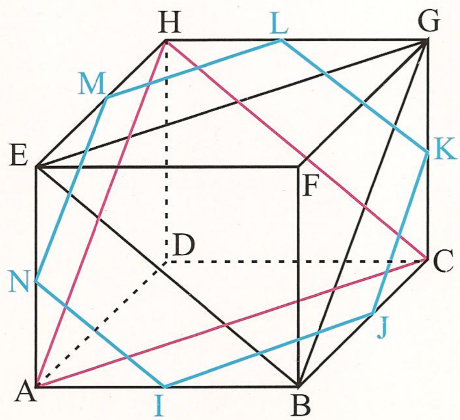
دایرة المعارف هندسه

۱۵

هندسهٔ فضایی

(چند وجهی‌های منتظم ، منشور ، متوازی السطوح ، مکعب مستطیل ، مکعب و هرم)



مؤلّف : محمد هاشم رستمی

دایرةالمعارف هندسه

«جلد پانزدهم»

هندسهٔ فضایی

(چندوجهی‌های منتظم، منشور، متوازی‌السطوح، مکعب مستطیل و مکعب)

مؤلّف: محمّدهاشم رستمی

فهرست

موضوع	صفحه	
پیشگفتار	۱۵	
	صورت	حل
بخش ۱. چندوجهیهای منتظم	۴۸_۲۳	۲۴۰_۱۶۹
۱.۱. تعریف و قضیه	۲۷	۱۶۹
۲.۱. چهاروجهی منتظم	۳۱	۱۹۰
۱.۲.۱. تعریف و قضیه	۳۱	۱۹۰
۲.۲.۱. نقطه، خط، صفحه	۳۱	۱۹۲
۱.۲.۲.۱. خط	۳۱	۱۹۲
۱.۱.۲.۲.۱. خطها بر هم عمودند	۳۱	۱۹۲
۲.۱.۲.۲.۱. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد	۳۱	۱۹۳
۳.۲.۱. زاویه	۳۲	۱۹۳
۱.۳.۲.۱. اندازهٔ زاویه	۳۲	۱۹۳
۴.۲.۱. یال، ارتفاع	۳۲	۱۹۷
۱.۴.۲.۱. یال	۳۲	۱۹۷
۱.۱.۴.۲.۱. اندازهٔ یال	۳۲	۱۹۷
۲.۴.۲.۱. ارتفاع	۳۲	۱۹۸
۱.۲.۴.۲.۱. اندازهٔ ارتفاع	۳۲	۱۹۸
۵.۲.۱. پاره‌خط	۳۳	۲۰۰
۱.۵.۲.۱. اندازهٔ پاره‌خط	۳۳	۲۰۰
۶.۲.۱. شعاع کره	۳۳	۲۰۳
۱.۶.۲.۱. اندازهٔ شعاع کره	۳۳	۲۰۳
۲.۶.۲.۱. رابطهٔ بین شعاعها	۳۴	۲۰۶
۱.۲.۶.۲.۱. رابطهٔ بین شعاعها (برابریها)	۳۴	۲۰۶
۲.۲.۶.۲.۱. رابطهٔ بین شعاعها (نابرابریها)	۳۵	۲۰۷
۷.۲.۱. مساحت	۳۵	۲۰۸
۱.۷.۲.۱. اندازهٔ مساحت	۳۵	۲۰۸
۱.۱.۷.۲.۱. اندازهٔ مساحت جانبی	۳۵	۲۰۸
۲.۱.۷.۲.۱. اندازهٔ مساحت کل	۳۵	۲۰۹
۳.۱.۷.۲.۱. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر	۳۵	۲۰۹
۸.۲.۱. حجم	۳۶	۲۱۱
۱.۸.۲.۱. اندازهٔ حجم	۳۶	۲۱۱
۱.۱.۸.۲.۱. اندازهٔ حجم چهاروجهی	۳۶	۲۱۱
۲.۱.۸.۲.۱. اندازهٔ حجمهای ایجاد شده	۳۶	۲۱۲
۱.۲.۱.۸.۲.۱. اندازهٔ حجم چهاروجهیهای ایجاد شده	۳۶	۲۱۲
۲.۲.۱.۸.۲.۱. اندازهٔ حجم شکلهای دیگر ایجاد شده	۳۶	۲۱۳
۳.۲.۱.۸.۲.۱. اندازهٔ سطح و حجم شکلهای دیگر	۳۷	۲۱۵
۲.۸.۲.۱. نسبت حجمها	۳۷	۲۱۵

موضوع	صفحه	
	صورت	حل
۹.۲.۱. رابطهٔ متری	۳۷	۲۱۶
۱.۹.۲.۱. رابطهٔ متری (برابریها)	۳۷	۲۱۶
۲.۹.۲.۱. رابطهٔ متری (نابرابریها)	۳۷	۲۱۷
۱۰.۲.۱. مکان هندسی	۳۸	۲۲۱
۱۱.۲.۱. رسم شکل	۳۸	۲۲۱
۱.۱۱.۲.۱. تعیین نقطه	۳۸	۲۲۱
۲.۱۱.۲.۱. رسم مثلث	۳۸	۲۲۱
۳.۱۱.۲.۱. رسم تصویر	۳۸	۲۲۲
۴.۱۱.۲.۱. رسم چهاروجهی	۳۹	۲۲۲
۱۲.۲.۱. برش، مقطع	۳۹	۲۲۳
۱۳.۲.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۳۹	۲۲۴
۱۴.۲.۱. مسأله‌های ترکیبی	۴۰	۲۲۴
۳.۱. شش‌وجهی منتظم	۴۰	-
۴.۱. هشت‌وجهی منتظم	۴۱	۲۳۰
۱.۴.۱. تعریف و قضیه	۴۱	-
۲.۴.۱. نقطه، خط، صفحه	۴۱	۲۳۰
۳.۴.۱. زاویه	۴۱	۲۳۰
۱.۳.۴.۱. اندازهٔ زاویه	۴۱	۲۳۰
۴.۴.۱. یال، ارتفاع	۴۱	۲۳۰
۱.۴.۴.۱. یال	۴۱	۲۳۰
۵.۴.۱. پاره‌خط	۴۲	۲۳۱
۱.۵.۴.۱. اندازهٔ پاره‌خط	۴۲	۲۳۱
۶.۴.۱. شعاع کره	۴۲	۲۳۲
۱.۶.۴.۱. اندازهٔ شعاع کره	۴۲	۲۳۲
۷.۴.۱. مساحت	۴۲	۲۳۲
۱.۷.۴.۱. اندازهٔ مساحت	۴۲	۲۳۲
۸.۴.۱. حجم	۴۲	۲۳۲
۱.۸.۴.۱. اندازهٔ حجم	۴۲	۲۳۲
۱.۱.۸.۴.۱. اندازهٔ حجم هشت‌وجهی منتظم	۴۲	۲۳۲
۲.۱.۸.۴.۱. اندازهٔ حجم شکلهای دیگر	۴۳	۲۳۳
۲.۸.۴.۱. نسبت حجمها	۴۳	۲۳۴
۹.۴.۱. رابطهٔ متری	۴۳	۲۳۵
۵.۱. دوازده‌وجهی منتظم	۴۴	۲۳۵
۱.۵.۱. تعریف و قضیه	۴۴	-
۲.۵.۱. نقطه، خط، صفحه	۴۴	۲۳۵
۳.۵.۱. زاویه	۴۴	۲۳۵
۱.۳.۵.۱. اندازهٔ زاویه	۴۴	۲۳۵
۴.۵.۱. یال، ارتفاع	۴۴	۲۳۶
۵.۵.۱. پاره‌خط	۴۵	۲۳۶

موضوع	صفحه	
	صورت	حل
۱.۱.۵.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط	۴۵	۲۳۶
۶.۵.۱. شعاع کره	۴۵	۲۳۶
۱.۶.۵.۱. اندازهٔ شعاع کره	۴۵	۲۳۶
۷.۵.۱. مساحت	۴۵	۲۳۶
۱.۷.۵.۱. اندازهٔ مساحت	۴۵	۲۳۶
۱.۱.۷.۵.۱. اندازهٔ مساحت کل	۴۵	۲۳۶
۶.۱. بیست‌وجهی منتظم	۴۶	۲۳۸
۱.۶.۱. تعریف و قضیه	۴۶	-
۲.۶.۱. نقطه، خط، صفحه	۴۶	۲۳۸
۳.۶.۱. زاویه	۴۶	۲۳۸
۱.۳.۶.۱. اندازهٔ زاویه	۴۶	۲۳۸
۴.۶.۱. یال، ارتفاع	۴۶	۲۳۸
۱.۴.۶.۱. یال	۴۶	۲۳۸
۵.۶.۱. پاره‌خط	۴۷	۲۳۸
۶.۶.۱. شعاع کره	۴۷	۲۳۹
۱.۶.۶.۱. اندازهٔ شعاع کره	۴۷	۲۳۹
۷.۶.۱. مساحت	۴۷	۲۳۹
۱.۷.۶.۱. اندازهٔ مساحت	۴۷	۲۳۹
۱.۱.۷.۶.۱. اندازهٔ مساحت کل	۴۷	۲۳۹
۸.۶.۱. حجم	۴۷	۲۴۰
۱.۸.۶.۱. اندازهٔ حجم	۴۷	۲۴۰
۲.۸.۶.۱. نسبت حجمها	۴۸	۲۴۰
بخش ۲. منشور	**۸۳ـ۴۹**	**۳۱۱ـ۲۴۱**
۱.۲. تعریف و قضیه	۵۲	۲۴۱
۲.۲. نقطه، خط، صفحه	۵۹	۲۴۵
۱.۲.۲. نقطه	۵۹	۲۴۵
۱.۱.۲.۲. رأس	۵۹	۲۴۵
۲.۱.۲.۲. نقطه‌ها هم‌صفحه‌اند	۵۹	۲۴۵
۲.۲.۲. خط	۶۰	۲۴۶
۱.۲.۲.۲. خطها هم‌صفحه‌اند	۶۰	۲۴۶
۳.۲.۲. صفحه	۶۰	۲۴۶
۱.۳.۲.۲. صفحه‌ها بر هم عمودند	۶۰	۲۴۶
۲.۳.۲.۲. وجه‌ها مساوی‌اند	۶۰	۲۴۶
۴.۲.۲. خط و صفحه	۶۰	۲۴۷
۱.۴.۲.۲. خط عمود بر صفحه است	۶۰	۲۴۷
۲.۴.۲.۲. خط موازی صفحه نیست	۶۰	۲۴۷
۳.۲. زاویه	۶۱	۲۴۸
۱.۳.۲. اندازهٔ زاویه	۶۱	۲۴۸
۱.۱.۳.۲. اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط	۶۱	۲۴۸

موضوع	صفحه	
	صورت	حل
۲.۳.۱.۲. اندازهٔ زاویهٔ بین دو صفحه	۶۱	۲۵۰
۳.۳.۱.۲. اندازهٔ زاویهٔ بین خط و صفحه	۶۱	۲۵۰
۲.۳.۲. زاویهٔ مسطحهٔ فرجه	۶۲	۲۵۴
۱.۲.۳.۲. اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ فرجه	۶۲	۲۵۴
۲.۲.۳.۲. رابطهٔ بین زاویه‌های مسطحهٔ فرجه	۶۲	۲۵۷
۴.۲. یال، ارتفاع، قطر	۶۳	۲۵۹
۱.۴.۲. یال	۶۳	۲۵۹
۱.۱.۴.۲. اندازهٔ یال	۶۳	۲۵۹
۲.۱.۴.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۶۳	۲۶۱
۲.۴.۲. ارتفاع	۶۴	۲۶۲
۱.۲.۴.۲. اندازهٔ ارتفاع	۶۴	۲۶۲
۳.۴.۲. قطر	۶۴	۲۶۳
۵.۲. پاره‌خط	۶۴	۲۶۳
۱.۵.۲. اندازهٔ پاره‌خط	۶۴	۲۶۳
۱.۱.۵.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها	۶۶	۲۶۸
۲.۱.۵.۲. نسبت پاره‌خطها	۶۶	۲۶۹
۶.۲. شعاع کره	۶۷	۲۷۲
۱.۶.۲. اندازهٔ شعاع کره	۶۷	۲۷۲
۷.۲. مساحت	۶۷	۲۷۲
۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت	۶۷	۲۷۲
۱.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت جانبی	۶۷	۲۷۲
۲.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت کل	۶۹	۲۷۴
۳.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت مقطع	۶۹	۲۷۵
۴.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت جانبی و مساحت کل	۶۹	۲۷۶
۵.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت جانبی، مساحت مقطع	۷۰	۲۷۷
۸.۲. حجم	۷۰	۲۷۷
۱.۸.۲. اندازهٔ حجم	۷۰	۲۷۷
۱.۱.۸.۲. اندازهٔ حجم منشور	۷۰	۲۷۷
۲.۱.۸.۲. اندازهٔ حجم شکلهای ایجاد شده	۷۲	۲۸۳
۲.۸.۲. نسبت حجمها	۷۲	۲۸۴
۳.۸.۲. رابطهٔ بین حجمها	۷۳	۲۸۴
۴.۸.۲. اندازهٔ سطح جانبی و حجم منشور	۷۳	۲۸۶
۵.۸.۲. اندازهٔ سطح جانبی، سطح کل و حجم منشور	۷۳	۲۸۶
۹.۲. رابطهٔ متری	۷۴	۲۸۷
۱۰.۲. مکان هندسی	۷۵	۲۹۰
۱۱.۲. رسم	۷۵	۲۹۱
۱.۱۱.۲. رسم صفحه	۷۵	۲۹۱
۱۲.۲. برش، مقطع	۷۶	۲۹۵
۱۳.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش	۷۷	۲۹۹

موضوع	صفحه	
	صورت	حل
۱۴.۲. مسأله‌های ترکیبی	۷۸	۳۰۲
بخش ۳. متوازی‌السطوح	**۱۰۳ـ۸۵**	**۳۶۳ـ۳۱۲**
۱.۳. تعریف و قضیه	۸۸	۳۱۲
۲.۳. نقطه، خط	۹۰	۳۱۴
۱.۲.۳. خط	۹۰	۳۱۴
۱.۱.۲.۳. خطها همرسند	۹۰	۳۱۴
۳.۳. زاویه	۹۰	۳۱۵
۱.۳.۳. اندازهٔ زاویه	۹۰	۳۱۵
۱.۱.۳.۳. اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط	۹۰	۳۱۵
۲.۱.۳.۳. اندازهٔ زاویهٔ بین دو صفحه	۹۰	۳۱۶
۳.۱.۳.۳. اندازهٔ زاویهٔ بین خط و صفحه	۹۱	۳۱۶
۴.۳. یال، ارتفاع، قطر	۹۱	۳۱۷
۱.۴.۳. یال	۹۱	۳۱۷
۱.۱.۴.۳. اندازهٔ یال	۹۱	۳۱۷
۲.۴.۳. ارتفاع	۹۱	۳۱۸
۱.۲.۴.۳. اندازهٔ ارتفاع	۹۱	۳۱۸
۳.۴.۳. قطر	۹۲	۳۱۹
۱.۳.۴.۳. اندازهٔ قطر	۹۲	۳۱۹
۵.۳. پاره‌خط	۹۲	۳۲۰
۱.۵.۳. اندازهٔ پاره‌خط	۹۲	۳۲۰
۲.۵.۳. تساوی پاره‌خطها	۹۳	۳۲۲
۳.۵.۳. نسبت پاره‌خطها	۹۳	۳۲۳
۶.۳. شعاع کره	۹۴	۳۲۶
۱.۶.۳. اندازهٔ شعاع کره	۹۴	۳۲۶
۷.۳. مساحت	۹۴	۳۲۶
۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت	۹۴	۳۲۶
۱.۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت جانبی	۹۴	۳۲۶
۲.۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت کل	۹۴	۳۲۶
۳.۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت تصویر	۹۵	۳۲۷
۲.۷.۳. رابطهٔ بین مساحتها	۹۵	۳۲۷
۸.۳. حجم	۹۵	۳۲۸
۱.۸.۳. اندازهٔ حجم	۹۵	۳۲۸
۱.۱.۸.۳. اندازهٔ حجم متوازی‌السطوح	۹۵	۳۲۸
۲.۱.۸.۳. ماکزیمم حجم متوازی‌السطوح	۹۷	۳۳۴
۳.۱.۸.۳. اندازهٔ حجم متوازی‌السطوح ناقص	۹۷	۳۳۶
۴.۱.۸.۳. اندازهٔ حجمهای ایجادشده	۹۷	۳۳۹
۲.۸.۳. نسبت حجمها	۹۸	۳۳۹
۳.۸.۳. رابطهٔ بین حجمها	۹۸	۳۴۰
۹.۳. رابطهٔ متری	۹۸	۳۴۲

موضوع	صفحه	
	صورت	حل
۱.۹.۳. رابطهٔ متری (برابریها)	۹۸	۳۴۲
۲.۹.۳. رابطهٔ متری (نابرابریها)	۹۹	۳۴۳
۱۰.۳. مکان هندسی	۹۹	۳۴۷
۱۱.۳. رسم شکل	۹۹	۳۴۸
۱.۱۱.۳. تعیین نقطه	۹۹	۳۴۸
۲.۱۱.۳. رسم صفحه	۹۹	۳۴۸
۳.۱۱.۳. رسم متوازی‌السطوح	۱۰۰	۳۵۰
۴.۱۱.۳. رسم شکلهای دیگر	۱۰۱	۳۵۴
۱۲.۳. برش، مقطع	۱۰۱	۳۵۵
۱۳.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش	۱۰۱	۳۵۸
۱۴.۳. مسأله‌های ترکیبی	۱۰۲	۳۵۹
بخش ۴. مکعب مستطیل	**۱۲۰ـ۱۰۵**	**۳۸۴ـ۳۶۴**
۱.۴. تعریف و قضیه	۱۰۷	۳۶۴
۲.۴. نقطه، خط، صفحه	۱۰۸	۳۶۵
۱.۲.۴. نقطه	۱۰۸	۳۶۵
۱.۱.۲.۴. نقطه‌های: همخط، همصفحه،...	۱۰۸	۳۶۵
۱.۱.۱.۲.۴. نقطه‌ها همخطند	۱۰۸	۳۶۵
۲.۲.۴. خط	۱۰۹	۳۶۵
۱.۲.۲.۴. خطهای: همرس، موازی،...	۱۰۹	۳۶۵
۱.۱.۲.۲.۴. خطها همرسند	۱۰۹	۳۶۵
۳.۲.۴. صفحه	۱۰۹	۳۶۵
۱.۳.۲.۴. صفحه‌های: موازی، عمود بر هم،...	۱۰۹	۳۶۵
۱.۱.۳.۲.۴. صفحه‌ها خوش‌ترازند	۱۰۹	۳۶۵
۳.۴. زاویه	۱۱۰	۳۶۷
۱.۳.۴. اندازهٔ زاویه	۱۱۰	۳۶۷
۴.۴. یال، ارتفاع، قطر	۱۱۰	۳۶۷
۱.۴.۴. یال	۱۱۰	۳۶۷
۱.۱.۴.۴. اندازهٔ یال	۱۱۰	۳۶۷
۲.۴.۴. ارتفاع	۱۱۱	۳۷۲
۱.۲.۴.۴. اندازهٔ ارتفاع	۱۱۱	۳۷۲
۳.۴.۴. قطر	۱۱۲	۳۷۴
۱.۳.۴.۴. اندازهٔ قطر	۱۱۲	۳۷۴
۲.۳.۴.۴. نسبت قطرها	۱۱۳	۳۷۴
۵.۴. پاره‌خط	۱۱۳	۳۷۵
۱.۵.۴. اندازهٔ پاره‌خط	۱۱۳	۳۷۵
۶.۴. شعاع کره	۱۱۳	۳۷۶
۱.۶.۴. اندازهٔ شعاع کره	۱۱۳	۳۷۶
۷.۴. مساحت	۱۱۴	۳۷۶
۱.۷.۴. اندازهٔ مساحت	۱۱۴	۳۷۶

موضوع	صفحه	
	صورت	حل
۱.۱.۷.۴. اندازهٔ مساحت جانبی	۱۱۴	۳۷۶
۲.۱.۷.۴. اندازهٔ مساحت کل	۱۱۴	۳۷۷
۳.۱.۷.۴. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر	۱۱۴	۳۷۷
۲.۷.۴. رابطهٔ بین مساحتها	۱۱۵	۳۷۸
۸.۴. حجم	۱۱۶	۳۷۹
۱.۸.۴. اندازهٔ حجم	۱۱۶	۳۷۹
۱.۱.۸.۴. اندازهٔ حجم مکعب مستطیل	۱۱۶	۳۷۹
۲.۱.۸.۴. اندازهٔ حجم شکلهای دیگر	۱۱۷	۳۷۹
۲.۸.۴. تساوی حجمها	۱۱۷	۳۸۰
۹.۴. رابطهٔ متری	۱۱۷	۳۸۱
۱.۹.۴. رابطهٔ متری (برابریها)	۱۱۷	۳۸۱
۲.۹.۴. رابطهٔ متری (نابرابریها)	۱۱۷	۳۸۲
۱۰.۴. مکان هندسی	۱۱۸	۳۸۲
۱۱.۴. رسم شکل	۱۱۸	۳۸۲
۱.۱۱.۴. رسم خط	۱۱۸	۳۸۲
۱۲.۴. برش، مقطع	۱۱۸	۳۸۳
۱۳.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش	۱۱۹	۳۸۳
۱۴.۴. مسأله‌های ترکیبی	۱۱۹	۳۸۴
بخش ۵. مکعب	**۱۲۱ـ۱۶۶**	**۳۸۵ـ۴۶۴**
۱.۵. تعریف و قضیه	۱۲۵	۳۸۵
۲.۵. نقطه، خط، صفحه	۱۲۷	۳۸۵
۱.۲.۵. نقطه	۱۲۷	۳۸۵
۱.۱.۲.۵. نقطه‌های: همخط، همصفحه،...	۱۲۷	۳۸۵
۱.۱.۱.۲.۵. نقطه‌ها همصفحه‌اند	۱۲۷	۳۸۵
۲.۱.۱.۲.۵. نقطه‌ها بر هم منطبقند	۱۲۸	۳۸۶
۳.۱.۱.۲.۵. نقطه‌ها درون مکعبند	۱۲۸	۳۸۷
۲.۲.۵. خط	۱۲۸	۳۸۷
۱.۲.۲.۵. خطهای: همرس، موازی،...	۱۲۸	۳۸۷
۱.۱.۲.۲.۵. خطها همرسند	۱۲۸	۳۸۷
۲.۱.۲.۲.۵. خطها بر هم عمودند	۱۲۸	۳۸۷
۳.۲.۵. خط و صفحه	۱۲۸	۳۸۸
۱.۳.۲.۵. خطها و صفحه‌های: موازی، عمود بر هم،...	۱۲۸	۳۸۸
۱.۱.۳.۲.۵. خط عمود بر صفحه است	۱۲۸	۳۸۸
۲.۱.۳.۲.۵. خط مماس برکره است	۱۲۹	۳۸۸
۴.۲.۵. مرکز تقارن، محور تقارن، صفحهٔ تقارن	۱۲۹	۳۸۸
۵.۲.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۱۲۹	۳۸۹
۱.۵.۲.۵. تعداد رأسها	۱۲۹	۳۸۹
۲.۵.۲.۵. تعداد یالها	۱۳۰	۳۸۹
۳.۵.۲.۵. تعداد رأسها و یالها	۱۳۰	۳۸۹

موضوع	صفحه	
	صورت	حل
۴.۵.۲.۵. تعداد رأسها، یالها و وجه‌ها	۱۳۰	۳۸۹
۵.۵.۲.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۱۳۰	۳۹۰
۳.۵. زاویه	۱۳۱	۳۹۰
۱.۳.۵. اندازهٔ زاویه	۱۳۱	۳۹۰
۱.۱.۳.۵. اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط	۱۳۱	۳۹۰
۲.۱.۳.۵. اندازهٔ زاویهٔ بین دو صفحه	۱۳۲	۳۹۰
۳.۱.۳.۵. اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ فرجه	۱۳۲	۳۹۱
۴.۱.۳.۵. اندازهٔ زاویهٔ بین خط و صفحه	۱۳۲	۳۹۲
۴.۵. یال، قطر	۱۳۲	۳۹۳
۱.۴.۵. یال	۱۳۲	۳۹۳
۱.۱.۴.۵. اندازهٔ یال	۱۳۲	۳۹۳
۲.۴.۵. قطر	۱۳۳	۳۹۴
۱.۲.۴.۵. اندازهٔ قطر	۱۳۳	۳۹۴
۵.۵. پاره‌خط	۱۳۳	۳۹۵
۱.۵.۵. اندازهٔ پاره‌خط	۱۳۳	۳۹۵
۲.۵.۵. کمترین اندازهٔ طول پاره‌خط	۱۳۴	۳۹۷
۳.۵.۵. بیشترین اندازهٔ طول پاره‌خط	۱۳۵	۳۹۹
۴.۵.۵. تساوی دو پاره‌خط	۱۳۵	۳۹۹
۵.۵.۵. نسبت پاره‌خطها	۱۳۵	۴۰۰
۶.۵. شعاع کره	۱۳۷	۴۰۵
۱.۶.۵. اندازهٔ شعاع کره	۱۳۷	۴۰۵
۷.۵. مساحت	۱۳۷	۴۰۶
۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت	۱۳۷	۴۰۶
۱.۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت جانبی	۱۳۷	۴۰۶
۲.۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت کل	۱۳۷	۴۰۶
۳.۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت جانبی و مساحت کل	۱۳۸	۴۰۷
۴.۱.۷.۵. افزایش سطح مکعب	۱۳۸	۴۰۷
۵.۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجادشده	۱۳۸	۴۰۷
۶.۱.۷.۵. کمترین مقدار مساحت شکلهای ایجادشده	۱۳۹	۴۰۸
۷.۱.۷.۵. بیشترین مقدار مساحت شکلهای ایجاد شده	۱۴۰	۴۰۸
۸.۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت مقطع	۱۴۰	۴۰۹
۲.۷.۵. نسبت مساحتها	۱۴۱	۴۱۳
۸.۵. حجم	۱۴۲	۴۱۴
۱.۸.۵. اندازهٔ حجم	۱۴۲	۴۱۴
۱.۱.۸.۵. اندازهٔ حجم مکعب	۱۴۲	۴۱۴
۲.۱.۸.۵. اندازهٔ حجمهای دیگر ایجادشده	۱۴۲	۴۱۵
۱.۲.۱.۸.۵. اندازهٔ حجم بخش مشترک	۱۴۲	۴۱۵
۲.۲.۱.۸.۵. اندازهٔ حجم چهاروجهی	۱۴۳	۴۱۷
۳.۲.۱.۸.۵. اندازهٔ حجم جسم	۱۴۳	۴۱۸

موضوع	صفحه	
	صورت	حل
۲.۸.۵. نسبت حجمها	۱۴۳	۴۱۹
۳.۸.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت	۱۴۴	۴۲۰
۹.۵. رابطهٔ متری	۱۴۴	۴۲۱
۱۰.۵. مکان هندسی	۱۴۵	۴۲۴
۱.۱۰.۵. مکان هندسی نقطه	۱۴۵	۴۲۴
۱۱.۵. رسم شکل	۱۴۶	۴۲۸
۱.۱۱.۵. رسم پاره‌خط	۱۴۶	۴۲۸
۲.۱۱.۵. رسم صفحه	۱۴۶	۴۲۹
۳.۱۱.۵. رسم تصویر	۱۴۶	۴۳۱
۴.۱۱.۵. رسم مکعب	۱۴۶	۴۳۲
۱۲.۵. برش، مقطع	۱۵۱	۴۳۸
۱.۱۲.۵. نوع مقطع	۱۵۱	۴۳۸
۲.۱۲.۵. محیط مقطع	۱۵۲	۴۴۰
۳.۱۲.۵. تعداد مکعبها، تعداد قسمتها	۱۵۲	۴۴۱
۴.۱۲.۵. تعداد صفحه‌ها	۱۵۴	۴۴۴
۵.۱۲.۵. رسم برش	۱۵۴	۴۴۵
۱۳.۵. گستردهٔ مکعب	۱۵۵	۴۴۶
۱۴.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش	۱۵۶	۴۴۷
۱۵.۵. مسأله‌های ترکیبی	۱۶۲	۴۵۵
فهرست منابع	۴۷۲_۴۶۵	

پیشگفتار

سپاس فراوان به درگاه پروردگار توانا، که توفیق نگارش این مجموعه را عنایت فرمود.

از سالها پیش، نیاز به تألیف مجموعهٔ کاملی از هندسه، شامل تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسه احساس می‌شد، تا علاقه‌مندان به این شاخه از ریاضی، با دسترسی به تمام مطالب مربوط به هر مبحث و حل و بررسی آنها، نه تنها به احاطه‌ای کامل بر آن مبحث دست یابند، بلکه خود نیز قضیه‌ها و مسأله‌ها را تعمیم دهند و یا، قضیه‌ها و مسأله‌های جدیدی در آن زمینه کشف کنند.

به این جهت از حدود چهل سال پیش به جمع‌آوری تعریفها، قضیه‌ها، مسأله‌ها و تاریخ هندسهٔ موجود در کتابهای ریاضی به زبان فارسی، ترجمه شده به‌فارسی، و کتابهای خارجی که در اختیار و یا در دسترس بود، برای تألیف دایرةالمعارف هندسه، اقدام، و تمام این مطالب براساس موارد زیر دسته‌بندی گردید:

۱. ویژگیهای توصیفی شکلهای هندسی، در هندسهٔ مسطحه؛
۲. رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه؛
۳. تبدیلهای هندسی (انتقال، بازتاب، دوران، تجانس، انعکاس،...)؛
۴. مکانهای هندسی؛
۵. ترسیمهای هندسی؛
۶. هندسهٔ فضایی؛
۷. هندسهٔ تحلیلی؛
۸. مقطعهای مخروطی (دایره، بیضی، هذلولی)؛
۹. هندسه‌های نااقلیدسی؛
...

هر یک از عنوانهای بالا، با توجه به حجم مطالب، یک یا چند جلد از این دایرةالمعارف را دربرمی‌گیرد. به عنوان مثال، رابطه‌های متری در هندسهٔ مسطحه، شامل پنج جلد به شرح زیر است :

جلد ۳. نسبت پاره‌خطها در هندسهٔ مسطحه (نسبت و تناسب، قضیهٔ تالس، تشابه،...) ؛

جلد ۴. رابطه‌های متری در دایره ؛

جلد ۵. رابطه‌های متری در مثلث، مثلث و دایره‌های : محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر ؛

جلد ۶. رابطه‌های متری در مثلثهای ویژه (مثلثهای : متساوی‌الاضلاع، متساوی‌الساقین، قائم‌الزاویه، و...)، مثلثهای ویژه و دایره‌های : محیطی، محاطی و دایره‌های دیگر ؛

جلد ۷. رابطه‌های متری در چند ضلعیها (چهارضلعیها، چهارضلعیهای ویژه، چهارضلعیهای محاطی و محیطی، پنج ضلعیها،...).

برای استفادهٔ بهینه از این مجموعه، ذکر چند نکته ضروری است :

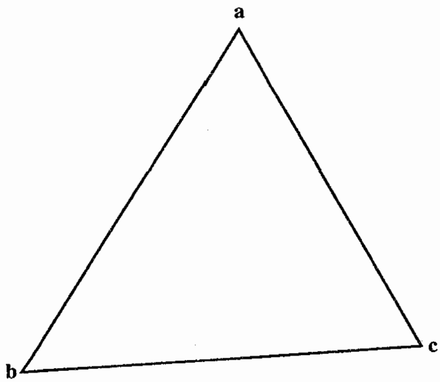
● در این مجموعه، صورت قضیه‌ها و مسأله‌ها، همراه با شکل آنها داده شده است (مگر در موارد ویژه، مثل برخی از مسأله‌های المپیادهای ریاضی، که رسم شکل درست، جزء هدفهای مسأله است)، تا دانشجویان علاقه‌مند به حل آنها، پیش از مراجعه به راهنمایی یا حل، خود به حل آنها بپردازند.

● قضیه‌ها و مسأله‌های تاریخی هندسه، با ذکر تاریخچهٔ مختصری از زمان ارائه و راه‌حلهای آنها، در مبحث مربوط به خود آمده‌اند، و غیر از مواردی خاص، تنها یک یا دو راه‌حل از آنها مطرح شده است ؛ زیرا برخی از این قضیه‌ها تاکنون به ده‌ها و حتی به صدها راه، حل شده‌اند ؛ مانند قضیهٔ فیثاغورس در مورد مثلث قائم‌الزاویه «مربع اندازهٔ وتر هر مثلث قائم‌الزاویه برابر است با مجموع مربعهای اندازه‌های دو ضلع زاویهٔ قائمه، $a^2 = b^2 + c^2$»، که تنها به وسیلهٔ اقلیدس از ۸ راه اثبات گردیده است.

● مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، از جمله المپیادهای ریاضی ایران، و مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی کشورهای دیگر، به همان صورت ترجمه شده، یا نوشته شده در متن اصلی آنها آورده شده است.

● علامتهای به کارگرفته شده در مسأله‌های المپیادهای بین‌المللی ریاضی و کشورهای مختلف به همان صورت متن اصلی آنها آمده است. به عنوان مثال، در المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف پاره‌خط AB به صورتهای $\overline{AB}$ ، $|AB|$ و یا AB نشان داده شده است، و یا

در المپیادهای ریاضی بلژیک از حروف کوچک مانند، a، b و c برای نامگذاری رأسهای مثلث استفاده شده است. به عنوان مثال، گفته شده : در مثلث abc ضلعهای bc،ab و ac،...



● در دیگر قضیه‌ها و مسأله‌ها، تعریفها و شکلها، از حرفها و علامتهای یکسان استفاده شده است ؛ به عنوان مثال، همه جا، نقطه‌ها با حرفهای بزرگ لاتین مانند نقطه‌های C،B،A و... ؛ و پاره‌خط AB به صورت AB، و اندازهٔ زاویه A به صورت $\hat{A}$ نشان داده شده است.

● شرح حال هندسه دانان بزرگ، پس از اولین قضیه و یا مسأله‌ای که به نام آنها مشهور است (مانند قضیهٔ تالس، قضیهٔ دزارگ، قضیهٔ پاپوس)، بعد از صورت آن قضیه یا مسأله، آورده شده است.

این جلد از دایرةالمعارف، هندسهٔ فضایی و شامل ۵ بخش است :

بخش ۱. چندوجهیهای منتظم
بخش ۲. منشور
بخش ۳. متوازی‌السطوح
بخش ۴. مکعب مستطیل
بخش ۵. مکعب

هر یک از بخشهای بالا به زیربخشهایی تقسیم شده‌اند. به عنوان مثال، بخش ۵. مکعب، دارای ۱۵ زیربخش است که عبارتند از :

۱.۵. تعریف و قضیه
۲.۵. نقطه، خط، صفحه
۳.۵. زاویه

۴.۵. یال، قطر

۵.۵. پاره خط

۶.۵. شعاع کره

۷.۵. مساحت

۸.۵. حجم

۹.۵. رابطهٔ متری

۱۰.۵. مکان هندسی

۱۱.۵. رسم شکل

۱۲.۵. برش، مقطع

۱۳.۵. گستردهٔ مکعب

۱۴.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۱۵.۵. مسأله‌های ترکیبی

هر یک از زیربخشهای بالا، خود به زیربخشهای جدیدی تقسیم شده‌اند، به عنوان مثال، زیر بخش ۸.۵. حجم، شامل زیربخشهای زیر است:

۱.۸.۵. اندازه حجم

۲.۸.۵. نسبت حجمها

۳.۸.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

هر یک از زیربخشهای بالا نیز شامل زیر بخشهای جدیدی هستند، به عنوان مثال، زیربخش ۱.۸.۵. اندازه حجم، دارای این زیربخشهاست:

۱.۱.۸.۵. اندازهٔ حجم مکعب

۲.۱.۸.۵. اندازهٔ حجمهای دیگر ایجاد شده

برخی زیربخشهای بالا نیز دارای زیربخشهای جدیدی هستند، به عنوان مثال، زیربخش ۲.۱.۸.۵. اندازهٔ حجمهای دیگر ایجاد شده، شامل زیربخشهای زیر است:

۱.۲.۱.۸.۵. اندازهٔ حجم بخش مشترک

۲.۲.۱.۸.۵. اندازهٔ حجم چهاروجهی

۳.۲.۱.۸.۵. اندازهٔ حجم جسم

در هر یک از این زیربخشها، مسأله‌ها با نظم و ترتیب ویژه‌ای ارائه گردیده‌اند.

امید است این مجموعه، مورد استفادهٔ دانش‌پژوهان ارجمند قرار گیرد و در شکوفایی استعدادهای آنان سهمی داشته باشد.

مؤلف، مدعی کامل بودن این دایرةالمعارف نیست ؛ ولی، امیدوار است که با همکاری ریاضیدانان محترم، استادان، دانشجویان، دانش‌آموزان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه، بتواند آن را کامل کند. بنابراین تقاضا دارد، قضیه‌ها و مسأله‌هایی را که در این مجموعه وجود ندارد، همچنین نظرات و پیشنهادهای اصلاحی و ارشادی خود را برای رفع کاستیها و تکمیل دایرةالمعارف، به نشانی ناشر، یا مؤلف، ارسال فرمایند، که پیشاپیش از این همکاری ارزنده، صمیمانه سپاسگزاری می‌شود.

مؤلف

هندسهٔ فضایی

بخش ۱. چندوجهی‌های منتظم
بخش ۲. منشور
بخش ۳. متوازی‌السطوح
بخش ۴. مکعب مستطیل
بخش ۵. مکعب

بخش ۱

• چندوجهیهای منتظم

۱.۱. تعریف و قضیه
۲.۱. چهاروجهی منتظم
۱.۲.۱. تعریف و قضیه
۲.۲.۱. نقطه، خط، صفحه
۱.۲.۲.۱. خط
۱.۱.۲.۲.۱. خطها برهم عمودند
۲.۱.۲.۲.۱. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد
۳.۲.۱. زاویه
۱.۳.۲.۱. اندازهٔ زاویه
۴.۲.۱. یال، ارتفاع
۱.۴.۲.۱. یال
۱.۱.۴.۲.۱. اندازهٔ یال
۲.۴.۲.۱. ارتفاع
۱.۲.۴.۲.۱. اندازهٔ ارتفاع
۵.۲.۱. پاره‌خط
۱.۵.۲.۱. اندازهٔ پاره‌خط
۶.۲.۱. شعاع کره
۱.۶.۲.۱. اندازهٔ شعاع کره
۲.۶.۲.۱. رابطهٔ بین شعاعها
۱.۲.۶.۲.۱. رابطهٔ بین شعاعها (برابریها)
۲.۲.۶.۲.۱. رابطهٔ بین شعاعها (نابرابریها)
۷.۲.۱. مساحت
۱.۷.۲.۱. اندازهٔ مساحت

۱.۲.۷.۱.۱. اندازهٔ مساحت جانبی
۱.۲.۷.۱.۲.اندازهٔ مساحت کل
۱.۲.۷.۱.۳. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر
۱.۲.۸. حجم
۱.۲.۸.۱. اندازهٔ حجم
۱.۲.۸.۱.۱. اندازهٔ حجم چهاروجهی
۱.۲.۸.۱.۲. اندازهٔ حجمهای ایجاد شده
۱.۲.۸.۱.۲.۱. اندازهٔ حجم چهاروجهیهای ایجاد شده
۱.۲.۸.۱.۲.۲. اندازهٔ حجم شکلهای دیگر ایجاد شده
۱.۲.۸.۱.۲.۳. اندازهٔ سطح و حجم شکلهای دیگر
۱.۲.۸.۲. نسبت حجمها
۱.۲.۹. رابطهٔ متری
۱.۲.۹.۱. رابطهٔ متری (برابریها)
۱.۲.۹.۲. رابطهٔ متری (نابرابریها)
۱.۲.۱۰. مکان هندسی
۱.۲.۱۱. رسم شکل
۱.۲.۱۱.۱. تعیین نقطه
۱.۲.۱۱.۲. رسم مثلث
۱.۲.۱۱.۳. رسم تصویر
۱.۲.۱۱.۴. رسم چهاروجهی
۱.۲.۱۲. برش، مقطع
۱.۲.۱۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۱.۲.۱۴. مسأله‌های ترکیبی

۱.۳. شش وجهی منتظم

۱.۴. هشت‌وجهی منتظم
۱.۴.۱. تعریف و قضیه
۱.۴.۲. نقطه، خط، صفحه

۱.۴.۳. زاویه
۱.۴.۳.۱. اندازهٔ زاویه
۱.۴.۴. یال، ارتفاع
۱.۴.۴.۱. یال
۱.۴.۵. پاره‌خط
۱.۴.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط
۱.۴.۶. شعاع کره
۱.۴.۶.۱. اندازهٔ شعاع کره
۱.۴.۷. مساحت
۱.۴.۷.۱. اندازهٔ مساحت
۱.۴.۸. حجم
۱.۴.۸.۱. اندازهٔ حجم
۱.۴.۸.۱.۱. اندازهٔ حجم هشت‌وجهی منتظم
۱.۴.۸.۱.۲. اندازهٔ حجم شکلهای دیگر
۱.۴.۸.۲. نسبت حجمها
۱.۴.۹. رابطهٔ متری

۱.۵. دوازده‌وجهی منتظم
۱.۵.۱. تعریف و قضیه
۱.۵.۲. نقطه، خط، صفحه
۱.۵.۳. زاویه
۱.۵.۳.۱. اندازهٔ زاویه
۱.۵.۴. یال، ارتفاع
۱.۵.۵. پاره‌خط
۱.۵.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط
۱.۵.۶. شعاع کره
۱.۵.۶.۱. اندازهٔ شعاع کره
۱.۵.۷. مساحت
۱.۵.۷.۱. اندازهٔ مساحت

۱.۵.۷.۱.۱. اندازهٔ مساحت کل

۱.۶. بیست‌وجهی منتظم

۱.۶.۱. تعریف و قضیه

۱.۶.۲. نقطه، خط، صفحه

۱.۶.۳. زاویه

۱.۶.۳.۱. اندازهٔ زاویه

۱.۶.۴. یال، ارتفاع

۱.۶.۴.۱. یال

۱.۶.۵. پاره‌خط

۱.۶.۶. شعاع کره

۱.۶.۶.۱. اندازهٔ شعاع کره

۱.۶.۷. مساحت

۱.۶.۷.۱. اندازهٔ مساحت

۱.۶.۷.۱.۱. اندازهٔ مساحت کل

۱.۶.۸. حجم

۱.۶.۸.۱. اندازهٔ حجم

۱.۶.۸.۲. نسبت حجمها

بخش ۱. چندوجهیهای منتظم

۱.۱. تعریف و قضیه

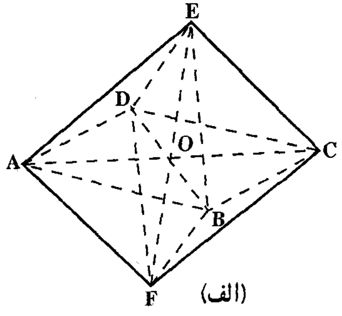
تعریف. چندوجهی، جسمی است که از هر طرف به یک چندضلعی مسطح محدود باشد، به‌طوری که هر دو چندضلعی مجاور، دارای یک ضلع مشترک باشند، و هر ضلع فقط مابین دو چندضلعی مشترک باشد، نه بیشتر.

این چندضلعیها را وجه‌های چندوجهی و رأسهای آنها را رأسهای چندوجهی و ضلعهای آنها را یالهای چندوجهی می‌نامند.

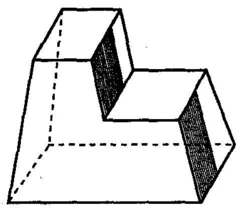
هرچندوجهی حداقل دارای چهار وجه است، زیرا سه صفحه فقط می‌توانند یک کنج سه‌وجهی تشکیل دهند.

قطر چندوجهی خطی است که دو رأس غیرواقع در یک وجه را به هم وصل می‌کند.

چندوجهی محدب و چندوجهی مقعر. چندوجهی را محدب نامند، هرگاه به تمامی در یک طرف صفحهٔ هر یک از وجه‌ها قرار گیرد (شکل(الف)) و در غیر این صورت چندوجهی را مقعر می‌نامند (شکل (ب)).



(الف)



(ب)

نکتهٔ ۱. مقطع هر چندضلعی محدب به وسیلهٔ یک صفحهٔ قاطع، همیشه چندضلعی محدب است.
نکتهٔ ۲. اگر خط راستی چندوجهی محدب را قطع کند، فقط در دو نقطه قطع می‌کند، نه بیشتر.
نکتهٔ ۳. می‌گویند نقطه‌ای مانند O در داخل یک چندوجهی محدب واقع است، هرگاه هر نیمخط اختیاری به مبدأ O، فقط یکی از وجه‌های چندوجهی را قطع نماید، والّا نقطه را واقع در خارج چندوجهی محدب گویند.

واضح است که این تعریف برای نقطه‌هایی است که روی وجه‌های جسم نباشند.

چندوجهیهای منتظم. اگر تمام وجه‌های چندوجهی، چندضلعیهای منتظم متساوی باشند و همه کنجهایی که در رأسهای جسم تشکیل می‌شوند برابر باشند، چندوجهی را منتظم می‌گویند.

قضیهٔ اولر. در هر چندوجهی محدب مجموع عدهٔ وجه‌ها و رأسها مساوی است با عدهٔ یالها به اضافهٔ دو.

۱. فرض کنیم F عدهٔ وجه‌ها و A عدهٔ یالها و S تعداد رأسها باشد، می‌خواهیم ثابت کنیم :

$$F + S = A + ۲$$

Euler ریاضیدان سوئیسی (۱۷۸۳-۱۷۰۷ میلادی)

۲. **قضیه.** تنها پنج نوع چندوجهی منتظم محدب وجود دارد.

۳. تعداد چندوجهیهای منتظم ستاره‌ای را تعیین کنید.

چندوجهیهای منتظم ستاره‌ای به وسیلهٔ پوانسو (Poinsot) ریاضیدان فرانسوی کشف و توسط کوشی (Cauchy) و برتراند (Bertrand) مورد بررسی قرار گرفت.

پوانسو در ۱۷۷۷ در پاریس زاده شد و در ۱۸۹۵ درگذشت. عضو ادارهٔ اندازه‌گیری مقدمات استاتیک، جایی که برای نخستین بار تئوری زوجها مطرح شد.

کوشی (Cauchy) در ۱۷۸۹ در پاریس زاده شد و در ۱۸۵۷ درگذشت. وی یکی از ریاضیدانان بزرگ جهان است و در بخشهای مختلف ریاضی با نام او و فرمولهای ابداعیش مواجه می‌شویم.

برتراند (Bertrand)عضو آکادمی علوم فرانسه در سال ۱۹۰۰ وفات یافت.

۴. تعریف منتظم بودن یک چندوجهی، متضمن سه خاصیت است :

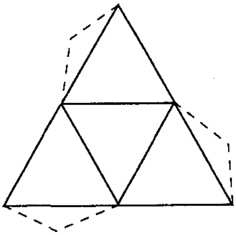
منتظم بودن وجه‌ها، مساوی بودن وجه‌ها، مساوی بودن کنجها. اغلب کتابهای درسی در هندسهٔ فضایی، هر سه خاصیت تعریف کننده را نمی‌دهند. با مثالهای نقضی نشان دهید که همهٔ خاصیتها مورد نیازند.

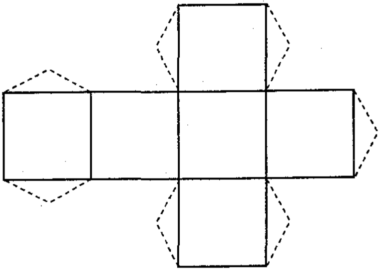
۵. از سه خاصیت تعریف کنندهٔ چندوجهیهای منتظم، یعنی منتظم بودن وجه‌ها، مساوی بودن وجه‌ها و مساوی بودن کنجها، می‌توان منتظم بودن کنجها را نتیجه گرفت. این کار را انجام

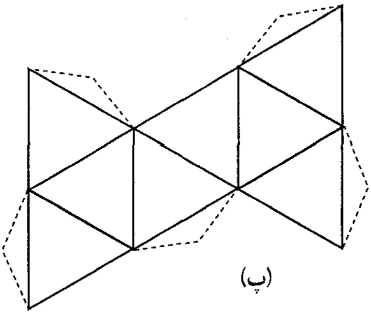
دهید و سپس نشان دهید که به جای سه خاصیت تعریف کننده می‌توان تنها دو خاصیت زیر را قرار داد:
منتظم بودن وجه‌ها و منتظم بودن کنجها.

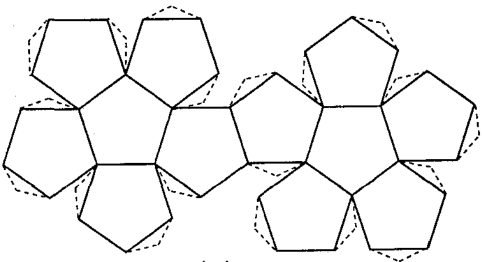
۶. ثابت کنید که اگر نقطه‌ای در یک چندوجهی منتظم حرکت کند، مجموع فاصله‌اش از وجه‌ها، مقدار ثابتی خواهد بود.

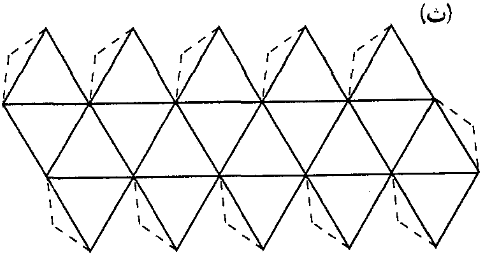
۷. شکلهای کیهانی.
این مورد قبول همه است که **فیثاغورس**، بانی اولیهٔ اصول ساختمان چندوجهیهای منتظم است که آنها را شکلهای کیهانی می‌نامید.
برای کسانی که به هندسه علاقمندند و مایلند نمونه‌هایی از چند وجهیهای منتظم را بسازند، در این جا طرح برش مقوا را برای چهاروجهی منتظم (شکل الف)، شش‌وجهی منتظم (شکل ب)، هشت‌وجهی منتظم (شکل پ)، دوازده‌وجهی منتظم (شکل ت)، و بیست‌وجهی منتظم (شکل ث) می‌آوریم.
ما کوشش می‌کنیم به صورت دقیق‌تری همهٔ آنچه را که تاریخ و یا روایت قرنها، ودیعهٔ فیثاغورس در ریاضیات می‌دانند، در این جا جمع‌آوری کنیم. ولی احساس می‌شود که اینها، قدری از بسیار است، بسیار از نظر معنا و اهمیت.

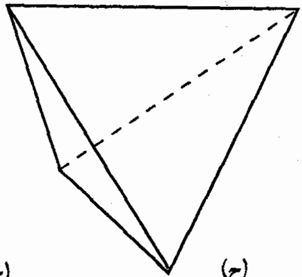

(الف)


(ب)

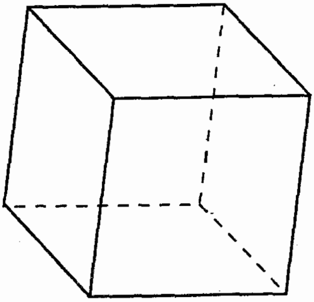

(پ)


(ت)

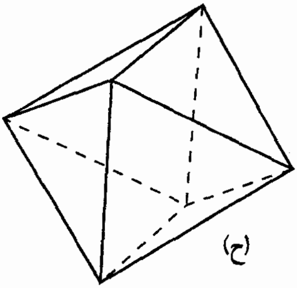

(ث)



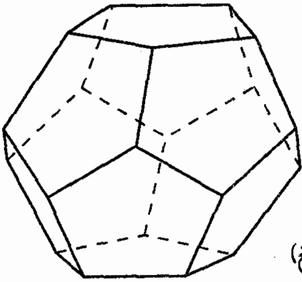
(ج)



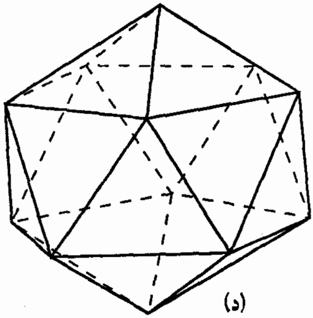
(چ)



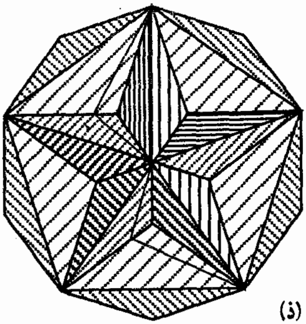
(ح)



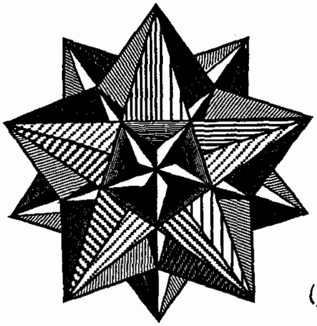
(خ)



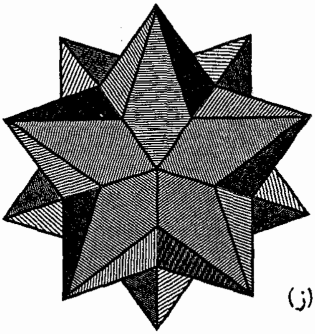
(د)



(ذ)



(ر)

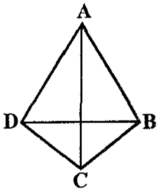


(ز)

۲.۱. چهاروجهی منتظم

۱.۲.۱. تعریف و قضیه

تعریف. همان‌طوری که می‌دانیم چهاروجهی منتظم، چندوجهیی است که از چهار مثلث متساوی‌الاضلاع همنهشت تشکیل می‌شود.
چهاروجهی منتظم چهار رأس، چهاروجه و شش یال دارد. شکل، چهاروجهی منتظم ABCD را نشان می‌دهد.



۸ . **قضیه.** ثابت کنید که هر ارتفاع چهاروجهی منتظم،از نقطهٔ برخورد ارتفاعهای وجه روبه روی آن می‌گذرد.
۹ . حجم و سطح جانبی و سطح کل چهاروجهی منتظمی به ضلع a را حساب کنید.

۲.۲.۱. نقطه، خط، صفحه

۱.۲.۲.۱.خط

۱.۱.۲.۲.۱. خطها برهم عمودند

۱۰. ثابت کنید خطهای راستی که وسط ارتفاع یک چهاروجهی منتظم را، به رأسهای وجهی از آن، که ارتفاع بر آن وارد شده وصل می‌کنند، دو به دو بر یکدیگر عمودند.

۲.۱.۲.۲.۱. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد

۱۱. نقطهٔ O مرکز چهاروجهی منتظمی است. از نقطهٔ M، که روی یکی از وجه‌های آن اختیار شده است، سه عمود به سه وجه دیگر آن فرود می‌آوریم، K، L و N را پاهای عمود درنظر می‌گیریم. ثابت کنید خط OM از مرکز ثقل مثلث KLN می‌گذرد.

۱.۲.۳. زاویه

۱.۲.۳.۱. اندازهٔ زاویه

۱۲. اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ هر فرجه از یک چهاروجهی منتظم را تعیین کنید.

۱۳. دو نقطهٔ P و Q در درون چهاروجهی منتظم ABCD واقعند. ثابت کنید که : $P\hat{A}Q < ۶۰^\circ$.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۳

۱.۲.۴. یال، ارتفاع

۱.۲.۴.۱. یال

۱.۲.۴.۱.۱. اندازهٔ یال

۱۴. در داخل چهاروجهی منتظم ABCD، دو کره به شعاعهای ۲R و ۳R طوری قرار گرفته‌اند که برهم مماس هستند. یکی از آنها در کنج سه‌وجهی به رأس A و دیگری در کنج سه‌وجهی به رأس B محاط شده‌اند. طول یال این چهاروجهی را حساب کنید.

۱۵. سطح کل یک چهاروجهی منتظم $۹\sqrt{۳}$ است. اندازهٔ یال این چهاروجهی کدام است؟

الف) ۲ ب) ۳ ج) ۶ د) ۹

۱۶. حجم یک چهاروجهی منتظم برابر $\frac{۴\sqrt{۲}}{۳}$ است. طول یال این چهاروجهی را به‌دست‌آورید.

۱.۲.۴.۲. ارتفاع

۱.۲.۴.۲.۱. اندازهٔ ارتفاع

۱۷. در چهاروجهی منتظم به ضلع a، اندازهٔ ارتفاع چهاروجهی را تعیین کنید.

۱۸. اندازهٔ ارتفاع یک چهاروجهی منتظم به ضلع ۱۲ را تعیین کنید.

۱۹. آیا یک چهاروجهی منتظم به طول یال واحد می‌تواند از داخل حفرهٔ دایره‌ای شکل به شعاع ۰/۴۵ یا ۰/۴۴ بگذرد؟ از ضخامت حفره صرفنظر کنید.

۱.۲.۵. پاره‌خط

۱.۲.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۲۰. ثابت کنید همهٔ فاصله‌های یک نقطهٔ فضا تا هر یک از چهار رأس چهاروجهی منتظم با یال برابر ۲، تنها وقتی به وسیلهٔ عددهای درست بیان می‌شوند که، این نقطه، بر یکی از رأسهای چهاروجهی منطبق باشد.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، بلغارستان، ۱۹۷۶

۲۱. ثابت کنید دو نقطهٔ دلخواه از سطح یک چهاروجهی منتظم با یال به طول واحد را می‌توان با خط شکسته‌ای که از طریق سطح چهاروجهی می‌گذرد، طوری به‌هم وصل کرد که طول آن از $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ تجاوز نکند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۰

۲۲. طول عمود مشترک دو یال متقابل یک چهاروجهی منتظم به ضلع a برابر است با :

الف) $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ ب) $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ ج) $\frac{a}{۲}$ د) $\frac{a\sqrt{۲}}{۳}$

دومین دورهٔ المپیادهای ریاضی ایران

۲۳. زاویه و فاصلهٔ بین دو میانهٔ متنافر از دو وجه جانبی چهاروجهی منتظم را که طول یال آن a می‌باشد، پیدا کنید.

۱.۲.۶. شعاع کره

۱.۲.۶.۱. اندازهٔ شعاع کره

۲۴. ثابت کنید می‌توان بر چهاروجهی منتظم، کره‌ای محیط و در آن کره‌ای محاط نمود. اگر طول یال چهاروجهی منتظم برابر a باشد، اندازه‌های شعاعهای کره‌های محیطی و محاطی آن را حساب کنید.

۲۵. چهاروجهی ABCD به یال a مفروض است. مرکز وجه ADC را نقطهٔ M و وسط یال BC را نقطهٔ N می‌نامیم. شعاع کره‌ای را پیدا کنید که در کنج سه‌وجهی A محاط بوده و

بر خط راست MN مماس باشد.

۲۶. یال یک چهاروجهی منتظم برابر است با a، شعاع کره‌ای را پیدا کنید که سطح آن بر همهٔ یالهای چهاروجهی مماس است.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۲۷. چهاروجهی منتظم ABCD به یال a داده شده است. شعاع کره‌ای را پیدا کنید که از رأسهای C و D و وسط یالهای AB و AC بگذرد.

۲۸. طول هر یال چهاروجهی منتظمی برابر a است. صفحهٔ P از رأس B و وسطهای یالهای AC و AD می‌گذرد. کره‌ای بر خطهای AB، AC و AD و آن بخش از صفحهٔ P که در داخل چهاروجهی قرار گرفته مماس است. شعاع کره را حساب کنید.

۲۹. چهاروجهی منتظمی به یال a مفروض است. شعاع کره‌ای را پیدا کنید که مرکز آن بر مرکز چهاروجهی منطبق بوده و مجموع حجمهای قسمتهایی از چهاروجهی که در خارج کره، و قسمتهایی از کره که در خارج چهاروجهی قرار گرفته‌اند، کمترین مقدار را داشته باشد.

۲.۶.۲.۱. رابطهٔ بین شعاعها

۱.۲.۶.۲.۱. رابطهٔ بین شعاعها (برابریها)

۳۰. ثابت کنید در هر چهاروجهی منتظم شعاع کرهٔ مماس بر شش یال، واسطهٔ هندسی بین شعاع کرهٔ محاطی و شعاع کرهٔ محیطی آن است.

۳۱. اگر d فاصلهٔ بین مرکزهای کره‌های محاط و محیط بر یک چهاروجهی منتظم و r و R شعاعهای این دو کره باشند، ثابت کنید داریم:

$$d^2 = (R - r)^2 - 4r^2$$

و برای کرهٔ محاطی خارجی نظیر زاویهٔ A داریم:

$$d_a^2 = (R + r_a)^2 - 4r_a^2$$

۱.۲.۶.۲.۲. رابطهٔ بین شعاعها (نابرابریها)

۳۲. اگر r و R بترتیب شعاعهای کره‌های محاطی و محیطی هرم چهاربر منتظمی باشند، ثابت کنید: $R/r \geq \sqrt{۲}+۱$

۱.۲.۷. مساحت

۱.۲.۷.۱. اندازهٔ مساحت

۱.۲.۷.۱.۱. اندازهٔ مساحت جانبی

۳۳. در چهاروجهی منتظمی، M و N وسطهای دو یال متقابل هستند. تصویر چهاروجهی بر روی صفحه‌ای که موازی با MN می‌باشد، چهارضلعی‌ای است که مساحت آن برابر S و یکی از زاویه‌های آن ۶۰° است. سطح جانبی چهاروجهی را پیدا کنید.

۱.۲.۷.۱.۲. اندازهٔ مساحت کل

۳۴. چهاروجهی منتظمی به یال ۲ داده شده است. اندازهٔ سطح کل آن را بیابید.

۳۵. یک کره به شعاع r بر چهار صفحهٔ وجه‌های یک چهاروجهی منتظم، مماس است. اندازهٔ سطح کل این چهاروجهی را تعیین کنید.

۱.۲.۷.۱.۳. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر

۳۶. چهاروجهی منتظمی به یال a مفروض است. کره‌ای به سه یال آن که از یک رأس خارج می‌شوند، در نقطهٔ انتهایی آنها مماس است. مساحت آن قسمت از سطح کره را پیدا کنید که در داخل چهاروجهی محصور شده است.

۳۷. از رأس S یک چهاروجهی منتظم SABC به یال a، صفحهٔ $SB'C'$ را موازی BC رسم می‌کنیم تا چهاروجهی را به دو قسمت معادل هم تقسیم کند. مطلوب است محاسبهٔ محیط و مساحت مثلث $SB'C'$ بر حسب a.

۱.۲.۸. حجم

۱.۲.۸.۱. اندازهٔ حجم

۱.۲.۸.۱.۱. اندازهٔ حجم چهاروجهی

۳۸. اندازهٔ حجم چهاروجهی منتظمی را که اندازهٔ یال آن برابر ۸ است، به دست آورید.

۳۹. اگر مساحت یک وجه چهاروجهی منتظم مساوی $۱۲\sqrt{۳}$ باشد، اندازهٔ حجم آن را به‌دست آورید.

۴۰. طول یال یک چهاروجهی منتظمی $۶\sqrt{۲}$ است. اندازهٔ حجم آن چهاروجهی کدام است؟

الف) ۷۲ ب) $۳۶\sqrt{۲}$ ج) $۳۶\sqrt{۳}$ د) $۷۲\sqrt{۲}$

۴۱. اندازهٔ ارتفاع یک چهاروجهی منتظم مساوی h است. اندازهٔ حجم آن را تعیین کنید.

۴۲. سطح کل یک چهاروجهی منتظم $۹\sqrt{۳}$ است. اندازهٔ حجم این چهاروجهی کدام است؟

الف) $۹\sqrt{۲}$ ب) $\frac{۹\sqrt{۲}}{۲}$ ج) $\frac{۹\sqrt{۲}}{۶}$ د) $\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}$

۱.۲.۸.۱.۲. اندازهٔ حجمهای ایجاد شده

۱.۲.۸.۱.۲.۱. اندازهٔ حجم چهاروجهیهای ایجاد شده

۴۳. چهاروجهی منتظم ABCD به یال a مفروض است. در صفحه‌های BCD، CDA، DAB و ABC بترتیب نقطه‌های A_1، B_1، C_1 و D_1 طوری اختیار شده‌اند که خط A_1B_1 بر صفحهٔ BCD و خط B_1C_1 بر صفحهٔ CDA و خط C_1D_1 بر صفحهٔ DAB و سرانجام خط D_1A_1 بر صفحهٔ ABC عمود هستند. حجم چهاروجهی $A_1B_1C_1D_1$ را پیدا کنید.

۱.۲.۸.۱.۲.۲. اندازهٔ حجم شکلهای دیگر ایجاد شده

۴۴. دو چهاروجهی منتظم مساوی را به وسیلهٔ یک وجه به هم وصل می‌کنیم، به نحوی که در آن وجه مشترک باشند. مرکزهای شش وجه هرم دوگانه‌ای را که به این ترتیب به دست می‌آید، رأسهای یک منشور قائم می‌گیریم. اگر یال هر یک از چهاروجهیها برابر a باشد، حجم این منشور را به دست آورید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۴۵. چهاروجهی منتظمی به حجم V، حول خطی که وسطهای یالهای متنافر را به هم وصل می‌کند، به اندازهٔ α دوران می‌کند. حجم قسمت مشترک چهاروجهی مفروض با چهاروجهی دوران یافته را پیدا کنید. $(0 < \alpha < \pi)$

۳.۲.۱.۸.۲.۱. اندازهٔ سطح و حجم شکلهای دیگر

۴۶. سطح و حجم کرهٔ محاط در یک چهاروجهی منتظم به یال a را تعیین کنید. همچنین سطح و حجم کرهٔ مماس بر یالهای چهاروجهی را به دست آورید.

۴۷. سطح و حجم کره‌ای را تعیین کنید که بر یک چهاروجهی منتظم به ضلع a محیط است.

۲.۸.۲.۱. نسبت حجمها

۴۸. دو چهاروجهی منتظم و برابر طوری یکدیگر را قطع می‌کنند که هر وجه هر یک از آنها از نقطه‌های وسطه سه یال همرس دیگری می‌گذرد. اجتماع این دو چهاروجهی (U)، «ستاره»ای سه‌بعدی است. اشتراک این دو چهاروجهی (V) را توصیف کنید. نسبت حجمهای U و V را به دست آورید.

۹.۲.۱. رابطهٔ متری

۱.۹.۲.۱. رابطهٔ متری (برابریها)

۴۹. ثابت کنید مجموع مربعهای تصویرهای یالهای یک چهاروجهی منتظم روی هر صفحهٔ دلخواه، مقدار ثابتی است.

۵۰. ثابت کنید در هر چهاروجهی منتظم، مجموع فاصله‌های هر نقطهٔ درونی تا چهاروجهی منتظم، مساوی طول ارتفاع چهاروجهی است.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۲.۹.۲.۱. رابطهٔ متری (نابرابریها)

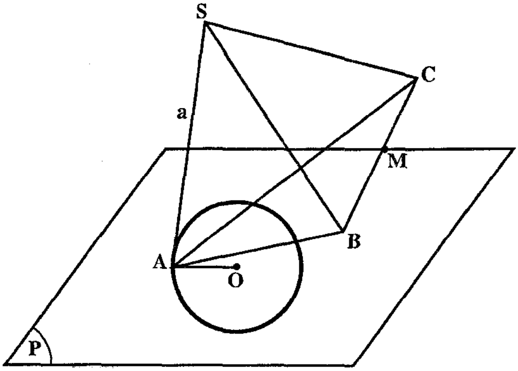
۵۱. ثابت کنید مجموع فاصله‌های رأسهای یک چهاروجهی منتظم از مرکز کرهٔ محیطی آن، از مجموع فاصله‌های این رأسها از هر نقطهٔ دیگر فضا کمتر است.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۶

۵۲. یک چهاروجهی منتظم به یال a را در چهاروجهی منتظم دیگری به یال b، طوری محاط کرده‌ایم که، هر رأس چهاروجهی محاطی، درست بر یک وجه چهاروجهی محیطی قرار گرفته است. ثابت کنید $3a \geq b$.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، هیأت داوران، یونان، ۱۹۷۹

۱۰.۲.۱. مکان هندسی



۵۳. رأس S یک چهاروجهی منتظم به یال a ثابت و رأس A یک دایرهٔ مفروض به شعاع R در صفحهٔ P را طی می‌کند و یال BC همواره موازی با صفحهٔ P می‌ماند. مکان هندسی نقطهٔ M وسط یال BC را تعیین کنید.

۱۱.۲.۱. رسم شکل

۱.۱۱.۲.۱. تعیین نقطه

۵۴. در درون چهارضلعی منتظم ABCD، نقطه‌ای مانند M بیابید، به‌قسمی که چهار هرم MABC، MBCD، MCDA و MDAB هم ارز (معادل) باشند.

۲.۱۱.۲.۱. رسم مثلث

۵۵. چهاروجهی منتظم ABCD داده شده است. مثلث $B'C'D'$ را چنان رسم می‌کنیم که وسط ضلعهایش نقطه‌های B، C و D باشد. ثابت کنید که چهاروجهی $AB'C'D'$ سه‌قائمه است.

۳.۱۱.۲.۱. رسم تصویر

۵۶. تصویر یک چهاروجهی منتظم را روی صفحه‌ای که موازی دو یال روبه‌روی آن باشد، به دست آورید.

۴.۱۱.۲.۱. رسم چهاروجهی

۵۷. دو خط عمود برهم غیر واقع در یک صفحه داده شده‌اند. چهاروجهی منتظمی رسم کنید که دو یال روبه‌روی آن روی این دو خط باشند.

۵۸. چهاروجهی منتظم SABC را رسم کنید. در صورتی که از آن: رأس S، نقطهٔ H، پای ارتفاع SH و صفحه‌ای که رأس A در آن واقع است، داده شده باشد.

۱۲.۲.۱. برش، مقطع

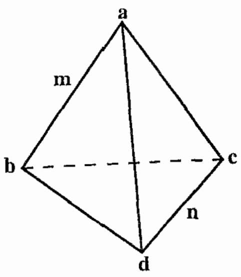
۵۹. یک چهاروجهی منتظم را با صفحه‌ای موازی دو یال روبه‌روی AB و CD قطع کرده‌ایم. دامنهٔ تغییرات مقطع حاصل را تعیین کنید هنگامی که صفحهٔ قاطع تغییر کند، اما موازی همان یالها باقی بماند.

۶۰. در چهاروجهی منتظم abcd، وسط یال [ab] را با m و وسط یال [cd] را با n نشان می‌دهیم. مقطع صفحهٔ عمودمنصف [mn] با چهاروجهی، کدام شکل زیر است؟

الف) مثلث　　　　ب) مربع

ج) متوازی‌الاضلاع بدون زاویهٔ قائمه　　　　د) لوزی بدون زاویهٔ قائمه

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۰



۱۳.۲.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۶۱. ثابت کنید وسطهای یالهای یک چهاروجهی منتظم، رأسهای یک هشت‌وجهی منتظم هستند.

۶۲. ثابت کنید چهاروجهی منتظم را نمی‌توان به چند چهاروجهی منتظم دو به دو نابرابر تقسیم کرد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۸

۱۴.۲.۱.مسأله‌های ترکیبی

۶۳. چهاروجهی SABC دارای خاصیت زیر است :
پنج کره، هر یک مماس به یالهای : SA ، SB، SC، BC، CA، AB، یا امتدادهای آنها موجودند.
الف) ثابت کنید چهاروجهی SABC منتظم است.
ب) برعکس، ثابت کنید که در مورد هرچهاروجهی منتظمی چنین پنج کره‌ای موجودند.
المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۲

۶۴. الف. ثابت کنید، اگر زاویه‌های مسطحهٔ شش فرجه از یک چهاروجهی، باهم برابر باشند، این چهاروجهی منتظم است.
ب. اگر تنها پنج فرجه، زاویه‌های مسطحهٔ برابر داشته باشند، آیا بازهم چهاروجهی منتظم است؟

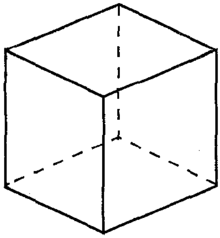
المپیادهای ریاضی امریکا، ۱۹۷۸

۶۵. در یک چهاروجهی منتظم نقطه‌های M و N میانگاههای یالهای AB و CD بوده و AB=a است. مطلوب است محاسبهٔ :
الف) طول پاره خط MN
ب) زاویهٔ بین خطهای MN و BC
ج) ثابت کنید خط MN بر یالهای AB و CD عمود است.

۶۶. اگر شش صفحه را طوری درنظر بگیریم که هر کدام از آنها از یک یال چهاروجهی منتظم و نقطهٔ وسط یال مقابل آن گذشته باشد، چهاروجهی، به چند بخش تقسیم می‌شود؟
اگر حجم چهاروجهی منتظم برابر واحد باشد، حجم هر یک از این بخشها را پیدا کنید.
المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، آلمان، ۱۹۷۴

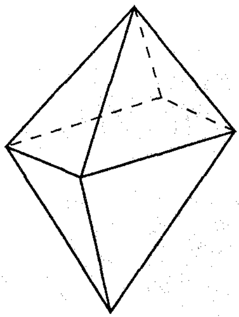
۳.۱. شش وجهی منتظم

همان‌طوری که می‌دانیم شش‌وجهی منتظم را که ازشش مربع همنهشت تشکیل می‌شود، مکعب می‌نامند. با توجه به این که مکعب حالت خاصی از مکعب مستطیل و در واقع زیرمجموعه‌ای از منشور است، مطالب مربوط به مکعب را در بخشهای بعد خواهیم دید.



۴.۱. هشت وجهی منتظم

۱.۴.۱. تعریف و قضیه



تعریف. همان‌طوری که می‌دانیم هشت‌وجهی منتظم از هشت مثلث متساوی‌الاضلاع همنهشت تشکیل می‌شود.

هشت‌وجهی منتظم ۶ رأس، ۸ یال و ۸ وجه دارد.

۲.۴.۱. نقطه، خط، صفحه

۶۷. بر هر رأس از یک هشت وجهی منتظم، چند وجه و چند یال می‌گذرد؟

۶۸. آیا هشت‌وجهی منتظم، صفحهٔ تقارن دارد؟ در صورت وجود چند تا؟

۳.۴.۱. زاویه

۱.۳.۴.۱. اندازهٔ زاویه

۶۹. اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ هشت‌وجهی منتظم را تعیین کنید.

۴.۴.۱. یال، ارتفاع

۱.۴.۴.۱. یال

۷۰. ثابت کنید، می‌توان فضا را به هشت‌وجهیها و چهاروجهیهای منتظم طوری تقسیم کرد که، طول هر یال از هر چندوجهی، عددی درست باشد و، در بین چندوجهیها، نتوان ده چند وجهی پیدا کرد که طول یالهای آنها با هم برابر باشد.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۹۰

۱.۴.۵. پاره‌خط

۱.۴.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۷۱. فاصلهٔ بین یالهای متناظر هشت‌وجهی منتظم به یال a را محاسبه کنید.

۱.۴.۶. شعاع کره

۱.۴.۶.۱. اندازهٔ شعاع کره

۷۲. اندازهٔ شعاع کره‌های محاطی و محیطی هشت‌وجهی منتظم محدبی به‌ضلع a را تعیین کنید.

۱.۴.۷. مساحت

۱.۴.۷.۱. اندازهٔ مساحت

۷۳. اندازهٔ مساحت کل هشت وجهی منتظم به یال a را تعیین کنید.

۱.۴.۸. حجم

۱.۴.۸.۱. اندازهٔ حجم

۱.۴.۸.۱.۱. اندازهٔ حجم هشت‌وجهی منتظم

۷۴. اندازهٔ حجم هشت‌وجهی منتظم به یال a را تعیین کنید.

۷۵. ثابت کنید که حجم هر هشت‌وجهی منتظم از فرمول $V=\frac{1}{6}d_1d_2d_3$ به دست می‌آید که در آن d_1، d_2 و d_3 طولهای قطرهای هشت‌وجهی‌اند.

۷۶. حجم و رویهٔ کل هشت‌وجهی منتظمی را پیدا کنید که طول هر یال آن ۳ باشد.

۱.۴.۸.۱.۲. اندازهٔ حجم شکلهای دیگر

۷۷. هشت‌وجهی منتظمی را با صفحه‌ای چنان بریده‌ایم که در مقطع، یک شش‌ضلعی منتظم به‌دست آید. همهٔ رأسهای این شش‌ضلعی را به یکی از رأسهای هشت‌وجهی منتظم وصل کرده‌ایم. اگر حجم هشت‌وجهی مفروض برابر V باشد، حجم جسم حاصل را پیدا کنید.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۷۸. یال یک هشت وجهی منتظم برابر است با a. سطح و حجم کرهٔ محاطی آن را به دست آورید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۱.۴.۸.۲. نسبت حجمها

۷۹. اگر سطح کل یک چهاروجهی منتظم با سطح کل یک هشت‌وجهی منتظم برابر باشد، نسبت حجم آنها را پیدا کنید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۱.۴.۹. رابطهٔ متری

۸۰. یک کنج S از یک جسم هشت‌وجهی منتظم را با صفحه‌ای قطع می‌کنیم. اگر نقطه‌های تقاطع این صفحه با یالهای کنج، A، B، C و D باشد، ثابت کنید:

$$\frac{1}{SA}+\frac{1}{SC}=\frac{1}{SB}+\frac{1}{SD}$$

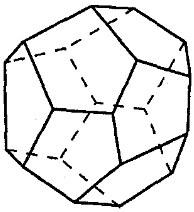
۸۱. تمام صفحه‌هایی که از نقطهٔ برخورد قطرهای یک هشت‌وجهی منتظم رسم می‌شوند، دوازده یال هشت‌وجهی یا امتداد آنها را چنان قطع می‌کنند که مجموع عکس طول ۲۴ پاره‌خط حاصل، مقدار ثابتی است.

۵.۱. دوازده‌وجهی منتظم

۱.۵.۱. تعریف و قضیه

تعریف. همان‌طوری که می‌دانیم دوازده‌وجهی منتظم از دوازده پنج‌ضلعی منتظم همنهشت به‌وجود می‌آید.

دوازده وجهی منتظم، دارای ۲۰ رأس، ۳۰ یال و ۱۲ وجه است.



۲.۵.۱. نقطه، خط، صفحه

۸۲. بر هر رأس از یک دوازده‌وجهی منتظم، چند وجه می‌گذرد؟

۸۳. ثابت کنید پنج مکعب وجود دارد که رأسهای آنها رأسهای یک دوازده‌وجهی منتظم است، هر یک از یالهای این مکعبها بر قطری از یک وجه دوازده‌وجهی و هر یک از رأسهای دوازده‌وجهی بر دو رأس از این پنج مکعب قرار دارد.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۳.۵.۱. زاویه

۱.۳.۵.۱. اندازهٔ زاویه

۸۴. اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ هر فرجهٔ دوازده‌وجهی منتظم محدب به یال a را تعیین کنید.

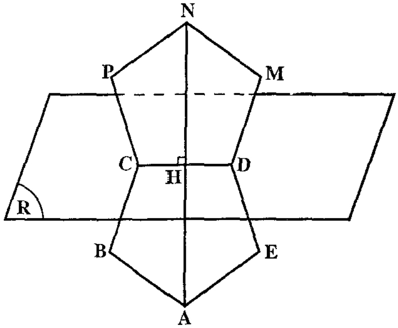
۴.۵.۱. یال، ارتفاع

۸۵. تعداد یالهای گذرنده بر هر رأس از یک دوازده‌وجهی را تعیین کنید.

۱.۵.۵. پاره‌خط

۱.۵.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۸۶. دوازده‌وجهی منتظم به یال a را در نظر می‌گیریم. اگر ABCDE و CDMNP دو وجه مجاور هم باشند، اندازهٔ پاره‌خط AN (شکل) را تعیین کنید.



۱.۵.۶. شعاع کره

۱.۶.۵.۱. اندازهٔ شعاع کره

۸۷. اندازهٔ شعاع کرهٔ محاطی و شعاع کرهٔ محیطی دوازده‌وجهی منتظم محدب به یال a را تعیین کنید.

۱.۵.۷. مساحت

۱.۷.۵.۱. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۷.۵.۱. اندازهٔ مساحت کل

۸۸. اندازهٔ مساحت کل رویهٔ دوازده‌وجهی منتظم محدب به یال a را تعیین کنید.

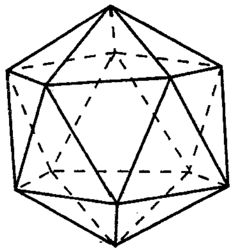
۸۹. اندازهٔ حجم دوازده‌وجهی منتظم محدب به یال a را تعیین کنید.

۹۰. تقویمی رومیزی به شکل دوازده‌وجهی منتظمی است که نام هر ماه روی یکی از ۱۲ وجه پنج ضلعی شکل آن، نوشته شده است. چند طریق اساساً متفاوت برای نوشتن ماهها روی وجه‌های این دوازده‌وجهی وجود دارد؟

۶.۱. بیست وجهی منتظم

۱.۶.۱. تعریف و قضیه

تعریف. بیست‌وجهی منتظم از بیست مثلث متساوی‌الاضلاع همنهشت به وجود می‌آید. بیست وجهی منتظم دارای ۳۰ یال، ۱۲ رأس و ۲۰ وجه است.



۲.۶.۱. نقطه، خط، صفحه

۹۱. بر هر رأس از یک بیست‌وجهی منتظم، چند وجه و چند یال می‌گذرد؟

۳.۶.۱. زاویه

۱.۳.۶.۱. اندازهٔ زاویه

۹۲. اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ بیست‌وجهی منتظم محدب را تعیین کنید.

۴.۶.۱. یال، ارتفاع

۱.۴.۶.۱. یال

۹۳. اندازهٔ ارتفاع هر وجه یک بیست‌وجهی منتظم مساوی $۶\sqrt{۳}$ است. اندازهٔ یال بیست‌وجهی منتظم را بیابید.

۱.۶.۵. پاره‌خط

۹۴. اندازهٔ پاره‌خط واصل بین هر دو رأس روبه‌روی یک بیست‌وجهی منتظم را که طول یال آن مساوی a است، تعیین کنید.

۱.۶.۶. شعاع کره

۱.۶.۶.۱. اندازهٔ شعاع کره

۹۵. مطلوب است شعاع کرهٔ محاطی و شعاع کرهٔ محیطی بیست‌وجهی منتظم، به شرطی که هر یال آن مساوی a باشد.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۱.۶.۷. مساحت

۱.۶.۷.۱. اندازهٔ مساحت

۱.۶.۷.۱.۱. اندازهٔ مساحت کل

۹۶. سطح کل بیست‌وجهی منتظم را به دست آورید. یال آن را a فرض کنید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۱.۶.۸. حجم

۱.۶.۸.۱. اندازهٔ حجم

۹۷. اگر یال بیست‌وجهی منتظم برابر a باشد، حجم آن را به دست آورید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۲.۸.۶.۱. نسبت حجمها

۹۸. اگر هر یال یک بیست وجهی منتظم برابر a باشد، نسبت حجم آن را به حجم کرهٔ محاط در آن پیدا کنید.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

بخش ۲

• منشور

۱.۲.تعریف و قضیه

۲.۲.نقطه، خط، صفحه

۲.۲.۱. نقطه

۲.۲.۱.۱. رأس

۲.۲.۱.۲. نقطه‌ها همصفحه‌اند

۲.۲.۲. خط

۲.۲.۲.۱. خطها همصفحه‌اند

۲.۲.۳. صفحه

۲.۲.۳.۱. صفحه‌ها برهم عمودند

۲.۲.۳.۲. وجه‌ها مساوی‌اند

۲.۲.۴. خط و صفحه

۲.۲.۴.۱. خط عمود بر صفحه است

۲.۲.۴.۲. خط موازی صفحه نیست

۳.۲. زاویه

۲.۳.۱. اندازهٔ زاویه

۲.۳.۱.۱. اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط

۲.۳.۱.۲. اندازهٔ زاویهٔ بین دو صفحه

۲.۳.۱.۳. اندازهٔ زاویهٔ بین خط و صفحه

۲.۳.۲. زاویهٔ مسطحهٔ فرجه

۲.۳.۲.۱. اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ فرجه

۲.۲.۲.۳.۲. رابطهٔ بین زاویه‌های مسطحهٔ فرجه

۴.۲. یال، ارتفاع، قطر
۱.۴.۲. یال
۱.۱.۴.۲. اندازهٔ یال
۲.۱.۴.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت
۲.۴.۲. ارتفاع
۱.۲.۴.۲. اندازهٔ ارتفاع
۳.۴.۲. قطر

۵.۲. پاره‌خط
۱.۵.۲. اندازهٔ پاره‌خط
۱.۱.۵.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها
۲.۱.۵.۲. نسبت پاره‌خطها

۶.۲. شعاع کره
۱.۶.۲. اندازهٔ شعاع کره

۷.۲. مساحت
۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت
۱.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت جانبی
۲.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت کل
۳.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت مقطع
۴.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت جانبی و مساحت کل
۵.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت جانبی، مساحت مقطع

۸.۲. حجم
۱.۸.۲. اندازهٔ حجم
۱.۱.۸.۲. اندازهٔ حجم منشور

۲.۸.۱.۲. اندازهٔ حجم شکلهای ایجاد شده
۲.۸.۲. نسبت حجمها
۳.۸.۲. رابطهٔ بین حجمها
۴.۸.۲. اندازهٔ سطح جانبی و حجم منشور
۵.۸.۲. اندازهٔ سطح جانبی، سطح کل و حجم منشور

۹.۲. رابطهٔ متری

۱۰.۲. مکان هندسی

۱۱.۲. رسم

۱.۱۱.۲. رسم صفحه

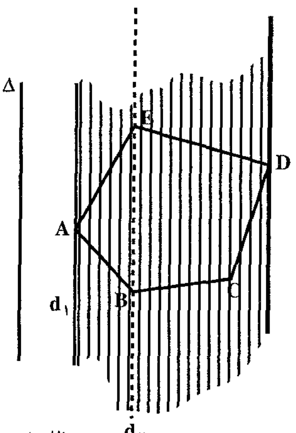
۱۲.۲. برش، مقطع

۱۳.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۱۴.۲. مسأله‌های ترکیبی

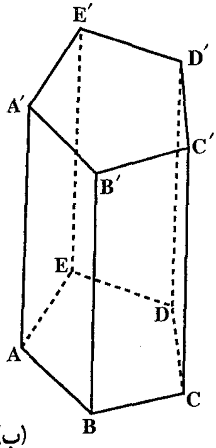
بخش ۲. منشور

۱.۲.تعریف و قضیه



(الف)

سطح منشوری. چندضلعی مسطح... ABCDE و امتداد Δ را که با صفحهٔ آن موازی نیست، درنظر می‌گیریم. مجموعهٔ خطهای موازی Δ که هر یک بر نقطه‌ای از چندضلعی می‌گذرد، سطحی پدید می‌آورد که آن را سطح منشوری می‌گوییم، (شکل الف) یعنی: سطح منشوری عبارت از مجموعهٔ خطهایی است که هریک بر نقطه‌ای از یک چندضلعی بگذرد و با امتدادی که با صفحهٔ چندضلعی موازی نیست، موازی باشد.
در هر سطح منشوری، چندضلعی مانند... ABCDE را چندضلعی هادی و هر خط از مجموعهٔ خطهای موازی Δ را، یک مولد سطح منشوری می‌گوییم.
در سطح منشوری، مجموعهٔ مولدهایی که بر نقطه‌های یک ضلع از چندضلعی هادی می‌گذرند، در یک صفحه واقعند، هریک از این صفحه‌ها را یک وجه سطح منشوری می‌نامیم. مولدهایی که از رأسهای چندضلعی هادی می‌گذرند، یالهای سطح منشوری نامیده می‌شوند. هر یال از سطح منشوری، فصل مشترک دو وجه مجاور آن است. مانند مولدهای d_1، d_2 و ... در شکل (الف).
هر صفحه که با مولدهای سطح منشوری موازی نباشد، سطح منشوری را در یک چندضلعی قطع می‌کند. این گونه چندضلعیها را مقطع سطح منشوری با صفحه می‌گوییم.



(ب)

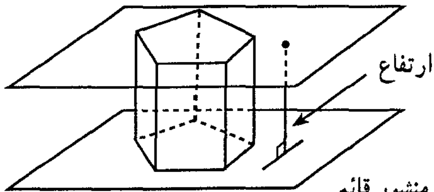
منشور. منشور جسمی است که مابین یک سطح منشوری و دو مقطع متوازی محصور باشد (شکل ب). دو مقطع متوازی را قاعدهٔ منشور می‌نامند و بنابراین دو قاعدهٔ هر منشور متساوی‌اند.

قسمتی از سطح منشوری را که مابین دو قاعده محصور است، سطح جانبی منشور گویند. سطح جانبی هر منشور از یک عده متوازی‌الاضلاع که آنها را وجوه جانبی منشور می‌نامند، تشکیل شده است. منشور را، به‌وسیلهٔ تعداد ضلعهای قاعدهٔ آن می‌نامند. مانند منشور سه‌پهلو یا چهارپهلو و غیره.

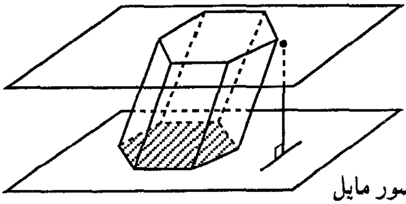
قطعه‌هایی از یالهای جانبی سطح منشوری که مابین دو قاعده محصورند، متساوی‌اند و آنها را یالهای جانبی می‌نامند.

ارتفاع منشور. ارتفاع هر منشور عبارت است از فاصلهٔ صفحه‌های دو قاعدهٔ آن.

منشور قائم و منشور مایل. منشور قائم منشوری است که یالهای‌جانبی آن برصفحه‌های دو قاعده عمود باشد. در این حالت وجه‌های جانبی مستطیل می‌باشند و ارتفاع با طول هر یال جانبی مساوی است. هر منشور را که قائم نباشد، مایل گویند.

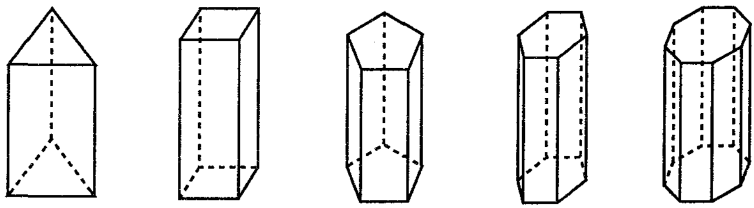


منشور قائم

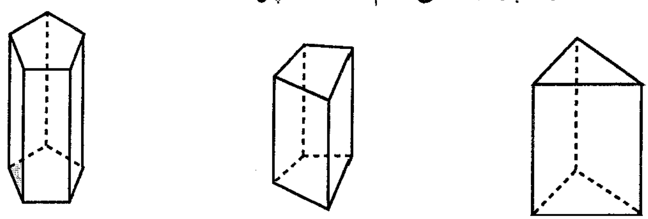

منشور مایل

منشور ناقص. منشور ناقص جسمی است که مابین سطح منشوری و دو مقطع مسطح غیر متوازی محصور باشد. این دو مقطع غیرمتوازی را باید طوری رسم کرد که فصل

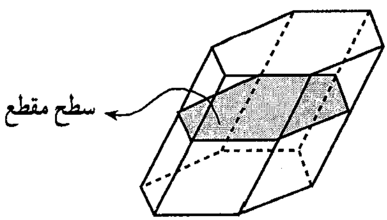
مشترک صفحه‌های آنها سطح منشوری را قطع نکند. در هر منشور ناقص، وجه‌های جانبی ذوزنقه‌اند (و در بعضی حالتهای مخصوص ممکن است مثلث باشند).
چگونگی محاسبهٔ حجم و سطح منشور ناقص، در بخش ۶. هرم، خواهد آمد.
منشور منتظم. گاهی منشور قائمی را که قاعدهٔ آن چندضلعی منتظم باشد، منشور منتظم می‌نامند. در این حالت وجه‌های جانبی عموماً مستطیلهای متساوی‌اند. شکلهای زیر چند منشور منتظم را نشان می‌دهند.



منشور را براساس شکل چندضلعی قاعده‌های آن نیز، نامگذاری می‌کنند. به‌طور مثال اگر قاعدهٔ یک منشور مثلث باشد، آن را منشور مثلثی می‌نامند. به این ترتیب، مکعب مستطیل یک منشور چهارضلعی قائم است. (چرا؟)



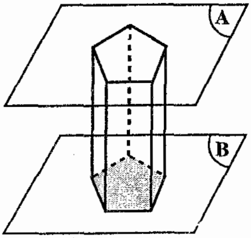
فیزیکدانها معمولاً به قطعهٔ شیشه‌ای مثلث شکلی که می‌تواند نور را به طیفهای آن تجزیه کند، منشور می‌گویند. این قطعه شیشه، یک منشور مثلثی قائم است.
تعریف. سطح مقطع یک شکل فضایی، شکلی است که از برخورد آن با یک صفحه حاصل می‌شود.



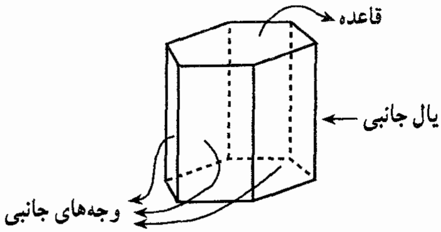
مقطع قائم منشور. هرگاه سطح منشوری را با صفحه‌ای عمود بر یالهای آن قطع کنیم، چندضلعی مقطع را، مقطع قائم منشورهای حاصل از آن سطح منشوری می‌نامند. واضح است که در این صورت، هر ضلع از مقطع قائم بر یالها عمود می‌باشد. در منشور قائم دو قاعده، مقطعهای قائم می‌باشند.

منشور را به‌صورت زیر نیز تعریف می‌کنند:

منشور یک چندوجهی است که دو وجه آن همنهشت بوده و در دو صفحهٔ موازی قرار گیرند و وجه‌های دیگر آن متوازی‌الاضلاع باشند.



دو وجه همنهشت منشور که در دو صفحهٔ موازی قرار می‌گیرند، قاعده‌های منشور نام دارند. وجه‌های دیگر که متوازی‌الاضلاع هستند، وجه‌های جانبی و یالهایی از منشور که محل تلاقی وجه‌های جانبی منشور هستند، یالهای جانبی نامیده می‌شوند که همگی با هم موازی‌اند (شکل). ارتفاع منشور پاره‌خطی است که صفحه‌های دو قاعده را به هم وصل می‌کند و بر هر دو قاعده عمود است.



۹۹. **قضیه.** اگر دو صفحهٔ متوازی (و غیر موازی با یالها) سطح منشوری را قطع کنند مقطعها، چندوجهیهای متساوی‌اند.

مساحت جانبی و مساحت کل منشور. مساحت جانبی هر منشور، مجموع مساحتهای وجه‌های جانبی آن است. برای تعیین مساحت جانبی منشور، در حالت کلی باید مساحت هر یک از وجه‌های جانبی را تعیین کرده، و مجموع آنها را حساب کنیم.

مساحت کل منشور برابر با مجموع مساحت جانبی و مساحتهای دو قاعدهٔ آن می‌باشد.
مساحت جانبی منشور را با استفاده از قضیهٔ زیر نیز می‌توان حساب کرد.

۱۰۰. **قضیه.** مساحت جانبی منشور برابر است با حاصلضرب محیط مقطع قائم در اندازهٔ یال آن.

اندازه‌گیری حجم

حجم. یک چندوجهی نیز مانند پاره‌خط و سطح و زاویه، قابل اندازه‌گیری می‌باشد. هر چند وجهی فضا را به سه ناحیهٔ جدا از هم تقسیم می‌کند: درون، برون و روی چندوجهی. این سه مفهوم را بدیهی‌وار می‌پذیریم.

در مورد حجم هم مانند سطحها، نمی‌توان دو حجم را به‌کمک انطباق با هم سنجید. می‌پذیریم که حجم هر چندوجهی را می‌توان با اصول زیر اندازه‌گیری کرد:

الف. اندازهٔ حجم هرچندوجهی عددی مثبت است.

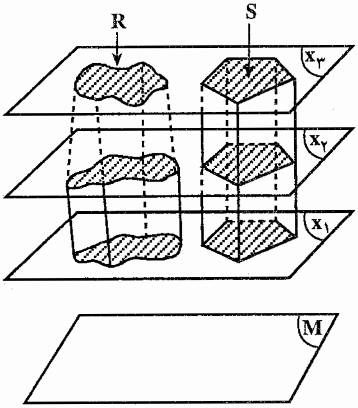
ب. اندازهٔ حجم هر مکعب مستطیل، برابر است با حاصلضرب درازاهای سه یال همرس آن که برحسب واحد درازای معینی اندازه‌گیری شده‌اند.

پ. هرگاه درون یک چندوجهی در درون یک چندوجهی دیگر قرار گیرد، اندازهٔ حجم اولی از اندازهٔ حجم دومی بزرگتر نیست.

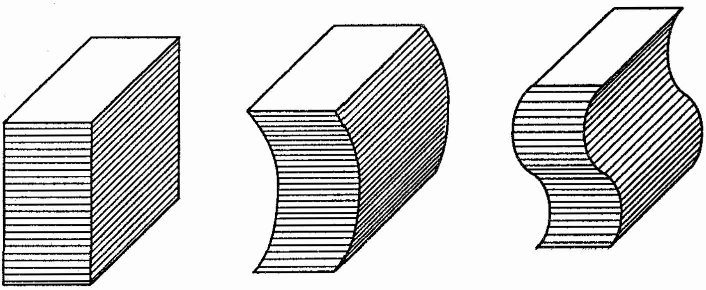
ت. هرگاه صفحه‌ای یک چندوجهی را به دو چندوجهی بخش کند، آن‌گاه اندازهٔ حجم چندوجهی اصلی برابر است با مجموع اندازه‌های حجمهای دو چندوجهی به‌دست آمده.

ث. اندازهٔ حجم یک چندوجهی با جابه‌جا شدن آن تغییر نمی‌کند.

ج. اصل کاوالیری (Cavalier). اگر دو حجم R و S و صفحهٔ M چنان باشند که هر صفحه موازی با M، یا هر دو حجم را قطع کند و یا هیچکدام را، و چنانچه هر دو را قطع کند، مساحتهای مقطعهای به‌دست آمده برابر باشند، آن‌گاه اندازهٔ حجم R با اندازهٔ حجم S برابر است (شکل ۱). برای درک اصل کاوالیری به شکلهای صفحهٔ بعد توجه کنید. در شکل (۲) مقطعهای سه جسم (الف)، (ب) و (ج) با هر صفحهٔ افقی مستطیلهایی هم‌ارز هستند و درنتیجه جسمها، حجم مساوی دارند. همچنین در شکل (۳) مقطعهای دو جسم (د) و (هـ) با هر صفحهٔ افقی یک دایره و یک مربع هم‌ارز هستند و در نتیجه دو جسم، حجم مساوی دارند.

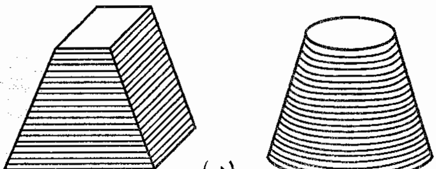


(۱)



(الف) (ب) (ج)

(۲)



(هـ) (د)

(۳)

(**قرارداد**. معمولاً برای اختصار به‌جای «اندازهٔ حجم» واژهٔ «حجم» را به‌کار می‌بریم.)

تبصره. توضیح این که اصل کاوالیری، جزء اصلهای هندسهٔ اقلیدسی نیست و به کمک انتگرالها قابل اثبات است. با پذیرفتن آن، محاسبهٔ حجم بعضی از اجسام ساده‌تر می‌شود. بدیهی است که بدون پذیرفتن این اصل نیز حجم این اجسام قابل محاسبه است.

واحد حجم. مکعبی که درازای هر یال آن ۱ باشد، واحد حجم نامیده می‌شود. چنانچه واحد درازا، متر، سانتیمتر، فوت، گز یا غیره باشد، واحد حجم را متر مکعب، سانتیمتر مکعب، فوت مکعب، گز مکعب یا غیره می‌نامند.

حجم منشور

۱۰۱. **قضیه.** حجم منشور برابر است با مساحت قاعده ضرب در ارتفاع آن.

۱۰۲. **قضیه.** ثابت کنید که حجم یک منشور منتظم برابر است با حاصلضرب مساحت جانبی آن، در نصف سهم قاعده‌اش.

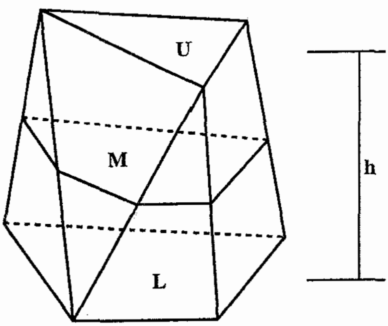
۱۰۳. **قضیه.** هرگاه سه وجه دوبه‌دو متقاطع از منشوری با سه‌وجه دوبه‌دو متقاطع از منشور دیگری نظیر به نظیر متساوی بوده و به اوضاع متشابهی قرار گرفته باشند، دو منشور متساوی‌اند.

۱۰۴. **قضیهٔ اصلی.** هر منشور مایل معادل است با منشور قائمی که قاعدهٔ آن مقطع قائم منشور مایل و ارتفاع آن یال جانبی منشور مایل باشد.

منشورنما (پریسماتوئید)

چند وجهیی است که رأسهای آن در دو صفحهٔ موازی قرار دارند. دو وجه واقع در این دو صفحهٔ موازی، قاعده‌های منشورنما خوانده می‌شوند. فاصلهٔ عمودی بین دو صفحه، ارتفاع منشورنما نام دارد، و مقطع موازی با قاعده‌ها و به یک فاصله از آنها مقطع میانی منشورنما نامیده می‌شود. حجم منشورنما را با V، مساحتهای قاعدهٔ بالا، قاعدهٔ پایین، و مقطع میانی را با U، L، M، و ارتفاع را با h، همچنان که در شکل نشان داده شده، نمایش می‌دهیم. خواهیم دید که:

$$V=\frac{h(U+L+۴M)}{۶}$$



در مقالهٔ دوم متریکا، هرون، برای حجم منشورنمایی که دارای قاعده‌های مستطیل شکل همجهت و با زوج ضلعهای متناظر a، b، c و d است، فرمول

$$V=h\left[\frac{(a+c)(b+d)}{۴}+\frac{(a-c)(b-d)}{۱۲}\right]$$

را می‌دهد.

در بخش ۶. هرم، دربارهٔ منشورنما، مطالب بیشتری خواهیم دید.

۱۰۵. آیا می‌توان منشور را به‌عنوان یک چندوجهی تعریف کرد که دو وجه آن چندضلعیهای مساوی با ضلعهای متناظر موازی باشند و بقیهٔ وجه‌های آن، به صورت متوازی‌الاضلاعهایی درآمده باشند.

مسأله‌های دشوار ریاضی

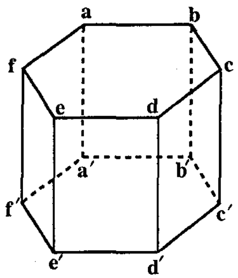
۱۰۶. آیا کنج و سطح منشوری را جسم هندسی می‌توان درنظر گرفت؟ چرا؟

۱۰۷. ساده‌ترین سطح منشوری کدام است؟ چرا؟ ساده‌ترین منشورها چند وجه دارد؟

۲.۲. نقطه، خط، صفحه

۱.۲.۲. نقطه

۱.۱.۲.۲. رأس



۱۰۸. شکل روبه‌رو نمایی از یک منشور قائم است که آن را P می‌نامیم. قاعده‌های P شش‌ضلعیهای منتظم هستند.
تغییر مکانی درنظر بگیرید که رأس a را به رأس e′ و رأس b را به رأس d′ تبدیل می‌کند و در کل منشور P را به خودش تبدیل می‌کند. در این تغییر مکان، رأس f′ به کدام رأس تبدیل می‌شود؟

الف) b   ب) c   ج) d   د) e   هـ) f

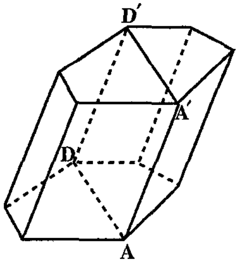
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

۲.۱.۲.۲. نقطه‌ها همصفحه‌اند

۱۰۹. در یک منشور ناقص مثلث‌القاعده، نقطه‌های برخورد قطرهای وجه‌ها و نقطه‌های برخورد امتداد ضلعهای قاعده‌ها، روی یک صفحه قرار دارند.

۲.۲.۲. خط

۱.۲.۲.۲. خطها همصفحه‌اند



۱۱۰. ثابت کنید که هر دو یال جانبی غیرمجاور یک منشور همصفحه‌اند و اشتراک صفحه‌ای که از آنها می‌گذرد با منشور، یک ناحیهٔ متوازی‌الاضلاعی است. (ابتدا بیان ریاضی حکم را براساس شکل روبه‌رو بنویسید.)

۳.۲.۲. صفحه

۱.۳.۲.۲. صفحه‌ها برهم عمودند

۱۱۱. ثابت کنید صفحه‌های A_1D_1C و BB_1D_1D از منشور چهارگوش منتظم $ABCDA_1B_1C_1D_1$ متعامد هستند.

۲.۳.۲.۲. وجه‌ها مساوی‌اند

۱۱۲. دو منشور مثلث‌القاعدهٔ $ABCA'B'C'$ و $A_1B_1C_1A_1'B_1'C_1'$ که رأس به رأس متناظرند، دارای وجه‌های جانبی متناظر مساوی و در یک جهت هستند، با هم مساوی‌اند. (جهت منشور $ABCA'B'C'$ جهت کنج سه‌وجهی $A.BCA'$ است.)

۴.۲.۲. خط و صفحه

۱.۴.۲.۲. خط عمود بر صفحه است

۱۱۳. قضیه. اگر دو صفحه متعامد باشند، آن‌گاه، خط مستقیم گذرنده بر یکی از آنها که با فصل مشترک دو صفحه زاویهٔ قائمه درست می‌کند، بر صفحهٔ دیگر عمود خواهد بود.

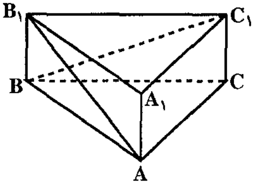
۲.۴.۲.۲. خط موازی صفحه نیست

۱۱۴. منشور $ABCA_1B_1C_1$ با قاعدهٔ مثلثی مفروض است. ثابت کنید، قطرهای AB_1، BC_1 و CA_1 از وجه‌های جانبی نمی‌توانند با یک صفحه موازی باشند.

۲.۳. زاویه

۲.۳.۱. اندازهٔ زاویه

۲.۳.۱.۱. اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط



۱۱۵. در منشور مثلثی منتظم (شکل)، $AA_1 = \frac{1}{\sqrt{5}}AB$ را داریم. زاویهٔ بین خطهای AB_1 و BC_1 را به‌دست آورید.

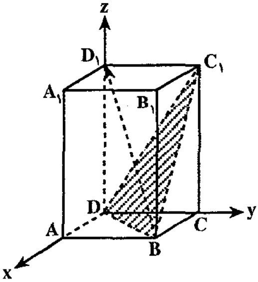
۱۱۶. در منشور چهاربر منتظم $ABCDA_1B_1C_1D_1$ طول ارتفاع، نصف طول ضلع قاعدهٔ منشور است. بیشترین اندازهٔ زاویهٔ A_1MC_1 وقتی نقطهٔ M بر روی یال AB قرار داشته باشد، چقدر است؟

۲.۳.۱.۲. اندازهٔ زاویهٔ بین دو صفحه

۱۱۷. ABC قاعدهٔ منشور منتظم مثلث‌القاعده‌ای است که طول ضلع آن a می‌باشد. نقطه‌های A_1، B_1 و C_1 روی یالهای جانبی منشور و بترتیب به فاصله‌های $\frac{a}{2}$، a و $\frac{3a}{2}$ از صفحهٔ قاعده قرار دارند. زاویهٔ بین صفحه‌های ABC و $A_1B_1C_1$ را پیدا کنید.

۲.۳.۱.۳. اندازهٔ زاویهٔ بین خط و صفحه

۱۱۸. در منشور مثلث‌القاعدهٔ منتظم $ABCA_1B_1C_1$ رابطهٔ $AA_1 = AB$ را داریم. زاویهٔ بین قطر AB و صفحهٔ AA_1C_1C را بیابید.



۱۱۹. در منشور چهارگوش منتظم، نسبت طول یال جانبی به ضلع قاعده برابر ۲ است. زاویهٔ بین قطر BD_1 منشور و صفحهٔ BC_1D را بیابید (شکل).

۱۲۰. ثابت کنید، برای هر مقدار طبیعی $n > 1$، بین همهٔ منشورهای منتظم با قاعدهٔ $2n$ ضلعی $A_1A_2 \cdots A_{2n}A'_1A'_2 \cdots A'_{2n}$، به شرط ثابت بودن شعاع R از دایرهٔ محیطی قاعده، بزرگترین زاویهٔ بین قطر $A_1A'_{n+1}$ و صفحهٔ $A_1A_3A'_{n+2}$، متعلق به منشوری است که، برای آن، داشته باشیم:

$$A_1A'_1 = 2R\cos\frac{180^\circ}{2n}$$

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، بلغارستان، ۱۹۸۲

۲.۳.۲. زاویهٔ مسطحهٔ فرجه

۱.۲.۳.۲. اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ فرجه

۱۲۱. منشور مثلث‌القاعده $ABCA_1B_1C_1$ داده شده است. می‌دانیم چهاروجهیهای $ABCC_1$، ABB_1C_1 و $AA_1B_1C_1$ با هم برابرند. فرجه‌های بین صفحهٔ قاعده و وجه‌های جانبی منشور را پیدا کنید. در صورتی که قاعدهٔ منشور، مثلث قائم‌الزاویه نامتساوی‌الساقین است.

۲.۲.۳.۲. رابطهٔ بین زاویه‌های مسطحهٔ فرجه

۱۲۲. قاعدهٔ منشوری، یک nضلعی محدب است. مجموع فرجه‌های این منشور را تعیین کنید.

۱۲۳. ثابت کنید مجموع فرجه‌های تشکیل شده به وسیلهٔ وجه‌های جانبی یک منشور n پهلو با یکی از قاعده‌های آن، از ۲ قائمه بیشتر و از $2(n-1)$ قائمه کمتر است.

۱۲۴. ثابت کنید مجموع فرجه‌های تشکیل شده به‌وسیلهٔ وجه‌های جانبی یک منشور مثلث‌القاعده با یکی از قاعده‌ها، بین دو قائمه و چهار قائمه است.

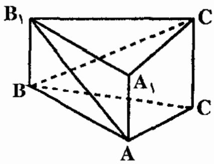
۴.۲. یال، ارتفاع، قطر

۱.۴.۲. یال

۱.۱.۴.۲. اندازهٔ یال

۱۲۵. همهٔ یالهای منشور مثلث‌القاعدهٔ منتظم $ABCA_1B_1C_1$ با هم برابرند. نقطهٔ K را متمایز از A و B روی AB و M را روی B_1C_1 و L را روی وجه ACC_1A_1 اختیار می‌کنیم. خط KL با صفحه‌های ABC و ABB_1A_1، و خط LM با صفحه‌های BCC_1B_1 و ACC_1A_1 وخط KM با صفحه‌های BCC_1B_1 و ACC_1A_1 زاویه‌های مساوی تشکیل داده‌اند. اگر $KL = KM = 1$ باشد، طول یال منشور را پیدا کنید.

۱۲۶. در منشور مثلثی منتظم (شکل)، زاویهٔ بین خطهای AB_1 و BC_1 برابر $\operatorname{Arc}\cos(\frac{1}{4})$ بوده و طول ضلع قاعده برابر a است. طول یال جانبی منشور را به‌دست آورید.



۱۲۷. طول ضلع قاعدهٔ منشور مثلث‌القاعدهٔ منتظم $ABCA_1B_1C_1$ برابر a است. دو یال چهاروجهی منتظمی روی خطهای مستقیم A_1B و B_1C قرار دارد. طول یال این چهاروجهی را به دست آورید.

۱۲۸. دانش‌آموزی سیمی به درازای ۱/۲۰ متر را به شکل یالهای یک منشور با قاعده‌های مربع درمی‌آورد. هرگاه درازای هر یال جانبی سه برابر درازای هر ضلع قاعده باشد، درازای یال جانبی چند سانتیمتر است؟

الف) ۱۶   ب) ۱۸   ج) ۲۲/۵   د) ۲۴   هـ) ۲۷

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

۲.۱.۴.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۲۹. یالهای منشور کدام مولدهای آن هستند؟

۱۳۰. چرا در سطح منشوری امتداد مولدها نباید با صفحهٔ چندضلعی هادی موازی باشد؟

۲.۴.۲. ارتفاع

۱.۲.۴.۲. اندازهٔ ارتفاع

۱۳۱. طول ضلع قاعدهٔ منشور منتظم $ABCA_1B_1C_1$ ، برابر a می‌باشد. نقطه‌های M و N را بترتیب وسطهای یالهای A_1B_1 و AA_1 درنظر می‌گیریم. تصویر پاره‌خط BM روی C_1N برابر $\frac{a}{2\sqrt{5}}$ شده است. ارتفاع منشور را پیدا کنید.

۱۳۲. در منشور مایلی، طول یال جانبی آن ۲۰ سانتیمتر بوده و با صفحهٔ قاعده، زاویهٔ $60°$ می‌سازد. ارتفاع منشور را تعیین کنید.

۱۳۳. چرا ارتفاع یک منشور مایل کوتاهتر از طول یال جانبی آن است؟

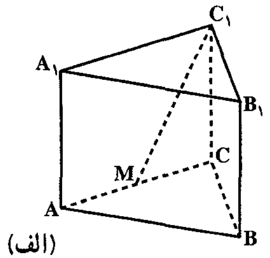
۳.۴.۲. قطر

۱۳۴. اگر در یک منشور چهار پهلو، سه قطر همرس باشند، قطر چهارمی نیز از نقطهٔ همرسی آنها می‌گذرد و این منشور یک متوازی‌السطوح است.

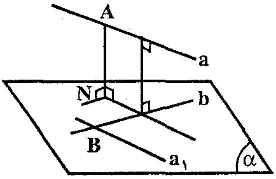
۵.۲. پاره‌خط

۱.۵.۲. اندازهٔ پاره‌خط

۱۳۵. یک سطح منشوری که مقطع قائم آن مثلث ABC به ضلعهای a، b و c است، داده شده است. روی یالهای این کنج و در یک طرف مقطع، طولهای $AA' = x$ ، $BB' = y$ و $CC' = z$ را جدا می‌کنیم. x، y و z را چنان تعیین کنید که سه وجه جانبی منشور ناقص $ABCA'B'C'$ معادل یکدیگر باشند. بحث کنید و نشان دهید که اگر این مسأله یک جواب داشته باشد، آن‌گاه تعداد بیشماری جواب دارد و تمام صفحه‌های $A'B'C'$ به‌دست آمده، بر یک خط ثابت می‌گذرند.



(الف)

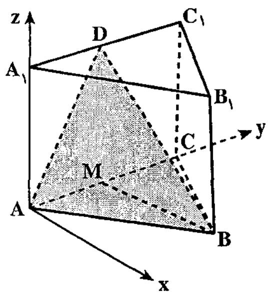


۱۳۶. در منشور مثلث‌القاعدهٔ منتظم شکل، تساویهای $AA_1 = ۳cm$ و $AB = ۴cm$ را داریم. نقطهٔ M میانگاه یال AC است. فاصلهٔ بین خطهای AB و C_1M را محاسبه کنید.

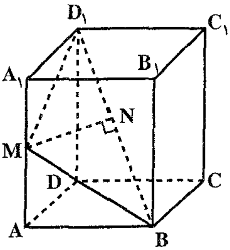
قضیهٔ فرعی. در یک چهاروجهی منتظم که طول یال آن a است، هر پاره‌خط واصل میانگاههای یالهای متناظر، عمود مشترک آن یالها بوده و طول این پاره‌خط برابر $\frac{a}{\sqrt{۲}}$ است. برای یافتن فاصلهٔ یال خطهای متنافر، لازم است که عمود مشترک آنها را رسم کنیم. دو خط متنافر را همیشه می‌توان روی دو صفحهٔ موازی رسم کرد. طرحی از رسم یکی از این صفحه‌ها (صفحهٔ گذرنده بر خط b) در شکل نشان داده شده است: B نقطهٔ دلخواهی از خط b است، $a_1 \| a$، $a_1 \cap b = B$، $b \subset \alpha$، $a_1 \subset \alpha$. فاصلهٔ بین خطهای a و b با فاصلهٔ بین هر نقطهٔ خط a از صفحهٔ α برابر است. از خط a نیز می‌توان صفحهٔ β را به موازات صفحهٔ α رسم کرد. فاصلهٔ بین صفحه‌های α و β برابر فاصلهٔ بین خطهای a و b است.

۱۳۷. همهٔ یالهای منشور منتظم $ABCA_1B_1C_1$ با هم برابر و طولی برابر a دارند. پاره‌خطهایی را درنظر بگیرید که دو سرشان بر روی قطرهای BC_1 و CA_1 قرار گرفته و با صفحهٔ ABB_1A_1 موازی باشند. کدام یک از این پاره‌خطها کوتاهترین طول را دارد؟

۱۳۸. در منشور مثلث‌القاعدهٔ منتظم شکل، $AB = ۴cm$ و $AA_1 = ۳cm$ را داریم. فاصلهٔ رأس C_1 را از صفحهٔ ADB پیدا کنید. نقطهٔ D میانگاه یال A_1C_1 است.



۱۳۹. طول ضلع قاعدهٔ منشور چهارگوش منتظم $ABCDA_1B_1C_1D_1$ (شکل)، برابر a است. تصویر عمود رسم شده در M، میانگاه یال AA_1 را بر خط BD_1 نشان داده و طول این عمود را بیابید.



۱۴۰. در منشور چهارگوش منتظم $ABCDA_1B_1C_1D_1$، طول عمود رسم شده از رأس B بر صفحهٔ AD_1C، با شرط $AB = a$ و $AA_1 = b$ را بیابید.

۱.۱.۵.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۱۴۱. مساحت قاعدهٔ منشور nضلعی منتظم، برابر S است. دو صفحه، تمام یالهای جانبی منشور را طوری قطع می‌کنند که بخشی از منشور که بین این صفحه‌ها محصور می‌شود، حجمی برابر V دارد. مجموع طولهای پاره‌خطهایی از یالهای جانبی منشور را که بین صفحه‌های قاطع قرار دارند، حساب کنید؛ در صورتی که دو صفحه، نقطهٔ مشترکی در داخل منشور ندارند.

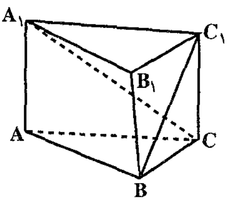
۲.۱.۵.۲. نسبت پاره‌خطها

۱۴۲. در منشور مثلث‌القاعدهٔ $ABCA_1B_1C_1$، دو مقطع به این ترتیب مرور داده شده‌اند: یکی از آنها بر یال AB و وسط یال CC_1 می‌گذرد، و دیگری بر یال A_1B_1 و وسط یال CB می‌گذرد، نسبت طول پاره‌خطی از فصل مشترک دو صفحه را که در داخل منشور محصور شده، به طول یال AB پیدا کنید.

۱۴۳. D وسط یال A_1C_1 از منشور مثلث‌القاعدهٔ منتظم $ABCA_1B_1C_1$ است. هرم مثلث‌القاعدهٔ $SMNP$ طوری قرار گرفته است که صفحه قاعدهٔ MNP آن، بر صفحهٔ ABC منطبق است و رأس M بر امتداد AC قرار دارد و $CM = \frac{1}{2}AC$ و یال SN از نقطهٔ D می‌گذرد و یال SP پاره‌خط BB_1 را قطع می‌کند. پاره‌خط BB_1 در نقطهٔ تقاطع

به چه نسبتی تقسیم می‌شود؟

۱۴۴. طول هر یک از یالهای منشور منتظم $ABCA_1B_1C_1$ برابر a است. نقطه‌های M و N را بترتیب روی قطرهای AB_1 و BC_1 از وجه‌های منشور طوری اختیار می‌کنیم که $MN = \frac{a}{\sqrt{3}}$ و $MN \perp AB$ باشد. نقطه‌های M و N به چه نسبتی پاره‌خطهای AB_1 و BC_1 را تقسیم می‌کنند؟



۱۴۵. برشی را در منشور مثلثی با عبور دادن صفحه‌ای از نقطه‌های A_1 و C (شکل) به موازات خط BC_1 رسم می‌کنیم. یال AB به‌وسیلهٔ این صفحه، به چه نسبتی تقسیم می‌شود؟

۶.۲. شعاع کره

۱.۶.۲. اندازهٔ شعاع کره

۱۴۶. منشور منتظم شش پهلویی که ضلع قاعدهٔ آن مساوی ۶ و ارتفاع آن مساوی بزرگترین قطر قاعدهٔ آن است، داده شده است. شعاع کره‌ای را بیابید که بر قاعده‌های این منشور مماس است.

۷.۲. مساحت

۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت

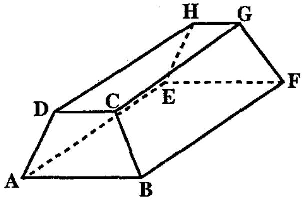
۱.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت جانبی

۱۴۷. ثابت کنید که مساحت رویهٔ جانبی منشور قائم از فرمول $S = hp$ به‌دست می‌آید که در آن h ارتفاع منشور و p محیط قاعده است.

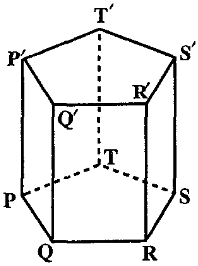
۱۴۸. طول یک یال جانبی منشور قائمی ۳ و محیط قاعدهٔ آن ۳۴ است. مساحت رویهٔ جانبی این منشور چقدر است؟

۱۴۹. سطح جانبی منشور قائمی را که قاعده‌اش لوزی به قطرهای ۴ و ۳ سانتیمتر و ارتفاعش برابر محیط قاعده‌اش می‌باشد، به‌دست آورید.

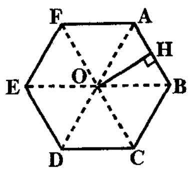
۱۵۰. شکل، یک منشور قائم را نشان می‌دهد که آن را روی یک وجه جانبیش گذاشته‌اند. قاعده‌های این منشور ناحیه‌های ذوزنقه‌ای هستند. طول قاعده‌های این ذوزنقه ۴ و ۹، و طول ساقهای آن ۵ و ۶ است، و $BF = ۱۲$. مساحت رویهٔ جانبی این منشور را به‌دست آورید.



۱۵۱. ارتفاع منشور پنج‌ضلعی قائم (شکل)، ۸ و طول ضلعهای قاعدهٔ آن ۲، ۵، ۷، ۷ و $۸\frac{۱}{۲}$ است. مساحت رویهٔ جانبی این منشور را به‌دست آورید.



۱۵۲. مساحت جانبی منشور منتظمی را حساب کنید که قاعدهٔ آن شش‌ضلعی منتظم بوده و بزرگترین قطر قاعدهٔ آن ۱۸ سانتیمتر و یال جانبی منشور ۱۰ سانتیمتر باشد.

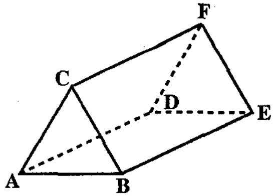


۱۵۳. مساحت جانبی منشور منتظمی را که قاعده‌اش شش‌ضلعی منتظمی به ضلع ۶ و ارتفاعش برابر نصف محیط قاعده‌اش می‌باشد، تعیین کنید.

۱۵۴. در منشور مایلی، مقطع قائم، شش‌ضلعی منتظمی به ضلع ۵ سانتیمتر و طول یال جانبی آن ۱۰ سانتیمتر است. مساحت جانبی این منشور را حساب کنید.

۲.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت کل

۱۵۵. قاعده‌های این منشور، مثلثهای متساوی‌الاضلاع و وجه‌های جانبی آن نواحی مستطیلی است. اگر طول ضلع قاعدهٔ آن ۶ و ارتفاع منشور ۱۰ باشد، مساحت رویهٔ کل منشور را به‌دست آورید.



۱۵۶. منشور قائمی با قاعدهٔ مربعی مفروض است. صفحه‌ای را از قطر قاعدهٔ پایین و یکی از رأسهای قاعدهٔ بالا گذرانده‌ایم. هرمی به‌دست آمده است که مساحت کل آن برابر است با S. مطلوب است مساحت کل منشور، به شرطی که زاویهٔ رأس مثلثی که در مقطع به‌دست می‌آید، برابر α باشد.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۳.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت مقطع

۱۵۷. طول همهٔ یالهای منشور شش‌بر منتظمی برابر a می‌باشد. (طول هر یال) مساحت مقطعی را پیدا کنید که، از یکی از ضلعهای قاعده بگذرد و با صفحهٔ قاعده زاویهٔ α بسازد.

۱۵۸. از ضلع قاعدهٔ یک منشور قائم، که قاعده‌های آن مثلثهای متساوی‌الاضلاع هستند، صفحه‌ای گذرانده‌ایم که با صفحهٔ قاعده، زاویه‌ای برابر α بسازد. مساحت مقطع مثلثی را پیدا کنید که به این ترتیب به‌دست می‌آید. می‌دانیم، حجم هرمی که با این صفحه از منشور جدا می‌شود، برابر است با V.

۱۵۹. منشور منتظم مثلث‌القاعده‌ای که هر ضلع قاعدهٔ آن a می‌باشد، در داخل کره‌ای به شعاع R محاط شده است. مساحت مقطعی از آن را تعیین کنید که صفحهٔ آن از مرکز کره و ضلع قاعدهٔ منشور می‌گذرد.

۴.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت جانبی و مساحت کل

۱۶۰. طول ضلع قاعدهٔ یک منشور قائم شش‌ضلعی منتظم، ۱۰ سانتیمتر و ارتفاع منشور ۱۸ سانتیمتر است. مساحت جانبی و مساحت کل آن را پیدا کنید.

۱۶۱. اگر قاعدهٔ یک منشور قائم، مثلث متساوی‌الاضلاعی به طول ضلع ۸ سانتیمتر و ارتفاع منشور ۱۲ سانتیمتر باشد، مساحت جانبی و مساحت کل این منشور را پیدا کنید.

۵.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت جانبی، مساحت مقطع

۱۶۲. قاعدهٔ یک منشور قائم، یک ناحیهٔ شش‌ضلعی منتظم است. طول یک ضلع قاعده ۲cm و طول یال جانبی آن ۷cm است. رویهٔ جانبی منشور را بیابید. مساحت مقطعی واقع در فاصلهٔ ۵ سانتیمتری قاعده و موازی قاعده را بیابید.

۸.۲. حجم

۱.۸.۲. اندازهٔ حجم

۱.۱.۸.۲. اندازهٔ حجم منشور

۱۶۳. حجم منشوری که مقطع قائم آن در یک دایره محاط باشد، مساوی نصف حاصلضرب مساحت جانبی آن در شعاع دایره است.

۱۶۴. ثابت کنید که حجم هر منشور مثلث‌القاعده برابر است با، نصف حاصلضرب اندازهٔ مساحت یک وجه، در فاصلهٔ آن وجه از یال روبه‌روی آن.

۱۶۵. دو صفحه از داخل منشور مثلث‌القاعدهٔ $ABCA_1B_1C_1$ می‌گذرند. یکی از آنها از رأسهای A، B و C_1 می‌گذرد. دیگری از رأسهای A_1 ، B_1 و C. این دو صفحه، منشور را به چهار قسمت تقسیم می‌کنند. حجم کوچکترین قسمت آن V است. حجم منشور را پیدا کنید.

۱۶۶. اگر ارتفاع یک منشور مثلث‌القاعده دو برابر قطر دایرهٔ محیطی قاعدهٔ آن باشد، این منشور معادل (هم‌ارز) متوازی‌السطوح قائمی است که ابعاد آن ضلعهای قاعدهٔ این منشور هستند.

۱۶۷. قاعدهٔ منشور $ABCA_1B_1C_1$ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a می‌باشد. تصویر منشور بر روی صفحهٔ قاعده، ذوزنقه‌ای با ساق جانبی AB و مساحتی برابر با دو برابر مساحت قاعده می‌باشد. اگر شعاع کره‌ای که بر رأسهای A، B، A_1 و C_1 می‌گذرد، برابر a باشد، حجم منشور را پیدا کنید.

۱۶۸. در قاعدهٔ یک منشور قائم، مثلث متساوی‌الساقینی قرار دارد که محیط آن برابر ۲p و

هریک از دو زاویهٔ برابر آن، برابر α است. از قاعدهٔ این مثلث و انتهای یال مقابل به آن در منشور، صفحه‌ای گذرانده‌ایم. زاویهٔ مجاور به قاعده در مثلث مقطع، برابر است با β. حجم منشور را پیدا کنید.

مسأله‌های دشوار ریاضی

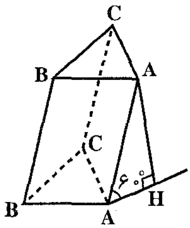
۱۶۹. حجم منشور قائمی که قاعدهٔ آن لوزی به قطرهای ۸ و ۶ سانتیمتر و ارتفاعش نصف محیط قاعدهٔ آن است، به‌دست آورید.

۱۷۰. قاعدهٔ یک منشور قائم عبارت است از لوزی ABCD به ضلع برابر a و زاویهٔ برابر ۶۰ درجه. دو انتهای B_1 و D_1 از قطر قاعدهٔ بالای منشور را با خطهای راست B_1E و D_1F به وسط ضلعهای KD و KB از قاعدهٔ پایین وصل کرده‌ایم. از برخورد این خطهای راست، زاویهٔ B_1OD_1، برابر با α، به‌وجود آمده است. حجم منشور را پیدا کنید.

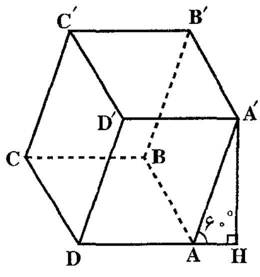
مسأله‌های دشوار ریاضی

۱۷۱. حجم منشور منتظمی به قاعدهٔ شش‌ضلعی منتظم به ضلع ۴ و ارتفاع ۱۰ را تعیین کنید.

۱۷۲. حجم منشور مایل مثلث‌القاعده‌ای را که قاعدهٔ آن مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a = ۱۲ سانتیمتر و یال منشور برابر ضلع قاعده است و با صفحهٔ قاعده زاویهٔ °۶۰ می‌سازد، به‌دست آورید.



۱۷۳. حجم منشور مربع‌القاعدهٔ مایلی را که طول ضلع قاعدهٔ آن $\sqrt{3}$ و یکی از وجه‌هایش مربع و وجه دیگرش لوزی به زاویهٔ °۶۰ است، تعیین کنید.



۱۷۴. ثابت کنید حجم یک منشور ناقص مثلث‌القاعده برابر است با حاصلضرب مساحت مقطع قائم آن، در فاصلهٔ مرکز ثقلهای دو قاعده‌اش.

۱۷۵. حجم یک منشور مثلث‌القاعده برابر است با حاصلضرب مساحت یک قاعده، در فاصلهٔ این قاعده از نقطهٔ همرسی میانه‌های قاعدهٔ دیگر.

۲.۱.۸.۲. اندازهٔ حجم شکلهای ایجاد شده

۱۷۶. در منشور منتظم $ABCA_1B_1C_1$ طول یالهای جانبی و ارتفاع قاعده با هم مساوی و برابر a می‌باشند. دو صفحه به این ترتیب از رأس A می‌گذرد: یکی عمود بر AB_1 و دیگری عمود بر AC_1. از رأس A_1 هم دو صفحه می‌گذرد: یکی عمود بر A_1B و دیگری عمود بر A_1C. حجم چندوجهی محصور بین این چهار صفحه و صفحهٔ BB_1C_1C را پیدا کنید.

۱۷۷. یک منشور مثلث‌القاعدهٔ منتظم قائم با قاعدهٔ مثلث متساوی‌الاضلاع داده شده است. مجانس مستقیم یالهای این منشور را نسبت به مرکز تجانس O، وسط پاره‌خطی که مرکزهای دو قاعدهٔ منشور را به هم وصل می‌کند، و با نسبت تجانس ۲ به‌دست می‌آوریم. اندازهٔ حجم بین جسم اخیر و منشور قبلی را به‌دست آورید. اندازهٔ ارتفاع منشور h و طول قاعدهٔ منشور مساوی a است.

۱۷۸. دو مربع مساوی در دو صفحهٔ موازی قرار دارند و مرکزهایشان روی خط عمود بر دو صفحهٔ آنها واقع است. همچنین قطرهای یکی، عمود بر ضلعهای دیگری است. بر یک ضلع از یکی و رأس متناظرش از دیگری، یک صفحه می‌گذرانیم. به این ترتیب وجه جانبی این جسم از هشت مثلث متساوی تشکیل می‌شود. حجم جسم محصور بین دو مربع و این هشت مثلث را برحسب a، ضلع مربع و h ارتفاع جسم (فاصلهٔ بین دو قاعده) به‌دست آورید.

۲.۸.۲. نسبت حجمها

۱۷۹. دو منشور ارتفاعهای مساوی دارند و مساحت قاعدهٔ یکی از آنها ۳ برابر مساحت قاعدهٔ دیگری است. نسبت حجمهای این دو منشور را تعیین کنید.

۳.۸.۲. رابطهٔ بین حجمها

۱۸۰. منشور سه پهلوی $ABCA'B'C'$ داده شده است. G و G' را مرکز ثقل مثلثهای قاعدهٔ آن می‌نامیم و پاره‌خط UV از یک خط راست که منشور را قطع نمی‌کند درنظر می‌گیریم.
نشان دهید که مجموع حجم چهاروجهیهایی که در یال UV مشترک هستند و یالهای روبه‌روی آنها AA'، BB' و CC' است، مساوی سه برابر حجم چهاروجهیی است که UV و GG' دو یال روبه‌روی آن می‌باشند.

۱۸۱. روی سه وجه SBC، SCA و SAB از یک چهاروجهی به‌عنوان قاعدهٔ تحتانی، سه منشور می‌سازیم که در خارج چهاروجهی قرار گیرند. I را نقطهٔ برخورد صفحه‌های فوقانی این منشورها درنظر می‌گیریم. روی وجه چهارم ABC، به‌عنوان قاعده، منشوری می‌سازیم که یالهای جانبی آن مساوی و موازی SI باشد. نشان دهید که این منشور هم‌ارز (معادل) مجموع سه منشور قبلی است.

۴.۸.۲. اندازهٔ سطح جانبی و حجم منشور

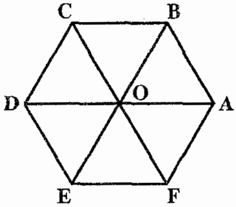
۱۸۲. اگر روی سه خط موازی و غیرواقع در یک صفحه پاره‌خطهای معلوم AA'، BB' و CC' تغییر مکان دهند، سطح جانبی و حجم منشور $ABCA'B'C'$ ثابت می‌مانند.

۵.۸.۲. اندازهٔ سطح جانبی، سطح کل و حجم منشور

۱۸۳. مساحت جانبی، سطح کل و حجم منشور قائمی را که قاعده‌اش لوزی به قطرهای ۶ سانتیمتر و ۸ سانتیمتر و ارتفاعش مساوی محیط قاعدهٔ آن است، به‌دست آورید.

۱۸۴. قاعدهٔ منشور منتظمی مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a و ارتفاع منشور برابر $3a$ است. سطح جانبی، سطح کل و حجم منشور را حساب کنید.

۱۸۵. حجم و سطح جانبی و سطح کل منشور منتظمی را که قاعده‌اش شش‌ضلعی منتظمی به ضلع a و ارتفاعش ۲a می‌باشد، حساب کنید.



۹.۲. رابطهٔ متری

۱۸۶. یک سطح منشوری چهار پهلو و یک مقطع صفحهٔ ABCD از این سطح را که رأسهای آن روی یالهای جانبی و در یک جهت، و نقطه‌های A' ، B' ، C' و D' را به فاصله‌های x' ، y' ، z' و t' از A، B، C و D درنظر می‌گیریم. نشان دهید که اگر مساحتهای مثلثهای BCD، CDA، DAB و ABC را با α ، β ، γ و δ نشان دهیم، برای آن که نقطه‌های A' ، B' ، C' و D' در یک صفحه باشند، لازم و کافی است که داشته باشیم:

$$\alpha x' - \beta y' + \gamma z' - \delta t' = 0$$

۱۸۷. روی یالهای جانبی AA_1 ، BB_1 و CC_1 ، از منشور مثلث‌القاعدهٔ $ABCA_1B_1C_1$ ، نقطه‌های A_0 ، B_0 و C_0 را طوری نشان گذاشته‌ایم که:

$$|AA_0| = a \text{ ، } |BB_0| = b \text{ ، } |CC_0| = c$$

M را نقطهٔ برخورد صفحه‌های A_0BC ، B_0AC و C_0AB می‌گیریم و، از آن، پاره‌خط راست MP را موازی یالهای جانبی منشور رسم می‌کنیم (P روی صفحهٔ قاعدهٔ ABC است). ثابت کنید، اگر $|MP| = d$ ، آن‌وقت:

$$\frac{1}{d} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}$$

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۱

۱۸۸. در یک منشور چهار پهلو، مجموع مربعهای ۱۲ یال برابر است با مجموع مربعهای چهار قطر به اضافهٔ هشت برابر مربع فاصلهٔ بین وسطهای قطرها.

درصورتی که منشور متوازی‌السطوح باشد، مسأله به چه صورت درمی‌آید؟

۱۸۹. اگر مقطع قائم یک منشور، یک چندضلعی منتظم باشد، ثابت کنید مجموع فاصله‌های یک نقطه واقع در درون آن، از وجه‌های جانبی و قاعده‌های منشور مقدار ثابتی است.

۱۰.۲. مکان هندسی

۱۹۰. یک منشور مثلث‌القاعده داده شده است. مکان هندسی نقطهٔ O را چنان بیابید که هرمهای به رأس مشترک O که قاعده‌های آنها بترتیب وجه‌های جانبی منشور باشند، حجم مساوی داشته باشند.
نسبت حجم یکی از این هرمها، به حجم منشور داده شده را تعیین کنید.

