است. مساحت لوزی عبارت است از :

$$\frac{۱}{۲} PM \times NQ = ۲OM \times ON \;;$$

و بنا به فرض $OM \times ON = k^۲$

N را چنان بنا می‌کنیم که این رابطه محقق باشد و برای این منظور روی OM نقطهٔ M' را چنان تعیین می‌کنیم که $OM \times OM' = k^۲$. از آن جا $ON = OM'$ و M' روی منعکس BC نسبت به O واقع است، قوت انعکاس $k^۲$ است، پس M' روی دایره به قطر OE' است و E' روی عمود OE که بر BC رسم می‌شود قرار دارد. به قسمی که $OE \times OE' = k^۲$. پس N در محل برخورد CD با دایرهٔ حاصل از دوران دایرهٔ به قطر OE' حول نقطهٔ O به اندازهٔ $\pm ۹۰°$ واقع است. پس از تعیین N، لوزی بسهولت رسم می‌شود.

۱.۱.۲.۴.۳.۲.۱.۳. متوازی‌الاضلاع، لوزی



۱۶۶. فرض کنیم مسأله حل‌شده و PQRS لوزی خواسته شده است که در متوازی‌الاضلاع ABCD محاط شده چون تمام لوزیهای متشابه نسبت قطرهایشان یکی است، پس نسبت $\frac{OP}{OQ} = \frac{p}{q}$ معلوم است و می‌دانیم که مرکز لوزی بر مرکز متوازی‌الاضلاع منطبق است،

بنابراین هرگاه مجانس خط CB را نسبت به مرکز O و با نسبت $\frac{p}{q}$ به دست آوریم و آن را $90°$ حول نقطهٔ O دوران دهیم، ضلع AB را در رأس P قطع می‌کند و سایر رأسها بسهولت از روی P به‌دست می‌آیند.

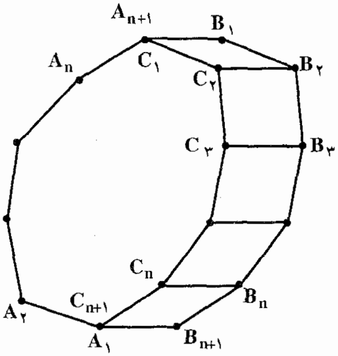
۱.۱.۲.۴.۳.۲.۲. رسم لوزی با معلوم‌بودن: مستطیل، مستطیل و ...

۱.۱.۲.۴.۳.۲.۲.۱. مستطیل، مساحت

۱۶۷. مستطیل را بـه چهار بخش همنهشت بـه‌وسیلهٔ رسم دو خط عمـود بـر هم که از مـرکـز مستطیـل رسم می شونـد و بترتیب بـر ضلعهای مستطیل عمـودنـد تقسیم می‌کنیم و ...

۱.۱.۲.۴.۳.۳. رسم لوزی با معلوم‌بودن چندضلعی

۱۶۹. حکم کلی‌تری را ثابت می‌کنیم : هر $2n$ضلعی را که ضلعهایی برابر داشته باشد و در ضمن، هر دو ضلع روبه‌رو در آن، با هم موازی باشند، می‌توان به لوزیها تقسیم کرد.



برای $n=2$ ، درستی حکم روشن است، زیرا چهارضلعی با ضلعهای برابر، خود یک لوزی است.

اکنون فرض می‌کنیم، حکم برای $n \geq 2$ درست باشد، و $2(n+1)$ ضلعی را با همان ویژگی در نظر می‌گیریم :

$$A_1A_2\cdots A_{n+1}B_1\cdots B_nB_{n+1}$$

فرض می‌کنیم، نقطه‌های :

$$C_1 = A_{n+1} \ , \ C_2,\cdots,C_n,C_{n+1} = A_1$$

نتیجهٔ انتقال موازی نقطه‌های B_1 ، ...، B_n و B_{n+1} ، به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{B_{N+1}A_1}$ باشند (شکل). در این صورت داریم :

$$B_iC_i = B_{n+1}A_1 = B_iB_{i+1} \quad \text{و} \quad (i=1,\cdots,n)$$

که از آن‌جا، با توجه به این که همهٔ خطهای راست B_iC_i با هم موازی هستند، نتیجه

می‌شود که همهٔ چهارضلعیهای $C_iB_iB_{i+1}C_{i+1}$ ، لوزی‌اند ؛ در ضمن :

$$A_nC_1 = C_1C_2 = \cdots = C_nA_1 \quad \text{و}$$

$$C_iC_{i+1} \| B_iB_{i+1} \| A_iA_{i+1}$$

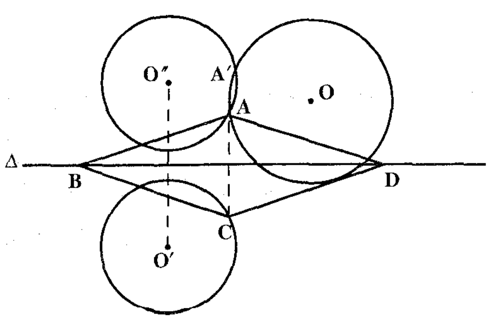
بنابراین، ۲n‌ضلعی $A_1 \cdots A_nC_1 \cdots C_n$ هم، به همان شکل مورد نظر است و، بنابر فرض استقرا، می‌توان آن‌را به لوزیهایی تقسیم کرد. حکم ثابت شد، بنابراین به پرسش مسأله باید پاسخ مثبت داد.

۱.۱.۲.۴.۴. رسم لوزی با معلوم بودن دایره یا شعاع دایره و ...

۱.۱.۲.۴.۴.۱. رسم لوزی با معلوم بودن دایره و ...

۱.۱.۲.۴.۴.۱.۱. دو دایره، خط، طول ضلع

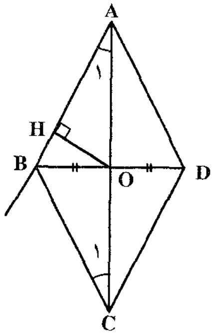
۱۷۰. مسأله را حل‌شده انگاشته، ملاحظه می‌کنیم که چون قطرهای لوزی بر هم عمودند و منصف یکدیگرند. پس دو رأس A و C نسبت به خط BD یا Δ قرینهٔ یکدیگرند. بنابراین هرگاه دایرهٔ O'' قرینهٔ دایرهٔ O' را نسبت به خط Δ معین کنیم، این دایره، دایرهٔ O را در نقطهٔ A قطع می‌نماید. هرگاه به مرکز A و به شعاعی مساوی طول ضلع لوزی دایره‌ای رسم کنیم خط Δ را در B و D قطع می‌کند. رأس C قرینهٔ A نسبت به خط BD است. شرط امکان مسأله آن است که دو دایرهٔ O و O'' یکدیگر را قطع کنند و یا مماس باشند و دایره به مرکزA یا A' و به شعاع l خط Δ را قطع کند.



۱.۱.۲.۴.۴.۲. رسم لوزی با معلوم بودن شعاع دایره و ...

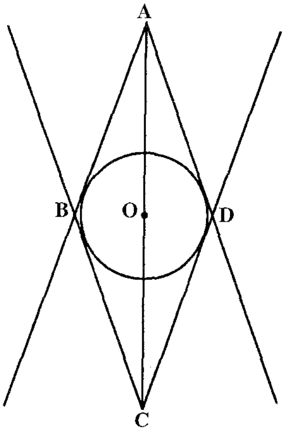
۱.۱.۲.۴.۴.۲.۱. شعاع دایرهٔ محاطی، یک زاویه

۱۷۱. مثلث OHA را می‌توان رسم کرد، چون $\hat{A}_1 = \frac{\alpha}{2}$ و OH معلوم است، پس $OC = OA$



را در امتداد OA جدا می‌کنیم. از C خطی رسم می‌کنیم، به‌طوری که $\hat{C}_1 = \hat{A}_1$ باشد. ادامهٔ این خط هر کجا که امتداد AH را قطع کرد، B می‌نامیم. از B به O وصل کرده، به اندازهٔ خودش ادامه می‌دهیم، هرکجا که شد، D می‌نامیم. از D به A و O وصل می‌کنیم. مثلث ADC قرینهٔ ABC است و ABCD لوزی مطلوب.

۱.۱.۲.۴.۴.۲.۲. شعاع دایرهٔ محاطی، قطر



۱۷۲. نخست قطر معلوم AC را رسم می‌کنیم. O وسط آن را مشخص کرده، به مرکز O و به شعاع r دایره‌ای می‌زنیم، از A و C دو مماس بر این دایره رسم می‌کنیم. این مماسها هر کجا که یکدیگر را قطع کردند، دو رأس B و D است و لوزی ABCD جواب مسأله است.

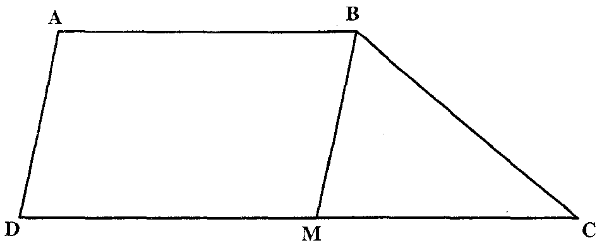
۱.۱.۲.۵. رسم ذوزنقه

۱.۱.۲.۵.۱. رسم ذوزنقه در حالت کلی

۱.۱.۲.۵.۱.۱. رسم ذوزنقه با معلوم‌بودن: نقطه؛ ضلع؛ قطر؛ ارتفاع؛...

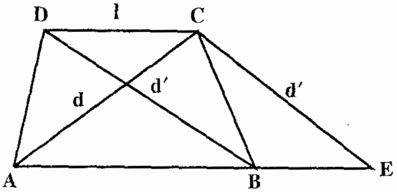
۱.۱.۲.۵.۱.۱.۱. ضلع

۱۷۳. فرض می‌کنیم مسأله حل‌شده و از B خطی به موازات AD رسم می‌کنیم تا DC را در M قطع کند. مثلث BMC را با معلوم‌بودن سه ضلع رسم می‌کنیم. سپس ازBخطی به



موازات MC رسم کرده و در روی آن به اندازه AB جدا می‌کنیم تا A به‌دست آید. از A به موازات BM رسم می‌کنیم تا امتداد MC را در D قطع کند.

۲.۱.۱.۵.۲.۱.۱. ضلع، قطر



۱۷۴. مسأله را حل شده انگاشته و فرض می‌کنیم ABCD ذوزنقه‌ای باشد که از آن طولهای دو قاعده $CD = b$ و $AB = a$ و دو قطر $AC = d$ و $BD = d'$ معلوم هستند.

حال از رأس C خط CE را موازی با قطر DB رسم می‌کنیم. در متوازی‌الاضلاع BECD داریم :

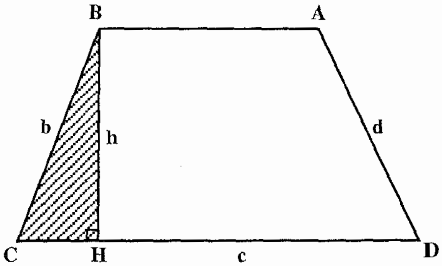
$BE = b$ و $EC = d'$ لذا سه ضلع مثلث AEC را می‌شناسیم :

$AC = d$ و $CE = d'$ و $AE = a + b$ و این مثلث را رسم می‌کنیم. پس از رسم این مثلث از رأس E طول EB را مساوی b به ضلع EA جدا می‌کنیم تا رأس B به‌دست آید و سپس CD را مساوی و موازی با BE رسم می‌کنیم تا رأس D حاصل شود.

شرط امکان مسأله آن است که بتوانیم مثلث ACE را رسم کنیم، یعنی داشته باشیم :

$$|d - d'| < a + b < d + d'$$

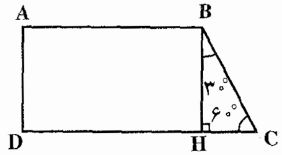
۳.۱.۱.۵.۲.۱.۱. ضلع، ارتفاع



۱۷۵. فرض می‌کنیم اندازهٔ ساقهای $AD = d$ و $BC = b$ و طول قاعدهٔ $CD = c$ و اندازهٔ ارتفاع $BH = h$ معلوم باشد. مثلث قائم‌الزاویهٔ BCH به دلیل معلوم‌بودن اندازهٔ وتر و یک ضلع ($\hat{H} = ۹۰°$، $CB = b$ و $BH = h$) قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم سپس CH را به اندازهٔ معلوم $CD = c$ امتداد می‌دهیم. به مرکز D و به شعاع $DA = d$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خطی را که از B موازی CD رسم شده است در نقطهٔ A قطع کند. ذوزنقهٔ ABCD جواب مسأله است.

۴.۱.۱.۵.۲.۱.۱. ضلع، زاویه

۱۷۶. فرض می‌کنیم مسأله حل‌شده و ABCD ذوزنقه مطلوب باشد. از نقطهٔ B عمود BH را



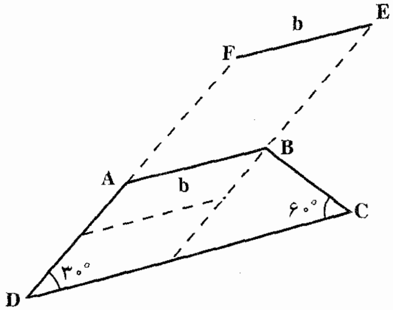
بر CD فرود می‌آوریم. چون CH در مثلث قائمه BCH برابر زاویهٔ ۳۰° می‌باشد مساوی نصف وتر یعنی ۲ سانتیمتر است. این مثلث را با معلومات داده شده می‌سازیم و از نقطهٔ B خطی به موازات CH رسم می‌کنیم. روی این خط از B به اندازهٔ $AB = ۶cm$ جدا نموده و CH را به اندازهٔ AB تا نقطهٔ D امتداد می‌دهیم. A را به B وصل می‌کنیم. ABCD ذوزنقهٔ مطلوب می‌باشد. از مثلث قائم‌الزاویه BHC نتیجه می‌شود :

$$BH^{۲} = BC^{۲} - CH^{۲}$$

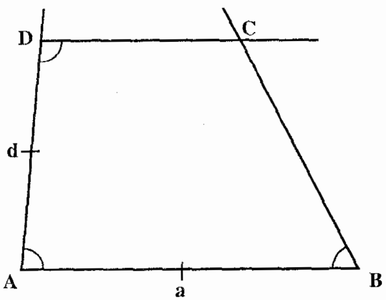
$BH^{۲} = ۱۶ - ۴$ و یا $BH = ۲\sqrt{۳}$ یا

$$S_{ABCD} = \frac{(AB + CD) \times BH}{۲} = \frac{(۶ + ۸) \times ۲\sqrt{۳}}{۲} = ۱۴\sqrt{۳}$$

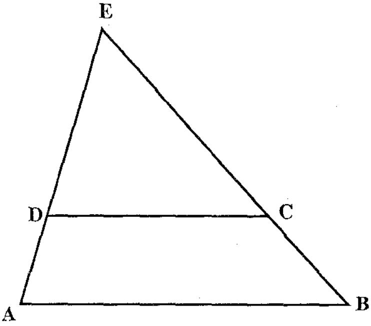
۱۷۷. اگر ABCD ذوزنقهٔ مطلوب باشد، ملاحظه می‌شود که اگر ساق AD را امتداد داده و از رأس B خطی موازی آن رسم کنیم هر پاره‌خط موازی با CD و متکی بر دو خط AF و BE برابر b می‌باشد و چهارضلعی ABEF متوازی‌الاضلاع است بنابراین راه‌حل زیر به‌دست می‌آید : پاره‌خط DC را مساوی a جدا کرده و زاویهٔ $\hat{D} = ۳۰°$ و زاویهٔ $\hat{C} = ۶۰°$ بر دو سر این پاره‌خط طرح می‌کنیم. بر روی امتداد ضلع دیگر زاویه D از یک نقطه دلخواه، خطی موازی CD رسم کرده بر روی آن پاره خطی به اندازهٔ b جدا می‌کنیم. از انتهای این پاره‌خط، خطی موازی DA رسم می‌کنیم. نقطه تلاقی این خط با ضلع دیگر زاویهٔ C رأس سوم ذوزنقه است. رأس چهارم هم با رسم BA موازی CD به‌دست می‌آید. (شکل)



۱۷۸. قاعدهٔ AB را به اندازهٔ داده شده a رسم می‌کنیم. سپس از A و B دو خط طوری رسم می‌کنیم که با AB زاویه‌های معلوم $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را بسازند. روی ضلع دیگر زاویهٔ A پاره‌خط $AD = d$ را جدا می‌کنیم و از D خطی موازی AB رسم می‌نماییم تا



ضلع دیگر زاویهٔ B را در نقطهٔ C قطع کند. ABCD ذوزنقهٔ جواب مسأله است.



۱۷۹. اگر ABCD (شکل) ذوزنقه خواسته‌شده باشد و E نقطهٔ برخورد ضلعهای غیرموازی AD و BC باشد، مثلثهای ABE و DCE متشابه‌اند و درنتیجه،

$$\frac{EC}{EB}=\frac{ED}{EA}=\frac{CD}{BA}=\frac{p}{q} \quad \text{(نسبت معلوم)}$$

$$\frac{EC}{EB-EC}=\frac{ED}{EA-ED}=\frac{p}{q-p}$$

$$\frac{EC}{CB}=\frac{EB}{DA}=\frac{p}{q-p}$$

بنابراین قطعه خطهای EC و ED می‌توانند ساخته شوند و همچنین مثلث DCE که دو ضلع و زاویهٔ بینش معلوم است. پس از رسم این مثلث، ED را از D به اندازهٔ DA امتداد می‌دهیم. اگر از A موازی CD رسم کنیم، EC را در B که رأس چهارم ذوزنقه است قطع می‌کند.

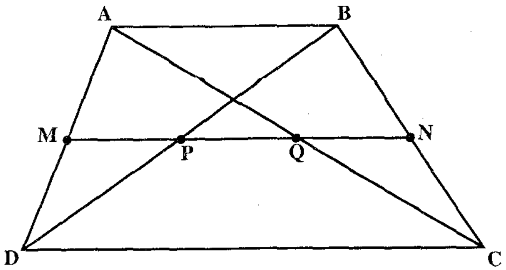
۵.۱.۱.۵.۲.۱.۱. قطر، پاره‌خط

۱۸۰. مسأله را حل‌شده و ذوزنقه ABCD را که از آن اندازه‌های دو قطر AC و BD و دو پاره‌خط PQ واصل بین وسطهای دو قطر و MN واصل بین وسطهای دو ساق معلوم است، جواب مسأله می‌گیریم. می‌دانیم که :

$$MN=\frac{AB+CD}{۲}\Rightarrow AB+CD=۲MN=\text{مقدارمعلوم} \quad (۱)$$

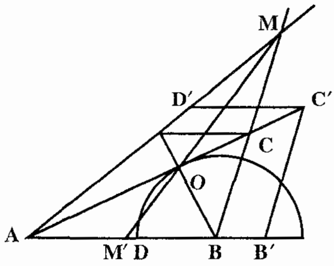
$$PQ=\frac{CD-AB}{۲}\Rightarrow CD-AB=۲PQ=\text{مقدار معلوم} \quad (۲)$$

از رابطه‌های (۱) و (۲) اندازه‌های دو قاعدهٔ ذوزنقه به‌دست می‌آید. پس رسم ذوزنقه به حالتی برمی‌گردد که از آن اندازه‌های دو قاعده و دو قطر آن معلوم است.



۱.۱.۲.۵.۱.۱.۶. قطر، زاویه

۱۸۱. می‌دانیم اگر O محل برخورد قطرهای ذوزنقهٔ ABCD باشد، داریم:



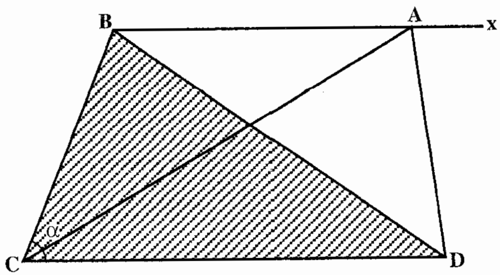
$$\frac{AO}{BO}=\frac{AC}{BD}=\frac{d}{d'}$$

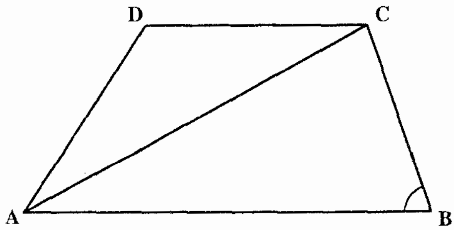
پس راه‌حل مسأله چنین است:

قطعه خط دلخواهی مانند AB رسم می‌کنیم و دو زاویهٔ مفروض ذوزنقه را در نقطه‌های A و B می‌سازیم که ضلعهای دیگر آنها در M یکدیگر را قطع می‌کنند. MM' میانهٔ مثلث MAB را می‌کشیم و مکان هندسی نقطه‌هایی را رسم می‌کنیم که نسبت فاصله‌های آنها از دو نقطهٔ A و B برابر $\frac{d}{d'}$ باشد (d و d' طول قطرهای داده شده است). نقطهٔ برخورد این مکان هندسی با میانهٔ MM' نقطهٔ O، محل برخورد دو قطر ذوزنقهٔ ABCD است. AC را تا C' امتداد می‌دهیم به قسمتی که AC' برابر d شود. $C'B'$ و $C'D'$ را به موازات CB و CD رسم می‌کنیم. ذوزنقهٔ $AB'C'D'$ جواب مسأله است.

۱.۱.۲.۵.۱.۱.۷. ضلع، قطر، زاویه

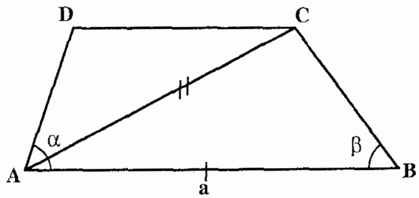
۱۸۲. مسأله را حل شده و ذوزنقهٔ ABCD را که از آن، اندازه‌های قطر AC، قطر BD، قاعده CD و زاویهٔ $A\hat{C}D=\alpha$ معلوم است، جواب مسأله می‌گیریم. مثلث BCD با معلوم‌بودن اندازه‌های دو ضلع و یک زاویه، قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم. سپس از B خط Bx را موازی CD رسم می‌کنیم. آن‌گاه دایره‌ای به مرکز C و به شعاع $CA=d$ رسم می‌کنیم تا خط Bx را در نقطهٔ A رأس چهارم ذوزنقه قطع کند. از A به D وصل می‌کنیم.



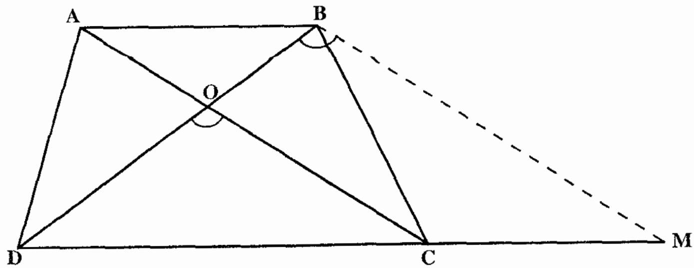


۱۸۳. مثلث ABC با معلوم‌بودن اندازهٔ دو ضلع و زاویهٔ روبه‌رو به یکی از آنها قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم. سپس از C خطی موازی AB و دایره‌ای به مرکز A و به شعاع معلوم AD رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دو مکان، نقطهٔ D رأس چهارم ذوزنقه است.

۱۸۴. مسأله را حل شده و ذوزنقهٔ ABCD را که در آن اندازهٔ زاویه‌ها و طول قاعدهٔ $AB = a$ و طول قطر $AC = d$ داده‌شده است، جواب مسأله می‌گیریم. مثلث ABC با معلوم‌بودن اندازهٔ دو ضلع و یک زاویه ($AB = a$ ، $AC = d$ و $\hat{B} = \beta$) قابل رسم است. بنابراین برای حل مسأله، نخست مثلث ABC را رسم می‌کنیم؛ سپس از A خطی رسم می‌کنیم که با AB زاویه‌ای مساوی زاویهٔ $\hat{A} = \alpha$ بسازد و از C خطی موازی AB می‌کشیم تا ضلع زاویهٔ A را در نقطهٔ D رأس چهارم ذوزنقه قطع کند. ABCD ذوزنقهٔ جواب مسأله است.

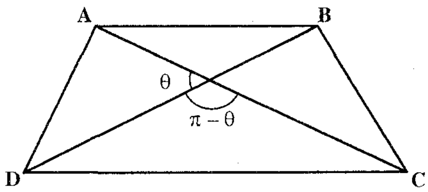


۱۸۵. اگر ABCD ذوزنقهٔ خواسته شده باشد، درصورتی که از B موازی AC رسم کنیم تا امتداد DC را در M قطع کند، در این حالت داریم $BM = AC$ و $(BD,\hat{}AC) = D\hat{B}M = \alpha$ و درنتیجه مثلث BDM با معلوم‌بودن دو ضلع و زاویهٔ بین آنها قابل رسم است، آن را رسم می‌کنیم. سپس اگر ضلع BC معلوم باشد، به مرکز B و شعاع BC قوسی رسم می‌نماییم تا DC را در C قطع نماید. با تکمیل متوازی‌الاضلاع ABMC بر روی مثلث BCM، ذوزنقهٔ ABCD کامل می‌شود و چنانچه ضلع AD معلوم باشد، از B موازی DM رسم



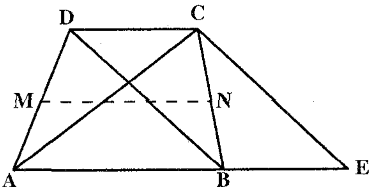
نموده به مرکز D و شعاع AD قوسی رسم می نماییم تا خطی که از B موازی DM رسم شده در A قطع نماید. پس از تعیین A، از A موازی BM رسم می‌نماییم تا C و درنتیجه ذوزنقه ABCD رسم شود.

۱۸۶. مسأله را حل شده و ذوزنقه ABCD($AB \parallel CD$) را جواب مسأله می‌گیریم. اجزای معلوم این ذوزنقه $AC = d$، $BD = d'$، $(A\hat{C}, BD) = \theta$ و $CD + AD = l$ می‌گیریم....



۸.۱.۱.۵.۲.۱.۱. قطر، پاره‌خط، زاویه

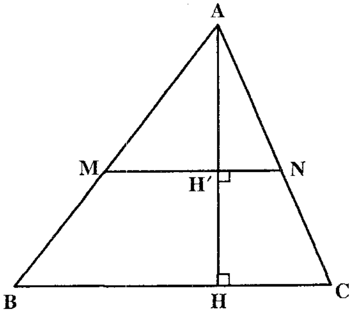
۱۸۷. اگر ABCD ذوزنقه مطلوب باشد. اگر قاعدهٔ AB را به اندازه قاعدهٔ DC تا نقطهٔ E امتداد دهیم $AE = 2l$ می‌باشد و $CE = DB$ است. بنابراین مثلث ACE را با داشتن سه ضلع می‌توان رسم کرد. با معلوم‌بودن زاویهٔ A از ذوزنقه، چون زاویهٔ A_1 معلوم است زاویهٔ $C\hat{A}D$ مشخص می‌شود. از نقطهٔ A خطی چنان رسم می‌کنیم که با AC زاویهٔ $C\hat{A}D$ را بسازد. ضلع این زاویه خطی را که از نقطهٔ C موازی AE رسم شود در نقطهٔ D رأس ذوزنقه قطع می‌کند. از D خطی موازی با CE رسم می‌کنیم تا AE را در نقطهٔ B قطع کند، B رأس دیگر ذوزنقه است. (شکل)



۲.۱.۵.۲.۱.۱. رسم ذوزنقه با معلوم‌بودن مثلث، مثلث و...

۱.۲.۱.۵.۲.۱.۱. مثلث، مساحت

۱۸۸. مسأله را حل شده و ذوزنقهٔ MNCB را جواب مسأله و مساحت آن را S می‌گیریم. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با MN را H' می‌نامیم. با توجه به فرض مسأله،



داریم :

$$S_{AMN} = S_{ABC} - S_{\text{ذوزنقه}} = S - S'$$
$$\Rightarrow \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{S-S'}{S} = \frac{AH'}{AH} \Rightarrow AH' = AH \times (1 - \frac{S'}{S})$$

بنابراین با معلوم‌بودن AH، S' و S اندازه AH' مشخص است. پس برای رسم ذوزنقهٔ خواسته شده ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و روی AH نقطهٔ H' را چنان اختیار می‌کنیم که $AH' = AH(1 - \frac{S'}{S})$ باشد. از H' خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا دو ضلع AB و AC را در M و N قطع کند. ذوزنقهٔ MNCB جواب مسأله است.

۱.۱.۲.۵.۱.۳. رسم ذوزنقه با معلوم‌بودن چندضلعی

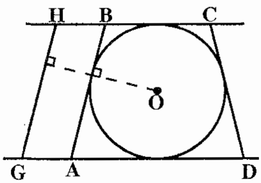
۱.۱.۲.۵.۱.۳.۱. رسم ذوزنقه با معلوم‌بودن چهارضلعی

۱۸۹. باید بتوانیم یک چهارضلعی با دو ضلع موازی بسازیم.

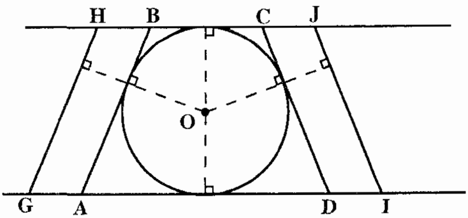
۱.۱.۲.۵.۱.۴. رسم ذوزنقه با معلوم بودن: دایره، دایره و ...

۱.۱.۲.۵.۱.۴.۱. دایره، ضلع

۱۹۰. شعاع دایرهٔ محاطی ذوزنقه را r، طول قاعدهٔ معلوم را $AD = b$ و اندازهٔ ساق معلوم را $AB = c$ می‌گیریم. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع r رسم می‌کنیم. دو خط مماس بر این دایره و موازی یکدیگر رسم می‌نماییم. آن‌گاه ساق AB به طول c مماس بر این دایره رسم می‌کنیم. از نقطهٔ A پاره‌خط $AD = b$ را مساوی قاعدهٔ داده شدهٔ ذوزنقه جدا می‌کنیم و از D خطی مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا خط موازی AD را در نقطهٔ C رأس چهارم ذوزنقه قطع کند.



۱۹۱. دایره‌ای به مرکز O و به شعاع r (شعاع دایرهٔ محاطی ذوزنقه) رسم می‌کنیم. سپس دو خط، مماس بر این دایره، و موازی یکدیگر رسم می‌کنیم. حال مماس AB را به طولی



مساوی ساق داده شده بر این دایره رسم می‌کنیم. همچنین مماس CD را بر این دایره، چنان رسم می‌کنیم که طولش مساوی ساق دیگر ذوزنقه (که معلوم است) باشد.

۱.۱.۲.۵.۱.۵. رسم ذوزنقه با معلوم بودن: مقطعهای مخروطی و منحنیهای دیگر

۱.۱.۲.۵.۱.۵.۱. سهمی

۱۹۲. ذوزنقهٔ BEDC معادل مستطیل JEHC است؛ که از آن جا باید مماس EFG را به قسمی رسم کنیم که نقطهٔ E وسط آن باشد.

فرض می‌کنیم $AM = a$ و $MB = b$ باشد، در این صورت داریم:

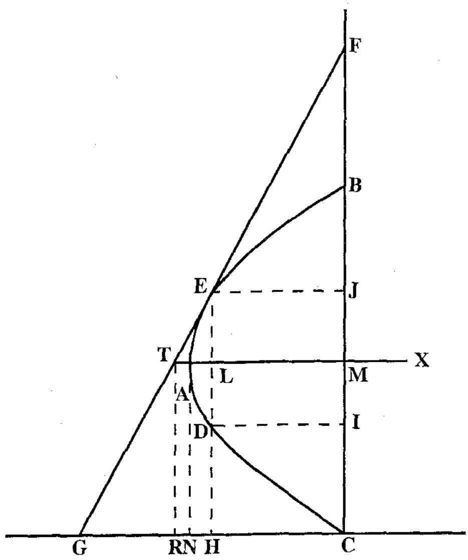
$$LE = \frac{b}{۳}\ ,\ AL = \frac{a}{۹} \Rightarrow LM = \frac{۸}{۹}a\ , JC = \frac{۴}{۳}b$$

$$\Rightarrow S_{BEDC} = S_{JEHC} = \frac{۸}{۹}a.\frac{۴}{۳}b = \frac{۳۲}{۲۷}ab$$

امّا قطعهٔ سهمی برابر است با:

$$\frac{۲}{۳}BC.AM = \frac{۴}{۳}b.a = \frac{۴}{۳}ab$$

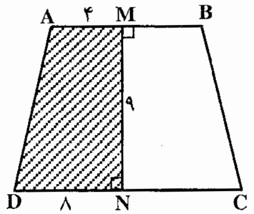
پس ذوزنقهٔ ماکزیمم $\frac{۸}{۹}$ قطعهٔ سهمی است.



۱.۱.۲.۵.۲. رسم ذوزنقه متساوی‌الساقین

۱.۱.۲.۵.۲.۱. رسم ذوزنقه متساوی‌الساقین با معلوم‌بودن: نقطه؛ ضلع؛ ...

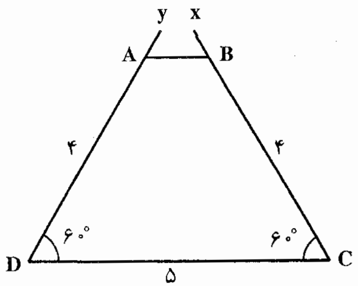
۱.۱.۲.۵.۲.۱.۱. ضلع، پاره‌خط



۱۹۳. اگر M و N وسطهای دو قاعدهٔ AB و CD از ذوزنقهٔ متساوی الساقین ABCD باشند MN محور تقارن ذوزنقه است. مقدارهای داده شده ذوزنقهٔ قائم‌الزاویهٔ AMND را رسم می‌کنیم و قرینهٔ آن‌را نسبت به محور تقارن MN به‌دست می‌آوریم. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD رسم می‌شود.

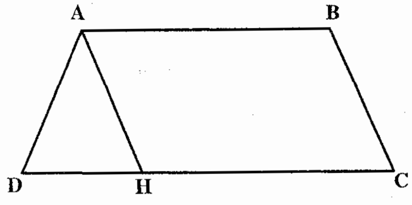
نکته. برای رسم این ذوزنقه روشهای دیگری نیز وجود دارد.

۱.۱.۲.۵.۲.۱.۲. ضلع، زاویه



۱۹۴. با توجه به داده‌های مسأله، این ذوزنقه متساوی‌الساقین است و برای رسم آن چنین عمل می‌کنیم: پاره‌خط CD به طول ۵ سانتیمتر را رسم می‌کنیم. از C و D دو خط Cx و Dy را در یک طرف CD چنان رسم می‌کنیم که $x\hat{C}D = y\hat{D}C = ۶۰°$ باشد. روی Cx و Dy دو پاره‌خط AD = CB = ۴cm را جدا می‌کنیم.
از A به B وصل می‌کنیم. ذوزنقهٔ ABCD جواب مسأله است.

۱۹۵. از A خطی به موازات BC رسم می‌کنیم. در مثلث متساوی‌الساقین ADH قاعدهٔ DH که تفاضل دو قاعدهٔ ذوزنقه است مقداری است معلوم و زاویهٔ $D\hat{A}H$ که برابر تفاضل دو زاویهٔ غیرمتساوی ذوزنقه است نیز معلوم است. پس این مثلث قابل رسم است. پس از رسم این مثلث DH را تا نقطهٔ C به اندازهٔ قاعدهٔ بزرگتر امتداد می‌دهیم و AB را به موازات DH برابر قاعدهٔ کوچکتر می‌کشیم.

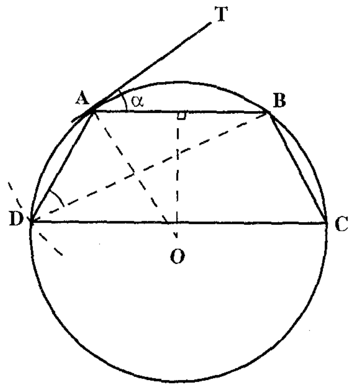


۱.۱.۲.۵.۲.۱.۳. ضلع، قطر، زاویه

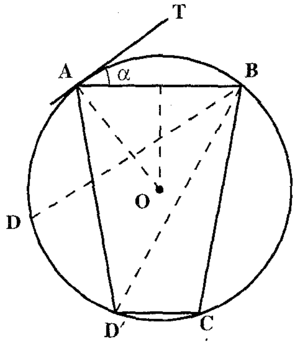
۱۹۶. اگر ABCD ذوزنقهٔ مطلوب باشد، چون از نقطهٔ A مماس AT را بر دایره رسم کنیم:

$$T\hat{A}B = A\hat{D}B = \alpha$$

است، $\overset{\frown}{ADB}$ کمان درخور زاویهٔ α نظیر به وتر AB می‌باشد. عمودمنصف وتر AB و عمودی که از نقطهٔ A بر AT اخراج شود در مرکز دایره متقاطعند. بنابراین راه ترسیم ذوزنقه چنین به‌دست می‌آید. پاره خطی به اندازهٔ ضلع AB رسم کرده و از نقطهٔ A، خط AT را چنان رسم می‌کنیم که با AB زاویهٔ α را تشکیل دهد. عمودمنصف AB و خط عمود بر AT از نقطهٔ A را رسم می‌کنیم نقطهٔ تلاقی این دو، مرکز دایرهٔ محیطی ذوزنقه می‌باشد. دایرهٔ محیطی را به مرکز O و شعاع OA رسم می‌کنیم و به مرکز B و شعاع BD کمانی رسم کرده تا محیط دایره را در نقطهٔ D قطع کند. از D خطی موازی AB می‌کشیم تا محیط دایره را در C قطع کند. ABCD ذوزنقهٔ مطلوب است. (شکل)



(الف)



(ب)

شرط امکان ترسیم آن است که دایرهٔ به مرکز B و شعاع BD دایرهٔ محیطی ذوزنقه را قطع کند و لذا باید:

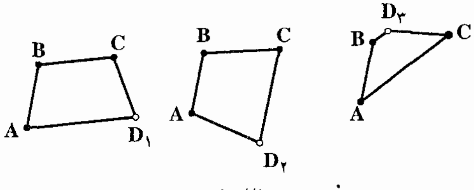
$$|R-BD| < \text{خط‌المرکزین} = OB = R < R+BD$$

اما نامساوی $OB = R < R+BD$ همواره محقق است و نامساوی $|R-BD| < R$ اگر $R-BD > 0$ باشد یعنی $R > BD$ باشد، $R-BD < R$ همواره درست است و اگر $R-BD < 0$ باشد، $R < BD$ نامساوی به‌صورت $BD - R < R$ درمی‌آید که در این صورت $BD < 2R$ می‌شود؛ یعنی شرط وجود نقطهٔ D آن است که BD طول قطر ذوزنقه، از قطر دایره کوچکتر باشد.

اگر دایرهٔ به مرکز B و شعاع BD دایرهٔ محیطی ذوزنقه را در دو نقطهٔ D و D′ قطع کند، ذوزنقهٔ ABCD′ جواب دیگری برای مسأله می‌باشد.

۱.۱.۲.۵.۲.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی

۱۹۷. الف) مسأله به اندازه‌ای مقدماتی است، که ممکن است شما از حل آن منصرف شوید، ولی آیا فکر کرده‌اید که مسأله سه جواب دارد (شکل (الف)). در چه حالتی مسأله دو جواب دارد و در چه حالتی یک جواب؟



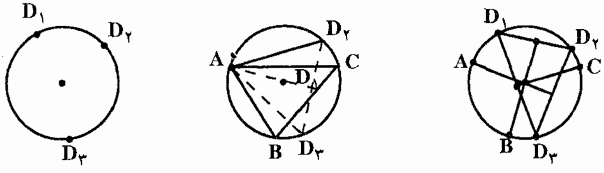
(الف)

ب) می‌دانیم که یک ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین را می‌توان در دایره‌ای محاط کرد. بنابراین هریک از گروه‌های چهارنقطه‌ای

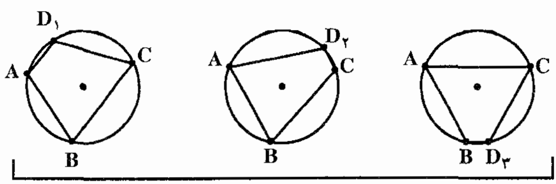
$$A\ ,\ B\ ,\ C\ ,\ D_1$$
$$A\ ,\ B\ ,\ C\ ,\ D_2$$
$$A\ ,\ B\ ,\ C\ ,\ D_3$$

بر محیط یک دایره قرار گرفته‌اند، ولی چون این سه دایره، سه نقطهٔ مشترک (A، B و C) دارند، بر هم منطبق‌اند. بنابراین نقطه‌های مورد نظر A، B و C بر محیط دایره‌ای که از D_1 ، D_2 و D_3 می‌گذرد، قرار دارند (شکل ب ـ ۱).

فرض کنید مسأله حل‌شده است؛ A، B و C نقطه‌های مورد نظر (شکل ب ـ ۲) و $ABCD_2$ و ABD_3C دو ذوزنقه، از سه ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین مطلوب، باشند.



(۱) (۲) (۳)



(۴)

(ب)

در این صورت اولاً ساقهای ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABCD_۲$ با هم برابرند:

$$AD_۲ = BC$$

ثانیاً قطرهای ذوزنقهٔ متساوی الساقین $ABD_۳C$ با هم برابرند:

$$AD_۳ = BC$$

و بنابراین خواهیم داشت:

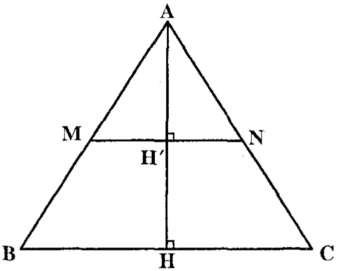
$$AD_۲ = AD_۳$$

از این‌جا نتیجه می‌شود که برای پیداکردن نقطهٔ A، باید عمودمنصف وتر $D_۲D_۳$ را رسم کرد و ادامه داد تا از مرکز دایره بگذرد و محیط دایره را قطع کند (شکل ب ـ۳)، به همین ترتیب با رسم عمودمنصفهای $D_۱D_۲$ و $D_۱D_۳$ بترتیب نقطه‌های B و C به‌دست می‌آید. در (شکل ب ـ۴)، به‌طور جداگانه، این سه ذوزنقه رسم شده است.
نقطه‌هایی که از برخورد دوم عمودمنصفها با دایره به‌دست می‌آید، منجر به جواب درست نمی‌شود. چرا؟

۱.۱.۲.۵.۲.۲. رسم ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با معلوم‌بودن: مثلث، مثلث و...

۱.۱.۲.۵.۲.۲.۱. مثلث متساوی‌الساقین،...

۱.۱.۲.۵.۲.۲.۱.۱. مثلث متساوی‌الساقین، مساحت



۱۹۸. مسأله را حل شده و ذوزنقهٔ MNBC محاط در مثلث متساوی‌الساقین ABC(AB=AC) را جواب مسأله می‌گیریم. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آن با MN را H' می‌نامیم.

با فرض $AH' = x$ و $AH = h = \sqrt{b^۲ - \frac{a^۲}{۴}}$

و $S_{ABC} = S_۱$، داریم:

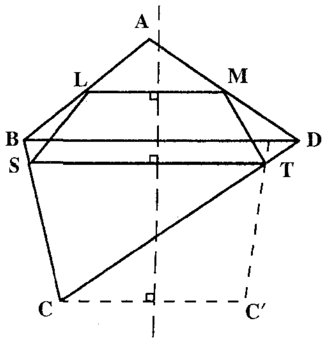
$$S_{AMN} = S_۱ - S \ , \ \frac{S_{AMN}}{S_{ABC}} = \frac{AH'}{AH} \Rightarrow \frac{S_۱ - S}{S_۱} = \frac{x}{\sqrt{b^۲ - \frac{a^۲}{۴}}}$$

$$\Rightarrow x = \sqrt{b^۲ - \frac{a^۲}{۴}}(\frac{S_۱ - S}{S_۱}) = \sqrt{b^۲ - \frac{a^۲}{۴}}(۱ - \frac{S}{S_۱}) = \text{مقدار معلوم}$$

بنابراین برای حل مسأله، ارتفاع AH از مثلث متساوی‌الساقین ABC(AB = AC) را رسم می‌کنیم و نقطهٔ H′ را روی آن چنان اختیار می‌کنیم که $AH' = \sqrt{b^{۲} - \frac{a^{۲}}{۴}(۱ - \frac{S}{S_{۱}})}$ باشد. از H′ خطی موازی ضلع BC رسم می‌کنیم تا دو ساق مثلث را در M و N قطع کند. ذوزنقهٔ MNCB جواب مسأله است.

۱.۱.۲.۵.۲.۳. رسم ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با معلوم‌بودن چندضلعی

۱.۱.۲.۵.۲.۳.۱. رسم ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با معلوم‌بودن چهارضلعی



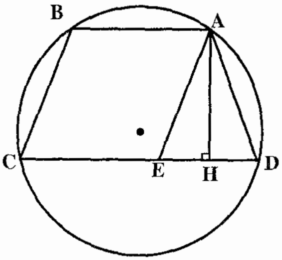
۱۹۹. چون ذوزنقه متساوی‌الساقین است خطی که از وسط یک قاعده بر قاعده‌ها عمود شود، محور تقارن است و دو رأس مثلاً S و T ذوزنقه نسبت به آن قرینه‌اند. از این ویژگی، ساختمان زیر نتیجه می‌شود:

از رأس معلوم M خطی به موازات قطر BD چهارضلعی رسم می‌کنیم تا ضلع AB را در L قطع کند. ML یک قاعدهٔ ذوزنقه است عمود منصف آن را می‌کشیم (محور تقارن است). قرینهٔ ضلع BC از چهارضلعی نسبت به این محور را رسم می‌کنیم. خط B′C′ به‌دست می‌آید که ضلع DC را در رأس T از ذوزنقه قطع می‌کند و قاعده TS را موازی BD رسم می‌نماییم. اگر B′C′ قطعه خط CD را بین C و D قطع کند مسأله جواب دارد. در حل بالا قاعدهٔ ذوزنقه را موازی BD گرفتیم. مسأله یک جواب دیگر نیز ممکن است داشته باشد و این درصورتی است که قاعدهٔ ذوزنقه را موازی با قطر AC اختیار نماییم.

۱.۱.۲.۵.۲.۴. رسم ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین با معلوم‌بودن: دایره، دایره و ...

۱.۱.۲.۵.۲.۴.۱. دایره، ضلع، ارتفاع

۲۰۰. مسأله را حل‌شده و ذوزنقهٔ ABCD را جواب مسأله می‌گیریم. از A خطی موازی BC رسم می‌کنیم تا قاعدهٔ بزرگ را در نقطهٔ E قطع کند $ED = CD - AB$ مقدار معلومی است. ارتفاع AH ازمثلث متساوی‌الساقین AED نیز معلوم است $(AE = BC = AD$

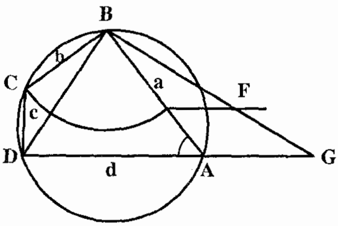


است). بنابراین مثلث متساوی‌الساقین AED با معلوم‌بودن اندازهٔ قاعده و ارتفاع وارد بر آن، قابل رسم است. از رسم این مثلث اندازهٔ AD = AE نیز مشخص می‌شود. بنابراین برای رسم ذوزنقه، وتر AD را در دایره رسم کرده مثلث متساوی‌الساقین AED را رسم می‌کنیم. (امتداد DH دایره را در نقطهٔ C قطع می‌کند.) از A خطی موازی CD رسم می‌کنیم تا دایره را در B قطع کند. ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین ABCD جواب مسأله است.

۳.۱.۱. رسم چهارضلعی محاطی

۱.۳.۱.۱. رسم چهارضلعی محاطی با معلوم‌بودن: نقطه؛ ضلع؛ ...

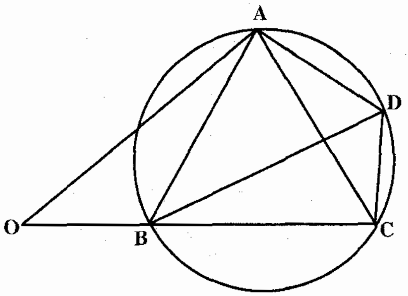
۱.۱.۳.۱.۱. ضلع



۲۰۱. راه اوّل. فرض کنیم چهارضلعی محاطی ABCD به ضلعهای $AB = a$، $BC = b$، $CD = c$ و $AD = d$ جواب مسأله باشد (شکل). می‌دانیم $\hat{A}+\hat{C}=180^\circ$، مثلث BCD را مطابق شکل به وضع BEF قرار می‌دهیم. چون $\hat{E}+\hat{A}=180^\circ$ پس $EF = c$ موازی با AD است و BF امتداد AD را در G قطع می‌کند و می‌نویسیم $\frac{EF}{AG}=\frac{BE}{BA}$ یا $\frac{c}{AG}=\frac{b}{a}$ از این تناسب AG جزء چهارم تناسب را با ترسیم می‌توان به‌دست آورد.

همچنین می نویسیم : $\frac{BE}{BA}=\frac{BF}{BG}$ یا $\frac{b}{a}=\frac{BF}{BG}$ یا $\frac{b}{a}=\frac{BD}{BG}$. بنابراین راه‌حل مسأله چنین است. DG را که برابر است با $AD + AG$ رسم می‌کنیم. مکان هندسی نقطه‌هایی را که از دو نقطهٔ D و G برابر $\frac{b}{a}$ باشد می‌کشیم و به مرکز A قوسی به شعاع a رسم

می‌کنیم تا مکان مذکور را در B قطع کند. پس از تعیین سه رأس D، A و B، تعیین رأس C با معلوم‌بودن b و c بسهولت انجام می‌گیرد.



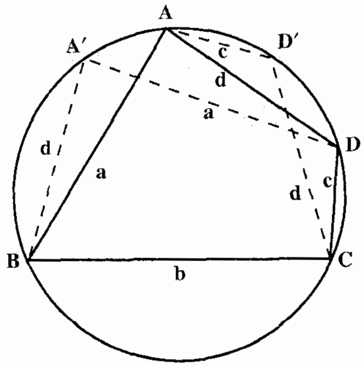
راه دوم. اگر b و d ضلعهای مقابل باشند روی یک خط مستقیم $CB = b$ و $BO = ac:d$ را جدا می‌کنیم، یک مکان A دایره‌ای به مرکز B و شعاع a است.
از طرفی داریم:

$$AO = ax:d$$

و یا

$$AO:AC = (ax:d):x = a:d$$

و درنتیجه مکان دوم A، دایرهٔ آپولونیوس است.
مثلث ACD بسادگی ساخته می‌شود(D در آن طرف AC که B نیست می‌باشد) و ABCD چهارضلعی مطلوب است.
دو دایره‌ای که A را مشخص می‌کنند در دو نقطه که نسبت به BC قرینه‌اند، متقاطعند، و درنتیجه دو جواب، نسبت به BC قرینهٔ یکدیگرند و به عبارت دیگر مسأله یک جواب دارد.
در مسأله فرض کردیم که b و d روبه‌رو باشند. اگر a و b یا c و d روبه رو باشند، دو جواب دیگر به‌دست می‌آوریم.
و اگر ABCD را رسم کرده باشیم، A′BCD و ABCD′ (دو جواب دیگر) را از روی آن و بسادگی می‌توانیم به‌دست آوریم. (شکل)



تبصرهٔ ۱. با توجه به ساختمان مسأله معلوم می شود که کمانهای $\overset{\frown}{BAD'}$ و $\overset{\frown}{CDA'}$ برابرند.
و داریم:

$$BD' = CA' = z$$

درنتیجه سه چهارضلعی : A′BCD و ABCD′ و ABCD سه قطر مختلف x، y و z را دارند.
قضیهٔ بطلمیوس را برای دو چهارضلعی ABCD′ و A′BCD به‌کار می‌بریم، داریم:

$$xz = ad + bc \quad \text{و} \quad yz = ab + cd$$

اگر طرفین این دو رابطه را بر هم تقسیم کنیم، خواهیم داشت :

$$x:y=(ad+bc):(ab+cd)$$

این فرمول با فرمول بطلمیوس x و y را برحسب ضلعها به‌دست می‌دهد.

تبصرهٔ ۲. مثلث BCD در دو چهارضلعی ABCD و A′BCD مشترک است و دو ضلع و زاویهٔ بین از دو مثلث ABD و A′BD مساوی‌اند. درنتیجه دو چهارضلعی ABCD و A′BCD متعادلند. به همین دلیل، دو چهارضلعی DABC و D′ABC و درنتیجه هر سه چهارضلعی متعادلند.

اگر R و S شعاع دایرهٔ محیطی و مساحت این چهارضلعیها باشد، طبق قضیهٔ بطلمیوس داریم :

$$xy=ac+bd$$

طرفین آن را در z ضرب می‌کنیم :

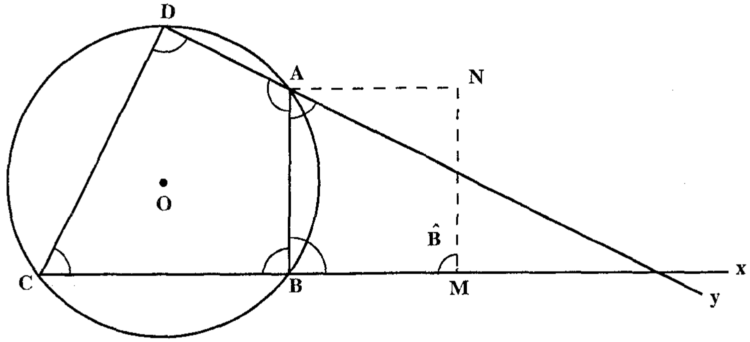
$$xyz=acz+bdz=۴RS_{A'CD}+۴RS_{A'CB}$$

و یا

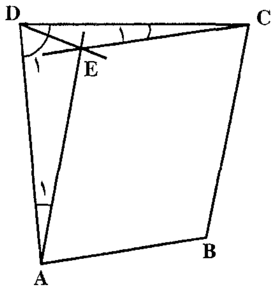
$$xyz=۴RS$$

۱.۱.۳.۱.۲. ضلع، زاویه

۲۰۲. راه اوّل. چون چهارضلعی محاطی است. پس اگر $\hat{A}$ و $\hat{B}$ دو زاویهٔ معلوم باشند، زاویه‌های $\hat{C}$ و $\hat{D}$ که مکملهای آنها می‌باشند، معلوم است و چهارضلعی با دو ضلع و چهار زاویه قابل رسم می‌باشد. بدین طریق که پاره‌خط $DC=l$ را به‌اندازه طول داده شده رسم نموده و از C و D دو خط چنان رسم می‌کنیم که با DC زاویه‌هایی برابر $\hat{D}$ و $\hat{C}$ بسازند و از نقطهٔ دلخواه M واقع بر CX خطی رسم می‌کنیم که با CX زاویه‌ای

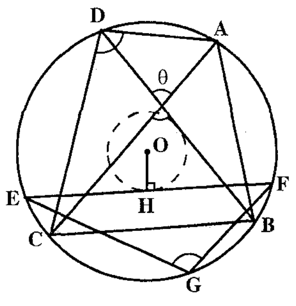


برابر $\hat{B}$ بسازد و بر آن نقطهٔ N را چنان تعیین می‌کنیم که $MN = l' = AB$ باشد، آن‌گاه پاره‌خط MN را به موازات خود و متکی بر DX آن‌قدر انتقال می‌دهیم تا نقطهٔ N بر DY قرار گیرد (به عبارت دیگر از N موازی CX رسم می نماییم) محل برخورد MN پس از انتقال با DY نقطهٔ A رأس سوم چهارضلعی و خطی که از A موازی MN رسم می‌شود CX را در B قطع می‌نماید و ABCD چهارضلعی خواسته شده است.



راه دوم. فرض می‌کنیم مسأله حل‌شده و چهارضلعی ABCD جواب مسأله باشد. چون زاویه‌های $\hat{D}$ و $\hat{C}$ معلوم است، پس مکمل آن زاویه‌ها یعنی $\hat{A}$ و $\hat{B}$ معلوم می‌شوند. از A و C دو خط به موازات BC و AB رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در E قطع کنند. چهارضلعی AECB متوازی‌الاضلاع است، پس $AB = EC$. چون B معلوم است، پس زاویه‌های این چهارضلعی معلوم می‌شوند. از آن‌جا چون تمام زاویهٔ $\hat{C}$ معلوم است، پس $\hat{C}_1$ معلوم می‌شود. مثلث DEC را با داده‌های DC و EC و زاویهٔ $\hat{C}$ رسم می‌کنیم و DE را به دست می‌آوریم و نیز مثلث ADE را با داده‌های DE و زاویه‌های $\hat{A}_1$ و $\hat{D}_1$ رسم می‌کنیم. درنتیجه AE به‌دست می‌آید. از C خطی رسم می‌کنیم تا با DC زاویهٔ $\hat{C}$ را بسازد. دایره‌ای به مرکز A و به شعاع AB رسم می‌کنیم تا خط رسم‌شده از C را در B قطع کند.

۱.۱.۳.۱.۳. قطر، زاویه

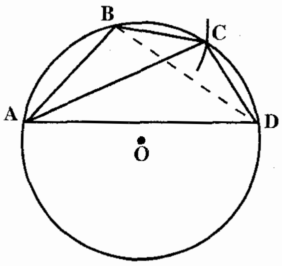


۲۰۳. روی قطر داده شدهٔ AC، کمان درخور زاویهٔ معلوم $\hat{D}$ را رسم می‌کنیم. در این صورت، دایرهٔ محیطی چهارضلعی نیز رسم شده است. قطر دیگر چهارضلعی یعنی BD وتر نظیر زاویهٔ A است. از آن‌جا از یک نقطهٔ اختیاری G از دایرهٔ محیطی چهارضلعی، زاویهٔ $E\hat{G}F$ را مساوی زاویهٔ معلوم $\hat{A}$ رسم می‌کنیم به مرکز

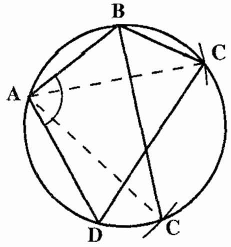
O و به شعاع OH دایره‌ای رسم می‌کنیم. اکنون باید خطی مماس بر دایرهٔ اخیر رسم کنیم، که با AC زاویه‌ای مساوی θ (زاویهٔ بین دو قطر) بسازد. این خط دایرهٔ محیطی چهارضلعی را در دو نقطهٔ B و D که دو رأس دیگر چهارضلعی محاطی خواسته شده‌اند، قطع می‌کند.

۴.۱.۳.۱.۱. ضلع، قطر، زاویه

۲۰۴. فرض می‌کنیم ضلعهای AB و AD و زاویهٔ A و قطر AC معلوم باشد. مثلث ABD را که دو ضلع و زاویهٔ بین آنها معلوم است رسم می‌کنیم و دایرهٔ محیطی آن را می‌کشیم (دایرهٔ O) به مرکز A و به شعاع AC (قطر چهارضلعی) دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ O را در C رأس دیگر چهارضلعی قطع کند. (شکل الف)
اگر دایرهٔ به مرکز A و به شعاع AC دایرهٔ محیطی چهارضلعی را در دو نقطه روی کمان $\overset{\frown}{BD}$ قطع کند، مسأله دو جواب دارد. (شکل ب)



(الف)



(ب)

۲.۳.۱.۱. رسم چهارضلعی محاطی با معلوم بودن: دایره یا شعاع دایره و ...

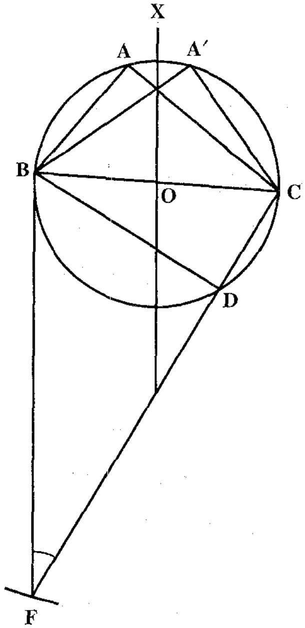
۱.۲.۳.۱.۱. رسم چهارضلعی محاطی با معلوم‌بودن: دایره، دایره و ...

۱.۱.۲.۳.۱.۱. دایره، نقطه

۲۰۵. مسأله را حل‌شده فرض کنید و از ویژگیهای به‌دست‌آمده، برای رسم شکل استفاده کنید.

۲.۱.۲.۳.۱.۱. دایره، ضلع

۲۰۷. راه اول. دو ضلع مجاور AB و AC و مجموع دو ضلع مجاور DC و BD معلوم است



(مجموع اخیر را l می‌نامیم). برای رسم چهارضلعی ملاحظه می‌کنیم که اگر مسأله را حل‌شده فرض کنیم و CD را به طولی مساوی BD امتداد دهیم، مثلث BDF متساوی‌الساقین می‌شود و بنابراین:

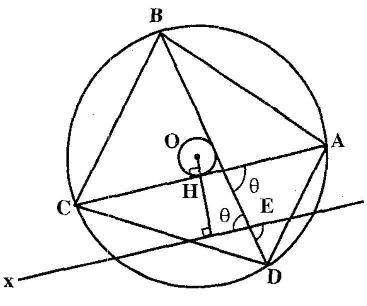
$D\hat{B}F = \hat{F} = \frac{B\hat{D}C}{۲}$ بنابراین از نقطهٔ اختیاری A وترهای AB و AC را رسم کرده BC را وصل می‌کنیم و بر قطعه خط CB کمان درخور زاویهٔ

$\hat{F} = \frac{B\hat{D}C}{۲} = \frac{۱۸۰^\circ - B\hat{A}C}{۲}$ را رسم می‌کنیم.

سپس چون $CF = l$ است، دایره‌ای به مرکز C و به شعاع l رسم می‌کنیم تا این کمان را در F قطع کند. FC دایره را در رأس مطلوب D قطع می‌کند.

راه دوم. دو ضلع متقابل AC و DB و مجموع دو ضلع متقابل AB و DC معلوم است. برای رسم چهارضلعی مسأله را حل شده انگاشته قطر Ox عمود بر BC را رسم می‌کنیم و قرینهٔ رأس A را نسبت به آن A′ می‌نامیم. طول ضلعهای چهارضلعی A′BDC متساوی با طول ضلعهای چهارضلعی ABDC است امّا به ترتیب دیگری قرار گرفته‌اند به‌طوری که دو ضلع معلوم A′B و BD مجاور یکدیگرند و دو ضلع A′C و CD نیز که مجموعشان معلوم است مجاور یکدیگر می‌باشند و مسأله به حالت اوّل برمی‌گردد.

۱.۱.۳.۲.۱.۳. دایره، قطر، زاویه

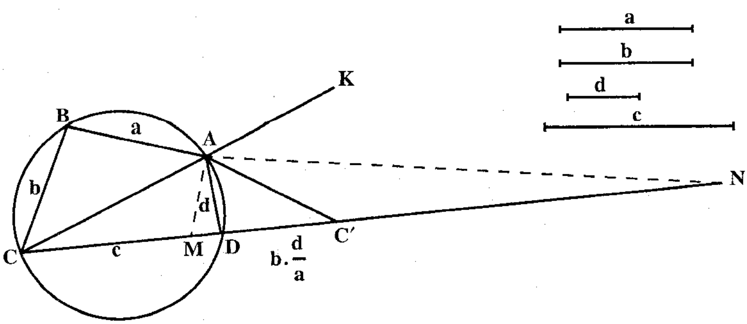


۲۰۸. مسأله را حل شده و دایرهٔ داده شده را (O,R) و چهارضلعی ABCD محاط در دایرهٔ O را جواب مسأله می‌گیریم. دو قطر معلوم $AC = d$ و $BD = d'$ وترهایی از دایرهٔ (O) می‌باشند. بنابراین فاصلهٔ آنها از مرکز دایره مشخص است؛ به عبارت دیگر این دو وتر

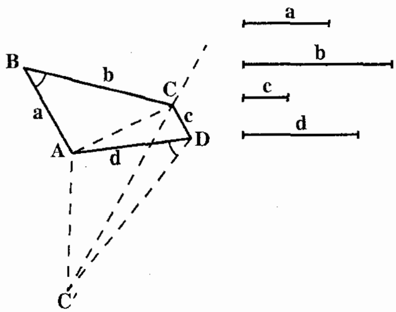
بر دو دایرهٔ به مرکز O و به شعاعهای معلوم مماسند. از آن جمله AC بر دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $\sqrt{R^{2}-\frac{d^{2}}{4}}$ مماس است. پس برای حل مسأله نقطهٔ B را روی دایره اختیار کرده به مرکز B و به شعاع $BD=d'$ کمانی رسم می‌کنیم تا دایرهٔ O را در نقطهٔ D قطع کند. از B به D وصل می‌کنیم. از نقطه‌ای اختیاری مانند E روی BD یا امتداد آن خط Ex را رسم می‌کنیم که با BD زاویه‌ای برابر θ (زاویهٔ بین دو قطر) بسازد. به مرکز O و به شعاع $OH=\sqrt{R^{2}-\frac{d^{2}}{4}}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. از O به خط Ex عمودی رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (OH و O) را در نقطهٔ H قطع کند. خط مماس رسم شده بر این دایره در نقطهٔ H، قطر AC از چهارضلعی خواسته شده است. از آن جا چهارضلعی مشخص می‌شود.

۴.۱.۲.۳.۱.۱. مسأله‌های ترکیبی

۲۰۹. الف) فرض کنید که چهارضلعی ABCD رسم شده است (شکل). تجانس مارپیچی به مرکز A، نسبت تجانس d/a و زاویهٔ دوران $B\hat{A}D$، مثلث ABC را به مثلث ADC' بدل می‌کند که در آن C' بر امتداد CD واقع است (زیرا $A\hat{D}C+A\hat{B}C=180^\circ$). در مثلث ACC' پاره خطهای $CD=c$، $DC'=bd/a$، $DA=d$ و نسبت ضلعهای $AC'=AC=d/a$ معلومند؛ لذا مثلث را می‌توان رسم کرد. [پاره خط CC' را جدا می‌کنیم، نیمسازهای زاویه‌های داخلی و خارجی مثلث ACC' در رأس A خط CC' را در نقطه‌های M و N قطع می‌کنند به‌طوری که $C'M/CM=C'N/CN=d/a$؛ این نقطه‌ها را می‌توان به‌دست آورد. چون $M\hat{A}N=90^\circ$، از آن‌جا نتیجه می‌شود که A نقطهٔ



برخورد دایرهٔ به قطر MN با دایرهٔ به مرکز D و شعاع d است.] با ترسیم مثلث ABC ضلعهای $AB = a$ و $CB = b$ روی پاره‌خط AC، چهارضلعی خواسته‌شده به دست می‌آید.

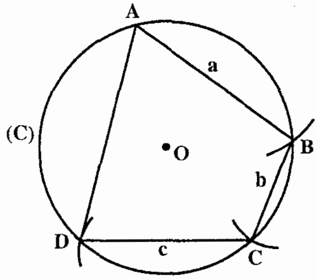


مسأله یا دقیقاً یک جواب دارد یا اصلاً جوابی ندارد.

ب) راه‌حل این قسمت شبیه قسمت (الف) است. فرض کنید چهارضلعی ABCD رسم شده است (شکل)؛ تجانس مارپیچی به مرکز A، نسبت تجانس d/a و زاویهٔ دوران $B\hat{A}D$ مثلث ABC را به مثلث ADC′ بدل می‌کند که در آن نقطهٔ C′ با توجه به تساویهای $C\hat{D}C' = \hat{B}+\hat{D}$ و $DC' = b.d/a$ معین می‌شود. با رسم مثلث CDC′ می‌توانیم A را از برخورد دایره‌ای به قطر پاره‌خط MN (که در آن M و N نقطه‌هایی از خط CC′ هستند چنان که $(C'M = CM) = C'N/CN = d/a$) و دایرهٔ به مرکز D و شعاع d به‌دست آوریم.

۱.۱.۳.۲.۲. شعاع دایرهٔ محیطی و ...

۱.۱.۳.۲.۲.۱. شعاع دایرهٔ محیطی، ضلع



۲۱۰. سه ضلع معلوم چهارضلعی را $AB = a$، $BC = b$ و $CD = d$ و دایرهٔ محیطی $C(O,R)$ فرض می‌کنیم. دایرهٔ به مرکز O و به شعاع R را رسم می‌کنیم. نقطه‌ای دلخواه مانند A روی این دایره اختیار می‌کنیم. به مرکز A و به شعاع $AB = a$ کمانی رسم می‌کنیم تا دایره را در نقطهٔ B قطع کند. به مرکز B و به شعاع $BC = b$ کمانی می‌زنیم تا دایره را در نقطهٔ C قطع کند. سپس به مرکز C و به شعاع $CD = c$ کمانی می‌زنیم تا دایره را در D رأس چهارم چهارضلعی ABCD قطع کند. از A به D وصل می‌کنیم. چهارضلعی مشخص می‌شود.

۱.۱.۳.۲.۲.۲. شعاع دایرهٔ محیطی، قطر، زاویه

۲۱۱. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و ABCD چهارضلعی محاطی مطلوب باشد. ازمرکز دایره عمودهای OE و OF را بترتیب بر قطرهای AC و BD فرود می‌آوریم. داریم :

$$FD = \frac{BD}{۲}\ ,\ EC = \frac{AC}{۲}$$

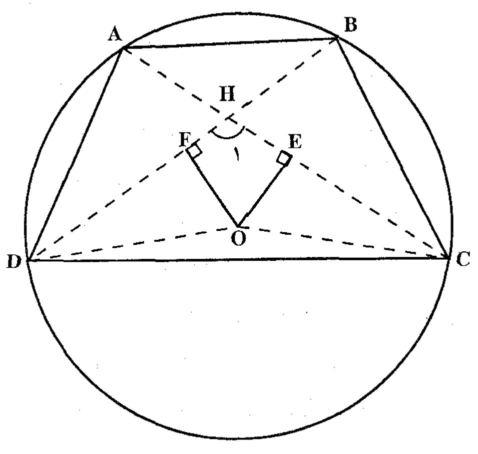
و

$$F\hat{O}E + \hat{H}_{۱} = ۱۸۰^{\circ}$$

و یا

$$F\hat{O}E = ۱۸۰^{\circ} - \hat{H}_{۱} \qquad (۱)$$

از مثلث قائم‌الزاویهٔ OCE طول OE را می‌توان به طریق ترسیم به‌دست آورد (با معلوم‌بودن $OC = R$ و $EC = \frac{AC}{۲}$) و ازمثلث قائم‌الزاویه OFD نیز می‌توان OF را به طریق ترسیم به‌دست آورد. رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد که چون $\hat{H}_{۱}$ معلوم است پس زاویه $F\hat{O}E$ معلوم می‌باشد. پس برای حل مسأله کافی است دایره‌ای به مرکز O و به شعاع R رسم نموده و زاویه‌ای برابر $۱۸۰^{\circ} - \hat{H}_{۱}$ در مرکز دایره رسم نموده و روی ضلعهای آن طولهایی برابر OE و OF جدا نموده و از نقطه‌های E و F عمودهایی بر OE و OF اخراج کرده تا دایره را بترتیب در نقطه‌های A، C، B و D قطع کنند چهار نقطه را به هم وصل می‌کنیم. چهارضلعی ABCD جواب مسأله است.

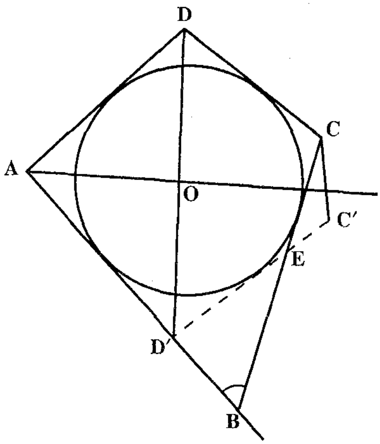


۴.۱.۱. رسم چهارضلعی محیطی

۱.۴.۱.۱. رسم چهارضلعی محیطی با معلوم‌بودن: نقطه؛ ضلع؛ ...

۱.۱.۴.۱.۱. ضلع، زاویه

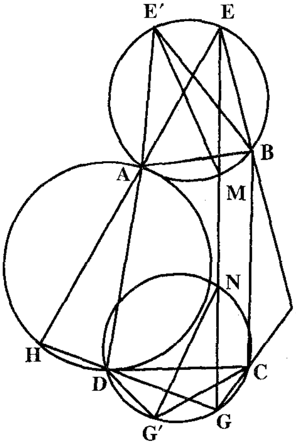
۲۱۲. چون AO نیمساز زاویهٔ $B\hat{A}D$ است، پس اگر قرینهٔ قسمت فوقانی شکل را نسبت به AO به‌دست آوریم D بر D' روی AB قرار می‌گیرد به‌قسمی که $AD' = AD$ باشد و DC به وضع $D'C'$ درمی‌آید که بر دایره مماس است. مثلث $BD'E$ را می‌توان رسم کرد زیرا : $BD' = b - d$ و اندازهٔ زاویه‌های $\hat{B}$ و $B\hat{D'}E = 180^\circ - \hat{D}$ معلوم است. پس از رسم مثلث، دایرهٔ محاطی خارجی آن را که در زاویهٔ $\hat{B}$ واقع است رسم کرده روی BD' طول $BA = b$ را جدا می‌کنیم و روی دومین مماس رسم شده از A بر دایره، $AD = d$ را جدا کرده از D مماس دیگری بر دایره رسم می‌نماییم تا امتداد BE را در C قطع کند.

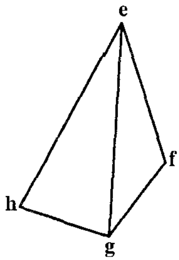


۲.۴.۱.۱. رسم چهارضلعی محیطی با معلوم‌بودن چهارضلعی

۱.۲.۴.۱.۱. دو چهارضلعی

۲۱۳. می‌خواهیم بر چهارضلعی مفروض ABCD چهارضلعی EFGH را چنان محیط کنیم که متشابه با چهارضلعی efgh باشد. کمان درخورهای زاویه‌های $h\hat{e}f$ ، $g\hat{h}e$ و $h\hat{g}f$ را بترتیب روی AB، AD و DC می‌سازیم. کمان $\overset{\frown}{AB}$ را به دو قسمت چنان تقسیم می‌کنیم که $A\hat{E'}M = h\hat{e}g$ و $M\hat{E'}B = g\hat{e}f$ شود. همچنین کمان $\overset{\frown}{DC}$ را به دو قسمت چنان تقسیم می‌کنیم که $D\hat{G}N = h\hat{g}e$ و $N\hat{G}F = e\hat{g}f$ باشد. نقطه‌های M و N را به هم وصل

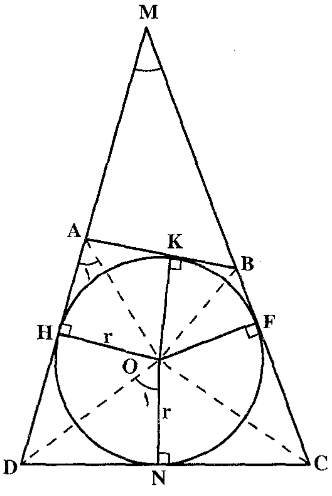




می‌کنیم. خط MN کمان $\overset{\frown}{AE'B}$ را در E و کمان $\overset{\frown}{DG'C}$ را در G قطع می‌کند. از برخورد EA و GD، رأس H و از برخورد EB و GC، رأس F به‌دست می‌آید و چهارضلعی EFGH با چهارضلعی efgh متشابه است زیرا، اوّلاً زاویه‌های آنها نظیر به نظیر برابرند، ثانیاً مثلثهای EGH و EGF با مثلثهای egh و egf متشابه‌اند.

۱.۱.۴.۳. رسم چهارضلعی محیطی با معلوم بودن دایره یا شعاع دایره و ...

۱.۱.۴.۳.۱. رسم چهارضلعی محیطی با معلوم بودن شعاع دایرهٔ محاطی و ...



۱.۱.۴.۳.۱.۱. شعاع دایرهٔ محاطی، ضلع، زاویه

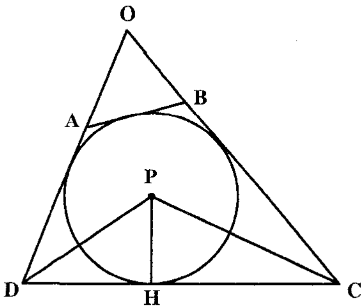
۲۱۴. چون $\hat{A}$ و $\hat{B}$ را داریم، پس مکملهای آن را داریم، بنابراین زاویهٔ $\hat{M}$ معلوم است. A را به O مرکز دایرهٔ محاطی وصل می‌کنیم. در مثلث AOH، $OH = r$ و $\hat{H} = ۹۰^\circ$ و $\hat{A}_۱ = \frac{\hat{A}}{۲}$ است بنابراین طول AH به‌دست می‌آید. همچنین در مثلث ODN، $ON = r$ و $\hat{O}_۱ = ۴۵^\circ + \frac{\hat{M}}{۴}$ و

$\hat{N}=90^\circ$ است. پس مثلث ODN قابل رسم است و از آن‌جا طول DN معلوم است. پس طول DH که مساوی DN است معلوم می‌باشد.