۱۹۱. پاره‌خطهای راست AD، BE و CF یالهای جانبی موازی از یک منشور مثلث‌القاعده را تشکیل می‌دهند. روی قاعدهٔ ABC این منشور همهٔ نقطه‌هایی را پیدا کنید که، از خطهای راست AE، BF و CD به یک فاصله باشند.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۱

۱۱.۲. رسم

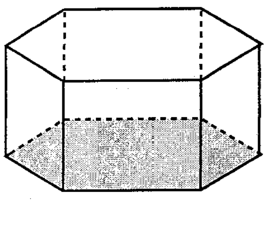
۱.۱۱.۲. رسم صفحه

۱۹۲. بر یکی از یالهای یک منشور ناقص مثلث‌القاعده، صفحه‌ای مرور دهید که حجم این منشور ناقص را به دو بخش هم‌ارز (معادل) تقسیم کند.

۱۹۳. یک منشور مثلث‌القاعده را به وسیلهٔ رسم صفحه‌ای که بر قاعده‌های آن نگذرد، به دو قسمت هم‌ارز تقسیم کنید.

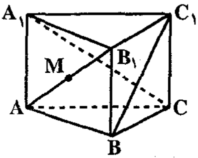
۱۹۴. صفحه‌هایی رسم کنید که یک سطح منشوری داده شده را در مثلثهایی متشابه با مثلث مفروضی قطع کنند.

۱۹۵. در شکل زیر، منشوری که قاعده‌های آن، یک شش‌ضلعی منتظم و سطحهای جانبی آن مربع هستند، نشان داده شده است. یک الگوی خیاط دقیق برای این شکل رسم کنید، یک رونوشت از آن بگیرید و آن را جمع کنید.



۱۲.۲. برش، مقطع

۱۹۶. روی قطر AB_1 از وجه ABB_1A_1 منشور مثلث‌القاعده (شکل)، نقطهٔ M طوری قرار گرفته است که $\frac{AM}{MB_1}=\frac{5}{4}$ را داریم. برشی از منشور را رسم کنید که با صفحهٔ گذرنده بر نقطهٔ M به موازات قطرهای A_1C و از وجه دیگر به‌وجود آمده است. یال CC_1 با این صفحه به چه نسبتی تقسیم می‌شود؟



۱۹۷. مقطعهای دو صفحهٔ موازی با سطح منشوری چه شکلهایی هستند؟

۱۹۸. صفحه‌ای که با مولدهای سطح منشوری موازی باشد در چه صورت آن سطح را قطع می‌کند؟ مقطع آن با سطح منشوری چه شکلی است؟ (در سطح منشوری کوژ یا کاو).

۱۹۹. ثابت کنید که یک منشور سه پهلو را می‌توان با صفحه‌ای چنان قطع کرد که مقطع، یک مثلث متشابه با مثلثی مفروض باشد.

۲۰۰. ثابت کنید، برای هر منشور با قاعدهٔ مثلثی و ارتفاع به‌قدر کافی بزرگ، می‌توان صفحه‌ای پیدا کرد که، در برخورد با یالهای جانبی منشور، مثلث متساوی‌الاضلاعی به‌وجود آورد.

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

۲۰۱. هر چندوجهی محدب را می‌توان به منشورهای ناقصی تجزیه کرد که یالهای جانبی آنها با یک خط مفروض Δ موازی باشند.

۲۰۲. یک منشور منتظم که وجه‌های جانبی آن F_1، F_2، F_3، ...، F_k هستند داده شده است. نقطهٔ A_1 را روی وجه F_1، و نقطهٔ A_k را روی وجه F_k اختیار می‌کنیم. کوتاهترین راه پیموده شده از A_1 تا A_k روی وجه‌های F_1، F_2، F_3، ...، F_k را در نظر می‌گیریم. نشان دهید که این خط شکسته ضلعهای مساوی دارد (به استثنای اولی و آخری). زاویه‌هایش مساوی‌اند، و ضلعهایش با یالهای منشور زاویه‌های مساوی می‌سازند و صفحهٔ حاصل از دو ضلع مجاور این چهارضلعی عمود بر صفحهٔ نیمساز فرجه‌های خارجی از منشور است که یالش شامل محل برخورد این دو ضلع است.

۱۳.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۲۰۳. دو منشور $ABC\cdots A'B'C'\cdots$ و $A_1B_1C_1\cdots A_1'B_1'C_1'\cdots$ که رأس به رأس متناظرند، در یک جهت هستند و دارای یک فرجهٔ مساوی بین یک وجه جانبی و یک قاعدهٔ متناظر می‌باشند.
ثابت کنید که این دو منشور مساوی‌اند.

۲۰۴. منشوری مثلث‌القاعده داده شده است. از نقطهٔ O واقع در درون آن عمودهایی بر وجه‌های جانبی این منشور رسم می‌کنیم و به طرف وجه‌ها، بردارهایی متناسب با مساحت این وجه‌ها جدا می‌کنیم. ثابت کنید که چندضلعی مجموع هندسی این بردارها بسته است.

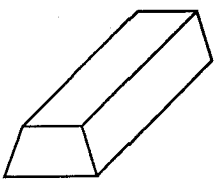
۲۰۵. با مقوا چند مثلث متساوی‌الاضلاع درست کرده‌اند. در سه رأس هر مثلث عددهای ۱، ۲ و ۳ را نوشته‌اند. سپس آنها را به شکل یک ستون روی هم چیده‌اند. آیا ممکن است وضعی پیش آید که مجموع عددها در طول هر یال ستون، برابر ۵۵ شود؟
آیا ممکن است در این مسأله مجموع عددها در هریال برابر ۵۰ شود؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۴

۲۰۶. چهار منشور مثلث‌القاعده چنان در کنار هم قرار دارند که آنها را می‌توان حول یک محور مشترک چرخاند. روی سه وجه جانبی هریک از این منشورها رقمهای ۰، ۱ و ۲ یادداشت شده‌اند، به‌گونه‌ای که هر وجه فقط شامل یکی از این رقمهاست. هر بار می‌توان سه منشور را با هم و در یک جهت و فقط به اندازهٔ یک سوم دور چرخاند. در آغاز روی وجه مرئی هریک از منشورها رقم صفر مشاهده می‌شود. آیا امکان دارد که روی چهار وجه مرئی این چهار منشور، هر ترکیب دلخواه از سه رقم ۰، ۱ و ۲ را ظاهر کرد؟ به ویژه آیا می‌توان چهارتایی (۰، ۰، ۰، ۱) را روی وجه‌های مرئی نمایان کرد؟

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۰

۲۰۷. شمشهای نقره به‌صورت منشور قائم ریخته می‌شوند. قاعده‌های این منشور ذوزنقه هستند. قاعده‌های این ذوزنقه ۱۰cm و ۷/۵cm و ارتفاع آن ۵cm است. طول شمش ۳۰cm است. اگر هر سانتیمترمکعب نقره ۱۰/۵ گرم وزن داشته باشد، وزن شمش را پیدا کنید.



۲۰۸. منشوری با پنج ضلعیهای A_1 ، A_2 ، A_3 ، A_4 ، A_5 و B_1 ، B_2 ، B_3 ، B_4 و B_5 به‌عنوان وجه‌های فوقانی و تحتانی آن مفروض است. هریک از ضلعهای دو پنج‌ضلعی و هر یک از پاره‌خطهای A_iB_j به ازای تمام مقدارها : ۵، ...، ۱ $=j$ و i به رنگ قرمز یا سبزرنگ شده است. هر مثلثی که رأسهایش، رأسهای منشور و تمام ضلعهایش رنگین باشد، دو ضلع به رنگهای متفاوت دارد. نشان دهید که تمام ۱۰ ضلع وجه‌های فوقانی و تحتانی از یک رنگند.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۹

۲۰۹. قرار است وجه‌های یک منشور با قاعدهٔ شش‌ضلعی به گونه‌ای رنگ شوند که هیچ دو وجه مجاور همرنگ نباشند. حداقل تعداد رنگهای لازم برابر است با :

الف) ۸ ب) ۷ ج) ۶ د) ۴ هـ) ۳

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

۲۱۰. در یک منشور منتظم که قاعدهٔ آن هشت‌ضلعی منتظم است، چند عدد زاویهٔ قائمه بین یالهای با رأس مشترک تشکیل می‌شود؟

الف) هیچ ب) ۱۶ عدد ج) ۲۴ عدد د) ۳۲ عدد هـ) ۴۰ عدد

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

۲۱۱. عددهای از ۱ تا ۱۰۰ را در رأسهای منشوری با قاعده‌های ۵۰ ضلعی گذاشته‌ایم. ثابت کنید می‌توان یالی از منشور را پیدا کرد، به نحوی که اختلاف عددهای دو انتهای آن، از ۴۸ تجاوز نکند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۴

۲۱۲. فرق منشور را با سطح منشوری آن بیان کنید. فرق منشور قائم و منشور مایل را بیان کنید.

۱۴.۲. مسأله‌های ترکیبی

۲۱۳. منشور مثلث‌القاعدهٔ $ABCA'B'C'$ را درنظر می‌گیریم. قاعدهٔ ABC و امتداد یالهای جانبی آن ثابتند. A' ، B' و C' روی این یالها به قسمی تغییر مکان می‌دهند که حجم این جسم ثابت می‌ماند.

الف. ثابت کنید که صفحهٔ $A'B'C'$ از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد.

ب. وضع صفحهٔ $A'B'C'$ را برای حالتی تعیین کنید که مثلث $A'B'C'$ کمترین مقدار ممکن باشد.

۲۱۴. در هر منشور مثلث‌القاعده:

الف) دو وجه جانبی مساوی، رو به رو به فرجه‌های مساوی هستند.

ب) بزرگترین وجه منشور، رو به رو به بزرگترین فرجه است.

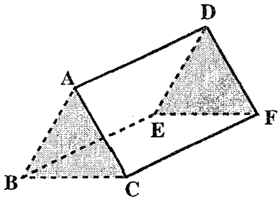
ج) مساحت هر یک از وجه‌ها از مجموع مساحتهای دو وجه دیگر کمتر است.

۲۱۵. شکل زیر یک منشور مثلثی است.

الف) قاعده‌های این منشور را نام ببرید.

ب) این منشور چند وجه جانبی دارد؟ وجه‌های جانبی آن چه شکلی دارند؟

ج) یالهای جانبی آن را نام ببرید.



۲۱۶. طول ضلعهای یک مقطع از یک منشور مثلث‌القاعده ۳، ۶ و $۳\sqrt{۳}$ است.

۱. طولهای ضلعهای مقطع دیگری از این منشور چقدرند؟

۲. این مقطع چه شکلی است؟

۳. اندازهٔ هریک از زاویه‌های آن چیست؟

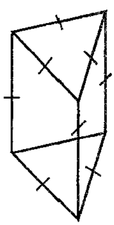
۴. مساحت یک مقطع منشور را بیابید.

۲۱۷. طول هر یال منشور قائم در شکل زیر ۴ سانتیمتر است.

الف) مساحت هر کدام از وجه‌ها و قاعده‌ها را حساب کنید.

ب) ارتفاع منشور چقدر است؟

ج) حجم منشور را به‌دست آورید.



۲۱۸. در منشور قائم و مثلث‌القاعدهٔ $ABCA_1B_1C_1$ داریم :

$$|BC| = a \ ، |AC| = b \ ، |AB| = c \ ، |AA_1| = h$$

مطلوب است محاسبهٔ :

۱. کسینوس زاویهٔ بین قطرهای AB_1 و BC_1 در وجه‌های ABB_1A_1 و BCC_1B_1 ؛

۲. کسینوس زاویهٔ بین ضلع AB و قطر B_1C .

۲۱۹. منشور قائمی است که ارتفاع آن برابر است با h و قاعده‌های آن مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی الساقین OAB و $O'A'B'$ به ساق a می‌باشند.

۱. برحسب a و h، مساحت سطح کل منشور را حساب کنید.

۲. اگر I وسط یال AB باشد، ثابت کنید OI بر AB' عمود است.

۳. از نقطهٔ O عمود OJ را بر AB' فرود می‌آوریم. ثابت کنید صفحهٔ JIO بر خط AB' عمود است و مثلث OIJ قائم‌الزاویه است.

۴. اگر $a = h$ باشد، اندازهٔ فرجهٔ $IAB'O$ را تعیین کنید.

۲۲۰. در یک منشور چهار پهلو :

۱. قطرها دو زوج خطهای همرس تشکیل می‌دهند.

۲. فاصلهٔ نقطه‌های مشترک آنها، مساوی است با فاصلهٔ وسطهای قطرها از یک قاعده.

۳. به کمک این ویژگی شرطی لازم و کافی پیدا کنید، برای آن که یک منشور، متوازی‌السطوح باشد.

۲۲۱. الف) منشوری که در شکل نشان داده شده است، منشور... است.

ب) ناحیهٔ $ABCD$ را ... می‌نامند.

پ) AA' ... نام دارد.

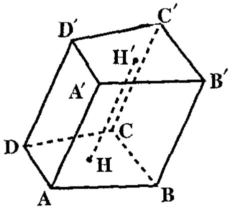
ت) HH' ... نام دارد.

ث) اگر AA' بر صفحهٔ قاعده عمود بود، منشور را ... می‌نامیدند.

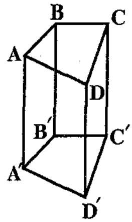
ج) ناحیهٔ متوازی‌الاضلاعی $BB'C'C$ ... نام دارد.

چ) اجتماع وجه‌های جانبی را ... می‌نامند.

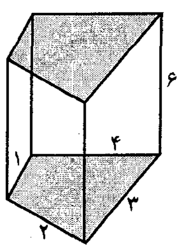
ح) اگر $ABCD$ □ متوازی‌الاضلاع بود، منشور را ... می‌نامیدند.



۲۲۲. در شکل زیر یک منشور قائم با قاعدهٔ چهارضلعی می‌بینید.
الف) این منشور چند وجه دارد؟
ب) وجه‌های آن چه شکلی دارند؟
پ) یالهایی از این منشور را که موازیند، نام ببرید.



۲۲۳. طول ضلعهای قاعدهٔ منشور قائم شکل داده شده، بترتیب ۱، ۲، ۳ و ۴ واحد، و طول یالهای جانبی آن ۶ واحد است.
۱. مساحت هریک از وجه‌های جانبی این منشور را به‌دست آورید.
۲. مساحت جانبی منشور چقدر است؟
۳. محیط قاعده را به‌دست آورید و آن را در طول یال جانبی ضرب کنید.
۴. از مقایسهٔ پاسخ سؤالهای ۲ و ۳ چه نتیجه‌ای می‌گیرید؟
۵. اگر طول یال جانبی یک منشور قائم h و محیط قاعدهٔ آن p باشد، برای محاسبهٔ مساحت جانبی منشور چه فرمولی پیشنهاد می‌کنید؟
۶. اگر طول، عرض و ارتفاع یک مکعب مستطیل، یعنی یک منشور چهارضلعی قائم a، b و c باشند، به کمک نتیجهٔ سؤال ۵، فرمولی برای پیدا کردن مساحت جانبی مکعب مستطیل به‌دست آورید.
۷. مساحت کل مکعب مستطیل سؤال ۶، برحسب a، b و c چقدر است؟



۲۲۴. یک دایره و یک مربع به مساحت مساوی مفروضند:
۱. تعیین کنید محیط کدام یک کمتر است.

۲. برای ساختن بشکه‌هایی به حجم و ارتفاع معین، آیا اگر آنها را به شکل استوانهٔ دوار درنظر بگیریم، به صرفه نزدیکتر است یا به شکل منشور منتظم مربع‌القاعده؟ به چه دلیل؟

۲۲۵. منشور مایلی است که قاعدهٔ آن مربع به ضلع a بوده و یالهای جانبی با قاعده زاویهٔ ۶۰ درجه می‌سازند و طول هریک از آنها برابر a می‌باشد.

۱. حجم این منشور را حساب کنید.

۲. مساحت مقطع قائم این منشور را تعیین نمایید.

۲۲۶. لوزی ABCD که اندازهٔ قطرهای AC و BD از آن بترتیب ۲a و a می‌باشند، قاعدهٔ یک منشور قائم است. روی یالهای جانبی آن و در یک جهت طولهای $AA' = ۳a$ ، $BB' = ۴a$ و $CC' = a$ را جدا می‌کنیم.

۱. نشان دهید که مثلث $B'A'C'$ قائم‌الزاویه است و صفحهٔ $A'B'C'$ از نقطهٔ D می‌گذرد.

۲. حجم منشور ناقصی را که قاعده‌های آن ABCD و $A'B'C'D'$ است، تعیین کنید.

۲۲۷. منشور منتظمی با قاعدهٔ ۶ ضلعی، به ضلع ۴ سانتیمتر، و ارتفاع ۱۰ سانتیمتر داده شده است.

۱. سطح جانبی

۲. سطح کل

۳. حجم

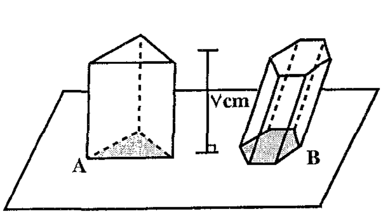
این منشور منتظم را بیابید.

۲۲۸. در شکل زیر، قاعده‌های یک منشور سه ضلعی قائم (A) و یک منشور شش‌ضلعی مایل (B) در یک صفحه قرار گرفته‌اند. ارتفاع هر دو منشور ۷ سانتیمتر است.

الف. اگر مساحت قاعدهٔ منشور A، ۱۰ سانتیمتر مربع باشد، حجم آن چقدر است؟

فرض کنید هر صفحه‌ای موازی با قاعده‌های این دو منشور، سطح مقطعهایی با مساحت برابر ایجاد کند.

ب. حجم منشور B را به‌دست آورید.



۲۲۹. یک منشور شش پهلوی منتظم که یالهای جانبی‌اش AA' ، BB' ، ...، FF' است، داده شده است. صفحه‌های $AB'C$ ، $CD'E$ ، $EF'A$ و صفحه‌های $B'CD'$ ، $D'EF'$ و $F'AB'$ که منشور را به شش هرم سه پهلو تقسیم می‌کنند، رسم می‌کنیم. حجم منشور ناقصی را که به این ترتیب به‌دست آمده :

۱. برحسب ضلع AB از شش‌ضلعی ؛

۲. برحسب ضلع AE از مثلث متساوی‌الاضلاع ؛

به دست آورید. می‌دانیم که ارتفاع منشور برابر h است.

۲۳۰. منشور ناقص قائم $ABC\cdots A'B'C'\cdots$ داده شده است :

۱. ثابت کنید که نقطه‌های A'' ، B'' ، C'' و ...، وسطهای یالهای این منشور، روی یک صفحه قرار دارند.

۲. با فرض این که S و S' مساحتهای دو قاعده باشد، مساحت مقطع $A''B''C''\cdots$ را برحسب S و S' تعیین کنید. مثال عددی $S=\sqrt{۳}$ و $S'=۴$.

۲۳۱. جمله‌های زیر را با اصطلاحات مناسب کامل کنید :

الف. قاعده‌های هر منشوری .... و .... هستند.

ب. وجه‌های جانبی منشور ناحیه‌های .... هستند.

پ. رویهٔ جانبی یک منشور ... منشور است.

ت. اگر قاعدهٔ یک منشور متوازی‌الاضلاع باشد، آن منشور .... نامیده می‌شود.

بخش ۳

• متوازی‌السطوح

۳.۱.تعریف و قضیه

۳.۲.نقطه، خط

۳.۲.۱. خط

۳.۲.۱.۱. قطرها همرسند

۳.۳. زاویه

۳.۳.۱. اندازهٔ زاویه

۳.۳.۱.۱. اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط

۳.۳.۱.۲. اندازهٔ زاویهٔ بین دو صفحه

۳.۳.۱.۳. اندازهٔ زاویهٔ بین خط و صفحه

۳.۴. یال، ارتفاع، قطر

۳.۴.۱. یال

۳.۴.۱.۱. اندازهٔ یال

۳.۴.۲. ارتفاع

۳.۴.۲.۱. اندازهٔ ارتفاع

۳.۴.۳. قطر

۳.۴.۳.۱. اندازهٔ قطر

۳.۵. پاره‌خط

۳.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۳.۵.۲. تساوی پاره‌خطها

۳.۵.۳. نسبت پاره‌خطها

۶.۳. شعاع کره
۱.۶.۳. اندازهٔ شعاع کره

۷.۳. مساحت
۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت
۱.۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت جانبی
۲.۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت کل
۳.۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت تصویر
۲.۷.۳. رابطهٔ بین مساحتها

۸.۳. حجم
۱.۸.۳. اندازهٔ حجم
۱.۱.۸.۳. اندازهٔ حجم متوازی‌السطوح
۲.۱.۸.۳. ماکزیمم حجم متوازی‌السطوح
۳.۱.۸.۳. اندازهٔ حجم متوازی‌السطوح ناقص
۴.۱.۸.۳. اندازهٔ حجمهای ایجاد شده
۲.۸.۳. نسبت حجمها
۳.۸.۳. رابطهٔ بین حجمها

۹.۳. رابطهٔ متری
۱.۹.۳. رابطهٔ متری (برابریها)
۲.۹.۳. رابطهٔ متری (نابرابریها)

۱۰.۳. مکان هندسی

۱۱.۳. رسم شکل
۱.۱۱.۳. تعیین نقطه

۳.۱۱.۲. رسم صفحه
۳.۱۱.۳. رسم متوازی‌السطوح
۳.۱۱.۴. رسم شکلهای دیگر

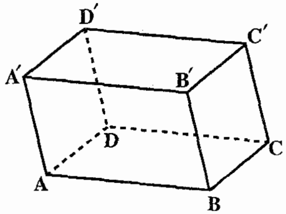
۳.۱۲. برش، مقطع

۳.۱۳. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۳.۱۴. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۳. متوازی‌السطوح

۱.۳. تعریف و قضیه



تعریف. متوازی‌السطوح منشوری است که قاعدهٔ آن متوازی‌الاضلاع است. هر متوازی‌السطوح دارای شش وجه و هشت رأس و دوازده یال و چهار قطر است (شکل).

۲۳۲. قضیه. در هر متوازی‌السطوح :

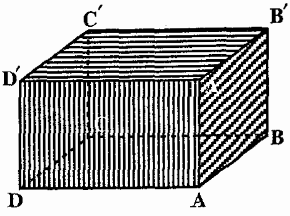
۱. یالها چهار به چهار متساوی و موازی‌اند.

۲. وجه‌ها دو به دو متساویند و در صفحه‌های متوازی قرار دارند.

۳. قطرها یکدیگر را در یک نقطه قطع می‌کنند که بر وسط هریک از آنها واقع است.

۲۳۳. قضیه. مقطع متوازی‌السطوح به‌وسیلهٔ صفحه‌ای که چهار یال متوازی را قطع کند، متوازی‌الاضلاع است.

متوازی‌السطوح قائم. متوازی‌السطوح قائم عبارت است از منشور قائمی که قاعدهٔ آن متوازی‌الاضلاع باشد. وجه‌های جانبی متوازی‌السطوح قائم همگی مستطیلند.



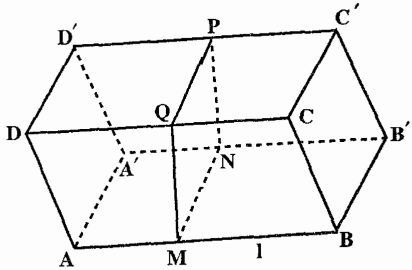
تبصره. در هر متوازی‌السطوح اختیاری که معمولاً آن را متوازی‌السطوح مایل می‌نامند، چون وجه‌های متقابل دو به دو متوازی و متساویند، می‌توان هر دو وجه متقابل را به اختیار، قاعده فرض کرد.

این کار را می‌توان درمورد متوازی‌السطوح قائم نیز انجام داد، ولی در این صورت متوازی‌السطوح مزبور مایل خواهد بود.

مساحت جانبی متوازی‌السطوح

با توجه به آن که متوازی‌السطوح منشوری است که قاعده‌های آن متوازی‌الاضلاعند، اگر اندازهٔ یکی از یالهای متوازی‌السطوح، مثلاً یال AB در شکل مساوی l و محیط مقطع قائم، عمود بر یالهای موازی AB از آن p باشد، با استفاده از قضیهٔ قبل مساحت جانبی متوازی‌السطوح به‌صورت زیر به‌دست می‌آید:

$$S = p.l$$



اما محیط مقطع قائم متوازی‌السطوح دو برابر مجموع ارتفاعهای دو وجه جانبی و مجاور آن است، پس اگر h_1 و h_2 ارتفاعهای آن دو وجه باشند، دستور بالا به‌صورت زیر تبدیل می‌شود:

$$S = 2l(h_1 + h_2)$$

حجم متوازی‌السطوح

۲۳۴. قضیه. حجم هر متوازی‌السطوح قائم، مساوی است با حاصلضرب مساحت قاعدهٔ آن در طول ارتفاعش.

۲۳۵. قضیه. حجم هر متوازی‌السطوح مایل، مساوی است با حاصلضرب مساحت قاعدهٔ آن در طول ارتفاعش.

۲۳۶. حجم هر متوازی‌السطوح، مساوی است با حاصلضرب نصف مجموع مساحتهای دو وجه موازی‌اش در فاصلهٔ آن دو از یکدیگر.

۲.۳. نقطه، خط

۱.۲.۳. خط

۱.۱.۲.۳. خطها همرسند

۲۳۷. در یک متوازی‌السطوح، سه یالی را درنظر بگیرید که از یک رأس گذشته‌اند، سپس، از سه نقطهٔ انتهای دوم این یالها صفحه‌ای عبور دهید. از برخورد این صفحه با متوازی‌السطوح، مثلثی به‌دست می‌آید. قطرهایی از متوازی‌السطوح که از رأس مشترک سه یال فوق می‌گذرند، در مرکز ثقل این مثلث، به هم می‌رسند.

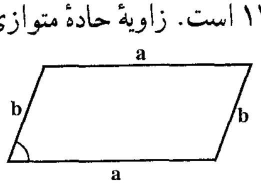
۳.۳. زاویه

۱.۳.۳. اندازهٔ زاویه

۱.۱.۳.۳. اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط

۲۳۸. متوازی‌السطوح قائم $ABCDA'B'C'D'$ داده شده است. درصورتی که قطرهای AB' و $A'D$ با ضلعهای قاعده، زاویه‌های α و β بسازند، مطلوب است تعیین زاویهٔ بین این دو قطر.

۲۳۹. حجم متوازی‌السطوح قائمی که ارتفاعش ۶ و قاعده‌اش متوازی‌الاضلاع به ضلعهای ۱۲ و ۴ می‌باشد، برابر ۱۴۴ است. زاویهٔ حادهٔ متوازی‌الاضلاع قاعده را تعیین کنید.



۲۴۰. در هر کنج از یک متوازی‌السطوح چند زاویه ممکن است قائمه باشد؟ در کدام حالتها؟

۲.۱.۳.۳. اندازهٔ زاویهٔ بین دو صفحه

۲۴۱. در متوازی‌السطوح قائم $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ، $|AB|=a$ ، $|AD|=b$ و $|AA_1|=c$.

زاویهٔ بین صفحه‌های AB_1D_1 و A_1C_1D را پیدا کنید.

۳.۱.۳.۳. اندازهٔ زاویهٔ بین خط و صفحه

۲۴۲. حجم متوازی‌السطوح مایلی به ابعاد ۶، ۸ و ۱۵ سانتیمتر، مساوی $۲۸۸\sqrt{۳}$ است. اگر زاویهٔ بین دو یال ۶ و ۸، مساوی ۶۰° باشد، اندازهٔ زاویهٔ بزرگترین یال با صفحهٔ گذرنده بر این دو یال را تعیین کنید.

۲۴۳. قاعدهٔ متوازی‌السطوح قائم $ABCDA_1B_1C_1D_1$، مربع $ABCD$ است. بزرگترین اندازهٔ ممکن زاویهٔ بین خط BD_1 و صفحهٔ BDC_1 را پیدا کنید.

۴.۳. یال، ارتفاع، قطر

۱.۴.۳. یال

۱.۱.۴.۳. اندازهٔ یال

۲۴۴. مساحت کل متوازی‌السطوح به ابعاد x، y و z مساوی مقدار ثابت $۲a^۲$ است. ابعاد این متوازی السطوح را چنان بیابید که دارای بیشترین حجم ممکن باشد.

۲۴۵. ابعاد یک متوازی‌السطوح قائم را محاسبه کنید، درصورتی که اندازهٔ یک قطر آن مساوی ۴ سانتیمتر، سطح جانبی آن ۲۰ سانتیمتر مربع و مجموع دو یال کوچکتر آن، مساوی بزرگترین یال آن است.

۲.۴.۳. ارتفاع

۱.۲.۴.۳. اندازهٔ ارتفاع

۲۴۶. قاعدهٔ متوازی‌السطوح قائمی، متوازی‌الاضلاعی به ابعاد ۱۲ و ۱۸ است که اندازهٔ زاویهٔ حاده‌اش ۶۰° است. درصورتی که اندازهٔ حجم این متوازی‌السطوح مساوی $۳۲۴\sqrt{۳}$ باشد، اندازهٔ ارتفاع متوازی‌السطوح را تعیین کنید.

۳.۴.۳. قطر

۲۴۷. به چه شرطی قطرهای یک متوازی‌السطوح با هم مساوی‌اند؟

۲۴۸. ثابت کنید هیچ متوازی‌السطوح قائمی وجود ندارد که سه قطر آن، یک کنج سه وجهی سه قائمه تشکیل دهند.

۱.۳.۴.۳. اندازهٔ قطر

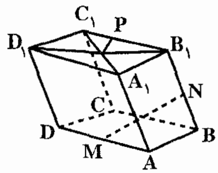
۲۴۹. اندازهٔ بزرگترین قطر متوازی‌السطوح مایلی با قاعده‌های لوزی را تعیین کنید، درصورتی که طول یالهایش مساوی a، و اندازهٔ زاویه‌های حادهٔ یک کنج سه وجهی از آن، هرکدام مساوی 60° باشد.

۵.۳. پاره‌خط

۱.۵.۳. اندازهٔ پاره‌خط

۲۵۰. در متوازی‌السطوح قائم‌الزاویهٔ $ABCDA_1B_1C_1D_1$، عمودهای A_1P و BQ را از رأسهای A_1 و B به قطر AC_1 وارد می‌کنیم. اگر $AB = a$، $AD = b$ و $AA_1 = c$ باشد، طول پاره‌خط PQ را محاسبه کنید.

۲۵۱. نقطه‌های M و N میانگاههای یالهای AD و BB_1 از یک متوازی‌السطوح هستند (شکل). در این متوازی‌السطوح $MN = a$ بوده و قطرهای وجه $A_1B_1C_1D_1$ در نقطهٔ P همدیگر را قطع می‌کنند. خط گذرنده بر نقطهٔ P به موازات خط MN صفحهٔ AA_1D_1D را در نقطهٔ Q قطع می‌کند. طول پاره‌خط PQ را محاسبه کنید.



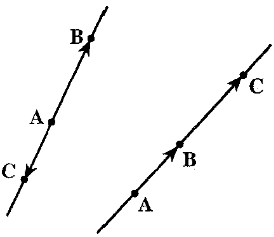
۲.۵.۳. تساوی پاره‌خطها

۲۵۲. متوازی‌السطوح $ABCDA'B'C'D'$ و قطر AC' از آن را درنظر می‌گیریم. ثابت کنید صفحهٔ گذرنده بر انتهای سه یالی که از رأس A می‌گذرند و صفحهٔ گذرنده بر انتهای سه یالی که از رأس C' می‌گذرند، قطر AC' را به سه قسمت متساوی تقسیم می‌کنند.

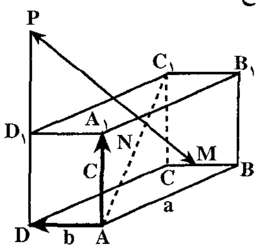
۲۵۳. تمام خطهایی که از مرکز یک متوازی‌السطوح می‌گذرند، وجه‌های آن را در دو نقطه قطع می‌کنند که از مرکز متوازی‌السطوح به یک فاصله‌اند.

۳.۵.۳. نسبت پاره‌خطها

نکته. در مورد سه نقطهٔ متمایز a، b و c که روی یک خط مستقیم قرار دارند، لازم و کافی است که بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ همخط باشند. یعنی بایستی عددی مانند λ وجود داشته باشد که در $\overrightarrow{AC} = \lambda\,\overrightarrow{AB}$ صدق کند. برهان این حکم مستقیماً از تعریف بردارهای همخط و ناشی شدن بردارهای $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{AC}$ از نقطهٔ A استنتاج می‌شود (شکل).



۲۵۴. در یک متوازی‌السطوح (شکل) از M، میانگاه یال BC، خطی را طوری رسم می‌کنیم که خطهای AC_1 و DD_1 را بترتیب در نقطه‌های N و P قطع کنند. نسبت MN/NP را به‌دست آورید.



۲۵۵. از انتهای سه یال یک متوازی‌السطوح که از یک رأس مشترک ناشی می‌شوند، صفحه‌ای را عبور می‌دهیم. این صفحه قطر متوازی‌السطوح را که از همان رأس ناشی می‌شود به چه نسبتی قطع می‌کند؟

۶.۳. شعاع کره

۱.۶.۳. اندازهٔ شعاع کره

۲۵۶. قاعدهٔ متوازی‌السطوح قائمی، مربعی به ضلع a می‌باشد. ارتفاع متوازی‌السطوح b است. شعاع کره‌ای را پیدا کنید که از دو سر ضلع AB قاعده می‌گذرد و بر وجه‌های موازی AB از متوازی‌السطوح، مماس است.

۷.۳. مساحت

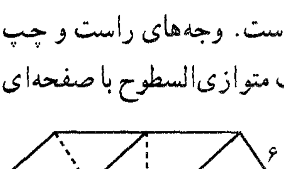
۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت جانبی

۲۵۷. اندازهٔ دو ضلع مجاور قاعدهٔ متوازی‌السطوح قائمی ۱۲cm و ۸cm، و اندازهٔ ارتفاع آن ۱۰ سانتیمتر است. اندازهٔ مساحت جانبی این متوازی‌السطوح را بیابید.

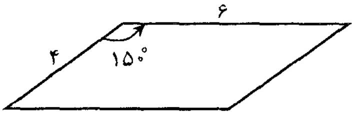
۲.۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت کل

۲۵۸. قاعدهٔ یک متوازی‌السطوح، مستطیلی به ابعاد ۶ و ۱۵ است. وجه‌های راست و چپ مربعهایی هستند که با قاعده زاویهٔ °۶۰ می‌سازند. اشتراک متوازی‌السطوح با صفحه‌ای که بر یالهای بزرگتر قاعده عمود است، ناحیه‌ای مستطیلی است. مساحت رویهٔ کل متوازی‌السطوح را بیابید.



۲۵۹. دو یال متقاطع متوازی‌السطوحی ۶ و ۴ سانتیمتر و زاویهٔ بین آنها $30°$ است. اگر یال سوم بر صفحهٔ آنها عمود و طولش ۵ سانتیمتر باشد، مساحت کل متوازی‌السطوح را بیابید.

۲۶۰. دو ضلع مجاور از قاعدهٔ متوازی‌السطوح قائمی به اندازه‌های ۴ و ۶ سانتیمتر و یک زاویهٔ قاعده $150°$ می‌باشد. اگر ارتفاع متوازی‌السطوح ۶ سانتیمتر باشد، مساحت کل آن را تعیین کنید.



۳.۷.۱.۳. اندازهٔ مساحت تصویر

۲۶۱. طول یالهای متوازی‌السطوح قائمی، a، b و c است. بیشترین مقدار مساحت تصویر قائم این متوازی‌السطوح بر روی یک صفحه چقدر است؟

۲۶۲. متوازی‌السطوحی در فضا جابه‌جا می‌شود. ثابت کنید، «سایهٔ» آن (یعنی تصویر قائم آن بر صفحهٔ افقی)، در موقعیتی دارای حداکثر مساحت است که، سه رأس دلخواه از متوازی‌السطوح، روی یک صفحهٔ افقی واقع باشند.

مسابقه‌های ریاضی شوروی سابق

۳.۷.۲. رابطهٔ بین مساحتها

۲۶۳. ثابت کنید که در هر متوازی‌السطوح، مجموع مربعهای مساحتهای شش مقطع ایجاد شده به‌وسیلهٔ صفحه‌های قطری، مساوی است با دو برابر مجموع مربعهای مساحتهای وجه‌های آن.

۳.۸. حجم

۳.۸.۱. اندازهٔ حجم

۳.۸.۱.۱. اندازهٔ حجم متوازی‌السطوح

۲۶۴. مطلوب است حجم متوازی‌السطوحی که تمام وجه‌های آن، لوزیهایی به ضلع a و به

زاویهٔ حادهٔ α باشند.

۲۶۵. زاویه‌های مسطحهٔ رأس متوازی‌السطوح با هم برابر و مساوی ۴۵ درجه‌اند. طول یالهایی که به یک رأس منتهی می‌شوند، برابرند با a، b و c. حجم متوازی‌السطوح را پیدا کنید.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۲۶۶. در متوازی‌السطوح، طول سه یالی که در یک رأس به هم می‌رسند، برابرند با a، b و c. دو یال اول بر هم عمودند و سومی با هریک از آنها زاویه‌ای برابر α می‌سازد. مطلوب است حجم متوازی‌السطوح.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۲۶۷. طول یالهایی از یک متوازی‌السطوح که از یک رأس خارج شده‌اند، برابرند با l، m و n؛ و زاویه‌های مسطحهٔ همین رأس، برابرند با زاویه‌های حادهٔ α، β و γ. حجم متوازی‌السطوح را پیدا کنید.

مسأله‌های دشوار ریاضی

۲۶۸. سه خط دو به دو عمود بر هم مفروضند. فاصلهٔ بین هر دو تا از این خطها برابر a می‌باشد. حجم متوازی‌السطوحی را پیدا کنید که قطر آن، روی یکی از این خطها قرار گیرد و قطرهای دو وجه مجاور آن، روی دو خط دیگر واقع شوند.

۲۶۹. وجه‌های یک متوازی‌السطوح شش لوزی مساوی‌اند. یکی از قطرهای متوازی‌السطوح مساوی ضلعهای لوزیها است. حجم این جسم چقدر است؟

۲۷۰. وجه‌های یک متوازی‌السطوح، لوزیهای مساوی‌اند که ضلع هر لوزی مساوی a و اندازهٔ ارتفاع متوازی‌السطوح برابر b است. حجم این متوازی‌السطوح را برحسب a و b تعیین کنید.

۲۷۱. حجم متوازی‌السطوح قائمی را که قاعده‌اش یک لوزی به قطرهای ۱۲ و ۱۶ سانتیمتر و ارتفاعش ۸ سانتیمتر است، محاسبه کنید.

۲۷۲. دو یال متقاطع متوازی‌السطوحی ۲۴ و ۱۶ سانتیمتر، و زاویهٔ بین آنها $60°$ است. اگر یال سوم بر صفحهٔ آنها عمود، و طولش ۱۰ سانتیمتر باشد، حجم متوازی‌السطوح چند سانتیمتر مکعب است؟

۲۷۳. متوازی‌السطوح $ABCDA_1B_1C_1D_1$ که در آن AC_1 برابر d و حجم آن v می‌باشد مفروض است. ثابت کنید با پاره‌خطهایی که طول آنها برابر با طولهای فاصله‌های رأسهای A_1، B و D از قطر AC_1 باشد، می‌توان یک مثلث ساخت. اگر مساحت این مثلث s

باشد، آن‌گاه $v = 2ds$.

۲.۱.۸.۳. ماکزیمم حجم متوازی‌السطوح

۲۷۴. بین تمام متوازی‌السطوحهای قائم مربع‌القاعده که مجموع ضلع قاعده و ارتفاع آنها مقدار ثابتی است، کدام متوازی‌السطوح دارای بیشترین حجم است؟

۲۷۵. بیشترین مقدار حجم یک جعبهٔ توخالی (در باز)، که مجموع مساحت ۵ وجه آن مساوی a^2 است، چقدر است؟

۲۷۶. حجم کدام متوازی‌السطوح مربع‌القاعده بیشترین مقدار ممکن است، درصورتی که مجموع مساحت قاعده و یک وجه آن مساوی مقدار معلوم a^2 باشد؟

۳.۱.۸.۳. اندازهٔ حجم متوازی‌السطوح ناقص

۲۷۷. حجم یک متوازی‌السطوح ناقص، برابر است با حاصلضرب مساحت یک مقطع قائم آن، در واسطهٔ حسابی یالهای جانبی آن.

۲۷۸. ثابت کنید حجم یک متوازی‌السطوح ناقص، برابر است با حاصلضرب نصف مجموع مساحتهای دو وجه جانبی موازی، در فاصلهٔ بین آن دو وجه.

۲۷۹. ثابت کنید حجم یک متوازی‌السطوح ناقص، برابر است با حاصلضرب اندازهٔ مساحت یکی از قاعده‌های آن در فاصلهٔ این قاعده از نقطهٔ برخورد قطرهای قاعدهٔ دیگر.

۲۸۰. حجم یک متوازی‌السطوح ناقص قائم محدود شده به یک چهارضلعی چپ، برابر است با حاصلضرب مساحت مقطع قائم آن در $\frac{1}{4}$ مجموع چهار یال جانبی‌اش.

۴.۱.۸.۳. اندازهٔ حجمهای ایجاد شده

۲۸۱. حجم متوازی‌السطوح $ABCDA_1B_1C_1D_1$ برابر V است. حجم مشترک دو چهاروجهی AB_1CD_1 و A_1BC_1D را پیدا کنید.

۲.۸.۳. نسبت حجمها

۲۸۲. اگر EF و KL دو خط متنافر، وسطهای دو ضلع موازی قاعده‌های متوازی‌السطوحی را به هم وصل کند، نسبت بین حجم هرم EFLK و متوازی‌السطوح را پیدا کنید.

۲۸۳. یک متوازی‌السطوح و هشت وجهی را که رأسهای آن مرکزهای وجه‌های این متوازی‌السطوح هستند درنظر می‌گیریم. نسبت حجم این دو جسم را بیابید.

۳.۸.۳. رابطهٔ بین حجمها

۲۸۴. متوازی‌السطوح $ABCDA'B'C'D'$ را با دو صفحه قطع می‌کنیم که موازی وجه‌های گذرنده بر یال AA' می‌باشند و یکدیگر را در صفحهٔ قطری شامل این یال قطع می‌کنند. ثابت کنید که دو متوازی‌السطوح از چهار متوازی‌السطوح ایجاد شده هم‌ارزند.

۲۸۵. متوازی‌السطوح $ABCDA'B'C'D'$ و پاره‌خط EF که صفحهٔ AEF متوازی‌السطوح را قطع نمی‌کند، داده شده‌اند. چهار وجهیهایی را درنظر می‌گیریم که در یال EF مشترک هستند و بترتیب یالهای روبه‌روی آنها AB، AD و AA' و قطر AC' از متوازی‌السطوح هستند که از رأس A رسم شده‌اند. ثابت کنید که آخرین چهاروجهی از این چهار وجهیها هم‌ارز (معادل) مجموع سه‌تای دیگر است.

۲۸۶. به مرکز رأسهای یک متوازی‌السطوح، کره‌های مساوی، به قطرهایی کمتر از کوچکترین یال متوازی‌السطوح رسم شده‌اند. نشان دهید که مجموع حجمهای بخشهایی از کره‌ها که در درون متوازی‌السطوح واقعند، مساوی با حجم یکی از آنهاست.

۹.۳. رابطهٔ متری

۱.۹.۳. رابطهٔ متری (برابریها)

۲۸۷. مجموع فاصله‌های رأسهای یک متوازی‌السطوح، از یک صفحه که آن‌را قطع نکرده است، مساوی هشت برابر فاصلهٔ نقطهٔ همرسی قطرهای آن، از این صفحه است.

۲۸۸. مجموع مربعهای فاصله‌های یک نقطهٔ دلخواه از ۸ رأس یک متوازی‌السطوح برابر است با ۸ برابر مربع فاصلهٔ این نقطه، از نقطهٔ همرسی قطرهای آن، بعلاوهٔ نصف مجموع مربعهای قطرهای آن.

۲.۹.۳. رابطهٔ متری (نابرابریها)

۲۸۹. ثابت کنید در هر متوازی‌السطوح، مجموع طولهای یالها، از دو برابر مجموع طولهای چهار قطر اصلی تجاوز نمی‌کند.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی

۱۰.۳. مکان هندسی

۲۹۰. مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید، که از وجه‌های جانبی یک متوازی‌السطوح به یک فاصله است.

۱۱.۳. رسم شکل

۱.۱۱.۳. تعیین نقطه

۲۹۱. سه صفحهٔ دو به دو متقاطع در سه خط Ox، Oy و Oz یکدیگر را قطع کرده‌اند. سطح منحنی abc بین این سه صفحه قرار دارد. نقطه‌ای روی این سطح چنان بیابید که اگر از این نقطه سه صفحه موازی صفحه‌های داده شده رسم کنیم، بزرگترین متوازی‌السطوح حاصل را داشته باشیم.

۲.۱۱.۳. رسم صفحه

۲۹۲. در یک قطعهٔ ایجاد شده در جسمی دوار به‌وسیلهٔ یک صفحه که عمود بر محور آن جسم دوار رسم می‌شود، متوازی‌السطوحی با حجم ماکزیمم محاط کنید، چنان‌که، یک وجه

متوازی‌السطوح روی صفحهٔ قاعدهٔ قطعه قرار داشته باشد.

۲۹۳. از رأس D از یک متوازی‌السطوح، صفحهٔ ABC را چنان رسم کنید که یالهای Ox، Oy و Oz از رأس O را که رأس روبه‌روی D است، چنان قطع کند که چهاروجهی OABC کوچکترین چهاروجهی ممکن باشد.

۳.۱۱.۳. رسم متوازی‌السطوح

۲۹۴. متوازی‌السطوح با حجم ماکزیمم را بیابید، درصورتی که مجموع سه یال آن مقدار ثابتی باشد.

۲۹۵. متوازی‌السطوح قائمی رسم کنید که موقعیت مرکزهای سه وجه از یک کنج سه قائمهٔ آن، مشخص است.

۲۹۶. متوازی‌السطوحی رسم کنید که از آن، چهار رأس غیرواقع در یک صفحه، داده شده‌اند. تعداد جوابها را تعیین کنید. چه شرطی باید برقرار باشد تا بین متوازی‌السطوحهای جواب مسأله، متوازی‌السطوح قائم، یا مکعب مستطیل باشد؟

۲۹۷. سه خط غیرواقع در یک صفحهٔ X، Y و Z داده شده‌اند. متوازی‌السطوحی رسم کنید که هر یال آن روی یکی از خطها باشد.

۲۹۸. متوازی‌السطوحی رسم کنید که سه یال غیرموازی آن، پاره‌خطهایی از سه خط داده شدهٔ D، D′ و D″ باشند.

۲۹۹. از هر رأس یک متوازی‌السطوح P، صفحه‌ای موازی صفحهٔ شامل سه رأس همسایه رسم می‌کنیم، یک جسم S تشکیل می‌شود.
متوازی‌السطوح P را با داشتن S بسازید و نسبت حجمهای آنها را بیابید.

۳۰۰. متوازی‌السطوحی محیط بر یک چهاروجهی رسم کنید به این معنی که هر یک از وجه‌های متوازی‌السطوح، شامل یک یال چهاروجهی باشد.

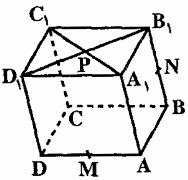
۳۰۱. چهار نقطه، غیرواقع بر یک صفحه، در فضا داده شده‌اند. چند متوازی‌السطوح وجود دارد، به‌نحوی که این چهار نقطه، رأسهایی از آن باشند؟

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۳

۴.۱۱.۳. رسم شکلهای دیگر

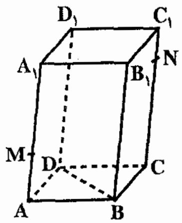
۳۰۲. هر چهاروجهی بیش از یک متوازی‌السطوح محیطی ندارد. امّا هر متوازی‌السطوح دارای دو چهاروجهی محاطی است که آنها را مزدوج خوانیم. می‌خواهیم با داشتن یکی از این دو چهاروجهی، دیگری را رسم کنیم.

۱۲.۳. برش، مقطع



۳۰۳. برشی از متوازی‌السطوحی را رسم کنید که به‌وسیلهٔ صفحه‌ای ایجاد می‌شود که آن صفحه، از میانگاه M و N یالهای AD و BB_1، و نقطهٔ P، محل تلاقی قطرهای وجه $A_1B_1C_1D_1$ عبور می‌کند (شکل). این صفحه یال AB را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۳۰۴. نقطه‌های M و N روی یالهای AA_1 و CC_1 از متوازی‌السطوحی طوری قرار داد که $AM / AA_1 = m$ است (شکل الف). برشی از متوازی‌السطوحی را رسم کنید که با صفحهٔ گذرنده بر نقطه‌های M و N به موازات قطر BD قاعده حاصل می‌شود. این صفحه یال BB_1 را به چه نسبتی قطع می‌کند؟



۳۰۵. صورتهای مختلف فصل مشترک یک صفحه و یک متوازی‌السطوح را مشخص کنید.

۱۳.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۳۰۶. متوازی‌السطوحی به ابعاد a، b و c را درنظر می‌گیریم و حجم آن را با V نشان می‌دهیم.

اگر $V=abc.v$ باشد، اندازهٔ v را تعیین کنید و ثابت کنید که $V \leq 1$ است.

۳۰۷. همهٔ قطرهای یک متوازی‌السطوح با هم برابرند. ثابت کنید، این متوازی‌السطوح، یک مکعب مستطیل است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۸

۱۴.۳. مسأله‌های ترکیبی

۳۰۸. دو یال متقاطع از متوازی‌السطوحی ۱۲ و ۸ سانتیمتر و زاویهٔ بین آنها ۶۰ درجه است. اگر سومین یال بر صفحهٔ آنها عمود و اندازه‌اش ۵ سانتیمتر باشد :

۱. مساحت جانبی

۲. مساحت کل

۳. حجم متوازی‌السطوح را حساب کنید.

۳۰۹. در متوازی‌السطوح قائم $ABCDA_1B_1C_1D_1$ یالهای AB، BC و BB_1 بترتیب، a، $2a$ و a طول دارند. وسط BC را E می‌نامیم. رأسهای M و N از چهاروجهی $MNPQ$، روی خط C_1E و رأسهای P و Q بر روی خط راستی قرار دارند که از نقطهٔ B_1 می‌گذرد و خط AD را در نقطهٔ F قطع می‌کند. مطلوب است :

الف. طول پاره‌خط DF

ب. فاصلهٔ بین وسطهای MN و PQ.

۳۱۰. ۱. بین تمام متوازی‌السطوحهای قائم که دارای حجم یکسان هستند، کدام متوازی‌السطوح کمترین سطح را دارد؟

۲. بین تمام متوازی‌السطوحهای قائم که دارای سطح یکسان (سطح مساوی) هستند، کدام متوازی‌السطوح بیشترین حجم را دارد؟

۳۱۱. متوازی‌السطوح $ABCDA'B'C'D'$ داده شده است :

۱. اگر دو وجه مجاور هم‌ارز (معادل) باشند، مقطع قائم صفحهٔ عمود بر یال مشترک آنها مثلاً AA' یک لوزی است و بعکس. دو صفحهٔ قطری که یکی شامل AA' و دیگری شامل BB' است، نیمسازهای فرجه‌های متناظرشان می‌باشند و بر هم عمودند و بعکس ؛ مرکز متوازی‌السطوح از چهار وجه شامل AA' و یا موازی AA' به یک فاصله است و بعکس.

۲. اگر شش وجه معادل (هم‌ارز) باشند، مقطعهای عمود بر امتداد یالهای متوازی‌السطوح لوزی هستند و بعکس؛
شش صفحهٔ قطری نیمسازهای فرجه‌های متناظرشان هستند و دو به دو بر هم عمودند و بعکس؛
مرکز متوازی‌السطوح از شش وجه به یک فاصله است و بعکس.

۳۱۲. در متوازی‌السطوح $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ، خطهای AC و DC_1 قطرهای وجه‌های آن هستند.
۱. ثابت کنید که زوج نقطه‌ای به‌صورت $M \in (AC)$ و $N \in (DC_1)$ وجود دارد که در $(MN) \parallel (BD_1)$ صدق کرده و این زوج منحصر به فرد است.
۲. نسبت MN / BD_1 را بیابید.

۳۱۳. در متوازی‌السطوح $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ، وجه $ABCD$ مربعی است به ضلع برابر a؛ یال AA_1 هم‌طولی برابر a دارد و با یالهای AB و AD زاویه‌ای برابر α می‌سازد.
۱. مطلوب است، طول قطر D_1B و زاویهٔ بین خطهای راست D_1B و AC.
۲. نتیجهٔ محاسبه را به‌ازای $a=10$ و $\alpha=120^\circ$ بدهید.

۳۱۴. عدد سطح کل یک متوازی‌السطوح، دو برابر عدد طول یک یال آن، و عدد حجم این متوازی‌السطوح، سه برابر عدد طول یال دوم آن است. درصورتی که طول سومین یال آن مساوی a باشد:
۱. اندازهٔ دو یال دیگر
۲. سطح و حجم این متوازی‌السطوح
را تعیین کنید.

۳۱۵. سه نقطهٔ O' ، O'' و O''' که مرکزهای سه وجه همرس یک متوازی‌السطوح قائم می‌باشند، داده شده‌اند:
۱. این متوازی‌السطوح را رسم کنید.
۲. اندازهٔ سطح جانبی و حجم آن را با داشتن ضلعهای مثلث $O'O''O'''$ به‌دست آورید.
حالتی را که مثلث $O'O''O'''$ متساوی‌الاضلاع است، بررسی کنید.

بخش ۴

• مکعب مستطیل

۴.۱. تعریف و قضیه

۴.۲. نقطه، خط، صفحه

۴.۲.۱. نقطه

۴.۲.۱.۱. نقطه‌های : همخط، همصفحه،...

۴.۲.۱.۱.۱. نقطه‌ها همخطند

۴.۲.۲. خط

۴.۲.۲.۱. خطهای : همرس، موازی،...

۴.۲.۲.۱.۱. خطها همرسند

۴.۲.۳. صفحه

۴.۲.۳.۱. صفحه‌های : موازی، عمود بر هم،...

۴.۲.۳.۱.۱. صفحه‌ها خوش‌ترازند

۴.۳. زاویه

۴.۳.۱. اندازهٔ زاویه

۴.۴. یال، ارتفاع، قطر

۴.۴.۱. یال

۴.۴.۱.۱. اندازهٔ یال

۴.۴.۲. ارتفاع

۴.۴.۲.۱. اندازهٔ ارتفاع

۴.۴.۳. قطر

۴.۴.۳.۱. اندازهٔ قطر

۴.۴.۳.۲. نسبت قطرها

۴.۵. پاره‌خط
۴.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۴.۶. شعاع کره
۴.۶.۱. اندازهٔ شعاع کره

۴.۷. مساحت
۴.۷.۱. اندازهٔ مساحت
۴.۷.۱.۱. اندازهٔ مساحت جانبی
۴.۷.۱.۲. اندازهٔ مساحت کل
۴.۷.۱.۳. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر
۴.۷.۲. رابطهٔ بین مساحتها

۴.۸. حجم
۴.۸.۱. اندازهٔ حجم
۴.۸.۱.۱. اندازهٔ حجم مکعب مستطیل
۴.۸.۱.۲. اندازهٔ حجم شکلهای دیگر
۴.۸.۲. تساوی حجمها

۴.۹. رابطهٔ متری
۴.۹.۱. رابطهٔ متری (برابریها)
۴.۹.۲. رابطهٔ متری (نابرابریها)

۴.۱۰. مکان هندسی

۴.۱۱. رسم شکل
۴.۱۱.۱. رسم خط

۴.۱۲. برش، مقطع

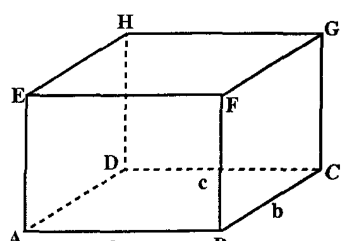
۴.۱۳. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۴.۱۴. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۴. مکعب مستطیل

۱.۴. تعریف و قضیه

تعریف. مکعب مستطیل، منشور قائمی است که قاعده‌های آن مربع یا مستطیل باشند (شکل). وجه‌های جانبی مکعب مستطیل، مربع یا مستطیلند. در هر مکعب مستطیل، کنجها سه قائمه‌اند، هر یال بر دو وجه مقابل عمود است. وجه‌های مقابل متوازی و متساوی‌اند، فرجه‌های بین هر دو وجه مجاور، قائمه‌اند.



قطر مکعب مستطیل. پاره‌خطی که دو رأس متقابل مکعب مستطیلی را به هم وصل می‌کند، قطر مکعب مستطیل نامیده می‌شود.

۳۱۶. اندازهٔ قطر مکعب مستطیل به ابعاد a، b و c را تعیین کنید.

مساحت جانبی مکعب مستطیل. مساحت جانبی مکعب مستطیلی که ضلعهای قاعدهٔ آن a و b و ارتفاعش c باشد، از دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$S = ۲(a + b)c$$

مساحت کل مکعب مستطیل. در مکعب مستطیل به ابعاد a، b و c مساحت کل از دستور زیر به‌دست می‌آید:

$$S = ۲(ab + bc + ca)$$

حجم مکعب مستطیل. بنا به اصل (ب)، اگر a، b و c اندازه‌های سه یال همرس مکعب مستطیل باشند، حجم آن از دستور زیر به‌دست می‌آید :

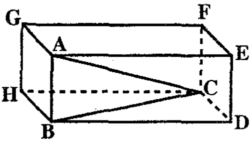
$$V=abc$$

از این دستور نتیجه می‌شود که حجم هر مکعب مستطیل برابر است با حاصلضرب اندازهٔ مساحت یک قاعده در ارتفاع نظیر آن قاعده.

یادداشت. مکعب مستطیل را به‌صورت زیر نیز می‌توان تعریف کرد :

مکعب مستطیل یک شش‌وجهی است که همهٔ وجه‌های آن مستطیل شکل هستند.

وجه‌های روبه‌رو در مکعب مستطیل موازی و همنهشت هستند. وجه‌های مجاور یک مکعب مستطیل صفحه‌های عمود بر هم و یالهای آن بر وجه‌ها عمود هستند (شکل).



مکعب مستطیل، ۸ رأس و ۱۲ یال دارد. در مکعب مستطیل به دو رأس مانند A و C (شکل) که در یک وجه قرار ندارند، رأسهای متقابل گفته می‌شود.

الف) در شکل، A، B و C سه رأس مکعب مستطیل هستند. رأسهای دیگر را نام ببرید.

ب) AB و CD دو یال این مکعب مستطیل هستند. یالهای دیگر را نام ببرید.

پ) پاره‌خط AC، دو رأس متقابل A و C را به هم وصل کرده است. رأسهای متقابل دیگر را نام ببرید.

۲.۴. نقطه، خط، صفحه

۱.۲.۴. نقطه

۱.۱.۲.۴. نقطه‌های: همخط، همصفحه،...

۱.۱.۱.۲.۴. نقطه‌ها همخطند

۳۱۷. ثابت کنید که مرکزهای هر دو وجه روبه‌روی مکعب مستطیل، با نقطهٔ همرسی قطرهای آن، روی یک خط راست قرار دارند.

۲.۲.۴. خط

۱.۲.۲.۴. خطهای: همرس، موازی،...

۱.۱.۲.۲.۴. خطها همرسند

۳۱۸. ثابت کنید که قطرهای مکعب مستطیل از یک نقطه می‌گذرند.

۳.۲.۴. صفحه

۱.۳.۲.۴. صفحه‌های: موازی، عمود بر هم،...

۱.۱.۳.۲.۴. صفحه‌ها خوش‌ترازند

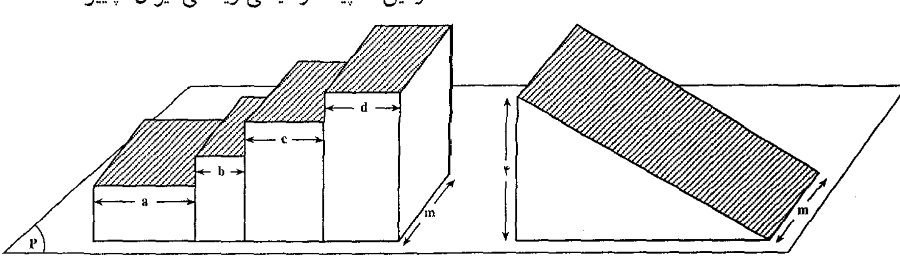
۳۱۹. دو جسم A و B با مشخصات زیر مفروضند:

جسم A از کنار هم گذاشتن چهار مکعب مستطیل با ارتفاعهای ۱، ۲، ۳ و ۴ و عرضهای a، b، c و d و طولهای یکسان m تشکیل شده است و جسم B منشوری است قائم با ارتفاع m و مقطع مثلث قائم‌الزاویه که یکی از ضلعهای مثلث برابر ۴ می‌باشد. حجم جسم A با حجم جسم B برابر بوده و قاعدهٔ جسم A با یکی از وجه‌های B مطابق شکل در صفحهٔ P می‌باشند. صفحهٔ P' را «خوش‌تراز» گوییم.

هرگاه P' موازی P بوده و مقطعهای ایجاد شده در دو جسم A و B توسط P' دارای مساحت یکسانی باشند، ثابت کنید، اگر تساویهای زیر برقرار باشند، دقیقاً ۴ صفحهٔ خوش‌تراز می‌توان پیدا کرد.

$$a = b = ۲c = ۳d$$

دومین المپیاد آزمایشی ریاضی ایران، پاییز ۱۳۷۱



(A) (B)

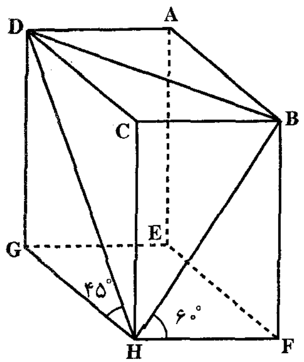
۳.۴. زاویه

۱.۳.۴. اندازهٔ زاویه

۳۲۰. در مکعب مستطیل شکل زیر، $D\hat{H}G = ۴۵^\circ$ و $F\hat{H}B = ۶۰^\circ$، کسینوس $B\hat{H}D$ کدام است؟

الف) $\frac{\sqrt{۳}}{۶}$ ب) $\frac{\sqrt{۲}}{۶}$ ج) $\frac{\sqrt{۶}}{۳}$ د) $\frac{\sqrt{۶}}{۴}$ هـ) $\frac{\sqrt{۶}-\sqrt{۲}}{۴}$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۲



۴.۴. یال، ارتفاع، قطر

۱.۴.۴. یال

۱.۱.۴.۴. اندازهٔ یال

۳۲۱. قطر مکعب مستطیلی ۱۶ و دو یال از آن به اندازه‌های ۸ و ۱۲ داده شده‌اند. طول یال سوم مکعب مستطیل را تعیین کنید.

۳۲۲. ابعاد مکعب مستطیلی به نسبت ۱، ۲ و ۳ و مساحت کل آن $۸۸\text{cm}^۲$ است. ابعاد آن کدام است؟

۳۲۳. حجم مکعب مستطیلی 192cm^3 و ابعاد آن متناسب با ۲، ۳ و ۴ می‌باشند. اندازهٔ بزرگترین یال این مکعب مستطیل را تعیین کنید.

۳۲۴. حجم مکعب مستطیلی 3600cm^3، یک بعد آن ۵ سانتیمتر و دو بعد دیگر به نسبت $\frac{4}{5}$ هستند. اندازهٔ این دو بعد را بیابید.

۳۲۵. جعبهٔ مکعب مستطیل شکلی را می‌توان به‌طور کامل با مکعبهای واحد پر کرد. اگر شخصی در جعبه، تا آن‌جا که امکان دارد، مکعبهایی، به حجم ۲، چنان قرار دهد که یالهایشان موازی یالهای جعبه باشد، می‌تواند دقیقاً ۴۰٪ جعبه را پر کند. ابعاد ممکن همهٔ چنین جعبه‌هایی را معین کنید.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۶

۳۲۶. ثابت کنید، اگر بتوان مکعب مستطیلی را به مکعب مستطیلهایی تقسیم کرد که طولهایی از هر کدام از آنها عدد درستی باشد، آن‌وقت، طولهایی از مکعب مستطیل اصلی هم، عدد درستی خواهد بود.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، هیأت داوران، یوگسلاوی سابق، ۱۹۷۹

۳۲۷. حجم یک مکعب مستطیل، ۸ سانتیمتر مکعب و سطح کل آن ۳۲ سانتیمترمربع است و سه بعد آن تصاعد هندسی تشکیل می‌دهند. مجموع طولهای همهٔ یالهای این مکعب مستطیل چند سانتیمتر است؟

الف) ۲۸ ب) ۳۲ ج) ۳۶ د) ۴۰ هـ) ۴۴

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

۲.۴.۴. ارتفاع

۱.۲.۴.۴. اندازهٔ ارتفاع

۳۲۸. آکواریمی به شکل مکعب مستطیل به پهنای ۱۰ اینچ و بلندی ۸ اینچ روی سطح افقی یک میز قرار دارد. اگر این آکواریم را کج کنیم داخل آن در بالا، سطح ۱۰ اینچ در ۸ اینچ دارد و در پایین، سه چهارم مستطیل کف را می‌پوشاند. وقتی که آکواریم دوباره به حالت اوّل برگردد، ارتفاع آب برحسب اینچ برابر است با :

الف) $2\frac{1}{2}$ ب) ۳ ج) $3\frac{1}{4}$ د) $3\frac{1}{2}$ هـ) ۴

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۱

۳۲۹. در ظرفی به شکل مکعب مستطیل که قاعدهٔ آن به بعدهای ۵ متر و ۲/۵ متر است، تا ارتفاع ۴ متر آب ریخته‌اند. مکعبی آهنی به طول یال ۱/۵ متر درون آن ظرف انداخته می‌شود. سطح آب در ظرف چند سانتیمتر بالا می‌رود؟

الف) ۱۸ ب) ۲۲ ج) ۲۵ د) ۲۷ هـ) ۳۶

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

۳۳۰. انباری داریم به عرض ۳ «چژان» و طول ۴ «چژان» و ۵ «چی». این انبار را با ۱۰۰۰۰ «هو» نمک پر کرده‌ایم. ارتفاع انبار چقدر است؟

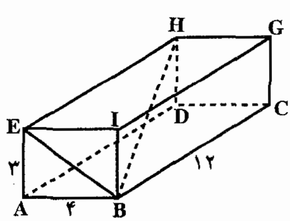
از رسالهٔ «ریاضیات در نه کتاب»، چین

۳۳۱. دری وجود دارد که ارتفاع آن، به اندازهٔ ۶ «چی» و ۸ «تسون» از عرض آن بیشتر است. بزرگترین فاصلهٔ بین رأسهای آن (قطر)، ۱ «چژان» است. ارتفاع و عرض در را پیدا کنید.

از مسأله‌های تاریخی ریاضیات، چین

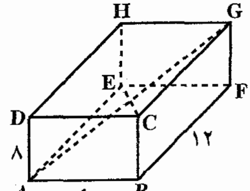
۳.۴.۴. قطر

۱.۳.۴.۴. اندازهٔ قطر



۳۳۲. در این جسم هر دو یال متقاطع بر هم عمودند. اگر $AE = ۳$ ، $AB = ۴$ و $BC = ۱۲$ ، طول قطر BE و قطر BH را بیابید.

۳۳۳. در این مکعب مستطیل، AG و EC قطرند. اگر $AB = ۹$ ، $BF = ۱۲$ و $AD = ۸$ ؛ AG و EC را بیابید.



۳۳۴. طول یالهای مجاور AB، BD و BE در مکعب مستطیلی بترتیب ۱، ۲ و ۳ سانتیمتر است. طول قطر AC از این مکعب مستطیل را تعیین کنید.

۳۳۵. سطح کل یک مکعب مستطیل ۲۲ سانتیمتر مربع و مجموع اندازه‌های همهٔ یالهای آن ۲۴ سانتیمتر است. اندازهٔ قطر این مکعب مستطیل چقدر است؟

الف) $\sqrt{۱۱}$ ب) $\sqrt{۱۲}$ ج) $\sqrt{۱۳}$ د) $\sqrt{۱۴}$ هـ) مشخص نمی‌شود

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۲.۳.۴.۴. نسبت قطرها

۳۳۶. دو مکعب مستطیل یکی به ابعاد a، b و c و دیگری به ابعاد $\frac{۳}{۲}a$، $\frac{۳}{۲}b$ و $\frac{c}{۴}$ مفروضند. مطلوب است، تعیین نسبت بین قطرهای آنها، در حالت خاص $a=\frac{b}{۲}=\frac{c}{۳}$. این نسبت را حساب کنید.

۵.۴. پاره‌خط

۱.۵.۴. اندازهٔ پاره‌خط

۳۳۷. روی دو دیوار روبه‌رو از اطاقی که طول و عرض معلومی دارد، مگس و عنکبوتی ایستاده‌اند. مگس، یک و نیم آرشین از کف اطاق و عنکبوت یک و نیم آرشین از سقف فاصله دارد. کوتاهترین راهی را پیدا کنید که عنکبوت، از طریق آن، بتواند خود را به‌مگس برساند.

از، ل.ن. تولستوی

۶.۴. شعاع کره

۱.۶.۴. اندازهٔ شعاع کره

۳۳۸. مکعب مستطیلی به ابعاد a، b و c داده شده است. اندازهٔ شعاع کره‌ای را بیابید که بر رأسهای این مکعب مستطیل می‌گذرد.

۷.۴. مساحت

۱.۷.۴. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۷.۴. اندازهٔ مساحت جانبی

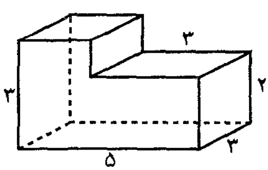
۳۳۹. قاعدهٔ مکعب مستطیلی، مربعی به ضلع ۵ و ارتفاع آن مساوی ۶ است. اندازهٔ مساحت جانبی این مکعب مستطیل را بیابید.

۳۴۰. از یک تکهٔ حلبی می‌خواهیم یک ظرف به شکل مکعب مستطیل بدون سرپوش به حجم ۱۰۸ مترمکعب بسازیم. حداقل سطح حلبی را که لازم است، به‌دست آورید.

۲.۱.۷.۴. اندازهٔ مساحت کل

۳۴۱. ابعاد یک مکعب مستطیل ۴، ۷ و ۱۲اند. مساحت رویهٔ کل آن را بیابید.

۳۴۲. شکل روبه‌رو، نمای جسمی است که در آن همهٔ یالها یا با هم موازی، یا بر هم عمودند.



اندازه‌های بعضی از یالها روی شکل مشخص شده است که همه برحسب سانتیمتر هستند. سطح کل این جسم چند سانتیمترمربع است؟

الف) ۷۲ ب) ۷۸ ج) ۷۰

د) ۶۰ هـ) با داده‌های مسأله قابل محاسبه نیست

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۷

۳۴۳. بین مکعب مستطیلهای به قطر a، کدام‌یک به سطح کل ماکزیمم می‌باشد؟

۳.۱.۷.۴. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر

۳۴۴. انبار علوفه‌ای به شکل مکعب مستطیلی است به عرض ۱۰ متر، طول ۱۳ متر و ارتفاع ۵ متر و بام آن مسطح است. قرار است دیوارهای انبار از داخل و خارج و سقف آن فقط از داخل نقاشی شود. مساحت سطحی که نقاشی می‌شود، برحسب مترمربع برابر است با:

الف) ۳۶۰ ب) ۴۶۰ ج) ۴۹۰ د) ۵۹۰ هـ) ۷۲۰

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۱

۳۴۵. ارتفاع مکعب مستطیلی ۱۰ سانتیمتر و ضلعهای قاعدهٔ آن ۱۲ و ۱۶ سانتیمتر است. مساحت مقطع صفحهٔ قطری مکعب مستطیل را پیدا کنید (صفحهٔ قطری مکعب یا مکعب مستطیل صفحه‌ای است که بر دو قطر از مکعب یا مکعب مستطیل می‌گذرد. مقطع این صفحه در جسم بالا یک مربع مستطیل است).

۳۴۶. مساحت صفحهٔ قطری مکعب مستطیل به ابعاد ۲، ۳ و ۴ سانتیمتر که بر کوچکترین یال می‌گذرد، چند سانتیمترمربع است؟

۱) $\sqrt{۲۹}$　　۲) $۴\sqrt{۱۳}$

۳) $۶\sqrt{۵}$　　۴) ۱۰

۳۴۷. قوطی کبریت را، چگونه در فضا نگه داریم که تصویر قائم آن بر صفحه، حداکثر مساحت را داشته باشد؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۳

۲.۷.۴. رابطهٔ بین مساحتها

۳۴۸. مساحتهای وجه‌های قاعده، پهلو و جلوی یک جعبهٔ مستطیل شکل معلومند. حاصلضرب این مساحتها برابر است با:

الف) حجم جعبه

ب) ریشهٔ دوم حجم جعبه

ج) دو برابر حجم جعبه

د) مجذور حجم جعبه

هـ) مکعب حجم جعبه

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۱

۳۴۹. مکعب مستطیلی به ابعاد ۵ در ۴ در ۳ به سه مکعب مستطیل ۵ در ۴ در ۱ تقسیم گردیده است. مجموع سطح کل سه مکعب مستطیل چقدر بزرگتر از سطح کل مکعب مستطیل اصلی است؟

۱) ۱۶۰　　۲) ۸۰

۳) ۱۲۰　　۴) ۰

۸.۴. حجم

۱.۸.۴. اندازهٔ حجم

۱.۱.۸.۴. اندازهٔ حجم مکعب مستطیل

۳۵۰. حجم مکعب مستطیلی را که طول، عرض و ارتفاع آن $\sqrt{۲}$، $\sqrt{۳}$ و $\sqrt{۵}$ سانتیمتر است، به‌دست آورید.

۳۵۱. ارتفاع یک مکعب مستطیل ۷ و طول دو ضلع قاعدهٔ آن ۴ و ۵ است. حجم آن را حساب کنید.

۳۵۲. حجم یک مکعب مستطیل که هر یک از وجه‌های جانبی، روبه‌رو و قاعدهٔ آن بترتیب به‌مساحت ۱۲ سانتیمترمربع، ۸ سانتیمترمربع و ۶ سانتیمترمربع می‌باشد، برحسب سانتیمترمکعب برابر است با :

الف) ۵۷۶   ب) ۲۴   ج) ۹   د) ۱۰۴   هـ) هیچ‌یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۰

۳۵۳. برای ساختن یک جعبهٔ روباز، از هر گوشهٔ یک ورقهٔ فلزی مستطیل شکل به ضلعهای ۱۰ سانتیمتر و ۱۴ سانتیمتر، مربعی به ضلع x سانتیمتر می‌بریم. کناره‌های طرح حاصل را، به‌طرف بالا خم می‌کنیم و خطهای اتصال را جوش می‌دهیم. حجم جعبهٔ حاصل، برابر است با :

الف) $۱۴۰x-۴۸x^{۲}+۴x^{۳}$ ب) $۱۴۰x+۴۸x^{۲}+۴x^{۳}$

ج) $۱۴۰x+۲۴x^{۲}+x^{۳}$ د) $۱۴۰x-۲۴x^{۲}+x^{۳}$

هـ) هیچ‌یک از اینها

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۷

۳۵۴. در یک مکعب مستطیل، وجه‌ها دارای مساحتهای ۶ سانتیمترمربع و ۹ سانتیمترمربع و ۲۴ سانتیمترمربع هستند. از گزاره‌های زیر کدامها درستند؟

الف) حجم این متوازی‌السطوح ۳۶ سانتیمترمکعب است.

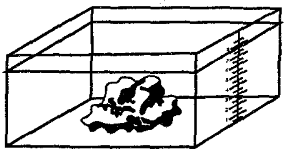
ب) حجم این متوازی‌السطوح ۱۲۹۶ سانتیمترمکعب است.

ج) حجم این متوازی‌السطوح ۴۸ سانتیمترمکعب است.

هـ) متوازی‌السطوح قائم با مفروضات بالا وجود ندارد.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۰

۴.۸.۱.۲. اندازهٔ حجم شکلهای دیگر



۳۵۵. یک قطعه فلز را در ظرف آبی به شکل مکعب مستطیل به قاعدهٔ ۵۰cm در ۳۶cm انداخته‌اند تا کاملاً به زیر آب رفته است. درنتیجه ارتفاع آب ۸mm بالا آمده است. حجم قطعه فلز را بیابید.

۳۵۶. ارتفاع یک مکعب مستطیل ۴۰cm و قاعدهٔ آن ۹cm در ۲۰cm است. صفحه‌ای که از قطر قاعدهٔ پایین و یکی از رأسهای قاعدهٔ بالای این جسم می‌گذرد، با وجوه جانبی آن هرمی تشکیل می‌دهد. حجم این هرم را بیابید.

۴.۸.۲. تساوی حجمها

۳۵۷. ثابت کنید، اگر ارتفاع یک منشور سه پهلو با دو برابر قطر دایرهٔ محیطی قاعدهٔ آن مساوی باشد، حجم منشور با حجم مکعب مستطیلی که یالهایش مساوی سه ضلع قاعدهٔ منشور باشند، برابر است.

۴.۹. رابطهٔ متری

۴.۹.۱. رابطهٔ متری (برابریها)

۳۵۸. مجموع مربعهای تصویرهای یک پاره‌خط روی سه صفحهٔ دو به دو عمود بر هم، مساوی دو برابر مربع طول آن پاره‌خط است.

۳۵۹. مجموع مربعهای تصویرهای یک پاره‌خط روی سه محور دو به دو عمود بر هم، مساوی با مربع طول این پاره‌خط است.

۴.۹.۲. رابطهٔ متری (نابرابریها)

۳۶۰. مکعب مستطیلی با یالهای به طول x، y و z سانتیمتر مفروض است ؛ درضمن :

$$p = 4(x+y+z)\ ,\ \ s = 2(xy+yz+xz)\ ,\ \ d = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$$

را بترتیب، محیط، مساحت سطح و قطر مکعب مستطیل می‌گیریم. ثابت کنید، به‌شرط $x<y<z$ داریم :

$$x<\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p-\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right)$$

$$z>\frac{1}{3}\left(\frac{1}{4}p+\sqrt{d^2-\frac{1}{2}s}\right)$$

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۰

۴.۱۰. مکان هندسی

۳۶۱. مکعب مستطیل $ABCD\,A'B'C'D'$ داده شده است. مکان هندسی نقطه‌ای را بیابید که از سه وجه جانبی مجاور هم، به یک فاصله باشند.

۴.۱۱. رسم شکل

۴.۱۱.۱. رسم خط

۳۶۲. قطر مکعب مستطیلی l و دو یال از آن به اندازه‌های a و b به‌صورت پاره‌خطهایی داده شده‌اند. یال سوم مکعب مستطیل را رسم کنید.

۴.۱۲. برش، مقطع

۳۶۳. کمترین تعداد برشهای صفحه‌ای را که برای بریدن مکعب مستطیلی به ابعاد $a\times b\times c$ به abc مکعب واحد لازم است، تعیین کنید، درصورتی که بتوان قطعه‌هایی را که قبلاً بریده شده‌اند، پیش از برش روی هم قرار داد (ل. موزر).

۱۳.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

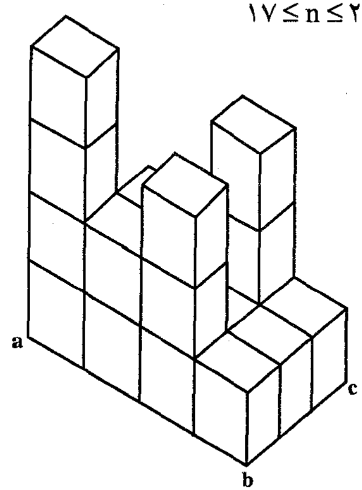
۳۶۴. شکل زیر، پرسپکتیو جسمی است که از روی هم چیدن مکعب مستطیلهای هم‌اندازه پدید آمده است. جسم روی مستطیلی بنا شده است که a، b و c سه رأس آن هستند. اگر n تعداد مکعب مستطیلهای به‌کار رفته باشد، بنا بر قاعده‌های پرسپکتیو (= مناظر و مرایا)، مناسبترین حدود n را کدام‌یک از فاصله‌های زیر مشخص می‌کند؟

الف) $18 \leq n \leq 20$ ب) $17 \leq n \leq 20$

ج) $18 \leq n \leq 21$ د) $18 \leq n \leq 22$

هـ) $17 \leq n \leq 24$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

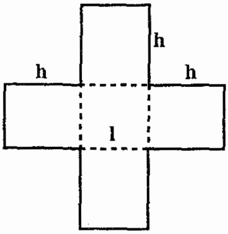


۳۶۵. ۲۶ کارت قرمز و ۲۶ کارت سیاه را کاملاً درهم ریخته و سپس آنها را روی هم چیده‌ایم. ثابت کنید که اگر تعداد کارتهای قرمز در ۲۶ کارت بالایی بیشتر از تعداد کارتهای سیاه در ۲۶ کارت پایینی باشد، دست‌کم سه کارت همرنگ پشت سر هم قرار گرفته‌اند.

۳۶۶. فرق اساسی بین متوازی‌السطوح و مکعب مستطیل را بیان کنید.

۱۴.۴. مسأله‌های ترکیبی

۳۶۷. اگر مقوای نشان داده شده در شکل صفحه بعد را از محلهای نقطه‌چین تا کنیم، یک



جعبهٔ در باز درست می‌شود.

الف) اگر $l = ۵cm$ و $h = ۴cm$، برای ساخت جعبه چه مقدار مقوا (برحسب سانتیمترمربع) لازم است؟

ب) مساحت مقوا را درحالت کلی برحسب l و h پیدا کنید.

۳۶۸. مکعب مستطیلی با قاعدهٔ مربع به طول ضلع ۶ سانتیمتر، و ارتفاع ۸ سانتیمتر داده شده است.

۱. اندازهٔ مساحت جانبی

۲. اندازهٔ مساحت کل

۳. اندازهٔ حجم

۴. اندازهٔ قطر

این مکعب مستطیل را تعیین کنید.

۳۶۹. مکعب مستطیلی به ابعاد ۱۶، ۱۲ و ۸ سانتیمتر داده شده است.

۱. اندازهٔ مساحت جانبی

۲. اندازهٔ مساحت کل

۳. اندازهٔ حجم

۴. اندازهٔ قطر

این مکعب مستطیل را تعیین کنید.

بخش ۵

• مکعب

۱.۵. تعریف و قضیه

۲.۵. نقطه، خط، صفحه

۱.۲.۵. نقطه

۱.۱.۲.۵. نقطه‌های : همخط، همصفحه،...

۱.۱.۱.۲.۵. نقطه‌ها همصفحه‌اند

۲.۱.۱.۲.۵. نقطه‌ها بر هم مُنطبقند

۳.۱.۱.۲.۵. نقطه‌ها درون مکعبند

۲.۲.۵. خط

۱.۲.۲.۵. خطهای : همرس، موازی،...

۱.۱.۲.۲.۵. خطها همرسند

۲.۱.۲.۲.۵. خطها بر هم عمودند

۳.۲.۵. خط و صفحه

۱.۳.۲.۵. خطها و صفحه‌های : موازی، عمود بر هم،...

۱.۱.۳.۲.۵. خط عمود بر صفحه است

۲.۱.۳.۲.۵. خط مماس بر کره است

۴.۲.۵. مرکز تقارن، محور تقارن، صفحهٔ تقارن

۵.۲.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱.۵.۲.۵. تعداد رأسها

۲.۵.۲.۵. تعداد یالها

۳.۵.۲.۵. تعداد رأسها و یالها

۴.۵.۲.۵. تعداد رأسها، یالها و وجه‌ها

۵.۲.۵.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳.۵. زاویه

۱.۳.۵. اندازهٔ زاویه

۱.۱.۳.۵. اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط

۲.۱.۳.۵. اندازهٔ زاویهٔ بین دو صفحه

۳.۱.۳.۵. اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ فرجه

۴.۱.۳.۵. اندازهٔ زاویهٔ بین خط و صفحه

۴.۵. یال، قطر

۱.۴.۵. یال

۱.۱.۴.۵. اندازهٔ یال

۲.۴.۵. قطر

۱.۲.۴.۵. اندازهٔ قطر

۵.۵. پاره‌خط

۱.۵.۵. اندازهٔ پاره‌خط

۲.۵.۵. کمترین اندازهٔ طول پاره‌خط

۳.۵.۵. بیشترین اندازهٔ طول پاره‌خط

۴.۵.۵. تساوی پاره‌خطها

۵.۵.۵. نسبت پاره‌خطها

۶.۵. شعاع کره

۱.۶.۵. اندازهٔ شعاع کره

۷.۵. مساحت

۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت جانبی

۲.۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت کل

۵.۷.۱.۳. اندازهٔ مساحت جانبی و مساحت کل
۵.۷.۱.۴. افزایش سطح مکعب
۵.۷.۱.۵. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده
۵.۷.۱.۶. کمترین مقدار مساحت شکلهای ایجاد شده
۵.۷.۱.۷. بیشترین مقدار مساحت شکلهای ایجاد شده
۵.۷.۱.۸. اندازهٔ مساحت مقطع
۵.۷.۲. نسبت مساحتها

۵.۸. حجم
۵.۸.۱. اندازهٔ حجم
۵.۸.۱.۱. اندازهٔ حجم مکعب
۵.۸.۱.۲. اندازهٔ حجمهای دیگر ایجاد شده
۵.۸.۱.۲.۱. اندازهٔ حجم بخش مشترک
۵.۸.۱.۲.۲. اندازهٔ حجم چهاروجهی
۵.۸.۱.۲.۳. اندازهٔ حجم جسم
۵.۸.۲. نسبت حجمها
۵.۸.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۵.۹. رابطهٔ متری

۵.۱۰. مکان هندسی
۵.۱۰.۱. مکان هندسی نقطه

۵.۱۱. رسم شکل
۵.۱۱.۱. رسم پاره‌خط
۵.۱۱.۲. رسم صفحه
۵.۱۱.۳. رسم تصویر
۵.۱۱.۴. رسم مکعب

۱۲.۵. برش، مقطع

۱.۱۲.۵. نوع مقطع

۲.۱۲.۵. محیط مقطع

۳.۱۲.۵. تعداد مکعبها، تعداد قسمتها

۴.۱۲.۵. تعداد صفحه‌ها

۱۳.۵. گستردهٔ مکعب

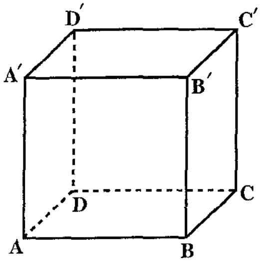
۱۴.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۱۵.۵. مسأله‌های ترکیبی

بخش ۵. مکعب

۱.۵. تعریف و قضیه

تعریف. مکعب منشوری است که قاعده‌ها و وجه‌های جانبی آن مربع باشند. از این تعریف نتیجه می‌شود که : مکعب، منشور قائم است. مکعب دارای شش وجه، دوازده یال و هشت رأس است (شکل).
هر یال مکعب بر وجه‌هایی که با آن موازی نیستند عمود است. فرجه‌های بین وجه‌های مجاور مکعب قائمه‌اند. کنجهای بین وجه‌هایی که بر هر رأس مکعب می‌گذرند، سه قائمه‌اند ؛ وجه‌های روبه‌روی مکعب متوازی‌اند. همهٔ یالهای مکعب متساوی‌اند. هر مکعب با یک عامل که همان اندازهٔ یالهای آن است، مشخص می‌شود.



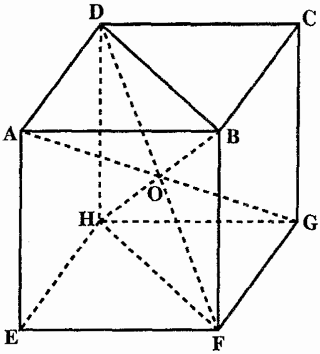
مساحت جانبی و مساحت کل مکعب. مساحت جانبی هر مکعب برابر با مجموع مساحتهای وجه‌های جانبی آن است. چون در مکعب هر یک از وجه‌های جانبی آن مربع می‌باشند، بنابراین اگر مساحت جانبی مکعبی به ضلع a را با S نمایش دهیم، خواهیم داشت :

$$S = ۴a^۲$$

مساحت کل مکعب. مساحت کل مکعب برابر با مجموع مساحتهای همهٔ وجه‌های آن

است، وجه‌های مکعب همگی مربعهای مساوی و تعداد آنها ۶ است. پس اگر مساحت کل مکعبی را که اندازهٔ هر یال آن a است با S نمایش دهیم:

$$S = 6a^2$$

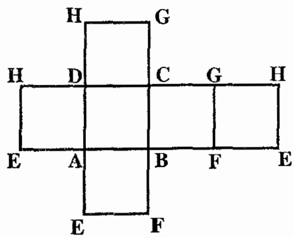


قطر مکعب. در هر مکعب پاره‌خطی که ابتدا و انتهای آن، دو رأس غیرواقع بر یک وجه باشند، قطر نامیده می‌شود.

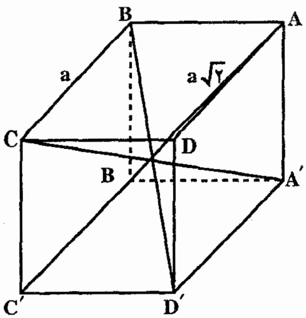
هر پاره‌خط که دو رأس مقابل یک وجه را به هم می‌پیوندد، قطری از آن وجه است. در شکل، پاره‌خطهای DF و HB قطرهای مکعب و پاره‌خطهای BD و HF قطرهایی از وجه‌های مکعبند.

۳۷۰. قضیه. اندازهٔ قطر مکعب به ضلع a، مساوی $a\sqrt{3}$ است.

گسترش سطح مکعب بر صفحه. اگر سطح مکعبی را در امتداد یالهای جانبی و سه یال از هر قاعده بریده و وجه‌های جانبی و یک قاعده را بر صفحهٔ قاعدهٔ دیگر باز کنیم، شکل زیر حاصل می‌شود. از این گسترش برای ساختن مکعبی به ضلع معین می‌توان استفاده کرد.



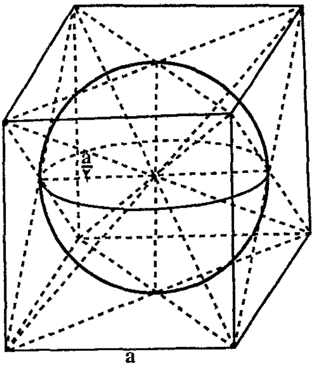
صفحهٔ قطری مکعب. صفحه‌ای است که بر دو قطر مکعب می‌گذرد. شش صفحهٔ قطری مکعب با هم برابرند؛ زیرا در مکعب به ضلع a، مستطیلهایی به ابعاد a و $a\sqrt{2}$ می‌باشند.



مساحت هر صفحهٔ قطری مکعب، مساوی $a.a\sqrt{2} = a^2\sqrt{2}$ است. صفحهٔ $BCD'A'$ در شکل، یکی از صفحه‌های قطری مکعب $ABCD\,A'B'C'D'$ را نشان می‌دهد. این صفحه بر دو قطر CA' و BD' گذشته است.

کرهٔ محیطی مکعب. کره‌ای است که بر رأسهای مکعب می‌گذرد. مرکز این کره مرکز مکعب است؛ زیرا صفحه‌های عمودمنصف ضلعهای مکعب در این نقطه متقاطعند.

در مکعب به ضلع a، اندازهٔ شعاع کرهٔ محیطی مساوی $\frac{a\sqrt{3}}{2}$، یعنی نصف قطر مکعب است.



کرهٔ محاطی مکعب. کره‌ای است که بر وجه‌های مکعب مماس است. مرکز این کره نیز مرکز مکعب است؛ زیرا صفحه‌های نیمساز فرجه‌های مکعب همگی در این نقطه همرسند. شعاع کرهٔ محاطی مکعبی به ضلع a، مساوی $\frac{a}{2}$، یعنی نصف ضلع مکعب است.

۲.۵. نقطه، خط، صفحه

۱.۲.۵. نقطه

۱.۱.۲.۵. نقطه‌های: همخط، همصفحه،...

۱.۱.۱.۲.۵. نقطه‌ها همصفحه‌اند

۳۷۱. O و O′ را دو سر قطری از یک مکعب فرض می‌کنیم. همهٔ یالهایی از مکعب را درنظر می‌گیریم که از رأس O یا O′ گذشته‌اند. ثابت کنید:

نقطه‌های وسط این یالها بر یک صفحه قرار دارند و رأسهای یک شش ضلعی منتظم را تشکیل می‌دهند.

المپیادهای ریاضی مجارستان، ۱۹۱۳

۲.۱.۱.۲.۵. نقطه‌ها بر هم منطبقند

۳۷۲. مکعب $ABCD\,A'B'C'D'$ داده شده است. تصویر قائم رأسهای B، D و A' انتهای یالهای AB، AD و AA' را روی قطر AC' به‌دست می‌آوریم. ثابت کنید که این سه تصویر در یک نقطه بر هم منطبقند که این نقطه به فاصلهٔ $\frac{2}{3}$ قطر AC' از طرف رأس A واقع است.

۳.۱.۱.۲.۵. نقطه‌ها درون مکعبند

۳۷۳. ۱۱۰۰۰ نقطه درون مکعبی به طول ضلع ۱۵ واحد مفروضند. ثابت کنید که دست‌کم ۶ تا از این نقطه‌ها درون کره‌ای به شعاع واحد واقعند.

۲.۲.۵. خط

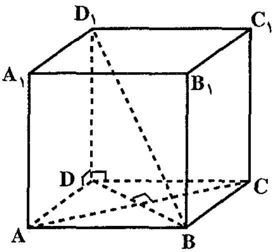
۱.۲.۲.۵. خطهای: همرس، موازی،...

۱.۱.۲.۲.۵. خطها همرسند

۳۷۴. ثابت کنید، قطرهای مکعب همرسند.

۲.۱.۲.۲.۵. خطها بر هم عمودند

۳۷۵. ثابت کنید، قطر BD_1 از مکعب شکل روبه‌رو، بر قطر AC از وجه $ABCD$ عمود است.



۳.۲.۵. خط و صفحه

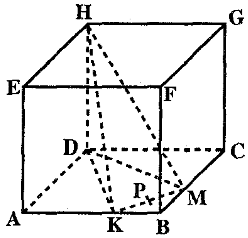
۱.۳.۲.۵. خطها و صفحه‌های: موازی، عمود بر هم،...

۱.۱.۳.۲.۵. خط عمود بر صفحه است

۳۷۶. قطر یک مکعب که از یک رأس آن ناشی می‌شود، بر صفحهٔ گذرنده از انتهای سه یال

ناشی از همان رأس، عمود است.

۳۷۷. در مکعب روبه‌رو، $BK = BM$ و P وسط پاره‌خط KM است. ثابت کنید، صفحهٔ HDP عمودمنصف پاره‌خط KM است.



۲.۱.۳.۲.۵. خط مماس بر کره است

۳۷۸. مکعب $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ مفروض است. از رأس A صفحه‌ای گذشته و بر کرهٔ محاط در آن مماس شده است. اگر M و N محل برخورد این صفحه با یالهای A_1B و A_1D باشند، ثابت کنید خط MN بر کرهٔ محاط در داخل مکعب، مماس است.

۴.۲.۵. مرکز تقارن، محور تقارن، صفحهٔ تقارن

۳۷۹. ثابت کنید که هر مکعب دارای یک مرکز تقارن، نه صفحهٔ تقارن و نه محور تقارن است.

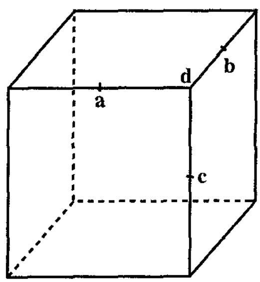
۵.۲.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱.۵.۲.۵. تعداد رأسها

۳۸۰. نقطه‌های a، b و c در وسط یالهای رأس d از یک مکعب واقعند. جسم abcd را از مکعب حذف می‌کنیم. در هر یک از رأسهای دیگر مکعب نیز این چنین جسمی را از مکعب حذف می‌کنیم. جسم باقیمانده چند رأس خواهد داشت؟

الف) ۱۲　　ب) ۱۸　　ج) ۲۴　　د) ۳۶　　هـ) ۴۸

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵



۲.۵.۲.۵. تعداد یالها

۳۸۱. یک مکعب چند جفت یالهای موازی با هم دارد؟

الف) ۸ جفت　　ب) ۱۲ جفت

ج) ۱۶ جفت　　د) ۱۸ جفت

هـ) ۲۴ جفت

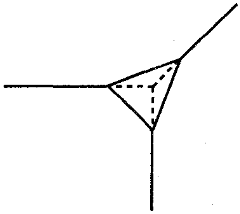
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۳.۵.۲.۵. تعداد رأسها و یالها

۳۸۲. در مکعبی با یال به طول ۳ سانتیمتر، از هر یک از گوشه‌های آن هرمی جدا می‌کنیم که رأس هرم همان رأس مکعب، یالهای جانبی هرم بر یالهای مکعب واقع و هر کدام به طول یک سانتیمتر باشند. در جسمی که باقی می‌ماند، تعداد یالها و تعداد رأسها روی هم برابر است با :

الف) ۶۰　　ب) ۶۸　　ج) ۷۲

د) ۸۰　　هـ) ۹۶



المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۴.۵.۲.۵. تعداد رأسها، یالها و وجه‌ها

۳۸۳. مرکزهای وجه‌های یک مکعب رأسهای یک چندوجهی محدب هستند. تعداد رأسها، یالها و وجه‌های این چندوجهی عبارت است از :

الف) ۸ رأس، ۱۲ یال، ۶ وجه

ب) ۶ رأس، ۱۰ یال، ۸ وجه

ج) ۶ رأس، ۱۲ یال، ۸ وجه

د) ۸ رأس، ۱۲ یال، ۸ وجه

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۷

۵.۵.۲.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۳۸۴. تحقیق کنید هر مکعب چند رأس، چند یال، چند وجه و چند قطر دارد؟ چرا؟

۳.۵. زاویه

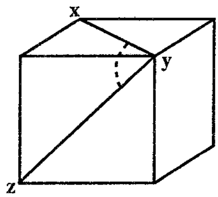
۱.۳.۵. اندازهٔ زاویه

۱.۱.۳.۵. اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط

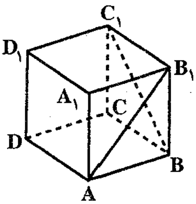
۳۸۵. در شکل زیر، یک مکعب تصویر شده است و پاره‌خطهای xy و yz، قطرهای دو وجه مجاور آن هستند. اندازهٔ زاویهٔ $x\hat{y}z$ چقدر است؟

الف) $60°$ ب) $70°$ ج) $80°$ د) $90°$ هـ) $120°$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶



۳۸۶. زاویهٔ بین خطهای مستقیمی را پیدا کنید که شامل قطرهای AB_1 و BC_1 از وجه‌های جانبی مکعب هستند (شکل).



۳۸۷. در این مکعب اندازهٔ زاویه‌های:

$D\hat{E}H$ و $D\hat{H}E$

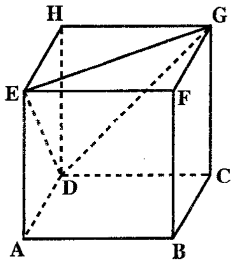
$E\hat{G}D$ و $H\hat{G}D$

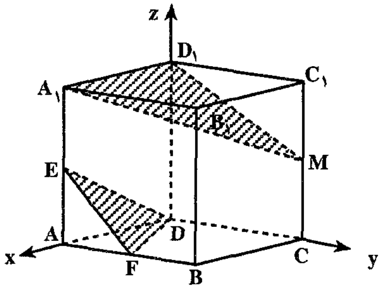
را بیابید.

می‌توانید از این ویژگیهای مکعب استفاده کنید:

۱) ۱۲ یال آن همنهشتند.

۲) هر دو یال متقاطعی بر هم عمودند.





۵.۳.۱.۲. اندازهٔ زاویهٔ بین دو صفحه

۳۸۸. نقطه‌های E، F و M در مکعب شکل روبه‌رو، بترتیب میانگاه یالهای AB ، AA_1 و CC_1 هستند. زاویهٔ بین صفحه‌های EFD و A_1D_1M را به‌دست آورید.

۵.۳.۱.۳. اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ فرجه

۳۸۹. مکعب $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ مفروض است. صفحه‌ای از نقطهٔ A گذشته و بر کرهٔ محاطی آن در داخل مکعب مماس و یالهای A_1B_1 و A_1D_1 را در نقطه‌های K و N قطع می‌کند. اندازهٔ فرجهٔ بین صفحه‌های AC_1K و AC_1N را تعیین کنید.

۵.۳.۱.۴. اندازهٔ زاویهٔ بین خط و صفحه

۳۹۰. مکعب $ABCD\,A_1B_1C_1D_1$ مفروض است. از یال AA_1 صفحه‌ای گذشته و با خطهای BC_1 و B_1D زاویه‌های مساوی تشکیل داده است. این زاویه را پیدا کنید.

۵.۴. یال، قطر

۵.۴.۱. یال

۵.۴.۱.۱. اندازهٔ یال

۳۹۱. مکعبهایی را درنظر می‌گیریم که مرکزهای آنها، بر مرکز تقارن مکعب مستطیل مفروضی، با یالهای $a<b<c$ واقع، و وجه‌های آنها با وجه‌های مکعب مستطیل موازی باشند. طول یال مکعبی را پیدا کنید که، برای آن، اجتماع حجمهای مکعب و مکعب مستطیل، با اشتراک آنها، حداقل تفاضل را داشته باشد.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، چکوسلواکی، ۱۹۷۹

۳۹۲. ضلع مکعبی را به‌دست آورید که با اضافه کردن ۱ سانتیمتر به طول ضلع آن، مساحت کلش ۱/۹۸ سانتیمترمربع افزایش یابد.

۳۹۳. طول قطر مکعبی ۱۲ است. طول ضلع این مکعب کدام است؟

۳۹۴. سطح کل و حجم مکعبی با یک عدد بیان شده است. طول یال این مکعب چقدر است؟

۳۹۵. عدد حجم یک مکعب برحسب فوت مکعب با عدد مساحت کل آن برحسب اینچ مربع برابر است (هر فوت، ۱۲ اینچ است). طول یال مکعب برحسب فوت برابر است با :

الف) ۶ ب) ۸۶۴ ج) ۱۷۲۸ د) ۶×۱۷۲۸

هـ) ۲۳۰۴

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۷۲

۵.۴.۲. قطر

۵.۴.۲.۱. اندازهٔ قطر

۳۹۶. اگر طول یالهای مکعبی برابر a باشد، طول قطر آن را پیدا کنید.

حالت خاص. طول یال مکعبی به ضلع ۶ را تعیین کنید.

۳۹۷. اندازهٔ قطر هر وجه و هر قطر از مکعبی به ضلع ۱۲ سانتیمتر را حساب کنید.

۳۹۸. در مکعب با یال به طول $۲\sqrt{۳}$ متر، طول قطر برابر است با :

الف) ۶ متر ب) ۵ متر ج) $۵\sqrt{۳}$ متر د) $۶\sqrt{۳}$ متر

هـ) $۲\sqrt{۶}$ متر

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۳۹۹. در مکعبی که درازای هر یال آن یک است. درازای هر قطر آن چقدر است؟

الف) ۳ ب) $۱+\sqrt{۲}$ ج) $\sqrt{۳}$ د) $۲+\sqrt{۲}$

هـ) $۲\sqrt{۲}$

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۴۰۰. اگر طول یال مکعب را دو برابر کنیم، طول قطر آن چه تغییری می‌کند؟

۵.۵. پاره‌خط

۵.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۴۰۱. طول یال مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ برابر a است. نقطه‌های P، K و L بترتیب وسطهای

AA_1 ، A_1D_1 و B_1C_1 درنظر گرفته شده‌اند و نقطهٔ Q مرکز وجه CC_1D_1D می‌باشد. دو سر پاره‌خط MN بر روی خطهای AD و KL قرار گرفته، خط PQ را قطع و بر آن عمود شده است. طول این پاره‌خط را حساب کنید.

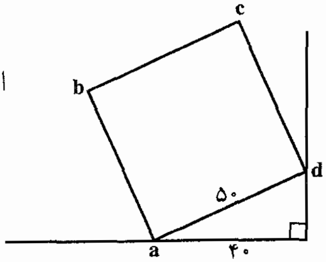
۴۰۲. طول یال یک مکعب برابر a است. فاصلهٔ بین خطهای مستقیمی را پیدا کنید که شامل قطرهای متناظر از دو وجه مجاور مکعب هستند.

۴۰۳. جعبهٔ به شکل مکعب در طول یک یال بر زمین و در طول یک یال بر دیوار تکیه دارد. طول هر یال جعبه ۵۰ سانتیمتر و تکیه‌گاه آن روی زمین تا پای دیوار ۴۰ سانتیمتر فاصله دارد. بالاترین رأس این جعبه (رأس C در شکل) از زمین چند سانتیمتر ارتفاع دارد؟

الف) $۴۰+\sqrt{۵۰}$ ب) ۷۰ ج) ۸۰ د) $۳۰+\sqrt{۵۰}$

هـ) ۹۰

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵



۴۰۴. در مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ اگر $AB = a$ باشد، آن‌گاه فاصلهٔ بین صفحه‌های AB_1D_1 و BDC_1 را محاسبه کنید.

۲.۵.۵. کمترین اندازهٔ طول پاره‌خط

۴۰۵. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ به یال a داده شده است. روی AA_1 نقطهٔ M و روی BC نقطهٔ N را طوری اختیار می‌کنیم که MN یال C_1D_1 را قطع کند. کمترین مقدار MN چقدر است؟

۴۰۶. مکعبی به یال a داده شده است. نقطهٔ N روی یکی از قطرهای وجه‌های جانبی آن درنظر گرفته شده است و M بر روی دایره‌ای قرار دارد که در صفحهٔ قاعده رسم می‌شود و مرکز آن بر مرکز قاعده منطبق و شعاع آن $(\frac{۵}{۱۲}a)$ است. کمترین مقدار MN را پیدا کنید.

۴۰۷. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ به یال a داده شده است. طول کوتاهترین پاره‌خطی را پیدا

کنید که دو سر آن بر روی AB_1 و BC_1 قرار داشته و با صفحهٔ ABCD زاویهٔ °۶۰ بسازد.

۴۰۸. طول یال مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ برابر یک سانتیمتر است. دایرهٔ محاطی مربع ABCD، و دایره‌ای را که از نقطه‌های A، C و B_1 گذشته است، رسم کرده‌ایم. حداقل فاصلهٔ بین نقطه‌های محیطی این دو دایره را پیدا کنید.

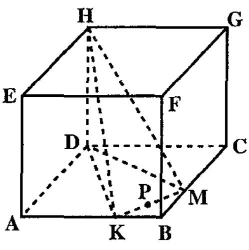
المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۵

۳.۵.۵. بیشترین اندازهٔ طول پاره‌خط

۴۰۹. با لحیم کردن دوازده قطعه سیم ۳ سانتیمتری، مکعبی ساخته شده است. اگر مگسی بر یکی از رأسها بنشیند و طول یالها را به قسمی طی کند که از هر رأس و هر یال فقط یک‌بار بگذرد، بیشترین مسافتی که می‌تواند بپیماید چند سانتیمتر است؟

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۵۷

۴.۵.۵. تساوی دو پاره‌خط



۴۱۰. در مکعبی که می‌بینید، $BK = BM$. ثابت کنید H از K و M به یک فاصله است. در استدلال خود می‌توانید از این ویژگیهای مکعب استفاده کنید:

الف) هر وجه مکعب در یک صفحه قرار دارد.

ب) ۱۲ یال مکعب همنهشتند.

پ) هر دو یال متقاطعی برهم عمودند.

۵.۵.۵. نسبت پاره‌خطها

۴۱۱. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$، نقطهٔ M مرکز وجه ABB_1A_1 و N نقطه‌ای واقع بر روی B_1C_1 و L وسط A_1B_1 و K پای عمود رسم شده از N بر BC_1 داده شده‌اند. یال B_1C_1 به‌وسیلهٔ نقطهٔ N به چه نسبتی تقسیم می‌شود؟ در صورتی که $L\hat{M}N = M\hat{K}N$ باشد.

۴۱۲. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ مفروض است. صفحه‌ای از رأس A و دو نقطهٔ P و Q، مرکز وجه‌های $A_1B_1C_1D_1$ و BB_1C_1C گذرانده‌ایم. این صفحه، یال B_1C_1 را به چه نسبتی قطع می‌کند؟

۴۱۳. در مکعب واحد $ABCDA'B'C'D'$ بر روی یالهای AA' ، AB، $B'C'$ و BC بترتیب نقطه‌های K، L، M و N را طوری اختیار می‌کنیم که داشته باشیم :

$$AL = \frac{۲}{۳}\ ,\ B'M = \frac{۱}{۴}\ ,\ CN = \frac{۳}{۱۰}$$

تعیین کنید کدام‌یک از یالهای AB و AD، صفحه‌ای را که شامل پاره‌خط KN بوده و موازی با پاره‌خط ML می‌باشد، قطع می‌کند. این یال به چه نسبتی قطع می‌شود؟

۴۱۴. فاصلهٔ بین دو قطر متنافر از دو وجه مجاور یک مکعب را که طول یال آن a می‌باشد، پیدا کنید. هر یک از این قطرها، به‌وسیلهٔ عمود مشترک به چه نسبتی تقسیم می‌شوند؟

۴۱۵. در مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ، نقطهٔ K را وسط یال AA_1 در نظر گرفته‌ایم و نقطهٔ L روی BC قرار دارد. پاره‌خط KL بر کرهٔ محاط در مکعب مماس است. پیدا کنید، پاره‌خط KL به چه نسبتی توسط نقطهٔ تماس تقسیم می‌شود.

۴۱۶. در مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ ، نقطهٔ M روی AC و نقطهٔ N روی قطر BD_1 مکعب طوری اختیار شده‌اند که $N\hat{M}C = ۶۰^\circ$ و $M\hat{N}B = ۴۵^\circ$. به چه نسبتی پاره‌خط AC و BD_1 توسط M و N تقسیم می‌شوند؟

۴۱۷. نقطه‌های M و N روی قطرهای AB_1 و BC_1 از وجه‌های مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ طوری قرار گرفته‌اند که پاره‌خط MN موازی وجه ABCD است. نسبتهای AM/AB_1 و BN/BC_1 را با شرط $MN/AB = \frac{\sqrt{۵}}{۳}$ به‌دست آورید.

۴۱۸. طول یال مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ برابر ۱ است. روی امتداد یال AD، نقطهٔ M را نسبت به D طوری اختیار می‌کنیم که $AM = ۲\sqrt{\frac{۲}{۵}}$. وسط یال A_1B_1 را با E و وسط یال DD_1 را با F نشان می‌دهیم. حداکثر نسبت MP/PQ را وقتی که نقطهٔ P روی AE و نقطهٔ Q روی CE قرار دارد، پیدا کنید.

۶.۵. شعاع کره

۱.۶.۵. اندازهٔ شعاع کره

۴۱۹. طول یال مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ برابر b است. شعاع کره‌ای را پیدا کنید که از وسط یالهای AA_1 و BB_1 و رأسهای A و C_1 می‌گذرد.

۴۲۰. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ به طول یال a داده شده است. شعاع کره‌ای را پیدا کنید که بر پاره خطهای AC_1 و CC_1 و خطهای AB و BC مماس بوده و خطهای AC و A_1C_1 را قطع کند.

۴۲۱. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ به یال a داده شده است. شعاع کوچکترین کره‌ای را پیدا کنید که بر خطهای AB_1 و B_1C، CD و DA مماس باشد.

۴۲۲. چهار کره با شعاعهای ۲، ۲، ۳ و ۳ بترتیب، در فضا مفروضند و هر کره بر سه تای دیگر مماس است. یک کرهٔ کوچک دیگر بر هر چهار کره مفروض مماس می‌باشد. اندازهٔ شعاع آن کره چیست؟

المپیادهای ریاضی چین، ۱۹۹۵

۷.۵. مساحت

۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت جانبی

۴۲۳. اندازهٔ مساحت جانبی مکعبی، به یال ۳ را تعیین کنید.

۴۲۴. حجم مکعبی برابر $۶۴cm^3$ است. سطح جانبی آن چقدر است؟

۲.۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت کل

۴۲۵. طول قطر وجه یک مکعب ۱۰ سانتیمتر است. مساحت کل آن را حساب کنید.

۴۲۶. اگر طول قطر مکعبی $\sqrt{۶}$ باشد، مساحت کل آن را حساب کنید.

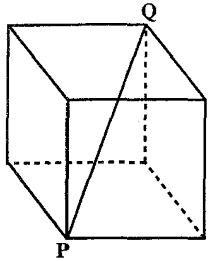
۴۲۷. سطح جانبی و حجم مکعبی با یک عدد بیان شده است. سطح کل مکعب کدام است؟

الف) ۶۴ ب) ۱۹۲ ج) ۴۸ د) ۹۶

۴۲۸. در شکل زیر، PQ قطر مکعب است. اگر طول PQ، a باشد، آن‌گاه سطح مکعب برابر است با :

الف) $۲a^۲$ ب) $۲\sqrt{۲}\ a^۲$ ج) $۲\sqrt{۳}\ a^۲$ د) $۳\sqrt{۳}\ a^۲$ هـ) $۶a^۲$

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۱



۳.۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت جانبی و مساحت کل

۴۲۹. مساحت جانبی و مساحت کل مکعبی به ضلع ۹ سانتیمتر را حساب کنید.

۴۳۰. مساحت رویهٔ جانبی مکعبی به قطر $۵\sqrt{۳}$ چقدر است؟ مساحت رویهٔ کل این مکعب چقدراست؟

۴.۱.۷.۵. افزایش سطح مکعب

۴۳۱. هرگاه هر یک از یالهای یک مکعب به میزان ٪۵۰ بلندتر اختیار شوند، سطح کل آن به چه نسبت زیادتر می‌شود؟

الف) ٪۵۰ ب) ٪۱۲۵ ج) ٪۱۵۰ د) ٪۳۰۰

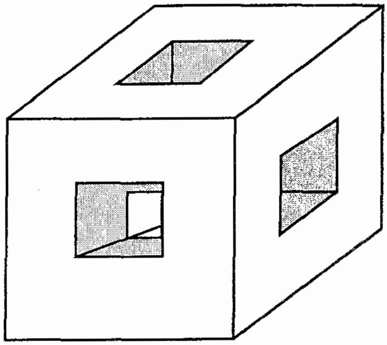
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۱

۵.۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۴۳۲. شکل داده شده، مکعبی چوبی است که طول هر یال آن ۳ متر است. از مرکز هر وجه به مرکز وجه روبه‌رو مکعب را سوراخ کرده‌اند. سوراخ مربع شکل و به ضلع یک متر است. یالهای سوراخها با یالهای مکعب موازی‌اند. سطح کل جسم حاصل که سطحهای داخل را نیز شامل باشد، برحسب مترمربع برابر است با :

الف) ۵۴ ب) ۷۲ ج) ۷۶ د) ۸۴ هـ) ۸۶

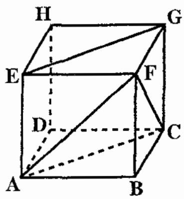
مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۲



۴۳۳. ضلع مکعبی ۸ سانتیمتر است، مساحت مقطع صفحهٔ قطری این مکعب کدام است؟

الف) ۶۴ ب) ۳۲ ج) $۶۴\sqrt{۲}$ د) ۹۶

۴۳۴. در مکعب، یالها همنهشت و یالهای متقاطع برهم عمودند. اگر طول یک ضلع ۶ باشد، ACGE □ a و a Δ ACF را بیابید.



۴۳۵. مکعبی به یال a مفروض است. مساحتهای آن قسمتهایی از کرهٔ محیطی آن را پیدا کنید، که به‌وسیلهٔ صفحه‌های وجه‌های مکعب جدا شده‌اند.

۶.۱.۷.۵. کمترین مقدار مساحت شکلهای ایجاد شده

۴۳۶. مکعبی به یال a بر روی یک صفحه قرار دارد. منبع نوری به فاصلهٔ b از صفحه واقع شده‌اند. $(b > a)$ مینیمم مساحت سایه‌ای را که مکعب روی صفحه می‌اندازد، حساب کنید.

۴۳۷. طول یال مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ برابر a است. نقطه‌های E و F را بترتیب وسطهای یالهای BB_1 و CC_1 درنظر می‌گیریم. مثلثهایی را درنظر می‌گیریم که رأسهای آنها محل برخورد صفحه‌ای موازی با صفحهٔ ABCD با خطهای AC_1، CE و DF باشند،

کمترین مقدار مساحتی که این گونه مثلثها می‌توانند داشته باشند، چقدر است؟

۷.۱.۷.۵. بیشترین مقدار مساحت شکلهای ایجاد شده

۴۳۸. جعبه‌ای به شکل مکعب به طول یال ۱۰ سانتیمتر است. کره‌ای که سطح آن A سانتیمتر مربع است، درون جعبه قرار دارد. از عددهای زیر، کدام‌یک بیشترین مقدار برای A می‌تواند باشد؟

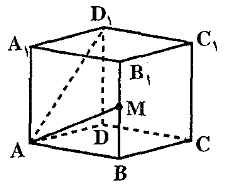
الف) ۳۱۲/۵   ب) ۳۱۳/۵   ج) ۳۱۴/۵   د) ۳۱۵/۵

هـ) ۳۱۶/۵

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

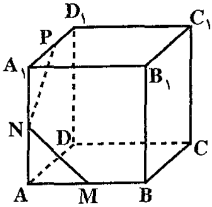
۸.۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت مقطع

۴۳۹. طول یال مکعبی برابر a است (شکل الف). مساحت برشی از مکعب را پیدا کنید که از قطر AD_1 متعلق به وجه AA_1D_1D و M میانگاه یال BB_1 عبور می‌کند.



(الف)

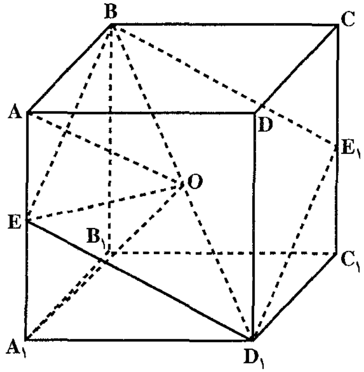
۴۴۰. از میانگاههای یالهای AB، AA_1 و A_1D_1 (شکل الف) صفحه‌ای را عبور می‌دهیم. شکل برش حاصل را تعیین کنید. اگر طول یال مکعب برابر a باشد، مساحت برش را محاسبه کنید.



۴۴۱. ثابت کنید، هر مقطع مکعب با صفحه‌ای که از مرکز آن می‌گذرد، مساحتی دارد که از مساحت وجه مکعب کمتر نیست.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۴

۴۴۲. ثابت کنید، بین جمیع مقاطع صفحه‌های گذرنده بر BD' و مکعب $ABCDA'B'C'D'$، آن مقطع مساحت مینیمم دارد که از نقطهٔ E وسط یال AA' گذشته باشد.



۲.۷.۵. نسبت مساحتها

۴۴۳. سطح بیرونی مکعبی چوبی به رنگ قرمز رنگ‌آمیزی شده است. این مکعب را به موازات هر یک از وجه‌های خود دو برش می‌دهند تا به ۲۷ مکعب مستطیل تقسیم شود. بعضی از وجه‌های این مکعب مستطیلها به رنگ قرمز و بقیهٔ وجه‌های آنها به رنگ طبیعی چوب باقی می‌ماند. نسبت مجموع مساحتهای وجه‌های با رنگ طبیعی به مجموع مساحتهای وجه‌های با رنگ قرمز، چقدر است؟

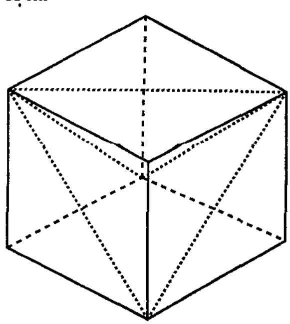
الف) ۲   ب) $\frac{۱}{۳}$ ج) $\frac{۱}{۴}$ د) ۱   هـ) ۳

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۲

۴۴۴. چهار رأس از هشت رأس یک مکعب، رأسهای یک چهاروجهی منتظم هستند. نسبت سطح مکعب به سطح این چهار وجهی کدام است؟

الف) $\sqrt{۲}$ ب) $\sqrt{۳}$ ج) $\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ د) $\frac{۲}{\sqrt{۳}}$ هـ) ۲

مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا، ۱۹۸۰



۴۴۵. نسبت سطح یک مکعب را به سطح کرهٔ محاط در آن پیدا کنید.

۸.۵. حجم

۱.۸.۵. اندازهٔ حجم

۱.۱.۸.۵. اندازهٔ حجم مکعب

۴۴۶. اندازهٔ حجم مکعبی به یال ۴ را تعیین کنید.

۴۴۷. اندازهٔ حجم مکعبی را بیابید که طول قطر آن $۸\sqrt{۳}$ باشد.

۴۴۸. سطح کل مکعبی برابر $۲۴cm^۲$ است. حجم این مکعب را پیدا کنید.

۴۴۹. اندازهٔ حجم مکعبی را به‌دست آورید که فاصلهٔ بین یک رأس آن از وسط یک یال که از آن رأس نمی‌گذرد، داده شده است (دو حالت درنظر بگیرید).

۴۵۰. گنجایش ظرفهای مکعبی شکل به نسبت (۱:۸:۲۷) و حجم مایع درون آنها، به نسبت (۱:۲:۳) است. مقداری از مایع ظرف اوّل در ظرف دوم ریخته‌ایم و سپس از ظرف دوم به ظرف سوم، تا جایی که سطح مایع در هر سه ظرف یکسان شود. سپس، از ظرف اوّل، $۱۲۸\frac{۴}{۷}$ لیتر مایع به ظرف دوم، ریخته‌ایم و بعد، از ظرف دوم به ظرف اوّل، آن قدر مایع برگرداندیم تا ارتفاع ستون مایع در ظرف اوّل دو برابر ارتفاع ستون مایع در ظرف دوم شود. معلوم شد در ظرف اوّل، ۱۰۰ لیتر کمتر از آن‌چه در آغاز در آن بوده، وجود دارد. در آغاز در هر ظرف چقدر مایع بوده است؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۷

۲.۱.۸.۵. اندازهٔ حجمهای دیگر ایجاد شده

۱.۲.۱.۸.۵. اندازهٔ حجم بخش مشترک

۴۵۱. قطر مکعبی با طول ۱، بر روی یال فرجه‌ای قرار دارد که اندازهٔ آن α می‌باشد ($\alpha<۱۸۰^\circ$). حدود تغییرات آن قسمت از حجم مکعب را پیدا کنید که در داخل این فرجه محصور شده است.

۴۵۲. یک یال مکعب و یک یال چهاروجهی منتظم، روی خط راستی قرار دارند. وسطهای

یالهای متقابل مکعب و چهاروجهی بر همدیگر منطبق هستند. حجم مشترک مکعب و چهار وجهی را پیدا کنید، در صورتی که طول یال مکعب a باشد.

۴۵۳. طول یال مکعبی برابر a است. مکعب را حول قطرش به اندازهٔ α دوران می‌دهیم. حجم مشترک مکعب اصلی را با مکعب دوران یافته پیدا کنید.

۵.۸.۱.۲.۲. اندازهٔ حجم چهاروجهی

۴۵۴. مکعبی به یال a مفروض است. دو رأس از یک چهاروجهی منتظم بر روی قطرآن، و دو رأس دیگرش بر روی قطر یکی از وجه‌های آن قرار دارد. حجم چهاروجهی را پیدا کنید.

۴۵۵. مکعبی به ضلع a داده شده است. اندازهٔ حجم چهاروجهیی را که رأسهای آن چهار رأس غیرواقع بر یک یال مکعب می‌باشند، برحسب a تعیین کنید (۴ رأس از مکعب که هیچ دوتایی از آنها به یک یال تعلق ندارند).

۵.۸.۱.۲.۳. اندازهٔ حجم جسم

۴۵۶. چهار رأس مکعب را طوری انتخاب کنید که هیچ دوتای آنها روی یک یال واقع نباشد. از هر سه رأس از این چهار رأس، یک صفحه عبور دهید. مطلوب است، حجم جسمی که محدود به این صفحه‌هاست. یال مکعب را برابر a بگیرید.

۴۵۷. مکعبی به ضلع a مفروض است، هر سه یالی را درنظر بگیرید که از یک رأس گذشته‌اند و از سه انتهای این سه یال صفحه‌ای بگذرانید. به این ترتیب، شش صفحه به‌دست می‌آید. مطلوب است، حجم جسم محدود به این شش صفحه.

۴۵۸. ۸ صفحه‌ای که بر وسطهای هر سه یال همرس یک رأس مکعب، می‌گذرند، شکلی درست می‌کنند که مکعب ـ هشت وجهی نامیده می‌شود. اندازهٔ حجم آن را بیابید.

۵.۸.۲. نسبت حجمها

۴۵۹. از قطر AD_1 وجه AA_1D_1D، در مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ برشی را عمود بر صفحهٔ BC_1D رسم می‌کنیم. این برش، مکعب را به دو قسمت تقسیم می‌کند. نسبت حجمهای آنها را بیابید.

۴۶۰. اگر ضلع مکعبی دو برابر شود، حجم آن چند برابر می‌شود؟ به عبارت دیگر، نسبت حجم

دو مکعب را بیابید که ضلع یکی دو برابر، ضلع دیگری باشد.

۴۶۱. کره‌ای از رأسهای یکی از وجه‌های مکعبی می‌گذرد و به ضلعهای وجه مقابل آن مماس است. نسبت حجم کره را به حجم مکعب پیدا کنید.

۴۶۲. نسبت حجمها و نسبت سطحهای یک مکعب و یک چهاروجهی منتظم را که اندازهٔ یال آنها مساوی a است، تعیین کنید.

۳.۸.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۶۳. برای آن که حجم یک مکعب را دو برابر کنیم، از روشهای زیر کدام یک مناسبتر است؟

الف) هر یال آن را به اندازهٔ خودش بزرگ کنیم.

ب) هر یال آن را به اندازهٔ نصف طول خود بزرگ کنیم.

ج) هر یال آن را به اندازهٔ یک چهارم طول خود بزرگ کنیم.

د) هر یال آن را به اندازهٔ یک سوم طول خود بزرگ کنیم.

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۹

۴۶۴. یک ظرف مکعب شکل ۳۰cm پر از آب است. اگر وزن یک لیتر آب یک کیلوگرم باشد، وزن آب درون ظرف چقدر است؟

۹.۵. رابطهٔ متری

۴۶۵. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ داده شده است. نقطه‌های M و N بر روی پاره‌خطهای AA_1 و BC_1 طوری اختیار شده‌اند که خط MN، خط B_1D را قطع می‌کند. مطلوب است:

$$\frac{BC_1}{BN} - \frac{AM}{AA_1}$$

۴۶۶. ثابت کنید مجموع مربعهای تصویرهای یالهای یک مکعب روی هر صفحهٔ دلخواه، مقدار ثابتی است.

۴۶۷. مکعب به یال برابر a را، به موازات خط راست l، بر صفحه‌ای تصویر کرده‌ایم. مطلوب است، مجموع مجذورهای طولهای همهٔ یالهای مکعب بر این صفحه، به شرطی که خط راست l، با این صفحه، زاویه‌ای برابر φ ساخته باشد.

۴۶۸. مکعبی به یال $a+b$ بگیرید و درستی اتحاد زیر را ثابت کنید :

$$(a+b)^۳ = a^۳ + b^۳ + ۳a^۲b + ۳ab^۲$$

۵.۱۰. مکان هندسی

۵.۱۰.۱. مکان هندسی نقطه

۴۶۹. مکان هندسی نقطه‌ای در درون یک مکعب را بیابید که از وجه مقابل آن به یک فاصله است.

۴۷۰. مکان هندسی بقیهٔ رأسهای مکعبی را تعیین کنید که از آن، دو رأس A و B که دو سر یک قطر از یک وجه آن می‌باشند، ثابت است.

۴۷۱. از مکعبی دو رأس A و B از یک یال داده شده است. مکان هندسی رأسها و یالهای دیگر این مکعب را تعیین کنید.

۴۷۲. عنکبوتی روی یکی از رأسهای مکعبی به یال ۱ می‌نشیند، سپس با سرعت $۱\frac{cm}{s}$ روی سطح مکعب می‌خزد. مکان هندسی نقطه‌هایی از سطح مکعب را پیدا کنید که در مدت ۲ ثانیه به‌وسیلهٔ عنکبوت پیموده می‌شود.

۴۷۳. همهٔ دورانهایی را که دور محورهای مختلف در فضا انجام می‌گیرد و رأس A از مکعب $ABCDA'B'C'D'$ را بر رأس B از آن منطبق می‌کنند، در نظر می‌گیریم. مطلوب است، مکان هندسی نقطه‌ای از سطح این مکعب که، ضمن این دورانها، از دوران نقطهٔ C به‌دست می‌آید.

المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، چکوسلواکی، ۱۹۷۳

۴۷۴. مکعب $ABCDA'B'C'D'$ ($ABCD$ و $A'B'C'D'$ بترتیب قاعده‌های فوقانی و تحتانی مکعبند و یالهای AA'، BB'، CC' و DD' موازی‌اند) را درنظر می‌گیریم. نقطهٔ X با سرعت ثابت در امتداد محیط مربع $ABCD$ در امتداد $ABCDA$ و نقطهٔ Y با همین نرخ در امتداد محیط مربع $B'C'CB$ حرکت می‌کند. نقطه‌های X و Y بترتیب حرکتشان را در یک لحظه از مواقع آغازین A و B' آغاز می‌کنند. مکان هندسی وسطهای قطعه‌های XY را تعیین و رسم کنید.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۳

۱۱.۵. رسم شکل

۱.۱۱.۵. رسم پاره‌خط

۴۷۵. دو پاره‌خط رسم کنید که نسبت آنها، مساوی نسبت حجمهای دو مکعب مفروض باشد.

۲.۱۱.۵. رسم صفحه

۴۷۶. ثابت کنید، مکعب را می‌توان با صفحه‌ای چنان قطع کرد که در مقطع، یک شش‌ضلعی منتظم به‌دست آید.

۴۷۷. مکعبی را با دو صفحه که نسبت به مرکز آن قرینهٔ یکدیگر و عمود بر یکی از قطرهای آن باشند، چنان قطع کنید که، مکعب را به سه بخش هم‌ارز تقسیم کنند.

۳.۱۱.۵. رسم تصویر

۴۷۸. تصویر یک مکعب را روی صفحه‌ای عمود بر یکی از قطرهای آن، رسم کنید.

۴.۱۱.۵. رسم مکعب

۴۷۹. دو خط متنافر D و D' بر یکدیگر عمودند. به چه طریق می‌توان مکعبی ساخت که دو یال آن بر D و D' منطبق باشند؟

۴۸۰. مکعبی رسم کنید که دو یال آن بترتیب، روی دو خط داده شدهٔ عمود برهم D و D' باشند.

۴۸۱. مکعبی رسم کنید که، اندازهٔ طول ضلع آن، و سه نقطه که یالهای رسم شده از یک رأس یا امتداد یالهای رسم شده از یک رأس از آن سه نقطه می‌گذرند، معلوم است.

۴۸۲. **مسأله تضعیف (دو برابر کردن) مکعب.** می‌خواهیم یال مکعبی را رسم کنیم که حجم آن دو برابر حجم مکعب مفروض باشد.

۴۸۳. ۱. تضعیف توسط آرخوتاس و منایخموس

الف. آرخوتاس (حدود ۴۰۰ ق.م.)، فیلسوف فیثاغورسی ؛ ریاضیدان، فرماندهٔ نظامی و سیاستمدار، یکی از محترمترین و پرنفوذترین شهروندان تارنتوم (تارانتوی کنونی) در ایتالیا بود. گفته‌اند که وی هفت بار به عنوان فرماندهٔ نیروهای تارنتوم انتخاب شده بود و به لحاظ علاقه‌ای که به رفاه و تحصیل کودکان تارنتوم نشان می‌داده، شهرت به هم رسانده بود. وی به‌طور غم‌انگیزی در یک کشتی شکستگی در نزدیکی تارنتوم غرق شد. آن‌چه در زیر می‌آید، شرح راه‌حل جالب وی برای مسألهٔ درج دو واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط مفروض است :

فرض کنید که a و b، $a > b$، دو پاره‌خط مفروض باشند. در یک صفحهٔ افقی دایره‌ای به قطر $AD = a$ رسم و وتر $AB = b$ را رسم کنید. فرض کنید که امتداد AB مماس بر دایره در D را در نقطهٔ P تلاقی کند، نیمهٔ بالایی نیم استوانهٔ مستدیر قائمی به قاعدهٔ نیمدایرهٔ ABD را برپا سازید ؛ مخروط مستدیر قائمی را با دوران دادن AP در حول AD تولید کنید ؛ چنبره‌ای با شعاع داخلی صفر را با دوران دادن دایره‌ای عمودی بر قطر AD، حول مولدی از استوانه که از A می‌گذرد، تولید کنید. نقطهٔ مشترک نیم‌استوانه، مخروط و چنبره را با K نشان دهید، و فرض کنید I پای مولدی از نیم استوانه، گذرنده بر K و وارد بر نیمدایرهٔ ABD باشد. ثابت کنید که AK و AI دو واسطهٔ هندسی بین a و b هستند، یعنی نشان دهید که $AD:AK = AK:AI = AI:AB$.

ب. منایخموس (حدود ۳۵۰ ق.م.) دو راه‌حل زیر را برای مسألهٔ تضعیف عرضه کرد. در این راه‌حلها از مقاطع مخروطی خاصی استفاده می‌شود که ظاهراً به‌وسیلهٔ منایخموس برای مسألهٔ حاضر ابداع شده‌اند :

۱. دو سهمی را که رأس مشترک و محورهای متعامد دارند، رسم کنید، به‌طوری که پارامتر یکی دو برابر پارامتر دیگری باشد. طول عمود وارد از نقطهٔ تلاقی دیگر دو سهمی بر محور سهمی کوچکتر را با x نشان دهید. دراین صورت x یال مکعبی است که حجمی دو برابر حجم مکعبی دارد که پارامتر کوچکتر یک یال آن است. با استفاده از هندسهٔ تحلیلی نوین ثابت کنید که این ترسیم درست است.

۲. یک سهمی با پارامتر s و سپس یک هذلولی متساوی‌الساقین با محور قاطعی مساوی ۴s رسم کنید که مجانبهای آن محور سهمی و مماس بر سهمی در رأس آن باشند. فرض کنید x طول عمود وارد از نقطهٔ تلاقی دو منحنی بر محور سهمی باشد، در این صورت $x^3 = 2s^3$. با استفاده از هندسهٔ تحلیلی نوین ثابت کنید که این ترسیم درست است.

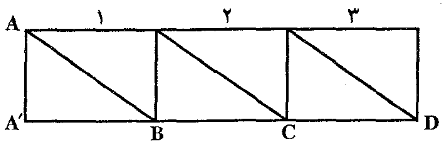
۲. تضعیف مکعب به‌وسیلهٔ آپولونیوس و اراتستن

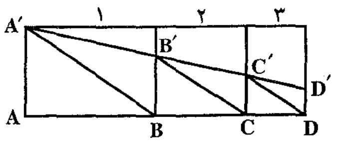
آپولونیوس (حدود ۲۲۵ ق.م.) مسألهٔ تضعیف را بترتیب زیر حل کرد. یک مستطیل $OADB$ و سپس دایره‌ای هم مرکز با مستطیل رسم کنید که امتدادهای OA و OB را در A' و B' به طریقی قطع کند که A'، D و B' همخط باشند. در واقع ساختن این دایره با ابزارهای اقلیدسی غیرممکن است، اما آپولونیوس یک روش مکانیکی برای رسم آن ارائه داد.

الف) نشان دهید که BB' و AA' دو واسطهٔ هندسی بین OA و OB هستند.

ب) اگر $OB = ۲(OA)$، نشان دهید که $(BB')^۳ = ۲(OA)^۳$.

ج) اراتستن (حدود ۲۳۰ ق.م.) یک «میانگین‌یاب» مکانیکی ابداع کرد، متشکل از سه قاب مستطیلی مساوی، با مجموعه‌ای از قطرهای متناظر، که قابلیت لغزیدن در امتداد شیارهایی را داشتند به‌طوری که قاب دوم می‌توانست زیر اولّی، و سومی می‌توانست زیر دومی بلغزد. فرض کنید که قابها، همچنان که در شکل نشان داده شده، لغزانده شوند به‌طوری که نقطه‌های A'، B' و C' همخط باشند. نشان دهید که BB' و CC' دو واسطهٔ هندسی بین AA' و DD' هستند. یک «میانگین‌یاب» از این نوع به آسانی از یک دسته مستطیلهای کاغذی ساخته می‌شود و می‌توان آن را چنان تعمیم داد که n میانگین بین دو پاره‌خط مفروض درج شوند.





۳. سیسوئید دیوکلس

دیوکلس (حدود ۱۸۰ ق.م.) منحنی سیسوئید را برای حل مسألهٔ تضعیف ابداع کرد.
یک سیسوئید کلی را می‌توان به‌صورت زیر تعریف نمود:
فرض کنید $C_۱$ و $C_۲$ دو منحنی مفروض باشند و فرض کنید O نقطهٔ ثابتی باشد. فرض کنید $P_۱$ و $P_۲$ نقطه‌های تلاقی یک خط متغیر گذرنده بر O با دو منحنی مفروض باشند.

مکان هندسی P بر این خط به‌طوری که $OP = OP_2 - OP_1 = P_1P_2$، سیسوئید C_1 و C_2 به قطب O نامیده می‌شود. اگر C_1 یک دایره، C_2 مماس بر C_1 در نقطهٔ A، و O نقطهٔ متقاطر A بر C_1 باشد، در این صورت سیسوئید C_1 و C_2 به قطب O سیسوئید دیوکلس است.

الف) با اختیار O به‌عنوان مبدأ و OA به‌عنوان نیمهٔ مثبت محور xها، نشان دهید که معادلهٔ دکارتی سیسوئید دیوکلس به صورت $y^2 = x^3/(2a - x)$ است، که در آن a شعاع C_1 می‌باشد. نشان دهید که معادلهٔ قطبی متناظر $r = 2a\sin\theta\tan\theta$ است.