اکنون برای حل مسأله، زاویه‌ای مساوی زاویهٔ معلوم $\hat{M}$ رسم می‌کنیم و دایره‌ای به شعاع r در آن محاط می‌کنیم. سپس OH را بر یک ضلع زاویه عمود رسم می‌کنیم و چون AH را داریم، نقطهٔ A را به‌دست می‌آوریم و مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا ضلع دیگر زاویه را در B قطع کند. سپس در امتداد AH نقطهٔ D را به فاصلهٔ طول معلوم DN جدا کرده، از D مماسی بر دایره رسم می‌کنیم تا ضلع دیگر زاویه را در C قطع کند. چهارضلعی ABCD جواب مسأله است.

۱.۱.۴.۳.۱.۲. شعاع دایرهٔ محاطی، محیط، زاویه

۲۱۶. فرض می‌کنیم ABCD چهارضلعی خواسته شده و از آن $\hat{A}$ و $\hat{B}$ معلوم باشد.



اگر O محل تقاطع AD و BC باشد زاویهٔ $\hat{O}$ معلوم است و چون شعاع معلوم است می‌توانیم به ضلعهای این زاویه دایره‌ای با شعاع معلوم مماس کنیم ؛ از طرفی چون زاویهٔ $\hat{A}$ نیز معلوم است معنی آن، این است که امتداد مماس AB بر دایرهٔ معلوم در دست است پس می‌توانیم مماس AB را بر دایره رسم کنیم و AB یکی از ضلعها است.

در چهارضلعی محیطی مجموع دو ضلع روبه‌رو، برابر مجموع دو ضلع روبه روی دیگر است و چون محیط معلوم است، پس نصف آن یعنی $AB+CD$ معلوم است و چون AB رسم شد، پس CD معلوم است.

در مثلث PDC زاویهٔ $D\hat{P}C=90^\circ+\frac{\hat{O}}{2}$ و درنتیجه معلوم است :

$PH=r$ (چرا؟)

پس آن مثلث (CPD) بسادگی قابل رسم است، با رسم آن، زاویه $P\hat{D}C$ و یا دو برابر آن $A\hat{D}C$ معلوم می‌شود، و به‌عبارت دیگر امتداد مماس بر یک دایره معلوم است و مماس یعنی CD بسادگی رسم می‌شود.

۱.۱.۵. رسم چهارضلعی محاطی، محیطی

۱.۱.۵.۱. رسم چهارضلعی محاطی، محیطی با معلوم‌بودن: نقطه؛ ضلع؛ ...

۱.۱.۵.۱.۱. نقطه

۲۱۷. با استفاده از این ویژگی که در هر چهارضلعی محدب محیطی، مجموع دو ضلع روبه‌رو، مساوی است با مجموع دو ضلع روبه‌روی دیگر، مسأله را به رسم مثلثی تبدیل کنید که از آن اندازهٔ یک ضلع، تفاضل دو ضلع دیگر و اندازه زاویهٔ روبه‌رو به ضلع داده شده، معلوم است.

۱.۲. رسم پنج‌ضلعی

۱.۲.۱. رسم پنج‌ضلعی با معلوم‌بودن: نقطه؛ ضلع؛...

۱.۲.۱.۱. نقطه

۲۱۸. راه اول. نقطهٔ دلخواه Q را روی صفحه در نظر می‌گیریم. چون نقطه‌های A، B، C، D و E وسط پاره خطهای راست XY، YZ، ZU، UV و VW هستند، بنابراین:

$$\overrightarrow{QA}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{QX}+\overrightarrow{QY}),\ \ \overrightarrow{QB}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{QY}+\overrightarrow{QZ}),\overrightarrow{QC}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{QZ}+\overrightarrow{QU}),$$

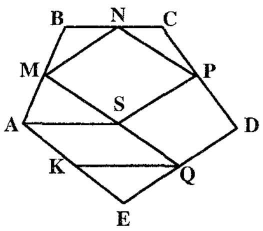
$$\overrightarrow{QD}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{QU}+\overrightarrow{QV}),\ \ \overrightarrow{QE}=\frac{۱}{۲}(\overrightarrow{QV}+\overrightarrow{QX})$$

نقطه‌های A، B، C، D و E و بنابراین، بردارهای $\overrightarrow{QA}$، $\overrightarrow{QB}$، $\overrightarrow{QC}$، $\overrightarrow{QD}$ و $\overrightarrow{QE}$، معلومند؛ و باید بردارهای مجهول $\overrightarrow{QX}$، $\overrightarrow{QY}$، $\overrightarrow{QZ}$، $\overrightarrow{QU}$ و $\overrightarrow{QV}$ را پیدا کرد. به این ترتیب، برابریهای فوق، پنج معادلهٔ پنج مجهولی تشکیل می‌دهند که برای حل آن، بهتر است برابریهای دوم و چهارم را تغییر علامت بدهیم و، سپس، پنج معادله را با هم جمع کنیم، به‌دست می‌آید:

$$\overrightarrow{QX}=\overrightarrow{QA}-\overrightarrow{QB}+\overrightarrow{QC}-\overrightarrow{QD}+\overrightarrow{QE}$$

که به کمک آن می‌توان بسادگی بردار $\overrightarrow{QX}$ را ساخت. به این ترتیب، رأس X از پنج‌ضلعی به‌دست می‌آید. رأسهای دیگر پنج‌ضلعی هم، با توجه به این که A، B، C، D و E در وسط ضلعها قرار دارند، به‌سادگی پیدا می‌شوند.

راه دوم. میانگاه‌های ضلعهای پنج‌ضلعی را با M، N، P، Q و K نشان می‌دهیم. نقطهٔ دلخواه A را اختیار کرده و ترکیب تقارنهای مرکزی $Z_K \circ Z_Q \circ Z_P \circ Z_N \circ Z_M$ را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. این ترکیب نسبت به نقطهٔ A چه کاری انجام می‌دهد؟ اگر این ترکیب را با δ نشان دهیم آن‌گاه $\delta(A) = A$ خواهد بود (شکل). اگر $Z_P \circ Z_N \circ Z_M(A) = Z_s(A)$ فرض شود آن‌گاه $Z_K \circ Z_Q \circ Z_S(A) = A$ خواهد بود. متوازی‌الاضلاعهای MNPS و SQKA را رسم می‌کنیم و پنج‌ضلعی مطلوب بدین ترتیب به‌دست می‌آید. دو مثال از کاربرد تقارن محوری را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم.



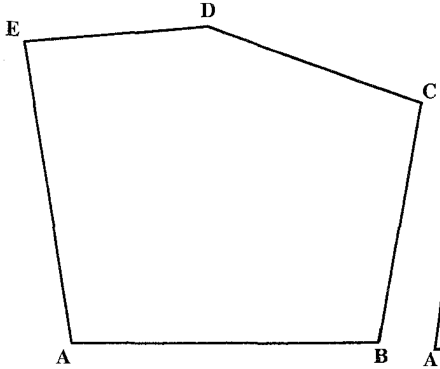
۱.۲.۱.۲. ضلع

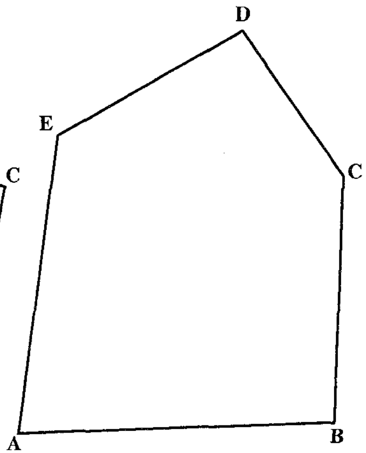
۲۱۹. اوّلاً، خط منکسر EABC را با مشخصات زیر رسم می‌کنیم:

$(EA = 5cm \ , \ AB = 5cm \ , \ BC = 4cm)$

البته طول EC باید کوچکتر از ۶ سانتیمتر باشد. حال مثلث EDC را رسم می‌کنیم، به طوری که $DE = CD = 3cm$ است.

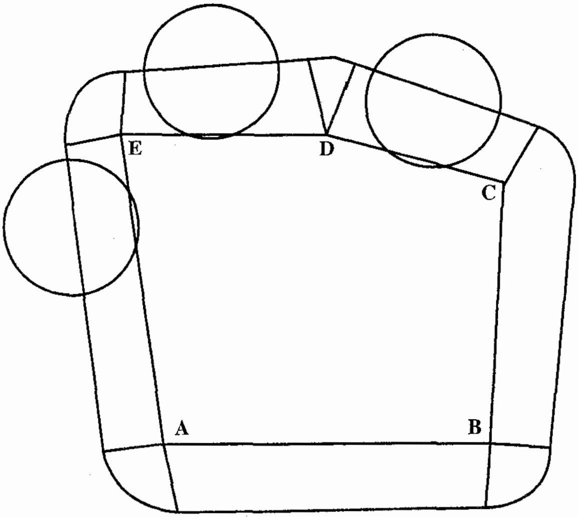
یادآوری می‌کنیم، که پنج‌ضلعیهای گوناگون زیادی با محیطهای یکسان خواهیم داشت:





ثانیاً، برای تعیین مسیر چرخ نیز به موازات هر ضلع از پنج‌ضلعی و به فاصلهٔ ۱ سانتیمتر از آنها، در خارج شکل، رسم می‌کنیم. پنج مستطیل به طولهای ۵، ۵، ۴، ۳ و ۳ سانتیمتر، و عرض ۱ سانتیمتر حاصل می‌شود. این مستطیلها دو به دو با هم زاویه تشکیل می‌دهند. شمار این زاویه‌ها ۵ تا است. رأس هریک از این زاویه‌ها را مرکز قرار می‌دهیم، و کمانی به شعاع ۱ سانتیمتر رسم می‌کنیم. طول مجموع این پنج کمان برابر یک دایرهٔ کامل می‌شود. پس طول مسیر مرکز چرخ در دور پنج‌ضلعی چنین محاسبه می‌شود :

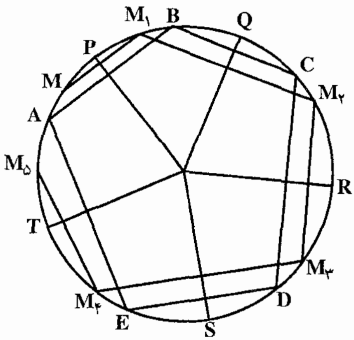
$$۵+۴+۳+۳+۵+۲\pi=۲۶/۲۸\text{cm}$$



۱.۲.۲. رسم پنج‌ضلعی با معلوم‌بودن: دایره، دایره و ...

۱.۱.۲.۲. دایره، نقطه

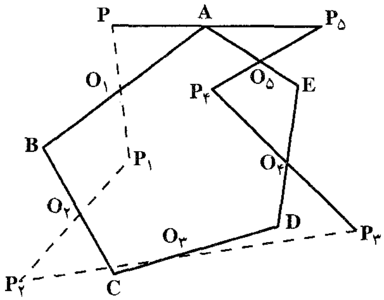
۲۲۰. اگر M نقطه‌ای از دایره باشد، نقطهٔ M_1 قرینهٔ M نسبت به خط OP و سپس M_2 قرینهٔ M_1 نسبت به خط OQ و سپس M_3 قرینهٔ M_2 نسبت به OR را می‌یابیم. بنابر تساوی کمانهای قرینه، داریم :



$$\overset{\frown}{AM} = \overset{\frown}{BM_1} = \overset{\frown}{CM_2} = \overset{\frown}{DM_3} = \overset{\frown}{EM_4} = \overset{\frown}{AM_5}$$

لذا نقطهٔ A بر وسط کمان $\overset{\frown}{MM_5}$ قرار دارد و سپس سایر رأسها بسهولت پیدا می‌شوند. حل مسأله در مورد عموم چندضلعیهایی که عده ضلعهایشان فرد باشد به همین قسم است.

۲۲۱. فرض کنیم ABCDE پنج‌ضلعی مطلوب باشد، قرینهٔ A نسبت به نقطهٔ O_1 عبارت است از B و قرینهٔ B نسبت به نقطهٔ O_2 عبارت است از C و آخرین نقطهٔ قرینه، باز همان A می‌باشد. حال نقطهٔ اختیاری P را فرض کرده همین عمل را نسبت به آن اجرا می‌کنیم یعنی قرینه‌های متوالی P_1، P_2، P_3، P_4 و P_5 را به‌طور متوالی نسبت به نقطه‌های O_1، O_2، O_3، O_4 و O_5 به‌دست می‌آوریم بنابر تساوی قطعه خطهای متقارن داریم:



$$AP = BP_1 = CP_2 = DP_3 = EP_4 = AP_5$$

به‌علاوه چون دو قطعه خط قرینه متوازی و مختلف‌الجهت هستند پس BP_1 و DP_3 و AP_5 متوازی و مختلف‌الجهت با AP می‌باشند لذا رأس A بر وسط PP_5 قرار دارد. بنابراین می‌توان بسهولت A و از روی آن سایر رأسها را به‌دست آورد. ساختمان فوق در صورتی صحیح است که عدهٔ ضلعهای چندضلعی فرد باشد در حالت دیگر یعنی وقتی که عدهٔ ضلعها زوج باشد مثلاً در مورد چهارضلعی، AP و AP_4 که مساوی و متحدالجهت هستند بر یکدیگر منطبق می‌شوند. بنابراین اگر P و P_4 منطبق شوند مسأله مبهم است و اگر منطبق نشوند محال است. در حالت چهارضلعی شکل $O_1O_2O_3A_4$ متوازی‌الاضلاع است.

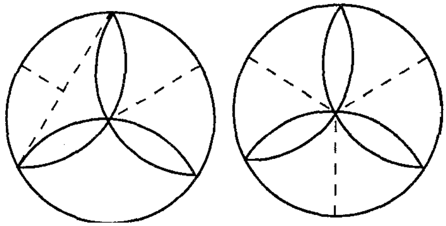
۲.۲.۲.۱. دایره، خط

۲۲۲. مسأله را حل‌شده و پنج‌ضلعی ABCDE محاط در دایرهٔ (O) را که ضلعها AB، BC، CD، DE و EA از آن با خطهای Δ_1، Δ_2، Δ_3، Δ_4 و Δ_5 موازی‌اند جواب مسأله می‌گیریم ...

۳.۱. رسم شش‌ضلعی

۲۲۳. شش‌ضلعی و مستطیل از دایره!

برای ساختن شش‌ضلعی منتظم، و همچنین مستطیل، دست‌کم باید سه بار خط مستقیم ببریم. محل برشها در شکلها نشان داده شده‌اند. با این یادآوری، که از شکل (الف) شش‌ضلعی، و از شکل (ب) مستطیل حاصل می‌شود.



(ب) (الف)

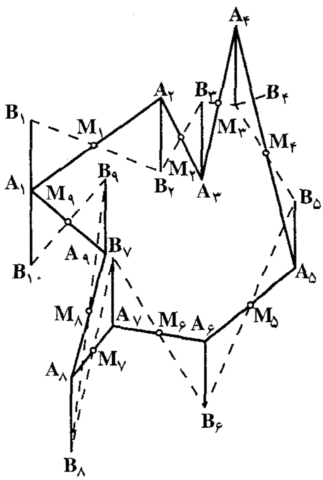
۲۲۴. مجانس شش‌ضلعی داده شده نسبت به یک نقطهٔ ثابت مانند S به‌عنوان مرکز تجانس و با نسبت تجانس $\frac{1}{2}$ را به‌دست می‌آوریم.

۴.۱. رسم nضلعی

۱.۴.۱.رسم nضلعی با معلوم‌بودن: نقطه، ضلع، ...

۱.۱.۴.۱. نقطه

۲۲۵. **راه‌حل اوّل.** فرض کنید مسأله حل‌شده است و $A_1A_2\cdots A_9$ نه‌ضلعی خواسته شده، و نقطه‌های M_1، M_2، ...، M_9 وسطهای ضلعهای آن باشند (شکل الف ؛ در این جا $n = 9$ گرفته شده است). گیریم B_1 نقطه‌ای از صفحه و B_2 نقطهٔ حاصل از یک نیمدور آن حول M_1 باشد، و B_3 از یک نیمدور B_2 حول M_2 به‌دست آمده باشد. این عمل را به همین نحو ادامه می‌دهیم تا بالاخره B_{10} از یک نیمدور B_9 حول M_9 به‌دست آید. چون هریک از پاره خطهای A_2B_2 ، A_3B_3 ، ...، A_1B_{10} از یک نیمدور پاره‌خط قبل از خود

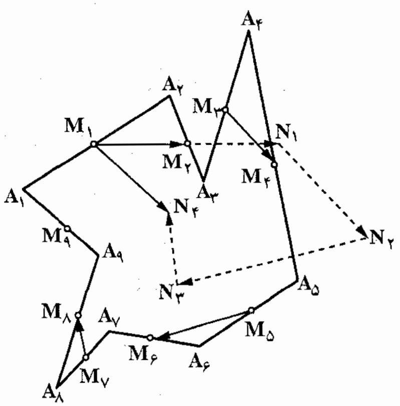


به‌دست می‌آید، پس همگی موازی، و دارای یک طول هستند، و هرکدام جهتی مخالف جهت پاره‌خط قبل از خود را دارند. بنابراین A_1B_1 و A_1B_{10} مساوی و موازی و مختلف الجهت هستند، که تعبیر آن این است که نقطهٔ A_1 وسط پاره‌خط B_1B_{10} است. چون با شروع از یک نقطهٔ دلخواه B_1 می‌توانیم B_{10} را بیابیم، پس A_1 را نیز می‌توانیم مشخص کنیم. سپس رأسهای باقیماندهٔ A_2، A_3، ...، A_9 از نیمدورهای متوالی حول M_1، M_2، ...، M_9 پیدا می‌شوند.

مسأله همیشه یک جواب یکتا دارد؛ امّا به محدب‌بودن نه‌ضلعی حاصل نیازی نیست و می‌تواند خودش را قطع کند.

اگر n زوج باشد و اگر همان استدلال قبلی را تکرار، یعنی، فرض کنیم مسأله حل‌شده است، می‌بینیم که A_1B_{n+1} و A_1B_1 مساوی، موازی و در یک جهت هستند، یعنی بر هم منطبق می‌شوند. پس اگر B_{n+1} بر B_1 منطبق نشود، مسأله جواب ندارد. اگر B_{n+1} بر B_1 منطبق شود، نقطهٔ A_1 هر طور انتخاب شده باشد A_1B_1 بر A_1B_{n+1} منطبق خواهد شد. در این حالت بینهایت جواب وجود دارد؛ هر نقطهٔ صفحه می‌تواند رأس A_1 اختیار شود.

راه‌حل دوم. رأس A_1 از n ضلعی مطلوب توسط مجموع نیمدورهایی حول نقطه‌های M_1، M_2، ...، M_n روی خودش برده می‌شود، یعنی A_1 یک نقطهٔ ثابت مجموع این n نیمدور است (شکل ب، که در آن، حالت $n=9$ نشان داده شده است). اگر n زوج بود، مجموع n نیمدور یک انتقال می‌شد. چون انتقال نقطهٔ ثابت ندارد، نتیجه می‌شود که به ازای n زوج، مسأله در حالت کلی جواب ندارد. تنها استثنا، حالتی است که مجموع n



نیمدور، یک تبدیل همانی (یک انتقال با طول صفر) باشد، یعنی تمام نقطه‌های صفحه را ثابت نگه دارد؛ مسأله، در این حالت بینهایت جواب دارد؛ در این حالت هر نقطهٔ صفحه می‌تواند رأس A_1 باشد. اگر n فرد (مثلاً $n=9$) باشد مجموع n نیمدور یک نیمدور خواهد بود. چون یک نیمدور دقیقاً یک نقطهٔ ثابت به نام مرکز تقارن دارد، از این جا

نتیجه می‌شود که رأس A_1 از نه‌ضلعی خواسته شده باید بر مرکز تقارن منطبق باشد ؛ در این حالت مسأله تنها یک جواب دارد.

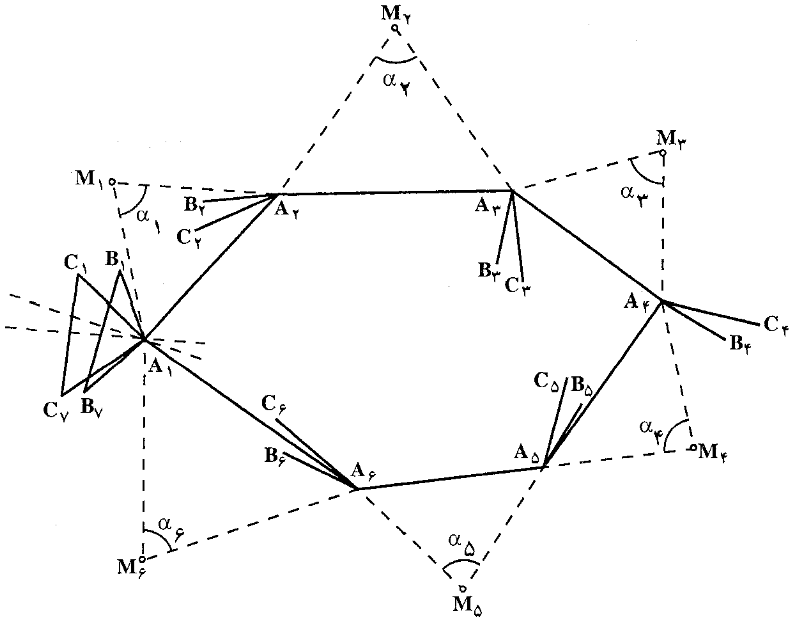
اکنون نشان می‌دهیم که چگونه باید مرکز تقارن مجموع نه نیمدور حول نقطه‌های M_1 ، M_2 ، ...، M_9 را، پیدا کنیم. مجموع دو نیمدور حول M_1 و M_2 انتقالی است در راستای M_1M_2 با طولی برابر $2M_1M_2$ ؛ مجموع دو نیمدور حول M_3 و M_4 انتقالی است در راستای M_3M_4 به طولی برابر $2M_3M_4$ ، و همین طور الی آخر. بنابراین مجموع هشت نیمدور اوّل بترتیب مساوی مجموع چهار انتقال در راستاهای M_1M_2 (یا M_1N_1) ، $M_3M_4(\|N_1N_2)$ ، $M_5M_6(\|N_2N_3)$ و $M_7M_8(\|N_3N_4)$ و بترتیب با طولهایی برابر $2M_1M_2(=M_1N_1)$ ، $2M_3M_4(=N_1N_2)$ ، $2M_5M_6(=N_2N_3)$ و $2M_7M_8(=N_3N_4)$ خواهد بود (شکل ب) که انتقالی است در راستای M_1N_4 و به طولی برابر M_1N_4 . نقطهٔ A_1 مرکز تقارن نیمدوری است که مجموع یک انتقال در راستای M_1N_4 و به طولی برابر M_1N_4 است با نیمدوری حول نقطهٔ M_9 . برای یافتن A_1 کافی است یک پاره خط M_9A_1 را با شروع از M_9 ، موازی N_4M_1 و به طول $M_1N_4/2$ رسم کنیم، با یافتن A_1 ، دیگر مشکلی برای یافتن بقیهٔ رأسهای نه‌ضلعی نداریم.

۲.۱.۴.۱. نقطه، زاویه

۲۲۶. راه حل اوّل. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و $A_1A_2\cdots A_n$ ، n ضلعی خواسته شده باشد (شکل، با $n=6$). نقطهٔ دلخواه B_1 را در صفحه انتخاب می‌کنیم. یک رشته دوران نخست حول M_1 به زاویهٔ α_1 ، سپس حول M_2 به زاویهٔ α_2 ، ...، و بالاخره حول M_n به زاویهٔ α_n ، پاره‌خط A_1B_1 را نخست به پاره‌خط A_2B_2 ، سپس A_2B_2 را به پاره‌خط A_3B_3 ... و بالاخره A_nB_n را به A_1B_{n+1} بدل می‌کند. همهٔ این پاره‌خطها با هم مساوی‌اند و از این رو A_1 ، رأس nضلعی، ازنقطه‌های B_1 و B_{n+1} (که B_{n+1} از این n دوران B_1 به‌دست‌آمده) همفاصله است. حال نقطهٔ دوم C_1 را در صفحه انتخاب می‌کنیم، و مرتباً آن را حول نقطه‌های M_1 ، M_2 ، ...، M_n به زاویه‌های α_1 ، α_2 ، ...، α_n دوران می‌دهیم. بدین ترتیب یک جفت نقطهٔ دوم C_1 و C_{n+1} متساوی‌الفاصله از A_1 به‌دست می‌آوریم. پس رأس A_3 از n ضلعی، می‌تواند محل تقاطع عمودمنصفهای پاره خطهای B_1B_{n+1} و C_1C_{n+1} باشد. پس از یافتن A_1 ، A_2 را می‌توان از دوران

A_1 حول M_1 به زاویهٔ α_1 به‌دست آورد؛ A_3 را از دوران A_2 حول M_2 به زاویهٔ α_2، ... و همین‌طور الی آخر. اگر عمودمنصفهای B_1B_{n+1} و C_1C_{n+1} یکدیگر را قطع کنند (یعنی پاره‌خطهای B_1B_{n+1} و C_1C_{n+1} موازی نباشند) مسأله یک جواب یکتا دارد. اگر این عمودمنصفها موازی باشند، مسأله جواب ندارد، و اگر بر هم منطبق باشند، مسأله بینهایت جواب دارد.

چندضلعی جواب این مسأله لزومی ندارد که محدب باشد و حتی ممکن است خودش را قطع کند.



راه حل دوم. رأس A_1 نقطهٔ ثابتی برای مجموع n دوران به مرکزهای M_1، M_2، ...، M_n به زاویه‌های α_1، α_2، ...، α_n است (این دورانها A_1 را به A_2، A_2 را به A_3، A_3 را به A_4، ...، و بالاخره A_n را به A_1 می‌برند). امّا مجموع n دوران به زاویه‌های α_1، α_2، ...، α_n دورانی است به زاویهٔ $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ به شرط این که $\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$ مضربی از 360° نباشد. در غیر این صورت این n دوران یک انتقال خواهد بود (این نتیجه‌گیری از قضیهٔ مجموع دو دوران حاصل می‌شود). تنها نقطهٔ ثابت یک دوران مرکز دوران است. پس اگر

$\alpha_1+\alpha_2+\cdots+\alpha_n$

مضربی از 360° نباشد، آن‌گاه A_1 به‌صورت مرکز دوران حاصل ازمجموع دورانهای حول نقطه‌های M_1، M_2، ...، M_n به زاویه‌های α_1، α_2، ...، α_n پیدا خواهد شد.
در عمل برای پیداکردن A_1 می‌توان روش مذکور برای یافتن مرکز مجموع دو دوران را به‌طور مکرر به‌کار برد.
انتقال نقطهٔ ثابت ندارد. پس اگر

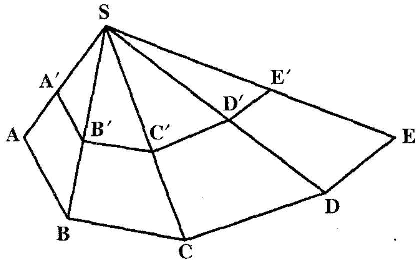
$$\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$$

مضربی از 360° باشد، مسأله در حالت کلی جواب ندارد. ولی در حالت خاص وقتی مجموع دورانها حول نقطه‌های M_1، M_2، ...، M_n به زاویه‌های α_1، α_2، ...، α_n (که در آن مجموع $\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n$ مضربی از 360° است) یک تبدیل همانی باشد، مسأله بینهایت جواب خواهد داشت (هر نقطهٔ صفحه می‌تواند رأس A_1 انتخاب شود).
همچنین اگر $\alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 180^\circ$، مسأله وقتی n فرد باشد یک جواب یکتا دارد، و وقتی زوج باشد یا جواب ندارد یا بینهایت جواب دارد.

۱.۴.۲. رسم n ضلعی با معلوم‌بودن: چندضلعی، چندضلعی و ...

۱.۴.۲.۱. چندضلعی، نقطه

۲۲۷. روی خطهای SA، SB، SC، ... (شکل) که رأسهای A، B، C، ... از چندضلعی مفروض را به مرکز تجانس مفروض S وصل می‌کنند، نقطه‌های A'، B'، C' و ... را طوری تعیین می‌کنیم که



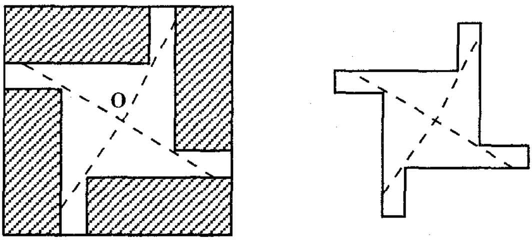
$$\frac{SA'}{SA} = \frac{SB'}{SB} = \frac{SC'}{SC} = \cdots = k$$

چندضلعی ... $A'B'C'D'$ که به این ترتیب رسم می‌شود شرطهای مسأله را داراست.
درواقع، مثلثهای SAB و $SA'B'$ متشابه‌اند، پس $A'B'$ با AB موازی است و

$$\frac{A'B'}{AB} = \frac{SA'}{SA} = k$$

و به همین ترتیب این رابطه برای جفتهای دیگر ضلعهای دو چندضلعی نیز برقرار است. چون جفتهای متناظر دو چندضلعی با هم موازی‌اند، زاویه‌های متناظر با هم برابرند. پس دو چندضلعی متشابه‌اند و به‌طور متشابه قرار گرفته‌اند و نسبت تشابه آنها برابر مقدار مفروض k است و روشن است که همهٔ خطهای واصل بین رأسهای متناظر دو چندضلعی از نقطهٔ S می‌گذرند.

۲۲۸. یکی از جوابهای ممکن، در شکل داده شده است. با مختصری تغییر در این شکل می‌توان جواب قسمت دوم مسأله را به‌دست آورد (شکل را ببینید).



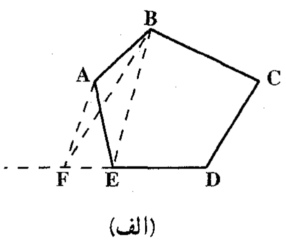
۲.۲.۴.۱. چندضلعی، مربع یا چندضلعی دیگر

۲۲۹. اگر S مساحت چندضلعی معلوم ... ABCDE و S′ مساحت مربع داده شده باشد و چندضلعی خواسته شده را ... A′B′C′D′E′ بنامیم. داریم :

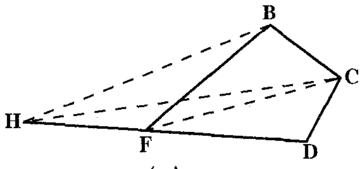
$$\frac{A'B'}{AB}=\frac{B'C'}{BC}=\frac{C'D'}{CD}=\cdots=\sqrt{\frac{S'}{S}}=k$$

از آن اندازهٔ ضلعهای A′B′ ، B′C′ ، C′D′ و ... یعنی اندازهٔ ضلعهای چهارضلعی خواسته شده معلوم است. از طرفی زاویه‌های آن معلومند زیرا با زاویه‌های متناظر چهارضلعی داده شده برابرند درنتیجه چندضلعی را با معلوم‌بودن اندازهٔ ضلعها و زاویه‌هایش می‌توان رسم کرد.

۲۳۰. فرض می‌کنیم پنج‌ضلعی ABCDE داده شده باشد. باید چهارضلعیی رسم کرد که مساحت آن با مساحت پنج‌ضلعی برابر باشد، یکی از قطرهای پنج‌ضلعی، مثلاً قطر BE را رسم کرده و از رأس A خطی موازی این قطر رسم می‌کنیم تا امتداد DE را در نقطهٔ F قطع کند. رأس B را به F وصل می‌کنیم چهارضلعی BCDE معادل با پنج‌ضلعی



(الف)



(ب)

ABCDE می‌باشد. زیرا اگر از پنج‌ضلعی، مثلث ABE را برداشته و به جای آن مثلث FBE را قرار دهیم مساحت پنج‌ضلعی تغییر نمی‌کند چون دو مثلث ABE و FBE به علت مشترک‌بودن قاعده BE و موازی‌بودن AF با BE معادلند ؛ امّا، با برداشتن مثلث ABE و جایگزین‌کردن مثلث FBE پنج‌ضلعی ABCDE با چهارضلعی FBCD معادل می‌شود. حال می‌توان به جای چهارضلعی FBCD مثلثی معادل آن ترسیم کرد در چهارضلعی FBCD قطر CF را رسم کرده و از B خطی موازی آن می‌کشیم تا امتداد DF را در نقطهٔ H قطع کند CH را رسم می‌کنیم. مثلث HCD معادل چهارضلعی FBCD می‌باشد. (شکل)

۲۳۲. به‌طور مثال کثیرالاضلاعی مشابه چهار کثیرالاضلاع می‌سازیم برای این کار یک ضلع کثیرالاضلاع مطلوب را x و ضلعهای نظیر آن را در اوّلی، دومی، سومی و چهارمی a، b، c و d می‌نامیم و فرض می‌کنیم S مساحت کثیرالاضلاع خواسته شده و S_1 ، S_2 ، S_3 و S_4 مساحتهای چهار کثیرالاضلاع مشابه باشند، داریم :

$$\frac{S}{x^2}=\frac{S_1}{a^2}=\frac{S_2}{b^2}=\frac{S_3}{c^2}=\frac{S_4}{d^2}$$

$$=\frac{S_1+S_2+S_3+S_4}{a^2+b^2+c^2+d^2}=\frac{S}{a^2+b^2+c^2+d^2}$$

کسر اوّل را با کسر آخر مقایسه می‌کنیم. داریم :

$$x^2=a^2+b^2+c^2+d^2$$

ساختن x با توجه به قضیهٔ فیثاغورس آسان است.

به همین ترتیب بقیهٔ ضلعهای آن به‌دست می‌آید و چون زاویه‌های آن معلوم است می‌توان بسادگی آن را رسم کرد.

تبصره. با استفاده از مسألهٔ بالا می‌توانیم کثیرالاضلاعی مشابه با دو کثیرالاضلاع متشابه بسازیم که مساحتش برابر تفاضل مساحتهای آنها باشد.

۳.۲.۴.۱. مسأله‌های ترکیبی

۲۳۳. الف. راه اوّل. گیریم nضلعی مورد نظر $A_1A_2\cdots A_n$ باشد و B_1 نقطه‌ای در صفحه. قرینه‌های پاره‌خط A_1B_1 را بترتیب نسبت به خطهای l_1 ، l_2 ، ...، l_n پیدا می‌کنیم تا پاره‌خطهای A_2B_2 ، A_3B_3 ، ...، A_nB_n ، A_1B_{n+1} به‌دست آیند. چون این پاره‌خطها

همگی با یکدیگر قابل انطباقند، نتیجه می‌شود که $A_1B_1 = A_1B_{n+1}$ ، یعنی، نقطهٔ A_1 ازنقطه های B_1 و B_{n+1} به یک فاصله است، و از این رو بر عمودمنصف پاره‌خط B_1B_{n+1} قرار دارد.

حال نقطهٔ دیگر C_1 را در صفحه انتخاب و فرض می‌کنیم C_2 ، C_3 ، ...، C_n ، C_{n+1} نقطه‌های حاصل از قرینه‌یابیهای پیاپی C_1 نسبت به l_1 ، l_2 ، ...، l_{n-1} ، l_n باشند. واضح است که رأس A_1 در این nضلعی نیز ازنقطه‌های C_1 و C_{n+1} به یک فاصله است، و بنابراین بر عمودمنصف C_1C_{n+1} قرار دارد. پس A_1 می‌تواند به‌صورت فصل مشترک عمودمنصفهای پاره‌خطهای B_1B_{n+1} و C_1C_{n+1} مشخص شود (وقتی دو نقطهٔ متمایز B_1 و C_1 انتخاب شدند، پاره‌خطهای B_1B_{n+1} و C_1C_{n+1} را می‌توانیم رسم کنیم). از قرینه‌یابی پیاپی A_1 نسبت به n خط مفروض، بقیهٔ رأسهای nضلعی را به‌دست می‌آوریم.

درصورتی که پاره‌خطها B_1B_{n+1} و C_1C_{n+1} موازی نباشند (یعنی، اگر عمودمنصفهای p و q در یک نقطه متقاطع باشند) مسأله جوابی یکتا دارد؛ اگر $B_1B_{n+1} \| C_1C_{n+1}$ ، آن‌گاه اگر p و q متمایز باشند مسأله اصلاً جواب ندارد، و اگر p و q منطبق باشند، مسأله بینهایت جواب دارد.

nضلعی حاصل از این راه حل ممکن است خودش را قطع کند.

اشکال این راه‌حل این است که به تفاوت اساسی موجود میان حالتهای n زوج و nفرد هیچ‌گونه اشاره‌ای ندارد.

راه دوم. گیریم nضلعی مورد نظر $A_1A_2\cdots A_n$ باشد (شکل الف). اگر قرینه‌های رأس A_1 را مرتب نسبت به خطهای l_1 ، l_2 ، ...، l_{n-1} ، l_n پیدا کنیم نقطه‌های A_2 ، A_3 ، ...، A_n و بالاخره دوباره A_1 را به‌دست خواهیم آورد. پس A_1 نقطهٔ ثابت مجموع تقارنها نسبت به خطهای l_1 ، l_2 ، ...، l_n است. حال دو حالت جداگانه را در نظر می‌گیریم.

حالت اوّل. nزوج. در این حالت مجموع تقارنها نسبت به خطهای l_1 ، l_2 ، ...، l_n در حالت کلی، یک دوران حول یک نقطهٔ O است، که می‌تواند با توجه به ترسیمی که در جمع تقارنها به‌کار رفته، به‌دست آید. نقطهٔ O تنها نقطهٔ ثابت دوران است. و بنابراین A_1 باید بر O منطبق باشد. با یافتن A_1 مشخص‌کردن بقیهٔ رأسهای nضلعی آسان است. مسأله در این حالت یک جواب یکتا دارد.

در حالت خاص، وقتی مجموع تقارنها نسبت به خطهای l_1 ، l_2 ، ...، l_n یک انتقال یا تبدیلِ همانی (یک دوران به زاویهٔ صفر درجه) یا انتقال به فاصلهٔ (صفر) باشد، مسأله یا اصلاً جوابی ندارد (انتقال نقطهٔ ثابت ندارد) و یا بیش از یک جواب دارد، زیرا هر نقطهٔ صفحه می‌تواند رأس A_1 اختیار شود (هر نقطه، یک نقطهٔ ثابت تبدیل همانی است).

حالت دوم. n فرد. در این حالت مجموع تقارنها نسبت به خطهای l_1 ، l_2 ، ...، l_n در حالت کلی یک لغزه است. چون لغزه نقطهٔ ثابت ندارد در حالت کلی وقتی n فرد باشد، جوابی وجود ندارد. در حالت خاص، وقتی مجموع تقارنها نسبت به خطهای l_1 ، l_2 ، ...، l_n تقارنی نسبت به یک خط l باشد (این خط را می‌توان رسم کرد)، جواب به‌صورت یکتا تعیین نمی‌شود ؛ هر نقطه از خط l می‌تواند به‌عنوان رأس A_1 از nضلعی انتخاب شود (هر نقطه از محور تقارن، یک نقطهٔ ثابت تقارن نسبت به این خط است).

پس، به ازای $n = ۳$ مسأله در حالت کلی جوابی ندارد ؛ تنها حالتهای استثنا حالتهایی هستند که خطهای l_1 ، l_2 و l_3 یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند، یا با هم موازی‌اند ؛ در این حالتها مسأله بیش از یک جواب دارد.

ب. این قسمت مسأله شبیه قسمت (الف) است. اگر nضلعی مورد نظر ما $A_1A_2\cdots A_n$ باشد (شکل ب)، خط A_nA_1 بر اثر تقارنهای پیاپی نسبت به l_1 ، l_2 ، ...، l_{n-1} ، l_n به خطهای $A_{n-1}A_n$ ، ...، A_2A_3 و A_1A_2 تبدیل شده، سرانجام به روی A_nA_1 برمی‌گردد. پس A_nA_1 خط ثابت مجموع تقارنها نسبت به خطهای l_1 ، l_2 ، ...، l_n است. دو حالت را در نظر می‌گیریم.

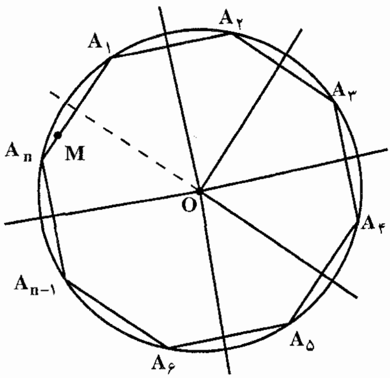
حالت اوّل. n زوج. در این حالت مجموع تقارنها نسبت به خطهای l_1 ، l_2 ، ...، l_n ، در حالت کلی، دورانی است حول یک نقطهٔ O، و بنابراین در حالت کلی خط ثابت ندارد. پس برای n زوج، در حالت کلی، مسأله جواب ندارد. در حالتهای خاص وقتی مجموع تقارنها یک نیمدور حول نقطهٔ O (دورانی به زاویهٔ ۱۸۰°)، یا یک انتقال یا یک تبدیل همانی باشد، مسأله بیش از یک جواب دارد. در حالت اوّل می‌توان هر خط دلخواهی را که از مرکز تقارن می‌گذرد خط A_nA_1 اختیار کرد ؛ در حالت دوم می‌توان هر خط موازی راستای انتقال را A_nA_1 گرفت، در حالت سوم می‌توان هر خط صفحه را A_nA_1 گرفت.

حالت دوم. n فرد. در این حالت مجموع تقارنها نسبت به خطهای l_1 ، l_2 ، ...، l_n در حالت کلی، یک لغزه با محور l است، که این محور می‌تواند رسم شود. چون l تنها خط ثابت لغزه است، از این جا نتیجه می‌شود که ضلع A_nA_1 از nضلعی مورد نظر بر

l قرار دارد ؛ از پیدا کردن قرینه‌های پیاپی l نسبت به خطهای l_1 ، l_2 ، ... ، l_{n-1} تمام ضلعهای دیگر nضلعی را به‌دست می‌آوریم. پس برای n فرد، مسأله در حالت کلی جواب یکتا دارد. استثنا زمانی رخ می‌دهد که مجموع تقارنها نسبت به خطهای مفروض، تقارنی نسبت به خط l باشد، در این حالت مسأله بیش از یک جواب دارد. برای ضلع A_nA_1 ، می‌توان خود خط l یا هر خط عمود بر آن را در نظر گرفت.
(پس به ازای $n = 3$ ، مسأله در حالت کلی یک جواب یکتا دارد ؛ خطهای l_1 ، l_2 و l_3 یا همگی نیمسازهای زاویه‌های خارجی مثلث هستند، یا دو تا از آنها نیمسازهای زاویه‌های داخلی هستند و سومی نیمساز زاویهٔ خارجی. تنها حالت استثنا وقتی است که سه خط l_1 ، l_2 و l_3 یکدیگر را در یک نقطه قطع کنند ؛ در این حالت مسأله بیش از یک جواب دارد ؛ خطهای l_1 ، l_2 و l_3 نیمساز زاویه‌های داخلی هستند، یا دو تا از آنها نیمسازهای زاویه‌های خارجی خواهند بود، و سومی نیمساز زاویهٔ داخلی). یافتن جوابی مشابه راه حل اوّل قسمت (الف) برای قسمت (ب) را به خواننده واگذار می‌کنیم.

۳.۴.۱. رسم n ضلعی با معلوم بودن: دایره، دایره و ...

۲۳۴. الف. گیریم nضلعی مورد نظر $A_1A_2A_3 \cdots A_n$ باشد (شکل). قرینه‌های رأس A_1 را مرتب نسبت به خطهای رسم‌شده از O، مرکز دایره، و عمودبر ضلعهای A_1A_2 ، A_2A_3 ، ... ، $A_{n-1}A_n$ ، A_nA_1 از nضلعی پیدا می‌کنیم (این خطها معلومند، چون راستاهای ضلعهای nضلعی داده شده‌اند) ؛ نخست رأس A_1 به A_2 ، سپس A_2 به A_3 ، ... و بعد A_{n-1} به A_n برده می‌شود، و سرانجام A_n به A_1 بازگردانیده می‌شود. پس A_1 نقطهٔ ثابت مجموع n تقارن نسبت به خطها معلوم است. دو حالت جداگانه در نظر می‌گیریم.



حالت اوّل. n فرد. چون مجموع سه تقارن نسبت به سه خط همرس، باز یک تقارن

نسبت به خطی است که از نقطهٔ همرسی می‌گذرد به‌آسانی دیده می‌شود که مجموع تعداد فردی تقارن نسبت به خطهایی که همه از یک نقطه می گذرند، باز یک تقارن نسبت به خطی است که از این نقطه می‌گذرد. (نخست به جای سه تقارن اوّلی یک تقارن تنها می‌گذاریم، سپس به جای مجموع این تقارن و دو تقارن بعدی، همین کار را می‌کنیم، و همین طور الی آخر). پس مجموع این n تقارن، یک تقارن نسبت به خطی است که بر نقطهٔ O، مرکز دایره، می‌گذرد. دقیقاً دو نقطه بر دایره وجود دارند که بر اثر تقارن نسبت به l ثابت می‌مانند؛ این نقطه‌ها، نقطه‌های برخورد دایره با I هستند. اگر یکی از اینها به‌عنوان رأس A_1 از چندضلعی خواسته شده در نظر گرفته شود، رأسهای دیگر با تقارنهای پیاپی این نقطه نسبت به n خط پیدا می‌شوند. مسأله دو جواب دارد.

حالت دوم. n زوج. مجموع هر دو تقارن نسبت به دو خط که از یک نقطهٔ O می‌گذرند، دورانی است حول نقطهٔ O به یک زاویهٔ مشخص. از این جا نتیجه می‌شود که به جای مجموع تعداد زوجی، n، تقارن نسبت به خطهایی که بر یک نقطهٔ O می‌گذرند می‌توان مجموع $n/2$ دوران حول O را قرار داد؛ از این جا نتیجه می‌شود که این مجموع خود دورانی حول O است. چون یک دوران حول O، در حالت کلی، نقطهٔ ثابتی بر دایرهٔ به مرکز O ندارد، پس مسأله ما در حالت کلی جواب ندارد. استثنا زمانی است که مجموع n تقارن محوری بدل به یک تبدیل همانی شود؛ در این حالت مسأله بینهایت جواب دارد. هر نقطه از دایره می‌تواند رأس A_1 از nضلعی مطلوب باشد.

ب. فرض کنیم n ضلعی رسم شده است (شکل). قرینه‌های رأس A_1 را به‌طور مرتب نسبت به $(n-1)$ خط عمود بر ضلعهای A_1A_2 ، A_2A_3 ، ....، $A_{n-1}A_n$ که از O، مرکز دایره، می‌گذرند پیدا می‌کنیم (این خطها معلومند، زیرا نقطهٔ O و امتدادهای ضلعهای چندضلعی داده شده‌اند)؛ این رشته عمل A_1 را به A_n می‌برد. دو حالت جداگانه در نظر می‌گیریم.

حالت اوّل. n فرد. دراین حالت مجموع $(n-1)$ تقارن نسبت به خطهایی که بر نقطهٔ O می‌گذرند، دورانی است حول O به زاویهٔ α (که می‌توان پیدا کرد). پس زاویهٔ $A_1\hat{O}A_n = \alpha$ زاویه‌ای است معلوم، و بنابراین طول وتر A_1A_n و فاصله‌اش از مرکز در دستند. چون A_1A_n باید از نقطهٔ مفروض M بگذرد، تنها کافی است که مماسهایی از M بر دایرهٔ به مرکز O و شعاعی مساوی فاصلهٔ وتر A_1A_n تا مرکز O، رسم کنیم. مسأله می‌تواند دو یا یک جواب داشته باشد یا اصلاً جواب نداشته باشد.

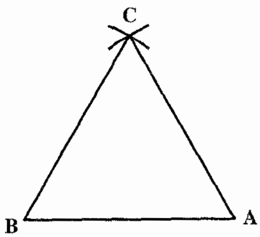
حالت دوم. n زوج. در این حالت مجموع $(n-1)$ تقارن نسبت به خطهایی که بر این نقطهٔ مشترک می‌گذرند، تقارنی است نسبت به خط l که بر این نقطه می‌گذرد. پس A_1 و A_n قرینه‌های یکدیگر نسبت به l هستند. چون A_1A_n باید از نقطهٔ معلوم M بگذرد، پس می‌توان آن را به آسانی از راه رسم عمود از M بر l به‌دست آورد. مسأله همواره یک جواب یکتا دارد.

۵.۱. رسم چندضلعیهای منتظم

۱.۵.۱. رسم سه ضلعی منتظم (مثلث متساوی‌الاضلاع)

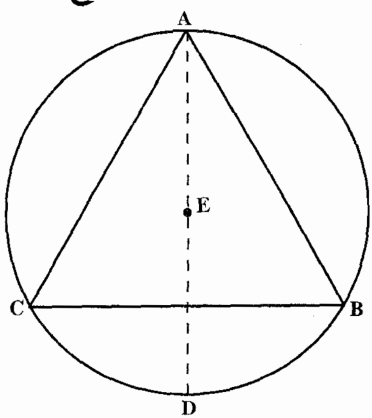
۱.۱.۵.۱. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع با معلوم بودن اندازهٔ ضلع

۲۳۵. **روش ابوالوفاء بوزجانی.** اگر بخواهیم که برخط AB مثلث متساوی‌الاضلاعی رسم کنیم، اوّل نقطهٔ A و نقطهٔ B را مرکز قرار می‌دهیم و به شعاع AB دو قوس می‌زنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ C تلاقی نمایند. سپس از نقطه‌های A و B دو خط به نقطهٔ C می‌کشیم تا مثلث متساوی‌الاضلاع ABC به‌دست آید.



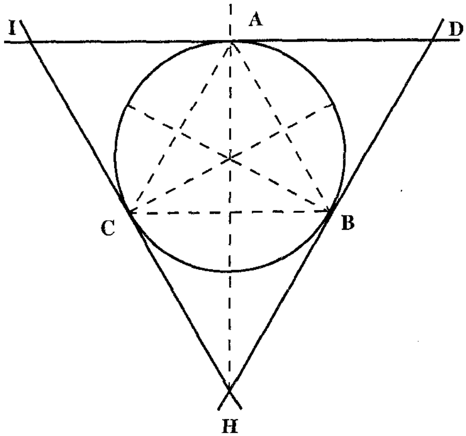
۲.۱.۵.۱. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایرهٔ به شعاع R

۲۳۶. **روش ابوالوفاء بوزجانی.** چون بخواهیم در دایرهٔ ABC به مرکز E مثلث متساوی‌الاضلاع رسم کنیم قطر AED را می‌کشیم و نقطهٔ D را مرکز قرار می‌دهیم و به طول ED دو نقطهٔ B و C را تعیین می‌نماییم. سپس خطهای AB، BC و AC را رسم می‌کنیم تا مثلث ABC متساوی‌الاضلاع و الزوایا به‌دست آید.



۳.۱.۵.۱. رسم مثلث متساوی‌الاضلاع محیط بر دایرهٔ به شعاع R

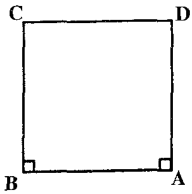
۲۳۷. وقتی بخواهیم بر دایرهٔ ABC مثلث متساوی‌الاضلاع رسم نماییم ابتدا در آن دایره، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را رسم و، سپس از نقطه‌های A، B و C خطهایی مماس بر دایره رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌های D، H و I قطع نمایند و مثلث متساوی‌الاضلاع IHD به‌دست آید.



۲.۵.۱. رسم چهارضلعی منتظم (مربع)

۱.۲.۵.۱. رسم مربع با معلوم بودن اندازهٔ ضلع

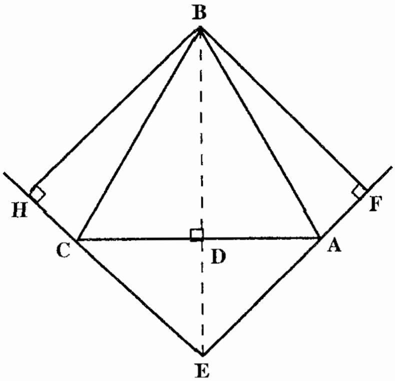
۲۳۸. روش ابوالوفاء بوزجانی. اگر بخواهیم برخط AB از دو نقطهٔ A و B دو عمود بر خط AB اخراج، به اندازهٔ طول AB روی آنها دو نقطهٔ C و D را نشان می‌کنیم، سپس خط CD را می‌کشیم، مربع ABCD به‌دست می‌آید.



۱.۵.۲.۲. رسم مربع با معلوم بودن مثلث

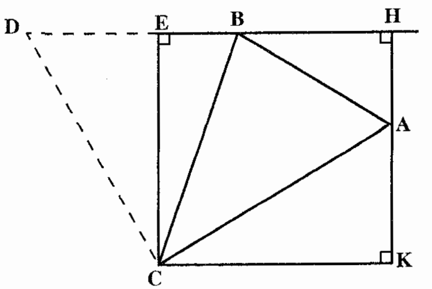
۱.۵.۲.۲.۱. رسم مربع با معلوم بودن مثلث متساوی‌الاضلاع

۲۳۹. **روش ابوالوفاء بوزجانی**. روش ترسیم مربع بر مثلث : اگر بخواهیم بر مثلثی متساوی‌الاضلاع مانند مثلث ABC مربعی محیط نماییم، اوّل ضلع AC را در نقطهٔ D نصف و خط عمودمنصف BD را رسم می‌کنیم و آن را معادل AD یعنی نصف ضلع AC تا نقطهٔ E امتداد می‌دهیم دو خط AE و CE را می‌کشیم و آن دو را امتداد می‌دهیم. حال از نقطهٔ B دو خط عمود BF و BH را بر این دو خط وارد می‌نماییم و مربع HEFB را به‌دست می‌آوریم.

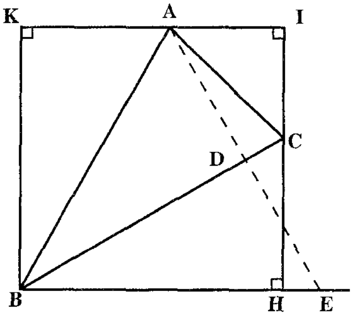


۱.۵.۲.۲.۲. رسم مربع با معلوم بودن مثلث در حالت کلی

۲۴۰. **روش ابوالوفاء بوزجانی. راه اوّل**. روش ترسیم مربع بر مثلث مختلف‌الاضلاع : اگر بخواهیم که بر مثلث مختلف‌الاضلاع ABC مربعی محیط نماییم، اوّل از نقطهٔ C خط عمود CD را بر خط AC و معادل آن رسم می‌کنیم، بعد خط DB را می‌کشیم و آن را امتداد می‌دهیم. سپس از نقطهٔ C عمود بر CE را بر این خط فرود می‌آوریم و خط عمود CK را از خط CE اخراج می‌نماییم. حال از نقطهٔ A خط AH را به دو جهت موازی CE رسم کنیم تا در نقطه‌های H و K به دو

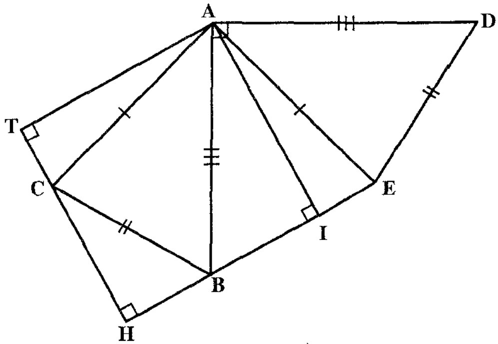


خط EH و CK برسد. مربع HKCE، مربع خواسته شده می‌باشد.



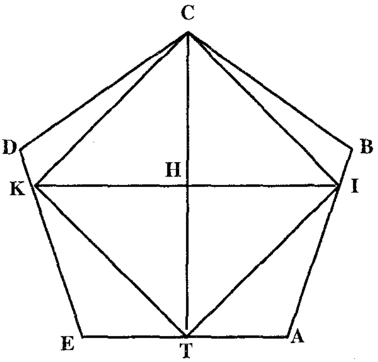
راه دوم. در مثلث مختلف‌الاضلاع ABC از نقطهٔ A عمود AD را بر ضلع BC فرود می‌آوریم و آن را تا نقطهٔ E امتداد می‌دهیم به‌طوری که AE مساوی BC شود، سپس BE را رسم می‌کنیم و در نقطهٔ C عمود CH را بر این خط فرود می‌آوریم و بعد از نقطهٔ A عمود AI را بر خط CH و از نقطهٔ B عمود BK را بر خط AI رسم می‌نماییم تا مربع KBHI به‌دست آید.

راه سوم. در مثلث مختلف‌الاضلاع ABC از نقطهٔ A خط AD را عمود بر AB اخراج می‌نماییم و آن را مساوی AC امتداد می‌دهیم. سپس مثلث ADE را معادل مثلث ABC رسم می‌کنیم یعنی خط AE مساوی ضلع AB و ED مساوی ضلع BC بعد خط BE را می‌کشیم و از نقطهٔ C عمود HC را بر آن و همچنین از نقطهٔ A عمود AI را بر خط BE و عمود TA را بر خط CH فرود می‌آوریم تا مربع HIAT به‌دست آید.



۱.۵.۲.۳. رسم مربع با معلوم بودن چندضلعی منتظم

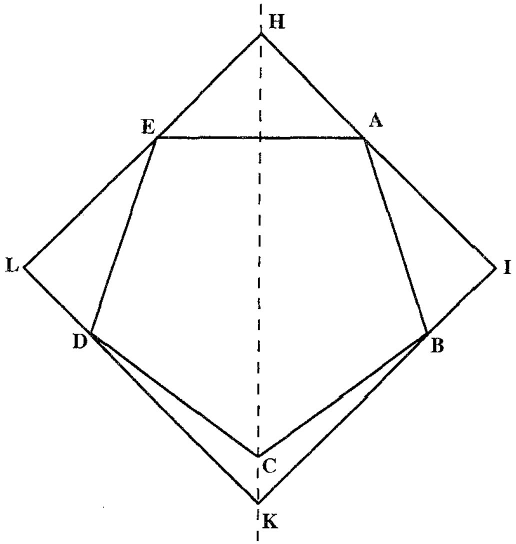
۱.۵.۲.۳.۱. رسم مربع با معلوم بودن پنج‌ضلعی منتظم



۲۴۱. **روش ابوالوفاء بوزجانی.** اگر بخواهیم مربعی در پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاعی مانند EDCBA محاط نماییم، اوّل عمود TC را رسم و آن را در نقطهٔ H نصف می‌کنیم و بعد

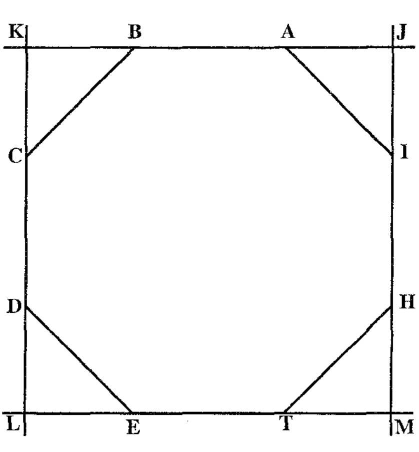
از نقطهٔ H خط KHI را موازی ضلع EA و یا عمود بر خط TC رسم می‌نماییم تا دو ضلع BA و ED را در نقطه‌های K و I قطع نماید. حال خطهای IC، TI، KT و CK را می‌کشیم تا مربع KTIC به‌دست آید.

۲۴۲. روش ابوالوفاء بوزجانی. اگر بخواهیم مربعی بر پنج‌ضلعیی مانند EDCBA که متساوی‌الاضلاع و الزوایا می‌باشد محیط نماییم، اوّل ضلع EA را نصف و خط عمودمنصف آن را مساوی نصف آن رسم می‌کنیم و بعد خطهای AH و EH را می‌کشیم و از نقطه‌های B و D دو خط عمود IB و LD را بر امتداد آنها فرود می‌آوریم و آنها را ازطرف دیگر امتداد می‌دهیم تا یکدیگر را در نقطهٔ K قطع نمایند. چهارضلعی LKIH به‌دست می‌آید که متساوی‌الاضلاع و الزوایا می‌باشد.



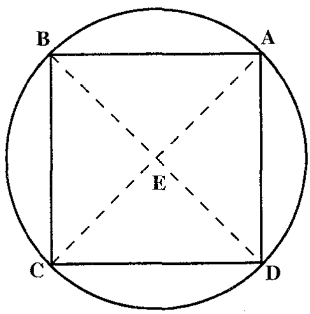
۲.۳.۲.۵.۱. رسم مربع با معلوم بودن هشت ضلعی منتظم

۲۴۳. روش ابوالوفاء بوزجانی. اگر بخواهیم که مربعی را بر ضلعهای هشت ضلعی محیط نماییم هر دو ضلع مقابل را از دو طرف امتداد می‌دهیم تا امتداد دو ضلع مقابل دیگر را قطع کند و مربع محیطی را به‌دست می‌آوریم، مانند هشت‌ضلعی IHTEDCBA و مربع LMJK که بر آن محیط شده است.

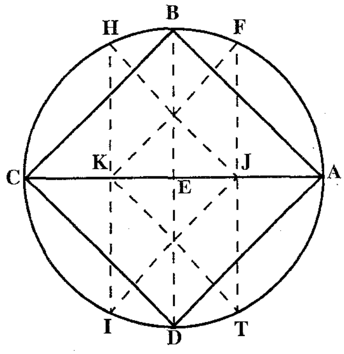


۴.۲.۵.۱. رسم مربع محاط در دایرهٔ به شعاع R

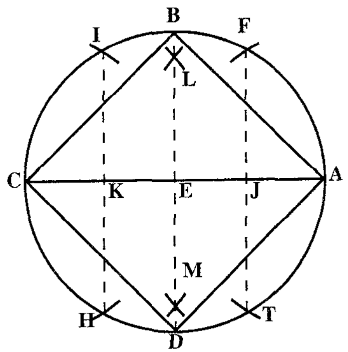
۲۴۴. روشهای ابوالوفاء بوزجانی. روش اوّل. اگر بخواهیم در دایره‌ای مانند دایرهٔ ABCD مربعی متساوی‌الاضلاع رسم کنیم دو قطر AC و BD را عمود بر یکدیگر می‌کشیم. سپس وترهای AB، BC، CD و AD را رسم می‌کنیم تا مربع متساوی‌الاضلاع و الزوایای ABCD به‌دست آید.



روش دوم. اگر بخواهیم مربع را با یک فتح پرگار که معادل نصف قطر دایره است رسم نماییم اوّل قطر AC را رسم و بعد به مرکز A، با همان فتح پرگار نقطه‌های F و T را نشان می‌کنیم و خط FT را می‌کشیم تا قطر AC را در نقطهٔ J قطع نماید، سپس به مرکز نقطهٔ C و با همان فتح پرگار نقطه‌های H و I را نشان می‌کنیم و خط HI را می‌کشیم تا قطر AC را در نقطهٔ K قطع نماید. حال دو خط KT و HI را می‌کشیم تا یکدیگر را در نقطهٔ M قطع کنند. خطی را که از نقطهٔ M به مرکز دایره وصل می‌نماییم قطر عمود بر قطر AC می‌باشد و آن را از دو طرف امتداد می‌دهیم تا با دایره در نقطه‌های B و D تلاقی کند و با کشیدن وترهای AB، BC، CD و DA مربع ABCD را به‌دست می‌آوریم.

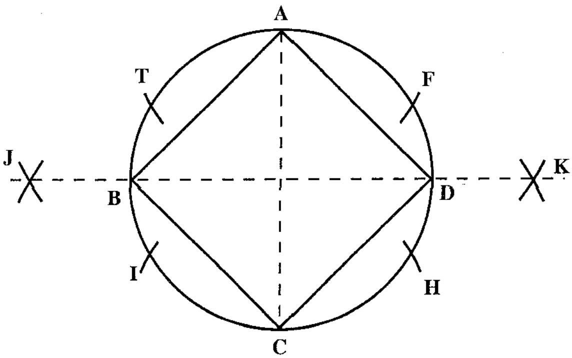


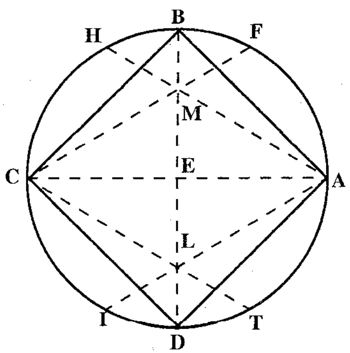
روش سوم. قطر AC را می‌کشیم و به مرکز A نقطه‌های F و T و به مرکز C نقطه‌های H و I را نشان می‌کنیم و با کشیدن خطهای FT و HI محل تلاقی آنها را با قطر AC یعنی نقطه‌های J و K تعیین می‌نماییم. سپس دو نقطهٔ J و K را مرکز قرار می‌دهیم و با همان فتح پرگار قوسهایی می‌زنیم تا یکدیگر را در



نقطه‌های L و M قطع کنند. سپس خط LM را می‌کشیم، این خط عمودمنصف قطر AC است و امتداد آن، دایره را در دو نقطهٔ B و D قطع می‌نماید، حال با کشیدن وترهای AB، BC، CD و DA مربع ABCD را تکمیل می‌کنیم.

روش چهارم. قطر AC را می‌کشیم و به مرکز A نقطه‌های F و T و به مرکز C نقطه‌های H و I را نشان می‌کنیم. سپس نقطه‌های F، T، H و I را مرکز قرار می‌دهیم و با همان فتح پرگار قوسهایی می‌زنیم تا یکدیگر را در نقطه‌های K و J قطع نمایند، بعد خط KJ را می‌کشیم، این خط دایره را در دو نقطهٔ B و D قطع می‌کند و بر قطر AC عمود است. حال با کشیدن خطهای AB، BC، CD و DA مربع متساوی الاضلاع و الزوایا را به‌دست می‌آوریم.



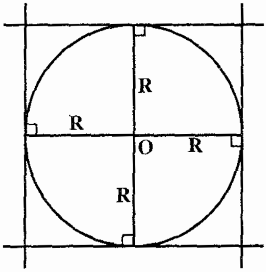


روش پنجم. پس از کشیدن قطر AC و نشان کردن نقطه‌های F، T، H و I خطهای IA و TC را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ L قطع نمایند. سپس از نقطهٔ L خطی به مرکز دایره وصل می‌کنیم و از دو طرف امتداد می‌دهیم تا با دایره در نقطه‌های B و D متقاطع شوند. حال با رسم خطهای AB، BC، CD و DA مربع را تمام می‌کنیم.

روش ششم. پس از کشیدن قطر AC و نشان کردن نقطه‌های T و I و پیدا کردن نقطهٔ L به‌همان ترتیب یعنی با همان فتح پرگار از نقطه‌های A و C نقطه‌های F و H را نشان و خطهای HA و FC را رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ M یکدیگر را قطع نمایند. حال نقطهٔ L

را به نقطهٔ M وصل می‌کنیم و از دو طرف امتداد می‌دهیم تا با دایره در نقطه‌های B و D متقاطع شود، سپس با رسم خطهای AB، BC، CD و DA مربع را تمام می‌کنیم. (شکل حالت قبل)

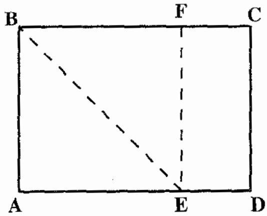
۱.۵.۲.۵. رسم مربع محیط بر دایرهٔ به شعاع R



۲۴۵. محیط دایره را به چهار کمان مساوی تقسیم می‌کنیم و در نقطه‌های تقسیم خطهایی مماس بر دایره رسم می‌کنیم. به بیان دیگر: دو قطر عمود برهم از دایره را رسم می‌کنیم و در انتهای این قطرها خطهایی عمود بر آنها رسم می‌کنیم تا مربع موردنظر به‌دست آید. بدیهی است که اندازهٔ هر ضلع این مربع مساوی ۲R است.

۱.۵.۲.۶. رسم مربع با تا زدن یا گره زدن کاغذ

۱.۵.۲.۶.۱. رسم مربع با تا زدن کاغذ



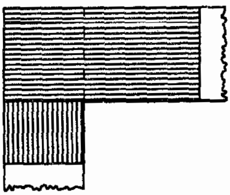
۲۴۶. یک مستطیل را طوری تا بزنید که یکی از زاویه‌های راست آن نصف شود (خط BE). EF را به‌گونه‌ای تا کنید که بر AD عمود شود. چرا ABFE مربع است؟ چه رابطه‌ای بین ضلعها و زاویه‌های مربع برقرار است؟

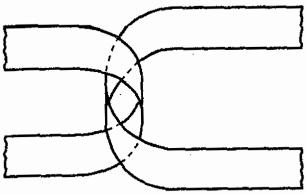
۱.۵.۲.۶.۲. رسم مربع با گره زدن کاغذ

۲۴۷. دو نوار کاغذی هم عرض آماده کنید.

الف. هر یک از نوارها را طوری روی هم تا بزنید که به شکل حلقه درآید (شکل الف).

ب. نوارها را از داخل هم بگذرانید. آنها را محکم بکشید و باقیمانده‌شان را ببرید. چرا این چند ضلعی مربع است؟ (شکل ب)

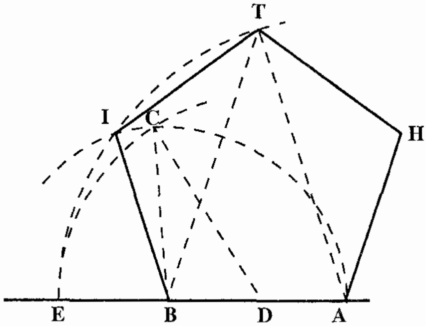

(ب)


(الف)

۳.۵.۱. رسم پنج ضلعی منتظم

۱.۳.۵.۱. رسم پنج‌ضلعی منتظم با معلوم بودن ضلع

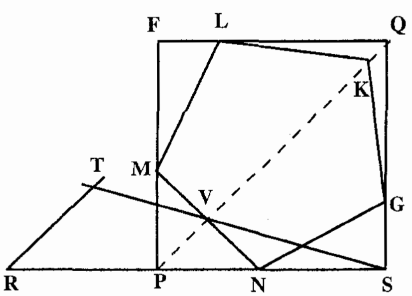
۲۴۸. روش ابوالوفاء بوزجانی. اگر بخواهیم بر خط AB پنج ضلعی متساوی‌الاضلاعی رسم نماییم، اوّل از نقطهٔ B عمود BC را مساوی AB اخراج می‌کنیم، سپس نقطهٔ D وسط خط AB را مرکز قرار می‌دهیم و به طول CD قوس EC را می‌کشیم تا امتداد خط AB را در نقطهٔ E قطع کند.

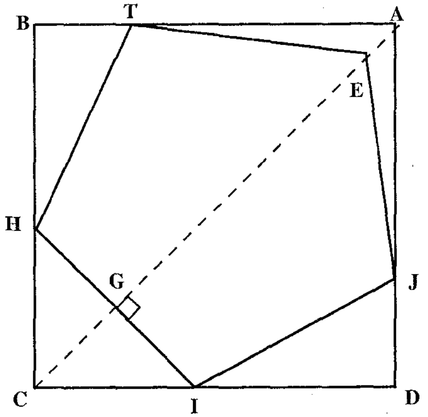


حال دو نقطهٔ A و B را مرکز قرار می‌دهیم و به فاصلهٔ EA دو قوس رسم می‌نماییم تا یکدیگر را در نقطهٔ T قطع کنند. خط TA و TB را می‌کشیم تا مثلث BTA که آن را مثلث پنج‌ضلعی گویند به‌دست آید، و این مثلث در بسیاری از ترسیمات مورد نیاز می‌باشد، بعد نقطه‌های A، B و T را مرکز قرار می‌دهیم و به طول BA قوسهایی رسم می‌کنیم تا در نقطه‌های I و H یکدیگر را قطع نمایند و با کشیدن خطهای HA، TH، IT و BI مخمس متساوی‌الاضلاع و الزوایای HTIBA به‌دست می‌آید.

۲.۳.۵.۱. رسم پنج‌ضلعی منتظم با معلوم بودن مربع

۲۴۹. روش ابوالوفاء بوزجانی. اگر بخواهیم در مربعی مانند مربع DCBA پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاعی مانند JIHTE محاط کنیم به‌طوری که یک رأس پنج‌ضلعی بر روی قطر مربع واقع شود، اوّل پنج‌ضلعی منتظم دیگری مانند پنج‌ضلعی GNMLK به هر نحوی که بخواهیم رسم و مربعی مانند مربع FQSP بر آن محیط می‌نماییم. بعد روی ضلع PS

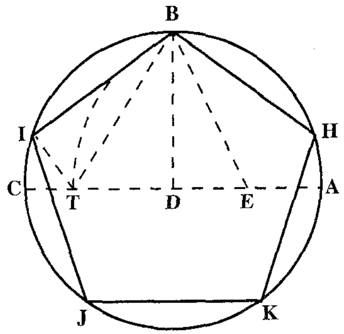




مساوی AB جدا می‌کنیم تا نقطهٔ R به‌دست آید. سپس قطر PQ را می‌کشیم و از نقطهٔ R خطی به موازات آن رسم می‌نماییم، بعد از نقطهٔ S به وسط ضلع NM وصل می‌کنیم و آن را امتداد می‌دهیم تا آن را در نقطهٔ T قطع نماید. حال بر روی قطر CA از مربع، قطعهٔ GC را معادل TR جدا و از نقطهٔ G عمودی بر CA اخراج می‌نماییم تا دو ضلع مربع را در نقطه‌های I و H قطع کند. بعد خط IH را می‌کشیم و دو نقطهٔ H و I را مرکز قرار می‌دهیم و به طول HI دو قوس رسم می‌نماییم تا ضلعهای مربع را درنقطه‌های J و T قطع کند و سپس به مرکز J یا T و به همان فتح پرگار قوس دیگری می‌کشیم تا قطر CA را در نقطهٔ E قطع نماید و با کشیدن خطهای JI و EJ تمام می‌کنیم.

۱.۵.۳.۳. رسم پنج ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R

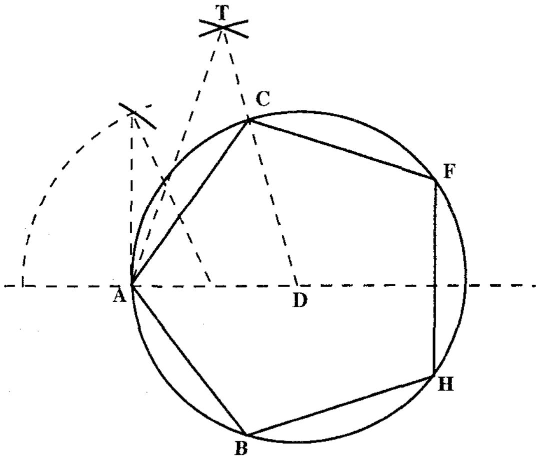
۲۵۰. **روشهای ابوالوفاء بوزجانی. الف.** اگر بخواهیم که در دایره‌ای پنج‌ضلعی منتظمی محاط نماییم، اوّل قطر ADC را می‌کشیم و



از نقطهٔ D که مرکز است عمود BD را رسم می‌کنیم، سپس شعاع AD را در نقطهٔ E نصف و به مرکز E و طول BE قوسی رسم می‌کنیم تا قطر را در نقطهٔ T قطع نماید، بعد به مرکز B و به طول BT قوس IT را می‌کشیم تا قوس IB را از دایره جدا کند. این قوس مساوی یک پنجم محیط دایره می‌باشد. حال قوسهای JI، KJ، HK و BH را مساوی IB جدا می‌کنیم و وتر آنها را می‌کشیم تا پنج ضلعی HKJIB با ضلعها و زاویه‌های مساوی به‌دست آید.

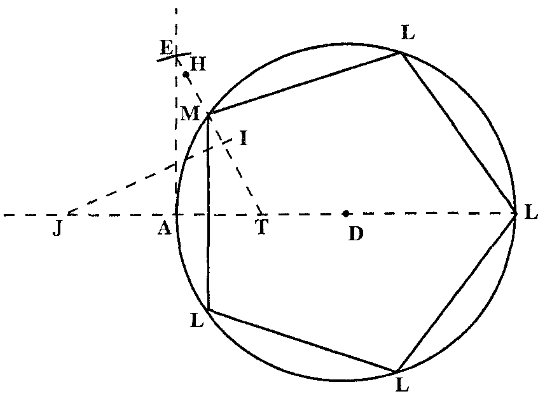
ب. اگر بخواهیم کشیدن پنج ضلعی، یا به عبارت دیگر تقسیم دایره به پنج قسمت مساوی یعنی مساوی شعاع دایره، با یک فتح پرگار انجام گیرد، بر روی قطعه خط AD

یعنی نصف قطر دایره مثلث پنج ضلعی را رسم می‌نماییم. ضلع DT از این مثلث دایره را در نقطهٔ C قطع می‌کند. حال قوس ABC را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم. از وترهای این چهار قوس با وتر AC پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع به‌دست آید.

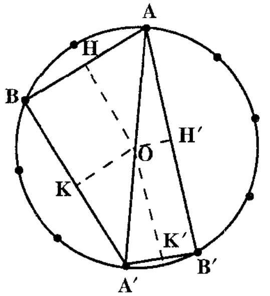


ج. قوس AC مساوی یک پنجم محیط دایره و وتر آن ضلع پنج ضلعی می‌باشد و چنانچه محیط دایره را بر طول این قوس تقسیم کنیم پنج ضلعی متساوی‌الاضلاع و الزوایا به‌دست می‌آید.