ب) بر نیمهٔ مثبت محور yها $OD = n(OA)$ را جدا کنید. DA را رسم کنید تا سیسوئید را در P قطع کند. فرض کنید OP خط C_2 را در Q قطع کند. نشان دهید که $(AQ)^3 = n(OA)^3$. وقتی $n = 2$، جوابی برای مسألهٔ تضعیف داریم.

ج) نیوتن نشان داده است که چگونه می‌توان سیسوئید دیوکلس را با یک گونیای نجاری تولید کرد. فرض کنید که لبهٔ بیرونی گونیا ACB باشد که در آن AC بازوی کوتاهتر است. خطی مانند MN رسم و نقطه‌ای مانند R را به فاصلهٔ AC از MN مشخص کنید. گونیا را طوری حرکت دهید که A همواره بر MN قرار گیرد و BC همواره از نقطهٔ R بگذرد. نشان دهید که P، وسط AC، سیسوئید دیوکلس را رسم می‌کند.

د) سیسوئید دو دایرهٔ متحدالمرکز نسبت به مرکز مشترک آنان چیست؟ سیسوئید یک جفت خط موازی نسبت به نقطه‌ای که بر هیچ یک از دو خط واقع نباشد، چیست؟

هـ) اگر C_1 و C_2 یکدیگر را در P قطع کنند، نشان دهید که OP در نقطهٔ O بر سیسوئید C_1 و C_2 به قطب O مماس است.

۴. چند تضعیف مربوط به قرن هفدهم

بسیاری از ریاضیدانان برجستهٔ قرن هفدهم، مانند هویگنس، دکارت، گرگوار دوسن ـ ونسان، و نیوتن ساختمانهایی برای تضعیف مکعب ابداع کردند. در زیر دو تا از این ساختمانها می‌آید.

الف) گرگوار دوسن ـ ونسان (Gre´goire de Saint - Vincent) (۱۶۴۷) ساختمانی برای پیدا کردن دو واسطهٔ هندسی بین دو پاره‌خط مفروض بر مبنای قضیهٔ زیر ارائه داد. هذلولی‌ای که از یک رأس مستطیلی رسم شود و دو ضلع مقابل به این رأس را به‌عنوان مجانبهای خود داشته باشد، دایرهٔ محیطی مستطیل را در نقطه‌ای قطع می‌کند که فاصله‌های آن از مجانبها، واسطه‌های هندسی بین ضلعهای مجاور مستطیل هستند. این قضیه را ثابت کنید.

ب) دکارت (۱۶۵۹) خاطرنشان کرد که منحنیهای

$$x^2 = ay \ , \ x^2 + y^2 = ay + bx$$

در نقطه‌ای مانند (x, y) متقاطعند به‌طوری که x و y دو واسطهٔ هندسی بین a و b هستند. درستی این مطلب را نشان دهید.

۵. کاربردهای اصل درج

فرض کنید که دو منحنی m و n و یک نقطه مانند O مفروض باشند. فرض کنید که خود را مجاز بدانیم که بر یک خط‌کش، قطعه خطی مانند MN جدا کرده سپس خط‌کش را چنان میزان کنیم که از نقطهٔ O گذشته و منحنیهای m و n را در M بر m و N بر n قطع کند. در این صورت گفته می‌شود که خط رسم شده در امتداد خط‌کش بنابر اصل درج رسم شده است. مسأله‌های خارج از حیطهٔ ابزارهای اقلیدسی را اغلب می‌توان با این ابزارها حل کرد، در صورتی که به خود اجازه دهیم که از اصل درج نیز استفاده کنیم.

الف) فرض کنید که AB پاره‌خط مفروضی باشد. زاویهٔ $A\hat{B}M = ۹۰^\circ$ و زاویهٔ $A\hat{B}N = ۱۲۰^\circ$ را رسم کنید. حال ACD را رسم کنید تا BM را در C و BN را در D قطع نماید به‌طوری که $CD = AB$. در این صورت $(AC)^3 = ۲(AB)^3$. این ترسیم در اساس، در آثار انتشار یافتهٔ ویت (۱۶۴۶) و نیوتن (۱۷۲۸) داده شده بود.

ب) فرض کنید که AOB زاویهٔ مرکزی دلخواهی در دایرهٔ مفروضی باشد. از B خطی مانند BCD رسم کنید که دایره را مجدداً در C و امتداد AO را در D قطع کند. به‌طوری که $CD = OA$ که در آن OA شعاع دایره است. در این صورت، (زاویهٔ $A\hat{O}B$) $\frac{۱}{۳} =$ (زاویهٔ $A\hat{D}B$). این راه‌حل مسأله تثلیث، از قضیه‌ای که توسط ارشمیدس (در حدود ۲۴۰ ق.م.) داده شده نتیجه می‌شود.

۶. کونکوئید نیکومدس

دربارهٔ نیکومدس (حدود ۲۴۰ ق.م.) صرفنظر از ابداع کونکوئید، منحنی‌ای که با آن هم مسألهٔ تثلیث و هم مسألهٔ تضعیف را می‌توان حل کرد، اطلاع کمی در دست است. یک کونکوئید کلی را می‌توان به صورت زیر تعریف کرد. فرض کنید c یک منحنی مفروض و O نقطهٔ ثابتی باشد. بر بردار شعاعی OP از O تا نقطه‌ای مانند P بر c، طول $PQ = \pm k$ را، که در آن k مقداری ثابت است، جدا کنید. در این صورت مکان هندسی Q کونکوئید c به قطب O و مقدار ثابت k نامیده می‌شود. منحنی کامل متشکل از دو شاخه است، یکی متناظر با $PQ = +k$ و دیگری با $PQ = -k$. اگر c مستقیم و O نقطهٔ دلخواهی

غیرواقع بر c باشد، کونکوئید نیکومدس به‌دست می‌آید.

۴۸۴. الف) با اختیار O به‌عنوان مبدأ و خط گذرنده بر O و موازی خط مفروض c به‌عنوان محور xها، نشان دهید که معادلهٔ دکارتی کونکوئید نیکومدس برای ثابت k عبارت است از $(y-a)^2(x^2+y^2)=k^2y^2$ که در آن a فاصلهٔ O از c است.

ب) نشان دهید که چگونه می‌توان کونکوئید نیکومدس را برای حل مسأله تضعیف به‌کار برد.

۱۲.۵. برش، مقطع

۱.۱۲.۵. نوع مقطع

۴۸۵. اگر مکعبی را با صفحه‌ای قطع کنیم، چه نوع n ضلعی منتظمی به‌وجود می‌آید؟

۴۸۶. ثابت کنید، صفحه‌ای می‌تواند مکعب را چنان قطع کند که مقطع، شش ضلعی منتظم باشد.

۴۸۷. ثابت کنید صفحهٔ وسطهای سه یال مکعب که موازی نباشند و همرس نیز نباشند، مکعب را در یک هشت‌وجهی منتظم قطع می‌کند.

۴۸۸. صفحه‌ای بر یکی از قطرهای یک وجه مکعب مفروض می‌گذرد. مقطع این صفحه با مکعب، کدام شکل زیر می‌تواند باشد؟

الف) مربع　　ب) مستطیل　　ج) ذوزنقه　　د) لوزی

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۱

۴۸۹. کدام یک از شکلهایی که در زیر نامبرده شده‌اند، نمی‌تواند مقطع یک صفحه با یک مکعب باشد؟

الف) مثلث متساوی‌الاضلاع

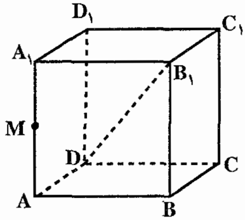
ب) مثلث متساوی‌الساقین غیرمتساوی‌الاضلاع

ج) مثلث قائم‌الزاویه

د) پنج‌ضلعی

هـ) شش‌ضلعی منتظم

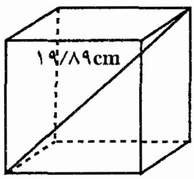
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴



۴۹۰. برشی از یک مکعب را رسم کنید که از M، میانگاه یال AA_1 طوری عبور کند که با قطر B_1D مکعب زاویهٔ قائمه بسازد (شکل). این برش قطر مکعب را به چه نسبتی تقسیم می‌کند؟

۲.۱۲.۵. محیط مقطع

۴۹۱. مکعب سر و دست شکسته



یک مکعب چوبی، به ضلع ۴۰ سانتیمتر داریم. آن را با یک ارّه به‌طور عمودی بر یکی از قطرهای مکعب می‌بریم. صفحهٔ برش از یک نقطهٔ یال مکعب عبور کرده است که با یکی از رأسهای آن، مطابق شکل، ۸۹ و ۱۹ سانتیمتر فاصله دارد. اگر سطح مقطع به‌شکل شش ضلعی باشد، محیط آن را برحسب سانتیمتر بیابید. یادآور می‌شویم که پاسخ شما باید به دقّت دو رقم بعد از ممیز باشد.

المپیادهای ریاضی برای همه، فرانسه

۳.۱۲.۵. تعداد مکعبها، تعداد قسمتها

۴۹۲. درازای یال مکعبی چوبی n سانتیمتر است و n عدد صحیح بزرگتر از ۲ است. سطح کل این مکعب به رنگ سیاه، رنگ شده است. این مکعب را به موازات وجه‌های خود به گونه‌ای برش می‌دهند که به n^3 مکعب کوچکتر، هر کدام با یال به درازای یک سانتیمتر، تقسیم می‌شود. از این مکعبهای کوچک، تعداد آنها که فقط یک وجهشان سیاه شده با تعداد آنها که هیچ وجهشان سیاه نشده برابر است. عدد n برابر است با :

الف) ۵ ب) ۶ ج) ۷ د) ۸

هـ) عددی غیر از اینها

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۵

۴۹۳. مکعب را بِبُرید.

یک مکعب را با ۶ برش مستقیم کارد می‌بریم. این مکعب چند قطعه می‌شود؟ در صورتی که

باید هنگام بریدن آن نکته‌های زیر را مراعات کنیم :
۱. سه وجه از آن را جهت بریدن انتخاب کنیم، که هرگز دو تا از آنها روبه‌روی هم نباشند.
۲. هر کدام از این سه وجه را دو بار ببریم.
۳. تیغهٔ کارد باید همواره عمود بر هر وجه، و هر بار منطبق بر یکی از قطرهای آن وجه باشد.
۴. هر برش باید به‌طور کامل انجام شود، و تمام مکعب را شامل گردد.
۵. در هر برش باید تمام قطعه‌ها کنار هم، به شکل مکعب کامل، قرار گیرند و همهٔ آنها یک جا بریده شوند.

المپیادهای ریاضی برای همه، فرانسه

۴۹۴. مکعبی را به چهار وجهیهایی تقسیم کرده‌ایم که یکدیگر را نمی‌پوشانند. کمترین تعداد این چهار وجهیها چقدر است؟

المپیادهای ریاضی روسیه، ۱۹۶۴

۴۹۵. شمار مکعبهای رنگی

شش وجه یک مکعب بزرگ چوبی را رنگ زده‌اند. سپس آن را با ۵۴ برش مستقیم اره (که هر بار سراسر تخته را بریده است)، به صورت مکعبهای کوچک درآورده‌اند. مسلماً قبل از پایان برشها هیچ قطعه‌ای را از آن جدا نکرده‌اند. بی‌شک برخی از این مکعبهای کوچک رنگی هستند (البته رنگی بودن شامل یک یا دو یا سه وجه است)، امّا شمار زیادی از مکعبهای کوچک رنگی نخواهند بود. آیا شما می‌توانید بگویید، مکعبهای رنگی کلاً چند تا هستند؟

المپیادهای ریاضی برای همه، فرانسه

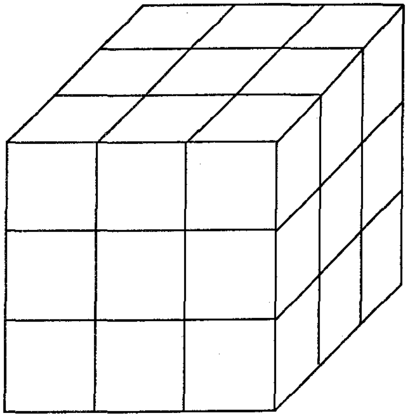
۴۹۶. مکعب ۱۲×۱۲×۱۲ را به یاری صفحه‌های موازی با وجه‌ها به مکعبهای واحد تقسیم کرده‌ایم. اگر با صفحهٔ دیگری، مقطعی به صورت شش‌ضلعی منتظم در مکعب به‌وجود آوریم، مکعب روی هم، به چند بخش تقسیم می‌شود؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۶۵

۴۹۷. چند بار ارّه کند؟

نجاری می‌خواهد یک مکعب چوبی رنگی را به ۲۷ مکعب کوچک مساوی تقسیم کند، امّا او می‌خواهد تعداد بریدن را به کمترین حد برساند. آیا شما می‌توانید بگویید، اولاً دست‌کم چند بار باید آن را ببرد. ثانیاً چند مکعب غیررنگی خواهد داشت؟

۴۹۸. مکعبی چوبی به طول ضلع ۳ اینچ درنظر بگیرید که مانند شکل، روی هر وجه آن چهار خط متوازی رسم شده باشد. با چند برش مستقیم با ارّه می‌توان همهٔ ۲۷ مکعبی را که این خطها مشخص می‌کنند، برید؟ کمترین تعداد برشهای لازم چند تا است؟



۴.۱۲.۵. تعداد صفحه‌ها

۴۹۹. حداقل چند صفحه لازم است تا، به کمک آنها، بتوان مکعب را دست‌کم، به ۳۰۰ بخش تقسیم کرد؟

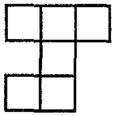
المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، انگلستان، ۱۹۷۰

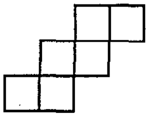
۵.۱۲.۵. رسم برش

۵۰۰. طول یال مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ برابر a است. نقطه‌های M و Q را بترتیب روی یالهای AD و B_1C_1 و نقطه‌های P و N را روی یال CD طوری اختیار می‌کنیم که $AM = C_1Q = CP = DN = a/۳$ باشد. برشی از مکعب را رسم کنید که با رسم صفحه‌ای از خط MP به موازات خط NQ به‌دست می‌آید. مساحت این برش را محاسبه کنید.

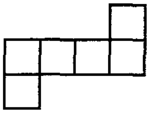
۱۳.۵. گستردهٔ مکعب

۵۰۱. از شکلهای زیر کدامها گستردهٔ یک مکعبند؟

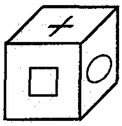
الف) 

ب) 

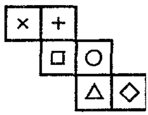
ج) 

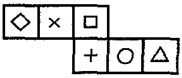
د) 

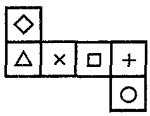
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۸

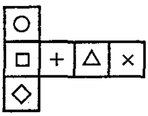


۵۰۲. روی شکل وجه مکعبی، شش شکل مختلف رسم شده است. سه وجه مرئی این مکعب و شکلهای روی آنها در شکل روبه‌رو مشاهده می‌شود. کدام‌یک از شکلهای چهارگانهٔ زیر، که به نسبت کوچکتر رسم شده‌اند، گستردهٔ این مکعب است؟

الف) 

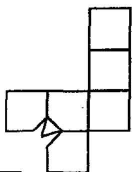
ب) 

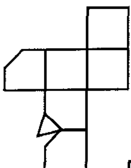
ج) 

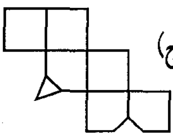
د) 

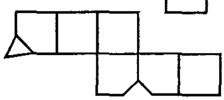
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۱

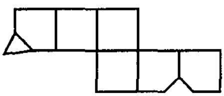
۵۰۳. مکعبی در نظر بگیرید که از یک گوشهٔ آن هرمی کوچک بریده شده باشد (مانند شکل زیر). کدام‌یک از شکلهای زیر می‌تواند گستردهٔ این چنین مکعب گوشه بریده‌ای باشد؟

الف) 

ب) 

ج) 

د) 

هـ) 

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۵۰۴. بر روی ضلعهای BC و DC از مربع ABCD، نقطه‌های M و N طوری قرار گرفته‌اند که :

$$CM + CN = AB$$

خطهای AM و AN خط BD را به سه پاره‌خط تقسیم می‌کنند. ثابت کنید، همواره می‌توان با این سه پاره‌خط مثلثی ساخت که یکی از زاویه‌های آن $60°$ باشد.

۱۴.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۵۰۵. از نقطهٔ دلخواهی در فضا، عمودهایی بر وجه‌های یک مکعب وارد می‌کنیم. شش پاره‌خط که به این ترتیب به‌دست می‌آید، قطرهای شش مکعب را تشکیل می‌دهند. ثابت کنید، شش کره، که هر یک از آنها به همهٔ یالهای مکعب نظیر خود مماس هستند، در یک خط مماس، مشترکند.

۵۰۶. آیا می‌توان رأسهای یک مکعب را با عددهای سه رقمی طوری شماره‌گذاری کرد که اوّلاً این عددها تنها با رقمهای ۱ و ۲ ساخته شده باشند، ثانیاً شماره‌های هر دو رأس مجاور، دست‌کم در دو مرتبه از رقمهای خود با هم اختلاف داشته باشند؟

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۷۶

۵۰۷. آیا می‌توان عددهای از ۱ تا ۱۲ را روی یالهای یک مکعب طوری قرار داد که، اگر مجموع عددهای هر سه یالی را که در یک رأس به هم می‌رسند، عدد متعلق به آن رأس در نظر بگیریم، آن وقت عددهای واقع در همهٔ رأسها یکی باشد؟

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۲

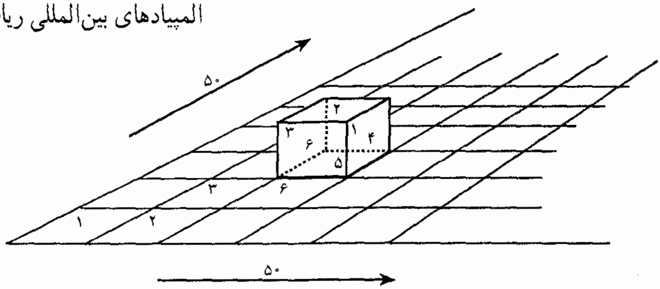
۵۰۸. مکعب و صفحهٔ شطرنج

(از المپیاد مسکو، ۱۹۷۳)

این مسأله مربوط به صفحهٔ شطرنجی ۵۰ × ۵۰ و مکعبی است که وجه‌های آن هم‌اندازهٔ مربعهای صفحهٔ شطرنج است. مکعب را که ابتدا در گوشهٔ سمت چپ پایین صفحه قرار دارد، متوالیاً حول یکی از یالهای قاعده‌اش می‌غلتانیم تا روی صفحه از مربعی به مربع دیگر برود و نهایتاً به گوشهٔ مقابل برسد. در هر حرکت فقط مجازیم مکعب را به طرف راست یا به طرف بالای صفحهٔ شطرنجی بغلتانیم. حتی با این محدودیتها، برای رسیدن به گوشهٔ مقابل راههای بسیار زیادی وجود دارد که از ترکیبهای ۴۹ گام به طرف راست

و ۴۹ گام به طرف بالا به‌دست می‌آیند (در حقیقت تعداد این راهها، $\binom{۹۸}{۴۹}$، یعنی عددی ۲۹ رقمی است).
حال فرض کنید که روی هر یک از وجه‌های این مکعب یکی از عددهای ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و ۶ نقش بسته است، به‌طوری که مجموع عددهای واقع بر وجه‌های مقابل ۷ باشد. همچنین فرض کنید، وقتی که مکعب روی یکی از مربعها قرار می‌گیرد، عددی که واقع بر وجه پایینی آن است، روی مربع ثبت می‌شود. از آن‌جا که طبق قوانین مجاز نیستیم، مکعب را روی مربعی برگردانیم که پیش از آن شماره خورده است، پس از خاتمهٔ غلتاندن مکعب، در مجموع ۹۹ مربع، $۹۹ = ۴۹ + ۴۹ + ۱$، شماره‌هایی از عددهای صحیح خورده‌اند. بیشترین و کمترین مقدار S، یعنی مجموع عددهای صحیح واقع بر این ۹۹ مربع، چقدر است؟

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۷۳



$S = ۱+۲+۳+۶+۵+\ldots\ldots$

۵۰۹. مکعبی، در دستگاه مختصات قائم فضایی چنان قرار گرفته است که مختصات چهار رأسی از آن که بر یک صفحه واقع نیستند، عددهای درستی شده‌اند. ثابت کنید، در این صورت، مختصات همهٔ رأسهای این مکعب، عددهای درستی هستند.

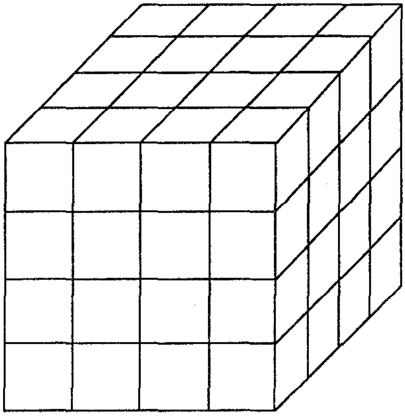
المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، مجارستان، ۱۹۸۲

۵۱۰. مکعبی با ضلع به طول a را روی یک صفحهٔ شطرنجی انداخته‌ایم. ثابت کنید، این مکعب نمی‌تواند بیش از $(a+۱)^۲$ رأس از خانه‌های شطرنجی را بپوشاند.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۷۳

۵۱۱. مکعب $۴\times۴\times۴$ در شکل، ۶۴ حجره دارد و مکعبهای کوچکی با دو رنگ متفاوت در اختیار داریم که هر کدام در یک حجرهٔ آن، جا می‌گیرد. دو بازیکن، هر یک، یکی از رنگها را انتخاب می‌کنند و به نوبت مکعبهای کوچک از رنگ خود را در حجره‌ها قرار می‌دهند. هر بازیکنی که زودتر چهار مکعب از رنگ خود را در یک خط راست قرار

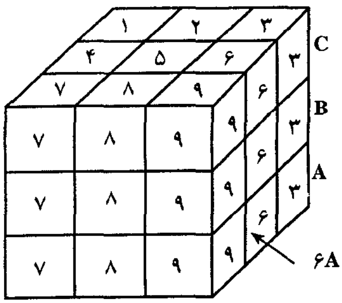
دهد، برندهٔ بازی است، چند روش مختلف
برای انجام این کار وجود دارد؟



۵۱۲. مکعبهای کوچک سبز و سفید

۲۷ مکعب سفید یا سبز کنار هم، و روی هم، قرار گرفته‌اند و تشکیل یک مکعب نسبتاً بزرگ را داده‌اند (شکل را ببینید). پس می‌توان گفت، شمار مکعبهای سبز N و شمار مکعبهای سفید N – ۲۷ است. به‌طوری که مشاهده می‌کنید، این مکعبها در سه طبقه روی هم نشسته‌اند و در هر طبقه از ۱ تا ۹ شماره‌گذاری شده‌اند (شمارهٔ مربوط به هر مکعب در ۶ وجه آن نوشته شده است). بنابراین با معلوم بودن شماره و طبقهٔ هر مکعب، محل آن به خوبی مشخص می‌شود. مثلاً وقتی می‌گوییم : (۵B)، منظور ما مکعبی است که در طبقهٔ B قرار دارد و هر کدام از شماره‌های نوشته شده در وجه‌های آن ۵ است و این مکعب همان مکعب مرکزی خواهد بود. همچنین مکعبی که با فلش مشخص کرده‌ایم، مکعب (۶A) نام دارد. آیا می‌توانید بیشترین شمار مکعبهای سبز (N) را بیابید؟ در صورتی که می‌دانیم، شمار مکعبهای سبز در دو وجه روبه رو از این مکعب بزرگ، هرگز بیش از نصف N نیست. این معما راه‌حل ریاضی ندارد و فقط به اندیشهٔ ریاضی نیازمند است. در جدول زیر، دور مکعبهای سبز دایره بزنید.

المپیادهای ریاضی برای همه، فرانسه



A:1 2 3 4 5 6 7 8 9
B:1 2 3 4 5 6 7 8 9
C:1 2 3 4 5 6 7 8 9

۵۱۳. یک مکعب، یک قوطی مکعبی سرپوش‌دار با همان اندازه‌های مکعب و شش نوع رنگ در اختیار داریم. با هر رنگ، یکی از وجه‌های مکعب و یکی از وجه‌های قوطی را رنگ کرده‌ایم. ثابت کنید، می‌توان مکعب را در قوطی طوری قرار داد که، هر وجه مکعب، به‌وجهی از قوطی با رنگی دیگر مجاور باشد.

المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۵

۵۱۴. یک مکعب و دو رنگ قرمز و سبز در اختیار داریم. دو نفر، به این ترتیب، با هم بازی می‌کنند. اوّلی ۳ یال مکعب را انتخاب می‌کند و آنها را به رنگ قرمز درمی‌آورد. رقیب او، ۳ یال دیگر را (از آنها، که تاکنون رنگ نشده‌اند) رنگ سبز می‌زند. بعد دوباره اوّلی ۳ یال بی‌رنگ را قرمز و بالاخره، رقیب او، ۳ یال باقی مانده را سبز می‌کند. رنگ یک یال را نمی‌توان عوض کرد و یک یال را، نمی‌توان دو بار، ولو با یک رنگ، رنگ زد. کسی بازی را می‌برد که، برای نخستین بار، توانسته باشد همهٔ یالهای یک وجه مکعب را، به رنگ مربوط به خود درآورد. آیا این حکم درست است که بازیکن اوّل، به شرطی که درست بازی کند، می‌تواند به‌طور قطع برنده باشد؟

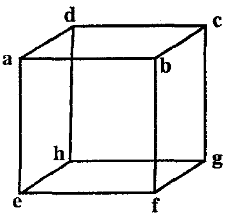
المپیادهای ریاضی سراسری شوروی سابق، ۱۹۸۴

۵۱۵. دوازده میلهٔ ۲۰ سانتیمتری به گونه‌ای به یکدیگر وصل شده‌اند که مکعبی را تشکیل داده‌اند. حشره‌ای از یک رأس این مکعب حرکت می‌کند، یالها و رأسها را هر یک فقط یک بار می‌پیماید و به رأس اوّل برمی‌گردد. طولانی‌ترین مسیری را که حشره می‌تواند بپیماید چند سانتیمتر است؟

الف) ۱۲۰ ب) ۱۴۰ ج) ۱۶۰ د) ۱۸۰ هـ) ۲۰۰

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۵۱۶. دوازده میلهٔ با هم برابر به صورت یالهای مکعب abcdefgh به هم وصل شده‌اند. حشره‌ای که روی این میله‌ها در حال حرکت است، هنگامی که به یک رأس مکعب برسد، یکی از سه یال وصل به آن رأس را به تصادف انتخاب می‌کند و طول آن را تا پایان آن می‌پیماید و در رأس جدید نیز همین عمل را انجام می‌دهد. بنابراین، در هر رأس که باشد، احتمال انتخاب یکی از یالهای آن $\frac{1}{3}$ است. رأسهای f و g به حشره‌کشی قوی آغشته شده‌اند. هرگاه حشره در رأس a واقع باشد، چه احتمالی وجود دارد برای آن که:



الف) به رأس f برسد؟

ب) به رأس g برسد؟

ج) از هیچ یک از رأسهای f و g نگذرد؟

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۷۸

۵۱۷. فرض می‌کنیم ۱۹۸۵ نقطه داخل مکعب واحدی مفروض باشند. ثابت کنید که شخص همواره می‌تواند ۳۲ نقطه از آنها را به طریقی تعیین کند که هر چندضلعی بسته (امکاناً زایل) دارای این نقطه‌ها به عنوان رأس، محیطی کمتر از $8\sqrt{3}$ داشته باشد.

۵۱۸. a و b دو رأس مقابل یک مکعب هستند. متحرکی که ابتدا از a روی یالهای مکعب حرکت کند، از همهٔ رأسها یک بار و فقط یک بار بگذرد و به رأس b برسد، چند مسیر مختلف را می‌تواند انتخاب کند؟

الف) هیچ　　ب) ۲　　ج) ۴　　د) ۶　　هـ) ۸

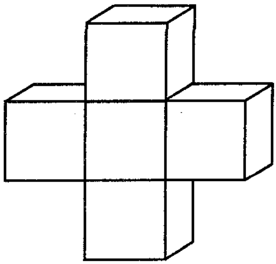
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۶

۵۱۹. شکل، نمای جسم صلبی است که از پنج مکعب برابر تشکیل شده است. این جسم صلب چند صفحهٔ تقارن دارد؟

الف) ۱　　ب) ۳

ج) ۴　　د) ۵

هـ) ۶



المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۵۲۰. رأسها و یالهای یک مکعب را روی یک صفحهٔ عمود بر یکی از قطرهای آن تصویر می‌کنیم (تصویر قائم). ثابت کنید که تصویر به دست آمده شامل یک شش‌ضلعی منتظم و قطرهای مرکزی آن است. اندازهٔ ابعاد این شش‌ضلعی منتظم را با فرض این که ضلع مکعب a باشد، تعیین کنید.

۵۲۱. ثابت کنید که اگر همهٔ وجه‌های یک چند وجهی، مربع باشند، و در هر رأس سه وجه تلاقی کنند، چند وجهی باید مکعب باشد.

۵۲۲. رأسهای خط شکستهٔ بسته‌ای که خودش را قطع نکرده است و دارای هشت ضلع است، رأسهای یک مکعبند. ثابت کنید، یکی از ضلعهای این خط شکسته، بر یکی از یالهای مکعب منطبق است.

المپیادهای ریاضی لنینگراد، ۱۹۸۷

۵۲۳. مکعبی به یال a مفروض است. شش مرکز شش وجه آن را رأسهای یک هشت وجهی محدب اختیار می‌کنیم. ثابت کنید، این هشت وجهی منتظم است و سطح جانبی آن را حساب کنید.

۵۲۴. مکعبی در نظر می‌گیریم که اندازهٔ هر یال آن a است. در مرکز هر وجه عمودی به طول $\frac{a}{2}\sqrt{2}$ بر وجه اخراج کرده و صفحه‌هایی در نظر می‌گیریم که هر یک از آنها بر یک یال مکعب و بر یکی از نقطه‌های منتهی‌الیه پاره‌خطهای مزبور بگذرد. حجم حاصل چند وجهی است و هر وجه آن چه شکلی دارد؟

۵۲۵. هشت وجهی مکعبی، جسم صلبی است که ضلعهای آن از به هم وصل کردن وسطهای ضلعهای مجاور یک مکعب به‌دست می‌آید. v، e و f (تعداد رأسها، تعداد یالها، تعداد وجه‌ها) را برای یک هشت وجهی مکعبی بشمارید.

۵۲۶. مکعبی با یال به طول ۵ سانتیمتر برش داده می‌شود و به ۱۲۵ مکعب با یال به طول یک سانتیمتر بخش می‌شود. اگر این مکعبهای کوچک از هم جدا نشوند، چند تا از آنها فقط و فقط در چهار وجه با مکعبهای کناری خود تماس دارند؟

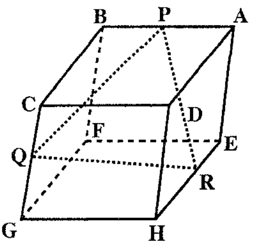
الف) ۸ ب) ۲۴ ج) ۳۶ د) ۴۴ هـ) ۵۴

المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۴

۵۲۷. ثابت کنید، در درون مکعب به یال a، می‌توان دو چهاروجهی منتظم به یال a، به نحوی جا داد که نقطهٔ مشترکی نداشته باشند.

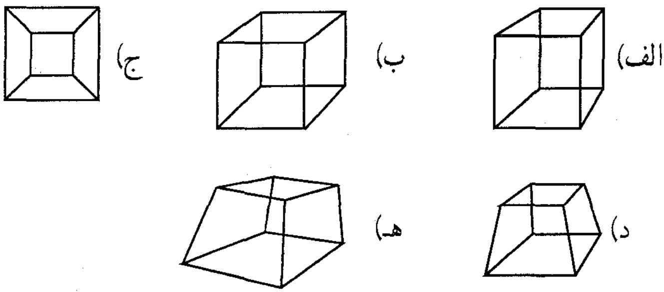
المپیادهای ریاضی کشورهای مختلف، آلمان، ۱۹۸۳

۵۲۸. مکعب ABCDEFGH را مانند شکل داده شده، در نظر بگیرید. مینیمم محیط مثلث PQR را که رأسهایش P، Q و R، بترتیب روی یالهای AB، CG و EH واقعند، تعیین کنید.



۵۲۹. با ورقهٔ آهن مربع شکلی به ضلع ۶a، می‌خواهیم قوطی مکعب شکل بدون در بسازیم که حجمش ماکزیمم شود. طول ضلع مربعی را که لازم است از هر گوشهٔ مربع ببریم، حساب کنید.

۵۳۰. در پرسپکتیو یک جسم، خطهای موازی تبدیل به خطهایی موازی یا خطهایی می‌شوند که همه از این نقطه (به نام نقطهٔ گریز) می‌گذرند. در رسم کدام‌یک از شکلهای زیر، به‌عنوان پرسپکتیو یک مکعب شفاف، این قاعده رعایت نشده است؟



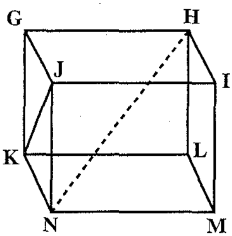
المپیادهای ریاضی بلژیک، ۱۹۸۳

۱۵.۵. مسأله‌های ترکیبی

۵۳۱. طول هر یال مکعب شکل زیر ۶ سانتیمتر است.

الف) طول JK، یعنی قطر وجه GJNK چقدر است؟

ب) طول قطر HN چقدر است؟



۵۳۲. مکعب $ABCDA'B'C'D'$ (با وجه $ABCD$ مستقیماً فوق وجه $A'B'C'D'$) را در نظر می‌گیریم.

a) مکان هندسی وسطهای قطعه‌های XY را که در آنها X هر نقطه‌ای از AC و Y هر نقطه‌ای از $B'D'$ است، بیابید.

b) مکان هندسی نقطه‌های Z را که بر قطعه‌های XY قسمت (a) با $ZY = ۲XZ$ قرار دارد، بیابید.

المپیادهای بین‌المللی ریاضی، ۱۹۶۰

۵۳۳. طول یال مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ برابر a است. نقطه‌های M و N بترتیب بر روی پاره‌خطهای BD و CC_1 قرار دارند و خط MN با صفحهٔ ABCD زاویهٔ $\frac{\pi}{4}$ و با صفحهٔ BB_1C_1C زاویهٔ $\frac{\pi}{6}$ تشکیل می‌دهد. مطلوب است:

الف) طول پاره‌خط MN.

ب) شعاع کره‌ای که مرکز آن روی پاره‌خط MN قرار داشته و بر صفحه‌های ABCD و BB_1C_1C مماس باشد.

۵۳۴. a) در دایره‌ای به قطر ۱، چند وتر رسم کرده‌ایم. ثابت کنید، اگر هر قطر در بیش از k نقطه وترها راقطع نکند، آن وقت مجموع طولهای همهٔ وترها، از ۳/۱۵k کمتر است.

b) در مکعبی با یال به طول a خط شکسته‌ای وجود دارد، که هر صفحهٔ موازی با یکی از وجه‌ها را، در بیش از k نقطه قطع نمی‌کند. ثابت کنید، طول خط شکسته، از ۳ka تجاوز نمی‌کند.

المپیادهای ریاضی سراسری روسیه

۵۳۵. الف) اگر صفحه‌ای از مرکز مکعب بگذرد و بر یکی از قطرهای آن عمود باشد، در برخورد با مکعب چه مقطعی به‌دست می‌دهد؟

ب) قطر d از مکعب را، به‌عنوان محور Ox انتخاب می‌کنیم (نقطهٔ O، مرکز مکعب است.) و S(x) را مساحت مقطع مکعب با صفحه‌ای می‌گیریم که بر قطر d عمود و از نقطهٔ x واقع بر قطر گذشته است. نمودار تابع S(x) را رسم کنید.

آمادگی برای المپیادهای ریاضی

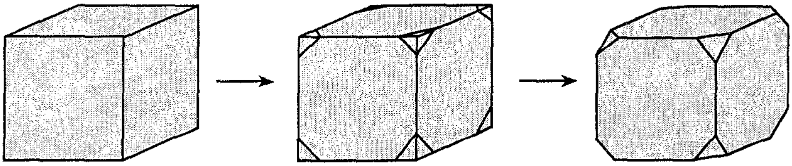
۵۳۶. اگر یک چند وجهی در اختیار داشته باشیم، با بریدن گوشه‌ای از آن ـ که یک رأس در آن واقع است ـ می‌توانیم، به یک چند وجهی دیگر دست یابیم. این فرایند، برش یا کوتاه‌سازی نام دارد؛ برای مثال، اگر ما گوشه‌های یک مکعب مربع را ببریم، شکلی شبیه شکل نشان داده شده در زیر به‌دست می‌آید. اگر طوری برش دهیم که وجه‌های شکل حاصل، مثلثهای متساوی‌الاضلاع و هشت ضلعیهای منتظم باشند، شکلی را به‌دست می‌آوریم که مکعب برش داده شده خوانده می‌شود.

۱. نشان دهید که همهٔ یالهای یک مکعب برش داده شده، به یک اندازه هستند.

۲. حجم یک مکعب برش داده شده را که طول همهٔ یالهای آن a است، به‌دست آورید.

(یک راه خوب، برای ساختن یک مکعب برش داده شده، استفاده از نرم‌افزار فایلهای

هندسه است.)



۵۳۷. ثابت کنید که در مکعب $ABCDA'B'C'D'$:

۱. یالها با هر یک از قطرها زاویه‌های مساوی می‌سازند.

۲. تصویرهای یالهای مکعب روی هر یک از قطرهای آن مساوی $\frac{1}{3}$ اندازهٔ آن قطر است.

۵۳۸. مکعبی به ضلع a داده شده است. به مرکز هر یک از رأسهای مکعب، کره‌ای به شعاع نصف ضلع مکعب رسم می‌کنیم:

۱. اندازهٔ حجم جسم محصور بین این کره‌ها را تعیین کنید.

۲. اندازهٔ شعاع کرهٔ معادل این جسم را بیابید.

۵۳۹. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ با طول یال a مفروض است. وسط یال DD_1 را با k نشان می‌دهیم:

۱. زاویه

۲. فاصلهٔ بین خطهای CK و A_1D را پیدا کنید.

۵۴۰. ۱. سطح و حجم کرهٔ محاط در مکعبی به ضلع a ؛

۲. حجم و سطح کره‌ای مماس بر یالها ؛

۳. سطح و حجم کرهٔ محیط بر این مکعب ؛

را بیابید.

۵۴۱. مکعبی به یال a را با صفحه‌هایی که بر وسط یالهای منتهی به هر رأس می‌گذرد، قطع می‌کنیم و جسم باقیمانده پس از حذف هشت هرم به‌دست آمده را مورد توجه قرار می‌دهیم:

۱. اندازهٔ یالهای جسم حاصل را تعیین کنید.

۲. اندازهٔ مساحت جسم حاصل را بیابید.

۳. اندازهٔ حجم کم شده از مکعب، به‌وسیلهٔ این جسم را تعیین کنید.

۵۴۲. مساحت مقطع قطری یک مکعب (فصل مشترک مکعب با صفحه‌ای که از دو قطر موازی در دو وجه روبه‌رو می‌گذرد) مساوی S است، مطلوب است :

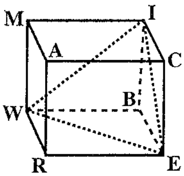
۱. ضلع

۲. قـطـر قـاعـده

۳. قـطـر مـکـعـب

۴. سطح کل و حجم آن.

۵۴۳. الف) به مکعب شکل روبه‌رو نگاه کنید. این شکل را در دفتر خود رسم کنید.



۱. در این مکعب رأس متقابل رأس I را نام ببرید.

۲. یالهایی را که بر یال AC عمود هستند، نام ببرید.

۳. کدام یک از یالهای این مکعب با یال MA موازی هستند؟

۴. یالهایی از این مکعب را که نه موازی یال AR باشند و نه عمود بر آن نام ببرید.

۵. این مکعب چند قطر دارد؟ آنها را رسم کنید و نام ببرید.

ب) حال پاره‌خطهای IE، WI و WE را نیز به شکلی که در دفتر خود رسم کرده‌اید، اضافه کنید.

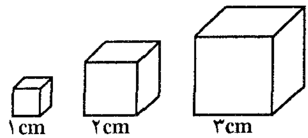
۶. اندازهٔ زاویه‌های IWB و BWE را به‌دست آورید.

۷. اندازهٔ زاویهٔ IWE را به‌دست آورید.

۸. آیا رابطهٔ $IWE = IWB + BWE$ برقرار است؟ چرا؟

۹. اگر طول یال این مکعب ۸ سانتیمتر باشد، طول پاره‌خط WI را حساب کنید.

۵۴۴. سه مکعب به طول یالهای ۱، ۲ و ۳ سانتیمتر مطابق شکل زیر در نظر بگیرید.



۱. مجموع مساحتهای همهٔ وجه‌های مکعب را به‌دست آورید و آن را مساحت کل بنامید.

۲. اگر طول یال یک مکعب را دو برابر کنیم، مساحت کل آن چه تغییری می‌کند؟

۳. اگر طول یال مکعبی را سه برابر کنیم، مساحت کل آن چه تغییری می‌کند؟

۴. حجم هر کدام از این مکعبها را حساب کنید.

۵. اگر طول یال مکعبی دو برابر یا سه برابر شود، حجم آن چه تغییری می‌کند؟

۵۴۵. ABCD و ABEF، دو وجه از یک مکعبند. نقطه‌های N و M، بترتیب روی پاره‌خطهای راست AC و FB انتخاب شده‌اند و در ضمن $AN = FM$.

۱. ثابت کنید، پاره‌خط راست MN با یکی از وجه‌های مکعب موازی است.

۲. مکان هندسی نقطهٔ وسط پاره‌خط راست MN را پیدا کنید.

۳. مطلوب است زاویه‌های حاده‌ای که، پاره‌خط راست MN، با قطرهای AC و FB می‌سازد.

۴. حداقل طول MN چقدر است؟ در این حالت، MN با قطرهای AC و FB چه زاویه‌هایی می‌سازد؟

۵. ثابت کنید، پاره‌خط راست MN نمی‌تواند عمودمشترک AC و FB باشد.

راهنمایی و حل

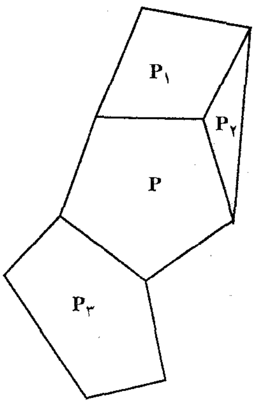
از آن‌جا که به گفتهٔ جورج پولیا J.Polya استاد بزرگ آموزش ریاضی «دانشجو می‌تواند برای حل مسأله‌ها از کار مستقل و شخصی خود تا جایی که ممکن است، استفاده نماید، ولی درصورتی که او را با مسأله‌ای که باید حل کند، تنها بگذارند و به او کمک نکنند، یا این کمک به اندازهٔ کافی نباشد، ممکن است اصلاً نتواند پیشرفت کند ؛ و اگر بیش از اندازه به او یاری شود، دیگر کاری باقی نمی‌ماند که او انجام دهد.» در این مجموعه، برخی از مسأله‌ها حل شده‌اند. تعدادی راهنمایی برای حل دارند و حل برخی دیگر از مسأله‌ها به عهدهٔ دانش‌پژوهان واگذار شده است، تا این جلد از دایرةالمعارف بتواند نقش و سهمی در تقویت قوهٔ تفکر و خلاقیت ذهنی آنان داشته باشد.

بدیهی است که راه‌حلها و راهنماییهای ارائه شده در این مجموعه، بهترین و یا ساده‌ترین راه‌حل یا راهنمایی نمی‌باشند ؛ و به‌طور یقین، دانشجویان با دقت‌نظر و بهره‌گیری از ذهن خلاق خویش، به راه‌حلهایی ساده‌تر و یا جالبتر از راه‌حلهای موجود در این مجموعه دست خواهند یافت.

هر چند سعی فراوان شده است تا مطالب این مجموعه خالی از اشتباه باشند، امّا ممکن است باز هم اشکالها و نادرستیهایی وجود داشته باشند، بدین‌جهت از دانش‌آموزان، دانشجویان، استادان، ریاضیدانان و دیگر علاقه‌مندان به هندسه درخواست می‌شود نظرهای ارشادی و اصلاحی خود، همچنین راه‌حلهای جالبتر یا ساده‌تر برای مسأله‌های حل شده، و راه‌حلهای مناسب و جالب برای مسأله‌های حل نشده را به نشانی مؤلف یا ناشر ارسال فرمایند تا برای هرچه پربارتر کردن محتوای این مجموعه و رفع کاستیهای آن مورد استفاده قرار گیرد ؛ ضمن سپاسگزاری از این لطف و همکاری، برای ارج نهادن به تلاشهایی که در این راه انجام خواهد شد، بهترین و جالب‌ترین راه‌حل برای هر مسأله، همچنین تعمیم قضیه‌ها یا مسأله‌ها به‌نام فرستندهٔ آن، در چاپهای بعدی دایرةالمعارف درج خواهد شد.

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۱
چندوجهیهای منتظم

۱.۱. تعریف و قضیه



۱. برای اثبات، شبکه‌ای مرکب از چندین چندضلعی را فرض می‌کنیم که هر یک از آنها در یک ضلع با دیگری مشترک بوده، همهٔ آنها در اطراف یک چندضلعی مانند p جمع شده باشند (شکل)، (لازم نیست که چندضلعیها همه در یک صفحه واقع باشند و نیز ممکن است بعضی از آنها با p ضلع مشترک نداشته، بلکه با چندضلعیهای دیگر ضلع مشترک داشته باشند). اگر a و s بترتیب عدهٔ ضلعها و رأسهای چندضلعی p ، a_1 و s_1 عدهٔ ضلعها و رأسهای چندضلعی p_1 که با ضلعها و رأسهای چندضلعی p مشترک نیستند باشد و به همین ترتیب a_2 و s_2 عدهٔ ضلعها و رأسهای چندضلعی p_2 غیرمشترک با ضلعها و رأسهای چندضلعی p و p_1 و بالاخره a_n و s_n عدهٔ ضلعها و رأسهای چندضلعی p_n غیرمشترک با ضلعها و رأسهای تمام چندضلعیهای ماقبل باشد. و نیز فرض می‌کنیم A' ، S' و F' بترتیب عدهٔ یالها و رأسها و وجه‌های شبکه باشند. واضح است که برای هر یک از چندضلعیها غیر از اولی عدهٔ ضلعهای غیرمشترک همیشه یکی بیشتر از عدهٔ رأسهای غیرمشترک است و F' عدد رابطهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$\left.\begin{aligned} a &= s \\ a_1 &= s_1 + 1 \\ a_2 &= s_2 + 1 \\ a_3 &= s_3 + 1 \\ &\cdots \end{aligned}\right\} \text{عدد رابطه } F'$$

از جمع کردن این رابطه‌ها حاصل می‌شود :

$$a+a_{۱}+a_{۲}+a_{۳}+\cdots=(s+s_{۱}+s_{۲}+\cdots)+F'-۱$$

و یا

$$A'=S'+F'-۱ \quad (۱)$$

حال اگر در چندوجهی محدبی یک وجه را حذف نماییم، $F-۱$ وجه دیگر باقی می‌ماند ولی تعداد رأسها و یالها به هیچ وجه تغییر نمی‌نماید، زیرا این یالها و رأسها متعلق به وجه‌های دیگر نیز بوده‌اند. وجه‌های باقیمانده تشکیل شبکه‌ای می‌دهند که باید تعداد یالها و رأسهای آن در رابطهٔ (۱) صدق کند، زیرا رابطهٔ مزبور برای هر شبکه‌ای، صرفنظر از عدهٔ وجه‌ها و یا شکل شبکه صحیح است. اما در این مورد :

$$A'=A\ ,\ S'=S\ ,\ F'=F-۱$$

که چون به‌جای آنها در رابطهٔ (۱) قرار دهیم، حاصل می‌شود :

$$A=S+(F-۱)-۱$$

و یا

$$A+۲=S+F$$

۲. برای تعیین انواع و تعداد چندوجهیهای منتظم از ویژگیهای کنجها و چندضلعیهای منتظم استفاده می‌کنیم.

در چندوجهیها، هیچ دو وجه مجاور یا غیرمجاور در یک صفحه واقع نیستند، پس در هر رأس، بین وجه‌هایی که یالهای مشترک دارند، یک کنج پدید می‌آید. می‌دانیم که مجموع زاویه‌های هر کنج از ۳۶۰° کوچکتر است و هر کنج حداقل سه زاویه دارد، بنابراین هر زاویه از یک کنج منتظم، از ۱۲۰° کوچکتر است. از این‌جا نتیجه می‌شود که تشکیل چندوجهی منتظم با چندضلعیهایی که اندازهٔ هر زاویهٔ آنها ۱۲۰° یا بزرگتر از آن باشد، اصولاً ممکن نیست، به بیان دیگر هر زاویه از یک چندوجهی منتظم لزوماً کوچکتر از ۱۲۰° است. با ملاحظهٔ آن که اندازهٔ هر زاویهٔ n ضلعی منتظم $\frac{(n-۲)۱۸۰^\circ}{n}$ است، از نامساوی $۱۲۰^\circ > \frac{(n-۲)۱۸۰^\circ}{n}$ می‌توان نتیجه گرفت که تعداد ضلعهای هر وجه از چندوجهی منتظم از مجموعهٔ اعداد درست ۳، ۴ و ۵ خارج نیست و چندوجهیهای منتظم عبارتند از : چهاروجهی منتظم، شش‌وجهی منتظم، هشت‌وجهی منتظم، دوازده‌وجهی منتظم و بیست‌وجهی منتظم.

اگر $n=۳$ ، یعنی اگر وجه‌های چندوجهی منتظم مثلثهای متساوی‌الاضلاع باشند، اندازهٔ هر زاویه از کنج ۶۰° است و در این حالت تعداد وجه‌های چندوجهی که از هر رأس

می‌گذرند، ممکن است ۳، ۴ یا ۵ باشد (چرا؟) به همین دلیل اگر $n = ۴$ یا $n = ۵$ ، یعنی اگر وجه‌های چندوجهی چهارضلعی یا پنج‌ضلعی منتظم باشند، اندازهٔ هر زاویه از هر وجه ۹۰° یا ۱۰۸° است و تعداد وجه‌هایی که از یک رأس چندوجهی می‌گذرند، بیش از سه وجه نیست. (چرا؟)

بیانی دیگر. فرض می‌کنیم A ، F و S بترتیب عدهٔ یالها و وجه‌ها و رأسهای چندوجهی و n عدهٔ یالهای هر وجه و m تعداد یالهای گذرنده بر یک رأس باشد.

اولاً. چون هر وجه دارای n یال است و هر یال مابین دو وجه مجاور مشترک است، پس رابطهٔ زیر برقرار است :

$$A = \frac{nF}{۲} \qquad (۱)$$

ثانیاً. چون از هر رأس جسم m یال می‌گذرد، و هر یال دو رأس را به هم وصل می‌کند، پس :

$$A = \frac{mS}{۲}$$

و یا $S = \frac{۲A}{m}$. اگر به‌جای A مقدار آن را در رابطهٔ (۱) قرار دهیم، نتیجه می‌شود :

$$S = \frac{nF}{m} \qquad (۲)$$

حال اگر در رابطهٔ اولر یعنی :

$F + S = A + ۲$ به‌جای A و S مقدارهای آنها را از رابطه‌های (۱) و (۲) قرار دهیم، حاصل می‌شود :

$$F + \frac{nF}{m} = \frac{nF}{۲} + ۲$$

و این رابطه پس از مختصر تصرفی به‌صورت زیر درمی‌آید :

$$F = \frac{۴m}{۲(m+n) - mn}$$

حال برای تعیین تعداد چندوجهیهای منتظم، چند حالت درنظر می‌گیریم :

الف) وجه‌ها مثلث متساوی‌الاضلاعند. در این صورت $n = ۳$ و رابطهٔ بالا به‌صورت زیر تبدیل می‌شود :

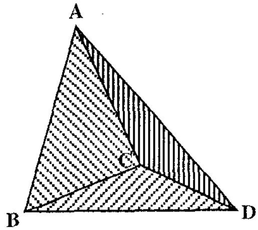
$$F = \frac{۴m}{۶ - m}$$

از این رابطه نتیجه می‌شود $m < ۶$ (به چه دلیل؟). پس : $m = ۳$ یا ۴ یا ۵ .

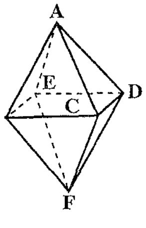
اولاً. $m = ۳$. در این‌حال $F = ۴$ و از رابطه‌های (۱) و (۲) سابق حاصل می‌شود: $A = ۶$ و $S = ۴$ و جسم چهار وجهی است (شکل الف).

ثانیاً. $m = ۴$. در این‌حال $F = ۸$ و $A = ۱۲$ و $S = ۶$ و جسم هشت‌وجهی است (شکل ب).

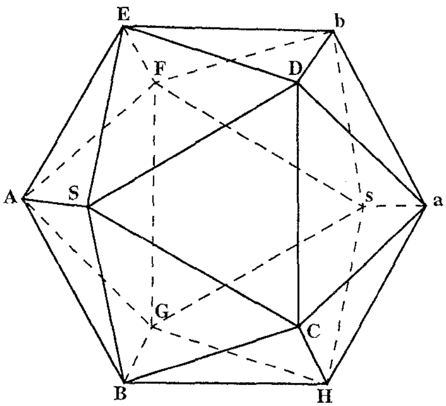
ثالثاً. $m = ۵$. پس $F = ۲۰$ و $S = ۱۲$ و $A = ۳۰$ و جسم بیست‌وجهی است (شکل پ). در شکل (ت) طرفین یک بیست‌وجهی منتظم جدا از یکدیگر نمایش داده شده است.



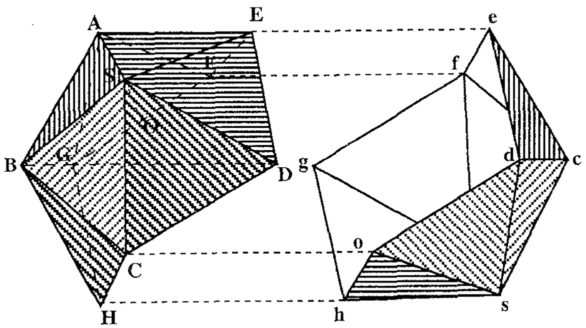
(الف)



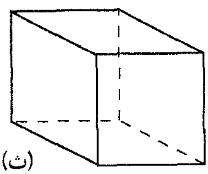
(ب)



(پ)



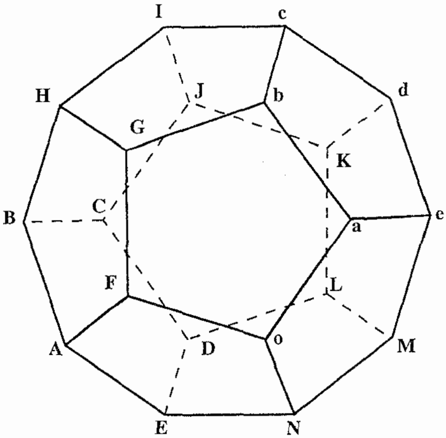
(ت)


(ث)

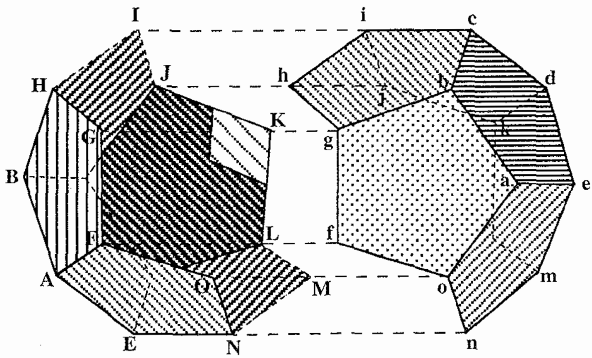
ب) وجه‌ها مربعند. در این حال $n = ۴$ و $F = \frac{۲m}{۴ - m}$. پس باید $m < ۴$ باشد و بنابراین تنها حالت ممکن آن است که $m = ۳$ باشد. در این صورت $S = ۸$ و $A = ۱۲$ و $F = ۶$ و

جسم شش‌وجهی است (شکل ث).

ج) وجه‌ها پنج‌ضلعی منتظمند. در این صورت $n=5$. پس $F=\frac{4m}{10-3m}$ و F وقتی مثبت و قابل قبول است که $m=3$ باشد و جز این ممکن نیست، پس $F=12$ و $S=20$ و $A=30$ و جسم دوازده‌وجهی است (شکل ج). در (شکل ج) طرفین یک دوازده‌وجهی منتظم مجزا از یکدیگر نمایش داده شده است.



(ج)



(ج)

اگر $n=6$ باشد، حاصل می‌شود $F=\frac{m}{3-m}$ ، و به m نمی‌توان هیچ مقدار قابل قبولی نسبت داد و همین حالت برای $n>6$ رخ می‌دهد.

بنابراین فقط پنج نوع چندوجهی منتظم وجود دارد که در سه نوع آن، وجه‌ها مثلث متساوی‌الاضلاع و در یک نوع آن وجه‌ها مربع و در یک نوع آن وجه‌ها پنج‌ضلعی منتظم می‌باشند.

در جدول زیر عنصرهای مختلف انواع چندوجهیهای منتظم درج شده است.

جسم	A	S	F	m	n
چهاروجهی	۶	۴	۴	۳	۳
هشت‌وجهی	۱۲	۶	۸	۴	۳
بیست وجهی	۳۰	۱۲	۲۰	۵	۳
شش‌وجهی	۱۲	۸	۶	۳	۴
دوازده وجهی	۳۰	۲۰	۱۲	۳	۵

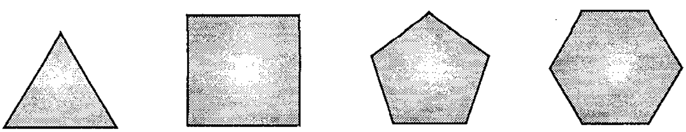
برای ساختن جسمهایی به‌صورت چندوجهی منتظم از شکل هر وجه و تعداد وجه‌ها در هر یک از حالت‌های پنج‌گانه می‌توان استفاده کرد.
چندوجهیهای منتظم را جسمهای افلاطونی می‌نامند. دلیل این نامگذاری آن است که افلاطون، فیلسوف بزرگ یونانی، در یکی از کتابهای خود، چهاروجهی و مکعب و هشت‌وجهی و دوازده‌وجهی را به چهارعنصر، آتش و باد و خاک و آب قیاس می‌کند و بیست‌وجهی را تصویری از همهٔ جهان می‌داند.

تعداد چند وجهیهای منتظم

در این قسمت، روش ارائه شده در کتاب درسی «آموزش هنر حل مسأله» را می‌بینیم.

دسته‌بندی چند وجهیهای منتظم

دسته‌بندی اشیا براساس ویژگیهای آنها بخشی از روش علمی در مطالعه و تحقیق است. این کار کمک می‌کند تا تعداد بیشتری از ویژگیهای یک شیئ کشف شود. اکنون یک سؤال را مطرح می‌کنیم:
چگونه می‌توان چندوجهیهای منتظم را دسته‌بندی کرد؟
در زیر خلاصه‌ای از تلاش علی و آرش را برای پاسخ دادن به سؤال بالا بررسی می‌کنیم:

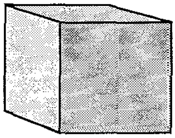


۶ ضلعی منتظم ۵ ضلعی منتظم ۴ ضلعی منتظم ۳ ضلعی منتظم

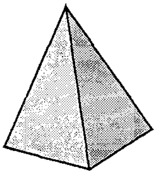
آرش: روش بررسی حالتهای ساده‌تر و خاص، تاکنون به ما کمک بسیار زیادی کرده است. اگر موافقید، شروع کنیم.

علی: بسیارخوب، از چندضلعیها شروع می‌کنیم و بعد به حالت سه‌بعدی ؛ یعنی چندوجهیها می‌رویم. دسته‌بندی چندضلعیهای منتظم کار ساده‌ای است. برای هر عدد طبیعی n که بزرگتر از ۲ باشد، یک nضلعی منتظم داریم.

آرش: برای چندضلعیهای منتظم، یک عدد n ، که تعداد ضلعها را نشان می‌دهد ؛ دسته‌بندی را مشخص می‌کند ولی فکر می‌کنم دسته‌بندی چندوجهیهای منتظم به این راحتی نباشد. بهتر است هرم مثلثی (چهاروجهی منتظم) و مکعب را که دو چندوجهی منتظم هستند، بررسی کنیم.



مکعب



هرم مثلثی

در هرم مثلثی، هر وجه سه ضلع دارد و در هر رأس یا کنج، سه وجه با هم برخورد می‌کنند. در مورد مکعب هر وجه ۴ یال دارد و هر کنج (رأس) از سه وجه به‌وجود می‌آید.

علی: در تعریف چندوجهیها دو نکتهٔ مهم وجود دارد ؛ اوّل، تعداد یالهای هر وجه و دوم، تعداد وجه‌هایی که در هر رأس با هم برخورد می‌کنند. اگر چندوجهیهای منتظم را در نظر بگیریم، «وجه‌ها، چندضلعیهای منتظم همنهشتند» و «رأسها، یکسان دیده می‌شوند».

آرش: چه خوب ؛ دسته‌بندی چندضلعیهای منتظم با یک عدد n انجام می‌شود. کافی است یک عدد طبیعی دیگر را که مربوط به رأسها باشد درنظر بگیریم ؛ مثلاً تعداد وجه‌هایی را که در هر رأس در مجاورت هم قرار دارند و یک کنج می‌سازند، با m نشان دهیم. در این صورت، زوج (n , m) می‌تواند ویژگیهای یک چندوجهی منتظم را بیان کند.

علی: جالب است ؛ ما در مورد دسته‌بندی چندضلعیهای منتظم، فقط یک کمیت n داشتیم و می‌دانستیم که برای هر $n \geq 3$ دقیقاً یک n ضلعی منتظم وجود دارد ولی، آیا برای هر زوج «n , m» هم دقیقاً یک چندوجهی منتظم وجود دارد؟ به‌عنوان مثال، یک چندوجهی منتظم که هر وجه آن ۱۱ ضلعی منتظم باشد در هر رأس (کنج)، ۷ وجه با هم تلاقی کنند، وجود دارد؟

آرش: نمی‌دانم. باید کمی فکر کنم، پس سؤال اصلی این است :

«به ازای کدام n و m طبیعی یک چندوجهی منتظم وجود دارد؟» البته می‌دانیم که $n \geq 3$ و $m \geq 3$. (چرا؟)

علی: چون هر وجه یک چندضلعی است و کوچکترین چندضلعی، مثلث است، پس $n \geq ۳$ و هر کنج چندوجهی حداقل سه وجه دارد، $m \geq ۳$. در واقع با دو وجه، یک فرجه پدید می‌آید نه یک کنج ؛ اما برای پاسخگویی به سؤال اصلی، فکر می‌کنم باید به چندضلعیهای منتظم برگردیم.

آرش: به نظر من، بهتر است نمونه‌ای از این چندوجهیهای منتظم را بسازیم، یعنی با قیچی و مقوا و چسب یک کاردستی درست کنیم، سپس خوب به آن نگاه کنیم، حتی در مرحلهٔ ساختن دقت کنیم که چه مشکلاتی پیش می‌آید و از آنها ایده بگیریم.

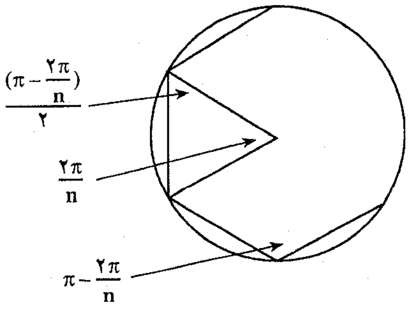
علی: فکر بسیار خوبی است.

کاردستی. یک چندوجهی منتظم بسازید. از هیچ کس راهنمایی نگیرید و سعی کنید این کار را به شیوهٔ آزمایش و خطا انجام دهید. پس از ساخته شدن یک چندوجهی منتظم، خوب به آن نگاه کنید و مسألهٔ مطرح شده را درنظر آورید. بحث همگانی لازم است. این قسمت مسأله یک گذرگاه! است، ناامید نشوید.

برای راحتی کار، هر وجه را یک مثلث متساوی الاضلاع بگیرید $(n = ۳)$ و امکانهای مختلف m را آزمایش کنید.

علی: نکتهٔ اصلی این است که در هر کنج، چند مثلث متساوی‌الاضلاع جا می‌گیرد. به یاد یک مسألهٔ مشابه افتادم. موقعی که می‌خواستیم یک سطحی را با چندضلعیهای منتظم کاشی‌کاری کنیم، متوجه شدیم، برای این که در هر رأس کاشیها دقیقاً به هم چفت شوند و فضای خالی بین آنها باقی نماند، باید در هر رأس ؛ مجموع زاویه‌ها $۲\pi(۳۶۰°)$ شود ؛ یعنی روی یک سطح صاف، در هر رأس، جمع زاویه‌ها باید ۳۶۰ درجه باشد.

آرش: فهمیدم، در هر رأس یک زاویه از یک وجه وجود دارد. کافی است اندازهٔ هر زاویهٔ چندضلعی منتظم را بدانیم. چون جمع این زاویه‌ها در هر رأس ۳۶۰ درجه است، تعداد وجه‌ها در هر رأس (m) معلوم می‌شود. به شکل نگاه کنید. به عبارت دیگر، $m(\pi - \frac{۲\pi}{n}) = ۲\pi$ و اگر π را از طرفین ساده کنیم، داریم :



$$m(۱ - \frac{۲}{n}) = ۲$$

و یا

$$\frac{۱}{m} + \frac{۱}{n} = \frac{۱}{۲} \qquad (۱)$$

مسألهٔ ۱. همهٔ جوابهای معادلهٔ (۱) را پیدا کنید. (حدس و آزمایش)

علی: این وضعیت در مورد چندضلعیها و روی صفحه، دوبعدی است. روشن است که در مورد چندوجهیها و در فضای سه‌بعدی، وضعیت فرق می‌کند. ما نمی‌خواهیم چندضلعیهای منتظم را روی صفحه در هر رأس کنار هم بچینیم. اگر چندوجهی محدب باشد (تورفتگی نداشته باشد)، واضح است که جمع زاویه‌ها در یک کنج (رأس) کمتر از ۳۶۰ درجه است؛ یعنی:

$$m(\pi - \frac{۲\pi}{n}) < ۲\pi$$

$$m(۱ - \frac{۲}{n}) < ۲$$

$$\frac{۱}{۲} < \frac{۱}{m} + \frac{۱}{n} \qquad (۲)$$

(محاسبه‌ها را انجام دهید و نشان دهید که رابطهٔ دوم از رابطهٔ اول به‌دست می‌آید.)

آرش: معادلهٔ $\frac{۱}{n} + \frac{۱}{m} = \frac{۱}{۲}$، چندتا جواب بیشتر ندارد، ولی نابرابری $\frac{۱}{n} + \frac{۱}{m} > \frac{۱}{۲}$ ممکن است بینهایت جواب داشته باشد؛ یعنی بینهایت زوج (n, m).

علی: ترس ندارد. بگذار آزمایشی بکنیم، شما هم کمک کن. می‌دانیم که $m \geq ۳$ پس $\frac{۱}{m} \leq \frac{۱}{۳}$ (چرا؟)، بنابراین:

$$\frac{۱}{۲} < \frac{۱}{m} + \frac{۱}{n} \leq \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{n}$$

$$\frac{۱}{۲} < \frac{۱}{۳} + \frac{۱}{n}$$

$$\frac{۱}{۲} - \frac{۱}{۳} < \frac{۱}{n}$$

$$\frac{۱}{۶} < \frac{۱}{n}$$

$$n < ۶$$

از طرف دیگر، می‌دانیم $n \geq ۳$ است؛ بنابراین:

$$۳ \leq n < ۶ \qquad (۳)$$

آرش: عجب نکتهٔ قشنگی! نقش n و m در نابرابری (۲) یکسان است؛ یعنی همهٔ شرطهای

هر دو یکی است. بنابراین:

$$۳ \leq m < ۶ \qquad (۴)$$

مسألهٔ ۲. نظر آرش را در مورد «n , m» بررسی کنید. سپس جدولی از زوجهای (n ,m) براساس نابرابریهای (۳) و (۴) تشکیل دهید.

(۳,۳) (۳,۴) (۳,۵)
(۴,۳) (۴,۴) (۴,۵)
(۵,۳) (۵,۴) (۵,۵)

علی: واقعاً غیرعادی است. فکر می‌کردیم بینهایت جواب دارد ولی دقیقاً نه تا جواب (۹ تا زوج مرتب «n , m») داشت!

آرش: خوب است هر نه تا جواب را در نابرابری قرار دهیم و آزمایش کنیم. هنوز خیال می‌کنم چشم‌بندی است!

مسألهٔ ۳. هر نه جواب را در نابرابری (۲) آزمایش کنید. اعداد دیگری غیر از جوابها را نیز بیازمایید.

اگرچه نه جواب برای زوج «n , m» به‌دست آمد، ولی مطمئن نیستم که برای هر زوج یک چندوجهی منتظم وجود دارد. شرط این که حاصل جمع زاویه‌های وجه‌ها در هر کنج (رأس) کمتر از ۲π باشد، بسیار مهم است؛ زیرا در غیر این صورت، چندوجهی به‌وجود نمی‌آید.

مسألهٔ ۴. نشان دهید فقط در حالتهای زیر چندوجهی منتظم وجود دارد.

m	۳	۳	۳	۴	۵
n	۳	۴	۵	۳	۳

از حل این مسأله چه نتیجه‌ای می‌توان گرفت؟

این چندوجهیهای منتظم به اجسام افلاطونی معروفند. در پایان این بخش نکته‌های تاریخی را یادآور می‌شویم.

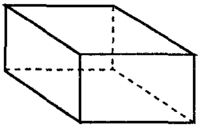
ویژگی مهم چند وجهیها

تاکنون به بررسی مطالعهٔ ویژگیهای دستهٔ خاصی از چندوجهیها، یعنی چندوجهیهای منتظم، پرداختیم و موفق شدیم همهٔ چندوجهیهای منتظم را شناسایی کنیم. اکنون درصدد شناخت ویژگیهای همهٔ چندوجهیها هستیم.

دیدگاهمان را عوض می‌کنیم و بار دیگر به چندضلعیها بازمی‌گردیم. چندضلعیها براساس تعداد ضلعها دسته‌بندی می‌شوند. وقتی یک چندضلعی در دست است با شمارش تعداد ضلعهای آن

مشخص می‌شود که در کدام دسته قرار می‌گیرد. روش دیگر، دسته‌بندی چندضلعیها براساس تعداد رأسهاست. با این حال، چون در مورد چندضلعیها تعداد ضلعها و رأسها برابر است، بنابراین هر دو روش یکی است. در مورد چندوجهیها سؤال مهم این است :

برای تعیین دسته‌بندی یک چندوجهی، چه چیزهایی مهم است؟ شمارش یالها یا شمارش رأسها و یا ...؟



مکعب

روی این سؤال کار کنید. حالتهای ساده و خاص را در نظر بگیرید.

علی و آرش روی این مسأله کار کرده‌اند. بحث آنها را پی می‌گیریم.

علی: با مکعب شروع می‌کنیم. مانند چندضلعیها، تعداد یالها را می‌شماریم ؛ درست است ۱۲ یال دارد. تعداد رأسها را هم شمارش می‌کنیم، ۸ رأس دارد.

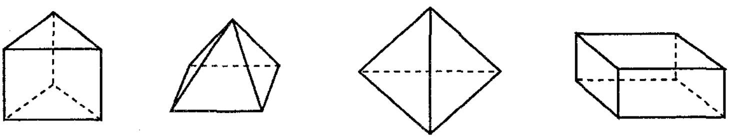
آرش: تعداد رأسها و یالها برابر نیست و با چندضلعیها تفاوت دارد. چندوجهیها یک جزء دیگر هم دارند ؛ وجه‌ها. آنها را هم می‌شماریم. در مکعب ۶ وجه وجود دارد.

علی: اگر چندوجهیها را براساس یالها، رأسها و وجه‌ها دسته‌بندی کنیم، آن‌گاه باید یک سه‌تایی از اعداد را درنظر بگیریم (۶،۸،۱۲) همان مکعب است.

آرش: خیلی جالب است! آیا در مورد این عددها چیز دیگری می‌توان گفت؟ آزمایش بدی نیست ؛ یک جدول تنظیم می‌کنیم و تعدادی از چندوجهیها را با این روش مورد بررسی قرار می‌دهیم ؛ یعنی یالها، رأسها و وجه‌های آنها را می‌شماریم.

علی: یالها را با E ، رأسها را با V و وجه‌ها را با F نامگذاری می‌کنیم. مکعب، چهاروجهی منتظم، هرم مصری، منشور مثلثی و ...

علی و آرش چند وجهیهای دیگری را هم درنظر گرفتند و موفق به کشف یک قانون کلی در مورد چندوجهیها شدند.



چند وجهی	E	V	F
مکعب	۱۲	۸	۶
هرم مثلثی			
هرم مصری			
منشور مثلثی			

مسألهٔ ۵. جدول صفحه قبل را کامل کرده الگویی در بین آنها جست‌وجو کنید. اگر به حدس خوبی نرسیدید، مثالهای دیگری از چندوجهیهایی که می‌شناسید به جدول اضافه کنید. حالا دوباره تلاش کنید.

اگر موفق به کشف قانونی در مورد چندوجهیها نشدید، ابتدا مسأله‌های زیر را حل کنید و سپس برای یافتن الگویی در جدول تلاش کنید.

۱. چندضلعیها در صفحه، مشابه چندوجهیها در فضا هستند. یک چندضلعی در صفحه دارای E یال (ضلع) و V رأس است. چه رابطه‌ای بین E و V وجود دارد؟

۲. V ، E و F را برای چندوجهیهای دیگر محاسبه کنید. آنها را نیز به جدول اضافه کنید. برای مثال، هرم دوگانه (دو هرم مثلثی به هم چسبیده) و چندوجهیهایی که در این بخش شناخته‌ایم.

می‌توان تعداد بیشماری چندوجهی را درنظر گرفت.

روی جدول کار کنید و بین E ، V و F رابطه‌ای برقرار کنید.

دسته‌بندی چندوجهیهای منتظم به کمک رابطهٔ اولر

پس از وقفه‌ای که به دلیل بررسی ویژگی‌های چندوجهیها و کشف دوبارهٔ رابطهٔ «اولر» ایجاد شد، به بررسی عمیق‌تر چندوجهیهای منتظم بازمی‌گردیم. به هر چندوجهی منتظم، یک زوج m و n منسوب کردیم، n نوع چندضلعی (n ضلعی) هر وجه و m تعداد وجه‌هایی را که در یک کنج (رأس) با هم برخورد دارند، نشان می‌دهد. جدول زیر که امکانهای مختلف m و n را مشخص می‌کند، به‌دست آمده است. می‌دانیم که زوج (۳,۳) یک چهاروجهی منتظم (هرم مثلثی) و (۳, ۴) یک مکعب را مشخص می‌کنند. آیا چندوجهیهای منتظم برای سه امکان دیگر، یعنی (۳,۴)، (۳,۵) و (۵, ۳) ، وجود دارد؟ آیا می‌توان بیش از یک چندوجهی منتظم به هر زوج نسبت داد؟ در واقع، پاسخ این دو سؤال، شناسایی چندوجهیهای منتظم را تکمیل می‌کند.

n	۳	۳	۳	۴	۵
m	۳	۴	۵	۳	۳

پیش از اینکه ادامهٔ بحث را از زبان علی و آرش بشنوید، روی این سؤالها کار کنید.

علی: یک چندوجهی منتظم از نوع (n ,m) را درنظر می‌گیریم. می‌خواهیم یالها را بشماریم.

هر وجه یک n ضلعی منتظم است ؛ بنابراین، هر وجه n یال دارد. پس تعداد کل یالها برابر

$n \times F$ است (F تعداد وجه‌هاست). در این صورت، هر یال دو بار شمرده می‌شود؛ زیرا هر یال مربوط به دو وجه است؛ بنابراین:

$$n \times F = ۲ \times E$$

آرش: یک روش دیگر هم برای شمارش یالها وجود دارد. در هر رأس (کنج) m وجه باهم برخورد دارند؛ بنابراین، همهٔ یالها برای همهٔ رأسها برابر $m \times V$ است (چرا؟) در این روش هم هر یال دو بار شمرده می‌شود. بنابراین:

$$mV = ۲E$$

علی: اگر این دو معادله را برحسب E حل کنیم، داریم:

$$(*) E = E \ , \ V = \frac{۲E}{m} \ , \ F = \frac{۲E}{n}$$

بنابراین، براساس رابطهٔ اولر می‌توان نوشت:

$$۲ = V - E + F$$
$$= (\frac{۲E}{m}) - E + (\frac{۲E}{n}) = (\frac{۲}{m} - ۱ + \frac{۲}{n}) \times E$$

در نتیجه:

$$(**) \ E = \frac{۲}{\frac{۲}{m} - ۱ + \frac{۲}{n}}$$

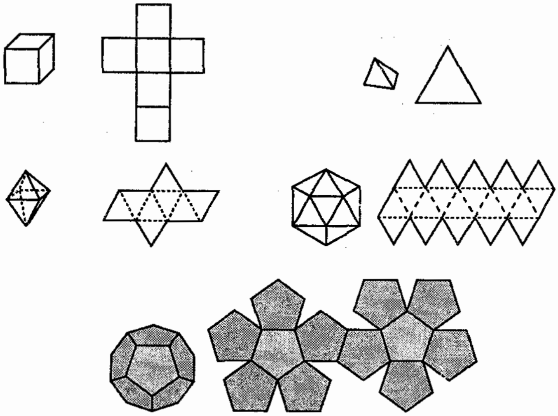
آرش: این رابطه می‌گوید که تعداد یالها دقیقاً براساس m و n مشخص می‌شوند. چون n و m را قبلاً شناخته‌ایم و معلوم هستند (جدول قبلی)، پس E ، F و V به طور یکتا تعیین می‌شوند، یعنی به ازای هر n و m دقیقاً یک E و یک F و یک V به‌دست می‌آید.

علی و آرش جدول زیر را کامل کردند.

n	m	E	V	F
۳	۳	۶	۴	۴
۳	۴			
۳	۵			
۴	۳			
۵	۳			

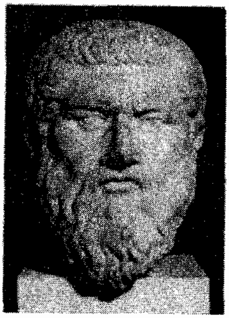
جدول را براساس رابطه‌های (*) و (**) کامل کنید.

در شکلهای روبه‌رو چندوجهیها و گستردهٔ آنها را که مربوط به جدول صفحهٔ قبل است، مشاهده می‌کنید.

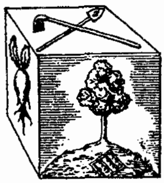


یادداشت تاریخی

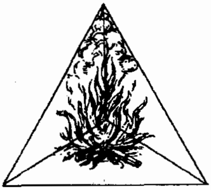
پس از اهرام مصر، مشهورترین مجموعهٔ چندوجهیها در زمانهای باستان، مجموعهٔ اجسام منتظم است. به‌نظر می‌رسد تائتتوس، ریاضیدان یونانی (۳۶۹ ـ ۴۱۵ ق.م.)، اولین کسی است که با آنها ریاضی‌گونه برخورد کرده است. افلاطون (۳۴۷ ـ ۴۲۷ ق.م.)، دوست تائتتوس، چندوجهیهای منتظم را با کیهان‌شناسی خود درآمیخت. تیمائوس، در گفت‌وگوی خود، روی چهار «عنصر» که همه‌چیز از آنها تشکیل شده است؛ بحث می‌کند.



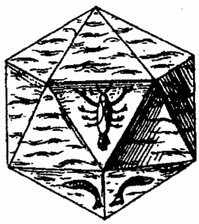
افلاطون



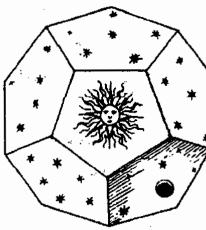
شش وجهی منتظم



چهار وجهی منتظم



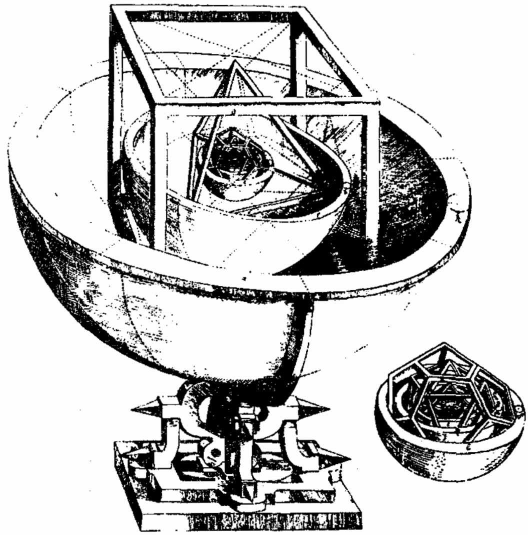
بیست وجهی منتظم



دوازده وجهی منتظم

هشت وجهی منتظم

اجزای زمین به شکل مکعب هستند و به حالتی استوار روی قاعده‌شان قرار دارند. اجزای هوا که هشت‌وجهیهای منتظم هستند، سبکند و اگر روی رأسهای مخالف نگه داشته شوند، به آزادی می‌چرخند. اجزای آتش، چهاروجهیهای منتظم هستند و گوشه‌های تیزی دارند. اجزای آب به شکل بیست‌وجهیهای منتظم و تقریباً کروی هستند، و مانند مایعات می‌توانند بغلتند.
۳۰۰ سال ق.م، زمانی که اقلیدس، مقاله‌های خود را می‌نوشت، یونانیها دربارهٔ هندسهٔ فضایی نظریاتی کاملاً شکوفا داشتند. درکتاب «یازده مقاله» اقلیدس روی ویژگیهای طولی چندوجهی بحث می‌کند. او در کتاب سیزدهم، نشان داد که چگونه می‌توان یک چهاروجهی منتظم ساخت و «اثبات کرد» که فقط پنج تا از آنها وجود دارند. هرون اولین کسی بود که به چهاروجهی منتظم به‌عنوان اجسام افلاطونی اشاره کرد.
پاپوس (۳۲۰ میلادی) از مطالعات ارشمیدس (۲۸۷ ـ ۲۱۲ ق.م.) ؛ که در حال حاضر مفقود شده است، روی چندوجهیهای نیمه منتظم ؛ که اجسام ارشمیدسی نیز نامیده می‌شوند ؛ گزارش می‌دهد.
در دورهٔ رنسانس، زمانی که نوشته‌های کلاسیک روم و یونان باستان با پشت سرگذاشتن سالهای تاریک اروپا در دسترس قرار گرفت، خداشناسان و فلاسفه و هنرمندان و دانشمندان کارهای افلاطون و اقلیدس را مورد مطالعه قرار دادند و این مطالعه‌ها علاقهٔ آنان را نسبت به چندوجهیها برانگیخت.
یوهانس کپلر (۱۶۳۰ ـ ۱۵۷۱) با نسبت دادن دوازده‌وجهی به کل جهان ـ شاید چون دوازده وجه آن با دوازده نشان دایرةالبروج متناظر بود ـ به کیهان‌شناسی افلاطون مطالبی افزود. به این ترتیب هرچند وجهی منتظم، با یکی از جنبه‌های دنیا متناظر می‌شد. کپلر از این فراتر رفت و چندوجهیهای منتظم را به دستگاه کپرنیک و سیارات در حال حرکت در مدار خورشید وارد ساخت و از آنها برای توضیح وجود شش سیاره (عطارد، زهره، زمین، مریخ، مشتری، زحل) و فاصلهٔ خاص این سیارات از مرکز خورشید، استفاده کرد. کپلر جوان به این نظریه که پنج فاصلهٔ بین شش سیاره، با پنج جسم منتظم متناظر است، تمایل پیدا کرد و به کمک آن، دو معما را در یک زمان توضیح داد : چرا دقیقاً پنج چندوجهی منتظم و چرا دقیقاً شش سیاره وجود دارد؟ او پس از تلاش بسیار برای مرتب کردن چندوجهیهای منتظم جهت تطبیق با این نظریه و داده‌های دانسته شده، به طرح زیر دست یافت. زحل در کره‌ای خارجی حرکت می‌کند که شامل یک مکعب است و یک کره در آن قرار گرفته است که مشتری روی آن حرکت می‌کند و خود شامل یک چهاروجهی منتظم است که کرهٔ مریخ در آن قرار دارد. به همین ترتیب کرهٔ مریخ شامل یک دوازده‌وجهی منتظم است. پس کرهٔ زمین شامل یک بیست‌وجهی، کرهٔ زهره شامل یک هشت‌وجهی و در نهایت کرهٔ عطارد است.



مکعب مربع β — کره‌ی زحل α
چهاروجهی δ — کره‌ی مشتری γ
دوازده وجهی Z — کره‌ی مریخ ε
بیست وجهی θ — کره‌ی زمین η
هشت وجهی X — کره‌ی زهره τ
خورشید μ — کره‌ی عطارد λ

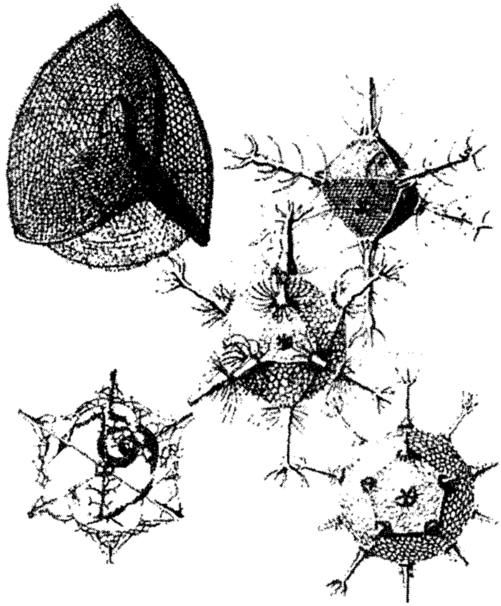
از کیهان‌نگاری اسرارآمیز کپلر،
جلد ۱ از کارهای ستاره‌شناسی کپلر
اِد. ج. فریش

کپلر از کشف خود چنان به وجد آمده بود که از حامی خود، دوکِ وورتمبرگ، خواست که مدلی طلایی از چندوجهیهای تودرتو و کره‌ها، برای نشان دادن طرح او و به دنیا و توضیح دادن جهان مرموز، ساخته شود.

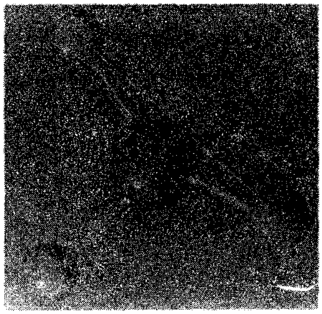
مِلِنکولیا: حکاکی توسط آلبِرشت دوررِ

برخی از تجربیات کپلر دربارهٔ چندوجهیها تا حدودی روشن بود. او از مطالعات ارشمیدس (از طریق پاپوس) در زمینهٔ چندوجهیهای نیمه‌منتظم آگاه بود و با شرحی دقیق و استدلالی مورد به مورد، برای تکمیل فهرست خود، صورت کاملی از این جسمها را تهیه کرد. طی این دوره، چندوجهیها توجه بسیاری از دانش‌پژوهان، هنرمندان، صنعت‌گران را به خود جلب کردند، از جمله آلبرشت دورر که تصور الگوی خیاط را برای یک چندوجهی طرح کرده بود و لئوناردو داوینچی که

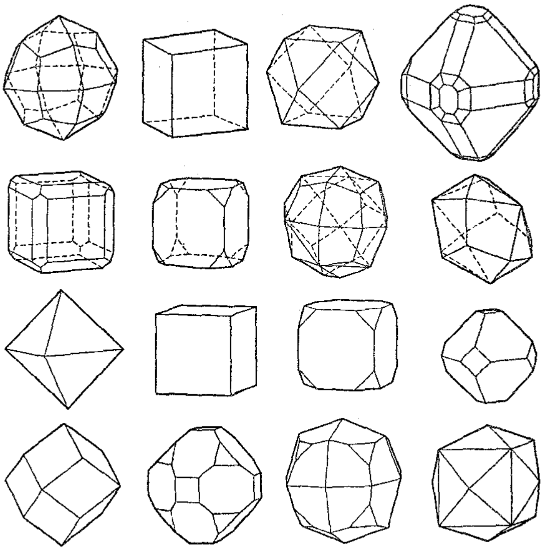
کتاب لوکاپالیولی را در زمینهٔ چندوجهیهای منتظم و نیمه منتظم مصور نمود.



تقریبهای خوبی از چندوجهیهای منتظم به عنوان استخوان‌بندی Radiolaria ، حیوانات minute marine گزارش ارنست هگل: نتایج علمی سفر H.M.S چلنجر، جلد ۱۸، لندن ۱۸۸۷.



درک یک هنرمند از مولکول متان: معماری مولکولها، توسط: لینوس پاولینگ و راجرد هیوارد. و. ه. فرسین. ۱۹۶۴



رسم بلورهای طلا، اطلس اشکال بلورها، توسط: ویکتورگلداِشمیت

دکارت (۱۶۵۰ ـ ۱۵۹۵) نیز چندوجهیها را مورد مطالعه قرار داد و فرضیه‌ای را ثابت کرد که نتیجهٔ سریع آن، فرمول اویلر است. او این فرمول مشهور را اولین بار در نامه‌ای خطاب به کریستین گلدباخ (۱۸۳۳ـ ۱۷۵۲) نقل کرد.

این پایان داستان چندوجهیها نیست. ریاضیدانان هنوز آنها را مطالعه می‌کنند و دانشمندان برای توصیف شکلهای مولکولها، بلورها و ترکیبات موجودات زنده، به استفاده از آنها ادامه می‌دهند. برخی از این ارتباطها در تصویرها و طرحهای این صفحه و صفحهٔ بعد نشان داده شده است.

یادداشت تاریخی از کتاب تاریخ ریاضیات دیوید اسمیت

چندوجهی. توجه عمدهٔ یونانیان در این زمینه به پنج چند وجهی منتظم محدود می‌شد. احتمال دارد **فیثاغورس** (ح ۵۴۰ پ. م.) آگاهیهای خود را در مورد مکعب، هشت‌وجهی و چهاروجهی درمصر به‌دست آورده باشد، ولی پیداست که معلومات مربوط به دوازده وجهی و بیست‌وجهی در مکعب خود او تکوین یافت. فیثاغوریان چهاروجهی را به آتش، هشت‌وجهی را به هوا (باد)، دوازده‌وجهی را به آب، مکعب را به خاک و بیست‌وجهی را که ظاهراً پس از همه کشف شد، به گیتی نسبت دادند. ظاهراً آنان می‌دانستند که هر پنج حجم را می‌توان در کره محاط کرد. آنان مطالعهٔ این حجمها را به مکتب افلاطون (ح ۳۸۰ پس از میلاد) انتقال دادند و در آن‌جا چندان مورد توجه قرار گرفتند که نویسندگان بعدی آنها را «اجسام افلاطونی» یا «شکلهای کیهانی» نامیدند. ولی امکان ندارد فیثاغوریان قدیم به همان مفهومی این حجمها را ترسیم کرده باشند که اقلیدس (ح ۳۰۰ پ. م.) و پاپوس (ح ۳۰۰ پ. م.) ترسیم کردند. نمونه‌هایی از مهره‌های دوازده‌وجهی مربوط به دوران بطلمیوسیان مصر را در دست داریم. همچنین برخی مدلهای مصری از بیست‌وجهیهای سلتی هنوز در موزه‌های مختلف موجود است. احتمالاً این شکلها دارای پاره‌ای اهمیت رمزی یا دینی بودند. از آن‌جا که یک سنگ بیست‌وجهی در ایتالیا به‌دست آمده که مربوط به دوران پیش از تاریخ است، احتمال دارد که قوم سلتی اعتقاد خود را از ناحیه‌ای مانند آلپ به‌دست آورده باشند و همچنین ممکن است وقتی فیثاغوریان آموزشهایشان را در کروتونا آغاز کردند، این افکار در ایتالیا شناخته بوده است.

پنج حجم منتظم به‌ویژه از جنبهٔ علم احکام نجوم در سده‌های میانه مورد توجه قرار گرفت. ولی در پایان این عصر مورد مطالعهٔ دقیق ریاضیدانان واقع شده بود. از پیشاهنگان این گروه می‌توان پترو فرانچسی را نام برد که کتابش به نام در باب حجمهای منتظم (ح ۱۴۷۵م) اول

بار موضوع را با دقت مورد مطالعه قرار داد. سپس پاتچیولی (۱۵۰۹ م) با استفاده از آثار معاصرانش آگاهیهای زیادی را در این‌باره درکتابش به نام بخش‌های آسمانی گرد آورد. آلبرشت دورر هنرمند نورنبرگی نشان داد چگونه می‌توان شکلها را به طریقی که در آثار جدید مرسوم است، از یک شبکه ساخت. موضوع چندوجهیهای ستاره‌ای با کپلر (۱۶۱۹م) آغاز شد و از آن پس علاقهٔ زیادی را برانگیخت.

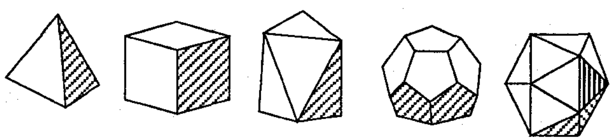
یادداشت تاریخی. از کتاب آشنایی با تاریخ ریاضیات هاورد و. ایوز

اجسام منتظم

یک چندوجهی را منتظم نامند هرگاه وجه‌های آن چندضلعیهای منتظم مساوی و کنجهای آن همه مساوی باشند. گرچه چندضلعیهای منتظم از هر مرتبه‌ای موجودند. معلوم می‌شود که تنها پنج چندوجهی منتظم متفاوت وجود دارند.

تاریخ اولیهٔ این چندوجهیهای منتظم در تاریکی ایام گذشته محو شده است. بررسی ریاضی آنها در مقالهٔ هشتم اصول اقلیدس آغاز شد. اولین حاشیه بر این مقاله خاطر نشان می‌سازد که این مقاله «اجسام موسوم به افلاطونی را بررسی می‌کند، که به غلط چنین نام یافته‌اند، زیرا سه تا از آنها، یعنی چهاروجهی مکعب و دوازده وجهی منسوب به فیثاغوریان است، درحالی که هشت‌وجهی و بیست‌وجهی به تئاتیتوس منسوب می‌باشد.» این مطلب می‌تواند حقیقت داشته باشد.

به‌هرحال، توصیفی از هر پنج چندوجهی منتظم به وسیلهٔ افلاطون داده شده است، وی در کتاب تیمایوس خود نشان می‌دهد که چگونه می‌توان مدلهایی از اجسام صلب را با ترکیب مثلثها، مربعها، و پنج‌ضلعیهایی که وجه‌های آنها را تشکیل می‌دهند، ساخت. تیمایوس افلاطون همان تیمایوس لوکریسی پیرو فیثاغورس است که از قرار معلوم افلاطون وی را در موقع دیدار از ایتالیا ملاقات کرد. در این اثر افلاطون، تیمایوس چهار جسم صلبی را که به آسانی قابل ساختن است ـ چهاروجهی، هشت‌وجهی، بیست‌وجهی و مکعب ـ به‌صورت رمزگونه‌ای با چهار «عنصر» اولیهٔ امپدوکلسی Empedoclus ، کلیهٔ اجسام مادی ـ آتش، باد، آب، خاک ـ مربوط می‌سازد. اشکال مربوط به توجیه جسم صلب پنجم، دوازده‌وجهی، با انتساب آن به جهان پیرامون،حل می‌شود.



یوهان کپلر Johann Kepler (۱۶۳۰ ـ ۱۵۷۱)، سرمنجم، ریاضیدان و عالم معانی باطنی اعداد Numerologist توضیح استادانه‌ای برای انتسابهای تیمایوس ارائه کرد. وی به طور شهودی پذیرفت کــه از بین جسمهای صلب منتظم، چـهاروجـهـی کـوچکترین حجم را نسبت به سطح خود محصور می‌کند، درحالی که بیست‌وجهی بیشترین حجم را دربر می‌گیرد. حال این نسبتهای حجم به سطح بترتیب کیفیتهای خشکی و رطوبت هستند وچون آتش خشکترین این چهار «عنصر» و آب مرطوبترین آنهاست، چهاروجهی باید مظهر آتش و بیست‌وجهی مظهر آب باشد. مکعب با خاک مربوط است زیرا مکعب، که استوار بر یکی از وجه های مربع شکل خود تکیه می‌کند ، بیشترین پایداری را دارد. از سوی دیگر، هشت‌وجهی وقتی که دو رأس مقابل آن به آرامی بین دو انگشت سبابه و شست نگهداشته شود، به‌آسانی می‌چرخد و ناپایداری باد را دارد. بالاخره، دوازده وجهی با جهان مربوط می‌شود، زیرا دوازده‌وجهی دارای ۱۲ وجه است و منطقةالبروج نیز ۱۲ علامت دارد.

چهاروجهی، مکعب و هشت‌وجهی را در طبیعت به‌صورت بلور، به‌طور مثال، بترتیب در سدیم سولفانتیمونات، نمک معمولی،و زاج کروم می‌توان یافت. دوتای دیگر نمی‌توانند به شکل بلور پدید آیند، ولی به‌صورت اسکلت حیوانات دریایی ذره‌بینی که رادیولاریا نامیده می‌شوند، مشاهده شده‌اند. در سال ۱۸۸۵ یک چهاروجهی منتظم اسباب‌بازی از ریشهٔ اتروسکی (Etruscan) که تصور می‌شود به ۵۰۰ ق.م. برگردد، در مونته‌لوفا نزدیک پادوا از زیر خاک درآمد.

۳. تعداد چندوجهیهای منتظم ستاره‌ای چهارتاست که عبارتند از :

۱. از دوازده‌وجهی منتظم محدب، ۱۲ وجهی منتظم ستاره‌ای با ۱۲ وجه پنج‌ضلعی منتظم ستاره‌ای و ۲۰ رأس به‌دست می‌آید.

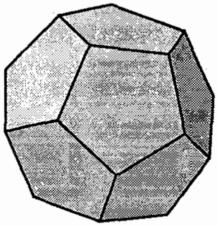
۲. از بیست‌وجهی منتظم محدب، سه چندوجهی منتظم ستاره‌ای نتیجه می‌شود :

الف. یک بیست‌وجهی منتظم ستاره‌ای با ۲۰ وجه مثلثی متساوی‌الاضلاع و ۱۲ رأس

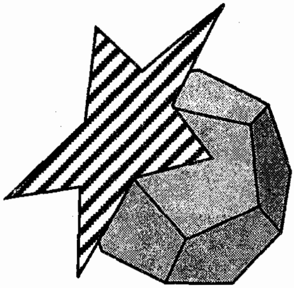
ب. یک دوازده وجهی منتظم ستاره‌ای با ۱۲ وجه پنج‌ضلعی منتظم محدب و ۱۲ رأس

پ. یک دوازده‌وجهی منتظم ستاره‌ای با ۱۲ وجه پنج‌ضلعی منتظم ستاره‌ای و ۱۲ رأس هر یک از چندوجهیهای منتظم ستاره‌ای دارای ۳۰ یال هستند.

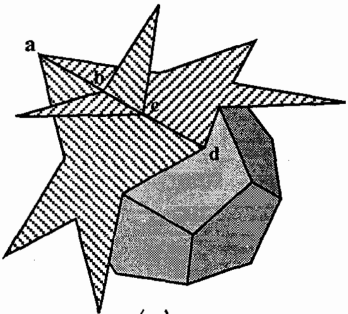
یادداشت. اکنون به بررسی یک سطح جالب دو رویه می‌پردازیم. روی یکی از وجه‌های دوازده‌وجهی منتظم (شکل الف)، همهٔ ضلعها را ادامه می‌دهیم تا یکدیگر را قطع کنند. یک ستارهٔ پنج‌پر منتظم به‌دست می‌آید (شکل ب). همین ستاره را برای وجه مجاور دوازده وجهی هم می‌سازیم. در این صورت، دو ستاره‌ای که ساخته‌ایم، در پاره‌خط ad مشترک



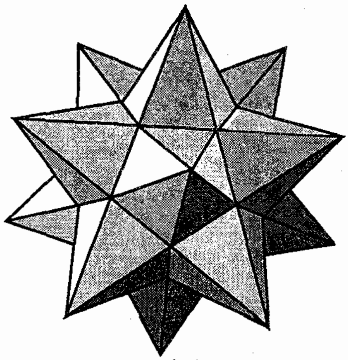
(الف)



(ب)



(پ)



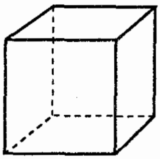
(ت)

می‌شوند (شکل پ). با وجود این، فرض می‌کنیم که این ستاره‌ها، تنها روی پاره‌خطهای ab و cd به‌هم چسبیده باشند. پاره‌خط bc را، اتصال «اضافی» این ستاره‌ها به حساب می‌آوریم که به خاطر این که «نتوانسته‌ایم این ستاره‌ها را در فضا مستقر کنیم، به‌وجود آمده است.» حالا، ستاره‌های مشابه را برای همهٔ وجه‌های دوازده‌وجهی می‌سازیم (شکل ت) ؛ سطحی به‌دست می‌آوریم که در فضا، متقاطع با خودش، قرار گرفته است (خطهای «اضافی» تقاطع همان یالهای دوازده‌وجهی منتظم اصلی هستند). این سطح، دورویه است. در واقع، اگر هر ستاره را با دو رنگ مختلف رنگ کنیم : رنگ قرمز برای رویهٔ داخلی ستاره‌ها (رویه‌ای که به طرف مرکز دوازده‌وجهی است)، و رنگ آبی برای رویهٔ خارجی ستاره‌ها، در آن صورت، تمامی سطح، که از دوازده ستاره تشکیل شده است، به دو رنگ درمی‌آید (ضمناً، ضمن عبور از یک وجه به وجه دیگری که مجاور آن است، رنگ‌آمیزی سازگار از آب درمی‌آید.) این سطح دارای دوازده‌وجه (ستاره) است. یالهای آن عبارتند از ادامهٔ یالهای دوازده وجهی (از نوع پاره‌خطهای ab و cd). بنابراین، روی سطحی که ساخته‌ایم، تعداد یالها، دو برابر تعداد یالهای دوازده‌وجهی، یعنی ۶۰ تاست. بالاخره تعداد رأسهای این سطح برابر است با ۳۲، یعنی ۲۰ رأس دوازده‌وجهی

و همهٔ رأسهای «خارجی» ستاره‌ها (که تعداد آنها به اندازهٔ وجه‌های دوازده‌وجهی، یعنی ۱۲، می‌باشد) درنتیجه شناساگر اولر برای این سطح، چنین می‌شود:

$$۳۲ - ۶۰ + ۱۲ = -۱۶$$

۴. مکعبی را درنظر بگیرید که در رأسهای آن لولاهایی نصب شده باشد. با حرکت دادن وجه‌های این مکعب، مکعب به متوازی‌السطوح تبدیل می‌شود، یعنی وجه‌ها همه مربع هستند، همنهشت نیز می‌باشند. اما کنجهایش مساوی نیستند. بنابراین برای منتظم بودن چندوجهی هر سه شرط بیان شده لازم است.



۵. بدیهی است کنجهای تشکیل شده در هر رأس از چندضلعیهای منتظم مساوی تشکیل شده است. به‌عنوان مثال کنجهای تشکیل شده در هر رأس یک چهاروجهی منتظم، مثلثهای متساوی‌الاضلاع همنهشت هستند. بنابراین اندازهٔ هر زاویهٔ کنج برابر ۶۰° است. پس این کنجها منتظم هستند. در مکعب وجه‌های کنجهای در هر رأس، کنج سه قائمه می‌باشند. از منتظم بودن وجه‌ها و منتظم بودن کنجها، مساوی بودن وجه‌ها نیز نتیجه می‌شود.

۶. نقطهٔ M را در درون چندوجهی منتظم ...ABCDEF در نظر می‌گیریم. از این نقطه به رأسهای چندوجهی، یعنی به نقطه‌های A، B، C، D، ... وصل می‌کنیم و همچنین عمودهای $L_۱$، $L_۲$، $L_۳$، ...، L_n را بر وجه‌های چندوجهی منتظم فرود می‌آوریم: می‌دانیم که حجم این چندوجهی منتظم، مساوی مجموع حجم چهاروجهیهای ایجاد شده (هرمها) به رأس M و به قاعدهٔ وجه‌های چهاروجهی است، که چون وجه‌های چندوجهی مساویند، اگر مساحت یکی از آنها را S فرض کنیم، داریم:

$$\text{حجم چندوجهی} = V = S\times l_۱ + S\times l_۲ + S\times l_۳ + \cdots + S\times l_n \Rightarrow$$

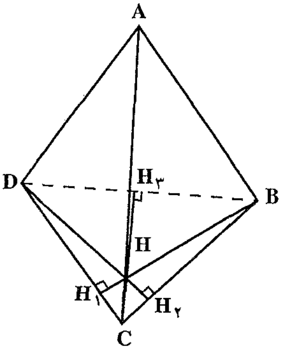
$$V = S(l_۱ + l_۲ + l_۳ + \cdots + l_n) \Rightarrow$$

$$l_۱ + l_۲ + l_۳ + \cdots + l_n = V/S = \text{مقدار ثابت}$$

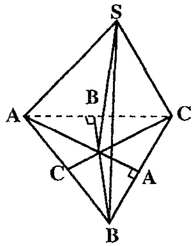
۲.۱. چهاروجهی منتظم

۱.۲.۱. تعریف و قضیه

۸. چهاروجهی منتظم ABCD را درنظر می‌گیریم: ارتفاعهای $BH_۱$، $CH_۲$ و $DH_۳$ از مثلث BCD را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد آنها را H می‌نامیم. صفحهٔ عمودمنصف ضلع CD



که شامل ارتفاع $BH_۱$ است، بر یال AB می‌گذرد و شامل ارتفاع AH است. همچنین صفحهٔ عمودمنصف ضلع BC که شامل ارتفاع $CH_۲$ است بر یال AD می‌گذرد و شامل ارتفاع AH است. بنابراین نقطهٔ H که محل برخورد ارتفاعهای مثلث BCD است، پای ارتفاع A از چهاروجهی ABCD است، به‌همین ترتیب، این ویژگی برای ارتفاعهای دیگر چهاروجهی منتظم برقرار است.



۹. می‌دانیم که چهاروجهی منتظم از چهار مثلث متساوی‌الاضلاع برابر تشکیل شده است، پس مساحت جانبی آن برابر است با مساحت سه مثلث از این مثلثها، و سطح کل آن برابر مساحت ۴ مثلث از این مثلثها می‌باشد.

اما مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر است با : $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۳}$ ؛ زیرا ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است. پس مساحت آن $S=\frac{۱}{۲}a\times\frac{a\sqrt{۳}}{۲}=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ خواهد بود.

پس : سطح جانبی چهاروجهی منتظم $S_۱=۳\times\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$

سطح کل چهاروجهی منتظم $S_۲=۴\times\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}=a^۲\sqrt{۳}$

از طرفی ارتفاع چهاروجهی منتظم برابر است با :

$$SH=\sqrt{SA^۲-AH^۴}$$

$$AH=\frac{۲}{۳}AA'=\frac{۲}{۳}\times\frac{a\sqrt{۳}}{۲}=\frac{a\sqrt{۳}}{۳}\ ,\ SA=a$$

$$\Rightarrow SH=\sqrt{a^۲-(\frac{a\sqrt{۳}}{۲})^۲}=\sqrt{\frac{۲a^۲}{۳}}=\frac{a\sqrt{۶}}{۳}$$

$$\Rightarrow h=\frac{a\sqrt{۶}}{۳}$$

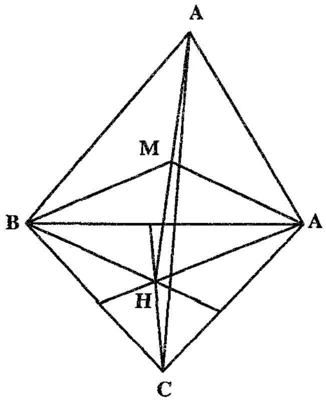
پس حجم چهاروجهی منتظم برابر است با :

$$V = \frac{1}{3} \times S \times h = \frac{1}{3} \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} \times \frac{a\sqrt{6}}{3} = \frac{a^3\sqrt{2}}{12}$$ حجم چهاروجهی منتظم

۱.۲.۲. نقطه، خط، صفحه

۱.۲.۲.۱. خط

۱.۲.۲.۱.۱. خطها بر هم عمودند



۱۰. چهاروجهی ABCD را در نظر می‌گیریم. ارتفاع AH را رسم می‌کنیم و وسط آن را M می‌نامیم. از M به B، C و D وصل می‌کنیم. باید ثابت کنیم که MB، MC و MD دو به دو بر هم عمودند. برای این کار کافی است ثابت کنیم مثلثهای BMC، CMD و DMB در رأس M قائم‌الزاویه‌اند. ضلع چهارضلعی منتظم را a فرض می‌کنیم. داریم :

$$AH = \frac{a\sqrt{6}}{3} \Rightarrow MH = AM = \frac{AH}{2} = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

$$BH = \frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3} \Rightarrow$$

$$MB = \sqrt{MH^2 + BH^2} = \sqrt{\frac{a^2}{6} + \frac{a^2}{3}} = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

همچنین داریم :

$$MC = MD = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

از طرفی $BC = a$ است. پس مثلث MBC در رأس M قائم‌الزاویه است، زیرا داریم :

$$BC^2 = MB^2 + MC^2$$

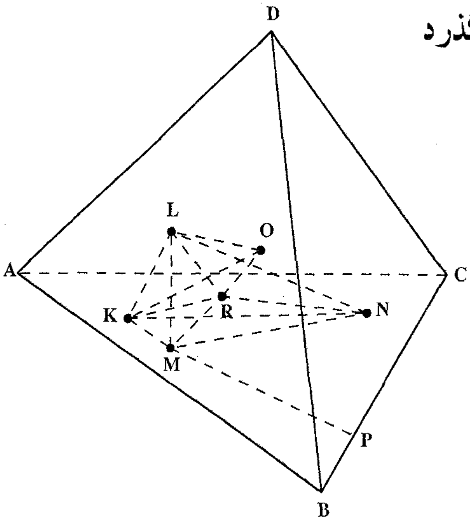
$$a^2 = \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2 + \left(\frac{a\sqrt{2}}{2}\right)^2$$

$$a^2 = \frac{a^2}{2} + \frac{a^2}{2} \Rightarrow a^2 = a^2$$

درنتیجه MB و MC بر هم عمودند.

با همین روش، ثابت می‌شود که MC بر MD، و MD بر MB عمود است.

۱.۲.۲.۱.۲. خط از نقطهٔ ثابتی می‌گذرد



۱۱. محل برخورد OM و صفحهٔ KLN را با R نشان دهید (شکل). حکم R مرکز ثقل مثلث KLM است، هم‌ارز این حکم می‌شود که : حجمهای چهاروجهیهای MKLO، MLNO، و MNKO با هم برابرند. فاصلهٔ M را از ضلعهای متناظر ABC بترتیب با x، y و z نشان دهید. چون صفحهٔ KLM، بر یال AD عمود است، فاصلهٔ O تا KLM برابر می‌شود با تصویر OM بر روی AD، که خود مساوی است با تصویر MP بر روی AD. در این‌جا، P، پای عمودی است که از نقطهٔ M بر BC فرود می‌آید. به‌آسانی دیده می‌شود که تصویر MP بر روی AD برابر است با $\frac{z}{\sqrt{۳}}$ که در آن z فاصلهٔ M تا BC می‌باشد. اگر α فرجهٔ بین وجه‌های چهاروجهی ABCD باشد، آن‌گاه :

$$V_{KLMO}=\frac{۱}{۶}KM.ML.\sin\alpha.\frac{z}{\sqrt{۳}}=\frac{xyz\sqrt{۲}}{۲۷}$$

هریک از دو چهاروجهی MLNO و MNKO هم، چنین حجمی خواهند داشت.

۱.۲.۳. زاویه

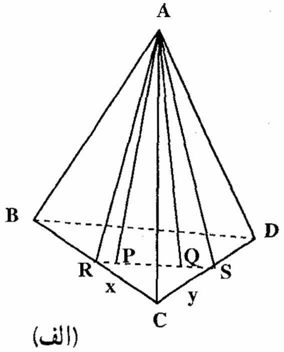
۱.۲.۳.۱. اندازهٔ زاویه

۱۲. اگر این زاویه را θ فرض کنیم، داریم :

$$\cos\theta=\frac{۱}{۳}$$

و اندازهٔ θ با تقریب برابر است با : $\theta = ۷۰^\circ, ۳۱', ۷۲''$

۱۳. راه اول. بدون این که به کلی‌بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توان فرض کرد که همهٔ یالهای چهاروجهی ABCD برابر واحد باشند، P و Q در داخل مثلث BCD قرار گیرند و خط راست PQ، خطهای راست BC و CD را بترتیب در R و S قطع کند (شکل الف). بنابراین :



(الف)

$P\hat{A}Q < R\hat{A}S$

اکنون ثابت می‌کنیم، RS کوتاهترین ضلع در مثلث ARS است (که از آن‌جا نتیجه می‌شود که زاویهٔ ARS، و به طور مسلم زاویهٔ PAQ، از ۶۰ درجه کمتر است).

در مثلث RSD داریم : $R\hat{S}D > ۶۰^\circ$ و $R\hat{D}S < ۶۰^\circ$

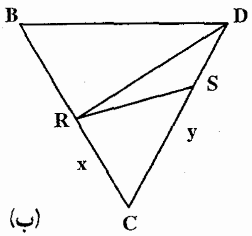
بنابراین $RD > RS$. چون $AR = RD$ (با توجه به برابری دو مثلث BDR و BAR)، $AR > RS$ و به همین ترتیب $AS > RS$. یعنی RS کوتاهترین ضلع مثلث ARS است.

راه دوم. در مثلث RCS (شکل ب) داریم :

$$RS^۲ = x^۲ + y^۲ - ۲xy\cos ۶۰^\circ = x^۲ + y^۲ + xy$$

و در مثلثهای ACR و ACS :

$$AR^۲ = x^۲ - x + ۱$$
$$AS^۲ = y^۲ - y + ۱$$



(ب)

که در آنها $۱ > x > ۰$ و $۱ > y > ۰$. پس $AR > RS$ ، زیرا :

$$AR^۲ - RS^۲ = (۱ - y)(۱ + y - x) > ۰$$

به همین ترتیب $AS > RS$ و درنتیجه $P\hat{A}Q < ۶۰^\circ$.

یادداشت. به‌عنوان تعمیم مسأله، ثابت می‌کنیم، اگر ABCD یک چهاروجهی دلخواه

باشد، به‌نحوی که هیچ‌کدام از زاویه‌های رأس A منفرجه نباشند، و اگر P و Q دو نقطه در داخل یا روی ABCD باشند، آن‌گاه :

$$P\hat{A}Q \le \max\left\{B\hat{A}C, C\hat{A}D, D\hat{A}B\right\}$$

اثبات را به روش برداری می‌دهیم. بردار به مبدأ A و انتهای V را v می‌نامیم. بدون این که به کلی‌بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، می‌توانیم نقطه‌های P و Q را در داخل یا روی مثلث BCD در نظر بگیریم و فرض کنیم :

$$|b| = |c| = |d| = ۱$$

در این صورت، برای نمایش برداری p و q می‌توان نوشت :

$$p = xb + yc + zd \quad , \quad q = ub + vc + wd$$

که در آنـــهـــا $x + y + z = ۱$ ، $x, y, z \ge ۰$ ، $u + v + w = ۱$ ، و $u, v, w \ge ۰$ و $|p| \le ۱$ و $|q| \le ۱$.

چون کسینوس در بازهٔ $[۰, \pi]$ نزولی است، بنابراین، نابرابری ما، هم‌ارز است با :

$$\frac{p.q}{|p||q|} \ge p.q = (xb + yc + zd)(ub + vc + wd)$$

$$\ge \min\{b.c, c.d, d.b\}$$

با انجام ضرب، به‌دست می‌آید :

$$p.q = xu + yv + zw + (yu + xv)b.c + (zv + yw)c.d$$
$$+(xw + zu)d.b$$

چون زاویه‌های رأس A منفرجه نیستند، بنابراین b.c، c.d و d.b غیرمنفی‌اند. درنتیجه :

$$p.q \ge \{xu + yv + zw + (yu + xv) + (zv + yw) + (xw + zu)\}.$$

$$\min\{b.c, c.d, d.b\} = (x + y + z)(u + v + w)\min\{b.c, c.d, d.b\}$$

$$= \min\{b.c, c.d, d.b\}$$

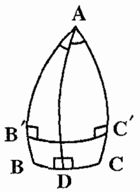
در رابطه با مثلثهای کروی، نابرابری بالا هم‌ارز است با این نتیجه که، بزرگترین کمان از مثلث کروی حاده (از این استفاده می‌کنیم که محیط مثلث کروی حاده، از محیط دایرهٔ عظیمهٔ کره کمتر است)، بزرگترین ضلع است. اگر ABC یک مثلث کروی باشد، و

$\hat{A}=\hat{C}=\frac{\pi}{۲}$، آن وقت همهٔ کمانهای مثلث که از نقطهٔ A می‌گذرند، طولی برابر AB و AC دارند. همچنین، اگر

$$AB=AC>\frac{\pi}{۲}>BC$$

آن وقت، نیمساز $\hat{A}$ از AC بزرگتر است (شکل پ را ببینید). در این‌جا،

$AB'=AC'=\frac{\pi}{۲}$ و $A\hat{B}D=A\hat{D}B=\frac{\pi}{۲}$.



(پ)

اگر تنها دو مثلث از وجه‌های به‌رأس A، در چهاروجهی ABCD، زاویه‌ای منفرجه در رأس داشته باشند، باز هم به همان نتیجه می‌رسیم. در این جا ترجیح داده‌ایم، از مثلث کروی متناظر، به جای چهاروجهی، استفاده کنیم.

رأس A از چهاروجهی را در مرکز کرهٔ به شعاع واحد قرار می‌دهیم و مثلث کروی را در نظر می‌گیریم که از برخورد کره با سه وجه چهاروجهی که از مرکز می‌گذرند، به‌دست می‌آید. نام‌گذاریهای مربوط به چهاروجهی را کنار می‌گذاریم و، در این جا، سه رأس مثلث را A، B و C، و سه ضلع روبه‌روی آنها را a، b و c می‌نامیم. مثلث کروی ABC را با ضلعهای a،b و c در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم: $b,c\le\frac{\pi}{۲}<a$. ثابت می‌کنیم که هر کمان از مثلث، از بزرگترین ضلع مثلث، یعنی a، کوچکتر است. از قانون کسینوسها در مثلث کروی استفاده می‌کنیم:

$$\cos a=\cos b\cos c+\sin b\sin \hat{C}\cos \hat{A}$$

و رابطه‌های دیگر مشابه آن.

دو انتهای P و Q از کمان مورد نظر را، روی محیط مثلث ABC می‌گیریم، به‌نحوی که بر یک ضلع واقع نباشند. ابتدا به حالتی می‌پردازیم که P روی AC و Q روی AB باشد. $AP=xb$ و $AQ=yc$ می‌گیریم که، در آنها $۰\le x$ ، $y\le ۱$ و $PQ=a'$ (شکل ت). داریم:

$$\cos a'=\cos xb\cos yc+\sin xb\sin yc\cos \hat{A}$$

از آن‌جا که:

$$\cos a'-\cos a=(\cos xb\cos yc-\cos b\cos c)$$
$$-\cos\hat{A}(\sin b\sin c-\sin xb\sin yc)\ge ۰$$

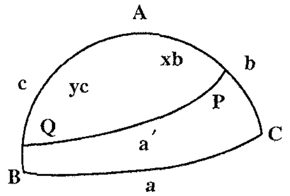
بنابراین، به‌دست می‌آید : $a' \le a$ (بنا به فرض $\cos\hat{A} \le ۰$).
حالتی را در نظر می‌گیریم که یکی از دو انتهای کمان، بر ضلع a واقع باشد، بدون این که به کلی‌بودن مسأله لطمه‌ای وارد شود، انتهای دیگر کمان را بر b می‌گیریم (شکل ث). در این جا داریم :

$$\cos c' = \cos xb \cos ya + \sin xb \sin ya \cos\hat{C}$$

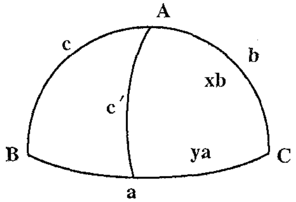
که در آن $۰ \le x \le ۱$ و $۰ \le y \le ۱$. چون

$$\cos c' - \cos a = (\cos xb \cos ya - \cos a) + \sin xb \sin ya \cos\hat{C} \ge ۰$$

به دست می‌آید، $c' < a$ (بنا به فرض $\cos\hat{C} \le ۰$).



(ت)



(ث)

۱.۲.۴. یال، ارتفاع

۱.۲.۴.۱. یال

۱.۲.۴.۱.۱. اندازهٔ یال

۱۴. طول یال چهاروجهی منتظم خواسته شده $(۵\sqrt{۶}+\sqrt{۲۲})R$ است.

۱۵. گزینهٔ (ب) درست است ؛ زیرا می‌دانیم که سطح کل چهاروجهی منتظم به یال a برابر با $a^۲\sqrt{۳}$ است، پس داریم :

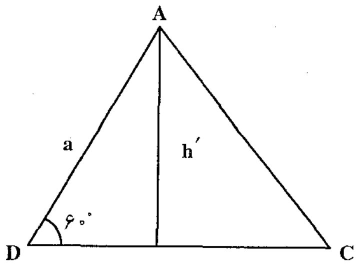
$$a^۲\sqrt{۳} = ۹\sqrt{۳} \Rightarrow a^۲ = ۹ \Rightarrow a = ۳$$

۱۶. داریم :

$$\frac{a^۳\sqrt{۲}}{۱۲} = \frac{۲\sqrt{۲}}{۳} \Rightarrow a^۳ = ۸ \Rightarrow a = ۲$$

۲.۴.۲.۱. ارتفاع

۱.۲.۴.۲.۱. اندازهٔ ارتفاع



۱۷. در مثلث متساوی‌الاضلاع، هر ارتفاع $\frac{\sqrt{۳}}{۲}$ هر ضلع است، $h' = \frac{\sqrt{۳}}{۲} \times a$. پس:

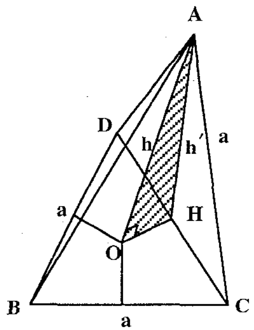
$$OH = \frac{\sqrt{۳}}{۲} a \times \frac{۱}{۳} = \frac{\sqrt{۳}}{۶} a$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ AHO که $A\hat{O}H = ۹۰^\circ$ است، داریم:

$$AH^۲ = h'^۲ = AO^۲ + OH^۲ = h^۲ + OH^۲$$

$$\Rightarrow \frac{۳a^۲}{۴} = h^۲ + (\frac{a\sqrt{۳}}{۶})^۲ \Rightarrow h^۲ = \frac{۳a^۲}{۴} - \frac{۳a^۲}{۳۶} = \frac{۲۷a^۲ - ۳a^۲}{۳۶}$$

$$\Rightarrow h^۲ = \frac{۲۴a^۲}{۳۶} \Rightarrow h^۲ = \frac{۶}{۹} a^۲ \Rightarrow h = \frac{\sqrt{۶}}{۳} a$$



۱۸. داریم:

$$h = \frac{a\sqrt{۶}}{۳} = \frac{۱۲\sqrt{۶}}{۳} = ۴\sqrt{۶}$$

۱۹. چهاروجهی مفروض را ABCD بنامید. روی یالهای BC و BD نقطه‌های M و N را اختیار و مسألهٔ زیر را حل کنید:

به‌ازای کدام مکانهای M و N، شعاع کوچکترین دایره‌ای که مثلث AMN را محصور می‌کند، (دایره‌ها را در صفحهٔ AMN در نظر بگیرید) کمترین مقدار را پیدا می‌کند. (واضح است که شعاع کوچکترین حفره نمی‌تواند کمتر از این شعاع باشد. برای این منظور کافیست در نظر بگیریم که لحظه گذشتن چهاروجهی از حفره، وقتی است که، دو رأس چهاروجهی در یک طرف صفحه حفره، رأس سوم در طرف دیگر و رأس چهارم در

داخل صفحه حفره قرار داشته باشد.)
فرض کنید M و N مربوط به همان مثلث مطلوب باشند، و فرض کنید این مثلث، حادهالزاویه باشد. در این صورت، کوچکترین دایره، که این مثلث را شامل بشود، منطبق بر کره محیطی آن خواهد بود. دایره‌ای را بر مثلث AMN محیط کنید و جسم صلبی را در نظر بگیرید که، از دوران کمان $\widehat{AMN}$ از این دایره، حول وتر AN ایجاد می‌شود. خط BC باید بر سطح این جسم مماس باشد به عبارت دیگر، روی BC می‌توانیم نقطهٔ M_1 را طوری اختیار کنیم که شعاع دایرهٔ محیطی مثلث AMN کوچکتر از شعاع دایرهٔ محیطی مثلث AMN بشود. علاوه‌بر این، BC باید مماس بر سطح کره‌ای باشد که از A، M و N می‌گذرد، و مرکز آن در صفحهٔ AMN قرار می‌گیرد. خط BD نیز باید، به همین ترتیب بر کره مماس باشد. پس:

$$BM = BN$$

با قراردادن $BM = BN = x$، وسط MN را با K و تصویر B را بر روی صفحه AMN با L (L روی امتداد AK قرار دارد) نشان دهید. همان‌طور که قبلاً اشاره شد، LM و LN مماس بر دایرهٔ محیطی مثلث AMN هستند و این مثلث متساوی‌الساقین است.

$$AM = AN = \sqrt{x^۲ - x + ۱} \quad \text{و} \quad MN = x$$

اگر $\widehat{MAN} = \alpha$، آن‌گاه:

$$\cos\alpha = \frac{x^۲ - ۲x + ۲}{۲(x^۲ - x + ۱)}$$

$$\sin\alpha = \frac{x\sqrt{۳x^۲ - ۴x + ۴}}{۲(x^۲ - x + ۱)}$$

$$LK = MK\tan\alpha = \frac{x^۲\sqrt{۳x^۲ - ۴x + ۴}}{۲(x^۲ - ۲x + ۲)}$$

مثلث AKB را در نظر بگیرید.

$$\widehat{AKB} = \beta > ۱۸۰^\circ$$

$$\cos\beta = \frac{۳x - ۲}{\sqrt{۳(۳x^۲ - ۴x + ۴)}}$$

$$LK = -KB\cos\beta = \frac{x(۲ - ۳x)}{۲\sqrt{۳x^۲ - ۴x + ۴}}$$

با مساوی قراردادن دو عبارت KL، مقدار x را پیدا می‌کنیم. معادلهٔ ساخته‌شده چنین

است :

$$۳x^۳-۶x^۲+۷x-۲=۰ \qquad (۱)$$

شعاع دایرهٔ محیطی مثلث AMN برابر خواهد بود با :

$$R=\frac{x^۲-x+۱}{\sqrt{۳x^۲-۴x+۴}}$$

(می‌توان نشان داد که اگر AMN قائمه باشد، وتر آن، کمتر از $\sqrt{۱۵-۱۰\sqrt{۲}} > ۰/۹$ نیست) نشان می‌دهیم که چهاروجهی ما، می‌تواند ازحفره‌ای به شعاع به‌دست‌آمده عبور کند. روی یالهای CB و CA نقطه‌های L و P را چنان تعیین کنید تا :

$$CL=CP=BM=BN=x$$

که در آن x، در معادلهٔ (۱) صدق می‌کند.

چهاروجهی را روی صفحه شامل حفره، چنان قرار دهید که، M و N روی لبه حفره قرارگیرند. چهاروجهی را حول MN دوران دهید تا یال AB، از سوراخ عبور کند و موازی صفحه قرار گیرد. سپس با نگهداشتن AB به موازات این صفحه، چهاروجهی ABCD را طوری از جای خود تغییر دهید که، نقطه‌های P و L بر لبهٔ حفره برسند و بالاخره چهاروجهی را حول PL دوران دهید تا یال DC، از سوراخ خارج بشود. (چهاروجهی بر خواهد گشت تا در آن طرف صفحه جا بگیرد، وجه ABC در این صفحه قرار خواهد گرفت.)

جواب : شعاع کوچکترین حفره،

$$R=\frac{x^۲-x+۱}{\sqrt{۳x^۲-۴x+۴}}$$

که در آن x ریشهٔ معادلهٔ $۳x^۳-۶x^۲+۷x-۲=۰$ می‌باشد. محاسبات مربوطه، به‌طور تقریب مقدار آن را معین می‌کند، $x\cong ۰/۳۹۱۳$ و $R\cong ۰/۴۴۷۸$ که خطای آن از ۰/۰۰۰۰۵ تجاوز نمی‌کند.

۱.۲.۵. پاره‌خط

۱.۲.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۲۰. ثابت می‌کنیم، اگر فاصلهٔ از نقطهٔ M تا رأسهای چهاروجهی منتظم ABCD به ضلع ۲، عددهایی درست باشند، آن وقت، دست‌کم یکی از این فاصله‌ها، برابر صفر است (عکس

حکم، تردیدی به‌وجود نمی‌آورد).

اگر نقطهٔ M، روی خط راستی باشد که شامل یالی از چهاروجهی، و به‌طور مثال یال AB است، و اگر H، وسط یال AB باشد، آن‌وقت، با فرض $MH = x$ و $MC = y$ داریم:

$$y > x \geq ۰ \quad , \quad x^۲ + (\sqrt{۳})^۲ = y^۲$$

از آن جا:

$$(y-x)(y+x) = ۳ \quad , \quad y - x = ۱ \quad , \quad y + x = ۳$$

بنابراین $x = ۱$؛ و این، به‌معنای آن است که نقطهٔ M، بر یکی از دو رأس A یا B منطبق است.

اکنون، حالتی را در نظر می‌گیریم که، نقطهٔ M، بر هیچ یک از این گونه خطهای راست قرار نگیرد. در این حالت، کوتاهترین فاصله از M تا رأسهای چهاروجهی (که آن‌را $x > ۰$ می‌گیریم)؛ نسبت به بقیهٔ فاصله‌ها، کمتر از ۲ واحد اختلاف دارد، یعنی هرکدام از این فاصله‌ها، یا x است و یا $x + ۱$. چهار مورد را بررسی می‌کنیم:

۱) هر چهار فاصله، برابر xاند. در این صورت M باید بر مرکز کرهٔ محیطی چهاروجهی، که شعاعی برابر $\frac{۱}{۲}\sqrt{۶}$ دارد، منطبق باشد که ممکن نیست، زیرا $x \in N$.

۲) سه تا از فاصله‌ها برابر x و یکی برابر $x + ۱$ است. برای مشخص بودن وضع، فرض می‌کنیم:

$$MA = MB = MC = x \text{ و } MD = x + ۱$$

اگر مرکز مثلث ABC را O بگیریم، نقطهٔ M باید روی نیمخط راست DO باشد و در ضمن، داشته باشیم:

$$x \geq AO = \frac{۲}{\sqrt{۳}} > ۱$$

یعنی:

$$DM = x + ۱ > ۲ > ۲\sqrt{\frac{۲}{۳}} = DO = DM - MO = x + ۱ - \sqrt{x^۲ - \frac{۴}{۳}}$$

از آن‌جا:

$$x + ۱ = ۲\sqrt{\frac{۲}{۳}} + \sqrt{x^۲ - \frac{۴}{۳}} = ۲\sqrt{\frac{۲}{۳}} + \sqrt{(x - \frac{۱}{۲})^۲ + x - \frac{۱۹}{۱۲}} > \frac{۳}{۲} + x - \frac{۱}{۲} = x + ۱$$

که ممکن نیست.

۳) سه تا از فاصله‌ها برابر $x + ۱$ و یکی برابر x است، مثل مورد ۲ فرض می‌کنیم:

$$MD = x \geq ۱ \text{ و } MA + MB + MC = x + ۱ \geq ۲$$

در این صورت، نقطهٔ M، روی خط راست OD قرار دارد و، در ضمن، نقطهٔ O نمی‌تواند

بین نقطه‌های M و D واقع باشد، زیرا در غیر این صورت :

$$x=۲\sqrt{\frac{۲}{۳}}+\sqrt{(x+۱)^۲-\frac{۴}{۳}}>۱+x$$

بنابراین، نقطهٔ M، روی نیمخط راست OD است و

$$۲\sqrt{\frac{۲}{۳}}=OD=OM-MD=\sqrt{(x+۱)^۲-\frac{۴}{۳}}-x<x+۱-x=۱<۲\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

که باز هم ممکن نیست.

۴) دو تا از فاصله‌ها برابر x و دوتای دیگر برابر $x+۱$ هستند. برای مشخص‌بودن وضع، فرض می‌کنیم :

$$MA=MB=x\geq ۱ \text{ و } MC=MD=x+۱\geq ۲$$

توجه کنیم که $x\neq ۱$، زیرا بنابر آنچه در بالا ثابت کردیم، نقطهٔ M نمی‌تواند روی خط راست AB باشد ؛ بنابراین $x\geq ۲$. وسط پاره‌خطهای راست AB و CD را، بترتیب، E و F می‌نامیم. دراین صورت، نقطهٔ M روی نیمخط راست FE است و در ضمن :

$$MF=\sqrt{(x+۱)^۲-۱}\geq\sqrt{۳}>\sqrt{۲}=EF$$

از آن‌جا، باید داشته باشیم :

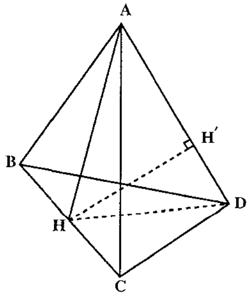
$$\sqrt{(x+۱)^۲-۱}-\sqrt{x^۲-۱}=MF-ME=EF=\sqrt{۲}$$

که ممکن نیست، زیرا به ازای $۱<x\in N$ داریم :

$$\sqrt{(x+۱)^۲-۱}-\sqrt{x^۲-۱}>\sqrt{۲}$$

به این ترتیب، حکم مسأله، به‌طور کامل ثابت شد.

۲۱. گستردهٔ نامتناهی چهاروجهی منتظم با یال به طول واحد را بر صفحه در نظر می‌گیریم و اثر هر رأس آن را، همه جا با یک حرف مشخص می‌کنیم. M و N را، دو نقطه از سطح چهاروجهی می‌گیریم و به همهٔ نقطه‌های متناظر آنها، روی گستردهٔ چهاروجهی توجه می‌کنیم. نقطه‌های $M_۱$ ، $M_۲$ ، ...، متناظر با نقطهٔ M، روی گره‌های شبکهٔ مثلثهای متساوی‌الاضلاع به ضلع ۲، قرار دارند. اثری از رأسهای N را در نظر می‌گیریم که در درون یکی از این مثلثهای $M_۱M_۲M_۳$ واقع است : نقطهٔ $N_۱$. این می‌ماند که ثابت کنیم، یکی از فاصله‌های از $N_۱$ تا رأسهای مثلث $M_۱M_۲M_۳$ ، از $۲\sqrt{۳}$ بیشتر نیست. و این، از آن‌جا ناشی می‌شود که مثلث، به سه چهارضلعی $OP_۱P_۲M_۳$ ، $OP_۱P_۳M_۲$ و $OP_۲P_۳M_۱$ تقسیم می‌شود که، در آنها، O مرکز مثلث $M_۱M_۲M_۳$ و $P_۱$ ، $P_۲$ و $P_۳$ ، پای عمودهایی است که از O بر ضلعها فرود آمده‌اند. زیرا نقطهٔ $N_۱$ بر یکی از آنها قرار دارد.



۲۲. گزینهٔ (ب) درست است.

زیرا در چهاروجهی به یال a، اگر عمود مشترک دو یال روبه‌روی AD و BC را HH′ بنامیم، در مثلثهای متساوی‌الاضلاع ABC و BCD داریم:

$$AH = HD = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

و در مثلث متساوی‌الساقین AHD به قاعدهٔ $AD = a$ داریم:

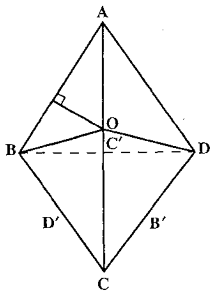
$$AH' = H'D = \frac{a}{۲} \Rightarrow HH' = \sqrt{AH^۲ - AH'^۲} = \sqrt{\frac{۳a^۲}{۴} - \frac{a^۲}{۴}} = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

۲۳. اگر ABCD چهاروجهی مفروض باشد، وسط AB را K، و وسط AC را M، می‌نامیم. تصویر چهاروجهی را، روی صفحه‌ای که از AB می‌گذرد و بر CK عمود است، به‌دست می‌آوریم. تصویر چهاروجهی، بر روی این صفحه، مثلثی مانند، $ABD_۱$ خواهد بود که در آن، $D_۱$ تصویر D می‌باشد. اگر $M_۱$ تصویر M باشد، ($M_۱$ وسط AK است) در آن صورت فاصلهٔ بین CK و DM برابر با فاصلهٔ K از خط $D_۱M_۱$ می‌شود و این فاصله، به آسانی قابل محاسبه است؛ زیرا مثلث $D_۱KM_۱$ قائم‌الزاویه می‌باشد و $D_۱K$ و $KM_۱$ در آن، بترتیب طولهایی برابر با $a\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ (ارتفاع چهاروجهی) و $\frac{a}{۴}$ دارند. مسأله دو جواب دارد.

برای پیدا کردن جواب دوم، میانه‌های CK و BN را در نظر بگیرید. N وسط DC است. جواب مسأله عبارت است از:

$$\frac{a\sqrt{۱۰}}{۱۰} \quad ، \quad \text{Arc}\cos\frac{۲}{۳} \quad ، \quad a\sqrt{\frac{۲}{۳۵}} \quad ، \quad \text{Arc}\cos\frac{۱}{۶}$$

۶.۲.۱. شعاع کره



۱.۶.۲.۱. اندازهٔ شعاع کره

۲۴. صفحه‌های عمودمنصفهای یالهای هر چهاروجهی منتظم از یک نقطه مانند O می‌گذرند که این نقطه، از رأسهای چهاروجهی به یک فاصله است. بنابراین مرکز کرهٔ محیطی

چهاروجهی منتظم است و داریم:

$$OA = OB = OC = OD = R = \frac{a\sqrt{۶}}{۴}$$

همچنین، صفحه‌های نیمساز فرجه‌های هر چهاروجهی منتظم از یک نقطه مانند O' می‌گذرند، که این نقطه از وجه‌های چهاروجهی منتظم به یک فاصله است. بنابراین مرکز کرهٔ محاطی چهاروجهی منتظم است و داریم:

$$r = \frac{a\sqrt{۶}}{۱۲}$$

۲۵. وقتی کره، با صفحهٔ AMN قطع می‌شود، دایره‌ای حاصل می‌شود که در مثلث AMN محاط شده است. در این مثلث $AN = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ ، $AM = \frac{a\sqrt{۳}}{۳}$ و $MN = \frac{a}{۲}$. (از مثلث CMN پیدا می‌شوند.) بنابراین اگر محل برخورد کرهٔ ذکر شده و AM، L باشد، در آن صورت:

$$AL = \frac{AN + AM - MN}{۲} = (\frac{۵}{۱۲}\sqrt{۳} - \frac{۱}{۴})a$$

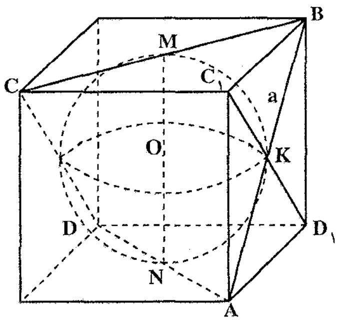
شعاع کرهٔ محاط در ABCD برابر است با $r = \frac{۱}{۴}\sqrt{\frac{۲}{۳}}$ ، که بر صفحهٔ ACD در نقطهٔ M مماس است. پس اگر x شعاع کرهٔ خواسته شده باشد، خواهیم داشت:

$$\frac{x}{r} = \frac{AL}{AM} = \frac{۵ - \sqrt{۳}}{۴}$$

و از آن‌جا:

$$x = \frac{۵\sqrt{۶} - ۳\sqrt{۲}}{۴۸}a$$

۲۶. ABCD را، چهاروجهی مفروض می‌گیریم (شکل). از یال AB، صفحه‌ای موازی با یال مقابل آن، CD، می‌گذرانیم. این صفحه، منحصر به فرد است و برای ساختن آن می‌توان به این ترتیب، عمل کرد: نقطهٔ A را بر AB انتخاب و از آن‌جا، خط راست C_1D_1 را موازی CD رسم می‌کنیم. صفحه‌ای که از AB و C_1D_1 بگذرد، همان صفحهٔ مورد نظر



است. به همین ترتیب، صفحهٔ دیگری رسم می‌کنیم که از یال CD بگذرد و با یال مقابل آن، AB، موازی باشد. این دو صفحه موازی‌اند اگر به همین ترتیب، برای هر دو یال مقابل هرم، دو صفحهٔ موازی. رسم کنیم، یک چندوجهی به‌دست می‌آید، این چندوجهی، به‌روشنی، مکعبی است که قطر هر وجه آن، برابر است با a. کره‌ای که بر یالهای هرم مماس باشد، کرهٔ محاطی این مکعب است و در ضمن، قطر آن برابر با یال مکعب است.
بنابراین، برای شعاع مجهول داریم:

$$R=\frac{۱}{۲}MN=\frac{۱}{۲}.\frac{a}{\sqrt{۲}}=\frac{a\sqrt{۲}}{۴}$$

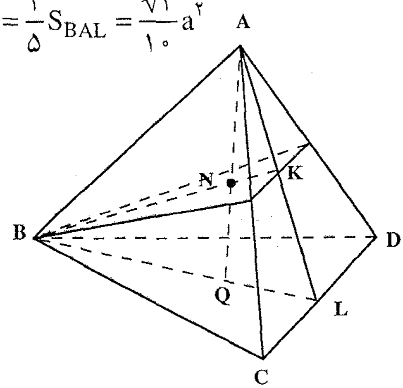
۲۷. شعاع کرهٔ مورد نظر $\frac{a\sqrt{۲۲}}{۸}$ است.

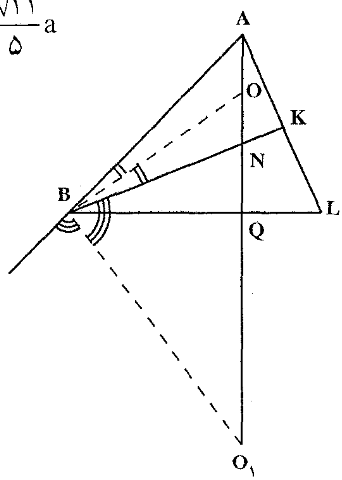
۲۸. صفحهٔ مقطعی مرور دهید که از یال AB و وسط CD بگذرد. محل برخورد صفحهٔ P را با خط AL، K بنامید. ارتفاع وارد از A بر BL، خط BK را در نقطهٔ N و BL را در نقطهٔ Q قطع می‌کند (شکل). به‌آسانی ثابت می‌شود که مرکز کره، بر روی AQ قرار دارد. در این‌جا مرکز کره، می‌تواند هم روی AN (نقطهٔ O) و هم در امتداد AQ (نقطهٔ $O_۱$) قرار گیرد.
شعاع کرهٔ اول برابر است با شعاع دایره‌ای که بر AB و BK مماس بوده و مرکز آن بر روی AN قرار دارد. اگر طول آن x باشد، می‌توان آن را از تساویهای زیر به‌دست آورد:

$$S_{BAN}=\frac{۱}{۲}(AB+BN)x$$

$$BN=\frac{۴}{۵}BK=\frac{۲}{۵}\sqrt{۲AB^۲+۲BL^۲-AL^۲}=\frac{\sqrt{۱۱}}{۵}a$$

$$S_{BAN}=\frac{۲}{۵}S_{BAL}=\frac{\sqrt{۲}}{۱۰}a^۲$$





پس :
$$x=\frac{\sqrt{2}a}{5+\sqrt{11}}$$

شعاع کرهٔ دوم به طریق مشابه محاسبه می‌شود.

جواب :
$$\frac{\sqrt{2}a}{5-\sqrt{11}} \text{ و } \frac{\sqrt{2}a}{5+\sqrt{11}}$$

۲۹. شعاع کره را x و مجموع حجم آن قسمت از کره را که در خارج چهاروجهی قرار دارد، با آن قسمت از چهاروجهی که در خارج کره قرار دارد با $V(x)$ نشان دهید. به‌آسانی دیده می‌شود،
$$V'(x)=S_1(x)-S_2(x)$$
که در آن $S_1(x)$ مساحت سطح آن قسمت از کره است که در خارج چهاروجهی قرار دارد و $S_2(x)$ مساحت سطح آن قسمت از کره است که در داخل چهاروجهی محصور شده است. مقدار مینیمم به‌ازای :
$$S_1(x)=S_2(x)$$
به دست می‌آید. از آن‌جا :
$$x=a.\frac{1}{3}\sqrt{\frac{2}{3}}$$

۲.۶.۲.۱. رابطهٔ بین شعاعها

۱.۲.۶.۲.۱. رابطهٔ بین شعاعها (برابریها)

۳۰. شعاع کرهٔ مماس بر یالهای چهاروجهی منتظم مساوی $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ است. از طرفی شعاع کره‌های محاطی و محیطی چهاروجهی منتظم بترتیب مساوی $\frac{a\sqrt{6}}{12}$ و $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ است، داریم :

$$(\frac{a\sqrt{2}}{4})^2=\frac{a\sqrt{6}}{12}\times\frac{a\sqrt{6}}{4}\Rightarrow\frac{2a^2}{16}=\frac{6a^2}{48}\Rightarrow\frac{a^2}{8}=\frac{a^2}{8}$$

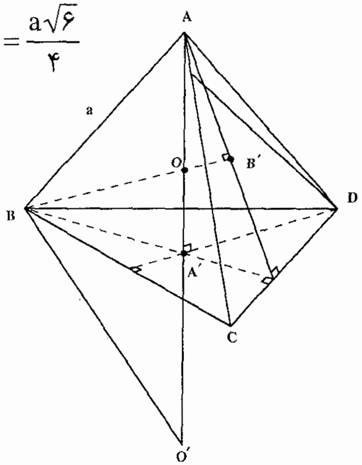
پس حکم مسأله برقرار است.

۳۱. می‌دانیم که در هر چهاروجهی منتظم، مرکز کرهٔ محیطی و مرکز کرهٔ محاطی درونی، بر هم منطبق می‌باشند و این مرکز مشترک، نقطهٔ همرسی ارتفاعهای چهاروجهی است که آن را O می‌نامیم. از طرفی مرکز کرهٔ محاطی خارجی واقع در درون کنج A، روی ارتفاع AA' از چهاروجهی منتظم قرار دارد که آن را O' می‌نامیم. اگر اندازهٔ یال چهاروجهی منتظم

a باشد، می‌دانیم که :

$$AA' = \frac{a\sqrt{۶}}{۳} \text{ و } OA' = r = \frac{۱}{۴}AA' = \frac{a\sqrt{۶}}{۱۲} \text{ و } OA = R = \frac{۳}{۴}AA' = \frac{a\sqrt{۶}}{۴}$$

$$O'A' = r_a = \frac{a\sqrt{۶}}{۶} \text{ و } d = ۰ \text{ و } d_a = OO' = \frac{a\sqrt{۶}}{۴}$$



با قراردادن مقدارهای بالا در رابطه‌های داده شده، درستی آنها ثابت می‌شود. داریم :

$$d^۲ = (R-r)^۲ - ۴r^۲ \Rightarrow ۰ = (\frac{a\sqrt{۶}}{۴} - \frac{a\sqrt{۶}}{۱۲})^۲ - ۴(\frac{a\sqrt{۶}}{۱۲})^۲ = ۰$$

$$\Rightarrow ۰ = \frac{a^۲}{۶} - \frac{a^۲}{۶} \Rightarrow ۰ = ۰$$

$$da^۲ = (R+ra)^۲ - ۴ra^۲ \Rightarrow (\frac{a\sqrt{۶}}{۴})^۲ = (\frac{a\sqrt{۶}}{۴} + \frac{a\sqrt{۶}}{۶})^۲ - ۴(\frac{a\sqrt{۶}}{۶})^۲$$

$$\Rightarrow \frac{۳a^۲}{۸} = \frac{۲۵a^۲}{۲۴} - \frac{۲a^۲}{۳} \Rightarrow \frac{۳a^۲}{۸} = \frac{۳a^۲}{۸}$$

نکته. رابطه‌های داده‌شده در این مسأله، مشابه رابطه‌های بین خط‌المرکزین دایره‌های محیطی و محاطی درونی و برونی مثلث است.

۱.۲.۶.۲.۲. رابطهٔ بین شعاعها (نابرابریها)

۳۲. طول یکی از ضلعهای قاعده را ۲a، ارتفاع هرم را h بنامید. در آن صورت، R برابر است با شعاع دایرهٔ محاطی مثلث متساوی‌الساقینی که قاعدهٔ آن $۲a\sqrt{۲}$ و ارتفاع آن h باشد.

$R = \frac{۲a^۲ + h^۲}{۲h}$ و r برابر می‌شود با شعاع دایرهٔ محاطی مثلث متساوی‌الساقین با قاعدهٔ

۲a و ارتفاع h، $r=\frac{a}{h}(\sqrt{a^{۲}+h^{۲}}-a)$. اگر

$$\frac{R}{r}=\frac{۲a^{۲}+h^{۲}}{۲a(\sqrt{a^{۲}+h^{۲}}-a)}=k$$ و

$$h^{۲}=xa^{۲}$$

خواهیم داشت:

$$۲+x=۲k(\sqrt{۱+x}-۱)$$

از آن‌جا:

$$x^{۲}+۴(۱+k-k^{۲})x+۴+۸k=۰$$

مبین این معادله برابر است با، $۱۶k^{۲}(k^{۲}-۲k-۱)$. بنابراین، $k\geq\sqrt{۲}+۱$ و این مطلوب مسأله است.

۱.۲.۷. مساحت

۱.۲.۷.۱. اندازهٔ مساحت

۱.۲.۷.۱.۱. اندازهٔ مساحت جانبی

۳۳. طول یال چهاروجهی را با x نشان دهید،

$$MN=\frac{x}{\sqrt{۲}}$$

اگر یالی که M وسط آن است، با صفحهٔ مفروض زاویهٔ α بسازد، یال مقابل آن، $\frac{\pi}{۲}-\alpha$ با آن خواهد ساخت.

تصویر چهاروجهی روی این صفحه، ذوزنقهٔ متساوی‌الساقینی خواهد بود که قاعده‌های آن $x\cos\alpha$ و $x\sin\alpha$ و فاصلهٔ بین آنها برابر با $\frac{x}{\sqrt{۲}}$ خواهد بود. از آن‌جا:

$$S=\frac{x^{۲}}{۲\sqrt{۲}}(\cos\alpha+\sin\alpha)$$

علاوه بر این، بنا به فرض، زاویهٔ مجاور قاعدهٔ بزرگ، برابر است با °۶۰، پس:

$$|\cos\alpha-\sin\alpha|=\sqrt{\frac{۲}{۳}}$$

جواب:

$$۳S\sqrt{۲}$$

۲.۱.۷.۲.۱. اندازهٔ مساحت کل

۳۴. مساحت هر مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a برابر $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ است. پس مساحت هر وجه از چهاروجهی به ضلع ۲ برابر است با $\sqrt{۳}=\frac{۴\sqrt{۳}}{۴}$. از آن‌جا، مساحت کل چهاروجهی مساوی $۴\sqrt{۳}$ است.

نکته. اندازهٔ مساحت کل هر چهاروجهی منتظم به یال a برابر است با :

$$V=a^۲\sqrt{۳}$$

۳۵. این کره، کرهٔ محاطی چهاروجهی منتظم است. می‌دانیم که در چهاروجهی منتظم به یال a، اندازهٔ شعاع کرهٔ محاطی مساوی $\frac{a\sqrt{۶}}{۱۲}$ است. بنابراین داریم :

$$r=\frac{a\sqrt{۶}}{۱۲}\Rightarrow a=\frac{۱۲r}{\sqrt{۶}}=۲\sqrt{۶}r$$

$S=a^۲\sqrt{۳}$ کل چهاروجهی منتظم به یال a

$$\Rightarrow \text{کل } S=(۲\sqrt{۶}r)^۲\times\sqrt{۳}=۲۴\sqrt{۳}r^۲$$

۳.۱.۷.۲.۱. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر

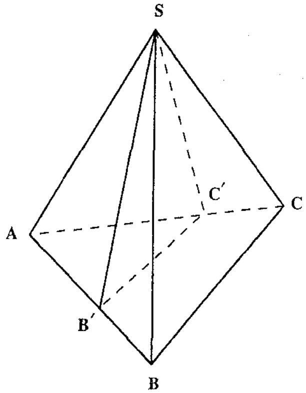
۳۶. چهاروجهی به یال ۲a را در نظر بگیرید. سطح جانبی کره‌ای که بر همهٔ یالهای آن مماس باشد، با سطح جانبی چهاروجهی، به چهار قطعه، و چهار مثلث منحنی‌الخط که هریک از آنها قابل انطباق بر مثلث مطلوب مسأله هستند، تجزیه می‌شود. شعاع کره برابر است با $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ و ارتفاع هر قطعه برابر می‌شود با :

$$a\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۲}{۳}}\right)$$

درنتیجه، مساحت مثلث منحنی‌الخط مطلوب برابر است با :

$$\frac{۱}{۴}\left[۴\pi a^۲\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}\right)^۲-۴\times۲\pi a^۲.\frac{\sqrt{۲}}{۲}\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲}-\frac{۱}{۲}\sqrt{\frac{۲}{۳}}\right)\right]$$

$$=\frac{\pi a^۲}{۶}(۲\sqrt{۳}-۳)$$



۳۷. با توجه به این که حجم هرم مساوی $\frac{۱}{۳}$ حاصلضرب قاعده در ارتفاع نظیر آن است. دو هرم $SAB'C'$ و $SBCC'B'$ در ارتفاع رأس A مشترکند و چون معادل یکدیگرند، پس مساحت قاعدهٔ آنها برابر است، یعنی داریم :

$$\text{مساحت } AB'C' = \text{مساحت } BCC'B' = \frac{۱}{۲} \text{ مساحت } ABC = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۸}$$

از آن‌جا :
$$B'C' \| BC \ , \ \text{مساحت } ABC = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$$

$$\Rightarrow \frac{\text{مساحت } AB'C'}{\text{مساحت } ABC} = \frac{\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۸}}{\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}} = \frac{۱}{۲} = \left(\frac{B'C'}{BC}\right)^۲ \Rightarrow \frac{B'C'}{BC} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow \frac{B'C'}{a} = \frac{\sqrt{۲}}{۲} \Rightarrow B'C' = \frac{\sqrt{۲}}{۲}a$$

چون مثلث $AB'C'$ متساوی‌الاضلاع است، پس :

$$AB' = AC' = B'C' = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

است. در مثلث SAB' داریم :

$$AB' = \frac{a\sqrt{۲}}{۲} \ , \ SA = a \ , \ S\hat{A}B' = ۶۰^\circ$$

$$\Rightarrow SB'^۲ = SA^۲ + AB'^۲ - SA.AB' = a^۲ + \frac{a^۲}{۲} - a \times \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$$

$$\Rightarrow SB'^۲ = a^۲\left(\frac{۳}{۲} - \frac{\sqrt{۲}}{۲}\right) = \frac{a^۲(۳-\sqrt{۲})}{۲}$$

$$\Rightarrow SB' = SC' = \frac{a\sqrt{۶-۲\sqrt{۲}}}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{محیط } SB'C' = \frac{a\sqrt{۲}}{۲} + ۲\left(\frac{a\sqrt{۶-۲\sqrt{۲}}}{۲}\right) = a\left(\frac{\sqrt{۲}}{۲} + \sqrt{۶-۲\sqrt{۲}}\right)$$

با معلوم بودن اندازهٔ سه ضلع مثلث $SB'C'$، اندازهٔ مساحت آن نیز بسادگی قابل محاسبه است.

۱.۲.۸. حجم

۱.۲.۸.۱. اندازهٔ حجم

۱.۲.۸.۱.۱. اندازهٔ حجم چهاروجهی

۳۸. اندازهٔ حجم چهاروجهی منتظم به یال a برابر است با :

$$V=\frac{a^{۳}\sqrt{۲}}{۱۲}$$

بنابراین داریم :

$$V=\frac{(۸)^{۳}\times\sqrt{۲}}{۱۲}=\frac{۱۲۸\sqrt{۲}}{۳}$$

۳۹. اندازهٔ مساحت هر وجه چهاروجهی منتظم به یال a مساوی $\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}$ است. پس داریم :

$$\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}=۱۲\sqrt{۳}\Rightarrow a^{۲}=۴۸\Rightarrow a=۴\sqrt{۳}$$

$$V=\frac{a^{۳}\sqrt{۲}}{۱۲}\Rightarrow V=\frac{(۴\sqrt{۳})^{۳}\times\sqrt{۲}}{۱۲}=۱۶\sqrt{۶}$$

۴۰. گزینهٔ (الف) درست است ؛ زیرا حجم چهاروجهی منتظم به یال a برابر است با $\frac{a^{۳}\sqrt{۲}}{۱۲}$.

بنابراین داریم :

$$V=\frac{(۶\sqrt{۲})^{۳}\times\sqrt{۲}}{۱۲}=۷۲$$

۴۱. می‌دانیم که اندازهٔ هر ارتفاع چهاروجهی منتظم به یال a برابر $\frac{\sqrt{۶}}{۳}a$ و اندازهٔ حجم آن مساوی $\frac{a^{۳}\sqrt{۲}}{۱۲}$ است. بنابراین داریم :

$$h=\frac{\sqrt{۶}}{۳}a\Rightarrow a=\frac{۳h}{\sqrt{۶}}=\frac{۳\sqrt{۶}}{۶}h=\frac{\sqrt{۶}}{۲}h$$

$$\Rightarrow V=\frac{a^{۳}\sqrt{۲}}{۱۲}=(\frac{\sqrt{۶}}{۲}h)^{۳}\times\frac{\sqrt{۲}}{۱۲}=\frac{۶\sqrt{۶}h^{۳}}{۸}\times\frac{\sqrt{۲}}{۱۲}$$

اندازهٔ حجم چهاروجهی منتظم $\Rightarrow V=\frac{۳\sqrt{۳}h^{۳}}{۸}$

۴۲. اگر یال چهاروجهی منتظم را a فرض کنیم، داریم :

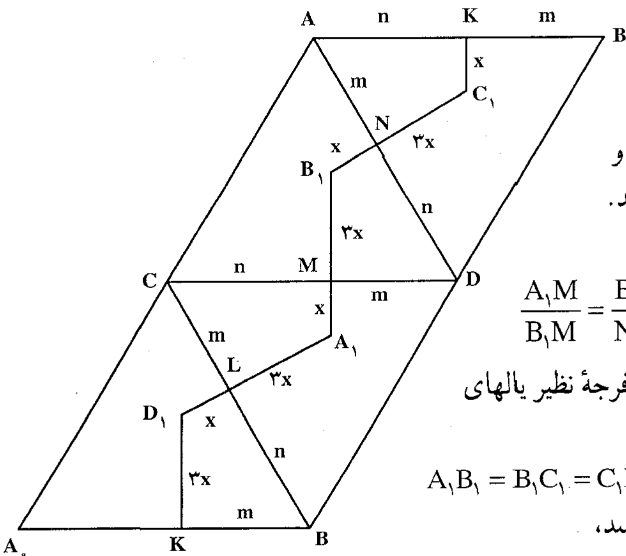
کل چهاروجهی منتظم $S=a^{۲}\sqrt{۳}\Rightarrow ۹\sqrt{۳}=a^{۲}\sqrt{۳}\Rightarrow a^{۲}=۹\Rightarrow a=۳$

حجم چهاروجهی منتظم $V=\frac{a^{۳}\sqrt{۲}}{۱۲}\Rightarrow V=\frac{۲۷\sqrt{۲}}{۱۲}=\frac{۹\sqrt{۲}}{۴}$

۱.۲.۸.۱.۲. اندازهٔ حجمهای ایجاد شده

۱.۲.۸.۱.۲.۱. اندازهٔ حجم چهاروجهیهای ایجاد شده

۴۳. عمودهای $A_۱M$ و $B_۱M$ را بر CD، $B_۱N$ و $C_۱N$ را بر AD، $C_۱K$ و $D_۱K$ را بر AB، $D_۱L$ و $A_۱L$ را بر CB فرود بیاورید.



چون :

$$\frac{A_۱M}{B_۱M}=\frac{B_۱N}{NC_۱}=\frac{C_۱K}{KD_۱}=\frac{D_۱L}{A_۱L}=\frac{۱}{۳}$$

(این نسبتها برابر کسینوس فرجهٔ نظیر یالهای چهاروجهی‌اند.) و

$$A_۱B_۱=B_۱C_۱=C_۱D_۱=D_۱A_۱$$

تساویهای زیر باید برقرار باشد،

$$A_۱M=B_۱N=C_۱K=D_۱L=x$$

$$B_۱M=NC_۱=KD_۱=A_۱L=۳x$$

(شکل، گسترش چهاروجهی را نشان می‌دهد). هریک ازیالهای CD، DA ، AB و BC همان‌طورکه در شکل دیده می‌شود، به پاره‌خطهای m و n تقسیم می‌شوند. با توجه به این که $m+n=a$ است، خواهیم داشت :

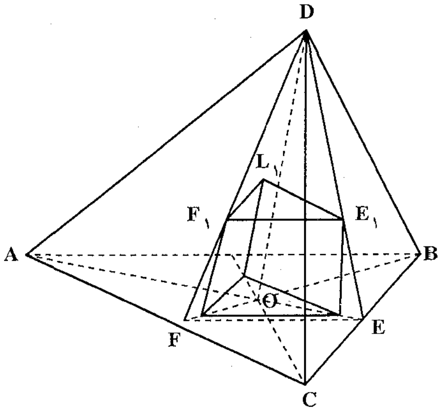
$$n=\frac{۷a}{۱۲}\ \text{،}\ \ m=\frac{۵a}{۱۲}\ \text{،}\ \ x=\frac{a\sqrt{۳}}{۱۲}$$

اکنون حجم چهاروجهی $A_1B_1C_1D_1$ را پیدا کنید.

جواب: $\frac{a^۳\sqrt{۲}}{۱۶۲}$

۱.۲.۸.۱.۲.۲. اندازهٔ حجم شکلهای دیگر ایجادشده

۴۴. یک چهاروجهی منتظم در نظر می‌گیریم (شکل). ارتفاع این چهاروجهی:



$$DO = h = \sqrt{AD^۲ - AO^۲} = \sqrt{a^۲ - \frac{a^۲}{۳}} = \frac{a\sqrt{۶}}{۳}$$

که در آن داریم:

$$AO = R = \frac{a}{\sqrt{۳}}\,;$$

$$EF = \frac{AB}{۲} = \frac{a}{۲}$$

از تشابه دو مثلث E_1DF_1 و EDF به‌دست می‌آید:

$$\frac{E_1F_1}{EF} = \frac{DE_1}{DF} = \frac{\frac{۲}{۳}DE}{DE} = \frac{۲}{۳}\,;$$

و از آن‌جا:

$$E_1F_1 = \frac{۲}{۳}EF = \frac{a}{۳}$$

بنابراین سطح قاعدهٔ منشور چنین می‌شود:

$$S = \frac{۱}{۴}\left(\frac{a}{۳}\right)^۲\sqrt{۳} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۳۶}$$

از تشابه دو مثلث DOE و E_1KE به‌دست می‌آید:

$$\frac{E_1K}{h} = \frac{E_1E}{DE} = \frac{\frac{۱}{۳}DE}{DE} = \frac{۱}{۳}\,;$$

و از آن‌جا:

$$E_1K = \frac{۱}{۳}h = \frac{a\sqrt{۶}}{۹}$$

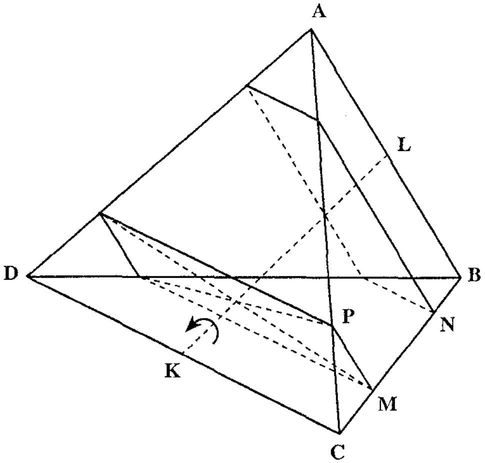
و ارتفاع منشور محاطی:

$$h_1 = ۲ \times E_1K = \frac{۲a\sqrt{۶}}{۹}$$

و حجم این منشور :

$$V = \frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۳۶} \cdot \frac{۲a\sqrt{۶}}{۹} = \frac{a^{۳}\sqrt{۲}}{۵۴}$$

جواب : $V = \frac{\sqrt{۲}a^{۳}}{۵۴}$



۴۵. طول یال چهاروجهی ABCD را با a نشان دهید و L و K را هم، وسطهای یالهای CD و AB بنامید. (شکل) روی یال CB نقطه‌ای مانند M را اختیار و از این نقطه مقطعی عمود بر KL رسم کنید. با قراردادن $CM = x$ مقدار x را طوری تعیین کنید که در مستطیل حاصل در مقطع، زاویهٔ بین قطرها برابر α گردد. چون ضلعهای مستطیل حاصل x و $a - x$ است، مقدار x را می‌توان از معادلهٔ زیر به‌دست آورد.

$$\frac{x}{a-x} = \tan\frac{\alpha}{۲} \quad , \quad x = \frac{a\tan\frac{\alpha}{۲}}{۱+\tan\frac{\alpha}{۲}}$$

اگر روی یال BC نقطهٔ دیگری مانند N را طوری اختیار کنیم که $BN = CM = x$، و از این نقطه مقطعی عمود بر KL رسم کنیم، در این صورت مستطیل دیگری خواهیم داشت که زاویهٔ بین قطرهای آن α خواهد بود. از آن جا معلوم می‌شود که در دورانی که حول KL به اندازهٔ زاویهٔ α و در خلاف چرخش عقربه‌های ساعت انجام می‌گیرد، صفحهٔ BCD از نقطه‌های K، P و N می‌گذرد. بنابراین در این دوران صفحهٔ BCD از چهاروجهی ABCD، هرم KPNC را جدا خواهد کرد که حجم آن برابر است با :

$$\frac{KC}{CD} \cdot \frac{CP}{CA} \cdot \frac{CN}{CB} V_{ABCD} = \frac{x(a-x)V}{۲a^{۲}} = \frac{\tan\frac{\alpha}{۲}}{۲(۱+\tan\frac{\alpha}{۲})^{۲}} V$$

عین همان استدلال برای تک تک وجه‌های چهاروجهی، به‌کار برده می‌شود. درنتیجه حجم مشترک برابر است با :

$$\frac{1+\tan^2\frac{\alpha}{2}}{(1+\tan\frac{\alpha}{2})^2}V$$

۱.۲.۸.۱.۲.۳. اندازهٔ سطح و حجم شکلهای دیگر

۴۶. شعاع کرهٔ محاطی چهاروجهی منتظم به یال a، مساوی $\frac{a\sqrt{6}}{12}$ است. بنابراین داریم :

$$R=\frac{a\sqrt{6}}{12}\Rightarrow$$

$$\text{سطح کرهٔ محاطی}\quad S=4\pi R^2=4\pi(\frac{a\sqrt{6}}{12})^2=\frac{\pi a^2}{6}$$

$$\text{حجم کرهٔ محاطی}\quad V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi(\frac{a\sqrt{6}}{12})^3=\frac{\pi\sqrt{6}a^3}{216}$$

شعاع کرهٔ مماس بر یالهای یک چهاروجهی به یال a ، برابر $\frac{a\sqrt{2}}{4}$ است. بنابراین داریم :

$$R=\frac{a\sqrt{2}}{4}$$

$$\Rightarrow \text{سطح کره}\quad S=4\pi R^2=4\pi(\frac{a\sqrt{2}}{4})^2=\frac{\pi a^2}{2}$$

$$\text{حجم کره}\quad V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi(\frac{a\sqrt{2}}{4})^3=\frac{\pi\sqrt{2}a^3}{24}$$

۴۷. شعاع کرهٔ محیطی چهاروجهی منتظم به ضلع a، مساوی $\frac{a\sqrt{6}}{4}$ است.

بنابراین داریم :

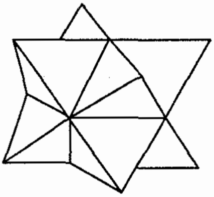
$$R=\frac{a\sqrt{6}}{6}\Rightarrow$$

$$\text{سطح کرهٔ محیطی}=S=4\pi R^2=4\pi(\frac{a\sqrt{6}}{4})^2=\frac{3\pi a^2}{2}$$

$$\text{حجم کرهٔ محیطی}=V=\frac{4}{3}\pi R^3=\frac{4}{3}\pi(\frac{a\sqrt{6}}{4})^3=\frac{\pi\sqrt{6}a^3}{8}$$

۱.۲.۸.۲. نسبت حجمها

۴۸. هر وجه V مثلثی متساوی‌الاضلاع است که طول ضلعش با نصف طول ضلع هریک از



چهاروجهیها برابر است (شکل). ۸ مثلث از این نوع داریم که هریک از آنها روی یکی از وجه‌های یکی از چهاروجهیها واقع است. بنابر تقارن، V باید هشت‌وجهی باشد. فرض کنید حجم هریک از «نوک»های چهاروجهی شکل ستارهٔ U برابر v باشد، حجم هریک از دو چهاروجهی متقاطع $۲^۳ v = ۸v$ است، پس حجم V برابر $۸v - ۴v = ۴v$ است. چون U از ۸ «نوک» چهاروجهی و هشت‌وجهی V تشکیل شده است، حجم U برابر است با $۴v + ۸v = ۱۲v$.

بنابراین :

$$\frac{(\text{حجم } U)}{(\text{حجم } V)} = \frac{۱۲v}{۴v} = ۳$$

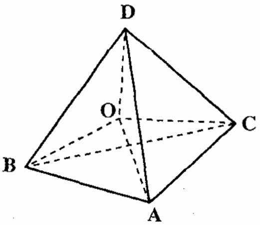
۱.۲.۹. رابطهٔ متری

۱.۲.۹.۱. رابطهٔ متری (برابریها)

۴۹. از هر یال چهاروجهی، صفحه‌ای به موازات یال مقابل آن مرور دهید. مکعبی خواهیم داشت که یک چهاروجهی در داخل آن محاط شده است. اگر یالهای چهاروجهی را b در نظر بگیریم، یال مکعب برابر $\frac{b}{\sqrt{۲}}$ خواهد بود. تصویر هریک از وجه‌های مکعب، یک متوازی‌الاضلاع می‌شود که قطرهای آن، برابر با تصویرهای یالهای چهاروجهی می‌باشد. مجموع مربعهای همهٔ قطرها برابر است با دو برابر مجموع مربعهای تصویرهای یالهای چهاروجهی، و برابر است با دو برابر مجموع مربعهای تصویرهای یالهای مکعب. با استفاده از نتیجه مسألهٔ قبل، می‌توانیم نتیجه بگیریم که مجموع مربعهای تصویرهای یالهای یک چهاروجهی منتظم، روی هر صفحهٔ دلخواه، برابر است با :

$$\frac{۸b^۲}{۲} = ۴b^۲$$

۵۰. نقطهٔ O را درون چهاروجهی منتظم ABCD انتخاب می‌کنیم (شکل) و آن را به همهٔ رأسهای چهاروجهی وصل می‌کنیم، چهار هرم ABCO، BCDO، CADO و ABDO به‌دست می‌آید.



روشن است که حجم هرم مفروض، برابر است با مجموع حجمهای این چهار هرم. مساحت هریک از وجه‌های چهاروجهی را S، ارتفاع آن را h و فاصلهٔ O تا وجه‌ها را (که ارتفاعهای چهار هرم حاصل را تشکیل می‌دهند) $h_۱$ ، $h_۲$ ، $h_۳$ و $h_۴$ می‌نامیم. داریم :

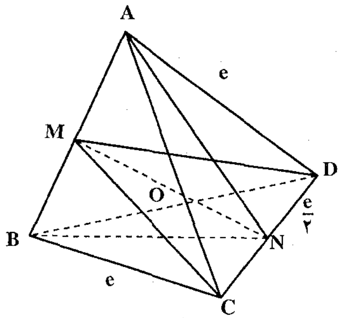
$$\frac{۱}{۳}Sh = \frac{۱}{۳}Sh_۱ + \frac{۱}{۳}Sh_۲ + \frac{۱}{۳}Sh_۳ + \frac{۱}{۳}Sh_۴$$

$$\Rightarrow h_۱ + h_۲ + h_۳ + h_۴ = h$$

۲.۹.۲.۱. رابطهٔ متری (نابرابریها)

۵۱. راه‌حل اول. فرض می‌کنیم AB و CD دو یال مقابل چهاروجهی، و M و N وسطهای آنها باشد ؛ شکل (الف) را ملاحظه کنید. ادعا می‌کنیم که :

$AB \perp MN \perp CD$ (۱)



(الف)

برای ملاحظهٔ این مطلب، طول یال چهاروجهی را با e نمایش می‌دهیم، و توجه می‌کنیم که :

$$CM = e\frac{\sqrt{۳}}{۲} = DM \text{ و } AN = e\frac{\sqrt{۳}}{۲} = BN$$

بنابراین NM یکی از میانه‌های مثلث متساوی‌الساقین ABN، و درنتیجه عمود بر قاعدهٔ AB آن است ؛ این خط میانهٔ مثلث متساوی‌الساقین CMD نیز هست و عمود بر قاعدهٔ CD از آن می‌باشد. از آن‌جا که M هم به AB، و هم به CD عمود است، طولش فاصلهٔ بین این دو خط متنافر است. این طول را به p نمایش دهیم.

نقطهٔ دلخواهی مانند p را انتخاب می‌کنیم، مجموع

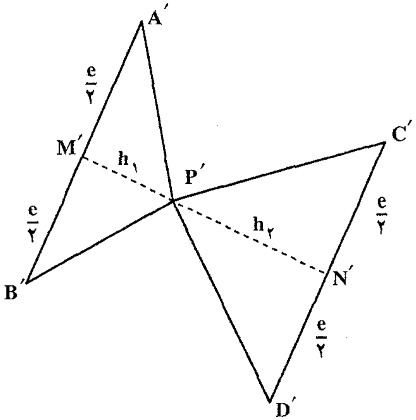
$$s = PA + PB + PC + PD \qquad (۲)$$

را تشکیل و نشان می‌دهیم که این مجموع، وقتی p وسط MN، یعنی مرکز دایرهٔ محیطی چهاروجهی منتظممان باشد، کمترین مقدار را داراست.

فرض می‌کنیم $h_۱$ و $h_۲$ بترتیب ارتفاعهای از pی مثلثهای APB و CPD باشند. در این صورت از آن‌جا که فاصلهٔ هر نقطهٔ واقع بر AB از هر نقطهٔ واقع بر CD حداقل مساوی p است، داریم :

$$h_۱ + h_۲ \geq p$$

اکنون دو مثلث متساوی‌الساقین $A'P'B'$ و $C'P'D'$ را در یک صفحه با قاعده‌های $A'B' = C'D' = e$ و ارتفاعهای از p' به طولهای $h_۱$ و $h_۲$ رسم می‌کنیم، و آنها را طوری قرار می‌دهیم که $A'B' \| C'D'$ باشد، و p' رأس مشترکشان، در نوار بین این دو



(ب)

قاعده، قرار گیرد، شکل (ب) را ملاحظه کنید. مثلث $A'P'B'$ دارای همان قاعده و همان ارتفاع مثلث APB است، و همین مطلب در مورد مثلث CPD و $C'P'D'$ برقرار است. اکنون از این حقیقت استفاده می‌کنیم که، در میان تمام مثلثهای با قاعده و ارتفاع معلوم، مثلث متساوی‌الساقین کمترین محیط را داراست. (برای اثبات شکل (پ) را ببینید.)

این مطلب مستلزم این است که:

$$s \geq P'A' + P'B' + P'C' + P'D' \qquad (۳)$$

از این گذشته، از آن‌جا که:

$$A'P' + P'D' \geq A'D' \text{ و } B'P' + P'C' \geq B'C'$$

(شکل (ب) را ملاحظه کنید) است، داریم:

$$s \geq A'D' + B'C' \qquad (۴)$$

که در آن $A'D'$ و $B'C'$ قطرهای یک مستطیل با ضلعهای e و $h_۱ + h_۲ \geq p$ اند. اگر نقطهٔ p وسط MN باشد، در این صورت APB و CPD مثلثهای متساوی‌الساقینی به ارتفاع $\frac{p}{۲}$ می‌شوند؛ و در این حالت مستطیلمان بعدهای $e \times p$ را دارا است، و مجموع قطرهایش، یعنی $۲(e^۲ + p^۲)^{\frac{۱}{۲}}$، درست برابر s است. و اگر P هر نقطهٔ دیگری باشد، حداقل یکی از نامساویهای (۳) و (۴) اکید است. بنابراین:

$$s > ۲(e^۲ + p^۲)^{\frac{۱}{۲}}$$

مگر این که P وسط MN باشد.

راه حل دوم. O مرکز کرهٔ محیطی چهاروجهی منتظم، نقطهٔ برخورد شش‌صفحه‌ای است که هریک از آنها، از یک یال و وسط یال مقابل چهاروجهی می‌گذرند. نشان می‌دهیم که، اگر نقطهٔ Pای بر یکی از این صفحه‌ها واقع نباشد (یعنی اگر O نباشد)، در این صورت مجموع (۲) مینیمم نیست، و از آن نتیجه می‌گیریم که نقطه‌ای که s را مینیمم می‌کند، بر تمام این صفحه‌ها واقع است، و درنتیجه باید نقطهٔ O باشد (دقیقتر بگوییم، استدلال فوق

تنها این را نشان می‌دهد که اگر مینیممی موجود باشد، وقتی حاصل می‌شود که P مرکز کرهٔ محیطی (O) باشد).

فرض می‌کنیم P بر صفحهٔ ABN (شکل (الف))، که در آن N وسط CD است، واقع نباشد. فرض می‌کنیم l خطی گذرنده از P و موازی CD. و درنتیجه عمود بر صفحهٔ ABN، P' نقطه‌ای که در آن l، ABN را قطع می‌کند، باشد. در این صورت داریم:

$$PC + PD > P'C + P'D \qquad (۵)$$

درواقع مثلثهای CPD و $CP'D$ دارای قاعده و ارتفاع یکسانند، و از آن‌جا که آخری متساوی‌الساقین است، محیط کمتری دارد (راه‌حل اول و شکلهای (پ) و (ت) را ملاحظه کنید.)

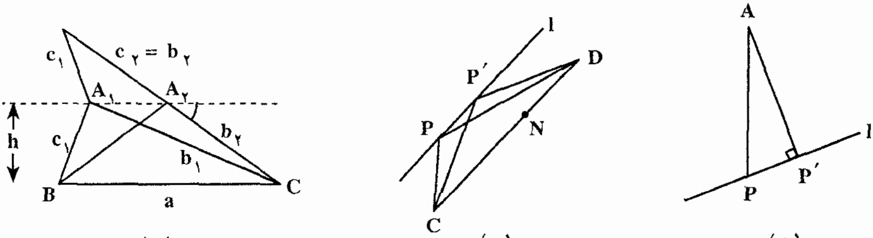
از این گذشته:

$$PA > P'A \ ، \ PB > P'B \qquad (۶)$$

زیرا PA وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ APP' و PB وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ $BP'P$ است؛ شکل (ث) را ملاحظه کنید. جمع سه نامساوی (۵) و (۶) می‌دهد:

$$PA + PB + PC + PD > P'A + P'B + P'C + P'D$$

که همان است که در پی اثباتش بودیم.



(پ) (ت) (ث)

راه حل سوم. فرض می‌کنیم $A'B'C'D'$ یک چهاروجهی منتظم باشد (شکل (ج) را ببینید) و فرض می‌کنیم $A'A$ ، $B'B$، $C'C$ و $D'D$ ارتفاعهای رسم شده از رأسها به وجه‌های مقابل آن باشد. در این صورت (بنا به تقارن) A، B،C و D رأسهای یک چهاروجهی منتظم محاط در $A'B'C'D'$ است. از این گذشته، چهار ارتفاع $A'A$ ، $B'B$، $C'C$ و $D'D$ در نقطهٔ O، که مرکز کرهٔ محیطی هر دو چهاروجهی است، متقاطع می‌شوند. اگر P نقطهٔ دلخواهی در $A'B'C'D'$ باشد، (شکل (چ) را ملاحظه کنید)، واضح است که: $PA + PB + PC + PD$ بزرگتر یا مساوی: $s = PQ + PR + PS + PT$ ، مجموع ارتفاعهای رسم شده از P به چهار وجه $A'B'C'D'$ است.

ادعا می‌کنیم که s مستقل از P است. برای ملاحظهٔ این مطلب، توجه می‌کنیم که V حجم $A'B'C'D'$ مساوی مجموع حجمهای چهاروجهیهایی که این چهاروجهی توسط نقطهٔ P به آنها تقسیم شده است، می‌باشد (شکل (چ)) این چهار چهاروجهی دارای قاعده‌هایی با مساحت مساوی Δ می‌باشند، بنابراین:

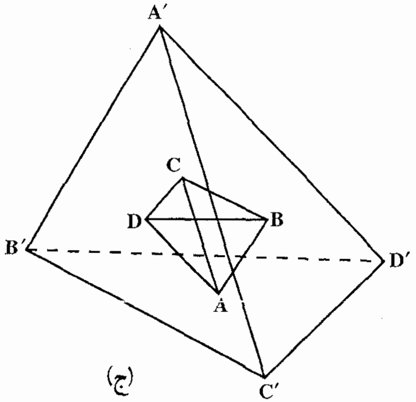
$$V=\frac{۱}{۳}(PQ+PR+PS+PT)\Delta=\frac{۱}{۳}s\Delta$$

به این ترتیب: $s=\frac{۳V}{\Delta}$، که نشان می‌دهد که s مستقل از P است. در حالت خاص، با P را مساوی O گرفتن، درمی‌یابیم که:

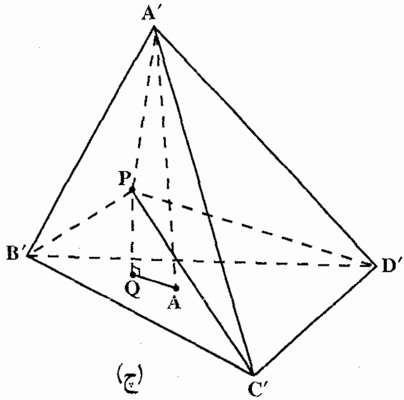
$$s=OA+OB+OC+OD$$

است. در نتیجه به ازای هر نقطهٔ P واقع در $A'B'C'D'$، داریم:

$$PA+PB+PC+PD>OA+OB+OC+OD$$



(ج)



(چ)

واضح است که تساوی تنها اگر $PA\perp B'C'D'$ و غیره، باشد رخ می‌دهد، و این بدان معنی است که P برخطهای AA'، BB'، CC' و DD' قرار دارد، و به عبارت دیگر $P=O$ است. (در مورد نقطه‌های P واقع در خارج $A'B'C'D'$ مسأله نداریم، زیرا استدلال فوق نشان می‌دهد که به ازای چنین نقطه‌هایی $s\Delta>۳V$، در نتیجه: $PA+PB+PC+PD\geq s>\frac{۳V}{\Delta}$ است).

۵۲. فرض می‌کنیم، چهاروجهی منتظم $T_۱$، در چهاروجهی منتظم $T_۲$ محاط شده باشد. در این صورت، شعاع $R_۱$ کرهٔ محیطی چهاروجهی $T_۱$ (که آن را کرهٔ S می‌نامیم)، از شعاع $r_۲$ کرهٔ محاطی چهاروجهی $T_۲$ کمتر نیست. در واقع، اگر بر کرهٔ S، صفحه‌های مماسی،

موازی وجه‌های چهاروجهی T_2 رسم کنیم، چهاروجهی T_3 (مشابه با چهاروجهی T_2، یعنی یک چهاروجهی منتظم) به دست می‌آید که محیط بر کرهٔ S است و چهاروجهی T_2 را دربرمی‌گیرد. بنابراین، شعاع $r_3 = R_1$ از کرهٔ محاطی چهاروجهی T_3، کمتر از r_2 نیست. چون r_1 از کرهٔ محاط در چهاروجهی منتظم T_1، دوبار کوچکتر از R_1 است، در نتیجه:

$$3r_1 = R_1 \geq r_2$$

که از آن‌جا، درستی نابرابری موردنظر، ثابت می‌شود.

۱.۲.۱۰. مکان هندسی

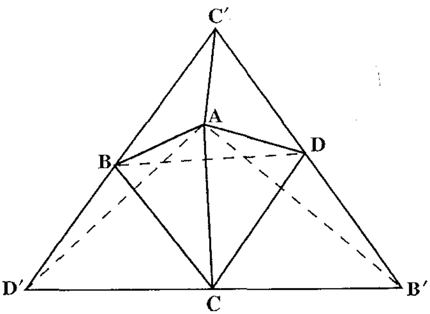
۵۳. این مکان هندسی یک دایره است. شعاع آن را تعیین کنید.

۱.۲.۱۱. رسم شکل

۱.۲.۱۱.۱. تعیین نقطه

۵۴. اگر توجه کنیم که وجه‌ها با هم مساوی‌اند، فاصلهٔ نقطهٔ خواسته شده از این وجه‌ها نیز باید با هم برابر باشد. این نشان می‌دهد که نقطهٔ موردنظر، نقطهٔ I، مرکز کرهٔ محاط در چهاروجهی منتظم است.

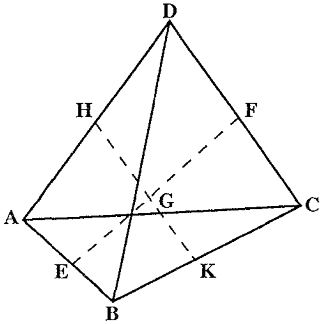
۱.۲.۱۱.۲. رسم مثلث



۵۵. ضلعهای مثلث $B'C'D'$ بترتیب موازی ضلعهای مثلث BCD و دو برابر آنهاست. مثلث $AB'D'$ را در نظر می‌گیریم. میانهٔ AC از آن مساوی با BD است؛ زیرا ABCD منتظم است، پس $AC = \frac{B'D'}{2}$، و از آن‌جا نتیجه می‌شود که این مثلث در رأس A قائم‌الزاویه است.

به طور مشابه می‌توان نشان داد که مثلثهای $B'AC'$ و $C'AD'$ نیز قائم‌الزاویه‌اند. بنابراین چهاروجهی $AB'C'D'$ در رأس A سه قائمه است.

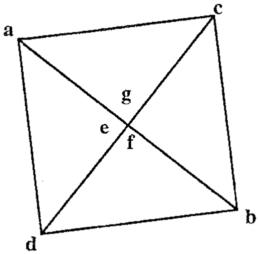
۳.۱۱.۲.۱. رسم تصویر



۵۶. در یک چهاروجهی منتظم :

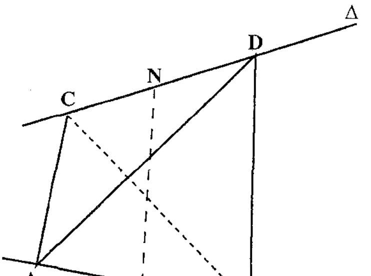
۱. یالهای روبه‌رو برابر هستند ؛ زیرا مجموع مربعهای اندازه‌های یالهای روبه‌رو با هم برابرند.

۲. چون یالهای روبه‌رو برابرند، پاره‌خطهایی که وسطهای یالهای روبه‌رو را به هم وصل می‌کنند، عمود مشترک این یالها می‌باشند و در مرکز ثقل چهاروجهی همرسند. این پاره‌خطها دوبه‌دو بر هم عمودند ؛ و بالاخره این پاره‌خطها با هم برابرند ؛ زیرا مثلثهای ECD و HCB همنهشتند (مساوی‌اند). بنابراین میانه‌های متناظرشان یعنی EF و HK نیز مساوی‌اند.



اگر تصویر چهاروجهی ABCD را روی صفحه‌ای موازی با یالهای BA و CD رسم کنیم، EF بر صفحهٔ تصویر عمود است. ab و cd که تصویرهای AB و CD می‌باشند ؛ دوبه‌دو با هم مساوی‌اند، بر هم عمود می‌باشند و در نقطهٔ وسطشان متقاطعند (efg)، از آن‌جا تصویرهای شش یال چهاروجهی، ضلعها و قطرهای مربع adbc می‌باشند.

۴.۱۱.۲.۱. رسم چهاروجهی



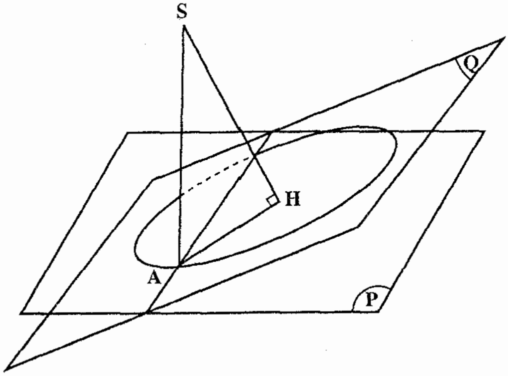
۵۷. پاره‌خط MN عمود مشترک دو خط Δ و Δ' را رسم می‌کنیم. نقطه‌های M و N وسطهای دو یال روبه‌رو از چهاروجهی منتظم خواسته شده است. فرض می‌کنیم این چهاروجهی منتظم ABCD، و اندازهٔ یال آن a باشد. در این صورت داریم :

$$AM = \frac{a}{۲} \text{ و } AN = \frac{a\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow MN = \sqrt{\frac{۳a^۲}{۴} - \frac{a^۲}{۴}} = \frac{a}{\sqrt{۲}}$$

از آن‌جا : $a = MN\sqrt{۲}$

با مشخص شدن طول یال چهاروجهی منتظم، چهار رأس A، B، C و D روی خطهای Δ و Δ' با توجه به این که $AM = MB = CN = ND = \frac{a}{2}$ است، به دست می‌آیند.

۵۸. ارتفاع H از نظر وضع و اندازه مشخص است،زیرا دو نقطهٔ S و H معلومند :



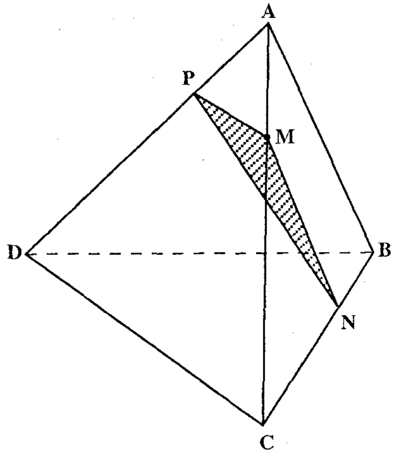
در نقطهٔ H صفحه‌ای عمود بر SH رسم می‌کنیم و فصل مشترک آن با صفحهٔ Q را خط D می‌نامیم. این صفحه، صفحه‌ای است که قاعدهٔ هرم (چهاروجهی منتظم) در آن قرار دارد. اگر این قاعده را ABC بنامیم، نقطهٔ A روی خط D است و از طرفی روی دایره‌ای به مرکز H و به شعاع $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ قرار دارد، زیرا اگر ضلع چهاروجهی منتظم را a بگیریم و ارتفاع AA' از مثلث متساوی‌الاضلاع ABC را رسم کنیم، داریم :

$$AH = \frac{2}{3}AA' = \frac{2}{3} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} = \frac{a\sqrt{3}}{3}$$

بنابراین دایره‌ای به مرکز H و به شعاع $HA = \frac{a\sqrt{2}}{3}$ رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این دایره با خط D، رأس A است. با معلوم بودن رأس A، مثلث متساوی‌الاضلاع ABC، و از آن‌جا چهاروجهی منتظم SABC براحتی رسم می‌شود.

۱۲.۲.۱. برش، مقطع

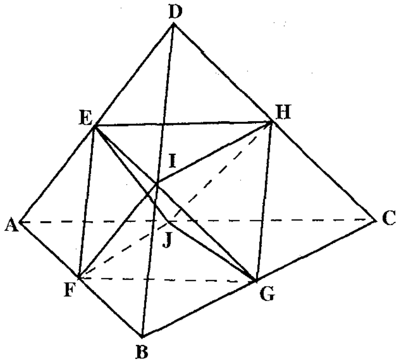
۵۹. چهاروجهی منتظم ABCD را درنظر می‌گیریم. از نقطه‌ای دلخواه واقع بر یکی از یالهای



AC، AD، BC یا BD. به عنوان مثال از نقطهٔ M واقع بر یال AC دو خط MN و MP را بترتیب موازی یالهای AB و CD رسم می‌کنیم. صفحهٔ MNP، یکی از صفحه‌های مورد نظر مسأله است که مقطع آن با چهاروجهی منتظم، مثلث MNP است. حال باید دامنهٔ تغییرات این مقطع را وقتی نقطهٔ M روی یال AC جابه‌جا شود، بررسی کنیم.

۶۰. گزینهٔ (ب) درست است.

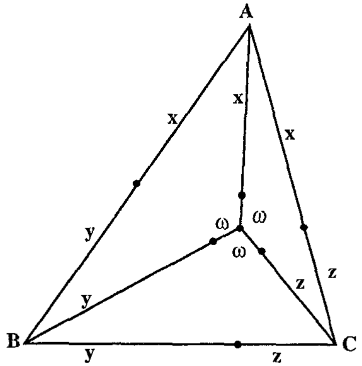
۱۳.۲.۱. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت



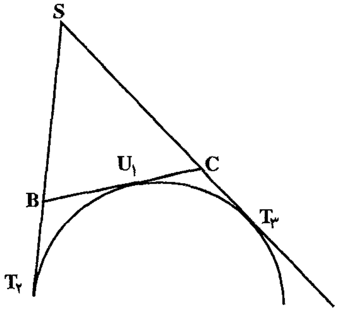
۶۱. تمام پاره‌خطهایی که وسطهای یک یال، به عنوان مثال نقطهٔ I، و وسط یال BD را به چهار نقطهٔ E، F، G و H وصل می‌کنند با هم برابرند ؛ زیرا مساوی نصف یکی از یالهای چهاروجهی منتظم هستند. از آن‌جا هشت مثلث ایجاد شده، متساوی‌الاضلاع و همنهشتند، بنابراین شکل EFGHIJ یک هشت وجهی منتظم است.

۱۴.۲.۱. مسأله‌های ترکیبی

۶۳. الف. حل از (G.Arenstorf). یکی از پنج کرهٔ مورد بحث به هر یک از شش یال مماس می‌شود ؛ در حالی که هر یک از چهار کرهٔ دیگر به یالهای یک وجه، و امتداد یالهای دیگر، (آن‌گونه که از رأس به طرف خارج امتداد یافته باشند) مماس است (از آن‌جا که این مطلب واضح نیست، اثباتی در پایان این مسأله به دست خواهیم داد). ابتدا کرهٔ «داخلی» را مورد بررسی قرار می‌دهیم، و از آن‌جا که مماسهای از هر رأس چهاروجهی مورد بحث



(الف)



(ب)

بر آن مساوی‌اند، نتیجه می‌گیریم که (شکل (الف) را ملاحظه کنید) :

$$SA + BC = SB + CA = SC + AB = x + y + z + w \qquad (۱)$$

بعد یکی از کره‌های «خارجی» به طور مثال : آن که به BC، CA و AB داخلاً (یعنی به خود اینها) و به SA، SB و SC خارجاً (یعنی به امتداد آنها از رأس) مماس است، را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم $T_۱$ ، $T_۲$ ، $T_۳$ نقطه‌های تماس واقع بر امتدادهای SA، SB، SC و $U_۱$ ، $U_۲$ ، $U_۳$ نقطه‌های تماس واقع بر BC، CA و AB باشد (شکل (ب) را ملاحظه کنید). در این صورت :

$$ST_۱ = ST_۲ = ST_۳$$

است. از آن‌جا که :

$$BU_۱ = BT_۲ \text{ و } CU_۱ = CT_۳$$

است، محیط ΔSBC می‌شود :

$$SB + BU_۱ + CU_۱ + SC = ST_۲ + ST_۳ = ۲ST_۱$$

به همین طریق درمی‌یابیم که تمام سه مثلث SBC، SCA و SAB دارای محیط یکسان $۲ST_۱$ اند. از آن‌جا که مثلثهای SBC و SCA دارای محیط مساوی و ضلع مشترکSCاند.

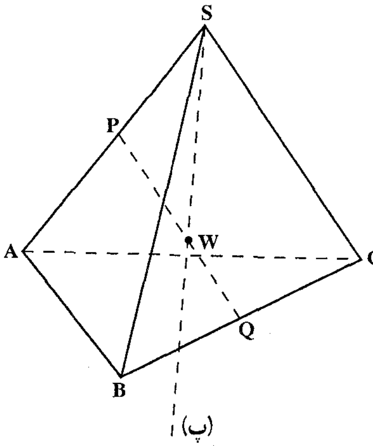
داریم : $SB + BC = SA + CA$

نیز بنا به (۱) داریم : $SB - BC = SA - CA$

با جمع این رابطه‌ها، داریم $SB = SA$. به همین ترتیب، $SC = SA$. در این صورت بنابه (۱) نتیجه می‌شود که : $AB = BC = CA$

تا این‌جا از $\sum$ و کرهٔ دیگر استفاده کرده، نتیجه گرفتیم که :ΔABC متساوی‌الاضلاع

است و سه وجه دیگر SABC متساوی‌الساقینند. با استفاده از هریک از چهار کرهٔ باقیماندهٔ دیگر، می‌توانیم تساوی تمام یالهای چهاروجهی را نتیجه بگیریم.



(پ)

ب. برعکس، فرض می‌کنیم چهاروجهی $T = SABC$ منتظم باشد، و فرض می‌کنیم W مرکز ثقل آن، یعنی مرکز جرم دستگاه حاصل از چهار جرم مساوی واقع در چهار رأس آن باشد. (با دسته‌بندی این جرمها به گروههای دوتایی، ملاحظه می‌کنیم که فی‌المثل W وسط PQ، که در آن P و Q بترتیب وسطهای SA و BC است، می‌باشد (شکل (پ) را ملاحظه کنید). واضح است که W تحت هر دورانی که T را بر خودش منطبق کند بی‌تغییر باقی می‌ماند. از آنجا که چنین دورانهایی که هر یال T را به یال دیگرش تبدیل کند موجودند، نتیجه می‌شود که W متساوی‌الفاصله از شش یال چهاروجهی است. در نتیجه کره‌ای به مرکز W و مماس به تمام این یالها وجود دارد.

اما T تحت دوران 120° حول SW بی‌تغییر باقی می‌ماند. در این صورت نتیجه می‌شود که هر کرهٔ Σ به مرکز واقع بر امتداد SWای که بر SA مماس باشد، به SB و SC نیز مماس است. به همین ترتیب، اگر Σ بر AB مماس باشد، به BC و CA نیز مماس است. بنابراین می‌توانیم کرهٔ خارجی را با پیدا کردن نقطهٔ X بر امتداد SW به طوری که از SA و AB به یک فاصله باشد، رسم کنیم. مکان هندسی نقطه‌های متساوی‌الفاصله از SA و AB عبارت از دو صفحهٔ عمود بر ΔSAB از نیمسازهای $S\hat{A}B$ اند. از این دو صفحه، آن که شامل نیمساز داخلی $S\hat{A}B$ است، از W می‌گذرد، در حالی که دیگری امتداد SW را در نقطهٔ مطلوب X قطع می‌کند.

رسم سه کرهٔ خارجی دیگر دقیقاً شبیه رسم این کره است.

اکنون ثابت می‌کنیم: اگر کرهٔ Σ به تمام شش یال یک چهاروجهی مماس باشد، در این صورت یکی از دو حالت زیر برقرار است:

(i) Σ به تمام شش یال به طور داخلی مماس است.

(ii) Σ به سه یال یک وجه به طور داخلی و به سه یال دیگر چهاروجهی به طور خارجی

مماس است.

از این گذشته، حداکثر یک کره چنان که (i) را برقرار کند و حداکثر یک کره در ارتباط با هر وجه، چنان که (ii) را برقرار کند موجود است:

در این مورد اثباتمان بر مبنای قضیهٔ زیر که در هندسهٔ مسطحه است قرار دارد: اگر دایره‌ای بر هر سه ضلع مثلث ABC مماس باشد، در این صورت به هر سه ضلع آن به طور داخلی مماس است، یا به یکی از ضلعها به طور داخلی، و به دو ضلع دیگر به طور خارجی، مماس است.

اکنون فرض می‌کنیم کرهٔ Σ به یال SA از چهاروجهی SABC به طور خارجی مماس باشد، و نقطهٔ تماس غیر از نقطهٔ A باشد. در این صورت Σ صفحهٔ SAB را در دایره‌ای که به SA در غیر از نقطهٔ A مماس است قطع می‌کند. در نتیجه Σ بنا به قضیهٔ فوق در مورد ΔSAB، به AB به طور داخلی و به SB به طور خارجی در نقطه‌ای غیر از B مماس می‌شود. به همین ترتیب درمی‌یابیم که Σ به AC به طور داخلی، و به SC به طور خارجی در غیر از نقطهٔ C، مماس است، و به BC به طور داخلی مماس می‌شود، و به طور خلاصه، Σ به سه یال وجه ABC به طور داخلی، و به سه یال دیگر به طور خارجی مماسند.

برای نشان دادن این که تمام یالهای SABC مساوی‌اند، عملاً تنها به وجود Σ. و دو کرهٔ دیگر نیاز داریم؛ در این مورد آخرین بند، راه حل قسمت (الف) را ملاحظه کنید.

۶۴. الف) از بحثی که قبلاً داشتیم استفاده می‌کنیم. کره‌ای به مرکز یکی از رأسهای چهاروجهی، و به طور مثال رأس A، در نظر می‌گیریم. کنج سه وجهی به رأس A، در برخورد با کره، یک مثلث کروی به وجود می‌آورد که، زاویه‌های آن، با زاویه‌های مسطحهٔ فرجه‌های کنج برابرند و، بنابراین طبق فرض مسأله، باید سه زاویهٔ مثلث کروی با هم برابر باشند. هر مثلث کروی با سه زاویهٔ خود، مشخص می‌شود (تنها یک مثلث کروی با سه زاویهٔ معلوم، وجود دارد). مثلث کروی با زاویه‌های برابر، متساوی‌الاضلاع است، بنابراین زاویه‌های مسطحه به رأس A در کنج سه وجهی با همین رأس، با هم برابرند. هر کدام از این زاویه‌ها را α می‌نامیم. به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که، زاویه‌های مسطحه به رأس B، یا به رأس C و یا به رأس D هم با یکدیگر برابرند، آنها را بترتیب β، γ و δ می‌نامیم. از آن جا که مجموع زاویه‌های مثلث چهار وجه در چهاروجهی ABCD، برابر است با $۴\times۱۸۰^\circ$، یعنی ۷۲۰ درجه، بنابراین:

$$۳(\alpha+\beta+\gamma+\delta)=۷۲۰^\circ \quad \text{یا} \quad \alpha+\beta+\gamma+\delta=۲۴۰^\circ$$

چون مجموع هر سه زاویهٔ دلخواه از زاویه‌های α ، β ، γ و δ برابر ۱۸۰ درجه است، در نتیجه :
$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = ۶۰^\circ$$
به این ترتیب، همهٔ وجه‌های چهاروجهی، مثلثهای متساوی‌الاضلاعی، همنهشت با یکدیگر می‌شوند، یعنی چهاروجهی منتظم است.

ب) بردارهای واحد k، l، m و n را، عمود بر وجه‌ها و در خارج چهاروجهی در نظر می‌گیریم. زاویهٔ بین هر دو بردار از این چهار بردار، مکمل زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ متناظر با آن است. بنابراین، در چهاروجهی منتظم، انتهای این بردارهای واحد، نقطه‌هایی با فاصله‌های برابر، روی سطح کرهٔ به شعاع واحدند، یعنی بین دوبه‌دوی این نقطه‌ها، شش کمان دایرهٔ عظیمه وجود دارد که همهٔ آنها از مرکز، با زاویهٔ θ دیده می‌شوند و، در ضمن، طولی برابر دارند [بسادگی معلوم می‌شود که $\theta = \mathrm{Arc}\cos(\frac{-۱}{۳})$]. اگر بتوانیم، چهار نقطه را روی کرهٔ به شعاع واحد، به نحوی پیدا کنیم که ۵ فاصله از ۶ فاصلهٔ بین دوبه‌دوی آنها، با هم برابر باشند، ولی فاصلهٔ ششمی با آنها فرق داشته باشد، آن‌وقت، صفحه‌های مماس بر کره در این نقطه‌ها، یک چهاروجهی را تشکیل می‌دهند که ۵ فرجه، و تنها ۵ فرجهٔ آن، با هم برابرند.

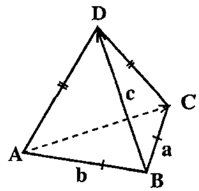
این کار را می‌توانیم، با تعویض جای نقطه‌های متساوی‌الفاصله انجام دهیم. نقطه‌های جدید K' ، L' و M' را طوری در نظر می‌گیریم که، دوباره یک مثلث کروی متساوی‌الاضلاع بسازند، ولی با طول ضلع، $\theta' < \theta$. N' را طوری انتخاب می‌کنیم که به فاصلهٔ θ' از K' و L' باشد. در این صورت فاصلهٔ N' از M' برابر با θ' نمی‌شود، زیرا، بنا به اثبات (الف)، اگر این فاصله هم برابر θ' شود، آن‌وقت با یک چهاروجهی منتظم سروکار داریم، در حالی که، برای چهاروجهی منتظم، این فاصله‌ها، باید برابر با θ باشند. به این ترتیب، باید به پرسش (ب) پاسخ منفی داد.

برای (الف) راه حل دومی را هم می‌آوریم.

راه‌حل دوم. الف. O را مرکز کرهٔ محاطی و A' ، B' ، C' و D' را نقطه‌های مشترک این کره، بترتیب، با وجه‌های متقابل به رأسهای A، B، C و D می‌گیریم. اگر بردارهایی را در نظر بگیریم که از O به نقطه‌های A' ، B' ، C' و D' وصل شوند و آنها را، بترتیب، a' ، b' ، c' و d' بنامیم، زاویهٔ بین هر دو تا از آنها، مکمل زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ متناظر با آن خواهد بود، و بنابراین، همهٔ این گونه زاویه‌ها با هم برابرند. از آن‌جا که طول این بردارها یکی است (برابر با شعاع کره)، شش فاصلهٔ $A'B'$ ، $A'C'$ ، ... و $C'D'$ با هم برابر می‌شوند. به زبان دیگر، $A'B'C'D'$ ، یک چهاروجهی منتظم است.

برای این که به منتظم بودن خود چهاروجهی ABCD قانع شویم، توجه می‌کنیم که وجه‌های آن، در نقطه‌های A' ، B' ، C' و D' بر کره مماسند.

۶۵. سه بردار ناصفحه $\overrightarrow{BC}=a$ ، $\overrightarrow{BD}=c$ و $\overrightarrow{BA}=b$ را اختیار می‌کنیم (شکل). چنین داریم:



$$\overrightarrow{DC}=a-c \text{ ، } \overrightarrow{DA}=b-c$$

طبق فرض $|a|=|b|$ و $|a-c|=|b-c|$ را داریم. از این رو نتیجه می‌شود که:

$$(a-c)^2=(b-c)^2 \text{ ، } a^2-2ac+c^2=b^2-2b.c+c^2$$

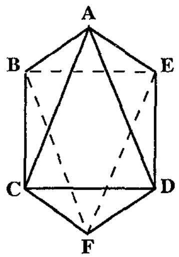
با منظور کردن $a^2=b^2$ به $a.c=b.c$ یعنی $(a-b)c=0$ می‌رسیم.

به دلیل $c=\overrightarrow{BD}$ و $a-b=\overrightarrow{AC}$ ، تساوی $\overrightarrow{AC}.\overrightarrow{BD}=0$ را داریم، یعنی $(AC\perp BD)$

۶۶. از آن‌جا که هر یک از صفحه‌های رسم شده، شامل یکی از پاره‌خطهایی است که وسط دو یال مقابل چهاروجهی را به هم وصل می‌کنند، بنابراین همهٔ صفحه‌ها، از نقطهٔ برخورد این پاره‌خطهای راست، که در درون چهاروجهی واقع است، می‌گذرند. بنابراین، شش صفحه‌ای که رسم کرده‌ایم، تمامی فضا را به کنجهایی تقسیم می‌کنند که در رأس خود مشترکند، یعنی هر یک از بخشهای چهاروجهی، دست‌کم یک وجه دارد که متعلق به وجه چهاروجهی است. از طرف دیگر، هیچ دو وجهی از چهاروجهی، نمی‌توانند وجه‌های یکی از بخشها باشند، زیرا هر دو وجه چهاروجهی، به وسیلهٔ صفحه‌ای که از یال مشترک آنها گذشته است، از هم جدا شده‌اند. بنابراین، تعداد بخشهای چندوجهی، برابر است با تعداد بخشهای سطح آن (که به وسیلهٔ صفحه‌ها تقسیم شده است)، و چون هر وجه چهاروجهی، به شش بخش تقسیم می‌شود، (برابر تعداد بخشهای یک مثلث که به وسیلهٔ میانه‌های آن تقسیم شده باشد)، تعداد همهٔ بخشها، برابر 6×4 ، یعنی ۲۴ می‌شود با توجه به تقارن (نسبت به شش صفحه‌ای که رسم کرده‌ایم) همهٔ بخشهای چهاروجهی با هم برابرند و حجم هر کدام از آنها برابر $\frac{1}{24}$ است.

۴.۱. هشت‌وجهی منتظم

۲.۴.۱. نقطه، خط، صفحه



۶۷. هشت وجهی منتظم از هشت مثلث متساوی‌الاضلاع همنهشت ایجاد می‌شود. از هر رأس یک هشت وجهی منتظم، ۴وجه و ۴ یال می‌گذرد (شکل). به عنوان مثال از رأس A چهار وجه ABC،ACD، ADE، و ABE، و ۴ یال AB، AC،AD و AE می‌گذرد.

۶۸. هشت وجهی منتظم دارای پنج صفحهٔ تقارن است، که چهار صفحهٔ آن صفحه‌های تقارن گذرنده بر قطرهای مربع BCDE و عمود بر این صفحه از هشت وجهی منتظم ABCDEF و دو صفحهٔ عمودمنصف ضلعهای روبه‌روی مربع بالا و یک صفحه نیز، صفحهٔ مربع BCDE است.

۳.۴.۱. زاویه

۱.۳.۴.۱. اندازهٔ زاویه

۶۹. اگر این زاویه را θ بگیریم، داریم:

$$\sin\frac{\theta}{۲}=\frac{۱}{\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۳}$$

اندازهٔ تقریبی این زاویه:

$$\theta=۱۰۹^\circ, ۲۸', ۲۴''$$

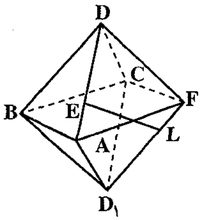
۴.۴.۱. یال، ارتفاع

۱.۴.۴.۱. یال

۷۰. راهنمایی. تقسیم چهاروجهی با یال به طول واحد را به ۴ چهاروجهی با یال به طول $\frac{۱}{۲}$ و هشت وجهی با یال به طول $\frac{۱}{۲}$ در نظر بگیرید.

۱.۴.۵. پاره‌خط

۱.۴.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط



۷۱. داریم: $(\overrightarrow{DA},\overrightarrow{FC})=(\overrightarrow{AD},\overrightarrow{AB})=۶۰^\circ$ و $\hat{ADC}=۹۰^\circ$ (ثابت کنید). فرض می‌کنیم: $\overrightarrow{DA}=a$، $\overrightarrow{DB}=\overrightarrow{FD}=b$ و $\overrightarrow{DC}=\overrightarrow{AD_1}=c$ (شکل). فاصلهٔ EL بین AD و FD_1 را پیدا می‌کنیم. داریم:

$$\overrightarrow{EA}=la \quad \text{و} \quad \overrightarrow{FL}=mb$$

بنابراین:

$$\overrightarrow{EL}=\overrightarrow{EA}+\overrightarrow{AD_1}+\overrightarrow{D_1L}=la+c+(m-۱)b$$

چون $EL\perp DA$ و $EL\perp FD_1$، پس $\overrightarrow{EL}.\overrightarrow{DA}=۰$ و $\overrightarrow{EL}.\overrightarrow{FD_1}=۰$ در نتیجه $[la+(m-۱)b+c].a=۰$ و $[la+(m-۱)b+c].b=۰$ و اگر توجه کنیم که:

$$a.b=a^۲\cos۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}a^۲ \quad , \quad a.c=۰ \quad , \quad b.c=a^۲\cos۶۰^\circ=\frac{۱}{۲}a^۲$$

آن‌وقت، به این دستگاه می‌رسیم:

$$۲l+m=۱ \quad ، \quad ۲m+l=۱$$

و ازآن‌جا $l=m=\frac{۱}{۳}$.

به این ترتیب، $|\overrightarrow{AE}|=\frac{۱}{۳}|\overrightarrow{AD}|$ و $|\overrightarrow{FL}|=\frac{۱}{۳}|\overrightarrow{FD_1}|$. طول $\overrightarrow{EL}$ را پیدا می‌کنیم:

$$\overrightarrow{EL}=\frac{۱}{۳}a-\frac{۲}{۳}b+c\ ;$$

$$|\overrightarrow{EL}|^۲=\frac{۱}{۹}a^۲+\frac{۴}{۹}a^۲+a^۲-\frac{۴}{۹}.\frac{۱}{۲}a^۲-\frac{۴}{۳}.\frac{۱}{۲}a^۲=\frac{۲}{۳}a^۲$$

و سرانجام $|\overrightarrow{EL}|=\frac{۱}{۳}a\sqrt{۶}$.

۱.۴.۶. شعاع کره

۱.۴.۶.۱. اندازهٔ شعاع کره

۷۲. اندازهٔ شعاع کرهٔ محاطی هشت‌وجهی منتظم برابر است با :

$$r = \frac{a\sqrt{6}}{6}$$

اندازهٔ شعاع کرهٔ محیطی هشت وجهی منتظم برابر است با :

$$R = \frac{a\sqrt{2}}{2}$$

۱.۴.۷. مساحت

۱.۴.۷.۱. اندازهٔ مساحت

۷۳. اندازهٔ مساحت کل هشت وجهی منتظم به یال a برابر $2\sqrt{3}a^2$ است ؛ زیرا اندازهٔ مساحت هر وجه مساوی $\frac{a^2\sqrt{3}}{4}$ است.

$$S_{\text{کل هشت‌وجهی منتظم}} = 8 \times \frac{a^2\sqrt{3}}{4} = 2\sqrt{3}a^2$$

۱.۴.۸. حجم

۱.۴.۸.۱. اندازهٔ حجم

۱.۴.۸.۱.۱. اندازهٔ حجم هشت‌وجهی منتظم

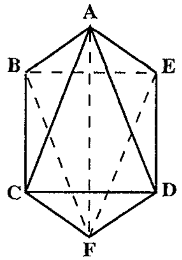
۷۴. اندازهٔ حجم هشت وجهی منتظم به یال a برابر است با :

$$V = \frac{a^3\sqrt{2}}{3}$$

۷۵. دو قطر هشت وجهی منتظم، قطرهای مربع به ضلع a می‌باشند که صفحهٔ تقارن هشت وجهی منتظم است (قاعده‌های دو هرم مربع‌القاعده که در قاعده مشترکند). بنابراین اندازهٔ

آنها $d_۱ = d_۲ = a\sqrt{۲}$ است. قطر سوم هشت‌وجهی، قطری است که رأسهای این دو هرم چهاروجهی را به هم وصل می‌کند. این پاره‌خط، ارتفاع دو هرم مربع‌القاعده است. پس نصف آن، ارتفاع هر یک از دو هرم است. بنابراین داریم:

$$\text{حجم هشت وجهی منتظم} = ۲ \times \text{حجم هرم چهاروجهی منتظم} = ۲ \times \frac{۱}{۳}(a^۲) \times \frac{d_۳}{۲}$$



$$= \frac{۱}{۶}(۲a^۲) \times d_۳ = \frac{۱}{۶}(a\sqrt{۲} \times a\sqrt{۲}) \times d_۳$$

$$= \frac{۱}{۶} d_۱ d_۲ d_۳$$

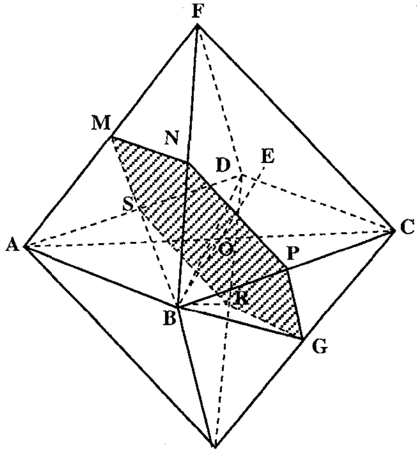
۷۶. اندازهٔ حجم هشت وجهی منتظم به یال a مساوی $\frac{a^۳\sqrt{۲}}{۳}$ است، پس داریم:

$$V = \frac{۲۷\sqrt{۲}}{۳} = ۹\sqrt{۲}$$

اندازهٔ سطح کل هشت وجهی منتظم به یال a مساوی $۲\sqrt{۳}a^۲$ است، پس داریم:

$$S_{\text{کل}} = ۲\sqrt{۳}(۳)^۲ = ۱۸\sqrt{۳}$$

۱.۴.۸.۱.۲. اندازهٔ حجم شکلهای دیگر



۷۷. صفحهٔ MNPQRS را از مرکز هشت‌وجهی؛ موازی یکی از وجه‌ها، و مثلاً CFD، رسم می‌کنیم (شکل). مقطع این صفحه با هشت وجهی، یک شش ضلعی است، که رأسهای آن M، N، P، Q، R و S در وسط شش یال هشت وجهی قرار دارند. این شش ضلعی، منتظم است، زیرا هر ضلع آن برابر است با نصف یال هشت وجهی، و زاویهٔ بین دو ضلع مجاور آن برابر است با ۱۲۰ درجه (زیرا ضلعهای شش‌ضلعی، با ضلعهای مثلث

متساوی‌الاضلاع CDF، موازی‌اند). همهٔ رأسهای این چندضلعی را به رأس B از هشت وجهی وصل می‌کنیم؛ هرمی به دست می‌آید با ارتفاع:

$$BO = \frac{۱}{۲}BE = \frac{۱}{۲}h$$

که در آن h، عبارت است از ارتفاع هرم BCDF، مساحت چندضلعی MNPQRS را σ و حجم هرم BCDF را $V_۲$ می‌نامیم. در این صورت، برای حجم مجهول $V_۱$ داریم:

$$V_۱ = \frac{۱}{۳}\sigma.\frac{۱}{۲}h = \frac{۱}{۳}\times ۶ \times (\frac{a}{۲})^۲ \frac{\sqrt{۳}}{۴}.\frac{h}{۲}$$

که در آن، a، یال هشت‌وجهی است. به این ترتیب:

$$V_۱ = \frac{۳}{۴}.\frac{۱}{۳}.\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}h = \frac{۳}{۴}V_۲ = \frac{۳}{۱۶}V$$

۷۸. سطح کرهٔ محاطی برابر است با:

$$S = \frac{۲}{۳}\pi a^۲$$

و حجم کرهٔ محاطی مساوی است با:

$$V = \frac{\pi\sqrt{۶}a^۳}{۲۷}$$

۲.۸.۴.۱. نسبت حجمها

۷۹. سطح کل چهاروجهی و هشت‌وجهی منتظم بترتیب چنینند: $۲\sqrt{۳}a_۱^۲$ و $a^۲\sqrt{۳}$
طبق فرض مسأله داریم:

$$a^۲\sqrt{۳} = ۲\sqrt{۳}a_۱^۲ \Rightarrow a^۲ = ۲a_۱^۲ \Rightarrow a = \sqrt{۲}a_۱$$

حجم چهاروجهی و هشت‌وجهی منتظم بترتیب چنین می‌شود:

$$V = \frac{a^۳\sqrt{۲}}{۱۲} \quad ; \quad V_۱ = \frac{a_۱^۳\sqrt{۲}}{۳}$$

و نسبت این دو حجم:

$$\frac{V}{V_۱} = \frac{a^۳\sqrt{۲}}{۴a_۱^۳\sqrt{۲}} = \frac{a^۳}{۴a_۱^۳} = \frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

جواب: $V:V_۱ = \sqrt{۲}:۲$

۱.۴.۹. رابطهٔ متری

۸۰. می‌دانیم که اگر از هر نقطه مانند O واقع بر نیمساز یک زاویه، قاطع AOC را رسم کنیم، $\frac{1}{SA}+\frac{1}{SC}$ مقدار ثابتی است.

اما زاویه‌های ASC و BSD همنهشتند، و برای صفحه‌ای دلخواه، نقطهٔ O برای هر دو زاویه این ویژگی را دارد.

بنابراین $\frac{1}{SA}+\frac{1}{SC}=\frac{1}{SB}+\frac{1}{SD}$

۸۱. برای هر دستهٔ چهارتایی پاره‌خطهای نظیر یک رأس، مقدار ثابت مساوی $\frac{2}{h}$ است، بنابراین برای ۶ رأس، مجموع ۲۴ پاره‌خط، مساوی $\frac{12}{h}$ است.

۱.۵. دوازده‌وجهی منتظم

۱.۵.۲. نقطه، خط، صفحه

۸۲. وجه‌های هر دوازده‌وجهی منتظم پنج ضلعیهای منتظم همنهشت است و چون اندازهٔ هر زاویهٔ یک پنج‌ضلعی منتظم مساوی ۱۰۸ درجه است، پس بر هر رأس از یک دوازده‌وجهی منتظم تنها ۳ وجه می‌گذرد.

۱.۵.۳. زاویه

۱.۵.۳.۱. اندازهٔ زاویه

۸۴. اگر این زاویه را θ بگیریم، داریم:

$$\sin\frac{\theta}{2}=\sqrt{\frac{5+\sqrt{5}}{10}}$$

اندازهٔ تقریبی θ برابر است با:

$$\theta=116^\circ, 34', 30''$$

۱.۵.۴. یال، ارتفاع

۸۵. در هر رأس از دوازده‌وجهی منتظم سه پنج ضلعی منتظم در مجاورت هم قرار می‌گیرند. بنابراین از هر رأس آن ۳ یال می‌گذرد.

۱.۵.۵. پاره‌خط

۱.۵.۵.۱. اندازهٔ پاره‌خط

۸۶. ارتفاع AH از پنج ضلعی منتظم ABCDE و صفحهٔ نیمساز فرجهٔ بین دو وجه داده شده را رسم می‌کنیم. اگر α زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ بین دو وجه داده شده باشد، داریم :

$$AN = ۲AH\sin\frac{\alpha}{۲}$$

۱.۵.۶. شعاع کره

۱.۵.۶.۱. اندازهٔ شعاع کره

۸۷. اندازهٔ شعاع کرهٔ محاطی دوازده وجهی منتظم $r=\frac{a}{۲}\sqrt{\frac{۲۵+۱۱\sqrt{۵}}{۱۰}}$ و اندازهٔ شعاع کرهٔ محیطی دوازده‌وجهی منتظم $R=\frac{a}{۲}\sqrt{۱۸+۶\sqrt{۵}}$ است.

۱.۵.۷. مساحت

۱.۵.۷.۱. اندازهٔ مساحت

۱.۵.۷.۱.۱. اندازهٔ مساحت کل

۸۸. اندازهٔ سطح کل دوازده وجهی منتظم $S=۳a^{۲}\sqrt{۲۵+۱۰\sqrt{۵}}$ است.

۸۹. اندازهٔ حجم دوازده وجهی منتظم محدب به یال a برابر است با :

$$V_{۱۲}=\frac{a^{۳}}{۴}\sqrt{۱۰(۴۷+۲۱\sqrt{۵})}$$

۹۰. راه اول. وجهی را برای نوشتن ماه فروردین انتخاب کنید. $\binom{۱۱}{۵}$ راه برای انتخاب ماههایی که باید روی پنج وجه مجاور به فروردین نوشته شوند، و !۴ راه اساساً متفاوت برای نوشتن این پنج ماه روی این پنج وجه که حلقه تشکیل می‌دهند وجود دارد. حلقهٔ دیگری شامل پنج وجه وجود دارد که هر یک از وجه‌های آن مجاور دو همسایهٔ فروردین است ؛ $\binom{۶}{۵}$ راه برای انتخاب ماههایی که باید روی این وجه‌ها نوشته شوند، و !۵ راه اساساً متفاوت برای نوشتن این پنج ماه روی حلقهٔ دوم نسبت به حلقهٔ اول وجود دارد. سرانجام، ماهی که باید روی وجه متقاطر وجه فروردین نوشته شود تعیین شده است.

بنابراین تعداد راههای اساساً متفاوت برای درست کردن این تقویم برابر است با :

$$\binom{۱۱}{۵}۴!\binom{۵}{۶}۵!=\frac{۱۱!}{۵}$$

راه دوم. اگر وجه‌های دوازده‌وجهی قابل تمیز از یکدیگر باشند، !۱۲ راه برای نوشتن ماهها روی وجه‌ها وجود دارد. هر یک از این آرایشها را می‌توان با تبدیلهای فضایی صلبی که دوازده‌وجهی را به خودش تبدیل می‌کنند به آرایشهای متفاوت دیگری تبدیل کرد. چنین تبدیل صلبی باید هر رأس دوازده‌وجهی را به رأس دیگری تبدیل کند و با مشخص کردن تصویرهای دو وجه مجاور به طور یکتا مشخص می‌شود (انعکاس، که در فضای سه بعدی قابل انجام نیست، به حساب نمی‌آید). برای وجه اول ۱۲ تصویر ممکن است ؛ بعد از مشخص شدن تصویر وجه اول، برای هر وجه مجاور آن پنج تصویر ممکن است. پس $۵\times ۱۲=۶۰$ تقارن برای دوازده وجهی وجود دارد، و هر یک از !۱۲ آرایش اساساً با ۶۰ آرایش (از جمله خودش) یکسان است. پس تعداد آرایشهای اساساً متفاوت $\frac{۱۱!}{۵}=\frac{۱۲!}{۶۰}$ است.

۶.۱. بیست‌وجهی منتظم

۲.۶.۱. نقطه، خط، صفحه

۹۱. وجه‌های جانبی بیست وجهی منتظم، مثلثهای متساوی‌الاضلاع همنهشت هستند که در هر رأس، پنج مثلث در مجاورت یکدیگر قرار می‌گیرند. بنابراین بر هر رأس یک بیست وجهی منتظم ۵ یال و ۵ وجه می‌گذرد.

۳.۶.۱. زاویه

۱.۳.۶.۱. اندازهٔ زاویه

۹۲. اگر این زاویه را θ فرض کنیم، داریم:

$$\sin\theta = \frac{۱+\sqrt{۵}}{۲\sqrt{۳}}$$

اندازهٔ تقریبی این زاویه: $\theta = ۱۳۸^\circ, ۱۲'$

۴.۶.۱. یال، ارتفاع

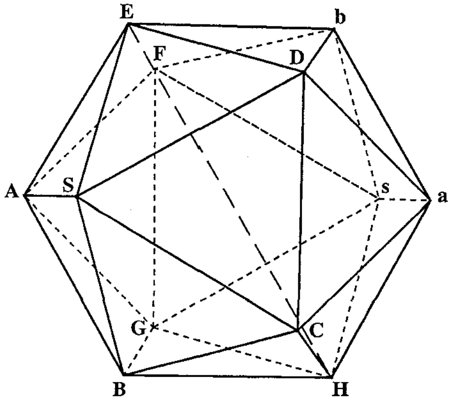
۱.۴.۶.۱. یال

۹۳. می‌دانیم که وجه‌های بیست وجهی منتظم، مثلثهای متساوی‌الاضلاع هستند. بنابراین اگر اندازهٔ ضلع هر وجه را a فرض کنیم، داریم:

ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع $= \frac{a\sqrt{۳}}{۲} = ۶\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۱۲$ اندازهٔ یال بیست وجهی منتظم

۵.۶.۱. پاره‌خط

۹۴. EH یکی از پاره‌خطهایی است که اندازهٔ آن خواسته شده است. این پاره‌خط دو برابر ارتفاع هرم پنج وجهی منتظم، بعلاوه ارتفاع شبه منشور بین این دو هرم است.



۱.۶.۶. شعاع کره

۱.۶.۶.۱. اندازهٔ شعاع کره

۹۵. اندازهٔ شعاع کرهٔ محاطی بیست وجهی منتظم محدب $r=\frac{a}{۱۲}\sqrt{۳}(۳+\sqrt{۵})$ و اندازهٔ شعاع کرهٔ محیطی بیست وجهی منتظم محدب $R=\frac{a}{۴}\sqrt{۱۰+۲\sqrt{۵}}$ است.

۱.۶.۷. مساحت

۱.۶.۷.۱. اندازهٔ مساحت

۱.۶.۷.۱.۱. اندازهٔ مساحت کل

۹۶. اندازهٔ سطح کل بیست وجهی منتظم محدب برابر است با :

$$S=۵\sqrt{۳}a^{۲}$$

زیرا وجه‌های بیست وجهی منتظم مثلثهای متساوی‌الاضلاع همنهشت می‌باشند. بنابراین اگر اندازهٔ یال بیست وجهی منتظم را a فرض کنیم، داریم :

$$\text{مساحت یک وجه}=\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}\Rightarrow S_{\text{کل}}=۲۰\times\frac{a^{۲}\sqrt{۳}}{۴}=۵\sqrt{۳}a^{۲}$$

۸.۶.۱. حجم

۱.۸.۶.۱. اندازهٔ حجم

۹۷. اندازهٔ حجم بیست وجهی منتظم محدب به یال a برابر است با :

$$V_{۲۰}=\frac{۵}{۱۲}(۳+\sqrt{۵})a^{۳}$$

۲.۸.۶.۱. نسبت حجمها

۹۸. شعاع کرهٔ محاط در ۲۰ وجهی منتظم چنین است :

$$r=\frac{a\sqrt{۳}(۳+\sqrt{۵})}{۱۲}$$

و حجم این کره :

$$V_{۱}=\frac{۴}{۳}\pi r^{۳}=\frac{\pi a^{۳}\sqrt{۳}(۳+\sqrt{۵})^{۳}}{۴۳۲}$$

حجم خود ۲۰ وجهی چنین است :

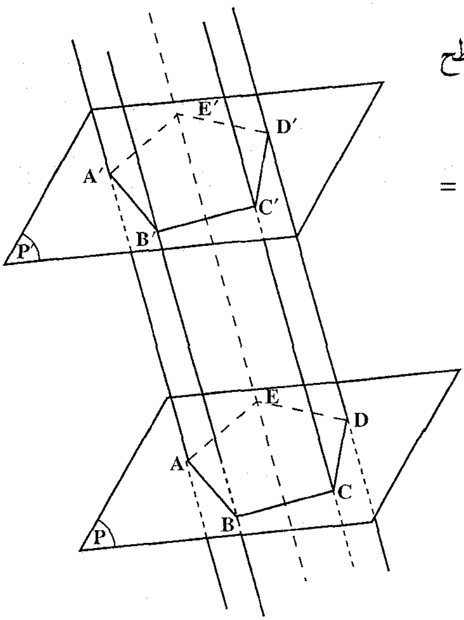
$$V=\frac{۵a^{۳}(۳+\sqrt{۵})}{۱۲}$$

جواب :

$$\frac{V}{V_{۱}}=\frac{۱۵\sqrt{۳}(۷-۳\sqrt{۵})}{۲\pi}$$

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش۲
منشور

۱.۲. تعریف و قضیه



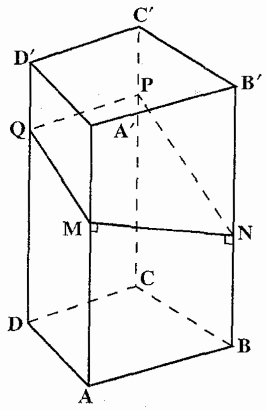
۹۹. فرض : { دو صفحهٔ متوازی P و ′P سطح منشوری S را قطع کرده‌اند.

حکم : مقطع $A'B'C'D'E'$ = مقطع ABCDE

ضلعهای $A'B'$ و AB متوازی‌اند، زیرا فصل مشترکهای دو صفحهٔ متوازی P و ′P با یک صفحه قاطع می‌باشند، پس شکل $AB'BA'$ متوازی‌الاضلاع است و $A'B' = AB$ و به همین دلیل ضلعهای مقطع ABCDE نظیر به نظیر با ضلعهای مقطع $A'B'C'D'E'$ متساوی‌اند. از طرف دیگر زاویهٔ $A\hat{B}C$ نیز با زاویهٔ $A'\hat{B}'C'$ مساوی است ؛ زیرا ضلعهای این دو زاویه نیز نظیر به نظیر متوازی‌اند و این وضع برای تمام زاویه‌ها برقرار است. بنابراین دو مقطع متساوی‌اند.

نتیجه. قاعده‌های منشور مساحتهای برابر دارند، زیرا که هر یک از قاعده‌ها هم یک مقطع است.

۱۰۰. منشور $ABCDA'B'C'D'$ (شکل) و مقطع قائم MNPQ از آن را در نظر می‌گیریم.



پاره‌خط MN بر یالهای AA' و BB' عمود است و بنابراین، ارتفاع نظیر قاعده‌های AA' و BB' از متوازی‌الاضلاع $AA'BB'$ است و آنها را معمولاً ارتفاعهای وجه‌های جانبی می‌گویند. اگر مساحت این متوازی‌الاضلاع را s_1 بنامیم $s_1 = MN.AA'$ با توجه به آن که یالهای منشور متساوی‌اند، مساحتهای متوازی‌الاضلاعهای جانبی بترتیب به صورت زیر به دست می‌آیند:

$$s_2 = MQ.AA'$$

$$s_3 = QP.AA'$$

$$\dots$$

و چون این تساویها را عضو به عضو با هم جمع کنیم، خواهیم داشت:

$$s_1 + s_2 + s_3 + \dots = (MN + MQ + QP + \dots).AA'$$

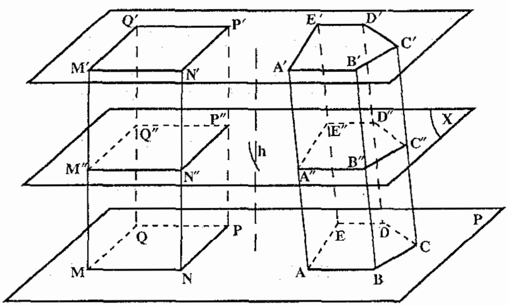
اگر محیط مقطع قائم منشور را p و مساحت جانبی منشور را s بنامیم:

$$s = p.AA'$$

نتیجه. در حالت مخصوصی که منشور قائم باشد، می‌توان هر یک از دو قاعده را مقطع قائم جسم دانست. بنابراین:

در منشور قائم مساحت سطح جانبی مساوی است با حاصلضرب محیط قاعده در ارتفاع.

تبصره. برای پیدا کردن مساحت رویهٔ کل منشور باید مساحت دو قاعده را برمساحت رویهٔ جانبی بیفزاییم.



۱۰۱. منشور $ABCDEA'B'C'D'E'$ را در نظر می‌گیریم و قاعدهٔ ABCDE را بر یک صفحهٔ P قرار می‌دهیم(شکل). مستطیل MNPQ را در صفحهٔ P چنان می‌سازیم که مساحتش با مساحت ABCDE برابر باشد. آن‌گاه

مکعب مستطیل $MNPQM'N'P'Q'$ را طوری بنا می‌کنیم که قاعدهٔ $M'N'P'Q'$، با چندضلعی $A'B'C'D'E'$ در یک صفحه موازی با P قرار گیرند. بدیهی است که هر صفحهٔ دلخواه موازی P، یا هم مکعب مستطیل و هم منشور را قطع می‌کند و یا، هیچ کدام را.

اما اگر صفحهٔ X موازیP باشد و آن دو حجم را قطع کند، در منشور یک چندضلعی $A''B''C''D''E''$ و در مکعب مستطیل یک مستطیل $M''N''P''Q''$ به وجود می‌آورد.

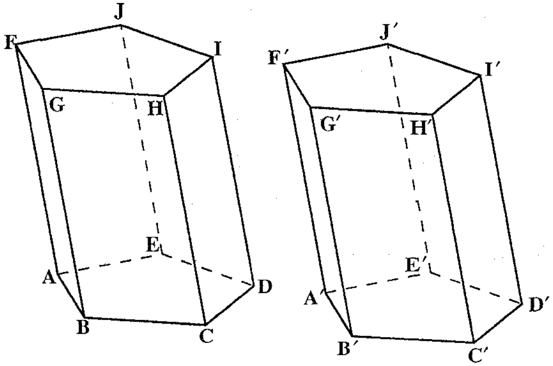
اما چندضلعیهای ABCDE و $A''B''C''D''E''$ با هم و مستطیلهای MNPQ و $M''N''P''Q''$ نیز با هم برابرند و در نتیجه مساحت $A''B''C''D''E''$ با مساحت $M''N''P''Q''$ برابر می‌باشد. بنابراین از اصل کاوالیری نتیجه می‌شود که اندازهٔ حجم منشور با اندازهٔ حجم مکعب مستطیل برابر است. چون حجم مکعب مستطیل برابر حاصلضرب مساحت قاعده و ارتفاع آن می‌باشد، پس حجم منشور داده شده نیز برابر با حاصلضرب مساحت قاعده در ارتفاع منشور می‌باشد، زیرا مساحت قاعدهٔ منشور با مساحت قاعده مکعب مستطیل و همچنین ارتفاع منشور با ارتفاع مکعب مستطیل برابر می‌باشد.

۱۰۲. در یک منشور منتظم با قاعدهٔ nضلعی منتظم، می‌توان به وسیلهٔ صفحه‌هایی که بر محور و یالهای جانبی منشور می‌گذرند، منشور منتظم را به n منشور سه‌پهلوی مساوی تجزیه کرد. اگر اندازهٔ مساحت هر وجه جانبی جسم را F ، a را اندازهٔ سهم قاعده فرض کنیم، داریم:

$$\text{حجم یک منشور} = F\times\frac{۱}{۲}a$$

$$\text{حجم مجموع منشورها} = n\times F\times\frac{۱}{۲}a$$

۱۰۳. چون باید سه وجه دوبه‌دو متقاطع باشند، ناچار یکی از آنها عبارت است از یکی از دو قاعده، و دو وجه دیگر، دو وجه جانبی مجاور می‌باشند. حال فرض می‌کنیم در دو منشور AI و AI' (شکل) سه وجه

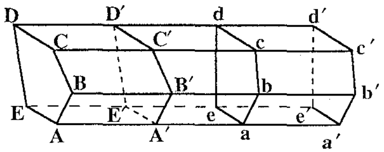


AD، AG و AJ بترتیب با سه وجه $A'D'$ ، $A'G'$ و $A'J'$ مساوی بوده، وضع قرار گرفتن وجه‌ها نیز در دو جسم یکی باشد.

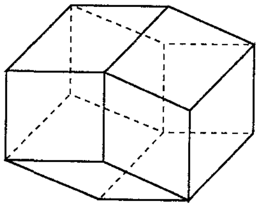
پس کنج A با کنج A' بنابر تساوی سه زاویه متساوی‌اند و می‌توان آنها را بر یکدیگر منطبق ساخت. در نتیجهٔ این انطباق، وجه AD بر وجه $A'D'$ منطبق می‌شود و یال AF روی یال $A'F'$ قرار می‌گیرد. پس سطحهای منشوری که شامل دو منشور مزبور می‌باشند، کاملاً بر یکدیگر منطبق می‌گردند، زیرا چندضلعی هادی و خط مولد آنها یکی شده است، اکنون ثابت می‌کنیم که دو قاعدهٔ فوقانی دو منشور نیز منطبق می‌شوند؛ زیرا پس از آن که وجه‌های AG و AJ بر دو وجه $A'G'$ و $A'J'$ منطبق شدند، دو ضلع FG و FJ از قاعدهٔ فوقانی منشور اول بر دو ضلع $F'G'$ و $F'J'$ از قاعدهٔ فوقانی منشور دوم منطبق می‌گردند. پس صفحه‌های این دو قاعده روی هم واقع می‌شوند و لذا، بخصوص قسمتی از این صفحه‌ها که در داخل سطح منشوری محدودند، نیز بر یکدیگر منطبق می‌گردند، یعنی دو قاعدهٔ فوقانی روی هم واقع می‌شوند و قضیه ثابت است.

نتیجهٔ ۱. دو منشور قائم که در قاعده و ارتفاع متساوی باشند، متساوی‌اند؛ زیرا در این صورت، وجه‌های جانبی آنها نیز برابر می‌باشند و سه وجه متقاطع متساوی خواهند داشت.

نتیجهٔ ۲. دو منشور ناقص قائم که قاعده‌های آنها مساوی یکدیگر باشند و یالهای جانبی آنها نظیر به نظیر برابر باشند با یکدیگر مساوی‌اند.



۱۰۴. منشور مایل $ABCDEA'B'C'D'E'$ را در نظر گرفته (شکل) سطح منشوری را که این منشور خروجی از آن است امتداد می‌دهیم و روی یال AA' خط aa' را مساوی با AA' جدا می‌نماییم و از a و a' دو مقطع قائم رسم می‌نماییم تا منشور قائم، $abcdea'b'c'd'e'$ به دست آید. می‌خواهیم ثابت کنیم که این منشور قائم با منشور مایل مفروض معادل است. در واقع: $Aa = A'a'$ و $Bb = B'b'$ و ... (به چه دلیل متساوی‌اند؟) و از طرف دیگر دو منشور ناقص $ABCDEabcde$ و $A'B'C'D'E'a'b'c'd'e'$ برابرند، پس اگر از دو منشور ناقص مزبور منشور ناقص $A'B'C'D'E'abcde$ را که بین هردوی آنها مشترک است حذف نماییم، قسمتهای باقیمانده که عبارت از منشور مایل و قائم مزبور هستند، معادل یکدیگر خواهند بود.



۱۰۵. بله می‌توان. ولی در این صورت، باید چند وجهیهایی را که نمی‌توان منشور نامید، از آن استثنا کرد. به طور مثال هشت‌وجهی با وجه‌های لوزی شکل.

۱۰۶. بنا به تعریف کنج و سطح منشوری، خیر.

۱۰۷. سطح منشوری که منحنی هادی آن مثلث باشد؛ زیرا مثلث چندضلعی مسطح با کمترین تعداد ضلع است.
ساده‌ترین منشورها پنج وجه دارد که شامل دو قاعده و سه وجه جانبی است.

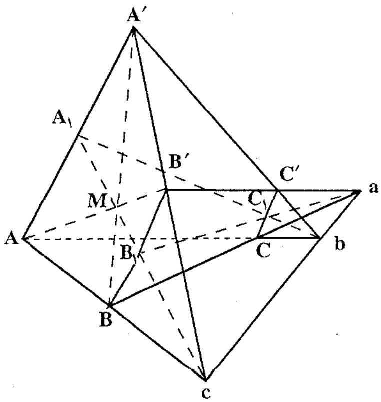
۲.۲. نقطه، خط، صفحه

۱.۲.۲. نقطه

۱.۱.۲.۲. رأس

۱۰۸. گزینهٔ (هـ) درست است.

۲.۱.۲.۲. نقطه‌ها همصفحه‌اند



۱۰۹. منشور ناقص $ABCA'B'C'$ را در نظر می‌گیریم. a، b و c را نقطه‌های برخورد امتداد ضلعهای متناظر دو قاعده فرض می‌کنیم. این سه نقطه روی یک خط راست واقعند، زیرا بر فصل مشترک دو صفحهٔ ABC و $A'B'C'$ قرار دارند.
از طرف دیگر اگر وسط یالهای جانبی منشور را A_1، B_1 و C_1 بنامیم، دیده می‌شود که در ذوزنقه‌های جانبی، A_1B_1، B_1C_1 و C_1A_1 بترتیب از نقطه‌های a، b و c و همچنین از نقطهٔ برخورد قطرهای این ذوزنقه‌ها می‌گذرند. از آن‌جا، a، b و c و نقطه‌های برخورد قطرهای ذوزنقه‌های جانبی در یک صفحه قرار

دارند که این صفحه $A_1B_1C_1$ است.

تبصره. این حکم برای منشور ناقص مثلث القاعده‌ای که قاعده‌های آن موازی نیز نباشند، درست است.

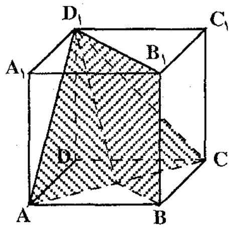
۲.۲.۲. خط

۱.۲.۲.۲. خطها همصفحه‌اند

۱۱۰. یالهای منشور پاره‌خطهای موازی‌اند. بنابراین به عنوان مثال، دو یال غیرمجاور AA' و DD' در یک صفحه قرار دارند. این صفحه دو صفحهٔ متوازی قاعده‌های منشور را در دو پاره‌خط متوازی AD و $A'D'$ قطع می‌کند (زیرا فصل مشترکهای یک صفحه با دو صفحهٔ متوازی دو خط متوازی هم است). بنابراین چهارضلعی $ADD'A'$ که‌ضلعهای آن دوبه‌دو موازی‌اند، متوازی‌الاضلاع است.

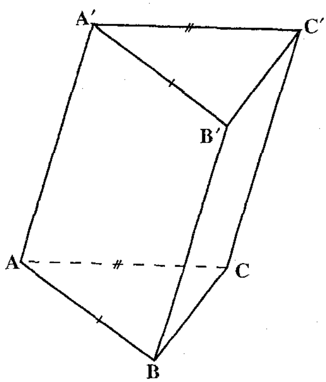
۳.۲.۲. صفحه

۱.۳.۲.۲. صفحه‌ها بر هم عمودند



۱۱۱. می‌دانیم که $(AC)\perp(BB_1D_1D)$ است (شکل). طبق قانون تعامد صفحه‌ها $AD_1C\perp(BB_1D_1D)$ است.

۲.۳.۲.۲. وجه‌ها مساوی اند



۱۱۲. مقطعهای قائم این منشورها مساوی‌اند، زیرا ضلعهای آنها نظیر به نظیر با هم مساوی‌اند. چون ارتفاعهای متناظر وجه‌های جانبی نیز با هم برابرند. در نتیجه زاویه‌های آنها که زاویه‌های مسطحهٔ فرجه‌های تشکیل شده به وسیلهٔ وجه‌های جانبی می‌باشند، نظیر به نظیر با هم برابرند.

اینک کنجهای سه وجهی $A.BCA'$ و $A_1.B_1C_1A'_1$ با هم برابرند، زیرا در یک جهت

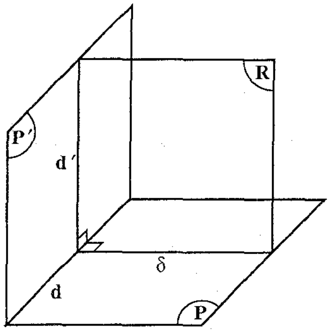
هستند، یک فرجهٔ مساوی دارند؛ $AA' = A_1A'_1$ که بین دو وجه مساوی نظیر هم واقعند.

$$B\hat{A}A' = B_1\hat{A}_1A'_1 \quad \text{و} \quad C\hat{A}A' = C_1\hat{A}_1A'_1$$

زیرا بنا به فرض، این زاویه‌ها نظیر هم در متوازی‌الاضلاعهای مساوی می‌باشند و اگر یکی از این منشورها را چنان جابه‌جا کنیم که فرجه‌های مساوی AA' و $A_1A'_1$ بر هم منطبق شوند و A_1B_1 و A_1C_1 نیز بر AB و AC واقع شوند، دو منشور بر هم منطبق خواهند شد.

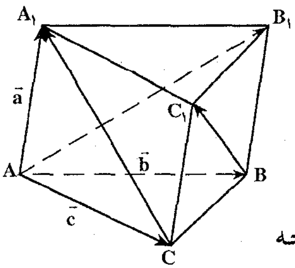
۲.۲.۴. خط و صفحه

۲.۲.۴.۱. خط عمود بر صفحه است



۱۱۳. دو صفحهٔ عمود بر هم P و P' با فصل مشترک d را در نظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم خط δ واقع در صفحهٔ P بر فصل مشترک d عمود باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که خط δ بر صفحهٔ P' عمود است. برای این کار کافی است ثابت کنیم که δ بر دو خط ناموازی از این صفحه عمود است. چون δ بنا به فرض بر خط d از صفحهٔ P' عمود می‌باشد، بنابراین باید ثابت کنیم بر یک خط دیگر ناموازی با d از صفحهٔ P' عمود است. برای اثبات بر خط δ صفحه‌ای می‌گذرانیم که بر خط d عمود باشد. این صفحه، صفحهٔ P' را در خط d' قطع می‌کند که بر خط d عمود است. اینک خط δ که بر دو خط نامتقاطع d و d' از صفحهٔ P' عمود می‌باشد، بر این صفحه عمود است.

۲.۲.۴.۲. خط موازی صفحه نیست



۱۱۴. بردارهای $\overrightarrow{AA_1} = a$، $\overrightarrow{AB} = b$ و $\overrightarrow{AC} = c$ را به عنوان بردارهای پایه انتخاب می‌کنیم (شکل). در این صورت:

$$\overrightarrow{AB_1} = a + b \quad \text{و} \quad \overrightarrow{BC_1} = a + c - b \quad \text{و} \quad \overrightarrow{CA_1} = a - c$$

اگر قطرهای AB_1، BC_1 و CA_1 موازی با یک صفحه

باشند، آن وقت باید بردارهای $\overrightarrow{AB_1}$، $\overrightarrow{BC_1}$ و $\overrightarrow{CA_1}$ هم صفحه باشند که ممکن نیست. در واقع، اگر این سه بردار را هم صفحه بگیریم، باید داشته باشیم:

$$\overrightarrow{AB_1} = x\overrightarrow{BC_1} + y\overrightarrow{CA_1}$$

و یا:

$$a + b = x(a + c - b) + y(a - c)$$

اگر در نظر بگیریم که، هر بردار را، تنها به یک طریق می‌توان برحسب بردارهای پایه تجزیه کرد، باید داشته باشیم:

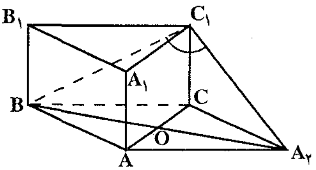
$$x + y = ۱ ،\ x = -۱ ،\ x - y = ۰$$

که دستگاهی ناسازگار است و جواب ندارد.

۳.۲. زاویه

۱.۳.۲. اندازهٔ زاویه

۱.۱.۳.۲. اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط



۱۱۵. قطر AB_1 و B_1C_1 را به صورت موازی جابه‌جا کرده و تصویر A را با A_2 نشان می‌دهیم (شکل). زاویهٔ بین خطهای AB_1 و BC_1 برابر زاویهٔ بین خطهای BC_1 و C_1A_2 است. چنین داریم:

$$AA_2 = B_1C_1 = BC \text{ و } AA_2 \| B_1C_1 \| BC$$

در نتیجه چهارضلعی $ABCA_2$ یک متوازی‌الاضلاع و به دلیل $BC = AB$ یک لوزی خواهد بود. نقطهٔ O مرکز لوزی بوده و در نتیجه BO ارتفاع مثلث ABC خواهد بود.

با در نظر گرفتن عبارت $AB = a$ تساویهای $BO = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و $BA_2 = a\sqrt{۳}$ را داریم.

با منظور کردن $BB_1 = \frac{a}{\sqrt{۵}}$ در می‌یابیم که در مثلثهای BB_1A و BB_1C_1، $AB_1 = BC_1 = \sqrt{\frac{۶}{۵}}\, a$ است. پاره‌خط A_2C_1 تصویر پاره‌خط AB_1 در جابه‌جایی موازی بوده و از این رو $A_2C_1 = AB_1 = \sqrt{\frac{۶}{۵}}\, a$ است. حال با استفاده از قانون

کسینوسها در مثلث BC_1A_2 به رابطهٔ زیر دست می‌یابیم :

$$\cos B\hat{C}_1A_2 = \frac{BC_1^2 + C_1A_2^2 - BA_2^2}{2BC_1.C_1A_2} = -\frac{1}{4}$$

از این رابطه$B\hat{C}_1A_2 = \arccos(-\frac{1}{4})$ به دست می‌آید. زاویهٔ بین نیمخطهایC_1B و C_1A_2 به صورت منفرجه $(\frac{\pi}{2} < \arccos(-\frac{1}{4}) < \pi)$ درآمده و بنابراین زاویهٔ بین خطهایC_1B و C_1A_2 مکمل زاویهٔ مزبور خواهد بود :

$$(C_1B, \hat{C}_1A_2) = \pi - \arccos(-\frac{1}{4})$$

با استفاده از اتحاد $(|x| \leq 1)$ و $\arccos x + \arccos(-x) = \pi$ به رابطهٔ زیر وصول می‌یابیم :

$$(C_1B, \hat{C}_1A_2) = \arccos(\frac{1}{4})$$

و در نتیجه جواب مسأله عبارت از $\arccos(\frac{1}{4})$ خواهد بود.

در دو مثال قبل جستجوی زاویهٔ بین خطها، به یافتن زاویهٔ بین نیمخطهایی با رأسهای مشترک و موازی خطهای مفروض تحویل یافت. اگرα زاویهٔ بین خطهای مستقیم باشد، آن‌گاه زاویهٔ بین نیمخطها مساویα یا$\pi - \alpha$ خواهد بود. این نکته را مخصوصاً در مسائلی که در آنها یافتن پارامترهای دیگری از چند وجهی براساس زاویهٔ بین خطها مطرح است، بایستی مورد ملاحظه قرار داد.

۱۱۶. ارتفاع منشور را واحد در نظر بگیرید و : $AM = x$

دایرهٔ محیطی مثلثA_1MC_1 را رسم کنید. جسمی را در نظر بگیرید که از دوران کمان A_1MC_1 از این دایره، حول وترA_1C_1 به وجود آمده باشد. زاویهٔ A_1MC_1 ، بیشترین مقدار را خواهند داشت اگر، خط AB بر سطح جسم به عنوان مولد مماس بشود، و این وقتی اتفاق می‌افتد که MO و AB که در آن O مرکز دایرهٔ محیطی مثلث ABC است، متقابلاً بر هم عمود بشوند. بنابراین خط MO، A_1C_1 را به نسبت زیر تقسیم می‌کند :

$$\frac{AM}{MB} = \frac{x}{2 - x}$$

از طرف دیگر، می‌توان نشان داد که MO، A_1C_1 را به نسبت زیر تقسیم می‌کند :

$$\frac{A_1M \cos A_1\hat{C}_1M}{C_1M \cos C_1\hat{A}_1M}$$

با بیان ضلعها و کسینوس زاویه‌های مثلث A_1MC_1 برحسب x، معادلهٔ زیر به دست می‌آید:

$$\frac{(1+x^2)(4-x)}{x(9-4x+x^2)}=\frac{x}{2-x} \Leftrightarrow x^3+3x-4=0$$

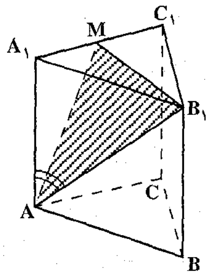
از آن‌جا: $x=1$

بیشترین مقدار زاویهٔ A_1MC_1 برابر می‌شود با، $\frac{\pi}{2}$.

۲.۱.۳.۲. اندازهٔ زاویهٔ بین دو صفحه

۱۱۷. اندازهٔ این زاویه مساوی $\frac{\pi}{4}$ است.

۳.۱.۳.۲. اندازهٔ زاویهٔ بین خط و صفحه



۱۱۸. تصویر خط AB_1 را روی صفحهٔ AA_1C_1C رسم می‌کنیم. صفحه‌های $A_1B_1C_1$ و AA_1C_1C متعامد بوده و بنابر آن عمود B_1M وارد برخط A_1C_1 بر صفحهٔ AA_1C_1C نیز عمود خواهد بود. خط AM تصویر قائم خط AB_1 روی صفحهٔ AA_1C_1C است. زاویهٔ بین خط AB_1 و صفحهٔ AA_1C_1C برابر $B_1\hat{A}M$ است. با در نظر گرفتن عبارت $AB=a$، رابطهٔ $AA_1=a$ و نیز رابطهٔ $AB_1=a\sqrt{2}$ را خواهیم داشت. ارتفاع B_1M از مثلث متساوی‌الاضلاع $A_1B_1C_1$ برابر $\frac{a\sqrt{3}}{2}$ است. در مثلث قائم‌الزاویهٔ B_1AM چنین داریم:

$$\sin B_1\hat{A}M=\frac{B_1M}{AB_1}=\frac{\sqrt{6}}{4}$$

$$B_1\hat{A}M=\arcsin\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$$

بنابراین جواب مسأله عبارت از $\arcsin\left(\frac{\sqrt{6}}{4}\right)$ خواهد بود.

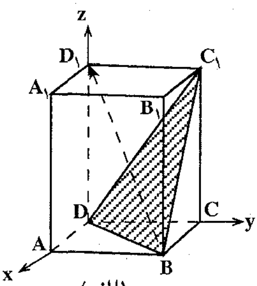
توجه. اختیار زاویهٔ B_1AA_1 به عنوان زاویهٔ بین خط AB_1 و صفحهٔ AA_1C_1C ناصحیح است (شکل الف). خط AA_1 تصویر قائم خط AB_1 روی صفحهٔ AA_1C_1C نیست و زاویهٔ B_1AA_1 که معادل $\frac{\pi}{4}$ است زاویهٔ بین خط و صفحهٔ مزبور محسوب نمی‌شود.

روش مختصات را نیز می‌توان برای یافتن زاویهٔ بین صفحه و خط به کار گرفت. دستگاه مختصات کارتزین را در فضا در نظر گرفته، فرض کنید که صفحهٔ α با معادلهٔ زیر در آن تعریف شده باشد:

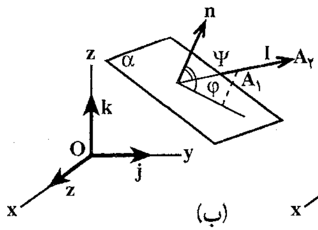
$$ax+by+cz+d=0 \qquad (1)$$

همچنین دو نقطهٔ $A_1(x_1,y_1,z_1)$ و $A_2(x_2,y_2,z_2)$ را از خط a در نظر بگیرید. زاویهٔ بین خط a و صفحهٔ α را با φ نشان می‌دهیم. دو بردار زیر را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم:

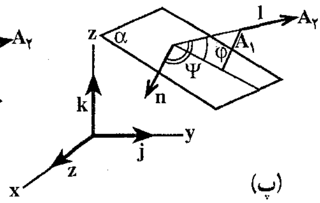
$$n=(a,b,c) \text{ و } l=\overrightarrow{A_1A_2}=(x_2-x_1,y_2-y_1,z_2-z_1)$$



(الف)



(ب)



(پ)

زاویهٔ φ به وسیلهٔ فرمول زیر تعریف می‌شود:

$$\sin\varphi=\frac{|n.l|}{|n|.|l|} \qquad (2)$$

در حقیقت بردار $n=(a,b,c)$، که بر صفحهٔ α عمود است با معادلهٔ (۱) تعریف شده و بنابراین با در نظر گرفتن تساوی $\psi=(\widehat{n,l})$ چنین خواهیم داشت:

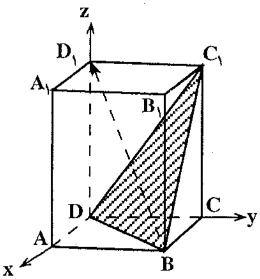
اگر $0 \le \psi \le \frac{\pi}{2}$ باشد، آن‌گاه $\varphi=\frac{\pi}{2}-\psi$ خواهد بود (شکل ب).

اگر $\frac{\pi}{2}<\psi\le\pi$ باشد، آن‌گاه $\varphi=\psi-\frac{\pi}{2}$ خواهد بود (شکل پ).

در هر دو حالت $\sin\varphi = |\cos\psi|$ را داریم. این امر و رابطهٔ $\cos\psi = \frac{n.l}{|n|.|l|}$ موجب فرمول (۲) می‌شود. در مسائل استنتاج معادله‌های صفحه غالباً از این نکته استفاده می‌شود که معادلهٔ هر صفحه گذرنده بر نقطهٔ $M(x_0, y_0, z_0)$ را می‌توان به شکل روبرو داشت:

$$a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0 \qquad (۳)$$

۱۱۹. دستگاه مختصات را همچون شکل در نظر می‌گیریم.



اگر ضلع قاعدهٔ منشور را با s نشان دهیم، طول یال جانبی آن برابر ۲s خواهد بود. آن‌گاه مختصات نقطه‌های B، C_1، D و D_1 را به دست می‌آوریم:

$$D_1(0,0,2s)\ ,\ \ D(0,0,0)\ \ C_1(0,s,2s)\ ,\ B(s,s,0)$$

صفحهٔ BC_1D از نقطهٔ $D(0,0,0)$ عبور کرده و بنابراین طبق معادلهٔ (۳) معادلهٔ آن دارای شکل $ax+by+cz=0$ خواهد بود.

با جاگذاری مختصات نقطه‌های B و C_1 در این معادله، دستگاه زیر به دست می‌آید:

$$\begin{cases} as+bs=0 \\ bs+2cs=0 \end{cases}$$

از این دستگاه درمی‌یابیم که $b=-2c$ و $a=2c$ است. این امر بدین معنی است که معادلهٔ صفحهٔ BC_1D دارای شکل روبه‌رو است: $2x-2y+z=0$ با منظور کردن $c\neq 0$ (در غیر این صورت همهٔ جمله‌ها صفر خواهد شد) و حذف آن از معادله، به معادلهٔ روبه‌رو می‌رسیم:

$$2x-2y+z=0$$

بدین ترتیب بردار n که بر صفحهٔ BC_1D عمود است دارای مختصات $(2,-2,1)$ است.

مختصات (p,q,r) بردار $l=\overrightarrow{BD_1}$ را به دست می‌آوریم:

$$p=0-s=-s،\ \ q=0-s=-s،\ r=2s-0=2s$$

آن‌گاه محاسبه‌های زیر را انجام می‌دهیم:

$$l.n=(-s).2+(-2).(-s)+2s.1=2s$$

$$|n|=\sqrt{4+4+1}=3$$

$$|l|=\sqrt{s^2+s^2+4s^2}=\sqrt{6}s$$

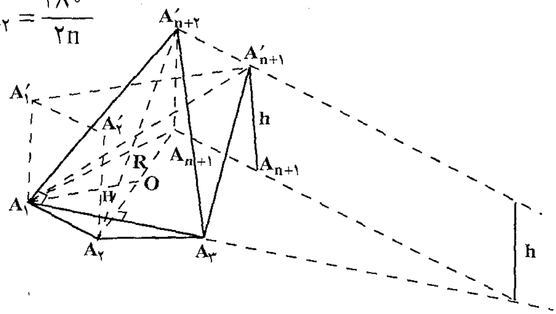
با در نظر گرفتن φ به عنوان زاویهٔ بین خط BD_1 و صفحهٔ BC_1D طبق فرمول (۲) چنین به‌دست می‌آید:

$$\sin\varphi=\frac{|l.n|}{|l|.|n|}=\frac{2s}{3\sqrt{6}s}=\frac{2}{3\sqrt{6}}=\frac{\sqrt{6}}{9}$$

بنابراین جواب مسأله عبارت از $\varphi=\arcsin(\frac{\sqrt{6}}{9})$ خواهد بود.

۱۲۰. ارتفاع منشور را h می‌نامیم در این صورت در چهاروجهی $A_1A_3A'_{n+1}A'_{n+2}$ (شکل)، زاویهٔ بین یالهای روبه‌روی A_1A_3 و $A'_{n+1}A'_{n+2}$، برابر است با:

$$A_3\hat{A}_1A_2=\frac{1}{2}A_3\hat{O}A_2=\frac{180^\circ}{2n}$$



(که در آن، O مرکز چندضلعی $A_1\cdots A_{2n}$ است. توجه کنیم که خطهای راست $A'_{n+1}A'_{n+2}$، $A'_1A'_2$ و A_1A_2 با هم موازی‌اند). فاصلهٔ بین یالهای A_1A_3 و $A'_{n+1}A'_{n+2}$ برابر h و طول آنها، چنین است:

$$A_1A_3=2R\sin\frac{180^\circ}{n} \quad \text{و} \quad A'_{n+1}A'_{n+2}=2R\sin\frac{180^\circ}{2n}$$

بنابراین، حجم چهاروجهی ما، برابر است با:

$$\frac{1}{6}A_1A_3.A'_{n+1}A'_{n+2}.h.\sin\frac{180^\circ}{2n}=\frac{2}{3}R^2h\sin\frac{180^\circ}{n}\sin^2\frac{180^\circ}{2n}$$

از طرف دیگر، اگر زاویهٔ بین خط راست $A_1A'_{n+1}$ و صفحهٔ $A_1A_3A'_{n+2}$ را، φ بگیریم، آن‌وقت همین حجم، چنین می‌شود:

$$\frac{1}{3}S_{A_1A_3A'_{n+2}}.A_1A'_{n+1}.\sin\varphi$$

که در آن:
$$A_1A'_{n+1}=\sqrt{(A_1A'_1)^2+(A'_1A'_{n+1})^2}=\sqrt{h^2+4R^2}$$

$$S_{A_1A_3A'_{n+2}} = \frac{1}{2}A_1A_3 . A'_{n+2}H = \frac{1}{2} . 2R . \sin\frac{180^\circ}{n}\sqrt{h^2 + (2R\cos^2\frac{180^\circ}{2n})^2}$$

($A'_{n+2}H$، ارتفاع مثلث $A_1A_3A'_{n+2}$ است). بنابراین به‌دست می‌آید :

$$\frac{2}{3}R^2 h \sin\frac{180^\circ}{n}\sin^2\frac{180^\circ}{2n} =$$

$$= \frac{1}{3}R\sin\frac{180^\circ}{n}\sqrt{h^2 + 4R^2\cos^4\frac{180^\circ}{2n}} . \sqrt{h^2+4R^2} . \sin\varphi$$

به این‌ترتیب، مقدار

$$\sin\varphi = 2R\sin^2\frac{180^\circ}{2n}\left(h^2 + \frac{16R^2\cos^4\frac{180^\circ}{2n}}{h^2} + 4R^2\cos^4\frac{180^\circ}{2n} + 4R^2\right)^{-\frac{1}{2}}$$

وقتی ماکزیمم می‌شود که نابرابری

$$h^2 + \frac{16R^4\cos^4\frac{180^\circ}{2n}}{h^2} \geq 2\sqrt{16R^4\cos^4\frac{180^\circ}{2n}}$$

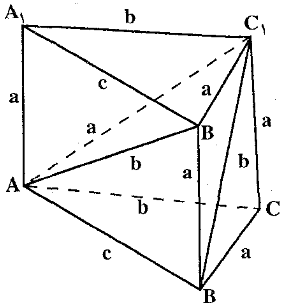
به برابری تبدیل شود، یعنی وقتی که داشته باشیم :

$$h^2 = \frac{16R^4\cos^4\frac{180^\circ}{2n}}{h^2} \Rightarrow h = 2R\cos\frac{180^\circ}{2n}$$

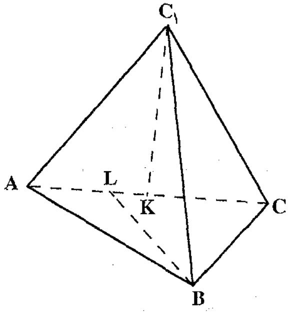
۲.۳.۲. زاویهٔ مسطحهٔ فرجه

۱.۲.۳.۲. اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ فرجه

۱۲۱. در مثلث ABC طول ضلعهای CA،BC و AB را بترتیب a، b و c در نظر بگیرید چون چهاروجهیهای $ABCC_1$ ، ABB_1C_1 و $AA_1B_1C_1$ قابل انطباق بر یکدیگرند، از آن‌جا نتیجه می‌شود که هر یک از آنها دو وجه قابل انطباق بر مثلث ABC دارند. در واقع اگر هر چهاروجهی یک وجه، از چنین وجه‌هایی داشته باشد، در آن صورت بین رأسهای چهاروجهیهای $ABCC_1$



(الف)



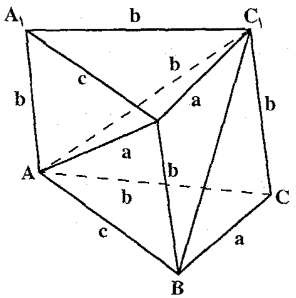
(ب)

و $A_1B_1C_1A$ تناظری به صورت $A \to A_1$ و $B \to B_1$ و $C \to C_1$ وجود می‌داشت. یعنی:

$BC_1 = B_1A$ و $CC_1 = AC_1$

و این یعنی هیچ یک از وجه‌ها در چهاروجهی ABC_1B_1، برابر مثلث ABC نیستند.

اکنون به آسانی نتیجه می‌شود یال جانبی منشور یا برابر a، یا برابر b و یا c است (به عنوان مثال اگر مثلث AC_1B بر مثلث ABC منطبق باشد، در آن صورت وجه A_1B_1A از چهاروجهی $A_1B_1C_1A$، متناظر با وجه AC_1B از چهاروجهی $ABCC_1$ و مثلث A_1B_1A قابل انطباق بر مثلث ABC خواهد بود.)



(پ)

همهٔ حالتها را در نظر بگیرید (شکل الف):

$$AA_1 = BB_1 = CC_1 = a \qquad (1)$$

در این صورت از رأس c، چهاروجهی $ABCC_1$، دو یال به طول a و یک یال به طول b اخراج می‌شود، و یک یال به طول c مقابل با یال CC_1 قرار می‌گیرد.

بنابراین نتیجه می‌شود برای رأس C از چهاروجهی $ABCC_1$، می‌بایست C_1 از چهاروجهی $A_1B_1C_1A$ متناظر بشود و $AC_1 = a$.

اکنون می‌توان ثابت کرد: $AB_1 = BC_1 = b$

در هر سه چهاروجهی فرجه‌های نظیر یالهای به طول b قابل انطباق برهم هستند و مجموع دو تا از چنین فرجه‌ها برابر π می‌باشد. (برای مثال دو فرجهٔ نظیر یال C_1B در چهاروجهیهای $ABCC_1$ و ABB_1C_1) یعنی هر یک از آنها برابر $\frac{\pi}{2}$ است.

عمودهای BL و C_1K را بر یال AC فرود آورید (شکل ب) چون فرجه نظیر یال AC برابر $90°$ است داریم:

$$b^2 = C_1B^2 = C_1K^2 + KL^2 + LB^2$$
$$= C_1C^2 - KC^2 + (KC - LC)^2 + BC^2 - LC^2 = 2a^2 - bx$$

که در آن $x = LC$ و از معادله نتیجه می‌شود:

$$a^2 - x^2 = c^2 - (b - x)^2$$

$$x = \frac{a^۲ + b^۲ - c^۲}{۲b}$$

به این ترتیب :

$$۳a^۲ - ۳b^۲ + c^۲ = ۰$$

اما بنا به فرض مثلث ABC قائم‌الزاویه است و این وقتی امکان‌پذیر است که داشته باشیم :

$$c^۲ = a^۲ + b^۲$$

در نتیجه :

$$b = a\sqrt{۲} \ , \ c = a\sqrt{۳}$$

اکنون می‌توان فرجهٔ نظیر یال BC از منشور موردنظر را پیدا کرد.

$A\hat{C}C_۱ = \frac{\pi}{۴}$ زاویهٔ مسطحهٔ فرجه است. (ABC و $C_۱CB$ مثلثهای قائم‌الزاویه‌اند که زاویهٔ C در آنها ۹۰° است).

فرجهٔ نظیر AB از چهاروجهی $ABCC_۱$، برابر $\frac{\pi}{۳}$ است و این موضوع را ثابت می‌کنیم. این زاویه را φ فرض می‌کنیم. فرجهٔ نظیر یال AB در منشور $ABCA_۱B_۱C_۱$ برابر است با ۲φ و فرجهٔ نظیر $A_۱B_۱$ برابر φ به این ترتیب :

$$۳\varphi = \pi \text{ یا } \varphi = \frac{\pi}{۳}$$

$$AA_۱ = BB_۱ = CC_۱ = b \qquad (۲)$$

(شکل پ).

در این حالت در چهار وجهی $ABCC_۱$، دو یال به طول b و یک یال به طول a از رأس C اخراج می‌شوند. بنابراین چهاروجهی $A_۱B_۱C_۱A$ نیز، یک چنین رأسی خواهد داشت که آن رأس A و یا $C_۱$ خواهد بود. در هر دو حالت داریم :

$$AC_۱ = b \text{ و } AB_۱ = a$$

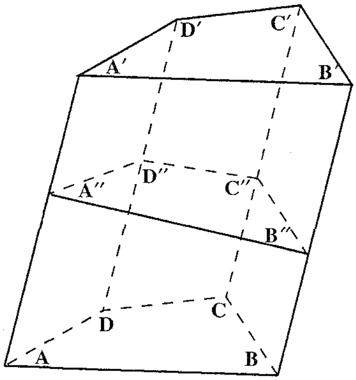
(یادآوری می‌کنیم دو وجه به ضلعهای a، b و c باید پیدا شود). بنابراین، هر یک از چهار وجهیهای $ABCC_۱$ و $A_۱B_۱C_۱A$، یک وجه دارند که مثلثی است متساوی‌الاضلاع به ضلع b. در حالی که در چهاروجهی $ABB_۱C_۱$ طول یال $BC_۱$ هر چه باشد، دارای چنین وجهی نیست. بنابراین چنین حالتی پیش نمی‌آید :

$$AA_۱ = BB_۱ = CC_۱ = c \qquad (۳)$$

این حالت در واقع بر همان حالت اول است، تنها قاعده‌های ABC و $A_۱B_۱C_۱$ جابه‌جا شده‌اند.

جواب : $\frac{\pi}{۲}$، $\frac{\pi}{۴}$ (یا $\frac{۳\pi}{۴}$)، $\frac{\pi}{۳}$ (یا $\frac{۲\pi}{۳}$)

۲.۲.۳.۲. رابطهٔ بین زاویه‌های مسطحهٔ فرجه



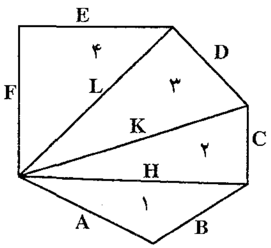
۱۲۲. منشور $ABCDA'B'C'D'$ را در نظر می‌گیریم. اگر صفحه‌ای عمود بر AB رسم کنیم، فرجه‌های AB و $A'B'$ مکمل یکدیگرند، زیرا زاویه‌های مسطحهٔ فرجهٔ آنها دو زاویهٔ درونی بین دو خط موازی و یک خط قاطع می‌باشند. یعنی داریم:

۲ قائمه = فرجه $A'B'$ + فرجهٔ AB

همین ویژگی برای فرجه‌های BC، $B'C'$ ؛ CD، $C'D'$ ؛ و $D'A'$ و DA برقرار است. بنابراین مجموع زاویه‌های فرجه‌هایی که قاعده‌ها ایجاد می‌کنند، مساوی $2n$ قائمه است که n تعداد وجه‌های منشور می‌باشد.

اکنون یک مقطع قائم $A''B''C''D''$... را رسم می‌کنیم. زاویه‌های این چند ضلعی، زاویه‌های مسطحهٔ فرجه‌های تشکیل شده بین وجه‌های مجاور منشور می‌باشند. مجموع این فرجه‌ها مساوی با $(n-2)$ قائمه است.

بنابراین مجموع زاویه‌های منشور مساوی است با $2n+2(n-2)$ قائمه یا $4(n-1)$ قائمه.