د. خط AD را رسم و ازنقطهٔ A عمود AE را معادل آن اخراج می‌کنیم. سپس خط AD را در نقطهٔ T نصف می‌نماییم و خط ET را می‌کشیم و بر روی این خط قطعهٔ HT را مساوی AD جدا و آن را در نقطهٔ I به دو قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و عمود JI



را از آن خارج می‌نماییم تا امتداد AD را قطع کند. حال به مرکز J و به طول IJ قوسی رسم می‌نماییم تا دایره را در دو نقطهٔ M و L تلاقی کند، قوس LM یک پنجم محیط دایره می‌باشد.



روش دوم. می‌دانیم که اگر دایره به ده قسمت مساوی تقسیم شده باشد و نقطه‌های تقسیم را یک در میان یا ۴ به ۴ به هم وصل کنیم پنج ضلعی منتظم محدب و پنج ضلعی منتظم ستاره‌ای به‌دست می‌آید.

پس برای ترسیم پنج ضلعیهای منتظم محاطی، ابتدا دایره را به ده کمان برابر تقسیم، و سپس نقطه‌های تقسیم را یک در میان یا ۴ به ۴ به هم وصل می‌کنیم. اگر AB ضلع پنج‌ضلعی منتظم محدب محاط در دایرهٔ به شعاع R باشد، $AB = C_5$ ، کمان کوچکتر از نیمدایرهٔ $\overset{\frown}{AB}$ مساوی با $\frac{2}{10}$ دایره است (شکل)

و اگر قطر AA' را رسم کنیم، کمان کوچکتر از نیمدایرهٔ $\overset{\frown}{A'B}$ مساوی با $\frac{3}{10}$ دایره می‌باشد و بنابراین، $A'B$ ضلع ده ضلعی منتظم ستاره‌ای محاط در دایره است. اگر مرکز دایره را O و وسط $A'B$ را K بنامیم، داریم :

$$r_5 = OH = \frac{1}{2}A'B = \frac{1}{2}C'_{10} \ , \ \ C_5 = AB = 2OK = 2r'_{10}.$$

همچنین اگر ضلع پنج ضلعی منتظم ستاره‌ای را $AB' = C'_5$ و وسط AB' را H' و وسط $A'B'$ را K' بنامیم، $A'B'$ ضلع ده ضلعی منتظم محدب است و داریم :

$$r'_5 = OH' = \frac{1}{2}A'B' = \frac{1}{2}C_{10} \ , \ \ C'_5 = AB' = 2OK' = 2r_{10}.$$

پس :

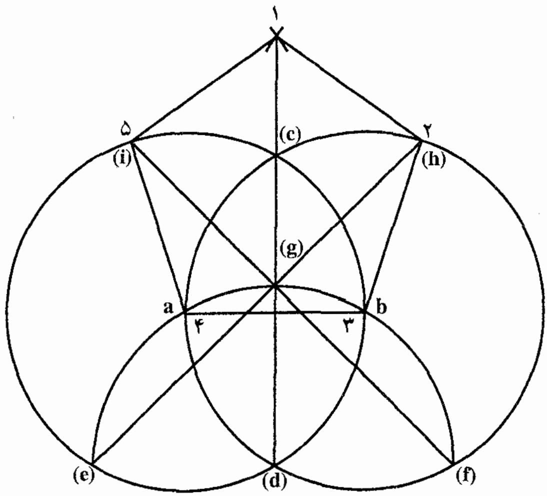
$$r_5 = \frac{R}{4}(\sqrt{5}+1)$$

$$r'_5 = \frac{R}{4}(\sqrt{5}-1)$$

$$C_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10-2\sqrt{5}}$$

$$C'_5 = \frac{R}{2}\sqrt{10+2\sqrt{5}}$$

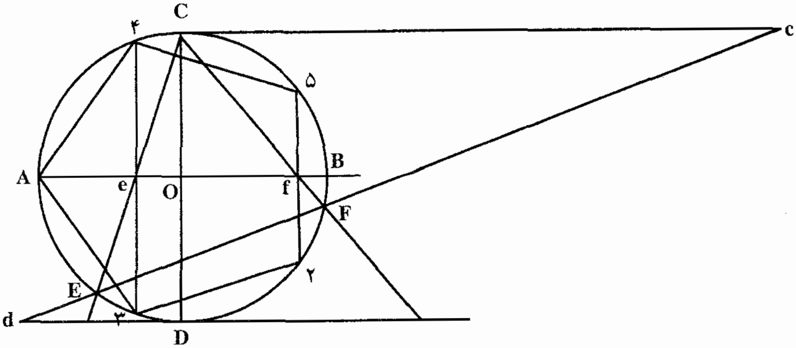
روش سوم. آلبرشت دیورر نه تنها در نوشته‌ها، بلکه حتی در تابلوها و کتابهای خود هم ردپای زیادی از استعداد ریاضی خود را نشان داده است. گواه ما مربع جادویی مشهور اوست که در تابلو «افسردگی» خود (شکل) به جا گذاشته است و یکی از قدیمی‌ترین مربعهای جادویی در اروپا است. گواه دیگر ما یک اثر کوچک دیورر است که در آن این نقاش نابغه راه‌حل بسیار ساده و خوبی برای ساختن پنج ضلعی منتظم به کمک پرگار داده است، وقتی که تنها طول ضلع آن معلوم باشد.



در شکل حرفهای a و b و عددهای ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ به همان صورتی است که خوددیورر گذاشته است، تنها حرفهایی که داخل پرانتز گذاشته شده است بعدها به آن اضافه شده است.

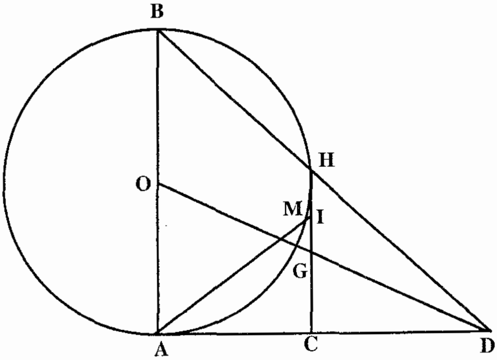
روش دیورر کاملاً دقیق نیست، ولی برای هدفهای عملی به اندازهٔ کافی خوب است. خود دیورر هم به این امر واقف بود و در حقیقت خط فاصلی بین شکلهای منتظم ریاضی و شکلهای منتظمی که در عمل لازم است، می‌کشد. شکل هم به قدری روشن است که نیازی به هیچ توضیح اضافی نیست.

روش چهارم. و این هم روش محاط کردن پنج ضلعی منتظم در دایره، که به‌وسیلهٔ ریاضیدان و منجم آلمانی اوگان شریوتر (سدهٔ هفدهم) داده شده است. AB و CD را دو قطر عمود بر هم دایره فرض می‌کنیم (شکل).



پاره‌خط Cc مساوی ۴OA و موازی AB است. پاره‌خط Dd مساوی BO و باز موازی AB است. خطی که دو نقطهٔ c و d را به هم وصل می‌کند، دایره را در نقطه‌های E و F قطع می‌کند. این دو نقطه را به نقطهٔ C وصل می‌کنیم و از نقطه‌های تلاقی این دو خط با AB، یعنی از نقطه‌های c و f عمودهایی بر AB اخراج می‌کنیم. نقطه‌های برخورد این دو عمود با دایره، چهار رأس پنج ضلعی را می‌دهند (نقطه‌های ۲، ۳، ۴ و ۵).

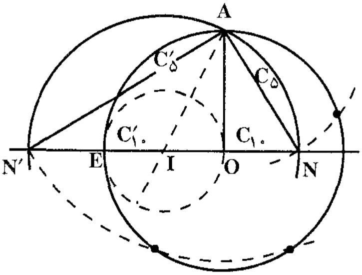
راه حل دیگر این مسأله، که از همین مؤلف است، خیلی جالب است.



روی مماس بر دایره، AC را مساوی شعاع و AD را مساوی قطر جدا می‌کنیم (شکل). D را به نقطه‌های O و B وصل می‌کنیم ؛ خطهای DO و DB دایره را در نقطه‌های G و H قطع می‌کنند. سپس به مرکز D و شعاع مساوی DG قوسی رسم می‌کنیم تا خط CH را در نقطهٔ I قطع کند. I را با خط راستی به A وصل می‌کنیم، تا دایره را در نقطهٔ M قطع کند. وتر AM ضلع مجهول پنج ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به قطر AB است.

اثبات صحت این شکل را، که به سادگی براساس استفاده از تقسیم طلایی انجام می‌گیرد، به عهدهٔ خواننده می‌گذاریم.

نکته. روش ترسیم ضلعهای پنج ضلعیهای منتظم محدب و ستاره‌ای



در دایرهٔ به مرکز O، دو شعاع عمود برهم OA و OE را رسم می‌کنیم و وسط شعاع OE را I می‌نامیم (شکل). دایرهٔ به مرکز I و به شعاع IA خط OE را در نقطه‌های N و 'N قطع می‌کند. ON و 'ON بترتیب مساوی با C_{10} و C'_{10} هستند و بنابراین:

$$NN' = C_{10} + C'_{10} = R\sqrt{5}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ 'ANN می‌توان نوشت:

$$AN^2 = N'N \times ON = R\sqrt{5} \times \frac{R}{2}(\sqrt{5}-1)$$

$$= \frac{R^2}{4}(10-2\sqrt{5}) = (C_5)^2$$

و

$$AN'^2 = N'N \times ON' = R\sqrt{5} \times \frac{R}{2}(\sqrt{5}+1)$$

$$= \frac{R^2}{4}(10+2\sqrt{5}) = (C'_5)^2$$

پس

$$C'_5 = AN' \quad , \quad C_5 = AN$$

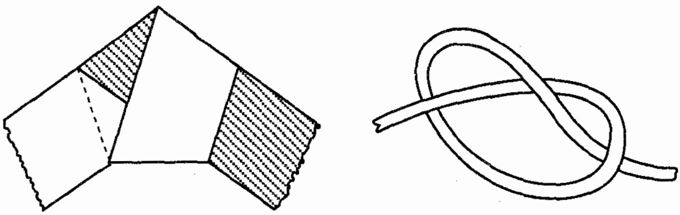
و برای تقسیم دایره به پنج کمان متساوی کافی است کمانهای متوالی که وتر روبه‌روی آنها AN باشد روی دایره جدا کنیم.

تبصره. چون به‌وسیلهٔ خط‌کش و پرگار می‌توانیم پنج ضلعی منتظم محدب محاط در یک دایره رسم کنیم، پس می‌توانیم متوالیاً دایره را به ۱۰، ۲۰، ۴۰، ... و به‌طور کلی به 5×2^n قسمت متساوی تقسیم کنیم. به این ترتیب، چند ضلعیهای منتظم محدب و ستاره‌ای را که عدهٔ ضلعهایشان 5×2^n است، می‌توان به‌وسیلهٔ خط‌کش و پرگار رسم کرد. (n عددی است صحیح بزرگتر یا مساوی با صفر)

۱.۵.۳.۴. رسم پنج ضلعی منتظم با گره زدن کاغذ

۲۵۱. نوار بلند کاغذی آماده کنید که عرض یکسان داشته باشد. برای این منظور، نوار ماشین حساب بسیار مناسب است. نوار را گره ساده بزنید (شکل الف). گره را سفت و ردها را

صاف کنید نوارهای اضافی را ببرید. گره را باز کنید و ذوزنقه‌های تشکیل شده را با هم بررسی و مقایسه کنید.

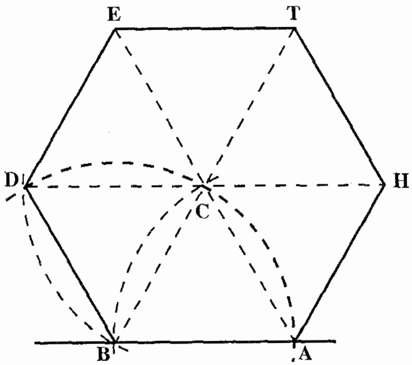


(ب) (الف)

۴.۵.۱. رسم شش ضلعی منتظم

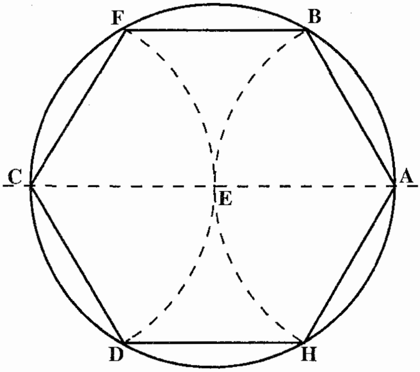
۱.۴.۵.۱. رسم شش ضلعی منتظم با معلوم بودن اندازهٔ ضلع

۲۵۲. روش ابوالوفاء بوزجانی. می‌خواهیم بر خط AB شش ضلعی متساوی الاضلاعی و الزوایا رسم نماییم. اوّل بر خط AB مثلثی متساوی‌الاضلاع مانند مثلث ABC می‌کشیم، سپس دو ضلع AC و BC را امتداد می‌دهیم و روی هر کدام از نقطهٔ C طولی معادل AB جدا می‌کنیم تا نقطه‌های E و T به‌دست آید. بعد به روی خط BC مثلث متساوی‌الاضلاع BCD را می‌کشیم و خط CD را امتداد می‌دهیم و از نقطهٔ C نقطهٔ H را به فاصلهٔ CD جدا می‌کنیم. حال خطهای DE، ET، HT و AH را می‌کشیم تا شش ضلعی متساوی‌الاضلاع و الزوایای ABDETH به‌دست آید.

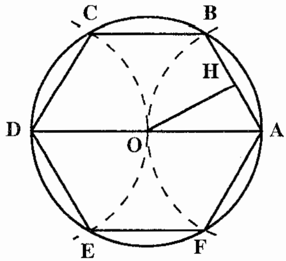


۲.۴.۵.۱. رسم شش ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R

۲۵۳. روش اول. اگر بخواهیم در دایرهٔ ABC شش ضلعی متساوی‌الاضلاع رسم کنیم، ابتدا قطر AC را می‌کشیم و به مرکز A و C و به طول شعاع دایره نقطه‌های B، H، D و F را نشان می‌نماییم. سپس با کشیدن وترهای AB، BF، CF، DC، HD و AH شش‌ضلعی متساوی‌الاضلاع را به‌دست می‌آوریم.



روش دوم. اگر شش ضلعی منتظم ABCDEF در دایره محاط شده باشد مثلث متساوی‌الساقین OAB که زاویهٔ رأسش AOB مساوی با ۶۰ درجه است، متساوی‌الاضلاع می‌باشد (شکل) پس $AB = OA = R$، و از مثلث قائم‌الزاویهٔ AOH (H وسط AB است).



نتیجه می‌شود :

$$OH = \frac{R\sqrt{۳}}{۲}$$

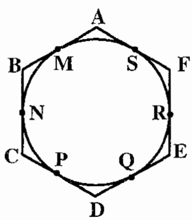
پس

$$r_۶ = \frac{R}{۲}\sqrt{۳} \quad , \quad C_۶ = R$$

پس برای ترسیم شش ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R کافی است قطر AD را رسم و به مرکزهای A و D و به شعاع R دو دایره رسم کنیم تا دایره را در رأسهای B، C، E و F قطع کنند. ABCDEF شش ضلعی منتظم محاط در دایره است.

۳.۴.۵.۱. رسم شش ضلعی منتظم محیط بر دایرهٔ به شعاع R

۲۵۴. دایرهٔ C(O,R) را در نظر می‌گیریم. محیط دایره را به شش کمان مساوی بخش می‌کنیم تا شش ضلعی منتظم محاطی MNPQRS به‌دست آید. در رأسهای این شش ضلعی منتظم، خطهایی مماس بر دایره رسم می‌کنیم، تا یکدیگر را در A، B،

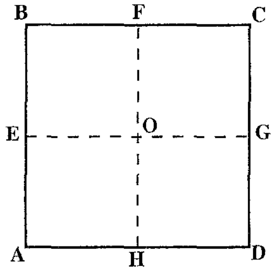


C، D، E و F قطع کنند. ABCDEF شش ضلعی منتظم محیط بر دایره است.

۴.۴.۵.۱. رسم شش ضلعی منتظم با تا کردن یا گره زدن کاغذ

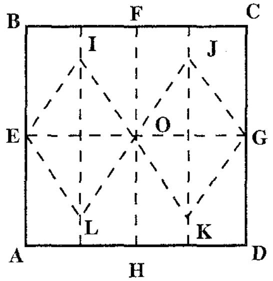
۱.۴.۴.۵.۱. رسم شش ضلعی منتظم با تا کردن کاغذ

۲۵۵. الف. مربع ABCD را طوری تا بزنید که EG و FH مربع را به چهار مربع مساوی تقسیم کنند (شکل الف).



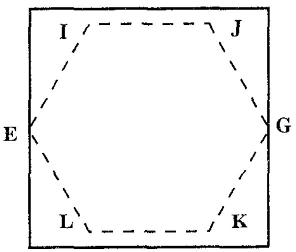
(الف)

ب. با رسم مثلثهای متساوی الاضلاع EOI، GOJ، GOK و EOL نقطه‌های I، J، K و L را مشخص کنید.



(ب)

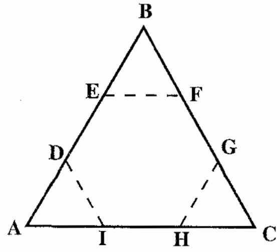
ج. اینک شش ضلعی EIJGKL را تا بزنید. (شکل ج)



(ج)

د. روش ساده‌تر رسم شش ضلعی منتظم، این است که سه گوشهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع را روی مرکز آن تا کنید (شکل د). مساحت مثلث ABC را با مساحت شش ضلعی

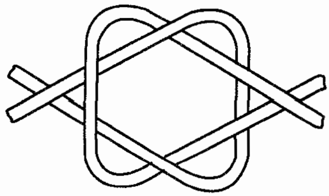
DEFGHI مقایسه کنید.

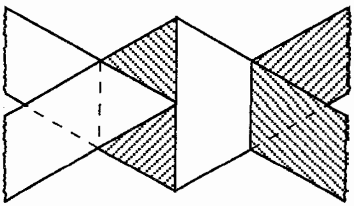


(د)

۲.۴.۴.۵.۱. رسم شش ضلعی منتظم با گره زدن کاغذ

۲۵۶. دو نوار کاغذی هم‌عرض آماده کنید. مانند شکل الف آنها را گره بزنید. انتهای هر نوار را به داخل حلقهٔ دیگر برگردانید. گره را سفت و ردها را صاف کنید و نوارهای اضافی را ببرید.

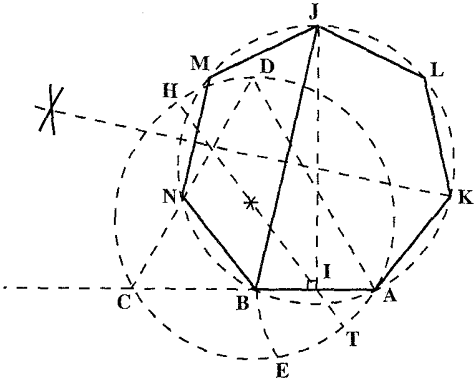

(الف)


(ب)

۵.۵.۱. رسم هفت‌ضلعی منتظم

۱.۵.۵.۱. رسم هفت‌ضلعی منتظم با معلوم بودن اندازهٔ ضلع

۲۵۷. روش ابوالوفاء بوزجانی. می‌خواهیم بر خط AB هفت‌ضلعی متساوی‌الاضلاع رسم کنیم. ابتدا خط AB را به اندازه خودش تا نقطهٔ C امتداد می‌دهیم و بر خط AC مثلث متساوی الاضلاع ACD را رسم می‌نماییم. سپس دایرهٔ محیطی این مثلث را رسم می‌کنیم (چنان که بعداً بیان خواهیم کرد). بعد از نقطه A وتر AE را معادل خط AB می‌کشیم و آن را در نقطهٔ T نصف می‌کنیم و خط عمودمنصف آن را می‌کشیم و امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ محیطی را در نقطه H قطع نماید. حال خط AB را در نقطهٔ I به دو نیم



تقسیم می‌کنیم و خط عمودمنصف آن را به اندازهٔ طول HT امتداد می‌دهیم و نقطهٔ J را مشخص می‌نماییم، حال بر سه نقطهٔ J ، B و A دایره‌ای رسم می‌کنیم (چنان که بعداً گفته می شود) و در این دایره قوسهای MJ ، LJ ، KL ، AK ، NM و BN را مساوی قوس AB جدا می‌نماییم و با رسم وتر این قوسها، هفت‌ضلعی BNMJLKA به‌دست می‌آید.

۱.۵.۵.۲. رسم هفت‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R

۲۵۸. این مسألهٔ ارشمیدس، یعنی رسم یک هفت‌ضلعی منتظم، در واقع، چهارمین مسألهٔ مشهور دنیای قدیم است. به‌جز این، سه مسأله مشهور دیگر هم وجود دارد: تضعیف مکعب، تثلیث زاویه و تربیع دایره.

ارشمیدس، توانست هفت‌ضلعی منتظم را، به‌کمک خط‌کش و پرگار، رسم کند. او از پیش قضیه‌ای استفاده کرد که، برای حل آن، باید از حل معادلهٔ درجهٔ سومی استفاده کرد که، در محدودهٔ رادیکالهای با فرجهٔ ۲ قابل حل نیست و بنابراین، نمی‌توان ریشه‌های آن را، به کمک خط‌کش و پرگار، رسم کرد.

به این ترتیب، ارشمیدس هم می‌دانست که مسألهٔ رسم هفت‌ضلعی منتظم را، نمی‌توان به‌طور کامل و دقیق، تنها به‌کمک خط‌کش و پرگار و بدون استفاده از وسیله‌های دیگر، حل کرد.

به این حکم، که هفت‌ضلعی منتظم را نمی‌توان به یاری خط‌کش و پرگار رسم کرد، می‌توان به‌کمک سنگ محک گوس، قانع شد. طبق این معیار (یا سنگ محک)، اگر n عددی اوّل باشد، برای این که بتوان n ضلعی منتظم را به یاری خط‌کش و پرگار رسم کرد، لازم و کافی است که عدد n به صورت $2^{2^k}+1$ باشد.

عدد ۷ را نمی‌توان به‌صورت $2^{2^k}+1$ نوشت و، بنابراین، رسم هفت‌ضلعی منتظم، تنها به یاری خط‌کش و پرگار، ممکن نیست. در واقع، هفت‌ضلعی منتظم را می‌توان به تقریب

و با هر اندازه دقت لازم، رسم کرد (به کمک خط‌کش و پرگار) و اگر بخواهیم، رسم هفت‌ضلعی منتظم به‌طور دقیق انجام شود، باید به‌جز خط‌کش و پرگار، از وسیله‌های دیگری هم (مثل گونیای دو قائمه) استفاده کرد. برای رسم تقریبی هفت‌ضلعی منتظم، مثلاً می‌توان به این ترتیب عمل کرد: ضلع هفت‌ضلعی منتظم محاط در دایره، به تقریب برابر است با نصف ضلع سه‌ضلعی منتظم محاط در همین دایره. در واقع، به‌ازای $r = ۱$ داریم:

$$a_{۷} = ۲\sin\frac{۳۶۰^\circ}{۱۴} \approx ۰/۸۶۸$$

از طرف دیگر

$$\frac{a_{۳}}{۲} = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \approx ۰/۸۶۷$$

و همان‌طور که دیده می‌شود، خطای این تقریب از ۰/۳٪ تجاوز نمی‌کند.

مسألهٔ رسم هفت‌ضلعی منتظم، منجر به حل این معادله می‌شود:

$$x^{۷} - ۱ = ۰$$

در صفحه بعد نشان می‌دهیم که این معادله، به‌کمک رادیکالهای با فرجهٔ ۲ قابل حل نیست. ریشه‌های هفتم واحد (به‌جز ۱) در معادلهٔ صفحه بعد صدق می‌کنند:

$$x^{۶} + x^{۵} + x^{۴} + x^{۳} + x^{۲} + x = -۱ \qquad (۱)$$

که در آن $x = \cos\frac{۲\pi}{۷} + i\sin\frac{۲\pi}{۷}$.

چون $x^{۷-k} = x^{-k}$، بنابراین، معادله را می‌توان چنین نوشت:

$$x + x^{-۱} + x^{۲} + x^{-۲} + x^{۳} + x^{-۳} = -۱ \qquad (۲)$$

فرض می‌کنیم:

$$x + x^{-۱} = y \qquad (۳)$$

آن وقت

$$x^{۲} + x^{-۲} = y^{۲} - ۲ \qquad (۴)$$

$$x^{۳} + x^{-۳} = y^{۳} - ۳y \qquad (۵)$$

معادلهٔ (۲)، به کمک رابطه‌های (۳)، (۴) و (۵) به این صورت درمی‌آید:

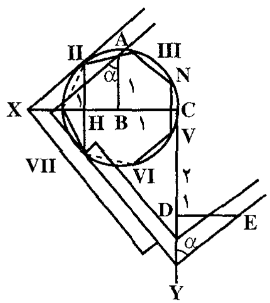
$$y^{۳} + y^{۲} - ۲y - ۱ = ۰ \qquad (۶)$$

به این ترتیب، مسأله منجر به حل معادلهٔ درجهٔ سوم (۶) می‌شود که می‌دانیم به‌کمک رادیکالهای با فرجهٔ ۲، قابل حل نیست. در نتیجه، مسألهٔ مربوط به رسم هفت‌ضلعی منتظم را نمی‌توان به‌یاری خط‌کش و پرگار حل کرد.

با وجود این، معادلهٔ (۶)، و بنابراین مسألهٔ رسم هفت‌ضلعی منتظم، به کمک گونیای دو قائمه قابل حل است. یادآوری می‌کنیم که

$$y = x + x^{-1} = (\cos\frac{2\pi}{7} - i\sin\frac{2\pi}{7}) + (\cos\frac{2\pi}{7} - i\sin\frac{2\pi}{7}) = 2\cos\frac{2\pi}{7}$$

بنابراین، اگر دو رأس هفت‌ضلعی را، یک درمیان، به هم وصل کنیم، وتری به‌دست می‌آید که فاصلهٔ مرکز دایره از آن، برابر $\frac{y}{2} = \cos\frac{2\pi}{7}$ می‌شود.



اکنون، معادلهٔ (۶) را به کمک رسم حل می‌کنیم. برای این منظور، خط شکستهٔ ABCDE را می‌کشیم (شکل)، به‌نحوی که $AB \perp BC$ ، $BC \perp CD$ و $CD \perp DE$، و ضمناً $AB = 1$ ، $BC = 1$ ، $CD = 2$ و $DE = 1$ باشد (۱، ۱، ۲، ۱، قدر مطلق ضریبها در معادلهٔ (۶) هستند).

حالا، گونیای دو قائمه را، آن‌طور که در شکل می‌بینید، قرار می‌دهیم و به اصطلاح، خط شکستهٔ مقعر AXYE را رسم می‌کنیم. با محاسبه معلوم می‌شود که $XB = y$ (جواب مورد نظر). این محاسبه را انجام می‌دهیم. زاویهٔ XAB را α می‌نامیم، در این صورت داریم :

$$XB = \operatorname{tg}\alpha$$

$$CY = XC\operatorname{tg}\alpha = (XB + 1)\operatorname{tg}\alpha$$

$$= (\operatorname{tg}\alpha + 1)\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha$$

$$CY = 2 + DY = 2 + \operatorname{cotg}\alpha = 2 + \frac{1}{\operatorname{tg}\alpha} = \frac{2\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha}$$

از برابر قرار دادن دو مقداری که برای CY به‌دست آمد، نتیجه می‌شود :

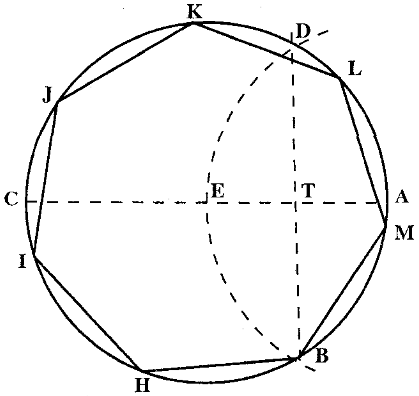
$$\frac{2\operatorname{tg}\alpha + 1}{\operatorname{tg}\alpha} = \operatorname{tg}^2\alpha + \operatorname{tg}\alpha$$

$$\mathrm{tg}^{۳}\alpha + \mathrm{tg}^{۲}\alpha - ۲\mathrm{tg}\alpha - ۱ = ۰$$

و دیده می‌شود که $\mathrm{tg}\alpha = XB$ ، در معادلهٔ (۶) صدق می‌کند.

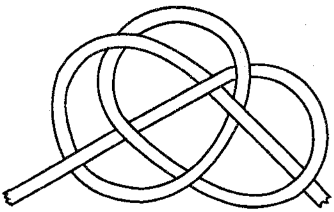
بنابراین، پاره‌خط XB را می‌توان به‌جای y درنظر گرفت. می‌دانیم $\frac{XB}{۲} = \frac{y}{۲}$ عبارت است از فاصلهٔ مرکز B تا وتری که دو رأس هفت‌ضلعی منتظم را، یک درمیان، به‌هم وصل کرده باشد. نقطهٔ H وسط XB را پیدا می‌کنیم و از آن‌جا، عمودی بر XB اخراج می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های II و VII قطع کند. به این ترتیب، دو رأس از رأسهای هفت‌ضلعی منتظم به‌دست می‌آید و، به کمک آنها، بقیهٔ رأسها هم، بسادگی، پیدا می‌شوند.

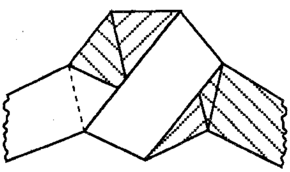
روش ابوالوفاء بوزجانی. اگر بخواهیم در دایرهٔ ABC هفت‌ضلعی متساوی‌الاضلاعی رسم نماییم، ابتدا قطر AC را می‌کشیم و سپس نقطهٔ A را مرکز قرار می‌دهیم و با همان فتح پرگار یعنی مساوی نصف قطر دایره، نقطه‌های B و D را نشان می‌کنیم و خط BD را رسم می‌کنیم تا قطر AC را در نقطهٔ T قطع نماید. حال به مرکز B و طول TB نقطهٔ H را نشان می‌کنیم، قوس BH مساوی یک هفتم محیط دایره (به تقریب نه به تحقیق) می‌باشد. پس چون دایره را بدین مقدار تقسیم و وترهای میان قسمتها را رسم نماییم هفت‌ضلعی MLKJIHB به‌دست می‌آید.



۳.۵.۵.۱. رسم هفت‌ضلعی منتظم با گره‌زدن کاغذ

۲۵۹. برای این فعالیت، به نوار بلند کاغذی که عرض یکسان دارد، نیاز دارید. نوار را مانند پنج‌ضلعی منتظم گره بزنید. امّا قبل از سفت کردن، یک سر نوار را زیر سر دیگر برده و



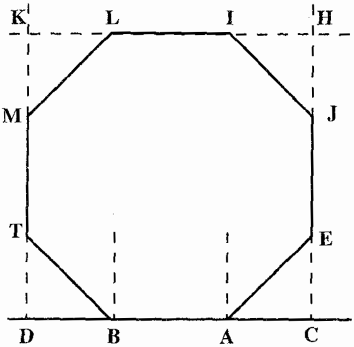


از وسط گره عبور دهید.

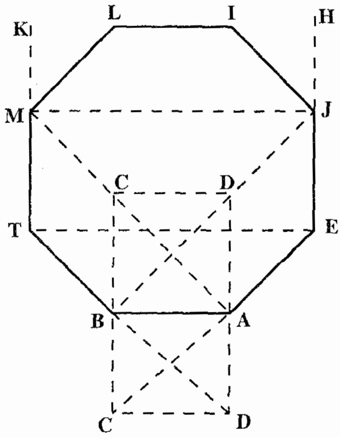
۱.۵.۶. رسم هشت‌ضلعی منتظم

۱.۵.۶.۱. رسم هشت‌ضلعی منتظم با معلوم بودن اندازهٔ ضلع

۲۶۰. **روشهای ابوالوفاء بوزجانی. روش اوّل.** می‌خواهیم بر خط AB هشت‌ضلعی متساوی‌الاضلاعی مساوی آن رسم نماییم. اوّل خط AB را از دو طرف ادامه می‌دهیم و بر هریک از نقطه‌های A و B زاویه‌ای مانند زاویه‌های CAE و DBT معادل نصف قائمه با آنها می‌سازیم. سپس خط AE و BT را مساوی AB جدا می‌کنیم و از نقطه‌های E و T دو عمود بر خط AB فرود می‌آوریم مانند CE و DT و بعد بر خط DC مربع HKDC را رسم می‌کنیم و خطهای IH ، JH ، LK و MK را معادل CE جدا می‌نماییم تا نقطه‌های J ، I ، L و M به‌دست آید، حال خطهای JI و LM را می‌کشیم تا هشت‌ضلعی ABTMLIJE حاصل شود.



روش دوم. اگر بخواهیم که این هشت‌ضلعی را با یک فتح پرگار رسم نماییم، اوّل پرگار را معادل طول خط AB باز می‌کنیم و تا اتمام رسم آن را ثابت نگه می‌داریم و سپس بر خط AB مربع ABCD را رسم می‌نماییم و بعد دو قطر AC و BD را رسم می‌کنیم و آنها را معادل طول AB تا نقطه‌های E و T امتداد می‌دهیم. سپس خط TE را رسم می‌نماییم و دو خط عمود JE و MT معادل خط AB را بر آن رسم می‌کنیم و خط MJ را می‌کشیم. حال زاویهٔ بین امتداد خطهای JE و MJ و همچنین زاویهٔ بین امتداد خط

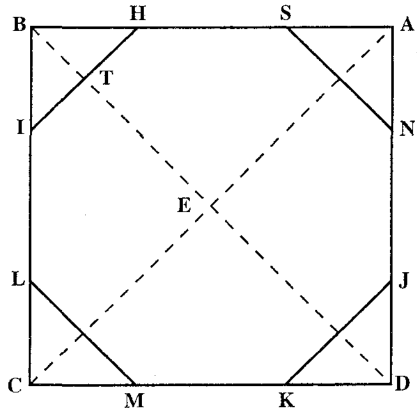


MT و JM را با دوخط JI و LM به دو نیمه تقسیم می‌نماییم و خط IJ و LM را مساوی خط AB جدا می‌کنیم و بالاخره با رسم خط LI هشت‌ضلعی متساوی‌الاضلاع و الزوایای EJILMTBA را کامل می‌نماییم.

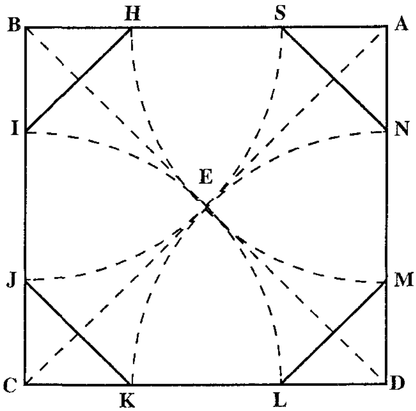
روش سوم. در این طرز کشیدن می‌توان مربع ABCD را در طرف داخل رسم کرد که در این صورت اوّل نقطه‌های J و M به‌دست می‌آید و برای کشیدن بقیهٔ ضلعها به همان نحوی که گفته شد عمل می‌کنیم (مطابق شکل قبل).

۱.۵.۶.۲. رسم هشت‌ضلعی منتظم با معلوم بودن مربع

۲۶۱. از کتاب هندسهٔ ایرانی. روش اول. اگر بخواهیم هشت‌ضلعی متساوی‌الاضلاعی در مربع مانند مربع ABCD محاط نماییم، اوّل هر دو قطر آن را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطهٔ E قطع نمایند. سپس به مرکز E و شعاع نصف ضلع مربع نقطهٔ T را روی قطر علامت می‌گذاریم، بعد به مرکز T و طول BT نقطه‌های H و I را نشان می‌کنیم. حال از هر رأس مربع به طول HB یا IB قطعه‌های SA ، NA ، JD ، KD ، MC و LC را تعیین می‌نماییم و خطهای HI، NS ، KJ و LM را می‌کشیم تا هشت‌ضلعی HILMKJNS به‌دست آید.



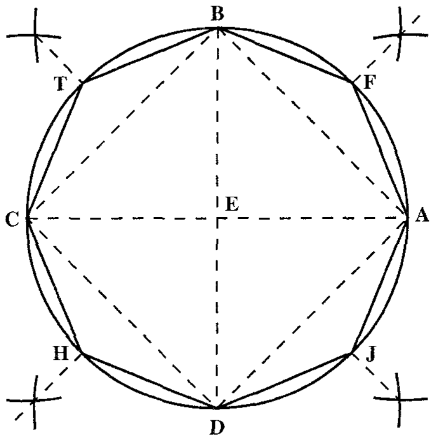
روش دوم. اگر بخواهیم با یک فتح پرگار به اندازهٔ نصف قطر، هشت‌ضلعی را رسم نماییم، هریک از چهار رأس (گوشه‌های) مربع را مرکز قرار می‌دهیم و به طول EA نقطه‌های H ، M ، N ، K ، L ، I ، S ، J را روی ضلعهای مربع تعیین و، خطهای SN ، HI ، KJ و LM را رسم می‌کنیم تا هشت‌ضلعی متساوی‌الاضلاع



به‌دست آید.

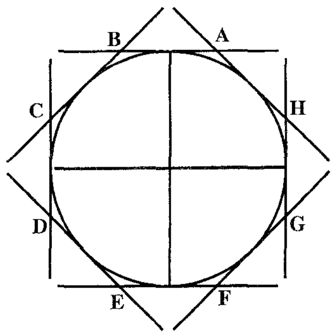
۱.۵.۶.۳. رسم هشت‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R

۲۶۲. **از کتاب هندسهٔ ایرانی.** اگر بخواهیم در دایره هشت‌ضلعی رسم کنیم اوّل مربعی رسم و، سپس هرکدام از قوسهای چهارگانه را به دو نیمه تقسیم می‌کنیم و وترها را می‌کشیم تا هشت‌ضلعی متساوی‌الاضلاع به‌دست آید. به عبارت دیگر اوّل دو قطر از دایره عمود بر یکدیگر رسم می‌کنیم تا دایره را به چهار قسمت مساوی تقسیم نماید. سپس منصف‌الزاویه‌های این چهار بخش را می‌کشیم تا دایره به هشت قسمت مساوی تقسیم شود. حال با اتصال نقطه‌های تقسیم هشت‌ضلعی منتظم را در دایره تکمیل می‌کنیم.



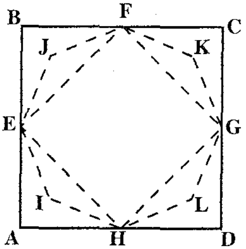
۱.۵.۶.۴. رسم هشت‌ضلعی منتظم محیط بر دایرهٔ به شعاع R

۲۶۳. محیط دایره را به هشت قسمت مساوی تقسیم کرده در نقطه‌های تقسیم مماسهایی بر دایره رسم می‌کنیم تا هشت‌ضلعی منتظم به‌دست آید.



۱.۵.۶.۵. رسم هشت‌ضلعی منتظم با تا زدن یا گره زدن کاغذ

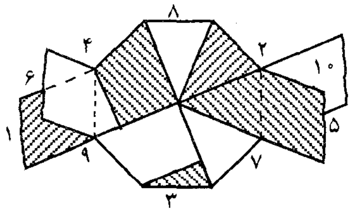
۱.۵.۶.۵.۱. رسم هشت‌ضلعی منتظم با تا زدن کاغذ

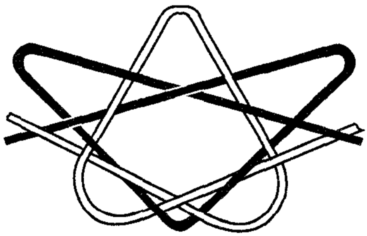


۲۶۴. نقطه‌های E ، F ، G و H وسط ضلعهای مربع ABCD را مشخص کنید. مربع محاطی EFGH را رسم کنید. نیمساز زاویه‌های بین ضلعهای مربع ABCD و EFGH را تا بزنید. چرا EJFKGLHI هشت‌ضلعی منتظم است؟ با دو یا سه قسمت کردن زاویه‌ها در مرکز مربع یا مثلث، می‌توان چندضلعیهای دیگری ساخت.

۲.۵.۶.۵.۱. رسم هشت‌ضلعی منتظم با گره‌زدن کاغذ

۲۶۵. دو نوار کاغذی هم عرض آماده کنید.
ابتدا مانند پنج‌ضلعی، با یک نوار کاغذ، یک گره شل بزنید. در شکل پایین، این گره با نوار هاشورخورده که از ۱، ۲، ۳، ۴ و ۵ عبور کرده نشان داده شده است. با نوار دوم از قسمت ۶ شروع نمایید، از روی ۱ و ۲ و سپس ۳ و ۴ عبور کنید. در قسمت ۷ دور بزنید. از پشت ۴ و ۵ و سپس ۱ و ۲ عبور دهید و در قسمت ۹ دور بزنید. از روی ۳ و ۴ و از زیر ۷ و ۸ و سپس ۴ و ۵ عبور کنید تا در قسمت ۱۰ سر نوار بیرون بیاید. گره را سفت و ردها را صاف کنید. باقیماندهٔ نوارهای ۱، ۵، ۶ و ۱۰ را ببرید.

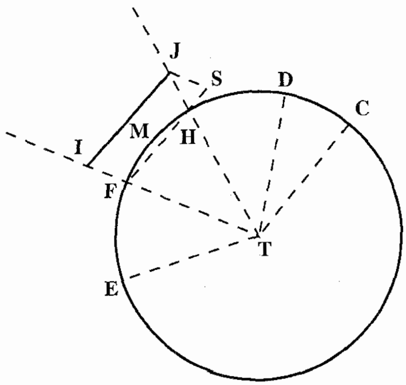


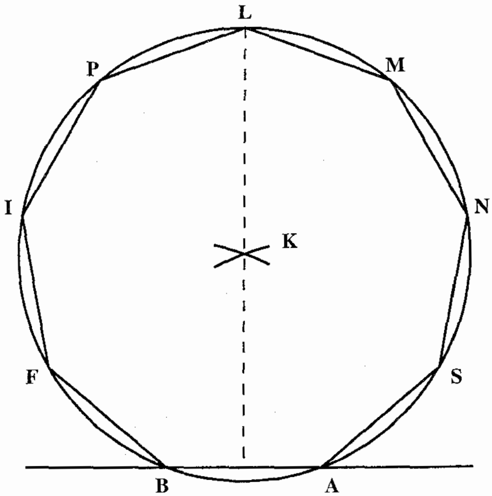


۱.۵.۷. رسم نه‌ضلعی منتظم

۱.۵.۷. ۱. رسم نه‌ضلعی منتظم با معلوم بودن اندازهٔ ضلع

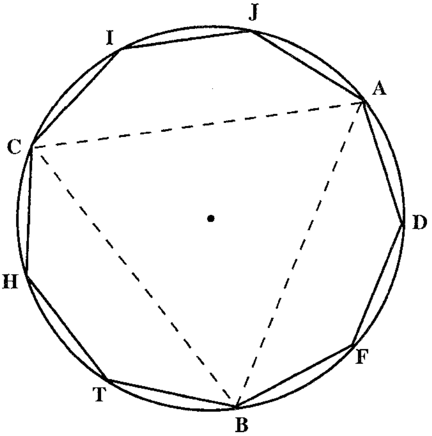
۲۶۶.روش ابوالوفاء بوزجانی.



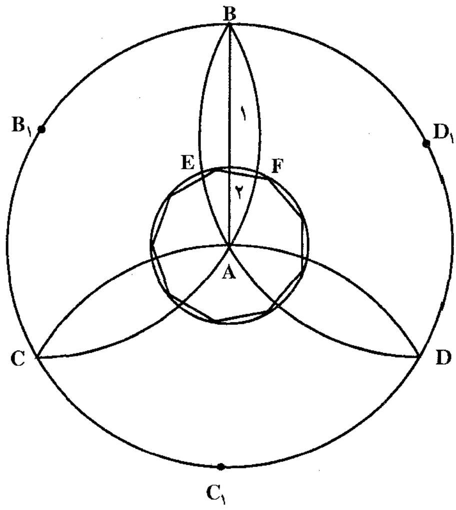


اگر بخواهیم بر خط AB نه‌ضلعی متساوی‌الاضلاع و الزوایا رسم نماییم، اوّل دایرهٔ دلخواه EDC را به هر شعاع که بخواهیم رسم می‌کنیم و نقطهٔ M را روی آن انتخاب و به طول نصف قطر دو نقطهٔ E و D را روی دایره نشان می‌نماییم و سپس قوس DE را به سه قسمت تقسیم می‌نماییم و ثلث آن را درنظر می‌گیریم و دو شعاع FT و HT را رسم می‌کنیم. سپس خط JI را در مثلث HTE چنان رسم می‌نماییم که موازی FH و مساوی AB باشد. حال به مرکز دو نقطهٔ A و B و طول TI دو قوس می‌کشیم تا یکدیگر را در نقطهٔ K قطع کنند و سپس نقطهٔ K را مرکز قرار می‌دهیم و دایرهٔ LBA را می‌کشیم و قوس BLA را به هشت قسمت مساوی تقسیم و وترهای آنها را رسم می‌کنیم تا با خط AB نه‌ضلعی متساوی‌الاضلاع و الزوایا به‌دست آید.

۱.۵.۷.۲. رسم نه‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R



۲۶۷. از کتاب هندسهٔ ایرانی.
اگر بخواهیم در دایره‌ای نه‌ضلعی منتظم رسم نماییم اوّل در دایره مثلث متساوی‌الاضلاع می‌کشیم و بعد هرکدام از قوسهای سه‌گانه را به سه قسمت مساوی تقسیم و وترهای نه‌گانه را رسم می‌کنیم تا نه‌ضلعی متساوی‌الاضلاع به‌دست آید.

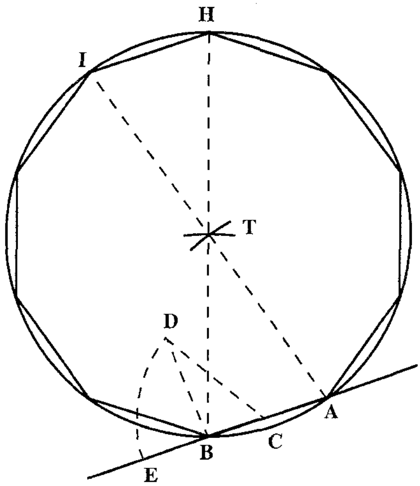


روش دیورر. به مرکز A دایرهٔ بزرگ را رسم می‌کنیم، سپس به همین شعاع و به مرکزهای B ، C ، و D (که دایره را به سه قسمت مساوی تقسیم کرده‌اند)، سه قوس می‌کشیم ؛ A را به B وصل و آن را به سه قسمت مساوی تقسیم می کنیم ؛ از نقطهٔ $\frac{1}{2}AB$ و نزدیک به A عمود EF را بر AB اخراج می‌کنیم ؛ پاره‌خط EF ضلع نه‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع $AE = AF$ خواهد بود. باید یادآوری کرد که این ترسیم هم تقریبی است.

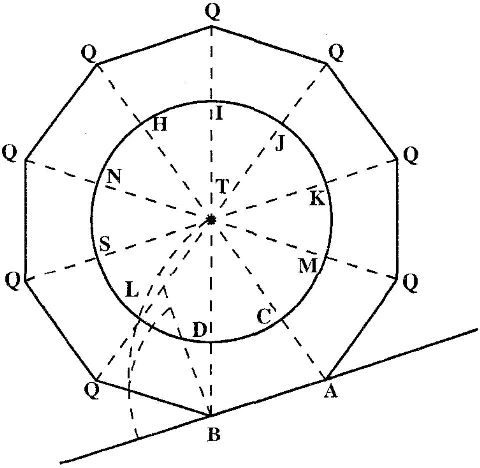
۸.۵.۱. رسم ده‌ضلعی منتظم

۸.۵.۱. ۱. رسم ده‌ضلعی منتظم با معلوم بودن اندازهٔ ضلع

۲۶۸. **روشهای ابوالوفاء بوزجانی. روش اول** . اگر بخواهیم بر خط AB ده‌ضلعی بسازیم، اوّل خط AB را در نقطهٔ C نصف می‌کنیم و از نقطهٔ B عمود BD را معادل AB اخراج نموده و به مرکز C وسط AB و شعاع DC نقطهٔ E را روی امتداد AB نشان می‌کنیم، سپس به مرکز نقطه‌های A و B و طول EA دو قوس رسم می‌نماییم تا یکدیگر را در نقطهٔ T قطع کنند. نقطهٔ T مرکز دایره‌ای است که ده‌ضلعی با ضلع AB محاط در آن می‌باشد. حال به مرکز T و شعاع BT دایره‌ای رسم می‌نماییم تا امتداد TA و TB را در دو نقطهٔ H و I قطع نماید، سپس هریک از دو قوس HA و IB را به چهار قسمت مساوی تقسیم می‌کنیم و وترهای این قوسها را می‌کشیم، ده‌ضلعی متساوی‌الاضلاع و الزوایا به‌دست می‌آید.

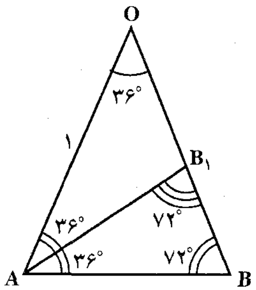


روش دوم. اگر بخواهیم بر خط AB ده ضلعی متساوی‌الاضلاعی و الزوایا رسم کنیم به‌طوری که فقط پرگار را به اندازهٔ خط AB باز نماییم، برای این کار اوّل مثلث پنج‌ضلعی روی خط AB را رسم و بعد به مرکز نقطهٔ T و شعاع AB دایره‌ای رسم می‌کنیم تا خطهای TA و TB را در نقطه‌های C و D



و امتداد آنها را در نقطه‌های I و H قطع نماید. حال هریک از دو قوس IC و HD را به چهار قسمت متساوی تقسیم و از مرکز دایره به این نقطه‌ها وصل می‌کنیم و آنها را به اندازهٔ فاصله CA امتداد می‌دهیم، چنانچه این نقطه‌ها را به یکدیگر وصل نماییم، ده‌ضلعی حاصل متساوی‌الاضلاع و الزوایا می‌باشد.

۱.۵.۸.۲. رسم ده‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R



۲۶۹. روش اول . طول ضلع ده‌ضلعی منتظم رابرحسب شعاع دایرهٔ محیطی آن، محاسبه می‌کنیم. برای این منظور، مثلث متساوی‌الساقین AOB را درنظر می‌گیریم که در آن، O مرکز ده‌ضلعی منتظم و AB یکی از ضلعهای آن است (شکل). در این‌صورت داریم :

$$A\hat{O}B = ۳۶^\circ \ , \ O\hat{A}B = ۷۲^\circ$$

$AB_۱$ ، نیمساز زاویهٔ OAB را رسم می‌کنیم. چون مثلثهای $OB_۱A$ و $B_۱AB$ متساوی الساقینند،بنابراین : $AB = AB_۱ = OB_۱$

OA =۱ و AB = x می‌گیریم. از تشابه مثلثهای AOB و $B_۱AB$ به‌دست می‌آید :

$$\frac{x}{۱-x} = \frac{۱}{x}$$

جواب مثبت این معادلهٔ درجه دوم $x = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ است. پاره‌خط راستی با این طول را می‌توانیم، به کمک پرگار و خط‌کش رسم کنیم. بنابراین، برای رسم ده‌ضلعی منتظم، کافی است دایره‌ای به شعاع واحد رسم کنیم و با آغاز از نقطه‌ای واقع بر محیط آن، به‌کمک پرگاری که به اندازهٔ $\frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ بازشده است، پشت سرهم رأسهای ده‌ضلعی منتظم را روی محیط دایره علامت بگذاریم.

یادداشت. در بسیاری از مسأله‌ها، با عدد $x = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۲}$ برخورد می‌کنیم. به‌عنوان مثال $\sin ۱۸^\circ = \frac{x}{۲} = \frac{\sqrt{۵}-۱}{۴}$.

عدد $\tau=\frac{1}{x}=\frac{\sqrt{5}+1}{2}$ را از زمانهای قدیم می‌شناخته‌اند و به «تقسیم طلایی» مربوط بوده است : اگر پاره‌خط راستی را به نسبت τ تقسیم کنیم، آن‌وقت، نسبت طول تمام پاره خط به بخش بزرگتر آن، برابر با نسبت بخش بزرگتر به بخش کوچکتر می‌شود. همین عدد، در رابطه با عددهای فیبوناچی هم به‌دست می‌آید.

برای علاقه‌مندان. امکان رسم n ضلعی منتظم بستگی به این دارد که، آیا عدد $\sin\frac{180^\circ}{n}$ به میدانی از عددهای ترسیم پذیر تعلق دارد یا نه. کارل فردریک گوس ثابت کرد، تنها وقتی می‌توان n ضلعی منتظم را رسم کرد که داشته باشیم :

$$n=2^k.n_1.n_2\cdots n_m$$

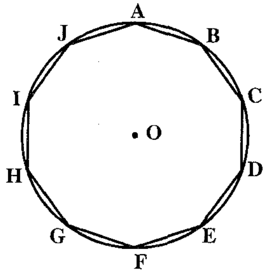
که در آن، عددهای n_i ، عددهای اوّل مختلفی به‌صورت $2^{2^l}+1$ هستند.

شرط بالا برای عدد n ، با شرط زیر هم‌ارز است : مقدار تابع $\varphi(n)$ اویلر، برابر توانی از ۲ می‌باشد. داریم $n=10$ و $\sin\frac{180^\circ}{n}=\frac{\sqrt{5}-1}{4}$ و مقدار $\varphi(10)$ تعداد عددهای کوچکتر از ۱۰ که نسبت به ۱۰ اوّلند، برابر است با $2^2=4$.

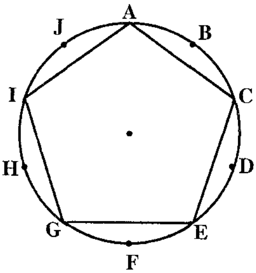
شرط $\varphi(n)=2^k$ را، به تقریب، می‌توان این‌طور روشن کرد. ضمن ساختمان هندسی به‌کمک پرگار و خط کش، هربار که نقطه‌های برخورد دو دایره یا یک دایره با خط راست را پیدا می‌کنیم، تعداد نقطه‌های حاصل دو برابر می‌شود. به این مناسبت، سر آخر، 2^l جواب به‌دست می‌آید. اکنون، فرض می‌کنیم، روشی کلی برای رسم یک n ضلعی منتظم پیدا کرده باشیم. آن وقت، طبق این روش کلی، نه‌تنها این n ضلعی را، بلکه درضمن هرخط شکستهٔ n ضلعی منتظم و بسته را هم می‌توانیم رسم کنیم. تعداد اینها برابر $\frac{1}{2}\varphi(n)$ است. بنابراین، $\varphi(n)$ باید توانی از ۲ باشد.

لازم و کافی بودن این شرط را، به‌طریق جبری ثابت می‌کنند.

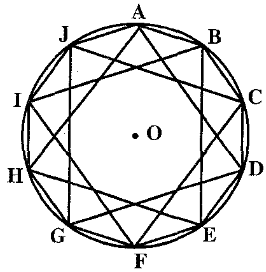
روش دوم. اگر دایره‌ای را به ده کمان متساوی تقسیم، و نقطه‌های تقسیم را به طور متوالی به‌هم وصل کنیم، ده‌ضلعی منتظم محدب به‌دست می‌آید و اگر نقطه‌های تقسیم را یک در میان به‌هم وصل کنیم، پنج‌ضلعی منتظم محدب حاصل می‌شود و اگر نقطه‌های تقسیم را ۳ به ۳ به هم وصل کنیم ده‌ضلعی منتظم ستاره‌ای به‌دست می‌آید و بالاخره، اگر نقطه‌های تقسیم را ۴ به ۴ به‌هم وصل کنیم، پنج‌ضلعی منتظم ستاره‌ای نتیجه می شود.



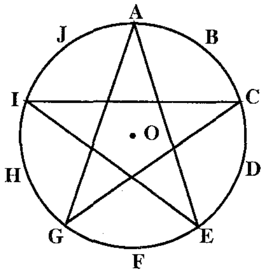
(الف) ده ضلعی محدب



(ب) پنج ضلعی محدب



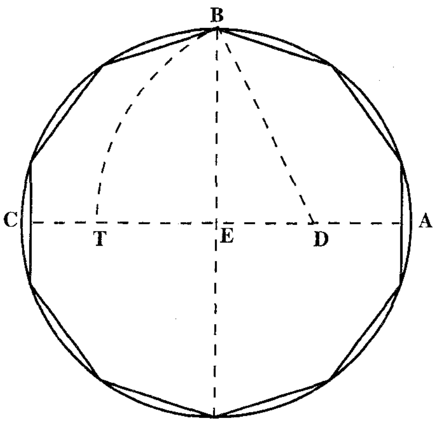
(ج) ده ضلعی ستاره‌ای



(د) پنج ضلعی ستاره‌ای

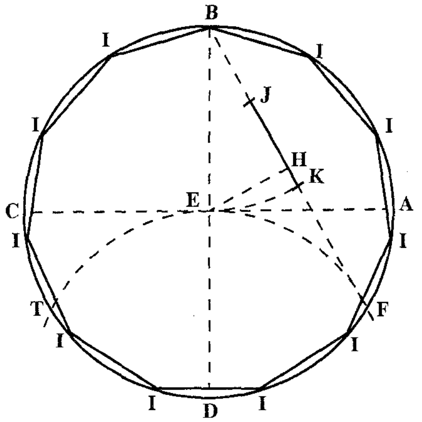
تبصره. چون اعداد صحیحی که از نصف ۱۰ یعنی ۵ کوچکتر و با ۱۰ اول هستند فقط ۱ و ۳ می‌باشند. پس یک ده‌ضلعی منتظم محدب و یک ده‌ضلعی منتظم ستاره‌ای وجود دارد.

روش سوم. روش ابوالوفاء بوزجانی. اگر بخواهیم که در دایره ده‌ضلعی رسم نماییم، همان‌طور که قبلاً در رسم پنج‌ضلعی متساوی‌الاضلاع گفته شد عمل می‌کنیم. در این عمل قطعه خط TE ضلع ده‌ضلعی یا وتر یک دهم محیط دایره می‌باشد و چون دایره را با آن فتح تقسیم نماییم به ده قسمت مساوی تقسیم شود که با رسم وتر آن قسمتها ده‌ضلعیی به‌دست آید که هر ضلع آن مساوی TE می‌باشد.



۹.۵.۱. رسم یازده‌ضلعی منتظم

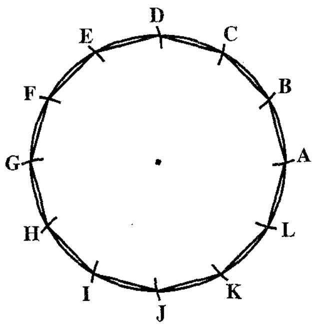
۲۷۰. از کتاب هندسهٔ ایرانی. دو قطر AC و BD را عمود بر یکدیگر رسم می‌نماییم. سپس به مرکز D و فتح پرگار مساوی شعاع دایره یا نصف قطر، دو نقطهٔ F و T را روی دایره نشان می‌کنیم. بعد خط FB را می‌کشیم و از مرکز دایره خطی بر خط FB عمود می‌نماییم و نقطهٔ تلاقی آن یعنی نقطهٔ H را تعیین می‌کنیم. حال قطعه خط BH را در نقطهٔ J نصف می‌نماییم و بعد به مرکز B و فتح پرگار مساوی شعاع دایره قوسی رسم می‌کنیم تا خط BF را در نقطهٔ K قطع نماید. قطعه خط KJ معادل طول یازده ضلعی محاط در دایره می‌باشد و با تقسیم دایره بر این فتح و کشیدن وتر قوسهای تقسیم شده، یازده‌ضلعی متساوی‌الاضلاع به‌دست می‌آید.



۱۰.۵.۱. رسم دوازده‌ضلعی منتظم

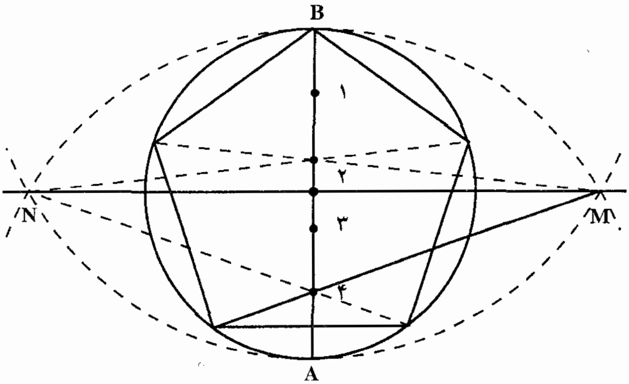
۱.۱۰.۵.۱. رسم دوازده‌ضلعی منتظم با معلوم بودن شعاع دایرهٔ محیطی

۲۷۱. دایرهٔ محیطی دوازده‌ضلعی منتظم را C(O,R) می‌نامیم، محیط این دایره را به شش‌قسمت برابر تقسیم می‌کنیم. سپس هریک از کمانهای به‌دست آمده را به دو کمان مساوی تقسیم می‌نماییم تا محیط دایره به ۱۲ قسمت برابر تقسیم شود. نقطه‌های تقسیم را به‌طور متوالی به‌هم وصل می‌کنیم تا دوازده‌ضلعی منتظم محاط در دایره رسم شود.

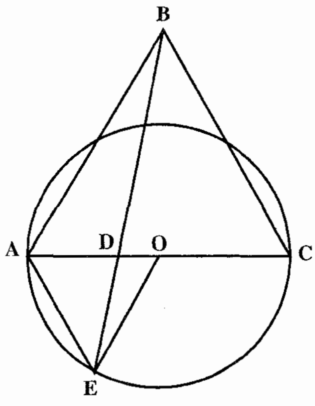


۱.۵.۱۱. رسم سیزده‌ضلعی منتظم

۲۷۲. **روش اول. روش کلی تقسیم یک دایره به چند قسمت مساوی.** قطر AB را رسم می‌نماییم و به مرکز نقطه‌های A و B و به شعاع AB دو کمان رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در نقطه‌های M و N قطع نمایند. سپس قطر AB را به تعداد ضلعهای چندضلعی منتظمی که می‌خواهیم رسم کنیم تقسیم می‌نماییم. حال اگر از نقطه‌های M و N به نقطه‌های دوم و چهارم و ششم و ... (یعنی یک درمیان) وصل کرده امتداد دهیم تا دایره را قطع کنند، طول وترهای حاصل بین آنها معادل ضلع چندضلعی موردنظر است و برای به‌دست آوردن چندضلعی کافی است وترهای مربوطه را به یکدیگر وصل کنیم. برای رسم سیزده ضلعی منتظم کافی است قطر AB را به سیزده قسمت مساوی تقسیم کنیم.



روش دیگر تقسیم دایره به چند قسمت مساوی. روی قطر دایره مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را می‌سازیم. سپس روی قطر AC نقطهٔ D را چنان اختیار می‌کنیم که نسبت AD به AC مساوی نسبت عدد ۲ به تعداد ضلعهای چندضلعی باشد. به‌عبارت دیگر چنانچه قطر AC را به تعداد ضلعهای چندضلعی تقسیم کنیم نقطه D به فاصلهٔ دو قسمت از نقطهٔ A باشد. حال اگر از B به D وصل کنیم و آن را امتداد دهیم تا دایره را در E قطع کند وتر



AE مساوی ضلع چندضلعی می‌باشد.

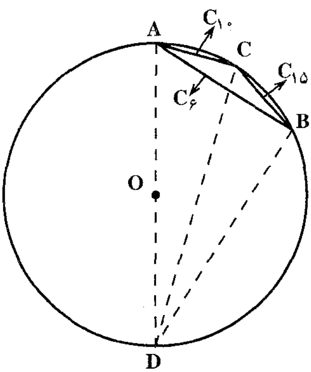
در این روش اشتباهات مطابق جدول زیر می‌باشد.

تعداد ضلعها	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹	۱۰	۲۰	۶۰	
زاویهٔ مرکزی	۱۲۰	۹۰	۷۲	۶۰	۵۱,۲۶″	۴۵	۴۰	۳۶	۱۸	۶	
درصد خطا	۰	۰	۰/۰۷	۰	۰/۱۷	۰/۱۴	–	۰/۹۷	۳/۵	۷/۲	

یعنی در تقسیمات ۵، ۷، ۸، ۱۰ خطا بین ۰/۰۷ تا یک درصد می‌باشد که برای کارهای عملی قابل توجه چندانی نیست ولی در تقسیمات بیشتر نیز درهرحال خطا از ده درصد تجاوز نمی‌کند.

۱۲.۵.۱. رسم پانزده‌ضلعی منتظم

۲۷۳. **ترسیم پانزده‌ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع R**. هر ضلع پانزده‌ضلعی منتظم محدب محاطی روبه‌روی کمانی از دایره که مساوی $\frac{۱}{۱۵}$ دایره می‌باشد واقع است، اما



$$\frac{۱}{۱۵}=\frac{۱}{۶}-\frac{۱}{۱۰}$$

و اگر در یک طرف قطر AD از دایره وترهای AB و AC را بترتیب مساوی با $C_۶$ و $C_{۱۰}$ رسم کنیم وتر BC ضلع پانزده‌ضلعی منتظم محدب محاطی خواهد بود (شکل). اگر بدین وسیله، دایره را به ۱۵ کمان متساوی تقسیم کنیم و نقطه‌های تقسیم را به‌طور متوالی یا ۲ به ۲ یا ۴ به ۴ یا ۷ به ۷ به‌هم وصل کنیم، پانزده‌ضلعی منتظم محدب و پانزده‌ضلعیهای منتظم ستاره‌ای به‌دست می‌آیند.

محاسبهٔ $C_{۱۵}$. قضیهٔ بطلمیوس را دربارهٔ چهارضلعی ACBD به‌کار می‌بریم. رابطهٔ زیر حاصل می‌شود:

$$AB\times CD=CB\times AD+AC\times BD \qquad (۱)$$

اما
$$AC = C_{۱۰} = \frac{R}{۲}(\sqrt{۵}-۱)\ ,\ \ AB = R\ ,\ \ AD = ۲R$$

و
$$CD = C'_{۵} = \frac{R}{۲}\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}\ ,\ \ BD = C_{۳} = R\sqrt{۳}$$

که چون در رابطهٔ (۱) قرار دهیم حاصل می‌شود :

$$C_{۱۵} = \frac{R}{۴}\left[\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}} - \sqrt{۱۵} + \sqrt{۳}\right]$$

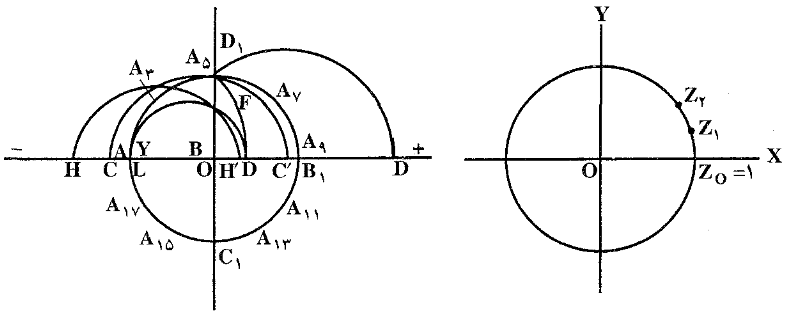
نکته. چون اعداد صحیحی که از نصف ۱۵ کوچکتر و با آن اوّل هستند عبارتند از ۱، ۲ ، ۴ و ۷ پس یک پانزده‌ضلعی منتظم محدب و سه پانزده‌ضلعی منتظم ستاره‌ای وجود دارد.

۱.۵.۱۳. رسم هفده‌ضلعی منتظم

۲۷۴. حل این مسأله، به این‌جا منجر می شود که محیط دایرهٔ به شعاع واحد را، به ۱۷ بخش برابر تقسیم کنیم. برای این‌منظور، باید بتوانیم نقطه‌های

$$Z_k = \cos\frac{۲k\pi}{n} + i\sin\frac{۲k\pi}{n}$$

را بسازیم (شکل الف)، که در آن، $i = \sqrt{-۱}$ ، $k = ۰,۱,۲,\cdots,۱۶$ و Z_k عبارت است از ریشه‌های معادلهٔ $Z^n - ۱ = ۰$.



(ب) (الف)

فرض می‌کنیم :

$$\varepsilon = \cos\frac{2\pi}{17} + i\sin\frac{2\pi}{17}$$

از آن‌جا، بنابر قانون مشهور مواور، خواهیم داشت :

$$\varepsilon^k = \cos\frac{2k\pi}{17} + i\sin\frac{2k\pi}{17}$$

که در آن $k=0,1,2$، ... و ۱۶ ریشه‌های معادله

$$z^{17} - 1 = 0$$

عبارتند از عددهای

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \varepsilon^3, \cdots, \varepsilon^{16}$$

همهٔ این ریشه‌ها، همان‌طور که از عبارتهای مربوط به آنها دیده می‌شود، باهم اختلاف دارند و رأسهای یک ۱۷ ضلعی منتظم محاط در دایرهٔ به شعاع واحد را تشکیل می‌دهند.
اکنون توجه می‌کنیم که :

$$\varepsilon^{17-k} = \varepsilon^{17}.\varepsilon^{-k} = 1\times\varepsilon^{-k} = \varepsilon^{-k}$$

بنابراین، ریشه‌های هفدهم واحد را، می‌توان به این صورت نوشت :

$$1, \varepsilon, \varepsilon^2, \cdots, \varepsilon^8, \varepsilon^{-8}, \cdots, \varepsilon^{-7}, \varepsilon^{-1}$$

می‌دانیم

$$z^{17} - 1 = (z-1)(z^{16} + z^{15} + \cdots + z^2 + z + 1)$$

بنابراین، همهٔ ریشه‌های هفدهم واحد، به جز ۱، باید در معادلهٔ زیر صدق کنند.

$$z^{16} + z^{15} + \cdots + z^2 + z + 1 = 0$$

یعنی

$$\varepsilon^{16} + \varepsilon^{15} + \cdots + \varepsilon^2 + \varepsilon + 1 = 0$$

یا

$$\varepsilon^{16} + \varepsilon^{15} + \cdots + \varepsilon^2 + \varepsilon = -1$$

و یا معادل آن

$$\varepsilon + \varepsilon^2 + \cdots + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-8} + \varepsilon^{-7} + \cdots + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-1} = -1$$

که می‌توان آن را چنین نوشت :

$$(\varepsilon + \varepsilon^2 + \varepsilon^4 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-4} + \varepsilon^{-8}) +$$
$$(\varepsilon^3 + \varepsilon^6 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^5 + \varepsilon^{-7}) = -1$$

جمله‌ها طوری تنظیم شده‌اند که، در هر پرانتز، هر جمله، از مجذور جملهٔ قبلی به‌دست آید. مجموع داخل پرانتزها را، بترتیب، با η و η_1 نشان می‌دهیم. در این صورت

$$\eta + \eta_1 = -1$$

حالا، اگر η و η_1 را درهم ضرب کنیم، به‌دست می‌آید :

$$\eta\eta_1 = -4$$

زیرا، ضمن عمل ضرب، از هر توان ε ، چهار بار پیدا می‌شود.

از دو رابطهٔ اخیر، معلوم می‌شود که η و η_1 ، ریشه‌های معادلهٔ درجهٔ دوم زیر هستند :

$$x^2 + x - 4 = 0 \qquad (1)$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید :

$$\eta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{17} \quad , \quad \eta_1 = -\frac{1}{2} - \frac{1}{2}\sqrt{17}$$

ضمناً $\eta > 0$ و $\eta_1 < 0$.

اکنون، همهٔ ریشه‌های هفدهم موهومی واحد را، به چهار گروه تقسیم می‌کنیم، به‌نحوی که در هرکدام از آنها، هر جمله، برابر با توان چهارم جملهٔ قبل باشد.

اگر مجموع جمله‌های گروهها را، بترتیب، z، z_1 ، z_2 و z_3 بنامیم، به این دستگاه می‌رسیم :

$$\begin{cases} \varepsilon + \varepsilon^4 + \varepsilon^{-1} + \varepsilon^{-4} = z \\ \varepsilon^2 + \varepsilon^8 + \varepsilon^{-2} + \varepsilon^{-8} = z_1 \\ \varepsilon^3 + \varepsilon^{-5} + \varepsilon^{-3} + \varepsilon^5 = z_2 \\ \varepsilon^6 + \varepsilon^7 + \varepsilon^{-6} + \varepsilon^{-7} = z_3 \end{cases} \qquad (*)$$

از این‌جا، بسادگی معلوم می‌شود :

$$\begin{cases} z + z_1 = \eta \\ z.z_1 = -1 \end{cases}$$

بنابراین، z و z_1 ، ریشه‌های معادلهٔ درجه دوم زیر هستند :

$$x^2 - \eta x - 1 = 0 \qquad (2)$$

و از آن‌جا

$$z = \frac{\eta}{2} + \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 1} \quad , \quad z_1 = \frac{\eta}{2} - \sqrt{\left(\frac{\eta}{2}\right)^2 + 1}$$

ضمناً $z > 0$ و $z_1 < 0$.

از همان دستگاه برابریهای (*) به‌دست می‌آید :

$$\begin{cases} z_2 + z_3 = \eta_1 \\ z_2 . z_3 = -1 \end{cases}$$

در این‌جا هم، z_2 و z_3 ، ریشه‌های این معادله‌اند :

$$x^2 - \eta_1 x - 1 = 0 \qquad (3)$$

از آن‌جا

$$z_2 = \frac{\eta_1}{2} + \sqrt{(\frac{\eta_1}{2})^2 + 1} \quad , \quad z_3 = \frac{\eta_1}{2} - \sqrt{(\frac{\eta_1}{2})^2 + 1}$$

ضمناً $z_2 > 0$ و $z_3 < 0$.