۱۲۳. A، B، C، ... را فرجه‌های ایجادشده بین وجه‌های جانبی و قاعدهٔ منشور فرض می‌کنیم. قطرهای نظیر یک رأس از قاعده را رسم می‌کنیم تا مثلثهای ۱، ۲، ۳، ... به وجود آیند و فرجه‌های ایجاد شده بین صفحه‌های قطری شامل این قطرها و نیمصفحه‌های مثلثهای ۱،۲،۳،... را H_1، H_2 ؛ K_1، K_2 ؛ ... می‌نامیم. با توجه به منشورهای مثلث‌القاعده خواهیم داشت:

۴ قائمه $> A+B+H_1 >$ ۲ قائمه

۴ قائمه $> H_2+C+K_2 >$ ۲ قائمه

۴ قائمه $> K_3+D+L_3 >$ ۲ قائمه

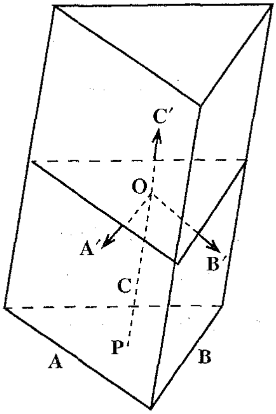
از جمع کردن عضوهای متناظر نامساویهای بالا و با قراردادن $A+B+C+D+\cdots=S$ و با توجه به این که ۲ قائمه $= H_1+H_2$ ؛ ۲ قائمه $= K_2+K_3$ ، ... ، و این که اگر تعداد وجه‌های جانبی منشور n باشد، تعداد مثلثها $n-2$ و تعداد قطرهای رسم شده از یک

رأس قاعده $n-3$ خواهد بود، داریم:

۴ قائمه $\times(n-2)>$ ۲ قائمه $\times(n-3)+S>$ ۲ قائمه $\times(n-2)$

یعنی: ۲ قائمه $\times(n-1)>S$ و ۲ قائمه $<S$

۱۲۴. منشوری مثلث‌القاعده را در نظر گرفته، فرجه‌های وجه‌های جانبی آن با یکی از قاعده‌ها را A، B و C می‌نامیم. می‌خواهیم ثابت کنیم که:



$$\text{۲ قائمه} < \hat{A}+\hat{B}+\hat{C} < \text{۴ قائمه}$$

برای اثبات، مقطعی قائم از آن را رسم می‌کنیم و نقطهٔ O را در درون آن انتخاب می‌نماییم. از نقطهٔ O نیمخطهای OA'، OB' و OC' را عمود بر ضلعهای مقطع و عمود OP را عمود بر یکی از قاعده‌ها و در جهت ضلعها و قاعده‌ها رسم می‌کنیم و فرض می‌کنیم:

$$B'\hat{O}C'=a\ ,\ C'\hat{O}A'=b\ ,\ A'\hat{O}B'=c$$

$$P\hat{O}A'=x\ ,\ P\hat{O}B'=y\ ,\ P\hat{O}C'=z$$

با توجه به کنجهای سه وجهی $O.PB'C'$ و $O.PC'A'$ داریم:

$y+z+a<$ ۴ قائمه و $y+z>a;$

$z+x+b<$ ۴ قائمه و $z+x>b;$

$x+y+c<$ ۴ قائمه و $x+y>c$

با جمع کردن عضوهای متناظر رابطه‌های اخیر و با توجه به این که ۴ قائمه $=a+b+c$ است، چون OA'، OB' و OC' عمود بر وجه‌های جانبی هستند، خواهیم داشت:

$x+y+z<$ ۴ قائمه و $x+y+z>$ ۲ قائمه

اما: $x=$ ۲ قائمه $-A$، $y=$ ۲ قائمه $-B$ و $z=$ ۲ قائمه $-C$

از این نامساویها نتیجه می‌شود:

$A+B+C>$ ۲ قائمه و $A+B+C<$ ۴ قائمه

این نامساویها وقتی برقرارند که منشور قائم است و یا وجه‌های جانبی روی صفحهٔ قاعده قرار می‌گیرند.

۴.۲. یال، ارتفاع، قطر

۱.۴.۲. یال

۱.۱.۴.۲. اندازهٔ یال

۱۲۵. ضلع قاعده و ارتفاع منشور را با a نشان دهید و $KB = x$.

از فرض مسأله نتیجه می‌شود تصویر KM روی صفحهٔ قاعده، موازی با نیمساز زاویه C از مثلث ABC است. داریم :

$$MC_1 = a - 2x \;,\; B_1M = 2x$$

اگر L_1 تصویر L بر روی AC باشد، با توجه به فرض داریم :

$$L_1C = a - 2x \;،\; LL_1 = AL_1(\frac{\sqrt{3}}{2})$$

بنابراین مقدارهایی که AL_1 قبول می‌کند، چنین است :

$$AL_1 = a - MC_1 = a - (a - 2x) = 2x \qquad (1)$$

$$AL_1 = a + (a + 2x) = 2(a - x) \qquad (2)$$

در حالت اول :

$$KL^2 = KL_1^2 + LL_1^2 = a^2 + 10x^2 - 4ax$$

در حالت دوم :

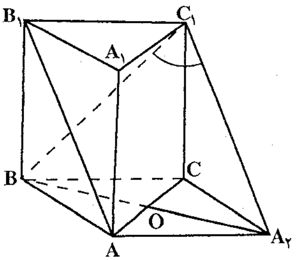
$$KL^2 = 6(a - x)^2$$

در هر دو حالت $KM^2 = 3x^2 + a^2$.

با حل دستگاه معادلات دو مقدار برای a به دست می‌آید :

$$a_1 = \frac{7}{\sqrt{97}} \;،\; a_2 = \frac{\sqrt{6} + \sqrt{14}}{8}$$

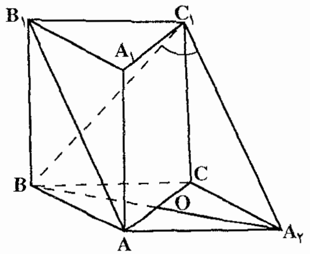
جواب : $\frac{\sqrt{6} + \sqrt{14}}{8}$ و $\frac{7}{\sqrt{97}}$.



۱۲۶. طول یال جانبی را با b نشان می‌دهیم و دو حالت زیر را ملاحظه می‌کنیم :

۱) $B\hat{C_1}A_2 = \mathrm{Arc}\cos(\frac{1}{4})$ (شکل الف) ؛

(الف)



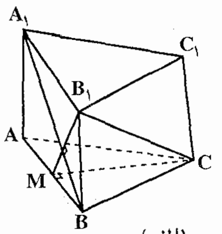
۲) $B\hat{C_1}A_2 = \pi - \operatorname{Arc}\cos(\frac{1}{4})$ (شکل ب).

(ب)

چنین داریم :

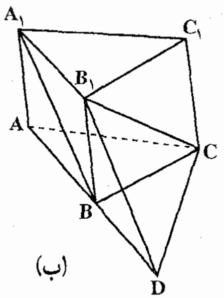
$BA_2 = a\sqrt{3}$ و $C_1A_2 = AB_1 = BC_1 = \sqrt{a^2+b^2}$ با استفاده از قانون کسینوسها در مثلث BC_1A_2 در حالت اول $3a^2 = 2\times(a^2+b^2)(1-\frac{1}{4})$ را، و به طریق مشابه در حالت دوم $3a^2 = 2(a^2+b^2)(1+\frac{1}{4})$ را داریم. از این جا درمی‌یابیم که به ترتیب $b_1 = a$ و $b_2 = \frac{a}{\sqrt{5}}$ است. بدین ترتیب مسأله دارای دو جواب خواهد بود : a یا $\frac{a}{\sqrt{5}}$

۱۲۷. بدیهی است خطهای A_1B و B_1C شامل یالهای متنافر چند وجهی است. ولی این یالها در چهاروجهی منتظم متعامد بوده و در نتیجه خطهای A_1B و B_1C نیز باید متعامد باشند.



(الف)

این شرط ما را مجاز می‌دارد تا l، طول یال جانبی مکعب را به دست آوریم. می‌دانیم که طول عمود مشترک یالهای متنافر یک چهاروجهی منتظم برابر $\frac{b}{\sqrt{2}}$ است که در آن، b طول یال چهاروجهی است. این امر بدین معنی است که اگر فاصلهٔ بین خطهای A_1B و B_1C برابر d باشد، آن‌گاه $b = d\sqrt{2}$ خواهد بود. حال با توجه به شرط ارائه شده در بالا، l، طول یال جانبی منشور را به دست می‌آوریم. قطر B_1C را روی صفحهٔ AA_1B_1B تصویر می‌کنیم. تصویر آن عبارت از خط B_1M (شکل الف) است. که در آن M میانگاه یال AB محسوب می‌شود. رابطهٔ $(B_1C)\perp(A_1B)$ موجب $(B_1M)\perp(A_1B)$ می‌شود. در این حالت مثلثهای قائم‌الزاویه MB_1B و A_1BA متشابه بوده و بنابراین $\frac{MB}{AA_1} = \frac{BB_1}{AB}$ خواهد بود. از این رابطه $\frac{a^2}{2} = l^2$ و $l = \frac{a}{\sqrt{2}}$ نتیجه می‌شود. حال فاصلهٔ بین خطهای A_1B و B_1C را تعیین می‌کنیم. خط B_1D را به صورت $B_1D \| A_1B$ رسم می‌کنیم



(ب)

(شکل ب). فاصلهٔ مطلوب برابر فاصلهٔ نقطهٔ B از صفحهٔ DB_1C است، یعنی برابر ارتفاع هرم BDB_1C رسم شده از رأس B است. حال به یافتن حجم هرمی مبادرت می‌کنیم که وجه DBC قاعدهٔ آن است. چنین داریم : $V=\frac{a^3}{4\sqrt{6}}$.

حال با منظور کردن وجه DB_1C به عنوان قاعدهٔ هرم نتیجه می‌شود که :

$$DB_1=BA_1=B_1C=\sqrt{a^2+\frac{1}{2}a^2}=a\sqrt{\frac{3}{2}}$$

مثلث DB_1C به دلیل $(DB_1)\|(A_1B)$ و $(A_1B)\perp(B_1C)$ قائم‌الزاویه است.

این امر به معنی $S_{DB_1C}=\frac{1}{2}|DB_1|.|B_1C|=3\frac{a^2}{4}$

است. با جاگذاری مقدارهای V و S_{DB_1C} در فرمول $V=\frac{1}{3}d.S_{DB_1C}$ به $d=\frac{a}{\sqrt{6}}$ وصول می‌یابیم. در تجزیه و تحلیل نهایی درمی‌یابیم که $b=\frac{d}{\sqrt{2}}=\frac{a}{\sqrt{3}}$ است و در نتیجه جواب مسأله عبارت از $\frac{a}{\sqrt{3}}$ خواهد بود.

بدیهی است که وقتی یال جانبی منشوری دارای طول حاصله در بالا باشد، آن‌گاه با ترتیب ارائه شده در فرض مسأله، می‌توان یک چند وجهی منتظمی را با آن ترکیب کرد. در این صورت قطرهای A_1B و B_1C متعامد خواهند بود. با جدا کردن پاره‌خطهایی به طول $\frac{a}{2\sqrt{3}}=\frac{b}{2}$ روی هر یک از خطهای A_1B و B_1C از طرف پای عمود مشترک آنها چهار نقطه حاصل می‌شود که رأسهای چند وجهی منتظم به شمار می‌روند.

۱۲۸. گزینهٔ (ب) درست است.

۲.۱.۴.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱۲۹. مولدهایی هستند که بر رأسهای دو قاعدهٔ آن می‌گذرند.

۱۳۰. زیرا در این صورت سطح منشوری به یک صفحه که همان صفحهٔ شامل چند ضلعی هادی است، تبدیل می‌شود.

۲.۴.۲. ارتفاع

۱.۲.۴.۲. اندازهٔ ارتفاع

۱۳۱. ارتفاع منشور را با x نشان دهید. بر امتداد یال $BB_۱$ نقطهٔ K را طوری اختیار کنیدکه:

$$BK = \frac{۳}{۲}x \text{ و } B_۱K = \frac{۵}{۲}x$$

چون KN موازی با BM و $KN = ۲BM$، پس طول تصویر KN بر روی CN دو برابر طول تصویر BM روی CN خواهد بود، یعنی برابر با: $\frac{a}{\sqrt{۵}}$.

در مثلث CNK داریم:

$$CN = \sqrt{a^۲ + \frac{x^۲}{۴}} \text{ ، } NK = \sqrt{a^۲ + ۴x^۲} \text{ و } CK = \sqrt{a^۲ + \frac{۲۵}{۴}x^۲}$$

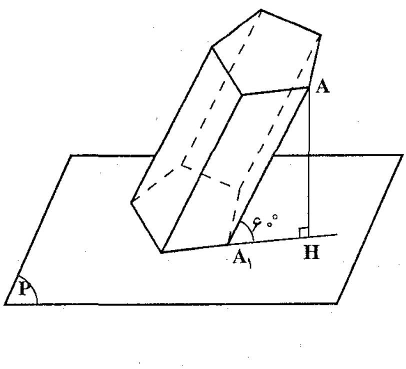
بر حسب آن که $C_۱NK$ حاده یا منفرجه باشد، دو معادلهٔ زیر را خواهیم داشت:

$$a^۲ + \frac{۲۵}{۴}x^۲ = (a^۲ + \frac{x^۲}{۴}) + (a^۲ + ۴x^۲) - ۲\sqrt{a^۲ + \frac{x^۲}{۴}} \cdot \frac{a}{\sqrt{۵}}$$

و یا:

$$a^۲ + \frac{۲۵}{۴}x^۲ = (a^۲ + \frac{x^۲}{۴}) + (a^۲ + ۴x^۲) + ۲\sqrt{a^۲ + \frac{x^۲}{۴}} \cdot \frac{a}{\sqrt{۵}}$$

جواب: a و یا $\frac{a}{۲\sqrt{۵}}$.



۱۳۲. ارتفاع منشور مایل، مساوی فاصلهٔ بین دو صفحهٔ قاعده است. که چون طول یال آن ۲۰cm است و با صفحهٔ قاعده زاویهٔ ۶۰° می‌سازد، داریم:

$\Rightarrow$ طول یال AA' = طول ارتفاع AH

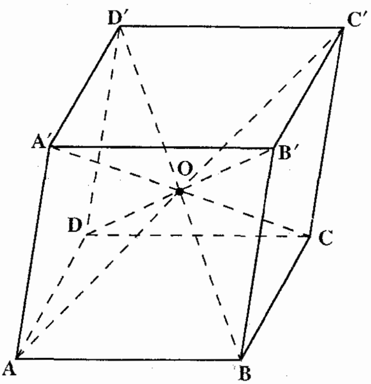
$$\text{طول ارتفاع} = ۲۰ \times \sin ۶۰^\circ = ۲۰ \times \frac{\sqrt{۳}}{۲} = ۱۰\sqrt{۳} \text{ cm}$$

$\Rightarrow$ طول ارتفاع منشور = ۱۰cm

۱۳۳. زیرا ارتفاع منشور، ضلع مجاور به زاویهٔ قائمه از مثلثی قائم‌الزاویه است که وتر آن مثلث قائم‌الزاویه، یال منشور است.

۲.۴.۳. قطر

۱۳۴. فرض می‌کنیم $ABCDA'B'C'D'$ منشور چهار پهلویی باشد که قطرهای AC' ، BD' و CA' از آن در نقطهٔ O همرس می‌باشند. AB و $D'C'$ با هم موازی‌اند ؛ زیرا فصل مشترکهای صفحهٔ (AC' و BD') با دو قاعده منشور است که این دو قاعده متوازی‌اند. اما DC موازی $D'C'$ می‌باشد، بنابراین AB موازی DC است. به روش مشابه با توجه به صفحهٔ (CA' و BD') ثابت می‌شود که BC موازی AD است. بنابراین منشور داده شده متوازی‌السطوح است. در نتیجه قطر DB' از نقطهٔ همرسی سه قطر دیگر آن می‌گذرد.



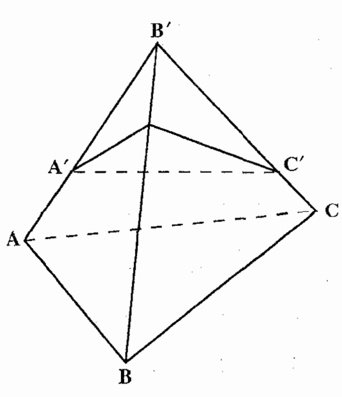
۲.۵. پاره خط

۲.۵.۱. اندازهٔ پاره خط

۱۳۵. چهار وجهی SABC و روی یالهای SA و SB نقطه‌های A' و B' را در نظر می‌گیریم. می‌خواهیم روی یال SC نقطه‌ای مانند C' چنان بیابیم که :

$$\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}}=\frac{m'}{m}$$

دیده می‌شود که دو چهار وجهی $SA'B'C'$ و SABC دارای یک کنج سه وجهی مشترک



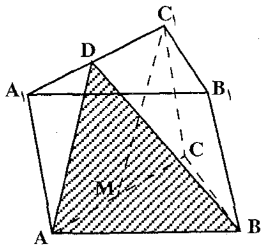
هستند. بنابراین داریم :

$$\frac{V_{SA'B'C'}}{V_{SABC}}=\frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}\Rightarrow\frac{SA'.SB'.SC'}{SA.SB.SC}=\frac{m'}{m}\Rightarrow$$

$$SC'=\frac{m'}{m}\times\frac{SA}{SA'}.\frac{SB}{SB'}.SC$$

این رابطه SC' را مشخص می‌کند و نقطهٔ C' را می‌توان تعیین کرد.
برای این که مسأله ممکن باشد، باید $SC'\le SC$ باشد و یا :

$$\frac{m'}{m}\le\frac{SA'.SB'}{SA.SB}\Rightarrow\frac{m'}{m}\le\frac{\text{مساحت}SA'B'}{\text{مساحت }SAB}$$



۱۳۶. از نقطهٔ Aی صفحهٔ AA_1C_1C ، خطی به موازات خط C_1M رسم می‌کنیم. بدیهی است که این خط از D میانگاه یال A_1C_1 عبور می‌کند (شکل) صفحهٔ AD را به موازات خط C_1M از خطهای AB عبور می‌دهیم. فاصلهٔ بین خطهای AB و C_1M برابر فاصلهٔ نقطه‌ای از خط C_1M و صفحهٔ ADB است. فاصلهٔ نقطهٔ C_1 از صفحهٔ ADB $\frac{۳}{۲}cm$ است بنابراین جواب مسأله عبارت از $\frac{۳}{۲}cm$ خواهد بود.

۱۳۷. اگر صفحه‌ای را از پاره خط مورد اشارهٔ مسأله، به موازات ABB_1A_1 مرور دهید، CB را در نقطهٔ K طوری قطع می‌کند که :

$$CK=x$$

پس تصویر این پاره‌خط بر روی وجه ABC، طولی برابر x دارد و تصویر آن بر روی یال CC_1 ، برابر با $|a-۲x|$ خواهد بود. از آن‌جا طول پاره‌خط برابر می‌شود با :

$$\sqrt{x^۲+(a-۲x)^۲}=\sqrt{۵x^۲-۴ax+a^۲}$$

کمترین مقدار طول مساوی است با : $\frac{a}{\sqrt{۵}}$

۱۳۸. دستگاه مختصات کارتزینی واقع در شکل را در نظر می‌گیریم. محور xهای این دستگاه و میانهٔ BM از مثلث ABC در صفحهٔ قاعده واقع شده و بر خط AC عمودند. بنابراین محور xها موازی خط BM خواهد بود. توجه دارید که قسمت هاشور خورده ADB از

صفحه، برشی از منشور به حساب نمی‌آید. مختصات نقطه‌های A، B، D و C_1 را به دست می‌آوریم :

$$A(0,0,0)\ ,\ B(2\sqrt{3},2,0)\ ,\ D(0,2,3)\ ,\ C_1(0,4,3)$$

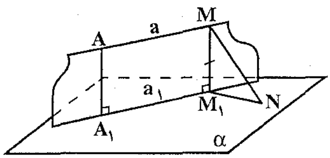
با توجه به مختصات معلوم نقطه‌های A، B و D معادلهٔ صفحهٔ ADB به دست می‌آید :

$$\sqrt{3}x-3y+2z=0$$

فاصلهٔ (ρ) نقطهٔ $C_1(0,4,3)$ از صفحهٔ مزبور را می‌توان به وسیلهٔ فرمول (۱) محاسبه کرد :

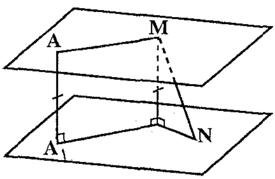
$$\rho=\frac{\left|\sqrt{3}\times 0-3\times 4+2\times 3\right|}{\sqrt{3+9+4}}=\frac{6}{4}=\frac{3}{2}$$

بنابراین جواب مسأله عبارت از $\frac{3}{2}$cm است.



(الف)

نکته. مسأله‌های مربوط به یافتن فاصله‌های یک خط و یک صفحه موازی با آن و صفحه‌های موازی به مسأله یافتن فاصلهٔ یک نقطه از یک صفحه تحویل می‌یابد. این نکته از حکمهای زیر استنتاج شده است :



(ب)

فاصلهٔ بین یک خط و یک صفحه موازی با آن، برابر فاصلهٔ نقطهٔ دلخواهی از آن خط نسبت به صفحه مفروض است. فاصلهٔ دو صفحهٔ موازی برابر با فاصلهٔ نقطهٔ دلخواهی از یک صفحه نسبت به صفحه دیگر است. حکم اول را ثابت می‌کنیم (شکل الف). حکم دوم را نیز می‌توان به طریق مشابه اثبات کرد (شکل ب).

اثبات. رابطه‌های $a\|\alpha$ ، $a\subset\alpha$ (اگر $a\subset\alpha$ باشد، آن‌گاه بدیهی است که فاصلهٔ بین آنها صفر خواهد بود) را در نظر می‌گیریم. A را نقطه‌ای دلخواه از خط a فرض می‌کنیم. $AA_1\perp\alpha$ ، را داریم (شکل الف) مطلوب قضیه این است که ثابت کنیم فاصلهٔ بین α و a برابر AA_1 است. با رسم صفحهٔ β از خط a و نقطهٔ A_1 ، $\beta\perp\alpha$ را داریم. اگر $\beta\cap\alpha=\alpha_1$ فرض شود، آن گاه $a_1\|a$ خواهد بود. نقطه‌های دلخواه $M\in a$ و $N\in\alpha$ را اختیار کرده و عمود MM_1 را در صفحهٔ β بر خط a_1 رسم می‌کنیم. آن گاه بدیهی

است که $MM_1 = AA_1$ خواهد بود.

از این گذشته $MM_1 \perp \alpha$ (به دلیل $\beta \perp \alpha$) بوده و از این رو $MN \geq MM_1$ را داریم، از این نکته استنتاج می‌شود که $MN \geq AA_1$ است. بدین ترتیب AA_1 کوتاهترین خط بین فاصله‌های نقطه‌های خط a و صفحهٔ α خواهد بود. یعنی AA_1 فاصلهٔ این شکلها خواهد بود.

۱۳۹. مثلث MBD_1 را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. عمود رسم شده از نقطهٔ M بر خط BD_1 ارتفاع این مثلث است. با درنظر گرفتن عبارت $AA_1 = b$ به $AM = MA_1 = \frac{b}{2}$ می‌رسیم.

در مثلثهای قائم‌الزاویه MAB و MA_1D_1 رابطهٔ $MB = MD_1 = \sqrt{a^2 + \frac{b^2}{4}}$ حاصل می‌شود. این امر بدین معنی است که مثلث MBD_1 متساوی‌الساقین بوده و ارتفاع رسم شده از رأس M میانه نیز هست، یعنی پای ارتفاع مزبور میانگاه پاره‌خط BD_1 است. با اتصال نقطهٔ M و N ، میانگاه قطر BD_1 ، ارتفاع رسم شده از نقطهٔ M به خط BD_1 به دست می‌آید.

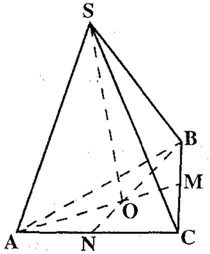
حال با یادآوری $BD_1 = \sqrt{2a^2 + b^2}$ و $BN = \frac{1}{2} BD_1$ ، از مثلث قائم‌الزاویهٔ MNB درمی‌یابیم که :

$$MN = \sqrt{MB^2 - BN^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

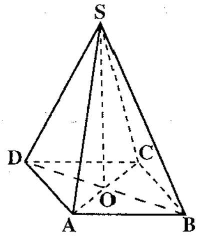
برای رسم عمودی از نقطهٔ معینی بر صفحهٔ معینی در فضا، معمول این است که موقعیت پای عمود را نسبت به نقطه‌های صفحهٔ مزبور که در شکل مشخص شده است، تعیین کنیم. شکل (الف) را اختیار می‌کنیم که در آن هرم مثلثی منتظم SABC و ارتفاع SO آن نشان داده شده است (مثلث ABC قاعدهٔ، هرم است). طبق تعریف، پای ارتفاع هرم منتظم مرکز قاعدهٔ هرم نیز هست.

مرکز مثلث متساوی‌الاضلاع ABC بر نقطهٔ برخورد میانه‌های آن منطبق است.

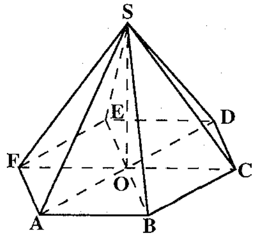
بنابراین میانه‌های AM و BN را در شکل (الف) رسم می‌کنیم. نقطهٔ O محل برخورد آنها، پای ارتفاع هرم است. پای ارتفاع هرم چهارگوش منتظم ارائه شده در شکل (ب) را می‌توان به عنوان نقطهٔ برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاعی به دست آورد که نقش قاعدهٔ هرم را بازی می‌کند و عبارت از مربع ABCD است. پای ارتفاع هرم شش وجهی منتظم ارائه شده در شکل (پ) را نیز می‌توان به طریق مشابه به دست آورد.



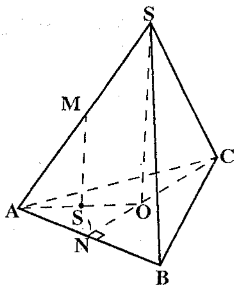
(الف)



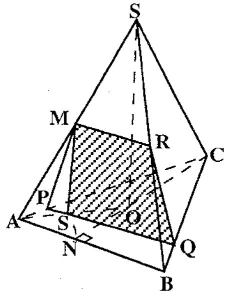
(ب)



(پ)



(ت)

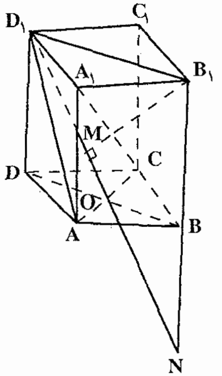


(ث)

شکلهای (ت) و (ث) رسم برشی از هرم مثلث‌القاعده منتظم SABC را نشان می‌دهد که با عبور صفحه‌ای از M، میانگاه یال SA تشکیل می‌شود.

این صفحه با ارتفاع CN قاعده هرم زاویهٔ قائمه تشکیل می‌دهد. صفحه قاطع را با α نشان می‌دهیم. به دلیل $(CN)\perp\alpha$ رابطهٔ $(ABC)\perp\alpha$ حاصل می‌شود. از این روعمود رسم شده از نقطهٔ M بر صفحهٔ ABC به صفحهٔ α متعلق خواهد بود. عمود رسم شده، با ارتفاع هرم که از رأس S رسم می‌شود، موازی است. براساس تجزیه و تحلیل انجام گرفته، ترسیمهای زیر را انجام می‌دهیم: ارتفاع SO هرم و خطهای $MS_1 \| SO$ را رسم می‌کنیم (شکل ت). ضلع برش که بر وجه ABC واقع است، بر خط CN عمود بوده و از این‌رو موازی یال AB می‌باشد. از نقطهٔ S_1 خطی براساس $PQ \| AB$ رسم می‌کنیم (شکل ث). از موازی بودن PQ و AB نتیجه می‌شود که ضلع برش که بر وجه ASB واقع است با یال AB نیز موازی است. خط MR را براساس $MR \| AB$ رسم می‌کنیم. برش حاصل عبارت از ذوزنقهٔ PMRQ است.

۱۴۰. می‌دانیم که صفحه‌های AD_1C و BB_1D_1D متعامد هستند. فصل مشترک این صفحه‌ها عبارت از خط DO است (شکل). اگر B_1M را در صفحهٔ BB_1D_1D بر خط DO عمود



رسم کنیم، آن‌گاه $B_1M \perp AD_1C$ خواهد بود. فرض می‌کنیم که $N = D_1O \cap BB_1$ است.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ NB_1D_1 $(N\hat{B_1}D_1 = 90^\circ)$ رابطهٔ $B_1D_1 = a\sqrt{2}$ و در نتیجه $NB_1 = 2b$ را داریم. در نتیجه چنین استنتاج می‌شود:

$$ND_1 = \sqrt{NB_1^2 + B_1D_1^2} = \sqrt{4b^2 + 2a^2}$$

پاره‌خط B_1M ارتفاع مثلث NB_1D_1 است. آن‌گاه از یک طرف در مورد مساحت این مثلث $S = \frac{1}{2}NB_1.B_1D_1$ و از طرف دیگر $S = \frac{1}{2}ND_1.B_1M$ را داریم. از این‌رو $B_1M.ND_1 = B_1D_1.NB_1$، یعنی رابطهٔ زیر استنتاج می‌شود:

$$B_1M = \frac{B_1D_1.NB_1}{ND_1} = \frac{2ab}{\sqrt{2b^2 + a^2}}$$

۱.۱.۵.۲. رابطهٔ بین پاره‌خطها

۱۴۱. فرض کنیم قاعدهٔ منشور n ضلعی $A_1A_2 \ldots A_n$ و مرکز دایرهٔ محیطی آن O باشد. اگر صفحهٔ معینی یالهای منشور را در نقطه‌های $B_1B_2 \ldots B_n$ قطع کند، و M در این صفحه طوری قرار داشته باشد که، MO بر صفحهٔ قاعدهٔ منشور عمود بشود، در آن صورت تساویهای زیر برقرار می‌شود:

$$\sum_{k=1}^{n} A_kB_k = nMO \qquad (1)$$

$$V = S \times MO \qquad (2)$$

که در آن V حجم آن قسمت از منشور است که، بین قاعده و صفحه‌ای که مرور داده شده محصور است.

اثبات تساوی (۱) به ازای مقدارهای زوج n، بدیهی است. اگر n فرد باشد، مثلث $A_kA_{k+1}A_1$ را در نظر بگیرید که در آن A_1 بیشترین فاصله را از A_k و A_{k+1} دارا می‌باشد. اگر C_k و C'_k بترتیب وسطهای A_kA_{k+1} و B_kB_{k+1} باشند، آن‌گاه:

$$\frac{C_kO}{OA_1} = \cos\frac{\pi}{n} = \lambda$$

اکنون به آسانی ثابت می‌شود که :

$$MO=\frac{C_kC'_k+(A_1B_1)\lambda}{1+\lambda}=\frac{\frac{1}{2}(A_kB_k+A_{k+1}B_{k+1})+(A_1B_1)\lambda}{1+\lambda}$$

با جمع کردن این تساویها به ازای تمام مقدارهای k، (به ازای $k=n$ و به جای $n+1$ ، ۱، اختیار کنید)، حکم (۱) نتیجه می‌شود.

برای اثبات تساوی (۲) چند وجهی $A_kA_{k+1}OB_kB_{k+1}M$ را درنظر بگیرید. اگر V_k حجم این چند وجهی باشد، آن‌گاه با استفاده از فرمول سیمسون خواهیم داشت :

$$V_k=\frac{b_n}{6}\left(\frac{A_kB_k+A_{k+1}B_{k+1}}{2}a_n+4\frac{A_kB_k+A_{k+1}B_{k+1}+2MO}{2}\cdot\frac{a_n}{2}\right)$$
$$=a_nb_n(A_kB_k+A_{k+1}B_{k+1}+MO)$$
$$=\frac{S}{3n}(A_kB_k+A_{k+1}B_{k+1}+MO)$$

که در آن a_n و b_n ضلع و سهم چند وجهی $A_1A_2\cdots A_n$ می‌باشند.

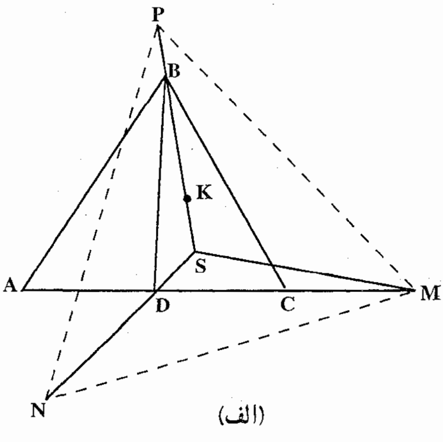
از جمع کردن این تساویها به ازای همهٔ مقدارهای k و با توجه به (۱)، تساوی (۲) را نتیجه می‌گیریم. اکنون به آسانی می‌توان جواب مسأله را به دست آورد که برابر است با $\frac{nV}{S}$.

۲.۱.۵.۲. نسبت پاره خطها

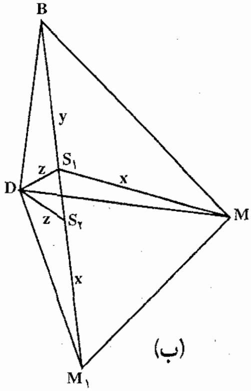
۱۴۲. نسبت خواسته شده $\frac{3}{5}$ است.

۱۴۳. چند وجهی مفروض را روی صفحهٔ ABC تصویر کنید (شکل). تصویرهای A_1 ، B_1 و C_1 روی شکل نشان داده نشده‌اند، زیرا بر نقطه‌های A، B و C منطبق هستند.

S_1 و D_1 را به ترتیب تصویرهای S و D در نظر بگیرید. اگر نقطهٔ K را روی PS_1 طوری اختیار کنید که $PK=ND_1$ ، آن‌گاه نقطهٔ K، در نقطهٔ K_1 تصویر خواهد شد و در آن نقطه،



(الف)



(ب)

PS صفحهٔ $A_1B_1C_1$ را قطع می‌کند. پس نسبت خواسته شده برابر است با :

$$\frac{KB}{BP}=\frac{ND_1-PB}{PB}=\frac{(S_1N-D_1S_1)-(PS_1-BS_1)}{PS_1-BS_1}$$

$$=\frac{BS_1-D_1S_1}{S_1M-BS_1} \qquad (۱)$$

در نتیجه مسأله منجر می‌شود به پیدا کردن پاره‌خطهای S_1M، BS_1 و D_1S_1. در این‌جا S_1 نقطه‌ای است که از آن نقطه، ضلعهای مثلث BD_1M به یک زاویه دیده می‌شوند. BD_1M مثلث قائم‌الزاویه‌ای به ضلعهای $D_1M=۲a$ و $BD_1=a\sqrt{۳}$ می‌باشد. اگر $S_1M=x$ و $S_1B=y$ و $S_1D_1=z$، مثلث D_1S_1M را به اندازهٔ ۶۰° حول نقطهٔ D_1 دوران دهید (شکل ب)، مثلث $D_1S_1S_2$ متساوی‌الاضلاع و به ضلع z می‌باشد. نقطه‌های B، S_1، S_2 و M_1 بر یک استقامت قرار دارند و $B\hat{D_1}M_1=۱۵۰^\circ$. از مثلث BD_1M_1 نتیجه می‌شود،

$$x+y+z=a\sqrt{۱۳}$$

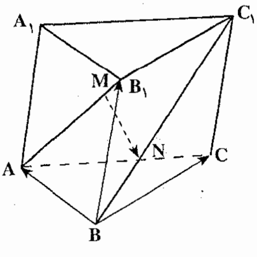
طول ارتفاع وارد بر ضلع BM_1 از مثلث BD_1M_1 برابر است با، $a\sqrt{\frac{۳}{۱۳}}$.

پس $z=\frac{۲a}{\sqrt{۱۳}}$ و $y+\frac{z}{۲}=\sqrt{۳a^۲-\frac{۳a^۲}{۱۳}}=\frac{۶a}{۱۳}$.

از آن‌جا به آسانی نتیجه می‌شود :

$$x=\frac{۶a}{\sqrt{۱۳}} \text{ و } y=\frac{۵a}{\sqrt{۱۳}}$$

با قراردادن حاصل در (۱)، نسبت مطلوب پیدا می‌شود، که برابر است با ۳. (اندازه‌گیری از رأس B انجام می‌گیرد.)



۱۴۴. به دلیل $MN\perp AB$، رابطهٔ $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BA}=۰$ استنتاج می‌گردد. بردار $\overrightarrow{MN}$ را برحسب بردارهای ناهمصفحهٔ $\overrightarrow{BA}$، $\overrightarrow{BC}$ و $\overrightarrow{BB_1}$ بیان می‌کنیم (شکل).

اگر عبارتهای $\frac{MB_1}{AB_1}=x$ ، $\frac{BN}{BC_1}=y$ را در نظر بگیریم، آن‌گاه رابطهٔ زیر را خواهیم داشت :

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MB_1}+\overrightarrow{B_1B}+\overrightarrow{BN}=x\overrightarrow{AB_1}-\overrightarrow{BB_1}+y\overrightarrow{BC_1}=$$
$$=x(\overrightarrow{BB_1}-\overrightarrow{BA})-\overrightarrow{BB_1}+y(\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{BC})=$$
$$=-x\overrightarrow{BA}+y\overrightarrow{BC}+(x+y-1)\overrightarrow{BB_1}$$

بامنظور کردن $\left|\overrightarrow{BA}\right|=\left|\overrightarrow{BC}\right|=\left|\overrightarrow{BB_1}\right|=a$ ، $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BC}=\frac{a^2}{2}$ و $\overrightarrow{BA}.\overrightarrow{BB_1}=\overrightarrow{BC}.\overrightarrow{BB_1}=0$

و با توجه به این که $\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BA}=0$ و $\left|\overrightarrow{MN}\right|^2=\frac{a^2}{3}$ ، دستگاه زیر حاصل می‌شود :

$$\begin{cases}-xa^2+\frac{y}{2}a^2=0\\ x^2a^2+y^2a^2+(x+y-1)^2a^2-xya^3=\frac{a^2}{3}\end{cases}$$

از معادلهٔ اول دستگاه $y=2x$ و بنابراین از معادلهٔ دوم نیز $36x^2-18x+2=0$ حاصل می‌شود. از این معادله، $x_1=\frac{1}{3}$ و $x_2=\frac{1}{6}$ به دست می‌آید. متناظراً $y_1=\frac{2}{3}$ و $y_2=\frac{1}{3}$ حاصل می‌شود.

از این‌رو به آسانی دریافت می‌شود که یا $\frac{AM}{MB_1}=\frac{BN}{NC_1}=\frac{2}{1}$ یا $\frac{BN}{NC_1}=\frac{1}{2}$ ، $\frac{AM}{MB_1}=\frac{5}{1}$ خواهد بود، بنابراین جواب مسأله عبارت از $\frac{AM}{MB_1}=\frac{BN}{NC_1}=\frac{2}{1}$ و یا به صورت زیر است :

$$\frac{AM}{MB_1}=\frac{5}{1} \text{ و } \frac{BN}{NC_1}=\frac{1}{2}$$

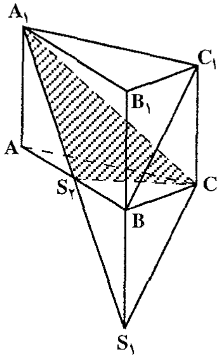
۱۴۵. صفحهٔ برش را با α نشان می‌دهیم. فصل مشترک صفحه‌های α و BB_1C_1C از نقطهٔ C به موازات وسط BC_1 عبور می‌کند (شکل). نقطهٔ برخورد آن را با خط BB_1 با S_1 نشان می‌دهیم. نقطهٔ S_1 ، بین صفحه‌های α و AA_1B_1B مشترک است. نقطهٔ مشترک دیگر A_1 است که در فرض مسأله ارائه شده است. با رسم خط A_1S_1 رأس S_2 برش

حاصل می‌شود. برش طرح شده، مثلث A_1CS_2 است. حال نسبت $\frac{AS_2}{S_2B}$ را تعیین می کنیم.

از تشابه مثلثهای A_1AS_2 و S_1BS_2 به $\frac{AS_2}{S_2B}=\frac{AA_1}{BS_1}$ می‌رسیم.

چون S_1BC_1C یک متوازی‌الاضلاع است $(BS_1 \| C_1C \ , \ BC_1 \| S_1C)$ از این رو داریم :

$$BS_1 = C_1C$$



با منظور کردن $AA_1 = C_1C$ به $\frac{AS_2}{S_2B}=\frac{1}{1}$ دست می‌یابیم.

۶.۲. شعاع کره

۱.۶.۲. اندازهٔ شعاع کره

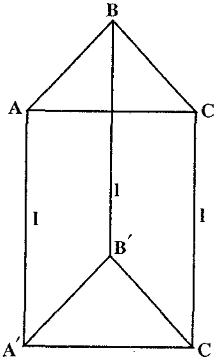
۱۴۶. در شش ضلعی منتظم به ضلع a، بزرگترین قطر قاعده مساوی 2a است. بنابراین بزرگترین قطر قاعدهٔ این منشور مساوی ۱۲ = ۶ × ۲ است. چون ارتفاع منشور نیز برابر بزرگترین قطر قاعده، یعنی ۱۲ است و این مقدار، قطر کرهٔ موردنظر است، پس شعاع این کره ۶ = ۲ ÷ ۱۲ است.

۷.۲. مساحت

۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت جانبی

۱۴۷. وجه‌های جانبی منشور قائم، مستطیلهایی هستند که اندازهٔ یک ضلع آنها مساوی h، ارتفاع منشور و ضلعهای دیگر آنها، ضلعهای چند ضلعی قاعدهٔ منشور می‌باشند. به‌عنوان



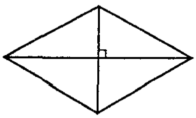
مثال، در یک منشور سه پهلوی قائم $ABCA'B'C'$ داریم :

$$S_{\text{جانبی}} = S_{AA'B'B} + S_{BB'C'C} + S_{CC'A'A}$$
$$= A'B' \times l + B'C' \times l + C'A' \times l =$$
$$= (A'B' + B'C' + C'A') \times l = \text{محیط مثلث } A'B'C' \times l$$

۱۴۸. داریم :

$$\Rightarrow \text{طول یال} \times \text{محیط قاعده} = S_{\text{جانبی منشور قائم}}$$
$$S_{\text{جانبی منشور قائم}} = ۳۴ \times ۳ = ۱۰۲$$

۱۴۹. اگر اندازهٔ هر ضلع لوزی را a بنامیم، داریم :



$$a = \sqrt{(\frac{۴}{۲})^۲ + (\frac{۳}{۲})^۲} = \frac{۵}{۲} \Rightarrow$$
$$\text{محیط قاعده} = ۴ \times \frac{۵}{۲} = ۱۰ \Rightarrow$$
$$\text{ارتفاع منشور} = ۱۰$$
$$S_{\text{جانبی منشور قائم}} = \text{محیط قاعده} \times \text{ارتفاع} = ۱۰ \times ۱۰ = ۱۰۰$$

۱۵۰. در منشور قائم داریم :

$$\Rightarrow \text{طول ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = S_{\text{جانبی}}$$
$$S_{\text{جانبی}} = (۴+۹+۵+۶) \times ۱۲ = ۲۸۸$$

۱۵۱. در منشور قائم داریم :

$$\Rightarrow \text{طول ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = S_{\text{جانبی}}$$
$$S_{\text{جانبی}} = (۲+۵+۷+۷+۸\frac{۱}{۲}) \times ۸ = ۲۳۶$$

۱۵۲. بزرگترین قطر در شش ضلعی منتظم (به‌طورکلی در هر n ضلعی منتظم) برابر قطر دایرهٔ محیطی آن است. پس : $۲R = ۱۸ \Rightarrow R = ۹$

اما در شش ضلعی منتظم شعاع دایرهٔ محیطی با ضلع شش ضلعی برابر است، یعنی :

$C_۶ = ۹$

پس داریم :

ارتفاع × محیط قاعده = سطح جانبی منشور $\Rightarrow$ cm ۵۴ = ۹×۶ = محیط قاعده

سطح جانبی منشور = $۵۴ \times ۱۰ = ۵۴۰\ cm^۲$

۱۵۳. داریم:

۱۸ = ۲ ÷ ۳۶ = ارتفاع منشور $\Rightarrow$ ۳۶ = ۶×۶ = محیط قاعده

جانبی S = محیط قاعده × طول ارتفاع $\Rightarrow$ جانبی S = ۳۶×۱۸ = ۶۴۸

۱۵۴. می‌دانیم که:

طول یال × محیط مقطع قائم = مساحت جانبی منشور مایل

بنابراین داریم:

جانبی منشور $S = (۶ \times ۵) \times ۱۰ = ۳۰۰\ cm^۲$

۲.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت کل

۱۵۵. با توجه به این که منشور داده شده قائم است و مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، مساوی $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$ است، داریم:

جانبی S = محیط قاعده × ارتفاع = $(۳ \times ۶) \times ۱۰ = ۱۸۰$

یک قاعده $S = \frac{(۶)^۲ \times \sqrt{۳}}{۴} = ۹\sqrt{۳} \Rightarrow$ دو قاعده $S = ۱۸\sqrt{۳}$

$\Rightarrow$ کل $S = ۱۸۰ + ۱۸\sqrt{۳}$

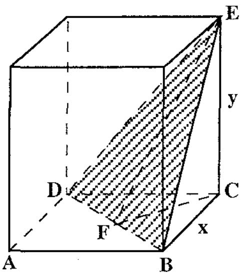
$\Rightarrow$ کل S = جانبی S + ۲ × قاعده S

$\Rightarrow$ کل $S = ۱۸۰ + ۱۸\sqrt{۳}$

۱۵۶. یال قاعده را x و یال جانبی را y می‌گیریم (شکل).

در این صورت:

$$S = \frac{۱}{۲}x^۲ + xy + \frac{۱}{۲}DB.EF$$



سطح کل منشور $S_n = ۲x^۲ + ۴xy$. برابری اول را ۴ برابر می‌کنیم، از مقایسهٔ برابری حاصل با برابری اخیر به دست می‌آید:

$$S_n = ۴S - ۲DB.EF$$

از طرف دیگر داریم :

$$DB = BC\sqrt{۲} = x\sqrt{۲}\ ; EF = FB\,\text{cotg}\frac{\alpha}{۲} = \frac{x\sqrt{۲}}{۲}\text{cotg}\frac{\alpha}{۲}$$

y را بر حسب x بیان می‌کنیم :

$$y = EC = \sqrt{EF^۲ - FC^۲} = \sqrt{\frac{x^۲}{۲}\text{cotg}^۲\frac{\alpha}{۲} - \frac{x^۲}{۲}} =$$

$$= \frac{x}{\sqrt{۲}}\sqrt{\frac{\cos^۲\frac{\alpha}{۲}}{\sin^۲\frac{\alpha}{۲}} - ۱} = \frac{x\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{۲}\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

اکنون می‌توان x را پیدا کرد :

$$S = \frac{۱}{۲}x^۲ + xy + \frac{۱}{۲}DB.EF = \frac{۱}{۲}x^۲ + \frac{x^۲\sqrt{\cos\alpha}}{\sqrt{۲}\sin\frac{\alpha}{۲}} + \frac{۱}{۲}x\sqrt{۲}.\frac{x\sqrt{۲}}{۲}\text{cotg}\frac{\alpha}{۲} =$$

$$= \frac{x^۲}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}(\sin\frac{\alpha}{۲} + \sqrt{۲\cos\alpha} + \cos\frac{\alpha}{۲});$$

$$x = \sqrt{\frac{۲S\sin\frac{\alpha}{۲}}{\sin\frac{\alpha}{۲} + \sqrt{۲\cos\alpha} + \cos\frac{\alpha}{۲}}}$$

و برای سطح کل مجهول داریم :

$$S_n = ۴S - ۲x\sqrt{۲}.\frac{x\sqrt{۲}}{۲}\text{cotg}\frac{\alpha}{۲} = ۴S - ۲x^۲\,\text{cotg}\frac{\alpha}{۲} =$$

$$= ۴S - \frac{۴S\sin\frac{\alpha}{۲}\text{cotg}\frac{\alpha}{۲}}{\sin\frac{\alpha}{۲} + \sqrt{۲\cos\alpha} + \cos\frac{\alpha}{۲}} = ۴S.\frac{\sin\frac{\alpha}{۲} + \sqrt{۲\cos\alpha}}{\sin\frac{\alpha}{۲} + \sqrt{۲\cos\alpha} + \cos\frac{\alpha}{۲}}$$

۳.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت مقطع

۱۵۷. اگر $\circ < \alpha < \frac{\pi}{۶}$، آن‌گاه :

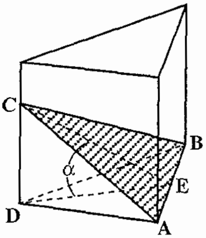
$$S = \frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲\cos\alpha}$$

اگر $\frac{\pi}{6} \le \alpha < \mathrm{Arc}\tan\frac{2}{\sqrt{3}}$، آن‌گاه :

$$S = \frac{a^2}{6\cos\alpha}(18\,\mathrm{cotg}\alpha - 3\sqrt{3} - 2\sqrt{3}\,\mathrm{cotg}^2\alpha)$$

اگر $\mathrm{Arc}\tan\frac{2}{\sqrt{3}} \le \alpha < \frac{\pi}{2}$، آن‌گاه :

$$S = \frac{a^2}{\sqrt{3}\sin\alpha}(\sqrt{3} + \mathrm{cotg}\alpha)$$



۱۵۸. مساحت مجهول را S و مساحت مثلث ABD را S_1 می‌گیریم (شکل). می‌دانیم که مساحت تصویر یک شکل مسطح، برابر است با مساحت خود شکل، ضرب در کسینوس زاویهٔ بین صفحهٔ تصویر و صفحهٔ شکل : $S_1 = S\cos\alpha$. از آن‌جا :

$$S = \frac{S_1}{\cos\alpha}\left(S_1 = \frac{AB^2\sin 60^\circ}{2} = \frac{\sqrt{3}}{4}AB^2\right)$$

طبق شرط داریم : $\frac{1}{3}S_1.CD = V$. ولی چون

$$CD = DE.\tan\alpha = AB\sin 60^\circ\tan\alpha = \frac{\sqrt{3}}{2}AB\tan\alpha$$

پس :

$$V = \frac{1}{3}.\frac{\sqrt{3}}{4}AB^2.\frac{\sqrt{3}}{2}AB\tan\alpha = \frac{1}{8}AB^3\tan\alpha \Rightarrow AB = 2\sqrt[3]{V.\mathrm{cotg}\alpha}$$

به این ترتیب، مساحت مجهول، چنین می‌شود :

$$S = \frac{S_1}{\cos\alpha} = \frac{\sqrt[3]{V^2\,\mathrm{cotg}^2\alpha}.\sqrt{3}}{\cos\alpha}$$

۱۵۹. مساحت مقطع خواسته شده $\frac{2a}{3}\sqrt{4R^2 - a^2}$ است.

۴.۱.۷.۲. اندازهٔ مساحت جانبی و مساحت کل

۱۶۰. چون منشور قائم است و مساحت شش ضلعی منتظم به ضلع a مساوی $\frac{3\sqrt{3}a^2}{2}$ می‌باشد، بنابراین داریم :

$\Rightarrow$ طول ارتفاع × محیط قاعده = S جانبی منشور

$$S_{\text{جانبی}} = (۶\times ۱۰)\times ۱۸ = ۱۰۸۰ \ \text{cm}^۲$$

$$S_{\text{یک قاعده}} = \frac{۳\sqrt{۳}(۱۰)^۲}{۲} = ۱۵۰\sqrt{۳} \ \text{cm}^۲$$

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + ۲\times S_{\text{یک قاعده}} \Rightarrow$$

$$S_{\text{کل}} = ۱۰۸۰ + ۳۰۰\sqrt{۳}\text{cm}^۲$$

۱۶۱. داریم :

$$S_{\text{جانبی}} = (۳\times ۸)\times ۱۲ = ۲۸۸ \ \text{cm}^۲$$

$$S_{\text{یک قاعده}} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{(۸)^۲\times\sqrt{۳}}{۴} = ۱۶\sqrt{۳} \ \text{cm}^۲$$

$$\Rightarrow S_{\text{کل}} = ۲۸۸ + ۱۶\sqrt{۳} \ \text{cm}^۲$$

۲.۷.۱.۵. اندازهٔ مساحت جانبی، مساحت مقطع

۱۶۲. داریم :

$\Rightarrow$ ارتفاع × محیط قاعده = S جانبی منشور قائم

$$S_{\text{جانبی}} = (۲\times ۶)\times ۷ = ۸۴ \ \text{cm}^۲$$

مساحت مقطع موازی قاعده، مساوی مساحت قاعدهٔ منشور است. بنابراین داریم :

$$S_{\text{مقطع}} = S_{\text{قاعده}} = \frac{۳\sqrt{۳}a^۲}{۲} = \frac{۳\sqrt{۳}(۲)^۲}{۲} = ۶\sqrt{۳} \ \text{cm}^۲$$

۲.۸. حجم

۲.۸.۱. اندازهٔ حجم

۲.۸.۱.۱. اندازهٔ حجم منشور

۱۶۳. فرض می‌کنیم V حجم و A اندازهٔ سطح جانبی منشور باشد، می‌دانیم که :

طول یال × اندازه مساحت مقطع قائم = V = حجم

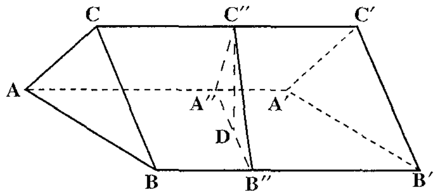
طول یال × محیط مقطع قائم = A = سطح جانبی

از آن‌جا نتیجه می‌شود :

$$\frac{V}{A}=\frac{\text{مساحت مقطع قائم}}{\text{محیط مقطع قائم}}$$

اما ما می‌دانیم که اگر r شعاع دایرهٔ محاطی درونی مقطع قائم باشد، داریم:

$$\text{مساحت مقطع قائم} = \frac{۱}{۲}\times \text{محیط} \times r \Rightarrow \frac{V}{A}=\frac{r}{۲} \Rightarrow V=A.\frac{r}{۲}$$



۱۶۴. می‌دانیم که مساحت سطح جانبی هر منشور برابر است با حاصل‌ضرب اندازهٔ مساحت یک مقطع قائم از آن، در طول یال جانبی‌اش.
حال اگر $A''B''C''$ یک مقطع قائم از منشور $ABCDA'B'C'D'$ و $C''D$ یک ارتفاع از مثلث $A''B''C''$ باشد، داریم:

$$V=S_{A''B''C''}\times AA'=\frac{۱}{۲}A''B''\times C''D\times AA'$$

اما $C''D$ بر صفحهٔ $ABB'A'$ عمود است و فاصلهٔ یال CC' از این وجه را مشخص می‌کند. بعلاوه $A''B''\times AA'$ مساوی مساحت $ABB'A'$ است. پس حکم مسأله درست است.

۱۶۵. حجم منشور خواسته شده مساوی $۱۲V$ است.

۱۶۶. فرض می‌کنیم a، b، c، S و R ؛ضلعها، مساحت یک قاعده و شعاع دایرهٔ محیطی این قاعده باشند و ارتفاع منشور را h می‌گیریم. داریم:

$$\text{حجم منشور} = Sh$$

اما بنا به فرض، $h=۴R$ است و از طرف دیگر می‌دانیم که در مثلث قاعدهٔ منشور $abc=۴RS$ است. از آن‌جا: $V=abc$.
یعنی منشور داده شده، معادل متوازی‌السطوح قائمی به یالهای a، b و c است.

۱۶۷. دو حالت اتفاق می‌افتد:

۱) ضلعهای جانبی ذوزنقه، تصویرهای یالهای AB و $B_۱C_۱$ هستند.

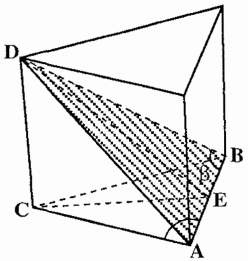
می‌توان ثابت کرد که در این حالت، مرکز کره، نقطهٔ C می‌شود. و حجم هرم برابر است با $\frac{۳a^۳}{۸}$.

۲) ضلعهای جانبی ذوزنقه (ساقها) تصویرهای یالهای AB و A_1C_1 هستند. در این حالت، مرکز کره بر مرکز دایرهٔ محیطی ذوزنقه $ABC_1'A_1'$ تصویر می‌شود.

ارتفاع ذوزنقه برابر است با $\frac{a\sqrt{5}}{3}$. و حجم منشور برابر است با، $\frac{a^3\sqrt{5}}{4}$.

جواب: $\frac{3a^3}{8}$ یا $\frac{a^3\sqrt{5}}{4}$.

۱۶۸. ضلع AB قاعده را x می‌نامیم (شکل). حجم مطلوب چنین است:



$$V = S_{ABC}.CD = \frac{1}{2}AB.CE.CD =$$

$$= \frac{1}{2}AB.AE\tan\alpha.CD =$$

$$= \frac{1}{2}x.\frac{x}{2}\tan\alpha.CD = \frac{1}{4}x^2\tan\alpha.CD$$

اکنون CD را برحسب x محاسبه می‌کنیم:

$$CD = \sqrt{DE^2 - EC^2} = \sqrt{(\frac{x}{2}\tan\beta)^2 - (\frac{x}{2}\tan\alpha)^2} = \frac{x}{2}\sqrt{\tan^2\beta - \tan^2\alpha} =$$

$$= \frac{x\sqrt{\sin^2\beta\cos^2\alpha - \sin^2\alpha\cos^2\beta}}{2\cos\alpha\cos\beta} = \frac{x\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}}{2\cos\alpha\cos\beta}$$

برای محاسبهٔ x، به طور مثال مثلث ABC را در نظر می‌گیریم. داریم:

$$2p = AB + BC + CA = AB + 2CA = x + \frac{2x}{2\cos\alpha} =$$

$$= x.\frac{1+\cos\alpha}{\cos\alpha} = \frac{2x\cos^2\frac{\alpha}{2}}{\cos\alpha}$$

و از آنجا $x = \frac{p\cos\alpha}{\cos^2\frac{\alpha}{2}}$ و

$$V = \frac{1}{4}x^2\tan\alpha.CD = \frac{x^3\tan\alpha}{8}.\frac{\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}}{\cos\alpha\cos\beta} =$$

$$=\frac{p^{۳}\cos^{۳}\alpha\tan\alpha}{۸\cos^{۶}\frac{\alpha}{۲}\cos\alpha\cos\beta}\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}=$$

$$=\frac{p^{۳}\sin ۲\alpha\sqrt{\sin(\beta+\alpha)\sin(\beta-\alpha)}}{۱۶\cos^{۶}\frac{\alpha}{۲}\cos\beta}$$

۱۶۹. داریم :

$$\text{طول ضلع لوزی}=\sqrt{(\frac{۸}{۲})^{۲}+(\frac{۶}{۲})^{۲}}=۵\text{cm}\Rightarrow$$

$$\text{محیط لوزی}=۴\times۵=۲۰\text{cm}\Rightarrow$$

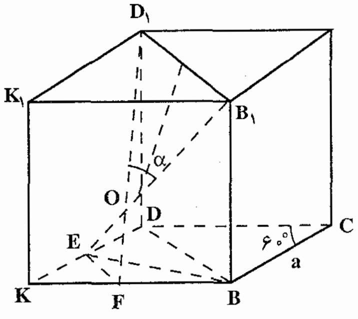
$$\text{ارتفاع منشور قائم}=۲۰\div۲=۱۰\text{cm}$$

$$\text{قاعده } S=\frac{۱}{۲}\times۶\times۸=۲۴\text{cm}^{۲}$$

$$\text{اندازه ارتفاع}\times\text{مساحت قاعده}=\text{حجم منشور قائم}\Rightarrow$$

$$\text{حجم منشور}=۲۴\times۱۰=۲۴۰\text{cm}^{۳}$$

۱۷۰. مساحت قاعده و ارتفاع منشور را S و H می‌گیریم، یعنی برای حجم مجهول V داریم :



$$V=S.H=a^{۲}\sin۶۰^{\circ}.H=\frac{a^{۲}H\sqrt{۳}}{۲}$$

از مثلث $B_۱EB$ (شکل) به دست می‌آید :

$$H=BB_۱=\sqrt{B_۱E^{۲}-BE^{۲}}$$

که در آن :

$$BE=KB\sin۶۰^{\circ}=\frac{a\sqrt{۳}}{۲} \quad \text{و} \quad B_۱E=B_۱O+OE$$

مثلثهای KDB و $K_۱D_۱B_۱$ متساوی‌الاضلاعند، به ضلع برابر a ؛ و EF پاره‌خطی است که وسط دوضلع مثلث KDB را به هم وصل کرده است، بنابراین :

$$B_۱E=\frac{a}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}+\frac{a}{۴\sin\frac{\alpha}{۲}}=\frac{۳a}{۴\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

به این ترتیب :

$$H=\sqrt{\frac{۹a^۲}{۱۶\sin^۲\frac{\alpha}{۲}}-\frac{۳}{۴}a^۲}=\frac{a\sqrt{۳}}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\frac{۳}{۴}-\sin^۲\frac{\alpha}{۲}}=$$

$$=\frac{a\sqrt{۳}}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\sin^۲ ۶۰^\circ-\sin^۲\frac{\alpha}{۲}}=\frac{a\sqrt{۳}}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\frac{\cos\alpha-\cos ۱۲۰^\circ}{۲}}=$$

$$=\frac{a\sqrt{۳}}{۲\sin\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\sin(۶۰^\circ+\frac{\alpha}{۲})\sin(۶۰^\circ-\frac{\alpha}{۲})}$$

$$V=\frac{۳a^۳}{۴\sin\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\sin(۶۰^\circ+\frac{\alpha}{۲})\sin(۶۰^\circ-\frac{\alpha}{۲})}$$

۱۷۱. داریم :

$$V=\text{حجم منشور منتظم}=\text{مساحت قاعده}\times\text{طول ارتفاع}\Rightarrow$$

$$V=\frac{۳\sqrt{۳}\times(۲)^۲}{۲}\times ۱۰=۶۰\sqrt{۳}$$

۱۷۲. ارتفاع منشور را که فاصلهٔ بین دو قاعده است به دست می‌آوریم. از A عمود $A'H$ را بر صفحهٔ قاعده رسم می‌کنیم. داریم :

$$\Delta A'AH':\ A'H=AA'\sin ۶۰^\circ=۱۲\times\sin ۶۰^\circ=۱۲\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=۶\sqrt{۳}$$

$$S_{\text{قاعده}}=\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{۱۴۴\sqrt{۳}}{۴}=۳۶\sqrt{۳}$$

$$\text{حجم منشور}=\text{سطح قاعده}\times\text{ارتفاع}=۳۶\sqrt{۳}\times۶\sqrt{۳}=۶۴۸$$

۱۷۳. داریم :

$$\Delta AA'H: A'H=AA'\sin ۶۰^\circ\Rightarrow$$

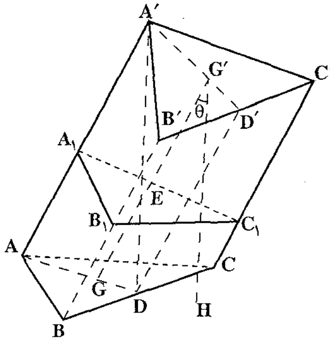
$$A'H=\sqrt{۳}\sin ۶۰^\circ=\sqrt{۳}\times\frac{\sqrt{۳}}{۲}=\frac{۳}{۲}\text{ارتفاع}$$

$$\text{مساحت قاعده}=(\sqrt{۳})^۲=۳\Rightarrow$$

$$\text{حجم منشور}=\text{سطح قاعده}\times\text{ارتفاع}=۳\times\frac{۳}{۲}=\frac{۹}{۲}$$

۱۷۴. منشور ناقص $ABCA'B'C'$ را در نظر می‌گیریم. مقطع قائم $A_1B_1C_1$ از آن را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که اندازهٔ حجم این مخروط ناقص برابر است با :

$$V = \text{مساحت}\ A_1B_1C_1 \times \frac{AA'+BB'+CC'}{۳}$$



موضوع عبارت است از این که ثابت کنیم $GG' = \frac{AA'+BB'+CC'}{۳}$. با توجه به این که G و G' مرکز ثقل مثلثهای دو قاعده است، میانه‌های AD و $A'D'$، و سپس DD' و GG' و قطر $A'D$ از ذوزنقهٔ $AA'D'D$ را رسم می‌کنیم و نقطهٔ برخورد $A'D$ و GG' را E می‌نامیم. با توجه به این که GG' موازی قاعده‌های این ذوزنقه می‌باشد، داریم :

$$\frac{EG}{AA'} = \frac{DG}{DA} = \frac{۱}{۳} \Rightarrow EG = \frac{AA'}{۳}$$

$$\frac{EG'}{DD'} = \frac{A'G'}{A'D'} = \frac{۲}{۳} \Rightarrow EG' = \frac{۲DD'}{۳}$$

اما در ذوزنقهٔ $BCC'B'$، $۲DD' = BB'+CC'$ ؛ بنابراین :

$$EG' = \frac{BB'+CC'}{۳}$$

از نتیجه خواهیم داشت :
$$GG' = GE + EG' = \frac{AA'+BB'+CC'}{۳}$$

۱۷۵. فرض می‌کنیم b و b_1 بترتیب مساحت قاعدهٔ ABC و مقطع $A_1B_1C_1$ و θ زاویهٔ حاده بین صفحه‌های این دو باشد. چون $A_1B_1C_1$ را می‌توان تصویر ABC در نظر گرفت، می‌توان نوشت $b_1 = b\cos\theta$.

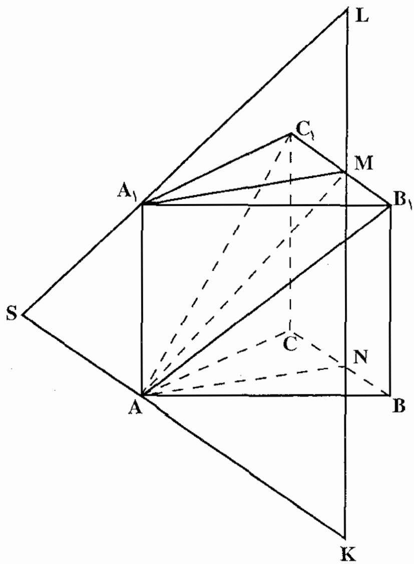
عمود $G'H$ را بر صفحهٔ ABC رسم می‌کنیم. $G'G$ و $G'H$ که بر صفحه‌های $A_1B_1C_1$ و ABC عمودند، با هم زاویه‌ای مساوی θ می‌سازند. بنابراین در مثلث قائم‌الزاویهٔ $G'HG(\hat{H} = ۹۰^\circ)$، داریم :

$$G'H = G'G\cos\theta$$

می‌دانیم که حجم منشور ناقص برابر است با $V = b_1 \times G'G$. از آن‌جا :

$$V = b\cos\theta \times \frac{G'H}{\cos\theta} = G'H \times b$$

۲.۱.۸.۲. اندازهٔ حجم شکلهای ایجاد شده



۱۷۶. از یال AA_1 صفحه‌ای را عمود بر صفحهٔ BCC_1B_1 مرور دهید (شکل). اگر M و N محل برخورد این صفحه‌ها با C_1B_1 و CB باشند، روی MN نقطهٔ K را طوری اختیار کنید که $NK = MN$. پس AA_1MN مربع می‌شود و از آن‌جا AK بر AM عمود است. پس AK بر صفحهٔ AC_1B_1 عمود می‌شود، یعنی AK خطی راست است که در طول آن، صفحه‌هایی که از رأس A می‌گذرند، همدیگر را قطع می‌کنند.

به طریق مشابه، نقطهٔ L برای رأس A_1 تعیین می‌شود. خطهای AK و A_1L همدیگر را در S قطع می‌کنند. بنابراین چندوجهی ما، عبارت از هرم چهاربر SKPLQ خواهد بود که رأس آن S و قاعدهٔ آن در صفحهٔ BB_1C_1C قرار دارد. علاوه بر آن B_1N تصویر AB_1 می‌شود. بنابراین صفحه‌ای که از A گذشته و بر AB_1 عمود می‌شود، صفحهٔ BB_1C_1C را در خط راستی عمود بر B_1N قطع می‌کند. از فرض مسأله نتیجه می‌شود که مثلث B_1NC_1 متساوی‌الاضلاع است. پس چهارضلعی PLQK که قاعدهٔ هرم SPLQK را تشکیل می‌دهد، لوزی می‌شود که از دو مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $KL = 3a$ ساخته شده است.

جواب : $\frac{9a^3\sqrt{3}}{4}$

۱۷۷. حجم منشور جدید مساوی حاصل‌ضرب حجم منشور قدیم در مکعب نسبت به تجانس، یعنی ضرب در ۸ است. اختلاف این دو حجم جواب مسأله است. بنابراین با توجه به

داده‌های مسأله حجم موردنظر برابر است با : $V=\frac{۷h}{۴}a^۲\sqrt{۳}$

۱۷۸. منشور هشت‌وجهی مساوی است با منشور مربع‌القاعده، به اضافهٔ چهارمنشور مثلث‌القاعده به قاعدهٔ ABE، منهای ۸ هرم به قاعدهٔ ABE. بنابراین حجم خواسته شده برابر است با :

$$V=a^۲h+۴ABE-۸ABE.\frac{h}{۳}$$

$$V=a^۲h+\frac{۴}{۳}ABE.h=\frac{h}{۳}(۳a^۲+۴ABE)$$

امّا : $۴ABE=a^۲(\sqrt{۲}-۱)$

پس داریم :

$$V=\frac{۱}{۳}a^۲h(۳+\sqrt{۲}-۱)\Rightarrow V=\frac{۱}{۳}a^۲h(۲+\sqrt{۲})$$

۲.۸.۲. نسبت حجمها

۱۷۹. حجم منشورها را $V_۱$ و $V_۲$ و مساحت قاعدهٔ این دو را بترتیب $S_۱$ و $S_۲$، و اندازهٔ مشترک ارتفاعهای آنها را h فرض می‌کنیم. داریم :

$$S_۱=۳S_۲$$

$$V_۱=S_۱\times h=۳S_۲\times h$$

$$V_۲=S_۲\times h\Rightarrow\frac{V_۱}{V_۲}=\frac{۳S_۲\times h}{S_۲\times h}=۳$$

۳.۸.۲. رابطهٔ بین حجمها

۱۸۰. از نقطه‌های U و V خطهایی موازی یالهای جانبی منشور رسم می‌کنیم تا قاعدهٔ ABC را در نقطه‌های u و v قطع کنند و uv را رسم می‌کنیم. از فرض قضیه نتیجه می‌شود که uv، مثلث ABC را قطع نمی‌کند.

چهاروجهیهای 'UVAA'، uVAA و 'uvAA هم‌ارزند. زیرا هر یک از آنها، از قبلی، با جابه‌جایی یک رأس روی خطی موازی با وجه مقابلش حاصل می‌شود. اما

اندازهٔ حجم $uvAA'$ برابر است با :

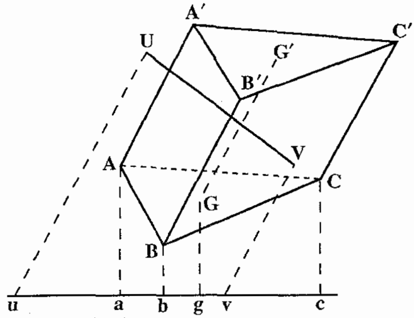
$$\frac{1}{3}S_{Auv}\times h=\frac{1}{6}uv\times Aa\times h$$

Aa فاصلهٔ A از خط uv و h ارتفاع منشور است، از آن‌جا :

$$V.(UVAA')=\frac{1}{6}uv\times Aa\times h$$

$$V.(UVBB')=\frac{1}{6}uv\times Bb\times h$$

$$V.(UVCC')=\frac{1}{6}uv\times Cc\times h$$



از جمع کردن عضوهای متناظر این سه تساوی نتیجه می‌شود :

$$V.(UVAA')+V.(UVBB')+V.(UVCC')=\frac{1}{6}uv(Aa+Bb+Cc)\times h$$

اما چون uv خارج مثلث ABC است، اگر G مرکز ثقل این مثلث و g تصویر آن روی uv باشد، داریم :

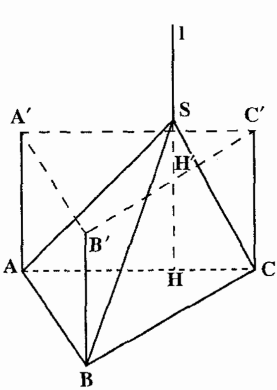
$$Aa+Bb+Cc=3Gg$$

و از آن‌جا مجموع حجمهای این سه چهاروجهی برابر است با :

$$3\times\frac{1}{6}uv\times Gg\times h$$

یعنی مساوی است با سه برابر حجم چهاروجهی $UVGG'$.

۱۸۱. نقطهٔ مشترک قاعده‌های بالایی سه منشور اولیه را I می‌نامیم. این قاعده‌ها را روی صفحهٔ خودشان و به موازات خودشان چنان می‌لغزانیم که رأسهای واقع بر یالهای جانبی گذرنده بر S به نقطهٔ I منتقل شوند. منشورهای $SBCIB'C'$، $SABIA'B'$ و $SCAIC'A'$ را خواهیم داشت که بترتیب با سه منشور اولی هم‌ارز هستند. باید نشان دهیم که مجموع حجم این سه منشور، مساوی حجم منشور $ABCA'B'C'$ است. برای اثبات، با توجه



به فرض، سه منشور اولیه در برون چهاروجهی ساخته شده‌اند.

دو نقطهٔ I و C در دو طرف صفحهٔ SAB قرار دارند. به طور مشابه دو نقطهٔ I و A، I و B در دو طرف صفحهٔ SBC و SCA قرار دارند. بنابراین نقطهٔ I در کنج سه وجهی متقابل به رأس با کنج S.ABC قرار دارد و این، ثابت می‌کند که IS، مثلث ABC را در نقطه‌ای واقع در درون آن قطع می‌کند.

اما اگر بر اثر یک لغزاندن، SI را به HH' منتقل کنیم، حجم سه منشور اولیه تغییر نخواهد کرد. دیده می‌شود وقتی H' در صفحهٔ $A'B'C'$ است، که منشور $ABCA'B'C'$، مساوی مجموع سه منشور $ABHA'B'H'$، $BCHB'C'H'$ و $CAHC'A'H'$ باشد.

۴.۸.۲. اندازهٔ سطح جانبی و حجم منشور

۱۸۲. می‌دانیم که اگر V حجم و S مساحت جانبی منشور $ABCA'B'C'$ باشند، داریم:

$AA' \times$ محیط مقطع قائم $= S$ و $AA' \times$ مساحت مقطع قائم $= V$

اما تمام منشورها همین مقطع قائم و همین طول یال AA' را دارند، پس V و S ثابت هستند.

۵.۸.۲. اندازهٔ سطح جانبی، سطح کل و حجم منشور

۱۸۳. داریم:

ضلع لوزی $= \sqrt{۹+۱۶} = \sqrt{۲۵} = ۵\text{cm} \Rightarrow$

محیط قاعده $= ۴\times ۵ \Rightarrow h = ۲۰$ ارتفاع منشور

سطح جانبی = محیط قاعده × طول ارتفاع $= ۲۰\times ۲۰ = ۴۰۰\text{cm}^۲$

یک قاعده $S = \frac{۶\times ۸}{۲} = ۲۴\text{cm}^۲ \Rightarrow$

دو قاعده $S = ۴۸\text{cm}^۲$

سطح کل منشور = سطح جانبی + سطح دو قاعده

سطح کل منشور $= ۴۰۰ + ۴۸ = ۴۴۸\text{cm}^۲$

حجم منشور = سطح قاعده × ارتفاع $= ۲۴\times ۲۰ = ۴۸۰\text{cm}^۳$

۱۸۴. $۳a =$ محیط قاعده $\Rightarrow$ ضلع مثلث متساوی‌الاضلاع $= a$

$$\text{جانبی منشور } S = \text{محیط قاعده} \times \text{ارتفاع} = ۳a \times ۳a = ۹a^۲$$

$$\text{قاعده } S = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} \Rightarrow \text{دو قاعده } S = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۲} \Rightarrow$$

$$\text{کل } S = ۹a^۲ + \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\text{حجم منشور} = \text{سطح قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} \times ۳a = \frac{۳\sqrt{۳}a^۳}{۴}$$

۱۸۵. داریم:

$$OH = \text{سهم قاعده} = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\text{سطح قاعده} = \frac{۱}{۲}(۶ \times a \times \frac{a\sqrt{۳}}{۲}) \Rightarrow \text{قاعده } S = \frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲}$$

$$\text{حجم منشور } V = \text{سطح قاعده} \times \text{ارتفاع} = \frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲} \times ۲a = ۳\sqrt{۳}a^۳$$

$$\text{جانبی } S = \text{محیط قاعده} \times \text{ارتفاع} = ۶a \times ۲a = ۱۲a^۲$$

$$\text{کل } S = \text{جانبی } S + \text{دو قاعده } S = ۱۲a^۲ + ۲(\frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲}) = ۳a^۲(۴ + ۳\sqrt{۳})$$

۹.۲. رابطهٔ متری

۱۸۶. فرض می‌کنیم که A'، B'، C' و D' دارای طول مثبت و در یک صفحه باشند. در این صورت یقیناً خواهیم داشت:

$$\text{حجم } ABDA'B'D' + \text{حجم } BCDB'C'D' = \text{حجم } ABCA'B'C' + \text{حجم } ACDA'C'D'$$

امّا، با ملاحظهٔ این که مساحتهای مقطعهای قائم این منشورهای ناقص مثلث‌القاعده، متناسب با γ، α، δ و β هستند، داریم:

$$\gamma \times \frac{x'+y'+t'}{۳} + \alpha \times \frac{y'+z'+t'}{۳} = \delta \times \frac{x'+y'+z'}{۳} + \beta \times \frac{x'+z'+t'}{۳}$$

اما چون که $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ است، داریم:

$$\alpha x'_۱ - \beta y'_۱ + \gamma z'_۱ - \delta t'_۱ = ۰$$

اکنون فرض می‌کنیم که طولهای A'، B'، C' و D' همگی مثبت نباشند؛ یک مقطع $A_1B_1C_1D_1$ موازی $ABCD$ را با فرض این که x'_1، y'_1، z'_1 و t'_1 طول نقطه‌های A'، B'، C' و D' (با در نظر گرفتن آرایش جدید A_1، B_1، C_1 و D_1) مثبت باشند، در نظر می‌گیریم. خواهیم داشت:

(۱) $$\alpha x'_1 - \beta y'_1 + \gamma z'_1 - \delta t'_1 = 0$$

امّا: $$\overline{AA_1} = \overline{AA'} + \overline{A'A_1}$$

از آن‌جا: $$x'_1 = x' - h$$

و به طور مشابه: $$y'_1 = y' - h \text{ ، } z'_1 = z' - h \text{ و } t'_1 = t' - h$$

با در نظر گرفتن $AA_1 = BB_1 = L = h$ و رابطهٔ (۱) می‌توان نوشت:

$$\alpha(x' - h) - \beta(y' - h) + \gamma(z' - h) - \delta(t' - h) = 0$$

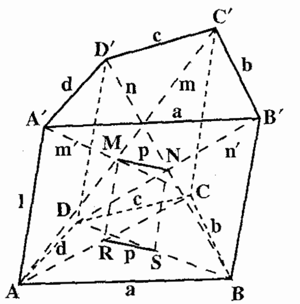
و چون که $\alpha + \gamma = \beta + \delta$ است، داریم:

(۲) $$\alpha x' - \beta y' + \gamma z' - \delta t' = 0$$

بعکس اگر x'، y'، z' و t' در رابطهٔ (۲) صدق کنند، A'، B'، C' و D' در یک صفحه قرار دارند. درنتیجه اگر D'' نقطهٔ برخورد صفحهٔ $A'B'C'$ با یال DD' باشد، داریم:

(۳) $$\alpha x' - \beta y' + \gamma z' - \delta t' = 0$$

از (۲) و (۳) نتیجه می‌شود که D'' بر D' منطبق است.



۱۸۸. منشور چهارپهلوی $ABCDA'B'C'D'$ را در نظر می‌گیریم. قطرهای AC' و $A'C$ در نقطهٔ M که وسط آنهاست یکدیگر را قطع می‌کنند، زیرا $ACC'A'$ متوازی‌الاضلاع است. به همان صورت BD' و $B'D$ در نقطهٔ N که وسط آنهاست یکدیگر را قطع می‌کنند.

فرض می‌کنیم که $AB = A'B' = a$ ، $BC = B'C' = b$ ، $CD = C'D' = c$ ، $DA = D'A' = d$ ، $AC' = m$ ، $A'C = m'$ ، $BD' = n$ ، $B'D = n'$ و $MN = p$ و طول یالهای جانبی منشور مساوی l باشد. می‌خواهیم ثابت کنیم که:

$$2(a^2 + b^2 + c^2 + d^2) + 4l^2 = m^2 + m'^2 + n^2 + n'^2 + 8p^2$$

خطهایی که از نقطه‌های M و N موازی AA' رسم می‌شوند، از وسطهای قطرهای AC و BD از چهارضلعی ABCD می‌گذرند و $RS = MN = p$ است.
می‌دانیم که در چهارضلعی ABCD،

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = AC^2+BD^2+4p^2 \qquad (1)$$

است. اما بنا به قضیهٔ اول میانه‌ها در مثلثهای ACA' و BDB' داریم:

$$AC^2+l^2=\frac{1}{2}(m^2+m'^2) \quad \text{و}$$

$$BD^2+l^2=\frac{1}{2}(n^2+n'^2)$$

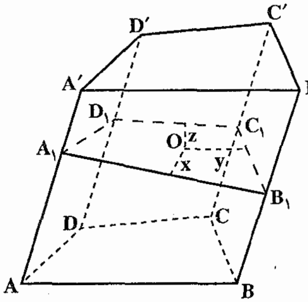
بنابراین رابطهٔ (۱) به صورت زیر درمی‌آید:

$$a^2+b^2+c^2+d^2=\frac{1}{2}(m^2+m'^2+n^2+n'^2)-2l^2+4p^2$$

و نهایتاً داریم:

$$2(a^2+b^2+c^2+d^2)+4l^2=m^2+m'^2+n^2+n'^2+8p^2$$

۱۸۹. منشور $ABCDA'B'C'D'$ را که مقطع قائم آن یک چندضلعی متساوی‌الاضلاع است، و نقطهٔ O واقع در درون این جسم را در نظر می‌گیریم. مجموع فاصلهٔ نقطهٔ O از دو قاعده، مساوی ارتفاع منشور است؛ پس کافی است ثابت کنیم که مجموع فاصلهٔ نقطهٔ O از وجه‌های منشور مقدار ثابتی است.



برای اثبات از نقطهٔ O مقطع قائم $A_1B_1C_1D_1$ را رسم می‌کنیم و از این نقطه عمودهایی بر وجه‌های منشور رسم می‌کنیم. این عمودها شامل عمودهایی هستند که از نقطهٔ O برضلعهای مقطع قائم رسم می‌شوند. a را اندازهٔ مشترک ضلعهای مقطع $A_1B_1C_1D_1$ ؛ x، y، z،... را فاصله‌های نقطهٔ O از وجه‌های جانبی منشور، l را طول یالهای منشور، b را اندازهٔ مساحتهای قاعده و V را حجم منشور فرض می‌کنیم.
نقطهٔ O را به رأسهای منشور وصل می‌کنیم. منشور به هرمهایی به رأس O تقسیم می‌شوند. قاعدهٔ دو تا از این هرمها، قاعدهٔ منشور است و مجموع حجم آنها مساوی است با $\frac{V}{3}$. قاعدهٔ هرمهای دیگر وجه‌های جانبی منشور است و مجموع حجم آنها برابر

است با :

$$\frac{۱}{۳}al(x+y+z+\cdots)$$

از آن‌جا داریم :

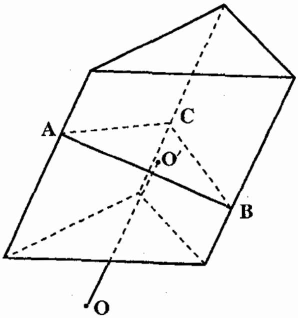
$$V=\frac{V}{۳}+\frac{۱}{۳}al(x+y+z+\cdots)\Rightarrow$$

$$x+y+z+\cdots=\frac{۲V}{al}$$

بنابراین مجموع فاصلهٔ نقطهٔ O از وجه‌های جانبی منشور مقدار ثابتی است.

۱۰.۲. مکان هندسی

۱۹۰. منشوری مثلث‌القاعده به یال l و مقطع قائم ABC از آن و نقطهٔ دلخواه O را در نظر می‌گیریم. از نقطهٔ O خطی موازی یالهای منشور رسم می‌کنیم تا صفحهٔ مقطع قائم را در نقطهٔ 'O قطع کند. هرمهایی که قاعدهٔ آنها وجه‌های جانبی منشور و رأس آنها نقطهٔ O است، با هرمهایی که قاعدهٔ آنها همان وجه‌های جانبی منشور و رأس آنها نقطهٔ 'O باشد، معادل (هم‌ارز) می‌باشند، زیرا 'OO با قاعده‌های آنها موازی است.



از طرفی می‌دانیم که این سه هرم با هم معادلند. بنابراین اگر ضلعهای مثلث ABC را a، b و c و فاصلهٔ نقطهٔ O از ضلعهای این مثلث را بترتیب x، y و z بنامیم، داریم :

$$\frac{۱}{۳}alx=\frac{۱}{۳}bly=\frac{۱}{۳}clz\Rightarrow$$

$$\frac{۱}{۲}ax=\frac{۱}{۲}by=\frac{۱}{۲}cz$$

اما تساوی اخیر نشان می‌دهد که مثلثهای O'BC ،O'CA و O'AB معادلند. در نتیجه نقطهٔ 'O محل برخورد میانه‌های مثلث ABC است، و مکان هندسی نقطهٔ O خطی است که از این نقطه به موازات یالهای منشور رسم می‌شود.

۱۹۱. پاسخ، تنها نقطهٔ O، مرکز مثلث ABC.

۲.۱۱. رسم

۲.۱۱.۱. رسم صفحه

۱۹۲. منشور ناقص مثلث‌القاعدهٔ $ABCA'B'C'$ به یالهای $AA'=a$، $BB'=b$ ، $CC'=c$ ، و یک صفحهٔ گذرنده بر یال AA' را در نظر می‌گیریم. این صفحه، وجه روبه‌رو را در خط DD' که موازی یالهای جانبی است قطع می‌کند.

صفحهٔ $AA'D$ به وسیلهٔ نسبت $\frac{DB}{DC}=\frac{m}{n}$ که آن را محاسبه خواهیم کرد، مشخص می‌شود. مقطع قائم $A''B''C''$ را رسم می‌کنیم و هم‌ارزی دو منشور $ABDA'B'D'$ و $ACDA'C'D'$ را بررسی می‌کنیم. خواهیم داشت:

$$S_{A''B''D''}\times\frac{a+b+DD'}{۳}=S_{A''C''D''}\times\frac{a+c+DD'}{۳}\Rightarrow$$

$$\frac{S_{A''B''D''}}{S_{A''C''D''}}=\frac{a+c+DD'}{a+b+DD'}$$

امّا:

$$\frac{S_{A''B''D''}}{S_{A''C''D''}}=\frac{B''D''}{C''D''}=\frac{m}{n}$$

بعلاوه در ذوزنقهٔ $BCC'B'$ داریم:

$$DD'=\frac{mc+nb}{m+n}$$

و از آن‌جا:

$$\frac{m}{n}=\frac{(a+۲c)m+(a+b+c)n}{(a+b+c)m+(a+۲b)n}$$

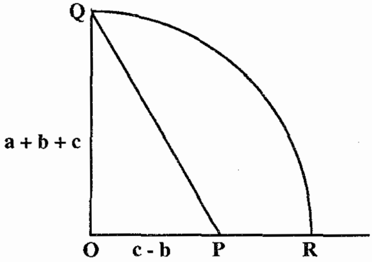
یا:

$$(a+b+c)\frac{m^{۲}}{n^{۲}}+۲(b-c)\frac{m}{n}-(a+b+c)=۰$$

این معادله دو ریشهٔ مختلف‌العلامه دارد. ریشهٔ مثبت جواب است و داریم:

$$\frac{m}{n}=\frac{c-b+\sqrt{(c-b)^{۲}+(a+b+c)^{۲}}}{a+b+c}$$

اینک، روی یک خط راست، $OP=c-b$ را جدا می‌کنیم و روی خط عمود بر OP



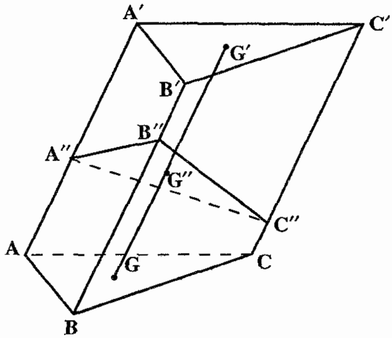
در نقطهٔ O، پاره‌خط $OQ = a + b + c$ را می‌سازیم. داریم:

$$PQ = \sqrt{(c-b)^{2} + (a+b+c)^{2}}$$

حال اگر PQ را به PR انتقال دهیم (شکل)، داریم:

$$OR = c - b + \sqrt{(c-b)^{2} + (a+b+c)^{2}}$$

و $\frac{OR}{OQ} = \frac{m}{n}$. اکنون برای تعیین نقطهٔ D، کافی است پاره‌خط BC را به نسبت OR و OQ تقسیم کنیم.

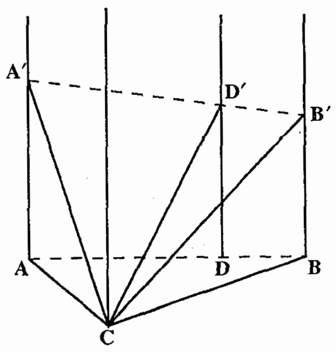


۱۹۳. منشور $ABCA'B'C'$ و مقطع $A''B''C''$ از آن را که در این جسم دو منشور ناقص هم‌ارز درست می‌کند، در نظر می‌گیریم، و خط GG' که مرکز ثقلهای دو مثلث ABC و $A'B'C'$ را به هم وصل می‌کند رسم می‌نماییم. این خط، صفحهٔ $A''B''C''$ را در نقطهٔ G'' که محل برخورد میانه‌های آن است قطع می‌کند.

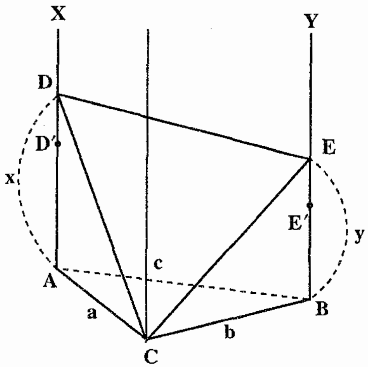
می‌دانیم که: $GG' \times$ مساحت مقطع قائم = حجم منشور ناقص

امّا $ABCA''B''C''$ و $A'B'C'A''B''C''$ دارای مقطعهای قائم مساوی هستند. بنابراین برای آن که معادل هم باشند، لازم و کافی است که $GG'' = G''G'$ باشد.

مسأله بیشمار جواب دارد. تمام صفحه‌هایی که بر نقطهٔ G'' وسط پاره‌خط GG' بگذرند و قاعده‌ها را قطع نکنند، جواب مسأله‌اند.



۱۹۴. فرض می‌کنیم ABC یک مقطع قائم از سطح منشوری باشد. چون مقطعهای این سطح با صفحه‌های موازی، با هم مساوی هستند، می‌توان فرض کرد که صفحه‌هایی که موردنظر برای رسم هستند، از یکی از رأسهای مثلث ABC به عنوان مثال از رأس C می‌گذرند. $A'B'C$ را مقطعی



می‌گیریم که با مثلث داده شدهٔ $A''B''C''$ متشابه است. ارتفاع CD' را رسم می‌کنیم و سپس $D'D$ را موازی AA' رسم می‌نماییم و در مثلث $A''B''C''$ ارتفاع $C''D''$ را رسم می‌کنیم. برای آن که مثلث $A'B'C$ با مثلث $A''B''C''$ متشابه باشد، لازم و کافی است که :

$$\frac{D'A'}{D'B'}=\frac{D''A''}{D''B''} \qquad (۱)$$

$$\frac{D'A'}{D'C}=\frac{D''A''}{D''C''} \qquad \text{و } (۲)$$

رابطهٔ (۱) نشان می‌دهد که نقطهٔ D' باید متعلق به خطی موازی یالهای جانبی باشد، که از نقطهٔ D واقع بر AB مشخص شده با $\frac{DA}{DB}=\frac{D''A''}{D''B''}$، رسم می‌شود. و رابطهٔ (۲) نشان می‌دهد که مقطع $CD'A'$ از منشور به مقطع قائم CDA، مثلثی متشابه با یک مثلث قائم‌الزاویه داده شده $C''D''A''$ است. بنابراین مسأله حل خواهد شد، در صورتی که بدانیم چگونه یک سطح مخروطی مثلث‌القاعده را با صفحه‌ای قطع کنیم که مقطع، یک مثلث قائم‌الزاویه متشابه با مثلث قائم‌الزاویهٔ داده شده‌ای باشد.

یک سطح منشوری با مقطع قائم ABC را که اندازهٔ ضلعهای آن b،a و c است، و یک صفحه که این سطح منشوری را تحت مثلث قائم‌الزاویهٔ CDE $(\hat{C}=۹۰^\circ)$، چنان قطع کند که $\frac{CD}{CE}$ مساوی مقدار معلوم $\frac{\beta}{\alpha}$ باشد، در نظر می‌گیریم. این صفحه به وسیلهٔ رابطه‌های زیر مشخص می‌شود :

$$\frac{CD^۲}{CE^۲}=\frac{\beta^۲}{\alpha^۲} \text{ و } DE^۲=CD^۲+CE^۲$$

دو محور همجهت روی یالهای گذرنده بر رأسهای A و B در نظر می‌گیریم و فرض می‌کنیم $\overline{AD}=x$ و $\overline{BE}=y$ باشد. دستگاه زیر را خواهیم داشت :

$$\frac{x^۲+b^۲}{y^۲+a^۲}=\frac{\beta^۲}{\alpha^۲} \qquad (۳)$$

$$۲xy=c^۲-b^۲-a^۲=-۲ab\cos\hat{C} \qquad \text{و } (۴)$$

$\hat{C}$ زاویهٔ $A\hat{C}B$ را نشان می‌دهد.
روش جبری حل این دستگاه ثابت است. امّا می‌خواهیم به روش هندسی آن را حل کنیم. طول دلخواهی مانند u اختیار می‌کنیم و قرار می‌هیم:

$x^2 = ux'$ و $y^2 = uy'$ و $a^2 = ua'$ و $b^2 = ub'$ و $\alpha^2 = u\alpha'$ و $\beta^2 = u\beta'$

در این صورت داریم:

$$(3)\ \frac{x^2+b^2}{y^2+a^2} = \frac{\beta^2}{\alpha^2} \Rightarrow \frac{x'+b'}{y'+a'} = \frac{\beta'}{\alpha'} \qquad (3)'$$

$$(4)\ xy = ab\cos\hat{C}\ ,\ \ xy\cos\hat{C} < 0\ \ \Rightarrow$$

$$x^2y^2 = a^2b^2\cos^2\hat{C} \Rightarrow x'y' = a'b'\cos^2\hat{C} \quad xy\cos\hat{C} < 0 \quad (4)'$$

اگر D' و E' نقطه‌هایی با طولهای x' و y' باشند، رابطهٔ $(3)'$ نشان می‌دهد که وقتی x' و y' تغییر می‌کنند، نقطه‌های D' و E' روی AX و BY پاره‌خطهای متناسب ایجاد می‌کنند. بنابراین خط $D'E'$ از نقطهٔ ثابتی مانند P می‌گذرد. برای تعیین نقطهٔ C دو حالت خاص از رابطهٔ $(3)'$ را در نظر می‌گیریم.

$$x'_1 = \beta' - b'\ ،\ y'_1 = \alpha' - a'$$

$$x'_2 = -\beta' - b'\ ،\ y'_2 = -\alpha' - a'$$

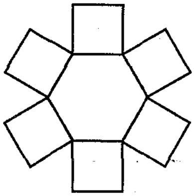
این مقدارها با دو نقطهٔ D'_1، E'_1 و D'_2 و E'_2 متناظرند. در این صورت نقطهٔ P محل برخورد $D'_1E'_1$ و $D'_2E'_2$ است، و چون $(x'_1 - x'_2)(y'_1 - y'_2) = 4\alpha'\beta'$ مثبت است، $D'_1E'_1$ و $D'_2E'_2$ همجهت هستند و این نشان می‌دهد که نقطهٔ P خارج بخشی از صفحه قرار دارد که به وسیلهٔ خطهای متوازی AX و BY محدود شده است.
اینک رابطهٔ $(4)'$ را تفسیر می‌کنیم. این رابطه نشان می‌دهد که پوش $D'E'$ یک مقطع مخروطی است که یکی از محورهایش AB است، و این مقطع مخروطی با دایرهٔ (Γ) به قطر AB یکی می‌شود، در صورتی که $a'b'\cos^2\hat{C} = \frac{c^2}{4}$ باشد. یا

$\frac{a^2b^2}{u^2}\cos^2\hat{C} = \frac{c^2}{4}$، و از آنجا $u = \frac{2ab\cos\hat{C}}{c}$.

در صورتی که u این مقدار را داشته باشد، خط $D'E'$ مماسی خواهد بود که از نقطهٔ P بر نیمدایرهٔ (Γ) که پایین AB قرار دارد، رسم می‌شود. با توجه به جای نقطهٔ P که قبلاً دیدیم، این مماس همواره وجود دارد، و یکتاست؛ در صورتی که نقطه‌های D' و E'

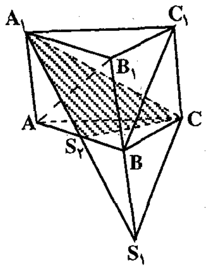
مشخص باشند، نقطه‌های D و E با استفاده از رابطه‌های $x=\varepsilon\sqrt{ux'}$ و $y=\varepsilon'\sqrt{uy'}$ با $xy\cos\hat{C}<0$ یا $\varepsilon\varepsilon'\cos\hat{C}<0$ مشخص می‌شوند.
مسأله ممکن است و دارای دو جواب متقارن نسبت به صفحهٔ ABC است.

دیده می‌شود که اگر $\hat{C}=90°$ باشد، یکی از دو مقدار x' یا y' وجود ندارد، و اگر $\alpha'=\beta'$ باشد، خط $D'E'$ هنگامی که x' و y' تغییر کنند، به موازات خودش تغییر مکان می‌دهد.

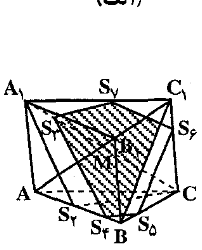


۱۹۵. الگوی موردنظر یک شش ضلعی منتظم است که روی هر ضلع آن یک مربع ساخته شده است.

۱۲.۲. برش، مقطع



(الف)



(ب)

۱۹۶. صفحه‌ای از خط مستقیم A_1C به موازات خط BC_1 رسم می‌کنیم (شکل (الف)) ($CS_1 \| C_1B$)، مثلث A_1S_2C برشی از منشور است که به وسیلهٔ صفحهٔ مزبور به وجود آمده است. صفحهٔ برش مطلوب را با α نشان می‌دهیم. این صفحه موازی فصل مشترکهای A_1C و CS_1 از صفحهٔ A_1CS_1 بوده و بنابراین $\alpha \| A_1CS_1$ خواهد بود. از این رو نتیجه می‌شود که ضلعهای برش مطلوب، با ضلعهای برش A_1S_2C که بر روی یک وجه یا وجه‌های موازی قرار دارند، موازی است. حال می‌توان برش مطلوب را رسم کرد. خط مستقیمی را از نقطهٔ M به موازات خط A_1S_2 رسم کرده و نقطه‌های برخورد آن با یالها یعنی نقطه‌های S_3 و S_4 را پیدا می‌کنیم (شکل (ب)). سپس ضلعهای $S_4S_5 \| S_2C$ و $S_5S_6 \| BC_1$ (به دلیل $\alpha \| BC_1$) و $S_6S_7 \| CA_1$ را رسم می‌کنیم.
پنج‌ضلعی $S_3S_4S_5S_6S_7$ برش مطلوب است (توجه دارید که $S_4S_5 \| S_3S_7$ است).
حال نسبت $\frac{CS_6}{S_6C_1}$ را محاسبه می‌کنیم. وجه AA_1B_1B را مورد ملاحظه قرار می‌هیم.

از تشابه مثلثهای AS_4M و B_1S_3M رابطهٔ $\frac{AS_4}{B_1S_3}=\frac{AM}{B_1M}=\frac{5}{4}$ را داریم. عبارت $x=\frac{S_2S_4}{AB}$ را منظور می‌کنیم. همچنین با در نظر گرفتن $AS_2=\frac{1}{2}AB$، $A_1S_3=S_2S_4$ و $A_1B_1=AB$ به $AS_4=(\frac{1}{2}+x)AB$، و $B_1S_3=(1-x)AB$ می‌رسیم. معادلهٔ $\frac{5}{4}=\frac{(\frac{1}{2}+x)}{(1-x)}$ به دست می‌آید که از آن نیز $x=\frac{1}{3}$ به دست می‌آید.

این امر به معنی $S_2S_4=\frac{1}{3}AB$ است که از آن رابطهٔ زیر استنتاج می‌شود:

$$S_4B=S_2B-S_2S_4=\frac{1}{6}AB$$

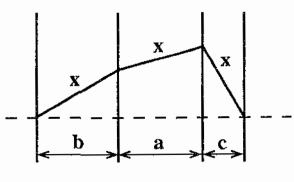
به دلیل $S_4S_5\|S_2C$، رابطهٔ $2=\frac{S_2S_4}{S_4B}=\frac{CS_5}{S_5B}$ را داریم و با توجه به $S_5S_6\|BC_1$ رابطهٔ $2=\frac{CS_5}{S_5B}=\frac{CS_6}{S_6C_1}$ استنتاج می‌شود. بنابراین یال CC_1 از طرف رأس C به نسبت $\frac{2}{1}$ تقسیم می‌شود

۱۹۷. دو چند ضلعی همنهشتند.

۱۹۸. در صورتی که شامل حداقل یکی از مولدهای سطح منشوری باشد.
مقطع این صفحه با سطح منشوری برحسب آن که کوژ یا کاو باشد، یک، دو، و یا چند خط راست است.

۱۹۹. منشور مثلث‌القاعدهٔ دلخواه $ADSA'D'S'$ را در نظر می‌گیریم. مقطعهای موازی با هم مساوی‌اند، می‌توان فرض کرد که مقطع خواسته شدهٔ SBC از یکی از رأسهای منشور رسم شده است، با توجه به این نکته که، مثلث SBC با مثلث داده شده‌ای متشابه است، زاویه‌های $\hat{BCS}$، $\hat{CBS}$ اندازه‌های معلومی دارند.

۲۰۰. سطح جانبی منشور را روی صفحه می‌گسترانیم (شکل) وجود مقطع موردنظر، هم‌ارز است با وجود خط شکسته‌ای که رأسهای آن، روی چهار خط راست موازی این گسترده باشند و، در ضمن، طول سه ضلع



این خط شکسته با هم برابر (و برابر x) باشند و اگر دو انتهای خط شکسته را به هم وصل کنیم، خط راستی عمود بر خطهای راست موازی به دست آید. بنابراین، کافی است ثابت کنیم، معادلهٔ

$$\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2-b^2}=\sqrt{x^2-c^2} \qquad (1)$$

برای $a \ge b \ge c > 0$ و $a < b+c$ جواب دارد.

این تابع را در نظر می‌گیریم:

$$y=f(x)=\sqrt{x^2-a^2}+\sqrt{x^2-b^2}-\sqrt{x^2-c^2}$$

این تابع، به ازای $x^2 \ge a^2$ معین و پیوسته است. توجه کنیم که

$$f(a)=\sqrt{a^2-b^2}-\sqrt{a^2-c^2} \le 0$$

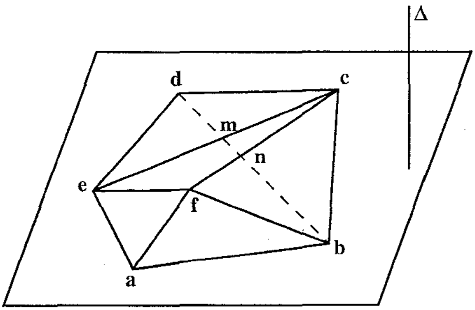
زیرا $b \ge c$؛ ولی:

$$f(\sqrt{a^2+b^2})=b+a-\sqrt{a^2+b^2-c^2}>0$$

اگر مقدارهای تابع پیوسته، در دو انتهای یک بازه، علامتهای مختلفی داشته باشند، آن‌وقت، مقدار تابع در نقطه‌ای واقع در درون این بازه برابر صفر می‌شود. در مورد تابع ما، این وضع در بازهٔ $\left[a, \sqrt{a^2+b^2}\right]$ پیش آمده است. بنابراین، تابع $f(x)$، در نقطه‌ای مثل x_0 واقع در درون این بازه برابر صفر می‌شود: $f(x_0)=0$ و معادلهٔ $f(x_0)=0$ دارای جواب است.

نکته. جواب معادلهٔ (۱) با دستوری به دست می‌آید که، به کمک آن، می‌توان خط شکسته را با پرگار و خط‌کش رسم کرد.

۲۰۱. چند وجهی با وجه‌های ABDE، BCD، CDE، FEC، FAB، FAE و FBC را در نظر می‌گیریم.



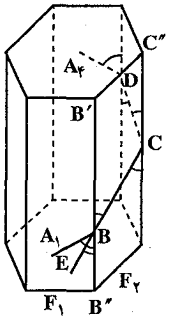
تصویر این چندوجهی را روی صفحه‌ای عمود بر خط Δ در نظر می‌گیریم.

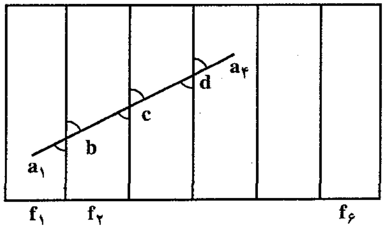
خطهای مصوّر یعنی خطهایی که به موازات خط Δ از رأسهای A، B، C، D و E می‌گذرند، چندوجهی را تنها در رأسهای چندوجهی قطع می‌کنند.

نقطهٔ f و نقطه‌های m و n، نقطه‌های برخورد یالهای درونی چندضلعی به محیط abcde را در نظر می‌گیریم.

f تصویر نقطهٔ F و همچنین تصویر نقطهٔ F' از قاعدهٔ ABDE، m تصویر نقطهٔ M از CE و یک نقطهٔ M' از BD است و بالاخره n تصویر یک نقطهٔ N از CF و یک نقطهٔ N' از BD است.

حال اگر هر چهاروجهی را مانند یک منشور ناقص مثلث‌القاعده تصور کنیم که دو یال جانبی آن به طول صفر باشد، این چندوجهی مجموع هشت منشور ناقص با یالهای جانبی موازی خط Δ خواهد بود که متناظرند با هشت بخشی که در تصویر چندضلعی abcde وجود دارد. این منشورهای ناقص عبارتند از $ABFF'$، $AEFF'$، $DEMM'$، $CDMM'$، $BCNN'$، $BNN'FF'$، $CMM'NN'$ و $EFF'MM'NN'$.





۲۰۲. به عنوان مثال یک منشور منتظم شش پهلو و دو نقطهٔ A_1 و A_4 واقع در وجه‌های F_1 و F_4 را در نظر می‌گیریم. گسترده وجه‌های جانبی این منشور روی یک صفحه را رسم می‌کنیم. آن‌گاه مستطیل مساوی f_1، f_2،...، f_6 را خواهیم داشت. تمام خطهایی که روی سطح جانبی منشور رسم شوند، تحت یک خط راست با پاره‌خطهایی به طول مساوی، روی گستردهٔ منشور رسم می‌شوند.

کوتاهترین راه از A_1 تا A_4، روی شکل گسترده پاره‌خط راست a_1a_4 است. این پاره‌خط، ضلعهای مستطیلها را در b، c و d قطع می‌کند، که متناظر با نقطه‌های B، C و D می‌باشند، که بسادگی قابل رسم هستند.

همچنین A_1BCDA_4 بیشترین راه رسیدن از A_1 به A_4 است، وقتی که وجه‌های F_1، F_2، F_3 و F_4 پیموده شوند.

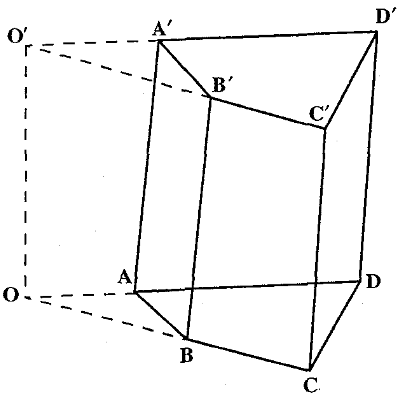
چون $bc = cd$ است، بنابراین $BC = CD$ و ضلعهای (به استثنای A_1B و DA_4) خط شکسته با هم برابرند؛ بعلاوه هنگام گسترش دادن شکل روی صفحه، زاویه‌ها محفوظ می‌مانند. A_1B، BC، CD، ... با یالهای منشور زاویه‌های برابر می‌سازند، زیرا زاویه‌های

b، c و d مساوی هستند.
حال کنجهای سه وجهی $B.A_1B'C$ و $C.BC'D$ را در نظر می‌گیریم. این دو کنج با هم مساوی‌اند، زیرا دارای یک فرجهٔ مساوی هستند که بین دو وجه مساوی متناظر قرار دارد. همچنین دو کنج در یک جهت هستند. از آن‌جا، $A_1\hat{B}C = B\hat{C}D$ و این، به ما نشان می‌دهد که تمام زاویه‌های A_1BCDA_4 با هم مساوی‌اند.

بالاخره، اگر BE امتداد CB باشد، در کنج سه وجهی $B.A_1EB''$ وجه‌های $A_1\hat{B}B''$ ، و $E\hat{B}B''$ مساوی b می‌باشند. پس این کنج متساوی‌الساقین است و صفحهٔ A_1BE یا به عبارت دیگر صفحهٔ A_1BC ی دو ضلع متوالی، عمود بر نیمساز فرجهٔ (A_1, BB'', E) است، و این نشان می‌دهد که این صفحه، نیمساز خارجی فرجهٔ $B'B''$ از منشور است.

۱۳.۲. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۲۰۳. دو منشور چهار پهلوی $ABCDA'B'C'D'$ و $A_1B_1C_1D_1A_1'B_1'C_1'D_1'$ را که در آنها قاعده‌های ABCD و $A_1B_1C_1D_1$ و همچنین وجه‌های جانبی متناظر $BCB'C'$ و $B_1C_1B_1'C_1'$ ؛ $ADD'A'$ و $A_1D_1D_1'A_1'$ با هم مساوی هستند، در نظر می‌گیریم.
فرض می‌کنیم OO' و O_1O_1' فصل مشترکهای وجه‌های در نظر گرفته شده منشور اول با منشور دوم باشد.
مثلثهای OAB و $O_1A_1B_1$ همنهشتند، زیرا با انطباق دو چهارضلعی ABCD و $A_1B_1C_1D_1$ ، این دو مثلث بر هم منطبق می‌شوند. از آن‌جا، $A_1\hat{O}_1B_1 = A\hat{O}B$ ؛ از طرف دیگر $A_1\hat{O}_1O_1' = A\hat{O}O'$ و $B_1\hat{O}_1O_1' = B\hat{O}O'$ ؛ زیرا زاویه‌های متناظر در متوازی‌الاضلاعهای مساوی می‌باشند. درنتیجه، کنجهای سه وجهی $O.BAO'$ و $O_1.B_1A_1O'$ مساوی می‌باشند؛ زیرا جهتهای یکسان دارند و دارای سه وجه دوبه‌دو مساوی می‌باشند. اکنون اگر یکی از منشورها را چنان تغییر



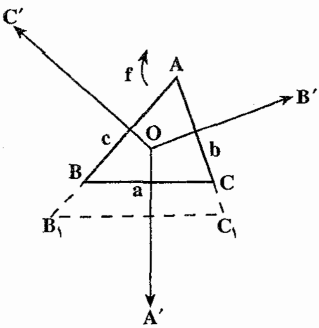
مکان دهیم که $ABCD$ و $A_1B_1C_1D_1$ بر هم منطبق شوند، دو منشور سه پهلوی $OABO'A'B'$ و $O_1A_1B_1O'_1A'_1B'_1$ بر هم منطبق خواهند شد، زیرا $OO'=AA'$، $O_1O'_1=A_1A'_1$ و در نتیجه $OO'=O_1O'_1$. بنابراین دو منشور داده شده بر هم منطبق خواهند شد.

۲۰۴. وجه‌های جانبی منشور را با صفحه‌ای که از نقطهٔ O عمود بر یالهای جانبی منشور رسم می‌شوند قطع می‌کنیم.

یک مقطع قائم ABC خواهیم داشت. پاره‌خطهای OA'، OB' و OC' که عمود بر وجه‌های جانبی و ممتد در جهت وجه‌ها و متناسب با مساحت وجه‌های متناظر هستند، بر ضلعهای مثلث ABC عمود و متناسب با طول ضلعهای این مثلثند. همچنین

$$OA'=aK \text{ و } OB'=bK \text{ و } OC'=cK$$

روی AB و AC پاره‌خطهای $AB_1=cK$ و $AC_1=bK$ را جدا می‌کنیم و B_1C_1 را وصل می‌کنیم. مثلث AB_1C_1 متشابه با مثلث ABC است و داریم:



$$OA'=B_1C_1\text{، }OB'=C_1A \text{ و } OC'=AB_1$$

اگر مثلث AB_1C_1 را حول رأس A به اندازهٔ زاویهٔ $90°$ و در جهت مشخص شده با فلش دوران دهیم تا مثلث AB_2C_2 به دست آید، ضلعهای AB_2، B_2C_2 و C_2A از مثلث AB_2C_2 با بردارهای OA'، OB' و OC' معادل (همسنگ) هستند و AB_2C_2 مجموع هندسی بردارهای OA'، OB' و OC' است، و این مجموع هندسی بسته است.

۲۰۵. نه ممکن نیست. مجموع عددهای هر سه یال باید روی هم برابر $6K$ باشد، که در آن K، تعداد مثلثهاست، ولی $165=3\times55$.

۲۰۷. حجم منشور برابر است با حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن. بنابراین داریم:

$$S_{\text{قاعده}}=(10+7/5)\times\frac{5}{2}=\frac{175}{4}\ \ cm^2$$

$$\Rightarrow \text{طول ارتفاع}\times\text{مساحت قاعده}=\text{حجم منشور}$$

$$\text{حجم منشور}=\frac{175}{4}\times30\ \ cm^3=\frac{6125}{2}\ \ cm^3$$

$$\text{وزن شمش}=\frac{6125}{2}\times10/5$$

۲۰۸. ابتدا با برهان خلف نشان می‌دهیم که یالهای: A_1A_2، A_2A_3، A_3A_4، A_4A_5 و A_5A_1 همه از یک رنگند. فرض می‌کنیم که برخلاف این موضوع، به‌طور مثال، یال A_1A_2 قرمز و یال A_2A_3 سبز است.

حداقل سه قطعه از پنج قطعهٔ: A_2B_1، A_2B_2، A_2B_3، A_2B_4 و A_2B_5 دارای یک رنگند، بدون این که کلیت مسأله را از دست بدهیم، فرض می‌کنیم این قطعات قرمز باشند، و آنها را با: A_2B_i، A_2B_j، A_2B_k مشخص می‌کنیم. در این صورت حداقل یکی از قطعات B_iB_j، B_jB_k، B_kB_i یال قاعده است؛ آن را B_rB_s می‌نامیم.

اگر B_rB_s قرمز باشد، مثلث قرمز $A_2B_rB_s$ را خواهیم داشت. بنابراین B_rB_s سبز است. اما قطعه‌های A_1B_r و A_1B_s نیز باید سبز باشند، زیرا در غیر این صورت: $A_1A_2B_r$ یا $A_1A_2B_s$ را به‌عنوان مثلثهای قرمز خواهیم داشت. بنابراین $A_1B_rB_s$ مثلثی سبز است. این تناقض مستلزم این است که: A_1A_2 و A_2A_3 دارای یک رنگ باشند و به‌همین ترتیب تمام یالهای هر قاعده یک رنگ دارند.

اکنون فرض می‌کنیم یالهای فوقانی همه قرمز و یالهای تحتانی همه سبز باشند. اگر ۳ یال سبز A_1 را به قاعدهٔ تحتانی وصل کنند، ۲ یال از آنها باید در رأسهای مجاور B_1 و B_s قاعده مختوم باشند. در این صورت $A_1B_rB_s$ مثلثی سبز است، و تناقض حاصل می‌شود.

درنتیجه حداقل سه‌یال قرمز A_1 را به قاعدهٔ تحتانی وصل می‌کنند به همین ترتیب حداقل سه یال قرمز A_2 را به قاعدهٔ تحتانی وصل می‌کنند. از آن‌جا که اکنون ۶ یال قرمز داریم، باید حداقل ۲ یال از آنها به رأس یکسان B_i قاعدهٔ تحتانی ختم شوند. در این صورت: $A_1A_2B_i$ مثلثی قرمز است، که تناقض به وجود می‌آورد.

تبصره. درصورتی که وجه‌های فوقانی و تحتانی، چند ضلعیهایی که با $2n+1$ ضلع باشند؛ همین استدلال به‌کار می‌رود. اما، درصورتی که این دو وجه چند ضلعیهایی با $2n$ ضلع باشند، نتیجه دروغ از آب درمی‌آید. چه به‌عنوان مثال، مثال نقضی با قرمز رنگ کردن یالهای فوقانی، سبز رنگ کردن یالهای تحتانی، قرمز یا سبز رنگ کردن یال A_iB_j بسته به این که $i-j$ زوج یا فرد باشد، به‌دست می‌آید.

۲۰۹. گزینهٔ (هـ) درست است.

۲۱۰. گزینهٔ (د) درست است.

۲۱۱. فرض می‌کنیم، چنین یالی وجود نداشته باشد. در سه رأس مجاور ۵۰، تنها عددهای

۹۹،۱ و ۱۰۰ می‌توانند باشند، ولی بین دو عدد ۱ و ۹۹، عدد دیگری جز ۵۰ نمی‌تواند باشد. پس در انتهای دیگر یال جانبی، که در یک انتهای آن، عدد ۵۰ را گذاشته‌ایم، باید عدد ۱۰۰ و در دو رأس مجاور ۵۰ (روی قاعدهٔ منشور) عددهای ۱ و ۹۹ گذاشته شود. فرض می‌کنیم، عدد ۱ را در سمت راست و عدد ۹۹ را درسمت چپ ۵۰ گذاشته باشیم. درسمت راست عددهای ۱ و ۱۰۰، تنها عددهای ۵۱ و ۲ را می‌توان گذاشت. به‌همین ترتیب، اگر از سمت راست جلو برویم، می‌توانیم عددهای بقیهٔ رأسها را پیدا کنیم. اگر به این ترتیب، یک دور کامل منشور را طی کنیم، بسادگی معلوم می‌شود که باید جای عدد ۹۹ را عوض کنیم.

۲۱۲. با توجه به تعریفها، این تفاوتها مشخص است.

۱۴.۲. مسأله‌های ترکیبی

۲۱۳. ۱. فرض می‌کنیم S مساحت یک مقطع قائم و GG' پاره‌خطی باشد که مرکز ثقلهای دو مثلث قاعده‌ها را به هم وصل می‌کند. اندازهٔ حجم منشور ناقص برابر است با $V = S \times GG'$ ؛ امّا V و S ثابت می‌باشند، بنابراین GG' ثابت است و چون G نقطهٔ ثابتی است، پس G' نقطهٔ ثابتی می‌باشد. بنابراین صفحهٔ $A'B'C'$ از نقطهٔ ثابت G' می‌گذرد.

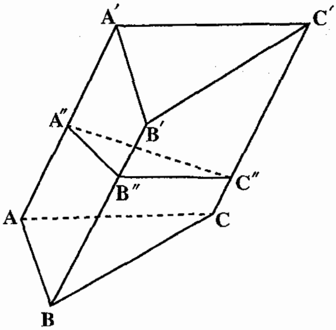
۲. زاویهٔ بین صفحهٔ $A'B'C'$ و صفحهٔ مقطع قائم را θ می‌نامیم، داریم :

$$S = \text{مساحت}\ A'B'C' \times \cos\theta \Rightarrow$$

$$\text{مساحت}\ A'B'C' = \frac{S}{\cos\theta}$$

از آن‌جا، مساحت مثلث $A'B'C'$ درصورتی کمترین مقدار ممکن را داراست که $\cos\theta = 1$ ؛ یعنی $\theta = 0^\circ$ و درنتیجه صفحهٔ $A'B'C'$، مقطع قائمی باشد که از G' رسم می‌شود. این مقطع قائم باید صفحهٔ قاعدهٔ ABC را قطع نکند.

اگر این مقطع، صفحهٔ ABC را قطع کند، صفحهٔ $A'B'C'$ که برای آن مساحت مثلث $A'B'C'$ کمترین مقدار ممکن است، صفحه‌ای است که بر G' می‌گذرد، یالها را قطع می‌کند و بزرگترین زاویه را با GG' می‌سازد. بسادگی دیده می‌شود که در این حالت این صفحه بر یکی از رأسهای مثلث ABC می‌گذرد.



۱.۲۱۴. منشور $ABCA'B'C'$ را درنظر گرفته، مقطع قائم $A''B''C''$ از آن را رسم می‌کنیم. اندازهٔ مساحت وجه‌های جانبی برابرند با $A''B''\times a$، $B''C''\times a$ و $C''A''\times a$، a اندازهٔ یال جانبی منشوراست.

اگر دو مساحت از مساحتهای بالا برابر باشند، ضلعهای نظیر مقطع قائم از آنها برابر خواهند بود و در این صورت زاویه‌های روبه‌روی آنها با هم مساوی‌اند. امّا این زاویه‌ها، زاویه‌های مسطحهٔ فرجهٔ بین وجه‌های نظیر این فرجه‌ها می‌باشند. بنابراین این فرجه‌ها با هم مساوی‌اند.

۲. اگر $B''C''\times a$ بزرگترین مقدار بین سه مقدار مساحت وجه‌ها باشد، $B''C''$ بزرگترین ضلع مقطع $A''B''C''$ خواهد بود؛ درنتیجه A بزرگترین زاویه و از آن‌جا AA' بزرگترین فرجهٔ منشور خواهد بود.

۳. بالاخره چون در مثلث $A''B''C''$ هر ضلع از مجموع دو ضلع دیگر بزرگتر است، و مساحت وجه‌های جانبی متناسب با این ضلعها می‌باشند، پس هریک از آنها از مجموع دو تای دیگر کوچکتر است.

۲۱۵. الف. مثلثهای ABC و AEF.

ب. ۳ وجه جانبی. وجه‌های جانبی متوازی‌الاضلاع یا مستطیل‌اند، بنابر آن که بترتیب، منشور مایل یا قائم باشد.

پ. یالهای جانبی عبارتند از AD، BE و CF.

۲۱۶. ۱. اگر دو مقطع متوازی باشند، همنهشتند، بنابراین ضلعهای مقطع دوم نیز ۳، ۶ و $۳\sqrt{۳}$ است، درصورتی که دو مقطع متوازی نباشند، ضلعهای مقطع دوم مشخص نیستند، یعنی می‌توانند مقدارهای دیگری باشند.

۲. مقطع مثلث است، به شرط آن که، صفحهٔ قاطع موازی یالهای منشور نباشند. درصورتی که صفحهٔ قاطع موازی یالها باشد، مقطع یک پاره‌خط (یک یال) یا یک چهارضلعی (متوازی‌الاضلاع یا مستطیل) است.

۳. با معلوم بودن ضلعهای مثلث مقطع، یعنی، ۳،۶ و $۳\sqrt{۳}$ زاویه‌های آن بسادگی قابل محاسبه‌اند، زیرا اگر زاویه‌های مثلث را α، β و γ فرض کنیم، داریم:

$$\cos\alpha=\frac{a^۲+b^۲-c^۲}{۲bc}=\frac{(۳)^۲+(۶)^۲-(۳\sqrt{۳})^۲}{۲\times۳\times۶}=\frac{۱۸}{۳۶}=\frac{۱}{۲}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\alpha=۶۰^\circ$$

$$\cos\beta=\frac{(۳\sqrt{۳})^۲+(۳)^۲-(۶)^۲}{۲\times۳\sqrt{۳}\times۳}=۰\Rightarrow\beta=۹۰^\circ$$

$$\cos\gamma=\frac{(۶)^۲+(۳\sqrt{۳})^۲-(۳)^۲}{۲\times۶\times۳\sqrt{۳}}=\frac{۵۴}{۳۶\sqrt{۳}}=\frac{۳}{۲\sqrt{۳}}=\frac{\sqrt{۳}}{۲}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\gamma=۳۰^\circ$$

نکته. از این ویژگی که $(۶)^۲=(۳)^۲+(۳\sqrt{۳})^۲$ یعنی ۳۶ = ۳۶ است، مشخص می‌شود که مقطع مثلثی قائم‌الزاویه است و زاویه‌های آن را از این ویژگی نیز می‌توان به‌دست آورد.

۴. مساحت مثلث قائم‌الزاویهٔ مقطع، برابر است با نصف حاصلضرب دو ضلع مجاور به زاویهٔ قائمهٔ آن، یعنی:

$$S=\frac{۱}{۲}(۳\sqrt{۳})(۳)=\frac{۹\sqrt{۳}}{۲}$$

۲۱۷. با توجه به شکل، قاعده‌ها، مثلثهای متساوی‌الاضلاع به ضلع ۴ و وجه‌های جانبی مربعهایی به ضلع ۴ می‌باشند. بنابراین:

الف. مساحت هر قاعده برابر است با:

$$\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}=\frac{(۴)^۲\sqrt{۳}}{۴}=۴\sqrt{۳}\,cm^۲$$

و مساحت هر وجه مساوی است با: $a^۲=(۴)^۲=۱۶\ cm^۲$

ب. ارتفاع منشور مساوی یال جانبی یعنی ۴cm است.

پ. حجم منشور برابر است با:

$$V=\text{سطح قاعده}\times\text{ارتفاع}=۴\sqrt{۳}\times۴=۱۶\sqrt{۳}\,cm^۳$$

۲۱۸. ۱. زاویهٔ بین دو قطر $AB_۱$ و $AC_۱$ را φ می‌گیریم. در این صورت:

$$\cos\varphi=\frac{|\overrightarrow{AB_۱}.\overrightarrow{BC_۱}|}{|\overrightarrow{AB_۱}|.|\overrightarrow{BC_۱}|}$$

از طرف دیگر داریم:

$$\overrightarrow{BC_۱}=\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_۱}-\overrightarrow{AB}\quad \text{و}\quad \overrightarrow{AB_۱}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_۱}$$

از آن‌جا :

$$\overrightarrow{AB_1}.\overrightarrow{BC_1}=(\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AA_1}).(\overrightarrow{AC}+\overrightarrow{AA_1}-\overrightarrow{AB})=\overrightarrow{AB}.\overrightarrow{AC}-c^2+h^2=$$

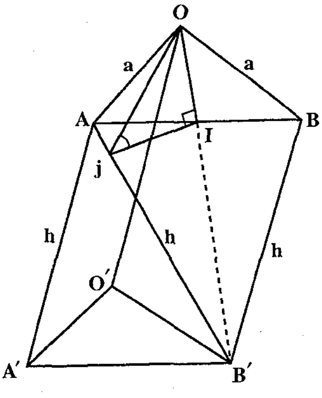
$$=\frac{1}{2}(c^2+b^2-a^2)-c^2+h^2=\frac{1}{2}(b^2-a^2-c^2+2h^2)$$

و درنتیجه :
$$\cos\varphi=\frac{|b^2-a^2-c^2+2h^2|}{2\sqrt{c^2+h^2}.\sqrt{a^2+h^2}}$$

۲. اگر زاویهٔ بین ضلع AB و قطر B_1C را α فرض کنیم، شبیه بالا به‌دست می‌آید :

$$\cos\alpha=\frac{|b^2-a^2-c^2|}{2c\sqrt{a^2+h^2}}$$

۲۱۹. اندازهٔ وتر مثلثهای قائم‌الزاویهٔ متساوی الساقین OAB و $O'A'B'$، مساوی $AB=A'B'=\sqrt{2}a$ است، بنابراین :



۱. مساحت سطح کل منشور برابر است با :

مساحت جانبی + S دو قاعده = S کل

$$=2(\frac{a^2}{2})+(2a+a\sqrt{2})h=$$

$$=a^2+a(2+\sqrt{2})h$$

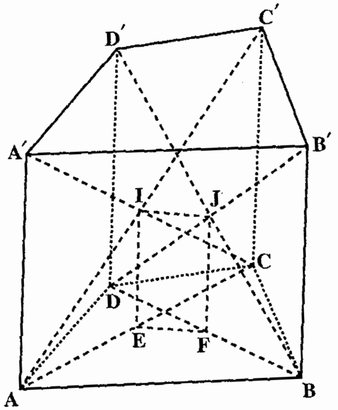
۲. OI عمودمنصف AB است. یعنی بر AB عمود است. AA' نیز بر صفحهٔ OAB عمود است بنابراین بر خط OI عمود می‌باشد. بنابراین OI بر دو خط متقاطع AB و AA' از صفحهٔ $ABB'A'$ عمود می‌باشد. پس بر این صفحه، و در نتیجه بر تمام خطهای این صفحه، از جمله بر AB' عمود است.

۳. خط AB' که بر دو خط متقاطع OI و IJ از صفحهٔ OIJ عمود است، بر این صفحه عمود است.

بنا به قضیهٔ سه عمود، OI بر IJ عمود است. یعنی مثلث OIJ در رأس I قائم‌الزاویه است.

۴. اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ این فرجه مساوی ۶۰ درجه است.

۲۲۰. ۱. منشور $ABCDA'B'C'D'$ را درنظر می‌گیریم. قطرهای AC' و $A'C$ که در



صفحهٔ دو یال موازی AA' و CC' قرار دارند، یکدیگر را قطع می‌کنند. همچنین دو قطر BD' و $B'D$ نیز که در صفحهٔ حاصل از دو خط متوازی BB' و DD' واقعند، یکدیگر را قطع می‌کنند.

۲. نقطه‌های I و J را محل برخورد قطرهای گفته شده در قسمت (۱) و E و F را وسطهای قطرهای چهارضلعی ABCD می‌گیریم.

در مثلث ACC'، پاره‌خط IE موازی CC' و مساوی $\frac{1}{2}CC'$ است. به‌طور مشابه در مثلث BDD'، JF موازی با DD' و مساوی $\frac{1}{2}DD'$ است. بنابراین IE و JF موازی و مساوی‌اند. از آن‌جا $IJ = EF$ است.

۳. برای آن که منشور، متوازی‌السطوح باشد، لازم و کافی است که چهارضلعی ABCD متوازی‌الاضلاع باشند؛ یعنی EF یا IJ مساوی صفر باشند.

بنابراین برای آن که یک منشور متوازی‌السطوح باشد، لازم و کافی است که قطرهای آن در نقطهٔ وسطشان همرس باشند.

۲۲۱. الف. مایل

ب. قاعدهٔ منشور

پ. یال منشور

ت. یال منشور

ث. قائم

ج. وجه منشور

چ. سطح جانبی منشور

ح. متوازی‌السطوح

۲۲۲. الف. چهار وجه

ب. مستطیل

پ. AA'، BB'، CC' و DD'.

۲۲۳. ۱. این مساحتها عبارتند از:

$$1\times6=6\ ,\ 2\times6=12\ ,\ 3\times6=18\ ,\ 4\times6=24$$

۲. مساحت جانبی منشور :

$$۶+۱۲+۱۸+۲۴=۶۰$$

۳. $۱+۲+۳+۴=۱۰$ محیط قاعده

$$۱۰\times۶=۶۰$$

۴. این دو مقدار با هم برابرند.

۵. مساحت جانبی منشور قائم برابر است با حاصل‌ضرب محیط قاعده در ارتفاع آن.

$$S_{\text{جانبی}}=p.h$$

۶. مساحت جانبی مکعب مستطیل مساوی محیط قاعده در ارتفاع آن است. یعنی :

$$S_{\text{جانبی}}=۲(a+b)c$$

۷. داریم : $S_{\text{کل}}=۲(a+b)c+۲ab$

۲۲۴. ۱. مساحت مشترک دایره و مربع را S، ضلع مربع را a و شعاع دایره را R می‌نامیم. داریم :

$$S=a^۲ \Rightarrow a=\sqrt{S} \Rightarrow \text{محیط مربع}=۴a=۴\sqrt{S}$$

$$S=\pi R^۲ \Rightarrow R^۲=\frac{S}{\pi} \Rightarrow R=\sqrt{\frac{S}{\pi}} \Rightarrow \text{محیط دایره}=۲\pi R=۲\pi\sqrt{\frac{S}{\pi}}$$

$$\Rightarrow \text{محیط دایره}=۲\sqrt{\pi S}<۴\sqrt{S}$$

به‌طوری که دیده می‌شود محیط دایره کمتر از محیط مربع است.

۲. ارتفاع مشترک را h و حجم مشترک را v می‌نامیم. داریم :

$$\text{حجم استوانه}=v=\pi R^۲h \Rightarrow R^۲=\frac{v}{\pi h} \Rightarrow R=\sqrt{\frac{v}{\pi h}}$$

شعاع قاعدهٔ استوانه به حجم v و ارتفاع h.

$$\text{حجم منشور مربع القاعده}=v=a^۲.h \Rightarrow a^۲=\frac{v}{h} \Rightarrow a=\sqrt{\frac{v}{h}}\ \text{ضلع مربع}$$

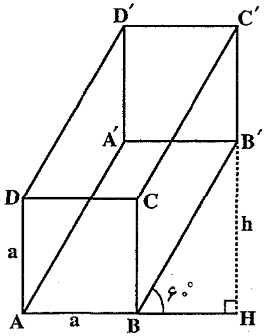
$$\text{سطح کل استوانه}=\text{سطح جانبی}+\text{سطح دو قاعده}=۲\pi Rh+۲\pi R^۲ \Rightarrow$$

$$\text{سطح کل استوانه}=۲\pi\times\sqrt{\frac{v}{\pi h}}h+۲\pi\times\frac{v}{\pi h}=۲\sqrt{\pi hv}+\frac{۲v}{h}$$

$$\text{سطح کل منشور}=\text{سطح جانبی}+\text{سطح دو قاعده}=۴a.h+۲a^۲=$$

$$=۴\sqrt{\frac{v}{h}}h+۲\times\frac{v}{h}=۴\sqrt{vh}+\frac{۲v}{h}$$

به‌طوری که دیده می‌شود سطح کل منشور کمتر است. بنابراین صرف با ساختن منشور است.



۲۲۵. ۱. ارتفاع این منشور برابر است با:

$$B'H = a\sin ۶۰^\circ = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}$$

از آن‌جا:

ارتفاع × سطح قاعده = حجم منشور

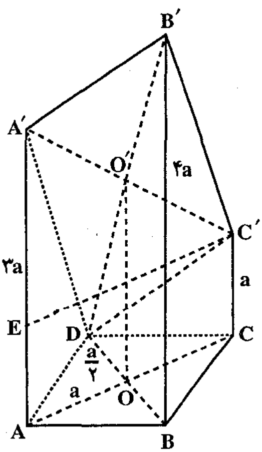
$$\Rightarrow \text{حجم منشور} = a^{۲} \times \frac{a\sqrt{۳}}{۲} = \frac{a^{۳}\sqrt{۳}}{۲}$$

۲. می‌دانیم که مساحت جانبی منشور برابر است با حاصل‌ضرب محیط مقطع قائم آن در طول یال. از طرفی وجه‌های جانبی این منشور از دو مربع به ضلع a و دو متوازی‌الاضلاع که دو ضلع مجاورش a است، تشکیل شده است. بنابراین داریم:

$$S_{\text{جانبی}} = \text{محیط مقطع قائم} \times a$$

مقطع قائم متوازی‌الاضلاعی است که ضلعهای آن ارتفاعهای وجه‌های جانبی منشور هستند و ضلعهای آن برابرند با $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ و a. پس مساحت آن برابر است با:

$$S_{\text{مقطع}} = a\sqrt{۲} \times a = \sqrt{۲}a^{۲}$$



۲۲۶. ۱. از نقطهٔ O محل برخورد قطرهای قاعدهٔ ABCD عمودی بر قاعده اخراج می‌کنیم. این عمود $A'C'$ را در O' قطع می‌کند، و در ذوزنقهٔ $ACC'A'$ داریم:

$$OO' = \frac{AA' + CC'}{۲} = ۲a$$

امّا، اگر O'' نقطهٔ برخورد OO' با DB' باشد، در مثلث DBB' داریم:

$$OO'' = \frac{BB'}{۲} = ۲a$$

بنابراین O' و O'' برهم منطبقند. پس $B'O'$ بر نقطهٔ

D می‌گذرد و صفحهٔ $A'B'C'$ شامل نقطهٔ D است. همچنین نتیجه می‌شود که چهارضلعی $DC'B'A'$ که قطرهای آن منصف یکدیگرند، متوازی‌الاضلاع است.
حال ضلعهای مثلث $A'B'C'$ را محاسبه می‌کنیم.
برای این کار $C'E$ را عمود بر AA' رسم می‌کنیم و به این نکته توجه می‌کنیم که ضلعهای لوزی قاعده، به طول $\frac{a\sqrt{5}}{2}$ است؛ داریم:

$$A'B'^2 = DC'^2 = \frac{5a^2}{4} + a^2 = \frac{9a^2}{4}$$

$$B'C'^2 = DA'^2 = \frac{5a^2}{4} + 9a^2 = \frac{41a^2}{4}$$

$$A'C'^2 = A'E^2 + EC'^2 = 4a^2 + 4a^2 = 8a^2$$

این رابطه‌ها نشان می‌دهند که $B'C'^2 = A'B'^2 + A'C'^2$. بنابراین مثلث $A'B'C'$ در رأس A' قائم‌الزاویه است.