فرض می‌کنیم :

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y$$
$$\varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} = y_1$$

به‌دست می‌آید :

$$\begin{cases} y + y_1 = z \\ y . y_1 = z_2 \end{cases}$$

که در آنها، z عبارت است از ریشهٔ مثبت معادلهٔ (۲) و z_2 برابر است با ریشهٔ مثبت معادلهٔ (۳). y و y_1 ، ریشه‌های این معادله‌اند :

$$x^2 - zx + z_2 = 0 \qquad (4)$$

از آن‌جا

$$y = \frac{z}{2} + \sqrt{(\frac{z}{2})^2 - z_2} \quad , \quad y_1 = \frac{z}{2} - \sqrt{(\frac{z}{2})^2 - z_2}$$

ضمناً $y > y_1$ ، زیرا داریم :

$$y = \varepsilon + \varepsilon^{-1} = 2\cos\frac{2\pi}{17} \; , \; y_1 = \varepsilon^4 + \varepsilon^{-4} = 2\cos\frac{8\pi}{17}$$

اکنون، مقدار ε را، از معادلهٔ زیر به‌دست می‌آوریم :

$$\varepsilon + \varepsilon^{-1} = y \Rightarrow \varepsilon^2 - y\varepsilon + 1 = 0$$

از آن‌جا

$$\varepsilon = \frac{y}{2} + \sqrt{(\frac{y}{2})^2 - 1} \qquad (5)$$

علامت جلو رادیکال را، به‌این جهت، مثبت گرفته‌ایم که $y = 2\cos\frac{2\pi}{17}$ و بنابراین

$$\varepsilon = \frac{y}{2} + \sqrt{(\frac{y}{2})^2 - 1} = \frac{y}{2} + i\sqrt{1 - (\frac{y}{2})^2}$$

$$=\cos\frac{2\pi}{17}+i\sin\frac{2\pi}{17}=\varepsilon$$

رابطهٔ (۵) نشان می‌دهد که ریشهٔ هفدهم واحد را می‌توان به کمک رادیکالهای با فرجهٔ ۲ نشان داد و، بنابراین، می‌توان آن را به کمک خط‌کش و پرگار رسم کرد. به این ترتیب، به پرسش مربوط به رسم هفده‌ضلعی منتظم، به‌کمک خط‌کش و پرگار، پاسخ مثبت داده می‌شود. حالا، طریقهٔ رسم را نشان می‌دهیم. برای این منظور، این پاره‌خطها را می‌سازیم :

۱) $\eta=\frac{\sqrt{17}}{2}-\frac{1}{2}$,

۲) $\eta_1=-\frac{\sqrt{17}}{2}-\frac{1}{2}$,

۳) $z=\frac{\eta}{2}+\sqrt{(\frac{\eta}{2})^2+1}$,

۴) $z_2=\frac{\eta_1}{2}+\sqrt{(\frac{\eta_1}{2})^2+1}$,

۵) $y=\frac{z}{2}+\sqrt{(\frac{z}{2})^2-z_2}$

با رسم y ، دیگر محیط دایره، بسادگی، به ۱۷ بخش برابر تقسیم می‌شود. در واقع، همان‌طور که قبلاً دیدیم، $y=2\cos\frac{2\pi}{17}$ ، بنابراین، $\frac{y}{2}=\cos\frac{2\pi}{17}$ ، وتری از دایره است که دو رأس متوالی هفده ضلعی منتظم را، به هم وصل می‌کند. خود رسم، به این ترتیب انجام می‌شود (شکل ب) :

۱. دایرهٔ به شعاع واحد را درنظر می‌گیریم و قطرهای افقی و قائم A_1B_1 و D_1C_1 را رسم می‌کنیم ؛

۲. روی محوری که بر قطر A_1B_1 منطبق است، جهت از چپ به راست، یعنی از A_1 به B_1 را، جهت مثبت، و جهت عکس آن، یعنی از B_1 به A_1 (از راست به چپ) را جهت منفی می‌گیریم، به‌نحوی که در سمت راست صفر، پاره‌خطهای مثبت و در سمت چپ آن، پاره‌خطهای منفی واقع باشند ؛

۳. پاره‌خط $OB=-\frac{1}{4}$ را می‌سازیم ؛

۴. در این صورت داریم :

$$BD_۱ = \sqrt{OB_۱^۲ + OD_۱^۲} = \sqrt{۱ + \frac{۱}{۱۶}} = \frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$$

۵. به مرکز B و شعاع برابر $BD_۱$ دایره‌ای رسم می‌کنیم و محل برخورد آن را بامحور افقی، C و ′C می‌گیریم. در این صورت داریم :

$$BC' = \frac{\sqrt{۱۷}}{۴} \quad , \quad BC = -\frac{\sqrt{۱۷}}{۴}$$

۶. به مرکزهای ′C و C و بترتیب، با شعاعهای $CD_۱$ و CD ، دایره‌هایی رسم می‌کنیم تا محور افقی را، در نقطه‌های ′D و D قطع کنند ؛

۷. با توجه به شکل ب، به‌دست می‌آید :

$$OC = OB + BC = -\frac{۱}{۴} - \frac{۱}{۴}\sqrt{۱۷} = \frac{\eta_۱}{۲} \ ,$$

$$OC' = OB + BC' = -\frac{۱}{۴} + \frac{۱}{۴}\sqrt{۱۷} = \frac{\eta}{۲} \ ,$$

$$OD' = OC' + C'D' = \frac{\eta}{۲} + \sqrt{(\frac{\eta}{۲})^۲ + ۱} = z \ ,$$

$$OD = OC + CD = \frac{\eta_۱}{۲} + \sqrt{(\frac{\eta_۱}{۲})^۲ + ۱} = z_۲ \ ;$$

۸. نیمدایره‌ای به قطر $A_۱D$ رسم می‌کنیم، به‌نحوی که شعاع $OD_۱$ را، در نقطهٔ F ، قطع کند ؛

۹. به مرکز F و شعاع $FK = \frac{۱}{۲}OD'$ ، نقطهٔ K را علامت می‌گذاریم ؛

۱۰. به مرکز K و شعاع KF دایره‌ای رسم می‌کنیم تا محور افقی را در H و ′H قطع کند ؛

۱۱. در این‌صورت، داریم :

$$-OH + OH' = HH' = ۲KH' = OD' = z \ ,$$

$$-OH.OH' = OF^۲ = -OA_۱.OD = OD = z_۲$$

$(-OA_۱ = ۱)$. بنابراین، پاره‌خطهای OH− و ′OH ، ریشه‌های این معادله‌اند :

$$x^۲ - zx + z_۲ = ۰$$

و این، همان معادلهٔ (۴) است که ریشه‌های آن عبارتند از y و $y_۱$. به این ترتیب

$$y = -OH \ , \ y_۱ = OH' \quad (y > y_۱) \ ;$$

۱۲. y ، یعنی ریشهٔ بزرگتر را، درنظر می‌گیریم و این پاره‌خط را می‌سازیم :

$$OL = \frac{y}{۲} = \frac{-OH}{۲}$$

۱۳. عمودی از نقطهٔ L ، بر محور افقی، اخراج می‌کنیم تا دایره را در نقطه‌های $A_۱$ و $A_{۱۷}$ قطع کند ؛ ضمناً، کمان $A_۱A_۲$ برابر $\frac{۲\pi}{۱۷}$ و وتر آن، ضلع هفده ضلعی موردنظر است ؛

۱۴. برای رسم هفده ضلعی منتظم، کافی است کمان $A_۱A_۲$ را، پشت سرهم، روی محیط دایره جدا کنیم و نقطه‌هایی را که به‌دست می‌آید، به‌طور متوالی، به‌هم وصل کنیم.
همان‌طور که قبلاً هم یادآوری کردیم، گوس مسألهٔ مربوط به رسم هفده‌ضلعی منتظم را در ۱۹ سالگی حل کرد. مسألهٔ کلی امکان رسم n ضلعی منتظم، او را به اثبات این قضیهٔ مهم کشانید : «وقتی و تنها وقتی می‌توان n ضلعی منتظم را، به کمک خط کش و پرگار، رسم کرد که عدد n بتواند به این صورت درآید :

$$۲^m p_۱ \cdot p_۲ \cdots p_s$$

که در آن، $p_۱$ ، $p_۲$ ، ...، p_s عددهای اوّل مختلفی به‌صورت $۲^{۲^k}+۱$ هستند». در حالت خاص که n عددی اوّل باشد، شرط لازم برای این که بتوان n ضلعی منتظم را رسم کرد، این است که n به‌صورت $۲^{۲^k}+۱$ باشد.
عدد ۱۷، به‌همین صورت است (به ازای $k = ۲$) و بنابراین، هفده ضلعی منتظم، به‌کمک خط کش و پرگار، قابل رسم است. با همین استدلال، معلوم می‌شود که n ضلعیهای منتظم زیر را می‌توان رسم کرد :
ـ مثلث ($۲^{۲^k}+۱ = ۳$ به ازای $k = ۰$) ؛
ـ پنج‌ضلعی ($۲^{۲^k}+۱ = ۵$ به ازای $k = ۱$) ؛ و غیره.
بنابر قضیهٔ گوس نمی‌توان، مثلاً، هفت‌ضلعی منتظم را به‌کمک خط کش و پرگار رسم کرد، زیرا عدد ۷ را نمی‌توان به‌صورت $۲^{۲^k}+۱$ نوشت.

۱۴.۵.۱. رسم چندضلعی منتظم

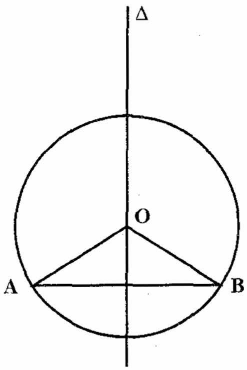
۲۷۵. دایرهٔ محیطی چندضلعی منتظم داده شده را رسم می‌کنیم. آن‌گاه در رأسهای چندضلعی منتظم داده شده، مماسهایی بر دایرهٔ محیطی رسم می‌نماییم. از تقاطع این خطهای مماس، چندضلعی منتظم محیط بر چندضلعی منتظم داده شده به‌دست می‌آید.

۱.۲. رسم دایره با معلوم بودن: نقطه؛ پاره خط، نیمخط، خط؛ زاویه؛ رابطهٔ متری

۱.۱.۲. رسم یک دایره با معلوم بودن: نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط، خط؛ ...

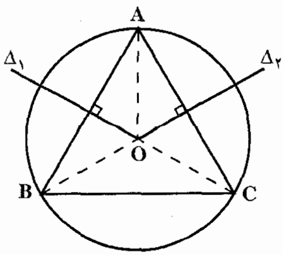
۱.۱.۱.۲. نقطه

۱.۱.۱.۱.۲. دو نقطه



۲۷۶. خط Δ و عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم و به مرکز نقطهٔ دلخواه O واقع بر Δ و به شعاع OA دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره از نقطهٔ B نیز می‌گذرد. مسأله بی‌شمار جواب دارد. یعنی بی‌شمار دایره می‌توان رسم کرد که بر دو نقطهٔ A و B می‌گذرند. مکان هندسی مرکز این دایره‌ها عمودمنصف پاره‌خط AB است.
کوچکترین این دایره‌ها دایره‌ای است که به قطر پاره‌خط AB رسم می‌شود. اگر شعاع دایره به سمت بینهایت میل کند، دایرهٔ نظیر آن به سمت خط راست AB میل می‌نماید؛ به همین علت، عده‌ای خط راست را دایرهٔ به شعاع بینهایت یا بخشی از دایرهٔ به شعاع بینهایت می‌خوانند.

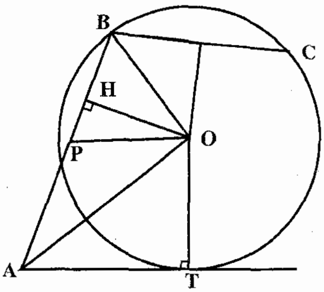
۲.۱.۱.۱.۲. سه نقطه



۲۷۷. سه نقطهٔ داده شده را A، B و C غیرواقع بر یک خط راست در نظر می‌گیریم. خطهای Δ_1 و Δ_2 عمودمنصفهای پاره‌خطهای AB و AC را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آنها را O می‌نامیم. از O به A، B و C وصل می‌کنیم. دایرهٔ به مرکز O و به شعاع $OA = OB = OC$ جواب مسأله است. (دایرهٔ محیطی

مثلث ABC)

تبصره. عمود منصف پاره خط BC نیز از نقطهٔ O می‌گذرد.



۲۷۸. **راه اول.** فرض می‌کنیم مسأله حل شده و دایرهٔ O جواب مسأله باشد، داریم $AT = l$. اگر شعاع دایره را R بنامیم، از مثلث قائم‌الزاویه OAT نتیجه می‌شود $OA^۲ = R^۲ + l^۲$. در مثلث OBA می‌توان نوشت :

$$OA^۲ - OB^۲ = ۲PH \times AB$$

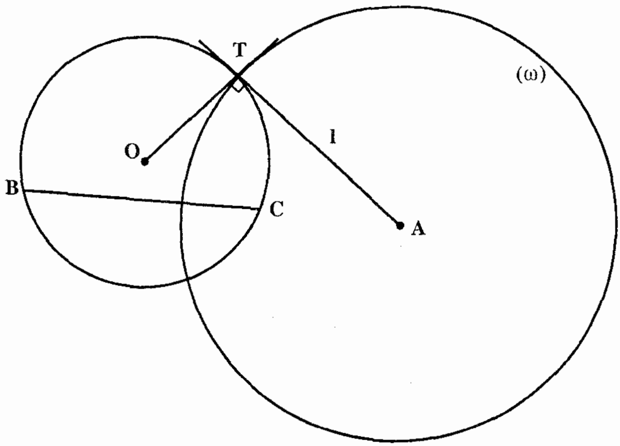
و یا

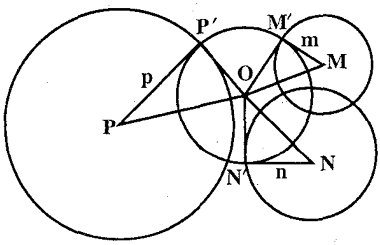
$$l^۲ = ۲PH \times AB$$

از این رابطه به کمک ترسیم، PH، در نتیجه نقطهٔ H به دست می‌آید. برای یافتن مرکز دایره، از H عمودی بر AB رسم می‌کنیم تا عمودمنصف BC را در O قطع کند.

راه دوم. اگر (O) دایرهٔ مطلوب گذرنده بر B و C باشد، که مماس رسم شده از A بر آن $AT = l$ باشد، در این صورت مثلث OTA در رأس T قائم‌الزاویه بوده و در نتیجه دایرهٔ به مرکز A و شعاع l بر دایرهٔ (O) عمود است و از آن‌جا حل مسأله چنین است :

به مرکز A و شعاع l دایرهٔ (ω) را رسم نموده دایره گذرنده بر B و C و عمود بر (ω)، دایرهٔ خواسته شده است.





۲۷۹. راه اول. اگر (O) دایرهٔ مطلوب باشد که اگر از نقطه‌های M، N و P بترتیب مماسهای MM' ، NN' و PP' بر آن رسم کرده باشیم، $MM' = m$ ، $NN' = n$ و $PP' = p$. در این حالت، چون شعاع بر خط مماس عمود است، پس مثلثهای OMM' ، ONN' و OPP' قائم‌الزاویه بوده و دایره‌های به مرکزهای M، N و P و شعاعهای m، n و p بر دایرهٔ (O) عمودند و در نتیجه حل مسأله چنین است :

به مرکزهای M، N و P و بترتیب به شعاعهای m، n و p دایره‌هایی رسم می‌نماییم. دایرهٔ عمود بر این سه دایره، دایرهٔ مطلوب است که مرکز آن، مرکز اصلی آنها، و شعاعش طول مماسی است که از مرکز اصلی بر آنها رسم می‌شود.

راه دوم. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و دایره O جواب مسأله باشد. در مثلثهای قائم‌الزاویه $MM'O$ و ONN' و OPP' می‌توان نوشت :

$$OM^2 = M'M^2 + OM'^2 = m^2 + R^2 \qquad (1)$$

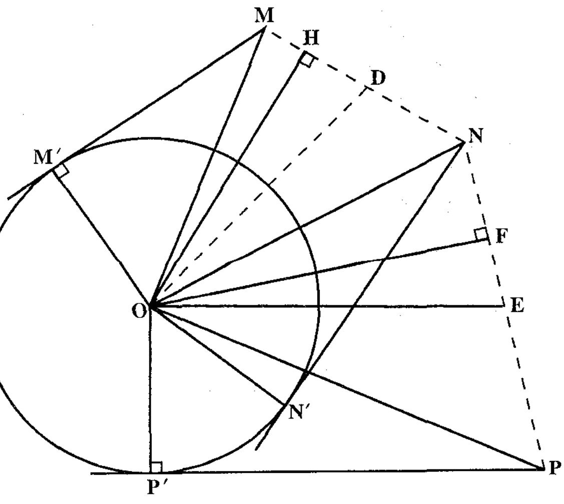
$$ON^2 = ON'^2 + NN'^2 = n^2 + R^2 \qquad (2)$$

$$OP^2 = OP'^2 + PP'^2 = l^2 + P^2 \qquad (3)$$

طرفین دو رابطهٔ (۱) و (۲) را از هم، و طرفین دو رابطهٔ (۲) و (۳) را نیز از هم کم می‌کنیم، داریم :

$$OM^2 - ON^2 = m^2 - n^2 \qquad (4)$$

$$OP^2 - ON^2 = l^2 - n^2 \qquad (5)$$



در مثلثهای OMN و OFP داریم :

$$OM^2 - ON^2 = 2MN \times HD \qquad (6)$$

$$OP^2 - ON^2 = 2EF \times NP \qquad (7)$$

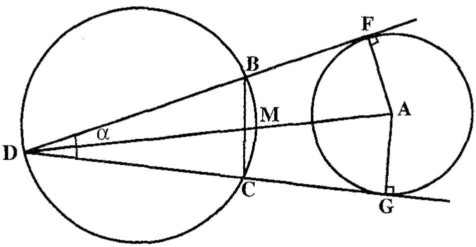
از مقایسه رابطه‌های (۴)، (۵)، (۶) و (۷) داریم :

$$2MN \times HD = m^2 - n^2 \Rightarrow HD = \frac{m^2 - n^2}{2MN}$$

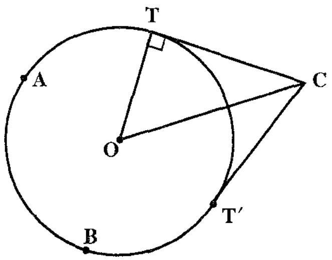
$$2EF \times NP = l^2 - n^2 \Rightarrow EF = \frac{l^2 - n^2}{2NP}$$

از رابطه‌های بالا طولهای HD و EF محاسبه می‌شوند، پس از یافتن نقطهٔ H و F، از این نقطه‌ها عمودهایی بر MN و NP رسم می‌کنیم تا همدیگر را در O قطع کنند. با معلوم بودن نقطهٔ (O)، طول OM و درنتیجه شعاع دایره نیز معین می‌گردد.

۲۸۰. کمان درخور زاویهٔ α روبه‌رو به پاره‌خط BC را رسم می‌کنیم. نقطهٔ A را به نقطهٔ M وسط کمان BC وصل می‌کنیم تا کمان درخور زاویهٔ α را در نقطهٔ D قطع کند. AD نیمساز زاویهٔ BDC است. به مرکز A و به شعاع فاصله‌اش از دو خط DB و DC یعنی $AG = AF$ دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره جواب مسأله است.



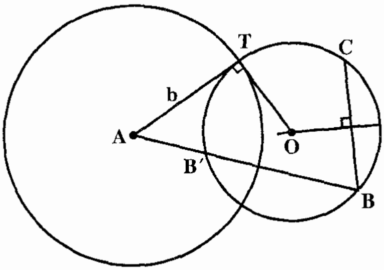
۲۸۱. فرض کنید (O) دایرهٔ مطلوب باشد که از دو نقطهٔ مفروض A و B می‌گذرد (شکل). اندازهٔ زاویهٔ بین مماسهای CT و CT′ که از نقطهٔ مفروض C بر (O) رسم می‌شوند مفروض است ؛ بنابراین، از مثلث قائم‌الزاویهٔ OTC زاویهٔ حادهٔ OCT را داریم ؛ به عبارت دیگر، شکل این مثلث معلوم است. پس نسبت $OT:OC$ و همچنین نسبتهای $OA:OC = OB:OC$ نیز معلومند. در نتیجه، دو مکان هندسی برای نقطهٔ O داریم (دو دایرهٔ آپولونیوس) و این نقطه را می‌توانیم بیابیم.



ترسیم. نقطهٔ دلخواه Q را روی نیمساز داخلی زاویهٔ مفروض P در نظر می‌گیریم و از

آن نقطهٔ عمود QR را بر یکی از دو ضلع زاویه رسم می‌کنیم. هر دو پاره‌خط مفروض AC و BC را به نسبت QR:QP، به صورت داخلی و خارجی تقسیم می‌کنیم، تا بترتیب نقطه‌های E، F و G، H به دست آید. هر نقطهٔ مشترک O بین دو دایره‌ای که EF و GH قطرهای آنها هستند مرکز دایرهٔ مطلوب است.

اثبات و بحث به خواننده واگذار می‌شود.



۲۸۲. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و دایرهٔ (O, R) جواب مسأله باشد. اگر از A مماس AT را بر دایره رسم کنید $AT^2 = b^2$ و از آن‌جا $AT = b$ است. بنابراین دایرهٔ به مرکز A و به شعاع b بر دایرهٔ O عمود است. (قوت مرکز دایرهٔ (A) نسبت به دایرهٔ (O) مساوی مربع شعاع خودش می‌باشد).

بنابراین اگر از A به B وصل کنیم و خط AB دایرهٔ (O) را در B′ قطع کند، داریم:

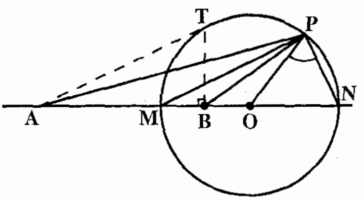
$$\overline{AB'}.\overline{AB} = b^2$$

پس
$$\overline{AB'} = \frac{b^2}{AB} = \text{مقدار معلوم}$$

بنابراین B′ نقطهٔ معلومی است. در نتیجه دایرهٔ جواب مسأله با سه نقطهٔ B′، B و C قابل رسم است.

پس برای حل مسأله کافی است نقطهٔ B′ را روی AB چنان پیدا کنیم که $\overline{AB'} = \frac{b^2}{AB}$ باشد. آن‌گاه بر سه نقطهٔ B، C و B′ دایرهٔ جواب مسأله را بگذرانیم.

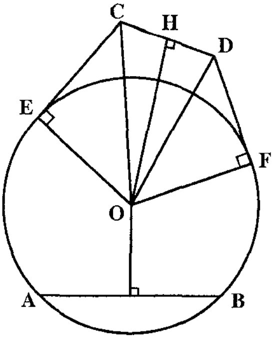
۲۸۳. اگر دایرهٔ به مرکز O و به شعاع OP جواب مسأله باشد قطری از دایره را که دو نقطهٔ A و B روی آن هستند MN می‌نامیم. (P_ABMN) تقسیم توافقی است و داریم: $\frac{PA}{PB} = \frac{MA}{MB} = \frac{NA}{NB} = k$. بنابراین برای حل مسأله روی خط AB دو نقطهٔ M و N را چنان انتخاب می‌کنیم که پاره‌خط AB را به نسبت $\frac{PA}{PB} = k$ تقسیم کنند. دایرهٔ به قطر MN که از P نیز می‌گذرد جواب مسأله است.



۲.۱.۱.۱.۳. چهار نقطه و بیشتر

۲.۱.۱.۱.۳.۱. چهار نقطه

۲۸۴. مسأله را حل شده می‌گیریم. داریم:



$$CE = DF \text{ و } OE = OF$$

$$\Rightarrow \Delta OEC \cong \Delta OFD \Rightarrow OD = OC$$

پس O روی عمودمنصف CD است. از طرفی O روی عمودمنصف AB است پس نقطهٔ برخورد این دو عمودمنصف است.

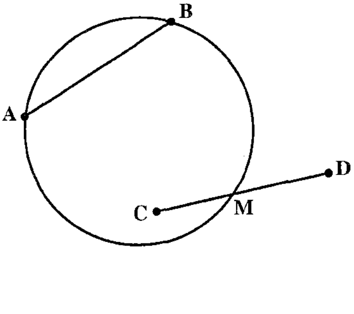
۲.۱.۱.۱.۳.۲. شش نقطه

۲۸۶. مسأله را حل شده و دایرهٔ $C(O,R)$ را جواب مسأله می‌گیریم. می‌دانیم دو نقطهٔ A و B در صورتی نسبت به یک دایره مزدوج هستند که روی یک قطر از دایره و امتداد آن قرارداشته باشند. از آن‌جا...

۲.۱.۱.۲. پاره‌خط، نیمخط، خط

۲.۱.۱.۲.۱. پاره‌خط

۲۸۷. نقطهٔ M را روی پاره‌خط CD چنان اختیار می‌کنیم که $\frac{MC}{MD} = \frac{۲}{۳}$ باشد. دایره‌ای که از سه نقطهٔ A، B و M می‌گذرد جواب مسأله است.



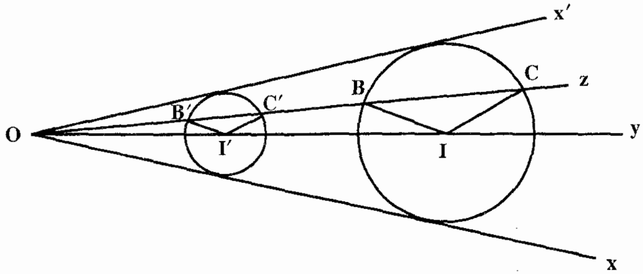
تبصره. اگر نقطهٔ N را روی پاره‌خط CD چنان اختیار کنیم که $\frac{ND}{NC} = \frac{۲}{۳}$ باشد، دایره‌ای که بر N، A و B بگذرد نیز جواب مسأله است.

۲.۱.۱.۲.۲. نیمخط

۲۸۸. چون مرکز دایره روی Oy است لذا Oy محور تقارن شکل است و Ox' قرینهٔ Ox نیز نسبت به Oy نیز بر دایرهٔ مفروض مماس است. حال مسأله را حل شده انگاشته و فرض

می‌کنیم I مرکز دایرهٔ مطلوب باشد و دایرهٔ اختیاری I' را که مماس بر Ox و بر Ox' است، رسم می‌کنیم، نقطهٔ O مرکز تجانس دو دایره I و I' است.

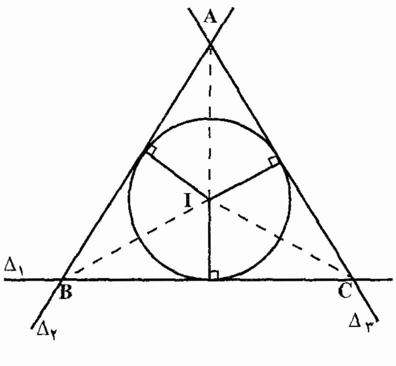
$I'B' \| IB$ و $I'C' \| IC$ است، پس از تشابه مثلثهای BIC و $B'I'C'$ حاصل می‌شود $\frac{I'C'}{IC} = \frac{B'C'}{BC}$، پس $\frac{OI'}{OI} = \frac{B'C'}{BC}$، پس OI جزء چهارم تناسب بین طول‌های معلوم $B'C'$، BC و OI است. پس از تعیین OI نقطهٔ I و لذا دایرهٔ مطلوب مشخص می‌شود.



۲.۱.۱.۲.۳. خط

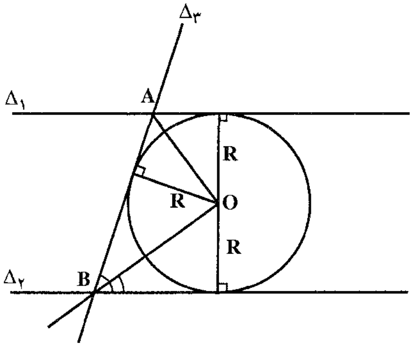
۲۸۹. سه خط Δ_1، Δ_2 و Δ_3 را در نظر می‌گیریم. سه حالت در نظر می‌گیریم:

الف. اگر Δ_1، Δ_2 و Δ_3 دو به دو متقاطع باشند، از تقاطع آنها مثلث ABC به دست می‌آید. دایره‌های محاطی درونی و برونی این مثلث (چهار دایره) جواب مسأله‌اند. می‌دانیم که مرکز این دایره‌ها نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی یا درونی و برونی مثلث است. در شکل دایرهٔ محاطی درونی مثلث ABC رسم شده است.



ب. اگر دو خط Δ_1 و Δ_2 موازی باشند و خط Δ_3 آنها را در دو نقطهٔ A و B قطع کند، دایرهٔ جواب مسأله، دایره‌ای است که قطرش مساوی فاصلهٔ بین دو خط موازی Δ_1 و Δ_2 است و چون باید بر Δ_3 یعنی AB نیز مماس باشد مرکز آن محل برخورد نیمسازهای

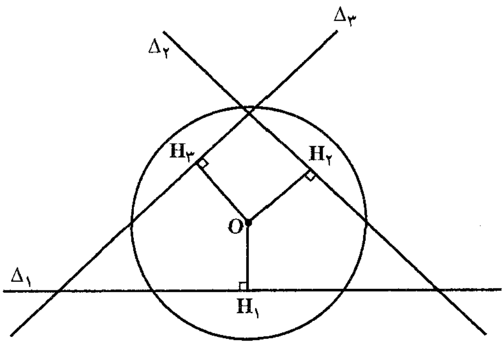
دو زاویهٔ A و B است. پس این نقطه را پیدا کرده به مرکز آن و به شعاع فاصله‌اش تا Δ_1 یا Δ_2 یا Δ_3 دایرهٔ جواب مسأله را رسم می‌کنیم.



پ. اگر $\Delta_1 \| \Delta_2 \| \Delta_3$ یعنی هر سه خط موازی باشند، مسأله جواب ندارد.

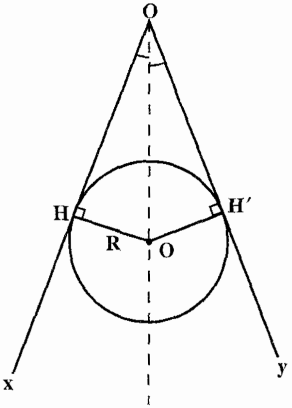
۲۹۰. مسأله را حل شده و دایرهٔ $C(O,R)$ را که با سه خط دوبه دو متقاطع Δ_1، Δ_2 و Δ_3 زاویهٔ α می‌سازند، جواب مسأله می‌گیریم. از O عمودهای OH_1، OH_2 و OH_3 را بترتیب عمود بر Δ_1، Δ_2 و Δ_3 رسم می‌کنیم. داریم:

$$OH_1 = OH_2 = OH_3 = R\cos\alpha$$



پس نقطهٔ O از سه ضلع مثلث حاصل از برخورد این سه خط به یک فاصله است. بنابراین O نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های مثلث حاصل از برخورد این سه خط است. بدیهی است که باید R ناکوچکتر از شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث حاصل از برخورد سه خط باشد.

۲.۱.۱.۳. زاویه



۲۹۱. فرض می‌کنیم دایرهٔ $C(O',R)$ یکی از جوابهای مسأله باشد. یعنی دایره‌ای باشد که بر دو ضلع زاویه مماس است. در این صورت $O'H = O'H' = R$ است ؛ یعنی نقطهٔ O' از دو ضلع زاویه به یک فاصله است. پس روی نیمساز زاویهٔ O قرار دارد.

مسأله بی‌شمار جواب دارد. یعنی بی‌شمار دایره می‌توان رسم کرد که بر دو ضلع این زاویه مماس باشند. برای محدود شدن تعداد جوابها لازم است یک شرط دیگر داده شود.

۲.۱.۱.۴. نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط، خط

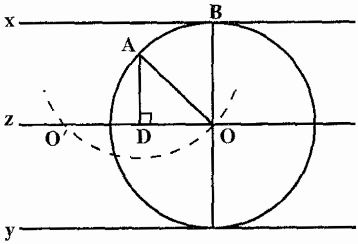
۲.۱.۱.۴.۱. نقطه، خط

۲.۱.۱.۴.۱.۱. یک نقطه، دو یا چند خط

۲.۱.۱.۴.۱.۱.۱. یک نقطه، دو خط

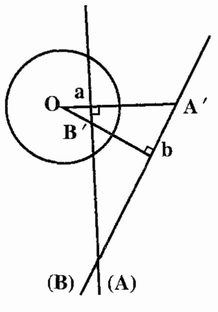
۲۹۲. از این ویژگی استفاده کنید که دایرهٔ خواسته شده از نقطهٔ P'، متقارن نقطه P نسبت به نیمساز زاویه‌ای که دو خط تشکیل می‌دهند، می‌گذرد.

۲۹۳. اگر O مرکز دایره‌ای باشد که از نقطهٔ A می‌گذرد و بر دو خط مفروض در B و C مماس است، BC قطری از دایره است که بر دو خط x و y عمود است، پس قطر دایرهٔ خواسته شده، مساوی فاصلهٔ بین دو خط موازی مفروض (۲d) است. مرکز دایرهٔ خواسته شده از طرفی روی خط z است که موازی x و y و به یک فاصله از آنهاست و ثانیاً روی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع d است. با مشخص شدن مرکز دایره و اندازهٔ شعاع آن دایره رسم می‌شود.



۲۹۴. دایرهٔ به مرکز O را چنان در نظر می‌گیریم که خطهای (A) و (B) نسبت به آن مزدوج باشند ؛ یعنی قطب یکی از آنها روی دیگری باشد.

عمود O_a که بر (A) رسم شود، (B) را در A' که قطب (A) است قطع می‌کند و



همچنین عمود O_b که بر (B) رسم شود (A) را در B' که قطب (B) است قطع می‌نماید.

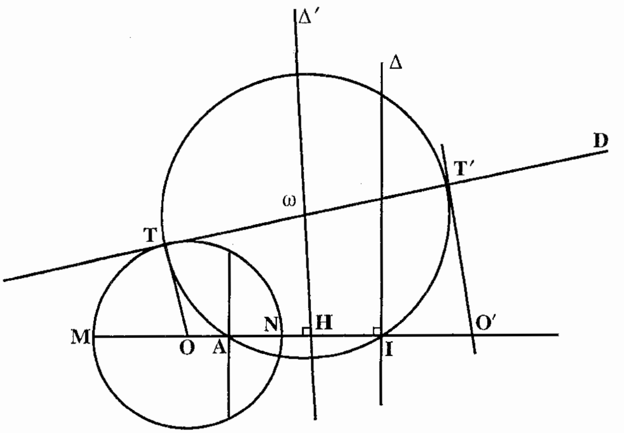
A' و B' مزدوجند و دایرهٔ (O) بر دایرهٔ به قطر $A'B'$ عمود است پس کافی است این دایره را رسم کنیم و سپس از O مماسی بر آن بکشیم. این مماس شعاع دایرهٔ (O) است (شکل). برای این که مسأله جواب داشته باشد، لازم است O در خارج دایرهٔ به قطر $A'B'$ واقع باشد؛ یعنی $O_a \times OA'$ مثبت باشد و برای این منظور لازم است که O در زاویهٔ منفرجه (A) و (B) قرار گیرد.

۲۹۵. اگر (O) دایرهٔ خواسته شده باشد که در نقطهٔ T بر خط D مماس بوده و Δ قطبی نقطهٔ A نسبت به آن دایره باشد در این صورت مرکز دایره (O) بر خطی واقع است که از A بر Δ عمود می‌شود و از آن‌جا اگر نقطهٔ تماس دایره با خط D معلوم باشد، می‌توان (O)، مرکز دایره را تعیین کرد. بدین طریق که از نقطهٔ تماس بر خط D عمود اخراج می‌کنیم تا عمود رسم شده از A بر Δ را قطع کند و چون A مزدوج توافقی I نسبت به MN می‌باشد، پس می‌توان نوشت:

$$\overline{OT}^2 = \overline{OM}^2 = \overline{ON}^2 = \overline{OA}.\overline{OI}$$

که در این حالت دایره گذرنده بر A، I و T بر دایرهٔ (O) عمود است و مرکزش بر D واقع می‌باشد و از آن‌جا حل مسأله چنین است:

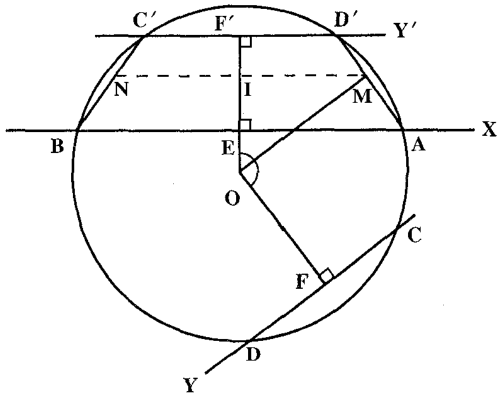
ابتدا از نقطهٔ A عمود AI را بر Δ وارد آورده و Δ' عمودمنصف AI را رسم می‌کنیم تا خط D را در (ω) قطع کند. دایرهٔ به مرکز ω و شعاع $R' = \omega I = \omega A$ دایره‌ای است که بر دایرهٔ (O) عمود است. نقطهٔ تقاطع این دایره با خط D، نقطه‌های T و T'، نقطه‌های

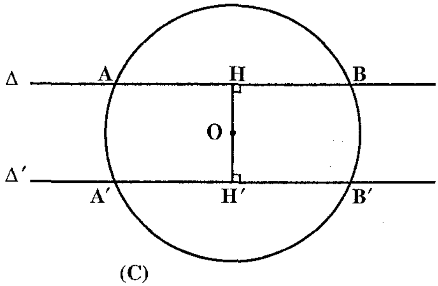


تماس می‌باشند و عمودهای رسم شده از T و T' بر خط D، خط AI را در نقطه‌های O و O' قطع می‌کنند. دایرهٔ به مرکز (O) و شعاع $R = OT$ و یا به مرکز (O') و شعاع $O'T' = R$ جواب مسأله است.

بحث. اگر عمود رسم شده از T یا T' بر D، خط AI را قطع کند، مسأله دارای جواب است، وگرنه مسأله جواب ندارد و همچنین لازم است که Δ' با D متقاطع باشد. در صورتی که $D\|\Delta$ باشد، T بر M منطبق بوده و در نتیجه A، I و M معلوم بوده و N مزدوج M نسبت به AI را تعیین کرده و (O) وسط MN مرکز و $OM = ON = R$ شعاع آن دایره است.

۲۹۶. مسأله را حل شده می‌گیریم و فرض می‌کنیم $AB + CD = a$ باشد دو عمود OE و OF را بر وترهای مزبور فرود می‌آوریم و خط Y حول نقطهٔ O به زاویهٔ FOE دوران می‌دهیم تا به وضع Y' موازی X درآید. در این حال CD به وضع $C'D'$ در می‌آید و داریم $AB + C'D' = a$. در ذوزنقهٔ متساوی‌الساقین $ABC'D'$، میانه MN برابر $\frac{AB + C'D'}{۲}$ و $\frac{a}{۴} = \frac{EA + F'D'}{۲} = IM$ است که طول معلومی دارد. پس برای حل مسأله خط Y را حول X دوران می‌دهیم تا موضع Y' موازی X درآید از O عمود EF' را بر X و Y' رسم می‌کنیم. از I وسط EF' خطی موازی X رسم می‌کنیم و در دو طرف I طولهای $IN = IM = \frac{a}{۴}$ را می‌سازیم. OM را وصل کرده، عمودی بر آن می‌کشیم تا خط X را در A که یک نقطه خواسته شده است قطع کند. (دایرهٔ به مرکز O و به شعاع OA جواب مسأله است)



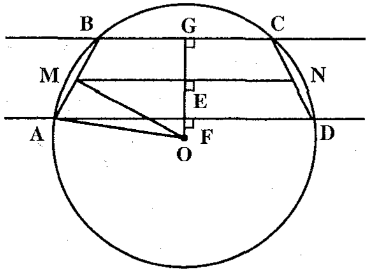


۲۹۷. نقطهٔ معلوم را O و دو خط متوازی را Δ و ′Δ می‌نامیم. دایرهٔ (C) را جواب مسأله می‌گیریم و نقطه‌های برخورد آن با Δ و ′Δ را بترتیب A و B ؛ و ′A و ′B می‌نامیم. از O عمودهای OH و ′OH را بر Δ و ′Δ رسم می‌کنیم. داریم :

$$AB + A'B' = 1 \Rightarrow \frac{AB}{۲} + \frac{A'B'}{۲} = \frac{1}{۲}$$

$$\Rightarrow AH + A'H' = \frac{1}{۲}$$

از آن‌جا...

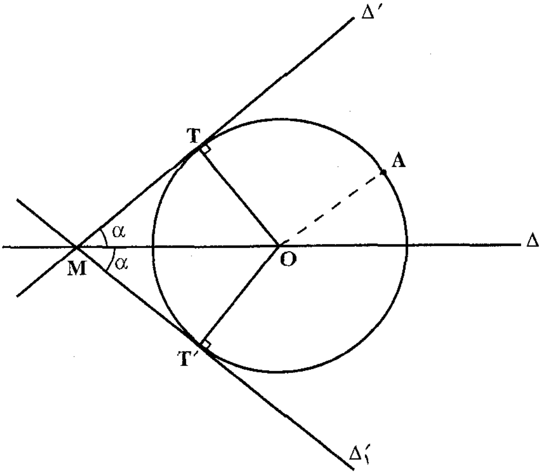


۲۹۸. فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد و ذوزنقهٔ ABCD جواب مسأله باشد. M و N را وسط ساقهای ذوزنقه می‌گیریم و عمود OFEG را بر قاعده‌ها رسم می‌کنیم. داریم :

$$\text{مساحت ذوزنقه} = MN.FG = k^۲ \Rightarrow MN = \frac{k^۲}{GF}$$

امّا GF که فاصلهٔ بین دو خط موازی داده شده است، معلوم است. پس MN معلوم می‌باشد. همچنین داریم $EM = \frac{k^۲}{۲GF}$. بنابراین با توجه به این که E وسط FG است نقطهٔ M را می‌توان مشخص کرد. پس برای رسم ذوزنقه، مرکز دایره یعنی نقطهٔ O را به M وصل می‌کنیم. سپس از نقطهٔ M خط AB را عمود بر OM رسم می‌کنیم. AO = BO شعاع دایرهٔ خواسته شده است و از آن‌جا ذوزنقه رسم می‌شود.

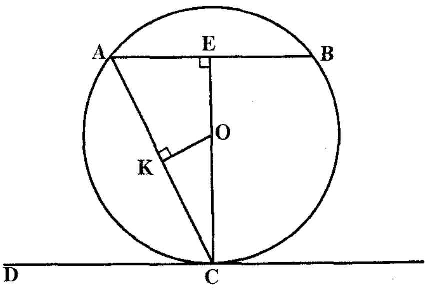
۲۹۹. مسأله را حل شده و دایرهٔ به مرکز O و به شعاع OA را جواب مسأله می‌گیریم. دایره‌ای که مرکزش روی Δ و مماس بر ′Δ باشد، بر قرینهٔ نقطهٔ A نسبت به خط Δ نیز می‌گذرد. بنابراین برای حل مسأله، نقطهٔ ′A قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به خط Δ پیدا می‌کنیم. حال باید دایره‌ای رسم کنیم که از دو نقطهٔ A و ′A می‌گذرد و بر خط ′Δ مماس است.



۲.۱.۱.۴.۱.۲. دو نقطه، یک یا چند خط

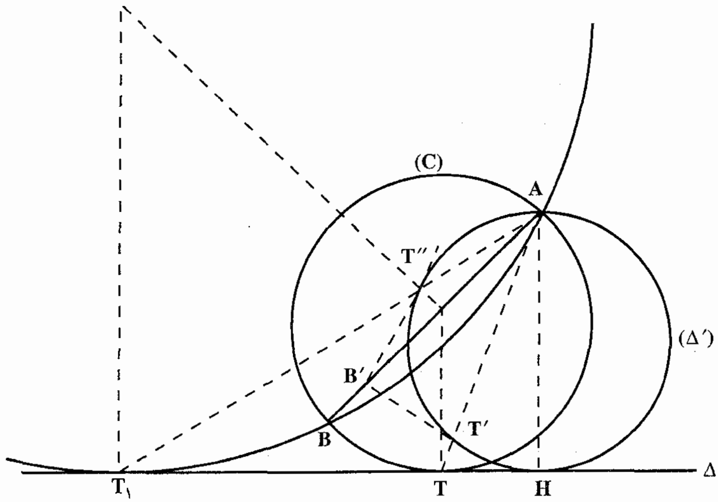
۲.۱.۱.۴.۱.۲.۱. دو نقطه، یک خط

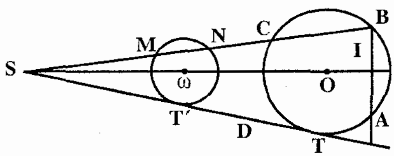
۳۰۰. فرض کنیم O مرکز دایره‌ای باشد که از A و B گذشته و در نقطهٔ C بر خط D مماس است. چون AB با مماس DC موازی است شعاع CO بر AB عمود است و از نقطهٔ E وسط آن می‌گذرد. پس برای حل مسأله کافی است، عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم تا خط D را در نقطهٔ C قطع کند و عمودمنصف CA را رسم کنیم تا عمودمنصف AB را در نقطهٔ O قطع کند، مسأله همواره دارای یک جواب است.



۳۰۱. راه اوّل. هرگاه مسأله حل شده باشد و (C) دایرهٔ مطلوب در T بر خط Δ مماس باشد (شکل)، در صورتی که شکل را به وسیلهٔ انعکاس تبدیل کنیم، منعکس (C) بر منعکس Δ در T′، منعکس T مماس خواهد بود. امّا اگر قطب را یکی از نقطه‌های (C) بگیریم، منعکس (C) خطی است مستقیم و منعکس Δ دایره‌ای خواهد بود مماس بر آن خط مستقیم؛ پس مسأله را به این طریق حل می‌کنیم:

A را قطب انعکاس و مقداری دلخواه، مثلاً AH^2، را قوت انعکاس فرض می‌کنیم (AH عمودی است که از A بر Δ رسم کرده‌ایم). منعکس خط Δ دایرهٔ ′Δ است که به قطر AH رسم شود. حال ′B منعکس B را به دست می‌آوریم و از ′B بر دایرهٔ (′Δ) مماس ′B′T را رسم کرده، ′AT را رسم می‌کنیم تا Δ را در T قطع کند. دایره‌ای که بر A، B و T بگذرد، دایرهٔ مطلوب است. مسأله در حالت کلی دو جواب دارد.





راه دوم. اگر (O) دایرهٔ مطلوب گذرنده بر A و B و مماس بر خط D در نقطهٔ T باشد، در این صورت مرکز این دایره بر عمودمنصف AB واقع است. و از طرفی نقطهٔ S محل برخورد عمودمنصف AB و خط D مرکز تجانس دایرهٔ (O) و کلیه دایره‌هایی که مرکزش بر عمودمنصف AB واقع و بر خط D مماسند می‌باشد و در نتیجه حل مسأله چنین است:

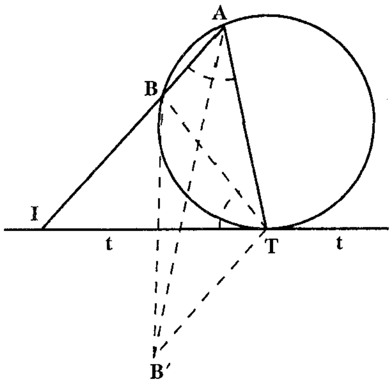
عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم تا خط D را در S قطع کند. دایرهٔ دلخواه (ω) را که مرکزش بر SI و بر خط D مماس است رسم می‌کنیم و S را به نقطهٔ B وصل می‌نماییم تا دایره (ω) را در M و N قطع نماید. نقطهٔ C مجانس M را با مرکز تجانس S و نسبت

تجانس $k=\dfrac{SN}{SB}$ تعیین می‌نماییم. دایرۀ گذرنده بر A، B و C جواب مسأله است.

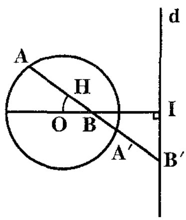
راه سوم. فرض کنید A و B دو نقطۀ مفروض باشند، خط AB خط مفروض t را در I قطع کند، و t در T بر دایرۀ مطلوب ABT مماس باشد (شکل). اگر B′ متقارن B نسبت به t باشد، تساویهای زیر را بین زاویه‌ها داریم:

$$\begin{aligned}A\hat{T}B' &= A\hat{T}B+B\hat{T}B' = A\hat{T}B+B\hat{T}I+B\hat{T}I\\ &= A\hat{T}B+B\hat{A}T+B\hat{T}I = I\hat{B}T+B\hat{T}I\\ &=۱۸۰^\circ - B\hat{I}T\end{aligned}$$

پس پاره‌خط معلوم AB′ از نقطۀ T با زاویۀ معلومی دیده می‌شود؛ پس T را می‌توان تعیین کرد. متقارن T نسبت به I جواب دیگری را برای مسأله به دست می‌دهد.



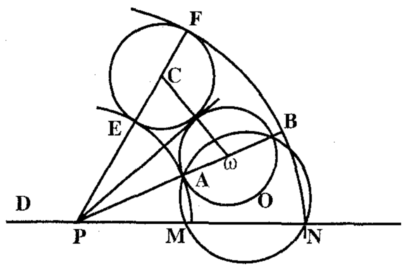
۳۰۲. اگر (O) دایرۀ مطلوب گذرنده بر A باشد که در آن d قطبی B نسبت به آن دایره باشد، چنانچه خط AB دایره را در A′ و خط d را در B′ قطع کند، نقطۀ A′ مزدوج A نسبت به B′ و B خواهد بود و از طرفی مرکز دایره بر عمودی واقع است که از B بر d فرود می‌آید و از آن جا حل مسأله چنین است:



از نقطۀ B عمودی بر خط d فرود می‌آوریم و AB را امتداد داده تا خط d را در B′ قطع کند. نقطۀ A′ مزدوج توافقی A نسبت به B و B′ تعیین می‌نماییم. محل برخورد عمودمنصف AA′ با خط BI نقطۀ (O) مرکز دایرۀ خواسته شده و OA = OA′ شعاع آن می‌باشد.

بحث. اگر AB بر d عمود باشد مرکز دایره بر نقطۀ H وسط AA′ واقع است، در

صورتی که $AB \parallel d$ باشد، A' قرینهٔ A نسبت به B روی دایره بوده و چون B وسط AA' است، B' در بینهایت بوده و IA در A بر دایره مماس است و از آن‌جا عمودی که در A بر IA رسم می‌شود، هرجا BI عمود رسم شده از B بر d را قطع کند، نقطهٔ (O) مرکز دایرهٔ خواسته شده و $OA = R$ شعاع آن است.



۳۰۳. **راه اول.** اگر (O) دایرهٔ خواسته شده باشد که از A و B گذشته و خط D را در طول $MN = l$ قطع کرده باشد، در این صورت اگر به قطر AB دایره (ω) را رسم نماییم و از P محل تلاقی AB با خط D مماس PT را بر آن رسم کنیم داریم:

$$PA.PB = PT^{۲} = PM.PN$$

و چنانچه دایرهٔ (C) را به شعاع $R = \frac{1}{۲}$ و مماس بر دایره (ω) در نقطهٔ T رسم نماییم درصورتی که C را به P وصل نموده امتداد دهیم تا دایره را در E و F قطع نماید، داریم:

$$CF = CE = CT = \frac{1}{۲}$$

و

$$PA.PB = PE.PF = PT^{۲} = PM.PN$$

و در نتیجه $PE = PM$ و $PF = PN$ و از آن‌جا حل مسأله چنین است:

AB را امتداد می‌دهیم تا خط D را در P قطع کند و دایرهٔ (ω) را به قطر AB رسم نموده و از P مماس PT را بر آن رسم می‌نماییم. و از ω به T وصل کرده بر Tω نقطهٔ C را چنان تعیین می‌کنیم که $CT = \frac{1}{۲}$ باشد و به مرکز C و شعاع $\frac{1}{۲}$ دایره‌ای رسم می‌کنیم تا PC را در E و F قطع کند، به مرکز P و شعاعهای PE و PF قوسهایی رسم می‌نماییم تا خط D را در M و N قطع کند در این صورت داریم:

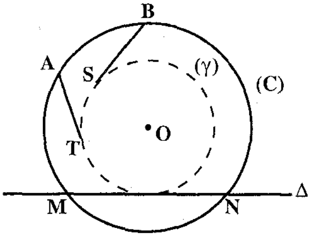
$$PE.PF = PM.PN = PT^{۲} = PA.PB$$

در نتیجه بر A، B، M و N یک دایره می‌گذرد و این دایره، دایرهٔ مطلوب است.

بحث. اگر P خارج دایرهٔ (C) باشد، مسأله دارای دو جواب است. در صورتی که AB موازی D باشد عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم تا D را در K قطع کند و بر D نقطه‌های M و N را چنان تعیین می‌کنیم که $KM = KN = \frac{1}{۲}$ باشد. دایرهٔ محیطی

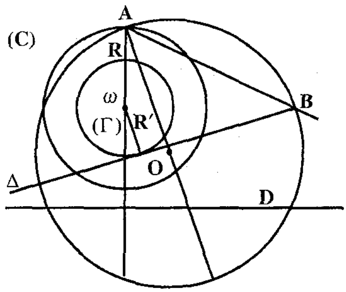
ذوزنقه متساوی‌الساقین ABNM جواب مسأله است. چنانچه AB بر D عمود باشد، می‌توان قاعدهٔ کلی را عمل کرد.

راه دوم. فرض کنیم دایرهٔ (C) جواب مسأله است که از دو نقطهٔ A و B گذشته و از خط Δ وتری به طول l جدا کرده باشد (شکل). $MN = l$ دایرهٔ (γ) را متحدالمرکز با آن و مماس بر Δ رسم می‌کنیم مماسهای AT و BS که بر (γ) رسم می‌شوند، هر یک برابر $\frac{MN}{2}$ یا $\frac{l}{2}$ می‌باشند. پس (γ) بر دو دایرهٔ به مرکزهای A و B و به شعاع $\frac{l}{2}$ عمود است.



پس (γ) متعلق به دستگاه دایره‌های عمود بر (A) و (B) و مماس بر خط Δ است و بنابراین، می‌توان آن را رسم کرد مرکز (γ) نقطه O همان مرکز (C) است و مسأله حل شده است.

۳۰۴. چنانچه (O) دایرهٔ مطلوب گذرنده بر A و B باشد که با خط D زاویهٔ α ساخته است در این صورت اگر نقطهٔ A قطب و AB^2 را قوت انعکاس فرض کنیم:

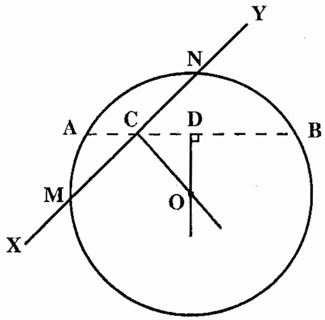


الف. منعکس خط D دایره‌ای است مانند (C) به مرکز (ω) گذرنده بر نقطهٔ A.

ب. منعکس دایرهٔ (O) خطی است مستقیم مانند Δ که از B می‌گذرد.

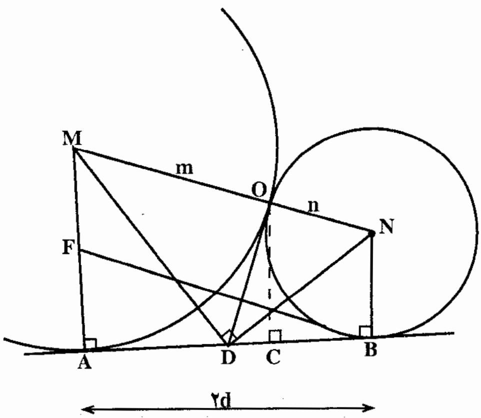
پ. چون در انعکاس زاویه‌ها ثابت می‌ماند پس زاویهٔ خط Δ و دایرهٔ (C) که بترتیب منعکسهای دایرهٔ (O) و خط D می‌باشند ثابت می‌ماند و چون نقطهٔ A و AB^2 و خط D معلومند پس با معلوم بودن A و D و AB^2 دایرهٔ (C) منعکس خط D را رسم نموده و دایرهٔ (Γ) را به مرکز (ω) و شعاع $R' = R\cos\alpha$ (R شعاع دایرهٔ (C) است) را رسم کرده و از B خط Δ را مماس بر (Γ) رسم می‌نماییم. منعکس خط Δ دایرهٔ خواسته شدهٔ (O) است.

بحث. بر حسب آن که از B بتوان یک یا دو مماس بر دایرهٔ (Γ) رسم کرد، مسأله دارای یک یا دو جواب است و چنانچه رسم مماس ممکن نباشد مسأله جواب ندارد.



۳۰۵. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و OB شعاع دایره‌ای باشد که MN کوچکترین وتر ممکن را ایجاد می‌کند. می‌دانیم در یک دایره کوچکترین وتری که از یک نقطهٔ واقع در داخل آن دایره می‌توان رسم کرد وتری است که بر قطر گذرنده از آن نقطه عمود باشد. بنابراین برای تعیین نقطهٔ O مرکز دایرهٔ خواسته شده، از نقطهٔ C واقع بر XY که نقطهٔ برخورد AB با XY است خطی عمود بر آن رسم می‌کنیم تا عمودمنصف پاره‌خط AB را در نقطهٔ O قطع کند. دایرهٔ به مرکز O و به شعاع $OA = OB$ جواب مسأله است.

۳۰۶. پاره‌خط AB را مساوی $۲d$ اختیار می‌کنیم. از مثلثهای قائم‌الزاویهٔ AMD و BDN رابطهٔ زیر نتیجه می‌شود:



$$mn = d^۲$$

از شرطهای مسأله، رابطهٔ زیر به دست می‌آید:

$$m^۲ + n^۲ = k^۲$$

از آن‌جا، می‌توان m و n را محاسبه کرد و سپس آنها را رسم کرد. از نقطه نظر ترسیمی ترجیح داده می‌شود که مسأله را به محاسبهٔ مجموع شعاعهای دو دایره تبدیل کنیم. برای این کار رابطهٔ اولی را در ۲ ضرب می‌کنیم و با رابطهٔ دومی جمع می‌کنیم، خواهیم داشت:

$$m^۲ + ۲mn + n^۲ = k^۲ + ۲d^۲$$
$$\Rightarrow (m+n)^۲ = k^۲ + ۲d^۲$$

تبصره. برای تفاضل دو شعاع داریم:

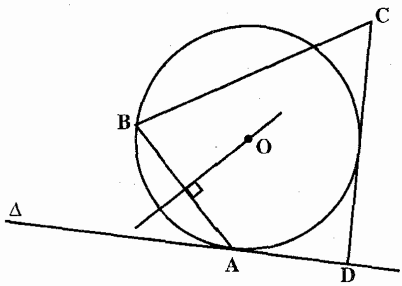
$$(m-n)^۲ = k^۲ - ۲d^۲$$

شرط امکان مسأله در این حالت آن است که $k \geq d\sqrt{۲}$ باشد.

۲.۱.۱.۴.۱.۳.سه نقطه، یک یا چند خط

۲.۱.۱.۴.۱.۳.۱. سه نقطه، یک خط

۳۰۷. مسأله را حل شده و دایرهٔ به مرکز O را که در دو نقطهٔ A و B گذشته و بر خط CD مماس است (D روی خط مفروض Δ است)، جواب مسأله می‌گیریم. مرکز این دایره از طرفی روی عمود منصف پاره‌خط AB است و از طرف دیگر...

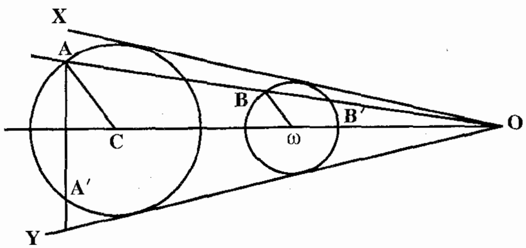


۲.۱.۱.۵. نقطه، زاویه

۳۰۸. راه اول. با استفاده از تجانس.

الف. می‌دانیم که هر دو دایره به هر نحو که باشند مجانس یکدیگرند و مرکز تجانس نقطهٔ تقاطع مماس مشترک آنها با خط المرکزین می‌باشد.

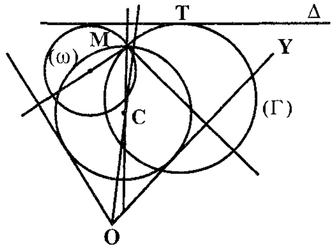
ب. کلیه دایره‌های مماس بر ضلعهای یک زاویه، مکان مرکزهایشان نیمساز آن زاویه است. پس دایرهٔ دلخواه (ω) مماس بر ضلعهای زاویه، $x\hat{O}y = \alpha$ رسم می‌نماییم و OA را وصل می‌کنیم تا دایرهٔ (ω) را در نقطهٔ B قطع کند. در این صورت B مجانس A است و چون دو دایرهٔ مجانس مرکزشان مجانس یکدیگر است، در نتیجه اگر از A موازی $B\omega$ رسم کنیم تا نیمساز زاویهٔ $x\hat{O}y$ را در C قطع کند C مرکز دایره و $AC = R$ شعاع آن است.



بحث. چون AO پیوسته دایرهٔ (ω) را در دو نقطه قطع می‌کند پس مسأله دارای دو جواب است.

راه دوم. با استفاده از قوت نقطه. چون دایره‌های مماس بر ضلعهای دو زاویه مرکزهایشان روی نیمساز زاویه است پس نیمساز زاویهٔ xOy منطبق بر قطری از دایرهٔ خواسته شده است و در نتیجه اگر دایرهٔ خواسته شده از A بگذرد از A'، قرینهٔ A نسبت به نیمساز $O\Gamma$ خواهد گذشت و از آن‌جا حل مسأله چنین است.

A' قرینهٔ A نسبت به نیمساز زاویه را رسم می‌نماییم دایرهٔ گذرنده بر نقطه‌های A و A' و مماس بر OX جواب مسأله است.



راه سوم. اگر (C) دایرهٔ خواسته شده گذرنده بر M و مماس بر OX و OY باشد چون انعکاس زاویه‌ها را تغییر نمی‌دهد، در نتیجه اگر منعکسهای خطهای OX و OY و دایرهٔ (C) را به قطب M و قوت دلخواه k رسم کنیم در این صورت :

الف. منعکس دایرهٔ (C) بر منعکسهای خطهای OX و OY مماس است.

ب. منعکس دایرهٔ C که از M قطب انعکاس می‌گذرد خطی است مستقیم و منعکسهای خطهای OX و OY دایره‌هایی مانند (ω) و (Γ) گذرنده بر M می‌باشند و Δ منعکس دایرهٔ (C) مماس مشترک دایره‌های (ω) و (Γ) می‌باشد و از آن‌جا حل مسأله چنین است :

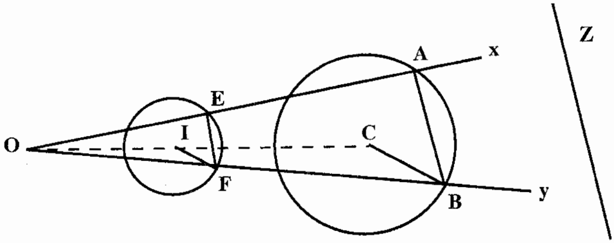
ابتدا دایره‌های (ω) و (Γ) منعکسهای خطهای OX و OY را نسبت به قطب M و قوت دلخواه k رسم می‌نماییم و سپس خط Δ مماس مشترک آنها را رسم می‌کنیم. منعکس خط Δ با قطب M و قوت k دایرهٔ خواسته شده است.

بحث. چون دایره‌های (ω) و (Γ) از نقطهٔ M می‌گذرند متقاطع بوده و دارای دو مماس مشترک می‌باشند و مسأله پیوسته دارای دو جواب است.

۲.۱.۱.۶.نقطه، خط، زاویه

۳۰۹. مسأله را حل شده می‌گیریم و فرض می‌کنیم وتر AB با راستای معین Z موازی باشد. اگر خطی به موازات Z رسم کنیم که ضلعهای زاویه را در E و F قطع کند، دایره‌ای که مرکزش I روی OC واقع بوده از E و F بگذرد، متجانس با دایرهٔ O است. پس برای

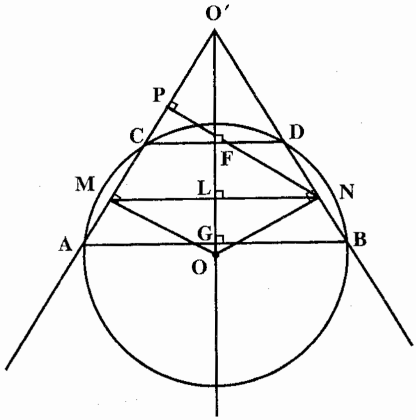
حل، پس از ترسیم دایرهٔ I، خط IF را رسم کرده، CB را موازی آن رسم می‌کنیم تا B به دست آید. دایرهٔ به مرکز C و شعاع CB جواب مسأله است.



۳۱۰. از نقطهٔ O عمودهای OM و ON را بر دو ضلع زاویه رسم می‌کنیم. پاره‌خط MN قاعدهٔ متوسط ذوزنقهٔ جواب مسأله است. ارتفاع ذوزنقه را FG می‌نامیم، داریم :

$$MN.FG = k^{2} \Rightarrow FG = \frac{k^{2}}{MN}$$

پس طول FG معین است. با توجه به این که نقطهٔ L محل برخورد MN با نیمساز زاویهٔ وسط پاره‌خط FG است، بنابراین بسادگی دو نقطهٔ F و G و از آن جا ذوزنقهٔ ABCD و در نتیجه $OA = OB = OC = OD$ شعاع دایرهٔ موردنظر به دست می‌آید.



۳۱۱. مسأله را حل شده و مرکز دایره را L می‌گیریم.

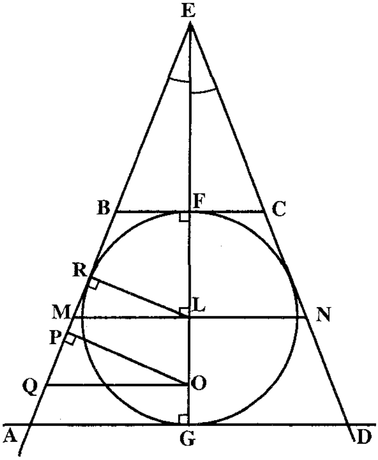
داریم :

$$MN.FG = 4LM.LR = k^{2}$$

اما اگر از نقطهٔ دلخواه O واقع بر نیمساز زاویه، OP و OQ را بترتیب عمود بر

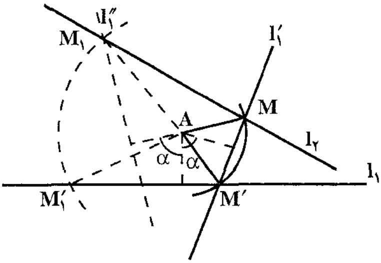
AB و موازی AD رسم کنیم، داریم :

$$\frac{LR^۲}{OP^۲} = \frac{k^۲}{۴OP.OQ}$$



از این رابطه LR شعاع دایرهٔ جواب مسأله به دست می‌آید.

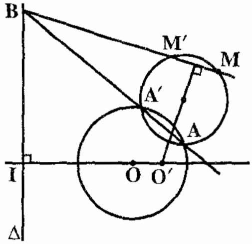
۳۱۲. خط $l_۱$ را حول نقطهٔ A به زاویهٔ α دوران می‌دهیم، و فرض می‌کنیم $l'_۱$ معرف وضع جدید آن باشد. گیریم M نقطهٔ برخورد $l'_۱$ با خط $l_۲$ باشد (شکل). دایرهٔ به مرکز A و گذرنده بر نقطهٔ M جواب مسأله خواهد بود، زیرا نقطهٔ برخورد این دایره با خط $l_۱$، M'، با دوران به نقطهٔ M برده خواهد شد (یعنی، زاویهٔ مرکزی $\alpha = M\hat{A}M'$).



مسأله دو جواب دارد (بسته به دوران در دو جهت)، به شرطی که هیچ یک از زاویه‌های بین خطهای $l_۱$ و $l_۲$ مساوی α نباشند؛ اگر یکی از زاویه‌های بین خطهای $l_۱$ و $l_۲$ مساوی α باشد، مسأله دقیقاً یک جواب یا بینهایت جواب دارد؛ اگر $l_۱$ و $l_۲$ بر هم عمود باشند و $\alpha = ۹۰^\circ$، مسأله یا اصلاً جواب ندارد یا بینهایت جواب دارد.

۲.۱.۱.۷. نقطه، دسته دایره

۳۱۳. دستگاه دایره‌ها با محور اصلی Δ و دایرهٔ (O) را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم دایره‌ای از دستگاه را مشخص کنیم که از نقطهٔ مفروض M بگذرد. M را به نقطهٔ غیرمشخص B از Δ وصل می‌کنیم و BAA' را می‌کشیم که دایرهٔ (O) را قطع کرده است اگر M' نقطهٔ دیگر تلاقی BM با دایرهٔ خواسته شده باشد (شکل)، داریم:

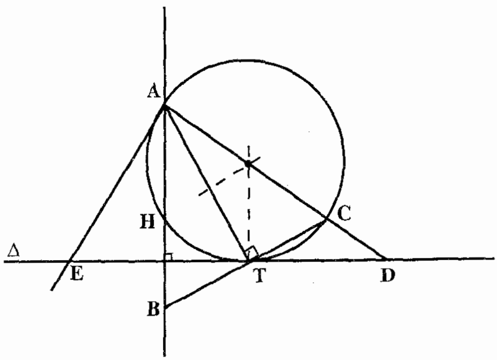


$$BM.BM' = BA \times BA'$$

پس طریق ترسیم دایرهٔ خواسته شده چنین است:
دایرهٔ به قطر دلخواهی از M می‌گذرانیم که دایرهٔ (O) را در A و A' قطع کند AA' را امتداد می‌دهیم تا Δ را در B قطع کند. B را به M وصل می‌کنیم BM دایرهٔ دلخواه را در M' قطع می‌کند. دایرهٔ خواسته شده باید از M' بگذرد و چون باید متعلق به دستگاه مفروض باشد پس مرکزش روی OI واقع است. بنابراین مرکز دایرهٔ خواسته شده در محل تلاقی عمودمنصف MM' و OI واقع است.

۲.۱.۱.۸. مسأله‌های ترکیبی

۱.۳۱۴. دو مکان هندسی برای نقطهٔ O' پیدا کنید با توجه به این که می‌دانیم دایره در نقطهٔ T بر خط Δ مماس است و از دو نقطهٔ A و T می‌گذرد.



۲. بررسی کنید که از بین سه ضلع مثلث کدام دو ضلع متساوی‌اند.
۳. از رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه استفاده کنید.
۴. مثلث AET را امتحان کنید و نتیجهٔ قسمت ۳ را مورد استفاده قرار دهید.

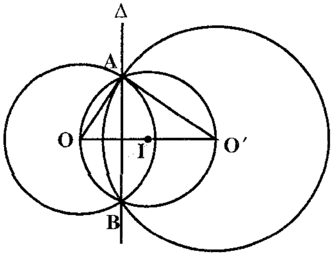
۱.۳۱۵. رسم دایره‌ای که از سه نقطه می‌گذرد.

۲. از رابطه‌های متری در مثلث قائم‌الزاویه یا رابطه‌های متری در دایره استفاده کنید.
۳. ساده است.
۴. از حالت دوم تشابه استفاده کنید.

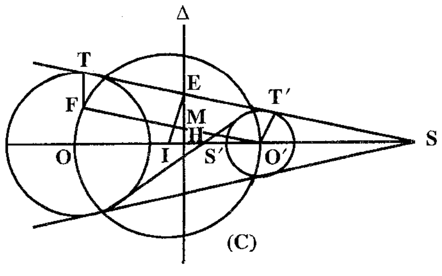
۲.۱.۲. رسم دو دایره با معلوم بودن: نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط، خط؛ ...

۲.۱.۲.۱. نقطه، خط

۳۱۶. می‌دانیم دو دایرهٔ عمود بر هم، اولاً متقاطعند، ثانیاً، شعاعهای نقطهٔ تقاطع بر هم عمودند و از طرفی می‌دانیم محور اصلی دو دایرهٔ متقاطع، وتر مشترک آنها است و از آن‌جا اگر Δ محور اصلی دو دایره به مرکزهای O و O' باشد، به قطر OO' دایره‌ای رسم می‌کنیم تا Δ را در نقطه‌های A و B قطع کند. دایره‌های به مرکزهای O' و O، به شعاعهای بترتیب $R = OA = OB$ و $R' = O'A = O'B$ دایره‌های خواسته شده‌اند.



۳۱۷. اگر دایره‌های (O) و (O') دایره‌های خواسته شده باشند که در آنها S و S' مرکزهای تجانس آنها و $OO' = d$ طول خط المرکزین و خط Δ محور اصلی آنها است. در این صورت: اولاً $ET = ET'$ و $O'T'$ و OT بر مماس مشترک خارجی دو دایره عمود بوده و چنانچه از (O') موازی مماس مشترک رسم کنیم محور اصلی دو دایره را در M و شعاع OT را در F قطع نموده و $O'M = MF$ و $O\hat{F}O' = 90^\circ$ است. ثانیاً، S و S' مزدوج توافقی OO' است و از آن‌جا حل مسأله چنین است:



بر SS' نقطه‌های O و O' را چنان تعیین می‌کنیم که $d = OO'$ بوده ($SS'O'O$) تشکیل یک تقسیم توافقی دهند. سپس دایرهٔ (C) به قطر OO' رسم نموده و پاره‌خط $O'F$ را چنان رسم می‌کنیم که به‌وسیلهٔ Δ به دو قسمت مساوی تقسیم شود. آن‌گاه از I موازی OF رسم می‌نماییم تا Δ را در E قطع کند SE مماس مشترک دو دایره است. چنانچه از O و O' بترتیب عمودهای OT و $O'T'$ بر SE وارد کنیم OT و $O'T'$ شعاعهای دایره‌های خواسته شده و O و O' مرکزهای آنها هستند.

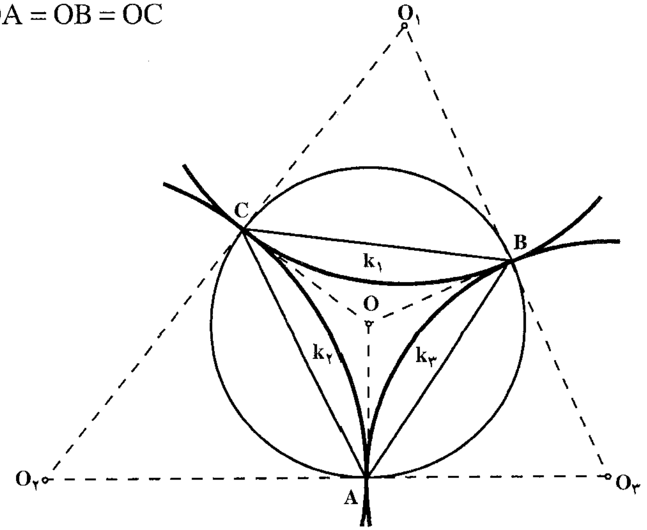
۳.۱.۲. رسم سه دایره با معلوم بودن: نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط، خط؛ زاویه

۱.۳.۱.۲. نقطه

۱.۱.۳.۱.۲. سه نقطه

۳۱۹. O_1 ، O_2 و O_3 را مرکزهای دایره‌های مجهول می‌گیریم (شکل الف). اگر مثلاً دو دایره به مرکزهای O_2 و O_3 را در نظر بگیریم، مماس مشترک آنها در نقطهٔ A، همان محور اصلی دو دایره، یعنی مکان هندسی نقطه‌هایی است که از دو دایره k_2 و k_3 به یک فوتند. بنابراین، سه محور اصلی زوج دایره‌های (k_2, k_3)، (k_1, k_3) و (k_1, k_2) در نقطه‌ای مانند O به هم می‌رسند (مرکز اصلی سه دایره). در ضمن

$$OA = OB = OC$$

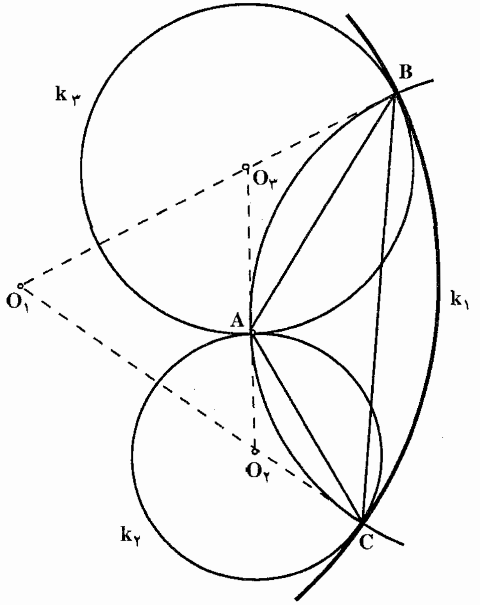


(الف)

(مرکز اصلی، نسبت به سه دایره به یک قوت است). در واقع، O، مرکز دایره‌ای است که از سه نقطهٔ A، B و C می‌گذرد؛ و روشن است که ضلعهای مثلث $O_1O_2O_3$ (و یا اگر لازم باشد، امتداد ضلعها) از نقطه‌های A، B و C می‌گذرند (خط بین دو مرکز از نقطهٔ تماس دو دایره عبور می‌کند) و در ضمن، بر OA، OB و OC عمودند.

به این ترتیب، دایره‌های مجهول k_1، k_2 و k_3 را می‌توان با روش زیر رسم کرد: دایرهٔ محیطی مثلث ABC را رسم می‌کنیم؛ مماسهای بر این دایره را، در نقطه‌های A، B و C می‌کشیم؛ از برخورد این مماسها، مرکزهای سه دایرهٔ k_1، k_2 و k_3 به دست می‌آید.

در حالتی که سه زاویهٔ مثلث ABC حاده باشند، دایره‌های k_1، k_2 و k_3 دو به دو مماس



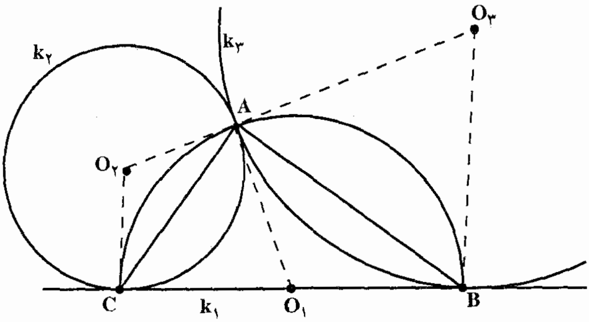
(ب)

خارجند (شکل الف).

در حالتی که یکی از زاویه‌های مثلث ABC منفرجه باشد، دو دایرهٔ مماس خارجند و بر دایرهٔ سوم، از داخل مماسند (شکل ب).

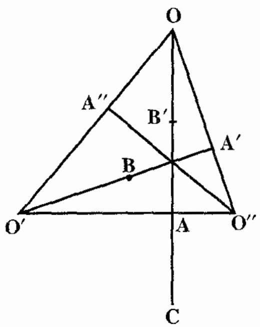
اگر یکی از زاویه‌های مثلث ABC قائمه باشد، از سه مماسی که در نقطه‌های A، B و C بر دایرهٔ محیطی مثلث ABC رسم می‌کنیم، دو مماس با هم موازی می‌شوند و بنابراین، در این حالت، مسأله جواب ندارد (شکل پ). ولی در این حالت، می‌توان گفت

که، یکی از دایره‌ها به خط راست تبدیل شده است و دو دایرهٔ دیگر، که مماس خارجند، در یک طرف این خط راست واقعند.



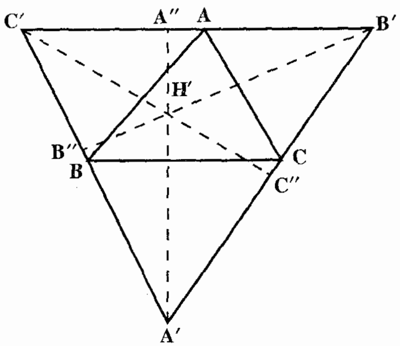
(پ)

۳۲۰. راه اول. سه دایرهٔ خواسته شده را (O)، (O′) و (O″) می‌نامیم، چون (O) به (O′) و (O″) عمود است (شکل)، پس مرکزش روی محور اصلی این دو دایره است که این محور بر O′O″ عمود است پس ارتفاع مثلث OO′O″ است. نقطه‌های B و C نقطه‌های مشترک دو دایرهٔ (O′) و (O″) از طرفی روی محور اصلی OA و از طرف دیگر روی دایره به قطر OO″ قرار دارند، زیرا



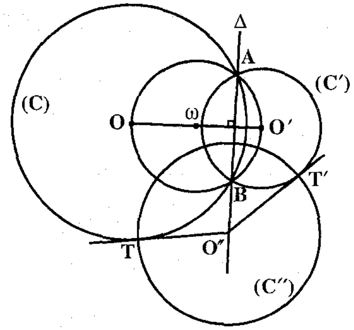
$$O'\hat{B}O'' = O'\hat{C}O'' = ۹۰^\circ$$

پس O′B و O″B شعاع دایره‌های (O′) و (O″) می‌باشند. به همین ترتیب اگر B′ نقطهٔ مشترک بین (شکل) ارتفاع O′A′ و دایرهٔ به قطر OO″ باشد، دایره (O) به شعاع OB′ خواهد بود.



برای این که این دایره‌ها موجود باشند، لازم و کافی است که B، C و B′ موجود

باشند و برای این، لازم است نقطه‌های A و ′A پای ارتفاعهای OA و ′O′A روی ضلعهای ″O′O و ″OO نه در امتداد آنها واقع شوند؛ یعنی مثلث ″OO′O حاده الزوایا باشد در حالی که یکی از زاویه‌های آن مثلاً O قائمه باشد، این دایره به مرکزش تبدیل خواهد شد.



راه دوم. اگر O، ′O و ″O مرکزهای سه دایرهٔ عمود بر هم C، ′C و ″C باشند، دایرهٔ ″C که بر دایره‌های O و ′O عمود است، مرکزش ″O بر محور اصلی دایره‌های C و ′C واقع است. در نتیجه اگر از ″O خط Δ را بر خط‌المرکزین ′OO عمود کنیم، این خط محور اصلی دایره‌های C و ′C و به مرکزهای O و ′O است که قابل رسم می‌باشد. در صورتی که از ″O مماسهایی بر دایره‌های C و ′C رسم نماییم تا با آنها در نقطه‌های T و ′T مماس شود، $O''T = O''T'$ شعاع دایره ″C بوده و قابل رسم می‌باشد.

۲.۲. رسم دایره با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۱.۲.۲. رسم دایره با معلوم بودن مثلث

۱.۱.۲.۲. رسم یک دایره

۳۲۲. مرکز دایرهٔ محیطی هر مثلث، نقطهٔ برخورد عمودمنصفهای ضلعهای آن است. بنابراین مثلث از هر نوعی که باشد، عمودمنصفهای ضلعهای آن را رسم می‌کنیم تا در نقطهٔ O متقاطع شوند. به مرکز O و به شعاع$OA = OB = OC$ دایرهٔ محیطی مثلث را رسم می‌کنیم.

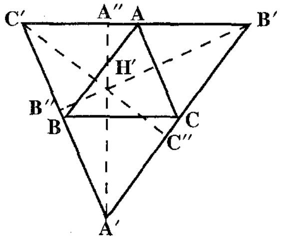
الف. در مثلث با زاویه‌های حاده نقطهٔ O داخل مثلث است.

ب. در مثلث با زاویهٔ منفرجه نقطهٔ O خارج مثلث است.

پ. در مثلث قائم‌الزاویه نقطهٔ O وسط وتر مثلث است.
ت. در مثلث متساوی‌الساقین بنابر آن که زاویه‌هایش حاده باشد یا یک زاویهٔ منفرجه داشته باشد، نقطهٔ O به ترتیب داخل مثلث یا خارج مثلث است.
ث. در مثلث متساوی‌الاضلاع نقطهٔ O داخل مثلث است.

۳۲۳. مرکز دایرهٔ محیطی مثلث، مرکز دایرهٔ جواب مسأله است.

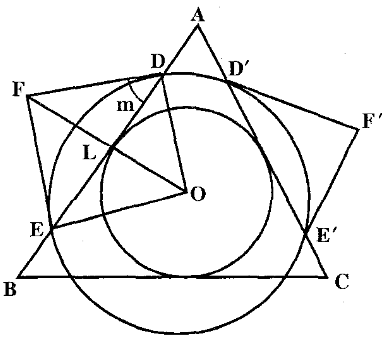
۳۲۴. از هر رأس مثلث خطی به موازات ضلع مقابلش رسم می‌کنیم تا مثلث $A'B'C'$ به‌دست آید (شکل). دایرهٔ خواسته شده بر دایره‌های به مرکز A، B و C و به شعاع BC، AC و AB عمود است این دایره‌ها به قطرهای $B'C'$ و $C'A'$ و $A'B'$ می‌باشند.



بنابراین مرکز دایرهٔ خواسته شده مرکز اصلی سه دایره مزبور است. امّا محور اصلی دوبه‌دوی این سه دایره ارتفاعهای $A'A''$ و $B'B''$ و $C'C''$ از مثلث $A'B'C'$ است. پس مرکز اصلی سه دایره نقطهٔ H' نقطهٔ تلاقی ارتفاعهای مثلث است و شعاع دایرهٔ خواسته شده برابر است با طول مماس رسم شده از H' بر یکی از دایره‌های ذکر شده.

برای این که مسأله ممکن باشد، لازم است که این مماس موجود باشد، یعنی H' خارج دایره‌ها باشد و یا H' خارج $A'A''$ قرار گیرد و این وقتی ممکن است که مثلث $A'B'C'$ یا متشابه آن ABC، یک زاویه منفرجه یا قائمه داشته باشد. در حالی که مثلث ABC قائم‌الزاویه باشد، دایرهٔ خواسته شده به یک نقطه تبدیل می‌شود و این نقطه رأس چهارم مستطیلی است که سه رأس دیگرش A، B و C است.

۳۲۵. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و زاویهٔ

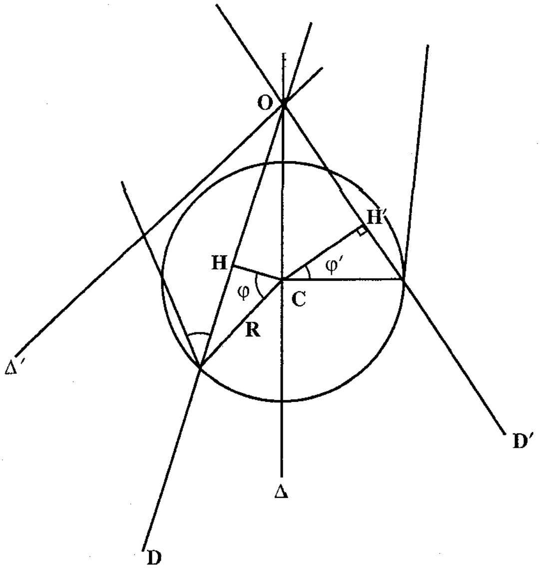


$\hat{D} = m$ باشد. سه وتر ایجاد شده باید مساوی باشند، زیرا مثلثهای DFE و $D'E'F'$ مساوی هستند. از آن‌جا نتیجه می‌شود که مرکز دایره از سه ضلع مثلث به یک فاصله است. بنابراین نقطهٔ O مرکز دایره، نقطهٔ برخورد نیمسازهای زاویه‌های درونی مثلث است. شعاع OD وتر مثلث

قائم‌الزاویهٔ DLO است که در آن $OL = r$ و زاویهٔ $\hat{O} = \hat{D} = m$ معلوم است.

نکته. اگر امتداد ضلعهای مثلث را نیز درنظر بگیریم، مسأله چهار جواب دارد که دایره‌های محاطی درونی و برونی مثلث ABC می‌باشند. کمترین شعاع ممکن برای $m = ۰$ مساوی r (شعاع دایرهٔ محاطی درونی مثلث) است.

۳۲۶. ابتدا مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را تعیین می‌کنیم که دو خط را به زاویه‌های معین قطع می‌کند. اگر C مرکز دایره‌ای باشد که دو خط Δ و Δ' را در شکل (الف) به زاویه‌های φ و φ' قطع کرده، چون از C دو عمود CH و CH' را بر D و D' فرود آوریم با ملاحظهٔ شکل دو تساوی زیر به‌دست می‌آید :



(الف)

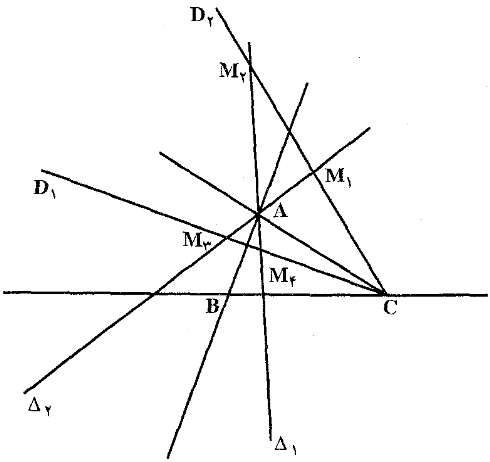
$$CH = R\cos\varphi$$

$$CH' = R\cos\varphi'$$

از تقسیم دو طرف این تساوی نتیجه می‌شود که :

$$\frac{CH}{CH'} = \frac{\cos\varphi}{\cos\varphi'}$$

از این دو تساوی نتیجه می‌گیریم مکان هندسی C دو خط مانند Δ و Δ' است که با D و D' یک دستگاه توافقی می‌سازد.
با استفاده از این مقدمه اگر M مرکز دایره‌ای باشد که ضلعهای مثلث ABC را به زاویه‌های α، β و γ قطع کند، درصورتی که فاصلهٔ M از ضلعهای نظیر، d_A، d_B و d_C فرض شود، این تساوی حاصل است:



(ب)

$$\frac{d_A}{\cos\alpha}=\frac{d_B}{\cos\beta}=\frac{d_c}{\cos\gamma}$$

از این‌جا،

$$\frac{d_A}{d_B}=\frac{\cos\alpha}{\cos\beta} \qquad (۱)$$

$$\frac{d_B}{d_C}=\frac{\cos\beta}{\cos\gamma} \qquad (۲)$$

از تساوی (۱)، نتیجه می‌شود که M متعلق به یکی از دو خط D_1 و D_2 است که از رأس C می‌گذرند و با CA و CB دستگاه توافقی می‌سازند. همین‌طور از تساوی (۲) نتیجه می‌گیریم که M متعلق به یکی از دو خط Δ_1 و Δ_2 است که از رأس A می‌گذرد و با آن دستگاه توافقی می‌سازد. از تقاطع D_i ها با Δ_i ها چهار نقطهٔ M_1، M_2، M_3 و M_4 که مرکزهای دایره‌های خواسته شده‌اند تعیین می‌شوند (شکل ب). رسم دایره‌ها بعد از تعیین مرکز آنها، چون با هر ضلع زاویهٔ معینی می‌سازند، بسادگی انجام می‌گیرد.

۳۲۷. مرکز دایرهٔ خواسته شده نقطه‌ای است که از آن نقطه سه دایره که رأسهای آنها، رأسهای مثلث و شعاع آنها متناسب با Cosec نصف زاویه‌های α، β و γ هستند، تحت زاویه‌های مساوی دیده شوند.

۳۲۸. مرکز دایرهٔ خواسته شده باید بر مرکز ارتفاعی مثلث مفروض ABC منطبق باشد. این

نقطه را H می‌نامیم. رأس A و پای ارتفاع گذرنده از A، یعنی D، دو نقطهٔ وارون نسبت به دایرهٔ خواسته شده‌اند؛ به‌همین ترتیب، B و E و همچنین، C و F نقطه‌های وارون نسبت به این دایره‌اند؛ پس مربع شعاع دایرهٔ خواسته شده باید با هر یک از حاصلضربهای زیر برابر باشد:

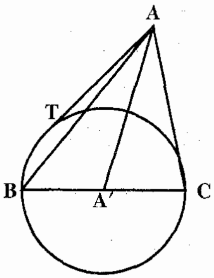
HA.HD , HB.HE , HC.HF (۱)

و این حاصلضربها در هر مثلثی برابرند. ولی نقطه‌های وارون A و D ؛ B و E ؛ و C و F باید در یک طرف H، یعنی مرکز دایرهٔ خواسته شده باشند، و این شرط تنها درصورتی برقرار می‌شود که ABC زاویهٔ منفرجه داشته باشد.

پس اگر هر سه زاویهٔ مثلث ABC حاده باشند، مسأله جواب ندارد. اگر مثلث ABC زاویهٔ منفرجه داشته باشد، مسأله یک جواب منحصر به‌فرد دارد، مرکز دایرهٔ خواسته شده (H) مرکز ارتفاعی مثلث ABC است. و مربع شعاع (H) با هریک از حاصلضربهای (۱) برابر است.

تعریف. دایرهٔ (H) را دایرهٔ قطبی، یا دایرهٔ مزدوج مثلث ABC می‌نامند.

۳۲۹. ۱. دایرهٔ (A) (شکل)، بر دایرهٔ به قطر BC عمود است. اگر از نقطهٔ A مماس AT را بر دایرهٔ مزبور رسم کنیم شعاع دایرهٔ (A) به‌دست می‌آید. برای این که این دایره موجود باشد لازم است که زاویهٔ A حاده یا قائمه باشد در حالی که A قائمه است. دایرهٔ (A) به نقطهٔ A تبدیل می‌شود. شعاع AT را برحسب a، b و c ضلعهای مثلث ABC محاسبه می‌کنیم، داریم:



$$AT^۲ = AA'^۲ - \frac{a^۲}{۴} \; ;$$

و به موجب قضیهٔ میانه‌ها داریم:

$$b^۲ + c^۲ = ۲AA'^۲ + \frac{a^۲}{۲} \; ;$$

پس

$$AT^۲ = \frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲} \; ;$$

یا

$$AT = \sqrt{\frac{b^۲ + c^۲ - a^۲}{۲}} \; ;$$

۲. فرض کنیم مثلث ABC زاویهٔ منفرجه ندارد در این صورت دایره‌های (A)، (B) و (C) موجودند و این دایره‌ها دو به دو برهم عمودند؛ زیرا اگر دو دایرهٔ (A) و (B) را درنظر بگیریم فاصلهٔ مرکزهای آنها برابر c می‌باشد. به‌موجب قسمت اوّل، مربع شعاع آنها عبارتند از:

$$\frac{c^۲+a^۲-b^۲}{۲} \quad , \quad \frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲}$$

و داریم:

$$c^۲=\frac{b^۲+c^۲-a^۲}{۲}+\frac{c^۲+a^۲-b^۲}{۴}$$

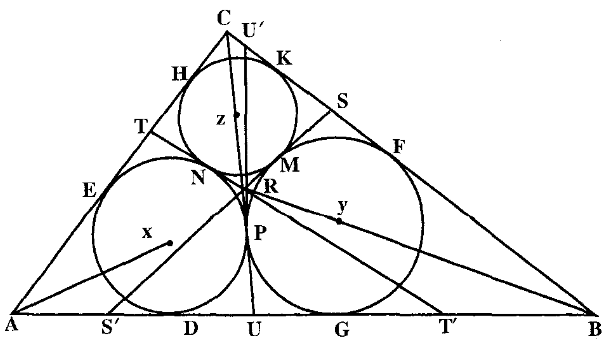
رابطهٔ بالا نشان می‌دهد که دو دایرهٔ (A) و (B) برهم عمودند.

۲.۱.۲.۲. رسم سه دایره

۳۳۰. این مسأله به راههای مختلف هندسی و جبری و مثلثاتی به‌وسیلهٔ دانشمندان علوم ریاضی حل شده است.

ژرگون ثابت نموده است که مسأله ۳۲ جواب دارد. چون اثبات طریقهٔ حل هریک از آنها دارای شکل بغرنج و استدلال مفصلی است، ما یکی از آن راه حلها را که به نام اشتینر است بدون استدلال بیان می‌کنیم.

R مرکز دایرهٔ محاطی داخلی مثلث ABC را معین نموده و سه دایره در مثلثهای ARB و ARC و BRC محاط می‌کنیم. ′SS و ′TT و ′UU مماسهای مشترک داخلی این سه دایره را رسم نموده و دایره‌های جواب را در مثلث ′ATT و ′BUU و ′CSS محاط می‌کنیم.

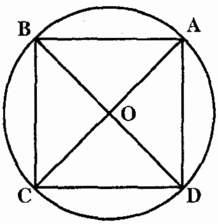


۳.۲. رسم دایره با معلوم بودن: چندضلعی، چند ضلعی و داده‌های دیگر

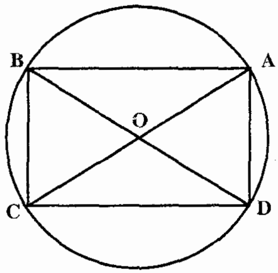
۱.۳.۲. رسم دایره با معلوم بودن چندضلعی

۱.۱.۳.۲. رسم دایره با معلوم بودن چهار ضلعیهای ویژه

۳۳۲. دایره‌ای که مرکزش مرکز مربع و شعاعش نصف قطر مربع باشد، جواب مسأله است.



۳۳۳. دایره‌ای است که مرکزش مرکز مستطیل و شعاعش مساوی نصف قطر مستطیل است. به‌عبارت دیگر، دایره‌ای است که به قطر مستطیل رسم می‌شود.



۲.۱.۳.۲. مسأله‌های ترکیبی

۳۳۴. ۱ و ۲. DC را از طرف D به اندازهٔ $\frac{a}{۲}$ امتداد می‌دهیم تا نقطهٔ F به‌دست آید. O را به F وصل می‌کنیم. عمودمنصف DC را در O' ، که مرکز دایرهٔ خواسته شده است قطع می‌کند.

شعاع دایرهٔ خواسته شده را x می‌نامیم بنابراین $O'C = a - x$ و $OO' = x + \frac{a}{۲}$ در مثلث قائم‌الزاویهٔ $OO'C$ داریم:

$$O'C^۲ = OO'^۲ - OC^۲$$

$$(a-x)^۲ = (x+\frac{a}{۲})^۲ - \frac{a^۲}{۴}$$

$$a^۲ + x^۲ - ۲ax = \frac{a^۲}{۴} + x^۲ + ax - \frac{a^۲}{۴}$$

$$۳ax = a^۲$$

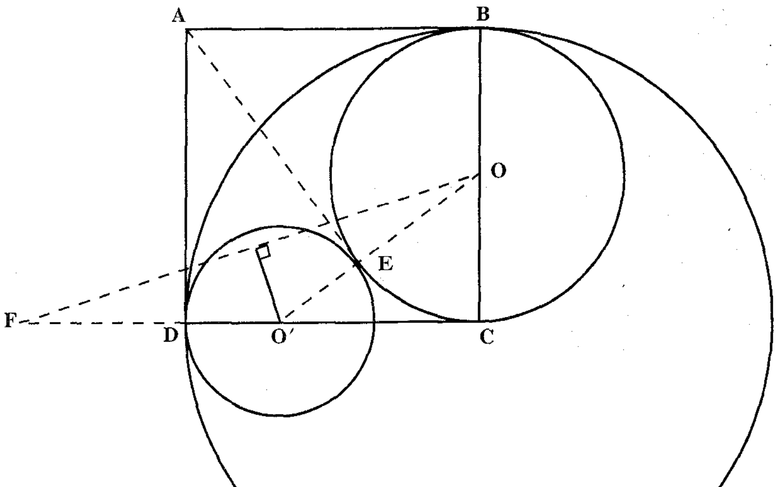
$$x = \frac{a^۲}{۴a} = \frac{a}{۴}$$

اگر از A مماسی بر نیمدایره رسم کنیم داریم :

$$AD = AE = AB = a$$

بنابراین از A مماسی بر نیمدایره رسم می‌کنیم. O را به نقطهٔ تماس (نقطهٔ E) وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا DC را در O′ قطع کند.

به مرکز C و به شعاع BC = DC = a اگر دایره‌ای بزنیم بر نیمدایره مماس داخل و بر AD در نقطهٔ D مماس می‌گردد.



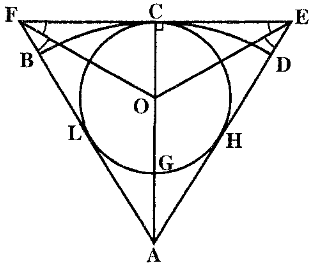
۴.۲. رسم دایره با معلوم بودن: دایره، دایره و داده‌های دیگر

۱.۴.۲. رسم دایره با معلوم بودن دایره

۱.۱.۴.۲. رسم یک دایره با معلوم بودن دایره

۱.۱.۱.۴.۲. یک دایره

۳۳۵. اگر مسأله را حل شده بگیریم، مشخص می‌شود که کافی است خط مماس ECF را از نقطهٔ C وسط کمان BCD رسم کنیم؛ سپس نیمساز زاویه‌های مساوی E و F از مثلث متساوی‌الساقین AEF را رسم نماییم تا AC را در نقطهٔ O قطع کند. دایرهٔ به مرکز O و به شعاع OC جواب مسأله است.



تبصره. همین راه حل را می‌توان برای رسم دایره‌ای محاط در مثلث حاصل از مماسهای AT، AH و کمان $\overset{\frown}{HGL}$ مورد استفاده قرار داد.

۲.۱.۱.۴.۲. دو دایره

۳۳۶. کوچکترین انحراف انعکاسی بین دو دایرهٔ داده شده عبارت است از:

$$\text{ch}\delta=\left|\frac{۱+۱-(\sqrt{۳}+۱)^{۲}}{۲}\right|=\sqrt{۳}+۱$$

در حالی که کسینوس هیپربولیک بزرگترین انحراف انعکاسی برابر است با:

$$\left|\frac{۱+۱-۴(\sqrt{۳}+۱)^{۲}}{۲}\right|=۴\sqrt{۳}+۷=۲\text{ch}^{۲}\delta-۱=\text{ch}۲\delta$$

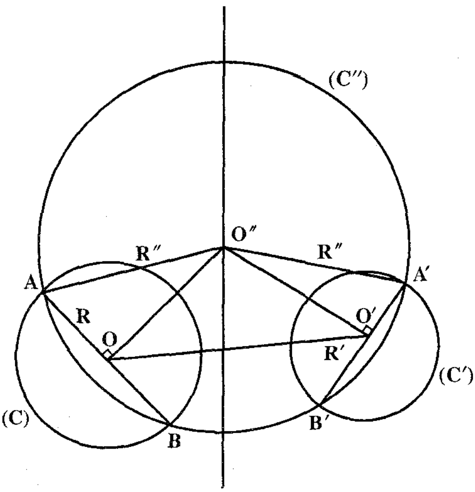
دایرهٔ رسم شدهٔ بین دو دایره، نمی‌تواند نیمساز آنها باشد، زیرا به یک دسته دایره تعلق ندارند.

۳۳۷. خط‌المرکزین دو دایره را رسم می‌کنیم که قطر AB از اوّلی و قطر CD از دومی را پدید می‌آورد به‌گونه‌ای که $AC \| BD$. دایره‌های به قطر AD و به قطر BC را با α و β نشان می‌دهیم و L و M نقطه‌های حدی دسته دایره‌های $\alpha\beta$ را به‌دست می‌آوریم. دایرهٔ نیمساز مطلوب، دایرهٔ به قطر LM است؛ زیرا در انعکاس نسبت به این دایره که بر دایره‌های α و β عمود است، A به D، و B به C تبدیل می‌شود.

۳۳۸. مسأله را حل شده و دایرهٔ $C''(O'',R'')$ که دو دایرهٔ $C(O,R)$ و $C'(O',R')$ را تحت قطرهای AB و $A'B'$ قطع کرده است جواب مسأله می‌گیریم. $O''O$ ، $O''O'$ و OO' را وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $O''OA$ و $O''O'A'$ داریم:

$$R''^{2} = OO''^{2} + R^{2} \quad (1)$$

$$R''^{2} = O'O''^{2} + R'^{2} \quad (2)$$



از مقایسهٔ رابطه‌های (۱) و (۲) نتیجه می‌شود:

$$O''O^{2} - O''O'^{2} = R'^{2} - R^{2} \quad (3)$$

اگر I وسط OO' و H پای عمود رسم شده از O'' بر OO' باشد، داریم:

$$O''O^{2} - O''O'^{2} = 2\overline{IH}.\overline{OO'} \quad (4)$$

از رابطه‌های (۳) و (۴) نتیجه می‌شود:

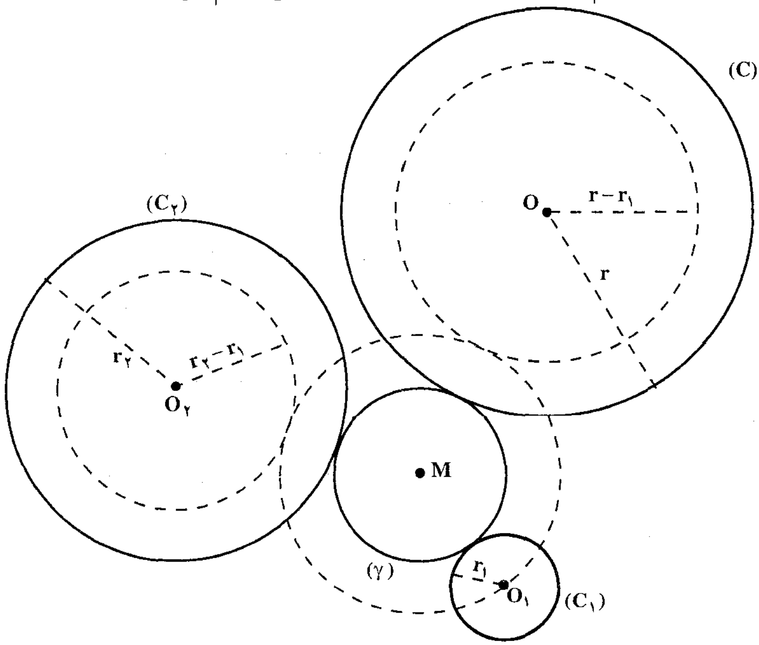
$$۲\overline{IH}.\overline{OO'} = R'^{۲} - R^{۲} \Rightarrow \overline{IH} = \frac{R'^{۲} - R^{۲}}{۲\overline{OO'}} = \text{مقدار ثابت}$$

بنابراین H نقطهٔ ثابتی است، پس به‌دلیل ثابت بودن نقطهٔ I، مکان هندسی نقطهٔ O'' مرکز دایره‌هایی که دو دایرهٔ داده شده را نصف می‌کنند، خطی است راست، عمود بر خط‌المرکزین این دو دایره. این خط قرینهٔ محور اصلی دو دایره نسبت به نقطهٔ I وسط خط‌المرکزین است.

بنابراین بی‌شمار دایره می‌توان رسم کرد که دو دایرهٔ مفروض را نصف کنند. برای محدود کردن تعداد دایره‌ها، لازم است یک شرط دیگر داده شود.

۳.۱.۱.۴.۲. سه دایره

۳۳۹. اگر مسأله حل شده و دایرهٔ (γ) (شکل)، دایرهٔ خواسته شده و M مرکز آن باشد و مرکز کوچکترین سه دایرهٔ مفروض را $O_۱$ بنامیم، دایره‌ای که به مرکز M و شعاع $MO_۱$ رسم شود، بر نقطهٔ $O_۱$ خواهد گذشت و بر دو دایره، یکی به مرکز O و شعاع $r - r_۱$ و دیگری به مرکز $O_۲$ و شعاع $r_۲ - r_۱$ مماس خواهد بود؛ پس مسأله تبدیل می‌شود به رسم دایره‌ای که بر یک نقطهٔ معلوم (یعنی $O_۱$) بگذرد و بر دو دایره (یعنی دایره‌های به شعاع $r - r_۱$ و مرکز O و به شعاع $r_۲ - r_۱$ و مرکز $(O_۲)$) مماس باشد. پس از به‌دست آمدن مرکز این دایره، رسم دایرهٔ خواسته شدهٔ مسأله به‌آسانی انجام می‌گیرد.



نکته. راه حل خود آپولونیوس، برای این مسأله، به ما نرسیده است، با وجود این، برخی از مؤلفان باستانی از آن یاد کرده‌اند. ظاهراً، برای این که آپولونیوس، مسأله را در حالت کلی حل کند، ابتدا حالتهای خاص و حدی آن را مورد بررسی قرار داده است :

۱. دایره‌ای رسم کنید که از سه نقطهٔ مفروض بگذرد ؛

۲. دایره‌ای رسم کنید که بر سه خط راست مفروض مماس باشد ؛

۳. دایره‌ای رسم کنید که از نقطهٔ مفروض بگذرد و بر دو خط راست موازی مفروض مماس باشد ؛

۴. دایره‌ای رسم کنید که از نقطهٔ مفروض بگذرد و بر دو خط راست مفروض متقاطع مماس باشد ؛

۵. دایره‌ای رسم کنید که از دو نقطهٔ مفروض بگذرد و بر خط راست مفروضی مماس باشد ؛

۶. دایره‌ای رسم کنید که بر دایرهٔ مفروضی مماس باشد و از دو نقطهٔ مفروض بگذرد ؛

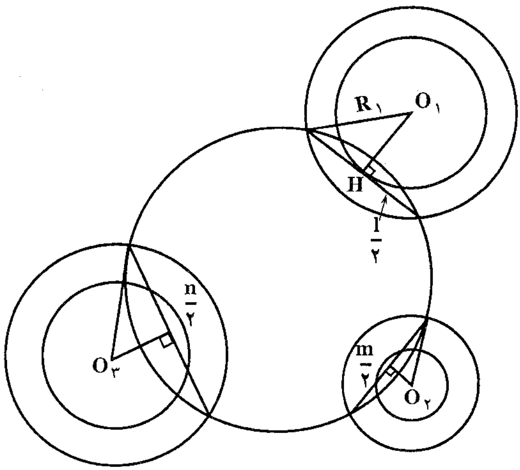
۷. دایره‌ای رسم کنید که بر سه دایرهٔ مفروضی که از یک نقطه می‌گذرند، مماس باشد.

بررسی نشان می‌دهد که، اگر مسألهٔ آپولونیوس، دارای تعداد محدودی جواب باشد، این تعداد از ۸ تجاوز نمی‌کند.

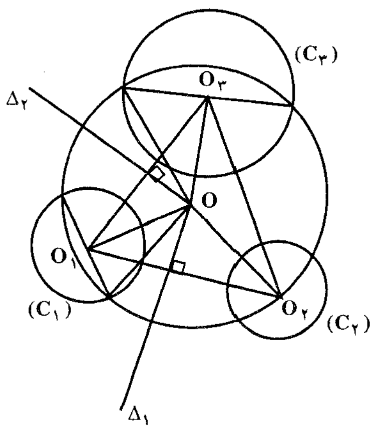
مؤلف این مسأله، آپولونیوس برغه‌ای، یکی از مشهورترین دانشمندان یونانی در سدهٔ سوم پیش از میلاد است. کتاب او، شامل قسمت عمده‌ای از ادبیات ریاضی آن زمان است. با همهٔ اینها، شهرت آپولونیوس به خاطر رساله‌ای است که در ۸ مقاله دربارهٔ مقطعهای مخروطی نوشته است (یکی از این ۸ مقاله گم شده است).

۳۴۰. مسأله را حل شده و دایرهٔ $C_4(O_4,R_4)$ را که سه دایرهٔ $C_1(O_1\,,R_1)$ ، $C_2(O_2\,,R_2)$ و $C_3(O_3\,,R_3)$ در وترهایی به طولهای l، m و n قطع کرده است، جواب مسأله می‌گیریم. می‌دانیم که مکان هندسی وسط وترهای به طول معلوم، در یک دایره، دایره‌ای به همان مرکز و به شعاع مقدار ثابتی است، یعنی مکان هندسی وسط وترهای به طول l در دایرهٔ (C_1) ، دایره‌ای به مرکز O_1 و به شعاع $\sqrt{R_1^2-\frac{l^2}{4}}$ و مکان هندسی وسط وترهای به طول m در دایرهٔ (C_2) ، دایره‌ای به مرکز O_2 و به شعاع $\sqrt{R_2^2-\frac{m^2}{4}}$ و مکان هندسی وسط وترهای به طول n در دایرهٔ (C_3) ، دایره‌ای به مرکز O_3 و به شعاع $\sqrt{R_3^2-\frac{n^2}{4}}$ است.

سه دایرهٔ اخیر را رسم می‌کنیم. دایرهٔ جواب مسأله دایره‌ای است که...

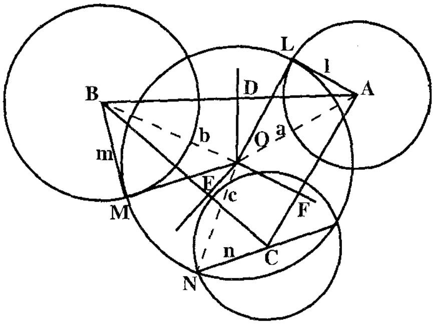


۳۴۱. می‌دانیم مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که دو دایرهٔ مفروض $C_1(O_1, R_1)$ و $C_2(O_2, R_2)$ را تحت قطر قطع می‌کنند، خطی راست عمود بر O_1O_2 است که قرینهٔ محور اصلی دو دایره نسبت به وسط خط‌المرکزین آن دو دایره می‌باشد. این خط را رسم می‌کنیم و Δ_1 می‌نامیم. همچنین خط Δ_2 مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که دو دایرهٔ $C_1(O_1, R_1)$ و $C_3(O_3, R_3)$ را تحت قطر قطع می‌کنند، به‌دست آورده، Δ_2 می‌نامیم. نقطهٔ O محل برخورد دو خط Δ_1 و Δ_2، مرکز دایرهٔ جواب مسأله است. اگر R شعاع این دایره باشد، اندازهٔ شعاع از رابطهٔ $R^2 = R_1^2 + OO_1^2$ به‌دست می‌آید؛ زیرا OO_1 و R_1 معلومند.



۳۴۲. مرکز دایرهٔ خواسته شده، که آن را R می‌نامیم، لزوماً روی سه محور اصلی دایره‌های (A) و (B)، دایره‌های (B) و (C)، و دایره‌های (C) و (A) قرار دارد ؛ پس R نقطهٔ مشترک این سه محور اصلی است.

۳۴۳. مرکز دایرهٔ جواب مسأله را O می‌نامیم. مکان هندسی مرکز دایره‌های عمود بر دو دایرهٔ (A) و (B) خط DO محور اصلی این دو دایره است. برای دو دایرهٔ (A)، (C) و (B)، (C) رابطه‌های زیر را داریم :



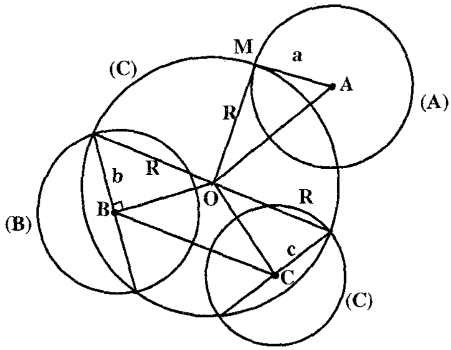
$$DO: \quad b^2 - a^2 = m^2 - l^2$$

$$EO: \quad b^2 - c^2 = m^2 + n^2$$

$$FO: \quad a^2 - c^2 = n^2 + l^2$$

دو مکان از این مکانها را رسم می‌کنیم. نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ جواب مسأله به‌دست می‌آید. مماس رسم شده از این نقطه بر یکی از دو دایرهٔ (A) یا (B) شعاع دایرهٔ جواب را مشخص می‌کند.

۳۴۴. مسأله را حل شده و دایرهٔ C(O,R) را جواب مسأله می‌گیریم. با توجه به ویژگیهای داده شده داریم :



$$a^2 + R^2 = OA^2$$

$$b^2 + OB^2 = R^2$$

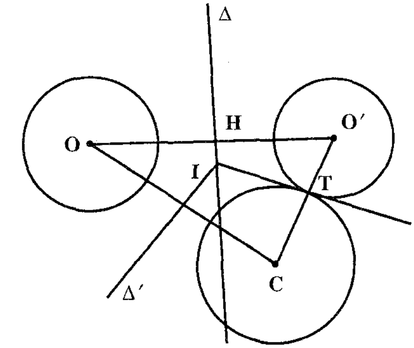
$$c^2 + OC^2 = R^2$$

می‌دانیم مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که دو دایرهٔ داده شده را نصف می‌کنند خطی است، عمود بر خط‌المرکزین این دو دایره، حال باید نقطه‌ای روی این خط چنان اختیار کنیم که دایرهٔ رسم شده به آن مرکز، بر دایرهٔ (A) عمود باشد.

۴.۱.۱.۴.۲. دسته دایره

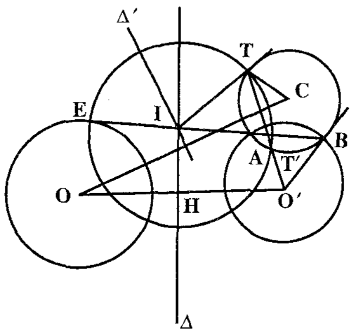
۳۴۵. اگر ′O دایرهٔ خواسته شده باشد که در نقطهٔ T بر دایرهٔ C مماس است، در این صورت،

اولاً. نقطهٔ O' مرکز آن روی عمودی است که از O بر Δ وارد می‌شود.
ثانیاً. مماس مشترک (C,O') محور اصلی دایره‌های O' و C است.
ثالثاً. محور اصلی $(O\ ,\ C)$ با Δ و مماس مشترک (O',C) همرس بوده و I نقطهٔ همرسی آنها، مرکز اصلی سه دایرهٔ (C,O',O) است و درنتیجه حل مسأله چنین است :



Δ' محور اصلی دایره‌های (O,C) را رسم می‌کنیم تا Δ را در نقطهٔ I قطع کند و از نقطهٔ I مماس IT را بر دایرهٔ (C) رسم می‌نماییم. نقطهٔ T، نقطهٔ تماس است. محل برخورد CT با OH، (O') مرکز دایرهٔ خواسته شده و $O'T$ شعاع آن است.
بحث. اگر از I بتوان یک یا دو مماس بر دایرهٔ (C) رسم کرد، مسأله دارای یک یا دو جواب است و اگر رسم مماس ممکن نباشد، مسأله جواب ندارد.

۳۴۶. راه اول. اگر (O') دایرهٔ خواسته شده و جزء دایره‌های دستگاه (O,Δ) و بر دایرهٔ مفروض (C) عمود بوده و A و B نقطه‌های برخورد C و O' باشند :



اولاً. AB محور اصلی دایره‌های (O',C) و Δ و Δ' (Δ' محور اصلی دایره‌های OوC) در نقطه‌ای مانند I مرکز اصلی آنها همرسند.
ثانیاً. دایرهٔ به مرکز I و شعاع $IT = IE$ طول مماس رسم شده از I بر دایره‌های C و O بر دایره‌های O، O' و C عمود است.
ثالثاً. TT' محور اصلی دایره‌های C و I که هر دو بر دایرهٔ (O') عمودند، از (O') می‌گذرد و درنتیجه، حل مسأله چنین است :
از O خطی بر Δ عمود می‌نماییم و Δ' محور اصلی دایره‌های O و C را رسم می‌نماییم.
نقطهٔ I محل برخورد Δ و Δ'، مرکز اصلی دایره‌های C، O و O' است.
از I مماس IE و IT را بر دایره‌های O و T رسم نموده و دایرهٔ به مرکز I و شعاع

$IT = IE$ را رسم می‌نماییم. TT' محور اصلی دایره‌های C و I خط OH را در O' قطع می‌کند، دایرهٔ به مرکز (O') و شعاع $O'B$ ($O'B$ طول مماسی است که از O' بر دایرهٔ C رسم شده) دایرهٔ خواسته شده است.

بحث. اگر I خارج دایرهٔ (O) باشد، مسأله دارای جواب است و اگر Δ موازی Δ' باشد، I در بینهایت است و در این حالت مرکز دایرهٔ C روی خط‌المرکزین OO' بوده و دایرهٔ I و همچنین دایرهٔ خواسته شده به خط‌المرکزین تبدیل می‌شود و درصورتی که Δ بر Δ' منطبق باشد (C) جزء دایره‌های دستگاه بوده و مسأله جواب ندارد.

راه دوم. فرض کنیم (F') دستگاه مزدوج (F) باشد. برای این که دایره متعلق به دستگاه (F) باشد، لازم و کافی است که بر دو دایرهٔ دستگاه (F') عمود باشد. پس دایرهٔ (Γ) عمود است بر سه دایره، که دو دایره متعلق به (F') است و دایرهٔ (C).

۳۴۷. ۶ دایره برای جواب مسأله وجود دارد.

۲.۱.۴.۲. رسم دو دایره با معلوم بودن دایره

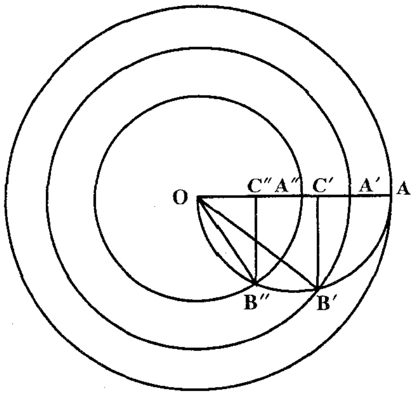
۱.۲.۱.۴.۲. رسم دو دایره با معلوم بودن یک دایره

۳۴۸. فرض کنیم دو دایره به مرکز O رسم شده باشند (شکل)، به قسمی که داشته باشیم:

$$\frac{\pi OA''^2}{p} = \frac{\pi OA^2 - \pi OA'^2}{m} = \frac{\pi OA'^2 - \pi OA''^2}{n}$$

یا

$$\frac{OA^2 - OA'^2}{m} = \frac{OA'^2 - OA''^2}{n} = \frac{OA''^2}{p} \quad (1)$$



نیمدایره‌ای به قطر OA رسم می‌کنیم تا دو دایره را در B' و B'' قطع کند. از B' و B'' عمودهای $B'C'$ و $B''C''$ را بر OA فرود می‌آوریم :

$$OA'^{2} = OB'^{2} = OA \times OC' \ , \ OA''^{2} = OB''^{2} = OA \times OC''$$

پس رابطهٔ (۱) چنین می‌شود :

$$\frac{OA^{2} - OA \times OC'}{m} = \frac{OA \times OC' - OA \times OC''}{n} = \frac{OA \times OC''}{p}$$

$$\frac{OA - OC'}{m} = \frac{OC' - OC''}{n} = \frac{OC''}{p}$$

$$\frac{AC'}{m} = \frac{C'C''}{n} = \frac{OC''}{p}$$

پس راه حل مسأله چنین است که شعاع OA از دایرهٔ مفروض را به نسبت عددهای m، n و p باید تقسیم نمود، تا نقطه‌های C' و C'' معین شوند ؛ سپس نیمدایره‌ای به قطر OA رسم کرده و از نقطه‌های C' و C'' دو عمود بر OA اخراج می‌کنیم تا نیمدایره را در B' و B'' قطع کنند. دایره‌های به شعاع OB' و OB'' جواب مسأله می‌باشند.

۲.۴.۱.۳. رسم n دایره با معلوم بودن دایره

۳۴۹. کرهٔ محاط در قالب یک دوازده وجهی منتظم و درضمن دایره‌هایی که با وجه‌های چند وجهی روی آن حک شده است، درنظر می‌گیریم. با تصویر رسم الجسمی (استریوگرافیک) این دایره‌ها بر صفحه، دایره‌هایی به‌دست می‌آید که همان ویژگی موردنظر مسأله را دارند. این ویژگی از آن‌جا ناشی می‌شود که هر وجه دوازده وجهی به‌وسیلهٔ پنج دایره احاطه شده است.

۲.۴.۱.۴. مسأله‌های ترکیبی

۳۵۰. از نقطه نظر هندسهٔ انعکاسی وضع دایره‌های موردنظر، نظیر شکل، مربوط به چیستان اشتینر در حالت $n = ۴$ می‌باشد. بنابراین سه عدد از انحرافهای انعکاسی برابر با $۲\log(\sqrt{۲} + ۳)$ و دوازده عدد دیگر برابر با صفر است.

۲.۴.۲. رسم دایره با معلوم بودن دایره و داده‌های دیگر

۱.۲.۴.۲. رسم دایره با معلوم بودن: دایره؛ نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط، خط؛ زاویه

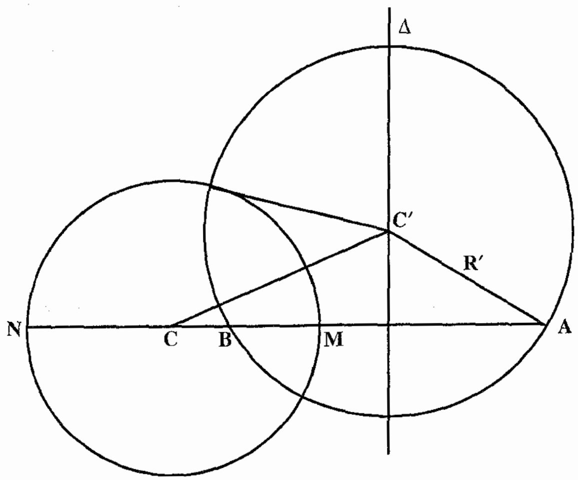
۱.۱.۲.۴.۲. رسم دایره با معلوم بودن دایره، نقطه

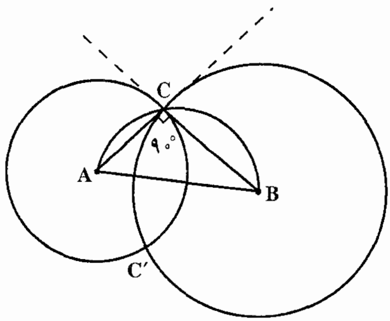
۱.۱.۱.۲.۴.۲. رسم یک دایره با معلوم بودن دایره، نقطه

۱.۱.۱.۱.۲.۴.۲. رسم یک دایره با معلوم بودن یک دایره، نقطه

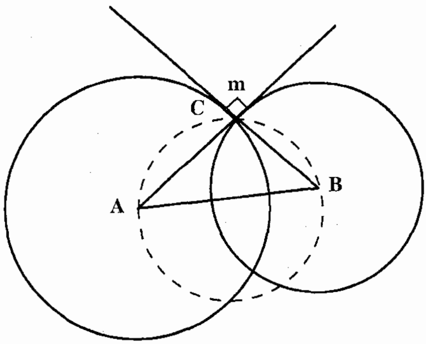
۱.۱.۱.۱.۱.۱.۲.۴.۲. یک دایره، یک نقطه

۳۵۱. اگر C' دایرهٔ گذرنده بر A و عمود بر دایرهٔ (C) باشد، در این صورت قطری از دایرهٔ (C) که از A می‌گذرد به‌وسیلهٔ دایرهٔ (C') به نسبت توافقی تقسیم می‌شود. اگر MN باشد، کلیهٔ دایره‌های گذرنده بر B و A بر دایرهٔ C عمودند و مکان مرکزهای آنها عمودمنصف AB و شعاعشان فاصلهٔ مرکز تا A یا B خواهد بود و چنانچه ملاحظه می‌شود، مسأله دارای بی‌نهایت جواب است و برای این که مسأله دارای جوابهای محدود باشد، بایستی شرط دیگری داده شود.





۳۵۲. دو دایره درصورتی عمود برهم هستند که زاویهٔ بین مماسهای رسم شده در هریک از نقطه‌های برخوردشان قائمه باشد. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مماس $BC = 1$ باشد. دیده می‌شود که کافی است دایره‌ای به قطر AB رسم کنیم و نقطهٔ برخورد آن با دایرهٔ داده شده به مرکز B و به شعاع 1 را به‌دست آوریم. پاره‌خط AC شعاع دایرهٔ خواسته شده است.

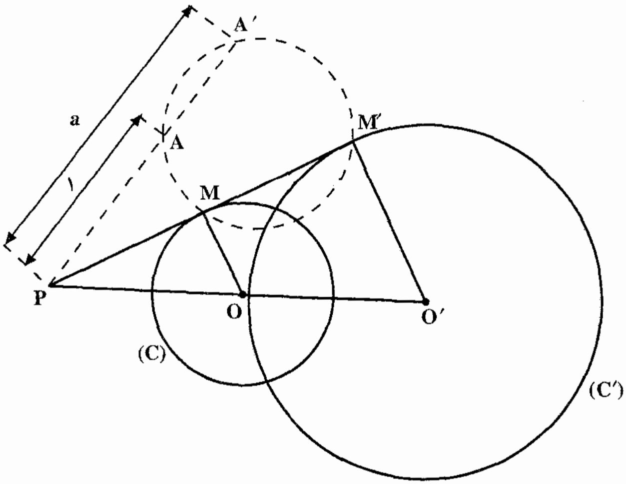


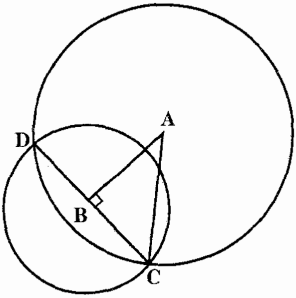
۳۵۳. مسأله را حل شده می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\hat{C} = m$ باشد. هر شعاع بر خط مماس در نقطهٔ تماس عمود است.

درنتیجه زاویه‌های $A\hat{C}B$ و $\hat{C}$ یا m مکمل یکدیگرند؛ زیرا ضلعهای آنها دو به دو عمود بر هم و در یک جهتند.

بنابراین $A\hat{C}B = ۱۸۰^\circ - m$. از آن‌جا برای حل مسأله کافی است روی پاره‌خط AB کمان درخور زاویهٔ $(۱۸۰^\circ - m)$ را رسم کنیم. تا دایرهٔ (B) را در نقطهٔ C قطع کند. دایرهٔ به مرکز A و به شعاع AC دایرهٔ خواسته شده است.

۳۵۴. به‌طور کلی برای رسم منعکس دایره کافی است که یک نقطه و مرکزش را تعیین کنیم. اما می‌دانیم که مرکز آن دایره، منعکس مزدوج توافقی P نسبت به دو سر قطری از (C) است که از P می‌گذرد. در حالت خاصی که P خارج دایرهٔ (C) باشد (شکل)، کافی است که مماس PM را بر دایره رسم کنیم و M′ منعکس M را (با ترسیم) به‌دست آوریم و از M′ موازی MO بکشیم تا امتداد PO را در O′ قطع کند و بالاخره به مرکز O′ و به شعاع O′M′ دایرهٔ مطلوب را رسم کنیم.





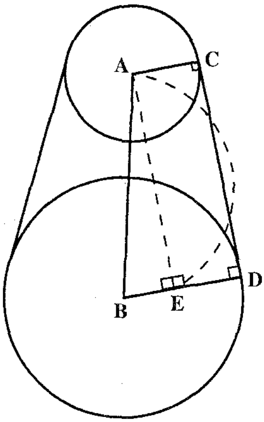
۳۵۵. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و دایرهٔ به مرکز A که دایرهٔ (B, b) را تحت قطر قطع کرده است، جواب مسأله باشد. یک نقطهٔ برخورد دو دایره را C می‌نامیم و از A به C وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC داریم:

مقدار معلوم $= AC^{2} = AB^{2} + BC^{2} = AB^{2} + b^{2}$

بنابراین شعاع دایرهٔ خواسته شده مقدار معلومی است و چون مرکز آن نیز در دست است، پس آن را می‌توان رسم کرد.

نکته. پاره‌خط AC وتر مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که یک ضلع زاویهٔ قائمه آن پاره‌خط AB و ضلع دیگرش شعاع دایرهٔ داده شده است. پس به روش ترسیم هم می‌توان AC را پیدا کرد.

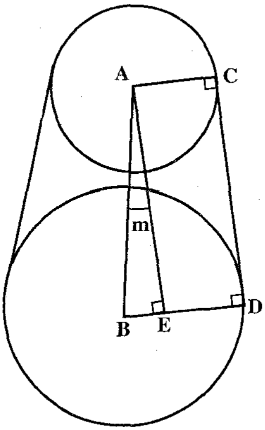
۳۵۶. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و طول مماس مشترک $CD = l$ باشد (شکل). از A خطی موازی CD رسم می‌کنیم تا BD را در E قطع کند. $AE = l$ و $A\hat{E}B = 90^{\circ}$ است. درنتیجه مثلث قائم‌الزاویهٔ ABE با معلوم بودن اندازهٔ وتر AB (خط‌المرکزین دو دایره) و ضلع $AE = l$ قابل رسم است. بنابراین برای حل مسأله دایره‌ای به قطر AB رسم می‌کنیم. سپس به مرکز A و به شعاع l دایره‌ای رسم می‌کنیم تا دایرهٔ به قطر AB را در نقطهٔ E قطع کند. از B به E وصل کرده، BE را به اندازهٔ $ED = AC$ شعاع دایرهٔ (A)



امتداد می‌دهیم. به مرکز B و به شعاع BD دایرهٔ جواب مسأله را رسم می‌کنیم.

تبصره. اگر ED را در امتداد BE جدا کنیم، CD مماس مشترک خارجی دو دایره خواهد بود و هنگامی که ED را روی EB اختیار می‌کنیم، CD مماس مشترک داخلی خواهد شد.

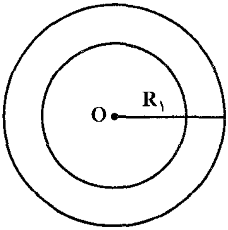
۳۵۷. مسأله را حل شده و دایرهٔ (B) را جواب مسأله و CD و $C'D'$ را دو مماس مشترک می‌گیریم که زاویهٔ بین آنها برابر ۲m است. از A خطی موازی CD رسم می‌کنیم تا BD را در E قطع کند. $B\hat{A}E = m$ است. بنابراین مثلث قائم‌الزاویهٔ ABE با معلوم بودن اندازهٔ وتر AB و زاویهٔ حادهٔ $B\hat{A}E = m$ قابل رسم است. بنابراین برای حل مسأله از A خطی رسم می‌کنیم که با AB زاویه‌ای مساوی m بگیرد. از B خطی عمود بر خط اخیر رسم می‌کنیم تا آن را در نقطهٔ E قطع کند. BE را به اندازهٔ $ED = AC$ امتداد می‌دهیم. دایرهٔ به مرکز B و به شعاع BD جواب مسأله است.



۳۵۸. مسأله را حل شده و دایرهٔ $(O,R_۱)$ هم مرکز با دایرهٔ (O,R) را جواب مسأله می‌گیریم. اگر دو قسمت مساحت با هم برابر باشند، داریم:

$$\pi R_۱^۲ = \pi R^۲ - \pi R_۱^۲ \Rightarrow ۲\pi R_۱^۲ = \pi R^۲$$

$$\Rightarrow ۲R_۱^۲ = R^۲ \Rightarrow R_۱^۲ = \frac{R^۲}{۲} \Rightarrow R_۱ = \frac{R\sqrt{۲}}{۲}$$



اگر نسبت مساحتهای دو قسمت k باشد، داریم:

$$\frac{\pi R_۱^۲}{\pi R^۲ - \pi R_۱^۲} = k \Rightarrow (۱+k)R_۱^۲ = R^۲$$

$$\Rightarrow R_۱^۲ = \frac{۱}{۱+k}R^۲ \Rightarrow R_۱ = \frac{۱}{\sqrt{۱+k}}R$$

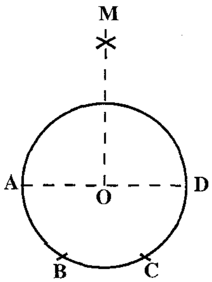
حالت ویژه. اگر نسبت داده شده عدد طلایی باشد، داریم :

$$\frac{\pi R_۱^۲}{\pi R^۲ - \pi R_۱^۲} = \frac{\sqrt{۵}+۱}{۲}$$

از آن‌جا $R_۱$ برحسب R قابل محاسبه است.

۳۵۹. این مسأله به ناپلئون منسوب است. برای حل آن ابتدا به کمک پرگار، از نقطهٔ دلخواهی واقع بر محیط دایره، سه نقطهٔ B، C و D را طوری جدا می‌کنیم که داشته باشیم :

$$AB = BC = CD = r$$



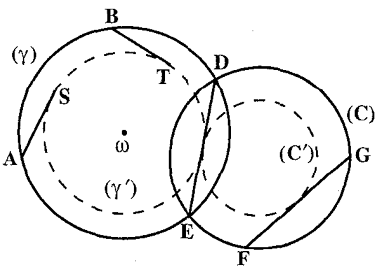
که در آن، r عبارت است از شعاع دایرهٔ مفروض (شکل). AC ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع محاط در دایره و برابر است با $r\sqrt{۳}$. از نقطه‌های A و D که در دو انتهای قطر AD قرار دارند، با شعاع برابر AC، دو کمان رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در M قطع کنند. حالا باید دهانهٔ پرگار را به اندازهٔ OM باز کنیم تا به کمک آن بتوانیم محیط دایره را به چهار بخش برابر تقسیم کنیم. درواقع داریم :

$$OM = \sqrt{AM^۲ - AO^۲} = \sqrt{۳r^۲ - r^۲} = r\sqrt{۲}$$

یعنی OM برابر است با ضلع مربع محاط در دایره که رأسهای آن، محیط دایره را به چهار قسمت برابر تقسیم می‌کنند.

۲.۴.۲.۱.۱.۱.۱.۲. یک دایره، دو نقطه

۳۶۰. فرض کنیم مسأله حل شده و دایرهٔ (γ) جواب مسأله است که از دو نقطهٔ A و B گذشته و از دایرهٔ مفروض (C) وتری مانند DE به طول l جدا کند (شکل). دو دایرهٔ (γ') را متحدالمرکز با (γ) و دایرهٔ (C') را متحدالمرکز با (C) و مماس بر DE رسم می‌کنیم.



مماس AS، BT که بر دایرهٔ (γ') رسم می‌شوند، هریک برابر با $\frac{OE}{۲} = \frac{l}{۲}$ است. درنتیجه دایرهٔ (γ') مماس بر دایرهٔ (C') بوده و بر دو دایرهٔ به مرکزهای A و B و به شعاع $\frac{l}{۲}$ عمود است، یعنی (γ') بر دستگاه دایرهٔ تشکیل شده از (A)

و (B) عمود است و درنتیجه می‌توان (γ') را رسم کرد. مرکزش ω همان مرکز (γ) است و شعاعش ωA یا ωB است. مسأله حداکثر دو جواب دارد.

۳۶۱. می‌دانیم برای رسم هر دایره، سه نقطهٔ آن لازم است و چون A و B دو نقطه از دایرهٔ مطلوب است، لذا کافی است نقطهٔ تماس T را تعیین نماییم. برای این منظور فرض می‌کنیم (ω) دایرهٔ مطلوب باشد که از A و B گذشته و در نقطهٔ T بر دایرهٔ (O) مماس است. در این صورت چنانچه AT را وصل کرده و امتداد دهیم تا دایرهٔ (C) را در نقطهٔ دیگر T' قطع کند و از A مماس AM بر دایرهٔ (C) رسم نماییم. داریم :

$$AM^2 = AT.AT' = \text{ثابت}$$

اگر A را قطب انعکاس و AM^2 را قوت انعکاس فرض کنیم :

اولاً. منعکس دایرهٔ (C) بر خودش منطبق است.

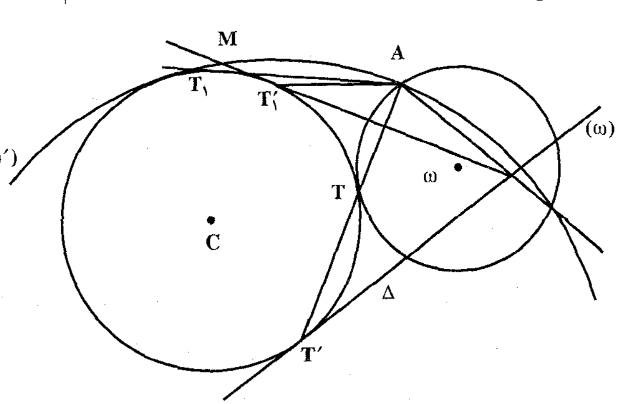
ثانیاً. منعکس دایرهٔ (ω) که از قطب انعکاس A می‌گذرد، خطی مستقیم است.

ثالثاً. چون انعکاس زاویه‌ها را تغییر نمی‌دهد، درنتیجه وقتی دایره‌های (ω) و (C) در نقطهٔ T مماس باشند، منعکسهای آنها مماس خواهند بود.

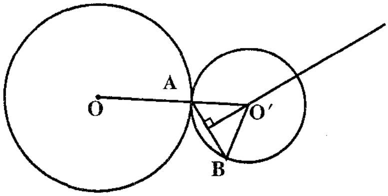
با شرطهای بالا یعنی با قطب A و قوت AM^2 لازم است که اگر Δ منعکس (ω) باشد. Δ و (C) برهم مماسند و از آن جا حل مسأله چنین است :

نقطهٔ B' منعکس B را با قطب A و قوت AM^2 تعیین می‌نماییم و از C' خط Δ را بر دایرهٔ (C) مماس رسم می‌کنیم. چنانچه T' نقطهٔ تماس باشد، AT' دایرهٔ (C) را در نقطهٔ T قطع می‌کند که دایرهٔ گذرنده بر ABT جواب مسأله است.

بحث. درصورتی که از B' بتوان یک یا دو مماس بر دایرهٔ (C) رسم کرد، مسأله دارای



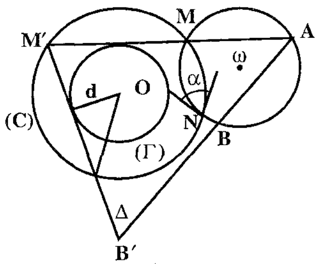
یک یا دو جواب است و اگر رسم مماس ممکن نباشد، مسأله جواب ندارد. البته اگر A و B هر دو خارج و یا داخل دایرهٔ (C) باشند، B' خارج دایره است و اگر A یا B بر دایره واقع باشند، یک مماس می‌توان بر دایرهٔ (C) رسم کرد، زیرا B' بر دایرهٔ (C) واقع می‌شود.



۳۶۲. این دایره باید از نقطهٔ A و از نقطهٔ B بگذرد و O، A و مرکز این دایره روی یک خط راست باشند. پس برای حل مسأله، عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم، سپس از O به A وصل کرده، امتداد می‌دهیم. هرجا که عمودمنصف AB را قطع کرد، نقطهٔ O' مرکز این دایره است. به مرکز O' و به شعاع $O'A = O'B$ دایرهٔ خواسته شده را رسم می‌کنیم.

۳۶۳. دو نقطهٔ P و Q را در درون دایرهٔ معلوم α درنظر می‌گیریم. منعکسهای P و Q نسبت به هر دایرهٔ به مرکز P عبارتند از P_∞ و Q'، و منعکس دایرهٔ α در این انعکاس یک دایرهٔ α' است که P_∞ و Q' در بیرون α' واقعند. مماسهای رسم شده از Q' بر α' دو «دایره»اند که بر P_∞ و بر Q' می‌گذرند که عبارتند از منعکسهای دو دایره‌ای که بر P و Q می‌گذرند و بر α مماس می‌باشند.

۳۶۴. اگر (ω) دایرهٔ مطلوب گذرنده بر A و B باشد که با دایرهٔ (O) زاویهٔ α ساخته است،



چنانچه M یکی از نقطه‌های تقاطع دایره‌های (ω) باشد. AM را امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ (O) را در نقطهٔ دیگر M' قطع کند و درصورتی که A را قطب و ثابت $P_{A(O)} = AM.AM' = AT^2 = k$ را قوت انعکاس فرض کنیم:

اولاً. منعکس دایرهٔ (O) بر خودش منطبق است.

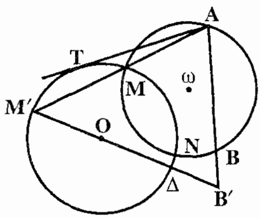
ثانیاً. منعکس دایرهٔ (ω) خطی است مستقیم مانند Δ که از M' می‌گذرد.

ثالثاً. چون انعکاس زاویه‌ها را تغییر نمی‌دهد، لذا اگر (ω) و (O) با هم زاویهٔ α بسازند، منعکسهای آنها نیز با هم زاویهٔ α خواهند ساخت، یعنی Δ و (O) نیز زاویهٔ α خواهند ساخت که در این حالت Δ بر دایرهٔ (Γ) که به مرکز (O) و به شعاع $d = R\cos\alpha$ رسم می‌شود، مماس می‌باشد و درنتیجه حل مسأله چنین است:

ابتدا از نقطهٔ A مماس AT را بر دایرهٔ (O) رسم می‌نماییم، سپس نقطهٔ A را قطب و AT^2 را قوت انعکاس فرض نموده و نقطهٔ B' منعکس β را تعیین می‌نماییم و آن‌گاه از B' خط Δ را مماس بر دایرهٔ (Γ) که به مرکز (O) و شعاع $d = R\cos\alpha$ رسم شده، رسم می‌نماییم تا دایرهٔ (O) را در M' قطع کند و AM' را رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (O) را در نقطهٔ دیگر M قطع کند. دایرهٔ گذرنده بر A، B و M جواب مسأله است.

بحث. اگر از B' یک یا دو مماس بتوان بر دایرهٔ (Γ) رسم کرد، مسأله دارای یک یا دو جواب است و چنانچه نتوانیم مماسی بر دایرهٔ (Γ) رسم کنیم مسأله جواب ندارد.

۳۶۵. راه اول. اگر (ω) دایرهٔ مطلوب گذرنده بر A و B و عمود بر دایرهٔ (O) و M و N نقطه‌های برخوردشان باشد، چنانچه از A مماس AT را بر دایرهٔ (O) رسم کرده و AM را وصل نماییم تا دایرهٔ (O) را در نقطهٔ دیگر M' قطع نماید، داریم :



$AT^2 = AM.AM' = k$ ثابت

درصورتی که A را قطب و AT^2 را قوت انعکاس فرض کنیم :

اولاً. منعکس دایرهٔ (O) بر خودش منطبق است.

ثانیاً. منعکس دایرهٔ (ω) که از A قطب انعکاس می‌گذرد، خطی مستقیم است.

ثالثاً. چون دایره‌های (ω) و (O) بر هم عمودند، منعکسهای آنها نیز بر هم عمود خواهند بود.

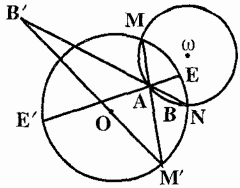
چنانچه Δ منعکس دایرهٔ (ω) باشد، بر (O) که منعکسش بر خودش منطبق است، عمود می‌باشد، یعنی Δ از نقطهٔ O مرکز دایرهٔ (O) می‌گذرد و از آن‌جا حل مسأله چنین است : از نقطهٔ A مماس AT را بر دایرهٔ (O) رسم می‌کنیم و سپس B' منعکس B را با قطب A و قوت AT^2 تعیین نموده و از B' به مرکز دایرهٔ (O) وصل می‌نماییم تا دایرهٔ (O) را در M' قطع کند. AM' دایرهٔ (O) را در نقطهٔ دیگر M قطع می‌نماید. دایرهٔ گذرنده بر A، M و B جواب مسأله است.

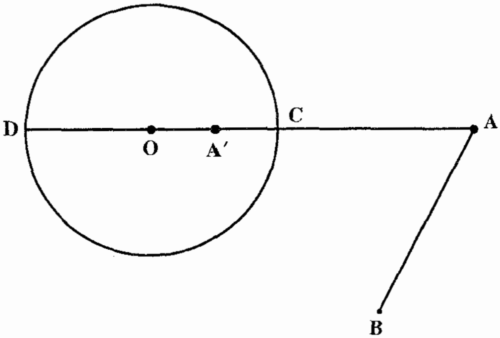
بحث. چون B' هرجا باشد، می‌توان از B' به مرکز دایره وصل نمود، درنتیجه مسأله پیوسته دارای جواب است.

یادآوری. درصورتی که A و B هر دو یا یکی داخل دایرهٔ (O) باشند از A قاطع $\overline{EAE'}$

را رسم نموده و A را قطب و مقدار ثابت $AE.AE' = AM.AM' = k$ را قوت انعکاس فرض می‌کنیم و مسأله را مانند صفحه قبل حل می‌کنیم.

راه دوم. نقطهٔ A را به مرکز دایرهٔ (O) وصل می‌کنیم تا دایرهٔ (O) را در C و D قطع کند، مزدوج A را نسبت به دو نقطهٔ C و D نقطهٔ A′ می‌نامیم. دایرهٔ محیطی مثلث A′AB جواب مسأله است.

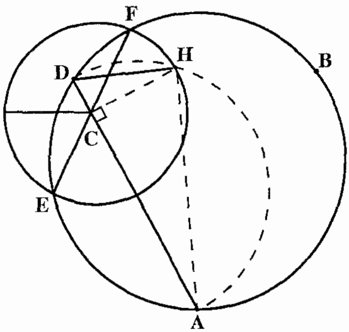




۳۶۶. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و FE یک قطر دایرهٔ داده شده باشد. ACD را رسم می‌کنیم. خواهیم داشت :

$$AC.CD = CF.CE = r^2$$

از آن‌جا، DC جزء سوم تناسب بین AC و r است که مشخص می‌شود و مسأله منجر می‌شود به رسم دایره‌ای که از سه نقطهٔ A، B و D می‌گذرد.



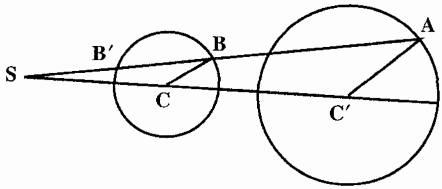
برای تعیین طول CD می‌توان نیمدایره‌ای روی AC رسم کرد که از نقطهٔ A و از نقطهٔ H انتهای شعاع CH که عمود بر AC است می‌گذرد ؛ زیرا داریم :

$$DC = \frac{CH^2}{AC}$$

۳۶۷. می‌دانیم در تجانس :

اوّلاً. هر دو پاره‌خط متجانس موازی‌اند.

ثانیاً. در دو دایرهٔ متجانس مرکزشان مجانس یکدیگرند.
ثالثاً. نسبت تجانس برابر نسبت دو شعاع آنهاست. لذا اگر A را به S مرکز تجانس وصل کنیم تا دایرهٔ (C) را در B قطع کند، B مجانس A بوده و داریم :



$\frac{SB}{SA} = \frac{R}{R_1} = k$ و درنتیجه اگر از A موازی BC رسم کنیم تا SC را C' قطع کند، نقطهٔ C' مرکز دایرهٔ خواسته شده و $C'A = R_1$ شعاع آن است ؛ زیرا :

$$\frac{SB}{SA} = \frac{R}{R_1} = \frac{BC}{AC'} = k \quad \text{و یا} \quad AC' = R_1$$

شعاع دایره می‌باشد (اگر B' نقطهٔ دیگر تقاطع SA با دایرهٔ (C) مجانس A فرض کنیم، مسأله دارای جواب دیگری نیز می‌باشد).

۲.۴.۲.۱.۱.۱.۲. دو دایره، نقطه

۲.۴.۲.۱.۱.۱.۲.۱. دو دایره، یک نقطه

۳۶۸. راه اول. اگر (ω) دایرهٔ مطلوب گذرنده بر A و مماس بر دایره‌های (O) و (O′) در نقطه‌های T و T' باشد، در این صورت نقطه‌های T و T' متناظر بوده، درنتیجه STT' خطی مستقیم است و داریم :

$$ST.ST' = SI.SI' = k$$

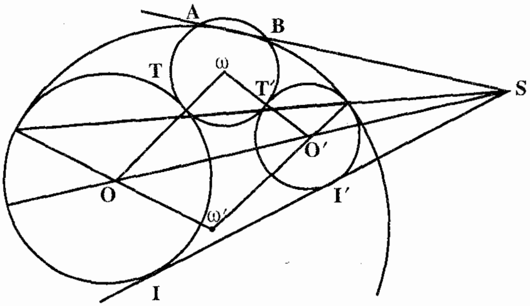
چنانچه SA را وصل کنیم تا دایرهٔ (ω) را در نقطهٔ دیگر B قطع کند، می‌توان نوشت :

$$SA.SB = SI.SI' = k$$

و از آن‌جا حل مسأله چنین است :
AS را وصل کرده و بر آن نقطهٔ B را چنان تعیین می‌کنیم که داشته باشیم :

$$SA.SB = SI.SI'$$

دایرهٔ گذرنده بر A و B و مماس بر یکی از دایره‌های (O) و یا (O′) جواب مسأله است.



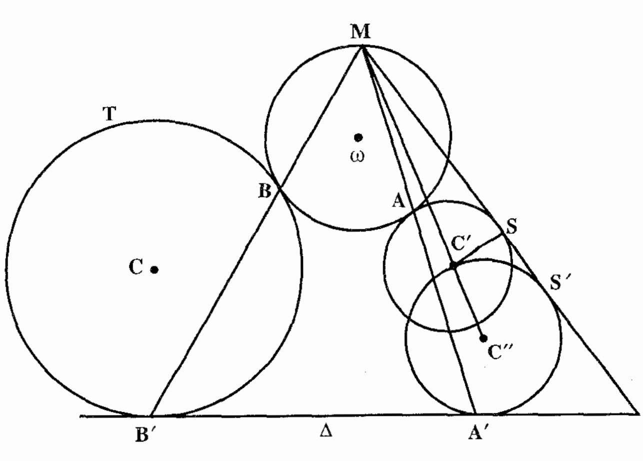
راه دوم. اگر (C) و (C′) دایره‌ها و M نقطهٔ مفروض و (ω) دایرهٔ مطلوب باشد که در نقطه‌های A و B بر دایره‌های (C) و (C′) است، کافی است نقطه‌های تماس A و B را تعیین نماییم. چنانچه MT مماس رسم شده از M بر دایرهٔ (C) و MB نیز دایرهٔ (C) را در نقطهٔ دیگر B′ قطع کند، داریم :

$$MT^{2} = MB.MB' = \text{مقدار ثابت}$$

M را قطب و MT^{2} را قوت انعکاس فرض کنیم :

اولاً. منعکس دایرهٔ (C) بر خودش منطبق است.

ثانیاً. منعکس دایرهٔ (C′) دایره‌ای است مانند (C″) و منعکس دایرهٔ (ω) خط Δ است و چون در انعکاس زاویه‌ها ثابت می‌ماند، لذا، چون (ω) بر دایره‌های (C) و (C′) مماس است، خط Δ منعکس (ω) بر منعکسهای دایره‌های (C) و (C′) مماس خواهد بود، یعنی خط Δ بر (C) و (C″) مماس است یا به‌عبارت دیگر خط Δ مماس مشترک

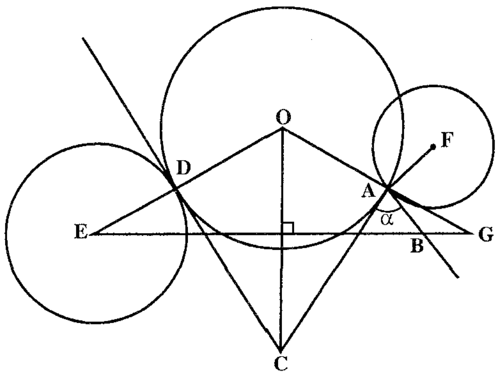


(C) و (″C) است و از آن‌جا حل مسأله چنین است:

ابتدا از M مماس MT را بر دایرهٔ (C) رسم کرده، دایرهٔ (″C) منعکس دایرهٔ (′C) به‌قطب M و قوت MT^2 را رسم می‌کنیم و سپس Δ مماس مشترک (″C) و (C) را رسم می‌نماییم. اگر ′A و ′B نقطه‌های تماس باشند، ′MB و ′MA را رسم می‌کنیم تا دایره‌های C و ′C را بترتیب در B و A قطع کند. دایرهٔ گذرنده بر M، A و B جواب مسأله است یا به عبارت دیگر منعکس مماس مشترک دو دایره جواب مسأله است.

بحث. اگر دایره‌های (″C) و (C) یک یا دو یا سه یا چهار مماس مشترک داشته باشند، مسأله دارای یک یا دو یا سه یا چهار جواب است و چنانچه دایره‌های (″C) و (C) مماس مشترک نداشته باشند، مسأله جواب ندارد.

۳۶۹. مسأله را حل شده و دایرهٔ (O) را جواب مسأله می‌گیریم که بر دایرهٔ (E) مماس است و دایرهٔ (F) را در نقطهٔ معلوم A به زاویهٔ α قطع می‌کند. اگر از A خط AB را مماس بر دایرهٔ (F) رسم کنیم. $C\hat{A}B = \alpha$ است و اگر OA را به اندازهٔ $AG = DE$ امتداد دهیم، مثلث OEG متساوی‌الساقین است و عمودمنصف EG از نقطهٔ O مرکز دایره می‌گذرد.

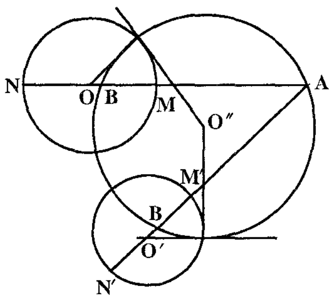


پس برای حل مسأله از نقطهٔ A واقع بر دایرهٔ (F) خط AB را مماس بر این دایره رسم می‌کنیم. سپس خط AC را چنان رسم می‌کنیم که $B\hat{A}C = \alpha$ باشد. از A خطی عمودبر AC رسم می‌کنیم و روی آن AG را مساوی شعاع دایرهٔ (E) جدا می‌کنیم. از G به E وصل کرده، عمودمنصف آن را رسم می‌کنیم تا امتداد AG را در نقطهٔ O، مرکز

دایرهٔ جواب مسأله، قطع کند. دایرهٔ به مرکز O و به شعاع OA را که جواب مسأله است، رسم می‌نماییم.

۳۷۰. فرض کنیم دایرهٔ (γ) جواب مسأله است. شکل را نسبت به A و با قوت دلخواهی منعکس می‌کنیم. منعکسهای (C) و (C') دایره‌های (C_1) و (C'_1) و منعکس (γ) خط (γ_1) است که دایره‌های (C_1) و (C'_1) را به زاویه‌های α و α' قطع می‌کند. خط (γ_1) مماس مشترک دو دایره است که بترتیب با (C_1) و (C'_1) هم مرکز می‌باشند و شعاعشان به‌وسیلهٔ زاویه‌های α و α' مشخص می‌شود، پس از تعیین (γ_1) بسهولت می‌توان (γ) را به‌دست آورد، مسأله حداکثر چهار جواب دارد.