۲. حجم متوازی‌السطوح ناقص $ABCDA'B'C'D'$ برابر است با:

$$V = \text{مساحت } ABCD \times \frac{AA' + BB' + CC'}{4}$$

امّا: $\text{مساحت } ABCD = 2 \times \text{مساحت } ABD = a^2$

و $\frac{AA' + BB' + CC'}{4} = 2a$

از آن‌جا: $V = 2a^3$

۲۲۷. ۱. داریم:

$$S_{\text{جانبی}} = \text{محیط قاعده} \times \text{ارتفاع} = (6 \times 4) \times 10 = 240$$

۲. سطح کل منشور مساوی مجموع مساحت جانبی و مساحتهای دو قاعده است.

$$S_{\text{یک قاعده}} = \frac{3a^2\sqrt{3}}{2} = \frac{3\sqrt{3}}{2} \times 16 = 24\sqrt{3} \quad cm^2$$

$$\Rightarrow S_{\text{کل}} = (240 + 48\sqrt{3}) \quad cm^2$$

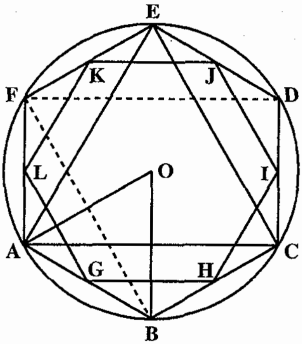
۳. حجم منشور مساوی حاصل‌ضرب مساحت قاعده در ارتفاع آن است:

$$\text{حجم منشور} = 24\sqrt{3} \times 10 = 240\sqrt{3} \quad cm^3$$

۲۲۸. الف. داریم:

$$\text{حجم منشور} = V = \text{سطح قاعده} \times \text{ارتفاع} = ۱۰ \times ۷ = ۷۰ \quad cm^۳$$

ب. بنا به اصل کاوالیری حجم منشور B مساوی حجم منشور A، یعنی $۷۰ \ cm^۳$ است.



۲۲۹. ۱. می‌دانیم که برای مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع a، اندازهٔ مساحت برابر است با، $\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$، یعنی $S_{AOB} = \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}$. پس مساحت ۶ ضلعی منتظم برابر است با:

$$۶ \times \frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۳\sqrt{۳}a^۲}{۲}$$

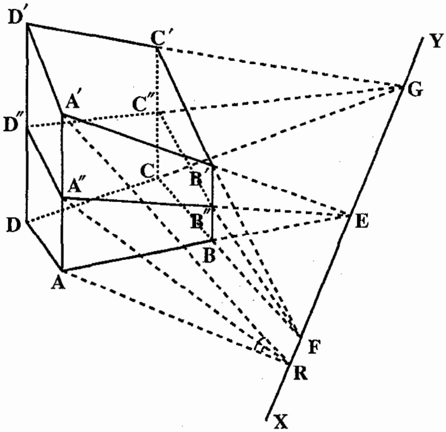
از آن‌جا:

$$\text{حجم} = \frac{۳a^۲\sqrt{۳}}{۲} \cdot \frac{۲}{۳}h = \sqrt{۳}a^۲h$$

۲. فرض می‌کنیم $AE = b$ باشد، داریم: $AE = a\sqrt{۳}$

یا: $b = a\sqrt{۳} \Rightarrow a = \frac{b}{\sqrt{۳}}$

$$\Rightarrow a^۲h\sqrt{۳} = \frac{b^۲}{۳}h\sqrt{۳}$$



۲۳۰. ۱. خط XY را محل برخورد صفحه‌های قاعده‌های منشور ناقص می‌گیریم. AB و A′B′ یکدیگر را در نقطهٔ E واقع بر XY قطع می‌کنند. به‌طور مشابه BC و B′C′ نیز نقطهٔ تقاطعشان روی XY است.

در ذوزنقه‌های AA′B′B، BB′C′C، ... خطهای A′B″،

$B''C''$ و ... که وسطهای ضلعهای متناظر قاعده‌ها را به هم وصل می‌کنند، از نقطه‌های E، F، ... می‌گذرند. حال اگر صفحهٔ (A'' ، XY) را با P نشان دهیم، نقطهٔ B'' در این صفحه است؛ زیرا روی خط $A''E$ از این صفحه قرار دارد. C'' نیز در این صفحه است، زیرا به $B''F$ از این صفحه تعلق دارد و... .از آن‌جا نقطه‌های A'' ، B'' ، C'' و D'' در صفحهٔ P واقعند.

۲. خط AR را عمود بر XY رسم می‌کنیم. سپس $A'R$ و $A''R$ را رسم می‌کنیم. زاویه‌های $A\hat{R}A'$ و $A\hat{R}A''$ ، زاویه‌های مسطحهٔ فرجه‌های بین صفحه‌های $A'B'C'D'$ و $A''B''C''D''$ با صفحهٔ $ABCD$ هستند. از آن‌جا داریم :

$$S = S'\cos A\hat{R}A' = S' \times \frac{AR}{A'R}$$

$$S = S''\cos A\hat{R}A'' = S'' \times \frac{AR}{A''R}$$

اما در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ $A'AR$ و $A''AR$ داریم :

$$A'R^۲ - AR^۲ = AA'^۲ = ۴A''A^۲ \ , \ A''R^۲ - AR^۲ = A''A^۲$$

از آن‌جا داریم :

$$A'R^۲ - AR^۲ = ۴(A''R^۲ - AR^۲) \ ;$$

$$\frac{AR}{S} = \frac{A'R}{S'} = \frac{A''R}{S''} \ , \ S'^۲ - S^۲ = ۴(S''^۲ - S^۲) \Rightarrow$$

$$S''^۲ = \frac{۳S^۲ + S'^۲}{۴}$$

و در نهایت $S'' = \frac{۱}{۲}\sqrt{۳S^۲ + S'^۲}$.

وقتی $S = \sqrt{۳}$ ، $S' = ۴$ باشد، خواهیم داشت : $S'' = ۲/۵$

۲۳۱. الف. موازی، همنهشت

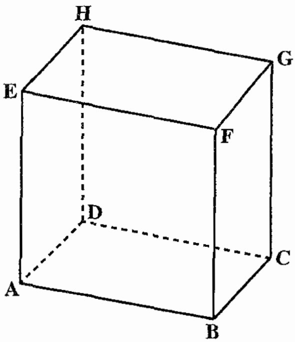
ب. متوازی‌الاضلاع هستند.

پ. مجموعهٔ وجوه جانبی منشور است.

ت. متوازی‌السطوح

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۳. متوازی‌السطوح

۱.۳. تعریف و قضیه

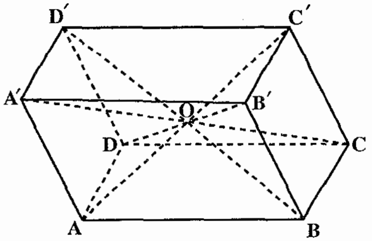


۲۳۲. ۱. می‌دانیم که بنا به تعریف یالهای جانبی AE، BF، CG و DH متساوی و متوازی‌اند (شکل). ولی چون قاعده‌ها و وجه‌های جانبی همگی متوازی‌الاضلاعند، یالهای EF و AB، و همچنین AB و DC، و بالاخره DC و HG دوبه‌دو متساوی و متوازی‌اند. بنابراین هر چهار یال متساوی و متوازی می‌باشند.

۲. می‌دانیم که دو قاعدهٔ متوازی‌الاضلاعها متساوی‌اند و واقع در صفحه‌های متوازی هستند.

حال دو وجه مقابل AEHD و BFGC را درنظر می‌گیریم. ضلعهای این دو متوازی‌الاضلاع نظیر به نظیر متساوی و متوازی می‌باشند و زاویه‌های AEH و BFG که ضلعهای آنها موازی یکدیگر هستند، نیز برابرند. پس این دو متوازی‌الاضلاع متساوی‌اند و در صفحه‌های متوازی قرار دارند و همچنینند دو وجه مقابل دیگر.

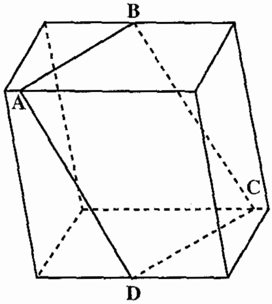
۳. در متوازی‌السطوح $ABCDA'B'C'D'$ (شکل) دو قطر $A'C$ و $D'B$ را درنظر می‌گیریم. چهارضلعی $A'D'CB$ متوازی‌الاضلاع است (قسمت اول). بنابراین دو قطر $A'C$ و $D'B$ از آن یکدیگر را در نقطه‌ای که در وسط هریک از آنهاست قطع می‌نمایند، حال اگر عین همین استدلال را



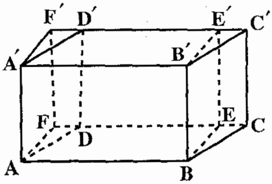
برای قطر $A'C$ و قطر دیگر AC' تکرار کنیم، معلوم می‌شود که AC' نیز از وسط $A'C$ می‌گذرد، پس چهار قطر یکدیگر را در نقطهٔ O که بر وسط هریک از آنها واقع است، قطع می‌نماید.

تعریف. صفحه‌ای را که بر دو قطر متوازی‌السطوح بگذرد، صفحهٔ قطری می‌نامند و هر متوازی‌السطوح دارای شش صفحهٔ قطری است.

نتیجه. از قسمت (۳) در قضیهٔ قبل نتیجه می‌شود که در هر متوازی‌السطوح شش صفحه قطری در یک نقطه تقاطع می‌نمایند.



۲۳۳. اگر صفحهٔ قاطع دو وجه مقابل را در خطهای AB و CD قطع کند (شکل)، این دو خط متوازی‌اند، زیرا مقطعهای دو صفحهٔ متوازی با یک صفحهٔ قاطع می‌باشند و به‌همین دلیل دو ضلع مقابل BC و AD متوازی‌اند، پس مقطع ABCD متوازی‌الاضلاع است.

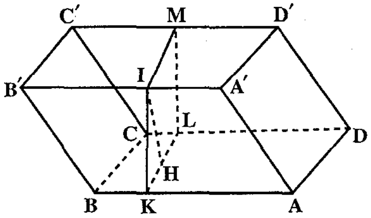


۲۳۴. متوازی‌السطوح قائم $ABCDA'B'C'D'$ را که یالهای جانبی AA'، BB'، CC' و DD' از آن بر صفحهٔ دو متوازی‌الاضلاع قاعده، یعنی ABCD و $A'B'C'D'$ عمودند (شکل) درنظر گرفته، آن را به منزلهٔ منشوری فرض می‌کنیم که قاعدهٔ آن مستطیل $A'AD'D$ باشد و از A و B دو مقطع قائم $AA'F'F$ و $BB'E'E$ را رسم می‌نماییم. این مقطعهای قائم، دو مستطیل متساوی می‌باشند (به چه دلیل؟) و بنابراین متوازی‌السطوح مفروض با مکعب مستطیل $AFF'A'BEE'B'$ معادل است. ولی حجم جسم اخیر برابر با حاصل‌ضرب ابعاد آن است. پس :

$$V = AB \times AF \times AA'$$

حال گوییم AF ارتفاع متوازی‌الاضلاع ADCB و AB قاعدهٔ آن است و اگر مساحت این متوازی‌الاضلاع را S فرض کنیم، $S = AB \times AF$ و AA' نیز ارتفاع متوازی‌السطوح قائم است. پس اگر آن را H بنامیم، دستور حجم متوازی‌السطوح قائم چنین می‌شود :

$$V = S.H$$



۲۳۵. متوازی‌السطوح مایل $ABCDA'B'C'D'$ را که قاعدهٔ آن $ABCD$ است درنظر می‌گیریم. می‌توان این متوازی‌السطوح را به منزلهٔ منشور مایلی فرض کرد که قاعدهٔ آن متوازی‌الاضلاع $ADD'A'$ باشد (شکل). حال مقطع قائم $KIML$ را در آن رسم می‌نماییم. این مقطع قائم، متوازی‌الاضلاعی است که قاعدهٔ آن را KL فرض می‌نماییم و ارتفاع IH آن را رسم می‌کنیم. می‌دانیم که متوازی‌السطوح مایل مفروض، معادل است با متوازی‌السطوح قائمی که قاعدهٔ آن مقطع قائم مفروض و ارتفاع آن یال جانبی AB باشد.

از طرفی می‌دانیم که حجم این متوازی‌السطوح قائم برابر است با حاصل‌ضرب مساحت قاعدهٔ آن در ارتفاعش، پس اگر حجم آن را که با حجم متوازی‌السطوح مایل برابر است V فرض کنیم، $V=(KL\times IH)\times AB$

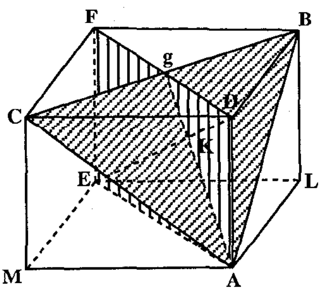
از طرف دیگر KL که ضلع مقطع قائم است، ارتفاع متوازی‌الاضلاع $ABCD$، یعنی قاعدهٔ متوازی‌السطوح مفروض می‌باشند. پس اگر مساحت این متوازی‌الاضلاع را S فرض کنیم، $S=KL\times AB$ و از طرف دیگر ارتفاع مقطع قائم مفروض، ارتفاع متوازی‌السطوح هم هست (به چه دلیل؟). بنابراین به فرض $IH=h$ حاصل می‌شود:

$$V=s\times h$$

۲.۳. نقطه، خط

۱.۲.۳. خط

۱.۱.۲.۳. خطها همرسند



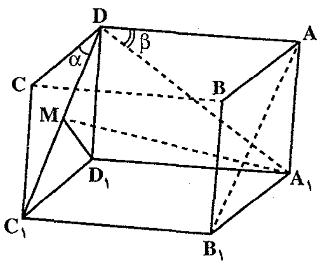
۲۳۷. صفحه‌ای که از یال AD و یال موازی آن EF بگذرد، ضلع مثلث ABC را در نقطهٔ g، وسط BC قطع می‌کند (شکل). بنابراین، قطر ED از متوازی‌السطوح، صفحهٔ مثلث ABC را، در نقطهٔ K، واقع بر میانهٔ Ag، قطع می‌کند. به‌همین ترتیب، اگر صفحه‌ای از یالهای BD و ME عبور دهیم، ثابت می‌شود که همین قطر از میانهٔ دوم مثلث

ABC می‌گذرد، یعنی به ناچار، از نقطهٔ برخورد میانه‌ها.

۳.۳. زاویه

۱.۳.۳. اندازهٔ زاویه

۱.۱.۳.۳. اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط



۲۳۸. فرض می‌کنیم قطرهای AB_1 و A_1D دو قطر غیرمتقاطع دو وجه مجاور باشد؛ پس $B\hat{A}B_1 = \alpha$ و $A_1\hat{D}A = \beta$ می‌باشد (شکل). قطر DC_1 از وجه DD_1C_1C را رسم می‌کنیم. چون $DC_1 \| AB_1$ است، پس زاویهٔ بین A_1D و AB_1 مساوی زاویهٔ $A_1\hat{D}C_1$ می‌باشد، که آن را زاویهٔ x می‌نامیم. عمود D_1M را بر D_1C در وجه DD_1C_1C رسم می‌کنیم (نقطهٔ M متعلق به خط C_1D است). طبق قضیهٔ سه عمود $MA_1 \perp DC_1$ می‌باشد، اگر $A_1D = l$ فرض شود، از مثلث قائم‌الزاویهٔ A_1DM خواهیم داشت:

$$DM = l\cos x \qquad (۱)$$

و در مثلث قائم‌الزاویهٔ A_1D_1D چون $\hat{A_1} = \hat{\beta}$ است، پس:

$$DD_1 = l\sin\beta \qquad (۲)$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ DD_1M، چون $\hat{D_1} = \hat{\alpha}$ است، پس:

$$DM = DD_1 \sin\alpha$$

یا طبق رابطهٔ (۲) داریم:

$$MD = l\sin\alpha\sin\beta \qquad (۳)$$

از رابطه‌های (۱) و (۳) نتیجه می‌شود:

$$l\cos x = l\sin\alpha\sin\beta$$

از آن‌جا:

$$\cos x = \sin\alpha\sin\beta$$

یا:

$$x = \text{Arc}(\sin\alpha\sin\beta)$$

۲۳۹. داریم :

مساحت قاعدهٔ متوازی‌السطوح $۱۲۴ \div ۶ = ۲۴$

$$۲۴ = ab\sin(\vec{a}, \vec{b})$$

$$۲۴ = ۱۲ \times ۴\sin(\vec{a}, \vec{b}) \Rightarrow \sin(\vec{a}, \vec{b}) = \frac{۱}{۲} = \sin ۳۰^\circ$$

$$\Rightarrow (\vec{a}, \vec{b}) = ۳۰^\circ$$

زاویهٔ حاده متوازی‌الاضلاع قاعده برابر ۳۰° است و زاویهٔ منفرجه ۱۵۰°.

۲۴۰. دو زاویه، وقتی متوازی‌السطوح قائم است.

۲.۱.۳.۳. اندازهٔ زاویهٔ بین دو صفحه

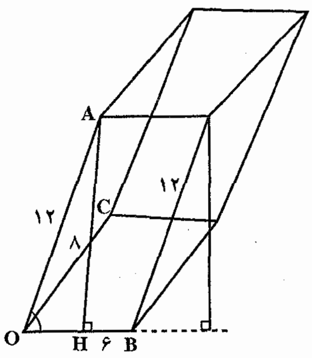
۲۴۱. پاسخ $\mathrm{Arc}\cos\left(\frac{a^۲b^۲ + b^۲c^۲ - c^۲a^۲}{a^۲b^۲ + b^۲c^۲ + c^۲a^۲}\right)$

۳.۱.۳.۳. اندازهٔ زاویهٔ بین خط و صفحه

۲۴۲. با فرض $OA = ۱۵$ ، $OB = ۶$ و $OC = ۸$ و $B\hat{O}C = ۶۰^\circ$ ، ارتفاع AH را رسم می‌کنیم :

داریم :

ارتفاع × اندازه مساحت قاعده = حجم متوازی‌السطوح



$$۲۸۸\sqrt{۳} = (۶ \times ۸ \times \sin ۶۰^\circ) \times AH \Rightarrow$$

$$\Rightarrow AH = ۱۲$$

$$\sin = A\hat{O}H = \frac{AH}{OA} = \frac{۱۲}{۱۵} = \frac{۴}{۵} \Rightarrow$$

$$A\hat{O}H = \mathrm{Arc}\sin\left(\frac{۴}{۵}\right)$$

۲۴۳. اگر :

$$AB = BC = ۱ \ , \ AA_۱ = x$$

$$V_{DD_۱BC_۱} = \frac{۱}{۳} S_{DBD_۱} \cdot \frac{\sqrt{۲}}{۲} = \frac{۱}{۶} x$$

از طرف دیگر:

$$V_{DD_1BC_1} = \frac{1}{3} S_{DBC_1} \cdot D_1B \sin\varphi = \frac{\sqrt{2}}{6} \cdot \sqrt{\frac{1}{2}+x^2} \cdot \sqrt{2+x^2} \sin\varphi$$

که در آن φ زاویهٔ بین D_1B و صفحه DBC_1 است. پس:

$$\sin\varphi = \frac{x}{\sqrt{(2+x^2)(1+2x^2)}} \;,$$

$$\frac{1}{\sin^2\varphi} = 2x^2 + \frac{2}{x^2} + 5 \ge 9$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود که بیشترین مقدار φ برابر $\operatorname{Arc}\sin\frac{1}{3}$ است.

۴.۳. یال، ارتفاع، قطر

۱.۴.۳. یال

۱.۱.۴.۳. اندازهٔ یال

۲۴۴. فرض می‌کنیم x، y و z یالهای متوازی‌السطوح باشد. حجم متوازی‌السطوح مساوی xyz است.

$xy + xz + yz = a^2$ نصف سطح کل متوازی‌السطوح است. اگر xy را قاعدهٔ آن بگیریم، $z(x+y)$ مساوی نصف مساحت جانبی آن می‌باشد. فرض می‌کنیم مساحت سطح قاعده یعنی xy ثابت باشد، در این صورت نصف مساحت جانبی نیز ثابت خواهد بود؛ زیرا $a^2 - xy$ مقدار ثابتی است. امّا اندازهٔ ارتفاع برابر است با:

$$z = \frac{a^2 - xy}{x+y}$$

ارتفاع z و درنتیجه حجم متوازی‌السطوح درصورتی بیشترین مقدار خود را دارا خواهد بود که $x+y$ کمترین مقدار خود را دارا باشد؛ امّا می‌دانیم که مجموع $x+y$ هنگامی که xy ثابت است، درصورتی کمترین مقدار خود را داراست که $x=y$، یعنی قاعدهٔ متوازی‌السطوح مربع باشد. چون برای وجه‌های دیگر نیز همین مطلب درست است، بنابراین برای یک سطح کل داده شده، مکعب ماکزیمم است.

۲۴۵. بزرگترین یال را x، و دو یال دیگر را y و z می‌نامیم.

طول این قطر برابر است با : $\sqrt{x^{2}+y^{2}+z^{2}}=4$

مساحت جانبی مساوی است با :

$$2(xy+yz+xz)=20$$

بعلاوه داریم : $y+z=x$

بنابراین دستگاه سه معادلهٔ سه مجهولی زیر را خواهیم داشت :

$$\begin{cases}x^{2}+y^{2}+z^{2}=16\\ xy+yz+xz=10\\ y+z=x\end{cases}$$

از حل این دستگاه نتیجه می‌شود :

$$\begin{cases}x=3\\ y=\dfrac{3+\sqrt{5}}{2}\\ z=\dfrac{3-\sqrt{5}}{2}\end{cases}$$

x، y و z برحسب متر محاسبه شده‌اند.

۳.۴.۲. ارتفاع

۳.۴.۲.۱. اندازهٔ ارتفاع

۲۴۶. داریم :

S قاعده $=12\times 18\times \sin 60^{\circ}=108\sqrt{3}$

حجم متوازی‌السطوح = سطح قاعده × ارتفاع ⇐

$324\sqrt{3}=108\sqrt{3}\times$ ارتفاع ⇐

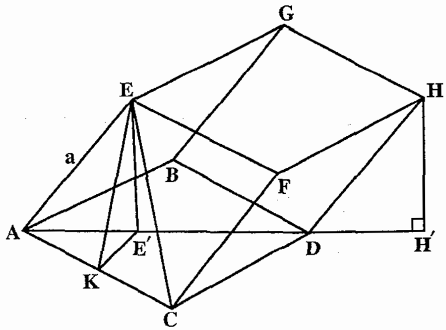
ارتفاع متوازی‌السطوح = ۳

۳.۴.۳. قطر

۲۴۷. قطرهای متوازی‌السطوح، قطرهای متوازی‌الاضلاعهای مقطعهای ایجاد شده به‌وسیلهٔ قطرها هستند. شرط لازم و کافی برای این که این قطرها برابر باشند، آن است که متوازی‌الاضلاعهای شامل قطرها مستطیل باشند و برای این منظور باید متوازی‌السطوح قائم باشد، یعنی وجه‌های جانبی آن بر یالهایی که شامل آنها نیست، عمود باشند، به‌عبارت دیگر متوازی‌السطوح، مکعب مستطیل باشد.

۲۴۸. در واقع اگر OA، OB، OC و OD چهار قطر باشند، فرض می‌کنیم OA، OB و OC یک کنج سه قائمه تشکیل داده‌اند. به‌دلیل تقارن، OD نیز با OA و OC یک کنج سه قائمهٔ دیگر تشکیل خواهند داد، و در این صورت D، O و B روی یک خط راست قرار خواهند داشت، که این ممکن نیست.

۱.۳.۴.۳. اندازهٔ قطر



۲۴۹. فرض می‌کنیم ABCDEFGH متوازی‌السطوحی مایل باشد که قاعده‌های آن لوزی هستند. تصویر نقطه‌های E و H روی صفحهٔ ABCD را E′ و H′ می‌نامیم. نقطه‌های E′ و H′ روی قطر AD واقع می‌شوند. تصویر قائم نقطهٔ E روی AC را K می‌نامیم و از K به E وصل می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ AEK داریم:

$$EK = \frac{a\sqrt{۳}}{۲}\ ,\ \ AK = \frac{a}{۲} \Rightarrow E'K = \frac{a}{۲\sqrt{۳}}\ ,\ \ AE' = \frac{a}{\sqrt{۳}}$$

از آن‌جا نتیجه می‌شود:

$$EE' = \sqrt{\frac{۳a^۲}{۴} - \frac{a^۲}{۱۲}} = \frac{a\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}}$$

از طرف دیگر:

$$AH' = AE' + E'H' = AE' + AD$$

امّا :

$$AD=\frac{۲a\sqrt{۳}}{۲}=a\sqrt{۳}$$

از آن‌جا :

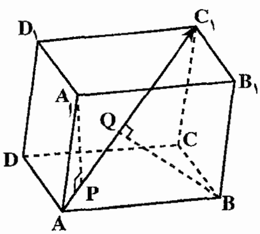
$$AH'=\frac{a}{\sqrt{۳}}+a\sqrt{۳}=\frac{۴a}{\sqrt{۳}}$$

اینک می‌توان AH را محاسبه کرد :

$$AH=\sqrt{HH'^{۲}+AH'^{۲}}=\sqrt{EE'^{۲}+AH'^{۲}}=\sqrt{\frac{۲a^{۲}}{۳}+\frac{۱۶a^{۲}}{۳}}=a\sqrt{۶}$$

۵.۳. پاره‌خط

۱.۵.۳. اندازهٔ پاره‌خط



۲۵۰. بردارهای $\overrightarrow{AP}$ و $\overrightarrow{AQ}$ با بردار $\overrightarrow{AC_۱}$ همخط بوده (شکل)، از این رو $\overrightarrow{AQ}=y\overrightarrow{AC_۱}\ ,\ \overrightarrow{AP}=x\overrightarrow{AC_۱}$ را داریم. بنابراین :

$$\overrightarrow{BQ}=-\overrightarrow{AB}+y\overrightarrow{AC_۱}\ ,\ \overrightarrow{A_۱P}=-\overrightarrow{AA_۱}+x\overrightarrow{AC_۱}$$

استنتاج می‌شود.

به‌دلیل $\overrightarrow{A_۱P}\perp\overrightarrow{AC_۱}$ رابطهٔ $\overrightarrow{A_۱P}.\overrightarrow{AC_۱}=۰$ را داریم که

از آن نیز $x=\dfrac{\overrightarrow{AA_۱}.\overrightarrow{AC_۱}}{|\overrightarrow{AC_۱}|^{۲}}$ استنتاج می‌شود.

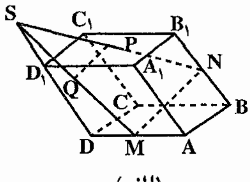
از آن‌جا که $\overrightarrow{AC_۱}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AD}+\overrightarrow{AA_۱}$ است، رابطه‌های $|\overrightarrow{AC_۱}|^{۲}=a^{۲}+b^{۲}+c$ و $\overrightarrow{AA_۱}.\overrightarrow{AC_۱}=c^{۲}$ حاصل می‌شود. این امر به معنی $x=\dfrac{c^{۲}}{(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})}$ است. به طریق مشابه $y=\dfrac{a^{۲}}{(a^{۲}+b^{۲}+c^{۲})}$ به‌دست می‌آید.

از این گذشته $\overrightarrow{PQ}=\overrightarrow{AQ}-\overrightarrow{AP}=(y-x)\overrightarrow{AC_1}$ را داریم که به معنی

$$PQ=|y-x|.AC_1=|c^2-a_1^2|/\sqrt{a^2+b^2+c^2}$$

است. بنابراین جواب مسأله عبارت از $\dfrac{|c^2-a^2|}{\sqrt{a^2+b^2+c^2}}$ خواهد بود.

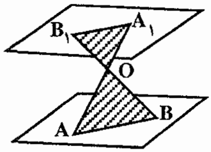
۲۵۱. برای حل این مسأله برشی از متوازی‌السطوح را که به‌وسیلهٔ صفحهٔ MNP ایجاد می‌شود می‌توان مورد استفاده قرار داد. یعنی فصل مشترک صفحه‌های MNP و AA_1D_1D را رسم کرده و نقطهٔ Q را روی آن پیدا می‌کنیم (ترسیمها در شکل (الف) نشان داده شده است).



(الف)

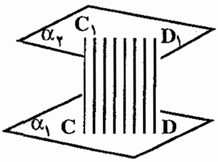
در مورد این مسأله از دو قضیهٔ سادهٔ زیر استفاده می‌کنیم :

۱. قطعه‌هایی از دو خط موازی بین دو صفحهٔ موازی دارای طولهای متساوی هستند.



(ب)

۲. اگر دو خط متقاطع در نقطهٔ O با دو صفحه بترتیب در نقطه‌های A و A_1 ؛ و B و B_1 محدود باشند، آن‌گاه $\dfrac{AO}{OA_1}=\dfrac{BO}{OB_1}$ خواهد بود. برهان این قضیه‌ها را می‌توان براساس شکلهای (ب) و (پ) به‌آسانی انجام داد. حال به حل مسأله می‌پردازیم.

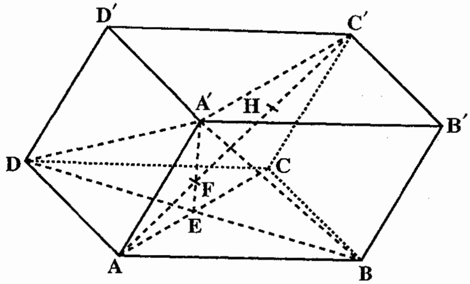


(پ)

نقطهٔ R را نقطهٔ برخورد پاره‌خط PQ و صفحهٔ BB_1C_1C درنظر می‌گیریم. بر طبق قضیهٔ اول طول پاره‌خطهای موازی QR و MN واقع بین صفحه‌های موازی AA_1D_1D و BB_1C_1C مساوی است. یعنی $QR=MN=a$ است. پاره‌خطهای QR و D_1B_1 واقع در بین همان دو صفحه در نقطهٔ P با شرط $\dfrac{D_1P}{PB_1}=1$ همدیگر را قطع می‌کنند. آن گاه طبق‌قضیهٔ دوم $\dfrac{QP}{PR}=1$ ؛یعنی $QP=PR=\dfrac{a}{2}$ را خواهیم داشت و جواب مسأله عبارت از $\dfrac{a}{2}$ خواهد بود.

۲.۵.۳. تساوی پاره‌خطها

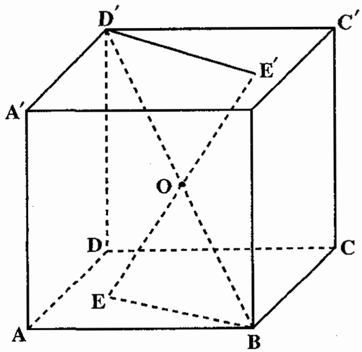
۲۵۲. یالهای رسم شده از رأس A عبارتند از AB، AA' و AD، صفحهٔ $BA'D$ که بر انتهای این سه یال می‌گذرد، صفحهٔ $ACC'A'$ را در فصل مشترک $A'E$ قطع می‌کند که $A'E$ نیز قطر AC' را در نقطهٔ F که اینک فصل مشترک صفحهٔ $BA'D$ و قطر AC' است، قطع می‌کند.



اما در متوازی‌الاضلاع $ACC'A'$، نقطهٔ E وسط ضلع AC است. می‌دانیم که پاره‌خط AF که روی قطر AC' ایجاد شده است، یک سوم این قطر است، یعنی $AF=\frac{1}{3}AC'$. با همین روش ثابت می‌شود که اگر H نقطهٔ برخورد صفحهٔ $B'CD'$ با قطر AC' باشد، $C'H=\frac{1}{3}AC'$ است. درنتیجه داریم:

$$AF=FH=HC'$$

۲۵۳. فرض می‌کنیم EE' پاره‌خطی باشد که از نقطهٔ O مرکز متوازی‌السطوح $ABCDA'B'C'D'$ گذشته است. صفحهٔ (BD',EE') قاعده‌های ABCD و $A'B'C'D'$ را در دو پاره‌خط متوازی BE و $D'E'$ قطع می‌کند. دو مثلث OBE و $OD'E'$ به‌دلیل برابری یک ضلع و دو زاویهٔ متناظر مجاور آنها؛ یعنی $O\hat{B}E=O\hat{D'}E'$ و زاویه‌های متقابل به رأس در O، همنهشتند. درنتیجه $OE=O'E'$ است.



۳.۵.۳. نسبت پاره‌خطها

۲۵۴. جهت اختصار سه بردار ناهمصفحهٔ $\overrightarrow{AB}$، $\overrightarrow{AD}$ و $\overrightarrow{AA_1}$ را بترتیب با a، b و c نشان داده و بردارهای دیگر را برحسب این بردارها حل می‌کنیم. نقطهٔ N روی خط AC_1 قرار دارد. بنابراین بردار $\overrightarrow{NA}$ با بردار ناصفر $\overrightarrow{AC_1}$ همخط بوده و $\overrightarrow{NA} = x\overrightarrow{AC_1}$ را خواهیم داشت.

درمورد بردار $\overrightarrow{AC}$ تساوی $\overrightarrow{AC_1} = a + b + c$ را داریم که به معنی $\overrightarrow{NA} = x(a+b+c)$ است. بردار $\overrightarrow{NM}$ عبارت از مجموع بردارهای $\overrightarrow{NA}$، $\overrightarrow{AB}$ و $\overrightarrow{BM}$ است:

$$\overrightarrow{NM} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BM}$$

با جاگذاری معادل بردار $\overrightarrow{NA}$ در این تساوی و با یادآوری:

$$\overrightarrow{AB} = a \text{ ، } \overrightarrow{BM} = \frac{1}{2}\overrightarrow{BC} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AD} = \frac{1}{2}b$$

چنین حاصل می‌شود:

$$\overrightarrow{NM} = (1+x)a + (\frac{1}{2}+x)b + xc$$

بردارهای $\overrightarrow{DP}$ و $\overrightarrow{DD_1}$ همخط بوده و $\overrightarrow{DD_1} = c$ است. بنابراین $\overrightarrow{DP} = yc$ خواهدبود.

از $\overrightarrow{NP} = \overrightarrow{NA} + \overrightarrow{AD} + \overrightarrow{DP}$ چنین استنتاج می‌شود:

$$\overrightarrow{NP} = xa + (1+x)b + (x+y)c$$

طبق نکته‌ای که قبلاً بیان شده است، برای نقطه‌های M، N و P که روی یک خط قرار دارند، لازم و کافی است که تساوی برداری زیر برقرار باشد:

$$\overrightarrow{NM} = \lambda\overrightarrow{NP}$$

با جاگذاری معادل بردارهای $\overrightarrow{NM}$ و $\overrightarrow{NP}$ در این رابطه چنین حاصل می‌شود:

$$(1+x)a + (\frac{1}{2}+x)b + xc = \lambda xa + \lambda(1+x)b + \lambda(x+y)c$$

با توجه به منفرد بودن تجزیه بردار، این تساوی برداری با دستگاه مشتمل بر سه معادلهٔ اسکالر صفحه بعد هم‌ارز است:

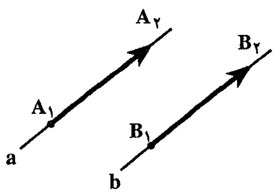
$$\begin{cases} 1+x=\lambda x \\ \frac{1}{2}+x=\lambda(1+x) \\ x=\lambda(x+y) \end{cases}$$

با حل این دستگاه $y=2$ ، $x=-\frac{2}{3}$ و $\lambda=-\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید.

بدین ترتیب $\overrightarrow{NM}=-\frac{1}{2}\overrightarrow{NP}$ را داریم که از آن نیز $NM=\frac{1}{2}NP$ به‌دست می‌آید.

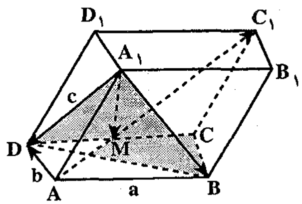
بنابراین جواب مسأله عبارت از ۲ : ۱ خواهد بود.

نکته. فرض کنید که A_1 و A_2 نقطه‌های متمایزی از خط a ، B_1 و B_2 نیز نقطه‌های متمایزی از خط b باشد. برای توازی خطهای a و b لازم و کافی است که بردارهای $\overrightarrow{A_1A_2}$ و $\overrightarrow{B_1B_2}$ همخط باشند. یعنی بایستی عددی مانند λ وجود داشته باشد که در $\overrightarrow{B_1B_2}=\lambda\,\overrightarrow{A_1A_2}$ صدق کند.



برهان این حکم از تعریف بردارهای همخط و قرار گرفتن پاره‌خط A_1A_2 روی خط a و پاره‌خط B_1B_2 روی خط b مستقیماً استنتاج می‌شود (شکل).

۲۵۵. رأس مفروض در مسأله را با A نشان داده و رأسهای دیگر متوازی‌السطوح را همچون شکل نامگذاری می‌کنیم (شکل). M را نقطه‌ای روی خط AC_1 درنظر می‌گیریم. برای این که نقطه‌های A_1 ، B ، D و M روی یک صفحه قرار بگیرند، لازم و کافی است که بردارهای $\overrightarrow{A_1B}$ ، $\overrightarrow{A_1D}$ و $\overrightarrow{A_1M}$ همصفحه باشند، یعنی بایستی اعدادی مانند α و β وجود داشته باشند، به‌طوری که :



$$\overrightarrow{A_1M}=\alpha\,\overrightarrow{A_1B}+\beta\,\overrightarrow{A_1D} \qquad (1)$$

عبارتهای $\overrightarrow{AA_1}=c$ ، $\overrightarrow{AD}=b$ و $\overrightarrow{AB}=a$ را درنظر گرفته و بردارهای (۱) را برحسب این سه بردار تجزیه می‌کنیم. چنین داریم :

$$\overrightarrow{A_1B} = a - c \text{ ، } \overrightarrow{A_1D} = b - c$$

همچنین $\overrightarrow{A_1M} = \overrightarrow{A_1A} + \overrightarrow{AM}$ را داریم. در این‌جا $\overrightarrow{A_1A} = -c$ بوده و بردار $\overrightarrow{AM}$ با بردار $\overrightarrow{AC_1}$ همخط است، یعنی :

$$\overrightarrow{AM} = x.\overrightarrow{AC_1} = x(a+b+c)$$

این امر به معنی $\overrightarrow{A_1M} = xa + xb + (x-1)c$ است. با جاگذاری تجزیه برداری حاصله در (۱) به تساوی :

$$xa + xb + (x-1)c = \alpha a + \beta b - (\alpha+\beta)c$$

دست می‌یابیم که از آن نیز دستگاه زیر حاصل می‌شود :

$$\begin{cases} x = \alpha \\ x = \beta \\ x - 1 = -\alpha - \beta \end{cases}$$

با حل این دستگاه $\beta = \frac{1}{3}$ ، $\alpha = \frac{1}{3}$ ، $x = \frac{1}{3}$ به‌دست می‌آید. بدین ترتیب $\overrightarrow{AM} = \frac{\overrightarrow{AC_1}}{3}$ را داریم ؛ یعنی صفحهٔ BDA_1 یک سوم قطر AC_1 را از طرف رأس A قطع می‌کند. از این رو نتیجه می‌شود که :

$$AM / MC_1 = \frac{1}{2}$$

بوده و جواب مسأله عبارت از $\frac{1}{2}$ خواهد بود.

معادلهٔ (۱) همچنین موجب $\overrightarrow{A_1M} = \frac{1}{3}(\overrightarrow{A_1B} + \overrightarrow{A_1D})$ شده و این امر حکایت از آن دارد که M، نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث BA_1D است. به‌عبارت دیگر قطر AC_1 مثلث BA_1D را در نقطهٔ برخورد میانه‌های آن قطع می‌کند.

۶.۳. شعاع کره

۱.۶.۳. اندازهٔ شعاع کره

۲۵۶. اندازهٔ شعاع کره $a+b\pm\sqrt{۲ab-\frac{a^۲}{۴}}$ است.

۷.۳. مساحت

۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت جانبی

۲۵۷. داریم :

$$\Rightarrow \text{ارتفاع} \times \text{محیط قاعده} = \text{مساحت جانبی متوازی‌السطوح}$$
$$S_{\text{جانبی}} = ۲(۱۲+۸)\times ۱۰ = ۴۰۰ \quad cm^۲$$

۲.۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت کل

۲۵۸. ضلعهای مقطع مستطیلی، ۶، $۶\times \sin ۶۰ = ۳\sqrt{۳}$ می‌باشند. بنابراین محیط مقطع قائم برابر :

$$۲(۶+۳\sqrt{۳}) = ۶(۲+\sqrt{۳})$$

و از آن جا، مساحت جانبی منشور برابر است با :

$$S_{\text{جانبی}} = \text{طول یال} \times \text{محیط مقطع قائم} =$$
$$= ۶(۲+\sqrt{۳})\times ۱۵ = ۹۰(۲+\sqrt{۳})$$

درنتیجه :

$$S_{\text{یک قاعده}} = ۶^۲ = ۳۶ \Rightarrow$$
$$S_{\text{کل}} = ۹۰(۲+\sqrt{۳}) + ۳۶ = ۲۱۶ + ۹۰\sqrt{۳}$$

۲۵۹. داریم :

$$S_{\text{یک قاعده}} = ۶\times ۴\times \sin ۳۰^\circ = ۱۲cm^۲$$
$$S_{\text{جانبی}} = ۲(۶+۴)\times ۵ = ۱۰۰ \ cm^۲$$
$$\Rightarrow S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + S_{\text{دو قاعده}} = ۱۰۰ + ۲۴ = ۱۲۴cm^۲$$

۲۶۰. داریم :

$$S = \text{محیط قاعده} \times \text{ارتفاع} = ۲(۴+۶)\times۶ = ۱۲۰\,\text{cm}^۲$$ سطح جانبی

$$S = ۴\times۶\times\sin۱۵۰^\circ = ۴\times۶\times\frac{۱}{۲} = ۱۲\,\text{cm}^۲$$ قاعده

$$S = ۲۴\,\text{cm}^۲$$ دو قاعده

$$S = ۱۲۰+۲۴ = ۱۴۴\,\text{cm}^۲$$ دو قاعده S+ جانبی S = سطح کل متوازی‌السطوح

۳.۱.۷.۳. اندازهٔ مساحت تصویر

۲۶۱. توجه داشته باشید که مساحت تصویر هر متوازی‌السطوح، همیشه دو برابر مساحت تصویر مثلثی است که رأسهای آن انتهای سه یال از متوازی‌السطوح باشند که، از یک رأس خارج می‌شوند. در متوازی‌السطوح قائم، همهٔ این نوع مثلثها، قابل انطباق بر یکدیگرند. بیشترین مساحت تصویر متوازی‌السطوح قائم، وقتی حاصل می‌شود که، یکی از این نوع مثلثها، موازی با صفحه‌ای باشد که متوازی‌السطوح بر روی آن تصویر می‌شود. بنابراین بیشترین مساحت تصویر برابر خواهد بود با :

$$\sqrt{a^۲b^۲+b^۲c^۲+c^۲a^۲}$$

۲.۷.۳. رابطهٔ بین مساحتها

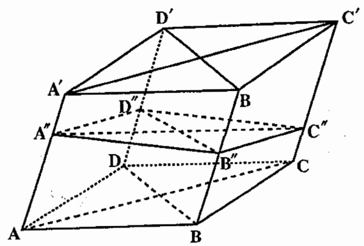
۲۶۳. فرض می‌کنیم :

$$S_{ABCD} = S_{A'B'C'D'} = \alpha$$

$$S_{ABB'A'} = S_{DCC'D'} = \beta$$

$$S_{ADD'A'} = S_{BCC'B'} = \gamma$$

$$S_{BDD'B'} = x \ , \ S_{ACC'A'} = y$$



سپس :

می‌دانیم که در متوازی‌الاضلاع مقطع قائم $A''B''C''D''$ داریم :

$$B''D''^۲ + A''C''^۲ = ۲(A''B''^۲ + A''D''^۲)$$

اگر دو طرف رابطهٔ بالا را در $AA'^۲$ ضرب کنیم، خواهیم داشت :

$$x^۲ + y^۲ = ۲(\alpha^۲ + \gamma^۲)$$

به‌طور مشابه اگر مساحتهای مقطعهای چهار صفحهٔ قطری را با z، l، u و v نشان

دهیم، خواهیم داشت :

$$z^۲ + l^۲ = ۲(\beta^۲ + \alpha^۲) \ ,$$
$$u^۲ + v^۲ = ۲(\gamma^۲ + \beta^۲)$$

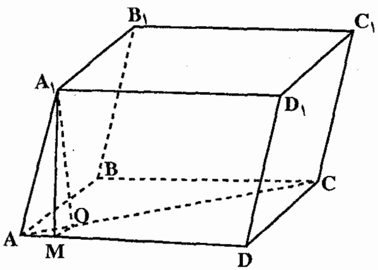
از جمع کردن عضوهای متناظر سه رابطهٔ به‌دست آمده نتیجه می‌شود :

$$x^۲ + y^۲ + z^۲ + l^۲ + u^۲ + v^۲ = ۴(\alpha^۲ + \beta^۲ + \gamma^۲)$$

۸.۳. حجم

۱.۸.۳. اندازهٔ حجم

۱.۱.۸.۳. اندازهٔ حجم متوازی‌السطوح



۲۶۴. اگر $۰° < \alpha < ۶۰°$ باشد، فقط می‌توان یک متوازی‌السطوح با مشخصات مسأله ساخت (شکل). ارتفاع $A_۱O$ عمود بر صفحهٔ ABCD را رسم می‌کنیم. تمام زاویه‌های حول رأس A حاده است ؛ چون $\alpha = A_۱\hat{A}B = A_۱\hat{A}D$ ، پس AO نیمساز زاویهٔ BAD می‌باشد و $C\hat{A}D = \frac{\alpha}{۲}$. عمود OM را بر AD فرود می‌آوریم و قطعه خط $A_۱M$ را رسم می‌کنیم. بنابر قضیهٔ سه عمود، AM بر AD عمود می‌شود، یعنی دو مثلث $AA_۱m$ و AOM قائم‌الزاویه‌اند و در مثلث $AA_۱M$ داریم $AM = a\cos\alpha$ و از مثلث قائم‌الزاویهٔ AOM نتیجه می‌شود :

$$AO = \frac{AM}{\cos\frac{\alpha}{۲}} = \frac{a\cos\alpha}{\cos\frac{\alpha}{۲}}$$

اگر $A_۱O = h$ فرض شود، از مثلث قائم‌الزاویهٔ $AA_۱O$ داریم :

$$h^۲ = a^۲ \times \frac{a^۲\cos^۲\alpha}{\cos^۲\frac{\alpha}{۲}} = \frac{a^۲}{\cos^۲\frac{\alpha}{۲}}(\cos^۲\frac{\alpha}{۲} - \sin^۲\frac{\alpha}{۲}) =$$

$$=\frac{a^{۲}}{\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}}(\frac{۱+\cos\alpha}{۲}-\frac{۱-\cos\alpha}{۲})=\frac{a^{۲}}{\cos^{۲}\frac{\alpha}{۲}}\sin\frac{۳\alpha}{۲}\sin\frac{\alpha}{۲}$$

$h=\dfrac{\alpha}{\cos\frac{\alpha}{۲}}\sqrt{\sin\sin\frac{\alpha}{۲}}$ و مساحت متوازی‌السطوح خواهد شد :

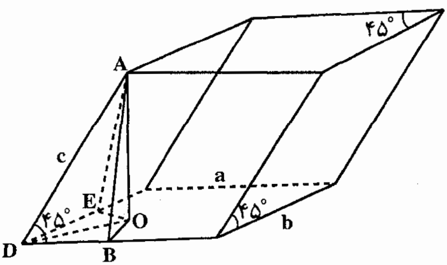
$$S_{ABCD}=a^{۲}\sin\alpha\ ,$$

$$V=H\times S_{ABCD}=۲a^{۳}\sin\frac{\alpha}{۲}\sqrt{\sin\sin\frac{\alpha}{۲}}$$

هرگاه $۶۰^\circ<\alpha<۹۰^\circ$ باشد، به‌غیر از متوازی‌السطوح فوق، باز هم می‌توان یک متوازی‌السطوح دیگر ساخت که هریک از زاویه‌های کنج آن $(۱۸۰^\circ-\alpha)$ و مجموع زاویه‌های سه وجه کنج از ۳۶۰° کمتر باشد. به طریق مشابه می‌توان محاسبه کرد که :

$$V_{۱}'=۲a^{۳}\cos\frac{\alpha}{۲}\sqrt{-\cos\frac{۳\alpha}{۲}\cos\frac{\alpha}{۲}}$$

۲۶۵. از مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ADO، DOB و DAB (شکل) داریم :



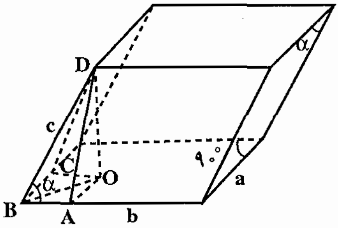
$$AO^{۲}=AD^{۲}-DO^{۲}=c^{۲}-(\frac{DB}{\cos۲۲^\circ,۳۰'})^{۲}=c^{۲}-(\frac{c.\cos۴۵^\circ}{\cos۲۲^\circ۳۰'})^{۲}=$$

$$=c^{۲}.(\frac{\cos^{۲}۲۲^\circ۳۰'-\cos^{۲}۴۵^\circ}{\cos^{۲}۲۲^\circ۳۰'})=c^{۲}\cdot\frac{\frac{۱+\cos۴۵^\circ}{۲}-\frac{۱}{۲}}{\cos^{۲}۲۲^\circ۳۰'}$$

$$=\frac{c^{۲}}{۲\sqrt{۲}\cdot\cos^{۲}۲۲^\circ۳۰'}\ ;\ AO=\frac{c}{\sqrt{۲\sqrt{۲}}\cos۲۲^\circ۳۰'}$$

به این ترتیب، حجم مجهول، چنین می‌شود :

$$V=Sh=S.AO=ab\sin۴۵^\circ.\frac{c}{\sqrt{۲\sqrt{۲}}\cos۲۲^\circ۳۰'}=\frac{abc}{۲\sqrt[۴]{۲}\cos۲۲^\circ۳۰'}$$



۲۶۶. برای حجم مجهول داریم : $V = ab.DO$ (شکل). از D، عمودهای DA و DC را بر یالهای مجاور قاعده فرود می‌آوریم. دو مثلث قائم‌الزاویهٔ DAB و DCB برابرند (وتر مشترک دارند و در یک زاویهٔ حاده برابرند)، پس $AB = BC$ و مستطیل AOCB یک مربع است. اکنون دیگر ارتفاع متوازی‌السطوح، بسادگی پیدا می‌شود :

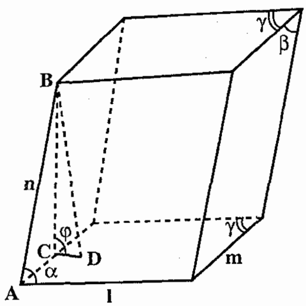
$$DO = \sqrt{DB^۲ - OB^۲} = \sqrt{DB^۲ - (AB^۲ + AO^۲)} = \sqrt{DB^۲ - ۲AB^۲} =$$

$$= \sqrt{c^۲ - ۲c^۲\cos^۲\alpha} = c\sqrt{۱ - ۲\cos^۲\alpha} = c\sqrt{-\cos ۲\alpha}$$

و از آن‌جا : $V = abc\sqrt{-\cos ۲\alpha}$

یادداشت. $\cos ۲\alpha < ۰$، زیرا $۲\alpha > ۹۰°$ (هر زاویهٔ مسطحهٔ کنج سه‌وجهی، از مجموع دو زاویهٔ دیگر کوچکتر است).

۲۶۷. با استفاده از شکل، برای حجم مجهول می‌توان نوشت :



$$V = lm\sin\gamma.BD = lm\sin\gamma.BC\sin\varphi =$$

$$= lm\sin\gamma.AB\sin\beta\sin\varphi =$$

$$= lmn\sin\beta\sin\gamma\sin\varphi$$

تنها در عبارت اخیر، $\sin\varphi$ نامعلوم است. ولی :

$$\cos\varphi = \frac{\cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma}$$

$$۱ + \cos\varphi = \frac{\sin\beta\sin\gamma + \cos\alpha - \cos\beta\cos\gamma}{\sin\beta\sin\gamma} =$$

$$= \frac{۱}{\sin\beta\sin\gamma}\left[\cos\alpha - \cos(\beta+\gamma)\right] =$$

$$= \frac{۲}{\sin\beta\sin\gamma}\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{۲}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{۲}$$

به‌همین ترتیب :

$$۱ - \cos\varphi = \frac{۲}{\sin\beta\sin\gamma}\sin\frac{\gamma+\alpha-\beta}{۲}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{۲}$$

اکنون دیگر، $\sin\alpha$ بسادگی پیدا می‌شود : (براساس رابطهٔ $\sin\alpha=\sqrt{1+\cos\alpha}\cdot\sqrt{1-\cos\alpha}$) و درنتیجه :

$$V=2lmn\sqrt{\sin\frac{\alpha+\beta+\gamma}{2}\sin\frac{\alpha+\beta-\gamma}{2}\sin\frac{\beta+\gamma-\alpha}{2}\sin\frac{\gamma+\alpha-\beta}{2}}$$

۲۶۸. دستگاه مختصات قائمی را درنظر بگیرید که خط اول، بر محور xها منطبق بشود، خط دوم موازی محور yها باشد و از نقطهٔ (a، ۰، ۰) بگذرد و خط سوم موازی محور zها و از نقطهٔ (۰، a ، a) بگذرد.

اگر $ABCDA_1B_1C_1D_1$ متوازی‌السطوحی باشد که در آن، نقطه‌های A و C بر روی خط اول و به مختصات بترتیب $(0, 0, x_1)$، $(0, 0, x_2)$، نقطه‌های B و C_1 روی خط دوم، و به مختصات $(a, y_1, 0)$، $(a, y_2, 0)$ و نقطه‌های D و B_1 روی خط سوم و بترتیب به مختصات (a, a, z_1) ، (a, a, z_2) باشند، از شرط تساوی بردارهای $\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{BC}=\overrightarrow{B_1C_1}$ نتیجه می‌شود :

$$a-x_1=x_2=-a$$

$$a=-y_1=y_2-a$$

$$z_1=-a=a-z_2$$

از آن‌جا :

$$x_1=2a \text{ ، } x_2=-a \text{ ، } y_1=-a \text{ ، } y_2=2a \text{ ، } z_1=-a \text{ ، } z_2=2a$$

از آن‌جا داریم :

$$A(2a, 0, 0) \text{ ، } B(0, -a, a) \text{ ، } C(-a, 0, 0)$$

$$D(a, a, -a) \text{ ، } B_1(a, a, 2a) \text{ ، } C_1(0, 2a, a)$$

می‌توان امتحان کرد که :

$$\overrightarrow{AB}=\overrightarrow{DC}$$

بالاخره داریم :

$$AC=3a \text{ ، } AB=a\sqrt{6} \text{ ، } BC=a\sqrt{3}$$

یعنی مثلث ABC قائم‌الزاویه می‌باشد و بنابراین مساحت ABCD برابر است با :

$$AB.BC=3a^2\sqrt{2}$$

معادلهٔ صفحه ABCD عبارت است از : $y+z=0$ ، پس فاصلهٔ B_1 از این صفحه برابر

می‌شود با : $\frac{3a}{\sqrt{2}}$

جواب : $9a^3$

۲۶۹. نقطهٔ A را رأس کنج سه‌وجهی تشکیل شده به‌وسیلهٔ سه زاویهٔ حادهٔ BAC، CAD و DAB می‌گیریم. داریم $BC = CD = DB = AB = a$. چهاروجهی ABCD منتظم است. برای محاسبهٔ حجم متوازی‌السطوح باید مساحت لوزیی را که مثلث متساوی‌الاضلاع ABC نصف آن است، در ارتفاع h رسم شده از رأس D بر صفحهٔ ABC، ضرب کنیم. امّا مساحت لوزی مساوی $\frac{a^2\sqrt{3}}{2}$ است و ارتفاع h چهاروجهی برابر است با $h = \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$ بنابراین داریم :

$$V = \frac{a^2\sqrt{3}}{2} \times \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{3}} = \frac{a^3\sqrt{2}}{2}$$

۲۷۰. نقطهٔ A را رأس کنج سه‌وجهی تشکیل شده به‌وسیلهٔ سه زاویهٔ مقابل به قطر b فرض می‌کنیم. با اندازه‌های داده شده، مثلث متساوی‌الاضلاع BCD به ضلع b را خواهیم داشت و همچنین سه مثلث متساوی‌الساقین مانند مثلث BAC که در آن $AB = AC = a$ و $BC = b$ است.

حجم خواسته شده، برابر حاصل‌ضرب دو برابر مساحت مثلث BAC، در ، ارتفاع رسم شده از رأس D بر صفحهٔ این مثلث است.
برای محاسبهٔ اندازهٔ ارتفاع h می‌دانیم که حجم هرم ABCD برابر است با حاصل‌ضرب مساحت مثلث ABC در $\frac{1}{3}h$ ، یا برابر است با حاصل ضرب مساحت مثلث BCD در یک سوم عمود k که از رأس A بر صفحهٔ مثلث BCD رسم می‌شود. از آن‌جا :

$$S_{BAC} \times h = S_{BCD} \cdot k \Rightarrow h = \frac{S_{BCD} \cdot k}{S_{BAC}} \qquad (1)$$

امّا براحتی می‌توانیم مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع BCD و k را برحسب داده‌های مسأله به‌دست آوریم زیرا :

مساحت مثلث متساوی‌الاضلاع BCD به ضلع b، برابر است با (۲) $S_{BCD} = \frac{b^2\sqrt{3}}{4}$.

ارتفاع k، یک ضلع زاویهٔ قائمه از مثلث قائم‌الزاویه‌ای است که اندازهٔ وترش مساوی a و اندازهٔ ضلع دیگر زاویهٔ قائمه‌اش مساوی $\frac{۲}{۳}$ ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع BCD است. امّا $\frac{۲}{۳}$ ارتفاع مثلث متساوی‌الاضلاع BCD برابر $\frac{b\sqrt{۳}}{۲}\times\frac{۲}{۳}$، یعنی $\frac{b\sqrt{۳}}{۳}$ است.

پس داریم:

$$k^۲ = a^۲ - \frac{b^۲}{۳} \Rightarrow k = \sqrt{\frac{۳a^۲ - b^۲}{۳}} \qquad (۳)$$

از رابطهٔ (۱) نتیجه می‌شود:

$$h = \frac{\frac{b^۲}{۴}\sqrt{۳} \times \frac{\sqrt{۳a^۲ - b^۲}}{۳}}{S_{BAC}} = \frac{b^۲\sqrt{۳a^۲ - b^۲}}{۴S_{BAC}} \qquad (۴)$$

امّا: $\text{حجم متوازی‌السطوح} = ۲S_{BAC} \times h$

بنابراین:

$$V = \frac{b^۲\sqrt{۳a^۲ - b^۲}}{۲} \qquad (۵)$$

بحث. تغییرات b از ۰ تا ۲a است.

برای $b = a$، از رابطهٔ (۵) نتیجه می‌شود: $V = \frac{a^۳\sqrt{۲}}{۲}$ که پاسخ مسألهٔ قبل است.

هنگامی که لوزی مربع باشد، $b = a\sqrt{۲}$ و رابطهٔ (۵) به‌صورت $v = a^۳$ درمی‌آید. در این حالت متوازی‌السطوح به یک مکعب به ضلع a تبدیل می‌شود.

۲۷۱. داریم:

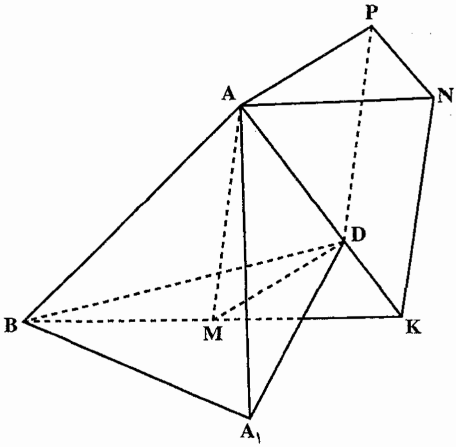
$$S_{\text{لوزی}} = \frac{۱۲\times۱۶}{۲} = ۹۶cm^۲ \Rightarrow$$

$$V = \text{سطح قاعده} \times \text{ارتفاع} = ۹۶\times۸ = ۷۶۸cm^۳$$

۲۷۲. داریم:

$$S_{\text{قاعده}} = ۲۴\times۱۶\times\sin۶۰^\circ = ۱۹۲\sqrt{۳}cm^۲$$

$$\text{حجم متوازی‌السطوح} = V = \text{سطح قاعده} \times \text{ارتفاع} = ۱۹۲\sqrt{۳}\times۱۰ = ۱۹۲۰\sqrt{۳}cm^۳$$



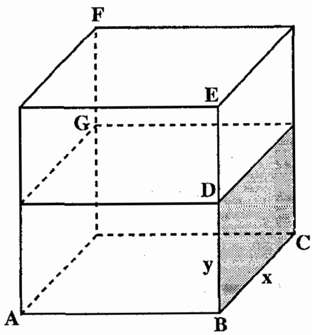
۲۷۳. نقطهٔ M را محل برخورد قطر AC_1، با صفحهٔ A_1BD درنظر بگیرید. پس M محل برخورد میانه‌های مثلث A_1BD می‌شود (این نقطه را نقطهٔ میانه‌ای مثلث می‌نامند) علاوه بر این، M قطر AC_1 را به نسبت ۲ : ۱ تقسیم می‌کند، یعنی: $AM = \frac{1}{3}d$.

هرم ABA_1D را درنظر بگیرید. (شکل). روی BM نقطهٔ K را طوری اختیار کنید که MK=BM و سپس منشور MKDANP را بسازید. به آسانی متوجه خواهید شد که فاصله‌های بین یالهای جانبی این منشور، بترتیب برابر است با فاصله‌های نقطه‌های A_1، B و D از AM. در نتیجه ضلعهای مقطع که عمود بر یالهای جانبی منشور MKDANP هستند، برابر این فاصله‌ها می‌شوند. علاوه بر این، حجم هرم ABA_1D، با حجم منشور ساخته شده برابر است و مقدارش یک ششم حجم متوازی‌السطوح می‌شود. یعنی:

$$\frac{1}{6}V = \frac{1}{3}ds$$

$$V = 2ds$$

۲.۱.۸.۳. ماکزیمم حجم متوازی‌السطوح



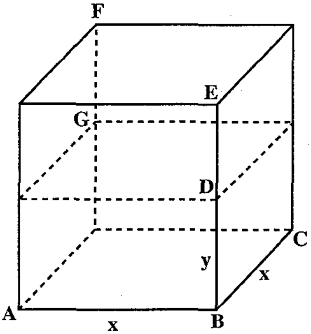
۲۷۴. فرض می‌کنیم x^2 قاعده، y ارتفاع و $(x+y)=l$ مقدار ثابت باشد. حجم متوازی‌السطوح مساوی x^2y است. $BD=y$ را به اندازهٔ خودش امتداد می‌دهیم تا $DE=BD$ حاصل می‌شود. یک جسم BF خواهیم داشت که دو برابر قبلی یعنی جسم BG است. ماکزیمم ACEF متناظر با ماکزیمم ACDG است. اما مجموع سه یال اولی ثابت است، چون:

$$AB+BC+BE=2(x+y)=2l$$

بنابراین جسم BF در صورتی ماکزیمم است که سه‌یال آن باهم برابر باشند؛ از آن جا نتیجه می‌شود که حجم BG هنگامی ماکزیمم است که ضلع مربع قاعده، دو برابر ارتفاع متوازی‌السطوح باشد.

در این صورت:

$$V = \frac{۴l^۳}{۲۷}$$



۲۷۵. حجم جعبه را با درنظرگرفتن $DE = BD = y$ دو برابر می‌کنیم (شکل). مساحت کل متوازی‌السطوحی که به این ترتیب حاصل شده است برابر $۲a^۲$ است. اما این متوازی‌السطوح یک مکعب است. بنابراین جعبهٔ ACDG نصف یک مکعب می‌باشد، و ارتفاع y مساوی نصف ضلع قاعدهٔ مربع است.

مساحت ۵ وجه یا $x^۲ + ۴xy = a^۲$ برابر است با:

$$x^۲ + ۴x \times \frac{x}{۲} = a^۲ \Rightarrow ۳x^۲ = a^۲ \Rightarrow x = \frac{a}{\sqrt{۳}} \quad , \quad y = \frac{a}{۲\sqrt{۳}}$$

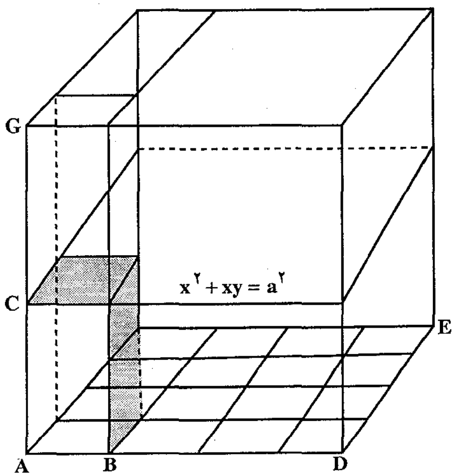
$$\Rightarrow V = \frac{a^۲}{۳} . \frac{a}{۲\sqrt{۳}} = \frac{a^۳}{۶\sqrt{۳}}$$

۲۷۶. ضلع مربع را x و ارتفاع جسم را y می‌گیریم. اندازهٔ حجم برابر است با $x^۲y$ و مساحت ثابت داده شده $x^۲ + xy = a^۲$ است داریم:

$$(۴x)^۲ + ۴ \times ۴xy = ۱۶a^۲$$

در این رابطه عامل اول مساحت مربعی به ضلع ۴x، عامل دوم مجموع مساحت چهار وجه جانبی است که قاعده‌شان ۴x و ارتفاع هر یک y است.

اما می‌دانیم ماکزیمم حجم هنگامی است که ضلع مربع قاعده، دو برابر ارتفاع باشد، بنابراین برای مثال داده شده که ضلع مربع ۴x است، داریم:



$$۴x = ۲y \Rightarrow y = ۲x$$

بنابراین ماکزیمم حجم وقتی است که ارتفاع y دو برابر ضلع x قاعدهٔ جسم خواسته شده باشد، از آن جا :

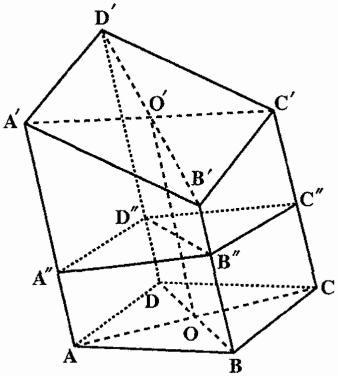
$$x^۲ + xy = a^۲ \Rightarrow x^۲ + ۲x^۲ = a^۲ \Rightarrow a^۲ = \frac{a^۲}{۳} \Rightarrow$$

$$x = \frac{a}{\sqrt{۳}} \ , \ y = \frac{۲a}{\sqrt{۳}} \Rightarrow$$

در این حالت

$$V = x^۲ y = \frac{۲a^۳}{۳\sqrt{۳}}$$

۳.۱.۸.۳. اندازهٔ حجم متوازی‌السطوح ناقص



۲۷۷. متوازی‌السطوح ناقص $ABCDA'B'C'D'$ و مقطع قائم $A''B''C''D''$ از آن را درنظر می‌گیریم. این جسم، مجموع دو منشور ناقص مثلث‌القاعدهٔ $ABDA'B'D'$ و $BCDB'C'D'$ است که اگر V حجم آن باشد، داریم :

$$V = S_{A''B''D''} \times \frac{AA' + BB' + DD'}{۳} + S_{B''C''D''} \times \frac{BB' + CC' + DD'}{۳}$$

$$V = \frac{S_{A''B''C''D''}}{۲} \times \frac{AA' + ۲BB' + CC' + ۲DD'}{۳} \quad (۱)$$

نقطه‌های برخورد قطرهای متوازی‌الاضلاعهای ABCD و $A'B'C'D'$ را O و O' می‌نامیم. در ذوزنقه‌های $ACC'A'$ و $BDD'B'$ داریم :

$$AA' + CC' = ۲OO'$$

$$BB' + DD' = ۲OO'$$

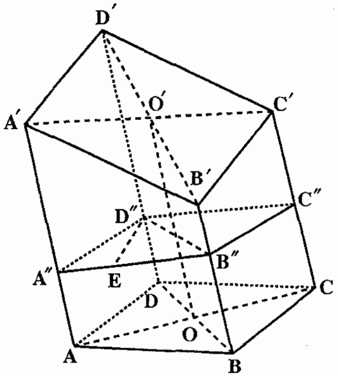
از آن‌جا :

$$OO' = \frac{AA' + BB' + CC' + DD'}{۴}$$

و رابطه (۱) به صورت زیر در می‌آید :

$$V = \frac{S_{A''B''C''D''}}{۲} \times \frac{۲OO' + ۴OO'}{۳} = S_{A''B''C''D''} \times OO'$$

اما برای این که OO' را مشخص کنیم، باید توجه کنیم که OO' واسطهٔ حسابی بین یالهای هرم است.



۲۷۸. متوازی‌السطوح ناقص $ABCDA'B'C'D'$ را درنظر می‌گیریم و $A''B''C''D''$ مقطعی قائم از آن را رسم می‌کنیم. $D''E$ را عمود بر $A''B''$ رسم می‌کنیم. $D''E$ بر صفحهٔ $ABB'A'$ عمود است. می‌دانیم که حجم این جسم برابر است با :

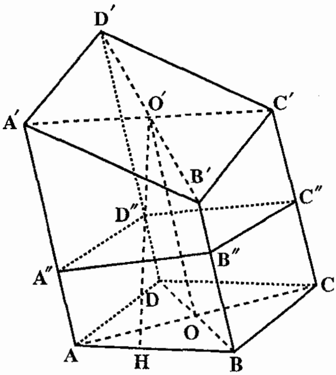
$$V = \text{مساحت}\ A''B''C''D'' \times \frac{AA'+BB'+CC'+DD'}{۴}$$

امّا : $\qquad$ $\text{مساحت}\ A''B''C''D'' = A''B''.D''E = C''D'' \times D''E$

و می‌توان نوشت :

$$V = \left(\frac{AA'+BB'}{۴} \times A''B'' + \frac{CC'+DD'}{۴} \times C''D''\right)D''E$$

ویا : $\qquad$ $V = \frac{۱}{۲}(S_{ABB'A'} + S_{CDD'C'})D''E$



۲۷۹. با توجه به شکل دیده می‌شود که حجم این جسم برابر است با :

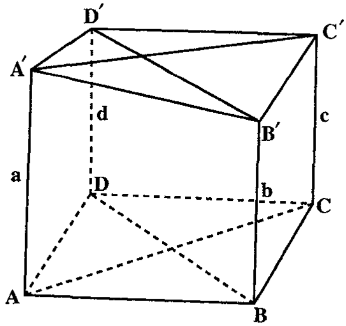
$V = S_{A''B''C''D''} \times OO'$ $\qquad$ (۱)

امّا اگر θ زاویهٔ حادهٔ بین صفحه‌های $ABCD$ و $A''B''C''D''$ باشد، چون $A''B''C''D''$ تصویر $ABCD$ است، می‌دانیم که $S_{A''B''C''D''} = S_{ABCD} \times \cos\theta$ است. حال $O'H$ را عمود بر قاعده رسم می‌کنیم، $O\hat{O'}H = \theta$ است، زیرا OO' و $O'H$ بترتیب بر صفحه‌های $A''B''C''D''$ و $ABCD$ عمودند. و در مثلث $O'HO$ قائم‌الزاویه در H داریم : $\qquad$ $O'H = OO' \cos\theta$

اکنون رابطهٔ (۱) را به صورت زیر می‌توان نوشت :

$$V = S_{ABCD} \times \cos\theta \times \frac{O'H}{\cos\theta} = S_{ABCD} \times O'H$$

۲۸۰. خطهای $A'C'$ و $B'D'$ در یک صفحه قرار ندارند. آنها یالهای رو به روی چهاروجهی $A'B'C'D'$ را تشکیل می‌دهند که سطح چپ انتهای متوازی‌السطوح ناقص چهاروجهی را به دو قسمت هم ارز تقسیم می‌کند (قضیهٔ ضمیمه). بنابراین این جسم، نصف مجموع چهار منشور مثلث‌القاعدهٔ $ABCA'B'C'$، $ADCA'D'C'$، $BADB'A'D'$ و $BCDB'C'D'$ است. مقطع قائم این چهار منشور هم‌ارز می‌باشند ؛ T را مساحت یکی از این مثلثها، مثلاً مساحت مثلث ABC فرض می‌کنیم.



مساحت یک منشور ناقص مثلث‌القاعده، برابر است با حاصل ضرب مساحت مقطع قائم آن، در ثلث مجموع یالهای جانبی‌اش. پس داریم :

$$\text{حجم } ABCA'B'C' = T.\frac{a+b+c}{۳}$$

$$\text{حجم } ADCA'D'C' = T\ \frac{a+d+c}{۳}$$

$$\text{حجم } BADB'A'D' = T.\frac{b+a+d}{۳}$$

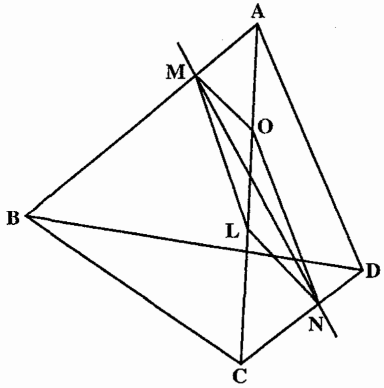
$$\text{حجم } BCDB'C'D' = T.\frac{b+c+d}{۳}$$

از آن جا نتیجه می‌شود :

$$\text{نصف مجموع حجمها} = T.\frac{a+b+c+d}{۲} = \text{مساحت } ABCD.\frac{a+b+c+d}{۴}$$

قضیه. هرگاه خطی روی دو وجه روبه روی یک چهاروجهی چنان بلغزد که همواره در یک صفحه متوازی یا دو یال دیگر باقی بماند، این خط یک چهارضلعی چپ به وجود می‌آورد که چهاروجهی را به دو بخش هم ارز تقسیم می‌کند.

اثبات. چهاروجهی ABCD را درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم MN خطی باشد که



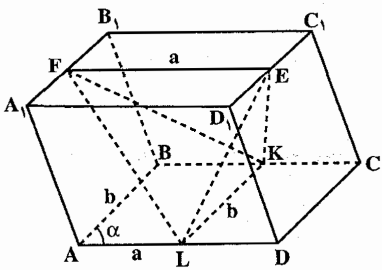
AB و CD را می‌پیماید و در صفحه‌ای موازی BC و AD واقع است.
می‌دانیم که چهارضلعی ایجاد شده از این حرکت، چهارضلعی چپ است و همچنین ضلعهای AB و DC به طور ثابت به نسبت ثابتی تقسیم می‌شوند. اما صفحهٔ قاطع موازی با دو یال AD و BC، صفحه‌های ABC و DBC را در خطهای MO و NL موازی BC، همچنین صفحه‌های BAD و CAD را در خطهای LM و NO موازی با AD قطع می‌کنند. در نتیجه مقطع حاصل متوازی‌الاضلاع LMON است. سطح چپ، که MN مولد آن است، این متوازی‌الاضلاع را به دو بخش مساوی تقسیم می‌کند. همین مطلب برای دیگر مقطعهای مشابه درست است. بنابراین چهاروجهی به دو بخش معادل تقسیم می‌شود.

۳.۸.۱.۴. اندازهٔ حجمهای ایجاد شده

۲۸۱. این حجم، مساوی $\frac{V}{۶}$ است.

۳.۸.۲. نسبت حجمها

۲۸۲. به فرض EF=a و KL=b و a طول عمود مشترک این دو خط (شکل) باشد، خواهیم داشت:



$$V_{EFKL} = \frac{۱}{۶} abc \ \sin\alpha$$

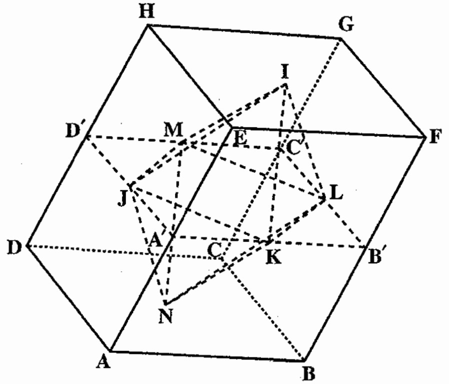
در متوازی‌السطوح $ABCDA_۱B_۱C_۱D_۱$ مساحت قاعده برابر $ab\sin\alpha$ و طول ارتفاع وارد بر این قاعده c است. در نتیجه حجم متوازی‌السطوح مساوی خواهد شد با :

$$V = abc \ \sin\alpha$$

یا نسبت این دو حجم، برابر $\frac{۱}{۶}$ خواهد بود.

۲۸۳. متوازی‌السطوح ABCDEFGH را و هشت‌وجهی را که رأسهای آن مرکز وجه‌های متوازی‌السطوح است، IJKLMN می‌نامیم. مساحت قاعدهٔ متوازی‌السطوح را با b و ارتفاع متناظر آن را h می‌نامیم.

هشت‌وجهی از دو هرم N.JKLM و I.JKLM تشکیل می‌شود. ارتفاع هر یک از این دو هرم مساوی $\frac{h}{۲}$ و مساحت قاعدهٔ مشترک آنها مساوی $\frac{b}{۲}$ است؛ زیرا نقطه‌های J، K، L و M وسطهای ضلعهای متوازی‌الاضلاع A′B′C′D′ می‌باشند که با قاعده‌های متوازی‌السطوح همنهشت است



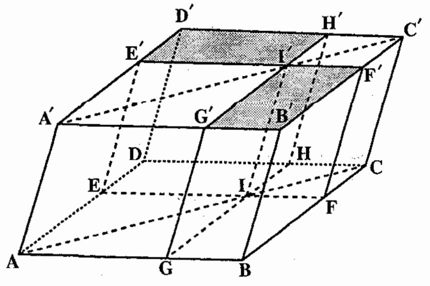
(A′، B′، C′ و D′ وسطهای یالهای متوازی‌السطوح می‌باشند). بنابراین داریم:

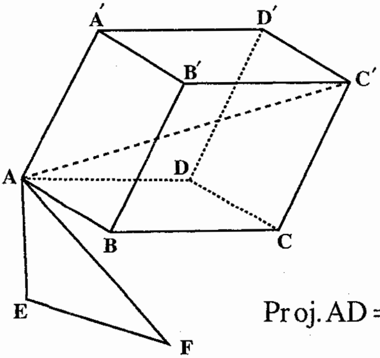
$$\text{حجم هشت‌وجهی} = ۲ \times \frac{۱}{۳} \times \frac{b}{۲} \times \frac{h}{۲} = \frac{bh}{۶} = \frac{۱}{۶} \times \text{حجم متوازی‌السطوح}$$

پس نسبت حجم هشت‌وجهی به حجم متوازی‌السطوح مساوی $\frac{۱}{۶}$ است.

۳.۸.۳. رابطهٔ بین حجمها

۲۸۴. دو متوازی‌السطوح EIHDE′I′H′D′ و IFBGI′F′B′G′ هم ارز (معادل) یکدیگرند؛ زیرا ارتفاعشان مساوی ارتفاع متوازی‌السطوح داده شده است و مساحت قاعده‌های آنها یعنی E′I′H′D′ و I′G′B′F′ نیز باهم برابر است.





۲۸۵. چهار چهاروجهی دارای یک وجه مشترک AEF و رأسهای مقابل به این وجه، D،B، A' و C' می‌باشند. ارتفاعهای آنها تصویرهای AB، AD، AA' و AC' روی یک خط مانند X است که بر صفحهٔ AEF عمود است. با توجه به این که

$$\text{Proj.}AD=\text{Proj.}B'C' \quad \text{و} \quad \text{Proj.}AA'=\text{Proj.}BB'$$

باید نشان دهیم که :

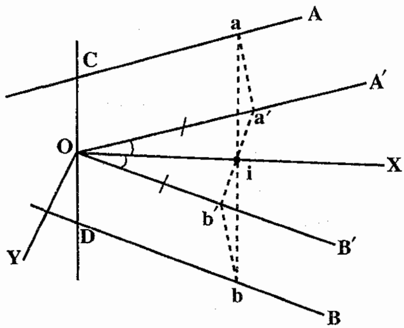
$$\text{Proj.}AC'=\text{Proj.}AB+\text{Proj.}BB'+\text{Proj.}B'C'$$

و یا با فرض این که a ، b، b' و c' تصویرهای B،A ، B' و C' باشند،

$$ac'=ab+bb'+b'c'$$

اما این تساوی برقرار است. زیرا نقطه‌های a، b، b' و c' روی X، با همین ترتیب قرار دارند.

۲۸۶. بدون شک خط CD عمود مشترک این خطها، یک محور تقارن شکل است ؛ زیرا برای هر یک از خطهای A و B، خط CD یک محور تقارن می‌باشد.



اگر O وسط پاره‌خط CD باشد و خطهای OA' و OB' را موازی A و B رسم کنیم، ثابت می‌شود که نیمسازهای زاویه‌های بین دو خط A' و B' ، دو محور تقارن دیگر شکل (A و B) می‌باشند.

نخست ملاحظه می‌کنیم که صفحهٔ $OA'B'$ عمود بر CD است، Ox را نیمساز زاویهٔ $A'\hat{O}B'$ می‌گیریم. روی A و B دو طول اختیاری $Ca=Db$ را جدا می‌کنیم و ثابت می‌کنیم که a و b نسبت به Ox قرینه‌اند.

برای اثبات aa' و bb' را عمود بر OA' و OB' رسم می‌کنیم. $a'b'$ نیمخط Ox را در i قطع می‌کند. داریم :

$aa'=OC$ و $bb'=OD$ ، بنابراین $aa'=bb'$ ؛ پس $Oa'=Ca$ ، $Ob'=Db$ ، و از آن‌جا $Oa'=Ob'$ است. در نتیجه، $a'b'$ عمود بر Ox و $ia'=ib'$ است. صفحه

(bb' و aa') عمود بر Ox است. زیرا Ox عمود بر CD است و در این صفحه مثلثهای قائم‌الزاویهٔ $ia'a$ و $ib'b$ همنهشتند، زیرا ضلعهای زاویه‌های قائمهٔ آنها نظیر به نظیر مساوی‌اند. بنابراین $ia = ib$ و $a\hat{i}a' = b\hat{i}b'$ و از این جا نتیجه می‌شود که a و a' قرینهٔ یکدیگرند، نسبت به Ox.

به همین روش ثابت می‌شود که نیمساز دیگر زاویهٔ (B' و A') نیز محور تقارن شکل (B و A) است. این سه محور تقارن در نقطهٔ O همرسند و در این نقطه، دو به دو برهم عمودند.

۹.۳. رابطهٔ متری

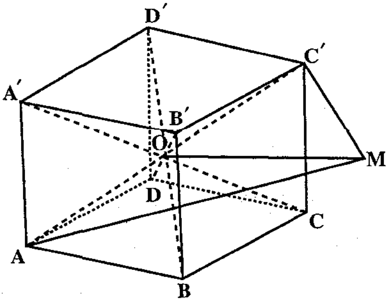
۱.۹.۳. رابطهٔ متری (برابریها)

۲۸۷. AA'، BB'، CC' و DD' را قطرهای متوازی‌السطوح و O را نقطهٔ همرسی آنها می‌گیریم.

مجموع فاصله‌های هر دو رأس رو به رو مانند A و A' از یک صفحه، دوبرابر فاصلهٔ نقطهٔ O از آن صفحه است. بنابراین مجموع فاصلهٔ هشت رأس متوازی‌السطوح از یک صفحه، مساوی هشت برابر فاصلهٔ نقطهٔ O از این صفحه است. در صورتی که صفحهٔ داده شده متوازی‌السطوح را قطع کند، بازهم این رابطه درست است. به شرط آن که اندازه‌های جبری فاصلهٔ رأسهای واقع در یک طرف این صفحه را مثبت، و اندازه‌های جبری فاصله‌های رأسهای واقع در طرف دیگر این صفحه را منفی بگیریم (به عبارت دیگر برای امتداد عمود بر صفحه یک جهت به عنوان جهت مثبت اختیار کنیم).

۲۸۸. متوازی‌السطوح $ABCDA'B'C'D'$ را درنظر می‌گیریم.

قطرهای AC' ، BD'، CA' و DB' از آن را رسم می‌کنیم و نقطهٔ همرسی آنها را O می‌نامیم. M را نقطه‌ای می‌گیریم که از آن نقطه به تمام رأسهای متوازی‌السطوح وصل کرده‌ایم.



با به کار بردن قضیهٔ اوّل میانه‌ها در مثلثهای MAC' ، MCA' ، MBD' و MDB' داریم :

$$MA^۲ + MC'^۲ = ۲MO^۲ + \frac{AC'^۲}{۲} \ ,$$

$$MB^۲ + MD'^۲ = ۲MO^۲ + \frac{BD'^۲}{۲} \ ,$$

$$MC^۲ + MA'^۲ = ۲MO^۲ + \frac{CA'^۲}{۲} \ ,$$

$$MD^۲ + MB'^۲ = ۲MO^۲ + \frac{DB'^۲}{۲}$$

از جمع کردن عضوهای متناظر رابطه‌های بالا، خواهیم داشت :

$$MA^۲ + MB^۲ + MC^۲ + MD^۲ + MA'^۲ + MB'^۲ + MC'^۲ + MD'^۲ = ۸MO^۲ + \frac{۱}{۲}(AC'^۲ + BD'^۲ + CA'^۲ + DB'^۲)$$

۲.۹.۳. رابطهٔ متری (نابرابریها)

۲۸۹. فرض می‌کنیم a، b و c بردارهایی متناظر با سه یال هم‌رأس متوازی‌السطوح باشند. باید ثابت کنیم که :

$$|a+b+c| + |b+c-a| + |c+a-b| + |a+b-c| \geq ۲(|a|+|b|+|c|) \quad (۱)$$

برقرار است. برای این کار قرار می‌دهیم :

$$u = b+c-a \ ، v = c+a-b \ ، w = a+b-c$$

در این صورت رابطهٔ (۱) صورت :

$$|u+v+w| + |u| + |v| + |w| \geq |v+w| + |w+u| + |u+v| \quad (۲)$$

را به خود می‌گیرد. نامساوی (۲) از : E.Hlawka و براساس اتحاد زیر بنا شده است :

$$(|u|+|v|+|w|-|v+w|-|w+u|-|u+v|+|u+v+w|) \times (|u|+|v|+|w|+|u+v+w|)$$
$$= (|v|+|w|-|v+w|)(|u|-|v+w|+|u+v+w|)$$

$$+(|w|+|u|-|w+u|)(|v|-|w+u|+|u+v+w|) \quad (۳)$$

$$+(|u|+|v|-|u+v|)(|w|-|u+v|+|u+v+w|)$$

زیرا، بنا به نامساوی مثلث، هر عامل واقع در سمت راست (۳) بزرگتر از یا مساوی با ۰ است، بنابراین سمت چپ (۳) نامنفی، و مستلزم (۲) است.

اثبات دیگر براساس قضیهٔ زیر از F.W.Levi : بنا شده است : فرض می‌کنیم :

$b_{ij}(i=۱,\ldots,q;\ j=۱,\ldots,r)$، $a_{ij}(i=۱,\ldots,p;\ j=۱,\ldots,r)$

اعداد حقیقی مفروض را نمایش دهند. اگر نامساوی :

$$\sum_{i=1}^{p}\left|\sum_{j=1}^{r} a_{ij}v_j\right| \le \sum_{i=1}^{q}\left|\sum_{j=1}^{r} b_{ij}v_j\right| \qquad (۴)$$

به ازاء جمیع مجموعه‌های اعداد حقیقی : v_1 ، ... ،v_r راست باشد، در این صورت به ازاء بردارهای n مؤلفه‌ای، v_1 ، ... ،v_r نیز راست است.

اثبات را به ازاء n مساوی ۲ بعد به‌دست می‌دهیم ؛ فرض می‌کنیم $u(\theta)$ بردار یکهٔ سازندهٔ زاویهٔ θ با جهت مثبت محور xها را نمایش دهد. در این صورت به ازاء هر بردار v داریم :

$$\int_0^{2\pi}|v\times u(\theta)|d\theta = 4|v| \qquad (۵)$$

بنا به فرض اگر در (۴) به‌جای : v_1 ، ... ،v_r مؤلفه‌های آنها در جهت $u(\theta)$ را قرار دهیم نامساوی راستی را به‌دست می‌آوریم :

$$\sum_{i=1}^{p}\left|\sum_{j=1}^{r} a_{ij}v_j.u(\theta)\right| \le \sum_{i=1}^{q}\left|\sum_{j=1}^{r} b_{ij}v_j.u(\theta)\right|$$

در این صورت با انتگرال گیری نسبت به θ و به کار بردن (۵)، نامساوی (۴) را به‌دست می‌آوریم.

اثبات در ابعاد بیشتر به همین ترتیب با این استثناء که در این مورد (۵) به‌صورت :

$$\int_s |v.u(S)|dS = k|v| \qquad (۵)'$$

که در آن انتگرال روی سطح یک کرهٔ n بعدی، و k ثابتی مستقل از v است تبدیل می‌شود، انجام می‌گیرد. در این صورت :

$$\int_s |v.u(S)|dS = |v|\int_s |v'.u(S)|dS$$

و انتگرال آخر بنا به تقارن کروی مستقل از v' است.
برای اثبات نامساوی اصلی‌مان، با توجه به قضیهٔ لوی به ازاء n مساوی سه بعد کافی است که نامساوی :

$$|a+b+c|+|a+b-c|+|a-b+c|+|-a+b+c| \geq ۲|a|+۲|b|+۲|c| \qquad (۶)$$

را به ازاء اعداد حقیقی a،b و c اثبات کنیم. ابتدا ملاحظه می‌کنیم که تغییر علامت هر یک از موارد a،b و c تنها عبارات سمت راست نامساوی را تبدیل می‌کند و سمت راست را بی‌تغییر باقی می‌گذارد، بنابراین می‌توانیم بدون از دست دادن کلیت مسأله فرض کنیم که a،b و c نامنفی‌اند.
اما :

$$(a+b+c)+(a+b-c)+(a-b+c)+(b+c-a) = ۲a+۲b+۲c \qquad (۶)'$$

است. و از آن‌جا که : $a، b، c \geq ۰$ است، سمت راستهای (۶) و (۶)′ مساویند، درحالی‌که سمت چپ (۶) بزرگتر از یا مساوی سمت چپ (۶)′ است، و بدین ترتیب اثبات تکمیل می‌شود.
قضیهٔ لوی تعمیم زیر در مورد نامساوی (۱) را به ازاء r بردار در فضایی با هر تعداد بعد به‌دست می‌دهد :

$$\sum |\pm a_۱ \pm a_۲ \pm \ldots \pm a_r| \geq ۲\binom{t}{r-۱}\sum_{i=۱}^{r}|a_i| \qquad (۷)$$

در این نامساوی : $t=\left[\frac{۱}{۲}(r-۱)\right]$، و مجموع سمت راست روی تمام ترکیبات + و − درنظر گرفته شده است.
بار دیگر اولین مرحلهٔ اثبات تنزل به‌حالت یک بعدی، و به حالت $a_i \geq ۰$ ، $i=۱،\ldots،r$ است. بعد به ترتیب زیر، اتحادی مشابه با (۶)′، بنا می‌کنیم : فرض می‌کنیم : $s_i = \pm۱ (i=۱،\ldots،r)$ و :

$$s=\begin{cases} ۱ & \text{اگر } \Sigma_{s_i} > ۰ \\ ۰ & \text{اگر } \Sigma_{s_i} = ۰ \\ -۱ & \text{اگر } \Sigma_{s_i} < ۰ \end{cases}$$

سپس ادعا می‌کنیم که :

$$\sum_{i=1}^{r} s(s_1a_1+...+s_ra_r)=2\binom{r-1}{t}\sum_{i=1}^{r}a_i \qquad (8)$$

که مجموع آن روی تمام ترکیبات علامتهای± 1 است، برقرار می‌باشد. عامل s باعث می‌شود که اکثریت علامتهای واقع در هر عبارت ناصفر مثبت باشند، و تقارن سمت چپ مستلزم این است که مساوی k برابر (k مقدار ثابتی است) مجموع سمت راست باشد. باید نشان دهیم که این ثابت چنانچه نشان داده شده، است.

ضریب a_1 در مجموع سمت چپ (۸) مساوی تعداد عباراتی است که در آنها s_1 مساوی اکثریت s_i (منجمله s_1)، منهای تعداد عباراتی است که در آنها s_1 مخالف اکثریت s_i است.

فرض می‌کنیم r فرد باشد. در این صورت در مورد هر مقدار ثابت $s_2, \dots, s_r$ دو مقدار ممکن s_1 داریم. اگر تعداد مقادیر مثبت در میان $s_2, \dots, s_r$ بر تعداد مقادیر منفی نباشد، در این صورت، از آن‌جا که $r-1$ زوج است، حداقل به اندازهٔ ۲ واحد تفاوت دارند. در نتیجه یکی از دو مقدار ممکن s_1 در اکثریت و دیگری در اقلیت خواهد بود، و توزیعات دو عبارت مورد بحث به‌ضریب a_1 لغو می‌شود. اما اگر : $\sum_2^r s_i=0$ باشد، در این صورت s_1، به اصطلاح، دارای رأی برنده است، و دو عبارت توزیع کلی از ۲ تشکیل می‌دهند. تعداد طرفی که در آنها دقیقاً : $\frac{1}{2}(r-1)$ مقدار از $s_1, \dots, s_r$ را می‌توان مثبت اختیار کرد : $\binom{r-1}{t}$ است ؛ و به این ترتیب، (۸) وقتی r فرد باشد، ثابت می‌شود.

حالتی که در آن r زوج است به‌عنوان تمرین به‌خواننده واگذار می‌شود، و اثبات با درنظر گرفتن قدرمطلقها در سمت چپ (۸) تکمیل می‌شود.

ثابتی که به‌دست آوردیم بهترین امکان است، و هنگامی حاصل می‌شود که فی‌المثل :

$$a_1=a_2=...=a_r=1$$

باشد.

تبصره. مسألهٔ در مورد طولهای قطرها با مسألهٔ رأی دادن زیر در ارتباط است : من و $r-1$ شخص دیگر به‌یکی از دو کاندیدا رأی می‌دهیم، و هر کس تصمیمش را با انداختن سکهٔ متجانسی می‌گیرد. در این صورت احتمال این که کاندیدای من رأی اکثریت را ببرد چیست؟

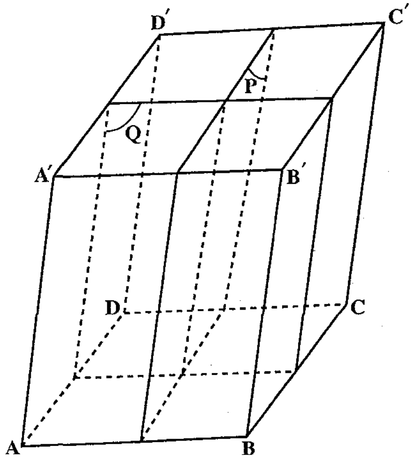
چون r فرد باشد، همواره برنده‌یی موجود است، و درمی‌یابیم که امکانات دلخواه به اندازهٔ:

$$۲\binom{r-۱}{t}$$

از حالتهای غیردلخواه متجاوزند. از آن‌جا که مجموع تمام امکانات ۲^r است، می‌توانیم حالتهای دلخواه را از این دو معادله به‌دست آوریم.

چون n زوج باشد، تنها اگر اکثریت بقیه به کاندیدای من رأی داده باشند، می‌توانیم در سمت برنده باشیم. در این صورت از آن‌جا که تعداد فرد به بن‌بست نمی‌رسد، احتمال در سمت برنده بودن در این حالت $\frac{۱}{۲}$ است، در حالی که، احتمال در سمت بازنده بودن کمتر از $\frac{۱}{۲}$ است، زیرا در صورتی که کاندیدایی اکثریت فقط ۱ رأی را در میان دیگران داشته باشد، می‌توانم موجب به بن‌بست رسیدن رأی‌گیری شوم.

۳.۱۰. مکان هندسی

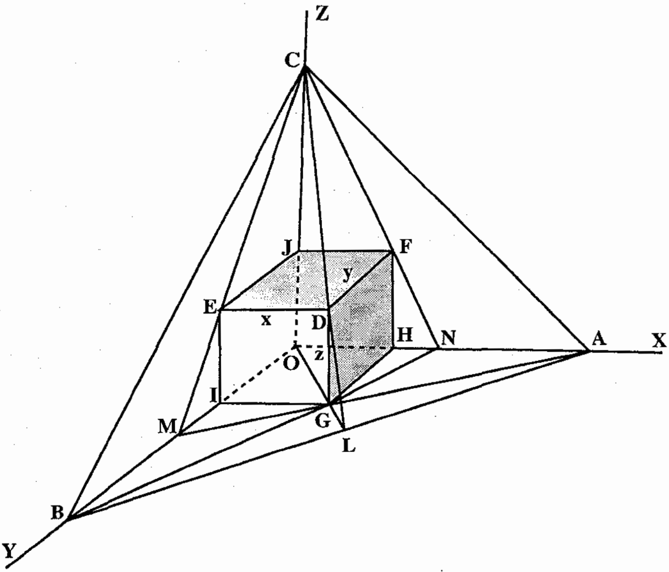


۲۹۰. متوازی‌السطوح ABCDA′B′C′D′ را درنظر می‌گیریم. می‌دانیم مکان هندسی نقطه‌ای که از دو وجه موازی AA′D′D و BB′C′C به یک فاصله است. صفحه‌ای موازی این دو صفحه بین آنها و به یک فاصله از آنها است. این صفحه را P می‌نامیم. همچنین مکان هندسی نقطه‌ای که از دو وجه موازی AA′B′B و CC′D′D به یک فاصله می‌باشد، صفحه‌ای موازی این دو صفحه، بین آنها و به یک فاصله از آنها است. این صفحه را Q می‌نامیم. فصل مشترک دو صفحهٔ P و Q یک خط راست است که بخشی از آن که محصور در شکل است، جواب مسأله است.

۱۱.۳. رسم شکل

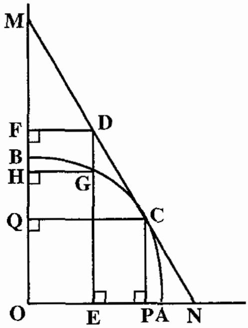
۱.۱۱.۳. تعیین نقطه

۲۹۱. با توجه به مسألهٔ مربوط به چهاروجهی و منشور محاط در آن، مسأله بدین طریق حل می‌شود که صفحهٔ مماسی مانند ABC چنان رسم کنیم که نقطهٔ تماس D، منطبق بر نقطهٔ همرسی میانه‌های مثلث ABC باشد. زیرا متوازی‌السطوح D، مساوی $\frac{2}{3}$ چهاروجهی OABC خواهد بود. حال آن که هر متوازی‌السطوحی که رأسش روی نقطهٔ دیگری از مثلث ABC باشد، حجمش از حجم متوازی‌السطوح بالا کمتر است.



۲.۱۱.۳. رسم صفحه

۲۹۲. کافی است یک چهارم قطعه را بررسی کنیم. بدین معنی که باریکهٔ محصور بین صفحهٔ قاعده و دو صفحهٔ عمود برهم را که بر محور می‌گذرند (l'onglet) درنظر بگیریم.
رأس جسم محاطی ماکزیمم باید روی سطح محدب باریکه باشد، نقطهٔ تماس یک صفحهٔ مماس بر سطح منحنی که سه وجه جانبی کنج سه قائمه را تحت یک مثلث قطع می‌کند که

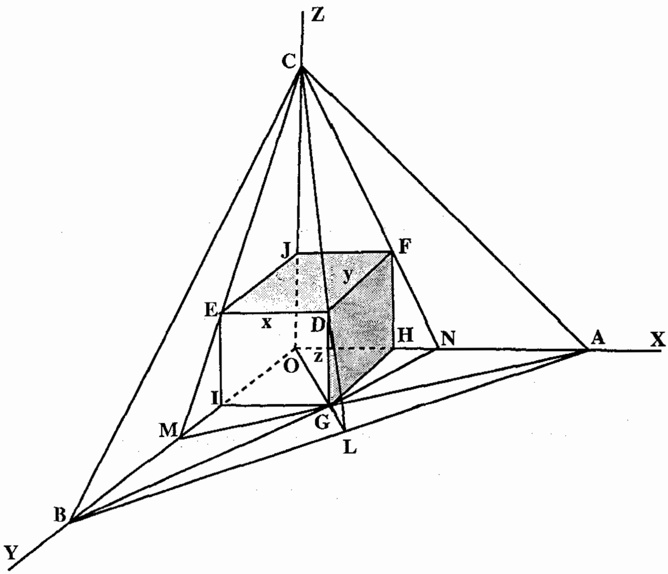


نقطهٔ تماس، نقطهٔ برخورد میانه‌های آن است.

بنابراین اگر کمان $\widehat{AB}$ معرف منحنی نصف‌النهاری me′ridienne از باریکه باشد، باید خط مماس MCN را چنان رسم کنیم که $CM = ۲CN$ باشد؛ زیرا هر میانهٔ مثلث به وسیلهٔ نقطهٔ همرسی میانه‌ها به نسبت $\frac{۲}{۳}$ از رأس تقسیم می‌شود.

متوازی‌السطوح قائمی که یالش CP و قطر قاعدهٔ فوقانیش CQ است، ماکزیمم است. در واقع، برای تمام دیگر نقطه‌های G از منحنی، متوازی‌السطوح متناظر با GE و GH کوچکتر از متوازی‌السطوح DE و DF است. امّا این آخری کوچکتر از جسم CP و CQ است. بنابراین متوازی‌السطوح متناظر با CP و CQ، متوازی‌السطوح ماکزیمم است.

۲۹۳. باید یالهای OA، OB و OC را سه برابر یالهای متناظرشان OH، OI، OJ از متوازی‌السطوح اختیار نمود. صفحهٔ ABD بر رأس D می‌گذرد و چهار وجهی به حجم مینیمم مساوی $\frac{۹}{۲}$ متوازی‌السطوح را می‌دهد.



۳.۱۱.۳. رسم متوازی‌السطوح

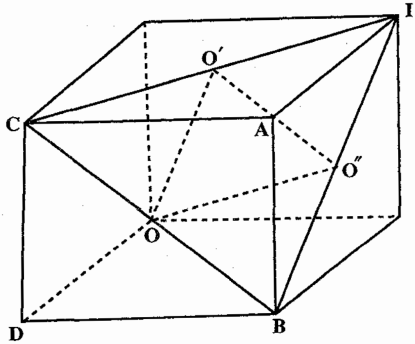
۲۹۴. x، y و z را سه یال فرض کنیم، با فرض این که z ثابت باشد، $x+y$ ثابت خواهد بود؛ زیرا داریم:

$$x+y=1-z$$

اما مستطیل xy در صورتی ماکزیمم است که $x=y$ باشد. بنابراین قاعدهٔ متوازی‌السطوح باید مربع باشد.

با درنظر گرفتن یک وجه دیگر به عنوان قاعده به‌نتیجهٔ مشابهی می‌رسیم. بنابراین متوازی‌السطوح به حجم ماکزیمم، مکعب است.

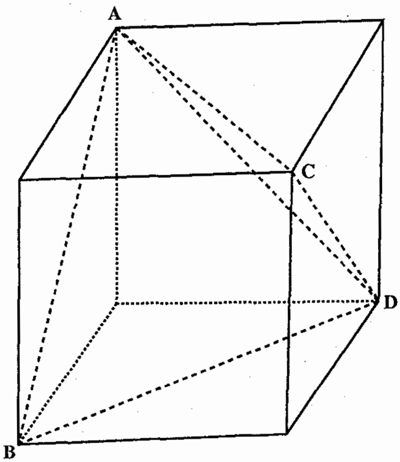
۲۹۵. مسأله را حل شده و $ABCDIJKL$ را جواب مسأله می‌گیریم. دیده می‌شود که نقطه‌های داده شدهٔ O، O' و O'' وسطهای ضلعهای مثلث BCI می‌باشند. بنابراین با معلوم بودن سه نقطهٔ O، O' و O'' مثلث BCI قابل رسم است، پس از رسم این مثلث، رأس A را می‌توان با رسم کردن کنج سه قائمه‌ای که یالهای آن از نقطه‌های B، C و I می‌گذرند، مشخص کرد.



برای این کار ارتفاعهای مثلث BCI را رسم می‌کنیم و از نقطهٔ H محل برخورد ارتفاعها، عمودی بر صفحهٔ BCI اخراج می‌کنیم. سپس در صفحهٔ شامل یک ارتفاع و این عمود، دایرهٔ به قطر این ارتفاع رسم می‌کنیم. نقطهٔ برخورد این عمود و دایره، رأس A است. اگر مثلث BCI حادةالزاویه باشد، مسأله دو جواب برای رأس A دارد که نسبت به صفحهٔ CBI قرینهٔ یکدیگرند. چهار رأس A، B، C و I مشخص می‌باشند و از آن‌جا متوازی‌السطوح قائم خواسته شده رسم می‌شود.

۲۹۶. چهار رأس داده شده را A، B، C و D می‌نامیم. دو حالت می‌توان درنظر گرفت. نخست آن که سه رأس از رأسهای داده شده به یک وجه تعلق داشته باشند و دیگر آن که سه رأس به یک وجه تعلق نداشته باشند. در حالت اوّل، چهار دستهٔ سه‌تایی رأس وجود دارد که چنین ویژگی را دارند:

به هر یک از این دسته‌ها سه قاعدهٔ متفاوت متناظر است و به هر یک از این قاعده‌ها



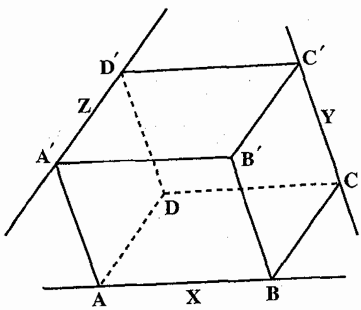
چهار متوازی‌السطوح متفاوت متناظرند. در مجموع ۱۲ متوازی‌السطوح متفاوت برای هر گروه و در نهایت، ۴۸ متوازی‌السطوح جواب مسأله است.

حال اگر فرض کنیم که بین چهار رأس داده شده، تنها دو رأس متعلق به یک وجه باشند، این رأسها باید متعلق به دو سر یک قطر از یک وجه باشند و دو رأس دیگر انتهاهای قطری از وجه موازی وجه اوّلی، و وجهی ناموازی از آن هستند.

همچنین می‌توان به سه صورت چهار نقطه را گروه‌بندی کرد و هر دستهٔ متناظر تنها یک متوازی‌السطوح، امّا سه متوازی‌السطوح از این متوازی‌السطوحها برهم منطبق هستند. بعلاوه، هنگامی که رأسها مشخص شدند، ترسیم بلافاصله به سهولت قابل انجام است.

در بررسی حالت اوّل، برای آن که یک متوازی‌السطوح قائم وجود داشته باشد، باید در چهاروجهی حاصل از چهارنقطهٔ داده شده، یک یال عمود بر قاعده باشد. در دومین حالت باید خطی که وسطهای دو یال رو به رو را به هم وصل می‌کنند، عمود مشترک این دو یال باشند. در صورتی که شرطهای داده شدهٔ قبلی در هر یک از حالتها برای دو زوج از یالهای مختلف برقرار باشند، متوازی‌السطوحها، مکعب مستطیل خواهند بود.

۲۹۷. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و متوازی‌السطوح $ABCDA'B'C'D'$ که یال AB از آن روی X، یال CC' روی Y و سومین یال، یعنی $D'A$ روی Z واقعند، جواب مسأله باشد. $A'A$ موازی Y است، پس A نقطهٔ برخورد خط X با صفحه‌ای است که بر Z می‌گذرد و با Y موازی است. همچنین B نقطهٔ برخورد X با صفحه‌ای است که بر Y می‌گذرد و با Z موازی است.

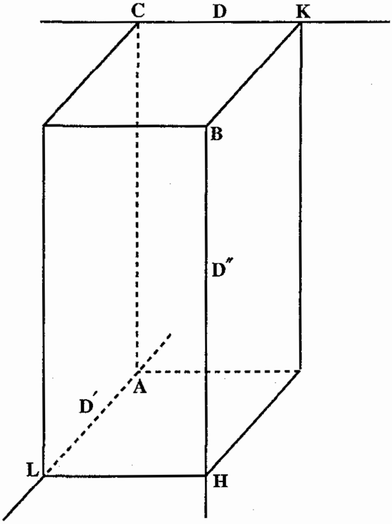


از B خطی موازی Z رسم می‌کنیم. این خط Y را در نقطهٔ C قطع می‌کند و از آن‌جا متوازی‌الاضلاع ABCD به دست می‌آید.

خطی که از A به موازات Y رسم شود، Z را در نقطهٔ A' قطع می‌کند. حال BB' ، CC' و DD' را موازی و مساوی AA' رسم می‌کنیم.

C' روی Y قرار دارد ؛ زیرا Y موازی AA' است و D' روی Z واقع است ؛ زیرا Z و AD موازی‌اند. از آن‌جا متوازی‌السطوح $ABCDA'B'C'D'$ مشخص است.

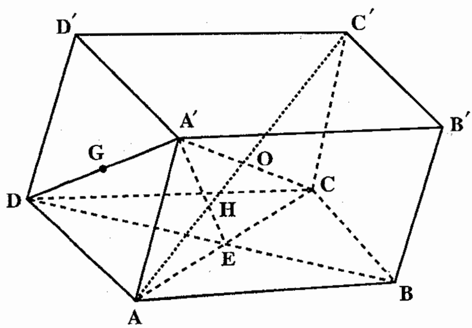
۲۹۸. بر D صفحه‌ای موازی D'' رسم می‌کنیم.



این صفحه خط D' را در نقطه‌ای مانند A قطع می‌کند که یک رأس از متوازی‌السطوح است. همچنین صفحه‌ای که بر D به موازات D' می‌گذرد، خط D'' را در نقطهٔ B رأس دیگر متوازی‌السطوح قطع می‌کند. حال بر خط D' دو صفحهٔ موازی خطهای D و D'' رسم می‌کنیم تا دو رأس H و C از متوازی‌السطوح به دست آید.

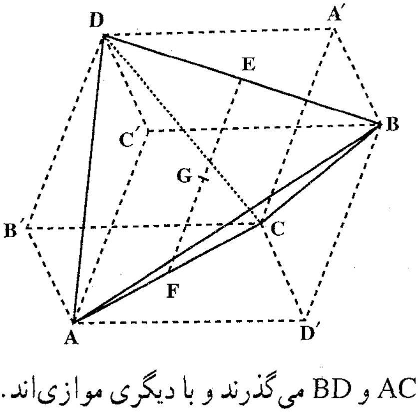
آن‌گاه دو صفحه بر D'' به موازات D' و D رسم می‌کنیم تا دو رأس K و L مشخص شوند. با مشخص شدن ۶ رأس از متوازی‌السطوح دو رأس دیگر بسادگی مشخص می‌شوند.

۲۹۹. صفحه‌ای را که از نقطهٔ A به موازات صفحهٔ $BA'D$ رسم می‌شود، درنظر می‌گیریم. O را مرکز متوازی‌السطوح و H را نقطهٔ برخورد AC' و صفحهٔ $BA'D$ فرض می‌کنیم. می‌دانیم که $AH = \frac{AC'}{۳}$ و یا $\frac{OA}{OH} = ۳$ است. از طرف دیگر، اگر E، F و G وسطهای DB، BA' و $A'D$ ، یعنی مرکزهای وجه‌های ABCD، $ABB'A'$ و $ADD'A'$ از متوازی‌السطوح P باشند، مثلث EFG یک وجه از یک هشت‌وجهیی است که رأس آن مرکزهای وجه‌های متوازی‌السطوح P است. بنابراین



جسم S از این هشت‌وجهی به وسیلهٔ تجانسی به مرکز O و با نسبت ۳ به دست می‌آید. همچنین S جسمی است که نقطهٔ O مرکز تقارن آن است و قطرهای آن موازی یالهای متوازی‌السطوح و سه برابر این یالها می‌باشند. همچنین می‌توان دید که رأسهای P مرکز ثقلهای وجه‌های S هستند. H نقطهٔ برخورد میانه‌های مثلث $AA'C$ است. از آن‌جا $\frac{EH}{EA'}=\frac{۱}{۳}$ و H همچنین مرکز ثقل $A'DB$ و EFG است. در این صورت عضو متناظر آن یعنی A در تجانس قبلی، مرکز ثقل متناظر مثلث EFG، یعنی مرکز تجانس یک وجه از هشت‌وجهی S است.

از آن‌جا نتیجه می‌شود که اگر هشت وجهی S داده شده باشد، رأسهای متوازی‌السطوح P، مرکز ثقلهای وجه‌های هشت‌وجهی S می‌باشند. می‌دانیم که حجم هشت محاط در P مساوی $\frac{P}{۶}$ می‌باشد. بنابراین حجم S که مجانس هشت‌وجهی محاطی با نسبت تجانس ۳ می‌باشد، برابر است با $۲۷\times\frac{P}{۶}=\frac{۹P}{۲}$. در نتیجه نسبت حجم S به P مساوی $\frac{۹}{۲}$ می‌باشد.



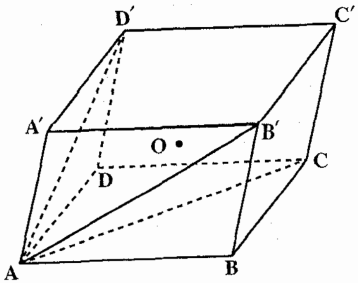
۳۰۰. چهاروجهی ABCD را درنظر می گیریم. سپس در متوازی‌السطوح محیطی وجهی را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم که شامل AC است؛ وجهی که موازی آن است، نمی‌تواند شامل CB ،AD ،AB و CD باشد. از آن‌جا، آن وجه شامل B یال مقابل AC است. همچنین صفحه‌های این وجه‌ها مشخصند. این صفحه‌ها، صفحه‌هایی هستند که بر هر یک از یالهای AC و BD می‌گذرند و با دیگری موازی‌اند. دیده می‌شود که این صفحه‌ها، همچنین موازی خطی هستند که وسطهای یالهای AD و BC را به هم وصل می کند و نقطهٔ G وسط این پاره خط (که همچنین وسط پاره‌خطهای دیگری است که وسطهای یالهای رو به رو به هم وصل می‌کنند) از دو صفحهٔ وجه‌های گفته شده در مسأله به یک فاصله است.

استدلالی مشابه نشان می‌دهد که نقطهٔ G از هر دو وجه مقابل دیگر نیز به یک فاصله است. بنابراین نقطهٔ G مرکز متوازی‌السطوح مورد نظر است. حال رأسهای دیگر متوازی‌السطوح قرینه‌های A' ، B' ، C' و D' نسبت به نقطهٔ G می‌باشند.

بعلاوه بسادگی دیده می‌شود که $AD'CB'C'BA'D$ متوازی‌السطوحی است که وجه‌های آن شامل یالهای چهاروجهی داده شده‌اند.
این روش ترسیم نشان می‌دهد که این متوازی‌السطوح همواره وجود دارد و مسأله تنها یک جواب دارد.

۳۰۱. پاسخ : ۲۹ متوازی‌السطوح
یادآوری می‌کنیم که متوازی‌السطوح با معلوم بودن یکی از رأسها و سه صفحهٔ «میانه» (صفحه‌هایی که هر کدام از آنها از رأسهای متوازی‌السطوح به یک فاصله‌اند، یعنی از مرکز متوازی‌السطوح می‌گذرند و با دو وجه آن موازی‌اند)، به‌طور یک ارزشی معین می‌شود.
برای چهار نقطهٔ مفروض K، L، M و N، (به شرطی که روی یک صفحه نباشند)، هفت صفحه وجود دارد که از این نقطه‌ها به یک فاصله‌اند (آنها، چهاروجهی KLMN را در یالهای «میانه» قطع می‌کنند). از این هفت صفحه، سه صفحه را می‌توان به $C_7^3 = 35$ طریق انتخاب کرد.
ولی ما به سه صفحه‌ای نیاز داریم که در یک نقطه به هم رسیده باشند. بنابراین، از بین این سه‌تایی‌ها، باید آنهایی را که با یک خط راست موازی‌اند، کنار گذاشت. از این گونه صفحه‌های سه‌تایی، ۶ مورد وجود دارد :
اینها گروههای سه‌تایی صفحه‌هایی هستند که با یکی از ۶ یال چهاروجهی موازی‌اند. با انتخاب یکی از $35 - 6 = 29$ گروه سه‌تایی از صفحه‌های «میانه»، می‌توانیم به وسیلهٔ چهار رأس مفروض، یک متوازی‌السطوح بسازیم ؛ برای این منظور، کافی است از چهار نقطهٔ مفروض، صفحه‌هایی موازی با صفحه‌های «میانه» رسم کنیم.

۴.۱۱.۳. رسم شکلهای دیگر



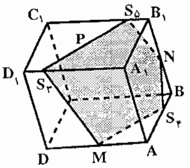
۳۰۲. می‌دانیم که یک چهاروجهی محاط در یک متوازی‌السطوح، از رسم کردن قطرهای وجه‌های جانبی نظیر یک رأس از متوازی‌السطوح و وصل کردن انتهای این قطرها به وجود می‌آید. مثال، چهاروجهی $ACB'D'$ ، همچنین چون متوازی‌السطوح

دارای ۸ رأس است، بنابراین ۸ چهاروجهی می‌توان در متوازی‌السطوح محاط کرد که عبارتند از :

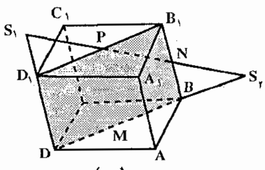
$C'BA'D$، $B'ACD'$، $A'BC'D$، $DC'A'B$، $CB'AD'$، $BA'DC'$، $ACB'D'$ و $D'B'CA$ و می‌بینیم که تنها دوتا از این چهار وجهیها متمایز هستند، چهاروجهیهای $ACB'D'$ و $A'C'BD$. امّا AC' ، CA' ، $B'D$ و BD' یکدیگر را در نقطهٔ O مرکز متوازی‌السطوح قطع می‌کنند که این نقطه، وسط هر یک از این پاره‌خطهاست. از طرف دیگر این نقطه که وسط پاره‌خطهای واصل بین وسطهای یالهای چهاروجهیها نیز هست، مرکز ثقل $ACB'D'$ است. از آن جا، یکی از این دو چهاروجهی قرینهٔ دیگری نسبت به مرکز تقارن O است. از طرفی یکی از این دو چهاروجهی یعنی $ACB'D'$ و نقطهٔ O مرکز ثقل آن داده شده است. سپس AO ، CO ، $B'O$ و $D'O$ را وصل کرده آنها را به اندازهٔ خود از طرف نقطهٔ O امتداد می‌دهیم تا چهاروجهی $C'A'DB$ به‌دست آید و متوازی‌السطوح رسم شود.

۱۲.۳. برش، مقطع

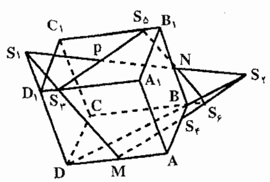
۳۰۳. رسم این برش در شکل (شکل الف) نشان داده شده است. صفحهٔ برش را با α به‌صورت $\alpha = MND$ نشان می‌دهیم. ابتدا نقطهٔ تلاقی خط NP و صفحهٔ AA_1D_1D را به دست می‌آوریم. این خط روی صفحهٔ BB_1D_1D قرار دارد، که صفحهٔ AA_1D_1D را روی خط DD_1 قطع می‌کند. نقطهٔ S_1 محل تلاقی خطهای NP و DD_1 (شکل ب) نقطهٔ مطلوب است. به طریق مشابه، S_2 ، نقطهٔ تلاقی خط NP و صفحهٔ ABCD یعنی $S_2 = NP \cap DB$ یافته می‌شود. صفحهٔ α ، صفحهٔ AA_1D_1D را در امتداد خط S_1M و صفحهٔ ABCD را در امتداد S_2M قطع می‌کند. حال دو رأس برش را در اختیار داریم : $S_3 = S_1M \cap D_1A_1$ و $S_4 = S_2M \cap AB$ (شکل پ). نقطهٔ $S_5 = S_3P \cap B_1C_1$ آخرین رأس برش است. توجه دارید که خطهای S_5N و S_4M خط BC را در



(الف)



(ب)



(پ)

همان نقطهٔ $S_6 = BC\cap\alpha$ قطع می‌کنند.

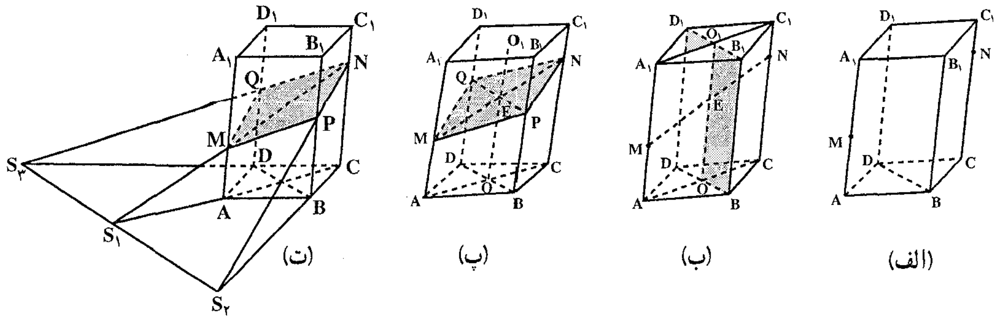
پنج ضلعی $MS_3S_5NS_4$ برش مطلوب است (شکل الف). ضلعهای S_3S_5 و MS_4 و نیز ضلعهای MS_3 و S_5N برش موازی هستند زیرا آنها روی وجه‌های موازی قرار دارند. حال نسبت AS_4 / S_4B را به دست می‌آوریم.

از تشابه مثلثهای MAS_4 و S_6BS_4 (شکل پ) به $AS_4 / BS_4 = AM / BS_6$ دست می‌یابیم.

تساوی مثلثهای BS_6N و B_1S_5N (نقطهٔ N میانگاه یال BB_1 است) موجب $BS_6 = B_1S_5$ می‌شود. از این گذشته نقطهٔ P مرکز تقارن متوازی‌الاضلاع $A_1B_1C_1D_1$ است و در نتیجه $B_1S_5 = D_1S_3$ خواهد بود. بدین‌ترتیب به $BS_6 = D_1S_3$ وصول می‌یابیم.

با منظور کردن $AM = DM$ نیز $AS_4 / BS_4 = DM / D_1S_3$ حاصل می‌شود. از تشابه مثلثهای DS_1M و $D_1S_1S_3$ به $DM / D_1S_3 = DS_1 / D_1S_1$ وصول می‌یابیم (شکل ب) (برحسب تساوی یک ضلع و زاویه‌های مجاور به آن) موجب D_1S_1 / B_1N تشابه مثلثهای S_1D_1P و NB_1P می‌شود. با درنظر گرفتن $B_1N = \frac{1}{2}B_1B = \frac{1}{2}D_1D$ رابطهٔ $D_1S_1 = \frac{1}{2}D_1D$ و در نتیجه $DS_1 = \frac{3}{2}DD_1$ به‌دست می‌آید. آن‌گاه بترتیب $DM / D_1S_3 = DS_1 / D_1S_1 = 3/1$ ، $AS_4 / BS_1 = DM / D_1S_3 = 3/1$ را خواهیم داشت. بنابراین یال AB از طرف رأس A به نسبت ۱ :۳ تقسیم می‌شود.

۳۰۴. قبلاً مسأله‌هایی را در مورد رسم برشی به موازات خط معینی مورد ملاحظه قرار داده‌ایم، مسألهٔ حاضر از این جهت با مسأله‌های قبلی متفاوت است که هیچ یک از نقطه‌های M و N برش، در روی صفحهٔ ABCD محتوی خط BD به موازات برش، قرار ندارند. ضلعهای برش که از رأسهای M و N ناشی می‌شوند با خط BD موازی نیستند؛ زیرا این خط وجه‌های محتوی ضلعهای مزبور را قطع می‌کند. صفحهٔ برش را با α نشان



(ت) (پ) (ب) (الف)

می‌دهیم. خط BD در صفحهٔ BB_1D_1D (شکل ب) قرار دارد. در نتیجه صفحه‌های α و BB_1D_1D در امتداد خط موازی با BD همدیگر را قطع می‌کنند. نقطهٔ تلاقی خط MN، در صفحهٔ α را با صفحهٔ BB_1D_1D رسم می‌کنیم. صفحهٔ AA_1C_1C محتوی خط MN، صفحهٔ BB_1D_1D را در امتداد خط OO_1 قطع می‌کند که موازی یالهای جانبی متوازی‌السطوح است. E، نقطهٔ مشترک خط MN و OO_1 دقیقاً عبارت از نقطهٔ اشتراک خط MN و صفحهٔ BB_1D_1D است. حال خطی به‌موازات خط BD از نقطهٔ E در صفحهٔ BB_1D_1D رسم کرده و نقطه‌های تلاقی P و Q را بترتیب با یالهای BB_1 و DD_1 پیدا می‌کنیم (شکل پ). خط PQ، فصل مشترک صفحه‌های α، BB_1D_1D بوده و در نتیجه نقطه‌های P و Q رأسهای برش خواهند بود. این برش عبارت از متوازی‌الاضلاع BB_1D_1D است که در آن $MQ \| PN$ و $MP \| QN$ می‌باشد. حال نسبت BP / PB_1 را به دست می‌آوریم. به‌دلیل این که $BOEP$ متوازی‌الاضلاع است و OE میانخط ذوزنقهٔ $AMNC$ است، رابطهٔ $BP = OE$ را داریم و از آن نیز چنین داریم :

$$OE = \frac{1}{2}(AM + CN)$$

با منظور کردن $AM = m\,AA_1$، $CN = n\,CC_1$ و $AA_1 = CC_1 = BB_1$ نتیجه می‌شود که :

$$BP = OE = \frac{m+n}{2}BB_1$$

آن‌گاه چنین به‌دست می‌آید :

$$PB_1 = BB_1 - BP = \frac{2-m-n}{2}BB_1 \ , \ BP / PB_1 = \frac{m+n}{2-m-n}$$

بنابراین یال BB_1 از طرف رأس B به نسبت $\frac{m+n}{2-m-n}$ تقسیم می‌شود.

توجه. در مسأله بالا هر صفحهٔ دیگری مثل صفحهٔ $ABCD$ را می‌توانیم به جای صفحهٔ BB_1D_1D اختیار کنیم، رسمهای متناظر به آن در شکل (ت) نشان داده شده است.

$$(S_1 = MN \cap AC \ , \ S_2S_3 \| BD)$$

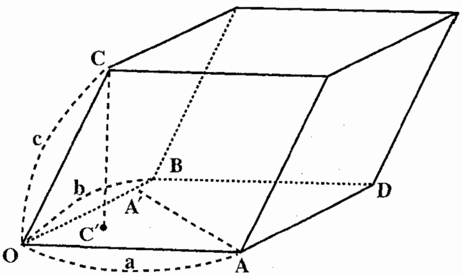
۳۰۵. مقطع عموماً، یک مثلث است، در صورتی که صفحه، تنها سه یال تشکیل دهندهٔ هر کنج سه وجهی نظیر یک رأس را قطع کند ؛ یک متوازی‌الاضلاع است در صورتی که

صفحه، چهاریال موازی را قطع کند ؛ یک شش ضلعی است، در صورتی که صفحه ۶ یال را قطع کند، ضلعهای رو به روی این شش ضلعی باهم موازی‌اند.

در حالت خاص، شش ضلعی به یک پنج ضلعی تبدیل می‌شود و این در صورتی است که صفحهٔ قاطع از یک رأس بگذرد و چهار یال را در خارج آن رأس قطع کند. این پنج ضلعی نیز دو زوج ضلع رو به روی موازی دارد.

در حالتی که صفحهٔ قاطع از مرکز متوازی‌السطوح بگذرد و مقطع شش‌ضلعی باشد، مرکز شش ضلعی بر مرکز متوازی‌السطوح منطبق است.

۱۳.۳. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش



۳۰۶. ارتفاع AA' از قاعدهٔ OADBی متوازی‌السطوح، همچنین ارتفاع CC' متوازی‌السطوح را رسم می‌کنیم.

V حجم این متوازی‌السطوح برابر است با :

$$V = \text{مساحت } OADB \times CC' = b \times AA' \times CC'$$

$$\Rightarrow V = abc \times \frac{AA'}{a} \times \frac{CC'}{c}$$

با فرض $v = \frac{AA'}{a} . \frac{CC'}{c}$ ، داریم :

$$V = abc.v$$

θ و φ را بترتیب اندازهٔ زاویهٔ $A\hat{O}B$ و زاویهٔ OC با صفحهٔ AOB اختیار می‌کنیم.

داریم : $v = \sin\theta . \sin\varphi$.

از آن‌جا $V \leq 1$ است. در صورتی $v = 1$ است که $\sin\theta = 1$ و $\sin\varphi = 1$ یعنی متوازی‌السطوح قائم باشد.

۳۰۷. از برابری قطرهای متوازی‌السطوح، مستطیل بودن وجه‌ها نتیجه می‌شود.

۱۴.۳ . مسأله‌های ترکیبی

۳۰۸. متوازی‌السطوح داده شده قائم است. بنابراین داریم :

۱ . مساحت جانبی

$$\text{سطح جانبی} = \text{محیط قاعده} \times \text{ارتفاع} = ۲(۱۲+۸)\times ۵ = ۲۰۰\,\text{cm}^۲$$

۲ . مساحت کل $\quad S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + S_{\text{دو قاعده}}$

$$S_{\text{یک قاعده}} = ۱۲\times ۸\times \sin ۶۰^\circ = ۴۸\sqrt{۳}\,\text{cm}^۲$$

$$\Rightarrow S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + S_{\text{دو قاعده}} \Rightarrow S_{\text{کل}} = ۲۰۰+۹۶\sqrt{۳}\,\text{cm}^۲$$

۳ . اندازهٔ حجم

$$\text{حجم متوازی‌السطوح} = \text{سطح قاعده} \times \text{ارتفاع} = ۴۸\sqrt{۳}\times ۵ = ۲۲۰\sqrt{۳}\,\text{cm}^۳$$

۳۰۹. الف. چون یالهای متقابل در چهاروجهی منتظم بر یکدیگر عمودند، $C_۱E$ و BF برهم عمود می‌شوند (شکل).

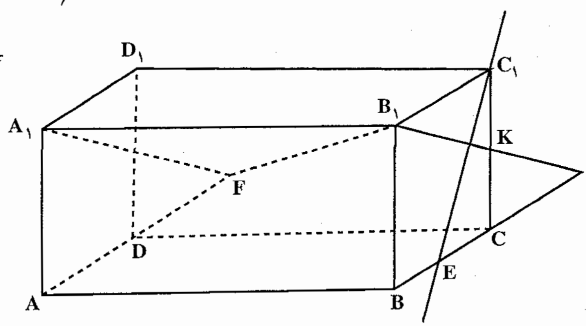
اگر K را وسط $C_۱C$ درنظر بگیریم، در آن‌صورت چون خطهای $B_۱K$ و $B_۱A_۱$ بر $C_۱E$ عمودند، خط $B_۱F$ باید در صفحه‌ای قرار گیرد که از $B_۱K$ و $B_۱A_۱$ می‌گذرد. بنابراین، $A_۱F$ موازی $B_۱K$ خواهد بود و از آن‌جا $DF = a$.

ب. فاصلهٔ بین وسطهای MN و PQ برابر است با فاصلهٔ بین $B_۱F$ و $C_۱E$، که می‌توان آن را ازمساوی قراردادن عبارتهای حجم چهاروجهی $FB_۱C_۱E$ به‌دست آورد :

$$\frac{۱}{۳}S_{B_۱C_۱E}\cdot ۲a = \frac{۱}{۶}FB_۱\cdot C_۱E\cdot x$$

یا

$$x = \frac{۴a}{۳\sqrt{۵}}$$



۳۱۰. ۱. یالهای متوازی‌السطوح را x، y و z ؛ سطح آن را S و حجم آن را V می‌گیریم. داریم :

$$S = ۲(xy+yz+zx)\ , V = xyz$$

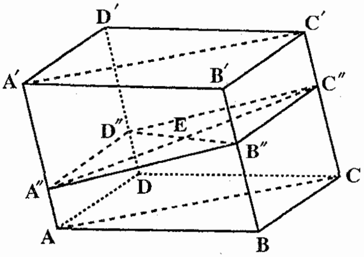
فرض کنیم V ثابت باشد، حال کمترین مقدار S، یعنی کمترین مقدار $xy+yz+zx$ را به‌دست می‌آوریم. چون سه‌مقدار xy، yz و zx و حاصلضرب آنها $S^2=x^2y^2z^2$ مقدار ثابتی است، پس مجموع $xy+yz+zx$ وقتی کمترین مقدار ممکن را خواهد داشت که $xy=yz=zx$ یعنی $x=y=z$، که در این‌صورت $V=x^3$ و از آن‌جا $x=\sqrt[3]{V}$ است.

۲. اکنون فرض می‌کنیم S مقدار ثابتی باشد و می‌خواهیم مقدار x، y و z را چنان بیابیم که V یعنی حجم متوازی‌السطوح حداکثر مقدار ممکن باشد. داریم:

$$V^2=x^2y^2z^2=(xy)(yz)(zx)$$

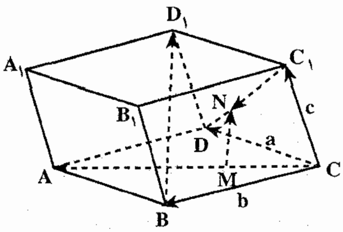
پس V^2 حاصلضرب سه مقدار است که مجموع آنها یعنی $\frac{S}{2}$ ثابت می‌باشد و بنابراین V^2 و از آن‌جا V وقتی ماکزیمم است که $xy=yz=zx$ و یا $x=y=z$ باشد، از آن‌جا: $S=6x^2$ و یا $x=\sqrt{\frac{S}{6}}$ است. بنابراین متوازی‌السطوحی که بیشترین حجم را دارد مکعبی است که اندازهٔ یال آن $\sqrt{\frac{S}{6}}$ است.

۱.۳۱۱. فرض می‌کنیم $ABB'A'$ و $ADD'A'$ هم‌ارز باشند. مقطع قائم عمود بر AA' را $A''B''C''D''$ می‌نامیم. متوازی‌الاضلاعهای $ABB'A'$ و $ADD'A'$ که معادل یکدیگرند، در قاعدهٔ AA' مشترکند، بنابراین ارتفاعهای متناظر این قاعدهٔ مشترک مساوی می‌باشند، یعنی $A''B''=A''D''$ و از آن‌جا متوازی‌الاضلاع $A''B''C''D''$ لوزی است.



بعکس اگر $A''B''=A''D''$ باشد، وجه‌های متناظر آنها هم‌ارز می‌باشند. $B''\hat{A''}D''$ یک زاویهٔ مسطحهٔ فرجهٔ یال AA' است، و صفحهٔ $ACC'A'$ که شامل نیمساز $A''C''$ از این زاویه است، نیمساز این فرجه است. همچنین می‌توان دید که این صفحه، نیمساز فرجهٔ CC' است و نیز $BDD'B'$ نیمساز فرجه‌های BB' و DD' می‌باشد؛ بعلاوه صفحه‌های قطری $ACC'A'$ و $BDD'B'$ برهم عمود می‌باشند؛ زیرا زاویهٔ قائمهٔ $A''EB''$ یک زاویهٔ مسطحه از فرجه‌هایشان می‌باشد.

بعکس، اگر دو صفحهٔ قطری دارای یکی از شرطهای داده شده باشند، $A''B''C''D''$، یک لوزی است و وجه‌های $ABB'A'$ و $ADD'A'$ هم‌ارز می‌باشند.
فرض کنیم که مقطع قائم از نقطهٔ E مرکز متوازی‌السطوح رسم شده باشد. فاصله‌های E از ضلعهای لوزی $A''B''C''D''$ مساوی هستند؛ امّا این فاصله‌ها با فاصله‌های نقطهٔ E از وجه‌های متوازی‌السطوح که بر ضلعهای این لوزی می‌گذرند، یکسان است؛ بعکس اگر فاصلهٔ نقطهٔ E از چهار وجه موردنظر مساوی باشد، $A''B''C''D''$ یک لوزی است و چهار وجه هم‌ارزند.
۲. بلافاصله از قسمت (۱) نتیجه می‌شود که اگر متوازی‌السطوحی دارای شش‌وجه هم‌ارز باشد، مقطعهای قائم عمود بر سه امتداد یالها، لوزی هستند، و بعکس. همچنین وقتی که شش صفحهٔ قطری، نیمسازهای فرجه‌های متناظرشان باشند، و دو به‌دو عمود بر هم باشند، و بعکس؛ و بالاخره وقتی که مرکز متوازی‌السطوح از شش وجه به یک فاصله است و بعکس.



۳۱۲. فرض کنید که M نقطه‌ای روی خط AC و N نقطه‌ای روی خط C_1D است (شکل). طبق حکم، برای توازی خطهای MN و BD_1 لازم و کافی است که عددی مانند λ وجود داشته باشد که: $\overrightarrow{MN}=\lambda\overrightarrow{BD_1}$ (۱) صدق کند.

بردارهای $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{BD_1}$ را در امتداد بردارهای $\overrightarrow{CD}$، $\overrightarrow{CB}$ و $\overrightarrow{CC_1}$ تجزیه می‌کنیم. این بردارها را بترتیب با a، b و c نشان می‌دهیم. تساوی $\overrightarrow{BD_1}=\overrightarrow{BC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1D_1}$ را داریم.

در این‌جا $\overrightarrow{C_1D_1}=\overrightarrow{CD}=a$ و $\overrightarrow{BC}=-\overrightarrow{CB}=-b$ بوده و از این‌رو $\overrightarrow{BD_1}=a-b+c$ (۲) را داریم. بردار $\overrightarrow{MN}$ را به‌صورت مجموع $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MC}+\overrightarrow{CC_1}+\overrightarrow{C_1N}$ نشان می‌دهیم. در این‌جا بردار $\overrightarrow{MC}$ با بردار $\overrightarrow{CA}$ همخط بوده و بنابراین $\overrightarrow{MC}=x\overrightarrow{CA}$ خواهد بود، ولی $\overrightarrow{CA}=a+b$ را داریم که به معنی $\overrightarrow{MC}=xa+xb$ است. بردار $\overrightarrow{C_1N}$ با بردار $\overrightarrow{C_1D}$ همخط بوده و $\overrightarrow{C_1D}=a-c$ است.