۳۷۱. از A به مرکزهای دو دایره وصل کرده، امتداد می‌دهیم تا دایرهٔ (O) را بترتیب در M و N و دایرهٔ (O') را در M' و N' قطع نماید. نقطه‌های B و B' را چنان تعیین می‌کنیم که $(ABMN)$ و $(AB'M'N')$ تشکیل تقسیم توافقی دهند. دایرهٔ گذرنده بر A، B و B' جواب مسأله است.

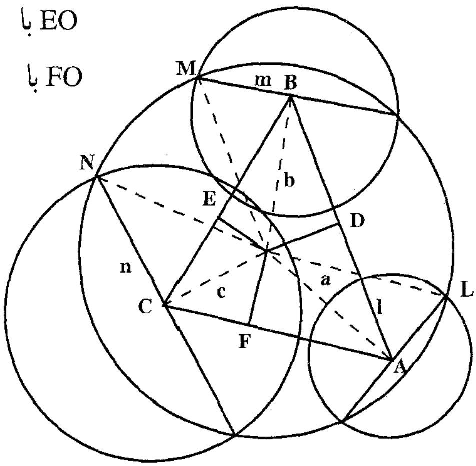


۳۷۲. مرکز دایرهٔ جواب مسأله را O می‌نامیم. نقطهٔ O به‌وسیلهٔ دو مکان از مکانهای هندسی زیر مشخص می‌شود:

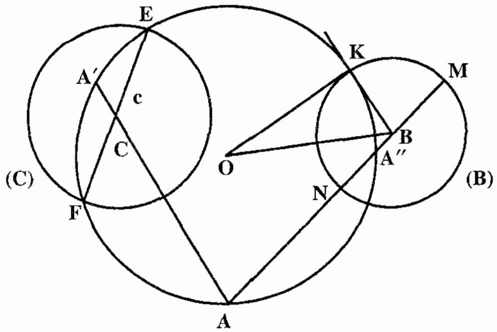
$a^2 - b^2 = m^2 - l^2$ با DO

$b^2 - c^2 = -m^2$ با EO

$a^2 - c^2 = -l^2$ با FO



۳۷۳. مسأله را حل شده و دایرهٔ (O) را جواب مسأله می‌گیریم که دایرهٔ (C) را نصف کرده و بر دایرهٔ (B) عمود است. از A به C وصل می‌کنیم. داریم :



$$\overline{AC}.\overline{CA'} = \overline{CE}.\overline{CF} = c^2$$

چون AC و c معلوم است، A′C طول معلومی دارد، و از آن‌جا نقطهٔ A′ از دایرهٔ (O) مشخص می‌شود.

حال اگر از A به B وصل کنیم تا دایرهٔ (O) را در A″ قطع کند، نقطهٔ A″ مزدوج توافقی نقطهٔ A نسبت به دو نقطهٔ M و N است که چون A، M و N ثابت است، پس A″ نقطهٔ ثابتی از دایرهٔ (O) است. بنابراین دایرهٔ گذرنده بر سه نقطهٔ A، A′ و A″ جواب مسأله است.

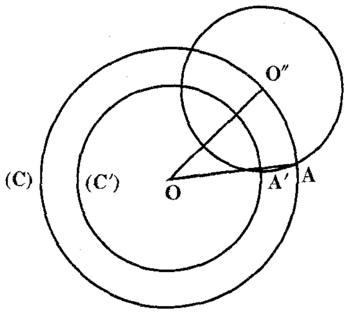
۳۷۴. قطر MN از دایرهٔ (O) و گذرنده بر A رسم نموده و نقطهٔ B مزدوج توافقی A نسبت به MN تعیین می‌نماییم. دایرهٔ گذرنده بر A و B و مماس بر دایرهٔ (O′) جواب مسأله است.

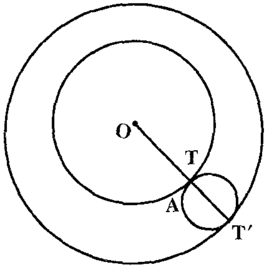
۳۷۵. دایرهٔ (O″) را جواب مسأله فرض می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آن با دو دایرهٔ (C) و (C′) را A و A′ می‌نامیم. بنا به فرض، OAA′ خطی راست است و داریم :

$$OA.OA' = OO''^2 - R''^2,$$

$$OA - OA' = R - R'$$

از آن‌جا...

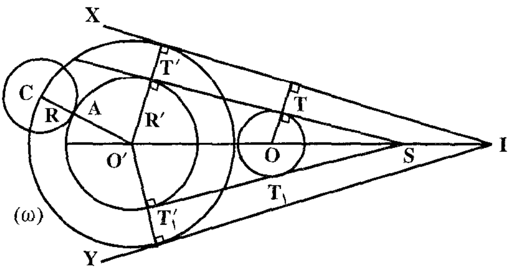




۳۷۶. نقطهٔ معلوم بین دو دایرهٔ داده شده، باید قرار داشته باشد. از ویژگیهای رابطه‌های متری در دایره استفاده کنید.

۳۷۷. اگر (O') دایرهٔ خواسته شدهٔ مماس بر دایرهٔ (C) باشد که S مرکز تجانس آن و دایرهٔ (O') می‌باشد، مماس مشترک آنها از S گذشته و $O'T' = O'A$ است و اگر خطهای IX و IY را موازی مماس مشترک دو دایرهٔ (O) و (O') و به فاصلهٔ R (R شعاع دایرهٔ C است) از آنها رسم کنیم، دایرهٔ (ω) به مرکز (O') و شعاع $R'' = R' + R$ از C گذشته و بر IX و IY مماس است و از آن جا حل مسأله چنین است:

از S خطهای ST و ST_1 مماس بر دایرهٔ (O) را رسم می‌نماییم و سپس خطهای IX و IY را موازی ST و ST_1 و به فاصلهٔ R از آنها رسم نموده، آن‌گاه دایرهٔ (ω) را چنان رسم می‌کنیم که از نقطهٔ (C) گذشته و بر IX و IY مماس باشد. اگر O' مرکز دایرهٔ (ω) باشد، $O'C$ دایرهٔ (C) را در A قطع می‌نماید. دایرهٔ به مرکز (O') و شعاع $R' = R'' - R$ دایرهٔ خواسته شده است.



۲.۲.۱.۱.۱.۲.۴.۲. دو دایره، دو نقطه

۳۷۸. فرض کنیم O محل تلاقی CA و C′A′ باشد. نقطهٔ مضاعف Δ همسانی دو دایره که در آن A و A′ متناظرند. نقطهٔ دیگر برش دو دایرهٔ (CC′O) و (AA′O) است. نقطه‌های M و M′ و در نتیجه دایرهٔ (AA′MM′) معلومند اگر I محل تلاقی AM و A′M′ را بدانیم. امّا I روی محوراصلی دو دایرهٔ مفروض واقع بوده و بعلاوه روی دایرهٔ (AA′Δ) نیز واقع است، زیرا AM و A′M′ متناظرند، پس I در محل تلاقی این دایره با محور اصلی D است.

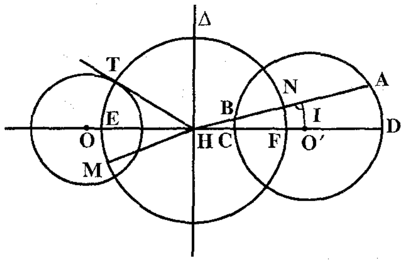
۳.۱.۱.۱.۲.۴.۲. سه دایره، نقطه

۱.۳.۱.۱.۱.۲.۴.۲. سه دایره، یک نقطه

۳۷۹. اگر نقطهٔ P را قطب انعکاس اختیار کنیم، سه دایرهٔ مفروض به سه خط تبدیل می‌شوند و تشکیل مثلث A′B′C′ را می‌دهند که یکی از چهار دایرهٔ محاطی این مثلث منعکس دایره جواب خواهد بود و بسهولت می‌توان جواب مسأله را پیدا کرد.

۴.۱.۱.۱.۲.۴.۲. دسته دایره، نقطه

۳۸۰. راه اوّل. اگر (O) دایره و Δ خط و A نقطهٔ مفروض باشند، مکان مرکزهای دایره‌های دستگاهی که Δ محور اصلی آنهاست، خطی است که از O بر Δ عمود رسم می‌شود و چنانچه H پای عمود باشد، دایرهٔ به مرکز H و شعاع HT (HT طول مماسی است که از H بر دایرهٔ (O) رسم شده) بر کلیهٔ دایره‌های دستگاه و از آن جمله دایرهٔ خواسته شدهٔ گذرنده بر A عمود است، پس اگر قطر MN از دایرهٔ H را که بر A می‌گذرد رسم کنیم، این قطر به وسیلهٔ دایرهٔ خواسته شده به نسبت توافقی تقسیم می‌شود، لذا B مزدوج A نسبت به MN را تعیین نموده، عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم تا OH را در O′ قطع کند. دایرهٔ به مرکز O′ و شعاع $R' = O'B = O'A$ دایرهٔ مطلوب است.

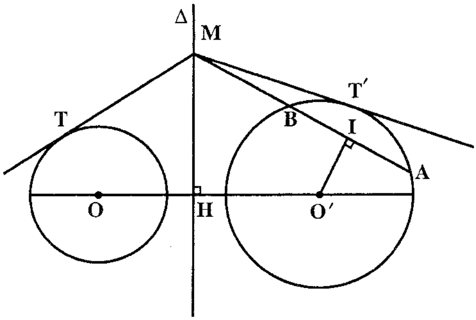


راه دوم. اگر (O′) دایرهٔ مطلوب گذرنده بر A باشد که Δ محور اصلی آن و دایرهٔ (O) است، در این صورت اگر از نقطهٔ دلخواه M مماس و قاطعی بر آن رسم کنیم، داریم:

$$MT^2 = MT'^2 = BA.MA \quad (1)$$

و از آن‌جا حل مسأله چنین است:

ابتدا از O مرکز دایرهٔ مفروض عمودی برΔ وارد آورده و از نقطهٔ دلخواه M بر دایرهٔ (O) مماس و همچنین به نقطهٔ A وصل می‌نماییم. چون باید داشته باشیم:



$$MT^{۲} = MB.MA$$

از این رابطه MB را به وسیلهٔ ترسیم رسم نموده و بر MA نقطهٔ B را تعیین می‌نماییم و عمودمنصف AB را رسم می‌کنیم تا OH را در O' قطع کند. دایرهٔ به مرکز (O') و شعاع $O'A = O'B$ دایرهٔ خواسته شده است.

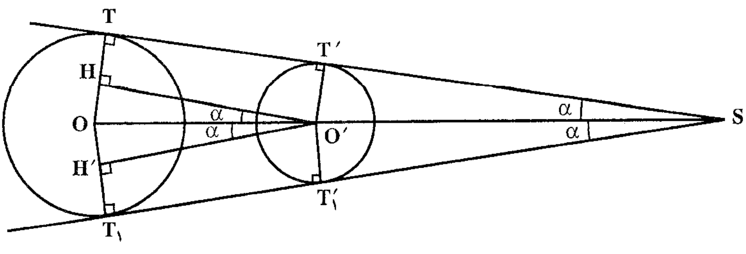
۳۸۱. دایرهٔ مطلوب به دسته دایرهٔ (ω) که مزدوج دسته دایرهٔ هم محور مفروض (U) است، تعلق دارد.

۲.۱.۱.۲.۴.۲. رسم دو دایره با معلوم بودن دایره، نقطه

۳۸۲. نقطهٔ برخورد دو مماس مشترک برونی یا درونی دو دایره، روی خط‌المرکزین این دو دایره قرار دارد و خط‌المرکزین، نیمساز زاویهٔ بین آنها است. اگر زاویهٔ بین دو مماس را ۲α فرض کنیم $T'\hat{S}T'_{۱} = T\hat{S}T_{۱} = \alpha$ است. از O' خطی موازی دو مماس مشترک رسم می‌کنیم تا OT و $OT_{۱}$ را در H و H' قطع کند. OO' نیمساز زاویهٔ $HO'H'$ است و داریم:

$$H\hat{O}'O = H'\hat{O}'O = \alpha$$

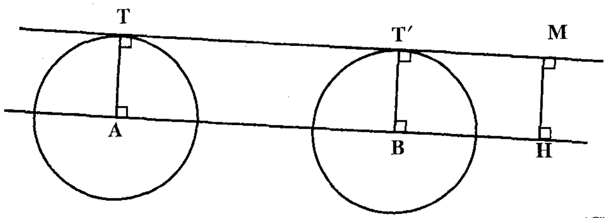
است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ $OHO'(\hat{H} = ۹۰^{\circ})$، $OH = R - R'$ و $H\hat{O}'O = \alpha$ است، پس وتر این مثلث یعنی OO' مشخص می‌شود و از آن‌جا وضع دو دایره را می‌توان مشخص کرد.

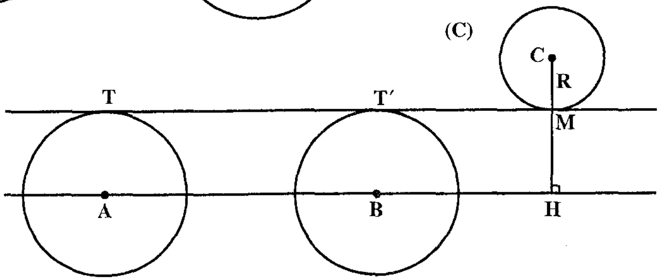


۳۸۴. خط‌المرکزین دو دایرهٔ مساوی با مماس مشترک آن دو دایره موازی است. بنابراین:

۱. شعاع دایره‌های خواسته شده مساوی MH یعنی فاصلهٔ نقطهٔ M از خط AB است که دو نقطهٔ داده شده را به هم وصل می‌کند.

۲. اگر A و B دو نقطهٔ ثابت و (C) دایرهٔ ثابت باشد، CMH را عمود بر خط‌المرکزین رسم می‌کنیم. CM=R شعاع دایرهٔ داده شده و MH شعاع دایره‌های خواسته شده است.

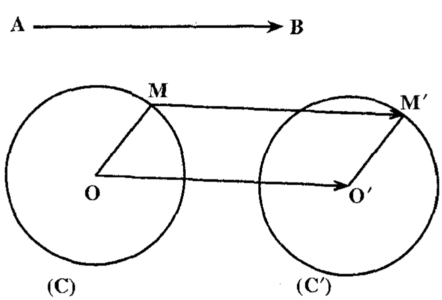




۲.۴.۲.۱.۲. دایره؛ پاره‌خط، نیمخط، خط

۲.۴.۲.۱.۲.۱. دایره، پاره‌خط

۳۸۵. مرکز دایره و یک نقطه از محیط آن را به اندازهٔ بردار $\overrightarrow{AB}$ انتقال می‌دهیم و دایرهٔ انتقال یافته را رسم می‌کنیم.



۲.۴.۲.۱.۲.۲. دایره، خط

۲.۴.۲.۱.۲.۲.۱. یک دایره، دو خط

۳۸۶. چون دایرهٔ موردنظر، باید بر دو خط راست موازی l و m مماس باشد، بنابراین مرکز آن K، روی خط راستی است که با l وm موازی و از آنها به یک فاصله باشد. شعاع R این دایره، برابر است با نصف فاصلهٔ بین دو خط راست موازیl و m. از طرف دیگر، دایرهٔ مجهول باید بر دایرهٔ مفروض

مماس باشد، یعنی نقطهٔ K، مرکز آن، باید به فاصلهٔ $R+r$ یا $R-r$ (اگر $R \geq r$) از نقطهٔ O باشد؛ بنابراین نقطهٔ K روی محیط یکی از دو دایرهٔ به مرکزO و شعاع $R+r$ و $R-r$ قرار دارد.

ساختمان را می‌توان به این ترتیب انجام داد. خط راستی موازی l و m و به یک فاصله از آنها (بین دو خط راست l و m) رسم می‌کنیم، سپس دو دایرهٔ به مرکز O و شعاعهای $R+r$ و $R-r$ (اگر $R > r$) را می‌کشیم. نقطهٔ K، محل برخورد خط راست با یکی از این دو دایره خواهد بود.

یادداشت. این مسأله ارتباط نزدیکی با مسألهٔ مشهور آپولونیوس (حدود ۲۰۰ سال پیش از میلاد) دارد:

سه دایره داده شده است، می‌خواهیم دایرهٔ چهارمی رسم کنیم که بر این سه دایره مماس باشد. این مسأله دشوار را می‌توان به کمک تبدیل انعکاسی حل کرد. برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم سه دایرهٔ مفروض، در بیرون یکدیگر باشند. اگر شعاعهای این دایره‌ها را به یک اندازه بزرگ کنیم، جای مرکز دایره‌ای که باید بر آنها مماس باشد، تغییر نمی‌کند. شعاعهای آنها را تا جایی بزرگ می‌کنیم که دو تا از دایره‌ها بر هم مماس شوند. سپس انعکاس تمامی صفحه را نسبت به دایره‌ای به مرکز نقطهٔ تماس این دو دایره پیدا می‌کنیم. در این تبدیل، دو دایرهٔ مماس بر هم، به دو خط راست موازی و دایرهٔ سوم، به یک دایره تبدیل می‌شوند.

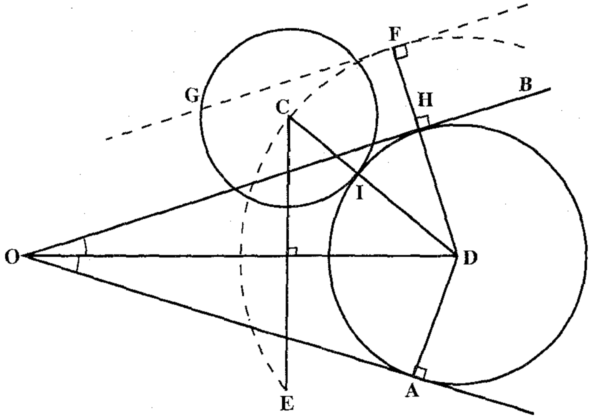
۳۸۷. دایرهٔ جواب مسأله را (D) می‌نامیم. مرکز آن یعنی نقطهٔ D روی نیمساز زاویهٔ AOB قرار دارد. CE را عمود بر OD وDF را عمود بر OB رسم می‌کنیم. به مرکز D و به شعاع DC کمان ECF را رسم می‌نماییم و FG را عمود بر DF و در نتیجه موازی OB رسم می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$DF = DC \quad , \quad DH = DI \Rightarrow HF = IC = r$$

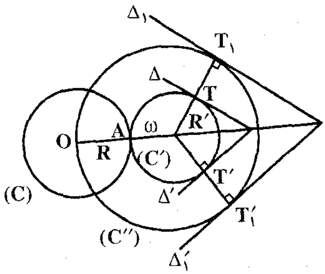
بنابراین برای حل مسأله باید خط نامحدود GF را موازی OB به فاصلهٔ r از آن رسم کنیم. نقطهٔ E را قرینهٔ نقطهٔ C نسبت به OD به دست آوریم و بالاخره کمان ECF را به وسیلهٔ دو نقطهٔ E و C و مماس بر خط GF رسم کنیم. مرکز این کمان، نقطهٔ O، مرکز دایرهٔ خواسته شده است.

تبصره. یک کمان دیگر می‌توان رسم کرد که از دو نقطهٔ E و C بگذرد و بر GF مماس باشد، پس مسأله یک جواب دیگر نیز دارد. دو جواب دیگر نیز خواهیم داشت، اگر مرکز دایرهٔ جواب را روی نیمساز زاویهٔ منفرجه بین دو خط داده شده اختیارکنیم.

اگر دو خط موازی باشند، نیمساز به خط موازی آن دو و به یک فاصله از آنها تبدیل می‌شود.



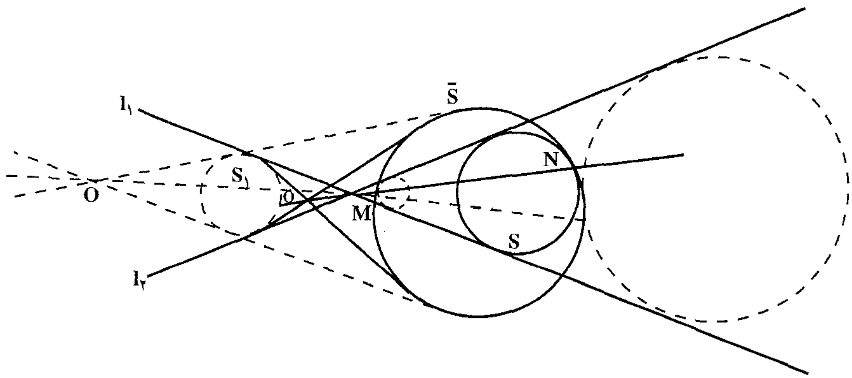
۳۸۸. اگر (C') دایرهٔ مطلوب به مرکز (ω) و به شعاع R' مماس بر دایرهٔ C و خطهای Δ و Δ' باشد، در صورتی که خطهای Δ_1 و Δ'_1 بترتیب موازی Δ و Δ' و به فاصلهٔ R از آنها رسم نماییم. دایرهٔ (C'') به مرکز (ω) و شعاع $R'' = R + R'$ از O مرکز دایرهٔ (C) گذشته و بر خطهای Δ_1 و Δ'_1 مماس خواهد بود. در نتیجه حل مسأله چنین است: خطهای Δ_1 و Δ'_1 را بترتیب موازی Δ و Δ' و به فاصلهٔ R از آنها رسم می‌نماییم. دایرهٔ (C'') را چنان رسم می‌کنیم که از (O) گذشته و بر Δ_1 و Δ'_1 مماس باشد.



دایرهٔ به مرکز (ω) و شعاع $R'' - R$، دایرهٔ مطلوب (C') است.

۳۸۹. دایرهٔ مطلوب را S می‌نامیم؛ دایرهٔ دلخواه S_1 را مماس بر l_1 و l_2 رسم می‌کنیم (شکل؛ در این شکل حالت $l_1 \| l_2$ را که در آن حل مسأله خیلی ساده‌تر است در نظر نمی‌گیریم). مرکز تجانس دایره‌های S و S_1 نقطهٔ M، محل برخورد l_1 و l_2 است، مرکز تجانس دایره‌های S_1 و $\bar{S}$ را می‌توان پیدا کرد؛ مرکز تجانس دایره‌های $\bar{S}$ و S نقطهٔ N، یعنی نقطهٔ تماس آنهاست. بنابر قضیهٔ مذکور دربارهٔ سه مرکز تجانس O، M و N بر یک خط واقعند، یعنی N یک نقطهٔ برخورد خط OM با دایرهٔ $\bar{S}$ است. با یافتن N مشکلی

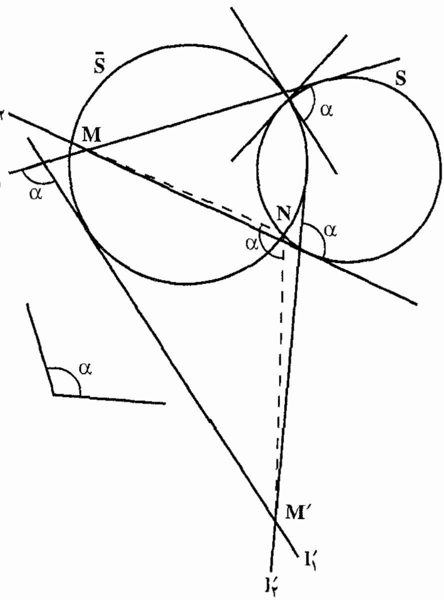
در راه ترسیم دایرهٔ S وجود نخواهد داشت.
نقطهٔ O مرکز تجانس دایره‌های $\bar{S}$ و S_1 را به دو طریق می‌توان انتخاب کرد؛ هر یک از دو خط OM که از این روش به دست می‌آید می‌تواند $\bar{S}$ را در دو نقطه قطع کند؛ پس تا چهار دایره می‌توان رسم کرد که همگی در شرایط مسأله صدق کنند؛ مرکزهای این دایره‌ها بر یکی از دو نیمساز دو زاویهٔ مجاوری که از برخورد l_1 و l_2 پدید می‌آیند، قرار دارند (مرکز دایرهٔ S_1 روی این نیمساز واقع است). اگر مرکز دایرهٔ S_1 را نقطه‌ای واقع بر نیمساز زاویهٔ دیگر اختیار کنیم، می‌توانیم تا چهار جواب دیگر نیز به دست آوریم. پس این مسأله روی‌هم رفته هشت جواب می‌تواند داشته باشد.



۳۹۰. فرض می‌کنیم که مسأله حل شده است (شکل). تجانس مارپیچی به مرکز N، نقطهٔ برخورد $\bar{S}$ با S، زاویهٔ دوران α و نسبت تجانسی برابر با نسبت شعاعهای دو دایرهٔ $\bar{S}$ و S، دایرهٔ S را به $\bar{S}$ بدل می‌کند. بر اثر این تبدیل l_1 و l_2 به خطهای l'_1 و l'_2 بدل می‌شوند که بر $\bar{S}$ مماسند و زاویهٔ بین l'_1 و l_1 مساوی α و زاویهٔ بین l'_2 و l_2 بدل می‌شود. در نتیجه:

$$M\hat{N}M' = \alpha$$

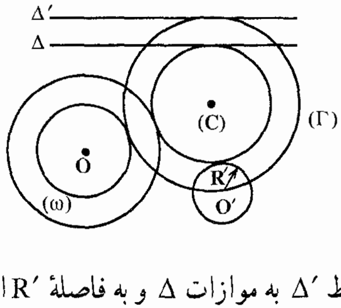
سرانجام به این ترسیم می‌رسیم:
مماسهای l'_1 و l'_2 بر $\bar{S}$ را که بترتیب با l_1 و l_2 زاویهٔ α می‌سازند، رسم می‌کنیم؛ نقطهٔ برخورد l'_1 و l'_2 را M' می‌نامیم و نقطهٔ برخورد $\bar{S}$ را با دایرهٔ دیگر گذرنده بر دو نقطهٔ M و M' و حاوی زاویهٔ α، N می‌نامیم. تجانس مارپیچی به مرکز N و زاویهٔ دوران α و نسبت تجانس NM'/NM دایرهٔ $\bar{S}$ را به دایرهٔ مطلوب S بدل می‌کند. مسأله می‌تواند تا هشت جواب داشته باشد.



تبصره. اگر $l_1 \| l_2$، حل مسأله خیلی ساده‌تر می‌شود، زیرا در این صورت می‌توانیم اندازهٔ r، شعاع دایرهٔ مطلوب را مستقیماً به دست آوریم؛ مرکز دایرهٔ به شعاع r که S را به زاویهٔ α قطع می‌کند، روی یکی از دو دایرهٔ کاملاً مشخص هم مرکز با $\bar{S}$ واقع است. در این حالت مسأله تا چهار جواب می‌تواند داشته باشد.

۲.۴.۲.۱.۲.۲.۲. دو دایره، یک خط

۳۹۱. اگر (C) دایرهٔ خواسته شده به شعاع R'' مماس بر دایره‌های (O) و (O′) به شعاعهای R و R' و همچنین مماس بر خط Δ باشد.



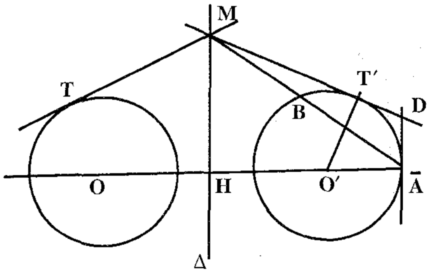
چنانچه به مرکز (O) و به شعاع $R-R'$ دایرهٔ (ω) را رسم و خط Δ' را به موازات Δ و به فاصلهٔ R' رسم نماییم. دایرهٔ (Γ) به مرکز C و به شعاع $R''+R'$ از نقطهٔ O' گذشته و بر دایرهٔ (ω) و خط Δ' مماس می‌شود و از آن‌جا حل مسأله چنین است:

دایرهٔ (ω) به مرکز(O) و به شعاع $R-R'$ و خط Δ' به موازات Δ و به فاصلهٔ R' از آن رسم می‌نماییم. دایرهٔ (Γ) را چنان رسم می‌کنیم که از نقطهٔ (O′) گذشته و بر خط Δ' و دایرهٔ (ω) مماس شود. آن‌گاه به مرکز (ω) و شعاع تفاضل شعاعهای دایرهٔ (Γ) و

دایرهٔ (O') دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره جواب مسأله است.

۳.۲.۲.۱.۲.۴.۲. دسته دایره، یک خط

۳۹۲. چنانچه (O') دایرهٔ مطلوب مماس بر خط مفروض D، Δ و (O) بترتیب خط و دایره مفروض باشند. بنا به خاصیت محور اصلی از هر نقطه واقع بر محور اصلی می‌توان دو مماس مساوی بر دو دایره رسم کرد و اگر M نقطهٔ تقاطع خط D با Δ باشد، چنانچه از M مماس MT را بر دایرهٔ (O) رسم نماییم داریم: $MT = MT'$. در نتیجه حل مسأله چنین است:

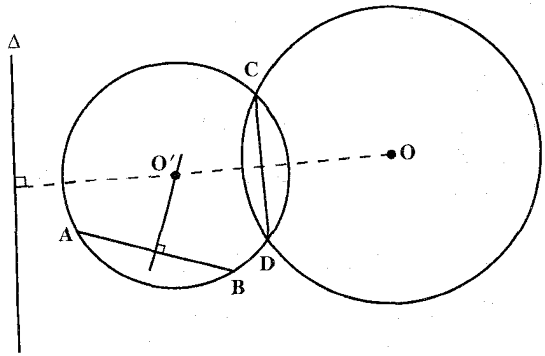


از مرکز دایرهٔ (O) عمود OH را بر Δ وارد کرده و از M محل برخورد D با Δ مماس MT را بر دایرهٔ (O) رسم می‌نماییم و سپس روی D نقطهٔ T' را به نحوی تعیین می‌کنیم که $MT = MT'$ باشد، در صورتی که از T' عمودی بر خط D اخراج کنیم، محل برخوردش با OH نقطهٔ (O') مرکز دایرهٔ مطلوب و $O'T'$ شعاع است.

بحث. در صورتی که D با Δ موازی باشد، نقطهٔ A محل برخورد OH با D یک نقطه از دایرهٔ (O') بوده است.

۳.۲.۱.۲.۴.۲. دایره، پاره‌خط، خط

۳۹۳. مرکز دایرهٔ مطلوب از طرفی روی عمودمنصف AB و از طرف دیگر روی عمودی است که از O بر امتداد Δ فرود آید. نقطهٔ O' مرکز دایرهٔ جواب است. شرط جواب متقاطع بودن دو عمود است و این که دایرهٔ O'، دایرهٔ O را قطع کند.



۲.۴.۲.۱.۳. دایره، نقطه، خط

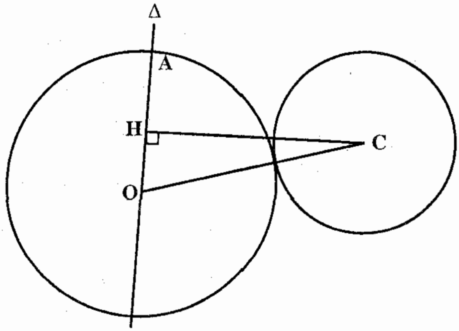
۳۹۴. راه اول. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و O دایرهٔ خواسته شده باشد. شعاع این دایره را x فرض می‌کنیم. اگر $OH=a$ و $HC=b$ باشد، در مثلث قائم‌الزاویهٔ OHC می‌توان نوشت:

$$(r+x)^2=(x-a)^2+b^2 \quad \text{و یا} \quad OC^2=OH^2+HC^2$$

از آن‌جا:

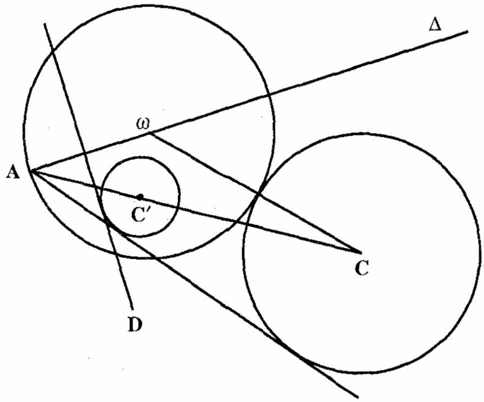
$$x=\frac{b^2+a^2-r^2}{2r+2a}$$

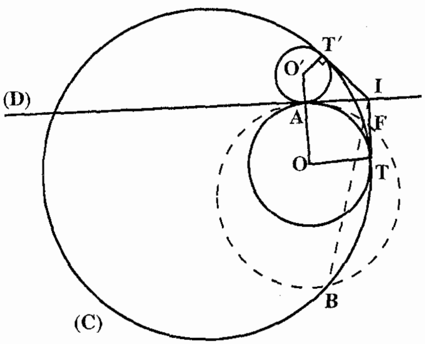
از این رابطه طول x به دست می‌آید و پس از یافتن x دایرهٔ به مرکز O و به شعاع x دایرهٔ خواسته شده است.



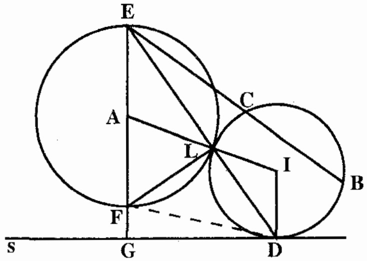
راه دوم. در صورتی که (ω) دایرهٔ مطلوب گذرنده بر A باشد که مرکزش بر Δ واقع بوده و بر دایرهٔ مفروض (C) مماس است، در این حالت، چون انعکاس زاویه‌ها را تغییر نمی‌دهد، لذا وقتی دو دایرهٔ (C) و (ω) مماس باشند، منعکسهای آنها مماس خواهند بود. چنانچه A را قطب انعکاس و عدد دلخواه k را قوت انعکاس اختیار کنیم، منعکس دایرهٔ (C)، دایرهٔ (C') و منعکس دایرهٔ (ω) گذرنده بر A قطب انعکاس خط D بوده که بر دایرهٔ (C') مماس بوده و بر خط Δ عمود است و در نتیجه حل مسأله چنین است: ابتدا دایرهٔ (C') منعکس دایرهٔ (C) را با قطب A و قوت دلخواه k تعیین می‌نماییم و سپس خط D مماس بر دایرهٔ (C') و عمود بر Δ را رسم می‌کنیم. منعکس خط D دایرهٔ مطلوبِ (ω) است.

بحث. چون دو مماس بر دایرهٔ (C') و عمود بر Δ می‌توان رسم کرد، در نتیجه مسأله پیوسته دارای دو جواب است.





راه سوم. مسأله را حل شده انگاشته، فرض می‌کنیم نقطهٔ O مرکز یکی از دایره‌های خواسته شده و T نقطهٔ تماس آن با دایرهٔ (C) باشد. دایره‌ای اختیاری رسم می‌کنیم که در نقطهٔ A بر خط D مماس باشد و دایرهٔ (C) را در نقطه‌های F و B قطع کند. خط BF محور اصلی دایرهٔ اختیاری و دایرهٔ (C) و خط (D) محور اصلی دایرهٔ اختیاری با دایرهٔ (O) و مماس در نقطهٔ T محور اصلی دایرهٔ (O) با دایرهٔ (C) است. این سه خط یکدیگر را در نقطهٔ I مرکز اصلی سه دایره قطع می‌کنند. بنابراین برای حل مسأله پس از رسم دایرهٔ اختیاری وتر BF را امتداد می‌دهیم تا خط (D) را در نقطهٔ I قطع کند. نقطهٔ تماس هر خط مماس رسم شده از I بر دایرهٔ (C) نقطهٔ تماس یک دایره که جواب مسأله است با دایرهٔ (C) می‌باشد، پس از تعیین T عمود TO بر خط مماس و عمود AO بر خط (D) را رسم می‌کنیم تا یکدیگر را در O مرکز دایرهٔ خواسته شده قطع کنند. اگر خط D دایرهٔ (C) را قطع نکند، مسأله همواره دو جواب دارد. اگر خط D بر دایرهٔ (C) مماس باشد و نقطهٔ A نقطهٔ تماس نباشد، مسأله یک جواب دارد و جواب دیگر خود خط D است و اگر نقطهٔ A نقطهٔ تماس خط D با دایرهٔ (C) باشد، مسأله بینهایت جواب دارد. بالاخره هرگاه خط D با دایرهٔ (C) متقاطع باشد و نقطهٔ A بر نقطهٔ تقاطع منطبق نباشد، مسأله دو جواب دارد و اگر نقطهٔ A بر نقطهٔ تقاطع منطبق باشد، جواب مسأله همان نقطهٔ A است.

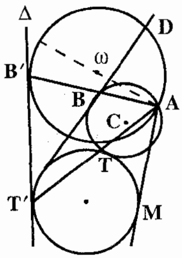


۳۹۵. راه اول. فرض کنید دایرهٔ مطلوب (I) (شکل)، از نقطهٔ مفروض B بگذرد. بر دایرهٔ مفروض (A) در نقطهٔ L و بر خط مفروض s در نقطهٔ D مماس باشد. نقطهٔ L یک مرکز تشابه دو دایره است، پس خط LD از یک انتهای قطر EF از دایرهٔ (A) که با شعاع ID از دایرهٔ (I) موازی است، می‌گذرد. پس نقطهٔ E معلوم است؛ زیرا EF قطر عمود بر خط s از دایرهٔ (A) است. فرض کنید EF خط s را در G قطع کند. قطر EF از نقطهٔ L با زاویهٔ قائمه دیده می‌شود؛ سپس DF هم‌از L و هم‌از G با زاویهٔ قائمه دیده می‌شود و LFGD یک چهارضلعی محاطی است. پس داریم:

$$EF.EG = EL.ED = EB.EC$$

و پاره‌خط EC را می‌توانیم به عنوان جزء چهارم تناسب رسم کنیم. این پاره‌خط نقطهٔ C را روی خط EB تعیین می‌کند و مسأله به مسألهٔ (PPL) تبدیل می‌شود و دو جواب برای مسألهٔ عنوان شده به دست می‌آید.

می‌توان کاری کرد که F نقش E را داشته باشد، به این ترتیب دو جواب دیگر به دست می‌آید و مسأله چهار جواب دارد.



راه دوم. اگر (C) دایرهٔ مطلوب، گذرنده بر نقطهٔ A و مماس بر دایرهٔ (O) و خط D در نقطه‌های T و B باشد، چنانچه AT را امتداد دهیم تا دایرهٔ (O) را در نقطهٔ دیگر T' قطع کند و از A مماس AM را بر دایرهٔ (O) رسم کنیم، در این صورت داریم:

$$AT.AT' = AM^2 = \text{ثابت} = P_{A(O)}$$

در صورتی که A را قطب و AM^2 را قوت انعکاس در نظر گیریم:

اولاً. منعکس دایرهٔ (C) بر خودش منطبق است.

ثانیاً. منعکس خط D، دایره‌ای است مانند (ω) و منعکس دایرهٔ (C) که از نقطهٔ A قطب انعکاس می‌گذرد، خطی است مستقیم مانند Δ.

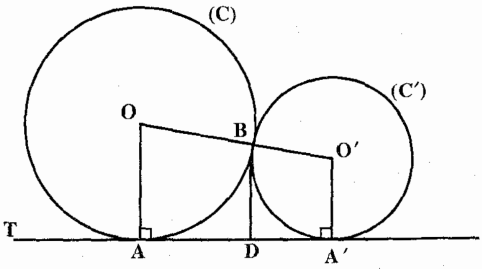
ثالثاً. چون دایرهٔ (C) بر دایرهٔ (O) و خط D مماس است و انعکاس زاویه‌ها را تغییر

نمی‌دهد، لذا منعکس دایرهٔ (C) بر منعکسهای دایرهٔ (O) و خط D مماس خواهند بود و چون منعکس خط D دایرهٔ (ω) و منعکس دایرهٔ (O) بر خودش منطبق و منعکس دایرهٔ (C) خط Δ است در نتیجه خط Δ بردایره‌های (ω) و (O) مماس می‌باشد و از آن‌جا حل مسأله چنین است :

ابتدا از A مماس AM را بر دایرهٔ (O) رسم می‌نماییم و سپس دایرهٔ (ω) منعکس خط D را تعیین می‌کنیم و آن‌گاه خط D مماس مشترک دایره‌های (ω) و (O) را رسم می‌نماییم. منعکس خط Δ . (C) دایرهٔ مطلوب است یا به عبارت دیگر اگر T' و B' بترتیب نقطه‌های تماس مماس مشترک باشند، آنها را به نقطهٔ A وصل نموده، امتداد می‌دهیم تا خط D و دایرهٔ (O) را در T و B قطع نماید. T و B نقطه‌های تماس دایرهٔ (C) با دایرهٔ (O) و خط D بوده و دایرهٔ گذرنده بر B، A و T جواب مسأله است.

بحث. در صورتی که دایره‌های (ω) و (C) یک یا دو یا سه و یا چهار مماس مشترک داشته باشند، مسأله دارای یک یا دو یا سه و یا چهار جواب است و چنانچه مماس مشترک نداشته باشند، مسأله جواب ندارد.

۳۹۶. مسأله را حل شده فرض می‌کنیم. مماس مشترک BD را رسم می‌نماییم تا AA' یا خط T را در نقطهٔ D قطع کند.

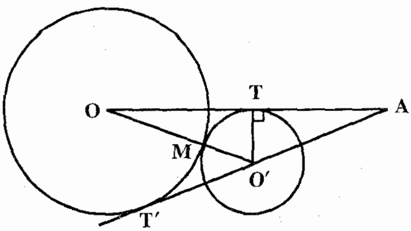


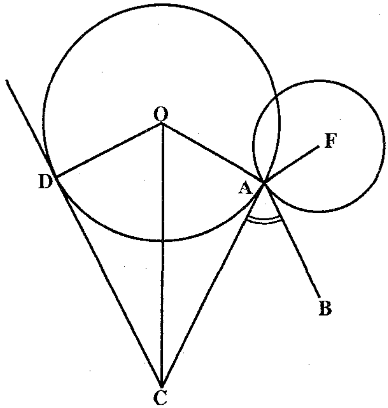
داریم :

$$DA = DB = DA'$$

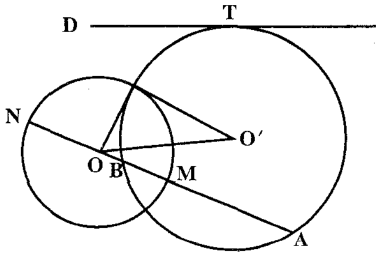
پس نقطهٔ D وسط AA' است. بنابراین برای حل مسأله از نقطهٔ D وسط پاره‌خط AA' مماس DB را بر دایرهٔ (O) رسم می‌کنیم. از O به B وصل می‌کنیم و امتداد می‌دهیم تا عمودی را که در نقطهٔ A' بر خط T اخراج شده است در نقطهٔ O' مرکز دایرهٔ جواب مسأله قطع کند. به مرکز O' و به شعاع $O'B = O'A'$ دایرهٔ خواسته شده را رسم می‌کنیم.

۳۹۷. شعاع دایرهٔ خواسته شده را x بگیرید و از داده‌های مسأله استفاده کنید.



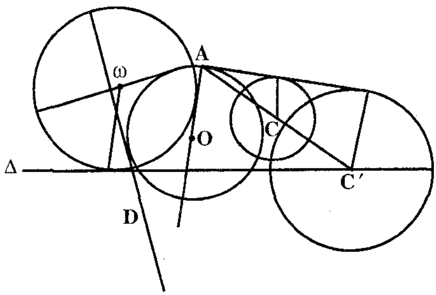


۳۹۸. از نقطهٔ A مماس AB را بر دایرهٔ داده شده رسم می‌کنیم. زاویهٔ $B\hat{A}C$ را مساوی α رسم می‌کنیم. خط AC باید مماس بر دایرهٔ خواسته شده باشد. از آن‌جا، مرکز O روی نیمساز زاویهٔ ACD و از طرفی روی خط AO است که بر مماس AC عمود است. بدین ترتیب نقطهٔ O مرکز دایرهٔ خواسته شده مشخص می‌شود.



۳۹۹. **راه اوّل.** قطر MN از دایرهٔ (O) و گذرنده بر A رسم نموده و نقطهٔ B مزدوج A نسبت به MN تعیین می‌نماییم. دایرهٔ (O′) گذرنده بر A و B و مماس بر خط D جواب مسأله است.

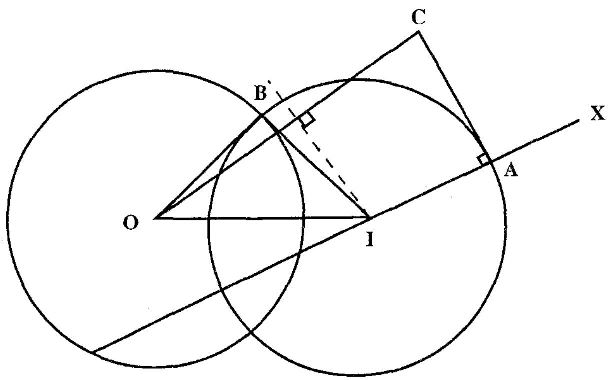
راه دوم. اگر (O) دایرهٔ خواسته شدهٔ گذرنده بر A و مماس بر خط D و عمود بر دایرهٔ (C) باشد، چنانچه A را قطب و عدد دلخواه k را قوت انعکاس فرض نماییم، منعکس دایرهٔ (O) خطی است مانند Δ و منعکس خط D دایره‌ای است مانند (ω) و منعکس دایرهٔ (C)، دایرهٔ (C′) است. به نحوی که چون در انعکاس زاویه‌های ثابت می‌ماند، لذا خط Δ بر دایرهٔ (ω) مماس و بر دایرهٔ (C′) عمود است، یعنی از مرکز دایرهٔ (C′) می‌گذرد و از آن‌جا حل مسأله چنین است :



دایرهٔ (ω) منعکس خط D و دایرهٔ (C') منعکس دایرهٔ (C) را با قطب A و قوت عدد دلخواه k تعیین نموده و از (O') مرکز دایرهٔ (C') خط Δ را مماس بر دایرهٔ (ω) رسم می‌نماییم. این خط منعکس دایرهٔ مطلوب است. منعکس خط Δ را با قطب A و قوت k تعیین می‌نماییم. این دایره، دایرهٔ مطلوب است.

بحث. چنانچه از (C') مرکز دایرهٔ (C') منعکس دایرهٔ (C) بتوان بر دایرهٔ (ω) یک یا دو مماس رسم کرد، مسأله دارای یک یا دو جواب است و در صورتی که نتوانیم مماس رسم کنیم، مسأله جواب ندارد.

۴۰۰. فرض می‌کنیم مسأله حل شده باشد و I مرکز دایرهٔ مطلوب و O مرکز دایرهٔ معلوم و B نقطهٔ تقاطع دو دایره باشد. مثلث IBO قائم‌الزاویه است و اگر آن را حول نقطهٔ I به زاویهٔ IBA دوران دهیم، خط BO به وضع AC عمود بر خط X در نقطهٔ A در می‌آید. پس برای حل مسأله می‌توان از A عمودی بر خط X اخراج کرده، روی آن AC را مساوی شعاع دایرهٔ معلوم می‌نماییم چون IC=IO است، پس نقطهٔ I مرکز دایرهٔ مطلوب در نقطهٔ تقاطع خط X با عمودمنصف OC واقع است.



۴۰۱. اگر (O') دایرهٔ خواسته شده باشد:

اولاً. مماس مشترک دو دایره از نقطهٔ S مرکز تجانس که بر خط‌المرکزین واقع است، می‌گذرد.

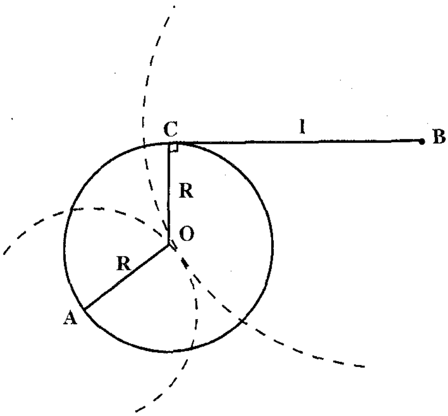
ثانیاً. چنانچه D محور اصلی آنها باشد، نقطهٔ I محل تلاقی D و مماس مشترک دو دایره، وسط TT' است و در نتیجه حل مسأله چنین است:

از S مماس ST را بر دایرهٔ (O) رسم می‌نماییم. آن‌گاه بر ST نقطهٔ T' را چنان تعیین می‌کنیم که $TI = IT'$ باشد، سپس از T' عمودی بر ST اخراج می‌کنیم تا SO را در

(′O) قطع کند. ′O مرکز و $R' = O'T'$ شعاع دایرهٔ مطلوب است.

۴۰۴. مسأله را حل شده و دایرهٔ به مرکز O و به شعاع r را جواب مسأله می‌گیریم. از B مماس BC را بر دایره رسم کرده و از C به O وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ BOC داریم:

$B\hat{C}O = ۹۰^\circ$ و $BC = l$ و $OC = R$

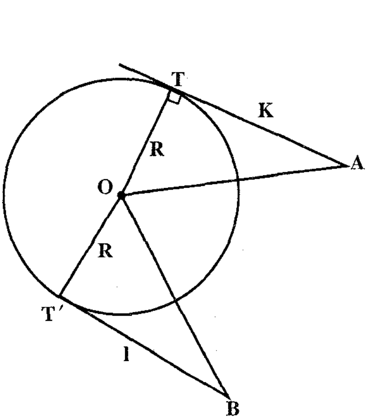


بنابراین اندازهٔ وتر BO مشخص است، پس یک مکان هندسی نقطهٔ O، دایره‌ای به مرکز B و به شعاع $BO = \sqrt{l^2 + r^2}$ است. از طرفی مکان هندسی دیگر نقطهٔ O دایره‌ای به مرکز A و به شعاع r است. بنابراین برای حل مسأله دو مکان هندسی بالا را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد آنها، نقطهٔ O مرکز دایرهٔ جواب است. به مرکز O و به شعاع r دایرهٔ جواب را رسم می‌کنیم.

۴۰۵. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و دایرهٔ $C(O , R)$ جواب مسأله باشد. از A مماس AT به طول k و از B مماس ′BT به طول l را رسم می‌کنیم از O به A و B وصل می‌کنیم. در دو مثلث قائم‌الزاویهٔ AOT و ′BOT داریم:

$AO = \sqrt{AT^2 + OT^2} = \sqrt{k^2 + R^2} =$ مقدار معلوم

$BO = \sqrt{BT'^2 + OT'^2} = \sqrt{l^2 + R^2} =$ مقدار معلوم

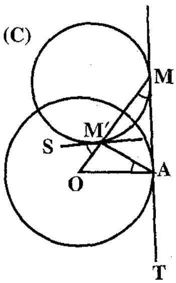


بنابراین دو مکان هندسی برای نقطهٔ O مرکز دایرهٔ جواب مسأله وجود دارد:
یکی دایره‌ای به مرکز A و به شعاع $\sqrt{k^2 + R^2}$ و دیگری دایره‌ای به مرکز B و به شعاع $\sqrt{l^2 + R^2}$. پس برای حل مسأله این دو دایرهٔ مکان هندسی را رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد آنها O مرکز دایرهٔ جواب مسأله است. به مرکز O و به شعاع

R دایرهٔ جواب را رسم می‌کنیم.

بحث. به تعداد نقطه‌های برخورد دو دایرهٔ مکان هندسی، مسأله جواب دارد.

۴.۱.۲.۴.۲. مسأله‌های ترکیبی



۴۰۶. ۱. دایرهٔ (C) عمود بر دایرهٔ (O) و مماس بر AT در نقطهٔ M را در نظر می‌گیریم. قطر OM از دایرهٔ (O) به وسیلهٔ (C) به توافق تقسیم شده است، پس M' تصویر A روی OM است؛ زیرا $OA^2 = OM \times OM'$، پس از تعیین M'، مرکز دایرهٔ (C) در محل تلاقی عمودمنصف MM' با عمود رسم شده از M به AT خواهد بود (شکل).

۲. زاویهٔ $OM'A$ قائمه است و M' روی دایرهٔ به قطر OA است و این دایره مکان M' است؛ زیرا وقتی M خط T را طی می‌کند، M' این دایره را می‌پیماید. فرض کنیم $M'S$ مماس رسم شده از M' بر دایرهٔ به قطر OA باشد، داریم:

$$S\hat{M'}O = M'\hat{A}O$$

امّا $M'\hat{A}O = O\hat{M}A$ پس $S\hat{M'}O = O\hat{M}A$

و این تساوی نشان می‌دهد که $M'S$ مماس بر دایرهٔ (C) است. به این ترتیب دایرهٔ به قطر OA و دایرهٔ (C) در نقطهٔ M' بر هم مماسند.

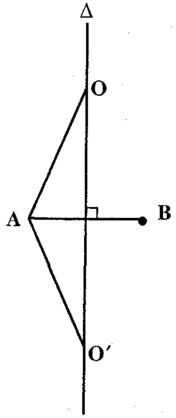
۳.۴.۲. رسم دایره با معلوم بودن شعاع دایره و داده‌های دیگر

۱.۳.۴.۲. شعاع دایره؛ نقطه؛ پاره‌خط، نیمخط، خط؛ زاویه؛ رابطهٔ متری

۱.۱.۳.۴.۲. شعاع دایره، نقطه

۱.۱.۱.۳.۴.۲. شعاع دایره، دو نقطه

۴۰۷. خط Δ عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم می‌کنیم. به مرکز نقطهٔ A و به شعاع R کمانی می‌زنیم تا خط Δ را در نقطهٔ O و O' قطع کند. دایره‌های به مرکزهای O و O' و به

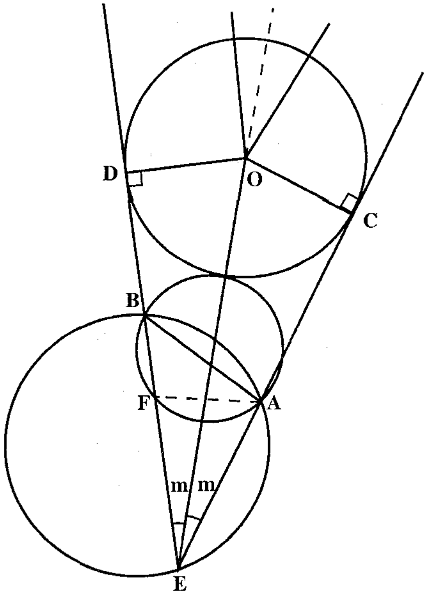


شعاع R که جواب مسأله‌اند، از دو نقطهٔ A و B می‌گذرند.

بحث. ۱. اگر $R > \frac{AB}{۲}$ باشد، مسأله دو جواب دارد.

۲. اگر $R = \frac{AB}{۲}$ باشد، مسأله یک جواب دارد که دایرهٔ به قطر AB است.

۳. اگر $R < \frac{AB}{۲}$ باشد، مسأله جواب ندارد.



۴۰۸. مسأله را حل شده می‌گیریم (شکل). AC − BD=l است و $\hat{AEB} = ۲m$ ، EF=EA می‌گیریم. در نتیجه خواهیم داشت BF = l است. مثلث BAF قابل رسم است ؛ زیرا AB و طول BF و زاویهٔ $\hat{AFB}$ از آن معلوم است. در نتیجه $\hat{AFE} = ۹۰^\circ - m$ از آن‌جا $\hat{AFB} = ۱۸۰^\circ - (۹۰^\circ - m) = ۹۰^\circ + m$ ، پس از رسم مثلث ABF، FB را امتداد می‌دهیم تا کمان درخور زاویهٔ ۲m روبه‌رو به پاره‌خط AB را در نقطهٔ E قطع کند. بین دو ضلع زاویهٔ AEB نقطهٔ O را چنان پیدا می‌کنیم که OC=OD=r باشد.

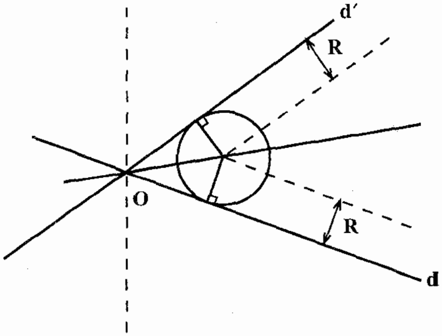
۲.۴.۳.۱.۲. شعاع دایره، خط

۲.۴.۳.۱.۲.۱. شعاع دایره، دو خط

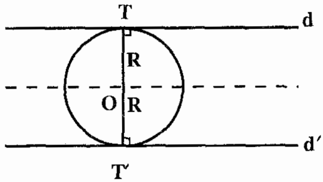
۴۰۹. دو حالت در نظر می‌گیریم :

۱. اگر d و d′ متقاطع باشند، نیمسازهای زاویه‌های بین آنها را رسم می‌کنیم و روی این نیمسازها نقطه‌ای تعیین می‌کنیم که به فاصلهٔ R از دو ضلع زاویه باشد. به مرکز این

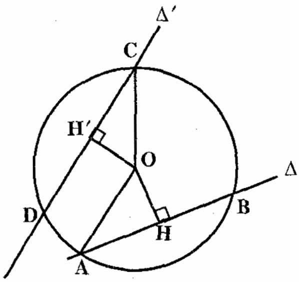
نقطه‌ها و به شعاع R دایره‌های جواب مسأله را رسم می‌کنیم. مسأله چهار جواب دارد.



۲. اگر d و ′d موازی باشند، مکان هندسی مرکز دایره‌های مماس بر آن دو خطی موازی آن دو و به یک فاصله از آن است. در این حالت مسأله وقتی جواب دارد که فاصلهٔ بین دو خط موازی مساوی ۲R باشد.



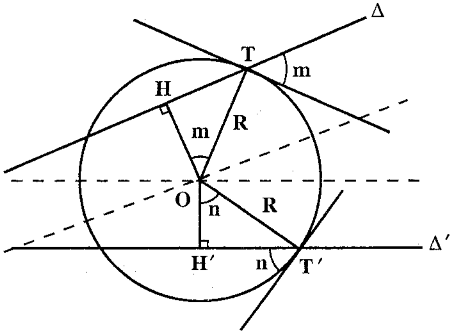
۴۱۰. مرکز دایره را O و دو خط داده شده را Δ و ′Δ می‌نامیم. وترهای ایجاد شده به طول l و ′l در دو دایره را AB و CD می‌نامیم. از O عمودهای OH و ′OH را بر AB و CD فرود می‌آوریم. داریم :



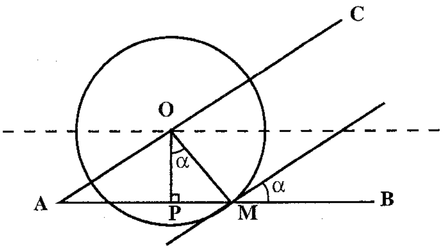
$$OH' = \sqrt{R'^{2} - \frac{l_1^{2}}{4}} \quad \text{و} \quad OH = \sqrt{R^{2} - \frac{l^{2}}{4}}$$

پس OH و ′OH مقدار معلومی هستند، بنابراین مکان هندسی نقطهٔ O دو خط موازی Δ و ′Δ و به فاصلهٔ OH و ′OH از آن هستند. پس برای رسم دایره، این دو مکان را رسم می‌کنیم تا نقطهٔ O به دست آید، به مرکز O و به شعاع R دایرهٔ خواسته شده را رسم می‌کنیم.

۴۱۱. مسأله را حل شده و دایرهٔ (O , R) را که دو خط Δ و ′Δ را بترتیب تحت زاویه‌های m و n قطع کرده است، جواب مسأله می‌گیریم. از O عمودهای OH و ′OH را بترتیب بر Δ و ′Δ فرود می‌آوریم. می‌دانیم که $OH = R\cos m$ و $OH' = R\cos n$ مقدار معلومی هستند. بنابراین دو مکان هندسی برای نقطهٔ O وجود دارد که دو خط موازی Δ و ′Δ



و به فاصلهٔ $R\cos m$ و $R\cos n$ از آن هستند. بنابراین برای حل این مسأله این دو خط مکان هندسی را رسم می‌کنیم تا نقطهٔ برخورد آنها یعنی O به دست آید. به مرکز O و به شعاع R دایرهٔ جواب مسأله را رسم می‌کنیم.



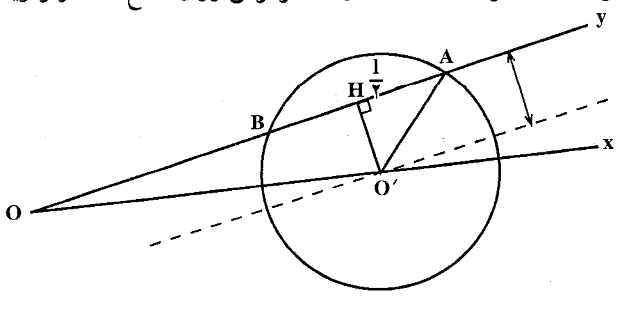
۴۱۲. اگر مسأله را حل شده و دایرهٔ به مرکز O و به شعاع r مماس بر خط AC که خط AB را به زاویهٔ α قطع کرده است، جواب مسأله بگیریم، بسادگی مشخص می‌شود که OP یعنی فاصلهٔ مرکز دایره از خط AB مقدار معلومی است؛ زیرا داریم:

$$\cos\alpha = \frac{OP}{r} \Rightarrow OP = r\cos\alpha$$

بنابراین یک مکان هندسی نقطهٔ O مرکز دایرهٔ خواسته شده، خطی موازی AB و به فاصلهٔ $r\cos\alpha$ از آن است. از طرفی مکان هندسی دیگر نقطهٔ O، خط AC است، پس نقطهٔ برخورد این دو خط نقطهٔ O است. بنابراین برای حل مسأله، خطی موازی AB و به فاصلهٔ $r\cos\alpha$ از آن رسم می‌کنیم تا خط AC را در نقطهٔ O قطع کند. به مرکز O و به شعاع r دایرهٔ جواب مسأله را رسم می‌کنیم.

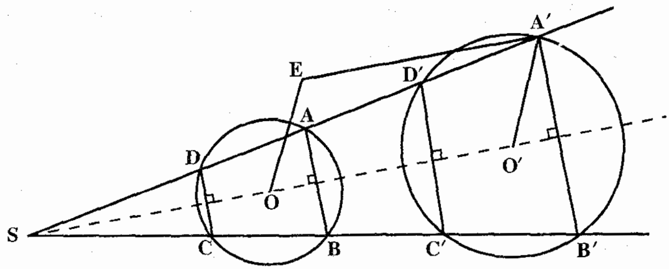
۲.۴.۳.۱.۳. شعاع دایره، زاویه

۴۱۳. مسأله را حل شده و دایرهٔ $C(O', R)$ را که مرکزش روی ضلع Ox از زاویهٔ xOy واقع



است و از Oy وتر AB به طول l را جدا می‌کند، جواب مسأله می‌گیریم. از O' عمود $O'H$ را بر AB فرود می‌آوریم. $O'H=\sqrt{R^۲-\frac{l^۲}{۴}}$ مقدار معلومی است. پس نقطهٔ O' روی خطی موازی ضلع Oy و به فاصلهٔ $O'H$ قرار دارد. بنابراین برای حل مسأله خطی موازی Ox و به فاصلهٔ معلوم $\sqrt{R^۲-\frac{l^۲}{۴}}$ از ضلع Oy رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این خط با ضلع Ox نقطهٔ O' مرکز دایرهٔ خواسته شده است. به مرکز O' و به شعاع R دایره را رسم می‌کنیم.

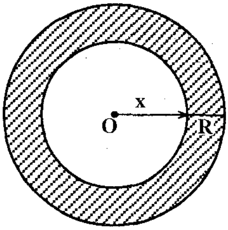
۴۱۴. مرکز دایره روی نیمساز زاویهٔ داده شده قرار دارد. قاعده‌های ذوزنقه بر این نیمساز عمود می‌باشند. از شکلهای متشابه استفاده می‌کنیم. دو خط موازی AB و CD را عمود بر نیمساز زاویه طوری رسم می‌کنیم که نسبت آنها مساوی نسبت قاعده‌های ذوزنقهٔ خواسته شده باشد. سپس دایرهٔ محیطی ذوزنقه متساوی‌الساقین ABCD را رسم می‌کنیم. مرکز این دایره را O می‌نامیم. OA=OB=OC=OD شعاع این دایره است. حال نقطهٔ O' مرکز دایرهٔ جواب را چنان تعیین می‌کنیم که $O'A'=r$ باشد. برای این کار کافی است OE=r اختیار کنیم و EA' را موازی نیمساز SO رسم کنیم و از A' خطی موازی OE رسم کنیم تا SO را در O' قطع کند، از آن‌جا دایرهٔ جواب مسأله به مرکز O' و به شعاع r مشخص می‌شود.



۴.۱.۳.۴.۲. شعاع دایره، رابطهٔ متری

۴۱۵. ۱. اگر مساحت حلقه، واسطهٔ هندسی بین مساحتهای دایرهٔ مفروض و دایرهٔ مجهول باشد و شعاع دایرهٔ کوچکتر را x بگیریم، داریم:

$$\frac{\pi R^۲}{\pi(R^۲-x^۲)}=\frac{\pi(R^۲-x^۲)}{\pi x^۲}\Rightarrow x^۲+Rx-R^۲=۰$$



$$\Rightarrow x_1 \ , \ x_2 = -\frac{R}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

$$\Rightarrow x^2 - Rx - R^2 = 0$$

$$\Rightarrow x_3 \ , \ x_4 = \frac{R}{2}(1 \pm \sqrt{5})$$

از چهار جواب بالا، جوابهای مثبت قابل قبول است یعنی $x_1 = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1) < R$ و $x_2 = \frac{R}{2}(\sqrt{5} + 1) > R$. x_1 جواب هست و x_2 با توجه به فرض این قسمت جواب نیست.

۲. اگر مساحت دایرهٔ مجهول، واسطهٔ هندسی بین مساحت دایرهٔ مفروض و مساحت حلقه باشد، در این صورت :

$$\frac{\pi R^2}{\pi x^2} = \frac{\pi x^2}{\pi(R^2 - x^2)} \Rightarrow x^4 + R^2x^2 - R^4 = 0$$

$$\Rightarrow x_2 = \sqrt{\frac{R^2}{2}(\sqrt{5} - 1)} = \sqrt{R.\frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)}$$

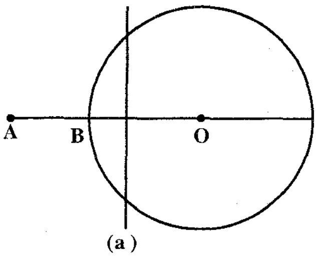
به این ترتیب شعاع دایرهٔ مورد نظر برابر است با واسطهٔ هندسی بین شعاع دایرهٔ مفروض و قطعهٔ بزرگتر این شعاع به شرطی که به نسبت ذات وسط و طرفین تقسیم شده باشد، پس جواب $x_1 = \frac{R}{2}(\sqrt{5} - 1)$ و $x_2 = \frac{R}{2}\sqrt{2(\sqrt{5} - 1)}$ است.

۲.۴.۳.۱.۵. شعاع دایره، نقطه، خط

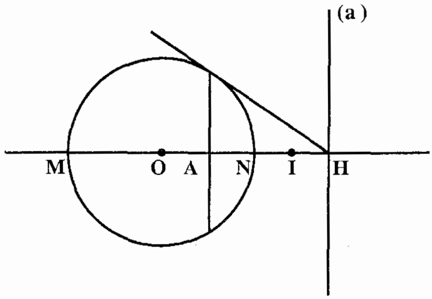
۴۱۶. راه اول. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و دایرهٔ (O) جواب مسأله باشد. مرکز دایره روی خطی است که از A بر (a) عمود می‌شود. می‌توان نوشت :

$$OM \times OA = OC^2 = R^2 \quad (1)$$

$$OA - OM = AM \quad (2)$$



از رابطه‌های (۱) و (۲) با معلوم بودن تفاضل دو پاره‌خط و واسطهٔ هندسی آنها می‌توان دو پاره‌خط را حساب کرد و دایره را رسم کرد.



راه دوم. اگر (O , R) دایرهٔ خواسته شده باشد که در آن (O) قطبی A نسبت به آن می‌باشد در این صورت مرکز دایره بر خطی است که از A بر خط (a) عمود می‌شود و در نتیجه بنا به خاصیت قطب و قطبی داریم:

$$OA.OH = R^2 = ON^2 = OM^2$$

یعنی A و H مزدوجهای M و N می‌باشند و در صورتی که I وسط AH باشد، می‌توان نوشت:

$$R^2 = OA.OH = (OI - AI)(OI + AI)$$

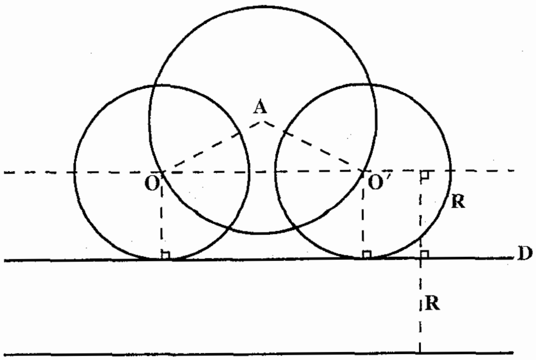
و یا

$$R^2 = OI^2 - AI^2$$

$$R^2 + AI^2 = OI^2$$

از روی این رابطه با معلوم بودن R و همچنین (a) و A می‌توان AH و در نتیجه AI و از آن‌جا OI را تعیین نمود، پس از تعیین OI، از نقطهٔ A بر خط (a) عمود کرده، وسط AH نقطه I و سپس نقطهٔ (O) را تعیین نموده. به مرکز (O) و شعاع R دایرهٔ خواسته شده را رسم می‌نماییم.

۴۱۷. دو خط موازی خط D و به فاصلهٔ R از آن رسم می‌کنیم. سپس دایره‌ای به مرکز A و به شعاع R رسم می‌کنیم. نقطه یا نقطه‌های برخورد این دایره با دو خط موازی خط D، مرکز دایره‌های جواب مسأله است و به تعداد نقطه‌های برخورد، مسأله جواب دارد.



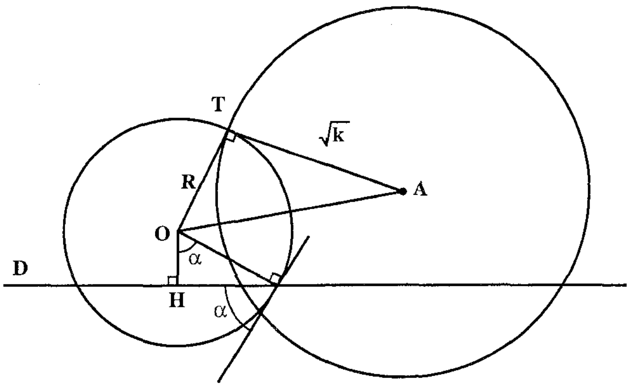
۴۱۸. تمام دایره‌های به شعاع معلوم R که روی خط D، وتر به طول l جدا کنند، از یکدیگر با یک انتقال به موازات D نتیجه می‌گردد. پس دو مکان هندسی از مرکز این دایره‌ها در دست است.

اولاً. خطهای (D′) و (D″) موازی D به فاصلهٔ $\sqrt{R^2-\frac{l^2}{4}}$.

ثانیاً. دایرهٔ به مرکز نقطهٔ معلوم A و شعاع R.

مسأله ممکن است حداکثر چهار جواب داشته باشد.

۴۱۹. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که خط D را تحت زاویهٔ α قطع می‌کنند، خطی موازی D و به فاصلهٔ $R\cos\alpha$ از آن است. این خط را رسم می‌کنیم. از طرفی دایرهٔ به مرکز A و به شعاع $\sqrt{k}$ بر دایرهٔ (O , R) عمود است. پس $OA=\sqrt{k+R^2}$ مقدار ثابتی است. بنابراین مکان هندسی دیگر نقطهٔ O دایره‌ای به مرکز A و به شعاع $\sqrt{k+R^2}$ است. این دایره را نیز رسم می‌کنیم تا نقطهٔ O مرکز دایرهٔ خواسته شده به دست آید.



۶.۱.۳.۴.۲. مسأله‌های ترکیبی

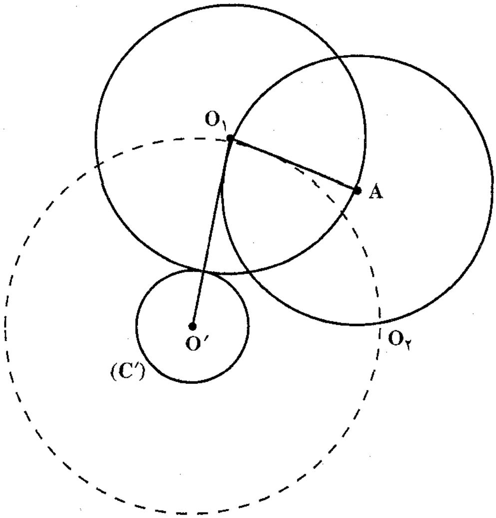
۴۲۰. مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که بر دو نقطه می‌گذرند عمودمنصف پاره‌خط واصل بین آن دو نقطه است. با استفاده از این ویژگی و داده‌های مسأله شکل را رسم کنید و خواسته‌های مسأله را ثابت کنید.

۲.۴.۳.۲. شعاع دایره، دایره و داده‌های دیگر

۲.۴.۳.۲.۱. شعاع دایره، دایره، نقطه

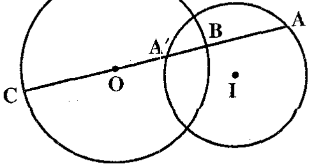
۴۲۱. می‌دانیم مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R که از نقطهٔ A می‌گذرند، دایره‌ای به مرکز A و به شعاع R است. این مکان هندسی را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی مرکز دایره‌های به شعاع R و مماس بر دایرهٔ مفروض(O',R') دایره‌ای به مرکز O' و به شعاع $R+R'$ (یا $R-R'$) است. این مکان هندسی را نیز رسم می‌کنیم. نقطه یا نقطه‌های برخورد این دو مکان هندسی، مرکز دایرهٔ جواب است.

مسأله حداکثر دو جواب دارد (در شکل تنها یک دایره رسم شده است).



۴۲۲. از نقطهٔ A (شکل) به مرکز دایرهٔ (O) وصل می‌کنیم. این خط دایره را در B و C قطع می‌کند. مزدوج توافقی A را نسبت به B و C نقطهٔ A می‌نامیم. اکنون باید دایره‌ای رسم کنیم که از A و A' بگذرد و شعاعش l باشد.

برای این که مسأله جواب داشته باشد، باید :



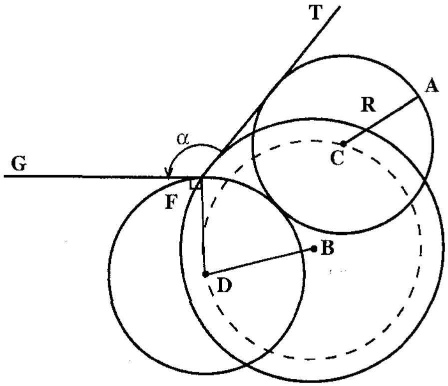
$$\frac{AA'}{۲} \leq l$$

امّا $OA' = \frac{r^2}{OA}$

و $\frac{AA'}{2} = \frac{1}{2}\left|OA - \frac{r^2}{OA}\right|$

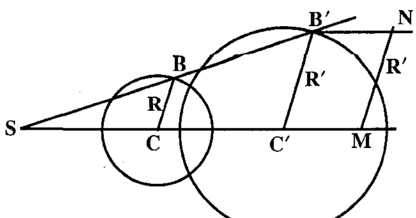
پس $l \geq \frac{1}{2}\left|OA - \frac{r^2}{OA}\right|$

۴۲۳. نخست مکان هندسی مرکز دایره‌هایی را رسم می‌کنیم که دایرهٔ (B , r) را تحت زاویهٔ معلوم α قطع می‌کنند. برای این کار از نقطهٔ دلخواه F واقع بر دایرهٔ (B , r) مماس BT را بر آن رسم می‌کنیم، سپس خط FG را چنان رسم می‌کنیم که $T\hat{F}G = \alpha$ باشد. از F عمودی بر FG اخراج می‌کنیم و روی آن FD=R را جدا می‌کنیم. دایرهٔ به مرکز D و به شعاع DF یکی از دایره‌هایی است که با دایرهٔ (B , r) زاویهٔ α می‌سازد. از D به B وصل می‌کنیم و به مرکز B و به شعاع BD دایره‌ای رسم می‌کنیم. این دایره مکان هندسی مرکز دایره‌هایی است که با دایرهٔ (B) زاویهٔ α می‌سازند. حال به مرکز A و به شعاع R کمانی رسم می‌کنیم تا دایرهٔ (B , BD) را در نقطهٔ C قطع کند. دایرهٔ به مرکز C و به شعاع R جواب مسأله است.



بحث. به تعداد نقطه‌های برخورد دو دایرهٔ (B ,BD) و (A , R) مسأله دارای جواب است.

۴۲۴. از نقطهٔ دلخواه B واقع بر دایرهٔ (C) به نقطهٔ S وصل کرده، امتداد می‌دهیم و از نقطهٔ دلخواه M واقع بر SC پاره‌خط $MN = R'$ و موازی CB رسم می‌نماییم و از N موازی SC رسم می‌کنیم تا SB را در B' قطع کند. خطی



که از B' موازی BC رسم می‌شود، SC را در C' قطع می‌کند. نقطهٔ C' مرکز دایرهٔ خواسته شده است.

۲.۲.۲.۳.۴.۲. شعاع دایره، دایره، خط

۴۲۵. مکان هندسی مرکزهای دایره‌های با شعاع مفروض r که بر خط راست مفروضی مماس باشند، عبارت است از دو خط راست l_1 و l_2 و موازی با این خط راست به فاصلهٔ r از آن.