درنتیجه $\overrightarrow{C_1N}=y\overrightarrow{C_1D}=ya-yc$ خواهد بود. از این‌رو تساوی صفحه بعد حاصل

می‌شود :

$$\overrightarrow{MN}=(x+y)a+xb+(1-y)c \qquad (3)$$

با جاگذاری تجزیه‌های برداری (۲) و (۳) در رابطهٔ (۱) چنین حاصل می‌شود :

$$(x+y)a+xb+(1-y)c=\lambda a-\lambda b+\lambda c$$

تساوی برداری با دستگاه زیر هم‌ارز است :

$$\begin{cases} x+y=\lambda \\ x=-\lambda \\ 1-y=\lambda \end{cases}$$

با حل این دستگاه $y=2/3$ ، $x=-1/3$ و $\lambda=1/3$ به‌دست می‌آید. این امر بدین معنی است که نقطه‌های M و N در موقعیتی قرار دارند که برحسب آن $(MN)\|(BD_1)$ بوده و این موقعیت منحصر به‌فرد است. براساس مقدارهای x و y چنین حاصل می‌شود :

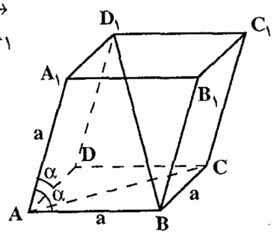
$$\overrightarrow{CM}=-x\overrightarrow{CA}=\frac{1}{3}\overrightarrow{CA}\ ,\ \ \overrightarrow{C_1N}=\frac{2}{3}\overrightarrow{C_1D}$$

در این حالت $\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{BD_1}/3$ بوده و از این رو $MN=BD_1/3$ را خواهیم داشت.

بنابراین جواب مسأله عبارت از ۱/۳ خواهد بود.

۳۱۳. رأس A را آغاز بردارها می‌گیریم و هر بردار را با نقطهٔ پایانی آن نشان می‌دهیم (شکل). داریم :

$$\overrightarrow{D_1B}=\vec{B}-\vec{D_1}=\vec{B}-(\vec{D}+\vec{A_1})=\vec{B}-\vec{D}-\vec{A_1}$$



دراین‌صورت

$$|\overrightarrow{D_1B}|=|\overrightarrow{D_1B}|^2=(\vec{B}-\vec{D}-\vec{A_1})^2=$$

$$\vec{B}^2+\vec{D}^2+\vec{A_1}^2-2\vec{B}.\vec{D}-2\vec{B}.\vec{A_1}+2\vec{D}.\vec{A_1}=$$

$$a^2+a^2+a^2-2a^2\cos 90^\circ-2a^2\cos\alpha+2a^2\cos\alpha=3a^2$$

و از آن‌جا $|\overrightarrow{D_1B}| = a\sqrt{۳}$.

زاویهٔ φ بین خطهای راست D_1B و AC را با استفاده از تعریف ضرب اسکالر دو بردار پیدا می‌کنیم :

$$\cos\varphi = \left|\frac{\overrightarrow{D_1B}.\overrightarrow{AC}}{D_1B.AC}\right|$$

علامت قدرمطلق را به‌این خاطر گذاشته‌ایم که $\varphi \le ۹۰^\circ$ و بنابراین $\cos\varphi \ge ۰$.

داریم :

$$\overrightarrow{D_1B}.\overrightarrow{AC} = (\vec{B} - \vec{D} - \overrightarrow{A_1}).(\vec{B} + \vec{D}) =$$

$$\vec{B}^{۲} - \vec{B}.\vec{D} - \vec{B}.\overrightarrow{A_1} + \vec{B}.\vec{D} - \vec{D}^{۲} - \overrightarrow{A_1}.\vec{D} = -۲a^{۲}\cos\alpha$$

$$\cos\varphi = \left|\frac{-۲a^{۲}\cos\alpha}{a\sqrt{۳}.a\sqrt{۲}}\right| = \sqrt{\frac{۲}{۳}}|\cos\alpha|$$

به‌ازای $a = ۱۰$ و $\alpha = ۱۲۰^\circ$ داریم :

$$|\overrightarrow{D_1B}| = ۱۰\sqrt{۳} \approx ۱۷/۳\ ,\ \cos\varphi \approx \sqrt{\frac{۱}{۶}} \approx ۰/۴۰۸\ ;\ \varphi \approx ۶۶^\circ$$

۳۱۴. طول اوّلین یال را x و طول دومین یال را y فرض می‌کنیم. خواهیم داشت :

$$۲(xy + ax + ay) = ۲x\ ,\ axy = ۳y$$

$$\begin{cases} xy + ax + ay = x \\ ax = ۳ \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \dfrac{۳}{a} \\ y = \dfrac{۳(۱-a)}{۳+a^{۲}} \end{cases}$$

در این‌صورت داریم :

$$S = ۲x = \frac{۶}{a}\ ,\ V = axy = \frac{۹(۱-a)}{۳+a^{۲}}$$

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۴
مکعب مستطیل

۱.۴. تعریف و قضیه

۳۱۶. هر مکعب مستطیل با اندازه‌های سه‌یال گذرنده از هر رأسش مشخص می‌شود. اگر سه‌یال مجاور مکعب مستطیل به اندازه‌های a، b و c باشند، (شکل)، در وجه ABCD :

$$AC = \sqrt{a^{2} + b^{2}}$$

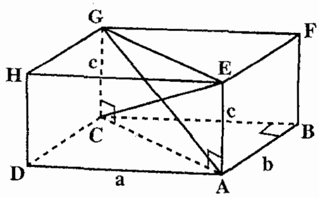
و چون $CG \perp AC$ است در مثلث قائم‌الزاویهٔ ACG داریم :

$$AG^{2} = AC^{2} + CG^{2} = a^{2} + b^{2} + c^{2} \Rightarrow AG = \sqrt{a^{2} + b^{2} + c^{2}}$$

یعنی، اندازهٔ قطر مکعب مستطیل مساوی است با جذر مجموع مربعهای سه‌یال مجاور آن.

اگر در مکعب مستطیلی $a = b$ ، یعنی قاعده‌ها، مربع باشند. مکعب مستطیل با دو بعد a و c مشخص می‌شود و در این‌صورت قطر AC از قاعده، $a\sqrt{2}$ است و قطر مکعب مستطیل $AG = \sqrt{2a^{2} + c^{2}}$ می‌باشد.

از آن‌چه ذکر شد، می‌توان نتیجه گرفت که در مکعب مستطیل قطرها مساوی یکدیگرند. این حکم را بدون محاسبهٔ قطرها نیز می‌توان ثابت کرد.



۲.۴. نقطه، خط، صفحه

۱.۲.۴. نقطه

۱.۱.۲.۴. نقطه‌های: همخط، همصفحه،...

۱.۱.۱.۲.۴. نقطه‌ها همخطند

۳۱۷. اگر O نقطهٔ همرسی قطرهای مکعب مستطیل $ABCDA'B'C'D'$ و O_1 و O_2 بترتیب مرکزهای دو وجه روبه‌روی ABCD و $A'B'C'D'$ باشد، از O به O_1 و O_2 وصل می‌کنیم. OO_1 بر وجه ABCD و OO_2 بر وجه $A'B'C'D'$ عمودند، بنابراین سه نقطهٔ O، O_1 و O_2 روی یک خط راست واقعند.

۲.۲.۴. خط

۱.۲.۲.۴. خطهای: همرس، موازی، ...

۱.۱.۲.۲.۴. خطها همرسند

۳۱۸. مکعب مستطیل، تمام ویژگیهای متوازی‌السطوح را داراست. ازجمله این ویژگی را که قطرهای آن از یک نقطه می‌گذرند. این نقطه مرکز تقارن مستطیل است که به‌طور خلاصه آن را مرکز مستطیل می‌نامند.

۳.۲.۴. صفحه

۱.۳.۲.۴. صفحه‌های: موازی، عمود برهم، ...

۱.۱.۳.۲.۴. صفحه‌ها خوش‌ترازند

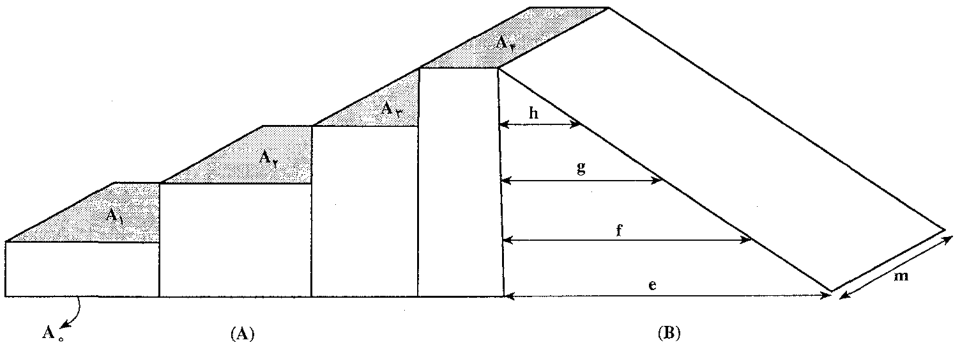
۳۱۹. دو شکل A و B را کنار یکدیگر قرار می‌دهیم و ابتدا اندازه‌های e، f، g و h را به‌دست

می‌آوریم :

$$\text{حجم } A = \text{حجم } B \Rightarrow a.m + ۲b.m + ۳c.m + ۴d.m = \frac{۱}{۲} \times ۴e.m$$

$$\Rightarrow e = \frac{۱}{۲}(a + ۲b + ۳c + ۴d) \Rightarrow e = \frac{۳۵}{۴}d$$

$$f = \frac{۳}{۴}e = \frac{۱۰۵}{۱۶}d \text{ و } g = \frac{۲}{۴}e = \frac{۳۵}{۸}d \text{ و } h = \frac{۱}{۴}e = \frac{۳۵}{۱۶}d$$



حال ثابت می‌کنیم، چهار صفحهٔ «خوش‌تراز» به‌صورت زیر خواهیم داشت :

الف. هر صفحهٔ موازی P و بین سطحهای $A_۰$ و $A_۱$ مقطعی با مساحت :

$$S_۱ = (a + b + c + d)m \text{ یعنی } S_۱ = \frac{۱۷}{۲}d.m$$

بر روی شکل A به‌وجود می‌آورد و با توجه به این که $f < \frac{۱۷}{۲}d < e$ می‌باشد، لذا در این فاصله یک صفحهٔ خوش‌تراز خواهیم داشت.

ب. هر صفحهٔ موازی P و بین سطحهای $A_۱$ و $A_۲$ با مساحت :

$S_۲ = (b + c + d).m$ یعنی $\frac{۱۱}{۲}d.m$ بر روی شکل A به‌وجود می‌آورد و با توجه به این‌که $g < \frac{۱۱}{۲}d < f$ می‌باشد، لذا یک صفحهٔ خوش‌تراز در این فاصله خواهیم داشت.

ج. هر صفحهٔ موازی P و بین سطحهای $A_۲$ و $A_۳$ مقطعی با مساحت :

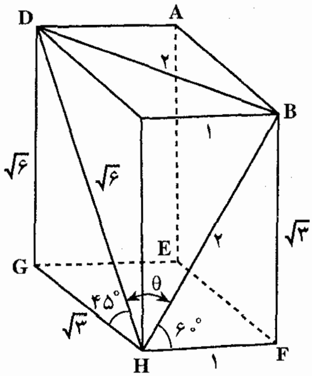
$S_۳ = (c + d).m$ یعنی $\frac{۵}{۲}d.m$ برروی شکل A به‌وجود می‌آورد و با توجه به این‌که $h < \frac{۵}{۲}d < g$ می‌باشد، لذا یک صفحهٔ خوش‌تراز در این فاصله خواهیم داشت.

د. هر صفحهٔ موازی P و بین سطحهای $A_۳$ و $A_۴$ مقطعی با مساحت :

$S_4 = d.m$ بر روی جسم A به‌وجود می‌آورد و با توجه به این‌که $0 < d < h$ می‌باشد، لذا یک صفحهٔ خوش‌تراز نیز در این فاصله خواهیم داشت.

۳.۴. زاویه

۱.۳.۴. اندازهٔ زاویه



۳۲۰. (د) بدون از دست دادن کلیت مسأله، فرض می‌کنیم $HF = ۱$. آن‌گاه همان‌گونه که در شکل نشان داده شده است، داریم:

$$BF = \sqrt{۳} = DG = GH$$

$$DH = \sqrt{۶} \text{ و } BH = ۲$$

چون $DC = HG = \sqrt{۳}$، دو مثلث DCB، HCB همنهشتند و $DB = HB = ۲$. اما مثلث DBH متساوی‌الساقین است و داریم:

$$\cos\theta = \frac{۱/۲\sqrt{۶}}{۲} = \frac{\sqrt{۶}}{۴}$$

۴.۴. یال، ارتفاع، قطر

۱.۴.۴. یال

۱.۱.۴.۴. اندازهٔ یال

۳۲۱. اگر d، اندازهٔ قطر مکعب مستطیل و a، b و c ابعاد آن باشند، داریم:

$$d = \sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲} \Rightarrow ۱۶ = \sqrt{۸^۲ + ۱۲^۲ + c^۲}$$

$$\Rightarrow ۲۵۶ = ۶۴ + ۱۴۴ + c^۲$$

$$\Rightarrow c^۲ = ۴۸ \Rightarrow c = \sqrt{۴۸} = ۴\sqrt{۳}$$

۳۲۲. داریم: $a =$ یک بعد به‌فرض $\Rightarrow 2a\ ,\ 3a$ ابعاد دیگر

$$\Rightarrow S_{کل} = 2(a+b)c + 2ab \Rightarrow 88 = 2(a+2a)\times 3a + 2(a)(2a)$$

$$\Rightarrow 88 = 22a^2 \Rightarrow a^2 = 4$$

$$\Rightarrow a = 2\ ,\ 2a = 4\ ,\ 3a = 6$$

ابعاد مکعب مستطیل

۳۲۳. اگر سه بعد مکعب مستطیل را a، b و c و حجم آن را V فرض کنیم، داریم:

$$V = a.b.c\ ,\ \frac{a}{2} = \frac{b}{3} = \frac{c}{4} \Rightarrow a = \frac{c}{2} \text{ و } b = \frac{3c}{4}$$

$$\Rightarrow 192 = \frac{c}{2}\times\frac{3c}{4}\times c \Rightarrow 192 = \frac{3c^3}{8}$$

$$\Rightarrow c^3 = 512 \Rightarrow c = 8 \Rightarrow a = 4 \text{ و } b = 6$$

بزرگترین یال $c = 8\text{cm}$ است.

۳۲۴. با فرض $a = 5$ و $\frac{b}{c} = \frac{4}{5}$ داریم:

$$V = a.b.c \Rightarrow 3600 = 5\times\frac{4c}{5}\times c \Rightarrow 3600 = 4c^2$$

$$\Rightarrow c^2 = 900 \Rightarrow c = 30 \Rightarrow b = \frac{4c}{5} = \frac{120}{5} = 24$$

دو بعد دیگر مکعب مستطیل

۳۲۵. از آن‌جا که مکعبهای واحد جعبه را به‌طور کامل پر می‌کنند، هریک از ابعاد جعبه عددی طبیعی، مثلاً: a_1، a_2 و a_3 است. در این صورت حجم جعبه: $a_1a_2a_3$ می‌باشد.

اکنون فرض می‌کنیم b_i بیشترین تعداد مکعبهای به‌حجم ۲، در نتیجه به‌طول یال $2^{\frac{1}{3}}$ ی که می‌توانند در امتداد یال به‌طول a_i جعبه‌مان قرار داده شوند، باشد. به‌این ترتیب عدد صحیح b_i نامساویهای:

$$a_i - \sqrt[3]{2} < \sqrt[3]{2}b_i \leq a_i$$

یا

$$\frac{a_i}{\sqrt[3]{2}} - 1 < b_i \leq \frac{a_i}{\sqrt[3]{2}} \qquad (1)$$

را برقرار می‌کند، و به‌عبارت دیگر، b_i بزرگترین عدد صحیح نامتجاوز از $\frac{a_i}{\sqrt[3]{2}}$ است،

و این معمولاً با کروشه نمایش داده می‌شود :

$$b_i = \left[a_i / \sqrt[3]{2}\right] \qquad (2)$$

حجمی که توسط این مکعبها اشغال شده : $\sqrt[3]{2}b_1 . \sqrt[3]{2}b_2 . \sqrt[3]{2}b_3$ می‌باشد و این حجم، همان‌طور که در مسأله گفته شده، ۴۰٪ حجم جعبه است. بنابراین :

$$2b_1b_2b_3 = (\frac{2}{5})a_1a_2a_3$$

و از آن :

$$\frac{a_1a_2a_3}{b_1b_2b_3} = 5 \qquad (3)$$

است.

برای یافتن تمام اعداد صحیح مثبت a_1 ، a_2 و a_3 ی تابع شرایط (۲) و (۳) ملاحظه می‌کنیم که : $a_i > 1$ (درغیر این‌صورت $b_i = 0$ می‌شود) است و بعضی از مقدارهای a، $b = \left[a / \sqrt[3]{2}\right]$ و a / b را در جدول می‌آوریم :

a	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	...
b	۱	۲	۳	۳	۴	۵	۶	...
a / b	۲	۱/۵	۱/۳۳...	۱/۶۶...	۱/۵	۱/۴	۱/۳۳...	...

ادعا می‌کنیم که به‌ازای $a > 8$ ، $a / b < 1/5$ است. برای اثبات این موضوع، تنها به استفاده از تخمین : $b > (a / \sqrt[3]{2}) - 1$ ، (۱) را ملاحظه کنید که از آن نتیجه می‌شود که :

$$\frac{a}{b} < \frac{a}{\frac{a}{\sqrt[3]{2}} - 1} = \frac{\sqrt[3]{2}}{1 - \frac{\sqrt[3]{2}}{a}}$$

است، نیاز داریم. هنگامی که a افزایش یابد، مخرج عضو اخیر این نامساوی اضافه می‌شود، و درنتیجه خود کسر کاهش می‌یابد.

به‌ازای $a \geq 8$ داریم :

$$\frac{a}{b} < \frac{\sqrt[3]{2}}{1 - \frac{\sqrt[3]{2}}{8}} < \frac{1/26}{1 - \frac{1/26}{8}} < 1/5 \qquad (4)$$

این نامساوی همراه با جدول بالا مشخص می‌کند که :

(۵) به‌ازای $\frac{a}{b} \le \frac{۵}{۳}\ ,\ a \ge ۳$

اگر $a_۱$، $a_۲$ و $a_۳$ حداقل ۳ باشند، در این‌صورت:

$$a_۱ a_۲ a_۳ / b_۱ b_۲ b_۳ \le (۵/۳)^۳$$

(۳) را نقض می‌کند؛ بنابراین نتیجه می‌گیریم که حداقل یکی از aها، مثلاً $a_۱$، باید ۲ باشد، درنتیجه بنابه (۳):

$$\frac{a_۲}{b_۲} \cdot \frac{a_۳}{b_۳} = \frac{۵}{۲} \qquad (۶)$$

برقرار است.

بعد نشان می‌دهیم که هریک از دو بعد دیگر جعبه‌مان بزرگتر از ۲ است و به‌این منظور، با اثبات این که به‌ازای: ۳، $i = ۲$، $a_i / b_i < ۲$ است و از آن $a_i > ۲$ نتیجه می‌شود، خواهیم رسید. بنابه (۱)، $b_i \le a_i / \sqrt[۳]{۲}$ است و بنابراین: $b_i / a_i \le ۱/\sqrt[۳]{۲}$ و بنا به (۶)، با $i = ۳$:

$$\frac{a_۲}{b_۲} = \frac{۵}{۲} \cdot \frac{b_۳}{a_۳} \le \frac{۵}{۲\sqrt[۳]{۲}} < ۲$$

به همین ترتیب، با $i = ۲$، (۱) و (۶) نامساوی $a_۳ / b_۳ < ۲$ را به‌دست می‌دهد. سرانجام، از جدول و (۴) ملاحظه می‌شود که: $a / b \le ۳/۲$ است، مگر این‌که $a = ۲$ یا $a = ۵$ باشد. از آن‌جا که:

$$(۳/۲)^۲ = ۹/۴ < ۵/۲$$

است، ملاحظه می‌کنیم که (۶) نقض می‌شود، مگر این‌که یکی از موردهای $a_۲$، $a_۳$؛ مثلاً $a_۲$ برابر ۵ باشد. دراین‌صورت: $a_۲ / b_۲ = ۵/۳$ می‌شود، و (۶):

$$\frac{۵}{۳} \cdot \frac{a_۳}{b_۳} = \frac{۵}{۲}\ ,\ \frac{a_۳}{b_۳} = \frac{۳}{۲}$$

را به‌دست می‌دهد. به‌این ترتیب، $a_۳$ یا ۳ یا ۶ است، و بنابراین ابعاد جعبهٔ مورد بحث یا: ۵×۳×۲ یا ۶×۵×۲ است.

۳۲۶. در ذهن خود، فضایی را که مکعب مستطیل در آن قرار دارد، به مکعبهایی با یال به طول $\frac{۱}{۲}$ تقسیم می‌کنیم و آنها را با دو رنگ سفید و سیاه، به ردیف «شطرنجی» رنگ می‌کنیم (یعنی به‌نحوی که، هر دو مکعب با وجه مشترک، با رنگهای متفاوت باشند). ثابت

می‌کنیم، اگر مکعب مستطیلی یالی با طول عدد درست داشته باشد و همهٔ وجه‌های آن موازی با وجه‌های مکعبها باشد، آن‌وقت، حجم بخش سفید آن، با حجم بخش سیاه آن برابر است. در واقع، به‌کمک صفحه‌هایی که عمود بر یال به‌طول عدد درست است، تمامی مکعب مستطیل را به قشرهایی با عرض $\frac{1}{2}$ تقسیم و توجه می‌کنیم ، اگر با انتقال موازی، قشر مرزی را تا قشر مجاور آن انتقال دهیم تا بر آن قرار گیرد، بخشهای سفید اوّلی، بر بخشهای سیاه دومی قرار می‌گیرند و برعکس. همین وضع، برای دو قشر مجاور بعدی پیش می‌آید و غیره. بنابراین، حجم بخشهای سفید در هر قشر، با حجم بخشهای سیاه آن قشر، برابر می‌شود (تعداد این قشرها، عددی زوج است). یعنی در کل مکعب مستطیل، حجم دو بخش سیاه و سفید، با هم برابرند. فرض کنید، وجه‌های مکعب مستطیل اصلی، با وجه‌های مکعبها موازی باشند، درضمن، رأس A از آن، بر رأس یکی از مکعبها منطبق باشد و بین یالهای آن، یالی به‌طول عدد درست وجود نداشته باشد. آن‌وقت، همهٔ مستطیلهایی که، طبق فرض مسأله، از تقسیم آن به‌دست آمده‌اند، یالی به طول عدد درست دارند (و روشن است که وجه‌های این مکعب مستطیلها، موازی با وجه‌های مکعبهاست، زیرا مجموعهٔ این مکعب مستطیلها، مجموعه‌ای متناهی است و می‌توان آنها را، به‌ترتیب زیر، پشت سرهم درنظر گرفت :

ابتدا مکعب مستطیلی را کنار می‌گذاریم که در گوشهٔ مکعب مستطیل اصلی قرارگرفته است، سپس مکعب مستطیلی را که در گوشهٔ شکل باقی مانده قرار دارد و غیره) در نتیجه، بنابر آن‌چه ثابت کردیم، حجم بخش سفید هرکدام از آنها (و بنابراین، بخش سفید مکعب مستطیل اصلی، به‌طور کلی) برابر با حجم بخش سیاه آن است. در مکعب مستطیل اصلی، می‌توان به‌کمک سه صفحهٔ موازی با وجه‌های آن، مکعب مستطیلی به‌رأس A و یالهای به‌طولهای درست، با حجم حداکثر ممکن، جدا کرد. در بین هفت مکعب مستطیل باقی مانده، که بعد از این برش باقی می‌ماند، شش مکعب مستطیل دارای یالی به طول عدد درست هستند و یکی از آنها، یالهایی کوچکتر از واحد و رأس B، منطبق بر رأس یکی از مکعبها دارد. این مکعب مستطیل را تا مکعبی به یال واحد و رأس B ادامه می‌دهیم. سه صفحه‌ای که، از این مکعب، مکعب مستطیل درونی را جدا می‌کنند، مکعب را به هشت مکعب مستطیل تقسیم می‌نمایند که در بین آنها، دست‌کم یکی، یالهایی دارد که طول آنها از $\frac{1}{2}$ تجاوز نمی‌کنند و بنابراین، حجم بخشهای سیاه و سفید آن، باهم برابر نیستند (زیرا، یکی از این حجمها، برابر صفر است). همین وضع، دربارهٔ سه مکعب

مستطیلی هم، که با آن وجه مشترک دارند (وهریک از آنها، با آن، مکعب مستطیلی به یال واحد می‌سازند)، صدق می‌کند ؛ همچنین، دربارهٔ بقیهٔ مکعب مستطیلها و از آن‌جمله، آن‌که به رأس B است. به‌این ترتیب، مکعب مستطیل اصلی، به هشت مکعب مستطیل تقسیم شده است که در هفت‌تای آنها، حجم بخش سفید با حجم بخش سیاه برابر است، ولی در هشتمی، این دو بخش، حجمی برابر ندارند. تناقض حاصل، ثابت می‌کند که مکعب مستطیل اصلی، نمی‌تواند یالی به طول عدد درست نداشته باشد.

۳۲۷. گزینهٔ (ب) درست است.

۲.۴.۴. ارتفاع

۱.۲.۴.۴. اندازهٔ ارتفاع

۳۲۸. (ب) طول کف آکواریم را u اینچ و ارتفاع آب را درحالتی که کف تراز است، h اینچ می‌گذاریم. حجم آب که در این حال به‌صورت مکعب مستطیل است، $۱۰hu$ اینچ مکعب می‌باشد. وقتی آکواریم را کج کنیم، حجم آب که حالا به‌صورت منشور با ارتفاع ۱۰ اینچ و قاعدهٔ مثلث قائم‌الزاویه است :

$$۱۰\times\frac{۱}{۲}\times۸(\frac{۳}{۴}u)=۱۰\times۳u$$

اینچ مکعب می‌باشد. چنانچه این دو عبارت حجم آب را مساوی قرار دهیم، داریم :

$$۱۰uh=۱۰\times۳u$$

بنابراین :

$$h=۳$$

درنتیجه وقتی کف آکواریم تراز است، ارتفاع آب ۳ اینچ می‌باشد.

۳۲۹. گزینهٔ (د) درست است.

۳۳۰. خود رساله، مسأله را این‌طور حل کرده است. «معلوم کنید، ۱۰۰۰۰ «هو» نمک، چند «چی» می‌شود. این را مقسوم بگیرید. با ضرب طول و عرض در یکدیگر، مقسوم‌علیه را پیدا کنید. با در دست داشتن مقسوم و مقسوم‌علیه، ارتفاع انبار برحسب «چی» به‌دست می‌آید».

برای حل مسأله، باید توجه داشت :

۱ «چزان» = ۱۰ «چی»

۱ «هو» = ۵۱/۷۷۵ «لیتر»

۳۳۱. برای این مسأله هم، مثل همهٔ موردهای دیگر، تنها قاعدهٔ عمل داده شده است: «۱ چژان را در خودش ضرب کن، می‌شود «شی»، نصف اضافی را در خودش ضرب کن، دو برابر کن و از «شی» کم کن. نصف باقی‌مانده را بردار، از آن جذر بگیر، از آن‌چه به‌دست آمد، نصف اضافی راکم کن، این، عرض در می‌شود. و اگر نصف اضافی را با آن جمع کنی، ارتفاع در پیدا می‌شود.»

اگر عرض در را x و طول آن را y بگیریم و فرض کنیم $y - x = m$ (اضافی)، بعد قطر را به d نشان دهیم، مسأله، منجر به حل دستگاه زیر می‌شود:

$$\begin{cases} d^2 = x^2 + y^2 \\ m = x - y \end{cases}$$

برای پیدا کردن x، به این معادلهٔ درجه دوم می‌رسیم:

$$2x^2 + 2mx + m^2 - d^2 = 0$$

که با حل آن به‌دست می‌آید:

$$x_{1,2} = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{m^2}{4} - \frac{m^2 - d^2}{2}} =$$

$$= -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{2d^2 - m^2}{4}} = -\frac{m}{2} \pm \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}}$$

از آن‌جا که دانشمندان چینی، به جواب‌های منفی توجه نداشتند، برای عرض در، باید نتیجه گرفت:

$$x = \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}} - \frac{m}{2}$$

و این، همان چیزی است که در قاعدهٔ رساله، برای تعیین مقدار x آمده است.

روشن است که، با در دست داشتن x، می‌توان y را از رابطهٔ زیر پیدا کرد:

$$y = x + m$$

ولی در رساله، برای پیدا کردن مقدار y، این رابطه داده شده است:

$$y = \sqrt{\frac{d^2 - 2\left(\frac{m}{2}\right)^2}{2}} + \frac{m}{2}$$

که ریشهٔ مثبت این معادله است :

$$۲y^{۲} - ۲my + m^{۲} - d^{۲} = ۰$$

۳.۴.۴. قطر

۱.۳.۴.۴. اندازهٔ قطر

۳۳۲. پاره‌خط BE قطر مستطیل ABIE، به طول و عرض ۴ و ۳ است، پس داریم :

$$BE = \sqrt{۴^{۲} + ۳^{۲}} = \sqrt{۲۵} = ۵$$

ازطرفی مثلث BEH در رأس E قائم‌الزاویه است. بنابراین داریم :

$$BH = \sqrt{BE^{۲} + EH^{۲}} \Rightarrow BH = \sqrt{۲۵ + ۱۴۴} = \sqrt{۱۶۹} = ۱۳$$
$$\Rightarrow BH = ۱۳$$

۳۳۳. داریم :

$$AG = \sqrt{AB^{۲} + AE^{۲} + AD^{۲}} \;,\; AE = BF = ۱۲$$
$$\Rightarrow AG = \sqrt{۸۱ + ۱۴۴ + ۶۴} = \sqrt{۲۸۹} = ۱۷ \Rightarrow AG = ۱۷$$

چون در مکعب مستطیل قطرها باهم برابرند، پس $EC = ۱۷$ است.

۳۳۴. با قرار دادن $a = ۱$ ، $b = ۲$ و $c = ۳$ در رابطهٔ (۱) طول AC را به‌دست می‌آوریم :

$$AC = \sqrt{۱ + ۴ + ۹} = \sqrt{۱۴}$$

۳۳۵. گزینهٔ (ب) درست است.

۲.۳.۴.۴. نسبت قطرها

۳۳۶. اندازهٔ قطرهای دو مکعب مستطیل را d و d′ می‌گیریم. داریم :

$$d = \sqrt{a^{۲} + b^{۲} + c^{۲}} \text{ و } d' = \sqrt{(\frac{۳}{۲}a)^{۲} + (\frac{۳}{۲}b)^{۲} + (\frac{c}{۴})^{۲}}$$

$$\Rightarrow d' = \sqrt{\frac{۹}{۴}a^{۲} + \frac{۹}{۴}b^{۲} + \frac{c^{۲}}{۱۶}}$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d'} = \frac{\sqrt{a^{۲} + b^{۲} + c^{۲}}}{\sqrt{\frac{۹}{۴}a^{۲} + \frac{۹}{۴}b^{۲} + \frac{c^{۲}}{۱۶}}}$$

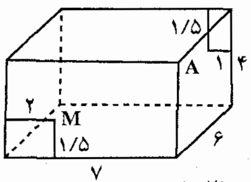
حالت خاص.

$$a=\frac{b}{۲}=\frac{c}{۳}=k \Rightarrow a=k\ ,\ b=۲k\ ,\ c=۳k$$

$$\Rightarrow \frac{d}{d'}=\frac{\sqrt{k^۲+۴k^۲+۹k^۲}}{\sqrt{\frac{۹}{۴}k^۲+۹k^۲+\frac{۹}{۱۶}k^۲}}=\frac{\sqrt{۱۴}\,k}{\frac{۳}{۴}\sqrt{۲۱}\,k}=\frac{۴\sqrt{۶}}{۹}$$

۵.۴. پاره‌خط

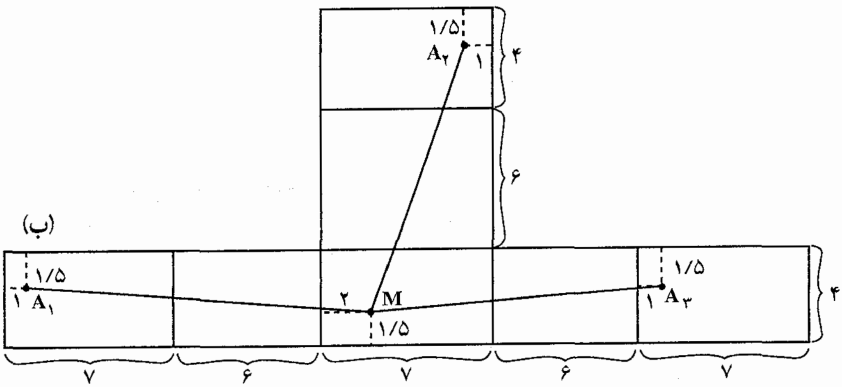
۱.۵.۴. اندازهٔ پاره‌خط



(الف)

۳۳۷. این مسأله را از خاطرات روزانهٔ و. یولگاکووا (ل. ن. تولستوی در سالهای آخر زندگی) ــ که منشی تولستوی بود ــ برداشته‌ایم. او می‌نویسد: «امروز، خیلی به مسألهٔ «عنکبوت و مگس» علاقه‌مند می‌شود ... باید گفت که این مسأله، نه بلافاصله حل می‌شود و نه ساده».
طول اتاق را ۷، عرض آن را ۶ و ارتفاع آن را ۴ آرشین می‌گیریم. فرض می‌کنیم، مگس روی دیوار بزرگتر و در فاصلهٔ دو آرشین از گوشه، و عنکبوت، روی دیوار مقابل و به‌فاصلهٔ یک آرشین از نزدیک‌ترین گوشه ایستاده باشند (شکل الف). مسأله را به‌صورت رسم، بهتر می‌توان حل کرد. گسترده شدهٔ اتاق را درنظر می‌گیریم (شکل ب) و نقطهٔ

(ب)



محل عنکبوت را با پاره‌خط راستی به‌نقطهٔ محل مگس وصل می‌کنیم. روشن است که، برحسب این‌که اتاق را چگونه بگسترانیم، سه جواب به‌دست می‌آید. درواقع، عنکبوت می‌تواند یا فقط ازطریق دیوار، یا ازطریق دیوار و سقف و یا ازطریق دیوار و کف، خود را به مگس برساند. چون فاصلهٔ کف تا مگس برابر است با فاصلهٔ عنکبوت تا سقف، بنابراین، مسیرهای ازطریق سقف و کف اتاق، هم‌ارزند.

با استفاده از گستردهٔ شکل و قضیهٔ فیثاغورس، به‌دست می‌آید :

$$MA_۱ = \sqrt{۱۹۷} \approx ۱۴/۰۴$$

$$MA_۲ = \sqrt{۱۱۶} \approx ۱۰/۷۷$$

$$MA_۳ = \sqrt{۱۴۵} \approx ۱۲/۰۴$$

بنابراین، از سه جواب ممکن، کوتاهترین مسیر، فاصلهٔ ۱۰/۷۷ آرشینی است که جواب مسأله است.

۶.۴. شعاع کره

۱.۶.۴. اندازهٔ شعاع کره

۳۳۸. درواقع اندازهٔ شعاع کرهٔ محیطی مکعب مستطیل خواسته شده است. این کره که مرکزش، مرکز مکعب مستطیل است، قطرش مساوی قطر مکعب می‌باشد، بنابراین اندازهٔ شعاع آن، مساوی نصف قطر مکعب مستطیل است. یعنی داریم :

$$R = \frac{d}{۲} = \frac{۱}{۲}\sqrt{a^۲ + b^۲ + c^۲}$$

۷.۴. مساحت

۱.۷.۴. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۷.۴. اندازهٔ مساحت جانبی

۳۳۹. می‌دانیم که مساحت جانبی مکعب مستطیل برابر است با حاصلضرب اندازهٔ محیط قاعده

در اندازهٔ ارتفاع آن. بنابراین داریم :

$$\text{محیط قاعده} = ۴\times ۵ = ۲۰ \Rightarrow \text{مساحت جانبی} = ۲۰\times ۶ = ۱۲۰$$

۳۴۰. ابعاد مکعب مستطیل را x، y و z می‌گیریم. داریم :

$$S_{\text{موردنظر}} = \text{مساحت جانبی} + \text{مساحت یک قاعده}$$

$$\Rightarrow S_{\text{موردنظر}} = ۲(x+y)z + xy \qquad (۱)$$

ازطرفی می‌دانیم که $xyz = ۱۰۸ (۲)$ است. حال با توجه به رابطهٔ (۲) باید کمترین مقدار S را تعیین کنیم.

۴.۷.۱.۲. اندازهٔ مساحت کل

۳۴۱. داریم :

$$S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + S_{\text{دو قاعده}}$$

$$S_{\text{کل}} = ۲(۴+۷)\times ۱۲ + ۲(۴\times ۷) = ۲۶۴ + ۵۶ = ۳۲۰$$

۳۴۲. گزینهٔ (الف) درست است.

۳۴۳. اگر ضلعهای مکعب مستطیل را y،z و x فرض کنیم، سطح جانبی آن خواهد شد :

$$۲(xy+yz+zx)$$

و می‌دانیم :

$$x^۲ + y^۲ \geq ۲xy \;,\; y^۲ + z^۲ \geq ۲yz \;,\; z^۲ + x^۲ \geq ۲xz$$

$$۲(x^۲+y^۲+z^۲) \geq ۲(xy+yz+zx) \;,\; ۲(xy+yz+zx) \leq ۲a^۲$$

یعنی ماکزیمم سطح کل $a^۲$ می‌باشد.

۴.۷.۱.۳. اندازهٔ مساحت شکلهای دیگر

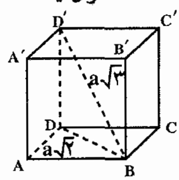
۳۴۴. گزینهٔ (د) درست است ؛ زیرا داریم :

$$S = ۱(۱۳\times ۱۰) + ۲\left[۲(۱۳\times ۵) + ۲(۱۰\times ۵)\right] = ۵۹۰$$

۳۴۵. طول یک ضلع مربع مستطیل صفحهٔ قطری

$$\sqrt{۱۲^۲ + ۱۶^۲} = \sqrt{۴۰۰} = ۲۰$$

$$۲۰\times ۱۰ = ۲۰۰ cm^۲$$



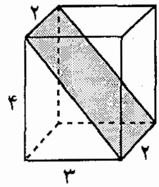
مساحت مقطع یکی از صفحه‌های قطری

۳۴۶. ضلع دیگر این صفحهٔ قطری برابر است با :

$$\sqrt{۳^۲+۴^۲}=\sqrt{۲۵}=۵\,\text{cm}$$

پس مساحت آن برابر است با :

$$۵\times۲=۱۰\,\text{cm}$$



۳۴۷. قوطی کبریت را باید طوری در فضا نگه داشت تا صفحه‌ای که از انتهای دوم یالهایی که از یک رأس آن می‌گذرد، صفحه‌ای افقی (یعنی موازی با صفحهٔ تصویر) باشد.

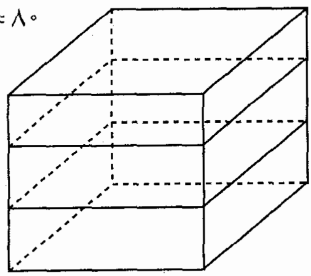
۴ . ۷ . ۲. رابطهٔ بین مساحتها

۳۴۸. گزینهٔ (د) درست است ؛ زیرا اگر ضلعها، l، w و h فرض شوند، آن‌گاه مساحت قاعده، وجه‌های جانبی و وجه روبه‌رو، بترتیب lw، wh و hl است. حاصلضرب این مساحتها برابر است با :

$$l^۲w^۲h^۲=(lwh)^۲=\text{مربع حجم}$$

۳۴۹. داریم :

$$\text{سطح کل مکعب مستطیل}=۲(۵+۴)\times۳+۲(۵\times۴)$$
$$=۵۴+۴۰=۹۴$$
$$\text{سطح کل یک مکعب مستطیل کوچک}=۲(۵\times۴)\times۱+۲(۵\times۴)$$
$$=۱۸+۴۰=۵۸$$
$$\text{سطح سه مکعب مستطیل کوچک}=۳\times۵۸=۱۷۴$$
$$\text{افزایش سطح کل}=۱۷۴-۹۴=۸۰$$



نکته. با توجه به این‌که مکعب مستطیلهای کوچک با دو برش از مکعب مستطیل اصلی به‌دست می‌آیند، پس در واقع به اندازهٔ چهار برابر سطح قاعده، به سطح کل مکعب مستطیل اضافه می‌شود ؛ یعنی :

$$۴\times(۵\times۴)=۸۰$$

۸.۴. حجم

۱.۸.۴. اندازهٔ حجم

۱.۱.۸.۴. اندازهٔ حجم مکعب مستطیل

۳۵۰. داریم :

$$V=\sqrt{۲}\times\sqrt{۳}\times\sqrt{۵}=\sqrt{۳۰}$$

۳۵۱. $V=۴\times۵\times۷=۱۴۰$

۳۵۲. گزینهٔ (ب) درست است، زیرا $lh=۱۲$ ، $hw=۸$ و $lw=۶$ است. با حذف h نتیجه می‌شود $l=\frac{۳w}{۲}$ ، و با حذف l داریم $\frac{۳w^۲}{۲}=۶$ ؛ بنابراین، $w=۲$ ، $l=۳$ ، $h=۴$ ، $V=lwh$ یا :

$$V^۲=(lwh)^۲=lh.hw.lw=۱۲\times۸\times۶=۴^۲\times۶^۲\Rightarrow$$
$$V=۴\times۶=۲۴$$

۳۵۳. گزینهٔ (الف) درست است.

بُعدها عبارتند از x، $۱۰-۲x$ و $۱۴-۲x$ ؛درنتیجه :

$$V=۱۴۰x-۴۸x^۲+۴x^۳$$

۳۵۴. گزینهٔ (الف) درست است.

۲.۱.۸.۴. اندازهٔ حجم شکلهای دیگر

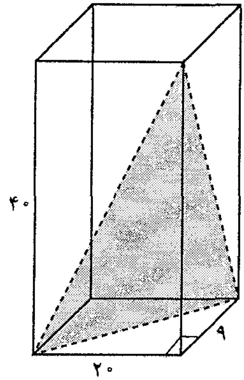
۳۵۵. حجم آب بالا آمده، مساوی حجم قطعه فلز است. داریم :

$$\text{حجم قطعه فلز}=۵۰\times۳۶\times۰/۸=۱۴۴۰cm^۳\Rightarrow \text{ارتفاع به سانتیمتر } ۰/۸=۸\div۱۰$$

۳۵۶. حجم مکعب مستطیل $= ۹\times ۲۰\times ۴۰ = ۷۲۰۰\,cm^۳$

حجم یکی از هرمها $= \frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲}\times ۹\times ۲۰)\times ۴۰ = ۱۲۰۰\,cm^۳$

حجم هرم دیگر $۷۲۰۰-۱۲۰۰=۶۰۰۰$

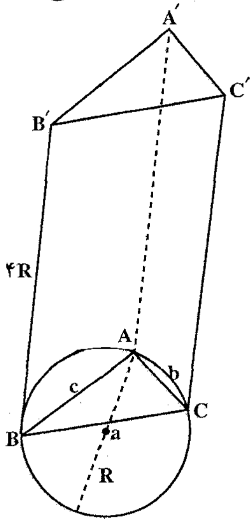


۲.۸.۴. تساوی حجمها

۳۵۷. اگر مساحت مثلث قاعدهٔ منشور را S و ضلعهای آن را a، b و c و شعاع دایرهٔ محیطی آن را R بنامیم، داریم:

$$R=\frac{abc}{۴S}$$

حجم منشور = مساحت قاعده × ارتفاع $= S\times ۴R = S\times ۴\frac{abc}{۴S}=abc$

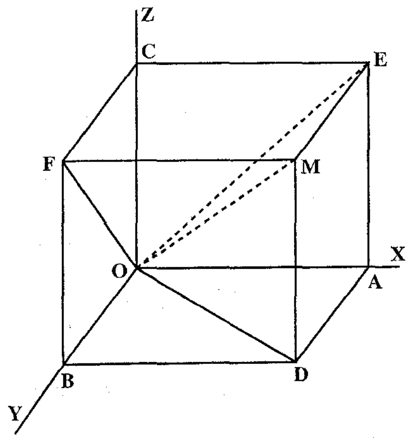


۹.۴. رابطهٔ متری

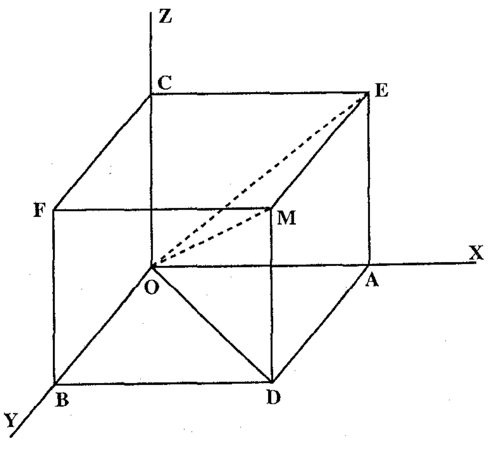
۱.۹.۴. رابطهٔ متری (برابریها)

۳۵۸. OD، OE و OF تصویرهای پاره‌خط روی سه‌صفحهٔ رسم شده از نقطهٔ O هستند، به‌عنوان مثال، ME عمود بر صفحهٔ XOZ است و داریم:

$$OD^۲ = OA^۲ + OB^۲ \ , \ OE^۲ = OA^۲ + OC^۲ \ , \ OF^۲ = OB^۲ + OC^۲$$
$$\Rightarrow OD^۲ + OE^۲ + OF^۲ = ۲OA^۲ + ۲OB^۲ + ۲OC^۲ = ۲OM^۲$$



۳۵۹. پاره‌خط OM و سه محور دو به دو عمود بر هم Ox ، Oy و Oz را در نظر می‌گیریم. برای تعیین تصویرهای OM روی سه محور از نقطهٔ M صفحه‌هایی عمود بر محورها رسم می‌کنیم تا محورها را در A، B و C قطع کنند. OA، OB و OC تصویرهای OM روی سه محور می‌باشند.



امّا خط MD که بر صفحهٔ AOBD

عمود است، بر خط OD نیز عمود می‌باشد. بنابراین داریم :

$$OM^{2} = OD^{2} + MD^{2} \text{ و } OD^{2} = OB^{2} + OA^{2} \Rightarrow OM^{2} = OA^{2} + OB^{2} + OC^{2}$$

۲.۹.۴. رابطهٔ متری (نابرابریها)

۳۶۰. عددهای α و β ریشه‌های سه جمله‌ای زیر هستند :

$$f(t) = (t-\alpha)(t-\beta) = t^{2} - \frac{1}{6}pt + \frac{1}{6}s$$

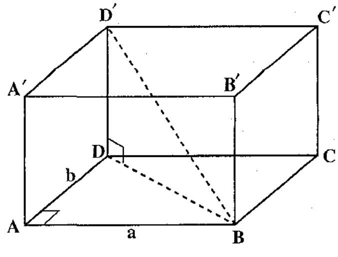
درضمن، $x < \frac{\alpha+\beta}{2} < z$ ، $f(x) > 0$ و $f(z) > 0$

۱۰.۴. مکان هندسی

۳۶۱. وجه‌های جانبی $AA'D'D$ ، $AA'B'B$ و $BB'C'C$ را در نظر می‌گیریم. مکان هندسی نقطه‌ای که از دو وجه $AA'B'B$ و $AA'D'D$ به یک فاصله است، صفحهٔ نیمساز فرجهٔ بین این دو وجه است که آن را P می‌نامیم. همچنین مکان هندسی نقطه‌ای که از دو وجه $AA'B'B$ و $BB'C'C$ به یک فاصله است، صفحهٔ نیمساز بین این دو فرجه است. این صفحه را رسم می‌کنیم و Q می‌نامیم. فصل مشترک دو صفحهٔ P و Q جواب مسأله است.

۱۱.۴. رسم شکل

۱.۱۱.۴. رسم خط



۳۶۲. مثلث قائم‌الزاویهٔ ABD را به ضلعهای مجاور به زاویهٔ قائمه $AB = a$ و $AD = b$ رسم می‌کنیم. وتر این مثلث قطر مستطیل قاعدهٔ مکعب مستطیل است. حال مثلث قائم‌الزاویه‌ای رسم می‌کنیم که

اندازهٔ وتر آن مساوی l و طول یک ضلعش $BD=\sqrt{a^۲+b^۲}$ باشد. ضلع دیگر این مثلث یعنی DD' یال سوم مکعب مستطیل موردنظر است.

۱۲.۴. برش، مقطع

۳۶۳. پاره‌خطی به طول $r=۲^s+t$ در نظر بگیرید که در آن s و t عددهای طبیعی‌اند و $۰<t\le ۲^s$. می‌خواهیم این پاره‌خط را به r قطعه به طول واحد ببریم (قراردادن قطعه‌های روی هم پیش از هر برش مجاز است). با یک برش می‌توانیم قطعه‌هایی به طولهای ۲^s و t به دست آوریم ؛ سپس با s برش دیگر (با قراردادن قطعه‌ها روی هم) r قطعه به طول واحد به دست می‌آید. با کمتر از $s+۱$ برش نمی‌توان این کار را انجام داد، چون در هر برش تعداد قطعه‌ها حداکثر دو برابر می‌شود. نتیجه این که اگر :

$$a=۲^m+d \quad (۰<d\le ۲^m)$$

$$b=۲^n+e \quad (۰<e\le ۲^n)$$

$$c=۲^p+f \quad (۰<f\le ۲^p)$$

کمترین تعداد برشهای صفحه‌ای لازم برای بریدن مکعب مستطیلی به ابعاد $a\times b\times c$ به abc مکعب واحد برابر است با $m+n+p+۳$.

۱۳.۴. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۳۶۴. گزینهٔ (ب) درست است.

۳۶۵. این مسأله کمی «فریب‌دهنده» است. با کمی تفکر یا محاسبه معلوم می‌شود که تعداد کارتهای قرمز در ۲۶ کارت بالایی همیشه باید با تعداد کارتهای سیاه در ۲۶ کارت پایینی برابر باشد. پس بنابر قواعد منطق، حکم مسأله هر چه باشد، درست است (به انتفای مقدم).

۳۶۶. وجه‌های جانبی متوازی‌السطوح، متوازی‌الاضلاع یا مستطیل و قاعده‌های آن متوازی‌الاضلاعند. حال آن که در مکعب مستطیل هر دو قاعده و وجه‌های جانبی آن

مستطیل می‌باشند.
به بیان دیگر در مکعب مستطیل یالها دو به دو برهم عمودند، ولی در متوازی‌السطوح این ویژگی، برقرار نیست. به ویژه، یالهای تشکیل دهندهٔ قاعده بر هم عمود نیستند.

۴ . ۱۴. مسأله‌های ترکیبی

۳۶۷. الف. مساحت سطح جعبهٔ درباز برابر است با :

$$۲۵ + ۴(۵ \times ۴) = ۲۵ + ۸۰ = ۱۰۵ \ \text{cm}^۲$$

ب. سطح مقوا از یک مربع و چهار مستطیل تشکیل می‌شود، پس داریم :

$$\text{مساحت مقوا} = l^۲ + ۴ \times l.h$$

۳۶۸. داریم :

۱. $S_{\text{جانبی}} = \text{محیط قاعده} \times \text{ارتفاع} \ (۴ \times ۶) \times ۸ = ۱۹۲ \ \text{cm}^۲$

۲. $S_{\text{کل}} = S_{\text{جانبی}} + \text{دو قاعده} \ S = ۱۹۲ + ۲(۶^۲) = ۲۶۴ \ \text{cm}^۲$

۳. $\text{حجم} = V = S_{\text{قاعده}} \times \text{ارتفاع} = ۳۶ \times ۸ = ۲۸۸ \ \text{cm}^۳$

۴. $\text{قطر مکعب مستطیل} = d = \sqrt{۶^۲ + ۶^۲ + ۸^۲} = \sqrt{۱۳۶} = ۲\sqrt{۳۴} \ \text{cm}$

۳۶۹. داریم :

۱. $S_{\text{جانبی}} = ۲(۱۶ + ۱۲) \times ۸ = ۴۴۸ \ \text{cm}^۲$

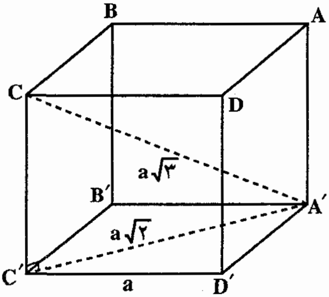
۲. $S_{\text{کل}} = ۴۴۸ + ۲ \times (۱۶ \times ۱۲) = ۸۳۲ \ \text{cm}^۲$

۳. $\text{حجم} = V = ۱۶ \times ۱۲ \times ۸ = ۱۵۳۶ \ \text{cm}^۳$

۴. $\text{قطر} = d = \sqrt{۱۶^۲ + ۱۲^۲ + ۸^۲} = \sqrt{۲۵۶ + ۱۴۴ + ۶۴} = \sqrt{۴۶۴} = ۴\sqrt{۲۹}$

راهنمایی و حل قضیه‌ها و مسأله‌های بخش ۵
مکعب

۱.۵. تعریف و قضیه



۳۷۰. مکعب $ABCDA'B'C'D'$ را در نظر می‌گیریم. یک قطر مکعب، به عنوان مثال $A'C$ را در نظر می‌گیریم. قطر $A'C'$ از وجه $A'B'C'D'$ را رسم می‌کنیم. مثلث $A'CC'$ در رأس C' قائم‌الزاویه است؛ زیرا $CC' \perp A'C'$ است.

می‌دانیم که با فرض این که طول یال مکعب a باشد، اندازهٔ $A'C' = a\sqrt{۲}$ است. از طرفی در مثلث قائم‌الزاویهٔ $A'CC'$ داریم:

$$A'C^{۲} = A'C'^{۲} + C'C^{۲} = (a\sqrt{۲})^{۲} + a^{۲}$$

$$\Rightarrow A'C^{۲} = ۳a^{۲} \Rightarrow A'C = a\sqrt{۳}$$

۲.۵. نقطه، خط، صفحه

۱.۲.۵. نقطه

۱.۱.۲.۵. نقطه‌های: همخط، همصفحه، ...

۱.۱.۱.۲.۵. نقطه‌ها هم‌صفحه‌اند

۳۷۱. A، B و C را انتهای سه یالی که در نقطهٔ O به هم رسیده‌اند و A′، B′ و C′ را انتهای

سه یالی کـه در O' بـه هم رسیده‌اند، مـی‌گیریم (شکل ۶۲). در ضمن، وسطـهـای AB'، $C'A$، BC'، $A'B$، CA' و $B'C$ را به ترتیب N'، M، L'، N، M' و L فرض می‌کنیم. در این صورت، همهٔ پاره‌خطهای راست

$$O'M, O'N', O'L, O'M', O'N, O'L',$$
$$OM, ON', OL, OM', ON, OL'$$

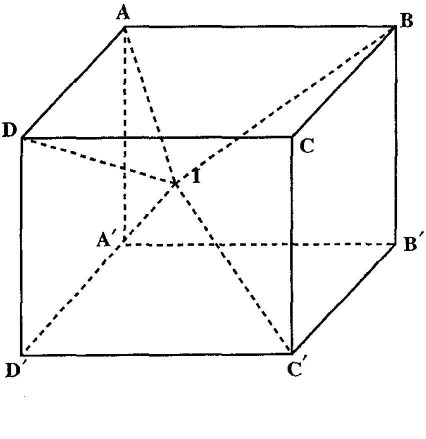
طول‌های برابر دارند، زیرا وترهای مثلثهای قائم‌الزاویه قابل انطباقند (همهٔ وجه‌های مکعب، مربعهایی قابل انطباقند) از این‌جا نتیجه می‌شود که نقطه‌های M، N'، L، M'، N و L' روی سطح کره‌ای به مرکز O و هم روی کره‌ای با همان شعاع و مرکز O' قرار دارند، یعنی این نقطه‌ها، روی محیط دایرهٔ محل برخورد این دو کره واقع شده‌اند. برای اثبات منتظم بودن شش ضلعی محاطی $MN'LM'NL'$، توجه می‌کنیم که، مثلاً، پاره‌خط MN' وسط دو ضلع مثلث $AB'C'$ را به هم وصل کرده و، بنابراین، برابر با نصف قطر $B'C'$ از مربع $AB'O'C'$، یعنی یکی از وجه‌های مکعب است. همین وضع، برای پاره‌خط‌های $N'L$، LM'، $M'N$، NL و $L'M$ هم وجود دارد. در نتیجه، همهٔ این پاره‌خطها با هم برابرند.

۲.۱.۱.۲.۵. نقطه‌ها برهم منطبقند

۳۷۲. تصویر نقطهٔ B روی AC' را I می‌نامیم و BC' را رسم می‌کنیم. در مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC' $(\hat{B}=۹۰^\circ)$ داریم:

$$AI=\frac{AB^۲}{AC'}\ ,\ \ AB=a$$

$$\Rightarrow AI=\frac{a^۲}{a\sqrt{۳}}=\frac{a}{\sqrt{۳}}=\frac{a\sqrt{۳}}{۳}=\frac{AC'}{۳}$$



به موجب ویژگی تقارن، همین نتیجه برای تصویر نقطهٔ D یا نقطهٔ A' برقرار است، یعنی تصویرهای این دو نقطه روی AC' نیز نقطهٔ I است، پس سه نقطهٔ تصویر برهم منطبقند.

۵.۲.۱.۱.۳. نقطه‌ها درون مکعبند

۳۷۳. مکعب را به $۲۱۹۷ = ۱۳^۳$ مکعب کوچک به ضلع $\frac{۱۵}{۱۳}$ واحد تقسیم کنید. طول قطر هر مکعب کوچک $\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۱۳}$ واحد است. اکنون توجه کنید که $۴ > \frac{۶۷۵}{۱۶۹} = (\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۱۳})^۲$ و یا $\frac{۱۵\sqrt{۳}}{۱۳}$.

بنابراین هر مکعب کوچک را می‌توان در کره‌ای به شعاع واحد گنجاند. چون ۱۱۰۰۰ نقطه و ۲۱۹۷ مکعب کوچک داریم و $۱۱۰۰۰ > ۱۰۹۸۵ = ۲۱۹۷ \times ۵$ دست‌کم یکی از مکعبهای کوچک حاوی دست‌کم ۶ نقطه است (بنابر اصل لانه کبوتری). پس کرهٔ واحدی وجود دارد که حاوی دست‌کم ۶ نقطه است.

۵.۲.۲. خط

۵.۲.۲.۱. خطهای: همرس، موازی، ...

۵.۲.۲.۱.۱. خطها همرسند

۳۷۴. همانند متوازی‌السطوح قطرهای مکعب نیز در یک نقطه همرسند، که این نقطه مرکز تقارن مکعب است که به طور خلاصه آن را مرکز مکعب می‌نامند.

نکته. بدون استفاده از ویژگی متوازی‌السطوح، با رسم صفحه‌های قطری مکعب و این ویژگی که قطرهای هر مستطیل منصف یکدیگرند، می‌توان همرس بودن قطرهای مکعب را ثابت کرد.

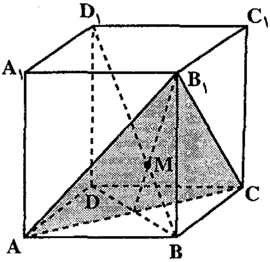
۵.۲.۲.۱.۲. خطها بر هم عمودند

۳۷۵. خط BD تصویر خط شیبدار BD_1 روی صفحهٔ $ABCD$ است؛ زیرا $D_1D \perp ABCD$ می‌باشد. وجه $ABCD$ یک مربع بوده و این امر به معنی $AC \perp BD$ است. براساس شرط کفایت قضیهٔ بالا رابطهٔ اخیر موجب $AC \perp BD_1$ می‌شود.

۵.۲.۳. خط و صفحه

۵.۲.۳.۱. خطها و صفحه‌های: موازی، عمود برهم، ...

۵.۲.۳.۱.۱. خط عمود بر صفحه است



۳۷۶. برای اثبات مثلاً قطر BD_1 را در نظر می‌گیریم، (شکل). ثابت کرده‌ایم که $BD_1 \perp AC$ است. به طریق کاملاً مشابه می‌توان ثابت کرد که $BD_1 \perp AB_1$ است. از این‌رو نتیجه می‌شود که $BD \perp AB_1C$ است. از ویژگیهای تقارن مکعب روشن می‌شود که این امر در مورد هر یک از قطرهای مکعب صادق است.

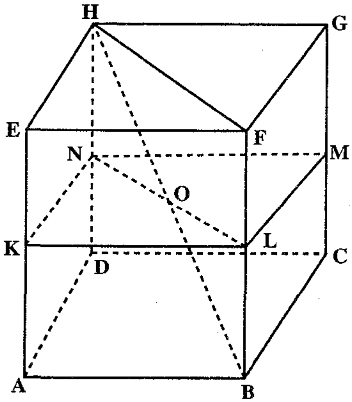
۳۷۷. به دلیل نیمساز بودن قطر BD برای زاویهٔ B و تساوی $BM = BK$، خط BD عمودمنصف پاره خط KM است، یعنی از نقطهٔ P می‌گذرد، پس صفحهٔ HDB که بر BD و نقطهٔ P وسط KM می‌گذرد، عمودمنصف پاره‌خط KM است.

۵.۲.۳.۱.۲. خط مماس بر کره است

۳۷۸. مکعب را حول قطر AC_1 به اندازهٔ زاویه‌ای، دوران دهید. چون صفحهٔ مثلث A_1BD بر AC_1 عمود است و ضلعهای آن بر کره محاط در مکعب مماس هستند، ضلعهای مثلث که پس از دوران از A_1BD به دست می‌آیند، همچنان بر کرهٔ محاطی مماس خواهند بود. با انتخاب مناسب زاویهٔ دوران، وجه AA_1B_1B بر صفحهٔ مفروض برده می‌شود و پاره‌خط MN پاره‌خطی از وجه دوران یافته می‌گردد.

۵.۲.۴. مرکز تقارن، محور تقارن، صفحهٔ تقارن

۳۷۹. مکعب ABCDEFGH را در نظر می‌گیریم. مانند هر متوازی‌السطوحی محل برخورد قطرهای این مکعب، مرکز تقارن آن است. صفحهٔ KLMN که شامل وسطهای یالهای AE، BF، CG و DH است، موازی قاعده‌ها و در نتیجه عمود بر این یالهاست. بنابراین این صفحه یک صفحهٔ تقارن مکعب است.



به همین ترتیب دو صفحهٔ دیگر تقارن موازی یالهای دیگر مکعب وجود دارند. این سه صفحهٔ تقارن مکعب، صفحه‌هایی هستند که از نقطهٔ O مرکز تقارن مکعب موازی وجه‌های آن رسم می‌شوند. این صفحه‌ها دوبه‌دو برهم عمودند. از آن جا خطهای محل برخورد آنها یعنی خطهایی که از نقطهٔ O موازی یالهای مکعب رسم می‌شوند، محور تقارن مکعب هستند. از طرف دیگر صفحهٔ BFDH که شامل دو یال متقابل است، نیز صفحهٔ تقارن مکعب است و از آن جا ۶ صفحهٔ تقارن خواهیم داشت که بر یالهای دوبه‌دو متقابل مکعب می‌گذرند. می‌دانیم که دو صفحهٔ KLMN و BFHD برهم عمودند و خط LN محل برخورد آنها که وسطهای یالهای BF و DH را به هم وصل می‌کند، یک محور تقارن مکعب است. بنابراین خطهایی که وسطهای یالهای متقابل موازی را به هم وصل می‌کنند نیز محور تقارن مکعب هستند. پس مکعب یک مرکز تقارن، ۹ صفحهٔ تقارن و ۹ محور تقارن دارد.

۵.۲.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۱.۵.۲.۵. تعداد رأسها

۳۸۰. گزینهٔ (الف) درست است.

۲.۵.۲.۵. تعداد یالها

۳۸۱. گزینهٔ (د) درست است.

۳.۵.۲.۵. تعداد رأسها و یالها

۳۸۲. گزینهٔ (الف) درست است.

۴.۵.۲.۵. تعداد رأسها، یالها و وجه‌ها

۳۸۳. گزینهٔ (ج) درست است.

۵.۵.۲.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

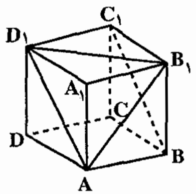
۳۸۴. هر مکعب ۸ رأس، ۱۲ یال، ۶ وجه و ۶ قطر دارد.

۳.۵. زاویه

۱.۳.۵. اندازهٔ زاویه

۱.۱.۳.۵. اندازهٔ زاویهٔ بین دو خط

۳۸۵. گزینهٔ (الف) درست است.



۳۸۶. قطرهای مفروض روی خطهای متنافر قرار دارند. قطر AD_1 از وجه ADD_1A_1 موازی قطر BC_1 بوده و از این‌رو زاویهٔ بین خطهای AD_1 و AB_1 با زاویهٔ بین خطهای BC_1 و AB_1 برابر است. مثلث AB_1D_1 را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. هر ضلع آن قطری از وجه مکعب است. طول قطرها برابر بوده و از این‌رو مثلث AB_1D_1 متساوی‌الاضلاع می‌باشد. پس $B_1\hat{A}D_1 = ۶۰^\circ$ است. زاویهٔ بین نیمخطهای AB_1 و AD_1 به دست آمده و معلوم شده است که حاده است. بنابراین زاویهٔ بین خطهای AD_1 و AB_1 نیز دارای همان مقدار بوده و جواب مسأله عبارت از ۶۰° خواهد بود.

۳۸۷. داریم :

$$DH \perp HE \Rightarrow D\hat{H}E = ۹۰^\circ \ , \ D\hat{E}H = ۴۵^\circ$$

$$H\hat{G}D = ۴۵^\circ, \ D\hat{E}G = ۹۰^\circ \ , \ ED = EG = a\sqrt{۲} \Rightarrow E\hat{G}D = ۴۵^\circ$$

۲.۱.۳.۵. اندازهٔ زاویهٔ بین دو صفحه

۳۸۸. دستگاه مختصات کارتزینی را همچون شکل در نظر می‌گیریم. با اختصاص a برای طول یال مکعب، مختصات نقطه‌هایی از مکعب را به دست می‌آوریم :

$$M(۰, a, \frac{a}{۲}) \text{ و } D_1(۰, ۰, a) \text{ ، } A_1(a, ۰, a) \text{ ، } F(a, ۲, ۰) \text{ ، } E(a, ۰, \frac{a}{۲}) \text{ ، } D(۰, ۰, ۰)$$

از مختصات معلوم این نقطه‌ها معادلهٔ صفحهٔ EFD را به دست می‌آوریم :

$$x-۲y-۲z=۰$$

همچنین معادلهٔ صفحهٔ A_1D_1M به صورت روبه‌رو به دست می‌آید :

$$y+۲z-۲a=۰$$

(قسمت هاشورخوردهٔ صفحهٔ A_1D_1M در شکل برشی از مکعب محسوب نمی‌شود).

بردار $n_1=(۱,-۲,-۲)$ بر صفحهٔ EFD و بردار $n_2=(۰,۱,۲)$ بر صفحهٔ A_1D_1M عمود است. φ، زاویهٔ بین این صفحه‌ها را به دست می‌آوریم :

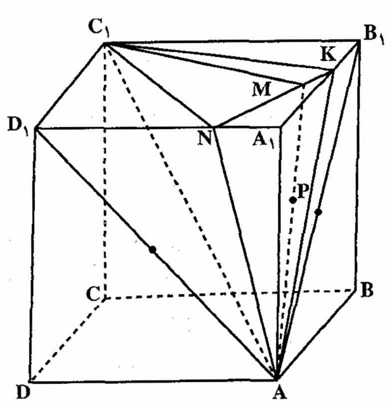
$$\cos\varphi=\frac{|n_1.n_2|}{|n_1|.|n_2|}=\frac{|۱/۰-۲/۱-۲/۲|}{\sqrt{۱+۴+۴}\times\sqrt{۱+۴}}=\frac{۲}{\sqrt{۵}}$$

$$\varphi=\operatorname{Arc}\cos\left(\frac{۲}{\sqrt{۵}}\right)$$

۳.۱.۳.۵. اندازهٔ زاویهٔ مسطحهٔ فرجه

۳۸۹. اگر صفحهٔ AKN در نقطهٔ P، بر کره مماس و خط AP خط NK را در نقطهٔ M قطع کند، (شکل) در آن صورت صفحهٔ C_1NA، صفحهٔ نیمساز فرجه بین صفحه‌های D_1C_1A و C_1MA خواهد بود (صفحه‌های D_1AN و ANM بر کره مماسند و صفحه‌های D_1C_1A و C_1MA از مرکز آن می‌گذرند).

به همین طریق صفحهٔ C_1KA، صفحهٔ نیمساز فرجه بین صفحه‌های MC_1A و C_1B_1A خواهد بود. بنابراین فرجهٔ بین صفحه‌های AC_1K و AC_1N نصف فرجهٔ بین صفحه‌های AD_1C_1 و AB_1C_1 بوده و برابر $\frac{۲\pi}{۳}$ می‌شود. جواب. $\frac{\pi}{۳}$



۴.۱.۳.۵ . اندازهٔ زاویهٔ بین خط و صفحه

۳۹۰. روی امتداد یال CC_1، نقطهٔ K را طوری اختیار کنید که B_1K موازی BC_1 باشد. از یال BB_1 صفحه‌ای به موازات صفحهٔ مفروض بگذرانید (شکل).

این صفحه باید از یکی از نیمسازهای داخلی و یا خارجی زاویهٔ DB_1K بگذرد. چون صفحه‌ای که بر BB_1 می‌گذرد، DK_1 را با نسبتی قطع می‌کند که با همان نسبت DC را نیز قطع می‌کند، پس دو حالت اتفاق می‌افتد :

۱) صفحه از نقطه‌ای مانند N واقع بر روی یال DC طوری می‌گذرد که :

$$DN/NC = \frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}$$

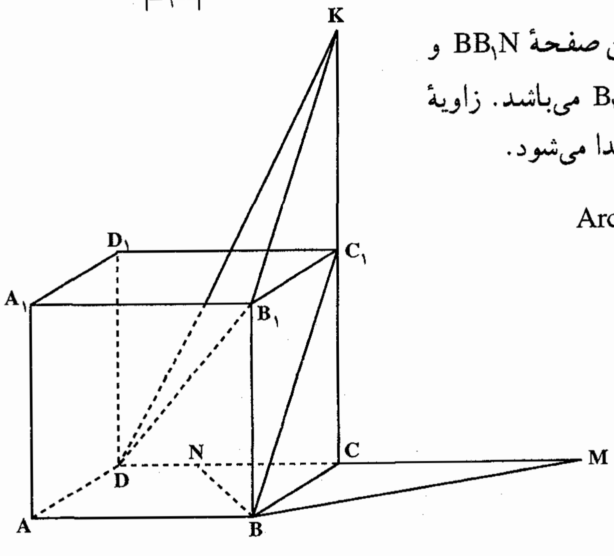
۲) صفحه از نقطه‌ای مانند M بر روی امتداد آن طوری می‌گذرد که باز :

$$DM/MC = \frac{\sqrt{۳}}{۲}$$

ابتدا فاصلهٔ نقطهٔ K را از صفحه پیدا کنید. این فاصله برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ C از خط BN. اگر این فاصله را x فرض کنیم، در آن صورت :

$$x = \frac{۲S_{BNC}}{BN} = \frac{a\sqrt{۲}}{(\sqrt{۳}+\sqrt{۲})\sqrt{۱۱-۴\sqrt{۶}}} = \frac{a(\sqrt{۶}-۱)\sqrt{۲}}{۵}$$

$$\sin\varphi = \frac{x}{|B_1K|} = \frac{\sqrt{۶}-۱}{۵}$$



که در آن φ زاویهٔ بین صفحهٔ BB_1N و خطهای B_1D و B_1K می‌باشد. زاویهٔ دیگر به همین طریق پیدا می‌شود.

جواب. $\operatorname{Arc\,sin}\frac{\sqrt{۶}\pm۱}{۵}$

۴.۵. یال، قطر

۱.۴.۵. یال

۱.۱.۴.۵. اندازهٔ یال

۳۹۱. اگر طول ضلع مکعب را x بگیریم، آن وقت تفاضل حجمهای موردنظر مسأله، چنین است :

$$f(x)=\begin{cases} abc-x^{۳} & (۰<x\le a)\\ abc+(x-a)x^{۳}-ax^{۲} & (a<x\le b)\\ x^{۳}+ab(c-x)-abx & (b<x\le c)\\ x^{۳}-abc & (c<x)\end{cases}$$

تابع $f(x)$، برای $x>۰$ پیوسته و مشتق آن برابر است با :

$$f'(x)=\begin{cases} -۳x^{۲} & (۰<x<a)\\ ۳x^{۲}-۴ax & (a<x<b)\\ ۳x^{۲}-۲ab & (b<x<c)\\ ۳x^{۲} & (c<x)\end{cases}$$

بنابراین، تابع $f(x)$، برای $۰<x<a$، نزولی ؛ برای $b<x$ صعودی (زیرا $۳x^{۲}-۲ab>۳b^{۲}-۲ab>۰$) ؛ و در بازهٔ (a,b) نزولی است، اگر داشته باشیم : $b\le\frac{۴}{۳}a$ (زیرا $۳x^{۲}-۴ax$ از $۳b^{۲}-۴ab$، که مقداری غیر مثبت است، کوچکتر است) و یا در نقطهٔ $x=\frac{۴}{۳}a$ می‌نیمم دارد، وقتی که داشته باشیم : $b>\frac{۴}{۳}a$. به این ترتیب، حداقل مقدار تابع $f(x)$، یا به ازای $x=b$ به دست می‌آید (اگر $b\le\frac{۴}{۳}a$) و یا به ازای : $x=\frac{۴}{۳}a$ (اگر $b>\frac{۴}{۳}a$)، و مقدار مجهول x برابر است با :

$$\min\left\{b,\frac{۴}{۳}a\right\}$$

۳۹۲. ضلع مربع را x فرض می‌کنیم. داریم:

$$۱/۹۸\times۱۰۰=۱۹۸\ \text{cm}^۲$$
$$۶x^۲+۱۹۸=۶(x+۱)^۲$$
$$\Rightarrow ۶x^۲+۱۹۸=۶x^۲+۶+۱۲x$$
$$\Rightarrow ۱۲x=۱۹۲\Rightarrow x=۱۶\text{cm}$$

۳۹۳. داریم:

$$a\sqrt{۳}=۱۲\Rightarrow a=\frac{۱۲}{\sqrt{۳}}=۴\sqrt{۳}$$

۳۹۴. داریم:

$$a^۳=۶a^۲\Rightarrow a=۶$$

۳۹۵. گزینهٔ (ب) درست است. فرض کنید طول یال مکعب f فوت و در نتیجه ۱۲f اینچ باشد. حجم بر حسب فوت مکعب را با مساحت هر ۶ وجه برحسب اینچ مربع، برابر قرار می‌دهیم، داریم: $f^۳=۶(۱۲f)^۲$، بنابراین $f=۶\times(۱۲)^۲=۸۶۴$.

۲.۴.۵. قطر

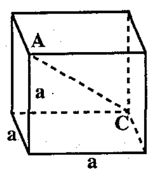
۱.۲.۴.۵. اندازهٔ قطر

۳۹۶. چون طول یالها برابر a است، پس در رابطهٔ $AC=\sqrt{a^۲+b^۲+c^۲}$ به جای a، b و c مقدار a را قرار می‌دهیم:

$$AC=\sqrt{a^۲+a^۲+a^۲}=\sqrt{۳a^۲}=a\sqrt{۳}$$

حالت خاص. برای $a=۶$ داریم:

$$\text{طول قطر}=a\sqrt{۳}=۶\sqrt{۳}$$



۳۹۷. در مکعبی به یال a، اندازهٔ قطر هر وجه، مساوی $a\sqrt{۲}$ و اندازهٔ قطر مکعب مساوی $a\sqrt{۳}$ است. بنابراین داریم:

$$\text{قطر هر وجه}=a\sqrt{۲}=۱۲\sqrt{۲}\ \text{cm}$$
$$\text{قطر مکعب}=a\sqrt{۳}=۱۲\sqrt{۳}\ \text{cm}$$

۳۹۸. گزینهٔ (الف) درست است.

۳۹۹. گزینهٔ (ج) درست است.

۴۰۰. می‌دانیم که اندازهٔ قطر مکعبی به یال a، مساوی $a\sqrt{۳}$ است. بنابراین اگر a دو برابر شود، قطر مکعب ۲ برابر خواهد شد، یعنی اگر

$$d = a\sqrt{۳}\ ,\ d' = a'\sqrt{۳}\ ,\ a' = ۲a$$
$$\Rightarrow d' = ۲a\sqrt{۳} = ۲d$$

۵.۵. پاره خط

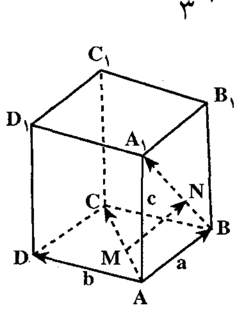
۱.۵.۵. اندازهٔ پاره خط

۴۰۱. باید توجه داشت که پاره خط MN، در محل برخوردش با PQ، به دو پاره‌خط مساوی تقسیم می‌شود. این پاره‌خط‌ها را روی صفحهٔ ABCD تصویر کنید. اگر $N_۱$ تصویر N، $K_۱$ وسط AD، $Q_۱$ وسط DC باشند ($K_۱$ و $Q_۱$ بترتیب تصویرهای K و Q هستند) در آن صورت، $N_۱M$ بر $AQ_۱$ عمود و در نقطهٔ تقاطع با آن نصف می‌گردد، پس:

$$N_۱\hat{A}D = ۲Q_۱\hat{A}D$$

از آن جا $N_۱K_۱$ و NM را می‌توان به دست آورد. جواب. $\frac{a}{۳}\sqrt{۱۴}$

۴۰۲. به عنوان مثال قطرهای AC و $A_۱B$ از وجه‌های مکعب را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم (شکل). M را نقطه‌ای بر روی خط AC و N را نقطه‌ای بر روی خط $A_۱B$ در نظر می‌گیریم. شرط تعامد پاره‌خط MN بر خطهای AC و $A_۱B$ با رابطه‌های زیر هم‌ارز است:



$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC} = ۰ \text{ و } \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{BA_۱} = ۰ \qquad (۱)$$

بردارهای $\overrightarrow{AC}$، $\overrightarrow{BA_۱}$ و $\overrightarrow{MN}$ را بر حسب $\overrightarrow{AB} = a$، $\overrightarrow{AD} = b$، $\overrightarrow{AA_۱} = c$ بیان می‌کنیم. چنین داریم:

$$\overrightarrow{BA_۱} = c - a \text{ و } \overrightarrow{AC} = a + b$$

همچنین به دلیل این که نقطهٔ M روی خط AC و نقطهٔ N روی خط A_1B قرار دارد، از این‌رو $\overrightarrow{AM} = x\overrightarrow{AC}$ و $\overrightarrow{BM} = y\overrightarrow{BA_1}$ استنتاج می‌شود. با منظور کردن این نکته در می‌یابیم که :

$$\overrightarrow{MN} = \overrightarrow{MA} + \overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BN} = -x\overrightarrow{AC} + a + y\overrightarrow{BA_1}$$
$$= (1-x-y)a - xb + yc$$

تجزیه‌های برداری را در معادله‌های (۱) جایگذاری می‌کنیم و معادله‌ها را تبدیل می‌کنیم :

$$\begin{cases}((1-x-y)a - xb + yc).(a+b) = 0\\ ((1-x-y)a - xb + yc).(c-a) = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}(1-x-y)a^2 - xa^2 = 0\\ ya^2 - (1-x-y)a = 0\end{cases}$$

$$\begin{cases}1-2x-y = 0\\ -1+x+2y = 0\end{cases}$$

از این‌رو $x = y = \frac{1}{3}$ به دست می‌آید. این امر بدین معنی است که نقطه‌های M و N روی پاره‌خطهای AC و BA_1 قرار دارند و $AM = \frac{AC}{3}$ و $BN = \frac{BA_1}{3}$ است.

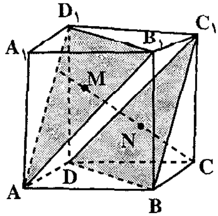
حال چنین داریم $\overrightarrow{MN} = \frac{1}{3}a - \frac{1}{3}b + \frac{1}{3}c$. بنابراین تساوی زیر استنتاج می‌شود :

$$MN = \sqrt{\frac{1}{9}(a^2 + a^2 + a^2)} = \frac{a}{\sqrt{3}}$$

۴۰۳. گزینهٔ (ب) درست است.

۴۰۴. قطر A_1C (شکل) مکعب بر صفحه‌های AB_1D_1 و BDC_1 عمود است و صفحه‌های AB_1D و BDC_1 قطر A_1C را به سه قسمت مساوی تقسیم می‌کنند. یعنی اگر M و N نقطه‌های تلاقی قطر A_1C با صفحه‌های مزبور باشند، آن‌گاه :

$$A_1M = MN = NC = \frac{1}{3}A_1C$$



خواهد بود. طول پاره‌خط MN با فاصلهٔ صفحه‌های $AB_۱D_۱$ و $BDC_۱$ برابر است. به دلیل $A_۱C=\sqrt{۳}a$ استنتاج می‌شود که $MN=\frac{\sqrt{۳}}{۳}a$ بوده و در نتیجه جواب مسأله عبارت از $\frac{\sqrt{۳}}{۳}a$ خواهد بود.

۲.۵.۵. کمترین اندازهٔ طول پاره‌خط

۴۰۵. محل برخورد MN و $D_۱C_۱$ را L می‌نامیم. اگر $AM=x$ و $BN=y$، از فرض مسأله معلوم می‌شود: $x>a$ و $y>a$.

با تصویر همهٔ نقطه‌ها بر روی $ABB_۱A_۱$، خواهیم داشت:

$$\frac{C_۱L}{LD_۱}=\frac{a}{x-a}$$

و با تصویر آنها بر روی ABCD خواهیم داشت:

$$\frac{C_۱L}{LD_۱}=\frac{y-a}{a}$$

در نتیجه

$$\frac{a}{x-a}=\frac{y-a}{a}$$

از آن‌جا $xy=(x+y)a$. امّا $(x+y)^۲\geq ۴xy$. بنابراین $xy\geq ۴a^۲$ اکنون داریم:

$$(MN)^۲=x^۲+y^۲+a^۲=(x+y)^۲-۲xy+a^۲$$

$$=\frac{(xy)^۲}{a^۲}-۲xy+a^۲=\frac{۱}{a^۲}(xy-a^۲)\geq ۹a^۲$$

کمترین مقدار MN برابر است با $۳a$.

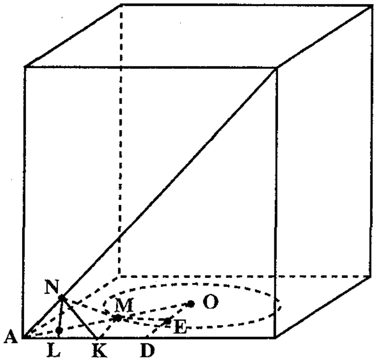
۴۰۶. اگر O مرکز دایره، L تصویر N بر روی صفحهٔ قاعده باشد، نقطهٔ M باید بر روی LO قرار گیرد؛ زیرا M نزدیکترین نقطهٔ دایره از N می‌باشد. از طرف دیگر، چون N نقطه‌ای از قطر نزدیک‌ترین وجه، به M است، MN بر این قطر عمود می‌شود و بنابراین KN نیز بر این قطر عمود است و از آن‌جا، K تصویر M بر روی وجهی می‌شود که این قطر را شامل است (شکل). اگر $AL=ax$، ANK مثلث قائم‌الزاویهٔ متساوی‌الساقین است و

بنابراین :

$$LK = AL = ax$$

$$MK : OD = \frac{LK}{LD} = \frac{ax}{۱-۲x}$$

$$KD = \frac{a}{۲}(۱-۴x)$$



در مثلث MOE قضیهٔ فیثاغورس را می‌نویسیم (ME موازی با AD است) معادلهٔ زیر را خواهیم داشت :

$$\frac{(۱-۴x)^۲}{۴} + (\frac{۱}{۲} - \frac{x}{۱-۲x})^۲ = \frac{۲۵}{۱۴۴}$$

$$\Leftrightarrow [۶(۱-۴x)(۱-۲x)]^۲ + [۶(۱-۴x)]^۲ + [۵(۱-۲x)]^۲ = ۰$$

با قراردادن $۵^۲ = ۳^۲ + ۴^۲$ در سمت راست و بردن آن به سمت چپ خواهیم داشت :

$$[۶(۱-۴x)(۱-۲x)]^۲ - [۳(۱-۲x)]^۲ + [۶(۱-۴x)]^۲ - [۴(۱-۲x)] = ۰$$

$$\Leftrightarrow ۹(۱-۲x)^۲(۱-۸x)(۳-۸x) + ۴(۵-۱۶x)(۱-۸x) = ۰$$

$$\Leftrightarrow (۱-۸x)\left[۹(۱-۲x)^۲(۳-۸x) + ۴(۵-۱۶x)\right] = ۰$$

به آسانی دیده می‌شود که نقطهٔ K باید در سمت چپ D قرار گیرد، یعنی :

$$۰ < x < \frac{۱}{۴}$$

و بنابراین عبارت داخل کروشه برابر صفر نیست، پس $x = \frac{۱}{۸}$.

جواب. $\frac{a\sqrt{۳۴}}{۲۴}$

۴۰۷. M روی $AB_۱$ و N روی $BC_۱$ اختیار و تصویرهای آنها را روی ABCD بترتیب $M_۱$ و $N_۱$ بنامید. با قراردادن $BM_۱ = x$ و $BN_۱ = y$ داریم :

$$M_۱N_۱ = \sqrt{x^۲ + y^۲}\ ,\ MN = \sqrt{x^۲ + y^۲ + (a-x-y)^۲}$$

امّا بنا به فرض :

$$MN = ۲M_۱N_۱$$

پس
$$(a-x-y)^2 = 3(x^2+y^2)$$
اگر $x^2+y^2=u^2$ ، $x+y=v$ ، داریم :
$$2u^2-v^2 \geq 0$$
و چون $u^2=\frac{1}{3}(a-v)^2$ با قراردادن u^2 در نامساوی اخیر که برحسب u و v است، نامعادله‌ای برحسب v به صورت زیر پیدا می‌شود :
$$v^2+4av-2a^2 \leq 0$$
از آن‌جا
$$a(2+\sqrt{6}) \leq v \leq a(\sqrt{6}-2)$$
اکنون کمترین مقدار MN را پیدا می‌کنیم که برابر می‌شود با :
$$2a(\sqrt{3}-\sqrt{2})$$

۴۰۸. پاسخ : $\frac{1}{2}(\sqrt{3}-\sqrt{2})$

دایره‌های مفروض، روی دو کرهٔ هم مرکز قرار دارند. کرهٔ محیط بر مکعب و کرهٔ محاط در آن، حداقل فاصلهٔ موردنظر برابر است با تفاضل شعاعهای این دو کره.

۳.۵.۵. بیشترین اندازهٔ طول پاره‌خط

۴۰۹. گزینهٔ (الف) درست است.

طولانیترین مسیر ۸ یال را می‌پوشاند، و $24=3\times 8$ سانتیمتر.

۴.۵.۵.تساوی دو پاره‌خط

۴۱۰. قطر DB را رسم می‌کنیم. دو مثلث DBE و DBM همنهشتند ($BK=BM$ ، $DB=DB$ و $D\hat{B}E=D\hat{B}M=45^\circ$)؛ پس $DK=DM$ از آن‌جا دو مثلث قائم‌الزاویهٔ HDK و HDM همنهشتند ($H\hat{D}K=H\hat{D}M=90^\circ$ ، $HD=HD$ و $DK=DM$). بنابراین $HK=HM$ است.

۵.۵.۵.نسبت پاره‌خطها

۴۱۱. اگر طول یال مکعب a، $NC_1 = x$، داریم :

$$LM = \frac{a}{2}\ ,\ \ NK = \frac{x}{\sqrt{2}}$$

$$LN^2 = LB_1^2 + B_1N^2 = \frac{a^2}{4} + (a-x)^2 = \frac{5}{4}a^2 - 2ax + x^2$$

$$LK^2 = LB_1^2 + B_1K^2 = LB_1^2 + B_1N^2 + NK^2 + 2B_1N.NK\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$= \frac{a^2}{4} + (a-x)^2 + \frac{x^2}{2} + (a-x)x = \frac{5}{4}a^2 - ax + \frac{x^2}{2}$$

$$MN^2 = MB_1^2 + B_1N^2 = \frac{3a^2}{2} - 2ax + x^2$$

$$MK^2 = MB^2 + BK^2 - MB.BK = \frac{3a^2}{2} - \frac{3}{2}ax + \frac{x^2}{2}$$

اگر $L\hat{M}K = M\hat{K}N = \varphi$، با استفاده از قضیهٔ کسینوسها در مثلثهای LMK و MKN خواهیم داشت :

$$LK^2 = LM^2 + MK^2 - 2LM.MK\cos\varphi$$
$$MN^2 = MK^2 + KN^2 - 2MK.KN\cos\varphi$$

با حذف $\cos\varphi$ بین این تساویها، نتیجه می‌شود :

$$LK^2.KN - MN^2.LM = (LM - KN)(LM.KN - MK^2)$$

با قراردادن مقدارهای این پاره‌خط در فرمولهای حاصل، خواهیم داشت :

$$(\frac{5a^2}{4} - ax + \frac{x^2}{2})\frac{x}{\sqrt{2}} - (\frac{3a^2}{2} - 2ax + x^2)\frac{a}{2}$$

$$= (\frac{a}{2} - \frac{x}{\sqrt{2}})(\frac{ax}{2\sqrt{2}} - \frac{3a^2}{2} + \frac{3ax}{2} - \frac{x^2}{2})$$

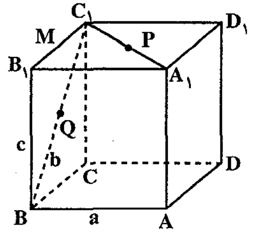
از این معادله نتیجه می‌شود :

$$x = (1 - \frac{\sqrt{2}}{2})$$

جواب. $\frac{B_1N}{NC_1}=\sqrt{۲}+۱$

۴۱۲. M را نقطهٔ برخورد صفحهٔ موردنظر، با یال B_1C_1 می‌گیریم (شکل) و فرض می‌کنیم :

$\overrightarrow{AB}=a$ ، $\overrightarrow{AD}=b$ ، $\overrightarrow{AA_1}=c$



از آن‌جا که بردارهای $\overrightarrow{AM}$ ، $\overrightarrow{AP}$ و $\overrightarrow{AQ}$ همصفحه‌اند و در ضمن، دو بردار اخیر همراستا نیستند، داریم :

$$\overrightarrow{AM}=m\overrightarrow{AP}+n\overrightarrow{AQ}=m(\overrightarrow{AA_1}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{A_1C_1})+n(\overrightarrow{AB}+\frac{۱}{۲}\overrightarrow{BC})$$

$$=m(c+\frac{۱}{۲}a+\frac{۱}{۲}b)+n(a+\frac{۱}{۲}c+\frac{۱}{۲}b)$$

$$=(\frac{۱}{۲}m+n)a+\frac{۱}{۲}(m+n)b+(m+\frac{۱}{۲}n)c$$

از طرف دیگر :

$$\overrightarrow{AM}=\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB_1}+\overrightarrow{B_1M}=a+c+\lambda b$$

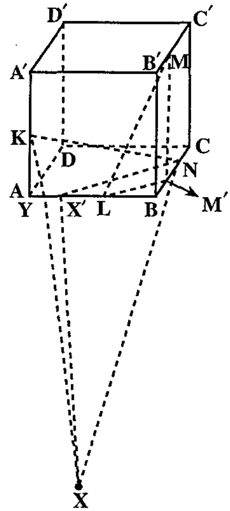
باید λ را پیدا کنیم. چون بردارهای a، b و c همصفحه نیستند، باید دو تجزیهٔ بردار $\overrightarrow{AM}$ برهم منطبق باشند و داشته باشیم :

$$\frac{۱}{۲}m+n=۱\ ,\ \ m+\frac{۱}{۲}n=۱\ ,\ \ \frac{۱}{۲}(m+n)=\lambda$$

از این دستگاه به دست می‌آید : $\lambda=\frac{۲}{۳}$ و بنابراین :

$$B_1M:MC_1=۲:۱$$

۴۱۳. از نقطهٔ N خطی به موازات ML رسم می‌کنیم (این خط در همان صفحهٔ شامل KN و موازی ML قرار می‌گیرد). محل تلاقی این خط را با صفحهٔ $ABB'A'$ ، X و محل برخورد خط AB و KX را Y می‌نامیم (شکل صفحه‌ی بعد را نگاه کنید).



فرض کنیم X' و M' تصویرهای نقطه‌های X و M بر روی صفحهٔ ABCD باشند. از موازی‌بودن خطهای ML و NX موازی بودن تصویرهای آنها، یعنی $M'L$ و NX' نتیجه می‌شود، و از آن‌جا داریم :

$$X'B = LB.\frac{NB}{M'B} = \frac{۱}{۳} \times \frac{۷/۱۰}{۱/۴} = \frac{۱۴}{۱۵}$$

چون $X'B < AB = ۱$، پس نقطهٔ Y بر روی پاره‌خط AB قرار دارد و صفحه، یال AB را قطع می‌کند. همچنین به طریق مشابه نتیجه می‌شود :

$$XX' = MM'.\frac{X'N}{LM'} = ۱ \times \frac{NB}{M'B} = \frac{۱۴}{۵}$$

$$\frac{AY}{YX'} = \frac{AK}{XX'} \in (۰\ ,\ \frac{۱}{۱۴/۵}) = (۰\ ,\ \frac{۵}{۱۴})$$

(چون طول یال مکعب واحد و نقطهٔ K به دلخواه بر روی آن اختیار می‌شود، پس AK از صفر تا ۱ تغییر می‌کند)، بنابراین داریم :

$$\frac{AY}{AX'} \in (۰\ ,\ \frac{۵}{۵+۱۴}) = (۰\ ,\ \frac{۵}{۱۹})$$

$$AY \in (۰\ ,\ \frac{۵}{۱۹}.AX') = (۰\ ,\ \frac{۱}{۵۷})$$

$$\frac{AY}{YB} \in (۰\ ,\ \frac{۱}{۵۶})$$

جواب : AB به نسبت دلخواه از ۰ تا $\frac{۱}{۵۶}$ با احتساب از رأس A، تقسیم می‌شود.

۴۱۴. $\frac{۱}{۲}$ و $a\sqrt{\frac{۱}{۳}}$

۴۱۵. به اندازهٔ $\frac{۴}{۵}$ از نقطهٔ K.

۴۱۶. طول یال مکعب را واحد فرض کنید و مرکز وجه ABCD را O بنامید.

از این که $N\hat{M}C = ۶۰^\circ$ و $N\hat{O}C = ۹۰^\circ$، نتیجه می‌شود که O بین M و C قرار دارد. با قراردادن $OM = x$ و $NB = y$ خواهیم داشت :

$$MN = ۲x\ ,\ NO = x\sqrt{۳}$$

$$MB=\sqrt{\frac{۱}{۲}+x^۲}$$

با به‌کاربردن قضیهٔ کسینوسها در مثلثهای MNB و ONB نتیجه می‌شود،

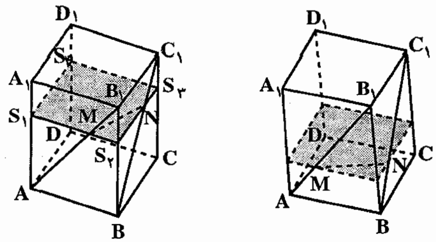
$$\begin{cases}\frac{۱}{۲}+x^۲=۴x^۲+y^۲-۲xy\sqrt{۲}\\ ۳x^۲=\frac{۱}{۲}+y^۲-\frac{۲}{\sqrt{۳}}y\end{cases}$$

بنابراین :

$$y=\frac{۲}{\sqrt{۳}}\ ,\ x=\frac{۱}{\sqrt{۶}}$$

جواب : $AM:MC=۲-\sqrt{۳}$ و $BN:ND_۱=۲$.

۴۱۷. طبق فرض $(MN)\|(ABCD)$ را در نظر بگیرید. خط مستقیم $S_۱S_۲$ را از نقطهٔ M واقع بر وجه $AA_۱B_۱B$ (شکل) به موازات AB رسم می‌کنیم. صفحه‌ای را که خطهای MN



و $S_۱S_۲$ تعریف می‌کنند، با صفحهٔ ABCD موازی است. برشی از مکعب که توسط مربع $S_۱S_۲S_۳S_۴$ ایجاد شده است با وجه ABCD برابر است. عبارتهای $AB=a$ ، $AM/AB_۱=x$ را در نظر می‌گیریم. از تشابه مثلثهای $MB_۱S_۲$ و $AB_۱B$ تساوی $MB_۱/AB_۱=MS_۲/AB=B_۱S_۲/B_۱B$ به‌دست می‌آید. با منظور کردن $MB_۱=(۱-x)AB_۱$ به رابطه‌های زیر وصول می‌یابیم :

$$MS_۲=(۱-x)AB=(۱-x)a$$
$$B_۱S_۲=(۱-x)BB_۱$$
$$BS_۲=BB_۱-B_۱S_۲=xBB_۱$$

تشابه مثلثهای $BS_۲N$ و $BB_۱C_۱$ رابطهٔ

$$S_۲N/B_۱C_۱=BN/BC_۱=BS_۲/BB_۱=x$$

را موجب شده و از این‌رو $S_2N = xa$ و $BN/BC_1 = AM/AB_1 = x$ استنتاج می‌شود.

در مثلث قائم‌الزاویهٔ MS_2N رابطه‌های $MN = \frac{\sqrt{5}}{3}a$ ، $S_2M = xa$ ، $MS_2 = (1-x)a$ را داریم. در نتیجه، طبق قضیهٔ فیثاغورس رابطهٔ زیر حاصل می‌شود :

$$\frac{5}{9}a^2 = (1-x)^2a^2 + x^2a^2 \quad \text{و} \quad 9x^2 - 9x + 2 = 0$$

ریشه‌های این معادله عبارت از $x_1 = \frac{2}{3}$ و $x_2 = \frac{1}{3}$ است. بدین ترتیب برای خط MN دو موقعیت وجود دارد که در شرط مسأله صدق می‌کند. شکل (الف) موقعیّت اول و شکل (ب) موقعیت دوم را نشان می‌دهد. جواب مسأله به صورت زیر خواهد بود :

$$AM/AB_1 = BN/BC_1 = \frac{2}{3} \quad \text{یا} \quad AM/AB_1 = BN/BC_1 = \frac{1}{3}$$

۴۱۸. خطهای AE و CF متقابلاً برهم عمودند. اگر Q_1 تصویر Q روی صفحهٔ ABB_1A_1 باشد، Q_1 روی پاره‌خط BL قرار خواهد گرفت. از آن‌جا L وسط AA_1 می‌شود. محل برخورد AE و LB را N می‌نامیم. به آسانی می‌توان محاسبه کرد که :

$$AN = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

با قراردادن

$$AP = \frac{1}{\sqrt{5}} + x \,,\ NQ_1 = y$$

خواهیم داشت :

$$PM^2 = \frac{8}{5} + (\frac{1}{\sqrt{5}} + x)^2 \,,\ PQ^2 = x^2 + y^2 + 1$$

$\frac{PM^2}{PQ^2}$ بزرگترین مقداری است که به ازای $y = 0$ به‌دست می‌آید. باقی می‌ماند که بزرگترین مقدار تابع

$$\frac{\frac{9}{5} + \left(\frac{2}{\sqrt{5}}\right)x + x^2}{x^2 + 1}$$

را پیدا کنیم. این مقدار به ازای

$$x = \frac{1}{\sqrt{5}}$$

به دست می‌آید.

جواب : $\sqrt{2}$

۶.۵. شعاع کره

۱.۶.۵. اندازهٔ شعاع کره

۴۱۹. شعاع کرهٔ خواسته شده، $a\sqrt{\frac{7}{8}}$ است.

۴۲۰. شعاع کرهٔ خواسته شده، $a\sqrt{2}$ است.

۴۲۱. یال B_1B را از طرف B امتداد دهید و روی امتداد آن نقطهٔ K را طوری اختیار کنید که $BK = a$.

همان‌طور که قبلاً مشاهده شد، K به یک فاصله از تمام ضلعهای چهارضلعی AB_1CD قرار دارد. روی قطر B_1D، نقطهٔ L را طوری اختیار کنید که $\frac{B_1L}{LD} = \sqrt{2}$. نقطهٔ L انتهایی نیمسازهای مثلثهای B_1AD و B_1CD است و بنابراین، L به یک فاصله از ضلعهای چهارضلعی AB_1CD قرار دارد. اکنون می‌توان ثابت کرد که همهٔ نقطه‌های خط KL، از ضلعهای این چهارضلعی به یک فاصله است. بنابراین شعاع مطلوب مسأله، برابر است با کوتاهترین فاصلهٔ بین خط KL و هر یک از خطهایی که چهارضلعی AB_1CD را می‌سازند.

فاصلهٔ بین مثلاً KL و AD را پیدا کنید. با تصویر کردن K و L روی صفحهٔ CDD_1C_1، نقطه‌های K_1 و L_1 به دست می‌آیند. فاصلهٔ مطلوب، برابر است با فاصلهٔ D تا خط K_1L_1.

جواب : $a\sqrt{1-\frac{\sqrt{2}}{2}}$

۴۲۲. در دو کرهٔ مماس برهم، خط‌المرکزین از نقطهٔ تماس دو کره می‌گذرد و مساوی مجموع

شعاعهای دو کره است. مرکز کره‌ها را به هم وصل کنید و از ویژگی بالا برای تعیین x، شعاع کرهٔ خواسته شده، استفاده کنید.

۷.۵. مساحت

۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت

۱.۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت جانبی

۴۲۳. اندازهٔ مساحت هر وجه $۹ = ۳^۲$ است. بنابراین:

$$S_{\text{جانبی مکعب}} = ۴ \times ۹ = ۳۶$$

$$\text{مساحت کل} = ۶ \times ۹ = ۵۴$$

۴۲۴. داریم:

$$V = a^۳ = ۶۴ \Rightarrow a = ۴ \text{ طول یال} \Rightarrow S_{\text{جانبی}} = ۴a^۲ = ۶۴ \ \text{cm}^۲$$

۲.۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت کل

۴۲۵. طول قطر هر وجه مکعبی به یال a، برابر $a\sqrt{۲}$ است. بنابراین داریم:

$$a\sqrt{۲} = ۱۰ \Rightarrow a = \frac{۱۰}{\sqrt{۲}} = ۵\sqrt{۲} \ \text{cm}$$

$$S_{\text{کل}} = ۶a^۲ = ۶(۵\sqrt{۲})^۲ = ۳۰۰ \ \text{cm}^۲$$

۴۲۶. در مکعبی به یال a، اندازهٔ قطر مکعب $a\sqrt{۳}$ است. بنابراین داریم:

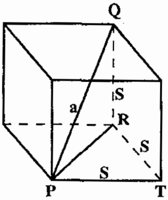
$$a\sqrt{۳} = \sqrt{۶} \Rightarrow a = \sqrt{۲} \ \text{اندازهٔ یال مکعب}$$

$$S_{\text{کل مکعب}} = ۶a^۲ = ۶(\sqrt{۲})^۲ = ۱۲$$

۴۲۷. داریم:

$$۴a^۲ = a^۳ \Rightarrow a = ۴ \ , \ S_{\text{کل}} = ۶a^۲ = ۶ \times ۱۶ = ۹۶$$

پس گزینهٔ (۴) درست است.



۴۲۸. گزینهٔ (الف) درست است. طول یال مکعب را s می‌گیریم و مطابق با شکل، T و R دو رأس مکعب هستند. با استفاده از قضیهٔ فیثاغورس در مثلثهای PQR و PRT داریم:

$$a^۲ - s^۲ = (PR)^۲ = s^۲ + s^۲ \,,$$
$$a^۲ = ۳s^۲$$

سطح کل مکعب برابر است با $۶s^۲ = ۲a^۲$

۳.۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت جانبی و مساحت کل

۴۲۹. اندازهٔ مساحت هر وجه، $۸۱ = ۹^۲$ سانتیمتر مربع است، پس داریم :

$$\text{جانبی}\ S = ۴a^۲ = ۴ \times ۸۱ = ۳۲۴ \ \text{cm}^۲$$
$$\text{کل}\ S = ۶a^۲ = ۶ \times ۸۱ = ۴۸۶ \ \text{cm}^۲$$

۴۳۰. در مکعب به یال a، اندازهٔ هر قطر مساوی $a\sqrt{۳}$ است، بنابراین داریم :

$$a\sqrt{۳} = ۵\sqrt{۳} \Rightarrow a = ۵$$
$$\text{جانبی}\ S = ۴a^۲ = ۴ \times ۲۵ = ۱۰۰ \ \text{cm}^۲$$
$$\text{کل}\ S = ۶a^۲ = ۶ \times ۲۵ = ۱۵۰ \ \text{cm}^۲$$

۴.۱.۷.۵. افزایش سطح مکعب

۴۳۱. گزینهٔ (ب) درست است.

۵.۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت شکلهای ایجاد شده

۴۳۲. گزینهٔ (ب) درست است ؛ زیرا :

هر واحد مربع که از هر وجه برداشته می‌شود، چهار واحد مربع سطح داخلی نمایان می‌شود. بنابراین سطح کامل جسم برحسب متر مربع برابر است با :

$$۶ \times ۳^۲ - ۶ + ۶ \times ۴ = ۷۲$$

۴۳۳. جواب گزینهٔ (۳) درست است.

۴۳۴. مستطیل ACGE یک صفحهٔ قطری مکعب است ؛ بنابراین مساحت آن برابر است با :

$$a^۲\sqrt{۲} = (۶)^۲ \times \sqrt{۲} = ۳۶\sqrt{۲}$$

در مثلث AFC $\quad AF = FC = AC = a\sqrt{۲}$

یعنی این مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $a\sqrt{۲}$ است. بنابراین مساحت آن برابر است با :

$$\frac{AC^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{(a\sqrt{۲})^۲\sqrt{۳}}{۴} = \frac{۲\sqrt{۳}a^۲}{۴} = \frac{\sqrt{۳}}{۲}a^۲$$

۴۳۵. دوازده هلال که مساحت کل آنها برابر است با :

$$\frac{\pi a^{۲}(۲-\sqrt{۳})}{۴}$$

و شش چهارضلعی منحنی‌الخط که مساحت کل آنها برابر است با :

$$\frac{\pi a^{۲}(\sqrt{۳}-۱)}{۲}$$

۶.۱.۷.۵. کمترین مقدار مساحت ایجاد شده

۴۳۶. توجه داشته باشید که سایهٔ تابیده شده تنها به وسیلهٔ وجه فوقانی مکعب ایجاد می‌شود (با فرض این که همهٔ وجه‌های باقی‌مانده شفاف هستند) و خود مربعی است به ضلع $\frac{ab}{b-a}$. بنابراین معلوم می‌شود که مساحت سایه‌ای که توسط مکعب به‌وجود می‌آید، کمترین مقدار را خواهد داشت، اگر منبع نور بالای وجه فوقانی قرار گیرد (تنها وجه فوقانی مکعب روشن شده است) و مقدار آن با به حساب آوردن مساحت وجه پایین مکعب برابر است با : $\left(\frac{ab}{b-a}\right)^{۲}$.

۴۳۷. مثلث KLM را در نظر بگیرید که تصویر مثلث مفروض روی صفحهٔ ABCD است. L بر روی CB، L روی CD و M روی CA قرار دارد.

اگر

$$CK = x$$

آن‌گاه

$$CL = |a-x|\ ,\ \ CM = \sqrt{۲}\left|a-\frac{x}{۲}\right|$$

به آسانی نتیجه می‌شود :

$$S_{KLM} = \frac{۱}{۲}\left|x(a-x)-a(a-\frac{x}{۲})\right| = \frac{۱}{۴}(۲x^{۲}-۳ax+۲a^{۲})$$

کمترین مقدار برابر $\frac{۷a^{۲}}{۳۲}$ می‌شود.

۷.۱.۷.۵. بیشترین مقدار مساحت شکلهای ایجاد شده

۴۳۸. گزینهٔ (ب) درست است.

۸.۱.۷.۵. اندازهٔ مساحت مقطع

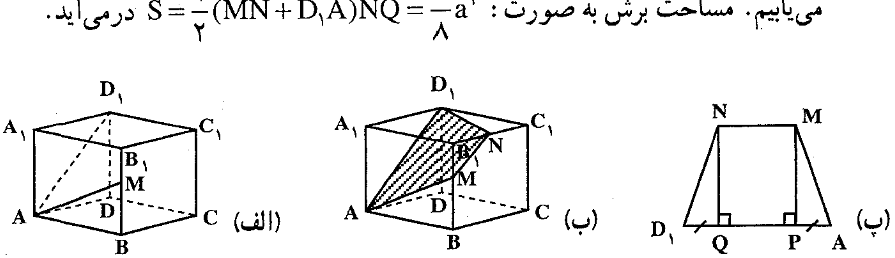
۴۳۹. صفحهٔ برش را با α نشان می‌دهیم. پاره‌خطهای AD_1 و AM هم به صفحهٔ α و همه به دو وجه از مکعب تعلق دارند. از این رو ضلعهای برش محسوب می‌شوند. ضلع برش را در وجهBB_1C_1C رسم می‌کنیم. صفحه‌های BB_1C_1C و AA_1D_1D موازی بوده و بنابراین فصل مشترک صفحه‌های α وBB_1C_1C با پاره‌خط AD_1 موازی خواهند بود. خطهای BC_1 و AD_1 موازی بوده و فصل مشترک نیز با BC_1 موازی خواهد بود. حال خط مستقیمی را از نقطهٔ M در صفحهٔ BB_1C_1C به موازات خطBC_1 رسم می‌کنیم. محل تلاقی آن با یالB_1C_1 رأس برش را به وجود می‌آورد (شکل (ب) را نگاه کنید). برش حاصل عبارت از ذوزنقهٔ $AMND_1$ است که در آن MN/AD_1 است.
حال ضلعهای آن را پیدا می‌کنیم.
رابطهٔ $AD_1 = a\sqrt{۲}$ را داریم. پاره‌خط MN، میانخط مثلثBB_1C_1 بوده و از این رو چنین داریم :

$$MN = \frac{۱}{۲}BC_1 = \frac{۲}{\sqrt{۲}}$$

در مثلثهای قائم‌الزاویهٔ ABM وD_1C_1N ($BM = NC_1 = a/۲$ ، $AB/C_1D_1 = a$) به $AM = D_1N = a\frac{\sqrt{۵}}{۲}$ وصول می‌یابیم. از این رو ذوزنقه $AMND_1$ متساوی‌الساقین محسوب می‌شود. ارتفاع آن را به دست می‌آوریم (پ). عمودهای MN وPQ را بر قاعدهٔ AD_1 رسم کرده و رابطه‌های زیر را به دست می‌آوریم : $PQ = MN = \frac{a}{\sqrt{۲}}$

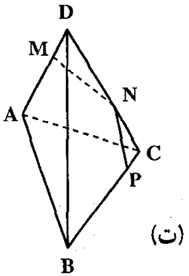
$$D_1Q = PA = \frac{۱}{۲}(DA - QP) = \frac{a}{۲\sqrt{۲}}$$

در مثلث قائم‌الزاویهٔ D_1QN($D_1Q = \frac{a}{۲\sqrt{۲}}$, $D_1N = \frac{a\sqrt{۵}}{۲}$) به $NQ = \frac{a}{۲\sqrt{۲}}$ وصول می‌یابیم. مساحت برش به صورت : $S = \frac{۱}{۲}(MN + D_1A)NQ = \frac{۹}{۸}a^۲$ درمی‌آید.

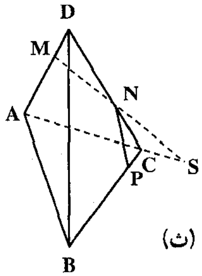


جواب مسأله عبارت از $\frac{9}{8}a^2$ خواهد بود.

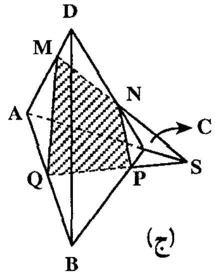
در شکلهای (ت)، (ث) و (ج)؛ برشی از یک چهاروجهی دیده می‌شود. این برش به وسیلهٔ صفحه‌ای به‌وجود آمده است که از نقطه‌های M، N و P واقع بر یالهای چندوجهی عبور می‌کند، نقطه‌های M و N طوری انتخاب شده‌اند که خطهای MN و AC ناموازی هستند. پاره‌خطهای MN و NP ضلعهای برش هستند (شکل ت)، نقطهٔ P ، نقطهٔ مشترک صفحه‌های MNP و ABC است. نقطهٔ مشترک دوم عبارت از نقطهٔ تلاقی خطهای MN و AC یعنی عبارت از $S = MN \cap AC$ است (شکل ث). خط SP فصل مشترک صفحه‌های MNP و ABC است. نقطهٔ برخورد این خط و یال AB رأس Q برش یعنی $Q = SP \cap AB$ را به‌وجود می‌آورد. برش حاصل عبارت از چهارضلعی MNPQ است (شکل ج).



(ت)



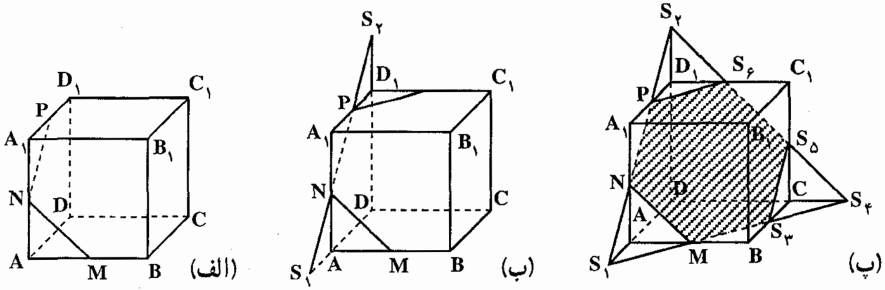
(ث)



(ج)

۴۴۰. صفحهٔ برش را با a نشان می‌دهیم. پاره‌خطهای MN و NP هم به صفحهٔ α و هم به وجه‌هایی از مکعب تعلق دارند. از این‌رو ضلعهای برش محسوب می‌شوند (شکل الف). نقطه‌های S_1 و S_2، محل تلاقی پاره‌خط NP واقع در صفحهٔ α و خطهای AD و DD_1 را رسم می‌کنیم (شکل ب). خط مستقیم S_1M فصل مشترک صفحه‌های α و ABCD است. نقطه‌های برخورد S_1M را با یال BC (نقطهٔ S_3 در شکل پ) و با خط CD (نقطهٔ S_4) پیدا می‌کنیم. نقطه‌های S_2 و S_4، نقطه‌های مشترک صفحه‌های α و CC_1D_1D است. خط S_2S_1 فصل مشترک این صفحه‌ها است. حال نقطه‌های برخورد خطهای S_2S_4 با یالهای CC_1 و C_1D_1 (نقطه‌های S_5 و S_6) را پیدا می‌کنیم. برش مطرح شده عبارت از شش‌ضلعی $PNMS_3S_5S_6$ است. توجه داشته باشید که ضلعهای مقابل برش موازی هستند، زیرا آنها روی فصل مشترکهای صفحهٔ α با صفحه‌های دوبه‌دو موازی وجه‌ها قرار دارند. حال ثابت می‌کنیم که رأسهای S_3، S_5 و S_6 برش

میانگاههای یالها هستند. پاره‌خط NP میانخط مثلث AA_1D_1 بوده و از این‌رو $NP \| AD_1$ است (شکل ت).



به طریق مشابه $MN \| BA_1$ بوده و به دلیل $BA_1 \| CD_1$ به $MN \| CD_1$ وصول می‌یابیم. بدین ترتیب صفحهٔ α برش با صفحهٔ AD_1C موازی خواهد بود. از این‌رو نتیجه می‌شود که فصل مشترکهای این صفحه‌ها با یالهای مکعب نیز موازی هستند؛ یعنی $S_5S_6 \| CD_1$ و $MS_3 \| AC$ است. به‌همین طریق ثابت می‌شود که $\alpha \| BA_1C_1$، ($NP \| AD_1 \| BC_1$ و $MN \| BA_1$) است که از آن نیز $S_6P \| C_1A_1$ و $S_3S_5 \| BC_1$ استنتاج می‌شود. حال $BM = MA$ را مورد ملاحظه قرار داده و قضیهٔ تالس را سه بار مورد استفاده قرار دهید.

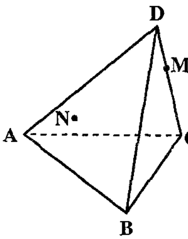
در نتیجه $CS_5 = S_5C_1$، $BS_3 = S_3C$ و $D_1S_6 = S_6D_1$ به‌دست می‌آید. این امر بدین معنی است که نقطه‌های S_3، S_5 و S_6 میانگاههای یالها هستند. از آنچه ثابت شد، چنین برمی‌آید، طول هر ضلع برش برابر $a/\sqrt{2}$ است. حال ثابت می‌کنیم که هریک از زاویه‌های برش 120° است. با ملاحظهٔ مثلث S_1MN به آسانی دریافت می‌شود که متساوی‌الاضلاع است. تساوی مثلث S_1AN و PA_1N (براساس تساوی یک ساق و یک زاویهٔ حاده) موجب $S_1A = PA_1 = \frac{a}{2}$ می‌شود. آن‌گاه داریم:

$$S_1N = \sqrt{S_1A^2 + AN^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

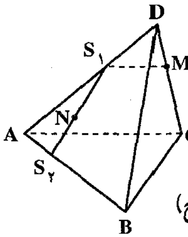
$$S_1M = \sqrt{S_1A^2 + AM^2} = \frac{a}{\sqrt{2}}$$

با منظور کردن $MN = \frac{a}{\sqrt{2}}$ متوجه می‌شویم که مثلث S_1MN نیز متساوی‌الاضلاع

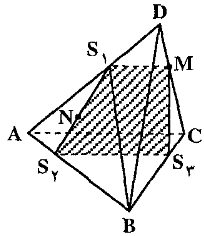
بوده و در نتیجه $S_1\hat{M}N = S_1\hat{N}M = 60^\circ$ خواهد بود. از این نکته نتیجه می‌شود که $S_2\hat{M}N = M\hat{N}P = 120^\circ$ است. به‌طریق مشابه با بررسی مثلثهای $S_3S_4S_5$ و S_6S_2P درمی‌یابیم که دیگر زاویه‌های برش نیز برابر 120° هستند. بدین ترتیب نتیجه می گیریم که برش مطرح شده، یک شش‌ضلعی منتظم است که طول هریک از ضلعهای آن برابر $\frac{a}{\sqrt{2}}$ است. مساحت این برش برابر $(\frac{3\sqrt{3}}{4})a^2$ خواهد بود.



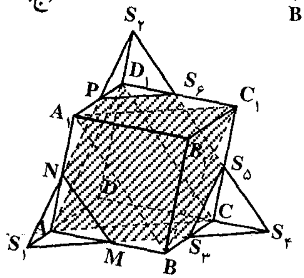
(ث)



(ج)



(چ)



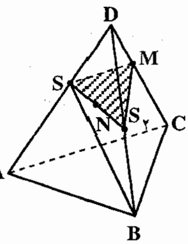
(ت)

شکلهای (ث)، (ج) و (چ) هریک برشی از یک چهاروجهی را نشان می‌دهد. این برش با صفحه‌ای به موازات یال AC تشکیل شده است که از نقطه‌های M واقع بر یال CD و N واقع بر وجه ABD عبور می‌کند. رسم این برش بر قضیهٔ زیر استوار است:

اگر صفحه‌ای از یک خط مستقیم موازی صفحهٔ دیگر عبور کرده و آن صفحه را قطع کند، آن‌گاه فصل مشترک صفحه‌ها با خط مزبور موازی خواهد بود. صفحهٔ برش را با α نشان می‌دهیم. صفحهٔ ACD در نقطهٔ M با صفحهٔ α مشترک بوده و دارای خط AC است که با صفحهٔ α موازی است. در نتیجه فصل مشترک این صفحه‌ها از نقطهٔ M به موازات خط AC عبور می‌کند. ضلع MS_1 برش را براساس این نکته (شکل ج) یعنی براساس $MS_1 \| AC$ رسم می‌کنیم.

با رسم خط S_1N ضلع دوم برش، یعنی S_1S_2 را به‌دست می‌آوریم. در شکلهای ث، ج و چ، نقطهٔ N طوری قرار دارد که نقطهٔ S_2 به یال AB متعلق است. صفحهٔ ABC نیز محتوی خط AC به موازات صفحهٔ برش است. بنابراین ضلع S_2S_3 برش موازی یال

AC است (شکل چ). پاره‌خط S_3M ضلع چهارم برش است. برش $MS_1S_2S_3$ یک ذوزنقه است که در آن ($MS_1 \| AC \| S_2S_3$) است. براساس موقعیت نقطهٔ N نسبت به پاره‌خط BS_1 برش می‌تواند یک مثلث نیز باشد (شکل ح).



(ح)

۴۴۱. چنین مقطعی یا متوازی الاضلاع است و یا یک شش‌ضلعی که نسبت به مرکز متقارن است و محیط آن از ۴a کمتر نیست (با بررسی گستردهٔ مکعب می‌توانید به این مطلب قانع شوید).

۴۴۲. ابتدا ثابت می‌کنیم OE عمود مشترک دو خط متنافر BD_1 و AA_1 می‌باشد (شکل). در مثلث متساوی‌الساقین BED_1 چون OE میانه است، پس بر BD_1 عمود می‌باشد، همچنین در مثلث متساوی‌الساقین AOA_1 ($OA = OA_1$) میانهٔ OE بر AA_1 عمود است، پس OE عمود مشترک BD_1 و AA_1 است. مقطع BED_1E_1 متوازی‌الاضلاع است و مساحتش $2BD_1 \times OE$ می‌باشد، چون BD_1 ثابت و OE عمود مشترک دو خط BD_1 و AA_1 می‌باشد، پس OE نزدیکترین فاصله بین خطهای AA_1 و BD_1 است، در نتیجه مساحتش مقطع مینیمم خواهد شد.

۵.۷.۲. نسبت مساحتها

۴۴۳. گزینهٔ (الف) درست است.

۴۴۴. (ب) هر یال چهاروجهی منتظم قطری از یک وجه مکعب است. از این‌رو، اگر s طول یال مکعب باشد، مساحت هر وجه چهاروجهی برابر است با :

$$\frac{(s\sqrt{2})^2\sqrt{3}}{4} = \frac{s^2\sqrt{3}}{2}$$

و نسبت مطلوب برابر است با :

$$\frac{۶s^۲}{۴(\frac{s^۲\sqrt{۳}}{۲})}=\sqrt{۳}$$

۴۴۵. اگر ضلع مکعب را a فرض کنیم، شعاع کرهٔ محاطی آن مساوی $\frac{a}{۲}$ است. بنابراین داریم :

$$S=۶a^۲ \text{ مکعب} \quad , \quad S=۴\pi(\frac{a}{۲})^۲=\pi a^۲ \text{ کرهٔ محاطی}$$

$$\frac{S_{\text{مکعب}}}{S_{\text{کره}}}=\frac{۶a^۲}{\pi a^۲}=\frac{۶}{\pi}$$

۸.۵. حجم

۸.۵.۱. اندازهٔ حجم

۸.۵. ۱.۱. اندازهٔ حجم مکعب

۴۴۶. اندازهٔ حجم مکعب به یال a مساوی با $a^۳$ است، پس داریم :

$$V=(۴)^۳=۶۴$$

۴۴۷. در مکعبی به یال a اندازهٔ قطر مساوی $a\sqrt{۳}$ است. بنابراین داریم :

$$a\sqrt{۳}=۸\sqrt{۳}\Rightarrow a=۸$$

$$\Rightarrow \text{حجم مکعب}=V=a^۳=۸^۳=۵۱۲$$

۴۴۸. داریم :

$$S_{\text{کل}}=۶a^۲=۲۴\Rightarrow a^۲=۴\Rightarrow a=۲\Rightarrow V_{\text{حجم}}=a^۳=۸cm^۳$$

۴۴۹. داریم :

$$۴\pi R^۲=۱\Rightarrow R^۲=\frac{۱}{۴\pi}=\frac{۱}{۱۲/۵۶۶۴}$$

$$\Rightarrow R=\frac{۱}{۳/۵۴}=۰/۲۸m$$

۴۵۰. پاسخ ۳۵۰، ۷۰۰ و ۱۰۵۰ لیتر.

۸.۵. ۱. ۲. اندازهٔ حجمهای دیگر ایجاد شده

۸.۵. ۱. ۲. ۱. اندازهٔ حجم بخش مشترک

۴۵۱. اگر قطر AC_1، روی یال فرجه قرار داشته باشد، وجه‌های فرجه، یالهای مکعب را در نقطه‌های M و N قطع می‌کنند. به آسانی دیده می‌شود که اگر، حجم آن قسمت از مکعب که در داخل فرجه محور شده، بیشترین و یا کمترین مقدار را بگیرد، آن‌گاه مساحتهای مثلثهای AC_1M و AC_1N باید برابر باشند (به عبارت دیگر با دوران فرجه در جهت مناسب خواهیم توانست این حجم را افزایش و یا کاهش دهیم). اگر $0 < \alpha \le 60°$ آن قسمت از مکعب، که در شرایط مسأله مطرح شده، حجمی بین $\frac{1}{2\sqrt{3}\cos\tan\frac{\alpha}{2}}$ و $\frac{1}{3(1+\sqrt{3}\cot\frac{\alpha}{2})}$ خواهد داشت. به ازای $\alpha = 60°$، این حجم ثابت و برابر $\frac{1}{6}$ می‌شود. به ازای $60° < \alpha \le 120°$ بیشترین مقدارهای بازه‌ها باید به اندازهٔ $\frac{1}{6}$ افزایش پیدا کنند و α با $\alpha - 60°$ جایگزین گردد و برای $120° < \alpha < 180°$ بازه‌ها باید به اندازهٔ $\frac{1}{3}$ افزایش پیدا کنند و α با $\alpha - 120°$ جایگزین شود.

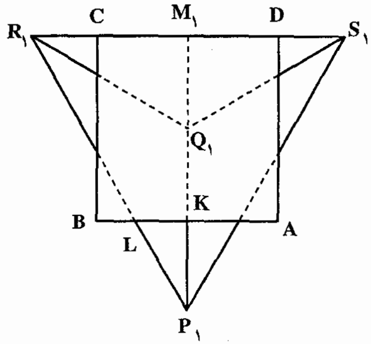
۴۵۲. وسط یال AB از مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ را K و وسط D_1C_1 را با M نشان دهید. K و M در عین‌حال وسطهای یالهای PQ و RS از چهاروجهی PQRS هم می‌شوند. D_1C_1 بر روی RS قرار دارد. اگر یال چهاروجهی برابر b باشد، در آن صورت :

$$MK = \frac{b\sqrt{2}}{2} = a\sqrt{2}$$

و بنابراین
$$b = 2a$$

اکنون تصویر چهاروجهی را روی ABCD پیدا کنید (شکل). P_1، Q_1، R_1 و S_1 را بترتیب تصویرهای P، Q، R و S بنامید. چون PQ با این صفحه، زاویهٔ $45°$ می‌سازد، پس طول P_1Q_1 برابر با $a\sqrt{2}$ می‌شود.

محل برخورد خطهای AB و P_1R_1 را با L نشان دهید. از تشابه مثلثهای P_1LK و $P_1R_1M_1$ نتیجه می‌شود :

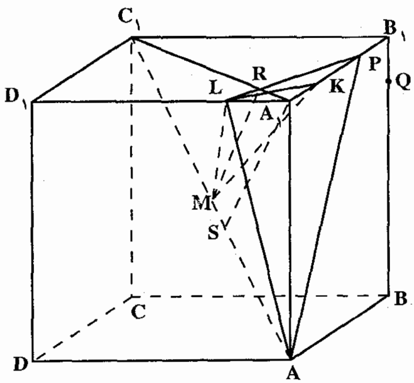


$$LK=\frac{R_1M_1.P_1K}{P_1M}=\frac{a}{1+\sqrt{2}}<\frac{a}{2}$$

از آن‌جا یال PR (و در نتیجه سایر یالها : PS ، QR و QS) از چهاروجهی مکعب را قطع می‌کند.
برای محاسبهٔ حجم جسم حاصل، به‌آسانی می‌توان آن را به عنوان یک چهاروجهی که گوشهٔ آن بریده شده درنظر گرفت.

جواب : $\frac{a^3\sqrt{2}}{12}(16\sqrt{2}-17)$

۴۵۳. فرض کنید $ABCDA_1B_1C_1D_1$ مکعبی باشد که حول AC_1 به اندازهٔ α دوران می‌کند (شکل) روی یالهای AB_1 و A_1D_1 نقطه‌های K و L را طوری اختیار کنید که $A_1K=A_1L=x$. از K و L بر قطر AC_1 عمود کنید. چون مکعب نسبت به صفحهٔ ACC_1A_1 تقارن دارد، این عمودها از یک نقطه مانند M واقع بر روی AC_1 می‌گذرند.



x را طوری انتخاب کنید که $K\hat{M}L=\alpha$. آن‌گاه با دوران مکعب، حول AC_1 به اندازهٔ α، و در خلاف جهت چرخش عقربه‌های ساعت (وقتی امتداد از A به C_1 درنظر گرفته شود) نقطهٔ K به نقطهٔ L میل خواهد کرد. روی یالهای B_1A_1 و B_1B نقطه‌های P و Q را به فاصلهٔ مساوی x از رأس B_1 اختیار کنید. پس از همان دوران، نقطهٔ Q بر نقطهٔ P میل کند، در نتیجه پس از دوران، وجه ABB_1A_1 از نقطه‌های A ، L و P خواهد گذشت و مکعب را در هرم AA_1PL به حجم برابر با $\frac{1}{6}ax(a-x)$ قطع خواهد کرد.

این استدلال در مورد تمام وجه‌ها صدق می‌کند. بنابراین حجم مشترک برابر است با $a^{۳}-ax(a-x)$.

اکنون باید مقدار x را از شرط $K\hat{M}L=\alpha$ پیدا کنیم. برای این منظور، نقطهٔ M را به R، وسط پاره‌خط LK وصل می‌کنیم، داریم :

$$MR=x\frac{\sqrt{۲}}{۲}\cot\frac{\alpha}{۲}$$

$$C_{۱}R=a\sqrt{۲}-x\frac{\sqrt{۲}}{۲}$$

از تشابه مثلثهای $C_{۱}RM$ و $C_{۱}A_{۱}A$ مقدار x پیدا می‌شود :

$$x=\frac{۲a}{۱+\sqrt{۳}\cot\frac{\alpha}{۲}}$$

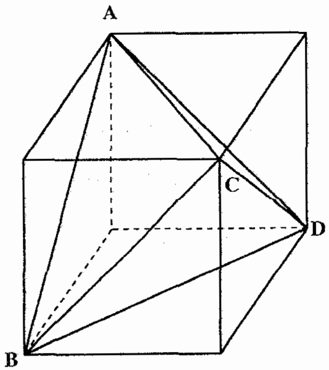
به این ترتیب حجم قسمت مشترک برابر می‌شود با :

$$\frac{۳a^{۲}(۱+\cot^{۲}\frac{\alpha}{۲})}{(۱+\sqrt{۳}\cot\frac{\alpha}{۲})^{۲}}$$

۵.۸.۱.۲.۲. اندازهٔ حجم چهاروجهی

۴۵۴. اندازهٔ حجم چهاروجهی $\frac{a^{۳}\sqrt{۶}}{۱۰۸}$ است.

۴۵۵. این چهاروجهی، یک چهاروجهی منتظم است که اندازهٔ یال آن مساوی قطر یک وجه از مکعب است. حجم یک چهاروجهی منتظم به یال x برابر است با :



$$V=\frac{x^{۳}\sqrt{۲}}{۱۲}$$

بنابراین این‌جا خواهیم داشت :

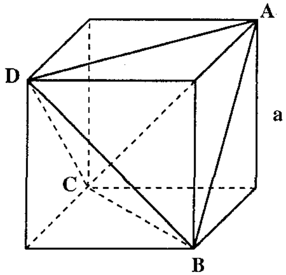
$$V=\frac{۲a^{۳}\sqrt{۲}.\sqrt{۲}}{۱۲}=\frac{a^{۳}}{۳}$$

ثلث مکعب نیز محاسبه می‌شود.

۵.۸.۱.۲.۳. اندازهٔ حجم جسم

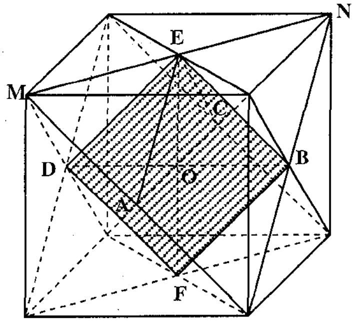
۴۵۶. شکل حاصل، چهاروجهی منتظم ABCD است (شکل). با یال $AB = a\sqrt{۲}$. حجم آن چنین است :

$$V = a^{۳} - ۴\times\frac{a^{۳}}{۴} = \frac{a^{۳}}{۳}$$



۴۵۷. یک هشت‌وجهی منتظم، با یال $AB = \frac{۱}{۲}MN = \frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ است (شکل). این هشت‌وجهی از دو هرم منتظم مساوی EABCD و FABCD با ارتفاع $EO = \frac{۱}{۲}EF = \frac{a}{۲}$ تشکیل شده است. بنابراین، حجم آن چنین است :

$$V = ۲V_{ABCDE} = ۲\times\frac{۱}{۳}(\frac{a\sqrt{۲}}{۲})^{۲}.\frac{a}{۲} = \frac{a^{۳}}{۶}$$



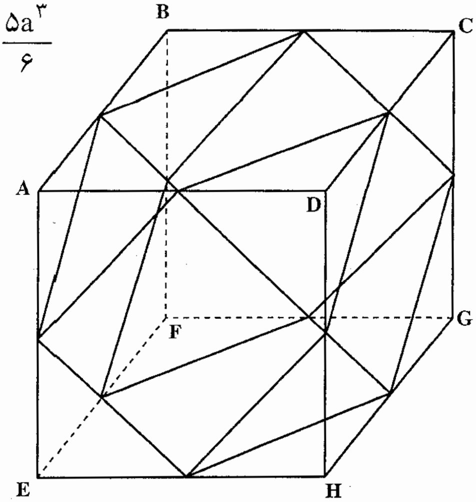
۴۵۸. حجم جسم موردنظر برابر است با تفاضل حجم مکعب، و حجم ۸ هرم مثلث‌القاعدهٔ منتظم که یالهای جانبی آنها دوبه‌دو عمود برهم است اگر ضلع مکعب را a فرض کنیم.

اندازهٔ یالهای جانبی هریک از هرم مساوی $\frac{a}{۲}$ خواهد بود بنابراین داریم :

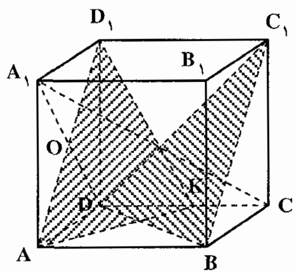
$$\text{حجم یک هرم} = \frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲}\times\frac{a}{۲}\times\frac{a}{۲})\times\frac{a}{۲} = \frac{a^{۳}}{۴۸} \Rightarrow$$

$$a^۳ = \text{حجم مکعب}$$ و $$\text{حجم ۸ هرم} = ۸ \times \frac{a^۳}{۴۸} = \frac{a^۳}{۶}$$

$$\Rightarrow \text{حجم جسم} = a^۳ - \frac{a^۳}{۶} = \frac{۵a^۳}{۶}$$



۲.۸.۵. نسبت حجمها



۴۵۹. قطر A_1C مکعب بر صفحهٔ BDC_1 عمود است(شکل). بنابراین صفحهٔ برش موازی خط A_1C خواهد بود. براساس این حقیقت برش را به‌صورت زیر رسم می‌کنیم : در صفحهٔ A_1DCB_1 از محل تلاقی آن با قطر AD_1 یعنی نقطهٔ O خط مستقیمی به موازات A_1C رسم می‌کنیم تا یال CD را در نقطهٔ K قطع کند. در نتیجه برش به صورت مثلث AD_1K حاصل می‌شود. به دلیل $DO = OA_1$ به $DK = KC$ وصول می‌یابیم. طول یال مکعب را با a نشان می‌دهیم. حجم هرم D_1ADK برابر $\frac{۱}{۳}.\frac{۱}{۲}.AD.DK \times DD_1 = \frac{۱}{۱۲}a^۳$ است. از این‌رو نتیجه می‌شود که نسبت قسمتهای حاصله از مکعب دراثر تقسیم برش عبارت از $\frac{۱}{۱۱}$ است. پس جواب مسأله عبارت از $\frac{۱}{۱۱}$ خواهد بود.

تبصره. حجم هرم، مساوی یک سوم حاصلضرب اندازهٔ مساحت قاعده، در ارتفاع نظیر آن قاعده است.

۴۶۰. حجم مکعب ۸ برابر می‌شود، زیرا اگر ضلع مربع داده شده را a فرض کنیم، ضلع مربع موردنظر $a' = ۲a$ خواهد بود و داریم :

مکعب داده شده $V = a^۳$

مکعب حاصل $V' = a'^۳ = (۲a)^۳ = ۸a^۳ \Rightarrow V' = ۸V$

نکته. به‌طور کلی اگر $a' = ka$ باشد، $V' = k^۳.V$ خواهد بود، یعنی اگر ضلع مکعبی k برابر شود، حجم آن $k^۳$ برابر خواهد شد.

۴۶۱. نسبت خواسته شده، $\frac{۴۱\pi\sqrt{۴۱}}{۳۸۴}$ است.