دایرهٔ مفروض را به شعاع R و به مرکز O می‌گیریم. مکان هندسی مرکزهای دایره‌های با شعاع r که بر دایرهٔ مفروض مماس باشند، عبارت است از:

۱. به شرط $R > r$، محیط دو دایرهٔ به شعاعهای $R+r$ و $R-r$ و با مرکز O؛

۲. به شرط $R = r$، محیط دایرهٔ به شعاع $R+r$ و به مرکز O و خود نقطهٔ O؛

۳. به شرط $R < r$، محیط دایرهٔ به شعاع $R+r$ و به مرکز O.

مرکز دایرهٔ مجهول، در محل برخورد این دو مکان هندسی قرار دارد. از آن‌جا که دو خط راست موازی با دو دایره، حداکثر ۸ نقطهٔ برخورد دارند، بنابراین، تعداد جوابهای مسأله می‌تواند از ۰ تا ۸ باشد (تحقیق کنید، همهٔ این حالتها ممکن است).

مسأله را با روش مکانهای هندسی حل کردیم.

این روش را می‌توان این طور شرح داد. فرض کنید نقطهٔ X که باید آن را پیدا کنیم، بنا به خواستهای مسأله، با دو شرط معین شود. ابتدا مکان هندسی نقطه‌هایی را پیدا می‌کنیم که تنها با شرط اوّل سازگارند سپس مکان هندسی نقطه‌هایی را جستجو می‌کنیم که تنها با شرط دوم سازگار باشند. نقطه‌های مشترک این دو مجموعه، در هر دو شرط صدق می‌کنند و بنابراین، نقطهٔ مجهول X را به دست می‌دهند.

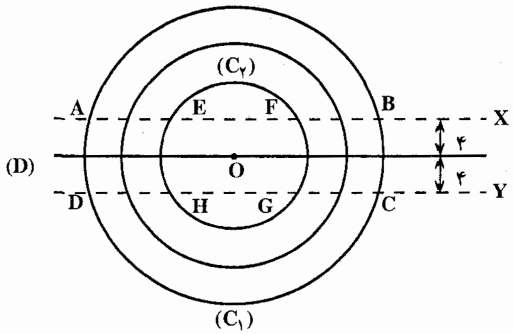
برای حل مسأله، باید نقطهٔ X مرکز دایره را پیدا کرد. دو شرط را از هم جدا می‌کنیم:

۱. X به فاصلهٔ r از محیط دایرهٔ مفروض قرار دارد.

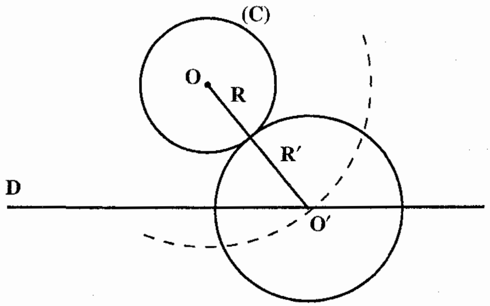
۲. X به فاصلهٔ r از خط راست مفروض واقع است. با پیدا کردن مکان هندسی نقطه‌هایی که با این شرطها سازگارند، موضعهای ممکن نقطهٔ X به دست می‌آید.

۴۲۶. اگر O' مرکز دایرهٔ خواسته شده باشد، چون این دایره با خط (D) مماس است، مرکز آن به فاصلهٔ ۴ میلیمتر از خط (D) واقع است. بنابراین نقطهٔ O' روی یکی از دو خط X و Y که به فاصلهٔ ۴ میلیمتر از خط (D) در طرفین آن رسم شوند، واقع است. از طرف دیگر اگر دایره‌های O و O' مماس خارج باشند، طول خط‌المرکزین

آنها $OO' = 16 + 4 = 20\,mm$ و O' بر دایرهٔ به مرکز O و به شعاع ۲۰ میلیمتر واقع خواهد بود و اگر دو دایرهٔ O و O' مماس داخل باشند، طول خط‌المرکزین آنها ۱۲ میلیمتر بوده، O' بر دایرهٔ به مرکز O و به شعاع ۱۲ میلیمتر واقع می‌باشد.



بنابراین برای حل مسأله دو دایره به مرکز O و به شعاعهای ۱۲ و ۲۰ میلیمتر رسم می‌نماییم. نقطه‌های تقاطع این دو دایره با خطهای X و Y مرکزهای دایره‌های خواسته شده هستند. چون فاصلهٔ دو خط از مرکز مشترک دایره‌های کمتر از شعاع هر یک از آنها است، پس خطها و دایره‌ها متقاطعند و نقطهٔ O' می‌تواند هشت وضع A، B، C، D، E، F، G و H را دارا باشد.



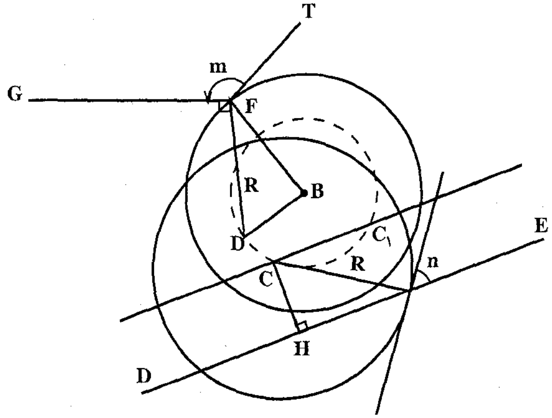
۴۲۷. دایرهٔ $C(O\,,\,R)$ و خط D را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم دایره‌ای به شعاع R' رسم کنیم که مرکزش روی خط D و به دایرهٔ (C) مماس باشد. اگر مسأله را حل شده بگیریم $OO' = R' + R$ مقدار ثابتی است، پس نقطهٔ O' روی دایره‌ای به مرکز O و به شعاع $R + R'$ قرار دارد. بنابراین برای حل مسأله این دایره را رسم می‌کنیم تا نقطهٔ O' به‌دست آید. آن‌گاه به مرکز O' و به شعاع R' دایرهٔ جواب را رسم می‌کنیم.

۴۲۸. از نقطهٔ دلخواه F واقع بر دایرهٔ (B) مماس FT را رسم می‌کنیم، سپس خط FG را چنان رسم می‌نماییم که $T\hat{F}G = m$ باشد. از نقطهٔ F عمودی بر FG اخراج کرده، روی آن پاره‌خط $FD = R$ را جدا می‌کنیم و از D به B وصل می‌کنیم:

اولاً. دایرهٔ به مرکز D و به شعاع R با دایرهٔ (B) زاویهٔ m می‌سازد.

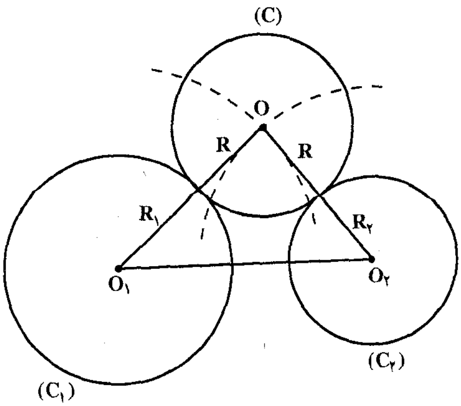
ثانیاً. دایرهٔ به مرکز B و به شعاع BD مکان هندسی مرکز دایره‌هایی است که با دایرهٔ (B) زاویهٔ m می‌سازند. این دایره را رسم می‌کنیم. از طرفی مکان هندسی مرکز دایره‌هایی که خط DE را به زاویهٔ n قطع می‌کنند دو خط Δ و Δ' موازی DE و به فاصلهٔ $R\cos n$ از آن است. این مکان هندسی را نیز رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد دایرهٔ (B , BD) با خطهای Δ و Δ' مرکز دایرهٔ جواب مسأله است، پس دایره‌های به مرکزهای C و C_1 و به شعاع R را رسم می‌کنیم.

بحث. به تعداد نقطه‌های برخورد دایرهٔ (B,BD) با دو خط Δ و Δ' مسأله جواب دارد.



۳.۲.۳.۴.۲. شعاع دایره، دو دایره

۴۲۹. مسأله را حل شده و دایرهٔ C(O , R) مماس بر دو دایرهٔ مفروض $C_1(O_1\ ,\ R_1)$ و $C_2(O_2, R_2)$ را جواب مسأله می‌گیریم. مرکزهای سه دایره را به‌هم وصل می‌کنیم. درصورتی که دایرهٔ (O) با دو دایرهٔ C_1 و C_2 مماس خارج باشد، داریم:



مقدار معلوم $= R + R_1 = OO_1$ و

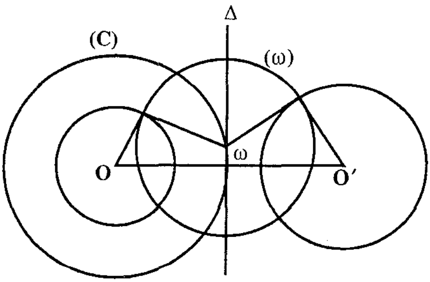
مقدار معلوم $= R + R_2 = OO_2$

پس دو مکان هندسی برای نقطهٔ O

به‌دست می‌آید که یکی دایره‌ای به مرکز O_1 و به شعاع $R+R_1$ و دیگری دایره‌ای به مرکز O_2 و به شعاع $R+R_2$ است. پس برای حل مسأله، این دو دایره را رسم می‌کنیم، تا نقطهٔ O به‌دست آید. به مرکز O و به شعاع R دایرهٔ جواب مسأله را رسم می‌کنیم. به تعداد نقطه‌های برخورد دو دایرهٔ مکان هندسی مسأله جواب دارد.

برای حالتی که دایرهٔ جواب مسأله با هر دو دایرهٔ C_1 و C_2 مماس درون یا با یکی از آنها مماس برونی با دیگری مماس درونی باشد، مسأله را حل کنید.

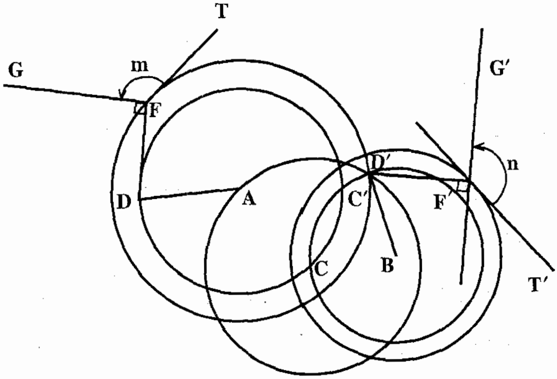
۴۳۰. می‌دانیم محور اصلی دو دایره مکان هندسی مرکزهای دایره‌هایی است که می‌توان از آن‌جا دایره‌هایی عمود بر دو دایره مفروض رسم کرد.



برای رسم دایره‌ای مانند (ω) به شعاع L و عمود بر دو دایرهٔ (O) و (O′) کافی است (ω) مرکز آن را بر محور اصلی دو دایره معلوم کرد. چنانچه (ω) مرکز دایرهٔ مطلوب باشد، بنابه خاصیت دایره‌های عمود برهم، مثلث $O\omega T$ در رأس T قائمه است و در آن $OT=R$ و $T\omega=L$ معلوم بوده و می‌توان $O\omega$ را حساب کرد و چون، ثابت$=\sqrt{R^2+L^2}=O\omega$ است، لذا مکان $O\omega$ دایره‌ای است به مرکز (O) و شعاع $O\omega=\sqrt{R^2+L^2}$، نقطهٔ تقاطع این دایره با محور اصلی دو دایره. (ω) مرکز دایرهٔ مطلوب است.

بحث. چنانچه دایرهٔ به مرکز (O) و شعاع $O\omega=\sqrt{R^2+L^2}$ محور اصلی دو دایره را در یک یا دو نقطه قطع کند، مسأله دارای یک یا دو جواب است و اگر متقاطع نباشند، مسأله جواب ندارد.

۴۳۱. نقطهٔ دلخواه F را روی دایرهٔ (A) اختیار کرده، مماس FT را بر آن رسم می‌کنیم. سپس خط FG را چنان رسم می‌نماییم که $T\hat{F}G=m$ باشد. از F عمودی بر FG اخراج کرده، پاره‌خط $FD=R$ را روی آن جدا می‌کنیم و از D به A وصل می‌کنیم.



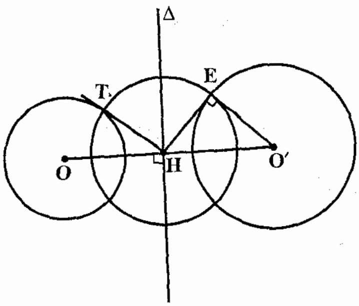
اولاً. دایرهٔ به مرکز D و به شعاع $DF = R$ دایره‌ای است که با دایرهٔ (A) زاویهٔ m می‌سازد.

ثانیاً. دایرهٔ به مرکز B و به شعاع BD مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R است که با دایرهٔ (A) زاویهٔ m می‌سازند. این مکان هندسی را رسم می‌کنیم. به‌روش مشابه، مکان هندسی مرکز دایره‌هایی به شعاع R را که با دایرهٔ (B) زاویهٔ (n) می‌سازند، رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دو مکان هندسی (C', C) مرکز دایرهٔ جواب مسأله است. به مرکز این نقطه و به شعاع R دایرهٔ جواب را رسم می‌کنیم.

بحث. به تعداد نقطه‌های برخورد دو دایرهٔ مکان هندسی، مسأله جواب دارد.

۴۳۲. شعاع دایره‌های داده شده را a و b و مرکز دایرهٔ خواسته شده را O می‌گیریم. خط‌المرکزین $AO = a \pm r$ و خط‌المرکزین $BO = \sqrt{b^2 + r^2}$ است. از آن‌جا نقطهٔ O بسادگی مشخص می‌شود.

۴.۲.۳.۴.۲. شعاع دایره، دسته دایره



۴۳۳. اگر O مرکز دایره و Δ خط مفروض و (O') دایرهٔ مطلوب به شعاع L باشد، دایرهٔ (O') بر دایرهٔ (H) عمود است درنتیجه چون O' و H بر هم عمودند، داریم:

$$HO'^2 = HT^2 + L^2$$

از این رابطه $O'H$ به‌وسیلهٔ ترسیم قابل رسم بوده و روی OH نقطهٔ O' را به‌طول $O'H$ از نقطهٔ H جدا نموده، دایرهٔ به مرکز O' و شعاع L دایرهٔ مطلوب است.

۵.۲.۳.۴.۲. رسم دو دایره

۴۳۴. ۱. از روش ترسیم هندسی استفاده می‌کنیم.

۲. برای حالتهای دیگر از روش جبری استفاده می‌کنیم و از دستور زیر استفاده می‌کنیم:

$(x+b)(y+b)=a^2$

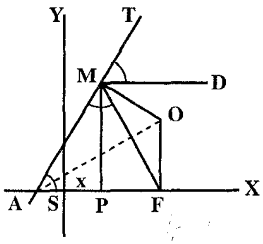
۶.۲.۳.۴.۲. مسأله‌های ترکیبی

۴۳۵. مسأله را حل شده بگیرید و از نتیجه‌های به دست آمده برای حل مسأله استفاده کنید. به عنوان مثال در حالتی که مجموع دو شعاع داده شده است، مسأله به رسم ذوزنقه قائم‌الزاویه‌ای تبدیل می‌شود که از آن، ساق قائم از نظر وضع و اندازه، و اندازه ساق مایل $(R+R')$ و مجموع دو قاعدهٔ ذوزنقه $(R+R')$ معلوم است.

۵.۲. رسم دایره با معلوم بودن مقطعهای مخروطی

۱.۵.۲. رسم دایره با معلوم بودن سهمی

۴۳۸. فرض می‌کنیم M یک نقطه از سهمی تعریف‌شده به کانون F و مماس در رأس SY و MT مماس در این نقطه باشد. MB را موازی با محور رسم می‌کنیم (شکل). زاویه‌های $B\hat{M}T$ و $F\hat{M}A$ برابرند؛ ولی $B\hat{M}T=F\hat{A}M$ می‌باشد. پس $F\hat{M}A=F\hat{A}M$ و در نتیجه $FA=FM$ است.



برای این‌که دایرهٔ مماس بر محور در نقطهٔ F از M گذشته و بر AM برهم مماس باشد، لازم و کافی است که $AM=AF$ باشد، یعنی مثلث FAM متساوی‌الاضلاع باشد. از این قرار نقطهٔ M نقطهٔ تماس

یک مماس با زاویهٔ ۶۰° روی محور و یا فصل مشترک سهمی با نیمخط FM با زاویهٔ ۶۰° روی FS می‌باشد.

محاسبهٔ شعاع OF این دایره. فرض کنیم $SP = x$ باشد، تحلیل مماس AP برابر $۲x$ می‌باشد و چون $AP = PF$ است، پس:

$$۲x = \frac{P}{۲} - x \qquad \text{و یا} \qquad x = \frac{P}{۶}$$

و در نتیجه $AF = \frac{۲P}{۳}$ می‌باشد و در مثلث AFO داریم:

$$OF = AF \tan ۳۰^\circ = \frac{۲P\sqrt{۳}}{۹}$$

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۳. رسم بیضی، هذلولی و سهمی

۱.۳. رسم بیضی

۱.۱.۳. رسم بیضی با معلوم بودن: نقطه؛ خط؛ ۲a، ۲b، ۲c؛...

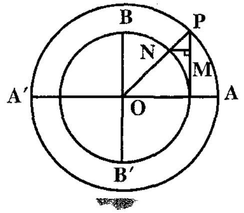
۱.۱.۱.۳. نقطه

۱.۱.۱.۱.۳. سه نقطه

۱.۱.۱.۱.۱.۳. دو کانون، یک نقطه

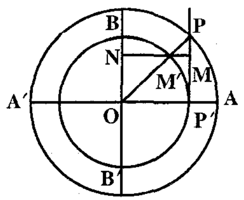
۴۳۹. نقطه را به دو کانون وصل می‌کنیم. مجموع دو شعاع حامل نقطه، مقدار ۲a است. به مرکز یکی از کانونها و به شعاع ۲a دایرهٔ هادی را رسم می‌کنیم. به کمک این دایره بیضی رسم می‌شود.

۲.۱.۱.۱.۱.۳. دو رأس، یک نقطه



(الف)

۴۴۰. حالت اول. A و A′ و نقطهٔ M داده شده است. دایرهٔ به قطر AA′ را رسم کرده و عمود MP′ را بر AA′ فرود می‌آوریم. از M خطی موازی AA′ می‌کشیم تا OP را در N قطع کند. ON برابر با b است و بیضی با ۲a و ۲b مشخص است (شکل الف).

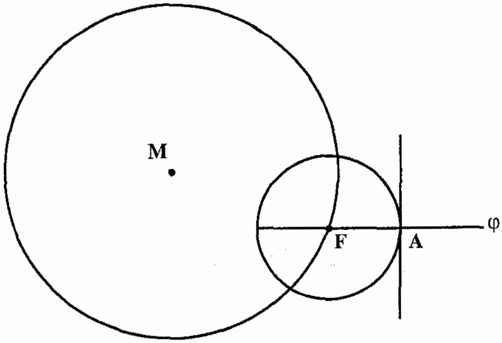


(ب)

حالت دوم. B، B′ و M داده شده است. دایرهٔ به قطر BB′ را رسم می‌کنیم و از M عمود MN را بر BB′ فرود می‌آوریم تا دایره را در M′ قطع کند. OM′ خطی را که از M به موازات BB′ رسم می‌شود، در P

قطع می‌کند. OP برابر a است و بیضی با ۲a و ۲b مشخص است (شکل ب).

۳.۱.۱.۱.۱.۳. یک کانون، یک رأس، یک نقطه



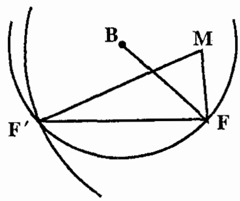
۴۴۱. F را به A وصل می‌کنیم از A عمودی بر FA رسم می‌کنیم. این خط بر بیضی در نقطهٔ A مماس است. دایره‌ای به مرکز F و به شعاع FA در نقطهٔ A با دایرهٔ هادی کانون دیگر مماس است و نیز دایرهٔ به مرکز M و به شعاع MF با دایرهٔ هادی کانون دیگر مماس است. قرینهٔ نقطهٔ A را نسبت به خط مماس φ می‌نماییم. این نقطه روی دایرهٔ هادی کانون دیگر است. حال باید دایره‌ای رسم کنیم که از φ بگذرد و با دو دایرهٔ بالا مماس باشد. این دایره، دایرهٔ هادی کانون دیگر است.

۴۴۲. اگر کانون دوم را به F' نشان دهیم، داریم : $BF' = BF$ و از طرف دیگر با معلوم بودن نقطهٔ M از منحنی می‌توان نوشت :

$$MF + MF' = BF + BF' = ۲BF$$

و یا

$$MF' = ۲BF - MF$$



پس نقطهٔ F' فصل مشترک دو دایره به مرکز B و M و به شعاعهای BF و $۲BF - MF$ می‌باشد.

بعکس، اگر F' محل برخورد این دایره‌ها باشد، داریم :

$$MF' + MF = BF + BF'$$

و

$$BF' = BF$$

و نقطهٔ B یک رأس محور ناکانونی بیضی به کانونهای F و F′ گذرنده بر M می‌باشد. مسأله دارای دو جواب و یا یک جواب و یا غیرممکن است. برای این که مسأله ممکن باشد، لازم است که:

$$۲BF - MF \geq ۰ \qquad (۱)$$

و همچنین این دو دایره متقاطع باشند و درصورتی این دو دایره متقاطع‌اند که:

$$\underbrace{|BF - MF| \leq BM}_{(۲)} \underbrace{\leq ۳BF - MF}_{(۳)}$$

نامساوی (۲) همواره برقرار است. اما از نامساوی (۳) می‌توان نوشت:

$$MB + MF \leq ۳BF$$

از این رابطه نتیجه می‌شود که نقطهٔ M نبایستی در ناحیهٔ خارج بیضی (E) به کانونهای B و F که طول قطر بزرگش ۳BF می‌باشد، قرار گیرد. ثابت می‌کنیم که با برقرار بودن شرط اخیر، نامساوی (۱) برقرار است، داریم:

$$MB + MF \leq ۳BF$$

و سه نقطهٔ M ، B و F را درنظر می‌گیریم:

$$MF - BF \leq MB$$

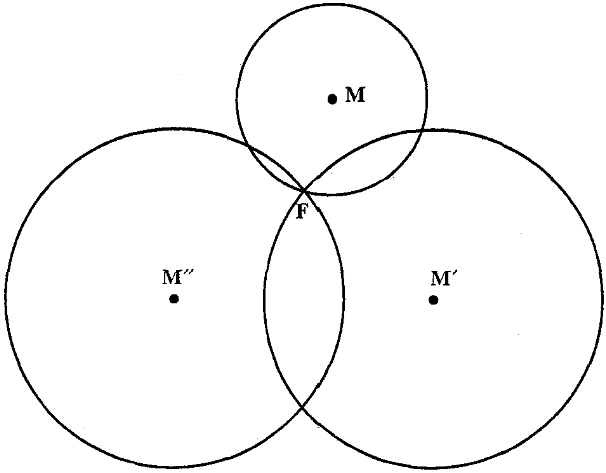
و از جمع نظیر به‌نظیر این دو نامساوی داریم:

$$۲MF \leq ۴BF \Rightarrow ۲BF - MF \geq ۰$$

۳.۱.۱.۱.۲. چهار نقطه

۳.۱.۱.۱.۲.۱. یک کانون ، سه نقطه

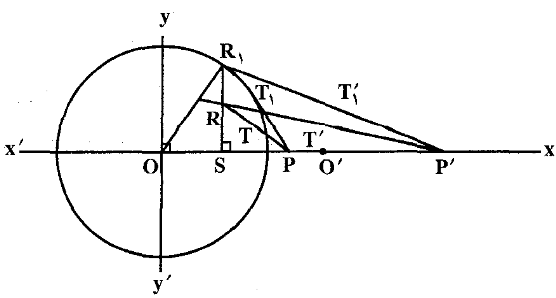
۴۴۳. دایره‌های به مرکزهای M، M′ و M″ و به شعاعهای MF، M′F و M″F بر دایرهٔ هادی کانون دیگر مماسند، پس برای یافتن دایرهٔ هادی کانون دیگر باید دایره‌ای رسم کرد که بر سه دایرهٔ M، M′ و M″ مماس شود.



۲.۱.۱.۳. خط

۱.۲.۱.۱.۳. دو محور، دو خط مماس

۴۴۴. فرض می‌کنیم بیضی، از دایرهٔ به قطرمحور کانونی xx' که عرض نقطه‌های آن در یک عدد ضرب شده باشند، به‌دست آمده باشد. متناظرهای T_1 و T'_1 خطهای T و T' بر دایره مماسند. از طرف دیگر T، T_1 و T'، T'_1 یکدیگر را در P و P' روی محور xx' قطع می‌کنند و فصل مشترکهای R و R_1 خطهای T، T' و T_1، T'_1 روی یک عمود بر xx' واقعند، بالاخره OR_1 نیمساز یکی از زاویه‌های حاصل از T_1 و T'_1 می‌باشد و این ثابت می‌کند که O' مزدوج توافقی O نسبت به P' و P است. R_1 فصل مشترک دایرهٔ به قطر OO' و عمود RS رسم شده از R بر $x'x$ می‌باشد. R_1P و R_1P' را رسم می‌کنیم تا مماسهای T_1 و T'_1 بر دایره و سپس دایره به‌دست آید (شکل).



بعکس بیضی که محور کانونی‌اش روی xx' طولی مساوی با قطردایره و محور دیگرش مساوی حاصلضرب این قطر در $\frac{SR}{SR_1}$ باشد، برT و T' مماس است. برای این‌که مسأله ممکن باشد، لازم و کافی است که S متعلق به قطعه خط OO' باشد.

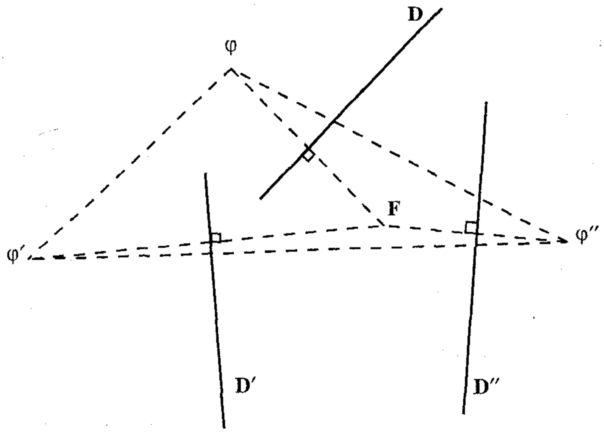
۳.۱.۱.۳. نقطه، خط

۱.۳.۱.۱.۳. یک نقطه، خط

۱.۱.۳.۱.۱.۳. یک نقطه، سه خط

۱.۱.۱.۳.۱.۱.۳. یک کانون، سه مماس

۴۴۵. قرینهٔ کانون F را نسبت به سه خط مماس ؛ φ ، φ' و φ'' می‌نامیم. این سه نقطه روی دایرهٔ هادی کانون دیگرند. دایرهٔ محیطی مثلث $\varphi\varphi'\varphi''$ را رسم می‌کنیم. مرکز این دایره کانون دیگر بیضی است و شعاع این دایره نیز $2a$ است.

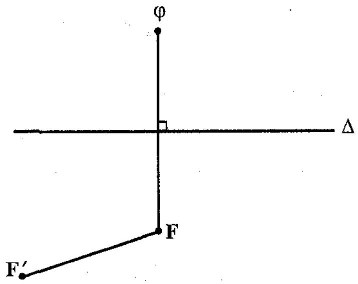


۲.۳.۱.۱.۳. دو نقطه، یک یا چند خط

۱.۲.۳.۱.۱.۳. دو نقطه، یک خط

۱.۱.۲.۳.۱.۱.۳. دو کانون، یک خط مماس

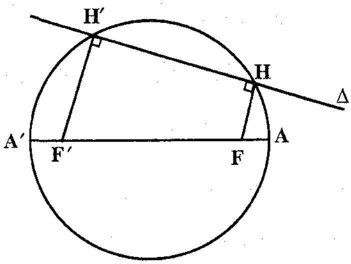
۴۴۶. تصویرهای دو کانون روی خط مماس مفروض، دو نقطه از دایرهٔ اصلی است. مرکز این



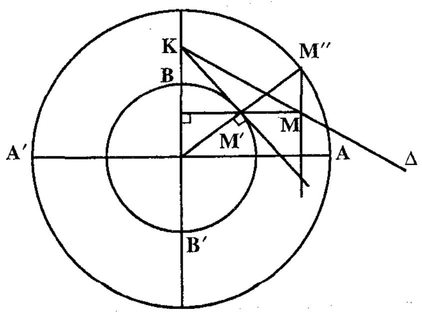
دایره وسط F′F است. شعاع دایرهٔ اصلی برابر است با a و بیضی با معلوم بودن دو کانون و ۲a رسم می‌شود.

۲.۱.۲.۳.۱.۱.۳.دو رأس، یک خط مماس

۴۴۷. حالت اول. دو رأس A و ′A و خط مماس معلوم است. دایرهٔ اصلی را به قطر ′AA رسم می‌کنیم. اگر این دایره خط مماس را در H و ′H قطع کند، این نقطه‌ها تصویرهای دو کانون روی خط مماس می‌باشند. محل برخورد عمودهای رسم شده از H و ′H بر خط مماس با ′AA، کانونهای F و ′F می‌باشند. با معین شدن دو کانون و معلوم بودن ′AA بیضی مشخص است.

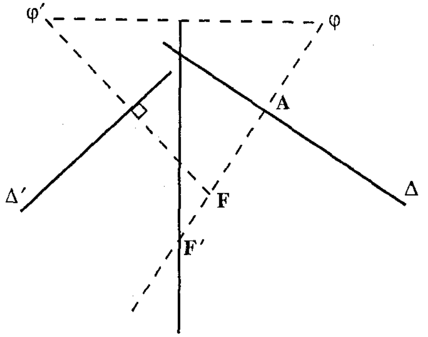


حالت دوم. دو رأس B و ′B و خط مماس معلوم است. دایرهٔ به قطر ′BB (دایرهٔ فرعی بیضی یا دایرهٔ اصلی دوم) را رسم می‌کنیم. فرض می‌کنیم خط مماس Δ قطر ′BB را در نقطهٔ K قطع کند، از K مماس ′KM را بر دایره رسم می‌کنیم. از ′M خطی بر ′BB عمود می‌کنیم تا Δ را در M قطع کند؛ M یکی از نقطه‌های بیضی است. از M خطی به موازات ′BB می‌کشیم تا ′OM را در ″M تلاقی کند. ″M یکی از نقطه‌های دایرهٔ اصلی است. دایرهٔ به مرکز O و به شعاع ″OM قطر عمود بر ′BB را در رأسهای A و ′A تلاقی می‌کند و با معلوم بودن چهار رأس، بیضی مشخص است.



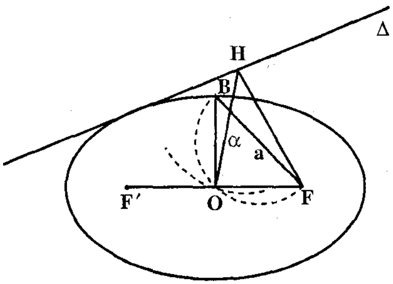
۳.۱.۱.۳.۲.۱.۳. یک رأس، یک کانون، یک خط مماس

۴۴۸. راه اول. فرض می‌کنیم رأس A، کانون F و خط مماس D معلوم باشند. اگر φ تصویر F روی D باشد، φ متعلق به دایرهٔ اصلی می‌باشد؛ بنابراین O مرکز دایرهٔ اصلی، فصل مشترک عمودمنصف Aφ و خط AF است. با معلوم بودن O بیضی مشخص می‌شود.



راه دوم. F را به A وصل می‌کنیم. می‌دانیم مماس در نقطهٔ A بر بیضی، بر FA عمود است. قرینهٔ کانون F را نسبت به دو خط مماس ′Δ و Δ نقطه‌های ′φ و φ می‌نامیم. این نقطه‌ها روی دایرهٔ هادی کانون دیگرند. عمودمنصف φφ′ را رسم می‌کنیم تا امتداد FA را در ′F قطع کند. این نقطه کانون دیگر بیضی است.

۴۴۹. کانون F، رأس B و خط مماس Δ بر بیضی را داده‌های مسأله می‌گیریم. BF = a نصف عدد ثابت بیضی است از طرفی تصویر کانون F روی خط مماس Δ یعنی نقطهٔ H روی دایرهٔ اصلی بیضی است. پس یک مکان هندسی نقطهٔ O مرکز بیضی دایره‌ای به مرکز H و به شعاع a است. از طرفی مرکز بیضی روی دایره‌ای به قطر BF واقع است.



پس برای حل مسأله دو مکان هندسی داده شده را رسم می‌کنیم تا مرکز بیضی به‌دست آید. در این‌صورت OF = c و از آن‌جا کانون ′F مشخص می‌شود و بیضی مشخص می‌گردد.

۳.۱.۱.۳.۲.۲. دو نقطه، دو خط

۳.۱.۱.۳.۲.۲.۱. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، دو خط مماس

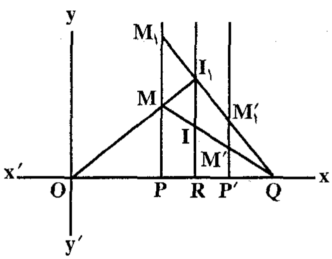
۴۵۰. فرض کنیم کانون F و خطهای مماس D و D' و M نقطهٔ تماس با D معلوم باشد. از طرفی نقطه‌های F_1 و F_2 قرینه‌های F نسبت به D و D' روی دایرهٔ هادی کانون دیگر واقع است. از طرف دیگر دایرهٔ به مرکز M و به شعاع MF بر دایرهٔ هادی کانون دیگر مماس است، پس بر دو نقطهٔ F_1 و F_2 دایره‌ای مرور می‌دهیم که بر دایرهٔ به مرکز M و به شعاع MF مماس شود. مرکز این دایره، کانون F' و شعاعش $2a$ است و بیضی قابل رسم است.

۳.۱.۱.۳.۲.۲.۲. یک کانون، یک نقطه، دو خط مماس

۴۵۲. فرض می‌کنیم کانون F و دو مماس D و D' و نقطهٔ M از یک بیضی معلوم باشند. اگر φ و φ' تصویرهای کانون F روی D و D' باشد، می‌دانیم φ و φ' متعلق به دایرهٔ اصلی می‌باشند. از طرفی دایرهٔ به‌قطر FM بر دایرهٔ اصلی مماس داخل است. بنابراین O مرکز بیضی (یا مرکز دایرهٔ اصلی) مرکز دایره‌ای است گذرنده بر φ و φ' و مماس بر دایرهٔ به قطر FM.

۳.۱.۱.۳.۲.۲.۳. دو نقطه، دو محور

۴۵۳. فرض می‌کنیم بیضی از دایرهٔ به قطر محور کانونی xx' که عرض نقطه‌های آن در یک عدد ضرب شده باشند، بدست آمده باشد. اگر M_1 و M'_1 متجانسهای نقطه‌های M و M' باشند، $M_1M'_1$ محور xx' را در همان نقطه Q که MM' تلاقی می‌کند، قطع می‌نماید. از طرف دیگر عمود منصف $M_1M'_1$ از O می‌گذرد (شکل). بنابراین I_1 وسط $M_1M'_1$ فصل مشترک دایرهٔ به قطر OQ و خط عمود بر xx' از R وسط PP' می‌باشد. خط $M_1M'_1$ پس معلوم است.



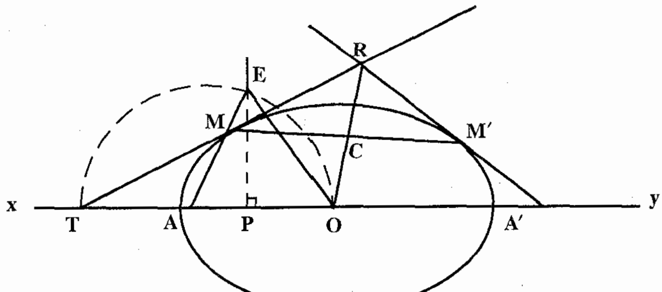
بعکس، بیضی که یک محورش روی xx' طولی مساوی $2OM_1$ جدا می‌کند و محور دومش مساوی $2OM_1 \times \dfrac{PM}{PM_1}$ باشد، از M و M' می‌گذرد. برای این که مسأله ممکن

باشد، لازم است که عمود بر xx' در R، دایرهٔ به‌قطر OQ را قطع کند، یا این که R متعلق به پاره‌خط OQ باشد.

۳.۲.۳.۱.۱.۳. دو نقطه، سه خط

۱.۳.۲.۳.۱.۱.۳. دو نقطهٔ تماس، محور کانونی، دو خط مماس

۴۵۴. خطهای مماس بر بیضی را RM و RM' نقطه‌های تماس آنها را M و M' و راستای محور سهمی را xy می‌نامیم. خط RCO که نقطهٔ R را به وسط پاره‌خط واصل بین نقطه‌های تماس وصل می‌کند، از مرکز بیضی می‌گذرد. پس داریم: $a^2 = \overline{OT}.\overline{OP}$. با رسم دایره‌ای به قطر OT، عمود MP رابطهٔ $OE^2 = OP.OT$ را می‌دهد؛ از آن‌جا $OE = a$ است. پس می‌توان دایرهٔ اصلی بیضی را رسم و بیضی را کامل کرد. خط ML که موازی xy رسم می‌شود، OL نیمهٔ قطر کوچک بیضی را می‌دهد.



۳.۳.۱.۱.۳. سه نقطه، خط

۱.۳.۳.۱.۱.۳. سه نقطه، یک خط

۱.۱.۳.۳.۱.۱.۳. یک کانون، دو نقطه، یک خط مماس

۴۵۵. روش اوّل. فرض می‌کنیم کانون F و مماس T و دو نقطهٔ M و N از یک بیضی معلوم باشند. φ تصویر F روی T متعلق به دایرهٔ اصلی و دایره‌های به قطرهای FM و FN با دایرهٔ اصلی مماس داخلند. بنابراین O مرکز بیضی (یا مرکز دایرهٔ اصلی)، مرکز دایره‌ای است مماس بر دایره‌های به قطرهای FM و FN گذرنده بر φ.

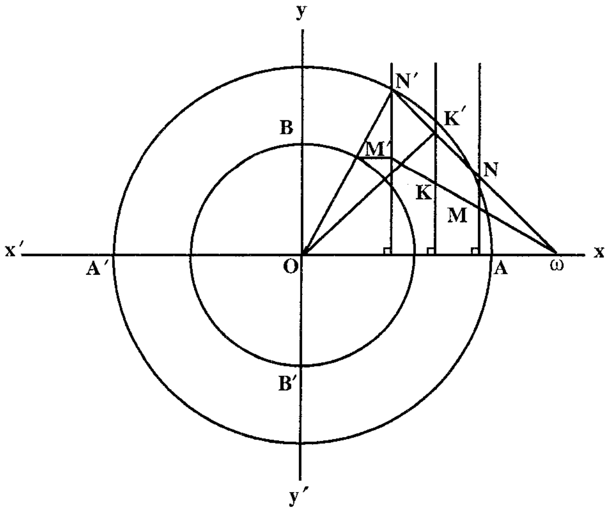
روش دوم. P قرینهٔ F را نسبت به T به‌دست می‌آوریم و دایره‌های به مرکزهای M و N و به شعاعهای FM و FN را رسم می‌کنیم. F' کانون دوم، مرکز دایرهٔ گذرنده بر P و مماس بر دو دایرهٔ اخیر می‌باشد.

روش سوم. دو نقطهٔ M و M' و کانون F و مماس Δ مفروضند. دو دایره به مرکزهای M و M' و به شعاعهای MF و $M'F$ رسم می‌کنیم و φ قرینهٔ F را نسبت به Δ به‌دست می‌آوریم. باید دایره‌ای رسم کنیم که از φ بگذرد و به دو دایرهٔ مذکور مماس شود (دایرهٔ هادی کانون دیگر). برای رسم این دایره φ را قطب انعکاس اختیار می‌کنیم، منعکسهای دو دایره را پیدا کرده، مماس مشترک آنها، منعکس جواب مسأله خواهد بود و منعکس این مماس مشترک دایره‌ای است که از φ می‌گذرد و بر دو دایره مماس است و مرکزش F' کانون دوم می‌باشد.

۳.۱.۱.۳.۳.۲. سه نقطه، دو خط

۳.۱.۱.۳.۳.۲.۲. مرکز، دو نقطه، دو محور

۴۵۶. نقطهٔ O مرکز بیضی و محورهای $x'x$ و $y'y$ و دو نقطهٔ M و M' از بیضی مفروضند. خط MM' محور $x'x$ را در ω قطع می‌کند. فرض می‌کنیم، K وسط MM' باشد. از نقطه‌های M، K و M' سه عمود بر محور $x'x$ فرود می‌آوریم. به قطر $O\omega$ نیمدایره‌ای رسم می‌کنیم که عمود رسم شده از K آن را در K' قطع می‌کند. خط $\omega K'$ عمودهای رسم شده از نقطه‌های M و M' را در نقطه‌های N و N' قطع می‌کند که این نقطه‌ها روی دایرهٔ اصلی بیضی می‌باشند. پس به مرکز O و به شعاع ON و ON' دایرهٔ اصلی را رسم می‌کنیم که محل برخورد آن با $x'x$ نقطه‌های A و A' رأس قطر بزرگ می‌باشند. از M' خطی به موازات $x'x$ رسم می‌کنیم که ON' را در C قطع می‌کند. دایرهٔ به شعاع OC محور $y'y$ را در نقطه‌های B و B' قطع می‌کند و این نقطه‌ها رأسهای قطر کوچک می‌باشند و بیضی با چهار رأس مشخص می‌شود.



۴.۱.۱.۳. رسم بیضی با معلوم بودن: نقطه؛ ۲a، ۲b، ۲c؛ ...

۱.۴.۱.۱.۳. دو کانون، ۲b

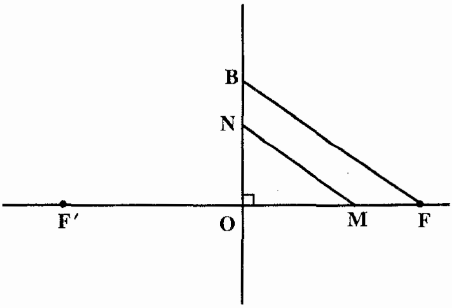
۴۵۷. چون قطر طول کوچک بیضی، ۲b است، با معلوم بودن ۲b و ۲c مقدار ۲a را با ترسیم از رابطهٔ $a^۲ = b^۲ + c^۲$ به‌دست می‌آوریم. بیضی با معلوم بودن دو کانون و ۲a مشخص می‌شود.

۲.۴.۱.۱.۳. دو کانون، $\frac{b}{a}$

۴۵۸. راه اول. با معلوم بودن دو کانون بیضی، فاصلهٔ کانونی یعنی ۲c مشخص است. از طرفی داریم: $a^۲ = b^۲ + c^۲$. با فرض $\frac{b}{a} = k$ از دستگاه دو معادلهٔ دو مجهولی زیر اندازهٔ a و b مشخص می‌شوند:

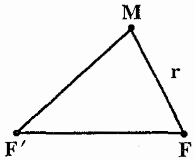
$$\begin{cases} a^۲ = b^۲ + c^۲ \\ \dfrac{b}{a} = k \end{cases}$$

با داشتن a و b، بیضی را می‌توان رسم کرد.



راه دوم. برای بیضی $\frac{b}{a}<1$ است.
OM و ON را چنان درنظر می‌گیریم که $\frac{NM}{NO}=\frac{a}{b}$ باشد و از نقطهٔ F خطی موازی MN رسم می‌کنیم. خواهیم داشت: $\frac{BF}{OB}=\frac{a}{b}$. از آن‌جا: $BO=b$ و $BF=a$ و درنتیجه بیضی مشخص می‌شود.

۳.۴.۱.۱.۳. یک کانون، یک نقطه، a و b



۴۵۹. فرض کنیم کانون F و یک نقطهٔ M، از بیضی به قطرهای $2a$ و $2b$ $(a>b)$ معلوم باشند. اگر $MF=r$ و F' کانون دوم (شکل) این بیضی باشد، داریم:

$$MF=2a-r$$

و

$$FF'=2\sqrt{a^2-b^2}$$

بنابراین F' محل برخورد دو دایره به مرکزهای F و M و به شعاعهای $2\sqrt{a^2-b^2}$ و $2a-r$ می‌باشد.

مسأله برحسب موقعیت این دو دایره، دارای دو جواب و یا یک جواب و یا بدون جواب می‌باشد. برای این‌که مسأله ممکن باشد، باید $r<2a$ و همچنین:

$$|2a-2r|\le 2\sqrt{a^2-b^2}<2a$$

نامساوی دوم همواره برقرار است و وقتی نامساَوی اول برقرار است که:

$$r^2-2ar+b^2\le 0$$

یا

$$a-\sqrt{a^2-b^2}\le r\le a+\sqrt{a^2-b^2}$$

در نتیجه نقطهٔ M نباید در خارج از تاج دایره‌ای محدود به دایره‌های به مرکز F و به شعاعهای زیر باشد:

$$a-\sqrt{a^2-b^2} \quad \text{و} \quad a+\sqrt{a^2-b^2}$$

۳.۱.۱.۵. خط، ۲a، ۲b، ۲c؛...

۳.۱.۱.۵.۱. قطر بزرگ، یک خط مماس، ۲a

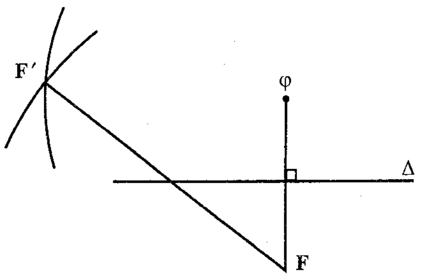
۴۶۰. دایرهٔ اصلی بیضی را به قطر AA' رسم می‌کنیم تا خط مماس را در C و C' قطع کند. عمودهای اخراج شده بر خط مماس در نقطه‌های C و C' خط AA' را در F و F' کانونهای بیضی قطع می‌کنند.

نکته. خط مماس بر بیضی محور کانونی بیضی را در خارج پاره‌خط AA' قطع می‌کند.

۳.۱.۱.۶. نقطه؛ خط: ۲a، ۲b، ۲c؛...

۳.۱.۱.۶.۱. یک کانون، یک مماس، ۲a و ۲b

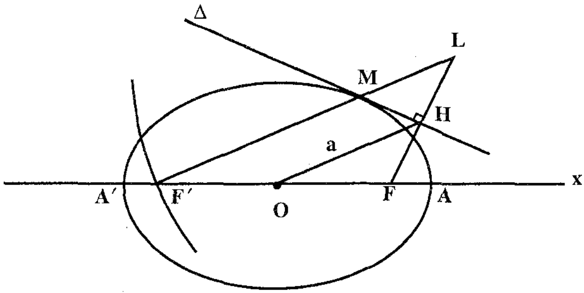
۴۶۱. قرینهٔ کانون F را نسبت به خط هادی Δ، نقطهٔ φ می‌نامیم، این نقطه روی دایرهٔ هادی کانون دیگر است، می‌دانیم $FF' = ۲c$ و $c = \sqrt{a^۲ - b^۲}$ است، پس c معلوم است. به مرکز F، به شعاع ۲c دایره‌ای رسم می‌کنیم. نقطهٔ F' روی این دایره است و نیز اگر به مرکز φ و به شعاع ۲a دایره‌ای رسم کنیم، نقطهٔ F' روی این دایره نیز هست. درنتیجه محل برخورد این دو دایره نقطهٔ F' است (بحث کنید).



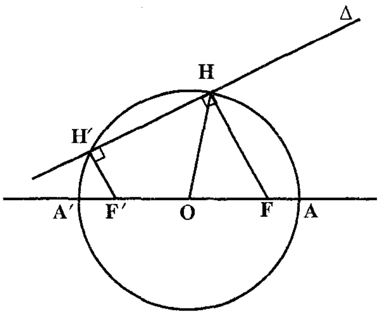
۳.۱.۱.۶.۲. یک کانون، یک خط مماس، راستای محور کانونی، ۲a

۴۶۲. راه اوّل. کانون F، خط مماس Δ و Fx محور کانونی و ۲a داده شده است. می‌دانیم که قرینهٔ کانون F نسبت به خط Δ یعنی نقطهٔ L روی دایرهٔ هادی کانون F' واقع است. بنابراین برای رسم بیضی، قرینهٔ کانون F نسبت به خط مماس Δ را L می‌نامیم. به مرکز L و به شعاع ۲a (شعاع دایرهٔ هادی هر کانون) کمانی رسم می‌کنیم تا Fx را در نقطهٔ F'

کانون دیگر بیضی قطع کند. از آن‌جا $FF' = 2c$ فاصلهٔ کانونی بیضی مشخص می‌شود. با معلوم بودن $2a$ و $2c$ بیضی مشخص است.



راه دوم. تصویر کانون F روی خط مماس Δ را H می‌نامیم. H نقطه‌ای از دایرهٔ اصلی بیضی است. به مرکز H و به شعاع a دایرهٔ اصلی بیضی را رسم می‌کنیم تا محور کانونی را در نقطه‌های O و ′O قطع کند. به مرکز O و به شعاع a دایرهٔ اصلی بیضی را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد دیگر آن با خط مماس را ′H می‌نامیم. عمودی که از ′H بر Δ اخراج شود، محور کانونی را در کانون ′F قطع می‌کند. با مشخص شدن دو کانون، اندازهٔ $2c$ و از آن‌جا با داشتن $2a$ و $2c$ بیضی مشخص است. با درنظر گرفتن ′O به‌عنوان مرکز بیضی مسأله یک جواب دیگر نیز دارد.

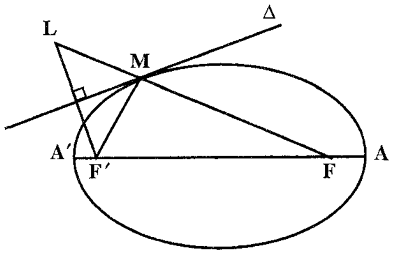


۳.۶.۱.۱.۳. مرکز، دو خط مماس، $2a$

۴۶۳. نظر به این‌که، مکان هندسی تصویرهای کانونهای بیضی بر مماسهای رسم شده بر آن، دایرهٔ اصلی است؛ بنابراین مماسها، دایرهٔ اصلی را در چهار نقطه قطع خواهند کرد. عمودهای رسم شده از این نقطه‌ها بر مماسها، دو به دو یکدیگر را در دو کانون قطع خواهند کرد (بحث کنید.)

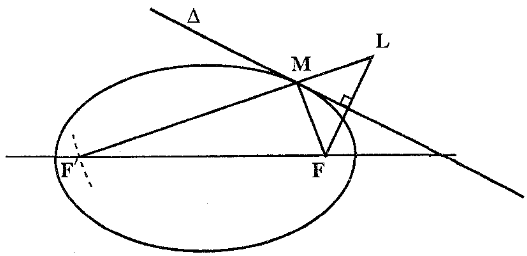
۳.۱.۱.۶.۴. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، یک خط مماس، $2a$

۴۶۴. F' را کانون، Δ را خط مماس و M را نقطهٔ تماس آن با بیضی می‌گیریم. قرینهٔ کانون F' نسبت به خط مماس Δ را به‌دست آورده، L می‌نامیم. می‌دانیم که $FL = 2a$ است. از L به M وصل کرده، روی LM پاره‌خط $LF = 2a$ را رسم می‌کنیم تا کانون F به‌دست آید. با مشخص‌شدن دو کانون، اندازهٔ $2c$ و از آن‌جا با دانستن $2a$ و $2c$ بیضی قابل‌رسم است.



۳.۱.۱.۶.۵. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، یک خط مماس، $2c$

۴۶۵. F را کانون معلوم، Δ را خط مماس و M را نقطهٔ تماس Δ با بیضی می‌گیریم. قرینهٔ کانون F نسبت به خط Δ را L می‌نامیم. از L به M وصل می‌کنیم. این خط از کانون F' می‌گذرد. از طرفی F' روی دایره‌ای به مرکز F و به شعاع $FF' = 2c$ قرار دارد. این دایره را نیز رسم می‌کنیم تا خط LM را در نقطهٔ F' قطع کند با مشخص‌شدن F' اندازهٔ $F'L = 2a$ به‌دست آید. با داشتن $2a$ و $2c$ بیضی قابل‌رسم است.



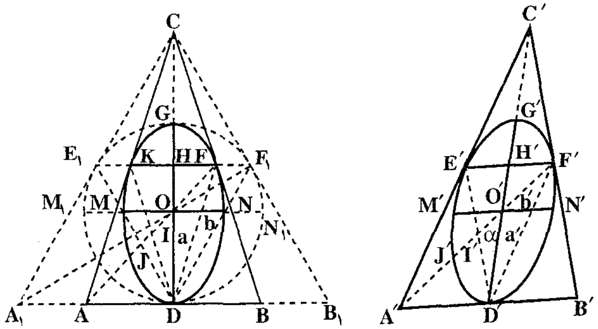
۲.۱.۳. رسم بیضی با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۱.۲.۱.۳. مثلث

۴۶۶. مسأله عکس، یعنی محیط کردن مثلثی با کمترین محیط بر یک بیضی داده شده، جواب مسأله را مشخص می‌کند.

۱. متناظر با دایرهٔ DE_1F_1 مثلث متساوی‌الاضلاع CA_1B_1 وجود دارد.

۲. متناظر با بیضی مثلث متساوی‌الساقین ABC وجود دارد که یکی از ضلعهای آن عمود بر یکی از محورهای بیضی است.



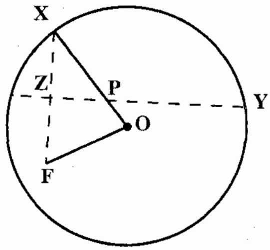
نسبت بیضی به مثلث ABC مانند نسبت دایره به مثلث A_1B_1C است. بعلاوه مثلث مینیمم محیطی، متناظر با مثلث ماکزیمم محیطی EDF است. می‌دانیم که $OH = HG$ و $DH = HC$ است. در نتیجه برحسب $OD = a$ داریم: $DH = \frac{۳a}{۲}$. همچنین داریم:

$$EF = OM\sqrt{۳} \text{ یا } EF = b\sqrt{۳} \Rightarrow b = \frac{EF}{\sqrt{۳}}$$

همچنین بسادگی می‌توان طول قطر MN را که مزدوج قطر DG است، مشخص کرد.

همچنان خواهیم داشت برای $M'O'$ یا b' ؛ $b' = \frac{E'F'}{\sqrt{۳}}$. زاویهٔ α ی بین دو قطر مزدوج زاویه‌ای است که میانهٔ $C'D'$ با ضلع $A'B'$ تشکیل می‌دهد.

۳.۱.۳. رسم بیضی با تا زدن کاغذ



۴۶۷. دایره‌ای به مرکز O بکشید. نقطهٔ دلخواه F را داخل دایره مشخص کنید. این نقطه را روی محیط دایره بیندازید و کاغذ را تا بزنید. این کار را با حرکت دادن F روی محیط دایره، ۲۰ تا ۳۰ بار تکرار کنید. این خطها بر بیضی به کانون F و O مماس هستند. شکل، حالتی را نشان می‌دهد که F روی X تاخورده است. چون YZ عمودمنصف FX است، پس $FP = PX$. بنابراین :

$$OP + FP = OP + PX = OX = \text{شعاع دایره}$$

به این ترتیب، مکان هندسی نقطهٔ P، بیضی‌ای با کانونهای F و O است. خط YZ نیز مماس بر بیضی در نقطهٔ P است. زیرا :

$$F\hat{P}Z = Z\hat{P}X = O\hat{P}Y$$

مماس بر بیضی در هر نقطه، نیمساز زاویهٔ بین شعاعهای حامل آن نقطه است.

۴.۱.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۶۸. هنگامی که دو قطر مزدوج و زاویهٔ بین آنها را داشته باشیم، متوازی‌الاضلاع محیطی چهار خط مماس و نقطه‌های تماس آنها را مشخص می‌کند. با وصل کردن A' به E، وسط BC و C به A و ... چهار نقطهٔ دیگر نیز خواهیم داشت. با فرض $DG = AD$ داریم :

$$\frac{DP}{DF} = \frac{AV}{AG}$$

تصویر یک پاره‌خط که به چند قسمت متساوی تقسیم شده است، روی یک خط، پاره‌خطی است که به همان تعداد قسمت متساوی تقسیم شده است. همچنین عموماً تصویرهای دو پاره‌خط موازی متناسب با خود آن پاره‌خطها متناسبند. همچنین اگر پاره‌خطی به نسبت

معینی تقسیم شده باشد، تصویر آن نیز به همان نسبت تقسیم می‌شود. حال کافی است نکته‌های بالا را برای دایرهٔ اصلی بیضی و بیضی به‌کار بریم. دو قطر مزدوج از بیضی تصویر دو قطر عمود برهم از دایرهٔ اصلی .

۱. فرض می‌کنیم $ce=\frac{1}{2}bc$ باشد. مثلثهای قائم‌الزاویهٔ $a'ec$ و $aa'c$ متشابه‌اند؛ زیرا $ce=\frac{1}{2}ca'$ و $a'c=\frac{1}{2}aa'$ است. درنتیجه $c\hat{a'}e=a\hat{a'}c$. همچنین $a\hat{a'}c+a\hat{a'}m=90^\circ$ و $\hat{m}=90^\circ$. بنابراین خطهای $a'e$ و ac یکدیگر را روی دایره قطع می‌کنند. تصویرهای آنها یعنی $A'E$ و AC روی بیضی متقاطعند. بعلاوه نقطهٔ E وسط CB است.

برای قسمت دوم، دایره را مورد توجه قرار می‌دهیم. فرض می‌کنیم $dg=ad$ یا $ag=2ad=aa'$ باشد، اگر $\frac{dp}{df}=\frac{av}{ag}$ باشد، مثلثهای قائم‌الزاویهٔ adp و $aa'v$ هنوز متشابه‌اند. زاویهٔ m قائمه است. از آن‌جا این نقطه‌ها به دایره تعلق دارند.

۲.۳. رسم هذلولی

۱.۲.۳. رسم هذلولی با معلوم بودن: نقطه؛ خط؛ ۲a، ۲b، ...

۱.۱.۲.۳. نقطه

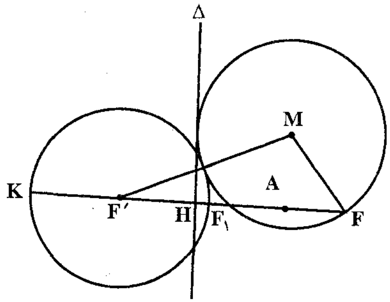
۱.۱.۱.۲.۳. سه نقطه

۱.۱.۱.۱.۲.۳. دو کانون، یک نقطه

۴۶۹. نقطهٔ داده شده را به دو کانون وصل می‌کنیم. تفاضل دو شعاع حامل نقطه، برابر با $2a$ است و هذلولی با معلوم بودن دو کانون و $2a$ قابل رسم است.

۲.۱.۱.۱.۲.۳. یک کانون، یک رأس، یک نقطه

۴۷۰. فرض می‌کنیم F یکی از کانونهای هذلولی و A رأس مجاور آن و M نقطه‌ای از منحنی باشد. می‌دانیم قرینهٔ F نسبت به A، نقطهٔ F_1 روی دایرهٔ هادی کانون دیگر واقع است و مرکز این دایره، روی امتداد FF_1 است و دایرهٔ به مرکز M و به شعاع MF بر دایرهٔ هادی مماس است، پس اگر F_1 را قطب انعکاس و قوت F_1 را نسبت به دایرهٔ (M) قوت



انعکاس اختیار کنیم، منعکس دایرهٔ (M) بر خود منطبق بوده و منعکس دایرهٔ هادی، خطی است مانند Δ عمود بر FF_1 و مماس بر دایرهٔ (M) مانند Δ . بنابراین نقطهٔ غیرمتناظر H، پای Δ را به‌دست می‌آوریم. به‌قسمی که $F_1H \times F_1K$ برابر قوت انعکاس باشد. دایرهٔ هادی به قطر F_1K است. با معلوم بودن دو کانون F و ′F و دایرهٔ هادی هذلولی رسم می‌شود.

۳.۲.۱.۱.۱.۳. دو رأس، یک نقطه

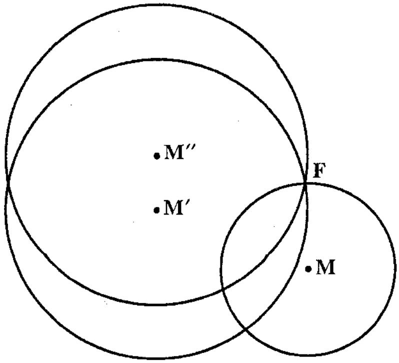
۴۷۱. فرض می‌کنیم P تصویر M روی ′AA باشد. از P مماس PQ را بر دایرهٔ اصلی اخراج می‌کنیم (دایرهٔ به قطر ′AA) و سپس از M عمودی بر PQ رسم می‌نماییم. اگر N فصل‌مشترک این خط با ′AA باشد، $PN = b$ است و هذلولی با معلوم بودن دو قطرش مشخص می‌شود.

برای این که هذلولی وجود داشته باشد، بایستی عمود رسم شده از M بر ′AA، از قطعه خط ′AA نگذرد.

۳.۲.۱.۱.۲. چهار نقطه

۳.۲.۱.۱.۲.۱. یک کانون، سه نقطه

۴۷۲. اگر M، ′M و ″M سه نقطه از هذلولی و F کانون آن باشد، دایره‌های به مرکزهای M، ′M و ″M و به شعاعهای MF، M′F و M″F با دایرهٔ هادی کانون دیگر مماسند. از آن‌جا برای یافتن دایرهٔ هادی کانون دیگر، باید دایره‌ای رسم کنیم که بر سه دایرهٔ بالا مماس شود.



۳.۲.۱.۲. خط

۳.۲.۱.۲.۱. یک مجانب، یک هادی، یک مماس

۴۷۳. چون زاویهٔ بین مجانب و هادی معلوم است، متمم آن و درنتیجه e خروج از مرکز هذلولی معلوم است. از طرفی ضریب زاویهٔ مجانب نسبت $\frac{b}{a}$ یا $\frac{a}{b}$ را می‌دهد، بنابراین a، b و c مشخص می‌شوند و از آن‌جا هذلولی قابل رسم است.

۳.۲.۱.۳. ۲a، ۲b، ۲c؛ ...

۳.۲.۱.۳.۱. ۲a، ۲b

۴۷۴. مستطیلی رسم می‌کنیم که ضلعهای آن ۲a و ۲b باشند. قطرهای این مستطیل، مجانبهای هذلولی می‌باشند. خطهایی که از مرکز این مستطیل موازی ضلعهای مستطیل رسم شوند، محورهای هذلولی می‌باشند. روی این محورها دو نقطهٔ F و F′ کانونهای هذلولی به فاصلهٔ $\sqrt{a^2+b^2}$ از مرکز آن مشخص می‌شود.

۳.۲.۱.۳.۲. ۲a، $\frac{c}{a}$

۴۷۵. با معلوم بودن ۲a، اندازهٔ a و با استفاده از $e=\frac{c}{a}$، اندازهٔ c به‌دست می‌آید. با معلوم بودن a و c هذلولی مشخص می‌شود. بدیهی است که $b=\sqrt{c^2-a^2}$ نیز معلوم است.

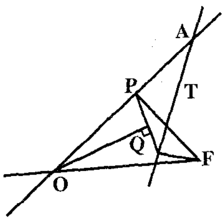
۳.۲.۱.۴. نقطه، خط

۳.۲.۱.۴.۱. یک نقطه، یک یا چند خط

۳.۲.۱.۴.۱.۱. یک نقطه، دو خط

۳.۲.۱.۴.۱.۱.۱. یک کانون، یک مماس، یک مجانب

۴۷۶. فرض می‌کنیم کانون F و مجانب A و مماس T معلوم باشند. P و Q،تصویر نقطهٔ F روی این خطها، متعلق به دایرهٔ اصلی می‌باشند (شکل). بنابراین مرکز این دایره، O، فصل مشترک



مجانب A و عمودمنصف PQ و شعاعش برابر PO می‌باشد و کانون دوم آن F، قرینهٔ F نسبت به O خواهد بود. بعکس، هذلولی به کانونهای F و ′F و به دایرهٔ اصلی به مرکز O و به شعاع OP، یکی از مجانبهایش A می‌باشد. چون FP در P بر این دایره مماس و T بر منحنی مماس است با این ترتیب تصویر، Q، نقطهٔ F روی T، یک نقطه از دایرهٔ اصلی می‌باشد.

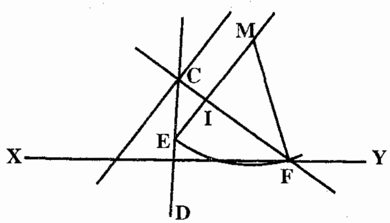
هذلولی با معلوم بودن کانونها و محور کانونی آن معین می‌شود. برای این‌که مسأله ممکن باشد، باید عمودمنصف PQ با A متقاطع شود، یعنی نقطه‌های P، Q و F، واقع بر یک استقامت نباشند و یا این‌که T موازی با A نباشد.

۳.۲.۱.۴.۱.۱.۲. یک کانون، یک هادی، یک مجانب

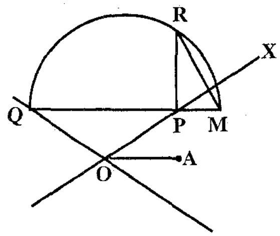
۴۷۷. فرض می‌کنیم از یک هذلولی کانون F و هادی نظیر D و امتداد مجانب معلوم باشد. از F عمود FK را بر هادی اخراج می‌کنیم تا آن را در K قطع کند و از F خطی موازی Δ رسم می‌کنیم تا هادی را در f قطع کند. عمودی که از f بر Ff اخراج شود، FK را در O مرکز هذلولی قطع می‌نماید.

۳.۲.۱.۴.۱.۱.۳. یک نقطه، یک هادی، یک مجانب

۴۷۸. می‌دانیم در هذلولی، هادی D نظیر کانون F، وتر تماس مماسهای رسم‌شده از F بر دایرهٔ اصلی می‌باشد. مجانبها، قطرهایی از این دایره که گذرنده بر نقطه‌های تماسند، می‌باشد (شکل).



بنابراین اگر C فصل مشترک X و D باشد، کانون F نظیر D، متعلق به عمود CY به X می‌باشد. از M خطی موازی مجانب رسم می‌کنیم تا با هادی در E تلاقی کند. می‌دانیم که : MF = ME . پس کانون، فصل مشترک Y و دایرهٔ به مرکز M و به شعاع ME می‌باشد. برای این‌که مسأله ممکن باشد، باید $ME \geq MI$ (I فصل مشترک ME با Y می‌باشد).



۴.۱.۱.۴.۱.۲.۳. یک نقطه، دو مجانب

۴۷۹. هذلولی به مجانبهای OX و OY و گذرنده بر نقطهٔ M را درنظر می‌گیریم. رأسهای آن بر روی نیمساز زاویهٔ مجانبها (زاویه‌ای که شامل M است) می‌باشد. فرض می‌کنیم A یکی از آنها باشد. از M خطی موازی با AO رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم P، Q فصل مشترک این خط با مجانبها باشند. داریم :

$$MP \times MQ = OA^2$$

بنابراین اگر R نقطهٔ تلاقی عمود وارده از P بر MQ با نیمدایرهٔ به قطر MQ باشد (شکل)، داریم :

$$MR^2 = MP \times MQ$$

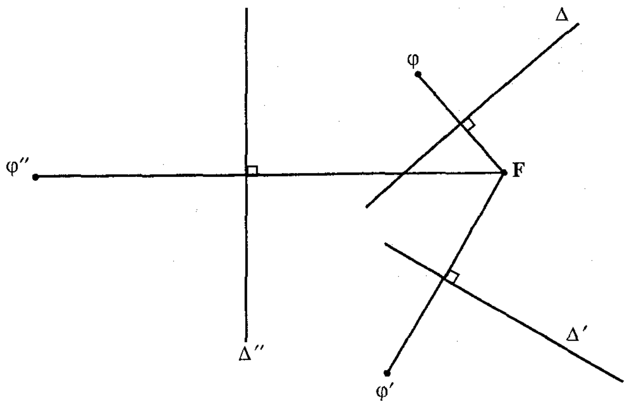
و در نتیجه :

$$OA = MR$$

۲.۱.۴.۱.۲.۳. یک نقطه، سه خط

۱.۲.۱.۴.۱.۲.۳. یک کانون، سه مماس

۴۸۰. قرینهٔ کانون F را نسبت به سه خط مماس؛ φ، φ' و φ'' می‌نامیم. این سه نقطه، روی دایرهٔ هادی کانون دیگرند، پس برای یافتن F' کافی است از سه نقطه φ''، φ' و φ دایره‌ای گذرانده و مرکز آن را تعیین کنیم.



۳.۲.۱.۴.۱.۲.۲. یک نقطه، دو هادی، یک مجانب

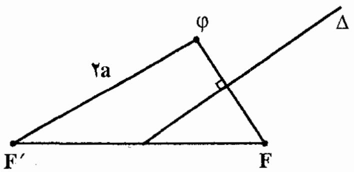
۴۸۱. خط Δ که به موازات D و D' متساوی‌الفاصله از A آنها رسم شود، محور تقارن هذلولی است. درنتیجه این منحنی از M' قرینهٔ M نسبت به Δ می‌گذرد. بعکس، هذلولی که D و X هادی و امتداد و مجانب آن باشد و از M و M' بگذرد. هادی دومش D' می‌باشد.

۳.۲.۱.۴ . دو نقطه، یک یا چند خط

۳.۲.۱.۴.۱ . دو نقطه، یک خط

۳.۲.۱.۴.۱.۱ . دو کانون، یک مماس

۴۸۲. **راه اول.** تصویرهای دو کانون را نسبت به خط مماس به دست می‌آوریم تا دو نقطه از دایرهٔ اصلی که مرکزش وسط FF' و شعاعش برابر a است، به دست آید. در این صورت هذلولی قابل رسم خواهد بود.



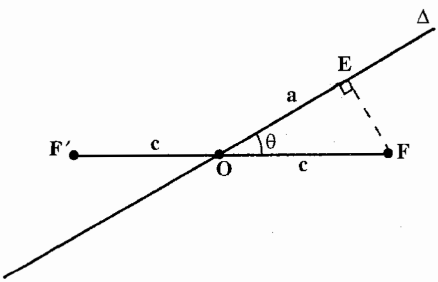
راه دوم. قرینهٔ کانون F را نسبت به خط مماس φ می‌نامیم. این نقطه روی دایرهٔ هادی کانون دیگر است و داریم : $F'\varphi = 2a$.

۳.۲.۱.۴.۱.۲ . دو کانون، یک مجانب

۴۸۳. دو کانون را به‌هم وصل می‌کنیم. از نقطهٔ O وسط FF' ، مجانب هذلولی را به موازات امتداد مفروض رسم می‌کنیم. می‌دانیم فاصلهٔ هر کانون از هر خط مجانب برابر b است، پس c و b معلوم است و از رابطهٔ $c^2 = a^2 + b^2$ مقدار a را با ترسیم به‌دست می‌آوریم و از آن‌جا ترسیم هذلولی امکان‌پذیر است.

۳.۲.۱.۴.۱.۳ . یک کانون، مرکز، یک مجانب

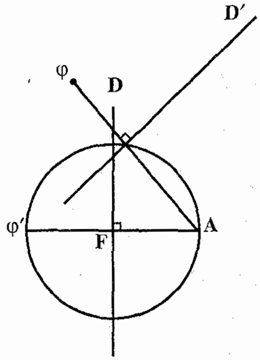
۴۸۴. می‌دانیم که O روی خط Δ مجانب هذلولی است. قرینهٔ نقطهٔ F نسبت به O نقطهٔ F' کانون دیگر هذلولی است و $FF' = 2c$ است. ازطرفی با معلوم بودن زاویهٔ Δ با محور کانونی FF' ضریب زاویهٔ خط مجانب یعنی نسبت $\frac{b}{a}$ مشخص است با معلوم بودن c و



و $\frac{b}{a}=k$ با استفاده از رابطه $c^2=b^2+a^2$ اندازهٔ a و b و از آن‌جا هذلولی مشخص است.

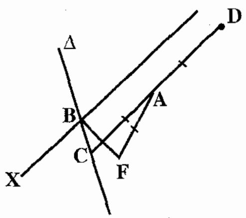
نکته. از این ویژگی که تصویر کانون F روی مجانب، روی دایرهٔ اصلی هذلولی است نیز می‌توان a را محاسبه کرد.

۳.۲.۱.۴.۲.۱.۴. یک کانون، یک رأس، یک مماس



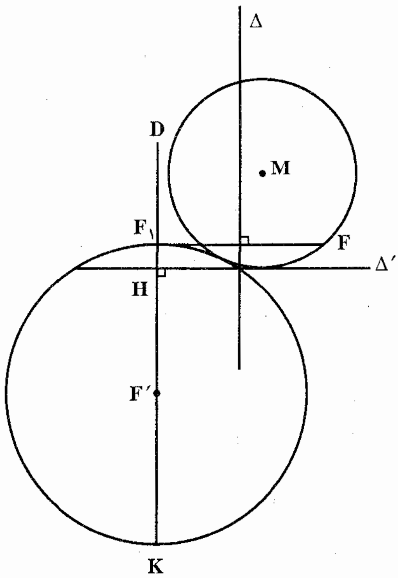
۴۸۵. قرینهٔ کانون F را نسبت به خط مماس ′D نقطهٔ φ می‌نامیم. این نقطه روی دایرهٔ هادی کانون دیگر است، از A عمودی بر FA رسم می‌کنیم. قرینهٔ کانون F را نسبت به خط D نقطهٔ ′φ می‌نامیم. دایرهٔ به مرکز A و به شعاع FA رسم می‌کنیم. این دایره، با دایرهٔ هادی کانون ′F مماس است و از آن‌جا برای یافتن دایرهٔ هادی کانون دیگر، باید دایره‌ای رسم کنیم که از دو نقطهٔ φ و ′φ بگذرد و با دایرهٔ به مرکز A و به شعاع AF مماس شود.

۳.۲.۱.۴.۲.۱.۵. یک کانون، یک نقطه، یک مجانب



۴۸۶. **راه اول.** هادی Δ نظیر کانون F را رسم می‌کنیم. Δ از B تصویر کانون F روی مجانب X می‌گذرد. از طرف دیگر می‌دانیم که شعاع حامل MF مساوی با فاصلهٔ M از هادی می‌باشد. بنابراین اگر ما روی خطی که از M به موازات X رسم می‌شود طولهای AC و AD را مساوی AF جدا کنیم، هادی Δ از C یا D گذشته و روی BC یا BD قرار می گیرد و همواره دو جواب وجود دارد (شکل).

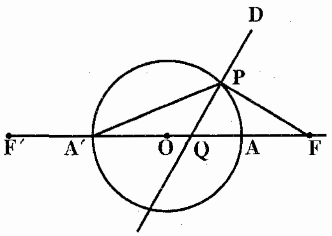
راه دوم. F یکی از کانونها و Δ یک مجانب و M یکی از نقطه‌های هذلولی فرض شده‌اند. قرینهٔ F را نسبت به Δ به‌دست می‌آوریم. F_1 روی دایرهٔ هادی کانون دیگر است و دایرهٔ هادی در F_1 بر خط FF_1 مماس است. بنابراین مرکزش روی خط D که از F_1 بر FF_1 عمود رسم شده، قرار دارد. اگر F_1 را قطب انعکاس و قوت F_1 را نسبت به دایرهٔ به مرکز M و به شعاع MF قوت انعکاس اختیار کنیم، منعکس دایرهٔ (M) بر خود منطبق بوده و منعکس دایرهٔ هادی خطی است مانند ′Δ مماس بر دایرهٔ (M) و عمود بر



D. اگر H پای Δ' روی D فرض شود، نقطهٔ K، نقطهٔ غیرمتناظر H را چنان اختیار می‌کنیم که $F_1H \times F_1K$ برابر قوت انعکاس باشد. دایرهٔ به قطر F_1K، منعکس خط Δ' با دایرهٔ هادی کانون دیگر است و رسم هذلولی با معلوم بودن دو کانون و دایرهٔ هادی میسر است.

۳.۲.۱.۴.۲.۱.۶. دو رأس، یک مماس

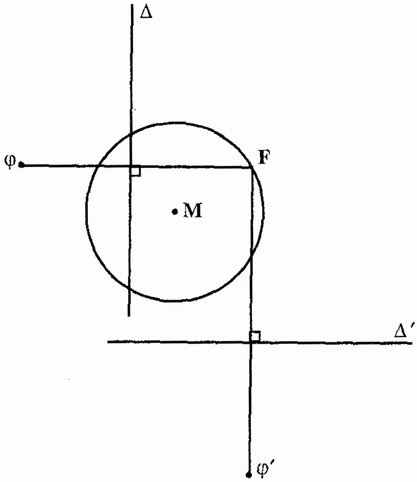
۴۸۷. فرض می‌کنیم یک هذلولی به رأسهای A و A' و مماس بر خط D باشد. می‌دانیم که تصویرهای کانونها روی یک مماس، متعلق به دایرهٔ اصلی می‌باشد؛ پس اگر P فصل مشترک D با دایرهٔ به قطر AA' باشد، عمود در P بر D، خط AA' را در یک کانون F قطع می‌کند (شکل) و کانون دوم نیز به همین روش نتیجه می‌شود (همچنین می‌توان از قرینه F نسبت به O کانون F' را به‌دست آورد) و هذلولی معلوم می‌شود. برای این که مسأله ممکن باشد، از یک طرف لازم است که D دایرهٔ به قطر AA' را قطع کند و از طرف دیگر عمود بر D در P، خط AA' را در خارج این قطعه تلاقی کند. خطهای PA و PA' را رسم می‌کنیم. زاویهٔ APA' قائمه است و برای این که یکی از ضلعهای PF زاویهٔ قائمه DPF خارج $A\hat{P}A'$ باشد، لازم و کافی است که دیگری، PQ، داخل آن باشد. در نتیجه برای این که مسأله ممکن باشد، لازم و کافی است که D قطعهٔ AA' را قطع کند.