۴۶۲. $V_۱ =$ حجم مکعب $= a^۳$ ، $V_۲ =$ حجم چهاروجهی منتظم $= \frac{a^۳\sqrt{۲}}{۱۲}$

نسبت حجمها $\frac{V_۱}{V_۲} = \frac{a^۳}{a^۳\sqrt{۲}} = \frac{۱۲}{\sqrt{۲}} = \frac{۱۲\sqrt{۲}}{۲} = ۶\sqrt{۲}$

$S_۱ =$ کل مکعب $S = ۶a^۲$ ، $S_۲ =$ کل چهاروجهی منتظم $S = ۶(\frac{a^۲\sqrt{۳}}{۴}) = \frac{۳\sqrt{۳}a^۲}{۲}$

$$\frac{S_۱}{S_۲} = \frac{۶a^۲}{\frac{۳\sqrt{۳}a^۲}{۲}} = \frac{۱۲}{۳\sqrt{۳}} = \frac{۴}{\sqrt{۳}} = \frac{۴\sqrt{۳}}{۳}$$

۳.۸.۵.سایر مسأله‌های مربوط به این قسمت

۴۶۳. گزینهٔ (ج) درست است.

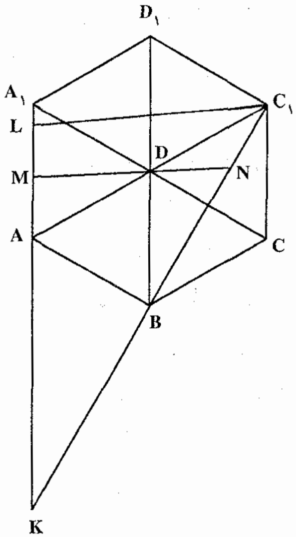
۴۶۴. داریم :

یک لیتر آب $= ۱۰۰۰ cm^۳$

حجم مکعب $= ۳۰^۳ = ۲۷۰۰۰ cm^۳$

وزن ظرف $۲۷ = ۲۷۰۰۰ \div ۱۰۰۰$

۹.۵. رابطهٔ متری



۴۶۵. با تصویر مکعب بر روی صفحهٔ عمود بر B_1D، شش ضلعی منتظم $ABCC_1D_1A_1$ به‌ضلع $\sqrt{\frac{2}{3}}a = b$ به‌دست می‌آید (شکل) که در آن a یال مکعب است (تصویر مثلث متساوی‌الاضلاع BC_1A_1 مثلثی برابر آن خواهد بود، چون صفحهٔ BC_1A_1 بر B_1D عمود است). مثلث KAC_1 را درنظر بگیرید که در آن :

$$KA = AC_1 = 2b$$

و خط NM از وسط AC_1 می‌گذرد.

اگر $\frac{AM}{AA_1} = x$ ، C_1L را به موازات MN رسم کنید، داریم :

$$ML = AM$$

$$\frac{KN}{KC_1} = \frac{KM}{KL} = \frac{2+x}{2+2x}$$

از آن‌جا

$$\frac{BN}{BC_1} = \frac{2(KN - BC)}{KC_1} = 2$$

$$\frac{KN}{KC_1} - 1 = \frac{2+x}{1+x} - 1 = \frac{1}{1+x}$$

به این ترتیب

$$\frac{BC_1}{BN} - \frac{AM}{AA_1} = 1 + x - x = 1$$

۴۶۶. خط راستی را عمود بر صفحهٔ مفروض درنظر بگیرید و زاویه‌هایی را که این خط با یالهای مکعب می‌سازد، α، β و γ بنامید. اندازه‌های تصویرهای یالها روی صفحه، $\sin\alpha$، $\sin\beta$ و $\sin\gamma$ می‌شود و چون

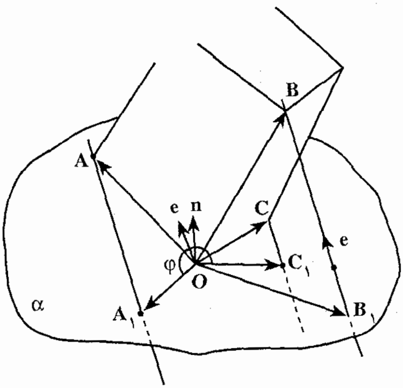
$$\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma = 1$$

پس مجموع مربعهای تصویرها، برابر خواهد بود با :

$$4a^2(\sin^2\alpha+\sin^2\beta+\sin^2\gamma)=8a^2$$

که در آن a طول یال مکعب است.

۴۶۷. مجموع مجذورهای تصویرهای سه‌یال OA، OB و OC را پیدا می‌کنیم. فرض می‌کنیم، صفحهٔ تصویر α، از نقطه‌های O، A_1، B_1 و C_1 گذشته باشد. A_1، B_1 و C_1، تصویرهای A، B و C بر صفحهٔ α به موازات خط راست l است. در ضمن n را بردار واحد قائم بر صفحه و e را بردار واحد در جهت خط راست l می‌گیریم (شکل). در این صورت (برای سادگی کار، بردارهای به آغاز نقطهٔ O را با حرف پایانی آنها نشان می‌دهیم : $\vec{A}$ یعنی $\overrightarrow{OA}$) :



$$\begin{cases}\vec{A_1}=\vec{A}+p_1e\\ \vec{B_1}=\vec{B}+p_2e\\ \vec{C_1}=\vec{C}+p_3e\end{cases}\qquad(1)$$

اگر برابریهای (۱) را، به‌صورت اسکالر در بردار n ضرب کنیم، به‌دست می‌آید :

$$n.\vec{A}+p_1e.n=0\ ,$$

$$n.\vec{B}+p_2e.n=0\ ,$$

$$n.\vec{C}+p_3e.n=0$$

و از آن جا :

$$p_1=-\frac{n.\vec{A}}{n.e}\ ,\ p_2=-\frac{n.\vec{B}}{n.e}\ ,\ p_3=-\frac{n.\vec{C}}{n.e}\qquad(2)$$

مقدارهای p_1، p_2 و p_3 را در برابریهای (۱) قرار می‌دهیم :

$$\vec{A_1}=\vec{A}-\frac{n.\vec{A}}{n.e}\,.\,e\ ,\ \vec{B_1}=\vec{B}-\frac{n.\vec{B}}{n.e}\,.\,e\ ,\ \vec{C_1}=\vec{C}-\frac{n.\vec{C}}{n.e}\,.\,e$$

در این صورت :

$$|\overrightarrow{OA_1}|^2+|\overrightarrow{OB_1}|^2+|\overrightarrow{OC_1}|^2$$

$$=\overrightarrow{A}^2+\overrightarrow{B}^2+\overrightarrow{C}^2+\frac{(n.\overrightarrow{A})^2+(n.\overrightarrow{B})^2+(n.\overrightarrow{C})^2}{(n.e)^2}-$$

$$2\frac{(n.\overrightarrow{A})(\overrightarrow{A}.e)+(n.\overrightarrow{B})(\overrightarrow{B}.e)+(n.\overrightarrow{C})(\overrightarrow{C}.e)}{n.e}$$

از طرف دیگر داریم :

$$\frac{(n.\overrightarrow{A})^2+(n.\overrightarrow{B})^2+(n.\overrightarrow{C})^2}{(n.e)^2}=$$

$$\frac{(a\cos(\widehat{\overrightarrow{A},n}))^2+(a\cos(\widehat{\overrightarrow{B},n}))^2+(a\cos(\widehat{\overrightarrow{C},n}))^2}{\cos^2(\widehat{n,e})}=\frac{a^2}{\sin^2\varphi}$$

زیرا مجموع کسینوسهای بین بردار n و بردارهای $\overrightarrow{OA}$ ، $\overrightarrow{OB}$ و $\overrightarrow{OC}$ برابر واحد است، سپس

$$(n.\overrightarrow{A})(e.\overrightarrow{A})+(n.\overrightarrow{B})(e.\overrightarrow{B})+(n.\overrightarrow{C})(e.\overrightarrow{C})=a^2(n.e)$$

بنابراین

$$|\overrightarrow{OA_1}|^2+|\overrightarrow{OB_1}|^2+|\overrightarrow{OC_1}|^2=3a^2+\frac{a^2}{\sin^2\varphi}-2a^2=a^2+\frac{a^2}{\sin^2\varphi}$$

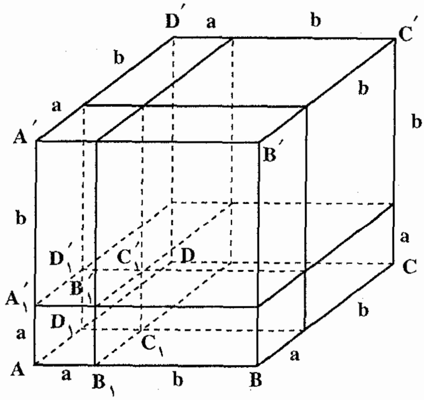
و اگر مجموع مجذورهای تصویرهای یالهای مکعب را Σ بنامیم، خواهیم داشت :

$$\Sigma=4a^2+\frac{4a^2}{\sin^2\varphi}$$

۴۶۸. مکعب $ABCDA'B'C'D'$ را که یالهای آن :

$$AB=AB_1+B_1B=a+b,$$
$$AD=AD_1+D_1D=a+b,$$
$$AA'=AA'_1+A'_1A'=a+b;$$

است، رسم می‌کنیم و از نقطه‌های B_1 ، D_1 و A'_1 بترتیب صفحه‌هایی موازی وجه‌های



$ADD'A'$ ، $ABB'A'$ و $ABCD$ رسم می‌کنیم. این صفحه‌ها در مکعب داده‌شده، هشت متوازی‌السطوح قائم ایجاد می‌کنند که دوتا از آنها مکعبهایی به یالهای a و b است، و سه‌تای دیگر به یالهای a،a و b و بالاخره سه‌تای آخری به یالهای a، b و b می‌باشند.

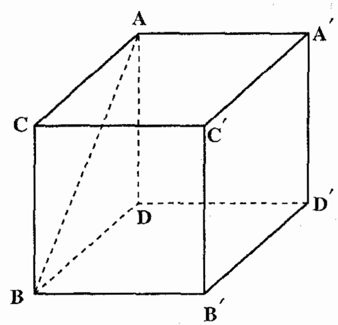
حجم هر متوازی‌السطوح قائم مساوی حاصلضرب سه‌بعد آن است، پس داریم:

$$(a+b)^{3} = a^{3} + b^{3} + 3a^{2}b + 3ab^{2}$$

۵.۱۰. مکان هندسی

۵.۱۰.۱. مکان هندسی نقطه

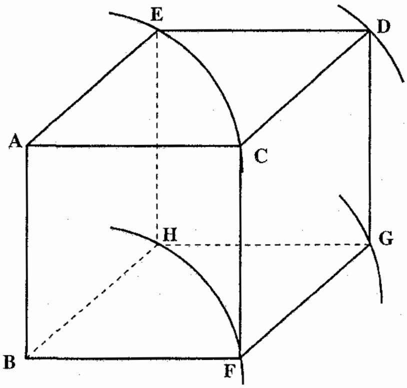
۴۶۹. صفحه‌ای موازی آن دو وجه، بین آنها و به یک فاصله از آنها.



۴۷۰. اگر دو رأس رو به روی یک قطر مکعب را ثابت نگاه داریم، شش رأس دیگر، سه به سه، دو دایرهٔ مساوی طی می‌کنند که مرکز آنها روی آن قطر ثابت و به فاصلهٔ یک سوم قطر از دو سر آن، و شعاع هر یک مساوی $\frac{a\sqrt{6}}{3}$ است؛ در صورتی که اندازهٔ ضلع مکعب را a فرض کنیم، اگر دو سر یک قطر از یک وجه مکعب، مانند A و B ثابت باشند، دو رأس دیگر آن وجه، دایره‌ای طی می‌کنند که مرکز آن وسط این قطر و شعاعش مساوی $\frac{a\sqrt{2}}{2}$ است. دو رأس دیگر همسایه، رأسهای ثابت، روی صفحه‌های عمود بر AB دو دایرهٔ مساوی به مرکزهای

A و B و به شعاع a طی می‌کنند و بالاخره مکان هندسی دو رأس C' و D' دو دایره به مرکز نقطهٔ I وسط قطر AB و به شعاع $\frac{a\sqrt{6}}{2}$ است؛ زیرا این شعاع وتر مثلث قائم‌الزاویهٔ IDD' است که دو ضلع زاویهٔ قائمه‌اش $IC=\frac{a\sqrt{2}}{2}$ و $BD'=a$ است و داریم:

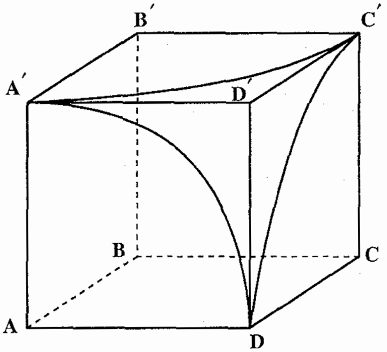
$$R=\sqrt{(\frac{a\sqrt{2}}{2})^2+a^2}=\sqrt{\frac{3a^2}{2}}=\frac{a\sqrt{6}}{2}$$



۴۷۱. چهار رأس انتهای یالهای گذرنده بر A یا B، دو به دو، دایره‌هایی به مرکز A و B و به شعاع AB می‌پیماید که صفحهٔ آنها در A یا B بر AB عمود است. مکان هندسی دو رأس دیگر، دایره‌هایی به‌همان مرکزها واقع در همان صفحه‌ها، امّا به شعاع $\sqrt{2}AB$ هستند. بالاخره، یالهای عمود بر AB، صفحه‌های دایره‌های قبلی، و یالهای موازی با AB سطحهای استوانه‌ای که قاعده‌شان دایره‌های قبلی و محورشان خط AB است را می‌پیمایند.

۴۷۲. اگر عنکبوت در رأس A از مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ قرار داشته باشد، مثلث DCC_1 را درنظر بگیرید. نسبتاً به آسانی ثابت می‌شود که کوتاهترین راهی که A را به هرنقطه از داخل مثلث DCC_1 وصل کند، یال DC را قطع می‌کند. در این حالت اگر وجه‌های ABCD و DCC_1D_1 طوری گسترده شوند، تا از دو مربع ABCD و DCC_1D_1 یک مستطیل ایجاد شود، در آن صورت کوتاهترین راه، قطعه‌ای از یک خط راست خواهد بود. در نتیجه، قوسی از یک دایره به شعاع دو سانتیمتر و به مرکز A که در گسترش مثلث DCC_1 واقع می‌شود، قسمتی از مرز مکان مطلوب را به وجود می‌آورد و تمام مرز شامل شش تا از این قوسهاست که سطح مکعب را به دو قسمت تقسیم می‌کنند. قسمتی که شامل رأس A می‌باشد و به اضافه مرز، درست مکان هندسی نقطه‌های مطلوب مسأله را تشکیل می‌دهند.

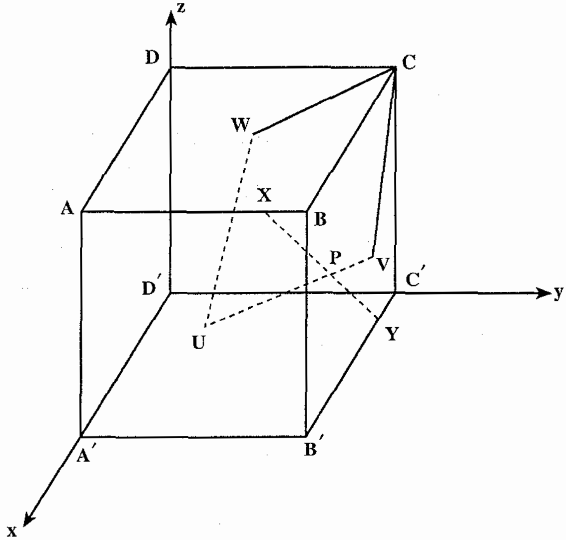
۴۷۳. خط راست l، تنها وقتی می‌تواند، به عنوان محور دوران، نقطهٔ A را به نقطهٔ B تبدیل کند که دو نقطهٔ A و B، بر این خط راست، تصویر مشترک O را داشته باشند و در



ضمن، از آن به یک فاصله باشند، یعنی وقتی که خط راست l، بر صفحه α_1، صفحهٔ عمودمنصف پاره خط راست AB واقع باشد. دوران دور این خط راست l به اندازهٔ زاویهٔ φ، هم‌ارز است با نتیجهٔ استفادهٔ متوالی از تقارن نسبت به صفحهٔ α_1 و سپس، نسبت به صفحهٔ α_2، مبدل صفحهٔ α_1 ضمن دوران دور خط راست l به اندازهٔ $\frac{\varphi}{2}$ (در همان جهت). برای اثبات این حقیقت، کافی است یادآوری کنیم که، مثلاً، در صفحهٔ ABO (که بر محور l عمود است)، دوران دور نقطهٔ O به اندازهٔ زاویهٔ φ، بر نتیجهٔ دو قرینه منطبق است. قرینهٔ نسبت به خطهای راست l_1 و l_1، فصل مشترکهای صفحهٔ ABO با صفحه‌های α_1 و α_2. چون تقارن نسبت به صفحهٔ α_1، نقطهٔ A را به نقطهٔ B تبدیل می‌کند، بنابراین، صفحهٔ α_2، برای دورانهای مورد نظر مسأله (و تنها برای آنها) از نقطهٔ B می‌گذرد. به این ترتیب، همهٔ تبدیلهای نقطهٔ C را، در دورانهای موردنظر، می‌توان به‌ترتیب زیر به دست آورد :

ابتدا قرینهٔ رأس C را نسبت به صفحهٔ α_1 به دست می‌آوریم (که منجر به رأس D می‌شود) و سپس قرینهٔ نتیجه را نسبت به صفحهٔ دلخواه α_2، که از B_2 گذشته باشد و موازی صفحهٔ α_1 نباشد، پیدا می‌کنیم. بنابراین، تبدیلهای نقطهٔ C، کرهٔ به مرکز B و شعاع BD را پر می‌کنند، به استثنای نقطه‌هایی که قرینهٔ نقطهٔ D نسبت به صفحهٔ BCC′ باشند، یعنی نقطه‌هایی که روی سطح مکعب نیستند، به این ترتیب، مجموعهٔ مجهول، عبارت است از محل برخورد این کره با وجه‌های مکعب و تشکیل شده است از سه کمان DA′، A′C′ و C′D از محیط دایره‌های، بترتیب، به مرکزهای A، B′ و C و شعاعهایی برابر طول یال مکعب (شکل).

۴۷۴. دستگاهی مختصاتی، چنان که در شکل نشان داده شده، درنظر می‌گیریم. فرض می‌کنیم، $0 \le t \le 1$ فاصلهٔ زمانی‌ای، که طی آن نقطه‌های X و Y اوّلین یالهای مسیرشان را می‌پیمایند، باشد. در این صورت مواقع X و Y در هر زمان ($0 \le t \le 4$) را در جدول صفحه بعد می‌آوریم. در این جدول حرفهای بزرگ نقطه‌ها، نیز بردارهای از مبدأ به این نقطه‌ها را نمایش می‌دهند :



t	x	y
$\circ \le t \le ۱$	$(۱-t)A+tB$	$(۱-t)B'+tc'$
$۱ \le t \le ۲$	$(۲-t)B+(t-۱)C$	$(۲-t)C'+(t-۱)C$
$۲ \le t \le ۳$	$(۳-t)C+(t-۲)D$	$(۳-t)C+(t-۲)B$
$۳ \le t \le ۴$	$(۴-t)D+(t-۳)A$	$(۴-t)B+(t-۳)B'$

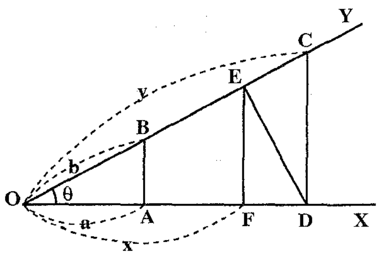
بنابراین نقطهٔ P وسط پاره خط XY مواقع زیر را اشغال می‌کند :

$$P=\frac{X+Y}{۲}=\begin{cases} \frac{۱}{۲}[(۱-t)(A+B')+t(B+C')]= \\ (۱-t)\frac{A+B'}{۲}+t\frac{B+C'}{۲}\ , & \circ \le t \le ۱ \\ \frac{۱}{۲}[(۲-t)(B+C')+(t-۱)(۲C)]= \\ (۲-t)\frac{B+C'}{۲}+(t-۱)C\ , & ۱ \le t \le ۲ \\ \frac{۱}{۲}[(۳-t)۲C+(t-۲)(B+D)]= \\ (۳-t)C+(t-۲)\frac{B+D}{۲}\ , & ۲ \le t \le ۳ \\ \frac{۱}{۲}[(۴-t)(B+D)+(t-۳)(A+B')= \\ (۴-t)\frac{B+D}{۲}+(t-۳)\frac{A+B'}{۲}\ , & ۳ \le t \le ۴ \end{cases}$$

عبارتهای سمت راست برآیند هستند که چون t از ۰ تا ۱ تغییر کند، P از وسط پاره خط AB' به وسط پاره خط BC' طی طریق می‌کند و به عبارت دیگر از V مرکز وجه $ABB'A'$ بهVمرکز وجه $BCC'B'$ می‌رود و مسیرش پاره‌خط مستقیمی از داخل مکعب است. چون t از ۱ تا ۲ تغییر کند، P از V به رأس C و در امتداد یک خط مستقیم حرکت می‌کند. چون t از ۲ تا ۳ تغییر کند، P از C به W مرکز وجه ABCD می‌رود و چون t از ۳ تا ۴ تغییر کند، P در امتداد یک خط مستقیم واقع در داخل مکعب به V نقطهٔ آغاز خود باز می‌گردد. به‌سادگی ملاحظه می‌شود که پاره‌خطهایی که در اوّلین و سومین زمان توسط P پیموده می‌شوند، هم‌چنان که آنها که در دومین و چهارمین زمان، موازی‌اند. گذشته از این، بردار P با سرعت ثابت حرکت می‌کند، و در نتیجه در هر فاصلهٔ زمانی به طول ۱ مسافت یکسانی را می‌پوشاند. در این صورت نتیجه می‌گیریم که P یک لوزی را می‌پیماید که طول هر ضلع آن نصف طول قطر وجه‌های مربع مکعب است. بنابراین، در صورتی که یالهای مکعب دارای طول s باشند، مکان P لوزی‌ای با ضلعهای به طول $\frac{\sqrt{۲}s}{۲}$ است. این لوزی بر صفحهٔ $x+y+z=۲s$ قرار دارد و فاصله‌اش از مبدأ $\frac{۲s}{\sqrt{۳}}$ است.

۱۱.۵. رسم شکل

۱.۱۱.۵. رسم پاره‌خط



۴۷۵. یالهای دو مکعب را a و b می‌گیریم. می‌خواهیم دو طول x و y را چنان بسازیم که $\frac{x}{y}=\frac{a^{۳}}{b^{۳}}$ باشد. با فرض $a<b$، می‌توان فرض کرد $\frac{a}{b}=\cos\theta$ و از آن‌جا خواهیم داشت: $x=y\cos\theta$. مثلث قائم‌الزاویهٔ OAB را چنان رسم می‌کنیم که وتر آن $OA=b$ و یک ضلع زاویهٔ قائمه‌اش $OA=a$ باشد. در این صورت $A\hat{O}B=\theta$ است. حال

طول دلخواه $OC = y$ را روی OY جدا می‌کنیم. تصویر C روی OX را D و تصویر D روی OY را E و تصویر E روی OX را F می‌نامیم. خواهیم داشت:

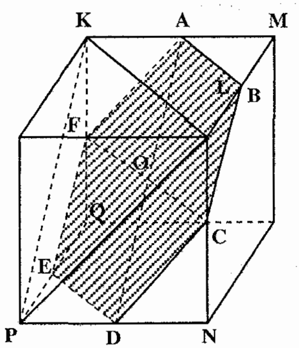
$$OD = y\cos\theta \;,\; OE = OD\cos\theta \;,\; OF = OE\cos\theta$$

از ضرب کردن عضوهای متناظر این سه رابطه نتیجه می‌شود:

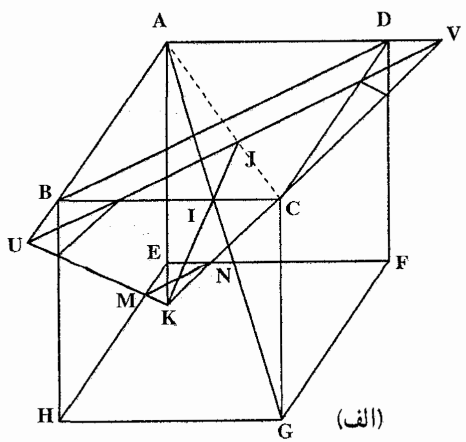
$$OF = y\cos^{3}\theta \Rightarrow OF = x$$

بنابراین OF و OC دو پاره خط هستند که نسبت آنها مساوی نسبت حجمهای دو مکعب داده شده است.

۲.۱۱.۵. رسم صفحه

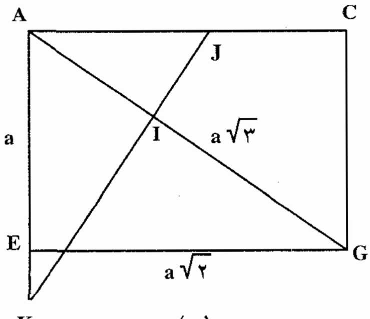


۴۷۶. از رأسهای K، L و P در مکعب مفروض، یک صفحه و از نقطهٔ A وسط یال KM، صفحهٔ دیگری موازی با صفحهٔ اول می‌گذرانیم (شکل). مقطع مکعب با صفحهٔ دوم، شش ضلعی مسطح ABCDEF است. این شش ضلعی، منتظم است، زیرا همهٔ ضلعهای آن باهم برابر، و برابر نصف قطر هر وجه مکعبند. هر زاویهٔ این شش ضلعی هم، برابر ۱۲۰ درجه است، زیرا ضلعهای آنها، با ضلعهای مثلث متساوی‌الاضلاع KLP، موازی‌اند.



(الف)

۴۷۷. کافی است مکعب را به قسمی قطع کنیم که یکی از حجمهای ایجاد شده، مساوی $\frac{1}{3}$ حجم مکعب باشد. فاصلهٔ نزدیکترین رأس قطر تا صفحهٔ قاطع را x می‌نامیم. بلا فاصله دیده می‌شود که اگر مکعب را ABCDEFGH و AG را قطر مورد نظر بگیریم،



(ب)

صفحهٔ مورد نظر باید بین صفحهٔ BDE و صفحهٔ موازی رسم شده از مرکز مکعب قرار گیرد. در این صورت این صفحه را در یک شش ضلعی قطع می‌کند و حجم محصور شده بین این صفحه باید مساوی تفاضل حجم هرم AUVK که قاعدهٔ آن مثلث متساوی‌الاضلاع UVK و ارتفاع آن AI=x است، و مجموع سه هرم کوچک مساوی، که یکی از آنها K.EMN است. می‌توان نوشت :

$$V=\frac{۱}{۳}x.JK.JU-\frac{۱}{۲}EK.EN^{۲}$$

در مثلث متساوی‌الاضلاع UVK داریم :

$$JU=\frac{JK}{\sqrt{۳}}$$

و در مثلث EKN، EK=EN است، بنابراین :

$$V=\frac{۱}{۳}x\times\frac{JK^{۲}}{\sqrt{۳}}-\frac{۱}{۲}EK^{۳}$$

اکنون JK و EK را محاسبه می‌کنیم، داریم :

$$\frac{AJ}{AI}=\frac{AG}{AC}=\frac{\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}\Rightarrow AJ=\frac{x\sqrt{۳}}{\sqrt{۲}}=JU=\frac{JK}{\sqrt{۳}}$$

$$\Rightarrow JK=\frac{۳x}{\sqrt{۲}}$$

از طرف دیگر :

$$AK=AV=AJ\sqrt{۲}=x\sqrt{۳}$$

بنابراین :

$$EK=x\sqrt{۳}-a$$

از آن‌جا خواهیم داشت :

$$V=\frac{۱}{۳}x\times\frac{۹x^{۲}}{۲\sqrt{۳}}-\frac{۱}{۲}(x\sqrt{۳}-a)^{۳}$$

$$\Rightarrow V=\frac{x^{3}\sqrt{3}}{2}-\frac{3x^{3}\sqrt{3}}{2}+\frac{9ax^{2}}{2}-\frac{3a^{2}x\sqrt{3}}{2}+\frac{a^{3}}{2}$$

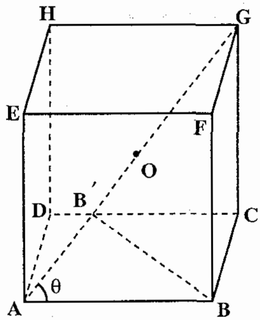
از آن جا معادلهٔ زیر را خواهیم داشت :

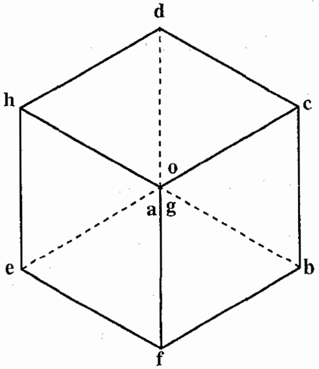
$$-2x^{3}\sqrt{3}+9ax^{2}-3a^{2}x\sqrt{3}+a^{3}=\frac{2a^{3}}{3}$$

$$\Rightarrow 6\sqrt{3}x^{3}-27ax^{2}+9a^{2}\sqrt{3}x-a^{3}=0$$

$$\Rightarrow x=\frac{31\sqrt{3}}{72}a$$

۳.۱۱.۵. رسم تصویر





۴۷۸. فرض کنیم که تصویر مکعب ABCDEFGH را روی صفحه‌ای عمود بر قطر AG رسم کرده باشیم. رأسهای A و G روی یک نقطه a یا g تصویر می‌شوند. یالهای مکعب که با AG زاویه‌های مساوی ساخته‌اند، با صفحهٔ P نیز زاویه‌های مساوی می‌سازند. در نتیجه تصویرهای این یالها پاره خطهای متساوی هستند. همچنین ABCG و ABFG تحت مثلثهای متساوی‌الاضلاع abcg و abfg تصویر می‌شوند. از طرف دیگر چون نقطه‌های E، D و H بترتیب قرینه‌های نقطه‌های f، C و B نسبت به‌نقطهٔ O وسط AG می‌باشند، تصویرهای آنها یعنی e،d و h قرینهٔ نقطه‌های F، c و b نسبت به نقطهٔ a هستند. به‌طور خلاصه، تصویرهای یالهای مکعب، محیط و نیمهٔ قطرهای شش ضلعی منتظم bedhef می‌باشند. برای تعیین اندازهٔ ضلع این شش ضلعی منتظم بر حسب l یال مکعب ، BB' را عمود بر AG رسم می‌کنیم.

می‌دانیم که $AB'=\frac{AG}{3}=\frac{l\sqrt{3}}{3}$ و در مثلث

قائم‌الزاویهٔ ABB' داریم :

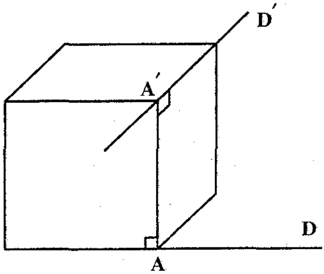
$$BB'^{۲} = AB^{۲} - AB'^{۲} = l^{۲} - \frac{۳l^{۲}}{۹} = \frac{۶l^{۲}}{۹}$$

$$\Rightarrow BB' = \frac{l\sqrt{۶}}{۳}$$

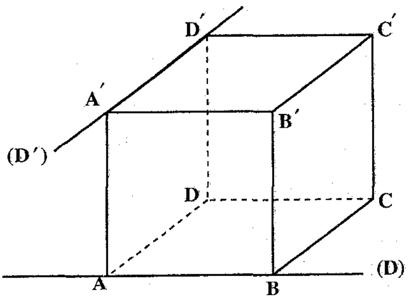
امّا BB' موازی صفحهٔ P است. بنابراین داریم :

$$ab = B'B = \frac{l\sqrt{۶}}{۳}$$

۴.۱۱.۵. رسم مکعب



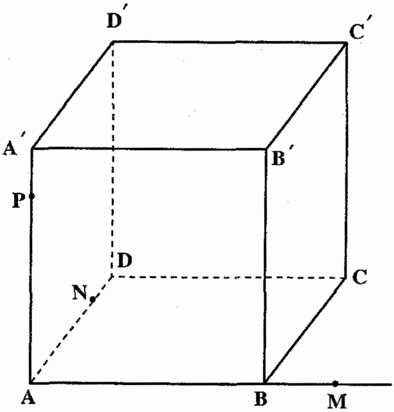
۴۷۹. AA'، عمود مشترک دو خط متنافر D و D'، یک ضلع مکعب مورد نظر است (شکل).



۴۸۰. برای هر یک از دو خط، صفحه‌ای عمود بر دیگری رسم می‌کنیم. فصل مشترک این دو صفحه و خطها، دو رأس از مکعب هستند که انتهای یک یال از مکعبند (A و A'). اینک با داشتن امتداد دو یال غیر موازی دیگر یعنی خطهای داده شدهٔ D و D'، بسادگی مکعب رسم می‌شود.

۴۸۱. فرض می‌کنیم مسأله حل شده و مکعب $ABCDA'B'C'D'$ به یال a و خطهای شامل یالهای گذرنده بر رأس A از آن که از نقطه‌های M، N و P می‌گذرند، جواب مسأله باشد.

نقطهٔ A رأس یک کنج سه‌وجهی، سه قائمه است که یالهای آن از نقطه‌های معلوم M،



N و P می‌گذرد و این کنج را به راحتی می‌توان رسم کرد. نقطهٔ A معلوم است؛ روی یالها و در دو طرف نقطهٔ A طولهایی مساوی a جدا می‌کنیم تا سه رأس دیگر مکعب به دست آید و از آن جا مکعب قابل رسم است. چون در دو طرف نقطهٔ A روی یالها و در امتداد یالهای کنج به رأس می‌توان پاره خطهایی مساوی a جدا کرد، بنابراین مسأله ۸ جواب دارد. اگر یالهای کنج را با x، y و z و امتداد آنها را با x′ ، y′ و z′ نشان دهیم، می‌توان روی امتدادهای سه‌گانهٔ : z ، y و x ؛ z′ ، y′ و x′ ؛ z′ ، y و x ؛ z′ ، y′ و x ؛ z ، y و x′ ؛ z ، y′ و x′ ؛ z′ ، y و x′ ؛ z′ ، y′ و x، پاره‌خطهایی به طول a جدا کرد.

برای آن که مسأله جواب داشته باشد، باید مثلث MNP حاده‌الزاویه باشد، اگر این مثلث این شرط را داشته باشد، دو کنج سه قائمه جواب مسأله وجود دارد که نسبت به صفحهٔ MNP قرینهٔ یکدیگرند و یالهای آنها از نقطه‌های N، M و P می‌گذرند.

بنابراین مسأله دارای ۱۶ جواب دو به دو قرینه نسبت به صفحهٔ MNP است.

۴۸۲. سرچشمهٔ مسألهٔ دو برابر کردن (تضعیف) مکعب را باید، ظاهراً، در تمایل دانشمندان باستانی، به تعمیم مسأله سادهٔ دو برابر کردن مربع دانست. دو برابر کردن مربع، یعنی رسم مربعی که مساحت آن، دو برابر مساحت مربع مفروض باشد.

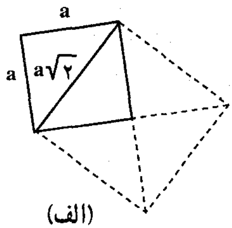
دشواریهایی که در مسیر حل مسألهٔ تضعیف مکعب وجود داشت، موجب پیدایش افسانه‌هایی دربارهٔ سرچشمهٔ این مسأله بوده است. برای نمونه، یکی از این افسانه‌ها را می‌آوریم. این افسانه، به اراتوستن (۲۷۶ تا ۱۹۴ پیش از میلاد)، ریاضیدان، اخترشناس و فیلسوف مشهور یونانی، منسوب است. او دربارهٔ علتهایی که دانشمندان باستانی را، وادار به بررسی مسأله مربوط به تضعیف مکعب کرده است، این طور حکایت می‌کند:

زمانی در جزیرهٔ دیلوس، واقع در دریای اژه، بیماری طاعون شیوع پیدا کرد. اهالی این جزیره، برای کمک و مشورت، به کاهن بزرگ دلفی، که در معبد آپولون در دلفی زندگی می‌کرد، مراجعه کردند (دلفی ــ مرکز عام مذهبی یونانیان در فوکید، در دامنهٔ کوه پارناس).

کاهن بزرگ، برای تسکین درد و اندوه مردم، پاسخ داد که باید لطف خدایان را جلب کرد و برای این منظور باید محراب طلایی آپولون را که به شکل مکعب است، دو برابر کرد.

اهالی دیلوس، با عجله، دو محراب طلایی، به اندازه‌ای که در معبد آپولون بود، ساختند و آنها را روی هم گذاشتند. به این امید که مسألهٔ دو برابر کردن قربان‌گاه مکعبی را حل کرده‌اند.

ولی طاعون تمام نشد. مردم دوباره به کاهن بزرگ مراجعه کردند و با حیرت پرسیدند : «چرا با وجودی که محراب طلایی آپولون بزرگ را دو برابر کرده‌ایم، طاعون از بین نمی‌رود؟». ولی کاهن بزرگ پاسخ داد : «نه، شما مسألهٔ مورد نظر را حل نکرده‌اید ؛ شما باید قربان‌گاه را طوری دو برابر کنید که شکل مکعبی آن تغییر نکند». و چون از حل مسأله، آن طور که کاهن دیلوس خواسته بود، عاجز ماندند، از افلاطون، فیلسوف و ریاضیدان، تقاضای کمک کردند. ولی او به طور مبهم پاسخ داد : «احتمالاً، خدایان به این مناسبت از شما ناراضی‌اند که به هندسه، کم می‌پردازید». با وجود این، خود افلاطون هم نتوانست این مسأله را به کمک خط‌کش و پرگار، حل کند. از همان زمانها،این مسأله را مسألهٔ «دیلوسی» هم گفته‌اند.



(الف)

یونانیان باستان، مسألهٔ مربوط به دو برابر کردن مربع را، نسبتاً ساده حل می‌کردند. برای این منظور، باید بتوان ریشهٔ دوم ۲ را، به کمک پرگار و خط‌کش، رسم کرد. در واقع، اگر طول ضلع مربع مفروض را a بگیریم، ضلع موردنظر که آن را x می‌نامیم، باید در این شرط صدق کند :

$$x^۲ = ۲a^۲$$

و از آن‌جا

$$x = a\sqrt{۲}$$

بنابراین، x را باید برابر قطر مربع مفروض گرفت که، بنابر قضیهٔ فیثاغورس برابر با $a\sqrt{۲}$ می‌شود (شکل الف).

یونانیان، با تعمیم مسأله مربوط به دو برابر کردن مربع، می‌خواستند، مسألهٔ مربوط به دو برابر کردنِ مکعب را هم، به کمک خط‌کش و پرگار، حل کنند. حل مسألهٔ مربوط به دو برابر کردن مکعب، منجر به رسم ریشهٔ سوم ۲، به کمک خط‌کش و پرگار، می‌شود. در واقع، اگر طول یال مکعب مفروض را a فرض کنیم و طول یال مکعب دو برابر آن را x بگیریم، باید داشته باشیم :

$$x^۳ = ۲a^۳$$

و از آن جا

$$x = a\sqrt[۳]{۲}$$

ولی تمام تلاشها، برای رسم $\sqrt[3]{2}$ ، به کمک خط کش و پرگار، بدون نتیجه ماند. این تلاشهای بی‌ثمر، همچنان ادامه داشت تا این که در نیمهٔ اوّل سدهٔ نوزدهم، ثابت شد که رسم $\sqrt[3]{2}$ به کمک خط کش و پرگار، ممکن نیست. برای این که تصوری دربارهٔ قابل حل بودن یا غیر قابل حل بودن مسأله‌های مربوط به ساختمانهای هندسی داشته باشیم، به یادآوری کوتاه زیر، اکتفا می‌کنیم:

قبل از هر چیز، به یاد می‌آوریم که عبارتهای زیر را می‌توان، بسادگی و به کمک خط کش و پرگار، رسم کرد:

$$a+b\ ,\ a-b\ ,\ \frac{a.b}{c}\ ,\ \sqrt{a.b}\ ,\ \sqrt{a^2+b^2}\ ,\ \sqrt{a^2-b^2}$$

که در آنها، a ، b و c پاره‌خطهایی مفروضند.

اگر حل مسأله‌ای، منجر به انجام تعداد محدودی عملهای پشت‌سرهم، از این نوعها باشد، آن وقت، مسأله به کمک پرگار و خط کش، قابل حل است. ولی اگر حل مسأله، محدود به انجام متوالی تعدادی متناهی از این عملها نشود، آن وقت نمی‌توان چنین مسأله‌ای را، به کمک خط کش و پرگار، حل کرد. مسألهٔ مربوط به تضعیف مکعب هم، نمونه‌ای از همین مسأله‌هاست و نمی‌توان آن را، تنها به یاری خط کش و پرگار، یعنی تنها با رسم خط راست و دایره، حل کرد.

گفتیم که مسألهٔ مربوط به تضعیف مکعب، منجر به حل این معادلهٔ درجه سوم می‌شود:

$$x^3-2a^3=0$$

که در آن، a و x بترتیب عبارتند از طول یالهای مکعب مفروض و مکعب مجهول.

اگر برای سادگی کار، یال مکعب مفروض را برابر ۱ بگیریم، به معادلهٔ $x^3-2=0$ می‌رسیم. بسادگی می‌توان ثابت کرد که این معادلهٔ با ضریبهای گویا، دارای ریشهٔ گویا و یا ریشه‌ای که به صورت جذر یک عدد گویا باشد، نیست. بنابراین طبق آن چه گفتیم، نمی‌توان آن را به کمک خط کش و پرگار، رسم کرد.

نخستین دانشمندی که به روشنی اعتقاد خود را مبنی بر ناممکن بودن رسم پاره‌خطی برای $\sqrt[3]{2}$ ، به کمک خط کش و پرگار، اظهار کرد، رنه دکارت، دانشمند فرانسوی بود. او در سال ۱۶۳۷، این حکم را ارائه داد که ریشهٔ سوم عددی که کعب درست ندارد، عددی گنگ است و محاسبهٔ آن را نمی‌توان منجر به تعداد محدودی عمل جذر گرفتن کرد.

اثبات دقیق مسأله قابل حل نبودن مسألهٔ تضعیف مکعب را، به کمک خط کش و

پرگار، پ. ونتل، ریاضیدان فرانسوی، در سال ۱۸۳۷ به دست داد.

یکی از نخستین هندسه‌دانان یونان قدیم، که با استفاده از وسیله‌های دیگری، علاوه بر خط‌کش و پرگار، گام مهمی برای حل مسألهٔ تضعیف مکعب برداشت، بقراط خیوسی (سدهٔ پنجم پیش از میلاد) بود.

بقراط خیوسی، حل مسألهٔ فضایی تضعیف مکعب را، منجر به بررسی یک مسألهٔ مسطحه کرد. این مسأله عبارت بود از جست‌وجوی دو واسطهٔ هندسی، بین دو پاره خطی که یکی دو برابر دیگری باشد. به زبان دیگر، او می‌خواست دو پاره‌خط x و y را طوری پیدا کند که اگر آنها را بین دو عدد مفروض a و ۲a قرار دهند، یک تصاعد هندسی به دست آید:

$$a, x, y, 2a$$

برای این که این چهار مقدار به تصاعد هندسی باشند، باید داشته باشیم:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{2a}$$

از آن‌جا:

$$y^2=2ax\ ,\ \ x^2=ay$$

بنابراین

$$x^4=a^2y^2=2a^3x \Rightarrow x^3=2a^3$$

روشن است که x عبارت است از ضلع مکعبی که حجم آن، دو برابر حجم مکعب مفروض به ضلع a است.

معلوم است که «درج» واسطه‌های x و y را نمی‌توان به کمک خط‌کش و پرگار انجام داد؛ زیرا این عمل منجر به پیدا کردن $x=\sqrt[3]{2}$ به کمک خط‌کش و پرگار می‌شود که البته، ممکن نیست.

به‌نظر می‌رسد که «درج» واسطه‌های x و y را می‌توان به انجام رسانید، به‌شرطی که از وسیله‌های اضافی و تکمیلی که به همین منظور آماده می‌شود، استفاده کنیم. افلاطون و اراتوستن، برای پیدا کردن واسطه‌های x و y (وقتی که بین پاره‌خطهای معلوم a و ۲a قرار گیرند و با آنها، یک تصاعد هندسی بسازند)، وسیله‌های ساده و بکری پیشنهاد کردند.

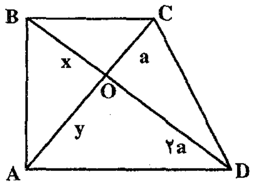
وسیلهٔ افلاطون، از دو گونیای معمولی نجاری تشکیل می‌شد. خود ساختمان هندسی، بر مبنای این پیش قضیه بود:

در هر ذوزنقهٔ قائم‌الزاویه (شکل ب) که قطرهای عمود برهم داشته باشد، قطعه‌های

قطرها، تشکیل یک تصاعد هندسی می‌دهند :

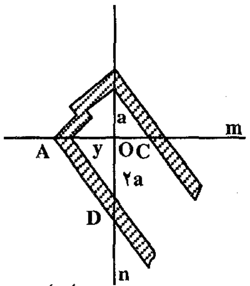
$$\frac{OC}{OB}=\frac{OB}{OA}=\frac{OA}{OD}$$

(ثابت کنید!)



(ب)

رسم واسطه‌های x و y که برای حل مسألهٔ تضعیف مکعب لازم است، منجر به عملهای زیر می‌شود :
دو خط راست m و n را درنظر می‌گیریم که برهم عمود و در نقطهٔ O متقاطع باشند (شکل پ). روی m و در طرف راست O، پاره‌خط $OC = a$ را جدا می‌کنیم (a، ضلع مکعبی است که می‌خواهیم دو برابر آن را پیدا کنیم). روی خط راست n و در پایین O، پاره‌خط $OD = ۲a$ را جدا می‌کنیم. اکنون، دو گونیا بر می‌داریم (گونیاها را هاشور زده‌ایم) و آنها را طوری قرار می دهیم (شکل (پ) را ببینید) که یک ضلع گونیای اوّل از نقطهٔ C که نقطه‌ای معلوم است، بگذرد و رأس آن بر خط راست n واقع باشد. همین‌طور، یک ضلع گونیای دوم از نقطهٔ D که معلوم است، بگذرد و رأس آن بر خط راست m قرار گیرد. دو ضلع دیگر گونیاها، باید در امتداد هم باشند.



(پ)

وقتی که دو گونیا را به این ترتیب قرار دهیم، روی خطهای راست m و n نقطه‌های A و B به دست می‌آید. در نتیجه، اگر فرض کنیم، $OB = x$ و $OA = y$ ، طبق پیش قضیه داریم :

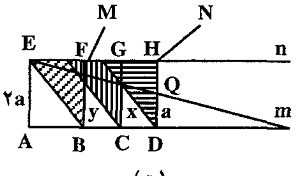
$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{۲a}$$

و از آن‌جا

$$x^{۳} = ۲a^{۳}$$

$x = OB$ ، همان یال مکعب موردنظر ماست.

وسیلهٔ اراتوستن را «مه زولاب» (mesolable) می‌نامند که به‌معنای «دام» است، یعنی وسیله‌ای که دو مقدار واسطه را که یکی از آنها ضلع مکعب مجهول است، به‌دام می‌اندازد. دام اراتوستن، از دو میلهٔ موازی m و n تشکیل شده است که فاصلهٔ بین



(ت)

آنها، دو برابر ضلع مکعب مفروض، یعنی ۲a، می‌باشد. بین این دو میله، سه‌مثلث قائم‌الزاویهٔ مساوی قرار گرفته است، به‌نحوی که یکی از ضلعهای پهلوی زاویهٔ قائمهٔ آنها، بر میلهٔ بالایی و رأس مقابل این ضلع، بر میلهٔ پایینی واقع باشد؛ ضمناً، نخستین مثلث سمت چپ، ثابت است و دو مثلث دیگر، می‌توانند در طول میله‌ها حرکت کنند (شکل (ت) را ببینید).

روی ضلع پهلوی زاویهٔ قائمهٔ MD، از مثلث متحرک سمت راست، پاره‌خط DQ=a را جدا می‌کنیم. اکنون مثلثهای متحرک را آن‌قدر جابه‌جا می‌کنیم تا نقطه‌های برخورد وتر هر مثلث با ضلع پهلوی زاویهٔ قائمهٔ مثلث دیگر (MوN)، با نقطه‌های E و Q، در امتداد یک خط است، قرار گیرند. در این صورت، از مثلثهای متشابه متناظر، به دست می‌آید:

$$\frac{a}{NC}=\frac{NC}{MB}=\frac{MB}{۲a}$$

که اگر NC را به x و MB را به y نشان دهیم، حاصل می‌شود:

$$\frac{a}{x}=\frac{x}{y}=\frac{y}{۲a}$$

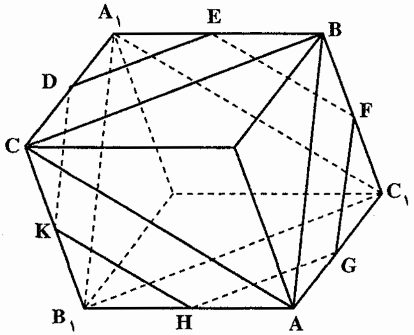
بنابراین، x=NC، عبارت است از همان مقدار مجهول یال مکعب دو برابر. مسأله دیلوسی، حل شد.

۱۲.۵. برش، مقطع

۱.۱۲.۵. نوع مقطع

۴۸۵. یک مثلث، یک چهارضلعی و یک شش‌ضلعی، یک مکعب را نمی‌توان در یک پنج‌ضلعی منتظم قطع نمود، زیرا در مقطعی که بیش از سه ضلع داشته باشد، لااقل یک جفت ضلع موازی موجود است. امّا در پنج‌ضلعی منتظم ضلعهای موازی وجود ندارد.

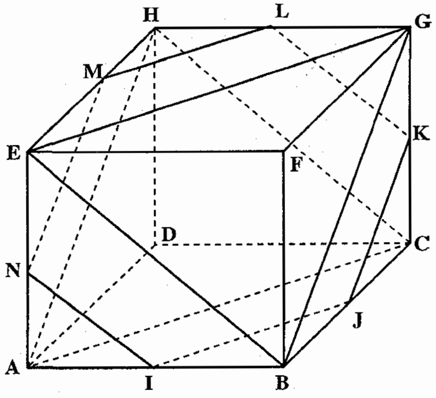
۴۸۶. صفحه‌های قاطع ABC و $A_۱B_۱C_۱$ باهم مساوی و موازی می‌باشند؛ زیرا $AB\|A_۱B_۱$ و $AC\|A_۱C_۱$ است، چنانچه صفحهٔ قاطعی چنان رسم کنیم (شکل) که با این دو صفحه موازی و به یک فاصله از آنها باشند، در نتیجه مقطع DEFGHK به دست می‌آید که



شش ضلعی منتظمی است. ضلعهای این مقطع مساوی‌اند. زیرا هر یک برابر نصف قطر مربعهای جانبی می‌باشند، $DE = \frac{1}{2}BC$ ، زیرا وسطهای ضلعهای مثلث A_1BC را به هم وصل کرده است و زاویه‌های این مقطع هر کدام ۱۲۰ درجه‌اند ؛ زیرا ضلعهای آنها موازی‌اند با ضلعهای مثلث متساوی‌الاضلاع ABC در این صورت شش ضلعی DEFGHK منتظم است.

۴۸۷. صفحهٔ رسم شده از نقطه‌های I، J و K وسطهای سه یالی را که دو به دو ناموازی‌اند و به یک رأس تعلق ندارد، درنظر می‌گیریم.

قطرهای BE، BG و GE از سه وجه کنج به رأس F و سپس قطر AC را رسم می‌کنیم.



پاره‌خط IJ که وسطهای BA و CB را به هم وصل می‌کند، موازی AC و مساوی نصف آن است. از آن‌جا، این پاره‌خط موازی EG و مساوی نصف آن نیز می‌باشد. همچنین پاره‌خط JK موازی BG و مساوی نصف آن است. صفحهٔ IJK که بر دو خط موازی با EG و BG می‌گذرد، با صفحه‌های BEG و ACH موازی است. از آن‌جا KL و CH باهم موازی‌اند، زیرا فصل مشترکهای صفحهٔ CGH با دو صفحهٔ متوازی IJKL و ACH می‌باشند. امّا، K وسط پاره‌خط CG است. بنابراین L وسط GH است و $KL = \frac{1}{2}CH$ می‌باشد. همچنین صفحهٔ IJK از نقطه‌های وسط L، M و N از ضلعهای متناظرشان می‌گذرد. شش ضلعی به‌دست آمده منتظم زیرا، هر ضلعش مساوی نصف ضلعهای یک مثلث متساوی‌الاضلاع است و زاویه‌های آن نیز مساوی‌اند، زیرا مکمل زاویه‌های یک مثلث متساوی‌الاضلاع هستند (چون $IJ \parallel EG$ و $JK \parallel BG$ ، پس زاویهٔ IJK مکمل زاویهٔ BGE

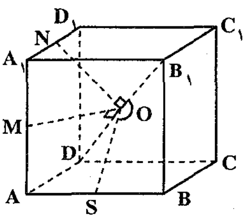
است).

تبصره. شش ضلعی منتظم IJKLMN، مقطعی از مکعب با صفحه‌ای عمود بر قطر FD است، که بیشترین مساحت را بین مقطعهای ایجاد شده در مکعب به وسیلهٔ صفحه‌های عمود بر FD دارا می‌باشد.

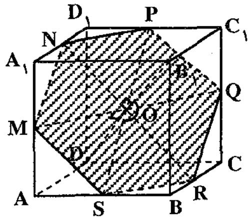
۴۸۸. گزینهٔ (ب،ج) درست است.

۴۸۹. گزینهٔ (د) درست است.

۴۹۰. به آسانی ثابت می‌شود که عمود رسم شده از نقطهٔ M برخط B_1D، از O، میانگاه پاره‌خط B_1D عبور می‌کند. عمود رسم شده از N میانگاه یال A_1D_1 بر خط B_1D نیز از نقطهٔ O می‌گذرد (شکل الف). این امر بدین معنی است که صفحهٔ برش گذرنده بر نقطه‌های M، N و O قطر B_1D را نصف می‌کند. حال به رسم برش می‌پردازیم. برای انجام این کار ثابت می‌کنیم که صفحهٔ برش از S، میانگاه یال AB می‌گذرد. خط مستقیم SO همچون خط MO بر خط B_1D عمود است. بدین ترتیب صفحهٔ MOS همچون صفحهٔ MON بر خط B_1D عمود خواهد بود. آن‌گاه این صفحه‌ها بر هم منطبق بوده و $S \in (MON)$ خواهد بود. از طرفی می‌دانیم که برشی از مکعب که با صفحهٔ MNS به وجود می‌آید، یک شش ضلعی منتظم (شکل ب) است که رأسهای آن میانگاه یالهایی از مکعب است که قطر B_1D را قطع نمی‌کنند. جواب مسأله عبارت از ۱ : ۱ است.



(الف)



(ب)

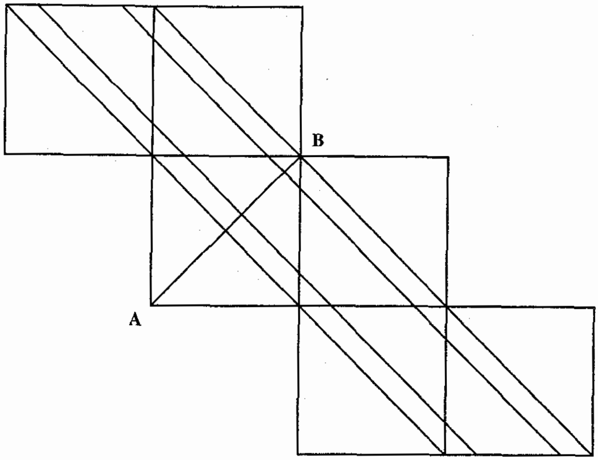
۲.۱۲.۵. محیط مقطع

۴۹۱. مکعب سر و دست شکسته.

این مکعب را، مطابق شکل صفحه بعد باز می‌کنیم. ملاحظه می‌شود که صفحهٔ عمود بر قطر AB شش وجه مکعب یا سه وجه از آن را در وضعیتهای مختلف ببرد، طول محیط چند ضلعیهای حاصل همیشه یکسان و مساوی با سه برابر قطر یکی از وجه‌های جانبی است، پس ۱۹/۸۹ در حل معمّا، دخالتی ندارد، و می‌توان از آن صرفنظر کرد و در

نتیجه همواره طول محیط سطح مقطع عمود بر قطر مکعب چنین محاسبه می‌شود :

$۳ \times \sqrt{۲} \times ۴۰ = ۱۶۹/۷\text{cm}$



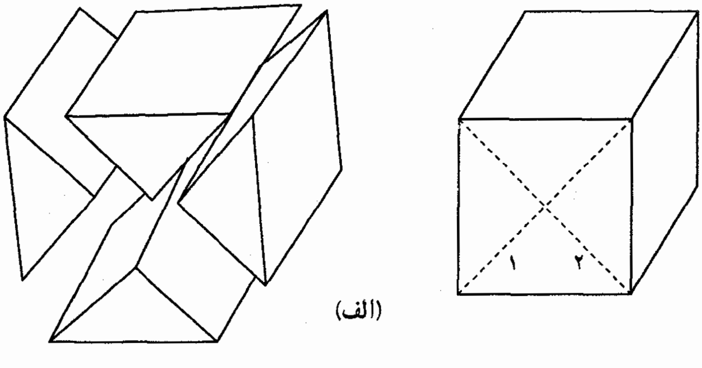
۳.۱۲.۵. تعداد مکعبها، تعداد قسمتها

۴۹۲. گزینهٔ (د) درست است.

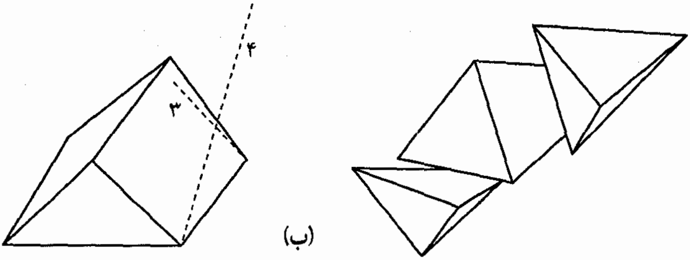
۴۹۳. مکعب را ببرید.

بعد از دو برش اولیهٔ عمود بر یکی از وجه‌های مکعب و منطبق بر قطرها، چهار قطعه به شکل منشور به قاعده‌های مثلثی، مطابق شکل (الف) خواهیم داشت.

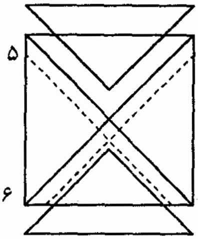
حال در وجه مجاور نیز نظیر آن دو برش را انجام می‌دهیم، نتیجه این می‌شود که هر یک از دو منشور دیگر نیز تا وسط آن بریده می‌شوند.



(الف)

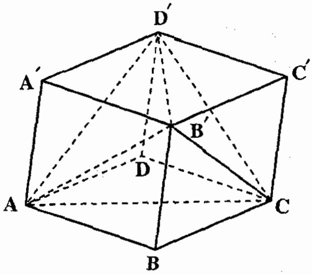


(ب)



(ج)

در آخرین وجه نیز همین کار را انجام می‌دهیم. تا دو وجه رو به رو به چهار قسمت شود و طرفین دو منشور دیگر نیز تا وسط آن بریده می‌شوند.
سرانجام ملاحظه خواهیم کرد، که هر یک از این چهار منشور به ۶ قطعه تقسیم می‌شوند، و در کل ۲۴ قطعه خواهیم داشت.



۴۹۴. بسادگی دیده می‌شود که مکعب را می‌توان به ۵ چهاروجهی تقسیم کرد. در شکل، این چهار وجهیها، عبارتند از:

$AA'B'D'$, $AB'BC$, $ACDD'$,
$B''C'D'C$, $ACD'B'$

ثابت می‌کنیم که مکعب را نمی‌توان به‌تعداد کمتری چهاروجهی تقسیم کرد. فرض کنید، مکعب را به چند چهار وجهی تقسیم کرده باشیم. دست‌کم دو چهاروجهی وجود دارد که قاعده‌های آنها، بر وجه $ABCD$ از مکعب قرار دارند. به همین ترتیب، دست‌کم دو چهاروجهی وجود دارد که قاعده‌های آنها بر وجه $A'B'C'D'$ واقعند.
روشن است که این چهاروجهیها، با دوتای اوّلی فرق دارند، زیرا در یک چهاروجهی نمی‌توان دو وجه موازی پیدا کرد. به این ترتیب، با ۴ چهاروجهی سروکار داریم. حجم آنها، روی هم، از $\frac{۲}{۳}a^{۳}$ تجاوز نمی‌کند، یعنی کمتر از حجم مکعب است. بنابراین، مکعب را نمی‌توان به ۴ چهاروجهی تقسیم کرد.

۴۹۵. شمار مکعبهای رنگی.

می‌دانیم که برای به‌دست آوردن مکعبهای کوچک باید مکعب بزرگ را از سه وجه به

تعداد مساوی برید (از دو وجه عمودی و یک وجه افقی). خواهیم داشت :

$$۵۴ = ۷۸ \times ۳$$

وقتی یک وجه ۱۸ بار بریده شود، به ۱۹ قسمت تقسیم می‌شود. پس شمار کل مکعبهای کوچک توان سوم ۱۹ خواهد بود. فقط مکعبهای کوچک واقع در آخرین لایهٔ مکعب بزرگ رنگی به‌شمار می‌روند و تمام مکعبهای واقع در داخل مکعب بزرگ غیر رنگی خواهند بود. بسادگی معلوم می‌شود که شمار مکعبهای غیر رنگی نیز توان سوم ۱۷ است (که آنها نیز به نوبهٔ خود یک مکعب تقریباً بزرگ را در داخل مکعب اصلی تشکیل می‌دهند). در این صورت محاسبهٔ شمار مکعبهای غیر رنگی خیلی ساده است :

$$۱۹^۳ - ۱۷^۳ = ۱۹۴۶$$

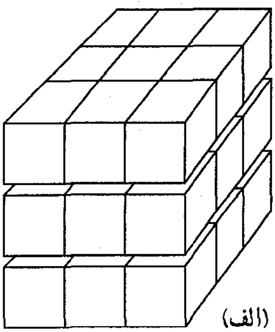
۴۹۶. یکی از رأسهای مکعب را مبدأ مختصات، در دستگاه محورهای مختصات فضایی بگیرید. در این صورت صفحهٔ مورد علاقهٔ ما، $x + y + z = ۱۸$، تنها وقتی مکعب را در نقطهٔ با مختصات(a, b, c) قطع می‌کند که داشته باشیم :

$$۱۵ < a + b + c < ۱۸$$

یعنی $a + b + c$، برابر است با ۱۶ یا ۱۷ (گوشه‌ای از مکعب را در نظر بگیرید که کمتر از دیگران از مبدأ دور باشد) تنها این می‌ماند که تعداد جوابهای معادله‌های $a + b + c = ۱۶$و۱۷ را در مجموعهٔ عددهای درست غیرمنفی، که از ۱۱ تجاوز نکنند، پیدا کنیم. و این تعداد، برابر است با ۲۱۶.

۴۹۷. پاسخ اوّلاً چنین است : ابتدا به طور عمودی دو بار به موازات هم مکعب را می‌برد، سپس بی‌آن که قطعه‌ها را از هم جدا سازد، به‌طور عمودی دو بار دیگر مکعب بزرگ را عمود بر محلهای بریده شده می‌برد. سپس بدون جدا کردن قطعه‌ها از یکدیگر دوبار نیز آن‌را به‌طور افقی می‌برد و بدین ترتیب کلاً با ۶ بار بریدن مکعب بزرگ را به ۲۷ مکعب کوچک تقسیم می‌کند. امّا پاسخ ثانیاً خیلی آسان است : فقط یکی از مکعبها که در وسط مکعب اصلی قرار دارد، غیر رنگی خواهد بود.

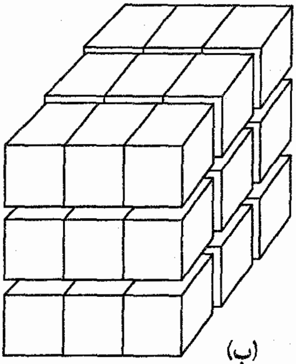
۴۹۸. توجه کنید که می‌توانیم با دو برش در امتداد دو خط متوازی روی یک وجه، مکعب را به سه قطعه هر کدام به ضخامت یک مکعب تقسیم کنیم (شکل (الف) را ببینید).



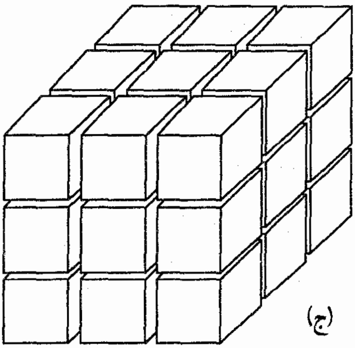
(الف)

سه قطعهٔ به دست آمده را کنار هم نگاه می‌داریم و با دو برش دیگر در امتداد دو خط متوازی روی وجه بالایی،

مکعب چوبی را به ۹ قطعه هر یک شامل سه مکعب تقسیم می‌کنیم (شکل ب). سپس در حالی که این ۹ قطعه را کنار هم نگاه داشته‌ایم، با دو برش دیگر (مانند شکل ج) همهٔ ۲۷ مکعب را از هم جدا می‌کنیم. کلاً با شش برش همهٔ ۲۷ مکعب کوچک را از هم جدا کرده‌ایم، پرسش این است که آیا می‌توان این کار را با کمتر از شش برش انجام داد یا نه. پاسخ منفی است. توجه کنید که مکعب مرکزی شش وجه دارد. برای جدا کردن هر یک از این وجه‌ها از مکعب مجاورش برش مجزایی لازم داریم، پس هر قدر هم در جا به جایی قطعه‌ها پیش از هر برش زیرکی به خرج دهیم، نمی‌توانیم با کمتر از شش برش این کار را انجام دهیم.



(ب)



(ج)

۴.۱۲.۵. تعداد صفحه‌ها

۴۹۹. با استقرای روی n، ثابت می‌کنیم که n خط راست، نمی‌تواند صفحه را به بیش از

$$p(n)=\frac{n(n+۱)}{۲}+۱$$

بخش، تقسیم کنند؛ در ضمن، وقتی می‌توان درست به p(n) بخش رسید که هیچ دو خط راستی موازی نباشند و هیچ سه خط راستی از یک نقطه نگذرند. در واقع $p(۰)=۱$ و به ازای هر مقدار $n\in N$، داریم:

$$p(n)\le p(n-۱)+n=\frac{(n-۱)n}{۲}+۱+n=\frac{n(n+۱)}{۲}+۱$$

در ضمن، برابری هم می‌تواند برقرار باشد (خط راست nام، ضمن برخورد با بقیهٔ خطهای راست، خودش به بیش از n بخش تقسیم نمی‌شود و هریک از این

بخشها، بخش تازه‌ای را در صفحه پدید می‌آورد). به همین ترتیب، می‌توان ثابت کرد که n صفحه، فضا را به بیش از

$$q(n)=\frac{n^{۳}+۵n+۶}{۶}$$

بخش، تقسیم نمی‌کنند؛ در ضمن، $q(n)$ بخش وقتی به‌دست می‌آید که هیچ دو صفحه‌ای موازی نباشند، هیچ سه صفحه‌ای از یک خط راست نگذرد و هیچ چهار صفحه‌ای از یک نقطه عبور نکنند. در واقع $q(۰)=۱$ و به ازای هر مقدار $n\in N$، داریم:

$$q(n)\le q(n-۱)+p(n-۱)=\frac{(n-۱)^{۳}+۵(n-۱)+۶}{۶}+\frac{(n-۱)n}{۲}+۱$$

$$=\frac{n^{۳}+۵n+۶}{۶}$$

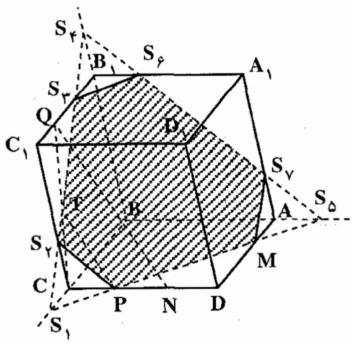
در ضمن، برابری هم ممکن است (صفحهٔ nام، ضمن برخورد با صفحه‌های دیگر به بیش از $p(n-۱)$ بخش تقسیم نمی‌شود و هر یک از این بخشها، بخش تازه‌ای از فضا را معین می‌کند).

تعداد صفحه‌های لازم، برای تقسیم فضا، دست‌کم به ۳۰۰ بخش، برابر است با ۱۳، زیرا:

$$q(۱۲)=۲۹۹<۳۰۰<۳۷۸=q(۱۳)$$

در واقع، ۱۲ صفحه کافی نیست و با ۱۳ صفحه، می‌توان فضا را به $q(۱۳)$ بخش تقسیم کرد؛ سپس، در داخل هر بخش فضا، نقطه‌ای در نظر می‌گیریم و مکعبی را انتخاب می‌کنیم که شامل همهٔ این $q(۱۳)$ نقطه باشد. اکنون، تنها این می‌ماند که تمامی ساختمان را به ساختمانی متشابه خود، با انتخاب ضریب مناسب، تبدیل کرد.

۵.۱۲.۵. رسم برش



۵۰۰. صفحهٔ NQP را مورد ملاحظه قرار می‌دهیم. این صفحه، وجه $BCC_۱B_۱$ را در امتداد پاره‌خط CQ قطع می‌کند. صفحهٔ برش، صفحهٔ NQP را در امتداد خط موازی با NQ قطع می‌کند. خطی در صفحهٔ NQP به صورت $PT\|NQ$ رسم می‌کنیم

(شکل). نقطهٔ $T = PT \cap CQ$ به صفحهٔ برش متعلق است. توجه دارید که به دلیل $CP = PN$ چنین داریم:

$$CT = TQ$$

آن‌گاه ترسیمهای زیر را انجام می‌دهیم:

$$S_1 = MP \cap BC \;,\; S_2 = S_1T \cap CC_1$$
$$S_3 = S_1T \cap B_1C_1 \;,\; S_4 = S_1T \cap BB_1$$
$$S_5 = MP \cap AB \;,\; S_6 = S_4S_5 \cap A_1B_1$$

$S_7 = S_4S_6 \cap AA_1$. برش مطرح شده عبارت از شش ضلعی $MPS_2S_3S_6S$ است.

حال مساحت برش را محاسبه می‌کنیم. به آسانی دریافت می‌شود که $S_1C = S_5A = \frac{a}{3}$ است. نقطهٔ T میانگاه پاره‌خط CQ بوده و $QS_3 = S_1C = \frac{a}{3}$ و $S_3B_1 = \frac{a}{3}$ را داریم. مثلثهای S_1S_2C و $S_3S_4B_1$ با مثلث $S_3S_2C_1$ متشابه بوده و $S_2C = S_4B_1 = \frac{a}{3}$ استنتاج می‌شود.

بدین ترتیب $BS_1 = BS_4 = BS_6 = \frac{4a}{3}$ را داریم. از این رو مثلث $S_1S_4S_5$ متساوی‌الاضلاع بوده و طول ضلع آن برابر $4\sqrt{2}\frac{a}{3}$ و مساحت آن نیز برابر $8\sqrt{3}\frac{a^2}{9}$ است. هر یک از مثلثهای S_1S_2P ، $S_4S_6S_3$ و S_5MS_7 با نسبت تشابه ۴ با مثلثهای $S_1S_4S_5$ متشابه هستند. این امر بدین معنی است که مساحت هر یک از آن مثلثها برابر $\frac{1}{16}.\frac{8\sqrt{3}}{9}a^2 = \frac{\sqrt{3}}{18}a^2$ است و حال می‌توان مساحت برش را به‌دست‌آورد:

$$\frac{8\sqrt{3}}{9}a^2 - 3\frac{\sqrt{3}}{18}a^2 = \frac{13\sqrt{3}}{18}a^2$$

یعنی مقدار آن برابر $\frac{13}{18}\sqrt{3}a^2$ است.

۱۳.۵. گستردهٔ مکعب

۵۰۱. گزینه‌های (ب) و (د) درست است.

۵۰۲. گزینه‌های (الف) و (ج) درست است.

۵۰۳. گزینهٔ (د) درست است.

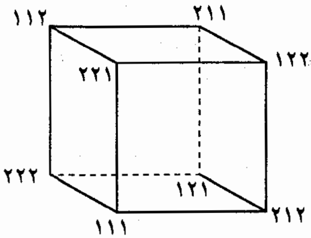
۵۰۴. مکعب $ABCDA_1B_1C_1D_1$ را درنظر بگیرید. روی یالهای A_1B و A_1D، نقطه‌های K و L را طوری اختیار کنید که:

$$A_1K = CM \ , \ \ A_1L = CN$$

محل برخورد AK و BA_1، AL و DA_1 را بترتیب، P و Q بنامید. به آسانی دیده می‌شود که ضلعهای مثلث A_1PQ متناظر است، با پاره‌خطهای روی قطر BD و چون مثلث BA_1D منتظم است، حکم مسأله ثابت می‌شود.

۱۴.۵. سایر مسأله‌های مربوط به این بخش

۵۰۵. ثابت کنید، خطی که از نقطهٔ مفروض می‌گذرد و به موازات قطر مکعب رسم می‌شود، بر هر یک از کره‌ها مماس است.



۵۰۶. در واقع می‌توان نگاشت مجموعهٔ رأسهای مکعب را بر خودش، طوری به دست آورد که هر دو رأس مجاور (که به وسیلهٔ یالی به هم وصل می‌شوند)، به رأسهایی بروند که به وسیلهٔ یالی به هم وصل نشده‌اند.

۵۰۷. نه، نمی‌شود. اگر عددهای واقع در رأسها برابر باشند، مجموع آنها باید مضربی از ۸ باشد، از طرف دیگر، مجموع این عددها (با توجه به این که عدد هر یال دوبار به حساب می‌آید)، برابر است با ۱۱×۱۲.

۵۰۸. کوشش برای دنبال کردن یکی از راههای نوعی، حتی در چند غلتش اوّل، نیاز به قدرت تصوری نامتعارف دارد. با وجود این، با کمی تلاش می‌توان تصویر به حد کافی روشنی از مسأله به دست آورد به این ترتیب، با استفاده از روش سادهٔ زیر به کلید حل مسأله دست یافت:

چون نمی‌توانیم روی صفحهٔ شطرنجی به طرف چپ برگردیم یا به طرف پایین حرکت کنیم، پس هر وجه پایینی مکعب پیش از این که دوباره عددی را روی مربعی ثبت کند باید به بالای مکعب بیاید.

اینک وقتی وجهی که عدد x روی آن نوشته شده است، بالای مکعب قرار دارد، وجه مقابل آن عدد ۷ − x را ثبت می‌کند. از آن‌جا که هر عدد پیش از ثبت شدن مجدد باید به بالای مکعب بیاید، بین هر دو باری که عدد ۷ − x ثبت می‌شود، جایی باید x ثبت شده باشد. به عبارت دیگر در هر مسیر عضوهای جفت مکمل (x , ۷ − x) یکی در میان و در فاصله‌های مختلف ظاهر می‌شوند و این فاصله‌ها بسته به این که شرایط چه باشد، با یکی از عضوهای این جفت آغاز می‌شوند. بعد از هر جفتی مانند (x , ۷ − x) ممکن است یک x یا یک ۷ − x اضافه، به عنوان اوّلین عضو مربوط به جفت آخر ناقص، ظاهر شود.

... x ... ۷ − x ... x ... ۷ − x ... −−− ... x ... ۷ − x ...

... ۷ − x ... x ... ۷ − x ... x ... −−− ... ۷ − x ... x ... ۷ − x ...

پس برای مثال ممکن است در طرف راست جفت مکمل (۶ , ۱) یا در ادامهٔ دنباله هیچ‌گاه ۱ یا ۶ ظاهر نشود و یا دقیقاً یک ۱ یا یک ۶ به عنوان اوّلین عضو جفتی ناقص آمده باشد. جفتهای (۵ , ۲) و (۴ , ۳) نیز وضعیت مشابهی دارند. چون بیش از سه جفت ناقص وجود ندارد، حداکثر با سه تا از این ۹۹ عدد نمی‌توان جفت مکمل کاملی درست کرد.

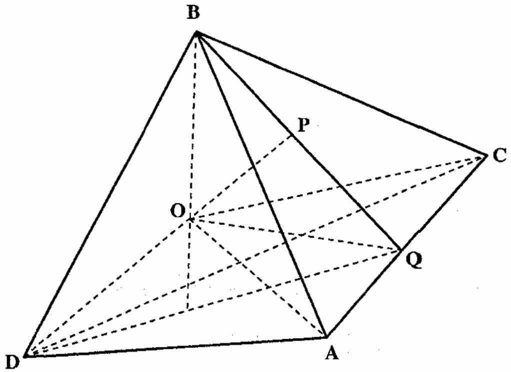
اینک بدیهی است که این جفتهای مکمل تعداد زوجی از ۹۹ مکان را در دنباله اشغال می‌کنند و در نتیجه تعداد جفتهای ناقص فرد است. در نتیجه فقط ممکن است یک یا سه جفت ناقص داشته باشیم، یعنی وقتی که بترتیب ۴۹ یا ۴۸ جفت مکمل وجود دارد.

از آن‌جا که مجموع هر جفت مکمل کامل ۷ است، مجموع حاصل از ۴۹ جفت مکمل کامل در S برابر است با ۳۴۳ = ۷ × ۴۹ و یک جفت ناقص این مجموع را به اندازهٔ ۱، ۲، ۳، ۴، ۵ و یا ۶ افزایش می‌دهد. بنابراین در این حالت S عددی بین ۳۴۴ و ۳۴۹ است.

ولی مجموع حاصل از ۴۸ جفت مکمل کامل در S برابر است با ۳۳۶ = ۷ × ۴۸ و عددهای صحیح باقی مانده از جفتهای (۶ , ۱)، (۵ , ۲) و (۴ , ۳) به مجموع S مقداری بیش از ۱۵ = ۴ + ۵ + ۶ و کمتر از ۶ = ۳ + ۲ + ۱ نمی‌افزایند. بنابراین مقدار ماکزیمم ۳۵۱ = ۱۵ + ۳۳۶ و مقدار می‌نیمم ۳۴۲ = ۶ + ۳۳۶ است. اثبات این که این کرانها واقعاً دست یافتنی هستند، کار ساده‌ای است (که آن را به خواننده واگذار می‌کنیم). پس

نتیجه این است که مقدارهای اکسترمم در حقیقت ۳۵۱ و ۳۴۲ هستند.
آیا جالب توجه نیست که تعداد بسیار زیادی از مقدارهای ممکن S، یعنی این تعداد از آنها

$$\binom{98}{49}=25477612258980856902730428600$$



همگی در نوار باریکی از ۱۰ عدد صحیح جای می‌گیرند؟

۵۰۹. ابتدا فرض می‌کنیم، سه رأس از چهار رأس مفروض مکعب $A_1A_2A_3A_4A'_1A'_2A'_3A'_4$ (شکل را ببینید) بر یک وجه واقع باشند. برای مشخص بودن وضع، این رأسها را A_1، A_2 و A_3 می‌گیریم، در این صورت، رأس A_4 هم دارای مختصات درست است، زیرا مختصات بردار $\overrightarrow{A_3A_4}=\overrightarrow{A_2A_1}$، عددهایی درستند. بنابراین، رأس چهارم، هرکدام از رأسهای A'_1، A'_2، A'_3 یا A'_4 باشد، مختصات بقیهٔ رأسهای مکعب، عددهایی درستند، زیرا

$$\overrightarrow{A_1A'_1}=\overrightarrow{A_2A'_2}=\overrightarrow{A_3A'_3}=\overrightarrow{A_4A'_4}$$

اکنون فرض می‌کنیم، هیچ سه رأسی از چهار رأس مفروض، واقع بر یک وجه نباشند. چون، بنابر فرض، این رأسها روی یک صفحه نیستند، رأسهای چهاروجهی منتظمی را تشکیل می‌دهند که یالهای آن، قطرهای وجه‌های مکعب است. برای مشخص بودن وضع، این رأسها را A_1، A'_2، A_3 و A'_4 می‌گیریم. ثابت می‌کنیم، بردار $\overrightarrow{A_1A'_3}$، مختصات درستی دارد. بردار

$$2\overrightarrow{A_1A'_3}=\overrightarrow{A_1A'_2}+\overrightarrow{A_1A_3}=\overrightarrow{A_1A'_4}$$

را در نظر می‌گیریم که دارای مختصات درست x، y و z است. قرار می‌گذاریم:

$$(\overrightarrow{A_1A'_2})^2=(\overrightarrow{A_1A_3})^2=(\overrightarrow{A_1A'_4})^2=a$$

$$\overrightarrow{A_1A'_2}.\overrightarrow{A_1A_3}=\overrightarrow{A_1A'_2}.\overrightarrow{A_1A'_4}=\overrightarrow{A_1A_3}.\overrightarrow{A_1A'_4}=a\cos 60^\circ=\frac{a}{2}=b$$

در این صورت $a, b \in z$ و

$$x^{۲} + y^{۲} + z^{۲} = (۲\overrightarrow{A_{۱}A_{۳}})^{۲} = ۳a + ۳ \times ۲b = ۱۲b \equiv ۰ (\mathrm{mod}\, ۴)$$

از آن‌جا که مجذور یک عدد زوج، در تقسیم بر ۴، به باقی‌ماندهٔ صفر، و مجذور یک عدد فرد، در تقسیم بر ۴، به باقی‌ماندهٔ واحد می‌رسد، بنابراین، باقی‌ماندهٔ تقسیم $x^{۲} + y^{۲} + z^{۲}$ بر ۴، برابر است با تعداد عددهای فرد در بین عددهای x، y و z. به این ترتیب، همهٔ مختصات x، y و z از بردار $۲\overrightarrow{A_{۱}A'_{۳}}$ عددهایی زوجند و مختصات بردار $\overrightarrow{A_{۱}A'_{۳}}$، عددهایی درستند.

می‌بینیم، نقطهٔ $A'_{۳}$ که با نقطه‌های $A'_{۲}$ و $A'_{۴}$ بر یک وجه واقع است، مختصات درستی دارد و بنابر آن چه در ابتدای بحث ثابت کردیم، مختصات همهٔ رأسهای مکعب، عددهایی درستند.

۵۱۰. همهٔ رأسهایی را که به وسیلهٔ مربع پوشیده شده‌اند و کوچکترین چندضلعی کوژ F را که این رأسها را در بر دارد، در نظر می‌گیریم. مساحت این چندضلعی را S و محیط آن را P می‌نامیم. در این صورت

$$S < A^{۲}, P \geq ۴a$$

فرض کنید، x رأس روی محیط و y رأس در درون این چندضلعی باشد. در این صورت:

$$x + y = (\frac{x}{۲} + y - ۱) + \frac{x}{۲} + ۱$$

و بنا بر دستور معروف «پیک»:

$$S = \frac{x}{۲} + y - ۱$$

بنابراین به دست می‌آید:

$$x + y = S + \frac{x}{۲} + ۱ \leq S + ۲a + ۱ \leq (a + ۱)^{۲}$$

۵۱۱. مکعبی به ابعاد ۶×۶×۶ در نظر بگیرید. هر خط برنده در مکعب ۴×۴×۴ مرکزی، ۲مکعب ۱×۱×۱ را در لایهٔ بیرونی قطع می‌کند و هر مکعب ۱×۱×۱ در راستای دقیقاً یک خط برنده قرار دارد. بنابراین، تعداد راههای برنده شدن برابر است با نصف تعداد مکعبهای ۱×۱×۱ بیرونی یا $۷۶ = (۶^{۳} - ۴^{۳})\frac{۱}{۲}$.

اگر بازی در مکعبی n بعدی، به طول ضلع k، انجام شود، عدد موردنظر عبارت است از:

$$\frac{۱}{۲}\left\{(k + ۲)^{n} - k^{n}\right\}$$

۵۱۲. ۱۶ تا از ۲۷ مکعب سبز می‌باشند که ما آنها را در جدول زیر (با رسم دایره دور هر کدام) مشخص کرده‌ایم، که هرگز شمار آنها در دو وجه روبه رو از نصف ۱۶(یعنی ۸) بیشتر نیست. مثلاً در وجه قائم طرف چپ (ستونهای ۱، ۴ و ۷ جدول) سه مکعب سبز، و در وجه قائم طرف راست (ستونهای ۳، ۶ و ۹ جدول) پنج مکعب سبز داریم که مجموع آنها (۸) از نصف ۱۶ بیشتر نیست. حالا شما دنبال راه‌حلهای دیگری بگردید.

A	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
B	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹
C	۱	۲	۳	۴	۵	۶	۷	۸	۹

۵۱۳. A و B را رنگهای کف و سرپوش قوطی می‌گیریم. دو وجه روبه‌روی مکعب را با دو رنگ دیگر C و D رنگ می‌کنیم. مکعب را طوری در قوطی قرار می‌دهیم که وجه به رنگ D، مجاور کف قوطی و وجه به رنگ E از مکعب مجاور وجه به رنگ F از قوطی باشد.

۵۱۴. درست نیست. کافی است دومی سه یال دوبه‌دو متناظر را به رنگ سبز درآورد و این عمل همیشه برای او ممکن نیست.

۵۱۵. گزینهٔ (ج) درست است.

۵۱۶. گزینهٔ (د) درست است.

۵۱۷. مکعب را به ۶۴ مکعب به طول یال $\frac{1}{4}$ افراز می‌کنیم. از آن‌جا که :

$$1985 = 31 \times 64 + 1$$

است، حداقل یک مکعب کوچک شامل حداقل ۳۲ نقطه موجود است. در این مکعب بزرگترین قطعه خط ممکن قطر است که طول $\frac{\sqrt{3}}{4}$ دارد. از آن‌جا که حداکثر چهار قطعه خط که طولشان دقیقاً $\frac{\sqrt{3}}{4}$ باشد، موجود است، محیط چندضلعی‌ای که این ۳۲ نقطه را به عنوان رأس دارد کوچکتر از :

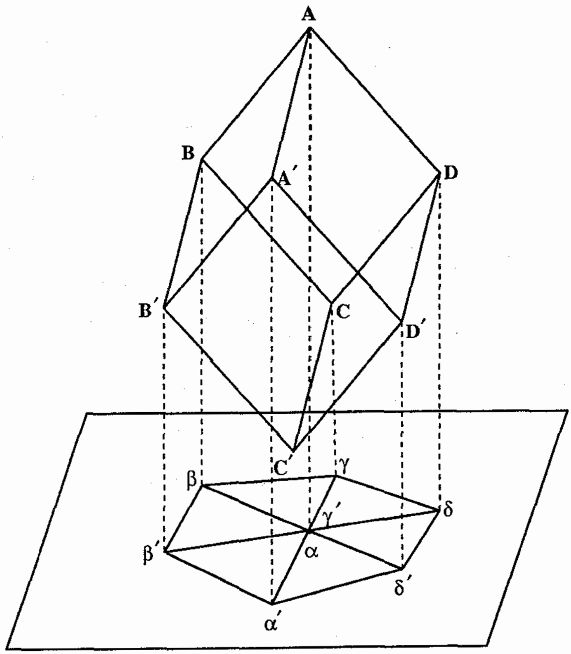
$$\frac{32\sqrt{3}}{4} = 8\sqrt{3}$$

است.

۵۱۸. گزینهٔ (د) درست است.

۵۱۹. گزینهٔ (د) درست است.

۵۲۰. $ABCDA'B'C'D'$ را مکعبی می‌گیریم که آن را روی صفحه‌ای عمود بر قطر AC' تصویر می‌کنیم. سه یال AB،AD و AA' که با هم زاویه‌های مساوی و همچنین با AC' زاویهٔ مساوی می‌سازند، تحت سه پاره‌خط مساوی که با هم زاویه‌های مساوی با مقدار $120^\circ = \frac{360^\circ}{3}$ می‌سازند، تصویر می‌شوند.

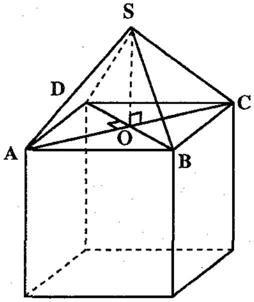


همین مطلب برای سه یال روبه‌روی سه یال قبلی، یعنی برای یالهای $C'D'$، $C'B'$ و $C'C$ که تحت سه پاره‌خط متقابل با پاره‌خطهای بالا تصویر می‌شوند، درست است. این اثبات نشان می‌دهد که تصویر مکعب یک شش ضلعی منتظم با قطرهای مرکزی آن است. برای محاسبهٔ ابعاد شش ضلعی منتظم، از این نکته استفاده می‌کنیم که فاصلهٔ رأس A از نقطهٔ I، پای عمود رسم شده از B به $A'C'$ مساوی $\frac{a\sqrt{3}}{3}$ است، یعنی $AI = \frac{a\sqrt{3}}{3}$. از آن جا داریم:

$$BI^2 = AI.IC' = \frac{a\sqrt{3}}{3} \times \frac{2a\sqrt{3}}{3} = \frac{2a^2}{6} \Rightarrow BI = \frac{a\sqrt{6}}{3}$$

۵۲۲. فرض می‌کنیم این طور نباشد. رأسهای مکعب را طوری به رنگهای سیاه و سفید درمی‌آوریم که، هر دو رأس مجاور، رنگهای متفاوتی داشته باشند؛ در این صورت، هر ضلع خط شکسته، یا دو رأسی از مکعب را به هم وصل می‌کند که هم رنگند، و یا یکی از قطرهای بزرگ مکعب است. روشن است که، در خط شکستهٔ ما، دست‌کم باید دو ضلع وجود داشته باشد که رأسهای با رنگهای مختلف را به هم وصل کرده باشد؛ ولی در این صورت این ضلعها در مرکز مربع یکدیگر را قطع می‌کنند که فرض مسأله را نقض می‌کند.

۵۲۳. ثابت می‌شود که وجه‌های هشت وجهی حاصل، مثلثهای متساوی‌الاضلاع همنهشت هستند و کنجهای این هشت وجهی نیز متساوی‌اند.



۵۲۴. جسم حاصل ۲۴ وجهی است؛ زیرا جسم ساخته شده روی هر وجه مکعب چهاروجهی است. هر وجه آن مثلثی متساوی‌الاضلاع است که اندازهٔ ضلع آن مساوی یال مکعب است. زیرا مثلثهای قائم‌الزاویهٔ SBO، SOC و BOC همنهشتند.

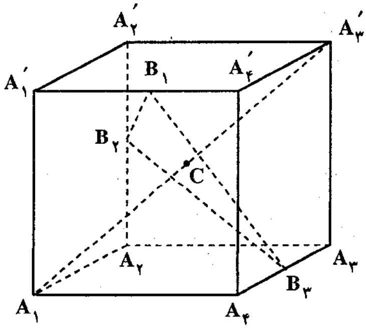
۵۲۵. این نقطه‌ها ۱۲ نقطه‌اند، که از وصل کردن آنها هشت وجهی مکعبی حاصل می‌شود.

تعداد وجه‌ها برابر است با: $۱۴ = ۸ + ۶$

تعداد یالها برابر است با: $۲۴ = ۴ \times ۶$

تعداد رأسها برابر ۱۲ است.

۵۲۶. گزینهٔ (ج) درست است.



۵۲۷. از نقطهٔ O مرکز مکعب $A_۱A_۲A_۳A_۴A'_۱A'_۲A'_۳A'_۴$، صفحه‌ای عمود بر قطر $A_۱A'_۳$ رسم می‌کنیم (شکل) این صفحه، از نقطه‌های $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ وسط یالهای $A_۱A'_۴$، $A_۲A_۳$ و $A_۳A_۴$ می‌گذرد، زیرا هر یک از نقطه‌های $B_۱$، $B_۲$ و $B_۳$ از رأسهای $A_۱$ و $A_۳$ به یک فاصله‌اند (برابر $\frac{a}{۲}\sqrt{۵}$)، چون داریم:

$$B_1O = B_2O = B_3O,$$

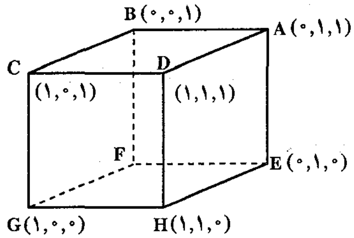
$$B_1B_2 = B_2B_3 = B_3B_1 = a\sqrt{\frac{3}{2}} > \frac{a}{2}\sqrt{5}$$

بنابراین، هر یک از دو هرم منتظم $A_1B_1B_2B_3$ و $A'_4B_1B_2B_3$ (که نقطهٔ مشترک درونی ندارند) شامل چهاروجهی منتظمی با ارتفاعهای

$$\frac{a}{2}\sqrt{3} = A_1O = A'_4O$$

و قاعدهٔ $B'_1B'_2B'_3$، متجانس با مثلث $B_1B_2B_3$ نسبت به مرکز O هستند. بالاخره، در درون این چهاروجهیهای $A'_4B'_1B_2B'_3$ و $A_1B'_1B_2B'_3$ چهاروجهیهای منتظم مجهول قرار گرفته‌اند که متجانس با آنها نسبت به مرکزند، با ضریب تجانس $\frac{2}{3}\sqrt{2} < 1$، با ارتفاعی برابر $a\sqrt{\frac{2}{3}}$، یعنی با یالی برابر a.

۵۲۸. دستگاه مختصات دکارتی را، مانند شکل در نظر بگیرید به طوری که مبدأ دستگاه در F باشد و محورهای x، y و z بترتیب در امتداد FG، FE و FB باشند. فرض کنید، $AB = 1$، تا این که مختصات نقطه‌های P، Q و R عبارت باشند از



$$P = (0, c, 1) \text{ و } Q = (1, 0, a) \text{ و } R = (b, 1, 0)$$

که در آنها $0 \le a, b, c \le 1$. مسألهٔ تعیین a، b و c با شرایط $0 \le a, b, c \le 1$ است به طوری که

$$L = \sqrt{a^2 + (1-b)^2 + 1} + \sqrt{b^2 + (1-c)^2 + 1} + \sqrt{c^2 + (1-a)^2 + 1}$$

مینیمم باشد.

بنابر نابرابری مینکوفسکی،

$$\sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} + \sqrt{y_1^2 + y_2^2 + y_3^2} + \sqrt{z_1^2 + z_2^2 + z_3^2} \ge$$
$$\sqrt{(x_1 + y_1 + z_1)^2 + (x_2 + y_2 + z_2)^2 + (x_3 + y_3 + z_3)^2}$$

از این نابرابری وقتی که $(x_1, x_2, x_3) = (1, a, 1-b)$، $(y_1, y_2, y_3) = (1, b, 1-c)$ و $(z_1, z_2, z_3) = (1, c, 1-a)$ نتیجه می‌شود:

$$L^{۲} \geq ۹+S^{۲}+(۳-S)^{۲}=۲(S-\frac{۳}{۲})^{۲}+\frac{۲۷}{۲}$$

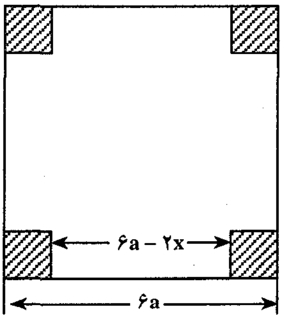
که در آن : $S=a+b+c$

چون $۲(S-\frac{۳}{۲})^{۲}+\frac{۲۷}{۲}$ به ازای $S=\frac{۳}{۲}$، مقدار مینیمم خود را می‌گیرد، پس $L^{۲} \geq \frac{۲۷}{۲}$.

امّا وقتی که $a=b=c=\frac{۱}{۲}$، $S=\frac{۳}{۲}$ و $L=۳\sqrt{\frac{۳}{۲}}=\sqrt{\frac{۲۷}{۲}}$. پس مینیمم محیط مثلث $۳\sqrt{\frac{۳}{۲}}$ است.

ملاحظه. در نابرابری مینکوفسکی برابری برقرار است اگر و فقط اگر $(x_۱, x_۲, x_۳)$، $(y_۱, y_۲, y_۳)$ و $(z_۱, z_۲, z_۳)$ متناسب باشند. در این مسأله $L^{۲} \geq ۹+S^{۲}+(۳-S)^{۲}$ و برابری برقرار است، اگر و فقط اگر $a=b=c=\frac{۱}{۲}$.

۵۲۹. اگر طول مربعهای بریده شده را x فرض کنیم، ضلعهای ورقه آهن باقی مانده $۶a-۲x$ خواهد شد (شکل) و در نتیجه ارتفاع مکعب مستطیل ساخته شده x می‌شود، می‌توان نوشت :



$$V=(۶a-۲x)^{۲}x=۴x(۳a-x)(۳a-x)$$
$$=۲\times ۲x(۳a-x)(۳a-x)$$

چون مجموع ثابت است، حاصلضرب وقتی ماکزیمم است که $۲x=۳a-x$ یا $x=a$ باشد.

۵۳۰. گزینهٔ (ب) درست است.

۱۵.۵. مسأله‌های ترکیبی

۵۳۱. الف. در مکعبی به یال a اندازهٔ قطر هر وجه مساوی $a\sqrt{۲}$ است، پس $JK=۶\sqrt{۲}cm$ است.

ب. در مکعب به یال a اندازهٔ قطر مکعب $a\sqrt{۳}$ است. بنابراین داریم :

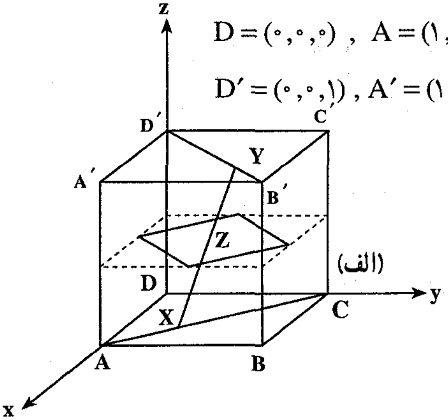
$$a\sqrt{۳}=۶\sqrt{۳}cm$$

۵۳۲. برای سهولت کار فرض می‌کنیم که مکعب ما، مکعب واحد باشد، در این صورت آن را بر دستگاه مختصات (z، y و x) با D در مبدأ و سه یال آن در امتداد محورهای مختصات قرار می‌دهیم، بنابراین رأسهای این مکعب عبارت می‌شوند از :

$$D=(\circ,\circ,\circ)\ ,\ A=(۱,\circ,\circ)\ ,\ B=(۱,۱,\circ)\ ,\ C=(\circ,۱,\circ)$$

$$D'=(\circ,\circ,۱)\ ,\ A'=(۱,\circ,۱)\ ,\ B'=(۱,۱,۱)\ ,\ C'=(\circ,۱,۱)$$

شکل (الف) را ملاحظه کنید.



(الف)

در این مورد استفاده‌های مکرر از حقایق زیر به عمل خواهیم آورد، اگر $V_۱=(x_۱\,,y_۱\,,z_۱)$ و $V_۲=(x_۲\,,y_۲\,,z_۲)$ هر دو نقطه‌ای در فضا باشند، در این صورت تمام نقطه‌های Vی واقع بر قطعه خط واصل آنها را می‌توان با :

$$V=(۱-T)V_۱+TV_۲=(۱-T)(x_۱\,,y_۱\,,z_۱)+T(x_۲\,,y_۲\,,z_۲)$$

$$=((۱-T)x_۱+Tx_۲\,,(۱-T)y_۱+Ty_۲\,,(۱-T)z_۱+Tz_۲)$$

که معادل با :

$$V=V_۱+T(V_۲-V_۱)$$

$$=(x_۱+T(x_۲-x_۱)\,,y_۱+T(y_۲-y_۱)\,,z_۱+T(z_۲-z_۱))$$

است، نمایش داد.

در این جا T همهٔ مقدارهای واقع در فاصلهٔ $[\circ,۱]$ را می‌گیرد، چون $T=\circ$ باشد، $V=V_۱$ ؛ و چون $T=۱$ شود، $V=V_۲$ است ؛ و در حالت کلی :

$$T=\frac{V_۱V}{V_۱V_۲}$$

برای حل مسأله، ابتدا به خاطر می‌آوریم که X بر AC و Y بر D′B′ قرار دارد. در این صورت با توجه به مطالب بالا داریم :

$$X=(۱-s)A+sC=(۱-s,\circ,\circ)+(\circ,s,\circ)=(۱-s\,,s,\circ)\ \ ,\ \ \circ\le s\le ۱$$

$$Y=(۱-t)D'+tB'=(\circ,\circ,۱-t)+(t\,,t\,,t)=(t\,,t\,,۱)\ \ ,\ \ \circ\le t\le ۱$$

(a) وسط XY: $P=(1-T)X+TY$ با $T=\frac{1}{2}$ است، بنابراین مختصات آن عبارت است از :

$$P=(\frac{1-s}{2},\frac{s}{2},0)+(\frac{t}{2},\frac{t}{2},\frac{1}{2})=(\frac{1-s+t}{2},\frac{s+t}{2},\frac{1}{2})$$

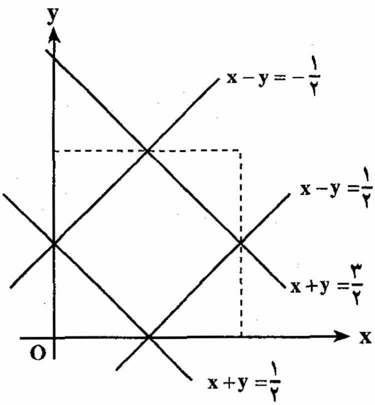
مختص z از P همواره برابر $\frac{1}{2}$ است، بنابراین P بر صفحهٔ $z=\frac{1}{2}$ موازی و به یک فاصله از صفحه‌های $z=0$ و $z=1$ قرار دارد. مجموع و تفاضل مختصات x و y این نقطه بترتیب عبارتند از :

$$x+y=\frac{1+2t}{2}=t+\frac{1}{2} \quad \text{و} \quad x-y=\frac{1-2s}{2}=\frac{1}{2}-s$$

از آن‌جا که $0\le t\le 1$ و $0\le s\le 1$ است، داریم :

$$\frac{1}{2}\le x+y\le\frac{3}{2} \quad \text{و} \quad -\frac{1}{2}\le x-y\le\frac{1}{2}$$

شکل (ب) نوارهایی را در صفحهٔ $z=\frac{1}{2}$ نشان می‌دهد که در هر یک از آنها یکی از نامساویهای بالا برقرار است ؛ مربع سایه‌داری که در آن هر دو نامساوی برقرارند مکان هندسی P است. ضلع این مربع $\frac{\sqrt{2}}{2}$ است.



(ب)

(b) مختصات نقطهٔ z به طوری که $XZ/XY=\frac{1}{3}$ یـــــا $ZY/XZ=2$ باشد، $(1-T)X+TY$ با $T=\frac{1}{3}$ است ؛

در نتیجه : $$Z=\frac{2}{3}(1-s,s,0)+\frac{1}{3}(t,t,1)=(\frac{2-2s+t}{3},\frac{2s+t}{3},\frac{1}{3})$$

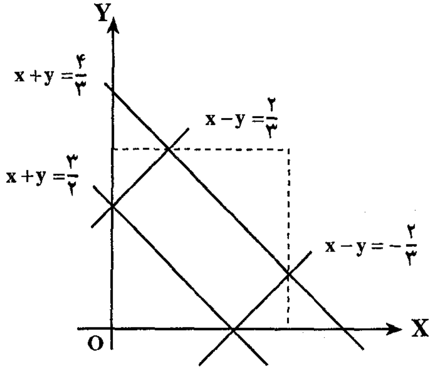
به این ترتیب Z بر صفحهٔ $z=\frac{1}{3}$ قرار می‌گیرد. مجموع و تفاضل x و y آن عبارتند از :

$$x+y=\frac{2+2t}{3} \quad \text{و} \quad x-y=\frac{2-4s}{3}$$

بنابراین :

$$\frac{۲}{۳}\le x+y\le \frac{۴}{۳} \text{ و } -\frac{۲}{۳}\le x-y\le \frac{۲}{۳}$$

نوارهای در صفحهٔ $z=\frac{۱}{۳}$ که در آنها این نامساویها برقرارند، را در شکل (پ) تصویر کرده‌ایم ؛ تقاطع این نوارها (مستطیل سایه‌دار) مکان هندسی Z است.



(پ)

۵۳۳. الف. طول پاره‌خط MN برابر a است.

ب. شعاع کره مساوی $\frac{a(۲-\sqrt{۲})}{۲}$ است.

۵۳۵. الف) صفحه‌ای که از وسط قطر مکعب بگذرد و بر آن عمود باشد، مکان هندسی نقطه‌هایی است که از دو انتهای قطر به یک فاصله‌اند. روی یالهای مکعب چنین نقطه‌ها را پیدا کنید.

ب) قطر را به سه بخش برابر تقسیم و برای $S(x)$، در هر یک از این بخشها، دستوری پیدا کنید. مساحت تصویر مقطع بر وجه مکعب، برابر است با $S(x)\sin\varphi$، که، در آن، φ، زاویهٔ بین قطر و وجه مکعب است.

۵۳۶. ۱. از هر یال پاره‌خطهایی مساوی هم بریده شده‌اند. به‌عبارت دیگر اگر یال مکعب a و اندازهٔ بریده شدهٔ از هر طرف یال x باشد، اندازهٔ باقی‌ماندهٔ هر یال $a-۲x$ است.

۲. از اندازهٔ حجم مکعب به یال a، یعنی $V=a^۳$، باید حجم ۸ هرم همنهشت را که حجم هریک از آنها مساوی $\frac{۱}{۳}(\frac{۱}{۲}\times x\times x)x=\frac{۱}{۶}x^۳$ است، کم کنیم، بنابراین داریم :

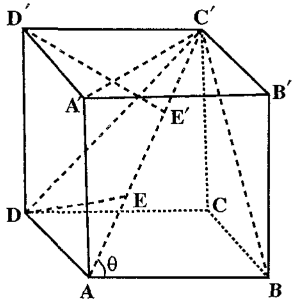
$$\text{حجم مورد نظر}=a^۳-۸(\frac{۱}{۶}x^۳)=a^۳-\frac{۴}{۳}x^۳$$

برای محاسبهٔ x برحسب a با توجه به شرایط مسأله، می‌توان نوشت :

$$\sqrt{۲}x+۲x=a\Rightarrow a=x(۲+\sqrt{۲})$$

$$\Rightarrow x=\frac{a}{۲+\sqrt{۲}}=\frac{a(۲-\sqrt{۲})}{۲}$$

$$\Rightarrow \text{حجم موردنظر}=a^۳-\frac{۴}{۳}\times\frac{a^۳(۲-\sqrt{۲})^۳}{۸}$$



۵۳۷. ۱. مکعب $ABCDA'B'C'D'$ و قطر AC' از آن را درنظر می‌گیریم. کافی است ثابت کنیم که یالهای AB ، AA' و AD رسم شده از رأس A با قطر AC' زاویه‌های مساوی می‌سازند؛ زیرا بقیهٔ یالها با این سه یال موازی می‌باشند. امّا اگر $C'B$ ، $C'A'$ و $C'D$ را رسم کنیم، سه مثلث قائم‌الزاویهٔ ABC'، $AA'C'$ و ADC' به‌وجود می‌آید که همنهشتند؛ زیرا دارای وتر مشترک AC' هستند و یک ضلع زاویهٔ قائمه از آنها برابر است، $AB = AA' = AD$. از آن‌جا:

$$B\hat{A}C' = A'\hat{A}C' = D\hat{A}C'$$

برای اختصار، فرض می‌کنیم θ اندازهٔ مشترک این سه زاویه باشد، در مثلث ABC' با فرض این که ضلع مکعب را a فرض کنیم، داریم:

$$AB = a \ , \ BC' = a\sqrt{۲} \ , \ AC' = a\sqrt{۳}$$

$$\Rightarrow \cos\theta = \frac{۱}{\sqrt{۳}} \ , \ \sin\theta = \frac{\sqrt{۲}}{\sqrt{۳}} \ , \ \tan\theta = \sqrt{۲}$$

۲. تصویرهای D و D' روی AC' را E و E' می‌نامیم و می‌گوییم که $AE = EE' = E'C'$ است. در نتیجه این سه‌پاره‌خط تصویرهای سه‌پاره خط مساوی به طول a روی AC' می‌باشند و با AC' زاویهٔ مساوی θ را می‌سازند.

۵۳۸. هشت قسمت کره، متناظر با یک کره به شعاع $\frac{a}{۲}$ می‌باشند. بنابراین:

$$\text{حجم کره} = \frac{۴}{۳}\pi(\frac{a}{۲})^۳ = \frac{۱}{۶}\pi a^۳$$

$$\text{تفاضل} = a^۳(۱-\frac{\pi}{۶})$$

برای کرهٔ معادل فرض می‌کنیم:

$$\frac{۴}{۳}\pi x^۳ = a^۳(۱-\frac{\pi}{۶})$$

$$\Rightarrow x^۳ = a^۳ \times \frac{۶-\pi}{۸\pi} \Rightarrow x = \frac{a}{۲}\sqrt[۳]{\frac{۶-\pi}{\pi}}$$

۵۳۹. اگر M وسط $BB_۱$ باشد، $A_۱M$ موازی با CK خواهد بود. در نتیجه زاویهٔ مطلوب برابر

با زاویهٔ MA_1D می‌شود. از طرفی، چون صفحهٔ A_1DM موازی با CK است، پس فاصلهٔ بین CK و A_1D برابر است با فاصلهٔ نقطهٔ K تا صفحهٔ A_1DM . این فاصله را با x و زاویهٔ مسطحه را با φ نشان می‌دهیم داریم :

$$V_{A_1MDK} = \frac{۱}{۳}S_{A_1MD}.x = \frac{۱}{۳}S_{A_1KD}.a = \frac{a^۳}{۱۲}$$

پس :

$$x = \frac{a^۳}{۴S_{A_1MD}}$$

اکنون ضلعهای A_1MD را پیدا می‌کنیم :

$$A_1D = a\sqrt{۲}\ ,\ A_1M = \frac{a\sqrt{۵}}{۲}\ ,\ DM = \frac{۳}{۲}a$$

با استفاده از قضیهٔ کسینوسها نتیجه می‌گیریم : $\cos\varphi = \frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$. بنابراین :

$$S_{A_1MD} = \frac{۳}{۴}a^۲\ ,\ x = \frac{a}{۳}$$

جواب : $\frac{a}{۳}$ و $\mathrm{Arc}\cos\frac{۱}{\sqrt{۱۰}}$.

۱.۵۴۰ . شعاع کرهٔ محاط در مکعب به ضلع a مساوی $\frac{a}{۲}$ است ؛ بنابراین :

$$\text{سطح کرهٔ محاط در مکعب} = ۴\pi r^۲ = ۴\pi(\frac{a}{۲})^۲ = \pi a^۲$$

$$\text{حجم کرهٔ محاط در مکعب} = \frac{۴}{۳}\pi r^۳ = \frac{۴}{۳}\pi(\frac{a}{۲})^۳ = \frac{\pi a^۳}{۶}$$

۲. شعاع کرهٔ مماس بر یالهای مکعب به ضلع a، مساوی $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ است ؛ بنابراین :

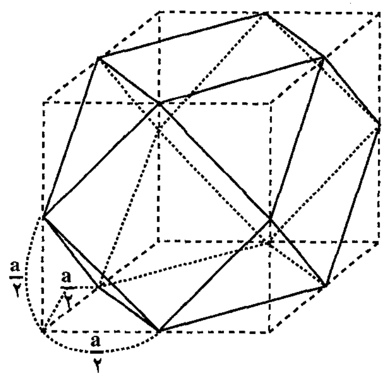
$$\text{سطح کرهٔ مماس بر یالهای مکعب} = ۴\pi(\frac{a\sqrt{۲}}{۲})^۲ = ۲\pi a^۲$$

$$\text{حجم کرهٔ مماس بر یالهای مکعب} = \frac{۴}{۳}\pi(\frac{a\sqrt{۲}}{۲})^۳ = \frac{\sqrt{۲}}{۳}\pi a^۳$$

۳. شعاع کرهٔ محیط بر مکعب به ضلع a ، مساوی $\frac{a\sqrt{۳}}{۲}$ است. بنابراین :

$$\text{سطح کرهٔ محیط بر مکعب} = ۴\pi(\frac{a\sqrt{۳}}{۲})^۲ = ۳\pi a^۲$$

$$\text{حجم کرهٔ محیط بر مکعب} = \frac{۴}{۳}\pi(\frac{a\sqrt{۳}}{۲})^۳ = \frac{\sqrt{۳}}{۲}\pi a^۳$$



۵۴۱. ترسیم نشان می‌دهد که جسم S که با حذف کردن ۸ هرم تشکیل شده به‌وسیلهٔ هر رأس و وسطهای یالهای منتهی به این رأس حاصل می‌شود، به‌وسیلهٔ ۱۴ وجه محدود شده است :

۶ مربع به ضلع $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ و هشت مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$. این جسم دارای ۲۴ یال به‌طول $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ است. بنابراین مجموع این یالها مساوی $۱۲\sqrt{۲}a$ است.

مساحت جسم S مساوی مجموع مساحتهای ۶ مربع به ضلع $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ و ۸ مثلث متساوی‌الاضلاع به ضلع $\frac{a\sqrt{۲}}{۲}$ است، پس داریم :

$$\text{جسم } S = ۶(\frac{a\sqrt{۲}}{۲})^۲ + ۸((\frac{a\sqrt{۲}}{۲})^۲ \times \frac{\sqrt{۳}}{۴})$$
$$= ۳a^۲ + \sqrt{۳}a^۲ = a^۲(۳+\sqrt{۳})$$

حجم کم شده از حجم مکعب، حجم ۸ هرم تشکیل شده روی هر رأس و وسطهای یالهای مجاور آن حاصل می‌شود. امّا حجم هریک از این هرمها برابر است با :

$$V_۱ = \frac{۱}{۳} \times \frac{۱}{۲} \times \frac{a}{۲}.\frac{a}{۲}.\frac{a}{۲} = \frac{a^۳}{۴۸}$$

بنابراین داریم :

$$\text{حجم کم شده} = ۸ \times \frac{a^۳}{۴۸} = \frac{a^۳}{۶}$$

۵۴۲. ۱، ۲، ۳ و ۴. اگر ضلع مکعب را x فرض کنیم، قطر قاعدهٔ مکعب $y = x\sqrt{۲}$ می‌باشد. از آن‌جا مساحت صفحهٔ قطری مکعب برابر است با :

$$s = x.y = \sqrt{۲}x^۲$$

بنابراین داریم :

$$s=\sqrt{۲}x^{۲}\Rightarrow x^{۲}=\frac{s}{\sqrt{۲}}=\frac{s\sqrt{۲}}{۲}\Rightarrow x=\sqrt{\frac{s\sqrt{۲}}{۲}}\ ,\ y=\sqrt{s\sqrt{۲}}$$

$$\text{قطر مکعب}=\sqrt{۳}x=\sqrt{\frac{۳\sqrt{۲}s}{۲}}$$

$$\text{کل مکعب}\ s=۶x^{۲}=۶\times\frac{s\sqrt{۲}}{۲}=۳\sqrt{۲}s$$

$$\text{حجم مکعب}=x^{۳}=(\sqrt{\frac{s\sqrt{۲}}{۲}})^{۳}=\frac{s\sqrt{۲}}{۲}.\sqrt{\frac{s\sqrt{۲}}{۲}}=\frac{s}{۲}\sqrt{\sqrt{۲}s}$$

۵۴۳. ۱. رأس R .

۲. AR ، CE ، AM ، CI ، MW ، BI ، WR و BE .

۳. IC ، WR و BE .

۴. یالها یا موازی AR هستند یا عمود بر آن، پس چنین یالی وجود ندارد.

۵. ساده است.

۶. $I\hat{W}B=۴۵^\circ$ و $B\hat{W}E=۴۵^\circ$.

۷. $I\hat{W}E=۶۰^\circ$ ، مثلث IWE متساوی‌الاضلاع است.

۸. خیر، زیرا سه خط در یک صفحه نیستند.

۹. $WI=۸\sqrt{۲}$ است.

۵۴۴. ۱. داریم: $۶cm^{۳}$، $۲۴cm^{۳}$ و $۵۴cm^{۳}$.

۲. چهار برابر می‌شوند ؛ زیرا $a'=۲a$ ، $S'=۶a'^{۲}=۲۴a^{۲}$.

۳. نه برابر می‌شود.

۴. $۱cm^{۳}$، $۸cm^{۳}$ و $۲۷cm^{۳}$.

۵. $۸=۲^{۳}$ برابر یا $۲۷=۳^{۳}$ برابر می‌شود.

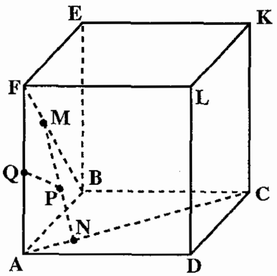
۵۴۵. $\overrightarrow{AD}=a$ ، $\overrightarrow{AB}=b$ و $\overrightarrow{AF}=c$ می‌گیریم ؛ در ضمن $a=b=c$ (شکل).

۱) داریم :

$$\overrightarrow{FM}=l.\overrightarrow{FB}=l.(b-c)\ ,\ \overrightarrow{AN}=l.\overrightarrow{AC}=l(a+b)$$

$$\overrightarrow{MN}=\overrightarrow{MF}+\overrightarrow{FA}+\overrightarrow{AN}=l(c-b)-c+l(a+b)=la(l-۱)c$$

از این‌جا معلوم می‌شود که بردارهای $\overrightarrow{MN}$ ، a و c همصفحه‌اند و بنابراین، پاره‌خط



راست MN با صفحهٔ AFLD موازی است.

۲) P را وسط پاره‌خط راست MN و Q را وسط پاره‌خط راست AF می‌گیریم. در این صورت :

$$\overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QF} + \overrightarrow{FM} + \overrightarrow{MP}\ ,\ \ \overrightarrow{QP} = \overrightarrow{QA} + \overrightarrow{AN} + \overrightarrow{NP}$$

از مجموع این دو برابری به‌دست می‌آید :

$$\overrightarrow{QP} = \frac{۱}{۲}(\overrightarrow{FM} + \overrightarrow{AN}) = \frac{۱}{۲}l(a + ۲b - c)$$

یعنی بردار $\overrightarrow{QP}$ با بردار ثابت $a + ۲b - c$ همراستاست ؛ و چون آغاز Q از بردار متغیر $\overrightarrow{QP}$ ، نقطهٔ ثابتی است، بنابراین نقطهٔ P روی پاره‌خط ثابت QR قرار دارد که وسط یال AF (نقطهٔ Q) را به وسط یال BC وصل کرده است (ثابت کنید!).

برعکس، اگر از نقطهٔ دلخواه P ، واقع بر پاره‌خط راست QR، خط راست MN را متقاطع با قطرهای FB و AC طوری رسم کنیم که $|\overrightarrow{AN}| = |\overrightarrow{FM}|$ ، آن وقت $|\overrightarrow{MP}| = |\overrightarrow{PN}|$ (ثابت کنید!).

به این ترتیب، پاره‌خط راست QR ، مکان هندسی مطلوب است.

۳) برای پیدا کردن زاویهٔ بین MN با قطرهای AC و FB ، از ضرب اسکالر بردارها استفاده می‌کنیم. داریم :

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC} = |\overrightarrow{MN}|.|\overrightarrow{AC}|.\cos\varphi_۱\ \ ;$$

$$\cos\varphi_۱ = \frac{\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC}}{|\overrightarrow{MN}|.|\overrightarrow{AC}|} = \frac{[la + (l-۱)c].(a+b)}{a\sqrt{l^۲ + (l-۱)^۲}.a\sqrt{۲}} = \frac{l}{\sqrt{۲(۲l^۲ - ۲l + ۱)}}$$

زاویهٔ بین MN و FB هم به همین ترتیب به‌دست می‌آید :

$$\cos\varphi_۲ = \frac{l-۱}{\sqrt{۲(۲l^۲ - ۲l + ۱)}}$$

چون نقطه‌های M و N ، روی قطرهای FB و AC (و نه در امتداد آنها) داده شده‌اند، بنابراین $۰ \le l \le ۱$ و دستورهای حاصل، زاویه‌های حادهٔ بین بردارهای $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{FB}$ و

بردارهای $\overrightarrow{MN}$ و $\overrightarrow{AC}$ را معین می‌کنند. خودتان حالتهای $l=0$ و $l=1$ را بررسی کنید.

۴) داریم:

$$\overrightarrow{MN}=la+(l-1)c\ ,\ |\overrightarrow{MN}|=a\sqrt{2(l-\frac{1}{2})^2+\frac{1}{2}}$$

از همین‌جا روشن می‌شود که حداقل طول MN به ازای $l=\frac{1}{2}$ به‌دست می‌آید، یعنی وقتی که نقطه‌های M و N بر وسط قطرهای FB وAC منطبق باشند، در این حالت:

$$\cos\varphi_1=\cos\varphi_2=\frac{1}{2}\ ;\ \varphi_1=\varphi_2=60^\circ$$

۵) اگر پاره‌خط راست MN ، عمود مشترک AC و FB باشد، آن وقت باید داشته باشیم:

$$\overrightarrow{MN}.\overrightarrow{AC}=0\ ,\ \overrightarrow{MN}.\overrightarrow{FB}=0\ ,$$

یعنی:

$$\begin{cases}[la+(l-1)c]\ .\ (a+b)=0\\ [la+(l-1)c]\ .\ (b-c)=0\end{cases}$$

که از آن‌جا به‌دست می‌آید:

$$(l-1)a^2=0\ ,\ la^2=0$$

ولی این دو برابری نمی‌توانند باهم برقرار باشند، بنابراین MN نمی‌تواند، عمود مشترک AC و FB باشد.

فهرست منابع

۱. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد اول. هاورد. و. ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.

۲. آشنایی با تاریخ ریاضیات. جلد دوم. هاورد. و. ایوز. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی.

۳. آمادگی برای المپیادهای ریاضی. واسیلیف ـ گوتن ماخر ـ رابرت توم. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.

۴. آمادگی برای شرکت در المپیاد ریاضی ایران. هوشنگ شرقی. نشر علوم پایه.

۵. از اِردوش تا کی‌یفْ. راس هانسبرگر. ترجمهٔ علی ساوجی. انتشارات فاطمی.

۶. المپیادهای بین‌المَللی ریاضی. جلد اول. ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ناس. نشرنام.

۷. المپیادهای بین‌المللی ریاضی. جلد دوم. مورای. اس. کلامکین. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. نشر ناس. نشر نام.

۸. المپیادهای ریاضی ایران. دکتر عبادا.. محمودیان. انتشارات دانشگاه شریف.

۹. المپیادهای ریاضی بلژیک. انجمن استادان ریاضی بلژیک. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات فاطمی.

۱۰. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد اول. ساموئل ال گریتزر. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۱۱. المپیادهای ریاضی بین‌المللی. جلد دوم. مورای.اس. کلامکین. ترجمهٔ دکتر محمدقاسم وحیدی اصل. مرکز نشر دانشگاهی تهران.

۱۲. المپیادهای ریاضی لنینگراد. د. فومین. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات انیشتن.
۱۳. المپیادهای ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ پرویز شهریاری-ابراهیم عادل. انتشارات مشعل دانشجو.
۱۴. بازآموزی و بازشناخت هندسه. هـ. س.م. کوکس تیر - س.ل. گریتزر. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. انتشارات مدرسه.
۱۵. برگزیدهٔ مسائل هندسه. گروهی از ریاضیدانان شوروی. ترجمهٔ عادل ارشقی. مؤسسهٔ خدمات فرهنگی رسام.
۱۶. پانصد مسألهٔ ریاضی پیکارجو. ادوارد ج. باربو - ماری س. کلامکین - ویلیام اُ. ج. موزر. ترجمهٔ مهران اخباریفر. انتشارات فاطمی.
۱۷. تاریخ ریاضیات. جلد اول. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۸. تاریخ ریاضیات. جلد دوم. دیوید اسمیت. ترجمهٔ غلامحسین صدری افشار.
۱۹. تاریخ هندسه. پی‌یر مارشال. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری، مؤسسهٔ مطبوعاتی علمی.
۲۰. تبدیلهای هندسی. جلد اول. ای. م. یاگلم. ترجمهٔ اسدا... کارشناس - عمید رسولیان. مرکز نشر دانشگاهی.
۲۱. تبدیلهای هندسی. جلد دوم. ای.م.یاگلم. ترجمهٔ محمد باقری. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۲۲. تبدیلهای هندسی. جلد سوم. ای.م.یاگلم. ترجمهٔ محمدهادی شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۲۳. ترسیمهای هندسی. تألیف احمد فیروزنیا. نشر گزاره.
۲۴. تئوری مقدماتی اعداد. جلدهای اول و دوم. دکتر غلامحسین مصاحب. انتشارات دهخدا.
۲۵. چگونه مسأله حل کنیم؟ جورج پولیا. ترجمهٔ احمد آرام. مؤسسهٔ مطبوعاتی کیهان.
۲۶. چند قضیهٔ هندسه. نگارش دکتر احمد شرف‌الدین.
۲۷. ۴۵۰ مسألهٔ ریاضی با حل. محمدحسین پرتوی - حسن مولایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۸. حل‌المسائل هندسهٔ جدید. حسن ملایی. ناشر کتابفروشی سعدی.
۲۹. حل المسائل هندسهٔ فضایی. ابوالقاسم قربانی - دکتر حسن صفاری. شرکت سهامی چاپ و انتشارات کتب ایران.
۳۰. حل‌المسائل هندسه و مخروطات جدید. محمدحسین پرتوی - محمدعلی پرتوی.

ناشر کتابفروشی سعدی.
۳۱. حل مسائل ریاضیات. محمدعلی واعظیان. ناشر محمدحسن علمی.
۳۲. حل مسائل متمم هندسه. دکتر کارونه. ترجمهٔ محمدباقر ازگمی ـ احسان‌ا... قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۳۳. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان چهارم ریاضی. دکتر حسینعلی شاهورانی. انتشارات کاویان.
۳۴. حل مسائل هندسه برای دانش‌آموزان ششم ریاضی و داوطلبان متفرقه. عباس ذوالقدر.
۳۵. حل مسائل هندسه برای سال چهارم دبیرستان. محمدباقر ازگمی ـ غلامرضا بهنیا ـ باقر امامی ـ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۳۶. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی. داریوش شاهین. انتشارات جاویدان.
۳۷. حل مسائل هندسه برای سال چهارم ریاضی و کنکور دانشکده‌ها. غلامعلی ریاضی ـ علی حسن‌زاده ـ محمدحسین پرتوی ـ محمدعابدی. مؤسسهٔ مطبوعاتی شرقی.
۳۸. حل مسائل هندسه و مخروطات برای سال ششم ریاضی و داوطلبان کنکور. محمدباقر ازگمی ـ پرویز شهریاری ـ غلامرضا بهنیا ـ باقر امامی ـ علی‌اصغر شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۳۹. حل مسأله از طریق مسأله. لورن سی. لارسن. ترجمهٔ علی ساوجی. انتشارات فاطمی.
۴۰. خلاصهٔ زندگینامهٔ علمی دانشمندان. بنیاد دانشنامهٔ بزرگ فارسی. انتشارات علمی و فرهنگی.
۴۱. خلاقیت ریاضی. جورج پولیا. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فاطمی.
۴۲. خطهای راست و منحنی‌ها. ن. ب. واسی‌لی‌یو ـ و. ل. گوتن‌ماخر. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات تهران.
۴۳. دایره‌ها. دَن پِدو. ترجمهٔ مهدی مدغم. انتشارات فاطمی.
۴۴. دربی فیثاغورس. شه‌پان النسکی. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات امیرکبیر.
۴۵. دورهٔ حل‌المسائل هندسه برای دبیرستان. جلدهای اول و دوم. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری. شرکت سهامی چاپ و انتشارات کتب ایران.
۴۶. دورهٔ کامل خودآموز هندسهٔ علوم تجربی. محمدهاشم رستمی. نشر گزاره.
۴۷. دورهٔ ماهنامهٔ ریاضیات. دکتر یحیی تابش.

۴۸. دورهٔ مجلهٔ ریاضی آشتی با ریاضیات و آشنایی با ریاضیات. پرویز شهریاری.
۴۹. دورهٔ مجلهٔ ریاضی برهان. انتشارات مدرسه.
۵۰. دورهٔ مجلهٔ رشد آموزش ریاضی. وزارت آموزش و پرورش.
۵۱. دورهٔ مجلهٔ ریاضی یکان. عبدالحسین مصحفی.
۵۲. روش حل مسائل هندسه. ابوالقاسم قربانی ـ دکتر حسن صفاری. بنگاه مطبوعاتی فریدون علمی.
۵۳. ریاضیات زنده. ی. پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر میترا.
۵۴. ریاضیدانان نامی. دکتر اریک تمپل بل. ترجمهٔ دکتر حسن صفاری. انتشارات امیرکبیر.
۵۵. زیباترین فرمولهای ریاضی. لیونل سالم ـ فردریک تستارد. ترجمهٔ پرویز امینی ـ حمیدرضا امیری. انتشارات مدرسه.
۵۶. سرگرمیهای هندسه. ی پرلمان. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات خوارزمی.
۵۷. شما هم می‌توانید در درس ریاضی خود موفق باشید. پرویز شهریاری. انتشارات مدرسه.
۵۸. فنون مسأله حل کردن. استیون ج. کرانتس. ترجمهٔ مهران اخباریفر. انتشارات فاطمی.
۵۹. قضایا و مسائل هندسه. غلامرضا یاسی‌پور.
۶۰. کارگاه هندسه / مجموعهٔ کارگاه علوم ریاضی. دکتر آرش رستگار. انتشارات فاطمی.
۶۱. گوشه‌هایی از ریاضیات دورهٔ اسلامی. جی. ال. برگرن. ترجمهٔ دکترمحمدقاسم وحیدی اصل ـ دکتر علیرضا جمالی. انتشارات فاطمی.
۶۲. مباحث و مسائل المپیاد ریاضی. فرشید الموتی ـ مازیار رامین راد ـ ... انتشارات پیشدانشگاهیان.
۶۳. محاسبه‌های برداری. پرویز شهریاری.
۶۴. مجموعهٔ مقالات و مسائل ریاضی. غلامرضا یاسی‌پور.
۶۵. مسأله‌های المپیادهای ریاضی امریکا. مورای.اس. کلامکین. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. نشربردار.
۶۶. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در شوروی سابق. واسیلیف ـ یه‌گوروف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشرتوسعه.
۶۷. مسأله‌های المپیادهای ریاضی در کشورهای مختلف. جمعی از ریاضیدانان شوروی

سابق. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۶۸. مسأله‌های تاریخی ریاضیات. و. د. چیستیاکوف. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر نی.
۶۹. مسأله‌های ریاضی آسان ولی .... گروهی از ریاضیدانان شوروی سابق. ترجمهٔ پرویز شهریاری. نشر گستره.
۷۰. مسأله‌های دشوار ریاضی. کنستانتین شاختو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۷۱. مسائل ریاضیات مقدماتی. ای. خ. لیواشینسکی. ترجمهٔ غلامرضا بهنیا. انتشارات احمدعلمی.
۷۲. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد اول. چارلز.ت. سالکیند. ترجمهٔ سیدحسین جوادپور ـ محمد قزل ایاغ. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۳. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد دوم. چارلز. ت. سالکیند. ترجمهٔ علی کافی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۴. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد سوم. چارلز.ت. سالکیند. ارل. ترجمهٔ غلامحسین اخلاقی‌نیا. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۵. مسائل مسابقه‌های ریاضی دبیرستانی امریکا. جلد چهارم. آرتینو گاگلیون ـ شل. ترجمهٔ عبدالحسین مصحفی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۶. مسائل مسابقات ریاضی (کنکورهای ریاضی شوروی سابق). و. س. کوشچنکو. ترجمهٔ پرویز شهریاری. مؤسسهٔ انتشارات امیرکبیر.
۷۷. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ دکتر سعید فارابی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۸. مسائل مسابقه‌های ریاضی مجارستان. گردآوری یوژف کورشاک. ترجمهٔ محمدمهدی ابراهیمی. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۷۹. مسائل و تمرینات لگاریتم و ریاضیات. احسانا... قوام‌زاده. ناشر کتابفروشی زوار تهران.
۸۰. مسائل هندسه و حل آنها برای داوطلبان کنکور دانشکده‌ها. محمدباقر ازگمی ـ پرویز شهریاری. مؤسسه مطبوعاتی احمد علمی.
۸۱. مسأله‌هایی در هندسه. آی. اف. شاریگین ترجمهٔ میرزا جلیلی ــ ابراهیم دارابی. انتشارات مبتکران.

۸۲. مسأله‌هایی در هندسهٔ مسطحه. ای.ف . شاریگین. ترجمهٔ ارشک حمیدی. انتشارات مبتکران.
۸۳. مکانهای هندسی. جلد اول. محمدهاشم رستمی. انتشارات مدرسه.
۸۴. مهمترین مسأله‌ها و قضیه‌های ریاضی. شکلیارسکی. چنتسوف یاگلوم. ترجمهٔ پرویز شهریاری ـ ابراهیم عادل. انتشارات مجید. انتشارات فردوس.
۸۵. نابرابریها. پرویز شهریاری. انتشارات فردوس.
۸۶. نابرابریهای هندسی. نیکولاس د. کازارینوف. ترجمهٔ دکتر محمدحسن بیژن زاده. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۸۷. نخستین گامها در المپیادهای ریاضی. جلدهای ۱،۲،۳و۴. ترجمه و تدوین ابراهیم دارابی. انتشارات پیشروان. انتشارات مبتکران.
۸۸. نه مقالهٔ هندسه. ابوالقاسم قربانی. دکترحسن صفاری.
۸۹. هندسهٔ ایرانی. ابوالوفا محمدبن محمد البوزجانی. ترجمهٔ سیدعلیرضا جذبی. انتشارات سروش.
۹۰. هندسه‌های اقلیدسی و نااقلیدسی. ماروین جی. گرینبرگ. ترجمهٔ م. هـ.شفیعیها. مرکز نشر دانشگاهی تهران.
۹۱. هندسه برای سال ششم دبیرستانها (مجموعهٔ علوم). محمدباقر ازگمی ـ باقر امامی ـ غلامرضا بهنیا ـ پرویز شهریاری ـ علی اصغر شیخ رضایی. مؤسسهٔ مطبوعاتی احمد علمی.
۹۲. هندسه تحلیلی. حسین غیور ـ محسن غیور. انتشارات صفی علیشاه.
۹۳. هندسه‌های جدید. جیمز. ار. اسمارت. ترجمهٔ غلامرضا یاسی‌پور. انتشارات مدرسه.
۹۴. هندسه در گذشته و حال. ترجمه و تألیف پرویز شهریاری. از مجموعهٔ کتابهای سیمرغ.
۹۵. هندسهٔ دلپذیر. دکتر احمد شرف‌الدین. انتشارات مدرسه.
۹۶. هندسهٔ دوایر. دکتر محسن هشترودی. انتشارات مجلهٔ ریاضی یکان.
۹۷. هندسهٔ دورهٔ کاردانی تربیت معلم رشتهٔ علوم ریاضی. صفر باهمت شیروانه ده ـ حسین غیور ـ حسین‌دوستی. شرکت چاپ و نشر ایران.
۹۸. هندسهٔ ۱ و ۲ نظام جدید آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
۹۹. هندسهٔ سال چهارم دبیرستان. ابوالقاسم قربانی. دکترحسن صفاری.

۱۰۰. هندسهٔ سالهای اول، دوم، سوم و چهارم دبیرستان نظام قدیم آموزشی وزارت آموزش و پرورش.
۱۰۱. هندسهٔ مسطحه. مقدمه‌ای بر هندسهٔ نوین مثلث و دایره. ناتان آلتشینرکورت. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۱۰۲. هندسهٔ مقدس. رابرت لولُر. ترجمهٔ هایده معیری. مؤسسهٔ مطالعات و تحقیقات فرهنگی.
۱۰۳. هندسهٔ مقدماتی از دیدگاه پیشرفته. ادوین. ا. موئیز. ترجمهٔ دکتر امیر خسروی - محمود نصیری. انتشارات مبتکران.
۱۰۴. هندسهٔ موئیز - داتز. ترجمهٔ محمود دیانی. انتشارات فاطمی.
۱۰۵. هندسه و مخروطات سال ششم ریاضی دبیرستان. وزارت آموزش و پرورش.

106. EXERCICES DE GEOMETRIE PAR.F.G.M.

107. EXERCICES DE GEOMETRIE PAR.TH. CARONNET.

108. EXERCICES DE GEOMETRIE MODERNE (TRANSVERSALES) . PAR.G.PAPELIER.

109. EXERCICES DE GEOMETRIE MODERNE (POLES, POLAIRES, PLANS POLATERES). PAR.G.PAPELIER.

110. GEOMETRIE A HIGHSCHOOL COURSE. SERGELAN GE. GENE MURROW.

111. GEOMETRY and its APPLICATIONS. Walter Meyer.

112. GEOMETRY AN INFORMAL APPROACH. PHILIP L. COX.

113. GEOMETRY for the Classroom. C. HERBERT CLEMENS MICHAEL A. CLEMENS.

114. GIANT COLOR BOOK OF MATHEMATICS. BY IRVING ADLER.

115. GUIDES PRATIQUES BORDAS.
II. GEOMETRIE PAR ROBERT ARDRE´.

116. JACOBS HAROLD. R. GEOMETRY.

117. LES NOMBRES ET LEURS MYSTERES PAR ANDRE´

WARUSFEL.

118. MATHEMATICS AROUND US.

119. MEMENTO DE MATHEMATIQUES USUELLES PAR.A.PONT.

120. PLANE GEOMETRY. WITH SPACE CONCEPTS. A.M. WELCHONS.W.R. KRICKENBERGER, HEIEN.R. PEARSON.

121. PRECIS DE GEOMETRIE PAR ANDRE´ VIEILLEFOND. P.TURMEL.

122. PRENTICE HALL GEOMETRY BY ROBERT KALINE, MARY KAY CORBITT.

123. PRINCIPLES AND PROBLEMS OF PLANE GEOMETRY BY BARNETT RICH.

124. RESOLUTION DES PROBLEMES ELEMENTAIRES DE GEOMETRIE PAR.E.J.HONNET.

125. THE COLLEGE BOARDS EXAMINATION BY. MARTIN MC. DONOUGH. ALVIN .J. HANSEN.