۳.۲.۱.۴.۲.۲. دو نقطه، دو خط

۳.۲.۱.۴.۲.۲.۱. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، دو مماس

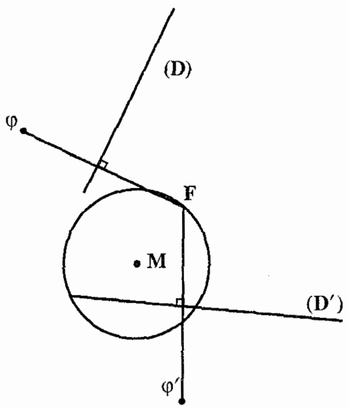
۴۸۸. راه اوّل. قرینهٔ کانون F را نسبت به دو خط مماس Δ و Δ' ، نقطه‌های φ و φ' می‌نامیم. دایره‌ای به مرکز M و به شعاع MF بر دایرهٔ هادی کانون دیگر مماس است. از آن‌جا برای یافتن دایرهٔ هادی کانون دیگر، باید دایره‌ای رسم کنیم که از دو نقطهٔ φ و φ' بگذرد و بر دایرهٔ به مرکز M مماس شود.



راه دوم. فرض می‌کنیم کانون F و مماسهای T و T' و نقطهٔ M یک نقطهٔ تماس هذلولی معلوم باشد. φ و φ' تصویرهای F روی T و T' متعلق به دایرهٔ اصلی می‌باشند. از طرف دیگر دایرهٔ اصلی بر دایرهٔ به قطر FM مماس خارج است. بنابراین O مرکز دایرهٔ اصلی، مرکز دایرهٔ گذرنده بر φ و φ' و مماس بر دایرهٔ به قطر FM است. می‌توان به‌جای O (مرکز) کانون دوم F' را به‌دست آورد.

۳.۲.۱.۴.۲.۲.۲. یک کانون، یک نقطه، دو مماس

۴۸۹. راه اوّل. قرینهٔ کانون F را نسبت به دو خط مماس D و D' نقطه‌های φ و φ' می‌نامیم. این دو نقطه روی دایرهٔ هادی کانون دیگرند. دایرهٔ به مرکز M و به شعاع MF با دایرهٔ هادی کانون دیگر مماس است. از آن‌جا برای یافتن دایرهٔ هادی کانون دیگر باید دایره‌ای رسم کنیم که از دو نقطهٔ φ و φ' بگذرد و با دایرهٔ به مرکز M و به شعاع MF مماس شود.

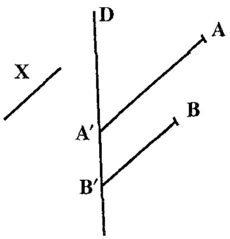


راه دوم. فرض می‌کنیم کانون F و دو مماس T و T' و نقطهٔ M از یک هذلولی معلوم باشند. φ و φ' تصویرهای F روی

T و T′ متعلق به دایرهٔ اصلی و دایرهٔ به قطر FM بر دایرهٔ اصلی مماس است. پس O مرکز هذلولی مرکز دایرهٔ مماس بر دایرهٔ به قطر FM و گذرنده بر φ و φ′ می‌باشد. با معلوم شدن O هذلولی مشخص می‌شود. می‌توان به‌جای O کانون دوم F′ را به‌دست آورد.

۳.۲.۱.۴.۲.۲.۳. دو نقطه، یک هادی، یک مجانب

۴۹۰. از A و B خطهایی موازی با X رسم می‌کنیم تا D را در A′ و B′ قطع کنند. می‌دانیم که اگر F کانون نظیر هادی D باشد، داریم :



$$AA' = AF \ , \ BB' = BF$$

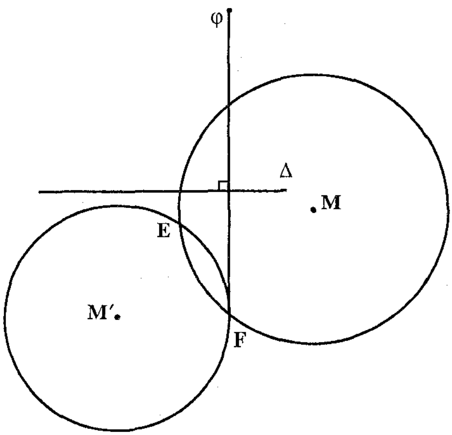
پس F فصل مشترک دایره‌های به مرکزهای A و B ، به شعاعهای AA′ و BB′ می‌باشد. با مشخص شدن F و اجزای دیگر، هذلولی بسادگی رسم می‌شود. برحسب موقعیتهای نسبی دو دایره، مسأله دارای دو جواب یک جواب و یا بدون جواب خواهد بود.

۳.۲.۱.۴.۳. سه نقطه، یک یا چند خط

۳.۲.۱.۴.۳.۱. سه نقطه، یک خط

۳.۲.۱.۴.۳.۱.۱. یک کانون، دو نقطه، یک خط مماس

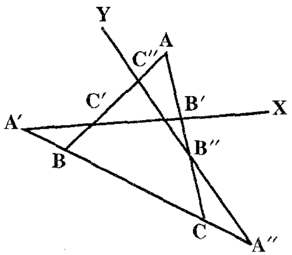
۴۹۱. راه اوّل. قرینهٔ کانون F را نسبت به خط Δ نقطهٔ φ می‌نامیم. این نقطه روی دایرهٔ هادی کانون دیگر است. اگر M و M′ دو نقطه از هذلولی باشند، دایره‌های به مرکزهای M و M′ و به شعاعهای MF و M′F با دایرهٔ هادی کانون دیگر مماسند. برای یافتن دایرهٔ هادی کانون دیگر باید دایره‌ای رسم کنیم که از نقطهٔ φ بگذرد و با دو دایرهٔ بالا مماس شود.



راه دوم. اگر کانون F و مماس T و دو نقطه A و B از یک هذلولی معلوم باشند، O مرکز هذلولی مرکز دایرهٔ مماس بر دایره‌های به قطرهای FA و FB و گذرنده بر φ تصویر F روی T می‌باشد. می‌توان کانون F' را به‌جای O به‌دست آورد.

۲.۱.۳.۴.۱.۲.۳. سه نقطه، یک مجانب

۴۹۲. می‌دانیم که یک هذلولی و مجانبهایش تمام خطهای قاطع را در دو وتر که دارای یک مرکز هستند، قطع می‌کند. بنابراین فرض می‌کنیم A'، B' و C' نقطه‌های برخورد مجانب X با ضلعهای مثلث ABC باشد. اگر A'' فصل‌مشترک BC با مجانب دوم باشد، $A'A''$ و BC دارای یک مرکزند، پس A'' قرینهٔ A' نسبت به وسط BC می‌باشد. به‌همین طریق B'' و C'' قرینه‌های B' و C' نسبت به وسطهای CA و AB متعلق به مجانب دوم، Y (که ساختمانش معلوم شد)، می‌باشد. بنابراین ما مجانبها و یک نقطه از هذلولی را می‌دانیم و بسهولت محورها را می‌توانیم به‌دست آوریم.



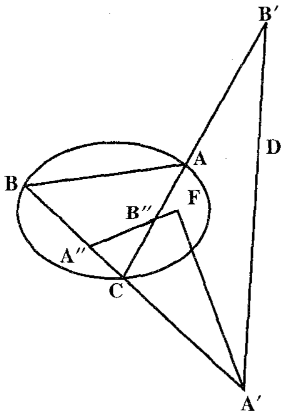
برای این که مسأله ممکن باشد، لازم است که Y متقاطع با X باشد، یا با فرض این که AB و AC با X متقاطعند:

$$\frac{AB''}{AB'} \neq \frac{AC''}{AC'} \quad \text{یا} \quad \frac{CB'}{AB'} \neq \frac{BC'}{AC'}$$

یعنی BC متقاطع با X باشد. بنابراین وقتی X با یکی از ضلعهای مثلث ABC موازی باشد، مسأله غیرممکن است (شکل).

۳.۱.۳.۴.۱.۲.۳. سه نقطه، یک هادی

۴۹۳. فرض کنیم A' و B' فصل مشترکهای خط D با خطهای BC و CA و همچنین نقطه‌های A'' و B'' مزدوج توافقی این نقطه‌ها نسبت به BC و CA باشند. اگر F کانون نظیر D از مقطع مخروطی با معلومات داده شده باشد، می‌دانیم که FA' یکی از نیمسازهای $B\hat{F}C$ است، پس FA'' نیمساز دیگر این زاویه بوده، در نتیجه $A'\hat{F}A''$ مساوی °۹۰ و F روی دایره‌ای است به قطر $A'A''$، این نقطهٔ F ضمناً روی دایرهٔ دیگری به قطر



$B'B''$ قرار دارد ؛ پس نقطهٔ مشترک این دو دایره است (شکل).
بعکس، فرض کنیم که این دو دایره نقطهٔ مشترکی مانند F داشته باشند. مقطع مخروطی که دارای کانونی مانند F و یک خط هادی نظیر مانند D می‌باشد و از نقطهٔ C می‌گذرد، ضمناً از A و B نیز خواهد گذشت. در حقیقت در دستگاه توافقی $F-BCA'A''$ شعاعهای FA' و FA'' متعامدند، پس نیمسازهای زاویه‌های تشکیل شده به وسیلهٔ FB و FC خواهند بود.
فرض کنیم که CB مقطع مخروطی را در نقطهٔ دیگر B_1 قطع کند. FB_1 قرینهٔ FC است، نسبت به FA'. بنابراین FB_1 بر FB منطبق می‌شود و B_1 روی B قرار می‌گیرد. ملاحظه می‌شود که مقطع مخروطی از A می‌گذرد.
مسأله دارای دو جواب یا یک جواب و یا اصلاً جواب ندارد، برحسب آن که دو دایره به قطرهای $A'A''$ و $B'B''$ متقاطع یا مماس بوده و یا یکدیگر را قطع نکنند.

۳.۲.۱.۵. نقطه؛ ۲a، ۲b، ۲c؛ ...

۳.۲.۱.۵.۱. دو کانون، ۲b

۴۹۴. با معلوم بودن دو کانون، فاصلهٔ کانونی یعنی ۲c معلوم است و چون ۲b نیز داده شده است، پس با ترسیم، از رابطهٔ $c^2 - b^2 = a^2$ ، مقدار a به‌دست می‌آید. از آن‌جا، با معلوم بودن ۲a و دو کانون، هذلولی مشخص و قابل رسم است.

۳.۲.۱.۵.۲. دو کانون، $\frac{b}{a}$

۴۹۵. راه اول. با معلوم بودن دو کانون، فاصلهٔ کانونی یعنی ۲c و در نتیجه c مشخص است.
از طرفی می‌دانیم که $c^2 = b^2 + a^2$ است. با فرض $\frac{b}{a} = k$ داریم :

$$\begin{cases} b^2 + a^2 = c^2 \\ \dfrac{b}{a} = k \end{cases}$$

از آن‌جا a و b محاسبه می‌شوند. با داشتن اندازهٔ a و b ، هذلولی مشخص می‌شود.
راه دوم. در بیضی $\frac{b}{a} < 1$ است. عمود MN را چنان رسم می‌کنیم، که $\frac{OM}{MN} = \frac{a}{b}$

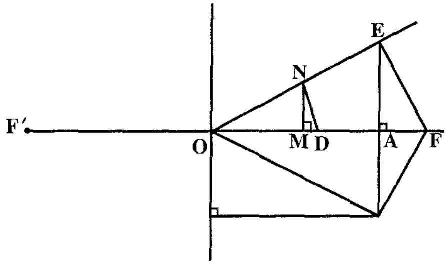
باشد. به مرکز O کمان $\overset{\frown}{ND}$ را رسم می‌کنیم و از کانون F خط FE را موازی ND رسم می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$\frac{OA}{AE}=\frac{a}{b}$$

از آن‌جا، $OA=a$ ، $AE=b$ است، زیرا:

$$AO^2+AE^2=OE^2=c^2$$

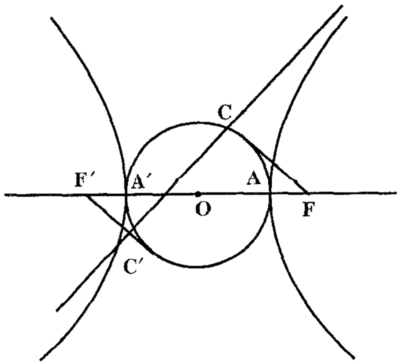
خط OE یک مجانب هذلولی است.



۳.۲.۱.۶. خط، ۲a، ۲b، ۲c؛ ...

۳.۲.۱.۶.۱. محور کانونی، یک مماس، ۲a

۴۹۶. روی قطر بزرگ ′AA دایرهٔ اصلی هذلولی را رسم می‌کنیم و نقطه‌های برخورد آن با خط مماس Δ را C و ′C می‌نامیم. از نقطه‌های C و ′C عمودهایی بر خط مماس اخراج می‌کنیم تا محور کانونی ′AA را در F و ′F کانونهای هذلولی قطع کنند. با معلوم بودن دو کانون $FF'=2c$ و از آن‌جا هذلولی قابل رسم است.



۳.۲.۱.۶.۲. دو خط مجانب، $2c$

۴۹۷. دو مجانب را رسم می‌کنیم. نیمسازهای دو مجانب محورهای هذلولی می‌باشند و محل تلاقی دو مجانب مرکز هذلولی است. به مرکز هذلولی دایره‌ای به شعاع c رسم می‌کنیم تا یکی از نیمسازها را در F و F' قطع کند، فاصلهٔ F یا F' از خطهای مجانب برابر b است. با معلوم شدن b مقدار a به‌دست می‌آید و هذلولی قابل رسم است.

۳.۲.۱.۷. نقطه؛ خط؛ $2a$، $2b$، $2c$؛...

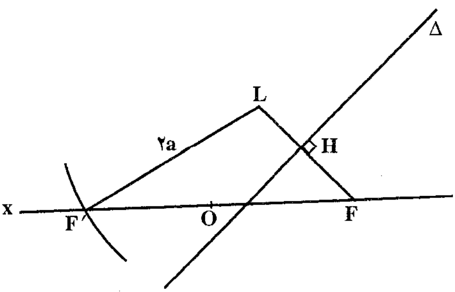
۳.۲.۱.۷.۱. یک کانون، یک مجانب، $2a$

۴۹۸. فرض می‌کنیم F یک کانون و A یک مجانب و $2a$ از یک هذلولی معلوم باشد. φ تصویر F روی A متعلق به دایرهٔ اصلی و $F\varphi = b$ است. بنابراین با معلوم بودن a و b مقدار c نیز معلوم می‌شود. بنابراین O فصل مشترک دایره‌های به مرکز φ به شعاع a و به مرکز F به شعاع c می‌باشد.

۳.۲.۱.۷.۲. یک کانون، یک مماس، $2a$، $2b$

۴۹۹. فرض کنیم کانون F و مماس T و طول قطرهای بزرگ و کوچک معلوم باشند. φ تصویر F روی T متعلق به دایرهٔ اصلی و $OF = c$ برابر $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ می‌باشد. بنابراین O فصل مشترک دایره‌های به مرکز φ و به شعاع a و به مرکز F و به شعاع $c = \sqrt{a^2 + b^2}$ می‌باشد. با معلوم بودن مرکز O هذلولی مشخص می‌شود.

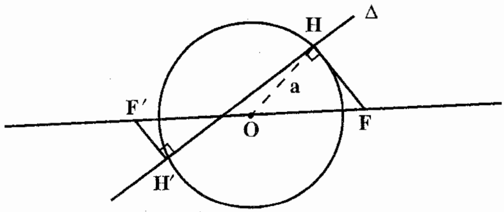
۳.۲.۱.۷.۳. یک کانون، یک مماس، محور کانونی، $2a$



۵۰۰. راه اول. F را کانون معلوم، Δ را خط مماس و Fx را محور کانونی اختیار می‌کنیم. قرینهٔ کانون F نسبت به خط مماس Δ را به‌دست آورده L می‌نامیم. می‌دانیم که L روی دایرهٔ هادی کانون F' است، که شعاع آن $2a$ است. بنابراین به مرکز L و به

شعاع $2a$ کمانی رسم می‌کنیم تا Fx را در نقطهٔ F' کانون دیگر هذلولی قطع کند. از آن‌جا $FF' = 2c$ مشخص می‌شود. با داشتن $2a$ و $2c$ هذلولی مشخص است.

راه دوم. تصویر کانون F روی خط مماس Δ را H می‌نامیم. H نقطه‌ای از دایرهٔ اصلی هذلولی است. به مرکز H و به شعاع a کمانی رسم می‌کنیم تا محور کانونی را در O و O' قطع کند. به مرکز O و به شعاع a دایرهٔ اصلی بیضی را رسم می‌کنیم. اگر H' نقطهٔ دیگر تقاطع مماس Δ با دایرهٔ اصلی هذلولی باشد، عمودی که از H' بر Δ اخراج می‌شود، محور کانونی را در F'، کانون دیگر هذلولی، قطع می‌کند. با مشخص شدن دو کانون و $2a$ هذلولی قابل رسم است. اگر O' را مرکز هذلولی قرار دهیم، مسأله یک جواب دیگر نیز دارد.



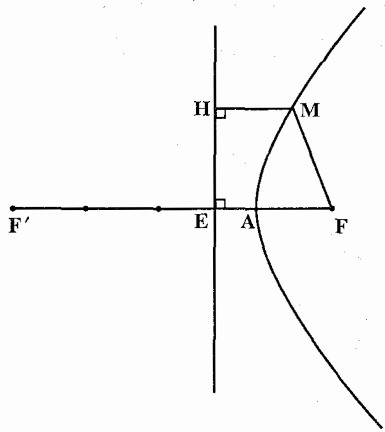
۳.۲.۱.۷.۴. مرکز، دو مماس، $2a$

۵۰۱. فرض می‌کنیم مرکز O و دو مماس T و T' و a نصف قطر بزرگ هذلولی معلوم باشد. با معلوم بودن O و a دایرهٔ اصلی مشخص است. این مماسها دایرهٔ اصلی را در چهارنقطه قطع می‌کنند. عمودهایی که در این چهار نقطه بر مماسها رسم می‌شوند، دوبه‌دو یکدیگر را در کانونها قطع خواهند کرد و هذلولی مشخص می‌شود.

۳.۲.۱.۷.۵. یک کانون، یک مجانب، $2c$

۵۰۲. فاصلهٔ کانون معلوم تا خط مجانب، b است؛ پس b و c معلوم است. از رابطهٔ $c^2 = a^2 + b^2$، مقدار a را به‌دست می‌آوریم. به مرکز F و به شعاع c قوسی رسم می‌کنیم که مجانب مفروض را در O مرکز هذلولی قطع می‌کند. قرینهٔ F را نسبت به O تعیین می‌کنیم؛ F' کانون دیگر هذلولی به‌دست می‌آید و هذلولی با دو کانون و $2a$ مشخص است.

۳.۲.۱.۷.۶. یک کانون، یک خط هادی، $\frac{c}{a}$

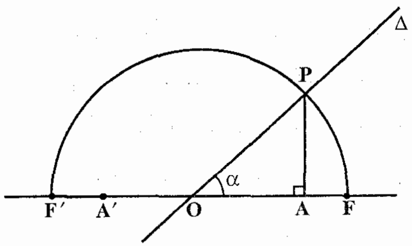


۵۰۳. کانون F و خط هادی D از یک هذلولی را درنظر می‌گیریم که خروج از مرکز آن $e=\frac{c}{a}$ داده شده است. می‌دانیم که هذلولی مکان هندسی نقطه‌ای است که نسبت فاصله‌اش از یک کانون به فاصله‌اش از خط هادی نظیر آن مقدار ثابت $\frac{c}{a}$ است.

همچنین $FE=\frac{b^2}{c}$، مقدار معلومی است. از آن‌جا ...

۳.۲.۱.۷.۷. یک رأس، یک مجانب، $\frac{c}{a}$

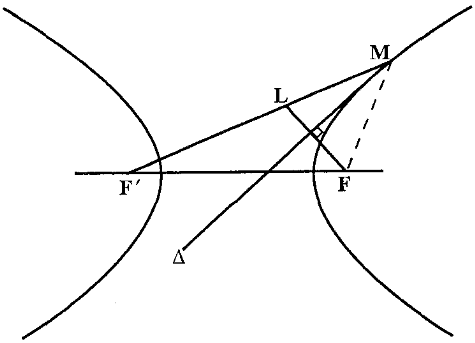
۵۰۴. اگر زاویهٔ مجانب را با محور کانونی α بنامیم، $\cos\alpha=\frac{a}{c}$ می‌شود. پس از رأس مفروض A خط AO را چنان می‌کشیم که با Δ زاویهٔ α بسازد. قرینهٔ A را نسبت به O پیدا می‌کنیم. A' رأس دیگر هذلولی است. از A عمودی بر AA' اخراج می‌کنیم که Δ را در P قطع کند. به موجب آنچه که می‌دانیم $OP=c$ است. به مرکز O و به شعاع OP دایره‌ای می‌کشیم که AA' را در F و F' قطع می‌کند. F و F' کانونهای هذلولی می‌باشند و هذلولی با معلوم بودن دورأس و دو کانون مشخص است.



۳.۲.۱.۷.۸. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، یک مماس، ۲a

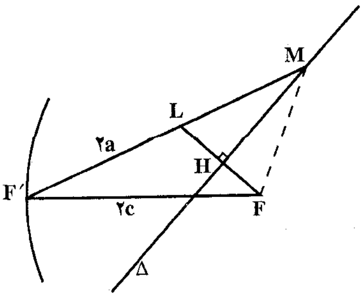
۵۰۵. F را کانون، Δ را خط مماس و M را نقطهٔ تماس داده شده می‌گیریم. قرینهٔ کانون F

نسبت به خط Δ را L می‌نامیم. و از L به M وصل می‌کنیم. می‌دانیم که LM از کانون F' می‌گذرد و $F'L = ۲a$ است، پس روی ML نقطهٔ F' را چنان اختیار می‌کنیم که $LF' = ۲a$ باشد، با مشخص شدن کانون F'، اندازهٔ فاصلهٔ کانونی یعنی $FF' = ۲c$ و از آن‌جا با معلوم بودن ۲a و ۲c هذلولی مشخص می‌شود.



۳.۲.۱.۷.۹. یک کانون، یک نقطهٔ تماس، یک مماس، ۲c

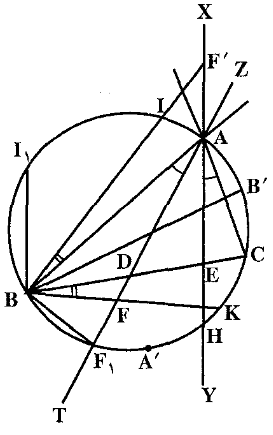
۵۰۶. F را کانون، Δ را خط مماس و M را نقطهٔ تماس آن با هذلولی فرض می‌کنیم. قرینهٔ کانون F نسبت به خط مماس را L می‌نامیم. خط LM را رسم می‌کنیم، می‌دانیم که این خط از کانون F' می‌گذرد. از طرفی دایرهٔ به مرکز F و به شعاع ۲c نیز از F' می‌گذرد. پس محل برخورد خط LM با دایرهٔ $(F , ۲c)$ کانون F' است. با مشخص شدن نقطهٔ F' عدد ثابت هذلولی $LF' = ۲a$ مشخص می‌شود و از آن‌جا با معلوم بودن ۲a و ۲c هذلولی قابل رسم است.



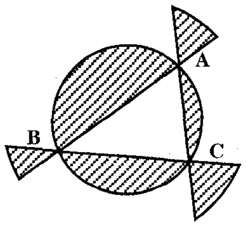
۲.۲.۳. رسم هذلولی با معلوم بودن: مثلث، مثلث و داده‌های دیگر

۱.۲.۲.۳. مثلث، یک کانون

۵۰۷. تصویرهای کانون F روی ضلعهای مثلث ABC سه نقطه از دایرهٔ اصلی می‌باشد. مقطع مخروطی با معلوم بودن این دایره و یک کانون معین است، یعنی یک بیضی و یا یک هذلولی است، برحسب این که دو کانون در یک طرف و یا طرفین یک مماس قرار گرفته باشند. فرض می‌کنیم F' کانون دوم باشد. دایرهٔ محیطی مثلث ABC و خط AF را رسم می‌کنیم. بنا به قضیهٔ پونسله AF' و BF' بترتیب قرینه‌های AF و BF نسبت به نیمساز AA' زاویهٔ $B\hat{A}C$ و نیمساز BB' زاویهٔ $A\hat{B}C$ می‌باشد (شکل).



بحث. فرض می‌کنیم F خط ZT گذرنده بر A را طی کند. اگر F در F_1 باشد، BI_1 قرینهٔ BF_1 نسبت به BB' موازی AH است ؛ زیرا $I_1\hat{B}A = F_1\hat{B}C$ ولی $F_1\hat{B}C = B\hat{A}H$ ، پس $I_1\hat{B}A = B\hat{A}H$ و بنابراین نقطهٔ F' وجود ندارد. اگر F روی F_1D باشد، BF داخل $F_1\hat{B}C$ قرار گرفته و قرینه‌اش، BI ، نسبت به BB' داخل زاویه $I_1\hat{B}A$ و F' متعلق به AX می‌باشد. بنابراین F و F' در طرفین مماس AB قرار گرفته و مقطع مخروطی هذلولی می‌باشد. با استدلال مشابهی وقتی که F متعلق به AZ باشد، یک هذلولی به‌دست می‌آید. مقطع مخروطی بیضی است، وقتی که F روی AD یا F_1D قرار گیرد. در نتیجه مقطع مخروطی یک هذلولی و یا یک بیضی است برحسب این که F واقع در ناحیهٔ هاشورخورده و یا خارج از آن باشد و می‌دانیم که مقطع مخروطی یک سهمی است وقتی که F روی دایرهٔ محیطی مثلث قرار گیرد (شکل).

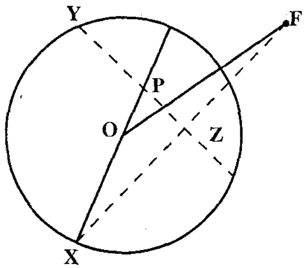


۳.۲.۳ . رسم هذلولی با تازدن کاغذ

۵۰۸. دایره‌ای به مرکز O رسم کنید. نقطهٔ دلخواه F را بیرون دایره مشخص کنید. مانند بیضی، F را چندبار روی محیط دایره بیندازید و کاغذ را تا بزنید. هریک از این خطها بر هذلولی به کانون F و O مماس هستند. شکل،حالتی را نشان می‌دهد که F روی X افتاده است. چون YZ عمودمنصف FX است، پس $FP = PX$ ، بنابراین :

$$FP - PO = PX - PO = \text{شعاع دایره}$$

همچنین $F\hat{P}Z = X\hat{P}Z$ است.



۳.۳.رسم سهمی

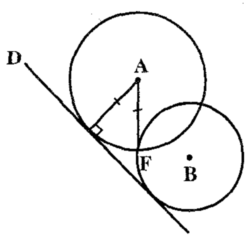
۱.۳.۳ . رسم سهمی با معلوم بودن: نقطه؛ خط؛ پارامتر؛ تحت مماس، تحت قائم؛...

۱.۱.۳.۳.نقطه

۱.۱.۱.۳.۳. سه نقطه

۱.۱.۱.۱.۳.۳. کانون، دو نقطه

۵۰۹. فرض کنیم F کانون و A و B دو نقطه از سهمی باشند. باید هادی D را مشخص کنیم. چون A و B متساوی‌الفاصله از F و خط D می‌باشند، پس خط D مماس مشترک دو دایره به مرکزهای A و B ، به شعاعهای AF و BF می‌باشند.



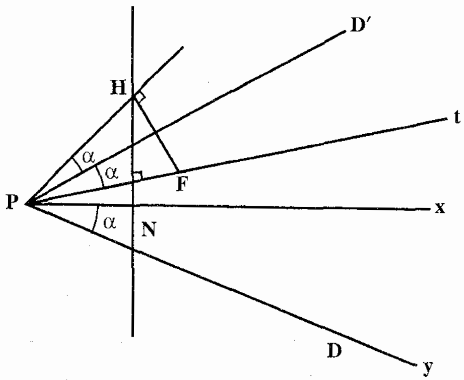
بحث. اگر A ، B و F واقع بر یک استقامت نباشند، دو دایره متقاطع و دارای دو مماس مشترک و بنابراین دو سهمی موافق با شرایط مسأله وجود دارد و همین‌طور است اگر A، B و F واقع بر یک استقامت و F بین آنها قرار داشته باشد. ولی وقتی F روی یکی از دو امتداد AB قرار داشته باشد، هیچ سهمی که در شرایط مسأله صدق کند، وجود ندارد.

۳.۳.۱.۲. خط

۳.۳.۱.۲.۱. سه خط

۳.۳.۱.۲.۱.۱. هادی، دو مماس

۵۱۰. فرض می‌کنیم خطهای مماس D و ′D یکدیگر را در P قطع کنند. از P عمودی بر هادی سهمی رسم می‌کنیم. سپس از P خطی رسم می‌کنیم که با ′D زاویهٔ $y\hat{P}N = \alpha$ (قضیهٔ پونسله) را بسازد، آن‌گاه از P خطی رسم می‌کنیم که با ′D زاویهٔ α بسازد و خط هادی را در H قطع کند؛ از H عمودی بر ′D رسم می‌کنیم تا Pt را در F قطع کند. F کانون سهمی است.

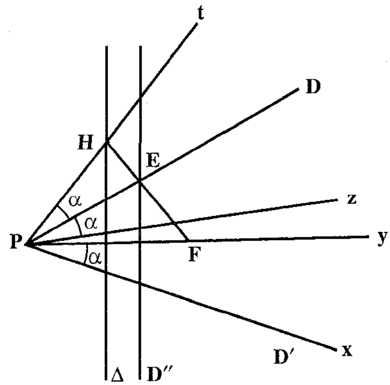


۳.۳.۱.۲.۱.۲. سه مماس

۵۱۱. راه اول. محل تلاقی دو مماس D و ′D را نقطهٔ P می‌نامیم از P عمود Py را بر ″D رسم می‌کنیم؛ سپس از P خطی می‌کشیم که با D زاویهٔ $x\hat{P}y = \alpha$ را بسازد. F روی این

خط است، سپس از P خطی می‌کشیم که با D زاویهٔ α بسازد و اگر مماس در رأس، خط D را در E قطع کند، برای یافتن کانون باید از E خطی رسم کنیم که متکی بر Pz و Pt و E وسط آن خط باشد. محل تلاقی این خط با Pz کانون F و خطی که از H به موازات D'' رسم شود، خط هادی سهمی است.

راه دوم. فرض می‌کنیم مماسهای Δ و Δ' مماس در رأس را در نقطه‌های A و B قطع کنند. نقطه‌های A و B تصویرهای کانون F روی مماسها می‌باشند، پس از A و B عمودهایی بر Δ و Δ' اخراج می‌کنیم. نقطهٔ تلاقی آنها کانون F است. قرینهٔ F را نسبت به مماس در رأس، نقطهٔ H را به‌دست می‌آوریم. از این نقطه، خط هادی را به موازات مماس در رأس رسم می‌کنیم.

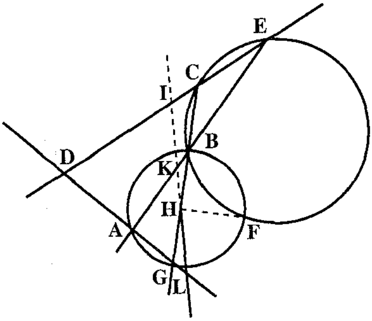


۲.۲.۱.۳.۳. چهار خط

۱.۲.۲.۱.۳.۳. چهار مماس

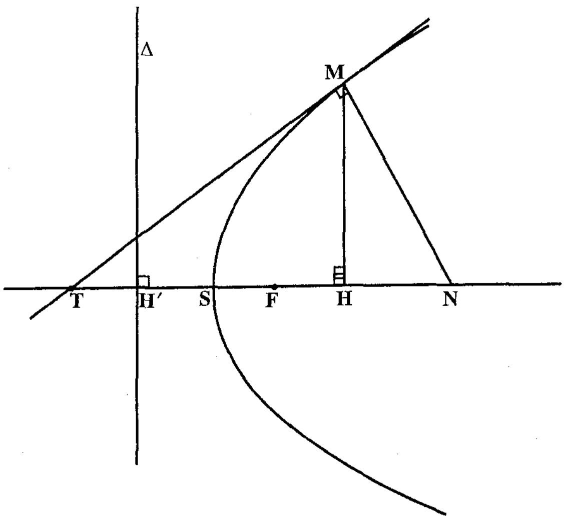
۵۱۲. فرض کنیم F کانون یک سهمی مماس بر خطهای AB ، BC ، CD و CA باشد (شکل). نقطهٔ F روی دایره‌های محیطی مثلثهای ABG و BCE قرار دارد؛ این دو دایره که در نقطهٔ B مشترکند، یکدیگر را در F قطع می‌کنند. طبق قضیهٔ Simson ، I ، H ، K و L تصویرهای F روی این چهارخط، واقع بر یک استقامتند. بعکس، سهمی به کانون F که IKHL مماس در رأسش باشد، بر چهار خط مزبور مماس می‌باشد.

بنابراین مسأله دارای یک جواب و فقط یک جواب است. تحت شرایط زیر، مسلماً لازم است که دوتا از این خطها موازی نبوده و سه‌تا از این خطها همرس نباشند.



۳.۱.۳.۳. پارامتر؛ تحت مماس، تحت قائم

۵۱۳. مسأله را حل شده و سهمی به کانون F و هادی Δ را جواب مسأله می‌گیریم. اگر HT و HN بترتیب تحت مماس و تحت قائم نظیر نقطهٔ M از سهمی باشند، مثلث قائم‌الزاویه MNT با معلوم بودن دو قطعه وتر قابل رسم است. این مثلث را رسم می‌کنیم. وسط تحت مماس HT نقطهٔ S رأس سهمی است و چون $SH' = SF = \frac{p}{2}$ معلوم است پس کانون و خط هادی سهمی نیز مشخص می‌شود و از آن‌جا سهمی رسم می‌شود.

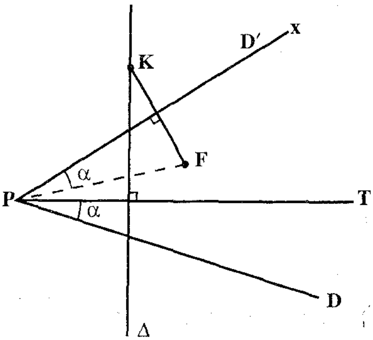


۳.۳.۱.۴. نقطه، خط

۳.۳.۱.۴.۱. یک نقطه، یک یا چند خط

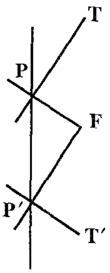
۳.۳.۱.۴.۱.۱. یک نقطه، دو خط

۳.۳.۱.۴.۱.۱.۱. کانون، دو مماس



۵۱۴. راه اوّل. محل تلاقی دو مماس را نقطهٔ P می‌نامیم. F را به P وصل می‌کنیم که با D زاویهٔ $x\hat{P}F = \alpha$ را بسازد. قرینهٔ F را نسبت به خط D′ نقطهٔ K می‌نامیم. خطی که از K بر Pt عمود شود، خط هادی است.

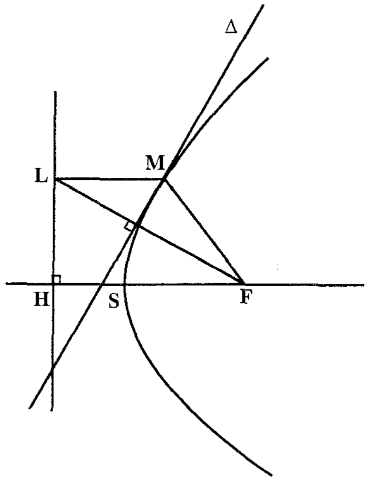
راه دوم. قرینه‌های کانون را نسبت به دوخط مماس به‌دست می‌آوریم. دو نقطه از خط هادی به‌دست می‌آید که با وصل آنها هادی مشخص می‌شود.



راه سوم. سهمی به کانون F و مماس بر خطهای T و T′ را درنظر می‌گیریم. تصویرهای F یعنی P و P′ روی این دو مماس، متعلق به مماس در رأس می‌باشند. از این‌رو سهمی معلوم می‌شود. بعکس، سهمی به کانون F که مماس در رأس آن PP′ باشد، بر خطهای T و T′ مماس است (شکل). برای این که این سهمی وجود داشته باشد، لازم است که P و P′ وجود داشته و PP′ از F نگذرد ولی P و P′ همواره وجود داشته (زیرا T و T′ وجود دارند) و برای این که PP′ از F نگذرد، باید T و T′ موازی نباشند.

۳.۳.۱.۴.۱.۱.۲. کانون، محور، یک مماس

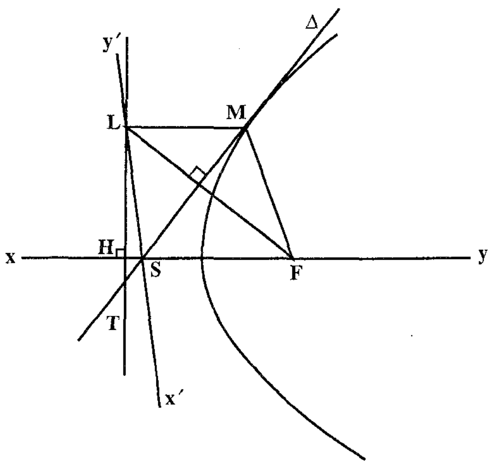
۵۱۵. راه اول. F را کانون، Δ را خط مماس و Fx را محور سهمی می‌گیریم. می‌دانیم که قرینهٔ کانون F نسبت به خط مماس Δ ، روی خط هادی سهمی قرار دارد. بنابراین قرینهٔ کانون F نسبت به خط مماس Δ را به‌دست آورده، L می‌نامیم. از L خط LH را عمود بر محور سهمی رسم می‌کنیم. این خط هادی سهمی و $FH = P$ پارامتر سهمی است. از آن‌جا سهمی مشخص می‌شود.



راه دوم. تصویر کانون F روی خط مماس را به دست می‌آوریم و H می‌نامیم. از H عمودی بر محور Fx فرود می‌آوریم تا آن را در S رأس سهمی قطع کند. از آن‌جا سهمی مشخص می‌شود.

۳.۳.۱.۴.۱.۱.۳. نقطه تماس، محور، یک مماس

۵۱۶. راه اول. Δ را خط مماس، M را نقطهٔ تماس آن با سهمی و خط xy را محور سهمی درنظر می‌گیریم. می‌دانیم که قرینهٔ کانون نسبت به هر خط مماس بر سهمی روی خط هادی سهمی است و چون کانون F روی محور سهمی یعنی xy واقع است، پس قرینهٔ خط xy نسبت به خط مماس Δ از نقطهٔ L می‌گذرد. از طرفی ML موازی محور سهمی است، پس برای رسم سهمی، قرینهٔ خط xy نسبت به خط Δ را به‌دست آورده، x′y′ می‌نامیم و از M خطی موازی xy رسم می‌کنیم

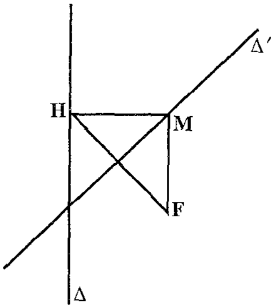


تا $x'y'$ را در نقطهٔ L قطع کند. از L عمودی بر Δ رسم می‌کنیم تا xy را در نقطهٔ F کانون سهمی قطع کند. خط LH که از L عمود بر xy رسم می‌شود، خط هادی سهمی است. با معلوم بودن کانون F و خط هادی، سهمی مشخص است.

راه دوم. نقطهٔ برخورد خط مماس Δ با محور سهمی را T می‌نامیم. تصویر نقطهٔ تماس M روی محور سهمی را به دست آورده، H می‌نامیم. TH تحت مماس سهمی است و وسط آن نقطهٔ S رأس سهمی است. با مشخص شدن S و F ، $SF = \frac{P}{۲}$ و از آن‌جا پارامتر سهمی به‌دست می‌آید و سهمی مشخص می‌شود.

۴.۱.۱.۴.۱.۳.۳. نقطه تماس، هادی، یک مماس

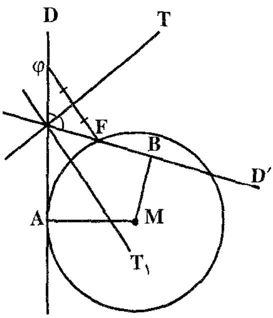
۵۱۷. راه اول. اگر Δ خط هادی و T خط مماس و M نقطهٔ تماس باشد، دایره‌ای به مرکز M و مماس بر D رسم می‌کنیم. اگر K نقطهٔ تماس دایرهٔ (M) با Δ باشد، قرینهٔ K نسبت به T، کانون سهمی است.



راه دوم. فرض می‌کنیم Δ' خط مماس و M نقطهٔ تماس و Δ خط هادی سهمی باشد. از M عمود MH را بر خط هادی رسم می‌کنیم از H عمودی بر D رسم کرده و به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا F به‌دست آید.

۵.۱.۱.۴.۱.۳.۳. یک نقطه ، هادی، یک مماس

۵۱۸. فرض کنیم یک سهمی به هادی D و گذرنده بر نقطهٔ M و مماس بر T باشد. باید کانون F این سهمی را مشخص کرد. φ قرینهٔ F نسبت به T روی هادی است، این نقطه متعلق به D' قرینهٔ D نسبت به T می‌باشد (شکل). از طرف دیگر چون M متساوی‌الفاصله از کانون و هادی است. F روی دایرهٔ (M) به مرکز M و مماس بر D می‌باشد.

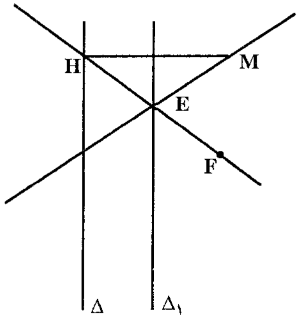


خلاصه. کانون محل تقاطع D' و دایرهٔ (M) می‌باشد.

بحث. اگر D' دایره را در دو نقطه و یا یک نقطه و یا قطع نکند، مسأله دارای دو جواب و یا یک جواب و یا جواب ندارد.

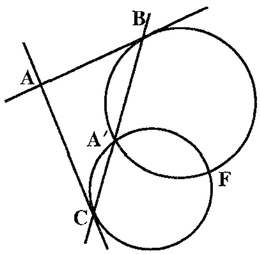
۳.۳.۱.۴.۱.۱.۶. یک نقطهٔ تماس ، دو مماس

۵۱۹. فرض می‌کنیم D خط مماس و Δ_1 مماس در رأس باشد. محل تلاقی D و Δ_1 را E می‌نامیم (این نقطه تصویر کانون F روی خط مماس است) از E خطی بر D عمود می‌کنیم کانون F روی این خط است از نقطهٔ تماس (M) خطی بر Δ_1 عمود می‌کنیم تا امتداد این خط را در H قطع کند. HE را به اندازهٔ خود امتداد می‌دهیم تا F به‌دست آید. از H به موازات Δ_1 رسم می‌کنیم. این خط هادی سهمی است.



۳.۳.۱.۴.۱.۲. یک نقطه، سه خط

۳.۳.۱.۴.۱.۲.۱. یک نقطهٔ تماس، سه مماس



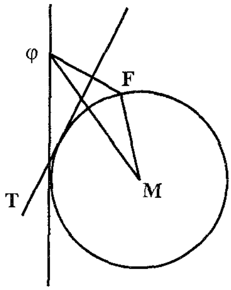
۵۲۰. می‌خواهیم یک سهمی رسم کنیم که بر سه خط که تشکیل مثلث ABC را می‌دهند، مماس باشد و نقطهٔ تماس آن با BC نقطهٔ مفروض ′A باشد. کانون این سهمی روی هریک از دو دایرهٔ گذرنده بر ′A و یکی مماس بر AB در B و دیگری مماس بر AC در C قرار گرفته است. بنابراین، F، دومین نقطهٔ برخورد این دو دایره می‌باشد. مماس در رأس، خط واصل پای تصویرهای F روی ضلعهای مثلث ABC می‌باشد (شکل).

باید توجه داشت که F متعلق به دایرهٔ محیطی این مثلث نیز می‌باشد. مسأله همواره دارای یک جواب و فقط یک جواب است. چون دو دایره‌ای که ما رسم می‌کنیم دارای یک نقطهٔ مشترک ′A می‌باشند. از طرف دیگر آنها در این نقطه نمی‌توانند مماس باشند (زیرا اگر آنها در ′A بر هم مماس باشند، AB و AC موازی می‌شوند و این خلاف فرض است)

درنتیجه این دو دایره همواره در نقطهٔ دوم F متقاطعند.

۲.۴.۱.۳.۳. دو نقطه، یک یا چند خط

۱.۲.۴.۱.۳.۳. دو نقطه، یک خط



۱.۱.۲.۴.۱.۳.۳. کانون، یک نقطه، یک مماس

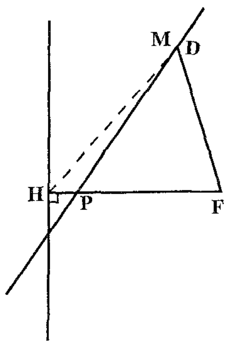
۵۲۱. فرض کنیم که یک سهمی به کانون F و مماس بر T و گذرنده بر نقطهٔ M باشد. باید هادی این سهمی را مشخص کنیم: φ قرینهٔ F نسبت به T روی هادی است. از طرف دیگر M متساوی‌الفاصله از F و این خط می‌باشد (هادی بر دایرهٔ به مرکز M و به شعاع MF مماس است)، پس خطی که از φ بر دایرهٔ به مرکز M و به شعاع FM مماس شود، هادی این سهمی است.

بحث. مسأله وقتی دو جواب دارد که $M\varphi > MF$ ، یعنی وقتی که M و F در یک طرف T قرار داشته باشند. وقتی یک جواب دارد که M روی T و وقتی غیر ممکن است که M و F در طرفین خط T قرار داشته باشند (شکل).

۲.۱.۲.۴.۱.۳.۳. کانون، یک نقطهٔ تماس، یک مماس

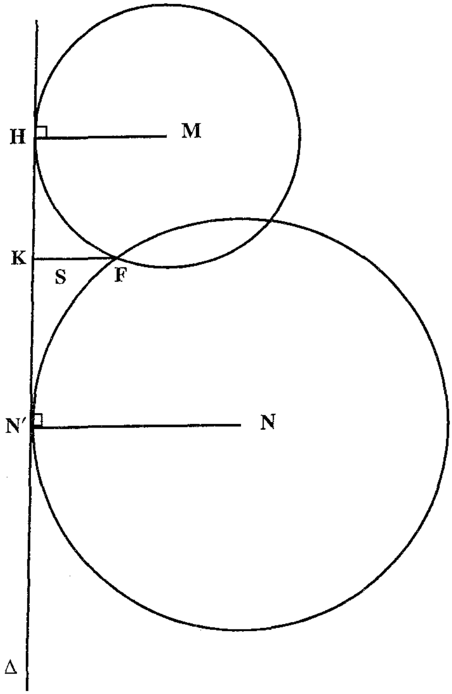
۵۲۲. راه اوّل. اگر M نقطه تماس و T خط مماس باشد، MF را رسم کرده و قرینهٔ آن را نسبت به T به‌دست می‌آوریم به قسمی که $MF = MF_1$ باشد. از F_1 خطی بر MF_1 عمود می‌کنیم تا هادی سهمی رسم شود.

راه دوم. فرض می‌کنیم D خط مماس و M نقطهٔ تماس باشد. از F عمودی بر Δ رسم می‌کنیم. دایره‌ای به مرکز M و به شعاع MF می‌زنیم تا امتداد PF را در H قطع کند (بحث کنید). خطی که از H بر MH عمود شود، خط هادی است.



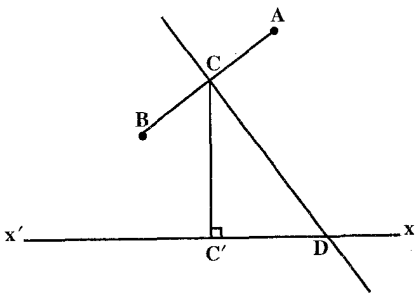
۳.۱.۲.۴.۱.۳.۳. دو نقطه، هادی

۵۲۳. از نقطه‌های M و N عمودهایی بر خط هادی Δ رسم می‌کنیم. دو دایره به مرکز M و N و به شعاعهای MH و 'NN رسم می‌کنیم تا همدیگر را در F قطع کنند (بحث کنید). FK را بر Δ عمود کرده، وسط FK رأس سهمی است.



۴.۱.۲.۴.۱.۳.۳. دو نقطه، محور

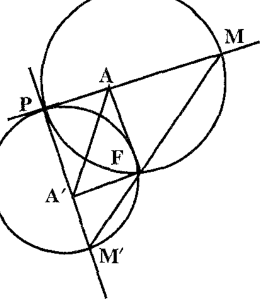
۵۲۴. از این ویژگی استفاده کنید که اگر از نقطهٔ C وسط پاره‌خط AB عمود 'CC را بر محور سهمی فرود آوریم و عمودمنصف پاره‌خط AB را رسم کنیم تا محور سهمی را در نقطهٔ D قطع کند، پاره‌خط C'D مساوی پارامتر سهمی است.



۳.۳.۱.۴.۲.۲. دو نقطه، دو خط

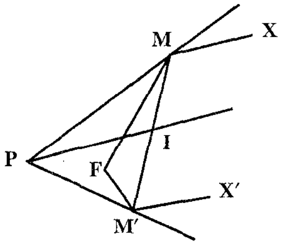
۳.۳.۱.۴.۲.۲.۱. دو نقطهٔ تماس، دو خط مماس

۵۲۵. راه اول. مراد رسم یک سهمی مماس بر خطهای PM و PM' در M و M' است. همان‌طوری که می‌دانیم، کانون F روی دایرهٔ گذرنده بر M و مماس بر PM' در P و روی دایرهٔ گذرنده بر M' و مماس بر PM در P قرار دارد.



(الف)

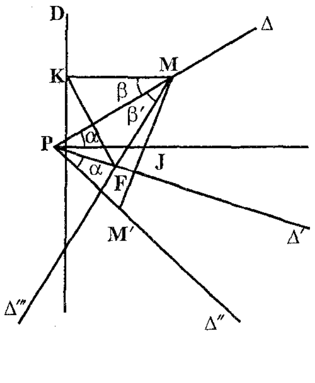
این دو دایره که دارای نقطهٔ مشترک P می‌باشند، یکدیگر را همواره در نقطهٔ دوم، F، قطع می‌کنند و مسأله همواره دارای یک جواب و فقط یک جواب است. این سهمی به‌وسیلهٔ کانونش F و مماس در رأسش که خط واصل بین A و A' پای تصویرهای F روی این دو مماس می‌باشد، مشخص می‌گردد (شکل الف). کانون F را می‌توان طبق روش زیر نیز تعیین نمود:



(ب)

خط PI که از وسط MM' می‌گذرد، موازی با محور است خطهای MX و $M'X'$ را موازی PI رسم می‌کنیم. F فصل مشترک قرینه‌های MF و $M'F$ خطهای MP و $M'P$ نسبت به MX و $M'X'$ می‌باشد (شکل ب).

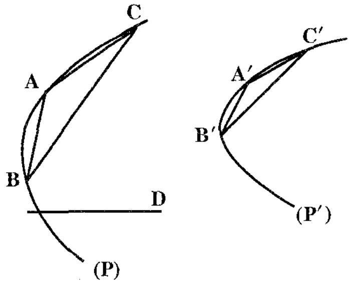
راه دوم. اگر Δ و Δ' دو خط مماس و M و M' نقطه‌های تماس باشند و P نقطهٔ برخورد Δ و Δ' فرض شود، P را به J وسط MM' وصل می‌کنیم و Δ'' را چنان می‌کشیم که $\alpha = \alpha'$ شود. به‌موجب قضیهٔ پونسله، کانون F روی Δ'' واقع است. از M خطی به موازات PJ رسم می‌کنیم و Δ''' را چنان می‌کشیم که $\beta = \beta'$ شود. کانون F روی Δ''' نیز قرار دارد، پس F در محل تلاقی Δ'' و Δ''' است. K قرینهٔ F نسبت به Δ روی خط هادی است. از K خطی عمود بر PJ رسم می‌کنیم، خط هادی نیز معین می‌شود.



۳.۴.۱.۳.۳. سه نقطه، یک یا چند خط

۳.۴.۱.۳.۳.۱. سه نقطه، یک خط

۳.۴.۱.۳.۳.۱.۱. سه نقطه، محور

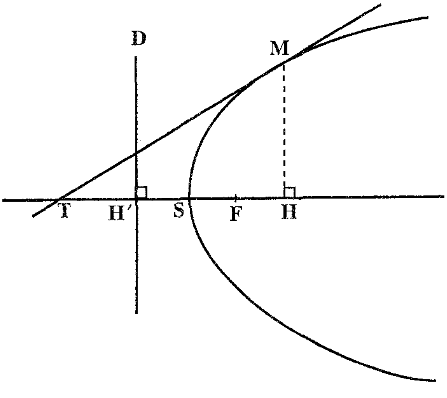


۵۲۶. با فرض این که مسأله حل شده و سهمی (P) گذرنده بر A، B و C به محور موازی D باشد، سهمی غیر مشخص (P′) را که محورش موازی با D باشد، رسم نموده در (P′)، مثلث ABC را که ضلعهایش موازی ABC باشد، محاط می‌کنیم.

(P) و (P′) متجانسند و در این تجانس متناظر ABC، مثلثی است که ضلعهایش موازی ضلعهای ABC و محاط در (P′) باشد ولی چنین مثلثی وجودش منحصر به‌فرد است و A′B′C′ می‌باشند. رأسهای آن را می‌توان طبق ساختمان نشان داده شده به‌دست آورد.

اگر ما سهمی (P′) را طوری بنا کنیم که محورش موازی با D باشد و در آن مثلث A′B′C′ را که ضلعهایش موازی ABC است، محاط کنیم. ABC و A′B′C′ متجانسند. در این تجانس سهمی (P) مطلوب، متناظر (P′) است.

۳.۳.۱.۵. نقطه؛ پارامتر؛ تحت مماس



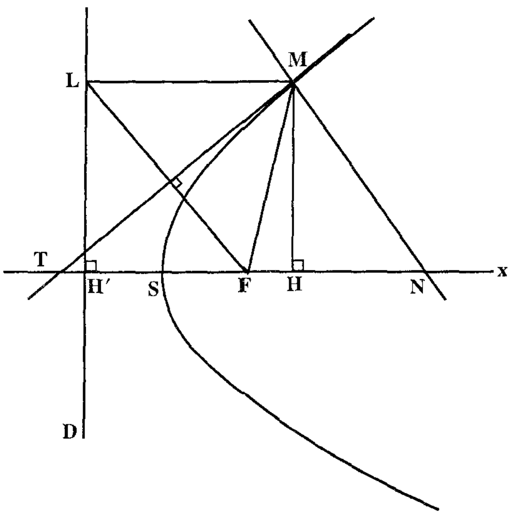
۵۲۷. مسأله را حل شده و سهمی به کانون F و هادی D را جواب مسأله می‌گیریم. تصویر نقطهٔ M روی محور نقطهٔ H داده شده است و HT تحت مماس سهمی نیز معلوم است. می‌دانیم که رأس سهمی وسط تحت مماس نظیر هر نقطه از سهمی است. بنابراین برای حل مسأله روی خطی که از نقطهٔ H می‌گذرد، پاره‌خط HT

را مساوی تحت مماس داده شده رسم می‌کنیم. وسط HT نقطهٔ S رأس سهمی است. در دو طرف رأس پاره‌خطهای $SF = SH = \frac{P}{r}$ را جدا می‌کنیم. کانون سهمی و پای‌خط هادی آن مشخص می‌شود. از H خط D را عمود بر محور سهمی رسم می‌کنیم. این خط هادی سهمی است. با معلوم بودن کانون و خط هادی سهمی مشخص است.

۶.۱.۳.۳. خط؛ پارامتر؛ تحت مماس، تحت قائم

۱.۶.۱.۳.۳. محور، خط قائم، پارامتر

۵۲۸. مسأله را حل شده می‌گیریم. MN را خط قائم Fx را محور سهمی و P را پارامتر سهمی می‌گیریم. می‌دانیم که اگر N نقطهٔ برخورد خط قائم بر سهمی با محور سهمی باشد و از M عمود MH را بر Fx رسم کنیم، $HN = P$ پارامتر سهمی است. بنابراین برای حل مسأله روی Nx پاره‌خط NH را مساوی پارامتر سهمی جدا می‌کنیم. از نقطهٔ H عمودی بر HN اخراج می‌کنیم تا خط قائم را در نقطهٔ M پای قائم قطع کند. از M عمودی بر MN اخراج می‌کنیم تا محور سهمی را در نقطهٔ T قطع کند. MT خط مماس و HT تحت مماس سهمی و نقطهٔ S وسط پاره‌خط TH رأس سهمی است. با مشخص شدن رأس سهمی و پارامتر آن، سهمی قابل رسم است.



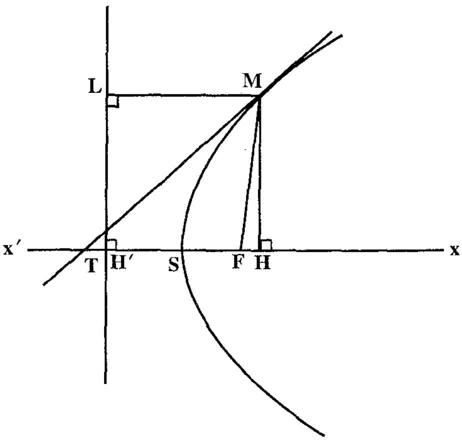
۳.۳.۱.۷. نقطه؛ خط؛ پارامتر؛ تحت مماس، تحت قائم

۳.۳.۱.۷.۱. کانون، محور، پارامتر

۵۲۹. روی محور سهمی از نقطهٔ F طول FH را برابر پارامتر سهمی جدا می‌کنیم و از H خط هادی را بر محور عمود می‌کنیم. سهمی با کانون و هادی آن مشخص می‌شود.

۳.۳.۱.۷.۲. نقطه، محور، تحت مماس

۵۳۰. خط x′x را محور، M را یک نقطه از سهمی و l را اندازهٔ تحت مماس سهمی فرض می‌کنیم. ML را بر هادی و MH را بر محور سهمی عمود می‌کنیم. می‌دانیم که رأس سهمی وسط تحت مماس سهمی واقع است.

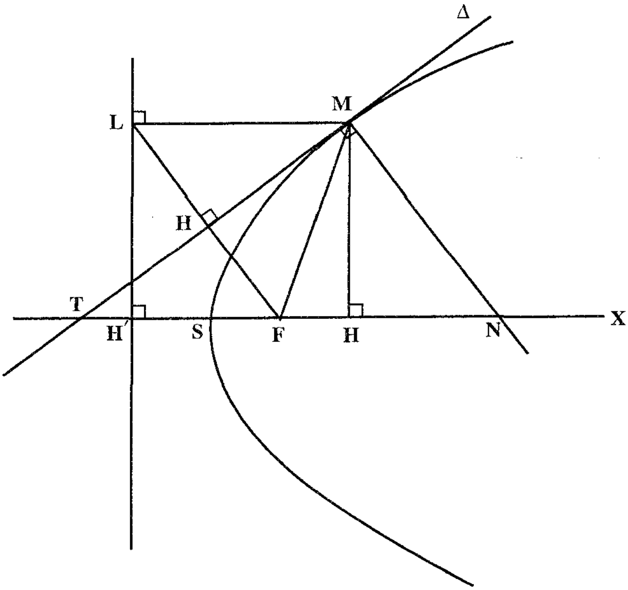


بنابراین برای حل مسأله پاره‌خط HT را مساوی با اندازهٔ تحت مماس داده شده l جدا می‌کنیم. نقطهٔ S وسط HT رأس سهمی و خط MT خط مماس بر سهمی در نقطهٔ M است. از طرفی می‌دانیم که قرینهٔ محور x′x نسبت به خط مماس MT از نقطهٔ L می‌گذرد. همچنین خطی که از M موازی محور سهمی رسم می‌شود، از نقطهٔ L می‌گذرد. بنابراین نقطهٔ L مشخص می‌شود. از L عمود LH را بر x′x یعنی محور سهمی رسم می‌کنیم. این خط هادی سهمی است. با مشخص شدن رأس و هادی سهمی، سهمی مشخص است.

۳.۳.۱.۷.۳. یک نقطهٔ تماس، یک مماس، تحت مماس

۵۳۱. مسأله را حل شده و سهمی به کانون F و هادی D را جواب مسأله می‌گیریم. خط مماس بر سهمی در M که محور سهمی را در T قطع کرده است و قائم MN را درنظر می‌گیریم. با توجه به این که $FH = P$ پارامتر سهمی و HT تحت مماس سهمی معلوم‌اند و $T\hat{M}N = ۹۰^\circ$ است. مثلث قائم‌الزاویهٔ $T\hat{M}N$ با معلوم بودن دو قطعهٔ وتر HN و HT و نقطهٔ H پای ارتفاع وارد بر وتر قابل رسم است.

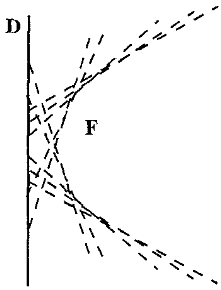
بنابراین برای حل مسأله، مثلث قائم‌الزاویهٔ TMN را رسم می‌کنیم (پاره‌خط TN را به طول $TH + HN$ = تحت قائم + تحت مماس سهمی رسم می‌کنیم. به قطر TN دایره‌ای می‌زنیم تا عمود اخراج شده از H بر TN را در M قطع کند. از M به T و N وصل می‌کنیم). از رأس این مثلث طولهای MT و MN به‌دست می‌آید. با معلوم بودن این دو مقدار مثلث قائم‌الزاویهٔ MNT را به رأس قائم رسم می‌کنیم. سپس نقطهٔ H تصویر M روی NT را به‌دست می‌آوریم. وسط پاره‌خط HT نقطهٔ S رأس سهمی است. پاره‌خطهای $SF = SH' = \frac{P}{۲}$ را جدا می‌کنیم کانون و پای هادی سهمی به‌دست می‌آید از H' عمودی بر $H'F$ اخراج می‌کنیم خط هادی سهمی مشخص می‌شود.



۲.۳.۳. رسم سهمی با تازدن کاغذ

۵۳۲. خط D را به‌عنوان خط هادی سهمی رسم کنید. نقطهٔ F کانون سهمی را خارج از خط D مشخص کنید. F را روی خط هادی بیندازید و کاغذ را تابزنید. این کار را ۲۰ تا ۳۰ بار با حرکت دادن F روی خط D تکرار کنید و هر بار روی کاغذ رد بیندازید. همهٔ این خطها بر سهمی مماس هستند. به این مماسها پوش منحنی می‌گوییم. همین خطهای

-متعدد، باعث احساس انحنای سهمی می‌شوند. شعاع حامل پاره‌خطی است که یک نقطهٔ منحنی را به کانون آن وصل می‌کند. مماس بر سهمی نیمساز زاویهٔ بین شعاع حامل نقطهٔ تماس و خط عمودی است که از آن نقطه بر خط هادی رسم می‌شود. ما برای رسم سهمی از این خاصیت استفاده کرده‌ایم.



فهرست منابع

۱. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد اول. هاورد. و. ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۲. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد دوم. هاورد. و. ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.
۳. آمادگی برای المپیادهای ریاضی. واسیلیف ـ گوتن ماخر ـ رابرت توم. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۴. آمادگی برای شرکت در المپیاد ریاضی ایران. هوشنگ شرقی. نشر علوم پایه.
۵. از اِردوش تا کی‌یِفْ. راس هانسبرگر. ترجمهٔ علی ساوجی. انتشارات فاطمی.
۶. المپیادهای بین‌المللی ریاضی. جلد اول. ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ناس.، نشرنام.
۷. المپیادهای بین‌المللی ریاضی. جلد دوم. مورای. اس. کلامکین. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ناس. نشر نام.
۸. المپیادهای ریاضی ایران. دکتر عبادا.. محمودیان. انتشارات دانشگاه شریف.
۹. المپیادهای ریاضی بلژیک. انجمن استادان ریاضی بلژیک. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات فاطمی.
۱۰. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد اول. ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۱۱. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد دوم. مورای.اس. کلامکین. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۱۲. المپیادهای ریاضی لنینگراد. د. فومین. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات انیشتن.
۱۳. المپیادهای ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات مشعل دانشجو.
۱۴. بازآموزی و بازشناخت هندسه. هـ. س.م. کوکس تیر ـ س.ل. گریتزر. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات مدرسه.
۱۵. برگزیدهٔ مسائل هندسه. گروهی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ عادل ارشقی. مؤسسهٔ خدمات فرهنگی رسام.
۱۶. پانصد مسألهٔ ریاضی پیکارجو. ادوارد ج. باربو ـ ماری س. کلامکین ـ ویلیام اُ. ج. موزر. ترجمهٔ مهران اخباریفر. انتشارات فاطمی.
۱۷. تاریخ ریاضیات. جلد اول. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۸. تاریخ ریاضیات. جلد دوم. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۹. تاریخ هندسه. پی‌یر مارشال. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری، مؤسسهٔ مطبوعاتی علمی.
۲۰. تبدیلهای هندسی. جلد اول. ای. م. یاگلم. ترجمهٔ اسدا... کارشناس ـ عمید رسولیان. مرکز نشر دانشگاهی.
۲۱. تبدیلهای هندسی. جلد دوم. ای.م.یاگلم. ترجمهٔ محمد باقری. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۲۲. تبدیلهای هندسی. جلد سوم. ای.م.یاگلم. ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۲۳. ترسیمهای هندسی. تألیف احمد فیروزنیا. نشر گزاره.
۲۴. تئوری مقدماتی اعداد. جلدهای اول و دوم. دکتر غلامحسین مصاحب. انتشارات دهخدا.
۲۵. چگونه مسأله حل کنیم؟ جورج پولیا. ترجمهٔ احمد آرام. مؤسسهٔ مطبوعاتی کیهان.
۲۶. چند قضیهٔ هندسه. نگارش دکتر احمد شرف‌الدین.

۲۷. ۴۵۰ مسألهٔ ریاضی با حل. محمدحسین پرتوی ـ حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۸. حل‌المسائل هندسهٔ جدید. حسن ملایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۹. حل‌المسائل هندسه و مخروطات جدید. محمدحسین پرتوی ـ محمدعلی پرتوی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۳۰. حل مسائل ریاضیات. محمدعلی واعظیان. ناشر محمدحسن علمی.
۳۱. حل مسائل متمم هندسه. دکتر کارونه. ترجمهٔ محمدباقر ازگمی ـ احسان‌ا... قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۳۲. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان چهارم ریاضی. دکتر حسینعلی شاهورانی. انتشارات کاویان.
۳۳. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان ششم ریاضی و داوطلبان متفرقه. عباس ذوالقدر.
۳۴. حل مسائل هندسه برای سال چهارم دبیرستان. محمدباقر ازگمی ـ غلامرضا بهنیا ـ باقر امامی ـ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۳۵. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی. داریوش شاهین. انتشارات جاویدان.
۳۶. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی و کنکور دانشکده‌ها. غلامعلی ریاضی ـ علی حسن‌زاده ـ محمدحسین پرتوی ـ محمدعابدی. مؤسسهٔ مطبوعاتی شرقی.
۳۷. حل مسائل هندسه و مخروطات برای سال ششم ریاضی و داوطلبان کنکور. محمدباقر ازگمی ـ پرویز شهریاری ـ غلامرضا بهنیا ـ باقر امامی ـ علی‌اصغر شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۳۸. حل مسأله از طریق مسأله. لورن سی. لارسن. ترجمهٔ علی ساوجی. انتشارات فاطمی.
۳۹. خلاصهٔ زندگینامهٔ علمی دانشمندان. بنیاد دانشنامهٔ بزرگ فارسی. انتشارات علمی و فرهنگی.
۴۰. خلاقیت ریاضی. جورج پولیا. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۴۱. خطهای راست و منحنی‌ها. ن. ب. واسی‌لی‌یو ـ و. ل. گوتن‌ماخر. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات تهران.
۴۲. دایره‌ها. دَن پِدو. ترجمهٔ مهدی مدغم. انتشارات فاطمی.
۴۳. درپی فیثاغورس. شه‌پان النسکی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات امیرکبیر.
۴۴. دورهٔ حل‌المسائل هندسه برای دبیرستان. جلدهای اول و دوم. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری. شرکت سهامی چاپ و انتشارات کتب ایران.
۴۵. دورهٔ کامل خودآموز هندسهٔ علوم تجربی. محمدهاشم رستمی. نشر گزاره.
۴۶. دورهٔ ماهنامهٔ ریاضیات. دکتر یحیی تابش.
۴۷. دورهٔ مجلهٔ ریاضی آشتی با ریاضیات و آشنایی با ریاضیات. پرویز شهریاری.
۴۸. دورهٔ مجلهٔ ریاضی برهان. انتشارات مدرسه.
۴۹. دورهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. وزارت آموزش و پرورش.
۵۰. دورهٔ مجلهٔ ریاضی یکان. عبدالحسین مصحفی.
۵۱. روش حل مسائل هندسه. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری. بنگاه مطبوعاتی فریدون علمی.
۵۲. ریاضیات زنده. ی. پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر میترا.
۵۳. ریاضیدانان نامی. دکتر اریک تمپل بل. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری. انتشارات امیرکبیر.
۵۴. سرگرمیهای هندسه. ی پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات خوارزمی.
۵۵. فنون مسأله حل کردن. استیون ج. کرانتس. ترجمهٔ مهران اخباریفر. انتشارات فاطمی.
۵۶. قضایا و مسائل هندسه. غلامرضا یاسی‌پور.
۵۷. گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی. جی. ال. برگرن. ترجمهٔ دکترمحمدقاسم وحیدی اصل ـ دکتر علیرضا جمالی. انتشارات فاطمی.

۵۸. مباحث و مسائل المپیاد ریاضی. فرشید الموتی ـ مازیار رامین راد ـ ... انتشارات پیشدانشگاهیان.
۵۹. محاسبه‌های برداری. پرویز شهریاری.
۶۰. مجموعهٔ مقالات و مسائل ریاضی. غلامرضا یاسی‌پور.
۶۱. مسأله‌های المپیادهای ریاضی امریکا. مورای.اس. کلامکین. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. نشربردار.
۶۲. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در شوروی سابق. واسیلیف ـ یه‌گوروف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشرتوسعه.
۶۳. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف. جمعی از ریاضیدانان شوروی سابق. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۶۴. مسأله‌های تاریخی ریاضیات. و. د. چیستیاکوف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر نی.
۶۵. مسأله‌های ریاضی آسان ولی .... گروهی از ریاضیدانان شوروی سابق. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر گستره.
۶۶. مسأله‌های دشوار ریاضی. کنستانتین شاختو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۶۷. مسائل ریاضیات مقدماتی. ای. خ. لیواشینسکی. ترجمهٔ غلامرضا بهنیا. انتشارات احمدعلمی.
۶۸. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد اول. چارلز.ت. سالکیند. ترجمهٔ سیدحسین جوادپور ـ محمد قزل ایاغ. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۶۹. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد دوم. چارلز. ت. سالکیند. ترجمهٔ علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۰. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد سوم. چارلز.ت. سالکیند. ارل. ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۱. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد چهارم. آرتینو گاگلیون ـ شل. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۲. مسائل مسابقات ریاضی (کنکورهای ریاضی شوروی سابق). و. س. کوشچنگو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۷۳. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوزف کورشاک. ترجمهٔ دکتر سعید فارابی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۴. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوزف کورشاک. ترجمهٔ محمدمهدی ابراهیمی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۵. مسائل و تمرینات لگاریتم و ریاضیات. احسانا... قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۷۶. مسائل هندسه و حل آنها برای داوطلبان کنکور دانشکده‌ها. محمدباقر ازگمی ـ پرویز شهریاری. مؤسسه مطبوعاتی احمد علمی.
۷۷. مسأله‌هایی در هندسهٔ مسطحه. ای.ف . شاریگین. ترجمهٔ ارشک حمیدی. انتشارات مبتکران.
۷۸. مکانهای هندسی. جلد اول. محمدهاشم رستمی. انتشارات مدرسه.
۷۹. مهمترین مسأله‌ها و قضیه‌های ریاضی. شکلیارسکی. چنتسوف یاگلوم. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات مجید. انتشارات فردوس.
۸۰. نابرابریها. پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۸۱. نابرابریهای هندسی. نیکولاس د. کازارینوف. ترجمهٔ دکتر محمدحسن بیژن زاده. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۸۲. نخستین گامها در المپیادهای ریاضی. جلدهای ۱،۲،۳و۴. ترجمه و تدوین ابراهیم دارابی. انتشارات پیشروان. انتشارات مبتکران.
۸۳. نه مقالهٔ هندسه. ابوالقاسم قربانی. دکترحسن صفاری.

۸۴. هندسهٔ ایرانی. ابوالوفا محمدبن محمد البوزجانی. ترجمهٔ سیدعلیرضا جذبی. انتشارات سروش.
۸۵. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی. ماروین جی. گرینبرگ. ترجمهٔ م. هـ.شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۸۶. هندسه برای سال ششم دبیرستانها (مجموعهٔ علوم). محمدباقر ازگمی. باقر امامی. غلامرضا بهنیا ـ پرویز شهریاری ـ علی اصغر شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۸۷. هندسه تحلیلی. حسین غیور. محسن غیور. انتشارات صفی علیشاه.
۸۸. هندسه‌های جدید. جیمز. ار. اسمارت. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. انتشارات مدرسه.
۸۹. هندسه در گذشته و حال. ترجمه و تألیف پرویز شهریاری. از مجموعهٔ کتابهای سیمرغ.
۹۰. هندسهٔ دلپذیر. دکتر احمد شرف‌الدین. انتشارات مدرسه.
۹۱. هندسهٔ دوایر. دکتر محسن هشترودی. انتشارات مجلهٔ ریاضی یکان.
۹۲. هندسهٔ دورهٔ کاردانی تربیت معلم رشتهٔ علوم ریاضی. صفر باهمت شیروانه ده ـ حسین غیور ـ حسین‌دوستی. شرکت چاپ و نشر ایران.
۹۳. هندسهٔ ۱ و ۲ نظام جدید آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
۹۴. هندسهٔ سال چهارم دبیرستان. ابوالقاسم قربانی. دکترحسن صفاری.
۹۵. هندسهٔ سالهای اول، دوم، سوم و چهارم دبیرستان نظام قدیم آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
۹۶. هندسهٔ مسطحه. مقدمه‌ای بر هندسهٔ نوین مثلث و دایره. ناتان آلتشیلرکورت. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۹۷. هندسهٔ مقدماتی از دیدگاه پیشرفته. ادوین. ا. موئیز. ترجمهٔ دکتر امیر خسروی ـ محمود نصیری. انتشارات مبتکران.
۹۸. هندسهٔ موئیز ـ دانز. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۹۹. هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستان. وزارت آموزش و پرورش.

100. EXERCICES DE GEOMETRIE PAR.F.G.M.
101. EXERCICES DE GEOMETRIE PAR.TH. CARONNET.
102. EXERCICES DE GEOMETRIE MODERNE (TRANSVERSALES) . PAR.G.PAPELIER.
103. EXERCICES DE GEOMETRIE MODERNE (POLES, POLAIRES, PLANS POLATERES). PAR.G.PAPELIER.
104. GEOMETRIE A HIGHSCHOOL COURSE. SERGELAN GE. GENE MURROW.
105. GIANT COLOR BOOK OF MATHEMATICS. BY IRVING ADLER.
106. GUIDES PRATIQUES BORDAS.
II. GEOMETRIE PAR ROBERT ARDRE´.
107. JACOBS HAROLD. R. GEOMETRY.
108. LES NOMBRES ET LEURS MYSTERES PAR ANDRE´ WARUSFEL.
109. MATHEMATICS AROUND US.
110. MEMENTO DE MATHEMATIQUES USUELLES PAR.A.PONT.
111.PLANE GEOMETRY. WITH SPACE CONCEPTS. A.M. WELCHONS.W.R. KRICKENBERGER. HEIEN.R.PEARSON.
112. PRECIS DE GEOMETRIE PAR ANDRE´ VIEILLEFOND. P.TURMEL.
113. PRENTICE HALL GEOMETRY BY ROBERT KALINE, MARY KAY CORBITT.
114. PRINCIPLES AND PROBLEMS OF PLANE GEOMETRY BY BARNETT RICH.
115. RESOLUTION DES PROBLEMES ELEMENTAIRES DE GEOMETRIE PAR.E.J.HONNET.
116. THE COLLEGE BOARDS EXAMINATION BY. MARTIN MC. DONOUGH. ALVIN .J. HANSEN.